ب. ب. دمیدوویچ

ترجمهٔ پرویز شهریاری

تمرینها و مسائل آنالیز ریاضی

$$\iint\limits_{(S)} F(\varphi, r)\, r\, dr\, d\varphi$$

مسائل و تمرینهای
آنالیز ریاضی

گردآورده و پرداختهٔ

ب. ب. دمیدوویچ

ترجمهٔ پرویز شهریاری

مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر
تهران، ۱۳۶۳

در بارهٔ کتاب

این کتاب برای دانشجویان رشته‌هـای‌فنی و بسـوسیلهٔ هیئت مؤلفین: بارانتکـوف، دمیدوویچ، یه‌فیمنکو، کوگان، لونتس، پورشنه‌وا، سی چـه‌وا، فرولوف، شوتاك و یان پولسکی تألیف شده است. سردبیری تألیف کتاب را دمیدوویچ به‌عهــده داشته است.

این ترجمه از روی چاپ‌ششم‌متن روسی کتاب انجام‌گرفته است وخود چاپ‌قریب به‌دو سال طول کشیده‌است.

جـواب تمام مسئله‌های محاسبه‌ای درآخـر کتاب داده شده است. علاوه بر آن برای هرمسئله‌ای که با علامت (*) مشخص شده است راهنمای حل وبرای مسئله‌هایی کـه با علامت(**) مشخص شده است حل کامل آمده است.

بسمه تعالی

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمهٔ آنالیز

۱. مفهوم تابع

۱°. عددهای حقیقی. عددهای گویا وگنگ را عددهای حقیقی گویند. قدرمطلق عدد حقیقی a عبارتست از عدد غیر منفی $|a|$ که با شرایط زیر معین می‌شود : $|a|=a$ وقتی که $a>0$ باشد و $|a|=-a$ وقتی که $a<0$ باشد . وقتی که a و b دو عدد حقیقی باشند نامساوی زیر همیشه صحیح است :

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

۲°. تعریف تابع. اگر هر مقدار* از کمیت متغیر x ، که متعلق به مجموعه‌ای مانند E است، تنها با یك مقدار معین از کمیت y متناظر باشد، y را تابع (یك‌ارزشی) x گویند ، یا اینکه گویند متغیر وابسته، به‌وسیلهٔ مجموعهٔ E معین می‌شود؛ x را آرگومان (آرگومان) یامتغیر مستقل می‌نامند. این مفهوم را که y تابع x است ، بطور ساده بصورت $y=f(x)$ یا $y=F(x)$ و غیره نشان می‌دهند.

اگر هر مقدار x ، که متعلق به مجموعهٔ E است ، با یك یا چند مقدار از کمیت متغیر y متناظر باشد ، y را تابع چند ارزشی x ، که در مجموعهٔ E تعریف می‌شود ، گویند . بعد از این هرجا ازکلمهٔ «تابع» استفاده کنیم ، به مفهوم یك ارزشی آن می‌گیریم، مگر اینکه خلاف آن تصریح شده باشد.

۳°. حوزهٔ وجود تابع. به مجموعهٔ مقادیری از x ، که برای آنها تابع مفروض معین باشد ، حوزهٔ وجود تابع یا حوزه‌ای‌که در آن تابع معین است ، گفته می‌شود.

---

*) در تمام مطالب بعدی هرجا صحبت از مقادیرکمیتها می‌شود ، منظور مقادیر حقیقی است ، بشرط اینکه بطور وضوح از خلاف آن صحبت نشود .

در حالتهای ساده ، حوزهٔ وجود تابع یا بسته است ، یعنی مجموعهٔ مقادیری از x که در نامساوی $a \leqslant x \leqslant b$ صدق می‌کنند و به‌شکل $[a\ ,\ b]$ نشان داده می‌شود؛ یـا باز است ، یعنی مجموعهٔ مقادیری از x که در نامساوی $a < x < b$ صدق می‌کنند و به شکل (a,b) مشخص می‌شود . ولی این امکان هم هست که حوزهٔ وجود تابع باطرح بغرنجتری مشخص شود (مثلا مسئلهٔ ۲۱ را ببینید) .

مثال ۱ . مطلوبست حوزهٔ وجود تابع

$$y = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ - ۱}}$$

حل . تابع وقتی معین است که داشته باشیم :

$$x^۲ - ۱ > ۰$$

یعنی $|x| > ۱$. بنابراین حوزهٔ وجود تابع عبارتست ازمجموعهٔ دونامساوی $-\infty < x < -۱$ و $۱ < x < +\infty$

۴° . تابع‌معکوس. اگر بتوان معادلهٔ $y = f(x)$ را بصورت یك ارزشی نسبت به‌متغیر x حل کرد ، یعنی تابعی مانند $x = g(y)$ چنان وجود داشته باشد که $y = f[g(x)]$ باشد ، تابع $x = g(y)$ و یا بصورت معمول $y = g(x)$ را تابع معکوس $y = f(x)$ گویند. واضح است که $g[f(x)] = x$ است و بنابراین دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ متقابلاعکس یکدیگرند.

در حالت کلی معادلهٔ $y = f(x)$ تـابع معکوس چند ارزشی $x = f^{-۱}(y)$ را چنان معین می‌کند که $y = f[f^{-۱}(y)]$ به ازای‌همهٔ مقادیر y ، به وسیلهٔ مقادیر تابع $f(x)$ مشخص می‌شود .

مثال ۲ . تابع معکوس تابع زیر را معین کنید :

$$y = ۱ - ۲^{-x} \qquad (۱)$$

حل . معادلهٔ (۱) را نسبت به x حل می‌کنیم ، بدست می‌آید :

$$۲^{-x} = ۱ - y \implies x = -\frac{lg(۱-y)^*}{lg۲} \qquad (۲)$$

واضح است که تابع (۲) وقتی معین است که $-\infty < y < ۱$ باشد .

---

*) $lgx = log_{۱۰}x$ ، همیشه به‌معنای لگاریتم اعشاری x است .

۵°. **تابع مرکب و تابع ضمنی.** وقتی که تابع y نسبت به x بایك رشته تساوی مثل $y=f(u)$ و $u=\varphi(x)$ داده شده باشد ، تابع مرکب یا تابع تابع نامیده می‌شود .

وقتی که تابع به‌وسیلهٔ معادله‌ای داده شده باشد ، که نسبت به متغیر تابع حل نشده‌باشد، تابع ضمنی نامیده می‌شود . مثلا معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$ ، y را بصورت یك تابع ضمنی نسبت به x معین می کند.

۶°. **منحنی نمایش تغییرات تابع.** مجموعهٔ‌نقاط (x,y) ازصفحهٔ xoy که مختصات آنها در معادلهٔ $y=f(x)$ صدق می کند ، منحنی تابع مفروض نامیده می‌شود .

**۱. ثابت کنید که اگر a و b عددهائی حقیقی باشند، داریم :

$$\big||a|-|b|\big|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$$

۲ . صحت تساویهای زیررا ثابت کنید :

a) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$;
c) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\ (b\neq ۰)$;
b) $|a|^۲=a^۲$;
d) $\sqrt{a^۲}=|a|$;

۳ . نامعادلات زیر را حل کنید :

a) $|x-۱|<۳$;
c) $|۲x+۱|<۱$;
b) $|x+۱|>۲$;
d) $|x-۱|<|x+۱|$.

۴ . اگر $f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۱x-۶$ باشد ، مطلوبست $f(-۱)$ ، $f(۰)$ ، $f(۱)$ ، $f(۲)$ ، $f(۳)$ ، $f(۴)$.

۵ . اگر $f(x)=\sqrt{۱+x^۲}$ باشد، مطلوبست محاسبهٔ $f(۰)$ ، $f\left(-\frac{۳}{۴}\right)$ ، $f(-x)$ ، $f\left(\frac{۱}{x}\right)$ و $\frac{۱}{f(x)}$.

۶ . فرض کنید $f(x)=arc\cos(lg x)$ باشد . مطلوبست $f\left(\frac{۱}{۱۰}\right)$ ، $f(۱)$ و $f(۱۰)$.

۷ . $f(x)$ یك تابع خطی است . این تابع را چنان پیدا کنید که $f(-۱)=۲$ و

$f(۲) = -۳$ باشد .

۸ . تابع صحیح و گویای $f(x)$ از درجهٔ دوم را چنان پیداکنید که $f(۰) = ۱$ ، $f(۱) = ۰$ و $f(۳) = ۵$ باشد.

۹ . می‌دانیم $f(۴) = -۲$ و $f(۵) = ۶$. مطلوبست مقدار تقریبی $f(۴/۳)$ ، **بشرطی** که تابع $f(x)$ در فاصلهٔ بستهٔ $۴ \leqslant x \leqslant ۵$ خطی است.

۱۰ . تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & (x \leqslant ۰) \\ x & (x > ۰) \end{cases}$$

را با استفاده از علامت قدر مطلق به وسیلهٔ یك رابطه نشان دهید .

حوزهٔ وجود توابع زیررا معین‌کنید :

۱۱. a) $y = \sqrt{x+۱}$ ؛ b) $y = \sqrt[۳]{x+۱}$ **۱۲.** $y = \dfrac{۱}{۴ - x^۲}$

۱۳. a) $y = \sqrt{x^۲ - ۲}$ ؛ b) $y = x\sqrt{x^۲ - ۲}$ **۱۴**** . $y = \sqrt{۲ + x - x^۲}$

۱۵ . $y = \sqrt{-x} + \dfrac{۱}{\sqrt{۲+x}}$ **۱۶ .** $y = \sqrt{x - x^۳}$

۱۷ . $y = lg \dfrac{۲+x}{۲-x}$ **۱۸ .** $y = lg \dfrac{x^۲ - ۳x + ۲}{x+۱}$

۱۹ . $y = arc\ cos \dfrac{۲x}{۱+x}$ **۲۰ .** $y = arc\ sin\left(lg \dfrac{x}{۱۰}\right)$

۲۱ . $y = \sqrt{sin\, ۲x}$

۲۲ . اگر $f(x) = ۲x^۴ - ۳x^۳ - ۵x^۲ + ۶x - ۱۰$ باشد ، مطلوبست :

$$\varphi(x) = \frac{۱}{۲}\Big[f(x) + f(-x) \Big] \quad \text{و} \quad \psi(x) = \frac{۱}{۲}\Big[f(x) - f(-x) \Big]$$

۲۳ . تابع $f(x)$ را ، که در فاصلهٔ متقارن $-l < x < l$ معین است ، **وقتی که** $f(-x) = f(x)$ باشد زوج و وقتی که $f(-x) = -f(x)$ باشد فرد گویند . **با توجه** به این تعریف ببینید کدامیك از توابع زیر زوج و کدامیك فرد است :

a) $f(x) = \frac{۱}{۲}\left(a^x + a^{-x}\right)$;

b) $f(x) = \sqrt{۱ + x + x^۲} - \sqrt{۱ - x + x^۲}$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$;

d) $f(x) = lg\,\dfrac{1+x}{1-x}$;

e) $f(x) = lg\,(x + \sqrt{1+x^2})$.

*۲۴. ثابت کنید هر تابع $f(x)$ را ،که در فاصلهٔ $-l<x<l$ معین است ، می‌توان به صورت مجموعی از توابع فرد و زوج نوشت .

۲۵ . ثابت کنید حاصلضرب دو تابع زوج یا دو تابع فرد ، تابعی است زوج ؛ و حاصلضرب یك تابع زوج در یك تابع فرد ، تابعی است فرد .

۲۶ . تابع $f(x)$ را متناوب گویند ، وقتی‌که عدد مثبتی مانند T وجود داشته باشد (دورهٔ تناوب تابع) بطوریکه به ازای‌همهٔ مقادیر x ، که در حوزهٔ وجود تابع قرار دارد ، $f(x+T)=f(x)$ باشد .

با توجه به‌این تعریف ببینید کدام یك از توابع زیر متناوبند . مورد توابع متناوب، کوچکترین دورهٔ تناوب را بدست آورید:

a) $f(x) = 10\,sin\,3x$;

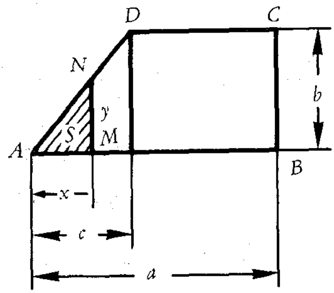
b) $f(x) = a\,sin\lambda x + b\,cos\lambda x$;

c) $f(x) = \sqrt{tg x}$

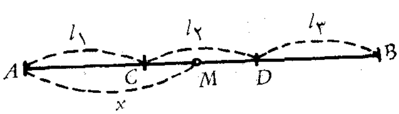
d) $f(x) = sin^2 x$

e) $f(x) = sin\,(\sqrt{x})$

۲۷ . طول پاره خط $y = MN$ و مساحت S شکل AMN را به‌عنوان تابعی‌از $x = AM$ (شکل۱) محاسبه کنید و منحنی این توابع را رسم کنید.



شکل۱



شکل ۲

۲۸ . تکاثف خطی (یعنی وزن‌واحد طول) میلهٔ $AB = l$ (شکل۲) در قطعات $AC = l_1$ و $CD = l_2$ و $DB = l_3$ $(l_1+l_2+l_3=l)$ بترتیب برابر q_1 ، q_2 و q_3 است . مطلوبست وزن m ، قطعهٔ متغیر $AM = x$ از این میله ، به‌عنوان تابعی از x و رسم نمایش این تابع .

۲۹ . مطلوبست $\varphi[\psi(x)]$ و $\psi[\varphi(x)]$ ، بشرطی که $\varphi(x)=x^{۲}$ و $\psi(x)=۲^{x}$ باشد .

۳۰ . اگر $f(x)=\dfrac{۱}{۱-x}$ باشد، مطاو بست $f\{f[f(x)]\}$.

۳۱ . مطلوبست $f(x+۱)$ ، بشرطی که $f(x-۱)=x^{۳}$ باشد .

۳۲ . اگر $f(n)$ مجموع n جملهٔ متوالی از یك تصاعد حسابی باشد، ثابت کنید:

$$f(n+۳)-۳f(n+۲)+۳f(n+۱)-f(n)=۰$$

۳۳ . ثابت کنید اگر داشته باشیم:

$$f(x)=kx+b$$

و $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ تشکیل تصاعد حسابی بدهند ، عددهای $f(x_۱)$ ، $f(x_۲)$ و $f(x_۳)$ هم به‌تصاعد حسابی هستند .

۳۴ . اگر $f(x)$ یك تابع مجهول‌القوه ، یعنی بصورت $f(x)=a^{x}$ $(a>۰)$ باشد و عددهای $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ تشکیل تصاعد حسابی بدهند، ثابت کنید عددهای $f(x_۱)$ ، $f(x_۲)$ و $f(x_۳)$ تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند .

۳۵ . اگر $f(x)=lg\dfrac{۱+x}{۱-x}$ باشد، ثابت کنید :

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{۱+xy}\right)$$

۳۶ . فرض کنید $\varphi(x)=\frac{۱}{۲}(a^{x}+a^{-x})$ و $\psi(x)=\frac{۱}{۲}(a^{x}-a^{-x})$ باشد ثابت کنید :

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)+\psi(x)\psi(y)\ ،$$
$$\psi(x+y)=\varphi(x)\psi(y)+\varphi(y)\psi(x)\ .$$

۳۷ . مطلوبست محاسبهٔ $f(-۱)$ ، $f(۰)$ و $f(۱)$ ، بشرطی که داشته باشیم :

$$f(x)=\begin{cases} arc\ sin x & (-۱\leqslant x\leqslant ۰) \\ arc\ tg x & (۰<x<+\infty) \end{cases}$$

۳۸ . به‌ازای چه مقادیری از x، هریك از توابع زیر صفر، مثبت ویا منفی است:

a) $y=۱+x;$ b) $y=۲+x-x^{۲};$

c) $y = 1 - x + x^2$;　　e) $y = lg\frac{2x}{1+x}$ ·

d) $y = x^3 - 3x$;

۳۹ . تابع معکوس هر یك از توابع زیر را پیدا کنید :

a) $y = 2x+3$;　　d) $y = lg\frac{x}{2}$;

b) $y = x^2 - 1$;　　e) $y = arc\,tg 3x$ ·

c) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$;

این توابع معکوس در چه حوزه‌ای معین هستند ؟

۴۰ . برای تابع

$$y = \begin{cases} x & (x \leqslant 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$$

تابع معکوس را بدست آورید .

۴۱ . هریك از توابع زیر را به صورت یك رشته تساوی بنویسید، بطوریکه هر یك از آنها یك تابع مقدماتی ساده باشند (توانی ، مجهول‌القوه ، مثلثاتی وغیره) :

a) $y = (2x-5)^{10}$;　　c) $y = lg tg\frac{x}{2}$;

b) $y = 2^{cos x}$;　　d) $y = arc\,sin(3^{-x^2})$.

۴۲ . هر یك از توابع مرکب زیر را، که به صورت یك رشته تساوی داده شده است ، بصورت یك تساوی بنویسید:

a) $y = u^2$ ، $u = sin x$;

b) $y = arc\,tg u$ ، $u = \sqrt{v}$ ، $v = lg x$;

c) $y = \begin{cases} 2u & (u \leqslant 0) \\ 0 & (u > 0) \end{cases}$ ، $u = x^2 - 1$

۴۳ . هریك از توابع زیر را بصورت صریح بنویسید :

a) $x^2 - arc\,cos y = \pi$;

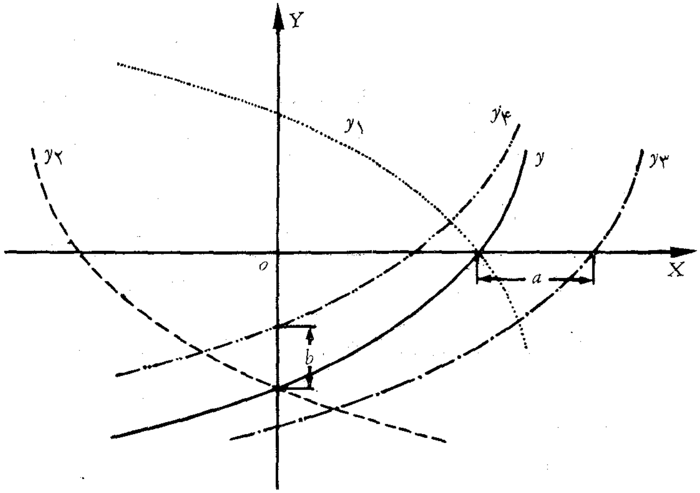
b) $10^x + 10^y = 10$;

c) $x+|y|=2y$.

هر یك از این توابع ضمنی در چه حوزه‌ای معین‌اند؟

۲. منحنی توابع مقدماتی

رسم منحنی تابع $y=f(x)$ اساساً از راه علامتگذاری شبکهٔ نقاط $M_i(x_i, y_i)$ انجام می‌گیرد، که در آن $y_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, 2, \dots)$ باشد؛ بشرطی که نقاط به‌اندازهٔ کافی نزدیك بهم انتخاب شده باشند. نقاط مجاور را باید بهم وصل کرد؛ نوع خطوطی که این نقطه‌ها را بهم وصل می‌کند از وضع استقرار نقاط مشخص می‌شود. برای محاسبه می‌توان از خط‌کش محاسبه استفاده کرد.



شکل ۳

رسم منحنی‌ها، به شناسائی توابع مقدماتی کمك می‌کند ومنحنی توابع مقدماتی، پایه‌ای برای رسم منحنیهای بغرنجتر می‌شود. بارسم منحنی

$$y=f(x) \qquad (\Gamma)$$

به‌کمك ترسیمات سادهٔ هندسی، منحنی توابع زیر بدست می‌آید:

۱) $y_1=-f(x)$ ؛ قرینهٔ منحنی Γ نسبت به محور ox ؛

۲) $y_۲ = f(-x)$ ؛ قرینهٔ منحنی Γ نسبت به محور oy ؛

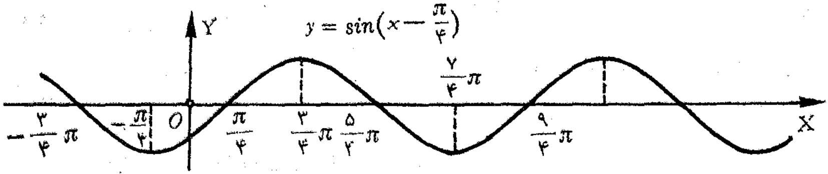
۳) $y_۳ = f(x-a)$ ؛ انتقال منحنی Γ درطول محور ox به اندازهٔ a ؛

۴) $y_۴ = b + f(x)$ ؛ انتقال منحنی Γ درطول محور oy به اندازهٔ b (شکل۳) .

مثال . منحنی تابع زیر را رسم کنید :

$$y = sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$$

حل . منحنی‌تابع $y = sin\,x$ رادرطول‌محور ox به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ بطرف راست منتقل‌می‌کنیم (شکل ۴) .



شکل ۴

نمایش توابع خطی زیررا رسم کنید (خط راست) :

۴۴ . $y = kx$ به‌ازای $k = ۰, ۱, ۲, \frac{۱}{۲}, -۱, -۲$.

۴۵ . $y = x + b$ به ازای $b = ۰$ و $۱, ۲, -۱, -۲$.

۴۶ . $y = \frac{۳}{۲}x + ۲$.

منحنی توابع صحیح و گویای درجه دوم زیررا رسم‌کنید (سهمی) :

۴۷ . $y = ax^۲$ به ازای $a = ۱, ۲, \frac{۱}{۲}$ و $-۱, -۲, ۰$.

۴۸ . $y = x^۲ + c$ به‌ازای $c = ۰, ۱, ۲, -۱$.

۴۹ . $y = (x - x_۰)^۲$ به‌ازای $y_۰ = ۰$ و $۱, ۲, -۱$.

۵۰ . $y = y_۰ + (x-۱)^۲$ به ازای $y_۰ = ۰$ و $۱, ۲, -۱$.

۵۱* . $y = ax^۲ + bx + c$ به ازای ۱) $a = ۱$ ، $b = -۲$ ، $c = ۳$ ؛

۲) $a=-2$ ، $b=6$ ، $c=0$.

۵۲ . $y = 2 + x - x^2$. نقاط تلاقی این سهمی را با محور ox پیدا کنید .

منحنی توابع صحیح وگویای زیررا، که بالاتر از درجه دوم هستند ، رسم کنید :

۵۳* . $y = x^3$ (سهمی‌مکعبی) .

۵۴ . $y = 2 + (x-1)^3$

۵۵ . $y = x^3 - 3x + 2$

۵۶ . $y = x^4$

۵۷ . $y = 2x^2 - x^4$

منحنی هریك از توابع هموگرافیك زیررا رسم کنید (هذلولی):

۵۸* . $y = \frac{1}{x}$

۵۹ . $y = \frac{1}{1-x}$

۶۰ . $y = \frac{x-2}{x+2}$

۶۱ . $y = y_0 + \frac{m}{x - x_0}$

$(m=6 ، y_0 = -1 ، x_0 = 1)$

۶۲* . $y = \frac{2x-3}{3x+2}$

منحنی توابع کسری وگویای زیررا رسم کنید :

۶۳ . $y = x + \frac{1}{x}$

۶۴ . $y = \frac{x^2}{x+1}$

۶۵* . $y = \frac{1}{x^2}$

۶۶ . $y = \frac{1}{x^3}$

۶۷* . $y = \frac{10}{x^2+1}$ (حلقهٔ آنه‌زا)

۶۸ . $y = \frac{2x}{x^2+1}$ (پیچ‌نیوتون)

۶۹ . $y = x + \frac{1}{x^2}$

۷۰ . $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (سه شاخهٔ نیوتون)

منحنی توابع گنگ زیررا رسم کنید:

۷۱* . $y = \sqrt{x}$

۷۲ . $y = \sqrt[3]{x}$

۷۳* . $y = \sqrt[3]{x^2}$ (سهمی نیل)

۷۴ . $y = \pm x\sqrt{x}$ (سهمی نیم‌مکعبی)

۷۵* . $y = \pm \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$ (بیضی)

۷۶ . $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ (هذلولی)

۷۷ . $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

۷۸* . $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{4-x}}$ (سیکلوئیددواُکلس)

۷۹. $y=\pm x\sqrt{۲۵-x^{۲}}$

منحنی توابع مثلثاتی زیر را رسم کنید :

۸۰*. $y=\sin x$ ۸۱*. $y=\cos x$

۸۲*. $y=tg x$ ۸۳*. $y=cotg x$

۸۴*. $y=\sec x$ ۸۵*. $y=cosec\, x$

۸۶. $y=A\ \sin x$ به‌ازای $A=۱, ۱۰, \frac{۱}{۲}, -۲$

۸۷*. $y=\sin nx$ به ازای $n=۱, ۲, ۳, \frac{۱}{۲}$.

۸۸. $y=\sin(x-\varphi)$ به‌ازای $\varphi=۰, \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}, \pi, -\frac{\pi}{۴}$.

۸۹*. $y=۵\sin(۲x-۳)$.

۹۰*. $y=a\sin x+b\cos x$ به ازای $a=۶$, $b=-۸$.

۹۱. $y=\sin x+\cos x$ ۹۲*. $y=\cos^{۲}x$

۹۳*. $y=x+\sin x$ ۹۴*. $y=x\sin x$

۹۵. $y=tg^{۲}x$ ۹۶. $y=۱-۲\cos x$

۹۷. $y=\sin x-\frac{۱}{۳}\sin ۳x$ ۹۸. $y=\cos x+\frac{۱}{۲}\cos ۲x$

۹۹*. $y=\cos\frac{\pi}{x}$ ۱۰۰. $y=\pm\sqrt{\sin x}$

منحنی توابع مجهول‌القوه و لگاریتمی زیررا رسم کنید :

۱۰۱. $y=a^{x}$ به ازای $a=۲, \frac{۱}{۲}, e$ $(e=۲/۷۱۸\ldots)$.

۱۰۲*. $y=lg_{a}x$ به‌ازای $a=۱۰, ۲, \frac{۱}{۲}, e$.

۱۰۳*. $y=shx$ که در آن $shx=\frac{۱}{۲}(e^{x}-{}^{-}e^{x})$ می‌باشد.

۱۰۴*. $y=chx$ که در آن $chx=\frac{۱}{۲}(e^{x}+e^{-x})$ می‌باشد.

۱۰۵*. $y=thx$ که در آن $thx=\frac{shx}{chx}$ می‌باشد .

۱۰۶. $y=10^{\frac{1}{x}}$ ۱۰۷*. $y=c-x^{2}$ (منحنی احتمال)

۱۰۸. $y=2^{-\frac{1}{x^2}}$ ۱۰۹. $y=lgx^2$

۱۱۰. $y=lg^2x$ ۱۱۱. $y=lg(lgx)$

۱۱۲. $y=\frac{1}{lgx}$ ۱۱۳. $y=lg\frac{1}{x}$

۱۱۴. $y=lg(-x)$ ۱۱۵. $y=lg_2(1+x)$

۱۱۶. $y=lg(\cos x)$ ۱۱۷. $y=2^{-x}\sin x$

منحنی توابع معکوس مثلثاتی زیررا رسم کنید :

۱۱۸*. $y=arc\ \sin x$ ۱۱۹*. $y=arc\ \cos x$

۱۲۰*. $y=arc\ tgx$ ۱۲۱*. $y=arc\ cotgx$

۱۲۲. $y=arc\ \sin\frac{1}{x}$ ۱۲۳. $y=arc\ \cos\frac{1}{x}$

۱۲۴. $y=x+arc\ cotgx$

منحنی توابع زیر را رسم کنید:

۱۲۵. $y=|x|$ ۱۲۶. $y=\frac{1}{2}(x+|x|)$

۱۲۷. (a $y=x|x|$؛ (b $y=lg_{\sqrt{2}}|x|$

۱۲۸. (a $y=\sin x+|\sin x|$؛ (b $y=\sin x-|\sin x|$

۱۲۹. $$y=\begin{cases}3-x^2 & (|x|\leqslant 1)\\ \frac{2}{|x|} & (|x|>1)\end{cases}$$

۱۳۰. (a $y=[x]$؛ (b $y=x-[x]$، که درآن $[x]$ قسمت صحیح عدد x است یعنی بزرگترین عدد صحیحی که کوچکتر یا مساوی x باشد .

منحنی توابع زیر را دردستگاه مختصات قطبی $(r\ ,\ \varphi)$ $(r\geqslant 0)$ رسم کنید :

۱۳۱*. $r=1$ (دایره) ۱۳۲*. $r=\frac{\varphi}{2}$ (پیچ ارشمیدس)

۱۳۳*. $r = e^{\varphi}$ (پیچ لگاریتمی) ۱۳۴*. $r = \frac{\pi}{\varphi}$ (پیچ هذلولی)

۱۳۵. $r = ۲\cos\varphi$ (دایره) ۱۳۶. $r = \frac{۱}{\sin\varphi}$ (خط راست)

۱۳۷. $r = \sec^{۲}\frac{\varphi}{۲}$ (سهمی) ۱۳۸*. $r = ۱۰\sin ۳\varphi$ (گل سه برگی)

۱۳۹*. $r = a(۱+\cos\varphi)$ $(a>۰)$ (کاردیوئید)

۱۴۰*. $r^{۲} = a^{۲}\cos ۲\varphi$ $(a>۰)$ (لمینسکات)

منحنی توابع زیر را، که بصورت پارامتری داده شده‌اند، رسم کنید :

۱۴۱*. $x = t^{۳}$ ، $y = t^{۲}$ (سهمی نیم مکعبی)

۱۴۲*. $x = ۱۰\cos t$ ، $y = \sin t$ (بیضی)

۱۴۳*. $x = ۱۰\cos^{۳}t$ ، $y = ۱۰\sin^{۳}t$ (آستروئید)

۱۴۴*. $x = a(\cos t + t\sin t)$ ، $y = a(\sin t - t\cos t)$ (گستردهٔ دایره)

۱۴۵*. $x = \frac{at}{۱+t^{۳}}$ ، $y = \frac{at^{۲}}{۱+t^{۳}}$ (برگ دکارتی)

۱۴۶. $x = \frac{a}{\sqrt{۱+t^{۲}}}$ ، $y = \frac{at}{\sqrt{۱+t^{۲}}}$ (نیمدایره)

۱۴۷. $y = ۲^{t}+۲^{-t}$ ، $y = ۲^{t}-۲^{-t}$ (شاخهٔ هذلولی)

۱۴۸. $x = ۲\cos^{۲}t$ ، $y = ۲\sin^{۲}t$ (پاره‌خط راست)

۱۴۹. $x = t - t^{۲}$ $y = t - t^{۳}$

۱۵۰. $x = a(۲\cos t - \cos ۲t)$ ، $y = a(۲\sin t - \sin ۲t)$ (کاردیوئید)

منحنی توابع ضمنی زیررا رسم کنید :

۱۵۱*. $x^{۲}+y^{۲} = ۲۵$ (دایره)

۱۵۲. $xy = ۱۲$ (هذلولی)

۱۵۳*. $y^{۲} = ۲x$ (سهمی)

۱۵۴. $\frac{x^{۲}}{۱۰۰}+\frac{y^{۲}}{۶۴} = ۱$ (بیضی)

۱۵۵. $y^{۲} = x^{۲}(۱۰۰-x^{۲})$

۱۵۶*. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (آستروئید)

۱۵۷*. $x+y=10\,lg y$

۱۵۸. $x^2=\cos y$

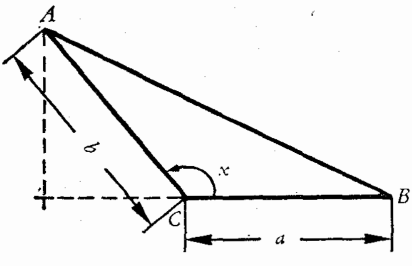
۱۵۹*. $\sqrt{x^2+y^2}=e^{Arctg\frac{y}{x}}$ (پیچ لگاریتمی)

۱۶۰*. $x^3+y^3-3xy=0$ (برگهای دکارتی)

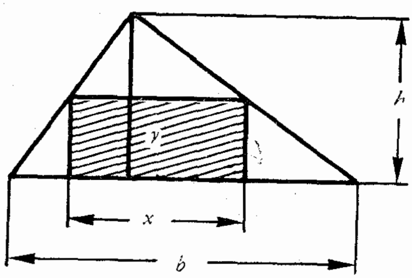
۱۶۱. رابطهٔ تبدیل درجهٔ صد قسمتی (C) را به درجهٔ فارنهایت (F) پیدا کنید، بشرطی که بدانیم صفر درجهٔ صد قسمتی با ۳۲ درجهٔ فارنهایت و ۱۰۰ درجهٔ صد قسمتی با ۲۱۲ درجهٔ فارنهایت مطابق است.

منحنی تابع بدست آمده را رسم کنید.

۱۶۲. در مثلثی که قاعدهٔ آن $b=10$ و ارتفاع آن $h=6$ است، مستطیلی محاط کرده‌ایم (شکل ۵). مساحت این مستطیل (y) را به عنوان تابعی از x (طول قاعدهٔ مستطیل) بیان کنید.



شکل ۶



شکل ۵

منحنی این تابع را بدست آورید و حداکثر آنرا محاسبه کنید.

۱۶۳. درمثلث ABC می‌دانیم $BC=a$ ، $AC=b$ و زاویهٔ مجهول $\widehat{ACB}=x$ (شکل ۶) $y=S_{ABC}$ را برحسب متغیر x بیان کنید، منحنی آنرا رسم وحداکثر مقدار آنرا تعیین کنید.

۱۶۵. معادلات زیررا به‌کمك رسم منحنی حل کنید:

a) $2x^2-5x+2=0$; d) $10^{-x}=x$;

b) $x^2+x-1=0$; e) $x=1+0{,}5\sin x$;

c) $lg x=0{,}1x$; f) $\cot g x=x\ (0<x<\pi)$;

۱۶۵ . دستگاههای زیر را به‌کمك رسم منحنی حل کنید :

a) $xy = ۱۰$ ، $x + y = ۷$;

b) $xy = ۶$ ، $x^۲ + y^۲ = ۱۳$;

c) $x^۲ - x + y = ۴$ ، $y^۲ - ۲x = ۰$;

d) $x^۲ + y = ۱۰$ ، $x + y^۲ = ۶$;

e) $y = \sin x$ ، $y = \cos x \quad (۰ < x < ۲\pi)$

۳. حدود

۱°. حد یك دنباله . عدد a را حد دنبالهٔ $x_۱$ ، $x_۲$ ، ... ، x_n ، ... گویند

$$\underset{n \to \infty}{\text{حد}}\ x_n = a$$

وقتی‌که به ازای هر مقدار $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $N = N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد ، بنحوی که برای مقادیر $n > N$ داشته باشیم :

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

مثال ۱. ثابت کنید :

$$\underset{n \to \infty}{\text{حد}}\ \frac{۲n + ۱}{n + ۱} = ۲$$

حل . تفاضل زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$\frac{۲n + ۱}{n + ۱} - ۲ = -\frac{۱}{n + ۱}$$

اگر این تفاضل را ازلحاظ قدرمطلق در نظر بگیریم ، وقتی که $n > \frac{۱}{\varepsilon} - ۱ = N(\varepsilon)$ باشد

$$\left| \frac{۲n + ۱}{n + ۱} - ۲ \right| = \frac{۱}{n + ۱} < \varepsilon \qquad (۲)$$

به این ترتیب به‌ازای هرمقدار مثبت عدد ε ، عدد $N = \frac{۱}{\varepsilon} - ۱$ وجود دارد بطوریکه اگر

$n>N$ باشد، نامساوی (۲) صحیح است. بنابراین عدد ۲ حد دنبالهٔ $x_n = \frac{۲n+۱}{n+۱}$ است و رابطهٔ (۱) صحیح است.

۲°. حد یك تابع. گویند تابع $f(x) \to A$ وقتی که $x \to a$ (A و a عدد هستند) یا

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

بشرطی که به‌ازای هرمقدار $\varepsilon > ۰$، $\delta = \delta(\varepsilon)$ وجود داشته باشد، بنحوی که اگر $۰ < |x-a| < \delta$ باشد، داشته باشیم:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

بهمین ترتیب

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

بشرطی که به‌ازای $|x| > N(\varepsilon)$ داشته باشیم $|f(x) - A| < \varepsilon$.

همچنین وقتی که می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

به معنای آنست که‌وقتی $۰ < |x-a| < \delta(E)$ باشد $|f(x)| > E$ است، که در آن E عبارتست از عدد مثبت دلخواه.

۳°. حد چپ وحد راست. وقتی که $x < a$ و $x \to a$، می‌نویسند: $x \to a - ۰$؛ بهمین ترتیب وقتی که $x > a$ و $x \to a$ می‌نویسند: $x \to a + ۰$. عددهای

$$f(a-۰) = \lim_{x\to a-۰} f(x) \quad \text{و} \quad f(a+۰) = \lim_{x\to a+۰} f(x)$$

را بترتیب حد چپ تابع $f(x)$ درنقطهٔ a و حدراست تابع $f(x)$ در نقطهٔ a گویند (اگر این عددها وجود داشته باشند). برای اینکه تابع $f(x)$ وقتی که $x \to a$ دارای حدی باشد، لازم و کافی است که تساوی زیر برقرار باشد:

$$f(a-۰) = f(a+۰)$$

اگر $\lim_{x\to a} f_۱(x)$ و $\lim_{x\to a} f_۲(x)$ وجود داشته باشند، قضایای زیر صحیح خواهدبود:

$$۱)\qquad \underset{x\to a}{\text{حد}}\,[f_۱(x)+f_۲(x)]=\underset{x\to a}{\text{حد}}\,f_۱(x)+\underset{x\to a}{\text{حد}}\,f_۲(x);$$

$$۲)\qquad \underset{x\to a}{\text{حد}}\,[f_۱(x)\cdot f_۲(x)]=\underset{x\to a}{\text{حد}}\,f_۱(x)\cdot\underset{x\to a}{\text{حد}}\,f_۲(x);$$

$$۳)\qquad \underset{x\to a}{\text{حد}}\left[\frac{f_۱(x)}{f_۲(x)}\right]=\frac{\underset{x\to a}{\text{حد}}\,f_۱(x)}{\underset{x\to a}{\text{حد}}\,f_۲(x)}\quad\left(\underset{x\to a}{\text{حد}}\,f_۲(x)\neq ۰\right).$$

حدود زیر مورد استعمال فراوان دارند :

$$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\,\frac{\sin x}{x}=۱\ ;$$

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{x}=\underset{\alpha\to ۰}{\text{حد}}\,(۱+\alpha)^{\frac{۱}{\alpha}}=e=۲/۷۱۸۲۸\ldots$$

مثال ۲ . حد چپ و حدراست تابع زیررا وقتی که $x\to ۰$، بدست آورید :

$$f(x)=arc\ tg\frac{۱}{x}$$

حل . داریم :

$$f(+۰)=\underset{x\to +۰}{\text{حد}}\left(arc\ tg\frac{۱}{x}\right)=\frac{\pi}{۲}$$

$$f(-۰)=\underset{x\to -۰}{\text{حد}}\left(arc\ tg\frac{۱}{x}\right)=-\frac{\pi}{۲}$$

و واضح است که در اینحالت، تابع $f(x)$ وقتی‌که $x\to ۰$ دارای حدی نیست.

۱۶۶ . ثابت کنید وقتی‌که $n\to\infty$ ، دنبالهٔ

$$۱,\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۹},\ldots,\frac{۱}{n^۲},\ldots$$

حدی مساوی صفر دارد. به ازای چه مقادیری از n نامساوی زیر صحیح است :

$$\frac{۱}{n^۲}<\varepsilon$$

(ε عدد مثبت دلخواهی است)؟

موارد عددی زیر را تحقیق‌کنید: a) $\varepsilon=۰/۱$ ؛ b) $\varepsilon=/۰۱$ ؛ c) $\varepsilon=۰/۰۰۱$.

۱۶۷ . ثابت کنید حد دنبالهٔ

$$x_n = \frac{n}{n+1} (n = ۱،۲، \ldots)$$

وقتی که $n \to \infty$ برابراست با ۱. به‌ازای چه مقادیری از $n > N$ نامساوی زیر برقراراست:

$$|x_n - ۱| < \varepsilon$$

(ε عدد مثبت دلخواهی است)؟

N را پیدا کنید بشرطی که: a) $\varepsilon = ۰/۱$؛ b) $\varepsilon = ۰/۰۱$؛ c) $\varepsilon = ۰/۰۰۱$.

۱۶۸. ثابت کنید

$$\lim_{x \to ۲} x^۲ = ۴$$

برای عدد مثبت و مفروض ε، عدد مثبت δ را چگونه انتخاب کنیم که از نامساوی

$$|x - ۲| < \delta$$

نامساوی زیر نتیجه شود:

$$|x^۲ - ۴| < \varepsilon?$$

δ را محاسبه کنید، بشرطی که داشته باشیم a) $\varepsilon = ۰/۱$؛ b) $\varepsilon = ۰/۰۱$، c) $\varepsilon = ۰/۰۰۱$.

۱۶۹. مفهوم دقیق روابط زیر را روشن کنید:

a) $\lim\limits_{x \to +۰} lg x = -\infty$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} ۲^x = +\infty$; c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

۱۷۰. حد هریك از دنباله‌های زیر را پیدا کنید:

a) $۱، -\frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۳}، -\frac{۱}{۴}، \ldots، \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}، \ldots;$

b) $\frac{۲}{۱}، \frac{۴}{۳}، \frac{۶}{۵}، \ldots، \frac{۲n}{۲n-۱}، \ldots;$

c) $\sqrt{۲}، \sqrt{۲\sqrt{۲}}، \sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲}}}، \ldots;$

d) $۰/۲، ۰/۲۳، ۰/۲۳۳، \ldots$

هریك ازحدود زیر را پیدا کنید:

۱۷۱. $$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{۱}{n^۲} + \frac{۲}{n^۲} + \frac{۳}{n^۲} \ldots + \frac{n-۱}{n^۲} \right)$$

۱۷۲. $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+1)}{n^3}$

۱۷۳. $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left[\dfrac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$

۱۷۴. $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

۱۷۵. $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

۱۷۶. $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$

۱۷۷. $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left[1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right]$

*۱۷۸. $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots n^2}{n^3}$

۱۷۹. $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

۱۸۰. $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{n\sin n!}{n^2+1}$

برای جستجوی حد نسبت دو کثیرالجملهٔ صحیح نسبت به x ، وقتی که $x\to\infty$، بهتر است هر دوجملهٔ نسبت را بر x^n تقسیم کنیم (n بزرگترین توان این کثیرالجملههاست).

از همین روش می‌توان برای مواردی هم که کسر شامل عبارتهای گنگ است ، استفاده کرد.

مثال۱.

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}=$$

$$=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(3+\frac{5}{x}\right)\left(4-\frac{6}{x}\right)}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2\times3\times4}{3}=8$$

مثال۲.

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}}=1$$

۱۸۱. $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

۱۸۲. $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{1000x}{x^2-1}$

۱۸۳. $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{x^2-5x+1}{3x+7}$

۱۸۴. $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$

۱۸۵. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$ ۱۸۶. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

۱۸۷. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$ ۱۸۸. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$

۱۸۹. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$ ۱۹۰. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو کثیرالجمله و $P(a)\neq 0$ یا $Q(a)\neq 0$ باشد، حد کسر گویای

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

مستقیماً بدست می‌آید.

اگر $P(a)=Q(a)=0$ باشد، کسر $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ یك یا چندبار بر دوجمله‌ای $x-a$ قابل قسمت است.

مثال ۳.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=4$$

۱۹۱. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ ۱۹۲. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$

۱۹۳. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ ۱۹۴. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

۱۹۵. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ ۱۹۶. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

۱۹۷. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$ ۱۹۸. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

در اکثر مواردی که عبارت شامل جملات گنگ باشد، می‌توان با انتخاب متغیر جدید، آنرا به‌عبارتی گویا منجر کرد.

مثال ۴. مطلوبست $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

حل. اگر $1+x=y^6$ فرض کنیم، داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}=\frac{3}{2}$$

۱۹۹. $\underset{x\to ۱}{\text{حد}}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}$ ۲۰۰. $\underset{x\to ۶۴}{\text{حد}}\dfrac{\sqrt{x}-۸}{\sqrt[۳]{x}-۴}$

۲۰۱. $\underset{x\to ۱}{\text{حد}}\dfrac{\sqrt[۳]{x}-۱}{\sqrt[۴]{x}-۱}$ ۲۰۲. $\underset{x\to ۱}{\text{حد}}\dfrac{\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt[۳]{x}+۱}{(x-۱)^{۲}}$

روش دیگری که برای محاسبهٔ حد کسرهای شامل عبارتهای گنگ می‌توان مورد استفاده قرار داد ، اینست که گنگ بودن مخرج را به گنگ بودن صورت منجر کنیم وبرعکس.

مثال۵.

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=$$

$$=\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{۱}{۲\sqrt{a}}\quad (a>۰)$$

۲۰۳. $\underset{x\to ۷}{\text{حد}}\dfrac{۲-\sqrt{x-۳}}{x^{۲}-۴۹}$ ۲۰۴. $\underset{x\to ۸}{\text{حد}}\dfrac{x-۸}{\sqrt[۳]{x}-۲}$

۲۰۵. $\underset{x\to ۱}{\text{حد}}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}$ ۲۰۶. $\underset{x\to ۴}{\text{حد}}\dfrac{۳-\sqrt{۵+x}}{۱-\sqrt{۵-x}}$

۲۰۷. $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\dfrac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x}$ ۲۰۸. $\underset{h\to ۰}{\text{حد}}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

۲۰۹. $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\dfrac{\sqrt[۳]{x+h}-\sqrt[۳]{x}}{h}$

۲۱۰. $\underset{x\to ۳}{\text{حد}}\dfrac{\sqrt{x^{۲}-۲x+۶}-\sqrt{x^{۲}+۲x-۶}}{x^{۲}-۴x+۳}$

۲۱۱. $\underset{x\to +\infty}{\text{حد}}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$ ۲۱۲. $\underset{x\to +\infty}{\text{حد}}(\sqrt{x(x+a)}-\sqrt{x})$

۲۱۳. $\underset{x\to +\infty}{\text{حد}}(\sqrt{x^{۲}-۵x+۶}-x)$ ۲۱۴. $\underset{y\to +\infty}{\text{حد}}x(\sqrt{x^{۲}+۱}-x)$

۲۱۵. $\underset{x\to \infty}{\text{حد}}(x+\sqrt[۳]{۱-x^{۳}})$

دربسیاری موارد،برای محاسبهٔ حدیك‌عبارت‌ازرابطهٔ $۱=\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\dfrac{\sin x}{x}$ استفاده می‌شود

ودو رابطهٔ

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\cos x=\cos a \quad \text{و} \quad \underset{x\to a}{\text{حد}}\sin x=\sin a$$

معلوم فرض می‌شود .

مثال ۶. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5\right)=1\times 5=5$

۲۱۶ . (a $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin x}{x}$ ، (b $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

۲۱۷ . $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ **۲۱۸ .** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$

۲۱۹ . $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$ **۲۲۰ ,** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(n\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$

۲۲۱ . $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ **۲۲۲ .** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

۲۲۳ . $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$ **۲۲۴ .** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\,\pi x}{x+2}$

۲۲۵ . $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ **۲۲۶ .** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-tg\,x}$

۲۲۷ . (a $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$ ؛ (b $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$

۲۲۸ . $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,tg\dfrac{\pi x}{2}$ **۲۲۹ .** $\lim\limits_{x\to 0}cotg\,2x\,cotg\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

۲۳۰ . $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}$ **۲۳۱ .** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

۲۳۲ . $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$ **۲۳۳ .** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-\sin x}{x^3}$

۲۳۴ . $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$ **۲۳۵ .** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{\sin 3x}$

۲۳۶ . $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$ **۲۳۷ .** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

۲۳۸ : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$ **۲۳۹ .** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

۲۴۰. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

برای پیدا کردن حدی به‌صورت

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}[\varphi(x)]^{\psi(x)}=C \qquad (3)$$

باید به‌این نکات توجه داشت :

۱) اگر حدود زیر وجود داشته باشد

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\varphi(x)=A \quad \text{و} \quad \underset{x\to a}{\text{حد}}\psi(x)=B$$

دراینصورت $C=A^B$ است ؛

۶) اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}\varphi(x)=A\neq 1$ و $\underset{x\to a}{\text{حد}}\psi(x)=\pm\infty$ ، مسئلهٔ مربوط به پیدا کردن حد(۳)،مستقیماً حل می‌شود ؛

۳) اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}\ \varphi(x)=1$ و $\underset{x\to a}{\text{حد}}\psi(x)=\infty$ ، فرض می‌کنیم $\varphi(x)=1+\alpha(x)$ که وقتی $x\to a$ ، $\alpha(x)\to 0$ و بنابراین خواهیم داشت :

$$C=\underset{x\to a}{\text{حد}}\left\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)\psi(x)}=e^{\underset{x\to a}{\text{حد}}\alpha(x)\psi(x)}=$$

$$=e^{\underset{x\to a}{\text{حد}}(\varphi(x)-1)\psi(x)}=$$

که در آن $e=2{,}71828\ldots$ ، عدد نپر است .

مثال ۷. مطلوبست محاسبهٔ $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$

حل. داریم : $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)=2$ و $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\ (1+x)=1$ ،بنابراین

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=2$$

مثال ۸. مطلوبست محاسبهٔ $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$

حل. داریم : $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{x+1}{2x+1}=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{2}$ و $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}x^2=\infty$ ، بنابراین:

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{x+1}{4x+1}\right)^{x^2}=0$$

مثال۹. مطلوبست $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$

حل . داریم : $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{x-1}{x+1}=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1$ ، بنابرین عبارت بالارا می‌توان چنین نوشت :

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right]^{x}=$$

$$=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{-\frac{2x}{1+x}}=e^{\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}$$

در اینحالت می‌توانیم بدون‌اینکه روش کلی را درنظربگیریم ، حد قبلی را بدست‌آوریم:

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=$$

$$=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$$

بطورکلی می‌توان ازاین رابطه استفاده کرد :

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$$

۲۴۱ . $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$

۲۴۲ . $\underset{x\to 1}{\text{حد}}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$

۲۴۳ . $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{1+x}}$

۲۴۴ . $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$

۲۴۵ . $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$

۲۴۶ . $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$

۲۴۷. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

۲۴۸. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$

۲۴۹. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

۲۵۰. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$

۲۵۱. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$

۲۵۲**. a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$

برای محاسبهٔ حدودی که در زیر داده شده است ، این مطلب را دانسته فرض می‌کنیم که اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد ومثبت هم باشد ، داریم :

$$\lim_{x\to a}[\ln f(x)]=\ln\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$

مثال ۱۰ . ثابت کنید

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad (*)$$

حل . داریم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$$

رابطهٔ (*) اکثر برای حل مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرد .

۲۵۳. $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(2x+1)-\ln(x+2)]$

۲۵۴. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lg(1+10x)}{x}$

۲۵۵. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

۲۵۶. $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$

۲۵۷. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

۲۵۸*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

۲۵۹*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \quad (a>0)$

۲۶۰*. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) \quad (a>0)$

۲۶۱. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

۲۶۲. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$

۲۶۳. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{shx}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{chx-1}{x}$

حدود یکطرفه (چپ یا راست) زیررا پیداکنید :

۲۶۴. a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

۲۶۵. a) $\lim\limits_{x\to -\infty} thx$ ؛ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} thx$

۲۶۶. a) $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ ؛ b) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

۲۶۷. a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{ln(1+e^{x})}{x}$ ؛ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ln(1+e^{x})}{x}$

۲۶۸. a) $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{|\sin x|}{x}$ ؛ b) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{|\sin x|}{x}$

۲۶۹. a) $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x-1}{|x-1|}$ ؛ b) $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x-1}{|x-1|}$

۲۷۰. a) $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{x}{x-2}$ ، b) $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{x}{x-2}$

منحنی نمایش توابع زیررا رسم کنید:

۲۷۱**. $y=\lim\limits_{x\to +\infty}(\cos^{2n} x)$

۲۷۲*. $y=\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{x}{1+x^{n}} \quad (x\geqslant 0)$

۲۷۳. $y=\lim\limits_{\alpha\to 0} \sqrt{x^2+\alpha^2}$

۲۷۴. $y=\lim\limits_{n\to \infty}(arctgnx)$

۲۷۵. $y=\lim\limits_{n\to \infty} \sqrt[n]{1+x^{n}} \quad (x\geqslant 0)$

۲۷۶. کسر متناوب مرکب زیررا به‌کسر متعارفی تبدیل کنید :

$$\alpha = 0,13555\cdots$$

۲۷۷. ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

$$ax^2+bx+c=0$$

بچه صورت در می‌آیند، بشرطی که a بسمت صفر میل کندو bو c مقادیر ثابتی باشند . ضمناً $b\neq 0$ است؟

۲۷۸ . مطلوبست حد زاویهٔ داخلی یك n ضلعی منتظم ، وقتی که $n\to\infty$.

۲۷۹ . مطلوبست حد محیط یك n ضلعی منتظم محاط دردایرهٔ بشعاع R ویا محیط بر آن ، وقتی که $n\to\infty$.

۲۸۰ . مطلوبست حد مجموع عرضهای منحنی

$$y=e^{-x}\cos\pi x$$

درنقاط $x=0,1,2,\dots,n$، وقتی که $n\to\infty$.

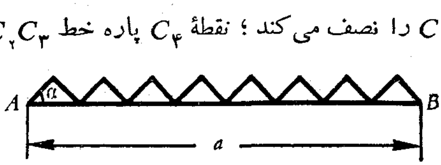
۲۸۱ . مطلوبست حد مجموع مساحتهای مربعهائی که روی عرضهای منحنی $y=2^{1-x}$ درنقاط $x=1,2,3,\dots,n$ ساخته می‌شود ، وقتی که $n\to\infty$.

۲۸۲ . وقتی که $n\to\infty$ ، مطلوبست حد محیط خط شکستهٔ $M_0M_1\dots M_n$ محاط درپیچ لگاریتمی $r=e^{-\varphi}$، بشرطی که رأسهای این‌خط شکسته بترتیب دارای زوایای‌قطبی زیر باشند :

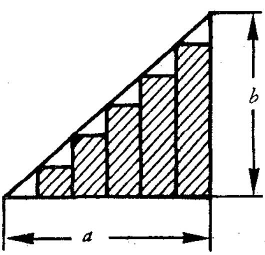
$$\varphi_0=0,\ \varphi_1=\frac{\pi}{2},\dots,\varphi_n=\frac{n\pi}{2}$$

۲۸۳ . پاره خط $AB=a$ (شکل ۷) را به n قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم وروی هر یك ازقسمتها ، به‌عنوان قاعده ، مثلث متساوی‌الساقینی بازاویهٔ مجاورقاعدهٔ $\alpha=45°$ساخته‌ایم. ثابت کنید حد طول این‌پاره خط شکسته باطول پاره خط AB فرق‌دارد، باوجودی که در حد، خط شکسته «ازلحاظ هندسی برپاره خط AB قرارمی‌گیرد».

۲۸۴ . نقطهٔ C_1 پاره‌خط $AB=l$ را به‌دوقسمت مساوی‌تقسیم می‌کند ؛ نقطهٔ C_2 پاره خط AC_1 را نصف می‌کند ؛ نقطهٔ C_3 پاره خط C_2C_1 را نصف می‌کند ؛ نقطهٔ C_4 پاره خط C_2C_3 را نصف



شکل ۷



شکل ۸

می‌کند وغیره . مطلوبست وضع حدی نقطهٔ C_n وقتی که $n \to \infty$.

۲۸۵ . ضلع a مجاور بەزاویهٔ قائمه ازمثلث قائم‌الزاویه‌ای را به n قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم (شکل۸) وروی پاره خطهائی که بدینطریق بدست می‌آید مستطیلهائی محاط در مثلث ساخته‌ایم. مطلوبست حدمساحت شکل پله مانندی که ازاین‌راه بدست می‌آید وقتی که $n \to \infty$.

۲۸۶ . مطلوبست محاسبهٔ مقادیر ثابت k و b ازمعادلهٔ

$$\lim_{x \to \infty}\left(kx + b - \frac{x^۳ + ۱}{x^۲ + ۱}\right) = ۰ \qquad (۱)$$

معادلهٔ (۱) را تعبیرهندسی کنید .

