و. گ. بالتیانسکی-ن.یا. ویلنکین

تقارن در جبر

ترجمهٔ پرویز شهریاری

حل بسیاری ازمسائل مربوط به جبر مقدماتی، بااستفاده‌از تقارن کثیرالجمله‌ها، فوق‌العاده ساده‌می‌شود.

ودراین کتاب‌ازطریقه‌های‌استفاده‌از تقارن برای‌حل دستگاه معادلات،معادلات گنگ، نامساویها وغیره گفتگو شده است. همهٔ این‌مسائل باروش واحدو به‌کمک‌عبارتهای متقارن‌حل می‌شوند . کتاب می‌تواند مورد استفادهٔ همهٔ کسانی‌که خود را برای مسابقات آماده می‌کنند ، همه دانشجویان و همهٔ علاقمندان به مطالب ریاضی قرار گیرد .

یادداشت مؤلفین

مطالب این کتاب:

مقدمه

یکی از مشکل‌ترین مباحث جبر برای دانش‌آموزان دبیرستانی ، حل دستگاههای بالاتر از درجهٔ اول است .

برای معادلهٔ درجه دوم یك مجهولی :

$$x^۲+px+q=۰$$

راه حل مشخصی وجود داردکه در رابطهٔ زیرخلاصه می‌شود :

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

برای دستگاه‌معادلات درجه اول هم راه حل‌مشخص وجود دارد(حذف مجهولات، مساوی‌کردن ضرایب و غیره) . ولی برای دستگـاه معادلات از درجات بالا ،کار به اشکال برخورد می‌کند .

عمومی‌ترین‌روشها برای حل اینگونه دستگاهها ، **روش حذف مجهولات** است . این‌روش را با حل نمونه‌ای ازاینگونه دستگاهها روشن می‌کنیم :

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x^2 + y^2 = 19 \end{cases}$$

معادلهٔ اول را نسبت به مجهول y حل می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$y = 4 - x$. مقداری‌که برای y بدست آمده درمعادلهٔ دوم قرار می‌دهیم ، معادلهٔ جدیدی بدست می‌آیدکه تنها شامل یك مجهول است :

$$2x^2 + (4 - x)^2 = 19$$

که پس از عملیات ساده به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود :

$$3x^2 - 8x - 3 = 0$$

باحل این معادله ، دوجواب برای x بدست می‌آید :

$$x_1 = 3 \;;\; x_2 = -\frac{1}{3}$$

هریك ازاین جوابها ، متناظر بـا جوابی برای y است (که می‌توان آنرا به‌کمك معادلهٔ $y = 4 - x$ بدست‌آورد) :

$$y_1 = 1 \;;\; y_2 = \frac{13}{3}$$

آزمایش نشان می‌دهدکه هردو جواب :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \end{array} \right. \;;\; \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{3} \\ y_2 = \frac{13}{3} \end{array} \right.$$

در دستگاه معادلات مفروض صدق می‌کنند .

روش حذف مجهولات کاملاً کلی است . از لحاظ نظری از هر دستگاه جبری دومعادلهٔ دومجهولی می‌توان یکی ازمجهولات‌را حذف‌کرد ومعادله‌ای نسبت به مجهول دوم بدست‌آورد . ولی حذف‌مجهول همیشه‌به سادگی‌نمونه‌ای که در بالا ذکرکردیم، انجام نمی‌گیرد . علاوه برآن یکی از مشکلات‌روش حذف مجهول اینست‌که اغلب منجر به معادله‌ای ازدرجه‌های بالا می‌شود.در جبرعالی ثابت می‌کنند، که اگرمعادله‌ای ازدستگاه (که شامل دومجهول‌است) از درجهٔ n ومعادلهٔ دوم ازدرجهٔ m باشد، پس‌ازحذف یك‌مجهول، معادله‌ای ازدرجهٔ $m \cdot n$ بدست می‌آید .

مثلاً دستگاه زیررا درنظر می‌گیریم :

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+y^3=9 \end{cases}$$

از معادلهٔ اول بدست می‌آید : $x^2=5-y^2$ وسپس :

$$x^6=(5-y^2)^3=125-75y^2+15y^4-y^6$$

بهمین‌ترتیب ازمعادلهٔ دوم‌بدست می‌آید : $x^3=9-y^3$ وبنابراین:

$$x^6=(9-y^3)^2=81-18y^3+y^6$$

اگر دو مقداری‌که برای x^6 بدست آورده‌ایم مساوی قرار دهیم ، به معادله‌ای می‌رسیم‌که تنها شامل مجهول y است :

$$2y^6-15y^4-18y^3+75y^2-44=0$$

ولی این معادلهٔ از درجهٔ ششم است $(6=3\times 2)$ و رابطه‌ای برای حل معادلهٔ درجه ششم در دبیرستان وجود ندارد* . به‌این ترتیب روش‌حذف مجهول، ما را به بن‌بست می‌کشاند .

بهمین علت است‌که روش حذف (برای حل دستگاههای معـادلات از درجه‌های بالا) بندرت در دبیرستان مورد استفـاده قرار می‌گیرد و معمولا

*) و نه‌فقط در دبیرستان، ریاضی‌دان بزرك نروژی **نیلس‌آبل** ثابت‌کرد که رابطه‌ای وجود ندارد‌که به‌کمك‌آن‌بتوان با اعمال معمولی‌روی اعداد(جمع، تفریق، ضرب ، تقسیم وریشه‌گرفتن)، معادلهٔ‌درجهٔ پنجم(ویا معادلات ازدرجه‌های بالاتر) را درحالت‌کلی حل‌کرد.

کوشش می کنند که برای حل دستگاه موردنظر راه حل ابتکاری جستجو کنند. ولی برای پی‌بردن به چنین راه‌حلهائی قاعدهٔ کلی وجود ندارد. هر دستگاهی باروش مخصوص به‌خود حل‌می‌شود و به‌ندرت می‌توان از تجربهٔ حل‌یك‌دستگاه برای حل دستگاه دیگر استفاده کرد. در نتیجه، این قسمت از ریاضیات دبیرستانی به‌گروه معماها وروشهای آزاد و ابتکاری حل آنها، می‌پیوندد.

هدف این کتاب اینست که خواننده را بـا یکی از روشهای‌کلی حل دستگاههای درجهٔ بالاآشنا کند. این‌روش‌به اندازهٔ روش حذف‌مجهول‌عمومی نیست، زیرا نمی‌تواند برای حل هردستگاهی مورد استفاده قرار گیرد، ولی بسیاری از دستگاههائی که در دورهٔ دبیرستانی باآنهامواجه می‌شویم بااستفاده از این روش قابل حل هستند. مهم اینست که، بـرخلاف روش حذف، این روش مارا به معادله‌ای ازدرجهٔ بالاتر نمی‌رساند، بلکه درجهٔ معادله را پائین می‌آورد.

روشی که ازآن صحبت خواهیم‌کرد، براساس استفاده ازنظریه‌ای است که بنام **تقارن کثیرالجمله‌ها** مشهور شده‌است. خواننده خواهد دیدکه خود نظریه، فوق‌العاده ساده است وعلاوه برحل دستگاههای جبری، درحل‌بسیاری ازانواع دیگر مسائل جبری‌هم می‌تواندمورد استفاده قرارگیرد (حل‌معادلات گنگ، اثبات اتحادها ونامساویها، تجزیهٔ یك‌عبارت‌به‌صورت ضرب و غیره). در متن‌کتاب تعدادی ازاینگونه مسائل‌حل شده ودرآخر هرقسمت هم مسائلی برای حل اضافه شده است. در بین آنهـا مسائل دشواری وجود داردکه در المپیادهای ریاضی مطرح شده‌است. به‌کمك نظریهٔ‌کثیرالجمله‌های متقارن‌حل این‌مسائل به‌اندازهٔ‌کافی ساده شده ومنجر به‌استفاده ازیك‌روش عمومی‌شده‌است.

۱

کثیر الجمله‌های متقارن نسبت به X و Y

۱. کثیر الجمله‌های متقارن

اگر به کتابهای مسائلی که برای دانش‌آموزان ممتاز دبیرستانی تهیه شده است مراجعه کنیم، اغلب به دستگاه معادلاتی برمی‌خوریم، مثل:

$$(۱)\begin{cases}x^۲+xy+y^۲=۴\\ x+xy+y=۲\end{cases}\quad;\quad(۲)\begin{cases}x+y=a+b\\ x^۲+y^۲=a^۲+b^۲\end{cases}\quad;$$

$$(۳)\begin{cases}x^۳+y^۳=۵a^۳\\ x^۲y+xy^۲=a^۳\end{cases};\quad (۴)\begin{cases}x^۴+x^۲y^۲+y^۴=۹۱\\ y^۲-xy+y^۲=۷\end{cases};$$

$$(۵)\begin{cases}۲(x+y)=۵xy\\ ۸(x^۳+y^۳)=۶۵\end{cases};\quad (۶)\begin{cases}x+y=۱\\ x^۴+y^۴=۷\end{cases};$$

$$(۷)\begin{cases}(x^۲+۱)(y^۲+۱)=۱۰\\ (x+y)(xy-۱)=۳\end{cases};(۸)\quad\begin{cases}x^۲+y^۲=axy\\ x^۴+y^۴=bx^۲y^۲\end{cases};$$

همهٔ این دستگاهها دارای یك خاصیت مشترك هستند : سمت چپ‌هر یك از معادلات، کثیر الجمله‌ای‌است که نسبت به x و y وضعی‌یکنواخت دارد . برای حل‌چنین دستگاههائی می‌توان از یك روش‌کلی استفاده کرد .

عبارتهائی که درآنها وضع x و y یکنواخت‌باشد، متقارن نامیده‌می‌شوند به‌عبارت دقیق‌تر :

کثیرالجمله‌ای از x و y متقارن نامیده می‌شودکه اگر درآن x را به y و y را به x تبدیل‌کنیم ، تغییر نکند .

کثیرالجملهٔ $x^۲y+xy^۲$ متقارن است، درحالیکه‌کثیرالجمله‌ای مثل: $x^۳-۳y^۲$ متقارن نیست ، زیرا باتبدیل x به‌ y و y به x به‌عبارت $y^۳-۳x^۲$ تبدیل می‌شودکه باعبارت اول یکی نیست .

مهمترین نمونه‌های عبارتهای متقارن‌را ذکر کنیم . درحساب‌هم‌دیده‌ایم که مجموع دوعدد به‌ترتیب جمله‌های جمع ارتباطی ندارد، یعنی برای هر مقدار x و y داریم :

$$x+y=y+x$$

این تساوی نشان می‌دهد‌که عبارت $x+y$ ، عبارتی متقارن است .

همین خاصیت برای ضرب هم وجود دارد :

$$x\cdot y=y\cdot x$$

یعنی عبارت $x\cdot y$ هم نسبت به x و y متقارن است .

عبارتهای $x+y$ و $x\cdot y$ را **ساده‌ترین‌کثیرالجمله‌های متقارن** نسبت

به x و y گویند و برای آنها علامتهای خاصی قرار داده‌اند*.

$$\sigma_1 = x+y \quad ; \quad \sigma_2 = x\cdot y$$

علاوه بر σ_1 و σ_2، اغلب به عبارتهائی برمی‌خوریم‌به **مجموع قوای متشابه** معروف‌اند، یعنی کثیرالجمله‌های x^2+y^2 ، x^3+y^3 ، … ، x^n+y^n ، …

کثیرالجملهٔ x^n+y^n را معمولا به S_n نشان می‌دهند، بنابراین :

$$S_1 = x+y\ ;$$
$$S_2 = x^2+y^2\ ;$$
$$S_3 = x^3+y^3\ ;$$
$$S_4 = x^4+y^4\ ;$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

۲. قضیهٔ اساسی مربوط بـه کثیرالجمله‌هائی‌که نسبت بـه دو متغیر متقارن‌اند.

برای بدست‌آوردن کثیرالجمله‌های متقارن، روش ساده‌ای وجود دارد: کثیرالجملهٔ دلخواهی (ودر حالت‌کلی غیر متقارن) نسبت به σ_1 و σ_2 انتخاب می‌کنیم ودرآن بجای σ_1 و σ_2 مقادیرشان را نسبت به x و y قرار می‌دهیم. واضح است که دراینصورت کثیرالجمله‌ای که نسبت به x و y متقارن است، بدست خواهیم آورد (زیرا نه $\sigma_1 = x+y$ و نه $\sigma_2 = x\cdot y$ با تبدیل x و y به یکدیگر تغییر نمی‌کنند و بنـابراین هرکثیرالجمله‌ای از $x+y$ و $x\cdot y$ هم ضمن این تبدیل بدون تغییر باقی می‌ماند) . مثلاً ازکثیرالجملهٔ $\sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_2$، کثیرالجملهٔ متقارن زیر بدست می‌آید :

$$(x+y)^3 - (x+y)xy = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$$

به این‌ترتیب، **اگر کثیرالجملهٔ دلخواهی از σ_1 و σ_2 درنظر بگیریم ودرآن بجای σ_1 و σ_2 مقادیر $\sigma_1 = x+y$ و $\sigma_2 = x\cdot y$ قرار دهیم، کثیرالجمله‌ای که نسبت به x و y متقارن است بدست خواهیم آورد.** دراینجا

---

*) σـ حرف یونانی (زیگما) .

سئوالی پیش می‌آید، آیااین طریقهٔ ساختن عبارتهای متقارن‌کلی است، یعنی: آیا می‌توان هر کثیرالجملهٔ متقارن **دلخواه** را ازاین راه بدست آورد ؟

مطالعهٔ مثالهـای مختلف ، صحت این حکم را محتمل می‌کند . مثلاً* مجموع قوای‌متشابه : S_1، S_2، S_3، S_4، بدون هیچ‌اشکالی برحسب σ_1 و σ_2 بیان می‌شوند :

$$S_1=x+y=\sigma_1 \ ;$$
$$S_2=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\sigma_1{}^2-2\sigma_2 \ ;$$
$$S_3=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=$$
$$=(x+y)[(x+y)^2-3xy]=\sigma_1(\sigma_1{}^2-3\sigma_2) \ ;$$
$$S_4=x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(\sigma_1{}^2-2\sigma_2)^2-2\sigma_2{}^2.$$

به‌عنوان نمونهٔ دیگر، عبارت متقارن x^3y+xy^3 را درنظرمی‌گیریم، داریم :
$$x^3y+xy^3=xy(x^2+y^2)=\sigma_2(\sigma_1{}^2-2\sigma_2)$$

انتخاب نمونه‌های دیگرهم مارا بهمین‌نتیجه می‌رساند: هر کثیرالجملهٔ متقارنی‌که انتخاب‌کنیم ، بعد از عملیات‌کم و بیش بغرنج به عبارتی نسبت به σ_1 و σ_2 تبدیل می‌شود ، بنابراین ، نمونه‌هـای مختلف ما را به قبول صحت قضیهٔ زیر می‌رساند .

قضیه . هرکثیرالجمله‌ای که نسبت به x و y متقارن باشد ، می‌تواند به‌صورت کثیرالجمله‌ای از $\sigma_1=x+y$ و $\sigma_2=x\cdot y$ نوشته شود .

متذکر می‌شویم‌که حتی یك میلیون مثال مختلف هم نمی‌تواند به‌معنی اثبات قضیه‌باشد وهمیشه‌این‌خطرهست‌که‌کثیرالجملهٔ متقارن یك میلیون ویکمی برحسب σ_1 و σ_2 قابل بیان نباشد.

*) تاریخ ریاضی ، اشتباهات زیادی را بخاطر دارد که ناشی از قضاوت روی مثالهاست . ریاضی‌دان فرانسوی **پیرفرما** با مطالعهٔ عدد $2^{2^n}+1$ متوجه شدکه به ازاء $n=1،2،3،4$ عددی است اول. اوگمان‌کردکه این عدد به‌ازاء همهٔ مقادیر n عددی‌است‌اول، درحالیکه این حکم صحیح نبود. **لئونارداولر** ثابت کردکه به ازاء $n=5$ عدد ۱۰ رقمی $2^{32}+1$ عددی اول نیست (و بر ۶۴۱ قابل‌قسمت است) .

←

بنابراین باید به‌اثبات کامل قضیه بپردازیم . برای‌این منظور دوحالت درنظر می گیریم .

۳ . بیان مجموع قوای‌متشابه برحسب σ_1 و σ_2 .

ابتداقضیه‌را تنها برای‌مجموع قوای‌متشابه‌اثبات‌می کنیم(و نه‌هر کثیرالجملهٔ دلخواه‌متقارن). بعبارت‌دیگر ثابت‌می کنیم که **هر مجموع قوای‌متشابهی به‌صورت $S_n = x^n + y^n$ را می‌توان به صورت‌کثیرالجمله‌ای از σ_1 و σ_2 تبدیل‌کرد.**

برای این منظور طرفین تساوی $S_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}$ را در $\sigma_1 = x + y$ ضرب می کنیم، بدست می‌آید :

$$\sigma_1 S_{k-1} = (x+y)(x^{k-1} + y^{k-1}) =$$
$$= x^k + xy^{k-1} + x^{k-1}y + y^k =$$
$$= x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = S_k + \sigma_2 S_{k-2}$$

بنابراین بدست می‌آید :

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} \qquad (1)$$

وجود همین رابطه ، صحت حکم را ثابت می‌کند . زیرا قبلاً ثابت

→

نمونهٔ دیگری ذکر کنیم (که بازهم به وسیلهٔ اولر نشان داده شد) . اگر درسه جمله‌ای $n^2 + n + 41$ به جای nعدد صفررا قراردهیم، عدد اول ۴۱بدست می‌آید . به ازاء $n = 2$ ، عدد اول ۴۳ بدست می‌آید . با قرار دادن مقادیر ...و۵و۴و۳و۲=n بازهم نتیجهٔ سه‌جمله‌ای یك‌عدد اول است . این احتمال پیدا می‌شود که **سه جمله‌ای $n^2 + n + 1$ به ازاء همهٔ مقادیر $n \geqslant 0$ عددی است اول** ولی این حکم صحیح نیست ! البته به ازاء ۳۹ و ... و۲و۱و$0 = n$ واقعاً هم اعدادی اول بدست می‌آید . ولی به ازاء $n = 40$ سه‌جمله‌ای مفروض به صورت $40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$ درمی‌آید که عددی غیر اول‌است . این‌مثال نشان می‌دهد که آزمایش روی‌نمونه‌های متوالی اعداد نمی‌تواند به معنای‌اثبات کامل یك حکم باشد .

کردیم (صفحهٔ ۱۶) که S_1 و S_2 را می‌توان به صورت کثیرالجمله‌هائی از σ_1 و σ_2 نوشت. طبق رابطهٔ(۱) روشن است که اگر S_1 ، S_2 ، ...، S_{k-2} و S_{k-1} برحسب σ_1 و σ_2 قابل بیان باشند، S_k هم برحسب σ_1 و σ_2 قابل بیان خواهد بود . در حقیقت با اطلاع بر اینکه S_1 و S_2 برحسب σ_1 و σ_2 قابل بیان هستند می‌توان ، با توجه به رابطهٔ (۱)، S_3 را برحسب σ_1 و σ_2 بدست‌آورد وسپس باکمك S_2 و S_3 مقدار S_4 را وبهمین‌ترتیب S_5، S_6 وغیره. واضح است که دیر یا زود عبارت دلخواه S_n برحسب σ_1 و σ_2 بدست می‌آید. به‌این ترتیب حکم موردنظر اثبات شد*.

رابطهٔ (۱) نه‌تنها ثابت می‌کندکه S_n برحسب σ_1 و σ_2 قابل بیان‌است، بلکه درعین‌حال راه‌محاسبهٔ S_n را برحسب σ_1 و σ_2 هم نشان می‌دهد . باکمك رابطهٔ (۱) بترتیب بدست می‌آید **:

$$S_3=\sigma_1S_2-\sigma_2S_1=\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-\sigma_2\sigma_1=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2\ ;$$

$$S_4=\sigma_1S_3-\sigma_2S_2=\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2)-\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=$$
$$=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2\ ;$$

$$S_5=\sigma_1\sigma_4-\sigma_2\sigma_3=\sigma_1(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)-\sigma_2(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2)=$$
$$=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2$$

درجدول زیر مجموع قوای S_1 ، S_2، ...، S_{10} برحسب σ_1 و σ_2 داده شده است، ازاین روابط در حل‌مسائل استفاده خواهیم‌کرد . خواننده‌می‌تواند خود این جدول را ادامه دهد و باکمك رابطهٔ (۱) صحت این روابط را را تحقیق‌کند .

---

*) روشی که‌برای‌اثبات‌این حکم‌مورد استفاده قرارگرفت، **روش استقراء ریاضی** نام دارد . برای اطلاع بیشتر از این روش می‌توانید به‌کتاب «روشهای جبر» تألیف مترجم این‌کتاب مراجعه نمائید .

**) مقادیری‌که برای S_3 و S_4 از این راه بدست می‌آید با مقادیری که برای‌آنها درصفحهٔ ۱۶ بدست‌آوردیم، مقایسه‌کنید .

بیان عبارت $S_n=x^n+y^n$ برحسب $\sigma_1=x+y$ و $\sigma_2=xy$

$$S_1=\sigma_1\ ;$$
$$S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2\ ;$$
$$S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2\ ;$$
$$S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2\ ;$$
$$S_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2\ ;$$
$$S_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3\ ;$$
$$S_7=\sigma_1^7-7\sigma_1^5\sigma_2+14\sigma_1^3\sigma_2^2-7\sigma_1\sigma_2^3\ ;$$
$$S_8=\sigma_1^8-8\sigma_1^6\sigma_2+20\sigma_1^4\sigma_2^2-16\sigma_1^2\sigma_2^3+2\sigma_2^4\ ;$$
$$S_9=\sigma_1^9-9\sigma_1^7\sigma_2+27\sigma_1^5\sigma_2^2-30\sigma_1^3\sigma_2^3+9\sigma_1\sigma_2^4\ ;$$
$$S_{10}=\sigma_1^{10}-10\sigma_1^8\sigma_2+35\sigma_1^6\sigma_2^2-50\sigma_1^4\sigma_2^3+25\sigma_1^2\sigma_2^4-2\sigma_2^5;$$
. . . .

۴. اثبات قضیهٔ اصلی

حال می‌توانیم بسهولت قضیهٔ اصلی را ثابت کنیم. هر کثیرالجملهٔ متقارن نسبت به x و y (پس از جمع جملات متشابه) شامل دو نوع جمله است:

اولاً ممکن است به جمله‌ای برخورد نمائیم که در آن توانهای x و y مساوی باشند، یعنی جمله‌ای به‌صورت ax^ky^k. واضح است که داریم:

$$ax^ky^k=a(xy)^k=a\sigma_2^k$$

یعنی جمله‌ای که به‌اینصورت باشد، مستقیماً برحسب σ_2 قابل بیان‌است

ثانیاً ممکن است به جمله‌ای برخورد کنیم که توانهای x و y درآن‌باهم برابر نباشند، یعنی جمله‌ای به‌صورت bx^ky^l $(k\neq l)$. واضح است که در کثیرالجملهٔ متقارن همراه با جملهٔ bx^ky^l جمله‌ای به صورت bx^ly^k هم وجود دارد که از تبدیل x و y به‌یکدیگر در جملهٔ bx^ky^l بدست می‌آید.

به این ترتیب در کثیرالجملهٔ متقارن، دو جمله به صورت $b(x^ky^l+x^ly^k)$ وجود خواهد داشت. اگر $k<l$ فرض کنیم، می‌توان این دو جمله‌ای را به این صورت نوشت:

$$b(x^ky^l+x^ly^k)=bx^ky^k(y^{l-k}+x^{l-k})=b\sigma_2{}^kS_{l-k}$$

و چون قبلاً ثابت کردیم که مجموع قوای متشابه S_{l-k} به صورت کثیرالجمله‌ای از σ_1 و σ_2 قابل بیان است، دوجمله‌ای مورد مطالعه هم برحسب σ_1 و σ_2 قابل بیان خواهد بود.

بنابراین هر کثیرالجملهٔ متقارن به صورت مجموعی از جمله‌های به‌صورت ax^ky^k و دوجمله‌ای‌هائی به‌صورت $b(x^ky^l+x^ly^k)$ درمی‌آید که هریك از آنها برحسب σ_1 و σ_2 قابل بیان هستند. به این ترتیب **هر کثیرالجملهٔ متقارن را می‌توان به صورت کثیرالجمله‌ای از σ_1 و σ_2 نوشت.**

قضیهٔ اصلی بطور کامل ثابت شد.

مثالی ذکر کنیم. کثیرالجملهٔ متقارن زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x,y)=x^5+3x^3y^2-x^3y^3+2xy^4-7x^2y^2+y^5+$$
$$+3x^2y^3-5xy^3-5x^3y+2x^4y$$

اگر آنرا به یك جمله‌ایها ودو جمله‌ایهائی، شبیه آنچه ضمن اثبات قضیه ذکر کردیم، تقسیم کنیم بدست می‌آید:

$$f(x,y)=-x^3y^3-7x^2y^2+(x^5+y^5)+3(x^3y^2+x^2y^3)+$$
$$+2(xy^4+x^4y)-5(xy^3+x^3y)$$

ویا پس‌از عملیات ساده:

$$f(x,y)=-x^3y^3-7x^2y^2+(x^5+y^5)+3x^2y^2(x+y)+$$
$$+2xy(x^3+y^3)-5xy(x^2+y^2)=-\sigma_2{}^3-7\sigma_2{}^2+S_5+$$
$$+3\sigma_2{}^2S_1+2\sigma_2S_3-5\sigma_2S_2.$$

وبالاخره اگر بجای مجموع قوای متشابه، مقادیرشان را برحسب σ_1 و σ_2 قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$f(x,y) = -\sigma_2^3 - 7\sigma_2^2 + (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) + 3\sigma_1\sigma_2^2 +$$
$$+ 2\sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - 5\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) =$$
$$= \sigma_1^5 - 3\sigma_1^3\sigma_2 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_2^3 + 3\sigma_2^2.$$

۵. قضیهٔ منحصر بفرد بودن نتیجهٔ تبدیل *

دیدیم که اگر کثیرالجمله‌ای نسبت به x و y متقارن باشد (به‌شرطی که‌از درجات خیلی بالا نباشد)، می‌توان به سادگی آنرا برحسب σ_1 و σ_2 بیان کرد. راهی را که برای اثبات قضیهٔ اصلی دنبال کردیم، ضمناً متضمن روش محاسبهٔ هر کثیرالجملهٔ متقارن $f(x, y)$ برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن σ_1 و σ_2 نیز هست. طبعاً سئوالی پیش می‌آید: آیا نمی‌توان روش دیگری پیدا کرد که به‌کمك آن کثیرالجملهٔ $f(x, y)$ به عبارت دیگری نسبت‌به σ_1 و σ_2 تبدیل شود؟ ثابت‌می‌شود که چنین نتیجه‌ای‌ممکن نیست: به‌هر طریقی که کثیرالجملهٔ $f(x, y)$ را برحسب σ_1 و σ_2 تبدیل کنیم، همیشه بیك نتیجهٔ واحد می‌رسیم. به عبارت دیگر قضیهٔ زیر صحیح است:

قضیهٔ منحصر بفرد بودن نتیجهٔ تبدیل. **اگر کثیرالجمله‌های $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ و $\psi(\sigma_1, \sigma_2)$ بازاء $\sigma_1 = x+y$ و $\sigma_2 = xy$ تبدیل بیك‌کثیرالجملهٔ‌متقارن $f(x, y)$ شوند، داریم****: $\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = \psi(\sigma_1, \sigma_2)$

---

*) خواننده می‌تواند در دور اول مطالعه، ازاین بند صرفنظر کند.

**) درحالت‌کلی، اگر دو کثیرالجمله با یکنوع تبدیل به‌نتیجهٔواحدی برسند، به‌این معنا نیست که دو کثیرالجمله متحدند. مثلا کثیرالجملهٔ:

$\psi(u, v) = u^2 + uv$ و $\varphi(u, v) = 2u^2 - v + uv$

با تبدیل $u = x+y$ و $v = x^2 + 2xy + y^2$ بیك نتیجه می‌رسند و این به آن مناسبت است که $u(x, y)$ و $v(x, y)$، خود بارابطهٔ $u^2 = v$ بهم مربوطاند. اساس اثبات قضیهٔ موردنظر براینست که عبارتهای $\sigma_1 = x+y$ و $\sigma_2 = xy$ باهیچ رابطهٔ جبری‌بهم مربوط نیستند.

کافی است که قضیهٔ منحصر بفرد بودن نتیجهٔ تبدیل را در حالت خاص $f(x , y) = 0$ ثابت کنیم ، به عبارت دیگر کافی است قضیهٔ زیر رااثبات کنیم:

(A) اگر کثیر الجملهٔ $\Phi(\sigma_1 , \sigma_2)$ باتبدیل $\sigma_1 = x+y$ و $\sigma_2 = xy$ مساوی صفر شود، خوه‌کثیر الجمله متحدبا صفر است .

ثابت می‌کنیم که قضیهٔ منحصر بفردبودن، نتیجه‌ای ازحکم (A) است. فرض می‌کنیم که کثیر الجمله‌های $\varphi(\sigma_1 , \sigma_2)$ و $\psi(\sigma_1 , \sigma_2)$ باتبدیل $\sigma_1 = x+y$ و $\sigma_2 = xy$ بیك نتیجه برسند : $\varphi(x+y , xy) = \psi(x+y , xy)$. در اینصورت کثیر الجملهٔ $\Phi(\sigma_1 , \sigma_2) = \varphi(\sigma_1 , \sigma_2) - \psi(\sigma_1 , \sigma_2)$ باهمین تبدیل مساوی صفر می‌شود :

$$\Phi(x+y , xy) = \varphi(x+y , xy) - \psi(x+y , xy) = 0$$

بنابراین اگر حکم (A) صحیح باشد ، $\Phi(\sigma_1 , \sigma_2) = 0$ و از آنجا $\varphi(\sigma_1 , \sigma_2) = \psi(\sigma_1 , \sigma_2)$ می‌شود .

برای اثبات حکم (A) لازم است که مفهوم جملهٔ « پر توان‌تر » در کثیر الجمله‌ای که شامل دو متغیر است روشن شود . $Ax^k y^l$ و $Bx^m y^n$ را دوجمله با متغیرهای x و y درنظر می‌گیریم . «پرتوانی» نسبت به توان x معین می‌شود و در حالت خاصی که توانهای x برابرند نسبت به توان y . به عبارت دیگر جملهٔ $Ax^k y^l$ را پر توان‌تر از $Bx^m y^n$ می‌نامیم وقتی که $k>m$ ویا $k=m$ و $l>n$ باشد . مثلاجملهٔ x^4y^2 پرتوان‌تر از x^2y^7 وجملهٔ x^4y^6 پرتوان‌تراز x^4y^5 است.واضح‌است که‌اگر $Ax^k y^l$ پرتوان‌تراز $Bx^m y^n$ و $Bx^m y^n$ پرتوان‌تر از $Cx^p y^q$ باشد ، $Ax^k y^l$ از $Cx^p y^q$ پرتوان‌تر خواهد بود .

حالا لم زیر را اثبات می‌کنیم :

پرتوان‌ترین جمله از کثیر الجملهٔ :

$$(x+y)^k (xy)^l \qquad (*)$$

پس از بازکردن پرانتزها مساوی $x^{k+l}y^l$ است .

عبارت (*) را می‌توان به‌اینصورت نوشت :

$$\underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{\text{مرتبه } k}x^l y^l$$

واضح است که جملهٔ باتوان بزرگتر برای x وقتی بدست می‌آید که در هر پرانتز جملهٔ x را انتخاب کنیم وچون تعداد پرانتزها برابر k است،این جمله بصورت $x^{k+l}.y^l$ در می‌آید . درهریك از بقیهٔ جمله‌ها ، توان x از $k+l$ کوچکتر است. بنابراین‌جملهٔ پرتوان‌تر $x^{k+l}y^l$ است. لم ثابت‌شد.

متذکر می‌شویم که عبارت (*) ازجملهٔ $\sigma_1^k\sigma_2^l$ با تبدیل $\sigma_1=x+y$ و $\sigma_1=xy$ بدست می‌آید . بنابراین اثبات این لم اجازه می‌دهد که با جملهٔ $\sigma_1^k\sigma_2^l$ ، بلافاصلهٔ جملهٔ پرتوان‌ترمتناظر را بدست‌آوریم ویا برعکس‌بادردست داشتن جملهٔ پرتوان‌تر به جملهٔ $\sigma_1^k\sigma_2^l$ پی‌ببریم. مثلا با تبدیل $\sigma_1=x+y$ و $\sigma_1=xy$ درجملهٔ $\sigma_1^6\sigma_2^4$ ، پس از بازکردن پرانتزها ،کثیرالجمله‌ای با جملهٔ پرتوان‌تر $x^{10}y^4$ بدست می‌آید . ضمناً اگر جملهٔ پرتوان‌تر x^7y^3را در دست داشته باشیم ، می‌توان به وجود جملهٔ $\sigma_1^4\sigma_2^3$ پی‌برد .

حالا به اثبات حکم (A) می‌پردازیم . باید ثابت کنیم‌که اگر کثیرالجملهٔ $\Phi(\sigma_1 ، \sigma_2)$ مخالف صفر باشد ، نمی‌تواند پس از تبدیل $\sigma_1=x+y$ و $\sigma_2=xy$ مساوی صفرشود .

فرض کنیم کثیرالجملهٔ $\Phi(\sigma_1 ، \sigma_2)$ به‌صورت زیرباشد :

$$\Phi(\sigma_1 ، \sigma_2)=\sum_{k و l} A_{kl}\sigma_1^k\sigma_2^l$$

در $\Phi(\sigma_1 ، \sigma_2)$ ، جمله‌هائی را انتخاب می‌کنیم که‌درآنها $k+l$ بزرگترین مقدار را داشته باشد و ازجملات انتخاب شده، جمله‌ای راانتخاب می‌کنیم که درآن l بزرگترین مقدار خود را داشته باشد (این جمله منحصر بفرداست، زیرا عددهای $k+l$ وl معرفk هستند) .

مثلا اگر داشته باشیم :

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = 3\sigma_1^4\sigma_2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^3 + \sigma_1\sigma_2^4 - 6\sigma_1\sigma_2^2 + 11\sigma_2^3 - 7\sigma_1 + 5\sigma_2 + 8$$

ابتدا جملات $3\sigma_1^4\sigma_2$ و $-4\sigma_1^2\sigma_2^3$ و $\sigma_1\sigma_2^4$ را وسپس از بین آنها $\sigma_1\sigma_2^4$ را انتخاب می‌کنیم .

به‌این ترتیب فرض کنید جملهٔ $A\sigma_1^m\sigma_2^n$ را انتخاب کرده باشیم . این جمله ، متناظر با جملهٔ پرتوان‌تر $Ax^{m+n}y^n$ است . ثابت می‌کنیم که این جمله از تمام بقیهٔ جملاتی که از تبدیل $\sigma_1 = x+y$ و $\sigma_2 = xy$ در کثیرالجملهٔ $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ ، پس از بازکردن پرانتزها بدست می‌آید، پرتوان‌تر است. این مطلب روشن است که بین جملاتی که در $A\sigma_1^m\sigma_2^n$ می‌توان انتخاب کرد ، $Ax^{m+n}y^n$ از همه پرتوان‌تر است . حالا جملهٔ دیگری مانند $B\sigma_1^k\sigma_2^l$ در نظر می‌گیریم که جملهٔ پر توان‌تر متناظر باآن $Bx^{k+l}y^l$ است.دراینصورت باتوجه به نوع انتخاب $A\sigma_1^m\sigma_2^n$ داریم $m+n>k+l$ و در صورتی که $m+n=k+l$ باشد، داریم $n>l$. در هر دو حالت $Ax^{m+n}y^n$ پر توان‌تر از $Bx^{k+l}y^l$ استوبنابراین پرتوان‌ترازهمهٔ جملات $B\sigma_1^k\sigma_2^l$ خواهد بود .

ثابت کردیم که $Ax^{m+n}y^n$ پرتوان‌تر از همهٔ جملاتی است که پس از تبدیل $\sigma_1 = x+y$ و $\sigma_2 = xy$ در $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ ، بعد از بازکردن‌پرانتزها بدست می‌آید . بنابرایق جملات‌متشابه باآن وجودندارد وبعد از جمع کردن جملات متشابه حذف نمی‌شود . به این‌ترتیب کثیرالجملهٔ $\Phi(x+y, xy)$ نمی‌تواند متحد باصفر باشد . تناقضی که بدست‌آمد . صحت حکم (A) وضمناً صحت قضیهٔ منحصر بفردبودن نتیجهٔ تبدیل را ثابت می‌کند .

۶. رابطهٔ وارینگا*

طریقه‌ای را که برای محاسبهٔ مجموع قوای متشابه با استفاده از رابطهٔ (۱) (صفحهٔ ۱۷) ذکر کردیم، متضمن این نقص است که برای محاسبهٔ S_k، باید قبلاً همهٔ مجموعهای قبلی را محاسبه کرد، درحالیکه اکثر احتیاجی به آنها نیست وتنها به محاسبهٔ مستقیم S_k برحسب σ_1 و σ_2 احتیاج داریم.

ادواردو وارینگا ریاضی‌دان انگلیسی در سال ۱۷۷۹ رابطه‌ای برای این محاسبهٔ مستقیم پیداکرد که به‌صورت زیر است**:

$$\frac{1}{k}S_k=\frac{1}{k}\sigma_1{}^k-\frac{(k-2)!}{1!(k-2)!}\sigma_1{}^{k-2}\sigma_2+\frac{(k-3)!}{2!(k-4)!}\sigma_1{}^{k-4}\sigma_2{}^2-$$

$$-\frac{(k-4)!}{3!(k-6)!}\sigma_1{}^{k-6}\sigma_2{}^3+\dots \qquad (2)$$

بسادگی می‌توان قانون تشکیل جملات را دراین رابطه فهمید. چون مجموع قوای متشابه $S_k=x^k+y^k$ کثیرالجمله‌ای است با درجهٔ k از x و y، طبیعی است که عبارت (۲) هم باید کثیرالجمله‌ای از درجهٔ k باشد. ولی $\sigma_1=x+y$ دوجمله‌ای ازدرجهٔ اول و $\sigma_2=x\cdot y$ یك جمله‌ای ازدرجهٔ دوم (نسبت به x و y) است. اگر σ_2 را بتوان m برسانیم، عبارت $\sigma_2{}^m=x^my^m$ بدست می‌آیدکه نسبت به x و y ازدرجهٔ $2m$ است وبرای قسمت σ_1 فقط توان $k-2m$ باقی میماند. بهمین مناسبت است که عبارت $\frac{1}{k}S_k$ از جملاتی به‌صورت $a_m\sigma_1{}^{k-2m}\sigma_2{}^m$ تشکیل شده‌است، که‌درآن m ازصفر تابزرگترین

---

*) ازاین بندهم در دوراول مطالعه، می‌توان صرفنظر کرد.

**) منظور از علامت $n!$ درریاضی حاصلضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n است، یعنی: $n!=1\times2\times3\times\dots\times n$

عدد صحیحی که از $\frac{k}{2}$ تجاوز نکند، تغییر می‌کند .

ضریب a_m کسری است که صورت آن $(k-m-1)!$ و مخرج آن حاصلضرب $m!$ و $(k-2m)!$ است (که به سادگی به خاطر سپرده می‌شود : m و $k-2m$ بترتیب عبارتند از توانهای σ_2 و σ_1 دراین جمله) . علاوه برآن ضریب a_m یك‌درمیان تغییر علامت می‌دهد. متذکرمی‌شویم که ضریب $\sigma_1{}^k$ هم طبق همین قانون تشکیل می‌شود ، فقط باید بخاطر داشت که دراین‌جمله توان σ_2 مساوی صفر است وباید $0!$ را مساوی یك به‌حساب آورد . بنابراین همهٔ جملات سمت راست تساوی را می‌توان با یك روش بدست آورد ؛ باید در عبارت:

$$\frac{(-1)^m(k-m-1)!}{m!(k-2m)!}\sigma_1{}^{k-2m}\sigma_2{}^m$$

عدد m را بترتیب مساوی ۰، ۱، ۲، ... گرفت ، تا بزرگترین مقدار m که به ازاء آن $k-2m$ منفی نباشد (یعنی تا بزرگترین عددی که از $\frac{k}{2}$ تجاوز نکند).

در ریاضی، اغلب به مجموعهائی برمی‌خوریم که همهٔ جملات آن شبیه یکدیگرند . به عبارت دقیق‌تر، همهٔ آنها از عبارتی مثل $f(m)$ ، به ازاء مقادیر خاص m، بدست می‌آیند. چنین مجموعهائی را به‌صورت :

$$\sum_m f(m)^{*}$$

می‌نویسند که علاوه برآن باید مقادیر خاصی راکه می‌توان به m داد ، درآن ذکرکرد . اگر مثلاً m بتواند همهٔ اعداد صحیح از صفر تا p راقبول

*) Σ ــ یکی ازحروف بزرگ یونانی (زیگما) ،که بعنوان علامت‌مجموع به‌کار می‌رود، شبیه حرف لاتینی S که حرف اول‌کلمهٔ Summa (مجموع) است .

کند، این مجموع به این صورت نوشته می‌شود :

$$\sum_{m=0}^{p} f(m)$$

به عبارت دیگر :

$$\sum_{m=0}^{p} f(m)=f(0)+f(1)+\cdots+f(p)$$

با استفاده از علامت $\sum$ ، رابطهٔ (۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\frac{1}{k}S_k=\sum_{m=0}^{p}\frac{(-1)^m(k-m-1)!}{m!(k-2m)!}\sigma_1{}^{k-2m}\sigma_2{}^m \;;$$

که درآن p بزرگترین عدد صحیحی است که از $\frac{k}{2}$ تجاوز نکند. درمطالب بعدی، برای سهولت‌کار، حدود تغییرات m را حذف‌کرده‌ایم.

با استفاده از رابطهٔ وارینگا می‌توان دوباره مقادیر $S_k(1<k<10)$ راکه درجدول صفحهٔ ۱۹ آورده‌ایم، بدست‌آورد.

اثبات رابطهٔ وارینگا باروش استقراء ریاضی انجام می‌گیرد. به ازاء $k=1$ ، این رابطه بصودت زیر در می‌آید.

$$S_1=\sigma_1$$

وبه ازاء $k=2$ به صورت :

$$\frac{1}{2}S_2=\frac{1}{2}\sigma_1{}^2-\sigma_2$$

بنابراین رابطهٔ وارینگابرای مقادیر $k=1$ و $k=2$ صحیح است.

حالافرض می‌کنیم که‌رابطهٔ وارینگا برای S_1، S_2، ... ، S_{k-1}صحیح باشد، دراینصورت برای‌اثبات‌آن درمورد S_k از رابطهٔ (۱) استفاده می‌کنیم (صفحهٔ ۱۷) ، داریم :

$$\frac{1}{k}S_k=\frac{1}{k}\left[\sigma_1 S_{k-1}-\sigma_2 S_{k-2}\right]=$$

$$=\frac{k-1}{k}\sigma_1\cdot\sum_m\frac{(-1)^m(k-m-2)!}{m!\,(k-2m-1)!}\sigma_1^{k-2m-1}\sigma_2^m-$$

$$-\frac{k-2}{k}\sigma_2\cdot\sum_n\frac{(-1)^n(k-n-3)!}{n!(k-2n-2)!}\sigma_1^{k-2n-2}\sigma_2^n=$$

$$=\frac{1}{k}\sum_m\frac{(-1)^m(k-m-2)!(k-1)}{m!(k-2m-1)!}\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m-$$

$$-\frac{1}{k}\sum_n\frac{(-1)^n(k-n-3)!(k-2)}{n!(k-2n-2)!}\sigma_1^{k-2n-2}\sigma_2^{n+1}.$$

در مجموع دوم $n+1$ را به m تغییر می‌دهیم ، دراینصورت می‌توان دومجموع رابیك مجموع تبدیل کرد .

$$\frac{1}{k}S_k=\frac{1}{k}\Sigma\frac{(-1)^m(k-m-2)!(k-1)}{m!(k-2m-1)!}\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m-$$

$$-\frac{1}{k}\Sigma\frac{(-1)^{m-1}(k-m-2)!(k-2)}{(m-1)!(k-2m)!}\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m=$$

$$=\frac{1}{k}\sum_m(-1)^m(k-m-2)!\left[\frac{k-1}{m!(k-2m-1)!}+\right.$$

$$\left.+\frac{k-2}{(m-1)!(k-2m)!}\right]\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m.$$

از طرف دیگر داریم :

$$\frac{1}{(m-1)!}=\frac{m}{m!};\frac{1}{(k-2m-1)!}=\frac{k-2m}{(k-2m)!};$$

بنابراین، عبارت داخل کروشه چنین‌می‌شود :

$$\frac{(k-1)(k-2m)}{m!(k-2m)!}+\frac{(k-2)m}{m!(k-2m)!}=\frac{k(k-m-1)}{m!(k-2m)!}.$$

بالاخره باتوجه به تساوی :

$$(k-m-۱)\cdot(k-m-۲)!=(k-m-۱)!$$

رابطهٔ مورد نظر بدست می‌آید :

$$\frac{۱}{k}S_k=\sum_m \frac{(-۱)^m(k-m-۱)!}{m!(k-۲m)!}\sigma_۱{}^{k-۲m}\sigma_۲{}^m .$$

به این‌ترتیب رابطهٔ وارینگ ثابت شد .

۲

مورد استعمال درجبر مقدماتی

(I)

۷. حل دستگاه معادلات

با استفاده از نتایج فصل قبل می‌توان به سادگی ، دستگاههای جبری مختلفی را حل کرد . قبلاً گفتیم که اکثراً به دستگاههائی برخورد می‌کنیم که سمت چپ تساوی درمعادلات آنها، نسبت به x و y متقارن است . در این حالت

می‌توان به سادگی معادلات را بامجهولات جدید $\sigma_1 = x+y$ و $\sigma_2 = x\cdot y$ نوشت . با قضیه‌ای که درصفحهٔ ۱۶ ثابت کردیم، این‌امکان همیشه وجود دارد. این‌تبدیل مجهول باعث می‌شود که درجهٔ معادلات پائین‌تر بیاید (زیرا $\sigma_2 = xy$ نسبت به x و y از درجهٔ دوم است) . به‌عبارت دیگر ، حل دستگاه نسبت به مجهولات جدید σ_1 و σ_2 ساده‌تر از حل دستگاه قبل از تبدیل است .

پس ازاینکه ، از دستگاه جدید ، مقادیر σ_1 و σ_2 بدست آمد ، باید مجهولات اصلی، یعنی x و y را محاسبه‌کرد . و این محاسبه هم به سادگی باکمك قضیهٔ زیر انجام می‌گیرد. این قضیه در برنامهٔ دبیرستانی وجود دارد وما آنرا با دقت بیشتری تکرار می‌کنیم .

قضیه . σ_1 و σ_2 را دوعدد دلخواه درنظر می‌گیریم ، معادلهٔ درجه‌دوم

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0 \qquad (*)$$

و دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x+y=\sigma_1 \\ x\cdot y=\sigma_2 \end{cases} \qquad (**)$$

بدین ترتیب با یکدیگر مربوطاند : اگر z_1 و z_2 ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم (*) باشند، دراینصورت دستگاه (**) دارای دوریشه است :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = z_1 \\ y_1 = z_2 \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = z_2 \\ y_2 = z_1 \end{array} \right.$$

وریشهٔ دیگری ندارد. برعکس اگر $x=a$ و $y=b$ ریشهٔ دستگاه (**) باشد، دراینصورت دوعدد a و b ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم(*) خواهندبود.

اثبات . اگر z_1 و z_2 ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم (*) باشند ، طبق روابط ویت داریم :

$$\begin{cases} z_1+z_2=\sigma_1 \\ z_1\cdot z_2=\sigma_2 \end{cases}$$

یعنی عددهای:

$$\begin{vmatrix} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} x_1 = z_2 \\ x_2 = z_1 \end{vmatrix}$$

ریشه‌های دستگاه (**)هستند. اینکه دستگاه(**) ریشه‌های دیگری ندارد، ناشی از اثبات قسمت دوم قضیه است که هم اکنون به‌آن خواهیم پرداخت.

فرض کنیم $x=a$ ، $y=b$ ، ریشهٔ دستگاه (**) باشند، یعنی :

$$\begin{cases} a+b=\sigma_1 \\ a\cdot b=\sigma_2 \end{cases}$$

دراینصورت خواهیم داشت :

$$z^2-\sigma_1 z+\sigma_2=z^2-(a+b)z+ab=(z-a)(z-b)$$

و این بـه معنای آنست که عددهای a و b ریشه‌های معادلـهٔ درجه دوم (*) هستند. قضیه ثابت شد.

چند مثال ذکر کنیم :

۱. دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{cases} ;$$

مجهولات جدید را $\sigma_1=x+y$ و $\sigma_2=x\cdot y$ می‌گیریم. با مراجعه به جدول صفحهٔ ۱۹ داریم :

$$x^3+y^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2 ;$$

و درنتیجه برای مجهولات جدید، دستگاه زیررا خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=35 \\ \sigma_1=5 \end{cases}$$

که ازآن $\sigma_2=6$ بدست می‌آید.

بادر دست داشتن ۵ $=\sigma_1$ و ۶ $=\sigma_2$ ، برای محاسبهٔ مجهولات اولیه دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x\cdot y=6 \end{cases}$$

و این دستگاه بسهولت قابل حل است (مثلاً ، قضیهٔ صفحهٔ ۳۱ حل این دستگاه را به حل معادلهٔ درجه دوم $z^2-5z+6=0$ منجر می‌کند) و جوابهای زیر بدست می‌آید :

$$\begin{vmatrix} x_1=2 \\ y_1=3 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} x_2=3 \\ y_2=2 \end{vmatrix}$$

۲. دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^5+y^5=33 \\ x+y=3 \end{cases}$$

شبیه مسئلهٔ قبل فرض می‌کنیم :

$$\sigma_1=x+y \; ; \; \sigma_2=x\cdot y$$

در اینصورت دستگاه مفروض ، نسبت به مجهولات جدید ، به صورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{cases} \sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2=33 \\ \sigma_1=3 \end{cases}$$

(با توجه به جدول صفحهٔ ۱۹) ، از آنجا برای σ_2 ، معادلهٔ درجه دوم زیر را خواهیم داشت :

$$15\sigma_2^2-135\sigma_2+210=0$$

یا :

$$\sigma_2^2-9\sigma_2+14=0$$

و ازاین معادله برای σ_2 دومقدار بدست می‌آید :

$$\sigma_2=2 \quad ; \quad \sigma_2=7$$

بنابراین برای مجهولات اولیهٔ x و y دودستگاه زیررا خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x\cdot y=7 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x+y=3 \\ x\cdot y=2 \end{cases}$$

که با حل آنها جوابهای زیر برای x و y بدست می‌آید :

$$\left| \begin{aligned} x_4&=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{19}}{2}i \\ y_4&=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{19}}{2}i \end{aligned} \right. ; \quad \left| \begin{aligned} x_3&=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{19}}{2}i \\ y_3&=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{19}}{2}i \end{aligned} \right. ; \quad \left| \begin{aligned} x_2&=1 \\ y_2&=2 \end{aligned} \right. ; \quad \left| \begin{aligned} x_1&=2 \\ y_1&=1 \end{aligned} \right.$$

برای حل معادلات یک مجهولی که از این طریق بدست می‌آید، اغلب می‌توان از قضیهٔ بزو (بند ۴۵ را به‌بینید) استفاده کرد . مثال زیر طریقهٔ استفاده از این قضیه را روشن می‌کند (متذکر می‌شویم که با روش حذف دستگاه شبیه آنرا نتوانستیم حل کنیم: صفحهٔ ۱۱ را به‌بینید) .

۴. دستگاه معادلات زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} x^3+y^3=8 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

مثل تمرینات قبل $\sigma_1=x+y$ و $\sigma_2=x\cdot y$ فرض می‌کنیم . دراینصورت دستگاه مفروض به صورت زیردرمی‌آید (جدول صفحهٔ ۱۹ را به‌بینید) :

$$\begin{cases} \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=8 \\ \sigma_1^2-2\sigma_2=4 \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم دستگاه، مقدار σ_2 را بدست‌آورده ودرمعادلهٔ اول قرارمی‌دهیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$-\frac{1}{2}\sigma_1^3+6\sigma_1-8=0$$

ویا پس ازضرب طرفین معادله در -2 :

$$\sigma_1^3-12\sigma_1+16=0$$

برای پیدا کردن مقادیر σ_1 در این معادله ، می‌توان از روش کلی حل معادلهٔ درجه سوم استفاده کرد ، ولی در اینحالت بهتر است که از «قضیهٔ بزو» استفاده کنیم. اگر درمعادلهٔ مفروض، اعداد صحیح را برای مجهول σ_1 (یعنی: $\sigma_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) مورد آزمایش قراردهیم ، بسادگی دیده می‌شود که $\sigma_1 = 2$ درمعادله صدق می‌کند . بنابراین طبق قضیهٔ بزو ، نتیجه می‌شود که عبارت سمت‌چپ تساوی بر $\sigma_1 - 2$ قابل‌قسمت است . این تقسیم راانجام می‌دهیم :

$$
\begin{array}{rrr|l}
 & \sigma_1^3 & -12\sigma_1+16 & \sigma_1-2 \\ \cline{4-4}
- & \sigma_1^3 - 2\sigma_1^2 & & \sigma_1^2+2\sigma_1-8 \\ \cline{2-3}
 & 2\sigma_1^2 & -12\sigma_1 & \\
- & 2\sigma_1^2 & -4\sigma_1 & \\ \cline{2-3}
 & & -8\sigma_1+16 & \\
- & & -8\sigma_1+16 & \\ \cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

همانطورکه انتظار داشتیم، تقسیم بدون باقیمانده است وخواهیم داشت :

$$\sigma_1^3 - 12\sigma_1 + 16 = (\sigma_1 - 2)(\sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 8)$$

به این‌ترتیب، معادلهٔ‌درجه سوم مفروض، به دومعادله‌تجزیه می‌شود، یکی‌خطی:

$$\sigma_1 - 2 = 0$$

که همان ریشهٔ $\sigma_1 = 2$ (که از قبل برای ما معلوم بود) بدست می‌دهد ، و دیگری درجه دوم :

$$\sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 8 = 0$$

که دارای دوریشه است : $\sigma_1 = -1 \pm 3$ یعنی $\sigma_1 = 2$ و $\sigma_1 = -4$.

بنابراین دوحالت ممکن است : یا $\sigma_1 = 2$ و یا $\sigma_1 = -4$. اکنون ازمعادلهٔ $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4$ مقدار σ_2 را محاسبه می‌کنیم که متناظراً $\sigma_2 = 0$ و $\sigma_2 = 6$ بدست می‌آید . درنتیجه برای مجهولات اصلی ، دو دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x\cdot y=0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x+y=-4 \\ x\cdot y=6 \end{cases}$$

که باحل آنها ، چهار دسته جوابهای دستگاه محاسبه می‌شود :

$$\left|\begin{array}{l} x_1=2 \\ y_1=0 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2=0 \\ y_2=2 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x_3=-2+i\sqrt{2} \\ y_3=-2-i\sqrt{2} \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_4=-2-i\sqrt{2} \\ y_4=-2+i\sqrt{2} \end{array}\right.$$

تمرینات

دستگاه معادلات زیر را حل‌کنید :

۱. $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$

۲. $\begin{cases} x+y=7 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12} \end{cases}$

۳. $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=0 \end{cases}$

۴. $\begin{cases} x+y=5 \\ x^3+y^3=65 \end{cases}$

۵. $\begin{cases} 4(x+y)=3xy \\ x+y+x^2+y^2=26 \end{cases}$

۶. $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=32 \\ 12(x+y)=7xy \end{cases}$

۷. $\begin{cases} xy=15 \\ x+y+x^2+y^2=42 \end{cases}$

۸. $\begin{cases} x+y+xy=7 \\ x^2+y^2+xy=13 \end{cases}$

۹. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19 \\ x-xy+y=7 \end{cases}$

۱۰. $\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y) \\ x^3+y^3=7(x+y) \end{cases}$

۱۱. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

۱۲. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18 \\ x+y=12 \end{cases}$

۱۳. $\begin{cases} x+y=a \\ x^3+y^3=b(x^2+y^2) \end{cases}$

۱۴. $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$

۱۵. $\begin{cases} xy(x+y)=20 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4} \end{cases}$

۱۶. $\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=23 \\ x^2+y^2+xy=19 \end{cases}$

۱۷. $\begin{cases} x^4-x^2y^2+y^4=1153 \\ x^2-xy+y^2=33 \end{cases}$

۱۸. $\begin{cases} \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{31}{7} \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$

۱۹. $\begin{cases} x+y=4 \\ x^4+y^4=82 \end{cases}$

۲۰. $\begin{cases} x+y=a \\ x^4+y^4=a^4 \end{cases}$

۲۱. $\begin{cases} x^4+y^4=a^4 \\ x+y=b \end{cases}$

۲۲. $\begin{cases} x+y=a \\ x^4+y^4=14x^2y^2 \end{cases}$

۲۳. $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2+x^3+y^3+x^4+y^4+x^5+y^5=b \end{cases}$

۲۴. $\begin{cases} x+y=a \\ x^5+y^5=b^5 \end{cases}$

۲۵. $\begin{cases} (x^3+y^3)(x^2+y^2)=2b^5 \\ x+y=b \end{cases}$

۲۶. $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

۲۷. $\begin{cases} y^2+y^2=7+xy \\ x^3+y^3=6xy-1 \end{cases}$

۲۸. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=133 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$

۲۹. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=a^2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$

۳۰. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=49 \\ x^4+x^2y^2+y^4=931 \end{cases}$

۳۱. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=39 \\ x^4-x^2+y^4-y^2=612 \end{cases}$

۳۲. $\begin{cases} x^4-x^2+y^4-y^2=84 \\ x^2+x^2y^2+y^2=49 \end{cases}$

۳۳. $\begin{cases} x^3+y^3+xy(x+y)=13 \\ x^2y^2(x^2+y^2)=468 \end{cases}$

۳۴. $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=16 \\ (x+y)(x^2+y^2)=40 \end{cases}$

۳۵. $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$

۳۶. $\begin{cases} x^3+y^3=(x+y)^2 \\ x^2+y^2=x+y+a \end{cases}$

۳۷. $\begin{cases} xy=a^2-b^2 \\ x^4+y^4=2(a^4+6a^2b^2+b^4) \end{cases}$

۳۸. $\begin{cases} x^3+y^3=a \\ x^2y+xy^2=b \end{cases}$

۳۹. $\begin{cases} x+y=a \\ x^7+y^7=a^7 \end{cases}$

۴۰. $\begin{cases} x+y-z=7 \\ x^2+y^2-z^2=37 \\ x^3+y^3-z^3=1 \end{cases}$

۴۱. $\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=353 \\ xy(x^2+y^2)=68 \end{cases}$

۴۲. $x^2+y^2=x^3+y^3=x^5+y^5$

۴۳. $\begin{cases} x^4=ax^2+by^2 \\ y^4=bx^2+ay^2 \end{cases}$

۴۴. $\begin{cases} 16(x^4+y^4+z^4+u^4)=289 \\ xy-zu=z+u=\frac{3}{2} \\ x+y=3 \end{cases}$

۸. استفاده از مجهول کمکی

گاهی پیش می‌آید که دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی ، ازمعادلاتی تشکیل شده است که نسبت به x و y متقارن نیستند، ولی باانتخاب مجهولات جدید

(کمکی) می‌توان آنها را به دومعادلهٔ متقارن تبدیل کرد . مثلا اگر در دستگاه:

$$\begin{cases} x^3-y^3=5 \\ xy^2+x^2y=1 \end{cases}$$

فرض کنیم : $z=-y$ ، به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} x^3+z^3=5 \\ xz^2+x^2z=1 \end{cases}$$

که سمت چپ هر دو تساوی نسبت به x و z متقارن است . گاهی انتخاب مجهول جدید کمی مشکل‌تر است . مثلا در دستگاه :

$$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 81x^4+16y^4=6817 \end{cases}$$

باید تبدیلات $3x=u$ و $-2y=v$ را داد ، که پس از آن دستگاه متقارن زیر بدست می‌آید ·

$$\begin{cases} u+v=5 \\ u^4+v^4=6817 \end{cases}$$

گاهی هم می‌توان بوسیلهٔ انتخاب مجهولات کمکی ، معادلهٔ یك مجهولی را بیك دستگاه متقارن تبدیل کرد ، مثلاً به نمونهٔ زیر توجه کنید .

معادلهٔ گنگ زیر را حل کنید :

$$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$$

فرض می‌کنیم : $\sqrt[4]{97-x}=z$ و $\sqrt[4]{x}=y$. در اینصورت معادلهٔ مفروض به صورت $y+z=5$ درمی‌آید وعلاوه بر آن داریم :

$$y^4+z^4=x+(97-x)=97$$

بنابراین به دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} y+z=5 \\ y^4+z^4=97 \end{cases}$$

که با انتخاب $\sigma_1=y+z$ و $\sigma_2=y\cdot z$ ، منجر به دستگاه زیرمی‌شود :

$$\begin{cases} \sigma_1=5 \\ \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=97 \end{cases}$$

که ازآن، معادلهٔ درجه دوم زیر برای σ_2 بدست می‌آید :

$$\sigma_2^2-50\sigma_2+264=0$$

که با حل‌آن بدست می‌آید :

$$\sigma_2=6 \quad \text{یا} \quad \sigma_2=44$$

و بنابراین حل مسئله ، منجر به حل دستگاههای زیر می‌شود :

$$\begin{cases} y+z=5 \\ y\cdot z=6 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y+z=5 \\ y\cdot z=44 \end{cases}$$

اولین دستگاه، دوجواب زیررا قبول دارد :

$$\begin{cases} y_1=2 \\ z_1=3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y_2=3 \\ z_2=2 \end{cases}$$

که با توجه به رابطهٔ $y=\sqrt[4]{x}$ ، برای مجهول اصلی x جوابهای : $x_1=16$ و $x_2=81$ بدست می‌آید . دستگاه دوم هم برای y و z ودرنتیجه برای x ، دوجواب می‌دهد (این جوابها موهومی‌اند و در معادلات گنگ تنها مقادیر حقیقی مجهولات انتخاب می‌شود) .

تمرینات

دستگاههای زیر را حل کنید.

۴۵. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=4 \end{cases}$

۴۶. $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{5}{2}xy \\ x-y=\dfrac{1}{4}xy \end{cases}$

۴۷. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^3-y^3=8 \end{cases}$

۴۸. $\begin{cases} x^5-y^5=3093 \\ x-y=3 \end{cases}$

۴۹. $\begin{cases} x^5-y^5=b^5 \\ x-y=a \end{cases}$

۵۰. $\begin{cases} x^2+y=5 \\ x^6+y^3=65 \end{cases}$

۵۱. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\dfrac{5}{6}\sqrt{xy} \\ x+y=13 \end{cases}$

۵۲. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=a \\ \dfrac{x^2}{\sqrt{y}}+\dfrac{y^2}{\sqrt{x}}=b \end{cases}$

۵۳. $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy} \\ x+y=20 \end{cases}$

۵۴. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{y^3x}=78 \end{cases}$

۵۵. $\begin{cases} x+y=10 \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

۵۶. $\begin{cases} x+\sqrt{xy}+y=a \\ x^3+2xy\sqrt{xy}+y^3=a^3 \end{cases}$

۵۷. $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7 \\ x^2+y^2+xy=133 \end{cases}$

۵۸. $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14 \\ x^2+y^2+xy=84 \end{cases}$

۵۹. $\begin{cases} x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{5}}=35 \\ x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{5}}=5 \end{cases}$

۶۰. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{61}{\sqrt{xy}}+1 \\ \sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=78 \end{cases}$

۶۱. $\begin{cases} x+y=72 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6 \end{cases}$

۶۲. $\begin{cases} x+xy+y=12 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y}=0 \end{cases}$

۶۳. $\begin{cases} \sqrt[4]{y^3-1}+\sqrt{x}=3 \\ x^2+y^3=82 \end{cases}$

۶۴. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3 \\ xy=8 \end{cases}$

۶۵. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{5}{2}\sqrt[6]{xy} \\ x+y=10 \end{cases}$

۶۶. $\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x}{y}}+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=a \\ x+y=b \end{cases}$

معادلات زیر راحل کنید :

۶۷. $\left(\frac{x+a}{2}\right)^6+\left(\frac{x-a}{2}\right)^6=a^6$

۶۸. $(ax^2+bx+c)^5-(ax^2+bx+d)^5=e$

۶۹. $(z^2+1)^7-(z^2-1)^7=2^7$

۷۰. $z^4+(1-z)^4=1$

۷۱. $(x+a+b)^5=x^5+a^5+b^5$

۷۲. $\sqrt{1-x^2}=(a-\sqrt{x})^2$

۷۳. $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=1$

۷۴. $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$

۷۵. $x\sqrt[3]{35-x^3}(x+\sqrt[3]{35-x^3})=30$

۷۶. $x\frac{19-x}{x+1}\left(x+\frac{19-x}{x+1}\right)=84$

۷۷. $(a-y)^2=\sqrt[3]{a^6-y^6}$

۷۸. $\sin^3 x+\cos^3 x=1$

۷۹. $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$

۸۰. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$

۸۱. $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$

۸۲. $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}$

۸۳. $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$

۸۴. $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}$

۸۵. $\sqrt[4]{78+\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}}-\sqrt[4]{84-\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}}=0$

۸۶. $\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1$

۸۷. $\sqrt[4]{41+x}+\sqrt[4]{41-x}=2$

۸۸. $\sqrt[5]{a+x}+\sqrt[5]{a-x}=\sqrt[5]{2a}$

۸۹. $\sqrt[7]{a-x}+\sqrt[7]{x}=\sqrt[7]{a}$

۹۰. $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a-x}=\sqrt[4]{b}$

۹۱. $\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5$

۹۲. $(x+a)^4+(x+b)^4=c$

۹. مسائلی دربارهٔ معادلات درجه دوم

مسائل زیادی که درآنها باید عبارتهای شامل ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم مفروض را محاسبه‌کرد، به‌سادگی به‌کمك کثیرالجمله‌های‌متقارن‌حل می‌شوند.

به دومثال زیر توجه‌کنید .

۱. معادلهٔ درجه دوم $x^2+6x+10=0$ مفروض است، معادلهٔ‌درجه دوم دیگری تشکیل دهیدکه ریشه‌های‌آن مجذور ریشه‌های این‌معادله باشد .

ریشه‌های معادلهٔ مفروض را x_1 و x_2 وریشه‌های معادلهٔ مجهول را y_1 و y_2 فرض می‌کنیم ، اگر ضرایب معادلهٔ مجهول را p و q بگیریم، طبق‌قضیهٔ ویت داریم :

$$\sigma_1=x_1+x_2=-6\ ;\ \sigma_2=x_1\cdot x_2=10$$

و بهمین‌ترتیب :

$$y_1+y_2=-p\ ;\ y_1\cdot y_2=q$$

اما طبق شرط مسئله باید داشته باشیم : $y_1=x_1^2$ ، $y_2=x_2^2$ وبنابراین:

$$p=-(y_1+y_2)=-(x_1^2+x_2^2)=-S_2=-(\sigma_1^2-2\sigma_2)=$$
$$=-16$$

$$q=y_1\cdot y_2=x_1^2\cdot x_2^2=\sigma_2^2=100$$

و به‌این‌ترتیب معادلهٔ درجه دوم مجهول به صورت زیر درمی‌آید :

$$y^2-16y+100=0$$

با همین روش می‌توان مسائل بغرنج تری را هم حل کرد . به نمونهٔ زیر توجه‌کنید .

۲. معادلهٔ درجه دوم $z^2+pz+q=0$ را چنان تشکیل دهیدکه اعداد :

$$z_1=x_1^6-2x_2^2\ ;\ z_2=x_2^6-2x_1^2$$

ریشه‌های‌آن باشند، x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-x-3=0$ هستند .

برای حل این مسئله ، بازهم از روابط ویت استفاده می‌کنیم ، طبق این روابط :

$$\sigma_1=x_1+x_2=1\ ;\ \sigma_2=x_1\cdot x_2=-3$$

ازطرف دیگر، طبق همین روابط :

$$-p=z_1+z_2=(x_1^6-2x_2^2)+(x_2^6-2x_1^2)\ ;$$

$$q=z_1\cdot z_2=(x_1^6-2x_2^2)\cdot(x_2^6-2x_1^2).$$

بااستفاده ازجدول صفحهٔ ۱۹، به سادگی می‌توان کثیرالجمله‌های متقارن p و q را برحسب σ_1 و σ_2 محاسبه کرد وسپس مقادیر $\sigma_1=1$ و $\sigma_2=-3$ راقرار داد . ضرایب p و q را محاسبه می‌کنیم . داریم :

$$-p=(x_1^6+x_2^6)-2(x_1^2+x_2^2)=S_6-2S_2=$$
$$=(\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3)-2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=$$
$$=[1^6-6\times1^4\times(-3)+9\times(-3)^2-2\times(-3)^3]-$$
$$-2[1^2-2\times(-3)]=140\ ;$$

$$q=(x_1^6-2x_2^2)(x_2^6-2x_1^2)=$$
$$=x_1^6\cdot x_2^6-2(x_1^8+x_2^8)+4x_1^2\cdot x_2^2=\sigma_2^6-2S_8+4\sigma_2^2=$$
$$=\sigma_2^6-2(\sigma_1^8-8\sigma_1^6\sigma_2+20\sigma_1^4\sigma_2^2-16\sigma_1^2\sigma_2^3+2\sigma_2^4)+4\sigma_2^2=$$
$$=(-3)^6-2\times[1^8-8\times1^6\times(-3)+20\times1^4\times(-3)^2-$$
$$-16\times1^2\times(-3)^3+2\times(-3)^4]+4\times(-3)^2=-833$$

بنابراین $p=-140$ و $q=-832$ می‌شود ومعادلهٔ درجه دوم موردنظر به صورت $z^2-140z-833=0$ درمی‌آید .

تمرینات

۹۳. معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادلهٔ $x^2+6x+10=0$ باشد .

۹۴. معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن توانهای دهم ریشه‌های معادله $x^2+x-3=0$ باشد .

۹۵. اگر x_1 و x_2 را ریشه‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ باشند ،

مقدار عبارت $x_1^k+x_2^k$ را به‌ازاء ۵± و۴± و۳± و۲± و۱± $=k$ محاسبه کنید.

۹۶. معادلهٔ درجه دومی با ریشه‌های x_1 وx_2 تشکیل دهید، به شرطی که می‌دانیم $x_1^5+x_2^5=31$ و $x_1+x_2=1$ باشد.

۹۷. ثابت کنید که اگر x_1 وx_2 ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2+px+q=0$، باضرایب صحیح p و q، باشد؛ به ازاء هر مقدار صحیح n عبارت $x_1^n+x_2^n$ عددی است صحیح.

۹۸. به ازاء چه مقدار حقیقی a، مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a-2)x-a-1=0$ حداقل مقدار خود را خواهد داشت؟

۹۹. اگر x_1 وx_2 ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-6x+1=0$ باشد، ثابت کنید که مجموع $x_1^n+x_2^n$ به‌ازاء هر عدد طبیعی n، عددی‌است صحیح و به ازاء هیچ مقداری از n، مضربی از ۵ نیست.

۱۰۰. اگر α وβ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2+px+q=0$، اعدادی مثبت باشند، حاصل عبارت $\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}$ را برحسب ضرایب معادله محاسبه کنید.

۱۰. نامساویها

کثیرالجمله‌های متقارن را، برای اثبات بسیاری از نامساویها هم می‌توان بخوبی مورد استفاده قرار داد. برای این منظور، باید از جدول صفحهٔ۱۹ و قضیهٔ زیر استفاده کرد.

قضیه. σ_1، σ_2 را اعدادی حقیقی فرض‌می کنیم، برای اینکه عددهای x وy، که ازدستگاه زیر معین می‌شوند:

$$\begin{cases} x+y=\sigma_1 \\ x\cdot y=\sigma_2 \end{cases}$$

مقادیری حقیقی باشند، لازم وکافی است که σ_1 وσ_2درنامساوی $\sigma_1^2-4\sigma_2\geqslant 0$

صدق کنند. تساوی $\sigma_1^2 = 4\sigma_2$ تنها برای حالتی است که $x = y$ باشد. برای اینکه هر دو عدد x و y حقیقی و غیر منفی باشند، لازم و کافی است که عددهای σ_1 و σ_2 در نامساویهای زیر صدق کنند:

$$\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geqslant 0 \quad ; \quad \sigma_1 \geqslant 0 \quad ; \quad \sigma_2 \geqslant 0$$

اثبات. با توجه به قضیه‌ای که درصفحهٔ ۳۱ دیدیم، عددهای x و y ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر هستند:

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$$

یعنی داریم:

$$z_{1,2} = \frac{\sigma_1 \pm \sqrt{\sigma_1^2 - 4\sigma_2}}{2}$$

بنابراین برای حقیقی بودن x و y لازم وکافی است که عبارت زیر رادیکال غیرمنفی باشد، یعنی نامساوی $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geqslant 0$ برقرار باشد. تساوی $\sigma_1^2 = 4\sigma_2$ به این معناست که دوریشهٔ معادله باهم برابرند، یعنی: $x = y$.

اگر عددهای x و y غیرمنفی باشند، علاوه برنامساوی $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geqslant 0$ باید داشته باشیم. $\sigma_1 \geqslant 0$ ، $\sigma_2 \geqslant 0$.

حالا فرض کنیم که نامساویهای $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geqslant 0$ و $\sigma_1 \geqslant 0$ و $\sigma_2 \geqslant 0$ برقرار باشد. همانطور که قبلا هم دیدیم از نامعادلهٔ اول نتیجه می‌شود که عددهای x و y حقیقی هستند؛ از نامساوی $\sigma_2 \geqslant 0$ نتیجه می‌شود که دوعدد هم علامت‌اند و سپس ازنامساوی $\sigma_1 \geqslant 0$ معلوم می‌شود که آنها غیر منفی‌اند. قضیه ثابت شد.

این قضیه را با روش دیگری هم می‌توان ثابت کرد. عددهای x و y ریشه‌های معادلهٔ $z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$ ، باضرایب حقیقی، هستند. یاهردوعدد حقیقی‌اند که دراینصورت تفاضل آنها هم عددی است حقیقی، یاهردومختلط‌اند که دراینصورت تفاضل آنها هم‌عددی موهومی می‌شود. بنابراین درحالت‌اول $(x - y)^2 \geqslant 0$ ودر حالت دوم $(x - y)^2 < 0$ است. به‌این‌ترتیب، اگر σ_1 و σ_2 حقیقی باشند، شرط لازم وکافی برای حقیقی بودن x و y، برقرار بودن

نامساوی $(x-y)^2 \geqslant 0$ است . باتوجه به‌اتحاد :

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 4\sigma_2$$

نامساوی $(x-y)^2 \geqslant 0$ به‌صورت $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geqslant 0$ تبدیل می‌شود. قسمت دوم‌هم بهمان طریق بالا اثبات می‌شود .

از قضیهٔ مذکور برای اثبات نامساویها ، می‌توان به این‌طریق استفاده کرد . فرض می کنیم که کثیرالجملهٔ متقارن $f(x, y)$ مفروض باشد وبخواهیم ثابت کنیم که این کثیرالجمله به ازاء همه مقادیر حقیقی x و y (یا بازاء همهٔ مقادیر غیرمنفی ، یا به‌ازاء $x+y \geqslant a$ ، بسته به‌شرط مسئله) همیشه غیرمنفی است : $f(x, y) \geqslant 0$. قبل‌از همه کثیرالجملهٔ $f(x, y)$ را برحسب مجهولات جدید σ_1 و σ_2 می نویسیم. سپس در کثیرالجمله‌ای که بدست می آید، σ_2 را برحسب σ_1 ومقدار غیرمنفی $z = \sigma_1^2 - 4\sigma_2$ ، قرار می‌دهیم ، یعنی قرار می‌دهیم : $\sigma_2 = \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z)$. در نتیجه کثیرالجمله‌ای برحسب σ_1 و z بدست می آید که باید ثابت کرد به ازاء مقادیر غیرمنفی z و به ازاء حدودی که طبق شرایط مسئله برای σ_1 وجود دارد، مقداری غیرمنفی است . و واضح است که اثبات نامساوی اخیر به مراتب ساده‌تر از نامساوی اول است . گاهی هم بهتر است که σ_1^2 را برحسب σ_2 و z محاسبه کنیم (یعنی $\sigma_1^2 = z + 4\sigma_2$).

چند مثال

۱. ثابت کنید که اگر a و b اعدادی حقیقی و در نامساوی $a+b \geqslant c$ صادق باشند، نامساویهای زیر صحیح است :

$$a^2 + b^2 \geqslant \frac{c^2}{2} ، \quad a^4 + b^4 \geqslant \frac{c^4}{8} ، \quad a^8 + b^8 \geqslant \frac{c^8}{128}$$

برای اثبات، ازساده‌ترین عبارتهای‌متقارن $\sigma_1 = a+b$ و $\sigma_2 = ab$ استفاده می کنیم . داریم :

$$S_2 = a^2 + b^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2 \times \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z) = \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{1}{2}z.$$

چون $z \geqslant 0$ وطبق شرط مسئله $\sigma_1 \geqslant c$ می‌باشد $S_2 \geqslant \frac{1}{2}c^2$ خواهدشد، یعنی :

$$a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}c^2$$

اگر درمورد نامساوی اخیر، استدلال قبل را تکرارکنیم، بدست‌می‌آید :

$$a^4 \times b^4 \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c^2\right)^2 = \frac{1}{8}c^4$$

وبالاخره بهمین ترتیب بدست می‌آید :

$$a^8 + b^8 \geqslant \frac{1}{128}c^8$$

با استفاده از روش استقراء ریاضی می‌توان بطورکلی ثابت‌کردکه اگر $a+b \geqslant c$ و n عددی طبیعی باشد، داریم :

$$a^{2^n} + b^{2^n} \geqslant \frac{1}{2^{2^n - 1}} \cdot c^{2^n}$$

۲. ثابت‌کنیدکه اگر a و b اعدادی حقیقی باشند و در نامساوی $a+b \geqslant 1$ صدق‌کنند ، $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$ صحیح خواهد بود.

این نامساوی حالت خاصی از نامساوی $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}c^4$ است‌که درمثال قبل ذکرکردیم . بنابراین‌می‌توان باتوجه به مثال قبل‌آنرا ثابت شده دانست.

ولی اگر بخواهیم آنرا بدون در نظرگرفتن نامساوی $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}c^4$ ثابت‌کنیم ، می‌توان نوشت :

$$a^4 + b^4 = S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \times$$

$$\times \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z) + 2\left[\frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z)\right]^2 = \frac{1}{8}\sigma_1^4 + \frac{3}{4}\sigma_1^2 z + \frac{1}{8}z^2 \geqslant \frac{1}{8}\sigma_1^4$$

(زیرا $z \geqslant 0$ است) وچون طبق شرط مسئله $\sigma_1 \geqslant 1$ است ، صحت نامساوی $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$ ثابت می‌شود .

تمرینات

ثابت‌کنید‌که به ازاء مقادیر حقیقی a و b نامساویهای زیر برقرار است :

۱۰۱. $$5a^2-6ab+5b^2\geqslant 0$$

۱۰۲. $$8(a^4+b^4)\geqslant(a+b)^4$$

۱۰۳. $$a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$$

۱۰۴. $$a^2+b^2+1\geqslant ab+a+b$$

۱۰۵. $$a^6+b^6\geqslant a^5b+ab^5$$

ثابت‌کنید‌که بازاء مقادیر غیرمنفی a و b نامساویهای زیر صحیح است :

۱۰۶. $$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

۱۰۷. $$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8\geqslant 64ab(a+b)^2$$

۱۰۸. $$a^4+2a^3b+2ab^3+b^4\geqslant 6a^2b^2$$

۱۰۹. $$\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

۱۱۰. اگر $x+y=a$ باشد، حداکثرمقدار عبارات $xy(x-y)^2$ چقدر است ؟

۱۱۱. ثابت‌کنید‌که اگر عددهای مثبت a و b در رابطهٔ $a+b=1$ صدق‌کنند ، داریم :

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}$$

۱۱۲. ثابت‌کنید‌که به ازاء همهٔ مقادیر مثبت x و y نامساوی زیر برقرار است :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$$

۱۱۳. ثابت‌کنید‌که برای مقادیرمثبت x_1 ، x_2 ، ... ، x_n نامساوی زیر برقرار است :

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2$$

۱۱. معادلات معکوسه

از کثیرالجمله‌های متقارن، برای حل بعضی ازمعادلات از درجه‌های بالا هم می‌توان استفاده کرد ودراین بند ما به‌معادلات معکوسه می‌پردازیم :

کثیرالجملهٔ :

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n \qquad (a_0\neq 0) \qquad (*)$$

رامعکوسه گویند، وقتی که ضرایب آن ازطرفین دو بدو برابر باشند، یعنی داشته باشیم: $a_0=a_n$ ، $a_1=a_{n-1}$ ، $a_2=a_{n-2}$ ، ... .مثلاً کثیرالجمله‌های زیر معکوسه هستند :

$$z^5-3z^4+2z^3+2z^2-3z+1,$$
$$2z^8+z^7-6z^5-6z^3+z+2,$$
$$z^n+1$$

معادلهٔ $f(z)=0$ ، وقتی که کثیرالجملهٔ سمت چپ آن معکوسه باشد ، معادلهٔ معکوسه نامیده می‌شود .

اساس حل معادلات معکوسه برقضیهٔ زیراست.

قضیه . هرکثیرالجملهٔ معکوسهٔ به‌صورت

$$f(z)=a_0z^{2k}+a_1z^{2k-1}+\cdots+a_{2k-1}z+a_{2k}$$

که ازدرجهٔ زوج $2k$ است به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$f(z)=z^kh(\sigma)$$

که درآن $\sigma=z+\frac{1}{z}$ و $h(\sigma)$ کثیرالجمله‌ای ازدرجهٔ k نسبت به σ می‌باشد.

هرکثیرالجملهٔ معکوسهٔ $f(z)$ ازدرجهٔ فرد بر $z+1$ قابل قسمت است وضمناً خارج‌قسمت، کثیرالجملهٔ معکوسه‌ای ازدرجهٔ زوج‌خواهد بود.

اثبات . ابتدا کثیرالجملهٔ $f(z)$ را ازدرجهٔ زوج $2k$ می‌گیریم . اگر دراین کثیرالجمله از z^k فاکتور بگیریم، بدست می‌آید :

$$f(z)=z^k\left(a_0z^k+a_1z^{k-1}+\dots+a_{2k-1}\frac{1}{z^{k-1}}+a_{2k}\frac{1}{z^k}\right),$$

ویا باتوجه به تساویهای $a_0=a_{2k}$ ، $a_1=a_{2k-1}$ ، ... خواهیم‌داشت:

$$f(z)=z^k\left[a_0\left(z^k+\frac{1}{z^k}\right)+a_1\left(z^{k-1}+\frac{1}{z^{k-1}}\right)+\dots+a_k\right],$$

حالا ثابت می‌کنیم که‌دوجمله‌ایهای $z^k+\frac{1}{z^k}$ و $z^{k-1}+\frac{1}{z^{k-1}}$ و ... را می‌توان برحسب $\sigma=z+\frac{1}{z}$ بیان‌کرد . ولی این مسئله ، منجر به مسئله‌ای می‌شود که قبلا دربارهٔ بیان $S_k=x^k+y^k$ برحسب عبارتهای متقارن سادهٔ $\sigma_1=x+y$ و $\sigma_2=xy$ ذکر کرده‌ایم. درحقیقت اگر فرض‌کنیم $x=z$ و $y=\frac{1}{z}$ ، دوجمله‌ای $S_k=x^k+y^k$ به‌صورت $z^k+\frac{1}{z^k}$ تبدیل می‌شود و عبارت متقارن سادهٔ $\sigma_1=x+y$ به‌صورت $\sigma=z+\frac{1}{z}$ وعبارت متقارن سادهٔ $\sigma_2=xy$ به صورت ۱ درمی‌آید . بنابراین اگر درعبارت S_k (که برحسب σ_1 و σ_2 نوشته شده) ، مقادیر $\sigma_1=\sigma=z+\frac{1}{z}$ و $\sigma_2=1$ را قرار دهیم ، عبارت $z^k+\frac{1}{z^k}$ برحسب σ بدست می‌آید . عملا ساده‌تر اینست که از جدول صفحهٔ ۱۹ استفاده کنیم. اگر در این روابط $\sigma_1=\sigma$ و $\sigma_2=1$ بگیریم ، بدست می‌آید :

$$z^2+\frac{1}{z^2}=\sigma^2-2;$$

$$z^3+\frac{1}{z^3}=\sigma^3-3\sigma;$$

$$z^4+\frac{1}{z^4}=\sigma^4-4\sigma^2+2;$$

$$z^5+\frac{1}{z^5}=\sigma^5-5\sigma^3+5\sigma;$$

$$z^6+\frac{1}{z^6}=\sigma^6-6\sigma^4+9\sigma^2-2;$$

$$z^7+\frac{1}{z^7}=\sigma^7-7\sigma^5+14\sigma^3-7\sigma;$$

$$z^8+\frac{1}{z^8}=\sigma^8-8\sigma^6+20\sigma^4-16\sigma^2+2;$$

$$z^9+\frac{1}{z^9}=\sigma^9-9\sigma^7+27\sigma^5-30\sigma^3+9\sigma;$$

$$z^{10}+\frac{1}{z^{10}}=\sigma^{10}-10\sigma^8+35\sigma^6-50\sigma^4+25\sigma^2-2;$$

. . . .

به این‌ترتیب حکم اول قضیه (که مربوط به‌کثیرالجمله‌های معکوس از درجهٔ زوج بود) ثابت شد .

حالا به‌حالت کثیرالجملهٔ معکوس از درجهٔ فرد $2k+1$ می‌پردازیم :

$$f(z)=a_0z^{2k+1}+a_1z^{2k}+\ldots+a_{2k}z+a_{2k+1}$$

وچون این کثیرالجمله معکوسه است ، بایدداشته باشیم :

$$a_0=a_{2k+1}\ ;\ a_1=a_{2k}\ ;\ a_2=a_{2k-1}\ ;\ldots\ldots$$

و بنابراین $f(z)$ را می‌توان چنین نوشت :

$$f(z)=a_0(z^{2k+1}+1)+a_1(z^{2k}+z)+a_2(z^{2k-1}+z^2)+\ldots+$$
$$+a_k(z^{k+1}+z^k)=a_0(z^{2k+1}+1)+a_1z(z^{2k-1}+1)+$$
$$+a_2z^2(z^{2k-3}+1)+\ldots+a_kz^k(z+1).$$

که هریك از دوجمله‌ایهای داخل پرانتزها بر $z+1$ قابل‌قسمت است ، بـا استفاده اتحاد :

$$z^{2m+1}+1=(z+1)(z^{2m}-z^{2m-1}+z^{2m-2}-\ldots+z^2-z+1)$$

خواهیم داشت :

$$a_0(z^{2k+1}+1)=a_0(z+1)(z^{2k}-z^{2k-1}+z^{2k-2}-\dots+$$
$$+z^2-z+1),$$

$$a_1z(z^{2k-1}+1)=a_1z(z+1)(z^{2k-2}-z^{2k-3}+\dots-z+1)=$$
$$=a_1(z+1)(z^{2k-1}-z^{2k-2}+\dots-z^2+z),$$

$$a_2z^2(z^{2k-3}+1)=a_2z^2(z+1)(z^{2k-4}-\dots+1)=$$
$$=a_2(z+1)(z^{2k-2}-\dots+z^2),$$

. . . .

$$a_kz^k(z+1)=a_k(z+1)z^k.$$

اگر این روابط را باهم جمع کنیم، باتوجه به عامل مشترك $z+1$ در سمت راست تساویها ، خواهیم داشت :

$$f(z)=(z+1)g(z),$$

$g(z)$ کثیرالجمله‌ای است که از مجموع عبارتهای زیر بدست می‌آید :

$$a_0(z^{2k}-z^{2k-1}+z^{2k-2}-\dots+z^2-z+1),$$
$$a_1(z^{2k-1}-z^{2k-2}+\dots-z^2+z),$$
$$a_2(z^{2k-2}-\dots+z^2),$$

. . . . . .

$$a_kz^k$$

به‌سادگی دیده می‌شود که درمجموع این عبارتها، ضرایب جملات از طرفین دوبه دوبرابرند وبنابراین $g(z)$ کثیرالجمله‌ای معکوسه است (از درجهٔ زوج $2k$). به این ترتیب قسمت دوم قضیه ۴، که مربوط به‌کثیرالجمله‌های‌معکوس ازدرجهٔ فرد بود ثابت شد . (در تمرینات ۱۲۲ و ۱۲۳ روش دیگری برای اثبات قسمت دوم در نظر گرفته شده است) .

دو مثال از مورد استفادهٔ قضیه مذکور در حل معادلات معکوسه ذکر می کنیم .

۱. معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$12z^4-16z^3-11z^2-16z+12=0$$

این معادله، معکوسه واز درجهٔ چهارم است . سمت‌چپ تساوی در این معادله به‌این ترتیب قابل تبدیل است :

$$12z^4-16z^3-11z^2-16z+12=$$

$$=z^2\left(12z^2-16z-11-\frac{16}{z}+\frac{12}{z^2}\right)=$$

$$=z^2\left[12\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-16\left(z+\frac{1}{z}\right)-11\right]=$$

$$=z^2[12(\sigma^2-2)-16\sigma-11]=z^2(12\sigma^2-16\sigma-35).$$

وچون $z=0$ ریشهٔ معادله نیست، به معادلهٔ درجه‌دوم زیر نسبت به σ می‌رسیم:

$$12\sigma^2-16\sigma-35=0$$

باحل این معادله جوابهای $\sigma=-\frac{7}{6}$ و $\sigma=\frac{5}{2}$ بدست‌می‌آید . بنابراین‌برای پیداکردن جوابهای معادلهٔ اصلی به دومعادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$z+\frac{1}{z}=-\frac{7}{6}\ ;\quad z+\frac{1}{z}=\frac{5}{2}$$

که باحل آنها جوابهای معادله بدست می‌آید :

$$z_{1,2}=\frac{-7\pm i\sqrt{95}}{12}\quad;\quad z_3=2\ ;\ z_4=\frac{1}{2}$$

۲. این معادله را حل کنید :

$$4z^{11}+4z^{10}-21z^9-21z^8+17z^7+17z^6+17z^5+17z^4-$$
$$-21z^3-21z^2+4z+4=0$$

که معادلهٔ معکوسه‌ای ازدرجهٔ فرد۱۱ است .

طبق قضیه‌ای‌که ثابت‌کردیم، عبارت‌سمت چپ تساوی بر $z+1$ قابل قسمت است ،که پس ازتقسیم خواهیم داشت :

$$4z^{11}+4z^{10}-21z^{9}-21z^{8}+17z^{7}+17z^{6}+17z^{5}+17z^{4}-$$
$$-21z^{3}-21z^{2}+4z+4=$$
$$=(z+1)(4z^{10}-21z^{8}+17z^{6}+17z^{4}-21z^{2}+4).$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض به دو معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود :

$$z+1=0$$
$$4z^{10}-21z^{8}+17z^{6}+17z^{4}-21z^{2}+4=0$$

معادلهٔ اول ریشهٔ $z_1=-1$ را می‌دهد . معادلهٔ دوم هم، معادله‌ای‌معکوسه و ازدرجهٔ زوج است . سمت چپ آنرا تبدیل می کنیم* :

$$4z^{10}-21z^{8}+17z^{6}+17z^{4}-21z^{2}+4=$$
$$=z^{5}\left(4z^{5}-21z^{3}+17z+17\cdot\frac{1}{z}-21\cdot\frac{1}{z^{3}}+4\cdot\frac{1}{z^{5}}\right)=$$
$$=z^{5}\left[\,4\left(z^{5}+\frac{1}{z^{5}}\right)-21\left(z^{3}+\frac{1}{z^{3}}\right)+17\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]=$$
$$=z^{5}[4(\sigma^{5}-5\sigma^{3}+5\sigma)-21(\sigma^{3}-3\sigma)+17]=$$
$$=z^{5}(4\sigma^{5}-41\sigma^{3}+100\sigma),$$

ازآنجاکه $z=0$ ریشهٔ معادله نیست، به معادلهٔ زیر نسبت به σ می‌رسیم :

$$\sigma(4\sigma^{4}-41\sigma^{2}+100)=0$$

بنابراین یك ریشهٔ $\sigma=0$ خواهیم داشت و چهار ریشه‌که از حل معادلهٔ دو مجذوری زیر بدست می‌آید :

$$4\sigma^{4}-41\sigma^{2}+100=0$$

درنتیجه برای σ پنج‌جواب بدست می‌آید :

$$\sigma=0\ ;\ \sigma=-\frac{5}{2}\ ;\ \ \sigma=\frac{5}{2}\ ;\ \ \sigma=2\ ;\ \ \sigma=-2$$

---

*) این‌معادله را به‌کمك مجهول‌کمکی $u=z^{2}$ هم می‌توان حل‌کرد ، که پس‌ازآن به‌معادلهٔ معکوسه‌ای ازدرجهٔ پنجم می‌رسیم .

یعنی برای محاسبهٔ مجهول اصلی به پنج معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$z+\frac{1}{z}=0 \; ; \; z+\frac{1}{z}=-\frac{5}{2} \; ; \; z+\frac{1}{z}=\frac{5}{2};$$

$$z+\frac{1}{z}=2 \; ; \; z+\frac{1}{z}=-2$$

با حل این معادلات ودرنظر گرفتن جواب $z_1=-1$ ، برای معادلهٔ‌مفروض ۱۱ جواب بدست می‌آید :

$$z_1=-1 \; ; \; z_2=i \; ; \; z_3=-i \; ; \; z_4=-2 \; ; \; z_5=-\frac{1}{2};$$

$$z_6=2 \; ; \; z_7=-\frac{1}{2} \; ; \; z_8=z_9=-1 \; ; \; z_{10}=z_{11}=1$$

تمرینات

معادلات زیررا حل کنید :

۱۱۴. $9z^6-18z^5-73z^4+164z^3-73z^2-18z+9=0$

۱۱۵. $z^8+4z^6-10z^4+4z^2+1=0$

۱۱۶. $10z^6+z^5-47z^4-47z^3+z^2+10z=0$

۱۱۷. $10z^6+19z^5-19z^4-20z^3-19z^2+19z+$
$+10=0$

۱۱۸. $2z^{11}+7z^{10}+15z^9+14z^8-16z^7-22z^6-$
$-22z^5-16z^4+14z^3+15z^2+7z+2=0$

۱۱۹. ثابت کنید که همهٔ ریشه‌های معادلهٔ معکوسهٔ درجه‌چهارم :

$$az^4+bz^3+cz^2+bz+a=0 \qquad (a\neq 0)$$

را می‌توان به‌کمک چهارعمل اصلی حساب وجذر گرفتن، بدست‌آورد .

