تقریب و اختلال در مکانیک

مولف : حجت‌اله مظفری

مظفری، حجت‌ا...، ۱۳۶۴ـ
تقریب و اختلال در مکانیک / مؤلف حجت‌ا... مظفری. ــ تهران: خوشخوان، ۱۳۸۵.
V، ۲۵۱ ص. : مصور، جدول، نمودار.

ISBN 964-8601-63-1

فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیپا.
۱. فیزیک ــ راهنمای آموزشی (متوسطه). ۲. فیزیک ــ مسائل، تمرینها و غیره (متوسطه). ۳. المپیادها (فیزیک).
الف. عنوان.
۷ ت ۶ م / ۳۰ QC ۵۳۰ / ۰۷۶
کتابخانه ملی ایران م ۸۵ ـ ۶۹۹

انتشارات خوشخوان

تقریب و اختلال در مکانیک

ناشر: انتشارات خوشخوان
مؤلف: حجت‌ا... مظفری
حروف‌چین: نساء پورحسین
طرح جلد: علی عباسی
چاپ اول: بهار ۱۳۸۵
تیراژ: ۳۰۰۰
قیمت: ۲۲۰۰ تومان
چاپ: دانش پژوه

شابک: ۹۶۴ـ۸۶۰۱ـ۶۳ـ۱ ISBN 964-8601-63-1

آدرس: تهران ـ جاده ساوه ـ شهرک ولیعصر(عج) ـ خیابان یاران ـ جنب بانک صادرات پلاک ۱۷۶ ـ واحد ۱۱ ـ انتشارات خوشخوان ـ تلفن: ۶۶۲۹۴۸۱۶

مقدمه مؤلف

یکی از مباحثی که در المپیاد فیزیک به خصوص در مراحل بالاتر مورد توجه طراحان سؤال است استفاده از تقریب در حل مسائل می‌باشد. اساساً تقریب در فیزیک کاربرد فراوان دارد. تا آن جایی که بنده در منابع فارسی و لاتین با پرس و جو از اساتید جستجو نمودم کتابی در این مبحث مهم تألیف نشده و از آن جایی که دانش‌آموزان علاقه‌مند به آوردن مدال طلای فیزیک کشوری و جهانی به شدت به یادگیری مبحث یاد شده محتاجند و همچنین این مبحث برای دانشجویان فیزیک و رشته‌های مهندسی که مملو از تقریب است، بسیار ضروری می‌نماید، بنده این کتاب را با استفاده از مطالعات و تحقیقات چند ساله که در این زمینه نموده بودم نگاشتم.

بعد از اتمام کار کتاب، آن را خدمت جناب آقای دکتر بهمن‌آبادی (رئیس کمیته‌ی المپیاد فیزیک و استاد دانشگاه صنعتی شریف) ارائه نموده و مورد تأئید ایشان قرار گرفت. از راهنمایی‌ها و ارشادات ایشان و همچنین از استاد بزرگوارم جناب آقای آقاپور که معلوماتم در فیزیک و به خصوص در زمینه تقریب و اختلال را مدیون زحمات دلسوزانه‌ی ایشان می‌دانم، نهایت سپاس و تشکر را دارم.

امید آن است به خواست خداوند متعال این کتاب در ارتقاء سطح علمی دانش‌آموزان کشور مؤثر باشد.

در آخر از جناب آقای حاجی‌زاده که زحمات فراوانی برای چاپ این کتاب متقبل شدند صمیمانه تشکر می‌نمایم.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه‌ی ریاضی

۱-۱ بسط تیلور

چندجمله‌ای‌ها از ساده‌ترین توابعی هستند که در آنالیز ظاهر می‌شوند.

در این فصل نشان می‌دهیم که تقریب بسیاری از قبیل توابع نمایی و مثلثاتی، به چندجمله‌ای‌ها امکان‌پذیر است چنانچه تفاوت بین یک تابع و چندجمله‌ای نزدیک شده به آن بقدر کافی کوچک باشد در کارهای عملی می‌توانیم آن چندجمله‌ای را به جای تابع اصلی بگذاریم.

هر تابع اختیاری $f_{(x)}$ را می‌توان به وسیله سری توانی از x نشان داد.

$$f_{(x)} = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \cdots = \sum_{k=۰}^{\infty} a_k x^k \qquad (۱-۱)$$

برای $x = ۰$ داریم: $f_{(۰)} = a_۰$

در این جا با فرض مجاز بودن مشتق‌گیری، داریم:

$$\frac{df}{dx} = f'_{(x)} = a_۱ + ۲a_۲x + ۳a_۳x^۲ + \cdots$$

با تعیین $f'_{(x)}$ در $x = 0$ داریم:

$$a_1 = f'_{(x)}|_{x=0}$$

برای مشتق دوم داریم:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''_{(x)} = 2!a_2 + 3!a_3 x + \cdots$$

با تعیین مجدد آن در $x = 0$ داریم:

$$2a_2 = f''_{(x)}|_{x=0} \rightarrow a_2 = \frac{1}{2!} f''_{(x)}|_{x=0}$$

برای مشتق سوم داریم:

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = f'''_{(x)} = 3!a_3 + 4!a_4 x + \cdots$$

مجدداً در $x = 0$ داریم:

$$3!a_3 = f'''_{(x)}|_{x=0} \rightarrow a_3 = \frac{1}{3!} f'''_{(x)}|_{x=0}$$

با ادامه این کار، چنین داریم:

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}_{(x)}|_{x=0} \qquad (1-2)$$

که در این جا $f^{(k)}_{(x)}$، kامین مشتق $f_{(x)}$ است. برای نمادگذاری راحت‌تر، غالباً از $f^{(k)}_{(0)}$ به جای $f^{(k)}_{(x)}|_{x=0}$ استفاده می‌کنیم.

توجه داشته باشید که $f^{(k)}_{(0)}$ بدین معنی است که باید از $f_{(x)}$، k مرتبه مشتق بگیریم و سپس x را برابر صفر قرار دهیم.

حال با استفاده از رابطه (۷-۱) و (۷-۲) داریم:

$$f_{(x)} = f_{(0)} + f'_{(0)} x + f''_{(0)} \frac{x^2}{2!} + f'''_{(0)} \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (1-3)$$

این سری اگر همگرا باشد، می‌تواند تقریب خوبی از $f_{(x)}$ را به ازای مقادیر کوچک x (یعنی مقادیر x نزدیک به صفر) به دست می‌دهد. در حالت کلی برای بسط تیلور داریم:

$$f_{(a+x)} = f_{(a)} + f'_{(a)} x + f''_{(a)} \frac{x^2}{2!} + \cdots \qquad (1-4)$$

که رفتار تابع را در همسایگی نقطه a به ما می‌دهد و رابطه (۱-۳) حالت خاصی ($a = 0$) از عبارت کلی (۱-۴) می‌باشد (رابطه (۱-۴) را با روش مشابه ۱-۳ اثبات نمایید).

حال با استفاده از تغییر متغیر $a + x = t$ در عبارت (۱-۴) داریم:

$$f_{(t)} = f_{(a)} + f'_{(a)}(t - 0) + f''_{(a)}\frac{(t-a)^2}{2!} + \cdots \quad (1) \qquad (۱-۵)$$

مثال ۱: الف) بسط $f_{(x)} = \sin x$ را تا مرتبه اول بدست آورید.

ب) این بسط را تا مرتبه سوم بدست آورید.

ج) بسط تابع را تا مرتبه پنجم بدست آورید.

د) بسط $f_{(x)} = \sin(x)$ را با توجه به نظم دیده شده در حالت کلی تا بی‌نهایت بدست آورید.

ه) روی نمودار در بازه $(0\,,\pi)$ توابع بدست آمده در قسمت‌های (الف) و (ب) و (ج) و همچنین خود تابع $f_{(x)} = \sin x$ را بکشید و سپس مقایسه نمایید.

الف)

$$f_{(x)} = \sin x \rightarrow f_{(0)} = 0$$
$$f^{(1)}_{(x)} = \cos x \rightarrow f^{(1)}_{(0)} = 1$$

حال با توجه به رابطه (۱-۳) داریم:

$$\sin x = (0) + (1)x + \cdots$$

وقتی می‌گوییم عبارتی را تا مرتبه‌ی nام بسط دهید دیگر از جملاتی که توان x آنها بزرگ‌تر از n باشد صرف‌نظر می‌کنیم.

$$\rightarrow \sin x = x$$

ب)

$$f_{(0)} = 0 \;,\; f^{(1)}_{(0)} = 1$$
$$f^{(k)}_{(x)} = -\sin x \rightarrow f^{(2)}_{(0)} = 0$$

دیده می‌شود که ضریب x^2 صفر بدست آمد و بسط $\sin x$ تا مرتبه دوم همان بسط تا مرتبه اول می‌باشد.

$$f^{(3)}_{(x)} = -\cos x \rightarrow f^{(3)}_{(0)} = -1$$

با بدست آوردن مشتقات در نقطه صفر و جاگذاری در رابطه (۱-۳) و صرف‌نظر از جملاتی که توان آنها بیشتر از ۳ است داریم:

۱) رابطه (۱-۵) بسط تیلور حول نقطه a نام دارد. ما در این فصل هر جا به‌طور خاص اشاره نکنیم منظورمان از بسط دادن، بسط حول نقطه صفر می‌باشد.

$$\sin x = (\circ) + (۱)x + (\circ)\frac{x^۲}{۲!} + (-۱)\frac{x^۳}{۳!} = x - \frac{x^۳}{۳!}$$

ج)

$$f_{(\circ)} = \circ \;,\; f^{(۱)}_{(\circ)} = ۱ \;,\; f^{(۲)}_{(\circ)} = \circ \;,\; f^{(۳)}_{(\circ)} = -۱$$

$$f^{(۴)}_{(x)} = \sin x \to f^{(۴)}_{(\circ)} = \circ$$

$$f^{(۵)}_{(x)} = \cos x \to f^{(۵)}_{(\circ)} = ۱$$

با توجه به رابطه (۱-۳) داریم:

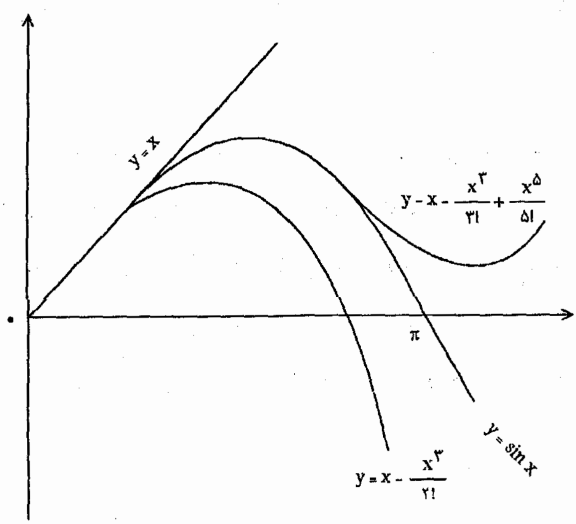
$$\sin x = (\circ) + (۱)x + (\circ)\frac{x^۲}{۲!} + (-۱)\frac{x^۳}{۳!} + (\circ)\frac{x^۴}{۴!} + (۱)\frac{x^۵}{۵!} = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!}$$

د) اگر همین کار را ادامه دهیم بسط $f_{(x)} = \sin x$ را به این صورت در می‌آوریم:

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{x^{(۲k+۱)}(-۱)^{k+۱}}{۲k+۱} \qquad (۱-۶)$$

$\sin x$ جز توابعی است که می‌توان برایش نظمی پیداکرد اما برای همه توابع نمی‌توان این ضابطه را پیداکرد.

ه) دیده می‌شود در (الف) در نزدیکی نقطه صفر $y = x$ به $y = \sin x$ خیلی نزدیک است. می‌دانیم $\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!}$، دلیل اینکه $y = x$ در نزدیکی نقطه صفر به $y = \sin x$ خیلی نزدیک است این است که وقتی $x \to \circ$، واقعاً می‌توانیم از جملات $\frac{x^۳}{۳!}$ و ... صرف‌نظر نماییم اما با بزرگ‌تر شدن x این تقریب هم نادرست می‌شود و باید جملات بیشتری نگه داشت.



شکل۱-۱

اگر در شکل (۱-۱) مقدار دقیق $\sin x$ را با یک سری تیلور که شامل جملات متوالی از رتبه‌های بالاتر است مقایسه کنید متوجه می‌شوید که هر جمله که به سری اضافه شود گسترهٔ دقت سری را افزایش می‌دهد. اگر تعداد این جملات بی‌نهایت شود، سری تیلور می‌تواند همه جا معرف این تابع باشد یعنی با شروع از نقطه صفر و با افزایش تعداد جملات ما به‌طور کامل به تابع $f_{(x)} = \sin x$ می‌رسیم.

۱-۲ بسط چندجمله‌ای‌ها و توابع کسری

این بخش را با بدست آوردن سری دوجمله‌ای از روی بسط تیلور شروع می‌کنیم.

مثال ۲: بسط $f_{(x)} = (۱ + x)^n$ را با استفاده از بسط تیلور بدست آورید.

$$f_{(x)} = (۱ + x)^n \rightarrow f_{(۰)} = ۱$$
$$f'_{(۰)} = n(۱ + x)^{n-۱}|_{x=۰} = n$$
$$f''_{(۰)} = n(n - ۱)(۱ + x)^{n-۲}|_{x=۰} = n(n - ۱)$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}_{(۰)} = n(n - ۱)(n - ۲)\ldots(n - k + ۱)(۱ + x)^{n-k}|_{x=۰}$$
$$= n(n - ۱)\ldots(n - k + ۱)$$

در نتیجه با استفاده از رابطه (۱-۳) داریم:

$$(۱+x)^n = ۱ + nx + \frac{۱}{۲!}(n)(n-۱)x^۲ + \cdots + \frac{(n)(n-۱)\ldots(n-k+۱)}{k!}x^k + \cdots \quad (۱\text{-}۷)$$

رابطه‌ی (۱-۷) سری دوجمله‌ای نام دارد.

توجه داشته باشید منظور ما از بسط دادن تا فلان مرتبه در بسط توابع بزرگ‌ترین توان x می‌باشد که عمل بسط را تا آنجا ادامه می‌دهیم.

مثال ۳: تابع $f_{(x)} = \sqrt{۱ + x}$ را تا مرتبه سوم بسط دهید.

در واقع این مثال حالت خاصی از سری دوجمله‌ای است که در آن $n = \frac{۱}{۲}$ می‌باشد. با توجه به رابطه (۱-۷) داریم:

$$(۱ + x)^{\frac{۱}{۲}} = ۱ + \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲!}(\frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۲} - ۱)x^۲ - ۱\frac{۱}{۳!}(\frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۲} - ۱)(\frac{۱}{۲} - ۲)x^۳ + \ldots$$
$$= ۱ + \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۸}x^۲ + \frac{۱}{۱۶}x^۳$$

در واقع چون مسأله، بسط را تا مرتبه‌ی سوم می‌خواهد از جملات با توان بزرگ‌تر از ۳ صرف‌نظر می‌کنیم.

مثال ۴: بسط تابع $f_{(x)}=\frac{x+1}{1-x}$ را تا مرتبه‌ی چهارم بدست آورید.

برای بدست آوردن بسط این تابع تا مرتبه چهارم، ابتدا $\frac{1}{1-x}$ را تا مرتبه‌ی چهارم بسط می‌دهیم و سپس در عبارت صورت ضرب می‌کنیم.

$$A_{(x)}=\frac{1}{1-x}\rightarrow A_{(0)}=1$$

$$A^{(1)}_{(x)}=\frac{1}{(1-x)^2}\rightarrow A^{(1)}_{(0)}=1$$

$$A^{(2)}_{(x)}=\frac{2}{(1-x)^3}\rightarrow A^{(2)}_{(0)}=2!$$

$$A^{(3)}_{(x)}=\frac{3!}{(1-x)^4}\rightarrow A^{(3)}_{(0)}=3!$$

$$A^{(4)}_{(x)}=\frac{4!}{(1-x)^5}\rightarrow A^{(4)}_{(0)}=4!$$

با بدست آوردن مشتق‌های $A_{(x)}$ در نقطه‌ی صفر و با توجه به رابطه (۱-۳) داریم:

$$A_{(x)}=1+x+x^2+x^3+x^4$$

$$\begin{aligned}f_{(x)}&=(1+x)A_{(x)}\rightarrow f_{(x)}=(1+x)(1+x+x^2+x^3+x^4)\\&=(1+x+x^2+x^3+x^4+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\\&=(1+2x+2x^2+2x^3+2x^4)\end{aligned}$$

باید توجه کنید وقتی بسط عبارتی را مثلاً تا مرتبه چهارم می‌خواهیم باید تمام جملاتی که از مرتبه ۴ و کمتر است در تمام مراحل در نظر گرفت و مراقب بود که جمله‌ای از قلم نیفتد.

مثال ۵: بسط تابع $f_{(x)}=\frac{1}{x}\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)$ را تا مرتبه‌ی دوم بنویسید.

ابتدا بسط $1-\frac{x+1}{1-x}=A_{(x)}$ را می‌نویسیم. و بسط $B_{(x)}=\frac{1+x}{1-x}$ را با توجه به مثال قبل می‌دانیم. اما قبل از نوشتن بسط $A_{(x)}$ باید مواظب باشیم که جمله‌ی $A_{(x)}$ را تا مرتبه‌ی سوم بسط دهیم زیرا $A_{(x)}$ قرار است در جمله‌ی $\frac{1}{x}$ ضرب شود پس

$$f_{(x)}=\frac{1}{x}(1+2x+2x^2+2x^3-1)=\frac{1}{x}(2x+2x^2+2x^3)=2(1+x+x^2)$$

۱-۳ بسط توابع مثلثاتی

همانطورکه در مثال ۱ دیدیم بسط تابع $f_{(x)} = \sin x$ به شکل زیر می‌باشد.

$$f_{(x)} = \sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \cdots \quad \text{(رابطه ۱-۶)}$$

و اگر به همان روش بسط $f_{(x)} = \cos x$ را بدست آوریم برای این تابع داریم:

$$f_{(x)} = \cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots \quad (۱-۸)$$

یک نتیجه مفید سری تیلور این است که اگر سری در همه جا همگرا باشد (توابعی که ما با آنها سر و کار داریم اکثراً همگرا هستند)، این سری چنان معرف خوبی برای این تابع خواهد شد که می‌توان از آن هر چند بار که بخواهیم انتگرال یا دیفرانسیل بگیریم. برای مثال:

$$\frac{d}{dx}(sinx) = \frac{d}{dx}(x - \frac{۱}{۳!}x^۳ + \frac{۱}{۵!}x^۵ + \cdots) = ۱ - \frac{۱}{۲!}x^۲ + \frac{۱}{۴!}x^۴ + \cdots = \cos x$$

به علاوه سری تیلور مربوط به حاصل‌ضرب دو تابع، برابر حاصل‌ضرب سری‌های جداگانه می‌باشد.

برای درک بیشتر این مطالب به مثال زیر توجه نمایید.

مثال ۶: با استفاده از سری تیلور نشان دهید: $\sin x \cos x = \frac{۱}{۲}\sin(۲x)$

$$\sin x = (x - \frac{۱}{۳!}x^۳ + \frac{۱}{۵!}x^۵ + \cdots)$$

$$\cos x = (۱ - \frac{۱}{۲!}x^۲ + \frac{۱}{۴!}x^۴ + \cdots)$$

داریم:

$$\begin{aligned}\sin x \cos x &= (x - \frac{۱}{۳!}x^۳ + \frac{۱}{۵!}x^۵ + \cdots)(۱ - \frac{۱}{۲!}x^۲ + \frac{۱}{۴!}x^۴ = \cdots)\\ &= x - (\frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۲!})x^۳ + (\frac{۱}{۴!} + \frac{۱}{۳!۲!} + \frac{۱}{۵!})x^۵ + \cdots\\ &= x - \frac{۲}{۳!}x^۳ + \frac{۱۶}{۵!}x^۵ + \cdots = \frac{۱}{۲}[(۳x) - \frac{(۳x)^۳}{۳!} + \frac{(۳x)^۵}{۵!} + \cdots]\\ &= \frac{۱}{۲}[\sin(۲x)]\end{aligned}$$

حال در مثال بعدی بسط $\tan x$ را که دیگر نظم و ضابطه $\sin x$ را ندارد بدست می‌آوریم.

مثال ۷: بسط $\tan x$ را تا مرتبه‌ی پنجم بدست آورید.

روش اول:

$$f_{(x)} = \tan x \rightarrow f_{(\circ)} = \circ$$

$$f^{(۱)}_{(x)} = \frac{۱}{\cos^۲ x} \rightarrow f^{(۱)}_{(\circ)} = ۱$$

$$f^{(۲)}_{(x)} = ۲\frac{\sin x}{\cos^۳ x} \rightarrow f^{(۲)}_{(\circ)} = \circ$$

$$f^{(۳)}_{(x)} = ۲\frac{\cos^۲ x + ۳\sin^۲ x}{\cos^۴ x} \rightarrow f^{(۳)}_{(\circ)} = ۲(۱) = ۲$$

$$f^{(۴)}_{(x)} = \frac{۴\sin x}{\cos^۳ x}[\frac{۶}{\cos^۲ x} - ۲] \rightarrow f^{(۴)}_{(\circ)} = \circ$$

$$f^{(۵)}_{(x)} = ۴(\frac{\cos^۲ x + ۳\sin^۲ x}{\cos^۴ x})(\frac{۶}{\cos^۲ x} - ۲) - \frac{۴۸\sin^۲ x}{\cos^۶ x} \rightarrow f^{(۵)}_{(\circ)} = ۱۶$$

با بدست آوردن مشتق‌های $f_{(x)}$ در نقطه‌ی صفر و با توجه به رابطه (۱-۳) داریم:

$$f_{(x)} = \circ + (۱)x + (\circ)\times\frac{x^۲}{۲!} + ۲\times\frac{x^۳}{۳!} + (\circ)\times\frac{x^۴}{۴!} + ۱۶\times\frac{x^۵}{۵!} = x + x^۳ + \frac{۲}{۱۵}x^۵$$

اما در این روش دیدیم که محاسبهٔ مشتق‌ها مقداری زمان می‌برد اما استفاده از روش دوم زمان کمتری می‌برد.

روش دوم:

می‌دانیم $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$، بسط $\sin x$ و بسط $\cos x$ را می‌دانیم و با توجه به این که بسط $\tan x$ را تا مرتبه ۵ می‌خواهیم صورت و مخرج را هم تا مرتبه‌ی ۵ بسط می‌دهیم.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!}}{۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!}}$$

ابتدا عبارت $A_{(x)} = \dfrac{۱}{۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!}}$ را تا مرتبه ۵ بسط می‌دهیم و سپس در صورت ضرب می‌کنیم

(جمله‌ی بعدی سری تیلور $\cos x$، $\frac{x^۶}{۶!}$ است و جمله مرتبه‌ی پنجم $\cos x$ صفر می‌باشد)

$$A_{(x)} = \frac{۱}{۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!}} = \frac{۱}{۱ - (\frac{x^۲}{۲!} - \frac{x^۴}{۴!})} = \frac{۱}{۱ - y}$$

که در این جا $y = \frac{x^۲}{۲!} - \frac{x^۴}{۴!}$

از طرفی طبق مثال ۴ می‌دانیم $\frac{۱}{۱-y} = ۱ + y + y^۲ + \cdots$، ولی ما تا جمله‌ی $y^۲$ را نگه می‌داریم زیرا $y^۳$ جملاتش نسبت به x از مرتبه ۶ و به بالا می‌باشد لذا داریم:

$$A_{(x)} = \frac{۱}{۱-y} = ۱ + y + y^۲ = ۱ + (\frac{x^۲}{۲!} - \frac{x^۴}{۴!}) + (\frac{x^۲}{۲!} - \frac{x^۴}{۴!})^۲$$
$$= ۱ + \frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۴}{۲۴} + \frac{x^۴}{۴}$$

در این جا از جمله $(\frac{x^۲}{۲!} - \frac{x^۴}{۴!})^۲$ فقط جمله $(\frac{x^۲}{۲!})^۲$ باقی می‌ماند و بقیه جملات از مرتبه بالای ۵ می‌باشند.

$$A_{(x)} = ۱ + \frac{x^۲}{۲} + \frac{۵x^۴}{۲۴} \to f(x) = (x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!})(۱ + \frac{x^۲}{۲} + \frac{۵x^۴}{۲۴})$$
$$= x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{۲}{۱۵}x^۵$$

دیدیم که در روش دوم نیازی به مشتق‌گیری‌های طولانی نبود و تنها چهار عمل اصلی وجود داشت.

دیده می‌شود بسط $f_{(x)} = \tan x$ حاوی جملات x به توان اعداد فرد می‌باشد و فاقد جملات x به توان زوج است و این با فرد بودن تابع $f_{(x)} = \tan x$ مطابقت دارد.

مثال ۸: تابع $\cos(\sin x)$ را تا مرتبه چهارم بسط دهید.

تمام جملات از مرتبه‌ی ۴ به بالا را حذف می‌کنیم.

$$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots$$

$$\cos(\sin x) = ۱ - \frac{\sin^۲ x}{۲!} + \frac{\sin^۴ x}{۴!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \cdots$$

$$\to \cos(\sin x) = ۱ - \frac{(x - \frac{x^۳}{۳!})^۲}{۲!} + \frac{(x - \frac{x^۳}{۳!})^۴}{۴!}$$
$$= ۱ - \frac{x^۲ - \frac{x^۴}{۳}}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} = ۱ - \frac{x^۲}{۲} + \frac{۵}{۲۴}x^۴$$

۱-۴ توابع معکوس مثلثاتی

در این بخش به بررسی سری تیلور توابع معکوس مثلثاتی می‌پردازیم.

مثال ۹: سری تیلور را برای تابع $f_{(x)} = \sin^{-1}(x)$ تا مرتبه‌ی پنجم نسبت به x بیابید.

در این جا یک راه این است که از $f^{(1)}_{(x)}$ تا $f^{(5)}_{(x)}$ را بدست آوریم که این کار وقت‌گیر و طاقت‌فرسایی است. اما راه مناسب‌تری را در این جا در نظر گرفته‌ایم.

فرض کنید:

$$\sin^{-1} x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \cdots \qquad (1)$$

می‌دانیم: $\sin^{-1}(\sin x) = x \rightarrow \sin^{-1}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) = x$

در این جا تا جمله مرتبه ۵ نگه می‌داریم. با جایگذاری $A_{(x)} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ در رابطه (۱) داریم:

$$\begin{aligned}\sin^{-1}(\sin x) =&\alpha_0 + \alpha_1(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) + \alpha_2(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})^2 + \alpha_3(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})^3 \\ &+ \alpha_4(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})^4 + \alpha_5(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})^5\end{aligned}$$

جملات بالاتر از مرتبه‌ی ۵ را حذف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\rightarrow \sin^{-1}(\sin x) =&\alpha_0 + \alpha_1 x - \alpha_1\frac{x^3}{3!} + \frac{\alpha_1 x^5}{5!} + \alpha_2 x^2 - \alpha_2\frac{x^4}{3} \\ &+ \alpha_3 x^3 - \alpha_3\frac{x^5}{2} + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 \\ =&\alpha_0 + x(\alpha_1) + x^2(\alpha_2) + x^3(\frac{-\alpha_1}{3!} + \alpha_3) + x^4(\frac{-\alpha_2}{3} + \alpha_4) \\ &+ x^5(\frac{\alpha_1}{5!} - \frac{\alpha_3}{3} + \alpha_5)\end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم: $\sin^{-1}(\sin x) = x$

$$\rightarrow \alpha_0 + \alpha_1(x) + \alpha_2(x^2) + (\alpha_3 - \frac{\alpha_1}{3!})(x^3) + (\frac{-\alpha_2}{3} + \alpha_4)x^4 + (\frac{\alpha_1}{5!} - \frac{\alpha_3}{2} + \alpha_5) = x$$

حالا ضریب x^0ها را در دو طرف تساوی با هم برابر قرار می‌دهیم: $\alpha_0 = 0$

ضرایب x^1ها را با هم برابر قرار می‌دهیم: $\alpha_1 = 1$

برای x^2 داریم: $\alpha_2 = 0$

$: x^3$ $\quad -\frac{\alpha_1}{3!} + \alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_3 = \frac{1}{3!}$

$: x^4$ $\quad -\frac{\alpha_2}{3} + \alpha_4 = 0 \rightarrow \alpha_4 = 0$

$: x^5$ $\quad \frac{\alpha_1}{5!} - \frac{\alpha_3}{2} + \alpha_5 = 0 \rightarrow \frac{1}{120} - \frac{1}{2 \times 3!} + \alpha_5 = 0 \rightarrow \alpha_5 = \frac{3}{40}$

با بدست آوردن α_1 تا α_5 داریم:

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{3}{40}x^5$$

۱-۵ بسط توابع لگاریتمی و نمایی

ابتدا بسط $f_{(x)} = e^x$ و $f_{(x)} = \ln^{(1+x)}$ را بدست می‌آوریم.

مثال ۱۰: بسط تیلور توابع $f_{(x)} = e^x$ و $g_{(x)} = \ln^{(1+x)}$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned}
&f_{(x)} = e^x \rightarrow f_{(0)} = 1\\
&f^{(1)}_{(x)} = e^x \rightarrow f^{(1)}_{(0)} = 1\\
&f^{(2)}_{(x)} = e^x \rightarrow f^{(2)}_{(0)} = 1\\
&f^{(n)}_{(x)} = f^{(n)}_{(0)} = 1
\end{aligned}$$

با بدست آوردن مشتقات $f_{(x)} = e^x$ و با توجه به رابطه (۱-۳) داریم:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{۱-۹}$$

$$\begin{aligned}
&g_{(x)} = \ln^{(1+x)} \rightarrow g_{(0)} = 0\\
&g^{(1)}_{(x)} = \frac{1}{1+x} \rightarrow g^{(1)}_{(0)} = 1\\
&g^{(2)}_{(x)} = -\frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow g^{(2)}_{(0)} = -1\\
&g^{(3)}_{(x)} = \frac{2}{(1+x)^3} \rightarrow g^{(3)}_{(0)} = 2!\\
&g^{(4)}_{(x)} = \frac{-3!}{(1+x)^4} \rightarrow g^{(4)}_{(0)} = -3!\\
&g^{(5)}_{(x)} = \frac{4!}{(1+x)^5} \rightarrow g^{(5)}_{(0)} = 4!
\end{aligned}$$

و به همین ترتیب مشتقات $\ln^{(1+x)}$ بدست می‌آیند و با توجه به رابطه‌ی (۱-۳) داریم:

$$\ln^{(1+x)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \tag{۱-۱۰}$$

مثال ۱۱: تابع $f_{(x)} = (۱ + ax)^{\frac{۱}{x}}$ را تا مرتبه اول بسط دهید. (که در آن a عددی ثابت می‌باشد)

می‌دانیم $m^x = e^{x \ln^m}$. پس با توجه به این مطلب داریم:

$$f_{(x)} = (۱ + ax)^{\frac{۱}{x}} = e^{\frac{۱}{x}\ln(۱+ax)} \rightarrow f(x) = e^{\frac{۱}{x}A_{(x)}}$$

در این جا در نگاه اول به نظر می‌رسد با توجه به این که مسأله از ما بسط را تا مرتبه اول می‌خواهد پس ما باید $A_{(x)} = \ln^{(۱+ax)}$ را تا مرتبه اول بسط دهیم اما باید به این نکته توجه داشت که $A_{(x)}$ در یک عبارت $\frac{۱}{x}$ ضرب می‌شود و مرتبه‌اش ۱ درجه کاهش می‌یابد. پس باید $A_{(x)} = \ln^{(۱+ax)}$ را تا مرتبه‌ی دوم بسط دهیم: $A_{(x)} = ax - \frac{a^۲x^۲}{۲}$

$$f_{(x)} = e^{\frac{۱}{x}A_{(x)}} = e^{\frac{۱}{x}(ax - \frac{a^۲x^۲}{۲})} = e^{(a - \frac{a^۲x}{۲})} = e^a e^{-\frac{a^۲x}{۲}}$$

حال بسط $e^{-\frac{a^۲x}{۲}}$ را تا مرتبه‌ی اول با توجه به رابطه (۱-۹) می‌نویسیم.

$$f_{(x)} = e^a(e^{-\frac{a^۲x}{۲}}) = e^a(۱ - \frac{a^۲x}{۲})$$

مثال ۱۲: بسط تابع $f_{(x)} = \ln^{(\cos x)}$ را تا مرتبه‌ی چهارم بدست آورید.

$$f_{(x)} = \ln^{\cos x} = \ln^{(۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!})}$$

با توجه به رابطه (۱-۱۰) و با توجه به $A_{(x)} = -\frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!}$ داریم:

$$f_{(x)} = \ln^{(۱+A_{(x)})} = A_{(x)} - \frac{A^۲_{(x)}}{۲} = (-\frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!}) - \frac{(-\frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!})^۲}{۲}$$
$$= -\frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۴}{۸} = -\frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۴}{۱۲}$$

البته این عملیات که در این فصل انجام دادیم وقتی مجازند که سری همگرا باشد. به‌طور مثال گستره‌ی همگرایی $f_{(x)} = e^x$ به صورت $-\infty < x < \infty$ می‌باشد در حالی که سری دو جمله تنها وقتی همگرا است که $-۱ < x < ۱$ باشد البته پیدا کردن گستره همگرایی کاری مشکل است. بنابراین با قبول اینکه با توابع ساده سر و کار داریم (همان‌طور که در مثال‌های این فصل دیدیم.) از این موضوع اجتناب می‌کنیم.

۱-۶ استفاده سری تیلور برای محاسبه حد

همان‌طور که در حدگیری دیده‌اید بعضی اوقات در بدست آوردن حد به ابهام برمی‌خوریم. در این بخش با استفاده از سری تیلور این‌گونه حدها را بررسی و حل می‌کنیم.

مثال ۱۳: حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\tan ۳x}{\tan x}$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{\tan ۳x}{\tan x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{e^{\sin ۳x} - e^{\sin x}}{x}$ د) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\tan(x) - \sin^{-۱}(x)}{x - \sin x}$

الف) در این جا حد از نوع $\frac{۰}{۰}$ می‌باشد. بسط توابع را تا اولین مرتبه غیر صفر[1] می‌نویسیم در این جا جمله مرتبه صفرم صفر است و لذا اولین مرتبه‌ی غیر صفر جمله‌ی مرتبه اول است و از جمله مرتبه سوم با توجه به این که $x \to ۰$، صرف‌نظر می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\tan ۳x}{\tan x} = \lim_{x\to ۰} \frac{۳x}{x} = ۳$$

ب) در این جا حد از نوع $\frac{\infty}{\infty}$ می‌باشد و چون ما بسط را حول نقطه‌ی صفر می‌دهیم برای محاسبه‌ی این حد از تغییر متغیر $t = \frac{\pi}{۲} - x$ استفاده می‌کنیم تا t به سمت صفر میل کند. حال تابع را نسبت به t حول نقطه صفر بسط می‌دهیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\tan(۳x)}{\tan x} = \lim_{t\to ۰} \frac{\tan ۳(\frac{\pi}{۲} - t)}{\tan(\frac{\pi}{۲} - t)} = \lim_{t\to ۰} \frac{\coth(۳t)}{\coth(t)} = \lim_{t\to ۰} \frac{\tan(t)}{\tan(۳t)} = \frac{۱}{۳}$$

ج) باز هم حد از نوع $\frac{۰}{۰}$ است. صورت کسر را تا اولین مرتبه غیر صفر بسط می‌دهیم.

$$A_{(x)} = e^{\sin ۳x} - e^{\sin x} = e^{۳x} - e^{x} = (۱ + ۳x) - (۱ + x) = x$$

$$\to \lim_{x\to ۰} \frac{e^{\sin ۳x} - e^{\sin x}}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{x}{x} = ۱$$

د) در این جا نیز نوع حد $\frac{۰}{۰}$ است. ابتدا بسط صورت، $A_{(x)}$ را تا اولین مرتبه غیر صفر می‌نویسیم.

$$A_{(x)} = \tan(x) - \sin^{-۱}(x) = x + \frac{x^۳}{۳} + \cdots - (x + \frac{x^۳}{۶} + \cdots) = \frac{x^۳}{۶}$$

۱) اولین مرتبه غیر صفر مربوط به اولین جمله غیر صفر می‌باشد که توان آن جمله، اولین مرتبه غیر صفر است. مثلاً در $\sin x = x - \frac{x^۳}{۳} + \cdots$، x اولین جمله غیر صفر است و توان x، ۱ می‌باشد لذا اولین مرتبه غیر صفر، مرتبه اول است ولی در $\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲} + \cdots$ اولین جمله غیر صفر ۱ است بنابراین توان اولین جمله غیر صفر، صفر ($x^۰$) می‌باشد، پس اولین مرتبه غیر صفر مرتبه صفرم است.

پس اولین مرتبه غیر صفر در صورت مرتبه ۳ می‌باشد. حالا برای مخرج هم این کار را انجام می‌دهیم.

$$B_{(x)} = x - \sin x = x - (x - \frac{x^۳}{۳!}) = \frac{x^۳}{۶}$$
$$\rightarrow \lim_{x\rightarrow ۰} \frac{A_{(x)}}{B_{(x)}} = ۱$$

مثال ۱۴: با استفاده از بسط تیلور مطلوبست محاسبه حد زیر.

$$\lim_{x\rightarrow ۰}\left(\frac{۱}{۲-۲\cos x} - \frac{۱}{x^۲}\right)$$

حل:

$$\lim_{x\rightarrow ۰}\left(\frac{۱}{۲-۲\cos x} - \frac{۱}{x^۲}\right) = \lim_{x\rightarrow ۰}\left(\frac{۱}{۲-۲(۱-\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۴}{۴!})} - \frac{۱}{x^۲}\right)$$
$$= \lim_{x\rightarrow ۰}\left[\frac{۱}{x^۲-\frac{x^۴}{۱۲}} - \frac{۱}{x^۲}\right] = \lim_{x\rightarrow ۰}\frac{۱}{x^۲(۱-\frac{x^۲}{۱۲})} - \frac{۱}{x^۲} = \lim_{x\rightarrow ۰}\left(\frac{۱-۱+\frac{x^۲}{۱۲}}{x^۲(۱-\frac{x^۲}{۱۲})}\right)$$
$$= \lim_{x\rightarrow ۰}\frac{\frac{۱}{۱۲}}{۱-\frac{x^۲}{۱۲}} = \frac{۱}{۱۲}$$

توجه کنید اگر در بسط $\cos x$ به دو جمله‌ی اول بسط $(۱-\frac{x^۲}{۳})$ بسنده می‌شد به جواب صفر می‌رسیدیم که غلط می‌باشد.

مثال ۱۵: حدود زیر را محاسبه نمایید.

الف) $\lim_{x\rightarrow ۰}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{۱}{x^۲}}$ ب) $\lim_{x\rightarrow ۰}\left(\frac{۱}{\ln(x+\sqrt{۱+x^۲})} - \frac{۱}{\ln(۱+x)}\right)$

الف)
$$\lim_{x\rightarrow ۰}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{۱}{x^۲}} = \lim_{x\rightarrow ۰}\left(\frac{x+\frac{x^۳}{۶}}{x}\right)^{\frac{۱}{x^۲}} = \lim_{x\rightarrow ۰}(۱+\frac{x^۲}{۶})^{\frac{۱}{x^۲}}$$

از طرفی طبق مثال ۱۱ می‌دانیم

$$\lim_{x\rightarrow ۰}(۱+ax)^{\frac{۱}{x}} = \lim_{x\rightarrow ۰}(e^a - \frac{a^۲}{۲}e^a x) = e^a \rightarrow \lim_{x\rightarrow ۰}(۱+\frac{x^۲}{۶})^{\frac{۱}{x^۲}} = e^{\frac{۱}{۶}}$$

ب)
$$\sqrt{۱+x^۲} = ۱+\tfrac{۱}{۲}x^۲$$
$$x+\sqrt{۱+x^۲} = ۱+x+\frac{x^۲}{۲}$$
$$\ln(x+\sqrt{۱+x^۲}) = \ln(۱+x+\frac{x^۲}{۲}) = x+\frac{x^۲}{۲} - \frac{۱}{۲}(x+\frac{x^۲}{۲})^۲$$
$$= x + ۰(x^۲) = x$$

یعنی بسط $\ln(a+\sqrt{۱+x^۲})$ تا مرتبه دوم x می‌باشد و جمله حاوی $x^۲$ ندارد. ما در این جا تمام عبارات را تا مرتبه دوم نسبت به x بسط می‌دهیم زیرا اگر به مرتبه اول بسنده کنیم به جواب نخواهیم رسید و حد مبهم است.

$$\ln(۱+x) = x - \frac{x^۲}{۲}$$

$$\lim\left(\frac{۱}{\ln(x+\sqrt{۱+x^۲}} - \frac{۱}{\ln(۱+x)}\right) = \lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{x} - \frac{۱}{x-\frac{x^۲}{۲}}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x}\left(۱ - \frac{۱}{۱-\frac{x}{۲}}\right) = \lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x}(۱-(۱+\frac{x}{۲})) = -\frac{۱}{۲}$$

تذکر: $\left(\frac{۱}{۱-\frac{x}{۲}} = ۱ + \frac{x}{۲}\right)$

۱-۷ روش نیوتن

یکی از روش‌هایی که در حل معادلات به کار برده می‌شود روش نیوتن است[۱]. شکل (۱-۲) یک شرح ترسیمی ارائه می‌دهد. با شروع از تخمین اولیه ($x_۱$) که چندان از یک ریشه x دور نیست در طول مماس و به سمت نقطه‌ی تقاطع آن با محور x می‌رویم ($x_۲, ۰$) ($x_۱$ را حدس می‌زنیم) $x_۲$ را به عنوان تقریب بعدی انتخاب می‌نماییم. سپس به نقطه $(x_۲, f(x_۲))$ رفته و این عمل ادامه می‌یابد تا اینکه مقادیر متوالی و به قدر کافی به هم نزدیک شوند، یا مقدار تابع به قدر کافی به صفر نزدیک گردد. طرز محاسبه بلافاصله از مثلث قائم‌الزاویه در شکل (۱-۲) بدست می‌آید که زاویه شیب خط مماس در $x = x_۱$، θ می‌باشد.

$$\tan\theta = f'(x_۱) = \frac{f(x_۱)}{x_۱ - x_۲} \to x_۲ = x_۱ - \frac{f(x_۱)}{f'(x_۱)}$$

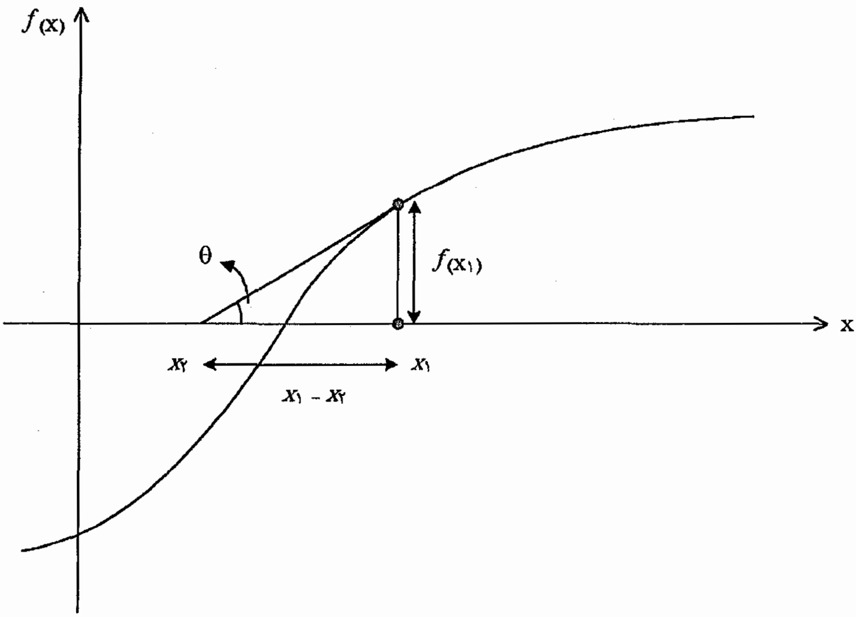
روش محاسبه را به صورت زیر ادامه می‌دهیم.

$$x_۳ = x_۲ - \frac{f(x_۲)}{f'(x_۲)}$$

یا با جمله‌ای عمومی‌تر

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots \qquad (۱۱-۱)$$

۱) نیوتن بحث مفصل این روش را چاپ نکرد، اما یک معادله درجه ۳ را در principia (۱۶۸۷) حل کرد. صورتی از این روش که در این جا داده شده است نسبت به مثال اصلی وی به‌طور قابل توجهی پیشرفت کرده است.



شکل۱-۲

مثال ۱۶: روش نیوتن را برای $f_{(x)} = ۳x + \sin x - e^x = ۰$ بکار ببرید.
محاسبات زیر را خواهیم داشت:

$$f_{(x)} = ۳x + \sin x - e^x$$

$$f'_{(x)} = ۳ + \cos x - e^x$$

اگر با $x_۱ = ۰$ شروع کنیم ($x_۱$ دلخواه می‌باشد)، داریم:

$$x_۲ = x_۱ - \frac{f_{(x_۱)}}{f'_{(x_۱)}} = ۰ - (\frac{-۱}{۳}) = ۰/۳۳۳۳$$

$$x_۳ = x_۲ - \frac{f(x_۲)}{f'(x_۲)} = ۰/۳۳۳۳ - \frac{-۰/۰۶۸۴۱۸}{۲/۵۴۹۳۴} = ۰/۳۶۳۰۱۷$$

$$x_۴ = x_۳ - \frac{f(x_۳)}{f'(x_۳)} = ۰/۳۶۳۰۱۷ - \frac{-۰/۲۷۹ \times ۱۰^{-۴}}{۲/۵۰۲۲۶} = ۰/۳۶۳۲۱۷$$

بعد از سه تکرار، ریشه تا هفت رقم با معنی صحیح می‌باشد که تقریب بسیار خوبی است.

در این بخش مقصود از گفتن نیوتن آشنایی با روش تکرار کردن و بدست آوردن جواب تقریبی بود وگرنه این روش در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.

مسائل

۱) بسط تابع $f_{(x)} = \cos x$ را ابتدا تا مرتبه اول و سپس دوم، سپس سوم و بعد چهارم بدست آورید و توابع بدست آمده را در هر مرحله رسم نمایید و این توابع را در روی نمودار با هم مقایسه نمایید (در روی نمودارتان خود تابع $\cos x$ را نیز برای انجام مقایسه رسم نمایید). بسط این تابع تا مرتبه دوم چه تفاوتی با بسط این تابع تا مرتبه سوم دارد؟

جواب: ($\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots$، بین بسط این تابع تا مرتبه دوم و تا مرتبه سوم فرقی نیست چون ضریب جمله مرتبه‌ی سوم صفر می‌باشد)

۲) بسط تابع $f_{(x)} = \sqrt[۳]{۱ + x}$ را تا مرتبه‌ی دوم بیابید و سپس با استفاده از آن مقدار تقریبی $a = \sqrt[۳]{۹/۱}$ را محاسبه نمایید.

۳) مقدار انتگرال زیر را با استفاده از بسط تیلور تا مرتبه اول، محاسبه نمایید.

$$I = \int_{۱}^{۱/۱} \frac{\sqrt{۴x - ۲}}{x^۲ + x + ۱} dx$$

حال اگر بازه انتگرال‌گیری به جای $(۱, ۱/۱)$ مثلاً $(۱, ۲)$ باشد و با همین روش I را محاسبه کنیم، جواب I بدست آمده در حالت جدید از دقت بالاتری برخوردار است یا حالت قبل. برای بالاتر بردن دقت چه کاری باید انجام داد.

جواب: $I = \frac{\sqrt{۲}}{۳۰}$ ـ حالت قبلی ـ برای بالاتر بردن دقت در حالت جدید باید جملات بیشتری از بسط تیلور را نگه داریم.

۴) بسط تابع $\coth(x + \frac{\pi}{۴})$ را تا مرتبه چهارم نسبت به x بیابید.

۵) بسط تیلور $f_{(x)} = \frac{۱}{x^۲} - \coth^۲ x$ را تا اولین مرتبه غیر صفر بیابید.

جواب: $\frac{۲}{۳}$

۶) بسط تیلور $f_{(x)} = \sin(\sin x)$ را تا سومین مرتبه غیر صفر نوشته و بگویید آیا جواب بدست آمده با زوجیت یا فردیت تابع $f_{(x)}$ مطابقت دارد.

۷) بسط تابع $f_{(x)} = \cos^{-۱} x$ را تا مرتبه‌ی پنجم بیابید.

جواب: $\frac{\pi}{۲} - x - \frac{x^۳}{۳!} - \frac{۳}{۴۰} x^۵$

۸) $f_{(x)} = \sin^{۲} x$ می‌باشد. بسط تابع معکوس f را تا مرتبه سوم بیابید.

۹) بسط تیلور تابع $f_{(x)} = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ را حول $x = ۰$ تا مرتبه ۶ نسبت به x بنویسید.

جواب: $-\frac{x^{۲}}{۳!} + \left[\frac{۱}{۵!} - \frac{۱}{۲(۳!)^{۲}}\right] x^{۴} + \left[-\frac{۱}{۷!} + \frac{۱}{(۳!)(۵!)} - \frac{۱}{۳(۳!)^{۳}}\right] x^{۶}$

۱۰) نشان دهید بسط تابع $f_{(x)} = (۱ - ۲^{x})^{\sin x}$ تا اولین مرتبه غیر صفر برابر ۱ می‌باشد.

۱۱) حدود زیر را با استفاده از بسط تیلور بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{(۱ + x)^{\frac{۱}{x}} - e}{x}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[۳]{۱ - x^{۲}}}{x^{۵}}$

ج) $\lim\limits_{x \to ۰^{+}} \frac{(۱ + x)^{\frac{\ln^{x}}{x}} - x}{x^{۲} \ln^{x}}$

جواب: الف) $-\frac{e}{۲}$ ب) $\frac{۱۱}{۹۰}$ ج) $-\frac{۱}{۲}$

۱۲) ثابت کنید وقتی $x \to ۰$ داریم $(۱ + x)^{۲} = ۱ + ۳x$ سپس با استفاده از آن مطلوبست

$$\lim_{x \to +\infty} \left[(x^{۴} + x^{۲})^{\frac{۱}{۲}} - x^{۲}\right]$$

۱۳) با استفاده از بسط، مقدار a را طوری بیابید که مقدار حد زیر متناهی باشد، سپس به ازای a بدست آمده مقدار حد را بیابید.

$$\lim_{x \to ۰} \frac{e^{ax} - e^{x} - x}{x^{۲}}$$

جواب: $a = ۲$ و $\frac{۳}{۲} =$ حد

۱۴) ثابت‌های a و b را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$\lim \frac{۱}{bx - \sin x} \int_{۰}^{x} \frac{t^{۲} dt}{\sqrt{a + t}} = ۱$$

۱۵) معادله زیر را به روش نیوتن با دو تکرار حل کنید ($x_۱$ را برابر ۱ بگیرید $x_۱ = ۱$) $۲e^{-x} - \sin x = ۰$

جواب: $x_۳ = ۰/۹۲۱$

فصل دوم

استفاده‌ی بسط و اختلال در حل معادلات

۲-۱ مقدمه (روش بسط و اختلال)

در این فصل با استفاده از این روش به تقریب مناسبی از توابع مجهول در معادله‌های چند جمله‌ای و دیفرانسیلی و انتگرالی و ... می‌پردازیم.

در این روش با داشتن یک نقطه از تابع $(x_{\circ}, y_{\circ})$ به هر تقریب دلخواهی از تابع مورد نظر می‌توان رسید. استفاده از این روش در فصل جاری را می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد.

قسمت اول مربوط به معادلات به صورت $f_{(x)} = \circ$ می‌باشد[1] که ما در این قسمت ابتدا جملات اختلالی را جدا نموده (شناسایی کرده) و کنارگذاشته و معادله‌ی حاصل را که ساده شده حل نموده، $x_{(\circ)}$ (جواب مرتبه صفرم) را بدست می‌آوریم، سپس جمله یا جملات اختلالی که در معادله اختلال ایجاد کرده‌اند را وارد نموده و بعد از شناسایی عامل اختلال x را به صورت سری توانی از عامل اختلال نوشته یعنی

$$x = x_{(\circ)} + \lambda x_{(1)} + \lambda^{2} x_{(2)} + \cdots \qquad (۲-۱)$$

۱) $f_{(x)}$ می‌توان متشکل از توابع چندجمله‌ای یا مثلثاتی یا نمایی یا ... و یا ترکیبی از این‌ها باشد.

که در این جا λ عامل اختلالی است و $x_{(1)}$ و $x_{(2)}$ و ... ضرایب مجهول و $x_{(0)}$ همان جواب مرتبه صفرم است که از حل معادله‌ی بدون اختلال بوجود آمده است. با قرار دادن $x = x_{(0)} + \lambda x_{(1)} + \lambda^2 x_{(4)} + \cdots$ در معادله اصلی و متحد قرار دادن جملات از مرتبه مساوی نسبت به λ در دو طرف تساوی $x_{(1)}$ و $x_{(2)}$ و ... بدست می‌آیند و با بدست آمدن ضرایب و قرار دادن در معادله x بدست می‌آید.

هر چقدر قدر مطلق عامل اختلالی کوچک‌تر از ۱ باشد سریع‌تر می‌توان به جواب واقعی $f_{(x)} = 0$ نزدیک شد.

قسمت دوم: این قسمت خود به دو بخش تقسیم می‌شود. دسته اول مربوط به معادلاتی می‌شود که در آن‌ها تابع $f_{(x)}$ مجهول می‌باشد (مربوط به معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی و ... می‌شوند). در این قسمت تابع $f_{(x)}$ یا همان y را به کمک سری توانی x نوشته

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (۲-۲)$$

و با قرار دادن در معادله و نگه داشتن جملات تا مرتبه‌ی مورد نیاز ضرایب جملات هم مرتبه را در دو طرف تساوی با هم برابر قرار می‌دهیم و بدین ترتیب a_iها را محاسبه می‌نماییم و با محاسبه‌ی a_iها تابع $f_{(x)}$ تا مرتبه مورد نیاز به دست می‌آید. (حل با استفاده از بسط دادن) در دسته‌ی دوم نیز تابع $f_{(x)}$ مجهول است اما این جا $f_{(x)}$ را به کمک سری توانی λ (عددی ثابت و کوچک) نوشته

$$y = f_{(x)} = y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots \qquad (۳-۲)$$

که y_0، y_1، y_2 و ... توابعی مجهول از x هستند که با قرار دادن رابطه‌ی (۲-۳) در معادله اصلی و مساوی قرار دادن ضرایب هم مرتبه λ، y_0، y_1، y_2 و ... بدست می‌آیند. در این جا معمولاً y_0 و y_1 و حداکثر y_2 را بدست می‌آوریم و از جملات دارای λ^3 و λ^4 و ... به دلیل کوچکی λ صرف‌نظر می‌نماییم. (حل با کمک روش اختلال)

۲-۲ چندجمله‌ای‌های درجه ۲ و ۳

بعضی از مثال‌های این فصل را می‌توان مستقیم و بدون روش بسط و اختلال حل کرد، اما هدف از آوردن این مثال‌ها درک بیشتر این روش می‌باشد.

مثال ۱: معادله $x^2 - 2x + \frac{1}{10} = 0$ را با روش اختلال تا مرتبه سوم نسبت به عامل اختلال حل کنید.

ضریب جمله‌ی x^2 یک است و ضریب جمله x، منفی دو و ضریب جمله ثابت ۱، $\frac{1}{10}$ می‌باشد، بنابراین چون $\frac{1}{10}$ از لحاظ قدرمطلق کوچکتر از بقیه ضرایب است به عنوان عامل اختلال $\frac{1}{10}$ را انتخاب

می‌نماییم ($\frac{1}{10} = \lambda$) با کنار گذاشتن $\frac{1}{10}$ معادله $x^2(0) - 2x(0) = 0$ را در نظر می‌گیریم و این معادله را حل می‌نماییم:

$$x_{(0)}^2 - 2x_{(0)} = 0 \rightarrow x_{(0)} = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \tag{1}$$

حالا معادله اصلی $x^2 - 2x + \frac{1}{10} = 0$ را در نظر می‌گیریم که در آن عامل اختلال $\lambda = \frac{1}{10}$ به معادله اضافه شده:

$$x^2 - 2x + \lambda = 0 \tag{2}$$

حال x را به صورت سری توانی از λ می‌نویسیم و جملاتِ تا مرتبه سوم نسبت به λ را نگه می‌داریم:

$$x = x_{(0)} + \lambda x_{(1)} + \lambda^2 x_{(2)} + \lambda^3 x_{(3)} \tag{3}$$

با قرار دادن در معادله (۲) داریم:

$$\left(x_{(0)} + \lambda x_{(1)} + \lambda^2 x_{(2)} + \lambda^3 x_{(3)}\right)^3 - 2\left(x_{(0)} + \lambda x_{(1)} + \lambda^2 x_{(2)} + \lambda^3 x_{(3)}\right) + \lambda = 0$$

$$\rightarrow x_{(0)}^2 \left(1 + \lambda \frac{x_{(1)}}{x_{(0)}} + \lambda^2 \frac{x_{(2)}}{x_{(0)}} + \lambda^3 \frac{x_{(3)}}{x_{(0)}}\right)^3$$

$$- 2x_{(0)} - 2\lambda x_{(1)} - 2\lambda^2 x_{(2)} - 2\lambda^3 x_{(3)} + \lambda = 0$$

$$\rightarrow x_{(0)}^2 \left(1 + \lambda^2 \frac{x_{(1)}^2}{x_{(0)}^2} + 2\lambda \frac{x_{(1)}}{x_{(0)}} + 2\lambda^2 \frac{x(2)}{x_{(0)}} + 2\lambda^3 \frac{x_{(3)}}{x_{(0)}} + 2\lambda^3 \frac{x_{(1)} x_{(3)}}{x_{(0)}^2}\right)$$

$$- 2x_{(0)} - 2\lambda x_{(1)} - 2\lambda^2 x_{(2)} - 2\lambda^3 x_{(3)} + \lambda = 0$$

ابتدا جملات λ^0 را متحد قرار می‌دهیم: (ضرایب λ^0 را متحد قرار می‌دهیم)

$$O_{(0)} : x_{(0)}^2 - 2x_{(0)} = 0$$

که این همان معادله (۱) است که حل کردیم.

به همین ترتیب ضرایب جملات λ^1 را برابر قرار می‌دهیم:

$$O_{(1)} : 2x_{(1)} x_{(0)} - 2x_{(1)} + 1 = 0 \rightarrow x_{(1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - x_{(0)}} \tag{4}$$

به همین ترتیب برای $\lambda^۲$ داریم:

$$O_{(۲)}: (x_{(۱)}^۲ + ۲x_{(۲)}x_{(۰)} - ۲x_{(۲)}) = ۰ \rightarrow x_{(۲)} = \frac{x_{(۱)}^۲}{۲ - ۲x_{(۰)}}$$

$$\xrightarrow{\text{از } (۴)} x_{(۲)} = \frac{۱}{۸}\frac{۱}{(۱ - x_{(۰)})^۳}$$

با متحد قرار دادن جملات $\lambda^۳$ داریم:

$$O_{(۳)}: \lambda^۳(۲x_{(۳)}x_{(۰)} + ۲x_{(۱)}x_{(۲)} - ۲x_{(۳)}) = ۰$$
$$\rightarrow x_{(۳)} = \frac{x_{(۱)}x_{(۲)}}{۱ - x_{(۰)}} = \frac{۱}{۱۶}\frac{۱}{(۱ - x_{(۰)})^۵}$$

با بدست آمدن $x_{(۱)}$ و $x_{(۲)}$ و $x_{(۳)}$ برحسب $x_{(۱)}$ و جاگذاری در معادله (۳) و قرار دادن $\lambda = \frac{۱}{۱۰}$ داریم:

$$x_{(۰)} = ۰ \rightarrow x = ۰ + (\frac{۱}{۱۰})(\frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۱۰})^۲\frac{۱}{۸} + (\frac{۱}{۱۰})(\frac{۱}{۱۶}) \rightarrow x = ۰/۰۵۱۳۱$$

اگر این جواب را با جواب واقعی مقایسه کنیم تا ۵ رقم اعشار صحیح می‌باشد. به علاوه اگر به جای اینکه تا مرتبه سوم حساب کنیم تا مرتبه‌های بالاتری حساب می‌کردیم جواب دقیق‌تر هم می‌شد.

$$x_{(۰)} = ۲ \rightarrow x = ۲ + (\frac{۱}{۱۰})(-\frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۱۰})^۲(-\frac{۱}{۸}) + (\frac{۱}{۱۰})^۳(-\frac{۱}{۱۶}) \rightarrow x = ۱/۹۴۸۶۸$$

اگر این جواب را با مقدار حقیقی ریشه دوم مقایسه کنیم در این جا نیز تا ۵ رقم اعشار صحیح است. هر چقدر رتبه‌ی اختلال (مرتبه‌ای که جواب را تا آن مرتبه محاسبه می‌کنیم) بالاتر رود جواب دقیق‌تر می‌شود یعنی جواب را می‌توان باز هم دقیق‌تر نمود.

در این جا مثالی از معادله درجه ۳ می‌زنیم که در آن عامل اختلال کوچک نیست اما با استفاده از اختلال مرتبه دوم با تقریب خوبی به جواب واقعی نزدیک می‌شویم و این نشان دهنده کاربرد وسیع این روش است.

مثال ۲: معادله زیر را تا مرتبه دوم حل نمایید.

$$۳y^۳ - ۸y - ۱ = ۰$$

در این جا نیز ابتدا معادله را ساده‌ترکرده و به معادله (۱) تبدیل می‌کنیم و جواب $y_{(۰)}$ را بدست می‌آوریم و سپس از روی $y_{(۰)}$ با استفاده از اختلال به جواب واقعی نزدیک‌تر می‌شویم:

$$۳y_{(۰)}^۳ - ۸y_{(۰)} = ۰ \qquad (۱)$$

$$\rightarrow y_{(۰)} = \begin{cases} ۰ \\ \sqrt{\frac{۸}{۳}} \\ -\sqrt{\frac{۸}{۳}} \end{cases}$$

حال معادله (۱) را با وارد کردن $\lambda = -۱$ به معادله (۲) تبدیل می‌کنیم.

$$۳y^۳ - ۸y + \lambda = ۰ \qquad (۲)$$

y را برحسب توان‌های λ تا مرتبه دوم بسط می‌دهیم.

$$y = y_{(۰)} + \lambda y_{(۱)} + \lambda^۲ y_{(۲)} \qquad (۳)$$

با جایگذاری در معادله (۲) داریم:

$$۳\big(y_{(۰)} + \lambda y_{(۱)} + \lambda^۳(۳)\big)^۳ - ۸\big(y_{(۰)} + \lambda y_{(۱)} + \lambda^۳ y(۳)\big) + \lambda = ۰$$

در این جا نیز مانند مثال قبل ضرایب توان‌های مساوی λ را در دو طرف تساوی متحد قرار می‌دهیم:

$$O_{(۱)} : ۳(۳y_{(۰)}^۲ y_{(۱)}) - ۸y_{(۱)} + ۱ = ۰ \rightarrow y_{(۱)} = -\frac{۱}{۹y_{(۰)}^۲ - ۸}$$

$$O_{(۲)} : ۳(۳y_{(۰)}y_{(۱)}^۲ + ۳y_{(۰)}^۲ y_{(۲)}) - ۸y_{(۲)} = ۰ \rightarrow y_{(۲)} = \frac{۹y_{(۰)}y_{(۱)}^۲}{۸ - ۹y_{(۰)}^۲} \qquad (۵)$$

$$y_{(۰)} = \begin{cases} ۰ \\ \sqrt{\frac{۸}{۳}} \\ -\sqrt{\frac{۸}{۳}} \end{cases} \xrightarrow{\text{از (۴)}} y_{(۱)} = \begin{cases} \frac{۱}{۸} \\ -\frac{۱}{۱۶} \\ -\frac{۱}{۱۶} \end{cases} \xrightarrow{\text{از (۵)}} y_{(۲)} = \begin{cases} ۰ \\ -۰/۰۰۳۶ \\ ۰/۰۰۳۶ \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله (۳) داریم:

$$y = \begin{cases} ۰ - \frac{۱}{۸} + ۰ = -۰/۱۲۵ \\ \sqrt{\frac{۸}{۳}} + \frac{۱}{۱۶} - ۰/۰۰۳۶ = ۱/۶۹۱۹ \\ -\sqrt{\frac{۸}{۳}} + \frac{۱}{۱۶} + ۰/۰۰۳۶ = -۱/۵۶۶۹ \end{cases}$$

جواب‌های بدست آمده تا ۳ رقم اعشار با جواب واقعی مطابقت دارد و می‌توان با ادامه این روند به جواب واقعی نزدیک‌تر هم شد.

۲-۳ چندجمله‌ای‌های درجه n

در این بخش مثالی که زده می‌شود مربوط به $n = ۵$ است و با استفاده از شیوه حل این مثال می‌توانید معادلات درجه بالاتر را نیز حل کنید.

مثال ۳: معادله $(x-۱)^۵ - \frac{۱}{۱۰}x^۳ + x - ۰/۹۵ = ۰$ را حل کنید (x را تا مرتبه دوم بدست آورید)

برای حل مسأله ابتدا باید معادله را به معادله ساده‌تری که به راحتی حل می‌شود تبدیل کرد (معادله (۱)) و با کنار گذاشتن جملات ۰/۰۵ و $-\frac{۱}{۱۰}x^۳$ چون از لحاظ قدرمطلق دارای کوچکترین ضرایب می‌باشند معادله را ساده نمود.

$$(x-۱)^۵ - \frac{۱}{۱۰}x^۳ + x - ۱ + ۰/۰۵ = ۰ \qquad (۱)$$

معادله را به معادله (۲) تبدیل می‌کنیم.

$$(x_{(۰)} - ۱)^۵ + x_{(۰)} - ۱ = ۰ \qquad (۲)$$

$$\rightarrow (x_{(۰)} - ۱)\left((x_{(۰)} - ۱)^۴ + ۱\right) = ۰ \rightarrow x_{(۰)} = ۱$$

معادله (۲) تنها یک جواب دارد پس x مرتبه صفر برابر ۱ می‌باشد. حال دو جمله $-\frac{x^۳}{۱۰}$ و ۰/۰۵ را باید اضافه کنیم برای این کار $\lambda = \frac{۱}{۱۰}$ می‌گیریم پس:

$$-\frac{۱}{۱۰}x^۳ \xrightarrow{(۳)} -\lambda x^۳ \qquad ۰/۰۵ \xrightarrow{(۴)} \frac{\lambda}{۲}$$

با استفاده از تبدیل‌های (۳) و (۴) و اضافه نمودن این جملات به معادله (۲)، معادله (۲) به معادله مطلوب مسأله تبدیل می‌شود.

$$(x-۱)^۵ - \lambda x^۳ + x - ۱ + \frac{\lambda}{۲} = ۰ \qquad (۵)$$

معادله (۵) همان معادله $(x-۱)^۵ - \frac{۱}{۱۰}x^۳ + x - ۰/۹۵$ می‌باشد.

$$x = ۱ + \lambda x(۱) + \lambda^۲ x(۲) \qquad (۶)$$

با جایگذاری رابطه (۶) در معادله (۵) داریم:

$$(\lambda x_{(۱)} + \lambda^۲ x_{(۲)})^۵ - \lambda(۱ + \lambda x_{(۱)} + \lambda^۲ x_{(۲)})^۳ + ۱ + \lambda x_{(۱)} + \lambda^۲ x_{(۲)} - ۱ + \frac{\lambda}{۲} = ۰$$

با نگه‌داشتن جملات تا مرتبه دوم و حذف جملات مرتبه بالاتر داریم:

$$-\lambda - ۳\lambda^۲ x_{(۱)} + ۱ + \lambda x_{(۱)} + \lambda^۲ x_{(۲)} - ۱ + \frac{\lambda}{۲} = ۰$$

$$\lambda^۲(-۳x_{(۱)} + x_{(۲)}) + \lambda(x_{(۱)} - \frac{۱}{۲}) = ۰$$

$$O_{(۱)} : x_{(۱)} - \frac{۱}{۲} = ۰ \to x_{(۱)} = \frac{۱}{۲}$$

$$O_{(۲)} : -۳x_{(۱)} + x_{(۲)} = ۰ \to x_{(۲)} = \frac{۳}{۲}$$

با بدست آوردن ضرایب و جایگذاری در معادله داریم:

$$x = ۱ + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۲} = ۱/۰۶۵$$

جواب واقعی ۱/۰۷۳ می‌باشد که می‌بینید اختلاف جواب بدست آمده با جواب واقعی ۰/۰۰۸ می‌باشد یعنی خطا کمتر از ۰/۰۱ می‌باشد. البته در صورت نیاز می‌توان با بسط تا مرتبه‌های بالاتر تقریب را بالاتر برد.

دیدیم مثال ۳ نیز که معادله درجه ۵ بود با روش اختلال حل شد به همین ترتیب که مثال ۳ حل شد معادله‌های با درجه‌های بالاتر نیز حل می‌شوند البته دیدیم در این مثال نیز λ که عامل ایجاد اختلال در معادله بود کوچک انتخاب شد ($\lambda = \frac{۱}{۱۰}$) اگر معادله طوری باشد که $|\lambda|$ کوچک نشود آن وقت برای دستیابی به جواب مناسب باید بسط را تا مرتبه‌های بالاتر بنویسیم و جملات بیشتری را نگه داریم که در این کتاب با مسائلی که λ خیلی کوچک می‌باشد سر و کار داریم.

۲-۴ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و دوم

در دو بخش جاری به حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از بسط دادن و اختلال می‌پردازیم. بعضی از این معادلات بدون استفاده از روش‌های بسط و اختلال نیز قابل حل‌اند اما این مثالها برای مقایسه بین دو روش و تفهیم بیشتر روش آورده شده در این فصل برای استفاده در حل معادلات غیر قابل حل به روش‌هایی که می‌شناسیم، می‌باشد.

مثال ۴: معادله $y' = y$ را حل کنید با شرط اولیه[۱] $y_{(۰)} = ۱$

روش اول: ابتدا سری توانی y را می‌نویسیم:

۱) منظورمان از $y_{(۰)} = ۱$، همان $f_{(۰)} = ۱$ یعنی y در نقطه صفر ($x = ۰$) برابر یک می‌باشد و دقت کنید با y مرتبه‌ی صفرم اشتباه گرفته نشود.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \qquad (1)$$

$$y_{(0)} = 1 \rightarrow a_0 = 1$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$$

با قرار دادن در معادله داریم:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = a_1 + 3a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$$

با متحد قرار دادن جملات هم مرتبه داریم:

$$O_{(0)} : a_0 = a_1 \rightarrow a_1 = 1$$

$$O_{(1)} : a_1 x = 2a_2 x \rightarrow a_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}$$

$$O_{(2)} : a_2 x^2 = 3a_3 x^2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{3!}$$

$$O_{(3)} : a_3 x^3 = 4a_4 x^3 \rightarrow a_4 = \frac{1}{4 \times 3 \times 2} = \frac{1}{4!}$$

از روی فرآیند بالا می‌توان بقیه ضرایب را حدس زد. $a_n = \frac{1}{n!}$ با جایگذاری در (۱) داریم:

$$y = 1 + (1)x + (\frac{1}{2!})x^2 + (\frac{1}{3!})x^3 + (\frac{1}{4!})x^4 + \cdots \qquad (2)$$

معادله (۲) همان بسط $y = e^x$ حول نقطه‌ی صفر است. $y = e^x$

روش دوم: $\frac{dy}{dx} = y \rightarrow \frac{dy}{y} = dx \rightarrow \ln^y = x + c \rightarrow y = e^{x+c}$

$$y_{(0)} = 1 \rightarrow 1 = e^c \rightarrow c = 0 \rightarrow y = e^x$$

با اینکه روش دوم ساده‌تر است اما همان‌طور که قبلاً گفتیم بعضی معادلات را از روش‌های شبیه روش دوم نمی‌توان حل کرد ولی روش اول همیشه جواب می‌دهد و ما در این کتاب با روش اول بیشتر کار خواهیم کرد.

مثال ۵: معادله $y' = 1 + y^2$ را حل نمایید. با شرط اولیه $y_{(0)} = 0$. از دو روش استفاده کنید. در روش بسط دادن، y را تا مرتبه ۵ برحسب x بدست آورید (در سری توانی جملات از مرتبه ۵ به بالا را در نظر بگیرید) و سپس بگویید این بسط مربوط به چه تابعی می‌شود.

روش اول: y را تا مرتبه پنجم نسبت به x می‌نویسیم:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \quad (1)$$

$$y_{(0)} = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x + 4a_4 x + 5a_5 x^4$$

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots$$

$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots) + 1 \quad (2)$$

جملات طرف راست معادله را تا مرتبه چهارم نسبت به x نگه می‌داریم چون طرف چپ هم تا مرتبه چهارم است و اما دلیل اینکه طرف چپ را تا مرتبه‌ی چهارم نگه می‌داریم این است که در نوشتن معادله $O_{(4)}$، a_5 محاسبه خواهد شد و ما نیز دنبال a_1، a_2، a_3، a_4 و a_5 هستیم و نه بیشتر.

$$\text{طرف راست}: 1 + (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4)^2 = 1 + a_1^2 x^2 + a_2^2 x^4 + 2a_1 a_2 x^3 + 2a_1 a_3 x^4$$

$$\xrightarrow{\text{از (2)}} a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 = 1 + a_1 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3) x^4$$

حالا جملات هم مرتبه در دو طرف تساوی را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$O_{(0)} : a_0 = 1$$

$$O_{(1)} : 2a_2 x = 0 \rightarrow a_2 = 0$$

$$O_{(2)} : 3a_3 x^2 = a_1 x^2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{3}$$

$$O_{(3)} : 4a_4 x^3 = 2a_1 a_2 x^3 \rightarrow a_4 = 0$$

$$O_{(4)} : 5a_5 x^4 = (a_2^2 + 3a_1 a_3) x^4 \rightarrow a_5 = \frac{2}{15}$$

با بدست آوردن ضرایب و قرار دادن در معادله‌ی (۱) داریم:

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5$$

این بسط را قبلاً هم در فصل ۱ دیده بودیم که مربوط به $y = \tan x$ می‌شود.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \rightarrow \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx \rightarrow \tan^{-1}(y) = x + c \rightarrow y = \tan(x + c)$$

$$y_{(0)} = 0 \rightarrow c = 0 \rightarrow y = \tan x$$

خاصیتی که در روش اول بود این بود که اگر مسأله به جای حل کامل معادله از ما حل معادله تا مرتبه‌ی مثلاً پنجم را می‌خواست آن وقت باید جواب بدست آمده در روش دوم را تا مرتبه‌ی پنجم برحسب x بسط می‌دادیم[۱] در حالی که در روش اول جواب مطلوب مستقیم بدست می‌آید.

مثال ۶: معادله‌ی $y' = 2 + y + y^2 + y^3$ با شرط اولیه $y_{(0)} = 0$ را تا مرتبه‌ی سوم نسبت به x حل کنید.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \qquad (1)$$

$$y_{(0)} = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

با توجه به این که $3a_3$ ضریب x^2 در y' می‌باشد اگر جملات را تا مرتبه دوم هم نگه داریم کافی است زیرا در نوشتن $O_{(2)}$، a_3 بدست می‌آید و a_1 و a_2 هم در $O_{(0)}$ و $O_{(1)}$ بدست می‌آیند.

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 = 2 + (a_0 + a_1x + a_2x^2) + (a_0 + a_1x + a_2x^2)^2 + (a_0 + a_1x + a_2x^2)^3$$

$$\rightarrow a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 = 2 + a_0 + a_1x + a_2x^2 + (a_0^2 + a_1^2x^2 + 2a_0a_1x + 2a_2a_0x^2)$$

$$+ (a_0^3 + 3a_0^2a_1x + 3a_0a_1^2x^2 + 3a_0^2a_2x^2)$$

$$O_{(0)} : a_1 = 2 + a_0 + a_0^2 + a_0^3 \rightarrow a_1 = 2$$

$$O_{(1)} : x(2a_2) = x(a_1 + 2a_0a_1 + 3a_0^2a_1) \rightarrow a_2 = 1$$

$$O_{(2)} : x^2(3a_3) = x^2(a_2 + a_1^2 + 2a_2a_0 + 3a_0a_1^2 + 3a_0^2a_2) \rightarrow a_3 = \frac{5}{3}$$

حالا با جایگذاری a_0، a_1، a_2 و a_3 در معادله (۱) داریم:

$$y = 2x + x^2 + \frac{5}{3}x^3$$

این جواب y تا مرتبه سوم می‌باشد. اگر این جواب را برای امتحان در معادله‌ی اصلی بگذاریم، تا مرتبه دوم جواب خواهد داد زیرا طرف چپ معادله به خاطر عمل مشتق‌گیری ۱ مرتبه کاهش رتبه می‌دهد و از مرتبه دوم است. جمله‌ی مرتبه‌ی سومش که از مشتق‌گیری از جمله مرتبه چهارم حاصل می‌شود در نظر گرفته نشده و تساوی هنگامی برقرار است که تمام جملات از یک مرتبه خاص در هر دو طرف حاضر باشند و اگر جمله‌ای از مرتبه‌ای در نظر گرفته نشود، تساوی بر هم می‌خورد.