۲۸۷* . یك تغییر شیمیائی به‌این‌ترتیب جریان داردکــه نمو کمیت جسم در هر فاصلهٔ زمانی τ ازدنبالهٔ بی‌نهایت فواصل $(i\tau, (i+۱)\tau)$ $(i = ۰, ۱, ۲, \ldots)$ با کمیت موجود جسم درابتدای این فاصله و باندازهٔ فاصله ، نسبت مستقیم دارد. بفرض اینکه درلحظهٔ شروع، کمیت جسم $Q_۰$ باشد ، مطلوبست کمیت جسم $Q_t^{(n)}$ بعدازفاصلهٔ زمانی t، بشرطی که نمو کمیت‌جسم درهر n امین قسمت فاصلهٔ زمانی $\tau = \dfrac{t}{n}$ انجام بگیرد .

مطلوبست $Q_t = \lim\limits_{n \to \infty} Q_t^{(n)}$

۴. بی‌نهایت کوچکها و بی‌نهایت بزرگها

۱°. **بی‌نهایت کوچکها** . اگرداشته باشیم

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = ۰$$

یعنی ، اگر برای $۰ < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ داشته باشیم $|\alpha(x)| < \varepsilon$ ، گویند تابع $\alpha(x)$ ، وقتی $x \to a$ ، بی‌نهایت کوچك است . بهمین ترتیب بی‌نهایت‌کوچك $\alpha(x)$ ، وقتی $x \to \infty$ ، تعریف می‌شود.

مجموع وحاصلضرب تعداد محدودی بی‌نهایت‌کوچك، وقتی $x \to a$ ، بازهم بی‌نهایت کوچك است ، وقتی $x \to a$.

اگر $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ ، وقتی $x \to a$ ، بی‌نهایت‌کوچك باشند و داشته باشیم

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$$

که درآن C عددی است مخالف صفر، توابع $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ را بی‌نهایت کوچکهای هم‌مرتبه گویند؛ اگر $C=0$ باشد، گویند تابع $\alpha(x)$ بی‌نهایت‌کوچکی ازمرتبهٔ بالاتر درمقایسه با $\beta(x)$ است، تابع $\alpha(x)$را بی‌نهایت‌کوچك ازمرتبهٔ n نسبت به‌تابع $\beta(x)$ گویند ، وقتی که‌داشته‌باشیم:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n}=C$$

که درآن $0<|C|<+\infty$ است .

اگر داشته باشیم

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$$

گویند توابع $\alpha(x)$ و $\beta(x)$، وقتی $x\to a$ ، بی‌نهایت کوچکهای معادل‌اند :

$$\alpha(x)\sim\beta(x)$$

مثلا اگر $x\to 0$ ، داریم :

$$\sin x\sim x;\ tg\,x\sim x;\ ln(1+x)\sim x$$

مجموع دو بی‌نهایت‌کوچك ازمرتبه‌های مختلف ، باآنکه مرتبهٔ‌کمتری دارد، معادل‌است.

اگردوبی‌نهایت‌کوچك را به‌مقادیر معادل آنها تبدیل کنیم ، نسبت آنها تغییر نمی‌کند .

به‌کمك این قضیه برای پیداکردن حدکسر

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

که در آن وقتی $x\to a$ ، $\alpha(x)\to 0$ و $\beta(x)\to 0$ ، می‌توان از صورت و مخرج بی‌نهایت کوچهائی ازمرتبهٔ بالاتر کم‌کرد (ویا اضافه نمود) ، زیرا مثل اینست‌که جمله‌های نسبت را به مقادیر معادل آنها تبدیل کرده‌ایم .

مثال۱.

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{\sqrt[3]{x^2+2x^4}}{ln(1+2x)}=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2x}=\frac{1}{2}$$

۲°. بی‌نهایت بزرگها. اگر برای هر عدد به‌اندازهٔ کافی بزرگ N عددی مثل $\delta(N)$ وجود داشته باشد، بنحوی که به‌ازای $0<|x-a|<\delta(N)$ نامساوی زیربرقرار باشد

$$|f(x)|>N$$

تابع $f(x)$ را بی‌نهایت بزرگ برای $x\to a$ گویند.

بهمین‌ترتیب بی‌نهایت بزرگ $f(x)$ برای $x\to\infty$ تعریف می‌شود. شبیه آنچه که در مورد بی‌نهایت کوچکها گفتیم، می‌توان مفهوم بی‌نهایت بزرگهای از مرتبه‌های مختلف را تعریف کرد.

۲۸۸. ثابت‌کنید که تابع

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

وقتی $n\to\infty$، بی‌نهایت کوچك است. برای چه مقادیری از x نامساوی

$$|f(x)|<\varepsilon$$

برقرار است؟ ε عددی است دلخواه.

محاسبه‌را برای‌حالتهایa) $\varepsilon=0/1$؛ b) $\varepsilon=0/01$؛ c) $\varepsilon=0/001$ انجام‌دهید.

۲۸۹. ثابت‌کنید که تابع

$$f(x)=1-x^2$$

وقتی $x\to 1$، بی‌نهایت کوچك است. به‌ازای چه مقادیری از x نامساوی

$$|f(x)|<\varepsilon$$

برای عدد مثبت و دلخواه ε برقرار است؟ برای حالتهای a) $\varepsilon=0/1$؛ b) $\varepsilon=0/01$؛ c) $\varepsilon=0/001$ محاسبهٔ عددی راانجام دهید.

۲۹۰. ثابت کنید که تابع

$$f(x)=\frac{1}{x-2}$$

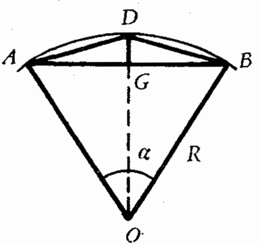
وقتی $x \to ۲$ ، بی‌نهایت بزرگ است . درکدام ناحیهٔ $|x - ۲| < \delta$ نامساوی زیر برقرار است؟

$$|f(x)| > N$$

N عدد مثبت دلخواهی است .

δ را درحالتهای $a)\ N = ۱۰$ ؛ $b)\ N = ۱۰۰$ ؛ $c)\ N = ۱۰۰۰$ پیدا کنید .

۲۹۱ . اگر r شعاع کره را بی‌نهایت کوچك مرتبهٔ اول فرض کنیم ، مطلوبست مرتبهٔ بی‌نهایت کوچکی : $a)$ سطح کره ، $b)$ حجم کره . مرتبهٔ بی‌نهایت کوچکی شعاع کره وحجم کره نسبت به‌سطح این کره‌چیست؟



شکل ۹

۲۹۲ . فرض می‌کنیم زاویهٔ مرکزی α از قطاع دایره‌ای AOB (شکل ۹) به‌شعاع R بسمت صفرمیل کند . مطلوبست مرتبهٔ بی‌نهایت کوچکی نسبت به بی‌نهایت کوچك α : $a)$ وتر AB ؛ $b)$ سهم GD ؛ $c)$ مساحت مثلث ABD .

۲۹۳ . وقتی $x \to ۰$ ، مرتبهٔ بی‌نهایت کوچکی نسبت به x را درمورد توابع زیر پیداکنید :

$$a)\ \frac{۲x}{۱+x};\quad b)\ \sqrt{x+\sqrt{x}};\quad c)\ \sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt{x^۳};$$

$$d)\ ۱-\cos x;\quad e)\ tg\,x-\sin x$$

۲۹۴ . ثابت کنید طول‌قوس بی‌نهایت کوچك دایره به‌شعاع ثابت، معادل‌طول‌وتر آنست.

۲۹۵ . آیا پاره خط بی‌نهایت کوچك یانیمدایرهٔ به‌قطر همین پاره خط معادل است؟

با استفاده ازقضیهٔ نسبت دو بی‌نهایت کوچك مطلوبست :

۲۹۶ . $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin ۳x\cdot\sin ۵x}{(x-x^۳)^۲}$

۲۹۷ . $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{ln(۱-x)}$

۲۹۸ . $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{lnx}{۱-x}$

۲۹۹ . $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\cos x-\cos ۲x}{۱-\cos x}$

۳۰۰ . ثابت کنید ، وقتی $x \to ۰$ ، مقادیر $\frac{x}{۲}$ و $\sqrt{۱+x}-۱$ معادل‌اند . با استفاده از

این نتیجه ثابت کنید که برای مقادیر کوچک $|x|$ تساوی تقریبی زیرصحیح است:

$$\sqrt{۱+x}\approx ۱+\frac{x}{۲} \qquad (۱)$$

با توجه به رابطهٔ (۱) بتقریب پیدا کنید:

a) $\sqrt{۱/۰۶}$; b) $\sqrt{۰/۹۷}$; c) $\sqrt{۱۰}$; d) $\sqrt{۱۲۰}$

ومقادیر بدست آمده را بامقادیری که ازراه جذرگرفتن بدست می‌آید، مقایسه کنید.

۳۰۱. ثابت کنید که وقتی $x\to ۰$، بادقت تا جمله‌های ردیف $x^۲$، تساویهای تقریبی زیرصحیح است:

a) $\dfrac{۱}{۱+x}\approx ۱-x$;

b) $\sqrt{a^۲+x}\approx a+\dfrac{x}{۲a}$ $(a>۰)$;

c) $(۱+x)^n\approx ۱+nx$ (n عددی طبیعی است) ;

d) $lg(۱+x)\approx Mx$ $\quad (M=lge=۰/۴۳۴۲۹...)$

با توجه به این روابط بتقریب محاسبه کنید:

۱) $\dfrac{۱}{۱/۰۲}$; ۲) $\dfrac{۱}{۰/۹۷}$; ۳) $\dfrac{۱}{۱۰۵}$; ۴) $\sqrt{۱۵}$; ۵) $۱/۰۴^۳$;

۶) $۰/۹۳^۴$; ۷) $lg۱/۱$

مقادیری راکه بدست می‌آورید با مقدار واقعی آنها مقایسه کنید.

۳۰۲. ثابت کنید که وقتی $n\to\infty$، تابع صحیح وگویای

$$P(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\dots+a_n \qquad (a_۰\neq ۰)$$

بی‌نهایت بزرگی معادل جملهٔ بادرجهٔ بزرگتر $a_۰x^n$ است.

۳۰۳. فرض کنید $x\to\infty$. x را بی‌نهایت بزرگی ازمرتبهٔ اول بگیرید، دراینصورت مرتبهٔ بی‌نهایت بزرگی توابع زیررا بدست آورید:

a) $x^۲-۱۰۰x-۱۰۰۰$; b) $\dfrac{x^۵}{x+۲}$;

e) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ d) $\sqrt[۳]{x-۲x^۲}$

۵. پیوستگی توابع

۱°. تعریف پیوستگی . تابع $f(x)$ را به ازای $x=\xi$ (یا «در نقطهٔ ξ») پیوسته گویند وقتی که: ۱) این تابع در نقطهٔ ξ معین باشد، یعنی $f(\xi)$ وجود داشته باشد؛ ۲) $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ وجود داشته باشد؛ ۳) این حد مساوی مقدار تابع در نقطهٔ ξ باشد، یعنی

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=f(\xi) \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم

$$x=\xi+\Delta\xi$$

که در آن $\Delta\xi\to ۰$، می‌توان شرط (۱) را چنین نوشت:

$$\lim_{\Delta\xi\to ۰}\Delta f(\xi)=\lim_{\Delta\xi\to ۰}[f(\xi+\Delta\xi)-f(\xi)]=۰ \qquad (۲)$$

یعنی تابع $f(x)$ تنها وقتی در نقطهٔ ξ پیوسته است، که در این نقطه بی‌نهایت کوچك نمو آوند متناظر با بی‌نهایت کوچك نمو تابع باشد.

اگر تابعی در هر نقطهٔ یك حوزه (فاصلهٔ باز، فاصلهٔ بسته و غیره) پیوسته باشد، گویند در این حوزه پیوسته است.

مثال ۱. ثابت کنید که تابع

$$y=\sin x$$

به ازای هر مقدار آوند x پیوسته است.

حل. داریم :

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=۲\sin\frac{\Delta x}{۲}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{۲}\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{\Delta x}{۲}}{\frac{\Delta x}{۲}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{۲}\right)\cdot\Delta x$$

و چون

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1 \quad \text{و} \quad \left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant 1$$

بنابراین به‌ازای هرمقدار x داریم:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

به‌این ترتیب نتیجه می‌شود که تابع $\sin x$ به‌ازای $-\infty<x<+\infty$ پیوسته است.

۲°. گویند تابع $f(x)$ به‌ازای $x=x_0$ (یا درنقطهٔ x_0)، متعلق به‌حوزهٔ تعریف تابع و یا یکی از حدود این حوزه، منفصل است وقتی که در این نقطه شرایط پیوستگی تابع را از دست بدهد.

مثال ۲. تابع $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ (شکل a،۱۰) به‌ازای $x=1$ منفصل‌است. این‌تابع درنقطهٔ $x=1$ معین نیست وبنابراین به‌ازای $x=1$ پیوسته نیست.

اگر برای تابع $f(x)$ حدود **انتهائی** وجود داشته باشد:

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)$$

و ضمناً هر سه مقدار $f(x_0)$، $f(x_0-0)$، $f(x_0+0)$ با هم مساوی نباشد، x_0 رانقطهٔ انفصال‌ازنوع اول گویند. درحالت خاصی که داشته باشیم:

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)$$

x_0 را نقطهٔ انفصال قابل حذف گویند.

برای پیوسته بودن تابع $f(x)$ درنقطهٔ x_0 لازم وکافی است که داشته باشیم:

$$f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$$

مثال ۳ . تابع $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$ به‌ازای $x=0$، انفصال از نوع اول دارد، زیرا داریم:

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=+1$$

$$f(-۰)=\underset{x\to -۰}{\text{حد}}\frac{\sin x}{-x}=-۱$$

مثال ۴. تابع $y=E(x)$، که درآن $E(x)$ به‌معنای قسمت صحیح عدد x است (یعنی $E(x)$ عددی است صحیح که در تساوی $x=E(x)+q$ صدق می‌کند ودر آن $۰\leqslant q<۱$)، در هر یك از نقطه‌های $x=۰$، $x=\pm۱$، $x=\pm۲$، ... منفصل است، ضمناً همهٔ نقطه‌ها انفصال ازنوع اول است (شکل ۱۰، b)،

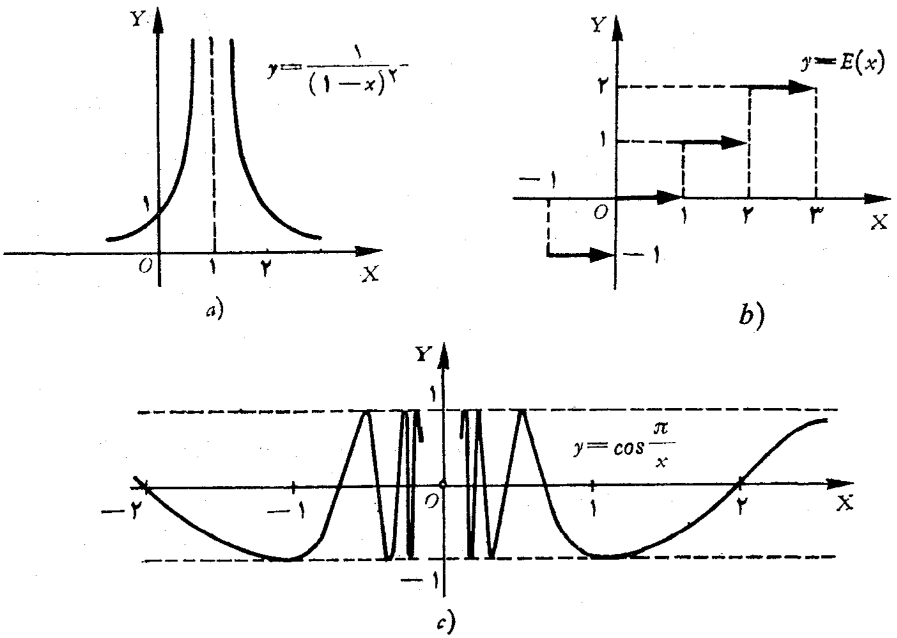
در حقیقت، اگر n عددی صحیح باشد، داریم:

$$E(n-۰)=n-۱\quad,\quad E(n+۰)=n$$

و واضح است که این تابع درسایر نقطه‌ها پیوسته است .

نقطه‌های انفصال تابع، وقتی که ازنوع اول نباشند، نقطه‌های انفصال نوع دوم نامیده می‌شوند.

نقطه‌های بی‌نهایت انفصال ، یعنی نقطه‌هائی مثل $x_۰$ که به‌ازای آنها لااقل یکی ازحدود $f(x_۰-۰)$ یا $f(x_۰+۰)$ مساوی ∞ باشد (مثال ۲ را ببینید).



شکل ۱۰

مثال ۵. تابع $y = \cos\frac{\pi}{x}$ (شکل ۱۰، c) در نقطهٔ $x = 0$ انفصال از نوع دوم دارد، زیرا دراین نقطه هیچیك از دو حد زیر وجود ندارد:

$$\lim_{x\to +0}\cos\frac{\pi}{x} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to -0}\cos\frac{\pi}{x}$$

۳°. خواص توابع پیوسته. برای بررسی تابع پیوسته باید قضیه‌های زیر را درنظر داشت:

۱) اگرچند تابع درحوزهٔ معینی پیوسته باشند، بشرط محدود بودن تعدادآنها، مجموع یاحاصلضربشان نیز دراین حوزه پیوسته است.

۲) اگر دوتابع درحوزهٔ معینی پیوسته باشند، خارج قسمت آنها به ازای همهٔ مقادیر آوند دراین حوزه، بشرطی که مقسوم‌علیه را صفر نکنند، پیوسته است.

۳) اگر تابع $f(x)$ درفاصلهٔ باز (a, b) پیوسته باشد و ضمناً مجموعهٔ مقادیر آن در فاصلهٔ باز(AوB) واقع باشد، وتابع $\varphi(x)$ درفاصلهٔ باز (AوB) پیوسته باشد، دراینصورت تابع مرکب $\varphi[f(x)]$ درفاصلهٔ باز (a,b) پیوسته خواهد بود.

وقتی که تابع $f(x)$ درفاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، دارای خواص زیراست:

۱) $f(x)$ درفاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ محدود است، یعنی عدد M وجود دارد بنحوی که به‌ازای $a\leqslant x\leqslant b$ داشته باشیم: $|f(x)|<M$؛

۲) $f(x)$ در $[a,b]$ دارای مقادیر حداقل وحداکثر است؛

۳) $f(x)$ تمام مقادیر بین دو مقدار مفروض را اختیار می‌کند، یعنی اگر $f(\alpha)=A$ و $f(\beta)=B$ $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$ باشد و $A\neq B$، برای هرعددی مانند C که بین عددهای A و B واقع باشد، لااقل یك مقدار $x=\gamma$ $(\alpha<\gamma<\beta)$ وجود دارد، بنحوی که $f(\gamma)=C$ باشد.

درحالت خاصی که $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ باشد، معادلهٔ

$$f(x)=0$$

لااقل یك جواب حقیقی درفاصلهٔ (α,β) دارد.

۳۰۴. ثابت کنید تابع $y=x^2$ به‌ازای هرمقدار آوند x پیوسته است.

۳۰۵. ثابت کنید که تابع صحیح و گویای

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

به‌ازای هر مقدار x پیوسته است.

۳۰۶ . ثابت کنید که تابع کسری و گویای

$$R(x)=\frac{a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\dots+a_n}{b_۰x^m+b_۱x^{m-۱}+\dots+b_m}$$

به‌ازای همهٔ مقادیر x پیوسته است ، به‌استثنای مقادیری که مخرج آنرا صفر می‌کند .

۳۰۷* . ثابت کنید به‌ازای $x\geqslant ۰$ تابع $y=\sqrt{x}$ پیوسته است .

۳۰۸ . ثابت کنید که‌اگر تابع $f(x)$ درفاصلهٔ باز (a,b) پیوسته وغیرمنفی باشد، تابع

$$F(x)=\sqrt{f(x)}$$

هم در این فاصله پیوسته است .

۳۰۹* . ثابت کنید تابع $y=cosx$ به‌ازای هرمقدار x پیوسته است .

۳۱۰ . تابع a)tgx (b) $cotgx$ به‌ازای چه‌مقادیری از x پیوسته است؟

۳۱۱* . ثابت‌کنید تابع $y=|x|$ پیوسته است . نمایش تغییرات این‌تابع را رسم کنید.

۳۱۲ . ثابت کنید قدرمطلق یك تابع پیوسته ، تابعی پیوسته است .

۳۱۳ . تابعی با روابط زیرداده شده است :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴}{x-۲} & (x\neq ۲)\\ A & (x=۲)\end{cases}$$

مقدار $A=f(۲)$ را چگونه بایدانتخاب کرد تااینکه تابع $f(x)$ به‌ازای $x=۲$ پیوسته باشد ؟ نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ دارسم کنید .

۳۱۴ . سمت راست تساوی

$$f(x)=۱-x\sin\frac{۱}{x}$$

به‌ازای $x=۰$ مفهوم خودرا ازدست می‌دهد. مقدار $f(۰)$ را چگونه باید انتخاب کرد تاتابع $f(x)$ به‌ازای $x=۰$ پیوسته باشد ؟

۳۱۵ . تابع

$$f(x)=arctg\frac{۱}{x-۲}$$

به‌ازای $x=2$ مفهوم خودرا ازدست می‌دهد. آیا می‌توان مقدار $f(2)$ را طوری تعریف کرد که تابع به‌ازای $x=2$ پیوسته باشد؟

۳۱۶ . تابع $f(x)$ به‌ازای $x=0$ معین نیست. درهریك ازموارد زیر $f(0)$ را طوری معین کنید که $f(x)$ به‌ازای $x=0$ پیوسته باشد:

a) $f(x)=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$ (عددی طبیعی است n);

b) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

c) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$;

d) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$;

e) $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$; f) $f(x)=\operatorname{cotg} x$

پیوستگی توابع زیررا بررسی کنید:

۳۱۷ . $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ **۳۱۸** . $y=\dfrac{1+x^3}{1+x}$

۳۱۹ . $y=\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$ **۳۲۰** . $y=\dfrac{x}{|x|}$

۳۲۱ . a) $y=\sin\dfrac{\pi}{x}$; b) $y=x\sin\dfrac{\pi}{x}$

۳۲۲ . $y=\dfrac{x}{\sin x}$ **۳۲۳** . $y=\ln(\cos x)$

۳۲۴ . $y=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$ **۳۲۵** . $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

۳۲۶. $y=(1+x)arctg\frac{1}{1-x^2}$ ۳۲۷. $y=e^{\frac{1}{x+1}}$

۳۲۸. $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$ ۳۲۹. $y=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$

۳۳۰. $y=\begin{cases} x^2 & (x\leqslant 3) \\ 2x+1 & (x>3) \end{cases}$. نمایش تغییرات این تابع را رسم کنید.

۳۳۱. ثابت کنید که تابع دیریکله $\chi(x)$ (که به‌ازای مقادیر گنگ x مساوی صفر و به‌ازای مقادیر گویای x برابر واحد است)، به‌ازای هرمقدار دلخواه x منفصل است .

پیوستگی توابع زیررا بررسی کنید و نمایش تغییرات آنها را رسم کنید:

۳۳۲. $y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^n} \quad (x\geqslant 0)$

۳۳۳. $y=\lim_{x\to\infty}(x\,arctg\,nx)$.

۳۳۴. a) $y=sgn\,x$ ، b) $y=x\,sgn\,x$ ، c) $y=sgn(\sin x)$ ، که درآنها تابع $sgn\,x$ باروابط زیر معین می‌شود:

$$sgn\,x=\begin{cases} +1 & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$$

۳۳۵. a) $y=x-E(x)$ ، b) $y=xE(x)$ ، که درآنها $E(x)$ برابر است باقسمت صحیح عدد x .

۳۳۶. نمونه‌ای برای این حکم قابل اثبات پیداکنیدکه مجموع دوتابع منفصل ممکن‌است تابعی پیوسته باشد.

*۳۳۷. فرض‌کنید α کسری مثبت و کوچکتر ازواحد باشد که بسمت صفر میل می‌کند $(0<\alpha<1)$. آیا می‌توان تساوی

$$E(1+\alpha)=E(1-\alpha)+1$$

را ، که به‌ازای همهٔ مقادیر α صحیح است ، درحالت حدی مقدار α نوشت ؟

۳۳۸ . ثابت کنید که معادلهٔ

$$x^{۳} - ۳x + ۱ = ۰$$

در فاصلهٔ باز (۱,۲) ریشهٔ حقیقی دارد. مقدار تقریبی این ریشه را محاسبه کنید.

۳۳۹ . ثابت کنید که هر کثیرالجملهٔ $P(x)$ ازدرجهٔ فرد، لااقل یك ریشهٔ حقیقی‌دارد.

۳۴۰ . ثابت کنید که معادلهٔ

$$tg x = x$$

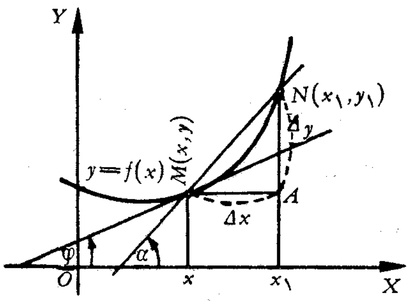
دارای بی‌نهایت ریشهٔ حقیقی است.

فصل دوم

دیفرانسیل تابع

۱.محاسبهٔ مستقیم مشتق

۱°. نمو آوند و نمو تابع. اگر x و x_1 مقادیری از آوند x ، و $y = f(x)$ و $y_1 = f(x_1)$ مقادیر متناظر تابع $y = f(x)$ باشد.



شکل۱۱

$$\Delta x = x_1 - x$$

را نمو آوند x در فاصلهٔ بستهٔ $[x, x_1]$ و

$$\Delta y = y_1 - y$$

یا

$$\Delta y = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (1)$$

را نمو تابع y درهمان فاصلهٔ بستهٔ $[x, x_1]$ گویند (شکل ۱۱ ، که در آن $\Delta x = MA$ و $\Delta y = AN$). نسبت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$$

عبارتست ازضریب زاویهٔ قاطع MN ازمنحنی تابع $y = f(x)$ (شکل۱۱) و سرعت متوسط تغییر تابع y درفاصلهٔ بستهٔ $[x,x+\Delta x]$ نامیده می‌شود.

مثال ۱ . برای تابع

$$y = x^{۲} - ۵x + ۶$$

Δx و Δy راکه متناظر با تغییر آوند

a) از $x = ۱$ تا $x = ۱/۱$؛

b) از $x = ۳$ تا $x = ۲$؛

محاسبه کنید.

حل . داریم:

$$\begin{aligned} a)\ & \Delta x = ۱/۱ - ۱ = ۰/۱, \\ & \Delta y = (۱/۱^{۲} - ۵\cdot ۱/۱ + ۶) - (۱^{۲} - ۵\cdot ۱ + ۶) = -۰/۲۹ \\ b)\ & \Delta x = ۲ - ۳ = -۱, \\ & \Delta y = (۲^{۲} - ۵\cdot ۲ + ۶) - (۳^{۲} - ۵\cdot ۳ + ۶) = ۰ \end{aligned}$$

مثال ۲ . برای هذلولی $y = \frac{۱}{x}$ ، مطلوبست ضریب زاویهٔ قاطعی کـه ازنقطه‌های به طول $x = ۳$ و $x_۱ = ۱۰$ عبور می‌کند.

حل . دراینجا $\Delta x = ۱۰ - ۳ = ۷$ ، $y = \frac{۱}{۳}$ ، $y_۱ = \frac{۱}{۱۰}$ و $\Delta y = \frac{۱}{۱۰} - \frac{۱}{۳} = -\frac{۷}{۳۰}$.

بنابراین $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{۱}{۳۰}$.

۲°. مشتق . مشتق $y' = \frac{dy}{dx}$ ازتابع $y = f(x)$ ، نسبت بـه آوند x عبارتست از حـد نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$، وقتی‌که Δx بسمت صفر میل کند، یعنی

$$y' = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

بشرطی‌که این حد وجود داشته باشد .

مقدار مشتق ، ضریب‌زاویهٔ‌مماس MT بر منحنی‌تابع $y = f(x)$ را درنقطهٔ x می‌دهد (شکل ۱۱) :

$$y' = tg\varphi$$

مشتق $y' = f'(x)$ عبارتست از سرعت تغییر تابع در نقطهٔ x.

مثال ۳ . مطلوبست مشتق تابع

$$y = x^{۲}$$

حل . طبق رابطهٔ (۱) بدست می‌آید:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^{۲} - x^{۲} = ۲x\Delta x + (\Delta x)^{۲},$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ۲x + \Delta x$$

بنابراین

$$y' = \underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} (۲x + \Delta x) = ۲x$$

۳°. مشتقهای یك طرفی . عبارتهای

$$f_-'(x) = \underset{\Delta x \to -۰}{\text{حد}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f_+'(x) = \underset{\Delta x \to +۰}{\text{حد}} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

بترتیب مشتق چپ و راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ x نامیده می‌شود . برای اینکه $f'(x)$ وجود داشته باشد، لازم وکافی است که داشته باشیم:

$$f'_-(x) = f'_+(x)$$

مثال ۴. مطلوبست $f'_-(۰)$ و $f'_+(۰)$ برای تابع

$$f(x) = |x|$$

حل . طبق تعریف داریم:

$$f'_{-}(\circ) = \lim_{\Delta x \to -\circ} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -۱ \quad , \quad f'_{+}(\circ) = \lim_{\Delta x \to +\circ} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = ۱$$

۴°. مشتق نامحدود. اگر درنقطه‌ای داشته باشیم :

$$\lim_{\Delta x \to \circ} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty$$

گویند تابع پیوستهٔ $f(x)$ درنقطهٔ x مشتق نامحدود دارد. دراین حالت مماس برمنحنی تابع $y = f(x)$ برمحور OX مماس است.

مثال ۵. $f'(\circ)$ را برای تابع زیر پیدا کنید:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

حل. داریم:

$$f'(\circ) = \lim_{\Delta x \to \circ} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \circ} \frac{۱}{\sqrt[3]{\Delta x^{۲}}} = \infty$$

۳۴۱. مطلوبست نمو تابع $y = x^{۲}$، در هر یك ازحالتهای زیر :

a) از $x = ۱$ تا $x_{۱} = ۲$ ؛
b) از $x = ۱$ تا $x_{۱} = ۱/۱$ ؛
c) از $x = ۱$ تا $x_{۱} = ۱ + h$.

۳۴۲. مطلوبست Δy برای تابع $y = \sqrt[3]{x}$ ، با شرط

a) $x = \circ$ ، $\Delta x = \circ/\circ\circ۱$ ؛
b) $x = ۸$ ، $\Delta x = -۹$ ؛
c) $x = a$ ، $\Delta x = h$.

۳۴۳. چرا برای تابع $y = ۲x + ۳$ می‌توان نمو Δy را بادردست داشتن نمو متناظر آن $\Delta x = ۵$ پیداکرد، ولی برای تابع $y = x^{۲}$ ممکن نیست ؟

۳۴۴. مطلوبست نمو Δy ونسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ برای توابع :

a) $y=\frac{1}{(x^2-2)^2}$ به‌ازای $x=1$ و $\Delta x=0/4$؛

b) $y=\sqrt{x}$ به‌ازای $x=0$ و $\Delta x=0/0001$؛

c) $y=lgx$ به‌ازای $x=100000$ و $\Delta x=-90000$.

۳۴۵ . مطلوبست Δy و $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ متناظر با تغییر آوند از x تا $x+\Delta x$ برای توابع:

a) $y=ax+b$؛ b) $y=x^4$؛

c) $y=\frac{1}{x^2}$؛ d) $y=\sqrt{x}$؛

e) $y=2^x$؛ f) $y=lnx$.

۳۴۶ . مطلوبست ضریب زاویهٔ قاطع درسهمی

$$y=2x-x^2$$

بشرطی که طول نقطه‌های تلاقی برابر باشد با :

a) $x_1=1$ ، $x_2=2$؛

b) $x_1=1$ ، $x_2=0/9$؛

c) $x_1=1$ ، $x_2=1+h$.

در حالت آخر، وقتی که $h\to 0$، حد ضریب زاویهٔ قاطع چقدر است؟

۳۴۷ . سرعت متوسط تغییر تابع $y=x^3$ درفاصلهٔ $1\leqslant x\leqslant 4$ چقدر است؟

۳۴۸ . قانون حرکت نقطه‌ای عبارتست از $s=2t^2+3t+5$، که در آن فاصلهٔ s برحسب سانتیمتر و زمان t برحسب ثانیه داده شده است. سرعت متوسط نقطه در فاصلهٔ بستهٔ زمانی از $t=1$ تا $t=5$ چقدر است ؟

۳۴۹ . مطلوبست شیب متوسط منحنی $y=2^x$ درفاصلهٔ بستهٔ $1\leqslant x\leqslant 5$.

۳۵۰ . مطلوبست شیب متوسط منحنی $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[x,x+\Delta x]$.

۳۵۱ . شیب منحنی $y=f(x)$ درنقطهٔ مفروض x یعنی‌چه؟

۳۵۲ . مطلوبست تعریف: a) سرعت متوسط نمو؛ b) سرعت لحظه‌ای نمو.

۳۵۳ . جسم گرمی درمحیطی با نسزدیکترین درجهٔ حرارت، سرد می‌شود. چه معنی می‌دهد: a) سرعت متوسط سرد شدن؛ b) سرعت سرد شدن درلحظهٔ مفروض؟

۳۵۴ . سرعت عکس‌العمل جسم درفعل وانفعالات شیمیائی به‌چه معنی است؟

۳۵۵ . اگر $m=f(x)$ جرم میلهٔ نامتجانسی در فاصلهٔ $[0,x]$ باشد، چه معنی دارد :
a) تکاثف خطی متوسط میله درفاصلهٔ $[x,x+\Delta x]$؛ b) تکاثف خطی میله درنقطهٔ x؟

۳۵۶ . مطلوبست نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ برای تابع $y=\frac{1}{x}$ در نقطهٔ $x=2$، بشرطی که:
a) $\Delta x=1$؛ b) $\Delta x=0/1$؛ c) $\Delta x=0/01$ باشد. مشتق y' به‌ازای $x=2$ چقدراست؟

۳۵۷** . مطلوبست مشتق تابع $y=tgx$.

۳۵۸ . مطلوبست $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ برای توابع:

a) $y=x^3$ ؛ b) $y=\frac{1}{x^2}$؛

c) $y=\sqrt{x}$ ؛ d) $y=cotgx$.

۳۵۹ . مطلوبست $f'(8)$ ، بشرطی که $f(x)=\sqrt[3]{x}$ باشد .

۳۶۰ . برای $f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$ مطلوبست $f'(0)$، $f'(1)$، $f'(2)$.

۳۶۱ . درچه نقطه‌ای مشتق تابع $f(x)=x^3$ ازلحاظ عددی برمقدار خود تابع منطبق است، یعنی $f(x)=f'(x)$؟

۳۶۲ . قانون حرکت نقطه‌ای $s=5t^2$ است ، که درآن فاصلهٔ s برحسب متر و زمان t برحسب ثانیه داده شده است. مطلوبست سرعت حرکت درلحظهٔ زمانی $t=3$.

۳۶۳ . مطلوبست ضریب زاویهٔمماس برمنحنی $y=0/1x^3$ که درنقطهٔ به‌طول $x=2$ رسم شده است.

۳۶۴ . مطلوبست ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی $y=sinx$ درنقطهٔ $(\pi,0)$.

۳۶۵ . مطلوبست مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ درنقطهٔ $x=x_0$ $(x_0\neq 0)$.

۳۶۶* . ضریب زاویه مماس بر منحنی‌های $y=\frac{1}{x}$ و $y=x^2$ را درنقطهٔ تلاقی آنهاپیدا کنید. مطلوبست محاسبهٔ زاویه بین این دومماس .

۳۶۷** . ثابت کنید توابع زیر درنقطه‌های مفروض، مشتق محدود ندارند:

a) $y=\sqrt[3]{x^2}$ درنقطهٔ $x=0$؛

b) $y=\sqrt[5]{x-1}$ درنقطهٔ $x=1$؛

c) $y=|\cos x|$ درنقطه‌های $x=\frac{۲k+۱}{۲}\pi$ $(k=۰,\pm۱,\pm۲,\dots)$.

۲. جدول مشتق‌ها

۱°. قواعد اساسی مشتق‌گیری. اگر C مقداری ثابت و $u=\varphi(x)$، $v=\psi(x)$ توابعی دارای مشتق باشند، داریم:

۱) $(c)'=۰$;

۲) $(x)'=۱$;

۳) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

۴) $(cu)'=cu'$;

۵) $(uv)'=u'v+v'u$;

۶) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^{۲}}(v\neq۰)$;

۷) $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^{۲}}(v\neq۰)$.

۲°. جدول مشتق توابع اساسی

I. $(x^n)'=nx^{n-۱}$,

II. $(\sqrt{x})'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x>۰)$,

III. $(\sin x)'=\cos x$,

IV. $(\cos x)'=-\sin x$,

V. $(tg\,x)'=\frac{۱}{\cos^{۲}x}$,

VI. $(cotg\,x)'=-\frac{۱}{\sin^{۲}x}$,

VII. $(\arcsin x)'=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}(|x|<۱)$,

VIII. $(\arccos x)'=-\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}(|x|<۱)$,

IX. $(arctg\,x)'=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$,

X. $(arccotg\,x)'=-\frac{۱}{۱+x^{۲}}$,

XI. $(a^x)'=a^x\ln a$,

XII. $(e^x)'=e^x$,

XIII. $(\ln x)'=\frac{۱}{x}(x>۰)$,

$$XIV.\ (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} = \frac{\log_a e}{x}\,(x>0, a>0),$$

$$XV.\ (shx)' = chx, \qquad XVI.\ (ch)' = shx,$$

$$XVII.\ (thx)' = \frac{1}{ch^2 x}, \qquad XVIII.\ (cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x},$$

$$XIX.\ (4rshx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$XX.\ (Archx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,(|x|>1),$$

$$XXI.\ (Arthx)' = \frac{1}{1-x^2}\,(|x|<1),$$

$$XXII.\ (Arcthx)' = -\frac{1}{x^2-1}\,(|x|>1)\text{.}$$

۳. قاعدهٔ مشتق‌گیری از توابع مرکب. اگـر $y=f(u)$ و $u=\varphi(x)$ ، یعنی $y=f[\varphi(x)]$ باشد، که در آن توابع y و u دارای مشتق باشند، داریم:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (1)$$

یا به‌عبارت دیگر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

این قاعده را می‌توان برای هر تعداد محدود از توابع مشتق‌دار تعمیم داد.

مثال ۱ . مشتق تابع زیررا بدست آورید:

$$y=(x^2-2x+3)^5$$

حل . فرض می کنیم $y=u^5$، که در آن $u=x^2-2x+3$ است، با توجه به‌رابطهٔ (۱) داریم :

$$y' = (u^5)'_u (x^2-2x+3)'_x = 5u^4(2x-2) = 10(x-1)(x^2-2x+3)^4$$

مثال ۲ . مطلوبست مشتق تابع

$$y = \sin^{۳} ۴x$$

حل . فرض می‌کنیم

$$y = u^{۳}, u = \sin v, v = ۴x$$

بدست می‌آید:

$$y' = ۳u^{۲} \cdot \cos v \cdot ۴ = ۱۲ \sin^{۲} ۴x \cos ۴x$$

مطلوبست مشتق توابع زیر (در تمرینهای ۳۶۸ تا ۴۰۸ قاعدهٔ مشتق‌گیری از توابع مرکب مورد استفاده قرار نمی‌گیرد):

A . توابع جبری

۳۶۸ . $y = x^{۵} - ۴x^{۳} + ۲x - ۲$.

۳۶۹ . $y = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۳}x + x^{۲} - ۰{,}۵x^{۴}$.

۳۷۰ . $y = ax^{۲} + bx + c$.

۳۷۱ . $y = -\frac{۵x^{۳}}{a}$.

۳۷۲ . $y = at^{m} + bt^{m+n}$.

۳۷۳ . $y = \frac{ax^{۶} + b}{\sqrt{a^{۲} + b^{۲}}}$.

۳۷۴ . $y = \frac{\pi}{x} + \ln ۲$.

۳۷۵ . $y = ۳x^{\frac{۲}{۳}} - ۲x^{\frac{۵}{۲}} + x^{-۳}$.

۳۷۶* . $y = x^{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}}$.

۳۷۷ . $y = \frac{a}{\sqrt[۳]{x^{۲}}} - \frac{b}{x\sqrt[۳]{x}}$.

۳۷۸ . $y = \frac{a + bx}{c + dx}$.

۳۷۹ . $y = \frac{۲x + ۳}{x^{۲} - ۵x + ۵}$.

۳۸۰ . $y = \frac{۲}{۲x - ۱} - \frac{۱}{x}$.

۳۸۱ . $y = \frac{۱ + \sqrt{z}}{۱ - \sqrt{z}}$.

B. توابع مثلثاتی ومعکوس مثلثاتی

۳۸۲ . $y = ۵\sin x + ۳\cos x$.

۳۸۳ . $y = tg x - cotg x$.

۳۷۴ . $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

۳۸۵ . $y = ۲t\sin t - (t^{۲} - ۲)\cos t$.

۳۸۶ . $y = arctg x + arccotg x$.

۳۸۷ . $y = x cotg x$.

۳۸۸. $y = x \cdot \arcsin x$.

۳۸۹. $y = \frac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x - x}{2}$.

C. توابع نمائی و لگاریتمی

۳۹۰. $y = x^2 \cdot e^x$.

۳۹۱. $y = (x-1)e^x$.

۳۹۲. $y = \frac{e^x}{x^2}$.

۳۹۳. $y = \frac{x^5}{e^x}$.

۳۹۴. $f(x) = e^x \cdot \cos x$.

۳۹۵. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

۳۹۶. $y = e^x \cdot \arcsin x$.

۳۹۷. $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

۳۹۸. $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$.

۳۹۹. $y = \frac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x}$.

۴۰۰. $y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x$.

D. توابع هذلولی و معکوس هذلولی

۴۰۱. $y = x \cdot \operatorname{sh} x$.

۴۰۲. $y = \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}$.

۴۰۳. $y = \operatorname{th} x - x$.

۴۰۴. $y = \frac{3\operatorname{cth} x}{\ln x}$.

۴۰۵. $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{Arth} x$.

۴۰۶. $y = \arcsin x \cdot \operatorname{Arsh} x$.

۴۰۷. $y = \frac{\operatorname{Arch} x}{x}$.

۴۰۸. $y = \frac{\operatorname{Arcth} x}{1-x^2}$.

E. توابع مرکب

مطلوبست مشتق توابع زیر(درتمرینهای ۴۰۹ تا ۴۶۶ بایدازقاعدهٔ مشتق‌گیری ازتوابع مرکب به‌کمك يك آوند کمکی، استفاده‌کرد):

۴۰۹**. $y = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$.

حل. فرض می‌کنیم $1 + 3x - 5x^2 = u$ ؛ دراینصورت $y = u^{30}$ و داریم:

$$y'_u = 30u^{29},\ u'_x = 3 - 10x;$$
$$y'_x = 30u^{29}(3 - 10x) = 30(1+3x-5x^2)^{29} \cdot (3 - 10x).$$

۴۱۰. $y = \left(\frac{ax+b}{c}\right)^3$.

۴۱۱. $f(y) = (2a + 3by)^2$.

۴۱۲. $y=(۳+۲x^۲)^۴$.

۴۱۳. $y=\frac{۳}{۵۶(۲x-۱)^۷}-\frac{۱}{۲۴(۲x-۱)^۶}-\frac{۱}{۴۰(۲x-۱)^۵}$.

۴۱۴. $y=\sqrt{۱-x^۲}$.

۴۱۵. $y=\sqrt[۳]{a+bx^۳}$.

۴۱۶. $y=\left(a^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{\frac{۳}{۲}}$.

۴۱۷. $y=(۳-۲\sin x)^۵$.

حل. $y'=۵(۳-۲\sin x)^۴(۳-۲\sin x)'=۵(۳-۲\sin x)^۴(-۲\cos x)=$
$=-۱۰\cos x(۳-۲\sin x)^۴.$

۴۱۸. $y=tgx-\frac{۱}{۳}tg^۳x+\frac{۱}{۵}tg^۵x$.

۴۱۹. $y=\sqrt{cotg x}-\sqrt{cotg\alpha}$.

۴۲۰. $y=۲x+۵\cos^۳x$.

۴۲۱*. $x=cosec^۲t+sec^۲t$.

۴۲۲. $f(x)=-\frac{۱}{۶(۱-۳\cos x)^۲}$.

۴۲۳. $y=\frac{۱}{۳\cos^۳x}-\frac{۱}{\cos x}$.

۴۲۴. $y=\sqrt{\frac{۳\sin x-۲\cos x}{۵}}$.

۴۲۵. $y=\sqrt[۳]{\sin^۲x}+\frac{۱}{\cos^۳x}$.

۴۲۶. $y=\sqrt{۱+\arcsin x}$.

۴۲۷. $y=\sqrt{arctg x}-(\arcsin x)^۳$.

۴۲۸. $y=\frac{۱}{arctg x}$.

۴۲۹. $y=\sqrt{xe^x+x}$.

۴۳۰. $y=\sqrt[۳]{۲e^x-۲^x+۱}+\ln^۵x$.

۴۳۱. $y=\sin۳x+\cos\frac{x}{۵}+tg\sqrt{x}$.

حل. $y'=\cos۳x\cdot(۳x)'-\sin\frac{x}{۵}\cdot\left(\frac{x}{۵}\right)'+\frac{۱}{\cos^۲\sqrt{x}}(\sqrt{x})'=$
$=۲\cos۳x-\frac{۱}{۵}\sin\frac{x}{۵}+\frac{۱}{۲\sqrt{x}\cos^۲\sqrt{x}}.$

۴۳۲. $y=\sin(x^۲-۵x+۱)+tg\frac{a}{x}$.

۴۳۳. $f(x)=\cos(\alpha x+\beta)$.

۴۳۴. $f(t)=\sin t\cdot\sin(t+\varphi)$.

۴۳۵. $y=\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$.

۴۳۶. $f(x)=a\,cotg\dfrac{x}{a}$.

۴۳۷. $y=-\dfrac{1}{20}\cos(5x^2)-\dfrac{1}{4}\cos x^2$.

۴۳۸. $y=\arcsin 2x$.

حل.

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot(2x)'=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

۴۳۹. $y=\arcsin\dfrac{1}{x^2}$.

۴۴۰. $f(x)=\arccos\sqrt{x}$.

۴۴۱. $y=arctg\dfrac{1}{x}$.

۴۴۲. $y=arccotg\dfrac{1+x}{1-x}$.

۴۴۳. $y=5e^{-x^2}$.

۴۴۴. $y=\dfrac{1}{5x^2}$.

۴۴۵. $y=x^2\cdot 10^{2x}$.

۴۴۶. $f(t)=t\cdot\sin 2^t$.

۴۴۷. $y=\arccos e^x$.

۴۴۸. $y=\ln(2x+7)$.

۴۴۹. $y=\lg\sin x$.

۴۵۰. $y=\ln(1-x^2)$.

۴۵۱. $y=\ln^2 x-\ln(\ln x)$.

۴۵۲. $y=\ln(e^x+5\sin x-4\arcsin x)$.

۴۵۳. $y=arctg(\ln x)+\ln(arctg\,x)$.

۴۵۴. $y=\sqrt{\ln x+1}+\ln(\sqrt{x}+1)$.

F. توابع مختلف

۴۵۵**. $y=\sin^3 5x\cdot\cos^2\dfrac{x}{3}$.

۴۵۶. $y=-\dfrac{11}{2(x-2)^2}-\dfrac{4}{x-2}$.

۴۵۷. $y=-\dfrac{15}{4(x-3)^4}-\dfrac{10}{3(x-3)^3}-\dfrac{1}{2(x-3)^2}$.

۴۵۸. $y=\dfrac{x^8}{8(1-x^2)^4}$.

۴۵۹. $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$.

۴۶۰. $y=\dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$.

۴۶۱. $y=\dfrac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

۴۶۲. $y=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\dfrac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}$.

۴۶۳. $y=\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$.

۴۶۴. $y=\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$.

۴۶۵. $y=x^4(a-2x^3)^2$.

۴۶۶. $y=\left(\dfrac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^m$.

۴۶۷. $y=\dfrac{9}{5(x+2)^5}-\dfrac{3}{(x+2)^4}+\dfrac{2}{(x+2)^3}-\dfrac{1}{2(x+2)^2}$.

۴۶۸. $y=(a+x)\sqrt{a-x}$.

۴۶۹. $y=\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$.

۴۷۰. $z=\sqrt[3]{y+\sqrt{y}}$.

۴۷۱. $f(t)=(2t+1)(3t+2)\sqrt[3]{3t+2}$.

۴۷۲. $x=\dfrac{1}{\sqrt{2ay-y^2}}$.

۴۷۳. $y=ln(\sqrt{1+e^x}-1)-ln(\sqrt{1+e^x}+1)$.

۴۷۴. $y=\dfrac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x-5)$.

۴۷۵. $y=\dfrac{(tg^2x-1)(tg^4x+10tg^2x+1)}{3tg^3x}$.

۴۷۶. $y=tg^2 5x$.

۴۷۷. $y=\dfrac{1}{2}\sin(x^2)$.

۴۷۸. $y=\sin^2(t^3)$.

۴۷۹. $y=3\sin x\cos^2 x+\sin^3 x$.

۴۸۰. $y=\dfrac{1}{3}tg^3x-tgx+x$.

۴۸۱. $y=-\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x}+\dfrac{4}{3}cotg x$.

۴۸۲. $y=\sqrt{\alpha\sin^2 x+\beta\cos^2 x}$.

۴۸۳. $y=\arcsin x^2+\arccos x^2$.

۴۸۴. $y=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2\arccos x$

۴۸۵. $y=\arcsin\frac{x^2-1}{x^2}$

۴۸۶. $y=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

۴۸۷. $y=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

۴۸۸. $y=\frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

۴۸۹. $y=\sqrt{a^2-x^2}+a\cdot\arcsin\frac{x}{a}$

۴۹۰. $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$

۴۹۱. $y=\arcsin(1-x)+\sqrt{2x-x^2}$

۴۹۲. $y=(x-\frac{1}{2})\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$

۴۹۳. $y=\ln(\arcsin 5x)$

۴۹۴. $y=\arcsin(\ln x)$

۴۹۵. $y=\operatorname{arctg}\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$

۴۹۶. $y=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}$

۴۹۷. $y=3b^2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b-x}}-(3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$

۴۹۸. $y=-\sqrt{2}\operatorname{arccotg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}-x$

۴۹۹. $y=\sqrt{e^{ax}}$

۵۰۰. $y=e^{\sin^2 x}$

۵۰۱. $F(x)=(2ma^{mx}+b)^p$

۵۰۲. $F(t)=e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t$

۵۰۳. $y=\frac{(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}$

۵۰۴. $y=\frac{1}{10}e^{-x}(3\sin 3x-\cos 3x)$

۵۰۵. $y=x^n\cdot a^{-x^2}$

۵۰۶. $y=\sqrt{\cos x}\cdot a^{\sqrt{\cos x}}$

۵۰۷. $y=3^{\operatorname{cotg}\frac{1}{x}}$

۵۰۸. $y=\ln(ax^2+bx+c)$

۵۰۹. $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$

۵۱۰. $y=x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})$

۵۱۱. $y = ln(a+x+\sqrt{2ax+x^2})$.

۵۱۲. $y = \frac{1}{ln^2 x}$.

۵۱۳. $y = ln cos\frac{x-1}{x}$.

۵۱۴*. $y = ln\frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$.

۵۱۵. $y = lu\frac{(x-1)^3(x-2)}{x-3}$.

۵۱۶. $y = -\frac{1}{2\sin^2 x} + ln tg x$.

۵۱۷. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$.

۵۱۸. $y = ln ln(3-2x^3)$.

۵۱۹. $y = 5 ln^3(ax+b)$.

۵۲۰. $y = ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$.

۵۲۱. $y = \frac{m}{2} ln(x^2-a^2) + \frac{n}{2a} ln\frac{x-a}{x+a}$.

۵۲۲. $y = x\cdot \sin(ln x - \frac{\pi}{4})$.

۵۲۳. $y = \frac{1}{2} ln tg\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

۵۲۴. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$.

۵۲۵. $y = \frac{1}{3} ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$.

۵۲۶. $y = 2^{\arcsin 2x} + (1-\arccos 3x)^2$.

۵۲۷. $y = 3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^3 ax}{\cos^3 bx}$.

۵۲۸. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} ln\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}$.

۵۲۹. $y = arctg ln x$.

۵۳۰. $y = ln \arcsin x + \frac{1}{2} ln^2 x + \arcsin ln x$.

۵۳۱. $y = arctg ln\frac{1}{x}$.

۵۳۲ . $y=\frac{\sqrt{۲}}{۳}arctg\frac{x}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۶}ln\frac{x-۱}{x+۱}$.

۵۳۳ . $y=ln\frac{۱+\sqrt{sinx}}{۱-\sqrt{sinx}}+۲arctg\sqrt{sinx}$.

۵۳۴ . $y=\frac{۳}{۴}ln\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}-۱}+\frac{۱}{۴}ln\frac{x-۱}{x+۱}+\frac{۱}{۲}arctgx$.

۵۳۵ . $f(x)=\frac{۱}{۳}ln(۱+x)-\frac{۱}{۶}ln(x^{۲}-x+۱)+\frac{۱}{\sqrt{۳}}arctg\frac{۲x-۱}{\sqrt{۳}}$.

۵۳۶ . $f(x)=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}+ln\sqrt{۱-x^{۲}}$.

۵۳۷ . $y=sh^{۳}۲x$.   ۵۳۸ . $y=e^{ax}ch\beta x$.

۵۳۹ . $y=th^{۳}۲x$.   ۵۴۰ . $y=lnsh۲x$.

۵۴۱ . $y=Arsh\frac{x^{۲}}{a^{۲}}$.   ۵۴۲ . $y=Arch lnx$.

۵۴۳ . $y=Arth(tgx)$.   ۵۴۴ . $y=Arcth(secx)$.

۵۴۵ . $y=Arth\frac{۲x}{۱+x^{۲}}$.

۵۴۶ . $y=\frac{۱}{۲}(x^{۲}-۱)Arthx+\frac{۱}{۲}x$.

۵۴۷ . $y=\left(\frac{۱}{۲}x^{۲}+\frac{۱}{۴}\right)Arshx-\frac{۱}{۴}x\sqrt{۱+x^{۲}}$.

۵۴۸ . مطلوبست y' بشرطی که داشته باشیم:

a) $y=|x|$ ؛   b) $y=x|x|$.

نمایش تغییرات توابع y, y' را رسم کنید.

۵۴۹ . مطلوبست y' بشرطی که داشته باشیم:

$$y=ln|x| \qquad (x\neq ۰)$$

۵۵۰ . مطلوبست $f'(x)$ ، بشرطی که داشته باشیم:

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{به ازای } x\leqslant 0\\ e^{-x} & \text{به ازای } x>0\end{cases}$$

۵۵۱ . مطلوبست $f'(0)$ بشرطی که داشته باشیم:

$$f(x)=e^{-x}\cos 3x$$

حل .
$$f'(x)=e^{-x}(-3\sin 3x)-e^{-x}\cos 3x$$
$$f'(0)=e^{0}(-3\sin 0)-e^{0}\cos 0=-1$$

۵۵۲ . $f(x)=\ln(1+x)+\arcsin\frac{x}{2}$. مطلوبست $f'(1)$.

۵۵۳ . $y=tg^{3}\frac{\pi x}{6}$. مطلوبست $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}$.

۵۵۴ . مطلوبست $f'_{+}(0)$ و $f'_{-}(0)$ برای توابع:

a) $f(x)=\sqrt{\sin(x^{2})}$ ؛ b) $f(x)=\arcsin\frac{a^{2}-x^{2}}{a^{2}+x^{2}}$ ؛

c) $f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ ، $x\neq 0$ ؛ $f(0)=0$.

d) $f(x)=x^{2}\sin\frac{1}{x}$ ، $x\neq 0$ ؛ $f(0)=0$ ؛

e) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ ، $x\neq 0$ ؛ $f(0)=0$ ؛

۵۵۵ . برای تابع $f(x)=e^{-x}$ مطلوبست $f(0)+xf'(0)$.

۵۵۶ . برای تابع $f(x)=\sqrt{1+x}$ مطلوبست $f(3)+(x-3)f'(3)$.