۱۲۰. ثابت کنید که می‌توان ریشه‌های معادلهٔ معکوسهٔ درجهٔ پنجم :

$$az^5+bz^4+cz^3+cz^2+bz+a=0 \qquad (a\neq 0)$$

را به‌کمك چهارعمل اصلی حساب وجذر گرفتن، محاسبه نمود .

۱۲۱. ثابت کنیدکه اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ معکوسهٔ درجه ششم (ویا ریشهٔ دیگری غیراز ۱ − ، ازمعادلهٔ معکوسهٔ درجهٔ هفتم) معلوم باشد ، بقیه جوابها را می‌توان به‌کمك چهار عمل اصلی حساب و ریشه گرفتن بدست آورد .

۱۲۲. با استفاده ازقضیهٔ بزو ، اثبات دیگری ازاین حکم پیدا کنید، که کثیرالجملهٔ معکوسهٔ از درجهٔ فرد، بر $z+1$ قابل‌قسمت است .

۱۲۳. ثابت کنید که‌کثیرالجملهٔ $f(z)$ از درجهٔ n (که مقدار ثـابتی مخالف صفر دارد)، تنها درحالتی معکوسه است‌که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right)=f(z)$$

وازآنجا اثبات دیگری برای قسمت دوم قضیه‌ای‌که در صفحهٔ۵۱ ذکر کردیم، پیدا کنید .

۱۲۴. ثابت‌کنیدکه اگر $f(z)$ و $g(z)$ کثیرالجمله‌هـای معکوسه‌ای باشند وضمناً $f(z)$ بر $g(z)$ قابل‌قسمت باشد، خارج‌قسمت $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ هم کثیرالجمله‌ای معکوسه است .

۱۲. تجزیهٔ‌کثیرالجمله‌های متقارن به‌صورت ضرب

دراین‌بند، تجزیه‌کثیرالجمله‌های متقارن‌را به‌صورت ضرب‌موردمطالعه قرار می‌دهیم . چند مثال را ازدرجهٔ چهارم انتخاب‌کرده‌ایم، تا روش‌تجزیهٔ عبارتهای متقارن درجهٔ چهارم روشن شود .

در مثال اول ،کثیرالجملهٔ مفروض را برحسب σ_1 وσ_2 نوشته‌ایم وسپس با تجزیهٔ عبارت جدید، تجزیهٔ عبارت اصلی را بدست‌آورده‌ایم . بعدازتبدیل عبارت درجه چهارم متقارن برحسب σ_1 و σ_2 ،کثیرالجملهٔ درجه دومی نسبت

به σ_2 بدست می‌آید که برای تجزیهٔ آن کافی است ریشه‌های آنرا بدست‌آوریم.

۱. عبارت زیررا به‌صورت ضرب تجزیه‌کنید :

$$f(x,y) = 10x^4 - 27x^3y - 110x^2y^2 - 27xy^3 + 10y^4$$

داریم :

$$f(x,y) = 10(x^4 + y^4) - 27xy(x^2 + y^2) - 110x^2y^2 =$$
$$= 10S_4 - 27\sigma_2 S_2 - 110\sigma_2^2.$$

که باتوجه به جدول صفحهٔ ۱۹ خواهیم داشت :

$$f(x,y) = 10\sigma_1^4 - 67\sigma_1^2\sigma_2 - 36\sigma_2^2$$

واین عبارت‌که نسبت به σ_2 اردرجهٔ دوم است به سادگی تجزیه می‌شود . با حل معادله نسبت‌به σ_2 جوابهای $\sigma_2 = -2\sigma_1^2$ و $\sigma_2 = \frac{5}{36}\sigma_1^2$ بدست‌می‌آید و بنابراین داریم :

$$f(x,y) = -36(\sigma_2 + 2\sigma_1^2)\left(\sigma_2 - \frac{5}{36}\sigma_1^2\right) =$$
$$= (2\sigma_1^2 + \sigma_2)(5\sigma_1^2 - 36\sigma_2)$$

بجای σ_1 و σ_2 ، مقادیرشان $\sigma_1 = x + y$ و $\sigma_2 = x \cdot y$ را قرار می‌دهیم ، بدست می‌آید :

$$f(x,y) = [2(x+y)^2 + xy][5(x+y)^2 - 36xy] =$$
$$= (2x^2 + 5xy + 2y^2)(5x^2 - 26xy + 5y^2).$$

هریك از عبارتهای درجه دومی‌که در داخل پرانتزها هستند، بنوبهٔ خود قابل تجزیه‌اند . مثلا اگر عبارت $2x^2 + 5xy + 2y^2$ را درنظر بگیریم، نسبت به x ازدرجهٔ دوم است و جوابهای $x = -\frac{1}{2}y$ و $x = -2y$ را قبول دارد . بنابراین :

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 = 2(x + \tfrac{1}{2}y)(x + 2y) = (2x + y)(x + 2y)$$

و بهمین‌ترتیب :

$$5x^2-26xy+5y^2=(x-5y)(5x-y)$$

۲. کثیرالجملهٔ زیررا تجزیه کنید :

$$f(x,y)=6x^4-11x^3y-18x^2y^2-11xy^3+6y^4$$

کثیرالجملهٔ متقارن $f(x,y)$ را برحسب σ_1 و σ_2 می‌نویسیم ، بدست می‌آید :

$$f(x,y)=6\sigma_1^4-35\sigma_1^2\sigma_2+16\sigma_2^2$$

جوابهای کثیرالجملهٔ درجه‌دوم اخیر (نسبت به σ_2)، $\sigma_2=2\sigma_1^2$ و $\sigma_2=\frac{3}{16}\sigma_1^2$ است وبنابراین به صورت زیر درمی‌آید :

$$f(x,y)=16(\sigma_2-2\sigma_1^2)(\sigma_2-\frac{3}{16}\sigma_1^2)=$$

$$=(2\sigma_1^2-\sigma_2)(3\sigma_1^2-16\sigma_2)$$

وازآنجا خواهیم داشت :

$$f(x,y)=[2(x+y)^2-xy][3(x+y)^2-16xy]=$$

$$=(2x^2+3xy+2y^2)(3x^2-10xy+3y^2).$$

عامل اول سمت راست تساوی دارای ریشه‌های موهومی است وبنابراین ازآن می‌گذریم (زیرا تجزیه به عوامل موهومی موردنظر ما نیست) . عامل دوم هم به‌سادگی تجزیه می‌شود :

$$3x^2-10xy+3y^2=(x-3y)(3x-y)$$

درنتیجه ، برای عبارت اصلی خواهیم داشت :

$$f(x,y)=6x^4-11x^3y-18x^2y^2-11xy^3+6y^4=$$

$$=(2x^2+3xy+2y^2)(x-3y)(3x-y).$$

۳. عبارت زیررا به‌صورت ضرب عوامل تجزیه کنید :

$$f(x,y)=2x^4-x^3y+3x^2y^2-xy^3+2y^4$$

داریم :

$$f(x,y)=2\sigma_1^4-9\sigma_1^2\sigma_2+9\sigma_2^2=(\sigma_1^2-3\sigma_2)(2\sigma_1^2-3\sigma_2)$$

که با قراردادن مقادیر σ_1 و σ_2 بدست می‌آید :

$$f(x,y)=[(x+y)^2-3xy][2(x+y)^2-3xy]=$$
$$=(x^2-xy+y^2)(2x^2+xy+2y^2).$$

هر دو عامل درجه دوم سمت راست تساوی دارای ریشه‌های موهومی هستند و بنابراین بیش ازاین تجزیه نمی‌شوند (البته به‌عوامل حقیقی) .

***

وقتی که کثیرالجملهٔ متقارن $f(x,y)$ را برحسب σ_1 و σ_2 می‌نویسیم ، گاهی عبارت درجه‌دومی که نسبت به σ_2 بدست می‌آید، دارای ریشه‌های موهومی است و بنابراین دنبال کردن روش بالا ، منجر به عواملی با ضرایب موهومی می‌شود . می‌توان ثابت کرد (که ما دراینجا به اثبات آن نمی‌پردازیم) که اگر راه دیگری برای تجزیهٔ عبارت انتخاب شود، می‌توان کثیرالجملهٔ $f(x,y)$ را به دوعامل باضرایب حقیقی تجزیه کرد . روش جدید براین اساس قرارداد که کثیرالجملهٔ درجه چهارم مفروض به دو عامل درجهٔ دوم تجزیه می‌شود که هیچکدام ازآنها متقارن نیستند، ولی هرکدام از تبدیل دوری دیگری نسبت به x و y بدست آمده است، یعنی در هرکدام x و y را بیکدیگر تبدیل کنیم، دیگری بدست‌می‌آید . به‌عبارت دیگر ، باید بتوانیم کثیرالجملهٔ متقارن‌ودرجه چهارم مفروض‌را، به‌این‌صورت تجزیه‌کنیم :

$$(Ax^2+Bxy+Cy^2)(Cx^2+Bxy+Ay^2)$$

که درآن A و B و C ضرایب مجهول (ویاآنطورکه معروف شده است «نامعین») هستند . این‌روش که ازقبل ضرایبی برای عوامل تجزیه در نظر می‌گیریم، به **روش ضرایب نامعین** معروف است .

ضرایب مجهول A و B و C را چگونه پیدا می‌کنیم ؟ ، این مطلب را

ضمن حل‌مسئله زیر روشن می‌کنیم .

۴. کثیرالجملهٔ درجه چهارم زیررا به‌ضرب عوامل تجزیه‌کنید :

$$f(x,y)=2x^4+3x^3y+6x^2y^2+3xy^3+2y^4$$

اگر این عبارت را برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن یعنی σ_1 وσ_2 بنویسیم به این‌صورت درمی‌آید :

$$f(x,y)=2\sigma_1^4-5\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_2^2$$

این کثیرالجمله ،که نسبت به σ_2 ازدرجهٔ دوم است، دارای ریشه‌های موهومی است . بنابراین باروش دوم‌عمل می‌کنیم، یعنی آنرا به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$2x^4+3x^3y+6x^2y^2+3xy^3+2y^4=$$
$$=(Ax^2+Bxy+Cy^2)(Cx^2+Bxy+Ay^2). \quad (*)$$

برای پیدا کردن ضرایب A و B و C ، توجه می‌کنیم‌که تساوی (*) باید یك اتحاد باشد ، یعنی باید به ازاء همهٔ مقادیر x و y برقرار باشد . بنابراین می‌توان از **روش مقادیرخاص** استفاده‌کرد ، یعنی برای پیدا کردن A وB وC ، در تساوی (*) به جای x و y مقادیر عددی دلخواهی قرار می‌دهیم . مثلا اگر قرار دهیم $x=y=1$ ، بدست می‌آید :

$$16=(A+B+C)^2$$

ازآنجا $A+B+C=\pm 4$ می‌شود. متذکر می‌شویم‌که ضرایب A وB وC با تقریب یك‌علامت بدست می‌آیند، زیرا اگر علامتهای A و B و C را باهم تغییر دهیم ، تساوی(*) صحیح باقی میماند، بنابراین بدون‌اینکه اشکالی‌پیش آید، می‌توانیم درنظر بگیریم :

$$A+B+C=4$$

حالا اگر $x=1$ و $y=-1$ فرض‌کنیم، ازتساوی (*) بدست می‌آید :

$$4=(A-B+C)^2$$

و ازآنجا :

$$A-B+C=\pm 2$$

بالاخره اگر فرض کنیم $x=0$ و $y=1$ بدست می‌آید : $AC=2$

به‌این ترتیب برای محاسبهٔ مقادیر A و B و C به دستگاه معادلات زیرمی‌رسیم:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ A-B+C=\pm 2 \\ A\cdot C=2 \end{cases}$$

اگر درمعادلهٔ دوم، علامت سمت راست تساوی را «+» بگیریم، ازدومعادلهٔ اول به‌سادگی بدست می‌آید : $B=1$ و $A+C=3$ که با در نظر گرفتن معادلهٔ سوم خواهیم‌داشت : $A=1$ ، $C=2$ (یا $C=1$ ، $A=2$) درنتیجه بدست می‌آید :

$$2x^4+3x^3y+6x^2y^2+3xy^3+2y^4=$$
$$=(x^2+xy+2y^2)(2x^2+xy+y^2)$$

که با بازکردن پرانتزهای سمت راست تساوی صحت آن ثابت می‌شود .

اگرسمت راست تساوی را درمعادلهٔ دوم دستگاه باعلامت منفی‌بگیریم، به‌جوابهای موهومی خواهیم‌رسید، بنابراین دراینحالت تجزیه به‌عوامل‌حقیقی بدست نمی‌آید (یعنی کثیرالجملهٔ مفروض را بنحو دیگری هم می‌توان تجزیه کرد، منتهی دراینحالت همراه با ضرایب موهومی خواهد بود) .

تمرینات

کثیرالجمله‌های زیررا به‌صورت ضرب عوامل تجزیه‌کنید :

۱۲۵. $2x^4+7x^3y+9x^2y^2+7xy^3+2y^4$

۱۲۶. $2x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+2y^4$

۱۲۷. $18a^4-21a^3b-94a^2b^2-21ab^3+18b^4$

۱۲۸. $3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4$

۱۳. مسائل مختلف

از کثیرالجمله‌های متقارن، برای حل مسائل مختلفی از انواع دیگر هم می‌توان استفاده کرد، مثلا به نمونه زیر توجه کنید .

بین معادلات زیر x و y را حذف کنید :

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=b \\ x^3+y^3=c \end{cases}$$

وقتی که برای دومجهول x و y ، سه معادله داریم، به این معناست که دستگاه مفروض به ازاء همهٔ مقادیر a و b و c دارای جواب نیست . باید رابطه‌ای بین a و b و c بدست آورد که درآنصورت، دستگاه مفروض دارای جواب باشد .

برای حل این مسئله می‌توان مقادیر x و y را ازدو معادلهٔ اول برحسب a و b بدست آورد ودر معادلهٔ سوم دستگاه قرار داد . این روش اغلب منجر به محاسبات مفصل می‌شود . ساده‌تر اینست که از متقارن بودن عبارتهای سمت چپ تساوی نسبت به x و y درسه معادله، استفاده کنیم . این عبارتها را برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن $\sigma_1=x+y$ و $\sigma_2=x\cdot y$ می‌نویسیم. دراینصورت دستگاه مفروض به‌صورت زیر درمی‌آید .

$$\begin{cases} \sigma_1=a \\ \sigma_1^2-2\sigma_2=b \\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=c \end{cases}$$

ازدومعادلهٔ اول‌دستگاه‌بدست می‌آید: $\sigma_1=a$ و $\sigma_2=\frac{1}{2}(a^2-b)$ و بنابراین باتوجه به‌معادلهٔ سوم‌خواهیم‌داشت :

$$a^3-\frac{3}{2}a(a^2-b)=c$$

ویا :

$$a^3-3ab+2c=0$$

واین همان رابطهٔ موردنظر بین a و b و c (که ازحذف x و y بدست آمده است) می‌باشد .

تمرینات

عبارتهای زیررا ساده کنید :

.۱۲۹
$$\frac{(x+y)^7-x^7-y^7}{(x+y)^5-x^5-y^5}$$

.۱۳۰
$$\frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

.۱۳۱
$$\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right)+\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+$$
$$+\frac{6}{(p+q)^5}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$$

صحت اتحادهای زیررا ثابت کنید :

.۱۳۲
$$(x+y)^3+3xy(1-x-y)-1=$$
$$=(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$$

.۱۳۳
$$(x+y)^4+x^4+y^4=2(x^2+xy+y^2)^2$$

.۱۳۴
$$(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$$

.۱۳۵
$$(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$$

۱۳۶. جوابهای مثبت وصحیح معادلهٔ زیررا پیدا کنید :
$$x^3+y^3+1=3xy$$

۱۳۷. ثابت کنید که یك کثیرالجملهٔ متقارن نسبت به x و y تنها وقتی بر x^2+xy+y^2 قابل‌قسمت است که اگر برحسب σ_1 و σ_2 بیان شود ، در کثیرالجملهٔ حاصل مجموع ضرایب برابر برصفر باشد .

۱۳۸. ثابت کنید به‌شرط اینکه $n=6k\pm1$ باشد، کثیرالجملهٔ متقارن وازدرجهٔ n : $(x+y)^n-x^n-y^n$ بر x^2+xy+y^2 قابل‌قسمت است.

۱۳۹. به چه شرطی، کثیرالجملهٔ $x^{2n}+x^n+1$ بر x^2+x+1 قابل‌قسمت است؟

۱۴۰. به‌چه‌شرطی کثیرالجملهٔ $(x+1)^n+x^n+1$ بر x^2+x+1 قابل‌قسمت است؟

۱۴۱. به‌چه‌شرطی کثیرالجملهٔ $(x+1)^n-x^n-1$ بر x^2+x+1 قابل‌قسمت است؟

۱۴۲. ثابت‌کنید که اگر عددهای u، v، x و y در روابط:

$$u+v=x+y \quad \text{و} \quad u^2+v^2=x^2+y^2$$

صدق کنند، به ازاء همه مقادیر صحیح ومثبت n خواهیم داشت:

$$u^n+v^n=x^n+y^n$$

۱۴۳. جوابهای صحیح این‌معادله رابدست‌آورید:

$$x+y=x^2-xy+y^2$$

۱۴۴. ثابت‌کنید که اگر n عددی فرد و مضربی از ۳ باشد، عبارت:

$$(a+b)^n-a^n-b^n-3(ab)^{\frac{n-1}{2}}(a+b)$$

بر a^2+ab+b^2 قابل‌قسمت است.

۳

کثیرالجمله‌هائی که نسبت به سه متغیر متقارن‌اند

۱۴ . تعریف

در دوفصل قبل کثیرالجمله‌هائی راکه نسبت به x و y متقارن بودند(یعنی کثیرالجمله‌هائی که با تبدیل x و y بیکدیگر تغییر نمی‌کنند)، مورد مطالعه قرار دادیم . درکثیرالجمله‌هائی که شامل سه متغیر x، y و z باشند، بجای

یك تبدیل سه نوع تبدیل مختلف می‌توان انجـام داد : می‌تـوان x و y را بیکدیگر تبدیل یا x وz ویا بالاخره y وz را .

کثیرالجملهٔ $f(x , y , z)$ را نسبت به سه متغیر x و y و z **متقارن** گوئیم ، وقتی‌که برای هریك ازسه تبدیل فوق، بدون‌تغییر باقی‌بماند(دربارهٔ این‌تعریف به بند ۳۰ هم مراجعه‌کنید) .

شرط متقارن بودن‌کثیرالجملهٔ $f(x , y, z)$ را می‌توان به این‌ترتیب نوشت :

$$f(x, y, z)=f(y, x, z)=f(z, y, x)=f(x, z, y).$$

نمونه‌های‌کثیرالجمله‌های متقـارن نسبت به سه متغیر را می‌توان شبیه حالت مربوط به دومتغیر بدست‌آورد . مثلا از اینکه جمع تابع قانون ترتیب (Commutative) است، نتیجه‌می‌شودکه‌کثیرالجملهٔ $x+y+z$متقارن است ، همچنین از ترتیب‌پذیری ضرب نتیجه می‌شودکه xyz هم یك عبـارت متقارن است .

همچنین**مجموع‌قوای‌متشابه**یعنی کثیرالجمله‌هائی بصورت‌زیرهم‌متقارن‌است:

$$S_k=x^k+y^k+z^k$$

درزیر نمونه‌های دیگری ازکثیرالجمله‌هائی‌که نسبت به سه‌متغیر متقارن‌اند ، ذکرکرده‌ایم :

$$xy+yz+xz;$$
$$x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz;$$
$$(x+y)(y+z)(x+z);$$
$$x(y^۴+z^۴)+y(x^۴+z^۴)+z(x^۴+y^۴)$$

برعکس ،کثیرالجملهٔ $x^۲z+y^۲z$ متقارن نیست . درست است‌که با تبدیلx وy بیکدیگر تغییر نمی‌کند :

$$x^۲z+y^۲z=y^۲z+x^۲z$$

ولی با تبدیل x و z به یکدیگر، صورت این کثیرالجمله تغییر می کند :

$$z^2x+y^2x\neq x^2z+y^2z$$

عبارتهای متقارن

$$x+y+z\ ;\ xy+xz+yz\ ;\ x\cdot y\cdot z$$

را **ساده‌ترین عبارتهای متقارن** نسبت به سه متغیر x و y و z گویند و آنها را به σ_1 ، σ_2 و σ_3 نشان می‌دهند :

$$\sigma_1=x+y+z,$$
$$\sigma_2=xy+xz+yz,$$
$$\sigma_3=xyz.$$

متذکر می‌شویم که σ_1 عبارتی از درجهٔ اول ، σ_2 از درجهٔ دوم و σ_3 از درجهٔ سوم است .

۱۵. قضیهٔ اصلی دربارهٔ کثیرالجمله‌هائی که نسبت به سه متغیر متقارن‌اند

برای ساختن کثیرالجمله‌هائی که نسبت به سه متغیر متقارن‌اند ، مثل حالت دو متغیره ، راه ساده‌ای وجود دارد . برای این‌منظور باید کثیرالجملهٔ دلخواهی (که در حالت‌کلی لازم نیست متقارن باشد) از متغیرهای σ_1 و σ_2 و σ_3 اختیارکرد ودرآن σ_1 را به $x+y+z$ و σ_2 را به $xy+xz+yz$ و σ_3 را به xyz تبدیل نمود . درنتیجه کثیرالجمله‌ای بدست می‌آیدکه نسبت به x و y و z متقارن است . مثلا ازکثیرالجملهٔ

$$\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$$

به‌ترتیبی که ذکرکردیم به‌کثیرالجملهٔ زیر می‌رسیم :

$$f(x,y,z)=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)-$$
$$-xyz$$

که پس از بازکردن پرانتزها ، کثیرالجملهٔ متقارن زیر بدست می‌آید :

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-4xyz$$

مثل حالت دومتغیره، با این‌روش می‌توان همهٔ کثیرالجمله‌های متقارن‌سه‌متغیره را بدست‌آورد . به‌عبارت دیگر حکم زیرصحیح است .

قضیه. هرکثیرالجمله‌ای راکه‌نسبت به x و y و zمتقارن باشد، می‌توان به صورت‌کثیرالجمله‌ای از $\sigma_1 = x+y+z$ و $\sigma_2 = xy+xz+yz$ و $\sigma_3 = xyz$ نوشت .

این قضیه را می‌توان، تقریباً شبیه حالت دو متغیره ثابت‌کرد ، تنها با زیادشدن تعداد متغیرها ، استدلال کمی بغرنج‌تر می‌شود*.

طرح اثبات چنین‌است . قبلا (مثل‌حالت دومتغیره) ثابت می‌کنیم که‌هر

---

*) خواننده‌ای‌که این استدلال بنظرش خسته‌کننده می‌رسد ، می‌تواند از آن بگذرد، بدون‌اینکه به درك مطالب بعدی لطمهٔ زیادی وارد شود . مطلب‌بر سر اینست‌که برای‌حل اکثر مسائل بعدی ، حالت‌کلی این قضیه مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، بلکه فقط باید بتوانیم‌کثیرالجمله‌های متقارن ازدرجهٔ دوم، سوم وچهارم را برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 بنویسیم . برای این‌منظورکافی است روابط زیر را بدانیم :

$$x^2+y^2+z^2=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$
$$x^3+y^3+z^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3,$$
$$x^4+y^4+z^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3,$$
$$x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3,$$
$$x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3,$$
$$x^3y+xy^3+x^3z+xz^3+y^3z+yz^3=\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3.$$

صحت‌این‌روابط رامی‌توان‌مستقیماً وباقراردادن‌مقادیر σ_1 و σ_2 و σ_3 بدست‌آورد.

به‌این‌ترتیب خواننده‌ای‌که بخواهد ازبحث نظری صرفنظرکند، می‌تواند این‌روابط راروی صفحه‌ای یادداشت‌کند وبلافاصله ازفصل۴ (صفحهٔ ۸۸) شروع نماید. ضمناً راهنمائی می‌کنیم‌که تعریف **مدار** (صفحهٔ ۷۵) وجدولهای‌مربوطه‌را درصفحات ۷۴ و ۸۱ مطالعه نماید.

مجموع قوای S_k را می‌توان برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن σ_1 ، σ_2 و σ_3 بیان‌کرد . سپس کثیرالجمله‌های بغرنج‌تری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای تشکیل این کثیرالجمله‌ها ، می‌توان جملهٔ دلخواهی درنظر گرفت وتمام انواع ممکنهٔ جملات شبیه‌آن را، که ازتبدیل متغیرها بیکدیگر بدست‌می‌آید، نوشت وباهم جمع‌کرد . کثیرالجملهٔ متقارنی راکه به‌این ترتیب‌بدست‌می‌آید، **مدار** هریك ازجملات خود می‌نامند . ما ثابت می‌کنیم‌که هرمدار رامی‌توان برحسب مجموع قوا ودرنتیجه برحسب σ_1 وσ_2 و σ_3 نوشت . بالاخره ثابت خواهیم‌کرد‌که‌کثیرالجملهٔ متقارن رامی‌توان به‌صورت یك‌مدار نوشت. بااثبات این مطلب، درستی قضیه ثابت می‌شود .

۱۶. بیان مجموع قوا برحسب σ_1 وσ_2 وσ_3 .

به‌این‌ترتیب، قبل ازهمه باید ثابت‌کنیم‌که هرمجموع قوائی به‌صورت $S_k=x^k+y^k+z^k$ را می‌توان‌برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 بیان نمود. درحالت کثیرالجمله‌های با دو متغیر x و y، برای اثبات چنین حکمی از رابطهٔ (۱) استفاده‌کردیم‌که در آن هر مجموع قوا را برحسب مجموع قوای قبلی بیان می‌کرد (صفحهٔ ۱۷ را به‌بینید) . شبیه این رابطه برای کثیرالجمله‌های سه متغیره هم وجود دارد (رابطهٔ نیوتون) :

$$S_k=\sigma_1 S_{k-1}-\sigma_2 S_{k-2}+\sigma_3 S_{k-3} \qquad (۳)$$

ما این رابطه را بدست نمی‌آوریم*، ولی مستقیماً صحت‌آنرا تحقیق می‌کنیم.

---

*) بدست‌آوردن رابطهٔ (۳) هم مشکل‌نیست ومی‌توان باتوجه به روابط بین ریشه‌ها وضرایب(روابط ویت)درمعادلهٔ درجه‌سوم به‌آن رسید . اگرریشه‌های معادلهٔ درجه سوم

$$t^3-\sigma_1 t^2+\sigma_2 t-\sigma_3=0 \qquad (a)$$

←

درسمت راست تساوی بجای S_{k-1} و S_{k-2} و S_{k-3} وهمچنین بجای σ_1 و σ_2 و σ_3 ، مقادیرشان را برحسب متغیرهای x و y و z قرارمی‌دهیم، پس‌ازانجام ضربها بدست می‌آید :

$$\sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \sigma_3 S_{k-3} =$$
$$= (x+y+z)(x^{k-1}+y^{k-1}+z^{k-1}) -$$
$$-(xy+xz+yz)(x^{k-2}+y^{k-2}+z^{k-2}) +$$
$$+xyz(x^{k-3}+y^{k-3}+z^{k-3}) =$$
$$= (x^k+y^k+z^k+xy^{k-1}+x^{k-1}y+xz^{k-1}+x^{k-1}z+$$

→

را x و y و z فرض کنیم ، واضح است که داریم (طبق روابط ویت) :

$$y+y+z=\sigma_1 ,$$
$$xy+xz+yz=\sigma_2 ,$$
$$xyz=\sigma_3 .$$

اکنون اگر طرفین معادلهٔ درجه‌سوم (a) را در t^{k-3} ضرب کنیم، بدست می‌آید :

$$t^k-\sigma_1 t^{k-1}+\sigma_2 t^{k-2}-\sigma_3 t^{k-3}=0$$

ویا :

$$t^k=\sigma_1 t^{k-1}-\sigma_2 t^{k-2}+\sigma_3 t^{k-3}$$

ریشه‌های معادلهٔ (a) ، یعنی x و y و z، درمعادلهٔ اخیرهم صادق‌اند، یعنی داریم:

$$x^k=\sigma_1 x^{k-1}-\sigma_2 x^{k-2}+\sigma_3 x^{k-3}$$
$$y^k=\sigma_1 y^{k-1}-\sigma_2 y^{k-2}+\sigma_3 y^{k-3}$$
$$z^k=\sigma_1 z^{k-1}-\sigma_2 z^{k-2}+\sigma_3 z^{k-3}$$

ازجمع این‌روابط بدست می‌آید :

$$x^k+y^k+z^k=\sigma_1(x^{k-1}+y^{k-1}+z^{k-1})-\sigma_2(x^{k-2}+$$
$$+y^{k-2}+z^{k-2})+\sigma_3(x^{k-3}+y^{k-3}+z^{k-3}).$$

ویا:

$$S_k=\sigma_1 S_{k-1}-\sigma_2 S_{k-2}+\sigma_3 S_{k-3}$$

« مترجم »

$$+yz^{k-1}+y^{k-1}z)-(x^{k-1}y+xy^{k-1}+x^{k-1}z+xz^{k-1}+$$
$$+y^{k-1}z+yz^{k-1}+xyz^{k-2}+xy^{k-2}z+x^{k-2}yz)+$$
$$+(x^{k-2}yz+xy^{k-2}z+xyz^{k-2})=x^k+y^k+z^k=S_k.$$

به‌این‌ترتیب صحت رابطهٔ (۳) تحقیق‌شد .

از این رابطه ، صحت حکم ماهم ثابت می‌شود .

درحقیقت به‌سادگی دیده می‌شودکه S_0 ، S_1 و S_2* را می‌توان برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 نوشت :

$$S_0=x^0+y^0+z^0=1+1+1=3\ ;$$
$$S_1=x+y+z=\sigma_1\ ;$$
$$S_2=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=$$
$$=\sigma_1^2-2\sigma_2.$$

حالا می‌توان باکمك رابطهٔ (۳) ، مجموع قوای بعدی را برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 بدست‌آورد : ابتدا S_3 ، سپس S_4 ، S_5 وغیره . به عبارت دیگر با دردست داشتن مقادیر S_0 ، S_1 و S_2 برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 می‌توان به‌کمك **روش‌استقراء ریاضی**[براساس‌رابطهٔ(۳)] نتیجه‌بگیریم که هرمجموع‌قوای‌متشابه S_k را می‌توان برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 بیان‌کرد . به‌این‌ترتیب حکم‌موردنظر ثابت شد .

مثل حالت مربوط به دومتغیره، رابطهٔ (۳) نه فقط **امکان** بیان مجموع قوای متشابه را برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 ثابت می‌کند ، بلکه ضمناً راه محاسبهٔ این عبارتها را هم نشان می‌دهد .

---

*) خواننده نباید تعجب‌کندکه بعنوان روابط مقدماتی از S_0 ، S_1 و S_2 استفاده‌کردیم ، نه از S_1 ، S_2 و S_3 (که ممکن است طبیعی‌تر بنظر برسد) . مطلب برسراینست‌که (همانطورکه از اثبات رابطه معلوم شد) رابطهٔ (۳) برای هرمقداردلخواهی‌از k صحیح‌است (مثلا درصفحهٔ ۸۶همین رابطه‌را برای‌توانهای منفی هم بکار برده‌ایم) . بنابراین دلیل استفاده از S_0 روشن‌شد ، بخصوص‌که استفادهٔ ازآن به‌سادگی‌محاسبه هم کمك می‌کند: محاسبهٔ S_3 برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 خیلی مطبوع نیست.

به‌عبارت دیگر، اثبات فوق سازنده است ، یعنی توالی معینی ازاعمال (یا به‌اصطلاح آلگوریتم)را نشان می‌دهد که اجازه می‌دهد با طی‌چند مرحلهٔ معین‌به‌بیان مجموع‌قوای‌متشابه‌دلخواهی‌از S_k برحسب $\sigma_۱$و$\sigma_۲$و$\sigma_۳$ برسیم. در جدول زیر مجموع‌قوای متشابه را تا $S_{۱۰}$ برحسب $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ و $\sigma_۳$ ذکر کرده‌ایم (خواننده می‌تواند ، خود این‌جدول را تشکیل ویاآنرا ادامه دهد) :

بیان $S_n = x^n + y^n + z^n$ برحسب $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ و $\sigma_۳$

$S_۰ = ۳ ;$

$S_۱ = \sigma_۱ ;$

$S_۲ = \sigma_۱^۲ - ۲\sigma_۲ ;$

$S_۳ = \sigma_۱^۳ - ۳\sigma_۱\sigma_۲ + ۳\sigma_۳ ;$

$S_۴ = \sigma_۱^۴ - ۴\sigma_۱^۲\sigma_۲ + ۲\sigma_۲^۲ + ۴\sigma_۱\sigma_۳ ;$

$S_۵ = \sigma_۱^۵ - ۵\sigma_۱^۳\sigma_۲ + ۵\sigma_۱\sigma_۲^۲ + ۵\sigma_۱^۲\sigma_۳ - ۵\sigma_۲\sigma_۳ ;$

$$S_۶ = \sigma_۱^۶ - ۶\sigma_۱^۴\sigma_۲ + ۹\sigma_۱^۲\sigma_۲^۲ - ۲\sigma_۲^۳ + ۶\sigma_۱^۳\sigma_۳ - ۱۲\sigma_۱\sigma_۲\sigma_۳ + \\ + ۳\sigma_۳^۲ ;$$

$$S_۷ = \sigma_۱^۷ - ۷\sigma_۱^۵\sigma_۲ + ۱۴\sigma_۱^۳\sigma_۲^۲ - ۷\sigma_۱\sigma_۲^۳ + ۷\sigma_۱^۴\sigma_۳ - \\ - ۲۱\sigma_۱^۲\sigma_۲\sigma_۳ + ۷\sigma_۱\sigma_۳^۲ + ۷\sigma_۲^۲\sigma_۳ ;$$

$$S_۸ = \sigma_۱^۸ - ۸\sigma_۱^۶\sigma_۲ + ۲۰\sigma_۱^۴\sigma_۲^۲ - ۱۶\sigma_۱^۲\sigma_۲^۳ + ۲\sigma_۲^۴ + ۸\sigma_۱^۵\sigma_۳ - \\ - ۳۲\sigma_۱^۳\sigma_۲\sigma_۳ + ۱۲\sigma_۱^۲\sigma_۳^۲ + ۲۴\sigma_۱\sigma_۲^۲\sigma_۳ - ۸\sigma_۲\sigma_۳^۲ ;$$

$$S_۹ = \sigma_۱^۹ - ۹\sigma_۱^۷\sigma_۲ + ۲۷\sigma_۱^۵\sigma_۲^۲ - ۳۰\sigma_۱^۳\sigma_۲^۳ + ۹\sigma_۱\sigma_۲^۴ + \\ + ۹\sigma_۱^۶\sigma_۳ - ۴۵\sigma_۱^۴\sigma_۲\sigma_۳ + ۵۴\sigma_۱^۲\sigma_۲^۲\sigma_۳ + ۱۸\sigma_۱^۳\sigma_۳^۲ - \\ - ۹\sigma_۲^۳\sigma_۳ - ۲۷\sigma_۱\sigma_۲\sigma_۳^۲ + ۳\sigma_۳^۳ ;$$

$$S_{۱۰} = \sigma_۱^{۱۰} - ۱۰\sigma_۱^۸\sigma_۲ + ۳۵\sigma_۱^۶\sigma_۲^۲ - ۵۰\sigma_۱^۴\sigma_۲^۳ + ۲۵\sigma_۱^۲\sigma_۲^۴ - \\ - ۲\sigma_۲^۵ + ۱۰\sigma_۱^۷\sigma_۳ - ۶۰\sigma^۵\sigma_۲\sigma_۳ + ۱۰۰\sigma_۱^۳\sigma_۲^۲\sigma_۳ + \\ + ۲۵\sigma_۱^۴\sigma_۳^۲ - ۴۰\sigma_۱\sigma_۲^۳\sigma_۳ - ۶۰\sigma_۱^۲\sigma_۲\sigma_۳^۲ + ۱۰\sigma_۱\sigma_۳^۳ + ۱۵\sigma_۲^۲\sigma_۳^۲ .$$

. . . .

۱۷. مدار یك‌جمله‌ایها

به‌این‌ترتیب، ماموفق‌شدیم که‌مجموع‌قوای‌متشابه S_n را برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن σ_1 و σ_2 و σ_3 بیان کنیم. حالا ثابت خواهیم کرد که دستهٔ بزرگی از کثیرالجمله‌های متقارن را، که به مدار یك‌جمله‌ایها معروف‌اند، می‌توان برحسب مجموع‌قوای متشابه مختلف ودرنتیجه برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 نوشت.

یك‌جمله‌ایهائی وجود دارند که با تبدیل متغیرهای آن بیکدیگر بدون تغییر باقی‌می‌مانند، یعنی متقارنند. به‌سادگی‌دیده می‌شود که درچنین‌جمله‌هائی بایدهمهٔ متغیرها ازیك درجه‌باشند، یعنی این‌جمله‌باید بصورت ضرب $x^k y^k z^k$ باشد (باضریب عددی مربوطه).

اگر توان متغیرها در یك جمله‌ای $x^k y^l z^m$ مختلف باشد، این یك جمله‌ای نسبت به x و y و z متقارن نخواهد بود. اگر بخواهیم کثیرالجملهٔ متقارنی داشته‌باشیم که یکی ازجملات آن $x^k y^l z^m$ باشد، بایدجملات‌دیگری را به‌آن اضافه‌کرد. کثیرالجملهٔ متقارنی‌که باحداقل جملات‌ساخته شده باشد ویکی ازجملات آن $x^k y^l z^m$ باشد، مدار این‌جمله نام دارد و با علامت $O(x^k y^l z^m)$ * نشان داده می‌شود.

واضح است که‌برای بدست‌آوردن مدارجملهٔ $x^k y^l z^m$ بایدتمام‌جملاتی راکه از تبدیل آن بدست می‌آید، به آن اضافه‌کرد. وقتی‌که هرسه عدد k و l و m مختلف باشند، مدار $O(x^k y^l z^m)$ شامل شش جمله است، که‌از تبدیل $x^k y^l z^m$ نسبت به متغیرها بدست می‌آید. مثلاً:

$$O(x^5y^2z)=x^5y^2z+x^5yz^2+x^2y^5z+x^2yz^5+xy^5z^2+xy^2z^5;$$

$$O(x^3y)=O(x^3yz^0)=x^3y+xy^3+x^3z+xz^3+y^3z+yz^3.$$

اگر درجملهٔ $x^k y^l z^m$ دوتوان باهم برابر باشند وسومی مخالف آنها، مثلاً

---

*) Oـ حرف اول کلمهٔ Orbite (مدار).

$k=l$ (و $k\neq m$) ، دراینصورت تبدیل x و y به یکدیگر، جملهٔ $x^k y^l z^m$ را تغییر نمی‌دهد. دراینحالت ؛ مدار تنها شامل سه‌جمله خواهدبود :

$$O(x^k y^k z^m)=x^k y^k z^m+x^k y^m z^k+x^m y^k z^k$$

مثلاً :

$$O(xyz^5)=xyz^5+xy^5z+x^5yz\ ;$$

$$O(xy)=xy+xz+yz\ ;$$

$$O(x^3y^3)=x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3.$$

حالت خاص مجموع قوای متشابه را هم می‌توان یك‌مدار دانست :

$$O(x^k)=O(x^k y^0 z^0)=x^k+y^k+z^k=S_k$$

بالاخره اگر $k=l=m$ باشد، مدارتنها شامل یك‌جمله است :

$$O(x^k y^k z^k)=x^k y^k z^k$$

حالا ثابت می‌کنیم که **مدارهرجمله رامی‌توان برحسب σ_3 و مجموع قوای متشابه بیان‌نمود** . وچون‌هرمجموع قوای‌متشابه رامی‌توان‌برحسب σ_1، σ_2 و σ_3 نوشت، نتیجه گرفت که **مدارهرجمله قابل‌بیان برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 است** . و این قدم دوم برای اثبات قضیهٔ اصلی است .

اگر یك‌جمله‌ای $x^k y^l z^m$ تنها به متغیر x مربوط باشد(یعنی‌داشته‌باشیم: $l=m=0$)، حکم واضح است : در اینحالت مدار $O(x^k)=S_k$ خودش یك مجموع قوای متشابه است .

به حالتی توجه می‌کنیم که یك‌جمله‌ای به دو متغیر بستگی داشته باشد، یعنی به‌صورت $x^k.y^l$ باشد، اگر $k\neq l$ باشد، رابطهٔ زیرصحیح است :

$$O(x^k y^l)=O(x^k).O(x^l)-O(x^{k+l})\qquad (k\neq l)\quad (۴)$$

زیرا می‌توان نوشت :

$$O(x^k)O(x^l)-O(x^{k+l})=$$

$$=(x^k+y^k+z^k)(x^l+y^l+z^l)-(x^{k+l}+y^{k+l}+z^{k+l})=$$

$$=(x^{k+l}+y^{k+l}+z^{k+l}+x^k y^l+x^l y^k+$$

$$+x^kz^l+x^lz^k+y^kz^l+y^lz^k)-(x^{k+l}+y^{k+l}+z^{k+l})=$$
$$=x^ky^l+x^ly^k+x^kz^l+x^lz^k+y^kz^l+y^lz^k=O(x^ky^l)$$

ودرحالتی‌که $l=k$ باشد، رابطهٔ (۴) به‌صورت زیردرمی‌آید :

$$O(x^ky^k)=\frac{1}{2}\left\{[O(x^k)]^2-[O(x^{2k})]^2\right\} \qquad (5)$$

(یعنی در رابطهٔ (۴) باید $l=k$ فرض‌کرد وطرف راست تساوی را بر۲ تقسیم نمود، عمل اخیر به‌این مناسبت است‌که مدار $O(x^ky^k)$ بجای شش جمله، تنها شامل سه‌جمله است) . صحت رابطهٔ (۵) راهم‌می‌توان مستقیماً وشبیه‌رابطهٔ (۴) اثبات‌کرد .

بالاخره، وقتی‌که یك‌جمله‌ای $x^ky^lz^m$ به سه متغیر x و y و z بستگی داشته باشد (یعنی هرسه عدد k و l و m مخالف صفرباشند) ، یك جمله‌ای $x^ky^lz^m$ برتوانی از xyz قابل‌قسمت خواهد بود. بنابراین درکثیرالجملهٔ $O(x^ky^lz^m)$ می‌توان از بزرگترین توان ممکنهٔ xyz عامل‌مشترك گرفت که دراینصورت عامل دوم، مدار جمله‌ای خواهد شدکه‌به تعدادی‌کمتر ازسه متغیر x و y و z بستگی دارد . مثل :

$$O(x^2y^3z^4)=$$
$$=x^2y^3z^4+x^2y^4z^3+x^3y^2z^4+x^3y^4z^2+x^4y^2z^3+x^4y^3z^2=$$
$$=(xyz)^2(yz^2+y^2z+xz^2+xy^2+x^2z+x^2y)=$$
$$=(xyz)^2O(x^2y);$$
$$O(x^3y^5z^5)=x^3y^5z^5+x^5y^3z^5+x^5y^5z^3=$$
$$=(xyz)^3\cdot(y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2)=(xyz)^3\cdot O(x^2y^2);\ldots$$

بطورکلی، اگر مثلاً $k\geqslant m$ و $l\geqslant m$ باشد (یعنی m کوچکترین عدد ازاعداد k و l و m باشد)، داریم :

$$O(x^ky^lz^m)=(xyz)^m\cdot O(x^{k-m}y^{l-m})=$$
$$\sigma_3{}^m\cdot O(x^{k-m}y^{l-m}). \qquad (6)$$

به‌این‌ترتیب، اگر جملهٔ $x^k y^l z^m$ تنها به‌یك متغیر بستگی داشته باشد، مدار $O(x^k y^l z^m)$ به‌صورت مجموع قواست؛ اگر این جمله به‌دو متغیر بستگی داشته باشد، مدار $O(x^k y^l z^m)$ طبق روابط(۴) و(۵) بازهم به چندمجموع قوای‌متشابه‌قابل‌تبدیل‌است؛ وبالاخره درحالتی که‌این‌جمله به‌هرسه متغیر x و y و z بستگی داشته باشد، پس از آنکه درمدار $O(x^k y^l z^m)$ از بزرگترین توان ممکنهٔ xyz (یعنی توانی‌از σ_3) عامل‌مشترك بگیریم، به حالت‌قبل‌منجر می‌شود. می‌بینیم که مدار هر یك جمله‌ای را می‌توان برحسب σ_3 و مجموع قوای متشابه بیان کرد.

***

ضمن‌اثبات فوق، به‌مطلبی برخورد کردیم که ازلحاظ‌ریاضی‌خیلی‌مطبوع بنظر نمی‌رسد؛ برای بیان مدار $O(x^k y^l)$ برحسب مجموع قوا دردوحالت $k \neq l$ و $k = l$ به دورابطهٔ متفاوت (۴) و(۵) رسیدیم. ولی اگردرتعریف مدار، دقت بیشتری بکنیم، علت این امرروشن می‌شود.

در حالتی که هرسه نمای k و l و m مختلف‌اند، مدار $O(x^k y^l z^m)$ از مجموع شش‌جمله تشکیل شده است:

$$O(x^k y^l z^m) = x^k y^l z^m + x^k y^m z^l + x^l y^k z^m + x^l y^m z^k + \\ + x^m y^k z^l + x^m y^l z^k \qquad (k \neq l \neq m \neq k) \qquad (*)$$

سمت راست رابطهٔ (*) رامی‌توان برای حالتی هم که دونما ویا حتی‌هرسه‌نما باهم برابر باشند، درنظر گرفت. این‌عبارت سمت راست تساوی رامدار**کامل** جملهٔ $x^k y^l z^m$ می‌نامیم و به‌صورت $O_\pi(x^k y^l z^m)$ نشان می‌دهیم:

$$O_\pi(x^k y^l z^m) = x^k y^l z^m + x^k y^m z^l + x^l y^k z^m + x^l y^m z^k + \\ + x^m y^k z^l + x^m y^l z^k \qquad (**)$$

بنابراین درحالتی‌که k وl وm سه‌عدد مختلف باشند، مدارکامل بـا مدار عادی یکی می‌شود .

وقتی‌که $k=l\neq m$ باشد، مدارکامل به‌این‌صورت درمی‌آید :

$$O_\pi(x^ky^kz^m)=x^ky^kz^m+x^ky^mz^k+x^ky^kz^m+x^ky^mz^k+$$
$$+x^my^kz^k+x^my^kz^k=۲(x_ky^kz^m+x^ky^mz^k+x^my^kz^k).$$

مقدار داخل پرانتز چیزی جزمدار عادی $O(x^ky^kz^m)$ نیست . بنابراین وقتی $k\neq m$ باشد، داریم :

$$O_\pi(x^ky^kz^m)=۲O(x^ky^kz^m)$$

وبالاخره وقتی $k=l=m$ باشد، واضح است‌که خواهیم داشت :

$$O_\pi(x^ky^kz^k)=۶x^ky^kz^k=۶O(x^ky^kz^k).$$

می‌بینیم‌که مدارکامل، تنها درتعداد عوامل با مدار عادی فرق دارد:

$O_\pi(x^ky^lz^m)=O(x^ky^lz^m)$ برای وقتی‌که k وl وm سه عددمتفاوت‌اند.

$$O_\pi(x^ky^kz^m)=۲O(x^ky^kz^m) \qquad (k\neq m)$$

$$O_\pi(x^ky^kz^k)=۶O(x^ky^kz^k).$$

به‌این‌ترتیب با درنظرگرفتن رابطهٔ (**) برای مدارهای‌کامل، روابط(۴)و (۵) بیك رابطه تبدیل می‌شوندکه برای همهٔ حالتها صحیح است :

$$O_\pi(x^ky^l)=S_kS_l-S_{k+l} \qquad (۴')$$

درحالت سه متغیره،که موردمطالعهٔ ماست ، احتیاج جدی به استفاده از مدار کامل نیست ، زیرا تبدیل یك رابطهٔ (۴') به دورابطهٔ (۴) و (۵) پیچیدگی زیادی دربیان مطلب بوجود نمی‌آورد . ولی درحالتی‌که باکثیرالجمله‌هـای

متقارن n متغیره سر و کار داشته باشیم (فصل هفتم را به‌بینید) بکار بردن مدار عادی، بغرنجیهای زیادی به وجود می‌آورد.

بهمین‌مناسبت، درمطالبی که بعداز این‌خواهیم‌آوردازمدار عادی‌استفاده می‌کنیم وتنها در فصل هفتم به‌مطالعهٔ مدارهای‌کامل خواهیم پرداخت .

***

اثبات فوق هم اثباتی سازنده است : مانه فقط امکان بیان مداریك‌جمله را برحسب σ_1 وσ_2 وσ_3 ثابت‌کردیم، بلکه بیك‌آلگوریتم مشخص‌هم رسیدیم که به‌کمك‌آن می‌توان هرمدار معین را برحسب σ_1 وσ_2 وσ_3 بدست‌آورد . اساس این‌آلگوریتم برروابط (۴) و(۵) و (۶) و جدولی‌که مقادیر S_k رابرحسب σ_1 وσ_2 وσ_3 بیان می‌کرد، قراردارد . مثلا :

$$O(x^2y^2)=\frac{1}{2}\Big\{[O(x^2)]^2-O(x^4)\Big\}=\frac{1}{2}(S_2{}^2-S_4)=$$

$$=\frac{1}{2}[(\sigma_1{}^2-2\sigma_2)^2-(\sigma_1{}^4-4\sigma_1{}^2\sigma_2+2\sigma_2{}^2+4\sigma_1\sigma_3)]=$$

$$=\sigma_2{}^2-2\sigma_1\sigma_3\ ;$$

(دراینجا ازرابطهٔ (۵) استفاده‌کردیم) ؛

$$O(x^4y^2z)=\sigma_3\cdot O(x^3y)=\sigma_3[O(x^3)\cdot O(x)-O(x^4)]=$$

$$=\sigma_3(S_3S_1-S_4)=\sigma_3[\sigma_1(\sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-$$

$$-(\sigma_1{}^4-4\sigma_1{}^2\sigma_2+2\sigma_2{}^2+4\sigma_1\sigma_3)]=\sigma_3(\sigma_1{}^2\sigma_2-2\sigma_2{}^2-\sigma_1\sigma_3)$$

(که درموردآن ازروابط (۴) و (۶) استفاده‌کردیم) .

درجدول زیر، بعضی‌ازمدارهای $O(x^ky^l)$ برحسب σ_1 وσ_2 وσ_3 داده شده است (خواننده می‌تواند این جدول را با استفاده از روابط (۴) و (۵) خود تشکیل ویاآنرا ادامهٔ دهد) :

بیان مدار $O(x^ky^l)$ برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3
$O(xy)=\sigma_2$;
$O(x^2y)=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$;
$O(x^3y)=\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3$;
$O(x^2y^2)=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3$;
$O(x^4y)=\sigma_1^3\sigma_2-3\sigma_1\sigma_2^2-\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_2\sigma_3$;
$O(x^3y^2)=\sigma_1\sigma_2^2-2\sigma_1^2\sigma_3-\sigma_2\sigma_3$;
$O(x^5y)=\sigma_1^4\sigma_2-4\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_1^3\sigma_3+7\sigma_1\sigma_2\sigma_3+2\sigma_2^3=3\sigma_3^2$;
$O(x^4y^2)=\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3-2\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-3\sigma_3^2$;
$O(x^3y^3)=\sigma_2^3+3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3$;
. . . .

۱۸. اثبات‌قضیهٔ اصلی

حالا دیگر می‌توان قضیه‌ای را که درصفحهٔ ۷۰ بیان‌کردیم ، ثابت‌کرد.

فرض‌کنید $f(x , y , z)$ کثیرالجمله‌ای متقارن و $ax^ky^lz^m$ یکی ازجمله‌های آن باشد . چون $f(x , y , z)$ متقارن است، همراه بااین‌جمله مدار $O(x^ky^lz^m)$ وجود خواهد داشت(باضریب ثابت a) ومی‌توان‌نوشت:

$$f(x, y, z)=a\cdot O(x^ky^lz^m)+f_1(x, y, z),$$

$f_1(x, y, z)$ کثیرالجمله‌ای است متقارن‌که تعداد جملات‌آن‌کمتر از تعداد جملات $f(x , y , z)$ است . از $f_1(x, y, z)$ هم می‌توان مدار یکی از جمله‌هایش را خارج‌کرد وغیره . پس از چند مرحلهٔ مشخص ،کثیرالجملهٔ $f(x, y, z)$ به‌صورت مجموعی ازمدارها درمی‌آید .

به‌این‌ترتیب هرکثیرالجملهٔ متقـارن $f(x , y , z)$ ، مجموعی است از تعداد معینی‌مدار یك‌جمله‌ای . وچون هرمدار قابل بیان برحسب σ_1 و σ_2 و

σ_3است، بنا براین هر کثیر الجملهٔ متقارن رامی‌توان برحسب σ_1 وσ_2وσ_3 نوشت. قضیهٔ اصلی بطور کامل ثابت شد .

اثبات درحالت کلی‌خودهم، سازنده است : شامل آلگوریتم ساده‌ای است که اجازه می‌دهد هر کثیر الجملهٔ دلخواه متقارن را برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 بیان کنیم .

به‌عنوان مثال کثیر الجملهٔ متقارن زیررا درنظر می گیریم :

$$f(x, y, z)=x^3+y^3+z^3-4xyz+2x^2y+2xy^2+$$
$$+2x^2z+2xz^2+2y^2z+2yz^2$$

برای بیان این عبارت برحسب σ_1 وσ_2 وσ_3 داریم :

$$f(x, y, z)=O(x^3)-4O(xyz)+2O(x^2y)=$$
$$=(\sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-4\sigma_3+2(\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3)=$$
$$=\sigma_1{}^3-\sigma_1\sigma_2-7\sigma_3.$$

تمرینات

کثیرالجمله‌های متقارن زیررا برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 بنویسید :

۱۴۵. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$

۱۴۶. $x^5y^2+x^5z^2+x^2y^5+x^2z^5+y^5z^2+y^2z^5$

۱۴۷. $(x+y)(x+z)(y+z)$

۱۴۸. $(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)$

۱۴۹. $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$

۱۵۰. $x^6+y^6+z^6+2x^5y+2x^5z+2xy^5+$
$+2xz^5+2y^5z+2yz^5-3x^4y^2-3x^4z^2-3x^2y^4-$
$-3x^2z^4-3y^4z^2-3y^2z^4+x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3.$

۱۵۱. مطلوبست محاسبهٔ مساحت مثلثی که محیط آن، مجموع مربعات

اضلاع آن ومجموع مکعبات اضلاع آن معلوم باشد .

۱۹. رابطهٔ وارینگا*

رابطهٔ (۳) راکه دربند۱۶ ثابت‌کردیم ، یك‌رابطهٔ برگشتی است و به کمك‌آن به شرطی می‌توان S_k را برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 محاسبه‌کردکه قبلا S_n را برای‌مقادیر $n<k$ حساب‌کرده باشیم. ولی با استفاده ازآن‌می‌توان رابطهٔ مستقلی بدست‌آوردکه مقدار S_k را مستقیماً برحسب σ_1 وσ_2 وσ_3 بدهد. این رابطه (رابطهٔ وارینگا) چنین است :

$$\frac{1}{k}S_k=$$
$$=\sum\frac{(-1)^{k-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!}\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\sigma_3^{\lambda_3}$$

در این رابطه λ_1 وλ_2 وλ_3 می‌توانند هرعدد دلخواه غیر منفی باشندکه در رابطهٔ $\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=k$ صدق‌کنند . ضمناً اگر به‌علامت $0!$ برخورد کردیم، برابربا واحد خواهیم‌گرفت . وجود توانهای λ_1 وλ_2 وλ_3 دررابطهٔ وارینگا مربوط به تفصیل زیر است . عبارت متقارن σ_1 نسبت به x وy و z ازدرجهٔ اول است، عبارت σ_2 ازدرجهٔ دوم وعبارت σ_3 ازدرجهٔ سوم. بنابراین اگر در جملهٔ $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\sigma_3^{\lambda_3}$ بجای σ_1 وσ_2 وσ_3 مقادیرشان‌رابرحسب xوy وz قراردهیم ،کثیرالجمله‌ای بدست می‌آیدکه نسبت به x و y و z از درجه $\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3$ می‌باشد. ازآنجاواضح‌است‌که درمجموع‌قوای‌متشابه‌S_kتنها ممکن است جمله‌هائی بشکل $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\sigma_3^{\lambda_3}$ وجود داشته باشدکه درمورد آنها $\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=k$ باشد .

بااستفاده ازرابطهٔ (۳) وبه‌کمك روش استقراء ریاضی، می‌توان رابطهٔ

---

*) در دور اول‌مطالعه ، می‌توان ازاین بند صرفنظرکرد .

وارینگا را ثابت‌کرد. ضمناً اتحاد زیرهم ،که به‌سادگی ثابت می‌شود، مورد استفاده قرار می‌گیرد :

$$k\cdot\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!}=(k-1)\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-2)!}{(\lambda_1-1)!\lambda_2!\lambda_3!}+$$

$$+(k-2)\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-2)!}{\lambda_1!(\lambda_2-1)!\lambda_3!}+(k-3)\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-2)!}{\lambda_1!\lambda_2!(\lambda_3-1)!}$$

که درآن $k=\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3$ است . اثبات کامل را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم .

به‌عنوان مثال S_6 را برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن می‌نویسیم . بنابر رابطهٔ وارینگا قبل ازهمه باید همهٔ جوابهای غیر منفی معادلهٔ زیر را بدست‌آورد :

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=6$$

این معادله ۷جواب داردکه درجدول زیر ذکرکرده‌ایم :

λ_1	λ_2	λ_3	λ_1	λ_2	λ_3
۶	۰	۰	۳	۰	۱
۴	۱	۰	۱	۱	۱
۲	۲	۰	۰	۰	۲
۰	۳	۰			

و بنابراین داریم :

$$\frac{1}{6}S_6=\frac{(-1)^{6-6-0-0}(6+0+0-1)!}{6!0!0!}\sigma_1^6\sigma_2^0\sigma_3^0+$$

$$+\frac{(-1)^{6-4-1-0}(4+1+0-1)!}{4!1!0!}\sigma_1^4\sigma_2^1\sigma_3^0+$$

$$+\frac{(-1)^{6-2-2-0}(2+2+0-1)!}{2!2!0!}\sigma_1^{2}\sigma_2^{2}\sigma_3^{0}+$$

$$+\frac{(-1)^{6-0-3-0}(0+3+0-1)!}{0!3!0!}\sigma_1^{0}\sigma_2^{3}\sigma_3^{0}+$$

$$+\frac{(-1)^{6-3-0-1}(3+0+1-1)!}{3!0!1!}\sigma_1^{3}\sigma_2^{0}\sigma_3^{1}+$$

$$+\frac{(-1)^{6-1-1-1}(1+1+1-1)!}{1!1!1!}\sigma_1^{1}\sigma_2^{1}\sigma_3^{1}+$$

$$+\frac{(-1)^{6-0-0-2}(0+0+2-1)!}{0!0!2!}\sigma_1^{0}\sigma_2^{0}\sigma_3^{2}=$$

$$=\frac{5!}{6!}\sigma_1^{6}-\frac{4!}{4!}\sigma_1^{4}\sigma_2+\frac{3!}{2!2!}\sigma_1^{2}\sigma_2^{2}-\frac{2!}{3!}\sigma_2^{3}+\frac{3!}{3!}\sigma_1^{3}\sigma_3-$$

$$-\frac{2!}{1!}\sigma_1\sigma_2\sigma_3+\frac{1!}{2!}\sigma_3^{2}=\frac{1}{6}\sigma_1^{6}-\sigma_1^{4}\sigma_2+\frac{3}{2}\sigma_1^{2}\sigma_2^{2}-\frac{1}{3}\sigma_2^{3}+$$

$$+\sigma_1^{3}\sigma_3-2\sigma_1\sigma_2\sigma_3+\frac{1}{2}\sigma_3^{2}.$$

که اگر طرفین آنرا در ۶ ضرب کنیم، بدست می‌آید :

$$S_6=\sigma_1^{6}-6\sigma_1^{4}\sigma_2+9\sigma_1^{2}\sigma_2^{2}-2\sigma_2^{3}+6\sigma_1^{3}\sigma_3-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^{2}$$

۲۰. مجموع معکوسات قوای متشابه

مجموع قوای متشابه، وقتی که با توان منفی باشد، یعنی عبارت به‌صورت:

$$S_{-k}=x^{-k}+y^{-k}+z^{-k}=\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k}$$

(که در آن ... ، ۳ ، ۲ ، ۱ $= k$) ، گاهی مجموع معکوسات قوای متشابه نامیده می‌شود . این مجموع را به سادگی می‌توان برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 نوشت :

$$S_{-k}=\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k}=\frac{y^kz^k+x^kz^k+x^ky^k}{x^ky^kz^k}=\frac{O(x^ky^k)}{\sigma_3{}^k}\quad(*)$$

ولی بطریق دیگری هم می‌توان عمل کرد . کافی است توجه کنیم که رابطهٔ (۳) (صفحهٔ ۷۱) برای هرمقداری از k صحیح است (وضمناً برای اعداد منفی) .

در رابطهٔ (۳) ، k را به $l+3$ تغییر می‌دهیم ، بدست می‌آید :

$$S_l=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}S_{l+1}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}S_{l+2}+\frac{1}{\sigma_3}S_{l+3}\qquad(3')$$

به کمك رابطهٔ (۳') می‌توان مقادیر مجموع معکوسات قوای متشابه را بدست آورد :

$$S_{-1}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}S_0-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}S_1+\frac{1}{\sigma_3}S_2=$$

$$=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\times 3-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}.\sigma_1+\frac{1}{\sigma_3}(\sigma_1{}^2-2\sigma_2)=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\ ;$$

$$S_{-2}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}S_{-1}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}S_0+\frac{1}{\sigma_3}S_1=$$

$$=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}.\frac{\sigma_2}{\sigma_3}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\times 3+\frac{1}{\sigma_3}.\sigma_1=\frac{\sigma_2{}^2-2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3{}^2}\ ;$$

$$S_{-3}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}S_{-2}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}S_{-1}+\frac{1}{\sigma_3}S_0=$$

$$=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}.\frac{\sigma_2{}^2-2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3{}^2}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}.\frac{\sigma_2}{\sigma_3}+\frac{1}{\sigma_3}\times 3=\frac{\sigma_2{}^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3{}^2}{\sigma_3{}^3};$$

$$S_{-4}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}S_{-3}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}S_{-2}+\frac{1}{\sigma_3}S_{-1}=$$

$$=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}.\frac{\sigma_2{}^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3{}^2}{\sigma_3{}^3}-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}.\frac{\sigma_2{}^2-2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3{}^2}+\frac{1}{\sigma_3}.\frac{\sigma_2}{\sigma_3}=$$

$$=\frac{\sigma_2{}^4-4\sigma_1\sigma_2{}^2\sigma_3+4\sigma_2\sigma_3{}^2+2\sigma_1{}^2\sigma_3{}^2}{\sigma_3{}^4}$$

وغیره . برعکس بــا در دست داشتن مقادیر مجموع معکوسات قوای متشابه (که ازاین‌راه بدست می‌آیند)، می‌توان مدارهای $O(x^k y^k)$ را ، بااستفاده از رابطهٔ (*) بدست‌آورد :

$$O(x^2y^2) = \sigma_3^2 S_{-2} = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 \; ;$$

$$O(x^3y^3) = \sigma_3^3 \cdot S_{-3} = \sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2 \; ;$$

$$O(x^4y^4) = \sigma_3^4 \cdot S_{-4} = \sigma_2^4 - 4\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 + 4\sigma_2\sigma_3^2 + 2\sigma_1^2\sigma_3^2 ; \ldots$$

۴

موارد استعمال در جبر مقدماتی

(II)

۲۱. حل دستگاههای سه مجهولی

از نتایجی که در فصل قبل بدست آوردیم، می‌توان برای حل بعضی از دستگاههای سه‌مجهولی استفاده کرد. اگر عبارتهای سمت چپ معادلات نسبت به x و y و z متقارن باشند، براحتی می‌توان σ_1 و σ_2 و σ_3 را بعنوان مجهولات جدید انتخاب کرد (بنابر قضیهٔ اصلی می‌توان سمت چپ معادلات را برحسب

σ_1 وσ_2 وσ_3 نوشت) . بـا توجه به این تغییرمجهولات ، درجهٔ معادلات پائین می‌آید (زیرا $\sigma_2 = xy + xz + yz$ ازدرجهٔ دوم و $\sigma_3 = xyz$ از درجـهٔ سوم است) . به عبارت دیگر حل دستگاه بـا مجهولات جدید ساده‌تر از حل دستگاه اصلی خواهد بود .

پس‌ازآنکه σ_1 وσ_2 وσ_3 بدست‌آمد، بایدمقادیر مجهولات اصلی یعنیx وy وz را محاسبه نمود واین عمل‌به‌کمك قضیهٔ زیر انجام‌پذیر است .

قضیه . σ_1 و σ_2 وσ_3را سه عدد دلخواه فرض‌کنید . معادلهٔ درجهٔ سوم:

$$u^3 - \sigma_1 u^2 + \sigma_2 u - \sigma_3 = 0 \qquad (*)$$

با دستگاه معادلات :

$$\begin{cases} x+y+z=\sigma_1 \ ; \\ xy+xz+yz=\sigma_2 ; \qquad (**) \\ \quad xyz=\sigma_3 . \end{cases}$$

بدینطریق بهم مربوطاند : اگر u_1 وu_2 وu_3 ریشه‌های معادلهٔ (*)باشند*، دستگاه معادلات (**) جوابهای زیررا خواهدداشت :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = u_1 \\ y_1 = u_2 \ ; \\ z_1 = u_3 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = u_1 \\ y_2 = u_3 \ ; \\ z_2 = u_2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x_3 = u_2 \\ y_3 = u_1 ; \\ z_3 = u_3 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x_4 = u_2 \\ y_4 = u_3 \ ; \\ z_4 = u_1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x_5 = u_3 \\ y_5 = u_1 \ ; \\ z_5 = u_2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x_6 = u_3 \\ y_6 = u_2 \\ z_6 = u_1 \end{array} \right.$$

(که هریك ازدیگری باتبدیل جوابها بدست می‌آید) وریشهٔ دیگری نخواهد

---

*) هرمعادلهٔ درجهٔ سومی دارای سه جواب است،که بین‌آنها ممکن‌است دویا هرسه جواب باهم برابرباشند، برای‌تعیین تعداد ریشه‌های مساوی‌درمعادلهٔ درجه سوم به فصل ضمیمه مراجعه‌کنید .

داشت؛ برعکس اگر $x=a$ ، $y=b$ و $z=c$ جوابی از دستگاه (**) باشد، عددهای a و b و c ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم (*) خواهند بود.

برای اثبات این‌قضیه ، قبلا احتیاج به حکم کمکی زیرداریم .

لم. اگر u_1 ، u_2 و u_3 را ریشه‌های معادلهٔ درجه سومی به صورت $u^3+pu^2+qu+r=0$ در نظربگیریم ، روابط زیرصحیح است :

$$u_1+u_2+u_3=-p\,;$$

$$u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3=q\;;\;\;u_1u_2u_3=-r$$

که به **روابط ویت** درمورد معادلهٔ درجه سوم معروف‌اند . ما بعداً (بند۳۸ را به‌بینید) روابط ویت را بطورکلی برای معادله‌ای بادرجه دلخواه پیداخواهیم کرد، ولی دراینجا تنها به‌حالت خاص معادلهٔ درجهٔ سوم احتیاج داریم . u_1 و u_2 و u_3 را ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم $u^3+pu^2+qu+r=0$ فرض می‌کنیم، عددهای u_1 و u_2 و u_3 می‌توانند حقیقی یا موهومی باشند . بنابراین عبارت درجه سوم u^3+pu^2+qu+r می‌تواند به صورت زیر به ضرب عوامل تجزیه شود :*

$$u^3+pu^2+qu+r=(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)\qquad(***)$$

که با بازکردن پرانتزهای سمت‌راست تساوی خواهیم داشت :

---

*) اثبات حالت‌کلی این‌نوع تجزیه ، برای عبارتهای درجهٔ n را در بند ۴۸ خواهیم دید .

برای معادلهٔ درجهٔ سوم، وقتی‌که سه ریشهٔ u_1 و u_2 و u_3 متمایز باشند ، می‌توان به طریق ساده‌تری اثبات‌کرد .

بنابرقضیهٔ بزو (بند۴۵ را به‌بینید) ، کثیرالجملهٔ u^3+pu^2+qu+r بر $u-u_1$ قابل‌قسمت است(زیرا u_1 یکی‌از ریشه‌های این‌عبارت است)، یعنی‌داریم:

$$u^3+pu^2+qu+r=(u-u_1)(u^2+ku+l)\qquad(****)$$

←

$$u^3+pu^2+qu+r=$$
$$=u^3-(u_1+u_2+u_3)u^2+(u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3)u-$$
$$-u_1u_2u_3.$$

کثیرالجملهٔ سمت‌چپ تساوی باید باکثیرالجملهٔ سمت راست تساوی‌متحد باشد، یعنی ضرایب متناظر دردوطرف تساوی باهم‌برابرباشند. به‌عبارت دیگر:

$$-(u_1+u_2+u_3)=p,$$
$$u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3=q,$$
$$-u_1u_2u_3=r.$$

لم ثابت شد.

اثبات قضیه. اگر u_1 و u_2 و u_3 ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم (*) باشند، باتوجه به لم فوق، روابط زیررا خواهیم داشت:

→

(درسمت راست تساوی، ضریب u^2 درپرانتز دوم بایدمساوی واحدباشد. زیرا این تساوی یك اتحاد است وپس ازبازکردن پرانتزها درسمت‌راست‌تساوی، باید ضریب بزرگترین درجه دردوطرف مساوی شود).

حالا درتساوی (***) مقدار $u=u_2$ را قرار می‌دهیم. سمت چپ تساوی مساوی صفر می‌شود (زیرا u_2 ریشهٔ آنست)، سمت راست تساوی به $(u_2-u_1)(u_2^2+ku_2+l)$ تبدیل می‌شود. چون $u_2-u_1\neq 0$ است (زیرا ریشه‌های u_1 و u_2 و u_3 را متمایز فرض‌کردیم)، باید $u_2^2+ku_2+l=0$ باشد، یعنی u_2 ریشه‌ای از عبارت درجه دوم u^2+ku+l است. بهمین ترتیب ثابت می‌شودکه u_3 هم‌ریشهٔ دیگر این‌عبارت است. به‌این‌ترتیب چون‌ریشه‌های‌سه‌جمله‌ای u^2+ku+l عددهای u_2 و u_3 هستند، داریم:

$$u^2+ku+l=(u-u_2)(u-u_3)$$

این مقدار سه‌جمله‌ای را در رابطهٔ (***) قرار دهیم، همان رابطهٔ (**) بدست می‌آید.

$$u_1+u_2+u_3=\sigma_1 ,$$
$$u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3=\sigma_2 ,$$
$$u_1u_2u_3=\sigma_3 .$$

ولی این تساویها به‌معنای آنست که $x=u_1$ ، $y=u_2$ و $z=u_3$ ریشه‌ای از دستگاه (**) هستند. پنج جـواب دیگر هم با تبدیل این اعداد بدست می‌آید. اینکه دستگاه جواب دیگری ندارد ناشی ازحکم بعدی قضیه است که ما به اثبات‌آن می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم $x=a$ ، $y=b$ و $z=c$ جوابی از دستگاه (**) باشد، یعنی داشته باشیم:

$$a+b+c=\sigma_1 ,$$
$$ab+ac+bc=\sigma_2 ,$$
$$abc=\sigma_3 .$$

دراینصورت داریم:

$$z^3-\sigma_1z^2+\sigma_2z-\sigma_3=z^3-(a+b+c)z^2+(ab+ac+bc)z-$$
$$-abc=(z-a)(z-b)(z-c).$$

واین، به‌معنای‌آنست که عددهای a و b و c ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم (*) هستند. قضیه ثابت شد.

تبصره. قضیه‌ای راکه ثابت‌کردیم، ضمناً نشان می‌دهدکه اگر مقادیر σ_1 و σ_2 و σ_3 معلوم باشد، برای پیداکردن مقادیر مجهولات اصلی x و y و z [یعنی برای حل دستگاه (**)]، کافی است معادلهٔ درجه سوم (*) را تشکیل دهیم و ریشه‌های آن بدست آوریم. برای حل معادلهٔ درجه سوم راه حل‌کلی وجود دارد (که دربسیاری ازکتابهای درسی ذکر شده است)، ولی این راه حل بغرنج ومفصل است و در عمل بندرت مورد استفاده قرار می‌گیرد. اغلب کوشش می‌کنند یکی ازریشه‌های معادلهٔ درجه سوم رابدست‌آورند (به‌بند ۴۶

مراجعه‌کنید) وسپس با استفاده ازقضیهٔ بزو آنرا حل نمایند. دوباره متذکر می‌شویم که باحل معادلهٔ درجه سوم (*) ، شش جواب برای x و y وz بدست می‌آید، زیرا دستگاه (**) نسبت به‌مجهولاتx و y و z متقارن‌است‌وبنابراین جوابهای این‌مجهولات را هم می‌توان بیکدیگر تبدیل‌کرد . چند مثال ذکر می‌کنیم .

۱. دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی زیررا حل‌کنید :

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=b^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

مجهولات جدید را σ_1 وσ_2 وσ_3 می‌گیریم وفرض می‌کنیم :

$$x+y+z=\sigma_1,$$
$$xy+xz+yz=\sigma_2,$$
$$xyz=\sigma_3.$$

به‌کمك جدول صفحهٔ ۷۴ برای مجهولات جدید، دستگاه زیررا خواهیم‌داشت:

$$\begin{cases} \sigma_1=a, \\ \sigma_1^2-2\sigma_2=b^2, \\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=a^3. \end{cases}$$

از این دستگاه بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \sigma_1=a, \\ \sigma_2=\frac{1}{2}(a^2-b^2), \\ \sigma_3=\frac{1}{2}a(a^2-b^2). \end{cases}$$

که تساویهای اخیررا می‌توان چنین نوشت :

$$\begin{cases} x+y+z=a \,, \\ xy+xz+yz=\frac{1}{2}(a^2-b^2) \,, \\ xyz=\frac{1}{2}a(a^2-b^2). \end{cases}$$

برای حل این دستگاه ، باتوجه به قضیهٔ صفحهٔ۸۹ می‌توان معادلهٔ درجه سوم زیررا تشکیل داد :

$$u^3-au^2+\frac{1}{2}(a^2-b^2)u-\frac{1}{2}a(a^2-b^2)=0$$

عبارت سمت‌چپ تساوی را می‌توان تجزیه نمود :

$$u^3-au^2+\frac{1}{2}(a^2-b^2)u-\frac{1}{2}a(a^2-b^2)=$$

$$=(u-a)[u^2+\frac{1}{2}(a^2-b^2)]$$

وبنا براین ریشه‌های این معادله چنین است :

$$u_1=a \;;\; u_2=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \;;\; u_3=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$$

بنا براین دستگاه مفروض دارای شش جواب است که از تبدیل جوابهای زیر نسبت به x و y و z بدست می‌آید :

$$x=a \;;\; y=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \;;\; z=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$$

گاهی با تغییر مجهولهای مناسبی می‌توان، یک‌دستگاه غیرمتقارن را به‌دستگاه متقارن تبدیل کرد. به‌نمونهٔ زیرتوجه بفرمائید .

۲. دستگاه زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \,, \\ x^1+4y^2+9z^2=b^2, \\ x^3+8y^3-27z^3=a^3. \end{cases}$$

اگر فرض کنیم : $x=u$ ، $2y=v$ و $-3z=w$ ، دستگاه مفروض به دستگاه متقارن زیر تبدیل می‌شود :

$$\begin{cases} u+v+w=a , \\ u^2+v^2+w^2=b^2 , \\ u^3+v^3+w^3=a^3 . \end{cases}$$

که جوابهای آنرا درمثال قبل پیداکردیم . یکی از این جوابها چنین است :

$$u=a \; ; \; v=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \quad ; \; w=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$$

وپنج جواب بقیه از تبدیل این جوابها نسبت به u و v و w ، بدست می‌آید. بنابراین برای دستگاه اصلی جوابهای زیررا خواهیم داشت :

$$۱) \quad x=a , \quad y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} , \quad z=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} ;$$

$$۲) \quad x=a , \quad y=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} , \quad z=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} ;$$

$$۳) \quad x=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} , \quad y=\frac{a}{2} , \quad z=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} ;$$

$$۴) \quad x=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} , \quad y=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} , \quad z=-\frac{a}{3} ;$$

$$۵) \quad x=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} , \quad y=\frac{a}{2} , \quad z=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} ;$$

$$۶) \quad x=-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} , \quad y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} , \quad z=-\frac{a}{3} .$$

گاهی برای تبدیل یك معادله به صورت متقارن ، احتیاج به تغییراتی درخود معادله داریم(ومثلا طرفین آنرا مجذور کنیم). مثال زیرمطلب راروشن‌می کند.

۴. دستگاه زیررا حل کنید :

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+xz+yz=11, \\ (x-y)(x-z)(y-z)=-2 \end{cases}$$

دراینجا به سراغ σ_1 و σ_2 و σ_3 می‌رویم . دو معادلهٔ اول دستگاه را می‌توان به صورت $\sigma_1=6$ و $\sigma_2=11$ نوشت .

اگرسمت چپ معادلهٔ سوم هم نسبت به x و y و z متقارن بود ، آنرا برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 می‌نوشتیم و باقراردادن مقادیر σ_1 و σ_2 درآن، مقدار σ_3 را بدست می‌آوریم وبا بدست‌آمدن σ_3 مقادیر x و y و z بدست می‌آمد . ولی سمت چپ تساوی درمعادلهٔ سوم ،کثیرالجمله‌ای متقارن نیست وبرای‌اینکه به عبارتی متقارن تبدیل شود ، طرفین معـادلهٔ سوم را مجذور می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2=4$$

حالا دیگر سمت‌چپ تساوی درمعادلهٔ اخیر متقارن است :

$$\begin{aligned}
&(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2= \\
&=(x^2+y^2-2xy)(x^2+z^2-2xz)(y^2+z^2-2yz)= \\
&=O(x^4y^2)+2x^2y^2z^2-2O(x^4yz)-2O(x^3y^2z)- \\
&-2O(x^3y^3)+4O(x^3y^2z)-8x^2y^2z^2=O(x^4y^2)- \\
&-6x^2y^2z^2-2xyz\cdot O(x^3)-2O(x^3y^3)+2xyz\cdot O(x^2y)= \\
&=(\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3-2\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-3\sigma_3^2)- \\
&-6\sigma_3^2-2\sigma_3(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-2(\sigma_2^3+3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3)+ \\
&+2\sigma_3(\sigma_1\sigma_3-3\sigma_3)=\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_2^3-4\sigma_1^3\sigma_3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3- \\
&-27\sigma_3^2.
\end{aligned}$$

بنابراین معادلهٔ سوم به‌صورت زیردرمی‌آید :

$$-4\sigma_1^3\sigma_3+\sigma_1^2\sigma_2^2+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-4\sigma_2^3-27\sigma_3^2=4$$

که اگر $\sigma_1 = ۶$ و $\sigma_2 = ۱۱$ قراردهیم ، معادلهٔ درجه دومی نسبت به σ_3 بدست می‌آید :

$$\sigma_3^2 - ۱۲\sigma_3 + ۳۶ = ۰$$

وازاین معادله $\sigma_3 = ۶$ بدست می‌آید .

به این‌ترتیب‌داریم : $\sigma_1 = ۶$ ، $\sigma_2 = ۱۱$ و $\sigma_3 = ۶$. برای‌پیدا کردن مقادیر x و y و z معادلهٔ درجه سوم زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$u^3 - ۶u^2 + ۱۱u - ۶ = ۰$$

که ریشه‌های‌آن عبارتند از $u_1 = ۱$ ، $u_2 = ۲$ و $u_3 = ۳$.

مقادیری‌که برای u_1 و u_2 و u_3 بدست‌آمد متناظر باشش دسته‌جواب برای x و y و z است‌که باتبدیل نسبت به مقادیر $x = ۱$ ، $y = ۲$ و $z = ۳$ بدست می‌آیند. ولی همه این‌جوابها دردستگاه معادلات اصلی صدق‌نمی‌کنند . با مجذور کردن طرفین معادلهٔ سوم امکان‌وجود ریشه‌های اضافی پیدا می‌شود. باآزمایش معلوم می‌شودکه جوابهای دستگاه چنین است :

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = ۱ \\ y_1 = ۲ \\ z_1 = ۳ \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = ۲ \\ y_2 = ۳ \\ z_2 = ۱ \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_3 = ۳ \\ y_3 = ۱ \\ z_3 = ۲ \end{array}\right.$$

تمرینات

این دستگاهها راحل‌کنید :

۱۵۲. $$\begin{cases} x + y + z = ۲ \\ x^2 + y^2 + z^2 = ۶ \\ x^3 + y^3 + z^3 = ۸ \end{cases}$$

۱۵۳. $$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

۱۵۴. $$\begin{cases} x + y + z = ۹ \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = ۱ \\ xy + xz + yz = ۲۷ \end{cases}$$

۱۵۵. $$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + xz + yz = a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=۲ \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=۱ \\ x^۲(y+z)+y^۲(z+x)+z^۲(x+y)=-۶ \end{cases}$$.۱۵۶

$$\begin{cases} xy+xz+yz=۱۱ \\ xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)=۴۸ \\ xy(x^۲+y^۲)+xz(x^۲+z^۲)+yz(y^۲+z^۲)=۱۱۸ \end{cases}$$.۱۵۷

$$\begin{cases} x^۳+y^۳+z^۳=\frac{۷۳}{۸} \\ xy+xz+yz=x+y+z \\ xyz=۱ \end{cases}$$.۱۵۸

$$\begin{cases} x+y+z=\frac{۱۳}{۳} \\ \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=\frac{۱۳}{۳} \\ xyz=۱ \end{cases}$$.۱۵۹

$$\begin{cases} x+y+z=۰ \\ x^۲+y^۲+z^۲=x^۳+y^۳+z^۳ \\ xyz=۲ \end{cases}$$.۱۶۰

$$\begin{cases} x^۵+y^۵+z^۵-u^۵=۲۱۰ \\ x^۳+y^۳+z^۳-u^۳=۱۸ \\ x^۲+y^۲+z^۲-u^۲=۶ \\ x+y+z-u=۰ \end{cases}$$.۱۶۱

$$\begin{cases} ۳xyz-x^۳-y^۳-z^۳=b^۳ \\ x+y+z=۲b \\ x^۲+y^۲-z^۲=b^۲ \end{cases}$$.۱۶۲

۱۶۳. معادلهٔ درجه سومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن مجذور ریشه‌های معادلهٔ $u^{۳}-۲u^{۲}+u-۱۲=۰$ باشد.

۱۶۴. معادلهٔ درجه‌سومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادلهٔ $u^{۳}-۲u^{۲}+u-۱۲=۰$ باشد.

۱۶۵. ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$a^{۳}+pa+q=b^{۳}+pb+q=c^{۳}+pc+q=۰$$

وضمناً a و b و c دوبه‌دو متمایز باشند، داریم: $a+b+c=۰$

۲۲. تبدیل به‌صورت ضرب

تبدیل به‌ساده‌ترین عبارتهای متقارن $\sigma_{۱}$ و $\sigma_{۲}$ و $\sigma_{۳}$، علاوه بر حل دستگاههای جبری، درمورد حل مسائل دیگری از جبر هم مورد استفاده قرار می‌گیرد. دراین بند از تجزیهٔ کثیرالجمله‌های متقارن صحبت می‌کنیم.

فرض کنید $f(x، y، z)$ کثیرالجملهٔ متقارنی ازسه متغیر باشد. برای تجزیهٔ این عبارت به‌صورت ضرب، می‌توان آنرا برحسب $\sigma_{۱}$ و $\sigma_{۲}$ و $\sigma_{۳}$ نوشت و سپس کثیرالجملهٔ جدیدی را که بدست می‌آید، تجزیه نمود.

اگر این تجزیه ممکن باشد، آنوقت مقادیر $\sigma_{۱}=x+y+z$ و $\sigma_{۲}=xy+xz+yz$ و $\sigma_{۳}=xyz$ را قرار می‌دهیم، تجزیهٔ عبارت اصلی بدست می‌آید.

چند مثال

۱. عبارت زیررا تجزیه کنید:

$$x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}-۳xyz$$

باتوجه به‌جدول صفحهٔ ۷۴ داریم:

$$x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}-۳xyz=S_{۳}-۳\sigma_{۳}=$$
$$=(\sigma_{۱}^{۳}-۳\sigma_{۱}\sigma_{۲}+۳\sigma_{۳})-۳\sigma_{۳}=\sigma_{۱}^{۳}-۳\sigma_{۱}\sigma_{۲}=\sigma_{۱}(\sigma_{۱}^{۲}-۳\sigma_{۲})=$$

$$=(x+y+z)[(x+y+z)^2-3(xy+xz+yz)]=$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$

۲. این عبارت را به صورت ضرب تجزیه کنید :

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4$$

باتوجه به روابط صفحه‌های ۷۴ و ۸۱ این کثیرالجمله را می‌توان چنین نوشت:

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4=2O(x^2y^2)-S_4=$$
$$=2(\sigma_2{}^2-2\sigma_1\sigma_3)-(\sigma_1{}^4-4\sigma_1{}^2\sigma_2+2\sigma_2{}^2+4\sigma_1\sigma_3)=$$
$$=-\sigma_1{}^4+4\sigma_1{}^2\sigma_2-8\sigma_1\sigma_3=\sigma_1(4\sigma_1\sigma_2-\sigma_1{}^3-8\sigma_3)$$

بنابراین عبارت‌مفروض بر $x+y+z$ قابل‌قسمت‌است. ازآنجاکه‌کثیرالجملهٔ مفروض تنها شامل توانهای زوج از متغیرهای x و y و z است با تبدیل x به $-x$ (یا y به $-y$ ، یا z به $-z$) تغییر نمی‌کند . بنابراین نه تنها بر $x+y+z$، بلکه بر $-x+y+z$ و $x-y+z$ و $x+y-z$ هم‌قابل قسمت است . ازآنجا بدست می‌آید :

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4=$$
$$=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)\cdot P \quad (*)$$

که درآن P يك کثیرالجمله است. باآزمایش درجهٔ کثیرالجمله‌ها در دوطرف تساوی روشن می‌شود که P کثیرالجمله‌ای ازدرجهٔ صفر است، یعنی P يك‌عدد است . برای محاسبهٔ این‌عدد می‌توان از روش‌مقادیرخاص استفاده کرد.چون تساوی (*) يك اتحاد است، باید به‌ازاء هرمقدار دلخواه x و y و z صادق باشد. فرض‌می‌کنیم $x=y=z=1$ ، بدست می‌آید: $3P=3$ یعنی $P=1$.
بنابراین رابطهٔ (*) چنین می‌شود :

$$2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4=$$
$$=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

گاهی باید قبل از تبدیل کثیرالجملهٔ متقارن برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 ، پرانتزها

را بازکنیم و اعمال مقدماتی ازقبیل جمع جمله‌های متشابه وغیره را انجام دهیم. بهتراست قبل از بازکردن پرانتزها با استفاده ازمقادیر σ_1 و σ_2 و σ_3 تاجائیکه ممکن است، عبارت را ساده کنیم، به‌عبارت دیگر σ_1 و σ_2 و σ_3 را به‌جای بعضی ازمقادیر عبارت مفروض قرار دهیم و بقیه را با همان متغیرهای x و y و z بنویسیم. به نمونهٔ زیر توجه کنید.

۳. این عبارت را تبدیل به‌ضرب کنید:

$$a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+$$
$$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

این عبارت را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$a(\sigma_1-2a)^2+b(\sigma_1-2b)^2+c(\sigma_1-2c)^2+$$
$$+(\sigma_1-2a)(\sigma_1-2b)(\sigma_1-2c)=(a+b+c)\sigma_1^2-$$
$$-4\sigma_1(a^2+b^2+c^2)+4(a^3+b^3+c^3)+\sigma_1^3-$$
$$-2\sigma_1^2(a+b+c)+4\sigma_1(ab+ac+bc)-8abc=$$
$$=\sigma_1^3-4\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)+4(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)+\sigma_1^3-2\sigma_1^3+$$
$$+4\sigma_1\sigma_2-8\sigma_3=4\sigma_3=4abc$$

روشهائی که ذکر کردیم، تنها درحالتی مفید واقع می‌شود که کثیرالجملهٔ متقارن به صورت ضرب عوامل متقارن تجزیه شود. برای حالت کلی تجزیهٔ یك عبارت متقارن به عوامل‌ضرب دلخواه (ومنجمله غیرمتقارن) به بند ۳۴ مراجعه کنید.

تمرینات

عبارتهای زیررا تجزیه کنید:

۱۶۶. $(x+y)(x+z)(y+z)+xyz$

۱۶۷. $2(a^3+b^3+c^3)+a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+$
$+bc^2-3abc$

۱۶۸. $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)$

۱۶۹. $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+$
$+2abc(a+b+c)+(a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc)$

۱۷۰. $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-$
$-(a+b-c)^3$

۱۷۱. $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+$
$+x^4+y^4+z^4$

۱۷۲. $(a+b+c)^5-(-a+b+c)^5-(a-b+c)^5-$
$-(a+b-c)^5$

۱۷۳. $(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)^2-$
$-(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)$

کسرهای زیررا ساده‌کنید :

۱۷۴. $$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$$

۱۷۵. $$\frac{bc-a^2+ca-b^2+ab-c^2}{a(bc-a^2)+b(ca-b^2)+c(ab-c^2)}$$

۱۷۶. ثابت‌کنید به ازاء همهٔ مقادیرطبیعی n ، کثیرالجملهٔ :

$$(x+y+z)^{2n}-(y+z)^{2n}-(x+z)^{2n}-(x+y)^{2n}+x^{2n}+$$
$$+y^{2n}+z^{2n}$$

برعبارت :

$$(x+y+z)^4-(y+z)^4-(x+z)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$$

قابل‌قسمت است .

۱۷۷. ثابت‌کنیدکه‌کثیرالجملهٔ :

$$a^4(b^2+c^2-a^2)^3+b^4(c^2+a^2-b^2)^3+c^4(a^2+b^2-c^2)^3$$

برعبارت $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$ قابل‌قسمت است .

۱۷۸. ثابت کنید که اگر a و b و c اعدادی صحیح باشندو $a+b+c$ بر ۶ قابل‌قسمت باشد، $a^3+b^3+c^3$ هم بر ۶ قابل‌قسمت خواهد بود.

۲۳. اثبات اتحادها

بااستفاده از ساده‌ترین عبارتهای متقارن، می‌توان، صحت بسیاری از اتحادها راهم ثابت کرد. به‌مثالهای زیر توجه کنید.

۱. اتحاد زیررا ثابت کنید:

$$(x+y+z)(xy+xz+yz)-xyz=(x+y)(x+z)(y+z)$$

سمت‌چپ تساوی چیزی‌جز $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$ نیست. درسمت راست تساوی، پرانتزها را بازمی‌کنیم (جدول صفحهٔ ۸۱ را به‌بینید):

$$(x+y)(x+z)(y+z)=$$

$$=x^2y+x^2z+y^2x+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz=$$

$$=O(x^2y)+2\sigma_3=(\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3)+2\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$$

۲. ثابت کنید که اگر $x+y+z=0$ باشد، داریم:

$$x^4+y^4+z^4=2(xy+xz+yz)^2$$

باتوجه به جدول‌صفحهٔ ۷۴ داریم:

$$x^4+y^4+z^4=S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3$$

وچون طبق شرط $\sigma_1=x+y+z=0$ است، خواهیم داشت:

$$x^4+y^4+z^4=2\sigma_1^2=2(xy+xz+yz)^2$$

۳. ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=1$$

خواهیم داشت: $xyz=0$

شرایط مسئله را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 1 \end{cases}$$

ازاین دستگاه بدست می‌آید : $\sigma_2 = 0$ و $\sigma_3 = 0$. تساوی $\sigma_3 = 0$ به‌معنای $xyz = 0$ است .

۴. ثابت کنید که اگر عددهای x ، y ، z ، u ، v و w در روابط زیر صدق کنند :

$$x + y + z = u + v + w$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3 + v^3 + w^3$$

به ازاء هرمقدار طبیعی n داریم :

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + w^n$$

ساده‌ترین عبارتهای متقارن را نسبت به x و y و z به σ_1 و σ_2 و σ_3 ونسبت‌به u و v و w به τ_1 و τ_2 و τ_3 نشان می‌دهیم، دستگاه روابط مفروض به‌این‌صورت در می‌آید :

$$\sigma_1 = \tau_1$$
$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \tau_1^2 - 2\tau_2$$
$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \tau_1^3 - 3\tau_1\tau_2 + 3\tau_3$$

(جدول صفحهٔ ۷۴ را به‌بینید) وازآنجا نتیجه می‌شود :

$$\sigma_1 = \tau_1 \;;\; \sigma_2 = \tau_2 \;;\; \sigma_3 = \tau_3$$

ودراینصورت برای هر کثیرالجملهٔ $\varphi(t_1, t_2, t_3)$ داریم :

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$$

وباتوجه به‌قضیهٔ صفحهٔ ۷۰ نتیجه می‌گیریم که اگر $f(x, y, z)$ کثیرالجملهٔ متقارن دلخواهی باشدداریم :

$$f(x, y, z) = f(u, v, w)$$

ودرحالت‌خاص :

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + w^n$$

***

درمثال۲ مقدارمجموع قوای‌متشابه $S_4=x^4+y^4+z^4$ را بادرنظر گرفتن شرط $\sigma_1=x+y+z=0$ محاسبه کردیم .