مثال ۷ نیز در این بخش به مانند مثال‌های ۵ و ۴ بدون روش بسط نیز حل می‌شوند ولی برای درک بیشتر مطلب آورده شده.

۱) در فصل ۱ در مثال ۷ این کار انجام شد.

مثال ۷: معادله $y''+2y'+y=0$ را حل کنید. شرایط اولیه[1] $y_{(0)}=1$ و $y'_{(0)}=-1$ می‌باشد.

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots\ ,\ y_{(0)}=1\rightarrow a_0=1$$

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots\ ,\ y'_{(0)}=-1\rightarrow a_1=-1$$

$$y''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\cdots$$

حال در معادله اصلی جاگذاری می‌کنیم. با توجه به این مطلب که چون $4a_4$ ضریب جمله x^2 در y'' می‌باشد برای بدست آوردن ضرایب تا a_4 کافی است جملات را تا مرتبه‌ی دوم بسط دهیم زیرا a_4 را در $O_{(2)}$ بدست می‌آوریم. a_2 و a_3 را نیز به ترتیب در $O_{(0)}$ و $O_{(1)}$ بدست خواهیم آورد. با جایگذاری y، y' و y'' در معادله اصلی داریم:

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+2a_1+4a_2x+6a_3x^2+a_0+a_1x+a_2x^2=0$$

با توجه به این که $a_0=1$ و $a_1=-1$ و با متحد قرار دادن جملات هم مرتبه داریم:

$$O_{(0)}:2a_2+2a_1+a_0=0\rightarrow a_2=\frac{1}{2}$$

$$O_{(1)}:6a_3x+4a_2x+a_1x=0\rightarrow 6a_3+2-1=0\rightarrow a_3=-\frac{1}{6}$$

$$O_{(2)}:12a_4x^2+6a_3x^2+a_2x^2=0\rightarrow a_4=\frac{1}{24}$$

$$\rightarrow y=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

این بسط مربوط به تابع $y=e^{-x}$ می‌باشد.

مثال ۸: معادله $y''+y'^2-y^3+x=0$ را تا مرتبه‌ی سوم نسبت به x حل کنید. با شرایط اولیه $y_{(0)}=1$ و $y'_{(0)}=1$

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\ ,\ y_{(0)}=0\rightarrow a_0=1$$

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\ ,\ y'_{(0)}=0\rightarrow a_1=1$$

$$y''=2a_2+6a_3x+\cdots$$

با جایگذاری y، y' و y'' در معادله اصلی داریم:

$$(2a_2+6a_3x+\cdots)+(a_1+2a_2x+\cdots)^2-(a_0+a_1x+\cdots)^3+x=0$$

۱) در معادله‌ی درجه n برای بدست آوردن جواب باید n شرط اولیه را به ما بدهند. در این جا معادله درجه ۲ است و ۲ شرط اولیه داده شده. یعنی معادله درجه n در جوابش، دارای n ثابت $(c_1, c_2, \ldots)$ است که با دادن n شرط اولیه، n ثابت بدست می‌آیند

با متحد قرار دادن جملات دارای x^0 داریم:

$$\bigcirc_{(0)} : 2a_2 + a_1^2 - a_0^3 = 0 \rightarrow a_2 = 0$$

$$\bigcirc_{(1)} : 6a_3x + 4a_2a_1x - 3a_0a_1x + x = 0$$

$$\rightarrow 6a_3 = 3a_0a_1 - 1 \rightarrow a_3 = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow y = 1 + (1)x + (\frac{1}{3})x^3 = 1 + x + \frac{x^3}{3}$$

مثال بعدی را با دیدگاهی متفاوت از مثالهای قبل در این بخش مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در این مثال جمله‌ای که معادله را مختل می‌کند شناسایی کرده و با استفاده از روش اختلال خود را به جواب واقعی معادله نزدیک می‌کنیم.

فرقی که مثال ۸ با مثالهای قبلی دارد این است که ما در مثال‌های قبل در واقع تابع مجهول حول نقطه‌ی صفر را تا مرتبه‌ی مطلوب مسأله بدست می‌آوردیم که تابع بدست آمده در نزدیکی نقطه‌ی صفر به تابع واقعی نزدیک بود اما جملات بعدی که توان‌های بیشتری دارند و ما از آنها صرف‌نظر می‌کردیم. با اینکه در نزدیکی صفر خیلی کوچک‌اند و قابل اغماض اما در نقاط دور به شکل مؤثری ظاهر می‌شوند و دیگر تقریب، جواب نمی‌دهد. اما در مثال بعدی این تقریب به شکل وسیع‌تری کاربرد دارد و فقط نزدیکی صفر را شامل نمی‌شود.

در مثال‌های قبل بسط را نسبت به توان‌های x می‌دادیم و وقتی از مرتبه‌ی دوم صحبت می‌شد، منظور جمله‌ی دارای x^2 بود، اما در این جا بسط نسبت به عامل اختلال (در این مسأله $k = \frac{1}{10}$) است و منظور از مرتبه‌ی دوم جمله‌ی حاوی k^2 می‌باشد.

مثال ۹: معادله $2y' = \frac{1}{10}y - 1$، را با شرط اولیه $y_{(0)} = 0$، تا مرتبه‌ی سوم نسبت به عامل اختلالی حل کنید.

حل: ابتدا باید جمله‌ای را که دارای کوچکترین ضریب باشد از لحاظ قدرمطلق به عنوان عبارت اختلالی در نظر بگیریم. ضریب y، $-\frac{1}{10}$ می‌باشد و ضریب y'، ۲ می‌باشد و ضریب جمله ثابت ۱ هم ۱ می‌باشد. $-\frac{1}{10}$ از لحاظ قدرمطلق از همه کوچک‌تر است، بنابراین $-\frac{1}{10}y$ جمله اختلالی و $k = \frac{1}{10}$ را عامل اختلال در نظر می‌گیریم.

در فصل اول گفتیم تمام توابع را می‌توان برحسب سری توانی نوشت. در این جا y را برحسب سری توانی از k می‌نویسیم و تا مرتبه‌ی سوم نسبت به این عامل بسط می‌دهیم:

$$y = y_0 + ky_1 + k^2y_2 + k^3y_3 \qquad (1)$$

که در این جا، y_0، y_1، y_2 و y_3 توابعی مجهول از x می‌باشند.

با توجه به این که $k = \frac{1}{10}$ می‌باشد، معادله اصلی به صورت زیر در می‌آید:

$$1 - ky = 2y' \qquad (2)$$

با توجه به معادله (۱) و مشتق‌گیری از طرفین معادله (۱) برحسب x داریم:

$$y' = y'_0 + ky'_1 + k^2y'_2 + k^3y'_3$$

(k ثابت می‌باشد)

(به فرق بین y_0 و $y_{(0)}$ توجه کنید که اولی مربوط به y مرتبه صفرم است و دومی یعنی y در نقطه‌ای که $x = 0$ می‌باشد)

با جایگذاری در معادله (۲) داریم:

$$1 - k(y + ky_1 + k^2y + k^3y_3) = 2(y' + ky'_1 + k^2y'_2 + k^3y'_3)$$

ضرایب جملات هم مرتبه را برابر قرار می‌دهیم.

جملات حاوی k^0 (۳) $O_{(0)} : 1 = 2y'_0$

جملات حاوی k^1 (۴) $O_{(1)} : -ky_0 = 2ky'_1$

جملات حاوی k^2 (۵) $O_{(2)} : -k^2y_1 = 2k^2y'_2$

جملات حاوی k^3 (۶) $O_{(3)} : -k^3y_2 = 2k^3y'_3$

با استفاده از معادله (۳) داریم:

$$y_0 = \frac{1}{2}x$$

$$\xrightarrow{\text{از (4)}} -y_0 = 2y'_1 \to y_1 = -\frac{x^2}{8}$$

$$\xrightarrow{\text{از (5)}} -y_1 = 2y'_2 \to y_2 = \frac{x^3}{48}$$

$$\xrightarrow{\text{از (6)}} -y_2 = 2y'_3 \to y_3 = \frac{x^4}{384}$$

با استفاده از (۱) و قرار دادن y_0، y_1، y_2 و y_3 بدست آمده در این معادله برای y داریم:

$$y = \frac{1}{2}x + k(-\frac{x^2}{8}) + k^2(\frac{x^3}{48}) + k^3(-\frac{x^4}{384})$$

$$\to y = \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{80} + \frac{x^3}{4800} - \frac{x^4}{38400}$$

آیا می‌توانید حدس بزنید این بسط مربوط به چه تابعی است؟

بعد از حل به روش دوم متوجه جواب سؤال بالا خواهید شد.

اما قبل از اینکه روش دوم را مطرح سازیم به نکته‌ای درباره‌ی ثوابت انتگرال‌ها می‌پردازیم:

y_0 را از معادله‌ی $2y'_0 = 1$ بدست آوردیم. در واقع حل این معادله به این شکل است.

$$y'_0 = \frac{1}{2} \rightarrow y_0 = \frac{1}{2}x + c_0 \tag{7}$$

که c_0 عددی ثابت می‌باشد (ثابت انتگرال). همچنین برای بدست آوردن y_1، y_2 و y_3 نیز ثوابت انتگرال خود را ظاهر می‌کنند مثلاً برای y_1 داریم:

$$y'_1 = -2y'_2 \rightarrow y'_2 = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x + c_0) \rightarrow y'_0 = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}c_0 x + c \tag{8}$$

که در این جا نیز یک ثابت c_1 ظاهر می‌شود.

به همین ترتیب برای y_2 و y_3، ثوابت c_2 و c_3 ظاهر می‌شوند. از روی (۷) و (۸) می‌توان نوشت:

$$y_0(0) = c_0 \tag{9}$$

$$y_1(0) = c_1 \tag{10}$$

به همین ترتیب

$$y_2(0) = c_2 \tag{11}$$

$$y_3(0) = c_3 \tag{12}$$

حالا اگر معادله (۱) را در نقطه صفر بررسی کنیم داریم:

$$y(0) = y_0(0) + ky_1(0) + k^2y_2(0) = k^3y_3(0)$$

با جایگذاری (۹) و (۱۰) و (۱۱) و (۱۲) در معادله بالا داریم: (طبق شرط اولیه $y(0) = 0$)

$$0 = c_0 + kc_1 + k^2c_2 + k^3c_3$$

حالا جملات هم مرتبه نسبت به k را در دو طرف تساوی برابر قرار داده، c_iها را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{r} c_0 = 0 \\ c_1 k = 0 \\ c_2 k^2 = 0 \\ c_3 k^3 = 0 \\ \vdots \end{array}\right\} \rightarrow c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = 0$$

با توجه به این که c_iها (ثوابت انتگرال) صفر شدند جوابی که ما بدست آوردیم صحیح می‌باشد ولی اگر به‌طور مثال شرط اولیه $y(۰) = ۱$ می‌بود، در آن صورت $c_۰ = ۱$ و $c_۱ = c_۲ = c_۳ = ۰$ بودند.

حالا به روش دوم برای حل این مسأله می‌پردازیم.

$$۱ - \frac{۱}{۱۰}y = ۲y' \to \frac{۱۰ - y}{۱۰} = \frac{۲dy}{dx} \to \frac{dx}{۲۰} = \frac{dy}{۱۰ - y} \to \frac{x}{۲۰} + c = -\ln^{۱۰-y}$$

با استفاده از شرط اولیه $y(۰) = ۰$ داریم:

$$c = -\ln^{۱۰}$$
$$\frac{x}{۲۰} - \ln^{۱۰} = -\ln^{۱۰-y} \to -\frac{x}{۲۰} + \ln^{۱۰} = \ln^{۱۰-y}$$

حالا $e^{-\frac{x}{۲۰}}$ را تا مرتبه ۴ نسبت به x بسط می‌دهیم:

$$y = ۱۰(۱ - e^{-\frac{x}{۲۰}}) = ۱۰\left(۱ - (۱ - (\frac{x}{۲۰}) + \frac{۱}{۲!}(\frac{x^۲}{۴۰۰}) - \frac{۱}{۳!}(\frac{x^۳}{۸۰۰۰}) + \frac{۱}{۴!}(\frac{x^۴}{۱۶۰۰۰۰}))\right)$$
$$= \frac{x}{۲۰} - \frac{x^۲}{۸۰} + \frac{x^۳}{۴۸۰۰} - \frac{x^۴}{۳۸۴۰۰۰}$$

این بسط همان جوابی است که در روش اختلالی بدست آوردیم. درست است که راه اختلالی طولانی‌تر است[۱] و راه دوم ساده‌تر اما همه معادلات به این شکل را، نمی‌توان با روش‌هایی شبیه روش دوم حل نمود ولی با روش اول با طی این مراحل می‌توان به جواب مطلوب مسأله رسید.[۲]

تقریبی که در مثال ۹ زده شده به شکل وسیع‌تری نسبت به مثال‌های قبلی کاربرد دارد زیرا در این جا جملاتی را که صرف‌نظر کردیم حاوی $k^۴$ و $k^۵$ و ... می‌باشند که خیلی کوچک می‌شوند و همیشه قابل اغماضند، خواه x بزرگ باشد یا کوچک، اما در مثال‌های قبل، از جملات حاوی $x^۴$ و $x^۵$ و ... صرف‌نظر می‌کردیم که این عمل فقط برای xهای کوچک جواب می‌دهد و نه برای xهای بزرگ.

۲-۵ معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی nام

معادله دیفرانسیلی مرتبه nام هم مانند مرتبه اول و مرتبه دوم به همان شیوه بسط قابل حل می‌باشند. در این جا به یک مثال از معادله مرتبه‌ی سوم اکتفا کرده‌ایم.

۱) مسائلی را که در فصل‌های بعد با روش اختلال حل می‌کنیم اغلب تا مرتبه‌ی اول حساب می‌شوند و از لحاظ عملیاتی نسبت به این مسائل کوتاه‌ترند

۲) البته با تمرین در استفاده از روش اختلال سرعت عمل در انجام مراحل بالا می‌رود.

مثال ۱۰: معادله $y^{(3)} + y'' + y^2 + e^x = 0$ را تا مرتبه پنجم نسبت به x بیابید. (شرایط اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 0$ و $y''(0) = 0$ می‌باشند).

حل: y را تا مرتبه‌ی پنجم برحسب ضرایب مجهول می‌نویسیم.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

$$y(0) = 0 \to a_0 = 0$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots$$

$$y'(0) = 0 \to a_1 = 0$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20 a_5 x^3 + \cdots$$

$$y''(0) = 0 \to a_2 = 0$$

$$y^{(3)} = 6a_3 + 24a_4 x + 60 a_5 x^2 + \cdots$$

$$(6a_3 + 24a_4 x + 60 a_5 x^2 + \cdots) + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20 a_5 x^3 + \cdots$$

$$+ (a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots)^2 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = 0$$

$$\bigcirc(0) = 0 \to 6a_3 + 1 = 0 \to a_3 = -\frac{1}{6}$$

$$\bigcirc(1) = 0 \to 24a_4 x + 6a_3 x + x = 0 \to a_4 = 0$$

$$\bigcirc(2) = 0 \to 60 a_5 x^2 + 12a_4 x^2 + \frac{x^2}{2} = 0 \to a_5 = -\frac{1}{120}$$

$$y = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$$

۲-۶ معادلات انتگرالی

هدف از این بخش نیز حل معادلاتی است که برای ما قابل حل نیست و می‌توان با استفاده از روش بسط و اختلال حل نمود.

مثال ۱۱: انتگرال زیر را حساب کنید و سپس تا مرتبه‌ی پنجم نسبت به x بسط دهید.

$$I = \int \frac{x^2 dx}{(\cos x + x \sin x)^2}$$

حل: در روش اول ابتدا انتگرال را حساب می‌کنیم و سپس بسط می‌دهیم:

$$I = \int \frac{x^۲ dx}{(\cos x + x\sin x)^۲} = \int \frac{x}{\cos x}\frac{x\cos x}{(\cos x + x\sin x)^۲}dx$$

$$U = \frac{x}{\cos x}\,,\ dv = \frac{x\cos x}{(\cos x + x\sin x)^۲}dx \to du = \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^۲ x}$$

$$V = \frac{-۱}{\cos x + x\sin x}\,,\ I = \frac{-x}{\cos(\cos x + x\sin x)} + \int\frac{dx}{\cos^۲ x}$$

$$\to I = \frac{-x}{\cos x(\cos x + x\sin x)} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-x + \sin x\cos x + x\sin^۲ x}{\cos x(\cos x + x\sin x)}$$

$$= \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x} = \frac{\tan x - x}{۱ + x\tan x}$$

حال عبارت محاسبه شده را تا مرتبه‌ی پنجم نسبت به x بسط می‌دهیم.

$$I = \frac{\tan x - x}{۱ + x\tan x} = \frac{(x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{۲}{۱۵}x^۵ - x)}{۱ + x\tan x} = \frac{x^۳(\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۱۵}x^۲)}{۱ + x\tan x}$$

$$A = \frac{\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۱۵}x^۲}{۱ + x\tan x}$$

چون عبارت A در $x^۳$ ضرب شده کافی است A را تا مرتبه‌ی دوم بسط دهیم.

$$A = (\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۱۵}x^۲) = (۱ + x(x + \frac{x^۳}{۳} + \cdots))^{-۱}$$

$$\to A = (\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۱۵}x^۲)(۱ + x^۲)^{-۱} = (\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۱۵}x^۲)(۱ - x^۲)$$

$$= \frac{۱}{۳} - \frac{x^۲}{۳} + \frac{۲}{۱۵}x^۲ = \frac{۱}{۳} + \frac{-۵ + ۲}{۲۵}x^۲ = \frac{۱}{۳} - \frac{x^۲}{۵}$$

$$\to I = x^۳(\frac{۱}{۳} - \frac{x^۲}{۵}) = \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۵}{۵}$$

روش دوم: در روش دوم که مد نظر می‌باشد از همان ابتدا بسط دادن را شروع می‌کنیم و جملات داخل انتگرال را تا مرتبه‌ی چهارم نسبت به x بسط می‌دهیم که بعد از انتگرال‌گیری به مرتبه‌ی پنجم تبدیل شود.

$$I = \int \frac{x^۲ dx}{(\cos x + x\sin x)^۲} = \int x^۲ A dx$$

که در این جا $A = \frac{۱}{(\cos x + x\sin x)^۲}$ می‌باشد. کافی است A را تا مرتبه‌ی دوم بسط دهیم تا در

x^2 ضرب شده و مرتبه چهارم شود

$$A = \frac{1}{(1 - \frac{x^3}{3} + x(x))^2} = \frac{1}{(1+\frac{x^2}{2})^2} = (1 + \frac{x^2}{2})^{-2} = 1 - x^2$$

$$\to I = \int x^2(1 - x^2)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$$

مثال ۱۲: معادله‌ی زیر را تا مرتبه‌ی سوم نسبت به x حل کنید. ($y'(0) = 0$ و $y''(0) = 0$)

$$y''(x) + \int_0^x (y^2(t) + t)dt + y'(x) + y(x) + x + 1 = 0$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \ , \ y'(0) = 0 \to a_1 = 0$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots \ , \ y''(0) = 0 \to a_2 = 0$$

برای بدست آوردن جواب معادله تا مرتبه‌ی سوم کافی است a_0، a_1، a_2 و a_3 را حساب کرد که a_1 و a_2 با توجه به شرایط اولیه محاسبه شدند. به خاطر وجود جمله‌ی $6a_3x$ در y''، a_3 از معادله $O(1)$ بدست می‌آید و a_0 نیز به خاطر وجود a_0 در y از $O(0)$ بدست می‌آید. لذا کافی است معادله را تا مرتبه‌ی اول نسبت به x بسط دهیم با جایگذاری y و y' و y'' در معادله داریم: (جملات بالاتر از مرتبه‌ی اول را حذف می‌کنیم)

$$2a_2 + 6a_3 x + \int_0^x ((a_0 + a_1 t)^2 + t)dt + a_1 + 2a_2 x + a_0 + a_1 x + x + 1 = 0$$

با داشتن $a_2 = a_1 = 0$ داریم:

$$6a_3 x + \int_0^x (a_0^2 + t)dt + a_0 + x + 1 = 0 \to 6a_3 x + a_0^2 x + a_0 + x + 1 = 0$$

جمله‌ی $\frac{x^2}{2}$ از مرتبه‌ی ۲ بود و حذف نمودیم:

$$O(0) : a_0 + 1 = 0 \to a_0 = -1$$

$$O(1) : x(6a_3 + a_0^2 + 1) = 0 \to a_3 = -\frac{1}{3}$$

$$y = -1 - \frac{x^3}{3}$$

معادله انتگرالی به این شکل، در ترمودینامیک و بعضی مباحث دیگر ظاهر می‌شوند.

مثال ۱۳: معادله‌ی انتگرالی $y' + x + \int_0^x \lambda y dt = 0$ را تا مرتبه‌ی اول نسبت به λ با فرض کوچک بودن λ حل نمایید. (با شرط اولیه $y(0) = 0$) و سپس جواب بدست آمده روی نمودار را به‌طور کیفی رسم نمایید. (با فرض $\lambda > 0$)

حل: ابتدا معادله را بدون عامل اختلال یعنی جمله‌ی حاوی λ در نظر می‌گیریم

$$y_0' + x = 0 \to y_0 = -\frac{x^2}{2} + c\ ,\ \ y(0) = 0 \to c = 0 \to y_0 = -\frac{x^2}{2}$$

حالا عامل اختلال را وارد کرده، داریم:

$$y = y_0 + \lambda y_1 \quad \text{: بازنویسی معادله}$$ [1]

چون مسأله جواب را از ما تا مرتبه اول می‌خواهد، لذا جملات حاوی λ^2 و λ^3 و ... را حذف می‌نماییم.
در عبارت $\int_0^x \lambda y dt$ به جای y، y_0 را قرار می‌دهیم تا جمله $\int_0^x \lambda y dt$ از مرتبه اول نسبت به λ باشد و مرتبه‌های بالاتر را حذف می‌کنیم:

$$(y_0 + \lambda y_1)' + x + \int_0^x \lambda y_0 dt = y_0' + \lambda y_1' + x + \int_0^x \lambda(-\frac{t^2}{2})dt = 0$$

$$O(0) = y_0' + x = 0$$

که این همان معادله است که قبلاً هم بدون در نظر گرفتن عامل اختلال مشاهده کردیم.

$$O(1) : y_1' - \frac{1}{2}\int t^2 dt = 0 \to y_1' - \frac{x^3}{6} = 0 \to y_1 = \frac{x^4}{24} + c'$$

$$y = -\frac{x^2}{2} + \lambda(\frac{x^4}{24} + c')$$

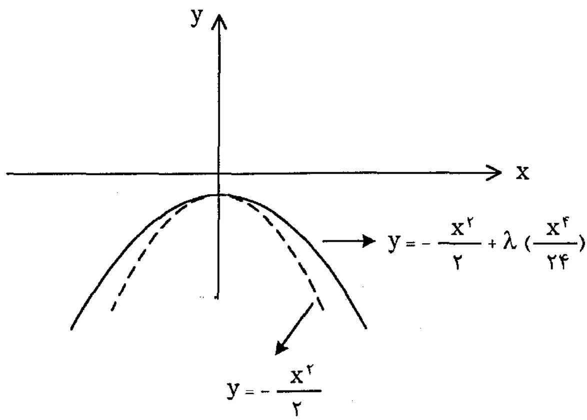
از طرفی طبق شرط اولیه داریم:

$$y(0) = 0 \to 0 = -\frac{(0)^2}{2} + \lambda(\frac{0}{2} + c') \to c' = 0$$

$$y = \frac{-x^2}{2} + \lambda(\frac{x^4}{24})$$

برای رسم تابع نیز ابتدا $y = -\frac{x^2}{2}$ را رسم نموده سپس با ایجاد تغییری کوچک متناسب با جمله $\lambda\frac{x^4}{24}$ تابع را رسم می‌کنیم (با فرض $\lambda > 0$)

۱) در این جا y_0 و y_1 توابعی مجهول از x هستند که y_0 را با توجه به حذف عبارت حاوی λ محاسبه نمودیم.



شکل۲-۱

۲-۷ معادلات مثلثاتی و سیکلوئیدی

مثال‌هایی که در این بخش آمده معادلات مثلثاتی و سیکلوئیدی می‌باشند که در آنها جمله‌ی اختلالی موجود می‌باشد و حل آنها اختلالی است.

مثال ۱۴: معادله سیکلوئیدی $\cos x = \frac{x}{10}$ را تا مرتبه دوم نسبت به عامل اختلالی حل کنید.

حل: در این معادله ضریب x، $\frac{1}{10}$ و ضریب $\cos x$، ۱ می‌باشد و چون $\frac{1}{10}$ کوچکتر از ۱ است $\frac{x}{10}$ را به عنوان جمله اختلالی می‌شناسیم. لذا ابتدا معادله را بدون در نظرگرفتن $\frac{x}{10}$ حل می‌کنیم تا $x(0)$ بدست آید.

$$\cos x(0) = 0 \rightarrow x(0) = \frac{\pi}{2}$$

حالا جمله اختلالی $(\frac{x}{10})$ را به طرف راست معادله اضافه می‌کنیم و $k = \frac{1}{10}$ را در نظر داریم:

$$\cos x = kx$$

بسط x را نسبت به k تا مرتبه‌ی دوم می‌نویسیم:

$$x = x(0) + kx(1) + k^2 x(2) = \frac{\pi}{2} + kx(1) + k^2 x(2)$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + kx(1) + k^2 x(2)\right) = k\left(\frac{\pi}{2} + kx(1) + k^2 x(2)\right)$$

و جملات بالاتر از مرتبه‌ی دوم را حذف می‌کنیم:

$$-\sin(kx(۱)+k^۲x(۲)) = \frac{\pi}{۲} + k^۲x(۱)$$

سینوس را تا مرتبه‌ی دوم نسبت به k بسط می‌دهیم:

$$\to -[(kx(۱)+k^۲x(۲))] = \frac{k\pi}{۲} + k^۲x(۱)$$

با متحد قرار دادن جملات هم مرتبه در دو طرف تساوی داریم:

$$\bigcirc(۱): -kx(۱) = \frac{k\pi}{۲} \to x(۱) = -\frac{\pi}{۲}$$

$$\bigcirc(۲): -k^۲x(۲) = k^۲x(۱) \to x(۲) = \frac{\pi}{۲}$$

$$x = \frac{\pi}{۲} + k(-\frac{\pi}{۲}) + k^۲(\frac{\pi}{۲}) = ۱/۴۲۹$$

جواب واقعی ۱/۴۲۸ است که با جواب بدست آمده ۰/۰۰۱ اختلاف دارد.
با نوشتن بسط x برحسب توان‌های بالاتر k دقت را می‌توان بالاتر برد.

مثال ۱۵: معادله مثلثاتی $\cos^۳ x + \sin ۲x = \frac{۱}{۱۰}$ را تا مرتبه‌ی اول نسبت به عامل اختلالی حل کنید.
$(-\frac{\pi}{۲} < x(۰) \leqslant \frac{\pi}{۲})$

حل: ابتدا $\frac{۱}{۱۰}$ را به عنوان عامل اختلال کنار می‌گذاریم تا $x(۰)$ بدست آید.

$$\cos^۳ x(۰) + \sin ۲x(۰) = ۰ \to \cos^۳ x(۰) + ۲\sin x(۰)\cos x(۰) = ۰$$

$$\to \cos x(۰)(\cos^۲ x(۰) + ۲\sin x(۰)) = ۰$$

$$\to \cos x(۰) = ۰ \text{ یا } \cos^۲ x(۰) + ۲\sin x(۰) = ۰ \to \sin^۲ x(۰) - ۲\sin x(۰) - ۱ = ۰$$

$$\to \sin x(۰) = ۱ \pm \sqrt{۲}$$

که جواب $\sqrt{۲}+۱$ غیر قابل قبول می‌باشد چون سینوس یک زاویه نمی‌تواند بیشتر از یک باشد.
حالا بسط x را برحسب k می‌نویسیم (تا مرتبه‌ی اول)

$$x = x(۰) + kx(۱)$$

حال معادله اصلی را با فرض $k = \frac{1}{10}$ بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos^3 x + \sin 2x = k$$
$$\cos^3(x(0) + kx(1)) + \sin(2x(0) + 2kx(1)) = k$$
$$\Big(\cos(x(0))\cos(kx(1)) - \sin(x(0))\sin(kx(1))\Big)^3$$
$$+ \sin(2x(0))\cos 2kx(1) + \sin 2kx(1)\cos 2x(0) = k$$

جملات را تا مرتبه‌ی اول نسبت به عامل k بسط می‌دهیم:

$$(\cos x(0) - kx(1)\sin x(0))^3 + \sin 2x(0) + 2kx(1)\cos 2x(0) = k$$
$$\rightarrow \cos^3 x(0)\left(1 - \frac{kx(1)\sin x(0)}{\cos x(0)}\right)^3 + \sin 2x(0) + 2kx(1)\cos 2x(0) = k$$
$$\cos^3 x(0) - 3kx(1)\cos^2 x(0)\sin x(0) + \sin 2x(0) + 2kx(1)\cos^2 x(0) = k$$

حال ضرایب جملات هم مرتبه را برابر قرار می‌دهیم:

$$O(0) : \cos^3 x(0) + \sin 2x(0) = 0$$

این همان معادله مرتبه‌ی صفرم است که قبلاً هم بدون در نظرگرفتن جمله‌ی اختلالی دیدیم:

$$O(1) : -3kx(1)\cos^2 x(0)\sin x(0) + 2kx(1)\cos 2x(0) = k$$
$$\rightarrow -3x(1)\cos^2 x(0)\sin x(0) + 2x(1)\cos 2x(0) = 1$$
$$\rightarrow x(1) = \frac{1}{2\cos 2x(0) - 3\cos^2 x(0)\sin x(0)}$$
$$\cos 2x(0) = 1 - 2\sin^2 x(0)\,,\quad \cos^2 x(0) = 1 - \sin^2 x(0)$$

با استفاده از اتحادهای بالا داریم:

$$x(1) = \frac{1}{2 - 4\sin^2 x(0) - 3\sin x(0) + 3\sin^3 x(0)}$$
$$x(0) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} \\ -0/4271 \end{cases} \quad \rightarrow x(1) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 0/4268 \end{cases} \quad \rightarrow x = \begin{cases} +1/5208 \\ 0/3844 \end{cases}$$

جواب‌های حقیقی ۱/۵۲۰۸ – و ۰/۳۸۵۰ می‌باشند که می‌بینید به ترتیب ۰/۰۰۰ و ۰/۰۰۰۶ با جواب‌های بدست آمده تفاوت دارند.

مسائل

۱) معادله $x^2 - 4x + \frac{1}{20} = 0$ را تا مرتبه دوم نسبت به عامل اختلالی حل کنید.

جواب: $x_2 = \frac{102079}{25600}$ و $x_1 = \frac{321}{25600}$

۲) ریشه معادله $x^3 + 2x + \frac{1}{100}$ را با روش اختلال تا مرتبه دوم، حل کنید.

۳) معادله $x^7 + 2x + \frac{61}{20} = 0$ را تا مرتبه‌ی اول نسبت به عامل اختلال حل نمایید.

جواب: $\frac{-181}{180}$

۴) معادله $x^5 + \frac{1}{2}x^4 + x + \frac{61}{30} = 0$ را بدون در نظر گرفتن عامل اختلال حل کنید. سپس با آوردن عامل اختلال معادله را تا مرتبه اول نسبت به عامل اختلالی حل کنید و بگویید معادله چند جواب دارد و تعداد جواب‌ها را با حالت بدون عامل اختلالی مقایسه کنید.

۵) معادله $y' + \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = 0$ را با شرط اولیه $y(0) = 1$ تا مرتبه‌ی دوم نسبت به x حل کنید.

جواب: $y = 1 - x - \frac{x^2}{2}$

۶) معادله $yy' + x + 2 = 0$ را با شرط اولیه $y(0) = 1$ تا مرتبه‌ی دوم نسبت به x حل نمایید.

۷) معادله $y^2y' + \sin y + x = 0$ را با شرط اولیه $y(0) = \frac{\pi}{2}$ حل نمایید.

جواب: $y = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}x - \frac{1}{\pi}(1 + \frac{4}{\pi})x^2$

۸) جواب معادله دیفرانسیل $y' + \lambda y^4 + y = 0$ را با دانستن $\lambda \ll 1$ تا مرتبه‌ی دوم نسبت به λ بیابید. (شرط اولیه: $y(1) = -\frac{1}{2}$)

۹) معادله دیفرانسیلی به شکل $yy' + x = 0$ را داریم.

الف) این معادله را حل نمایید.

ب) حال جمله $\lambda\frac{x}{y}$ را به معادله اضافه می‌کنیم یعنی داریم: $yy' + x + \lambda\frac{x}{y} = 0$ معادله جدید را تا مرتبه اول نسبت به λ با فرض کوچک بودن λ حل نمایید. شرط اولیه برای هر دو قسمت $y(0) = R$ می‌باشد و فرض نمایید معادله برای $y > 0$ می‌باشد.

جواب: الف) $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ و ب) $y = \sqrt{R^2 - x^2} + \lambda(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}})$

۱۰) معادله دیفرانسیل $y^{(۳)} + y' + y^۳ + \ln^{(۱+x)} = ۰$ را تا مرتبه‌ی چهارم نسبت به x حل نمایید.
(شرط اولیه $y(۰) = ۱$، $y'(۰) = ۰$ و $y''(۰) = ۰$)

۱۱) معادله دیفرانسیلی به صورت $y'' + y = ۰$ می‌باشد.

الف) جواب این معادله را با شرط اولیه $y(۰) = ۰$ و $y'(۰) = ۱$ بدست آورید.

ب) حال با افزودن جمله‌ی $\lambda y^۲$ معادله به شکل $y'' + y + \lambda y^۲ = ۰$ تبدیل می‌شود. معادله حاصل را تا مرتبه‌ی اول نسبت به λ حل نمایید و بگویید T دوره‌ی تناوب تابع حاصل چقدر است و آن را در بازه‌ی $[۰, T]$ به‌طور کیفی رسم نمایید.

(راهنمایی: حل معادله $y'' + y + \sin^۲ x = ۰$ به صورت

$$y = A\sin x + B\cos x - \frac{\sin^۲ x}{۳} + \frac{۲}{۳}$$

می‌باشد.)

جواب: الف) $y = \sin x$ و ب) $y = \sin x + \lambda(-\frac{۲}{۳}\cos x - \frac{\sin^۲ x}{۳} + \frac{۲}{۳})$

۱۲) معادله به صورت $y'' = -\frac{h}{y^۲}$ داریم. شرایط اولیه $y(۱) = \frac{۲h}{k^۲}$ و $y'(۱) = k$ می‌باشند.

الف) معادله را با این شرایط اولیه حل نمایید.

ب) حال معادله $y'' = -\frac{h}{y^۲} + \lambda y$ را با فرض کوچک بودن λ حل کنید (تا مرتبه اول نسبت به λ)

(راهنمایی: برای حل قسمت (الف) دو طرف معادله را در y' ضرب نمایید سپس دو طرف معادله به دیفرانسیل کامل تبدیل می‌شوند)

۱۳) انتگرال زیر را تا دومین مرتبه غیر صفر نسبت به x حل نمایید

$$I = \int \frac{x^۴ \arctan x}{x^۲ + ۱} dx$$

جواب: $I = \frac{x^۶}{۶} - \frac{x^۸}{۶}$

۱۴) معادله‌ی انتگرال $y'' + \int_۰^x \lambda y^۲(t)dt - ۲ = ۰$ را با فرض کوچک بودن λ تا مرتبه‌ی اول نسبت به λ حل نمایید.

۱۵) معادله سیکلوئیدی $\sin^۲ x - \frac{۳}{۲}\cos x + \lambda x^۲ = ۰$ را با فرض کوچک بودن λ تا مرتبه‌ی اول نسبت به λ محاسبه نمایید (با فرض $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$)

جواب: $x = \frac{\pi}{۳} - \lambda\left(\frac{۴\pi^۲}{۴۵\sqrt{۳}}\right)$

۱۶) چندجمله‌ای زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} P(\epsilon, x) &= (x-۱)(x-۲)(x-۳)\ldots(x-۱۹)(x-۲۰) + \epsilon x^{۱۹} \\ &= x^{۲۰} - (۲۱۰ - \epsilon)x^{۱۹} + \cdots + ۲۰! \end{aligned}$$

دقت کنید که فقط ضریب $x^{۱۹}$ به ϵ بستگی دارد. معادله‌ی $P(۰, x) = ۰$، ۲۰ ریشه‌ی حقیقی دارد که عبارت‌اند از:

$$x_۱ = ۱,\ x_۲ = ۲,\ \ldots, x_{۱۹} = ۱۹,\ x_{۲۰} = ۲۰$$

الف) ثابت کنید برای $\epsilon > ۰$، معادله‌ی $P(\epsilon, x) = ۰$ هیچ ریشه‌ی حقیقی‌ای که بزرگ‌تر از ۲۰ باشد ندارند.

ب) می‌خواهیم به روش اختلال ریشه‌های معادله‌ی $P(\epsilon, x) = ۰$ را تا مرتبه‌ی اول (نسبت به ϵ) بدست آوریم. این ریشه‌ها را به شکل $x_n = n + \epsilon y_n$ بنویسید، و y_n را بدست آورید. $y_۹$ و $y_{۱۷}$ را حساب کنید.

ج) $x_۹$ و $x_{۱۷}$ را به ازای $\epsilon = ۱۰^{-۸}$ حساب کنید.

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش‌پژوهان جوان سال ۱۳۸۲)

فصل سوم

سینماتیک

۳-۱ مقدمه

گاهی در مراحل حل یک مسأله فیزیک، ممکن است آنقدر خودتان را درگیر ریاضی بیابید که فیزیک مسأله به کلی پنهان شود. در چنین مواردی، بهتر است برای لحظه‌ای به عقب برگردید و ببینید که آیا از عبارات ساده‌ی تقریبی نمی‌توان به جای فرمول‌های پیچیده و کامل استفاده کرد تا از آن نوع ریاضیات پیچیده اجتناب شود. ممکن است در گاه اول احساس شود که اساساً این روش‌ها نتایج غیر دقیق می‌دهند و اشتباه است، اما همانطور که در فصول قبل، مثال‌های مختلف عددی و غیره برای حل معادلات مختلف و دقت آنها را دیدیم (و خواهیم دید) این شک برطرف می‌شود.

در این فصل و فصول آینده، مسائلی را که نیاز به استفاده از فنون تقریب دارند، بررسی می‌کنیم.

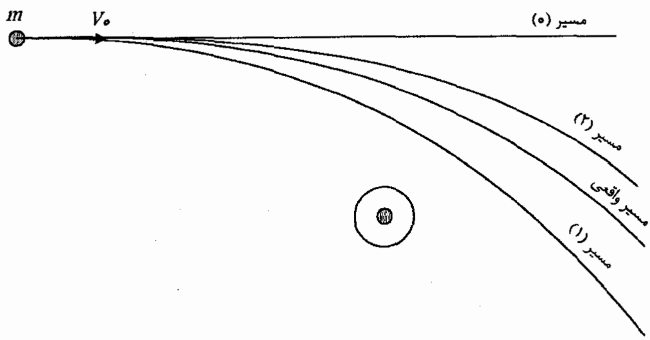
در حالت کلی روش حل این‌گونه مسائل به دو دسته تقسیم می‌شود که در واقع یکی می‌باشد.

روش اول، استفاده از بسط و جایگذاری در معادلاتی که مد نظرند می‌باشد. (همانطور که در فصول قبل هم دیدیم). معمولاً این معادلات برای ما قابل حل نیستند و از این طریق جواب تا تقریب دلخواه ما حاصل می‌شود.

روش دوم، استفاده از روش تکرار (مسیر) است. به این ترتیب که با شناسایی عامل اختلال، برای ساده

شدن مسأله آن را به کلی کنار گذاشته، مسأله‌ی ساده شده را حل می‌کنیم و سپس با دانستن وضعیت سیستم در هر لحظه و وارد کردن عامل اختلال از روی مسیری که در دست است مسیر جدید ناشی از وجود عامل مختل کننده را بدست می‌آوریم و همین کار را تا مرحله‌ی مورد نیاز ادامه می‌دهیم.

به‌طور مثال پرتاب یک گلوله از فواصل بسیار دور را به سمت کره‌ی زمین در نظر بگیرید که در این جا جرم ذره خیلی کوچک است (نیروی گرانشی ضعیف) و سرعت بسیار بالا است. بدلیل نیروی جاذبه، جسم کمی منحرف می‌شود. برای بدست آوردن مسیر واقعی ذره ابتدا فرض می‌کنیم جرم ذره صفر باشد یعنی مسیر مرتبه‌ی صفر حاصل می‌شود. سپس با فرض مسیر صفر و اعمال نیرو روی این مسیر و عمل جذب مسیر یک انحراف از حالت صفر است بدست می‌آید. و حال با فرض مسیر مرتبه یک و اعمال مجدد نیرو، مسیر مرتبه‌ی دو که مجدداً انحراف از حالت صفر است بدست می‌آید و به همین ترتیب عمل می‌شود تا به مسیر واقعی برسیم (شکل ۳-۱). (به مثال ۱ در فصل اول رجوع شود)



شکل۳-۱: مراحل رسیدن به مسیر واقعی

مزیت روش مسیر بر روش بسط این است که در این روش، نوشتن یک سری معادلات سنگین حذف می‌شود و نیازی به نوشتن و حتی آگاهی به آن معادلات نیست و سریعتر هم به جواب می‌رسد و مزیت روش بسط بر مسیر این است که کاربرد بیشتری دارد و اطمینان بیشتری در حل به وسیله‌ی این روش حاصل می‌شود، زیرا استفاده‌ی درست از روش مسیر گاهی اوقات نیاز به توانایی و تمرین زیاد در اختلال و تقریب دارد.

در این کتاب با حل مسائل از طریق اختلال و بسط در مکانیک و همچنین با مباحثی همچون مدول یانگ و کار مجازی و بسامد زاویه‌ای نوسانات و پایداری و ناپایداری و ... که در ارتباط با تقریب‌اند آشنا می‌شویم.

۳-۲ حرکت یک بعدی در برابر مقاومت هوای متناسب با سرعت

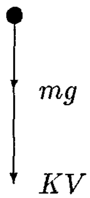
مثال ۱: گلوله‌ای به جرم m و با سرعت اولیه V_0 به سمت بالا پرتاب می‌شود. نیروی مقاومت هوا به صورت $F = -kV$ می‌باشد که در آن k ثابت است.

الف) سرعت گلوله را برحسب زمان بیابید.

ب) زمانی که گلوله، به ارتفاع اوج می‌رسد را محاسبه کنید (تا مرتبه‌ی اول نسبت به k)

ج) با فرض کوچک بودن اثر نیروی اصطکاک در این مسأله، با استفاده از قسمت (ب)، نامساوی نشان دهنده‌ی این کوچک بودن را تشکیل دهید.

الف) ابتدا معادله حرکت را می‌نویسیم.



$$ma = -mg - kV$$
$$\rightarrow \frac{dV}{dt} = -g - \frac{k}{m}V \qquad (۱)$$

شکل۳-۲: دیاگرام آزاد جسم

روش اول: (استفاده از بسط)
ابتدا سرعت را برحسب عامل مختل کننده (نیروی مقاومت هوا) بسط می‌دهیم:

$$V = V_{(۰)} + kV_{(۱)} + k^{۲}V_{(۲)} + \cdots$$
$$\frac{dV}{dt} = V' = V'_{(۰)} + kV'_{(۱)} + k^{۲}V'_{(۲)} + \cdots \quad ^{(۱)}$$

که در این جا لازم به یادآوری است که $V_{(۰)}$، $V_{(۱)}$ و $V_{(۲)}$ و ... ، توابعی از g و t و هر پارامتر دیگری از مسأله به غیر از k می‌باشند که جملات براساس آن مرتب شده است.

با جایگذاری V و V' در معادله داریم:

$$V'_{(۰)} + kV'_{(۱)} + k^{۲}V'_{(۲)} + \cdots = -g - \frac{k}{m}(V_{(۰)} + kV_{(۱)} + \cdots) \qquad (۲)$$

با مرتب کردن و نوشتن معادلات هم مرتبه داریم:

جملات فاقد k:
$$O_{(۰)} : V'_{(۰)} = -g \xrightarrow[\text{از دو طرف}]{\text{با انتگرال‌گیری}} V_{(۰)} = V_{۰} - gt \quad ^{(۱)}$$

---

۱) که در آن علامت پریم، نشان دهنده‌ی مشتق نسبت به زمان است.

توجه کنید $V_{(\circ)}$ یعنی سرعت در غیاب اصطکاک که بدست آمد: $V_{(\circ)} = V_\circ - gt$ که همین طور هم انتظار می‌رفت.

جملات دارای $k^۱$:

$$\bigcirc_{(۱)} : kV'_{(۱)} = -\frac{k}{m}V_{(\circ)} \rightarrow V'_{(۱)} = -\frac{V_{(\circ)}}{m}$$

$$\rightarrow V'_{(۱)} = -\frac{(V_\circ - gt)}{m} = -\frac{V_\circ}{m} + \frac{gt}{m}$$

$$\rightarrow V_{(۱)} = -\frac{V_\circ t}{m} + \frac{gt^۲}{۲m} \quad (۲)$$

از معادله (۲) و نوشتن جملات دارای $k^۲$ داریم:

$$\bigcirc_{(۲)} : k^۲V'_{(۲)} = -\frac{k^۲}{m}V_{(۱)} \rightarrow V'_{(۲)} = \frac{V_\circ t}{m^۲} - \frac{gt^۲}{۲m^۲}$$

$$\rightarrow V_{(۲)} = \frac{V_\circ t^۲}{۲m^۲} - \frac{gt^۳}{۶m^۲}$$

$$\rightarrow V = V_\circ - gt + \frac{k}{m}(\frac{gt^۲}{۲} - V_\circ t) + \frac{k^۲}{m^۲}(\frac{V_\circ t^۲}{۲} - \frac{gt^۳}{۶}) + \cdots$$

$$V = V_\circ + \frac{mg}{k}(-\frac{kt}{۱!m} + \frac{k^۲t^۲}{۲!m^۲} - \frac{k^۳t^۳}{۳!m^۳} + \cdots) + V_\circ(-\frac{kt}{m} + \frac{k^۲t^۲}{۲!m^۲} - \cdots)$$

می‌توان این بسط را به صورت زیر حدس زد.

$$V = V_\circ + \frac{mg}{k}(e^{-\frac{kt}{m}} - ۱) + V_\circ(e^{-\frac{kt}{m}} - ۱) = (\frac{mg}{k} + V_\circ)e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}$$

البته این جواب از راه انتگرال‌گیری از (۱) هم بدست می‌آمد و برای درک بهتر مطلب، این مثال را از این طریق حل کردیم، زیرا معادله حاکم در بعضی مسائل قابل حل نیست و مجبوریم از این روش استفاده کنیم.

راه دوم: (استفاده از تکرار و مسیر):

ابتدا فرض می‌کنیم مقاومت هوا اصلاً وجود ندارد برای سرعت داریم:

$$V^{(\circ)} = V_\circ - gt$$

که در آن، $V^{(\circ)}$ حالت بدون اصطکاک را نشان می‌دهد.[۳]

۱) در این جا ثابت انتگرال‌گیری $V_\circ$ است زیرا در لحظه صفر داریم: $V_{(\circ)} = V_\circ$

۲) در این جا، ثابت انتگرال‌گیری صفر است زیرا در لحظه‌ی صفر سرعت دقیقاً برابر $V_\circ$ است و k در لحظه‌ی صفر در تابع سرعت وجود ندارد و اگر قرار باشد ثابت غیر صفر باشد جمله‌ی حاوی k در سرعت در لحظه صفر به وجود می‌آید. بنابراین در اینجا و موارد مشابه ثابت انتگرال‌گیری‌ها به این طریق قابل محاسبه‌اند (به مثال ۹ در فصل ۲ مراجعه شود)

۳) برای اینکه فرق مرتبه در این روش با روش قبلی مشخص شود از اندیس در بالای متغیر استفاده شده است.

حالا اثر نیروی اصطکاک روی جسمی که با سرعت $V^{(0)}$ حرکت می‌کند را حساب می‌کنیم:

$$m\Delta V^{(1)} = \int_0^t f\,dt = \int -k(V_0 - gt)dt = -kV_0t + \frac{kgt^2}{2}$$
$$\rightarrow \Delta V^{(1)} = -\frac{kV_0}{m} + \frac{kgt^2}{2m}$$

بنابراین اثر نیروی اصطکاک در این جا عوض کردن سرعت به اندازه‌ی $\Delta V^{(1)}$ است و برای سرعت جدید داریم:

$$V^{(1)} = V^{(0)} + \Delta V^{(1)} = V_0 - gt + k(\frac{gt^2}{2m} - \frac{V_0t}{m})$$

حالا سرعت جدیدی برای ما حاصل شد که با استفاده از آن، می‌خواهیم به تقریب بهتری دست پیدا کنیم. یعنی می‌خواهیم اثر نیروی اصطکاک در این مسأله و در جابجایی از حالت بدون اصطکاک را حساب کنیم. اما با استفاده از $V^{(1)}$ داریم:

$$f = -kV^{(1)}$$
$$\Delta V^{(2)} = \frac{1}{m}\int f\,dt = \frac{1}{m}\int -k[(V_0 - gt) + k(\frac{gt^2}{2m} - \frac{V_0t}{m})]dt$$
$$\rightarrow \Delta V^{(2)} = -\frac{kV_0t}{m} + \frac{kgt^2}{2m} - \frac{k^2gt^3}{6m^2} + \frac{k^2V_0t^2}{2m^2}$$

این $\Delta V^{(2)}$ یعنی تغییر سرعت به واسطه‌ی نیروی اصطکاک به این معنی که اگر نیروی اصطکاک نبود سرعت همان $(V_0 - gt)$ بود اما با وجود اصطکاک سرعت برابر است با

$$V^{(2)} = V_0 - gt + \Delta V^{(2)}$$
$$\rightarrow V^{(2)} = V_0 - gt - \frac{kV_0}{m}t + \frac{k^2V_0t^2}{2m^2} + \frac{kgt^2}{2m} - \frac{k^2gt^3}{6m^2}$$

که دیده می‌شود، این همان جوابی است که به روش اول حاصل شد بنابراین با ادامه این روش داریم:

$$V = (\frac{mg}{k} + V_0)e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}$$

ب) برای این قسمت چون مثال جواب را تا مرتبه اول نسبت به k می‌خواهد، از روی $V^{(1)}$ داریم:

$$V^{(1)} = V_0 - gt + k(\frac{gt^2}{2m} - \frac{V_0t}{m})$$

جسم زمانی به اوج می‌رسد که $V = ۰$. لذا داریم:

$$V_{\circ} - gt + \frac{kgt^{۲}}{۲m} - \frac{kV_{\circ}t}{m} = ۰$$

برای حل معادله‌ی بالا و بدست آوردن زمان اوج تا مرتبه اول دو راه در پیش رو داریم. یکی حل معادله‌ی درجه‌ی ۲ و بعد از آن بسط جملات تا مرتبه‌ی ۱ نسبت به K و راه دوم، نوشتن زمان اوج به صورت زیر است:

$$t = t_{(۰)} + kt_{(۱)} + \cdots$$

که راه دوم ساده‌تر است. با جاگذاری و نگهداری جملات تا مرتبه اول داریم:

$$V_{\circ} - gt_{(۰)} - gkt_{(۱)} + \frac{kg(t_{(۰)} + kt_{(۱)})^{۲}}{۲m} - \frac{kV_{\circ}(t_{(۰)} + kt_{(۱)})}{m} = ۰$$

با حذف جملات حاوی $k^{۲}$ و ... داریم:

$$V_{\circ} - gt_{(۰)} - gkt_{(۱)} + \frac{kgt_{(۰)}^{۲}}{۲m} - \frac{kV_{\circ}t_{(۰)}}{m} = ۰$$

با مرتب کردن و نوشتن جملات هم مرتبه داریم:

$$O_{(۰)} : V_{\circ} - gt_{(۰)} = ۰ \rightarrow T_{(۰)} = \frac{V_{\circ}}{g}$$

$$O_{(۱)} : -gt_{(۱)} + \frac{gt_{(۰)}^{۲}}{۲m} - \frac{V_{\circ}t_{(۰)}}{m} = ۰$$

$$\rightarrow t_{(۱)} = -\frac{V_{\circ}t_{(۰)}}{mg} + \frac{t_{(۰)}^{۲}}{۲m}$$

با جاگذاری $t_{(۰)}$ در معادله‌ی $t_{(۱)}$ داریم:

$$t_{(۱)} = -\frac{V_{\circ}^{۲}}{۲mg^{۲}}$$

$$t = t_{(۰)} + kt_{(۱)} = \frac{V_{\circ}}{g} - \frac{kV_{\circ}^{۲}}{۲mg^{۲}}$$

زمان کمتر از $\frac{V_{\circ}}{g}$ شد که از لحاظ فیزیک مسأله هم همین انتظار می‌رفت (چرا؟)

ج) برای این قسمت می‌توان از (ب) استفاده نمود و با دانستن این که اثر نیروی اصطکاک (با فرض کوچک بودن) در تغییر زمان رسیدن به اوج کم است داریم:

$$\frac{V_{\circ}}{g} \gg \frac{kV_{\circ}^{۲}}{۲mg^{۲}} \rightarrow \frac{kV_{\circ}}{mg} \ll ۱$$

$\alpha = \frac{kV_\circ}{mg}$ عبارت کوچک این مسأله است و این که بگوییم k خیلی کوچک است در صورتی که با دقت بیشتری به مطلب نگاه کنیم غلط است زیرا معنی ندارد دو چیز را که از یک جنس نیستند با هم مقایسه کنیم (منظور از دو چیز، k و یک است). مثلاً غلط است بگوییم هزار متر خیلی بزرگ‌تر از یک کیلوگرم است و معنی ندارد.

۳-۳ حرکت یک بعدی در برابر مقاومت هوای متناسب با مجذور سرعت

مثال ۲: یک ذره با سرعت اولیه‌ی $V_\circ$ به بالا پرتاب می‌شود. نیروی مقاومت هوای وارد بر این ذره $-m\alpha\vec{V}|\vec{V}|$ است. زمان رسیدن ذره به نقطه‌ی اوج، ارتفاع اوج و زمان برگشتن ذره به محل پرتاب را تا مرتبه یک نسبت به α بدست آورید. (سؤال دوره‌ی چهل نفر باشگاه دانش پژوهان سال ۷۹)

حل: معادله‌ی حرکت ذره وقتی به سمت بالا می‌رود به صورت زیر است.

$$m\frac{dV}{dt} = -mg - m\alpha V^۲$$
$$\dot{V} = -g - \alpha V^۲ \qquad (۱)$$

اگر V را تا مرتبه‌ی اول نسبت به α بنویسیم، داریم:

$$V = V_{(\circ)} + \alpha V_{(۱)}$$

با جایگزین کردن رابطه‌ی اخیر در معادله (۱) بدست می‌آوریم:

$$\dot{V}_{(\circ)} + \alpha\dot{V}_{(۱)} = -g - \alpha(V_{(\circ)}^۲ + \alpha^۲ V_{(۱)}^۲ + ۲\alpha V_{(\circ)}V_{(۱)})$$

با برابر قرار دادن مرتبه‌های مختلف در طرفین رابطه‌ی اخیر داریم:

$$\begin{cases}\dot{V}_{(\circ)} = -g \\ \dot{V}_{(۱)} = -V_{(\circ)}^۲\end{cases} \rightarrow \begin{cases}V_{(\circ)} = V_\circ - gt \\ V_{(۱)} = -V_\circ^۲ t - \frac{g^۲}{۳}t^۳ + V_\circ g t^۲\end{cases}$$

$$V = (V_\circ - gt) - \alpha(V_\circ^۲ t + \frac{g^۲}{۳}t^۳ - V_\circ g t^۲)$$

با یک بار انتگرال‌گیری از معادله‌ی بالا، $y_{(t)}$ بدست می‌آید.

$$y_{(t)} = V_\circ t - \frac{۱}{۲}gt^۲ - \alpha(\frac{V_\circ^۲}{۲}t^۲ + \frac{g^۲}{۱۲}t^۴ - V_\circ g\frac{t^۳}{۳}) \qquad (۲)$$

برای پیدا کردن زمان رسیدن ذره به اوج، t_f، V را صفر می‌گذاریم.

$$\circ = (V_\circ - gt_f) - \alpha(V_\circ^{۲}t_f + \frac{g^{۲}}{۳}t_f^{۳} - V_\circ g t_f^{۲}) \qquad (۳)$$

چون t_f را تا مرتبه‌ی اول نسبت به α می‌خواهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$t_f = T_{(\circ)} + \alpha T_{(۱)}$$

با جایگزین کردن رابطه‌ی اخیر در معادله (۳) داریم:

$$\circ = [V_\circ - g(t_{(\circ)} + \alpha t_{(۱)})] - \alpha[V_\circ^{۲}(t_\circ + \alpha t_{(۱)}) + \frac{g^{۲}}{۳}(t_{(\circ)} + \alpha t_{(۱)})^{۳}$$
$$- V_\circ g(t_{(\circ)} + \alpha t_{(۱)})^{۲}]$$

ضریب کروشه‌ی دوم در معادله‌ی بالا α است بنابراین در جملات داخل کروشه تنها جملاتی را حفظ می‌کنیم که از مرتبه‌ی صفر نسبت به α باشند.

$$\circ = [V_\circ - g(t_{(\circ)} + \alpha t_{(۱)})] - \alpha[V_\circ^{۲}t_{(\circ)} + \frac{g^{۲}}{۳}t_{(\circ)}^{۳} - V_\circ g t_{(\circ)}^{۲}]$$

$$\begin{cases} V_\circ - gt_{(\circ)} = \circ & \text{:جملات فاقد } \alpha \\ -gt_{(۱)} = V_\circ^{۲}t_{(\circ)} + \frac{۱}{۳}g^{۲}t_{(\circ)}^{۳} - V_\circ g t_{(\circ)}^{۲} & \text{:جملات دارای } \alpha^{۱} \end{cases}$$

از معادله‌ی اول داریم: $t_{(\circ)} = \frac{V_\circ}{g}$. با جاگذاری این $t_{(\circ)}$ در معادله‌ی دوم رابطه‌ی بالا، بدست می‌آوریم:

$$-gt_{(۱)} = V_\circ^{۲}\frac{V_\circ}{g} + \frac{۱}{۳}g^{۲}\frac{V_\circ}{g^{۳}} - V_\circ g\frac{V_\circ^{۲}}{g^{۲}}$$

$$t_{(۱)} = -\frac{۱}{۳}\frac{V_\circ}{g^{۲}}$$

بنابراین t_f می‌شود:

$$t_f = \frac{V_\circ}{g} + \alpha(-\frac{۱}{۳}\frac{V_\circ^{۲}}{g^{۲}})$$

$$t_f = \frac{V_\circ}{g}(۱ - \frac{\alpha}{۳}\frac{V_\circ^{۲}}{g}) \rightarrow t_f = t_\circ(۱ - \frac{\alpha}{۳}gt_\circ^{۲})$$

ارتفاع اوج هم از معادله‌ی (۲) بدست می‌آید. با قرار دادن $t = t_f$ داریم:

$$H = V_\circ t_f - \frac{۱}{۲}gt_f^{۲} - \alpha[\frac{V_\circ^{۲}}{۲}t_f^{۲} + \frac{g^{۲}}{۱۲}t_f^{۴} - \frac{V_\circ g}{۳}t_f^{۳}]$$

اگر قرار دهیم $t_f = t_\circ - \frac{\alpha}{۳} g t_\circ^{۳}$ و $H = H_{(\circ)} + \alpha H_{(۱)}$، بدست می‌آوریم:

$$H_{(\circ)} + \alpha H_{(۱)} = V_\circ(t_\circ - \frac{\alpha}{۳} g t_\circ^{۳}) - \frac{g}{۲}(t_\circ^{۲} - \frac{۲}{۳}\alpha g t_\circ^{۴})$$
$$- \alpha[\frac{V_\circ}{۲}t_\circ^{۲} + \frac{g^{۲}}{۱۲}t_\circ^{۴} - \frac{V_\circ g}{۳}t_\circ^{۳}]$$

که در آن تنها جملات تا مرتبه‌ی اول α حفظ شده است. با قرار دادن $t_\circ = \frac{V_\circ}{g}$ داریم:

$$H_{(\circ)} + \alpha H_{(۱)} = V_\circ(\frac{V_\circ}{g} - \frac{\alpha}{۳}\frac{V_\circ^{۲}}{g^{۲}}) - \frac{g}{۲}(\frac{V_\circ^{۲}}{g^{۲}} - \frac{۲\alpha V_\circ^{۴}}{۳g^{۳}})$$
$$- \alpha(\frac{V_\circ^{۴}}{۲g^{۲}} + \frac{V_\circ^{۴}}{۱۲g^{۲}} - \frac{V_\circ^{۴}}{۳g^{۲}})$$
$$O_{(\circ)} : H_{(\circ)} = \frac{V_\circ^{۲}}{g} - \frac{۱}{۲}\frac{V_\circ^{۲}}{g} = \frac{V_\circ^{۲}}{۲g}$$
$$O_{(۱)} : H_{(۱)} = \frac{-۱}{۳}\frac{V_\circ^{۴}}{g^{۲}} + \frac{۱}{۳}\frac{V_\circ^{۴}}{g^{۲}} - \frac{۱}{۴}\frac{V_\circ^{۴}}{g^{۲}} = -\frac{۱}{۴}\frac{V_\circ^{۴}}{g^{۲}}$$

بنابراین ارتفاع اوج ذره تا مرتبه‌ی اول نسبت به α می‌شود:

$$H = H_{(\circ)} + \alpha H_{(۱)} = \frac{V_)^{۲}}{۲g} - \alpha\frac{V_\circ^{۴}}{۴g^{۲}} = \frac{V_\circ^{۲}}{۲g}(۱ - \alpha\frac{V_\circ^{۲}}{۲g})$$

برای بدست آوردن زمان برگشتن ذره به محل پرتاب، معادله حرکت را می‌نویسیم: $\dot{V} = g - \alpha V^{۲}$
با قرار دادن $V = V_{(\circ)} + \alpha V_{(۱)}$ داریم:

$$\dot{V}_{(\circ)} + \alpha\dot{V}_{(۱)} = g - \alpha(V_{(\circ)}^{۲} + \alpha^{۲}V_{(۱)}^{۲} + ۲\alpha V_{(\circ)}V_{(۱)})$$

$$O_{(\circ)} : \dot{V}_{(\circ)} = g \rightarrow V_{(\circ)} = gt$$

$$O_{(۱)} : \dot{V}_{(۱)} = -V_{(\circ)}^{۲} = -g^{۲}t^{۲} \rightarrow V_{(۱)} = -g^{۲}\frac{t^{۳}}{۳}$$

$$V_{(t)} = V_{(\circ)} + \alpha V_{(۱)} = gt - \alpha g^{۲}\frac{t^{۳}}{۳}$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی بدست آمده داریم:

$$y_{(t)} = \frac{۱}{۲}gt^{۲} - \frac{\alpha}{۱۲}g^{۲}t^{۴}$$

که در آن $t = \circ$ زمانی است که ذره در مبدأ قرار دارد. زمان برگشتن، T_r، با قرار دادن $y_{(T_r)} = H = \frac{V_\circ^۲}{۲g}(۱ - \alpha\frac{V_\circ^۲}{۲g})$ بدست می‌آید. T_r را هم به صورت $T_{r_{(\circ)}} + \alpha T_{r_{(۱)}}$ در نظر می‌گیریم.

$$\frac{V_\circ^۲}{۲g}(۱ - \alpha\frac{V_\circ^۲}{۲g}) = \frac{۱}{۲}g(T_{r_{(\circ)}}^۲ + ۲\alpha T_{r_{(\circ)}}T_{r_{(۱)}}) - \frac{\alpha}{۱۲}g^۲(T_{r_{(\circ)}}^۴)$$

$$O_{(\circ)} : \frac{۱}{۲}gT_{r_{(\circ)}}^۲ = \frac{V_\circ^۲}{۲g} \to T_{r_{(\circ)}} = \frac{V_\circ}{g}$$

$$O_{(۱)} : -\frac{V_\circ^۴}{۴g^۲} = gT_{r_{(\circ)}}T_{r_{(۱)}} - \frac{g^۲}{۱۲}T_{r_{(\circ}}^۴ \to g\frac{V_\circ}{g}T_{r_{(۱)}} = \frac{g^۲}{۱۲}T_{r_{(\circ)}}^۴ - \frac{V_\circ^۴}{۴g^۲}$$

$$\to T_{r_{(۱)}} = -\frac{۱}{۶}\frac{V_\circ^۳}{g^۲}$$

بنابراین $T_r = T_{r_{(\circ)}} + \alpha T_{r_{(۱)}} = \frac{V_\circ}{g} - \frac{\alpha V_\circ^۳}{۶g^۲}$ و بنابراین زمان برگشت از زمان پرتاب ذره برابر است با:

$$t = T_r + t_f = \frac{۲V_\circ}{g} - \frac{۱}{۲}\alpha\frac{V_\circ^۳}{g^۲}$$

۳-۴ جابجایی کوچک و سینماتیک

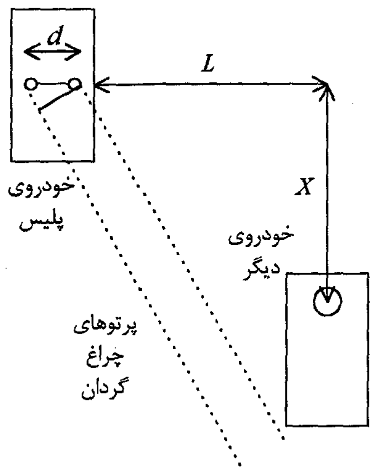
موارد زیادی پیش می‌آید، با مسأله‌ای روبرو می‌شویم که در آن اجزاء مسأله در حرکت‌اند و از ما متغیر در لحظه‌ای خاص خواسته می‌شود. در این موارد می‌توان با مقایسه‌ی اجزاء مسأله در لحظه‌ی مورد نظر و δt ثانیه بعد از آن و استفاده‌ی مناسب از بسط دادن جملات تا مرتبه‌ی اول به جواب خواسته شده رسید.

مثال ۳: چراغ گردان خودروهای پلیس، متشکل از یک چراغ و یک آینه‌ی همگرا است، به گونه‌ای که چراغ در نقطه‌ی کانونی آینه است و در نتیجه نور چراغ به صورت موازی از آینه باز می‌تابد. آینه با سرعت زاویه‌ای ω حول چراغ می‌چرخد، یعنی در هر ثانیه به اندازه‌ی زاویه‌ی ω رادیان می‌چرخد. یک خودروی پلیس در یک سمت یک بزرگراه ایستاده است و روی آن دو چراغ گردان به فاصله‌ی d از هم قرار دارند. دو چراغ گردان با سرعت زاویه‌ای یکسان ω می‌چرخند و پرتوهای آن‌ها با هم موازی است. خودروی دیگری، مانند شکل (۳-۳)، در سوی دیگر بزرگراه ایستاده است. فاصله‌ی چراغ گردان نزدیک‌تر تا این سوی دیگر بزرگراه (که خودروی دوم ایستاده است) برابر L است $(d \ll L)$

الف) پرتوهای دو چراغ گردان با اختلاف زمانی T به چشم راننده‌ی خودروی دوم می‌رسد. این اختلاف زمانی را برحسب پارامترهای مسأله به تقریب به دست آورید و نمودار T برحسب x را بکشید.

راهنمایی: برای زاویه‌های کوچک α می‌توانید فرض کنید $\sin\alpha \simeq \tan\alpha \simeq \alpha$ که α برحسب رادیان است.

ب) بیشینه‌ی این اختلاف زمانی، به ازای xهای مختلف، چقدر است؟ این مقدار را به ازای $L = ۳۰\ m$، $d = ۱\ m$ و $\omega = ۶\ rad/s$ حساب کنید. (مسأله‌ی مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد فیزیک ایران)



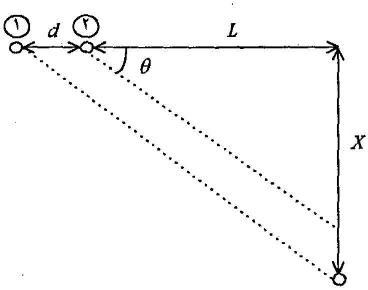
شکل ۳-۳

حل: الف) شکل (۳-۴) لحظه‌ای را نشان می‌دهد که نور چراغ گردان (۱) به خودرو می‌رسد. برای این لحظه داریم:

$$\tan\theta = \frac{X}{L+d} = \frac{X}{L}(۱ - \frac{d}{L}) \qquad (۱)$$

بعد از زمان T که نور چراغ گردان دو به اتومبیل می‌رسد داریم:

$$\tan(\theta + \omega T) = \frac{X}{L}$$



شکل ۳-۴

با توجه به $\omega T \ll \theta$ و رابطه‌ی (۴-۱) $(f(x, t\delta x) = f(x_\circ) + \delta x f'(x_\circ))$ داریم:

$$\tan\theta + \omega T\frac{۱}{\cos^۲\theta} = \frac{X}{L} \qquad (۲)$$

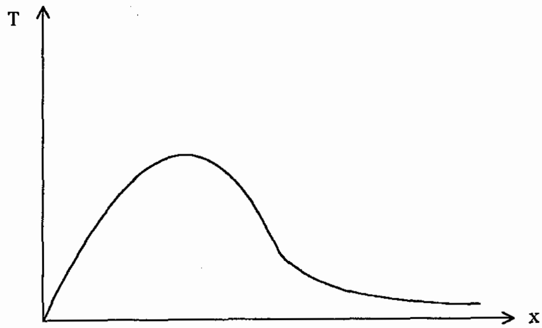
که در این جا $\tan(\theta + \omega T)$ تا مرتبه‌ی یک نسبت به ΩT بسط داده شده. با دانستن $\cos\theta = \frac{(L+d)}{\sqrt{(۱+d)^۲ + X^۲}}$ و قرار دادن $\tan\theta$ از (۱) در (۲) داریم:

$$\frac{X}{L} - \frac{Xd}{L^۲} + \omega T\frac{X^۲ + (L+d)^۲}{(L+d)^۲} = \frac{X}{L}$$

در این رابطه چون ωT از مرتبه‌ی یک است ضریب آن را تا مرتبه‌ی صفرم نسبت به $\frac{d}{L}$ می‌نویسیم تا حاصلضرب جمله‌ی مرتبه‌ی دوم ندهد. لذا داریم:

$$\frac{-Xd}{L^۲}+\omega T(\frac{X^۲+L^۲}{L^۲})=۰\rightarrow T=\frac{Xd}{(X^۲+L^۲)\omega} \qquad (۳)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳) نمودار T برحسب x به صورت شکل (۳-۵) در می‌آید.



شکل۳-۵

در این مثال با اینکه در صورت سؤال فقط از تقریب مثلثاتی ذکر شده و از بسط نیوتن ($(۱+\epsilon)^n=۱+n\epsilon+\cdots$) حرفی به میان نیامده، اما اگر از آن استفاده نشود در عبارات شامل $\frac{d}{L}$، جواب به‌طور کامل درست نیست، زیرا در یک معادله نمی‌توان عبارتی را تا مرتبه‌ی اول بسط داد و عبارتی دیگر را تا این مرتبه بسط نداد و در این مسأله با همان تقریب مثلثاتی هم می‌توان به بسط نیوتن در عبارات شامل $\frac{d}{L}$ رسید و دانستن بسط نیوتن ضروری نیست.

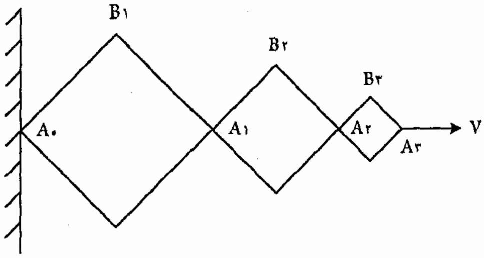
ب) برای بیشینه‌ی T داریم:

$$\frac{dT}{dX}=۰\rightarrow d(X^۲+L^۲)\omega-۲X^۲\omega d=۰$$
$$\rightarrow X^۲-۲X^۲=L^۲\rightarrow X=L$$
$$\rightarrow T_{\max}=\frac{Ld}{۲L^۲\omega}=\frac{d}{۲L\omega}$$

با جاگذاری اعداد داده شده در صورت مسأله داریم:

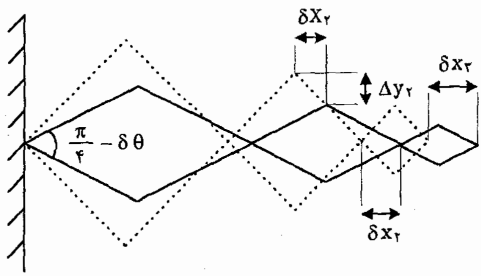
$$T_{\max}=\frac{۱}{۳۶۰}s$$

مثال ۴: یک ساختار لولایی شامل سه لوزی با نسبت اضلاع ۳:۲:۱ است شکل (۳-۶). رأس $A_۳$ در امتداد افق با سرعت V حرکت می‌کند سرعت رئوس $A_۱$، $A_۲$ و $B_۲$ را در لحظه‌ای که زاویه‌ی ساختار ۹۰° است، به دست آورید.



شکل۳-۶

حل: مطابق شکل (۳-۷) فرض کنید بعد از زمان δt نقطه $A_۳$ به اندازه‌ی $\delta x_۳$ جلو رود و نصف زاویه‌ی رأس $A_۰$ از $\frac{\pi}{۴}$ به $(\frac{\pi}{۴}-\delta\theta)$ تغییر کرده باشد.



شکل۳-۷

با توجه به شکل (۳-۷) می‌توانیم برای $\delta x_۲$ یعنی جابجایی نقطه‌ی $A_۲$، مختصات اولیه‌ی این نقطه را از مختصات ثانویه‌ی آن کم کنیم:

$$\delta x_۲ =[۲(۳\ell)\cos(\frac{\pi}{۴}-\delta\theta)+۲(۲\ell)\cos(\frac{\pi}{۴}-\delta\theta)]-[۲(۳\ell)\cos\frac{\pi}{۴}+۲(۲\ell)\cos\frac{\pi}{۴}]$$

با بسط جملات تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\delta\theta$ بدست می‌آوریم:

$$\delta x_۲ = ۱۰\frac{\sqrt{۲}}{۲}\delta\theta = ۵\sqrt{۲}\delta\theta \qquad (۱)$$

برای بدست آوردن $\delta\theta$ هم، از فرض مسأله استفاده می‌کنیم.

با توجه به شکل (۳-۷) می‌توانیم δx_3 را بوسیله‌ی تفریق مختصات اولیه از ثانویه محاسبه کنیم:

$$\delta x_3 =[2(3\ell)\cos(\frac{\pi}{4}-\delta\theta)+2(2\ell)\cos(\frac{\pi}{4}-\delta\theta)+2(\ell)\cos(\frac{\pi}{4}-\delta\theta)] - [2(3\ell)\cos\frac{\pi}{4}+2(2\ell)\cos\frac{\pi}{4}+2(\ell)\cos(\frac{\pi}{4}-\delta\theta)]$$

با بسط جملات تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\delta\theta$ داریم:

$$\delta x_3 = 12\ell\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\delta\theta\frac{\sqrt{2}}{2}\right]-12\ell\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}\ell\delta\theta \rightarrow \delta\theta=\frac{\delta x_3}{6\sqrt{2}\ell} \qquad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\delta x_2 = \frac{5}{6}\delta x_3 \rightarrow V_{A_2}=\frac{5}{6}V$$

به همین ترتیب برای نقطه‌ی A_1 داریم:

$$V_{A_1}=\frac{V}{2}$$

سرعت B_2 دو مؤلفه دارد. برای بدست آوردن مؤلفه‌ی x آن باید مختصات x اولیه را از ثانویه کم کنیم. لذا برای جابجایی نقطه B_2 در راستای x، (Δx_2) داریم:

$$\Delta x_2 = 2(3\ell)\cos(\frac{\pi}{4}-\delta\theta)+2\ell\cos(\frac{\pi}{4}-\delta\theta)=4\sqrt{2}\ell\delta\theta$$

با استفاده از (۲) داریم:

$$\dot{x}_{B_2}=\frac{2}{3}V$$

به همین ترتیب برای Δy داریم:

$$\Delta y_2 = 2\ell\sin(\frac{\pi}{4}-\delta\theta)-2\ell\sin\frac{\pi}{4}=-\ell\sqrt{2}\delta\theta$$

از (۲) داریم:

$$\Delta y_2 = -\frac{\delta x_3}{6}\rightarrow \dot{y}_{B_2}=-\frac{1}{6}V$$

که علامت منفی نشان دهنده‌ی حرکت نقطه B_2 به سمت پایین است. برای سرعت نقطه‌ی B_2 (V_{B_2}) داریم:

$$V_{B_2}=\sqrt{\dot{x}_{B_2}^2+\dot{y}_{B_2}^2}=\frac{\sqrt{17}}{6}V$$

۳-۵ حرکت پرتابه در دو بعد

مثال ۵: در یک حرکت پرتابی، مقدار شتاب ناشی از اصطکاک بین جسم و پرتابه و هوا در دو جهت x و y برابر با ثابت a است.