۵۵۷ . برای توابع $f(x)=tg x$ و $\varphi(x)=\ln(1-x)$ ، مطلوبست $\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}$.

۵۵۸ . برای توابع $f(x)=1-x$ و $\varphi(x)=1-\sin\frac{\pi x}{2}$ ، مطلوبست $\frac{\varphi'(1)}{f'(1)}$.

۵۵۹ . ثابت کنید مشتق یك تابع زوج تابعی است فرد ومشتق یك تابع فردتابعی استزوج.

۵۶۰ . ثابت کنید مشتق یك تابع متناوب بازهم تابعی متناوب است .

۵۶۱ . ثابت کنید که تابع $y=xe^{-x}$ درمعادلهٔ $xy'=(1-x)y$ صدق می کند.

۵۶۲ . ثابت کنید که تابع $y = xe^{-\frac{x^{۲}}{۲}}$ درمعادلهٔ $xy' = (۱ - x^{۲})y$ صدق می‌کند.

۵۶۳ . ثابت کنید که تابع $y = \frac{۱}{۱+x+lnx}$ درمعادلهٔ $xy' = y(ylnx - ۱)$ صدق می‌کند.

G. **مشتق لگاریتمی**

مشتق لگاریتمی تابع $y = f(x)$ به‌مشتق لگاریتم این تابع گفته می‌شود، یعنی

$$(lny)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

استفاده ازلگاریتم تابع گاهی محاسبهٔ مشتق آنرا ساده می‌کند.

مثال . مطلوبست مشتق تابع‌نمائی ومرکب

$$y = u^{v}$$

که درآن داریم : $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$.

حل . اگر ازطرفین تساوی لگاریتم بگیریم، بدست می‌آید:

$$lny = v \cdot lnu$$

که اگر از طرفین تساوی اخیر نسبت به x مشتق بگیریم:

$$(lny)' = v'lnu + v(lnu)',$$

یا

$$\frac{۱}{y}y' = v'lnu + v\frac{۱}{u}u',$$

وازآنجا

$$y' = y(v'lnu + \frac{v}{u}u'),$$

یا

$$y' = u^{v}(v'lnu + \frac{v}{u}u'),$$

۵۶۴ . مطلوبست y'، بشرطی که داشته باشیم:

$$y = \sqrt[۳]{x^{۲}}\frac{۱ - x}{۱ + x^{۲}}\sin^{۳}x\cos^{۲}x$$

حل . $\ln y=\frac{۲}{۳}\ln x+\ln(۱-x)-\ln(۱+x^۲)+۳\ln\sin x+۲\ln\cos x,$

$$\frac{۱}{y}y'=\frac{۲}{۳}\cdot\frac{۱}{x}+\frac{-۱}{۱-x}-\frac{۲x}{۱+x^۲}+۳\cdot\frac{۱}{\sin x}\cos x-\frac{۲\sin x}{\cos x},$$

$$y'=y\left(\frac{۲}{۳x}-\frac{۱}{۱-x}-\frac{۲x}{۱+x^۲}+۳\cot g x-۲tg x\right)$$

۵۶۵ . مطلوبست y'، بشرطی که داشته باشیم: $y=(\sin x)^x$.

حل . $\ln y=x\ln\sin x;\quad \frac{۱}{y}y'=\ln\sin x+x\cot g x;$

$$y'=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\cot g x)$$

با استفاده از لگاریتم تابع $y=f(x)$، y' را بدست آورید:

۵۶۶ . $y=(۱+x)(۱+۲x)(۱+۳x)$.

۵۶۷ . $y=\frac{(x+۲)^۲}{(x+۱)^۳(x+۳)^۴}$.

۵۶۸ . $y=\sqrt{\frac{x(x-۱)}{x-۲}}$

۵۶۹ . $y=x\sqrt[۳]{\frac{x^۲}{x^۲+۱}}$.

۵۷۰ . $y=\frac{(x-۲)^۹}{\sqrt{(x-۱)^۵(x-۳)^{۱۱}}}$.

۵۷۱ . $y=\frac{\sqrt{x-۱}}{\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}\sqrt{(x+۳)^۳}}$.

۵۷۲ . $y=x^x$

۵۷۳ . $y=x^{x^۲}$.

۵۷۴ . $y=\sqrt[x]{x}$.

۵۷۵ . $y=x^{\sqrt{x}}$.

۵۷۶ . $y=x^{x^x}$.

۵۷۷ . $y=x^{\sin x}$.

۵۷۸ . $y=(\cos x)^{\sin x}$.

۵۷۹ . $y=\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^x$.

۵۸۰ . $y=(arctg x)^x$.

۳. مشتق توابعی که بطور مفروض صریح نیستند

۱°. مشتق تابع معکوس . اگر برای تابع $y=f(x)$، مشتق $y'_x\neq ۰$ باشد، مشتق

تابع معکوس آن $x = f^{-1}(y)$ چنین است:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

یا

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

مثال ۱ . مطلوبست مشتق x'_y، بشرطی که داشته باشیم:

$$y = x + ln x$$

حل . داریم: $y'_x = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$؛ بنابراین $x'_y = \frac{x}{x+1}$.

۲°. مشتق توابعی که به‌صورت پارامتری داده شده باشند. اگر رابطهٔ بین تابع y و آوند x بوسیلهٔ پارامتر t داده شده باشد:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

در اینصورت

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

ویا به‌عبارت دیگر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال ۲ . مطلوبست $\frac{dy}{dx}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x = a cos t \\ y = a sin t \end{cases}$$

حل . بدست می‌آوریم: $\frac{dx}{dt}=-asint$, $\frac{dy}{dt}=acost$. از آنجا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{acost}{-asint}=-cotgt$$

۳°. مشتق توابع ضمنی . اگر رابطهٔ بین xو y بصورت ضمنی داده شده باشد:

$$F(x,y)=\circ \qquad (۱)$$

برای پیداکردن مشتق $y'_x=y'$ درحالتهای ساده‌کافی‌است: ۱) درحالیکه y را تابع‌x به‌حساب می‌آوریم مشتق سمت چپ معادلهٔ (۱) را نسبت به‌x محاسبه‌کنیم؛ ۲) این مشتق را مساوی صفر قراردهیم، یعنی فرض‌کنیم:

$$\frac{d}{dx}F(x,y)=\circ \qquad (۲)$$

و ۳) معادله‌ای‌که بدست می‌آید نسبت به‌y' حل‌کنیم.

مثال ۳ . مطلوبست مشتق y'_x، بشرطی‌که داشته باشیم:

$$x^{۳}+y^{۳}-۳axy=\circ \qquad (۳)$$

حل . اگرمشتق سمت‌چپ تساوی(۳) رانسبت‌به‌x، مساوی صفر قراردهیم، بدست‌می‌آید:

$$۳x^{۲}+۳y^{۲}y'-۳a(y+xy')=\circ,$$

و از آنجا

$$y'=\frac{x^{۲}-ay}{ax-y^{۲}}$$

۵۸۱ . مطلوبست مشتق x'_y. بشرطی‌که داشته باشیم:

a) $y=۳x+x^{۳}$؛ b) $y=x-\frac{۱}{۲}sinx$.

c) $y=\circ,۱x+e^{\frac{x}{۲}}$.

مطلوبست مشتق $y'=\frac{dy}{dx}$ برای تابع y، که بصورت پارامتری داده شده است:

۵۸۲. $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t^3 \end{cases}$

۵۸۳. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \left(\dfrac{1}{t+1}\right)^2 \end{cases}$

۵۸۴. $\begin{cases} x = \dfrac{2at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$

۵۸۵. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$

۵۸۶. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$

۵۸۷. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases}$

۵۸۸. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$

۵۸۹. $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = b\sin^2 t \end{cases}$

۵۹۰. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$

۵۹۱. $\begin{cases} x = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$

۵۹۲. $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

۵۹۳. $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$

۵۹۴. $\begin{cases} x = a(\ln tg\frac{1}{2} + \cos t - \sin t) \\ y = a(\sin t + \cos t) \end{cases}$

۵۹۵. $\dfrac{dy}{dx}$ را برای $t = \dfrac{\pi}{2}$ محاسبه کنید، اگر داشته باشیم:

$$\begin{cases} x = a(t - sint) \\ x = a(۱ - cost) \end{cases}$$

حل. $\frac{dy}{dx} = \frac{a\,sint}{a(۱ - cost)} = \frac{sint}{۱ - cost},$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{۲}} = \frac{sin\frac{\pi}{۲}}{۱ - cos\frac{\pi}{۲}} = ۱$$

۵۹۶. مطلوبست $\frac{dy}{dx}$ به‌ازای $t = ۱$، اگرداشته باشیم:

$$x = tlnt \;,\; y = \frac{lnt}{t}$$

۵۹۷. مطلوبست $\frac{dy}{dx}$ به ازای $t = \frac{\pi}{۴}$، اگرداشته باشیم:

$$x = e^t cost \;,\; y = e^t sint$$

۵۹۸. ثابت کنیدکه تابع y که بوسیلهٔ معادله‌های پارامتری زیرداده شده است:

$$x = ۲t + ۳t^۲ \;,\; y = t^۲ + ۲t^۳$$

درمعادلهٔ زیرصدق می کند:

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^۲ + ۲\left(\frac{dy}{dx}\right)^۳$$

۵۹۹. به‌ازای $x = ۲$ تساوی زیرصحیح است:

$$x^۲ = ۲x$$

آیا ازاینجا نتیجه می‌شودکه تساوی

$$(x^۲)' = (۲x)'$$

هم به‌ازای $x=۲$ صحیح است؟

۶۰۰. فرض کنید $y=\sqrt{a^۲-x^۲}$. آیا می‌توان ازطرفین تساوی زیرمشتق گرفت:

$$x^۲+y^۲=a^۲$$

مطلوبست مشتق $y'=\frac{dy}{dx}$ از توابع ضمنی:

۶۰۱. $۲x-۵y+۱۰=۰$.

۶۰۲. $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$.

۶۰۳. $x^۳+y^۳=a^۳$.

۶۰۴. $x^۳+x^۲y+y^۲=۰$.

۶۰۵. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

۶۰۶. $\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{y^۲}=\sqrt[۳]{a^۲}$.

۶۰۷. $y^۳=\frac{x-y}{x+y}$.

۶۰۸. $y-۰/۳\sin y=x$

۶۰۹. $a\cos^۲(x+y)=b$.

۶۱۰. $tg y=xy$.

۶۱۱. $xy=arctg\frac{x}{y}$.

۶۱۲. $arctg(x+y)=x$.

۶۱۳. $e^y=x+y$.

۶۱۴. $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=c$.

۶۱۵. $\ln y+\frac{x}{y}=c$.

۶۱۶. $arctg\frac{y}{x}=\frac{۱}{۲}\ln(x^۲+y^۲)$.

۶۱۷. $\sqrt{x^۲+y^۲}=c\,arctg\frac{y}{x}$.

۶۱۸. $x^y=y^x$.

۶۱۹. مطلوبست محاسبهٔ y' درنقطهٔ $M(۱,۱)$، اگرداشته باشیم:

$$۲y=۱+xy^۳$$

حل. داریم: $۲y'=y^۳+۳xy^۲y'$. با فرض $x=۱$, $y=۱$ بدست می‌آید $۲y'=۱+۳y'$ وازآنجا $y'=-۱$،

۶۲۰. مطلوبست مشتق y' ازتوابع مفروض y درنقاط مربوط:

a) $(x+y)^۳=۲۷(x-y)$ به‌ازای $x=۲$ و $y=۱$؛

b) $ye^y=n^{x+۱}$ به‌ازای $x=۰$ و $y=۱$؛

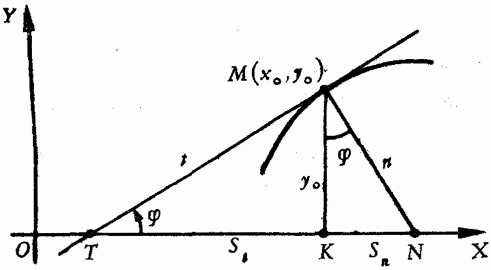
c) $y^۲=x+\ln\frac{y}{x}$ به‌ازای $x=۱$ و $y=۱$.

۴. موارد استعمال مشتق در هندسه و مکانیك

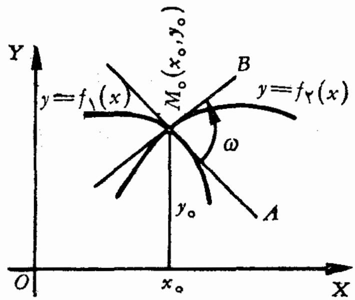
۱°. معادلهٔ مماس و قائم. ازمفهوم هندسی‌مشتق‌نتیجه می‌شودکه معادلهٔ مماس برمنحنی $y=f(x)$ یا $F(x,y)=0$ در نقطهٔ $M(x_0,y_0)$ عبارتست از

$$y-y_0=y_0'(x-x_0),$$

که درآن y'_0 عبارتست ازمشتق y' درنقطهٔ $M(x_0,y_0)$. خطی که از نقطهٔ تماس وعمود برخط مماس رسم می‌شود، قائم برمنحنی نامیده می‌شود.



شکل ۱۳



شکل ۱۲

برای قائم معادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$x-x_0+y'_0(y-y_0)=0$$

۲°. زاویهٔ بین دو منحنی . زاویهٔ بین دو منحنی

$$y=f_1(x) \quad \text{و} \quad y=f_2(x)$$

در نقطهٔ مشترك آنها $M_0(x_0,y_0)$ (شکل ۱۲)، عبارتست از زاویهٔ ω بین مماسهای M_0A و M_0B براین دومنحنی درنقطهٔ M_0. بنا بر رابطهٔ معروف هندسهٔ تحلیلی داریم:

$$tg\omega=\frac{f'_2(x_0)-f'_1(x_0)}{1+f'_1(x_0)\cdot f'_2(x_0)}$$

۳°. پاره خطهای مربوط به مماس و قائم در دستگاه محورهای مختصات قائم.

مماس وقائم بوسیلهٔ چهار پاره خط زیر معین می‌شوند:

$t = TM$ که پاره خط مماس نامیده می‌شود،

$S_t = TK$ که تحت مماس نامیده می‌شود،

$n = NM$ که پاره خط قائم نامیده می‌شود،

$S_n = KN$ که تحت قائم نامیده می‌شود.

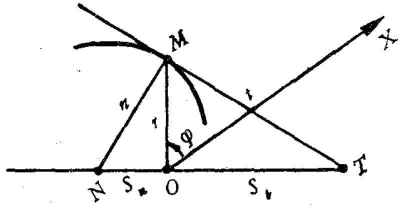
چون $KM = |y_0|$ و $tg\varphi = y'_0$، بنابراین

$$t = TM = \left|\frac{y_0}{y'_0}\sqrt{1+(y'_0)^2}\right| \; ; \; n = NM = \left|y_0\sqrt{1+(y'_0)^2}\right|;$$

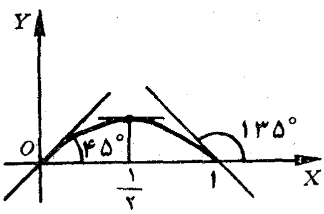
$$S_t = TK = \left|\frac{y_0}{y'_0}\right| \; ; \; S_n = |y_0 y'_0|.$$

۴°. پاره خطهای مربوط به‌مماس وقائم دردستگاه مختصات قطبی. اگر منحنی در دستگاه مختصات قطبی بامعادلهٔ $r = f(\varphi)$ داده شده باشد، زاویهٔ μ بین مماس MT و شعاع قطبی $r = OM$ (شکل ۱۴)، با رابطهٔ زیر معین می‌شود:

$$tg\mu = r\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'}$$



شکل ۱۴



شکل ۱۵

مماس MT و قائم MN درنقطهٔ M همراه باشعاع قطبی نقطهٔ تماس و عمود بر شعاع قطبی، که ازقطب O عبور کرده‌است، بوسیلهٔ پاره‌خطهای زیرمعین می‌شوند (شکل۱۴ راببینید):

$t = MT$: پاره خط مماس قطبی،

$n = MN$: پاره خط قائم قطبی،

$S_t = OT$: تحت مماس قطبی،

$S_n = ON$: تحت مماس قطبی،

این پاره خطها باروابط زیر معین می‌شوند:

$$t = MT = \frac{r}{|r'|}\sqrt{r^{۲} + (r')^{۲}}; \qquad S_t = OT = \frac{r^{۲}}{|r'|};$$

$$n = MN = \sqrt{r^{۲} + (r')^{۲}}; \qquad S_n = ON = |r'|\cdot$$

۶۲۱ . مطلوبست زاویهٔ φ بین محور ox ومماس برمنحنی $y = x - x^{۲}$ درنقطهٔ بطول:

a) $x = ۰$ ؛ b) $x = \frac{۱}{۲}$ ؛ c) $x = ۱$.

حل . داریم: $y' = ۱ - ۲x$. از آنجا: a) $tg\varphi = ۱$ و $\varphi = ۴۵^\circ$ ؛ b) $tg\varphi = ۰$ و $\varphi = ۰^\circ$ ؛ c) $tg\varphi = -۱$ و $\varphi = ۱۳۵^\circ$ (شکل ۱۵).

۶۲۲ . تحت چه زاویه‌ای منحنی‌های سینوسی $y = sin x$ و $y = sin ۲x$ محور طول‌را در مبداء مختصات قطع می‌کنند؟

۶۲۳ . منحنی تانژانتی $y = tg x$ محور طول‌را درمبداء مختصات، تحت چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

۶۲۴ . منحنی $y = e^{۰,۵x}$ خط $x = ۲$ را تحت چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

۶۲۵ . نقطه‌هائی ازمنحنی $y = ۳x^{۴} + ۴x^{۳} - ۱۲x^{۲} + ۲۰$ را پیدا کنید که‌مماس بر آنها موازی محور طول باشد.

۶۲۶ . در چه نقطه‌ای مماس برسهمی

$$y = x^{۲} - ۷x + ۳$$

موازی با خط $۵x + y - ۳ = ۰$ است؟

۶۲۷ . معادلهٔ سهمی $y = x^{۲} + bx + c$ را طوری پیدا کنید که‌بر خط $x = y$ در نقطهٔ $(۱,۱)$ مماس باشد.

۶۲۸ . مطلوبست ضریب‌زاویهٔ مماس‌برمنحنی $x^{۳} + y^{۳} - xy - ۷ = ۰$ درنقطهٔ $(۱,۲)$.

۶۲۹ . نقطه‌ای‌ازمنحنی $y^{۲} = ۲x^{۳}$ راپیدا کنید که‌مماس‌در آن‌برخط $۴x - ۳y + ۲ = ۰$ عمود باشد.

۶۳۰ . معادله‌های مماس و قائم برسهمی

$$y=\sqrt{x}$$

را در نقطهٔ بطول $x=۴$ بنویسید.

حل . داریم: $y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$؛ ازآنجا ضریب زاویهٔ مماس: $k=|y'|_{x=۴}=\frac{۱}{۴}$. چون مختصات نقطهٔ تماس $x=۴$ ، $y=۲$ است، معادلهٔ مماس عبارتست از $y-۲=\frac{۱}{۴}(x-۴)$ یا $x-۴y+۴=۰$.

باتوجه‌به‌اینکه قائم برخط مماس عموداست،ضریب‌زاویهٔ قائم $k_۱=-۴$ می‌شود وازآنجا معادلهٔ قائم بصورت $y-۲=-۴(x-۴)$ یا $۴x+y-۱۸=۰$ در می‌آید.

۶۳۱ . مطلوبست معادله‌های مماس وقائم برمنحنی $y=x^۳+۳x^۲-۴x-۳$ درنقطهٔ $(-۲,۵)$.

۶۳۲ . معادله‌های مماس وقائم برمنحنی $y=\sqrt[۳]{x-۱}$ را در نقطهٔ $(۱,۰)$ پیدا کنید.

۶۳۳ . معادله‌های مماس وقائم برهریك‌ازمنحنی‌های زیررا درنقطه‌های مربوط بنویسید:

a) $y=tg\,۲x$ درمبداء مختصات؛

b) $y=arcsin\frac{x-۱}{۲}$ درنقطهٔ تقاطع بامحور طول؛

c) $y=arccos\,۳x$ درنقطهٔ تقاطع بامحور عرض؛

d) $y=ln x$ درنقطهٔ تقاطع بامحور طول؛

e) $y=e^{۱-x^۲}$ در نقطهٔ تقاطع باخط $y=۱$.

۶۳۴ . مطلوبست معادله‌های مماس وقائم در نقطهٔ $(۲,۲)$ برمنحنی

$$\begin{cases} x=\frac{۱+t}{t^۳} \\ y=\frac{۳}{۲t^۲}+\frac{۱}{۲t} \end{cases}$$

۶۳۵ . معادلهٔ هریك ازمماسهای برمنحنی

$$x=t\cos t\ ,\ y=t\sin t$$

را در مبداءمختصات ودر نقطهٔ $t=\frac{n}{۴}$ بدست آورید.

۶۳۶ . مطلوبست معادله‌های مماس و قائم برمنحنی $x^۳+y^۲+۲x-۶=۰$ در نقطهٔ به‌عرض $y=۳$.

۶۳۷ . مطلوبست معادلهٔ مماس برمنحنی $x^۵+y^۵-۲xy=۰$ درنقطهٔ $(۱,۱)$.

۶۳۸ . مطلوبست معادله‌های مماس وقائم برمنحنی

$$y=(x-۱)(x-۲)(x-۳)$$

در نقطه‌های تلاقی آن بامحور طول.

۶۳۹ . مطلوبست معادله‌های مماس وقائم درنقطهٔ $(۱,۲)$ برمنحنی

$$y^۴=۴x^۴+۶xy$$

*۶۴۰ . ثابت کنیدکه پاره‌خط مماس‌برهذلولی $xy=a^۲$، که بین محورهای‌مختصات قرارگرفته است، بوسیلهٔ نقطهٔ تماس نصف می‌شود.

۶۴۱ . ثابت کنید که پاره خط مماس برآستروئید $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$، که به‌محورهای مختصات محدود است، طول ثابتی مساوی a دارد.

۶۴۲. ثابت‌کنید که قائم بردایرهٔ بازشدهٔ

$$x=a(cost+t\,sint)\ ,\ y=a(sint-t\,cost)$$

بردایرهٔ $x^۲+y^۲=a^۲$ مماس است.

۶۴۳ .مطلوبست‌زاویه‌ای که تحت‌آن سهمی‌های $y=(x-۲)^۲$, $y=-۴+۶x-x^۲$ یکدیگر را قطع می کنند.

۶۴۴ . سهمی‌های $y=x^۲$, $y=x^۳$ تحت چه زاویه‌ای یکدیگررا قطع می کنند؟

۶۴۵ . ثابت کنید که منحنی‌های $y=۴x^۲+۲x-۸$ و $y=x^۳-x+۱۰$ درنقطهٔ $(۳,۳۴)$ بریکدیگر مماس‌اند. آیا این دومنحنی درنقطهٔ $(-۲,۴)$ هم بریکدیگر مماس‌اند؟

۶۴۶ . ثابت کنید که هذلولیهای

$$xy=a^۲\ ,\ x^۲-y^۲=b^۲$$

یکدیگر را تحت زاویهٔ قائمه قطع می کنند.

۶۴۷ . سهمی $y^۲=۴x$ مفروض است. طولهای پاره‌خط مماس، پاره خط قائم، تحت

مماس وتحت قائم را در نقطهٔ $(۱,۲)$ محاسبه کنید.

۶۴۸ . مطلوبست تحت مماس منحنی $y=۲^{x}$ درنقطهٔ دلخواه آن.

۶۴۹ . ثابت کنید در هذلولی متساوی الساقین $x^۲-y^۲=a^۲$ طول پاره خط قائم در نقطهٔ دلحواه آن برابر است باشعاع قطبی این نقطه.

۶۵۰ . ثابت کنیدکه تحت قائم هذلولی $x^۲-y^۲=a^۲$ در هر نقطهٔ دلخواه آن برابر است با طول این نقطه.

۶۵۱ . ثابت‌کنید تحت مماسهای بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲=a^۲$ در نقطه‌هائی که طولهای مساوی دارند، باهم برابرند. ازاینجا چه راهی برای رسم مماس بربیضی نتیجه می‌گیرید؟

۶۵۲ . مطلوبست‌طولهای‌پاره‌خط‌مماس، پاره‌خط‌قائم، تحت‌مماس‌وتحت قائم‌درسیکلوئید

$$x=a(t-sint)\ ,\ y=a(۱-cost)$$

در نقطهٔ دلخواه $t=t_۰$.

۶۵۳ . مطلوبست زاویهٔ بین مماس وشعاع قطبی درپیچ لگاریتمی

$$r=a\cdot e^{k\varphi}$$

۶۵۴ . مطلوبست زاویهٔ بین‌مماس وشعاع قطبی‌نقطهٔ‌تماس‌درلمینسکات $r^۲=a^۲cos۲\varphi$.

۶۵۵ . مطلوبست طول پاره خطهای مماس قطبی، قائم قطبی، تحت مماس قطبی‌وتحت قائم قطبی وهمچنین زاویهٔ بین مماس وشعاع قطبی نقطهٔ تماس درپیچ ارشمیدس

$$r=a\varphi$$

درنقطهٔ با زاویهٔ قطبی $\varphi=۲\pi$.

۶۵۶ . مطلوبست طـول پاره خطهای تحت مماس، تحت قائم، مماس وقائم قطبی، و همچنین زاویهٔ بین مماس وشعاع قطبی در پیچ هذلولی $r=\frac{a}{\varphi}$ درنقطهٔ‌دلخواه $\varphi=\varphi_۰$ و $r=r_۰$.

۶۵۷ . قانون حرکت نقطه‌ای برمحور ox عبارتست از

$$x=۳t-t^۳$$

مطلوبست سرعت حرکت نقطه درلحظه‌های: $t_۰=۰$ ، $t_۱=۱$ ، $t_۲=۲$ (x برحسب سانتیمتر و t برحسب ثانیه است).

۶۵۸ . روی محور ox دو نقطه حرکت‌می کنند، قانون‌حرکتهای این‌دونقطه چنین‌است:

$$x = 100 + 5t \quad , \quad x = \frac{1}{2}t^2$$

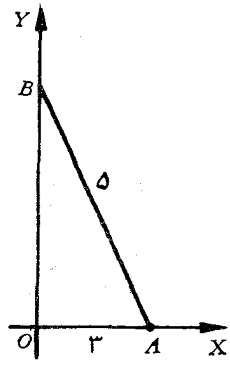
که در آن $t \geqslant 0$. در لحظهٔ برخورد این دو نقطه،با چه سرعتی ازهم دور می‌شوند (x برحسب سانتیمتر و t برحسب ثانیه است)؟

۶۵۹ . دوانتهای پاره خط AB بطول مساوی ۵ متر بردومحور متعامد ox و oy متکی است (شکل ۱۶). سرعت‌جابجائی انتهای A مساوی ۲ متر درثانیه است. در لحظه‌ای که نقطهٔ A ازمبداء مختصات به‌فاصلهٔ (متر) $OA = 3$ قرارگرفته است، سرعت نقطهٔ B چقدر است؟

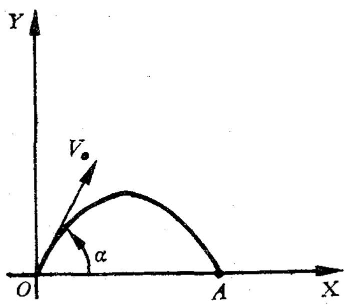
*۶۶۰ . قانون حرکت یك نقطهٔ مادی، که تحت زاویهٔ α با افق و سرعت اولیهٔ v_0 در صفحهٔ قائم xoy پرتاب شده است (شکل ۱۷)، با روابط زیر داده شده است (بدون در نظر گرفتن مقاومت هوا):

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

که در آن t زمان و y سرعت نیروی ثقل است. مطلوبست مسیر حرکت وفاصلهٔ سقوط. همچنین سرعت حرکت وجهت آنرا بدست آورید.



شکل ۱۶



شکل ۱۷

۶۶۱ . نقطه‌ای برهذلولی $y = \frac{10}{x}$ حرکت می کند، بنحوی که طول آن x، بطوریکنواخت

باسرعت ۱ واحد درثانیه نمو می‌کند. وقتی که نقطه دروضع (۲,۵) قـرارگرفته است، عرض آن باچه سرعتی حرکت می‌کند؟

۶۶۲. درچه نقطه‌ای ازسهمی $y^{۲} = ۱۸x$، تغییر عرض دو برابر سریعتر ازتغییر طول آنست؟

۶۶۳. یك ضلع مستطیل مساوی مقدار ثابت (سانتیمتر) $a = ۱۰$ و ضلع دیگر bمتغیر است. ضلع متغیر بـا سرعت ثـابت ۴ سانتیمتر درثـانیه بـزرگ می‌شود. در لحظه‌ای کـه (سانتیمتر)$b = ۳۰$ است، سرعت بزرگ شدن قطر مستطیل ومساحت آنرا پیداکنید.

۶۶۴. شعاع کره‌ای باسرعت ۵ سانتیمتر درثانیه بطور یکنواخت بزرگ می‌شود. در لحظه‌ای که شعاع کره مساوی ۵۰ سانتیمتراست، سرعت نموسطح کره وحجم کره راپیداکنید.

۶۶۵. نقطه‌ای برپیچ ارشمیدسی

$$r = a\varphi$$

حرکت می‌کند (سانتیمتر $a = ۱۰$)، بنحوی که سرعت زاویه‌ای دوران شعاع قطبی آن ثابت و مساوی ۶ درجه درثـانیه است. مطلوبست سـرعت بزرگ شدن شعاع قطبی r درلحظه‌ای کـه (سانتیمتر) $r = ۲۵$ باشد.

۶۶۶. میلهٔ نامتجانس AB بطول ۱۲ سانتیمتر مفروض است. جرم قسمت AM ازآن متناسب بامربع فاصلهٔ نقطهٔ متغیر M از انتهای A وبرای (سانتیمتر) $AM = ۲$ مساوی ۱۰ گرم است. جرم تمام‌میلهٔ AB وتکاثف خطی آنرا درهرنقطهٔ M پیداکنید. تکاثف خطی میله‌درنقطه‌های A و B چقدر است؟

۵. مشتق از مرتبه‌های بالاتر

۱°. تعریف. مشتق مرتبهٔ دوم یا مشتق دوم تابع $y = f(x)$ بـه مشتق مشتق آن گفته می‌شود، یعنی

$$(y')'$$

مشتق دوم را به‌این ترتیب نشان می‌دهند:

$$y'', \text{ یا } \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}, \text{ یا } f''(x)$$

اگر $x = f(t)$ قانون حرکت مستقیم‌الخط نقطه‌ای باشد، $\frac{d^۲x}{dt^۲}$ عبارتست از شتاب این حرکت.

بطورکلی مشتق مرتبهٔ n ام تابع $y = f(x)$ به‌این‌ترتیب بدست می‌آیدکه ازمشتق مرتبهٔ $(n-۱)$ ام آن مشتق بگیریم. مشتق مرتبهٔ n ام را چنین نمایش می‌دهند:

$$y^{(n)}, \text{ یا } \frac{d^n y}{dx^n}, \text{ یا } f^{(n)}(x)$$

مثال ۱ مطلوبست مشتق مرتبهٔ دوم از تابع

$$y = ln(۱ - x)$$

حل.

$$y' = \frac{-۱}{۱-x};\ y'' = \left(\frac{-۱}{۱-x}\right)' = \frac{۱}{(۱-x)^۲}$$

۲°. رابطهٔ لایپنیتس. اگر توابع $u = \varphi(x)$ و $v = \psi(x)$ مشتقهای متوالی تا مرتبهٔ n ام را داشته باشند، برای محاسبهٔ مشتق مرتبهٔ n ام حاصلضرب این دو تابع می‌توان از **رابطهٔ لایپنیتس** استفاده کرد:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-۱)}v' + \frac{n(n-۱)}{۲}u^{(n-۲)}v'' + \dots + uv^{(n)}.$$

۳°. مشتق مرتبه‌های بالاتر ازتوابع پارامتری. اگر داشته باشیم:

$$x = \varphi(t)\ ,\ y = \psi(t)$$

مشتقهای $y'_x = \frac{dy}{dx}$ ، $y''_{xx} = \frac{d^۲y}{dx^۲}$، ... را می‌توان باروابط زیر محاسبه‌کرد:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},\ y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},\ y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \dots$$

برای مشتن مرتبهٔ دوم رابطهٔ زیر برقرار است:

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^۲}$$

مثال ۴ . مطلوبست y''، بشرطی که داشته باشیم:

$$x = acost \text{ , } y = bsint$$

حل . داریم:

$$y' = \frac{(bsint)'_t}{(acost)'_t} = \frac{bcost}{-asint} = -\frac{b}{a}cotgt$$

$$y'' = \frac{\left(-\frac{b}{a}cotgt\right)'_t}{(acost)'_t} = \frac{-\frac{b}{a}\cdot\frac{-۱}{sin^۲t}}{-asint} = -\frac{b}{a^۲sin^۲t}$$

A. مشتق مرتبه‌های بالاتر از توابع صریح

مطلوبست مشتق مرتبهٔ دوم از توابع زیر:

۶۶۷ . $y = x^۸ + ۷x^۶ - ۵x + ۴$

۶۶۸ . $y = e^{x^۲}$

۶۶۹ . $y = sin^۲x$

۶۷۰ . $y = ln\sqrt[۳]{۱ + x^۲}$

۶۷۱ . $y = ln(x + \sqrt{a^۲ + x^۲})$

۶۷۲ . $f(x) = (۱ + x^۲)arctgx$

۶۷۳ . $y = (arcsinx)^۲$

۶۷۴ . $y = ach\frac{x}{a}$

۶۷۵ . ثابت کنید که تابع $y = \frac{x^۲ + ۲x + ۲}{۲}$ در معادلهٔ دیفرانسیلی $۱ + y'^۲ = ۲yy''$ صدق می کند.

۶۷۶ . ثابت کنید که تابع $y = \frac{۱}{۲}x^۲e^x$ درمعادلهٔدیفرانسیلی $y'' - ۲y' + y = e^x$ صدق‌می کند.

۶۷۷ . ثابت کنید که‌تابع $y = C_۱e^{-x} + C_۲e^{-۲x}$ به ازای هر مقدار $C_۱$ و $C_۲$ در معادلهٔ $y'' + ۳y' + ۲y = ۰$ صدق می کند.

۶۷۸ . ثابت کنید که تابع $y = e^{۲x}sin۵x$ درمعادلهٔ $y'' - ۴y' + ۲۹y = ۰$ صدق می کند.

۶۷۹ . اگر داشته باشیم: $y = x^۳ - ۵x^۲ + ۷x - ۲$، مطلوبست y'''.

۶۸۰ . مطلوبست $f'''(۳)$، اگر داشته باشیم: $f(x) = (۲x - ۳)^۵$.

۶۸۱ . مطلوبست y^V از تابع $y = ln(۱ + x)$.

۶۸۲ . مطلوبست y^{VI} از تابع $y = sin۲x$.

۶۸۳ . ثابت کنید که تابع $y = e^{-x}cosx$ درمعادلهٔ دیفرانسیلی $y^{IV} + ۴y = ۰$ صدق‌می کند.

۶۸۴ . مطلوبست $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f''(0)$ ، $f'''(0)$ ، اگر داشته باشیم:

$$f(x)=e^{x}\sin x$$

۶۸۵ . معادلهٔ حرکت نقطه‌ای برمحور ox عبارتست از

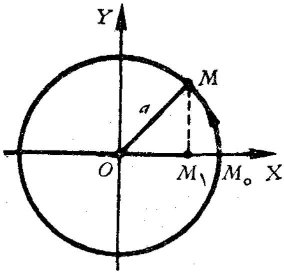
$$x=100+5t-0{,}001t^{3}$$

مطلوبست سرعت و شتاب نقطه درلحظه‌های $t_0=0$ ، $t_1=1$ ، $t_2=10$.

۶۸۶ . روی‌دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$، نقطهٔ M باسرعت زاویه‌ای ثابت ω حرکت‌می‌کند.

مطلوبست قانون حرکت تصویر آن M_1 بر محور ox، بشرط اینکه درلحظهٔ $t=0$ نقطه در وضع $M_0(a,0)$ باشد (شکل ۱۸). سرعت و شتاب حرکت نقطهٔ M_1 را بدست آورید.

وقتی که نقطهٔ M_1 درلحظهٔ اولیه و در لحظه‌ای که برمبداء مختصات قرار می‌گیرد، سرعت و شتاب آن چقدر است؟



شکل ۱۸

حداکثر مقدار مطلق سرعت و شتاب نقطهٔ M_1 را پیدا کنید.

۶۸۷ . مطلوبست مشتق مرتبهٔ n ام از تابع $y=(ax+b)^n$ (n عددی طبیعی است).

۶۸۸ . مشتق مرتبهٔ n ام هر یك از دو تابع زیر را بدست آورید:

$$a)\ \ y=\frac{1}{1-x};\qquad b)\ \ y=\sqrt{x}$$

۶۸۹ . مشتق مرتبهٔ n ام هر یك از توابع زیر را بدست آورید:

$a)\ \ y=\sin x;$

$b)\ \ y=\cos 2x;$

$c)\ \ y=e^{-2x};$

$d)\ \ y=\ln(1+x);$

$e)\ \ y=\frac{1}{1+x};$

$f)\ \ y=\frac{1+x}{1-x};$

$g)\ \ y=\sin^2 x;$

$h)\ \ y=\ln(ax+b).$

۶۹۰ . با استفاده از رابطهٔ لایبنیتس، در هر یك از موارد زیر $y^{(n)}$ را بدست آورید:

a) $y = xe^{x}$;

b) $y = x^{2}e^{-2x}$;

c) $y = (1-x^{2})\cos x$;

d) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$;

e) $y = x^{3}\ln x$.

۶۹۱ . اگر $f(x) = \ln\dfrac{1}{1-x}$ باشد، $f^{(n)}(0)$ را محاسبه کنید.

B . مشتق مرتبه‌های بالاتر در توابع پارامتری و ضمنی

$\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$ را در هریک از توابع زیر بدست آورید:

۶۹۲ . a) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^{3} \end{cases}$ ، b) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^{2}) \end{cases}$ ، c) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^{2}} \end{cases}$

۶۹۳ . a) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ ، b) $\begin{cases} x = a\cos^{3}t \\ y = a\sin^{3}t \end{cases}$ ، c) $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t) \\ y = a(\cos t + t\sin t) \end{cases}$.

۶۹۴ . a) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^{2}t \end{cases}$ ، b) $\begin{cases} x = e^{-at} \\ y = e^{at} \end{cases}$

۶۹۵ . a) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \frac{1}{2}t^{2} \end{cases}$ ، b) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{1-t} \end{cases}$

۶۹۶ . مطلوبست $\dfrac{d^{2}x}{dy^{2}}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$x = e^{t}\cos t \quad , \quad y = e^{t}\sin t$$

۶۹۷ . مطلوبست $\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$ به‌ازای $t=0$، بشرطی که داشته باشیم:

$$x=ln(1+t^{2})\ ,\ y=t^{2}$$

۶۹۸ . ثابت کنید که y، بعنوان تابعی از x، که از روابط $x=sint$ ، $y=ae^{t\sqrt{2}}+be^{-t\sqrt{2}}$ معین می‌شود، به‌ازای هرمقدار دلخواه a و b در معادلهٔ دیفرانسیلی زیر صدق می‌کند:

$$(1-x^{2})\frac{d^{2}y}{dx^{2}}-x\frac{dy}{dx}=2y$$

$y'''=\frac{d^{3}y}{dx^{3}}$ را در توابع زیر بدست آورید:

۶۹۹ . $\begin{cases}x=sect\\ y=tgt\end{cases}$ ۷۰۰ . $\begin{cases}x=e^{-t}cost\\ y=e^{-t}sint\end{cases}$

۷۰۱ . $x=e^{-t}$ ، $y=t^{3}$

۷۰۲. مطلوبست $\frac{d^{n}y}{dx^{n}}$ ، بشرطی که داشته باشیم :

$$x=lnt\ ,\ y=t^{m}$$

۷۰۳ . اگر تابع $y=f(x)$ معلوم باشد، مطلوبست مشتقهای x'' و x''' از تابع معکوس $x=f^{-1}(y)$.

۷۰۴ . اگر $x^{2}+y^{2}=1$ باشد، مطلوبست y''.

حل . بنا برقاعدهٔ مشتق‌گیری ازتوابع مرکب داریم: $2x+2yy'=0$ و از آنجا $y'=-\frac{x}{y}$ و در نتیجه

$$y''=-\left(\frac{x}{y}\right)'_{x}=-\frac{y-xy'}{y^{2}}$$

که اگر بجای y' مقدارش را قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$y''=-\frac{y^{2}+x^{2}}{y^{3}}=-\frac{1}{y^{3}}$$

از توابع $y=f(x)$ ، که بصورت ضمنی داده شده‌اند، y'' را محاسبه کنید:

۷۰۵. $y^{2}=2px$

۷۰۶. $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$

۷۰۷. $y=x+arctgy$

۷۰۸. با در دست داشتن معادلهٔ $y=x+lny$، مطلوبست $\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$ و $\frac{d^{2}x}{dy^{2}}$.

۷۰۹. y'' را در نقطهٔ $(1,1)$ بدست آورید، بشرطی که داشته باشیم:

$$x^{2}+5xy+y^{2}-2x+y-6=0$$

۷۱۰. y'' را درنقطهٔ $(0,1)$ پیدا کنید، اگر داشته باشیم:

$$x^{4}-xy+y^{4}=1$$

۷۱۱. a) تابع y بصورت ضمنی با معادلهٔ زیر داده شده است:

$$x^{2}+2xy+y^{2}-4x+2y-2=0$$

مطلوبست $\frac{d^{3}y}{dx^{3}}$ درنقطهٔ $(1,1)$.

b) مطلوبست $\frac{d^{3}y}{dx^{3}}$، اگر داشته باشیم: $x^{2}+y^{2}=a^{2}$.

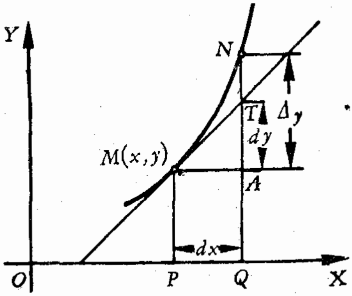
۶. دیفرانسیل مرتبهٔ اول و مرتبه‌های بالاتر

۱°. دیفرانسیل مرتبهٔ اول. دیفرانسیل (مرتبهٔ اول) تابع $y=f(x)$ عبارتست از قسمت اصلی نمو آن، که بطور خطی نسبت به‌نمو $\Delta x=dx$ از متغییر مستقل بوجود می‌آید. دیفرانسیل تابع برابر است باحاصلضرب مشتق در دیفرانسیل متغیر مستقل

و از آنجا

$$dy = y'dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$



شکل ۱۹

اگر MN قوسی ازمنحنی‌تابع $y = f(x)$(شکل ۱۹)، MT مماس بــر آن درنقطهٔ $M(x,y)$ و

$$PQ = \Delta x = dx$$

باشد، نمو عرض مماس

$$AT = dy$$

وپاره خط $AN = \Delta y$ می‌شود.

مثال ۱ . مطلوبست نمو ودیفرانسیل تابع $y = 3x^2 - x$.

حل . روش اول:

$$\Delta y = 3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x) - 3x^2 + x,$$

یا

$$\Delta y = (6x-1)\Delta x + 3(\Delta x)^2$$

و بنابراین

$$dy = (6x-1)\Delta x = (6x-1)dx$$

روش دوم:

$$y' = 6x - 1\ ;\ dy = y'dx = (6x-1)dx$$

مثال ۲ . Δy و dy را در تــابــع $y = 3x^2 - x$ بــه‌ازای $x = 1$, $\Delta x = 0{,}01$ محاسبه کنید.

حل . $\Delta y = (6x-1)\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 5\cdot 0{,}01 + 3\cdot(0{,}01)^2 = 0{,}0503$

$$dy = (6x-)\Delta x = 5\cdot 0{,}01 = 0{,}0500$$

۲°. خواص اصلی دیفرانسیل‌ها

۱) $dc = 0$ ، c مقداری است ثابت.

۲) $dx = \Delta x$ ، x متغیر مستقل است.

۳) $d(cu) = cdu$.

۴) $d(u \pm v) = du \pm dv$.

۵) $d(uv) = udv + vdu$.

۶) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

۷) $df(u) = f'(u)du$.

۳°. مورد استعمال دیفرانسیل در محاسبات تقریبی . اگر نمو Δx آوند x از لحاظ قدر مطلق کوچك باشد، دیفرانسیل dy تابع $y = f(x)$ و نمو Δy تابع، بطورتقریب با هم برابرند:

$$\Delta y \approx dy$$

یعنی

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

و بنابراین

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (1)$$

مثال ۳ . ضلع یك مربع بطور تقریب چقدر تغییر می‌کند، بشرطی که مساحت آن از ۹ متر مربع به ۹٫۱ مترمربع برسد؟

حل . اگر x مساحت مربع و y ضلع آن باشد، داریم:

$$y = \sqrt{x}$$

طبق شرط مسئله: $x = 9$ ، $\Delta x = 0{,}1$.

نمو Δy ضلع مربع را بتقریب محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta y \approx dy = y'\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0{,}1 = 0{,}016 \ (\text{متر})$$

۵۰۴. دیفرانسیل از مرتبه‌های بالاتر . دیفرانسیل مرتبهٔ دوم به دیفرانسیل دیفرانسیل مرتبهٔ اول گویند:

$$d^{۲}y = d(dy)$$

وبهمین ترتیب دیفرانسیل مرتبهٔ سوم ومرتبه‌های بالاتر ازآن تعریف می‌شود.

اگر $y = f(x)$ و x متغیر مستقل باشد، داریم:

$$d^{۲}y = y''(dx)^{۲}$$
$$d^{۳}y = y'''(dx)^{۳}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d^{n}y = y^{(n)}(dx)^{n}$$

واگر $y = f(u)$ باشد، که درآن $u = \varphi(x)$ است، داریم:

$$d^{۲}y = y''(du)^{۲} + y'd^{۲}u,$$
$$d^{۳}y = y'''(du)^{۳} + ۳y''du \cdot d^{۲}u + y'd^{۳}u$$

وغیره .

۷۱۲ . مطلوبست نمو Δy و دیفرانسیل dy تـابع $y = ۵x + x^{۲}$ به ازای $x = ۲$ و $\Delta x = ۰{,}۰۰۱$.

۷۱۳ . بدون محاسبهٔ مشتق، مطلوبست

$$d(۱ - x^{۳})$$

به‌ازای $x = ۱$ و $\Delta x = -\frac{۱}{۳}$.

۷۱۴ . مساحت S یك‌مربع به‌ضلع مساوی x بارابطهٔ $S = x^{۲}$ معین‌می‌شود. مطلوبست نمو ودیفرانسیل این تابع وتعبیر هندسی قسمت اخیر.

۷۱۵ . تعبیر هندسی نمو ودیفرانسیل هریك ازتوابع زیررا بدهید:

a) مساحت دایره: $S = \pi x^{۲}$؛ b) حجم مکعب: $v = x^{۳}$

۷۱۶ . ثابت‌کنیدکه وقتی $\Delta x \to ۰$، نموتابع $y = ۲^{x}$ ، متناظر بانمو x ، به‌ازای هر مقدار x معادل است باعبارت $۲^{x}\Delta x \ln ۲$.

۷۱۷ . به‌ازای چه مقداری از x دیفرانسیل تابع $y = x^{۲}$ معادل نمو این تابع به‌ازای $\Delta x \to ۰$ نیست؟

۷۱۸ . آیا تابع $y=|x|$ به‌ازای $x=0$ دیفرانسیل دارد؟

۷۱۹ . بااستفاده ازمشتق، مطلوبست دیفرانسیل تابع $y=\cos x$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{6}$ و $\Delta x=\frac{\pi}{36}$.

۷۲۰ . مطلوبطت دیفرانسیل تابع

$$y=\frac{2}{\sqrt{x}}$$

به‌ازای $x=9$ و $\Delta x=-0{,}01$.

۷۲۱ . دیفرانسیل تابع

$$y=tgx$$

را به‌ازای $x=\frac{\pi}{3}$ و $\Delta x=\frac{\pi}{180}$ محاسبه کنید.

مطلوبست دیفرانسیل توابع زیر به‌ازای مقادیر دلخواه آوند ونمو آن :

۷۲۲ . $y=\frac{1}{x^m}$.　　۷۲۳ . $y=\frac{x}{1-x}$.

۷۲۴ . $y=acc\sin\frac{x}{a}$.　　۷۲۵ . $y=arctg\frac{x}{a}$.

۷۲۶ . $y=e^{-x^2}$.　　۷۲۷ . $y=x\ln x-x$.

۷۲۸ . $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$.　　۷۲۹ . $r=cotg\varphi+cosec\varphi$.

۷۳۰ . $s=arccotge^t$.

۷۳۱ . مطلوبست dy ، اگر داشته باشیم: $x^2+2xy-y^2=a^2$

حل . داریم: $2xdx+2(ydx+xdy)-2ydy=0$

وازآنجا

$$dy=-\frac{x+y}{x-y}dx$$

دیفرانسیل توابع زیرراکه به‌صورت ضمنی داده شده‌است بدست آورید:

۷۳۲ . $(x+y)^2(2x+y)^3=1$

۷۳۳. $y=e^{-\frac{x}{y}}$

۷۳۴. $ln\sqrt{x^2+y^2}=arctg\frac{y}{x}$

۷۳۵. dy را در نقطهٔ $(1,2)$ برای تابع $y^3-y=6x^2$ بدست آورید.

۷۳۶. مقدار تقریبی $sin 31°$ را محاسبه کنید.

حل. اگر $x=arc 30°=\frac{\pi}{6}$ و $\Delta x=arc 1°=\frac{\pi}{180}$ فرض کنیم. ازرابطهٔ (۱) (۳° را ببینید) داریم:

$$sin 31°\approx sin 30°+\frac{\pi}{180}cos 30°=0{,}500+0{,}017\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}515$$

۷۳۷. باتبدیل نمو تابع به‌دیفرانسیل، بتقریب محاسبه کنید:

a) $cos 61°$؛ b) $tg 44°$؛ c) $e^{0{,}2}$؛

d) $lg 0{,}9$؛ e) $arctg 1{,}05$.

۷۳۸. اگر شعاع R کره‌ای که مساوی ۱۵ سانتیمتر است به‌اندازهٔ ۲ میلیمتر اضافه شود، حجم آن بتقریب چقدر اضافه خواهد شد؟

۷۳۹. رابطهٔ تقریبی زیررا پیدا کنید (برای مقادیر کوچك $|\Delta x|$ درمقایسه با x):

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$$

و به‌کمك آن مقادیر تقریبی $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{17}$ ، $\sqrt{70}$ و $\sqrt{640}$ را محاسبه کنید.

۷۴۰. رابطهٔ تقریبی زیررا پیدا کنید:

$$\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

و مقادیر تقریبی $\sqrt[3]{10}$ ، $\sqrt[3]{70}$ و $\sqrt[3]{200}$ را پیدا کنید.

۷۴۱. مقدار تقریبی توابع زیررا بدست آورید:

a) $y=x^3-4x^2+5x+3$ به‌ازای $x=1{,}03$؛

b) $f(x)=\sqrt{1+x}$ به‌ازای $x=0{,}2$.

c) $f(x)=\sqrt[۳]{\frac{۱-x}{۱+x}}$ به‌ازای $x=۰,۱$.

d) $y=e^{۱-x^۲}$ به‌ازای $x=۱,۰۵$.

۷۴۲ . مقدار تقریبی $tg۴۵^\circ۳'۲۰''$ را پیدا کنید.

۷۴۳ . مقدار تقریبی $arcsin\,۰,۵۴$ را محاسبه کنید.

۷۴۴ . مقدار تقریبی $\sqrt[۴]{۱۷}$ را پیدا کنید.

۷۴۵ . براساس رابطهٔ قانون اهم $I=\frac{E}{R}$، ثابت کنید که تغییر کوچک جریان‌را، بشرط تغییر کوچک مقاومت، می‌توان ازرابطهٔ تقریبی زیر بدست آورد:

$$\Delta I=-\frac{I}{R}\Delta R$$

۷۴۶ . ثابت کنید که ۱٪ خطای نسبی درتعیین شعاع منجر به ۲٪ خطای نسبی تقریبی درمحاسبهٔ مساحت دایره وسطح کره می‌شود.

۷۴۷ . اگر $y=cos\,۵x$ باشد $d^۲y$ را محاسبه کنید.

حل . $d^۲y=y''(dx)^۲=-۲۵cos\,۵x(dx)^۲$

۷۴۸ . $u=\sqrt{۱-x^۲}$ ، مطلوبست $d^۲u$.

۷۴۹ . $y=arccos\,x$ ، مطلوبست $d^۲y$.

۷۵۰ . $y=sin\,x\,ln\,x$ ، مطلوبست $d^۲y$.

۷۵۱ . $z=\frac{ln\,x}{x}$ ، مطلوبست $d^۲z$.

۷۵۲ . $z=x^۲.e^{-x}$ ، مطلوبست $d^۳z$،

۷۵۳ . $z=\frac{x^۴}{۲-x}$ ، مطلوبست $d^۴z$.

۷۵۴ . $u=۳\,sin(۲x+۵)$ ، مطلوبست d^nu.

۷۵۵ . $y=e^{x\cos\alpha}sin(x\,sin\alpha)$ ، مطلوبست d^ny.

۷. قضایای مربوط به‌واسطه

۱°. **قضیهٔ اول.** اگر تابع $f(x)$ درفاصلهٔ بستهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ پیوسته باشد و در هر نقطهٔ داخل این فاصله مشتق $f'(x)$ وجود داشته باشد و

$$f(a) = f(b),$$

برای آوند x لااقل یك مقدار ξ وجود دارد، بنحوی که $a < \xi < b$ وداشته باشیم:

$$f'(\xi) = 0$$

۲°. **قضیهٔ لاگرانژ.** اگرتابع $f(x)$ در فاصلهٔ بستهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ پیوسته باشد و درهر نقطهٔ داخل این فاصله مشتق داشته باشد، درا ینصورت

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi)$$

که درآن $a < \xi < b$.

۳°. **قضیهٔ کوشی.** اگرتوابع $f(x)$ و $F(x)$ درفاصلهٔ بستهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ پیوسته باشد وبرای $a < x < b$ مشتقهائی‌داشته باشندکه باهم‌بسمت صفرمیل نکنند وضمناً $F(b) \neq F(a)$، درا ینصورت

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \qquad (a < \xi < b)$$

۷۵۶. ثابت کنید که تابع $f(x) = x - x^3$ در فواصل بستهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 0$ و $0 \leqslant x \leqslant 1$ با شرایط قضیهٔ رول می‌سازد، مقادیر مربوطهٔ ξ را بدست‌آورید.

حل. تابع $f(x)$ پیوسته است وبه‌ازای همهٔ مقادیر x دارای مشتق است، علاوه برآن $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$، بنابراین می‌توان ازقضیهٔ رول‌درفواصل بستهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 0$ و $0 \leqslant x \leqslant 1$ استفاده‌کرد. برای پیدا کردن مقدار ξ معادلهٔ $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0$ را تشکیل می‌دهیم. ازآنجا $\xi_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ و $\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ و ضمناً $-1 < \xi_1 < 0$ و $0 < \xi_2 < 1$.

۷۵۷. تابع $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ در دو انتهای فاصلهٔ بستهٔ $[0,4]$ مقادیری

مساوی هم دارد:

$$f(۰)=f(۴)=\sqrt[3]{۴}$$

آیا قضیهٔ رول برای این تابع درفاصلهٔ بستهٔ $[۰,۴]$ صحیح است؟

۷۵۸ . آیا شرایط قضیهٔ رول برای تابع

$$f(x)=tg\,x$$

در فاصلهٔ بستهٔ $[۰,\pi]$ صحیح است؟

۷۵۹ . فرض کنید

$$f(x)=x(x+۱)(x+۲)(x+۳)$$

ثابت کنید معادلهٔ $f'(x)=۰$ دارای سه ریشهٔ حقیقی است.

۷۶۰ . واضح است که معادلهٔ

$$e^{x}=۱+x$$

ریشهٔ $x=۰$ را قبول دارد. ثابت کنید که این معادله ریشهٔ حقیقی دیگری ندارد.