دراینجا نمونه‌های دیگری ازمجموع قوای متشابه را با شرط $\sigma_1=0$ ذکر کرده‌ایم . این مقادیر (که از روابط جدول صفحهٔ ۷۴ بادر نظر گرفتن $\sigma_1=0$ بدست‌آمده است) درجدول زیر داده شده است :

بیان مجموع قوای متشابه $S_k=x^k+y^k+z^k$ برحسب σ_2 وσ_3 باشرط $\sigma_1=0$	
$S_1=0\ ;$	$S_6=3\sigma_3^2-2\sigma_2^3\ ;$
$S_2=-2\sigma_2\ ;$	$S_7=7\sigma_2^2\sigma_3\ ;$
$S_3=3\sigma_3\ ;$	$S_8=2\sigma_2^4-8\sigma_2\sigma_3^2\ ;$
$S_4=2\sigma_2^2\ ;$	$S_9=3\sigma_3^3-9\sigma_2^3\sigma_3\ ;$
$S_5=-5\sigma_2\sigma_3\ ;$	$S_{10}=-2\sigma_2^5+15\sigma_2^2\sigma_3^2;$

باکمك این‌روابط وبا توجه به‌روابط (۴) و (۵) (صفحات۷۶و۷۷)، می‌توان بسادگی مدار $O(x^ky^l)$ را برحسب σ_2 وσ_3 باشرط $\sigma_1=0$ بدست آورد ، مثلاً :

$$O(x^5y^2)=O(x^5)\cdot O(x^2)-O(x^7)=S_5\cdot S_2-S_7=$$
$$=(-5\sigma_2\sigma_3)\cdot(-2\sigma_2)-7\sigma_2^2\sigma_3=3\sigma_2^2\sigma_3 \qquad (\text{به ازاء } \sigma_1=0)$$

مثالهائی دربارهٔ استفاده این روابط ذکر می‌کنیم .

۵. ثابت‌کنیدکه اگر $x+y+z=0$ و $xy+xz+yz=0$ باشد، داریم :

$$3(x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3)=(x^3+y^3+z^3)^2$$

باتوجه به‌جدول صفحهٔ ۸۱ وباتوجه به‌شرایط $\sigma_1=0$ و $\sigma_2=0$ داریم :

$$x^{۲}y^{۲}+x^{۲}z^{۲}+y^{۲}z^{۲}=O(x^{۲}y^{۲})=۳\sigma_{۳}^{۱}\ ;$$

علاوه بر آن با توجه به جدول صفحهٔ قبل داریم :

$$x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}=S_{۳}=۳\sigma_{۳} \qquad (\text{به‌ازاء } \sigma_{۱}=۰)$$

و ازاین روابط، صحت تساوی حکم به‌سادگی ثابت می‌شود .

۶. صحت اتحاد زیررا تحقیق کنید :

$$\frac{(a+b)^{۷}-a^{۷}-b^{۷}}{(a+b)^{۳}-a^{۳}-b^{۳}}=\frac{۷}{۶}[(a+b)^{۴}+a^{۴}+b^{۴}].$$

برای اثبات عدد $-a-b$ را به c نشان می‌دهیم :

$$c=-a-b$$

ازآنجا $a+b+c=۰$ می‌شود ومی‌توان از جدول صفحهٔ قبل استفاده کرد.

سمت چپ تساوی حکم به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{(a+b)^{۷}-a^{۷}-b^{۷}}{(a+b)^{۳}-a^{۳}-b^{۳}}=\frac{(-c)^{۷}-a^{۷}-b^{۷}}{(-c)^{۳}-a^{۳}-b^{۳}}=\frac{a^{۷}+b^{۷}+c^{۷}}{a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}}=$$

$$=\frac{S_{۷}}{S_{۳}}=\frac{۷\sigma_{۲}{}^{۲}\sigma_{۳}}{۳\sigma_{۳}}=\frac{۷}{۳}\sigma_{۲}{}^{۲}$$

وسمت راست تساوی حکم :

$$\frac{۷}{۶}[(a+b)^{۴}+a^{۴}+b^{۴}]=\frac{۷}{۶}[(-c)^{۴}+a^{۴}+b^{۴}]=$$

$$=\frac{۷}{۶}(a^{۴}+b^{۴}+c^{۴})=\frac{۷}{۶}S_{۴}=\frac{۷}{۶}\times ۲\sigma_{۲}{}^{۲}=\frac{۷}{۳}\sigma_{۲}{}^{۲}$$

و به‌این ترتیب، صحت اتحاد تحقیق شد .

روش مذکور را برای اثبات بسیاری از اتحادها می‌توان بکار برد :
اگرهردو طرف اتحاد برحسب تفاضلهای $a-b$ ، $b-c$ و $c-a$ باشند،
بهتر است که فرض کنیم : $x=a-b$ ، $y=b-c$ و $z=c-a$ ،
دراینصورت خواهیم داشت :

$$x+y+z=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$$

که دراینصورت می‌توان ازروابط صفحهٔ ۱۰۵ استفاده کرد. ازهمین روش می‌توان برای تجزیهٔ عبارتهائی که برحسب $a-b$ و $b-c$ و $c-a$ بیان شده‌اند، استفاده کرد.

دومثال ذکر می‌کنیم.

۷. صحت این اتحادرا تحقیق کنید:

$$(a-b)^6+(b-c)^6+(c-a)^6-9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=$$
$$=2(a-b)^3(a-c)^3+2(b-c)^3(b-a)^3+2(c-a)^3(c-b)^3$$

که بافرض $x=a-b$ و $y=b-c$ و $z=c-a$ به اثبات اتحاد زیر می‌رسیم:

$$x^6+y^6+z^6-9x^2y^2z^2=-2x^3z^3-2x^3y^3-2y^3z^3;$$

ویا پس ازتبدیل:

$$S_6-9\sigma_3^2=-2O(x^3y^3) \qquad (*)$$

وچون $\sigma_1=x+y+z=0$ است، با استفاده از روابط جدول صفحهٔ ۱۰۵ خواهیم داشت:

$$S_6=3\sigma_3^2-2\sigma_2^3; \qquad O(x^3y^3)=\sigma_2^3+3\sigma_3^2$$

که دیگر به سادگی، صحت تساوی (*) ثابت می‌شود.

۸. کثیرالجملهٔ زیررا تجزیه کنید:

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$$

با فرض $x=a-b$ و $y=b-c$ و $z=c-a$ خواهیم داشت:

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=x^3+y^3+z^3=S_3=$$
$$=3\sigma_3=3xyz=3(a-b)(b-c)(c-a).$$

تمرینات

صحت اتحادهای زیررا تحقیق کنید :

۱۷۹. $(a+b+c)^3-(-a+b+c)^3-(a-b+c)^3-$
$$-(a+b-c)^3=24abc$$

۱۸۰. $a(-a+b+c)^2+b(a-b+c)^2+$
$$+c(a+b-c)^2+(-a+b+c)(a-b+c)\times$$
$$\times(a+b-c)=4abc$$

۱۸۱. $(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+$
$$+a^4+b^4+c^4=12abc(a+b+c)$$

۱۸۲. $(a+b+c)^4+(-a+b+c)^4+(a-b+c)^4+$
$$+(a+b-c)^4=4(a^4+b^4+c^4)+24(a^2b^2+$$
$$+a^2c^2+b^2c^2)$$

۱۸۳. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc=$
$$=(b+c)(c+a)(a+b)$$

۱۸۴. $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3-$
$$-3(a+b)(b+c)(c+a)=2(a^3+b^3+c^3-3ab)$$

۱۸۵. $(ab+ac+bc)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ac)^2+$
$$+(c^2-ab)^2=(a^2+b^2+c^2)^2$$

۱۸۶. $(-a+b+c)^3+(a-b+c)^3+(a+b-c)^3-$
$$-3(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=$$
$$=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

۱۸۷. $(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2+2a^2b^2c^2-$
$$-a^4(b+c)^2-b^4(c+a)^2-c^4(a+b)^2=$$
$$=2(ab+ac+bc)^3$$

۱۸۸. $(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)+$
$$+(x+yz)(y+zx)(z+xy)=$$
$$=(xyz+1)(x^2+y^2+z^2+2xyz-1)$$

۱۸۹. $xyz(x+y+z)^3-(yz+xz+xy)^3=$
$$=(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$$

۱۹۰. $(x+y+z)^5-(-x+y+z)^5-(x-y+z)^5-$
$$-(x+y-z)^5=80xyz(x^2+y^2+z^2)$$

۱۹۱. $(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4=$
$$=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)^2$$

۱۹۲. $[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]^2=$
$$=4[(x-y)^2(y-z)^2+(y-z)^2(z-x)^2+$$
$$+(z-x)^2(x-y)^2]$$

ثابت کنید که اگر $a+b+c=0$ باشد، اتحادهای زیر صحیح است :

۱۹۳. $a^3+b^3+c^3=3abc$

۱۹۴. $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=0$

۱۹۵. $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+$
$$+(a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc)=0$$

۱۹۶. $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

۱۹۷. $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$

۱۹۸. $2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2)$

۱۹۹. $$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

۲۰۰. $$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

.۲۰۱ $$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^4+b^4+c^4}{2}$$

.۲۰۲ $$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}=\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)^2$$

.۲۰۳ $$\left(\frac{a^7+b^7+c^7}{7}\right)^2=\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)^2\cdot\frac{a^4+b^4+c^4}{2}$$

۲۰۴. اتحادهای شمارهٔ ۱۳۳، ۱۳۴ و۱۳۵ (صفحهٔ ۶۵)را بااستفاده ازروش مسئلهٔ ۶ (صفحهٔ۱۰۶) حل کنید .

صحت اتحادهای زیررا تحقیق کنید :

.۲۰۵ $$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3-$$
$$-3(b-c)(c-a)(a-b)=0$$

.۲۰۶ $$25[(b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7][(b-c)^3+$$
$$+(c-a)^3+(a-b)^3]=$$
$$=21[(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5]^2$$

.۲۰۷ $$(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4=$$
$$=2[(y-z)^2(z-x)^2+(z-x)^2(x-y)^2+$$
$$+(x-y)^2(y-z)^2]$$

۲۰۸. کثیرالجملهٔ زیررا بەصورت ضرب تجزیه کنید :

$$(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$$

۲۰۹. ثابت کنید که اگر $s=\frac{a+b+c}{2}$ باشد ، اتحاد زیر صحیح است :

$$a(s-b)(s-c)+b(s-a)(s-c)+$$
$$+c(s-a)(s-b)+2(s-a)(s-b)(s-c)=abc$$

۲۱۰. ثابت کنید که به شرط $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ داریم :

$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc=s^3$$

۲۱۱. ثابت کنید که باشرط $xy+xz+yz=0$ داریم :

$$(x+y)^2(x+z)^2(y+z)^2+2x^2y^2z^2=$$
$$=x^4(y+z)^2+y^4(z+x)^2+z^4(x+y)^2$$

۲۱۲. ثابت کنید که اگر $xy+xz+yz=1$ باشد ، داریم :

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

۲۱۳. ثابت کنید که اگر داشته باشیم: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ و همچنین: $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ ، خواهیم‌داشت:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

۲۱۴. مطلوبست محاسبهٔ مجموع $a^4+b^4+c^4$ ، بشرطی که داشته باشیم :

$$a+b+c=0\ ; \quad a^2+b^2+c^2=1$$

۲۱۵. ثابت کنید که اگر رابطهٔ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ برقرار باشد، برای مقادیر فرد n داریم :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^n=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}=\frac{1}{(a+b+c)^n}$$

۲۱۶. ثابت کنید که کثیرالجملهٔ $(x+y)^n-x^n-y^n$ به‌ازاء مقادیر $n=6k\pm1$ برعبارت x^2+xy+y^2 وبه ازاء $n=6k+1$ برعبارت $(x^2+xy+y^2)^2$ قابل‌قسمت است .

۲۱۷. ثابت کنید که اگر داشته باشیم :

$$u=x+y+z+a(y+z-2x)\ ;$$

$$v=x+y+z+a(x+z-2y)\ ;$$
$$w=x+y+z+a(x+y-2z)$$

رابطهٔ زیرصحیح است :

$$u^3+v^3+w^3-3uvw=27a^2(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

۲۱۸. ثابت کنید که اگر داشته باشیم :

$$y^2+yz+z^2=a^2 \quad ; \quad z^2+zx+x^2=b^2\ ;$$
$$x^2+xy+y^2=c^2 \quad ; \quad yz+zx+xy=0$$

رابطهٔ زیر صحیح است :

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)=0$$

۲۱۹. ثابت کنید که اگر عددهای x و y و z حقیقی باشند، از تساوی :

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+$$
$$+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$$

نتیجه می‌شود : $x=y=z$

۲۲۰. ثابت کنید که با شرط $a+b+c+d=0$ داریم :

$$ad(a+d)^2+bc(a-d)^2+ab(a+b)^2+cd(a-b)^2+$$
$$+ac(a+c)^2+bd(a-c)^2+4abcd=0$$

۲۴. نامساویها

واضح است که اگر x و y و z اعدادی حقیقی باشند ، نامساوی زیر صحیح است :

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqslant 0$$

و ضمناً علامت تساوی تنها برای موردی است که $x=y=z$ باشد . عبارت سمت چپ این نامساوی ، نسبت به x و y و z ، متقارن است . با بازکردن پرانتزها ، می‌توان این نامساوی را به صورت $2S_2-2\sigma_2\geqslant 0$ نوشت ، که با

استفاده ازروابط جدول صفحهٔ ۷۴ می‌شود :

$$\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2 \qquad (7)$$

به‌این‌ترتیب ، نامساوی (۷) برای همهٔ مقادیر حقیقی x و y وz برقرار است وعلامت تساوی وقتی صحیح است که $x=y=z$ باشد .

ازنامساوی (۷) می‌توان تعداد زیادی‌نامساوی دیگر نتیجه گرفت.چند مثال ذکر کنیم .

۱. ثابت کنید که برای مقادیر حقیقی a وb و c نامساوی $\sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1\sigma_3$ صحیح است .

نامساوی (۷) را می‌توان به این‌صورت نوشت :

$$(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+xz+yz)$$

که اگر درآن $x=ab$ ، $y=ac$ و $z=bc$ فرض کنیم، بدست‌می‌آید:

$$(ab+ac+bc)^2 \geqslant 3(a^2bc+ab^2c+abc^2)$$

ویا : $$(ab+ac+bc)^2 \geqslant 3abc(a+b+c)$$

واین، همان نامساوی حکم است . تساوی $\sigma_2^2=3\sigma_1\sigma_3$ وقتی برقرار است که $a=b=c$ ویا دوعدد ازاعداد a وb وc مساوی صفر باشد .

۲. ثابت کنید که برای مقادیر مثبت x و y و z نامساوی $\sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3$ برقرار است .

چون x و y و z مقادیری مثبت‌اند ، داریم : $\sigma_1>0$ ، $\sigma_2>0$ و $\sigma_3>0$. بنابراین می‌توان طرفین نامساویهای $\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2$ و $\sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1\sigma_3$ را درهم‌ضرب کرد. ازآنجا بدست می‌آید : $\sigma_1^2\sigma_2^2 \geqslant 9\sigma_1\sigma_2\sigma_3$. که اگر طرفین آنرا برمقدار مثبت $\sigma_1\sigma_2$ تقسیم کنیم به نامساوی‌مورد نظر $\sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3$ می‌رسیم. تساوی $\sigma_1\sigma_2=9\sigma_3$ تنها برای حالت $x=y=z$ پیش می‌آید .

این نامساوی را بطریق دیگری هم می‌توانستیم ثابت کنیم ، در مسئلهٔ شمارهٔ ۱۱۳ صفحهٔ ۵۰ اگر $n=3$ فرض کنیم، داریم :

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\geqslant ۹$$

که اگر در پرانتز دوم مخرج مشترك بگیریم، بهمان نامساوی حکم‌می‌رسیم.

۳. ثابت‌کنید که برای مقادیر مثبت x و y و z نامساوی $\sigma_۱^۳\geqslant ۲۷\sigma_۳$ برقرار است.

بااستفاده ازنامساوی (۷) ونامساوی مثال۲ بدست می‌آید:

$$\sigma_۱^۴=\sigma_۱^۲.\sigma_۱^۲\geqslant\sigma_۱^۲\times ۳\sigma_۲=۳\sigma_۱(\sigma_۱\sigma_۲)\geqslant ۳\sigma_۱\times ۹\sigma_۳=۲۷\sigma_۱\sigma_۳$$

که با ساده کردن طرفین‌نامساوی $\sigma_۱^۴\geqslant ۲۷\sigma_۱\sigma_۳$ به‌عدد مثبت$\sigma_۱$، نامساوی‌حکم بدست می‌آید.

تساوی $\sigma_۱^۳=۲۷\sigma_۳$تنها وقتی بدست‌می‌آید که‌داشته‌باشیم: $x=y=z$

۴. ثابت‌کنید که برای عددهای مثبت x وy وz داریم:

$$\sigma_۲^۳\geqslant ۲۷\sigma_۳^۲ .$$

داریم:

$$\sigma_۲^۳=\sigma_۲.\sigma_۲^۲\geqslant\sigma_۲.۳\sigma_۱\sigma_۳=۳\sigma_۳(\sigma_۱\sigma_۲)\geqslant ۳\sigma_۳\times ۹\sigma_۳=۲۷\sigma_۳^۲$$

تمرینات

ثابت‌کنید که نامساویهای زیر به ازاء همهٔ مقادیرحقیقی a، b، c، x، y و z صحیح‌اند:

۲۲۱. $x^۲+y^۲+z^۲\geqslant xy+xz+yz$

۲۲۲. $x^۲+y^۲+z^۲\geqslant\frac{۱}{۳}(x+y+z)^۲$

۲۲۳. $۳(ab+ac+bc)\leqslant(a+b+c)^۲$

۲۲۴. $a^۲b^۲+b^۲c^۲+a^۲c^۲\leqslant abc(a+b+c)$

۲۲۵. $(bc+ca+ab)^۲\geqslant ۳abc(a+b+c)$

۲۲۶. $a^۲+b^۲+۱\geqslant ab+a+b$

نامساویهای زیررا برای‌مقادیر مثبت a ، b ، c ، x ، y و z ثابت‌کنید :

.۲۲۷ $(a+b+c)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c})\geqslant ۹$

.۲۲۸ $a^۳+b^۳+c^۳\geqslant ۳abc$

.۲۲۹ $(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲)\geqslant ۹abc$

.۲۳۰ $\frac{a+b+c}{۳}\geqslant \sqrt[۳]{abc}$

.۲۳۱ $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\geqslant \frac{۱}{\sqrt{bc}}+\frac{۱}{\sqrt{ac}}+\frac{۱}{\sqrt{ab}}$

.۲۳۲ $ab(a+b-۲c)+bc(b+c-۲a)+$
$+ac(a+c-۲b)\geqslant ۰$

.۲۳۳ $ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)\geqslant ۶abc$

.۲۳۴ $(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant ۸abc$

.۲۳۵ $xyz\geqslant (x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)$

.۲۳۶ $\sigma_۱^۳-۴\sigma_۱\sigma_۲+۹\sigma_۳\geqslant ۰$

با شرط $\sigma_۱=x+y+z$ ، $\sigma_۲=xy+xz+yz$ و $\sigma_۳=xyz$.

.۲۳۷ $۲(a^۳+b^۳+c^۳)\geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+$
$+ac(a+c)$

.۲۳۸ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant \frac{۳}{۲}$

.۲۳۹ $\frac{۲}{b+c}+\frac{۲}{c+a}+\frac{۲}{a+b}\geqslant \frac{۹}{a+b+c}$

.۲۴۰ $۲(a^۳+b^۳+c^۳)\geqslant a^۲(b+c)+b^۲(c+a)+$
$+c^۲(a+b)$

.۲۴۱ $\frac{x^۳+y^۳+z^۳}{x^۲+y^۲+z^۲}\geqslant \frac{x+y+z}{۳}$

۲۴۲. $۳(a^۳+b^۳+c^۳)\geq(a+b+c)(ab+ac+bc)$

۲۴۳. $(x+y+z)^۳\leq ۹(x^۳+y^۳+z^۳)$

۲۴۴. $۸(a^۳+b^۳+c^۳)\geq ۳(a+b)(a+c)(b+c)$

۲۴۵. $a^۴+b^۴+c^۴\geq abc(a+b+c)$

۲۴۶. ثابت کنید که با شرط $x \text{ ، } y \text{ ، } z\geq -\frac{۱}{۴}$ و $x+y+z=۱$ نامساوی زیر صحیح است:

$$\sqrt{۴x+۱}+\sqrt{۴y+۱}+\sqrt{۴z+۱}<۵$$

۲۴۷. ثابت کنید که اگر a و b و c دو به‌دو متمایز باشند و در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=۰$$

خواهیم داشت:

$$\frac{a}{(b-c)^۲}+\frac{b}{(c-a)^۲}+\frac{c}{(a-b)^۲}=۰$$

آیا عکس آن صحیح است؟

اگر a و b و c اضلاع یك مثلث باشند، ثابت کنید:

۲۴۸. $۲(ab+ac+bc)>a^۲+b^۲+c^۲$

۲۴۹. $(a^۲+b^۲+c^۲)(a+b+c)>۲(a^۳+b^۳+c^۳)$

۲۵۰. ثابت کنید که اگر $a+b+c=۰$ باشد، خواهیم داشت:

$$ab+ac+bc\leq ۰$$

۲۵۱. ریشه‌های صحیح معادلهٔ زیررا بدست‌آورید:

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=۳$$

۲۵۲. ثابت کنید که از مثلثهای به محیط $\sigma_۱$ ، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای مساحت حداکثر است.

۲۵۳. اگر $0 \leqslant u, v, w < \frac{7}{16}$ ، $u+v+w=1$ باشد، حداکثر مقدار عبارت زیر را پیدا کنید :

$$(1+u)(1+v)(1+w)$$

۲۵۴. ثابت کنید که اگر عددهای مثبت a و b و c در رابطهٔ : $a+b+c=1$ صدق کنند، داریم :

$$(1-a)(1-b)(1-c) > 8abc$$

۲۵. گویاکردن مخرج کسرها

با استفاده از عبارتهای متقارن می‌توان مسائل مشکلی را دربارهٔ گویا کردن مخرج کسرها حل کرد .

درحالتی که مخرج کسر به‌صورت $a \pm \sqrt[n]{b}$ یا $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$ باشد ، بدون استفاده ازعبارتهای متقارن هم‌می‌توان آنرا گویا کرد . دراین‌مورد کافی است که ازروابط زیر استفاده کنیم :

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2 ;$$

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\dots+y^{n-1});$$

$$x^{2k+1}+y^{2k+1}=(x+y)(x^{2k}-x^{2k-1}y+x^{2k-2}y^2- \\ -\dots+y^{2k})$$

مثلاً ، اگر بخواهیم مخرج کسر

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[12]{5}+\sqrt[12]{3}}$$

راگویا کنیم، ابتدا صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج کسر ، یعنی در $\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3}$ ضرب می کنیم، دراینصورت مخرج به $\sqrt[6]{5}-\sqrt[6]{3}$ تبدیل‌می‌شود

که اگر سپس صورت ومخرج را در $\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3}$ ضرب کنیم، بدست‌می‌آید :

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[12]{5}+\sqrt[12]{3}}=\frac{\sqrt{7}(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3})(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3})}{(\sqrt[12]{5}+\sqrt[12]{3})(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3})(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3})}=$$

$$=\frac{\sqrt{7}(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3})(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3})}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$$

حالا می‌توان دومین رابطه‌ای راکه دربالا آوردیم ، مورد استفاده قرار داد .

فرض می‌کنیم $x=\sqrt[3]{5}$ و $y=\sqrt[3]{3}$. بنابراین باید صورت و مخرج کسر را

$$x^2+xy+y^2=\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}$$

ضرب کنیم ، که بدست می‌آید :

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[12]{5}+\sqrt[12]{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{7}(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3})(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}=$$

$$=\frac{\sqrt{7}(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3})(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{5})^3-(\sqrt[3]{3})^3}=$$

$$=\frac{\sqrt{7}(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3})(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{2}$$

ولی اگر درمخرج کسر سه رادیکال ویا بیشتر باشد، کار بغرنج‌تر می‌شود . در اینحالت می‌توان ازعبارتهای متقارن استفاده کرد. به مثالهای زیر توجه کنید.

۱. مخرج کسر زیرراگویاکنید :

$$\frac{q}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt{a}=x$ ، $\sqrt{b}=y$ ، $\sqrt{c}=z$. در اینصورت مخرج ، کثیرالجملهٔ متقارن $\sigma_1=x+y+z$ می‌شود . کوشش می‌کنیم ، عاملی را جستجو کنیم ، که پس ازضرب درمخرج، حاصلضرب برحسب قوای‌متشابه S_2 و S_4 بیان‌شود ، زیرا این‌مجموع قوای متشابه به‌صورت:

$$S_2=x^2+y^2+z^2=a+b+c\ ;$$

$$S_4=x^4+y^4+z^4=a^2+b^2+c^2\ ;$$

هستند وبنابراین مخرج گویا خواهد شد .

برای جستجوی چنین‌عاملی ازروابط زیر استفاده می‌کنیم :

$$S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2\ ; \quad S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2$$

(جدول صفحهٔ ۷۴ را به‌بینید) . می‌بینیم که درهردو رابطه ، تنها آخرین جملهٔ سمت‌راست تساوی بر σ_1 قابل‌قسمت نیست . ولی به سادگی می‌توان ترکیبی‌از این دورابطه رابدست‌آورد ، بطوریکه دارای عامل σ_1 باشد. برای این‌منظور طرفین رابطهٔ S_2 را مجذور می‌کنیم :

$$S_2^2=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_2^2$$

وازآن دوبرابر S_4 راکم می‌کنیم، بدست می‌آید :

$$S_2^2-2S_4=-\sigma_1^4+4\sigma_1^2\sigma_2-8\sigma_1\sigma_3=\sigma_1(4\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3-8\sigma_3):$$

و ازآنجا :

$$\frac{1}{\sigma_1}=\frac{4\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3-8\sigma_3}{S_2^2-2S_4} \qquad (*)$$

اگر در این رابطه فرض‌کنیم : $x=\sqrt{a}$ ، $y=\sqrt{b}$ و $z=\sqrt{c}$

و $S_2=x^2+y^2+z^2=a+b+c)$

$(S_4=x^4+y^4+z^4=a^2+b^2+c^2$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=$$

$$=\frac{4(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})-(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^3-8\sqrt{abc}}{(a+b+c)^2-2(a^2+b^2+c^2)}$$

واگر طرفین تساوی را در q ضرب کنیم، حل مسئله بدست می‌آید.

تبصره. اگر درصورت کسر طرف دوم تساوی، بازکردن سه‌جمله‌ای یعنی $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^3$ نامطبوع بنظر برسد، می‌توان از رابطهٔ زیر برای تبدیل رابطهٔ(*) استفاده کرد:

$$S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$$

و بنابراین رابطهٔ (*) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\sigma_1}=\frac{\sigma_1\sigma_2-S_3-5\sigma_3}{S_2^2-2S_4}$$

ازآنجا (بافرض $x=\sqrt{a}$ ، $y=\sqrt{b}$ و $z=\sqrt{c}$) جواب مسئله به‌صورت ساده‌تر زیردرمی‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})-(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})-5\sqrt{abc}}{2(ab+ac+bc)-(a^2+b^2+c^2)}$$

۲. مخرج کسر زیر را گویا کنید:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$$

مجموع قوای متشابه S_3 را می‌نویسیم:

$$S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$$

درسمت راست این‌تساوی، تنها آخرین جمله بر σ_1 قابل قسمت نیست. اگر آنرا به سمت‌چپ تساوی ببریم بدست‌می‌آید:

$$S_3-3\sigma_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2)$$

از آنجا:

$$\frac{1}{\sigma_1}=\frac{\sigma_1^2-3\sigma_2}{S_3-3\sigma_3}=\frac{S_2-\sigma_2}{S_3-3\sigma_3}$$

اگردراین رابطه $x=\sqrt[3]{a}$ ، $y=\sqrt[3]{b}$ و $z=\sqrt[3]{c}$ فرض کنیم، بدست‌می‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}}{(a+b+c)-3\sqrt[3]{abc}}$$

به‌این‌ترتیب می‌بینیم که اگر مخرج کسر به‌صورت $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ باشد، با ضرب صورت ومخرج کسر درعبارت :

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}$$

مخرج کسر به صورت زیردرمی‌آید :

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}$$

حالا برای گویا کردن مخرج کافی است ازرابطهٔ زیر استفاده کنیم :

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

یعنی باید صورت ومخرج کسر را درعبارت :

$$(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2}$$

ضرب کنیم، که درنتیجه بدست می‌آید :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{\begin{array}{l}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc})\times\\ \quad\times[(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}]\end{array}}{(a+b+c)^3-27abc}$$

مسائلی راکه حل کردیم ، حالتهـای خاصی از یك مسئلهٔ کلی هستند . فـرض کنیدکه بخواهیم مخرج کسر زیررا گویا کنیم :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}$$

یعنی، می‌خواهیم کسر مفروض را به‌صورت :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}=\frac{A}{B}$$

بنویسیم ،که درآن A عبارتی گنگ، ولی B عبارتی گویا است. واضح است

که مخرج کسر وقتی گویا خواهد بود که در آن بجای رادیکالهای $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ و $\sqrt[n]{c}$ ، تابعی از توانهای nام آنها وجود داشته باشد. به‌عبارت‌دیگر اگر فرض کنیم : $\sqrt[n]{a}=x$ ، $\sqrt[n]{b}=y$ و $\sqrt[n]{c}=z$ ، باید داشته باشیم :

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{f(x,y,z)}{g(x^n,y^n,z^n)}$$

که در آن f و g کثیرالجمله‌هائی هستند . این تساوی را می‌توان به صورت $g(x^n, y^n, z^n)=\sigma_1 f(x,y,z)$ نوشت. بنابراین باید کثیرالجمله‌ای از سه متغیر چنان پیدا کنیم که $g(x^n , y^n , z^n)$ بر $\sigma_1=x+y+z$ قابل قسمت باشد .

این کثیرالجملهٔ g را چگونه پیدا کنیم ؟ از کثیرالجمله‌های متقارن استفاده می‌کنیم . ساده‌ترین نمونه‌های کثیرالجمله‌های متقارن، نسبت به توانهای nام سه متغیر x و y و z، مجموع قوای متشابه آنها است :

$$S_n=x^n+y^n+z^n \; ; \; S_{2n}=x^{2n}+y^{2n}+z^{2n} \; ;$$

$$S_{3n}=x^{3n}+y^{3n}+z^{3n} \; ; \; \ldots$$

اگر بتوانیم ترکیبی از این مجموع قوای متشابه را چنان پیدا کنیم که کثیرالجملهٔ حاصل g بر σ_1 قابل‌قسمت باشد، مسئله حل شده است و ما مثال ۱ را با همین روش حل کردیم .

گاهی پیدا کردن ترکیبی از مجموع قوای متشابه به S_n، S_{2n} ، S_{3n} و ... که بر σ_1 قابل‌قسمت باشد کار مشکلی می‌شود. در اینگونه موارد می‌توان ، علاوه بر مجموع قوای متشابه مذکور از σ_3 هم استفاده کرد . وقتی که $x=\sqrt[n]{a}$ ، $y=\sqrt[n]{b}$ و $z=\sqrt[n]{c}$ باشد، $\sigma_3=\sqrt[n]{abc}$ می‌شود ، یعنی به عبارتهای گویای S_n ، S_{2n} ، S_{3n} ، ... تنها یك جملهٔ گنگ $\sigma_3=\sqrt[n]{abc}$ را اضافه

کرده‌ایم و برای گویاکردن چنین مخرجی می‌توان از روشی که درابتدای این بند ذکر کردیم ، استفاده کرد (به حل مثال ۲ مراجعه کنید) .

به‌عنوان نمونه‌ای ازاین راه حل کلی، مسئله زیررا حل می‌کنیم .

۳. مخرج کسر زیررا گویا کنید :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}}$$

ما دراینجا تنها به اصول حل مسئله می‌پردازیم ومحاسبهٔ قسمتهای مختلف آنرا بعهدهٔ خواننده می‌گذاریم . با توجه به جدول صفحهٔ ۷۴ مقادیر $S_۴$ و $S_۸$ به صورت زیرهستند (جملاتی راکه بر $\sigma_۱$ قابل‌قسمت‌اند ننوشته‌ایم) :

$$S_۴=\cdots+۲\sigma_۲{}^۲\ ;\ S_۸=\cdots+۲\sigma_۲{}^۴-۸\sigma_۲\sigma_۳{}^۲.$$

و بنابراین :

$$۲S_۸-S_۴{}^۲=\cdots-۱۶\sigma_۲\sigma_۳{}^۲.$$

جملاتی راکه بر $\sigma_۱$ قابل‌قسمت‌اند به طرف‌چپ تساوی منتقل وطرفین تساوی را مجذور می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$(۲S_۸-S_۴{}^۲-\cdots)^۲=۲۵۶\sigma_۲{}^۲\sigma_۳{}^۴$$

وچون $S_۴=\cdots+۲\sigma_۲{}^۲$ می‌باشد، می‌توان نوشت :

$$۲۵۶\sigma_۲{}^۲\sigma_۳{}^۴=۱۲۸S_۴\sigma_۳{}^۴+\cdots$$

(که درآن بقیهٔ جملات قابل‌قسمت بر $\sigma_۱$ هستند) که اگر تمام جملاتی راکه‌بر $\sigma_۱$ قابل‌قسمت‌اند درسمت راست تساوی نگه داریم، بدست می‌آید :

$$(۲S_۸-S_۴{}^۲)^۲-۱۲۸S_۴\sigma_۳{}^۴=\cdots$$

به عبارت‌دیگر $(۲S_۸-S_۴{}^۲)^۲-۱۲۸S_۴\sigma_۳{}^۴$ بر $\sigma_۱$ قابل‌قسمت است :

$$(۲S_۸-S_۴{}^۲)^۲-۱۲۸S_۴\sigma_۳{}^۴=\sigma_۱A \qquad (**)$$

که درآن A کثیرالجملهٔ متقارنی است (اگر خواننده بخواهدکثیرالجملهٔ A را بدست‌آورد ، لازم نیست‌که همهٔ اعمال مذکور درفوق را انجام دهد، بلکه

کافی است باکمك جدول صفحهٔ ۷۴ مقادیر مجموع قوای متشابه S_4 و S_8 را در رابطهٔ (**) قرار دهد) . بالاخره اگر فرض کنیم: $x=\sqrt[4]{a}$ ، $y=\sqrt[4]{b}$ و $z=\sqrt[4]{c}$ (که دراینصورت $S_4=a+b+c$ و $S_8=a^2+b^2+c^2$ و $\sigma_3=\sqrt[4]{abc}$ خواهد شد) بدست می‌آید :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}}=\frac{1}{\sigma_1}=\frac{A}{(2S_8-S_4^2)-128S_4\sigma_3^4}=$$

$$=\frac{A}{(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)^2-128(a+b+c)abc}$$

متأسفانه ، روشی راکه شرح‌دادیم متضمن امکانات محدودی است، زیرا با بالا رفتن توان‌در مجموع قوای متشابه S_n ، S_{2n} ، ... ؛ بیان آنها برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 خیلی بغرنج می‌شود و انتخاب ترکیبی از مجموع قوای متشابه را با اشکالات زیاد مواجه می‌سازد . علاوه بر آن ، این‌روش تنها برای موردی که مخرج کسر شامل سه رادیکال باشد قابل استفاده است . در فصل هفتم (بند ۴۳ را به‌بینید) روش کلی حل اینگونه مسائل را ذکرخواهیم‌کرد . در آنجا راه حلی‌راکه برای‌گویاکردن مخرج کسر، درهرحالت‌غیرمشخص، می‌تواند مورد استفاده قرارگیرد مورد مطالعه قرارداده‌ایم (اگرچه راه حل‌کلی منجر به عملیات مفصل وبغرنج می‌شود) .

در این‌بند، ضمناً راهی برای یکنوع‌دیگر مسائل مربوط به‌گویانش‌هم پیدا می‌شود . این‌نوع مسائل رامی‌توان درحالت‌کلی به‌این‌صورت بیان‌کرد: رابطهٔ زیررا به‌صورت یك‌رابطه‌که نسبت به a و b و c گویا باشد، تبدیل‌کنید:

$$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}=0$$

به عبارت دیگر بـاید رابطهٔ‌گویائی بین a و b و c پیداکنیم ، بشرطی‌که

$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}=0$ باشد. به‌سادگی ارتباط این مسئله با مسئلهٔ گویا کردن مخرج کسر روشن می‌شود. اگر فرض کنیم $x=\sqrt[n]{a}$ و $y=\sqrt[n]{b}$ و $z=\sqrt[n]{c}$، طبق شرط خواهیم داشت:

$$\sigma_1=x+y+z=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}=0$$

حالا اگر موفق شویم (مثلاً باترکیب مجموع قوای متشابه S_n، S_{2n}، ...) کثیرالجمله‌ای مثل g پیدا کنیم، بطوریکه $g(x^n, y^n, z^n)=\sigma_1 f(x, y, z)$ باشد، باتوجه‌به‌رابطهٔ $\sigma_1=0$ خواهیم‌داشت: $g(x^n, y^n, z^n)=0$. واین‌همان رابطهٔ گویای مورد نظر است (زیرا داریم: $x^n=a$ ، $y^n=b$ و $z^n=c$).

متذکر می‌شویم که با دردست داشتن رابطهٔ $\sigma_1=0$ ، می‌توان از جدول ساده شدهٔ صفحهٔ ۱۰۵ (ونه جدول صفحهٔ ۷۴) استفاده کرد. مثالی ذکر می‌کنیم.

۴. رابطهٔ زیر را گویا کنید.

$$\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}+c=0$$

برای حل فرض می‌کنیم $\sqrt[n]{a}=x$ ، $\sqrt[n]{b}=y$ و $c=z$ ، دراینصورت رابطهٔ مفروض به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sigma_1=x+y+z=\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}+c=0$$

چون $\sigma_1=0$ است، رابطهٔ (**) چنین می‌شود:

$$(2S_8-S_4^2)^2-128S_4\sigma_3^4=0$$

که باتوجه به روابط:

$$S_4=x^4+y^4+z^4=a+b^2+c^4\ ;\ S_8=a^2+b^4+c^8\ ;$$
$$\sigma_3^4=ab^2c^4$$

بدست می‌آید:

$$(a^2+b^4+c^8-2ab^2-2ac^4-2b^2c^4)-$$
$$-128(a+b^2+c^4)ab^2c^4=0$$

واین همان رابطهٔ گویای موردنظر بین‌مقادیر a و b و c است .

تمرینات

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید :

۲۵۵. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

۲۵۶. $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$

روابط زیر را گویا کنید :

۲۵۷. $\sqrt{a}+\sqrt{b}+1=0$

۲۵۸. $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}+b=0$

۲۵۹. $p\sqrt[3]{a^2}+q\sqrt[3]{a}+r=0$

۲۶۰. $\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}+c=0$

۲۶۱. $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}$

۲۶۲. $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt[4]{a^2+b^2}=0$

۵

کثیرالجمله‌های متقارن منفی نسبت به‌سه متغیر

۲۶. تعریف

تا اینجا از کثیرالجمله‌های متقارن گفتگو کردیم ، یعنی کثیرالجمله‌ائی که بـا تبدیل هـر دو مجهول دلخواه آن بیکدیگر تغییر نکنند . حالا به کثیرالجمله‌هائی می‌پردازیم که خیلی به‌کثیرالجمله‌هـای متقارن نزدیکند و آنهارا **متقارن منفی** گویند. **به‌کثیرالجمله‌ای متقارن منفی گوئیم که با تبدیل**

هردو مجهول دلخواه‌آن بیکدیگر تغییر علامت بدهد .

ابتدا کثیرالجمله‌های متقارن‌منفی دومتغیره‌را مطالعه می‌کنیم. به‌عنوان نمونهٔ اینگونه کثیرالجمله‌ها، می‌توان از $x-y$ ، x^2-y^2 و x^4y-xy^4 نام برد. درحقیقت اگر فی‌المثل درعبارت x^2-y^2 جای x و y را باهم عوض کنیم به عبارت y^2-x^2 تبدیل می‌شود وچون داریم :

$$y^2-x^2=-(x^2-y^2)$$

عبارت x^2-y^2 یك عبارت متقارن‌منفی است . بهمین‌ترتیب متقارن‌منفی بودن $x-y$ و x^4y-xy^4 هم ثابت می‌شود .

به‌عنوان نمونهٔ کثیرالجملهٔ متقارن منفی‌سه‌متغیره می‌توان ازکثیرالجملهٔ زیر نام برد :

$$(x-y)(x-z)(y-z)$$

که اگر درآن مثلاً جای x و y را باهم عوض‌کنیم چنین می‌شود :

$$(y-x)(y-z)(x-z)=-(x-y)(x-z)(y-z)$$

بهمین‌ترتیب اگر y و z ویا x و z را بهم تبدیل کنیم ، بازهم به قرینهٔ خودش تبدیل می‌شود .

خاصیت مهم کثیرالجمله‌های متقارن منفی اینست : **مجذور کثیرالجملهٔ متقارن منفی، یك‌کثیرالجملهٔ متقارن است** ، زیرا باتبدیل هردو متغیردلخواه درکثیرالجملهٔ متقارن منفی‌تنها علامت‌آن تغییر می‌کند . ولی یك مجذورکامل علامت ثابتی دارد وبنابراین مجذورکثیرالجملهٔ متقارن منفی با تبدیل هردو متغیر دلخواه‌آن به یکدیگر تغییر نمی‌کند، یعنی متقارن است .

ولی تنها از مجذورکردن یك‌عبارت متقارن منفی نیست‌که یك عبارت متقارن بدست می‌آید: اگر دوکثیرالجملهٔ متقارن منفی دلخواه را درهم‌ضرب کنیم، ازحاصلضرب آنها کثیرالجمله‌ای متقارن بدست می‌آید، زیرا درتبدیل

هردو متغیر به یکدیگر ، هردوعبارت تغییرعلامت می‌دهند و بنابراین علامت حاصلضرب آنها ثابت باقی میماند .

بالاخره اگر یك‌عبارت متقارن منفی را دریك عبارت متقارن ضـرب کنیم، یك‌عبارت متقارن منفی بدست می‌آید، زیرا دراینصورت اگر دو متغیر را بهم تبدیل کنیم ، یکی ازعوامل تغییرعلامت می‌دهد ودیگری ثابت‌می‌ماند.

۲۷ قضیهٔ اصلی کثیرالجمله‌های متقارن منفی

حالا به‌بینیم کثیرالجمله‌های متقـارن منفی را چگونه می‌توان ساخت ؟ نکتهٔ آخری که در بند قبل ذکر کردیم . راه ساختن کثیرالجمله‌های متقارن منفی را بدست می‌دهد .کافی یك عبارت متقارن منفی درنظر بگیریم، ازضرب این‌عبارت درهمهٔ انواع کثیرالجمله‌های متقارن ، عبارتهائی حاصل می‌شودکه متقارن منفی هستند .

طبعاً سئوالی پیش می‌آید : آیا می‌توان عبارت متقارن منفی چنـان پیدا کرد که از ضرب آن در همهٔ انواع کثیرالجمله‌های متقارن ، همهٔ انواع کثیرالجمله‌های متقارن منفی (از متغیرهای مفروض) بدست‌آید ؟ خواهیم‌دید که جواب چنین سئوالی مثبت است .

ازکثیرالجمله‌های دومتغیره شروع می‌کنیم . ثابت می‌کنیم‌که در مورد چنین‌کثیرالجمله‌هائی ، عبارت مورد جستجو $x-y$ است . به عبارت دیگر باید قضیهٔ زیررا ثابت‌کنیم .

قضیه . هرکثیرالجملهٔ متقـارن منفی دو متغیره $f(x , y)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$f(x, y)=(x-y)g(x, y) \qquad (۸)$$

که درآن $g(x, y)$ ،کثیرالجملهٔ متقارنی نسبت به دومتغیر x و y است .

قبل از اثبات این قضیه ، به لم زیر توجه می‌کنیم .

لم. اگر $f(x, y)$ کثیرالجملهٔ متقارن‌منفی باشد $f(x, x) = 0$ است.

به‌عبارت دیگر، وقتی‌که دومتغیر x و y درکثیرالجملهٔ متقارن منفی با هم برابر باشند ،کثیرالجمله برابر صفر می‌شود .

برای اثبات این لم ، به تعریف کثیرالجملهٔ متقارن منفی توجه‌می‌کنیم. طبق این تعریف، اگر $f(x, y)$ متقارن منفی باشد ، بایدداشته باشیم :

$$f(x, y) = -f(y, x)$$

دراین تساوی $y = x$ فرض می‌کنیم، بدست‌می‌آید $(fx, x) = -f(x, x)$.
که تنها درحالت $f(x, x) = 0$ می‌تواند برقرار باشد.

لمی راکه اثبات‌کردیم می‌توان به‌طریق دیگری‌توضیح داد. کثیرالجملهٔ $f(x, y)$ را برحسب قوای x منظم می‌کنیم و متغیر y را به‌عنوان ضریب در نظر می‌گیریم . مثلاً اگرکثیرالجملهٔ $f(x, y)$ چنین باشد :

$$f(x, y) = x^4y^2 - y^4x^2 + x^4y - y^4x + x^3y^2 - x^2y^3$$

آنرا به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$f(x, y) = (y^2 + y)x^4 + y^2x^3 - (y^4 + y^3)x^2 - y^4x$$

حالا باتوجه به لم ثـابت شده ، نتیجه می‌گیریم‌که اینکثیرالجمله به ازاء $x = y$ مساوی صفر می‌شود . به عبارت دیگر $x = y$ ریشه‌ای ازکثیرالجملهٔ $f(x, y)$ است .

از آنجا طبق قضیهٔ بزو (بند ۴۵) $f(x, y)$ بر $x - y$ قابل قسمت است ، یعنی :

$$f(x, y) = (x - y)g(x, y),$$

که درآن $g(x, y)$ کثیرالجمله‌ای ازدو متغیر x و y است .

حالا برای اثبات‌کامل قضیه، باید ثابت‌کنیم‌که $g(x, y)$ کثیرالجمله‌ای متقارن است . برای‌این‌منظور در رابطهٔ (۸) جای x و y رابا هم عوض‌می‌کنیم:

$$f(y , x)=(y-x)\, g(y, x)$$

این تبدیل به‌این مناسبت اشکال ندارد ،که رابطهٔ (۸) یك اتحاد است، یعنی به ازاء همهٔ مقادیر x و y صحیح است . حالا باتوجه به‌اینکه طبق‌فرض‌داریم: $f(x , y)=-f(y, x)$ و چون $(x-y)=-(y-x)$ است ، نتیجه می‌شود :

$$f(x, y)=(x-y)g(y, x)$$

بامقایسهٔ این‌رابطه بارابطهٔ (۸) بدست می‌آید :

$$(x-y)g(x, y)=(x-y)g(y, x)$$

وبنابراین برای مقادیر $x \neq y$ خواهیم داشت :

$$g(y, x)=g(x, y)$$

درحالت $x=y$ رابطهٔ اخیر به صورت $g(x, x)=g(x, x)$ درمی‌آیدکه بازهم صحیح‌است. بنابراین به ازاء همهٔ مقادیردلخواه x و y می‌توان‌نوشت: $g(y, x)=g(x, y)$. یعنی $g(x, y)$ کثیرالجمله‌ای متقارن است . قضیه ثابت شد .

به‌این‌ترتیب ساختمان کثیرالجمله‌های متقارن‌منفی دومتغیره کاملاً روشن شد: هریك ازآنها بر $x-y$ قابل قسمت‌اند وضمناً خارج‌قسمت، کثیرالجمله‌ای متقارن است .

حالت کثیرالجمله‌های سه متغیره راهم درست بهمین‌ترتیب می‌توان‌مورد مطالعه قرار داد . ابتدا ثابت می‌کنیم‌که اگر دریك کثیرالجملهٔ متقارن‌منفی سه متغیره ، دو متغیر دلخواه با هم برابر باشند ، مساوی صفر می‌شود . یعنی تساویهای :

$$f(x, x, z)=f(x, y, x)=f(x, y, y)=0$$

برای هر کثیرالجملهٔ متقارن منفی $f(x, y, z)$ صحیح است.

پس ازآن ، با استفاده ازقضیهٔ بزو، نتیجه می‌گیریم‌که هر کثیرالجملهٔ

متقارن منفی برعبارتهای $y-z$ و $x-z$ ، $x-y$ قابل‌قسمت است. بنابراین هر کثیرالجملهٔ متقارن منفی برحاصلضرب این‌عبارتها یعنی :

$$T=(x-y)(x-z)(y-z)$$

قابل‌قسمت است و آنرا می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$f(x, y, z)=(x-y)(x-z)(y-z)g(x, y, z) \qquad (۹)$$

که در آن $g(x, y, z)$ یك کثیرالجمله است. شبیه کثیرالجمله‌های دو متغیره می‌توان ثابت کرد که $g(x, y, z)$ یك کثیرالجملهٔ متقارن است . تفصیل استدلال را دراین موارد بعهدهٔ خواننده می‌گذاریم .

به این‌ترتیب برای کثیرالجمله‌های متقارن منفی سه متغیره حکم زیر صحیح است .

قضیه . هر کثیرالجملهٔ متقارن منفی $f(x, y, z)$ ازسه متغیر x و y و z عبارتست ازحاصلضرب عبارت :

$$T=(x-y)(x-z)(y-z)$$

در کثیرالجملهٔ متقارن $g(x, y, z)$ ازسه متغیر x و y و z (رابطهٔ ۹) .

تمرینات

۲۶۳. ثابت کنید که اگر کثیرالجملهٔ متقارن $f(x, y)$ بر $x-y$ قابل قسمت باشد، بر $(x-y)^2$ قابل‌قسمت است .

۲۶۴. ثابت کنید که اگر کثیرالجملهٔ متقارن $f(x, y, z)$ بر $x-y$ قابل‌قسمت باشد، برعبارت :

$$\Delta(x, y, z)=(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2$$

قابل‌قسمت است .

۲۸. مبین ومورد استعمال آن در جستجوی ریشهٔ معادلات

دیدیم که ساده‌ترین عبارتهای متقارن منفی $x-y$ برای دو متغیره و

$T=(x-y)(x-z)(y-z)$ برای سه‌متغیره، درنظریهٔ کثیرالجمله‌های متقارن منفی، نقش اساسی‌دارند . مجذور ساده‌ترین عبارتهای متقارن‌منفی‌را مبین می‌نامند . بنابراین درحالت دومتغیره مبین $\Delta=(x-y)^{۲}$ ودرحالت سه متغیره $\Delta=(x-y)^{۲}(x-z)^{۲}(y-z)^{۲}$ می‌باشد . قبلاً گفتیم که‌مبین عبارتی‌متقارن است ومی‌توان آنرا برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن‌نوشت. درحالت دومتغیره، این‌عبارت به‌صورت زیر درمی‌آید. (صفحهٔ ۴۸ را به‌بینید):

$$\Delta=\sigma_{۱}^{۲}-۴\sigma_{۲}$$

ودر حالت سه متغیره (مثال ۳صفحهٔ ۹۵) :

$$\Delta=-۴\sigma_{۱}^{۳}\sigma_{۳}+\sigma_{۱}^{۲}\sigma_{۲}^{۲}+۱۸\sigma_{۱}\sigma_{۲}\sigma_{۳}-۴\sigma_{۲}^{۳}-۲۷\sigma_{۳}^{۲} \qquad (۱۰)$$

به‌منظور مقایسه، رابطهٔ (۱۰) را باکمك مقادیر خاص هم بدست می‌آوریم . مبین $\Delta(x، y، z)$ کثیرالجمله‌ای است از درجهٔ شش، بنابراین درتبدیل‌آن برحسب $\sigma_{۱}$ و $\sigma_{۲}$ و $\sigma_{۳}$ ممکن‌است جمله‌هائی به‌صورت $\sigma_{۱}^{m}\sigma_{۲}^{n}\sigma_{۳}^{p}$ (با ضرایبی) وجود داشته باشدکه درمورد همهٔ آنها $m+۲n+۳p=۶$ باشد (زیرا $\sigma_{۱}$ از درجهٔ اول، $\sigma_{۲}$ از درجهٔ دوم و $\sigma_{۳}$ ازدرجهٔ سوم‌است). روشن‌است که معادلهٔ $m+۲n+۳p=۶$ دارای هفت جواب مثبت و صحیح است که در جدول زیر مشخص شده است :

m	n	p	m	n	p
۶	۰	۰	۱	۱	۱
۴	۱	۰	۰	۳	۰
۳	۰	۱	۰	۰	۲
۲	۲	۰			

به عبـارت دیگر مبین $\Delta(x، y، z)$ بـرحسب $\sigma_{۱}$ و $\sigma_{۲}$ و $\sigma_{۳}$ را می‌توان چنین نوشت :

$$\Delta(x, y, z)=A\sigma_1^6+B\sigma_1^4\sigma_2+C\sigma_1^3\sigma_3+D\sigma_1^2\sigma_2^2+$$
$$+E\sigma_1\sigma_2\sigma_3+F\sigma_2^3+G\sigma_3^2 \qquad (*)$$

که درآن A، B، C، D، E، F و G ضرایب ثابتی هستند. چون تساوی (*) یك اتحاد است ، بنابراین به‌ازاء هر مقدار دلخواه از x و y و z باید برقرار باشد .

فرض می‌کنیم $x=1$ و $y=z=0$ ؛ در اینحالت داریم: $\sigma_1=1$ و $\sigma_2=\sigma_3=0$ و $\Delta(1, 0, 0)=(1-0)^2(0-0)^2(0-1)^2=0$. بنابراین تساوی (*) به صورت $A=0$ درمی‌آید . به این‌ترتیب ضریب A بدست‌آمد .

حالا فرض می‌کنیم $x=0$، $y=1$ ، $z=-1$ ؛ دراینحالت $\sigma_1=0$ و $\sigma_2=-1$ ، $\sigma_3=0$ و $\Delta=4$ می‌شود وبنابراین تساوی(*) بسهولت به‌صورت $F(-1)^3=4$ و یا $F=-4$ درمی‌آید .

به ازاء $x=2$ و $y=z=-1$ (یعنی $\sigma_1=0$ ، $\sigma_2=-3$ و $\sigma_3=2$) ازرابطهٔ (*) بدست می‌آید :

$$(-4).(-3)^3+4G=0 \Longrightarrow G=-27$$

حالا فرض می‌کنیم $x=0$، $y=z=1$ (یعنی $\sigma_1=2$ ، $\sigma_2=1$ و $\sigma_3=0$) وسپس $x=0$ ، $y=1$ ، $z=2$ (یعنی $\sigma_1=3$ ، $\sigma_2=2$ و $\sigma_3=0$) که‌از آنها (باتوجه به $A=0$ و $F=-4$) بدست می‌آید :

$$\begin{cases} 16B+4D-4=0 \\ 162B+36D-32=4 \end{cases}$$

که اگرآنرا مثل یك دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی نسبت به B و D حل کنیم $B=0$ و $D=1$ بدست می‌آید .

بالاخره به x و y و z مقادیر زیر را نسبت می‌دهیم : $x=y=z=1$ و $x=y=1$ ، $z=-1$ ، که در اینصورت (با در نظر گرفتن مقادیری که

برای A و B و D و F و G بدست‌آوردیم) دستگاه زیررا خواهیم داشت :

$$\begin{cases} ۲۷C+۸۱+۹E-۱۰۸-۲۷=۰ \\ -C+۱+E+۴-۲۷=۰ \end{cases}$$

که ازآنجا $C=-۴$ و $E=۱۸$ بدست می‌آید .

به این‌ترتیب همهٔ ضرایب A ، B ، C ، D ، E ، F و G معین شد .

اگر این مقادیر را در رابطهٔ (*) قراردهیم به همان تساوی (۱۰) می‌رسیم.

مبین، درنظریهٔ معادلات جبری نقشی اساسی دارد . به‌کمك آن‌می‌توان تعدادریشه‌های حقیقی معادله وشرط مساوی‌بودن ریشه‌ها وغیره رابدست‌آورد. ما از حالت معادلهٔ درجه دوم ،که برای خوانندگـان روشن است ، شروع می‌کنیم . $x_۱$ و$x_۲$ را ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم :

$$x^۲+px+q=۰$$

باضرایب حقیقی p و q ، فرض می‌کنیم . طبق روابط ویت داریم :

$\sigma_۱=x_۱+x_۲=-p$ و $\sigma_۲=x_۱x_۲=q$. بنابراین :

$$\Delta=(x_۱-x_۲)^۲=\sigma_۱^۲-۴\sigma_۲=p^۲-۴q \qquad (۱۱)$$

ما تنها در حالتی‌بحث می‌کنیم که ضرایب معادله اعدادی حقیقی باشند .دراین حالت سه وضع پیش می‌آید :

a) ریشه‌های معادله حقیقی و متمایزند ،

b) ریشه‌های معادله حقیقی و مساوی‌اند ،

c) ریشه‌های معادله مختلط ومزدوج‌اند .

مبین‌روشن می‌کند که یك معادلهٔ مفروض درکدامیك ازاین حالتهااست. ساده‌تر ازهمه مشخص می‌کندکه‌آیا ریشه‌ها برابرند یا نه ؟ وقتی‌که دو ریشه برابر باشند $x_۱=x_۲$ وبنابراین $\Delta=(x_۱-x_۲)^۲=۰$ می‌شود و برعکس با استفاده از رابطهٔ (۱۱) نتیجه می‌گیریم‌که : ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲+px+q=۰$ تنها وقتی برابرندکه $p^۲-۴q=۰$ باشد و واضح‌است

وقتی‌که ریشه‌ها برابرند، حقیقی‌هم هستند (زیرا $x_1+x_2=-p$) . حالا فرض‌کنیم ریشه‌های x_1 و x_2 متمایز باشند ، یعنی $\Delta\neq 0$ باشد : به‌بینیم‌کی حقیقی وکی مختلط مزدوج‌اند . اگر x_1 و x_2 حقیقی باشند ، تفاضل آنها x_1-x_2 هم عددی است حقیقی وبنابراین $\Delta=(x_1-x_2)^2$ ، عددی مثبت می‌شود. درحالتی‌که x_1،x_2 مختلط مزدوج یعنی به صورت $x_1=\alpha+\beta i$ ، $x_2=\alpha-\beta i$ باشد ، $x_1-x_2=2\beta i$ می‌شود و بنابراین مبین معادله $\Delta=(x_1-x_2)^2=-4\beta^2$ عددی منفی می‌شودکه با توجه به اینکه $\Delta=p^2-4q$ است (رابطهٔ ۱۱) ، نتایج زیر بدست می‌آید :

اگر $x^2+px+q=0$ معادله‌ای درجه‌دوم با ضرایب حقیقی‌باشد:

a) وقتی‌که $\Delta=p^2-4q>0$ باشد ، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم، حقیقی ومتمایزند ؛

b) وقتی‌که $\Delta=p^2-4q=0$ باشد، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم، حقیقی و مساوی‌اند ؛

c) وقتی‌که $\Delta=p^2-4q<0$ باشد ، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم، مختلط و مزدوج‌اند .

بنابراین ، درحالت معادلهٔ درجه دوم ، می‌توان باکمك مبین، روشن کردکه چه موقع ریشه‌های معادله حقیقی ومتمایز، چه موقع حقیقی ومساوی وبالاخره چه موقع مختلط‌اند*.

حالا به معادلهٔ درجه سوم می‌پردازیم **:

$$x^3+nx^2+px+q=0$$

ضرایب n و p و q را حقیقی می گیریم . دراین‌مورد، ممکن است به‌حالتهای زیر برخوردکنیم :

---

*) مبین‌را به‌جای‌اصطلاح لاتینی «discriminato» گذاشته‌ایم .

**) اگر این‌قسمت از بحث وبند بعدازآن بنظر مشکل برسد ، می‌توان بدون‌اینکه لطمه‌ای به بحثهای اصلی این کتاب بزند، ازآنها صرفنظر کرد .

a) سه ریشهٔ معادله حقیقی ومتمایز باشند ؛

b) سه ریشهٔ معادله حقیقی، دوریشهٔ مساوی وریشهٔ سوم متمایز ازآنها باشد ؛

c) سه ریشهٔ معادله مساوی (وحقیقی) باشند؛

d) یکی از ریشه‌های معادله حقیقی ودو ریشهٔ دیگر مختلط و مزدوج یکدیگر باشند .

حالت دیگر ممکن نیست .

برای تشخیص این حالتها، دوباره مبین سه ریشهٔ x_1 و x_2 و x_3 معادلهٔ مفروض را تشکیل می‌دهیم، یعنی عبارت :

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \qquad (**)$$

طبق روابط ویت، درمورد معادلهٔ درجه سوم، داریم :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -n,$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p,$$
$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 = -q,$$

و بنابراین، بنابر رابطهٔ (۱۰) خواهیم‌داشت :

$$\Delta = -4n^3q + n^2p^2 + 18npq - 4p^3 - 27q^2.$$

واضح است که اگر دوریشه ازمعادله باهم برابرباشند، درعبارت (**) یکی ازپرانتزها مساوی صفر ودر نتیجه مبین مساوی صفر می‌شود . اگر سه ریشه متمایز باشند (یعنی بین‌آنها هیچ دوریشه‌ای مساوی نباشند) ، تمام‌پرانتزهای عبارت (**) مخالف صفر و درنتیجه مبین هم مخالف صفر می‌شود. بنابراین برای اینکه درمعادلهٔ :

$$x^3 + nx^2 + px + q = 0$$

لااقل دوریشه باهم برابر باشند، لازم وکافی است که $\Delta = 0$ باشد.

حالا فرض کنید که سه ریشهٔ معادله حقیقی ومتمایز باشند . دراینصورت $T = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ مخالف صفر وحقیقی خواهد شد،

یعنی $\Delta=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$ عددی مثبت می‌شود .

بالاخره فرض کنید که x_1 عددی حقیقی و ریشه‌های $x_2=\alpha+\beta i$ و $x_3=\alpha-\beta i$ مختلط و مزدوج هم باشند، دراینصورت عبارت : $T=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$ به‌صورت زیر در می‌آید :

$$T=(x_1-\alpha-\beta i)(x_1-\alpha+\beta i)\times 2\beta i=2[(x_1-\alpha)^2+\beta^2]\beta i$$

و بنابراین :

$$\Delta=T^2=-4[(x_1-\alpha)^2+\beta^2]^2\beta^2<0$$

بنابراین قضیهٔ زیر ثابت‌شد :

اگر معادلهٔ درجه سوم

$$x^3+nx^2+px+q=0$$

با ضرایب حقیقی باشد و

$$\Delta=-4n^3q+n^2p^2+18npq-4p^3-27q^2$$

مبین این معادله باشد، دراینصورت :

a) اگر $\Delta>0$ باشد، سه ریشهٔ x_1 ، x_2 و x_3 حقیقی و متمایزند ؛

b) اگر $\Delta=0$ باشد ، بین سه ریشهٔ معادله ، لااقل دو ریشه با هم برابرند ؛

c) اگر $\Delta<0$ باشد، یکی‌از ریشه‌های معادله، حقیقی ودو ریشهٔ‌دیگر مختلط ومزدوج‌اند .

تحقیق وضع ریشه‌ها کاملاً تمام نشده است . ما هنوز نمی‌دانیم چه‌موقع دو ریشهٔ معادله باهم‌برابر وریشهٔ سوم متمایز باآنهاست وچه موقع هرسه‌ریشهٔ معادله با هم برابر است . در اینجا باید ازکثیرالجملهٔ متقارن دیگری برای کمك به‌مبین استفاده‌کرد. ساده‌تر ازهمه اینست‌که ازکثیرالجملهٔ متقارن زیر استفاده‌کنیم :

$$\Delta_1=(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2=2(\sigma_1^2-3\sigma_2)=$$
$$=2(n^2-3p).$$

واضح است که اگر x_1 و x_2 و x_3 حقیقی باشند، عبارت Δ_1 تنها وقتی‌مساوی صفر می‌شود که هرسه ریشهٔ x_1 و x_2 و x_3 باهم برابر باشند.

بنابراین‌اگر مبینΔازمعادلهٔ درجه‌سوم $x^3+nx^2+px+q=0$ برابر صفرباشد، وقتی‌که $n^2-3p\neq 0$ باشد، دوریشهٔ معادله برابر وریشهٔ سوم متمایز ازآنهاست و وقتی که $n^2-3p=0$ باشد هرسه ریشهٔ معادله‌باهم برابر است.

متذکر می‌شویم‌که اگر درکثیرالجملهٔ درجه سوم:

$$x^3+nx^2+px+q$$

مجهول جدید yرا باشرط $x=y-\frac{n}{3}$ انتخاب کنیم، ایــن کثیرالجمله به‌صورت y^3+Py+Q درمی‌آید، یعنی فاقدجملهٔ شامل درجه دوم‌خواهد شد (ما روابطی‌که P وQ را برحسب n و p و q بدست می‌دهد ننوشته‌ایم، پیداکردن این روابط مشکل نیست). بنابراین هر معادلهٔ دلخواه درجه سوم را می‌توان به‌صورت زیرنوشت:

$$y^3+Py+Q=0$$

وقتی‌که معادلهٔ درجه سوم به این‌صورت باشد، عبارتهایΔ وΔ_1 ساده‌می‌شوند:

$$\Delta=-4p^3-27q^2,$$

$$\Delta_1=-6P$$

تمرین

۲۶۵. ثابت‌کنیدکه اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم

$$x^3-px-2q=0$$

(p و q اعدادی حقیقی هستند) اعداد صحیح باشند، عبارت p^3-27q^2 مجذورکامل است.

۲۹. استفاده ازمبین برای اثبات نامساویها

ازنتایج بندقبل ، می‌توان قضیهٔ زیر اثبات‌کرد .

قضیه. σ_1 ، σ_2 و σ_3 را اعدادی‌حقیقی می‌گیریم . برای‌اینکه هرسه‌عدد x ، y وz که از دستگاه معادلات زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} x+y+z=\sigma_1 \\ xy+xz+yz=\sigma_2 \\ xyz=\sigma_3 \end{cases}$$

حقیقی باشند، لازم وکافی است‌که مبین $\Delta(x, y, z)$ (رابطهٔ ۱۰) غیرمنفی باشد (تساوی $\Delta(x, y, z)=0$ تنها درحالتی صحیح است‌که بین اعداد xو y وz ، لااقل دوعدد باهم برابر باشند) .

اثبات. طبق قضیه‌ای‌که در صفحهٔ ۸۹ ثابت‌کردیم ، عددهای x ، y وz ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم زیرهستند :

$$u^3-\sigma_1 u^2+\sigma_2 u-\sigma_3=0$$

که همهٔ ضرایب آن حقیقی هستند . بنابراین ، باتوجه به قضیهٔ صفحهٔ ۱۳۸ ، این عددها تنها وقتی حقیقی هستندکه $\Delta(x, y, z)\geqslant 0$ باشد.

نتیجه. برای اینکه عددهای x وy وz نه تنها حقیقی ، بلکه ضمناً غیر منفی هم باشند، لازم وکافی است‌که علاوه برشرط $\Delta(x, y, z)\geqslant 0$ روابطزیر راهم داشته باشیم :

$$\sigma_1\geqslant 0 \;;\; \sigma_2\geqslant 0 \;;\; \sigma_3\geqslant 0 \qquad (۱۲)$$

واضح است‌که اگر عددهای x و y و z غیر منفی باشند ، نامساویهای (۱۲) برقرار است .

برعکس فرض می‌کنیم‌که برای عددهای حقیقی x و y وz نامساویهای (۱۲) برقرار باشند، ثابت می‌کنیم‌که دراینصورت این عددها غیرمنفی‌اند .

عددهای x و y و z ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند :

$$u^3-\sigma_1 u^2+\sigma_2 u-\sigma_3=0 \qquad (*)$$

بنابراین کافی است ثابت‌کنیم‌که این‌معادله ، ریشهٔ منفی ندارد . فرض‌می‌کنیم $u=-v$. معادلهٔ درجه سوم به‌صورت‌زیر درمی‌آید :

$$v^3+\sigma_1 v^2+\sigma_2 v+\sigma_3=0$$

چون $\sigma_1\geqslant 0$ و $\sigma_2\geqslant 0$ و $\sigma_3\geqslant 0$ می‌باشد، به ازاء هرمقدار مثبت v ، سمت‌چپ این معادله ، مقداری مثبت می‌شود . یعنی این معادله ، ریشهٔ مثبت ندارد . وچون $u=-v$ بود ، معادلهٔ $(*)$ریشهٔ منفی نخواهد داشت . قضیه ثابت‌شد.

متذکر می‌شویم‌که چون نامساوی $\Delta(x, y, z)\geqslant 0$ شرط لازم وکافی برای حقیقی بودن سه‌عدد x و y و z است، هرحکمی‌که درمورد مقادیر σ_1 و σ_2 و σ_3 به‌ازاء مقادیرحقیقی x و y و z هم صادق باشد، می‌توان از نامساوی $\Delta(x, y, z)\geqslant 0$ نتیجه‌گرفت . مثلا هرنامساوی‌که به مقادیر σ_1 و σ_2 و σ_3 ، برای مقادیرحقیقی x و y و z مربوط باشد، می‌تواند ازنامساوی $\Delta(x,y,z)\geqslant 0$ نتیجه شود . بهمین‌ترتیب ، هرنامساوی مربوط به مقادیر σ_1 و σ_2 و σ_3 راکه برای مقادیرغیرمنفی x و y و z صادق‌باشد، می‌توان ازنامساوی $\Delta(x,y,z)\geqslant 0$ ونامساویهای (۱۲) نتیجه‌گرفت. دراینحالت‌استفاده ازرابطهٔ $\Delta(x,y,z)\geqslant 0$ ونامساویهای (۱۲) می‌تواند روش‌کلی اثبات نامساویها باشد. ولی این روش کلی، اغلب‌کار را به عملیات‌بغرنج وطولانی می‌کشاند، بهمین مناسبت بودکه در بند۲۴ ازاین روش‌کلی استفاده نکردیم وروش ساده‌تری را بیان نمودیم.

به عنوان مثال نشان می‌دهیم‌که چگونه از نامساوی $\Delta(x, y, z)\geqslant 0$ می‌توان نامساوی (۷) را نتیجه‌گرفت . (متذکر می‌شویم‌که تمام نامساویهای بند ۲۴ را ازنامساوی (۷) نتیجه‌گرفتیم) . بااستفاده ازرابطهٔ ۱۰ .نامساوی $\Delta(x, y, z)\geqslant 0$ راکه بـرای همهٔ مقادیر حقیقی x و y و z صحیح است ، می‌نویسیم :

$$\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_2^3-4\sigma_1^3\sigma_3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2\geqslant 0$$

سمت چپ این نامساوی را به صورت کثیرالجمله‌ای نسبت به σ_3 در نظر می‌گیریم و به‌ترتیب زیر تبدیل می‌کنیم :

$$\Delta(x, y, z)=\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_2^3-4\sigma_1^3\sigma_3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2=$$

$$=-27\left[\sigma_3^2+\left(\frac{4}{27}\sigma_1^3-\frac{2}{3}\sigma_1\sigma_2\right)\sigma_3+\left(\frac{4}{27}\sigma_2^3-\frac{1}{27}\sigma_1^2\sigma_2^2\right)\right]=$$

$$=-27\left\{\left[\sigma_3+\left(\frac{2}{27}\sigma_1^3-\frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2\right)\right]^2+\left(\frac{4}{27}\sigma_2^3-\frac{1}{27}\sigma_1^2\sigma_2^2\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2}{27}\sigma_1^3-\frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2\right)^2\right\}=-27\left(\sigma_3+\frac{2}{27}\sigma_1^3-\frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2\right)^2+$$

$$+\left(\frac{4}{27}\sigma_1^6-\frac{4}{3}\sigma_1^4\sigma_2+4\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_2^3\right)=$$

$$=-27\left(\sigma_3+\frac{2}{27}\sigma_1^3-\frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2\right)^2+\frac{4}{27}(\sigma_1^2-3\sigma_2)^3.$$

وازآنجاکه $\Delta(x, y, z)\geqslant 0$ است، داریم :

$$-27\left(\sigma_3+\frac{2}{27}\sigma_1^3-\frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2\right)^2+\frac{4}{27}(\sigma_1^2-3\sigma_2)^3\geqslant 0$$

یا :

$$\frac{4}{27}(\sigma_1^2-3\sigma_2)^3\geqslant 27\left(\sigma_3+\frac{2}{27}\sigma_1^3-\frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2\right)^2$$

واضح است که‌سمت‌راست نامساوی اخیرغیرمنفی است وبنابراین خواهیم‌داشت:

$$\frac{4}{27}(\sigma_1^2-3\sigma_2)^3\geqslant 0 \implies (\sigma_1^2-3\sigma_2)^3\geqslant 0$$

بالاخره اگر ازطرفین نامساوی کعب بگیریم (این عمل جهت‌نامساوی راتغییر نمی‌دهد) ، نامساوی مطلوب $\sigma_1^2-3\sigma_2\geqslant 0$ بدست می‌آید .

تمرین

۲۶۶. ثابت کنید که اگر عددهای حقیقی a و b و c در شرایط $abc>0$ و $a+b+c>0$ صدق کنند، به‌ازاء همهٔ مقادیر طبیعی n داریم:

$$a^n+b^n+c^n>0$$

۳۰. تبدیل زوج و تبدیل فرد

تعریف عبارتهای متقارن نسبت به سه متغیر x و y و z را، که درصفحهٔ ۶۷ ذکر کردیم، می‌توان به‌طریق دیگری هم عنوان کرد. تبدیلات مختلف x و y و z را درنظر می‌گیریم. این تبدیلات شش‌نوع‌اند: x می‌تواند به هریك ازسه متغیر x و y و z وسپس درهریك ازاین سه حالت، y به‌یکی از دومتغیر بقیه تبدیل‌شود. به‌این ترتیب شش نوع تبدیل بدست می‌آید (وقتی که معلوم باشد x و y به چه متغیری تبدیل می‌شوند، برای y یك حالت باقی میماند: z تنها می‌تواند به متغیر باقیماندهٔ سوم تبدیل شود). این شش نوع تبدیل ممکنهٔ متغیرهای x و y و z را درجدول زیرنشان داده‌ایم؛

$$\begin{matrix} x & y & z\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ x&z&y\end{matrix}\qquad\qquad \begin{matrix} x & y & z\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ z&y&x\end{matrix}\qquad\qquad \begin{matrix} x & y & z\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ y&x&z\end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x & y & z\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ x&y&z\end{matrix}\qquad\qquad \begin{matrix} x & y & z\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ y&z&x\end{matrix}\qquad\qquad \begin{matrix} x & y & z\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ z&x&y\end{matrix}$$

درسه تبدیل‌اول (سطر بالا) ازسه متغیر، دومتغیرجای‌خودرا باهم عوض‌می‌کنند وسومی ثابت می‌ماند. به‌عبارت دیگر، سطر بالا تمام انواع تبدیلات دو متغیر را بما می‌دهد. اولین تبدیل سطر پائین یك اتحاد است، یعنی هیچیك از متغیرها تغییر نمی‌کنند. دو تبدیل آخر سطر پائین **تبدیل‌دوری** نام دارند.

این نامگذاری به‌این مناسبت است که متغیرها متوالیاً جای‌خودرا به‌یکدیگر می‌دهند (مثلا دراولین‌آنها x به y و y به z و z به x تبدیل می‌شود) ، یعنی می‌توان این‌دوتبدیل را به‌صورت یك‌حلقة یا به‌زبان ریاضی به صورت یك‌دور نشان داد :

بنابراین در تبدیل دوری ، هریك از متغیرها بطور دایره‌ای به متغیر بعدی تبدیل می‌شود .

طبق تعریف ،کثیرالجملهٔ $f(x, y, z)$ متقارن است، به‌شرطی‌که با تبدیل هردو مجهول دلخواه آن به یکدیگر تغییر نکند ، یعنی به شرطی با تبدیلات مذکور درسطر بالای جدول فوق تغییر نکند . البته هـر کثیرالجملهٔ متقارن (وبطورکلی هرکثیرالجملهٔ دلخواه) ضمن تبدیل اتحادی (یعنی وقتی که مقدار هیچیك ازمتغیرهای‌آن تغییرنکند) تغییر نمی‌کند .

سئوالی پیش می‌آید؛ آیاکثیرالجمله‌های متقارن ضمن تبدیل دوری هم بدون تغییر می‌مانند؟ بنظر می‌رسدکه جواب این‌سئوال مثبت‌است. درحقیقت یك‌تبدیل دوری‌را می‌توان به‌این ترتیب بدست‌آوردکه در دو تبدیل متوالی، هربار جای دومتغیر را باهم عوض‌کنیم . مثلا اگر ابتدا جای x و y و سپس جای x و z را باهم عوض‌کنیم، مثل اینست‌که x را به y و y را به z و z را به x تبدیل‌کرده‌ایم ، یعنی یك تبدیل دوری انجام داده‌ایم . ولی در هـر تبدیل دومتغیر به یکدیگر ،کثیرالجملهٔ متقارن ثابت می‌ماند، بنابراین اگر دومرتبه بطور متوالی این‌تبدیل را انجام دهیم، یعنی با تبدیل دوری ، بازهم کثیرالجملهٔ متقارن ثابت می‌ماند :

$$f(x, y, z)=f(y, z, x)=f(z, x, y).$$

به این ترتیب کثیرالجمله‌های متقارن سه متغیره را می‌توان به این ترتیب تعریف کرد :

کثیرالجمله‌ای را نسبت به‌سه متغیر متقارن گوئیم، وقتی‌که ضمن‌هرگونه تبدیل متغیرها، ثابت بماند .

تبدیلاتی راکه درجدول صفحهٔ ۱۴۳ درسطر بالا نوشته‌ایم تبدیلات **فرد** وآنهائی راکه درسطر پائین نوشته‌ایم تبدیلات **زوج** گویند . این‌نامگذاری به این‌مناسبت است‌که برای بدست‌آوردن هریك ازتبدیلات سطر پائین باید تبدیل دومتغیررا به یکدیگر به تعدادزوج انجام داد (برای هریك‌ازتبدیلات دوری ۲ مرتبه‌وبرای تبدیل اتحادی‌صفرمرتبه)، درحالیکه درهریك‌ازتبدیلات سطر بالاتنهایك‌مرتبه (یعنی به‌تعدادفرد) جای دومتغیررا باهم‌عوض‌می‌کنیم*.

حالا به‌بینیم وضع کثیرالجمله‌های متقارن منفی ، ضمن این تبدیلات ، چگونه است؟ طبق‌تعریف، این کثیرالجمله‌ها ضمن تبدیل فرد(یعنی ضمن‌تبدیل دومتغیر به‌یکدیگر- سطر بالای‌جدول) تغییرعلامت‌می‌دهند.ولی کثیرالجمله‌های متقارن منفی ضمن تبدیل زوج تغییر نمی‌کنند، زیرا اگر به تعداد زوج‌جای دومتغیر را باهم عوض‌کنیم ، در هر بار علامت کثیرالجملهٔ متقارن منفی عوض می‌شود، یعنی نتیجهٔ کل‌تبدیلات تغییری نمی‌کند .

به این‌ترتیب، هم‌عبارتهای متقارن وهم‌عبارتهای متقارن‌منفی ضمن تبدیل‌زوج نسبت به‌متغیرهای x و y و z تغییر نمی‌کنند (ضمناً عبارتهای متقارن ضمن تبدیل فردهم تغییر نمی‌کنند، درحالیکه عبارتهای متقارن منفی ضمن این تبدیل تغییرعلامت می‌دهند) .

---

*) می‌توان ثابت‌کرد (که ما احتیاجی به آن نداریم) که بطورکلی اگر جای‌دو متغیررا به تعدادزوج باهم عوض‌کنیم، یکی ازتبدیلات سطر پائین بدست می‌آید واگر تبدیل دومتغیر را به‌یکدیگر به تعداد فرد انجام دهیم، به‌یکی از تبدیلات سطربالا می‌رسیم .

۳۱.کثیرالجمله‌های متقارن زوج

طبعاً در بررسی انواع کثیرالجمله‌ها ، می‌توان کثیرالجمله‌های متقارن ومتقارن منفی را تحت یك‌عنوان تعریف کرد .کثیرالجمله‌ای را متقارن زوج گوئیم، وقتی که ضمن تبدیل زوج نسبت به x و y و z تغییر نکند وهمانطور که قبلا دیدیم، هم کثیرالجمله‌های‌متقارن وهم کثیرالجمله‌های متقارن‌منفی، درشمار کثیرالجمله‌های متقارن زوج هستند .

سئوالی‌پیش می‌آید: دامنهٔ کثیرالجمله‌هائی که بدین‌ترتیب بدست‌می‌آید چقدراست ؟ بنظر می‌رسد که این‌دامنه خیلی وسیع نباشد :

هر کثیرالجملهٔ متقارن‌زوج مجموعی است‌ازکثیرالجمله‌های متقارن و متقارن منفی .

برای اثبات ،کثیرالجملهٔ متقارن زوج دلخواهی مثل $P(x, y, z)$ درنظر می گیریم و درآن x وyرا بهم تبدیل می‌کنیم، پس از این تبدیل، در حالت‌کلی ،کثیرالجملهٔ دیگری مثل $Q(x, y, z)$ بدست می‌آید . ولی‌اگر درکثیرالجملهٔ $Q(x, y, z)$دوباره دومتغیر را بهم تبدیل‌کنیم، طبق‌تعریف، باید بهمان‌کثیرالجملهٔ $P(x, y, z)$ برسیم (زیرا دوتبدیل متوالی دو متغیر به یکدیگر برابراست با تبدیل‌زوج نسبت به x و y وz وبا تبدیل زوج هم کثیرالجملهٔ $P(x, y, z)$ تغییرنمی‌کند) . ازطرف دیگراگردرکثیرالجملهٔ $P(x, y, z)$جای هردو متغیردلخواه‌را بهم عوض‌کنیم بایدهمان‌کثیرالجملهٔ $Q(x, y, z)$ بدست آیدکه با تبدیل x و y به یکدیگر بدست آمده بود (ثابت‌کنید !) .

به این‌ترتیب هرتبدیل دومتغیر به یکدیگر P رابه Q و Q را به P تبدیل می‌کند . بنابراین‌کثیرالجملهٔ :

$$F(x, y, z)=P(x, y, z)+Q(x, y, z)$$

ضمن تبدیل هردو متغیردلخواه به یکدیگر ثابت می‌ماند (فقط جای‌جمله‌های آن عوض می‌شود)، یعنی این کثیرالجمله متقارن است .

همچنین کثیرالجملهٔ :

$$H(x, y, z) = P(x, y, z) - Q(x, y, z)$$

یك کثیرالجملهٔ متقارن منفی است. ولی‌داریم :

$$P(x, y, z) = \frac{1}{2}F(x, y, z) + \frac{1}{2}H(x, y, z)$$

به این ترتیب ثابت شدکه هرکثیرالجملهٔ متقـارن زوج عبارتست از مجموع کثیرالجمله‌های متقارن ومتقارن منفی .

ما طریقهٔ ساختن کثیرالجمله‌های متقارن و متقارن منفی را می‌دانیم ، بنابراین به‌نتیجهٔ زیرمی‌رسیم :

هرکثیرالجملهٔ متقارن زوج‌نسبت به سه‌متغیر x و y و z می‌تواندبصورت عبارتی ازکثیرالجمله‌های σ_1 و σ_2 و σ_3 و $T=(x-y)(x-z)(y-z)$ باشد. ضمناً عبارت‌حاصل نسبت به T ازدرجهٔ اول‌است، زیرا $T^2=\Delta$ عبارتی متقارن و بنابراین برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 قابل بیان است .

متذکر می‌شویم‌که همهٔ این مطالب برای‌کثیرالجمله‌های دو متغیره هم صحیح است . دراین‌حالت تنهادو نوع تبدیل وجود دارد :

$$\begin{matrix} x & y \\ \downarrow & \downarrow \\ y & x \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} x & y \\ \downarrow & \downarrow \\ x & y \end{matrix}$$

که اولین‌آنها (تبدیل x و y به یکدیگر) تبدیل فرد و دومی (که یك تبدیل اتحادی است) تبدیل زوج است . چون تبدیل‌زوج، تنها همان تبدیل اتحادی است ،کثیرالجمله‌ای متقـارن زوج است‌که در تبدیل اتحـادی تغییر نکند ، به‌عبارت دیگر هرکثیرالجملهٔ دومتغیره دلخواه رامی‌توان متقارن‌زوج‌بحساب

آورد . شبیه آنچه راکه در موردکثیرالجمله‌های سه متغیره گفتیم ، در مورد کثیرالجمله‌های دومتغیره می‌توان گفت :

هر کثیرالجملهٔ $P(x , y)$ از دو متغیر x و y عبارتست از مجموع کثیرالجمله‌های متقارن ومتقارن منفی .

به‌عبارت دیگر همیشه داریم :

$$P(x, y)=f(x, y)+(x-y)g(x, y)$$

که درآن f و g کثیرالجمله‌هائی متقارن‌هستند . اثبات شبیه حالت سه متغیره انجام می‌گیرد .

٦

مورد استعمال در جبر مقدماتی

III

۳۲. تجزیه به صورت ضرب

قضیه‌ای را که در بند۲۷ دربارهٔ کثیرالجمله‌های متقارن‌منفی ثابت‌کردیم اهمیت فوق‌العاده‌ای در ساده‌کردن حل مسائل جبر مقدماتی دارد. چون هر کثیرالجملهٔ متقارن منفی نسبت به سه متغیر x و y و z بر کثیرالجملهٔ :

$$T(x, y, z) = (x-y)(x-z)(y-z)$$

قابل‌قسمت است، می‌توانیم بلافاصله هر کثیرالجملهٔ متقارن منفی $f(x, y, z)$ را به‌صورت ضرب تجزیه‌کنیم :

$$f(x, y, z)=T(x, y, z)\cdot g(x, y, z) \qquad (*)$$

$g(x, y, z)$ یك کثیرالجملهٔ متقارن است و بنوبهٔ خود ، اغلب قابل تجزیه است (بند۲۲ را به‌بینید) . متذکر می‌شویم که برای جستجوی خارج‌قسمت :

$$g(x, y, z)=\frac{f(x, y, z)}{T(x, y, z)}$$

صلاح برتقسیم مستقیم کثیرالجملهٔ متقارن منفی $f(x, y, z)$ برعبارت درجه سوم $T(x, y, z)$ نیست. ساده‌ترین‌راه (وقتی که درجهٔ $f(x, y, z)$ خیلی بالا نباشد) استفاده ازمقادیر خاص است .

بخصوص در حالتی که کثیرالجملهٔ متقارن منفی $f(x, y, z)$ از درجهٔ سوم باشد، خارج‌قسمت

$$\frac{f(x, y, z)}{T(x, y, z)} \qquad (**)$$

ازدرجهٔ صفر، یعنی عددثابت است وداریم :

$$f(x, y, z)=k\cdot T(x, y, z)$$

این رابطه یك اتحاد، یعنی به ازاء همهٔ مقادیر x و y و z صحیح است. بنابراین برای تعیین k کافی‌است درتساوی اخیر به x و y و z مقادیر عددی دلخواه (والبته مختلف) نسبت دهیم تامقدار k بدست‌آید .

اگر کثیرالجملهٔ متقارن منفی $f(x, y, z)$ از درجهٔ چهارم باشد ، خارج‌قسمت (**) کثیرالجملهٔ متقارنی ازدرجهٔ اول، یعنی بصورت $k\sigma_1$ است (k عدد ثابت است) :

$$f(x, y, z)=k\cdot T(x, y, z)\cdot\sigma_1$$

که بازهم برای بدست آوردن ضریب k ، می‌توان در دو طرف تساوی به

x و y و z مقادیری عددی نسبت داد .

بهمین‌ترتیب ، اگر کثیرالجملهٔ متقارن منفی ومتجانس $f(x , y , z)$ ازدرجهٔ پنجم باشد، خارج‌قسمت (**) کثیرالجملهٔ متقارن متجانس درجه‌دوم یعنی به صورت $k\sigma_1^2+l\sigma_2$ خواهد بود (k و l ضرایب ثابت‌اند) :

$$f(x, y, z)=T(x, y, z)\cdot(k\sigma_1^2+l\sigma_2).$$

که برای پیداکردن k و l کافی است دوبار، مقادیر عددی به x و y و z نسبت بدهیم .

اگر $f(x, y, z)$ ، کثیرالجملهٔ متقارن‌منفی متجانس و ازدرجهٔ ششم باشد، داریم :

$$f(x, y, z)=T(x, y, z)\cdot(k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3)$$

و غیره .

چند مثال

۱. عبارت زیررا به‌صورت ضرب تجزیه‌کنید :

$$f(x, y, z)=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$$

روشن است که این‌عبارت، متقارن منفی است، علاوه برآن ازدرجهٔ سوم است و بنابراین داریم :

$$f(x, y, z)=k\cdot T(x, y, z)$$

برای پیداکردن ضریب k فرض می‌کنیم $x=0$ ، $y=1$ و $z=2$ ، بدست می‌آید $-2k=6$ یا $k=-3$ وبنابراین :

$$(x-y)^3+(x-z)^3+(z-x)^3=-3(x-y)(x-z)(y-z)=$$

$$=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

۲. این عبارت را تجزیه‌کنید :

$$f(x, y, z)=yz(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)+xy(x^2-y^2).$$

طبق‌آنچه قبلاً گفتیم داریم :

$$f(x, y, z)=k\cdot T(x, y, z)\sigma_1.$$

یعنی :

$$yz(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)+xy(x^2-y^2)=$$
$$=k(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z).$$

که اگر $x=0$ ، $y=1$ و $z=2$ قرار دهیم $k=1$ بدست می‌آید و بنابراین :

$$yz(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)+xy(x^2-y^2)=$$
$$=(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$$

۴. کثیرالجمله زیررا به صورت ضرب تجزیه کنید :

$$f(x, y, z)=x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)$$

این کثیرالجملهٔ متقارن‌منفی ازدرجهٔ پنجم است و بنابراین داریم :

$$f(x, y, z)=T(x, y, z)\cdot(k\sigma_1^2+l\sigma_2).$$

در این اتحاد $x=-1$ ، $y=0$ و $z=1$ قرار می‌دهیم که دراینصورت $\sigma_1=0$ ، $\sigma_2=-1$ ، $f(x, y, z)=2$ و $T(x, y, z)=-2$ می‌شود واز آنجا $l=1$ بدست می‌آید . همچنین اگر فرض کنیم $x=0$ ، $y=1$ و $z=2$ بدست می‌آید $-2(9k+2l)=-4$ که با توجه به $l=1$ بدست می‌آید $k=0$ و بنابراین خواهیم داشت :

$$f(x, y, z)=x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)=$$
$$=(x-y)(x-z)(y-z)(xy+xz+yz)$$

تمرینات

عبارتهای متقارن‌منفی زیررا به‌صورت ضرب عوامل تجزیه‌کنید :

۲۶۷. $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$

۲۶۸. $(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+(c-a)\times$

$\times(a+b-c)(-a+b+c)+(a-b)(-a+b+c)(a-b+c)$

۲۶۹.

$(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2$

۲۷۰. $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

۲۷۱. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

۲۷۲. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

۲۷۳. $x(y+z)(y^2-z^2)+y(z+x)(z^2-x^2)+$

$+z(x+y)(x^2-y^2)$

۲۷۴.

$(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3$

۲۷۵. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$

۲۷۶.

$(b-c)(b+c)^4+(c-a)(c+a)^4+(a-b)(a+b)^4$

۲۷۷ $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$

۲۷۸. $a^2(a+b)(a+c)(b-c)+b^2(b+c)\times$

$\times(b+a)(c-a)+c^2(c+a)(c+b)(a-b)$

۲۷۹. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

۲۸۰. $a^2(b-c)(c+a-b)(a+b-c)+b^2(c-a)\times$

$\times(a+b-c)(b+c-a)+c^2(a-b)(b+c-a)(c+a-b)$

۲۸۱. ثابت کنید که به ازاء مقادیر طبیعی p و q کثیرالجملهٔ

$x^q\cdot y^r+y^q\cdot z^r+z^q\cdot x^r-x^r\cdot y^q-y^r\cdot z^q-z^r\cdot x^q$

بر $(x-y)(x-z)(y-z)$ قابل‌قسمت است.

۲۸۲. ثابت کنید که به ازاء مقادیر طبیعی p و q و r کثیرالجملهٔ :

$$x^p\cdot y^q\cdot z^r+y^p\cdot z^q\cdot x^r+z^p\cdot x^q\cdot y^r-x^r\cdot y^q\cdot z^p-y^r\cdot z^q\cdot x^p-$$
$$-z^r\cdot x^q\cdot y^q$$

بر $(x-y)(x-z)(y-z)$ قابل‌قسمت است .

۲۸۳. ثابت کنید که اگر مقادیر x و y و z در رابطهٔ :

$$(y-z)\sqrt[3]{1-x^3}+(z-x)\sqrt[3]{1-y^3}+(x-y)\sqrt[3]{1-z^3}=0$$

صدق کنند، خواهیم داشت :

$$(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)=(1-xyz)^3$$

۳۳. اثبات اتحادها وساده‌کردن عبارتهای جبری

روشی راکه در بند قبل برای تجزیهٔ عبارتهای جبری بکار بردیم ، می‌توان به سادگی برای حل بسیاری‌از مسائل دیگر جبرهم مورد استفاده‌قرار داد . مثلاً می‌توان از این روش برای اثبات اتحادهائی استفاده کرد که در دوطرف تساوی‌آن عبارتهای متقارن منفی قرار گرفته باشند. همچنین اگر در صورت ومخرج کسری عبارتهای متقارن منفی نسبت به سه متغیر وجود داشته باشد، می‌توان کسررا به‌عبارت $T(x،y،z)$ ساده کرد . چندمثال ذکر کنیم.