الف) معادله‌ی مسیر $y = f(x)$ را در کلی‌ترین حالت ممکن بدست آورید.

ب) تحت سرعت اولیه‌ی بسیار بالا و aی بسیار کوچک، مقدار برد بیشینه تحت چه زاویه‌ای بدست می‌آید. (دوره‌ی چهل نفر باشگاه دانش پژوهان)

حل: الف) برای حرکت در راستای x داریم:

$$x = -\frac{۱}{۲}at^{۲} + V_{\circ x}t \qquad (۱)$$

$$y_{(\text{بالا رفتن})} = -\frac{۱}{۲}(g+a)t^{۲} + V_{\circ y}t \qquad (۲)$$

$$y_{(\text{پایین رفتن})} = -\frac{۱}{۲}(g-a)t^{۲} + H$$

که در آن $H = \frac{V_{\circ y}^{۲}}{۲(g+a)}$، ارتفاع اوج جسم است. زمان اوج جسم نیز برابر است با $t_{۱} = \frac{V_{\circ y}}{g+a}$
با بدست آوردن t از معادله‌ی (۱) و جاگذاری در (۲) و (۳) تابع $y = f(x)$ بدست می‌آید. از معادله‌ی (۱) داریم:

$$at^{۲} - ۲V_{\circ x}t + ۲x = \circ \to t = \frac{V_{\circ x} \pm \sqrt{V_{\circ x}^{۲} - ۲ax}}{a}$$

در رابطه‌ی بالا جواب مثبت قابل قبول نیست زیرا در $x = \circ$، $t = \circ$ است

$$y_{(\text{بالا رفتن})} = -\frac{۱}{۲}(g+a)\left[\frac{V_{\circ x} - \sqrt{V_{\circ x}^{۲} - ۲ax}}{a}\right]^{۲} + V_{\circ y}\left[\frac{V_{\circ x} - \sqrt{V_{\circ x}^{۲} - ۲ax}}{a}\right], \ t \leqslant \frac{V_{\circ y}}{g+a}$$

$$y_{(\text{پایین رفتن})} = -\frac{۱}{۲}(g-a)\left[\frac{V_{\circ x} - \sqrt{V_{\circ x}^{۲} - ۲ax}}{a}\right]^{۲} + \frac{V_{\circ y}^{۲}}{۲(g+a)}, \ t \geqslant \frac{V_{\circ y}}{g+a}$$

از آنجایی که $H = \frac{V_{\circ y}^{۲}}{۲(g+a)}$ و شتاب حرکت در راستای y هنگام پایین آمدن $g - a$ است برای زمان پایین آمدن داریم:

$$t_{۲} = \frac{V_{\circ y}}{\sqrt{g^{۲} - a^{۲}}}$$

ب) برای بدست آوردن برد، در معادله‌ی (۱) به جای t مقدار $t_۱ + t_۲$ را قرار می‌دهیم.

$$R = -\frac{۱}{۲}a\left[\frac{V_{\circ y}}{g+a} + \frac{V_{\circ y}}{\sqrt{g^۲ - a^۲}}\right]^۲ + V_{\circ x}\left[\frac{V_{\circ y}}{g+a} + \frac{V_{\circ y}}{\sqrt{g^۲ - a^۲}}\right]$$

حال عبارت بالا را تا مرتبه‌ی یک نسبت به $\frac{a}{g}$ بسط می‌دهیم:

$$R = -\frac{۱}{۲}aV_{\circ y}^۲[\frac{۱}{g}(۱ - \frac{a}{g}) + \frac{۱}{g}]^۲ + V_{\circ x}V_{\circ y}[\frac{۱}{g}(۱ - \frac{a}{g}) + \frac{۱}{g}]$$

با قرار دادن $V_{\circ x} = V_\circ \cos\alpha$ و $V_{\circ y} = V_\circ \sin\alpha$ داریم:

$$R = -\frac{۱}{۲}a\frac{V_\circ^۲ \sin^۲\alpha}{g^۲}(۲ - \frac{a}{g})^۲ + \frac{V_\circ^۲ \sin\alpha\cos\alpha}{g}(۲ - \frac{a}{g})$$

برای بدست آوردن ماکزیمم برد، مشتق R برحسب α را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{dR}{d\alpha} = -\frac{۱}{۲}\frac{a}{g^۲}V_\circ^۲ \sin ۲\alpha(۲ - \frac{a}{g})^۲ + \frac{V_\circ^۲\cos ۲\alpha}{g}(۲ - \frac{a}{g}) = \circ$$

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲g}{a(۲ - \frac{a}{g})} = (\frac{g}{a} + \frac{۱}{۲}) \to \alpha_{\max} = \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(\frac{g}{a} + \frac{۱}{۲})$$

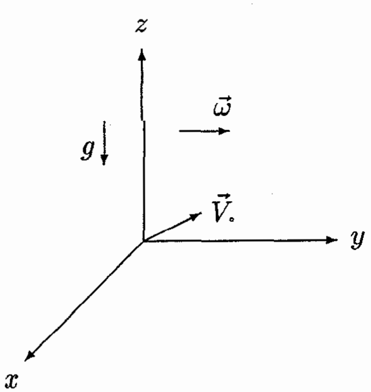
۳-۶ حرکت پرتابه در سه بعد

دراین قسمت هم، مثالی از حرکت جسمی که مقاومت هوا تأثیر اندکی در مسیر حرکتش می‌نماید، می‌پردازیم:

مثال ۶: گلوله‌ای با سرعت اولیه $\vec{V}_\circ = \hat{i}V_{\circ x} + \hat{j}V_{\circ y} + \hat{k}V_{\circ z}$ از مبدأ مختصات پرتاب می‌شود. باد نیز با سرعت ثابت $\omega\hat{j}$ می‌وزد. با در نظر گرفتن نیروی مقاومت هوا به صورت $\vec{f} = -b\vec{u}$ (که $\vec{u}$ سرعت گلوله نسبت به هوا و b مقدار ثابتی است)، مقادیر زیر را تا تقریب مرتبه‌ی اول نسبت به b بدست آورید.

الف) زمان رسیدن گلوله به برد آن یعنی $t_۱$ را بدست آورید.

ب) نقطه‌ی برد گلوله $(x_۱, y_۱)$ را بدست آورید.
(آزمون انتخابی تیم جهانی فیزیک سال ۷۸)



شکل ۳-۸

حل: الف) برای نیروی اصطکاک داریم:

$$\vec{f} = -b(V_x\hat{i} + (V_y - \omega)\hat{j} + V_z\hat{k})$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f} \rightarrow \begin{cases} m\dfrac{dV_z}{dt} = -mg - bV_z & (۱) \\ m\dfrac{dV_y}{dt} = -b(V_y - \omega) & (۲) \\ m\dfrac{dV_x}{dt} = -bV_x & (۳) \end{cases}$$

$$\text{از } (۱) \rightarrow m\frac{d(V_{z_{(۰)}} + bV_{z_{(۱)}})}{dt} = -mg - bV_{z_{(۰)}} \qquad (۴)$$

$$\text{از } (۲) \rightarrow m\frac{d(V_{y_{(۰)}} + bV_{y_{(۱)}})}{dt} = -b(V_{y_{(۰)}} - \omega) \qquad (۵)$$

$$\text{از } (۳) \rightarrow m\frac{d(V_{x_{(۰)}} + bV_{x_{(۱)}})}{dt} = -bV_{x_{(۰)}} \qquad (۶)$$

برای جملات مرتبه‌ی صفرم در (۴) داریم:

$$V_{z_{(۰)}} = V_{۰z} - gt$$

برای جملات مرتبه‌ی اول در (۴) داریم:

$$mbV'_{z_{(۱)}} = -bV_{z_{(۰)}} = -b(V_{۰z} - gt)$$

$$\rightarrow V'_{z_{(۱)}} = \frac{۱}{m}(gt - V_{۰z}) \rightarrow V_{z_{(۱)}} = \frac{۱}{m}(\frac{gt^۲}{۲} - V_{۰z}t)$$

$$\rightarrow V_z = V_{۰z} - gt + \frac{b}{m}(\frac{gt^۲}{۲} - V_{۰z}t)$$

$$\rightarrow Z = V_{۰z}t - \frac{۱}{۲}gt^۲ + \frac{b}{m}g\frac{t^۳}{۶} - \frac{bV_{۰z}t^۲}{۲m}$$

در نقطه‌ی رسیدن به برد داریم:

$$Z = ۰ \rightarrow V_{۰z}t - \frac{۱}{۲}gt^۲ + \frac{b}{m}g\frac{t^۳}{۶} - \frac{bV_{۰z}}{m}\frac{t^۲}{۲} = ۰$$

$$\rightarrow V_{۰z} - \frac{۱}{۲}g(t_{(۰)} + bt_{(۱)}) + \frac{b}{m}g\frac{t^۲_{(۰)}}{۶} - bV_{۰z}\frac{t_{(۰)}}{۲m} = ۰$$

برای جملات فاقد b در رابطه‌ی بالا داریم:

$$V_{۰z} - \frac{۱}{۲}gt_{(۰)} = ۰ \rightarrow t_{(۰)} = \frac{۲V_{۰z}}{g}$$

برای جملات حاوی b^1 داریم: (با جاگذاری $t_{(0)} = \frac{2V_{0z}}{g}$)

$$-\frac{1}{2}gbt_{(1)} + \frac{b}{m}g\frac{4V_{0z}^2}{g^2\times 6} - bV_{0z}\frac{2V_{0z}}{2mg} = 0$$

$$t_{(1)} = \frac{2}{g}(\frac{2V_{0z}^2}{3mg} - \frac{V_{0z}^2}{mg}) = -\frac{2V_{0z}^2}{3mg^2}$$

$$t_1 = \frac{2V_{0z}}{g} - \frac{2V_{0z}^2}{3mg^2}b$$

الف) برای نقطه‌ی برد از معادله‌ی (۵) داریم:

برای جملات مرتبه‌ی صفر داریم:

$$V'_{y_{(0)}} = 0 \rightarrow V_{y_{(0)}} = V_{0y}$$

برای جملات مرتبه‌ی اول داریم:

$$mV'_{y_{(1)}} = \omega - V_{y_{(0)}} \rightarrow V_{y_{(1)}} = \frac{\omega t - V_{0y}t}{m}$$

$$\rightarrow V_y = V_{0y} + \frac{(\omega - V_{0y})tb}{m}$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y \rightarrow y = V_{0y}t + \frac{(\omega - V_{0y})bt^2}{2m}$$

با جاگذاری t_1 در معادله‌ی بالا برای y_1 برد داریم:

$$y_1 = V_{0y}(t_{(0)} + bt_{(1)}) + \frac{(\omega - V_{0y})b(t_{(0)} + bt_{(1)})^2}{2m}$$

با حذف جملات b^2 و بالاتر داریم:

$$y_1 = V_{0y}t_{(0)} + bV_{0y}t_{(1)} + \frac{(\omega - V_{0y})bt_{(0)}^2}{2m}$$

با جاگذاری $t_{(0)}$ و $t_{(1)}$ از قسمت قبل داریم:

$$y_1 = \frac{2V_{0y}V_{0z}}{g} + bV_{0y}(\frac{-2V_{0z}^2}{3mg^2}) + \frac{(\omega - V_{0y})b}{2m}\frac{4V_{0z}^2}{g^2}$$

$$y_1 = \frac{2V_{0y}V_{0z}}{g} - \frac{8bV_{0y}V_{0z}^2}{3mg^2} + \frac{2bV_{0z}^2\omega}{mg^2}$$

از رابطه‌ی (۶) داریم:

$$V_{x(\cdot)} = V_{\cdot x}$$

$$mbV'_{x(\text{۱})} = -bV_{\cdot x} \to V_{x(\text{۱})} = -\frac{V_{\cdot x}}{m}t$$

$$\to V_x = V_{\cdot x} - \frac{V_{\cdot x}}{m}bt \to x = V_{\cdot x}t - \frac{V_{\cdot x}bt^{\text{۲}}}{\text{۲}m}$$

برای $x_{\text{۱}}$ برد داریم:

$$\to x_{\text{۱}} = V_{\cdot x}(t_{(\cdot)} + bt_{(\text{۱})}) - \frac{V_{\cdot x}b}{\text{۲}m}t^{\text{۲}}_{(\cdot)}$$

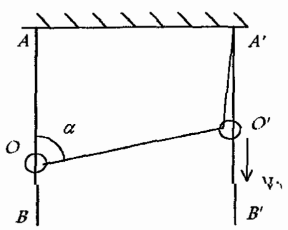
$$\to x_{\text{۱}} = V_{\cdot x}(\frac{\text{۲}V_{\cdot z}}{g} - \frac{\text{۲}V^{\text{۲}}_{\cdot z}b}{\text{۳}mg^{\text{۲}}}) - \frac{\text{۴}V_{\cdot x}V^{\text{۲}}_{\cdot z}b}{\text{۲}mg^{\text{۲}}}$$

$$= \frac{\text{۲}V_{\cdot x}V_{\cdot z}}{g} - \frac{\text{۸}bV^{\text{۲}}_{\cdot z}V_{\cdot x}}{\text{۳}mg^{\text{۲}}}$$

بدین ترتیب نقطه‌ی برد گلوله $(x_{\text{۱}}, y_{\text{۱}})$ هم تا مرتبه‌ی اول نسبت به b بدست آمد.

مسائل

۱) دو حلقه‌ی O و O' روی دو میله‌ی ساکن AB و $A'B'$ قرارگرفته‌اند. نخ غیرکشسانی که یک سر آن در نقطه‌ی A' بسته شده است، پس از عبور از حلقه‌ی O' به حلقه‌ی O وصل شده است (شکل (۳-۹))



شکل۳-۹

فرض کنید حلقه‌ی O' با سرعت ثابت $V_{\text{۱}}$ به سمت پایین حرکت کند. سرعت حلقه‌ی O $(V_{\text{۲}})$ را در لحظه‌ای که $\angle AOO' = \alpha$ است، بیابید.

جواب: $V_{\text{۲}} = V_{\text{۱}}(\frac{\text{۱}}{\cos\alpha} - \text{۱})$

۲) براساس یک افسانه‌ی علمی، گالیلئو برای این که نشان دهد سرعت سقوط اجسام به وزن‌شان بستگی ندارد دو وزنه‌ی متفاوت را از بالای برج کج پیزا رها کرد و حاضران مشاهده کردند این دو وزنه با هم به زمین رسیدند.

می‌خواهیم ببینیم این افسانه تا چه حد واقعی است.

گلوله‌ای با سرعت اولیه‌ی صفر از ارتفاع h رها می‌شود. نیروی مقاومت هوا برای این گلوله $m\alpha V^2$ است که در آن m جرم گلوله و V سرعت آن است. α کمیت ثابتی است که به جنس گلوله و اندازه‌ی آن بستگی دارد:

$$\alpha = \frac{\rho'}{\rho} R$$

در این جا ρ' چگالی هوا، ρ چگالی گلوله و R اندازه‌ی گلوله ($\frac{4}{3}$ برابر شعاع گلوله) است.

الف) معادله‌ی دیفرانسیل حرکت گلوله را بنویسید و از روی آن $y_{(t)}$ را تا مرتبه‌ی یک نسبت به α به دست آورید. y ارتفاع گلوله و t زمان است.

ب) زمان رسیدن گلوله به زمین در نبود مقاومت هوا را T_0 بنامید. همین زمان با وجود مقاومت هوا را T بنامید. $\frac{(T-T_0)}{T_0}$ را تا مرتبه‌ی یک نسبت به α به دست آورید.

ج) پس از زمان T_0، گلوله در نزدیکی زمین است $H = y(T_0)$ را تا مرتبه‌ی یک نسبت به α بدست آورید.

ارتفاع برج پیزا تقریباً $50\ m$، چگالی هوا از مرتبه‌ی $1\ kg/m^3$، چگالی سرب از مرتبه‌ی $10^4\ kg/m^3$، و چگالی چوب از مرتبه‌ی $10^3\ kg/m^3$ است.

د) یک گلوله سربی به اندازه‌ی $10\ cm$ و یک گلوله‌ی چوبی به اندازه‌ی $5\ cm$ را همزمان از بالای برج پیزا رها می‌کنیم (این کار با دست بسیار دشوار است، چون جرم گلوله‌ی بزرگ‌تر نزدیک $20\ kg$ است!) اختلاف زمان رسیدن این گلوله به زمین چقدر است؟ فاصله‌ی دو گلوله از هم در نزدیکی زمین چقدر است؟ (امتحان ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۰)

۳) مردی که در ساحل شیبدار دریاچه‌ای ایستاده است قایقی را در آب به وسیله‌ی طنابی که در دست دارد با سرعت ثابت V به سوی خود می‌کشد سرعت قایق در لحظه‌ای که زاویه‌ی بین راستای طناب و سطح آب برابر با α است، چه اندازه خواهد بود؟

جواب: $V_1 = \frac{V}{\cos\alpha}$ که در آن V_1 سرعت قایق است.

۴) می‌خواهیم عمق چاه، یعنی فاصله‌ی بین سطح آب درون چاه با سطح زمین را بسنجیم. برای این کار سنگی را به درون چاه می‌اندازیم و زمان بین رها شدن سنگ تا شنیدن صدای برخورد سنگ با

سطح آب توی چاه، T، را با کرونومتر می‌سنجیم. می‌دانیم که در محل چاه $g = 10\ m/s^2$ است. فرض کنید $T = 2{,}0\ s$ باشد. اگر فرض کنیم صوت با سرعت بی‌نهایت منتشر می‌شود و T را با دقت خیلی خوبی سنجیده‌ایم، آن وقت عمق چاه می‌شود $h_0 = \frac{1}{2}gT^2$ اگر صوت با سرعت بی‌نهایت منتشر شود و دقت زمان سنجی حدود $0{,}2\ s$ باشد، عمق چاه می‌شود $h_0 + h_1$. اگر خطای زمان سنجی نداشته باشیم و سرعت صوت را $330\ m/s$ بگیریم، عمق چاه می‌شود $h_0 + h_2$.

الف) $|h_1|$ تقریباً چقدر است؟

ب) اگر می‌توان، علامت h_1 را تعیین کنید.

ج) $|h_2|$ تقریباً چقدر است؟ (دقت کنید که زمان برگشت صوت از ته چاه نسبت به زمان رسیدن سنگ به سطح آب، بسیار کوچک است)

د) اگر می‌توان، علامت h_2 را تعیین کنید.

راهنمایی: اگر $|\epsilon|$ خیلی کوچک‌تر از ۱ باشد، آن‌گاه $(1+\epsilon)^2 \simeq 1 + 2\epsilon$ (امتحان مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد فیزیک کشوری)

۵) ذره‌ای را با سرعت اولیه‌ی V_0 و زاویه‌ی θ نسبت به افق شلیک می‌کنیم. مقاومت هوا به صورت $\vec{f} = -mk\vec{V}$ می‌باشد. تغییر برد ذره را نسبت به حالتی که مقاومت هوا وجود نداشته، تا مرتبه‌ی اول نسبت به k بیابید.

جواب: $\Delta R = \dfrac{4kV_0^3}{3g^2}\sin\theta\sin 2\theta$

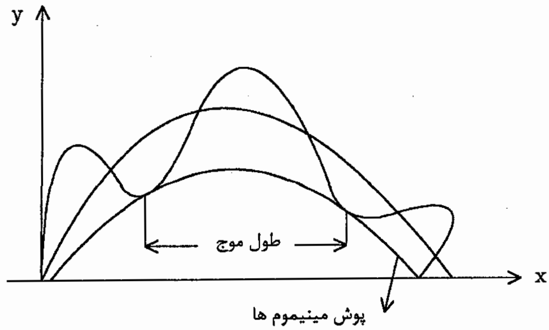
۶) یک فواره آب را با سرعت ثابت V_0 در زاویه‌ی θ با افق پرتاب می‌کند. زاویه‌ی پرتاب توسط یک موتور الکتریکی به صورت $\theta = \frac{\pi}{4} + \alpha\sin\omega t$ $(\alpha \ll \frac{\pi}{4})$ تنظیم می‌شود.

اگر در یک لحظه از مسیر حرکت آب عکس بگیریم حالتی موجی مشاهده می‌کنیم. دامنه‌ی حرکت را در فاصله‌ی افقی x از مبداء، اختلاف ارتفاع قائم ماکزیمم و مینیمم مسیر در آن نقطه تعریف می‌کنیم.

الف) دامنه‌ی حرکت را برحسب x بنویسید.

منحنی گذرنده از نقاط مینیموم را پوش مینیموم مسیر می‌نامیم. طول موج در فاصله‌ی افقی x از مبدأ را فاصله‌ی افقی دو نقطه‌ی تماس مسیر آب با منحنی پوش مینیموم‌ها تعریف می‌کنیم. در زمانی که مینیموم اول در فاصله‌ی x قرار داشته باشد:

ب) این طول موج را حساب کنید.



شکل۳-۱۰

(آزمون دوره ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۳)

۷) الف) کره‌ای به شعاع R و جرم M در شاره‌ای به چگالی ρ سقوط می‌کند. فرض کنید نیروی مقاومتی که از طرف شاره به کره وارد می‌شود $F = \pi\rho R^۲V^۲$ است که V سرعت سقوط کره درون شاره است. این کره تقریباً چه طولی را طی کند تا سرعتش از مرتبه‌ی سرعت حدش شود. برای سقوط قطره‌ی باران به شعاع $۳\ mm$ در هوا چگالی $\rho = ۱\ kg/m^۳$ این مقدار از چه مرتبه‌ای است؟ سرعت حد چقدر است؟

(راهنمایی: اگر نسبت $\frac{A}{B}$ بین ۰/۱ و ۱۰ باشد، A و B از یک مرتبه‌اند)

ب) فرض کنید قطره‌ای با شعاع خیلی کوچک در مه سقوط می‌کند. حین حرکت این قطره، قطرات ریز آب درون مه به آن می‌چسبند. چگالی جرمی رطوبت محیط $\rho_۰$ است. در صورتی که این قطره ارتفاع h را درون مه سقوط کند، شعاع نهایی قطره چقدر است؟ از شعاع اولیه‌ی قطره صرف‌نظر کنید. فرض کنید قطره تقریباً همیشه با سرعت حدش سقوط می‌کند. چون $\rho \gg \rho_۰$ است نیروی مقاومت هوا را مثل حالت (الف) در نظر بگیرید شتاب سقوط قطره چقدر است؟ $h = ۱\ Km$ و $\rho_۰ = ۱۰^{-۵}\ g/cm^۳$ بگیرید. مقدار عددی تغییر شعاع قطره و سرعت حد قطره را بدست آورید.

(راهنمایی: اختلال بکار رفته در این قسمت شبیه مثال‌های ۴ در فصل ۸ و ۲ در فصل ۴ و ۳ در فصل ۹ می‌باشد.)

جواب: الف) سرعت حد $V_\ell = ۶/۳\ m/s$ است و $x = ۰/۲\ m$ است که در آن x مسافت طی شده برای رسیدن سرعت به ۰/۱ سرعت حد (هم مرتبه شدن با سرعت حد) می‌باشد. بنابراین مقدار جواب از مرتبه‌ی متر است.

ب) شعاع نهایی قطره $R_f = ۰/۲۵\ cm$ و شتاب سقوط قطره $a = ۱/۶\ cm/s^۲$ و سرعت حد قطره $V_\ell = ۵/۸\ m/s$ می‌باشد.

۸) جسمی به جرم m و بار q را از ارتفاع $y_۰ = h$ بالای یک صفحه‌ی رسانای بی‌نهایت با سرعت $\vec{V}_۰ = V_{۰x}\hat{i} + V_{۰y}\hat{j}$ پرتاب می‌کنیم. ابعاد جسم ناچیز است. شتاب گرانش $\vec{g} = -g\hat{j}$ ثابت است. بار جسم (q) را خیلی خیلی کوچک در نظر بگیرید. برای سادگی محاسبات فرض کنید $x_۰ = ۰$ است.

الف) ارتفاع اوج جسم را تا اولین مرتبه‌ی تقریب غیر صفر q بدست آورید.

ب) اکنون برای سادگی فرض کنید سرعت اولیه‌ی جسم در راستای قائم صفر است، یعنی $\vec{V}_۰ = V_۰\hat{i}$. مدت زمان پرواز (یعنی زمانی که طول می‌کشد تا جسم به صفحه برخورد کند) و برد ذره را تا اولین مرتبه‌ی تقریب غیر صفر q محاسبه کنید.

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۰)

فصل چهارم

حرکت روی سطوح با اَشکال مختلف

۴-۱ حرکت روی سطح شیبدار لغزنده

مثال ۱: جسمی به جرم m را روی سطح شیبداری به جرم m رها می‌کنیم و شروع به حرکت می‌کند. شتاب سطح شیبدار را تا مرتبه‌ی اول نسبت به عامل اختلال $(\frac{m}{M})$ بیابید. (کلیه‌ی سطوح بدون اصطکاک‌اند)

حل: در این مثال نیز دو راه حل در پیش رو داریم.

راه اول: معادلات حرکت را نوشته و با حل آن و بسط تا مرتبه‌ی اول به جواب برسیم. (روش بسط)

راه دوم: که روش مسیر است و خیلی سریع‌تر به جواب می‌رسد. ابتدا راه اول را بررسی می‌کنیم.

(۱) برای m در راستای x : $N\sin\theta = ma_x$

(۲) برای m در راستای y : $mg - N\cos\theta = ma_y$

(۳) برای m در راستای x : $N\sin\theta = Ma$

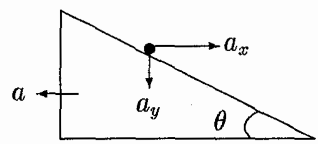
$$\tan\theta = \frac{a_y}{a + a_x} \quad : \text{معادله‌ی قیدی (سینماتیکی)} \qquad (۴)$$

$$\text{از (۱) و (۳)} \rightarrow ma_x = Ma \rightarrow a_x = \frac{Ma}{m}$$

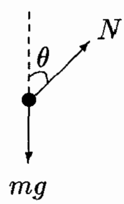
$$\text{از (۲) و (۳)} \rightarrow mg - Ma\coth\theta = ma_y \rightarrow a_y = g - \frac{ma\coth\theta}{m}$$

$$\text{از (۴)} \rightarrow \tan\theta = \frac{y - \frac{Ma\coth\theta}{m}}{a + \frac{Ma}{m}} - \frac{gm - Ma\coth\theta}{am + aM}$$

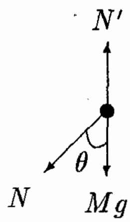
$$\rightarrow a = \frac{mg}{(m+M)\tan\theta + M\coth\theta}$$



شکل۴-۱



شکل۴-۲: دیاگرام آزاد m



شکل۴-۳: دیاگرام آزاد M

چون مسأله بسط تا مرتبه‌ی اول را می‌خواهد و صورت از مرتبه‌ی اول است لذا مخرج را تا مرتبه‌ی صفرم بسط می‌دهیم.

$$a = \frac{mg}{M\tan\theta + M\coth\theta} = \frac{m}{M}\frac{g\sin ۲\theta}{۲}$$

روش دوم: ابتدا فرض می‌کنیم $m = ۰$ یعنی عامل اختلال نداریم و $\frac{m}{M} = ۰$. بنابراین مسیر ذره m مشخص است. حال با توجه به این که مسیر مشخص است یعنی خط راستی با زاویه‌ی θ نسبت به افق و از طرفی شتاب ذره در راستای عمود بر مسیری که خط راست است صفر می‌باشد، داریم:

$$N = mg\cos\theta$$

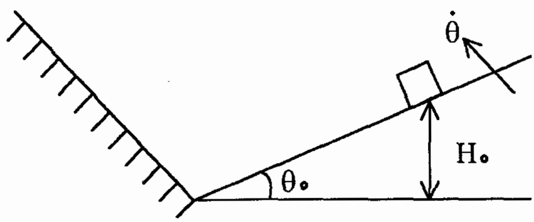
برای حرکت جسم M در راستای افق داریم:

$$Ma = N\sin\theta \rightarrow a = \frac{N\sin\theta}{M} = \frac{mg\sin ۲\theta}{۲M}$$

که همان جواب روش اول است که خیلی سریع‌تر از این روش حاصل شد و دیگر نیازی به نوشتن معادله‌ی قید و ... نبود و مزیت حل از طریق مسیر بر حل از طریق بسط ساده‌تر شدن و بی‌نیاز شدن از نوشتن بعضی معادلات مشکل‌تر می‌باشد.

۲-۴ حرکت روی سطح شیبدار گردنده

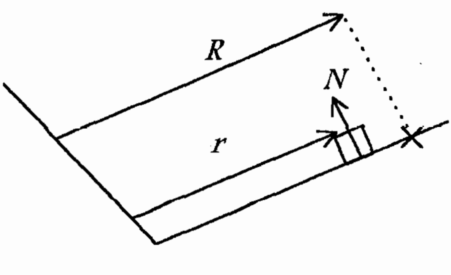
مثال ۲: سطح شیبدار مقابل از زاویه‌ی θ_0 شروع و با سرعت زاویه‌ای $\dot\theta$ بالا می‌آید. جعبه را از ارتفاع H_0 از دیوار انتهایی سطح رها می‌کنیم. (هنگامی که زاویه θ_0 است). پس از چندین بار برخورد با دیوار هنگامی که زاویه سطح شیبدار به θ_f رسید، جعبه تا چه فاصله‌ای از دیوار انتهایی دور می‌شود؟ (سطح شیبدار بدون اصطکاک و برخورد با دیوار الاستیک و $\dot\theta$ خیلی کوچک است ولی ممکن است ωt کوچک نباشد که در این جا t زمان لازم رسیدن به θ_f است).
(امتحان میان دوره‌ای باشگاه دانش پژوهان سال ۷۴)



شکل۴-۴

حل: برای حل مسأله فرض می‌کنیم در یک زاویه‌ی دلخواه θ هستیم. پس حرکت را در این زاویه بررسی کرده و به کل تعمیم می‌دهیم.

در این مثال با توجه به کوچک بودن $\dot\theta$، $\dot\theta T \ll ۱$، در این رابطه T زمان یک دور رفت و برگشت در زاویه θ است که $T = \sqrt{\frac{۲R}{g\sin\theta}}$ (شکل (۴-۵))



شکل۴-۵

برای کار نیروی اصطکاک در یک دور رفت و برگشت داریم: $W_N = \int N ds$ که در آن ds دیفرانسیل جابجایی در راستای N است و N نیروی نرمال سطح. برای ds داریم: $ds = r\dot\theta dt$ لذا برای W_N داریم:

$$W_N = \int r\dot{\theta} N dt = \dot{\theta}\int rN dt \qquad (۱)$$

در رابطه (۱) با قرار دادن $N_{(\circ)}$ به جای N (چون یک ضریب $\dot{\theta}$ که مرتبه‌ی اول است دارد) داریم $(N_{(\circ)} = mg\cos\theta)$:

$$W_N = \dot{\theta} mg\cos\theta \int_{\circ}^{T} rdt = \dot{\theta} mg\cos(۲\int_{\circ}^{\frac{T}{۲}} rdt)$$

دقت کنید در این روابط بازه‌های انتگرال هم تا مرتبه‌ی صفرم نسبت به $\dot{\theta}$ نوشته می‌شوند (چون یک ضریب $\dot{\theta}$ داریم) یعنی این بازه‌ها با فرض $\dot{\theta} = \circ$ نوشته خواهند شد. برای r داریم:

$$r = R - g\sin\theta \times \frac{t^۲}{۲}$$
$$\rightarrow W_N = ۲\dot{\theta} mg\cos\theta \int_{\circ}^{\frac{T}{۲}} (R - \frac{g\sin\theta}{۲}t^۲)dt = \frac{۲Rmg\cos\theta}{۳}$$

از طرفی $\dot{\theta}T = \Delta\theta$ که در آن $\Delta\theta$ تغییرات زاویه است در یک رفت و برگشت کامل در زاویه‌ی دلخواه θ لذا داریم:

$$W_N = \frac{۲}{۳} mgR\cos\theta\Delta\theta$$

می‌دانیم کار نیروی نرمال سطح برابر با تغییر در انرژی جسم است لذا داریم:

$$\Delta E = \frac{۲}{۳} Rmg\cos\theta\Delta\theta$$

و برای E در بالاترین نقطه از مسیر داریم (برای زاویه دلخواه θ):

$$E = mgR\sin\theta = mgH\,^{۱} \rightarrow \Delta E = mg\Delta H \rightarrow \frac{۲}{۳} Rmg\cos\theta\Delta\theta = mg\Delta H$$

و چون $\dot{\theta}$ خیلی کم است لذا در یک رفت و برگشت $\Delta\theta$ و ΔH در مقایسه با کل حرکت بسیار کوچک‌اند (المان‌های کوچک زاویه و ارتفاع). بنابراین داریم:

$$\frac{۲}{۳} R\cos\theta d\theta = dH$$

می‌دانیم $H = R\sin\theta$. داریم:

$$\frac{۲}{۳} H\coth\theta d\theta = dH \rightarrow \frac{dH}{H} = \frac{۲}{۳}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta$$

۱) H ارتفاع اوج در زاویه‌ی دلخواه θ است و نباید با ارتفاع در طول حرکت در زاویه θ که متغیر است اشتباه شود.

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ی بالا داریم:

$$\ln^{\frac{H_f}{H_\circ}} = \frac{۲}{۳}\ln^{\frac{\sin\theta_f}{\sin\theta_\circ}} \rightarrow \frac{H}{H_\circ} = (\frac{\sin\theta_f}{\sin\theta_\circ})^{\frac{۲}{۳}}$$

توجه کنید در این مثال عامل اختلال $\dot{\theta}T \ll ۱$ می‌باشد و درستی این رابطه برای وقتی که θ_f و $\theta_\circ$ اختلاف چشمگیری هم دارند پا بر جاست و با دقت بالایی جواب به دست خواهد آمد. با توجه به رابطه‌ی بالا برای R_f، فاصله‌ی نهایی از دیوار انتهایی برحسب θ_f داریم.

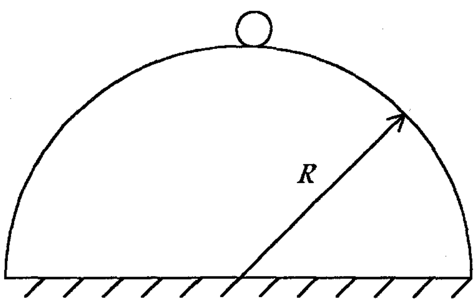
$$R_f = \frac{H_\circ}{\sin\theta_f}(\frac{\sin\theta_f}{\sin\theta_\circ})^{\frac{۲}{۳}}$$

۳-۴ حرکت روی سطح کروی با اصطکاک

مثال ۳: جسمی به جرم m از بالای تپه‌ای به شعاع R با یک ضربه‌ی کوچک شروع به حرکت می‌کند. این جسم در زاویه‌ی $\theta_\circ$ از سطح جدا می‌شود. این زاویه را بیابید.

الف) برای حالتی که جسم با تپه اصطکاک ندارد.

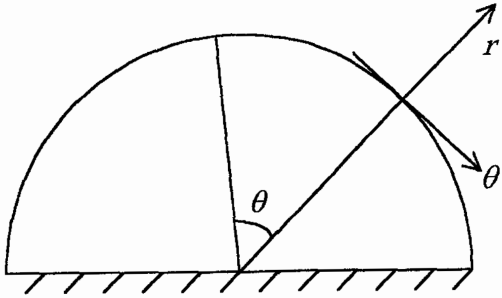
ب) برای حالتی که ضریب اصطکاک جسم با سطح μ است و $\mu \ll ۱$ (جواب را تا مرتبه‌ی اول نسبت به μ بدست آورید)



شکل۴-۶

حل: الف) معادلات حرکت در راستای r نشان داده شده در شکل (۴-۷) را می‌نویسیم.

$$\text{در راستای } r:\ mg\cos\theta - N = \frac{mV^۲}{R}$$



شکل۴-۷

در لحظه‌ی جدایی برای $\theta_{\circ}$ داریم $N = \circ$ بنابراین داریم:

$$mg\cos\theta = \frac{mV^{۲}}{R} \qquad (۱)$$

برای سرعت هم از پایستگی انرژی داریم:

$$mgR - mgR\cos\theta_{\circ} = \frac{mV^{۲}}{۲} \rightarrow V^{۲} = ۲gR(۱ - \cos\theta_{\circ})$$

$$\text{از } (۱) \rightarrow \cos\theta_{\circ} = \frac{۲}{۳} \rightarrow \theta_{\circ} = \arccos\frac{۲}{۳}$$

ب) تفاوت این قسمت با قسمت قبلی این است که به دلیل وجود نیروی اصطکاک دیگر پایستگی انرژی نداریم.

با نوشتن معادلات در راستای r و θ داریم:

$$\text{در راستای } r : mg\cos\theta - N = \frac{mV^{۲}}{R} \qquad (۲)$$

$$\text{در راستای } \theta : mg\sin\theta - N\mu = m\frac{dV}{dt} \qquad (۳)$$

در حل این دو معادله و دو مجهول به مشکل بر می‌خوریم (N و V برحسب θ)، لذا به صورت زیر عمل می‌کنیم.

چون زاویه‌ی جدایی را می‌خواهیم در معادله (۲) به جای N، صفر قرار می‌دهیم:

$$mg\cos\theta = \frac{mV^{۲}}{R} \qquad (۴)$$

یعنی باز هم مانند قبل، در زاویه‌ی جدایی مؤلفه‌ی نیروی جاذبه در راستای r با نیروی مرکزگرا (از دید ناظر روی جرم m گریز از مرکز) برابر است.

حال در معادله‌ی (۴) اگر سرعت را داشته باشیم مسأله حل شده برای بدست آوردن سرعت از معادله‌ی (۳) استفاده می‌کنیم که نشان دهنده‌ی نرخ افزایش سرعت در طول مسیر است (در طول مسیر N برابر صفر نیست)

اما اگر به معادله‌ی (۳) توجه کنید عبارت N در μ ضرب شده. پس کافی است N را تا مرتبه‌ی صفرم نسبت به μ بنویسیم. عبارت مرتبه صفر N هم نسبت به μ یعنی تابع N در غیاب μ.

برای N در غیاب μ از قسمت (الف) داریم:

$$\left.\begin{array}{r} mg\cos\theta - N = \dfrac{mV^{۲}}{R} \\ V^{۲} = ۲gR(۱-\cos\theta) \end{array}\right\} \rightarrow N = mg(۳\cos\theta - ۲)$$

این N همان $N_{(۰)}$ می‌باشد لذا با جاگذاری در معادله (۳) داریم:

$$mg\sin\theta - \mu mg(۳\cos\theta - ۲) = m\frac{dV}{dt}$$

برای حذف عامل زمان از معادله به این صورت عمل می‌کنیم:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{R}\frac{dV}{d\theta} = \frac{V}{R}V' \qquad (۵)$$

که در این رابطه به جای $\frac{d\theta}{dt}$، $\frac{V}{R}$ را قرار دادیم و علامت پریم نشان دهنده‌ی مشتق نسبت به θ است.

حالا سرعت را بسط می‌دهیم:

$$V = V_{(۰)} + \mu V_{(۱)}$$
$$V' = V'_{(۰)} + \mu V'_{(۱)}$$

با جاگذاری در معادله‌ی (۵) داریم:

$$gR\sin\theta - ۳\mu gR\cos\theta + ۲\mu gR = (V_{(۰)} + \mu V_{(۱)})(V'_{(۰)} + \mu V'_{(۱)})$$
$$= (V_{(۰)}V'_{(۰)} + \mu V_{(۱)}V'_{(۰)} + \mu V_{(۰)}V'_{(۱)})$$

در این رابطه با دسته‌بندی جملات مرتبه‌ی صفرم داریم:

$$O_{(۰)} : Rg\sin\theta = V_{(۰)}V'_{(۰)}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا داریم: (محدوده‌ی تغییرات θ از صفر تا θ و محدوده‌ی تغییرات $V_{(\circ)}$ از صفر تا $V_{(\circ)}$ است)

$$Rg(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}V_{(\circ)}^{2}\rightarrow V_{(\circ)}=\sqrt{2Rg(1-\cos\theta)}$$

که همانطور که انتظار می‌رفت این همان نتیجه‌ای است که از نوشتن پایستگی انرژی (در غیاب اصطکاک) حاصل می‌شود. برای جملات مرتبه‌ی یک داریم:

$$-3Rg\cos\theta+2Rg=V_{(\circ)}V'_{(1)}+V'_{(\circ)}V_{(1)}$$

اما می‌دانیم طرف راست معادله، مشتق حاصلضرب $V_{(1)}$ و $V_{(\circ)}$ است. در نتیجه داریم:

$$-3gR\cos\theta+2gR=(V_{(\circ)}V_{(1)})'$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ای بالا داریم:

$$-3gR\sin\theta+2gR\theta=V_{(\circ)}V_{(1)}$$

$$\rightarrow V_{(1)}=-\frac{3gR\sin\theta+2gR\theta}{V_{(\circ)}}=\frac{gR(-3\sin\theta+2\theta)}{\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}}$$

با جاگذاری در معادله‌ی (۴) داریم:

$$g\cos\theta=\frac{(V_{(\circ)}+\mu V_{(1)})^{2}}{R}$$

$$\rightarrow Rg\cos\theta=V_{(\circ)}^{2}+2\mu V_{(1)}V_{(\circ)}$$

$$\rightarrow Rg\cos\theta=2gR(1-\cos\theta)+2\mu\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}\times\frac{gR(-3\sin\theta+2\theta)}{\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}}$$

$$\rightarrow\cos\theta=2-2\cos\theta+2\mu(2\theta-3\sin\theta)$$

$$\rightarrow 2-3\cos\theta+4\mu\theta-6\mu\sin\theta=0$$

این معادله قابل حل نیست مگر از طریق بسط θ.

$$\theta=\theta_{(\circ)}+\mu\theta_{(1)}$$

با جاگذاری و حذف جملات مرتبه‌ی بالا داریم:

$$2-3\cos(\theta_{(\circ)}+\mu\theta_{(1)})+4\mu\theta_{(\circ)}-6\mu\sin\theta_{(\circ)}=0$$

(چرا در عبارت $\sin\theta$ به جای θ، $\theta_{(0)}$ را قرار دادیم؟)

$$\rightarrow 2 - 3(\cos\theta_{(0)} - \mu\theta_{(1)}\sin\theta_{(0)}) + 4\mu\theta_{(0)} - 6\mu\sin\theta_{(0)} = 0$$

$$O_{(0)} : 2 = 3\cos\theta_{(0)} \rightarrow \theta_{(0)} = \arccos\frac{2}{3}$$

همان جواب قسمت (الف) که در غیاب اصطکاک حاصل شد!

$$O_{(1)} : 3\theta_{(1)}\frac{\sqrt{5}}{3} + 4\arccos\frac{2}{3} - 6\frac{\sqrt{5}}{3} = 0$$

$$\rightarrow \theta_{(1)} = \frac{2\sqrt{5} - 4\arccos\frac{2}{3}}{\sqrt{5}}$$

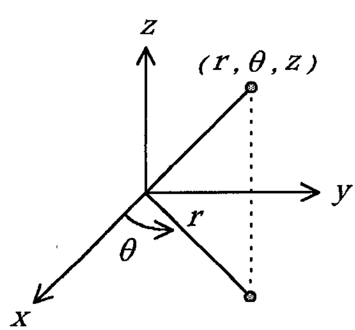
$$\rightarrow \theta_{(1)} = 2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\arccos\frac{2}{3} = 0{,}495\ Rad$$

$$\theta = \arccos\frac{2}{3} + (2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\arccos\frac{2}{3})\mu = 0{,}841 + 0{,}495\ \mu$$

یعنی θ نسبت به حالت (الف) زیادتر شد که همین انتظار را هم از طریق شهودی و درک فیزیکی مسأله می‌توان داشت (چرا؟)

۴-۴ حرکت روی سطح سهمیوار

مثال ۴: دستگاه مختصات استوانه‌ای، دستگاهی سه بعدی شبیه دستگاه دو بعدی قطبی است که مختصات یک نقطه در آن با سه کمیت (r, θ, z) مطابق شکل (۴-۸) تعیین می‌شود. z ارتفاع نقطه‌ی مورد نظر از صفحه xy و r و θ مختصات قطبی تصویر نقطه در صفحه xy است.

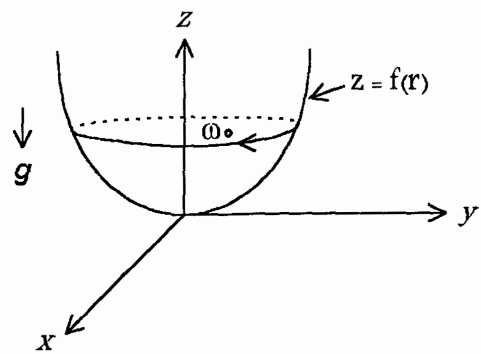


شکل۴-۸

با توجه به اینکه در این دستگاه بردار یکه در جهت z، $\hat{k}$، ثابت است به راحتی می‌توان دید که بردار شتاب در این دستگاه به شکل $\vec{a} = \widehat{\ddot{z}k}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$ است.

الف) یک سطح متقارن از دوران منحنی $z = f(y)$ حول محور z به وجود آمده است. یعنی معادله‌ی این سطح در دستگاه استوانه‌ای به شکل $z = f(r)$ است. این سطح دارای این خاصیت است که اگر ذره‌ای با سرعت زاویه‌ای اولیه‌ی $\omega_\circ$ و سرعت موازی صفحه‌ی xy، در هر نقطه‌ای روی آن قرار بگیرد، شروع به دوران حول محور z در صفحه‌ای ثابت موازی صفحه xy می‌کند ($\omega_\circ$ به اینکه ذره در چه نقطه‌ای روی سطح شروع به حرکت کند بستگی ندارد). رویه‌ی سطح بدون اصطکاک است. نشان دهید که معادله‌ی سطح به شکل $z = f(r) = kr^2$ خواهد بود و k را برحسب $\omega_\circ$ و g به دست آورید.

فرض کنید $f_{(\circ)} = \circ$ و صفحه‌ی xy صفحه‌ی افق است.



شکل ۴-۹

ب) نشان دهید در دستگاه استوانه‌ای $F_\theta = \dfrac{m}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$ که در آن F_θ نیرو در جهت $\hat{\theta}$ است.

ج) حال فرض کنید ذره‌ای با شرایط اولیه‌ی دلخواه روی سطح قسمت (الف) شروع به حرکت می‌کند. با استفاده از معادلات نیرو، رابطه‌ی شتاب در دستگاه استوانه‌ای نشان دهید شعاع حرکت (r) در معادله‌ی زیر صدق می‌کند.

$$\frac{\dot{r}^2 + \gamma\ddot{r} + \frac{g}{2k}}{r^3\ddot{r} - \ell^2} = -\frac{1}{4k^2r^4} \qquad \begin{aligned} \ell &= r_\circ^2\dot{\theta}_\circ \\ r_\circ &= r_{(\circ)} \\ \dot{\theta}_\circ &= \dot{\theta}_{(\circ)} \end{aligned}$$

* توجه: فرض کنید حرکت ذره روی سطح می‌ماند.

د) حال فرض کنید ذره روی سطح با سرعت زاویه‌ای $\omega_\circ$ در یک صفحه‌ی افقی ثابت در حال دوران حول z است. در $t = \circ$ ضربه‌ی کوچکی مماس به سطح و در صفحه‌ی $\hat{z}$ و $\hat{r}$ (یعنی مؤلفه‌ای در جهت θ ندارد) به ذره وارد می‌شود و در اثر ضربه در $t = \circ$ شعاع حرکت ذره شروع به تغییر با آهنگ کوچک اولیه‌ی $\dot{r}_\circ$ می‌کند (یعنی شرایط اولیه به شکل $\dot{r}_{(\circ)} = \dot{r}_\circ$ و $r_{(\circ)} = r_\circ$ و $\dot{\theta}_{(\circ)} = \omega_\circ$ است). حال با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیل قسمت قبل و با تقریب‌های مناسب معادله‌ی حرکت ذره ($\theta_{(t)}$ و $r_{(t)}$) را تا مرتبه‌ی اول به دست آورید.

راهنمایی: می‌توانید فرض کنید $r_{(t)} = r_\circ + \delta(t)$

ه) حال فرض کنید سطح دارای ضریب اصطکاک کوچک $\mu \ll ۱$ است. باز ذره‌ای با سرعت زاویه‌ای $\omega_\circ$ و سرعت موازی صفحه‌ی xy، شروع به حرکت روی سطح می‌کند. بردار نیروی اصطکاک را تا مرتبه‌ی اول نسبت به μ به دست آورید. فرض کنید زمان خیلی طولانی از شروع حرکت نمی‌گذرد.

و) با استفاده از معادلات نیرو و شتاب در دستگاه استوانه‌ای و رابطه‌ی قسمت قبل در این حالت (وجود اصطکاک) معادلات حرکت را بدست آورید (تا مرتبه‌ی اول نسبت به μ)

راهنمایی ۱: سعی کنید در این حالت هم معادله‌ی دیفرانسیل مناسبی برای $r_{(t)}$ بدست آورید. (شبیه کاری که در قسمت (ج) کردید). البته شاید این بار این رابطه علاوه بر r و مشتقات زمانی آن، شامل زمان هم باشد. سپس با تقریب‌های مناسب معادلات را ساده کنید.

راهنمایی ۲: در حل مسأله ممکن است به معادلات دیفرانسیلی که در زیر به همراه جوابشان آمده‌اند برخورد کنید:

$$\text{۱)}\quad \ddot{x} + \omega^۲ x = \circ \rightarrow x = \mathrm{arccos}(\omega t + \varphi)$$

که A و φ به شرایط اولیه بستگی دارند و ثابت‌اند.

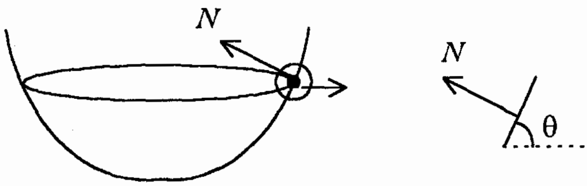
$$\text{۲)}\quad \ddot{x} + \omega^۲ x = \alpha t \rightarrow x = \mathrm{arccos}(\omega t + \varphi) + \frac{\alpha t}{\omega^۲}$$

که در آن A و φ به شرایط اولیه بستگی دارند و ثابت هستند. α نیز عددی ثابت است.

(سؤال دوره‌ی ۴۰ نفر المپیاد فیزیک باشگاه دانش پژوهان سال ۸۰)

حل:

الف) مطابق شکل (۴-۱۰) نیروی نرمال سطح هم نیروی جاذبه را خنثی می‌کند و هم نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند.



شکل۴-۱۰

از نوشتن معادله برای راستای z داریم:

$$N\cos\theta = mg$$

برای نیروی مرکزگرا هم داریم:

$$N\sin\theta = m\omega_\circ^\text{۲} r \rightarrow \tan\theta = \frac{\omega_\circ^\text{۲} r}{g} \rightarrow f'_{(r)} = \frac{\omega_\circ^\text{۲} r}{g}$$

$$\rightarrow f_{(r)} - f_{(\circ)} = \frac{\omega_\circ^\text{۲} r}{\text{۲}g}$$

چون $f_{(\circ)} = \circ$، داریم:

$$z = f_{(r)} = \frac{\omega_\circ^\text{۲} r^\text{۲}}{\text{۲}g} \rightarrow k = \frac{\omega_\circ^\text{۲}}{\text{۲}g}$$

ب) طبق فرض صورت مسأله داریم:

$$\vec{a_\theta} = (r\ddot{\theta} + \text{۲}\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = \frac{\text{۱}}{r}(r^\text{۲}\ddot{\theta} + \text{۲}r\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

که این جمله‌ی حاصله در سمت راست که یک ضریب $\frac{\text{۱}}{r}$ هم دارد مشتق حاصلضرب دو تابع $r^\text{۲}$ و $\dot{\theta}$ است یعنی داریم:

$$\frac{\text{۱}}{r}(r^\text{۲}\ddot{\theta} + \text{۲}r\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{\text{۱}}{r}\frac{d}{dt}(r^\text{۲}\dot{\theta}) \rightarrow F_\theta = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^\text{۲}\dot{\theta})$$

ج) چون نیرو در راستای θ نداریم:

$$F_\theta = \circ \rightarrow \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^\text{۲}\dot{\theta}) = \circ \rightarrow r^\text{۲}\dot{\theta} = \text{ثابت}$$

یعنی $r^\text{۲}\dot{\theta} = r_\circ^\text{۲}\dot{\theta}_\circ = \ell$

که در آن ℓ تکانه زاویه‌ای واحد جرم نام دارد.

در این قسمت معادله در راستای z را می‌نویسیم:

$$N\cos\theta - mg = m\ddot{z} \qquad (۱)$$

برای راستای r هم داریم:

$$-N\sin\theta = \ddot{r} - \dot{r}\theta^۲ \qquad (۲)$$

علامت منفی در عبارت $(-N\sin\theta)$ به خاطر این است که این نیرو به سمت مرکز (کاهش r) است.

$$z = kr^۲ \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{d(kr^۲)}{dr}\frac{dr}{dt} = ۲kr\dot{r}$$

$$\rightarrow \frac{d^۲z}{dt^۲} = \frac{d(۲kr\dot{r})}{dt} = ۲k(\dot{r}^۲ + r\ddot{r})$$

که علامت نقطه، نشان دهنده‌ی مشتق نسبت به زمان است.

$$N\cos\theta = m(g + ۲kr\dot{r} + ۲k\dot{r}^۲)$$

با جاگذاری در معادله‌ی (۲) و دانستن $\tan\theta = ۲kr$ داریم:

$$۲kr = \frac{\frac{\ell^۲}{r^۳} - r\ddot{r}}{g + ۲kr\ddot{r} + ۲k\dot{r}^۲} \rightarrow \frac{\dot{r}^۲ + r\ddot{r} + \frac{g}{۲k}}{r^۳\ddot{r} - \ell^۲} = -\frac{۱}{۴k^۲r^۴}$$

د)

$$r = r_۰ + \delta_{(t)}\ ,\quad \delta_{(t)} \ll r_۰$$

$$\dot{r} = \dot{\delta}_{(t)}\ ,\quad \ddot{r} = \ddot{\delta}_{(t)}$$

با جاگذاری در معادله قسمت (ج) داریم: (δ، $\dot{\delta}$ و $\ddot{\delta}$ از یک مرتبه‌ی کوچکی‌اند)

$$\frac{\dot{\delta}^۲ + (r_۰ + \delta)\ddot{\delta} + \frac{g}{۲k}}{(r_۰ + \delta)^۳\ddot{\delta} - \ell^۲} = -\frac{۱}{۴k^۲(r_۰ + \delta)^۴}$$

با صرف‌نظر از جملات مرتبه‌ی دوم نسبت به δ، $\dot{\delta}$ و $\ddot{\delta}$ و حاصلضرب‌هایشان داریم:

$$-\frac{r_۰\ddot{\delta} + \frac{g}{۲k}}{-r_۰^۳\ddot{\delta} + \ell^۲} = -\frac{۱}{۴k^۲r_۰^۴(۱ + \frac{۴\delta}{r_۰})}$$

$$\rightarrow (\frac{\gamma_۰\ddot{\delta}}{\ell^۲} + \frac{g}{۲k\ell^۲})(۱ - \frac{r_۰^۳\ddot{\delta}}{\ell^۲}) = \frac{۱}{۴k^۲r_۰^۴}(۱ - \frac{۴\delta}{r_۰})$$

$$\rightarrow (\frac{\gamma_۰\ddot{\delta}}{\ell^۲} + \frac{g}{۲k\ell^۲})(۱ + \frac{r_۰^۳\ddot{\delta}}{\ell^۲}) = \frac{۱}{۴k^۲r_۰^۴} - \frac{\delta}{k^۲r_۰^۵}$$

با قرار دادن $k = \frac{\omega_\circ^۲}{۲g}$ و $\ell = r_\circ^۲\omega_\circ$ می‌توان به سادگی دید که $\frac{۱}{۴k^۲r_\circ^۴} = \frac{g}{۲k\ell^۲}$ بنابراین داریم:

$$\frac{r_\circ\ddot{\delta}}{\ell^۲} + \frac{r_\circ^۳\ddot{\delta}}{\ell^۲}\frac{g}{۲k\ell^۲} = -\frac{\delta}{k^۲r_\circ^۵} \rightarrow \frac{\ddot{\delta}r_\circ}{\ell^۲}(۱ + \frac{r_\circ^۲g}{۲k\ell^۲}) = -\frac{\delta}{k^۲r_\circ^۵}$$

$$\rightarrow \frac{\ddot{\delta}r_\circ}{r_\circ^۴\omega_\circ^۲}\left(\frac{۲\frac{\omega_\circ^۲}{۲g}\gamma_\circ^۴\omega_\circ^۲ + r_\circ^۲g}{\frac{\omega_\circ^۲r_\circ^۲}{g}}\right) = -\frac{\delta}{\frac{\omega_\circ^۴r_\circ^۵}{۴g^۲}} \rightarrow \ddot{\delta} + \frac{۴g^۲\omega_\circ^۲}{\omega_\circ^۴r_\circ^۲ + g^۲}\delta = \circ$$

با جانشینی $\gamma^۲ = \frac{۴g^۲\omega_\circ^۲}{\omega_\circ^۴r_\circ^۲ + g^۲}$ داریم:

$$\ddot{\delta} + \gamma^۲\delta = \circ$$

با توجه به راهنمایی مسأله داریم:

$$\delta_{(t)} = A\cos(\gamma t + \varphi)$$

از طرفی از آنجایی که $\delta_{(t)}$ در لحظه‌ی صفر برابر صفر است (چرا؟) داریم: $\varphi = \frac{\pi}{۴}$ و از آنجایی که در لحظه‌ی صفر $\dot{\delta}_{(t)}$ برابر $\dot{r}_\circ$ است داریم:

$$\dot{r}_\circ = -A\gamma\sin(\frac{\pi}{۲}) \rightarrow A = -\frac{\dot{r}_\circ}{\gamma}$$

$$\rightarrow \delta = -\frac{\dot{r}_\circ}{\gamma}\cos(\gamma t + \frac{\pi}{۲}) = \frac{\dot{r}_\circ}{\gamma}\sin(\gamma t)$$

که در آن $\gamma = \frac{۲g\omega_\circ}{\sqrt{\omega_\circ^۴r_\circ^۲ + g^۲}}$ می‌باشد.

برای θ هم داریم:

$$r^۲\dot{\theta} = r_\circ^۲\omega_\circ \rightarrow \dot{\theta} = \frac{r_\circ^۲\omega_\circ}{(r_\circ + \frac{\dot{r}_\circ}{\gamma}\sin\gamma t)^۲} = \omega_\circ(۱ - \frac{۲\dot{\gamma}_\circ\sin\gamma t}{\gamma r_\circ})$$

$$\rightarrow \theta = \omega_\circ t - \int_\circ^t \frac{۲\dot{r}_\circ\sin\gamma t}{\gamma r_\circ}dt = \omega_\circ t - \frac{۲\dot{r}_\circ}{\gamma^۲r_\circ}[۱ - \cos\gamma t]$$

$$\rightarrow \theta_{(t)} = \omega_\circ t - \frac{۲\dot{r}_\circ}{\gamma^۲r_\circ}\cos\gamma t - \frac{۲\dot{r}_\circ}{\gamma^۲\gamma_\circ}$$

ه) در این جا برای یافتن نیروی اصطکاک مسیر را مرتبه‌ی صفرم در نظر می‌گیریم. بنابراین مسیر C دایره‌ای به شعاع r می‌باشد برای نیروی اصطکاک داریم: $f = \mu N$

از طرفی داریم:

$$N\cos\theta = mg$$
$$N = \frac{mg}{\cos\theta}\ ,\quad \tan\theta = ۲kr$$
$$\to \vec{f} = -mg\sqrt{۱+\frac{\omega_۰^۶ r^۲}{g^۲}}\hat{\theta}$$

یعنی در واقع با توجه به این که $f = \mu N$ است برای اینکه f مرتبه‌ی اول باشد باید N مرتبه‌ی صفرم باشد (نسبت به μ) و مرتبه‌ی صفر N به معنای حالتی است که اصطکاک نداریم یعنی ($r =$ ثابت) و

$$r = r_۰ + \mu r_{(۱)}$$

$$\omega = \omega_۰ + \mu\omega_{(۱)}$$

معادله در راستای z : $N\cos\theta = m(g + ۲kr\ddot{r} + \dot{r}^۲) = m(g + ۲kr_۰\ddot{r}_{(۱)}\mu)$

رابطه‌ی بالا را به عنوان رابطه‌ی (۳) در نظر بگیرید.

معادله در راستای r : $-N\sin\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲)$

$$= m(\ddot{r}_{(۱)} - (r_۰ + r_{(۱)}\mu)(\omega_۰^۲ + ۲\omega_۰\mu\omega_{(۱)}) \qquad (۴)$$

با حذف N از دو رابطه‌ی (۳) و (۴) و دانستن $\tan\theta = ۲kr = ۲k(r_۰ + \mu r_{(۱)})$ داریم:

$$۲k(gr_۰ + g\mu r_{(۱)} + ۲kr_۰^۲\ddot{r}_{(۱)}\mu) = (-\mu\ddot{r}_{(۱)} + r_۰\omega_۰^۲ + ۲r_۰\omega_۰\mu\omega_{(۱)} + \omega_۰^۲ r_{(۱)}\mu)$$

$$O_{(۰)} : ۲kgr_۰ = r_۰\omega_۰^۲$$

که با جاگذاری k درستی این رابطه برایمان ثابت می‌شود و انتظار ما برآورده.

$$O_{(۱)} : ۲kgr_{(۱)} + ۴k^۲r_۰^۲\ddot{r}_{(۱)} = -\ddot{r}_{(۱)} + ۲r_۰\omega_۰\omega_{(۱)} + \omega_۰^۲ r_{(۱)} \qquad (۵)$$

حال برای راستای θ طبق (ب) داریم: (و با استفاده از نتیجه ه)

$$F_\theta = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^۲\dot{\theta}) = -\mu mg\sqrt{۱+\frac{\omega_۰^۴ r^۲}{g^۲}} = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^۲\dot{\theta})$$

$$-\mu rg\sqrt{۱+\frac{\omega_۰^۴ r^۲}{g^۲}}\,t = r^۲\dot{\theta} - r_۰^۲\omega_۰$$

همه‌ی جملات طرف چپ را تا مرتبه‌ی صفر می‌نویسیم زیرا در یک μ ضرب می‌شوند.

$$-\mu r_\circ g\sqrt{1+\frac{\omega_\circ^4 r_\circ^2}{g^2}}t=(r_\circ+\mu r_{(1)})^2(\omega_\circ+\mu\omega_{(1)})-r_\circ^2\omega_\circ$$

$$=(r_\circ^2+2r_\circ r_{(1)}\mu)(\omega_\circ+\mu\omega_{(1)})-r_\circ^2\omega_\circ=r_\circ^2\omega_{(1)}\mu+2r_\circ r_{(1)}\omega_\circ\mu$$

$$\rightarrow\omega_{(1)}=\frac{-r_\circ g\sqrt{1+\frac{\omega_\circ^4 r_\circ^2}{g^2}}t-2r_\circ r_{(1)}\omega_\circ}{r_\circ^2} \qquad (6)$$

با جاگذاری در معادله‌ی (۵) و قرار دادن $k=\frac{\omega_\circ^2}{2g}$ داریم:

$$\ddot{r}_{(1)}\left(\frac{r_\circ^2\omega_\circ^4+g^2}{g^2}\right)=-2\omega_\circ\left(\sqrt{g^2+\omega_\circ^4 r_\circ^2}t+2r_{(1)}\omega_\circ\right)$$

$$\rightarrow\ddot{r}_{(1)}+\frac{4\omega_\circ^2}{r_\circ^2\omega_\circ^4+g^2}r_{(1)}=-\frac{2\omega_\circ\sqrt{g^2+\omega_\circ^4 r_\circ^2}g^2}{r_\circ^2\omega_\circ^4+g^2}t \qquad (7)$$

$$\rightarrow\ddot{r}_{(1)}+\frac{4\omega_\circ^2 g^2}{r_\circ^2\omega_\circ^4+g^2}r_{(1)}=-\frac{2\omega_\circ g^2}{\sqrt{g^2+r_\circ^2\omega_\circ^4}}t$$

با جانشینی ضریب $r_{(1)}$ به صورت زیر ضریب t هم جانشینی به شکل زیر پیدا خواهد کرد:

$$\frac{4\omega_\circ^2 y^2}{r_\circ^2\omega_\circ^4+g^2}=\gamma^2\rightarrow\frac{-2\omega_\circ g^2}{\sqrt{g^2+r_\circ^2\omega_\circ^4}}=-\gamma g$$

$$\rightarrow\ddot{r}_{(1)}+\gamma^2 r_{(1)}=-\gamma g t$$

با استفاده از راهنمایی مسأله داریم:

$$r_{(1)}=A\cos(\gamma t+\varphi)-\frac{\gamma g t}{\gamma^2}$$

و چون $r_{(1)}$ در زمان صفر، صفر است (چرا؟) داریم:

$$\circ=A\cos\varphi\rightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow r_{(1)}=-A\sin(\gamma t)-\frac{gt}{\gamma}$$

$$\rightarrow\dot{r}_{(1)}=-A\gamma\cos(\gamma t)-\frac{g}{\gamma}$$

چون در لحظه‌ی صفر $\dot{r}_{(1)}$ برابر صفر است داریم:

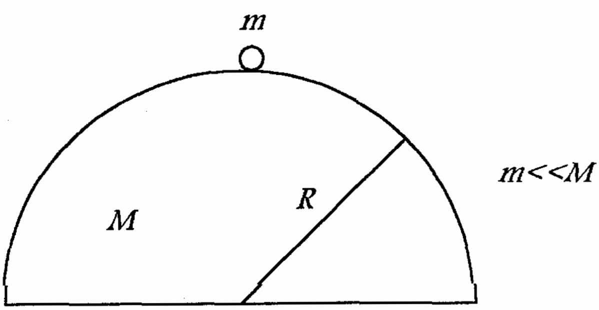
$$- A\gamma - \frac{g}{\gamma} = 0 \rightarrow A = -\frac{g}{\gamma^2}$$
$$\rightarrow r_{(1)} = \frac{g}{\gamma}\cos(\gamma t) - \frac{g}{\gamma}t$$
$$\rightarrow r = r_0 + \mu(\frac{g}{\gamma}\cos(\gamma t) - \frac{g}{\gamma}t)$$

که در آن $\gamma = \frac{2\omega_0 g}{\sqrt{r_0^2\omega_0^4 + g^2}}$ اگر در این جواب دقت کنید می‌بینید که با شهود فیزیکی هم مطابقت دارد (چرا؟). به همین ترتیب θ هم با جاگذاری $r_{(1)}$ در معادله‌ی (۶) و انتگرال‌گیری قابل محاسبه است.

مسائل

۱) توپی مطابق شکل (۴-۱۱) از بالاترین نقطه‌ی نیم کره رها می‌شود. ماکزیمم سرعتی را که نیم کره می‌یابد، پیدا کنید. (کلیه سطوح بدون اصطکاک‌اند)

(**راهنمایی:** ابتدا مسیر مرتبه‌ی صفرم را در نظر بگیرید و سپس در نقطه‌ی جدایی از پایستگی تکانه‌ی خطی در راستای افق استفاده کنید)



شکل۴-۱۱

جواب: $V = \frac{2\sqrt{2gR}}{3\sqrt{3}}\frac{m}{M}$

۲) ذره‌ای با شروع حرکت از نقطه‌ی A روی استوای کره‌ای به شعاع واحد، به اندازه‌ی زاویه‌ی α به سمت شرق می‌رود تا به نقطه‌ی B برسد سپس زاویه‌ی β روی دایره‌ی عظیمه‌ی گذرنده از قطب

شمال و نقطه‌ی B به سمت شمال می‌رود اگر مختصات اولیه‌ی ذره $z_\circ = \circ$، $y_\circ = \circ$ و $x_\circ = ۱$ باشد مختصات نهایی آن را حساب کنید $\vec{r_۱} = (x_۱, y_۱, z_۱) =?$

ب) اکنون فرض کنید که این ذره از نقطه‌ی A به اندازه‌ی زاویه‌ی β روی دایره‌ی عظیمه‌ی گذرنده از قطب شمال و نقطه‌ی A به سمت شمال برود تا به نقطه‌ی C برسد. سپس روی دایره‌ی عظیمه‌ی گذرنده از نقطه‌ی C به اندازه‌ی زاویه‌ی α حرکتی کند که شروع آن به سمت شرق است. این حرکت روی دایره‌ی عظیمه‌ای صورت می‌گیرد که از C می‌گذرد و بر دایره‌ی عظیمه‌ی گذرنده از C و قطب شمال عمود است.

دقت کنید که در مختصات کروی، φ با حرکت روی استوا و θ با حرکت روی مدارها سنجیده می‌شود. (مدارها دایره‌های عظیمه‌ی عمود بر استوا هستند) مختصات نهایی ذره در این وضعیت را محاسبه کنید:

$$\vec{r_۲} = (x_۲, y_۲, z_۲) =?$$

ج) بردار اختلاف مختصات نهایی در این دو حالت $\vec{\Delta} = \vec{r_۲} - \vec{r_۱}$ را بیابید.

د) فرض کنید α و β از یک مرتبه‌ی کوچک باشند $\vec{\Delta}$ را تا مرتبه‌ی دوم کوچکی (یعنی تا جملاتی که بزرگ‌تر از $\alpha^۲$ و $\beta^۲$، یا $\alpha\beta$ نیستند) محاسبه کنید.

راهنمایی: مختصات دکارتی معادل (r, θ, φ) در دستگاه کروی،

$$(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

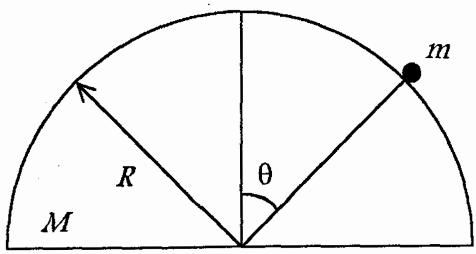
است.

(آزمون دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان سال ۱۳۸۲)

۳) مطابق شکل (۴-۱۲) ذره‌ای به جرم m روی نیم کره‌ای به جرم M قرار دارد. از اصطکاک بین جرم m و نیم کره صرف‌نظر کنید. ولی بین نیم کره و زمین اصطکاک وجود دارد و ضریب اصطکاک ایستایی آن μ_s است.

الف) با فرض آنکه μ_s به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، در مدتی که جرم m روی نیم کره می‌لغزد، نیم کره حرکتی نخواهد کرد. در این حالت نیروی اصطکاک بین نیم کره و زمین را برحسب زاویه‌ی θ بدست آورید.

ب) حداقل μ_s چه مقدار باشد که نیم کره حرکت نکند؟ برای حل این بخش ابتدا معادله‌ی لازم را بدست آورید و سپس با فرض $۱ \ll \alpha = \dfrac{m}{M}$ مقدار μ_s را تا مرتبه‌ی اول نسبت به α محاسبه کنید.



شکل۴-۱۲

جواب الف) $f = mg\sin\theta(۳\cos\theta - ۲)$
ب) $(\mu_s)_{\min} \approx ۰/۳\alpha$

۴) جسمی به جرم m روی سطحی که می‌توان از اصطکاکش چشم پوشید، حرکت می‌کند. در مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) معادله‌ی سطح به صورت $r = r_{(z)}$ است. می‌دانیم شتاب در دستگاه استوانه‌ای به صورت

$$\vec{a} = (\ddot{r} - \gamma\dot{\theta}^{۲})\hat{\gamma} + (r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}$$

است.

الف) معادله‌ی حرکت جسم را بدست آورید. (تنها معادلات دیفرانسیل حرکت را در مختصات استوانه‌ای بنویسید)

ب) با ساده کردن معادلات دیفرانسیل به دست آمده در قسمت (الف)، نشان دهید که معادله‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\ddot{z}f_۱(r, r', r'') + \dot{z}^{۲}f_۲(r, r', r'') = f_۳(r, r', r'', \dot{\theta}) \qquad (۱)$$

که در آن $r' = \dfrac{dr}{dz}$ و $r'' = \dfrac{d^{۲}r}{dz^{۲}}$ است توابع $f_۱$، $f_۲$ و $f_۳$ را معین کنید.

ج) فرض کنید حرکت جسم نزدیک به یک دایره است یعنی فرض کنید

$$z = z_{\circ} + \epsilon\sin\omega t$$

است که در آن $\epsilon \ll z_{\circ}$. حال $r_{(z)}$ را حول $z_{\circ}$ بسط تیلور دهید و $r_{(z)}$ و $r'_{(z)}$ را تا مرتبه‌ی اول نسبت به ϵ به دست آورید. با گذاشتن این مقادیر در معادله‌ی (۱) نشان دهید که

$$\omega^{۲} = \Omega^{۲}f_۴(r_{\circ}, r'_{\circ}, r''_{\circ})$$

است که در آن $r_\circ = r_{(z_\circ)}$، $r'_\circ = r'_{(z_\circ)}$، $r''_\circ = r''_{(z_\circ)}$ و $\Omega = \frac{J}{mr_\circ^{\text{۲}}}$ است که در آن (ثابت $J = mr^{\text{۲}}\dot{\theta} =$) است.

تابع $f_{\text{۴}}$ را بدست آورید.

د) اگر $\omega^{\text{۲}} < \circ$ باشد مدار ناپایدار است. نشان دهید این شرط به صورت زیر در می‌آید:

$$(\frac{\text{۱}}{r^{\text{۲}}})''_\circ < \circ$$

که مشتق‌گیری نسبت به z است و در نقطه‌ی $r_\circ$ محاسبه می‌شود.

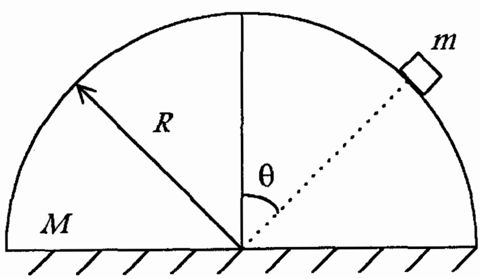
ه) کدام یک از سطوح زیر پایدار و کدام ناپایدار است.

۱) $r = -\frac{k}{z}$ (k ثابت است)

۲) $r^{\text{۲}} - z^{\text{۲}} = R^{\text{۲}}$ (k ثابت است)

(امتحان باشگاه دانش پژوهان جوان)

۵) ذره‌ای به جرم m در بالاترین نقطه‌ی نیم کره‌ای به جرم M و شعاع R در حال سکون است. ذره‌ی m با اختلال کوچکی شروع به لغزیدن می‌کند. با فرض $M \ll m$ باشد، زاویه‌ی جدا شدن m از سطح نیم کره، θ را بدست آورید. از اصطکاک بین m و نیم کره و همچنین بین نیم کره و سطح افق چشم پوشی کنید.

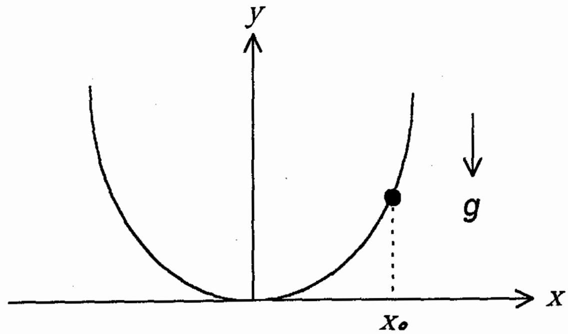


شکل۴-۱۳

(مجموعه تمرینات باشگاه دانش پژوهان جوان)

جواب: $\theta = \arccos\frac{\text{۲}}{\text{۳}} + \frac{\text{۸}}{\text{۲۷}\sqrt{\text{۵}}}\frac{m}{M}$

۶) جسمی به جرم m بر روی منحنی مشخص شده‌ی زیر (شکل (۴-۱۴)) تحت تأثیر گرانش حرکت می‌کند. $y = \frac{x^{\text{۲}}}{\text{۲}a}$ که a پارامتر مشخص کننده‌ی منحنی است.



شکل۴-۱۴

الف) انرژی جنبشی و پتانسیل را برحسب x و $\dot{x}$ و دیگر پارامترهای مسأله (به جز y و $\dot{y}$) تعیین کنید. فرض کنید که جسم بر روی منحنی از نقطه‌ی مشخص شده با $x_\circ$ با سرعت اولیه‌ی صفر رها شود.