۷۶۱ . تحقیق کنید که شرایط قضیهٔ لاگرانژ برای تابع

$$f(x)=x-x^{۳}$$

درفاصلهٔ بستهٔ $[-۲,۱]$ صدق می‌کند ومقدار واسطهٔ ξ متناظرآنرا بدست آورید.

حل . تابع $f(x)=x-x^{۳}$ پیوسته است وبرای همهٔ مقادیر x دارای مشتق است و ضمناً $f'(x)=۱-۳x^{۲}$. ازآنجا طبق رابطهٔ لاگرانژ داریم:

$$f(۱)-f(-۲)=۰-۶=[۱-(-۲)]f'(\xi);$$
$$f'(\xi)=-۲;\ \ ۱-۳\xi^{۲}=-۲;\ \ \xi=\pm۱$$

که ازآن $\xi=-۱$ قابل قبول است، زیرا نامساوی $-۲<\xi<۱$ درموردآن صدق می‌کند.

۷۶۲ . صحت شرایط قضیهٔ لاگرانژ را برای تابع $f(x)=x^{\frac{۴}{۳}}$ درفاصلهٔ بستهٔ $[-۱,۱]$ مورد تحقیق قراردهید ونقطهٔ واسطهٔ ξ متناظرآنرا پیدا کنید.

۷۶۳ . روی قطعه‌ای از سهمی $y=x^{۲}$، که بین نقطه‌های $A(۱,۱)$ و $B(۳,۹)$ واقع است، نقطه‌ای را بدست آورید که مماس درآن موازی وتر AB باشد.

۷۶۴ . با استفاده از رابطهٔ لاگرانژ، رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$\sin(x+h)-\sin x=h\cdot\cos\xi$$

که در آن $x<\xi<x+h$.

۷۶۵ . a) شرایط قضیهٔ کوشی را برای توابع $f(x)=x^۲+۲$ و $F(x)=x^۳-۱$ درفاصلهٔ بستهٔ $[۱,۲]$ تحقیق کنید و ξ را بدست آورید؛

b) همین کار را در مورد توابع $f(x)=\sin x$ و $F(x)=\cos x$ برای فاصلهٔ بستهٔ $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ انجام دهید .

۸. رابطهٔ تیلور

اگر تابع $f(x)$ ومشتقهای متوالی آن تا مرتبهٔ $(n-۱)$ ام درفاصلهٔ بستهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ (یا $b\leqslant x\leqslant a$) پیوسته باشد وضمناً درهر نقطهٔ داخل این فاصله مشتق محدود $f^{(n)}(x)$ وجود داشته باشد، رابطهٔ تیلور دراین فاصلهٔ بسته صحیح است:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^۲}{۲!}f''(a)+\frac{(x-a)^۳}{۳!}f'''(a)+\cdots+$$
$$+\frac{(x-a)^{n-۱}}{(n-۱)!}f^{(n-۱)}(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

که در آن $\xi=a+\theta(x-a)$ و $۰<\theta<۱$.

درحالت خاص و به‌ازای $a=۰$ داریم (رابطهٔ ماکلورن):

$$f(x)=f(۰)+xf'(۰)+\frac{x^۲}{۲!}f''(۰)+\cdots+\frac{x^{n-۱}}{(n-۱)!}f^{(n-۱)}(۰)+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

که در آن $\xi=\theta x$ و $۰<\theta<۱$.

۷۶۶ . کثیرالجملهٔ $f(x)=x^۳-۲x^۲+۳x+۵$ را برای برحسب قوای صحیح ومثبت دوجمله‌ای $x-۲$ مرتب کنید.

حل . $f'(x)=۳x^۲-۴x+۳$ ؛ $f''(x)=۶x-۴$ ؛ $f'''(x)=۶$ ؛ و برای

$n\geqslant 4$: $f^{(n)}(x)=0$ ، وازآنجا :

$$f(2)=11;\quad f'(2)=7;\quad f''(2)=8;\quad f'''(2)=6$$

و بنابراین

$$x^3-2x^2+3x+5=11+(x-2)\cdot 7+\frac{(x-2)^2}{2!}\cdot 8+\frac{(x-2)^3}{3!}\cdot 6$$

ویا

$$x^3-2x^2+3x+5=11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3$$

۷۶۷ . تابع $f(x)=e^x$ را برحسب قوای $x+1$ تاجملهٔ شامل $(1+x)^3$ بنویسید.

حل . برای همهٔ مقادیر n داریم: $f^{(n)}(x)=e^x$ و $f^{(n)}(-1)=\frac{1}{e}$. بنابراین

$$e^x=\frac{1}{e}+(x+1)\frac{1}{e}+\frac{(x+1)^2}{2!}\cdot\frac{1}{e}+\frac{(x+1)^3}{3!}\cdot\frac{1}{e}+\frac{(x+1)^4}{4!}\cdot e^{\xi}$$

که درآن $\xi=-1+\theta(x+1)$ و $0<\theta<1$.

۷۶۸ . تابع $f(x)=\ln x$ را برحسب قوای $x-1$ تاجملهٔ $(1-x)^2$ بنویسید.

۷۶۹ . تابع $f(x)=\sin x$ را برحسب قوای x تاجملهٔ x^3 و تاجملهٔ x^5 بنویسید.

۷۷۰ . تابع $f(x)=e^x$ را برحسب قوای x تاجملهٔ شامل x^{n-1} بنویسید.

۷۷۱ . ثابت کنیدکه اختلاف $\sin(a+h)$ با

$$\sin a+h\cos a$$

بیشتر از $\frac{1}{2}h^2$ نیست.

۷۷۲ . منشاء روابط تقریبی زیررا روشن کنید :

$$a)\ \sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2,\qquad |x|<1$$

$$\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2,$$

وخطای آنها را معین کنید.

۷۷۳ . خطای رابطهٔ تقریبی زیررا پیداکنید:

$$e \approx ۲+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۴!}$$

۷۷۴ . یك قطعه نخ بخاطر نیروی وزن خود بصورت منحنی زنجیری $y=ach\frac{x}{a}$ می‌ایستد. ثابت کنید که برای مقادیر کوچك $|x|$ شکل نخ بتقریب برسهمی زیرمنطبق است:

$$y=a+\frac{x^{۲}}{۲a}$$

۷۷۵* . ثابت کنید که به‌ازای $|x|<a$، تساوی تقریبی زیر بادقت تا $\left(\frac{x}{a}\right)^{۲}$ صحیح‌است:

$$e^{\frac{x}{a}} \approx \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

۹. قاعدهٔ هوپیتال ـ برنولی برای رفع ابهام

۱°. رفع ابهام از نوع $\frac{۰}{۰}$ و $\frac{\infty}{\infty}$. توابع یك ارزشی $f(x)$ و $\varphi(x)$ را که به‌ازای $۰<|x-a|<h$ دارای مشتق‌اند وضمناً $\varphi'(x)$ بسمت صفرمیل نمی‌کند، درنظرمی‌گیریم.

اگر $f(x)$ و $\varphi(x)$ برای وقتی که $x \to a$ ، بی‌نهایت کوچك یا بی‌نهایت بزرگ باشند، یعنی خارج قسمت $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ در نقطهٔ $x=a$ به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ درآید، داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

بشرطی که حد نسبت مشتقها وجود داشته باشد (قاعدهٔ هوپیتال ــ برنولی). قاعده برای حالتی هم که $a=\infty$ باشد، صحیح است.

اگر خارج قسمت $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ دوباره درنقطهٔ $x=a$ بیکی ازدو صورت مبهم مذکور درآید

و $f'(x)$ و $\varphi'(x)$ دارای شرایطی باشند که برای $f(x)$ و $\varphi(x)$ گفتیم، می‌توان نسبت مشتقهای دوم را بدست آورد وغیره.

ولی باید بخاطر داشت که ممکن است در حالتی که نسبت $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ بسمت حدی میل نکند، نسبت $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ وجود داشته باشد (مسئلهٔ شمارهٔ ٨٠٩ را ببینند).

٤ـ٥. انواع عبارتهای دیگر مبهم. برای رفع ابهام در حالت $0.\infty$، حاصلضرب متناظر $f_1(x)\cdot f_2(x)$ را، که درآن $\lim_{x\to a} f_1(x)=0$ و $\lim_{x\to a} f_2(x)=\infty$، بصورت $\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}}$ (نوع $\frac{0}{0}$) یا $\frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}}$ (نوع $\frac{\infty}{\infty}$) می‌نویسیم.

درحالت مبهم $\infty-\infty$، باید تفاضل متناظر $f_1(x)-f_2(x)$ را بصورت ضرب $f_1(x)\left[1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]$ نوشت وابتدا از $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ رفع ابهام نمود؛ اگر $\lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=1$ باشد، عبارت را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}}\quad\left(\text{حالت }\frac{0}{0}\right)$$

حالتهای 1^∞، 0^0، ∞^0 را با لگاریتم گرفتن ازآنها وپیدا کردن حد لگاریتم توان $[f_1(x)]^{f_2(x)}$، رفع ابهام می‌کنیم (که منجر به‌رفع ابهام ازحالت $0.\infty$ می‌شود).

دربعضی‌موارد بهتراست قاعدهٔ هوپیتال ـ برنولی‌را همراه باروشهای مقدماتی‌جستجوی حدود بکار برد.

مثال ١. محاسبه‌کنید

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\cot g\, x}\quad\left(\text{حالت مبهم }\frac{\infty}{\infty}\right)$$

حل. با بکار بردن قاعدهٔ هوپیتال ـ برنولی، داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\cot g\, x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\cot g\, x)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم که احتیاجی به‌استفادهٔ مجدد از قاعدهٔ هوپیتال ــ برنولی نیست، زیرا داریم:

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{\sin^2 x}{x}=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=1\cdot 0=0$$

به‌این‌ترتیب بدست می‌آید:

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}=0$$

مثال ۲ . مطلوبست محاسبهٔ

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)\quad(\text{حالت مبهم } \infty-\infty)$$

حل. کسر هارا بیک‌مخرج تبدیل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

قبل از آنکه از قاعدهٔ هوپیتال ــ برنولی استفاده کنیم، توجه می‌کنیم که می‌توان مخرج کسر اخیر را به‌بی‌نهایت کوچك معادل آن تبدیل کرد: $x^2\sin^2 x\sim x^4$، بدست می‌آید:

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\quad(\text{حالت مبهم } \tfrac{0}{0})$$

و بنا بر قاعدهٔ هوپیتال ــ برنولی

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}$$

سپس با روش مقدماتی بدست می‌آید:

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}=\frac{1}{3}$$

مثال ۳ . محاسبه کنید

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\,(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}\quad(\text{حالت مبهم } 1^\infty)$$

حل . حد لگاریتم عبارت را بااستفاده ازقاعدهٔ هوپیتال ــ برنولی بدست می‌آوریم:

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\, ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\,\frac{3ln\cos 2x}{x^2}=-6\,\underset{x\to 0}{\text{حد}}\,\frac{tg\,2x}{2x}=-6$$

و بنابراین

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=e^{-6}$$

حد توابع زیر را بدست آورید:

۷۷۶. $\underset{x\to 1}{\text{حد}}\,\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

حل. $\underset{x\to 1}{\text{حد}}\,\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}=\underset{x\to 1}{\text{حد}}\,\frac{3x^2-4x-1}{3x^2-7}=\frac{1}{2}$

۷۷۷. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\,\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

۷۷۸. $\underset{x\to 1}{\text{حد}}\,\frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$.

۷۷۹. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\,\frac{ch x-1}{1-\cos x}$.

۷۸۰. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\,\frac{tg x-\sin x}{x-\sin x}$.

۷۸۱. $\underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{حد}}\,\frac{\sec^2 x-2tg x}{1+\cos 4x}$.

۷۸۲. $\underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\text{حد}}\,\frac{tg x}{tg 5x}$.

۷۸۳. $\underset{x\to \infty}{\text{حد}}\,\frac{e^x}{x^5}$.

۷۸۴. $\underset{x\to \infty}{\text{حد}}\,\frac{ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

۷۸۵. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\,\frac{\frac{\pi}{x}}{cotg\frac{\pi x}{2}}$.

۷۸۶. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\,\frac{ln(\sin mx)}{ln\sin x}$.

۷۸۷. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}(1-\cos x)cotg\,x$.

حل. داریم :

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}(1-\cos x)cotg\,x=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\,\frac{(1-\cos x)\cos x}{\sin x}=$$

$$=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\,\frac{1-\cos x}{\sin x}\cdot\underset{x\to 0}{\text{حد}}\cos x=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\,\frac{\sin x}{\cos x}\cdot 1=0$$

۷۸۸. $\underset{x\to 1}{\text{حد}}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$.

۷۸۹. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\,arc\sin x\,cotg\,x$.

۷۹۰. $\lim\limits_{x\to 0}(x^n e^{-x})$، $n>0$.

۷۹۱. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{a}{x}$.

۷۹۲. $\lim\limits_{x\to\infty} x^n\sin\dfrac{a}{x}$، $n>0$.

۷۹۳. $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \ln(x-1)$.

۷۹۴. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

حل. داریم:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\frac{1}{x}+\ln x-1}{\ln x+\frac{1}{x}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x-\frac{1}{x}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

۷۹۵. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.

۷۹۶. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$.

۷۹۷. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{cotg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

۷۹۸. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

حل. $y=x^x$ می‌گیریم؛ بترتیب داریم:

$$\ln y = x\ln x;\quad \lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}(x\ln x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0\ ;$$

وازآنجا $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\, y = 1$ ، یعنی $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\, x^{x} = 1$.

۷۹۹. $\underset{x\to +\infty}{\text{حد}}\, x^{\frac{1}{x}}$.

۸۰۰. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\, x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

۸۰۱. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\, x^{\sin x}$.

۸۰۲. $\underset{x\to 1}{\text{حد}}\, (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

۸۰۳. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\, (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

۸۰۴. $\underset{x\to 1}{\text{حد}}\, x^{\frac{1}{1-x}}$.

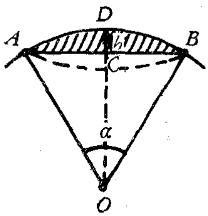
۸۰۵. $\underset{x\to 1}{\text{حد}}\left(tg\frac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

۸۰۶. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\, (cotg\, x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

۸۰۷. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg x}$.

۸۰۸. $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\, (cotg\, x)^{\sin x}$.

۸۰۹. ثابت کنید که حدود:



شکل ۲۰

$$a)\ \underset{x\to 0}{\text{حد}}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = 0\ ;$$

$$b)\ \underset{x\to \infty}{\text{حد}}\frac{x-\sin x}{x+\sin x} = 1$$

را نمی‌توان باقاعدهٔ هوپیتال ــ برنولی بدست‌آورد. این حدود را بطور مستقیم بدست آورید.

۸۱۰*. ثابت کنید که سطح قطعه دایره با زاویهٔ مرکزی کوچك α ، وقتی که وتر آن $AB = b$ وسهم آن $CD = h$ باشد (شکل ۲۰) ، بتقریب برابر است

$$S \approx \frac{2}{3}bh$$

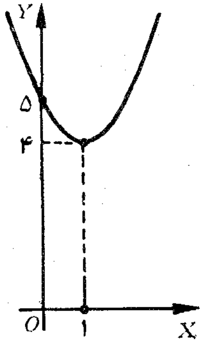
وقتی $\alpha \to 0$ ، خطای نسبی چگونه است؟

فصل سوم

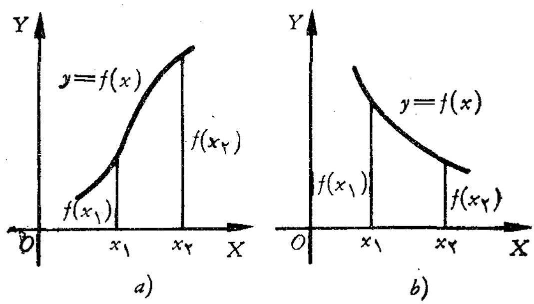
اکستره ممهای تابع و مورد استعمال هندسی مشتق

اکستره ممهای توابع شامل یك آوند

۰۱. توابع صعودی وتوابع نزولی. تـابـع $y=f(x)$ در یك فـاصلهٔ باز (یا بسته) صعودی (یا نزولی) نامیده می‌شود. بشرطی‌که برای هردونقطهٔ x_1 و x_2 ، متعلق به‌این فاصله ، از نامساوی $x_1 < x_2$ نامساوی $f(x_1) < f(x_2)$ (شکل ۲۱ ، a) (یا $f(x_1) > f(x_2)$ - شکل ۲۱ ، b) نتیجه شود. اگر تابع $f(x)$ درفاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته‌وبه‌ازای $a<x<b$ $f'(x)>0$ (یا $f'(x)<0$) باشد،تابع $f(x)$درفاصلهٔبستهٔ $[a,b]$ صعودی (یانزولی)است. درحالتهای ساده، حوزهٔوجود تابع $f(x)$ را می‌توان به‌تعداد محدودی فواصل صعودی



شکل ۲۲



شکل ۲۱

ونزولی (فواصل یکنوا ــ مونوتون ــ) تقسیم کرد. این فواصل محدود به‌نقاط بحرانی x اند (که درآنجا یا $f'(x)=0$ ویا $f'(x)$ وجود ندارد).

مثال ۱ . صعودی ونزولی بودن تابع زیررا معین کنید:

$$y=x^{2}-2x+5$$

حل . مشتق تابع را پیدا می‌کنیم

$$y'=2x-2=2(x-1) \qquad (1)$$

ازآنجا به‌ازای $x=1$ داریم $y'=0$. روی محور اعداد، دوفاصله‌ای راکه در آنها تابع یکنوا است بدست می‌آوریم: $(-\infty, 1)$ و $(1, +\infty)$، ازرابطهٔ (۱) داریم: ۱) اگر داشته باشیم $-\infty<x<1$ ، دراینصورت $y'<0$ می‌شود وبنابراین تابع $f(x)$ درفاصلهٔ $(-\infty, 1)$ نزولی است؛ ۲) اگر $1<x<+\infty$ باشد، $y'>0$ می‌شود و بنابراین تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $(1, +\infty)$ صعودی است (شکل ۲۲).

مثال ۲ . فواصل صعودی ونزولی تابع زیررا پیدا کنید:

$$y=\frac{1}{x+2}$$

حل . $x=-2$ نقطهٔ انفصال تابع است و وقتی $x\neq-2$ باشد داریم : $y'=-\frac{1}{(x+2)^{2}}<0$. بنابراین‌تابع y درفواصل $-\infty<x<-2$ و $-2<x<+\infty$ نزولی است.

مثال ۳ . فواصل صعودی و نزولی را درتابع زیر بدست آورید:

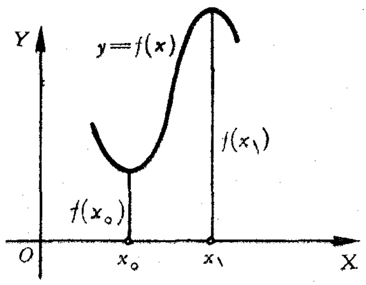
$$y=\frac{1}{5}x^{5}-\frac{1}{3}x^{3}$$

حل . داریم

$$y'=x^{4}-x^{2} \qquad (2)$$

باحل معادلهٔ $x^{4}-x^{2}=0$ بدست می‌آید: $x_1=-1$ ، $x_2=0$ ، $x_3=1$ که درآنها مشتق y' بسمت صفر میل می‌کند. چون y' تنها وقتی تغییر علامت می‌دهد که از نقطه‌هائی عبور کند که درآنجا یابسمت صفرمیل کند ویا پیوستگی خودرا ازدست بدهد (دراینجا نقطه‌های انفصال

برای تابع وجود ندارد)، بنابراین در هر یك از فاصله‌های $(-\infty,-1)$، $(-1,0)$، $(0,1)$ و $(1,+\infty)$ علامت مشتق ثابت می‌ماند، به‌این‌ترتیب تابع مورد بحث در هر یك از این فواصل یکنواست. برای اینکه ببینیم در هریك از این فاصله‌ها، تابع صعودی یا نزولی است، باید علامت مشتق را در هریك از این فاصله‌ها معین کنیم. برای اینکه علامت y' را در فاصلهٔ $(-\infty,-1)$ معین کنیم کافی است علامت y' را در یك نقطه پیدا کنیم، مثلا $x=-2$ می‌گیریم، از (۲) بدست می‌آید $y'=12>0$، بنابراین مقدار مشتق درفاصلهٔ $(-\infty,-1)$ مثبت و تابع در این فاصله صعودی است. بهمین‌ترتیب معلوم می‌شود که در فاصلهٔ $(-1,0)$ داریم $y'<0$ (برای امتحان می‌توان مثلا $x=-\frac{1}{2}$ انتخاب کرد) ودرفاصلهٔ $(0,1)$ داریم $y'<0$ (دراینجا می‌توان $x=\frac{1}{2}$ فرض کرد) ودر فاصلهٔ $(1,+\infty)$ داریم $y'>0$



شکل ۲۳

درنتیجه تابع موردبحث درفاصلهٔ $(-\infty,-1)$ صعودی، درفاصلهٔ $(-1,1)$ نزولی ودرفاصلهٔ $(1,+\infty)$ صعودی است.

۲۰. اکسترممهای تابع. اگر چنان فاصله‌ای دردوطرف ومجاور نقطهٔ x_0 وجودداشته باشد، بنحوی که به‌ازای هرنقطهٔ $x\neq x_0$ ازاین‌فاصلهٔ نامساوی $f(x)>f(x_0)$ برقرارباشد، نقطهٔ x_0 را نقطهٔ می‌نیمم تابع $y=f(x)$ و عدد $f(x_0)$ را می‌نیمم تابع $y=f(x)$ گویند. بهمین‌ترتیب اگر به‌ازای هرنقطهٔ $x\neq x_1$ از فاصلهٔ مجاور نقطهٔ x_1 نامساوی $f(x)<f(x_1)$ برقرار باشد، x_1 را نقطهٔ ماکزیمم تابع $f(x)$، و $f(x_1)$ را ماکزیمم‌تابع گویند (شکل ۲۳). نقطهٔ ماکزیم یا می‌نیمم تابع را نقطهٔ اکسترمم، ومقدار می‌نیمم یا مقدار ماکزیمم را اکسترمم تابع گویند. اگر x_0 نقطهٔ اکسترمم تابع $f(x)$ باشد، یا $f'(x_0)=0$ (نقطهٔساکن) ویا $f'(x_0)$ وجود ندارد (شرط لازم وجوداکسترمم). عکس‌این مطلب صحیح نیست: نقطه‌هائی که‌درآنها $f'(x)=0$ یا $f'(x)$ وجود ندارد(نقطه‌های بحرانی)، الزاماً نقطه‌های اکسترمم تابع $f(x)$ نیستند. شرایط‌کافی وجود یاعدم وجود اکسترمم تابع پیوسته $f(x)$ با قاعده‌های زیر داده می‌شود:

۱. اگر فاصله‌ای‌مانند $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ در مجاورت نقطهٔ‌بحرانی x_0 وجود داشته‌باشد،

بنحوی که بهازای $x_0 - \delta < x < x_0$ داشته باشیم $f'(x) > 0$ وبهازای $x_0 < x < x_0 + \delta$ داشته‌باشیم $f'(x) < 0$، x_0 نقطهٔ ماکزیمم تابع $f(x)$ است؛ واگر بهازای $x_0 - \delta < x < x_0$ داشته باشیم $f'(x) < 0$ و بهازای $x_0 < x < x_0 + \delta$ داشته باشیم $f'(x) > 0$، x_0 نقطهٔ مینیمم تابع $f(x)$ است.

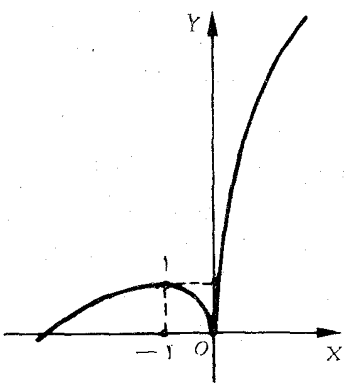
بالاخره، اگرعدد مثبتی مانند δ پیداشود، بنحوی که $f'(x)$ بهازای $0 < |x - x_0| < \delta$ علامت خود را حفظ کند، نقطهٔ x_0، نقطهٔ اکسترمم تابع $f(x)$ نیست.

۲. اگــر $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0) < 0$، x_0 نقطهٔ ماکزیمم تابع $f(x)$ است؛ اگر $f'(x_0) = 0$ و $f''(x_0) > 0$، x_0 نقطـهٔمی‌نیمم تـابع $f(x)$ است ؛ اگــر $f'(x_0) = 0$، $f''(x_0) = 0$ و $f'''(x_0) \neq 0$، نقطهٔ x_0 نقطهٔ اکسترمم تابع $f(x)$ نیست.

بطور کلی: فرض‌کنیم اولین مشتقی که ازمشتقهای متوالی‌تابع $f(x)$ درنقطهٔ x_0مساوی صفر نیست، ازمرتبهٔ k باشد. دراینصورت اگر k عددی زوج باشد، x_0 نقطهٔ اکسترمم تابــع است وبخصوص‌اگر $f^{(k)}(x_0) < 0$ باشد، ماکزیمم واگر $f^{(k)}(x_0) > 0$ باشد، می‌نیمم است. اگرk عددی فرد باشد، x_0 نقطهٔ اکسترمم نیست.

مثال ۴ . اکسترممهای تابع زیررا پیدا کنید:

$$y = ۲x + ۳\sqrt[۳]{x^۲}$$



شکل ۲۴

حل . مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y' = ۲ + \frac{۲}{\sqrt[۳]{x}} = \frac{۲}{\sqrt[۳]{x}}(\sqrt[۳]{x} + ۱) \qquad (۳)$$

برای اینکه y' مساوی صفرشود، باید داشته باشیم:

$$\sqrt[۳]{x} + ۱ = ۰$$

از آنجا نقطهٔ ساکن $x_۱ = -۱$ بدست می‌آید. از رابطهٔ (۳) معلوم می‌شود: اگر $x = -۱ - h$ (h عددی‌مثبت و به‌اندازهٔ کافی کوچک‌است). $y' > ۰$؛ واگر $x = -۱ + h$ باشد،$y' < ۰$ می‌شود. بنابراین $x_۱ = -۱$ نقطهٔ ماکزیمم‌تابعy است وضمناً داریم $y_{max} = ۱$.

مخرج عبارت y' را از (۳) مساوی صفر قرار می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$\sqrt[3]{x} = ۰$$

از آنجا نقطهٔ بحرانی تابع یعنی $x_۲ = ۰$ پیدا می‌شود، کــه در آنجا y' وجود ندارد. به‌ازای $x = -h$ داریم $y' < ۰$ و به‌ازای $x = h$ داریم $y' > ۰$. بنابراین $x_۲ = ۰$ نقطهٔ می‌نیمم تابع y است وضمناً $y_{min} = ۰$ (شکل ۲۴). بررسی تابع را در نقطهٔ $x_۱ = -۱$ به‌کمك مشتق دوم هم می‌توان انجام داد

$$y'' = -\frac{۲}{۳x\sqrt[3]{x}}$$

به‌ازای $x_۱ = -۱$ داریم $y'' < ۰$ وبنابراین $x_۱ = -۱$ نقطهٔ ماکزیمم تابع است.

۳°. مقدار حداقل ومقدار حداکثر. تابع پیوستهٔ $f(x)$، حداقل (یا حداکثر)مقدار خودرادرفاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ یادرنقطه‌های بحرانی‌تابع ویادوانتهای‌فاصلهٔ $[a,b]$ بدست‌می‌آورد.

مثال ۵. حداقل وحداکثر مقدار تابع

$$y = x^۳ - ۳x + ۳$$

را در فاصلهٔ بستهٔ $-۱\frac{۱}{۲} \leqslant x \leqslant ۲\frac{۱}{۲}$ بدست آورید.

حل. چون داریم:

$$y' = ۳x^۲ - ۳$$

نقطه‌های بحرانی تابع y عبارتند از $x_۱ = -۱$ و $x_۲ = ۱$. مقادیر تابع را در این نقطه‌ها ودر دوانتهای فاصلهٔ بسته مقایسه می‌کنیم:

$$y(-۱) = ۵;\quad y(۱) = ۱;\quad y(-۱\frac{۱}{۲}) = ۴\frac{۱}{۸};\quad y(۲\frac{۱}{۲}) = ۱۱\frac{۱}{۸}$$

بنابراین حداقل مقدار تابع $m = ۱$ در نقطهٔ $x = ۱$ (نقطهٔ می‌نیمم) و حداکثر تابع $M = ۱۱\frac{۱}{۸}$ در نقطهٔ $x = ۲\frac{۱}{۲}$ (انتهای راست فاصلهٔ بسته) بدست می‌آید.

فواصل صعودی ونزولی توابع زیررا بدست آورید:

۸۱۱. $y = ۱ - ۴x - x^{۲}$.

۸۱۲. $y = (x - ۲)^{۲}$.

۸۱۳. $y = (x + ۴)^{۳}$.

۸۱۴. $y = x^{۲}(x - ۳)$.

۸۱۵. $y = \frac{x}{x - ۲}$.

۸۱۶. $y = \frac{۱}{(x - ۱)^{۲}}$.

۸۱۷. $y = \frac{x}{x^{۲} - ۶x - ۱۶}$.

۸۱۸. $y = (x - ۳)\sqrt{x}$.

۸۱۹. $y = \frac{x}{۳} - \sqrt[۳]{x}$.

۸۲۰. $y = x + \sin x$.

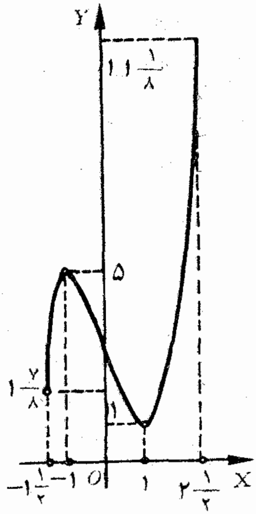
۸۲۱. $y = x\ln x$.

۸۲۲. $y = \arcsin(۱ + x)$.

۸۲۳. $y = ۲e^{x^{۳} - ۴x}$.

۸۲۴. $y = ۲^{\frac{۱}{x - a}}$.

۸۲۵. $y = \frac{e^{x}}{x}$.



شکل ۲۵

اکسترمم توابع زیررا بدست آورید:

۸۲۶. $y = x^{۲} + ۴x + ۶$.

حل . مشتق تابع مفروض را بدست می‌آوریم: $y' = ۲x + ۴$. بامساوی صفر قراردادن مشتق، مقدار بحرانی آونـد $x = -۲$ بدست می‌آید. چون به‌ازای $x < -۲$ داریم $y' < ۰$ و به‌ازای $x > -۲$ داریم $y' > ۰$، $x = -۲$ نقطهٔ می‌نیمم تابع‌مفروض است وضمناً $y_{min} = ۲$. بااستفاده ازعلامت مشتق‌دوم هم‌می‌توان بهمین نتیجه درموردنقطهٔ بحرانی رسید: $y'' = ۲ > ۰$.

۸۲۷. $y = ۲ + x - x^{۲}$.

۸۲۸. $y = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x + ۲$.

۸۲۹. $y = ۲x^{۳} + ۳x^{۲} - ۱۲x + ۵$.

حل . مشتق تابع را محاسبه می‌کنم:

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$$

بامساوی صفر قرار دادن مشتق، نقطه‌های بحرانی $x_1 = -2$ و $x_2 = 1$ بدست می‌آیـد. برای تعیین‌خصوصیت‌اکسترممم‌مشتق‌دوم‌را محاسبه‌می کنیم: $y'' = 6(2x+1)$، چون $y''(-2) < 0$، بنابراین $x_1 = -2$ نقطهٔ ماکزیمم تـابع y است و ضمناً $y_{max} = 25$. بهمین تـرتیب داریم $y''(1) > 0$، بنابراین $x_2 = 1$ نقطهٔ می‌نیمم تابع y است وضمناً $y_{min} = -2$.

۸۳۰. $y = x^2(x-12)^2$.

۸۳۱. $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.

۸۳۲. $y = \dfrac{x^3}{x^2+3}$.

۸۳۳. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$.

۸۳۴. $y = \dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$.

۸۳۵. $y = \dfrac{16}{x(4-x^2)}$.

۸۳۶. $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+8}}$.

۸۳۷. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$.

۸۳۸. $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

۸۳۹. $y = 2\sin 2x + \sin 4x$.

۸۴۰. $y = 2\cos\dfrac{x}{2} + 3\cos\dfrac{x}{3}$.

۸۴۱. $y = x - \ln(1+x)$.

۸۴۲. $y = x\ln x$.

۸۴۳. $y = x\ln^2 x$.

۸۴۴. $y = \operatorname{ch} x$.

۸۴۵. $y = x^2 \cdot e^x$.

۸۴۶. $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

۸۴۷. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

۸۴۸. $y = x - \operatorname{arctg} x$.

مطلوبست حداقل وحداکثر مقدار تابع درفواصل مفروض (اگر فاصله‌ای داده نشده است، باید حداقل وحداکثر مقدار تابع را درتمام حوزهٔ وجود تابع بدست آورد):

۸۴۹. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

۸۵۰. $y = \sqrt{x(10-x)}$.

۸۵۱. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

۸۵۲. $y = \arccos x$.

۸۵۳. $y = x^3$ درفاصلهٔ بستهٔ $[-1, 3]$.

۸۵۴. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$: (a درفاصلهٔ $[-1, 5]$، (b درفاصلهٔ $[-10, 12]$.

۸۵۵. ثابت کنید که به‌ازای مقدار مثبت x، نامساوی زیر برقرار است:

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$$

۸۵۶ . ضریب p و q را درسه جمله‌ای درجه دوم $y=x^2+px+q$ طوری پیدا کنید که این سه‌جمله‌ای به‌ازای $x=1$ می‌نیمی مساوی ۳ داشته‌باشد، نتیجه‌ای که بدست می‌آورید تعبیر هندسی کنید.

۸۵۷ . نامساوی زیررا ثابت کنید:

$$e^x>1+x \qquad (x\neq 0)$$

حل . تابع زیررا درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=e^x-(1+x)$$

این‌تابع تنهایك می‌نیمم $f(0)=0$ دارد، بنابراین به‌ازای $x\neq 0$ داریم: $f(x)>f(0)$، یعنی

$$e^x>1+x \qquad (\text{به‌ازای } x\neq 0)$$

نامساویهای زیررا ثابت کنید:

۸۵۸ . $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$ به‌ازای $x>0$.

۸۵۹ . $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$ به‌ازای $x\neq 0$.

۸۶۰ . $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ به‌ازای $x>0$.

۸۶۱ . عدد مثبت و مفروض a را به دو قسمت چنان تقسیم کنید، که حاصلضرب آنها حداکثر باشد.

۸۶۲ . قطعهٔ مفتول بطول l بنحوی بصورت مستطیل درآورید که سطح آن حداکثر باشد.

۸۶۳ . کدامیك از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ به محیط $2p$ حداکثر سطح را دارد؟

۸۶۴ . می‌خواهیم محوطهٔ مستطیل شکلی را بسازیم که از سه طرف آن بوسیله تورسیمی حصار شده باشد وضلع چهارمش متصل بیك‌دیوارسنگی باشد. اگر l متر توردداشته باشیم، برای داشتن حداکثر محوطه، شکل آنرا چگونه درنظر بگیریم؟

۸۶۵ . می‌خواهیم ازیك مقوائی‌مربع شکل‌بضلع a ، مکعب مستطیل‌روبازی باحداکثر گنجایش بسازیم. برای این‌منظورازگوشه‌های صفحهٔ مقوا مربعهای مساوی بریده‌ایم وکناره‌های

شکل صلیبی بدست آمده را خم کرده‌ایم. ضلع هریك ازمربعهای گوشه‌ها را پیدا کنید.

۸۶۶ . جعبهٔ فلزی بازی باقاعدهٔ مربع شکل‌باید v لیتر گنجایش داشته باشد. ابعادجعبه چقدر باشد تاحداقل مقدار فلز مصرف شده باشد؟

۸۶۷ . کدام استوانه باحجم مفروض حداقل سطح کل را دارد؟

۸۶۸ . درکرهٔ مفروضی، استوانه‌ای باحداکثر حجم محاط کنید.

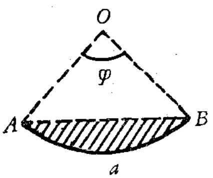
۸۶۹ . درکرهٔ مفروضی، استوانه‌ای باحداکثر سطح جانبی محاط کنید.

۸۷۰ . درکرهٔ مفروض ، مخروطی باحداکثر حجم محاط کنید.

۸۷۱ . درکرهٔ مفروض ، مخروط قائم دواری باسطح جانبی حداکثر محاط کنید.

۸۷۲ . مخروطی باحداقل‌حجم براستوانهٔ مفروضی محیط کنید (صفحه ومرکز دوقاعدهٔ مخروط واستوانه برهم منطبق‌اند).

۸۷۳ . کدامیك‌ازمخروطهائی که بر کرهٔ مفروض محیط‌شده‌است، دارای حداقل حجم است؟

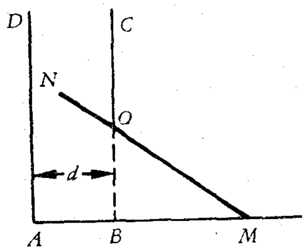


شکل ۲۶

۸۷۴ . یك باریکهٔ آهن سفید به‌عرض a را خم کرده‌ایم و بصورت یك ناودان استوانه‌ای باز درآورده‌ایم (شکل ۲۶).زاویهٔ مرکزی φ چقدر باشد تا گنجایش ناودان حداکثر شود؟

۸۷۵ . ازیك ورقهٔ دایره‌ای شکل قطاعی‌چنان جدا کنید که با پیچیدن آن‌ بصورت یك‌مخروط‌ قیفی با حداکثر گنجایش بدست آید.

۸۷۶ . ظرف بازی ازیك استوانه ودرپائین‌آن یك نیمکره درست شده است؛ ضخامت دیوارهٔ ظرف ثابت‌است. اندازه‌های ظرف چگونه باشد تابرای حجم مفروض حداقل مواداولیه بکار رود ؟



شکل ۲۷

۸۷۷ . مطلوبست حداقل ارتفاع $h=OB$ در ورودی برج قائم $ABCD$ ، برای اینکه بتوان میلهٔ محکم MN بطول l را از آن وارد برج کرد، بشرطی کهM، انتهای میله، روی‌خط افقی AB می‌لغزد وعرض برج مساوی $d<l$ است (شکل ۲۷).

۸۷۸ . در صفحهٔ محورهای مختصات، نقطهٔ $M_0(x_0,y_0)$ واقع درربع اول داده شده است. خطی ازاین نقطه چنان عبور دهید که با نیم محورهای مثبت

مثلثی باحداقل سطح بسازد.

۸۷۹ . دریك بیضی مفروض مستطیلی محاط کنید که اضلاع آن موازی محورهای بیضی ومساحت آن حداکثر باشد.

۸۸۰ . درقطعه‌ای که ازسهمی $y^{۲} = ۲px$ بوسیلهٔ خط $x = ۲a$ جداشده است، مستطیلی باحداکثر حجم محاط کنید.

۸۸۱ . روی منحنی $y = \frac{۱}{۱ + x^{۲}}$ نقطه‌ای بدست آورید که مماس درآن با محور OX حداکثر زاویه را ازلحاظ قدر مطلق بسازد.

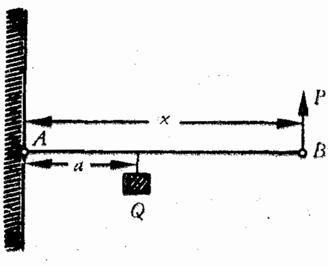
۸۸۲ . قاصدی می‌خواهد خود را از نقطهٔ A، واقع در ساحل رودخانه‌ای، به‌نقطهٔ B، که درطرف دیگر رودخانه واقع است، برساند. می‌دانیم‌که سرعت حرکت در ساحل k برابر سرعت حرکت درآب است؛ قاصد باچه زاویه‌ای رودخانه را قطع کند تا در حداقل زمان به‌نقطهٔ B برسد. عرض رودخانه مساوی h وفاصلهٔ بین نقطه‌های A و B (درطول ساحل) مساوی d است.

۸۸۳ . روی پاره خط راست $AB = a$، که دو منبع روشنائی A (به شدت p) و B (به‌شدت q) را بهم وصل می‌کند، نقطهٔ M را باضعیف‌ترین نور پیدا کنید (نور بامربع فاصله ازمنبع روشنائی نسبت معکوس دارد).

۸۸۴ . لامپی بالای مرکز میز گردی به‌شعاع r آویزان است. لامپ در چه ارتفاعی از ازمیز باشد تااشیائی راکه درکنارهٔ میز قرارگرفته است به‌حداکثر ممکن روشن کند؟ (نور با کسینوس زاویهٔ فرود نسبت مستقیم وبامربع فاصله ازمنبع روشنائی نسبت معکوس دارد).

۸۸۵ . می‌خواهیم از تیر چوبی به قطر d، مکعب مستطیلی جداکنیم. عرض x و ارتفاع y این مکعب مستطیل چقدر باشد تا حداکثرمقاومت را از لحاظ: a) فشار، b) انحنا داشته باشد؟

تبصره . مقاومت تیر از لحاظ فشار باسطح مقطع عرضی، واز لحاظ انحنا با عرض این مقطع درمربع ارتفاع آن نسبت مستقیم دارد.



شکل ۲۸

۸۸۶ . به‌میلهٔ یکجنس AB که‌می‌تواند در نقطهٔ A بچرخد (شکل ۲۸)، وزنهٔ Q کیلوگرمی در a سانتیمتری A آویزان است . نیروی P عمود برمیله در انتهای آزاد B ازمیله، آنرا بحالت تعادل نگاه می‌دارد. میله هر

سانتیمتری q کیلوگرم وزن دارد. مطلوبست طول x میله ، برای اینکه P حداقل باشد وحداقل مقدار P .

۸۸۷*. A ، B و C مرکزهای سه کرهٔ قابل ارتجاع روی یك خط راست قرار دارند. کرهٔ A به‌جرم M باسرعت v به کرهٔ B می‌خورد، کرهٔ B دراثر این ضربه سرعتی پیدا می کند وبه کرهٔ C به‌جرم m برخورد می کند. جرم کرهٔ B چقدر باشد تا سرعت کرهٔ C حداکثر مقدار ممکن بشود؟

۸۸۸. اگر N عنصر الکتریکی یکنواخت داشته باشیم، می‌توانیم باطریقه‌های مختلف ازآنها باطری بسازیم. n عنصررا بطور متوالی وسپس گروههای بدست آمده را (به تعداد $\frac{N}{n}$) بطورموازی قرارمی‌دهیم. جریانی که چنین باطری می‌دهد ازرابطهٔ زیربدست می‌آید:

$$I = \frac{Nn\varepsilon}{NR+n^{2}r}$$

که درآن ε نیروی الکتریکی یك عنصر ، r مقاومت داخلی وR مقاومت خارجی آنست.

معین کنید به‌ازای چه‌مقدار n ، باطری حداکثر جریان را می‌دهد.

۸۸۹. معین کنید y ، قطر سوراخ گرد سد چقدر باشد تا Q ، مصرف ثانیه‌ای آب حداکثر مقدار ممکن باشد؟ بشرطی‌که داشته باشیم: $Q=cy\sqrt{h-y}$ ، که درآن h عمق نقطهٔ پائینی سوراخ است (h وضریب تجربی c مقادیر ثابتی هستند).

۸۹۰. اگر x_1،x_2،...،x_n نتایج اندازه‌گیریهای مقدار x باشند، محتمل‌ترین مقدار آن به‌ازای مقداری ازx بدست می‌آیدکه درمورد آن مجموع مربعهای خطاها

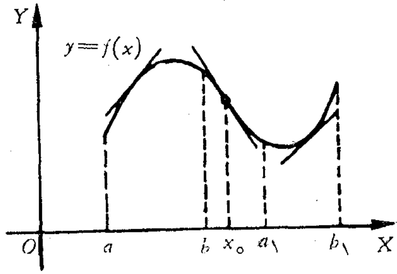
$$\sigma = \sum_{i=1}^{n}(x-x_i)^{2}$$

حداقل مقدار را داشته باشد (اصل حداقل مربعها).

ثابت کنیدکه محتمل‌ترین مقدار کمیتx عبارتست ازواسطهٔ عددی نتیجه‌هائی که دراندازه گیری بدست آمده است .

۴ . جهت تقعر . نقطهٔ عطف

۱°. تقعر منحنی تابع. گویند تقعر منحنی دیفرانسیل‌دار تابع $y=f(x)$ درفاصلهٔ (a,b) بطرف پائین است، وقتی که به‌ازای $a<x<b$، قوس منحنی درهر نقطهٔ فاصلهٔ (a,b) زیر مماس در آن قرارگرفته باشد. همچنین تقعر منحنی درفاصلهٔ (a_1,b_1) بطرف بالا است، وقتی که دراین‌فاصله منحنی بالای مماسهای نقطه‌های مختلف آن قرارگرفته باشد (شکل ۲۹). برای‌اینکه تقعرمنحنی $y=f(x)$ بطرف پائین‌باشد، کافی است که درفاصلهٔمربوطه نامساوی $f''(x)<0$ برقرار باشد و بهمین ترتیب برای اینکه تقعر منحنی بطرف بالا باشد کافی است که $f''(x)>0$ باشد.



شکل ۲۹

بجای اینکه بگوئیم تقعر منحنی بطرف پائین‌است، می‌توان گفت تحدب آن بطرف بالا است. بهمین ترتیب در حالتی که تقعر منحنی بطرف بالا باشد، تحدب آن بطرف پائین است.

۲°. نقطه‌های عطف. نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$ که درآنجا جهت تقعرمنحنی عوض می‌شود، نقطهٔ عطف منحنی نامیده می‌شود (شکل ۲۹).

به‌ازای طولهای نقطه‌های عطف منحنی تابع $y=f(x)$، یا مشتق دوم $f''(x_0)=0$ و یا $f''(x_0)$ وجود ندارد. نقطه‌هائی که درموردآنها $f''(x)=0$ باشد ویا $f''(x)$ وجودنداشته باشد، نقطه‌های بحرانی نوع دوم نامیده می‌شوند. نقطهٔ بحرانی نوع دوم وقتی نقطهٔ عطف است که $f''(x)$ درهریك‌ازفاصله‌های $x_0-\delta<x<x_0$ و $x_0<x<x_0+\delta$ علامت‌ثابتی داشته باشد وضمناً این‌علامتها مخالف هم باشند؛ درحالتی که علامت $f''(x)$ دراین دوفاصله‌یك علامت داشته باشد، نقطهٔ بحرانی نقطهٔ عطف نیست.

مثال ۱ . فواصل تقعر و تحدب، وهمچنین نقاط عطف منحنی گوس را پیداکنید.

$$y=e^{-x^2}$$

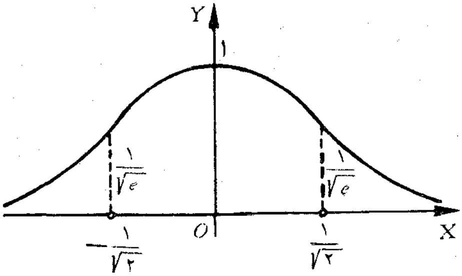
حل . داریم :

$$y' = -۲xe^{-x^۲}$$
$$y'' = (۴x^۲ - ۲)e^{-x^۲}$$

مشتق دوم را مساوی صفر قرار می‌دهیم، نقطه‌های بحرانی نوع دوم بدست می‌آید:

$$x_۱ = -\frac{۱}{\sqrt{۲}},\ x_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

این نقطه‌ها، محور طول را به سه فاصله تقسیم می‌کنند: $\mathrm{I}(-\infty, x_۱)$ ، $\mathrm{II}(x_۱, x_۲)$، $\mathrm{III}(x_۲, +\infty)$. علامت y'' در این فاصله‌ها بترتیب +، −، + است (برای تعیین این علامت، می‌توان در هر یك از این فاصله‌ها نقطه‌ای درنظر گرفت ومقدار مربوطه x را در y'' قرار داد). به‌این‌ترتیب: ۱) تقعر منحنی در فاصله‌های



شکل ۳۰

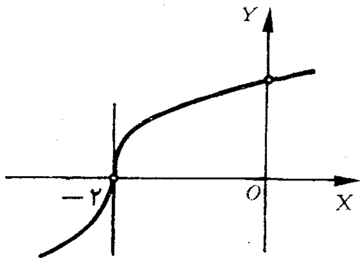
$$\frac{۱}{\sqrt{۲}} < x < +\infty \text{ و } -\infty < x < \frac{-۱}{\sqrt{۲}}$$

بطرف بالااست؛ ۲) تقعرمنحنی درفاصلهٔ $-\frac{۱}{\sqrt{۲}} < x < \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ بطرف پائین‌است. نقطه‌های $\left(\frac{\pm ۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt{e}}\right)$ نقطه‌های عطف منحنی هستند (شکل ۳۰).

متذکر می‌شویم که چون منحنی گوس نسبت به‌محور OY متقارن است، کافی است جستجوی تقعرمنحنی‌را تنهادرفاصلهٔ $۰ < x < +\infty$ انجام داد.

مثال ۲ . مطلوبست تعیین نقطه‌های عطف منحنی تابع

$$y = \sqrt[۳]{x + ۲}$$



شکل ۳۱

حل . داریم:

$$y'' = -\frac{۲}{۹}(x+۲)^{-\frac{۵}{۳}} = \frac{-۲}{۹\sqrt[۳]{(x+۲)^۵}} \quad (۱)$$

واضح است که y'' هرگز مساوی صفر نمی‌شود.

اگرمخرج کسر سمت‌راست تساوی‌را دررابطهٔ(۱) مساوی صفرقراردهیم، معلوم‌می‌شودکه y'' به‌ازای $x = -۲$ وجود ندارد. چون y'' به‌ازای $x > -۲$ مثبت و به‌ازای $x < -۲$ منفی است، بنابراین‌نقطهٔ$(-۲, ۰)$ نقطهٔ عطف منحنی است (شکل ۳۱). مماس در این نقطه موازی محور عرض است، زیرا مشتق اول یعنی y' به‌ازای $x = -۲$ نامحدود است.

مطلوبست فواصل تقعر و نقطه‌های عطف منحنی توابع زیر:

۸۹۱. $y = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x + ۴$ ·

۸۹۲. $y = (x + ۱)^۴$ ·

۸۹۳. $y = \frac{۱}{x + ۳}$ ·

۸۹۴. $y = \frac{x^۳}{x^۲ + ۱۲}$ ·

۸۹۵. $y = \sqrt[۳]{۴x^۳ - ۱۲x}$ ·

۸۹۶. $y = \cos x$ ·

۸۹۷. $y = x - \sin x$ ·

۸۹۸. $y = x^۲ \ln x$ ·

۸۹۹. $y = \operatorname{arctg} x - x$ ·

۹۰۰. $y = (۱ + x^۲)e^x$ ·

۳: مجانبها

۱°. **تعریف** . اگر نقطهٔ (x,y) بطورمتصل برمنحنی $y = f(x)$ چنان واقع باشدکه وقتی یکی ازدومختص نقطه بسمت بی‌نهایت میل‌کند، فاصلهٔ این نقطه ازیك خط راست بسمت صفر میل نماید، این خط را مجانب منحنی گویند.

۲°. **مجانبهای قائم** . اگر عدد a وجود داشته باشد، بنحوی‌که داشته باشیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

خط $x = a$ مجانب منحنی است (مجانب قائم).

۳°. **مجانبهای مایل** . اگر حدود زیر وجود داشته باشد:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_۱,$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - k_۱ x] = b_۱,$$

خط $y=k_1x+b_1$ مجانب $y=f(x)$ است (مجانب مایل راست ، ویا درحالت $k_1=0$ مجانب افقی راست).

اگر حدود زیروجود داشته باشد:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2,$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-k_2x]=b_2،$$

خط $y=k_2x+b_2$ مجانب منحنی است (مجانب مایل چپ، ویا در حالت $k_2=0$ مجانب افقی چپ). منحنی تابع $y=f(x)$ (تابع یك ارزشی فرض شده است) نمی‌تواند بیش از یك مجانب راست (مایل یا افقی) ویك مجانب چپ (مایل یا افقی) داشته باشد.

مثال ۱ . مجانبهای منحنی تابع زیررا پیداکنید:

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

حل . اگر مخرج را مساوی صفر قرار دهیم، دومجانب قائم بدست می‌آید:

$$x=-1,\quad x=1$$

حال به‌جستجوی مجانبهای مایل می‌پردازیم. وقتی $x\to+\infty$ بدست می‌آید:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=1,$$

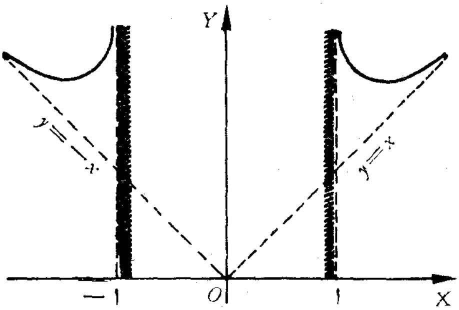
$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=0$$

بنابراین مجانب مایل راست منحنی عبارتست از $y=x$. بهمین ترتیب وقتی $x\to-\infty$ داریم:

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-1,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(y+x)=0$$

بنابراین مجانب چپ منحنی $y=-x$ است (شکل ۳۲). اگر تقارن منحنی را نسبت به‌محور عرض‌درنظر بگیریم، جستجوی مجانبهای منحنی ساده‌تر می‌شود.



شکل ۳۲

مثال ۲ . مجانبهای منحنی زیررا بدست آورید:

$$y=x+\ln x$$

حل . چون داریم:

$$\lim_{x\to+0} y=-\infty$$

خط $x=0$ مجانب قائم (پائین) منحنی است. مجانب مایل راست منحنی راپیدا می‌کنیم (چون $x>0$ است. مجانب چپ ندارد):

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\ln x=\infty$$

بنابراین مجانب مایل وجود ندارد.

اگرمنحنی بصورت معادله‌های پارامتری $x=\varphi(t)$؛ $y=\psi(t)$ داده‌شده‌باشد، قبلاجستجو می‌کنیم که‌آیامقادیری ازپارامتر t وجوددارد که به‌ازای‌آنها یکی ازتوابع $\varphi(t)$ یا $\psi(t)$ بسمت بی‌نهایت میل کند ودیگری محدود باقی بماند. اگر $\varphi(t_0)=\infty$ و $\psi(t_0)=C$ باشد، منحنی دارای مجانب افقی $y=C$ است. اگر $\psi(t_0)=\infty$ و $\varphi(t_0)=C$ باشد، خط $x=C$ مجانب قائم منحنی است.

اگر $\varphi(t_0)=\psi(t_0)=\infty$ باشد وضمناً داشته باشیم:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}=k;\quad \lim_{t\to t_0}[\psi(t)-k\varphi(t)]=b$$

خط $y=kx+b$ مجانب مایل منحنی است.

اگرمنحنی بصورت معادلهٔ قطبی $r=f(\varphi)$ داده شده باشد، می‌توان مجانبهای آنرا با قاعدهٔ فوق پیدا کرد؛ برای این منظور باید معادلهٔ منحنی را بصورت پارامتری درآورد:

$$x = r\cos\varphi = f(\varphi)\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi = f(\varphi)\sin\varphi$$

مجانبهای منحنی‌های زیررا بدست آورید:

۹۰۱. $y=\frac{۱}{(x-۲)^۲}$.

۹۰۲. $y=\frac{x}{x^۲-۴x+۳}$.

۹۰۳. $y=\frac{x^۲}{x^۲-۴}$.

۹۰۴. $y=\frac{x^۳}{x^۲+۹}$.

۹۰۵. $y=\sqrt{x^۲-۱}$.

۹۰۶. $y=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۳}}$.

۹۰۷. $y=\frac{x^۲+۱}{\sqrt{x^۲-۱}}$.

۹۰۸. $y=x-۲+\frac{x^۲}{\sqrt{x^۲+۹}}$.

۹۰۹. $y=e^{-x^۲}+۲$.

۹۱۰. $y=\frac{۱}{۱-e^x}$.

۹۱۱. $y=e^{\frac{۱}{x}}$.

۹۱۲. $y=\frac{\sin x}{x}$.

۹۱۳. $y=\ln(۱+x)$.

۹۱۴. $x=t$ ؛ $y=t+۲\,arctg\,t$.

۹۱۵. مطلوبست مجانبهای پیچ هذلولی $r=\frac{a}{\varphi}$.