۱. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)=$$
$$=[a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)](a+b)(b+c)(c+a)$$

در هردوطرف تساوی کثیرالجمله‌های متقارن‌منفی، ازدرجهٔ ششم، قرار گرفته‌اند، سمت چپ تساوی را می‌توان چنین نوشت :

$$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)=$$
$$=T(a،b،c)\cdot(k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3).$$

که درآن $T(a،b،c)=(a-b)(a-c)(b-c)$ و k ، l ، m ضرایب

ثابت نامعلومی هستند . اگر فرض کنیم $a=-1$ ، $b=-2$ و $c=3$ ، از تساوی مفروض بدست می‌آید $-120=20\times 6m$ و یا $m=-1$.

سپس اگر فرض کنیم $a=1$ ، $b=2$ ، $c=-\frac{2}{3}$ (این مقدار را بااین مناسبت انتخاب کردیم که $\sigma_2=0$ شود) ، بدست می‌آید :

$$-\frac{160}{27}=-\frac{40}{9}\left(\frac{343}{27}k-\frac{4}{3}m\right)$$

ازآنجا بادرنظر گرفتن $m=-1$ بدست می‌آید $k=0$. بالاخره با درنظر گرفتن $a=0$ ، $b=1$ و $c=2$ به سادگی مقدار $l=1$ بدست می‌آید . به این ترتیب سمت چپ تساوی چنین می‌شود :

$$T(a,b,c)\cdot(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)$$

حالا به عبارت سمت راست تساوی توجه می‌کنیم . دراین عبارت، مقدار داخل کروشه یك کثیرالجملهٔ متقارن منفی از درجه سوم و بنابراین به صورت $p\cdot T(a,b,c)$ است که درآن p ضریب ثابتی است . اگر به a و b و c مقادیر ثابتی نسبت بدهیم (مثلا $a=0$ ، $b=1$ و $c=2$) به سادگی مقدار $p=1$ بدست می‌آید . بنابراین مقدار داخل کروشه برابر $T(a,b,c)$ است. ازاینجا برای اثبات اتحاد کافی است ثابت کنیم :

$$(a+b)(b+c)(c+a)=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$$

تحقیق آن مشکل نیست (مثال ۱ صفحهٔ ۱۰۳ را به‌بینید) .

۴. عبارت زیررا ساده کنید :

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}$$

اگر بیك مخرج تبدیل کنیم، داریم :

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=$$

$$=\frac{(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(a+b)(c+a)+(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

صورت کسر در سمت راست تساوی، کثیرالجملهٔ متقارن منفی ازدرجهٔ سوم است وبنابراین برعبارت $T(a, b, c)=(a-b)(a-c)(b-c)$ قابل‌قسمت است یعنی :

$$(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(a+b)(c+a)+$$
$$+(c-a)(a+b)(b+c)=k(a-b)(a-c)(b-c)$$

که به سادگی $k=1$ بدست می‌آید وبنابراین :

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

تمرینات

۲۸۴ ثابت کنید که به ازاء $a+b+c=0$ اتحاد زیر صحیح‌است:

$$\left(\frac{a^2}{b-c}+\frac{b^2}{c-a}+\frac{c^2}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a^2}+\frac{c-a}{b^2}+\frac{a-b}{c^2}\right)=$$
$$=4abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

عبارتهای زیررا ساده‌کنید :

۲۸۵. $$\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{a-b}{a+b}+\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

۲۸۶. $$\frac{x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$$

۲۸۷. $$\frac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}$$

۲۸۸. $$\frac{x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)}{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}$$

۲۸۹. $$\frac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$$

۲۹۰. $$\frac{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$$

۲۹۱.

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

۲۹۲.

$$\frac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b^2(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c^2(c-a)(c-b)}$$

۲۹۳.

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

۲۹۴.

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}$$

۲۹۵.

$$\frac{a^2(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$$

۲۹۶. $$\frac{\frac{b^2-c^2}{a}+\frac{c^2-a^2}{b}+\frac{a^2-b^2}{c}}{\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}}$$

۲۹۷. اگر $x+y+z=0$ باشد، مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید:

$$\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right)$$

۲۹۸. دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} yz(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)+xy(x^2-y^2)=-12 \\ x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)=-22 \\ (x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=6 \end{cases}$$

۳۴. تجزیهٔ کثیرالجمله‌های متقارن سه متغیره به صورت ضرب

درحالت سه متغیره، تقارن کثیرالجمله‌ها، کار مربوط به تجزیهٔ آنها را خیلی ساده می‌کند. مثل حالت دومتغیره (بند ۱۲)، دراینجا هم عوامل ضرب ممکن است متقارن ویا غیرمتقارن باشند. ضمناً اگر ضمن تجزیهٔ عامل غیر متقارن $h(x, y, z)$ بدست آید، به‌مناسبت متقارن بودن عبارت اصلی، تمام تبدیلات $h(x, y, z)$ نسبت به متغیرهای x و y و z هم بدست خواهد آمد.

دربند ۳۰ دیدیم که متغیرهای x و y و z را می‌توان به شش نوع مختلف تبدیل کرد. بنابراین، درحالت کلی، باید همراه عامل غیرمتقارن $h(x, y, z)$ پنج عامل دیگر هم وجود داشته باشد، ولی اگر خود عامل $h(x, y, z)$ دارای تقارن نسبی باشد، تعداد عوامل اضافی کم می‌شود. مثلا اگر عامل $h(x, y, z)$ نسبت به x و y متقارن باشد یعنی داشته باشیم:

$$h(x, y, z)=h(y, x, z)$$

ضمن تبدیلات متغیرهای x و y و z، تنها دوعامل متمایز $h(y, z, x)$ و $h(z, x, y)$ علاوه بر عامل $h(x, y, z)$ بدست می‌آید (که با کمک تبدیلات دوری بدست می‌آیند). ویا اگر کثیرالجملهٔ $h(x, y, z)$ متقارن زوج باشد، یعنی داشته باشیم (بند ۳۱ را به‌بینید):

$$h(x, y, z)=h(y, z, x)=h(z, x, y)$$

دراینصورت تنها یک عامل $h(y, x, z)$ را باید اضافه کنیم.

به‌این ترتیب در تجزیهٔ کثیرالجملهٔ متقارن $f(x , y , z)$ باید عواملی به‌صورت زیر وجود داشته باشد :

۱) عامل متقارن $h(x , y , z)$ ؛

۲) حاصلضربی به‌صورت $h(x , y , z) \cdot h(y , x , z)$ ، که در آن $h(x , y , z)$ کثیرالجمله‌ایست که ضمن تبدیلات زوج تغییر نمی‌کند .

۳) حاصلضربی به صورت $h(x , y , z) \cdot h(y , z , x) \cdot h(z , x , y)$ ، که در آن $h(x , y , z)$ کثیرالجمله‌ایست متقارن نسبت به x و y .

۴) حاصلضربی به صورت :

$$h(x , y , z) \cdot h(y , x , z) \cdot h(x , z , y) \cdot h(z , x , y) \cdot h(y , z , x) \times \times h(z , y , x)$$

که در آن $h(x , y , z)$ کثیرالجمله‌ای است غیرمتقارن .

به‌بینیم که چگونه می‌توان از نکات مذکور برای تجزیهٔ کثیرالجمله‌های متقارن استفاده کرد . تجزیه به عوامل متقارن را در بند ۲۲ دیده‌ایم . بعد از آنکه کثیرالجمله را به عوامل متقارن تجزیه کردیم ، باید هریك از عوامل را (باکمك نکاتی‌که در این بند ذکر کردیم) به عوامل ساده‌تر تجزیه کنیم . به نمونه‌ای توجه کنیم .

۱. عبارت زیررا به عوامل‌ضرب تجزیه کنید :

$$f(x , y , z) = ۲x^۳ + ۲y^۳ + ۲z^۳ + ۷x^۲y + ۷xy^۲ + ۷x^۲z + + ۷xz^۲ + ۷y^۲z + ۷yz^۲ + ۱۶xyz .$$

تبدیل این‌عبارت به‌کثیرالجمله‌ای برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ و $\sigma_۳$ راه را برای تجزیه باز نمی‌کند . زیرا به‌کمك جدول صفحات ۷۴ و ۸۱ به سادگی بدست می‌آید :

$$f(x , y , z) = ۲\sigma_۱^۳ + \sigma_۱\sigma_۲ + \sigma_۳ ,$$

واین عبارت را نمی‌توان تجزیه‌کرد .

بنابراین عبارت مفروض دارای عوامل متقارن نیست و باید عوامل غیر متقارن آنرا جستجو کرد. ازآنجاکه عبارت مفروض $f(x, y, z)$ از درجهٔ سوم است، می‌تواند به سه عامل درجه اول (بدون مقدار ثابت) تجزیه‌شود. از اینجا نتیجه می‌شود که هریك ازعوامل نسبت به دومتغیر متقارن‌اند، زیرا در غیراینصورت می‌بایست بجای سه عـامل، شش عامل بدست می‌آوردیم (یعنی می‌بایست $f(x, y, z)$ ازدرجهٔ ششم باشد). کثیرالجملهٔ درجهٔ اول نسبت‌به x و y و z که نسبت به x و y متقارن باشد، بصورت $ax+ay+bz$ است.

بنابراین تجزیهٔ موردنظر به‌صورت زیر است :

$$\begin{aligned} &2x^3+2y^3+2z^3+7x^2y+7xy^2+7x^2z+\\ &\qquad +7xz^2+7y^2z+7yz^2+16xyz=\\ &=(ax+ay+bz)(ax+by+az)(bx+ay+az). \qquad (*) \end{aligned}$$

حالا باید مقادیر a و b را بدست‌آوریم. ابتدا در رابطهٔ $(*)$ $x=1$، $y=1$ و $z=1$ فرض می‌کنیم که ازآنجا بدست می‌آید :

$$64=(2a+b)^3 \Longrightarrow 2a+b=4$$

سپس $x=y=1$ و $z=-1$ می‌گیریم، بدست می‌آید :

$$(2a-b)b^2=0$$

بالاخره اگر $x=1$ و $y=z=0$ فرض‌کنیم به رابطهٔ $a^2b=2$ می‌رسیم که به معنای $b\neq 0$ است. بنابراین ازتساوی $(2a-b)b^2=0$، باتوجه به شرط $b\neq 0$، بدست می‌آید $2a-b=0$. به این‌ترتیب برای مقادیر a و b به دورابطهٔ زیر می‌رسیم :

$$\left|\begin{aligned} 2a+b&=4\\ 2a-b&=0 \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left|\begin{aligned} a&=1\\ b&=2 \end{aligned}\right.$$

و تجزیهٔ عبارت مفروض چنین می‌شود :

$$2x^3+2y^3+2z^3+7x^2y+7xy^2+$$
$$+7x^2z+7xz^2+7y^2z+7yz^2+16xyz=$$
$$=(x+y+2z)(x+2y+z)(2x+y+z).$$

که با بازکردن پرانتزهای سمت راست تساوی ، صحت تجزیه ثابت می‌شود .

در دو مثال زیر نمونه‌هائی را ذکر می‌کنیم که قابل تجزیه به عوامل نیستند .

۲. ثابت کنید که عبارت زیر را نمی‌توان به صورت ضرب عوامل تجزیه کرد :

$$f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4+3x^2y^2+3y^2z^2+3x^2z^2+8x^2yz+$$
$$+8xy^2z+8xyz^2$$

چون عبارت از درجهٔ چهارم است ، نمی‌تواند به سه ویا به شش عامل متجانس تجزیه شود . بنابراین اگر این عبارت قابل تجزیه باشد، یا عوامل تجزیه متقارنند ویا عبارتهای درجه دومی هستند که با تبدیلات دوری تغییر نمی‌کنند. ولی درحالت دوم هم عوامل باید متقارن باشند، زیرا بسادگی می‌توان ثابت کرد که کثیرالجملهٔ درجه دومی که ضمن تبدیلات دوری تغییر نکند ، متقارن است .

بنابراین بـاید ثابت کنیم که کثیرالجملهٔ $f(x,y,z)$ نمی‌تواند به عوامل متقارن تجزیه شود. برای این‌منظور کثیرالجمله را برحسب‌ساده‌ترین عبارتهای متقارن بیان می‌کنیم :

$$f(x,y,z)=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+6\sigma_1\sigma_3+5\sigma_2^2$$

به سادگی دیده می‌شود که کثیرالجملهٔ حاصل‌از σ_1 و σ_2 و σ_3 قابل تجزیه‌نیست (لااقل به این مناسبت که σ_3 تنها در یك جمله وجود دارد) . به این ترتیب کثیرالجملهٔ مفروض $f(x,y,z)$ دارای‌عوامل متقارن نیست .

۳. ثابت کنید که عبارت $x^3+y^3+z^3-nxyz$ تنها بازاء $n=3$

قابل تجزیه به صورت ضرب عوامل حقیقی است .

ابتدا عوامل متقارن را جستجو می‌کنیم، داریم :

$$x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}-nxyz=\sigma_{۱}^{۳}-۳\sigma_{۱}\sigma_{۲}+(۳-n)\sigma_{۳}$$

ولی عبارت $\sigma_{۱}^{۳}-۳\sigma_{۱}\sigma_{۲}+(۳-n)\sigma_{۳}$ تنها وقتی قابل‌تجزیه است که در آن $۳-n=\circ$ یعنی $n=۳$ باشد .

حالا ثابت می‌کنیم که عبارت $x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}-nxyz$ را نمی‌توان به صورت ضرب سه عامل درجه اول تجزیه کرد. چون این‌عوامل باید نسبت به دومتغیر متقارن باشند، باید داشته باشیم :

$$x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}-nxyz=$$
$$=(ax+ay+bz)(ax+by+az)(bx+ay+az).$$

با مقایسهٔ ضرایب $x^{۲}y$، دردوطرف تساوی $a^{۳}+a^{۲}b+ab^{۲}=\circ$ می‌شود وچون $a\neq\circ$ است(زیرا بامقایسهٔ ضرایب $x^{۳}$ دردوطرف تساوی $a^{۲}b=۱$ بدست می‌آید)، $a^{۲}+ab+b^{۲}=\circ$ می‌شود وواضح است که این‌معادله ریشهٔ‌حقیقی ندارد و بنابراین کثیرالجملهٔ $x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}-nxyz$ نمی‌تواند به عوامل حقیقی درجه اول تجزیه شود.

تمرینات

۲۹۹. عبارت $(a+b+c)^{۳}-a^{۳}-b^{۳}-c^{۳}$ را به‌صورت‌ضرب‌عوامل تجزیه کنید .

۳۰۰. کثیرالجملهٔ $(x+y+z)^{۵}-x^{۵}-y^{۵}-z^{۵}$ را به‌صورت‌ضرب عوامل تجزیه کنید .

۳۰۱. عبارت زیررا ساده‌کنید :

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ac}{(b+a)(b+c)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}+$$
$$+\frac{۲abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

۳۰۲. ثابت کنید که اگر عددهای حقیقی a و b و c در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1,$$

از سه کسر سمت چپ تساوی، دو کسر برابر $+1$ و سومی برابر -1 است.

۳۰۳. ثابت کنید که اگر مقادیر حقیقی a و b و c در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$$

خواهیم داشت (n عددی طبیعی است):

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{2n+1}+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^{2n+1}+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^{2n+1}=1$$

۷

کثیرالجمله‌هائی که نسبت به چند متغیر متقارن‌اند

۳۵. ساده‌ترین عبارتهای متقارن نسبت به چندمتغیر

حالا به مطالعهٔ کثیرالجمله‌هائی می‌پردازیم که نسبت به چند متغیر متقارن‌اند . اساسی‌ترین آنها را درفصلهای قبل، ضمن بررسی کثیرالجمله‌های متقارن دومتغیره وسه متغیره ، دیدیم . ولی برای رسیدن به متغیرهای بیشتر پیچیدگیهائی به وجود می‌آید .

تعریف کثیرالجمله‌های متقارن درحالت چندمتغیره ، کاملا شبیه حالت‌دو متغیره است : کثیرالجملهٔ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ از n متغیر x_1 و $x_2, \dots, x_n$ متقارن‌نامیده می‌شود، وقتی که‌با تبدیل هردو متغیر دلخواه آن به‌یکدیگر ، تغییر نکند. این تعریف‌را به طریق دیگری هم می‌توان بیان‌کرد (باتعریف‌صفحهٔ ۱۴۵ مقایسه‌کنید): کثیرالجملهٔ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را متقارن گوئیم‌وقتی که ضمن‌هر گونه تبدیل متغیرهای x_1 ، x_2 ، ... ، x_n تغییر نکند. به‌عبارت‌دیگر :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}),$$

که درآن i_1 و $i_2, \dots, i_n$ همان عددهای ۱ ، ۲ ، ... ، n ، منتهی با ترتیب دلخواه، هستند .

اکثر مفاهیم مربوط به‌کثیرالجمله‌های متقارن‌دویاسه متغیره رامی‌توان در حالت‌کلی هم تعریف‌کرد . مثلا **مجموع قوای متشابه** متغیرهای x_1, x_2 ، $x_3, \dots, x_n$ ازدرجهٔ k به عبارت زیر گفته می‌شود :

$$S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \dots + x_n^k.$$

ویا **مدار یك‌جمله‌ای** $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ به مجموع جمله‌هائی گفته‌می‌شود که از $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ ضمن تبدیل متغیرهـا بدست می‌آید . مثلا در حالت $n=4$ ، یعنی درحالت چهار متغیر x_1 و x_2 و x_3 و x_4 داریم :

$$O(x_1^2 x_2^3) = x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_3^3 + x_1^2 x_4^3 + x_2^2 x_1^3 +$$
$$+ x_2^2 x_3^3 + x_2^2 x_4^3 + x_3^2 x_1^3 + x_3^2 x_2^3 + x_3^2 x_4^3 + x_4^2 x_1^3 +$$
$$+ x_4^2 x_2^3 + x_4^2 x_3^3.$$

ودرحالت خاص :

$$S_k = O(x_1^k).$$

برای مطالب بعدی از یادآوری زیر استفاده می‌کنیم : برای بدست آوردن مدار یك‌جمله‌ای $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ می‌توان بجـای حروف x_1 و x_2

و ... و x_n ، توانهای α_1 ، α_2 ، ... α_n را جابجا کرد . البته ضمن نوشتن یك جملهای $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ باید به حروفی هم که درآن وجود ندارند (یعنی باتوان صفرهستند) ، توجه کرد . مثلا درحالت کثیرالجملههای چهار متغیره، یك‌جملهای $x_1^2x_2^3$ را (که مدارآنرا دربالا نوشتیم) باید بهصورت $x_1^2x_2^3x_3^0x_4^0$ نوشت وسپس تمام انواع تبدیلات توانها را درنظر گرفت .

علاوه برآن متذکر میشویم که مدار یك‌جمله ، ازهرجملهٔ دلخواه‌آن، می‌تواند بهوجودآید :

$$O(x_1^4x_2^2x_3^0)=O(x_1^0x_2^4x_3^2)=O(x_1^2x_2^0x_3^4)=\dots$$

با مختصر تفاوتی می‌توان ساده‌ترین عبارتهای متقارن را هم تعریف کرد . برای‌اینکه این تعریف را بدست‌آوریم ، بخاطر بیاوریم که این‌عبارتها رادر موردکثیرالجملههای سه متغیره چگونه تعریف می‌کردیم . در این حالت سه عبارت داشتیم :

$$\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+x_3,\\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,\\ \sigma_3=x_1x_2x_3.\end{cases}$$

اولین آنها عبارتست از مجموع تمام متغیرهای x_1 و x_2 و x_3 یعنی مدار جملهٔ x_1 :

$$\sigma_1=O(x_1)$$

دومین‌عبارت ازراه جستجوی همهٔانواع‌تبدیل x_1x_2 وجمع آنها بدست‌می‌آید. بعبارت دیگر این‌عبارت ، همان مدار x_1x_2 است :

$$\sigma_2=O(x_1x_2)$$

وبالاخره σ_3 عبارتست از مدار $x_1x_2x_3$ (در حالت مفروض ، این مدار از یك‌جمله تشکیل شده است) . شبیه همین وضع‌را برای حالتی‌که باچند متغیر سر وکار داشته باشیم، درنظر می گیریم :

$$\sigma_1 = O(x_1),$$
$$\sigma_2 = O(x_1 x_2),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\sigma_k = O(x_1 x_2 \cdots x_k),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\sigma_n = O(x_1 x_2 \cdots x_n).$$

ازاینجا معلوم می‌شود که تعداد ساده‌ترین عبارتهای متقارن برابر با تعداد متغیرهاست.

کثیرالجمله‌های σ_1 ، σ_2 ، ... ، σ_n را می‌توان به‌ترتیب زیر توضیح داد. اولین آنها مجموع سادهٔ همهٔ n متغیر است:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

کثیرالجملهٔ دوم، مجموع همهٔ انواع ممکنهٔ حاصلضربهای دو به‌دوی متغیرهاست. یعنی:

$$\begin{aligned}\sigma_2 = {} & x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_{n-1} + x_1x_n + \\ & + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_{n-1} + x_2x_n + \\ & + \cdots\cdots + \\ & + x_{n-1}x_n,\end{aligned}$$

ویا بطورخلاصه:

$$\sigma_2 = \sum_{\substack{i,\,j=1 \\ i<j}}^{n} x_i x_j$$

(علامت $\sum$ به‌معنی مجموع است؛ نشانه‌های پائین وبالای آن به معنای آنست که مقادیر i و j از ۱ تا n تغییر می‌کنند و ضمناً در هرجمله نشانهٔ پائین x در عامل اول کوچکتر ازعامل دوم است).

بهمین ترتیب برای کثیرالجملهٔ سوم σ_3 باید متغیرهارا سه‌به‌سه درهم‌ضرب وسپس باهم جمع کرد . یعنی :

$$\sigma_3 = \sum_{\substack{i, j, l=1 \\ i<j<l}}^{n} x_i \cdot x_j \cdot x_l$$

و بطورکلی کثیرالجملهٔ k ام به صورت زیراست :

$$\sigma_k = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k=1 \\ i_1<i_2<\ldots<i_k}}^{n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

و بالاخره کثیرالجملهٔ آخر ، حاصلضرب همهٔ متغیرهاست :

$$\sigma_n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n \cdot$$

واضح است که کثیرالجملهٔ σ_k متجانس ونسبت به متغیرهای x_1 و x_2 و...و x_n ازدرجهٔ k است .

مثال . اگر $n=4$ باشد، ساده‌ترین عبارتهای متقارن چنین است :

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$,

$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$,

$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$,

$\sigma_4 = x_1x_2x_3x_4$

برای خواننده‌ای که با آنالیز ترکیبی آشنا باشد، به سادگی ثابت می‌شود که تعداد جملات ساده‌ترین عبارت متقارن از درجهٔ k نسبت به n متغیر برابر است با ترکیب n حرف k به k یعنی برابر است با :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

۳۶. قضیهٔ اصلی مربوط به‌کثیرالجمله‌های متقارن نسبت به‌چندمتغیر

درست مثل حالت دو وسه متغیره ، هر کثیرالجملهٔ متقارن n متغیره‌را می‌توان به‌صورت کثیرالجمله‌ای ازساده‌ترین عبارتهای متقارن σ_1 ، σ_2 ،...، σ_n نوشت . به عبارت دیگر قضیهٔ زیرصحیح است :

قضیه. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ راکثیرالجملهٔ متقارنی از n متغیر فرض می‌کنیم . دراینصورت کثیرالجمله‌ای مانند $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ وجود دارد، که اگردرآن بجای σ_1 ، σ_2، ...وσ_n مقادیرشان را برحسب x_1 ، x_2،...وx_n یعنی :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n$$

قراردهیم ، کثیرالجمله‌ای‌متحدبا $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ بدست‌آیدوکثیرالجملهٔ $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ که دارای چنین خاصیتی باشد منحصر بفرد است .

این قضیه را می‌توان درست‌شبیه حالت سه متغیره ثابت‌کرد، تنها به‌علت اضافه شدن تعداد متغیرها ، بعضی بغرنجیها بوجود می‌آید .

ابتدا ثابت می‌کنندکه هـر مجموع قوای متشابهی می‌تواند بـرحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن بیان شود . بعدازآن ثابت می‌کنندکه‌مدارهر یك جمله‌ای‌که شامل k متغیر باشد، می‌تواند به وسیلهٔ مدارهائی ازجمله‌های بـا متغیرهای‌کمتر و درآخرکار به وسیلهٔ مجموع قوای متشابه‌بیان شود . بالاخره ثابت می‌کنندکه هرکثیرالجملهٔ متقـارن قابل بیـان برحسب مدارهای یك جمله‌ایهاست . برای انجام این اثبات به سادگی می‌توان از همان تعریفی‌که برای مدار قبلاکرده بودیم استفاده‌کرد وضمناً مفهوم مدارکامل راهم بکاربرد (صفحهٔ ۷۸ را به‌بینید) . مثلا اگر دریك جمله‌ای $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ همهٔ

توانهای k_1 ، k_2 ، ...، k_n مختلف باشند ، مدار $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n})$ دارای $n!$ جمله است که‌ازیك‌جمله‌ای مفروض باکمك‌همهٔ انواع تبدیلات‌ممکنه نسبت به متغیرهای x_1، x_2 ، ... ، x_n بدست می‌آید (میدانیم‌که با n متغیر x_1 ، x_2 ، ...، x_n می‌توان $n!$ تبدیل مختلف بدست آورد) . این‌عبارت‌را مدارکامل یك‌جمله‌ای $x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ می‌نامیم .

مدارکامل $O_\pi(x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n})$ را نه‌تنها درحالت مختلف‌بودن توانهای k_1 ، k_2،...، k_n (یعنی‌وقتی‌که بامدار عادی‌یکی‌است)، بلکه درهر مورددلخواه می‌توان‌بکاربرد. درحالت‌کلی‌مدارکامل $O_\pi(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})$ با مدار عادی $O(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})$ تنها در ضریب عددی فرق داردکه می‌توان آنرا به‌سادگی بدست‌آورد. میدانیم‌که‌برای توانهای دلخواه k_1، k_2،...، k_n مجموع ضرایب درمدارکامل برابر $n!$است . اگر فرض‌کنیم‌که بین‌توانهای k_1، k_2،...، k_n تعداد n_1 توان باهم برابر باشند، سپس n_2 توان‌برابر، با اولیها مختلف باشند وغیره تا بالاخره درگروه آخر n_l توان مساوی باهم وجود داشته باشد؛ داریم :

$$O_\pi(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}) = n_1!n_2!\dots n_l!O(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})$$

ما دراینجا ازجزئیات مربوط به اثبات قضیه‌گذشتیم وتنها طرحی از آن بر اساس مورد سه متغیره بیان‌کردیم ؛ ولی اثبات‌کامل ودقیق‌آن می‌تواندتمرین خوبی برای خواننده باشد .

برای اینکه وسیلهٔ‌کنترل‌کار دردسترس باشد ، روابط اساسی‌که دراین اثبات مورد استفاده قرار می‌گیرد ، ذکر می‌کنیم :

$$S_k=\sigma_1\cdot S_{k-1}-\sigma_2\cdot S_{k-2}+\sigma_3\cdot S_{k-3}-\dots+(-1)^{k-1}k\sigma_k \quad (13)$$

(دراین‌رابطه، جملهٔ $(-1)^{i-1}S_{k-i}\sigma_i$ که درآن $i>n$ باشد، مساوی‌صفر درنظرگرفته شده) ،

$$O_\pi(x_1^k \cdot x_2^l) = (n-2)!(S_k S_l - S_{k+l}),$$

$$(n-2)O_\pi(x_1^k x_2^l x_3^m) = O_\pi(x_1^k x_2^l)S_m - O_\pi(x_1^{k+m} x_2^l) - O_\pi(x_1^k x_2^{l+m})$$

و غیره .

بطورکلی برای هرتوان k_1 ، ....، k_{r+1} رابطهٔ زیرصحیح است :

$$\begin{aligned}(n-r)O_\pi(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r} x_{r+1}^{k_{r+1}}) &= \\ &= O_\pi(x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}) S_{k_{r+1}} - \\ &- O_\pi(x_1^{k_1+k_{r+1}} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}) - \\ &- O_\pi(x_1^{k_1} x_2^{k_2+k_{r+1}} \dots x_r^{k_r}) - \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &- O_\pi(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r+k_{r+1}})\end{aligned}$$

بعداً ، دربند۴۱ اثبات دیگری ازقضیهٔ اصلی خواهیم دید .

۳۷. بیان مجموع قوای متشابه برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن

رابطهٔ (۱۳) امکان می‌دهد که بتوانیم یکی پس ازدیگری، مجموع قوای متشابه S_k را درست مثل حالتهای دومتغیره وسه‌متغیره حساب کنیم. این‌رابطه برای هرتعداد متغیرصحیح‌است؛ فقط باید بخاطرداشت که اگر کثیرالجمله‌ای با n متغیر مورد مطالعه است ، بایدتمام جملاتی راکه شامل σ_i هستند، و در آنها i بزرگتر از n است، حذف‌نمود. رابطهٔ (۱۳) رابرای بعضی‌از مقادیر k بکار می‌بریم :

$S_1 = \sigma_1$;

$$S_2=\sigma_1 S_1-2\sigma_2\ ;$$
$$S_3=\sigma_1 S_2-\sigma_2 S_1+3\sigma_3\ ;$$
$$S_4=\sigma_1 S_3-\sigma_2 S_2+\sigma_3 S_1-4\sigma_4\ ;$$
$$S_5=\sigma_1 S_4-\sigma_2 S_3+\sigma_3 S_2-\sigma_4 S_1+5\sigma_5\ ;$$
$$S_6=\sigma_1 S_5-\sigma_2 S_4+\sigma_3 S_3-\sigma_4 S_2+\sigma_5 S_1-6\sigma_6\ ;$$

. . . .

ازاین‌روابط می‌توان بسادگی، مقدارمجموع قوای متشابه را بدست‌آورد:

$$S_1=\sigma_1\ ;$$
$$S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2\ ;$$
$$S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3\ ;$$
$$S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4\ ;$$
$$S_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3-5\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5\ ;$$
$$S_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3+6\sigma_1^3\sigma_3-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3+$$
$$+3\sigma_3^2-6\sigma_1^2\sigma_4+6\sigma_2\sigma_4+6\sigma_1\sigma_5-6\sigma_6;$$

. . . .

این روابط هم ، مثل رابطهٔ (۱۳)، برای هرتعداد دلخواه متغیرصحیح است ؛ تنها باید توجه داشت‌که اگر با n متغیر سر وکـار داریم ، از این روابط باید جملاتی راکه شامل σ_i با $i>n$ هستند، حذف نمود . مثلا اگر دراین روابط ، جملات شامل σ_4 ، σ_5 ، σ_6 و... را حذف کنیم، مجموع‌قوای متشابه برای حالت سه متغیره بدست‌می‌آید ، یعنی همان روابطی‌که در جدول صفحهٔ ۷۴ نوشته بودیم . اگر در روابط اخیر ، جملات شامل σ_3 راهم حذف کنیم، مجموع قوای متشابه برای حـالت دومتغیره بدست می‌آیدکه در جدول صفحهٔ ۱۹ ذکرکرده‌ایم .

مثلا برای چهار متغیر x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 داریم :

$$S_1=\sigma_1 \ ;$$
$$S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2 \ ;$$
$$S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3 \ ;$$
$$S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4 \ ;$$
$$S_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3-5\sigma_1\sigma_4 \ ;$$
$$S_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3+6\sigma_1^3\sigma_3-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3+$$
$$+3\sigma_3^2-6\sigma_1^2\sigma_4+6\sigma_2\sigma_4 \ ;$$

. . . .

(این‌روابط را ازروی روابط‌کلی باحذف جملات شامل σ_5 ، σ_6 ، . . . نوشته‌ایم) .

رابطهٔ وارینگا راهم برای بیان مجموع قوای متشابه ، درحالت n متغیر می‌توان نوشت . این رابطه به‌این‌صورت است :

$$\frac{1}{k}S_k = \sum (-1)^{k-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_k}\times$$
$$\times\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_k-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\dots\lambda_k!}\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\dots\sigma_k^{\lambda_k};$$

مجموع فوق برای همهٔ مقادیر صحیح و غیر منفی‌که در رابطهٔ زیر صدق‌کنند، محاسبه می‌شود :

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3\dots+k\lambda_k=k \ ,$$

واگربه نشانه $0!$ برخوردکردیم ؛ برابر واحد است . اثبات رابطهٔ وارینگا باروش استقراء ریاضی وبراساس رابطهٔ (۱۳) انجام می‌گیرد.

تمرینات

۳۰۴. این ضرب‌را انجام دهید :

$$(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-$$
$$-bd-cd);$$

۳۰۵. ثابت کنید که با شرط $a+b+c+d=0$ ، اتحاد زیر صحیح است :

$$(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(bcd+acd+abd+abc)^2$$

۳۰۶. صحت اتحاد زیر را با شرط $a+b+c+d=0$ ثابت کنید:

$$a^4+b^4+c^4+d^4=2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+$$
$$+2(ad-bc)^2+4abcd$$

۳۰۷. مجموع کثیرالجمله متقارن زیر را نسبت به متغیرهای x_1 ، x_2 ، … و x_n برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن محاسبه کنید :

$$\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2=(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2$$

۳۰۸. ثابت کنید که برای کثیرالجمله‌های متقارن n متغیره ، برای مقادیر حقیقی متغیرها ، نامساوی زیر صحیح است :

$$(n-1)\sigma_1^2\geqslant 2n\sigma_2$$

۳۰۹. صحت نامساوی زیر را ثابت کنید :

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$$

۳۱۰. ثابت کنید که برای اعداد مثبت a_1 ، a_2 ، … ، a_n نامساوی زیر صحیح است :

$$\sum_{i<j}\sqrt{a_ia_j}\leqslant\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

۳۱۱. اگر $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ باشد، صحت نامساوی زیر را ثابت کنید :

$$\sum_{i<j}^{n} a_i a_j \leqslant 0$$

۳۱۲. عبارت زیر را تجزیه‌کنید :

$$x^3+y^3+z^3+t^3-3xyz-3xyt-3xzt-3yzt$$

۳۱۳. ثابت‌کنیدکه برای هرعدد طبیعی n ، عبارت :

$$(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}$$

برعبارت $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ قابل‌قسمت است .

۳۱۴. این معادله را حل‌کنید :

$$(x+b+c)(x+a+c)(x+a+b)(a+b+c)-abcx=0$$

۳۱۵. ثابت‌کنیدکه برای عددهای مثبت x_1، x_2، ... و x_n نامساوی $\sigma_1\sigma_{n-1}>n^2\sigma_n$ صحیح است .

۳۱۶. ثابت‌کنیدکه برای عددهای مثبت x_1، x_2، ...و x_n نامساوی زیر صحیح است :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_1-x_1}+\frac{\sigma_1}{\sigma_1-x_2}+\dots+\frac{\sigma_1}{\sigma_1-x_n}>\frac{n^2}{n-1}$$

۳۱۷. ثابت‌کنیدکه برای عددهای مثبت x_1، x_2، ...و x_n نامساوی زیرصحیح است $(k=1,2,\dots,n-1)$:

$$\sigma_k\cdot\sigma_{n-k}>(C_n^k)^2\sigma_n$$

۳۸. ساده‌ترین عبارتهای متقارن نسبت به n متغیر و معادلات جبری درجهٔ n ؛ روابط ویت

در بندهای ۷ و ۲۱ ارتباط ساده‌ترین عبارتهای متقارن نسبت به‌دومتغیر را بامعادلهٔ درجهٔ دوم و ساده‌ترین عبارتهای متقارن نسبت به سه متغیر را با معادلهٔ درجهٔ سوم دیدیم . بهمین‌ترتیب بین عبارتهای متقارن ساده نسبت به n

متغیر ومعادلهٔ جبری درجهٔ n هم روابطی وجود دارد . به عبارت دیگر قضیهٔ زیر صحیح است .

قضیه . اگر σ_1 ، σ_2، ...و σ_n عددهای دلخواهی باشند، معادلهٔجبری درجهٔ n :

$$u^n-\sigma_1 u^{n-1}+\sigma_2 u^{n-2}-\ldots+(-1)^n\sigma_n=0 \qquad (*)$$

و دستگاه معادلات :

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=\sigma_1 \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\sigma_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1x_2\cdots x_n=\sigma_n \end{cases} \qquad (**)$$

به این‌ترتیب به یکدیگر مربوطاند : اگر u_1 ، u_2 ، ... ، u_n ریشه‌های معادله (*) باشند، دستگاه (**) دارای $n!$ ریشه است‌که یك دسته از آنها چنین‌است:

$$x_1=u_1\ ;\ x_2=u_2\ ;\ \cdots\ ;\ x_n=u_n$$

و بقیهٔ آنها باتبدیل u_1 و u_2 ، ... ،u_n بدست می‌آید ودستگاه (**) غیر ازاین‌جوابها، جواب دیگری ندارد. برعکس‌اگر $x_1=u_1$ ، $x_2=u_2$ ، ... و $x_n=u_n$ ، جوابی‌از دستگاه (**)باشند، عددهای u_1،u_2،...وu_n ریشه‌های معادلهٔ (*) هستند .

اثبات . فرض‌کنیم u_1 ، u_2 ، ... و u_n ریشه‌های معادله (*) باشند، دراینصورت‌کثیرالجملهٔ :

$$f(u)=u^n-\sigma_1 u^{n-1}+\sigma_2 u^{n-2}-\ldots+(-1)^n\sigma_n$$

به‌ترتیب زیرقابل تجزیه است (بند۴۸ را به‌بینید) :

$$f(u)=(u-u_1)(u-u_2)\cdots(u-u_n)$$

پرانتزها رادرسمت راست تساوی بازمی‌کنیم . واضح است‌که بزرگترین‌جمله

u^n است . برای اینکه ضریب جملهٔ u^{n-1} را پیدا کنیم ، توجه می‌کنیم که جملات شامل u^{n-1} بترتیب زیر بدست می‌آیند : بین n پرانتزی که وجود دارد از $n-1$ پرانتز (یعنی همهٔ پرانتزها بجز پرانتز kام) جملهٔ u و از پرانتز kام جملهٔ $-u_k$ را انتخاب ودرهم ضرب می‌کنیم . نتیجهٔ این ضرب جملهٔ $-u_k \cdot u^{n-1}$ ومجموع این حاصلضربها به صورت :

$$-(u_1+u_2+\cdots+u_n)u^{n-1}$$

خواهد بود . بنابراین ضریب u^{n-1} برابر است با :

$$u_1+u_2+\cdots+n_n$$

بهمین‌ترتیب می‌توان ثابت‌کرد که ضریب u^{n-2} چنین است :

$$u_1u_2+u_1u_3+\cdots+u_{n-1}u_n$$

وغیره . جملهٔ مستقل از u هم به صورت $(-1)^n u_1u_2\cdots u_n$ در می‌آید که ازضرب n جملهٔ به صورت $(-u_k)$ حاصل می‌شود .

به این ترتیب کثیرالجملهٔ $f(u)$ به این‌صورت است :

$$u^n-\sigma_1u^{n-1}+\sigma_2u^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n=$$
$$=u^n-(u_1+u_2+\cdots+u_n)u^{n-1}+$$
$$+(u_1u_2+u_1u_3+\cdots+u_{n-1}u_n)u^{n-2}+\cdots+$$
$$+(-1)^nu_1u_2\cdots u_n.$$

از آنجاکه این تساوی یك اتحاد است (یعنی به ازاء همهٔ مقادیر متغیر u برقرار است) ، ضرایب توانهای مساوی u در سمت چپ و سمت راست با هم برابرند ، یعنی :

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=\sigma_1$$
$$u_1u_2+u_1u_3+\cdots+u_{n-1}u_n=\sigma_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_1u_2\cdots u_n=\sigma_n$$

و این به‌معنای آنست که عددهای $x_1=u_1$ ، $u_2=u_2$ ، ....، $x_n=u_n$ جوابی ازدستگاه (**) هستند. هرتبدیلی ازمقادیر u_1، u_2، ....، u_n بازهم جواب دستگاه‌است، زیرا دستگاه (**) نسبت به‌مجهولات x_1، x_2، ....، x_n متقارن است . اینکه دستگاه جواب دیگری ندارد، ازحکم بعدی قضیه نتیجه می‌شود ،که‌کاملاً شبیه حالت سه‌متغیره ثابت می‌شود (صفحهٔ ۹۱ را به‌بینید).

طبق قضیه‌ای‌که ثابت‌شد ، حل دستگاه (**) منجر به حل یك معادلهٔ درجهٔ n می‌شود. بخصوص اگر مقادیر σ_1 ، σ_2، ....، σ_n معلوم باشند، برای پیداکردن مجهولات اصلی x_1، x_2، ....، x_n (یعنی برای حل دستگاه(**)) کافی است معادلهٔ (*) را تشکیل دهیم و آنرا حل‌کنیم . باحل این معادله n جواب u_1 ، u_2 ، ....، u_n بدست می‌آید . از آنجا یك دسته از جوابهای دستگاه (**) چنین می‌شود :

$$x_1=u_1 \,,\, x_2=u_2 \,,\, \cdots \,,\, x_n=u_n$$

با تبدیل‌عددهای u_1، u_2، ....، u_n به همهٔ طریقه‌های ممکن بقیهٔ جوابهای دستگاه هم بدست می‌آید .

نتیجه . اگر u_1، u_2، ...، u_n ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ n زیر باشند:

$$u^n+a_1u^{n-1}+a_2u^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

روابط زیر برقرار است :

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=-a_1$$

$$u_1u_2+u_1u_3+\cdots+u_{n-1}u_n=a_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$u_1u_2\cdots u_n=(-1)^na_n$$

(**روابط ویت** برای معادلهٔ جبری درجهٔ n) .

با استفاده ازقضیهٔ اصلی دربارهٔ‌کثیرالجمله‌های متقارن، نتیجهٔ مهم زیر هم بدست می‌آید : اگر u_1 ، u_2 ، ....، u_n ریشه‌های‌کثیرالجملهٔ درجه nام

$g(u)=u^n+a_1u^{n-1}+\dots+a_n$ و $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ کثیرالجملهٔ متقارن دلخواهی باشد، می‌توان مقدار $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را به ازاء $x_1=u_1$ ، $x_2=u_2$ ، ... ، $u_n=u_n$ به صورت کثیرالجمله‌ای از ضرایب a_1 ، a_2 ، ... ، a_n ، مربوط به‌کثیرالجملهٔ $g(u)$ ، نوشت . درحقیقت طبق قضیهٔ اصلی‌مربوط به‌کثیرالجمله‌های متقارن می‌توانیم $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن σ_1، σ_2، ...، σ_n بیان کنیم، از طرف دیگرمقادیراین عبارتها به ازاء $x_1=u_1$ ، $x_2=u_2$ ، ... ، $x_n=u_n$ طبق روابط ویت ، با تقریب علامت‌همان ضرایب a_1، a_2، ... ، a_n ازکثیرالجملهٔ $g(u)$ هستند . به این‌ترتیب حکم ثابت شد .

تمرینات

دستگاههای زیررا حل‌کنید :

۳۱۸.
$$\begin{cases} x+y+z+u=a \\ x^2+y^2+z^2+u^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3+u^3=a^3 \\ x^4+y^4+z^4+u^4=a^4 \end{cases}$$

۳۱۹.
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\dots+x_n=a \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots+x_n^2=a^2 \\ x_1^3+x_2^3+x_3^3+\dots+x_n^3=a^3 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_1^n+x_2^n+x_3^n+\dots+x_n^n=a^n \end{cases}$$

۳۲۰.
$$\begin{cases} x+y+z+u=1 \\ x^2+y^2+z^2+u^2=9 \\ x^3+y^3+z^3+u^3=1 \\ x^4+y^4+z^4+u^4=33 \end{cases}$$

۳۹. روش ضرایب نامعین

اثباتی راکه دربند۳۶ دربارهٔ قضیهٔ اصلی کثیرالجمله‌های متقارن انجام دادیم ، راه پیداکردن کثیرالجملهٔ $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ را هم بدست می‌دهد، ولی در حالتی‌که کثیرالجملهٔ متقارن شامل n متغیر باشد ، این راه مستلزم عملیات بسیار مفصل است ؛ زیرا باید چندین بار مدارهای یك جمله‌ایها را برحسب مدارهای یك‌جمله‌ایهائی‌که متغیرهای کمتری دارند ، تبدیل کرد ؛ بهمین‌مناسبت وقتی که‌تعداد متغیرها ازسه‌تجاوز کند، برای‌پیداکردن کثیرالجملهٔ $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ از روش دیگری ،که به **روش ضرایب نامعین** معروف است، استفاده می‌کنند . البته می‌توان ازاین روش ، در مواردی هم‌که با سه یاحتی‌دومتغیر سروکارداریم ، استفاده‌کرد، منتهی دراین موارد فایدهٔ‌محسوسی ندارد . اگرچه قبلاً ازروش ضرایب نامعین هم استفاده‌کرده‌ایم (بند ۲۸) و حتی درمورد توابع دومتغیره هم آنرا بکار برده‌ایم .

روش ضرایب نامعین درحالت‌کلی خود، عبارتست ازمطالعهٔ این‌مطلب که کدام یك‌جمله‌ایهای بصورت $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ می‌توانند درکثیرالجملهٔ متقارن $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، وقتی که‌برحسب $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ نوشته می‌شود، وجود داشته باشد (یعنی وقتی که کثیرالجملهٔ متقارن به $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ تبدیل می‌شود. بند ۳۶ را به‌بینید). از آنجاکه هرکثیرالجملهٔ متقارن را می‌توان به سادگی به مدارهای یك جمله‌ایها تبدیل کرد، بدون‌اینکه به‌کلیت موضوع لطمه‌ای وارد شود می‌توان کثیرالجملهٔ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ رامدار یك‌جمله دانست :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$$

برای انتخاب جمله‌های $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ ، که در $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$

وجود دارند ، قبل از همه باید توان جملهٔ : $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ را معین کرد . فرض کنید که این‌توان مساوی N باشد ، یعنی درحققیت داشته باشیم: $N=k_1+k_2+\dots+k_n$. واضح است که در اینصورت در بیان کثیرالجملهٔ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ برحسب σ_1 ، σ_2 ، ... ، σ_n تنها جمله‌هائی وجود دارد که نسبت به x_1 ، x_2 ، ... ، x_n ازتوان مساوی N باشد .

بنابراین باید روشن کرد که وقتی درجملهٔ $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\dots\sigma_n^{\lambda_n}$ به‌جای σ_1 ، σ_2 ، ... ، σ_n مقادیراصلی آنها رایعنی : $\sigma_1=x_1+x_2+\dots+x_n$ و $\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n$ و غیره را قرار دهیم ، چه توانی بدست می‌آید . چون توان σ_k نسبت به x_1 ، x_2 ، ... ، x_n مساوی k است، واضح است که توان $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\dots\sigma_n^{\lambda_n}$ نسبت به x_1 ، x_2 ، ... ، x_n برابر $\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n$ می‌شود . ازطرف دیگر ، این توان باید برابر N باشد، بنابراین عددهای λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n باید دررابطهٔ زیرصدق کنند:

$$\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=N$$

این رابطه ، که مثل معادله‌ای بامجهولات λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n درنظر گرفته می‌شود ، دارای بی‌نهایت جواب است . ولی‌ما به‌همهٔ جوابهای آن احتیاج نداریم ، زیرا λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n اعدادی‌**صحیح وغیرمنفی** هستند وبنابراین تعداد جوابهای‌صحیح وغیرمنفی این‌معادله هم‌محدود است .

به‌این‌ترتیب‌درعبارت $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ ، کثیرالجملهٔ متقارن‌به‌صورت $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n})$ برحسب σ_1 ، σ_2 ، ... ، σ_n با جمله‌هائی به صورت $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\dots\sigma_n^{\lambda_n}$ بیان می‌شود که در آن λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n جوابهای صحیح و غیرمنفی معادلهٔ زیرهستند :

$$\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=N$$

و $N=k_1+k_2+\dots+k_n$، توان کثیرالجملهٔ $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n})$ می‌باشد .

مثلاً برای اینکه به‌بینیم در بیان کثیرالجملهٔ $O(x_1^4x_2^3x_3)$ ازچهار متغیر ، برحسب σ_1، σ_2، σ_3 و σ_4 ، چه جملاتی می‌توانند وجود داشته باشد، باید ریشه‌های صحیح وغیرمنفی معادلهٔ زیررا پیداکرد :

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4=8$$

این جوابها درجدول زیر مشخص شده‌اند :

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
۸	۰	۰	۰	۳	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱
۶	۱	۰	۰	۲	۳	۰	۰	۰	۴	۰	۰
۵	۰	۱	۰	۲	۱	۰	۱	۰	۲	۰	۱
۴	۲	۰	۰	۲	۰	۲	۰	۰	۱	۲	۰
۴	۰	۰	۱	۱	۲	۱	۰	۰	۰	۰	۲

بنابراین دربیان کثیرالجملهٔ $O(x_1^4x_2^3x_3)$ برحسب σ_1 ، σ_2، σ_3 و σ_4 تنها جملاتی به‌صورت زیر وجود دارد :

$$\sigma_1^8\ ;\ \sigma_1^6\sigma_2\ ;\ \sigma_1^5\sigma_3\ ;\ \sigma_1^4\sigma_2^2\ ;\ \sigma_1^4\sigma_4\ ;$$

$$\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3\ ;\ \sigma_1^2\sigma_2^3\ ;\ \sigma_1^2\sigma_2\sigma_4\ ;\ \sigma_1^2\sigma_3^2\ ;\ \sigma_1\sigma_2^2\sigma_3\ ;$$

$$\sigma_1\sigma_3\sigma_4\ ;\ \sigma_2^4\ :\ \sigma_2^2\sigma_4\ ;\ \sigma_2\sigma_3^2\ ;\ \sigma_4^2.$$

به عبارت دیگر، این‌عبارت به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\begin{aligned}O(x_1^4x_2^3x_3)=&A_1\sigma_1^8+A_2\sigma_1^6\sigma_2+A_3\sigma_1^5\sigma_3+A_4\sigma_1^4\sigma_2^2+\\&+A_5\sigma_1^4\sigma_4+A_6\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3+A_7\sigma_1^2\sigma_2^3+A_8\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4+\\&+A_9\sigma_1^2\sigma_3^2+A_{10}\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3+A_{11}\sigma_1\sigma_3\sigma_4+A_{12}\sigma_2^4+\\&+A_{13}\sigma_2^2\sigma_4+A_{14}\sigma_2\sigma_3^2+A_{15}\sigma_4^2.\end{aligned}$$

بنابراین شکلی را که کثیرالجملهٔ $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ باید به آن صورت باشد پیدا کردیم . ولی هنوز ضرایب A_1 ، A_2 ، .... ، A_{15} برای ما معلوم نیست وبهمین مناسبت است که این‌روش را **روش ضرایب نامعین** نامیده‌اند .

برای اینکه حل مسئلهٔ مفروض تمام شود ، یعنی بتوانیم کثیرالجملهٔ : $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ را پیداکنیم ،که به $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ با جانشین کردن $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ به وسیلهٔ مقادیرشان برحسب $x_1, x_2, \ldots x_n$ تبدیل می‌شود، باید ضرایب مجهول را بدست آوریم . این محاسبه هم به سادگی و با **روش مقادیر خاص** انجام می‌گیرد که مادر مثال زیر آنرا روشن می‌کنیم (ضمناً صفحات ۱۳۳ و ۱۳۴ را هم به بینید).

مثال. کثیرالجملهٔ $O(x_1^4 x_2^2 x_3^0)$ از سه متغیر x_1, x_2, x_3 را برحسب $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ بیان کنید .

شبیه آنچه که قبلاً دربارهٔ روش ضرایب نامعین ذکر کردیم ، معلوم می‌شود که این‌عبارت باید به‌صورت زیر باشد :

$$O(x_1^4x_2^2x_3^0) = A_1\sigma_1^6 + A_2\sigma_1^4\sigma_2 + A_3\sigma_1^3\sigma_3 + A_4\sigma_1^2\sigma_2^2 +$$
$$+ A_5\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + A_6\sigma_2^3 + A_7\sigma_3^2 \qquad (*)$$

این تساوی باید برای همهٔ مقادیر x_1 و x_2 و x_3 برقرار باشد . بنابراین اگر مقادیری برای x_1 و x_2 و x_3 درنظر بگیریم وبه ازاء آنها مقادیر σ_1 و σ_2 و σ_3 را محاسبه کنیم ودر رابطهٔ (*) قراردهیم ، معادله‌ای نسبت به ضرایب A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، A_5 ، A_6 و A_7 بدست می‌آید . با تغییر مقادیر x_1 ، x_2 و x_3 می‌توان به دستگاهی رسید که برای محاسبهٔ ضرایب مجهول کافی باشد .

ساده‌ترین راه آنست که برای x_1 و x_2 و x_3 مقادیری انتخاب کنیم که به ازاء آنها بعضی از عبارتهای متقارن ساده مساوی صفر شوند . مثلا فرض می‌کنیم $x_1 = 1$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0$ که به ازاء آنها خواهیم داشت :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 = 0$$

علاوه بر آن درمدار $O(x_1^4x_2^2)$ ، همه جملات مساوی صفر می‌شوند، زیرا درهریك از این جملات عامل x_2 یا x_3 وجود دارد. به این‌ترتیب بدست می‌آید : $A_1 = 0$.

حالا فرض می‌کنیم : $x_1 = 1$ ، $x_2 = -1$ و $x_3 = 0$. دراینحالت داریم : $\sigma_1 = 0$ ، $\sigma_2 = -1$ ، $\sigma_3 = 0$ و $O(x_1^4x_2^2) = 2$ که ازآنجا به تساوی $A_6 = -2$ می‌رسیم . بهمین‌ترتیب اگر $x_1 = 1$ ، $x_2 = 1$ و $x_3 = 0$ بگیریم، بدست می‌آید :

$$16A_2 + 4A_4 + A_6 = 2$$

که با توجه به تساوی $A_6 = -2$ می‌شود :

$$4A_2 + A_4 = 1$$

حالا اگر فرض‌کنیم : $x_1 = 2$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = 0$ بدست می‌آید:

$$9A_2 + 2A_4 = 2$$

که ازاین دومعادله نتیجه می‌شود : $A_2 = 0$ و $A_4 = 1$.

اکنون با فرض $x_1 = 1$ ، $x_2 = 1$ و $x_3 = -2$ ، که به ازاء آنها $\sigma_1 = 0$ می‌شود، به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$-27A_6 + 4A_7 = 42$$

وچون $A_6 = -2$ بود، $A_7 = -3$ بدست می‌آید .

ضرایب A_3 ، A_5 هم بهمین‌ترتیب بدست می‌آیند. برای محاسبهٔ آنها بهتراست‌یکبار $x_1 = 2$ ، $x_2 = -1$ و $x_3 = -1$ وباردیگر $x_1 = 1$ ، $x_2 = 1$ و $x_3 = 1$ بگیریم‌که ازآنجا $A_3 = -2$ و $A_5 = 4$ بدست می‌آید .

همهٔ ضرایب A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، A_5 ، A_6 و A_7 بدست‌آمد که‌اگر

قرار دهیم، بیان مدار $O(x_1^4x_2^2)$ برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن σ_1، σ_2، σ_3 بدست می‌آید :

$$O(x_1^4x_2^2)=\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-2\sigma_2^3-3\sigma_3^2$$

که با آنچه درجدول صفحهٔ ۸۱ نوشته‌ایم مطابقت می‌کند .

تمرینات

کثیرالجمله‌های متقارن زیررا که ازچهار متغیر x_1، x_2، x_3 و x_4 هستند، برحسب σ_1، σ_2، σ_3 و σ_4 بیان کنید :

۳۲۱.
$$(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)\times$$
$$\times(x_2+x_4)(x_3+x_4)$$

۳۲۲.
$$(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$$

۳۲۳. اتحاد زیررا ثابت‌کنید :

$$(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3+(a+d)^3+(b+d)^3+$$
$$+(c+d)^3=3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

۳۲۴ صحت اتحاد زیررا ثابت‌کنید :

$$(a+b+c+d)^5-[(b+c+d)^5+(a+c+d)^5+$$
$$+(a+b+d)^5+(a+b+c)^5]+[(b+c)^5+(a+d)^5+$$
$$+(a+b)^5+(c+d)^5+(b+d)^5+(a+c)^5]-$$
$$-[a^5+b^5+c^5+d^5]=60abcd(a+b+c+d).$$

۴۰. منظم‌کردن‌کثیرالجمله‌ها ؛ جملات پرتوان‌تر

روشی‌که در بندقبل دربارهٔ انتخاب جملهٔ $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\dots\sigma_n^{\lambda_n}$ ذکر کردیم نسبتاً مفصل و بغرنج است ، در این روش تنها به توان جملهٔ :

$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ توجه داریم که مدار آن کثیرالجملهٔ متقارن مفروض می‌شود . در اینجا جمله‌هائی هم که وجود ندارند ، در نظر گرفته می‌شود و تنها بعد از محاسبات لازم معلوم می‌شود که ضریب آنها برابر صفر است (مثلا ضرایب A_1، A_2 در مثال صفحهٔ ۱۸۴) . حالا به ذکر روشی می‌پردازیم که کارما را درانتخاب تعداد یك‌جمله‌ایها تاحدی ساده می‌کند .

برای این‌منظور جملات کثیرالجمله را بترتیب معینی منظم می‌کنیم . وقتی که کثیرالجمله شامل یك متغیر باشد ، منظم‌کردن عبارت ساده است : دراینصورت می‌توان آنرا برحسب قوای صعودی یاقوای نزولی x منظم‌کرد. اما وقتی که با چند متغیر سروکار داشته باشیم، چگونه منظم‌کنیم : x^4y^2را اول بنویسیم یا xy^5 را ؟

برای رفع این مشکل هم باید مثل فرهنگ لغات عمل کرد . دوکلمهٔ «دیوار» و«ستاره» را درنظربگیریم . درحروف الفبا حرف اول کلمهٔ «دیوار» قبل ازحرف اول کلمهٔ «ستاره» است ولی حرف دوم آن بعد از حرف دوم کلمهٔ «ستاره» قرار گرفته‌است . ولی ما می‌دانیم که درتنظیم فرهنك لغات ابتداحرف اول را درنظر می‌گیرند وسپس به حرف دوم وبعد حرف سوم آن وغیره نگاه می‌کنند . بهمین مناسبت درکتاب لغت ، کلمهٔ «دیوار» قبل از کلمهٔ «ستاره» قرار می‌گیرد .

در ریاضیات هم درست بهمین‌ترتیب عمل می‌کنند . متغیرها راشماره‌گذاری می‌کنند وبرای‌مقایسهٔ دوجملهٔ $x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$ و $x_1^{l_1}\dots x_n^{l_n}$، ابتدا فقط به توانهای متغیر اول نگاه می‌کنند ، یعنی به k_1 و l_1 . اگر $k_1>l_1$ باشد ، جملهٔ اول را بالاتر و یا به‌اصطلاح پر توان‌تر از جملهٔ دوم بحساب می‌آورند ، و اگر $k_1<l_1$ باشد ، جملهٔ اول را پائین‌تر و یا کم‌توان‌تر ازجملهٔ دوم گویند . درحالتی که $k_1=l_1$ باشد به‌توان حرف x_2 دردوجمله

متوجه می‌شوند . اگر به ازاء $k_1 = l_1$ داشته باشیم $k_2 > l_2$ ، جملهٔ اول پرتوان‌تر از جملهٔ دوم است واگر $k_2 < l_2$ باشد ، جملهٔ اول کم توان‌تر از جملهٔ دوم است . بطورکلی اگر $k_1 = l_1$ ، ... ، $k_{s-1} = l_{s-1}$ باشد ، وقتی که $k_s > l_s$ است، جملهٔ پرتوان‌ترهمان جملهٔ اول‌است وبرعکس‌وقتی که $k_s < l_s$ باشد، جملهٔ پرتوان‌تر ، جملهٔ دوم است . اگر دریکی از جمله‌ها متغیری موجود نباشد، آنرا باتوان‌صفر درنظر می‌گیرند (زیرا داریم : $x_k^0 = 1$) .

مثلاً دوجملهٔ $x_1^3 x_2^4 x_3^2$ و $x_1^3 x_2^4 x_4^5$ را درنظر می‌گیریم، برای مقایسه ، آنها را به‌صورت زیرمی‌نویسیم :

$$x_1^3 x_2^4 x_3^2 x_4^0 \ , \ x_1^3 x_2^4 x_3^0 x_4^5$$

چون‌توانهای x_1 ، x_2 دردوجمله باهم برابرند و توان x_3 درجملهٔ اول بزرگتر است، بنابراین جملهٔ اول پرتوان‌تر است .

مثلاً فرض کنیدکه بخواهیم کثیرالجملهٔ زیررا منظم‌کنیم :

$$x_2^3 x_3^2 + x_1^5 x_2 + x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_2^2$$

جملهٔ دوم پرتوان‌ترین جمله‌هاست ، زیرا توان x_1 درآن از همهٔ جمله‌های دیگر بیشتر است . در جمله‌های سوم و چهارم توان x_1 یکی است ، مقایسهٔ توانهای x_2 درآنها ، نشان می‌دهدکه جملهٔ پرتوان‌تر جملهٔ چهارم است . بالاخره جملهٔ اول ، کم‌توان‌ترین جمله‌هاست ، زیرا در آن x_1 وجود ندارد (یعنی توان x_1 درآن مساوی صفراست) .

بنابراین کثیرالجملهٔ مفروض، بعداز منظم‌کردن چنین می‌شود :

$$x_1^5 x_2 + x_1^3 x_2^2 + x_1^3 x_2 x_3 + x_2^3 x_3^2$$

حالا روشن می‌کنیم که جملهٔ پرتوان‌تر درمدار یك‌جمله‌ای $O(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n})$

بچه‌صورت است (بعضی از توانهای k_1، ...، k_n می‌توانند مساوی صفر باشند) . دراین‌جمله، بجای تبدیل متغیرها ، می‌توان ازتبدیل توانهااستفاده کرد . واضح است که درجملهٔ پرتوان‌تر، باید توان x_1 بزرگترین مقدار ممکنه را داشته باشد، به‌عبارت دیگر باید بزرگترین عدد بین توانهای k_1، ....، k_n باشد . در حالتی‌که چنین نباشد، می‌توان با تبدیل توانها ، پرتوان‌ترین جملهٔ مدار را بدست‌آورد . درهمین جمله توان x_2 باید دومین مقام را ازلحاظ بزرگترین مقدار ممکنه داشته باشد وغیره .

به‌این ترتیب پرتوان‌ترین جمله ازمدار $O(x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n})$ به صورت $x_1^{j_1}\dots x_n^{j_n}$ است‌که درآن j_1، ...، j_n سمان عددهای k_1، ....، k_n هستندکه بطورنزولی منظم شده‌اند . مثلا جملهٔ پرتوان‌تر درمدار:

$$O(x_1^2x_3^4x_4^5)\equiv O(x_1^2x_2^0x_3^4x_4^5)$$

عبارتست از $x_1^5x_2^4x_3^2$.

به‌این تبصره جالب هم‌توجه‌بفرمائید. اگر$f(x)$و$g(x)$ کثیرالجمله‌هائی ازیك متغیر باشند، پرتوان‌ترین جملهٔ حاصلضرب آنها عبارتست از حاصلضرب پرتوان‌ترین‌جمله‌های‌آنها ، این‌حکم برای‌کثیرالجمله‌های چند متغیره هم صحیح است :

جملهٔپرتوان‌تر درحاصلضرب همیشه برابر است باحاصلضرب‌جمله‌های پرتوان‌تر. ما دیگر به اثبات این‌حکم (که تقریباً واضح است) نمی‌پردازیم.

۴۱. انتخاب جمله‌های کثیرالجملهٔ $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ به کمك جمله‌های پرتوان‌تر

مفهوم جملهٔ پرتوان‌تر اجازه می‌دهد ، جمله‌هائی راکه ممکن است در $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ وجود داشته باشد ، دقیق‌تر معین‌کنیم . ابتدا به‌بینیم

توانهای λ_1 ، λ_2 ، ...، λ_n را بچه‌ترتیب انتخاب کنیم تاجملهٔ پرتوان‌تردر عبارت $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ با جملهٔ پرتوان‌تر در مدار $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$ یکی باشد .

واضح است که جملهٔ پرتوان‌تر درکثیرالجملهٔ $\sigma_1=x_1+\ldots+x_n$ عبارتست از x_1 . بهمین‌ترتیب جمله پرتوان‌تر در σ_2 عبارتست از x_1x_2 و بطورکلی جملهٔ پرتوان‌تر در σ_k عبارتست از $x_1x_2\ldots x_k$.

ازقضیهٔ مربوط به جملهٔ پرتوان‌تر در يك حاصلضرب نتیجه می‌شودکه جملهٔ پرتوان‌تر درعبارت $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ به‌صورت زیر است :

$$x_1^{\lambda_1}(x_1x_2)^{\lambda_2}(x_1x_2x_3)^{\lambda_3}\ldots(x_1x_2\ldots x_n)^{\lambda_n}$$

بنابراین توان x_1 در این جمله مساوی $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$ و توان x_2 مساوی $\lambda_2+\ldots\lambda_n$ وتوان x_3 مساوی $\lambda_3+\ldots+\lambda_n$ وبالاخره توان x_n مساوی λ_n است . بنابراین جملهٔ پرتوان‌تر درعبارت $\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\ldots\sigma_n^{\lambda_n}$ به صورت زیر است :

$$x_1^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}x_2^{\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\ldots x_n^{\lambda_n}.$$

عددهای λ_1، λ_2، ...، λ_n را چنان انتخاب می‌کنیم‌که این‌جمله بر جملهٔ پر توان‌تر مدار $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2},\ldots x_n^{k_n})$ منطبق باشد . بدون اینکه به‌کلیت مطلب لطمه‌ای وارد شود، می‌توان ترتیبی دادکه جملهٔ مولد مدار، جملهٔ پرتوان‌تر آن باشد ، یعنی داشته باشیم : $k_1\geqslant k_2\geqslant\ldots\geqslant k_n$

با مقایسهٔ توانها درتساوی :

$$x_1^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}x_2^{\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\ldots x_n^{\lambda_n}=$$
$$=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n},$$

بدست می‌آید :

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k_1,$$
$$\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k_2,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\lambda_n=k_n$$

بنابراین داریم :

$$\lambda_1=k_1-k_2\ ;\ \lambda_2=k_2-k_3\ ;\ \ldots\ ;\ \lambda_{n-1}=k_{n-1}-k_n\ ;$$
$$\lambda_n=k_n.$$

به عبارت دیگر ، عددهـای λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n عبارتند از تفاضلهای بین توانهای متوالی عوامل درپرتوان‌ترین جملهٔ مدار .

حالا عبارت $\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_n^{k_n}$ را ازمدارمفروض یعنی‌مدار $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$ کم می‌کنیم ، به عبارت دیگرکثیرالجملهٔ متقارن زیررا درنظر می‌گیریم :

$$O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})-\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_n^{k_n}$$

اگر بجای σ_1 ، σ_2 ، ... ، σ_n مقـادیرشان را برحسب x_1، x_2، ... ، x_n قراردهیم، جملهٔ پرتوان‌تر در هردو جملهٔ تفریق (مفروق و مفروق‌منه) یکی می‌شود . بنابراین ضمن تفریق این دو جمله حذف می‌شوند و عبارتی بدست می‌آیدکه جملهٔ پرتوان‌ترآن پائین‌تراز $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$ قرارگرفته است . این عبارت را به مجموع مدارهای یك‌جمله‌ایها تبدیل و عمل فوق را تکرارمی‌کنیم، بعداز چند مرحله‌بیان کثیرالجملهٔ $O(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$ برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن بدست می‌آید .

واضح است‌که دراین‌بیان فقط جملاتی وجود داردکه پرتوان‌ترین آنها بالاتر ازپرتوان‌ترین جملهٔ مدار نیست. ازهمین مطلب‌هم درانتخاب‌جمله‌های

کثیرالجملهٔ $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ استفاده می‌شود . بخصوص، درحالیکه همه جوابهای صحیح وغیرمنفی معادلهٔ

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = N$$

را بدست می‌آوریم (ضمناً داریم : $N = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$) ، باید برای هر جواب جملهٔ پرتوان‌تر مربوطه را نوشت . این جملهٔ پر توان‌تر به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$x_1^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} x_2^{\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \cdots x_n^{\lambda_n}$$

اگر این جملهٔ پرتوان‌تر بالاتر ازجملهٔ پرتوان‌تر از مدار بود، باید جواب متناظرآنرا حذف کرد واگر مساوی یا پائین‌تر ازجملهٔ پرتوان‌تر مدار بود ، باید جواب متناظرآنرا نگه داشت .

بعنوان مثال دوباره کثیرالجملهٔ متقارن $O(x_1^4 x_2^3 x_3 x_4^0)$ را در نظر می‌گیریم (صفحهٔ۱۸۲ را به‌بینید). باحل‌معادلهٔ:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 8$$

۱۵ جواب صحیح غیرمنفی بدست می‌آیدکه جملات پرتوان‌تر متناظر آنها چنین‌اند :

$$x_1^8;\quad x_1^7x_2;\quad x_1^6x_2x_3;\quad x_1^6x_2^2;$$
$$x_1^5x_2x_3x_4;\quad x_1^5x_2^2x_3;\quad x_1^5x_2^3;$$
$$x_1^4x_2^2x_3x_4;\quad x_1^4x_2^2x_3^2;\quad x_1^4x_2^3x_3;$$
$$x_1^3x_2^2x_3^2x_4;\quad x_1^4x_2^4;\quad x_1^3x_2^3x_3x_4;$$
$$x_1^3x_2^3x_3^2;\quad x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2.$$

بامقایسهٔ این جمله‌ها با $x_1^4x_2^3x_3$ ، دیده می‌شودکه بسیاری ازآنها بالاتر از $x_1^4x_2^3x_3$ قرارگرفته‌اند و بنابراین باید حذف شوند . تنها هفت جمله باقی میماند :

$x_1^4x_2^3x_3$; $x_1^4x_2^2x_3^2$; $x_1^4x_2^2x_3x_4$;
$x_1^3x_2^2x_3^2x_4$; $x_1^3x_2^3x_3x_4$; $x_1^3x_2^3x_3^2$;
$x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2$.

بنابراین دربیان مدار $(x_1^4x_2^3x_3)$ برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن ، تنها جمله‌هائی به صورت زیر وجود دارد :

$\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3$, $\sigma_1^2\sigma_3^2$, $\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4$, $\sigma_1\sigma_3\sigma_4$,
$\sigma_2^2\sigma_4$, $\sigma_2\sigma_3^2$, σ_4^2.

یعنی خواهیم داشت :

$$O(x_1^4x_2^3x_3)=B_1\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3+B_2\sigma_1^2\sigma_3^2+B_3\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4+$$
$$+B_4\sigma_1\sigma_3\sigma_4+B_5\sigma_2^2\sigma_4+B_6\sigma_2\sigma_3^2+B_7\sigma_4^2.$$

یعنی باید تنها هفت ضریب‌را معین کنیم، نه ۱۵ ضریب (آنطور که درصفحهٔ ۱۸۲ داشتیم) . تعیین ضرایب دراینجا هم باروش مقادیرخاص انجام می گیرد .

***

متذکر می‌شویم‌که استدلالهای این بند شامل اثبات جدیدی از قضیهٔ اساسی دربارهٔ کثیرالجمله‌های متقارن بود (بند ۳۶ را به‌بینید) . اگر $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ را کثیرالجملهٔ متقارنی نسبت‌به n متغیر x_1، x_2، ...، x_n و $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ را جملهٔ پر توان‌تر آن فرض‌کنیم ، وقتی‌که $k_1>k_2>\dots>k_n$ باشد، تفاضل:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)-a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\dots\sigma_n^{k_n}$$

خود یك کثیرالجملهٔ متقارن است (به شرطی‌که σ_1، σ_2، ... ، σ_n مقادیرشان را برحسب x_1 ، x_2 ، ... ، x_n قراردهیم ، پرانتزها را بازکنیم وجملات متشابه را جمع جبری کنیم) که جملهٔ پرتوان‌ترآن پائین‌تر ازجملهٔ پرتوان‌تر $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ قرار دارد . در موردکثیرالجملهٔ متقارن جدید هم

می‌توان همان عمل راانجام‌داد وکثیرالجملهٔ متقارن دیگری باجملهٔ پرتوان‌تر بازهم پائین‌تر بدست‌آورد وغیره . به عبارت‌دیگر اگرمتوالیاً عبارت‌بصورت $a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_n^{k_n}$ را (که توانهای‌آن باکمك جملهٔ پرتوان‌تر بدست می‌آید) ازکثیرالجملهٔ متقارن‌کم‌کنیم ، جملهٔ پرتوان‌تر مرتباً پائین و پائین‌تر می‌آید. ازآنجاکه پائین‌تر ازجملهٔ پرتوان‌تر تعداد محدودی جمله قراردارد، پس‌از انجام تعداد محدودی عمل مذکور به‌کثیرالجمله‌ای می‌رسیم که مطلقا شامل جمله نیست، یعنی مساوی صفر است . به عبارت دیگر تساوی زیررا خواهیم داشت :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_n^{k_n} - \\ - b\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\ldots\sigma_n^{l_n} - \ldots = 0$$

که اگر همهٔ جملات سمت‌چپ تساوی را ، بجز $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ بسمت راست ببریم، رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\ldots\sigma_n^{k_n} + \\ + b\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\ldots\sigma_n^{l_n} + \ldots$$

یعنی حاصل عبارت متقارن $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ برحسب $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ پیدا می‌شود .

دراین‌اثبات، نقش اصلی به‌عهدهٔ مفهوم‌جملهٔ پرتوان‌تر است . بااستفاده ازهمین مفهوم، می‌توان قضیهٔ منحصر بفرد بودن این تبدیل‌را هم‌ثابت‌کرد :

هرکثیرالجملهٔ متقارن نسبت به $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را می‌توان تنها بیك صورت به‌کثیرالجملهٔ $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, x_n)$ تبدیل کرد (بند ۴ را به‌بینید) که ما دراینجا به اثبات آن نمی‌پردازیم .

۴۲. کثیرالجمله‌های متقارن منفی نسبت به n متغیر

کثیرالجمله‌هائی که نسبت به n متغیر متقارن منفی هستند، کاملا شبیه مورد دو یا سه متغیره تعریف می‌شود. کثیرالجملهٔ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **متقارن منفی** است، وقتی که با تبدیل هر دو متغیر دلخواه آن بیکدیگر، تغییر علامت بدهد.

همهٔ مطالبی را که در بند ۲۷ دربارهٔ کثیرالجمله‌های متقارن منفی سه متغیره بیان کردیم، می‌توان برای حالتی که با تعداد متغیرهای بیشتری سر و کار داریم، بکار برد. تنها طرح ساده‌ترین عبارت متقارن منفی کمی بغرنج‌تر می‌شود. درحالت سه متغیره، این عبارت به صورت $(x-y)(x-z)(y-z)$ بود، یعنی حاصلضرب عواملی که از تفاضلهای دو به دوی x، y و z (یعنی $x-y$، $x-z$ و $y-z$) بدست آمده‌اند.

اگر این قاعده را برای حالت کلی ودرمورد تعداد بیشتری متغیر بکار بریم، عبارتی به‌صورت زیر بدست می‌آید (علامت $\prod$ به معنای حاصلضرب است):

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j) =$$

$$=(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)\cdots$$
$$\cdots(x_{n-1}-x_n).$$

(درسمت راست‌تساوی $\frac{n(n-1)}{2}$ عامل‌ضرب وجود دارد). مثلا درحالتی که باچهار متغیر سر و کار داشته باشیم، کثیرالجملهٔ زیر بدست می‌آید:

$$T=(x_1, x_2, x_3, x_4)=$$
$$=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4).$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که کثیرالجملهٔ مذکور $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ متقارن منفی است، یعنی باتبدیل هردومتغیر دلخواه آن به یکدیگر بقرینهٔ

خودتبدیل‌می‌شود. این کثیرالجمله‌را ساده‌ترین کثیرالجملهٔ متقارن‌منفی نسبت به n متغیر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ گویند . این‌مطلب‌روشن می کندکه هر کثیرالجملهٔ متقارن منفی $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را (شبیه حالت سه متغیره) می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

که در آن $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ کثیرالجمله‌ایست متقارن (**قضیهٔ اصلی** کثیرالجمله‌های n متغیره متقارن منفی) . این حکم را می‌توان درست مثل حالت سه متغیره ثابت‌کرد (بند ۲۷ را به‌بینید) .

مجذورکثیرالجملهٔ $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را مبین متغیرهای x_1 و $x_2, \ldots, x_n$ گویند وبه $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نشان می‌دهند :

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2.$$

ازآنجاکه مبین Δ ، مربع کثیرالجملهٔ متقارن منفی $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ است ، کثیرالجمله‌ای متقارن و برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ قابل‌بیان است. بنابراین اگرعددهای $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ریشه‌های معادلهٔ جبری زیر باشند :

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

می‌توان $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را برحسب ضرایب $a_1, \ldots, a_n$ این معادله بیان‌کرد . دربند ۲۸ این‌محاسبه را درحالت سه متغیره انجام‌دادیم. ما رابطه‌ای ذکر خواهیم‌کردکه به‌کمك آن بتوان مبین را برحسب مجموع قوای متشابه‌بیان‌کرد، که درنتیجه می‌تواند به سادگی(باکمك رابطهٔ وارینگا) به‌صورت عبارتی برحسب $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ نوشته شود .

ازعبارت مبین معلوم می‌شودکه تنها وقتی مساوی صفر می‌شودکه دو متغیر دلخواه‌آن مقادیری مساوی هم داشته باشند . بنابراین باکمك مبین

می‌توان، بدون حل معادله ، فهمیدکه آیا بین ریشه‌های آن، دو ریشهٔ مساوی وجود دارد، یعنی به اصطلاح دارای **ریشهٔ مضاعف** می‌باشد یا نه ؟

***

برای خواننده‌ای که به مفهوم‌دترمینان آشناست، می‌توان مبین‌را بشکل دترمینان بصورت زیبائـی در آورد : دترمینانی‌کـه عناصر آن از قوای متشابه درست شده است . ابتدا به حـالت سه متغیر x ، y ، z می‌پردازیم . **دترمینان واندرموند** را درنظر می‌گیریم :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x & y & z \\ x^۲ & y^۲ & z^۲ \end{vmatrix}$$

اگر $x=y$ باشد، دوستون این دترمینان‌باهم برابر ومقدار دترمینان‌مساوی صفر می‌شود . بنابراین دترمینان واندرموند به $x-y$ قابل قسمت است . بهمین‌ترتیب می‌توان ثابت‌کرد‌که این دترمینان بر $x-z$ و $y-z$ هم‌قابل قسمت است . از طرف دیگر با بازکردن دترمینان ،کثیرالجمله‌ای از درجهٔ سوم نسبت به x ، y ، z بدست می‌آید . ازآنجا خواهیم داشت :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x & y & z \\ x^۲ & y^۲ & z^۲ \end{vmatrix} = k(x-y)(x-z)(y-z)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $yz^۲$ دردو طرف تساوی، مقدار k بدست‌می‌آید: $k=-۱$ وبنابراین :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x & y & z \\ x^۲ & y^۲ & z^۲ \end{vmatrix} = -(x-y)(x-z)(y-z)$$

به این ترتیب دترمینان واندرموند ، با تقریب یك علامت ، همان ساده‌ترین عبارت متقارن‌منفی ازسه متغیر x و y و z، یعنی $T(x، y، z)$ است. بنابراین

مجذورآن مساوی مبین $\Delta(x, y, z)$ خواهد بود . ضمناً می‌دانیم‌که اگر جای سطرها وستونها را در دترمینان عوض‌کنیم ، مقدار آن تغییر نمی‌کند ، بنابراین داریم :

$$\Delta(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

که اگر ازقاعدهٔ ضرب دترمینانها استفاده‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$\Delta(x, y, z) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}$$

که درآن $S_0 = x^0 + y^0 + z^0 = 3$ فرض‌شده است .

اگر این دترمینان را بازکنیم و بجای مجموع قوای متشابه، مقادیر آنها را برحسب σ_1 ، σ_2 ، σ_3 قرار دهیم، بیان مبین $\Delta(x, y, z)$ برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن بدست می‌آید .

وقتی‌که تعداد متغیرها بیشتر از سه باشد، می‌توان درست بهمان ترتیب فوق استدلال‌کرد . دراینحالت، مبین بارابطهٔ زیرمشخص می‌شود :

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2$$

که می‌توان ، مثل‌حالت سه متغیره ،آنرا بصورت دترمینانی،که عناصر آن مجموع قوای متشابه است، بیان‌کرد . این بیان چنین است :

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \cdots S_{n-1} \\ S_1 & S_2 \cdots S_n \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ S_{n-1} & S_n \cdots S_{2n-2} \end{vmatrix}$$

تمرينات

عبارتهای زیررا تجزیه کنید :

۳۲۵. $a^3(b-c)(c-d)(d-b)-b^3(c-d)(d-a)\times$
$\times(a-c)+c^3(d-a)(a-b)(b-d)-d^3(a-b)(b-c)\times$
$\times(c-a)$.

۳۲۶. $(b+c-a-d)^4(b-c)(a-d)+(c+a-$
$-b-d)^4(c-a)(b-d)+(a+b-c-d)^4(a-b)(c-d)$

۳۲۷. $x^2y^2(z-t)(x-y)+x^2z^2(t-y)(x-z)+$
$+x^2t^2(y-z)(x-t)+y^2z^2(x-t)(y-z)+$
$+y^2t^2(z-x)(y-t)+z^2t^2(x-y)(z-t)$.

۳۲۸. $x^4(z-y)(y-t)(z-t)+y^4(x-z)(x-t)\times$
$\times(z-t)+z^4(y-x)(y-t)(x-t)-t^2[x^2(z-y)\times$
$\times(y-t)(z-t)+y^2(x-z)(x-t)(z-t)+z^2(y-x)\times$
$\times(y-t)(x-t)$

۳۲۹. $x^3y^3(z-t)(x-y)+x^3z^3(t-y)(x-z)+$
$+x^3t^3(y-z)(x-t)+y^3z^3(x-t)(y-z)+$
$+y^3t^3(z-x)(y-t)+z^3t^3(x-y)(z-t)$

صحت اتحادهای زیررا تحقیق کنید :

۳۳۰. $(x^2+y^2)(z-t)(x-y)+(x^2+z^2)(t-y)\times$
$\times(x-z)+(x^2+t^2)(y-z)(x-t)+(y^2+z^2)(x-t)\times$
$\times(y-z)+(y^2+t^2)(z-x)(y-t)+(z^2+t^2)(x-y)\times$
$\times(z-t)=0$

۳۳۱. $[b^2c^2(a+d)+a^2d^2(b+c)](b-c)(a-d)+$

$$+[c^2a^2(b+d)+b^2d^2(c+a)](c-a)(b-d)+$$

$$+[a^2b^2(c+d)+c^2d^2(a+b)](a-b)(c-d)=0$$

عبارتهای زیر را ساده کنید :

۳۳۲. $$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

۳۳۳. $$\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

۳۳۴. $$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^2}{(b-d)(b-c)(b-d)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

۳۳۵. $$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

۳۳۶. $$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

۳۳۷. $$\frac{a^2b^2c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)}+\frac{a^2b^2d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)}+\frac{a^2c^2d^2}{(a-b)(c-b)(d-b)}+\frac{b^2c^2d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)}$$

۴۳. روش کلی گویاکردن مخرج کسرها

در بند ۲۵ ازروش خاصی برای گویا کردن مخرج کسرها گفتگو کردیم. حالا روش کلی را موردمطالعه قرار می‌دهیم . این روش بر اساس رابطهٔ بین ساده‌ترین عبارتهای متقارن بین n متغیر با ساده‌ترین عبارتهای متقارن بین $n-1$ متغیر قرار دارد .

ساده‌ترین عبارتهای متقارن نسبت به متغیرهای x_2، x_3، ...، x_n را به τ_1، τ_2، ...، τ_{n-1} نشان می‌دهیم، دراینصورت داریم :

$$\tau_1 = x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

$$\tau_2 = x_2x_3 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\tau_{n-1} = x_2x_3 \cdots x_n$$

ساده‌ترین عبارتهای متقارن بین n متغیرراهم ، مثل سابق ، σ_1، σ_2، ...، σ_n می‌نامیم :

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sigma_n = x_1x_2 \cdots x_n$$

واضح است که داریم :
$$\sigma_1 = x_1 + \tau_1$$

حالا تمام جملاتی از σ_2 راکه شامل x_1 هستند درنظر می‌گیریم . این جملات چنین‌اند :

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n = x_1(x_2 + x_3 \cdots + x_n) = x_1\tau_1$$

بقیهٔ جملات σ_2 هم تشکیل ساده‌ترین عبــارت متقارن درجه دوم را نسبت به $n-1$ متغیر x_2 ، x_3 ، ...،وx_n می‌دهند (یعنی τ_2) ، بنابراین‌داریم :

$$\sigma_2 = x_1\tau_1 + \tau_2$$

بهمین ترتیب می‌توان ثابت کرد :

$$\sigma_3 = x_1\tau_2 + \tau_3$$

و بطور کلی :

$$\sigma_k = x_1\tau_{k-1} + \tau_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$$

(چون $n-1$ کثیرالجمله‌از τ_k داریم، این‌رابطه نمی‌تواند برای $k=n$ بکار رود، ولی برای σ_n واضح است که داریم : $\sigma_n = x_1\tau_{n-1}$) .

باتوجه به‌روابطی که نوشتیم خواهیم داشت :

$$\tau_1 = \sigma_1 - x_1$$
$$\tau_2 = \sigma_2 - x_1\tau_1$$
$$\tau_3 = \sigma_3 - x_1\tau_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\tau_{n-1} = \sigma_{n-1} - x_1\tau_{n-2}$$

باکمك‌این‌روابط می‌توان τ_1 و τ_2 ، ... ، τ_{n-1} رابرحسب σ_1 و σ_2، ... ، σ_{n-1} و x_1 بیان کرد .

بخصوص درحالتی که $\sigma_1 = 0$ ، $\sigma_2 = 0$، ... ، $\sigma_{n-1} = 0$ باشد، این روابط بصورت سادهٔ زیردرمی‌آیند :

$$\tau_1 = -x_1, \qquad \tau_2 = x_1^2, \ \ldots, \ \tau_{n-1} = (-1)x_1^{n-1} \qquad (14)$$

درمطالب بعدی‌هم ما ازهمین روابط (۱۴) استفاده می‌کنیم .

حالا به موضوع‌اصلی، یعنی گویاکردن مخرج کسر، می‌پردازیم. فرض می‌کنیم که مخرج کسر، کثیرالجمله‌ای‌از رادیکال $x_1 = \sqrt[n]{a}$ باشد ، به‌عبارت دیگر مخرج به‌شکل کثیرالجملهٔ زیر باشد :

$$b_0x_1^{n-1} + b_1x_1^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$$

که درآن b_0 و b_1 ، ... ، b_{n-1} ضرایبی دلخواه و $x_1^n = a$ باشد . سپس

فرض می‌کنیم که صورت کسر هم کثیرالجملهٔ دیگری از x_1 باشد. به‌این‌ترتیب کسر به صورت زیر خواهد بود :

$$\frac{g(x_1)}{f(x_1)}$$

$g(x_1)$ و $f(x_1)$ کثیرالجمله‌هائی از x_1 و $x_1{}^n - a = 0$ است .

ریشه‌های دیگر معادلهٔ $x^n - a = 0$ را x_2 ، x_3 ، ... و x_n می‌گیریم (خواهیم دید که احتیاجی به محاسبهٔ این‌جوابها نیست، زیرا جواب برحسب x_1 بدست می‌آید) . برای گویا کردن مخرج ، صورت و مخرج کسر را در $f(x_1)\cdot f(x_2)\cdots f(x_n)$ ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید :

$$\frac{g(x_1)}{f(x_1)} = \frac{g(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$$

واضح است که مخرج کسر با هر تبدیلی از ریشه‌های x_1 ، x_2 ، ... و x_n تغییر نمی‌کند ، یعنی نسبت به x_1 ، x_2 ، ... ، x_n متقارن است، بنابراین می‌توان آنرا برحسب σ_1 ، σ_2 ، ... ، σ_n بیان نمود . از طرف دیگر، چون عددهای x_1 ، x_2 ، ... ، x_n ریشه‌های کثیرالجملهٔ $x^n - a$ می‌باشند ، طبق روابط ویت داریم :

$$\sigma_1 = 0 ,\quad \sigma_2 = 0 , \ldots , \sigma_{n-1} = 0 ,\quad \sigma_n = (-1)^{n+1}a$$

اگر این‌مقادیر σ_1، σ_2 ، ... ، σ_n را برای‌مخرج درنظر بگیریم، کثیرالجمله‌ای نسبت به a ، b_0 ، b_1 ، ... ، b_{n-1} ، یعنی عبارتی که دیگر شامل رادیکال x_1 نیست، بدست می‌آید. به‌این‌ترتیب مخرج کسر گویا می‌شود . برای‌اینکه حل مسئله تمام شود، باید صورت کسر را هم برحسب رادیکال معلوم $x_1 = \sqrt[n]{a}$ حساب کرد . عامل $g(x_1)$ به شکل موردنظر هست ، بنابراین باید حاصل عبارت زیررا پیدا کنیم :

$$f(x_2)\cdots f(x_n)$$

این عبارت باهر تبدیلی نسبت به متغیرهای x_2 ، ... ، x_n تغییر نمی‌کند و بنابراین نسبت به این‌متغیرها متقارن است، یعنی می‌توان آنرا برحسب τ_1 و τ_2 ، ... ، τ_{n-1} ـ ساده‌ترین عبارتهـای متقارن نسبت به $n-1$ متغیر ـ نوشت . چون‌درحالت مورد بحث $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_{n-1} = 0$ است، مقادیر τ_1 ، τ_2 ، ... ، τ_{n-1} برحسب x_1 به صورت سادهٔ روابط (۱۴) در می‌آید :

$$\tau_k = (-1)^k x_1^k$$

با قراردادن این مقادیر، حاصل صورت کسر هم بدست می‌آید که با در نظـر گرفتن $x_1^n = a$ می‌توان بازهم آنراساده کرد .

در نظر اول، اینطور استنباط می‌شود که روش مذکور تنها درحالتی بکار می‌رود که درمخرج یك‌رادیکال $x_1 = \sqrt[n]{a}$ ، منتها باتوانهای مختلف، وجود داشته باشد. ولی، درحقیقت می‌توان ضرایب b_0 ، b_1 ، ... ، b_{n-1} و عدد a را هم برحسب رادیکالهای دیگری‌درنظر گرفت . دراینصورت ابتدامخرج کسررا نسبت به رادیکال $x_1 = \sqrt[n]{a}$ گویا می‌کنیم ، سپس به بقیهٔ رادیکالها (که b_0 ، b_1 ، ... ، b_{n-1} و a برحسب آنها بیان شده‌اند) می‌پردازیم، یعنی نسبت به یکی ازرادیکالهای باقیمانده، با روش‌فوق ، گویا می‌کنیم و غیره . بعداز چندمرحله عمل، بالاخره مخرج کسر بکلی گویا می‌شود. البته این‌روش مستلزم عملیات‌بسیارمفصلی است، ولی درعوض روشی‌کلی است ومخرج‌هر کسر دلخواهی را باکمك‌آن می‌توان گویاکرد .

دونمونه ذکر می‌کنیم .