ب) نیروی عمود بر سطح را برحسب x و دیگر پارامترهای مسأله (به جز $\dot{x}$ و $\dot{y}$ و مشتقات بالاتر x و y نسبت به زمان) به دست آورید. از این به بعد $\frac{x_\circ}{a}$ را کوچک بگیرید و محاسبات را تا مرتبه‌ی دو برحسب $\frac{x_\circ}{a}$ و $\frac{x}{a}$ انجام دهید.

(یعنی از جملات حاوی توان‌های $\frac{x_\circ^3}{a^3}$ و $\frac{x^3}{a^3}$ و بالاتر صرف‌نظر کنید.) فرض کنید در طی مدت زمانی طولانی (دوره‌ی تناوب $\gg t$) a اندکی تغییر می‌کند و به $a+\delta a$ می‌رسد بر اثر این تغییر $x_\circ$ هم اندکی تغییر می‌کند و به $x_\circ+\delta x_\circ$ می‌رسد.

ج) تغییر میانگین زمانی انرژی جنبشی را برحسب δa و $\delta x_\circ$ حساب کنید.

در محاسبه‌ی کارها، اثر تغییر a و $x_\circ$ هر دو را در نظر بگیرید و در خلال فرآیند از تغییر فرکانس نوسانها صرف‌نظر کنید.

د) میانگین زمانی کار انجام شده توسط نیروی وزن را در خلال این فرآیند حساب کنید.

ه) میانگین زمانی کار انجام شده توسط نیروی عمود بر سطح را در خلال این فرآیند حساب کنید.

و) با برابر قرار دادن کار انجام شده توسط نیروها با تغییر انرژی جنبشی نسبت $\frac{\delta x_\circ}{\delta a}$ را تعیین کنید و از روی آن ثابت کنید در خلال فرآیند کمیتی به شکل $ax_\circ^n$ ثابت است و از آنجا n را تعیین کنید.

راهنمایی: $\frac{1}{2} = <\cos^2\omega t> = <\sin^2\omega t>$ که منظور از $<f_{(t)}>$ میانگین زمانی $f_{(t)}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

T مدتی است که میانگیری انجام می‌شود و $< f_{(t)} > = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f_{(t)}dt$
(آزمون دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۴)

فصل پنجم

اندازه‌گیری دورهٔ تناوب و بسامد نوسانات

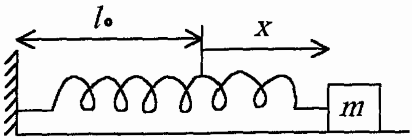
در این فصل به بررسی نوسانات کوچک حول نقطه‌ی تعادل و محاسبه بسامد نوسانات و بررسی پایداری و ناپایداری این نوسانات حول نقطه‌ی تعادل می‌پردازیم. تمام سیستم‌های مقید برای جابجایی کوچک از وضعیت تعادل مانند نوسانگر هماهنگ (جرم و فنر) رفتار می‌کنند. ابتدا لازم است نوسانات یک جرم و فنر را بررسی کنیم.

۵-۱ نوسانگر هماهنگ ساده

مثال ۱: جسمی به جرم m به فنری با ثابت k بسته شده و حول نقطه‌ی تعادل (طول آزاد فنر) نوسان می‌کند. بسامد زاویه‌ای نوسانات حرکت را بیابید.

حل: برای جسمی به جرم m که به فنر بسته شده، مطابق شکل با انتخاب مبدأ روی نقطه‌ی تعادل (طول آزاد فنر $\ell_۱$)، معادله‌ی حرکت را به صورت زیر داریم:

$$F = -kx \to m\ddot{x} + kx = ۰ \to \ddot{x} + \frac{k}{m}x = ۰$$



شکل۵-۱

جواب این معادله‌ی دارای مشتق از مرتبه‌ی دو به صورت زیر است[1]

$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

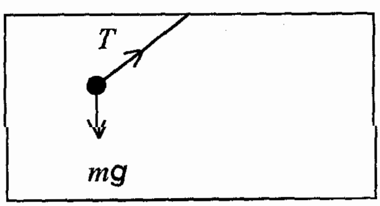
که در این رابطه $\omega = \sqrt{\frac{F}{m}}$ بسامد زاویه‌ای نوسان می‌باشد و A و B ثوابتی‌اند که با شرایط اولیه تعیین می‌شوند. برای دورهٔ تناوب هم داریم: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

۵-۲ نوسان آونگ در واگن قطار

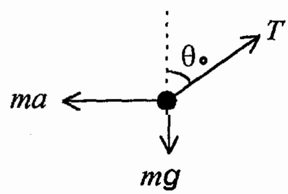
مثال ۲: دورهٔ تناوب نوسانهای یک آونگ در واگن یک قطار که واگن با شتاب افقی a حرکت می‌کند را بیابید. (طول آونگ را ℓ بگیرید)

حل: برای حل مسأله دستگاه مختصات را بر روی واگن قرار می‌دهیم. لذا نیروی مجازی ma در خلاف جهت شتاب واگن به گلوله وارد می‌شود[2] برای حالت تعادل مطابق شکل (۵-۲) داریم:

$$\left.\begin{aligned} T\sin\theta_\circ &= ma \\ T\cos\theta_\circ &= mg \end{aligned}\right\} \rightarrow \tan\theta_\circ = \frac{a}{g} \qquad (1)$$



از دید ناظر بیرونی



از دید ناظر روی واگن

شکل۵-۲

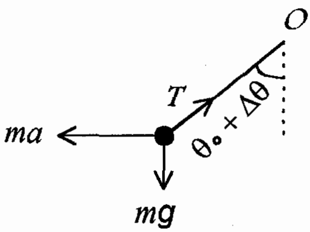
۱) این جواب را با استفاده از اعداد مختلط می‌توان بدست آورد و با جاگذاری در معادله هم می‌توان نشان داد.

۲) در فصل ۱۴ بیشتر درباره‌ی نیروی مجازی صحبت خواهد شد.

حالا فرض کنیم سیستم به اندازه‌ی کوچک $\Delta\theta$ از وضعیت تعادل خارج شده.
با نوشتن گشتاور حول نقطه‌ی O داریم:

$$mg\ell\sin(\theta_\circ + \Delta\theta) - ma\ell\cos(\theta_\circ + \Delta\theta) = -I\ddot{\theta}$$

که در آن $I = m\ell^۲$ و علامت منفی در طرف راست معادله به خاطر اثر کاهنده‌ی گشتاور سمت چپ معادله است. لذا با بسط دادن نسبت به $\Delta\theta$ و جاگذاری I داریم:



شکل۵-۳

$$mg\ell(\Delta\theta\cos\theta_\circ + \sin\theta_\circ) - ma\ell(\cos\theta_\circ - \Delta\theta\sin\theta_\circ) = -m\ell^۲\ddot{\theta}$$

با دانستن $g\sin\theta_\circ = a\cos\theta_\circ$ و لحاظ آن در معادله‌ی بالا داریم:

$$\Delta\theta g\cos\theta_\circ + \Delta\theta a\sin\theta_\circ = -\ell\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{a\sin\theta_\circ + g\cos\theta_\circ}{\ell}\Delta\theta = \circ$$

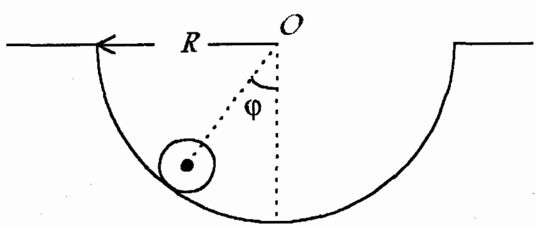
با استفاده از رابطه (۱) و معادله نوسانگر هماهنگ داریم:

(دقت کنید در روابط بالا $\Delta\ddot{\theta} = \ddot{\theta}$ است)

$$\omega = \sqrt{\frac{g^۲ + a^۲}{\ell}} \rightarrow T = ۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{g^۲ + a^۲}}}$$

۵-۳ نوسان در گودال

مثال ۳: حلقه‌ای به جرم m و شعاع r می‌تواند بدون سُر خوردن روی سطح داخل استوانه‌ای به شعاع R بغلتد. اگر زاویه φ کوچک باشد، دوره‌ی تناوب حرکت مرکز حلقه را تعیین کنید.



شکل۵-۴

حل: برای حل این‌گونه مسائل مناسب آن است که از ثابت بودن انرژی استفاده کنیم.

$$E = U + K\ ,\quad U = mg(R-r)(۱-\cos\varphi) = mg(R-۱)(۱-(\frac{\varphi^۲}{۲}+\cdots))$$
$$\to U = mg(R-۱)\frac{\varphi^۲}{۲}$$

برای انرژی جنبشی دو جمله داریم که یکی مربوط به حرکت مرکز جرم حلقه حول O و دیگری حرکت حلقه، حول مرکز جرم خودش است.

$$E = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}I\omega^۲ + U = \frac{۱}{۲}m((R-r)\dot\varphi)^۲ + \frac{۱}{۲}(mr^۲)\omega^۲ + U$$

برای بدست آوردن ω هم می‌دانیم که سرعت نقطه‌ی تماس حلقه با استوانه برابر صفر است. لذا جمع سرعت ناشی از حرکت خطی (سرعت مرکز جرم) و سرعت ناشی از حرکت چرخشی از نقطه‌ی تماس باید صفر شود. لذا داریم:

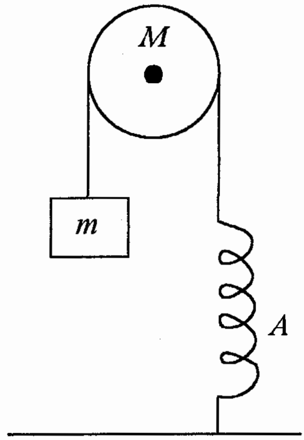
$$(R-r)\dot\varphi - \omega r = ۰ \to \omega = \frac{R-r}{r}\dot\varphi$$
$$\to k = \frac{۱}{۲}m(R-r)^۲\dot\varphi^۲ + \frac{۱}{۲}m(R-r)^۲\dot\varphi^۲ = m(R-r)^۲\dot\varphi^۲$$

می‌دانیم $E = \text{Const}$. بنابراین $\dot E = ۰$ داریم:

$$E = U + K$$
$$\dot E = ۰ \to \dot U + \dot K = ۰ \to mg(R-r)\dot\varphi\varphi + ۲m(R-r)^۲\dot\varphi\ddot\varphi = ۰$$
$$\to \ddot\varphi + \frac{g}{۲(R-r)}\varphi = ۰ \to \omega = \sqrt{\frac{g}{۲(R-r)}} \to T = ۲\pi\sqrt{\frac{۲(R-r)}{g}}$$

۵-۴ نوسان به همراه قرقره‌ی جرم‌دار

مثال ۴: شکل (۵-۵) یک دستگاه مکانیکی را که شامل وزنه‌ای به جرم m، فنر A با ضریب کشسانی k و قرقره‌ای به جرم M است، نشان می‌دهد. ریسمانی که از قرقره عبور کرده است، وزنه‌ای را به فنر متصل می‌کند. دوره‌ی تناوب نوسانهای وزنه را بیابید.



شکل۵-۵

حل: ابتدا برای حالت تعادل داریم:

$$mg = kx_0$$

که x_0 میزان کشیدگی فنر قبل از نوسان است.

بعد از نوسان کشیدگی فنر x، و سرعت جرم $\dot{x}$ و سرعت زاویه‌ای استوانه $\frac{\dot{x}}{R}$ و انرژی پتانسیل گرانشی $-mg(x-x_0)$ می‌باشد (چرا؟)

$$E = U + K = -mg(x-x_0) + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2$$

$$\dot{E} = 0 \rightarrow -mg\dot{x} + kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} + \frac{M}{2}\dot{x}\ddot{x} = 0 \rightarrow \frac{\ddot{x}}{k}\left(m + \frac{M}{2}\right) = \frac{mg}{k} - x$$

به جای $\ddot{x}$ می‌توان نوشت $\ddot{\left(x - \frac{mg}{k}\right)}$ زیرا مشتق $\frac{mg}{k}$ صفر است و

$$\ddot{x} = \ddot{\left(x - \frac{mg}{k}\right)} \rightarrow \ddot{\left(x - \frac{mg}{k}\right)}\left(\frac{m + \frac{M}{2}}{k}\right) = -\left(x - \frac{mg}{k}\right)$$

با جانشینی $\alpha = x - \frac{mg}{k}$ داریم:

$$\ddot{\alpha} + \frac{k}{m + \frac{M}{2}}\alpha = 0$$

می‌بینیم که معادله، همانطور که انتظار می‌رفت به شکل معادله‌ی نوسانگر هماهنگ ساده در آمد لذا برای دوره‌ی تناوب حرکت داریم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{M}{2}}{k}}$$

دیدیم نیروی جاذبه که ثابت می‌باشد در دوره‌ی تناوب تأثیری ندارد.

۵-۵ نوسان در بعد مولکولی

مثال ۵: تابع انرژی پتانسیل که معمولاً برای توصیف برهم کنش بین دو اتم به کار می‌رود عبارتست از:

$$U = \epsilon\left[(\frac{r_\circ}{r})^{۱۲} - ۲(\frac{r_\circ}{r})^{۶}\right]$$

الف) نشان دهید که شعاع مربوط به پتانسیل کمینه برابر $r_\circ$ و عمق چاه پتانسیل برابر ϵ است.

ب) بسامد زاویه‌ای نوسانهای کوچک حول نقطه‌ی تعادل دو اتم یکسان به جرم‌های m را که از طریق برهم کنش با هم ارتباط دارند، بیابید.

(مجموعه تمرینات باشگاه دانش پژوهان جوان)

الف) $\frac{dU}{dr} = \circ \to -\frac{۱۲r_\circ^{۱۲}}{r^{۱۳}} + \frac{۱۲r_\circ^{۶}}{r^{۷}} = \circ \to r = r_\circ$

$U_{r_\circ} = \epsilon(۱ - ۲) = -\epsilon$

ب) می‌دانیم $F = -\frac{dU}{dr}$ و چون $\frac{dU}{dr}$ در $r = r_\circ$ برابر صفر است لذا $r = r_\circ$ نقطه‌ی تعادل است.
حالا فرض کنید هر اتم به اندازه‌ی کوچک Δr از وضعیت تعادل منحرف شود. لذا فاصله دو اتم $r + ۲\Delta r$ می‌شود.

$$F = -\frac{dU}{dr} = (\frac{۱۲r_\circ^{۱۲}}{(r_\circ + ۲\Delta r)^{۱۳}} - \frac{۱۲r_\circ^{۶}}{(r_\circ + ۲\Delta r)^{۷}})\epsilon$$

$$= (\frac{۱۲r_\circ^{۱۲}}{r_\circ^{۱۳}(۱ + \frac{۲\Delta r}{r_\circ})^{۱۳}} - \frac{۱۲r_\circ^{۶}}{r_\circ^{۷}(۱+\frac{۲\Delta r}{r_\circ})^{۷}})\epsilon = \frac{۱۲\epsilon}{r_\circ}(۱-\frac{۲۶\Delta r}{r_\circ}) - \frac{۱۲}{r_\circ}(۱-\frac{۱۴\Delta r}{r_\circ})$$

$$= \frac{۱۲\epsilon}{r_\circ} - \frac{۱۲ \times ۲۶\Delta r\epsilon}{r_\circ^{۲}} - \frac{۱۲\epsilon}{r_\circ} + \frac{۱۲ \times ۱۴\Delta r}{r_\circ^{۲}}\epsilon = -\frac{۱۴۴\Delta r\epsilon}{r_\circ^{۲}}$$

همانطور که انتظار داشتیم در طی فرآیند بسط و ساده کردن جملات مرتبه‌ی صفرم ساده شدند.

از طرفی می‌دانیم:

$$F = m\ddot{\Delta r} \to m\ddot{\Delta r} = \frac{-۱۴۴\epsilon}{r_\circ^{۲}}\Delta r$$

$$\ddot{\Delta r} = -\frac{۱۴۴}{mr_\circ^{۲}}\Delta r \to \omega = ۱۲\sqrt{\frac{\epsilon}{mr_\circ}}$$

با نوشتن رابطه‌ی $\dot{E} = \dot{K} + \dot{U} = \circ$ هم می‌توانستیم به همین جواب برسیم.

۵-۶ نوسان تحت اثر دو منشأ

مثال ۶: ذره‌ای به جرم m در جهت مثبت x در یک بعد حرکت می‌کند. این ذره تحت تأثیر نیروی ثابتی که بزرگی آن B و جهت آن به طرف مبدأ است و یک نیروی دافعه‌ی تابع قانون عکس مجذور فاصله به بزرگی $\frac{A}{x^{۲}}$ قرار می‌گیرد.

الف) مکان تعادل $x_{۰}$ را بیابید.

ب) بسامد نوسان‌های کوچک حول $x_{۰}$ چقدر است.

الف)
$$B - \frac{A}{x_{۰}^{۲}} = ۰ \rightarrow x_{۰} = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

ب)

$$F = -B + \frac{A}{x^{۲}} = -B + \frac{A}{(x_{۰} + \Delta x)^{۲}} = -B + \frac{A}{x_{۰}^{۲}}(۱ - \frac{۲\Delta x}{x_{۰}})$$
$$\rightarrow m\ddot{x} = -\frac{۲A\Delta x}{x_{۰}^{۳}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{۲A}{m a_{۰}^{۳}}} = \sqrt{\frac{۲B^{\frac{۳}{۲}}}{mA^{\frac{۱}{۲}}}}$$

۵-۷ نوسان آونگ توأم با وزش باد

مثال ۷: توپ سنگینی به جرم m به ریسمان بدون جرمی به طول ℓ بسته شده است. نیروی مقاومت هوا، با سرعت آن نسبت به هوا متناسب است: $F_{fr} = \mu V$. باد شدیدی با سرعت V به صورت افقی در حال وزیدن می‌باشد. دوره‌ی تناوب نوسانات کوچک جسم را حساب کنید. فرض کنید که مدت لازم برای میرا شدن نوسانات خیلی طولانی‌تر از دوره‌ی تناوب باشد.

(**راهنمایی:** حل معادله‌ی $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_{۰}^{۲}x = ۰$ به صورت $x = Ae^{-(\frac{\gamma}{۲})t}\cos(\omega t + \varphi)$ می‌باشد که در آن برای ω (بسامد نوسانات) داریم: $\omega = \sqrt{\omega_{۰}^{۲} - \frac{\gamma^{۲}}{۴}}$ و می‌دانیم که $T = \frac{۲\pi}{\omega}$)

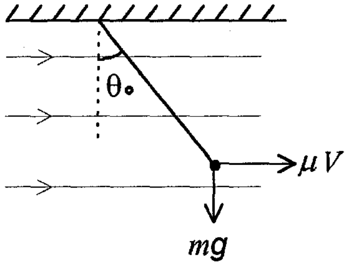
حل: ابتدا نقطه‌ی تعادل را بدست می‌آوریم. مطابق شکل (۵-۶) داریم:

$$\sum T_{۰} = ۰$$

رابطه‌ی بالا برقراری تعادل گشتاوری است.

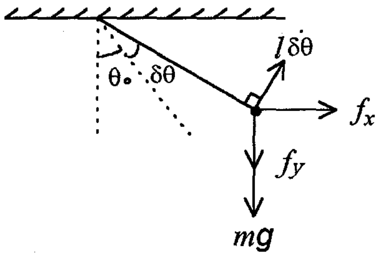
$$\to mg\ell\sin\theta_\circ = \mu V\ell\cos\theta_\circ$$

$$\to \tan\theta_\circ = \frac{\mu V}{mg}$$



شکل۵-۶

حالا فرض کنیم توپ به اندازه‌ی کوچک $\delta\theta$ منحرف شود (نسبت به وضعیت تعادل). مطابق شکل (۵-۷) داریم:



شکل۵-۷

$$f_x = \mu(V - \ell\dot{\delta\theta}\cos(\theta_\circ + \delta\theta))$$

$$f_y = \mu\ell\dot{\delta\theta}\sin(\theta_\circ + \delta\theta)$$

$$f_x = \mu(V - \ell\dot{\delta\theta}\cos\theta_\circ - \ell\dot{\delta\theta}\delta\theta\sin\theta_\circ)$$

از جمله‌ی $\dot{\delta\theta}\delta\theta$ به دلیل اینکه از مرتبه‌ی دوم است صرف‌نظر می‌کنیم. داریم:

$$f_x = \mu(V - \ell\dot{\delta\theta}\cos\theta_\circ)$$

به همین ترتیب برای راستای y داریم:

$$f_y = \mu\ell\dot{\delta\theta}\sin\theta_\circ$$

با نوشتن گشتاور حول O داریم:

$$\sum T_\circ = m\ell^2\ddot{\delta\theta} \to m\ell^2\ddot{\delta\theta} = f_x\ell\cos(\theta_\circ + \delta\theta) - (mg + f_y)\ell\sin(\theta_\circ + \delta\theta)$$

$$\to m\ell\ddot{\delta\theta} = \mu(V - \ell\dot{\delta\theta}\cos\theta_\circ)(\cos\theta_\circ - \delta\theta\sin\theta_\circ)$$

$$- (mg + \mu\ell\dot{\delta\theta}\sin\theta_\circ)(\sin\theta_\circ + \delta\theta\cos\theta_\circ)$$

با بسط عبارت و حذف عبارت مرتبه‌ی ۲ و قرار دادن $\tan\theta_\circ = \frac{\mu V}{mg}$ داریم:

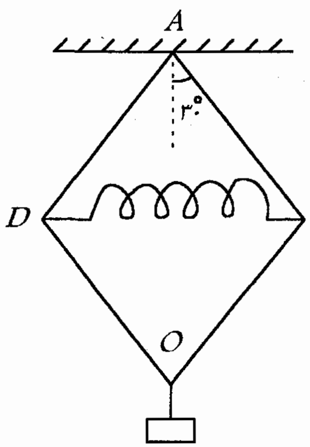
$$\ddot{\delta\theta} + \frac{\mu}{m}\dot{\delta\theta} + \frac{\sqrt{m^2g^2 + \mu^2V^2}}{m\ell}\delta\theta = 0$$

در این رابطه $\gamma = \frac{\mu}{m}$ و $\omega_\circ^2 = \frac{\sqrt{m^2g^2 + \mu^2V^2}}{m\ell}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \to T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\frac{g}{\ell})\sqrt{1 + (\frac{\mu V}{mg})^2} - \frac{\mu^2}{4m^2}}}$$

۵-۸ نوسانات یک قاب لوزی شکل

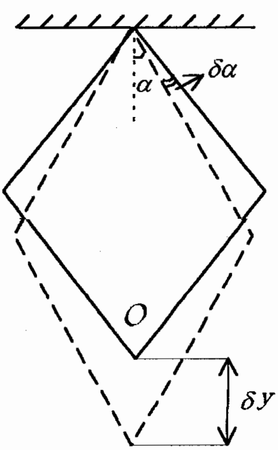
مثال ۸: چهار میله‌ی بدون جرم به طول ℓ که هرکدام توسط اتصالات لولایی به هم متصل شده‌اند، تشکیل یک لوزی را می‌دهند (شکل (۵-۸)).



شکل۵-۸

لولای A ثابت شده است و جسمی از لولای O آویزان شده است. لولای B و D نیز توسط فنر بدون جرمی با طول کشیده نشده‌ی ℓ ۱/۵، به هم متصل شده‌اند. در حالت تعادل، میله‌ها زاویه‌ی $\alpha_0 = 30°$ با راستای عمودی می‌سازند. دوره‌ی تناوب نوسانات کوچک جسم را بدست آورید.

حل: فرض می‌کنیم با یک اختلال کوچک زاویه α_0 شروع به تغییرات کند. مطابق شکل (۵-۹) برای معادله‌ی نیرو داریم (کشش در هر میله برابر T است):



شکل۵-۹

تعادل برای نقطه‌ی B:

$$2T\sin(30 + \delta\alpha) = k\delta\ell \qquad (1)$$

مطابق شکل و فرض مسأله داریم:

$$\Delta\ell = 1{,}5\ell - 2\ell\sin(30 + \delta\alpha) = \frac{\ell}{2} - \sqrt{3}\ell\delta\alpha \quad (2)$$

از معادله‌ی حرکت برای جسم داریم:

$$2T'\cos(30 + \delta\alpha) - mg = m\ddot{\delta y} \qquad (3)$$

که در این رابطه T' کشش میله‌های OB و OD می‌باشد.

با توجه به شکل (۵-۹):

$$\delta y = ۲\ell(\cos ۳۰ - \cos(۳۰ + \delta\alpha)) = \ell\delta\alpha \qquad (۴)$$

از (۱) و (۲)، T را حساب کرده در معادله (۳) می‌گذاریم. با استفاده از (۴) داریم:

$$۲k\ell(\frac{\sqrt{۳}}{۴} - \frac{۱۰\delta\alpha}{۴}) - mg = m\ell\delta\ddot{\alpha} \qquad (۵)$$

حالا باید k را با توجه به حالت تعادل حساب کنیم. اما نیازی نیست دوباره معادلات را بنویسیم. اگر کمی در معادله‌ی (۵) دقت کنیم متوجه می‌شویم که جملات مرتبه‌ی صفر باید همدیگر را خنثی کنند لذا داریم:

$$O_{(۰)} : ۲k\ell\frac{\sqrt{۳}}{۴} - mg = ۰ \rightarrow k = \frac{۲mg}{\sqrt{۳}\ell} \qquad (۶)$$

همچنین برای مرتبه‌ی اول داریم:

$$O_{(۱)} : ۵k\ell\delta\alpha = m\ell\delta\ddot{\alpha} \qquad (۷)$$

$$\text{از (۶) و (۷)} \rightarrow \delta\ddot{\alpha} + \frac{۱۰y}{\sqrt{۳}\ell}\delta = ۰ \rightarrow T = ۲\pi\sqrt{\frac{\sqrt{۳}\ell}{۱۰g}}$$

دقت کنید که $\delta\alpha$ و $\delta\dot{\alpha}$ و $\delta\ddot{\alpha}$ همگی از مرتبه‌ی اول می‌باشند.

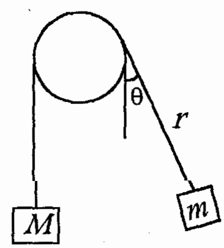
۵-۹ نوسانات دستگاه آتوود

مثال ۹: مطابق شکل ماشین آتوودی را در نظر بگیرید که یکی از جرم‌های آن کمی از وضعیت قائم دور شده است.

الف) معادلات حرکت را برای مختصات r و θ بنویسید.

ب) معادلات حرکت را با تقریب زاویه‌ی کوچک بازنویسی کنید.

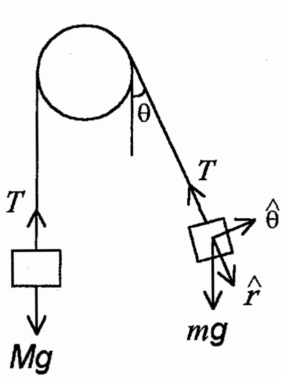
ج) نشان دهید که اگر یک رابطه بین جرم‌ها و دامنه‌ی نوسان زاویه‌ای θ_0 برقرار باشد، در این صورت حرکت مختصه‌ی r صرفاً نوسانی است. رابطه‌ی فرکانس نوسانی r و θ را بدست آورید.



شکل ۵-۱۰

راهنمایی: تقریب زاویه‌ی کوچک به معنای کوچک بودن سرعت $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ نیز می‌باشد[1]. (آزمون دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۷۶)

۱) چون خود $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ ناشی از تغییرات کوچک در زاویه‌اند حتماً ضریب دامنه‌ی تغییرات زاویه در آنها است



شکل۵-۱۱

حل: با استفاده از دستگاه قطبی و توجه به شکل پایین داریم:

$$mg\cos\theta - T = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲}) \qquad (۱)$$

$$-mg\sin\theta = m(۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \qquad (۲)$$

برای جسم M داریم:

$$T - Mg = M\ddot{r} \qquad (۳)$$

ب) در تقریب زاویه‌ی کوچک داریم:

$$\sin\theta = \theta\ , \quad \cos\theta = ۱ - \frac{\theta^{۲}}{۲}$$

همچنین در این تقریب $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ کوچکند. بنابراین معادلات حرکت برای اجرام به صورت زیر حاصل می‌شود؛ (در این جا لازم است جملات را تا مرتبه‌ی دوم نسبت به θ بسط دهیم. برعکس اکثر مواقع که اگر صحبتی از رتبه‌ی بسط نشود باید تا مرتبه‌ی یک بسط دهیم زیرا در این جا اگر تا مرتبه‌ی یک بسط دهیم خیلی از عبارات تعیین کننده مانند نیروی مرکزگرا و غیره حذف می‌شوند و اساساً به تناقض می‌خوریم و در آن صورت با حذف T از معادلات (۱) و (۳) و بسط تا مرتبه‌ی یک برای $\ddot{r}$ مقدار ثابت بدست می‌آوریم که غلط بودن این مطلب واضح است و ادامه‌ی مسأله معنا ندارد. بنابراین جملات را در معادله‌ی (۱) تا مرتبه‌ی دوم بسط می‌دهیم ولی در معادله‌ی (۲) نیازی به این مطلب نیست)

$$mg(۱ - \frac{\theta^{۲}}{۲}) - T = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲}) \qquad (۴)$$

$$-\ mg\theta = mr\ddot{\theta} \qquad (۵)$$

$$T - Mg = M\ddot{r} \qquad (۶)$$

دلیل اینکه معادله (۱) را تا مرتبه‌ی دوم بسط دادیم در بالا گفته شد، اما دلیل بسط (۲) تا مرتبه‌ی یک این است که خواسته‌ی ما از معادله‌ی (۲)، $\theta_{(t)}$ می‌باشد و جاگذاری آن در (۴)، لذا اگر ما از معادله‌ی (۲)، θ را تا مرتبه (۱) بدست آوریم وقتی در معادله‌ی (۴) قرار گیرد مرتبه‌ی (۲) می‌شود ولی اگر از اول θ را تا مرتبه‌ی ۲ بدست آوریم، وقتی در معادله‌ی (۴) جاگذاری شد مرتبه‌ی بالاتر از ۲ برای ما ظاهر می‌شود که مورد نیاز نیست.

ج) طبق معادله‌ی (۵) (معادله‌ی نوسانگر هماهنگ) داریم:

$$\theta = \theta_\circ \cos \omega t$$

که در آن $\theta_\circ$ دامنه‌ی نوسان و $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$ است.

با حذف T از معادله‌ی (۴) و (۶) داریم:

$$mg(۱ - \frac{\theta^۲}{۲}) - Mg = (m+M)\ddot{r} - mr\dot{\theta}^۲$$

با گذاشتن مقادیر $\theta = \theta_\circ \cos \omega t$ و $\dot{\theta} = -\theta_\circ \omega \sin \omega t$ در معادله‌ی اخیر داریم:

$$(m-M)g - \frac{mg}{۲}\theta_\circ^۲ \cos^۲ \omega t = (m+M)\ddot{r} - m\theta_\circ^۲ r\omega^۲ \sin^۲ \omega t$$

با جاگذاری g به جای $r\omega^۲$ خواهیم داشت:

$$(m+M)\ddot{r} = (m-M)g + \frac{mg\theta_\circ^۲}{۲}(۲\sin^۲ \omega t - \cos ۲\omega t)$$

$$\rightarrow (m+M)\ddot{r} = (m - M + \frac{m\theta_\circ^۲}{۴})g - \frac{۳}{۴}mg\theta_\circ^۲ \cos ۲\omega t$$

$$\rightarrow \ddot{r} = \frac{(m-M+\frac{m\theta_\circ^۲}{۴})g}{m+M} - \frac{۳mg\theta_\circ^۲ \cos ۲\omega t}{۴(m+M)}.$$

$$\rightarrow \dot{r} = \frac{(m-M+\frac{m\theta_\circ^۲}{۴})g}{m+M}t - \frac{۳mg\theta_\circ^۲ \sin ۲\omega t}{۸\omega(m+M)}$$

$$r = \frac{(m-M+\frac{m\theta_\circ^۲}{۴})gt^۲}{۲(m+M)} - \frac{۳mg\theta_\circ^۲(۱-\cos ۲\omega t)}{۱۶\omega^۲(m+M)}$$

لذا، r از ۳ جمله تشکیل شده که یکی شامل $t^۲$ و دیگری جمله‌ی ثابت و سومی هم شامل $\cos ۲\omega t$ است. برای نوسانی شدن r جملات ثابت و $\cos ۲\omega t$ مشکل ایجاد نمی‌کنند ولی جمله‌ی شامل $t^۲$ با زمان افزایش می‌یابد و جلوی نوسانی شدن r را می‌گیرد. لذا برای نوسانی شدن r ضریب آن باید صفر باشد.

$$\rightarrow m - M + \frac{m\theta_\circ^۲}{۴} = \circ \rightarrow \theta_\circ = ۲\sqrt{\frac{M-m}{m}} \qquad (۷)$$

$$r = -\frac{۳mg\theta_\circ^۲}{۱۶\omega^۲(m+M)}(۱-\cos ۲\omega t) \qquad (۸)$$

از رابطه‌ی (۸) واضح است که فرکانس نوسانات r، $\omega' = ۲\omega$ می‌باشد. بنابراین فرکانس نوسانات r دو برابر فرکانس نوسانات θ می‌باشد.

۵-۱۰ فنر حلقوی شکل

مثال ۱۰: فنری به طول اولیه‌ی $\ell_\circ$ و جرم m و ضریب سختی k را به شکل دایره‌ای می‌بندیم. اگر حلقه را با سرعت زاویه‌ای ω بچرخانیم:

الف) چه رابطه‌ای بین کمیت‌های مسأله برقرار باشد تا شعاع حلقه به حالت تعادل برسد. این شعاع تعادل را بدست آورید. $(r_t = ?)$

ب) در این حالت $(r = r_t)$ دوره‌ی تناوب نوسانات کوچک حول نقطه‌ی تعادل را بدست آورید.
(آزمون دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان سال ۷۷)

حل:

الف) برای اینکه شعاع حلقه به حالت تعادل برسد، باید کشش فنر c شتاب مرکزگرای آن را تأمین کند. یعنی:

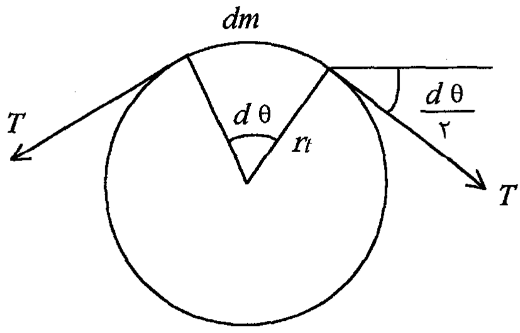
$$۲T\sin(\frac{d\theta}{۲}) = \omega^۲ r_t dm$$

بنابراین داریم:

$$Td\theta = \omega^۲ r_t dm \qquad (۱)$$

که در آن $T = k'\Delta\ell$ که $k' = \frac{۲\pi k}{d\theta}$ و $\Delta\ell = (r_t d\theta - \frac{\ell_\circ}{۲\pi}d\theta)$

$$\rightarrow T = ۲\pi k(r_t - \frac{\ell_\circ}{۲\pi}) \qquad (۲)$$



شکل۵-۱۲

لذا بنابر معادله‌ی (۱) و (۲) داریم:

$$۲\pi k(r_t - \frac{\ell_\circ}{۲\pi})d\theta = r_t \omega^۲ m \frac{d\theta}{۲\pi}$$

که در آن از $dm = m\frac{d\theta}{۲\pi}$ استفاده شده است.

$$r_t = \frac{\frac{\ell_\circ}{۲\pi}}{۱ - \frac{m\omega^۲}{۴\pi^۲ k}} \ , \ \omega^۲ < \frac{۴\pi^۲ k}{m}$$

ب) معادله‌ی حرکت شعاعی حلقه حول نقطه‌ی تعادل به صورت زیر است:

$$F_r = (\ddot{r} - r\omega^۲)dm \qquad (۳)$$

که در آن $F_r = -Td\theta$ و $T = ۲\pi k(r - \frac{\ell_\circ}{۲\pi})$. همچنین $r = r_t + \delta$ با جاگذاری در (۳) داریم:

$$-۲\pi k(r_t + \delta - \frac{\ell_\circ}{۲\pi})d\theta = (\ddot{\delta} - (r_t + \delta)\omega^۲)\frac{m}{۲\pi}d\theta \rightarrow \ddot{\delta} + (\frac{۴\pi^۲ k}{m} - \omega^۲)\delta$$
$$= r_t\omega^۲ - \frac{۴\pi k}{m}(r_t - \frac{\ell_\circ}{۲\pi}) \qquad (۴)$$

سمت راست معادله‌ی (۴) با توجه به قسمت (الف) صفر می‌شود. (همانطور که انتظار هم داشتیم، زیرا جملات مرتبه‌ی صفر در یک معادله باید با هم در دو طرف تساوی برابر باشند)

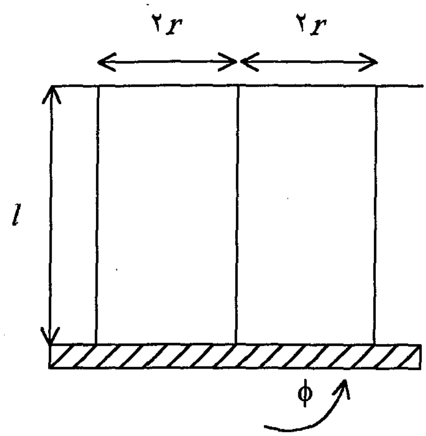
$$\rightarrow \ddot{\delta} + (\frac{۴\pi^۲ k}{m} - \omega^۲)\delta = ۰ \rightarrow T = \frac{۲\pi}{\sqrt{\frac{۴\pi^۲ k}{m} - \omega^۲}}$$

۵-۱۱ پیچش طناب‌های استوانه‌ای

مثال ۱۱: دو طناب کنار هم به سقف متصل شده‌اند. طنابها را استوانه‌هایی به شعاع r و طول ℓ فرض کنید. طناب‌ها از پایین به یک میله متصل شده‌اند.

الف) حال فرض کنید میله را به اندازه‌ی زاویه‌ی ϕ می‌چرخانیم. فاصله‌ی میله را با سقف بیابید. $(h = ?)$

ب) فرض کنید میله را به اندازه‌ی زاویه $\phi_\circ$ چرخانده و رها می‌کنیم. معادله‌ی دیفرانسیل برای تغییرات زمانی ϕ بدست آورید.



شکل۵-۱۳

توجه: هرگاه جسمی علاوه بر حرکت خطی مرکز جرم با سرعت زاویه‌ای ϕ حول مرکز جرم دوران کند، انرژی جنبشی آن برابر $\frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mV^2$ است که در آن V سرعت مرکز جرم و I کمیتی به نام لختی دورانی است که فقط به هندسه‌ی جسم بستگی دارد.

ج) در حالت $\ell \gg \gamma$، ϕ را برحسب زمان بدست آورید.

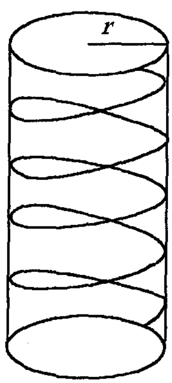
(آزمون ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان سال ۷۹)

حل:

الف) محور طناب‌ها حول استوانه‌ای به شعاع r می‌پیچد. طول محور طناب‌ها ℓ است و اگر به اندازه‌ی ϕ بچرخد، مقدار پیچش r_ϕ است و فاصله میله تا سقف نیز h خواهد شد و رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$h^2 + r^2\phi^2 = \ell^2$$

$$h = \sqrt{\ell^2 - r^2\phi^2}$$



شکل۵-۱۴

ب) انرژی کل طناب برابر است با:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 - mgh$$

که در آن مبدأ انرژی پتانسیل، سقف در نظرگرفته شده است. همچنین داریم:

$$\dot{h} = \frac{-r^۲\phi\dot{\phi}}{\sqrt{\ell^۲ - r^۲\phi^۲}}$$

$$E = \frac{۱}{۲}\left[\frac{-r^۲\phi\dot{\phi}}{\sqrt{\ell^۲ - \gamma^۲\phi^۲}}\right]^۲ + \frac{۱}{۲}I\dot{\phi}^۲ - mg\sqrt{\ell^۲ - \gamma^۲\phi^۲}$$

ج) چون در این جا می‌خواهیم ϕ را برحسب زمان با استفاده از معادله‌ی انرژی بدست آوریم، لذا لازم است بسط عبارت انرژی را تا مرتبه‌ی دوم انجام دهیم (مانند مثال‌های قبلی که از انرژی استفاده می‌شد و آینده). بنابراین جمله‌ی اول عبارت E به دلیل رتبه‌ی چهارم r صرف‌نظر می‌شود. لذا داریم:

$$E = \frac{۱}{۲}I\dot{\phi}^۲ - mg\ell(۱ - \frac{r^۲}{۲\ell^۲_{\circ}}\phi^۲)$$

با مشتق‌گیری زمانی از عبارت اخیر (E ثابت است) داریم:

$$\circ = I\dot{\phi}\ddot{\phi} + mg\frac{r^۲}{۲\ell}(۲\phi\dot{\phi}) \rightarrow \ddot{\phi} + \frac{mgr^۲}{\ell I}\phi = \circ \rightarrow \phi = \phi_\circ \cos(\omega t + \theta_\circ)$$

که با فرض $\dot{\phi}_{(\circ)} = \circ$، $\theta_\circ = \circ$ است در نتیجه $\phi = \phi_\circ \cos\omega t$ که در آن $\omega = \sqrt{\frac{mgr^۲}{\ell I}}$ است و $\phi_\circ$ زاویه‌ی اولیه‌ی چرخش.

۵-۱۲ حرکت متناوب غیر هماهنگ

می‌خواهیم کمی در مورد بسامد نوسانات و وابستگی آن به دامنه در حرکات متناوب غیر هماهنگ بحث نماییم.

«فرض کنید تابع $V_{(x)}$ در نقطه‌ی $x_\circ$ کمینه باشد. اگر $V_{(x)}$ را حول نقطه‌ی $x_\circ$ بسط دهیم داریم:

$$V_{(x)} = V_{(x_\circ)} + \frac{۱}{۱!}(x - x_\circ)^۱V'_{(x_\circ)} + \frac{۱}{۲!}(x - x_\circ)^۲V''_{(x_\circ)} + \frac{۱}{۳!}(x - x_\circ)^۳V'''_{(x_\circ)} + \cdots$$

که در این جا به دلیل اینکه در نقطه‌ی تعادل داریم $\frac{dV_{(x)}}{dx} = \circ$ لذا جمله‌ی دوم سمت راست صفر می‌باشد. بنابراین داریم:

$$V_{(x)} = V_{(x_\circ)} + \frac{۱}{۲!}(x - x_\circ)^۲V''_{(x_\circ)} + \frac{۱}{۳!}(x - x_\circ)^۳V'''_{(x_\circ)} + \cdots$$

برای سادگی مبدأ مختصات را در $x_\circ$ می‌گذاریم. در این جا خودمان را به حالتی که جمله‌ی مرتبه‌ی دو برحسب x غیر صفر است محدود می‌کنیم. در صورتی که x به اندازه‌ی کافی به صفر نزدیک باشد می‌توان از جمله‌های مرتبه‌ی دوم به بالا صرف‌نظر کرد. فرض کنید $V_{(x)}$ تابع پتانسیل برای نیرویی باشد. مسأله تبدیل به مسأله‌ی نوسانگر هماهنگ می‌شود و نیرو عبارت است از

$$m\ddot{x} = -kx\ , \quad k > 0$$

در تقریب بعدی می‌توانیم جمله‌های بعدی را نگه داریم. فرض کنید جمله‌ی مرتبه‌ی دوم صفر باشد.

$$m\ddot{x} = -kx + \beta x^3$$

این معادله، معادله‌ی حرکت یک نوسانگر غیر هماهنگ است. هر چند حرکت دوره‌ای است ولی هماهنگ نیست.

مثال ۱۲: نوسان‌گر غیر هماهنگی را در نظر بگیرید که معادله حرکت آن به صورت $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon x^3$. فرکانس نوسانات این حرکت را تا مرتبه‌ی اول نسبت به ϵ بیابید.

حل: $x = x_{(0)} + \epsilon x_{(1)}$

با جاگذاری در معادله‌ی اصلی داریم:

$$O_{(0)} : x_{(0)} = A\cos\omega_0 t$$

$$O_{(1)} : \ddot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} = x_{(0)}^3$$

انتظار داریم جواب مسأله دوره‌ای باشد، ولی طرف راست رابطه‌ی بالا متناظر با یک نیروی واداشته با همان فرکانس طبیعی سیستم است. اتفاقی که می‌افتد این است که تشدید رخ می‌دهد، جواب بزرگ می‌شود و جواب دیگر تناوبی نیست. در واقع اگر جواب را با یک جواب هم‌آهنگ تقریب بزنیم می‌بینیم که جواب تناوبی نیست. اما می‌دانیم که جواب مسأله تناوبی است. در این جا روش اختلال عادی جواب نمی‌دهد. در واقع نشان می‌دهیم که فرکانس طبیعی سیستم که مربوط به حرکت هم‌آهنگ در مرتبه‌ی صفر است عوض می‌شود. به این کار باز بهنجارش گفته می‌شود. یعنی مسأله را می‌توان با یک نوسانگر هم‌آهنگ تقریب زد ولی با فرکانسی غیر از ω_0. بسط زیر را برای فرکانس در نظر بگیرید.

$$\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_{(1)} \rightarrow \omega_0 = \omega - \epsilon\omega_{(1)}$$

$$\rightarrow \ddot{x}_{(0)} + \epsilon\ddot{x}_{(1)} + (\omega - \epsilon\omega_{(1)})^2 (x_{(0)} + \epsilon x_{(1)}) = \epsilon x_{(0)}^3$$

$$O_{(0)} : \ddot{x}_{(0)} + \omega^2 x_{(0)} = 0 \rightarrow x_{(0)} = A\cos\omega t$$

که در آن A دامنه‌ی نوسانات است.

$$O_{(1)} : x_{(1)} - 2\omega\omega_{(1)} x_{(0)} + \omega^2 x_{(1)} = x_{(0)}^3$$

$$\rightarrow x_{(1)} + \omega^2 x_{(1)} = A^3 \cos^3\omega t + 2A\omega\omega_{(1)}\cos\omega t$$

با استفاده از اتحاد $\cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta$ داریم:

$$O_{(1)} : x_{(1)} + \omega^2 x_{(1)} = \frac{3}{4}A^3\cos\omega t + \frac{1}{4}A^3\cos 3\omega t + 2\omega\omega_{(1)}A\cos\omega t$$

برای آنکه تشدید رخ ندهد و حرکت تناوبی و دوره‌ای بماند باید ضریب $\cos\omega t$ صفر باشد لذا داریم:

$$\frac{3}{4}A^3 + 2\omega\omega_{(1)}A = 0 \to \omega_{(1)} = -\frac{3A^2}{8\omega} \to \omega = \omega_0 + \epsilon(-\frac{3A^2}{8\omega})$$

از طرفی چون جمله‌ی دوم سمت راست معادله یک ضریب ϵ دارد عبارت داخل پرانتز را می‌توان تا مرتبه‌ی صفرم به صورت $(-\frac{3A^2}{8\omega_0})$ نوشت لذا داریم:

$$\omega = \omega_0 - \frac{3A^2}{8\omega_0}\epsilon$$

دقت کنید که برای نوسانگر هم‌آهنگ فرکانس مستقل از دامنه است ولی برای نوسان‌گر غیر هم‌آهنگ فرکانس به دامنه بستگی دارد. در این جا با اضافه شدن اختلال، نوسان‌گر هم‌آهنگی با فرکانس ω_0 به نوسانگری ناهم‌آهنگ تبدیل می‌شود. البته این نوسان‌گر یک حرکت دوره‌ای دارد و اگر بخواهیم آن را با یک نوسان‌گر هم‌آهنگ تقریب بزنیم، فرکانس آن نوسانگر ω است.

حرکت آونگ هم مثالی از نوسانگر غیر هم‌آهنگ است که در قسمت ۳-۱۱ درباره‌ی آن بحث خواهد شد.»[1]

مثال ۱۳: ذره‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که در راستای محور x در میدان نیرویی با پتانسیل $V = Ax^2 + Bx^4$ که در آن A و B ثوابت مثبت‌اند، حرکت می‌کند. وابستگی دوره‌ی تناوب حرکت حول $x = 0$ را تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر از دامنه‌ی حرکت x_0، محاسبه کنید.

(سؤال دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان سال ۸۲)

حل: می‌توانیم x را برحسب دامنه نوسان به صورت زیر بنویسیم.

$$x = x_{(0)} + A_0 x_{(1)} + A_0^2 x_{(2)} + A_0^3 a_{(3)} + \cdots \qquad (1)$$

می‌دانیم $x_{(0)} = 0$ است زیرا اگر دامنه‌ی نوسانات (A_0) صفر باشد حرکت نداریم. برای نیرو هم داریم:
(دقت کنید A_0 دامنه با A ضریب x^2 در انرژی اشتباه گرفته نشود)

$$f = -\frac{dU}{dx} = -2Ax - 4Bx^3 \to \ddot{x} = -\frac{2A}{m}x - \frac{4B}{m}x^3 \qquad (2)$$

۱) مطالب این بخش از مقاله‌ی دکتر آقا محمدی درباره‌ی اختلال و تقریب برداشته شده.

که در این رابطه $\omega_0^2 = \frac{2A}{m}$ یعنی اگر جمله‌ی Bx^4 وجود نمی‌داشت و معادله حرکت نوسانگر هماهنگ ساده می‌بود فرکانس زاویه نوسانات $\sqrt{\frac{2A}{m}}$ می‌بود ولی در حال حاضر ω است که برای آن داریم:

$$\omega = \omega_0 + A_0\omega_{(1)} + A_0^2\omega_{(2)} + \cdots \rightarrow \omega_0 = \omega - A_0\omega_{(1)} - A_0^2\omega_{(2)} - \cdots \quad (3)$$

که وابستگی نوسانگر ناهماهنگ را به دامنه نشان می‌دهد.

با استفاده از معادله‌ی (۱) و (۲) داریم:

$$A_0\ddot{x}_{(1)} + A_0^2\ddot{x}_{(2)} + A_0^3\ddot{x}_{(3)} = -\omega_0^2(A_0x_{(1)} + A_0^2x_{(2)} + A_0^3x_{(3)}) - \frac{4B}{m}(A_0x_{(1)} + \cdots)^3$$

که رابطه‌ی بالا را تا مرتبه‌ی سوم نسبت به دامنه ادامه خواهیم داد. باجاگذاری ω_0 از معادله‌ی (۳) داریم:

$$\begin{aligned}A_0\ddot{x}_{(1)} + A_0^2\ddot{x}_{(2)} + A_0^3\ddot{x}_{(3)} =& (-\omega^2 + 2\omega\omega_{(1)}A_0 + 2\omega\omega_{(2)}A_0^2 - A_0^2\omega_{(1)}^2) \\ &\times (A_0x_{(1)} + A_0^2x_{(2)} + A_0^3x_{(3)}) - \frac{4B}{m}A_0^3x_{(1)}^3 \\ \rightarrow A_0\ddot{x}_{(1)} + A_0^2\ddot{x}_{(2)} + A_0^3\ddot{x}_{(3)} =& -\omega^2x_{(1)}A_0 - \omega^2x_{(2)}A_0^2 - \omega^2x_{(3)}A_0^3 + 2\omega\omega_{(1)}x_{(1)}A_0^2 \\ &+ 2\omega\omega_{(1)}x_{(2)}A_0^3 + 2\omega\omega_{(2)}x_{(1)}A_0^3 - \omega_{(1)}^2x_{(1)}A_0^3 - \frac{4B}{m}x_{(1)}^3A_0^3\end{aligned}$$

$$O_{(1)} : \ddot{x}_{(1)} = -\omega^2x_{(1)} \rightarrow x_{(1)} = \cos\omega t$$

(در این جا فرض شده در لحظه‌ی صفر، سرعت صفر است)

$$O_{(2)} : \ddot{x}_{(2)} = -\omega^2x_{(2)} + 2\omega\omega_{(1)}x_{(1)} = -\omega^2x_{(2)} + 2\omega\omega_{(1)}\cos\omega t$$

برای اینکه تشدید اتفاق نیافتد و حرکت دوره‌ای و تناوبی باشد لازم است ضریب $\cos\omega t$ در طرف راست معادله‌ی $\ddot{x}_{(2)} + \omega^2x_{(2)} = 2\omega\omega_{(1)}\cos\omega t$ صفر باشد. لذا $\omega_{(1)} = 0$

با توجه به صفر بودن $\omega_{(1)}$ برای $O_{(3)}$ داریم:

$$O_{(3)} : \ddot{x}_{(3)} = -\omega^2x_{(3)} + 2\omega\omega_{(2)}x_{(1)} - \frac{4B}{m}x_{(1)}^3$$

با جاگذاری $x_{(1)} = \cos\omega t$ در معادله بالا و استفاده از اتحاد $\cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{\cos 3\theta}{4}$ داریم:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{(3)} + \omega^2x_{(3)} &= 2\omega\omega_{(2)}\cos\omega t - \frac{4B}{m}(\frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t) \\ &= \cos\omega t(2\omega\omega_{(2)} - \frac{3B}{m}) - \frac{B}{m}\cos 3\omega t \\ \rightarrow \ddot{x}_{(3)} + \omega^2x_{(3)} &= (2\omega\omega_{(2)} - \frac{3B}{m})\cos\omega t - \frac{B}{m}\cos 3\omega t\end{aligned}$$

برای آنکه حرکت دوره‌ای و تناوبی باشد لازم است جلوی تشدید گرفته شود و در حرکتی که فرکانس زاویه‌ای آن ω است وجود نیروی وابسته به زمان با فرکانس ω تشدید ایجاد می‌کند (طرف راست معادله، جمله اولش چنین است یعنی باعث تشدید و افزایش دامنه می‌شود) بنابراین ضریب $\cos\omega t$ باید صفر باشد لذا داریم:

$$\omega_{(2)} = -\frac{3B}{2\omega m} \rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{3B}{2m\omega}A_0^2$$

و چون جمله‌ی دوم راست معادله ضریب A_0^2 دارد می‌توانیم تا مرتبه‌ی صفر به جای ω، ω_0 را قرار داده و در عین حال مرتبه‌ی دو بودن ω را نسبت به A_0 حفظ کنیم لذا برای ω داریم:

$$\omega = \omega_0 - \frac{3B}{2m\omega_0}A_0^2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0 - \frac{3B}{2m\omega_0}A_0^2}$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}(1 + \frac{3BA_0^2}{2m\omega_0^2}) = \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{3\pi B}{m\omega_0^3}A_0^2$$

با جاگذاری $\omega_0 = \sqrt{\frac{2A}{m}}$

$$T = \pi\sqrt{\frac{m}{2A}}(2 + \frac{3B}{2A}A_0^2)$$

دقت کنید که A_0 دامنه است و با A اشتباه گرفته نشود.

توجه کنید اگر در این مسأله به جای (ω_0)، $(\omega - A_0\omega_{(1)} \dots)$ را قرار نداده بودیم، نمی‌توانستیم شرط تناوبی بودن حرکت را اعمال کرده و از آن ω را تا مرتبه‌ی دوم بدست آوریم یعنی به معادله‌ی به فرم

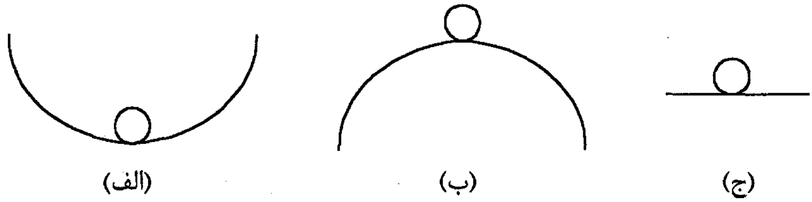
$$\ddot{x} + \omega^2 x = k\cos\omega t + f_{(t)}$$

بر نمی‌خوردیم که در آن ω بسامد زاویه‌ای نوسانات جسم باشد و در نتیجه نمی‌توانستیم ادعا کنیم که ضریب k باید صفر باشد، لذا از این فن یعنی جاگذاری $\omega - A_0\omega_{(1)} \dots$ به جای ω_0 استفاده نمودیم. البته این مثال با مثال‌های قبلی و راه و روش کل کمی تفاوت داشت و آن به خاطر پدیده‌ی تشدید بود که توضیحات کامل در مثال ۲۲ آمده است.

۵-۱۳ انواع تعادل

در آخر هم لازم است کمی در مورد پایداری و ناپایداری و انواع تعادل بحث شود. می‌دانیم برای نقطه‌ی تعادل اجسام داریم: $\frac{dU}{dr} = 0$، که در این رابطه r متغیری است که U وابسته به آن است و لزوماً فاصله نمی‌باشد.

حال اگر $\frac{d^2U}{dr} > 0$، تعادل پایدار است مانند حرکت گلوله داخل یک چاه مانند شکل (۵-۱۵ الف)

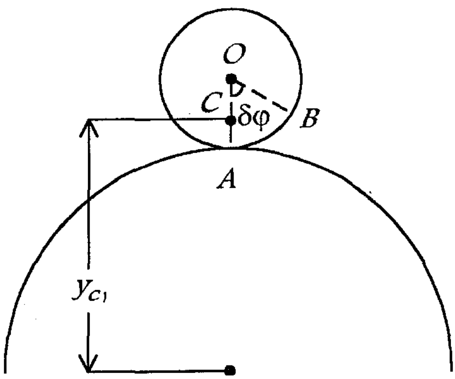


شکل۵-۱۵

اگر $\frac{d^{\text{۲}}U}{dr^{\text{۲}}} < \text{۰}$ تعادل ناپایدار است مانند حرکت جسمی کوچک روی قلّه‌ی تپه مانند شکل (۵-۱۵- ب) و اگر $\frac{d^{\text{۲}}u}{dr^{\text{۲}}} = \text{۰}$ تعادل خنثی است مانند شکل (۵-۱۵- ج) لازم به ذکر است در این جا نیز مانند قبل در عملیات انرژی را تا مرتبه‌ی دوم بسط می‌دهیم.

مثال ۱۴: کره‌ای به شعاع $R_{\text{۱}}$ روی سطحی کروی به شعاع $R_{\text{۲}}$ قرار دارد. مرکز جرم کره‌ی اول کجا باشد (در چه فاصله از محل تماس دو کره باشد) تا تعادل کره اول پایدار باشد. (سطح کروی ثابت است و حرکت کره‌ی اول روی سطح کروی از نوع غلتش خالص است).

حل: فرض می‌کنیم جسم به اندازه‌ی کوچکی روی سطح حرکت کند و فرض کنیم اگر فاصله مرکز جرم از محل تماس دو کره h باشد، با مقایسه شکل (۵-۱۶) و شکل (۵-۱۷) برای تغییر ارتفاع مرکز جرم با کم کردن مختصات y اولیه از ثانویه داریم:

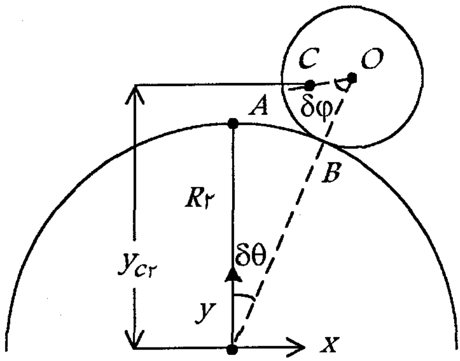


شکل۵-۱۶

$$\delta y = y_{c_{\text{۲}}} - y_{c_{\text{۱}}}$$

$$y_{c_{\text{۲}}} = (R_{\text{۱}} + R_{\text{۲}})(\text{۱} - \frac{\delta\theta^{\text{۲}}}{\text{۲}}) - (R_{\text{۱}} - h)(\text{۱} - \frac{(\delta\theta + \delta\varphi)^{\text{۲}}}{\text{۲}}) \qquad (\text{۱})$$

که در این رابطه به جای $\cos\delta\theta$ و $\cos(\delta\theta+\delta\varphi)$ بسط آنها را قرار دادیم. از طرفی شرط غلتش را به صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:



با جابجایی کوچک از تعادل

شکل۵-۱۷

$$\delta\theta R_۲ = \delta\varphi R_۱ \qquad (۲)$$

در نتیجه از (۱) و (۲) برای $y_{c_۲}$ داریم:

$$y_{c_۲} = R_۲ + h + \frac{\delta\theta^۲}{۲}\left(R_۲ + \frac{R_۲^۲}{R_۱} - h - \frac{R_۲^۲h}{R_۱^۲} - \frac{۲hR_۲}{R_۱}\right)$$

$$\delta y = y_{c_۲} - y_{c_۱} = \frac{\delta\theta^۲}{۲}\left(R_۲ + \frac{R_۲^۲}{R_۱} - \frac{h}{R_۱^۲}(R_۱+R_۲)^۲\right)$$

برای تعادل پایدار داریم:

$$\frac{d^۲U}{d\theta^۲} > ۰$$

از طرفی می‌دانیم $\frac{d^۲(\frac{\delta\theta^۲}{۲})}{d\theta^۲} = ۱$ چون $d(\delta\theta) = d\theta$ (مثل این می‌ماند که $\frac{d^۲(\frac{\theta^۲}{۲})}{d\theta^۲}$ را حساب کنیم. لذا داریم:

$$R_۲ + \frac{R_۲^۲}{R_۱} - \frac{h}{R_۱^۲}(R_۱+R_۲)^۲ > ۰ \rightarrow \frac{R_۲R_۱ + R_۲^۲}{R_۱} > \frac{h}{R_۱^۲}(R_۱+R_۲)^۲ \rightarrow \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} < \frac{۱}{h}$$

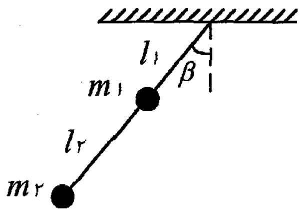
شرط بدست آمده برای h، شرط تعادل پایدار حول نقطه‌ی تعادل است.

مسائل

۱) دوره‌ی تناوب یک آونگ را در آسانسوری که به‌طور قائم با شتاب a حرکت می‌کند پیدا کنید.

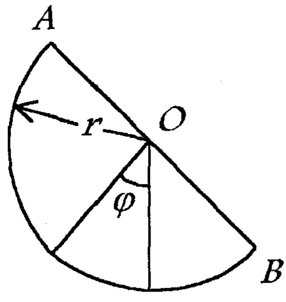
جواب: $T = ۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g \pm a}}$. اگر شتاب آسانسور به سمت بالا باشد علامت مثبت و اگر شتاب آن رو به پایین باشد علامت منفی را به کار می‌بریم.

۲) دوره‌ی تناوب نوسانهای آونگ نشان داده شده در شکل (۵-۱۸) را پیدا کنید. میله‌ی حامل جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ را بی‌وزن در نظر بگیرید.



شکل۵-۱۸

۳) دوره‌ی تناوب نوسان‌های آونگی را که از یک نیم حلقه‌ی همگن باریک به شعاع r تشکیل شده است و مطابق شکل (۵-۱۹) از ریسمان‌های بی‌وزن OA و OB آویزان است بدست آورید.

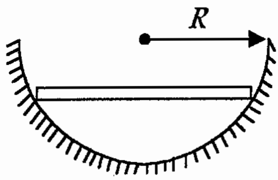


شکل۵-۱۹

جواب: $T = \sqrt{\frac{\pi r}{۲g}}$

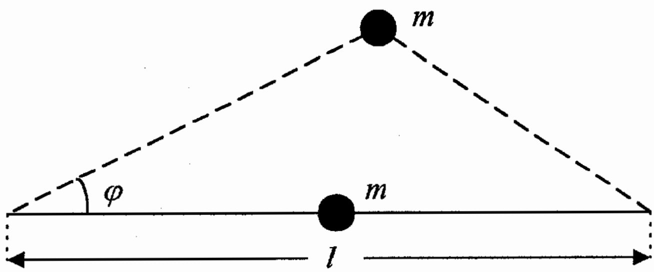
۴) میله‌ای به وزن ω و طول L در صفحه‌ی قائم روی سطح استوانه‌ای بدون اصطکاک می‌لغزد. اگر میله را اندکی از وضعیت تعادل منحرف کنیم و رها کنیم پریود نوسانات آن را بدست آورید.

(مجموعه تمرینات باشگاه دانش پژوهان)



شکل۵-۲۰

۵) ریسمانی که از دو انتها ثابت شده است، با نیروی f کشیده می‌شود. وزنه‌ای نقطه‌ای به جرم m به وسط ریسمان وصل شده است (شکل (۵-۲۱)). دوره‌ی تناوب نوسانهای کوچک وزنه را تعیین کنید. از جرم ریسمان و نیروی گرانش صرف‌نظر می‌کنیم.



شکل۵-۲۱

جواب: $T = ۲\pi\sqrt{\frac{m\ell}{۴f}}$

۶) الواری به جرم m، طول ℓ و پهنای W و ضخامت B از وسط روی استوانه‌ای به شعاع R قرار دارد. دوره‌ی نوسانات کوچک آن را بدست آورید. (حرکت غلتشی کامل است)

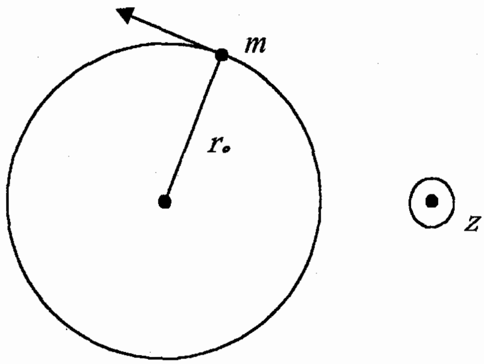
(مجموعه تمرینات باشگاه دانش پژوهان جوان)

۷) در بعضی دریاچه‌ها هر از چندی نوسان کل سطح آب مشاهده می‌شود. دریاچه‌هایی که این پدیده را نشان می‌دهند، اغلب طول بسیار زیادی دارند (در مقایسه با عمقشان) ولی بسیار باریک‌اند. آب این دریاچه‌ها، مانند چای در فنجان وقتی برای مهمان آورده می‌شود، به‌طور یک پارچه نوسان می‌کند. برای ساختن مدلی برای این فرآیند از ظرفی با مقطع چهار گوش شروع می‌کنیم (شکل (۵-۲۲)) که طول آن ℓ و عمق آب در آن h است. برای محاسبه فرض می‌شود که سطح آب زاویه‌ی کوچکی با افق می‌سازد. سطح آب در موقع نوسان تخت می‌ماند ولی حول خطی در سطح افق نوسان می‌کند. این خط سطح آب را به دو مستطیل بزرگ قسمت می‌کند. مدلی برای حرکت آب درست کنید و رابطه‌ای برای دوره‌ی نوسان T بدست آورید.

(پانزدهمین المپیاد بین‌المللی فیزیک در سوئد)

جواب: $T = \dfrac{\pi L}{\sqrt{۳gh}}$

۸) میدان نیرویی به صورت $\vec{f} = \dfrac{\alpha m}{r^n}(\hat{Z} \times \hat{V})$ در نظر بگیرید، که در آن r فاصله از مبدأ O است. جسمی به جرم m روی دایره‌ای به شعاع $r_۰$ در حال چرخش است. شرطی روی n پیدا کنید که حرکت جسم حول شعاع $r_۰$ پایدار باشد.



شکل۵-۲۲

(امتحان دوره‌ی چهل نفر باشگاه دانش پژوهان سال ۱۳۸۱)

۹) یک کنده‌ی سنگین و گرد از انتهای دو ریسمان آویزان شده است به‌طوری که فاصله‌ی نقاط آویز برابر قطر کنده می‌باشد. طول عمودی هر ریسمان برابر L است. دوره‌ی نوسانات کوچک را در صفحه‌ی عمود بر کنده بدست آورید.

جواب: $T = ۲\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

۱۰) انرژی پتانسیل برای اندرکنش دو اتم از یک ملکول، به صورت زیر است:

$$V_{(r)} = -\frac{A}{r^۶} + \frac{B}{r^n} \qquad (n > ۶\ ,\ \ A > ۰\ ,\ \ B > ۰)$$

الف) فاصله‌ی تعادل را حساب کنید: $r_۰ = ?$

ب) انرژی لازم برای شکستن این ملکول را برحسب A، n و $r_۰$ بیابید.

ج) فرض کنید که جرم دو اتم برابر است و جرم هر یک M می‌باشد فرکانس نوسانات کوچک حول $r_۰$ را برحسب M، n، $r_۰$ و D و انرژی شکست محاسبه کنید.

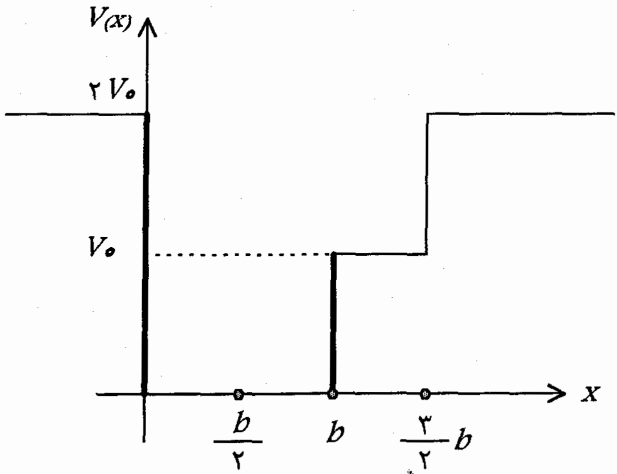
(آزمون دوره‌ی چهل نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۲)

۱۱) باری به جرم M روی ریل‌های افقی قرار دارد. آونگی شامل گلوله‌ای به جرم m توسط ریسمان بدون جرم و غیر کشسان از آن بار آویزان است. بار تنها می‌تواند در راستای ریل حرکت کند.

نسبت دوره‌ی تناوبهای $\frac{T_2}{T_1}$، یعنی دوره‌ی نوسانات کوچک در صفحه‌ی عمودی و موازی با ریل و دوره‌ی تناوب آن عمود بر ریل‌ها را به دست آورید.

جواب: $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{M}{m+M}}$

۱۲) انرژی پتانسیل یک ذره به جرم m که در راستای محور x حرکت می‌کند، برحسب مکان آن در زیر رسم شده است. دوره‌ی تناوب یک نوسان کامل را با فرض این که انرژی آن $E = \frac{3}{2}V_0$ است محاسبه کنید.



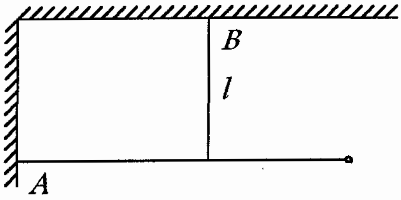
شکل۵-۲۳

(امتحان دوره‌ی چهل نفر باشگاه دانش پژوهان سال ۱۳۸۲)

۱۳) یک میله‌ی بدون وزن با یک بار در یک انتهای آن در نقطه‌ی A به یک دیوار لولا شده است به‌طوری که می‌تواند در هر جهتی نوسان کند (شکل (۵-۲۴)).

این میله توسط نخ غیر قابل کشسانی به طول ℓ از وسط به‌طور افقی نگه داشته است.

بار، یک اندازه حرکت در جهت عمود بر صفحه‌ی شکل بدست می‌آورد دوره‌ی تناوب، (T) را برای نوسانات کوچک سیستم بدست آورید.



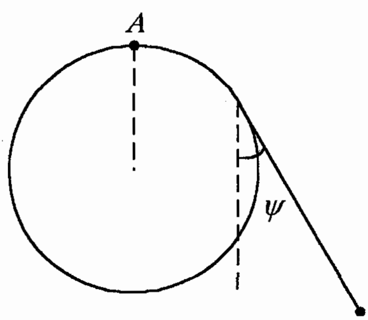
شکل۵-۲۴

جواب: $T = ۲\pi\sqrt{\frac{۲\ell}{g}}$

۱۴) جرم m به وسیله‌ی طنابی به طول ℓ مطابق شکل (۵-۲۵) به نقطه‌ی A روی استوانه‌ای بسته شده است. محور استوانه افقی و شعاع آن R است. $R < \frac{۲\ell}{\pi}$ است. استوانه را ثابت و حرکت را منحصر به صفحه‌ی قائمی بگیرید که از نقطه‌ی A می‌گذرد و بر محور استوانه عمود است. فرض کنید جرم m در زمان $t = ۰$ در $\psi_۰$ باشد.

الف) انرژی این جسم را برحسب $\psi_۰$ و ψ و $\dot{\psi}$ بدست آورید.

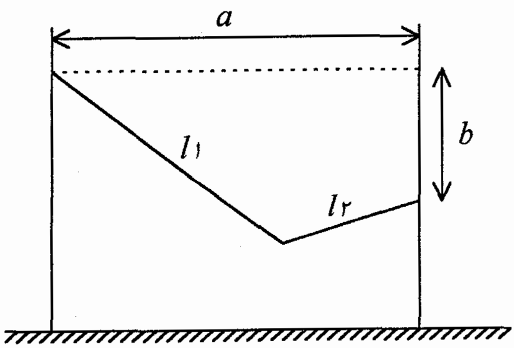
ب) فرکانس نوسان‌های کوچک حول تعادل پایدار را به دست آورید.



شکل۵-۲۵

(امتحان دوره‌ی ۷ نفر (انتخابی تیم جهانی) باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۲)

۱۵) طناب تابی به اندازه‌ی b بالاتر از طناب دیگر آن بسته شده است. فاصله‌ی پایین دیواره‌های تاب از هم برابر a است. طول $L_۱$ و $L_۲$ نخ‌ها طوری است که داریم: $L_۱^۲ + L_۲^۲ = a^۲ + b^۲$ (شکل (۵-۲۶)) پریود نوسانات کوچک تاب، (T) را حساب کنید. ارتفاع کسی که تاب می‌خورد در برابر طول‌های بالا قابل صرف‌نظر است.



شکل۵-۲۶

جواب: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_1L_2}{ag}}$

۱۶) ذره‌ای تحت تأثیر پتانسیل $U_{(x)}$ قرار دارد. انرژی این ذره را E بگیرید. دوره‌ی تناوب این نوسان‌گر برابر است با:

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-U_{(x)}}}\ ,\quad U_{(x_1)} = U_{(x_2)} = E$$

الف) نشان دهید در صورتی که پتانسیل $U_{(x)}$ به اندازه‌ی $\delta U_{(x)}$ تغییر کند، تغییر دوره‌ی تناوب، δT، تا مرتبه‌ی اول δU از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\delta T = -\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{\partial}{\partial E}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\delta U_{(x)}dx}{\sqrt{E-U_{(x)}}}$$

که در واقع همان

$$\delta T = -\frac{\partial}{\partial E}(T\overline{\delta U})$$

است. $\overline{\delta U}$ متوسط زمانی δU است یعنی

$$\overline{\delta U} = \frac{1}{T}\int_0^T \delta U(x_{(t)})dt$$

ب) فرض کنید $U = \frac{1}{2}mW^2x^2$ و $\delta U = \beta x^4$ است δT را بدست آورید.

(امتحان دوره‌ی ۷ نفر (انتخابی تیم جهانی) باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۱)

۱۷) دری مستطیل شکل به عرض w و ارتفاع h و جرم m است. در یکنواخت است و محور آن که در لبه قرار دارد با امتداد شاغول زاویه α می‌سازد. فرض کنید لولاها بدون اصطکاک‌اند. زمان

تناوب حرکت نوسانی ساده را برای نوسان‌های کوچک حول نقطه‌ی تعادل پایدار آن را بدست آورید.
(امتحان انتخابی تیم جهانی المپیاد فیزیک ایران سال ۱۳۷۸)

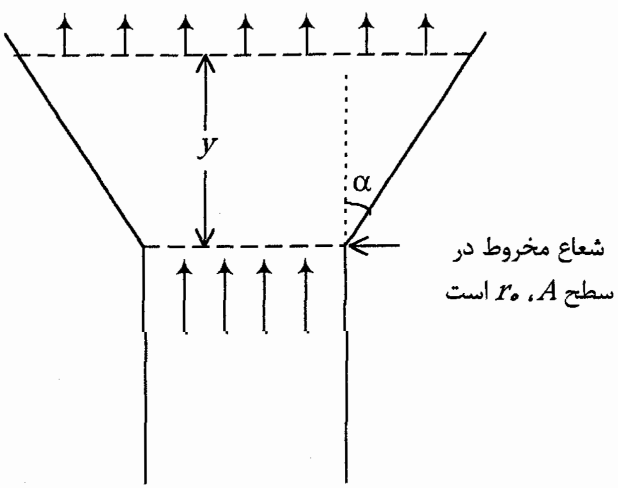
جواب: $T = ۲\pi\sqrt{\frac{۲w}{۳g\sin\alpha}}$

۱۸) قیفی مطابق شکل (۵-۲۷) در نظر بگیرید که از قسمت پایین آن مایع تراکم ناپذیری وارد می‌شود. سرعت عمودی مایع در تمام نقاط هر مقطع قیف یکسان است. سرعت مایع در قسمت پایین قیف (سطح A) $V_۰$ است. اگر گلوله‌ای در مایع قرار گیرد نیروی وارد بر آن طبق رابطه‌ی $\vec{F} = -k\vec{V}_{rel}$ بدست می‌آید، که در آن k مقدار ثابت مثبت و $\vec{V}_{rel}$ سرعت نسبی گلوله نسبت به مایع است. گلوله روی محور قیف قرار دارد. مقدار حجمی که در واحد زمان از هر سطح مقطع قیف عبور می‌کند ثابت است.