۴. رسم منحنی توابع

برای رسم منحنی تابع قبل ازهمه باید حوزهٔ تعریف تابع را پیدا کرد ووضع تابع را در مرز حوزهٔ تعریف آن روشن کرد. همچنین بهتر است به‌بعضی ازخصوصیات تابع (اگروجود داشته باشند) توجه کرد، مثل تقارن، تناوب، ثابت بودن علامت، مونوتونی وغیره.

سپس باید نقاط انفصال، نقاط اکستره مم، نقاط عطف، مجانبها وغیره را پیدا کرد. این عناصر خصوصیات کلی منحنی تابع را روشن می‌کند و از لحاظ ریاضی طرح صحیح آنرا بدست می‌دهند.

مثال ۱. منحنی تابع زیررا رسم کنید:

$$y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^{2}-1}}$$

حل. a) تابع به‌استثنای نقطه‌های $x=\pm 1$ ، همیشه وجود دارد.
تابع فرد است وبنابراین منحنی آن نسبت به‌نقطهٔ $O(0,0)$ متقارن است. این وضع رسم منحنی را ساده می‌کند.

b) نقاط انفصال تابع عبارتند از $x=-1$ و $x=1$ وضمناً داریم:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} y=\pm\infty\,,\quad \lim_{x\to -1\pm 0} y=\pm\infty$$

بنابراین خطهای $x=\pm 1$ مجانبهای قائم منحنی هستند.

c) به‌جستجوی مجانبهای مایل می‌پردازیم. داریم:

$$k_{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=0,$$
$$b_{1}=\lim_{x\to+\infty} y=\infty,$$

بنابراین منحنی،مجانب مایل راست ندارد. ازمتقارن بودن منحنی نتیجه می‌شودکه مجانب مایل چپ هم وجود ندارد.

d) نقاط بحرانی نوع اول ونوع دوم را پیدا می‌کنیم، یعنی نقاطی‌که درآنها مشتق‌اول یا مشتق دوم مساوی صفر می‌شود ویاوجود ندارد. داریم:

$$y'=\frac{x^{2}-3}{3\sqrt[3]{(x^{2}-1)^{4}}} \qquad (1)$$

$$y''=\frac{2x(9-x^{2})}{9\sqrt[3]{(x^{2}-1)^{7}}} \qquad (2)$$

y' و y'' تنها درنقطه‌های $x=\pm 1$ وجود ندارد، یعنی درنقطه‌هائی که خود تابع y هم وجود ندارد، بنابراین نقطه‌های بحرانی تنها درنقطه‌هائی هستندکه y' یا y'' مساوی صفرشوند.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$y'=0 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{3};$$
$$y''=0 \Longrightarrow x=0,\pm 3$$

بنا براین y' درهریك ازفاصله‌های $(-\infty,-\sqrt{۳})$ ، $(-\sqrt{۳},-۱)$ ، $(-۱,۱)$ ، $(۱,\sqrt{۳})$ ، $(\sqrt{۳},+\infty)$ و y'' در هر یك از فاصله‌های $(-\infty,-۳)$ ، $(-۳,-۱)$ ، $(-۱,۰)$ ، $(۰,۱)$ ، $(۱,۳)$ و $(۳,+\infty)$ دارای علامت ثابت‌اند.

برای‌اینکه علامت y' (یا y'') را درهریك ازاین فاصله‌ها معین‌کنیم، کافی است علامت y' (یا y'') را درنقطه‌ای ازهریك ازاین فواصل پیداکنیم.

بهتر است نتایجی راکه بدست‌آورده‌ایم درجدولی منظم‌کنیم (جدول I) ، همچنین لازم است عرض نقطه‌های خاص منحنی را بدست‌آوریم. البته باتوجه به‌فردبودن تابع y' کافی‌است فقط به‌مقادیر $x\geqslant ۰$ بپردازیم، نیمهٔ چپ منحنی براساس تقارن فرد تابع بدست می‌آید.

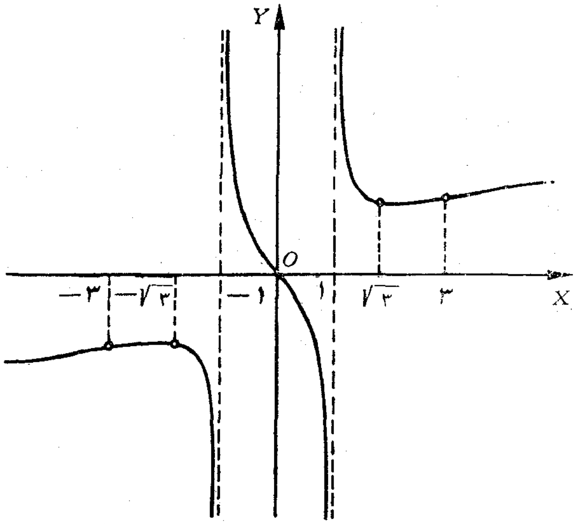
جدول I

x	۰	$(۰,۱)$	۱	$(۱,\sqrt{۳})$	$\sqrt{۳}\approx ۱,۷۳$	$(\sqrt{۳},۳)$	۳	$(۳,+\infty)$
y	۰	$-$	$\pm\infty$	$+$	$\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt[۳]{۲}}\approx ۱,۳۷$	$+$	۱,۵	$+$
y'	$-$	$-$	وجود ندارد	$-$	۰	$+$	$+$	$+$
y''	۰	$-$	وجود ندارد	$+$	$+$	$+$	۰	$-$
نتیجه	نقطهٔ عطف	تابع نزولی وتقعرمنحنی بطرف‌پایین است	نقطهٔ انفصال	تابع نزولی وتقعرمنحنی بطرف بالا است	نقطهٔ می‌نیمم	تابع صعودی وتقعرمنحنی بطرف بالا است	نقطهٔ عطف	تابع صعودی وتقعرمنحنی بطرف پایین است

e) بااستفاده ازنتیجهٔ بررسیها، منحنی تابع را رسم می‌کنیم (شکل ۳۳).

مثال ۲ . مطلوبست رسم منحنی تابع

$$y=\frac{\ln x}{x}$$



شکل ۳۳

حل . a) حوزهٔ تعریف تابع عبارتست از $0 < x < +\infty$.

b) تابع درحوزهٔ وجود خودنقطهٔ انفصال‌ندارد، ولی‌وقتی به‌نقطهٔ مرزی($x = 0$) حوزهٔ وجود تابع نزدیك می‌شویم داریم:

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

بنابراین خط $x = 0$ (محور عرض) مجانب قائم منحنی است.

c) به‌جستجوی مجانب مایل یاافقی راست می‌پردازیم (مجانب چپ وجود ندارد، زیرا $x > 0$ است):

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$
$$b = \lim_{x \to +\infty} y = 0$$

بنابراین مجانب افقی راست منحنی همان محور طول است: $y = 0$.

d) نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$y'=\frac{۱-lnx}{x^۲}\quad,\quad y''=\frac{۲lnx-۳}{x^۳}$$

y' , y'' درتمام نقاط حوزهٔ تعریف تابع وجود دارند و

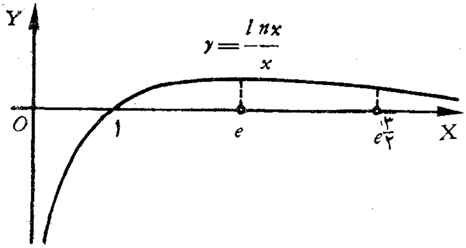
$$y'=۰\implies lnx=۱\implies x=e;$$

$$y''=۰\implies lnx=\frac{۳}{۲}\implies x=e^{\frac{۳}{۲}}.$$

جدول II

x	۰	$(۰,۱)$	۱	$(۱,e)$	$e\approx ۲,۷۲$	$(e,e^{\frac{۳}{۲}})$	$e^{\frac{۳}{۲}}\approx ۴,۴۹$	$(e^{\frac{۳}{۲}},+\infty)$
y	$-\infty$	$-$	۰	$+$	$\frac{۱}{e}\approx ۰,۳۷$	$+$	$\frac{۳}{۲\sqrt{e^۳}}\approx ۰,۳۳$	$+$
y'	وجود ندارد	$+$	$+$	$+$	۰	$-$	$-$	$-$
y''	وجود ندارد	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	۰	$+$
نتیجه	نقطهٔ مرزی حوزهٔ تعریف تابع . مجانب قائم	تابع صعودی و تقعر آن بسمت پائین	نقطهٔ تلاقی منحنی بامحور طول	تابع صعودی و تقعر آن بسمت پائین	نقطهٔ ماکزیمم	تابع نزولی و تقعر آن سمت پائین	نقطهٔ عطف	تابع نزولی و تقعرآن بسمت بالا

جدولی را که شامل نقطه‌های خاص باشد، تشکیل می‌دهیم (جدول II). ضمناً علاوه برنقطه‌های خاصی که پیدا کرده‌ایم، بهتر است نقطه‌های تلاقی‌منحنی را بامحورهای مختصات نیز بدست آوریم. اگر $y=۰$ فرض کنیم $x=۱$ مـی‌شود (نقطهٔ تـلاقی



شکل ۳۴

منحنی با محور طول)؛ منحنی محور عرض را قطع نمی‌کند.

e) بااستفاده از بررسیهائی که انجام دادیم، منحنی تابع را رسم می‌کنیم (شکل ۳۴).

منحنی توابع زیررا رسم‌کنید، برای هریك‌ازآنها حوزهٔ وجودتابع، نقاط انفصال، نقاط اکسترمم، فواصل صعودی ونزولی تابع، نقاط عطف، جهت تقعر وهمچنین مجانبهای منحنی را پیدا کنید.

۹۱۶. $y = x^3 - 3x^2$.

۹۱۷. $y = \dfrac{6x^2 - x^4}{9}$.

۹۱۸. $y = (x-1)^2(x+2)$.

۹۱۹. $y = \dfrac{(x-2)^2(x+4)}{4}$.

۹۲۰. $y = \dfrac{(x^2-5)^3}{125}$.

۹۲۱. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$.

۹۲۲. $y = \dfrac{x^4 - 3}{x}$.

۹۲۳. $y = \dfrac{x^4 + 3}{x}$.

۹۲۴. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$.

۹۲۵. $y = \dfrac{1}{x^2 + 3}$.

۹۲۶. $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$.

۹۲۷. $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$،

۹۲۸. $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$.

۹۲۹. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

۹۳۰. $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$.

۹۳۱. $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$.

۹۳۲. $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$.

۹۳۳. $y = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$.

۹۳۴. $y = x\sqrt{x+3}$.

۹۳۵. $y = \sqrt{x^3 - 3x}$.

۹۳۶. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$.

۹۳۷. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

۹۳۸. $y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

۹۳۹. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

۹۴۰. $y = \sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}$.

۹۴۱. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-4)^2}$.

۹۴۲. $y = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$.

۹۴۳. $y = \dfrac{4}{x\sqrt{x^2 - 4}}$.

۹۴۴. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

۹۴۵. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

۹۴۶. $y=x\cdot e^{-x}$.

۹۴۷. $y=\left(a+\frac{x^{۲}}{a}\right)\cdot e^{\frac{x}{a}}$.

۹۴۸. $y=e^{۸x-x^{۲}-۱۴}$.

۹۴۹. $y=(۲+x^{۲})\cdot e^{-x^{۲}}$.

۹۵۰. $y=۲|x|-x^{۲}$.

۹۵۱. $y=\frac{lnx}{\sqrt{x}}$.

۹۵۲. $y=\frac{x}{۲}ln\frac{x}{a}$.

۹۵۳. $y=\frac{x}{lnx}$.

۹۵۴. $y=(x+۱)ln^{۲}(x+۱)$.

۹۵۵. $y=ln(x^{۲}-۱)+\frac{۱}{x^{۲}-۱}$.

۹۵۶. $y=ln\frac{\sqrt{x^{۲}+۱}-۱}{x}$.

۹۵۷. $y=ln(۱+e^{-x})$.

۹۵۸. $y=ln\left(e+\frac{۱}{x}\right)$.

۹۵۹. $y=sinx+cosx$.

۹۶۰. $y=sinx+\frac{sin۲x}{۲}$.

۹۶۱. $y=cosx-cos^{۲}x$.

۹۶۲. $y=sin^{۳}x+cos^{۳}x$.

۹۶۳. $y=\frac{۱}{sinx+cosx}$.

۹۶۴. $y=\frac{sinx}{sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)}$.

۹۶۵. $y=sinx\cdot sin۲x$.

۹۶۶. $y=cosx\cdot cos۲x$.

۹۶۷. $y=x+sinx$.

۹۶۸. $y=arcsin(۱-\sqrt[۳]{x^{۲}})$.

۹۶۹. $y=\frac{arcsinx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$.

۹۷۰. $y=۲x-tgx$.

۹۷۱. $y=x\cdot arctgx$.

۹۷۲. $y=x\cdot arctg\frac{۱}{x}$ بازای $x\neq ۰$ و $y=۰$ بازای $x=۰$.

۹۷۳. $y=x+۲arccotgx$.

۹۷۴. $y=\frac{x}{۲}+arccotg\,x$.

۹۷۵. $y=lnshx$.

۹۷۶. $y=Arch\left(x+\frac{۱}{x}\right)$.

۹۷۷. $y = e^{\sin x}$·
۹۷۸. $y = e^{\arcsin\sqrt{x}}$·
۹۷۹. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$·
۹۸۰. $y = \ln\sin x$·
۹۸۱. $y = \ln tg\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{x}{۲}\right)$·
۹۸۲. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$·
۹۸۳. $y = \cos x - \ln\cos x$·
۹۸۴. $y = \operatorname{arctg}(\ln x)$·
۹۸۵. $y = \arcsin\ln(x^{۲} + ۱)$·
۹۸۶. $y = x^{x}$·
۹۸۷. $y = x^{\frac{۱}{x}}$·

همچنین منحنی توابع مسائل شمارهٔ ۸۲۶ تا ۸۴۸ را نیز رسم کنید.

منحنی توابع زیر را که بصورت پارامتری داده شده است، رسم کنید:

۹۸۸. $x = t^{۲} - ۲t$ ، $y = t^{۲} + ۲t$ ·

۹۸۹. $x = a\cos^{۳} t$ ، $y = a\sin t$ $(a > ۰)$·

۹۹۰. $x = t \cdot e^{t}$ ، $y = t \cdot e^{-t}$ ·

۹۹۱. $x = t + e^{-t}$ ، $y = ۲t + e^{-۲t}$·

۹۹۲. $x = a\,(sh t - t)$ ، $y = a\,(ch t - ۱)$ $(a > ۰)$·

۵. دیفرانسیل قوس ـ انحنا

۱°. دیفرانسیل قوس. دیفرانسیل قوس s ازمنحنی مسطح، که به‌وسیلهٔ معادله‌ای با مختصات دکارتی x و y داده شده است، با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$ds = \sqrt{(dx)^{۲} + (dy)^{۲}}\,;$$

ضمناً وقتی معادلهٔ منحنی به‌صورتهای مختلف باشد:

a) $y = f(x)$ ، داریم: $ds = \sqrt{۱ + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}}\,dx$ به ازای $dx > ۰$؛

b) $x = f_{۱}(y)$، داریم: $ds = \sqrt{۱ + \left(\frac{dx}{dy}\right)^{۲}}\,dy$ به‌ازای $dy > ۰$؛

c) $x = \varphi(t)$، $y = \psi(t)$ داریم: $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^{۲} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^{۲}}\,dt$ به‌ازای $dt > ۰$؛

d) $F(x,y)=0$، داریم: $|dy|\dfrac{\sqrt{F'^{2}_{x}+F'^{2}_{y}}}{|F'_x|}=|dx|\dfrac{\sqrt{F'^{2}_{x}+F'^{2}_{y}}}{|F'_y|}=ds$.

اگر زاویه‌ای را که جهت مثبت مماس (یعنی درجهتی که قوس s منحنی صعودی است) باجهت مثبت محور oX تشکیل می‌دهد، به α نشان دهیم، بدست می‌آید:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \sin\alpha=\frac{dy}{ds}$$

در مختصات قطبی

$$ds=\sqrt{(dr)^2+(rd\varphi)^2}=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi$$

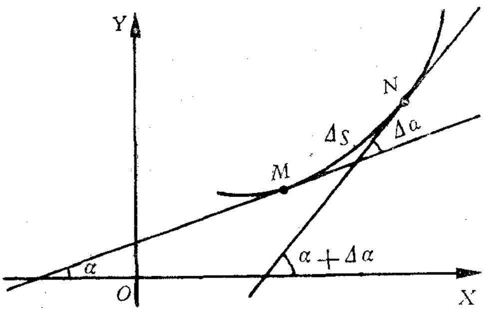
اگر زاویهٔ بین شعاع قطبی نقطهٔ منحنی را بامماس دراین نقطه مساوی β بگیریم، داریم:

$$\cos\beta=\frac{dr}{ds}\,,\quad \sin\beta=r\frac{d\varphi}{ds}$$

۲°. انحنای منحنی. انحنای K ازمنحنی درنقطهٔ M عبارتست ازحد نسبت زاویهٔبین جهتهای مثبت مماس درنقطه‌های M و N منحنی به‌طول قوس $\widehat{MN}=\Delta s$، وقتی که $N\to M$ (شکل ۳۵) یعنی

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{d\alpha}{ds},$$

که درآن α عبارتست از زاویهٔ بین جهت مثبت مماس‌درنقطهٔ M ومحور طول.



شکل ۳۵

شعاع انحنای R عبارتست از عکس قدرمطلق انحنا یعنی

$$R=\frac{1}{|K|}$$

منحنی‌های باانحنای ثابت عبارتند از

دایره $\left(K=\dfrac{۱}{a}\right)$، که در آن a شعاع دایره است) وخط راست ($K=۰$).

رابطهٔ محاسبهٔ انحنا دردستگاه مختصات قائم (باتقریب علامت) چنین است:

۱) اگرمنحنی بامعادله‌ای به‌صورت تابع صریح $y=f(x)$ داده شده باشد

$$K=\frac{y''}{(۱+y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}};$$

۲) اگرمعادلهٔ منحنی به‌صورت ضمنی $F(x,y)=۰$ داده شده باشد

$$K=\frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & ۰ \end{vmatrix}}{\left(F'^{۲}_x+F'^{۲}_y\right)^{\frac{۳}{۲}}}$$

۳) اگرمعادلهٔ منحنی به‌صورت پارامتری $x=\varphi(t)$، $y=\psi(t)$ داده شده باشد

$$K=\frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{\left(x'^{۲}+y'^{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}}$$

که در آن $x'=\dfrac{dx}{dt}$، $y'=\dfrac{dy}{dt}$، $x''=\dfrac{d^{۲}x}{dt^{۲}}$، $y''=\dfrac{d^{۲}y}{dt^{۲}}$.

۴) وقتی که معادلهٔ منحنی به‌صورت قطبی $r=f(\varphi)$ داده شده باشد

$$K=\frac{r^{۲}+۲r'^{۲}-rr''}{(r^{۲}+r'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

که در آن $r'=\dfrac{dr}{d\varphi}$ و $r''=\dfrac{d^{۲}r}{d\varphi^{۲}}$.

۳°. دایرهٔ انحنا. دایرهٔ انحنا (یا دایرهٔ بوسان) منحنی در نقطهٔ M ازآن عبارتست ازوضع حدی دایره‌ای که از نقطهٔ M و دو نقطهٔ دیگر P و Q از منحنی عبور کند، وقتی که

$P \to M$ و $Q \to M$.

شعاع دایرهٔ انحنا مساوی شعاع انحنا است ومرکز دایرهٔ انحنا (مرکز انحنا) بر قائمی قرار داردکه ازنقطهٔ M برمنحنی رسم شود، ضمناً مرکز انحنا در داخل تقعر منحنی واقع است. مختصات X و Y مرکز انحنای منحنی ازروابط زیربدست می آید:

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad Y = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

مکان‌هندسی مرکزهای انحنای یك منحنی‌را گسترده (یا دولوپه) منحنی گویند.

اگردرروابط تعیین مختصات مرکزانحنا، X و Y را مختصات متغیر گسترده بگیریم،این روابط معادله‌های پارامتری گسترده را برحسب پارامترx یا y (یا t ، وقتی که خودمنحنی‌بوسیلهٔ معادلات پارامتری داده شده باشد) می‌دهند.

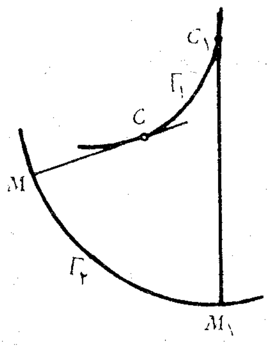
مثال ۱ . معادلهٔ گستردهٔ سهمی $y = x^2$ را پیداکنید.

حل . داریم :

$$X = -4x^3 , Y = \frac{1+6x^2}{2}$$

پارامتر x را حذف می کنیم، معادلهٔ گسترده بصورت زیر درمی آید:

$$Y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{X}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$



شکل ۳۶

گسترنده (یادولوپانت) یك منحنی عبارتست ازمنحنی که‌گستردهٔ آن منحنی مفروض باشد.

قائم MC ازگستردهٔ Γ_2 مماس بر گستردهٔ Γ_1 است؛ طول قوس $\widehat{CC_1}$ ازگسترده برابر است با نمو متناظرشعاع‌انحنا$\widehat{CC_1} = |M_1C_1 - MC|$ (شکل۳۶). هر گسترده‌دارای‌بی‌نهایت‌گسترنده‌است.

۴°. رأس منحنی . رأس منحنی به‌نقطه‌ای ازآن گوئیم که درآنجا مقدارانحنای منحنی ماکزیمم یامی‌نیمم باشد. برای تعیین راسهای منحنی عبارت انحنا، یعنیK را می‌نویسیم ونقاط اکسترمم آنرا بدست می‌آوریم. بجای انحنای K می‌توان شعاع انحنا $R = \frac{1}{|K|}$ را انتخاب

وسپس اکسترممهای آنرا پیداکرد.

مثال ۲ . مطلوبست رأسهــای منحنی زنجیری $y=ach\frac{x}{a}$ $(a>0)$.

حل. چون داریم $y'=sh\frac{x}{a}$ و $y''=\frac{1}{a}ch\frac{x}{a}$ بنابراین بدست‌می‌آید: $K=\frac{1}{ach^{2}\frac{x}{a}}$

بنابراین $R=ach^{2}\frac{x}{a}$ می‌شود. داریم: $\frac{dR}{dx}=sh\frac{2x}{a}$. مشتق R یعنی $\frac{dR}{dx}$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم، بدست می‌آید: $sh\frac{2x}{a}=0$ ، ازآنجا تنها یك نقطهٔ بحرانی $x=0$ پیدا می‌شود.

مشتق دوم یعنی $\frac{d^{2}R}{dx^{2}}$ را محاسبه می‌کنیم ومقدار $x=0$ را درآن قرار می‌دهیم بدست می‌آید:

$$\left.\frac{d^{2}R}{dx^{2}}\right|_{x=0}=\left.\frac{2}{a}ch\frac{2x}{a}\right|_{x=0}=\frac{2}{a}>0$$

بنابراین $x=0$ نقطهٔ می‌نیمم شعاع انحنا (یاماکزیمم انحنا) منحنی زنجیری‌است. به‌این‌ترتیب رأس منحنی زنجیری $y=ach\frac{x}{a}$ عبارتست ازنقطهٔ $A(0,a)$.

مطلوبست دیفرانسیل قوس وهمچنین کسینوس وسینوس زاویهٔ بین جهت مثبت محور طول و مماس برهریك ازمنحنی‌های زیر:

۹۹۳ . $x^{2}+y^{2}=a^{2}$ (دایره).

۹۹۴ . $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$ (بیضی).

۹۹۵ . $y^{2}=2px$ (سهمی).

۹۹۶ . $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (آسترونید).

۹۹۷ . $y=ach\frac{x}{a}$ (منحنی زنجیری).

۹۹۸ . $x=a(t-sint)$ ؛ $y=a(1-cost)$ (سیکلوئید).

۹۹۹ . $x=acos^{3}t$ ؛ $y=asin^{3}t$ (آسترونید).

مطلوبست دیفرانسیل قوس و همچنین کسینوس یا سینوس زاویهٔ بین شعاع قطبی و مماس بر هریك ازمنحنی‌های زیر:

۱۰۰۰. $r = a\varphi$ (پیچ ارشمیدس).

۱۰۰۱. $r = \frac{a}{\varphi}$ (پیچ هذلولی‌وار).

۱۰۰۲. $r = a\sec^{۲}\frac{\varphi}{۲}$ (سهمی).

۱۰۰۳. $r = a\cos^{۲}\frac{\varphi}{۲}$ (کاردیوئید).

۱۰۰۴. $r = a^{\varphi}$ (پیچ لگاریتمی).

۱۰۰۵. $r^{۲} = a^{۲}\cos ۲\varphi$ (لمنیسکات).

انحنای منحنی‌های زیررا درنقاط مربوط پیداکنید:

۱۰۰۶. $y = x^{۴} - ۴x^{۳} - ۱۸x^{۲}$ درمبداء مختصات.

۱۰۰۷. $x^{۲} + xy + y^{۲} = ۳$ درنقطهٔ $(۱,۱)$.

۱۰۰۸. $\frac{y^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$ دررأسهای $A(a,\circ)$ و $B(\circ,b)$.

۱۰۰۹. $x = t^{۲}$ ، $y = t^{۳}$ درنقطهٔ $(۱,۱)$.

۱۰۱۰. $r^{۲} = ۲a^{۲}\cos ۲\varphi$ دررأسهای بازوایای قطبی $\varphi = \circ$ و $\varphi = \pi$.

۱۰۱۱. انحنای سهمی $y^{۲} = ۸x$ درچه نقطه‌ای مساوی ۰٫۱۲۸ است؟

۱۰۱۲. رأس منحنی $y = e^{x}$ را پیداکنید.

شعاع انحنا را درنقطهٔ دلخواه هریك ازمنحنی‌های زیرپیدا کنید:

۱۰۱۳. $y = x^{۳}$ (سهمی مکعبی).

۱۰۱۴. $\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$ (بیضی).

۱۰۱۵. $x = \frac{y^{۲}}{۴} - \frac{\ln y}{۲}$.

۱۰۱۶. $x = a\cos^{۳}t$ ؛ $y = a\sin^{۳}t$ (آستروئید).

۱۰۱۷. $x = a(\cos t + t\sin t)$ ؛ $y = a(\sin t - t\cos t)$.

۱۰۱۸. $r = ae^{k\varphi}$ (پیچ لگاریتمی).

۱۰۱۹ . $r = a(1 + \cos\varphi)$ (کاردیوئید).

۱۰۲۰ . حداقل مقدار شعاع انحنای سهمی $y^2 = 2px$ را بدست آورید.

۱۰۲۱ . ثابت کنید شعاع انحنای منحنی زنجیری $y = a\,ch\dfrac{x}{a}$ مساوی طول پاره خط قائم است.

مختصات مرکز انحنای هریك ازمنحنی‌های زیررا درنقطهٔ مربوطه پیداکنید:

۱۰۲۲ . $xy = 1$ درنقطهٔ $(1,1)$.

۱۰۲۳ . $ay^2 = x^3$ درنقطهٔ (a,a).

معادلهٔ دایرهٔ انحنا را درمورد هریك ازمنحنی‌های زیر درنقطهٔ مربوطه بنویسید:

۱۰۲۴ . $y = x^2 - 6x + 10$ درنقطهٔ $(3,1)$.

۱۰۲۵ . $y = e^x$ درنقطهٔ $(0,1)$.

منحنی‌های زیررا پیداکنید.

۱۰۲۶ . $y^2 = 2px$ (سهمی).

۱۰۲۷ . $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (بیضی).

۱۰۲۸ . ثابت کنید گستردهٔ سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t)\ ;\ y = a(1 - \cos t)$$

عبارتست ازسیکلوئید جابجا شده.

۱۰۲۹ . ثابت کنید گستردهٔ پیچ لگاریتمی

$$r = ae^{k\varphi}$$

بازهم یك پیچ لگاریتمی به‌همان قطب است.

۱۰۳۰ . ثابت کنید که منحنی (دایرهٔ بازشده):

$$x = a(\cos t + t\sin t)\ ;\ y = a(\sin t - t\cos t)$$

عبارتست ازگستردهٔ دایرهٔ $x = a\cos t$ ؛ $y = a\sin t$.

فصل چهارم

انتگرال نامعین

۱. انتگرال گیری مستقیم

۱°. قواعد اساسی انتگرال گیری. ۱) $F'(x) = f(x)$ ، دراینصورت

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

که در آن C مقدار ثابت دلخواهی است.

۲) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$. A مقداری است ثابت.

۳) $\int [f_1(x)\pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

۴) اگر داشته باشیم: $\int f(x)dx = F(x)+C$ و $u = \varphi(x)$، داریم:

$$\int f(u)du = F(u)+C$$

ودرحالت خاص

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a\neq 0)$$

۲°. جدول انتگرالهای ساده.

$$\text{I.} \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1).$$

II. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$.

III. $\int \frac{dx}{x^۲ + a^۲} = \frac{۱}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{۱}{a} arccotg \frac{x}{a} + C_۱ \quad (a \neq ۰)$.

IV. $\int \frac{dx}{x^۲ - a^۲} = \frac{۱}{۲a} ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq ۰)$.

$\int \frac{dx}{a^۲ - x^۲} = \frac{۱}{۲a} ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C (a \neq ۰)$.

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^۲ + a}} = ln \left| x + \sqrt{x^۲ + a} \right| + C \quad (a \neq ۰)$.

VI. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^۲ - x^۲}} = arc sin \frac{x}{a} + C = -arc cos \frac{x}{a} + C_۱ \quad (a > ۰)$.

VII. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C \quad (a > ۰); \int e^x dx = e^x + C$

VIII. $\int sin x dx = -cos x + C$

IX. $\int cos x dx = sin x + C$

X. $\int \frac{dx}{cos^۲ x} = tg x + C$

XI. $\int \frac{dx}{sin^۲ x} = -cotg x + C$

XII. $\int \frac{dx}{sin x} = ln \left| tg \frac{x}{۲} \right| + C = ln |cosec x - cotg x| + C$

XIII. $\int \frac{dx}{cos x} = ln \left| tg \left(\frac{x}{۲} + \frac{\pi}{۴} \right) \right| + C = ln |tg x + sec x| + C$

XIV. $\int sh x dx = ch x + C$

XV. $\int ch x dx = sh x + C$.

XVI. $\int \frac{dx}{ch^۲ x} = th x + C$

XVII. $\int \frac{dx}{sh^۲ x} = -cth x + C$

مثال ۱. $\int(ax^2+bx+c)dx=\int ax^2dx+\int bxdx+\int cdx=$

$$=a\int x^2dx+b\int xdx+c\int dx=a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx+C.$$

با استفاده ازقواعد اساسی ۱) ، ۲) ، ۳) وروابط انتگرال‌گیری ، انتگرالهای زیررا پیدا کنید:

۱۰۳۱ $\int 5a^2x^6dx$.

۱۰۳۲ $\int(6x^2+8x+3)dx$.

۱۰۳۳ $\int x(x+a)(x+b)dx$.

۱۰۳۴ $\int(a+bx^3)^2dx$.

۱۰۳۵ $\int\sqrt{2px}\,dx$.

۱۰۳۶ $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$.

۱۰۳۷ $\int(nx)^{\frac{1-n}{n}}dx$.

۱۰۳۸ $\int\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx$.

۱۰۳۹ $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$.

۱۰۴۰ $\int\frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

۱۰۴۱ $\int\frac{(x^m-x^n)^2}{\sqrt{2}}dx$.

۱۰۴۲ $\int\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}dx$.

۱۰۴۳ $\int\frac{dx}{x^2+7}$.

۱۰۴۴ $\int\frac{dx}{x^2-10}$.

۱۰۴۵ $\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

۱۰۴۶ $\int\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$.

۱۰۴۷ $\int\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$.

۱۰۴۸* a) $\int tg^2x\,dx$.

b) $\int th^2x\,dx$.

۱۰۴۹ a) $\int cotg^2x\,dx$.

b) $\int cth^2x\,dx$.

۱۰۵۰ $\int 3^xe^xdx$.

۳°. **تبدیل زیر علامت دیفرانسیل .** قاعدهٔ ۴) جدول انتگرالهای ساده را توسعه می‌دهد . بخصوص طبق این قاعده روشن می‌شود که جدول انتگرالها بدون توجه به‌اینکه متغیر مستقل است یا تابع دیفرانسیل‌دار ، صحیح است.

مثال۲.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}=\frac{1}{5}\int(5x-2)^{-\frac{1}{2}}d(5x-2)=$$
$$=\frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{5}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{5}\cdot\frac{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{5}\sqrt{5x-2}+C.$$

که در آن $u=5x-2$ قراردادیم وازقاعدهٔ ۴) وشمارهٔ I جدول انتگرال استفاده کردیم.

مثال۳.
$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{\sqrt{1+(x^2)^2}}=\frac{1}{2}ln(x^2+\sqrt{1+x^4})+C.$$

مثال۴.
$$\int x^2e^{x^3}dx=\frac{1}{3}\int e^{x^3}d(x^3)=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$$

درمثالهای ۲، ۳ و۴ قبل ازاینکه ازیك رابطهٔ مربوط بهجدول انتگرالها استفاده کنیم، انتگرال مربوطه را بهصورت زیرنوشتهایم:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f(u)du,\quad [u=\varphi(x)]$$

این روش را تبدیل زیر علامت انتگرال گویند.

با استفاده ازقواعد اساسی وروابط انتگرالگیری، انتگرالهای زیررا پیدا کنید:

۱۰۵۱.** $\int\frac{adx}{a-x}$.

۱۰۵۲.** $\int\frac{2x+3}{2x+1}dx$.

۱۰۵۳. $\int\frac{1-3x}{3+2x}dx$.

۱۰۵۴. $\int\frac{xdx}{a+bx}$.

۱۰۵۵. $\int\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}dx$.

۱۰۵۶. $\int\frac{x^2+1}{x-1}dx$.

۱۰۵۷. $\int\frac{x^2+5x+7}{x+3}dx$.

۱۰۵۸. $\int\frac{x^4+x^2+1}{x-1}dx$.

۱۰۵۹. $\int\left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2dx$.

۱۰۶۰.* $\int\frac{x}{(x+1)^2}dx$.

۱۰۶۱. $\int\frac{bdy}{\sqrt{1-y}}$.

۱۰۶۲. $\int\sqrt{a-bx}\,dx$.

۱۰۶۳.* $\int \frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}dx$.

۱۰۶۴. $\int \frac{\sqrt{x}+ln x}{x}dx$.

۱۰۶۵. $\int \frac{dx}{۳x^۲+۵}$.

۱۰۶۶. $\int \frac{dx}{۷x^۲-۸}$.

۱۰۶۷. $\int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^۲}\ (۰<b<a)$.

۱۰۶۸. $\int \frac{x^۲}{x^۲+۲}dx$.

۱۰۶۹. $\int \frac{x^۲}{a^۲-x^۲}dx$.

۱۰۷۰. $\int \frac{x^۲-۵x+۶}{x^۲+۴}dx$.

۱۰۷۱. $\int \frac{dx}{\sqrt{۷+۸x^۲}}$.

۱۰۷۲. $\int \frac{dx}{\sqrt{۷-۵x^۲}}$.

۱۰۷۳. $\int \frac{۲x-۵}{۳x^۲-۲}dx$.

۱۰۷۴. $\int \frac{۳-۲x}{۵x^۲+۷}dx$.

۱۰۷۵. $\int \frac{۳x+۱}{\sqrt{۵x^۲+۱}}dx$.

۱۰۷۶. $\int \frac{x+۳}{\sqrt{x^۲-۴}}dx$.

۱۰۷۷. $\int \frac{xdx}{x^۲-۵}$.

۱۰۷۸. $\int \frac{xdx}{۲x^۲+۳}$.

۱۰۷۹. $\int \frac{ax+b}{a^۲x^۲+b^۲}dx$.

۱۰۸۰. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^۴-x^۴}}$.

۱۰۸۱. $\int \frac{x^۲}{۱+x^۶}dx$.

۱۰۸۲. $\int \frac{x^۲dx}{\sqrt{x^۶-۱}}$.

۱۰۸۳. $\int \sqrt{\frac{arc\sin x}{۱-x^۲}}dx$.

۱۰۸۴. $\int \frac{arctg\frac{x}{۲}}{۴+x^۲}dx$.

۱۰۸۵. $\int \frac{x-\sqrt{arctg\,۲x}}{۱+۴x^۲}dx$.

۱۰۸۶. $\int \frac{dx}{\sqrt{(۱+x^۲)ln(x+\sqrt{۱+x^۲})}}$.

۱۰۸۷. $\int ae^{-mx}dx$.

۱۰۸۸. $\int ۴^{۲-۳x}dx$.

۱۰۸۹. $\int (e^t-e^{-t})dt$.

۱۰۹۰. $\int (e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x^۲}{a}})dx$.

۱۰۹۱. $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x}dx$.

۱۰۹۲. $\int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}dx$.

۱۰۹۳. $\int e^{-(x^2+1)}x\,dx$.

۱۰۹۴. $\int x\cdot 7^{x^2}dx$.

۱۰۹۵. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

۱۰۹۶. $\int 5^{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

۱۰۹۷. $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$.

۱۰۹۸. $\int e^x\sqrt{a-be^x}\,dx$.

۱۰۹۹. $\int (e^{\frac{x}{a}}+1)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{x}{a}}dx$.

۱۱۰۰*. $\int \frac{dx}{2^x+3}$.

۱۱۰۱. $\int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}}$.

۱۱۰۲. $\int \frac{e^{-bx}}{1-e^{-2bx}}dx$.

۱۱۰۳. $\int \frac{e^t dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}$.

۱۱۰۴. $\int \sin(a+bx)dx$.

۱۱۰۵. $\int \cos\frac{x}{\sqrt{2}}dx$.

۱۱۰۶. $\int (\cos ax+\sin ax)^2dx$.

۱۱۰۷. $\int \cos\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

۱۱۰۸. $\int \sin(lg x)\cdot\frac{dx}{x}$.

۱۱۰۹*. $\int \sin^2 x\,dx$.

۱۱۱۰*. $\int \cos^2 x\,dx$.

۱۱۱۱. $\int \sec^2(ax+b)dx$.

۱۱۱۲. $\int cotg^2 ax\,dx$.

۱۱۱۳. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{a}}$.

۱۱۱۴. $\int \frac{dx}{3\cos(5x-\frac{\pi}{4})}$.

۱۱۱۵. $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)}$.

۱۱۱۶. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$.

۱۱۱۷. $\int x\sin(1-x^2)dx$.

۱۱۱۸. $\int \left(\frac{1}{\sin x\sqrt{2}}-1\right)^2dx$.

۱۱۱۹. $\int tg x\,dx$.

۱۱۲۰. $\int cotg x\,dx$.

۱۱۲۱. $\int \cot g\frac{x}{a-b}dx$.

۱۱۲۲. $\int \frac{dx}{tg\frac{x}{5}}$.

۱۱۲۳. $\int tg\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

۱۱۲۴. $\int x\cot g(x^2+1)dx$.

۱۱۲۵. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$.

۱۱۲۶. $\int \cos\frac{x}{a}\sin\frac{x}{a}dx$.

۱۱۲۷. $\int \sin^3 6x\cos 6x\,dx$.

۱۱۲۸. $\int \frac{\cos ax}{\sin^5 ax}dx$.

۱۱۲۹. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx$.

۱۱۳۰. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}dx$.

۱۱۳۱. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2x\,dx$.

۱۱۳۲. $\int tg^2\frac{x}{3}\sec^2\frac{x}{3}dx$.

۱۱۳۳. $\int \frac{\sqrt{tg x}}{\cos^2 x}dx$.

۱۱۳۴. $\int \frac{\cot g^{\frac{2}{3}} x}{\sin^2 x}dx$.

۱۱۳۵. $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$.

۱۱۳۶. $\int \frac{(\cos ax+\sin ax)^2}{\sin ax}dx$.

۱۱۳۷. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 3x}{b-a\cot g 3x}dx$.

۱۱۳۸. $\int (2\,sh 5x-3\,ch 5x)dx$.

۱۱۳۹. $\int sh^2 x\,dx$.

۱۱۴۰. $\int \frac{dx}{sh x}$.

۱۱۴۱. $\int \frac{dx}{ch x}$.

۱۱۴۲. $\int \frac{dx}{ch x\, sh x}$.

۱۱۴۳. $\int th x\,dx$.

۱۱۴۴. $\int cth x\,dx$.

انتگرالهای نامعین زیر را پیدا کنید:

۱۱۴۵. $\int x\sqrt[5]{5-x^2}dx$.

۱۱۴۶. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}dx$.

۱۱۴۷. $\int \frac{x^3}{x^8+5}dx$.

۱۱۴۸. $\int xe^{-x^2}dx$.

۱۱۴۹. $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}dx$.

۱۱۵۰. $\int \frac{x^3-1}{x+1}dx$.

۱۱۵۱. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$.

۱۱۵۲. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$.

۱۱۵۳. $\int \frac{tg 3x - cotg 3x}{\sin 3x}dx$.

۱۱۵۴. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

۱۱۵۵. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{tg^2 x-2}}dx$.

۱۱۵۶. $\int \left(2+\frac{x}{2x^2+1}\right)\frac{dx}{2x^2+1}$.

۱۱۵۷. $\int a^{\sin x}\cos x dx$.

۱۱۵۸. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}dx$.

۱۱۵۹. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$.

۱۱۶۰. $\int tg^2 ax dx$.

۱۱۶۱. $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$.

۱۱۶۲. $\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{4-tg^2 x}}$.

۱۱۶۳. $\int \frac{dx}{\cos\frac{x}{a}}$.

۱۱۶۴. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$.

۱۱۶۵. $\int tg\sqrt{x-1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

۱۱۶۶. $\int \frac{xdx}{\sin(x^2)}$.

۱۱۶۷. $\int \frac{e^{arctg x}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}dx$.

۱۱۶۸. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

۱۱۶۹. $\int \frac{\left(1-\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}dx$.

۱۱۷۰. $\int \frac{x^2}{x^2-2}dx$.

۱۱۷۱. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$.

۱۱۷۲. $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$.

۱۱۷۳. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx$.

۱۱۷۴. $\int \frac{dx}{e^x+1}$

۱۱۷۵. $\int \frac{dx}{(a+b)+(a-b)x^2}$

۱۱۷۶. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}}dx$

۱۱۷۷. $\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax}$

۱۱۷۸. $\int \sin(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0)dt$

۱۱۷۹. $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$

۱۱۸۰. $\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$

۱۱۸۱. $\int e^{-tg x}\sec^2 x dx$

۱۱۸۲. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}dx$

۱۱۸۳. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

۱۱۸۴. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

۱۱۸۵. $\int \frac{\sec x \, tg x}{\sqrt{\sec^2 x+1}}dx$

۱۱۸۶. $\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x}dx$

۱۱۸۷. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

۱۱۸۸. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}}dx$

۱۱۸۹. $\int x^2 ch(x^3+3)dx$

۱۱۹۰. $\int \frac{3^{th x}}{ch^2 x}dx$

۲. روش تبدیل

۱°. تغییر متغیر در انتگرالهای نامعین . با فرض

$$x=\varphi(t)$$

که درآن t عبارتست از متغیر جدید وφ تابع پیوسته و قابل دیفرانسیل‌گیری ، خواهیم داشت:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

تابع φ چنان انتخاب شده است که سمت راست رابطهٔ (۱) برای انتگرال گرفتن ساده‌تر باشد .

مثال ۱. مطلوبست

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx$$

حل. اگر $t=\sqrt{x-1}$ فرض کنیم ، $x=t^2+1$ و $dx=2tdt$ می‌شود و بنابراین

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx=\int(t^2+1)t.2tdt=2\int(t^4+t^2)dt=$$

$$=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+c=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+c$$

گاهی از تبدیل بصورت زیر استفاده می‌شود:

$$u=\varphi(x)$$

فرض می‌کنیم که بتوانیم عبارت $f(x)dx$ زیر علامت انتگرال را به این صورت درآوریم:

$$f(x)dx=g(u)du\ ,\qquad (u=\varphi(x))$$

اگر $\int g(u)du$ معلوم باشد ، یعنی

$$\int g(u)du=F(u)+c$$

دراینصورت خواهیم داشت:

$$\int f(x)dx=F[\varphi(x)]+c$$

از این روش درقسمت ۱ ، ۳° هم گفتگو کرده بودیم.

مثال ۲. $u=5x-2$ ؛ $du=5dx$ ؛ $dx=\frac{1}{5}du$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x-2}}=\frac{1}{5}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{5}\sqrt{5x-2}+c$$

مثال ۳. $u=x^2$ ؛ $du=2xdx$ ؛ $xdx=\frac{du}{2}$.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{2}ln(u+\sqrt{1+u^2})+c=$$

$$=\frac{1}{2}ln(x^2+\sqrt{1+x^4})+c$$

مثال ۴. $u=x^3$ ؛ $du=3x^2dx$ ؛ $x^2dx=\frac{du}{3}$.

$$\int x^2 \cdot e^{x^3}dx=\frac{1}{3}\int e^u du=\frac{1}{3}e^u+c=\frac{1}{3}e^{x^3}+c$$

۲ . ۰ تبدیل مثلثاتی

۱) اگر انتگرال شامل $\sqrt{a^2-x^2}$ باشد، معمولا $x=a\sin t$ فرض می‌شود؛ دراینصورت

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$$

۲) اگر انتگرال شامل $\sqrt{x^2-a^2}$ باشد ، $x=a\sec t$ فرض می‌شود ؛ دراینصورت

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\,tg\,t$$

۳) اگر انتگرال شامل $\sqrt{x^2+a^2}$ باشد ، $x=a\,tg\,t$ فرض می‌شود ، در اینصورت

$$\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$$

متذکر می‌شویم که تبدیل مثلثاتی همیشه کار را ساده نمی‌کند. بعضی موارد بجای تبدیل مثلثاتی بهتراست از **تبدیل هذلولی** استفاده کنیم (مثال ۱۲۰۹ را ببینید).

مثال ۵. مطلوبست $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$.

حل. اگر $x=tg\,t$ فرض کنیم $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$ می‌شود واز آنجا

$$\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx=\int\frac{\sqrt{tg^2t+1}}{tg^2t}\cdot\frac{dt}{\cos^2t}=\int\frac{\sec t\cos^2t}{\sin^2t}\cdot\frac{dt}{\cos^2t}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sin^2t\cos t}=\int\frac{\sin^2t+\cos^2t}{\sin^2t\cos t}dt=\int\frac{dt}{\cos t}+\int\frac{\cos t}{\sin^2t}dt=$$

$$=ln|tg\,t+\sec t|-\frac{1}{\sin t}+c=ln|tg\,t+\sqrt{1+tg^2t}|-\frac{\sqrt{1+tg^2t}}{tg\,t}+c=$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+c$$

۱۱۹۱. انتگرالهای زیر را با تبدیل مربوطه محاسبه کنید:

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}\ ,\ x=\frac{1}{t};$

d) $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+1}\ ,\ x=-\ln t\ ;$

c) $\displaystyle\int x(5x^2-3)^7dx\ ,\ 5x^2-3=t:$

d) $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}\ ,\ t=\sqrt{x+1}\ ;$

e) $\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2x}}\ ,\ t=\sin x$

با تغییر متغیر مناسب ، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱۱۹۲. $\displaystyle\int x(2x+5)^{10}dx$.

۱۱۹۳. $\displaystyle\int\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$.

۱۱۹۴. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$.

۱۱۹۵. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

۱۱۹۶. $\displaystyle\int\frac{\ln 2x}{\ln 4x}\cdot\frac{dx}{x}$.

۱۱۹۷. $\displaystyle\int\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

۱۱۹۸. $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

۱۱۹۹. $\displaystyle\int\frac{\sin^3x}{\sqrt{\cos x}}dx$.

۱۲۰۰* $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

با تغییر متغیر مثلثاتی، انتگرالهای زیر را بدست آورید:

۱۲۰۱. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

۱۲۰۲. $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

۱۲۰۳. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$.

۱۲۰۴* $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

۱۲۰۵. $\cdot\int\frac{\sqrt{x^{۲}+۱}}{x}dx$ ۱۲۰۶*. $\cdot\int\frac{dx}{x^{۲}\sqrt{۴-x^{۲}}}$

۱۲۰۷. $\cdot\int\sqrt{۱-x^{۲}}\,dx$

۱۲۰۸. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(۱-x)}}$$

به کمك تبدیل $x=\sin^{۲}t$.

۱۲۰۹. مطلوبست محاسبهٔ

$$\int\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}dx$$

با استفاده ازتبدیل هذلولی $x=asht$.

حل. داریم:

$$\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}=\sqrt{a^{۲}+a^{۲}sh^{۲}t}=acht \quad ، \quad dx=achtdt$$

واز آنجا

$$\int\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}dx=\int acht\cdot achtdt=a^{۲}\int ch^{۲}tdt=a^{۲}\int\frac{ch۲t+۱}{۲}dt=$$

$$=\frac{a^{۲}}{۲}(\frac{۱}{۲}sh۲t+t)+c=\frac{a^{۲}}{۲}(shtcht+t)+c$$

وچون داریم : $sht=\frac{x}{a}$ ، $cht=\frac{\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}}{a}$ و

$$e^{t}=cht+sht=\frac{x+\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}}{a}$$

بنابراین بدست می‌آید:

$$\int\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}\,dx=\frac{x}{۲}\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}+\frac{a^{۲}}{۲}ln(x+\sqrt{a^{۲}+x^{۲}})+c_{۱}$$

که در آن $c_{۱}=c-\frac{a^{۲}}{۲}$ مقدار ثابت دلخواه جدید است.

۱۲۱۰. با فرض $x=acht$ مطلوبست

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

۳. انتگرال گیری جزء به جزء

رابطهٔ انتگرال‌گیری جزء به جزء. اگر $u=\varphi(x)$ و $v=\psi(x)$ توابعی دارای دیفرانسیل باشند، داریم :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

مثال ۱. پیدا کنید:

$$\int x\ln x dx$$

$u=\ln x$ ؛ $dv = xdx$ فرض می کنیم ، داریم : $du=\frac{dx}{x}$ ؛ $v=\frac{x^2}{2}$. ازآنجا:

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}+c$$

گاهی برای اینکه بتوانیم یك انتگرال را محاسبه کنیم ، لازم است که چندبار از قاعدهٔ جزء به جزء استفاده نمائیم . گاهی هم به‌کمك انتگرال‌گیری جزء به جزء به معادله‌ای می‌رسیم که می‌توان ازآن انتگرال مورد نظر را بدست آورد.

مثال ۲. مطلوبست

$$\int e^x \cos x dx$$

حل. داریم:

$$\int e^x\cos x dx = \int e^x d(\sin x) = e^x\sin x - \int e^x \sin x dx =$$
$$= e^x\sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x dx$$

وبنابراین

$$\int e^x\cos x dx = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x dx,$$

واز آنجا

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء انتگرالهای زیر را پیدا کنید:

۱۲۱۱. $\int \ln x dx$. ۱۲۱۲. $\int \operatorname{arctg} x dx$.

۱۲۱۳. $\int \arcsin x dx$. ۱۲۱۴. $\int x \sin x dx$.

۱۲۱۵. $\int x \cos 2x dx$. ۱۲۱۶. $\int \frac{x}{e^x} dx$.

۱۲۱۷. $\int x \cdot 2^{-x} dx$. ۱۲۱۸**. $\int x^2 e^{3x} dx$.

۱۲۱۹*. $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} dx$. ۱۲۲۰*. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}} dx$.

۱۲۲۱. $\int x \sin x \cos x dx$. ۱۲۲۲*. $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx$.

۱۲۲۳. $\int x^2 \ln x dx$. ۱۲۲۴. $\int \ln^2 x dx$.

۱۲۲۵. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$. ۱۲۲۶. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

۱۲۲۷. $\int x \operatorname{arctg} x dx$. ۱۲۲۸. $\int x \arcsin x dx$.

۱۲۲۹. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$. ۱۲۳۰. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

۱۲۳۱. $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$. ۱۲۳۲. $\int e^x \sin x dx$.

۱۲۳۳. $\int 3^x \cos x dx$. ۱۲۳۴. $\int e^{ax} \sin bx dx$.

۱۲۳۵. $\int \sin(\ln x) dx$.

با روشهای مختلف، انتگرالهای زیر را بدست آورید:

۱۲۳۶. $\int x^3 e^{-x^2} dx$. ۱۲۳۷. $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

۱۲۳۸. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx$. ۱۲۳۹. $\int x \ln \frac{1 - x}{1 + x} dx$.

۱۲۴۰. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$. ۱۲۴۱. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$.

۱۲۴۲. $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x dx$. ۱۲۴۳. $\int x (\operatorname{arctg} x)^2 dx$.

۱۲۴۴. $\int(\arcsin x)^2dx$.

۱۲۴۵. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$.

۱۲۴۶. $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

۱۲۴۷. $\int x\,tg^2 2x\,dx$.

۱۲۴۸. $\int\frac{\sin^2 x}{e^x}dx$.

۱۱۴۹. $\int\cos^2(\ln x)dx$.

۱۲۵۰**. $\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$.

۱۲۵۱*. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

۱۲۵۲*. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

۱۲۵۳*. $\int\sqrt{A+x^2}dx$.

۱۲۵۴*. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

۴. انتگرالهای ساده، شامل سه جمله‌ای درجه دوم

۱°. انتگرالهای بصورت $\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$. روش اصلی محاسبهٔ عبارتست از تبدیل سه جمله‌ای درجه دوم بصورت:

$$ax^2+bx+c=a(x+k)^2+l \qquad (1)$$

که در آن k و l مقادیری ثابت هستند. ساده‌ترین راه برای تبدیل (۱) اینست که از سه جمله‌ای درجه دوم مجذور کاملی را جدا کنیم همچنین می‌توان از تبدیل زیر استفاده کرد:

$$2ax+b=t$$

درحالتی‌که $m=0$ باشد، با تبدیل سه جمله‌ای درجه دوم بصورت (۱) به حالت III یا IV از جدول انتگرالها می‌رسیم.

مثال ۱.

$$\int\frac{dx}{2x^2-5x+7}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2-2\cdot\frac{5}{4}x+\frac{25}{16}\right)+\left(\frac{7}{2}-\frac{25}{16}\right)}=$$

$$=\frac{۱}{۲}\int\frac{d(x-\frac{۵}{۴})}{(x-\frac{۵}{۴})^۲+\frac{۳۱}{۱۶}}=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳۱}}{۴}}arctg\,\frac{x-\frac{۵}{۴}}{\frac{\sqrt{۳۱}}{۴}}+c=$$

$$=\frac{۳}{\sqrt{۳۱}}arctg\,\frac{۴x-۵}{\sqrt{۳۱}}+c.$$

در حالتی که $m\neq ۰$ باشد، از صورت کسر مضرب $۲ax+b$ (مشتق مخـرج) را جدا می کنیم .

$$\int\frac{mx+n}{ax^۲+bx+c}dx=\int\frac{\frac{m}{۲a}(۲ax+b)+(n-\frac{ml}{۲a})}{ax^۲+bx+c}dx=$$

$$=\frac{m}{۲a}ln|ax^۲+bx+c|+(n-\frac{ml}{۲a})\int\frac{dx}{ax^۲+bx+c}$$

و به‌این ترتیب به محاسبهٔ انتگرالی شبیه حالت قبل می‌رسیم.

مثال ۲.

$$\int\frac{x-۱}{x^۲-x-۱}dx=\int\frac{\frac{۱}{۲}(۲x-۱)-\frac{۱}{۲}}{x^۲-x-۱}dx=\frac{۱}{۲}ln|x^۲-x-۱|-$$

$$-\frac{۱}{۲}\int\frac{d(x-\frac{۱}{۲})}{(x-\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۵}{۴}}=\frac{۱}{۲}ln|x^۲-x-۱|-\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}ln\left|\frac{۲x-۱-\sqrt{۵}}{۲x-۱+\sqrt{۵}}\right|+c$$

۲°. انتگرالهای بصورت $\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^۲+bx+c}}dx$

روش‌محاسبه شبیه حالت قبل است. وقتی $a>۰$ باشد به حالت V و وقتی $a<۰$ باشد به حالت VI از جدول انتگرالهای ساده می‌رسیم.