۱. مخرج کسرزیر راگویاکنید :

$$A = \frac{1}{1 - \sqrt[4]{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt[4]{8}}$$

اگر $x_1=\sqrt[4]{2}$ فرض کنیم ،کسرمزبور را می‌توان‌چنین نوشت :

$$A=\frac{1}{1-x_1+2x_1^2+x_1^3}=\frac{1}{f(x_1)}$$

بقیهٔ ریشه‌های معادلهٔ $x^4-2=0$ را به x_2، x_3، x_4 نشان می‌دهیم‌وساده‌ترین کثیرالجمله‌های متقارن σ_1، σ_2، σ_3، σ_4، τ_1، τ_2 و τ_3 را مورد توجه قرار می‌دهیم . داریم :

$$A=\frac{f(x_2)f(x_3)f(x_4)}{f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)}$$

صورت ومخرج کسر را برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن می‌نویسیم :

$$f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)=$$
$$=(1-x_1+2x_1^2+x_1^3)(1-x_2+2x_2^2+x_2^3)\times$$
$$\times(1-x_3+2x_3^2+x_3^3)(1-x_4+2x_4^2+x_4^3)=$$
$$=1+a\sigma_4+b\sigma_4^2+c\sigma_4^3$$

(بخاطر داریم‌که $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0$ است) ، پس ازمحاسبات لازم ضرایب a و b و c بدست می‌آید :

$$f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)=1-3\sigma_4+42\sigma_4^2+\sigma_4^3$$

بالاخره بادرنظر گرفتن $\sigma_4=x_1x_2x_3x_4=-2$ (باتوجه به روابط ویت) مقدار زیر برای مخرج کسر بدست می‌آید :

$$f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)=1-3(-2)+$$
$$+42(-2)^2+(-2)^3=167$$

حالا باتوجه به جدول صفحهٔ ۸۱ داریم :

$$f(x_2)f(x_3)f(x_4)=(1-x_2+2x_2^2+x_2^3)\times$$
$$\times(1-x_3+2x_3^2+x_3^3)(1-x_4+2x_4^2+x_4^3)=$$
$$=1-O(x_2)+2O(x_2^2)+O(x_2^3)+O(x_2x_3)-$$
$$-2O(x_2^2x_3)-O(x_2^3x_3)+4O(x_2^2x_3^2)+2O(x_2^3x_3^2)+$$

$$+O(x_2^3x_3^2)-O(x_2x_3x_4)+2O(x_2^2x_3x_4)+O(x_2^3x_3x_4)-$$
$$-4O(x_2^2x_3^2x_4)-2O(x_2^3x_3^2x_4)-O(x_2^3x_3^3x_4)+$$
$$+8O(x_2^2x_3^2x_4^2)+4O(x_2^3x_3^2x_4^2)+2O(x_2^3x_3^3x_4^2)+$$
$$+O(x_2^3x_3^3x_4^3)=1-\tau_1+2(\tau_1^2-2\tau_2)+$$
$$+(\tau_1^3-3\tau_1\tau_2+3\tau_3)+\tau_2-2(\tau_1\tau_2-3\tau_3)-$$
$$-(\tau_1^2\tau_2-2\tau_2^2-\tau_1\tau_3)+4(\tau_2^2-2\tau_1\tau_3)+$$
$$+2(\tau_1\tau_2^2-2\tau_1^2\tau_3-\tau_2\tau_3)+(\tau_2^3+3\tau_3^2-3\tau_1\tau_2\tau_3)-$$
$$-\tau_3+2\tau_1\tau_3+\tau_3(\tau_1^2-2\tau_2)-4\tau_2\tau_3-2\tau_3(\tau_1\tau_2-3\tau_3)-$$
$$-\tau_3(\tau_2^2-2\tau_1\tau_3)+8\tau_3^2+4\tau_1\tau_3^2+2\tau_2\tau_3^2+\tau_3^3.$$

و چون $\tau_1=-x_1$ ، $\tau_2=x_1^2$ ، $\tau_3=-x_1^3$ و $\tau_1^4=2$ می‌باشد ، صورت کسر بالاخره چنین می‌شود :

$$f(x_2)f(x_3)f(x_4)=9+15x_1+25x_1^2-14x_1^3=$$
$$=9+15\sqrt[4]{2}+25\sqrt{2}-14\sqrt[4]{8}$$

و نتیجه کسر میشود :

$$A=\frac{1}{1-\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}}=\frac{9+15\sqrt[4]{2}+25\sqrt{2}-14\sqrt[4]{8}}{167}$$

۲. مخرج کسر زیر را گویا کنید (بامثال ۲ صفحهٔ ۱۲۰ مقایسه کنید):

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$$

اگر فرض کنیم $\alpha=\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ و $x_1=\sqrt[3]{a}$ ، داریم :

$$A=\frac{1}{\alpha+x_1}=\frac{1}{f(x_1)}$$

که در آن x_1 ریشهٔ معادلهٔ $x^3-a=0$ است . اگر x_2 و x_3 را دو ریشهٔ دیگر معادله فرض کنیم ، داریم :

$$A=\frac{f(x_2)f(x_3)}{f(x_1)f(x_2)f(x_3)}$$

وسپس :

$$f(x_1)f(x_2)f(x_3)=(\alpha+x_1)(\alpha+x_2)(\alpha+x_3)=$$

$$=\alpha^3+\alpha^2(x_1+x_2+x_3)+\alpha(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+$$
$$+x_1x_2x_3=\alpha^3+\sigma_1\alpha^2+\sigma_2\alpha+\sigma_3$$

وچون طبق روابط ویت داریم : $\sigma_1=\sigma_2=0$ و $\sigma_3=a$. بدست می‌آید :

$$f(x_1)f(x_2)f(x_3)=\alpha^3+a=(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^3+a=$$
$$=a+b+c+3\sqrt[3]{b^2c}+3\sqrt[3]{bc^2}$$

وبرای صورت کسر :

$$f(x_2)f(x_3)=\alpha^2-x_1\alpha+x_1^2=(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})^2-$$
$$-\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})+(\sqrt[3]{a})^2=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}+2\sqrt[3]{bc}-$$
$$-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}$$

وبنابراین کسر مفروض به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$A=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}+2\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}}{a+b+c+3\sqrt[3]{b^2c}+3\sqrt[3]{bc^2}}$$

که درآن یکی از رادیکالهای مخرج از بین رفته است $(\sqrt[3]{a})$.

حالا فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{b}=y_1$ ، عبارت A را چنین می‌نویسیم :

$$A=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}+2\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}}{\beta+\gamma y_1+\delta y_1^2}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}+2\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}}{g(y_1)}$$

که در آن $\beta=a+b+c$ و $\gamma=3\sqrt[3]{c^2}$ و $\delta=3\sqrt[3]{c}$ می‌باشد ، صورت و مخرج کسررا در $g(y_2)g(y_3)$ ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید :

$$A=\frac{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}+2\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac})g(y_2)g(y_3)}{g(y_1)g(y_2)g(y_3)}$$

حالا ساده‌ترین عبارتهای متقارن را نسبت به y_1 ، y_2 و y_3 به σ'_1 ، σ'_2 و σ'_3 و نسبت به y_2 ، y_3 را به τ'_1 ، τ'_2 نشان می‌دهیم ، در اینصورت خواهیم داشت :

$$g(y_1)g(y_2)g(y_3)=(\beta+\gamma y_1+\delta y_1^2)(\beta+\gamma y_2+\delta y_2^2)\times$$
$$\times(\beta+\gamma y_3+\delta y_3^2)=\beta^3+\beta^2\gamma\sigma_1'+\beta^2\delta(\sigma_1'^2-2\sigma_2')+$$
$$+\beta\gamma^2\sigma_2'+\beta\gamma\delta(\sigma_1'\sigma_2'-3\sigma_3')+\beta\delta^2(\sigma_2'^2-2\sigma_1'\sigma_3')+$$
$$+\gamma^3\sigma_3'+\gamma^2\delta\sigma_1'\sigma_3'+\gamma\delta^2\sigma_2'\sigma_3'+\delta^3\sigma_3'^2.$$

وچون طبق روابط ویت داریم : $\sigma_1'=\sigma_2'=0$ و $\sigma_3'=b$ ، بدست می‌آید:

$$g(y_1)g(y_2)g(y_3)=\beta^3-3\beta\gamma\delta\cdot b+\gamma^3\cdot b+\delta^3\cdot b^2=$$
$$=(a+b+c)^3-27(a+b+c)bc+27bc^2+27b^2c=$$
$$=(a+b+c)^3-27abc.$$

و سپس :

$$g(y_2)g(y_3)=(\beta+\gamma y_2+\delta y_2^2)(\beta+\gamma y_3+\delta y_3^2)=$$
$$=\beta^2+\beta\gamma\tau_1'+\beta\delta(\tau_1'^2-2\tau_2')+\gamma^2\tau_2'+\gamma\delta\tau_1'\tau_2'+\delta^2\tau_2'^2$$

وبنابراین با توجه به رابطهٔ (۱۴) :

$$g(y_2)g(y_3)=(a+b+c)^2-3(a+b+c)\sqrt[3]{bc^2}+$$
$$+3(a+b+c)\sqrt[3]{c}(\sqrt[3]{b^2}--2\sqrt[3]{b^2})+9c\sqrt[3]{cb^2}-9cb+$$
$$+9\sqrt[3]{c^2}\cdot b\sqrt[3]{b}=(a+b+c)^2-9bc-3(a-2b+c)\sqrt[3]{bc^2}-$$
$$-3(a+b-2c)\sqrt[3]{b^2c}$$

و بالاخره بدست می‌آید :

$$A=(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}+2\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac})\times$$
$$\times\frac{[(a+b+c)^2-9bc-3(a-2b+c)\sqrt[3]{bc^2}-3(a+b-2c)\sqrt[3]{b^2c}]}{(a+b+c)^3-27abc}$$

واین‌رابطه، همانست که درصفحهٔ ۱۲۱ هم بدست‌آوردیم(اگر پرانتزهای‌صورت کسر را بازکنیم، بهمان عبارت می‌رسیم). همانطورکه درصفحات ۱۲۰و۱۲۱ دیدیم ، حل این‌مسئله باسادگی بیشتری به‌انجام می‌رسید، بنابراین روشی را

که دراین‌بند ذکر کردیم، همیشه کوتاه‌ترین و ساده‌ترین راه حل نیست، بلکه کلی‌ترین راه حل است .

۴۴. محاسبهٔ ریشهٔ اعداد به‌کمك عبارتهای متقارن

دانش‌آموزان دبیرستانی به‌طریقهٔ جذر گرفتن ازاعدادکاملاً آشناهستند ولی در دورهٔ دبیرستان، روش ساده‌ای که باکمك‌آن بتوان ریشه‌های اعدادرا با فرجه‌های بزرگتر از۲حساب‌کرد (البته بدون استفاده از جدولها و مثلاً جدول لگاریتم) ، وجود ندارد . ریشهٔ اعداد را می‌توان، بـا یك‌روش نسبتاً ساده‌ای ،که به روش تقریبات متوالی مشهور است، پیداکرد. ولی‌ما دراینجا ازاین روش‌صحبت نمی‌کنیم، بلکه روش دیگری ازمحاسبهٔ تقریبی ریشه را با کمك‌کثیرالجمله‌های متقارن ذکر می‌کنیم .

فرض‌کنیدکه بخواهیم $\sqrt[k]{N}$ را محاسبه‌کنیم که درآن N عددی است مثبت. به‌عنوان«تقریبهای مرحلهٔ صفر» عددهای مثبت‌دلخواه $a_1^{(0)}$، $a_2^{(0)}$، ...، $a_{k-1}^{(0)}$ را انتخاب می‌کنیم وعدد زیررا محاسبه می‌کنیم:

$$a_k^{(0)}=\frac{N}{a_1^{(0)}a_2^{(0)}\ldots a_{k-1}^{(0)}}$$

ایـن عددهـا دارای این خاصیت هستندکـه حاصلضرب آنهـا یعنی $\sigma_k=a_1^{(0)}a_2^{(0)}\ldots a_k^{(0)}$ برابراست با N . حالا ساده‌ترین عبارتهای متقارن σ_1، σ_2، ...، σ_k را نسبت به عددهای $a_1^{(0)}$، $a_2^{(0)}$، ...، $a_k^{(0)}$ محاسبه می‌کنیم وسپس ازروی‌آنها به عنوان «تقریبهـای مرحلهٔ اول» عددهای زیررا انتخاب می‌کنیم :

$$a_1^{(1)}=\frac{\sigma_1}{k};a_2^{(1)}=\frac{2\sigma_2}{(k-1)\sigma_1};\ a_3^{(1)}=\frac{3\sigma_3}{(k-2)\sigma_2};\ldots;$$

$$a_k^{(1)}=\frac{k\sigma_k}{1\times\sigma_{k-1}}.$$

حاصلضرب همهٔ عددهای «تقریب اول» برابراست با :

$$\frac{k!\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}{k!\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{k-1}}=\sigma_k=N$$

دوباره ساده‌ترین عبارتهای متقارن σ_1 ، σ_2 ، ... ، σ_k را نسبت به عددهای $a_1^{(1)}$ ، $a_2^{(1)}$ ، ... ، $a_k^{(1)}$ محاسبه و به‌كمك آنها «تقریبهای مرحلهٔ دوم» را بترتیب زیر انتخاب می‌کنیم :

$$a_1^{(2)}=\frac{\sigma_1}{k};\ a_2^{(2)}=\frac{2\sigma_2}{(k-1)\sigma_1};\ a_3^{(2)}=\frac{3\sigma_3}{(k-2)\sigma_2};\ldots;$$

$$a_k^{(2)}=\frac{k\sigma_k}{1\times\sigma_{k-1}}.$$

حاصلضرب تقریبهای دوم هم مساوی N می‌شود. سپس بهمین‌ترتیب «تقریبهای مرحلهٔ سوم» : $a_1^{(3)}$ ، $a_2^{(3)}$ ، ... ، $a_k^{(3)}$ را انتخاب می‌کنیم وغیره .

می‌توان ثابت‌کرد که وقتی n بسمت بی‌نهایت میل کند، هریك‌ازمقادیر $a_1^{(n)}$ ، $a_2^{(n)}$ ، ... ، $a_k^{(n)}$ (تقریبهای مرحلهٔ nام) بسمت $\sqrt[k]{N}$ میـل می‌کنند .

دونمونه ذکر می‌کنیم .

۱. به‌ازاء $k=2$ ، یعنی برای‌جذر گرفتن روابط‌زیررا خواهیم‌داشت:

$$a_2^{(0)}=\frac{N}{a_1^{(0)}};$$

$$a_1^{(1)}=\frac{\sigma_1}{2}=\frac{a_1^{(0)}+a_2^{(0)}}{2};\ a_2^{(1)}=\frac{N}{a_1^{(1)}};$$

و بطوركلی :

$$a_1^{(n)}=\frac{a_1^{(n-1)}+a_2^{(n-1)}}{2};\ a_2^{(n)}=\frac{N}{a_1^{(n)}}.$$

مثلاً فرض‌کنید بخواهیم $\sqrt{3}$ رامحاسبه‌کنیم. $a_1^{(0)}$ را مساوی۲ می‌گیریم ، درآنصورت بترتیب بدست می‌آید :

$$a_۱^{(۰)}=۲; \qquad a_۲^{(۰)}=\frac{۳}{۲};$$

$$a_۱^{(۱)}=\frac{۲+\frac{۳}{۲}}{۲}=\frac{۷}{۴}; \qquad a_۲^{(۱)}=\frac{۳\times۴}{۷}=\frac{۱۲}{۷};$$

$$a_۱^{(۲)}=\frac{\frac{۷}{۴}+\frac{۱۲}{۷}}{۲}=\frac{۹۷}{۵۶}; \qquad a_۲^{(۲)}=\frac{۳\times۵۶}{۹۷}=\frac{۱۶۸}{۹۷};$$

$$a_۱^{(۳)}=\frac{\frac{۹۷}{۵۶}+\frac{۱۶۸}{۹۷}}{۲}=\frac{۱۸۸۱۷}{۱۰۸۶۴}; \quad a_۲^{(۳)}=\frac{۳\times۱۰۸۶۴}{۱۸۸۱۷}=\frac{۳۲۵۹۲}{۱۸۸۱۷};$$

. . . . ،

که اگر کسرهای متعارفی را به‌کسرهای اعشاری تبدیل‌کنیم، بدست می‌آید :

$$a_۱^{(۳)}=۱/۷۳۲۰۵۰۸۱\ldots; \qquad a_۲^{(۳)}=۱/۷۳۲۰۵۰۸۰\ldots،$$

یعنی درتقریب سوم تا۷ رقم بعد ازممیز، مقدار $\sqrt{۳}$ بدست می‌آید(به‌سادگی دیده می‌شودکه یکی ازعددهای $a_۱^{(n)}$ ، $a_۲^{(n)}$ تقریب اضافی $\sqrt{N}$ و دیگری تقریب نقصانی‌آنرا می‌دهد، زیرا حاصلضرب آنها مساوی N است) .

۲. وقتی‌که $k=۳$ باشد ، یعنی برای‌کعب‌گرفتن باید از روابط زیر استفاده‌کرد :

$$a_۳^{(۰)}=\frac{N}{a_۱^{(۰)}a_۲^{(۰)}};$$

$$a_۱^{(۰)}=\frac{\sigma_۱}{۳}=\frac{a_۱^{(۰)}+a_۲^{(۰)}+a_۳^{(۰)}}{۳},$$

$$a_۲^{(۱)}=\frac{\sigma_۲}{\sigma_۱}=\frac{a_۱^{(۰)}a_۲^{(۰)}+a_۱^{(۰)}a_۳^{(۰)}+a_۲^{(۰)}a_۳^{(۰)}}{a_۱^{(۰)}+a_۲^{(۰)}+a_۳^{(۰)}},$$

$$a_۳^{(۱)}=\frac{N}{a_۱^{(۱)}a_۲^{(۱)}},$$

و بطورکلی :

$$a_1^{(n)} = \frac{a_1^{(n-1)} + a_2^{(n-1)} + a_3^{(n-1)}}{3},$$

$$a_2^{(n)} = \frac{a_1^{(n-1)} a_2^{(n-1)} + a_1^{(n-1)} a_3^{(n-1)} + a_2^{(n-1)} a_3^{(n-1)}}{a_1^{(n-1)} + a_2^{(n-1)} + a_3^{(n-1)}},$$

$$a_3^{(n)} = \frac{N}{a_1^{(n)} a_2^{(n)}}.$$

مثلاً فرض کنیدکه بخواهیم $\sqrt[3]{2}$ را محاسبه کنیم .

فرض می‌کنیم: $a_1^{(0)} = a_2^{(0)} = 1$. دراینصورت بترتیب بدست می‌آید:

$$a_1^{(0)} = 1, \quad a_2^{(0)} = 1, \quad a_3^{(0)} = \frac{2}{1 \times 1} = 2;$$

$$a_1^{(1)} = \frac{1+1+2}{3} = \frac{4}{3}, \quad a_2^{(1)} = \frac{1\times 1 + 1\times 2 + 1\times 2}{1+1+2} = \frac{5}{4},$$

$$a_3^{(1)} = \frac{2}{\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}} = \frac{6}{5};$$

$$a_1^{(2)} = \frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}}{3} = \frac{227}{180},$$

$$a_2^{(2)} = \frac{\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}+\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}+\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}}{\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}} = \frac{286}{227},$$

$$a_3^{(2)} = \frac{2}{\frac{227}{180}\times\frac{286}{227}} = \frac{360}{286}.$$

که اگر کسرهای متعارفی را به اعشاری تبدیل کنیم، می‌شود :

$$a_1^{(2)} = 1/2611111\ldots$$

$$a_2^{(2)} = 1/25991118\ldots$$

$$a_{\text{۳}}^{(\text{۲})} = \text{۱/۲۵۸۷۴۱۲}$$

تقریبهای بعدی از این‌عدد شروع می‌شود :

$$a_{\text{۱}}^{(\text{۳})} = \frac{a_{\text{۱}}^{(\text{۱})} + a_{\text{۲}}^{(\text{۲})} + a_{\text{۳}}^{(\text{۲})}}{\text{۳}} = \text{۱/۲۵۹۹۲۱۷}\cdots$$

که اگر مقادیر $a_{\text{۲}}^{(\text{۳})}$ و $a_{\text{۳}}^{(\text{۳})}$ راهم محاسبه‌کنیم ، روشن می‌شود که پنج رقم بعداز ممیز این‌عدد صحیح است .

ضمیمه

مطالبی دربارهٔ معادلات جبری از درجه‌های بالا

هرجا که دراین کتاب به معادلات درجهٔ سوم ویا بالاتر برخورد می‌شد، از احکامی استفاده می‌کردیم که اثبات آنها را طرح نکردیم. در این فصل به اثبات این احکام می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان ریشه‌های صحیح کثیرالجمله‌های باضرایب صحیح را بدست آورد.

۴۵. قضیهٔ بزو

ضمن حل‌معادلات از درجه‌های بالا، اغلب ازقضیهٔ زیر که به «قضیه بزو» معروف است، استفاده می‌شود .

قضیه . باقیماندهٔ تقسیم کثیرالجملهٔ

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$$

بر $x-\alpha$ برابر است با مقدار این کثیرالجمله به ازاء $x=\alpha$ ، یعنی برابر است با عدد زیر :

$$f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\dots+a_n$$

برای اثبات این قضیه ، کثیرالجملهٔ $f(x)$ را بر $x-\alpha$ تقسیم می‌کنیم. خارج‌قسمت این‌تقسیم را به $q(x)$ و باقیماندهٔ آنرا به $r(x)$ نشان می‌دهیم . باقیماندهٔ هر تقسیم ، کثیرالجمله‌ای است که درجهٔ آن ازمقسوم‌علیه کمتر است. بنابراین، باتوجه به‌اینکه‌مقسوم‌علیه $x-\alpha$ ازدرجهٔ اول است، درجهٔ $r(x)$ مساوی صفر می‌شود، یعنی $r(x)=r$ عددی ثابت است . بنابراین داریم :

$$f(x)=(x-\alpha)q(x)+r$$

برای محاسبهٔ r ، دراین تساوی $x=\alpha$ می گیریم، بدست می‌آید $f(\alpha)=r$ قضیهٔ بزو ثابت شد .

نتیجه . اگر α ریشه‌ای از کثیرالجملهٔ $f(x)$ باشد (یعنی $f(\alpha)=0$ باشد) ، این کثیرالجمله بر $x-\alpha$ قابل‌قسمت است .

ازاینجا مثلاً نتیجه می‌شود که x^n-a^n بر $x-a$ قابل‌قسمت است، زیرا اگر x را به a تبدیل کنیم بدست می‌آید : $f(a)=a^n-a^n=0$. حالا خواننده می‌تواند به سادگی ثابت کند که کثیرالجمله‌های $x^{2n}-a^{2n}$ و $x^{2n+1}+a^{2n+1}$ بر $x+a$ قابل‌قسمت است (بند۲۵ را به‌بینید) .

تمرینات

۳۳۸. باقیماندهٔ تقسیم $x^{2n}+a^{2n}$ را بر $x+a$ بدست آورید.

۳۳۹. ثابت کنید که برای هرعدد طبیعی n کثیرالجملهٔ:

$$(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}$$

برعبارت $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ قابل‌قسمت است.

۴۶. جستجوی ریشه‌های صحیح کثیرالجمله‌های باضرایب صحیح

قضیه. فرض کنید که تمام ضرایب کثیرالجملهٔ

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

اعدادی صحیح باشند و α ریشهٔ صحیح این کثیرالجمله باشد، در این‌صورت α مقسوم‌علیهی ازمقدار ثابت a_n خواهدبود.

درحقیقت، طبق‌شرط قضیه داریم:

$$f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n=0$$

و ازآنجا:

$$a_n=-\alpha(a_0\alpha^{n-1}+a_1\alpha^{n-2}+\cdots+a_{n-1})$$

چون عبارت داخل پرانتز عددی است صحیح (همهٔ ضرایب a_k وهمچنین‌عدد α اعدادی صحیح‌اند)، بنابراین a_n بر α قابل‌قسمت است.

حکمی راکه‌ثابت کردیم، ازجهت جستجوی‌ریشه‌های صحیح کثیرالجمله‌های باضرایب صحیح، فوق‌العاده اهمیت دارد. برای این منظور باید مقدار ثابت کثیرالجمله را در نظر گرفت و همهٔ مقسوم‌علیه‌های آنرا (چه مثبت و چه منفی) بدست بیاوریم. سپس مقسوم‌علیه‌های مذکور را در کثیرالجمله قرار می‌دهیم تا به‌بینیم به ازاء کدامیك از آنها مساوی صفر می‌شود. اگر به ازاء هیچیك ازمقسوم‌علیه‌های مقدار ثابت، مقدارکثیرالجمله برابر صفر نشود، به

معنای آنست که این کثیرالجمله دارای ریشهٔ صحیح نیست .

وقتی‌که تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد a_n خیلی‌زیاد باشد، این‌روش منجر به محاسبات طولانی ومفصل می‌شود . دراینگونه موارد می‌توان با روش زیر حجم محاسبات راکم‌کرد . درکثیرالجملهٔ

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

متغیر x را به $y+k$ تبدیل می‌کنیم ،کثیرالجملهٔ جدیدی نسبت به y بدست می‌آید :

$$F(y)=a_0(y+k)^n+a_1(y+k)^{n-1}+\dots+a_{n-1}(y+k)+a_n$$

با بازکردن پرانتزها معلوم می‌شودکه مقدار ثابت درکثیرالجملهٔ اخیر برابر است با $f(k)$ یعنی :

$$a_0k^n+a_1k^{n-1}+\dots+a_{n-1}k+a_n$$

(این نتیجه هم به سادگی وباکمك قضیهٔ بزو بدست می‌آید) .

چون $y=x-k$ است، اگر α ریشه‌ای ازکثیرالجملهٔ $f(x)$ باشد، $\alpha-k$ هم ریشه‌ای ازکثیرالجملهٔ $F(y)$ خواهدبود . بنابراین، طبق‌قضیه‌ای که قبلا ثابت‌کردیم ، باید مقدار ثابت $F(y)$ یعنی $f(k)$ بر $\alpha-k$ قابل قسمت باشد .

به این‌ترتیب حکم زیر ثابت‌شد :

فرض‌کنید :

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$$

کثیرالجمله‌ای با ضرایب صحیح وα ریشهٔ صحیح‌آن باشد . دراینصورت برای هرعددصحیح k عدد $\alpha-k$ مقسوم‌علیهی از $f(k)$ است .

این‌حکم به میزان زیادی‌حجم محاسبات راکم می‌کند . مثلا اگر b_1و b_2 ، ... ، b_s مقسوم‌علیه‌های مقدار ثابت a_n ازکثیرالجملهٔ $f(x)$ باشند ، بایدعدد صحیحی مثل k درنظرگرفت و دیدکه‌کدامیك از عددهای b_j-k

مقسوم‌علیه عدد $f(k)$ هم‌هستند . فقط‌همین عددها‌ممکن است ریشهٔ کثیرالجملهٔ $f(x)$ باشند. برای k بهتر است حتی‌الامکان از عددهای کوچک استفاده کرد $k=\pm۱، \pm۲،\dots$.

به‌مثال زیر توجه کنید :

ریشه‌های صحیح کثیرالجملهٔ زیررا پیدا کنید

$$f(x)=x^۴+۳x^۳-۱۵x^۲-۳۷x-۶۰$$

ابتدا مقسوم‌علیه‌های مقدارثابت ۶۰− را می‌نویسیم :

۱، −۱، ۲، −۲، ۳، −۳، ۴، −۴، ۵، −۵، ۶، −۶،
۱۰، −۱۰، ۱۲، −۱۲، ۱۵، −۱۵، ۲۰، −۲۰، ۳۰،
−۳۰، ۶۰، −۶۰

حالا $k=۱$ می‌گیریم وعددهای $b_j-۱$ را تشکیل می‌دهیم :

۰، −۲، ۱، −۳، ۲، −۴، ۳، −۵، ۴، −۶، ۵، −۷،
۹، −۱۱، ۱۱، −۱۳، ۱۴، −۱۶، ۱۹، −۲۱، ۲۹، −۳۱،
۵۹، −۶۱

چون $f(۱)=-۱۰۸$ است و عدد ۱۰۸ بر عددهای ۰، −۵، ۵، −۷، −۱۱، ۱۱، −۱۳، ۱۴، −۱۶، ۱۹، −۲۱ و ۲۹ قابل‌قسمت‌نیست، فقط‌عددهای −۱، ۲، −۲، ۳، −۳، ۴، ۵، −۵ و ۱۰ باقی میماند . اگر بخواهیم بازهم تعداد عددها راکم‌کنیم ، $k=۲$ فرض می‌کنیم و عددهای $b_j-۲$ را تشکیل می‌دهیم، این عددها چنین‌اند: −۳، ۰، −۴، ۱، −۵، ۲، ۳، −۷ و ۸. ولی چون $f(۲)=-۱۵۴$ است و ۱۵۴ برعددهای −۳، ۰، −۴، −۵، ۳ و ۸ قابل قسمت نیست ، برای ما تنها سه عدد باقی‌میماند که می‌توانند ریشه‌های صحیح احتمالی کثیرالجمله باشند: ۳، ۴، −۵ .

اگر این سه عدد را درکثیرالجمله قرار دهیم، معلوم می‌شود که ۴ و −۵ ریشه‌های کثیرالجملهٔ مفروض هستند وطبق قضیهٔ بزو این کثیرالجمله بر

$(x+5)(x-4)$ قابل‌قسمت است . به این ترتیب خواهیم داشت :

$$x^4+3x^3-15x^2-37x-60=(x-4)(x+5)(x^2+2x+3)$$

و دوریشهٔ دیگر کثیرالجمله‌هم باحل معادله زیر بدست می‌آید

$$x^2+2x+3=0$$

واین ریشه‌ها چنین‌اند :

$$x_{3,4}=-1\pm\sqrt{-2}=-1\pm i\sqrt{2}$$

از روشی‌که برای جستجوی ریشه‌های صحیح کثیرالجمله بکار بردیم ، برای جستجوی ریشه‌های گویای کثیرالجملهٔ

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

هم می‌توان استفاده کرد (ضرایب کثیرالجمله اعدادی صحیح هستند) .

شبیه حالت مربوط به‌ریشه‌های صحیح می‌توانیم حکم زیررا ثابت‌کنیم:

ریشهٔ گویای کثیرالجملهٔ $f(x)$ ، باضرایب صحیح، عددهائی به صورت $\frac{p}{q}$ هستند که p مقسوم‌علیهی ازعدد ثابت a_n و q مقسوم‌علیهی ازضریب a_0 می‌باشد .

ضمناً اگر $\frac{p}{q}$ ریشه‌ای ازکثیرالجملهٔ $f(x)$ باشد، برای‌هرعدد صحیح kعدد $p-kq$ مقسوم‌علیهی ازعدد $f(k)$ خواهد بود .

ازاینجا این‌نتیجه هم بدست می‌آیدکه اگر درکثیرالجملهٔ بـا ضرایب صحیح، ضریب a_0 بزرگترین درجه، مساوی۱ بـاشد ، کثیرالجمله نمی‌تواند ریشه‌های گویای غیرصحیح داشته باشد .

بهمین مناسبت اغلب بهتر است‌که بجای جستجوی ریشه‌های گویای یك معادل، ، ریشه‌های صحیح معادلهٔ دیگری را جستجو کنیم . برای این منظور کافی‌است‌طرفین کثیرالجملهٔ$f(x)$ رادر a_0^{n-1} ضرب کنیم(که دراینصورت در جوابهای‌معادله‌تغییری حاصل نمیشود) وسپس$y=a_0x$فرض کنیم.دراینصورت کثیرالجملهٔ $f(x)$ به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$F(y)=y^n+a_1y^{n-1}+a_2a_0y^{n-2}+\dots+a_na_0^{n-1}$$

که دارای ضرایب صحیح وضریب بزرگترین درجهٔ واحد است .

تمرینات

ریشه‌های کثیرالجمله‌های زیررا بدست‌آورید :

۳۴۰. $x^4-4x^3-13x^2+28x+12$

۳۴۱. $x^4+4x^3-x^2-16x-12$

۳۴۲. $x^5+2x^4-10x^3-20x^2+9x+18$

۳۴۳. $x^5+3x^4-2x^3-9x^2-11x-6$

۳۴۴. $x^6-x^5-8x^4+14x^3+x^2-13x+6$

۳۴۵. $4x^4+8x^3-x^2-8x-3$

۴۷. جستجوی ریشه‌های صحیح موهومی

روشی راکه دراینجا برای‌جستجوی ریشه‌های صحیح معادله‌ذکرکردیم، می‌توان برای پیداکردن ریشه‌های مختلط به صورت $\alpha+\beta i$ هم بکاربرد (α وβ اعدادی صحیح فرض شده‌اند). به‌حکم زیر توجه‌کنید :

فرض کنید :

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$$

کثیرالجمله‌ای با ضرایب حقیقی صحیح باشد ، اگر $\alpha+\beta i$ $(\beta\neq 0)$ ریشهٔ مختلط صحیح‌آن باشد، عدد ثابت a_n بر $\alpha^2+\beta^2$ قابل قسمت است .

درحقیقت ، چون ضرایب کثیرالجملهٔ $f(x)$ حقیقی است ، علاوه بر $\alpha+\beta i$ ، عدد $\alpha-\beta i$ (مزدوج $\alpha+\beta i$) هم ریشهٔ آن‌خواهد بودوبنابراین بنابرقضیهٔ بزوکثیرالجملهٔ $f(x)$ بایدبرسه جمله‌ای درجه دوم‌زیرقابل‌قسمت باشد:

$$(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)=(x-\alpha)^2+\beta^2=$$
$$=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$$

و به این‌ترتیب خواهیم داشت :

$$f(x)=(x^۲-۲\alpha x+\alpha^۲+\beta^۲)q(x)$$

خارج‌قسمت $q(x)$ کثیرالجمله‌ای ازدرجهٔ $n-۲$ خواهد بود. ضمناً ، باتوجه به قاعدهٔ تقسیم یك کثیرالجمله بر کثیرالجملهٔ دیگر ، همهٔ ضرایب کثیرالجملهٔ $q(x)$ ، اعدادی حقیقی وصحیح خواهد بود. و چون مقدار ثابت حاصلضرب برابر است با حاصلضرب مقادیر ثابت عوامل آن، خواهیم داشت :

$$a_n=(a^۲+b^۲)b_{n-۲},$$

که درآن $b_{n-۲}$ عبارتست از مقدار ثابت خارج قسمت $q(x)$. به‌این‌ترتیب حکم موردنظر ثابت‌شد .

جستجوی ریشه‌های صحیح مختلط هم ، باکمی اشکال بیشتر ، شبیه جستجوی ریشه‌های صحیح حقیقی‌انجام‌می‌گیرد. ابتدا بایدهمهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت مقدار ثابت را پیداکرد، سپس تمام حالتهائی را درنظرگرفت‌که هریك ازاین مقسوم‌علیه‌ها می‌توانند به مجموع دومربع‌کامل $\alpha^۲+\beta^۲$ تبدیل شوند، بالاخره آزمایش‌کردکه‌کدامیك ازعددهای $\pm\alpha\pm\beta i$ (برای مقادیرپیداشدهٔ α و β) می‌توانند ریشهٔ‌کثیرالجمله باشند .

دراینجاهم تبصرهٔ مهم‌زیر می‌تواندکار جستجوی ریشه‌ها راساده‌ترکند: اگر $\alpha+\beta i$ ریشهٔ مختلط و صحیح‌کثیرالجملهٔ با ضرایب صحیح زیر باشد : $(\beta\neq ۰)$

$$f(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\cdots+a_n$$

برای هرعدد صحیح k ، عدد $f(k)$ بر $(\alpha-k)^۲+\beta^۲$ قابل قسمت خواهد بود .

این حکم‌کاملا شبیه‌مورد ریشه‌های صحیح حقیقی ثابت می‌شود. بااستفاده از این تبصره می‌توان تعداد ریشه‌های احتمالی را به میزان زیادی‌کم‌کرد . نمونه‌ای ذکر می‌کنیم .

ریشه‌های صحیح ومختلط کثیرالجملهٔ زیررا بدست‌آورید :

$$f(x)=x^۴-۸x^۳+۲۷x^۲-۵۰x+۵۰$$

مقدارثابت این کثیرالجمله مساوی ۵۰ است ومقسوم‌علیه‌های صحیح و مثبت‌آن عبارتست از : ۱، ۲، ۵، ۱۰، ۲۵ و۵۰ . این مقسوم‌علیه‌ها را به مجموع‌دو مربع‌کامل $\alpha^۲+\beta^۲$ تبدیل می‌کنیم، اگر $\beta\neq ۰$ باشدداریم :

$$۱=۰^۲+۱^۲ ;$$

$$۲=۱^۲+۱^۲ ;$$

$$۵=۲^۲+۱^۲=۱^۲+۲^۲ ;$$

$$۱۰=۳^۲+۱^۲=۱^۲+۳^۲ ;$$

$$۲۵=۴^۲+۳^۲=۳^۲+۴^۲=۰^۲+۵^۲ ;$$

$$۵۰=۷^۲+۱^۲=۵^۲+۵^۲=۱^۲+۷^۲$$

یعنی ریشه‌های صحیح احتمـالی کثیرالجملهٔ مفروض از بین اعداد زیر است (حقیقی ومختلط) :

$۱، -۱، ۲، -۲، ۵، -۵، ۱۰، -۱۰، ۲۵، -۲۵، ۵۰، -۵۰،$

$i، -i، ۱+i، ۱-i، -۱+i، -۱-i،$

$۲+i، ۲-i، -۲+i، -۲-i، ۱+۲i، ۱-۲i، -۱+۲i،$

$-۱-۲i،$

$۳+i، ۳-i، -۳+i، -۳-i، ۱+۳i، ۱-۳i، -۱+۳i،$

$-۱-۳i،$

$۴+۳i، ۴-۳i، -۴+۳i، -۴-۳i، ۳+۴i، ۳-۴i،$

$-۳+۴i، -۳-۴i، ۵i، -۵i،$

$۷+i، ۷-i، -۷+i، -۷-i، ۱+۷i، ۱-۷i، -۱+۷i،$

$-۱-۷i، ۵+۵i، ۵-۵i، -۵+۵i، -۵-۵i،$

۵۶ عدد بدست‌می‌آید، که هریك‌آنها می‌توانندریشهٔ‌کثیرالجملهٔ مفروض‌باشند.

برای اینکه این تعداد را کم کنیم $k=1$ می‌گیریم $f(1)=20$ می‌شود و از بین اعداد مختلط $\alpha+\beta i$ تنها آنهائی را انتخاب می‌کنیم که درمورد آنها عدد $(1-\alpha)^2+\beta^2$ مقسوم‌علیهی ازعدد ۲۰ باشد (و از اعداد حقیقی آنهائی را انتخاب می‌کنیم که درمورد آنها $1-x$ مقسوم‌علیهی ازعدد ۲۰ باشد). با این آزمایش معلوم می‌شود که تنها ۱۹ عدد زیر برای آزمایش باقی میماند:

$$-1،\ 2،\ 5،\ i،\ -i،\ 1+i،\ 1-i،\ -1+i،\ -1-i،\ 2+i،$$
$$2-i،\ -2+i،\ -2-i،\ 1+2i،\ 3+i،\ 3-i،\ 3+4i،\ 3-4i.$$

حالا $k=-1$ می‌گیریم $f(-1)=136$ می‌شود. از اعداد مختلط فوق آنهائی را انتخاب می‌کنیم که درمورد آنها $(1+\alpha)^2+\beta^2$ مقسوم‌علیهی از ۱۳۶ باشد، تنها ۱۰ عدد باقی میماند:

$$i،\ -i،\ -1+i،\ -1-i،\ -2+i،\ -2-i،\ 1+2i،$$
$$1-2i،\ 3+i،\ 3-i،$$

بالاخره $k=3$ می‌گیریم و اعدادی را انتخاب می‌کنیم که برای آنها $(\alpha-3)^2+\beta^2$ مقسوم‌علیه $f(3)=8$ باشد. این اعداد باقی میماند:

$$1+2i،\ 1-2i،\ 3+i،\ 3-i$$

وبا آزمایش معلوم می‌شود که ۴ عدد باقیمانده، ریشه‌های کثیرالجملهٔ مفروض هستند.

تمرینات

۳۴۶. $x^4+2x^3-6x^2-22x+65$

۳۴۷. $x^6+2x^5+11x^4-4x^3+75x^2-6x+65$

۳۴۸. $x^4-7x^3+10x^2+26x-60$

۳۴۹. $x^5+5x^3+20x^2-6x-20$

۳۵۰. $x^5-3x^4+12x^3-34x^2+104x-8$

۴۸. قضیهٔ اصلی جبر و تجزیهٔ کثیرالجمله‌ها به ضرب‌عوامل اول

دربند ۲۱ (صفحهٔ ۸۹) تجزیهٔ عبارتهای درجهٔ سوم رابه‌صورت ضرب عوامل اول مورد مطالعه قرار دادیم. بهمان ترتیب می‌توان هر کثیـرالجملهٔ دلخواهی راکه درجهٔ آن مخالف صفر باشد، تجزیه‌کرد.

قضیه. هر کثیرالجملهٔ

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

که درجه‌ای مخالف صفر داشته باشد، می‌تواند به این‌ترتیب به صورت ضرب درآید:

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) \qquad (*)$$

واین تجزیه هم منحصر بفرد است، یعنی تنها بیك‌صورت می‌تواند تبدیل‌شود.

اثبات این قضیه بر مبنای قضیهٔ زیر که قضیهٔ **اصلی‌جبر** نامیده می‌شود قرار دارد:

هر کثیرالجملهٔ $f(x)$، که درجه‌ای مخالف صفرداشته باشد، لااقل‌دارای یك ریشه است.

اینجاهم ضرایب‌کثیرالجمله و هم ریشه‌های آن می‌تواند حقیقی و یـا مختلط باشد.

اگرچه قضیهٔ اصلی‌جبر، ازلحاظ ماهیت‌کاملا جبری است، ولی‌ازلحاظ روش اثبات، قضیه‌ای غیر جبری است. اثبات قضیهٔ اصلی‌را می‌توان باروشهای آنالیز ریاضی، مکان‌شناسی (توپولوژی) و سایررشته‌های ریاضی بدست‌آورد، ولی درهمهٔ این‌موارد ودرهرصورت‌از **مفهوم پیوستگی**، که‌مفهومی غیرجبری است، استفاده می‌شود. اثبات خالص جبری قضیهٔ اصلی جبر، بطوریکه تنهـا براساس‌کثیرالجمله‌ها قرارگرفته باشد، وجود ندارد. بهمین مناسبت، دراین کتاب، که به بحث درکثیرالجمله‌ها اختصاص دارد، به اثبات قضیهٔ اصلی جبر نپرداخته‌ایم.

به این ترتیب دراینجا قضیهٔ اصلی جبررا **بدون اثبات** می‌پذیریم و به اثبات قضیهٔ مربوط به تجزیه کثیرالجمله‌ها به عوامل درجهٔ اول می‌پردازیم. اثبات را با استقراء وبرای کثیرالجملهٔ $f(x)$ ازدرجهٔ n انجام می‌دهیم. هر کثیرالجملهٔ درجه اول‌را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x)=a_0x+a_1 \qquad (a_0\neq 0),$$

و بنابراین داریم:

$$f(x)=a_0(x+\frac{a_1}{a_0}).$$

در این مورد منحصر بفرد بودن تجزیه واضح است. بنابراین قضیه، بسرای کثیرالجمله‌های درجهٔ اول، ثابت است.

حالا فرض می‌کنیم که این قضیه برای تمـام کثیرالجمله‌هائی که درجهٔ کمتر از n دارند،صحیح باشد. کثیرالجملهٔ درجهٔ n زیررا درنظرمی‌گیریم:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$$

باتوجه به‌قضیهٔ اصلی‌جبر، این کثیرالجمله لااقل‌یك‌ریشهٔ α_1دارد که‌دراینصورت طبق قضیهٔ بزو، بر $x-\alpha_1$ قابل‌قسمت است، یعنی

$$f(x)=(x-\alpha_1)q(x)$$

که درآن $q(x)$ کثیرالجمله‌ای از درجهٔ $n-1$ است. واضح است که جملـهٔ پرتوان‌تر $q(x)$ مساوی a_0x^{n-1} است وطبق فرض می‌تواند به صورت زیر تجزیه شود:

$$q(x)=a_0(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

(α_2، α_3، ...، α_n اعدادی هستند)، بنابراین:

$$f(x)=(x-\alpha_1)q(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

ثابت کردیم که کثیرالجملهٔ $f(x)$ به عوامل‌درجهٔ اول تجزیه می‌شود، حالا باید ثابت کنیم که‌این‌تجزیه‌تنها بیك‌صورت انجام می گیرد(باتقریب تبدیل‌عوامل).

فرض می کنیم:

$$a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)=b_0(x-\beta_1)\times \quad (**)$$
$$\times(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n)$$

که با مقایسهٔ ضرایب x^n دردوطرف تساوی نتیجه می‌شود : $a_0=b_0$.

حالا توجه می‌کنیم که عبارت سمت‌چپ تساوی (**) به ازاء $x=\alpha_1$ برابر صفر می‌شود . بنابراین سمت راست تساوی هم باید به ازاء همین عدد مساوی صفر شود . یعنی باید یکی ازعددهای β_1 ، β_2، ....، β_n مساوی α_1 باشد: درغیراینصورت درسمت‌راست تساوی حاصلضرب n عدد غیرصفر بصورت $\alpha_1-\beta_k$ $(k=1،2، ...، n)$ خواهیم داشت :

مثلاً فرض می‌کنیم $\alpha_1=\beta_1$ باشد. دراینصورت می‌توان دوطرف‌تساوی (**) را به $x-\alpha_1$ ساده‌کرد. بدست می‌آید :

$$(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)=(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n)$$

ولی دراینجا هردوطرف تساوی کثیرالجمله‌هائی ازدرجهٔ $n-1$ هستند وطبق فرض استقراء ، عوامل سمت چپ وسمت راست این‌تساوی تنها ازجهت ترتیب ممکن‌است باهم‌اختلاف داشته‌باشند. به‌این‌ترتیب‌درمورد تساوی(**)هم‌عوامل دوطرف تساوی‌تنهاازلحاظ ردیف عوامل‌می‌توانند مختلف‌باشند. قضیه‌ثابت‌شد.

به‌این‌ترتیب برای هرکثیرالجملهٔ $f(x)$ ازدرجهٔ n، تنها یك‌مجموعهٔ شامل n عدد α_1 ، α_2 ، ... ، α_n وجودداردکه به‌کمك آنهامی‌توان‌کثیرالجمله را به صورت(*) نوشت. متذکر می‌شویم‌که عددهای α_1 ، α_2 ، ... ، α_n ممکن است دوبه‌دو باهم اختلاف داشته باشند و یابین‌آنها عددهای مساوی هم وجود داشته باشد . بلافاصله نتیجه می‌شودکه عددهای α_1 ، α_2 ، ... ، α_n ریشه‌های کثیرالجملهٔ $f(x)$ هستند وکثیرالجملهٔ $f(x)$ ریشهٔ دیگری ندارد: اگر در رابطهٔ (*) بجای x عددی، که باهیچیك ازعددهای α_1 ، α_2 ، ... ، α_n مساوی نباشد، قراردهیم؛ هیچیك ازعوامل سمت‌راست تساوی‌مساوی صفر نمی‌شودیعنی $f(x)\neq 0$ خواهد بود .

حالادیگرمی‌توانیم‌تعریف‌دقیق «مجموعهٔ‌همهٔ ریشه‌های‌کثیرالجملهٔ $f(x)$»

را بیان کنیم : طبق تعریف ، منظور ازمجموعهٔ همهٔ ریشه‌ها ، همان عددهـای α_1 ، α_2 ، ... ، α_n می‌باشند . اگر بین این عدها بعضی باهم مساوی باشند ، گویند کثیرالجمله ریشهٔ تکراری دارد . بخصوص اگر بین عددهای α_1 ، α_2 ، ... ، α_n و k مرتبه به عدد α برخورد کنیم وهمهٔ بقیهٔ عددها باهم فرق داشته باشند، گویند α ریشهٔ تکراری‌ازمرتبهٔ k در کثیرالجملهٔ $f(x)$ است. این‌مطلب که هر ریشهٔ تکراری به‌تعداد تکرارخود ریشهٔ معادله است، صحت‌این‌حکم‌را محقق می‌کند که هر کثیرالجملهٔ درجهٔ n دارای n ریشه است .

حل مسائل

صفحهٔ ۳۶

۱. با در نظر گرفتن مجهولات جدید $\sigma_1 = x + y$ و $\sigma_2 = xy$، دستگاه مفروض به دستگاه کمکی زیر تبدیل می‌شود :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 7 \end{cases}$$

که جوابهای آن $\sigma_1 = 5$ و $\sigma_2 = 6$ است. از آنجا جوابهای زیر برای دستگاه اصلی بدست می‌آید :

$$\begin{vmatrix} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{vmatrix} \; ; \quad \begin{vmatrix} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{vmatrix}$$

۲. اگر طرفین معادلهٔ دوم را در xy ضرب کنیم ، دستگاه نسبت به مجهولات جدید σ_1 و σ_2 چنین می‌شود :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 7 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \frac{25}{12}\sigma_2 \end{cases}$$

که جوابهای آن $\sigma_1 = 7$ و $\sigma_2 = 12$ است واز آنجا دستگاه‌اصلی دودسته‌جواب زیررا قبول‌دارد :

$$\begin{vmatrix} x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_2 = 4 \\ y_2 = 3 \end{vmatrix}$$

۳. دستگاه کمکی چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0 \end{cases}$$

جوابهای این‌دستگاه $\sigma_1 = 1$ و $\sigma_2 = \frac{1}{2}$ است وجوابهای دستگاه اصلی :

$$\begin{vmatrix} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ y_1 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ y_2 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{vmatrix}$$

۴. دستگاه کمکی را تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 65 \end{cases}$$

ازآنجا $\sigma_1 = 5$ و $\sigma_2 = 4$ بدست می‌آید و خواهیم داشت :

$$\begin{vmatrix} x_1 = 1 \\ y_1 = 4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_2 = 4 \\ y_2 = 1 \end{vmatrix}$$

۵. باانتخاب مجهولات جدید σ_1 و σ_2 خواهیم داشت :

$$\begin{cases} 4\sigma_1 = 3\sigma_2 \\ \sigma_1 + \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 26 \end{cases}$$

که باحذف σ_2 بین دومعادله ، به معادلهٔ درجه دوم $3\sigma_1^2 - 5\sigma_1 - 78 = 0$ می‌رسیم وازآنجا دو دسته جواب برای دستگاه کمکی بدست می‌آید :

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 = 6 \\ \sigma_2 = 8 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} \sigma_1 = -\frac{13}{3} \\ \sigma_2 = -\frac{52}{9} \end{vmatrix}$$

که به ازاء هرکدام ازآنها دودسته جواب برای معادلهٔ اصلی بدست می‌آید :

$$\begin{vmatrix} x_1 = 2 \\ y_1 = 4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_2 = 4 \\ y_2 = 2 \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} x_3 = \dfrac{-13 + \sqrt{377}}{6} \\ y_3 = \dfrac{-13 - \sqrt{377}}{6} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_4 = \dfrac{-13 - \sqrt{377}}{6} \\ y_4 = \dfrac{-13 + \sqrt{377}}{6} \end{vmatrix}$$

۶. دستگاه کمکی چنین می‌شود :

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_1 = 32 \\ 12\sigma_1 = 7\sigma_2 \end{cases}$$

که باحذف σ_2 بین آنها به‌معادلهٔ درجه دوم $7\sigma_1^2 - 17\sigma_1 - 224 = 0$ می‌رسیم.

ازآنجا خواهیم داشت :

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 = 7 \\ \sigma_2 = 12 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \sigma_1 = -\frac{32}{7} \\ \sigma_2 = -\frac{384}{49} \end{vmatrix}$$

که هریك ازآنها دودسته جواب برای دستگاه اصلی بدست می‌دهد :

$$\begin{vmatrix} x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_2 = 4 \\ y_2 = 3 \end{vmatrix} ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_3 = \dfrac{-16+8\sqrt{10}}{7} \\ y_3 = \dfrac{-16-8\sqrt{10}}{7} \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_4 = \dfrac{-16-8\sqrt{10}}{7} \\ y_4 = \dfrac{-16+8\sqrt{10}}{7} \end{array}\right.$$

۷. مجهولات جدید σ_1 و σ_2 را انتخاب می‌کنیم :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 15 \\ \sigma_1 + \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 42 \end{cases}$$

بین این دو معادله σ_2 را حذف می‌کنیم، به معادلهٔ $\sigma_1^2 + \sigma_1 - 72 = 0$ می‌رسیم، ازآنجا جوابهای زیر بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1 = 8 \\ \sigma_2 = 15 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} \sigma_1 = -9 \\ \sigma_2 = 15 \end{array}\right.$$

ودر نتیجه جوابهای دستگاه چنین می‌شود

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = \\ y_1 = 5 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = 5 \\ y_2 = 3 \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_3 = \dfrac{-9+\sqrt{21}}{2} \\ y_3 = \dfrac{-9-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_4 = \dfrac{-9-\sqrt{21}}{2} \\ y_4 = \dfrac{-9+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

۸. با تبدیل دستگاه به دستگاهی با مجهولات σ_1 و σ_2 داریم :

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 7 \\ \sigma_1^2 - \sigma_2 = 13 \end{cases}$$

ازجمع این‌دو معادله با یکدیگر، به معادلهٔ درجه‌دوم $\sigma_1^2 + \sigma_1 - 20 = 0$ می‌رسیم که ازآنجا بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1 = 4 \\ \sigma_2 = 3 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} \sigma_1 = -5 \\ \sigma_2 = 12 \end{array}\right.$$

وجوابهای دستگاه اصلی چنین می‌شود :

$$\left|\begin{array}{l} x_1=1 \\ y_1=3 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2=3 \\ y_2=1 \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_3=\dfrac{-5+i\sqrt{23}}{2} \\ y_3=\dfrac{-5-i\sqrt{23}}{2} \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_4=\dfrac{-5-i\sqrt{23}}{2} \\ y_4=\dfrac{-5+i\sqrt{23}}{2} \end{array}\right.$$

۹. برای دستگاه کمکی داریم :

$$\begin{cases} \sigma_1^2-3\sigma_2=19 \\ \sigma_1-\sigma_2=7 \end{cases}$$

اگر σ_2 را بین این دو معادله حذف کنیم ، به معادلهٔ $\sigma_1^2-3\sigma_1+2=0$ می‌رسیم ودر نتیجه خواهیم داشت :

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1=1 \\ \sigma_2=-6 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} \sigma_1=2 \\ \sigma_2=-5 \end{array}\right.$$

که به ازاء هر یك ازآنها دو دسته جواب برای دستگاه اصلی بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l} x_1=3 \\ y_1=-2 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2=-2 \\ y_2=3 \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_3=1+\sqrt{6} \\ y_3=1-\sqrt{6} \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_4=1-\sqrt{6} \\ y_4=1+\sqrt{6} \end{array}\right.$$

۱۰ اگر $x=y$ باشد، معادلهٔ اول دستگاه به اتحاد تبدیل می‌شود و معادلهٔ دوم به صورت $2x^3=14x$ در می‌آید. ازآنجا به سادگی سه دسته‌از جوابهای دستگاه بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l} x_1=0 \\ y_1=0 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2=\sqrt{7} \\ y_2=\sqrt{7} \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_3=-\sqrt{7} \\ y_3=-\sqrt{7} \end{array}\right. ;$$

بهمین‌ترتیب اگر $x=-y$ باشد، معادلهٔ دوم‌تبدیل به اتحاد می‌شود ومعادلهٔ اول به صورت $2x^3=28x$ در می‌آیدکه از آنجا دو جواب دیگر دستگاه بدست می‌آید :

$$\begin{vmatrix} x_4=\sqrt{19} \\ y_4=-\sqrt{19} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_5=-\sqrt{19} \\ y_5=\sqrt{19} \end{vmatrix} ;$$

بالاخره اگر $x\neq\pm y$ باشد، طرفین معادلهٔ اول‌دستگاه بر $x-y$ وطرفین معادلهٔ دوم دستگاه بر $x+y$ قابل قسمت است و دستگـاه به صورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=19 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$$

ودرمورد دستگاه اخیر، دستگاه‌کمکی چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1^2-\sigma_2=19 \\ \sigma_1^2-3\sigma_2=7 \end{cases}$$

ازآنجا $\sigma_1^2=25$ و$\sigma_2=6$ بدست می‌آید وبنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{vmatrix} \sigma_1=5 \\ \sigma_2=6 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \sigma_1=-5 \\ \sigma_2=6 \end{vmatrix}$$

ودرنتیجه بقیهٔ جوابهای‌دستگاه اصلی بدست می‌آید :

$$\begin{vmatrix} x_6=2 \\ y_6=3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_7=3 \\ y_7=2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_8=-2 \\ y_8=-3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_9=-3 \\ y_9=-2 \end{vmatrix}$$

۱۱. با از بین بردن مخرجها و انتخاب مجهولات جدید σ_1 و σ_2 به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases}\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 12\sigma_2 \\ 3\sigma_1 = \sigma_2\end{cases}$$

با حذف σ_2 ، بین این دو معادلـه ، به معادلهٔ $\sigma_1^3 - 9\sigma_1^2 - 36\sigma_1 = 0$ می‌رسیم و ازاین معادلهٔ درجه سوم بسادگی سه جواب دستگـاه کمکی بدست می‌آید :

$$\left|\begin{aligned}\sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= 0\end{aligned}\right. \; ; \; \left|\begin{aligned}\sigma_1 &= 12 \\ \sigma_2 &= 36\end{aligned}\right. \; ; \; \left|\begin{aligned}\sigma_1 &= -3 \\ \sigma_2 &= -9\end{aligned}\right.$$

جواب اول منجر به $x = y = 0$ می‌شود که واضح‌است در دستگاه اصلی صدق نمی‌کند. ازجواب دوم نتیجه می‌شود :

$$\left|\begin{aligned}x_1 &= 6 \\ y_1 &= 6\end{aligned}\right. \; ; \; \left|\begin{aligned}x_2 &= 6 \\ y_2 &= 6\end{aligned}\right.$$

وبالاخره ازجواب سوم بدست می‌آید :

$$\left|\begin{aligned}x_3 &= \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} \\ y_3 &= \frac{-3-3\sqrt{5}}{2}\end{aligned}\right. \; ; \; \left|\begin{aligned}x_4 &= \frac{-3-3\sqrt{5}}{2} \\ y_4 &= \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\end{aligned}\right.$$

۱۲. با ازبین بردن مخرجها در معادلهٔ اول وانتخاب σ_1 و σ_2 به‌عنوان مجهولات جدید بدست می‌آید :

$$\begin{cases}\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 18\sigma_2 \\ \sigma_1 = 12\end{cases}$$

که ازآنها بسادگی $\sigma_1 = 12$ و $\sigma_2 = 32$ بدست می‌آید وخواهیم داشت :

$$\left|\begin{aligned}x_1 &= 4 \\ y_1 &= 8\end{aligned}\right. \; ; \; \left|\begin{aligned}x_2 &= 8 \\ y_2 &= 4\end{aligned}\right.$$

۱۳. دستگاه کمکی چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = b(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) \end{cases}$$

که از آنجا بدست می‌آید : $(3a - 2b)\sigma_2 = a^3 - a^2b$. که اگر ضمناً داشته باشیم: $3a - 2b \neq 0$ ، تنها جواب σ_2 چنین می‌شود :

$$\sigma_2 = \frac{a^3 - a^2b}{3a - 2b}$$

ودراینحالت جوابهای دستگاه اصلی چنین می‌شود :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{-a^3 + 2a^2b}{4(3a - 2b)}} \\ y_1 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{-a^3 + 2a^2b}{4(3a - 2b)}} \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{-a^3 + 2a^2b}{4(3a - 2b)}} \\ y_2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{-a^3 + 2a^2b}{4(3a - 2b)}} \end{array} \right.$$

اگر $3a - 2b = 0$ ولی $a^3 - a^2b \neq 0$ باشد ، دستگاه کمکی (و درنتیجه دستگاه اصلی) جواب ندارد . بالاخره اگر داشته باشیم : $3a - 2b = 0$ و $a^3 - a^2b = 0$ یعنی $a = b = 0$ ، به ازاء $\sigma_1 = 0$ و مقدار دلخواه σ_2 دستگاه کمکی برقرار است . بنابراین دراینحالت هرمقداری از x و y که در معادلهٔ $x + y = 0$ صدق کنند، جواب دستگاه است .

۱۴. بعدازآنکه مخرجها را درمعادلهٔ دوم ازبین ببریم، دستگاه کمکی چنین می‌شود :

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma_2 = 30 \\ 6\sigma_1 = 5\sigma_2 \end{cases}$$

و این دستگاه دودسته جواب دارد :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_2 = 6 \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = -5 \\ \sigma_2 = -6 \end{array} \right.$$

وجوابهای دستگاه اصلی چنین می‌شود :

$$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=3 \end{cases};\quad \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=2 \end{cases};\quad \begin{cases} x_3=-6 \\ y_3=1 \end{cases};\quad \begin{cases} x_4=1 \\ y_4=-6 \end{cases}$$

۱۵. شبیه تمرین قبل‌عمل می‌شود، جوابها چنین است :

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=4 \end{cases};\quad \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=\dfrac{-5+\sqrt{41}}{2} \\ y_3=\dfrac{-5-\sqrt{41}}{2} \end{cases};\quad \begin{cases} x_4=\dfrac{-5-\sqrt{41}}{2} \\ y_4=\dfrac{-5+\sqrt{41}}{2} \end{cases}$$

۱۶. دستگاه کمکی چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1^2-2\sigma_2+2\sigma_1=23 \\ \sigma_1^2-\sigma_2=19 \end{cases}$$

که با حذف σ_2 به معادلهٔ درجه دوم $\sigma_1^2-2\sigma_1-15=0$ می‌رسیم و از آنجا دوجواب زیررا بدست می‌آوریم :

$$\begin{cases} \sigma_1=-3 \\ \sigma_2=-10 \end{cases};\quad \begin{cases} \sigma_1=5 \\ \sigma_2=6 \end{cases}$$

که به ازاء هریك ازآنها دو دسته جواب برای دستگاه اصلی بدست می‌آید :

$$\begin{cases} x_1=-5 \\ y_1=2 \end{cases};\quad \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-5 \end{cases};\quad \begin{cases} x_3=2 \\ y_3=3 \end{cases};\quad \begin{cases} x_4=3 \\ y_4=2 \end{cases}$$

۱۷. دستگاه جدید را برحسب σ_1 و σ_2 تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{cases} \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+\sigma_2^2=1153 \\ \sigma_1^2-3\sigma_2=33 \end{cases}$$

که با حذف σ_1 به معادلهٔ درجه دوم $\sigma_2^2 - 33\sigma_2 + 32 = 0$ می‌رسیم. ازآنجا چهاردسته جواب برای دستگاه کمی بدست می‌آید:

$$\begin{cases}\sigma_1 = \pm 6\\ \sigma_2 = 1\end{cases};\quad \begin{cases}\sigma_1 = \pm\sqrt{129}\\ \sigma_2 = 32\end{cases}$$

وهریك ازآنها دودسته جواب برای دستگاه اصلی بدست می‌دهد:

$$\begin{cases}x_1 = 3+\sqrt{8}\\ y_1 = 3-\sqrt{8}\end{cases};\quad \begin{cases}x_2 = 3-\sqrt{8}\\ y_2 = 3+\sqrt{8}\end{cases};\quad \begin{cases}x_3 = -3+\sqrt{8}\\ y_3 = -3-\sqrt{8}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_4 = -3-\sqrt{8}\\ y_4 = -3+\sqrt{8}\end{cases};\quad \begin{cases}x_5 = \dfrac{\sqrt{129}+1}{2}\\ y_5 = \dfrac{\sqrt{129}-1}{2}\end{cases};\quad \begin{cases}x_6 = \dfrac{\sqrt{129}-1}{2}\\ y_6 = \dfrac{\sqrt{129}+1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_7 = \dfrac{-\sqrt{129}+1}{2}\\ y_7 = \dfrac{-\sqrt{129}-1}{2}\end{cases};\quad \begin{cases}x_8 = \dfrac{-\sqrt{129}-1}{2}\\ y_8 = \dfrac{-\sqrt{129}+1}{2}\end{cases}$$

۱۸. با ازبین بردن مخرجها وانتخاب مجهولات جدید σ_1 و σ_2، به دستگاه کمکی زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}7(\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) = 31(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2)\\ \sigma_1^2 - \sigma_2 = 3\end{cases}$$

اگر طرفین معادلهٔ اول‌را به σ_1 ساده‌کنیم (که جوابی هم از دستگاه حذف نمی‌کند) وبجای σ_2 مقدارآنرا ازمعادلهٔ اول قرار دهیم، به معادلهٔ‌دومجذوری $7\sigma_1^4 - 43\sigma_1^2 + 36 = 0$ می‌رسیم که ازآنجا جوابهای زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases}\sigma_1 = \pm 1\\ \sigma_2 = -2\end{cases};\quad \begin{cases}\sigma_1 = \pm\dfrac{6}{\sqrt{7}}\\ \sigma_2 = \dfrac{15}{7}\end{cases}$$

ودر نتیجه جوابهای زیر را برای دستگاه اصلی خواهیم داشت :

$$\begin{vmatrix} x_1=2 \\ y_1=-1 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_2=-1 \\ y_2=2 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_3=-2 \\ y_3=1 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_4=1 \\ y_4=-2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_5=\dfrac{3+i\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \\ y_5=\dfrac{3-i\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_6=\dfrac{3-i\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \\ y_6=\dfrac{3+i\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x_7=\dfrac{-3+i\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \\ y_7=\dfrac{-3-i\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_8=\dfrac{-3-i\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \\ y_8=\dfrac{-3+i\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \end{vmatrix}$$

۱۹. دستگاه کمکی را تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{cases} \sigma_1=4 \\ \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=82 \end{cases}$$

که جوابهای آن چنین‌است :

$$\begin{vmatrix} \sigma_1=4 \\ \sigma_2=3 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} \sigma_1=4 \\ \sigma_2=29 \end{vmatrix}$$

وهریك ازآنها دودسته جواب از دستگاه اصلی‌را بدست می‌دهد :

$$\begin{vmatrix} x_1=3 \\ y_1=1 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_2=1 \\ y_2=3 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x_3=2+5i \\ y_3=2-5i \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_4=2-5i \\ y_4=2+5i \end{vmatrix}$$

۲۰. دستگاه کمکی وجوابهای آن چنین است :

$$\begin{cases}\sigma_1=a\\ \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=a^4\end{cases}\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}\sigma_1=a\\ \sigma_2=0\end{array}\right.;\left|\begin{array}{l}\sigma_1=a\\ \sigma_2=2a^2\end{array}\right.$$

ودر نتیجه جوابهای دستگاه اصلی چنین می‌شود .

$$\left|\begin{array}{l}x_1=a\\ y_1=0\end{array}\right.;\left|\begin{array}{l}x_2=0\\ y_2=a\end{array}\right.;$$

$$\left|\begin{array}{l}x_3=\frac{a}{2}(1+i\sqrt{7})\\ y_3=\frac{a}{2}(1-i\sqrt{7})\end{array}\right.;\left|\begin{array}{l}x_4=\frac{a}{2}(1-i\sqrt{7})\\ y_4=\frac{a}{2}(1+i\sqrt{7})\end{array}\right.$$

۲۱. شبیه مسئلهٔ قبل داریم :

$$\begin{cases}\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=a^4\\ \sigma_1=b\end{cases}\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}\sigma_1=b\\ \sigma_2=b^2\pm\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}\end{array}\right.$$

وازآنجا برای دستگاه اصلی خواهیم داشت :

$$\left|\begin{array}{l}x_1=\frac{b}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}b^2+\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}}\\ y_1=\frac{b}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}b^2+\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}}\end{array}\right.;$$

$$\left|\begin{array}{l}x_2=\frac{b}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}b^2+\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}}\\ y_2=\frac{b}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}b^2+\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}}\end{array}\right.;$$

$$\left|\begin{array}{l}x_3=\frac{b}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}b^2-\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}}\\ y_3=\frac{b}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}b^2-\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}}\end{array}\right.;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_4=\dfrac{b}{2}-\sqrt{-\dfrac{3}{4}b^2-\sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{2}}} \\ y_4=\dfrac{b}{2}+\sqrt{-\dfrac{3}{4}b^2-\sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{2}}} \end{array}\right.$$

۲۲. با انتخاب مجهولات جدید σ_1 و σ_2 خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \sigma_1=a \\ \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2-12\sigma_2^2=0 \end{cases} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \sigma_1=a \\ \sigma_2=\dfrac{a^2}{6} \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} \sigma_1=a \\ \sigma_2=-\dfrac{a^2}{2} \end{array}\right.$$

وبرای دستگاه اصلی :

$$\left|\begin{array}{l} x_1=\dfrac{a}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ y_1=\dfrac{a}{2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2=\dfrac{a}{2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ y_2=\dfrac{a}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_3=\dfrac{a}{2}(1+\sqrt{3}) \\ y_3=\dfrac{a}{2}(1-\sqrt{3}) \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_4=\dfrac{a}{2}(1-\sqrt{3}) \\ y_4=\dfrac{a}{2}(1+\sqrt{3}) \end{array}\right.$$

۲۳. برای دستگاه کمکی داریم :

$$\begin{cases} \sigma_1=0 \\ \sigma_1^2-2\sigma_2+\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+\sigma_1^5- \\ \qquad -5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2=b \end{cases}$$

وجوابهای آن :

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1=0 \\ \sigma_2=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{b}{2}} \end{array}\right.$$

وهریك ازاین‌جوابها، دودسته ازجوابهای دستگاه اصلی را می‌دهند :

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+4b}}{2}} \\ y_1 = -\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+4b}}{2}} \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = -\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+4b}}{2}} \\ y_2 = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+4b}}{2}} \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_3 = \sqrt{\dfrac{-1-\sqrt{1+4b}}{2}} \\ y_3 = -\sqrt{\dfrac{-1-\sqrt{1+4b}}{2}} \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_4 = -\sqrt{\dfrac{-1-\sqrt{1+4b}}{2}} \\ y_4 = \sqrt{\dfrac{-1-\sqrt{1+4b}}{2}} \end{array}\right. ;$$

۲۴. دستگاه را نسبت به σ_1 و σ_2 تشکیل می‌دهیم :

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1 = a \\ \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = b \end{array}\right.$$

وجوابهای آن :

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1 = a \\ \sigma_2 = \dfrac{a^2}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5+4b^5}{5a}} \end{array}\right.$$

که هریك ازآنها دودسته جواب برای دستگاه اصلی بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a}{2} + \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5+4b^5}{5a}}} \\ y_1 = \dfrac{a}{2} - \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5+4b^5}{5a}}} \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{a}{2} - \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5+4b^5}{5a}}} \\ y_2 = \dfrac{a}{2} + \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^5+4b^5}{5a}}} \end{array}\right. ;$$

$$\left| \begin{array}{l} x_3 = \frac{a}{2} + \sqrt{-\frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5+4b^5}{5a}}} \\ y_3 = \frac{a}{2} - \sqrt{-\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5+4b^5}{5a}}} \end{array} \right. ;$$

$$\left| \begin{array}{l} x_4 = \frac{a}{2} - \sqrt{-\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5+4b^5}{5a}}} \\ y_4 = \frac{a}{2} + \sqrt{-\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5+4b^5}{5a}}} \end{array} \right. ;$$

۲۵. دستگاه کمکی چنین است :

$$\begin{cases} (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = 2b^5 \\ \sigma_1 = b \end{cases}$$

که با قراردادن مقدار $\sigma_1 = b$ در معادلهٔ اول دستگاه کمکی، به معادلهٔ درجه دوم $6\sigma_2^2 - 5b^2\sigma_2 - b^4 = 0$ می‌رسیم . ازآنجا دودسته جواب زیر برای دستگاه کمکی بدست می‌آید :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_1 = b \\ \sigma_2 = b^2 \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = b \\ \sigma_2 = -\frac{1}{6}b^2 \end{array} \right.$$

وجوابهای دستگاه اصلی بسادگی محاسبه می‌شود :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{b}{2}(1+i\sqrt{3}) \\ y_1 = \frac{b}{2}(1-i\sqrt{3}) \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{b}{2}(1-i\sqrt{3}) \\ y_2 = \frac{b}{2}(1+i\sqrt{3}) \end{array} \right. ;$$

$$\left| \begin{array}{l} x_3 = \frac{b}{2}\left(1+\sqrt{\frac{5}{3}}\right) \\ y_3 = \frac{b}{2}\left(1-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} x_4 = \frac{b}{2}\left(1-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) \\ y_4 = \frac{b}{2}\left(1+\sqrt{\frac{5}{3}}\right) \end{array} \right.$$

۲۶. دستگاه کمکی چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 9 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 5 \end{cases}$$

باحذف σ_2 بین این‌دومعادله ، به معادلهٔ درجه سوم $\sigma_1^3 - 15\sigma_1 + 18 = 0$ می‌رسیم . مقدار $\sigma_1 = 3$ جواب این‌معادله است که با استفاده از قضیهٔ بزو دو ریشهٔ دیگر معادله هم : $\sigma_1 = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{33}$ بدست می‌آید . بنابراین سه جواب برای دستگاه کمکی داریم :

$$\left| \begin{aligned} \sigma_1 &= 3 \\ \sigma_2 &= 2 \end{aligned} \right. ; \quad \left| \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33} \\ \sigma_2 &= \frac{11}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{33} \end{aligned} \right. ; \quad \left| \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33} \\ \sigma_2 &= \frac{11}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{33} \end{aligned} \right.$$

وجوابهای دستگاه اصلی :

$$\left| \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ y_1 &= 2 \end{aligned} \right. ; \quad \left| \begin{aligned} x_2 &= 2 \\ y_2 &= 1 \end{aligned} \right. ; \quad \left| \begin{aligned} x_3 &= -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4} + \sqrt{\frac{3}{8}\sqrt{33} - \frac{1}{8}} \\ y_3 &= -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4} + \sqrt{\frac{3}{8}\sqrt{33} - \frac{1}{8}} \end{aligned} \right. ;$$

$$\left| \begin{aligned} x_4 &= -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4} - \sqrt{\frac{3}{8}\sqrt{33} - \frac{1}{8}} \\ y_4 &= -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4} + \sqrt{\frac{3}{8}\sqrt{33} - \frac{1}{8}} \end{aligned} \right. ;$$

$$\left| \begin{aligned} x_5 &= -\frac{3}{3} - \frac{\sqrt{33}}{4} + i\sqrt{\frac{3}{8}\sqrt{33} + \frac{1}{8}} \\ y_5 &= -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4} - i\sqrt{\frac{3}{8}\sqrt{33} + \frac{1}{8}} \end{aligned} \right. ;$$

$$\begin{vmatrix} x_6 = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4} - i\sqrt{\frac{3}{8}\sqrt{33} + \frac{1}{8}} \\ y_6 = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4} + i\sqrt{\frac{3}{8}\sqrt{33} + \frac{1}{8}} \end{vmatrix}$$

۲۷. برای دستگاه کمکی داریم :

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 7 + \sigma_2 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 6\sigma_2 - 1 \end{cases}$$

σ_2 را ازمعادلهٔ اول بدست‌آورده و درمعادلهٔ دوم قرار می‌دهیم ، معادلهٔ درجه دوم $2\sigma_1^2 - 7\sigma_1 - 15 = 0$ بدست می‌آید. ازآنجا بسادگی جوابهای زیر پیدا می‌شود :

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_1 = 6 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} \sigma_1 = -\frac{3}{2} \\ \sigma_2 = -\frac{19}{12} \end{vmatrix}$$

و برای جوابهای دستگاه اصلی داریم :

$$\begin{vmatrix} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} x_3 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{103}{3}} \\ y_3 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{103}{3}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_4 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{103}{3}} \\ y_4 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{103}{3}} \end{vmatrix}$$

۲۸. دستگاه کمکی چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_2^2 = 133 \\ \sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 7 \end{cases}$$

σ_2 را از معادلهٔ دوم بدست‌آورده و درمعادلهٔ اول قرار می‌دهیم ، $\sigma_1^2 = 25$ بدست می‌آید . ازآنجا دوجواب خواهیم داشت :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_1 = \pm 5 \\ \sigma_2 = 6 \end{array} \right.$$

که از هریك از آنها ، دوجواب برای دستگاه اصلی بدست می‌آید :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x_3 = -2 \\ y_3 = -3 \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} x_4 = -3 \\ y_4 = -2 \end{array} \right.$$

۲۹. دستگاه کمکی را تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_2^2 = a^2 \\ \sigma_1^2 - \sigma_2 = 1 \end{cases}$$

اگر σ_2 را از معادلهٔ دوم محاسبه و در معادلـهٔ اول قرار دهیم ، بـه معادلهٔ $2\sigma_1^2 = 3 - a^2$ می‌رسیم که از آنجا بدست می‌آید :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_1 = \pm\sqrt{\dfrac{3-a^2}{2}} \\ \sigma_2 = \dfrac{1-a^2}{2} \end{array} \right.$$

و درنتیجه جوابهای زیر را برای دستگاه اصلی خواهیم داشت :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3-a^2}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3a^2-1}{2}} \\ y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3-a^2}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3a^2-1}{2}} \end{array} \right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}} \\ y_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}} \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_3=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}} \\ y_3=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}} \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_4=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}} \\ y_4=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2-1}{2}} \end{array}\right. ;$$

۳۰. دستگاه را برحسب σ_1 و σ_2 می‌نویسیم :

$$\begin{cases} \sigma_1^2-\sigma_2=49 \\ \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+3\sigma_2^2=931 \end{cases}$$

از معادلهٔ اول σ_2 را محاسبه و در معادلـهٔ دوم قرار می‌دهیم ، $\sigma_1^2=64$ بدست می‌آید و داریم :

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1=\pm 8 \\ \sigma_2=15 \end{array}\right.$$

و جوابهای دستگاه اصلی چنین می‌شود :

$$\left|\begin{array}{l} x_1=3 \\ y_1=5 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2=5 \\ y_2=3 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_3=-3 \\ y_3=-5 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_4=-5 \\ y_4=-3 \end{array}\right.$$

۳۱. دستگاه کمکی چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1^2-\sigma_2=39 \\ \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2-\sigma_1^2+2\sigma_2=612 \end{cases}$$

با حذف σ_2 بین دو معادلهٔ دستگاه کمکی به معادلهٔ دو مجذوری $\sigma_1^4 - \sigma_1^2 - 2352 = 0$ می‌رسیم و از آنجا جوابهای زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 = \pm 7 \\ \sigma_2 = 10 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \sigma_1 = \pm i\sqrt{48} \\ \sigma_2 = -87 \end{vmatrix}$$

و در نتیجه جوابهای زیر برای x و y بدست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} x_1 = 2 \\ y_1 = 5 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_2 = 5 \\ y_2 = 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_3 = -2 \\ y_3 = -5 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_4 = -5 \\ y_4 = -2 \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} x_5 = \sqrt{3}(2i+5) \\ y_5 = \sqrt{3}(2i-5) \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_6 = \sqrt{3}(2i-5) \\ y_6 = \sqrt{3}(2i+5) \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} x_7 = \sqrt{3}(-2i+5) \\ y_7 = \sqrt{3}(-2i-5) \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_8 = \sqrt{3}(-2i-5) \\ y_8 = \sqrt{3}(-2i+5) \end{vmatrix}$$

۳۲. دستگاه کمکی را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + 2\sigma_2 = 84 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_2^2 = 49 \end{cases}$$

σ_1^2 را از معادلهٔ دوم محاسبه و در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم، به معادلهٔ دومجذوری $\sigma_2^4 - 99\sigma_2^2 + 2268 = 0$ می‌رسیم. حالا دیگر به‌سادگی همهٔ جوابهای دستگاه کمکی بدست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 = \pm 5 \\ \sigma_2 = 6 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \sigma_1 = \pm 1 \\ \sigma_2 = -6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 = \pm\sqrt{2\sqrt{63} - 14} \\ \sigma_2 = \sqrt{63} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \sigma_1 = \pm i\sqrt{2\sqrt{63} + 14} \\ \sigma_2 = -\sqrt{63} \end{vmatrix}$$

که به ازاء هریك از آنها دوجواب برای دستگاه اصلی بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_3 = -2 \\ y_3 = -3 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_4 = -3 \\ y_4 = -2 \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_5 = 3 \\ y_5 = -2 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_6 = -2 \\ y_6 = 3 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_7 = -3 \\ y_7 = 2 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_8 = 2 \\ y_8 = -3 \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_9 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \\ y_9 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_{10} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \\ y_{10} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_{11} = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \\ y_{11} = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_{12} = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \\ y_{12} = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_{13} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \\ y_{13} = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x_{14}=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \\ y_{14}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_{15}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}}-i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \\ y_{15}=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}}-i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{16}=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}}-i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \\ y_{16}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}-7}{2}}-i\sqrt{\dfrac{\sqrt{63}+7}{2}} \end{cases}$$

۳۳. دستگاه کمکی چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2=13 \\ \sigma_2^2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=468 \end{cases}$$

طرفین معادلهٔ دوم دستگاه را برطرفین معادلهٔ اول تقسیم می‌کنیم ، با ساده کردن به $\sigma_1^2-2\sigma_2$ (که مخالف صفراست) به معادلهٔ $36\sigma_1=\sigma_2^2$ می‌رسیم. اگر σ_1 را از این معادله برحسب σ_2 محاسبه و در معادلهٔ اول دستگاه قرار دهیم، به معادلهٔ $\sigma_2^6-2\times 36^2\sigma_2^3-13\times 36^3=0$ می‌رسیم که نسبت به σ_2^3 ازدرجهٔ دوم است ، با حل این معادله جوابهای زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \sigma_1=1 \\ \sigma_2=-6 \end{cases};\quad \begin{cases} \sigma_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_2=3(1+i\sqrt{3}) \end{cases};\quad \begin{cases} \sigma_1=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_2=3(1-i\sqrt{3}) \end{cases}:$$

$$\begin{cases} \sigma_1=\sqrt[3]{169} \\ \sigma_2=6\sqrt[3]{13} \end{cases};\quad \begin{cases} \sigma_1=\sqrt[3]{169}\,\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_2=-3\sqrt[3]{13}(1+i\sqrt{3}) \end{cases};\quad \begin{cases} \sigma_1=\sqrt[3]{169}\,\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_2=-3\sqrt[3]{13}(1-i\sqrt{3}) \end{cases}$$

که هریك ازآنها دو جواب از دستگاه اصلی را بدست می‌دهند :

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -2 \end{cases};\quad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 3 \end{cases};\quad \begin{cases} x_3 = \frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3}) \\ y_3 = 1-i\sqrt{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_4 = 1-i\sqrt{3} \\ y_4 = \frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3}) \end{cases};\quad \begin{cases} x_5 = \frac{3}{2}(-1-i\sqrt{3}) \\ y_5 = 1+i\sqrt{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_6 = 1+i\sqrt{3} \\ y_6 = \frac{3}{2}(-1-i\sqrt{3}) \end{cases};\quad \begin{cases} x_7 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{169}+\frac{i}{2}\sqrt{11\sqrt[3]{13}} \\ y_7 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{169}-\frac{i}{2}\sqrt{11\sqrt[3]{13}} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_8 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{169}-\frac{i}{2}\sqrt{11\sqrt[3]{13}} \\ y_8 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{169}+\frac{i}{2}\sqrt{11\sqrt[3]{13}} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_9 = -\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169}+\sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right)-\frac{i}{4}\left(\sqrt{11\sqrt[3]{13}}-\sqrt{3\sqrt[3]{169}}\right) \\ y_9 = -\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169}-\sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right)+\frac{i}{4}\left(\sqrt{11\sqrt[3]{13}}+\sqrt{3\sqrt[3]{169}}\right) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_{10} = -\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169}-\sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right)+\frac{i}{4}\left(\sqrt{11\sqrt[3]{13}}+\sqrt{3\sqrt[3]{169}}\right) \\ y_{10} = -\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169}+\sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right)-\frac{i}{4}\left(\sqrt{11\sqrt[3]{13}}-\sqrt{3\sqrt[3]{169}}\right) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_{11} = -\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169}+\sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right)-\frac{i}{4}\left(\sqrt{3\sqrt[3]{169}}-\sqrt{11\sqrt[3]{13}}\right) \\ y_{11} = -\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169}-\sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right)-\frac{i}{4}\left(\sqrt{3\sqrt[3]{169}}+\sqrt{11\sqrt[3]{13}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{12} = -\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169} - \sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right) - \frac{i}{4}\left(\sqrt{3\sqrt[3]{169}} + \sqrt{11\sqrt[3]{13}}\right) \\ y_{12} = -\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{169} + \sqrt{33\sqrt[3]{13}}\right) - \frac{i}{4}\left(\sqrt{3\sqrt[3]{169}} - \sqrt{11\sqrt[3]{13}}\right) \end{cases}$$

۳۴. دستگاه کمکی چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 = 16 \\ \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 = 40 \end{cases}$$

باحذف σ_2 بدست می‌آید : $\sigma_1^3 = 64$. ازآنجاسه جواب برای دستگاه کمکی بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 4 \\ \sigma_2 = 3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \sigma_1 = 2(-1 + i\sqrt{3}) \\ \sigma_2 = \frac{3}{2}(-1 - i\sqrt{3}) \end{cases} ; \quad \begin{cases} \sigma_1 = 2(-1 - i\sqrt{3}) \\ \sigma_2 = \frac{3}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \end{cases}$$

وبه ازاء هریك ازآنها دوجواب برای دستگاه اصلی بدست می‌آید :

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_3 = \frac{3}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \\ y_3 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x_4 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \\ y_4 = \frac{3}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_5 = \frac{3}{2}(-1 - i\sqrt{3}) \\ y_5 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x_6 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) \\ y_6 = \frac{3}{2}(-1 - i\sqrt{3}) \end{cases}$$

۳۵. برای دستگاه کمکی داریم :

$$\begin{cases}\sigma_1\sigma_2=30\\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=35\end{cases}$$

با حذف σ_2 به معادلهٔ $\sigma_1^3=125$ می‌رسیم که از آنجا جوابهای زیر را خواهیم داشت :

$$\left|\begin{array}{l}\sigma_1=5\\ \sigma_2=6\end{array}\right.;\quad \left|\begin{array}{l}\sigma_1=\frac{5}{2}(-1+i\sqrt{3})\\ \sigma_2=3(-1-i\sqrt{3})\end{array}\right.;\quad \left|\begin{array}{l}\sigma_1=\frac{5}{2}(-1-i\sqrt{3})\\ \sigma_2=3(-1+i\sqrt{3})\end{array}\right.$$

ودر نتیجه جوابهای دستگاه اصلی چنین می‌شود :

$$\left|\begin{array}{l}x_1=2\\ y_1=3\end{array}\right.;\quad \left|\begin{array}{l}x_2=3\\ y_2=2\end{array}\right.;\quad \left|\begin{array}{l}x_3=-1+i\sqrt{3}\\ y_3=\frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3})\end{array}\right.;$$

$$\left|\begin{array}{l}x_4=\frac{3}{2}(-1+i\sqrt{3})\\ y_4=-1+i\sqrt{3}\end{array}\right.;\quad \left|\begin{array}{l}x_5=-1-i\sqrt{3}\\ y_5=\frac{3}{2}(-1-i\sqrt{3})\end{array}\right.;$$

$$\left|\begin{array}{l}x_6=\frac{3}{2}(-1-i\sqrt{3})\\ y_6=-1-i\sqrt{3}\end{array}\right.$$

۳۶. دستگاه کمکی را تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{cases}\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=\sigma_2^2\\ \sigma_1^2-2\sigma_2=\sigma_1+a\end{cases}$$

اگر σ_2 را ازمعادلهٔ دوم بدست‌آورده ودرمعادلهٔ اول قراردهیم به‌معادلهٔ درجه سوم $\sigma_1^3-\sigma_1^2-3a\sigma_1=0$ می‌رسیم که ازآنجا سه جواب برای‌دستگاه کمکی بدست می‌آید :

$$\begin{cases}\sigma_1=0\\ \sigma_2=-\dfrac{a}{2}\end{cases};\quad \begin{cases}\sigma_1=\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+3a}\\ \sigma_2=a\end{cases};\quad \begin{cases}\sigma_1=\dfrac{1}{2}-\sqrt{\dfrac{1}{4}+3a}\\ \sigma_2=a\end{cases}$$

و به ازاء هریك، دوجواب برای دستگاه اصلی بدست می‌آید :

$$\begin{cases}x_1=\sqrt{\dfrac{a}{2}}\\ y_1=-\sqrt{\dfrac{a}{2}}\end{cases};\quad \begin{cases}x_2=-\sqrt{\dfrac{a}{2}}\\ y_2=\sqrt{\dfrac{a}{2}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_3=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1}+\dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a+2\sqrt{12a+1}}\\ y_3=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1}-\dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a+2\sqrt{12a+1}}\end{cases};$$

$$\begin{cases}x_4=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1}-\dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a+2\sqrt{12a+1}}\\ y_4=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1}+\dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a+2\sqrt{12a+1}}\end{cases};$$

$$\begin{cases}x_5=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1}+\dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a-2\sqrt{12a+1}}\\ y_5=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1}-\dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a-2\sqrt{12a+1}}\end{cases}:$$

$$\begin{cases}x_6=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1}-\dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a-2\sqrt{12a+1}}\\ y_6=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\sqrt{12a+1}+\dfrac{1}{4}\sqrt{2-4a-2\sqrt{12a+1}}\end{cases}$$

۳۷. دستگاه کمکی چنین‌است :

$$\begin{cases}\sigma_2=a^2-b^2\\ \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=2(a^4+6a^2b^2+b^4)\end{cases}$$

با محاسبه σ_2 ازمعادلهٔ اول و قراردادن آن در معادلهٔ دوم دستگاه ،به معادلهٔ دو مجذوری $\sigma_1^4 - 4(a^2-b^2)\sigma_1^2 - 16a^2b^2 = 0$ می‌رسیم و از آنجا چهار جواب برای دستگاه کمکی بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l}\sigma_1 = \pm 2a \\ \sigma_2 = a^2 - b^2\end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l}\sigma_1 = \pm 2bi \\ \sigma_2 = a^2 - b^2\end{array}\right.$$

که هریك ازآنها دوجواب برای دستگاه اصلی می‌دهد :

$$\left|\begin{array}{l}x_1 = -a+b \\ y_1 = -a-b\end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l}x_2 = -a-b \\ y_2 = -a+b\end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l}x_3 = a+b \\ y_3 = a-b\end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l}x_4 = a-b \\ y_4 = a+b\end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l}x_5 = -bi+ai \\ y_5 = -bi-ai\end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l}x_6 = -bi-ai \\ y_6 = -bi+ai\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}x_7 = bi+ai \\ y_7 = bi-ai\end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l}x_8 = bi-ai \\ y_8 = bi+ai\end{array}\right.$$

۳۸. دستگاه کمکی را تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{cases}\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_1 = a \\ \sigma_1\sigma_2 = b\end{cases}$$

وجوابهای آن :

$$\left|\begin{array}{l}\sigma_1 = \sqrt[3]{a+3b} \\ \sigma_2 = \dfrac{b}{\sqrt[3]{a+3b}}\end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l}\sigma_1 = \sqrt[3]{a+3b}\cdot\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_2 = \dfrac{b}{\sqrt[3]{a+3b}}\cdot\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}\sigma_1 = \sqrt[3]{a+3b}\cdot\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_2 = \dfrac{b}{\sqrt[3]{a+3b}}\cdot\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

وهریك ازآنها دوجواب برای دستگاه اصلی می‌دهد :

$$\begin{vmatrix} x_1=\frac{1}{2}\sqrt[3]{a+3b}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}} \\ y_1=\frac{1}{2}\sqrt[3]{a+3b}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}} \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} x_2=y_1 \\ y_2=x_1 \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} x_3=x_1\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ y_3=y_1\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} x_4=x_2\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ y_4=y_2\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} x_5=x_1\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ y_5=y_1\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} x_6=x_2\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ y_6=y_2\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

۳۹. دستگاه کمکی چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1=a \\ \sigma_1^7-7\sigma_1^5\sigma_2+14\sigma_1^3\sigma_2^2-7\sigma_1\sigma_2^3=a^7 \end{cases}$$

اگرمقدار σ_1 را ازمعادلهٔ اول، درمعادلهٔ دوم قراردهیم، به معادلهٔ درجه سوم $a\sigma_2^3-2a^3\sigma_2^2+a^5\sigma_2=0$ می‌رسیم . اگر $a\neq 0$ باشد سه جواب برای دستگاه کمکی بدست می‌آید :

$$\begin{vmatrix} \sigma_1=a \\ \sigma_2=0 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} \sigma_1=a \\ \sigma_2=a^2 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} \sigma_1=a \\ \sigma_2=a^2 \end{vmatrix}$$

وجوابهای دستگاه اصلی چنین می‌شود :

$$\begin{vmatrix} x_1=a \\ y_1=0 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} x_2=0 \\ y_2=a \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} x_3=\frac{a}{2}(1+i\sqrt{3}) \\ y_3=\frac{a}{2}(1-i\sqrt{3}) \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{array}{l|l|l} x_4 = y_3 & x_5 = x_3 & x_6 = x_4 \\ ; & ; & \\ y_4 = x_3 & y_5 = y_3 & y_6 = y_4 \end{array}$$

درحالتی‌که $a = 0$ باشد، هردوعدد x و y که درمعادلهٔ $x + y = 0$ صدق کنند، جواب دستگاه خواهد بود .