الف) گلوله‌ای به جرم m در چه ارتفاعی از سطح A قرار گیرد تا گلوله در حالت تعادل قرار گیرد.

ب) اگر گلوله در یک y دلخواهی قرار گرفته باشد معادله‌ای برحسب $y_{(t)}$ و مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم آن بنویسید.

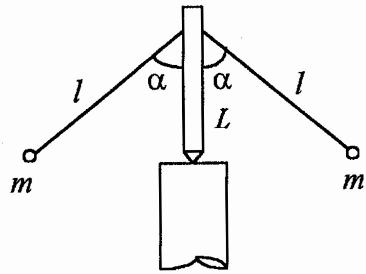
ج) فرض کنید گلوله را در نقطه‌ی تعادلش قرار می‌دهیم. حال آن را از حالت تعادل خارج می‌کنیم. (ضربه‌ای عمودی می‌زنیم) اگر تغییر موضع گلوله کوچک باشد، $y_{(t)}$ را بعد از زدن ضربه بدست آورید. (ثوابت مربوطه که با شرایط اولیه تعیین می‌شوند مهم نیستند)



شکل۵-۲۷

(امتحان دوره‌ی چهل نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۰)

۱۹) اسباب بازی تی‌تر تشکیل شده است از دو وزنه‌ی همانند که مطابق شکل (۵-۲۸) به انتهای دو بازوی معلقی که از میخی آویزان‌اند متصل‌اند. این ساختار به‌طور غیر قابل انتظاری پایدار است. این اسباب بازی می‌تواند با احتمال واژگون شدن کم به چرخش یا به نوسان در آید. با بررسی انرژی پتانسیل آن رابطه‌ای بین ℓ، L و α بیابید که در آن تعادل اسباب بازی حول نقطه‌ی نشان داده شده در شکل از نوع پایدار باشد. برای سهولت فقط حرکت نوسانی در صفحه‌ی قائم را مورد توجه قرار دهید.



شکل۵-۲۸

جواب: $L < \ell \cos\alpha$

۲۰) آزمایش کاوندیش برای تعیین ثابت گرانش (G) به شکل زیر است. دو جرم M روی پایه‌هایی ثابت‌اند. دو جرم m با میله‌ی سبکی به یکدیگر متصل‌اند و میله با ریسمان سبکی آویزان است. مجموعه‌ی این چهار جرم در یک صفحه‌ی افقی قرار دارند. ریسمان که قائم است مثل فنری پیچشی با ثابت k عمل می‌کند. $(\tau = -k\theta)$؛ که در آن τ گشتاور و θ زاویه‌ی انحراف نسبت به حالت تعادل است. سیستم فقط می‌تواند حول ریسمان قائم دوران کند. طول میله $2r$، و فاصله‌ی دو جرم M از هم $2R$ است. وسط میله بر وسط دو جرم M منطبق است.

الف) حالت‌های تعادل سیستم را پیدا کنید. فرض کنید که در حالت تعادل ریسمان نتابیده است.

ب) شرط اینکه این تعادل‌ها پایدار باشد را بدست آورید.

ج) فرض کنید تعادل‌ها پایدار باشد. در این صورت G را برحسب m، M، r و R بدست آورید.

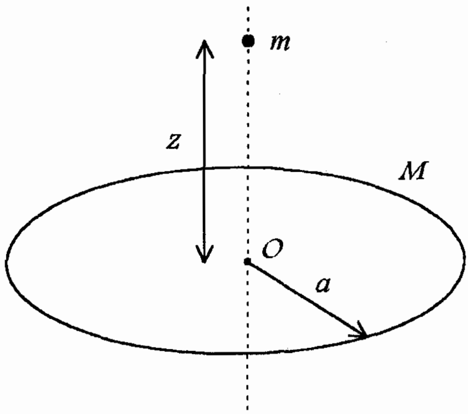
(آزمون انتخابی تیم جهانی المپیاد فیزیک ایران سال ۱۳۷۶)

۲۱) حلقه‌ای به جرم M و شعاع a در نظر بگیرید. ذره‌ای به جرم m روی محور حلقه و به فاصله‌ی z از مرکز آن (نقطه‌ی O) واقع است.

الف) انرژی پتانسیل گرانشی جرم m ناشی از حلقه را بدست آورید.

ب) با رسم انرژی پتانسیل برحسب Z نوع تعادل حول نقطه‌ی O را مشخص کنید.

ج) اگر جرم m در مرکز حلقه (نقطه‌ی O) باشد و به اندازه‌ی کوچکی ($Z \ll a$) در امتداد محور حلقه جابجا شود، فرکانس نوسانات کوچک آن را بدست آورید.

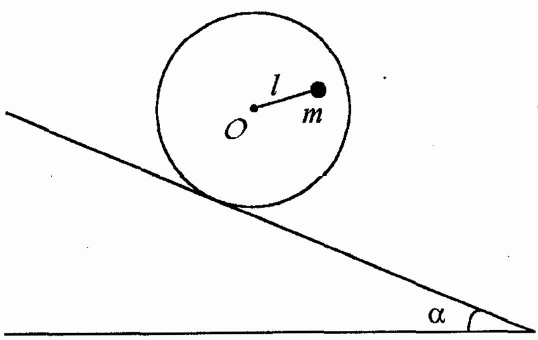


شکل۵-۲۹

(امتحان پایان ترم فیزیک ۱ دانشگاه صنعتی شریف سال ۱۳۸۳)

جواب: الف) $u = -\frac{GmM}{\sqrt{a^۲ + Z^۲}}$ ب) پایدار ج) $v = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{GM}{a^۳}}$

۲۲) ذره‌ای سنگین به جرم m در استوانه‌ای با جرم ناچیز و به شعاع R نشانده شده است. فاصله‌ی ذره از محور استوانه ℓ است. این استوانه روی یک سطح شیبدار به زاویه‌ی α با افق، بدون لغزش می‌غلتد و محور استوانه در حین غلتیدن آن افقی می‌ماند. ذره تحت اثر نیروی گرانش است. به ازای چه شرطی دستگاه دارای نقطه‌ی تعادل پایدار است. فرکانس نوسانهای کوچک حول این نقطه‌ی ثابت را بیابید.



شکل۵-۳۰

(امتحان انتخابی تیم جهانی المپیاد فیزیک ایران سال ۱۳۷۶)

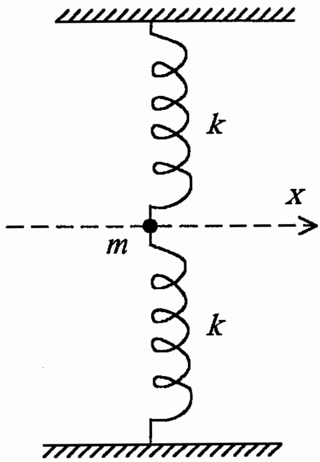
۲۳) جسمی به جرم m به دو فنر با ثابت یکسان k متصل است. دو طرف دیگر فنرها نیز به دو دیوار متصل‌اند. کل سیستم در صفحه‌ی افقی قرار دارد. (شکل (۵-۳۱)). در این وضعیت فنرها طول آزاد خود را دارند. جرم m را در راستای x منحرف می‌کنیم. این انحراف را کوچک بگیرید.

الف) نشان دهید نیرویی از طرف فنرها به m وارد می‌شود که متناسب با x^3 است.

ب) انرژی پتانسیل را بدست آورید.

ج) پریود نوسانات جرم m را بدست آورید.

راهنمایی: $\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\frac{\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})}$ که در آن Γ یک تابع ریاضی است که به آن تابع گاما می‌گوییم.



شکل۵-۳۱

(امتحان پایان ترم فیزیک ۱ دانشگاه صنعتی شریف سال ۱۳۸۱)

جواب: الف) $F_x = -k\frac{x^3}{\ell^2}$ ب) $U_{(x)} = \frac{kx^4}{4\ell^2}$ ج) $T = \frac{\ell}{A}\sqrt{\frac{2m\pi}{k}}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$

۲۴) روی میله‌ای که معادله‌ی آن به صورت $z = \alpha r^{2k}$ (α و k ثابت هستند و $r = \sqrt{x^2+y^2}$ است) دانه‌ی تسبیحی بدون اصطکاک و آزادانه می‌تواند حرکت کند. این میله با سرعت زاویه‌ای ثابت $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ می‌چرخد.

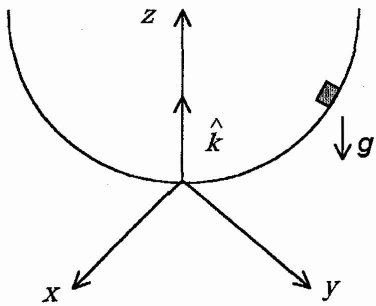
الف) معادله‌ی مؤلفه‌های z، r و θی قانون نیوتن را برای دانه‌ی تسبیح بنویسید. (r و θ مختصه‌های قطبی‌ی دانه‌ی تسبیح در صفحه xy هستند)

ب) معادله‌های مربوط به مؤلفه‌های z و γ را بر هم تقسیم کنید و با انتگرال‌گیری ازآن به معادله‌ی زیر برسید.

$$E' = f_{(r)}\dot{r}^{۲} + k_{(r)}$$

E' مقداری ثابت است. تابع‌های $f_{(r)}$ و $k_{(r)}$ را بدست آورید.

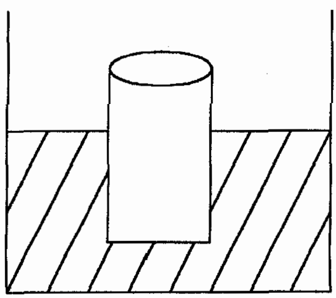
ج) دانه‌ی تسبیح در چه نقاطی از میله باشد تا حرکت آن پایا باشد (یعنی در چارچوب دستگاه دوار میله، دانه تسبیح ساکن باشد). اگر دانه‌ی تسبیح را از این نقاط منحرف کنیم به ازای چه شرطی حرکت آن پایدار و به ازای چه شرطی حرکتش ناپایدار است. برای حالت پایدار فرکانس نوسان‌های کوچک و برای حالت ناپایدار ثابت زمانی (یعنی زمانی که دامنه‌ی حرکت e برابر می‌شود) را بدست آورید.



شکل۵-۳۲

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۴)

۲۵) جسمی به شکل یک استوانه‌ی بلند به شعاع a با چگالی ρ روی مایعی با چگالی ρ_w شناور است. ($\rho \leqslant \rho_w$). با جابجا کردن کوچک استوانه در راستای قائم شروع به نوسان در امتداد قائم می‌کند. فرکانس نوسانات استوانه را بدست آورید (طول استوانه ℓ می‌باشد).



شکل۵-۳۳

(امتحان پایان ترم فیزیک ۱ دانشگاه صنعتی شریف سال ۱۳۸۲)

جواب: $v = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{\rho_w g}{\rho \ell}}$

۲۶) میله‌ی همگنی به طول ℓ و جرم m مقید است که همواره دو انتهایش روی دایره‌ای به شعاع R باشد ($\ell < ۲R$). صفحه‌ی دایره بر صفحه‌ی افق عمود است. اصطکاکی در کار نیست. زاویه‌ی میله با افق را θ می‌نامیم.

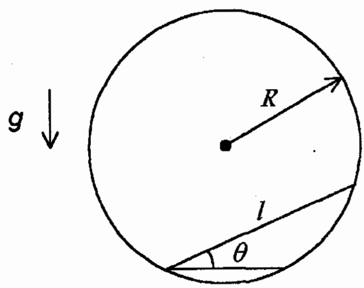
میله را از یک وضعیت اولیه، که افقی نیست اما در نزدیکی‌های پایین دایره است، رها می‌کنیم. زاویه‌ی اولیه را $\theta_۰$ می‌نامیم.

الف) $\dot{\theta}$ را به صورت تابعی از θ بدست آورید.

ب) مؤلفه‌های افقی و قائم سرعت مرکز جرم میله را به صورت تابعی از θ بدست آورید.

ج) اگر $\theta_۰$ خیلی کوچک باشد، و میله در نزدیکی‌های پایین‌ترین قسمت دایره باشد، میله نوسان می‌کند. بسامد این نوسان چیست؟

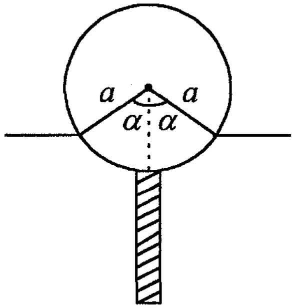
یادآوری: گشتاور لختی یک میله‌ی همگن به طول ℓ و جرم m حول محوری عمود بر میله که از مرکز جرم می‌گذرد $\frac{۱}{۲}m\ell^۲$ است.



شکل۵-۳۴

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۴)

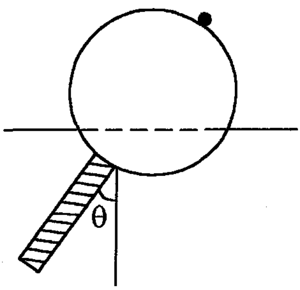
۲۷) الف) یک حلقه‌ی نجات شامل یک استوانه‌ی جامد به شعاع a و طول ℓ است که از مواد سبک وزن و با چگالی یکنواخت d ساخته می‌شود، به‌طوری که یک میله‌ی یکنواخت و ثابت به‌طور مستقیم و به طرف بالا از وسط کف استوانه در امتداد طول استوانه جلو آمده است. جرم میله برابر جرم استوانه و طول آن برابر قطر استوانه است. همچنین چگالی آن بزرگ‌تر از چگالی آب دریا است. این حلقه‌ی نجات روی سطح آب دریا (با چگالی ρ) شناور است. در حالت تعادل رابطه‌ای برای زاویه‌ی α برحسب $\frac{d}{\rho}$ بدست آورید (شکل (۵-۳۵)) حجم میله را نادیده بگیرید.



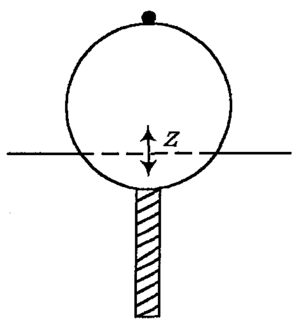
شکل۵-۳۵

ب) اگر بر اثر اختلال، حلقه‌ی نجات به صورت عمودی به اندازه‌ی مقدار مختصر z فشرده شود (شکل ۵-۳۶))، بر اثر نیروی خالص رانش که به طرف بالا بر آن وارد می‌شود شروع به نوسان حول نقطه‌ی شناوری به طرف بالا و پایین می‌کند. بسامد مُد عمودی ارتعاش را برحسب α، g و a بدست آورید. در این جا g شتاب ناشی ازگرانی زمین است. فرض کنید تأثیر حرکت آب بر دینامیک حلقه‌ی نجات به‌گونه‌ای است که جرم مؤثر حلقه‌ی نجات را با ضریب $\frac{۱}{۳}$ افزایش می‌دهد. می‌توانید فرض کنید α کوچک نیست.

پ) همین طور حلقه‌ی نجات حول محور مرکزی که به‌طور افقی است نوسان می‌کند. (شکل (۵-۳۷)). بسامد نوسانها را دوباره برحسب g و a بدست آورید. در این حالت دینامیک و چسبندگی آب را نادیده بگیرید. زاویه‌ی نوسان را کوچک فرض کنید.



شکل۵-۳۷



شکل۵-۳۶

(آزمون بیست و ششمین المپیاد جهانی فیزیک در استرالیا)

جواب: الف) $\alpha - \cos\alpha \sin\alpha = \frac{۲d\pi}{\rho}$

ب) $\omega_z = \sqrt{\dfrac{۲g \sin\alpha}{۲\alpha(\alpha - \cos\alpha \sin\alpha)}}$

پ) $\omega_\theta = \sqrt{\dfrac{۱۲g}{۲۹a}}$

۲۸) یک جرم m در مداری دایره‌ای به شعاع $r_\circ$ تحت اثر نیروی مرکزی که پتانسیل آن از رابطه‌ی $U = -\dfrac{km}{r^n}$ تبعیت می‌کند قرار دارد. نشان دهید اگر $n < ۲$ باشد در صورت جابجایی کوچک جسم از مدار اولیه، حرکت آن پایدار خواهد بود.

(جمعی از اساتید دانشگاه شیکاگو)

فصل ششم

حرکت سیاره‌ای و گرانش

۶-۱ نیروی وارد بر سفینه در حضور ستاره و سیاره با هم

مثال ۱: سفینه‌ای به جرم $m_{\circ}$ در فاصله‌ی R از ستاره‌ای به جرم M قرار دارد. این ستاره مشکوک به داشتن سیاره‌ای به جرم m است که در مداری دایره‌ای با شعاع a دور آن می‌چرخد. فرض کنید $R > a$، و سفینه در صفحه‌ی مدار سیاره است. از قانون گرانش نیوتن می‌دانیم که دو جرم $m_۱$ و $m_۲$ که در فاصله‌ی r از یکدیگر قرار دارند نیروی $\frac{Gm_۱m_۲}{r^۲}$ در راستای خط واصلشان و به صورت جاذبه به هم وارد می‌کنند، که در آن G ثابت گرانش نیوتن است.

نیروی گرانشی که به سفینه وارد می‌شود در حالتی که سیاره در دورترین فاصله‌اش نسبت به سفینه باشد را $F_۱$، و نیروی گرانشی که به سفینه وارد می‌شود در حالتی که سیاره در نزدیک‌ترین فاصله‌اش نسبت به سفینه باشد را $F_۲$ می‌نامیم. نیروی گرانشی را که ستاره به سفینه وارد می‌کند با F نشان می‌دهیم.

الف) f را با رابطه‌ی $f = (\frac{R}{a})(\frac{F_۲ - F_۱}{F})$ تعریف می‌کنیم. f را حساب کنید.

برای این که سفینه بتواند از روی این نیروها سیاره را تشخیص دهد، باید $\frac{F_2 - F_1}{F}$ قابل توجه باشد.

ب) در حد $\frac{a}{R} \to 0$ مقدار f چقدر است. (مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد فیزیک)

حل: الف)

$$F_1 = \frac{Gm_\circ M}{R^2} + \frac{Gm_\circ m}{(R+a)^2}$$

$$F_2 = \frac{Gm_\circ M}{R^2} + \frac{Gm_\circ m}{(R-a)^2}$$

$$f = \frac{R}{a}\left(\frac{F_2 - F_1}{F}\right) = \frac{4R^4 m}{M(R^2 - a^2)^2} = \frac{4m}{(1 - (\frac{a}{R})^2)^2}$$

ب) وقتی $\frac{a}{R} \to 0$ داریم:

$$f = \frac{4m}{M}$$

البته این مثال از لحاظ عملیات بسیار ساده می‌باشد ولی جهت اطلاع دانش‌آموزان داوطلب شرکت در آزمون‌های المپیاد کشوری آورده شده تا بدانند در مراحل اولیه، عملیات تقریب ساده می‌باشد.

۶-۲ خارج شدن ماهواره از مدار اصلی با ضربه در راستای شعاع

مثال ۲: ماهواره‌ای به جرم m در مداری دایره‌ای به دور زمین درگردش است. ماهواره برای حرکت به سمت زمین یکی از موتورهای خود را روشن می‌کند ولی به‌طور موقت و کوتاه مدت. (این عمل مانند ضربه‌ای کوچک در راستای r به ماهواره می‌باشد). می‌خواهیم مدار جدید ماهواره را بیابیم (حداکثر انحراف فاصله ماهواره از مرکز زمین که دامنه نوسانات در راستای r می‌باشد را A بگیرید و شعاع اولیه‌ی حرکت دایره را $r_\circ$ بگیرید)

حل: اختلال ایجاد شده انرژی ماهواره را تغییر می‌دهد ولی تکانه‌ی زاویه‌ای[1] را تغییر نمی‌دهد.

$$\theta : mr^2\dot{\theta} = \ell = r_\circ^2\omega_\circ = \text{ثابت} \qquad (1)$$

همان طورکه در مثال ۸ دیدیم این رابطه (رابطه‌ی ۱) از شتاب در راستای $\hat{\theta}$ و انتگرال‌گیری از آن به دست آمد.

$$r : m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2} \qquad (2)$$

حالا روابط (۱) و (۲) را با فرضیات زیر بسط می‌دهیم:

$$r = r_\circ + \delta r \ , \ \ \omega = \omega_\circ + \delta\omega \ , \ \ \ddot{r} = \ddot{\delta r}$$

۱) تکانه زاویه‌ای $(\vec{L})$ دارای رابطه‌ی $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{V}$ می‌باشد که در آن m جرم جسم و $\vec{r}$ بردار مکان نسبت به مبدأ (مرکز) و $\vec{V}$ بردار سرعت می‌باشد.

$$\text{از (۱)} \rightarrow (r_\circ + \delta r)^{۲}(\omega_\circ + \delta\omega) = r_\circ^{۲}\omega_\circ \rightarrow \delta\omega = -\frac{۲\omega_\circ \delta r}{r_\circ} \qquad (۳)$$

$$\text{از (۲)} \rightarrow \ddot{\delta r} - (r_\circ + \delta r)(\omega_\circ + \delta\omega)^{۲} = -\frac{GM}{(r_\circ + \delta r)^{۲}}$$

$$\rightarrow \ddot{\delta r} - r_\circ\omega_\circ^{۲} - ۲\omega_\circ r_\circ \delta\omega - \delta r \omega_\circ^{۲} = -\frac{GM}{r_\circ^{۲}} + \frac{۲GM}{r_\circ^{۳}}\delta r$$

با توجه به این $r_\circ\omega_\circ^{۲} = \frac{GM}{r_\circ^{۲}}$ داریم:

$$\ddot{\delta r} - \frac{۳GM}{r_\circ^{۳}}\delta r - ۲\omega_\circ r_\circ \delta\omega = \circ$$

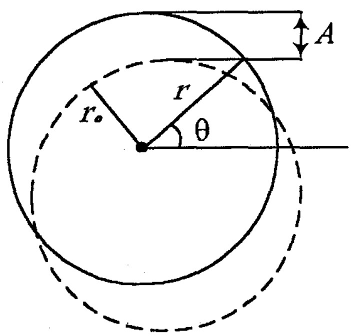
$$\text{از (۳)} \rightarrow \ddot{\delta r} + \frac{GM}{r_\circ^{۳}}\delta r = \circ \rightarrow \delta r = A\sin\sqrt{\frac{GM}{r_\circ^{۳}}}t \qquad (۴)$$

که در آن A دامنه‌ی نوسانات در راستای r است.

$$\text{از (۳) و (۴)} \rightarrow \delta\omega = -\frac{۲\omega_\circ A \sin\omega_\circ t}{r_\circ}$$

$$\rightarrow \omega = \omega_\circ - \frac{۲\omega_\circ A}{r_\circ}\sin\omega_\circ t \rightarrow \theta = \omega_\circ t + \frac{۲A}{r_\circ}(\cos\omega_\circ t - ۱)$$

همانطور که از معادله‌ی بالا پیداست، دوره‌ی تناوب حرکت $\frac{۲\pi}{\omega_\circ}$ است بنابراین دوره‌ی تناوب حرکت θ و r یکی می‌باشد لذا بعد از یک دور کامل، ماهواره در راستای r هم یک نوسان کامل انجام می‌دهد. در شکل (۶-۱) می‌توانید چگونگی حرکت ماهواره در مدار جدید را ملاحظه کنید.



شکل۶-۱

$$r = r_\circ + A\sin\omega_\circ t = r_\circ + A\sin\theta \qquad (۵)$$

$$\theta = \omega_\circ t + \frac{۲A}{r_\circ}(\cos\omega_\circ t - ۱) \qquad (۶)$$

همانطور که در معادله‌ی (۵) مشاهده می‌کنید چون جمله دوم سمت راست معادله ضریب A دارد و A هم از مرتبه‌ی اول است می‌توان در عبارت داخل تابع سینوس به جای $\omega_\circ t$، θ را تا مرتبه‌ی صفرم قرار داد یعنی $\omega_\circ t$ با θ تا مرتبه‌ی صفرم برابر است لذا برای r داریم: $r = r_\circ + A\sin\theta$

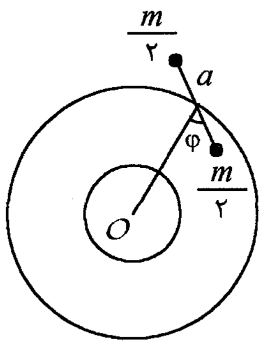
در این قسمت توجه کنید به نظر دانیل کلپنر و روبرت جی‌کلنکو در مورد حرکت سیارات در منظومه‌ی شمسی و اختلال:

«اکثر اعضای منظومه‌ی شمسی نه کاملاً همگن و نه کاملاً کروی هستند. برای مثال ماهواره‌های حول ماه بر اثر تمرکز جرمی در ماه، مختل می‌شود، و سیاره‌ی عطارد نیز به واسطه‌ی برآمدگی استوایی خورشید، اندکی مختل می‌شود. بعلاوه منظومه‌ی شمسی به هیچ عنوان یک سیستم دو جسمی نیست. هر سیاره‌ای همانگونه که بوسیله‌ی خورشید جذب می‌شود به وسیله‌ی تمام سیاره‌های دیگر جذب می‌شود.

خوشبختانه هیچ یک از این اثرات زیاد بزرگ نیستند. اکثر جرم منظومه‌ی شمسی در خورشید متمرکز است. به‌طوری که جذب سیارات بوسیله‌ی یکدیگر بسیار ضعیف است. بزرگ‌ترین بر هم کنش بین مشتری و زحل وجود دارد. اثر این اختلال عمدتاً در تغییر سرعت هر یک از سیارات است به‌طوری که دیگر قانون مساحت‌های برابر به‌طور دقیق حاکم نیست. با این حال این اختلال هرگز باعث جابجایی مشتری بیشتر از چند دقیقه‌ی کمانی از وضع عادی آن نمی‌شود. (یک دقیقه‌ی کمانی تقریباً برابر یک سی‌ام قطر ماه است که از زمین دیده می‌شود.) در عمل، ابتدا مدار سیاره بدون در نظر گرفتن سیارات دیگر محاسبه می‌شود و سپس تصحیحات کوچک در مدار بواسطه‌ی وجود آن به عمل می‌آید. چنین طریقه‌ای، روش اختلال نامیده می‌شود. (در واقع سیارات دور دست از روی بررسی اثر اختلال آنها بر مدار سیارات شناخته شده کشف شده‌اند.) بعلاوه اگر جسمی دقیقاً همگن یا دارای تقارن کروی نباشد، می‌توان نشان داد که میدان گرانشی آنها علاوه بر جمله‌ی اصلی $\frac{1}{r^2}$، دارای جملاتی وابسته به $\frac{1}{r^3}$ و $\frac{1}{r^4}$ و غیره است. این ضرایب به نسبت اندازه‌ی جسم به r بستگی دارد. در مقیاس منظومه‌ی شمسی از جملات با توان بالا می‌توان صرف‌نظر کرد. اگر چه ممکن است برای قمرهای نزدیک اهمیت پیدا کنند.»

۶-۳ حرکت ماهواره‌ی دمبلی شکل به دور زمین

مثال ۳: ماهواره‌ای به شکل دمبل متشکل از دو کره‌ی کوچک که جرم هر کره $\frac{m}{2}$ است. با میله‌ی سبکی به طول $2a$ به هم متصل‌اند. این ماهواره در مداری دایره‌ای شکل حرکت می‌کند. فاصله‌ی مرکز جرم ماهواره تا زمین (O) برابر $r_\circ$ است و زاویه‌ی φ زاویه‌ی بین دمبل با بردار شعاعی OC است که O مرکز زمین است. دو کره‌ی انتهایی میله را به عنوان دو ذره در نظر بگیرید و فرض کنید حرکت در یک صفحه صورت می‌گیرد. جرم زمین را M_e بگیرید.



شکل ۶-۲

الف) تابع انرژی پتانسیل ماهواره را برحسب $r_\circ$، a و φ و ثابت‌های دیگر بنویسید.

ب) در حالت $a \ll r_\circ$ تابع انرژی پتانسیل را تا مرتبه‌ی دوم بنویسید.

پ) نقاط تعادل سیستم را به دست آورید و پایداری یا ناپایداری آن را تعیین کنید. (حالت $a \ll r_\circ$ را در نظر بگیرید)

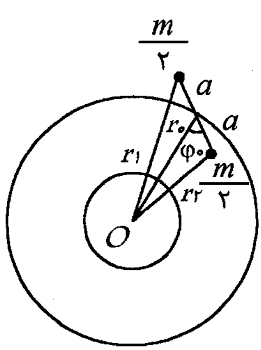
ت) در حالت تعادل پایدار فرکانس زاویه‌ای نوسانات کوچک (ω) آن را تعیین کنید.

ث) اگر فرکانس زاویه‌ای ماهواره به دور زمین $\omega_\circ$ باشد، نسبت $\frac{\omega}{\omega_\circ}$ را بدست آورید.

حل: الف) با توجه به شکل (۶-۳) داریم:

$$U = -\frac{GM_e m}{۲}(\frac{۱}{r_۱} + \frac{۱}{r_۲})$$

$$\rightarrow U = -\frac{GM_e m}{۲}(\frac{۱}{(r_\circ^۲ + a^۲ + ۲r_\circ a\cos\varphi)^{\frac{۱}{۲}}} + \frac{۱}{(r_\circ^۲ + a^۲ - ۲r_\circ a\cos\varphi)^{\frac{۱}{۲}}})$$



شکل ۶-۳

ب)

$$U = -\frac{GmM_e}{۲r_۰}\left((۱ + \frac{۲a}{r_۰}\cos\varphi + \frac{a^۲}{r_۰^۲})^{-\frac{۱}{۲}} + (۱ - \frac{۲a}{r_۰}\cos\varphi + \frac{a^۲}{r_۰^۲})^{-\frac{۱}{۲}}\right)$$

با بسط تا مرتبه‌ی دوم داریم:

$$U = -\frac{GmM_e}{۲}\left((۱ - \frac{a}{r_۰}\cos\varphi - \frac{a^۲}{۲r_۰^۲} + (-\frac{۱}{۲})(-\frac{۳}{۲})(\frac{۲a\cos\varphi}{r_۰})^۲\right.$$

$$\left. + ۱ + \frac{a}{r_۰}\cos\varphi - \frac{a^۲}{۲r_۰^۲} + (-\frac{۱}{۳})(-\frac{۳}{۲})(\frac{۲a\cos\varphi}{r_۰})^۲\right)$$

$$= -\frac{GmM_e}{۲r_۰}\left((۲ - \frac{a^۲}{r_۰^۲} + \frac{۶a^۲}{r_۰^۲}\cos^۲\varphi)\right)$$

همانطورکه دیدید جملات مرتبه‌ی یک با هم مساوی شدند و اولین مرتبه‌ای که در آن متغیر φ وارد شد مرتبه‌ی دوم است، به همین خاطر مسأله بسط را تا مرتبه‌ی دوم از ما طلب کرد.

پ) برای نقطه‌ی تعادل داریم: $\frac{dU}{d\varphi} = ۰$ و برای حالت تعادل پایدار داریم: $\frac{d^۲U}{d\varphi^۲} > ۰$ و برای حالت تعادل ناپایدار داریم: $\frac{d^۲U}{d\varphi^۲} < ۰$ همانطورکه در قسمت (۵-۱۳) دیدیم.

از (۱) داریم:

$$\frac{dU}{d\varphi} = -\frac{GM_em}{r_۰^۳}۳a^۲\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{d^۲U}{d\varphi^۲} = \frac{GM_em}{r_۰^۳}۳a^۲\cos^۲\varphi$$

با صفر قرار دادن $\frac{dU}{d\varphi}$ به دست می‌آوریم: $\varphi = ۰$ و $\varphi = \frac{\pi}{۲}$ اولین وضعیت تعادل ($\varphi = ۰$) پایدار است، زیرا $\frac{d^۲U}{d\varphi^۲} > ۰$ می‌باشد در این حالت گرانش ماهواره به گونه‌ای است که محور ماهواره (خط رابط دو جرم متصل به آن) در جهت بردار شعاعی OC می‌باشد.

وضعیت دوم ($\varphi = \frac{\pi}{۲}$)، تعادل ناپایدار است. زیرا $\frac{d^۲U}{d\varphi^۲} < ۰$ خواهد بود و محور با بردار شعاعی، زاویه‌ی قائمه می‌سازد.

ت) برای عبارت انرژی ماهواره داریم:

$$E = \frac{۱}{۲}I\dot\varphi^۲ + U(\varphi) = \text{constant}$$

با بسط این عبارت حول نقطه‌ی تعادل پایدار ($\varphi = ۰$) داریم:

$$E = \frac{۱}{۲}I\dot\varphi^۲ - \frac{GM_em}{۲r_۰}\left(۲ - \frac{a^۲}{r_۰^۲} + \frac{۶a^۲}{r_۰^۲}(۱ - \frac{\varphi^۲}{۲})\right)$$

$$\dot{E} = \circ \rightarrow I\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{\text{۳}GM_e ma^{\text{۲}}}{r_\circ^{\text{۳}}}\varphi\dot{\varphi} = \circ$$

$$I = ma^{\text{۲}} \rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{\text{۳}GM_e}{r_\circ^{\text{۳}}}\varphi = \circ \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\text{۳}GM_e}{r_\circ^{\text{۳}}}}$$

ث) برای بدست آوردن فرکانس زاویه‌ای ماهواره به دور زمین ($\omega_\circ$) از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{GM_e m}{r_\circ^{\text{۲}}} = mr_\circ\omega_\circ^{\text{۲}} \rightarrow \omega_\circ^{\text{۲}} = \frac{GM_e}{r_\circ^{\text{۳}}} \rightarrow \frac{\omega}{\omega_\circ} = \sqrt{\text{۳}}$$

یعنی اگر خط واصل ماهواره و زمین در مدت زمانی، زاویه‌ی θ را طی کند، دمبل زاویه‌ی $\sqrt{\text{۳}}\theta$ را خواهد چرخید.

۶-۴ حرکت سیاره‌ای با وجود نیروی اصطکاک هوا

مثال ۴: یک ذره در میدان نیروی مرکزی $\vec{F} = mf_{(r)}\hat{r}$ روی دایره حرکت می‌کند. m جرم ذره است. اگر به این ذره یک نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت آن وارد شود ذره دیگر روی دایره نمی‌ماند. فرض کنید نیروی اصطکاک وارد بر ذره $-\alpha m\vec{V}$ است که $\vec{V}$ سرعت ذره و α یک پارامتر ثابت است.

الف) در حالت $\alpha = \circ$، برای حرکت دایره‌ای رابطه‌ی بین V و r را بدست آورید.

ب) رابطه تغییر انرژی پتانسیل برحسب زمان را بنویسید. رابطه را تا مرتبه‌ی یک نسبت به α ساده کنید و با استفاده از آن یک معادله برای تغییر r برحسب زمان بنویسید که در آن فقط r وجود داشته باشد.

پ) برای نیروی $f_{(r)} = -\frac{k}{r^{\text{۲}}}$ معادله‌ی دیفرانسیل بالا را حل کنید و $r_{(t)}$ را بدست آورید.
(دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان سال ۷۹)

حل: الف) در حالت $\alpha = \circ$ داریم:

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow mf_{(r)}\hat{r} = mr\dot{\theta}^{\text{۲}}(-\hat{r}) \rightarrow f_{(r)} = -r\dot{\theta}^{\text{۲}}$$

از طرفی $r\dot{\theta} = V$ است. پس داریم:

$$V^{\text{۲}} = -rf_{(r)}$$

ب) می‌دانیم تغییرات زمانی انرژی کل ذره برابر توان مصرفی نیروی اصطکاک است. یعنی:

$$\frac{d}{dt}[\frac{\text{۱}}{\text{۲}}mV^{\text{۲}} + U] = -\alpha\vec{V}\cdot\vec{V}$$

که در آن انرژی U انرژی پتانسیل است. بنابراین تغییرات زمانی انرژی پتانسیل می‌شود:

$$\frac{dU}{dt} = -\alpha m V^{۲} - \frac{d}{dt}(\frac{۱}{۲}mV^{۲}) \qquad (۱)$$

تغییرات سرعت از مرتبه‌ی α است. پس خود سرعت را تا مرتبه‌ی صفرم در نظر می‌گیریم. یعنی حرکت را روی دایره می‌گیریم. از قسمت (الف) داشتیم: $V^{۲} = -rf_{(r)}$. بنابراین معادله‌ی (۱) می‌شود:

$$\frac{dU}{dt} = \alpha m r f_{(r)} + \frac{d}{dt}(\frac{۱}{۲}mrf_{(r)}) \qquad (۲)$$

همچنین داریم: $U_{(r)} = -\int_{\infty}^{r} mf_{(r)}dr$. بنابراین طرف چپ معادله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dr}\frac{dr}{dt} = \dot{r}(-mf_{(r)})$$

بنابراین معادله‌ی (۲) به صورت زیر در می‌آید.

$$-m\dot{r}f_{(r)} = \alpha m r f_{(r)} + \frac{۱}{۲}m\dot{r}(f_{(r)} + r\frac{df_{(r)}}{dr})$$

$$\dot{r} = \frac{-۲\alpha r f_{(r)}}{(۳f_{(r)} + r\frac{df_{(r)}}{dr})}$$

پ) برای $f_{(r)} = -\frac{k}{r^{۲}}$ داریم: $\frac{df_{(r)}}{dr} = \frac{۲k}{r^{۳}}$ و به دست می‌آوریم:

$$\dot{r} = \frac{۲\alpha k/r}{(-\frac{۳k}{r^{۲}} + \frac{۲k}{r^{۲}})} \to \dot{r} = -۲\alpha r \to r = r_{\circ}e^{-۲\alpha t}$$

که در آن $r_{\circ}$ شعاع اولیه است.

لازم به ذکر است نمی‌توان تابع نمایی را بسط داد زیرا ممکن است αt کوچک نباشد، عبارت کوچک در این مسأله αT است که در آن T زمان یک دور کامل است.

در این راه ممکن است این سؤال پیش آید که چرا در $\frac{d}{dt}(\frac{۱}{۲}mV^{۲})$، V را مرتبه‌ی صفرم قرار دادیم به همین خاطر راه دوم را برای اطمینان از درستی این حل می‌آوریم.

راه دوم: در این جا $r + \delta r$ را به جای r در معادلات حرکت قرار می‌دهیم چون بعد از اثر اصطکاک شعاع تغییر می‌کند.

$$\vec{V} = \dot{\delta r}\hat{r} + (r+\delta r)\dot{\theta}\hat{\theta} \to \vec{f} = -\alpha m(\dot{\delta r}\hat{r} + (r+\delta r)\dot{\theta}\hat{\theta}) \qquad (۱)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱) و دستگاه قطبی داریم:

$$\ddot{\delta r} - (r+\delta r)\dot{\theta}^{۲} = -f(r+\delta r) - \dot{\delta r}\alpha \qquad (۲)$$

جمله‌ی دوم سمت راست معادله $(\dot{\delta r}\alpha)$ به دلیل داشتن رتبه‌ی دوم نسبت به α حذف می‌شود زیرا خود $\dot{\delta r}$ جمله‌ی مرتبه‌ی صفرم نسبت به α ندارد (چون در $\alpha = \circ$، $\dot{\delta r} = \circ$ می‌باشد). بنابراین با قرار دادن $\omega + \delta\omega$ به جای $\dot{\theta}$ داریم:

$$\delta\ddot{r} - (r + \delta r)(\omega + \delta\omega)^{۲} = -f_{(r+\delta r)}$$

با قرار دادن $f_{(r+\delta r)} = f_{(r)} + \delta r f'_{(r)}$ و ساده کردن معادلات تا مرتبه‌ی دوم داریم:

$$\to \delta\ddot{r} - r\omega^{۲} - ۲r\omega\delta\omega - \omega^{۲}\delta r = -f_{(r)} - f'_{(r)}\delta r$$

می‌دانیم $r\omega^{۲} = f_{(r)}$ داریم:

$$\delta\ddot{r} - ۲r\omega\delta\omega - \omega^{۲}\delta r + f'_{(r)}\delta r = \circ \qquad (۳)$$

حالا با نوشتن معادله‌ی تکانه زاویه‌ای در راستای θ، حرکت را به‌طور کامل بررسی نمودیم (معادله‌ی تکانه زاویه‌ای همان معادله‌ی شتاب در راستای θ است که به این صورت در آمده)

$$|\vec{L}| = m|(\vec{r} + \delta\vec{r}) \times (\delta\dot{r}\hat{r} + (r + \delta r)\dot{\theta}\hat{\theta})|$$

$$L = m(r + \delta r)^{۲}(\omega + \delta\omega) = m(r^{۲}\omega + ۲\omega r\delta r + r^{۲}\delta\omega) \qquad (۴)$$

از طرفی برای L داریم:

$$T = \frac{dL}{dt} \to L = L_{\circ} - Tt = L_{\circ} - m\alpha V_{(\circ)}rt \qquad (۵)$$

که در آن T گشتاور وارد بر ذره است و $V_{(\circ)} = \sqrt{rf_{(r)}}$

از (۴) و (۵) داریم:

$$L_{\circ} - m\alpha\sqrt{rf_{(r)}}rt = mr^{۲}\omega + ۲m\omega r\delta r + r^{۲}m\delta\omega$$

$L_{\circ} = mr^{۲}\omega$ و $\sqrt{rf_{(r)}} = \omega r$. لذا داریم:

$$\delta\omega = -\alpha\omega t - \frac{۲\omega\delta r}{r} \qquad (۶)$$

با جاگذاری (۶) در (۳) داریم:

$$\ddot{\delta r} - ۲r\omega(-\alpha\omega t - \frac{۲\omega\delta r}{r}) - \omega^{۲}\delta r + f'_{(r)}\delta r = \circ$$

$$\rightarrow \delta\ddot{r} + ۲r\omega^۲\alpha t + ۴\omega^۲\delta r - \omega^۲\delta r + f'_{(r)}\delta r = ۰$$
$$\rightarrow \delta\ddot{r} + (f'_{(r)} + ۳\omega^۲)\delta r = -۲r\omega^۲\alpha t$$
$$\delta r = A\sin(\sqrt{۳\omega^۲ + f'_{(r)}}t + \varphi) - \frac{۲r\omega^۲\alpha t}{۳\omega^۲ + f'_{(r)}}$$

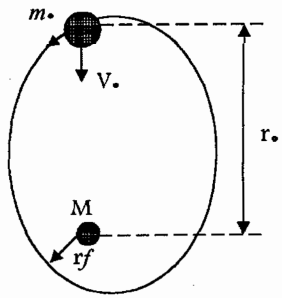
چون در $t = ۰$، $\delta r = ۰$، بنابراین $\varphi = ۰$ می‌باشد و چون در لحظه صفر $\dot{\delta r}$ هم برابر صفر است لذا $A = ۰$. بنابراین با این شرایط اولیه که این مسأله دارد برای δr داریم:

$$\delta r = -\frac{۲r\omega^۲\alpha t}{۳\omega^۲ + f'_{(r)}} = -\frac{۲\alpha r f_{(r)} t}{۳f_{(r)} + rf'_{(r)}}$$

در این جا عمداً از اندیس‌های $r_۰$ و $\omega_۰$ برای مقدار مرتبه‌ی صفرم فاصله و سرعت زاویه‌ای استفاده نشد و به جای آنها از r و ω استفاده شد، زیرا می‌خواستیم جوابی که بدست می‌آوریم برای هر فاصله‌ای درست باشد مرحله‌ی دیگر مسأله با توجه به داشتن $\dot{r}$ مانند راه حل اول انجام می‌شود.

۶-۵ سیستم ستاره‌های دوتایی و خروج از مسیر اولیه

مثال ۵: می‌دانیم که بیشتر ستاره‌ها یک سیستم دوتایی را تشکیل می‌دهند. یک نوع از این سیستم‌های دوتایی، شامل یک ستاره‌ی عادی به جرم $m_۰$ و یک ستاره‌ی نوترونی متراکم و بسیار سنگین به جرم M است که به دور یکدیگر می‌چرخند. فرض کنید $M \gg m_۰$ است، در نتیجه ستاره‌ی عادی روی یک مدار دایره‌ای به شعاع $r_۰$ حول ستاره‌ی نوترونی می‌چرخد. فرض کنید ستاره‌ی عادی شروع به گسیل گاز به طرف ستاره‌ی نوترونی می‌کند، و سرعت گسیل گاز نسبت به ستاره‌ی عادی برابر $V_۰$ است شکل (۶-۴). همچنین فرض کنید در این مسأله نیروی گرانشی ستاره‌ی نوترونی غالب است و از تغییرات مداری ستاره‌ی عادی چشمپوشی کنید. کمترین فاصله بین دو ستاره را در شکل (۶-۴) که با r_f نشان داده شده است بیابید. (مسأله المپیاد جهانی فیزیک ۲۰۰۱)



شکل ۶-۴

حل: خروج گاز را با سرعت V_0 نسبت به ستاره‌ی عادی و نرخ خروجی جرم را A در نظر بگیرید. بنابراین نیروی وارد به ستاره عادی به واسطه خروج گاز برابر با AV_0 است که در مقایسه با نیروی جاذبه گرانشی خیلی کوچک است[۱]. به همین خاطر $r \gg \delta r$ است. با استفاده از مختصات قطبی در راستای r داریم: (مبدأ مختصات را روی ستاره‌ی نوترونی قرار می‌دهیم):

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f_{(r)} \rightarrow m(\ddot{\delta r} - (r_0 + \delta r)(\omega_0 + \delta\omega)^2) = -\frac{GmM}{(r_0 + \delta r)^2} + AV_0$$

$$\rightarrow \delta\ddot{r} - 2r_0\omega_0\delta\omega - \omega_0^2\delta r = \frac{2GM}{r_0^3}\delta r + \frac{AV_0}{m} \qquad (۱)$$

برای جمله‌ی دوم سمت راست معادله داریم:

$$\frac{AV_0}{m} = \frac{AV_0}{m_0 - At} = \frac{AV_0}{m_0}(1 + \frac{At}{m_0}) = \frac{AV_0}{m_0} + \frac{A^2V_0t}{m_0^2}$$

از جمله‌ی دارای ضریب A^2 صرف‌نظر می‌کنیم لذا با جایگذاری در (۱) داریم:

$$\delta\ddot{r} - 2r_0\omega_0\delta\omega - \omega_0^2\delta r = \frac{2GM}{r_0^3}\delta r + \frac{AV_0}{m_0} \qquad (۲)$$

برای راستای θ هم داریم:

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \qquad (۳)$$

چون در راستای θ نیرویی نداریم و خروج گاز در جهت θ نیرویی وارد نمی‌کند.

از (۳) $\rightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \rightarrow 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$

عبارت بالا مشتق کامل ضرب دو تابع r^2 و $\dot{\theta}$ است لذا داریم:

$$r^2\dot{\theta} = \text{ثابت}\ r_0^2\omega_0 \rightarrow (r_0 + \delta r)^2(\omega_0 + \delta\omega) = r_0^2\omega_0 \rightarrow \delta\omega = -\frac{2\omega_0}{r_0}\delta r$$

با جاگذاری در رابطه‌ی (۲) داریم:

$$(\delta\ddot{r} + 4\omega_0^2\delta r - \omega_0^2\delta r) = \frac{2GM}{r_0^3} + \frac{AV_0}{m_0}$$

از طرفی چون قبل از خروج گاز حرکت روی دایره‌ای به شعاع r_0 است داریم:

$$\frac{GM}{r_0^2} = r_0\omega_0^2$$

۱) کوچک بودن آن را می‌توانید به صورت تخمینی محاسبه کنید

با لحاظ کردن این نتیجه در عبارت بدست آمده داریم:

$$\ddot{\delta r} + \frac{GM}{r_\circ^{3}}\delta r = \frac{AV_\circ}{m_\circ} \qquad (۴)$$

حل معادله‌ی بالا به صورت زیر است (می‌توانید با جاگذاری در رابطه‌ی (۴) این حل را بیازمایید):

$$\delta r = C\sin\omega_\circ t + D\cos\omega_\circ t + \frac{AV_\circ r_\circ^{3}}{GmM}$$

که در این رابطه $\omega_\circ = \sqrt{\frac{GM}{r_\circ^{3}}}$ است.

در لحظه‌ی $t = \circ$، $\delta r = \circ$. بنابراین داریم:

$$\circ = \circ + D + \frac{AV_\circ r_\circ^{3}}{GmM} \rightarrow D = -\frac{AV_\circ r_\circ^{3}}{GmM}$$

در لحظه‌ی $t = \circ$، $\dot{\delta r} = \circ$. بنابراین داریم:

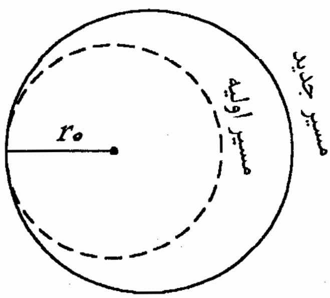
$$\circ = C\omega_\circ \rightarrow C = \circ$$

$$r = r_\circ + \frac{AV_\circ r_\circ^{3}}{GmM}(1 - \cos\omega_\circ t)$$

کمترین مقدار این عبارت $r_\circ$ است. یعنی کمترین فاصله‌ی دو ستاره $r_\circ$ می‌باشد (از لحاظ شهودی چرا؟) و بیشترین مقدار آن

$$r = r_\circ + \frac{2AV_\circ r_\circ^{3}}{GmM}$$

می‌باشد. شکل (۶-۵)، چگونگی حرکت در مدار جدید را نشان می‌دهد.



شکل ۶-۵

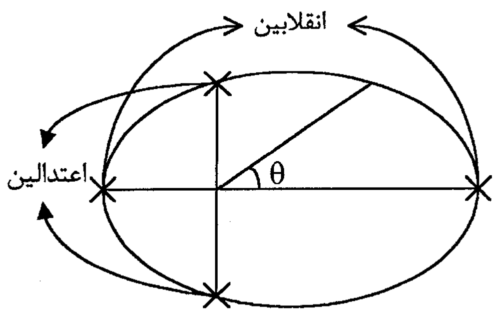
۶-۶ حرکت زمین به دور خورشید

مثال ۶: مدار زمین به دور خورشید یک بیضی با خروج از مرکز کوچک ϵ است که معادله‌ی آن $r_{(\theta)} = \frac{a}{\text{۱} - \epsilon\cos\theta}$ است. فرض کنید اعتدالین در $\theta = \pm\frac{\pi}{\text{۲}}$ است (اعتدال بهاری، اول بهار و اعتدال پاییزی، اول پاییز است) با دانستن این که در یک نیروی مرکزی مساحتی که بردار مکان جسم جاروب می‌کند با زمان متناسب است (قانون بقای اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای)، ϵ را بیابید (ϵ را خیلی کوچک بگیرید)

فاصله‌ی زمین از خورشید، اول تابستان (انقلاب تابستانی) بیشتر است یا اول زمستان (انقلاب زمستانی)؟ این اختلاف فاصله چند کیلومتر است؟

تذکر: الف) فاصله متوسط زمین و خورشید Km ۱۵۰ است.

ب) در این سؤال منظور از اسم فصل‌ها، این فصل‌ها در نیم‌کره‌ی شمالی است.(مسأله دوره‌ی ۷ نفر، انتخابی تیم جهانی ایران)



شکل ۶-۶

حل:

$$r_{(\theta)} = \frac{a}{\text{۱} - \epsilon\cos\theta} = a(\text{۱} + \epsilon\cos\theta)$$

$$r^{\text{۲}}\dot{\theta} = \text{constant} \rightarrow (a^{\text{۲}} + \text{۲}a^{\text{۲}}\epsilon\cos\theta)(\omega_{\circ} + \delta\omega) = a^{\text{۲}}\omega_{\circ}$$

که در این رابطه $\omega_{\circ}$ سرعت زاویه‌ای در $\theta = \frac{\pi}{\text{۲}}$ است.

$$\rightarrow a^{\text{۲}}\omega_{\circ} + a^{\text{۲}}\delta\omega + \text{۲}a^{\text{۲}}\epsilon\omega_{\circ}\cos\theta = a^{\text{۲}}\omega_{\circ} \rightarrow \delta\omega = -\text{۲}\epsilon\omega_{\circ}\cos\theta$$

$$\omega = \omega_{\circ} + \delta\omega = \omega_{\circ} - \text{۲}\epsilon\cos\theta\omega_{\circ}$$

$$\rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega_{\circ}(\text{۱} - \text{۲}\epsilon\cos\theta) = \frac{d\theta}{\text{۱} - \text{۲}\epsilon\cos\theta} = \omega_{\circ}dt$$

$$\to \int_{\circ}^{\theta} (\text{۱} + \text{۲}\epsilon \cos\theta) d\theta = \omega_{\circ} t \to \theta + \text{۲}\epsilon \sin\theta = \omega_{\circ} t \to t = \frac{\theta + \text{۲}\epsilon\sin\theta}{\omega_{\circ}}$$

که در آن t زمان نسبت به مبدأ زمان $(\theta = \circ)$ می‌باشد.

با توجه به طولانی بودن تعداد روزهای تابستان و بهار و کوتاه بودن روزهای پاییز و زمستان برای زاویه‌ی فصول داریم:

تابستان:	$\circ < \theta < \frac{\pi}{\text{۲}}$
پاییز:	$\frac{\pi}{\text{۲}} < \theta < \pi$
زمستان:	$\pi < \theta < \frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}}$
بهار:	$\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}} < \theta < \frac{\text{۲}}{\pi}$

بنابراین با توجه به این که برای آخر تابستان داریم:

$$t_{\text{۱}} = \text{۹۳ Day} \to \text{۹۳} = \frac{\frac{\pi}{\text{۲}} + \text{۲}\epsilon}{\omega_{\circ}}$$

تا آخر پاییز هم برای t داریم:

$$\text{۹۳} + \text{۹۰} - \frac{\text{۳}}{\text{۸}} = \frac{\pi}{\omega_{\circ}} \to \omega_{\circ} = \frac{\text{۸}\pi}{\text{۱۴۶۱۰}} \frac{\text{rad}}{\text{Day}} \quad (\text{۲})$$

که $\frac{\text{۳}}{\text{۸}}$ به خاطر ۳۰ روز نبودن اسفند ماه کم شده. با توجه به رابطه‌ی (۲) و جاگذاری در (۱) داریم:

$$\epsilon = \frac{\text{۹۳}\omega_{\circ} - \frac{\pi}{\text{۲}}}{\text{۲}} = \frac{\frac{\text{۷۴۴}}{\text{۱۴۶۱}}\pi - \frac{\pi}{\text{۲}}}{\text{۲}}$$

$$\to \epsilon = \frac{\text{۲۷}\pi}{\text{۵۸۴۴}} = \frac{\text{۹}\pi}{\text{۱۹۴۸}}$$

ب) فرض کنید فاصله‌ی زمین از خورشید در تابستان و زمستان به ترتیب $r_{\text{۱}}$ و $r_{\text{۲}}$ باشد، داریم:

$$r_{\text{۱}} = \frac{a}{\text{۱} - \epsilon\cos_{(\circ)}}, \quad r_{\text{۲}} = \frac{a}{\text{۱} - \epsilon\cos\pi}$$

$$\to r_{\text{۱}} = a(\text{۱} + \frac{\text{۹}\pi}{\text{۱۹۴۸}}), \quad r_{\text{۲}} = a(\text{۱} - \frac{\text{۹}\pi}{\text{۱۹۴۸}})$$

برای بدست آوردن a هم با توجه به این که فاصله‌ی متوسط زمین و خورشید $\text{۱۵۰} \times \text{۱۰}^{\text{۶}} Km$ است داریم:

$$\bar{r} = \frac{\int_{\circ}^{۲\pi} r d\theta}{۲\pi} = \frac{\int_{\circ}^{۲\pi} a(۱ + \epsilon \cos\theta)}{۲\pi} = a$$

$$\bar{r} = ۱۵\circ \times ۱\circ^{۶} Km \rightarrow a = ۱۵\circ \times ۱\circ^{۶} Km$$

$$\rightarrow r_۱ = ۱۵\circ \times ۱\circ^{۶}(۱ + \frac{۹\pi}{۱۹۴۸})$$

$$r_۲ = ۱۵\circ \times ۱\circ^{۶}(۱ - \frac{۹\pi}{۱۹۴۸})$$

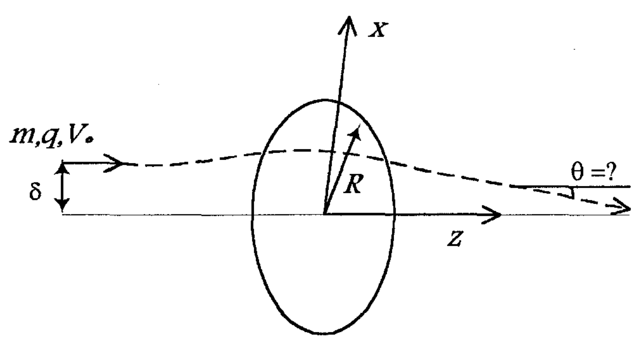
$$\delta r = r_۱ - r_۲ = ۱۵\circ \times ۱\circ^{۶} \times \frac{۲ \times ۹\pi}{۱۹۴۸} = ۴/۳۵ \times ۱\circ^{۶} Km$$

۶-۷ اثر میدان گرانشی حلقه روی ذره متحرک

در مثال بعدی به بررسی پرتاب یک ذره باردار به سمت حلقه‌ای با بار Q می‌پردازیم. اگر چه این مثال مربوط به مبحث الکتریسیته می‌باشد اما می‌تواند بیانگر پرتاب ذره‌ای با جرم m به سمت حلقه‌ای سنگین باشد که تحت اثر گرانش حلقه از حالت مرتبه‌ی صفرم منحرف می‌شود و با آن هیچ تفاوتی ندارد غیر از آنکه در حالت اول نیرو دافعه و در حالت دوم جاذبه است.

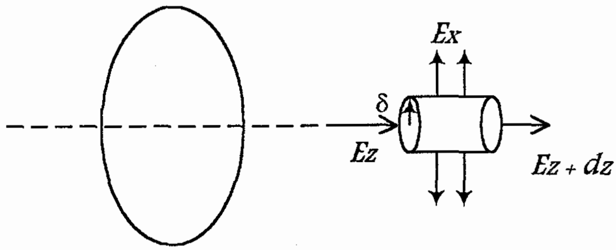
مثال ۷: بار q را با سرعت اولیه‌ی $V_\circ$ به سمت حلقه‌ای با بار Q ($qQ > \circ$) از سمت منفی بی‌نهایت محور zها به سمت مثبت بی‌نهایت محور zها مطابق شکل (۶-۷) پرتاب می‌کنیم. با فرض کوچک بودن اثر حلقه بر روی حرکت بار q مقدار انحراف زاویه‌ای از راستای اولیه‌ی پرتاب را تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر در بی‌نهایت بیابید. (δ فاصله‌ی اولیه‌ی بار q از محور zها و بار q خیلی کوچک است)

(امتحان انتخابی تیم جهانی المپیاد فیزیک سال ۱۳۸۱)



شکل ۶-۷

حل: در ابتدا لازم است با استفاده از قانون گاوس میدان شعاعی (در راستای محور xها) را در فاصله‌ی z از حلقه بیابیم.



شکل ۶-۸

با انتخاب استوانه‌ای به شعاع δ و طول dz به عنوان سطح گاوسی داریم:

$$\oint E \cdot ds = \frac{q_{in}}{\epsilon_\circ}$$

از آنجا که بار داخل سطح گاوسی صفر است داریم:

$$\oint E \cdot ds = \circ \rightarrow -E_z(\pi\delta^۲) + E_{z+dz}(\pi\delta^۲) + E_x ۲\pi\delta dz = \circ$$

$$\rightarrow E_x = -\frac{\delta}{۲}\frac{E_{z+dz} - E_z}{dz} = -\frac{\delta}{۲}\frac{dE_z}{dz}$$

که در آن از تعریف مشتق استفاده شده است.

از طرفی به راحتی قابل محاسبه است که میدان حاصل از حلقه‌ای با بار Q در فاصله‌ی z روی محور آن $E_z = \frac{kQz}{(R^۲ + z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ می‌باشد.

$$\rightarrow E_x = \frac{\delta}{۲}\frac{Q(۲z^۲ - R^۲)}{۴\pi\epsilon_\circ(R^۲ + z^۲)^{\frac{۵}{۲}}}$$

کافی است مؤلفه‌ی x سرعت و z سرعت را در مثبت بی‌نهایت بدانیم در آن صورت

$$\theta = \frac{V_x}{V_z} \qquad (۱)$$

$$V_z^{(۱)} = V_\circ + \int_{-\infty}^{z} a_z dt$$

که در آن a_z شتاب در راستای z می‌باشد از آن جایی که سرعت را در راستای z تا مرتبه‌ی اول می‌خواهیم از مسیر صفرم استفاده می‌کنیم:

$$E_z = \frac{kQz}{(R^۲ + z^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

از فاصله‌ی δ هم صرف‌نظر می‌کنیم زیرا خود q کوچک است و جمله‌ی a_z را از مرتبه‌ی اول خواهد کرد و اگر δ را هم وارد کنیم E_z از مرتبه‌ی اول شده و با ضرب در q از مرتبه‌ی دوم می‌شود.

$$\rightarrow V_z^{(1)} = V_\circ + \int_{-\infty}^{z} \frac{kQqz}{m(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dz}{V_\circ}$$

که در آن به جای dt، تا مرتبه‌ی صفرم $\frac{dz}{V_\circ}$ قرار داده شده است.

$$\rightarrow V_z^{(1)} = V_\circ - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_\circ mV_\circ(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{۲}$$

می‌توان از عبارت اخیر فهمید $Qq \ll 4\pi\epsilon_\circ mV_\circ^2 R$ است برای سرعت در راستای x هم داریم:

$$V_x^{(1)} = \int_{-\infty}^{z} a_x dt = \int \frac{q}{m}\frac{\delta}{2}\frac{Q(2z^2-R^2)}{4\pi\epsilon_\circ(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\frac{dz}{V_\circ}$$

$$= -\frac{qQ\delta}{8\pi\epsilon_\circ mV_\circ}\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{۳}$$

با جاگذاری (۲) و (۳) در (۱) در $z=\infty$ داریم: $\theta^{(1)} = 0$

بنابراین اولین مرتبه‌ی غیر صفر θ مرتبه‌ی اول نیست. لذا باید $V_x^{(2)}$ را از روی مسیر مرتبه‌ی اول $(\delta^{(1)}, V_z^{(1)})$ بدست آورد.

$$V_x^{(2)} = \int a_x dt = \int_{-\infty}^{z} \frac{q}{m}\frac{\delta^{(1)}}{2}\frac{Q(2Z'^2-R^2)}{4\pi\epsilon_\circ(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\frac{dz}{V_z^{(1)}}$$

برای یافتن $\delta^{(1)}$ (فاصله‌ی بار تا مرتبه‌ی اول از محور zها) داریم:

$$\delta^{(1)} = \delta + \int V_x^{(1)} dt = \delta + \int V_x^{(1)}\frac{dz}{V_\circ}$$

$$= \delta + \frac{qQ\delta}{8\pi\epsilon_\circ mV_\circ^2}\int_{-\infty}^{z}\frac{zdz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \delta\left(1+\frac{Qq}{8\pi\epsilon_\circ mV_\circ^2(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\rightarrow V_x^{(2)} = \frac{qQ\delta}{8\pi\epsilon_\circ mV_\circ}\int_{-\infty}^{z}\left(1+\frac{Qq}{8\pi\epsilon_\circ mV_\circ^2(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{2z^2-R^2}{(z^2+R^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$$
$$\left(1+\frac{Qq}{4\pi\epsilon_\circ mV_\circ^2(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)dz$$

که در آن به جای $\frac{1}{V_z^{(1)}}$ با استفاده از بسط تیلور

$$\frac{1}{V_z^{(1)}} = \frac{1}{V_\circ}\left(1+\frac{Qq}{4\pi\epsilon_\circ mV_\circ^2(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

قرار داده شده است.

$$\rightarrow V_x^{(2)} = \frac{qQ\delta}{8\pi\epsilon_0 mV_0}\int_{-\infty}^{z}\left(1+\frac{3Qq}{8\pi\epsilon_0 mV_0^2(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{2z^2-R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right)dz$$

$$\rightarrow V_x^{(2)} = \frac{qQ\delta}{8\pi\epsilon_0 mV_0}\left(-\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\Big|_{-\infty}^{z}+\frac{3Qq}{8\pi\epsilon_0 mV_0^2}\int_{-\infty}^{z}\frac{(2z^2-R^2)}{(R^2+z^2)^3}dz\right)$$

که در آن از تفکیک زیر برای حل انتگرال بالا استفاده می‌شود.

$$\frac{2z^2-R^2}{(z^2+R^2)^3} = 2\frac{1}{(z^2+R^2)^2}-3\frac{R^2}{(z^2+R^2)^3}$$

که در آن با استفاده از تغییر متغیر $z = R\tan\alpha$ و با علم بر این که

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2}\,\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{1}{2}I_0$$

البته با فرض زوج بودن n داریم: $(I_0 = \frac{\pi}{2})$

$$V_x^{(2)} = \frac{qQ\delta}{8\pi\epsilon_0 mV_0}\,\frac{3Qqx}{8\pi\epsilon_0 mV_0^2}2\left(2\frac{\pi}{4}-\frac{3\times 3\times 1\times\pi}{4\times 2\times 2}\right)\frac{1}{R^3}$$

$$\rightarrow V_x^{(2)} = \frac{3(qQ)^2\delta\pi}{(8\pi\epsilon_0 mV_0R)^2V_0R}\times(-\frac{1}{8})$$

لذا با استفاده از (۱) و (۲) و رابطه بالا برای θ داریم:

$$\theta = -\frac{3}{8}\left(\frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 mV_0^2R}\right)^2\frac{\delta}{R}$$

مسائل

۱) الف) ماهواره‌ای به جرم m در مداری دایره‌ای حول زمین است. شعاع مدار r_0 و جرم زمین M_e است. انرژی مکانیکی کل ماهواره را پیدا کنید.

ب) حال فرض کنید که ماهواره در طبقات بالای جو زمین حرکت می‌کند، جایی که به واسطه‌ی نیروی ضعیف و ثابت اصطکاک f سرعت آن کند می‌شود. ماهواره به آهستگی به صورت مارپیچ به طرف زمین حرکت می‌کند. از آنجا که نیروی اصطکاک ضعیف است، تغییر شعاع خیلی به آهستگی صورت خواهد گرفت. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که در هر لحظه ماهواره عملاً در مداری دایره‌ای به شعاع متوسط r قرار دارد. تغییر تقریبی شعاع را در هر دوره‌ی گردش ماهواره‌ی Δr پیدا کنید.

ج) تغییر تقریبی انرژی جنبشی ماهواره (Δk) را در هر دوره پیدا کنید.

جواب: (ج) $\Delta k = +2\pi r f$ (به علامت توجه کنید!)

۲) همانطور که می‌دانید، قوانین کپلری، عباراتی در مورد حرکت دو جرم هستند. اگر حرکت ماه دور زمین را بدون توجه به اجرام دیگر در نظر می‌گرفتیم و مرکز جرم این سیستم را مبدأ یک دستگاه لخت فرض می‌کردیم، قوانین کپلر به‌طور دقیق صدق می‌کردند. در این مسأله می‌خواهیم بررسی کنیم حرکت این سیستم دور خورشید، چه‌قدر خطا ایجاد می‌کند.

خورشید، زمین و ماه به جرم‌های M_s، M_e و M_m را در یک صفحه در نظر بگیرید. خورشید را مبدأ یک دستگاه لخت فرض کنید. بردار مکان‌های زمین نسبت به خورشید، ماه نسبت به خورشید و ماه نسبت به زمین را به ترتیب $\vec{R}$، $\overrightarrow{R_M}$ و $\vec{r}$ بنامید.

فاصله‌ی ماه از زمین $|\vec{r}|$ خیلی کوچکتر از فاصله‌ی زمین از خورشید است. تعریف می‌کنیم: $\dot{\vec{s}} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$، این در واقع همان نرخ جاروب شدن مساحت است.

الف) تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر از $\frac{r}{R}$، $\overrightarrow{\ddot{s}_{(t)}}$ را برحسب ثابت گرانش G و M_s و $\overrightarrow{r_{(t)}}$ و $\overrightarrow{R_{(t)}}$ حساب کنید.

ب) از این جا به بعد حرکت ماه دور زمین و زمین به دور خورشید را دایره‌ای بگیرید:

$$\overrightarrow{r_{\circ(t)}} = r_\circ(\cos\omega_M t\ e_x + \sin\omega_M t\ e_y)$$
$$\overrightarrow{R_{\circ(t)}} = R_\circ(\cos\omega_E t\ e_x + \sin\omega_E t\ e_y)$$

(این فرض تا مرتبه‌ی صفرم است)

در این رابطه، $\omega_E = \sqrt{\frac{GM_s}{R_\circ^3}}$ و $\omega_M = \sqrt{\frac{GM_e}{r_\circ^3}}$ می‌باشند.

$\dot{\vec{s}}_\circ$ را نرخ جاروب مساحت بردار $\vec{r}$، برای حالتی که مرکز جرم زمین و خورشید را مبدأ دستگاه فرض می‌کنیم بدست آورید. (وضعیت کپلری خاص)

اکنون $\overrightarrow{\dot{s}_{(t)}}$ را برحسب ω_E و ω_M و $r_\circ$ و $\dot{\vec{s}}_\circ$ بدست آورید.

ج) برای دانستن مقدار خطا، تعریف می‌کنیم:

$$\eta = \max\left(\frac{|\dot{\vec{s}} - \dot{\vec{s}}_\circ|}{|\dot{\vec{s}}_\circ|}\right)$$

مقدار عددی η را محاسبه کنید.

راهنمایی: برای بدست آوردن $\overrightarrow{\dot{s}_{(t)}}$ تا مرتبه‌ی اول، از $\overrightarrow{\ddot{s}_{(t)}}$ انتگرال بگیرید.

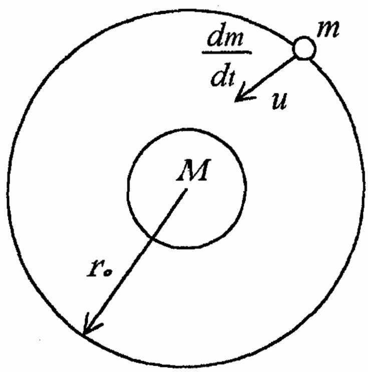
(آزمون ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۳)

۳) ماهواره‌ای در فاصله‌ی $R_\circ$ از مرکز زمین قرار داده می‌شود. به واسطه‌ی نیروی چسبندگی (ویسکوزیته) مقاومت هوا نیروی $F_\nu = A\nu^\alpha$ به آن وارد می‌شود که در آن ν سرعت ماهواره است. دیده می‌شود فاصله‌ی ماهواره از مرکز زمین با نرخ $\frac{dr}{dt} = -C$ تغییر می‌کند که در آن C ثابتی مثبت است. نرخ این تغییر بقدری کوچک است که کم شدن انرژی ماهواره در هر دور چرخیدن در برابر انرژی جنبشی کل خیلی کم است. رابطه‌ای برای A و α بیابید.

(جمعی از اساتید دانشگاه شیکاگو)

جواب: $\alpha = ۳$ و $-C(\frac{GMm}{۲}) = A(GM)^۲$

۴) سفینه‌ای به جرم m مطابق شکل (۶-۹) روی دایره‌ای به شعاع $r_\circ$، حول سیاره‌ی ثابتی به جرم M در حال چرخش است. در لحظه‌ی $t = ۰$، سفینه با آهنگ ثابت $\frac{dm}{dt} = b$ شروع به خارج کردن جرم می‌کند. در دستگاه ساکن (نسبت به سیاره)، اندازه‌ی سرعت خروج جرم u و جهت آن به سمت سیاره است. با فرض کوچک بودن b (نسبت به پارامترهایی که باید تعیین کنید) انحراف شعاعی حرکت سفینه نسبت به حالت دایره‌ای را تا کمترین مرتبه‌ی غیر صفر b به عنوان تابعی از زمان بدست آورید.



شکل ۶-۹

راهنمایی: جواب معادله‌ی دیفرانسیل $\ddot{x} + \omega_\circ^۲ x = \alpha t + \beta$ به صورت زیر است:

$$x_{(t)} = A\cos\omega_\circ t + B\sin\omega_\circ t + Ct + D$$

A، B، C و D ثابت‌هایی هستند که باید تعیین شوند. α، β و $\omega_\circ^۲$ ثابت و معلوم هستند. (امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۳)

۵) معادله‌ی مسیر سیاره‌ی P به دور خورشید $\rho = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi}$ است، که در آن ρ فاصله‌ی سیاره‌ی P از خورشید و ϕ زاویه‌ی خط واصل خورشید به سیاره با محور x است. مبدأ مختصات خورشید است و خورشید در یکی از دو کانون بیضی است. a نصف قطر بزرگ خورشید و e خروج از مرکز بیضی است. $e = \dfrac{c}{a}$ که $2c$ فاصله‌ی دو کانون بیضی از هم است. حرکت سیاره روی بیضی چنان است که $\rho^2\dot{\phi} = \ell$ که ℓ ثابت است. زاویه‌ی خط واصل کانون دیگر بیضی به سیاره با محور x را ϕ' بنامید.

الف) ϕ' را تا مرتبه‌ی یک نسبت به e برحسب ϕ به دست آورید.

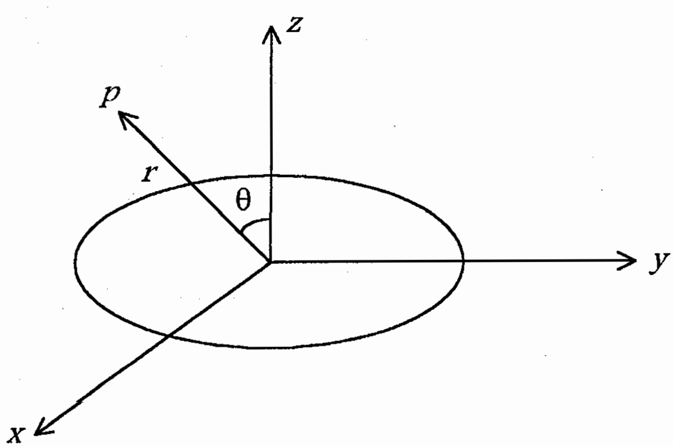
ب) سرعت زاویه‌ای $\dot{\phi}'$ را تا مرتبه‌ی یک نسبت به e حساب کنید.

(امتحان دوره ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۷۹)

جواب: (الف) $\phi' = \phi + e(-2\sin\phi)$

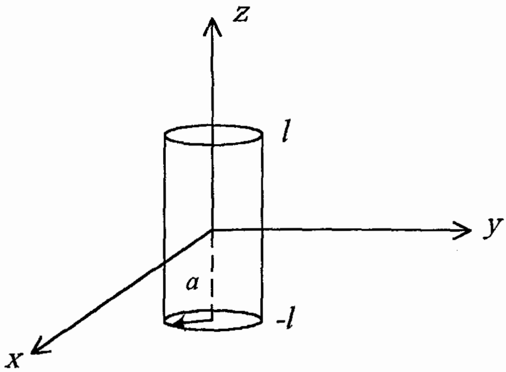
(ب) $\dot{\phi}' = \dfrac{\ell}{a^2}$

۶) الف) حلقه‌ای به شعاع a و چگالی جرمی واحد طول λ داریم. پتانسیل گرانش حلقه را در نقطه‌ی P به مختصات کروی $(r,\theta,0)$ محاسبه کنید. محاسبات را تا مرتبه‌ی $\dfrac{a^3}{r^3}$ انجام دهید.



شکل ۶-۱۰

ب) پتانسیل گرانشی یک پوسته‌ی استوانه‌ای را که مطابق شکل (۶-۱۱)، محورش موازی محور z است و از $z = -\ell$ تا $z = \ell$ امتداد دارد، روی نقطه‌ای در صفحه‌ی $z = 0$، در فاصله‌ی d از محور استوانه پیدا کنید. جواب را به صورت انتگرال نگه دارید. $a \ll d$ است که a شعاع استوانه است.



شکل۶-۱۱

ج) کره‌ای به چگالی ρ داریم. در آن به موازات محور z، سوراخی به شعاع a ایجاد کرده‌ایم. نقطه‌ی P در صفحه xy به فاصله‌ی d از محور سوراخ قرار دارد (روی صفحه‌ی استوایی کره). $\frac{a}{R}$ و $\frac{R}{d}$ هر دو خیلی کوچک هستند و هم مرتبه‌اند (R شعاع کره است). تصحیح پتانسیل گرانشی را در ρ، نسبت به حالت $a = ۰$، تا دومین مرتبه‌ی غیر صفر حساب کنید.

د) تصحیح سرعت مداری ماهواره‌ای را که در مداری به شعاع $r_۰$، حول این کره در صفحه‌ی xy می‌چرخد، تا دومین مرتبه‌ی غیر صفر بدست آورید.