مثال ۳.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{۲+۳x-۲x^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}-\left(x-\frac{۳}{۴}\right)^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}ascsin\,\frac{۴x-۳}{۵}+c$$

مثال ۴.

$$\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx+2\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=$$

$$=\sqrt{x^2+2x+2}+2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+c$$

۳°. انتگرالهای بصورت $\int\frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. به کمک تبدیل

$$\frac{1}{mx+n}=t$$

این انتگرال به انتگرال حالت **۲°** تبدیل می‌شود.

مثال ۵. مطلوبست

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

حل. فرض می‌کنیم : $x+1=\frac{1}{t}$، از آنجا بدست می‌آید : $dx=-\frac{dt}{t^2}$ و داریم:

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+\frac{1}{2}}\right|+c=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right|+c=$$

۴°. انتگرالهای بصورت $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$. به‌کمک جدا کردن مجذور کامل زیر رادیکال ، این انتگرال بیکی از دو انتگرال اساسی زیر تبدیل می‌شود (تمرینهای ۱۲۵۲ و ۱۲۵۳ را ببینید:

۱) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c,$

$$۲)\ \int \sqrt{x^۲+A}\,dx=\frac{x}{۲}\sqrt{x^۲+A}+\frac{A}{۲}\ln\left|x+\sqrt{x^۲+A}\right|+c.$$

مثال ۶.

$$\int \sqrt{۱-۲x-x^۲}\,dx=\int \sqrt{۲-(۱+x)^۲}\,d(۱+x)=$$
$$=\frac{۱+x}{۲}\sqrt{۱-۲x-x^۲}+\arcsin\frac{۱+x}{\sqrt{۲}}+c.$$

انتگرالهای زیر را پیداکنید:

.۱۲۵۵ $\int\frac{dx}{x^۲+۲x+۵}.$

.۱۲۵۶ $\int\frac{dx}{x^۲+۲}.$

.۱۲۵۷ $\int\frac{dx}{۳x^۲-x+۱}.$

.۱۲۵۸ $\int\frac{x\,dx}{x^۲-۷x+۱۳}.$

.۱۲۵۹ $\int\frac{۳x-۲}{x^۲-۴x+۵}dx.$

.۱۲۶۰ $\int\frac{(x-۱)^۲}{x^۲+۳x+۴}dx.$

.۱۲۶۱ $\int\frac{x^۲dx}{x^۲-۶x+۱۰}.$

.۱۲۶۲ $\int\frac{dx}{\sqrt{۲+۳x-۲x^۲}}.$

.۱۲۶۳ $\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^۲}}.$

.۱۲۶۴ $\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲+px+q}}.$

.۱۲۶۵ $\int\frac{۳x-۶}{\sqrt{x^۲-۴x+۵}}dx.$

.۱۲۶۶ $\int\frac{۲x-۸}{\sqrt{۱-x-x^۲}}dx.$

.۱۲۶۷ $\int\frac{x}{\sqrt{۵x^۲-۲x+۱}}dx.$

.۱۲۶۸ $\int\frac{dx}{x\sqrt{۱-x^۲}}.$

.۱۲۶۹ $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^۲+x-۱}}.$

.۱۲۷۰ $\int\frac{dx}{(x-۱)\sqrt{x^۲-۲}}.$

.۱۲۷۱ $\int\frac{dx}{(x+۱)\sqrt{x^۲+۲x}}.$

.۱۲۷۲ $\int\sqrt{x^۲+۲x+۵}\,dx.$

.۱۲۷۳ $\int\sqrt{x-x^۲}\,dx.$

.۱۲۷۴ $\int\sqrt{۲-x-x^۲}\,dx.$

.۱۲۷۵ $\int\frac{x\,dx}{x^۴-۴x^۲+۳}.$

.۱۲۷۶ $\int\frac{\cos x}{\sin^۲x-۶\sin x+۱۲}dx.$

۱۲۷۷. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$. ۱۲۷۸. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}}$

۱۲۷۹. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1-4\ln x - \ln^2 x}}$.

۵. انتگرال توابع گویا

۱°. روش ضرایب نامعین. انتگرال توابع گویا ، بعد از جدا کردن قسمت صحیح منجر به انتگرال کسر گویای

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (1)$$

می‌شود ، که درآن $P(x)$ و $Q(x)$ کثیرالجمله‌های صحیح هستند و ضمناً درجهٔ صورت، یعنی $P(x)$ کمتراز درجهٔ مخرج یعنی $Q(x)$ است . اگرداشته باشیم:

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} \cdots (x-l)^{\lambda}$$

که درآن a، . . . ،b ریشه‌های حقیقی و متمایز کثیرالجملهٔ $Q(x)$ و α، . . . ،λ عددهائی طبیعی (تعداد تکرار ریشه‌ها) هستند ، می‌توان کسر (۱) را به‌کسرهای ساده‌تر تجزیه کرد:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \cdots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda} \qquad (2)$$

برای محاسبهٔ ضرایب نامعین A_1 ، A_2 ،...، L_λ طرفین اتحاد(۲)را بصورت‌صحیح درمی‌آوریم وسپس ضرایب توانهای مساوی متغیر x را درطرفین اتحاد مساوی هم قرارمی‌دهیم (روش اول) . همچنین می‌توان این ضرایب را با انتخاب عددهای دلخواه برای x در تساوی (۲) بدست آورد (روش دوم)

مثال ۱. مطلوبست

$$\int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2} = I$$

حل. داریم :

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}$$

واز آنجا بدست می‌آید :

$$x\equiv A(x+1)^2+B_1(x-1)(x+1)+B_2(x-1) \qquad (3)$$

a) **روش اول محاسبهٔ ضرایب.** اتحاد (۳) را به‌اینصورت می‌نویسیم:

$$x\equiv(A+B_1)x^2+(2A+B_2)x+(A-B_1-B_2)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مساوی x ، بدست می‌آید:

$$A+B_1=0 \ ; \ 2A+B_2=1 \ ; \ A-B_1-B_2=0$$

واز آنجا خواهیم داشت:

$$A=\frac{1}{4} \ ; \ \ B_2=-\frac{1}{4} \ ; \ \ B_2=\frac{1}{2}$$

b) **روش دوم محاسبهٔ ضرایب.** اگر در اتحاد (۳) فرض‌کنیم $x=1$ بدست‌می‌آید:

$$1=4A\Longrightarrow A=\frac{1}{4}$$

وبا فرض $x=-1$ خواهیم داشت:

$$-1=-2B_2\Longrightarrow B_2=\frac{1}{2}$$

بالاخره $x=0$ می‌گیریم:

$$0=A-B_1-B_2\Longrightarrow B_1=A-B_2=-\frac{1}{4}$$

به این ترتیب داریم :

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}ln|x-1|-\frac{1}{4}ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}+c=$$

$$=-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$$

مثال ۲. مطلوبست

$$\int \frac{dx}{x^{3}-2x^{2}+x}=I$$

حل. داریم :

$$\frac{1}{x^{3}-2x^{2}+x}=\frac{1}{x(x-1)^{2}}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^{2}};$$

$$1=A(x-1)^{2}+Bx(x-1)+Cx \qquad (4)$$

برای حل این مثال ازهردو روش برای پیداکردن ضرایب استفاده می‌کنیم. با بکاربردن روش دوم و با فرض $x=0$ در اتحاد (۴) بدست می‌آید: $A=1$. سپس $x=1$ می‌گیریم، $C=1$ بدست می‌آید. بالاخره از روش اول استفاده می‌کنیم : در اتحاد (۴) ضرایب x^{2} را مساوی قرار می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$A+B=0 \implies B=-1$$

و بنابراین؛

$$A=1\ ,\ B=-1\ ,\ C=1$$

به‌این‌ترتیب خواهیم داشت:

$$I=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^{2}}=ln|x|-ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$$

اگر کثیرالجملهٔ $Q(x)$ دارای‌ریشه‌های مختلط $a\pm ib$ از مرتبهٔ k باشد، در تجزیهٔ (۲) کسرهای سادهٔ به‌صورت زیر هم اضافه می‌شود:

$$\frac{M_{1}x+N_{1}}{x^{2}+px+q}+\dots+\frac{M_{k}x+N_{k}}{(x^{2}+px+q)^{k}} \qquad (5)$$

که در آن داریم:

$$x^{2}+px+q=[x-(a+ib)][x-(a-ib)]$$

و M_{1}، N_{1}، ...، M_{k}، N_{k} ضرایب نامعینی هستندکه با روشهای مذکور در فوق معین می‌شوند. به‌ازای $k=1$ انتگرال کسر (۵) مستقیماً بدست می‌آید؛ وقتی $k>1$ باشد، روش کاهشی را بکار می‌بریم، ضمناًمرتباً سه‌جمله‌ای درجه دوم $x^{2}+px+q$ را به‌صورت $\left(x+\frac{p}{2}\right)^{2}+\left(q-\frac{p^{2}}{4}\right)$ می‌نویسیم و تبدیل $x+\frac{p}{2}=z$ را درنظر می‌گیریم.

مثال ۳. مطلوبست

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = I$$

حل. چون داریم:

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1$$

با فرض $z=2+x$ بدست می‌آید:

$$I=\int \frac{z-1}{(x^2+1)^2}\,dz=\int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^2}-\int \frac{(1+z^2)-z^2}{(z^2+1)^2}dz=$$

$$=-\frac{1}{2(z^2+1)}-\int \frac{dz}{z^2+1}+\int z\,d\left[-\frac{1}{2(z^2+1)}\right]=-\frac{1}{2(z^2+1)}-$$

$$-arctg z-\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}arctg z=-\frac{z+1}{2(z^2+1)}-\frac{1}{2}arctg z+c=$$

$$=-\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)}-\frac{1}{2}arctg(x+2)+c$$

۲°. روش اوستروگرادسکی *Ostogradsky*. اگر $Q(x)$ ریشه‌های مکرر داشته باشد، دراینصورت

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{X(x)}{Q_1(x)}+\int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}dx \qquad (6)$$

که در آن $Q_1(x)$ عبارتست از بزرگترین مقسوم علیه مشترك کثیرالجملهٔ $Q(x)$ و مشتق آن $Q'(x)$ و

$$Q_2(x)=Q(x):Q_1(x);$$

$X(x)$ و $Y(x)$ کثیرالجمله‌هائی با ضرایب نامعین که درجهٔ آنها بترتیب یك واحد کمتراز درجهٔ $Q_1(x)$ و $Q_2(x)$ است.

ضرایب نامعین کثیرالجمله‌های $X(x)$ و $Y(x)$ به کمك دیفرانسیل گرفتن از اتحاد (۶) معین می‌شود.

مثال ۴. مطلوبست $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$

حل. داریم:

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}dx$$

اگر از طرفین این اتحاد دیفرانسیل بگیریم، بدست می‌آید:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2} + $$

$$+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1};$$

و یا

$$1 = (2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)+(Dx^2+Ex+F)(x^3-1)$$

که اگر ضرایب توانهای مساوی x را برابر بگیریم، خواهیم داشت:

$$D=0\ ;\ E-A=0\ ;\ F-2B=0\ ;\ D+3C=0\ ;\ E+2A=0\ ;\ B+F=-1\ ;$$

و از آنجا

$$A=0\ ;\ B=-\frac{1}{3}\ ;\ C=0\ ;\ D=0\ ;\ E=0\ ;\ F=-\frac{2}{3}$$

و بنابراین بدست می‌آید:

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{x^3-1}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^3-1} \qquad (7)$$

برای محاسبهٔ انتگرال سمت راست در تساوی (۷)، کسر $\frac{1}{x^3-1}$ را به کسرهای ساده‌تر تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{L}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1};$$

$$1 = L(x^2+x+1)+Mx(x-1)+N(x-1) \qquad (8)$$

با فرض $x=1$ بدست می‌آید: $L=\frac{1}{3}$

با مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مساوی x در طرفین رابطهٔ (۸) بدست می‌آید:

$$L+M=0\ ;\ L-N=1 \Longrightarrow M=-\frac{1}{3},\ N=-\frac{2}{3}$$

و به‌این ترتیب

$$\int \frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}ln|x-1|-\frac{1}{6}ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

و در نتیجه

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}=-\frac{x}{3(x^3-1)}+\frac{1}{9}ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\frac{2}{3\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

انتگرالهای زیر را پیداکنید:

۱۲۸۰. $\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

۱۲۸۱. $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$.

۱۲۸۲. $\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

۱۲۸۳. $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$.

۱۲۸۴. $\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$.

۱۲۸۵. $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$.

۱۲۸۶. $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$.

۱۲۸۷. $\int\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$.

۱۲۸۸. $\int\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$.

۱۲۸۹. $\int\frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx$.

۱۲۹۰. $\int\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}dx$.

۱۲۹۱. $\int\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$.

۱۲۹۲. $\int\frac{x^4}{x^4-1}dx$.

۱۲۹۳. $\int\frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$.

۱۲۹۴. $\int\frac{dx}{x^3+1}$.

۱۲۹۵. $\int\frac{dx}{x^4+1}$.

۱۲۹۶. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

۱۲۹۷. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

۱۲۹۸. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx$.

۱۲۹۹. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$.

۱۳۰۰. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$.

با استفاده از روش استروگرادسکی، انتگرالهای زیر را پیداکنید:

۱۳۰۱. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$.

۱۳۰۲. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$.

۱۳۰۳. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

۱۳۰۴. $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}dx$.

با استفاده از روشهای مختلف، انتگرالهای زیر را پیداکنید:

۱۳۰۵. $\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}dx$.

۱۳۰۶. $\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}dx$.

۱۳۰۷. $\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}dx$.

۱۳۰۸. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$.

۱۳۰۹. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$.

۱۳۱۰*. $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$.

۱۳۱۱. $\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$.

۱۳۱۲. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$.

۱۳۱۳. $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^{10}}$.

۱۳۱۴. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$.

۶. انتگرال بعضی توابع گنگ

۱. انتگرالهای بصورت

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\dots\right]dx \qquad (1)$$

که در آن R تابعی گویا و p_1 ، q_1 ، p_2 ، q_2، ... عددهائی صحیح‌اند.
انتگرالهای بصورت (۱) به‌کمك تبدیل

$$\frac{ax+b}{cx+d}=z^n$$

بدست می‌آیند، که در آن n عبارتست از کوچکترین مضرب مشترك q_1 ، q_2 ، ...

مثال ۱. مطلوبست $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

حل. با تبدیل $2x-1=z^4$ بدست می‌آید:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}=\int\frac{2z^3dz}{z^2-z}=2\int\frac{z^2dz}{z-1}=$$

$$=2\int\left(z+1+\frac{1}{z-1}\right)dz=(z+1)^2+2\ln|z-1|+c=$$

$$=\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+c$$

انتگرالهای زیر را پیداکنید:

۱۳۱۵. $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$.

۱۳۱۶. $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{ax+b}}$.

۱۳۱۷. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

۱۳۱۸. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

۱۳۱۹. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$.

۱۳۲۰. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$.

۱۳۲۱. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$.

۱۳۲۲. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

۱۳۲۳. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

۱۳۲۴. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$.

۱۳۲۵. $\frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx$.

۲°. انتگرالهای به‌صورت

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \qquad (2)$$

که درآن $P_n(x)$ کثیرالجمله‌ای از درجهٔ n است. فرض می‌کنیم:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+$$
$$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (3)$$

که درآن $Q_{n-1}(x)$ کثیرالجمله‌ای از درجهٔ $n-1$ با ضرایب نامعین و λ عدد است.
ضرایب نامعین کثیرالجملهٔ $Q_{n-1}(x)$ وعدد λ به‌کمك دیفرانسیل‌گرفتن ازطریق اتحاد (۳) پیدا می‌شود.

مثال ۲.
$$\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx = \int\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx =$$
$$=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

از آنجا

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+4}+$$
$$+\frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}$$

با ضرب طرفین رابطه در $\sqrt{x^۲+۴}$ و مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مساوی x، بدست می‌آید:

$$A=\frac{۱}{۴}\,;\ B=۰\,;\ C=\frac{۱}{۲}\,;\ D=۰\,;\ \lambda=-۲$$

وبنابراین

$$\int x^۲\sqrt{x^۲+۴}\,dx=\frac{x^۳+۲x}{۴}\sqrt{x^۲+۴}-۲ln(x+\sqrt{x^۲+۴})+c$$

۳°. انتگرالهای به‌صورت

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^۲+bx+c}} \qquad (۴)$$

با تبدیل $\frac{۱}{x-\alpha}=t$ به‌صورت انتگرال (۲) درمی‌آید.

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱۳۲۶. $\int\frac{x^۲dx}{\sqrt{x^۲-x+۱}}$.

۱۳۲۷. $\int\frac{x^۵}{\sqrt{۱-x^۲}}dx$.

۱۳۲۸. $\int\frac{x^۶}{\sqrt{۱+x^۲}}dx$.

۱۳۲۹. $\int\frac{dx}{x^۵\sqrt{x^۲-۱}}$.

۱۳۳۰. $\int\frac{dx}{(x+۱)^۳\sqrt{x^۲+۲x}}$.

۱۳۳۱. $\int\frac{x^۲+x+۱}{x\sqrt{x^۲-x+۱}}dx$.

۴°. انتگرال دیفرانسیل دوجمله‌ای

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx \qquad (۵)$$

که در آن m و n و p عددهائی گویا هستند.

شرط چبیشف. انتگرال (۵) تنها وقتی برحسب توابع‌گویا قابل بیان است‌که یکی از سه‌حالت زیر وجود داشته باشد:

۱) وقتی‌که p عددی صحیح باشد؛

۲) وقتی که $\frac{m+۱}{n}$ عددی‌صحیح باشد. دراینحالت از تبدیل $a+bx^n=z^s$ استفاده

می‌کنیم، که در آن s عبارتست از مخرج کسر p؛

۳) وقتی که $\frac{m+1}{n}+p$ عددی صحیح باشد . در اینحالت از تبدیل $ax^{-n}+b=z^{s}$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۳. مطلوبست

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=I$$

حل. در اینجا $m=-\frac{1}{2}$ ، $n=\frac{1}{4}$ ، $p=\frac{1}{3}$ و $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2$ می‌شود . بنابراین به حالت (۲) برمی‌گردد و باید از تبدیل $1+x^{\frac{1}{4}}=z^{3}$ استفاده کنیم. داریم:

$$x=(z^{3}-1)^{4}\ ;\ dx=12z^{2}(z^{3}-1)^{3}dz$$

بنابراین

$$I=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=12\int\frac{z^{3}(z^{3}-1)^{3}}{(z^{3}-1)^{2}}dz=$$

$$=12\int(z^{6}-z^{3})dz=\frac{12}{7}z^{7}-3z^{4}+c$$

که در آن داریم: $z=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$.

انتگرالهای زیر را بدست آورید:

۱۳۳۲. $\int x^{3}(1+2x^{2})^{-\frac{3}{2}}dx$.

۱۳۳۳. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^{4}}}$.

۱۳۳۴. $\int\frac{dx}{x^{4}\sqrt{1+x^{2}}}$.

۱۳۳۵. $\int\frac{dx}{x\sqrt[5]{1+x^{5}}}$.

۱۳۳۶. $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}$.

۱۳۳۷. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$.

۷. انتگرال توابع مثلثاتی

۱°. انتگرالهای به‌صورت

$$\int \sin^m x\cos^n x dx = I_{m,n} \qquad (1)$$

(m و n عددهای صحیح‌اند).

۱) اگر $m=2k+1$ عددی فرد باشد، فرض می‌کنیم

$$I_{m,n} = -\int \sin^{2k} x\cos^n x d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x)$$

و بهمین‌ترتیب در حالتی هم‌که n عددی فرد باشد، عمل می‌شود.

مثال ۱.
$$\int \sin^{10} x\cos^3 x dx = \int \sin^{10} x(1-\sin^2 x)\cdot d(\sin x) =$$
$$=\frac{1}{11}\sin^{11} x - \frac{1}{13}\sin^{13} x + c$$

۲) اگر m و n عددهای مثبت و زوج باشند، عبارت زیر انتگرال (۱) را به‌کمک روابط زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \ , \ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \ ,$$

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

مثال ۲.
$$\int \cos^2 3x\sin^4 3x dx = \int (\cos 3x\sin 3x)^2 \sin^2 3x dx =$$
$$= \int \frac{\sin^2 6x}{4}\cdot\frac{1-\cos 6x}{2} dx = \frac{1}{8}\int(\sin^2 6x - \sin^2 6x\cos 6x)dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int\left(\frac{1-\cos 12x}{2} - \sin^2 6x\cos 6x\right)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{1}{18}\sin^3 6x\right) + c$$

۳) اگر $m=-\mu$ و $n=-v$ عددهای صحیح منفی وهر دو زوج یا هردو فردباشند، داریم:

$$I_{m,n}=\int\frac{dx}{\sin^{\mu}x\cos^{v}x}=\int cosec^{\mu}x\sec^{v-۲}x\,d(tgx)=$$

$$=\int\left(۱+\frac{۱}{tg^{۲}x}\right)^{\frac{\mu}{۲}}(۱+tg^{۲}x)^{\frac{v-۲}{۲}}d(tgx)=\int\frac{(۱+tg^{۲}x)^{\frac{\mu+v}{۲}-۱}}{tg^{\mu}x}d(tgx)$$

و در حالت خاص داریم:

$$\int\frac{dx}{\sin^{\mu}x}=\frac{۱}{۲^{\mu-۱}}\int\frac{d(\frac{x}{۲})}{\sin^{\mu}\frac{x}{۲}\cos^{\mu}\frac{x}{۲}},\quad\int\frac{dx}{\cos^{v}x}=\int\frac{d(x+\frac{\pi}{۲})}{\sin^{v}(x+\frac{\pi}{۲})}$$

مثال ۳.

$$\int\frac{dx}{\cos^{۴}x}=\int\sec^{۲}x\cdot d(tgx)=\int(۱+tg^{۲}x)\cdot d(tgx)=$$

$$=tgx+\frac{۱}{۳}tg^{۳}x+c$$

مثال ۴.

$$\int\frac{dx}{\sin^{۳}x}=\frac{۱}{۲^{۳}}\int\frac{dx}{\sin^{۳}\frac{x}{۲}\cos^{۳}\frac{x}{۲}}=\frac{۱}{۸}\int tg^{-۳}\frac{x}{۲}\sec^{۶}\frac{x}{۲}dx=$$

$$=\frac{۱}{۸}\int\frac{(۱+tg^{۲}\frac{x}{۲})^{۲}}{tg^{۳}\frac{x}{۲}}\sec^{۲}\frac{x}{۲}dx=\frac{۲}{۸}\int\left[tg^{-۳}\frac{x}{۲}+\frac{۲}{tg\frac{x}{۲}}+tg\frac{x}{۲}\right]d(tg\frac{x}{۲})=$$

$$=\frac{۱}{۴}\left[-\frac{۱}{۲tg^{۲}\frac{x}{۲}}+۲ln\left|tg\frac{x}{۲}\right|+\frac{tg^{۲}\frac{x}{۲}}{۲}\right]+c$$

۴°. انتگرالهای به‌صورت $\int tg^{m}xdx$ (یا $\int cotg^{m}xdx$) (m عدد مثبت وصحیحی است) با استفادهٔ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شوند:

$$tg^2x = sec^2x - 1$$

(و یا $cotg^2x = cosec^2x - 1$).

مثال ۵. $\int tg^4xdx = \int tg^2x(sec^2x-1)dx = \frac{tg^3x}{3} - \int tg^2xdx =$

$$= \frac{tg^3x}{3} - \int (sec^2x - 1)dx = \frac{tg^3x}{3} - tgx + x + c$$

۵) در حالت کلی، انتگرال $I_{m,n}$ به‌صورت (۱)، به‌کمك رابطهٔ برگشتی محاسبه می‌شود که معمولاً منجر به‌انتگرالهای حالت خاص می‌شود.

مثال ۶. $\int \frac{dx}{cos^3x} = \int \frac{sin^2x+cos^2x}{cos^3x}dx = \int sinx \cdot \frac{sinx}{cos^3x}dx + \frac{dx}{cosx} =$

$$= sinx \cdot \frac{1}{2cos^2x} - \frac{1}{2}\int \frac{cosx}{cos^2x}dx + \int \frac{dx}{cosx} = \frac{sinx}{2cos^2x} +$$

$$+ \frac{1}{2}ln|tgx + secx| + c$$

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱۳۳۸. $\int cos^3xdx$.

۱۳۳۹. $\int sin^5xdx$.

۱۳۴۰. $\int sin^2xcos^3xdx$.

۱۳۴۱. $\int sin^3\frac{x}{2}cos^5\frac{x}{2}dx$.

۱۳۴۲. $\int \frac{cos^5x}{sin^3x}dx$.

۱۳۴۳. $\int sin^4xdx$.

۱۳۴۴. $\int sin^2xcos^2xdx$.

۱۳۴۵. $\int sin^2xcos^4xdx$.

۱۳۴۶. $\int cos^6 3xdx$.

۱۳۴۷. $\int \frac{dx}{sin^4x}$.

۱۳۴۸. $\int \frac{dx}{cos^6x}$.

۱۳۴۹. $\int \frac{cos^2x}{sin^6x}dx$.

۱۳۵۰. $\int \frac{dx}{sin^2xcos^4x}$.

۱۳۵۱. $\int \frac{dx}{sin^5xcos^3x}$.

۱۳۵۲. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$.

۱۳۵۳. $\int \frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\sin x\cos x}dx$.

۱۳۵۴. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$.

۱۳۵۵. $\int \sec^5 4x\,dx$.

۱۳۵۶. $\int tg^2 5x\,dx$.

۱۳۵۷. $\int cotg^3 x\,dx$.

۱۳۵۸. $\int cotg^4 x\,dx$.

۱۳۵۹. $\int \left(tg^3\frac{x}{3}+tg^4\frac{x}{3}\right)dx$.

۱۳۶۰. $\int x\sin^2 x^2\,dx$.

۱۳۶۱. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$.

۱۳۶۲. $\int \sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}\,dx$.

۱۳۶۳. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}$.

۱۳۶۴. $\int \frac{dx}{\sqrt{tg x}}$.

۲°. انتگرالهای به‌صورت $\int \sin mx\cos nx\,dx$، $\int \sin mx\sin nx\,dx$ و $\int \cos mx\cos nx\,dx$. در این حالتها از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$1)\quad \sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x];$$

$$2)\quad \sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x];$$

$$3)\quad \cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x].$$

مثال ۷.

$$\int \sin 9x\sin x\,dx=\int\frac{1}{2}[\cos 8x-\cos 10x]dx=$$

$$=\frac{1}{16}\sin 8x-\frac{1}{20}\sin 10x+c$$

انتگرالهای زیر را پیداکنید:

۱۳۶۵. $\int \sin 3x\cos 5x\,dx$.

۱۳۶۶. $\int \sin 10x\sin 15x\,dx$.

۱۳۶۷. $\int cos\frac{x}{۲}cos\frac{x}{۳}dx$. ۱۳۶۸. $\int sin\frac{x}{۳}cos\frac{۲x}{۳}dx$.

۱۳۶۹. $\int cos(ax+b)cos(ax-b)dx$.

۱۳۷۰. $\int sin\omega t\, sin(\omega t+\varphi)dt$. ۱۳۷۱. $\int cos x cos^{۲}۳x dx$.

۱۳۷۲. $\int sin x\, sin ۲x\, sin ۳x dx$.

۳°. انتگرالهای به‌صورت

$$\int R(sin x, cos x)dx \qquad (۲)$$

که در آن R یك تابع گویاست.

۱) به کمك تبدیل $tg\frac{x}{۲}=t$ یعنی

$$sin x = \frac{۲t}{۱+t^{۲}},\ cos x=\frac{۱-t^{۲}}{۱+t^{۲}}\ ,\ dx=\frac{۲dt}{۱+t^{۲}}$$

انتگرال (۲) به‌انتگرال توابع گویائی با متغیر جدید t تبدیل می‌شود.

مثال ۸. مطلوبست

$$\int\frac{dx}{۱+sin x+cos x}=I$$

حل. با فرض $tg\frac{x}{۲}=t$ بدست می‌آید:

$$I = \int\frac{\frac{۲dt}{۱+t^{۲}}}{۱+\frac{۲t}{۱+t^{۲}}+\frac{۱-t^{۲}}{۱+t^{۲}}}=\int\frac{dt}{۱+t}=ln|۱+t|+c=ln\left|۱+tg\,\frac{x}{۲}\right|+c$$

۲) اگر اتحاد زیر برقرار باشد

$$R(-sin x, -cos x)\equiv R(sin x, cos x)$$

برای تبدیل انتگرال(۲) به‌صورت گویا می‌توان از تبدیل $tg x = t$ استفاده کرد. دراینحالت داریم:

$$sin x = \frac{t}{\sqrt{۱+t^{۲}}}, cos x=\frac{۱}{\sqrt{۱+t^{۲}}}, x=arctg t\ ,\ dx=\frac{dt}{۱+t^{۲}}$$

مثال ۹. مطلوبست

$$\int \frac{dx}{۱+\sin^{۲} x} = I$$

حل. فرض می‌کنیم:

$$tg x = t\,,\quad \sin^{۲} x = \frac{t^{۲}}{۱+t^{۲}}\,,\quad dx = \frac{dt}{۱+t^{۲}}$$

و دراینصورت خواهیم داشت:

$$I = \int \frac{dt}{(۱+t^{۲})\left(۱+\frac{t^{۲}}{۱+t^{۲}}\right)} = \int \frac{dt}{۱+۲t^{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\int \frac{d(t\sqrt{۲})}{۱+(t\sqrt{۲})^{۲}} =$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲}} arctg(t\sqrt{۲} + c = \frac{۱}{\sqrt{۲}} arctg(\sqrt{۲}\, tg x) + c$$

متذکر می‌شویم که انتگرال (۳) را می‌توان با تقسیم صورت و مخرج کسر بر $\cos^{۲} x$ سریع‌تر بدست می‌آید.

درحالتهای خاص باید از روشهای ابتکاری استفاده کرد (مثال شماره ۱۳۷۹ را ببینید).

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱۳۷۳. $\int \frac{dx}{۳+۵\cos x}$.

۱۳۷۴. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

۱۳۷۵. $\int \frac{\cos x}{۱+\cos x} dx$.

۱۳۷۶. $\int \frac{\sin x}{۱-\sin x} dx$.

۱۳۷۷. $\int \frac{dx}{۸-۴\sin x + ۷\cos x}$.

۱۳۷۸. $\int \frac{dx}{\cos x + ۲\sin x + ۳}$.

۱۳۷۹.** $\int \frac{۳\sin x + ۲\cos x}{۲\sin x + ۳\cos x} dx$.

۱۳۸۰. $\int \frac{۱+tg x}{۱-tg x} dx$.

۱۳۸۱.* $\int \frac{dx}{۱+۳\cos^{۲} x}$.

۱۳۸۲.* $\int \frac{dx}{۳\sin^{۲} x + ۵\cos^{۲} x}$.

۱۳۸۳.* $\int \frac{dx}{\sin^{۲} x + ۳\sin x\cos x - \cos^{۲} x}$.

*۱۳۸۴. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x \sin x}$.

۱۳۸۵. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$. ۱۳۸۶. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$.

۱۳۸۷. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx$. ۱۳۸۸. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}dx$.

*۱۳۸۹. $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$. *۱۳۹۰. $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx$.

۸. انتگرال توابع هذلولی

انتگرال توابع هذلولی کاملا شبیه انتگرال توابع مثلثاتی محاسبه می‌شود. باید روابط اساسی را بخاطر داشت:

۱) $ch^2x - sh^2x = 1;$

۲) $sh^2x = \frac{1}{2}(ch2x - 1);$

۳) $ch^2x = \frac{1}{2}(ch2x + 1);$

۴) $shxchx = \frac{1}{2}sh2x$

مثال ۱. مطلوبست $\int ch^2xdx$.

حل. داریم:

$$\int ch^2xdx = \int \frac{1}{2}(ch2x+1)dx = \frac{1}{4}sh2x + \frac{1}{2}x + c$$

مثال ۲. مطلوبست $\int ch^3xdx$.

حل. داریم:

$$\int ch^3xdx = \int ch^2xd(shx) = \int(1+sh^2x)d(shx) = shx = \frac{sh^3x}{3} + c$$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید:

۱۳۹۱. $\int sh^3 x dx$ ·

۱۳۹۲. $\int ch^4 x dx$ ·

۱۳۹۳. $\int sh^3 x ch x dx$ ·

۱۳۹۴. $\int sh^2 x ch^2 x dx$ ·

۱۳۹۵. $\int \frac{dx}{sh x ch^2 x}$ ·

۱۳۹۶. $\int \frac{dx}{sh^2 x ch^2 x}$ ·

۱۳۹۷. $\int th^3 x dx$ ·

۱۳۹۸. $\int cth^4 x dx$ ·

۱۳۹۹. $\int \frac{dx}{sh^2 x + ch^2 x}$ ·

۱۴۰۰. $\int \frac{dx}{2 sh x + 3 ch x}$ ·

*۱۴۰۱. $\int \frac{dx}{th x - 1}$ ·

۱۴۰۲. $\int \frac{sh x dx}{\sqrt{ch 2x}}$ ·

۹. استفاده از تبدیلهای مثلثاتی و هذلولی

برای محاسبهٔ انتگرالهای به‌صورت $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ (۱)

(R تابعی است گویا)

تبدیل سه جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c بــه مجموع یا تفاضل دو مربع، انتگرال (۱) را منجر بیکی‌از انتگرالهای به‌صورت زیر می‌کند:

۱) $\int R(z, \sqrt{m^2-z^2})dz;$

۲) $\int R(z, \sqrt{m^2+z^2})dz;$

۳) $\int R(z, \sqrt{z^2-m^2})dz$

و این انتگرالها هم با تبدیلهای زیر قابل محاسبه‌اند:

۱) $z = m\sin t$ یا $z = m\,th\,t$،

۲) $z = m\,tg\,t$ یا $z = m\,sh\,t$،

۳) $z = m\sec t$ یا $z = m\,ch\,t$،

مثال ۱. مطلوبست

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}=I$$

حل. داریم :

$$x^2+2x+2=(x+1)^2+1$$

اگر $x+1=tgt$ بگیریم $dx=sec^2tdt$ می‌شود وداریم:

$$I=\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}}=\int\frac{sec^2tdt}{tg^2tsect}=\int\frac{cost}{sin^2t}dt=$$

$$=-\frac{1}{sint}+c=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+c$$

مثال ۴. مطلوبست

$$\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx=I$$

حل. داریم :

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

فرض می کنیم $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}sht$ و $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}chtdt$، بدست می آید:

$$I=\int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sht-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}cht\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}chtdt=\frac{3\sqrt{3}}{8}\int shtch^2tdt-$$

$$-\frac{3}{8}\int ch^2tdt=\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{ch^3t}{3}-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}shtcht+\frac{1}{2}t\right)+c$$

و چون داریم :

$$sht=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right),\quad cht=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1},$$

$$t=ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})+ln\frac{2}{\sqrt{3}}$$

و بالاخره خواهیم داشت:

$$I=\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}(x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+x+1}-$$
$$-\frac{3}{16}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})+c$$

انتگرالهای زیر را پیداکنید:

۱۴۰۳. $\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

۱۴۰۴. $\int\sqrt{2+x^2}\,dx$

۱۴۰۵. $\int\frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx$

۱۴۰۶. $\int\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

۱۴۰۷. $\int\sqrt{x^2-4}\,dx$

۱۴۰۸. $\int\sqrt{x^2+x}\,dx$

۱۴۰۹. $\int\sqrt{x^2-6x-7}\,dx$

۱۴۱۰. $\int(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}dx$

۱۴۱۱. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$

۱۴۱۲. $\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}$

۱۴۱۳. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

۱۴۱۴. $\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$

۱۰. انتگرال توابع مختلف متعالی

انتگرالهای زیر را پیداکنید:

۱۴۱۵. $\int(x^2+1)^2e^{2x}dx$

۱۴۱۶. $\int x^2\cos^2 3x\,dx$

۱۴۱۷. $\int x\sin x\cos 2x\,dx$

۱۴۱۸. $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx$

۱۴۱۹. $\int e^x\sin x\sin 3x\,dx$

۱۴۲۰. $\int xe^x\cos x\,dx$

۱۴۲۱. $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$

۱۴۲۲. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$

۱۴۲۳. $\int x^2\ln\frac{1+x}{1-x}dx$

۱۴۲۴. $\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$

۱۴۲۵. $\int x\arccos(5x-2)dx$.

۱۴۲۶. $\int \sin x \, sh x \, dx$.

۱۱. استفاده از روابط برگشتی

با استفاده از روابط برگشتی، انتگرالهای زیر را محاسبه‌کنید:

۱۴۲۷. $I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ ؛ مطلوبست I_2 و I_3.

۱۴۲۸. $I_n=\int \sin^n x dx$ ؛ مطلوبست I_4 و I_5

۱۴۲۹. $I_n=\int \frac{dx}{\cos^n x}$ ؛ مطلوبست I_3 و I_4

۱۴۳۰. $I_n=\int x^n e^{-x} dx$ ؛ مطلوبست I_{10}

۱۲. انتگرال توابع مختلف

۱۴۳۱. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+9}$.

۱۴۳۲. $\int \frac{x-5}{x^2-2x+2}dx$.

۱۴۳۳. $\int \frac{x^3}{x^2+x+\frac{1}{2}}dx$.

۱۴۳۴. $\int \frac{dx}{x(x^2+5)}$.

۱۴۳۵. $\int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}$.

۱۴۳۶. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

۱۴۳۷. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$.

۱۴۳۸. $\int \frac{dx}{x^4-2x^2+1}$.

۱۴۳۹. $\int \frac{xdx}{(x^2-x+1)^3}$.

۱۴۴۰. $\int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2}dx$.

۱۴۴۱. $\int \frac{(\sqrt{x}+۱)^۲}{x^۳}dx$ ·

۱۴۴۲. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^۲+x+۱}}$ ·

۱۴۴۳. $\int \frac{۱-\sqrt[۳]{۲x}}{\sqrt{۲x}}dx$ ·

۱۴۴۴. $\int \frac{dx}{(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x})^۲}$ ·

۱۴۴۵. $\int \frac{۲x+۱}{\sqrt{(۴x^۲-۲x+۱)^۳}}dx$ ·

۱۴۴۶. $\int \frac{dx}{\sqrt[۴]{۵-x}+\sqrt{۵-x}}$ ·

۱۴۴۷. $\int \frac{x^۲}{\sqrt{(x^۲-۱)^۳}}dx$ ·

۱۴۴۸. $\int \frac{xdx}{(۱+x^۲)\sqrt{۱-x^۴}}$ ·

۱۴۴۹. $\int \frac{xdx}{\sqrt{۱-۲x^۲-x^۴}}$ ·

۱۴۵۰. $\int \frac{x+۱}{(x^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}}dx$ ·

۱۴۵۱*. $\int \frac{dx}{(x^۲+۴x)\sqrt{۴-x^۲}}$ ·

۱۴۵۲. $\int \sqrt{x^۲-۹}\,dx$ ·

۱۴۵۳. $\int \sqrt{x-۴x^۲}dx$ ·

۱۴۵۴. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^۲+x+۱}}$ ·

۱۴۵۵. $\int \sqrt{x^۲+۲x+۲}\,dx$ ·

۱۴۵۶. $\int \frac{dx}{x^۴\sqrt{x^۲-۱}}$ ·

۱۴۵۷. $\int \frac{dx}{x\sqrt{۱-x^۲}}$ ·

۱۴۵۸. $\int \frac{dx}{\sqrt[۳]{۱+x^۳}}$ ·

۱۴۵۹. $\int \frac{۵x}{\sqrt{۱+x^۴}}dx$ ·

۱۴۶۰. $\int \cos^۴ x dx$ ·

۱۴۶۱. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^۵ x}$ ·

۱۴۶۲. $\int \frac{۱+\sqrt{\cot g x}}{\sin^۲ x}dx$ ·

۱۳۶۳. $\int \frac{\sin^۳ x}{\sqrt[۵]{\cos^۳ x}}dx$ ·

۱۴۶۴. $\int \operatorname{cosec}^۵ ۵x dx$ ·

۱۴۶۵. $\int \frac{\sin^۲ x}{\cos^۶ x}dx$ ·

۱۴۶۶. $\int \sin(\frac{\pi}{۴}-x)\sin(\frac{\pi}{۴}+x)dx$ ·

۱۴۶۷. $\int tg^{3}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx$

۱۴۶۸. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x-5}$

۱۴۶۹. $\int \frac{dx}{2+3\cos^{2}x}$

۱۴۷۰. $\int \frac{dx}{\cos^{2}x+2\sin x\cos x+2\sin^{2}x}$

۱۴۷۱. $\int \frac{dx}{\sin x\sin 2x}$

۱۴۷۲. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$

۱۴۷۳. $\int \frac{\sec^{2}x}{\sqrt{tg^{2}x+4tgx+1}}dx$

۱۴۷۴. $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^{2}+\sin^{2}ax}}dx$

۱۴۷۵. $\int \frac{x\,dx}{\cos^{2}3x}$

۱۴۷۶. $\int x\sin^{2}x\,dx$

۱۴۷۷. $\int x^{2}e^{x^{3}}dx$

۱۴۷۸. $\int xe^{2x}dx$

۱۴۷۹. $\int x^{2}\ln\sqrt{1-x}\,dx$

۱۴۸۰. $\int \frac{arctg\,x}{\sqrt{1+x^{2}}}dx$

۱۴۸۱. $\int \sin^{2}\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$

۱۴۸۲. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^{2}}$

۱۴۸۳. $\int \frac{dx}{(tgx+1)\sin^{2}x}$

۱۴۸۴. $\int sh x\, ch x\, dx$

۱۴۸۵. $\int \frac{sh\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx$

۱۴۸۶. $\int \frac{sh x\, ch x}{sh^{2}x+ch^{2}x}dx$

۱۴۸۷. $\int \frac{x}{sh^{2}x}dx$

۱۴۸۸. $\int \frac{dx}{e^{2x}-2e^{x}}$

۱۴۸۹. $\int \frac{e^{x}}{e^{2x}-6e^{x}+13}dx$

۱۴۹۰. $\int \frac{e^{2x}}{(e^{x}+1)^{\frac{1}{4}}}dx$

۱۴۹۱. $\int \frac{2^{x}}{1-4^{x}}dx$

۱۴۹۲. $\int (x^{2}-1)10^{-2x}dx$

۱۴۹۳. $\int \sqrt{e^{x}+1}\,dx$

۱۴۹۴. $\int \frac{arctg\,x}{x^{2}}dx$

۱۴۹۵. $\int x^3 \arcsin\frac{1}{x}dx$ ·

۱۴۹۶. $\int \cos(\ln x)dx$ ·

۱۴۹۷. $\int (x^2-3x)\sin 5x dx$ ·

۱۴۹۸. $\int x \operatorname{arctg}(2x+3)dx$ ·

۱۴۹۹. $\int \arcsin\sqrt{x}dx$ ·

۱۵۰۰. $\int |x|dx$ ·

فصل پنجم
انتگرال معین

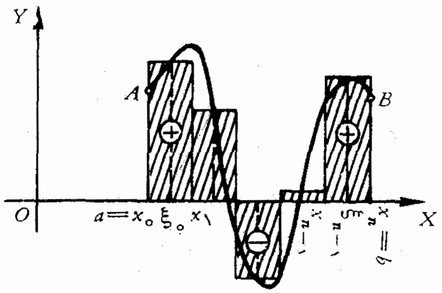
۱. انتگرال معین به‌عنوان حد مجموع

۱°. مجموع انتگرالی. فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصلهٔ بستهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ معین باشد و $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ تقسیم دلخواهی از این فاصله به n قسمت باشد (شکل ۳۷) مجموع به‌صورت

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

که در آن $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$ ؛
$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$:
$i=0,1,2,\cdots,(n-1)$

مجموع انتگرالی، تابع $f(x)$ در $[a,b]$ نامیده می‌شود. از لحاظ هندسی S_n عبارتست از مجموع جبری مساحتهای مستطیلهای متناظر (شکل ۳۷).



شکل ۳۷

۲°. انتگرال معین. حد مجموع S_n، وقتی که تعداد تقسیمهای n بسمت بی‌نهایت و بزرگترین تقسیم Δx_i بسمت صفر میل کند، انتگرال معین تابع $f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ نامیده می‌شود، یعنی

$$\lim_{\text{Max}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \qquad (۲)$$

وقتی‌که تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، در این فاصله انتگرال دارد، یعنی حد (۲) وجود دارد و به‌روش تقسیم این فاصله به‌پاره خطهای جزئی و به‌انتخاب نقطهٔ ξ_i روی این‌پاره خطها، بستگی ندارد. از لحاظ هندسی، انتگرال معین (۲) عبارتست ازمجموع جبری مساحت شکلی که از ذوزنقهٔ مختلط‌الخط $aABb$ تشکیل شده است، که در آن مساحت قسمتی که دربالای محور OX قرارگرفته است با علامت مثبت و مساحت قسمتی که‌در زیر محور OX قرارگرفته است با علامت منفی انتخاب شده است (شکل ۳۷ را ببینید).

تعریف مجموع انتگرالی و انتگرال معین در حالت فاصلهٔ $[a,b]$ هم وقتی که $a>b$ باشد، تعمیم داده می‌شود.

مثال ۱. مجموع انتگرالی S_n را برای تابع

$$f(x) = ۱ + x$$

در فاصلهٔ بستهٔ $[۱,۱۰]$ تشکیل دهید، برای این منظور فاصلهٔ مورد نظر را به n قسمت تقسیم کنید و نقاط ξ_i را منطبق بر انتهای چپ فاصلهٔ بستهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ بگیرید. حد S_n وقتی که $n \to \infty$ چقدر است؟

حل. در اینجا $\Delta x_i = \frac{۱۰-۱}{n} = \frac{۹}{n}$ و $\xi_i = x_i = x_0 + i\Delta x_i = ۱ + \frac{۹i}{n}$. از آنجا $f(\xi_i) = ۱ + ۱ + \frac{۹i}{n} = ۲ + \frac{۹i}{n}$. بنابراین (شکل ۳۸)

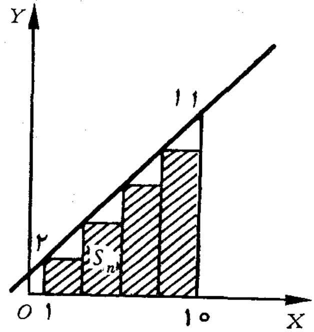
$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \left(۲ + \frac{۹i}{n}\right)\frac{۹}{n} = \frac{۱۸}{n}n + \frac{۸۱}{n^2}(0 +$$

$$+ ۱ + \dots + n - ۱) =$$

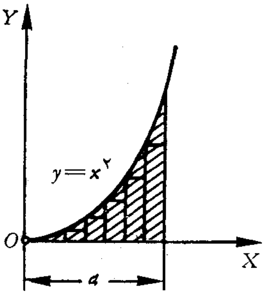
$$= ۱۸ + \frac{۸۱}{n^2}\cdot\frac{n(n-۱)}{۲} = ۱۸ + \frac{۸۱}{۲}\left(۱ - \frac{۱}{n}\right) = ۵۸\frac{۱}{۲} - \frac{۸۱}{۲n},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = ۵۸\frac{۱}{۲}$$

مثال ۲. مطلوبست مساحت مثلث مختلط‌الخطی که محدود است به‌قوس سهمی $y=x^2$ ، محور OX وقائم $x=a$ $(a>0)$.



شکل ۳۸



شکل ۳۹

حل . قاعدهٔ a را به n قسمت مساوی $\Delta x=\frac{a}{n}$ تقسیم می‌کنیم. اگر مقدار تابع را در ابتدای هریك از فاصله‌ها انتخاب کنیم، خواهیم داشت:

$$y_1=0\ ;\ y_2=\left(\frac{a}{n}\right)^2\ ;\ y_3=\left[2\left(\frac{a}{n}\right)^2\right]\ ;\ \cdots\ ;\ y_n=\left[(n-1)\frac{a}{n}\right]^2$$

مساحت مستطیلهای محاطی با ضرب هر y_k در قاعدهٔ $\Delta x=\frac{a}{n}$ محاسبه می‌شود (شکل ۳۹) . با جمع کردن آنها، مساحت شکل پله‌کانی بدست می‌آید:

$$S_n=\frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)^2\left[1+2^2+3^2+\ \cdots\ +(n-1)^2\right]$$

از طرف دیگر برای مجموع مربعهای اعداد صحیح می‌دانیم:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$S_n=\frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

و ازآنجا در حالت حدی بدست می‌آید:

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{a^3}{3}$$

انتگرالهای معین زیر را، به‌عنوان حد مجموع انتگرالی آنها، محاسبه کنید:

۱۵۰۱. $\int_a^b dx$.

۱۵۰۲. $\int_0^T (v_0+gt)dt$.

(v_0 و g مقادیر ثابت‌اند)

۱۵۰۳. $\int_{-2}^{1} x^2 dx$.

۱۵۰۴. $\int_0^{10} 2^x dx$.

۱۵۰۵*. $\int_1^5 x^3 dx$.

۱۵۰۶*. مطلوبست مساحت ذوزنقهٔ مختلط‌الضلع محدود به‌هذلولی

$$y=\frac{1}{x}$$

محور OX و دو عرض $x=a$, $x=b$ $(0<a<b)$.

۱۰۵۷*. مطلوبست

$$f(x)=\int_0^x \sin t\,dt$$

۲. محاسبهٔ انتگرال معین به‌کمك انتگرال نامعین

۱°. انتگرال معین با حد فوقانی متغیر. اگر تابع $f(t)$ در فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، تابع

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

تابع اولیهٔ تابع $f(x)$ است، یعنی

$$F'(x)=f(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

۲. رابطهٔ نیوتون ـ لایب‌نیتز. اگر $F'(x)=f(x)$ باشد داریم:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

تابع اولیهٔ $F(x)$ از راه محاسبهٔ انتگرال نامعین بدست می‌آید:

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

مثال ۱. مطلوبست محاسبهٔ $\int_{-۱}^{۳} x^۴dx$.

حل. $$\int_{-۱}^{۳} x^۴dx=\frac{x^۵}{۵}\Big|_{-۱}^{۳}=\frac{۳^۵}{۵}-\frac{(-۱)^۵}{۵}=۴۸\frac{۴}{۵}$$

۱۵۰۸. فرض کنید

$$I=\int_a^b \frac{dx}{lnx} \qquad (b>a>۱)$$

مطلوبست ۱) $\frac{dI}{da}$؛ ۲) $\frac{dI}{db}$.

مشتق توابع زیر را پیدا کنید:

۱۵۰۹. $F(x)=\int_{۱}^{x} lnt\,dt$ ($x>۰$). **۱۵۱۰.** $F(x)=\int_x^{۰} \sqrt{۱+t^۴}dt$

۱۵۱۱. $F(x)=\int_x^{x^۲} e^{-t^۲}dt$. **۱۵۱۲.** $I=\int_{\frac{۱}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^۲)dt$ $(x>۰)$

۱۵۱۳. اکسترممهای تابع زیر را پیدا کنید:

$$y=\int_۰^x \frac{\sin t}{t}dt \qquad (\text{در حوزهٔ } x>۰)$$

با استفاده از رابطهٔ نیوتون ــ لایب‌نیتز، این انتگرالها را حساب‌کنید:

۱۵۱۴. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

۱۵۱۵. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$.

۱۵۱۶. $\int_{-x}^{x} e^t dt$.

۱۵۱۷. $\int_0^x \cos t\,dt$.

به‌کمك انتگرالهای معین حدود زیر را پیداکنید:

۱۵۱۸**. $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

۱۵۱۹**. $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right)$.

۱۵۲۰. $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$.

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

۱۵۲۱. $\int_1^2 (x^2-2x+3)dx$.

۱۵۲۲. $\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$.

۱۵۲۳. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$.

۱۵۲۴. $\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$.

۱۵۲۵. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.

۱۵۲۶. $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$.

۱۵۲۷. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$.

۱۵۲۸. $\int_{-1}^{1} \frac{y^5dy}{y+2}$.

۱۵۲۹. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

۱۵۳۰. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

۱۵۳۱. $$\int_{0}^{1} \frac{z^{3}}{z^{3}+1} dz$$

۱۵۳۲. $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} sec^{2}\alpha d\alpha$$

۱۵۳۳. $$\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

۱۵۳۴. $$\int_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^{2}}}$$

۱۵۳۵. $$\int_{0}^{1} \frac{y^{2}dy}{\sqrt{y^{6}+4}}$$

۱۵۳۶. $$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} cos^{2}\alpha d\alpha$$

۱۵۳۷. $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^{3}\varphi d\varphi$$

۱۵۳۸. $$\int_{e}^{e^{2}} \frac{dx}{x ln x}$$

۱۵۳۹. $$\int_{1}^{e} \frac{sin(ln x)}{x} dx$$

۱۵۴۰. $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg x dx$$

۱۵۴۱. $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} cotg^{4}\varphi d\varphi$$

۱۵۴۲. $$\int_{0}^{1} \frac{e^{x}}{1+e^{2x}} dx$$

۱۵۴۳. $$\int_{0}^{1} ch x dx$$

۱۵۴۴. $$\int_{ln 2}^{ln 3} \frac{dx}{ch^{2} x}$$

۱۵۴۵. $$\int_{0}^{\pi} sh^{2} x dx$$

۳. انتگرالهای نامتعارف

۱°. انتگرالهای توابع نامحدود. اگر تابع $f(x)$ در مجاورت نقطهٔ c از فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ نامحدود و به‌ازای $a\leqslant x\leqslant c$ و $c<x\leqslant b$ پیوسته باشد، طبق تعریف فرض می‌کنند:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta\to 0}\int_{c+\eta}^b f(x)dx \qquad (۱)$$

اگر حدود سمت راست تساوی (۱) وجود داشته باشد و محدود باشد، انتگرال را متقارب و در غیر اینصورت متباعد گویند. در حالتی‌که $c=a$ یا $c=b$ باشد، این تعریف ساده‌تر می‌شود.

اگر تابع $F(x)$ که درفاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته است، چنان باشدکه به ازای $x\neq c$ داشته باشیم: $F'(x)=f(x)$ (تعمیم تابع اولیه)، دراینصورت

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad (۲)$$

اگر به‌ازای $a\leqslant x\leqslant b$ داشته باشیم: $|f(x)|\leqslant F(x)$ وضمناً $\int_a^b F(x)dx$ متقارب باشد، انتگرال (۱) هم متقارب است (علامت مقایسه).

اگر $f(x)\geqslant 0$ و $\lim_{x\to c}\{f(x)|c-x|^m\}=A\neq\infty$ و $A\neq 0$ یعنی وقتی $x\to c$ داشته باشیم: $f(x)\sim\frac{A}{|c-x|^m}$، دراینصورت: ۱) به‌ازای $m<1$ انتگرال (۱) متباعد و ۲) به‌ازای $m\geqslant 1$ انتگرال (۱) متباعد است.

۲°. انتگرال باحد بی‌نهایت. اگـر تابع $f(x)$ به‌ازای $a\leqslant x\leqslant\infty$ پیوسته باشد، فرض می‌کنند

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (۳)$$

وبرحسب اینکه حد سمت راست تساوی (۳) وجود داشته باشد ویا وجود نداشته باشد،انتگرال مربوطه متقارب یا متباعد نامیده می‌شود. بهمین ترتیب

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)dx$$

اگر $|f(x)|\leqslant F(x)$ و $\int_a^\infty F(x)dx$ متقارب باشد،انتگرال (۳)هم متقارب‌است.

اگر $f(x)\geqslant ۰$ و $\lim_{x\to\infty}\{f(x)x^m\} = A\neq\infty$ و $A\neq ۰$، یعنی به‌ازای $x\to\infty$ داشته باشیم: $f(x)\sim\frac{A}{x^m}$، در اینصورت: ۱) بـه‌ازای $m>۱$ انتگـرال (۳) متقارب و ۲) به‌ازای $m\leqslant ۱$ انتگرال (۳) متباعد است.

مثال ۱.

$$\int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{x^۲} = \lim_{\varepsilon\to۰}\int_{-۱}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^۲} + \lim_{\varepsilon\to۰}\int_{\varepsilon}^{۱}\frac{dx}{x^۲} = \lim_{\eta\to۰}\left(\frac{۱}{\eta}-۱\right) +$$

$$+\lim_{\eta\to۰}\left(\frac{۱}{\eta}-۱\right) = \infty$$

انتگرال متباعد است.