۴۰. اگر مجهولات جدید را $\sigma_1 = x + y$ و $\sigma_2 = xy$ فرض کنیم ، دستگاه کمکی زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \sigma_1 - z = 7 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 - z^2 = 37 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - z^3 = 1 \end{cases}$$

اگر مقدار σ_2 را ازمعادلهٔ دوم وسپس مقدار z را ازمعادلهٔ اول، درمعادلهٔسوم قرار دهیم، بدست می‌آید $18\sigma_1 = 342$ که دیگر بسادگی خواهیم داشت :

$$\sigma_1 = 19, \qquad \sigma_2 = 90, \qquad z = 12$$

وجوابهای دستگاه اصلی چنین می‌شود :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = 9 & x_2 = 10 \\ y_1 = 10 \; ; & y_2 = 9 \\ z_1 = 12 & z_2 = 12 \end{array}$$

۴۱. دستگاه کمکی چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_2^2 = 353 \\ \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 = 68 \end{cases}$$

اگر طرفین معادلهٔ دوم را در۴ ضرب کنیم وبا معادلهٔ اول جمع کنیم ، معادلهٔ $\sigma_1^4 = 625$ بدست می‌آید. از آنجا هشت جواب برای دستگاه کمکی بدست می‌آید :

$$\begin{cases}\sigma_1=\pm 5\\ \sigma_2=4\end{cases};\quad \begin{cases}\sigma_1=\pm 5\\ \sigma_2=\dfrac{17}{2}\end{cases};\quad \begin{cases}\sigma_1=\pm 5i\\ \sigma_2=-4\end{cases};\quad \begin{cases}\sigma_1=\pm 5i\\ \sigma_2=-\dfrac{17}{2}\end{cases}$$

وبرای دستگاه اصلی خواهیم داشت :

$$\begin{cases}x_1=4\\ y_1=1\end{cases};\quad \begin{cases}x_2=1\\ y_2=4\end{cases};\quad \begin{cases}x_3=-4\\ y_3=-1\end{cases};\quad \begin{cases}x_4=-1\\ y_4=-4\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_5=\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}i\\ y_5=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}i\end{cases};\quad \begin{cases}x_6=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}i\\ y_6=\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}i\end{cases};\quad \begin{cases}x_7=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}i\\ y_7=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}i\end{cases};$$

$$\begin{cases}x_8=-\dfrac{5}{3}-\dfrac{3}{2}i\\ y_8=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}i\end{cases};\quad \begin{cases}x_9=i\\ y_9=4i\end{cases};\quad \begin{cases}x_{10}=4i\\ y_{10}=i\end{cases};\quad \begin{cases}x_{11}=-i\\ y_{11}=-4i\end{cases};$$

$$\begin{cases}x_{12}=-4i\\ y_{12}=-i\end{cases};\quad \begin{cases}x_{13}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i\\ y_{13}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i\end{cases};\quad \begin{cases}x_{14}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i\\ y_{14}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i\end{cases};$$

$$\begin{cases}x_{15}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i\\ y_{15}=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i\end{cases};\quad \begin{cases}x_{16}=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i\\ y_{16}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i\end{cases}$$

۴۲. دستگاه کمکی چنین می‌شود :

$$\sigma_1^2-2\sigma_2=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2$$

σ_2 را از تساوی اول بدست‌آورده ودر تساوی‌دوم قرار می‌دهیم، بدست‌می‌آید:

$$\sigma_1^3(\sigma_1^4-3\sigma_1^3+\sigma_1^2+3\sigma_1-2)=0$$

که ریشه‌های آن عبارتست از ۰ ، ۰ ، ۰ ، ۱ ، ۱ ، ۱ — و ۲. با دردست داشتن σ_1 ، مقدار σ_2 وازآنجا جوابهای x و y بدست می‌آید :

$$\begin{vmatrix} x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=0 \\ y_1=y_2=y_3=y_4=y_5=y_6=0 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_7=0 \\ y_7=1 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_8=1 \\ y_8=0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x_9=0 \\ y_9=1 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_{10}=1 \\ y_{10}=0 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_{11}=-\frac{1}{2}+\frac{i}{10}\sqrt{15} \\ y_{11}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{10}\sqrt{15} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x_{12}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{10}\sqrt{15} \\ y_{12}=-\frac{1}{2}+\frac{i}{10}\sqrt{15} \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_{13}=x_{14}=1 \\ y_{13}=y_{14}=1 \end{vmatrix}$$

۴۳. مجموع وتفاضل معادلات دستگاه را می‌نویسیم :

$$\begin{cases} x^4+y^4=(a+b)(x^2+y^2) \\ x^4-y^4=(a-b)(x^2-y^2) \end{cases}$$

اگر $x^2-y^2\neq 0$ باشد ، طرفین معادلهٔ دوم را می‌توان به x^2-y^2 ساده کرد ودرنتیجه دستگاه زیررا خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x^4+y^4=(a+b)(x^2+y^2) \\ x^2+y^2=a-b \end{cases}$$

ودستگاه کمکی آن چنین می‌شود :

$$\begin{cases} \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=(a+b)(\sigma_1^2-2\sigma_2) \\ \sigma_1^2-2\sigma_2=a-b \end{cases}$$

با حذف σ_2 بین این‌دومعادله ، به معادله دومجذوری زیر می‌رسیم :

$$\sigma_1^4-2(a-b)\sigma_1^2+a^2+2ab-3b^2=0$$

که ازآنجا بسادگی چهار جواب دستگاه کمکی بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l}\sigma_1=\pm\sqrt{(a-b)+2\sqrt{b^2-ab}}\\ \sigma_2=\sqrt{b^2-ab}\end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l}\sigma_1=\pm\sqrt{(a-b)-2\sqrt{b^2-ab}}\\ \sigma_2=-\sqrt{b^2-ab}\end{array}\right.$$

ودرنتیجه برای دستگاه اصلی خواهیم داشت :

$$\left|\begin{array}{l}x_1=\frac{1}{2}\sqrt{a-b+2\sqrt{b^2-ab}}+\frac{1}{2}\sqrt{a-b-2\sqrt{b^2-ab}}\\ y_1=\frac{1}{2}\sqrt{a-b+2\sqrt{b^2-ab}}-\frac{1}{2}\sqrt{a-b-2\sqrt{b^2-ab}}\end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l}x_2=y_1\\ y_2=x_1\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}x_3=-x_1\\ y_3=-y_1\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}x_4=-x_2\\ y_4=-y_2\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}x_5=-x_1\\ y_5=y_1\end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l}x_6=-x_2\\ y_6=y_2\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}x_7=-x_3\\ y_7=y_3\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}x_8=-x_4\\ y_8=y_4\end{array}\right.$$

اگر $x^2=y^2$ باشد، به معادلهٔ $x^4=(a+b)x^2$ می‌رسیم واین خود هشت جواب دیگر می‌دهد :

$$\left|\begin{array}{l}x_9=x_{10}=x_{11}+x_{12}=0\\ y_9=y_{10}=y_{11}=y_{12}=0\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}x_{13}=\sqrt{a+b}\\ y_{13}=\sqrt{a+b}\end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l}x_{14}=x_{13}\\ y_{14}=-y_{13}\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}x_{15}=-x_{13}\\ y_{15}=y_{13}\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}x_{16}=-x_{13}\\ y_{16}=-y_{13}\end{array}\right.$$

۴۴. اگر مجهولات جدیدرا $\sigma_1=x+y$ ، $\sigma_2=xy$ ؛ $\tau_1=z+u$ و $\tau_2=zu$ بگیریم، دستگاه جدید چنین می‌شود :

$$\begin{cases} 16(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+\tau_1^4-4\tau_1^2\tau_2+2\tau_2^2)=289 \\ \sigma_2-\tau_2=\frac{3}{2} \\ \sigma_1=3 \text{ ، } \tau_1=\frac{3}{2} \end{cases}$$

مقادیر معلوم σ_1 و τ_1 را درمعادلهٔاول دستگاه قرار می‌دهیم، بدست می‌آید :

$$\begin{cases} 68-36\sigma_2+2\sigma_2^2-9\tau_2+2\tau_2^2=0 \\ \sigma_2-\tau_2=\frac{3}{2} \end{cases}$$

با حذف σ_2 به معـادلهٔ درجه دوم $8\tau_2^2-78\tau_2+37=0$ می‌رسیم و به سادگی جوابهای زیررا بدست می‌آوریم :

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1=3 \\ \sigma_2=\frac{43}{4} \\ \tau_1=\frac{3}{2} \\ \tau_2=\frac{37}{4} \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} \sigma_1=3 \\ \sigma_2=2 \\ \tau_1=\frac{3}{2} \\ \tau_2=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

وجوابهای دستگاه اصلی چنین می‌شود :

$$\left|\begin{array}{l} x_1=1 \\ y_1=2 \\ z_1=1 \\ u_1=\frac{1}{2} \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2=2 \\ y_2=1 \\ z_2=1 \\ u_2=\frac{1}{2} \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_3=1 \\ y_3=2 \\ z_3=\frac{1}{2} \\ u_3=1 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_4=2 \\ y_4=1 \\ z_4=\frac{1}{2} \\ u_4=1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x_{۵}=\frac{۳}{۲}+i\frac{\sqrt{۳۴}}{۲} \\ y_{۵}=\frac{۳}{۲}-i\frac{\sqrt{۳۴}}{۲} \\ z_{۵}=\frac{۳}{۴}+i\frac{\sqrt{۱۳۹}}{۴} \\ u_{۵}=\frac{۳}{۴}-i\frac{\sqrt{۱۳۹}}{۴} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_{۶}=y_{۵} \\ y_{۶}=x_{۵} \\ z_{۶}=z_{۵} \\ u_{۶}=u_{۵} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_{۷}=x_{۵} \\ y_{۷}=y_{۵} \\ z_{۷}=u_{۵} \\ u_{۷}=z_{۵} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_{۸}=y_{۵} \\ y_{۸}=x_{۵} \\ z_{۸}=u_{۵} \\ u_{۸}=z_{۵} \end{cases}$$

صفحهٔ ۴۰

۴۵. اگر $\frac{x}{a}=u$ و $\frac{y}{b}=v$ فرض کنیم ، دستگاه مفروض به صورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{cases} u+v=۱ \\ \frac{۱}{u}+\frac{۱}{v}=۴ \end{cases}$$

اگر فرض کنیم : $\sigma_{۱}=u+v$ و $\sigma_{۲}=uv$ ، به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\sigma_{۱}=۱ \quad \text{و} \quad \frac{\sigma_{۱}}{\sigma_{۲}}=۴$$

ازآنجا $\sigma_{۱}=۱$ و $\sigma_{۲}=\frac{۱}{۴}$ بدست می‌آید و ازآنها یك جواب (ویا دقیق‌تر دوجواب مساوی) $u=v=\frac{۱}{۲}$ بدست می‌آید و در نتیجه :

$$x=\frac{a}{۲} \quad ; \quad y=\frac{b}{۲}$$

۴۶. $y=-z$ می‌گیریم ، دراینصورت به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} x^{۲}+z^{۲}=-\frac{۵}{۲}xz \\ x+z=-\frac{۱}{۴}xz \end{cases}$$

که اگر $\sigma_1 = x+z$ و $\sigma_2 = xz$ فرض کنیم ، بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -\frac{5}{2}\sigma_2 \\ \sigma_1 = -\frac{1}{4}\sigma_2 \end{cases}$$

و دوجواب زیر بدست می‌آید :

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_2 = -8 \end{vmatrix}$$

که هریك ازآنها دوجواب برای دستگاه متقارن می‌دهند :

$$\begin{vmatrix} x_1 = x_2 = 0 \\ z_1 = z_2 = 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_3 = 4 \\ z_3 = -2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_4 = -2 \\ z_4 = 4 \end{vmatrix}$$

و جوابهای دستگاه اصلی چنین می‌شود :

$$\begin{vmatrix} x_1 = x_2 = 0 \\ y_1 = y_2 = 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_3 = 4 \\ y_3 = 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_4 = -2 \\ y_4 = -4 \end{vmatrix}$$

۴۷. با فرض $y = -z$ ، دستگاه مفروض چنین می‌شود :

$$\begin{cases} x+z=2 \\ x^3+z^3=8 \end{cases}$$

و برای دستگاه کمکی خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 8 \end{cases}$$

که جوابهای $\sigma_1 = 2$ و $\sigma_2 = 0$ خواهد داشت ، ازآنجا مقادیر xوz و سپس xوy بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ y_1 = 0 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ y_2 = -2 \end{array}\right.$$

۴۸. $y = -z$ می‌گیریم. دستگاه مفروض منجر به دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} x^5 + z^5 = 3094 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

و دستگاه کمکی آن:

$$\begin{cases} \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 3093 \\ \sigma_1 = 3 \end{cases}$$

و جوابهای آن:

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_2 = -10 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_2 = 19 \end{array}\right.$$

که هریك از آنها متناظر با دوجواب برای دستگاه متقارن هستند:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = 5 \\ z_1 = -2 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = -2 \\ z_2 = 5 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_3 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{67}}{2} \\ z_3 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{67}}{2} \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{array}{l} x_4 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{67}}{2} \\ y_4 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{67}}{2} \end{array}\right.$$

و بالاخره جوابهای دستگاه اصلی چنین می‌شود:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = 5 \\ y_1 = 2 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = -2 \\ y_2 = -5 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_3 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{67}}{2} \\ y_3 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{67}}{2} \end{array}\right. ;$$

$$\left|\begin{aligned} x_4 &= \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{67}}{2} \\ y_4 &= -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{67}}{2} \end{aligned}\right.$$

۴۹. با فرض $y=-z$ به دستگاه متقارن زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} x^5+z^5=b^5 \\ x+z=a \end{cases}$$

و این دستگاه را قبلاحل کرده‌ایم (تمرین ۲۴ صفحهٔ ۳۷) . جوابهای دستگاه اصلی چنین است :

$$\left|\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{2}+\sqrt{-\frac{a^2}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5+4b^5}{5a}}} \\ y_1 &= -\frac{a}{2}+\sqrt{-\frac{a^2}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5+4b^5}{5a}}} \end{aligned}\right. \quad ; \quad \left|\begin{aligned} x_2 &= -y_1 \\ y_2 &= -x_1 \end{aligned}\right. ;$$

$$\left|\begin{aligned} x_3 &= \frac{a}{2}+\sqrt{-\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5+4b^5}{5a}}} \\ y_3 &= -\frac{a}{2}+\sqrt{-\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5+4b^5}{5a}}} \end{aligned}\right. \quad ; \quad \left|\begin{aligned} x_4 &= -y_3 \\ y_4 &= -x_3 \end{aligned}\right.$$

۵۰ اگر $z=x^2$ فرض کنیم، دستگاه متقارن زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} y+z=5 \\ y^3+z^3=65 \end{cases}$$

و این دستگاه را هم قبلا حل کرده‌ایم (تمرین ۴ صفحهٔ ۳۶) . به این‌ترتیب جوابهای زیر را برای دستگاه اصلی خواهیم داشت :

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ y_1 = 4 \end{array}\right. ; \left|\begin{array}{l} x_2 = -1 \\ y_2 = 4 \end{array}\right. ; \left|\begin{array}{l} x_3 = 2 \\ y_3 = 1 \end{array}\right. ; \left|\begin{array}{l} x_4 = -2 \\ y_4 = 1 \end{array}\right.$$

۵۱. اگر $\sqrt{x} = u$ و $\sqrt{y} = v$ فرض‌کنیم ، دستگاهی به صورت زیر خواهیم داشت :

$$\begin{cases} u+v = \frac{5}{6}uv \\ u^2+v^2 = 13 \end{cases}$$

و دستگاه کمکی آن چنین می‌شود :

$$\begin{cases} 6\sigma_1 = 5\sigma_2 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 13 \end{cases}$$

و جوابهای آن :

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_2 = 6 \end{array}\right. ; \left|\begin{array}{l} \sigma_1 = -\frac{13}{5} \\ \sigma_2 = -\frac{78}{25} \end{array}\right.$$

متذکر می‌شویم که تنها جوابهای غیرمنفی u و v قابل قبول است ، زیرا در $u = \sqrt{x}$ و $v = \sqrt{y}$ ریشه‌های حسابی مورد نظر است . بنابراین عدد $\sigma_2 = uv$ هم عددی غیرمنفی است . به این ترتیب تنها جواب اول دستگاه کمکی قابل قبول است :

$$\left|\begin{array}{l} u_1 = 2 \\ v_1 = 3 \end{array}\right. ; \left|\begin{array}{l} u_2 = 3 \\ v_2 = 2 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} u_3 = -\frac{13}{10} + \frac{\sqrt{481}}{10} \\ v_3 = -\frac{13}{10} - \frac{\sqrt{481}}{10} \end{array}\right. ; \left|\begin{array}{l} u_4 = v_3 \\ v_4 = u_3 \end{array}\right.$$

و در نتیجه دوجواب زیر را برای دستگاه اصلی خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 9 \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

۵۲. $\sqrt{x} = u$ و $\sqrt{y} = v$ فرض می‌کنیم ، در اینصورت دستگاه مفروض را می‌توان چنین نوشت :

$$\begin{cases} u^2v + v^2u = a \\ \dfrac{u^4}{v} + \dfrac{v^4}{u} = b \end{cases}$$

و برای دستگاه کمکی :

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma_2 = a \\ \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = b\sigma_2 \end{cases}$$

اگر از معادلهٔ اول دستگاه σ_2 را محاسبه و در معادلهٔ اول قرار دهیم ، پس از ساده‌کردن طرفین آن به σ_1 ، داریم :

$$\sigma_1^6 - 5a\sigma_1^3 + (5a^2 - ab) = 0$$

و این معادله‌ای درجه دوم نسبت به σ_1^3 است ، با حل آن بدست می‌آید :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt[3]{\dfrac{5}{2}a + \sqrt{\dfrac{5}{4}a^2 + ab}} \\ \sigma_2 = \dfrac{a}{\sigma_1} \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt[3]{\dfrac{5}{2}a - \sqrt{\dfrac{5}{4}a^2 + ab}} \\ \sigma_2 = \dfrac{a}{\sigma_1} \end{cases}$$

(ما چهار جواب دیگر را ، که اعدادی مختلط هستند ، در نظر نگرفتیم ، زیرا $u=\sqrt{x}$ و $v=\sqrt{y}$ اعدادی غیرمنفی هستند و بنابراین σ_1 و σ_2 هم باید غیرمنفی باشند) . هریك از این جوابها ، دو جواب برای دستگاه متقارن برحسب u و v ، بدست می‌دهد ، برای این منظور باید معادلهٔ درجه دوم زیر را تشکیل داد :

$$z^2-\sigma_1 z+\frac{a}{\sigma_1}=0 \qquad (*)$$

چون تنها به جوابهای غیرمنفی u و v کار داریم ، باید مبین این معادله غیر منفی باشد :

$$\sigma_1^2-\frac{4a}{\sigma_1}\geqslant 0$$

یا $\sigma_1^3\geqslant 4a$ (بیاد داشته باشیم که باید $\sigma_1>0$ باشد) ، ولی جواب دوم معادله، در این نامساوی صدق نمی‌کند :

$$\sigma_1^3=\frac{5}{2}a-\sqrt{\frac{5}{4}a^2+ab}<\frac{5}{2}a<4a$$

(عدد a مثبت هست، زیرا $a=\sigma_1\sigma_2\geqslant 0$ است و واضح‌است که مقدار $a=0$ هم قابل‌قبول نیست). برای اینکه جواب اول در شرط مورد نظر صدق کند، باید داشته باشیم :

$$\frac{5}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2+ab}\geqslant 4a \Longrightarrow \sqrt{\frac{5}{4}a^2+ab}\geqslant \frac{3}{2}a$$

و از آنجا به سادگی نتیجه می‌شود که $b\geqslant a$.

با حل دستگاه (*) ، دوجواب برای دستگاه متقارن بدست می‌آید :

$$u_1=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2+ab}}+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{5}{4}a^2+ab}-\frac{3}{1}a}{\sqrt[3]{\frac{5}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2+ab}}}}$$

$$v_1=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2+ab}}-$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{5}{4}a^2+ab}-\frac{3}{2}a}{\sqrt[3]{\frac{5}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2+ab}}}}$$

$$u_2=v_1;\quad v_2=u_1$$

و بالاخره با شرط $b>a>0$ برای دستگاه اصلی جوابهای زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{vmatrix}x_1=u_1^2\\ y_1=v_1^2\end{vmatrix}\;;\;\begin{vmatrix}x_2=u_2^2\\ y_2=v_2^2\end{vmatrix}$$

۵۳. با فرض $\sqrt{x}=u$ و $\sqrt{y}=-v$ ، به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases}u+v=-2uv\\ u^2+v^2=20\end{cases}$$

و برای دستگاه کمکی بدست می‌آید :

$$\begin{cases}\sigma_1=-2\sigma_2\\ \sigma_1^2-2\sigma_2=20\end{cases}$$

و جوابهای آن :

$$\begin{vmatrix}\sigma_1=4\\ \sigma_2=-2\end{vmatrix}\;;\;\begin{vmatrix}\sigma_1=-5\\ \sigma_2=\frac{5}{2}\end{vmatrix}$$

چون $u=\sqrt{x}>0$ و $v=-\sqrt{y}<0$ است ، باید $\sigma_2=uv<0$

باشد ، بنابراین جواب دوم قابل قبول نیست و برای جواب اول داریم :

$$\begin{cases} u_1 = 2+\sqrt{6} \\ v_1 = 2-\sqrt{6} \end{cases} ; \begin{cases} u_2 = 2-\sqrt{6} \\ v_2 = 2+\sqrt{6} \end{cases}$$

از این جوابها هم ، جواب دوم قابل قبول نیست ، زیرا در شرایط $u>0$ و $v>0$ صدق نمی‌کند . تنها جواب اول باقی میماند که از آنجا جواب زیر را

را برای دستگاه اصلی بدست می‌دهد :

$$\begin{cases} x = u_1^2 = (2+\sqrt{6})^2 = 10+4\sqrt{6} \\ y = v_1^2 = (2-\sqrt{6})^2 = 10-4\sqrt{6} \end{cases}$$

۵۴. دستگاه‌مفروض نشان می‌دهد که x و y مخالف صفر و هم‌علامت‌اند. اگر هردو مثبت باشند ، می‌توان فرض کرد : $\sqrt{x}=u$ و $\sqrt{y}=v$. و اگر هردومقدار x و y منفی باشند ، می‌توان فرض کرد : $\sqrt{-x}=u$ و $\sqrt{-y}=v$. در هردو حالت دستگاه مفروض ، به دستگاه متقارن زیر منجر میشود :

$$\begin{cases} \dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}=\dfrac{7}{vu}+1 \\ u^3v+v^3u=78 \end{cases}$$

و به عنوان دستگاه کمکی خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \sigma_1^2-3\sigma_2=7 \\ \sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=78 \end{cases}$$

اگر σ_1^2 را ازمعادلهٔ اول بدست آورده و درمعادلهٔ دوم قراردهیم ، بمعادلهٔ درجه دوم $\sigma_2^2+7\sigma_2-78=0$ می‌رسیم . بنابراین چهار جواب برای دستگاه کمکی بدست می‌آید :

$$\left|\begin{matrix}\sigma_1=5\\ \sigma_2=6\end{matrix}\right. ;\ \left|\begin{matrix}\sigma_1=-5\\ \sigma_2=6\end{matrix}\right. ;\ \left|\begin{matrix}\sigma_1=4\sqrt{2}i\\ \sigma_2=-13\end{matrix}\right. ;\ \left|\begin{matrix}\sigma_1=-4\sqrt{2}i\\ \sigma_2=-13\end{matrix}\right.$$

چون $u=\sqrt{\pm x}$ و $v=\sqrt{\pm y}$ ، اعدادی مثبت هستند باید σ_1 و σ_2 مثبت باشند ، یعنی برای ما تنها جواب اول این دستگاه قابل قبول است . ازآنجا دوجواب برای دستگاه متقارن بدست می‌آید :

$$\left|\begin{matrix}u_1=2\\ v_1=3\end{matrix}\right. ;\ \left|\begin{matrix}u_2=3\\ v_2=2\end{matrix}\right.$$

و برای مجهولات دستگاه اصلی (با توجه به $u=\sqrt{x}$ و $v=\sqrt{y}$ یا $u=\sqrt{-x}$ و $v=\sqrt{-y}$) چهار جواب بدست می‌آید :

$$\left|\begin{matrix}x_1=4\\ y_1=9\end{matrix}\right. ;\ \left|\begin{matrix}x_2=9\\ y_2=4\end{matrix}\right. ;\ \left|\begin{matrix}x_3=-4\\ y_3=-9\end{matrix}\right. ;\ \left|\begin{matrix}x_4=-9\\ y_4=-4\end{matrix}\right.$$

۵۵. از معادلهٔ دوم دستگاه روشن می‌شود که xوy هم‌علامت‌اند که باتوجه به‌معادلهٔ اول دستگاه باید هردومثبت باشند. $u=\sqrt{x}$ و $v=\sqrt{y}$ فرض‌می‌کنیم ، به دستگاه متقارن زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases}u^2+v^2=10\\ \dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

که دستگاه کمکی آن چنین است :

$$\begin{cases}\sigma_1^2-2\sigma_2=10\\ \sigma_1^2-2\sigma_2=\dfrac{5}{2}\sigma_2\end{cases}$$

و جوابهای آن :

$$\left|\begin{matrix}\sigma_1=3\sqrt{2}\\ \sigma_2=4\end{matrix}\right. ;\ \left|\begin{matrix}\sigma_1=-3\sqrt{2}\\ \sigma_2=4\end{matrix}\right.$$

جواب دوم قابل قبول نیست و برای جواب اول داریم :

$$\begin{vmatrix} u_1=\sqrt{2} \\ v_1=2\sqrt{2} \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} u_2=2\sqrt{2} \\ v_2=\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

و بالاخره برای مجهولات دستگاه اصلی :

$$\begin{vmatrix} x_1=2 \\ y_1=8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_2=8 \\ y_2=2 \end{vmatrix}$$

۵۶. واضح‌است که باید مقادیر x و y هم‌علامت باشند. اگر هر دو مثبت باشند $\sqrt{x}=u$ و $\sqrt{y}=v$ و اگر هر دو منفی باشند $\sqrt{-x}=u$ و $\sqrt{-y}=v$ فرض می‌کنیم. درحالت اول به دستگاه متقارن زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} u^2+uv+v^2=a \\ u^6+2u^3v^3+v^6=a^3 \end{cases}$$

سمت چپ معادلهٔ دوم مجذور کامل است و بنابراین a عددی غیر منفی است.

دستگاه کمکی چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1{}^2-\sigma_2=a \\ \sigma_1{}^6-6\sigma_1{}^4\sigma_2+9\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2=a^3 \end{cases}$$

$\sigma_1{}^2$ را ازمعادلهٔ‌اول دستگاه بدست‌آورده، درمعادلهٔ‌دوم قرار می‌دهیم، به‌معادلهٔ درجه سوم $4\sigma_2{}^3-3a^2\sigma_2=0$ می‌رسیم. ازآنجا شش جواب برای دستگاه کمکی بدست می‌آید که شرایط $\sigma_1\geq 0$ و $\sigma_2\geq 0$ در دوتای آنها صدق می‌کند :

$$\begin{vmatrix} \sigma_1=\sqrt{2} \\ \sigma_2=0 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} \sigma_1=\sqrt{a(1+\frac{\sqrt{3}}{2})} \\ \sigma_2=a\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

جواب دوم برای u و v ریشه‌های مختلط می‌دهد و به ازاء جواب اول‌داریم :

$$\left|\begin{array}{l} u_1=\sqrt{a} \\ v_1=0 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} u_2=0 \\ v_2=\sqrt{a} \end{array}\right.$$

ودر نتیجه دوجواب برای دستگاه اصلی بدست می‌آید (به ازاء $a>0$) :

$$\left|\begin{array}{l} x_1=a \\ y_1=0 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2=0 \\ y_2=a \end{array}\right.$$

درحالتی‌که مقادیر x و y منفی باشند ، به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} -u^2-v^2+uv=a \\ -u^6-v^6+2u^3v^3=a^2 \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شودکه a عددی غیر مثبت است . دستگاه کمکی چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1{}^2-3\sigma_2=-a \\ \sigma_1{}^6-6\sigma_1{}^4\sigma_2+9\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2-4\sigma_2{}^3=-a^2 \end{cases}$$

اگر $\sigma_1{}^2$ را ازمعادلهٔ اول محاسبه ودرمعادلهٔ دوم‌قرار دهیم، بدست می‌آید : $4\sigma_2{}^3-3a^2\sigma_2=0$. از آنجا دو جواب برای دستگاه‌کمکی (با شرایط $\sigma_1>0$ و $\sigma_2>0$) بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1=\sqrt{-a} \\ \sigma_2=0 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} \sigma_1=\sqrt{-a\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)} \\ \sigma_2=-a\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

که هریك ازآنها دوجواب برای دستگاه متقارن می‌دهند :

$$\left|\begin{array}{l} u_1=\sqrt{-a} \\ v_1=0 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} u_2=0 \\ v_2=\sqrt{-a} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} u_3=\frac{1}{2}\sqrt{-a\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)}+\frac{1}{2}\sqrt{-a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ v_3=\frac{1}{2}\sqrt{-a\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)}-\frac{1}{2}\sqrt{-a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \end{array}\right. ;$$

$$\begin{cases} u_4 = v_3 \\ v_4 = u_3 \end{cases}$$

و ازآنجا برای دستگاه اصلی (به‌ازاء $a>0$) خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x_1 = a \\ y_1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{a}{2}+\frac{1}{4}a\sqrt{3}-\frac{1}{4}a\sqrt{4\sqrt{3}-5} \\ y_3 = \frac{a}{2}+\frac{1}{4}a\sqrt{3}+\frac{1}{4}a\sqrt{4\sqrt{3}-5} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_4 = y_3 \\ y_4 = x_3 \end{cases}$$

۵۷. ازمعادلهٔ اول دستگاه دیده می‌شود که x و y اعدادی هم علامت‌اند و بنابراین هر دو غیرمنفی هستند (زیرا $x+y=7+\sqrt{xy}$) . با فرض $u=\sqrt{x}$ و $v=\sqrt{y}$ ، به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} u^2+v^2-uv=7 \\ u^4+v^4+u^2v^2=133 \end{cases}$$

و این دستگاه را هم ما قبلا حل‌کرده‌ایم (تمرین ۲۸ صفحهٔ ۳۷) . با شرایط $u\geqslant 0$ و $v\geqslant 0$ خواهیم داشت :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ v_1 = 3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u_2 = 3 \\ v_2 = 2 \end{cases}$$

وبنابراین دستگاه اصلی دارای دوجواب زیر است :

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 9 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 4 \end{cases} ;$$

۵۸. ازمعادلهٔ اول دستگاه‌معلوم است که x و y، عددهائی هم‌علامت‌اند. علاوه برآن هردو باید مثبت باشند، زیرا درغیراینصورت (یعنی اگر $x<0$ و $y<0$ باشد) داریم :

$$۱۴ = x + y + \sqrt{xy} < x + y + ۲\sqrt{xy} = -(\sqrt{-x} - \sqrt{-y})^۲ < ۰$$

اگر $u = \sqrt{x}$ و $v = \sqrt{y}$ فرض کنیم، به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} u^۲ + uv + v^۲ = ۱۴ \\ u^۴ + u^۲v^۲ + v^۴ = ۸۴ \end{cases}$$

که شبیه‌آنرا قبلا حل کرده‌ایم (تمرین ۳۰ صفحهٔ ۳۷) . دوجواب پیدامی‌کنیم که درشرایط $u > ۰$ و $v > ۰$ صدق می‌کنند :

$$\begin{vmatrix} u_۱ = \sqrt{۲} \\ v_۱ = ۲\sqrt{۲} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} u_۲ = ۲\sqrt{۲} \\ v_۲ = \sqrt{۲} \end{vmatrix}$$

بنابراین معادلهٔ اصلی دارای دوجواب زیر است :

$$\begin{vmatrix} x_۱ = ۲ \\ y_۱ = ۸ \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_۲ = ۸ \\ y_۲ = ۲ \end{vmatrix}$$

۵۹. با تبدیل $x^{\frac{۱}{۴}} = u$ و $y^{\frac{۱}{۵}} = v$ به دستگاه متقارن زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} u^۳ + v^۳ = ۳۵ \\ u + v = ۵ \end{cases}$$

و این دستگاه را قبلا حل کرده‌ایم (مثال ۱ صفحهٔ ۳۲) :

$$\begin{vmatrix} u_۱ = ۲ \\ v_۱ = ۳ \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} u_۲ = ۳ \\ v_۲ = ۲ \end{vmatrix}$$

ودرنتیجه دوجواب زیررا برای دستگاه اصلی خواهیم داشت :

$$\begin{vmatrix} x_۱ = ۱۶ \\ y_۱ = ۲۴۳ \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_۲ = ۸۱ \\ y_۲ = ۳۲ \end{vmatrix}$$

۶۰. واضح است که دوعدد x و y باید یك‌علامت داشته باشند. بنابراین باید تبدیل $\sqrt[۴]{x} = u$ و $\sqrt[۴]{y} = v$ یا تبدیل $\sqrt[۴]{-x} = u$ و $\sqrt[۴]{-y} = v$

را در نظر بگیریم. در هردو صورت دستگاه مفروض، به دستگاه متقارن زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases}\dfrac{u^2}{v^2}+\dfrac{v^2}{u^2}=\dfrac{61}{u^2v^2}+1\\[2ex] u^3v+v^3u=78\end{cases}$$

و دستگاه کمکی آن چنین می‌شود:

$$\begin{cases}\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+\sigma_2^2=61\\[1ex] \sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=78\end{cases}$$

اگر σ_1^2 را ازمعادلهٔ دوم بدست‌آورده ودر معادلهٔ اول دستگاه قراردهیم، به معادلهٔ دومجذوری $3\sigma_2^4+61\sigma_2^2-78^2=0$ می‌رسیم. دیگر به سادگی می‌توان دستگاه کمکی را حل‌کرد، ولی تنها یکی از این جوابها در شرایط $\sigma_1>0$ و $\sigma_2>0$ صدق می‌کنند:

$$\left|\begin{aligned}\sigma_1&=5\\ \sigma_2&=6\end{aligned}\right.$$

بالاخره دوجواب برای دستگاه متقارن بدست می‌آید:

$$\left|\begin{aligned}u_1&=2\\ v_1&=3\end{aligned}\right. ;\quad \left|\begin{aligned}u_2&=3\\ v_2&=2\end{aligned}\right.$$

و ازآنجا، چهارجواب برای دستگاه اصلی خواهیم داشت:

$$\left|\begin{aligned}x_1&=16\\ y_1&=81\end{aligned}\right. ;\quad \left|\begin{aligned}x_2&=81\\ y_2&=16\end{aligned}\right. ;\quad \left|\begin{aligned}x_3&=-16\\ y_3&=-81\end{aligned}\right. ;\quad \left|\begin{aligned}x_4&=-81\\ y_4&=-16\end{aligned}\right.$$

۶۱. با فرض $\sqrt[3]{x}=u$ و $\sqrt[3]{y}=v$، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}u^3+v^3=72\\ u+v=6\end{cases}$$

و به عنوان دستگاه کمکی :

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 72 \\ \sigma_1 = 6 \end{cases}$$

که جواب آن $\sigma_1 = 6$ و $\sigma_2 = 8$ است . ازآنجا خواهیم داشت :

$$\left| \begin{matrix} u_1 = 2 \\ v_1 = 4 \end{matrix} \right. ; \quad \left| \begin{matrix} u_2 = 4 \\ v_2 = 2 \end{matrix} \right.$$

ودر نتیجه دستگاه اصلی دوجواب زیررا دارد :

$$\left| \begin{matrix} x_1 = 8 \\ y_1 = 64 \end{matrix} \right. ; \quad \left| \begin{matrix} x_2 = 64 \\ y_2 = 8 \end{matrix} \right.$$

۶۲. با تبدیل $u = \sqrt[3]{x}$ و $v = \sqrt[3]{y}$ به دستگاه متقارن زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} u^2 + u^2v^2 + v^2 = 12 \\ u + uv + v = 0 \end{cases}$$

و دستگاه کمکی آن :

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 12 \\ \sigma_1 + \sigma_2 = 0 \end{cases}$$

اگر σ_2 را بین دومعادله حذف کنیم، به معادلهٔ $\sigma_1^2 = 4$ می‌رسیم و ازآنجادو جواب برای دستگاه کمکی بدست می‌آید :

$$\left| \begin{matrix} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_2 = -2 \end{matrix} \right. ; \quad \left| \begin{matrix} \sigma_1 = -2 \\ \sigma_2 = 2 \end{matrix} \right.$$

جواب دوم منجر به ریشه‌های موهومی برای دستگاه متقارن می‌شود و جواب اول منجر به جوابهای حقیقی :

$$\left| \begin{matrix} u_1 = 1 + \sqrt{3} \\ v_1 = 1 - \sqrt{3} \end{matrix} \right. ; \quad \left| \begin{matrix} u_2 = 1 - \sqrt{3} \\ v_2 = 1 + \sqrt{3} \end{matrix} \right.$$

بنابراین دستگاه اصلی دارای جوابهای زیر است :

$$\begin{vmatrix} x_1 = 10+6\sqrt{3} \\ y_1 = 10-6\sqrt{3} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_2 = 10-6\sqrt{3} \\ y_2 = 10+6\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

۶۳. اگر $\sqrt{x}=u$ و $\sqrt[4]{y^2-1}=v$ بگیریم، بدست می‌آید :

$$\begin{cases} u+v=3 \\ u^4+(v^4+1)=82 \end{cases}$$

و دستگاه کمکی چنین می‌شود :

$$\begin{cases} \sigma_1=3 \\ \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=81 \end{cases}$$

این دستگاه دوجواب دارد :

$$\begin{vmatrix} \sigma_1=3 \\ \sigma_2=0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \sigma_1=3 \\ \sigma_2=18 \end{vmatrix}$$

به ازاء جواب اول ، جوابهای حقیقی برای دستگاه متقارن بدست می‌آید :

$$\begin{vmatrix} u_1=3 \\ v_1=0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} u_2=0 \\ v_2=3 \end{vmatrix}$$

بنابراین برای دستگاه اصلی دوجواب زیر بدست می‌آید :

$$\begin{vmatrix} x_1=9 \\ y_1=1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_2=0 \\ y_2=\sqrt{82} \end{vmatrix}$$

۶۴. فرض می‌کنیم : $\sqrt[3]{x}=u$ و $\sqrt[3]{y}=v$ ، دراینصورت به دستگاه زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} u+v=3 \\ u^3v^3=8 \end{cases}$$

دستگاه کمکی آن چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_2^3 = 8 \end{cases}$$

که تنها یک‌جواب حقیقی $\sigma_1 = 3$ و $\sigma_2 = 2$ دارد . در نتیجه خواهیم داشت :

$$\left| \begin{aligned} u_1 &= 1 \\ v_1 &= 2 \end{aligned} \right. ; \quad \left| \begin{aligned} u_2 &= 2 \\ v_2 &= 1 \end{aligned} \right. ;$$

و برای دستگاه اصلی :

$$\left| \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ y_1 &= 8 \end{aligned} \right. ; \quad \left| \begin{aligned} x_2 &= 8 \\ y_2 &= 1 \end{aligned} \right. ;$$

۶۵. روشن است که x و y هم علامت‌اند و ضمناً (با توجه به معادلهٔ دوم) مثبت‌اند . بنابراین می‌توان $\sqrt[6]{x} = u$ و $\sqrt[6]{y} = v$ فرض کرد که در نتیجه خواهیم داشت :

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = \frac{5}{2} uv \\ u^6 + v^6 = 10 \end{cases}$$

وبرای دستگاه کمکی داریم:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = \frac{9}{2} \sigma_2 \\ \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 = 10 \end{cases}$$

اگر مقدار σ_1^2 را درمعادلهٔ دوم‌دستگاه قراردهیم، به معادلهٔ درجه سوم $13\sigma_2^3 = 16$ می‌رسیم . بنابراین دستگاه کمکی تنها یك جواب داردکه با شرایط $\sigma_1 > 0$ و $\sigma_2 > 0$ می‌سازد .

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 = 3\sqrt[6]{\frac{2}{13}} \\ \sigma_2 = 2\sqrt[3]{\frac{2}{13}} \end{vmatrix}$$

و از آنها جوابهای زیر برای دستگاه متقارن بدست می‌آید :

$$\begin{vmatrix} u_1 = \sqrt[6]{\frac{2}{13}} \\ v_1 = 2\sqrt[6]{\frac{2}{13}} \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} u_2 = 2\sqrt[6]{\frac{2}{13}} \\ v_2 = \sqrt[6]{\frac{2}{13}} \end{vmatrix}$$

و برای دستگاه اصلی :

$$\begin{vmatrix} x_1 = \frac{2}{13} \\ y_1 = \frac{128}{13} \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} x_2 = \frac{128}{13} \\ y_2 = \frac{2}{13} \end{vmatrix}$$

۶۶. با فرض $\sqrt[6]{x} = u$ و $\sqrt[6]{y} = v$ به دستگاه متقارن زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} \frac{u}{v} + \frac{v}{u} = a \\ u^3 + v^3 = b \end{cases}$$

و بعنوان دستگاه کمکی داریم :

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = (a+2)\sigma_2 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = b \end{cases}$$

که با حذف σ_2 به معادلهٔ $(a-1)\sigma_1^3 = b(a+2)$ می‌رسیم . به این ترتیب به ازاء $a \neq 1$ و $a \neq -2$ تنها جوابی که برای دستگاه کمکی بدست می‌آید، چنین است :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt[3]{\dfrac{b(a+2)}{a-1}} \\ \sigma_2 = \sqrt[3]{\dfrac{b^2}{(a+2)(a-1)^2}} \end{cases}$$

که از آنجا دوجواب برای دستگاه متقارن بدست می‌آید :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{b(a+2)}{a-1}}\left(1+\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}\right) \\ v_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{b(a+2)}{a-1}}\left(1-\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}\right) \end{cases} ; \quad \begin{cases} u_2 = v_1 \\ v_2 = u_1 \end{cases}$$

این جوابها وقتی حقیقی هستند که $a-2$ و $a+2$ هم‌علامت باشند و ضمناً $a+2\neq 0$ باشد، به عبارت دیگر به ازاء $a>2$ یا $a<-2$. بنابراین وقتی $a>2$ یا $a<-2$ باشد، داریم :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{2} + \dfrac{b(a+1)}{2(a-1)}\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}} \\ y_1 = \dfrac{b}{2} - \dfrac{b(a+1)}{2(a-1)}\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_2 = y_1 \\ y_2 = x_1 \end{cases}$$

وقتی‌که $a=1$ ولی $b\neq 0$ باشد ، دستگاه کمکی (و درنتیجه دستگاه اصلی) جواب ندارد . وقتی‌که $a=1$ و $b=0$ باشد ، دستگاه کمکی تبدیل به یك معادلهٔ $\sigma_1^2 = 3\sigma_2$ می‌شود که متناظر باجوابهای موهومی برای‌دستگاه‌متقارن است (زیرا مبین‌معادلهٔ درجه‌دوم $z^2-\sigma_1 z+\sigma_2=0$ منفی است). بنابراین دستگاه مفروض به ازاء $a=1$ جواب ندارد .

بالاخره به ازاء $a=-2$ ، دستگاه کمکی چنین می‌شود :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = b \end{cases}$$

و این دستگاه تنها به ازاء $b=0$ جواب دارد که جواب آن $\sigma_1 = 0$ و هر مقدار دلخواهی برای σ_2 است. به این ترتیب به‌ازاء $a=-2$ و $b=0$ هر عدد دلخواهی برای x و y (به جز صفر) که دررابطهٔ $x+y=0$ صدق کند، جواب دستگاه اصلی است.

۶۷. فرض می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}(x+a)=u \ ، \ \frac{1}{2}(x-a)=v$$

دراینصورت $u+v=a$ می‌شود وداریم:

$$\begin{cases} u+v=a \\ u^6+v^6=a^6 \end{cases}$$

و برای دستگاه کمکی‌داریم:

$$\begin{cases} \sigma_1=a \\ \sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3=a^6 \end{cases}$$

اگر σ_1 را بین‌دومعادلهٔ دستگاه کمکی‌حذف کنیم، به‌سادگی به‌معادلهٔ درجه سوم $2\sigma_2^3-9a^2\sigma_2^2+6a^4\sigma_2=0$ می‌رسیم که درنتیجه سه جواب دستگاه کمکی بدست می‌آید:

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1=a \\ \sigma_2=0 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} \sigma_1=a \\ \sigma_2=a^2\dfrac{9\pm\sqrt{33}}{4} \end{array}\right.$$

ازطرف‌دیگر $x=u-v$ می‌باشد، یعنی:

$$x^2=(u+v)^2-4uv=\sigma_1^2-4\sigma_2$$

و بنابراین:

$$x^2=a^2 \quad \text{یا} \quad x^2=a^2-a^2(9\pm\sqrt{33})$$

وجوابهای زیررا برای معادله خواهیم داشت:

$$x_1 = a \;;\; x_2 = -a \;;\; x_3 = ia\sqrt{8-\sqrt{32}}$$

$$x_4 = -ia\sqrt{8-\sqrt{32}} \;،\; x_5 = ia\sqrt{8+\sqrt{32}} \;،$$

$$x_6 = -ia\sqrt{8+\sqrt{32}}$$

۶۸. فرض می‌کنیم ،

$$ax^2+bx+c=u \;،\; ax^2+bx+d=-v$$

دراینصورت دستگاه زیررا خواهیم داشت :

$$\begin{cases} u+v=c-d \\ u^5+v^5=e \end{cases}$$

شبیه این‌دستگاه را قبلاً حل کرده‌ایم (تمرین ۲۴ صفحهٔ ۳۷). جوابهای آن چنین‌اند (تنها جوابهای u رانوشته‌ایم) :

$$u_{1,2} = \frac{c-d}{2} \pm \sqrt{-\frac{(c-d)^2}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(c-d)^5+4e}{5(c-d)}}}$$

$$u_{3,4} = \frac{c-d}{2} \pm \sqrt{-\frac{(c-d)^2}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(c-d)^5+4e}{5(c-d)}}}$$

وجوابهای معادلهٔ اصلی از چهار معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=u_i$ ($i=1، 2، 3، 4$) بدست می‌آید . درنتیجه هشت جواب برای x خواهیم داشت (ازترکیب دلخواه علامتها در جواب زیر) :

$$x = -\frac{b}{2a} \pm$$

$$\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-2a(c+d)\pm 2a\sqrt{-(c-d)^2\pm 2\sqrt{\frac{(c-d)^5+4e}{5(c-d)}}}}$$

۶۹. فرض می‌کنیم $z^2+1=u$ و $z^2-1=-v$. در اینصورت $u+v=2$ می‌شود ودستگاه زیربدست می‌آید :

$$\begin{cases} u+v=2 \\ u^2+v^2=2^2 \end{cases}$$

که باتوجه به حل‌تمرین ۳۹ صفحهٔ ۳۸ جوابهای زیررا برای‌آن خواهیم‌داشت (تنها مقادیر u رانوشته‌ایم) :

$$u_1=2,\quad u_2=0,\quad u_3=1+i\sqrt{3},$$

$$u_4=1-i\sqrt{3},\quad u_5=u_3,\quad u_6=u_4.$$

که درنتیجه برای حل دستگاه اصلی، شش معادلهٔ درجه دوم $z^2+1=u_i$ $(i=1,2,\ldots,6)$ را خواهیم داشت که ازآنجا ۱۲ جواب برای مجهول z بدست می‌آید :

$$z_1=1,\quad z_2=-1,\quad z_3=i,\quad z_4=-i$$

$$z_5=z_6=(1+i)\sqrt[4]{\frac{3}{4}},\ z_7=z_8=(1-i)\sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

$$z_9=z_{10}=(-1+i)\sqrt[4]{\frac{3}{4}},\ z_{11}=z_{12}=(-1-i)\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$$

۷۰. اگر $y=1-z$ فرض‌کنیم، $y+z=1$ می‌شود و به دستگاه متقارن زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} y+z=1 \\ y^4+z^4=1 \end{cases}$$

که باتوجه به حل تمرین‌شمارهٔ ۲۰ صفحهٔ ۳۷ جوابهای زیررا برای z بدست می‌آوریم :

$$z_1=1,\quad z_2=0,\quad z_3=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{7}),\ z_4=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{7})$$

۷۱. فرض می‌کنیم : $x+a+b=u$ و $-x=v$. دراینصورت $u+v=a+b$ می‌شود ودستگاه متقارن زیررا خواهیم داشت :

$$\begin{cases} u+v=a+b \\ u^{5}+v^{5}=a^{5}+b^{5} \end{cases}$$

که باتوجه به‌حل تمرین۲۴ صفحهٔ ۳۷ با شرط $a+b\neq 0$ ، چهار جواب زیررا برای v بدست می‌آوریم :

$$v=\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{-\frac{(a+b)^{2}}{4}\pm\frac{1}{2}(a^{2}+b^{2})}$$

وازآنجا باتوجه به رابطهٔ $x=-v$ ، چهارجواب برای معادلهٔ اصلی‌بدست می‌آید :

$$x_1=-a,\quad x_2=-b,$$

$$x_{3,4}=-\frac{a+b}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{3a^{2}+3b^{2}+2ab}$$

درحالتی‌که $a+b=0$ باشد، معادله تبدیل به‌اتحاد می‌شود وهرمقدار دلخواه x درآن صدق می‌کند .

۷۲. چون $(a-\sqrt{x})^{2}$ به‌ازاء همهٔ مقادیر حقیقی x غیرمنفی است ، معادلهٔ مفروض‌را می‌توان چنین نوشت :

$$1-x^{2}=(a-\sqrt{x})^{4}$$

فرض می‌کنیم : $\sqrt{x}=u$ و $a-\sqrt{x}=v$. دراینصورت $u+v=a$ می‌شود ومعادلهٔ مفروض به‌صورت $1-u^{4}=v^{4}$ درمی‌آید و دستگاه متقارن زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} u+v=a \\ u^{4}+v^{4}=1 \end{cases}$$

راه حل این‌معادله رادرتمرین ۲۱ صفحهٔ ۳۷ دیده‌ایم . برای u چهارجواب زیر بدست می‌آید :

$$u=\frac{a}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}a^{2}\pm\sqrt{\frac{a^{4}+1}{2}}}$$

چون $u=\sqrt{x}$ غیرمنفی است، بایدعبارت زیررادیکال مثبت‌باشد . درنتیجه زیررادیکال تنها علامت «+» رامی‌توان گرفت وضمناً باید نامساوی زیر هم برقرار باشد :

$$\sqrt{\frac{a^۴+۱}{۲}}>\frac{۳}{۴}a^۲$$

که ازآنجا به‌سادگی $|a|<\sqrt[۴]{۸}$ بدست می‌آید . ازطرف دیگر نامساوی

$$\left|\frac{a}{۲}\right|<\sqrt{-\frac{۳}{۴}a^۲+\sqrt{\frac{a^۴+۱}{۲}}}$$

بانامساوی $|a|<۱$ معادل است. بنابراین‌عبارت :

$$u_۱=\frac{a}{۲}+\sqrt{-\frac{۳}{۴}a^۲+\sqrt{\frac{a^۴+۱}{۲}}}$$

به ازاء $-۱<a<\sqrt[۴]{۸}$ غیرمنفی است . همچنین‌عبارت :

$$u_۲=\frac{a}{۲}-\sqrt{-\frac{۳}{۴}a^۲+\sqrt{\frac{a^۴+۱}{۲}}}$$

وقتی غیرمنفی است که $۱<a<\sqrt[۴]{۸}$ باشد . با مجذور کردن مقادیر $u_۱$ و $u_۲$ جوابهای معادلهٔ اصلی بدست می‌آید :

$$x_۱=-\frac{a}{۲}+\sqrt{\frac{a^۴+۱}{۲}}+a\sqrt{-\frac{۳}{۴}a^۲+\sqrt{\frac{a^۴+۱}{۲}}}$$

$$(-۱<a<\sqrt[۴]{۸})$$

$$x_۲=-\frac{a}{۲}+\sqrt{\frac{a^۴+۱}{۲}}-a\sqrt{-\frac{۳}{۴}a^۲+\sqrt{\frac{a^۴+۱}{۲}}}$$

$$(۱<a<\sqrt[۴]{۸})$$

۷۳. فرض می‌کنیم :

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}=u \text{ ،} \quad \sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=v$$

ازآنجا $u^5=\frac{1}{2}+x$ و $v^5=\frac{1}{2}-x$ می‌شود ودستگاه متقارن زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^5+v^5=1 \end{cases}$$

وجوابهای آن (تمرین ۲۴ صفحهٔ ۳۷ را به‌بینید) :

$$\left| \begin{array}{l} u_1=1 \\ v_1=0 \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} u_2=0 \\ v_2=1 \end{array} \right.$$

(تنها جوابهای حقیقی دستگاه به‌کارما می‌آید) . رابطهٔ $u^5=\frac{1}{2}+x$ جوابهای معادلهٔ اصلی را بدست می‌دهد :

$$x_1=\frac{1}{2} \text{ ،} \quad x_2=-\frac{1}{2}$$

۷۴. اگر $y=\sqrt{17-x^2}$ فرض کنیم، به‌دستگاه متقارن‌زیر می‌رسیم

$$\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x+y+xy=9 \end{cases}$$

که دستگاه کمکی آن چنین می‌شود :

$$\begin{cases} \sigma_1{}^2-2\sigma_2=17 \\ \sigma_1+\sigma_2=9 \end{cases}$$

وجوابهای آن :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_1=5 \\ \sigma_2=4 \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_1=-7 \\ \sigma_2=16 \end{array} \right.$$

جواب دوم منجر به مقادیر مختلط برای x و y می‌شود که موردتوجه ما نیست، اولین آنها جوابهای زیر را برای دستگاه متقارن می‌دهد:

$$\begin{vmatrix} x_1 = ۱ \\ y_1 = ۴ \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_2 = ۴ \\ y_2 = ۱ \end{vmatrix}$$

بنابراین، معادلهٔ اصلی دوجواب $x_1 = ۱$ و $x_2 = ۴$ راخواهدداشت.

۷۵. بافرض $\sqrt[3]{۳۵ - x^3} = y$ به دستگاه متقارن زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = ۳۵ \\ xy(x+y) = ۳۰ \end{cases}$$

که این دستگاه راقبلاً درتمرین۳۵ صفحهٔ ۳۸ حل کرده‌ایم. اگر به‌جوابهای حقیقی اکتفاکنیم، دوجواب $x_1 = ۲$ و $x_2 = ۳$ برای دستگاه اصلی بدست می‌آید.

۷۶. $\frac{۱۹ - x}{x+۱} = y$ فرض می‌کنیم، از آنجا $۱۹ - x = xy + y$ می‌شود و به دستگاه متقارن زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x + y + xy = ۱۹ \\ xy(x+y) = ۸۴ \end{cases}$$

دستگاه کمکی آن چنین است:

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = ۱۹ \\ \sigma_1 \sigma_2 = ۸۴ \end{cases}$$

و جوابهای آن:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 = ۷ \\ \sigma_2 = ۱۲ \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \sigma_1 = ۱۲ \\ \sigma_2 = ۷ \end{vmatrix}$$

به ازاء هریك ازاین جوابها، دوجواب برای دستگاه متقارن بدست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} x_1=3 \\ y_1=4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_2=4 \\ y_2=3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_3=6+\sqrt{29} \\ y_3=6-\sqrt{29} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_4=6-\sqrt{29} \\ y_4=6+\sqrt{29} \end{vmatrix}$$

بنابراین جوابهای معادلهٔ مفروض چنین است :

$$x_1=3,\quad x_2=4,\quad x_3=6+\sqrt{29},\quad x_4=6-\sqrt{29}$$

۷۷. طرفین معادله را مکعب می‌کنیم، $(a-y)^6=a^6-y^6$ بدست می‌آید . اگر $a-y=x$ فرض کنیم ، دستگاه متقارن زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^6+y^6=a^6 \end{cases}$$

و دستگاه کمکی آن :

$$\begin{cases} \sigma_1=a \\ \sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3=a^6 \end{cases}$$

وجوابهای آن :

$$\begin{vmatrix} \sigma_1=a \\ \sigma_2=0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \sigma_1=a \\ \sigma_2=a^2(\frac{9}{4}\pm\frac{\sqrt{33}}{4}) \end{vmatrix}$$

که از آنها، تنها جواب اول، متناظر باجوابهای حقیقی برای دستگاه متقارن است:

$$\begin{vmatrix} x_1=a \\ y_1=0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_2=0 \\ y_2=a \end{vmatrix}$$

بنابراین معادلهٔ مفروض دوجواب $y_1=0$ و $y_2=a$ را قبول دارد .

۷۸. اگر $\sin x=u$ و $\cos x=v$ فرض کنیم، به دستگاه متقارن زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} u^2+v^2=1 \\ u^3+v^3=1 \end{cases}$$

که برای دستگاه کمکی آن خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 1 \end{cases}$$

باحذف σ_2 بین‌معادلات این‌دستگاه، به‌معادلهٔ $\sigma_1^3 - 3\sigma_1 + 2 = 0$ می‌رسیم. این معادله ریشهٔ $\sigma_1 = 1$ را قبول داردکه بااستفاده از قضیهٔ بزو ، می‌توان دوجواب دیگرآنرا هم بدست آورد . به این‌ترتیب سه جواب برای دستگاه متقارن بدست می‌آید :

$$\left|\begin{matrix} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = 0 \end{matrix}\right. ; \left|\begin{matrix} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = 0 \end{matrix}\right. ; \left|\begin{matrix} \sigma_1 = -2 \\ \sigma_2 = \frac{3}{2} \end{matrix}\right.$$

آخرین جواب، متناظر بامقادیر مختلط‌برای u و v است(که قابل‌قبول برای $u = \sin x$ و $v = \cos x$ نیست) . درنتیجه تنها یك‌جواب مضاعف $\sigma_1 = 1$ و $\sigma_2 = 0$ باقی میماندکه متناظر باجوابهای زیربرای u و v است :

$$\left|\begin{matrix} u_1 = 1 \\ v_1 = 0 \end{matrix}\right. ; \left|\begin{matrix} u_2 = 0 \\ v_2 = 1 \end{matrix}\right.$$

و ازآنجا دودستگاه زیررا خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

وجوابهای معادلهٔ اصلی به سادگی بدست می‌آید :

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ، } x = 2k\pi \quad (k = 0 \text{ ، } \pm 1 \text{ ، } \pm 2 \text{ ، } \ldots)$$

۷۹. فرض می‌کنیم : $\sqrt[4]{629 - x} = u$ و $\sqrt[4]{77 + x} = v$

دراینصورت دستگاه متقارن زیررا خواهیم داشت :

$$\begin{cases} u+v=8 \\ u^4+v^4=706 \end{cases}$$

که جوابهای حقیقی آن چنین‌اند (مسئلهٔ ۲۱ صفحهٔ ۳۷ را به بینید) :

$$\begin{vmatrix} u_1=3 \\ v_1=5 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} u_2=5 \\ v_2=3 \end{vmatrix}$$

با درنظر گرفتن رابطهٔ $\sqrt[4]{629-x}=u$ دو جواب برای معادلهٔ اصلی بدست می‌آید :

$$x_1=548 ، x_2=4$$

۸۰. فرض می‌کنیم : $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=u$ و $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=v$.

دراینصورت دستگاه متقارن زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} u+v=2 \\ u^3+v^3=2 \end{cases}$$

برای دستگاه کمکی داریم :

$$\begin{cases} \sigma_1=2 \\ \sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} \sigma_1=2 \\ \sigma_2=1 \end{vmatrix}$$

از آنجا جواب مضاعف $u=v=1$ برای دستگاه متقارن بدست می‌آید وبا توجه به رابطهٔ $u=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$ تنها جواب $x=0$ برای معادلهٔ اصلی پیدا می‌شود .

۸۱. $\sqrt[3]{8+x}=u$ و $\sqrt[3]{8-x}=v$ در نظر می‌گیریم ، به دستگاه متقارن زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^3+v^3=16 \end{cases}$$

که به‌عنوان دستگاه کمکی خواهیم داشت :

$$\begin{cases}\sigma_1=1\\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=16\end{cases}\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}\sigma_1=1\\ \sigma_2=-5\end{array}\right.$$

ازآنجا دوجواب زیر برای دستگاه متقارن‌بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l}u_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}\\ v_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}u_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}\\ v_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$$

که باتوجه به رابطهٔ $\sqrt[4]{8+x}=u$ جوابهای زیررا خواهیم داشت :

$$x_1=3\sqrt{21}\,,\qquad x_2=-3\sqrt{21}$$

۸۲. اگر $\sqrt{1-x^2}=y$ فرض کنیم، به دستگاه متقارن‌زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{35}{12}\end{cases}$$

که دستگاه کمکی آن چنین می‌شود :

$$\begin{cases}\sigma_1^2-2\sigma_2=1\\ 12\sigma_1=35\sigma_2\end{cases}$$

وجوابهای آن :

$$\left|\begin{array}{l}\sigma_1=\frac{7}{5}\\ \sigma_2=\frac{12}{25}\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}\sigma_1=-\frac{5}{7}\\ \sigma_2=-\frac{12}{49}\end{array}\right.$$

ازاینجا چهار جواب برای دستگاه متقارن بدست می‌آیدکه باتوجه به شرط $y>0$ سه‌جواب زیر قابل قبول‌اند :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} \\ y_1 = \frac{3}{5} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3}{5} \\ y_2 = \frac{4}{5} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_3 = -\frac{5}{14} - \frac{\sqrt{73}}{14} \\ y_3 = -\frac{5}{14} + \frac{\sqrt{73}}{14} \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ اصلی سه جواب زیررا قبول دارد :

$$x_1 = \frac{4}{5}, \quad x_2 = \frac{3}{5}, \quad x_3 = -\frac{5}{14} - \frac{\sqrt{73}}{14}$$

۸۳. با فرض $u = \frac{1}{x}$ و $v = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ به دستگـاه متقارن زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{35}{12} \end{cases}$$

که همان دستگاه تمرین قبل است. فقط باید جوابهائی ازآنرا درنظر گرفت که u و v هم‌علامت باشند . این‌جوابها برای u چنین‌اند :

$$u_1 = \frac{4}{5}, \quad v_1 = \frac{3}{5}$$

وازآنجا دوجواب برای معادلهٔ مفروض بدست می‌آید :

$$x_1 = \frac{5}{4}, \quad x_2 = \frac{5}{3}$$

۸۴. فرض می‌کنیم : $\sqrt[3]{54 + \sqrt{x}} = u$ و $\sqrt[3]{54 - \sqrt{x}} = v$ ،

دراینصورت به دستگاه متقارن زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} u + v = \sqrt[3]{18} \\ u^3 + v^3 = 108 \end{cases}$$

وبرای دستگاه کمکی داریم :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt[3]{18} \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 108 \end{cases}$$

که جواب آن چنین است:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_1 = \sqrt[3]{18} \\ \sigma_2 = -\dfrac{30}{\sqrt[3]{18}} \end{array} \right.$$

در نتیجه دوجواب زیررا برای دستگاه متقارن خواهیم داشت :

$$\left| \begin{array}{l} u_1 = \sqrt[3]{18}\left(\dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{23}{12}}\right) \\ v_1 = \sqrt[3]{18}\left(\dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{23}{12}}\right) \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} u_1 = v_1 \\ v_2 = u_1 \end{array} \right.$$

که با درنظر گرفتن رابطهٔ $u = \sqrt[3]{54 + \sqrt{x}}$ به‌دو معادلهٔ زیرمی‌رسیم :

$$\sqrt{x} = 8\sqrt{69} \text{ ، } \sqrt{x} = -8\sqrt{69}$$

معادلهٔ دوم جواب ندارد وجواب معادلهٔ اول چنین است:

$$x = 64 \times 69 = 4416$$

۸۵. اگر یکی ازرادیکالها رابطرف دوم تساوی ببریم ودوطرف را به توان چهار برسانیم . به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$\sqrt[4]{24 + \sqrt{x}} + \sqrt[4]{30 - \sqrt{x}} = 6$$

اگر $u = \sqrt[4]{24 + \sqrt{x}}$ و $v = \sqrt[4]{30 - \sqrt{x}}$ فرض کنیم ، به‌دستگاه متقارن زیرمی‌رسیم :

$$\begin{cases} u + v = 6 \\ u^4 + v^4 = 54 \end{cases}$$

که دستگاه کمکی آن چنین است :

$$\begin{cases}\sigma_1=6\\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=54\end{cases}$$

جواب این‌دستگاه $\sigma_1=6$ و $\sigma_2=9$ می‌باشد. ازآنجا جواب مضاعف زیر برای دستگاه متقارن بدست می‌آید :

$$u=v=3$$

که بادرنظر گرفتن‌رابطهٔ $u=\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}$ به جواب $x=9$ می‌رسیم. آزمایش هم نشان می‌دهدکه این‌جواب درمعادلهٔ اصلی صدق می‌کند.

۸۶. با فرض $u=\sqrt[3]{10-x}$ و $-v=\sqrt[3]{3-x}$ دستگاه متقارن زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases}u+v=1\\ u^3+v^3=7\end{cases}$$

که دستگاه کمکی آن چنین است :

$$\begin{cases}\sigma_1=1\\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=7\end{cases}$$

که تنها یك‌جواب $\sigma_1=1$ و $\sigma_2=-2$ را قبول دارد. جوابهای متناظر دستگاه متقارن‌چنین است :

$$\begin{vmatrix}u_1=2\\ v_1=-1\end{vmatrix}\;;\;\begin{vmatrix}u_2=-1\\ v_2=2\end{vmatrix}$$

وباتوجه‌به‌رابطهٔ $u=\sqrt[3]{10-x}$ دوجواب $x_1=2$ و $x_2=11$ برای معادلهٔ مفروض بدست می‌آید.

۸۷. فرض می‌کنیم : $u=\sqrt[4]{41+x}$ و $v=\sqrt[4]{41-x}$. دستگاه متقارن زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} u+v=2 \\ u^4+v^4=82 \end{cases}$$

که جوابهای حقیقی آن چنین است (تمرین ۲۱ صفحهٔ ۳۷ را به‌بینید) :

$$\begin{vmatrix} u_1=3 \\ v_1=-1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} u_2=-1 \\ v_2=3 \end{vmatrix}$$

هیچیك از این جوابها در شرایط $u>0$ و $v>0$ صدق نمی‌کنند و بنابراین معادلهٔ مفروض جواب ندارد .

۸۸. با فرض $\sqrt[5]{a+x}=u$ و $\sqrt[5]{a-x}=v$ داریم :

$$\begin{cases} u+v=\sqrt[5]{2a} \\ u^5+v^5=2a \end{cases}$$

که جوابهای حقیقی آن چنین‌اند (تمرین ۲۴ صفحهٔ ۳۷ را به‌بینید) :

$$\begin{vmatrix} u_1=\sqrt[5]{2a} \\ v_1=0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} u_2=0 \\ v_2=\sqrt[5]{2a} \end{vmatrix}$$

با توجه به رابطهٔ $\sqrt[5]{a+x}=u$، برای معادلهٔ اصلی جوابهای $x_1=a$ و $x_2=-a$ بدست می‌آید .

۸۹. بافرض $\sqrt[7]{a-x}=u$ و $\sqrt[7]{x}=v$ به‌دستگاه‌متقارن‌زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} u+v=\sqrt[7]{a} \\ u^7+v^7=a \end{cases}$$

که ریشه‌های حقیقی آن چنین‌اند، (تمرین ۳۹ صفحهٔ ۳۸ را به‌بینید):

$$\begin{vmatrix} u_1 = \sqrt[7]{a} \\ v_1 = 0 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} u_2 = 0 \\ v_2 = \sqrt[7]{a} \end{vmatrix}$$

و باتوجه به رابطهٔ $\sqrt[7]{x} = v$ دوجواب برای معادلهٔ اصلی بدست می‌آید :

$$x_1 = 0 \;,\; x_2 = a$$

۹۰. با فرض $\sqrt[4]{x} = u$ و $\sqrt[4]{a-x} = v$ دستگاه متقارن زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} u+v = \sqrt[4]{b} \\ u^4+v^4 = a \end{cases}$$

که دارای دوجواب حقیقی می‌تواند باشد (تمرین ۲۱ صفحهٔ ۳۷ را به‌بینید):

$$\begin{vmatrix} u_1 = \dfrac{\sqrt[4]{b}}{2} + \sqrt{-\dfrac{3}{4}\sqrt{b} + \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}} \\ v_1 = \dfrac{\sqrt[4]{b}}{2} - \sqrt{-\dfrac{3}{4}\sqrt{b} + \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}} \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} u_2 = v_1 \\ v_2 = u_1 \end{vmatrix}$$

عبارت زیر رادیکال با شرط $8a > b > 0$ غیرمنفی است وچون u و v مقادیر مثبت هستند ، بایدشرط زیرهم برقرارباشد :

$$\frac{\sqrt[4]{b}}{2} > \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt{b} + \sqrt{\frac{a+b}{2}}}$$

که به سادگی‌به شرط $b > a$ می‌رسد . بنابراین‌جوابهای دستگاه متقارن وقتی قابل‌قبول‌اندکه شرط $b > a > \frac{b}{8} > 0$ برقرار باشد . با توجه به رابطهٔ $\sqrt[4]{x} = u$ و با در نظرگرفتن شرط $b > a > \frac{b}{8} > 0$ دو جواب زیر برای

معادلهٔ اصلی بدست می‌آید :

$$x_{1,2}=\frac{a}{2}\pm\sqrt[4]{b}\,(\sqrt{2(a+b)}-\sqrt{b})\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt{b}+\sqrt{\frac{a+b}{2}}}$$

۹۱. فرض کنیم : $\sqrt[4]{8-x}=u$ و $\sqrt[4]{89+x}=v$ ، دستگاه متقارن زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases}u+v=5\\ u^4+v^4=97\end{cases}$$

جوابهای آن(که درشرایط $u>0$ و $v>0$ صدق کنند) چنین‌اند (تمرین ۲۱ صفحهٔ ۳۷ را به‌بینید) :

$$\left|\begin{array}{l}u_1=2\\ v_1=3\end{array}\right. ;\quad \left|\begin{array}{l}u_2=3\\ v_2=2\end{array}\right.$$

که با توجه به رابطهٔ $\sqrt[4]{8-x}=u$ دو جواب $x_1=-8$ و $x_2=-73$ بدست می‌آید .

۹۲. $x+a=u$ و $x+b=-v$ می‌گیریم . دستگاه متقارن زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases}u+v=a-b\\ u^4+v^4=c^4\end{cases}$$

جوابهای آن (باتوجه به‌حل‌تمرین ۲۱ صفحهٔ ۳۷) ، چنین‌اند (فقط‌جوابهای u را نوشته‌ایم) :

$$u=-\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}(a-b)^2\pm\sqrt{\frac{(a-b)^4+c^4}{2}}}$$

و در نتیجه چهار جواب زیر برای معادلهٔ اصلی بدست می‌آید :

$$x=-\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}(a-b)^2\pm\sqrt{\frac{(a-b)^4+c^4}{2}}}$$

صفحهٔ ۴۵

۹۳. داریم: $\sigma_1 = x_1 + x_2 = -6$ و $\sigma_2 = x_1 x_2 = 10$. ریشه‌های معادلهٔ مجهول $z^2 + pz + q = 0$ عبارتند از $z_1 = x_1^3$ و $z_2 = x_2^3$. بنابراین:

$$-p = z_1 + z_2 = x_1^3 + x_2^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = (-6)^3 - 3(-6) \times 10 = -36,$$

$$q = z_1 z_2 = x_1^3 x_2^3 = \sigma_2^3 = 1000$$

و بنابراین معادلهٔ مطلوب، به صورت $z^2 + 36z + 1000 = 0$ درمی‌آید.

۹۴. داریم: $\sigma_1 = x_1 + x_2 = -1$ و $\sigma_2 = x_1 x_2 = -3$. برای معادلهٔ مطلوب $z^2 + pz + q = 0$ باید $z_1 = x_1^{10}$ و $z_2 = x_2^{10}$ باشد. بنابراین:

$$-p = z_1 + z_2 = x_1^{10} + x_2^{10} = \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5 = 4207,$$

$$q = z_1 z_2 = x_1^{10} \cdot x_2^{10} = \sigma_2^{10} = 59049$$

وبنابراین معادلهٔ مجهول به صورت زیراست:

$$z^2 - 4207z + 59049 = 0$$

۹۵. داریم: $\sigma_1 = x_1 + x_2 = -p$ و $\sigma_2 = x_1 x_2 = q$ وبنابراین:

$$x_1 + x_2 = \sigma_1 = -p,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = p^2 - 2q,$$

$$x_1^3 + x_2^3 = S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = -p^3 + 3pq,$$

$$x_1^4 + x_2^4 = S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = p^4 - 4p^2q + 2q^2,$$

$$x_1^5 + x_2^5 = S_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = -p^5 + 5p^3q - 5pq^2,$$

و سپس :

$$x_1^{-1}+x_2^{-1}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{S_1}{\sigma_2}=-\frac{p}{q},$$

$$x_1^{-2}+x_2^{-2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{S_2}{\sigma_2^2}=\frac{p^2-2q}{q^2}$$

$$x_1^{-3}+x_2^{-3}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}=\frac{S_3}{\sigma_2^3}=\frac{-p^3+3pq}{q^3},$$

$$x_1^{-4}+x_2^{-4}=\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^4x_2^4}=\frac{S_4}{\sigma_2^4}=\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q^4},$$

$$x_1^{-5}+x_2^{-5}=\frac{x_1^5+x_2^5}{x_1^5x_2^5}+\frac{S_5}{\sigma_2^5}=\frac{-p^5+5p^3q-5pq^2}{q^5},$$

۹۶. معادلهٔ موردنظررا $x^2+px+q=0$ می گیریم. دراینصورت $p=x_1+x_2=\sigma_1$ و $q=x_1x_2=\sigma_2$ می‌شود و روابط مفروض مسئله به صورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{cases}\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_1^2=31\\ \sigma_1=1\end{cases}$$

یعنی :

$$\begin{cases}-p^5+5p^3q-5pq^2=31\\ p=-1\end{cases}$$

ازآنجا به معادلهٔ درجه دوم $5q^2-5q-35=0$ برای q می‌رسیم که جوابهای $q_1=3$ و $q_2=-2$ را قبول دارد . به این‌ترتیب دومعادلهٔ زیر (که اولین‌آنها ریشه‌های مختلط دارد) بدست می‌آید :

$$x^2-x+3=0\ ;\quad x^2-x-2=0$$

۹۷. داریم: $\sigma_1=x_1+x_2=-p$ و $\sigma_2=x_1x_2=q$. بنابراین رابطهٔ (۱) صفحهٔ ۱۷ را می‌توان چنین‌نوشت :

$$x_1^n+x_2^n=-p(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})-q(x_1^{n-2}+x_2^{n-2})$$

بنابراین اگر ثابت کنیم که عددهای $x_1^{n-2}+x_2^{n-2}$ و $x_1^{n-1}+x_2^{n-1}$ صحیح هستند، باتوجه‌به رابطهٔ بالا، عدد $x_1^n+x_2^n$ هم صحیح خواهدبود.

به این‌ترتیب برای تمام‌کردن استدلال استقرائی تنها کافی است ثابت‌کنیم $x_1^n+x_2^n$ به ازاء دو مقدار اولیهٔ n، عددی است صحیح و به ازاء مقادیر ۲ و $n=1$ داریم:

$$x_1^1+x_2^1=x_1+x_2=\sigma_1=-p$$
$$x_1^2+x_2^2=S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=p^2-2q$$

۹۸. داریم:

$$\sigma_2=x_1x_2=-(a+1) \text{ و } \sigma_1=x_1+x_2=a-2$$

برای مجموع مربعات ریشه‌ها داریم:

$$x_1^2+x_2^2=S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=(a-2)^2+2(a+1)=$$
$$a^2-2a+6=(a-1)^2+5$$

و واضح است که این‌عبارت وقتی حداقل مقدار خود را داردکه $a=1$ باشد (ودراینصورت مجموع مربعات ریشه‌ها مساوی ۵ می‌شود).

۹۹. باتوجه به حل‌تمرین ۹۷ مقدار $x_1^n+x_2^n$ به ازاء همهٔ مقادیر طبیعی n عددی است صحیح. ازطرف دیگرداریم:

$$\sigma_1=x_1+x_2=6 \text{ و } \sigma_2=x_1x_2=1$$

طبق رابطهٔ (۱) صفحهٔ ۱۷ می‌توان نوشت:

$$S_n=6S_{n-1}-S_{n-2}$$

و بهمین‌ترتیب:

$$S_{n-1}=6S_{n-2}-S_{n-3}$$

اگراین‌مقدار S_{n-1} را در رابطهٔ قبل‌قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$S_n=35S_{n-2}-6S_{n-3}=-S_{n-2}+5(7S_{n-2}-S_{n-3})$$

ازاینجا دیده می‌شود که S_n و $S_{n-۳}$ باهم بر ۵ قابل‌قسمت‌اند و یا باهم بر ۵ قابل‌قسمت نیستند . به این‌ترتیب اگر S_n بر ۵ قابل‌قسمت باشد . بایدعددهای $S_{n-۳}$ ، $S_{n-۶}$ ، $S_{n-۹}$ ، ... بر ۵ قابل‌قسمت باشدکه درآخرکار باید یکی ازعددهای $S_۱$ یا $S_۲$ یا $S_۳$ بر ۵ قابل‌قسمت باشد . ولی چون داریم $S_۱ = ۶$ ، $S_۲ = ۳۴$ و $S_۳ = ۱۹۸$ یعنی هیچیك ازآنها مضربی از ۵ نیستند و بنابراین $S_n = x_۱^n + x_۲^n$ هم به ازاء هیچ مقداری از n بر ۵ قابل‌قسمت نیست .

۱۰۰. $\sqrt[۴]{\alpha} = u$ و $\sqrt[۴]{\beta} = v$ فرض‌می‌کنیم ، در اینصورت طبق شرایط مسئله داریم :

$$-p = \alpha + \beta = u^۴ + v^۴ \quad ، \quad q = \alpha\beta = u^۴ v^۴$$

با این‌مفروضات باید مقدار $u + v = \sqrt[۴]{\alpha} + \sqrt[۴]{\beta}$ را محاسبه کنیم . با فرض $u + v = \sigma_۱$ و $uv = \sigma_۲$ می‌توانیم روابط مفروض را به صورت زیر بنویسیم :

$$-p = \sigma_۱^۴ - ۴\sigma_۱^۲\sigma_۲ + ۲\sigma_۲^۲ \ ، \ q = \sigma_۲^۴$$

که با حذف $\sigma_۲$ به معادلهٔ دو مجذوری زیرمی‌رسیم :

$$\sigma_۱^۴ - ۴\sqrt[۴]{q}\,\sigma_۱^۲ + ۲\sqrt{q} + p = ۰$$

چون دراین تمرین به مقادیرحسابی $\sqrt[۴]{\alpha}$ و $\sqrt[۴]{\beta}$ کار داریم ، باید $\sigma_۱ = \sqrt[۴]{\alpha} + \sqrt[۴]{\beta}$ مقداری مثبت باشد . معادلهٔ دو مجذوری فوق چهار ریشه‌دارد:

$$\pm\sqrt{۲\sqrt[۴]{q} \pm \sqrt{۲\sqrt{q} - p}}$$

که ازآنها تنها یك ریشه مثبت است (درهردو مورد علامت «+» را انتخاب کنیم) . درحقیقت از شرایط $\alpha > ۰$ و $\beta > ۰$ نتیجه می‌شودکه $p < ۰$ ،

$q>0$ و $p^2-4q>0$ ، بنابراین $|p|>2\sqrt{q}$ یعنی $-p>2\sqrt{q}$ و از آنجا بدست می‌آید $\sqrt{2\sqrt{q}-p}>\sqrt{4\sqrt{q}}=2\sqrt[4]{q}$. بنابراین زیر رادیکال باید علامت «+» را انتخاب کرد ؛ یعنی :

$$\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}=\sigma_1=\sqrt{2\sqrt[4]{q}+\sqrt{2\sqrt{q}-p}}$$

صفحهٔ ۵۰

۱۰۱. داریم :

$$5a^2-6ab+5b^2=5S_2-6\sigma_2=5(\sigma_1^2-2\sigma_2)-6\sigma_2=$$

$$=5\sigma_1^2-16\sigma_2=5\sigma_1^2-16\times\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)=\sigma_1^2+4z>0$$

۱۰۲. درمثال ۱ صفحهٔ ۴۸ دیدیم که اگر $a+b>c$ باشد ، نامساوی $a^4+b^4>\frac{1}{8}c^4$ صحیح است و اگر در نامساوی مفروض $a+b=c$ فرض کنیم، به همان مثال می‌رسیم. ولی می‌توان این نامساوی را مستقیماً هم ثابت کرد :

$$8(a^4+b^4)-(a+b)^4=8S_4-\sigma_1^4=8(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)-$$

$$-\sigma_1^4=7\sigma_1^4-32\sigma_1^2\times\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)+16\times\frac{1}{16}(\sigma_1^2-z)^2=$$

$$=6\sigma_1^2z+z^2>0$$

۱۰۳. داریم :

$$a^4+b^4-a^3b-ab^3=a^4+b^4-ab(a^2+b^2)=S_4-\sigma_2S_2=$$

$$=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2-\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=\sigma_1^4-5\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_2^2=$$

$$=\sigma_1^4-5\sigma_1^2\times\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)+4\times\frac{1}{16}(\sigma_1^2-z)^2=\frac{3}{4}\sigma_1^2z+$$

$$+\frac{1}{4}z^2>0$$

۱۰۴. داریم :

$$a^2+b^2+1-ab-a-b=\sigma_1^2-3\sigma_2-\sigma_1+1=$$

$$=\sigma_1^2-3\times\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)-\sigma_1+1=\frac{1}{4}\sigma_1^2-\sigma_1+1+\frac{3}{4}z=$$

$$=(\frac{1}{2}\sigma_1-1)^2+\frac{3}{4}z\geq 0$$

۱۰۵. داریم :

$$a^6+b^6-a^5b-ab^5=S_6-\sigma_2S_4=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+$$

$$+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3-\sigma_2(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)=$$

$$=\sigma_1^6-7\sigma_1^4\sigma_2+13\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_2^3=\sigma_1^6-7\sigma_1^4\times\frac{1}{4}(\sigma_1^2-z)+$$

$$+13\sigma_1^2\times\frac{1}{16}(\sigma_1^2-z)^2-4\times\frac{1}{64}(\sigma_1^2-z)^3=\frac{5}{16}\sigma_1^4z+$$

$$+\frac{5}{8}\sigma_1^2z^2+\frac{1}{16}z^3\geq 0$$

۱۰۶. اگر $\sqrt{a}=u$ و $\sqrt{b}=v$ فرض کنیم ، نامساوی مفروض به صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{u^2}{u}+\frac{v^2}{u}\geq u+v \Longrightarrow u^3+v^3\geq uv(u+v)$$

که باید صحت آنرا باشرایط $u\geq 0$ و $v\geq 0$ ثابت کنیم . داریم :

$$u^3+v^3-uv(u+v)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2-\sigma_1\sigma_2=\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2=$$

$$=\sigma_1(\sigma_1^2-4\sigma_2)$$

وچون $\sigma_1\geq 0$ و $\sigma_1^2-4\sigma_2\geq 0$ است (قضیهٔ صفحهٔ ۴۶ را به‌بینید)، این مقدار غیرمنفی خواهد بود .

۱۰۷. با فرض $\sqrt{a}=u$ و $\sqrt{b}=v$ نامساوی مفروض به صورت زیر درمی‌آید :

$$(u+v)^8 \geq 64u^2v^2(u^2+v^2)^2$$

چون u و v غیرمنفی‌هستند، می‌توان نامساوی فوق‌را به‌صورت زیر نوشت :

$$(u+v)^4 \geq 8uv(u^2+v^2)$$

داریم :

$$(u+v)^4 - 8uv(u^2+v^2) =$$
$$= \sigma_1^4 - 8\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \sigma_1^4 - 8\sigma_1^2\sigma_2 + 16\sigma_2^2 =$$
$$= \sigma_1^4 - 8\sigma_1^2 \times \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z) + 16 \times \frac{1}{16}(\sigma_1^2 - z)^2 \geq 0$$

۱۰۸. داریم :

$$a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4 - 6a^2b^2 = S_4 + 2\sigma_2 S_2 - 6\sigma_2^2 =$$
$$= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 6\sigma_2^2 =$$
$$= \sigma_1^4 - 2\sigma_1^2\sigma_2 - 8\sigma_2^2 = (z + 4\sigma_2)^2 - 2(z + 4\sigma_2)\sigma_2 - 8\sigma_2^2 =$$
$$= z^2 + 6\sigma_2 z$$

باتوجه به شرط $a ، b \geq 0$ داریم : $\sigma_2 \geq 0$ و $z \geq 0$ (قضیهٔ صفحهٔ ۴۶ را به‌بینید) ونامساوی مطلوب ثابت شده است .

۱۰۹. داریم :

$$\frac{a^3+b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - \frac{1}{8}\sigma_1^3 =$$
$$= \frac{3}{8}\sigma_1^3 - \frac{3}{2}\sigma_1\sigma_2 = \frac{3}{8}\sigma_1 z \geq 0$$

۱۱۰. داریم :

$$xy(x-y)^2 = \sigma_2(\sigma_1^2 - 4\sigma_2) = \sigma_2 z = \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z) =$$
$$= \frac{1}{4}(a^2 - z)z = \frac{1}{4}(-z^2 + a^2 z) = \frac{1}{4}\left[-\left(z - \frac{a^2}{2}\right)^2 + \frac{a^4}{4}\right]$$

ازاینجامعلوم می‌شود که‌عبارت مفروض نمی‌تواند از $\frac{a^4}{16}$ تجاوز کند واین‌مقدار حداکثر را به‌ازاء $z-\frac{a^2}{2}=0$ بدست می‌آورد (یعنی وقتی که $a=\sigma_1$ و $\frac{a^2}{2}=\sigma_1^2-4\sigma_2$ باشدکه از آنجا به‌سادگی معلوم می‌شود که x و y باید ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $z^2-az+\frac{a^2}{8}=0$ باشند).

۱۱۱. داریم :

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2-\frac{25}{2}=a^2+b^2+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}-\frac{17}{2}=$$

$$=(\sigma_1^2-2\sigma_2)+\frac{\sigma_1^2-2\sigma_1}{\sigma_2^2}-\frac{17}{2}=1-2\sigma_2+\frac{1-2\sigma_2}{\sigma_2^2}-\frac{17}{2}=$$

$$=\frac{1}{2\sigma_2^2}(-4\sigma_2^3-15\sigma_2^2-4\sigma_2+2).$$

باید ثابت کنیم که عبارت داخل پرانتزغیر منفی است، یعنی :

$$4\sigma_2^3+15\sigma_2^2+4\sigma_2<2 \qquad (*)$$

چون $a, b>0$ است $\sigma_2>0$ می‌شود، علاوه بر آن $z=\sigma_1^2-4\sigma_2>0$ یعنی $1-4\sigma_2>0$ است ازآنجا $\sigma_2<\frac{1}{4}$ خواهدشد . به‌این‌ترتیب نامساوی $0<\sigma_2<\frac{1}{4}$ صحیح است. کثیرالجملهٔ $4\sigma_2^3+15\sigma_2^2+4\sigma_2$، که‌همهٔ ضرایب آن مثبت‌است، حداکثر مقدارخود رادرفاصلهٔ $0<\sigma_2<\frac{1}{4}$ به ازاء $\sigma_2=\frac{1}{4}$ بدست می‌آورد و این‌مقدار حداکثر برابر ۲است . بنابراین نامساوی (*) صحیح است .

۱۱۲. این نامساوی‌را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$x^2+y^2\geqslant 2xy \Longrightarrow \sigma_1^2-2\sigma_2\geqslant 2\sigma_2$$

واین‌نامساوی‌یعنی $\sigma_1^2\geqslant 4\sigma_2$ درقضیهٔ صفحهٔ ۴۶ ثابت‌شده‌است. علامت‌مساوی‌تنها

برای حالت $x=y$ بدست می‌آید .

۱۱۳. اگر پرانتزهای سمت‌چپ را باز کنیم، به‌مجموع زیرمی‌رسیم :

$$\sum_{i, j=1}^{n} \frac{x_i}{x_j}$$

دراین مجموع n جمله به‌صورت $\frac{x_k}{x_k}$، مساوی واحد ، وجود دارد . علاوه برآن دوجمله‌ایهائی به‌صورت :

$$\frac{x_k}{x_l}+\frac{x_l}{x_k} \qquad (*)$$

وجود داردکه تعدادآنها برابراست باتعداد ترکیب n عدد۲ به۲؛ یعنی‌مساوی $\frac{n(n-1)}{2}$. چون هرعبارت به صورت (*) کوچکتر از۲ نیست (مسئله قبل را به‌بینید)، بنابراین مجموع جملاتی که به اینصورت نوشته می‌شودکوچکتر ازمقدار زیر نیست :

$$n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت‌کنیم .

متذکر می‌شویم‌که تساوی

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)=n^2$$

وقتی برقرار است‌که هریك از عبارتهای بصورت (*) مساوی ۲ باشد ، یعنی برای هرمقدار k و l داشته باشیم : $k=l$ ، به‌عبارت دیگر این‌تساوی وقتی برقرار است‌که داشته باشیم :

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

صفحهٔ ۵۷

۱۱۴. داریم :

$$9z^6-18z^5-73z^4+164z^3-73z^2-18z+9=$$

$$=z^3\left[9\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)-18\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-73\left(z+\frac{1}{z}\right)+164\right]=$$

$$=z^3[9(\sigma^3-3\sigma)-18(\sigma^2-2)-73\sigma+164]=$$

$$=z^3(9\sigma^3-18\sigma^2-100\sigma+200)$$

چون $z=0$ ریشهٔ معادلهٔ اصلی نیست، به‌معادلهٔ درجه سوم زیر برحسب σ می‌رسیم:

$$9\sigma^3-18\sigma^2-100\sigma+200=0$$

سمت‌چپ این‌معادله به‌سادگی به‌صورت زیر تجزیه می‌شود :

$$(\sigma-2)(9\sigma^2-100)=0$$

(می‌توان ابتدا ریشهٔ $\sigma=2$ را جستجو کرد وسپس ازقضیهٔ بزو استفاده کرد).

دراینصورت به سادگی خواهیم داشت :

$$\sigma=2,\quad \sigma=\frac{10}{3},\quad \sigma=-\frac{10}{3}$$

بنابراین برای محاسبهٔ ریشه‌های معادلهٔ اصلی داریم :

$$z+\frac{1}{z}=2,\quad z+\frac{1}{z}=\frac{10}{3},\quad z+\frac{1}{z}=-\frac{10}{3}$$

که با حل‌آنها جوابهای زیررا خواهیم داشت :

$$z_1=1,\quad z_2=1,\quad z_3=3,\quad z_4=\frac{1}{3},\quad z_5=-3,\quad z_6=-\frac{1}{3}$$

۱۱۵. داریم :

$$z^8+4z^6-10z^4+4z^2+1=z^4\left[\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)+4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-\right.$$

$$\left.-10\right]=z^4[(\sigma^4-4\sigma^2+2)+4(\sigma^2-2)-10]=$$

$$=z^4(\sigma^4-16)=0$$

به معادلهٔ دوجمله‌ای $\sigma^4 - 16 = 0$ می‌رسیم که ریشه‌های آن‌چنین است :

$$\sigma = 2,\quad \sigma = -2,\quad \sigma = 2i,\quad \sigma = -2i$$

وبرای محاسبهٔ جوابهای معادلهٔ اصلی، چهارمعادلهٔ زیررا خواهیم داشت :

$$z+\frac{1}{z}=2,\quad z+\frac{1}{z}=-2,\quad z+\frac{1}{z}=2i,\quad z+\frac{1}{z}=-2i$$

که باحل آنها جوابهای زیر بدست می‌آید :

$$z_1=z_2=1,\quad z_3=z_4=-1,\quad z_5=i(1+\sqrt{2}),$$

$$z_6=i(1-\sqrt{2}),\quad z_7=i(-1+\sqrt{2}),\quad z_8=i(-1-\sqrt{2})$$

۱۱۶. داریم :

$$10z^6+z^5-47z^4-47z^3+z^2+10z=$$
$$=z(10z^5+z^4-47z^3-47z^2+z+10)$$

پرانتز سمت راست تساوی کثیرالجمله‌ایست ازدرجهٔ پنجم که مقدار ثابت آن مخالف صفر است. بنابه‌قضیهٔ صفحهٔ ۵۱، این کثیرالجمله بر $z+1$ قابل‌قسمت است وخواهیم داشت :

$$10z^6+z^5-47z^4-47z^3+z^2+10z=z(z+1)\times$$
$$\times(10z^4-9z^3-38z^2-9z+10)=$$
$$z^3(z+1)\left[10\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-9\left(z+\frac{1}{z}\right)-38\right]=$$
$$=z^3(z+1)[10(\sigma^2-2)-9\sigma-38]=z^3(z+1)\times$$
$$(10\sigma^2-9\sigma-58).$$

که اگر عبارت اخیررا مساوی‌صفرقرار دهیم دوجواب $z_1=0$ و $z_2=-1$ برای معادلهٔ اصلی بدست می‌آید وعلاوه‌برآن معادلهٔ $10\sigma^2-9\sigma-58=0$ را باجوابهای $\sigma=-2$ و $\sigma=\frac{29}{10}$ خواهیم داشت .

و از آنجا :

$$z+\frac{1}{z}=-2 \text{ ، } z+\frac{1}{z}=\frac{29}{10}$$

و به این‌ترتیب علاوه بر دو جواب قبلی چهار جواب دیگر معادلهٔ اصلی هم بدست می‌آید :

$$z_3=-1 \text{ ، } z_4=-1 \text{ ، } z_5=\frac{5}{2} \text{ ، } z_6=\frac{2}{5}$$

۱۱۷. داریم :

$$10z^6+19z^5-19z^4-20z^3-19z^2+19z+10=$$

$$=z^3\left[10\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+19\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-19\left(z+\frac{1}{z}\right)-20\right]=$$

$$=z^3\left[10(\sigma^3-3\sigma)+19(\sigma^2-2)-19\sigma-20\right]=$$

$$=z^3(10\sigma^3+19\sigma^2-49\sigma-58)$$

معادلهٔ $10\sigma^3+19\sigma^2-49\sigma-58=0$ دارای ریشه‌های زیر است :

$$\sigma=-1 \text{ ، } \sigma=2 \text{ ، } \sigma=-\frac{29}{10}$$

(یکی از ریشه‌ها را باجستجو پیدا می‌کنیم وسپس‌ازقضیهٔ بزو استفاده می‌کنیم).

به این‌ترتیب به سه معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$z+\frac{1}{z}=-1 \text{ ، } z+\frac{1}{z}=2 \text{ ، } z+\frac{1}{z}=-\frac{29}{10}$$

که باحل آنها جوابهای زیررا خواهیم‌داشت :

$$z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

$$z_3=z_4=1 \text{ ، } z_5=-\frac{5}{2} \text{ ، } z_6=-\frac{2}{5}$$

۱۱۸. بترتیب داریم :

$$2z^{11}+7z^{10}+15z^9+14z^8-16z^7-22z^6-22z^5-$$

$$-16z^4+14z^3+15z^2+7z+2=(z+1)(2z^{10}+5z^9+$$

$$+10z^8+4z^7-20z^6-2z^5-20z^4+4z^3+10z^2+$$

$$+5z+2)=z^5(z+1)\left[2\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)+5\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)+\right.$$

$$\left.+10\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-20\left(z+\frac{1}{z}\right)-2\right]=$$

$$=z^5(z+1)(2\sigma^5+5\sigma^4-16\sigma^2-40\sigma).$$

عامل z^5 جوابی برای دستگاه اصلی بدست نمی‌دهد و عامل $z+1$ شامل جواب $z_1=-1$ است ، حالا به معادلهٔ درجه پنجم زیر می‌پردازیم :

$$2\sigma^5+5\sigma^4-16\sigma^2-40\sigma=0$$

با تجزیهٔ عبارت سمت چپ این‌معادله ، بدست می‌آید :

$$\sigma(2\sigma+5)(\sigma-2)(\sigma^2+2\sigma+4)=0$$

وازآنجا پنج‌جواب زیر را خواهیم داشت:

$$\sigma=0,\ \sigma=-\frac{5}{2},\ \sigma=2,\ \sigma=-1+i\sqrt{3},\ \sigma=-1-i\sqrt{3}$$

بنابراین ده جواب معادله را می‌توان باکمك پنج معادلهٔ زیر بدست آورد :

$$z+\frac{1}{z}=0,\ z+\frac{1}{z}=-\frac{5}{2},\ z+\frac{1}{z}=2,$$

$$z+\frac{1}{z}=-1+i\sqrt{3},\ \ z+\frac{1}{z}=-1-i\sqrt{3}$$

ویازده جواب معادلهٔ اصلی چنین است :

$$z_1=-1,\ z_2=i,\ z_3=-i,\ z_4=-2,\ z_5=-\frac{1}{2},$$

$$z_6=z_7=1,$$

$$z_{8,9}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\pm\sqrt[4]{3}.\frac{1+i}{\sqrt{2}}.\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

$$z_{10,11}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\pm\sqrt[4]{3}.\frac{1-i}{\sqrt{2}}.\frac{-1+i\sqrt{1}}{2}$$

۱۱۹. داریم :

$$az^4+bz^3+cz^2+bz+a=z^2[a(z^2+\frac{1}{z^2})+b(z+\frac{1}{z})+$$
$$+c]=z^2[a(\sigma^2-2)+b\sigma+c]=z^2(a\sigma^2+b\sigma+(c-2a)]$$

چون $a\neq 0$ است، $z=0$ ریشهٔ معادله نیست و به معادلهٔ درجه دوم زیر نسبت به σ می‌رسیم :

$$a\sigma^2+b\sigma+(c-2a)=0$$

ومیدانیم که حل این معادله به کمک چهار عمل اصلی وجذر گرفتن انجام می گیرد. حالا حل معادلهٔ اصلی به حل دومعادلهٔ زیر منجر می‌شود :

$$z+\frac{1}{z}=\sigma\ ,$$

که درآن σ می‌تواند ریشهٔ اول یاریشهٔ دوم معادلهٔ درجه دوم بالا باشدو برای حل این دومعادله هم تنها به چهارعمل اصلی وجذر گرفتن احتیاج داریم .