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۱)

۷) یک ذره به جرم m در پتانسیل مرکزی $mu_{(r)}$ حرکت می‌کند. به این ذره نیروی اصطکاک وابسته به سرعت $\vec{F} = -m\alpha\vec{V}$ وارد می‌شود. اگر اصطکاک کوچک باشد و ذره در ابتدا روی یک مسیر دایره‌ای حرکت کند، مسیر حرکت به دایره نزدیک می‌ماند.

الف) مسیر حرکت را دایره‌ای فرض کنید و تغییر شعاع مسیر برحسب زمان را بدست آورید. فرض کنید $u_{(r)}$ مناسب است با r^{β} و $\beta > -۲$ باشد.

ب) با فرض حرکت دایره‌ای، تغییر بسامد زاویه‌ای حرکت برحسب زمان را بدست آورید.

ج) در چه حالتی برحسب α و β فرض تقریباً دایره‌ای بودن مسیر با گذشت زمان بهتر می‌شود؟

(راهنمایی: تغییر شعاع طی یک دوره گردش ذره را با شعاع مدار مقایسه کنید)

در حالتی که فرض تقریباً دایره‌ای بودن مسیر با گذشت زمان بدتر می‌شود تا چه زمانی این تقریب قابل قبول است؟ (مرتبه‌ی این زمان مورد نظر است)

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۷۹)

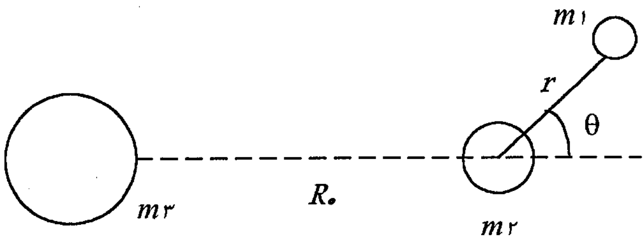
جواب: الف) $\dot{r} = \frac{-۲\alpha}{\beta+۲} r \rightarrow r = r_{\circ} e^{\frac{-۲\alpha}{\beta+۲}t}$

ب) $\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \sqrt{A\beta r_{\circ}^{\beta-۲}} \left(\frac{۲-\beta}{۲+\beta}\right) \alpha e^{-(\frac{\beta-۲}{\beta+۲})\alpha t}$

ج) اگر $\circ < \alpha \left(\frac{\beta-۲}{\beta+۲}\right)$ باشد با گذشت زمان فرض دایره‌ای بودن بهتر می‌شود.

اگر $۱ \gg t \left(\frac{\beta-۲}{\beta+۲}\right) \alpha > \circ$ باشد، هنوز تقریب قابل قبول است. اما وقتی t به سمت $\frac{\beta+۲}{\alpha(\beta-۲)}$ میل می‌کند، این فرض دیگر خوب نخواهد بود.

۸) الف) فرض کنید در فضا جرمی داریم، $m_۱$، که در دایره‌ای به شعاع $r_{\circ}$ به دور جرم دیگر، $m_۲$، که تقریباً ثابت است، می‌چرخد. اولاً چه شرطی باید داشته باشیم تا چنین حالتی پیش بیاید. ثانیاً $\theta_{(t)}$ را برای جرم متحرک محاسبه کنید.



شکل ۶-۱۲

ب) حال می‌خواهیم تأثیر جرم دیگری، $m_۳$، را که در فاصله‌ی $R_{\circ}$ نسبت به $m_۲$ قرار دارد بر مسیر $m_۱$ بیابیم. فرض کنید همچنان $m_۲$ و $m_۳$ ثابت‌اند. معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به فاصله‌ی جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$، (r) را به‌طور تقریبی بیابید.

راهنمایی: جواب کلی معادله‌ی $\ddot{x} + \omega_{\circ}^{۲} x = k - \alpha \cos \omega_۱ t$ به صورت

$$x = A\cos(\omega_{\circ} t + \varphi) + \frac{k}{\omega_{\circ}^{۲}} + \frac{\alpha}{\omega_۱^{۲} - \omega_{\circ}^{۲}} \cos \omega_۱ t$$

و در حالتی که $\omega_۱ \rightarrow \omega_{\circ}$ دامنه به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

ج) آیا این مدل، مدل خوبی برای سیستم ماه و زمین و خورشید است؟ چرا؟

$R_{\circ} = ۱/۵ \times ۱۰^{۸} Km\ ,\ \ r_{\circ} = ۴ \times ۱۰^{۵} Km\ ,$

$$m_3 = 2 \times 10^{30} Kg\ ,\quad m_2 = 6 \times 10^{24} Kg\ ,\quad m_1 = 7 \times 10^{22} Kg$$

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۱)

۹) در این مسأله می‌خواهیم برخی از صورت‌های آشکار اندازه‌ی جزر و مدهای میان اقیانوسی روی زمین را بررسی کنیم. برای سادگی مسأله فرض‌های زیر را به کار ببرید.

- زمین و ماه به صورت دو سیستم منزوی فرض می‌شوند.
- فاصله‌ی بین ماه و زمین ثابت فرض می‌شود.
- همه سطح زمین را اقیانوسی از آب فرا گرفته است.
- دینامیک حرکت چرخشی زمین به دور محور خودش را نادیده بگیرید.
- هنگام محاسبه‌ی نیروی جاذبه‌ی گرانشی زمین، همه‌ی جرم زمین را در مرکز آن در نظر بگیرید.

داده‌های دیگر به قرار زیر است:

جرم زمین : $M = 5{,}98 \times 10^{24}\ Kg$

جرم ماه : $M_m = 7{,}3 \times 10^{22}\ Kg$

شعاع زمین : $R = 6{,}37 \times 10^{6}\ m$

فاصله‌ی بین مرکز زمین و مرکز ماه : $L = 3{,}84 \times 10^{8}\ m$

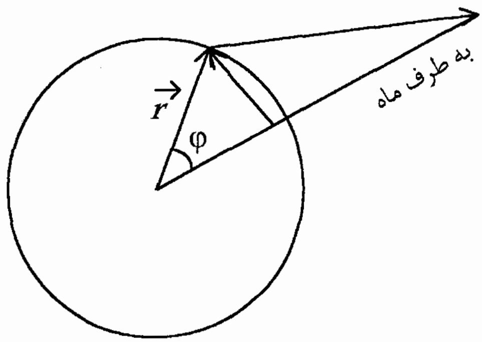
ثابت گرانش : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3.Kg^{-1}.s^{-2}$

الف) ماه و زمین با سرعت زاویه‌ای حول مرکز جرم مشترک، C می‌چرخند. فاصله‌ی C از مرکز زمین چقدر است؟ (این فاصله را با ℓ نشان دهید).

مقدار عددی ℓ را حساب کنید.

حال از چارچوب مرجعی استفاده می‌کنیم که در آن ماه و مرکز زمین با یکدیگر حول C می‌چرخند. در این چارجوب مرجع شکل مایع روی سطح زمین ایستا است.

برای نشان دادن موقعیت جرم نقطه‌ای m روی سطح مایع زمین همانطور که در شکل (۶-۱۳) نشان داده شده است از مختصات قطبی r که از مرکز جرم C می‌گذرد و در صفحه‌ی P (صفحه‌ی کاغذ) و عمود بر محور چرخشی است استفاده می‌کنیم.



شکل ۶-۱۳

ب) یک جرم نقطه‌ای (جرم m) از مایع روی سطح زمین در نظر بگیرید (در صفحه‌ی P) در چارچوب مرجع، بر آن نیروی گریز از مرکز و نیروهای گرانشی از طرف ماه و زمین وارد می‌شود. انرژی پتانسیل متناظر با این سه نیرو را بنویسید.

اشاره: هر نیروی $F_{(r)}$، که نسبت به چند مبدأ به‌طور شعاعی باشد، برابر است با منفی مشتق انرژی پتانسیل $V_{(r)}$ که دارای تقارن کروی است:

$$F_{(r)} = -\frac{dV_{(r)}}{dr}$$

پ) برآمدگی جزر و مدی، h، را به‌طور تقریبی برحسب کمیت‌های M و M_m و ... به دست آورید. اختلاف بین بیشترین و کمترین جزر و مد در این مدل برحسب متر چقدر است؟

برای $a \ll ۱$ (a خیلی کوچک‌تر از یک) می‌توانید از تقریب زیر استفاده کنید.

$$\frac{۱}{\sqrt{۱ + a^۲ - ۲a\cos\theta}} \approx ۱ + a\cos\theta + \frac{۱}{۲}a^۲(۳\cos^۲\theta - ۱)$$

(بیست و هفتمین المپیاد جهانی فیزیک در نروژ)

جواب: الف) $\ell = \frac{M_m}{M + M_m}L = ۴{,}۶۳ \times ۱۰^۶\ m$

ب) $V_{(r)} = -\frac{۱}{۲}m\omega^۲(r^۲ - ۲r\ell\cos\varphi + \ell^۲) - \frac{GmM}{r} - \frac{GmM_m}{|L - r|}$

پ)

$$h = \frac{M_m r^۲ R^۲}{۲ML^۳}(۳\cos^۲\varphi - ۱)$$

$$h_{\max} - h_{\min} = \frac{۳M_m R^۴}{\alpha M L^۳} = ۰{,}۵۴\ m$$

۱۰) دو ستاره به جرم‌های m_1 و m_2 تحت گرانش خودشان در نقطه‌ی O می‌چرخند. نقطه‌ی O روی پاره خطی است که جرم‌های m_1 و m_2 را به هم وصل می‌کند. فاصله‌ی m_1 و m_2 از O، به ترتیب d_1 و d_2 است، که $m_1d_1 = m_2d_2$، و d_1 و d_2 ثابت‌اند.

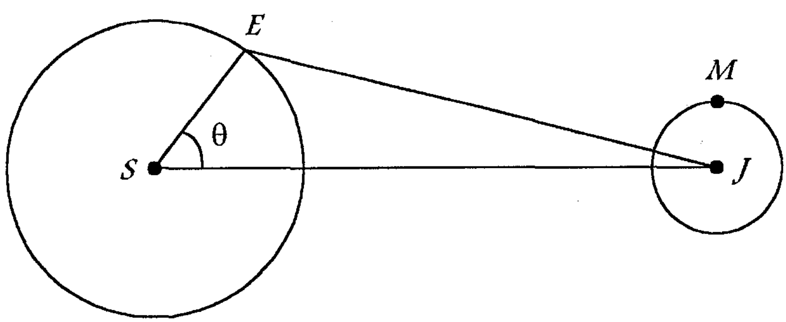
سیاره‌ای به جرم m تحت گرانش این دو ستاره حرکت می‌کند. $m \ll m_1, m_2$، به‌طوری که می‌شود از اثر گرانشی سیاره بر ستاره چشم پوشید.

با فرض این که r (فاصله‌ی سیاره از O) خیلی بزرگ‌تر از d_1 و d_2 است، نیروی گرانشی وارد بر m را تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر نسبت به d_1 و d_2 حساب کنید. این نیرو را برحسب $\vec{r}$ (بردار مکان سیاره نسبت به O) و $\hat{n}$ (جهت عمود بر صفحه‌ی شامل مدارهای ستاره‌ها) به دست آورید.

(**راهنمایی:** دوره‌ی حرکت ستاره‌ها خیلی کوچک‌تر از دوره‌ی حرکت سیاره است. بنابراین طی یک دوره‌ی حرکت ستاره‌ها می‌شود سیاره را ثابت گرفت)

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۱)

۱۱) سال‌ها قبل، پیش از اینکه دانشمندان بتوانند سرعت نور را به‌طور دقیق محاسبه کنند اُ. رومر (O. Romer) منجم دانمارکی، زمان‌های کسوف یک قمر سیاره‌ی مشتری را مطالعه کرد. او توانست سرعت نور را از زمان تناوب رصد شده‌ی یک قمر مشتری تعیین کند. شکل (۶-۱۴) مدار زمین، E، حول خورشید، s، و همچنین یکی از اقمار مشتری را نشان می‌دهد.



شکل ۶-۱۴

(رومر زمان بین دو ظهر متوالی قمر M از پشت مشتری را مشاهده کرد)

یک سری طولانی از رصد کسوفها اجازه می‌دهد که ارزیابی دقیقی از زمان تناوب واقعی داشته باشیم. زمان تناوب رصد شده بستگی به مکان نسبی زمین نسبت به دستگاه مرجع sJ (که به عنوان یک محور دستگاه مختصات در نظر گرفته می‌شود) دارد. زمان متوسط گردش (واقعی)

$T_\circ = ۴۲\ h\ ۲۸\ min\ ۱۶\ s$ است و بیشینه زمان تناوب مشاهده شده $s(T_\circ + ۱۵)$ است. فاصله‌ی متوسط زمین تا خورشید $R_E = ۱۴۹/۶ \times ۱۰^۶\ Km$، زمان تناوب گردش زمین و مشتری به دور خورشید به ترتیب ۳۶۵ روز و ۱۱/۹ سال است.

الف) فرض کنید مدار زمین و مشتری دایره است. با توجه به قانون سوم کپلر یعنی اینکه مربع زمان تناوب گردش سیارات به دور خورشید متناسب با توان سوم فاصله‌ی آنها تا خورشید است (یعنی $T^۲ \propto R^۳$). فاصله‌ی مشتری تا خورشید R_J، را بدست آورید.

ب) سرعت زاویه‌ای نسبی ωی زمین نسبت به دستگاه مرجع خورشید-مشتری (sJ) را به دست آورید.

پ) فرض کنید یک ناظر ببیند که وقتی در مکان θ_k است M از سایه شروع به طلوع کردن می‌کند و در طلوع بعدی در $\theta_{k+۱}$ باشد $(k = ۱, ۲, ۳, \ldots)$. ناظر از این رصدها، پریود ظاهری گردش $T_{(t_k)}$ را به صورت تابعی از زمان مشاهده، t_k، بدست می‌آورد. از نظر او این تغییرات مربوط به تغییرات فاصله‌ی مشتری $d_{(t_k)}$ نسبت به ناظر طی این مشاهدات است.

پ ۱) با توجه به شکل (۶-۱۴) فاصله مشتری تا زمین، $d_{(t_k)}$، را برحسب تابعی از زمان t_k تا تقریب مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{R_E}{R_J}$ به دست آورید.

پ ۲) اختلاف فاصله‌ی بین مشتری تا زمین را در دو رصد متوالی از طلوع قمر مشتری $\Delta d = d_{(t+T_\circ)} - d_{(t)}$، بدست آورید.

توجه کنید $\omega_\circ T \ll ۱$ است (مقدار $\omega T_\circ$ را بدست آورید) بنابراین داریم: $\sin\omega_\circ T \approx \omega T_\circ$ و $\cos\omega T_\circ \approx ۱$. مقدار Δd را با توجه به این تقریبات بدست آورید.

ت) $T_{(t_k)}$ را برحسب $T_\circ$، t_k و کمیت‌های ثابت دیگر بدست آورید. $T_{(t_k)}$ را برحسب t_k ترسیم کنید، مکان زمین، وقتی پریود بیشینه، پریود کمینه و پریود واقعی M مشاهده می‌شود، کجاست؟

ث) سرعت نور را از نتایج بالا بدست آورید.

جواب: الف) $R_J = R_E = \left(\frac{T_J}{T_E}\right)^{\frac{۲}{۳}} = ۷۷۹/۸ \times ۱۰^۶\ m$

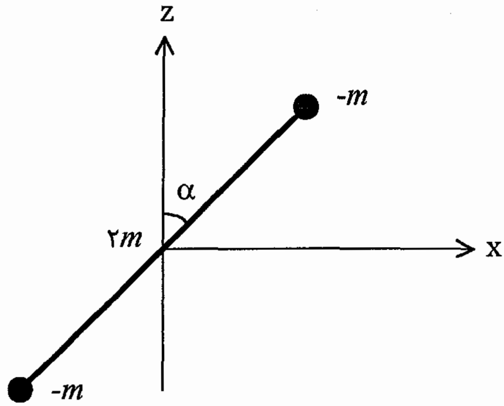
ب) $\omega = \omega_E - \omega_J = ۰/۰۱۵۷\ rad/day$

پ) $d_{(t)} = R_J - R_E \cos\omega t$ و $\Delta d_{(t)} = R_E \omega T_\circ \sin\omega t$

ت) $T = T_\circ + \frac{R_E \omega T_\circ \sin\omega t}{C}$

ث) $C = ۲/۷۷ \times ۱۰^۵\ Km/s$

۱۲) زمین به شکل کره‌ای است که در قطب‌ها کمی پخ و در استوا کمی برآمده است یک مدل ساده برای زمین یک جرم نقطه‌ای، به جرم M_E، در مبدأ است، همراه با سه جرم $-m$، $-m$، $+۲m$ به شکل زیر:



شکل۶-۱۵

خطی که این سه جرم را به هم وصل می‌کند در صفحه‌ی xz است فاصله‌ی جرم‌های $-m$ از مبدأ هم با شعاع زمین، R_E، برابر است. خطی که جرم‌ها را به هم وصل می‌کند همان محور چرخش زمین است.

الف) فرض کنید یک جرم نقطه‌ای M در نقطه‌ی $(x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = ۰)$ قرار دارد، $r \gg R_E$. بردار گشتاور نیروی وارد بر زمین را تا کوچک‌ترین مرتبه نسبت به $\frac{R_E}{r}$ حساب کنید.

ب) فرض کنید جرم M در صفحه‌ی xy با سرعت زاویه‌ای ثابت روی دایره‌ای به شعاع r می‌گردد، و طی یک دوره‌ی حرکت M، محور چرخش زمین تقریباً ثابت است. میانگین گشتاور بر زمین طی یک دوره را بدست آورید.

ج) یک بار جرم M را ماه با $M_m \sim ۱۰^{۲۳}\ Kg$ و $r_M \sim ۴ \times ۱۰^{۵}\ Km$، و یک بار جرم M را خورشید با $M_s \sim ۲ \times ۱۰^{۳۰}\ Kg$ و $r_s \sim ۱۵۰ \times ۱۰^{۶}\ Km$ بگیرید. نسبت گشتاور میانگین حاصل از ماه به گشتاور میانگین حاصل از خورشید را حساب کنید.

د) این گشتاورها باعث چرخش محور چرخش زمین حول محور z (عمود بر صفحه‌ی منظومه‌ی شمسی) می‌شود. دوره‌ی این حرکت تقریباً ۲۶۰۰۰ سال است. با فرض $\alpha = ۲۳/۵^\circ$، نسبت $\frac{m}{M_E}$ را حساب کنید. M_E جرم زمین است.

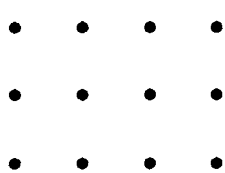
(امتحان انتخابی تیم اعزامی المپیاد فیزیک ایران سال ۱۳۸۱)

فصل هفتم

نیروی فنر و کشسانی

۷-۱ مدول یانگ و ضریب پواسن

مثال ۱: نواری به پهنای W و طول L از یک ماده‌ی کش‌سان را در نظر بگیرید. وقتی این نوار را در راستای طولی می‌کشیم، طول آن زیاد و پهنای آن کم می‌شود. افزایش طول را Δx، کاهش عرض را Δy، و نیروی کشش را F می‌نامیم. برای تغییر طول‌های کم، Δx و Δy با F متناسب‌اند. $P_s = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\dfrac{L}{W}$ را نسبت پواسن و $Y_s = \dfrac{F}{W}\dfrac{L}{\Delta x}$ را مدول یانگ سطحی می‌نامیم. مطابق شکل (۷-۱) برای نوار این مدل را در نظر می‌گیریم. در حالت تعادل، یک شبکه‌ی مربعی منتظم داریم که روی هر رأس آن یک اتم قرار دارد.



شکل۷-۱

روی هر ضلع هر مربع فنری با ثابت فنر k است، که اتم‌های دو رأس آن ضلع را به هم وصل می‌کند. روی هر قطر هر مربع هم یک فنر با ثابت فنر k' است، که اتم‌های دو سر آن قطر را به هم وصل می‌کند. طول ضلع هر مربع در حالت تعادل ℓ است. فرض کنید نوار را در راستای طول با نیروی F بکشیم. (نیروی F را به‌طور یکنواخت در عرض نوار توزیع کرده‌ایم.) در اثر این کار، مربع‌ها به مستطیل تبدیل می‌شود. طول هر مستطیل را $\ell + a$ و عرض هر مستطیل را $\ell + b$ بگیرید.

الف) طول قطر مستطیل در این حالت چقدر است؟

راهنمایی: اگر ϵ خیلی کوچک‌تر از یک باشد، آنگاه $\sqrt{۱ + \epsilon} = ۱ + \frac{\epsilon}{۲}$

فرض کنید a و b خیلی کوچک‌تر از ℓ باشد. در بدست آوردن طول جدید از جمله‌های درجه‌ی دو نسبت به a و b چشم بپوشید.

یکی از اتم‌های لبه‌ی طولی (لبه‌ای که نیرو به آن وارد نمی‌شود) را در نظر بگیرید. از تغییر زاویه‌ی قطر هر مستطیل با طول و عرض آن چشم بپوشید.

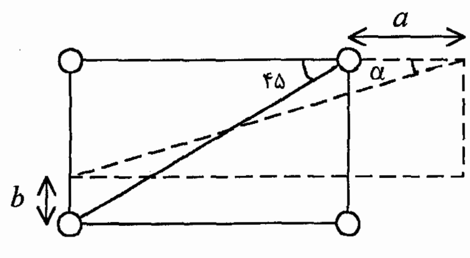
ب) نسبت $\frac{b}{a}$ را چنان پیدا کنید که اتم در حالت تعادل باشد. از این جا P_s را بدست آورید.

ج) یکی از اتم‌های عرضی را در نظر بگیرید و با استفاده از شرط تعادل آن، نسبت $\frac{F}{a}$ را حساب کنید و از این جا Y_s را بدست آورید.

(مرحله‌ی دوم المپیاد فیزیک ایران سال ۸۱)

حل: همانطور که در شکل (۷-۲) مشخص است طول نوار به اندازه‌ی a افزایش و عرض آن به اندازه‌ی b کاهش یافته، لذا برای قطر داریم:

$$d = \sqrt{(\ell + a)^۲ + (\ell - b)^۲} = \sqrt{۲}\ell\sqrt{۱ + \frac{a - b}{\ell} + \frac{a^۲ + b^۲}{\ell^۲}}$$

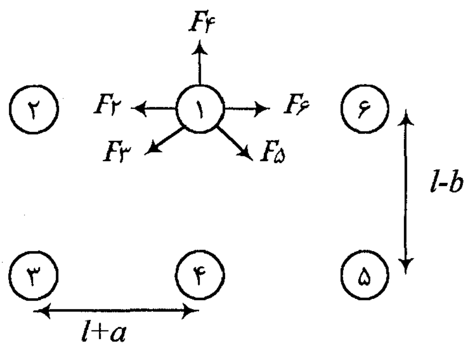


شکل ۷-۲

با بسط تا مرتبه‌ی اول داریم:

$$d = \sqrt{۲}\ell + \frac{a-b}{\sqrt{۲}} \rightarrow \Delta d = \frac{a-b}{\sqrt{۲}}$$

در شکل (۷-۳) یک اتم از لبه‌ی طولی نوار یعنی لبه‌ای که به آن نیرو وارد نمی‌شود و ۵ اتم اطراف آن نشان داده شده است که هر کدام نیرویی به اتم (۱) وارد می‌کنند.



شکل۷-۳

$$F_{۲} = F_{۶} = ka$$

$$F_{۳} = F_{۵} = k'\Delta d = k'\frac{a-b}{\sqrt{۲}}$$

$$F_{۴} = kb$$

$$\sum F_x = ۰ \rightarrow F_{۶} + F_{۵}\cos\alpha - F_{۲} - F_{۳}\cos\alpha = ۰ \qquad (۱)$$

$$\sum F_y = ۰ \rightarrow F_{۴} - (F_{۳} + F_{۵})\sin\alpha = ۰ \qquad (۲)$$

از معادله‌ی (۱)، مطلب جدید حاصل نمی‌شود ولی از معادله‌ی (۲) با جاگذاری $\sin\alpha$ تا مرتبه‌ی صفرم (زیرا $F_{۵}$ و $F_{۳}$، خود از مرتبه‌ی یک نسبت به a و b هستند) داریم:

$$kb - \frac{۲k'(a-b)}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰ \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{k'}{k'+k}$$

اگر تعداد مربع‌ها در طول نوار m و در عرض آن n باشد، داریم:

$$m = \frac{L}{\ell}, \qquad n = \frac{W}{\ell}$$

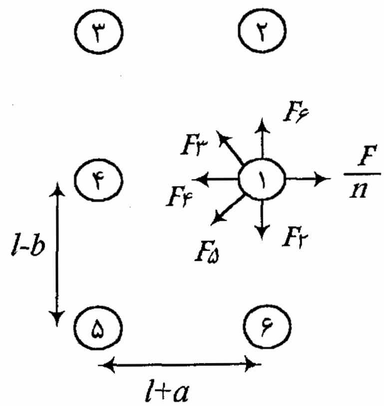
با توجه به افزایش یک ضلع مربع به اندازه‌ی a و کاهش ضلع دیگر به اندازه‌ی b، داریم:

$$\Delta x = ma = \frac{L}{\ell}a$$

$$\Delta y = nb = \frac{W}{\ell}b$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b}{a}\frac{W}{L} \qquad P_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{L}{W} = \frac{b}{a} = \frac{k'}{k'+k}$$

در شکل (۷-۴) یک اتم از لبه‌ی عرضی نوار، یعنی لبه‌ای که به آن نیرو وارد می‌شود و نیز ۵ اتم اطراف آن نشان داده شده است.



شکل۷-۴

مشابه قسمت قبل (لبه‌ی طولی) داریم:

$$F_۶ = F_۲ = kb$$

$$F_۵ = F_۳ = k'\frac{a-b}{\sqrt{۲}}$$

$$F_۴ = ka$$

$$\sum F_x = ۰ \to \frac{F}{n} - F_۴ - \frac{F_۳ + F_۵}{\sqrt{۲}} = ۰ \qquad (۳)$$

$$\sum F_y = ۰ \to F_۶ - \frac{F_۳}{\sqrt{۲}} - \frac{F_۵}{\sqrt{۲}} - F_۲ = ۰ \qquad (۴)$$

معادله‌ی (۴) مطلب جدیدی نمی‌دهد ولی از معادله‌ی (۳) داریم:

$$\frac{F}{n} - ka - \frac{۲k'(a-b)}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}} = ۰ \to \frac{F}{n} = a(k+k') - k'b$$

با جاگذاری b از رابطه‌ی $\frac{b}{a} = \frac{k'}{k'+k}$ در معادله‌ی بالا داریم:

$$\frac{F}{n} = \frac{k^{۲} + ۲kk'}{k+k'}a$$

با قرار دادن $n = \frac{W}{\ell}$ داریم:

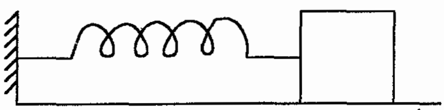
$$\frac{F}{W}\frac{\ell}{a} = \frac{k^{۲} + ۲kk'}{k+k'}$$

اگر $\frac{\ell}{a}$ را از رابطه‌ی $\Delta x = \frac{L}{\ell}a$ در رابطه‌ی بالاتر قرار دهیم برای Y_s داریم:

$$Y_s = \frac{F}{W}\frac{L}{\Delta x} = \frac{k^{۲} + ۲kk'}{k+k'}$$

۷-۲ جسم متصل به فنر و نوسانات با اصطکاک

مثال ۲: قطعه‌ای مکعبی شکل، مطابق شکل (۷-۵) تحت اثر فنری با ثابت k و نیروی اصطکاک ضعیفی با مقدار ثابت f قرار دارد. این قطعه به اندازه‌ی فاصله $x_{\circ}$ از حالت تعادل کشیده و سپس رها می‌شود. قطعه بعد از چند بار نوسان به حالت سکون در می‌آید (تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر)



شکل۷-۵

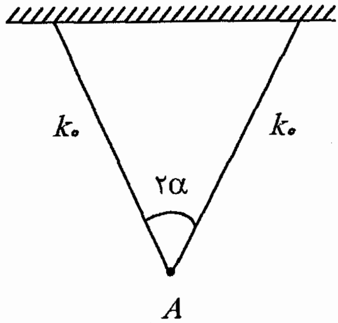
حل: برای بدست آوردن جواب مسیر مرتبه‌ی صفر را در نظر می‌گیریم. کار نیروی f در یک رفت و برگشت روی این مسیر $۲fx_{\circ}$ می‌باشد بنابراین بعد از n دور رفت و برگشت، کار نیروی اصطکاک $۲fx_{\circ}n$ می‌باشد، که برای سکون جسم لازم است. بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{۲}kx_{\circ}^{۲} = ۲fx_{\circ}n \rightarrow n = \frac{kx_{\circ}}{۴f}$$

۷-۳ ضریب سختی معادل

مثال ۳: دو میله‌ی بی‌وزن یکسان با مفصل به یکدیگر و به یک تیر افقی متصل شده‌اند (شکل ۷-۶). سختی هر کدام از میله‌ها $k_{\circ}$ و زاویه‌ی بین آنها ۲α می‌باشد. سختی سیستم میله‌ها (k) را هنگامی که

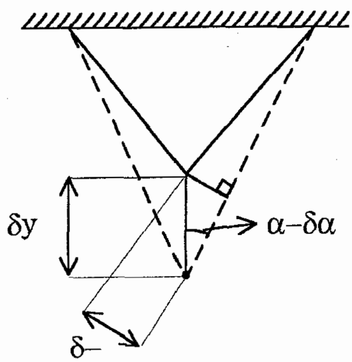
یک نیروی معین (F) به نقطه‌ی A به‌طور عمودی وارد شود محاسبه کنید. فرض کنید که جابجایی نقطه‌ی A در اثر اعمال نیرو نسبت به طول میله‌ها کوچک است.



شکل ۷-۶

حل: بعد از اعمال نیروی F مطابق شکل (۷-۷) داریم:

$$F = ۲k_\circ \delta' \cos\alpha \qquad (۱)$$



شکل ۷-۷

که δ' افزایش طول هر میله است.

$$\delta' = \delta y \cos(\alpha - \delta\alpha) = \delta y \cos\alpha$$

که در این به جای $\alpha - \delta\alpha$، α را قرار دادیم زیرا δ' را تا مرتبه‌ی اول می‌خواهیم. با جاگذاری در رابطه‌ی (۱) داریم:

$$F = ۲k_\circ \cos^۲ \alpha \delta y \qquad (۲)$$

با توجه به تعریف سختی معادل داریم:

$$F = k_t \delta y \qquad (۳)$$

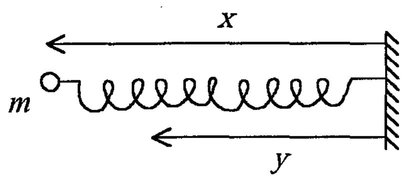
$$\text{از (۲) و (۳)} \rightarrow k_t = ۲k_۰ \cos^۲ \alpha$$

۷-۴ فنر جرم‌دار

مثال ۴: اگر m_s جرم فنر قابل چشم‌پوشی نباشد ولی در مقایسه با m، جرم جسم آویخته به آن کوچک باشد، دوره‌ی تناوب حرکت را بدست آورید.

حل: با توجه به شکل (۷-۸) برای انرژی سیستم داریم:

$$E = \frac{۱}{۲}m\dot{x}^۲ + \frac{۱}{۲}kx^۲ + E_s \qquad (۱)$$



شکل۷-۸

که در این رابطه E_s انرژی جنبشی فنر است. برای محاسبه‌ی E_s تا مرتبه‌ی اول، مسیر مرتبه‌ی صفر را در نظر بگیرید یعنی فرض کنید فنر جرم نداشت در آن صورت هر قطعه‌ای از فنر را که در نظر بگیریم، متناسب با طولش به یک مقدار کش می‌آمد. لذا برای $\dot{y}$ و E_s روابط زیر را داریم: (یعنی محاسباتمان را از روی مسیر مرتبه‌ی صفر انجام می‌دهیم)

$$\dot{y} = \frac{y}{x}\dot{x}$$

$$E_s = \int \frac{۱}{۲}\dot{y}^۲ dm_s = \int \frac{۱}{۲}(\frac{y^۲}{x^۲}\dot{x}^۲)\lambda dy$$

که در این رابطه $\lambda = \frac{m_s}{x}$ چگالی خطی فنر است.

$$E_s = \frac{\dot{x}^۲\lambda}{۲x^۲}\int_۰^x y^۲ dy = \frac{\dot{x}^۲\lambda}{۲x^۲}\frac{x^۳}{۳} = \frac{۱}{۲}(\frac{\lambda x}{۳})\dot{x}^۲ \rightarrow E_s = \frac{۱}{۲}\frac{m_s}{۳}\dot{x}^۲ \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$E_s = \frac{۱}{۲} m\dot{x}^۲ + \frac{۱}{۲} kx^۲ + \frac{۱}{۶} m_s \dot{x}^۲$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی بالا نسبت به زمان داریم:

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} + \frac{m_s \dot{x}\ddot{x}}{۳} = ۰$$

$$\rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m + \frac{m_s}{۳}} x = ۰ \rightarrow T = ۲\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_s}{۳}}{k}}$$

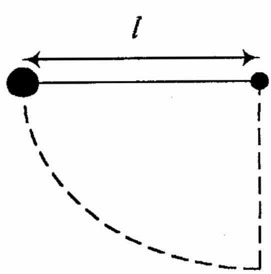
توجه کنید که در این مثال از روش مسیر در اختلال استفاده نمودیم و λ را ثابت گرفتیم (زیرا در مسیر مرتبه‌ی صفرم قطعات به یک اندازه کش می‌آیند) و E_s را محاسبه نمودیم و الا خود ϵ تابعی از m_s است که ϵ مقدار افزایش طول یک المان تقسیم بر طول اولیه المان است. (کرنش طولی).

$$\epsilon = \epsilon_{(۰)} + m_s \epsilon_{(۱)} + \dots \qquad (۳)$$

که ما در حل این مثال در واقع به جای ϵ، $\epsilon_{(۰)}$ را قرار دادیم و جواب E_s جمله‌ی مرتبه‌ی اول شد و اگر جملات بعدی رابطه‌ی (۳) را نیز قرار می‌دادیم جواب از مرتبه‌های بالاتر می‌شد که مد نظر نمی‌باشد. (دیدید که در این مثال هم مانند قبل روش مسیر و بسط یکی می‌باشند)

مسائل

۱) فرض کنید که تار شکل (۷-۹) کشسان (مثلاً از کش ساخته شده است) و هنگام رها شدن گلوله طول کشیده نشده آن برابر با ℓ است.



شکل ۷-۹

الف) مقدار $\Delta\ell$، جابجایی تار را در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر نسبت به $\frac{1}{k}$ حساب کنید.

ب) تحت این شرایط سرعت گلوله را در پایین‌ترین نقطه تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{1}{k}$ بیابید.

جواب: الف) $\Delta\ell = \frac{3mg}{k}$

ب) $V = \sqrt{2g(\ell - \frac{3mg}{2k})}$

۲) بار q در نقطه‌ی x و بار $-q$ در نقطه‌ی $x - \Delta x$ است. این دو بار را یک فنر آرمانی به هم وصل می‌کند، با طول کشیده نشده‌ی صفر و ضریب سختی ی k. به بار q یک نیروی خارجی ی $F\hat{x}$ هم وارد می‌شود. این مجموعه در میدان الکتریکی $E\hat{x}$ است، که E تابع مکان است. در کل مسأله از نیروی الکتریکی یی که این دو بار به هم وارد می‌کنند چشم می‌پوشیم.

a) نیروی کل وارد بر هر یک از این دو بار را بنویسید.

b) در حالتی که این دو بار ساکن و در حالت تعادل‌اند، با فرض این که k خیلی بزرگ است Δx را حساب کنید. k نسبت به چه کمیتی باید خیلی بزرگ باشد.

c) با همان فرض بالا F را حساب کنید.

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان سال ۱۳۸۴)

۳) دو دیسک کوچک همسان به جرم m روی سطح افقی هموازی قرار دارند. دیسک‌ها با فنر سبک غیر کشسان به طول ℓ_0 و ضریب سختی k به همدیگر وصل شده‌اند. در لحظه‌ای یکی از دیسک‌ها با سرعت V_0 در جهت عمود به فنر روی سطح به حرکت در می‌آید. بیشترین کشیدگی فنر را در حین حرکت بیابید، اگر بدانیم که به‌طور قابل ملاحظه‌ای از واحد کوچکتر است.

جواب: $\Delta\ell_{\max} = \frac{mV_0^2}{k\ell_0}$

۴) یک حلقه‌ی لاستیکی با شعاع اولیه‌ی r_0 و ضریب فنری k را که از قانون هوک پیروی می‌کند در نظر بگیرید. k را خیلی بزرگ فرض کنید.

اکنون بار Q به‌طور یکنواخت روی محیط حلقه توزیع می‌شود.

الف) ثابت کنید میدان الکتریکی روی محیط کش بی‌نهایت بزرگ است.

ب) شعاع تعادل جدید کش را تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر نسبت به $\frac{1}{k}$ محاسبه کنید. با توجه به قسمت (الف) وجود این شعاع تعادل را چگونه توجیه می‌کنید.

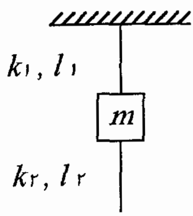
ج) فرکانس نوسانات شعاع حلقه را در نزدیکی حالت تعادل جدید حساب کنید.

راهنمایی: حلقه را یک موجود یک بعدی فرض کنید. سطح مقطع آن را نادیده بگیرید.

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۰)

راهنمایی: اگر جایی در حل مسأله به عبارت $\frac{0}{0}$ رسیدید، صورت و مخرج را بسط دهید.

۵) مطابق شکل (۷-۱۰) وزنه‌ای به جرم m از ریسمانی آویزان است و ریسمان دیگری به انتهای آن وزنه متصل است ضرایب سختی ریسمان‌ها k_1 و k_2 و طول کشیده نشده‌ی آنها L_1 و L_2 می‌باشد. تغییر مکان وزنه نسبت به حالت تعادل خود را x و مکان انتهای ریسمان دوم نسبت به حالت تعادل سیستم را y بنامید. (جهت مثبت را رو به پایین می‌گیریم) جرم ریسمان‌ها قابل چشم‌پوشی است.



شکل ۷-۱۰

الف) فرض کنید انتهای ریسمان دوم را با معادله‌ی $y_{(t)}$ حرکت دهیم. معادله‌ی دیفرانسیلی بنویسید که تغییرات x برحسب زمان را نشان دهد.

ب) از این جا به بعد دو ریسمان را مشابه فرض کنید ($L_1 = L_2 = L$ و $k_1 = k_2 = k$) فرض کنید حرکت انتهای ریسمان دوم از زمان صفر آغاز شود و با شتاب a باشد. $x_{(t)}$ را به دست آورید.

راهنمایی: جواب معادلاتی از نوع $\ddot{X} + \Omega^2 X = Y$ که در آن Y یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n می‌باشد، $X = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t + \tilde{Y}$ بوده که در آن $\tilde{Y}$ هم یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n است. ضرایب موجود در $\tilde{Y}$ از این جا به دست می‌آید که X در معادله صدق کند و A و B از شرایط اولیه معلوم می‌شود.

پ) مقدار کشیدگی دو ریسمان را بدست آورید.

ت) اگر کشیدگی هر یک از دو ریسمان از ℓ بیشتر شود، آن ریسمان پاره می‌شود. با فرض اینکه این اتفاق در زمان بسیار کوتاهی رخ دهد، مقدار کشیدگی هر یک از دو ریسمان را برحسب t بسط دهید و تنها اولین جمله‌ی غیر صفر (نسبت به $t = 0$) را بدست آورید.

ث) با استفاده از قسمت (ت) به ازای چه مقادیری از a ریسمان اول و به ازای چه مقادیری از a ریسمان دوم پاره می‌شود.

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۷۷)

جواب: الف) $m\ddot{x} + (k_۱ + k_۲)x = k_۲ t_{(t)}$

ب) $x = \frac{a}{۲\omega^۲}\cos\omega t + \frac{۱}{۴}at^۲ - \frac{a}{۲\omega^۲}$ که در آن $\omega^۲ = \frac{۲k}{m}$ است.

پ) $\ell_۱ = \frac{mg}{k} + \frac{a}{۲\omega^۲}\cos\omega t + \frac{۱}{۴}at^۲ - \frac{a}{۲\omega^۲}$

$$\ell_۲ = \frac{۱}{۴}at^۲ - \frac{a}{۲\omega^۲} + \frac{a}{۲\omega^۲}$$

ت) $\ell_۱ = \frac{mg}{k} + \frac{۱}{۴۸}a\omega^۲ t^۴$

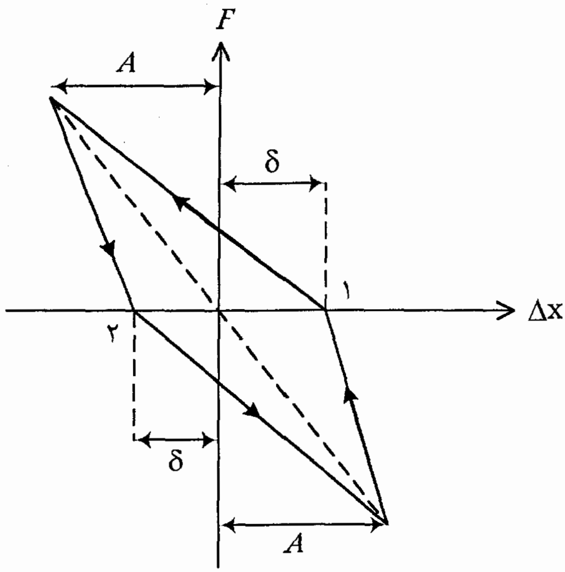
$$\ell_۲ = \frac{۱}{۲}at^۲$$

ث) ریسمان اول: $\circ < a < \frac{\ell^۲\omega^۲}{۱۲(\ell - \frac{mg}{k})}$

ریسمان دوم: $a > \frac{\ell^۲\omega^۲}{۱۲(\ell - \frac{mg}{k})}$

۶) فنری به ثابت k در نظر بگیرید که اثر پسماندی داشته باشد، به این صورت که وقتی کشیده می‌شود موقعی که رها شود که به $(F = \circ)$ برگردد طول آن از طول اولیه بیشتر می‌شود (نقطه‌ی ۱) مقدار این افزایش طول δ است و فرض کنید مقدار آن به صورت $\delta = \beta A$ یعنی تغییر طول متناسب با مقدار کشیدگی اولیه است. همچنین اگر فنر از حالت فشرده رها شود هنگامی که به $F = \circ$ برمی‌گردد طول آن کمتر از طول اولیه است (نقطه‌ی ۲) که مقدار آن نیز δ است.

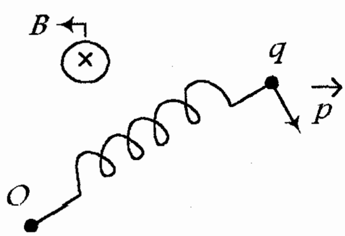
حال فرض کنید جسمی به جرم m به این فنر متصل است و آن را به اندازه‌ی A می‌کشیم و رها می‌کنیم که نوسان کند. نمودار نیرو برحسب Δx در شکل (۷-۱۱) نشان داده شده است. (اگر پسماند نبود نمودار خط می‌شد $(F = -k\Delta x)$ به خاطر اثر پسماند انرژی نوسانگر تلف می‌شود. فرض کنید زمان ویژه‌ی کاهش انرژی (زمانی که انرژی نصف می‌شود) خیلی بیشتر از دوره‌ی تناوب نوسانات است. فرض کنید $\beta \ll ۱$ است و مسیر نوسان به صورت متوازی‌الاضلاع باقی می‌ماند. فرض کنید معادله‌ی حرکت جسم به صورت $x_{(t)} = A_{(t)}\cos\omega t$ باشد، $A_{(t)}$ را بدست آورید.



شکل۷-۱۱

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۳)

۷) به یک بار الکتریکی q با جرم m واقع در میدان مغناطیسی B در یک لحظه‌ی تکانه‌ی P می‌دهیم. اگر بار به فنری با ثابت k متصل باشد (k خیلی بزرگ است) تغییر طول ایجاد شده در فنر را تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر نسبت به $\frac{1}{k}$ بیابید. (طول اولیه‌ی فنر ℓ_0 و در ابتدا در حالت آزاد است)



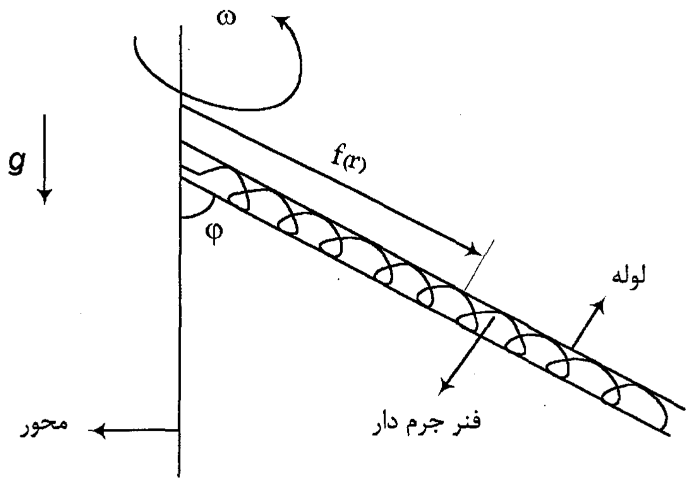
شکل۷-۱۲

جواب: $\Delta\ell = \left(\frac{P^2}{m\ell_0} + \frac{qBP}{m}\right)\frac{1}{k}$

۸) لوله‌ی صلب بدون جرمی را که فنر جرم‌داری به جرم m و ضریب سختی k و طول آزاد ℓ_0 در داخل آن قرار دارد، در نظر بگیرید. این لوله از یک انتها به محوری که با سرعت زاویه‌ای ω در

حال چرخش است متصل شده است و می‌تواند آزادانه در صفحه‌ی شامل لوله و محور حرکت کند (شکل (۷-۱۳))

(توجه کنید که فنر فقط در راستای میله می‌تواند تغییر طول بدهد)



شکل۷-۱۳

الف) ضریب سختی فنر (k) را بی‌نهایت بگیرید و زاویه‌ی تعادل در اینحالت را محاسبه کنید ($\varphi_\circ$)

در صورت بی‌نهایت نبودن ضریب سختی k، زاویه‌ی تعادل (φ) نسبت به حالت قبل تغییر می‌کند. می‌خواهیم این زاویه را بدست آوریم.

برای این منظور تابع $f_{(r)}$، ($\circ < r < \ell_\circ$) را تعریف می‌کنیم که بیانگر مکان جزء کوچکی از فنر است که در حالت (الف) در فاصله r از تکیه‌گاه قرار داشته است.

ب) معادلات لازم را برای جزء کوچکی از فنر در حالت تعادل بنویسید و با توجه به آنها معادله‌ی دیفرانسیلی برای $f_{(r)}$ بدست آورید. (این معادله شامل $f_{(r)}$ و مشتقات آن، ثابت‌های مسأله و زاویه‌ی تعادل، φ، می‌باشد.)

حال فرض می‌کنیم که k بسیار بزرگ است به‌طوری که $\frac{1}{k}$ بسیار کوچک است.

ج) معادله‌ی دیفرانسیلی بدست آمده در قسمت (ب) را حل کرده و جواب را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{1}{k}$ بسط دهید. حال با اعمال شرایط مرزی مناسب، تابع $f_{(r)}$ را به‌طور کامل (همراه با ضرایب) تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{1}{k}$ به دست آورید.

د) زاویه‌ی تعادل جدید را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{1}{k}$ و ثابت‌های مسأله بدست آورید.

* جواب معادله دیفرانسیل ناهمگن $\frac{d^۲y}{dx^۲} + a^۲y = b$ (که a و b ثابت‌اند) به صورت $y = A\sin(ax+B) + \frac{b}{a^۲}$ است که A و B ضرایب دلخواهی هستند که با توجه به شرایط مرزی مشخص می‌شوند.

فصل هشتم

آونگ

۱-۸ آونگ ساده

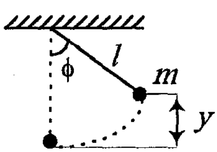
در این قسمت ابتدا به بررسی حرکت آونگ ساده که نوسانگر غیر هماهنگ است می‌پردازیم.

مثال ۱: دوره‌ی تناوب نوسانات یک آونگ ساده را تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر نسبت به دامنه‌ی حرکت (به جز مرتبه‌ی صفرم) به دست آورید.

حل: حرکت یک جسم تحت تأثیر نیروهای پایستار را همواره می‌توان با روش متداول انرژی حل کرد، و طبیعی است که این روش را برای یافتن حرکت آونگ به کار بریم. انرژی کل آونگ چنین است:

$$E = k + U = \frac{۱}{۲}\ell^۲\dot{\phi}^۲ + mgy$$

که در آن ℓ طول آونگ و y فاصله‌ی عمودی از پایین‌ترین نقطه است. از شکل (۸-۱) داریم:



شکل۸-۱

$$y = \ell(۱ - \cos\phi)$$

در انتهای نوسان $\phi = \phi_\circ$ و $\dot{\phi} = \circ$ است. انرژی کل چنین است

$$E = mg\ell(1 - \cos\phi_\circ)$$

معادله‌ی انرژی عبارت است از:

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\phi}^2 + mg\ell(1 - \cos\phi) = m\ell g(1 - \cos\phi)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\phi - \cos\phi_\circ)}$$

و

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_\circ}} = \int \sqrt{\frac{2g}{\ell}}dt \qquad (1)$$

برای یافتن جواب از اتحاد $\cos\phi = 1 - 2\sin^2(\frac{\phi}{2})$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos\phi - \cos\phi_\circ = 2[\sin^2(\frac{\phi}{2}) - \sin^2(\frac{\phi}{2})] \qquad (2)$$

با قرار دادن (۲) در (۱) داریم:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{2}\sqrt{\sin^2(\frac{\phi_\circ}{2}) - \sin^2(\frac{\phi}{2})}} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \int dt \qquad (3)$$

از تغییر متغیری به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin u = \frac{\sin(\frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi_\circ}{2})} \qquad (4)$$

همانطور که آونگ یک نوسان کامل انجام می‌دهد، ϕ بین $-\phi_\circ$ و $+\phi_\circ$ و در همان زمان u بین $-\pi$ و $+\pi$ تغییر می‌کند. اگر قرار دهیم: $k = \sin\frac{\phi_\circ}{2}$ آنگاه

$$\sin\frac{\phi}{2} = k\sin u$$

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\phi}{2}d\phi = k\cos u du$$

و

$$d\phi = \left(\frac{1 - \sin^2 u}{1 - k^2\sin^2 u}\right)^{\frac{1}{2}} \times 2k du \qquad (5)$$

جایگزین کردن معادلات (۴) و (۵) در معادله (۳) بدست می‌دهد:

$$\int \frac{du}{\sqrt{۱ - k^۲ \sin^۲ u}} = \sqrt{\frac{y}{\ell}} \int dt$$

برای یک دوره‌ی تناوب، انتگرال می‌گیریم. حدود u از ۰ تا ۲π است در حالی که t از ۰ تا T تغییر می‌کند. داریم:

$$\int_۰^{۲\pi} \frac{du}{\sqrt{۱ - k^۲ \sin^۲ u}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}} T$$

انتگرال سمت چپ یک انتگرال بیضوی و بخصوص یک انتگرال بیضوی کامل از نوع اول است. مقادیر این تابع در جدول‌های محاسبه شده در دسترس است. اما، با مقصودی که داریم، بسط عبارت زیر انتگرال راحت است:

$$(۱ - k^۲ \sin^۲ u)^{-\frac{۱}{۲}} = ۱ + \frac{۱}{۲} k^۲ \sin^۲ u$$

و

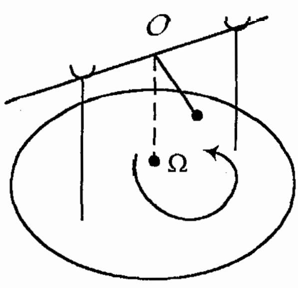
$$T = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_۰^{۲\pi} du(۱ + \frac{۱}{۲} k^۲ \sin^۲ u) = \sqrt{\frac{\ell}{g}} (۲\pi + \frac{۲\pi}{۴} k^۲) = ۲\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} (۱ + \frac{۱}{۴} \sin^۲ \frac{\phi_۰}{۲})$$

از طرفی داریم: $\sin^۲(\frac{\phi_۰}{۲}) = \frac{\phi_۰^۲}{۴}$. لذا داریم:

$$T = ۲\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} (۱ + \frac{۱}{۱۶} \phi_۰^۲)$$

۸-۲ آونگ روی دیسک دوار

مثال ۲: یک آونگ روی محوری که توسط دو پایه نگهداری می‌شود مطابق شکل (۸-۲) به‌طوری سوار است که فقط می‌تواند روی صفحه‌ای عمود بر محور نوسان کند. آونگ شامل جرم M است که به میله‌ی بدون جرمی به‌طول ℓ متصل است پایه‌ها روی سکویی نصب شده‌اند که با سرعت زاویه‌ای Ω دوران می‌کند. با فرض کوچک بودن دامنه، بسامد آونگ را پیدا کنید.



شکل۸-۲

حل: دستگاه مختصات را روی دیسک دوار قرار می‌دهیم لذا علاوه بر نیروی وزن، نیروی گریز از مرکز هم وارد می‌آید. برای حالت تعادل با نوشتن گشتاور حول نقطه‌ی O داریم:

$$\sum T_\circ = \circ \rightarrow M\Omega^2 \ell \sin\theta_\circ . \ell \cos\theta_\circ = Mg\ell \sin\theta_\circ \rightarrow \cos\theta_\circ = \frac{g}{\Omega^2 \ell}$$

حالا اگر به اندازه‌ی $\delta\theta$ از حالت تعادل منحرف شویم داریم:

$$T_\circ = I\ddot{\delta\theta}$$

$$M\Omega^2 \ell \sin(\theta_\circ + \delta\theta)\ell \cos(\theta_\circ + \delta\theta) - Mg\ell \sin(\theta_\circ + \delta\theta) = M\ell^2 \ddot{\delta\theta}$$

با ساده کردن و حذف جملات مرتبه‌ی دو داریم: $(\cos\theta_\circ = \frac{g}{\Omega^2 \ell})$

$$\ddot{\delta\theta} + (\frac{g^2}{\ell^2 \Omega^2} + \Omega^2 - \frac{2g^2}{\Omega^2 \ell^2})\delta\theta = \circ$$

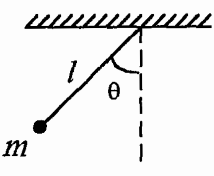
$$\rightarrow \omega = \sqrt{\Omega^2 - \frac{g^2}{\ell^2 \Omega^2}}$$

۳-۸ میرایی آونگ ساده

مثال ۳: آونگی به طول ℓ و جرم m در نظر بگیرید.

الف) معادله‌ی دینامیک سیستم را بنویسید و دوره‌ی تناوب آونگ را پیدا کنید.

شتاب گرانش g، و میرایی را در این قسمت صفر بگیرید. دامنه را خیلی کوچک بگیرید (تا مرتبه‌ی صفرم نسبت به $\theta_\circ$). این دوره‌ی تناوب $(\omega_\circ)$ را حساب کنید.



شکل۸-۳

ب) حال دامنه را دوباره خیلی کوچک فرض کنید. ضریب میرایی (γ) را غیر صفر اما کوچک بگیرید. ثابت کنید که رابطه‌ی θ برحسب زمان به صورت $\theta_{(t)} = \theta_\circ e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \varphi)$ است. ω_1 را برحسب $\omega_\circ$ و γ حساب کنید.

توجه: ضریب میرایی γ به این صورت تعریف می‌شود که نیروی مقاوم در برابر حرکت در امتداد مخالف حرکت برابر $f_f = 2\gamma m V$ است.

پ) ثابت کنید رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\gamma = -\frac{1}{2E} < \frac{dE}{dt} >$$

که E انرژی سیستم، $\frac{dE}{dt}$ تغییرات زمانی آن و $< \frac{dE}{dt} >$ متوسط تغییرات زمانی آن است.

ت) حال در این قسمت دوباره ضریب میرایی را صفر بگیرید و دامنه را به جای خیلی کوچک، کوچک در نظر بگیرید (اولین تقریب غیر صفر بعد از مرتبه‌ی صفر). ω_2 و دوره‌ی تناوب T_2 را در این شرایط به دست آورید. (برحسب g و ℓ و θ_0).

راهنمایی: رابطه‌ی $\theta = \theta_0 \sin(\omega_2 t)$ را در معادله‌ای که بدست می‌آورید جایگزین کنید و به رابطه‌ی زیر توجه نمایید.

$$\sin^3 \alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

سپس ضریب $\sin(\omega_2 t)$ را در دو طرف معادله برابر قرار دهید.

ث) حال فرض کنید هم ضریب میرایی غیر صفر است و هم دامنه خیلی کوچک نیست، بلکه هر دو فقط کوچک هستند ولی قابل صرف‌نظر نیستند. در این حال ضریب میرایی معادل γ_1 (که با γ ضریب میرایی واقعی فرق دارد) را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2E} < \frac{dE}{dt} >$$

$$< \frac{dE}{dt} > = \frac{\int_0^T \frac{dE}{dt} dt}{\int_0^T dt}$$

که T دوره‌ی تناوب است. مقدار γ_1 را برحسب θ_0 به دست آورید.

(دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۷۸)

حل: الف) با استفاده از دستگاه مختصات قطبی و نوشتن نیروها در راستای r و θ داریم:

$$\hat{r} : mg\cos\theta - T = -m\ell\dot{\theta}^2$$

$$\hat{\theta} : mg\sin\theta = m\ell\ddot{\theta}$$

برای دامنه‌ی کوچک و تا مرتبه‌ی یک داریم: $\sin\theta = \theta$ و از معادله در راستای θ داریم:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \rightarrow \theta = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

که $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ فرکانس زاویه‌ای حرکت آونگ است.

ب) نیروی میرایی متناسب با سرعت است یعنی برابر $-b(\ell\dot{\theta})$ است که در این رابطه $b = ۲m\gamma$. با نوشتن معادله در راستای θ داریم:

$$- mg\sin\theta - ۲m\gamma\ell\dot{\theta} = m\ell\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + ۲\gamma\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = ۰$$

برای جواب معادله دیفرانسیل اخیر با فرض $\gamma < \omega_۰ = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ داریم:

$$\theta = \theta_۰ e^{-\gamma t}\sin(\omega_۱ t + \varphi)$$

که در آن $\omega_۱ = \sqrt{\omega_۰^۲ - \gamma^۲}$

پ) تغییر زمانی انرژی سیستم برابر با کار نیروی اصطکاک است. بنابراین داریم:

$$\frac{dE}{dt} = -۲m\gamma V^۲ \rightarrow \frac{dE}{dt} = -۲m\gamma\ell^۲\dot{\theta}^۲ \qquad (۱)$$

با استفاده از (ب) می‌توان $\dot{\theta}$ را به صورت زیر محاسبه نمود.

$$\dot{\theta} = \theta_۰ e^{-\gamma t}(-\gamma\sin(\omega_۱ t + \varphi) + \omega_۱\cos(\omega_۱ t + \varphi)) \qquad (۲)$$

از طرفی با فرض $\gamma \ll \omega_۰$ داریم:

$$\omega_۱ = \sqrt{\omega_۰^۲ - \gamma^۲} = \omega_۰(۱ - \frac{\gamma^۲}{۲\omega_۰^۲}) = \omega_۰$$

و همچنین در عبارت (۱) چون جمله‌ی $\dot{\theta}^۲$ یک ضریب γ هم دارد، لذا لازم است خود $\dot{\theta}^۲$ تا مرتبه‌ی صفرم نسبت به γ نوشته شود و لذا در عبارت (۲) از جمله‌ی اول داخل پرانتز که توان‌های بالاتر γ را ایجاد می‌کند صرف‌نظر می‌کنیم و لذا داریم:

$$< \frac{dE}{dt} > = \frac{\int_۰^T \frac{dE}{dt}dt}{T} = \frac{\int_۰^T (-۲m\gamma)\omega_۰^۲\theta_۰^۲\cos^۲(\omega_۰ t + \varphi)e^{-۲\gamma t}dt}{T}$$

$$= -\frac{۲m\gamma\omega_۰^۲\theta_۰^۲}{T}\int_۰^T \cos^۲(\omega_۰ t + \varphi)e^{-۲\gamma t}dt$$

اما چون ضریب پشت انتگرال از مرتبه‌ی یک نسبت به γ می‌باشد، داخل انتگرال را باید تا مرتبه‌ی صفرم نگه داریم و چون جمله‌ی $e^{-۲\gamma t}$ در بازه‌ی ۰ تا T تا مرتبه‌ی صفرم نسبت به زمان ثابت است از انتگرال بیرون می‌آوریم و داریم:

$$< \frac{dE}{dt} > = -\frac{۲m\gamma\omega_۰^۲\theta_۰^۲}{T}e^{-۲\gamma t}\int_۰^T \cos^۲(\omega_۰ t + \varphi)dt$$

جواب انتگرال بالا $(\frac{T}{۲})$ می‌باشد.

$$< \frac{dE}{dt} >= -m\gamma\ell^{۲}\theta_{\circ}^{۲}\omega_{\circ}^{۲}e^{-۲\gamma t} \qquad (۳)$$

برای انرژی داریم:

$$E = \frac{۱}{۲}m\ell^{۲}\dot{\theta}^{۲} + mg\ell(۱-\cos\theta) = \frac{۱}{۲}m\ell^{۲}\dot{\theta}^{۲} + mg\frac{\theta^{۲}}{۲}\ell$$

در این جا E را تا مرتبه‌ی صفرم محاسبه می‌کنیم زیرا قرار است نشان دهیم $< \frac{dE}{dt} >$ $۲E\gamma = -$ و لازم است E در طرف چپ معادله تا مرتبه‌ی صفرم باشد که مجموعاً طرف چپ از مرتبه‌ی یک شود. با جاگذاری برای E داریم:

$$E = \frac{۱}{۲}m\ell^{۲}\theta_{\circ}^{۲}\omega_{\circ}^{۲}e^{-۲\gamma t} \qquad (۴)$$

با مقایسه (۳) و (۴)' داریم:

$$< \frac{dE}{dt} >= -۲\gamma E \rightarrow \gamma = -\frac{-< \frac{dE}{dt} >}{۲E}$$

ت) برای دامنه‌ی کوچک تا اولین تقریب بعد از مرتبه‌ی اول نسبت به $\theta_{\circ}$ داریم:

$$-\frac{g}{\ell}\sin\theta = \ddot{\theta} \rightarrow -\omega_{\circ}^{۲}(\theta - \frac{\theta^{۳}}{۳!}) = \ddot{\theta} \qquad (۵)$$

با فرض $\theta = \theta_{\circ}\sin\omega_{۲}t$ و جایگزین آن در معادله‌ی (۳) بدست می‌آوریم:

$$-\omega_{\circ}^{۲}\sin\omega_{۲}t + \frac{\omega_{\circ}^{۲}}{۶}\theta_{\circ}^{۲}\sin^{۳}\omega_{۲}t = -\omega_{۲}^{۲}\sin\omega_{۲}t$$

$$\rightarrow -\omega_{\circ}^{۲}\sin\omega_{۲}t + \frac{\omega_{\circ}^{۲}\theta_{\circ}^{۲}}{۶}[\frac{۳}{۴}\sin\omega_{۲}t - \frac{۱}{۴}\sin^{۳}\omega_{۲}t]$$

$$= -\omega_{۲}^{۲}\sin\omega_{۲}t$$

با استفاده از راهنمایی مسأله و برابر قرار دادن ضرایب $\sin\omega_{۲}t$ در دو طرف معادله داریم:

$$-\omega_{\circ}^{۲} + \frac{۳}{۲۴}\omega_{\circ}^{۲}\theta_{\circ}^{۲} = -\omega_{۲}^{۲}$$

$$\rightarrow \omega_{۲} = \omega_{\circ}\sqrt{۱ - \frac{\theta_{\circ}^{۲}}{۸}} = \omega_{\circ}(۱ - \frac{\theta_{\circ}^{۲}}{۱۶}) \rightarrow T = T_{\circ}[۱ + \frac{\theta_{\circ}^{۲}}{۱۶}]$$

که در آن $\omega_{\circ} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ است.

ث) با توجه به این که $\frac{dE}{dt} = -2m\gamma\ell^2\dot{\theta}^2$ است، میانگین آن می‌شود:

$$< \frac{dE}{dt} >= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dE}{dt}dt = -\gamma m\ell^2\omega_2^2\theta_0^2$$

که در آن چون ضریب γ را داریم و می‌خواهیم $< \frac{dE}{dt} >$ را تا مرتبه‌ی اول نسبت به γ باشد، لذا حتی جمله‌ی $e^{-2\gamma t}$ را هم تا مرتبه‌ی صفرم قرار می‌دهیم و فقط بزرگ بودن دامنه را در نظر می‌گیریم. انرژی تا مرتبه‌ی صفر (چرا؟) نسبت به γ می‌شود:

$$E = mg\ell(1-\cos\theta_0) = mg\ell\left(1-(1-\frac{\theta_0^2}{2}+\frac{\theta_0^2}{24})\right) = mg\ell\frac{\theta_0^2}{2}(1-\frac{\theta_0}{12})$$

بنابراین γ_1 می‌شود:

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2E} < \frac{dE}{dt} >= -\frac{1}{mg\ell\theta_0^2(1-\frac{\theta_0^2}{12})}(-\gamma m\ell^2\theta_0^2\omega_2^2)$$

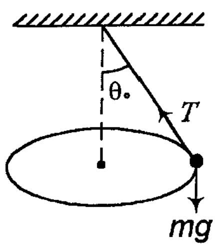
$$= \frac{\gamma\ell\omega_2^2}{g}(1+\frac{\theta_0^2}{12}) = \frac{\gamma\ell}{g}\omega_0^2(1-\frac{\theta_0^2}{16})^2(1+\frac{\theta_0^2}{12})$$

$$= \gamma(1-\frac{\theta_0^2}{8})(1+\frac{\theta_0^2}{12}) = \gamma(1-\frac{\theta_0^2}{24})$$

دقت کنید بسط برحسب θ_0 را تا مرتبه‌ای نوشتیم تا به اولین مرتبه‌ی غیر صفر بعد از مرتبه‌ی صفرم جواب برای γ_1 دست پیدا کنیم.

۴-۸ آونگ کروی و میرایی

مثال ۴: آونگی کروی[1] مطابق شکل (۸-۴) از سقف آویزان و در حال چرخش روی دایره‌ای به شعاع R_0 می‌باشد که $R_0 = \ell\sin\theta_0$.



شکل۸-۴

۱) مکان هندسی جسم متصل به نخ روی کره‌ای به شعاع طول نخ می‌باشد.

نیروی مقاومت هوا کوچک است و مقدار آن از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$f = -m\alpha V$$

که V مقدار سرعت جسم و α ثابت می‌باشد این نیروی مقاومت هوا سبب کاهش زاویه‌ی ساخته شده بوسیله‌ی نخ و راستای قائم می‌شود. این زاویه را برحسب زمان بیابید ($\alpha T \ll ۱$) که در این رابطه T زمان لازم برای دور زدن است. دقت کنید ممکن است αt کوچک نباشد که در آن t زمان کل حرکت است. مانند مثال ۶)

حل: ابتدا در حالت $\alpha = ۰$ برای تعادل در زاویه θ داریم: (حرکت دائم روی دایره)

$$mg = T\cos\theta$$

$$mR\omega^{۲} = T\sin\theta$$

$$R = \ell\sin\theta$$

از روابط بالا داریم:

$$\omega^{۲} = \frac{g}{\ell\cos\theta}$$

با دخیل کردین اثر مقاومت هوا، نیروی اصطکاک در هر دور کار W_f را روی آونگ انجام می‌دهد که این کار سبب تغییر در انرژی آونگ شده و چون کار آن کوچک است حرکت همچنان روی دایره باقی می‌ماند (تا مرتبه‌ی صفرم نسبت به αT) ولی زاویه‌ی بین نخ در راستای قائم با گذشت زمان کم می‌شود. لذا با در نظر گرفتن مسیر مرتبه‌ی صفرم (دایره‌ای به شعاع R) برای W_f داریم:

$$W_f = -m\alpha V(۲\pi R) = -۲\pi m\alpha R^{۲}\omega$$

با در نظر گرفتن مبدأ پتانسیل در نقطه‌ی O برای انرژی آونگ داریم:

$$E = \frac{۱}{۲}mV^{۲} - mg\ell\cos\theta = \frac{۱}{۲}\cos\theta = \frac{۱}{۲}mR^{۲}\omega^{۲} - mg\ell\cos\theta \qquad (۱)$$

نوشتن E تا همین مرتبه (مرتبه‌ی صفر نسبت به α) در این جا کافی است (بعداً متوجه می‌شوید). تغییرات انرژی آونگ در یک دوره‌ی تناوب برابر کار نیروی اصطکاک است. لذا داریم:

$$T\frac{d(E)}{dt} = -۲\pi m\alpha R^{۲}\omega \qquad (۲)$$

که در این رابطه دوره‌ی تناوب در آهنگ تغییرات انرژی برابر تغییرات انرژی در یک دور زدن می‌باشد. از (۱) و (۲) و جاگذاری $\omega^{۲} = \frac{g}{\ell\cos\theta}$ و $T = \frac{۲\pi}{\omega}$ داریم:

$$\frac{d}{dt}(\frac{۱}{۲}mg\ell\frac{\sin^۲\theta}{\cos\theta}-mg\ell\cos\theta)=-m\alpha\ell^۲\frac{\sin^۲\theta g}{\ell\cos\theta}$$
$$\rightarrow\frac{d}{dt}(\frac{۱}{۲}\frac{\sin^۲\theta}{\cos\theta}-\cos\theta)=-\alpha\frac{\sin^۲\theta}{\cos\theta}$$
$$\rightarrow\dot{\theta}(\sin\theta+\frac{۱}{۲}\frac{\sin^۳\theta}{\cos^۲\theta}+\sin\theta)=-\alpha\frac{\sin^۲\theta}{\cos\theta}$$

که در این رابطه $\dot{\theta}$ از مرتبه‌ی یک نسبت به α است. اگر α نباشد، $\dot{\theta}=۰$
دلیل نوشتن E تا مرتبه‌ی صفر در رابطه‌ی (۱) در این جا مشخص گردید.

$$\dot{\theta}=-\alpha\frac{\sin\theta\cos\theta}{۲\cos^۲\theta+\frac{۱}{۲}\sin^۲\theta}\rightarrow\frac{۲\cos^۲\theta+\frac{۱}{۲}\sin^۲\theta}{\sin\theta\cos\theta}d\theta=-\alpha dt$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا داریم:

$$۲\ln^{(\frac{\sin\theta}{\sin\theta_۰})}-\frac{۱}{۲}\ln^{(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_۰})}=-\alpha t$$
$$\rightarrow\ln\left[\frac{(\frac{\sin\theta}{\sin\theta_۰})^۲}{(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_۰})^{\frac{۱}{۲}}}\right]=-\alpha t$$
$$\rightarrow\frac{\sin^۲\theta}{\sqrt{\cos\theta}}=\frac{\sin^۲\theta_۰}{\sqrt{\cos\theta_۰}}e^{-\alpha t}$$

در این رابطه که θ برحسب $\theta_۰$ بیان شده است، فاصله بین θ و $\theta_۰$ می‌تواند زیاد هم باشد، زیرا تغییرات کوچک زاویه برای یک دور زدن است (که ما از این تقریب استفاده نمودیم) ولی بعد از چندین دور زدن، ممکن است تغییرات زاویه کوچک نباشد، که اگر در حل این مسأله از این مطلب استفاده می‌شد، حل دچار اشکال می‌گردید.

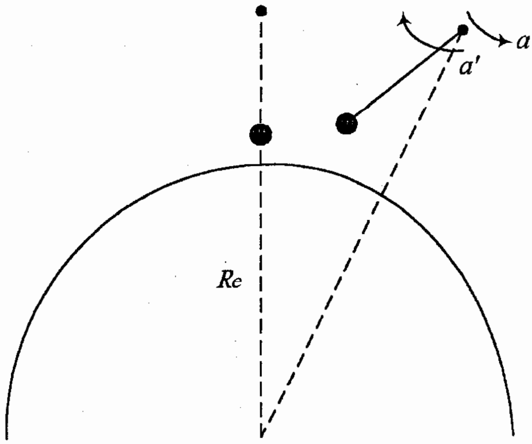
در عبارت نمایی که θ برحسب $\theta_۰$ و زمان بیان شد، نمی‌توان $e^{-\alpha t}$ را بسط داد و از جملات با توان بالا $(-\alpha t)$ صرف‌نظر نمود زیرا همانطور که در بالا گفته شد ممکن است αt کوچک نباشد.

اهمیت این مطلب ایجاب می‌کند بار دیگر تکرار شود که عامل کوچک در این مسأله αT است و نه αt (به مثال ۲ در فصل ۴ رجوع شود)

مسائل

۱) آونگی که گلوله‌ی آن به طرف مرکز زمین است مطابق شکل (۸-۵) در حال سکون است. نقطه‌ی آویز آونگ به‌طور افقی با شتاب یکنواخت a شروع به حرکت می‌کند، و آونگ شروع به نوسان می‌کند. شتاب زاویه‌ای a' آونگ را پیدا کنید. زمان تناوب آونگ را که به ازای آن آونگ در امتداد شعاع زمین

قرار می‌گیرد پیدا کنید. از دوران زمین صرف‌نظر کنید (این موضوع، اصول کار وسیله‌ای به نام آونگ شوار است که برای نصب ژیروسکوپ در دستگاه‌های راهنمای لخت استفاده می‌شود)

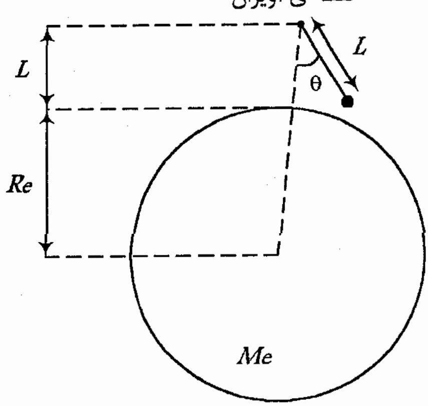


شکل۸-۵

جواب: $T \approx ۱\frac{۱}{۲}h$

۲) آونگی در اختیار داریم که طول آن با شعاع زمین قابل مقایسه است. فاصله‌ی نقطه‌ی آویز تا مرکز زمین $R_e + L$ است که در آن L طول آونگ و R_e شعاع زمین است. بسامد نوسانات کم دامنه‌ی آن را بدست آورید.

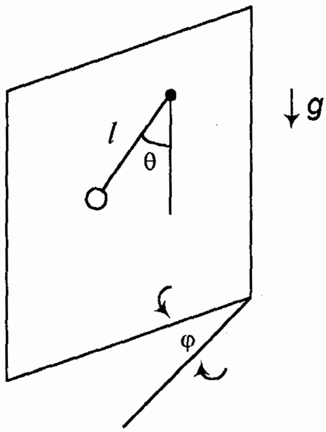
جواب خود را در حالت‌های حدی $L \gg R_e$ و $L \ll R_e$ بررسی و توجیه کنید.



شکل۸-۶

(امتحان آزمایشی دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پروهان جوان سال ۱۳۸۱)

۳) یک آونگ کروی، مطابق شکل (۸-۷) در نظر بگیرید که θ و φ می‌توانند با زمان تحت تأثیر گرانش تغییر کنند ولی طول آونگ ℓ_c، ثابت بوده و جرم آونگ نقطه‌ای است. (θ نمی‌تواند منفی باشد.)



شکل۸-۷

الف) ابتدا فرض می‌کنیم که آونگ در صفحه‌ی $\varphi = 0$ مقید است. اگر در ابتدای حرکت $\dot{\theta} = 0$ و $\theta = \theta_0$ باشد، $\dot{\theta}$ را برحسب θ به دست آورده و نمودار آن را به‌طور شماتیک رسم کنید. (نمودار ۱)

از این جا به بعد، آونگ لزوماً به صفحه‌ی $\varphi = 0$ مقید نیست. (فرض کنید $\theta > 0$ باشد)
اگر در ابتدای حرکت $\dot{\theta} = 0$، $\dot{\varphi} = \omega_0$ و $\theta = \theta_0$ و $\varphi = 0$ باشد.

ب) $\dot{\varphi}$ را برحسب θ به دست آورده، نمودار φ را برحسب θ رسم کنید (نمودار ۲)

پ) $\dot{\theta}$ را برحسب θ به دست آورده، نمودار $\dot{\theta}$ را برحسب θ به‌طور شماتیک رسم کنید.

ت) با توجه به نمودار ۳ استدلال کنید که تغییرات θ و در نتیجه $\dot{\varphi}$ تناوبی است.