مثال ۲.

$$\int_۰^\infty\frac{dx}{۱+x^۲} = \lim_{b\to\infty}\int_۰^b\frac{dx}{۱+x^۲} = \lim_{b\to\infty}(arctg b - arctg ۰) = \frac{\pi}{۲}$$

مثال ۳. تقارب **انتگرال** اولر ــ پواسون‌را بررسی کنید:

$$\int_۰^\infty e^{-x^۲}dx \qquad (۴)$$

حل. فرض می‌کنیم:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$

انتگرال اول سمت راست تساوی متعارف است. انتگرال دوم هم متقارب است، زیرا به‌ازای $x \geqslant 1$ داریم: $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ و

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \underset{b\to\infty}{\text{حد}} \int_1^b e^{-x}dx = \underset{b\to\infty}{\text{حد}} \left(-e^{-b}+e^{-1}\right) = e^{-1};$$

بنابراین انتگرال (۴) متقارب است.

مثال ۴. دربارهٔ تقارب انتگرال زیر تحقیق کنید:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} \qquad (5)$$

حل. وقتی $x \to +\infty$ داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

چون انتگرال $\int_1^\infty \frac{bx}{x^{\frac{3}{2}}}$ متقارب است، انتگرال (۵) هم متقارب می‌شود.

مثال ۵. دربارهٔ انتگرال الیپتیك تحقیق کنید:

$$\int_0^1 \frac{bx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad (6)$$

حل : نقطهٔ انفصال زیر انتگرال $x = 1$ است. با استفاده از رابطهٔ لاگرانژ درمورد تفاضل

$$1-x^4 = (1-x)(1+x)\,(1+x^2)$$

بدست می‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)\cdot 4x_1^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}$$

بنابراین وقتی $x \to 1$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

وچون انتگرال $\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$ متقارب است، انتگرال مفروض (۶) هم متقارب است.

انتگرالهای نامتعارف زیر را محاسبه کنید (ویا متباعدبودن آنها را ثابت کنید):

۱۵۴۶. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ·

۱۵۴۷. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ ·

۱۵۴۸. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ ·

۱۵۴۹. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ ·

۱۵۵۰. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ·

۱۵۵۱. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ ·

۱۵۵۲. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ ·

۱۵۵۳. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ ·

۱۵۵۴. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ ·

۱۵۵۵. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$ ·

۱۵۵۶. $\int_0^\infty \sin x\, dx$ ·

۱۵۵۷. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$ ·

۱۵۵۸. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ ·

۱۵۵۹. $\int_a^\infty \frac{dx}{x\ln x}\ (a>1)$

۱۵۶۰. $\int_a^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}\ (a>1)$.

۱۵۶۱. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot g\, x\, dx$ ·

۱۵۶۲. $\int_0^{\infty} e^{-kx}dx$ $(k>0)$.

۱۵۶۳. $\int_0^{\infty} \frac{arctg x}{x^2+1}dx$.

۱۵۶۴. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

۱۵۶۵. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$.

۱۵۶۶. $\int_0^{1} \frac{dx}{x^3-5x^2}$.

دربارهٔ تقارب انتگرالهای زیر تحقیق کنید:

۱۵۶۷. $\int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$.

۱۵۶۸. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$.

۱۵۶۹. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$.

۱۵۷۰. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$.

۱۵۷۱. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

۱۵۷۲. $\int_1^{2} \frac{dx}{lnx}$.

۱۵۷۳. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$.

۱۵۷۴*. ثابت کنید که انتگرال اولر نوع اول (تابع بتا)

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

به ازای $p>0$ و $q>0$ متقارب است.

۱۵۷۵*. ثابت کنید که انتگرال اولر نوع دوم (تابع گاما)

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$$

به‌ازای $p>0$ متقارب است.

۴. تغییر متغیر در انتگرال معین

اگر تابع $f(x)$ درفاصلهٔ بستهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ پیوسته باشد و $x=\varphi(t)$ ومشتق آن $\varphi'(t)$ در فاصلهٔ بستهٔ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ پیوسته باشد (که درآن $a=\varphi(\alpha)$ و $b=\varphi(\beta)$)، ضمناً $f[\varphi(t)]$ در فاصلهٔ بستهٔ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ پیوسته ومعین باشد، داریم:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

مثال ۱. مطلوبست

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (a>0)$$

حل. فرض می‌کنیم:

$$x=a\sin t;\quad dx=a\cos t\,dt$$

در اینصورت $t=\arcsin\dfrac{x}{a}$ وبنابراین می‌توان $\alpha=\arcsin 0=0$ و $\beta=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$ گرفت. درنتیجه خواهیم داشت:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt=$$

$$=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=$$

$$=\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^4}{16}$$

۱۵۷۶. آیا می‌توان انتگرال

$$\int_{0}^{2} \sqrt[3]{1-x^{2}}\, dx$$

را به‌کمك تبدیل $x = cost$ محاسبه‌کرد؟

انتگرالهای زیر را به‌کمك تبدیلهای مربوطه برحسب متغیر جدید بنویسید:

۱۵۷۷. $\int_{1}^{3} \sqrt{x+1}\, dx$ ، $x = 2t-1$.

۱۵۷۸. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{4}}}$ ، $x = sint$.

۱۵۷۹. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^{2}+1}}$ ، $x = sht$.

۱۵۸۰. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ ، $x = arctgt$.

۱۵۸۱. در مورد انتگرال

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (b>a)$$

تبدیل خطی صحیح $x = \alpha t + \beta$ را چنان بگیرید که حدود انتگرال جدید بترتیب مساوی ۰ و ۱ شود.

با استفاده از تبدیلهای مربوطه، انتگرالهای زیر را محاسبه‌کنید:

۱۵۸۲. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ، $x = t^{2}$

۱۵۸۳. $\int_{3}^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3} dx$ ، $x-2 = z^{3}$

.۱۵۸۴ $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$ ، $e^x - 1 = z^2$

.۱۵۸۵ $\int_{0}^{\pi} \frac{dt}{3 + 2\cos t}$ ، $tg\frac{t}{2} = z$

.۱۵۸۶ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x}$ ، $tg x = t$

باتبدیلهای، مناسبی انتگرالهای زیر را محاسبه‌کنید:

.۱۵۸۷ $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2}\,dx$.۱۵۸۸ $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\,dx$

.۱۵۸۹ $\int_{0}^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}\,dx$.۱۵۹۰ $\int_{0}^{5} \frac{dx}{2x + \sqrt{3x + 1}}$

این انتگرالها را محاسبه کنید:

.۱۵۹۱ $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 5x + 1}}$.۱۵۹۲ $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$

.۱۵۹۳ $\int_{0}^{\pi} \sqrt{ax - x^2}\,dx$.۱۵۹۴ $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3\cos x}$

.۱۵۹۵ ثابت‌کنید، اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، داریم:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

واگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، داریم:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

۱۵۹۶. ثابت کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$$

۱۵۹۷. ثابت کنید

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\arccos x} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$$

۱۵۹۸. ثابت کنید

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

۵. انتگرال گیری جزء به‌جزء

اگر توابع $u(x)$ و $v(x)$ درفاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته و دارای مشتق باشند، داریم:

$$\int_{a}^{b} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)u'(x)dx \quad (1)$$

با استفاده از رابطهٔ انتگرال‌گیری جزء به جزء انتگرالهای زیر را محاسبه‌کنید:

۱۵۹۹. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

۱۶۰۰. $\int_{1}^{e} \ln x dx$

۱۶۰۱. $\int_{۰}^{۱} x^{۳}e^{۲x}dx$

۱۶۰۲. $\int_{۰}^{\pi} e^{x}\sin x dx$

۱۶۰۳. $\int_{۰}^{\infty} xe^{-x}dx$

۱۶۰۴. $\int_{۰}^{\infty} e^{-ax}\cos bx dx \quad (a>۰)$

۱۶۰۵. $\int_{۰}^{\infty} e^{-ax}\sin bx dx \quad (a>۰)$

۱۶۰۶**. ثابت کنید که برای تابع گاما (مسئلهٔ ۱۵۷۵ را ببینید)، رابطهٔ کاهشی زیر صحیح است:

$$\Gamma(p+۱)=p\Gamma(p) \qquad (p>۰)$$

و از آنجا نتیجه بگیرید که اگر n عددی طبیعی باشد، داریم:

$$\Gamma(n+۱)=n!$$

۱۶۰۷. ثابت کنید که برای انتگرال

$$I_n=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^n x dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^n x dx$$

رابطهٔ کاهشی زیر صحیح است:

$$I_n=\frac{n-۱}{n}I_{n-۲}$$

وقتی که n عددی طبیعی باشد، I_n راپیدا کنید و با استفاده ازرابطه‌ای که بدست می‌آید $I_۹$ و $I_{۱۰}$ را بدست آورید.

۱۶۰۸. با استفاده متوالی از انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، انتگرال زیر را محاسبه کنید (مسئلهٔ ۱۵۷۴ را ببینید):

$$B(p,q)=\int_{۰}^{۱} x^{p-۱}(۱-x)^{q-۱}dx$$

p و q عددهائی صحیح و مثبت‌اند.

۱۶۰۹*. انتگرال زیر را برحسب B (تابع بتا) بنویسید:

$$I_{m,n}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$$

n و m عددهائی صحیح وغیرمنفی هستند.

۶. قضیهٔ مقدار میانه

۱°. تخمین انتگرال. اگر به‌ازای $a\leqslant x\leqslant b$ داشته باشیم: $f(x)\leqslant F(x)$، دراینصورت

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b F(x)dx \qquad (۱)$$

اگر $f(x)$ و $\varphi(x)$ به‌ازای $a\leqslant x\leqslant b$ متصل باشد و علاوه بر آن $\varphi(x)\geqslant 0$، دراینصورت

$$m\int_a^b \varphi(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\leqslant M\int_a^b \varphi(x)dx \qquad (۲)$$

که در آن m حداقل و M حداکثر مقدارتابع $f(x)$ در فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ است.

در حالت خاصی که $\varphi(x)\equiv 1$ باشد، داریم:

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a) \qquad (۳)$$

نامساویهای (۲) و (۳) را می‌توان به نامساویهای هم‌ارز آنها تبدیل کرد:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)dx;$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

که درآنها c و ξ عددهائی واقع دربین a و b هستند.

مثال ۱. این انتگرال را تخمین بزنید:

$$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$$

حل . چون $0\leqslant \sin^2 x\leqslant 1$، بنابراین داریم:

$$\frac{\pi}{2}< I <\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

یعنی
$$1,57< I< 1,91$$

۲°. مقدار میانهٔ تابع. عدد

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

مقدار میانهٔ تابع $f(x)$ درفاصلهٔ بستهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ نامیده می‌شود.

1610*. بدون محاسبهٔ انتگرالها، علامت آنها را پیدا کنید:

$a)\quad \int\limits_{-1}^{2} x^3 dx;\qquad b)\quad \int\limits_{0}^{\pi} x\cos x dx;\qquad c)\quad \int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx.$

1611. بدون محاسبهٔ انتگرالها، معین کنید کدامیك از آنها بزرگترند:

a) $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1+x^2}dx$ یا $\int\limits_{0}^{1} x dx$؛

b) $\int\limits_{0}^{1} x^2\sin^2 x dx$ یا $\int\limits_{0}^{1} x\sin^2 x dx$.

c) $\int\limits_{1}^{2} e^{x^2}dx$ یا $\int\limits_{1}^{2} e^{x}dx$.

مقدار میانهٔ هر تابع را درفاصلهٔ مربوطه پیدا کنید:

1612. $f(x)=x^2$، $0\leqslant x\leqslant 1$

1613. $f(x)=a+b\cos x$، $-\pi\leqslant x\leqslant \pi$

1614. $f(x)=\sin^2 x$، $0\leqslant x\leqslant \pi$

۱۶۱۵. $f(x)=\sin^4 x$ ، $0\leqslant x\leqslant\pi$

۱۶۱۶. ثابت کنید $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ بین مقادیر $\frac{2}{3}\approx 0{,}67$ و $\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}70$ واقع است. مطلوبست مقدار دقیق این انتگرال.

انتگرالهای زیر را تخمین بزنید:

۱۶۱۷. $\int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx$

۱۶۱۸. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3}$

۱۶۱۹. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$

۱۶۲۰*. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$

۱۶۲۱. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$

۱۶۲۲. با انتگرال‌گیری جزء به جزء ثابت کنید:

$$0<\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\cos x}{x}\,dx<\frac{1}{100\pi}$$

۷. مساحت اشکال مسطحه

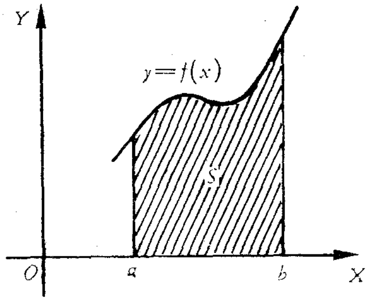
۱°. مساحت در دستگاه مختصات قائم. اگر منحنی پیوسته‌ای در دستگاه مختصات قائم $y=f(x)$ باشد، $[f(x)\geqslant 0]$، مساحت ذوزنقهٔ مختلط‌الخطی که محدود است به‌این‌منحنی، دو قائم در نقطه‌های $x=a$, $x=b$ وپاره خط محور طول $a\leqslant x\leqslant b$ (شکل ۴۰)، از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

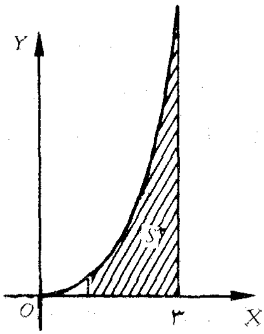
مثال ۱. مساحت محدود بـه‌سهمی $y = \frac{x^۲}{۲}$، خطهای $x = ۱$ و $x = ۳$ و محور طول را محاسبه کنید (شکل ۴۱).

حل. مساحت مطلوب بوسیلهٔ انتگرال زیر بدست می‌آید:

$$S = \int_۱^۳ \frac{x^۲}{۲} dx = ۴\frac{۱}{۳}$$



شکل ۴۰



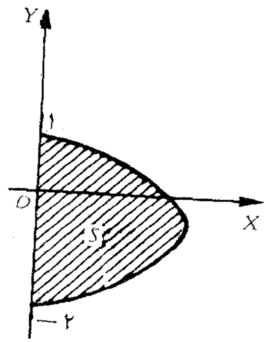
شکل ۴۱

مثال ۲. مطلوبست مساحت محدود به منحنی $x = ۲ - y - y^۲$ ومحورعرض (شکل ۴۲)

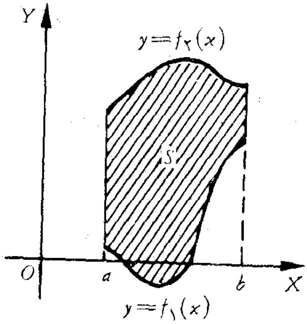
حل. در اینجا نقش محورهای مختصات باهم عوض شده است وبنابراین مساحت مورد نظر از انتگرال زیر بدست می‌آید:

$$S = \int_{-۲}^{۱} (۲ - y - y^۲)dy = ۴\frac{۱}{۲}$$

حدودانتگرال، یعنی $y_۱ = -۲$ و $y_۲ = ۱$، عرضهای نقاط تلاقی منحنی مفروض بامحور عرض‌اند.



شکل۴۲



شکل۴۳

در حالت کلی، وقتی که مساحت S محدود به دو منحنی پیوسته $y=f_۱(x)$ و $y=f_۲(x)$ ودوقائم $x=a$ و $x=b$ باشد، بشرطی که به‌ازای $a\leqslant x\leqslant b$ داشته باشیم: $f_۱(x)\leqslant f_۲(x)$ (شکل ۴۳)، خواهیم داشت:

$$S=\int_a^b[f_۲(x)-f_۱(x)]dx$$

مثال ۳. مطلوبست مساحت S، واقع بین منحنی‌های

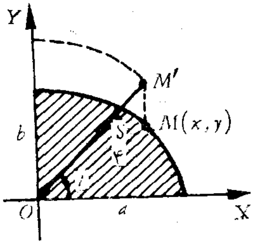
$$(۳)\qquad y^۳=x^۲\qquad y=۲-x^۲\qquad (\text{شکل}۴۴)$$

حل. از حل معادله‌های (۳)، حدود انتگرال پیدا می‌شود: $x_۱=-۱$ و $x_۲=۱$. با توجه به‌رابطهٔ (۲) بدست می‌آید:

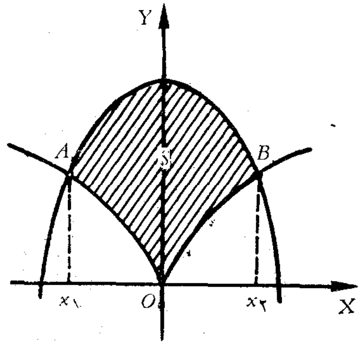
$$S=\int_{-۱}^{۱}(۲-x^۲-x^{\frac{۲}{۳}})\,dx=\left(۲x-\frac{x^۳}{۳}-\frac{۳}{۵}x^{\frac{۵}{۳}}\right)_{-۱}^{۱}=۲\frac{۲}{۱۵}$$

اگر منحنی با معادلاتی به‌صورت پارامتری داده‌شده باشد: $x=\varphi(t)$ ، $y=\psi(t)$، مساحت ذوزنقهٔ مختلط‌الخط محدود به این منحنی، دوقائم $x=a$ و $x=b$ وپاره خط محور OX با انتگرال زیر بیان می‌شود:

$$S=\int_{t_۱}^{t_۲}\psi(t)\varphi'(t)dt$$



شکل ۴۵



شکل ۴۴

که t_1 و t_2 از معادلات زیر بدست می‌آید:

$$a=\varphi(t_1) \quad \text{و} \quad b=\varphi(t_2)$$

در فاصلهٔ بستهٔ $[t_1, t_2]$ داریم: $\psi(t)\geqslant 0$.

مثال ۴. مطلوبست مساحت بیضی S (شکل ۴۵)، با استفاده از معادلهٔ پارامتری آن

$$x=a\cos t\ , \qquad y=b\sin t$$

حل . به علت متقارن بودن بیضی، کافی است مساحت یک ربع آنرا بدست آوریم و نتیجه‌ای را که بدست می‌آید چهار برابر کنیم. درمعادلهٔ $x=a\cos t$ ابتدا $x=0$ وسپس $x=a$ می‌گیریم، حدود انتگرال بدست می‌آید: $t_1=\frac{\pi}{2}$ و $t_2=0$. به‌این ترتیب:

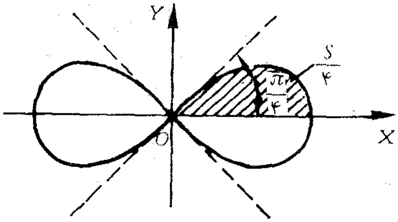
$$\frac{1}{4}S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt=ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\frac{\pi ab}{4}$$

وبنابراین: $S=\pi ab$.

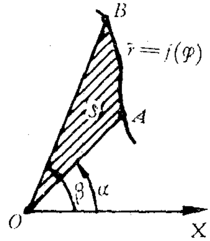
۲°. مساحت درمختصات قطبی. اگر منحنی پیوسته در مختصات قطبی بوسیلهٔ معادلهٔ $r=f(\varphi)$ داده شده باشد، مساحت قطاع AOB (شکل ۴۶)، که محدود به قوس منحنی و دو شعاع قطبی OA و OB، متناظر با مقادیر $\varphi_1=\alpha$ و $\varphi_2=\beta$ است، با انتگرال زیربدست می‌آید:

$$S=\frac{۱}{۲}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\varphi)]^{۲}d\varphi$$

مثال ۵. مطلوبست مساحت بین لمینسکات برنولی $r^{۲}=a^{۲}\cos ۲\varphi$ (شکل۴۷).



شکل۴۷



شکل۴۶

حل. باتوجه به متقارن بودن منحنی ابتدا یکچهارم مساحت موردنظررا بدستمی‌آوریم:

$$\frac{۱}{۴}S=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۴}}a^{۲}\cos ۲\varphi d\varphi=\frac{a^{۲}}{۲}\left[\frac{۱}{۲}\sin ۲\varphi\right]_{\circ}^{\frac{\pi}{۴}}=\frac{a^{۲}}{۴}$$

ازآنجا $S=a^{۲}$.

۱۶۲۳. مطلوبست مساحت محدود به سهمی $y=۴x-x^{۲}$ ومحور طول.

۱۶۲۴. مطلوبست مساحت محدود به منحنی $y=\ln x$، محورطول وخط $x=e$.

۲۶۲۵*. مطلوبست مساحت محدود به منحنی $g=x(x-۱)(x-۲)$ ومحور OX.

۱۶۲۶. مطلوبست مساحت محدود به منحنی $y^{۲}=x$، خط $y=۱$ وقائم $x=۸$.

۲۶۲۷. مطلوبست مساحت محدود به یك نیم موج سینوسی $y=\sin x$ ومحورطول.

۱۶۲۸. مساحت بین منحنی $y=tgx$، محورطول وخط $x=\frac{\pi}{۳}$ رابدست آورید.

۱۶۲۹. مساحت بین هذلولی $xy=m^{۲}$، قائمهای $x=a$ و $x=۳a$ $(a>\circ)$ و محور طول را محاسبه‌کنید.

۱۶۳۰. مطلوبست مساحت بین حلقهٔ آنه‌زا $y=\frac{a^{۳}}{x^{۲}+a^{۲}}$ و محورطول.

۱۶۳۱. مطلوبست مساحت محدود به منحنی $y=x^{۳}$، خط $y=۸$ و محور عرض.

۱۶۳۲. مساحت محدود به سهمی‌های $y^{2}=2px$ و $x^{2}=2py$ را بدست‌آورید.

۱۶۳۳. مساحت بین‌سهمی $y=2x-x^{2}$ و خط $y=-x$ را پیدا کنید.

۱۶۳۴. مساحت قطعه‌ای را که خط $y=3-2x$ از سهمی $y=x^{2}$ جدا می کند، محاسبه کنید.

۱۶۳۵. مساحت محدودبه‌سهمی‌های $y=x^{2}$، $y=\frac{x^{2}}{2}$ وخط $y=2x$ را بدست‌آورید.

۱۶۳۶. مطلوبست محاسبهٔ مساحت بین‌سهمی‌های $y=\frac{x^{2}}{3}$ و $y=4-\frac{2}{3}x^{2}$.

۱۶۳۷. مساحت بین‌حلقهٔ‌آنه‌زا $y=\frac{1}{1+x^{2}}$ و سهمی $y=\frac{1}{2}x^{2}$ را بدست آورید.

۱۶۳۸. مطلوبست مساحت محدود به‌منحنی‌های $y=e^{x}$ ، $y=e^{-x}$ و خط $x=1$.

۱۶۳۹. مطلوبست مساحت شکلی که به هذلولی $\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$ و خط $x=2a$ محدود است.

۱۶۴۰*. مطلوبست مساحت محدود به‌آستروئید

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

۱۶۴۱. مطلوبست مساحت بین منحنی زنجیری $y=a\,ch\frac{x}{a}$، محور OY و خط $y=\frac{a}{2e}(e^{2}+1)$.

۱۶۴۲. مساحت محدود به‌منحنی $a^{2}y^{2}=x^{2}(a^{2}-x^{2})$ را بدست آورید.

۱۶۴۳. مساحت داخل‌منحنی $\left(\frac{x}{5}\right)^{2}+\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ را پیدا کنید.

۱۶۴۴. مطلوبست مساحت بین هذلولی متساوی‌الساقین $x^{2}-y^{2}=9$، محور OX و قطری که از نقطهٔ $(5,4)$ عبور کرده است.

۱۶۴۵. مطلوبست مساحت بین منحنی $y=\frac{1}{x^{2}}$، محور OX وطول $x=1$.

۱۶۴۶*. مطلوبست مساحت محدود به سیکلوئید $y^{2}=\frac{x^{3}}{2a-x}$ ومجانب آن $x=2a$ $(a>0)$.

۱۶۴۷*. مطلوبست مساحت بین استره‌فوئید $y^2=\dfrac{x(x-a)^2}{2a-x}$ ومجانب آن $(a>0)$.

۱۶۴۸. مساحت دوقسمتی را پیدا کنید که در دایرهٔ $x^2+y^2=8$ بوسیلهٔ سهمی $y^2=2x$ بوجود می‌آید.

۱۶۴۹. مطلوبست مساحت بین دایرهٔ $x^2+y^2=16$ وسهمی $x^2=12(y-1)$.

۱۶۵۰. مطلوبست مساحت واقع در داخل آستروئید

$$x=a\cos^3 t \ ، \ y=b\sin^3 t$$

۱۶۵۱. مطلوبست مساحت محدود به‌محور OX و یك قوس سیکلوئید

$$x=a(t-\sin t) \ ، \ y=a(1-\cos t)$$

۱۶۵۲. مطلوبست مساحت محدود به‌یك شاخهٔ منحنی

$$\begin{cases} x=at-b\sin t \\ y=a-b\cos t \end{cases} \qquad (0<b\leqslant a)$$

ومماسهای برنقطه‌های پائینی آن.

۱۶۵۳. مطلوبست مساحت محدود به‌کاردیوئید

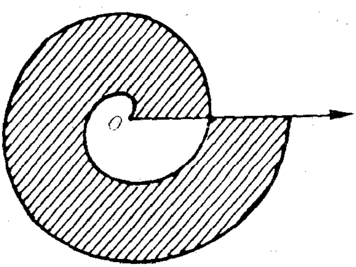
$$\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t) \\ y=a(2\sin t-\sin 2t) \end{cases}$$

۱۶۵۴*. مطلوبست مساحت حلقهٔ برگ دکارتی

$$x=\frac{3at}{1+t^3} \quad و \quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}$$

۱۶۵۵*. مطلوبست مساحت شکل محدود به‌کاردیوئید $r=a(1+\cos\varphi)$.

۱۶۵۶*. مطلوبست مساحت بین پیچهای اول ودوم پیچ ارشمیدس $r=a\varphi$ (شکل۴۸).



(شکل۴۸)

۱۶۵۷. مساحت یك برگ‌گل منحنی $r=a\cos 2\varphi$ راپیدا کنید.

۱۶۵۸. مطلوبست‌مساحت محدودبه‌منحنی $r^2=a^2\sin 4\varphi$.

۱۶۵۹*. مطلوبست مساحت محدود به منحنی $r=a\sin 3\varphi$.

۱۶۶۰. مطلوبست مساحت محدود به‌حلزون پاسکال $r = ۲ + \cos\varphi$.

۱۶۶۱. مطلوبست مساحت محدود به‌سهمی $r = a\sec^{۲}\frac{\varphi}{۲}$ ونیم خطهای $\varphi = \frac{\pi}{۴}$ و $\varphi = \frac{\pi}{۲}$.

۱۶۶۲. مطلوبست مساحت شکل محدود به‌بیضی

$$r = \frac{p}{۱ + \varepsilon\cos\varphi} \quad (۰ \leqslant \varepsilon < ۱)$$

۱۶۶۳. مطلوبست مساحت محدود به‌منحنی $r = ۲a\cos ۳\varphi$ که در خارج دایرهٔ $s = a$ قرارگرفته است.

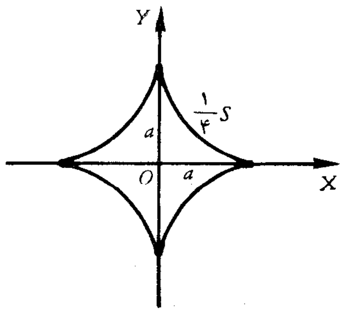
۱۶۶۴.** مطلوبست مساحت محدود به‌منحنی $x^{۴} + y^{۴} = x^{۲} + y^{۲}$.

۸. طول قوس منحنی

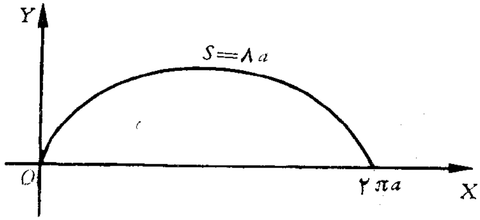
۱°. طول قوس دردستگاه مختصات قائم. طول s قوس منحنی مسطح $y = f(x)$، واقع دربین نقطه‌های به‌طولهای $x = a$ و $x = b$ برابراست با:

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{۱ + y'^{۲}}\, dx$$

مثال ۱. طول استروئید $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}}$ را پیداکنید(شکل۴۹).



شکل۴۹



شکل۵۰

حل. با مشتق‌گرفتن از معادلهٔ آستروئید، بدست می‌آید:

$$y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

بنابراین برای طول قوس یکچهارم آستروئید داریم:

$$\frac{1}{4}s = \int_{0}^{a} \sqrt{1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\, dx = \int_{0}^{a} \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx = \frac{3}{2}a$$

واز آنجا $s = 6a$.

۲°. طول‌قوس منحنی‌وقتی‌که‌به‌صورت پارامتری داده شده است. اگر منحنی بوسیلهٔ معادلات پارامتری $x = \varphi(t)$ و $y = \psi(t)$ ($\varphi(t)$ و $\psi(t)$ توابعی پیوسته ودارای مشتق‌اند) داده شده باشد، طول قوس منحنی برابراست با

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

t_1 و t_2 مقادیر پارامتر متناظر با دوانتهای قوس است.

مثال ۲. مطلوبست طول یکی از قوسهای سیکلوئید (شکل۵۰):

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

حل . داریم: $x' = \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$ و $y' = \frac{dy}{dt} = a\sin t$. بنابراین

$$s = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt = 2a\int_{0}^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 8a$$

حدود انتگرال: $t_1 = 0$ و $t_2 = 2\pi$ متناظر با دو انتهای قوس سیکلوئیدند.

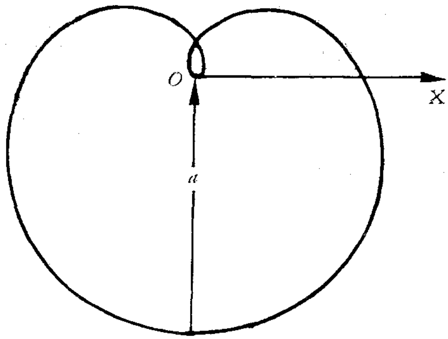
اگر منحنی بوسیلهٔ معادلهٔ $r = f(\varphi)$ در مختصات قطبی r و φ داده شده باشد، طـول

قوس s برابر است با

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^{2}+r'^{2}}\,d\varphi$$

α و β مقادیر زاویه‌های قطبی در دوانتهای قوس است .

مثال ۳. مطلوبست طول منحنی $r=a\sin^{3}\frac{\varphi}{3}$ (شکل ۵۱). تمام منحنی عبارتست از مکان نقطهٔ (r,φ) وقتی که φ از ۰ تا 3π تغییر کند.



شکل ۵۱

حل. داریم: $r'=a\sin^{2}\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$، بنابراین طول قوس تمام منحنی چنین است:

$$s=\int_{0}^{3\pi}\sqrt{a^{2}\sin^{6}\frac{\varphi}{3}+a^{2}\sin^{4}\frac{\varphi}{3}\cos^{2}\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=a\int_{0}^{3\pi}\sin^{2}\frac{\varphi}{3}d\varphi=\frac{3\pi a}{2}$$

۱۶۶۵. مطلوبست طول قوس سهمی نیم مکعبی $y^{2}=x^{3}$ از مبداء مختصات تا نقطهٔ $x=4$ ، $y=8$.

۱۶۶۶*. مطلوبست طول منحنی زنجیری $y=a\,ch\frac{x}{a}$ از رأس $A(0,a)$ تا نقطهٔ $B(b,h)$.

۱۶۶۷. مطلوبست طول قوس سهمی $y=2\sqrt{x}$ از $x=0$ تا $x=1$.

۱۶۶۸. مطلوبست طول قوسی ازمنحنی $y=e^x$ که بین نقطه‌های $(۰,۱)$ و $(۱,e)$ قرارگرفته است.

۱۶۶۹. مطلوبست طول قوس منحنی $y=lnx$ از $x=\sqrt{۳}$ تا $x=\sqrt{۸}$.

۱۶۷۰. مطلوبست طول قوس $y=arcsin(e^{-x})$ از $x=۰$ تا $x=۱$.

۱۶۷۱. مطلوبست طول قوس $x=lnsecy$ در فاصلهٔ $y=۰$ تا $y=\frac{\pi}{۳}$.

۱۶۷۲. مطلوبست طول قوس‌منحنی $x=\frac{۱}{۴}y^۲-\frac{۱}{۲}lny$ از $y=۱$ تا $y=e$.

۱۶۷۳. مطلوبست طول قوس شاخه راست تراکتریس

$$x=\sqrt{a^۲-y^۲}+aln\left|\frac{a+\sqrt{a^۲-y^۲}}{y}\right|$$

از $y=a$ تا $y=b$ $(۰<b<a)$.

۱۶۷۴. مطلوبست طول قسمت بستهٔ منحنی $۹ay^۲=x=x(x-۳a)^۲$.

۱۶۷۵. مطلوبست طــول قوس منحنی $y=ln(cth\frac{x}{۲})$ از $x=a$ تا $x=b$ $(۰<a<b)$.

۱۶۷۶*. مطلوبست طول قوس‌گستردهٔ دایره

$$\begin{cases} x=a(cost+tsint) \\ y=a(sint-tcost) \end{cases}$$

از $t=۰$ تا $t=T$.

۱۶۷۷. مطلوبست طول‌گستردهٔ (دولویه) بیضی

$$x=\frac{c^۲}{a}cos^۳t\ ,\quad y=\frac{c^۲}{b}sin^۳t \qquad (c^۲=b^۲-b^۲)$$

۱۶۷۸. مطلوبست طول منحنی

$$\begin{cases} x=a(۲cost-cos۲t) \\ y=a(۲sint-sin۲t) \end{cases}$$

۱۶۷۹. طول شاخهٔ اول پیچ ارشمیدس $r=a\varphi$ را پیداکنید.

۱۶۸۰. طول تمام‌کاردیوئید $r=a(۱+cos\varphi)$ را بدست آورید.

۱۶۸۱. مطلوبست طول قوس قسمتی از سهمی $r = a\sec^{2}\frac{\varphi}{2}$ که بوسیلهٔ خط قائم مار برقطب سهمی جدا می‌شود.

۱۶۸۲. مطلوبست طول قوس پیچ هذلولی $r\varphi = 1$ از نقطهٔ $(2, \frac{1}{2})$ تا نقطهٔ $(\frac{1}{2}, 2)$.

۱۶۸۳. مطلوبست طول قوس پیچ لگاریتمی $r = ae^{m\varphi}$ $(m>0)$، که در داخل دایرهٔ $r = a$ قرارگرفته است.

۱۶۸۴. مطلوبست طول قوس منحنی $\varphi = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$ از $r = 1$ تا $r = 3$.

۹. حجم اجسام

۱°. حجم جسم دوار. حجم جسمی که از دوران ذوزنقهٔ مختلط‌الخط محدود به‌منحنی $y = f(x)$، محور OX و دوقائم $x = a$ و $x = b$، دور محور OX و OY بدست می‌آید، بترتیب با روابط زیر معین می‌شود:

$$1)\quad V_X = \pi\int_a^b y^2 dx;\qquad 2)\quad V_Y = 2\pi\int_a^b xydx^*$$

مثال ۱. مطلوبست حجم جسمی که از دوران شکلی که محدود است به نیم‌دوره تناوب

*) فرض‌کنید جسمی از دوران ذوذنقهٔ مختلط‌الخط محدود به‌منحنی $y = f(x)$ و خطهای $x = a$ ، $x = b$ و $y = 0$ دورمحور OY بدست‌آمده‌باشد. به‌عنوان عنصرحجم این‌جسم، حجم قسمتی‌از جسم‌را قبول‌کنیدکه از دوران مستطیل به‌اضلاع y و dx (که به‌فاصلهٔ x از محور OY قرارگرفته‌است) دورمحور OY بدست‌آمده‌باشد. دراین‌صورت عنصر حجم چنین‌است: $dV_Y = 2\pi xydx$ واز آنجا بدست می‌آید:

$$V_Y = 2\pi\int_a^b xydx$$

منحنی سینوسی $y=\sin x$ و پاره خط $0\leqslant x\leqslant \pi$ از محور OX، a) دور محور OX و b) دور محور OY بدست می‌آید.

حل.

$$a)\quad V_X=\pi\int_0^\pi \sin^2 x dx=\frac{\pi^2}{2};$$

$$b)\quad V_Y=2\pi\int_0^\pi x\sin x dx=2\pi(-x\cos x+\sin x)\Big|_0^\pi=2\pi^2$$

حجم جسمی را که از دوران شکل محدود به‌منحنی $x=g(y)$، محور OY و دو خط موازی $y=c$ و $y=d$، دور محور OY بدست می‌آید، می‌توان از رابطهٔ زیر معین کرد:

$$V_Y=\pi\int_c^d x^2 dy$$

که از رابطهٔ (۱ قبلی با تبدیل x و y به‌یکدیگر بدست آمده است.

اگرمنحنی به‌صورت دیگری داده شده باشد (به‌صورت پارامتری، در دستگاه مختصات قطبی وغیره)، در روابط مربوط به‌محاسبهٔ حجم باید در متغیر انتگرال تغییر لازم را انجام داد.

در حالت کلی‌تر، حجم جسمی که از دوران شکل محدود به‌منحنی‌های $y_1=f_1(x)$ و $y_2=f_2(x)$ (ضمناً $f_1(x)\leqslant f_2(x)$) وخطهای $x=a$ و $x=b$، دور محور OX یا OY بدست می‌آید، بترتیب از روابط زیر معین می‌شود:

$$V_X=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)dx;\qquad V_Y=2\pi\int_a^b x(y_2-y_1)dx$$

مثال ۲. مطلوبست حجم چنبرهٔ(تور $tore$) حاصل از دوران سطح دایرهٔ $x^2+(y-b)^2\leqslant a^2$ $(b\geqslant a)$ دور محور OX (شکل ۵۲).

حل. داریم:

$$y_1=b-\sqrt{a^2-x^2}\ \text{و}\ y_2=b+\sqrt{a^2-x^2}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$V_X = \pi \int_{-a}^{a} [(b+\sqrt{a^۲-x^۲})^۲ - (b-\sqrt{a^۲-x^۲})^۲]dx =$$

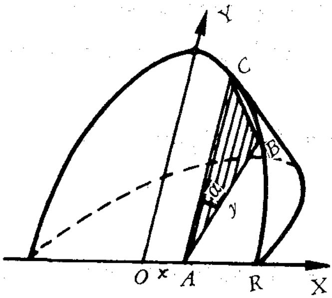
$$= ۴\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^۲-x^۲}dx = ۲\pi^۲ a^۲ b$$

(انتگرال اخیر با تبدیل $x = a\sin t$ بدست می‌آید).

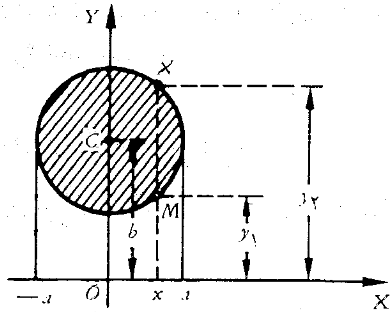
حجم جسمی را که از دوران قطاع محدود به‌قوس منحنی $r = F(\varphi)$ و دوشعاع قطبی $\varphi = \alpha$ و $\varphi = \beta$، دور محور قطبی بدست می‌آید، می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$V_P = \frac{۲}{۳}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^۳ \sin\varphi d\varphi$$

از همین رابطه می‌توان برای محاسبهٔ حجم‌جسمی که از دوران شکل محدود بیك منحنی بسته (که در مختصات قطبی داده شده است)، دورمحور قطبی بدست می‌آید، محاسبه کرد.



شکل ۵۳



شکل ۵۲

مثال ۳. مطلوبست حجمی که ازدوران سطح محدودبه‌منحنی $r = a\sin ۲\varphi$ دورمحور قطبی بدست می‌آید.

حل. داریم:

$$V_P = ۲ \cdot \frac{۲}{۳}\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} r^۳ \sin\varphi d\varphi = \frac{۴}{۳}\pi a^۳ \int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۳ ۲\varphi \sin\varphi d\varphi =$$

$$=\frac{۳۲}{۳}\pi a^۳\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sin^۴\varphi cos^۳\varphi d\varphi=\frac{۶۴}{۱۰۵}\pi a^۳$$

۴۰. محاسبهٔ حجم به‌کمك مقطع عرضی‌آن. اگر $S=S(x)$ مساحت مقطع جسم با صفحهٔ عمود بریك خط (که‌آنرا محور OX می‌گیریم) درنقطهٔ به‌طول oc باشد، حجم این‌جسم چنین است:

$$V=\int_{X_۱}^{X_۲} S(x)dx$$

که درآن $x_۱$ و $x_۲$ طولهای دوطرف مقطع جسم‌اند.

مثال ۴. استوانهٔ دواری به‌شعاع قاعدهٔ R مفروض است. از یك قطر قاعده صفحه‌ای چنان‌گذرانده‌ایم که با قاعده زاویه‌ای مساوی α ساخته است. مطلوبست حجم قسمتی‌ازاستوانه که با این صفحه ازآن جدا می‌شود (شکل۵۳).

حل. قطری ازقاعده راکه صفحهٔ مقطع ازآن‌گذشته است، محور OX وقطری ازقاعده‌را که عمود برآنست محور OY می‌گیریم. معادلهٔ دایرهٔ قاعده چنین است:

$$x^۲+y^۲=R^۲$$

مساحت مقطع ABC که به‌فاصلهٔ x از مبداء O قرارگرفته است چنین‌است:

$$S(x)=S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\cdot BC=\frac{۱}{۲}y\cdot ytg\alpha=\frac{y^۲}{۲}tg\alpha$$

بنابراین حجم مورد نظرچنین‌است:

$$V=۲\cdot\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{R} y^۲tg\alpha dx=tg\alpha\int_{۰}^{R}(R^۲-x^۲)dx=\frac{۲}{۳}R^۳tg\alpha$$

۱۶۸۵. مطلوبست حجم جسمی‌که از دوران شکل محدود به محـور OX و سهمی $y=ax-x^۲$ $(a>۰)$ دور محور OX بدست می‌آید.

۱۶۸۶. مطلوبست حجم بیضوی‌که ازدوران بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ دور محور OX بدست آمده است.

۱۶۸۷. مطلوبست حجم حاصل از دوران سطح محدود به‌منحنی زنجیری $y = ach\dfrac{x}{a}$، محور OX وخطهای $x = \pm a$ دورمحور OX.

۱۶۸۸. مطلوبست حجمی که از دوران سطح محدود به‌منحنی $y = sin^2 x$ در فاصلهٔ $x = 0$ تا $x = \pi$ دورمحور OX بدست می‌آید.

۱۶۸۹. حجمی را که از دوران سطح محدود به سهمی نیم مکعبی $y^2 = x^3$، محور OX وخط $x = 1$ دور محور OX بدست می‌آید، پیدا کنید.

۱۶۹۰. حجم جسمی را پیدا کنید که از دوران همان سطح مسئلهٔ ۱۶۸۹ دور محور OY بدست می‌آید.

۱۶۹۱. مطلوبست حجم جسمی که از دوران سطح محدود به منحنی $y = e^x$ وخطهای $x = 0$، $y = 0$ دور a) محور OX و b) محور OY بدست می‌آید.

۱۶۹۲. قسمتی از سهمی $y^2 = 4ax$ را که بوسیلهٔ خط $x = a$ جدا شده است، دور محور OY دوران داده‌ایم، حجم جسم حاصل را بدست‌آورید.

۱۶۹۳. قسمتی از بیضی $y^2 = 4ax$ را که بوسیلهٔ خط $x = a$ جدا شده است، دور همین خط دوران داده‌ایم، حجم جسمی را که بدست می‌آید، حساب کنید.

۱۶۹۴. شکلی را که محدود به‌سهمی $y^2 = 2px$ و خط $x = \dfrac{p}{2}$ است دور خط $y = -p$ دوران داده‌ایم، حجم حاصل را بدست‌آورید.

۱۶۹۵. سطح بین سهمی‌های $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ را دور محور OX دوران داده‌ایم، حجم جسم حاصل را بدست آورید.

۱۶۹۶. سطح محدود به‌منحنی حلقهٔ $(x - 4a)y^2 = ax(x - 3a)$ $(a > 0)$ را دور محور OX دوران داده‌ایم، حجم حاصل را پیدا کنید.

۱۶۹۷. سیکلوئید $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ را دور مجانب آن $x = 2a$ دوران داده‌ایم، حجم جسم حاصل را بدست‌آورید.

۱۶۹۸. مطلوبست حجم سهموی (پارابولوئید) دواری که شعاع قاعدهٔ آن مساوی R و ارتفاعش مساوی H باشد.

۱۶۹۹. قطعه‌ای از سهمی به‌قاعدهٔ $2a$ و ارتفاع h را دور قاعده‌اش دوران داده‌ایم. مطلوبست حجم جسم دواری که به‌این ترتیب بدست می‌آید.

۱۷۰۰. هذلولی متساوی‌الساقین $x^۲ - y^۲ = a^۲$ را دور محور OX دوران داده‌ایم ثابت کنید حجمی که صفحهٔ $x = ۲a$ از این جسم جدا می‌کند برابر است با حجم کره‌ای به شعاع a.

۱۷۰۱. شکلی راکه محدود به‌یك قوس سیکلوئید $(x = a[t - sint]$، $y = a(۱ - cost)$ و محور OX است: a) دورمحور OX، b) دورمحور OY، c) دور محور تقارن شکل دوران داده‌ایم. مطلوبست حجم هریك از جسمهای حاصل.

۱۷۰۲. آستروئید $x = acos^۳t$، $y = a\,sin^۳t$ را دور محـور OY دوران داده‌ایـم. مطلوبست حجم جسم حاصل.

۱۷۰۳. کاردیوئید $r = a(۱ + cos\varphi)$ را دور محور قطبی دوران داده‌ایم. حجم‌جسم حاصل را بدست‌آورید.

۱۷۰۴. مطلوبست حجم حاصل از دوران سطح محـدود به‌منحنی $r = acos^۲\varphi$ دور محورقطبی.

۱۷۰۵. مطلوبست حجم هرم ناقصی‌که دو قاعدهٔ آن مستطیلهائی به‌اضلاع A، B و a،b وارتفاع مساوی h باشد.

۱۷۰۶. حجم مخروط قائمی را پیداکنیدکه قاعدهٔ آن یك بیضی با نیم قطرهای‌مساوی a و b وارتفاع آن مساوی h باشد.

۱۷۰۷. روی وترهای آستروئید $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}}$ که موازی محور OX هستند، مربعهائی به ضلع مساوی طول وتر چنان ساخته‌ایم که صفحهٔ آنها برصفحهٔ XOY عمود باشد. مطلوبست حجم جسمی که از این مربعها درست شده است.

۱۷۰۸. دایره‌ای چنان جابجا می‌شودکه یکی از نقاط محیط آن برمحور OY واقع است، مرکز آن بیضی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ را رسم می‌کند وصفحهٔ دایره برصفحهٔ XOY عمود است. مطلوبست حجم جسمی که دایره بوجود می‌آورد.

۱۷۰۹. صفحهٔ یك مثلث متحرك برقطرثابت دایره‌ای به شعاع a عمود است. قـاعدهٔ مثلث وتری از دایره است ورأس‌آن روی خطی موازی با قطرثابت وبه فاصلهٔ h از صفحهٔ‌دایره می‌لغزد. مطلوبست حجم جسمی که با حرکت این مثلث ازیك انتها تا انتهای دیگرقطر، بدست می‌آید (این جسم راکونوئیدگویند).

۱۷۱۰. مطلوبست حجم مشترك استوانه‌های $x^۲ + z^۲ = a^۲$ و $y^۲ + z^۲ = a^۲$.

۱۷۱۱. مطلوبست حجمی که صفحهٔ $x = a$ ازجسم $\frac{z^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} \leqslant x$ جدا می کند .

۱۷۱۲. مطلوبست حجم جسم محدود به‌سطح $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ وصفحه‌های $z = 0$ و $z = h$.

۱۷۱۳. مطلوبست حجم بیضــوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

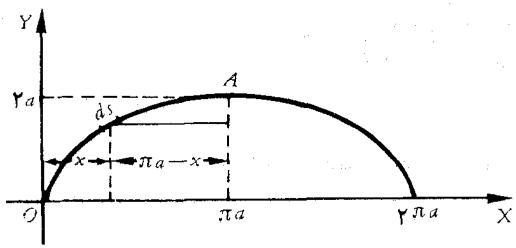
۱۰. مساحت سطوح دوار

مساحت سطحی که از دوران‌قوس منحنی مسطح $y = f(x)$ درفاصلهٔ $x = a$ و $x = b$ دور محور OX بدست می آید، از رابطهٔ زیر معین می‌شود:

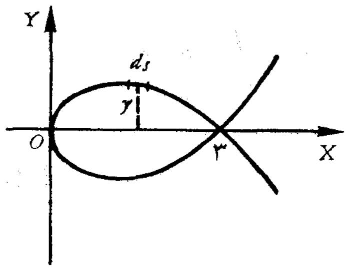
$$S_X = 2\pi \int_a^b y \frac{ds}{dx} dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx \quad (1)$$

(ds عبارتست از دیفرانسیل قوس منحنی).

درحالتی که معادلهٔ منحنی به‌صورت دیگری داده شده باشد، مساحت سطح S_X از رابطهٔ (۱) وبا تغییر مناسب متغیر بدست می آید.



شکل۵۵



شکل۵۴

مثال ۱. مطلوبست سطح حاصل ازدوران حلقهٔ منحنی $9y^2 = x(3-x)^2$ دورمحور OX (شکل ۵۴).

حل . برای قسمت بالائی منحنی به‌ازای $0 \leqslant x \leqslant 3$ داریم:

$$y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$$

از آنجا دیفرانسیل قوس چنین است: $ds = \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}dx$. بنابررابطهٔ (۱) سطح مطلوب چنین است:

$$S = 2\pi\int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x} \cdot \frac{x+1}{2\sqrt{x}}dx = 3\pi$$

مثال ۲. مطلوبست سطح حاصل از دوران یك قوس سیکلوئید $x = a(t - \sin t)$، $y = a(1 - \cos t)$ دور محور تقارن آن (شکل ۵۵).

حل. سطح مورد نظر از دوران قوس OA دور خط AB، به معادلهٔ $x = \pi a$، بدست می‌آید. y را به عنوان متغیر مستقل در نظر می‌گیریم، چون محور دوران AB به‌فاصلهٔ πa از از محور OY قرارگرفته است، خواهیم داشت:

$$S = 2\pi\int_0^{2a} (\pi a - x)\frac{ds}{dy} \cdot dy$$

که با درنظرگرفتن متغیر t، بدست می‌آید:

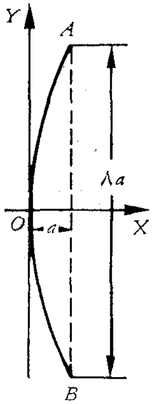
$$S = 2\pi\int_0^{\pi} (\pi a - at + a\sin t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} (\pi a - at + a\sin t)2a\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{\pi} \left(\pi\sin\frac{t}{2} - t\sin\frac{t}{2} + \sin t\sin\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= 4\pi a^2 \left[-2\pi \cos\frac{t}{2} + 2t\cos\frac{t}{2} - 4\sin\frac{t}{2} + \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2} \right]_0^{\pi} = 8\pi\left(\pi - \frac{4}{3}\right)a^2$$

۱۷۱۴. اندازه‌های آئینهٔ سهموی (پارابولوئید) AOB در شکل ۵۶ داده شده است. می‌خواهیم مساحت سطح این آئینه را پیدا کنیم.



شکل ۵۶

۱۷۱۵. مطلوبست مساحت سطح دوکی که از دوران یک نیم موج منحنی‌سینوسی $y = \sin x$ دور محور OX بدست‌می‌آید.

۱۷۱۶. مطلوبست مساحت سطحی که از دوران منحنی تانژانتی $y = tg x$ درفاصلهٔ $x = 0$ تا $x = \frac{\pi}{4}$ دور محور OX بدست می‌آید.

۱۷۱۷. قوس‌منحنی $y = e^{-x}$ را از $x = 0$ تا $x = +\infty$ دورمحور OX دوران داده‌ایم، مطلوبست مساحت سطحی که بدست می‌آید.

۱۷۱۸. مطلوبست مساحت سطحی که از دوران منحنی زنجیری $y = ach\frac{x}{a}$ دورمحور OX در فاصلهٔ $x = 0$ تا $x = a$ بدست می‌آید (این سطح را کاته‌نوئیدگویند).

۱۷۱۹. مطلوبست مساحت سطحی که از دوران آستروئید $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ دور محور OY بدست می‌آید.

۱۷۲۰. مطلوبست مساحت سطح‌حاصل از دوران منحنی $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ دورمحور OX درفاصلهٔ از $y = 1$ تا $y = e$.

۱۷۲۱*. مطلوبست مساحت چنبرهٔ (تور $tore$) حاصل از دوران دایرهٔ $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ دور محور OX $(b > a)$.

۱۷۲۲. مطلوبست مساحت سطح حاصل از دوران بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ دور:

۱) محور OX؛ ۲) محور OY $(a > b)$

۱۷۲۳. مطلوبست مساحت سطحی که از دوران یك قوس سیکلوئید ($x = a(t - \sin t)$ و $y = a(1 - \cos t)$) دور: a) محور OX؛ b) محور OY؛ c) مماس بر سیکلوئید در بالاترین

نقطهٔ آن، بدست می‌آید.

۱۷۲۴. مطلوبست مساحت سطح حاصل ازدوران کاردیوئید

$$\begin{cases} x = ۲(۲cost - cos۲t) \\ y = a(۲sint - sin۲t) \end{cases}$$

دورمحور OX.

۱۷۲۵. مطلوبست سطح حاصل ازدوران لمینسکات $r^۲ = a^۲cos۲\varphi$ دورمحورقطبی.

۱۷۲۶. مطلوبست سطح‌حاصل‌ازدوران‌کاردیوئید $r = ۲a(۱ + cos\varphi)$ دورمحورقطبی.

۱۱. گشت آور. مرکز ثقل. قضیهٔ گولدن

۱°. گشت‌آور آماری. گشت‌آورآماری‌نقطهٔ مادی A به‌جرم m و به‌فاصلهٔ d ازمحور l، نسبت به‌محور l عبارتست ازمقدار $M_۱ = md$.

گشت‌آور آماری مجموعهٔ n نقطهٔ مادی به جرمهای $m_۱, m_۲, \ldots, m_n$ که با محور l در یك صفحه واقع وبه فاصلهٔ $d_۱, d_۲, \ldots, d_n$ از آن باشند، نسبت به محور l عبارتست ازمجموع

$$M_۱ = \sum_{i=۱}^{n} m_i d_i \qquad (۱)$$

ضمناً فواصل مربوط به‌نقطه‌هائی‌که یك‌طرف محور l قرارگرفته‌اند با علامت مثبت (+) وفواصل مربوط به‌بقیهٔ نقطه‌هاباعلامت منفی (−) انتخاب می‌شود. بهمین‌ترتیب می‌توان گشت‌آور آماری دستگاه نقاط رانسبت بیك‌صفحه تعریف کرد.

اگرجرم بطور پیوسته یك منحنی یا یك‌شکل از صفحهٔ XOY را پر کرده باشد، در اینصورت گشت‌آور آماری M_X و M_Y را نسبت به‌محورهای مختصات OX و OY، بجای مجموع (۱)، ازانتگرالهای مربوطه بدست‌می‌آورند. در موردشکلهای هندسی، تکاثف راواحد می‌گیرند.

در حالتهای خاص: ۱) برای منحنی $x = x(s)$ ؛ $y = y(s)$، که پارامتر s طول قوس است، داریم:

$$M_X=\int\limits_{\circ}^{L}y(s)ds \quad ; \quad M_Y=\int\limits_{\circ}^{L}x(s)ds \qquad (۲)$$

($ds=\sqrt{(dx)^۲+(dy)^۲}$ دیفرانسیل قوس است)؛

۲) برای شکل مسطح محدود به‌منحنی $y=y(x)$، محور OX و دو قائم $x=a$ و $x=b$، بدست می‌آید:

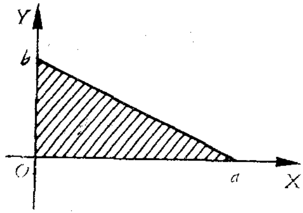
$$M_X=\frac{۱}{۲}\int\limits_{a}^{b}y|y|dx \quad ; \quad M_Y=\int\limits_{a}^{b}x|y|dx \qquad (۳)$$

مثال ۱. مطلوبست گشتاور آماری مثلث محدود به‌خطهای $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱$ ،$x=\circ$، $y=\circ$ نسبت به‌محورهای OX و OY (شکل ۵۷).