۱۲۰. سمت چپ این معادله بر $z+1$ قابل قسمت است (قضیهٔ صفحهٔ ۵۱ را به‌بینید) . خارج قسمت این تقسیم کثیرالجملهٔ معکوسهٔ درجه چهارمی‌خواهد بودکه ضریب بزرگترین درجهٔ آن مساوی a است بنابراین باتوجه به حل مسئلهٔ ۱۱۹ نتیجه می‌شود که حل معادلهٔ مفروض هم باکمك چهار عمل اصلی و جذر گرفتن ممکن است .

۱۲۱. اگر معادلهٔ معکوسهٔ درجهٔ ششم را (باشرط اینکه مقدار ثابت آن مخالف صفرباشد) برحسب مجهول جدید $\sigma=z+\frac{1}{z}$ بنویسیم، بهمعادلهٔ درجه سومی نسبت به σ می‌رسیم . اگر z_1 ریشهٔ معلوم معادلهٔ درجهٔ ششم‌باشد $(z_1\neq 0)$، عدد $\sigma=z_1+\frac{1}{z_1}$ ریشه‌ای از معادلهٔ‌درجه سوم‌نسبت به σ خواهد بود. حالا اگر از قضیهٔ بزو استفاده کنیم (باکمك چهار عمل اصلی) به‌معادلهٔ

درجه دومی نسبت به v می‌رسیم که می‌توانیم آنرا باکمك چهارعمل اصلی‌وجذر گرفتن حل کنیم .

اگر معادلهٔ مفروض ازدرجهٔ هفتم باشد (باشرط اینکه مقدار ثابت آن مخالف صفرباشد) ، سمت چپ آن بر $z+1$ قابل‌قسمت و خارج قسمت، معادلهٔ معکوسه‌ای ازدرجهٔ ششم‌خواهد بود . اگرغیراز -1 ریشهٔ دیگری‌ازمعادلهٔ اصلی معلوم باشد ، ریشهٔ همین معادلهٔ درجه ششم است و مسئله به حالت قبل برمی‌گردد .

۱۲۲. کثیرالجملهٔ معکوسهٔ ازدرجهٔ فرد (باشرط $a_0 \neq 0$) رامی‌توان چنین نوشت :

$$f(z)=a_0(z^{2k+1}+1)+a_1(z^{2k}+z)+a_2(z^{2k-1}+z^2)+\dots$$

(صفحهٔ ۵۳ را به‌بینید) . مقدار این‌کثیرالجمله را به ازاء $z=-1$ پیدا می‌کنیم :

$$f(-1)=a_0(-1+1)+a_1(1-1)+a_2(-1+1)+\dots=0$$

وچون $f(-1)=0$ است، بنابراین طبق قضیهٔ بزوکثیرالجملهٔ مفروض بر $z+1$ قابل‌قسمت است .

۱۲۳. فرض کنید :

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n \quad (a_n\neq 0)$$

کثیرالجملهٔ دلخواهی از درجهٔ n (با مقدار ثابتی مخالف صفر) باشد . دراینصورت داریم :

$$z^nf\left(\frac{1}{z}\right)=z^n\left[a_0\left(\frac{1}{z}\right)^n+a_1\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}+\dots+a_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)+a_n\right]=$$

$$=a_0+a_1z+\dots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n=$$

$$=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0$$

تساوی $f(z)=z^nf\left(\frac{1}{z}\right)$ تنها وقتی برقرار استکه ضرایب متناظر در دو

کثیر الجملهٔ :

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$
$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

مساوی باشند، یعنی داشته باشیم :

$$a_0=a_n \text{ ، } a_1=a_{n-1}\text{، } \cdots$$

به عبارت دیگر تساوی $f(z)=z_nf\left(\frac{1}{z}\right)$ تنها وقتی برقرار است که کثیرالجملهٔ $f(z)$ معکوسه باشد.

حالا به اثبات حکم دوم قضیه‌ای که در صفحهٔ ۵۱ ذکر کرده‌ایم، می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $f(z)$ کثیرالجملهٔ معکوسه‌ای از درجهٔ فرد $n=2k+1$ با مقدار ثابتی مخالف صفر باشد. با توجه به نتیجه‌ای که در مسئلهٔ ۱۲۲ گرفتیم، این کثیرالجمله بر $z+1$ قابل‌قسمت است، یعنی داریم :

$$f(z)=(z+1)g(z)$$

که در آن $g(z)$ کثیرالجمله‌ای از درجهٔ $2k$ است. باید ثابت کنیم که $g(z)$ هم کثیرالجمله‌ای معکوسه است. چون $f(z)$ معکوسه است (با مقدار ثابتی مخالف صفر) داریم :

$$f(z)=z^{2k+1}f\left(\frac{1}{z}\right)$$

با توجه به اینکه داشتیم $f(z)=(z+1)g(z)$، می‌توان رابطهٔ فوق را به‌صورت زیر نوشت :

$$(z+1)g(z)=z^{2k+1}\left(\frac{1}{z}+1\right)g\left(\frac{1}{z}\right)$$

که پس از عملیات ساده چنین می‌شود :

$$g(z)=z^{2k}g\left(\frac{1}{z}\right)$$

و این رابطه هم به معنای آنست که $g(z)$ کثیرالجمله‌ای معکوسه است.

۱۲۴. اگر کثیرالجملەهای f و g را بترتیب ازدرجەهای m و n فرض کنیم، $h(z)$ ازدرجهٔ $m-n$ خواهدشد . چون f و g کثیرالجملەهائیمعکوسه هستند (ومقدار ثابتآنها مخالفصفراست)، باتوجه بەنتیجهٔ مسئله ۱۲۳ داریم:

$$f(z)=z^m f\left(\frac{1}{z}\right) \quad ; \quad g(z)=z^n g\left(\frac{1}{z}\right)$$

طرفین ایندو رابطه رابرهم تقسیم میکنیم، بدست میآید :

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{z^m f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^n g\left(\frac{1}{z}\right)}=z^{m-n}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$$

وچون $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ است، رابطهٔ فوق را میتوانچنین نوشت:

$$h(z)=z^{m-n}h\left(\frac{1}{z}\right)$$

واین بەمعنایآنستکه $h(z)$ کثیرالجملەای معکوسه است .

صفحهٔ ۶۳

۱۲۵. داریم :

$$\begin{aligned}
&2x^4+7x^3y+9x^2y^2+7xy^3+2y^4=\\
&=2S_4+7\sigma_2S_2+9\sigma_2^2=2(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)+\\
&+7\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+9\sigma_2^2=2\sigma_1^4-\sigma_1^2\sigma_2-\sigma_2^2=\\
&=(\sigma_2+2\sigma_1^2)(\sigma_1^2-\sigma_2)=[xy+2(x+y)^2][(x+y)^2-xy]=\\
&=(2x^2+5xy+2y^2)(x^2+xy+y^2)=\\
&\qquad\qquad=(x+2y)(2x+y)(x^2+xy+y^2)
\end{aligned}$$

(پرانتزآخر سەجملەای درجه دومیاستکه قابلتجزیه بەعوامل درجه اول با ضرایب حقیقی نیست) .

۱۲۶. داریم :

$$2x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+2y^4=2S_4-\sigma_2S_2+\sigma_2^2=$$
$$=2(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)-\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_2^2=$$
$$=2\sigma_1^4-9\sigma_1^2\sigma_2+7\sigma_2^2=(\sigma_1^2-\sigma_2)(2\sigma_1^2-7\sigma_2)=$$
$$=[(x+y)^2-xy][2(x+y)^2-7xy]=$$
$$=(x^2+xy+y^2)(2x^2-3xy+2y^2).$$

و این دو کثیرالجملهٔ درجه دوم قابل تجزیه به‌عوامل باضرایب‌حقیقی نیستند.

۱۲۷. به‌ترتیب داریم:

$$18a^4-21a^3b-94a^2b^2-21ab^3+18b^4=18S_4-$$
$$-21\sigma_2S_2-94\sigma_2^2=18(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)-$$
$$-21\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)-94\sigma_2^2=18\sigma_1^4-93\sigma_1^2\sigma_2-16\sigma_2^2=$$
$$=(3\sigma_1^2-16\sigma_2)(6\sigma_1^2+\sigma_2)=[3(x+y)^2-16xy]\times$$
$$\times[6(x+y)^2+xy]=(3x^2-10xy+3y^2)(6x^2+13xy+$$
$$+6y^2)=(x-3y)(3x-y)(2x+3y)(3x+2y).$$

۱۲۸. داریم :

$$3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4=3S_4-8\sigma_2S_2+$$
$$+14\sigma_2^2=3(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)-8\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+14\sigma_2=$$
$$=3\sigma_1^4-20\sigma_1^2\sigma_2+36\sigma_2^2.$$

سه‌جمله‌ای‌درجه دومی که نسبت به σ_2 بدست‌آمده است، دارای ریشه‌های‌مختلط است و بنابراین باید از روش دوم برای تجزیه استفاده‌کنیم (روش ضرایب نامعین) . فرض‌می‌کنیم :

$$3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4=$$
$$=(Ax^2+Bxy+Cy^2)(Cx^2+Bxy+Ay^2)$$

اگر $x=y=1$ بگیریم بدست می‌آید:

$$(A+B+C)^2=4 \Rightarrow A+B+C=\pm 2$$

که‌می‌توان (شبیه مثال۴ صفحهٔ ۶۲) بدون‌اینکه به‌عمومیت مسئله لطمه‌ای بخورد تنها $A+B+C=2$ را درنظر بگیریم. سپس به ازاء $x=0$ و $y=1$ بدست می‌آید $A \cdot C=3$. بالاخره به‌ازاء $x=1$ و $y=-1$ بدست‌می‌آید:

$$(A-B+C)^2=36 \Rightarrow A-B+C=\pm 6$$

به‌این‌ترتیب دستگاه زیررا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ A-B+C=\pm 6 \\ \quad A \cdot C=3 \end{cases}$$

اگرمعادلهٔ دوم‌دستگاه را باعلامت «+» بگیریم، ازدومعادلهٔ اول $B=-2$ وازآنجا بسادگی $A=1$ و $C=3$ بدست می‌آید (یا $C=1$ و $A=3$).

درنتیجه‌خواهیم داشت:

$$3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4=$$
$$=(x^2-2xy+3y^2)(3x^2-2xy+y^2).$$

(علامت «—» درمعادلهٔ دوم‌منجر به‌ریشه‌های مختلط برای دستگاه می‌شود).

صفحهٔ ۶۵

۱۲۹. بترتیب داریم:

$$\frac{(x+y)^7-x^7-y^7}{(x+y)^5-x^5-y^5}=\frac{\sigma_1^7-S_7}{\sigma_1^5-S_5}=\frac{7\sigma_1^5\sigma_2-14\sigma_1^3\sigma_2^2+7\sigma_1\sigma_2^3}{5\sigma_1^3\sigma_2-5\sigma_1\sigma_2^2}=$$

$$=\frac{7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^4-2\sigma_1^2\sigma_2+\sigma_2^2)}{5\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2)}=\frac{7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2)^2}{5\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2)}=\frac{7}{5}(\sigma_1^2-\sigma_2)=$$

$$=\frac{7}{5}[(x+y)^2-xy]=\frac{7}{5}(x^2+xy+y^2)$$

۱۳۰. داریم:

$$\frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sigma_1^2}\cdot\frac{S_2}{\sigma_2^2}+\frac{2}{\sigma_1^3}\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{\sigma_1^2-2\sigma_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}+\frac{2}{\sigma_1^2\sigma_2}=\frac{\sigma_1^2-2\sigma_2+2\sigma_2}{\sigma_1^2\sigma_1^2}=$$

$$=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}=\frac{1}{\sigma_2^2}=\frac{1}{a^2b^2}$$

۱۳۱. به‌ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right)+\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+$$

$$+\frac{6}{(p+q)^5}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{\sigma_1^3}\cdot\frac{S_3}{\sigma_2^3}+\frac{3}{\sigma_1^4}\cdot\frac{S_2}{\sigma_2^2}+\frac{6}{\sigma_1^5}\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=$$

$$=\frac{\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^3\sigma_2^3}+\frac{3(\sigma_1^2-2\sigma_2)}{\sigma_1^4\sigma_2^2}+\frac{6}{\sigma_1^4\sigma_2}=$$

$$=\frac{\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2)+3\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+6\sigma_2^2}{\sigma_1^4\sigma_2^3}=\frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^4\sigma_2^3}=$$

$$=\frac{1}{\sigma_2^3}=\frac{1}{p^3q^3}$$

۱۳۲. ابتدا عبارت سمت چپ تساوی را تبدیل می‌کنیم:

$$(x+y)^3+3xy(1-x-y)-1=\sigma_1^3+3\sigma_2(1-\sigma_1)-1=$$

$$=\sigma_1^3+3\sigma_2-3\sigma_1\sigma_2-1$$

وسپس عبارت‌سمت راست تساوی‌را:

$$(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)=$$

$$=(\sigma_1-1)(\sigma_1^2-3\sigma_2+\sigma_1+1)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2+\sigma_1-$$

$$-\sigma_1^2+3\sigma_2-\sigma_1-1=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_2-1$$

نتیجه‌ها یکی است و بنابراین اتحاد صحیح است.

۱۳۳. بترتیب داریم :

$$(x+y)^4+x^4+y^4=\sigma_1^4+S_4=\sigma_1^4+\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=$$
$$=2\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=2(\sigma_1^4-2\sigma_1^2\sigma_2+\sigma_2^2)=$$
$$=2(\sigma_1^2-\sigma_2)^2=2(x^2+y^2+xy)^1$$

۱۳۴. $$(x+y)^5-x^5-y^5=\sigma_1^5-S_5=\sigma_1^5-$$
$$-(\sigma^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2)=5\sigma_1^3\sigma_2-5\sigma_1\sigma_2^2=5\sigma_1\sigma_1(\sigma_1^2-\sigma_2)=$$
$$=5xy(x+y)(x^2+y^2+xy)$$

۱۳۵. $$(x+y)^7-x^7-y^7=$$
$$=\sigma_1^7-S_7=\sigma_1^7-(\sigma_1^7-7\sigma_1^5\sigma_2+14\sigma_1^3\sigma_2^2-7\sigma_1\sigma_2^3)=$$
$$=7\sigma_1^5\sigma_2-14\sigma_1^3\sigma_2^2+7\sigma_1\sigma_2^3=7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^4-2\sigma_1^2\sigma_2+\sigma_2^2)=$$
$$=7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2)^2=7xy(x+y)(x^2+y^2+xy)^2$$

۱۳۶. اگر همهٔ جملات را به سمت چپ معادله منتقل و سپس برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن σ_1 و σ_2 بنویسیم ، خواهیم داشت :

$$\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+1-3\sigma_2=0$$

یا : $$(\sigma_1+1)(\sigma_1^2-\sigma_1+1-3\sigma_2)=0$$

چون x و y مقادیری مثبت هستند، $\sigma_1>0$ می‌شود و σ_1+1 نمی‌تواند مساوی صفرشود، بنابراین معادلهٔ زیررا خواهیم داشت :

$$\sigma_1^2-\sigma_1+1-3\sigma_2=0$$

یعنی باید x و y را ازدستگاه زیر بدست‌آوریم :

$$\begin{cases} x+y=\sigma_1 \\ xy=\sigma_2=\frac{1}{3}(\sigma_1^2-\sigma_1+1) \end{cases}$$

که با توجه به قضیهٔ صفحهٔ ۳۱ باید معادلهٔ درجه دوم زیررا حل‌کرد :

$$z^2-\sigma_1 z+\frac{1}{3}(\sigma_1^2-\sigma_1+1)=0$$

ریشه‌های این معاله چنین‌اند :

$$z_{1,2}=\frac{\sigma_1}{2}\pm\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{4}-\frac{1}{3}(\sigma_1^2-\sigma_1+1)}=$$

$$=\frac{\sigma_1}{2}\pm\sqrt{-\frac{1}{12}(\sigma_1^2-4\sigma_1+4)}=$$

$$=\frac{\sigma_1}{2}\pm\sqrt{-\frac{1}{12}(\sigma_1-2)^2}$$

چون ریشه‌های این معادله (یعنی x و y) باید حقیقی باشند ، عبارت زیر رادیکال باید غیرمنفی باشد و این تنها درحالتی ممکن است‌که $\sigma_1=2$ باشد (یعنی‌زیر رادیکال مساوی صفرشود) . به‌این‌ترتیب $\sigma_1=x+y=2$ می‌شود.

بنابراین معادله تنها یك جواب صحیح ومثبت دارد وآن $x=y=1$ است و آزمایش‌هم نشان می‌دهد که این جواب در معادله صدق می‌کند .

راه حل‌دوم . مثل‌حالت اول معادلهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\sigma_1^2-\sigma_1+1-3\sigma_2=0$$

بنا به قضیهٔ صفحهٔ ۴۶ داریم $4\sigma_2<\sigma_1^2$. بنابراین از معادلهٔ فوق بدست می‌آید :

$$\sigma_1^2-\sigma_1+1=3\sigma_2<\frac{3}{4}\sigma_1^2$$

واز آنجا :

$$\frac{1}{4}\sigma_1^2-\sigma_1+1<0 \implies \frac{1}{4}(\sigma_1-2)^2<0$$

واین نامساوی جزبه ازاء $\sigma_1=2$ برقرار نیست و بهمان جواب منحصر بفرد قبل می‌رسیم .

۱۳۷ . فرض کنیم کثیرالجملهٔ $f(x,y)$ بر x^2+xy+y^2 قابل‌قسمت باشد ، یعنی داشته باشیم :

$$f(x,y)=(x^2+xy+y^2)g(x,y)$$

که درآن $g(x,y)$ یک کثیرالجمله متقارن است . اگر $g(x,y)$ را برحسب σ_1 و σ_2 به صورت $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ بگیریم، رابطهٔ فوق را می‌توانیم اینطور بنویسیم :

$$f(x,y)=(x^2+xy+y^2)g(x,y)=(\sigma_1^2-\sigma_2)\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$$

واضح‌است که اگر درسمت راست تساوی فوق $\sigma_1=\sigma_2=1$ فرض کنیم، حاصل برابر صفر می‌شود. یعنی $f(x,y)$ برحسب σ_1 و σ_2 به‌صورت $(\sigma_1^2-\sigma_2)\varphi(\sigma_1,\sigma_2)$ در می‌آید که به ازاء $\sigma_1=\sigma_2=1$ مساوی صفر می‌شود . واین به معنای آنست که مجموع ضرایب کثیرالجملهٔ $(\sigma_1^2-\sigma_2)\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ مساوی صفراست .

برعکس، فرض کنید :

$$f(x,y)=\sigma_1^n+b_1\sigma_1^{n-2}\sigma_2+b_2\sigma_1^{n-4}\sigma_2^2+b_3\sigma_1^{n-6}\sigma_2^3+\dots$$

بیان کثیرالجملهٔ $f(x, y)$ برحسب σ_1 و σ_2 باشد وضمناً مجموع ضرایب واقع درسمت راست تساوی بالا مساوی صفر باشد. اگر از σ_1^n فاکتور بگیریم ، عبارت بالا را می‌توان چنین نوشت :

$$f(x,y)=\sigma_1^n[1+b_1(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2})+b_2(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2})^2+b_3(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2})^3+\dots]$$

که ضمناً توان پرانتزهای داخل کروشه از $\frac{n}{2}$ تجاوز نمی‌کند.

طبق فرض مجموع ضرایب واقع درداخل کروشه برابرصفر است واین به معنای آنست که کثیرالجملهٔ $1+b_1z+b_2z^2+\dots$ به ازاء $z=1$ برابرصفر می‌شود و بنابراین طبق قضیهٔ بزو این کثیرالجمله بر $z-1$ قابل قسمت است ، یعنی :

$$1+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\dots=(1-z)h(z)$$

که درجهٔ کثیرالجملهٔ $h(z)$ درآن مساوی $k-1$ است، بنابراین:

$$f(x,y)=\sigma_1^n(1+b(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2})+b_2(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2})^2+b_3(\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2})^3+\dots=$$

$$=\sigma_1{}^n\left(1-\frac{\sigma_2}{\sigma_1{}^2}\right)=(\sigma_1{}^2-\sigma_1).\sigma_1{}^{n-2}.\ h\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1{}^2}\right).$$

اگر $n=2m+1$ باشد ، نا مساوی $k<m$ به این‌معنی است که درجهٔ کثیرالجملهٔ $h(z)$ از $m-1$ تجاوز نمی کند وعدد $n-2=2m-1$ از دوبرابر درجهٔ $h(z)$ بزرگتراست . اگرهم $n=2m$ باشد ، نامساوی $k<m$ به این‌معنی‌است که درجهٔ کثیرالجملهٔ $h(z)$ از $m-1$ تجاوز نمی کند و بنابرایـن‌عدد $n-2=2m-2$ از دوبرابر درجهٔ کثیرالجملهٔ $h(z)$ کوچکتر نیست . به این‌ترتیب در هرحال عدد $n-2$ از دو برابـر درجـهٔ کثیرالجملهٔ $h(z)$ کوچکتر نیست و بنابراین‌عبارت $\sigma_1{}^{n-2}.\ h\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1{}^2}\right)$ شامل σ_1 در مخرج نیست، یعنی کثیرالجمله‌ای برحسب σ_1 و σ_2 است . می بینیم که :

$$f(x,y)=(\sigma_1{}^2-\sigma_1)\varphi(\sigma_1,\sigma_2)$$

که درآن $\varphi(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1{}^{n-2}.h\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1{}^2}\right)$ یك کثیرالجمله است . بنابرایـن کثیرالجملهٔ $f(x,y)$ بر $\sigma_1{}^2-\sigma_2=x^2+xy+y^2$ قابل‌قسمت است .

۱۳۸. اگرمجموع S_n را به ازاء $\sigma_1=\sigma_2=1$ بـه a_n نشان دهیم و در رابطهٔ (۱) صفحهٔ ۱۷ مقادیر $\sigma_1=\sigma_2=1$ را قرار دهیم، بدست می‌آید :

$$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$$

وبهمین ترتیب :

$$a_{n-1}=a_{n-2}-a_{n-3}$$

ازجمع این‌دورابطه بدست‌می‌آید $a_n=-a_{n-3}$ وشبیه‌آن $a_{n-3}=-a_{n-6}$ وبنابراین‌خواهیم داشت :

$$a_n=a_{n-6}\qquad(n>6)$$

برای اینکه کثیرالجملهٔ $(x+y)^n-x^n-y^n=\sigma_1{}^n-S_n$ بـر x^2+xy+y^2 قابل‌قسمت باشد ، لازم وکافی‌است که به ازاء $\sigma_1=\sigma_2=1$

مساوی صفرشود (به‌مسئلهٔ ۱۳۷ مراجعه‌کنید) ، یعنی $a_n - 1 = 0$ یا $a_n = 1$ باشد .

حالا با کمك روابط $a_n = a_{n-6} = a_{n-12} = \dots$ مـی‌توان نوشت (بازاء $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$) :

$$a_{6k+1} = a_1 = S_1 = 1$$

$$a_{6k+2} = a_2 = S_2 = -1$$

$$a_{6k+3} = a_3 = S_3 = -2$$

$$a_{6k+4} = a_4 = -a_1 = -1$$

$$a_{6k+5} = -a_2 = 1$$

$$a_{6k} = a_6 = -a_3 = 2$$

بنابراین‌رابطهٔ $a_n = 1$ تنها وقتی برقرار است‌که n به صورت $6k+1$ یا $6k+5$ (یعنی به صورت $6k \pm 1$) باشد .

۱۳۹. فرض کنیدکثیرالجملهٔ $f(x)$ از درجهٔ m بـر x^2+x+1 قابل قسمت باشد ، یعنی:

$$f(x) = (x^2+x+1)g(x)$$

که درآن $g(x)$ کثیرالجمله‌ای ازدرجهٔ $m-2$ است . دراینصورت داریم :

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1\right) g\left(\frac{x}{y}\right)$$

طرفین این‌تساوی را در y^m ضرب می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$y^m f\left(\frac{x}{y}\right) = (x^2+xy+y^2)y^{m-2}g\left(\frac{x}{y}\right)$$

هردو عبارت $y^m f\left(\frac{x}{y}\right)$ و $y^{m-2}g\left(\frac{x}{y}\right)$ شامل y در مخرج نیستند ، یعنی به‌صورت‌کثیرالجمله‌اند. بنابراین $y^m f\left(\frac{x}{y}\right)$ بر x^2+xy+y^2 قابل قسمت است‌که ازآنجا به ازاء $y=1$ نتیجه‌می‌شود که $f(x)$ بر x^2+x+1

قابل‌قسمت است. بنابراین شرط لازم و کافی برای اینکه $f(x)$ بر x^2+x+1 قابل‌قسمت باشد، اینست که $y^m f\left(\frac{x}{y}\right)$ بر x^2+xy+y^2 قابل قسمت باشد.

به این ترتیب باید به بینیم به ازاء چه مقداری از n، کثیرالجملهٔ $x^{2n}+x^ny^n+y^{2n}$ بر x^2+xy+y^2 قابل‌قسمت است. داریم:

$$x^{2n}+x^ny^n+y^{2n}=S_{2n}+\sigma_1{}^n$$

و برای اینکه این کثیرالجمله بر x^2+xy+y^2 قابل‌قسمت باشد، لازم و کافی است که به ازاء $\sigma_1=\sigma_2=1$ برابر صفر شود، یعنی $a_{2n}+1=0$ یا $a_{2n}=-1$ باشد (حل مسئلهٔ ۱۳۸ را به‌بینید). بنابراین باید $2n=6k+2$ یا $2n=6k+4$ باشد، به عبارت دیگر $n=3k+1$ یا $n=3k+2$ باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که عبارت $x^{2n}+x^n+1$ وقتی بر x^2+x+1 قابل قسمت است که n مضربی از ۳ نباشد.

۱۴۰. باید به بینیم به ازاء چه مقادیری از n کثیرالجملهٔ $(x+y)^n+x^n+y^n=\sigma_1{}^n+S_n$ بر x^2+xy+y^2 قابل‌قسمت است (به مقدمهٔ حل مسئلهٔ ۱۳۹ مراجعه کنید). و با توجه به حل مسئلهٔ ۱۳۷ این وضع تنها وقتی امکان دارد که به ازاء $\sigma_1=\sigma_2=1$ کثیرالجملهٔ $\sigma_1{}^n+S_n$ بسمت صفر میل کند، یعنی وقتی‌که $1+a_n=0$ باشد (حل مسئلهٔ ۱۳۸ را به‌بینید). به این ترتیب باید به بینیم به ازاء چه مقادیری از n تساوی $a_n=-1$ برقرار است و با توجه به حل مسئلهٔ ۱۰ شرط $n=6k+2$ یا $n=6k+4$ بدست می‌آید (یا بطور خلاصه $n=6k\pm2$).

۱۴۱. باید به بینیم به ازاء چه مقادیری از n کثیرالجملهٔ $(x+y)^n-x^n-y^n$ بر x^2+xy+y^2 قابل قسمت است (مقدمهٔ حل مسئله ۱۳۹ را به‌بینید) و به‌کمك نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۳۸، این وضع وقتی امکان دارد که $n=6k\pm1$ باشد.

۱۴۲ . ساده‌ترین‌عبارتهای متقارن را نسبت به x و y با σ_1 و σ_2 و نسبت به u و v با τ_1 و τ_2 نشان می‌دهیم ، دراینصورت داریم :

$$\sigma_1=\tau_1 \quad \text{و} \quad \sigma_1^2-2\sigma_2=\tau_1^2-2\tau_2$$

وازآنجابدست می‌آید : $\sigma_1=\tau_1$ و $\sigma_2=\tau_2$. ازاینجا نتیجه می‌شودکه‌برای هر کثیرالجملهٔ $\varphi(z_1, z_2)$ داریم :

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2)=\varphi(\tau_1, \tau_2)$$

ازاینجا به‌کمك قضیهٔ صفحهٔ ۱۶ نتیجه مـی‌شودکه اگر $f(x, y)$ کثیرالجملهٔ متقارن دلخواهی باشد و $f(x, y)=\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ بیان آن برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن باشد، داریم :

$$f(x, y)=\varphi(\sigma_1, \sigma_2)=\varphi(\tau_1, \tau_2)=f(u, v)$$

ودرحالت خاص‌هم به ازاء هرمقدار n خواهیم داشت :

$$x^n+y^n=u^n+v^n$$

۱۴۳ . معادلهٔ مفروض را می‌توان به‌این‌صورت نوشت :

$$\sigma_1=\sigma_1^2-3\sigma_2$$

وچون x و y مقادیری‌حقیقی هستند، بایدداشته باشیم : $4\sigma_2\leqslant\sigma_1^2$ (قضیهٔصفحهٔ ۴۶را به‌بینید) وبنابراین :

$$\sigma_1^2-\sigma_1=3\sigma_2\leqslant\frac{3}{4}\sigma_1^2$$

یعنی :

$$\frac{1}{4}\sigma_1^2-\sigma_1\leqslant 0 \Longrightarrow \sigma_1(\sigma_1-4)\leqslant 0$$

ازاینجا نتیجه می‌شودکه بایدداشته باشیم : $0\leqslant\sigma_1\leqslant 4$. حالا ازرابطهٔ $\sigma_1-\sigma_1^2=3\sigma_2$ جوابهای ممکنهٔ زیررا بدست می‌آوریم :

$$\left|\begin{matrix}\sigma_1=0\\ \sigma_2=0\end{matrix}\right. ; \quad \left|\begin{matrix}\sigma_1=1\\ \sigma_2=0\end{matrix}\right. ; \quad \left|\begin{matrix}\sigma_1=2\\ \sigma_2=\frac{2}{3}\end{matrix}\right. ; \quad \left|\begin{matrix}\sigma_1=3\\ \sigma_2=2\end{matrix}\right. ; \quad \left|\begin{matrix}\sigma_1=4\\ \sigma_2=4\end{matrix}\right.$$

جواب سوم قابل‌قبول نیست، زیرا x و y و درنتیجه σ_1 و σ_2 مقادیری صحیح هستند. چهاردستگاه زیر برای ما باقی‌میماند :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=0 \end{cases};\quad \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases};\quad \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases};\quad \begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases}$$

که باحل‌آنها جوابهای ممکنهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\left|\begin{matrix} x_1=0 \\ y_1=0 \end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix} x_2=1 \\ y_2=0 \end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix} x_3=0 \\ y_3=1 \end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix} x_4=2 \\ y_4=1 \end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix} x_5=1 \\ y_5=2 \end{matrix}\right.;\quad \left|\begin{matrix} x_6=2 \\ y_6=2 \end{matrix}\right.$$

وباآزمایش معلوم می‌شود که همهٔ این‌جوابها هم‌در معادله صدق می‌کنند .

۱۴۴. باید ثابت کنیم که کثیرالجملهٔ متقارن :

$$(a+b)^n-a^n-b^n-3(ab)^{\frac{n-1}{2}}(a+b)$$

به ازاء $\sigma_1=\sigma_2=1$ مساوی صفر می‌شود (به حل مسئلهٔ ۱۳۷ صفحهٔ ۳۱۹ مراجعه‌کنید) ، یعنی داشته باشیم :

$$1-a_n-3=0$$

ولی‌چون $n=6k+3$ است، $a_n=-2$ می‌شود (حل‌مسئله ۱۳۸ را به‌بینید) واثبات تساوی واضح است .

صفحهٔ ۸۲

۱۴۵ بترتیب‌داریم ،

$$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2=S_4-2O(x^2y^2)=$$
$$=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-2(\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3)=$$
$$=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+8\sigma_1\sigma_3.$$

۱۴۶. $$x^5y^2+x^5z^2+x^2y^5+x^2z^5+y^5z^2+y^2z^5=$$
$$=O(x^5y^2)=O(x^5)O(x^2)-O(x^7)=S_5S_2-S_7=$$

$$=(\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3)(\sigma_1^2-2\sigma_2)-$$
$$-(\sigma_1^7-7\sigma_1^5\sigma_2+14\sigma_1^3\sigma_2^2-7\sigma_1\sigma_2^3+7\sigma_1^4\sigma_3-21\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3+$$
$$+7\sigma_1\sigma_3^2+7\sigma_2^2\sigma_3)=-2\sigma_1^4\sigma_3+\sigma_1^3\sigma_2^2+6\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3-3\sigma_1\sigma_2^2-$$
$$-7\sigma_1\sigma_3^2+3\sigma_2^2\sigma_3 .$$

۱۴۷.
$$(x+y)(x+z)(y+z)=(\sigma_1-x)(\sigma_1-y)\times$$
$$\times(\sigma_1-z)=\sigma_1^3-\sigma_1^2(x+y+z)+\sigma_1(xy+xz+yz)-$$
$$-xyz=\sigma_1^3-\sigma_1^3+\sigma_1\sigma_2-\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$$

۱۴۸.
$$(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)=O(x^4y^2)+$$
$$+2x^2y^2z^2=\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3-2\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_3^2$$

۱۴۹. به صفحهٔ ۹۶ مراجعه کنید.

۱۵۰. داریم:

$$x^6+y^6+z^6+2x^5y+2x^5z+2xy^5+2xz^5+2y^5z+2yz^5-$$
$$-3x^4y^2-3x^4z^2-3x^2y^4-3x^2z^4-3y^4z^2-3y^2z^4+$$
$$+x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3=S_6+2O(x^5y)-3O(x^4y^2)+$$
$$+O(x^3y^3)=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3+6\sigma_1^3\sigma_3-$$
$$-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2+2(\sigma_1^4\sigma_2-4\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_1^3\sigma_3+7\sigma_1\sigma_2\sigma_3+$$
$$+2\sigma_2^3-3\sigma_3^2)-3(\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3-2\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-3\sigma_3^2)+$$
$$+\sigma_2^3+3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3=\sigma_1^6-4\sigma_1^4\sigma_2-2\sigma_1^2\sigma_2^2+9\sigma_2^3+$$
$$+10\sigma_1^3\sigma_3-13\sigma_1\sigma_2\sigma_3+9\sigma_3^2.$$

۱۵۱. مقادیر زیر برای ما مفروض است:

$$\begin{cases} a+b+c=S_1 \\ a^2+b^2+c^2=S_2 \\ a^3+b^3+c^3=S_3 \end{cases}$$

اما باتوجه به جدول صفحهٔ ۷۴ داریم:

$$S_1=\sigma_1$$
$$S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$$
$$S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$$

واز آنجا بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l}\sigma_1=S_1\\ \sigma_2=\frac{1}{2}(S_1^2-S_2)\\ \sigma_3=\frac{1}{6}\sigma_1^3-\frac{1}{2}S_1S_2+\frac{1}{3}S_3\end{array}\right.$$

بالاخره باتوجه به رابطهٔ هرون، داریم :

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)=p^4-p^3(a+b+c)+$$
$$+p^2(ab+ac+bc)-pabc=$$
$$=\left(\frac{S_1}{2}\right)^4-\left(\frac{S_1}{2}\right)^3\sigma_1+\left(\frac{S_1}{2}\right)^2\sigma_2-\frac{S_1}{2}\sigma_3=$$
$$=\frac{1}{16}S_1^4-\frac{1}{8}S_1^3\cdot S_1+\frac{1}{4}S_1^2\cdot\frac{1}{2}(S_1^2-S_2)-\frac{1}{2}S_1\Big(\frac{1}{6}S_1^3-$$
$$-\frac{1}{2}S_1S_2+\frac{1}{3}S_3\Big)=-\frac{1}{48}S_1^4+\frac{1}{8}S_1^2S_2-\frac{1}{6}S_1S_3.$$

و بالاخره :

$$S=\sqrt{\frac{1}{48}(-S_1^4+6S_1^2S_2-8S_1S_3)}$$

صفحهٔ ۹۷

۱۵۲. این دستگاه حالت خاصی از دستگاه مثال۲ صفحهٔ ۹۳ است :

$a=2$ و $b=\sqrt{6}$. بنابراین یکی ازجوابهای دستگاه به‌صورت زیراست:

$$x=2,\ \ y=1,\ \ z=-1$$

پنج‌جواب دیگراز تبدیل این‌جوابها بدست می‌آید .

۱۵۳. این تمرین هم همان مثال ۱ صفحهٔ ۹۳ به ازاء $b=a$ است .
بنابراین یکی ازجوابهای دستگاه به‌صورت زیر است :

$$x=a\,,\quad y=0\,,\quad z=0$$

ودوجواب دیگرآن ازتبدیل این‌جوابها بدست می‌آید. (هریك ازاین جوابها مضاعف است، یعنی معادله بطورکلی شش‌جواب داردکه‌دوبدو برهم‌منطبق‌اند).

۱۵۴. دستگاه مفروض‌را می‌توان چنین نوشت :

$$\sigma_1=9\,,\quad \frac{\sigma_2}{\sigma_3}=1\,,\quad \sigma_2=27$$

که ازآنجا بدست می‌آید :

$$\sigma_1=9\,,\quad \sigma_2=27\,,\quad \sigma_3=27$$

بنابراین برای حل‌دستگاه بایدمعادلهٔ درجه سوم زیررا تشکیل بدهیم:

$$u^3-9u^2+27u-27=0$$

این معادله به صورت $(u-3)^3=0$ درمی‌آید وبنابراین دارای سه جواب مساوی $u_1=u_2=u_3=3$ می‌باشد. به این‌ترتیب، باتوجه به قضیهٔ صفحه ۸۹، دستگاه مفروض دارای‌شش جواب منطبق برهم است :

$$x=y=z=3$$

۱۵۵. در دستگـاه مفروض $\sigma_1=a$ ، $\sigma_2=a^2$ و $\sigma_3=a^3$ است و بنابراین باید معادلهٔ درجه سوم‌زیررا حل‌کنیم :

$$u^3-au^2+a^2u-a^3=0$$

که می‌توان‌آنرا به‌صورت زیر نوشت :

$$(u-a)(u^2+a^2)=0$$

وریشه‌های چنین‌اند :

$$u_1=a\,,\quad u_2=ai\,,\quad u_3=-ai$$

بنابراین دستگاه اصلی شش دسته جواب دارد که از تبدیل جوابهای زیر بدست می‌آید :

$$x=a ، \ y=ai ، \ z=-ai$$

۱۵۶. داریم :

$$(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=$$
$$=(\sigma_۲+y^۲)+(\sigma_۲+z^۲)+(\sigma_۲+x^۲)=۳\sigma_۲+S_۲=\sigma_۱{}^۲+\sigma_۲$$

همچنین داریم : $O(x^۲y)=\sigma_۱\sigma_۲-۳\sigma_۳$

بنابراین دستگاه مفروض به صورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{cases}\sigma_۱=۲\\ \sigma_۱{}^۲+\sigma_۲=۱\\ \sigma_۱\sigma_۲-۳\sigma_۳=-۶\end{cases}$$

ازآنجا به‌سادگی بدست می‌آید :

$$\sigma_۱=۲ ، \ \sigma_۲=-۳ ، \ \sigma_۳=۰$$

ومعادلهٔ مربوطهٔ درجه سوم آن چنین می‌شود :

$$u^۳-۲u^۲-۳u=۰$$

وجوابهای آن : $u_۱=۰ ، \ u_۲=۳ ، \ u_۳=-۱$

به‌این‌ترتیب‌دستگاه اصلی‌شش‌جواب‌دارد که‌ازتبدیل‌جوابهای زیر بدست‌می‌آید:

$$x=۰ ، \ y=۳ ، \ z=-۱$$

۱۵۷. داریم :

$$xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z)=O(x^۲y)=\sigma_۱\sigma_۲-۳\sigma_۳.$$
$$xy(x^۲+y^۲)+yz(y^۲+z^۲)+xz(x^۲+z^۲)=O(x^۳y)=$$
$$=\sigma_۱{}^۲\sigma_۲-۲\sigma_۲{}^۲-\sigma_۱\sigma_۳.$$

بنابراین دستگاه مفروض به صورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{cases} \sigma_2 = 11 \\ \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 48 \\ \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3 = 118 \end{cases}$$

با قراردادن مقدار σ_2 درمعادلات دوم وسوم این دستگاه خواهیم داشت :

$$\begin{cases} 11\sigma_1 - 3\sigma_3 = 48 \\ 11\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 = 360 \end{cases}$$

باحذف σ_3 بین‌این دومعادله، به‌معادلهٔ درجه دوم‌زیر می‌رسیم :

$$22\sigma_1^2 + 48\sigma_1 - 1080 = 0$$

که جوابهای‌آن ۶ و $-\frac{90}{11}$ است . بنابراین دو دسته جواب برای دستگـاه کمکی خواهیم داشت :

$$\sigma_1 = 6 ، \sigma_2 = 11 ، \sigma_3 = 6 \quad \text{یا} \quad \sigma_1 = -\frac{90}{11} ، \sigma_2 = 11 ; \sigma_3 = -46$$

که متناظر بادو معادلهٔ درجه سوم زیر هستند :

$$u^3 - 6u^2 + 11u - 6 = 0 ، \quad u^3 + \frac{90}{11}u^2 + 11u + 46 = 0$$

جوابهای معادلهٔ اول‌چنین است :

$$u_1 = 1 ، u_2 = 2 ، u_3 = 3$$

ریشه‌های معادلهٔ دوم‌را دراینجا نمی‌نویسیم (این‌ریشه‌ها گویا نیستند ومی‌توان آنها را ازراه حل‌کلی معادلهٔ درجه سوم که درکتابهای درسی جبر عالی ذکر شده است، حل‌کرد) .

به این‌ترتیب‌دستگاه‌اصلی شش‌جواب داردکه‌ازتبدیل جوابهای $x = 1$ ، $y = 2$ و $z = 3$ بدست می‌آید وهمچنین شش‌جواب دیگر که باکمك جوابهای معادله درجه سوم $u^3 + \frac{90}{11}u^2 + 11u + 46 = 0$ بدست می‌آید .

۱۵۸. دستگاه کمکی به صورت زیر است :

$$\begin{cases} S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \frac{73}{8} \\ \sigma_2 = \sigma_1 \\ \sigma_3 = 1 \end{cases}$$

با قراردادن مقادیر σ_2 و σ_3 ازمعادلات دوم وسوم دستگاه، درمعادلهٔ اول، به معادلهٔ درجه سوم‌زیر می‌رسیم :

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1^2 - \frac{49}{8} = 0$$

این معادله را می‌توان به‌این‌صورت نوشت ·

$$(2\sigma_1)^3 - 7(2\sigma_1)^2 - 49 = 0$$

یکی ازریشه‌های این معادله $2\sigma_1 = 7$ یعنی $\sigma_1 = \frac{7}{2}$ است . حالا به‌کمك قضیهٔ بزو، معادلهٔ درجهٔ سوم مفروض را می‌توان چنین نوشت :

$$(\sigma_1 - \frac{7}{2})(\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{7}{4}) = 0$$

که ریشه‌های‌آن چنین است :

$$\sigma_1 = \frac{7}{2};\ \sigma_1 = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{3}i$$

بنابراین دستگاه کمکی سه جواب دارد :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{7}{2},\ \ \sigma_3 = 1;$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{3}i,\ \sigma_3 = 1$$

که معادلات درجه سوم‌متناظرآنها چنین است :

$$\begin{cases} u^3-\frac{7}{2}u^2+\frac{7}{2}u-1=0 \\ u^3+(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{3}i)u^2-(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{3}i)u-1=0 \qquad (*) \\ u^3+(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{3}i)u^2-(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{3}i)u-1=0 \end{cases}$$

معادلهٔ اول‌را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$(u^3-1)-\frac{7}{2}(u^2-u)=0 \Longrightarrow (u-1)(u^2-\frac{5}{2}u+1)=0$$

که ریشه‌های‌آن چنین است :

$$u_1=1 \text{ ،} \quad u_2=2 \text{ ،} \quad u_3=\frac{1}{2}$$

بنابراین دستگاه اصلی‌شش‌جواب داردکه از تبدیل‌جوابهای زیر بدست‌می‌آید:

$$x=1 \text{ ،} \quad y=2 \text{ ،} \quad z=\frac{1}{3}$$

وهمچنین۱۲ جواب دیگرکه باکمك معادلات دوم وسوم (*) محاسبه‌می‌شوند (این جوابها را می‌توان به سادگی و باکمك راه حل‌کلی معـادلهٔ درجه سوم بدست‌آورد) .

۱۵۹. دستگاه‌کمکی را تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{cases} \sigma_1=\frac{13}{3} \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_3}=\frac{13}{3} \\ \sigma_3=1 \end{cases}$$

و ازآنجا $\sigma_1=\frac{13}{3}$ ،$\sigma_2=\frac{13}{3}$ و $\sigma_3=1$ بدست می‌آیدکه معادلهٔ درجه‌سوم متناظر باآنها چنین است :

$$u^3 - \frac{13}{3}u^2 + \frac{13}{3}u - 1 = 0$$

و یا :

$$(u-1)(u^2 - \frac{10}{3}u + 1) = 0$$

که ریشه‌های آن $u_1 = 1$ ، $u_2 = 3$ و $u_3 = \frac{1}{3}$ است . به این ترتیب دستگاه اصلی، شش جواب دارد که از تبدیل جوابهای زیر بدست می‌آید :

$$x = 1 ، y = 3 ، z = \frac{1}{3}$$

۱۶۰. دستگاه کمکی چنین است :

$$\sigma_1 = 0 ، S_2 = S_3 ، \sigma_3 = 2$$

و یا :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \\ \sigma_3 = 2 \end{cases}$$

واز آنجا بدست می‌آید :

$$\sigma_1 = 0 ، \sigma_2 = -3 ، \sigma_3 = 2$$

با این‌جوابها می‌توان معادلهٔ درجه سوم زیررا تشکیل داد :

$$u^3 - 3u - 2 = 0$$

که ریشه‌های آن چنین است :

$$u_1 = u_2 = -1 \text{ و } u_3 = 2$$

بنابراین دستگاه مفروض سه‌جواب دارد (درحقیقت شش‌جواب دوبدومساوی) که از تبدیل جوابهای زیر بدست می‌آید :

$$x = y = -1 \text{ و } z = 2$$

۱۶۱. از معادلهٔ آخر بدست می‌آید :

$$u = x + y + z = \sigma_1$$

بنابراین برای سه معادلهٔ اول دستگاه خواهیم داشت :

$$\begin{cases} S_5 - \sigma_1^5 = 210 \\ S_3 - \sigma_1^3 = 18 \\ S_2 - \sigma_1^2 = 6 \end{cases}$$

و یا :

$$\begin{cases} -5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3 = 210 \\ -3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 18 \\ -2\sigma_2 = 6 \end{cases}$$

معادلهٔ دوم را می‌توان به‌صورت $\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 = 6$ نوشت . طرفین معادلهٔاول را می‌توان به ۵ ساده‌کرد و سپس سمت چپ تساوی را تجزیه نمود :

$$(\sigma_1^2 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2) = 42$$

و چون $\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 = 6$ است ، بدست می‌آید :

$$\sigma_1^2 - \sigma_2 = 7$$

وبالاخره چون $\sigma_2 = -3$ است، معادلهٔ سوم، $\sigma_1^2 = 4$ می‌شود و جوابهای دستگاه‌کمکی بصورت زیر درمی‌آید :

$$\sigma_1 = 2 \text{ ، } \sigma_2 = -3 \text{ ، } \sigma_3 = 0 \text{ ;}$$

$$\sigma_1 = -2 \text{ ، } \sigma_2 = -3 \text{ ، } \sigma_3 = 12$$

که متناظراً دو معادلهٔ درجه سوم بدست می‌آید :

$$u^3 - 2u^2 - 3u = 0 \text{ ، } u^3 + 2u^2 - 3u - 12 = 0$$

که معادلهٔ اول سه جواب زیر را قبول دارد :

$$u_1 = 0 \text{ ، } u_2 = 3 \text{ ، } u_3 = -1$$

ومعادلهٔ دوم ریشهٔ‌گویا ندارد . به این‌ترتیب دستگاه اصلی دارای ۱۲جواب

است که شش جواب آن از تبدیل جوابهای :

$$x=0 \,,\; y=3 \,,\; z=-1$$

بدست می‌آید و شش جواب دیگر هم از تبدیل جوابهای معادلهٔ درجه سوم :

$$u^3+2u^2-3u-12=0$$

۱۶۲. باوجودی‌که معادلهٔ سوم دستگاه متقارن نیست ، معهذا می‌توان با استفاده از کثیرالجمله‌های متقارن این دستگاه را حل‌کرد . دومعادلهٔ اول دستگاه را می‌توان چنین نوشت :

$$3\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3=b^3$$
$$\sigma_1=2b$$

و ازآنجا بدست می‌آید :

$$\sigma_1=2b \,,\; \sigma_2=\frac{3}{2}b^2 \quad (*)$$

حالا معادلهٔ سوم دستگاه را به این صورت می‌نویسیم :

$$x^2+y^2+z^2=b^2+2z^2 \Longrightarrow \sigma_1^2-2\sigma_2=b^2+2z^2$$

که با قراردادن مقادیر σ_1 و σ_2 در آن بدست می‌آید $z^2=0$ یعنی $z=0$.
از روابط $(*)$ یعنی :

$$x+y=2b \,,\; xy=\frac{3}{2}b^2$$

هم مقادیر x و y بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l} x_1=b\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ y_1=b\left(1-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ z_1=0 \end{array}\right. ; \quad \left|\begin{array}{l} x_2=b\left(1-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ y_2=b\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ z_2=0 \end{array}\right.$$

(درحقیقت دستگاه چهاردسته جواب داردکه دوبدو باهم برابرند) .

۱۶۳. u_1 و u_2 و u_3 را ریشه‌های معادلهٔ مفروض می‌گیریم و معادلهٔ

مجهول را به صورت :

$$t^3+pt^2+qt+r=0$$

و ریشه‌های آنرا t_1 و t_2 و t_3 می‌گیریم. طبق روابط ویت برای معادلهٔ درجه سوم، داریم (صفحهٔ ۹۱) :

$$\begin{cases}\sigma_1=u_1+u_2+u_3=2\\ \sigma_2=u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3=1\\ \sigma_3=u_1u_2u_3=12\end{cases}$$

و بهمین‌ترتیب :

$$t_1+t_2+t_3=-p,\ t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=q,\ t_1t_2t_3=-r$$

ولی طبق شرط مسئله داریم :

$$t_1=u_1^2,\ t_2=u_2^2,\ t_3=u_3^2$$

و بنابراین :

$$p=-(t_1+t_2+t_3)=-(u_1^2+u_2^2+u_3^2)=-S_2=$$
$$=-(\sigma_1^2-2\sigma_2)=-2,$$

$$q=t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=u_1^2u_2^2+u_1^2u_3^2+u_2^2u_3^2=$$
$$=O(u_1^2u_2^2)=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3=-47,$$

$$r=-t_1t_2t_3=-u_1^2u_2^2u_3^2=-144$$

و به این ترتیب معادلهٔ درجه سوم مورد نظر چنین می‌شود :

$$t^3-2t^2-47t-144=0$$

۱۶۴. اگر قراردادها را شبیه تمرین قبل بگیریم، طبق شرط مسئله باید داشته باشیم :

$$t_1=u_1^3,\ t_2=u_2^3 \text{ و } t_3=u_3^3$$

و بنابراین :

$$p=-(t_1+t_2+t_3)=-(u_1^3+u_2^3+u_3^3)=-S_3=$$
$$=-(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)=-38,$$

$$q = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = u_1^3u_2^3 + u_1^3u_3^3 + u_2^3u_3^3 =$$
$$= O(u_1^3u_2^3) = \sigma_2^3 + 3\sigma_3^2 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 361 \text{ ،}$$
$$r = -t_1t_2t_3 = -u_1^3u_2^3u_3^3 = -\sigma_3^3 = -1728$$

و بنابراین معادلهٔ درجه سوم مورد نظر چنین می‌شود :

$$t^3 - 38t^2 + 361t - 1728 = 0$$

۱۶۵. روابط مفروض مسئله بدین معناست که a و b و c ریشه‌های (متمایز) معادلهٔ درجه سوم زیرهستند :

$$u^3 + pu + q = 0$$

و بنابراین باتوجه به قضیهٔ صفحهٔ ۹۱ داریم :

$$a+b+c = \sigma_1 = 0 \text{ ، } ab+ac+bc = \sigma_2 = p \text{ ، } abc = \sigma_3 = -q$$

که رابطهٔ اول همان رابطهٔ مورد نظر مسئله است .

صفحهٔ ۱۰۱

۱۶۶. بترتیب داریم :

$$(x+y)(x+z)(y+z) + xyz = (\sigma_1 - z)(\sigma_1 - y)(\sigma_1 - x) +$$
$$+ \sigma_3 = \sigma_1^3 - \sigma_1^2(x+y+z) + \sigma_1(xy+yz+xz) -$$
$$- xyz + \sigma_3 = \sigma_1^3 - \sigma_1^3 + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 =$$
$$= (x+y+z)(xy+xz+yz)$$

۱۶۷.

$$2(a^3+b^3+c^3) + a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 -$$
$$- 3abc = 2S_3 + O(a^2b) - 3\sigma_3 = 2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) +$$
$$+ (\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) - 3\sigma_3 = 2\sigma_1^3 - 5\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1(2\sigma_1^2 - 5\sigma_2) =$$
$$= (x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2 - xy - xz - yz)$$

۱۶۸.

$$a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) + abc(a+b+c) =$$
$$= O(a^3b) + \sigma_1\sigma_3 = (\sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3) + \sigma_1\sigma_3 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 =$$

$$=\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=\sigma_2S_2=(ab+ac+bc)(a^2+b^2+c^2)$$

۱۶۹.

$$a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+2abc(a+b+c)+$$
$$+(a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc)=2O(a^2b^2)+2O(a^2bc)+$$
$$+2\sigma_1\sigma_3+S_2\sigma_2=2(\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3)+2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_1\sigma_3+$$
$$+\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=\sigma_1^2\sigma_2=(a+b+c)^2(ab+ac+bc)\,.$$

۱۷۰.

$$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3=$$
$$=\sigma_1^3-(\sigma_1-2a)^3-(\sigma_1-2b)^3-(\sigma_1-2c)^3=\sigma_1^3-3\sigma_1^3+$$
$$+3\sigma_1^2(2a+2b+2c)-3\sigma_1(4a^2+4b^2+4c^2)+$$
$$+8(a^3+b^3+c^3)=\sigma_1^3-3\sigma_1^3+6\sigma_1^3-12\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)+$$
$$+8(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)=24\sigma_3=24abc$$

۱۷۱.

$$(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+$$
$$+z^4=\sigma_1^4-(\sigma_1-x)^4-(\sigma_1-y)^4-(\sigma_1-z)^4+S_4=\sigma_1^4-$$
$$-3\sigma_1^4+4\sigma_1^3(x+y+z)-6\sigma_1^2(x^2+y^2+z^2)+$$
$$+4\sigma_1(x^3+y^3+z^3)-(x^4+y^4+z^4)+S_4=\sigma_1^4-3\sigma_1^4+$$
$$+4\sigma_1^4-6\sigma_1^2S_2+4\sigma_1S_3-S_4+S_4=2\sigma_1^4-6\sigma_1^2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+$$
$$+4\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)=12\sigma_1\sigma_3=12xyz(x+y+z).$$

۱۷۲. بترتیب داریم :

$$(a+b+c)^5-(-a+b+c)^5-(a-b+c)^5-$$
$$-(a+b-c)^5=\sigma_1^5-(\sigma_1-2a)^5-(\sigma_1-2b)^5-$$
$$-(\sigma_1-2c)^5=\sigma_1^5-3\sigma_1^5+5\sigma_1^4(2a+2b+2c)-$$
$$-10\sigma_1^3(4a^2+4b^2+4c^2)+10\sigma_1^2(8a^3+8b^3+8c^3)-$$
$$-5\sigma_1(16a^4+16b^4+16c^4)+32(a^5+b^5+c^5)=\sigma_1^5-$$

$$-3\sigma_1^5+10\sigma_1^5-40\sigma_1^3S_2+80\sigma_1^2S_3-80\sigma_1S_4+32S_5=$$

$$=8\sigma_1^5-40\sigma_1^3(\sigma_1^2-2\sigma_2)+80\sigma_1^2(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-$$

$$-80\sigma_1(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3)+32(\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+$$

$$+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3)=80\sigma_1^2\sigma_3-160\sigma_2\sigma_3=80\sigma_3(\sigma_1^2-$$

$$-2\sigma_2)=80\sigma_3S_2=80abc(a^2+b^2+c^2).$$

۱۷۳. داریم :

$$(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)^2-(a+b+c)^2(a^2+b^2+$$

$$+c^2)=(s_2+\sigma_2)^2-\sigma_1^2S_2=(\sigma_1^2-\sigma_2)^2-\sigma_1^2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=$$

$$=\sigma_2^2=(ab+ac+bc)^2$$

۱۷۴ صورت کسر چنین می‌شود :

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

(تمرین ۱ صفحهٔ ۹۹ را به بینید) . برای مخرج کسر داریم :

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2S_2-2\sigma_2=2(S_2-\sigma_2)=$$

$$=2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}=\frac{a+b+c}{2}$$

۱۷۵. داریم :

$$\frac{bc-a^2+ca-b^2+ab-c^2}{a(bc-a^2)+b(ca-b^2)+c(ab-c^2)}=\frac{\sigma_2-S_2}{3\sigma_3-S_3}=$$

$$\frac{\sigma_2-(\sigma_1^2-2\sigma_2)}{3\sigma_3-(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)}=\frac{3\sigma_2-\sigma_1^2}{3\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3}=\frac{3\sigma_2-\sigma_1^2}{\sigma_1(3\sigma_2-\sigma_1^2)}=$$

$$=\frac{1}{\sigma_1}=\frac{1}{a+b+c}$$

۱۷۶. چون داریم :

$$(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+$$
$$+z^4=12xyz(x+y+z)$$

(تمرین ۱۷۱ را به بینید)، باید ثابت کنیم که کثیرالجملهٔ :

$$\varphi(x,y,z)=(x+y+z)^{2n}-(y+z)^{2n}-(x+z)^{2n}-$$
$$-(x+y)^{2n}+x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}$$

بر x و y و z و $x+y+z$ قابل قسمت است. به ازاء $x=0$ کثیرالجملهٔ $\varphi(x,y,z)$ بصورت زیر درمی‌آید :

$$(y+z)^{2n}-(y+z)^{2n}-z^{2n}-y^{2n}+y^{2n}+z^{2n}=0$$

بنابراین کثیرالجملهٔ $\varphi(x,y,z)$ بر x قابل قسمت است و بهمین ترتیب ثابت می‌شود که بر y و z هم قابل قسمت است. حالا باید ثابت کنیم که این کثیرالجمله بر $x+y+z$ قابل قسمت است. $\varphi(x,y,z)$ را به صورت کثیرالجمله‌ای نسبت به x در نظر می‌گیریم (y و z را به‌عنوان ضریب). برای اینکه ثابت کنیم این کثیرالجمله بر $x+y+z$ قابل قسمت است، با توجه به قضیهٔ بزو باید ثابت کنیم که $x=-y-z$ یکی از ریشه‌های این کثیرالجمله است. در حقیقت $\varphi(x,y,z)$ به ازاء $x=-y-z$ به صورت زیر در می‌آید :

$$0^{2n}-(y+z)^{2n}-(-y-z+z)^{2n}-(-y-z+y)^{2n}+$$
$$+(-y-z)^{2n}+y^{2n}+z^{2n}=-(y+z)^{2n}-y^{2n}-z^{2n}+$$
$$+(y+z)^{2n}+y^{2n}+z^{2n}=0$$

۱۷۷. چون داریم :

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=$$
$$=-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

(مثال ۲ صفحهٔ ۱۰۰ را به بینید)، باید ثابت کنیم کثیرالجملهٔ :

$$\varphi(a,b,c)=a^4(b^2+c^2-a^2)^3+b^4(c^2+a^2-b^2)^3+$$
$$+c^4(a^2+b^2-c^2)^3$$

برهریك از کثیرالجمله‌های زیر قابل قسمت است :

$$a+b+c \ ، \ -a+b+c \ ، \ a-b+c \ ، \ a+b-c$$

به عبارت دیگر باید ثابت‌کنیم که به ازاء $a=\pm b\pm c$ (چهار ترکیب علامت) ، کثیرالجملهٔ $\varphi(a،b،c)$ مساوی‌صفرمی‌شود ومثلا به‌ازاء $a=b-c$ کثیرالجملهٔ $\varphi(a،b،c)$ چنین می‌شود :

$$(b-c)^۴[b^۲+c^۲-(b-c)^۲]^۳+b^۴[c^۲-b^۲+(b-c)^۲]^۳+$$
$$+c^۴[(b-c)^۲+b^۲-c^۲]^۳=(b-c)^۴(۲bc)^۳+$$
$$+b^۴(۲c^۲-۲bc)^۳+c^۴(۲b^۲-۲bc)^۳=(b-c)^۴\times ۸b^۳c^۳+$$
$$+۸b^۴c^۳(c-b)^۳+۸c^۴b^۳(b-c)^۳=۸b^۳c^۳(b-c)^۳[(b-c)-$$
$$-b+c)]=۰$$

۱۷۸. اگر $a+b+c$ بر ۶ قابل قسمت باشد ، هرسه عدد a و b و c نمی‌توانند فرد باشند (زیرا دراینصورت مجموع آنها هم فرد خواهد شد). بنابراین لااقل یکی از عددهای a و b و c زوج است . از طرف دیگر داریم :

$$a^۳+b^۳+c^۳=S_۳=\sigma_۱{}^۳-۳\sigma_۱\sigma_۲+۳\sigma_۳=\sigma_۱(\sigma_۱{}^۲-۳\sigma_۲)+۳\sigma_۳$$

طبق فرض عدد $\sigma_۱=a+b+c$ بر۶ قابل‌قسمت است ، عدد $۳\sigma_۳=۳abc$ هم بر ۶ قابل قسمت است ، زیرا یکی از عددهای aوbوc زوج است . بنابراین مجموع :

$$\sigma_۱(\sigma_۱{}^۲-۳\sigma_۲)+۳\sigma_۳=a^۳+b^۳+c^۳$$

هم بر ۶ قابل قسمت است .

صفحهٔ ۱۰۸

۱۷۹. تمرین ۱۷۵ را به‌بینید .

۱۸۰. مثال ۳ صفحهٔ ۱۵۱ را به بینید .

۱۸۱. تمرین ۱۷۱ را به بینید .

۱۸۲. عبارت سمت چپ تساوی مفروض را می‌توان چنین نوشت :

$$\sigma_۱{}^۴+(\sigma_۱-۲a)^۴+(\sigma_۱-۲b)^۴+(\sigma_۱-۲c)^۴=\sigma_۱{}^۴+۳\sigma_۱{}^۴-$$

$$-4\sigma_1^3(2a+2b+2c)+6\sigma_1^2(4a^2+4b^2+4c^2)-$$
$$-4\sigma_1(8a^3+8b^3+8c^3)+16a^4+16b^4+16c^4=\sigma_1^4+$$
$$+3\sigma_1^4-8\sigma_1^4+24\sigma_1^2S_2-32\sigma_1S_3+16S_4=-4\sigma_1^4+$$
$$+24\sigma_1^2(\sigma_1^2-2\sigma_2)-32\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)+16(\sigma_1^4-$$
$$-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3)=4\sigma_1^4-16\sigma_1^2\sigma_2-32\sigma_1\sigma_3+32\sigma_2^2$$

حالا به عبارت سمت راست تساوی می‌پردازیم :

$$4S_4+24O(a^2b^2)=4(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3)+$$
$$+24(\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3)=4\sigma_1^4-16\sigma_1^2\sigma_2-32\sigma_1\sigma_3+32\sigma_2^2.$$

به این ترتیب صحت تساوی ثابت می‌شود .

۱۸۳. سمت چپ تساوی را تبدیل می‌کنیم :

$$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc=a(\sigma_1-a)^2+$$
$$+b(\sigma_1-b)^2+c(\sigma_1-c)^2-4\sigma_3=\sigma_1^2(a+b+c)-$$
$$-2\sigma_1(a^2+b^2+c^2)+(a^3+b^3+c^2)-4\sigma_3=\sigma_1^3-2\sigma_1(\sigma_1^2-$$
$$-2\sigma_2)+(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-4\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$$

سمت راست تساوی هم به‌همین مقدار تبدیل می‌شود (مثال ۱ صفحهٔ ۱۰۳ را به بینید) .

۱۸۴. سمت چپ تساوی باتوجه به مثال ۱ صفحهٔ ۱۰۳ چنین‌می‌شود :

$$(\sigma_1-a)^3+(\sigma_1-b)^3+(\sigma_1-c)^3-3(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)=3\sigma_1^3-$$
$$-3\sigma_1^2(a+b+c)+3\sigma_1(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3)-$$
$$-3(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)=3\sigma_1^3-3\sigma_1^3+3\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+$$
$$+3\sigma_3)-3(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)=2\sigma_1^3-6\sigma_1\sigma_2=2\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_2)$$

و سمت راست تساوی هم همین مقدار را دارد (مثال ۱ صفحهٔ ۹۹) .

۱۸۵. داریم :

$$(ab+ac+bc)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ac)^2+(c^2-ab)^2=$$

$$=\sigma_2^2+S_4-2O(a^3bc)+O(a^2b^2)=\sigma_2^2+(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+$$
$$+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3)-2\sigma_1\sigma_3+(\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3)=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+$$
$$+4\sigma_2^2=(\sigma_1^2-2\sigma_2)^2=S_2^2=(a^2+b^2+c^2)^2$$

۱۸۶. عبارت سمت چپ تساوی (باتوجه به‌تمرین ۱۷۰ ومثال ۳ صفحهٔ ۱۰۱) چنین می‌شود:

$$(\sigma_1^3-24\sigma_3)-3(-\sigma_1^3+4\sigma_1\sigma_2-8\sigma_3)=4\sigma_1^3-12\sigma_1\sigma_2=$$
$$=4(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2)=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

(مثال ۱ صفحهٔ ۹۹ را به‌بینید).

۱۸۷. سمت چپ تساوی را می‌توان به این ترتیب تبدیل کرد:

$$[(\sigma_1-a)(\sigma_1-b)(\sigma_1-c)]^2+2\sigma_3^2-O(a^4b^2)-2O(a^4bc)=$$
$$=[\sigma_1^3-\sigma_1(a+b+c)+\sigma_1(ab+ac+bc)-abc]^2+$$
$$+2\sigma_3^2-O(a^4b^2)-2\sigma_3O(a^3)=(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^2+2\sigma_3^2-$$
$$-(\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3-2\sigma_1^3\sigma_3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-3\sigma_3^2)-2\sigma_3(\sigma_1^3-$$
$$-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)=2\sigma_2^3=2(ab+ac+bc)^3$$

۱۸۸. سمت چپ تساوی به این ترتیب تبدیل می‌شود:

$$(\sigma_3^2-O(x^2y^2)+S_2-1)+(\sigma_3+O(x^2y^2)+O(x^3yz)+$$
$$+\sigma_3^2)=2\sigma_3^2+\sigma_3-1+S_2+O(x^3yz)=2\sigma_3^2+\sigma_3-1+$$
$$+\sigma_1^2-2\sigma_2+\sigma_3(\sigma_1^2-2\sigma_2)\,.$$

و حالا سمت راست تساوی را تبدیل می‌کنیم:

$$(\sigma_3+1)(\sigma_1^2-2\sigma_2+2\sigma_3-1)=\sigma_3\sigma_1^2-2\sigma_2\sigma_3+2\sigma_3^2-\sigma_3+$$
$$+\sigma_1^2-2\sigma_2+2\sigma_3-1$$

و همانطور که می‌بینیم دوطرف تساوی بیك مقدار تبدیل شده‌اند.

۱۸۹. سمت چپ تساوی به صورت $\sigma_1^3\sigma_3-\sigma_2^3$ می‌باشد، سمت راست تساوی را تبدیل می‌کنیم:

$$(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)=\sigma_3^2-O(x^3y^3)+O(x^4yz)-$$
$$-\sigma_3^2=\sigma_3O(x^3)-O(x^3y^3)=\sigma_3(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-(\sigma_2^3+$$
$$+3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3)=\sigma_1^3\sigma_3-\sigma_2^3$$

۱۹۰. تمرین ۱۷۲ را به بینید .

۱۹۱. داریم :

$$(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4=2S_4-4O(x^3y)+$$
$$+6O(x^2y^2)=2(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3)-4(\sigma_1^2\sigma_2-$$
$$-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3)+6(\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3)=2\sigma_1^4-12\sigma_1^2\sigma_2+18\sigma_2^2=$$
$$=2(\sigma_1^4-6\sigma_1^2\sigma_2+9\sigma_2^2)=2(\sigma_1^2-3\sigma_2)^2=2(S_2-\sigma_2)^2=$$
$$=2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)^2$$

۱۹۲. فرض می‌کنیم: $x-y=a$ ، $y-z=b$ و $z-x=c$. در اینصورت $a+b+c=0$ و اتحاد مفروض چنین می‌شود :

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$

و یا $S_2^2=2O(a^2b^2)$. این رابطه هم صحیح است زیرا به ازاء $\sigma_1=0$ داریم :

$$S_2=-2\sigma_2\ ;\ O(a^2b^2)=\sigma_2^2$$

۱۹۳. با توجه به رابطهٔ جدول صفحهٔ ۱۰۵ داریم :

$$a^3+b^3+c^3=3\sigma_3=3abc$$

۱۹۴. سمت چپ تساوی به صورت زیر است (مثال ۱ صفحهٔ ۱۰۳ را به‌بینید) :

$$S_3+3(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)=3\sigma_3-3\sigma_3=0$$

۱۹۵. سمت چپ تساوی با توجه به شرط $\sigma_1=0$ چنین می‌شود :

$$2O(a^2b^2)+2O(a^2bc)+S_2\sigma_2=2\sigma_2^2-2\times0+$$
$$+(-2\sigma_2)\sigma_2=0$$

۱۹۶. داریم :

$$a^۴+b^۴+c^۴=S_۴=۲\sigma_۲{}^۲ ,$$

$$۲(a^۲b^۲+b^۲c^۲+c^۲a^۲)=۲O(a^۲b^۲)=۲\sigma_۲{}^۲$$

۱۹۷.

$$۲(a^۴+b^۴+c^۴)=۲S_۴=۴\sigma_۲{}^۲ ,$$

$$(a^۲+b^۲+c^۲)^۲=S_۲{}^۲=(-۲\sigma_۲)^۲=۴\sigma_۲{}^۲$$

۱۹۸.

$$۲(a^۵+b^۵+c^۵)=۲S_۵=-۱۰\sigma_۲\sigma_۳ ,$$

$$۵abc(a^۲+b^۲+c^۲)=۵\sigma_۳S_۲=-۱۰\sigma_۲\sigma_۳$$

۱۹۹.

$$\frac{a^۵+b^۵+c^۵}{۵}=\frac{S^۵}{۵}=-\sigma_۲\sigma_۳ ,$$

$$\frac{a^۳+b^۳+c^۳}{۳}\cdot\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۲}=\frac{S_۳}{۳}\cdot\frac{S_۲}{۲}=\sigma_۳(-\sigma_۲)=-\sigma_۲\sigma_۳$$

۲۰۰.

$$\frac{a^۷+b^۷+c^۷}{۷}=\frac{S_۷}{۷}=\sigma_۲{}^۲\sigma_۳ ,$$

$$\frac{a^۵+b^۵+c^۵}{۵}\cdot\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۲}=\frac{S_۵}{۵}\cdot\frac{S_۲}{۲}=$$

$$=(-\sigma_۲\sigma_۳)(-\sigma_۲)=\sigma_۲{}^۲\sigma_۳$$

۲۰۱.

$$\frac{a^۷+b^۷+c^۷}{۷}=\frac{S_۷}{۷}=\sigma_۲{}^۲\sigma_۳ .$$

$$\frac{a^۳+b^۳+c^۳}{۳}\cdot\frac{a^۴+b^۴+c^۴}{۲}=\frac{S_۳}{۳}\cdot\frac{S_۴}{۲}=\sigma_۳\sigma_۲{}^۲ .$$

۲۰۲.

$$\frac{a^۷+b^۷+c^۷}{۷}\cdot\frac{a^۳+b^۳+c^۳}{۳}=\frac{S_۷}{۷}\cdot\frac{S_۳}{۳}=$$

$$=\sigma_۲{}^۲\sigma_۳\sigma_۳=\sigma_۲{}^۲\sigma_۳{}^۲ ,$$

$$\left(\frac{a^۵+b^۵+c^۵}{۵}\right)^۲=\left(\frac{S^۵}{۵}\right)^۲=(-\sigma_۲\sigma_۳)^۲=\sigma_۲{}^۲\sigma_۳{}^۲$$

۲۰۳.

$$\left(\frac{a^۷+b^۷+c^۷}{۷}\right)^۲=\left(\frac{S_۷}{۷}\right)^۲=(\sigma_۲{}^۲\sigma_۳)^۲=\sigma_۲{}^۴\sigma_۳{}^۲ ,$$

$$\left(\frac{a^۵+b^۵+c^۵}{۵}\right)^۲ \cdot \frac{a^۴+b^۴+c^۴}{۲}=\left(\frac{S_۵}{۵}\right)^۲ \cdot \frac{S_۴}{۲}=$$

$$=(-\sigma_۲\sigma_۳)^۲ \cdot \sigma_۲{}^۲=\sigma_۲{}^۴\sigma_۳{}^۲ \, .$$

۲۰۴. فرض می‌کنیم : $z=-x-y$ ، دراینصورت داریم :

$$(x+y)^۴+x^۴+y^۴=(-z)^۴+x^۴+y^۴=z^۴+x^۴+y^۴=$$
$$=S_۴=۲\sigma_۲{}^۲=۲(xy+xz+yz)^۲=۲[xy-(x+y)^۲]=$$
$$=۲(xy+x^۲+y^۲)^۲\,;$$

$$(x+y)^۵-x^۵-y^۵=(-z)^۵-x^۵-y^۵=-S_۵=۵\sigma_۲\sigma_۳=$$
$$=۵(xy+xz+yz)xyz=۵xy(-x-y)(-x^۲-y^۲-$$
$$-xy)=۵xy(x+y)(x^۲+xy+y^۲)\,;$$

$$(x+y)^۷-x^۷-y^۷=-S_۷=-۷\sigma_۲{}^۲\sigma_۳=-۷xyz(xy+$$
$$+xz+yz)^۲=۷xy(x+y)(xy+x^۲+y^۲)^۲$$

۲۰۵. مثال ۸ صفحهٔ ۱۰۷ را به بینید .

۲۰۶. فرض می‌کنیم : $a-b=x$ ، $b-c=y$ و $c-a=z$ ، در اینصورت $x+y+z=۰$ می‌شود و اتحاد مفروض به صورت زیر درمی‌آید :

$$۲۵(a^۷+b^۷+c^۷)(x^۳+y^۳+z^۳)=۲۱(x^۵+y^۵+z^۵)^۲$$

و این اتحاد را قبلا ثابت‌کرده‌ایم (تمرین ۲۰۲ را به بینید) .

۲۰۷. فرض می‌کنیم : $x-y=a$ ، $y-z=b$ و $z-x=c$. در اینصورت $a+b+c=۰$ و اتحاد مفروض به صورت زیر درمی‌آید :

$$a^۴+b^۴+c^۴=۲(a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲) \Longrightarrow S_۴=۲O(a^۲b^۲)$$

و این تساوی هم واضح است ، زیرا داریم :

$$S_۴=۲\sigma_۲{}^۲ \;\; ; \;\; O(a^۲b^۲)=\sigma_۲{}^۲$$

۲۰۸. فرض می‌کنیم : $x-y=a$ ، $y-z=b$ و $z-x=c$.

دراینصورت $a+b+c=0$ می‌شود و داریم :

$$(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5=a^5+b^5+c^5=S_5=$$

$$=-5\sigma_2\sigma_3=\frac{5}{2}(-2\sigma_2)\sigma_3=\frac{5}{2}S_2\sigma_3=\frac{5}{2}(x-y)(y-z)\times$$

$$\times(z-x)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]=$$

$$=5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$

۲۰۹. سمت چپ تساوی را می‌توان به این ترتیب تبدیل کرد :

$$S^2(a+b+c)-2S(ab+ac+bc)+3abc+2[S^3-S^2(a+$$

$$+b+c)+S(ab+ac+bc)-abc]=\left(\frac{\sigma_1}{2}\right)^2\sigma_1-\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3+$$

$$+2\left(-\frac{\sigma_1^3}{8}+\frac{\sigma_1}{2}\sigma_2-\sigma_3\right)=\sigma_3=abc$$

۲۱۰. اتحاد مفروض را می‌توان چنین نوشت :

$$\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)^3+\left(\frac{a-b+c}{2}\right)^3+\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^3+$$

$$+3abc=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3$$

که همان تمرین شمارهٔ ۱۷۹ است .

۲۱۱. سمت چپ تساوی (با توجه به $\sigma_2=0$) به این صورت تبدیل می‌شود :

$$[(\sigma_1-x)(\sigma_1-y)(\sigma_1-z)]^2+2\sigma_3^2=(-\sigma_3)^2+2\sigma_3^2=3\sigma_3^2$$

حالا سمت راست تساوی را محاسبه می‌کنیم :

$$x^4(y+z)^2+y^4(z+x)^2+z^4(x+y)^2=O(x^4y^2+$$

$$+2O(x^4yz)=(-2\sigma_1^3\sigma_3-3\sigma_3^2)+2\sigma_3(\sigma_1^3+3\sigma_3)=3\sigma_3^2$$

۲۱۲. اگر مخرجها را از بین ببریم ، اتحاد مفروض چنین می‌شود :

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)\times$$

$$\times(1-y^2)=4xyz$$

سمت چپ تساوی را با توجه به $\sigma_3=1$ ، تبدیل می‌کنیم :

$$O(x)-O(x^2y)+O(x^2y^2z)=\sigma_1-(\sigma_1-3\sigma_3)+\sigma_3=4\sigma_3=4xyz$$

۲۱۳. فرض‌می‌کنیم : $\frac{x}{a}=u$ ، $\frac{y}{b}=v$ و $\frac{z}{c}=w$. در اینصورت روابط مفروض به صورت زیر درمی‌آیند :

$$\sigma_1=u+v+w=1 \quad ; \quad \frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0$$

ازرابطهٔ دوم‌نتیجه می‌شود $\frac{\sigma_2}{\sigma_3}=0$ یعنی $\sigma_2=0$. حالا با فرض $\sigma_1=1$ و $\sigma_2=0$ داریم :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=u^2+v^2+w^2=S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=1$$

۲۱۴. از روابط مفروض $\sigma_1=0$ و $S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=1$ نتیجه می‌شود :

$$\sigma_1=0 \quad , \quad \sigma_2=-\frac{1}{2}$$

و در نتیجه خواهیم داشت :

$$a^4+b^4+c^4=S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3=2\sigma_2^2=\frac{1}{2}$$

۲۱۵. تساوی $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ را می‌توان به صورت $\frac{1}{\sigma_1}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$ نوشت که از آنجا $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3=0$ بدست می‌آید و بالاخره (مثال ۱ صفحهٔ ۱۰۳) :

$$(a+b)(a+c)(b+c)=0$$

بنابراین رابطهٔ فرض‌وقتی برقرار است که یکی ازعبارتهای $a+b$ ، $a+c$

یا $b+c$ مساوی صفر شود یعنی یکی از تساویهای $a=-b$ ، $a=-c$ یا $c=-b$ برقرار باشد که در اینصورت تساویهای :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^n=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}=\frac{1}{(a+b+c)^n}$$

به ازاء مقادیر فرد n برقرار خواهد بود .

۲۱۶. فرض می‌کنیم $z=-x-y$ ، دراینصورت $x+y+z=0$ می‌شود و به ازاء مقادیر فرد n داریم :

$$(x+y)^n-x^n-y^n=-z^n-x^n-y^n=-S_n\ ,$$

$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=-z(x+y)-xy=-\sigma_2$$

بنابراین باید ثابت کنیم که درحالت $\sigma_1=0$ مجموع $S_n=x^n+y^n+z^n$ به ازاء $n=6k\pm1$ بر σ_2 و به ازاء $n=6k+1$ بر σ_2^2 قابل قسمت است . مجموع S_n را برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 می‌نویسیم . چون $\sigma_1=0$ است ، S_n به صورت کثیرالجمله‌ای از σ_2 و σ_3 درمی‌آید . فرض کنید $k\sigma_2^\alpha\sigma_3^\beta$ یکی ازجمله‌های این کثیرالجمله باشد . اگر $\alpha=0$ باشد ، توان این جمله نسبت به x و y و z مضربی از ۳ خواهد بود . یعنی به ازاء $n=6k\pm1$ هرجملهٔ این کثیرالجمله (که بیان S_n است) باید شامل σ_2 ، لااقل با توان یك ، باشد که دراینصورت S_n بر σ_2 قابل قسمت است . حالا فرض می‌کنیم درجملهٔ $k\sigma_2^\alpha\sigma_3^\beta$ توان σ_2 مساوی یك باشد ، یعنی $\alpha=1$. در اینصورت جملهٔ مفروض نسبت به x و y و z از درجه $2+3\beta$ می‌شود و بنابراین در حالت $n=6k+1$ توان σ_2 درهرجمله لااقل مساوی ۲ است یعنی S_n بر σ_2^2 قابل قسمت است .

۲۱۷. ساده‌ترین عبارتهای متقارن را نسبت به x و y و z به σ_1 و σ_2 و σ_3 و نسبت به u و v و w به τ_1 و τ_2 و τ_3 نشان می‌دهیم . در اینصورت داریم :

$u=(a+1)\sigma_1-3ax$ و $v=(a+1)\sigma_1-3ay$ و

$w=(a+1)\sigma_1-3az$

و از آنجا بسادگی بدست می‌آید :

$$\tau_1=3(a+1)\sigma_1-3a\sigma_1=3\sigma_1 \quad \text{و} \quad \tau_2=3(a+1)^2\sigma_1^2-$$
$$-6(a+1)\sigma_1^2+9a^2\sigma_2=3(1-a^2)\sigma_1^2+9a^2\sigma_2$$

حالا خواهیم داشت :

$$u^3+v^3+w^3-3uvw=(\tau_1^3-3\tau_1\tau_2+3\tau_3)-3\tau_3=$$
$$=\tau_1^3-3\tau_1\tau_2=27\sigma_1^3-3\times 3\sigma_1[3(1-a^2)\sigma_1^2+9a^2\sigma_2]=$$
$$=27a^2\sigma_1^3-81a^2\sigma_1\sigma_2=27a^2(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2)=$$
$$=27a^2(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

.۲۱۸

حاصلضرب $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$ یك کثیرالجملهٔ متقارن است :

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$$

(مثال ۲ صفحهٔ ۱۰۰ را به بینید) . چون مقادیر a^2 ، b^2 و c^2 داده شده است ، می‌توان این عبارت را برحسب x و y و z نوشت که در اینصورت کثیرالجملهٔ متقارن زیر را برحسب x و y و z خواهیم داشت :

$$(y^2+yz+z^2)^2+(z^2+zx+x^2)^2+(x^2+xy+y^2)^2-$$
$$-2(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)-$$
$$-2(y^2+yz+z^2)(x^2+xy+y^2)-$$
$$-2(z^2+zx+x^2)(x^2+xy+y^2)$$

باید ثابت کرد که این عبارت به ازاء $\sigma_3=0$ مساوی صفر می‌شود . خواننده می‌تواند این عبارت برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 بنویسد ؛ در هرجملهٔ حاصل آن عامل σ_3 وجود خواهد داشت و بنابراین مساوی صفر می‌شود .

۲۱۹. فرض می‌کنیم : $a=x-y$ ، $b=y-z$ و $c=z-x$.
در اینصورت $a+b+c=0$ می‌شود و تساوی مفروض به صورت زیر درمی‌آید :

$$a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

و یا :

$$a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

که اگر برحسب ساده‌ترین عبارتهای متقارن بنویسیم ، بدست می‌آید :

$$\sigma_1^2-2\sigma_2=2(\sigma_1^2-3\sigma_2)$$

و بنابراین (باتوجه به شرط $\sigma_1=0$) داریم : $\sigma_2=0$ و بنابراین :

$$a^2+b^2+c^2=S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=0$$

ولی تساوی $a^2+b^2+c^2=0$ تنها درحالت $a=b=c=0$ امکان دارد و از آنجا خواهیم داشت :

$$x-y=y-z=z-x=0 \implies x=y=z$$

۲۲۰. عبارت سمت چپ تساوی نسبت به b و c و d متقارن است .
ساده‌ترین عبارتهای متقارن را نسبت به b و c و d به σ_1 ، σ_2 و σ_3 نشان می‌دهیم ، دراینصورت تساوی مفروض به صورت زیر درمی‌آید :

$$a^3\sigma_1+2a^2S_2+aS_3+a^2\sigma_2+6a\sigma_3+\sigma_1\sigma_3+4a\sigma_3=0$$

و چون $a+b+c+d=0$ است پس $a=-\sigma_1$ می‌شود . اگر مقادیر S_2 و S_3 را (باتوجه به‌جدول صفحهٔ ۷۴) دررابطه قرار دهیم و $a=-\sigma_1$ درنظر بگیریم به‌سادگی صحت آن ثابت می‌شود .

صفحهٔ ۱۱۴

۲۲۱. نامساوی مفروض به‌صورت $\sigma_1^2-2\sigma_2\geqslant\sigma_2$ درمی‌آید که به‌سادگی به $\sigma_1^2\geqslant3\sigma_2$ تبدیل می‌شود (رابطهٔ ۷ صفحهٔ ۱۱۳ را به‌بینید) .

۲۲۲. این نامساوی به صورت $\sigma_1^2-2\sigma_2\geqslant\frac{1}{3}\sigma_1^2$ و از آنجا به‌صورت

$\sigma_1^2 \geq 3\sigma_2$ درمی‌آید .

۲۲۳. این نامساوی هم به‌سادگی به نامساوی $\sigma_1^2 > 3\sigma_2$ تبدیل می‌شود.

۲۲۴. نامساوی مفروض را می‌توان به صورت $O(a^2b^2) \geq \sigma_1\sigma_3$ یا $\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 \geq \sigma_1\sigma_3$ نوشت وبنابراین به نامساوی مثال ۱ صفحهٔ ۱۱۳ تبدیل می‌شود .

۲۲۵. این نامساوی هم به نامساوی $\sigma_2^2 \geq \sigma_1\sigma_3$ (مثال ۱ صفحهٔ ۱۱۳) تبدیل می‌شود .

۲۲۶. این نامساوی همان نامساوی $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$ (تمرین ۲۲۱ را به بینید) است‌که به ازاء $c=1$ در نظر گرفته شده است .

۲۲۷. نامساوی مفروض به صورت $\sigma_1 \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \geq 9$ درمی‌آید ، که با توجه به $\sigma_3 > 0$ می‌شود $\sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3$ (مثال۲ صفحهٔ ۱۱۳ را به‌بینید).

۲۲۸. این نامساوی ، پس از تبدیل به صورت زیر درمی‌آید :

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \geq 3\sigma_3 \Longrightarrow \sigma_1^3 \geq 3\sigma_1\sigma_2$$

و از آنجا چون $\sigma_1 > 0$ است به نامساوی مسلم $\sigma_1^2 \geq 3\sigma_2$ می‌رسیم (شمارهٔ ۷ صفحهٔ ۱۱۳ را به‌بینید) .

۲۲۹. نامساوی مفروض چنین می‌شود :

$$\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) \geq 9\sigma_3 \Longrightarrow \sigma_1^3 \geq 2\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3$$

که از مجموع دونامساوی مسلم $\sigma_1^3 \geq 3\sigma_1\sigma_2$ و $\sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3$ بدست می‌آید .

۲۳۰. اگر طرفین این نامساوی را مکعب کنیم به صورت $\frac{1}{27}\sigma_1^3 \geq \sigma_3$ (مثال ۳ صفحهٔ ۱۱۴) درمی‌آید .

۲۳۱. اگر فرض کنیم $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$ و $y = \frac{1}{\sqrt{b}}$ و $z = \frac{1}{\sqrt{c}}$ ، نامساوی مفروض به صورت $x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz$ درمی‌آید (مثال ۱ صفحهٔ ۱۱۳ را به بینید) .

۲۳۲. عبات سمت‌چپ این‌نامساوی رامی‌توان چنین‌نوشت :

$$ab(\sigma_1-3c)+bc(\sigma_1-3a)+ac(\sigma_1-3b)=\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3$$

و به این‌ترتیب نامساوی مفروض به‌صورت $\sigma_1\sigma_2\geq 9\sigma_3$ درمی‌آید (مثال ۲ صفحهٔ ۱۱ را به‌بینید) .

۲۳۳. نامساوی مفروض را می‌توان چنین نوشت :

$$ab(\sigma_1-c)+ac(\sigma_1-b)+bc(\sigma_1-a)\geq 6\sigma_3 \Longrightarrow \sigma_1\sigma_2-3\sigma_3\geq 6\sigma_3$$

(مثال ۲ صفحهٔ ۱۱۲ را به‌بینید) .

۲۳۴. نامساوی مفروض (باتوجه به مثال ۱ صفحهٔ ۱۰۳) به صورت $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3\geq 8\sigma_3$ درمی‌آید (مثال ۲ صفحهٔ ۱۱۳ را به‌بینید) .

۲۳۵. فرض می‌کنیم :

$$a+b=x,\quad b+c=y,\quad c+a=z$$

یعنی :

$$a=\frac{x+z-y}{2},\quad b=\frac{x+y-z}{2},\quad c=\frac{y+z-x}{2}$$

اگر a، b و c مقادیری مثبت باشند، باتوجه به تمرین ۲۳۴ داریم :

$$xyz\geq(x+z-y)(x+y-z)(y+z-x)$$

و اگر $a\leq 0$ باشد، $y\geq z+x$ می‌شود ودراینصورت داریم $y\geq z$ و $y\geq x$ و بنابراین هر دو عدد b و c غیرمنفی خواهند بودکه در اینصورت $abc\leq 0$ می‌شود ونامساوی $xyz\geq 8abc$ واضح است .

۲۳۶. اگر عبارتهای سمت‌راست وسمت‌چپ نامساوی ۲۳۵ را برحسب σ_1 بنویسیم، به همین نامساوی می‌رسیم .

۲۳۷. نامساوی مفروض را می‌توان به اینصورت نوشت :

$$2S_3\geq O(a^2b) \Longrightarrow 2(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)\geq\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$$

ویا بالاخره :

۲۳۲. عبات سمت‌چپ این‌نامساوی رامی‌توان چنین‌نوشت :

$$ab(\sigma_1-3c)+bc(\sigma_1-3a)+ac(\sigma_1-3b)=\sigma_1\sigma_2-9\sigma_3$$

و به این‌ترتیب نامساوی مفروض به‌صورت $\sigma_1\sigma_2\geqslant 9\sigma_3$ درمی‌آید (مثال۲ صفحهٔ ۱۱ را به‌بینید) .

۲۳۳. نامساوی مفروض را می‌توان چنین نوشت :

$$ab(\sigma_1-c)+ac(\sigma_1-b)+bc(\sigma_1-a)\geqslant 6\sigma_3 \Longrightarrow \sigma_1\sigma_2-3\sigma_3\geqslant 6\sigma_3$$

(مثال ۲ صفحهٔ ۱۱ را به‌بینید) .

۲۳۴. نامساوی مفروض (باتوجه به مثـال ۱ صفحهٔ ۱۰۳) به صورت $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3\geqslant 8\sigma_3$ درمی‌آید (مثال۲ صفحهٔ ۱۱۳را به‌بینید) .

۲۳۵. فرض می‌کنیم :

$$a+b=x\,،\quad b+c=y\,،\quad c+a=z$$

یعنی :

$$a=\frac{x+z-y}{2}\,،\ b=\frac{x+y-z}{2}\,،\ c=\frac{y+z-x}{2}$$

اگر a، b و c مقادیری مثبت باشند، باتوجه به تمرین۲۳۴ داریم :

$$xyz\geqslant(x+z-y)(x+y-z)(y+z-x)$$

و اگر $a\leqslant 0$ باشد، $y\geqslant z+x$ می‌شود ودراینصورت داریم $y\geqslant z$ و $y\geqslant x$ و بنابراین هر دو عدد b و c غیرمنفی خواهند بودکه در اینصورت $abc\leqslant 0$ می‌شود ونامساوی $xyz\geqslant 8abc$ واضح است .

۲۳۶. اگر عبارتهای سمت‌راست وسمت‌چپ نامساوی ۲۳۵را برحسب σ_1 بنویسیم، به همین نامساوی می‌رسیم .

۲۳۷. نامساوی مفروض را می‌توان به اینصورت نوشت :

$$2S_3\geqslant O(a^2b) \Longrightarrow 2(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)\geqslant\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$$

ویا بالاخره :

که پس از ساده کردن چنین می‌شود ·

$$2\sigma_1^3-7\sigma_1\sigma_2+1\sigma_3\geq 0$$

که همان نامساوی مسئلهٔ ۱۳۷ است ،

۲۴۲. نامساوی مفروض به اینصورت درمی‌آید :

$$3S_3\geq\sigma_1\sigma_2 \Longrightarrow 3\sigma_1^3-10\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\geq 0$$

که اگر نامساوی تمرین ۲۳۶ را بـه دوبرابر نامساوی $\sigma_1^3\geq 3\sigma_1\sigma_2$ اضافه کنیم (ویا نامساوی شمارهٔ ۲۳۷ را به نامساوی $\sigma_1^3\geq 3\sigma_1\sigma_2$ اضافه کنیم) به‌ـ همین نامساوی می‌رسیم .