ث) در این حالت فرض کنید ω_0 کوچک است. محدوده‌ی تغییرات θ را تا اولین مرتبه‌ی تقریب بیابید.

راهنمایی: به نمودارهای (۱) و (۳) دقت کنید.

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پروهان جوان سال ۱۳۷۶)

جواب: $\theta_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \sin\theta_0 \cos\frac{\theta_0}{2}$

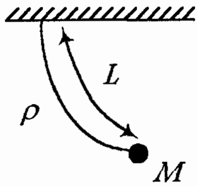
۴) در این مسأله می‌خواهیم اثر جرم نخ آونگ را بر حرکت آن بررسی کنیم.

فرض کنید یک آونگ ساده از یک جرم M و نخی به طول L و چگالی طولی کوچک ρ تشکیل شده است.

الف) تغییر فرکانس آونگ را تا مرتبه‌ی اول نسبت به ρ پیدا کنید.

راهنمایی: می‌توانید از بقای انرژی استفاده کنید.

ب) معادله‌ی شکل نخ آونگ را برحسب زمان بدست آورید.



شکل۸-۸

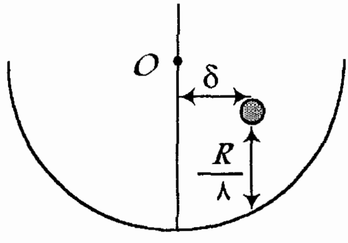
(امتحان انتخابی تیم جهانی المپیاد فیزیک ایران سال ۱۳۸۱)

فصل نهم

برخورد

۹-۱ برخورد کشسان با سطح کروی

مثال ۱: توپ کوچکی از ارتفاع $\frac{R}{8}$ داخل کاسه‌ای به شعاع R رها می‌شود. اگر فاصله‌ی افقی توپ تا محور کاسه δ باشد که در آن $\frac{\delta}{R} \ll 1$ می‌باشد، محاسبه کنید توپ بعد از برخورد با کاسه کجا فرود می‌آید. شکل (۹-۱)

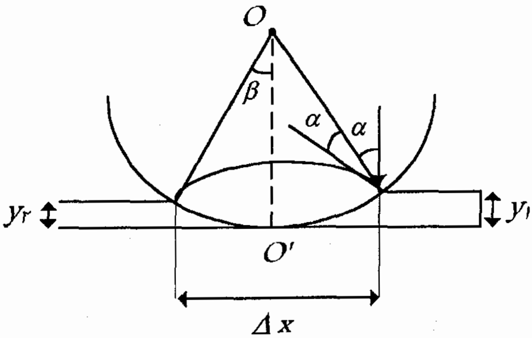


شکل ۹-۱

حل: چون توپ در ارتفاع $\frac{R}{۸}$ است برای سرعت آن هنگام برخورد با کره داریم:

$$V = \sqrt{۲g(\frac{R}{۸})} = \frac{\sqrt{Rg}}{۲} \qquad (۱)$$

مطابق شکل (۹-۲) برای حرکت جسم در دستگاه دکارتی معادلات به صورت زیر می‌باشد:



شکل۹-۲

$$\Delta x = V \sin(۲\alpha)t \qquad (۲)$$

$$y_۲ - y_۱ = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + V\cos ۲\alpha t \qquad (۳)$$

از شکل داریم: (α و δ از یک مرتبه‌اند)

$$y_۱ = R(۱ - \cos\alpha) = \frac{R\alpha^۲}{۲}$$
$$y_۲ = \frac{R\beta^۲}{۲}$$

چون α و β حداقل از مرتبه‌ی δاند (یعنی اگر $\delta = ۰$، $\alpha = \beta = ۰$) لذا $y_۱$ و $y_۲$ تا مرتبه‌ی یک صفرند.
بنابراین از (۳) و $\cos ۲\alpha = ۱$ داریم:

$$۰ = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + Vt$$

با جاگذاری (۱) در رابطه‌ی بالا داریم:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}}$$

با جاگذاری t در (۲) داریم:

$$\Delta x = V(2\alpha)\sqrt{\frac{R}{g}} \rightarrow \Delta x = R\alpha \qquad (۴)$$

از طرفی می‌دانیم با توجه به شکل (۹-۱) و (۹-۲) داریم:

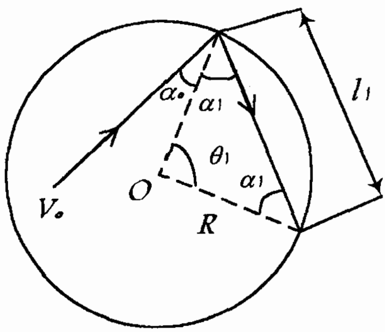
$$\delta = R\sin\alpha = R\alpha \qquad (۵)$$

با توجه به رابطه‌ی (۴) و (۵) و مقایسه این دو این نتیجه حاصل می‌شود که محل برخورد توپ با نیم کره نقطه‌ی O' یعنی پایین‌ترین نقطه‌ی سطح داخلی نیم کره می‌باشد.

۹-۲ برخورد غیرکشسان با سطح کروی

مثال ۲: توپی داخل سطح کروی که ثابت شده حرکت می‌کند. (شتاب جاذبه وجود ندارد) در لحظه‌ی صفر توپ با سرعت V_0 و زاویه α_0 به دیواره‌ی داخل آن برخورد می‌کند. فرض کنید $e = 1 - \epsilon$ باشد به‌طوری که $n\epsilon \ll 1$، که n تعداد دفعات برخورد به دیواره است.

الف) با توجه به شکل (۹-۳) مقادیر α_n و V_n و ℓ_n را برحسب شرایط اولیه (α_0 و V_0) و R و تعداد دفعات برخورد n، و ϵ تا مرتبه‌ی اول نسبت به $n\epsilon$ بیابید. اندیس n متناظر با برخورد nام است.



شکل ۹-۳

ب) $\overline{\omega_n}$ را به صورت $\overline{\omega_n} = \dfrac{\theta_n}{\Delta t_n}$ تعریف می‌کنیم که θ_n زاویه‌ی مرکزی بعد از برخورد nام و Δt_n زمان ما بین برخورد nام و $(n+1)$ام است. مقدار $\overline{\omega_n}$ را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $n\epsilon$ بدست آورید.

ج) توصیف کنید در حالتی که $n\epsilon \ll 1$ و $n\epsilon \gg 1$ چه اتفاقی می‌افتد.

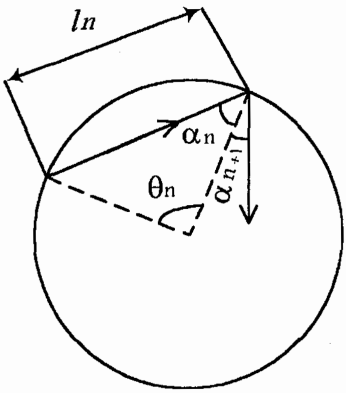
(دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۰)[1]

۱) این سؤال قسمتی از سؤال اصلی می‌باشد.

حل: مطابق شکل (۹-۴) داریم:

$$eV_{n_\perp} = V_{(n+1)_\perp} \rightarrow eV_n \cos\alpha_n = V_{n+1}\cos\alpha_{n+1} \qquad (1)$$

$$V_{n_\parallel} = V_{(n+1)_\parallel} \rightarrow V_n \sin\alpha_n = V_{n+1}\sin\alpha_{n+1} \qquad (2)$$



شکل۹-۴

که در این روابط $V_{n_\perp}$، مؤلفه‌ی سرعت در جهت عمود بر سطح و $V_{n_\parallel}$ موازی سطح می‌باشند. از تقسیم طرفین رابطه‌ی (۲) بر (۱) داریم:

$$\tan\alpha_{n+1} = \frac{\tan\alpha_n}{e}$$

$$\tan\alpha_n = \frac{\tan\alpha_{n+1}}{e}$$

و به همین ترتیب ادامه می‌یابد تا $\tan\alpha_1 = \dfrac{\tan\alpha_0}{e}$ لذا داریم:

$$\tan\alpha_n = \frac{\tan\alpha_0}{e^n}$$

از طرفی برای α_n داریم:

$$\alpha_n = \alpha_0 + n\epsilon\alpha_{(1)} \rightarrow \tan(\alpha_0 + n\epsilon\alpha_{(1)}) = \frac{\tan\alpha_0}{(1-\epsilon)^n}$$

برای طرف چپ معادله می‌دانیم: $f_{(x_0+\delta)} = f_{(x_0)} + \delta f'_{(x_0)}$ و برای طرف راست داریم: $(1-\epsilon)^{-n} = 1 + n\epsilon$ لذا بدست می‌آوریم:

$$\tan\alpha_0 + \frac{n\epsilon\alpha_{(1)}}{\cos^2\alpha_0} = \tan\alpha_0(1+n+\epsilon) \rightarrow \alpha_{(1)} = \sin\alpha_0\cos\alpha_0$$

$$\rightarrow \alpha_n = \alpha_0 + n\epsilon\sin\alpha_0\cos\alpha_0 \qquad (3)$$

برای ℓ_n با توجه به شکل (۹-۴) داریم:

$$\ell_n = 2R\cos\alpha_n$$

از (۴) داریم:

$$\ell_n = 2R\cos(\alpha_\circ + n\epsilon\sin\alpha_\circ\cos\alpha_\circ)$$

با توجه به بسط تیلور داریم ($f_{(x_\circ+\delta)} = f_{(x_\circ)} + \delta f'_{(x_\circ)}$):

$$\ell_n = 2R(\cos\alpha_\circ - n\epsilon\sin^2\alpha_\circ\cos\alpha_\circ)$$

$$\rightarrow \ell_n = 2R\cos\alpha_\circ(1 - n\epsilon\sin^2\alpha_\circ)$$

با توجه به رابطه (۲) داریم:

$$V_{n+1} = \frac{V_n\sin\alpha_n}{\sin\alpha_{n+1}}$$

با عوض کردن اندیس‌ها داریم:

$$V_n = \frac{V_{n-1}\sin\alpha_{n-1}}{\sin\alpha_n}$$

$$V_{n-1} = \frac{V_{n-2}\sin\alpha_{n-2}}{\sin\alpha_{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$V_1 = \frac{V_\circ\sin\alpha_\circ}{\sin\alpha_1}$$

$$\rightarrow V_n = \frac{V_\circ\sin\alpha_\circ}{\sin\alpha_1}\times\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\times\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3}\times\cdots\times\frac{\sin\alpha_{n-1}}{\sin\alpha_n}$$

$$\rightarrow V_n = \frac{V_\circ\sin\alpha_\circ}{\sin\alpha_n}$$

با توجه به (۴) داریم:

$$\rightarrow V_n = \frac{V_\circ\sin\alpha_\circ}{\sin(\alpha_\circ + n\epsilon\sin\alpha_\circ\cos\alpha_\circ)} = \frac{V_\circ\sin\alpha_\circ}{\sin\alpha_\circ + n\epsilon\sin\alpha_\circ\cos^2\alpha_\circ}$$

$$\rightarrow V_n = V_\circ(1 - n\epsilon\cos^2\alpha_\circ)$$

$$\Delta t_n = \frac{\ell_n}{V_n} = \frac{2R\cos\alpha_\circ(1-n\epsilon\sin^2\alpha_\circ)}{V_\circ(1-n\epsilon\cos^2\alpha_\circ)} = \frac{2R\cos\alpha_\circ}{V_\circ}(1-n\epsilon\sin^2\alpha_\circ + n\epsilon\cos^2\alpha_\circ)$$

$$= (1 + n\epsilon\cos 2\alpha_\circ) \qquad (5)$$

$$\theta_n = \pi - 2\alpha_n$$

از (۴) داریم:

$$\theta_n = \pi - 2(\alpha_0 + n\epsilon \sin\alpha_0 \cos\alpha_0) = \pi - 2\alpha_0 - n\epsilon \sin 2\alpha_0$$

با توجه به (۵) داریم:

$$\overline{\omega_n} = \frac{\theta_n}{\Delta t_n} = \frac{\pi - 2\alpha_0 - n\epsilon\sin 2\alpha_0}{\frac{2R\cos\alpha_0}{V_0}(1 + n\epsilon\cos 2\alpha_0)} = \frac{(\pi - 2\alpha_0)(1 - \frac{n\epsilon\sin 2\alpha_0}{\pi - 2\alpha_0})}{\frac{2R\cos\alpha_0}{V_0}(1 + n\epsilon\cos 2\alpha_0)}$$

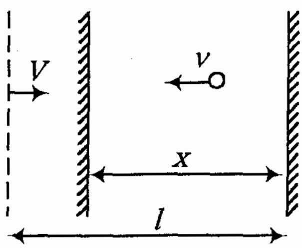
$$= \frac{(\pi - 2\alpha_0)V_0}{2R\cos\alpha_0}\left(1 - (\frac{\sin 2\alpha_0}{\pi - 2\alpha_0} - \cos 2\alpha_0)n\epsilon\right)$$

۹-۳ رفت و برگشت توپ بین دو دیوار

مثال ۳: یک توپ مخصوص به جرم m مطابق شکل با سرعت V_0 بین دو دیواره به جلو و عقب می‌جهد. از گرانش صرف‌نظر می‌کنیم و برخوردها را کاملاً کشسان در نظر می‌گیریم.

الف) نیروی متوسط وارد بر هر دیواره را پیدا کنید.

ب) اگر یکی از دیواره‌ها به آرامی و با سرعت $V \ll v$ به طرف دیگری حرکت کند، به دلیل فاصله‌ی کوتاه بین برخوردها و به علت اینکه سرعت توپ هنگام جهش از دیواره‌ی متحرک افزایش می‌یابد، آهنگ جهش تندتر خواهد شد. F را برحسب فاصله‌ی بین دیواره‌ها، x پیدا کنید.



شکل۹-۵

حل:

الف) توپی اگر با سرعت v با دیوار برخورد کند با همان سرعت برخواهد گشت (برخورد کشسان باشد).

می‌خواهیم نیروی متوسط وارد بر هر دیواره را پیدا کنیم. برای این نیرو داریم:

$$\bar{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

که در این رابطه $P = mV$ و ΔP تغییر تکانه است که توپ دارد (به واسطه‌ی نیروی دیوار) و Δt زمان متوسط بین تغییر تکانه است. بعد از n بار رفت و برگشت از طرف دیوار سمت چپ تغییر تکانه‌ی $۲nmV_۰$ به توپ اعمال می‌شود و زمان لازم برای این امر هم (زمان متوسط) $۲n\frac{\ell}{V_۰}$ می‌باشد. لذا برای $\bar{F}$ داریم:

$$\bar{F} = \frac{۲nmV_۰}{۲n\frac{\ell}{V_۰}} = \frac{mV_۰^۲}{\ell}$$

ب) در این قسمت می‌خواهیم تغییرات سرعت توپی را که با سرعت ν به دیوار که با سرعت V حرکت می‌کند را حساب کنیم. برای این کار ناظر را روی دیوار قرار می‌دهیم که قبل و بعد از برخورد سرعتش V است. ناظر مشاهده می‌کند توپ با سرعت $V + \nu$ به طرفش آمد، اما مطلبی که از پایستگی انرژی از دید ناظر روی دیوار می‌توان دریافت این است که سرعت برگشت از دید این ناظر باید $V + \nu$ باشد، اما چون این از دید ناظر روی دیوار است، نسبت به ناظر ساکن سرعت برگشت $\nu + ۲V$ است و لذا $\Delta\nu = ۲V$ می‌باشد (تغییرات سرعت توپ از لحاظ اندازه).

برای Δt یک سری رفت و برگشت توپ هنگامی که فاصله‌ی دو دیوار x است داریم:

$$\Delta t = \Delta t_{(۰)} + V\Delta t_{(۱)} \qquad (۱)$$

که می‌دانیم در این رابطه $\Delta x_{(۰)} = \frac{۲x}{\nu}$ (هنگامی که $V = ۰$)

$$\Delta\nu = -۲V \qquad (۲)$$

و چون زمان یک رفت و برگشت نسبت به زمان کل حرکت کم است، می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta\nu}{\Delta t} = \frac{d\nu}{dt} \qquad (۳)$$

از طرفی از (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\Delta\nu}{\Delta t} = \frac{-۲V}{\Delta t_{(۰)} + V\Delta t_{(۱)}} = -\frac{۲V}{\Delta t_{(۰)}} = -\frac{V\nu}{x}$$

که در آن $\Delta t_{(۰)} = \frac{۲x}{\nu}$ و از جملات مرتبه‌ی ۲ و با بالا نسبت به V صرف‌نظر شده با توجه به (۳) داریم:

$$\frac{d\nu}{dt} = -\frac{V\nu}{x} = -\frac{\nu}{x}\frac{dx}{dt}$$

که در آن $V = \frac{dx}{dt}$، لذا از رابطه‌ی بالا داریم:

$$x\frac{d\nu}{dt} + \nu\frac{dx}{dt} = ۰ \rightarrow x\nu = C \rightarrow x\nu = LV_۰ \rightarrow \nu = \frac{LV_۰}{x} \qquad (۴)$$

از طرفی برای محاسبه‌ی نیروی وارد بر دیوار در لحظه‌ای که فاصله دو دیوار x است با توجه به (الف) داریم:

$$F = \frac{mV_a^۲}{x}$$

با جاگذاری ν از (۴) داریم:

$$F = \frac{mV_۰^۲}{\ell}(\frac{\ell}{x})^۳$$

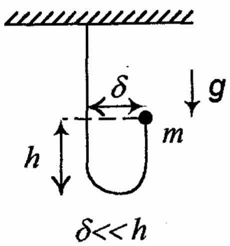
دقت کنید روش حل این مثال شبیه مثال‌های ۴ در فصل ۸ و ۲ در فصل ۴ است که در آن‌ها توضیحات به‌طور وسیع‌تری آمده است.

مسائل

۱) گلوله‌ای به جرم m از ارتفاع h بالای سطح شیبداری که با افق زاویه α می‌سازد و جرم M را دارد رها می‌شود و بعد از برخوردی کشسان با سطح شیبدار به سطح شیبدار سرعت ΔV را می‌دهد (کلیه سطوح بدون اصطکاک‌اند). ΔV را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{m}{M}$ بیابید (m نسبت به M خیلی کوچک است)

جواب: $\Delta V = \sqrt{۲gh}\sin\alpha\frac{m}{M}$

۲) گلوله‌ای متصل شده به طناب کشسان (پایستگی انرژی برقرار است) مطابق شکل (۹-۶) از ارتفاع h رها می‌شود. به ازای چه hهای حرکت تناوبی است و برای آن hها دوره‌ی تناوب را بیابید.



شکل۹-۶

۳) در مثال ۳ نشان دهید که کار لازم برای حرکت دادن دیواره از ℓ تا x برابر است با افزایش انرژی جنبشی توپ (این مسأله ساز و کار گرم شدن گاز بر اثر تراکم را نشان می‌دهد)

۴) می‌خواهیم سطحی بسازیم که اگر جسمی را از ارتفاع $y_۰$ روی آن رها کنیم حرکت آن پس از چهار بار برخورد با سطح، تناوبی شود. این سطح دارای این خاصیت‌هاست:

I) معادله‌ی آن به صورت $y = f_{(x)}$ است یعنی برخورد آن با هر سطح $z = C$ یکسان است و نمی‌توان مسأله را دو بعدی بررسی کرد.

II) نسبت به محور y متقارن است یعنی $f_{(x)} = f_{(-x)}$

III) برای سادگی فرض می‌کنیم $|f'_{(x)}| \ll 1$ یا فقط xهای به اندازه‌ی کافی کوچک که این شرط برقرار باشد را در نظر می‌گیریم یعنی تا مرتبه‌ی اول نسبت به f' محاسبات را انجام دهید.

IV) گرانش در جهت $-y$ است.

V) مهم نیست که جسم از چه xی رها شود.

معادله‌ی سطح را بدست آورید. کافی است رابطه‌ای بین x و y بیابید.

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۴)

۵) یک ریسمان غیرکشسان را به محور چرخی به شعاع r و جرم m گره زده و آن را در جهت افقی و در صفحه‌ی چرخ می‌کشیم. این چرخ بدون جهش بر روی شبکه‌ای شامل ریل‌های افقی موازی که در فاصله‌ی ℓ از هم چیده شده‌اند، می‌چرخد ($\ell \ll r$). متوسط نیروی کشش نخ را طوری پیدا کنید که چرخ با سرعت ثابت v بر روی این شبکه حرکت کند. فرض کنید تمام جرم چرخ در محور آن قرار دارد.

جواب: $T = \dfrac{mV^2\ell}{2r^2}$

۶) فرض کنید از سطح صافی ذراتی با سرعت V_0 در راستای عمودی رو به بالا گسیل می‌شوند. سطح صاف را $y = 0$ بگیرید. به دلیل گرانش سرعت و چگالی ذرات برحسب ارتفاع y، که جهت مثبت آن رو به بالا فرض شده است، متغیر است. (g در راستای منفی محور y است)

تعداد ذرات بر واحد حجم در $y = 0$ را n_0 (یکنواخت) فرض کنید. فرض کنید ذرات در بالاترین نقطه‌ی مسیرشان به نحوه‌ای جذب شده و دیگر به سطح باز نمی‌گردند.

الف) $n_{(y)}$ یعنی تعداد ذرات بر واحد حجم را بدست آورید.

حال فرض کنید کره‌ای به شعاع R و جرم M در داخل منطقه‌ای که $n_{(y)}$ صفر نیست قرار می‌دهیم. جرم هر یک از ذرات را m بگیرید و برخورد ذرات با کره را کشسان فرض کنید. R را کوچک فرض کنید به‌طوری که چگالی ذرات در کل نقاط کره ثابت باشد.

ب) شرطی برای تعادل کره بدست آورید و ارتفاع تعادل آن را محاسبه کنید.

ج) فرض کنید کره را از وضعیت تعادل به اندازه δy منحرف کنیم. معادله‌ی دیفرانسیلی برای $\delta y_{(t)}$ تا مرتبه‌ی اول نسبت به δy و $\dot{\delta y}$ بدست آورید.

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۴)

فصل دهم

مدول الاستیسیته (مدول یانگ)

۱-۱۰ تعاریف و روابط

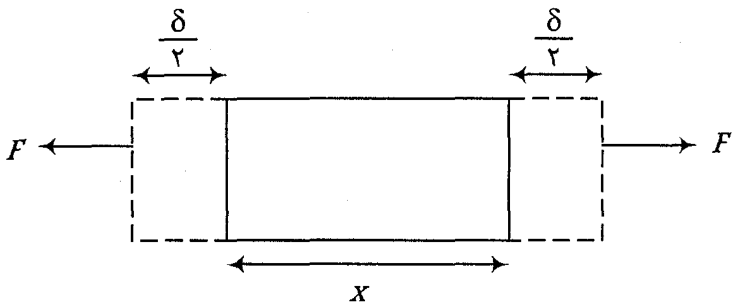
در ابتدای این قسمت تعریف کرنش را برای میله‌ای که تحت کشش قرار گرفته شده است مطابق شکل (۱۰-۱) به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\epsilon = \frac{\delta}{x} \qquad (۱۰-۱)$$

که در این رابطه δ افزایش طول بعد از اعمال نیرو و x طول اولیه‌ی میله است. به همین ترتیب برای میله‌ای که در طول آن کرنش تابعی از فاصله از ابتدای میله است داریم:

$$\epsilon_{(x)} = \frac{d\delta}{dx} \qquad (۱۰-۲)$$

که در آن $d\delta$ تغییر طول قطعه‌ی دیفرانسیلی بعد از اعمال نیروهای خارجی و dx طول اولیه‌ی المان می‌باشد.



شکل ۱۰-۱

تغییرات σ برحسب ϵ به صورت خطی می‌باشد که در آن σ نیرو در واحد سطح جسم است که شیب این خط نسبت ثابتی به نام مدول یانگ است.

مدول الاستیسیته یا مدول یانگ که به‌گونه‌ای نشان دهنده سختی جسم است، به جنس جسم بستگی دارد و طبق توضیحات بالا دارای رابطه‌ی زیر می‌باشد:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \qquad (۱۰-۳)$$

که در این رابطه σ نیرو در واحد سطح می‌باشد.

به‌طور کلی مدول یانگ شیب خط نمودار σ برحسب ϵ است.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{d\delta}{dx}} \rightarrow d\delta = \frac{F dx}{AE} \qquad (۱۰-۴)$$

که در آن dx طول اولیه‌ی المان و A سطح مقطع میله در فاصله‌ی x و $d\delta$ تغییرات طول المان است.

$$\rightarrow \delta = \int_{\circ}^{L} \frac{F_{(x)} dx}{A_{(x)} E_{(x)}} \qquad (۱۰-۵)$$

در حالت کلی این رابطه برای میله‌ای است که در آن $F_{(x)}$ و $A_{(\circ)}$ و $E_{(x)}$ متغیرند. دقت کنید که در این روابط، $\frac{F_{(\circ)}}{A_{(\circ)}E}$ از مرتبه‌ی اول است (کوچک است). یعنی اگر F را مرتبه‌ی صفر و A را مرتبه‌ی صفر و بازه‌های انتگرال را از مرتبه‌ی صفر قرار دهیم δ مرتبه‌ی یک می‌شود این به دلیل آن است که مدول یانگ برای اجسام خیلی بالا است و $\frac{۱}{E}$ خیلی کوچک می‌شود.

بنابراین $F_{(x)}$ و $A_{(x)}$ و $E_{(x)}$ را از مرتبه‌ی صفر قرار می‌دهیم و بالاتر نمی‌رویم (اولین مرتبه غیر صفر برای تغییر طول یک است) یعنی تمام این متغیرها مربوط به قبل از کشیدگی‌اند حتی بازه‌های انتگرال.

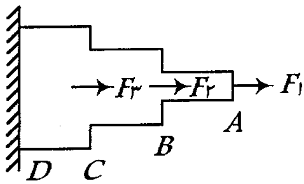
۲-۱۰ افزایش طول میله تحت اثر نیروی اعمال شده

مثال ۱: میله‌ای به طول ℓ_0 تحت نیروی F قرار می‌گیرد. تغییر طول میله را بیابید. (مقطع میله A و مدول یانگ E است.)

حل: چون F در تمام مقطع ثابت است داریم:

$$d\delta = \frac{Fdx}{AE} \to \delta = \int_0^{\ell_0} \frac{Fdx}{AE} = \frac{F\ell_0}{AE}$$

مثال ۲: میله‌ای مطابق شکل (۱۰-۲) به صورت پله‌ای است و سه نیروی F_1 و F_2 و F_3 در مقاطع شامل A و B و C به آن وارد می‌شوند. سطح مقطع در قسمت AB و BC و CD به ترتیب A_1 و A_2 و A_3 و طول این قسمت‌ها ℓ_1 و ℓ_2 و ℓ_3 و مدول کشسانی (مدول یانگ) آن‌ها E_1 و E_2 و E_3 است. تغییر طول کل برای نقطه‌ی A را بیابید.

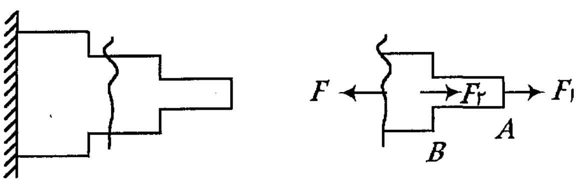


شکل ۱۰-۲

$$\delta = \frac{\delta A}{B} + \frac{\delta B}{C} + \frac{\delta C}{D}$$

که در آن $\frac{\delta A}{B}$ تغییر طول قسمت AB و $\frac{\delta B}{C}$ تغییر طول قسمت BC و $\frac{\delta C}{D}$ تغییر طول قسمت CD است. نیرو در مقطع قسمت AB، F_1 و در BC، $F_1 + F_2$ و در CD، $F_1 + F_2 + F_3$ می‌باشد.

برای بدست آوردن نیرو در هر مقطع کافی است یک برش در آن مقطع بزنیم و تعادل را برای جسم جدید ایجاد شده که به جایی متصل نیست، بنویسیم. برای مثال اگر نیرو در مقطع BC را بخواهیم کافی است مانند شکل (۱۰-۳) مقطع δ را زده و جسم ایجاد شده در سمت راست را جدا کرده و سپس تعادل را برای آن بنویسیم:



شکل ۱۰-۳

$$F = F_1 + F_2$$

بنابراین برای تغییر طول‌ها داریم:

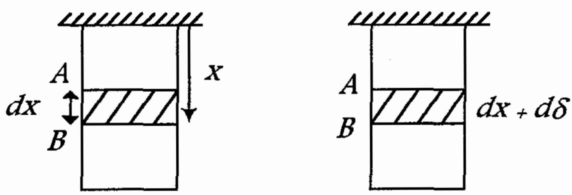
$$\frac{\delta A}{B} = \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1}$$
$$\frac{\delta B}{C} = \frac{(F_1 + F_2) L_2}{A_2 E_2}$$
$$\frac{\delta C}{D} = \frac{(F_1 + F_2 + F_3) L_3}{A_3 E_3}$$
$$\rightarrow \delta = \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1} + \frac{(F_1 + F_2) L_2}{A_2 E_2} + \frac{(F_1 + F_2 + F_3) L_3}{A_3 E_3}$$

۱۰-۳ افزایش طول تحت اثر نیروی گسترده

مثال ۳: میله‌ای یکنواخت به جرم m و مدول E و طول ℓ_0 و سطح مقطع A را از سقف آویزان می‌کنیم، تغییر طول میله را بعد از آویزان کردن بیابید.

حل: $d\delta = \frac{F dx}{AE}$ که در این جا برای محاسبه‌ی F برحسب x، کافی است برشی در فاصله x بزنیم:

$$F_{(x)} = mg \frac{(\ell_0 - x)}{\ell_0}$$



(الف) قبل از اعمال وزن (ب) بعد از اعمال وزن

شکل ۱۰-۴

$$\rightarrow d\delta = \frac{\left(\frac{mg(\ell_0 - x)}{\ell_0}\right) dx}{AE} = \left(\frac{mg}{AE} - \frac{mgx}{AE\ell_0}\right) dx$$
$$\rightarrow \delta = \int_0^{\ell_0} \left(\frac{mg}{AE}\right) dx - \int_0^{\ell_0} \left(\frac{mgx}{AE\ell_0}\right) dx = \frac{mg\ell_0}{2AE}$$

همانطور که قبلاً بیان شد در این مثال نیز برای محاسبه $F_{(x)}$، شکل قبل از کشیدگی را معیار قرار دادیم.

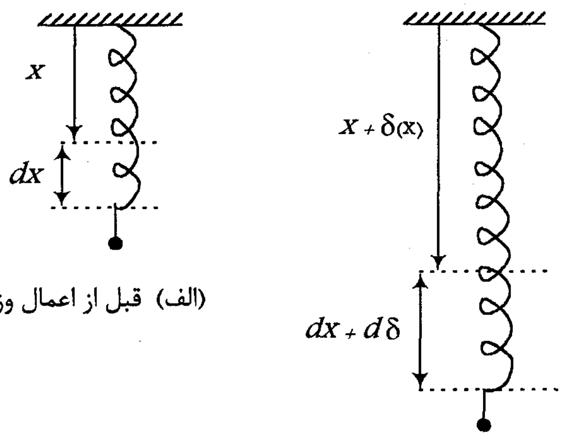
قبل از شروع مثال بعدی می‌خواهیم کمی در مورد خاصیت فنری فلزات صحبت کنیم. در میله‌ی مثال ۱ برای جابجایی داشتیم $\delta = \frac{F\ell_\circ}{AE}$.

از طرفی اگر میله را با توجه به یکنواختی آن در طول به صورت فنری با ثابت k فرض کنیم با توجه به قانون $(\delta = \frac{F}{k})$ و مقایسه‌ی آن با رابطه‌ی $\delta = \frac{F\ell_\circ}{AE}$ نتیجه می‌گیریم که میله مانند فنر با ثابت فنر $k = \frac{AE}{\ell_\circ}$ می‌باشد.

مثال ۴: فنری به جرم m و با ثابت k از سقف آویزان شده. تغییر طول فنر بعد از آویزان شدن را بیابید.

راه اول: در شکل (۱۰-۵) فنر را به چندین قسمت تقسیم کردیم که تعداد آنها در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$n = \frac{\ell_\circ}{dx}$$



(الف) قبل از اعمال وزن

(ب) بعد از کشیدگی

شکل ۱۰-۵

از طرفی می‌دانیم اگر فنری را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، ثابت فنر برای هر یک n برابر می‌شود، لذا برای المان نشان داده شده در شکل (۱۰-۵) $k' = \frac{k\ell_\circ}{dx}$ می‌باشد. از طرفی برای F در فاصله x داریم (با استفاده از برش زدن):

$$F = mg\frac{(\ell_\circ - x)}{\ell_\circ}$$

$$d\delta = \frac{F}{k'} = \frac{mg - mg\frac{x}{\ell_\circ}}{\frac{k\ell_\circ}{xd}} = \frac{mg}{k\ell_\circ}(\text{۱} - \frac{x}{\ell_\circ})dx$$

$$\rightarrow d\delta = \frac{mg}{k\ell_\circ}\int_\circ^{\ell_\circ}(\text{۱} - \frac{x}{\ell_\circ})dx = \frac{mg}{\text{۲}k}$$

روش دوم: در مثال ۳ دیدیم که اگر میله‌ای یکنواخت به وزن mg آویزان شود برای جابجایی آن داریم:

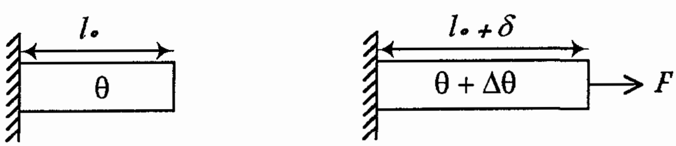
$$\delta = \frac{mg\ell_\circ}{\text{۲}AE}$$

می‌توانیم فنر را مانند میله‌ای یکنواخت فرض کنیم که در آن $k = \frac{AE}{\ell_\circ}$. لذا با توجه به رابطه‌ی $\delta = \frac{mg\ell_\circ}{\text{۲}AE}$ و با جاگذاری k داریم:

$$\delta = \frac{mg}{\text{۲}k}$$

۴-۱۰ دخیل کردن تغییر دما

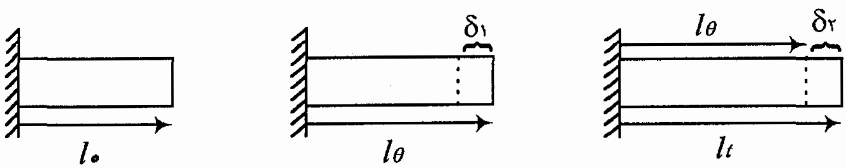
در این قسمت می‌خواهیم تأثیر تغییر دما را روی اجسام و رابطه‌ی آن با تغییر طول و مدول یانگ را بررسی کنیم. اگر میله‌ای مطابق شکل (۱۰-۶) علاوه بر تغییر دما به اندازه‌ی $\Delta\theta$ تحت تأثیر نیروی F هم قرار



(الف) طول اولیه (ب) بعد از اعمال تغییر دما و اعمال نیرو

شکل ۱۰-۶

گیرد برای یافتن تغییر طولش می‌توانیم ابتدا فرض کنیم دمای میله به اندازه‌ی $\Delta\theta$ بالا رفته و به اندازه‌ی $\delta_\text{۱}$ طولش زیاد شده (۱۰-۷-ب) و سپس نیروی F را وارد کرده‌ایم مانند شکل (۱۰-۷-ج) و $\delta_\text{۲}$ مربوط به افزایش طول میله‌ی ℓ_θ بر اثر اعمال F است.



(الف) طول اولیه (ب) تغییر دمای Δθ (ج) اعمال نیروی F

شکل ۱۰-۷

بعد از اعمال نیروی F، طول میله به ℓ_t می‌رسد. برای ℓ_t داریم:

$$\delta_{\text{۲}} = \ell_t - \ell_\theta = \frac{F\ell_\theta}{AE} \rightarrow \ell_t = \ell_\theta + \frac{F\ell_\theta}{AE}$$

از طرفی از ترمودینامیک می‌دانیم $\ell_\theta = \ell_\circ(\text{۱} + \alpha\Delta\theta)$. لذا برای ℓ_t داریم:

$$\ell_t = \ell_\circ(\text{۱} + \alpha\Delta\theta) + \frac{F\ell_\circ(\text{۱} + \alpha\Delta\theta)}{AE} = \ell_\circ + \ell_\circ\alpha\Delta\theta + \frac{F\ell_\circ}{AE} + \frac{F\ell_\circ\alpha\Delta\theta}{AE}$$

در این رابطه جمله‌ی اول مرتبه‌ی صفرم و جمله‌ی اول مرتبه‌ی اول $(\text{۱} \gg \alpha\Delta\theta)$ و جمله‌ی سوم مرتبه‌ی اول $(\text{۱} \gg \frac{F}{AE})$ و جمله‌ی چهارم مرتبه‌ی دوم است، زیرا هم $\alpha\Delta\theta$ و هم $\frac{F}{AE}$ را در خود جای داده، لذا از این جمله صرف‌نظر می‌کنیم.

$$\ell = \ell_\circ + \ell_\circ\alpha\Delta\theta + \frac{F\ell_\circ}{AE} \rightarrow \delta = \ell_\circ\alpha\Delta\theta + \frac{F\ell_\circ}{AE}$$

حال فرض کنیم ابتدا نیروی F را وارد کنیم و طول از $\ell_\circ$ به ℓ_F برسد سپس دما را به اندازه‌ی $\Delta\theta$ بالا برده‌ایم و طول در این مرحله از ℓ_F به ℓ_t برسد که ℓ_t طول نهایی می‌باشد. داریم:

$$\ell_t = \ell_f(\text{۱} + \alpha\Delta\theta)$$

$$\ell_f = \frac{F\ell_\circ}{AE} + \ell_\circ \rightarrow \ell = (\frac{F\ell_\circ}{AE} + \ell_\circ)(\text{۱} + \alpha\Delta\theta) = \ell_\circ + \ell_\circ\alpha\Delta\theta + \frac{F\ell_\circ}{AE} + \frac{F\ell_\circ\alpha\Delta\theta}{AE}$$

که در این رابطه نیز جمله چهارم قابل صرف‌نظر است.

$$\ell = \ell_\circ + \frac{\ell_\circ F}{AE} + \ell_\circ\alpha\Delta\theta \rightarrow \delta = \frac{\ell_\circ F}{AE} + \ell_\circ\alpha\Delta\theta$$

در هر صورت اعمال تغییر دمای $\Delta\theta$ و نیروی F را به هر صورتی برحسب زمان در نظر بگیریم به جواب بالا خواهیم رسید، لذا در حالت کلی برای بدست آوردن تغییر طول میله‌ای به طول $\ell_\circ$ که تحت اثر تغییر دما و نیرو قرار گرفته می‌توان از بر هم نهی استفاده نمود و نوشت:

(۱۰-۶) (تغییرات طول فقط بر اثر اعمال نیرو) + (تغییرات طول فقط بر اثر تغییر دما) = تغییرات طول

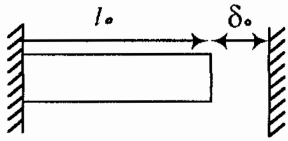
مثلاً برای میله‌ای یکنواخت همانطور که مشاهده نمودید داریم:

$$\delta = \frac{\ell_\circ F}{AE} + \ell_\circ\alpha\Delta\theta \qquad (\text{۱۰-۷})$$

دقت کنید در روابط محاسبه‌ی تغییر طول و روابط مشابه، اگر نیرو کششی باشد، F را مثبت در نظر گرفته و اگر نیرو فشاری باشد F را منفی می‌گیریم یعنی در اثر نیروی کششی δ مثبت و در اثر نیروی فشاری منفی می‌باشد.

مثال ۵: مطابق شکل (۱۰-۸) میله‌ای به طول $\ell_\circ$ از یک انتها به دیوار بسته شده و انتهای آزاد دیگر فاصله‌ی $\delta_\circ$ با دیوار مجاور را دارد. بعد از افزایش دما به اندازه $\Delta\theta$ میله به دیوار مجاور می‌رسد و به آن فشرده می‌شود. نیروی فشاری بین دیوار و میله را بیابید.

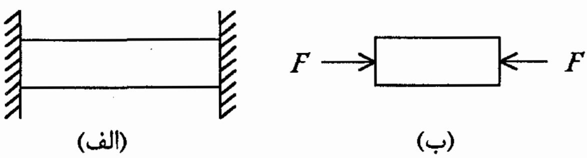
(ضریب انبساط طولی میله α و مدول یانگ E و مساحت مقطع A است)



شکل ۱۰-۸

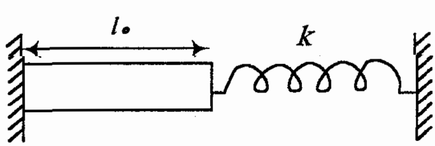
در این مثال تغییر طول میله به اندازه $\delta_\circ$ می‌باشد و تغییر دما $\Delta\theta$ و نیرو هم $(-F)$ است که علامت منفی به خاطر فشاری بودن نیرو می‌باشد. با قرار دادن این اطلاعات در معادله‌ی (۱۰-۷) داریم:

$$\delta_\circ = \alpha\ell_\circ\Delta\theta + \frac{(-F)\ell_\circ}{AE} = \alpha\ell_\circ\Delta\theta - \frac{F\ell_\circ}{AE} \rightarrow F = \alpha\Delta\theta AE - \frac{AE}{\ell_\circ}\delta_\circ$$



شکل ۱۰-۹

مثال ۶: میله‌ای مطابق شکل (۱۰-۱۰) از یک انتها به دیوار بسته شده و از انتهای دیگر به فنری با ثابت k. در ابتدا هم میله و هم فنر در حالت آزاد قرار دارند. حالا اگر دمای میله به اندازه‌ی $\Delta\theta$ بالا رود، این میله چه مقدار به سمت راست حرکت خواهد کرد.



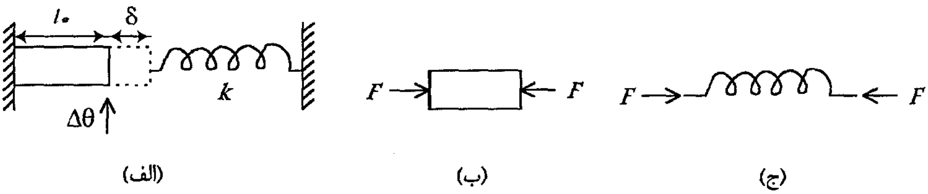
شکل ۱۰-۱۰

حل: از رابطه‌ی (۳-۷) برای جابجایی داریم:

$$\delta = \ell = \alpha\Delta\theta - \frac{F\ell_\circ}{AE} \qquad (۱)$$

از طرفی طبق قانون هوک داریم:

$$F = k\delta \qquad (۲)$$

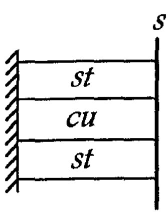


شکل ۱۰-۱۱: مربوط به افزایش طول بعد از تغییر دما

$$\text{از (۱) و (۲)} \rightarrow \delta = \ell_\circ \alpha \Delta\theta - \frac{k\delta\ell_\circ}{AE} \rightarrow \delta = \frac{\ell_\circ \alpha \Delta\theta}{1 + \frac{k\ell_\circ}{AE}}$$

۱۰-۵ جوش دادن میله‌ها

مثال ۷: مطابق شکل دو میله‌ی فولادی و یک میله‌ی مسی که در وسط‌شان قرار دارد را به وسیله صفحه‌ی s در انتهای سمت راست به یکدیگر جوش داده‌ایم. یعنی هر سه با هم و یک اندازه به جلو و عقب می‌روند مقدار تغییر طول سیستم را در اثر اعمال تغییر دمای $\Delta\theta$ بیابید.



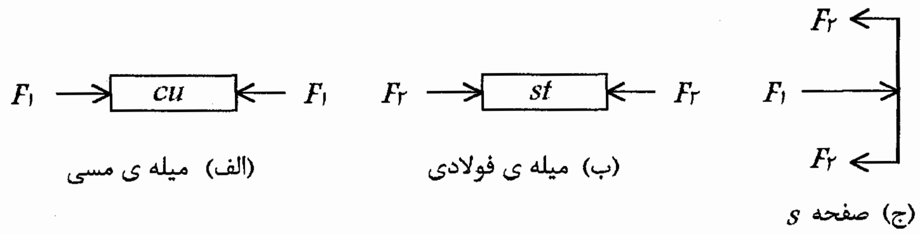
شکل ۱۰-۱۲

مشخصات فولاد: E_s، $A, \ell_\circ$ و α_s

مشخصات مس: E_c، $\ell_\circ$، A و α_c

$\alpha_c > \alpha_s$

حل: دیاگرام آزاد مس و فولاد و صفحه s به صورت زیر می‌باشد.



شکل ۱۰-۱۳

از (۱۰-۱۳-ج) برای تعادل صفحه‌ی s داریم:

$$F_1 = 2F_2$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۰-۷) برای فولاد داریم:

$$\delta = \frac{F_2 \ell_\circ}{AE_s} + \alpha_s \ell_\circ \Delta\theta \qquad (1)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۰-۷) برای مس داریم:

$$\delta = \frac{-F_1 \ell_\circ}{AE_c} + \alpha_c \ell_\circ \Delta\theta = \frac{-2F_2 \ell_\circ}{AE_c} + \alpha_c \ell_\circ \Delta\theta \qquad (2)$$

با استفاده از (۲) برای F_2 داریم:

$$F_2 = \frac{\alpha_c \ell_\circ \Delta\theta - \delta}{2\ell_\circ} AE_c$$

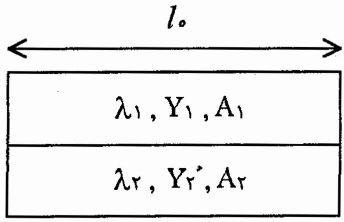
با جاگذاری در رابطه‌ی (۱) داریم:

$$\delta = \frac{(\alpha_c \ell_\circ \Delta\theta - \delta)}{2} \frac{E_c}{E_s} + \alpha_s \ell_\circ \Delta\theta$$

$$\rightarrow \delta(1 + \frac{E_c}{2E_s}) = \ell_\circ(\Delta\theta)(\alpha_s + \frac{\alpha_c}{2E_s})$$

$$\rightarrow \delta = \frac{\ell_\circ(\alpha_s + \frac{\alpha_c E_c}{2E_s})\Delta\theta}{1 + \frac{E_c}{2E_s}} = \frac{\ell_\circ(2\alpha_s E_s + \alpha_c E_c)\Delta\theta}{2E_s + E_c}$$

مثال ۸: دو میله از دو جنس مختلف در نظر بگیرید. در دمای $T_\circ$، طول هر میله $\ell_\circ$ است. مطابق شکل (۱۰-۱۴) این دو میله را به هم جوش داده‌اند. ضریب انبساط طولی میله‌ها λ_1 و λ_2 و مساحت مقطع میله‌ها A_1 و A_2 و مدول یانگ میله‌ها λ_1 و λ_2 است. میله‌ها را گرم می‌کنیم. چون ضریب انبساط طولی میله‌ها با هم فرق می‌کند، افزایش طول ناشی از گرم شدن میله‌ها یکسان نیست. اما میله‌ها به هم جوش



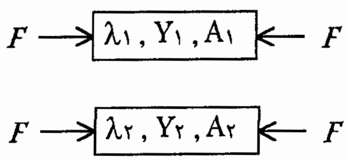
شکل ۱۰-۱۴

خورده‌اند و اگر مساحت مقطع‌شان به حد کافی زیاد باشد، تقریباً خم نمی‌شوند. بنابراین در یکی کشش و در دیگری فشار به وجود می‌آید، به‌طوری که طول دو میله در دمای T یکسان می‌شود. ثابت فنر $(\frac{EA}{\ell})$ این دو میله را همان ثابت فنرشان در دمای $T_\circ$ بگیرید ($\frac{E_\circ A_\circ}{\ell_\circ}$ تقریب مرتبه‌ی صفرم) این طول چقدر است؟

(مرحله دوم، سیزدهمین المپیاد فیزیک کشوری)

حل: فرض می‌کنیم سیستم به اندازه‌ی δ تغییر طول داده است. بنابراین هر کدام نیز به این اندازه تغییر طول داده‌اند. اگر رابطه‌ی (۱۰-۷) را برای میله‌ی (۱) بنویسیم با توجه به شکل (۱۰-۱۵) داریم:

$$\delta = \lambda_1 \ell_\circ \Delta T - \frac{F\ell_\circ}{A_1 Y_1}$$



شکل ۱۰-۱۵

برای میله‌ی (۲) داریم:

$$\delta = \lambda_2 \ell_\circ \Delta T - \frac{F\ell_\circ}{A_2 Y_2}$$

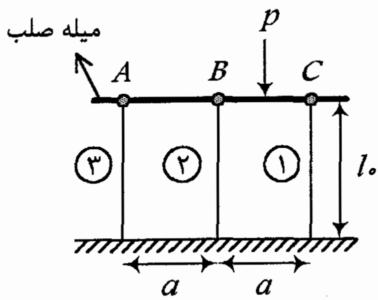
با حل این دو معادله و دو مجهول برای δ داریم:

$$\delta = \ell_\circ \frac{\lambda_1 Y_1 A_1 + Y_2 \lambda_2 A_2}{Y_1 A_1 + Y_2 A_2} \Delta T$$

$$\rightarrow \ell = \ell_\circ \left(1 + \frac{\lambda_1 A_1 Y_1 + \lambda_2 A_2 Y_2}{Y_1 A_1 + Y_2 A_2} \right)$$

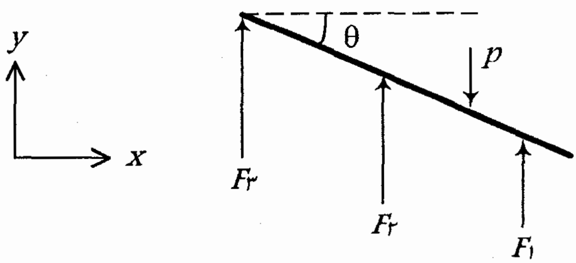
۱۰-۶ تغییر طول میله‌ها در حالت‌های دیگر اتصال

مثال ۹: سه میله با سختی‌های برابر مطابق شکل (۱۰-۱۶) به وسیله‌ی میله‌ی صلبی که عمود بر این سه میله است به هم مرتبط شده‌اند. تحت اثر نیروی p که در وسط فاصله‌ی (۱) و (۲) به میله‌ی صلب وارد می‌شود قرارگرفته‌اند. F_1، F_2 و F_3 مربوط به هر میله را بیابید.
(مساحت مقطع هر میله را A و مدول یانگ آن را E بگیرید)



شکل ۱۰-۱۶

حل: ابتدا دیاگرام آزاد میله‌ی صلب را می‌کشیم:



شکل ۱۰-۱۷

برای تعادل میله‌ی صلب معادلات را به صورت زیر داریم:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_1 + F_2 + F_3 = P \qquad (1)$$

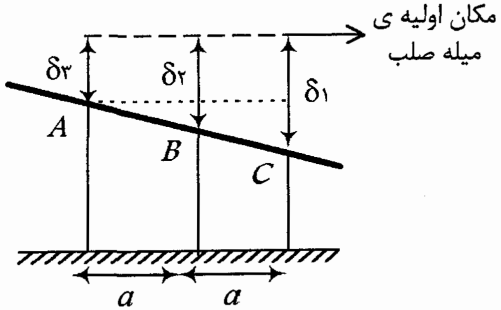
$$\sum T_A = 0 \rightarrow F_2 a + F_1(2a) - \frac{3Pa}{2} = 0$$

$$\rightarrow F_2 + 2F_1 = \frac{3}{2}P \qquad (2)$$

توجه کنید معادلات را تا مرتبه‌ی اول نوشته‌ایم و لذا کج شدن میله تا مرتبه اول نسبت به θ تأثیری در تغییر فاصله‌ی افقی ندارد و این تغییر از مرتبه‌ی دوم است و در معادله‌ی گشتاور (معادله (۲)) ظاهر نشد.

اما نیاز به معادله‌ی سومی برای یافتن سه مجهول F_1، F_2 و F_3 است. با توجه به هندسه از شکل (۱۰-۱۸) و نوشتن رابطه‌ی تالس در مثلث ایجاد شده در شکل داریم:

$$\frac{\delta_1 - \delta_3}{\delta_2 - \delta_3} = \frac{2a}{a} \rightarrow \delta_2 = \frac{\delta_1 + \delta_3}{2}$$



شکل ۱۰-۱۸

از طرفی برای δ_1، δ_2 و δ_3، طبق رابطه‌ی افزایش طول برای یک میله یکنواخت $(\delta = \dfrac{F\ell}{AE})$ داریم:

$$\frac{F_2\ell_0}{AE} = \frac{\frac{F_1\ell_0}{AE} + \frac{F_3\ell_0}{AE}}{2} \rightarrow F_2 = \frac{F_1 + F_3}{2} \rightarrow F_3 = 2F_2 - F_1 \qquad (3)$$

با جاگذاری (۳) در (۱) داریم:

$$F_2 = \frac{P}{3}$$

$$\text{از (۲)} \rightarrow F_1 = \frac{7P}{12}$$

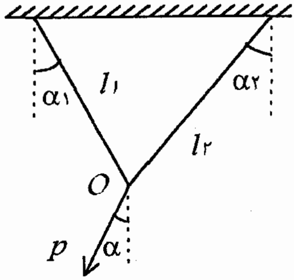
و از (۳) داریم:

$$F_3 = \frac{P}{12}$$

مثال ۱۰: مطابق شکل (۱۰-۱۹) دو میله‌ی (۱) و (۲) در نقطه‌ی O به همدیگر پین شده‌اند. اگر نیروی P با زاویه‌ی α نسبت به قائم به نقطه‌ی O وارد شود، جابجایی در دو راستای x و y را برای این نقطه بیابید.

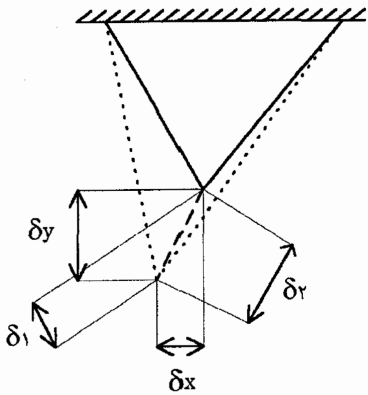
اطلاعات میله (۱): ℓ_1، A_1، E_1 و α_1

اطلاعات میله (۲): ℓ_2، A_2، E_2 و α_2



شکل ۱۰-۱۹

حل: مطابق شکل (۱۰-۲۰) جابجایی در راستای قائم را δy و در راستای افق را δx می‌گیریم:



شکل ۱۰-۲۰: خط‌چین نشان دهنده‌ی وضعیت میله‌ها بعد از اعمال P است.

اشتباهی که اکثریت در حل این سؤال می‌کنند این است که حرکت نقطه‌ی O را در راستای نیروی P در نظر می‌گیرند یعنی می‌پندارند که $\tan\alpha = \dfrac{\delta x}{\delta y}$ که غلط می‌باشد و دلیلی ندارد که جابجایی در راستای نیرو باشد. مطابق شکل (۱۰-۲۰) داریم: (فیثاغورث)

$$(\ell_2 + \delta_2)^2 = (\ell_2 \cos\alpha_2 + \delta x)^2 + (\ell_2 \sin\alpha_2 + \delta y)^2 \qquad (۱)$$

$$(\ell_1 + \delta_1)^2 = (\ell_1 \cos\alpha_1 + \delta x)^2 + (\ell_1 \sin\alpha_1 + \delta y)^2 \qquad (۲)$$

$$\delta_1 = \frac{F_1\ell_1}{A_1E_1} \qquad \delta_2 = \frac{F_2\ell_2}{A_2E_2}$$

$$\text{(۱) از} \rightarrow \delta_2 = \delta x \cos\alpha_2 + \delta y \sin\alpha_2 \qquad (۳)$$

$$\text{(۲) از} \rightarrow \delta_1 = -\delta x \cos\alpha_1 + \delta y \sin\alpha_1 \qquad (۴)$$

$$\text{از } (4) \rightarrow \delta x = \frac{\delta y \sin\alpha_1 - \delta_1}{\cos\alpha_1} = \frac{\delta y \sin\alpha_1 - \frac{F_1\ell_1}{A_1E_1}}{\cos\alpha_1}$$

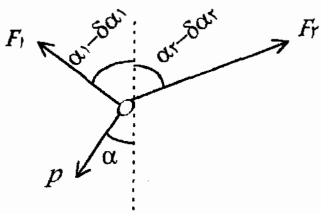
با جاگذاری δx در (۳) داریم:

$$\delta_2 = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}(\sin\alpha_1\delta y - \frac{F_1\ell_1}{A_1E_1}) + \delta y \sin\alpha_2$$

$$\rightarrow \frac{F_2\ell_2}{A_2E_2} = -\frac{F_1\ell_1}{A_1E_1}\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} + \delta y(\frac{\cos\alpha_2\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} + \sin\alpha_2)$$

$$\rightarrow \delta y = \frac{(\frac{F_1\ell_1}{A_1E_1}\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} + \frac{F_2\ell_2}{A_2E_2})\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} \rightarrow \delta y = \frac{\frac{F_1\ell_1\cos\alpha_2}{A_1E_1} + \frac{F_2\ell_2\cos\alpha_1}{A_2E_2}}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} \qquad (5)$$

برای بدست آوردن F_1 و F_2 دیاگرام آزاد پین O را در نظر می‌گیریم.



شکل ۱۰-۲۱

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_1\sin(\alpha_1 - \delta\alpha_1) + P\sin\alpha = F_2\sin(\alpha_2 - \delta\alpha_2) \qquad (6)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_1\cos(\alpha_1 - \delta\alpha_1) + F_2\cos(\alpha_2 - \delta\alpha_2) = P\cos\alpha \qquad (7)$$

برای بدست آوردن δy از (۵) نیاز به بدست آوردن F_1 و F_2 از (۶) و (۷) است اما جملات صورت کسر در (۵) از مرتبه‌ی یک می‌باشند و لذا باید F_1 و F_2 را تا مرتبه‌ی صفرم محاسبه نمود. بنابراین معادله‌ی (۶) و (۷) به صورت زیر در می‌آیند.

$$F_1\sin\alpha_1 + P\sin\alpha = F_2\sin\alpha_2 \rightarrow F_1 = \frac{F_2\sin\alpha_2 - P\sin\alpha}{\sin\alpha_1} \qquad (8)$$

$$F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2 = P\cos\alpha$$

با جاگذاری F_1 از (۸) در رابطه‌ی بالا داریم:

$$\frac{F_2\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - P\sin\alpha\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} + F_2\cos\alpha_2 = P\cos\alpha$$

$$\rightarrow F_2\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - P\sin\alpha\cos\alpha_1 + F_2\sin\alpha_1\cos\alpha_2 = P\cos\alpha\sin\alpha_1$$

$$\rightarrow F_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = P \sin\alpha \cos\alpha_2 \sin\alpha_1 + P \cos\alpha \sin\alpha_1$$

$$\rightarrow F_2 = \frac{P(\cos\alpha + \sin\alpha \cos\alpha_1)\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

با جاگذاری در (۸) داریم:

$$F_1 = \frac{\frac{P\cos\alpha\sin\alpha_2\sin\alpha_1 + P\sin\alpha\cos\alpha_1\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} - P\sin\alpha}{\sin\alpha_1}$$

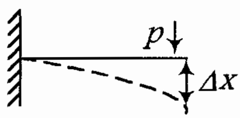
با داشتن F_1 و F_2 با توجه به رابطه‌ی (۵) δy محاسبه می‌شود و از آنجا δx هم بدست می‌آید (بدست آوردن جواب آخر را به شما واگذار می‌کنیم).

مسائل

۱) الف) دو فنر به ضریب سختی k_1 و k_2 را به هم به صورت سری وصل می‌کنیم. ضریب سختی معادل دو فنر را بیابید.

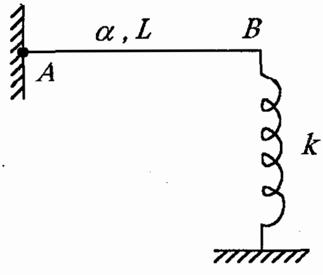
ب) برای حالت موازی این ضریب معادل را بیابید.

ج) اگر یک تیر را به دیواری جوش دهیم و به سر این تیر مطابق شکل (۱۰-۲۲) نیروی P وارد آوردیم. مقدار جابجایی سر تیر از رابطه‌ی $\Delta x = \alpha L^3 P$ بدست می‌آید که l طول میله است و α به جنس میله وابسته است.



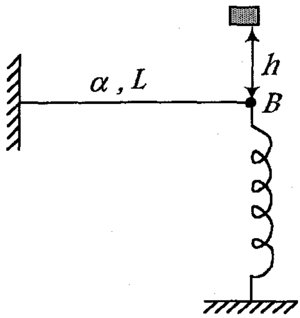
شکل ۱۰-۲۲

حالا فرض کنید که در نقطه‌ی B، یک فنر به ضریب سختی k را به سر تیر وصل کنیم. ضریب سختی معادل را بیابید. (شکل (۱۰-۲۳))



شکل ۱۰-۲۳

د) جسمی در ارتفاع h از نقطه‌ی B رها می‌شود. جرم جسم را m فرض کنید. مقدار جابجایی نقطه‌ی B را بیابید (این جسم درست در بالای نقطه‌ی B قرار دارد)



شکل ۱۰-۲۴

جواب: الف) $k_t = \dfrac{k_۱ k_۲}{k_۱ + k_۲}$

ب) $k_t = k_۱ + k_۲$

ج) $k_t = k + \dfrac{۱}{\alpha L^۳}$

د) $x_B = \dfrac{mg}{k + \frac{۱}{\alpha L^۳}} + \sqrt{\left(\dfrac{mg}{k + \frac{۱}{\alpha L^۳}}\right)^۲ + \dfrac{۲mgh}{k + \frac{۱}{\alpha L^۳}}}$

۲) ستونی از یک ماده به‌طور عمودی روی زمین گذارده شده است. به خاطر وزن خودش فشرده می‌شود. فاصله‌ی هر نقطه از این ستون تا سطح زمین در حالت فشرده نشده را با x نشان می‌دهیم. فاصله‌ی همین نقطه تا سطح زمین در حالت فشرده شده را با $z_{(x)}$ نشان می‌دهیم. ستون را می‌شود به شکل N فنر متوالی در نظر گرفت، که طول فشرده نشده‌ی هر یک $\Delta x = \dfrac{۱}{N}$، و ثابت فنر هر یک Nk است. L طول ستون است در حالی که فشرده نشده باشد. هر چه N بزرگ‌تر باشد این مدل به واقعیت نزدیک‌تر است.

الف) نیروی کشش یکی از فنرها را برحسب Δx (طول فنر در حالت عادی) و Δz (طول فنر در حالت فشرده شده) به دست آورید.

ب) N را به سمت بی‌نهایت میل دهید و نیروی کشش در نقطه‌ی x را بدست آورید. فرض کنید چگالی طول ستون یکنواخت است، یعنی وزن بخشی از ستون به طول کشیده نشده‌ی D برابر است با DW که W ثابت است.

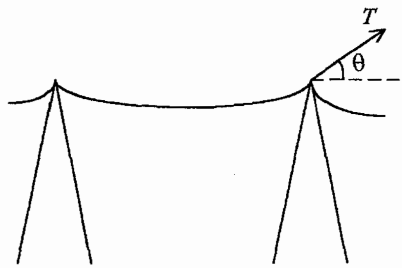
ج) شرط تعادل را برای قسمتی از ستون که بالای نقطه‌ی x است بنویسید، و z را برحسب x بدست آورید.

د) تغییر طول ستون را در اثر فشردگی حساب کنید.

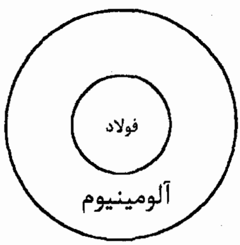
ه) به جای ستون، فنر بدون جرم قائمی با ثابت k را در نظر بگیرید، که روی آن باری به وزن WL (وزن ستون قبل) گذاشته‌اند. تغییر طول این فنر در اثر این بار چقدر است؟

(آزمون مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد فیزیک کشوری)

۳) در شکل (۱۰-۲۵) قسمتی از یک خط انتقال نیرو نشان داده شده است. طول کابلی که میان دو دکل بسته شده، $\ell = ۳۰۰\ m$ است. کابل در محل اتصال به دکل، با راستای افق زاویه‌ی $\theta = ۳۰^\circ$ می‌سازد. در شکل (۱۰-۲۶) مقطع کابل نشان داده شده است. کابل از یک رشته‌ی فولادی به سطح مقطع $S_S = ۸\ cm^۲$ و یک غلاف آلومینیومی تشکیل شده است که به آن چسبیده است. مساحت مقطع آلومینیومی $S_A = ۱۲\ cm^۲$ است. چگالی فولاد $d_S = ۷۸۰۰\ Kg/m^۳$ و چگالی آلومینیوم $d_A = ۲۷۰۰\ Kg/m^۳$ و $g = ۱۰\ m/s^۲$ است.



شکل ۱۰-۲۵

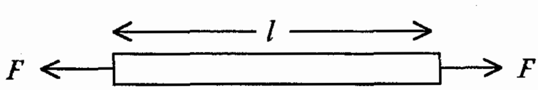


شکل ۱۰-۲۶

الف) نیروی کشش کابل، T، را در محل اتصال به دکل بدست آورید. اگر مطابق شکل (۱۰-۲۷) میله‌ای به طول ℓ و سطح مقطع S، تحت نیروی کشش F قرار گیرد، طول میله به اندازه‌ی $\Delta\ell$ افزایش می‌یابد. بنا به تعریف، مدول یانگ، Y، برای این میله با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$Y = \frac{F}{S}\frac{\ell}{\Delta\ell}$$

مدول یانگ را برای فولاد $Y_S = ۲۵۰ \times ۱۰^۹\ N/m^۲$ و برای آلومینیوم $Y_A = ۷۰ \times ۱۰^۹\ N/m^۲$ بگیرید. پیش از بستن کابل به دکل‌ها، مغز فولادی و غلاف آلومینیومی، کشیده شده نبوده و تحت فشار نبوده‌اند.



شکل ۱۰-۲۷

ب) نیروی کشش در مغز فولادی کامل، T_S و نیز نیروی کشش در غلافِ آلومینیوم، T_A، را بدست آورید. فرض کنید شدت جریانی که ازکابل می‌گذرد، $I = ۴۰۰ \ A$ است. مقاومت ویژه‌ی فولاد را $\rho_S = ۹/۵ \times ۱۰^{-۸} \ \Omega m$ و مقاومت ویژه‌ی آلومینیوم را $\rho_A = ۲/۷ \times ۱۰^{-۸} \ \Omega m$ بگیرید.

ج) جریانی که از مغز فولادی می‌گذرد، I_S، و جریانی که از غلاف آلومینیومی می‌گذرد، I_A، چقدر است؟

(مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد فیزیک کشوری)

جواب: الف) $T = ۲۸۴۴۰ \ N$

ب) $T_A = ۸۴۱۴ \ N, \ \ T_S = ۲۰۰۲۶ \ N$

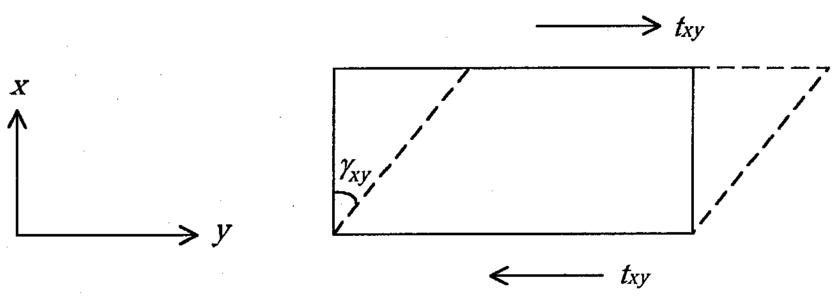
ج) $I_A = ۳۳۶ \ A \ , \ \ I_S = ۶۴ \ A$

۴) اگر مکعب مستطیلی تحت نیروی برشی قرار گیرد زاویه‌اش با ضلع مجاور به اندازه‌ی γ_{xy} تغییر می‌کند که اندیس xy نشان دهنده‌ی این است که نیروی برشی دارای این اندیس است یعنی t_{xy} و t_{xy} نشان دهنده‌ی آن است که نیروی برشی در صفحه‌ای که بردار نرمالش در راستای x است قرار دارد و خود نیرو در راستای y است. منظور از نیرو، نیرو در واحد سطح می‌باشد.

برای این مکعب مستطیل داریم:

$$t_{xy} = G\gamma_{xy}$$

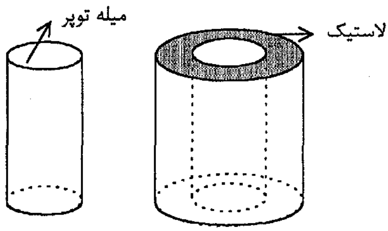
که در آن γ_{xy} برحسب رادیان و G ثابت مدول برشی است.



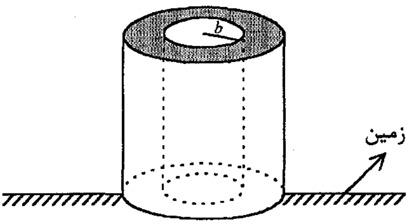
شکل ۱۰-۲۸

حالا حلقه‌ای لاستیکی به شعاع داخلی a و خارجی b و ارتفاع h و چگالی ρ و ثابت برشی G را در نظر بگیرید. میله‌ای فولادی را داخل حلقه قرار می‌دهیم و سطح داخلی لاستیک را به‌طور کامل به میله می‌چسبانیم. سپس حلقه را داخل لوله‌ای توخالی از جنس فولاد و با ارتفاع خیلی

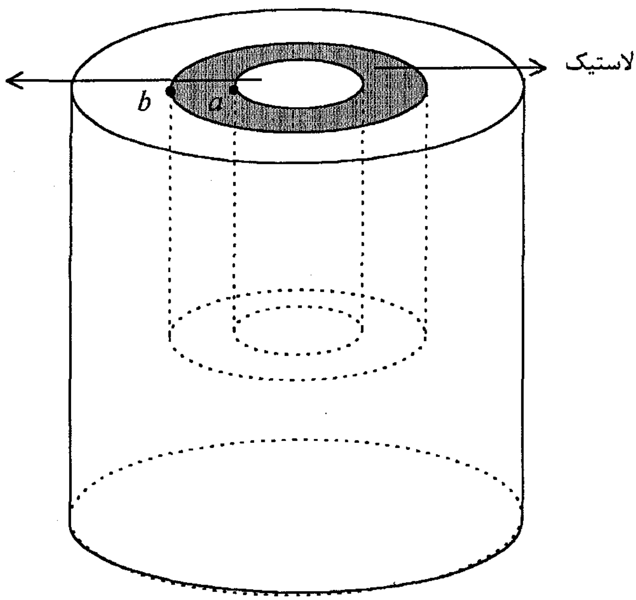
بیشتر از h قرار می‌دهیم و مانند قبل کاملاً می‌چسبانیم. سپس نیروی ρ را به‌طور عمودی به میله‌ی فولادی با شعاع کوچک (میله‌ی توپر به شعاع a) وارد می‌کنیم. مقدار جابجایی عمودی این میله را بیابید (از شتاب جاذبه صرف‌نظر کنید)



شکل ۱۰-۲۹



شکل ۱۰-۳۰



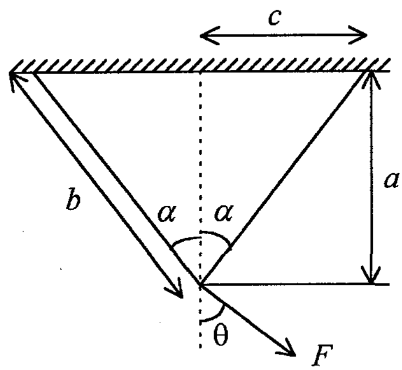
شکل ۱۰-۳۱

راهنمایی ۱: چگالی مورد نیاز نیست و نقطه‌ی b ثابت است و مسأله جابجایی نقطه‌ی a را می‌خواهد.

راهنمایی ۲: لاستیک را به استوانه‌های نازک تقسیم کنید و بعد از یافتن جابجایی نسبی سطح داخلی و خارجی استوانه‌های نازک روی آن از b تا a انتگرال بگیرید.

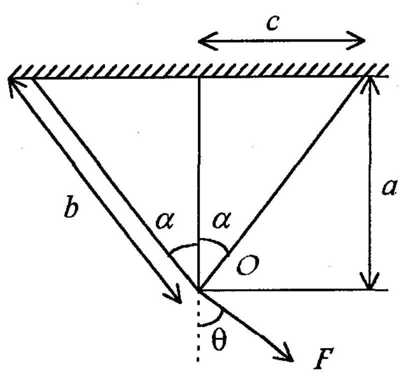
۵) الف) مطابق شکل (۱۰-۳۲) دو میله را در نظر بگیرید. نیروی ثابت F با زاویه‌ی θ نسبت به خط عمود به نقطه‌ی اتصال دو میله وارد می‌شود. نیروی کشش دو میله را حساب کنید.

در تمام قسمت‌های مسأله از جرم میله‌ها صرف‌نظر کنید و فرض کنید تمام اتصال میله‌ها با دیوار و با یکدیگر بدون اصطکاک است.



شکل ۱۰-۳۲

ب) میله‌ی دیگری مطابق شکل (۱۰-۳۳) به دستگاه اضافه می‌شود، به‌طوری که وقتی نیرویی به نقطه‌ی O وارد نشود کشش هر سه میله صفر است. معادلات نیرو را برای دستگاه جدید بنویسید و نشان دهید که این معادلات برای بدست آوردن کشش سه میله کافی نیست.



شکل ۱۰-۳۳

پ) برای حل مسأله فرض می‌کنیم هرکدام از میله‌ها به مقدار بسیار کمی تغییر طول پیدا می‌کنند. ثابت کشسانی میله‌ی وسط k_1 و ثابت کشسانی دو میله‌ی دیگر k است. با فرض این

که نقطه‌ی تماس O به اندازه‌ی کوچکی جابجا شود، تغییر طول و در نتیجه کشش هر میله را برحسب جابجایی نقطه‌ی تماس سه میله به دست آورید. معادلات به دست آمده را به همراه معادلات قسمت (ب) حل کنید و کشش هر میله را برحسب α، θ و $\eta = \frac{k_1}{k}$ به دست آورید.

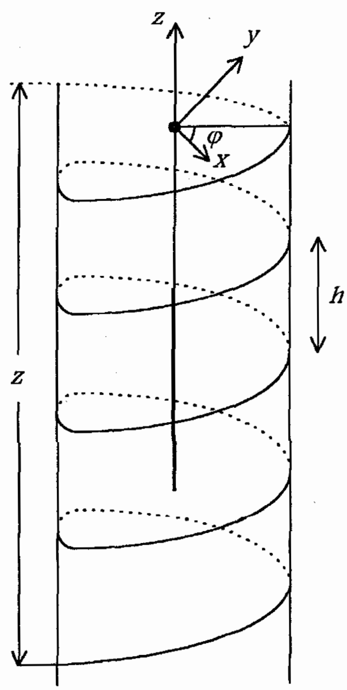
(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۷۹)

جواب: الف)
$$T_1 = F\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin 2\alpha}\ ,\quad T_2 = F\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin 2\alpha}$$

ب)

$$T_1 = \frac{F}{2}\left[\frac{2\cos\alpha\cos\theta}{2\cos^2\alpha+\eta} - \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right]$$
$$T_2 = \frac{F}{2}\left[\frac{2\cos\alpha\cos\theta}{2\cos^2\alpha+\eta} + \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right]$$
$$T_3 = \frac{\eta}{2}\frac{T_1+T_2}{\cos\alpha} = \eta\frac{F\cos\theta}{2\cos^2\alpha+\eta}$$

۶) مطابق شکل (۱۰-۳۴) فنری به طول Z که به استوانه‌ای به شعاع R محاط است در اختیار داریم. پای پیچ فنر h است. معادله‌ی شکل فنر (مارپیچ) به صورت زیر است:

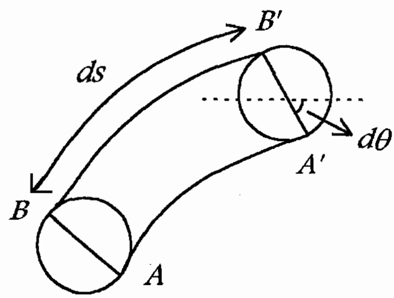


شکل ۱۰-۳۴

$$\vec{r} = R\cos\varphi\hat{i} + R\sin\varphi\hat{j} + \frac{h}{۲\pi}\varphi\hat{k}$$

الف) شعاع انحنای فنر را بدست آورید.

ب) فرض کنید این فنر از سیم ساخته شده است. این سیم چون قطر دارد شیب خم مربوط به داخلی‌ترین بخش سیم نسبت به صفحه‌ی xy با شیب مربوط به خارجی‌ترین بخش سیم نسبت به صفحه‌ی xy متفاوت است. همین عامل باعث می‌شود بعد از طی مسیر ds، نقاط انتهایی این دو خم نسبت به نقاط اولیه‌شان پیچیده باشند. مطابق شکل (۱۰-۳۵)، $\frac{d\theta}{ds}$ و پیچش سیم به ازای واحد طول است و θ پیچش به ازای کل مسیر است. θ را برحسب Z، h و R بدست آورید.