۲۴۳. پس ازتبدیل، نامساوی مفروض چنین‌می‌شود :

$$\sigma_1^3\leq 9S_3 \Longrightarrow 8\sigma_1^3-27\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3\geq 0$$

که اگرسه برابرنامساوی ۲۳۶را به ۵برابرنامساوی $\sigma_1^3\geq 3\sigma_1\sigma_2$ اضافه کنیم، صحت‌آن واضح می‌شود .

۲۴۴. نامساوی مفروض پس ازتبدیل چنین می‌شود :

$$8S_3\geq 3(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3) \Longrightarrow 8\sigma_1^3-27\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3\geq 0$$

واین همان نامساوی تمرین قبل است .

۲۴۵. نامساوی موردنظر را می‌توان چنین نوشت :

$$S_4\geq\sigma_1\sigma_3 \Longrightarrow \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+3\sigma_1\sigma_3\geq 0$$

که اگر طرفین نامساوی ۲۳۶ رادر σ_1 ضرب وبه دو برابر نامساوی واضح $\sigma_2^2\geq 3\sigma_1\sigma_3$ اضافه کنیم ، صحت‌آن ثابت می‌شود .

۲۴۶. باتوجه به نامساویهای $x, y, z\geq -\frac{1}{4}$ مقادیر زیررادیکالهـا غیرمنفی می‌شود. فرض می‌کنیم :

$$\sqrt{4x+1}=u, \quad \sqrt{4y+1}=v, \quad \sqrt{4z+1}=w$$

دراینصورت رابطهٔ $x+y+z=1$ به صورت زیردرمی‌آید :

$$u^2+v^2+w^2=7$$

که بااین‌شرط بایدنامساوی $v+u+w<5$را ثابت‌کرد. این نامساوی هم به‌سادگی ازنامساوی مثال۲ (صفحهٔ ۱۱۳)بدست می‌آید.

۲۴۷. اگر در رابطهٔ اول مخرجها را ازبین ببریم.(عددهای $b-c$ و $c-a$ و $a-b$ مخالف صفرند)، بدست می‌آید:

$$a(c-a)(a-b)+b(b-c)(a-b)+c(b-c)(c-a)=0$$

وازآنجا خواهیم داشت:

$$-S_3-3\sigma_3+O(a^2b)=0$$

وبنابراین رابطهٔ اول هم‌ارز بارابطهٔ زیر است:

$$\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3=0 \qquad (*)$$

بهمین‌ترتیب رابطهٔ دوم‌را هم می‌توان چنین نوشت:

$$a(c-a)^2(a-b)^2+b(b-c)^2(a-b)^2+$$
$$+c(b-c)^2(c-a)^2=0$$

و یا:

$$S_5-2O(a^4b)+O(a^3b^2)+4O(a^3bc)-3O(a^2b^2c)=0$$

بنابراین رابطهٔ دوم هم‌ارز رابطهٔ زیر است:

$$\sigma_1^5-7\sigma_1^3\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_3+12\sigma_1\sigma_2^2-27\sigma_2\sigma_3=0 \qquad (**)$$

اگر سمت چپ تساوی (**) را برعبارت سمت‌چپ تساوی (*) تقسیم‌کنیم، می‌بینیم‌که تساوی (**) به صورت‌زیر درمی‌آید:

$$(\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3)(\sigma_1^2-3\sigma_2)=0 \qquad (***)$$

ازاینجا واضح است‌که اگر رابطهٔ (*)برقرار باشد، رابطهٔ (**) هم‌برقرار است، به عبارت دیگراز رابطهٔ اول ، رابطهٔ دوم نتیجه می‌شود.

اگر a، b وc مقادیری حقیقی‌باشند، چون‌دو به دومخالف یکدیگرند، عبارت $\sigma_1^2-3\sigma_2$ نمی‌تواند مساوی‌صفرشود(شمارهٔ ۷صفحهٔ ۱۱۳رابه‌ببینید).

بنابراین برای مقادیر حقیقی و مختلف a، b و c از رابطهٔ دوم هم‌می‌توان رابطهٔ اول را نتیجه گرفت.

۳۴۸. چون a، b و c اضلاع یك مثلث‌اند، عددهای

$$x=a+b-c,\quad y=a-b+c,\quad z=-a+b+c$$

عددهائی مثبت هستند. فرض می‌کنیم:

$$a=\frac{x+y}{۲},\quad b=\frac{x+z}{۲},\quad c=\frac{y+z}{۲}$$

بنابراین نامساوی مفروض هم‌ارز نامساوی زیر است:

$$۲\left(\frac{x+y}{۲}\cdot\frac{x+z}{۲}+\frac{x+y}{۲}\cdot\frac{y+z}{۲}+\frac{x+z}{۲}\cdot\frac{y+z}{۲}\right)>$$
$$>\left(\frac{x+y}{۲}\right)^۲+\left(\frac{x+z}{۲}\right)^۲+\left(\frac{y+z}{۲}\right)^۲$$

که در آن x ، y و z مقادیری مثبت هستند. نامساوی اخیر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$۲(S_۲+۳\sigma_۲)>۲S_۲+۲\sigma_۲\Longrightarrow ۴\sigma_۲>۰$$

وچون x، y وz مقادیری، مثبت‌هستند نامساوی $\sigma_۲=xy+xz+yz>۰$ هم برقرار است.

۳۴۹. اگرهمان تبدیلات مسئلهٔ قبل را رعایت‌کنیم (به ازاء مقادیر مثبت x، y وz) به نامساوی زیر می‌رسیم:

$$\left[\left(\frac{x+y}{۲}\right)^۲+\left(\frac{x+z}{۲}\right)^۲+\left(\frac{y+z}{۲}\right)^۲\right](x+y+z)>$$
$$>۲\left[\left(\frac{x+y}{۲}\right)^۳+\left(\frac{x+z}{۲}\right)^۳+\left(\frac{y+z}{۲}\right)^۳\right]$$

ویا (پس ازانجام ضربها در طرفین آن) داریم:

$$(۲S_۲+۲\sigma_۲)\sigma_۱>[۲S_۳+۳O(x^۲y)]$$

که پس از ساده کردن به‌صورت $\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3>0$ در می‌آید که صحت آن واضح است .

۲۵۰. این نامساوی نتیجه‌ای از نامساوی ۲۲۳ صفحهٔ ۱۱۴ است .

۲۵۱. ازمعادلهٔ مفروض نتیجه می‌شود که x ، y و z مقادیری مخالف صفرند. فرض می‌کنیم :

$$u=\frac{xy}{z},\quad v=\frac{xz}{y},\quad w=\frac{yz}{x}$$

و بنابراین طبق‌شرط مسئله $\sigma_1=u+v+w=3$ خواهدبود. سپس باتوجه به رابطهٔ :

$$\sigma_2=uv+uw+vw=x^2+y^2+z^2$$

ازنامساوی (۷) صفحهٔ ۱۱۳ نتیجه می‌شود:

$$9\geqslant 3(x^2+y^2+z^2)\implies x^2+y^2+z^2\leqslant 3$$

ازآنجاکه x، y و z مقادیری صحیح ومخالف صفرند، ازاین نامساوی نتیجه می‌شود :

$$|x|=|y|=|z|=1$$

وبنابراین هریك ازعددهای u ، v و w مساوی ± 1 می‌شود. ولی ازرابطهٔ $u+v+w=3$ نتیجه می‌شود که $u=v=w=1$ است . بنابراین‌هریك ازعددهای x، y و z مساوی ± 1 می‌شود وضمناً تعداد عددهای منفی بایدزوج باشد (یعنی حاصلضرب آنها مساوی $+1$ شود) . به این ترتیب چهار جواب زیر بدست می‌آید :

$$\left|\begin{array}{l}x_1=1\\y_1=1\\z_1=1\end{array}\right.;\quad \left|\begin{array}{l}x_2=1\\y_2=-1\\z_2=-1\end{array}\right.;\quad \left|\begin{array}{l}x_3=-1\\y_3=1\\z_3=-1\end{array}\right.;\quad \left|\begin{array}{l}x_4=-1\\y_4=-1\\z_4=1\end{array}\right.$$

وآزمایش نشان می‌دهدکه هرچهارجواب درمعادله صدق می‌کند .

۲۵۲. طبق رابطهٔ هرون، مساحت مثلث برحسب اضلاع a و b و c چنین است:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

فرض می‌کنیم:

$$x=a+b-c,\quad y=a-b+c,\quad z=-a+b+c$$

عددهای x، y و z مثبت‌اند وضمناً:

$$x+y+z=a+b+c=\sigma_1$$

حالا داریم:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)xyz}=\frac{1}{4}\sqrt{\sigma_1\sigma_3}$$

وبنابراین، باتوجه به نامساوی مثال۳ صفحهٔ ۱۱۴ داریم:

$$S<\frac{1}{4}\sqrt{\sigma_1\frac{1}{27}\sigma_1^3}=\frac{1}{12\sqrt{3}}\sigma_1^2$$

وضمناً علامت تساوی برای‌موقعی است‌که $x=y=z$ ویا $a=b=c$ باشد.

بنابراین بین‌مثلثهای به محیط σ_1، مثلث متساوی‌الاضلاع بامساحت $\frac{1}{12\sqrt{3}}\sigma_1^2$ حداکثر مساحت رادارد.

۲۵۳. با استفاده ازنامساویهای $\sigma_3<\frac{1}{9}\sigma_1\sigma_2$ (مثال ۲ صفحهٔ ۱۳۳) و $\sigma_2<\frac{1}{3}\sigma_1^2$ (رابطهٔ ۷ صفحهٔ ۱۱۳) داریم:

$$(1+u)(1+v)(1+w)=1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=$$

$$=2+\sigma_2+\sigma_3<2+\sigma_2+\frac{1}{9}\sigma_1\sigma_2=2+\sigma_2+\frac{1}{9}\sigma_2=2+\frac{10}{9}\sigma_2<$$

$$<2+\frac{10}{9}\times\frac{1}{3}\sigma_1^2=2+\frac{10}{27}=\frac{64}{27};$$

وعلامت تساوی برای وقتی است که $u=v=w$ باشد، یعنی داشته باشیم :

$$u=\frac{۱}{۳}،\ v=\frac{۱}{۳}،\ w=\frac{۱}{۳}$$

۲۵۴. اگر درهریك از پرانتزها بجای واحد، $a+b+c$ قراردهیم بهمان نامساوی مسئلهٔ ۲۳۴ می‌رسیم.

صفحهٔ ۱۲۶

۲۵۵. این‌مسئله حالت‌خاصی ازمثال۱ صفحهٔ ۱۱۸ است. می‌توان تمام اعمال این‌مثال را انجام داد ویا بطورخلاصه ازنتیجهٔ آن (صفحهٔ ۱۲۰) باشرط $x=۱$ ، $y=\sqrt{۲}$ ، $z=-\sqrt{۳}$ استفاده کرد.

جواب : $\dfrac{۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$

۲۵۶. این‌مسئله حالت‌خاص مثال۲ صفحهٔ ۱۲۰ است (به ازاء $x=۱$، $y=\sqrt[۳]{۲}$ و $z=۲\sqrt[۳]{۴}$).

جوات : $\dfrac{۷\sqrt[۳]{۲}-۳-\sqrt[۳]{۴}}{۲۳}$

۲۵۷. باتوجه به رابطهٔ $S_۲^۲-۲S_۴=\sigma_۱(۴\sigma_۱\sigma_۲-\sigma_۱^۳-۸\sigma_۳)$ (صفحهٔ ۱۱۹)، رابطهٔ مجهول به صورت $S_۲^۲-۲S_۴=۰$ در می‌آید که در آن داریم :

$$x=\sqrt{a}،\ y=\sqrt{b}،\ z=۱$$

و بنابراین :

$$S_۲=x^۲+y^۲+z^۲=a+b+۱$$
$$S_۴=x^۴+y^۴+z^۴=a^۲+b^۲+۱$$

و ازآنجا :

$$S_۲^۲-۲S_۴=(a+b+۱)^۲-۲(a^۲+b^۲+۱)=$$
$$=۲ab+۲a+۲b-a^۲-b^۲-۱$$

به این‌ترتیب رابطهٔ مجهول چنین می‌شود :

$$2ab-a^2-b^2+2a+2b-1=0$$

۲۵۸. فرض می‌کنیم: $x=\sqrt[3]{a}$ ، $y=\sqrt[3]{a^2}$ و $z=b$. چون داریم: $\sigma_3=xyz=ab$ ، از رابطهٔ $S_3-3\sigma_3=\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2)$ نتیجه می‌شود که رابطهٔ مجهول به‌صورت $S_3-3\sigma_3=0$ است. ازطرف دیگر داریم :

$$S_3-3\sigma_3=x^3+y^3+z^3-3xyz=a+a^2+b^3-3ab$$

وبنابراین بدست می‌آید :

$$a+a^2+b^3-3ab=0$$

۲۵۹. حل شبیه تمرین قبل است . رابطهٔ مجهول‌چنین می‌شود :

$$a^2p^3+aq^3+r^3-3apqr=0$$

۲۶۰. اگر طرفین‌رابطهٔ مفروض رادر $\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}+c$ ضرب‌کنیم، بدست می‌آید :

$$(\sqrt[3]{a}+c)^2-b=0 \Longrightarrow (c^2-b)+2c\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}=0$$

حالا فرض می‌کنیم: $x=c^2-b$ ، $y=2c\sqrt[3]{a}$ و $z=\sqrt[3]{a^2}$ وضمناً عبارت $S_3-3\sigma_3=x^3+y^3+z^3-3xyz$ را تشکیل می‌دهیم (به حل تمرین قبل مراجعه‌کنید)، رابطهٔ مجهول چنین می‌شود :

$$(c^2-b)^3+8ac^3+a^2-6ac(c^2-b)=0$$

یا :

$$(c^2-b)^3+2ac^3+a^2+6abc=0$$

۲۶۱. اگرفرض‌کنیم : $u=(ax)^{\frac{2}{3}}$ و $v=(by)^{\frac{2}{3}}$ و $w=-c^{\frac{4}{3}}$ خواهیم داشت : $\sigma_1=u+v+w=0$. چون عبارت $S_3-3\sigma_3$ بر σ_1 قابل‌قسمت است، بدست می‌آید $S_3-3\sigma_3=0$ ویا :

$$(ax)^2+(by)^2-c^4+3(axbyc^2)^{\frac{2}{3}}=0$$

حالا اگر جملهٔ شامل ریشهٔ سوم‌را به طرف‌دوم منتقل‌کرده وطرفین را مکعب کنیم، بدست می‌آید :

$$(a^2x^2+b^2y^2-c^4)^3=-27(abc^2xy)^2$$

و یا :

$$a^6x^6+b^6y^6+3a^4b^2x^4y^2+3a^2b^4x^2y^4-3a^4c^4x^4-$$
$$-3b^4c^4y^4+21a^2b^2c^4x^2y^2+3a^2c^8x^2+3b^2c^8y^2-c^{12}=0$$

۲۶۲. فرض می‌کنیم : $\sqrt{a}=x$ ، $\sqrt{b}=y$ و $z=-\sqrt[4]{a^2+b^2}$ ،
دراین‌صورت رابطهٔ مفروض به صورت $\sigma_1=x+y+z=0$ درمی‌آید و
رابطهٔ (**) صفحهٔ ۱۲۳ چنین می‌شود :

$$(2S_8-S_4^2)^2-128S_4\sigma_3^4=0$$

و یا :

$$[2(a^4+b^4+(a^2+b^2)^2)-(a^2+b^2+a^2+b^2)^2]^2-$$
$$-128(a^2+b^2+a^2+b^2)a^2b^2(a^2+b^2)=0$$

که پس ازساده‌کردن چنین می‌شود :

$$-16a^2b^2(4a^2+4b^2+ab)(4a^2+4b^2-ab)=0$$

و این‌همان رابطهٔ مجهول است . متذکر می‌شویم که هردوسه جمله‌ای داخل‌در
پرانتزها تنها وقتی مساوی‌صفر می‌شوند (برای مقادیر حقیقی a و b) که
$a=b=0$ باشد :

$$4a^2+4b^2\pm ab=\frac{7}{2}(a^2+b^2)+\frac{1}{2}(a\pm b)^2\geqslant\frac{7}{8}(a^2+b^2)$$

وبنابراین می‌توان از هردو پرانتز صرفنظر کرد که دراینصورت $a^2b^2=0$
یا $ab=0$ بدست می‌آید . ازاینجا نتیجه می‌گیریم که رابطهٔ مفـروض وقتی
برقرار است که لااقل یکی ازعددهای a یا b مساوی صفر شود. به‌این‌ترتیب
می‌توان رابطهٔ مجهول راکه پس ازگویاکردن عبارت بدست می‌آید ، به این
صورت نشان داد :

$$ab=0$$

صفحهٔ ۱۳۲

۲۶۳. اگر کثیرالجملهٔ متقارن $f(x, y)$ بر $x-y$ قابل‌قسمت باشد، خارج‌قسمت $\frac{f(x, y)}{x-y}$ کثیرالجملهٔ متقارن‌منفی خواهد بود (با تبدیل x و y به یکدیگر صورت کسر تغییر نمی‌کند؛ درحالیکه مخرج آن تغییر علامت می‌دهد). بنابراین به‌کمك آنچه‌که درصفحهٔ ۱۳۰ گفته‌ایم، کثیرالجملهٔ $\frac{f(x, y)}{x-y}$ بر $x-y$ قابل قسمت است، یعنی $f(x, y)$ بر $(x-y)^2$ قابل قسمت خواهد بود.

۲۶۴. چون $f(x, y, z)$ متقارن است، وقتی‌که بر $x-y$ قابل‌قسمت باشد بر $y-z$ و $z-x$ یعنی بر $T(x, y, z)$ قابل قسمت خواهد بود. خارج قسمت $\frac{f(x, y, z)}{T(x, y, z)}$ عبارتی متقارن منفی است (به حل مسئلهٔ قبل مراجعه‌کنید) و بنابراین بر $T(x, y, z)$ قابل قسمت است. به این‌ترتیب کثیرالجملهٔ $f(x, y, z)$ بر $[T(x, y, z)]^2$ یعنی بر $\Delta(x, y, z)$ قابل قسمت می‌شود.

صفحهٔ ۱۳۹

۲۶۵. مبین این‌معادلهٔ درجه سوم چنین است:

$$\Delta = -4(-p)^3 - 27(-2q)^2 = 4(p^3 - 27q^2)$$

وچون $\Delta = [(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)]^2$ (x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله هستند)، طبق فرض‌عددی است صحیح، Δ مجذورکامل می‌شود. بنابراین (با توجه به صحیح بودن مقادیر p و q)، عدد $p^3 - 27q^2$ هم مجذور کامل است.

صفحهٔ ۱۴۳

۲۶۶. چون هرسه عدد a و b و c حقیقی هستند، خواهیم داشت: $\Delta(a, b, c)\geqslant 0$ ، علاوه برآن طبق‌شرط داریم : $\sigma_1>0$ و $\sigma_3>0$. اگر $\sigma_2\geqslant 0$ باشد، باتوجه به نتیجهٔ صفحهٔ ۱۴۰ ، هر سه عدد a و b و c غیرمنفی خواهند بود (ضمناً مخالف صفرهم هستند، زیرا $abc>0$ است). بنابراین مجموع $S_n=a^n+b^n+c^n$ هم مثبت خواهدبود. اگر $\sigma_2\geqslant 0$ برقرارنباشد یعنی $\sigma_2<0$ باشد، در رابطهٔ :

$$S_n=\sigma_1 S_{n-1}-\sigma_2 S_{n-2}+\sigma_3 S_{n-3}$$

همهٔ ضرایب σ_1 وσ_2 و σ_3مثبت می‌شود وبرای اثبات مثبت بودن مجموع‌قوای S_n کافی است ثابت‌کنیم‌که سه مجموع قوای‌اولیه مثبت‌اند . درحقیقت‌داریم:

$$S_0=3>0$$

$$S_1=\sigma_1>0$$

$$S_2=a^2+b^2+c^2>0$$

بنابراین، بدون ارتباط به علامت σ_2 ، مجموع قوای S_n مثبت می‌شود .

صفحهٔ ۱۵۲

۲۶۷. عبارت موردنظر متقارن‌منفی وازدرجهٔ سوم است . بنابراین :

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)=$$
$$=k(x-y)(x-z)(y-z) .$$

که اگر $x=-1$ ، $y=0$ و$z=1$ فرض‌کنیم، $k=-1$ بدست می‌آید.

۲۶۸. کثیرالجملهٔ مفروض، نسبت به a و b وc متقارن منفی وازدرجهٔ سوم است، بنابراین به صورت $k(a-b)(a-c)(b-c)$ درمی‌آید . با فرض $a=1$ ، $b=0$ و $c=1$ مقدار $k=4$ بدست می‌آید .

۲۶۹. کثیرالجملهٔ متقارن منفی باید (باتوجه به درجه سوم‌بودن آن)

به صورت $k(a-b)(a-c)(b-c)$ باشد که با قراردادن $a=-۱$ ، $b=۰$ و $c=۱$ مقدار $k=۱$ بدست می‌آید.

۲۷۰. جواب :

$$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)=(a-b)(a-c)(b-c)$$

۲۷۱. عبارت متقارن منفی از درجهٔ چهارم است و بنابراین باید به صورت :

$$k(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)$$

باشد وبافرض $a=۰$ ، $b=۱$ و $c=۲$ به سادگی $k=-۱$ می‌شود.

۲۷۲. باتوجه به اینکه این کثیرالجمله، متقارن منفی وازدرجهٔ چهارم است، به صورت زیر درمی‌آید :

$$k(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$$

و با فرض $x=۰$ ، $y=۱$ و $z=۲$ به سادگی $k=۱$ می‌شود.

۲۷۳. جواب :

$$x(y+z)(y^۲-z^۲)+y(z+x)(z^۲-x^۲)+z(x+y)(x^۲-y^۲)=$$
$$=-(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$$

۲۷۴. جواب :

$$(b-c)(b+c)^۳+(c-a)(c+a)^۳+(a-b)(a+b)^۳=$$
$$=۲(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)$$

۲۷۵. کثیرالجملهٔ مفروض، متقارن‌منفی وازدرجهٔ پنجم است‌وبنابراین باید به صورت زیر باشد :

$$(k\sigma_۱^۲+l\sigma_۲)(x-y)(x-z)(y-z)$$

با فرض $x=-۱$ ، $y=۰$ و $z=۱$ بدست می‌آید $l=۱۵$ و با فرض $x=۰$ ، $y=۱$ و $z=۲$ بدست می‌آید :

$$-۱۸k-۴l=۳۰ \Longrightarrow k=-۵$$

و بنابراین داریم :

$$k\sigma_1^2+l\sigma_2=-5\sigma_1^2+15\sigma_2=-5(\sigma_1^2-3\sigma_2)=-5(S_2-\sigma_2)$$

وبالاخره تجزیهٔ عبارت مفروض به صورت زیر درمی‌آید :

$$-5(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)(x-y)(x-z)(y-z)$$

(تمرین ۲۰۸ را هم ببینید) .

۲۷۶. کثیرالجملهٔ متقارن منفی مفروض از درجهٔ پنجم است و باید به صورت زیر باشد :

$$(k\sigma_1^2+l\sigma_2)(a-b)(a-c)(b-c)$$

با فرض $a=-1$ ، $b=0$ و $c=1$ بدست می‌آید $l=-1$. سپس بافرض $a=0$ ، $b=1$ و $c=2$ بدست می‌آید : $-18k-4l=-50$ و از آنجا $k=3$ می‌شود وداریم :

$$k\sigma_1^2+l\sigma_2=3\sigma_1^2-\sigma_2=3S_2+5\sigma_2=3a^2+3b^2+3c^2-$$
$$-5ab-5ac-5bc$$

ودرنتیجه تجزیهٔ عبارت مفروض چنین می‌شود :

$$(3a^2+3b^2+3c^2-5ab-5ac-5bc)(a-b)(a-c)(b-c)$$

۲۷۷. اگر شبیه دوتمرین قبل عمل کنیم، بدست می‌آید :

$$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)=$$
$$=(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)(a-b)(a-c)(b-c)$$

۲۷۸. جواب :

$$(a+b+c)^2(a-b)(a-c)(b-c)$$

۲۷۹. عبارت متقارن منفی مفروض ازدرجهٔ ششم است و بنابراین باید به صورت زیر باشد :

$$(k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3)(x-y)(x-z)(y-z)$$

فرض می‌کنیم : $x=1$ ، $y=2$ و $z=-3$ (که $\sigma_1=0$ شود)، به‌سادگی

$m=-1$ بدست می‌آید . سپس فرض می کنیم : $x=-2$ ، $y=3$ و $z=6$ (که $\sigma_2=0$ شود) ، $k=0$ بدست می‌آید . بالاخره اگر $x=0$ ، $y=1$ و $z=2$ فرض کنیم $l=1$ بدست می‌آید وبنا براین خواهیم داشت :

$$k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3=(x+y)(x+z)(y+z)$$

(مثال ۱ صفحهٔ ۱۰۳ را به‌بینید) . به‌این‌ترتیب تجزیهٔ‌زیر برای‌عبارت مفروض بدست می‌آید :

$$(x+y)(x+z)(y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$$

متذکرمی‌شویم که این‌نتیجه را به طریق ساده‌تری هم‌می‌توانستیم بدست‌آوریم: فرض می کنیم $x^2=u$ ، $y^2=v$ و $z^2=w$ ، کثیرالجملهٔ مفروض به‌صورت $u^2(v-w)+v^2(w-u)+w^2(u-v)$ درمی‌آید که تبدیل عبارت متقارن منفی اخیر به‌صورت ضرب به‌سادگی انجام می گیرد .

۲۸۰. کثیرالجملهٔ مفروض، متقارن‌منفی وازدرجهٔ‌پنجم‌است وبنا براین باید به صورت زیر باشد :

$$(k\sigma_1^2+l\sigma_2)(a-b)(a-c)(b-c)$$

فرض می کنیم : $a=-1$ ، $b=0$ و $c=1$ وسپس $a=0$ ، $b=1$ و $c=2$ ، بدست می‌آید : $l=0$ و $k=1$ وبنا براین برای تجزیهٔ عبارت مفروض خواهیم داشت :

$$(a+b+c)^2(a-b)(a-c)(b-c)$$

۲۸۱ و ۲۸۲. هریك ازاین‌کثیرالجمله‌ها متقارن منفی‌هستندوبنا براین بر $(x-y)(x-z)(y-z)$ قابل قسمت‌اند .

۲۸۳. فرض‌می کنیم: $u=(y-z)\sqrt[3]{1-x^3}$ ، $v=(z-x)\sqrt[3]{1-y^3}$ و $w=(x-y)\sqrt[3]{1-z^3}$ ، دراینصورت رابطهٔ‌مفروض به $u+v+w=0$ تبدیل می‌شود . ازآنجاکه عبارت $S_3-3\sigma_3$ بر σ_1 قابل قسمت است (صفحهٔ ۱۲۰ را به‌بینید) ، رابطهٔ $S_3-3\sigma_3=0$ هم برقرار خواهد بود به این ـ ترتیب داریم :

$$(y-z)^3(1-x^3)+(z-x)^3(1-y^3)+(x-y)^3(1-z^3)=$$
$$=3(y-z)(z-x)(x-y)\sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)}$$

کثیرالجملهٔ سمت‌چپ تساوی متقارن منفی است. آنرا چنین می‌نویسیم:

$$[(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3]-[(y-z)^3x^3+$$
$$+(z-x)^3y^3+(x-y)^3z^3]$$

عبارت داخل کروشهٔ اول‌را می‌توان چنین نوشت:

$$-3(x-y)(x-z)(y-z)=-3T(x, y, z)$$

وعبارت داخل کروشهٔ دوم چنین است:

$$(y-z)^3x^3+(z-x)^3y^3+(x-y)^3z^3=$$
$$=(k\sigma_1{}^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3)(x-y)(x-z)(y-z)$$

اگرضرایب k ، l ، m را شبیه تمرین ۲۷۹ پیدا کنیم، $k=l=0$ و $m=-3$ بدست می‌آید. بنابراین تساوی‌مفروض رامی‌توان چنین‌نوشت:

$$-3T(x, y, z)+3\sigma_3T(x, y, z)=$$
$$=-3T(x, y, z)\sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)}$$

وچون طبق فرض‌عددهای x ، y و z باهم متمایزند، $T(x, y, z)\neq 0$ می‌شود ومی‌توانیم طرفین تساوی‌را به $3T(x, y, z)$ ساده‌کنیم، بدست می‌آید:

$$1-xyz=\sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)}$$

صفحهٔ ۱۵۶

۲۸۴. پرانتز اول را تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{a^2}{b-c}+\frac{b^2}{c-a}+\frac{c^2}{a-b}=$$
$$=\frac{a^2(c-a)(a-b)+b^2(b-c)(a-b)+c^2(b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

صورت کسر سمت راست تساوی، عبارتی‌متقارن وازدرجهٔ‌چهارم است‌وبنابراین،

باید به‌صورت $k\sigma_1^4+l_1\sigma_1^2\sigma_2+m\sigma_1\sigma_3+n\sigma_2^2$ باشد ، چون طبق شرط $\sigma_1=0$ است به صورت $n\sigma_2^2$ خواهد بود وتنها باید ضریب n رامحاسبه‌کنیم. اگر درصورت‌کسر سمت راست تساوی $a=-1$ ، $b=0$ و $c=1$ فرض کنیم (چون درحقیقت باید $\sigma_1=0$ باشد) ، به ازاء این مقادیر صورت‌کسر مساوی -4 می‌شود و چون $\sigma_2=ab+ac+bc=-1$ است، بدست می‌آید $-4=n(-1)^2$ و ازآنجا $n=-4$. به این‌ترتیب پرانتز اول سمت‌چپ تساوی فرض به ازاء $\sigma_1=0$ چنین می‌شود :

$$\frac{-4\sigma_2^2}{-T(a,b,c)}$$

واما برای پرانتز دوم :

$$\frac{b^2c^2(b-c)+a^2c^2(c-a)+a^2b^2(a-b)}{a^2b^2c^2}=$$

$$=\frac{T(a,b,c)\cdot(k_1\sigma_1^2+l_1\sigma_2)}{\sigma_3^2}$$

اگردرصورت‌کسر $a=-1$ ، $b=0$ و $c=1$ فرض‌کنیم $l_1=1$ می‌شود وچون $\sigma_1=0$ است، پرانتزدوم سمت‌چپ تساوی فرض به‌اینصورت درمی‌آید:

$$\frac{T(a,b,c)\sigma_2}{\sigma_3^2}$$

بنابراین به ازاء $\sigma_1=0$ سمت‌چپ تساوی فرض به صورت $\frac{4\sigma_2^3}{\sigma_3^2}$ درمی‌آید . به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت‌که سمت راست تساوی فرض هم همین مقدار می‌شود .

۲۸۵. حاصل این عبارت برابر صفر است (مثال ۲ صفحهٔ ۱۵۵ را به بینید) .

۲۸۶. هم صورت وهم‌مخرج کسر عبارتهای‌متقارن منفی‌هستندوبنا براین کسر مفروض را می‌توان چنین‌نوشت :

$$\frac{T(x, y, z)\cdot(k\sigma_1^2+l\sigma_2)}{T(x, y, z)\cdot m\sigma_1}$$

اگر درصورت کسر $x=-1$ ، $y=0$ و $z=1$ سپس $x=0$ ، $y=1$ و $z=2$ فرض کنیم، بدست می‌آید: $l=1$ ، $k=0$. بهمین‌ترتیب $m=1$ بدست می‌آید (تمرین ۲۷۲ را به‌بینید) . با قرار دادن مقادیری‌که برای ضرایب بدست‌آوردیم، حاصل‌کسر مفروض چنین می‌شود :

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{xy+xz+yz}{x+y+z}$$

۲۸۷. مخرج‌کسر مفروض چنین می‌شود :

$$-3T(a, b, c)=3(a-b)(b-c)(c-a)$$

(مثال۱ صفحهٔ ۱۵۱ را به‌بینید) . صورت این‌کسرهم شبیه مخرج آن چنین است :

$$-3T(a^2, b^2, c^2)=3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$$

و بنابراین برای‌کسر مفروض خواهیم داشت :

$$\frac{3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{3(a-b)(b-c)(c-a)}=(a+b)(b+c)(c+a)$$

۲۸۸. صورت‌کسر مفروض را می‌توان چنین‌نوشت :

$$(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)(x-y)(x-z)(y-z)$$

(تمرین ۲۷۷ را به‌بینید) ومخرج‌کسر هم چنین است :

$$2(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)$$

وبنابراین مقدار‌کسر پس از ساده شدن خواهدشد :

$$\frac{(x-y)(x-z)(y-z)}{2}$$

۲۸۹. صورت‌کسر مفروض برابر است با :

$$(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$$

(تمرین ۲۷۲ را به‌بینید) . ومخرج هم به سادگی تبدیل می‌شود به :

$$(x-y)(x-z)(y-z)$$

بنابراین بعد از ساده‌کردن، کسر مفروض برابر با $x+y+z$ می‌شود .

۲۹۰. صورت کسر (تمرین ۲۷۹را به‌بینید) چنین می‌شود :

$$(x+y)(x+z)(y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$$

وچون مخرج مساوی $(x-y)(x-z)(y-z)$ می‌باشد، حاصل کسر بعداز ساده‌شدن چنین است :

$$(x+y)(x+z)(y+z)$$

۲۹۱. پس ازتبدیل بیك‌مخرج خواهیم داشت :

$$\frac{bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}$$

که صورت‌آن برابر است با $(a-b)(a-c)(b-c)$ (تمرین ۲۷۰ را به‌بینید) ، بنابراین‌کسر مفروض مساوی $\frac{1}{abc}$ می‌شود.

۲۹۲. با تبدیل بیك مخرج بدست می‌آید :

$$\frac{b^2c^2(b-c)+a^2c^2(c-a)+a^2b^2(a-b)}{a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)}$$

که صورت‌آن برابر است بـا $(k\sigma_1^2+l\sigma_2)(a-b)(a-c)(b-c)$ و ضمناً $l=1$ (به حل‌مسئلۀ ۲۸۴ مراجعه‌کنید) و $k=0$ (که به سادگی و با قراردادن $a=0$ ، $b=1$ و $c=2$ بدست می‌آید) . بنابراین‌کسر مفروض چنین می‌شود :

$$\frac{\sigma_2}{a^2b^2c^2}=\frac{ab+ac+bc}{a^2b^2c^2}$$

۲۹۳. اگرمخرجها را یکی‌کنیم، بدست می‌آید :

$$\frac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

صورت کسر مساوی $(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)$ می‌شود (تمرین ۲۷۲ را به‌بینید) . بنابراین کسر مفروض برابر با $a+b+c$ می‌شود :

۲۹۴. با تبدیل بیك‌مخرج بدست می‌آید :

$$\frac{a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

صورت این کسر با توجه به تمرین ۲۷۷ برابر است با :

$$(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)(a-b)(a-c)(b-c)$$

وبنابراین حاصل کسر مفروض، بعداز ساده شدن، چنین می‌شود :

$$a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc$$

۲۹۵. اگر بیك مخرج تحویل کنیم، می‌شود :

$$\frac{a^2(a+b)(a+c)(b-c)+b^2(b+c)(b+a)(c-a)+c^2(c+a)(c+b)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

باتوجه به تمرین ۲۷۸ صورت این کسر چنین می‌شود :

$$(a+b+c)^2(a-b)(a-c)(b-c)$$

وبنابراین حاصل عبارت مفروض $(a+b+c)^2$ می‌شود .

۲۹۶. اگر صورت ومخرج را بیك‌مخرج تحویل و سپس کسر مفروض را به‌کسر ساده‌ای تبدیل کنیم، بدست می‌آید :

$$\frac{bc(b^2-c^2)+ac(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)}{bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)}$$

با توجه به مثال ۲ صفحهٔ ۱۵۱ و تمرین ۲۷۰ ، این کسر را می‌توان چنین نوشت :

$$\frac{(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=a+b+c$$

۲۹۷. هریك ازپرانتزها را بیك مخرج تحویل می‌کنیم ؛

$$\frac{yz(y-z)+xz(z-x)+xy(x-y)}{xyz}\times$$

$$\times\frac{x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

صورت کسر اول برابر است بـا $(x-y)(x-z)(y-z)$. صورت کسر دوم کثیرالجملهٔ متقارنی از درجهٔ سوم است ، بنابراین باید به صورت $k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3$ باشد. به ضرایب k و l کاری نداریم (زیرا طبق شرط $\sigma_1=0$ است). برای پیدا کردن ضریب m فرض می‌کنیم : $x=1$ ، $y=2$ و $z=-3$ (چون باید $\sigma_1=x+y+z=0$ باشد) . دراینصورت تساوی:

$$x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)=$$

$$=k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3$$

به صورت $-54=-6m$ درمی‌آید وازآنجا $m=9$ می‌شود. به‌این‌ترتیب به ازاء $x+y+z=0$ ، عبارت‌مفروض چنین می‌شود :

$$\frac{(x-y)(x-z)(y-z)}{xyz}\times\frac{9\sigma_3}{(x-y)(x-z)(y-z)}=\frac{9xyz}{xyz}=9$$

این مسئله را ازراه دیگری هم می‌توان حل کرد. چون‌صورت کسراول متقارن منفی وازدرجهٔ سوم است ، به‌صورت $k(x-y)(x-z)(y-z)$ و صورت کسر دوم که متقارن وازدرجهٔ سوم است به صورت :

$k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_1+m\sigma_3$ و یا به ازاء $\sigma_1=0$ به‌صورت $m\sigma_3$ درمی‌آید .

بنابراین تمام جملات شامل مجهول حذف می‌شوند و حـاصل عبارت مساوی مقدار ثابتی خواهد بود . حالاکافی است که مقادیردلخواهی (به مجموع‌صفر) برای x و y و z درنظر بگیریم تاحاصل کسر بدست آید (مثلاً $x=1$ ، $y=2$ و $z=-3$) .

۲۹۸. دستگاه مفروض را می‌توان چنین‌نوشت :

$$\begin{cases}(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)=-۱۲\\(xy+xz+yz)(x-y)(x-z)(y-z)=-۲۲\\-۳(x-y)(x-z)(y-z)=۶\end{cases}$$

(مثالهای ۱، ۲ و ۳ صفحات ۱۵۱ و ۱۵۲ را به‌بینید). از معادلهٔ سوم بدست می‌آید :

$$(x-y)(x-z)(y-z)=-۲ \qquad (*)$$

اگر این مقدار را درمعادلات اول ودوم دستگاه قراردهیم، بدست می‌آید .

$$\begin{cases}\sigma_۱=x+y+z=۶\\\sigma_۲=xy+xz+yz=۱۱\end{cases}$$

و دستگاه شامل معادلات اخیر را ضمن مثال ۳ صفحهٔ ۹۶ قبلاً حل کرده‌ایم.

صفحهٔ ۱۶۲

۲۹۹. کثیرالجملهٔ مفروض به‌صورت $\sigma_۱^۳-S_۳=۳\sigma_۱\sigma_۲-۳\sigma_۳$ درمی‌آید و بنابراین قابل تجزیه به عوامل متقارن نیست . بنابراین تنها این احتمال وجود دارد که به سه عامل درجه اول تجزیه شود، ضمناً هریك ازعوامل باید نسبت به دو متغیر متقارن باشند. به‌عبارت دیگر تجزیهٔ مفروض بایدبه‌صورت زیر باشد :

$$(a+b+c)^۳-a^۳-b^۳-c^۳=(ka+kb+lc)(ka+lb+\\+kc)(la+kb+kc) \qquad (*)$$

که‌درآن k و l ضرایب نامعینی هستند. اگر درتساوی (*) $a=b=c=۱$ فرض کنیم ، بدست می‌آید $(۲k+l)^۳=۲۴$ و از آنجا $۲k+l=۲\sqrt[۳]{۳}$. سپس اگر $a=b=۰$ و $c=۱$ فرض کنیم، بدست می‌آید $k^۲l=۰$ ، یعنی یکی ازدو ضریب k و l باید مساوی صفرباشند . بالاخره اگر $a=b=۱$ و

$c=0$ فرض کنیم $2k(k+l)^2=6$ بدست می‌آید واز آنجامعلوم می‌شود که $k\neq 0$ است . بنابراین $l=0$ و $k=\sqrt[3]{3}$ می‌شود وخواهیم داشت :

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=(\sqrt[3]{3}a+\sqrt[3]{3}b)(\sqrt[3]{3}a+\sqrt[3]{3}c)\times$$
$$\times(\sqrt[3]{3}b+\sqrt[3]{3}c)$$

که اگر $\sqrt[3]{3}$ را از پرانتزها بیرون بیاوریم می‌شود :

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(a+c)(b+c)$$

که باآزمایش هم می‌توان صحت آنرا تحقیق کرد .

متذکر می‌شویم که این تجزیه از قبل هم برای ما معلوم بود ، زیرا داریم :

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3=3(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)=$$
$$=3(a+b)(a+c)(b+c)$$

(مثال۱ صفحهٔ ۱۰۳ رابه‌بینید). منتهی‌درآنجا (صفحهٔ ۱۰۳) ، از بیان عبارت: $(a+b)(a+c)(b+c)$ برحسب σ_1 ، σ_2 و σ_3 استفاده کرده‌بودیم‌ودراینجا مستقیماً عبارت مفروض‌را تجزیه‌کردیم .

۳۰۰. ابتدا عوامل متقارن تجزیهٔ عبارت مفروض‌را جستجومی‌کنیم :

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=\sigma_1^5-S_5=5\sigma_1^3\sigma_2-5\sigma_1\sigma_2^2-$$
$$-5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_2\sigma_3=(5\sigma_1^3\sigma_2-5\sigma_1^2\sigma_3)-(5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_2\sigma_3)=$$
$$=5(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_1^2-\sigma_2)$$

که اگر تجزیهٔ عبارت $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$ رابخاطر بیاوریم، خواهیم داشت :

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=5(x+y)(x+z)(y+z)\times$$
$$\times(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)$$

۳۰۱. پس ازمخرج مشترك گرفتن بدست می‌آید :

$$\frac{bc(b+c)+ac(a+c)+ab(a+b)+2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

صورت این کسر را می‌توان چنین نوشت :

$$O(a^2b)+2\sigma_3=(\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3)+2\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3=$$
$$=(a+b)(a+c)(b+c)$$

وبنابراین حاصل عبارت مفروض برابر واحد است .

۳۰۲. اگر همهٔ جملات را به سمت چپ تساوی ببریم ، پس از اینکه مخرجها حذف‌شوند، خواهیم داشت :

$$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)-$$
$$-2abc=0$$

و یا :

$$O(a^2b)-S_3-2\sigma_3=0 \Longrightarrow 4\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3-8\sigma_3=0 \qquad (*)$$

واضح است که این‌عبارت شامل عوامل متقارن نیست . این احتمال باقی‌میماند که‌آنرا به عوامل درجه اول (ومتقارن نسبت به دومتغیر) تجزیه‌کنیم :

$$4\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3-8\sigma_3=(ka+kb+lc)(ka+lb+kc)\times$$
$$\times(la+kb+kc)$$

با فرض $a=b=c=1$ (که دراینصورت $\sigma_1=\sigma_2=3$ و $\sigma_3=1$ می‌شود)، بدست می‌آید : $(2k+l)^3=1$ وازآنجا $2k+l=1$. سپس $a=b=0$ و $c=1$ می گیریم (یعنی $\sigma_1=1$ و $\sigma_2=\sigma_3=0$) ، به‌سادگی‌بدست می‌آید: $k^2l=-1$. بالاخره به ازاء $a=b=1$ و $c=0$ (یعنی $\sigma_1=2$ و $\sigma_2=1$ و $\sigma_3=0$) بدست می‌آید $2k(k+l)^2=0$ و چون $k\neq0$ است (زیرا $k^2l=-1$ بود) $k+l=0$ می‌شود وازدستگاه :

$$\begin{cases}2k+l=1\\ k+l=0\end{cases}$$

مقادیر $k=1$ و $l=-1$ بدست می‌آید . درنتیجه خواهیم داشت :

$$4\sigma_1\sigma_2-\sigma_1^3-8\sigma_3=(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

که مستقیماً می‌توان‌صحت آنرا تحقیق کرد. باتوجه به‌رابطهٔ (*) خواهیم‌داشت:

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)=0$$

یعنی باید یکی از عوامل $a+b-c$ ، $a-b+c$ و یا $-a+b+c$ مساوی صفر باشد . مثلا فرض‌می‌کنیم $a+b-c=0$ باشد ، در اینصورت $c=a+b$ می‌شود و خواهیم داشت :

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+(a+b)^2-a^2}{2b(a+b)}=\frac{2b^2+2ab}{2b^2+2ab}=1$$

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{(a+b)^2+a^2-b^2}{2a(a+b)}=\frac{2a^2+2ab}{2a^2+2ab}=1$$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(a+b)^2}{2ab}=-\frac{2ab}{2ab}=-1$$

۳۰۳. این تمرین نتیجهٔ مستقیم حل تمرین قبل است .

صفحهٔ ۱۳۷

۳۰۴. داریم :

$$(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-$$
$$-bd-cd)=\sigma_1(S_2-\sigma_2)=\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=$$
$$=(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-3\sigma_3=S_3-3\sigma_3=a^3+b^3+c^3+d^3-$$
$$-3(abc+abd+acd+bcd)$$

۳۰۵. به ازاء $\sigma_1=a+b+c+d=0$ داریم :

$$(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=S_3^2=(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)^2=(3\sigma_3)^2=$$
$$=9\sigma_3^2=9(bcd+acd+abd+abc)^2$$

۳۰۶. به ازاء $\sigma_1=a+b+c+d=0$ سمت چپ تساوی حکم چنین می‌شود :

$$a^4+b^4+c^4+d^4=S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-$$
$$-4\sigma_4=2\sigma_2^2-4\sigma_4$$

حالا سمت راست تساوی را ساده می‌کنیم :

$$2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+2(ad-bc)^2+4abcd=$$
$$=2[O(a^2b^2)-6\sigma_4]+4\sigma_4=2O(a^2b^2)-8\sigma_4=$$
$$=2\times\frac{1}{2}(S_2^2-S_4)-8\sigma_4=S_2^2-S_4-8\sigma_4=(\sigma_1^2-2\sigma_2)^2-$$
$$-(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4)-8\sigma_4=(-2\sigma_2)^2-$$
$$-(2\sigma_2^2-4\sigma_4)-8\sigma_4=2\sigma_2^2-4\sigma_4$$

۳۰۷. اگر پرانتزها را بازکنیم ،کثیرالجملهٔ جبری که بدست می‌آید ازجملهٔ x_i^2، به اندازهٔ $n-1$ مرتبه و علاوه بر آن $-2\sigma_2$ هم وجود دارد. بنا براین :

$$\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2=(n-1)S_2-2\sigma_2-(n-1)(\sigma_1^2-2\sigma_2)-$$
$$-2\sigma_2=(n-1)\sigma_1^2-2n\sigma_2$$

۳۰۸. از تمرین قبل بلافاصله نتیجه می‌شود :

$$(n-1)\sigma_1^2-2n\sigma_2\geqslant 0$$

۳۰۹. این نامساوی به صورت $S_2\geqslant\frac{1}{n}\sigma_1^2$ یعنی $\sigma_1^2-2\sigma_2\geqslant\frac{1}{n}\sigma_1^2$ درمی‌آید که به‌سادگی از نامساوی تمرین قبل نتیجه می‌شود .

۳۱۰. $\sqrt{a_i}=x_i$ فرض می‌کنیم، در اینصورت نامساوی‌مفروض چنین می‌شود :

$$\sum_{j<j}x_ix_j<\frac{n-1}{2}\sum_{j=1}^{n}x_i^2$$

و یا $\sigma_2<\frac{n-1}{2}S_2$ و یا بالاخره $\sigma_2<\frac{n-1}{2}(\sigma_1^2-2\sigma_2)$. و نامساوی اخیر هم بلافاصله از نامساوی ۳۰۸ نتیجه می‌شود .

۳۱۱. این نامساوی بلافاصله از نامساوی ۳۰۸ نتیجه می‌شود .

۳۲۱. به‌ترتیب داریم :

$$x^3+y^3+z^3+t^3-3xyz-3xyt-3xzt-3yzt=$$
$$=S_3--3\sigma_3=(\sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-3\sigma_3=\sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2=$$
$$=\sigma_1(\sigma_1{}^2-3\sigma_2)=\sigma_1(S_2-\sigma_2)=(x+y+z+t)(x^2+y^2+$$
$$+z^2+t^2-xy-xz-xt-yz-yt-zt)$$

۳۱۳. فرض می‌کنیم : $t=-x-y-z$. در اینصورت خواهیم داشت : $\sigma_1=x+y+z+t=0$ وکثیرالجملهٔ مفروض به صورت زیر درمی‌آید :

$$(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}=-t^{2n+1}-$$
$$-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}=-S_{2n+1}\,;$$
$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=-t^3-x^3-y^3-z^3=-S_3=$$
$$=-(\sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)=-3\sigma_3$$

(زیرا $\sigma_1=0$ است) . به این ترتیب باید ثابت‌کنیم‌که مجموع قوای متشابه S_{2n+1} به‌ازاء $\sigma_1=0$ بر σ_3 قابل‌قسمت‌است . چون $\sigma_1=0$ است، بنابراین مجموع قوای S_{2n+1} برحسب σ_2 و σ_3 و σ_4 قابل بیان است و واضح است‌که هریك ازجملات این بیان باید شامل σ_3 باشد، زیرا S_{2n+1} (نسبت به x و y و z و t) از درجهٔ فرد است و σ_2 و σ_4 دارای توان زوج هستند. بنابراین کثیرالجملهٔ S_{2n+1} بر σ_3 قابل قسمت است .

۳۱۴. عبارت سمت چپ این معادله نسبت به a و b و c و x متقارن است و به سادگی به صورت زیر درمی‌آید :

$$(\sigma_1-a)(\sigma_1-b)(\sigma_1-c)(\sigma_1-x)-\sigma_4=0$$

ویا :

$$(\sigma_1{}^4-\sigma_1{}^4+\sigma_1{}^2\sigma_2-\sigma_1\sigma_3+\sigma_4)-\sigma_4=0$$

در نتیجه معادلهٔ مفروض به صورت $\sigma_1{}^2\sigma_2-\sigma_1\sigma_3=0$ درمی‌آید و ازآنجا :

$$\sigma_1(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)=0$$

که اگر دوباره برحسب a و b و c و x بنویسیم . به معادلهٔ زیر می‌رسیم :

$$(a+b+c+x)[(a+b+c+x)(ab+ac+bc+ax+$$
$$+bx+cx)-(abc+abx+acx+bcx]=0$$

اگر ساده‌ترین عبارتهای متقارن را نسبت به a و b و c با τ_1 و τ_2 و τ_3 نشان دهیم ، معادلهٔ مفروض چنین می‌شود :

$$(\tau_1+x)[\tau_1x^2+\tau_1^2x+(\tau_1\tau_2-\tau_3)]=0$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$x_1=-\tau_1\ ;\ x_{2,3}=\frac{-\tau_1^2\pm\sqrt{\tau_1^4-4\tau_1(\tau_1\tau_2-\tau_3)}}{2\tau_1}=$$
$$=-\frac{\tau_1}{2}\pm\frac{1}{2\tau_1}\sqrt{S_4-2\tau_2^2}$$

(به جدول صفحهٔ ۷۴ مراجعه‌کنید) . اگر جوابها را برحسب a و b و c بنویسیم خواهیم داشت :

$$x_1=-(a+b+c)$$

$$x_{2,3}=-\frac{a+b+c}{2}\pm$$
$$\pm\frac{1}{2(a+b+c)}\sqrt{a^4+b^4+c^4-2(ab+ac+bc)}$$

۳۱۵. از نامساوی زیر استفاده می‌کنیم :

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)>n^2$$

(تمرین ۱۱۳ را به بینید). اگر سمت چپ این‌نامساوی‌را بیك مخرج تبدیل کنیم $\sigma_1.\frac{n-1}{\sigma_n}>n^2$ بدست می‌آید که همان نامساوی حکم است .

متذکر می‌شویم‌که نامساوی مفروض به ازاء $n=2$ به صورت $\sigma_1^2>4\sigma_2$

درمی‌آید (صفحهٔ ۴۷ را به‌بینید) و به ازاء $n=3$ به $\sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3$ تبدیل می‌شود (مثال ۲ صفحهٔ ۱۱۳) .

۳۱۶. فرض می‌کنیم :

$$y_1=\frac{\sigma_1}{\sigma_1-x_1}\ ,\ y_2=\frac{\sigma_1}{\sigma_1-x_2}\ ,\ \ldots\ ,\ y_n=\frac{\sigma_1}{\sigma_1-x_n}$$

در اینصورت داریم :

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}=\frac{\sigma_1-x_1}{\sigma_1}+\frac{\sigma_1-x_2}{\sigma_1}+\cdots+\frac{\sigma_1-x_n}{\sigma_1}=$$

$$=n-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{\sigma_1}=n-1$$

و نامساوی :

$$(y_1+y_2+\cdots+y_n)\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}\right)\geqslant n^2$$

(تمرین ۱۱۳ صفحهٔ ۵۰ را به بینید) در اینجا به صورت زیر درمی‌آید :

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1-x_1}+\frac{\sigma_1}{\sigma_1-x_2}+\cdots+\frac{\sigma_1}{\sigma_1-x_n}\right)(n-1)\geqslant n^2$$

که از آنجا نامساوی حکم به‌سادگی حاصل می‌شود.

۳۱۷. اگر تعداد جملاتی که درعبارت $\sigma_k=O(x_1x_2\cdots x_k)$ وجود دارد ، مساوی m بگیریم، داریم : $m=C_n^k$. این‌جملات را به y_1، y_2، ... و y_m نشان می‌دهیم (که در آن $m=C_n^k$ است) . در اینصورت به سادگی معلوم می‌شود کـه جملات σ_{n-k} عبارتند از $\frac{\sigma_n}{y_1}$ ، $\frac{\sigma_n}{y_2}$، ... و $\frac{\sigma_n}{y_n}$ یعنی :

$$\frac{\sigma_n}{y_1}+\frac{\sigma_n}{y_2}+\cdots+\frac{\sigma_n}{y_n}=\sigma_{n-k}$$

و یا :

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}=\frac{\sigma_{n-k}}{\sigma_n}$$

و نامساوی : $(y_1+y_2+\cdots+y_m)(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_m})>m^2$

(تمرین ۱۱۳) ، بصورت زیر که همان نامساوی حکم است ، درمی‌آید :

$$\sigma_k \frac{\sigma_{n-k}}{\sigma_n}>\left(C_n^k\right)^2$$

صفحهٔ ۱۷۹

۳۱۸. با بیان‌عبارتهای سمت‌چپ تساویها برحسب σ_1 و σ_2 و σ_3 و σ_4، دستگاه کمکی زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases}\sigma_1=a\\ \sigma_1^2-2\sigma_2=a^2\\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=a^3\\ \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4=a^4\end{cases}$$

از آنجا به سادگی بدست می‌آید :

$$\sigma_1=a \text{ و } \sigma_2=0 ،\ \sigma_3=0 ،\ \sigma_4=0$$

بنابراین برای‌حل‌دستگاه مفروض کافی‌است‌معادلهٔ درجه چهارم زیرراحل‌کنیم:

$$u^4-au^3=0$$

ریشه‌های این معادله چنین است :

$$u_1=a ،\ u_2=u_3=u_4=0$$

بنابراین ریشه‌های دستگاه اصلی عبارتست از :

$$x=a ،\ y=z=t=0$$

و سه جواب دیگر که از تبدیل این جوابها نسبت به x و y و z و t بدست می‌آید (درحقیقت ازتبدیل این‌جواب ، ۲۴ جواب بدست می‌آید. منتها بین آنها تنها ۴ جواب متمایز وجود خواهد داشت) .

۳۱۹. دستگاه مفروض به این صورت است :

$$S_1 = a \text{ ، } S_2 = a^2 \text{ ، } \dots \text{ ، } S_n = a^n$$

ثابت می‌کنیم که دراینصورت $\sigma_1 = a$ و $\sigma_2 = \sigma_3 = \dots = \sigma_n = 0$ خواهد بود . در حقیقت از روابط :

$$\sigma_1 = S_1 = a$$

$$S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a^2$$

نتیجه می‌شود که $\sigma_2 = 0$ است . فرض می‌کنیم که ثابت کرده باشیم $\sigma_1 = a$ و $\sigma_2 = \sigma_3 = \dots = \sigma_{k-1} = 0$ $(k<n)$ ، در اینصورت از معادلهٔ $S_k = a^k$ بدست می‌آید (رابطهٔ ۱۳ صفحهٔ ۱۷۰) :

$$\sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \sigma_3 S_{k-3} - \dots + (-1)^{k-2}\sigma_{k-1}S_1 +$$
$$+ (-1)^{k-1} k\sigma_k = a^k$$

و یا :

$$\sigma_1 S_{k-1} + (-1)^{k-1} k\sigma_k = a^k$$

و چون $S_{k-1} = a^{k-1}$ و $\sigma_1 = a$ است ، می‌شود :

$$(-1)^{k-1} k\sigma_k = 0$$

و از آنجا $\sigma_k = 0$ می‌شود . به این ترتیب باروش استقراء ریاضی ثابت شد :

$$\sigma_1 = a \text{ ، } \sigma_2 = \sigma_3 = \dots = \sigma_n = 0$$

بنابراین برای حل دستگاه مفروض باید معادلهٔ درجه n ام زیر را حل کنیم :

$$u^n - au^{n-1} = 0$$

که از آنجا بدست می‌آید :

$$u_1 = a \text{ و } u_2 = u_3 = \dots = 0$$

و ریشه‌های دستگاه اصلی عبارتند از :

$$x_1 = a \text{ ، } x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$$

و همهٔ جوابهای دیگری که از تبدیل آن بدست می‌آید .

۳۲۰. به عنوان دستگاه کمکی داریم :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 9 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 1 \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 = 33 \end{cases}$$

که جوابهای آن چنین است :

$$\sigma_1 = 1 ، \sigma_2 = -4 ، \sigma_3 = -4 ، \sigma_4 = 0$$

معادلهٔ درجه چهارم زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$u^4 - u^3 - 4u^2 + 4u = 0$$

که ریشه‌های آن چنین است :

$$u_1 = 0 ، u_2 = 1 ، u_3 = 2 ، u_4 = -2$$

بنابراین دستگاه اصلی ۲۴ جواب داردکه از تبدیل جوابهای زیر نسبت به مجهولات بدست می‌آید :

$$x = 0 ، y = 1 ، z = 2 ، t = -2$$

صفحهٔ ۱۸۵

۳۲۱. چون کثیرالجملهٔ مفروض نسبت به x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 متقارن و از درجهٔ ششم است ، باید ریشه‌های صحیح و غیرمنفی معادلهٔ زیر را بدست آوریم :

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 6$$

این ریشه‌ها ده‌تاست :

k_1	k_2	k_3	k_4	k_1	k_2	k_3	k_4
۶	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۰
۴	۱	۰	۰	۰	۳	۰	۰
۳	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۲	۲	۰	۰	۰	۰	۲	۰
۲	۰	۰	۱				

بنابراین باید داشته باشیم :

$$(x_۱+x_۲)(x_۱+x_۳)(x_۱+x_۴)(x_۲+x_۳)(x_۲+x_۴)(x_۳+x_۴)=$$
$$=A\sigma_۱^۶+B\sigma_۱^۴\sigma_۲+C\sigma_۱^۳\sigma_۳+D\sigma_۱^۲\sigma_۲^۲+E\sigma_۱^۲\sigma_۴+F\sigma_۱\sigma_۲\sigma_۳+$$
$$+G\sigma_۲^۳+H\sigma_۲\sigma_۴+K\sigma_۳^۲$$

که درآن ضرایب A، B، ...، K نامعین‌اند . برای تعیین این ضرایب از روش مقادیرخاص استفاده می‌کنیم . بجای $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ در دو طرف تساوی رابطهٔ فوق به‌ترتیب مقادیری‌راکه درجدول زیر نوشته‌ایم، قرارمی‌دهیم (برای اینکه‌کار به‌سادگی انجام‌گیرد، مقادیرمتناظر $\sigma_۱$، $\sigma_۲$، $\sigma_۳$، $\sigma_۴$ راهم‌در جدول ذکرکرده‌ایم) :

$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$x_۴$	$\sigma_۱$	$\sigma_۲$	$\sigma_۳$	$\sigma_۴$
۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰
۰	۰	۱	−۱	۰	−۱	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۲	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۲	۳	۲	۰	۰
۰	۱	۱	−۲	۰	−۳	−۲	۰
۰	−۲	۳	۶	۷	۰	−۳۶	۰
۰	۱	۱	۱	۳	۳	۱	۰
۱	۱	−۱	−۱	۰	−۲	۰	۱
۱	۱	۱	۱	۴	۶	۴	۱

ودرنتیجه دستگاه روابط زیررا بدست می‌آوریم :

$۰=A$ ،

$۰=-G$ ،

$۰=۲^۶A+۱۶B+۴D+G$ ،

$$\circ = ۳^۶A + ۱۶۲B + ۳۶D + ۸G \text{ ،}$$

$$-۴ = -۲۷G + ۴K \text{ ،}$$

$$-۳۶^۲ = ۷^۶A - ۷^۳ \times ۳۶C + ۳۶^۲K \text{ ،}$$

$$۸ = ۳^۶A + ۳^۵B + ۳^۳C + ۳^۴D + ۹F + ۳^۳G + K \text{ ،}$$

$$\circ = -۸G - ۲H$$

$$۶۴ = ۴^۶A + ۶ \times ۴^۴B + ۴^۴C + ۴^۲ \times ۶^۲D + ۱۶E +$$
$$+ ۶ \times ۱۶F + ۶^۳G + ۶H + ۱۶K.$$

از این دستگاه به سادگی می‌توان مقادیرزیر رابدست‌آورد :

$A = \circ$ ، $G = \circ$ ، $B = \circ$ ، $D = \circ$ ، $K = -۱$ ، $C = \circ$ ،
$F = ۱$ ، $H = \circ$ ، $E = -۱$

وبالاخره خواهیم داشت :

$$(x_۱ + x_۲)(x_۱ + x_۳)(x_۱ + x_۴)(x_۲ + x_۳)(x_۲ + x_۴)(x_۳ + x_۴) =$$
$$= -\sigma_۱^۲\sigma_۴ + \sigma_۱\sigma_۲\sigma_۳ - \sigma_۳^۲$$

متذکر می‌شویم که حل این‌تمرین وتمرین بعدرا می‌توان بااستفاده ازنکاتی‌که در بندهای ۴۰ و۴۱ گفته‌ایم ، ساده‌تر انجام داد .

۳۲۲. شبیه تمرین قبل باید باکمك مقادیر خاص برای $x_۱$ ، $x_۲$ ، $x_۳$ و$x_۴$ ، ضرایب نامعین را درتساوی زیر پیداکرد :

$$(x_۱x_۲ + x_۳x_۴)(x_۱x_۳ + x_۲x_۴)(x_۱x_۴ + x_۲x_۳) = A\sigma_۱^۶ +$$
$$+ B\sigma_۱^۴\sigma_۲ + C\sigma_۱^۳\sigma_۳ + D\sigma_۱^۲\sigma_۲^۲ + E\sigma_۱^۲\sigma_۴ + F\sigma_۱\sigma_۲\sigma_۳ + G\sigma_۲^۳ +$$
$$+ H\sigma_۲\sigma_۴ + K\sigma_۳^۲$$

اگر از همان مقادیر خاص تمرین قبل استفاده‌کنیم ، دستگاه روابط زیر را خواهیم داشت :

$$\circ = A \text{ ،}$$

$$\circ = -G \text{ ،}$$

$$\circ = ۲^۶A + ۱۶B + ۴D + G \text{ ،}$$

$$0=3^6A+162B+36D+8G,$$
$$4=-27G+4K,$$
$$36^2=7^6A-7^3\times 36C+36^2K,$$
$$1=3^6A+3^5B+3^3C+3^4D+9F+3^3G+K,$$
$$8=-8G-2H$$
$$8=4^6A+6\times 4^4B+4^4C+4^2\times 6^2D+16E+6\times 16F+$$
$$+6^3G+6H+16K.$$

و ازآنجا به‌سادگی بدست می‌آید :

$$A=0,\ G=0,\ B=0,\ D=0,\ K=1,\ C=0,$$
$$F=0,\ H=-4,\ E=1$$

وبالاخره خواهیم داشت :

$$(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)=$$
$$=\sigma_1^2\sigma_4-4\sigma_2\sigma_4+\sigma_3^2.$$

۳۲۳. مقدار سمت راست تساوی چنین است :

$$3\sigma_1S_2=3\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)=3\sigma_1^3-6\sigma_1\sigma_2$$

ومقدار سمت چپ‌تساوی را با روش ضرایب نامعین بدست می‌آوریم؛ داریم :

$$(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3+(a+d)^3+(b+d)^3+$$
$$+(c+d)^3=A\sigma_1^3+B\sigma_1\sigma_2+C\sigma_3$$

مقادیرخاص زیررا قرار می‌دهیم :

a	b	c	d	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۲	۱	۰	۰
۰	۱	۱	−۲	۰	−۳	−۲	۰

بدست می‌آید :

$$\begin{cases} ۳ = A , \\ ۱۲ = ۸A + ۲B, \\ ۰ = -۲c \end{cases}$$

وبنابراین $A = ۳$ ، $B = -۶$ و $C = ۰$ بدست می‌آید ، یعنی سمت چپ تساوی حکم مساوی $۳\sigma_۱^۳ - ۶\sigma_۱\sigma_۲$ می‌شود .

۳۲۴. سمت راست تساوی مساوی $۶۰\sigma_۱\sigma_۴$ است ومقدار سمت‌چپ را با روش ضرایب نامعین پیدا می‌کنیم .

داریم :

$$(a+b+c+d)^۵ - [(b+c+d)^۵ + (a+c+d)^۵ + \\ + (a+b+d)^۵ + (a+b+c)^۵] + [(b+c)^۵ + (a+d)^۵ + \\ + (a+b)^۵ + (c+d)^۵ + (b+d)^۵ + (a+c)^۵] - \\ - (a^۵ + b^۵ + c^۵ + d^۵) = A\sigma_۱^۵ + B\sigma_۱^۳\sigma_۲ + C\sigma_۱^۲\sigma_۳ + \\ + D\sigma_۱\sigma_۲^۲ + E\sigma_۱\sigma_۴ + F\sigma_۲\sigma_۳ .$$

مقادیر زیررا درآن قرار می‌دهیم :

a	b	c	d	$\sigma_۱$	$\sigma_۲$	$\sigma_۳$	$\sigma_۴$
۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱	۲	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۲	۳	۲	۰	۰
۰	−۲	۳	۶	۷	۰	−۳۶	۰
۰	۱	۱	۱	۳	۳	۱	۰
۱	۱	۱	۱	۴	۶	۴	۱

دراینصورت خواهیم داشت :

$۰ = A$

$$۰ = ۳۲A + ۸B + ۲D \text{ ،}$$

$$۰ = ۳^۵A + ۵۴B + ۱۲D \text{ ،}$$

$$۰ = ۷^۵A - ۳۶ \times ۷^۲c \text{ ،}$$

$$۰ = ۳^۵A + ۳^۴B + ۳^۲C + ۳^۳D + ۳F \text{ ،}$$

$$۲۴۰ = ۴^۵A + ۶ \times ۴^۳B + ۴^۳C + ۴ \times ۶^۲D + ۴E + ۲۴F$$

و بنابراین :

$$A = ۰ \text{ ، } B = ۰ \text{ ، } C = ۰ \text{ ، } D = ۰ \text{ ، } E = ۶۰ \text{ ، } F = ۰$$

یعنی سمت‌چپ تساوی حکم هم‌مساوی $۶۰\sigma_۱\sigma_۴$ است .

صفحهٔ ۱۹۸

۳۲۵. این کثیرالجمله متقارن‌منفی وازدرجهٔ‌ششم‌است. چون کثیرالجملهٔ $T(a ، b ، c ، d)$ هم ازدرجهٔ ششم است، کثیرالجملهٔ مفروض باید به‌صورت: $k.T(a ، b ، c ، d)$ باشد که در آن k مقداری ثابت است . اگر فرض‌کنیم : $a = ۰$ ، $b = ۱$ ، $c = ۲$ و $d = ۳$، مقدارکثیرالجملهٔ مفروض مساوی -۱۲ و مقدارکثیرالجملهٔ $T(a ، b ، c ، d)$ مساوی ۱۲ می‌شود . یعنی $۱۲k = -۱۲$ واز آنجا $k = -۱$ بدست‌می‌آید وصورت‌تجزیهٔ‌عبارت مفروض چنین است :

$$-(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

۳۲۶. اگر شبیه تمرین قبل استدلال کنیم، بدست می‌آید :

$$۱۹۲ = ۱۲k \Longrightarrow k = ۱۶$$

وبنابراین صورت تجزیهٔ‌کثیرالجملهٔ مفروض چنین می‌شود :

$$۱۶(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

۳۲۷. شبیه دوتمرین قبل‌عمل می‌کنیم $۱۲k = ۱۲$ یعنی $k = ۱$ بدست می‌آید وجواب چنین است :

$$(x-y)(x-z)(x-t)(y-z)(y-t)(z-t)$$

۳۲۸. این کثیرالجمله ، متقارن منفی وازدرجهٔ هفتم است ، بنـابراین بایدچنین باشد :

$$k\sigma_1 T(x، y، z، t)$$

فرض می‌کنیم: $x=۰$ ، $y=۱$ ، $z=۲$ و $t=۳$. دراینصورت کثیرالجملهٔ مفروض مساوی ۷۲ — و$\sigma_1 T(x، y، z، t)$ مساوی ۷۲ می‌شود وبنـابراین $-۷۲=۷۲k$ یعنی ۱ — $=k$ می‌شود وتجزیهٔ عبارت مفروض چنین می‌شود:

$$-(x+y+z+t)(x-y)(x-z)(x-t)(y-z)(y-t)(z-t)$$

۳۲۹. کثیرالجملهٔ مفروض متقارن‌منفی و ازدرجهٔ هشتم استوبنابراین باید به‌صورت زیر باشد :

$$(k\sigma_1^۲+l\sigma_۲)T(x، y، z، t)$$

برای پیداکردن ضرایب k و l ابتدا فرض می‌کنیم $x=۰$ ، $y=۱$ ، $z=۲$ و$t=۳$ وسپس $x=-۱$ ، $y=۰$ ، $z=۱$ و $t=۲$. روابطزیر بدست می‌آید :

$$۱۳۲=۱۲(۳۶k+۱۱l) \text{ ، } -۱۲=۱۲(۴k-l)$$

که ازآنجا به سادگی $k=۰$ و $l=۱$ بدست می‌آید وتجزیهٔ عبارت‌مفروض چنین می‌شود :

$$(xy+xz+xt+yz+yt+zt)(x-y)(x-z)(x-t)\times$$
$$\times(y-z)(y-t)(z-t).$$

۳۳۰. سمت‌چپ تساوی ، کثیرالجمله‌ای متقارن‌منفی واز درجهٔ چهارم است وچون بایدبر $T(x، y، z، t)$ قابل‌قسمت باشد، برابرصفرمی‌شود.

۳۳۱. سمت چپ‌تساوی ،کثیرالجمله‌ای متقارن منفی و از درجهٔ هفتم است وبنابراین به‌صورت زیر است :

$$k.\sigma_1.T(a، b، c، d)$$

برای اینکه اتحاد ثابت شود، کافی است ثابت کنیم که $k = 0$ است. برای این منظور باید تحقیق کنید که به ازاء مقادیر مختلفی از x، y، z و t (با شرط $\sigma_1 \neq 0$)، عبارت مفروض مساوی صفر می‌شود. مقادیر $a = 1$، $b = 0$، $c = 1$ و $d = 2$ را قرار می‌دهیم. و به سادگی روشن می‌شود که به‌ازاء این مقادیر سمت چپ تساوی مفروض مساوی صفر است.

۳۳۲. اگر بیك مخرج تحویل کنیم، کسری بدست می‌آید که صورت آن چنین است:

$$(b-c)(b-d)(c-d)-(a-c)(a-d)(c-d)+$$
$$+(a-b)(a-d)(b-d)-(a-b)(a-c)(b-c)$$

که کثیرالجمله‌ای متقارن‌منفی وازدرجهٔ سوم‌است وچون بایدبر $T(a, b, c, d)$ که از درجهٔ ششم است، قابل‌قسمت باشد، مساوی صفر می‌شود. یعنی حاصل عبارت مفروض هم مساوی صفر است.

۳۳۳. اگر بیك مخرج تبدیل کنیم، کسری بدست می‌آید که صورت‌آن کثیرالجمله‌ای متقارن منفی وازدرجهٔ چهارم می‌شود وبنابراین بایدمساوی‌صفر باشد، یعنی حاصل عبارت مفروض هم مساوی صفر است.

۳۳۴. اگر شبیه دوتمرین قبل عمل کنیم، روشن می‌شود که حاصل‌این عبارت هم مساوی صفر است.

۳۳۵. باتبدیل بیك‌مخرج، به کسری‌می‌رسیم که مخرج آن $T(a, b, c, d)$ وصورت‌آن چنین است:

$$a^3(a-c)(b-d)(c-d)-b^3(a-c)(a-d)(c-d)+$$
$$+c^3(a-b)(a-d)(b-d)-d^3(a-b)(a-c)(b-c)$$

این کثیرالجمله هم مساوی $T(a, b, c, d)$ است (تمرین ۳۲۵ را به‌بینید) و بنابراین حاصل‌عبارت مفروض مساوی واحد است.

۳۳۶. اگر بیك مخرج تحویل کنیم ، به کسری می‌رسیم که مخرج آن $T(a, b, c, d)$ وصورت آن چنین است :

$$a^4(b-c)(b-d)(c-d)-b^4(a-c)(a-d)(c-d)+$$
$$+c^4(a-b)(a-d)(b-d)-d^4(a-b)(a-c)(b-c).$$

که کثیرالجمله‌ای متقارن منفی واز درجهٔ هفتم است وبنابراین باید به صورت $k\sigma_1 . T(a, b, c, d)$ باشد .

برای پیدا کردن ضریب ثابت k فرض می کنیم : $a=-1$ ، $b=0$ ، $c=1$ و $d=2$ که به سادگی $k=1$ بدست می آید . و بنابراین حاصل عبارت مفروض $\sigma_1=a+b+c+d$ می باشد .

۳۳۷. اگر کسرها را بیك مخرج تحویل کنیم ، به کسری می‌رسیم که مخرج آن $T(a, b, c, d)$ وصورت آن چنین است :

$$a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)-a^2b^2d^2(a-b)(a-d)\times$$
$$\times(b-d)+a^2c^2d^2(a-c)(a-d)(c-d)-$$
$$-b^2c^2d^2(b-c)(b-d)(c-d).$$

که عبارتی متقارن منفی واز درجهٔ ۹ است و باید به‌صورت زیرباشد :

$$(k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3)T(a, b, c, d)$$

برای پیدا کردن ضرایب ثابت k ، l و m ازمقادیرخاص زیراستفاده می کنیم:

a	b	c	d	σ_1	σ_2	σ_3	$T(a, b, c, d)$
-3	۰	۱	۲	۰	-7	-6	۱۲۰
۰	۱	۲	۳	۶	۱۱	۶	۱۲
-1	۰	۱	۲	۲	-1	-2	۱۲

و بنابراین روابط زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} -720=-720m, \\ 72=12(216k+66l+6m), \\ -24=12(8k-2l-2m) \end{cases}$$

که از آنجا به سادگی بدست می‌آید :

$$m=1, k=l=0$$

و به‌این ترتیب صورت کسر چنین می‌شود :

$$\sigma_3 . T(a,b,c,d)$$

و حاصل عبارت مفروض برابر است با :

$$\sigma_3=abc+abd+acd+bcd$$

صفحهٔ ۲۱۵

۳۳۸. باقیماندهٔ موردنظر با قراردادن مقدار $x=-a$ در کثیرالجملهٔ مفروض بدست می‌آید ، یعنی :

$$(-a)^{2n}+a^{2n}=a^{2n}+a^{2n}=2a^{2n}$$

۳۳۹. باتوجه به تمرین ۲۹۹ داریم :

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(x+z)(y+z)$$

بنابراین باید ثابت کنیم که کثیرالجملهٔ :

$$f(x,y,z)=(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}$$

بر $x+y$ و $x+z$ و $y+z$ قابل قسمت است . اثبات برای هر سه حالت شبیه یکدیگر است . مثلا ثابت می‌کنیم که $f(x,y,z)$ بر $x+y$ قابل قسمت است. برای این‌منظور باید ثابت کنیم که $f(x,y,z)$ (که به‌عنوان کثیرالجمله‌ای نسبت به x در نظر گرفته می‌شود) به‌ازاء $x=-y$ برابر صفر است . داریم:

$$f(-y,y,z)=(-y+y+z)^{2n+1}-(-y)^{2n+1}-y^{2n+1}-$$
$$-z_{2n}{}^{+1}=z^{2n+1}+y^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}=0$$

صفحهٔ ۲۱۹

۳۴۰. مقسوم علیه‌های مقدار ثابت چنین است :

۱۲ − ، ۱۲ ، ۶ − ، ۶ ، ۴ − ، ۴ ، ۳ − ، ۳ ، ۲ − ، ۲ ، ۱ − ، ۱

$k = 1$ می گیریم و عددهای $1 - b_j$ را تشکیل می‌دهیم (b_j مقسوم‌علیه‌هائی است که نوشته‌ایم) . عددهای زیر بدست می‌آید :

۱۳ − ، ۱۱ ، ۷ − ، ۵ ، ۵ − ، ۳ ، ۴ − ، ۲ ، ۳ − ، ۱ ، ۲ − ، ۰

چون $f(1) = 24$ است و عدد ۲۴ بر ۰ و ۵ و ۷ − و ۱۱ و ۱۳ − قابل‌قسمت نیست ، از مقسوم‌علیه‌های اولیه ، عددهای زیر باقی می‌ماند :

۴ ، ۳ − ، ۳ ، ۲ − ، ۲ ، ۱ −

با آزمایش معلوم می‌شود که عددهای ۲ و ۳ − ریشه‌های کثیرالجملهٔ مفروض‌اند و بنابراین طبق قضیهٔ بزو ، این عبارت بر $(x-2)(x+3)$ قابل قسمت است و ازآنجا بدست می‌آید :

$$x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 = (x-2)(x+3)(x^2 - 5x - 2)$$

که با حل معادلهٔ $x^2 - 5x - 2 = 0$ ، ریشه‌های کثیرالجملهٔ مفروض بدست می‌آید :

$$x_1 = 2 \ ,\ x_2 = -3 \ ,\ x_{3,4} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$$

۳۴۱. مقسوم‌علیه‌های مقدار ثابت ۱۲ − چنین است :

۱۲ − ، ۱۲ ، ۶ − ، ۶ ، ۴ − ، ۴ ، ۳ − ، ۳ ، ۲ − ، ۲ ، ۱ −

$k = 1$ می گیریم و عددهای $1 - b_j$ را تشکیل می‌دهیم :

۱۳ − ، ۱۱ ، ۷ − ، ۵ ، ۵ − ، ۳ ، ۴ − ، ۲ ، ۳ − ، ۱ ، ۲ − ، ۰

$f(1) = -24$ می‌شود که بر ۰ و ۵ و ۷ − و ۱۱ و ۱۳ − قابل‌قسمت نیست و بنابراین عددهای زیر برای ما باقی می‌ماند :

۴ ، ۳ − ، ۲ ، ۲ − ، ۲ ، ۱ −

که با آزمایش معلوم می‌شود عددهای زیر ریشه‌های معادله‌اند :

$$x_1 = -۱ \text{ ، } x_2 = ۲ \text{ ، } x_3 = -۲ \text{ ، } x_4 = -۳$$

۳۴۲. مقسوم‌علیه‌های ۱۸ را می‌نویسیم :

$$\pm ۱ \text{ ، } \pm ۲ \text{ ، } \pm ۳ \text{ ، } \pm ۶ \text{ ، } \pm ۹ \text{ ، } \pm ۱۸$$

$k = ۲$ می‌گیریم و عددهای $b_j - ۲$ را تشکیل می‌دهیم، عددهای زیر بدست می‌آید :

$$-۱ \text{ ، } -۳ \text{ ، } ۰ \text{ ، } -۴ \text{ ، } ۱ \text{ ، } -۵ \text{ ، } ۴ \text{ ، } -۸ \text{ ، } ۷ \text{ ، } -۱۱ \text{ ، } ۱۶ \text{ ، } -۲۰$$

از طرف دیگر $f(۲) = -۶۰$ می‌شود و عدد ۶۰ برعددهای ۰ و ۸− و ۷ و ۱۱− و ۱۶ قابل قسمت نیست ، بنابراین مقسوم‌علیه‌های زیر باقی می‌ماند :

$$\pm ۱ \text{ ، } ۲ \text{ ، } \pm ۳ \text{ ، } -۶ \text{ ، } \pm ۱۸$$

که اگر درکثیرالجمله قرار دهیم ، عددهای زیر به عنوان ریشه‌های معادله بدست می‌آید :

$$x_1 = ۱ \text{ ، } x_2 = -۱ \text{ ، } x_3 = -۲ \text{ ، } x_4 = ۳ \text{ ، } x_5 = -۳$$

۳۴۳. مقسوم‌علیه‌های مقدار ثابت را می‌نویسیم :

$$\pm ۱ \text{ ، } \pm ۲ \text{ ، } \pm ۳ \text{ ، } \pm ۶$$

اگر $k = ۱$ فرض کنیم ، عددهای $b_j - ۱$ چنین می‌شود :

$$۰ \text{ ، } -۲ \text{ ، } ۱ \text{ ، } -۳ \text{ ، } ۲ \text{ ، } -۴ \text{ ، } ۵ \text{ ، } -۷$$

و $f(۱) = -۲۴$ برعددهای ۰و۵ و ۷− قابل‌قسمت نیست ، مقسوم‌علیه‌های زیر باقی می‌ماند :

$$\pm ۱ \text{ ، } \pm ۲ \text{ ، } \pm ۳$$

حالا اگر $k = -۲$ بگیریم و عددهای $b_j + ۲$ را تشکیل دهیم :

$$\pm ۱ \text{ ، } ۴ \text{ ، } ۰ \text{ ، } ۵ \text{ ، } -۱$$

و $f(-۲) = ۱۲$ بر ۰ و ۵ قابل‌قسمت نیست و تنها عددهای :

$$\pm ۱ \text{ ، } ۲ \text{ ، } -۳$$

باقی می‌ماند که به سادگی دیده می‌شود هر سه آنها ریشه‌های کثیرالجمله‌اند و بنابراین طبق قضیهٔ بزو ، عبارت مفروض بر $(x+1)(x-2)(x+3)$ قابل‌قسمت است و داریم :

$$x^5+3x^4-2x^3-9x^2-11x-6=$$
$$=(x+1)(x-2)(x+3)(x^2+x+1)$$

که باحل‌معادلهٔ $x^2+x+1=0$ دوجواب دیگر معادله هم حساب می‌شود:

$$x_1=-1 \text{ ، } x_2=2 \text{ ، } x_3=-3 \text{ ، } x_{4,5}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳۴۴. مقسوم‌علیه‌های مقدار ثابت ۶ چنین‌اند :

$$1 \text{، } -1 \text{، } 2 \text{، } -2 \text{، } 3 \text{، } -3 \text{، } 6 \text{، } -6$$

آزمایش معلوم می‌کند که ۱و۱ــ و ۲و۳ــ ریشه‌های کثیرالجمله‌اندوبنابراین کثیرالجملهٔ مفروض بر $(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$ قابل‌قسمت است و داریم :

$$x^6-x^5-8x^4+14x^3+x^2-13x+6=$$
$$=(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)(x^2-2x+1)$$

و دیگر به سادگی ریشه‌های کثیرالجملهٔ مفروض معین می‌شود :

$$x_1=x_2=x_3=1 \text{ ، } x_4=-1 \text{ ، } x_5=2 \text{ ، } x_6=-3$$

۳۴۵. کثیرالجملهٔ مفروض را در ۴ ضرب و $y=2x$ می‌گیریم ، کثیرالجملهٔ زیر بدست می‌آید :

$$y^4+4y^3-y^2-16y-12$$

که ریشه‌های آن چنین است :

$$y_1=-1 \text{ ، } y_2=2 \text{ ، } y_3=-2 \text{ ، } y_4=-3$$

(تمرین ۳۴۱ را به بینید) . چون $x=\frac{y}{2}$ است ، ریشه‌های کثیرالجملهٔ اصلی چنین می‌شود :

$$x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=1,\ x_3=-1,\ x_4=-\frac{3}{2}$$

صفحهٔ ۲۲۲

۳۴۶. مقسوم‌علیه‌های صحیح و مثبت مقدار ثابت ۶۵ عبارتست از ۱ و ۵ و ۱۳ و ۶۵ . این مقسوم‌علیه‌ها را به صورت زیر می‌توان به مجموع دو-مربع کامل تبدیل کرد :

$$1=0^2+1^2,$$
$$5=2^2+1^2=1^2+2^2,$$
$$13=2^2+3^2=3^2+2^2,$$
$$65=1^2+8^2=4^2+7^2=7^2+4^2=8^2+1^2$$

بنابراین ریشه‌های صحیح (حقیقی یا موهـومی) کثیرالجملهٔ مفروض در بین عددهای زیر است :

$$1, -1, 5, -5, 13, -13, 65, -65, i, -i, 2+i, 2-i,$$
$$-2+i, -2-i, 1+2i, 1-2i, -1+2i, -1-2i, 2+3i,$$
$$2-3i, -2+3i, -2-3i, 3+2i, 3-2i, -3+2i,$$
$$-3-2i, 1+8i, 1-8i, -1+8i, -1-8i, 4-7i,$$
$$4+7i, -4+7i, -4-7i, 7+4i, 7-4i, -7+4i,$$
$$-7-4i, 8+i, 8-i, -8+i, -8-i.$$

برای اینکه قسمتی از این ۴۲ عدد را حذف کنیم ، $k=1$ فرض می‌کنیم ، $f(1)=40$ می‌شود . بنابراین از بین عددهای حقیقی α ، آنهائی می‌مانند که برای آنها $\alpha-1$ مقسوم‌علیهی از ۴۰ باشد و از عددهای موهومی $\alpha+\beta i$ آنهائی ریشهٔ احتمالی هستند که برای آنها $(1-\alpha)^2+\beta^2$ مقسوم‌علیهی از ۴۰ باشد . از آنجا عددهای زیر باقی می‌ماند:

$$-1, 5, i, -i, 2+i, 2-i, -2+i, -2-i, 1+2i,$$
$$1-2i, -1+2i, -1-2i, 2+3i, 2-3i, 3+2i, 3-2i,$$
$$-3+2i, -3-2i.$$

حالا $k=۲$ می‌گیریم که از آنجا $f(۲)=۲۹$ می‌شود و تنها عددهای زیر برای ما باقی می‌ماند:

$$۲+i،\ ۲-i،\ -۳+۲i،\ -۳-۲i$$

و با آزمایش معلوم می‌شود که این‌چهار عدد هم ریشه‌های کثیرالجملهٔ مفروض هستند .

۳۴۷. ریشه‌های احتمالی این کثیرالجمله شبیه تمرین قبل است ، $f(۲)=۶۲۵$ را تشکیل می‌دهیم ، عددهای زیر باقی می‌ماند·

$$۱،\ i،\ -i،\ ۲+i،\ ۲-i،\ ۱+۲i،\ ۱-۲i،\ -۲+۳i،\ -۲-۳i،$$
$$۳+۲i،\ ۳-۲i\ .$$

حالا $k=-۲$ و $f(-۲)=۵۸۵$ را در نظر می‌گیریم ، این عددها باقی می‌ماند :

$$۱،i،\ -i،\ ۱+۲i،\ ۱-۲i،\ -۲+۳i،\ -۲-۳i$$

عدد۱ ریشهٔ کثیرالجمله نیست وهر شش‌عدد دیگردر کثیرالجمله صدق‌می کنند.

۳۴۸. مقسوم‌علیه‌های مثبت و صحیح عدد ۶۰ چنین است :

$$۱،\ ۲،\ ۳،\ ۴،\ ۵،\ ۶،\ ۱۰،\ ۱۲،\ ۱۵،\ ۲۰،\ ۳۰،\ ۶۰$$

و از بین این عددها، آنهائی که به مجموع دو مربع کامل قابل تبدیل‌اند در نظر می‌گیریم :

$$۱=۰^۲+۱^۲$$
$$۲=۱^۲+۱^۲،$$
$$۴=۰^۲+۲^۲،$$
$$۵=۱^۲+۲^۲=۲^۲+۱^۲،$$
$$۱۰=۱^۲+۳^۲=۳^۲+۱^۲،$$
$$۲۰=۲^۲+۴^۲=۴^۲+۲^۲$$

بنابراین ریشه‌های صحیح معادلهٔ مفروض بین عددهای زیر است :

$$۱،\ -۱،\ ۲،\ -۲،\ ۳،\ -۳،\ ۴،\ -۴،\ ۵،\ -۵،\ ۶،\ -۶،\ ۱۰،$$
$$-۱۰،\ ۱۲،\ -۱۲،\ ۱۵،\ -۱۵،\ ۲۰،\ -۲۰،\ ۳۰،\ -۳۰،\ ۶۰،\ -$$

$-60,\ i,\ -i,\ 1+i,\ 1-i,\ -1+i,\ -1-i,\ 2i,\ -2i,\ 1+2i,$
$1-2i,\ -1+2i,\ -1-2i,\ 2+i,\ 2-i,\ -2+i,\ -2-i,$
$1+3i,\ 1-3i,\ -1+3i;\ -1-3i,\ 3+i,\ 3-i,\ -3+i,$
$-3-i,\ 2+4i,\ 2-4i,\ -2+4i,\ -2-4i,\ 4+2i,$
$4-2i,\ -4+2i,\ -4-2i\ .$

با درنظر گرفتن $f(1)=-30$ و $f(-1)=-68$ عددهای زیر برای ما باقی می‌ماند:

$-2,\ 3,\ -5,\ -i,\ -1+i,\ -1-i,\ -2+i,\ -2-i,$
$3+i,\ 3-i\ .$

و سپس اگر $k=2$ و $f(2)=-8$ را درنظر بگیریم؛ عددهای زیر را برای آزمایش خواهیم داشت:

$$-2,\ 3,\ 3+i,\ 3-i$$

و این عددها هم ریشه‌های معادله‌اند.

۳۴۹. $f(1)$ ، $f(-1)$ ، $f(2)$ و $f(-2)$ را تشکیل می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$f(1)=f(-1)=f(-2)=0$$

یعنی عددهای ۱ و ۱− و ۲− ریشه‌های معادله‌اند و بنابراین راه ساده اینست که کثیرالجملهٔ مفروض را بر $(x-1)(x+1)(x+2)$ تقسیم کنیم، بدست می‌آید:

$$x^5+5x^3+20x^2-6x-20=$$
$$=(x-1)(x+1)(x+2)(x^2-2x+10)$$

و دوجواب دیگر کثیرالجمله از حل معادلهٔ درجه دوم $x^2-2x+10=0$ بدست می‌آید و بنابراین ریشهٔ عبارات مفروض چنین است:

$$1,\ -1,\ -2,\ 1+3i,\ 1-3i$$

۳۵۰. مقسوم‌علیه‌های صحیح و مثبت مقدار ثابت چنین است:

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 16,\ 20,\ 40,\ 80$$

که به صورت زیر به مجموع دو مربع کامل تبدیل می‌شوند :

$$۱=۰^۲+۱^۲,$$
$$۲=۱^۲+۱^۲,$$
$$۴=۰^۲+۲^۲,$$
$$۵=۱^۲+۲^۲=۲^۲+۱^۲,$$
$$۸=۲^۲+۲^۲,$$
$$۱۰=۱^۲+۳^۲=۳^۲+۱^۲,$$
$$۱۶=۰^۲+۴^۲,$$
$$۲۰=۲^۲+۴^۲=۴^۲+۲^۲,$$
$$۴۰=۲^۲+۶^۲=۶^۲+۲^۲,$$
$$۸۰=۴^۲+۸^۲=۸^۲+۴^۲$$

بنابراین ریشه‌های احتمالی کثیرالجملهٔ مفروض چنین است :

$\pm۱,\ \pm۲,\ \pm۴,\ \pm۵,\ \pm۸,\ \pm۱۰,\ \pm۱۶,\ \pm۲۰,\ \pm۴۰,\ \pm۸۰,\ \pm i,\ ۱\pm i,\ -۱\pm i,\ \pm۲i,\ ۱\pm۲i,\ -۱\pm۲i,\ ۲\pm i,\ -۲\pm i,\ ۲\pm۲i,\ -۲\pm۲i,\ ۱\pm۳i,\ -۱\pm۳i,\ ۳\pm i,\ -۳\pm i,\ \pm۴i,\ ۲\pm۴i,\ -۲\pm۴i,\ ۴\pm۲i,\ -۴\pm۲i,\ ۲\pm۶i,\ -۲\pm۶i,\ ۶\pm۲i,\ -۶\pm۲i,\ ۴\pm۸i,\ -۴\pm۸i,\ ۸\pm۴i,\ -۸\pm۴i.$

با درنظر گرفتن $f(۳)=۲۵۰$ ، تنها عددهای زیر باقی میماند :

$۱,\ \pm۲,\ ۴,\ ۵,\ ۸,\ \pm i,\ ۱\pm i,\ ۲\pm i,\ ۲\pm۲i,\ -۱\pm۳i,\ ۳\pm i,\ \pm۴i,\ ۴\pm۲i\ .$

سپس با درنظر گرفتن $f(-۱)=-۲۳۴$ برای ما باقی می‌ماند :

$$۱,\ \pm۲,\ ۵,\ ۸,\ \pm i,\ ۲\pm۲i,\ -۱\pm۳i$$

محاسبه $f(۲)=۷۲$ و $f(-۲)=-۶۰۰$ بازهم تعداد عددها را کم می‌کند.

$$۱,\ ۸,\ ۲\pm۲i,\ -۱\pm۳i$$

۸ ریشهٔ کثیرالجمله نیست ، زیرا به ازاء $x=۸$ ، همهٔ جمله‌ها بجز مقدار ثابت بر ۳۲ قابل قسمت است و ۵ عدد :

$$۱,\ ۲\pm۲i,\ -۱\pm۳i$$

هم ریشه‌های کثیرالجمله‌اند .

پایان