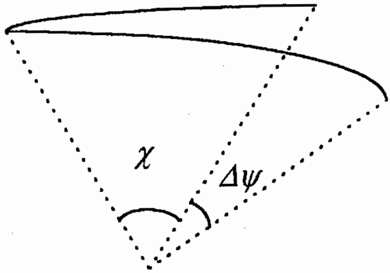
خم AA' : داخلی ترین بخش سیم

خم BB' : خارجی ترین بخش سیم

شکل ۱۰-۳۵

ج) اگر طول سیم تشکیل دهنده‌ی فنر L و شعاع آن a باشد ($L \gg a$) گشتاوری که به ازای پیچش کوچک $\Delta\theta$ در سیم به وجود می‌آید متناسب با $\Delta\theta$ و به صورت $\tau = k\Delta\theta$ است. k ثابت است و برابر $k = \theta'\frac{\pi a^۴}{۲L}$ است (θ' به جنس بستگی دارد و مدول برشی خوانده می‌شود). به همین ترتیب گشتاوری که به ازای خم شدن این سیم از انحنای ψ به $\psi + \Delta\psi$ ($\Delta\psi$ کوچک است) به انتهای آن وارد می‌شود برابر $\tau' = k'\Delta\psi$ است که در آن k' ثابت و برابر $k' = Y\frac{\pi a^۴}{۴L}$ (Y: به جنس بستگی دارد و مدول یانگ نامیده می‌شود)

حالا فرض کنید که فنر را به اندازه‌ی کوچک Δz بکشیم. شکل نهایی فنر را بدست آورید. یعنی مقدار تغییر فنر (Δh) و شعاع استوانه‌ای که فنر بر آن محاط است (ΔR) را تعیین کنید.



شکل ۱۰-۳۶

راهنمایی: گشتاور کمیتی است که از حاصل ضرب نیرو در طول بازوی اعمال نیرو بدست می‌آید. رابطه‌ی $\tau = k\Delta\varphi$ رابطه‌ی $F = k\Delta x$ است و انرژی پتانسیل مربوط به آن نیز شبیه انرژی پتانسیل مربوط به F که به صورت $U = \frac{1}{2}k\Delta x^2$ است به شکل $U = \frac{1}{2}k(\Delta\varphi)^2$ می‌باشد.

د) نشان دهید قانون هوک برقرار است. یعنی $F = -k\Delta Z$. مقدار k را برحسب Z، h و R اولیه و ثوابت a، θ' و Y بدست آورید.

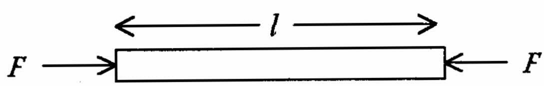
(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۳)

۷) از یک ورقه‌ی فلزی تخت، یک قرص دایره‌ای بیرون آورده‌ایم. با یک مفتول نازک به سطح مقطع a یک حلقه‌ی دایره شکل درست کرده‌ایم. ضریب انبساط سطحی ورقه 2λ و ضریب انبساط طولی مفتول α است. در دمای صفر درجه‌ی سیلسیوس شعاع دایره‌ای که از ورقه بیرون آورده‌ایم R_0، و شعاع حلقه $r_0 = \beta R_0$ است ($\beta < 1$). حلقه را جای خالی قرص می‌گذاریم به‌طوری که آن دو هم مرکز باشند و صفحه‌ی آنها بر هم منطبق باشد.

الف) چه رابطه‌ای میان شعاع‌های حلقه و قرص و ضرایب انبساط آنها برقرار باشد، تا با افزایش دما، حلقه در جای خالی قرص گیر کند؟

ب) حداقل افزایش دما، $\Delta\theta_1$، برای این منظور چقدر است؟

میله‌ای به طول ℓ و سطح مقطع A در نظر بگیرید. (اگر مطابق شکل (۱۰-۳۷) به دو سر این میله دو نیروی هم اندازه‌ی F در راستای میله وارد شود و طول میله به اندازه‌ی $\Delta\ell$ کوتاه شود، مدول یانگ برای این میله، Y، با رابطه‌ی $Y = \frac{F}{A}\frac{\ell}{\Delta\ell}$ تعریف می‌شود.



شکل ۱۰-۳۷

ج) در حالی که حلقه در جای خالی قرص قرار دارد، دمای حلقه و ورقه‌ی فلزی را از صفر درجه‌ی سیلسیوس $2\Delta\theta_1$ افزایش می‌دهیم. کمان کوچکی از حلقه به طول ΔS را در نظر بگیرید و نیروی شعاعی وارد بر آن، ΔF_r، را بدست آورید. از تغییر شعاع جای خالی قرص به جز بر اثر افزایش دما چشم‌پوشی کنید.

(امتحان مرحله‌ی دوم چهاردهمین المپیاد فیزیک کشوری)

جواب: الف) $\alpha\beta > \lambda$

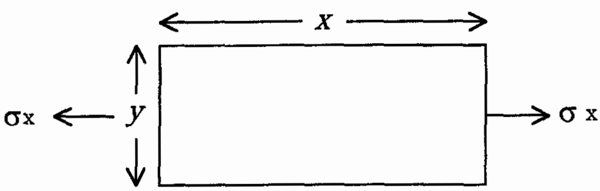
ب) $$\Delta\theta_1 = \frac{1-\beta}{(\alpha\beta-\lambda)}$$

ج) $$\Delta F_r = \frac{Ya(1-\beta)}{\beta^2 R_0\left(1+\alpha\frac{2(1-\beta)}{\alpha\beta-\lambda}\right)^2}\Delta S$$

۸) اگر صفحه‌ای مستطیلی را با نیرو در واحد سطح σ_x در راستای x تحت کشش یا فشار قرار دهیم داریم:

$$\left|\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}\right| = \nu$$

که ν ضریب پواسن است و $\epsilon_y = \dfrac{\Delta y}{y}$ و $\epsilon_x = \dfrac{\Delta x}{x}$ می‌باشند.

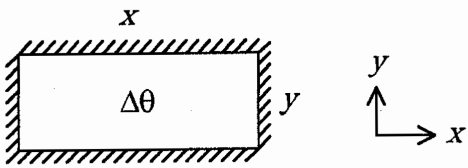


شکل ۱۰-۳۸

همچنین می‌دانیم که $\epsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E}$ که E مدول یانگ می‌باشد. (اگر σ_y و σ_z صفر باشند) حالا اگر در راستای y و z هم نیرو داشته باشیم:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

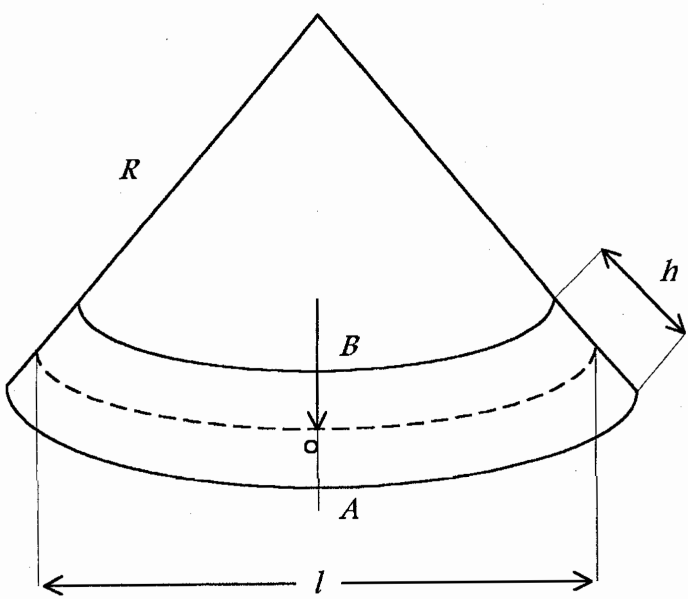
الف) صفحه‌ای مستطیلی را از چهار طرف به وسیله‌ی دیوار محدود کرده‌ایم. حالا صفحه را به اندازه‌ی $\Delta\theta$ گرم می‌کنیم. مقدار σ_x و σ_y را بیابید. (نیرو در واحد سطح از طرف دیوار بر مستطیل)



شکل ۱۰-۳۹

ب) مکعب مستطیلی به ابعاد $a \times b \times c$ به چگالی ρ در اختیار داریم. سوراخی به ابعاد $a \times b$ (سطح سوراخ) در زمین کنده‌ایم که به اندازه‌ی کافی گود است. مکعب مستطیل را در درون سوراخ قرار می‌دهیم که به واسطه‌ی وزش طول c از c به $c+\Delta c$ تغییر می‌کند. مقدار Δc را بیابید.

۹) می‌خواهیم قطعه‌ی چوبی به طول ℓ، به پهنای W و به ارتفاع h را بشکنیم. برای شکستن، آن را مطابق شکل (۱۰-۴۰) روی دو پایه قرار داده، به وسط آن نیروی F وارد می‌کنیم. فرض کنید چوب در اثر این نیرو تغییر شکل داده و به شکل کمانی از یک دایره به شعاع R در می‌آید. همچنین فرض کنید که طول، در صفحه‌ای که از وسط چوب می‌گذرد (خط‌چین) همان مقدار اولیه‌ی طول چوب است.



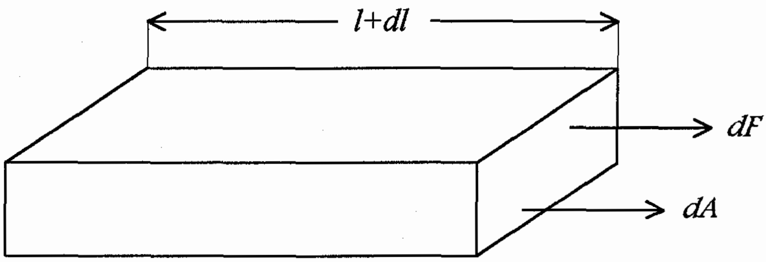
شکل ۱۰-۴۰

الف) تغییر طول صفحات مختلف چوب را برحسب x (فاصله‌ی O در راستای AB) به دست آورده و نیرویی را که نیمه سمت راست چوب به نیمه‌ی سمت چپ یا برعکس وارد می‌کند

محاسبه کنید. برای بدست آوردن نیرو از مدول کشسانی یانگ استفاده نمایید. یعنی

$$dF = Y(\frac{\delta\ell}{\ell})dA$$

که در آن Y مدول کشسانی یانگ و ثابت است، $\delta\ell$ تغییر طول، ℓ طول اولیه و dA قطعه مساحتی است که نیرو در آنجا محاسبه می‌شود.



شکل ۱۰-۴۱

ب) برای نیمه‌ی سمت چپ (یا سمت راست) تعادل نیروها وگشتاورها حول O را بنویسید و از آنجا R را برحسب F بدست آورید. (اگر $\frac{\delta\ell}{\ell}$ از یک حد بحرانی زیادتر شود، چوب می‌شکند.)

پ) استدلال کنید که چرا $R_۲$ای وجود دارد که چوب به محض رسیدن به آن می‌شکند؟

ت) بستگی نیروی لازم برای شکستن چوب را به W، h و ℓ بدست آورید. اگر هر یک را (تک تک) دو برابر کنیم نیروی لازم چند برابر می‌شود.

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۷۷)

جواب: الف) $\delta\ell = \frac{\ell x}{R}\ ,\quad F = \frac{۱}{۸}\frac{YW}{R}h^۲$

ب) $R = \frac{YW}{F\ell}\frac{h^۳}{۳}$

ت) ۴ برابر

۱۰) دو قطبی الکتریکی $\vec{P} = P\hat{z}$ در نقطه‌ی ($x = ۰$ و $y = ۰$ ،$z = ۰$) است. یک حلقه‌ی باردار با چگالی یکنواخت در نظر بگیرید که صفحه‌ی آن عمود بر محور z، و مرکز آن در (z، $y = ۰$ و $x = ۰$) است. بار کل حلقه q است.

الف) شعاع حلقه را a بگیرید و نیروی وارد بر حلقه را حساب کنید.

فرض کنید حلقه کشسان است، شعاع آن را در حالت کشیده یا فشرده نشده $a_\circ$ است، و $T = Y\dfrac{\Delta a}{a_\circ}$، که T نیروی کشش در حلقه، Δa تغییر شعاع حلقه نسبت به $a_\circ$، و Y یک مقدار ثابت است. فرض کنید Y بسیار بزرگ است. در افزایش شعاع حلقه، از اثر بار حلقه روی خودش صرف‌نظر کنید، و تنها اثر دو قطبی روی حلقه را در نظر بگیرید.

ب) Δa را تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر نسبت به $\dfrac{1}{Y}$ حساب کنید.

ج) اولین تصحیح غیر صفر نسبت به $\dfrac{1}{Y}$ در نیروی وارد بر حلقه را حساب کنید.

(امتحان دوره‌ی ۴۰ نفر باشگاه دانش پژوهان جوان سال ۱۳۸۴)

فصل یازدهم

کار مجازی ـ نیروی مجازی در دستگاه مختصات دوار

۱۱-۱ کار مجازی

می‌دانیم در نقطه‌ی تعادل یک ذره داریم: $\frac{du}{dr} = \circ$ یا $\delta u = \circ$ (تا مرتبه‌ی اول نسبت به جابجایی). حال اگر سیستمی متشکل از چند جسم صلب به هم پیوسته داشته باشیم باز هم در نقطه‌ی تعادل سیستم $\delta u = \circ$. از طرفی در این سیستم‌ها $\delta u = \sum \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{\delta r_i}$ که در آن $\overrightarrow{F_i}$ نیروی خارجی iام و $\overrightarrow{\delta r_i}$ جابجایی کوچک آن از حالت تعادل است. بنابراین در نقطه‌ی تعادل

$$\sum \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{\delta r_i} = \circ \qquad (۱۱-۱)$$

است.

ما به جمله‌ی $\sum \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{\delta r_i}$ کار مجازی می‌گوییم، زیرا وقتی جسمی در حال تعادل است حرکت ندارد

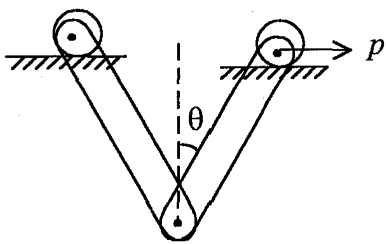
و این کار با فرض اختلال کوچک و انحراف کوچک سیستم است که در واقع وجود ندارد و فقط برای حل مسأله است. بنابراین کار مجازی انجام شده توسط نیروهای خارجی روی سیستم‌های فیزیکی ایده‌آل در حال تعادل، برای هر جابجایی و همه‌ی جابجایی‌های سازگار با قیود مسأله برابر صفر است.

منظور از جمله‌ی سازگار با قیود مسأله این است که مثلاً اگر جسمی روی سطحی قرار دارد جابجایی باید روی سطح باشد و این اجازه را نداریم که جابجایی داده شده توسط ما، تماس جسم با سطح را قطع کند.

لازم به ذکر است که کار نیرو در اثر جابجایی کوچک δr نقطه اثر نیرو، $F\delta r$ و کار گشتاور در اثر جابجایی کوچک $\delta\theta$، $M\delta\theta$ می‌باشد.

مزیت این روش این است که بدون دخالت نیروهایی که جابجایی‌اشان صفر است به جواب می‌رسیم و آنها دخیل نمی‌شوند مانند نیروی نرمال سطح (بر جابجایی عمود است) و نیروهای تکیه‌گاهی که جابجایی‌اشان صفر است و نیروهای خارجی متحرک غیر عمود بر جابجایی (نیروهای فعال) دخیل می‌شوند.

مثال ۱: دو میله‌ی یکنواخت، هر یک به جرم m و طول ℓ به یکدیگر لولا شده و مطابق شکل (۱۱-۱) بارگذاری شده‌اند. به ازای نیروی معلوم P، زاویه‌ی θ در حالت تعادل چقدر است؟



شکل۱۱-۱

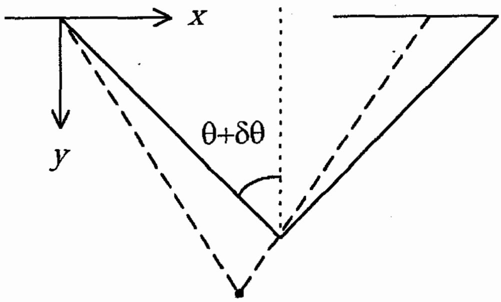
حل: نیروهای خارجی، P و نیروی وزن و نیروی تکیه‌گاه ۰ است که نیروی تکیه‌گاه جابجایی ندارد. بنابراین کار مجازی‌اش صفر است.فرض می‌کنیم نیروی P به اندازه‌ی δx جابجا شود. با توجه به شکل (۱۱-۲) برای جابجایی مرکز جرم هر یک از دو میله با تفریق مختصات y اولیه از ثانویه داریم:

$$\delta y = \frac{\ell}{۲}(\cos(\theta + \delta\theta) - \cos\theta) \rightarrow \delta y = -\frac{\ell}{۲}\delta\theta \sin\theta$$

که علامت منفی نشان دهنده‌ی کم شدن y است.

برای یافتن $\delta\theta$ با توجه به شکل جابجایی δx را به صورت تفریق مختصات اولیه از ثانویه می‌نویسیم.

$$\delta x = ۲\ell\sin(\theta + \delta\theta) - ۲\ell\sin\theta = ۲\ell(\sin\theta + \delta\theta\cos\theta - \sin\theta)$$
$$= ۲\ell\cos\theta\delta\theta \rightarrow \delta\theta = \frac{\delta x}{۲\ell\cos\theta} \rightarrow \delta y = -\frac{\ell}{۲}\sin\theta\frac{\delta x}{۲\ell\cos\theta} \rightarrow \delta y = -\frac{\delta x\tan\theta}{۴}$$



شکل۱۱-۲

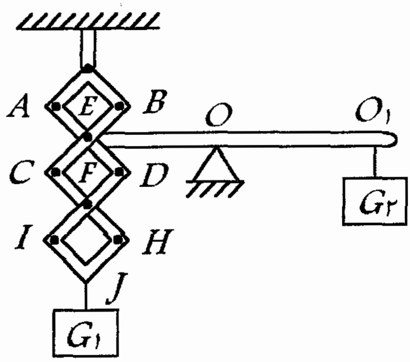
از رابطه‌ی $\sum \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{\delta r_i}$ برای تعادل سیستم داریم:

$$P\delta x + ۲mg\delta y = ۰ \rightarrow P\delta x - \frac{mg}{۲}\tan\theta\delta x = ۰$$

$$\rightarrow P = \frac{mg}{۲}\tan\theta \rightarrow \theta = \tan^{-۱}(\frac{۲P}{mg})$$

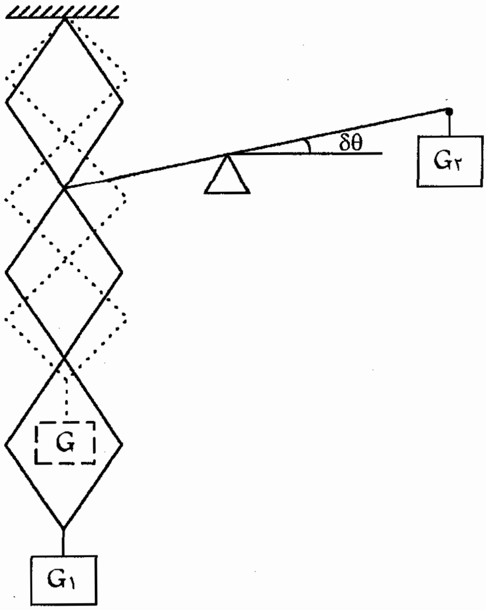
مثال ۲: به ازای چه نسبتی بین وزنه‌های $G_۱$ و $G_۲$، دستگاه نشان داده شده در شکل (۱۱-۳) به حال تعادل خواهد بود؟

میله‌های AD، BC، CH و DI و بازوی $OO_۱$ اهرم هر یک به ترتیب طولی دو برابر میله‌های AE، EB، IJ و JH و بازوی FO دارند. وزن نرده‌ها و بازو ناچیز است.



شکل۱۱-۳

حل: برای حل مسأله با استفاده از حل کار مجازی باید به سیستم جابجایی کوچک بدهیم. لذا شکل (۱۱-۴) حاصل می‌شود.



شکل۱۱-۴

همانطور که در مثال ۴ فصل سوم دیدیم جابجایی نقطه‌ی J سه برابر جابجایی نقطه‌ی F است و برای جابجایی نقطه‌ی F هم داریم:

$$\delta y_F = \ell\delta\theta \rightarrow \delta y = ۳\ell\delta\theta \qquad (۱)$$

برای جابجایی $O_۱$ هم داریم:

$$\delta O_۱ = ۲\ell\delta\theta \qquad (۲)$$

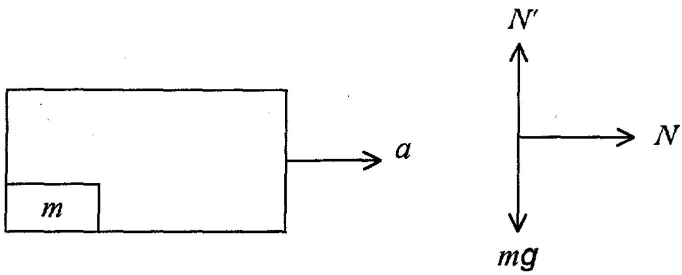
نیروهای خارجی روی این سیستم، نیروی وزن $G_۱$ و $G_۲$ و نیروی تکیه‌گاه و سقف است که نیروی تکیه‌گاه و سقف جابجایی ندارند بنابراین کار مجازی هم ندارند و فقط نیروهای خارجی متحرک (فعال) در کار مجازی شرکت دارند و لذا از رابطه‌ی (۱۱-۱) داریم: (و با استفاده از (۱) و (۲))

$$۳\ell\delta\theta G_۱ - ۲\ell\delta\theta G_۲ = ۰ \rightarrow \frac{G_۱}{G_۲} = \frac{۲}{۳}$$

۱۱-۲ تعریف نیروی مجازی

همانطور که می‌دانید برای بررسی هر مسأله در فیزیک ابتدا دستگاه مختصات را انتخاب می‌کنیم که این دستگاه می‌بایست لخت باشد (با سرعت ثابت حرکت کند) و اجازه‌ی انتخاب دستگاه نالخت (شتابدار)

را نداریم مگر آنکه به تک تک اجرام، که آنها را از دید دستگاه جدید شتابدار رصد می‌کنیم یک نیروی مجازی که عبارتست از جرم ذره ضرب در قرینه‌ی شتاب دستگاه نالخت را وارد کنیم. $(-m\vec{a})$، که در آن صورت می‌توانیم به بررسی مسأله بپردازیم و نتایج درستی را بدست آوریم که با واقعیت مطابق است. به‌طور مثال در نظر بگیرید جسم به جرم m را در انتهای یک واگن که با شتاب a به سمت جلو حرکت می‌کند مانند شکل (۱۱-۵). از دید ناظر خارجی نیروهای وارد بر جسم m به صورت زیر می‌باشند.

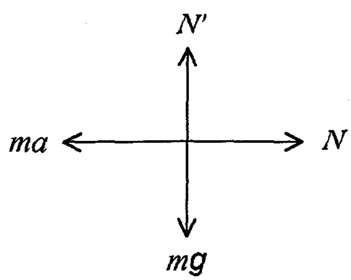


(الف) (ب)

شکل۱۱-۵

که در این جا $N = ma$.

حال فرض کنید دستگاه مختصات را روی واگن نصب کنیم در آن صورت مشاهده می‌کنیم که یک نیروی افقی به جرم m وارد می‌شود (N). اما این جسم حرکتی ندارد (از دید ناظر روی واگن). بنابراین به تناقض می‌رسیم. برای رفع این مشکل همانطور که گفتیم باید فرض کنیم که نیرویی در خلاف جهت شتاب دستگاه مختصات (خلاف جهت شتاب واگن) به جسم وارد می‌شود (نیروی مجازی) که مقدار آن ma است. بنابراین در این مثال دیاگرام آزاد از دید ناظر روی واگن با این فرض به صورت زیر در می‌آید.



شکل۱۱-۶

با توجه به سکون جسم از دید ناظر روی واگن معادله‌ی زیر توسط این ناظر حاصل می‌شود:

$$N = ma$$

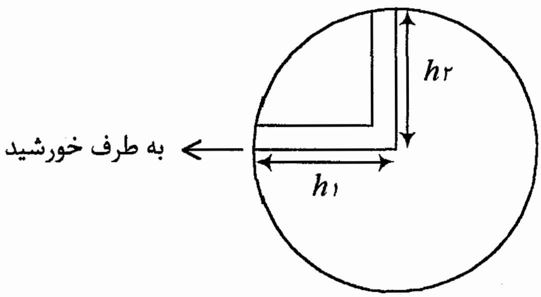
این معادله همان معادله‌ای است که ناظر روی زمین بدست آورده بود. به همین ترتیب اگر نیروی مجازی را در دستگاه‌های نالخت وارد کنیم می‌توانیم معادلات انرژی و تکانه و ... را بنویسیم و جواب درست را در این مبحث (نیروی مجازی) بررسی کنیم.

۱۱-۳ پدیده‌ی جزر و مد

مثال ۳: این مثال براساس مدلی است که بوسیله نیوتن طرح شده است برای بررسی پدیده جزر و مد. فرض کنید دو چاه پر از آب از سطح زمین تا مرکز آن کشیده شده است و در آنجا به هم می‌پیوندند. یکی در امتداد زمین ـ خورشید و دیگر عمود بر آن است.

اختلاف ارتفاع ایجاد شده برای دو ستون آب را به واسطه‌ی حرکت به دور خورشید بیابید.

$$\Delta h_s = h_۱ - h_۲ =?$$



شکل۱۱-۷

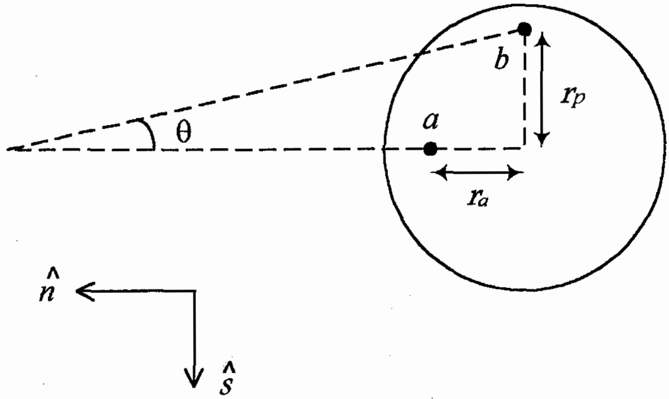
دستگاه مختصات را در مرکز زمین قرار می‌دهیم.

اندازه‌ی شتاب مرکز زمین به صورت $\overrightarrow{G_\circ} = \frac{GM_s}{r_s^۲}\hat{n}$ می‌باشد که $\hat{n}$ بردار یکه در راستای خط واصل مرکز زمین و خورشید است و $\hat{s}$ بردار یکه‌ی عمود بر آن. با توجه به شکل (۱۱-۸) برای محاسبه‌ی میدان جاذبه‌ی خورشید در نقطه‌ی b داریم:

$$\overrightarrow{G_b} = \frac{GM_s}{(r_s^۲ + r_b^۲)}(\sin\theta\hat{s} + \cos\theta\hat{n})$$

برای سینوس وکسینوس θ هم داریم:

$$\sin\theta = \frac{r_b}{\sqrt{r_b^۲ + r_s^۲}} \qquad \cos\theta = \frac{r_s}{\sqrt{r_s^۲ + r_b^۲}}$$



شکل ۱۱-۸

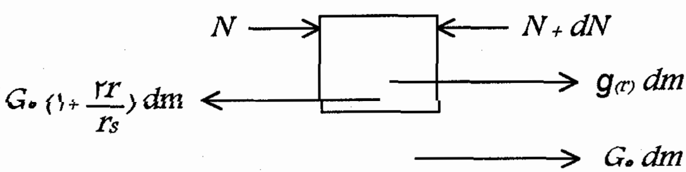
با بسط جملات شتاب تا تقریب مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{r_b}{r_s}$ و صرف‌نظر از جملات مرتبه‌ی بالاتر داریم:

$$\overrightarrow{G_b} = \frac{GM_s}{r_s^2}\left(\frac{r_b}{r_s}\hat{s} + \hat{n}\right) = \overrightarrow{G_\circ} + G_\circ\frac{r_b}{r_s}\hat{s}$$

به همین ترتیب برای محاسبه‌ی میدان جاذبه در نقطه a داریم:

$$\overrightarrow{G_a} = \frac{GM_s}{(r_s - r_a)^2}\hat{n} = \frac{GM_s}{r_s^2(1 - \frac{2r_a}{r_s})^2}\hat{n} = G_\circ(1 + \frac{2r_a}{r_s})\hat{n}$$

با توجه به شکل (۱۱-۹) المانی از ستون (۱) (این ستون در راستای خط واصل مرکز زمین و خورشید است) را در نظر می‌گیریم. با توجه به این که دستگاه مختصات در مرکز زمین نصب شده، باید یک نیروی مجازی $G_\circ dm$ را که در آن $G_\circ$ اندازه‌ی شتاب مرکز زمین است در خلاف جهت $\hat{n}$ به المان وارد کنیم.



شکل ۱۱-۹

از دید ناظر روی زمین شتاب صفر است لذا برای تعادل المان داریم:

$$N + dN + G_\circ(1 + \frac{2r}{r_s})dm = N + G_\circ dm + g_{(r)}dm$$

که در این رابطه از جمله‌ی چرخش زمین به حول محور خود در برابر $g_{(r)}$ صرف‌نظر شده است و همچنین در این رابطه، N نیروی نرمال بین سطوح مایع است و $G_\circ dm$ نیروی مجازی و $G_\circ(1+\frac{2r}{r_s})dm$ نیروی گرانش خورشید و $g_{(r)}dm$ نیروی گرانش زمین می‌باشد. با ساده کردن معادله‌ی بالا داریم:

$$dN = (g_{(r)} - \frac{2G_\circ r}{r_s})dm$$
$$dm = \rho A dr$$

که در آن A مساحت مقطع چاه است.

$$dN = A dP_1$$

که در آن P_1 فشار در ستون (۱) است.

$$\rightarrow dP_1 = (g_{(r)} - \frac{2G_\circ r}{r_s})dr$$

با استدلال مشابه برای ستون (۲) هم داریم:

$$dP_2 = (g_{(r)} + \frac{G_\circ r}{r_s})dr$$

از آنجایی که فشار در ته دو چاه، باید یکسان باشد داریم:

$$\int_\circ^{h_1} (g_{(r)} - \frac{2G_\circ r}{r_s})dr = \int_\circ^{h_2} (g_{(r)} + \frac{G_\circ r}{r_s})dr$$
$$\rightarrow \int_\circ^{h_1} g_{(r)}dr - \frac{2G_\circ}{r_s}\int_\circ^{h_1} rdr = \int_\circ^{h_2} g_{(r)}dr + \frac{G_\circ}{r_s}\int_\circ^{h_2} rdr$$
$$\rightarrow \int_\circ^{h_1} g_{(r)}dr - \int_\circ^{h_2} g_{(r)}dr = \frac{2G_\circ}{r_s}\int_\circ^{h_1} rdr + \int_\circ^{h_2} rdr$$
$$\rightarrow \int_{h_2}^{h_1} g_{(r)}dr = \frac{G_\circ}{r_s}(2\int_\circ^{h_1} rdr + \int_\circ^{h_2} rdr)$$
$$G_{(r)} = \frac{GM_e}{r^2} \rightarrow GM_e(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}) = \frac{G_\circ}{2r_s}(2h_1^2 + h_2^2) \quad (1)$$

برای h_1 و h_2 هم داریم:

$$h_1 = R_e + \delta_1 \quad (2)$$
$$h_2 = R_e + \delta_2 \quad (3)$$

که در این روابط δ_1 و δ_2 نسبت به R_e خیلی کوچک‌اند (ارتفاع جزر و مد در برابر شعاع زمین خیلی کم است) با جاگذاری (۲) و (۳) در (۱) داریم:

$$GM_e\left(\frac{1}{R_e+\delta_2}-\frac{1}{R_e+\delta_1}\right)=\frac{G_0}{2r_s}\left(2(R_e+\delta_1)^2+(R_e+\delta_2)^2\right) \qquad (4)$$

با توجه به $G_0=\dfrac{GM_s}{r_s^2}$ و با بسط جملات و جاگذاری G_0 داریم:

$$\frac{GM_e}{R_e}\left(1-\frac{\delta_2}{R_e}-(1-\frac{\delta_1}{R_e})\right)=\frac{GM_s}{2r_s^3}(3R_e^2)$$

توجه کنید در این جا هر دو طرف رابطه را تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر بسط می‌دهیم که برای سمت چپ معادله تا مرتبه‌ی یک لازم است و برای سمت راست معادله تا مرتبه‌ی صفرم کافی است.

$$\Delta h_s=\delta_1-\delta_2=\frac{3}{2}\frac{M_s}{M_e}(\frac{R_e}{R_s})^3R_e$$

با توجه به جواب حاصل، واضح است که $\dfrac{M_s}{M_e}(\dfrac{R_e}{R_s})^3 \ll 1$ اگر طرف راست معادله‌ی (۴) را هم تا مرتبه‌ی اول بسط می‌دادیم در آن صورت عبارت $\beta=\dfrac{M_s}{M_e}(\dfrac{R_e}{R_s})^3$ علاوه بر این که ضریب R_e می‌شد ضریب δ_1 و δ_2 هم می‌شد. ولی عبارت $k\beta R_e$ مرتبه‌ی اول است که در آن $k=\dfrac{3}{2}$. بنابراین عبارت $k'\beta\delta_1$ یا $k'\beta\delta_2$ از مرتبه‌ی دوم خواهد بود که در آن k' هم یک عدد است به همین خاطر، بسط دو طرف معادله تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر در این جا به منزله‌ی بسط دو طرف معادله تا مرتبه‌ی یک می‌باشد. از مقادیر عددی

$$M_s=1/99\times10^{33}g \qquad R_s=1/49\times10^{13}cm$$
$$M_e=5/98\times10^{27}g \qquad R_e=6/37\times10^{8}cm$$

بدست می‌آوریم: $\Delta h_s=24\ cm$

استدلال‌های مشابه برای ماه چنین بدست می‌دهد.

$$\Delta h_m=\frac{3}{2}\frac{M_m}{M_e}(\frac{R_e}{r_m})^3R_e$$

که با جاگذاری $M_m=7/34\times10^{25}$ و $r_m=3/84\times10^{10}cm$ بدست می‌آوریم:

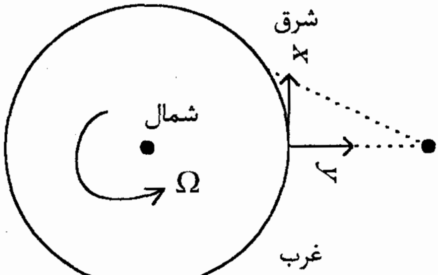
$$\Delta h_m=53/5\ cm$$

با وجود اینکه میدان گرانشی خورشید در زمین تقریباً ۲۰۰ برابر قویتر از میدان ماه است می‌بینیم که تأثیر ماه تقریباً دو برابر بزرگ‌تر از تأثیر خورشید است. دلیل آن این است که نیروی جزر و مدی بستگی به تغییرات میدان گرانشی برحسب r دارد (گرادیان میدان گرانشی) و نه خود میدان گرانشی. ماه آنقدر نزدیک است که میدان آن در زمین به‌طور قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌کند، در حالی که میدان خورشید که در فاصله‌ی دورتر قرار دارد نسبتاً ثابت‌تر است. قویترین جزر و مد که مهکشند نامیده می‌شود در زمانی که ماه به صورت هلال یا بدر کامل است اتفاق می‌افتد و این هنگامی است که ماه و خورشید با هم عمل می‌کنند. در فاصله‌ی بین آنها، در تربیعات ماه، ضعیف‌ترین جزر و مد که کهکشند نامیده می‌شود اتفاق می‌افتد که ماه و خورشید عکس هم عمل می‌کنند. نسبت نیروهای کشندی این دو حالت (نسبت نیروهای مهکشد به کهکشد) عبارتست از:

$$\frac{\Delta h_{sp}}{\Delta h_{ne}} = \frac{\Delta h_m + \Delta h_s}{\Delta h_m - \Delta h_s}$$

۴-۱۱ نیروی کوریولیس و سقوط جسم از بالای برج

مثال ۴: جسمی از ارتفاع h بالای یک برج سقوط می‌کند. اما به دلیل چرخش زمین مطابق شکل (۱۱-۱۰) با کمی انحراف روی زمین می‌افتد. یعنی بدون اینکه ما به آن سرعت در راستای افق داده باشیم، در راستای افق به اندازه Δx منحرف و جابجا می‌شود. مقدار انحراف را بیابید.



شکل۱۱-۱۰

حل: برای حل این مسأله ابتدا منشأ این پدیده را پیدا می‌کنیم.

دستگاه مختصات را روی زمین و پایین برج قرار می‌دهیم. از آنجایی که دستگاه مختصات دارای چرخش است برای شتاب در دستگاه لخت داریم:

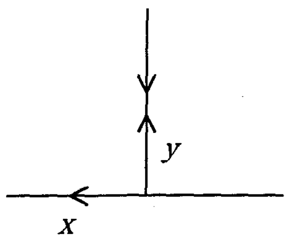
$$\vec{a}_{\text{لختی}} = \vec{a}_{\text{دوار}} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V}_{\text{دوار}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

که در این رابطه $a_{\text{لختی}}$ ، شتاب در دستگاه لخت است و $a_{\text{دوار}}$ شتاب نسبت به دستگاه مختصات دوار و $V_{\text{دوار}}$ ، سرعت نسبت به دستگاه مختصات دوار و Ω سرعت زاویه‌ای دستگاه مختصات می‌باشد.

$$\rightarrow \vec{a}_{\text{دوار}} = \vec{a}_{\text{لختی}} - ۲\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{V}_{\text{دوار}} - \overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \vec{r})$$

$$\rightarrow \vec{F}_{\text{دوار}} = \vec{F}_{\text{حقیقی}} - ۲m\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{V}_{\text{دوار}} - \overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \vec{r}) \qquad (۱)$$

$\overrightarrow{F}_{\text{دوار}}$ ، نیرویی است که ناظر روی دستگاه مختصات دوار مشاهده می‌کند و جمله‌ی دوم و سوم سمت راست معادله، جملات نیروی مجازی در دستگاه مختصات دوار می‌باشند. برای حل مسأله ابتدا مسیر مرتبه‌ی صفرم را در نظر می‌گیریم و سپس نیروی مجازی را روی این مسیر اعمال می‌کنیم. مسیر مرتبه‌ی صفرم را در غیاب نیروی مجازی که نسبت به mg خیلی کوچک است، سقوط بدون انحراف مانند شکل (۱۱-۱۱) در نظر می‌گیریم. با توجه به این مسیر طبق رابطه‌ی (۱) برای نیرو در راستای x داریم:



شکل۱۱-۱۱

$$F_x = ۲m\Omega V_{\text{دوار}}$$

که در این رابطه با توجه به مسیر مرتبه‌ی صفر داریم:

$$V_{\text{دوار}} = gt$$

لذا برای شتاب در راستای x داریم:

$$a_x = ۲\Omega gt$$

$$\rightarrow V_x = \Omega g t^۲ \rightarrow \Delta x = \frac{۱}{۳}\Omega g t^۳$$

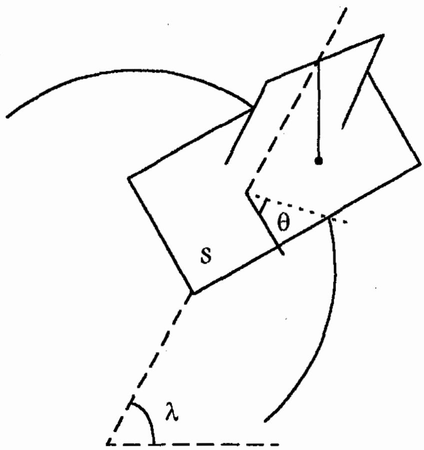
که مجدداً در این رابطه به جای t، زمان مرتبه‌ی صفرم را می‌گذاریم:

$$t = \sqrt{\frac{۲h}{g}} \rightarrow \Delta x = \frac{۱}{۳}\Omega g (\frac{۲h}{g})^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲h\Omega}{۳}\sqrt{\frac{۲h}{g}}$$

همانطورکه در بالا مشاهده نمودید تمام جملات دارای Ω بودند (Ω کوچک است) و به همین خاطر بقیه‌ی متغیرها را تا مرتبه‌ی صفرم قرار دادیم (دلیل درستی روش مسیر)

۱۱-۵ آونگ فوکو

مثال ۵: آونگی که در شکل (۱۱-۱۲) می‌بینید، آونگ فوکو نام دارد که علاوه بر $\dot{\theta}$، به دلیل نیروی کوریولیس دارای $\dot{\varphi}$ هم می‌باشد. دوره‌ی تناوب حرکت تقدیمی (حرکت در راستای φ) را بیابید. (علاوه بر Ω، $\dot{\theta}$، $\dot{r}$ و θ هم کوچکند)



شکل۱۱-۱۲

حل: طبق رابطه‌ی (۱) در مثال قبل برای نیروی مجازی داریم:

$$\overrightarrow{F} = -۲m\overrightarrow{\Omega} \times (\dot{r}\hat{r} + \dot{R}\widehat{R} + r\dot{\varphi}\widehat{\varphi})$$

چون نیرو در راستای φ را می‌خواهیم با توجه به رابطه‌ی بالا داریم:

$$F_\varphi = -۲m\Omega\dot{r}\sin\lambda \qquad (۱)$$

که در این رابطه از جمله‌ی حاوی $\dot{R}$ صرف‌نظر شده، زیرا $\dot{R}$ از مرتبه‌ی دوم می‌باشد در حالی که $\dot{r}$ از مرتبه‌ی یک است. (از جمله‌ی $-\overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \vec{r})$ هم به دلیلی که بعداً آورده می‌شود صرف‌نظر شده).
لذا با استفاده از دستگاه مختصات قطبی در صفحه‌ی S داریم:

$$m(r\ddot{\varphi} + ۲\dot{r}\dot{\varphi}) = -۲m\Omega\sin\lambda\dot{r}$$

ساده‌ترین جواب این معادله با انتخاب $\dot{\varphi} = \text{const}$ پیدا می‌شود در این حالت $r\ddot{\varphi}$ حذف شده و داریم:

$$\dot{\varphi} = -\Omega \sin \lambda$$

آونگ به‌طور یکنواخت در جهت ساعتگرد حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. زمان لازم برای یک دوران کامل صفحه نوسان عبارتست از:

$$T = \frac{۲\pi}{\dot{\varphi}} = \frac{۲۴h}{\sin \lambda}$$

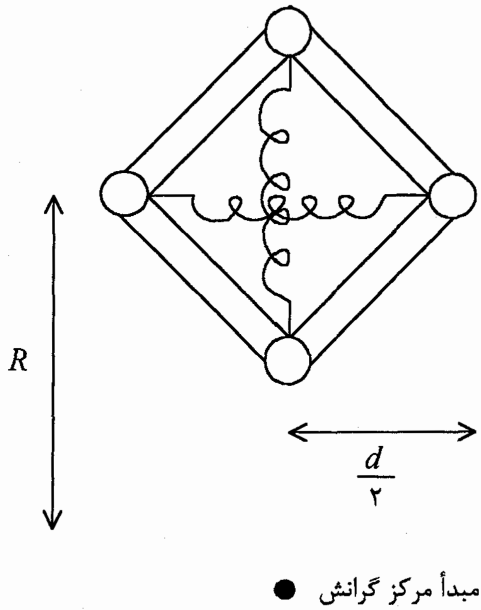
در این جا یک سؤال مطرح می‌شود که چرا جمله‌ی گریز از مرکز در F_φ وارد نشد. جواب سؤال این است که ما صفحه‌ی S را طوری انتخاب می‌کنیم که بردار نرمال این صفحه در راستای شتاب جاذبه مؤثر باشد. $\left(\vec{g'}_{(r)} = \vec{g}_{(r)} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})\right)$ یعنی در حالت سکون آونگ، امتداد نخ در راستای $\vec{g'}_{(r)}$ می‌باشد، لذا نیروی گریز از مرکز $\left(-\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})\right)$ در تعیین راستای بردار نرمال S لحاظ شده و مجموع نیروی جاذبه‌ی زمین و گریز از مرکز در راستای $\hat{\varphi}$ مؤلفه‌ای ندارد.

مجدداً ممکن است سؤالی مطرح شود و آن اینکه با توجه به مطالب بالا به جای λ باید $\lambda + \delta\lambda$ قرار داد که $\delta\lambda \ll \lambda$ (به دلیل کوچک بودن $\Omega^۲ R$ در برابر mg). ولی اگر به معادله‌ی (۱) نگاه کنید F_φ یک ضریب $\dot{r}\Omega$ دارد. بنابراین بقیه‌ی جملات را از مرتبه‌ی صفر قرار می‌دهیم لذا دیگر $\delta\lambda$ وارد نمی‌شود.

۱۱-۶ سقوط آزاد در میدان گرانشی

مثال ۶: دستگاهی متشکل از چهار میله‌ی یکسان و چهار جرم یکسان با دو فنر، مطابق شکل، به هم بسته شده‌اند. این مجموعه شکل مسطحی را تشکیل می‌دهد (لوزی) که فقط زاویه‌های آن متغیر است، اما طول اضلاع ثابت می‌ماند. در حالت تعادل، شکل حاصل مربع است. دستگاه را در یک میدان گرانشی با شتاب گرانشی $\vec{g} = -g_{(r)}\hat{r}$ قرار می‌دهیم. مبدأ میدان و دستگاه چهار میله‌ای در یک صفحه قرار دارند و قطر عمودی لوزی در راستای شعاعی است. این دستگاه در میدان گرانشی سقوط آزاد می‌کند و به خاطر بستگی میدان گرانشی به مکان، شکل آن از حالت مربع به لوزی تبدیل می‌شود. $g \sim \frac{۱}{r^۲}$، جرم هر وزنه m و میله‌ها بدون جرم و صلبند، ضریب سختی هر فنر k، نصف قطر مربع $\frac{d}{۲}$ است.

فنرها در حالتی که دستگاه به شکل مربع است فشرده شده‌اند و نیروی فشردگی آنها $f_۰$ است. با فرض اینکه $\frac{d}{R} \ll ۱$ است و با صرف‌نظر کردن از نوسان فنرها، تغییر اندازه‌ی قطر کوچک و بزرگ لوزی را نسبت به مربع بدست آورید. R فاصله‌ی مرکز دستگاه از مرکز گرانش است.



شکل۱۱-۱۳

حل: ابتدا برای حالتی که هنوز دستگاه در میدان گرانش وارد نشده داریم:

$$f = k(\ell_\circ - d) \qquad (۱)$$

$$\ell = \frac{\sqrt{۲}}{۲}d$$

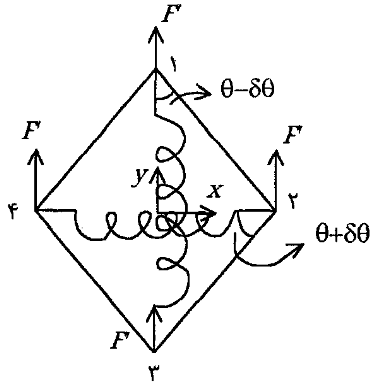
$$۲T_{(\circ)} \cos\theta = f \to T_{(\circ)} = \frac{f}{۲\cos\theta} \qquad (۲)$$

که در این رابطه ℓ طول هر ضلع دستگاه و $\theta = \frac{\pi}{۴}$ و $T_{(\circ)}$ کشش هر میله قبل از قرارگرفتن در میدان جاذبه است. حالا فرض کنید دستگاه را در میدان گرانش قرار داده‌ایم. دستگاه مختصات را روی مرکز لوزی (مرکز جرم سیستم) می‌گذاریم. شتاب مرکز جرم سیستم از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$a = \frac{F}{۴m} = \frac{\frac{۴m\alpha}{R^۲}}{۴m} = \frac{\alpha}{R^۲} \qquad (۳)$$

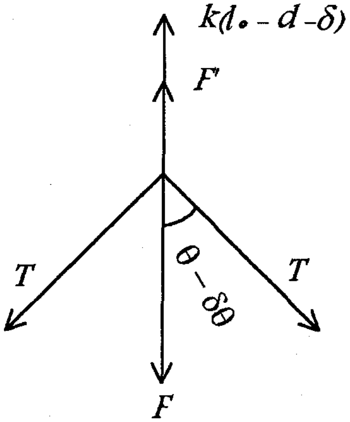
که در آن α عددی ثابت است. $(F = m\alpha\frac{۱}{R^۲})$

حالا حالت تعادل مسأله را از دید ناظر روی مرکز جرم بررسی می‌کنیم. مطابق شکل (۱۱-۱۴) دیاگرام آزاد جرم (۱) به صورت شکل (۱۱-۱۵) در می‌آید.



F' نیروی مجازی می باشد

شکل۱۱-۱۴



شکل۱۱-۱۵: دیاگرام آزاد جرم (۱)

از شکل (۱۱-۱۵) برای تعادل جسم (۱) در راستای قائم داریم:

$$۲T\cos(\theta-\delta\theta)+F=F'+k(\ell_\circ-d-\delta) \qquad (۴)$$

که در آن مطابق شکل F' نیروی مجازی (از (۳): $F'=\frac{m\alpha}{R^۲}$) و F نیروی جاذبه‌ی گرانشی است ($F=\frac{m\alpha}{(R+\frac{d+\delta}{۲})^۲}$) و δ افزایش طول فنر قائم است. از طرفی برای T، کشش میله داریم:

$$T=T_{(\circ)}+\delta T_{(۱)}$$

$$\text{از (۳)}\ \rightarrow ۲(T_{(\circ)}+\delta T_{(۱)})(\cos\theta+\delta\theta\sin\theta)+\frac{m\alpha}{R^۲}(۱-\frac{d}{R})$$
$$=\frac{m\alpha}{R^۲}+k(\ell_\circ-d)-k\delta$$

در عبارت F از جمله‌ی $\frac{\delta}{R}$ در برابر $\frac{d}{R}$ که خود $\frac{d}{R}$ مرتبه‌ی اول است (پس $\frac{\delta}{R}$ مرتبه‌ی دوم است) صرف‌نظر شده است. با توجه به رابطه‌ی (۱) و (۲) و صرف‌نظر از جملات مرتبه‌ی دوم داریم:

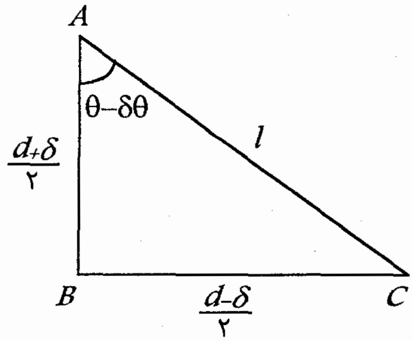
$$f\tan\theta\delta\theta+۲T_{(۱)}\cos\theta\delta-\frac{m\alpha d}{R^۳}=-k\delta \qquad (۵)$$

از طرفی طبق رابطه‌ی فیثاغورث داریم:

$$(\frac{d+\delta}{۲})^۲+(\frac{d-\delta'}{۲})^۲=\ell^۲=\frac{d^۲}{۲} \qquad (۶)$$

که در این رابطه δ' فشردگی فنر افقی نسبت به حالت قبل از قرارگرفتن در جاذبه است.

$$\text{از (۶)} \rightarrow \delta=\delta'$$



شکل۱۱-۱۶

حالا برای مثلث $\triangle ABC$ در شکل (۱۱-۱۶) داریم:

$$\sin(\theta-\delta\theta)=\frac{\frac{d-\delta}{۲}}{\frac{d\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}\delta}{۲d}$$

$$\rightarrow \sin\theta-\delta\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\frac{\delta}{d}$$

با توجه به $\theta=\frac{\pi}{۴}$ داریم:

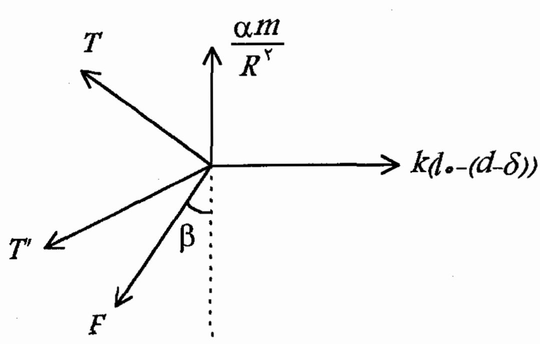
$$\delta\theta=\frac{\delta}{d} \qquad (۷)$$

با جاگذاری (۷) در (۵) داریم:

$$f\tan\frac{\delta}{d}+۲T_{(۱)}\cos\theta\delta-\frac{m\alpha d}{R^{۳}}=-k\delta$$

$$\rightarrow T_{(۱)}=\frac{-k+\frac{m\alpha d}{R^{۳}}-\frac{f\tan\theta}{d}}{۲\cos\theta}$$

دیاگرام آزاد جرم (۲) به صورت زیر است.



شکل۱۱-۱۷: دیاگرام آزاد جسم (۲)

برای β هم داریم:

$$\tan\beta=\frac{\frac{d}{۲}}{R}\rightarrow\beta=\frac{d}{۲R}$$

برای F هم داریم:

$$F=\frac{m\alpha}{(R^{۲}+(\frac{d}{۲})^{۲})}=\frac{m\alpha}{R^{۲}}$$

با نوشتن تعادل در راستای x برای جسم (۲) داریم:

$$(T+T')\cos(\theta+\delta\theta)+\frac{\alpha m}{R^{۲}}\sin\beta=k(\ell_{\circ}-d)+k\delta$$

با جاگذاری $\sin\beta=\beta=\frac{d}{۲R}$ و $f=k(\ell_{\circ}-d)$ و بسط داریم:

$$(T+T')(\cos\theta-\delta\theta\sin\theta)+\frac{\alpha md}{۲R^{۳}}=f+k\delta \qquad (۸)$$

با نوشتن تعادل در راستای y داریم:

$$T\cos(\theta+\delta\theta)+\frac{\alpha m}{R^{۲}}=T'\cos(\theta+\delta\theta)+F\cos\beta$$

با توجه به این که $\cos\beta=۱$ و $F=\frac{\alpha m}{R^{۲}}$ داریم:

$$T=T' \qquad (۹)$$

بنابر این با قرار دادن (۹) و بسط T در معادله‌ی (۸) داریم:

$$(۲T_{(\circ)}+۲\delta T_{(۱)})(\cos\theta-\delta\theta\sin\theta)+\frac{\alpha md}{۲R^{۳}}=f+k\delta$$

$$۲T_{(\circ)}\cos\theta+۲T_{(\circ)}\sin\theta\delta\theta+۲\cos\theta T_{(۱)}\delta+\frac{\alpha md}{۲R^{۳}}=f+k\delta$$

با توجه به (۲) و (۷) داریم:

$$f\tan\theta\frac{\delta}{d}+۲\cos\theta\delta T_{(۱)}+\frac{\alpha md}{۲R^{۳}}=k\delta$$

با توجه به این که $T_{(۱)}$ را قبلاً حساب کردیم، با جاگذاری آن در رابطه‌ی بالا داریم:

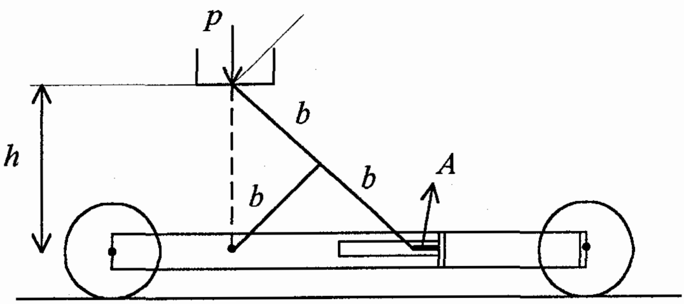
$$\frac{f\tan\theta}{d}+(-k+\frac{m\alpha d}{R^{۳}\delta}-\frac{f\tan\theta}{d})+\frac{\alpha md}{۲R^{۳}\delta}=k$$

$$\rightarrow\frac{۳m\alpha d}{۲\delta R^{۳}}=۲k$$

$$\rightarrow\delta=\frac{۳m\alpha}{۴kR^{۲}}(\frac{d}{R})$$

مسائل

۱) یک ماشین بالابر توسط یک سیلندر هیدرولیک که حرکت افقی را کنترل می‌کند کار می‌کند. فشردگی C در میله‌ی پیستون از سیلندر را برای تحمل بار P در ارتفاع h تعیین کنید.



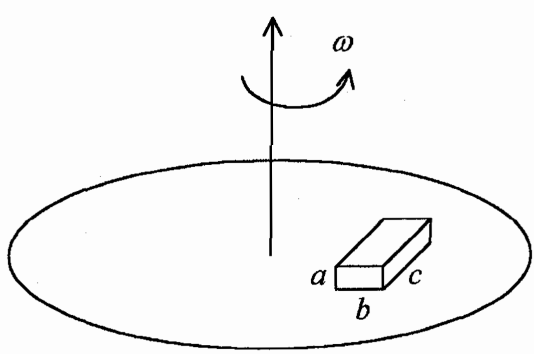
شکل۱۱-۱۸

جواب: $C = P\sqrt{(\frac{۲B}{h})^۲ - ۱}$

۲) جعبه‌ای به ابعاد a، b و c روی دیسک افقی که با سرعت زاویه ω می‌چرخد قرار گرفته و مرکز جرم آن در شعاع R است که نسبت به ابعاد جعبه بزرگ می‌باشد.

الف) نقاط مناسبی را که می‌توان به عنوان نقطه اثر نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح معرفی کرد بیابید.

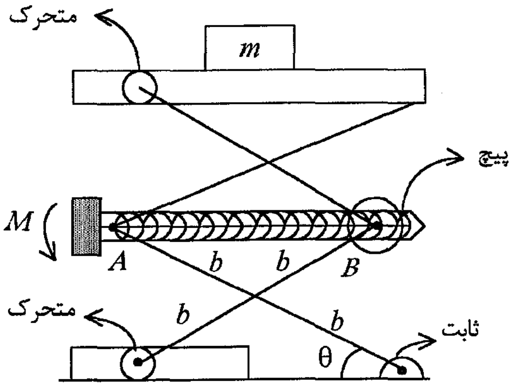
ب) ماکزیمم سرعت زاویه‌ای دستگاه را پیدا کنید به‌طوری که جعبه سر جای خود بماند. (ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s است)



شکل۱۱-۱۹

(امتحان پایان دوره‌ای مرحله‌ی دوم المپیاد فیزیک ایران سال ۱۳۶۹)

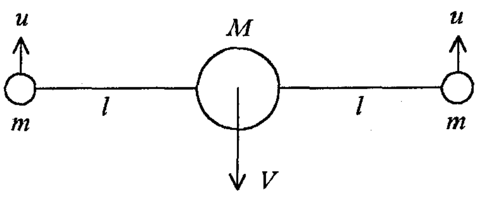
۳) در مکانیزم نشان داده شده در شکل (۱۱-۲۰) با چرخاندن پیچی که مفصل‌های A و B را به هم متصل می‌کند، می‌توان موقعیت قائم بار m را تنظیم نمود. هرگاه پیچ یک دور چرخانده شود، فاصله‌ی بین A و B به اندازه‌ی پیش‌روی پیچ L، تغییر می‌نماید. گشتاور لازم برای غلبه بر اصطکاک در دنده‌ها و یاتاقان پیچ را M_f بگیرید، و کل گشتاور لازم برای بالا بردن بار، M را محاسبه کنید.



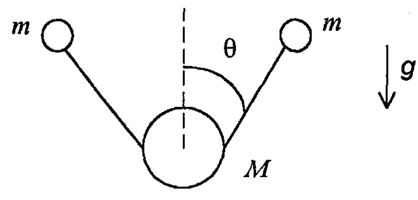
شکل۱۱-۲۰

جواب: $M = M_f + \dfrac{mgL}{\pi}\cot\theta$

۴) دو جرم m همراه با دو میله‌ی صلب، به یک جسم به جرم M $(M \gg m)$ لولا شده‌اند. این مجموعه را مطابق شکل (۱۱-۲۱) همراه با سرعت‌های اولیه‌ی u و V که به ترتیب به جرم‌های m و M می‌دهیم در میدان گرانشی یکنواخت g رها می‌کنیم. طول هر یک از دو میله‌ی صلب ℓ است.



(الف)



(ب)

شکل۱۱-۲۱

الف) زاویه‌ی میله‌ها را نسبت به امتداد قائم، $\theta_{(t)}$، را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\dfrac{m}{M}$ به دست آورید.

توجه: میله‌ها بدون جرم‌اند و از هر گونه اصطکاک صرف‌نظر کنید.

ب) زمان رسیدن دو جرم m به یکدیگر را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\dfrac{m}{M}$ به دست آورید.

۵) مسأله‌ی ۹ فصل ششم را با استفاده از نیروی مجازی حل کنید.

۶) نیروی گرانشی ماه در سطح زمین، بر شتاب مؤثر سقوط آزاد مؤثر است. تغییر شتاب سقوط آزاد در نزدیکی سطح زمین، حاصل از گرانش ماه را حساب کنید.

فرض کنید زاویه‌ی جهت ماه نسبت به زمین، با بردار عمود بر سطح زمین θ است. نسبت مرتبه‌ی تغییر شتاب سقوط آزاد ناشی از ماه، نسبت به تغییر شتاب سقوط آزاد ناشی از چرخش زمین را تخمین بزنید. جرم ماه را $10^{23} Kg$، فاصله‌ی زمین تا ماه را $4 \times 10^{8} m$، و شعاع زمین را $6 \times 10^{6} m$ بگیرید.

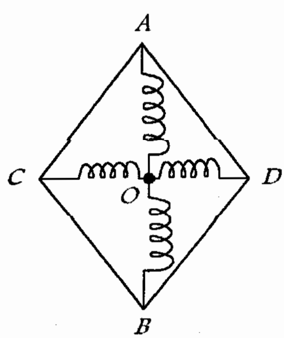
راهنمایی: توجه کنید که زمین دارد مثل یک جسم صلب در میدان گرانشی ماه سقوط می‌کند.

۷) دوچرخه سواری با سرعت ثابت V روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند. جرم کل دوچرخه و دوچرخه‌سوار برابر M، جرم هر چرخ m و شعاع هر کدام r است. در حالتی که دوچرخه در وضعیت قائم قرار دارد، فاصله‌ی مرکز جرم کل تا زمین برابر h است. مرکز جرم از هر دو محور چرخ به یک اندازه است. فاصله‌ی بین دو محور 2ℓ است. دوچرخه‌سوار باید دوچرخه را چقدر نسبت به وضعیت قائم کج کند تا بتواند تعادل آن را در حین حرکت حفظ کند؟

راهنمایی: فرض کنید $R \gg \ell$ است.

جواب: $\tan\theta = \left(\frac{2mr - Mh}{mghR}\right) V^2$

۸) زمین در اثر نیروهای کشندی، که عمدتاً ناشی از ماه است، قسمتی از انرژی مکانیکی خود را از دست می‌دهد. این مسأله مدل ساده شده‌ای برای بررسی این موضوع است. در این مدل زمین را یک لوزی مدل سازی می‌کنیم که در هر یک از رئوس آن جرم μ قرار دارد و جرم M در مرکز لوزی است.



شکل ۱۱-۲۲

این چهار جرم به وسیله‌ی چهار فنر یکسان به جرم مرکزی متصل‌اند، ضمناً رئوس مجاور لوزی با میله‌های

صلبی به هم متصل‌اند، چنان که طول اضلاع لوزی ثابت است. طول کشیده نشده‌ی فنرها $\ell_{\circ}$، و طول حالت تعادل فنرها (وقتی که لوزی به شکل مربع در می‌آید) ℓ است. ضریب سختی فنرها هم k است.

الف) فاصله‌ی ماه تا زمین را r بگیرید. با فرض اینکه جرم زمین خیلی بزرگ‌تر از جرم ماه (m) است، مرکز جرم زمین تقریباً ساکن است. حال فرض کنید محور AB با خط واصل مرکز زمین به مرکز ماه زاویه‌ی θ می‌سازد. طول حالت تعادل OA و OC را بدست آورید.

توضیح: برهمکنش گرانشی بخش‌های مختلف زمین با هم در فنرها منظور شده است. ضمناً OA و OC را با این فرض به دست آورید که تغییر طول‌ها نسبت به ℓ بسیار کوچک‌اند.

ب) فرض کنید زمین با سرعت زاویه‌ای ω به دور خود و ماه با سرعت زاویه‌ای Ω به دور زمین می چرخد. طول‌های OA و OC را برحسب زمان بدست آورید. (می‌توانید از این تقریب استفاده کنید که در هر لحظه، فنرهای زمین در حالتی قرار می‌گیرند که مجموعه‌ی جرم‌های زمین در حال تعادل باشد)

ج) معادله‌ی حرکت نوسانگری که یک عامل میراکننده هم بر آن اثر کند، $\mu\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \mu\omega_{\circ}^{2}x = \circ$ است. از این معادله تغییرات انرژی نوسانگر $(\frac{\mu}{2}\dot{x}^{2} + \frac{\mu\omega_{\circ}^{2}}{2}x^{2})$ برحسب زمان را بدست آورید. اکنون فرض کنید طول‌های OA و OC برحسب زمان همان مقادیر بدست آمده در قسمت (ب) است و با در نظرگرفتن ضریب میرایی γ، مقدار اتلاف انرژی بر واحد زمان را بدست آورید. مقدار متوسط این کمیت را نیز بدست آورید.

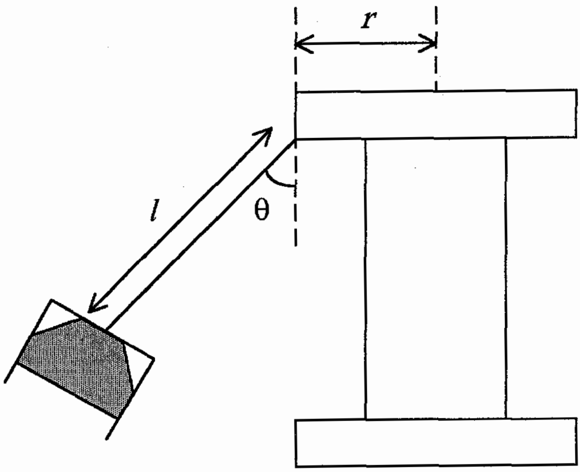
د) گشتاور لختی زمین را I بگیرید. با چشم‌پوشی از حرکات فنرها، انرژی مکانیکی مجموعه‌ی زمین و ماه را بدست آورید. با توجه به قسمت (ج)، این انرژی به تدریج کم می‌شود. کم شدن این انرژی باعث تغییر r، ω و Ω می‌شود. از قسمت (ج) یک معادله برای تغییرات این کمیت‌ها بدست آمده است. دو معادله‌ی دیگر هم بدست آورید، که از مجموع سه معادله بتوان r، ω و Ω را حساب کرد. به‌طور کیفی بگوئید هر یک از این کمیت‌ها در چه جهتی تغییر می‌کنند (زیاد می‌شوند یا کم می‌شوند). برای بدست آوردن روابط می‌توان فرض کرد که، از آنجا که تغییرات r، ω وΩ بسیار کم است، حرکت ماه تقریباً به همان شکل دایره است، اما دایره‌ای که شعاع آن به کندی عوض می‌شود. ضمناً اگر در تعیین کیفی جهت تغییرات به مقدار نسبی کمیت‌های مختلف نیاز پیدا کردید، از معلومات کیفی خودتان استفاده کنید.

ه) در حالت نهایی، که کمیت‌ها به مقدار ثابتی می‌رسند، وضعیت سیستم به‌طور کیفی چگونه است؟ یک معادله‌ی جبری (غیر دیفرانسیل) بنویسید که از روی آن مقدار نهایی r تعیین شود.

(امتحان انتخابی تیم اعزامی المپیاد فیزیک ایران سال ۱۳۷۷)

۹) چرخ و فلکی مطابق شکل (۱۱-۲۳) دارای $N = ۱۰$ تاب است. (در شکل تنها یکی از تاب‌ها

نشان داده شده است) هر تاب از یک سیم بلند که از یک طرف به چرخ گردنده‌ای لولا شده و از سوی دیگر به صندلی متصل است تشکیل شده، به‌طوری که فاصله‌ی لولا تا مرکز جرم صندلی به علاوه‌ی کودک سوار بر آن، $\ell = ۷cm$ می‌باشد. شعاع چرخ گردنده، $r = ۱m$، جرم تخمینی بچه‌هایی که سوار چرخ و فلک می‌شوند به علاوه‌ی جرم صندلی حدوداً $m = ۳۵Kg$ بوده و وزن سیم‌ها قابل صرف‌نظر است. گشتاور لختی چرخ گردنده $I_\omega = ۱۰۰۰ Kgm^۲$ است که هنگام چرخش گشتاور اصطکاکی $T_f = ۴۰۰ N.m$ به آن وارد می‌شود. کافی است که چهار بند اول را به صورت پارامتری پاسخ دهید و به دو بند آخر جواب عددی دهید.



شکل ۱۱-۲۳

الف) گشتاور لختی کل سیستم برحسب θ چقدر است؟

ب) اگر چرخ و فلک هر T ثانیه یک دور بزند، رابطه‌ای بین θ و T بیابید.

پ) حال تا تقریب اول نسبت به $\frac{r}{\ell}$، θ را برحسب T بیابید.

ت) با توجه به قسمت‌های قبل انرژی کل چرخ و فلک را برحسب T بیابید.

فرض کنید در ابتدا چرخ و فلک آهسته می‌چرخد ولی کم کم سریع‌تر می‌شود، به‌طوری که پس از $m + V$ دور، T به ۴٫۵sec می‌رسد که تا زمان $t = ۱۵۰ \sec$ ثابت مانده، سپس موتور خاموش می‌شود و در نهایت چرخ و فلک به علت اصطکاک اندک اندک می‌ایستد.

ث) از ابتدا تا انتهای حرکت، چرخ و فلک چند دور می‌زند؟

ج) در صورتی که اداره‌ی برق برای هر کیلو وات ساعت، ۷۰۰ تومان از صاحب چرخ و فلک بگیرد و بازده‌ی موتور چرخ و فلک $e = \%۶۰$ باشد و صاحب چرخ و فلک بخواهد ۵

برابر پولی را که به اداره‌ی برق می‌دهد از بچه‌ها بگیرد باید از هر نفر چقدر پول بگیرد؟

حل: الف) $I = I_\omega + Nm(r+\ell\sin\theta)^2$

ب) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(r+\ell\sin\theta)\cot\theta}{g}}$

پ) $\theta^{(1)} = \cos^{-1}\left(\dfrac{gT^2}{4\pi^2\ell}\right) + \epsilon\dfrac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}$ که در آن $\epsilon = \dfrac{r}{\ell}$

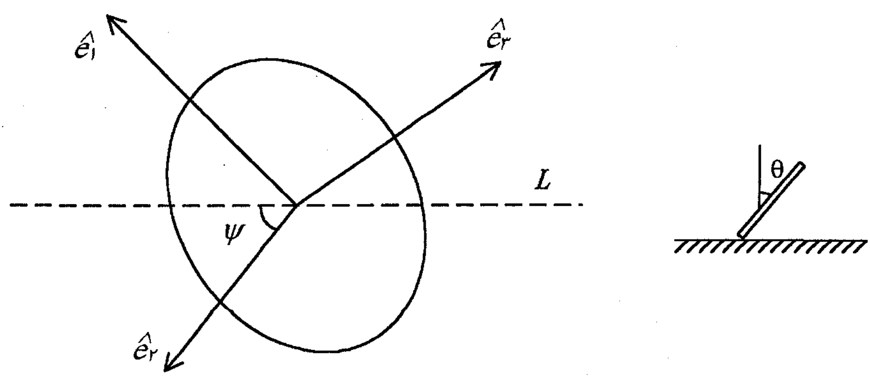
ت) $E = \dfrac{1}{2}I_0\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2(a+\sin^2\theta_0) + Nmg\ell(1-\cos\theta_0) + \dfrac{r}{\ell}\left(\dfrac{I_0(\frac{2\pi}{T})^2 + Nmg\ell\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\right)$

ث) ۵۱ دور

ج) از هر نفر ۲۰٫۵ تومان.

۱۰) در این مسأله می‌خواهیم پایداری حرکت یک سکه که روی سطح افقی بدون لغزش حرکت می‌کند را بررسی کنیم. فرض کنید سکه‌ای در ابتدا در امتداد یک خط راست و در صفحه‌ای عمود بر صفحه‌ی افقی با سرعت ثابت حرکت می‌کند. سپس اختلال کوچکی، کمی آن را از صفحه‌ی قائمی که در آن حرکت می‌کرده خارج می‌کند، اما حرکت همچنان غلتشی کامل می‌ماند. حال می‌خواهیم ببینیم حداقل سرعت زاویه‌ای اولیه‌ی سکه برای اینکه سکه پایدار بماند چقدر است.

الف) مطابق شکل (۱۱-۲۴) دستگاه $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ متصل به سکه را در نظر بگیرید. ($\hat{e}_1$ و $\hat{e}_2$ داخل صفحه‌ی سکه و $\hat{e}_3$ عمود بر صفحه‌ی سکه است)



(الف) (ب)

شکل ۱۱-۲۴

وضعیت دستگاه $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ را می‌توان با سه زاویه‌ی اویلر به این ترتیب مشخص کرد:

زاویه‌ی θ: زاویه‌ی صفحه‌ی سکه با صفحه‌ی قائم که شامل خط L است. خط L قطری از سکه است که موازی افق است.

زاویه‌ی ψ: زاویه‌ی بین L و $\widehat{e}_2$ در داخل صفحه‌ی سکه.

زاویه‌ی φ: زاویه‌ی دوران خط L نسبت به یک خط ثابت افقی که از مرکز سکه می‌گذرد.

بردار سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ در این حالت برابر است با:

$$\vec{\omega}=(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\sin\theta)\widehat{e}_3+(\dot{\theta}\cos\psi-\dot{\varphi}\cos\theta\sin\psi)\widehat{e}_2+(\dot{\theta}\sin\psi+\dot{\varphi}\cos\theta\cos\psi)\widehat{e}_1$$

با توجه به اینکه سکه در ابتدا در صفحه‌ی قائم و به خط راست حرکت می‌کرده و اختلال تنها اندکی آن را منحرف کرده است $\overrightarrow{\omega}$ را تا مرتبه‌ی اول بنویسید. یعنی در عبارت مربوط به $\overrightarrow{\omega}$ کمیت‌های کوچک را تعیین و تقریب‌های مناسب را اعمال کنید.

ب) بردار سرعت مرکز جرم و شتاب مرکز جرم را با همان تقریب‌های قسمت (الف) بدست آورید. مؤلفه‌های آن را در دستگاه $(\widehat{e}_1,\widehat{e}_2,\widehat{e}_3)$ بنویسید.

ج) بردار نیروی عکس‌العمل سطح را بیابید. باز هم مؤلفه‌ها را در دستگاه $(\widehat{e}_1,\widehat{e}_2,\widehat{e}_3)$ بنویسید.

د) بردار گشتاور حول مرکز جرم را بیابید.

ه) با استفاده از معادلات اویلر $(\vec{\tau}=\dot{\overrightarrow{L}}_{\text{چرخان}}+\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{L})$ سه معادله‌ی دیفرانسیل برای ψ، φ و θ بدست آورید.

و) نشان دهید تا مرتبه‌ی اول $\dot{\psi}$ ثابت است.

ز) نشان دهید اگر $\dot{\psi}_0$ (سرعت زاویه‌ای اولیه) به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد حرکت مختصه‌ی θ نوسانی بوده و در نتیجه سکه پایدار است. حداقل $\dot{\psi}_0$ برای پایداری سکه چقدر است.

توجه: در تمام قسمت‌ها به کمیت‌های کوچک توجه کنید و از تقریب‌های مناسب استفاده کنید.

(امتحان انتخابی تیم اعزامی المپیاد فیزیک ایران سال ۱۳۸۰)

منابع

[۱] فیزیک هالیدی

[۲] دینامیک کلاسیک (ماریون)

[۳] آشنایی با مکانیک (کلپنر)

[۴] استاتیک مریام

[۵] آزمون‌های تابستانی المپیاد فیزیک (دکتر بهمن‌آبادی)

[۶] دوره‌ی درسی فیزیک (مسائل و تمرین‌ها)

[۷] مسأله‌های جهانی المپیاد فیزیک (جلد ۱ و ۲)

[۸] المپیادهای فیزیک ایران (جلد ۳ و ۴ انتشارات آینده‌سازان)

[۹] آپتیتیوت (مسأله)

[۱۰] ایرودوف (مسأله)

[۱۱] مسائل طرح شده توسط جمعی از اساتید شیکاگو