حل. در اینجا $y=b(۱-\frac{x}{a})$ است. با استفاده از روابط (۳) بدست می‌آید:

$$M_X=\frac{b^۲}{۲}\int\limits_{\circ}^{a}(۱-\frac{x}{a})^۲\,dx=\frac{ab^۲}{۶};$$

$$M_Y=b\int\limits_{\circ}^{a}x(۱-\frac{x}{a})\,dx=\frac{a^۲b}{۶}$$



شکل ۵۷

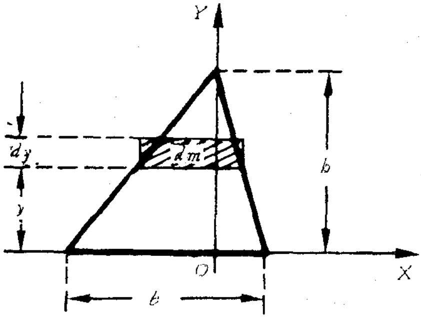
۲°. گشتاور ماند. گشتاور ماند نقطهٔ مادی به‌جرم m و به‌فاصلهٔ d از محور l، نسبت به‌این محور به‌عدد $I_l=md^۲$ گفته می‌شود.

گشتاور ماند مجموعهٔ n نقطهٔ مادی به‌جرمهای $m_۱$، $m_۲$، ...، m_n، نسبت به‌محور l، به‌مجموع زیر گفته می‌شود:

$$I_l=\sum_{i=۱}^{n}m_id_i^۲$$

که در آن $d_۱$، $d_۲$، ...، d_n عبارتند ازفواصل این نقطه‌ها از محور l. درحالتی که مجموعهٔ نقطه‌ها پیوسته باشد، بجای مجموع، انتگرال نظیر آن انتخاب می‌شود.

مثال ۲. مطلوبست گشتاورماند مثلث به‌قاعدهٔ b وارتفاع h نسبت به‌قاعدهٔ آن.



شکل ۵۸

حل. قاعدهٔ مثلث را به عنوان محور OX وارتفاع آنرابه‌عنوان محور OYدرنظر می‌گیریم (شکل۵۸).

مثلث را به بی‌نهایت نوار باریك افقی به عرض dy تقسیم می‌کنیم، این نوارها نقش جرمهای ابتدائی d_m را به‌عهده دارند. با استفاده از تشابه مثلثها بدست می‌آید:

$$dm = b\frac{h-y}{h}dy$$

و

$$dI_X = y^2 dm = \frac{b}{h}y^2(h-y)dy$$

ازآنجا:

$$I_X = \frac{b}{h}\int_0^h y^2(h-y)dy = \frac{1}{12}bh^3$$

۳°. مرکز ثقل. مختصات مرکز ثقل. یك شکل مسطح (قوس یا سطح) به جرم M از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{M_Y}{M} \quad و \quad \bar{y} = \frac{M_X}{M}$$

که در آن M_X و M_Y، گشت‌آورهای آماری جرم‌اند. در مورد شکلهای هندسی جرم M از لحاظ عددی برابر است با طول قوس یا مساحت متناظر.

برای مختصات مرکز ثقل $(\bar{x}, \bar{y})$ قوس منحنی مسطح $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$، که دونقطهٔ $A\big(a, f(a)\big)$ و $B\big(b, f(b)\big)$ را بهم وصل می‌کند، داریم:

$$\bar{x} = \frac{\int_A^B x\,ds}{s} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx} \quad و \quad \bar{y} = \frac{\int_A^B y\,ds}{s} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx}{\int_o^b \sqrt{1+(y')^2}dx}$$

مختصات مرکـز ثقل $(\bar{x}, \bar{y})$ ذوزنقه مختلطالخط $a \leqslant x \leqslant b$ ، $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ را می‌توان از روابط زیر بدست آورد:

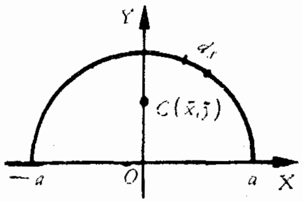
$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xy\,dx}{S} \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{S}$$

که در آن $S = \int_a^b y\,dx$ عبارتست ازمساحت شکل.

رابطهٔ مشابهی برای محاسبهٔ مختصات مرکز ثقل جسم وجود دارد.

مثال ۳ . مطلوبست مرکزثقل قوس نیمدایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ $(y \geqslant 0)$ (شکل۵۹).

حل . داریم:



شکل۵۹

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \;;\quad y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$M_Y = \int_{-a}^{a} x\,ds = \int_{-a}^{a} \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = 0,$$

$$M_X = \int_{-a}^{a} y\,ds = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2a^2 \;,\; M = \int_{-a}^{a} \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi a$$

وبنابراین:

$$\bar{x} = 0,\; \bar{y} = \frac{2}{\pi}a$$

۴۰. قضایای گولدن:

قضیهٔ ۱. مساحت سطح حاصل از دوران قوس یك منحنی مسطح دور محوری که در صفحهٔ منحنی واقع شده و آنرا قطع نمی‌کند، برابراست با حاصلضرب طول قوس در محیط دایره‌ای که مرکز ثقل قوس ضمن دوران طی می‌کند.

قضیهٔ ۲. حجم جسم حاصل از دوران یك شکل مسطح دورمحوری که درصفحهٔ شکل قرار دارد و آنرا قطع نمی‌کند، برابراست با حاصلضرب مساحت این شکل درمحیط دایره‌ای که مرکز ثقل شکل ضمن دوران طی می‌کند.

۱۷۲۷. مطلوبست گشت‌آور آماری پاره‌خطی ازخط

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱$$

که بین محورهای مختصات قرارگرفته است، دور هریك ازمحورهای مختصات.

۱۷۲۸. مطلوبست گشت‌آور آماری مستطیلی به‌اضلاع a و b نسبت به‌ضلع آن.

۱۷۲۹. گشت‌آور آماری مثلث محدود به‌خطهای $x+y=a$ ، $x=۰$ و $y=۰$ را نسبت به محورهای OX و OY وهمچنین مختصات مرکز ثقل مثلث را بدست‌آورید.

۱۷۳۰. مطلوبست گشت‌آور آماری قوسی ازآستروئید

$$x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$$

که در ربع اول قرارگرفته است، نسبت به‌محورهای OX و OY و همچنین مختصات مرکز ثقل آن.

۱۷۳۱. مطلوبست گشت‌آور آماری دایرهٔ $r=۲a\sin\varphi$ نسبت به‌محور قطبی آن.

۱۷۳۲. مطلوبست مختصات مرکزثقل قوس منحنی زنجیری

$$y=a\,ch\frac{x}{a}$$

درفاصلهٔ $x=-a$ تا $x=a$.

۱۷۳۳. مطلوبست مرکزثقل دایرهٔ به‌شعاع a، که مقابل زاویهٔ مرکزی ۲α قرار گرفته است.

۱۷۳۴. مطلوبست مختصات مرکزثقل‌اولین قوس سیکلوئید

$$x=a(t-\sin t)\ ,\ y=a(۱-\cos t)\quad (۰\leqslant t\leqslant ۲\pi)$$

۱۷۳۵. مطلوبست مختصات مرکزثقل شکل محدود به‌بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ ومحورهای مختصات OX و OY $(x\geqslant ۰\ ,\ y\geqslant ۰)$.

۱۷۳۶. مطلوبست مختصات مرکزثقل شکل محدود به منحنی‌های

$$y=x^۲,\ y=\sqrt{x}$$

۱۷۳۷. مطلوبست مختصات مرکز ثقل شکل محدود به‌قوس اول سیکلوئید
$$x = a(t - \sin t)\ ,\ y = a(1 - \cos t)$$
ومحور OX.

۱۷۳۸**. مطلوبست مرکز ثقل سطح نیمکرهٔ به‌شعاع a و به‌مرکز مبداء مختصات که دربالای صفحهٔ XOY قرار گرفته است.

۱۷۳۹**. مطلوبست مرکز ثقل مخروط قائم دوار ومتجانسی که شعاع قاعدهٔ آن‌مساوی r وارتفاعش مساوی h باشد.

۱۷۴۰**. مطلوبست مرکز ثقل نیمکرهٔ متجانس به‌شعاع a و مرکز مبداء مختصات و واقع دربالای صفحهٔ XOY.

۱۷۴۱. مطلوبست گشت‌آورماند محیط دایرهٔ به‌شعاع a نسبت به‌قطر آن.

۱۷۴۲. مطلوبست‌گشت‌آور ماند مستطکیل به اضلاع a و b نسبت به ضلع آن.

۱۷۴۳. مطلوبست گشت‌آور ماند قطعه سهمی قائم به‌قاعدهٔ $2l$ و ارتفاع h نسبت به محور تقارن آن.

۱۷۴۴. گشت‌آور ماند سطح بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را نسبت به محـورهای آن پیدا کنید.

۱۴۷۵**. مطلوبست گشت آور مـاند قطبی حلقـهٔ دایره‌ای به‌شعاعهـای R_1 و R_2 $(R_2 < R_1)$، یعنی گشت‌آورماند نسبت به‌محوری که ازمرکز حلقه می‌گذرد وبرصفحهٔ آن عمود است.

۱۷۴۶**. مطلوبست‌گشت‌آورماند مخروط قائم دوار ومتجانسی که شعاع قاعدهٔ آن R وارتفاعش H است،نسبت به‌محور آن.

۱۷۴۷**. گشت‌آورماندکرهٔ متجانس به‌شعاع a و جـرم M را نسبت به‌قطر آن پیدا کنید.

۱۷۴۸. مطلوبست سطح وحجم چنبره‌ای $(tore)$ که از دوران دایرهٔ به‌شعـاع a دور محوری که درصفحهٔ دایره قرار دارد و به‌فاصلهٔ b از مرکز آن قرار دارد $(b \leqslant a)$، بدست آمده باشد.

۱۷۴۹. a) مطلوبست وضع مرکز ثقل قوسی از آستروئید $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ کـه در ربع اول قرار دارد.

b) مطلوبست مرکز ثقل شکل محدود به‌منحنی‌های $y^{۲} = ۲px$ و $x^{۲} = ۲py$.

۱۷۵۰.** a) با استفاده ازقضیهٔ‌گولدن، مرکز ثقل نیمدایره را بدست‌آورید.

b) با استفاده ازقضیهٔ‌گولدن، ثابت‌کنیدکه مرکز ثقل مثلث ازقاعدهٔ آن به‌فاصله یك سوم ارتفاع قرار دارد.

۱۲. کاربرد انتگرالهای معین درحل‌مسائل فیزیك

۱°. **راهی‌که یك نقطه طی می‌کند.** اگرنقطه‌ای روی یك منحنی حرکت‌کند و مقدار مطلق سرعت‌آن $v = f(t)$ تابع مفروضی از زمان t باشد، راهی راکه نقطه در فاصلهٔ زمانی $[t_{۱}, t_{۲}]$ طی‌می‌کند، برابراست با:

$$s = \int_{t_{۲}}^{t_{۱}} f(t)dt$$

مثال ۱. سرعت نقطه‌ای $v = ۰,۱t^{۳}$ متر درثانیه است. مطلوبست s، راهی‌که نقطهٔ در فاصلهٔ $T = ۱۰$ ثانیه از ابتدای حرکت، طی می‌کند. سرعت متوسط دراین فاصله چقدر است؟

حل. داریم:

$$s = \int_{۰}^{۱۰} ۰,۱t^{۳}dt = ۰,۱\left.\frac{t^{۴}}{۴}\right|_{۰}^{۱۰} = ۲۵۰ \ (\text{متر})$$

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{S}{T} = ۲۵ \ (\text{متر بر ثانیه})$$

۲°. **کارنیرو.** اگر نیروی متغیر $X = f(x)$ درجهت محور OX عمل‌کند، کار نیرو روی پاره خط $[x_{۱}, x_{۲}]$ برابر است با

$$A = \int_{x_{۱}}^{x_{۲}} f(x)dx$$

مثال ۲. اگر به‌طول فنری با نیروی یك‌کیلوگرم به‌اندازهٔ یك سانتیمتر اضافه شود، چه‌کاری باید انجام بگیرد تا ۶ سانتیمتر به‌طول فنر اضافه شود؟

حل. نیروی x کیلوگرم که x متر به‌طول فنر اضافه کند، طبق قانون هوك برابر است با: $X = kx$، که در آن k عبارتست ازضریب نسبت.

اگر (متر) ۰٫۰۱ = x و (کیلوگرم) ۱ = X فرض کنیم، ۱۰۰ = k بدست می‌آید و بنابراین $X = ۱۰۰x$. از آنجا کار مورد نظر چنین است:

$$A = \int_{۰}^{۰٫۰۶} ۱۰۰x\,dx = ۵۰x^۲ \Big|_{۰}^{۰٫۰۶} = ۰٫۱۸ \text{ (کیلوگرم متر)}$$

۵۳. انرژی جنبشی. انرژی جنبشی نقطهٔ مادی به‌جرم m و سرعت v بـه‌عبارت زیر گفته می‌شود:

$$K = \frac{mv^۲}{۲}$$

انرژی جنبشی مجموعهٔ n نقطهٔ مادی به‌جرمهای $m_۱$،$m_۲$،...،m_n وسرعتهای متناظر $v_۱$، $v_۲$،...،v_n برابراست با:

$$K = \sum_{i=۱}^{n} \frac{m_i v_i^{\,۲}}{۲} \qquad (۱)$$

برای محاسبهٔ انرژی جنبشی جسم، آنرا به‌قسمتهای جزئی (که نقش نقطه‌های مادی را دارند) تقسیم می‌کنیم وسپس مجموع انرژیهای جنبشی این‌قسمتها را بدست می‌آوریم، درحد بجای مجموع (۱) می‌توان انتگرال آنرا درنظر گرفت.

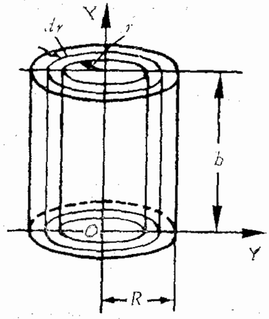
مثال ۳. مطلوبست انرژی جنبشی استوانهٔ دوار متجانسی که چگالی آن δ، شعاع قاعده‌اش R وارتفاعش مساوی h باشد ودور محور خودش با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد.

حل. به عنوان جرم جزئی dm، جرم استوانهٔ مجوفی را می‌گیریم که ارتفاع آن h، شعاع داخلیش r و ضخامت دیوارهٔ آن dr باشد (شکل ۶۰). داریم:

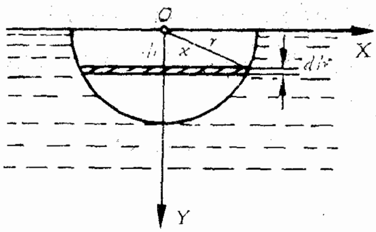
$$dm = ۲\pi r \cdot h\delta dr$$

چون سرعت خطی جرم dm برابراست با $v = r\omega$، انرژی جنبشی جزئی‌چنین است:

$$dK = \frac{v^۲ dm}{۲} = \pi r^۳ \omega^۲ h\delta dr$$



شکل ۶۰



شکل ۶۱

واز آنجا
$$K=\pi\omega^2 h\delta\int_0^R r^3 dr=\frac{\pi\omega^2\delta R^4 h}{4}$$

۰۴. فشارمایع. طبق قانون پاسکال، نیروی فشارمایع روی سطح S که در عمق h غوطه‌ور باشد، برابراست با
$$P=\gamma hs$$
که درآن γ چگالی مایع است.

مثال ۴. مطلوبست نیروی فشار وارد برسطح نیمدایره‌ای به‌شعاع r که قطر آن بر سطح آب منطبق وبطورقائم درآب غوطه‌ور است (شکل ۶۱).

حل. سطح نیمدایره را به نوارهائی موازی سطح آب تقسیم می‌کنیم. مساحت یکی از این اجزاء (با صرفنظرکردن از بی‌نهایت‌کوچك مرتبهٔ بالاتر)، که به‌فاصلهٔ h ازسطح‌آب قرار دارد چنین است:
$$dS=2dxh=2\sqrt{r^2-h^2}\ dh$$
نیروی فشاری‌که روی این جزء وارد می‌شود، برابراست با
$$dP=\gamma hdS=2\gamma h\sqrt{r^2-h^2}\,dh$$
دراینجا $\gamma=1$ می‌باشد. ازاینجاکل نیروی فشاربرابر است با
$$P=2\int_0^r h\sqrt{r^2-h^2}\ dh=-\frac{2}{3}(r^2-h^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^r=\frac{2}{3}r^3$$

۱۷۵۱. سرعت جسمی که بطورقائم وبا سرعت اولیهٔ $v_\circ$ بطرف‌بالا پرتاب می‌شود، بدون درنظرگرفتن مقاومت هوا، با رابطهٔ:

$$v = v_\circ - gt$$

بدست می‌آید، که درآن t زمان حرکت و g شتاب نیروی ثقل است. وقتی که t ثانیه ازابتدای پرتاب‌گذشته باشد، فاصلهٔ جسم از وضع اولیهٔ آن چقدراست؟

۱۷۵۲. سرعت جسمی که بطورقائم و با سرعت اولیهٔ $v_\circ$ بطرف بالا پرتاب می‌شود، با درنظرگرفتن مقاومت هوا، از رابطهٔ

$$v = ctg\left(-\frac{g}{c}t + arctg\frac{v_\circ}{c}\right)$$

بدست می‌آید، که درآن t زمان حرکت، g شتاب نیروی ثقل و c مقداری ثابت است. ارتفاع صعود جسم را پیدا کنید.

۱۷۵۳. نقطه‌ای ازمحور OX دور مبداء مختصات حرکت نوسانی هارمونیك دارد، ضمناً سرعت آن بوسیلهٔ رابطهٔ

$$v = v_\circ cos\omega t$$

معین می‌شود، که درآن t زمان و $v_\circ$ و ω مقادیر ثابت‌اند.

مطلوبست قانون نوسان نقطه، بشرطی که به‌ازای $t = \circ$ بـه‌طول $x = \circ$ باشد. مقدار متوسط قدر مطلق سرعت نقطه دریك دورهٔ تناوب چقدر است؟

۱۷۵۴. سرعت حرکت نقطه‌ای $v = te^{-\circ/\circ 1t}$ متر بر ثانیه است. مطلوبست‌فاصله‌ای‌را که نقطهٔ مفروض ازابتدای حرکت تا توقف‌کامل طی می‌کند.

۱۷۵۵. یك موشك درجهت قائم بطرف بالا می‌رود. باتوجه به‌اینکه در حالت ثابت بودن نیروی‌کشش، شتاب موشك بخاطرکم شدن وزنش طبق قانون $j = \dfrac{A}{a - bt}$ $(a - bt > \circ)$ زیاد می‌شود، مطلوبست سرعت موشك درهر لحظهٔ زمانی t، بشرطی‌که سرعت اولیهٔ آن مساوی صفرباشد، همچنین مطلوبست ارتفاع موشك درلحظهٔ زمانی $t = t_1$.

***۱۷۵۶.** مطلوبست‌کاری‌که باید برای خالی‌کردن آب یك بشکهٔ قائم استوانـه‌ای با تلمبه انجام داد، شعاع قاعدهٔ ظرف مساوی R وارتفاع آن مساوی H است.

۱۷۵۷. اگربخواهیم آب یك ظرف مخروطی راکه رأس آن بطرف پائین است بـا تلمبه خالی‌کنیم، کارلازم را محاسبه‌کنید، بشرطی‌که شعاع قاعدهٔ ظرف مساوی R وارتفاع آن مساوی H باشد.

۱۷۵۸. دیگی بشکل نیمکره به‌شعاع ۱۰ متر پراز آب است. مطلوبست کاری که برای خالی کردن آب آن بوسیلهٔ تلمبه، مصرف می‌شود.

۱۷۵۹. مخزن استوانه‌ای شکلی که محور آن افقی است پراز روغن‌است ومی‌خواهیم روغن را ازسوراخ بالای آن خارج کنیم. اگر وزن مخصوص روغن γ، طول مخزن H وشعاع قاعدهٔ آن R باشد،کاری راکه برای خارج کردن روغن بوسیلهٔ تلمبه لازم است، بدست آورید.

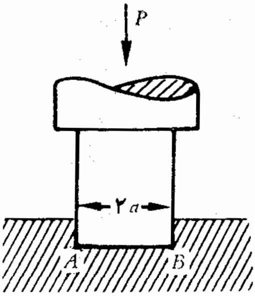
۱۷۶۰.** مطلوبست مقدار کار لازم برای اینکه جسمی به‌جرم m را تا ارتفاع h از سطح زمین بلندکنیم، شعاع کرهٔ زمین را R بگیرید. اگر بخواهیم جسم تا بی‌نهایت دور شود چه‌کاری لازم است؟

۱۷۶۱.** دوبار الکتریکی

$$e_0 = ۱۰۰ CGSE \quad \text{و} \quad e_1 = ۲۰۰ CGSE$$

روی محور OX وبترتیب در نقاط $x_0 = ۰$ و $x_1 = ۱$ (سانتیمتر) قرار گرفته‌اند. مطلـوبست مقدار کاری که برای جابجا شدن بار e_1 به‌نقطهٔ $x = ۱۰$ (سانتیمتر) لازم است.

۱۷۶۲.** استوانه‌ای دارای پیستون متحرکی است که قطر آن $D = ۲۰$ (سانتیمتر) و طول آن $l = ۸۰$ (سانتیمتر) است. دراستوانه بخار آب با فشار $P = ۱۰$ کیلوگرم برسانتیمتر مربع وجود دارد. چه‌کاری باید انجام بگیرد تا درحرارت ثابت، حجم بخارآب نصف شود؟



شکل ۶۲

۱۷۶۳.** برای انبساط آدیاباتیك هوائی که حجم اولیهٔ آن $V_0 = ۱$ (مترمکعب) و فشار اولیهٔ آن $P_0 = ۱$ (کیلوگرم بـر سانتیمتر مربع) است ، به‌حجم $V_1 = ۱۰$ (متر مکعب) چقدر کار لازم است؟

۱۷۶۴.** غلطك قائم به وزن P وشعاع a درشکاف AB قرار دارد (شکل۶۲). نیروی اصطکاك بین قسمت کوچك σ از قاعدهٔ غلطك وسطی که برآن تکیه کرده است مساوی $F = \mu p \sigma$ است، که درآن p (مقدارثابت) عبارتستازفشار غلطك در سطـح تکیه‌گاه برواحد سطح، و μ ضریب اصطکاك است. مطلوبست کار نیروی اصطکاك برای یك دورمحور.

۱۷۶۵.** مطلوبست محاسبهٔ انرژی جنبشی دیسکی به‌جرم M وشعاع R، که باسرعت زاویه‌ای ω دورمحوری که از مرکز دیسك می‌گذرد و سطح آن عمود است، می‌چرخد.

۱۷۶۶. مطلوبست محاسبهٔ انرژی جنبشی مخروط قائم دواری به‌جرم M که با شعاع

زاویه‌ای ω دورمحور خودش می‌چرخد، بشرط اینکه شعاع قاعدهٔ مخروط مساوی R و ارتفاع آن مساوی H باشد.

۱۷۶۷*. چه مقدار کار باید مصرف‌کرد تاگلولهٔ فلزی به‌شعاع $R = ۲$ (متر) را که با سرعت زاویه‌ای $\omega = ۱۰۰۰$ (دور دردقیقه) دور قطر خودش می‌چرخد، بطور کامل متوقف شود؟ (وزن مخصوص فلز $\gamma = ۷{,}۷$ (گرم برسانتیمتر مربع) است).

۱۷۶۸. مثلثی به‌قاعدهٔ b و ارتفاع h بطورقائم درآب غوطه‌وراست، بنحوی‌که رأس آن بطرف پائین و قاعده‌اش در سطح آب قرار دارد. نیروی فشار آب را حساب‌کنید.

۱۷۶۹. سد قائمی بشکل ذوزنقه است، مطلوبست نیروی فشارآب‌که برتمام سد وارد می‌شود، بشرطی‌که قاعدهٔ بالای سد $a = ۷۰$ (متر) ، قاعدهٔ پائین آن $b = ۵۰$ (متر) و ارتفاع آن $h = ۲۰$ (متر) باشد.

۱۷۷۰. مطلوبست نیروی فشار مایع با وزن مخصوص γ، بربیضی قائم به‌محورهای $۲a$ و $۲b$ که مرکز آن درسطح h مایع غوطه‌ور است، ضمناً محور بزرگتر $۲a$ بیضی موازی سطح مایع است $(h \geqslant b)$.

۱۷۷۱. مطلوبست نیروی فشار آب وارد برمخروط دوار قائم با شعاع قاعدهٔ R و ارتفاع H، که درآب بنحوی غوطه‌ور است‌که رأس آن بطرف پائین و قاعده‌اش درسطح آب واقع است.

مسائل مختلف

۱۷۷۲. مطلوبست جرم میلهٔ بطول $l = ۱۰۰$ (سانتیمتر)، بشرطی که تراکم خطی میله در فاصلهٔ x سانتیمتری یکی از دوانتهای آن برابر است با

$$\delta = ۲ + ۰{,}۰۰۱x^۲ \text{ (گرم برسانتیمتر)}$$

۱۷۷۳. با تجربه معلوم شده است که حرارت ویژهٔ آب در t درجهٔ صد قسمتی $(۰° \leqslant t \leqslant ۱۰۰°)$ برابر است با

$$c = ۰{,}۹۹۸۳ - ۵{,}۱۸۴ \cdot ۱۰^{-۵} t + ۶{,}۹۱۲ \cdot ۱۰^{-۷} t^۲$$

چه حرارتی باید ازدست بدهیم تا یك‌گرم آب‌را از ۰درجهٔ صد قسمتی به‌حرارت ۱۰۰ درجه برسانیم؟

۱۷۷۴. باد فشار یکنواخت p گرم برسانتیمتر مربع را بر دری‌که عرضی مساوی b سانتیمتر و ارتفاعی مساوی h سانتیمتر دارد، وارد می‌کند. مطلوبست‌گشتاور نیروی فشارباد،

وقتی که روی لولای خود شروع به‌حرکت می کند.

۱۷۷۵. مطلوبست نیروی جاذبه‌ای که یك میلهٔ مادی بطول l و جرم M روی نقطهٔ مادی به جرم m عمل می کند. بشرطی که نقطه به‌فاصلهٔ a ازیکی از دو انتهای میله و با آن روی یك خط راست باشد.

۱۷۷۶****.** ضمن لایه‌لایه‌کردن جریان مایع درلولهٔ گردی که شعاع مقطع آن مساوی a است، v سرعت جریان مایع در نقطه‌ای که به‌فاصلهٔ r ازمحور لوله قرار دارد، بوسیلهٔ رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$v = \frac{p}{۴\mu l}(a^{۲} - r^{۲}),$$

که درآن p اختلاف فشار مایع در دوانتهای لوله، μ ضریب چسبندگی (و یسکوزیته) و l طول لوله است. مطلوبست مقدار Q عمل کرد مایع، یعنی مقدار مایعی که از مقطع قطری در واحد زمان عبور می کند.

۱۷۷۷***.** شرایط شبیه مسئلهٔ ۱۷۷۶ است، فقط در اینجا لوله مقطعی به‌شکل مربع مستطیل دارد، بنحوی که طول مربع مستطیل‌مقطع مساوی a وعرض‌آن مساوی $۲b$ است. در چنین حالتی سرعت جریان v درنقطهٔ $M(x,y)$ از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$v = \frac{p}{۲\mu l}[b^{۲} - (b-y)^{۲}]$$

مطلوبست Q مقدار مایعی که در واحد زمان از مقطع قطری لوله عبور می کند.

۱۷۷۸****.** برای مطالعهٔ خواص دینامیکی اتومبیل، اغلب‌ازمنحنی که به صورت خاصی رسم شده است استفاده می کنند. روی محور طول سرعت v را، و روی محور عرض مقادیر عکس شتاب a، متناظر با سرعت v را نشان می‌دهند. ثابت کنید که مساحت S محدود به‌این منحنی، دوعرض $v = v_۱$ و $v = v_۲$ ومحور طول، ازلحاظ عددی، برابراست با زمان لازم برای اینکه سرعت حرکت اتومبیل از $v_۱$ تا $v_۲$ افزایش یابد.

۱۷۷۹. تیرافقی به‌طول l تحت عمل وزنی که جهت‌آن قائم وبطرف پائین است ودر تمام طول تیر به‌طور یکنواخت تقسیم‌شده‌است، وعکس‌العمل‌های A و B $\left(A = B = \frac{Q}{۲}\right)$، که جهت آنها قائم وبه‌طرف پائین است، درحال تعادل است. مطلوبست گشت‌آور خمشی M_x در مقطع قطری x، یعنی گشت‌آور نسبت به‌نقطهٔ P بطول x، همهٔ نیروهائی که درقسمت AP عمل

می‌کنند.

۱۷۸۰. تیرافقی بطول l تحت عمل عکس‌العملهای اتکائی A و B، ونیروی وزن که در طول تیر بطور یکنواخت تقسیم شده است وشدت آن $q = kx$ است (x فاصلهٔ ازنقطهٔ اتکای سمت چپ و k ضریب ثابت)، بحال تعادل‌است. مطلوبست گشت‌آور خمشی M_x در مقطع x.

تبصره : شدت پراکندگی نیرو عبارتست از نیروئی که به‌واحد طول وارد می‌شود.

۱۷۸۱*. مطلوبست مقدار حرارتی که ازجریان سینوسی

$$I = I_0 sin(\frac{2\pi}{T}t - \varphi)$$

درجریان تناوب T در هادی به‌مقاومت R بوجود می‌آید.

فصل ششم

توابع چند متغیره

۱. مفاهیم اصلی

۱°. مفهوم تابع‌چند متغیره. کمیت متغیر z را تابع یك ارزشی از دو متغیر x و y گویند، وقتی که هردو مقدار دلخواه (y,x) از حوزهٔ مفروض تنها متناظر با یك مقدار معین z باشد. متغیرهای x و y را آوند (آرگومان) یا متغیر مستقل گویند. ارتباط تابعی را در این مورد چنین نشان می‌دهند:

$$z = f(x,y) \quad \text{یا} \quad z = F(x,y), \qquad \text{وغیره}$$

بهمین‌ترتیب تابع سه یا چندآوندی تعریف می‌شود.

مثال ۱. V حجم مخروط را به‌عنوان‌تابعی از مولد آن x وشعاع قاعدهٔ آن y بیان کنید.

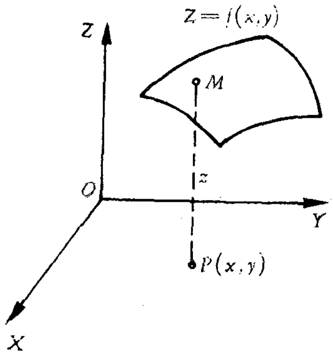
حل. از هندسه می‌دانیم، که حجم مخروط برابر است با

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 h,$$

که درآن h عبارتست از ارتفاع مخروط. از طرف دیگرداریم: $h = \sqrt{x^2 - y^2}$. بنابراین

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$$

واین همان رابطهٔ تابعی مورد نظر است.



شکل ۶۳

مقدار تابع $z = f(x,y)$ درنقطهٔ $P(a,b)$ یعنی به‌ازای $x = a$ و $y = b$ با $f(a,b)$ یا $f(P)$ نشان داده می‌شود. نمایش هندسی تابع $z = f(x,y)$ دردستگاه مختصات قائم X، Y، Z، درحالت کلی عبارتست ازیك سطح (شکل۶۳).

مثال ۲. مطلوبست $f(۲, -۳)$ و $f(۱, \frac{y}{x})$ ، بشرطی‌که داشته باشیم:

$$f(x,y) = \frac{x^۲ + y^۲}{۲xy}$$

حل. با فرض $x = ۲$ و $y = -۳$ بدست می‌آید:

$$f(۲, -۳) = \frac{۲^۲ + (-۳)^۲}{۲\cdot۲\cdot(-۳)} = -\frac{۱۳}{۱۲}$$

وبا فرض $x = ۱$ وتبدیل y به $\frac{y}{x}$ خواهیم داشت:

$$f(۱, \frac{y}{x}) = \frac{۱ + \left(\frac{y}{x}\right)^۲}{۲\cdot۱\cdot\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{x^۲ + y^۲}{۲xy}$$

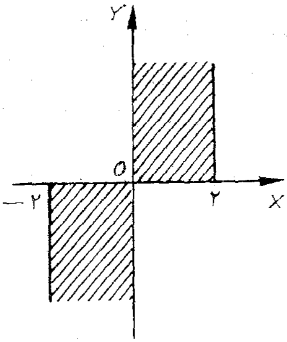
یعنی $f(x,y) = f(۱, \frac{y}{x})$.

۲°. حوزهٔ وجود تابع. حوزهٔ وجود (یا حوزهٔ تعریف) تابع $z = f(x,y)$ عبارتست از مجموعهٔ نقاط (x,y) از صفحهٔ XOY،که در آن تابع مفروض معین باشد (یعنی مقادیر حقیقی معین را قبول کند). در حالتهای ساده، حوزهٔ وجود تابع عبارتست از قسمت محدود یا نامحدودی از صفحهٔ مختصات XOY، که به‌یك یا چند منحنی (حدود حوزه) محدود باشد.

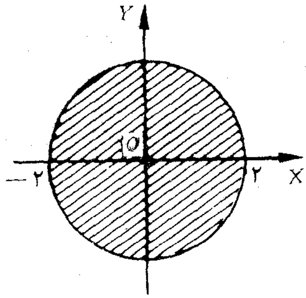
بهمین‌ترتیب، حوزهٔ تعریف تابع سه متغیره $u = f(x,y,z)$ عبارتست از جسمی در فضای $OXYZ$.

مثال ۳. حوزهٔ وجود تابع زیر را بدست آورید:

$$z = \frac{۱}{\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}}$$



شکل۶۵



شکل۶۴

حل. تابع وقتی حقیقی است که داشته باشیم: $۴-x^۲-y^۲>۰$ یا $x^۲+y^۲<۴$، نامساوی اخیر برای مختصات نقاط واقع در داخل دایره‌ای به‌شعاع ۲ و مرکز مبداء مختصات صادق است. حوزهٔ وجود تابع، نقاط داخلی همین دایره است (شکل ۶۴)

مثال ۴. مطلوبست حوزهٔ وجود تابع

$$z = arc\sin\frac{x}{۲}+\sqrt{xy}$$

حل. جملهٔ اول تابع به ازای $-۱\leqslant\frac{x}{۲}\leqslant۱$ یا $-۲\leqslant x\leqslant۲$ معین است. جملهٔ دوم تابع وقتی حقیقی است که $xy\geqslant۰$ باشد، یعنی یا $x\geqslant۰$ ، $y\geqslant۰$ ویا $x\leqslant۰$ ، $y\leqslant۰$ باشد. حوزهٔ وجود همهٔ تابع در شکل۶۵ نشان داده شده است (حدود حوزه هم جزو حوزهٔ تعریف تابع است).

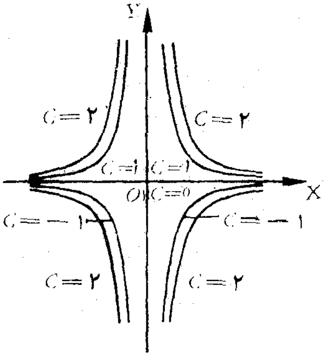
۳°. منحنی وسطح ترازتابع . منحنی تراز تابع $z=f(x,y)$ عبارتست از منحنی $f(x,y)=C$ در صفحهٔ XOY، که در تمام نقطه‌های آن ، تابع فقط **یك مقدار** $z=c$ را اختیار کند.

سطح تراز. تابع سه متغیرهٔ $u=f(x,y,z)$ عبارتست از سطح $f(x,y,z)=C$ که در نقطه‌های آن، تابع مساوی مقدار ثابت $u=C$ باشد.

مثال ۵. منحنی‌های تراز تابع $z=x^۲y$ را رسم کنید.

حل. منحنی‌های تراز تابع به‌صورت $x^۲y=c$ یا $y=\frac{c}{x^۲}$ می‌باشد. با فرض $c=۰$،

$c=\pm 1$، $c=\pm 2$، ... خانوادهٔ منحنی‌های تراز بدست می‌آید (شکل ۶۶).



شکل ۶۶

۱۷۸۲. V حجم یك چهار وجهی قائم را به عنوان تابعی از ارتفاع آن x و یال آن y بیان کنید.

۱۷۸۳. هرم قائم ناقصی با قاعده‌های منتظم شش ضلعی مفروض است، سطح جانبی آن S را به عنوان تابعی از اضلاع قاعده‌های آن x و y و ارتفاع آن z بیان کنید.

۱۷۸۴. مطلوبست $f(\frac{1}{2},3)$ و $f(1,-1)$ بشرطی که داشته باشیم:

$$f(x,y)=xy+\frac{x}{y}$$

۱۷۸۵. اگر $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{2xy}$ باشد، مطلوبست $f(y,x)$ ، $f(-x,-y)$ ، $f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$ و $\frac{1}{f(x,y)}$.

۱۷۸۶. مطلوبست مقادیری که تابع

$$f(x,y)=1+x-y$$

در نقاط سهمی $y=x^2$ قبول می‌کند ومنحنی تابع زیر را رسم کنید:

$$F(x)=f(x,x^2)$$

۱۷۸۷. مقادیر تابع

$$z=\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{1-x^2-y^2}$$

را در نقاط دایرهٔ $x^2+y^2=R^2$ پیدا کنید.

۱۷۸۸*. مطلوبست $f(x)$ ، بشرطی که داشته باشیم:

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\quad (xy>0)$$

*۱۷۸۹. مطلوبست $f(x,y)$ ، بشرطی که داشته باشیم:

$$f(x+y,x-y)=xy+y^{2}$$

*۱۷۹۰. داریم: $z=\sqrt{y}=f(\sqrt{x}-1)$. مطلوبست توابع f و z بشرطی که به ازای $y=1$ داشته باشیم $z=x$.

**۱۷۹۱. داریم: $z=x\,f\left(\frac{y}{x}\right)$. مطلوبست تعیین توابع f و z بشرطی که به‌ازای $x=1$ داشته باشیم : $z=\sqrt{1+y^{2}}$.

۱۷۹۲. حوزهٔ وجود توابع زیر را پیدا کنید و روی دستگاه محورهای مختصات نشان دهید:

a) $z=\sqrt{1-x^{2}-y^{2}}$; b) $z=1+\sqrt{-(x-y)^{2}}$;

c) $z=ln(x+y)$; d) $z=x+arccos y$;

e) $z=\sqrt{1-x^{2}}+\sqrt{1-y^{2}}$; f) $z=arcsin\frac{y}{x}$;

g) $z=\sqrt{x^{2}-4}+\sqrt{4-y^{2}}$;

h) $z=\sqrt{(x^{2}+y^{2}-a^{2})(2a^{2}-x^{2}-y^{2})}\quad(a>0)$;

i) $z=\sqrt{y\sin x}$; j) $z=ln(x^{2}+y)$;

k) $z=arctg\,\frac{x-y}{1+xy}$; l) $z=\frac{1}{x^{2}+y^{2}}$;

m) $z=\frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$; n) $z=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y}$;

o) $z=\sqrt{\sin(x^{2}+y^{2})}$.

۱۷۹۳. حوزهٔ وجود تابع را درهریك ازتوابع سه‌آوندی زیر پیدا کنید:

a) $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$; b) $u=ln(xyz)$;

c) $u=arcsin x+arcsin y+arcsin z$; d) $u=\sqrt{1-x^{2}-y^{2}-z^{2}}$.

۱۷۹۴. نوع سطح هریك ازتوابع زیر ومنحنی‌های تراز آنها را پیدا کنید:

a) $z=x+y$; b) $z=x^{2}+y^{2}$; c) $z=x^{2}-y^{2}$;

$d)\ z=\sqrt{xy};$ $e)\ z=(1+x+y)^2;$ $f)\ z=1-|x|-|y|;$

$g)\ z=\frac{y}{x^2};$ $h)\ z=\frac{y}{\sqrt{x}};$ $i)\ z=\frac{2x}{x^2+y^2}.$

۱۷۹۵. منحنی‌های تراز هریك ازتوابع زیر را پیدا کنید:

$a)\ z=\ln(x^2+y);$ $b)\ z=\arcsin xy;$

$c)\ z=f(\sqrt{x^2+y^2});$

$d)\ z=f(y-ax);$ $e)\ z=f\left(\frac{y}{x}\right).$

۱۷۹۶. سطوح تراز توابع سه متغیرهٔ زیر را پیدا کنید:

$a)\ u=x+y+z;$ $b)\ u=x^2+y^2+z^2;$

$c)\ u=x^2+y^2-z^2.$

۲. پیوستگی

۱°. حد تابع. عدد A را حد تابع $z=f(x,y)$، وقتی که نقطهٔ $P'(x,y)$ بسمت نقطهٔ $P(a,b)$ میل کند، گویند، وقتی که برای هرعدد $\varepsilon>0$ عددی مانند $\delta>0$ وجود داشته باشد، بنحوی که به‌ازای $0<\rho<\delta$، که در آن $\rho=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ عبارتست از فاصلهٔ بین دونقطهٔ P و P'، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

و دراین مورد می‌نویسند:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A$$

۲°. پیوستگی و نقطهٔ انفصال. تابع $z=f(x,y)$ را در نقطهٔ $P(a,b)$ پیوسته گویند، وقتی که داشته باشیم:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=f(a,b)$$

تابعی که درهمهٔ نقاط یك حوزه پیوسته باشد، گویند در این حوزه پیوسته است.

شرط پیوستگی برای تابع $f(x,y)$ ممکن است برای بعضی نقاط جداگانه (نقاط انفصال) یا برای نقاطی که یك یا چند منحنی تشکیل می‌دهند (منحنی‌های انفصال) وگاهی برای نقاطی که شکلهای بغرنجتر هندسی تشکیل می‌دهند، وجود نداشته باشد.

مثال ۱. نقاط انفصال تابع زیر را بدست‌آورید:

$$z=\frac{xy+1}{x^2-y}$$

حل. وقتی که مخرج مساوی صفر باشد ، تابع مفهوم خود را از دست می‌دهد . ولی $x^2-y=0$ یا $y=x^2$ معادلهٔ یك سهمی است. بنابراین سهمی $y=x^2$ منحنی انفصال تابع مفروض است.

۱۷۹۷*. حد توابع زیر را پیداکنید:

$a)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$; $\qquad b)$ $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

$c)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$; $\qquad d)$ $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to k}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$;

$e)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x+y}$; $\qquad f)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

۱۷۹۸. پیوستگی این تابع را بررسی کنید:

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2} & \text{به ازای } x^2+y^2\leqslant 1\\ 0 & \text{به ازای } x^2+y^2>1\end{cases}$$

۱۷۹۹. نقاط انفصال توابع زیر را پیدا کنید:

$a)$ $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; $\qquad b)$ $z=\dfrac{1}{(x-y)^2}$;

c) $z = \frac{1}{1-x^2-y^2}$; d) $z = \cos\frac{1}{xy}$.

***۱۸۰۰.** ثابت کنید که تابع

$$z = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{به ازای } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{به ازای } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

برای هریك از متغیرهای x و y بطور جداگانه پیوسته است، ولی تواماً بـرای این دو متغیر در نقطهٔ $(0,0)$ پیوسته نیست.

۳. مشتقهای جزئی

۱°. تعریف مشتقهای جزئی. اگر داشته باشیم $z = f(x,y)$، مثلا با فـرض اینکه y مقدار ثابتی باشد، مشتق زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = f'_x(x,y)$$

که مشتق جزئی تابع z نسبت به‌متغیر x نامیده می‌شود. بهمین ترتیب می‌توان مشتق جـزئی تابع z را نسبت به متغیـر y بدست آورد. واضح است که برای پیدا کردن مشتقهای جـزئی می‌توان از روابط عادی مشتق‌گیری استفاده کرد.

مثال ۱. مشتقهای جزئی تابع زیر را بدست‌آورید:

$$z = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}$$

حل. اگر y را مقداری ثابت درنظر بگیریم، بدست می‌آید:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$$

بهمین ترتیب، اگر x را مقداری ثابت فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۱}{tg\frac{x}{y}}\cdot\frac{۱}{cos^{۲}\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^{۲}}\right)=-\frac{۲x}{y^{۲}\sin\frac{۲x}{y}}$$

مثال ۲. مشتقهای جزئی تابع سه آوندی زیر را پیدا کنید:

$$u=x^{۳}y^{۲}z+۲x-۳y+z+۵$$

حل. بترتیب داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=۳x^{۲}y^{۲}z+۲,\ \frac{\partial u}{\partial y}=۲x^{۳}yz-۳,\ \frac{\partial u}{\partial z}=x^{۳}y^{۲}+۱$$

۲°. قضیهٔ اولر. تابع $f(x,y)$ را متجانس از مرتبهٔ n گویند، وقتی که برای هر ضریب حقیقی k تساوی زیر برقرار باشد:

$$f(kx,ky)\equiv k^{n}f(x,y).$$

تابع صحیح وگویا وقتی متجانس است که همهٔ جملههای آن از یك درجه باشند.

برای هر تابع متجانس از مرتبهٔ n، که قابل مشتقگیری باشد، رابطهٔ زیر صحیح است (قضیهٔ اولر):

$$x f_{x}'(x,y)+y f_{y}'(x,y)=n f(x,y).$$

مشتقهای جزئی توابع زیر را بدست آورید:

۱۸۰۱. $z=x^{۳}+y^{۳}-۳axy$.

۱۸۰۲. $z=\frac{x-y}{x+y}$.

۱۸۰۳. $z=\frac{y}{x}$.

۱۸۰۴. $z=\sqrt{x^{۲}-y^{۲}}$.

۱۸۰۵. $z=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}$.

۱۸۰۶. $z=ln(x+\sqrt{x^{۲}+y^{۲}})$.

۱۸۰۷. $z=arctg\frac{y}{x}$.

۱۸۰۸. $z=x^{y}$.

۱۸۰۹. $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$.

۱۸۱۰. $z=arcsin\sqrt{\frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}}$.

۱۸۱۱. $z = ln sin \frac{x+a}{\sqrt{y}}$.　　۱۸۱۲. $u = (xy)^z$.

۱۸۱۳. $u = z^{xy}$.

۱۸۱۴. اگر داشته باشیم: $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$، مطلوبست $f'_x(۲,۱)$ و $f'_y(۲,۱)$.

۱۸۱۵. مطلوبست $f'_x(۱,۲,۰)$، $f'_y(۱,۲,۰)$، $f'_z(۱,۲,۰)$، بشرطی که داشته باشیم:

$$f(x,y,z) = ln(xy+z)$$

قضیهٔ اولر را در مورد توابع متجانس زیر مورد تحقیق قرار دهید (شماره‌های ۱۸۱۶ تا ۱۸۱۹):

۱۸۱۶. $f(x,y) = Ax^۲ + ۲Bxy + Cy^۲$.　　۱۸۱۷. $z = \frac{x}{x^۲+y^۲}$.

۱۸۱۸. $f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt[۳]{x^۲+y^۲}}$.　　۱۸۱۹. $f(x,y) = ln\frac{y}{x}$.

۱۸۲۰. مطلوبست $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{۱}{r}\right)$، بشرطی که داشته باشیم: $r = \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$.

۱۸۲۱. مطلوبست محاسبهٔ $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$، بشرطی که داشته باشیم: $x = r cos\varphi$ و $y = r sin\varphi$.

۱۸۲۲. ثابت کنید $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ۲$، بشرطی که داشته باشیم:

$$z = ln(x^۲ + xy + y^۲)$$

۱۸۲۳. ثابت کنید $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$، بشرطی که داشته باشیم:

$$z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$$

۱۸۲۴. ثابت کنید $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = ۰$، بشرطی که داشته باشیم:

$$u = (x-y)(y-z)(z-x)$$

۱۸۲۵. ثابت کنید $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}=۱$، بشرطی که داشته باشیم:

$$u=x+\frac{x-y}{y-z}$$

۱۸۲۶. مطلوبست $z=z(x,y)$، بشرطی که داشته باشیم:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^۲+y^۲}$$

۱۸۲۷. مطلوبست $z=z(x,y)$، بشرطی که بدانیم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^۲+y^۲}{x} \quad \text{و} \quad z(x,y)=\sin y \quad \text{به‌ازای} \quad x=۱$$

۱۸۲۸. از نقطهٔ $M(۱,۲,۶)$ واقع بر سطح $z=۲x^۲+y^۲$ صفحه‌هائی موازی‌باصفحه‌های مختصات XOZ وYOZ رسم کرده‌ایم. مطلوبست زوایای بین محورهای مختصات ومماسهائی بر مقاطع بدست آمده از نقطهٔ مشترك M رسم شود.

۱۸۲۹. مساحت ذوزنقهٔ به قاعده‌های a وb وارتفاع h چنین است: $S=\frac{۱}{۲}(a+x)h$.

مطلوبست $\frac{\partial S}{\partial a}$، $\frac{\partial S}{\partial b}$، $\frac{\partial S}{\partial c}$ وبا استفاده از شکل تعبیر هندسی آنها را روشن کنید.

۱۸۳۰*. ثابت‌کنید تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{۲xy}{x^۲+y^۲} & \text{به‌ازای} \quad x^۲+y^۲\neq ۰\\ ۰ & \text{به‌ازای} \quad x=y=۰\end{cases}$$

در نقطهٔ $(۰,۰)$ دارای مشتقهای جزئی $f_x'(x,y)$ و $f_y'(x,y)$ می‌باشد، اگرچه دراین نقطه منفصل است. شکل هندسی این‌تابع‌را در نزدیکیهای نقطهٔ $(۰,۰)$ رسم کنید.

۴. دیفرانسیل کامل تابع

۱°. نمو کامل تابع. نموکامل تابع $z=f(x,y)$ عبارتست ازتفاضل

$$\Delta z=\Delta f(x,y)=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

۲°. دیفرانسیل کامل تابع. دیفرانسیل‌کامل تابع $z=f(x,y)$ عبارتست ازقسمت اصلی نمو خطی Δz، نسبت به‌نمو آوندهای Δx و Δy.

تفاضل نمو کامل ودیفرانسیل کامل یك تابع نسبت به $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$، بی‌نهایت کوچکی ازمرتبهٔ بالاتر است.

تابع‌وقتی دارای دیفرانسیل‌کامل‌است که مشتقهای جزئی آن‌پیوسته‌باشد. وقتی‌تابعی دارای دیفرانسیل کامل باشد،گویند قابل دیفرانسیل گیری است. طبق تعریف، دیفرانسیلهای متغیرهای مستقل مساوی با نموهای آنهاست، یعنی $dx=\Delta x$ و $dy=\Delta y$. دیفرانسیل‌کامل تابع $z=f(x,y)$ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

بهمین‌ترتیب، دیفرانسیل کامل تابع‌سه‌آوندی $u=f(x,y,z)$ ازرابطهٔ زیربدست‌می‌آید:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

مثال ۱. درمورد تابع زیر نموکامل ودیفرانسیل‌کامل را بدست‌آورید:

$$f(x,y)=x^2+xy-y^2$$

حل. بترتیب داریم:

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)=(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)(y+\Delta y)-(y+\Delta y)^2;$$

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y)&=[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)(y+\Delta y)-(y+\Delta y)^2]-(x^2+xy-y^2)=\\&=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2+x\cdot\Delta y+y\,\Delta x+\Delta x\cdot\Delta y-2y\cdot\Delta y-\Delta y^2=\\&=[(2x+y)\Delta x+(x-2y)\Delta y]+(\Delta x^2+\Delta x\cdot\Delta y-\Delta y^2)\end{aligned}$$

این عبارت $df=(2x+y)\Delta x+(x-2y)\Delta y$ عبارتست ازدیفرانسیل کامل تابع، و $(\Delta x^2+\Delta x\cdot\Delta y-\Delta y^2)$ بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر نسبت به‌بی‌نهایت کوچك $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ است.

مثال ۲. دیفرانسیل کامل تابع زیر را بدست آورید:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

حل. داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

۳°. استفاده از دیفرانسیل کامل توابع در محاسبات تقریبی. وقتی که $|\Delta x|$ و $|\Delta y|$ و بنابراین $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ برای تابع دیفرانسیل‌دار $z=f(x,y)$ به‌اندازهٔ کافی کوچك باشد، تساوی تقریبی $\Delta z\approx dz$ برقرار است یا

$$\Delta z\approx\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

مثال ۳. ارتفاع مخروطی $H=30$ (سانتیمتر) وشعاع قاعدهٔ آن $R=10$ (سانتیمتر) است. اگر ارتفاع مخروط به‌اندازهٔ ۳ میلیمتر زیاد وشعاع قاعدهٔ آن به‌اندازهٔ ۱ میلیمتر کم‌شود، حجم آن چه تغییری می‌کند؟

حل. حجم مخروط برابر است با $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$. تغییر حجم را بتقریب به‌کمك دیفرانسیل بدست می‌آوریم:

$$\Delta V\approx dV=\frac{1}{3}\pi(2RHdR+R^2dH)=\frac{1}{3}\pi(-2\cdot10\cdot30\cdot0{,}1+100\cdot0{,}3)=$$

$$=-10\pi\approx-31{,}4$$

مثال ۴. $1{,}02^{3{,}01}$ را بتقریب محاسبه‌کنید.

حل. تابع $z=x^y$ را در نظر می‌گیریم. با فرض $x=1$، $y=3$، $\Delta x=0{,}02$، $\Delta y=0{,}01$ بدست می‌آید (مقدار اولیهٔ تابع $z=1^3=1$):

$$\Delta z \approx dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y lnx\Delta y = ۳\cdot۱\cdot ۰,۰۲ + ۱\cdot ln۱\cdot ۰,۰۱ = ۰,۰۶$$

بنابراین: $۱,۰۲^{۳,۰۱} \approx ۱ + ۰,۰۶ = ۱,۰۶$.

۱۸۳۱. برای تابع $f(x,y) = x^۲y$ مطلوبست نمو کامل و دیفرانسیل کامل در نقطهٔ $(۱,۲)$؛ آنهارا در حالتهای زیر باهم مقایسه کنید:

$a)\quad \Delta x = ۱, \Delta y ۲;$ $\qquad b)\quad \Delta x = ۰,۱, \quad \Delta y = ۰,۲$

۱۸۳۲. ثابت کنید که برای u و v از چند (و مثلا دو) متغیر، قاعده‌های معمولی دیفرانسیل‌گیری صحیح است:

$a)\quad d(u+v) = du + dv;$ $\qquad b)\quad d(uv) = vdu + udv;$

$$c)\quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^۲}$$

دیفرانسیل کامل توابع زیر را بدست آورید:

۱۸۳۳. $z = x^۳ + y^۳ - ۳xy$ $\qquad$ **۱۸۳۴.** $z = x^۲y^۳$

۱۸۳۵. $z = \dfrac{x^۲ - y^۲}{x^۲ + y^۲}$ $\qquad$ **۱۸۳۶.** $z = sin^۲x + cos^۲y$

۱۸۳۷. $z = yx^y$ $\qquad$ **۱۸۳۸.** $z = ln(x^۲ + y^۲)$

۱۸۳۹. $f(x,y) = ln(۱ + \dfrac{y}{x})$ $\qquad$ **۱۸۴۰.** $z = arctg\dfrac{y}{x} + arctg\dfrac{x}{y}$

۱۸۴۱. $z = lntg\dfrac{y}{x}$ $\qquad$ **۱۸۴۲.** مطلوبست $d\,f(۱,۱)$ با شرط

$$f(x,y) = \frac{x}{y^۲}$$

۱۸۴۳. $u = xyz$

۱۸۴۴. $u = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$ $\qquad$ **۱۸۴۵.** $u = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^z$

۱۸۴۶. $u = arctg\dfrac{xy}{z^۲}$ $\qquad$ **۱۸۴۷.** مطلوبست $df(۳,۴,۵)$

با شرط $f(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}$

۱۸۴۸. یکی از ضلعهای مستطیل $a = ۱۰$ (سانتیمتر) ودیگری $b = ۲۴$ (سانتیمتر) است. اگر ضلع a را ۴ میلیمتر درازتر و ضلع b را ۱ میلیمتر کوتاهتر کنیم، قطر l چه

تغییری می‌کند؟ تغییر تقریبی را بدست آورید و با مقدار دقیق آن مقایسه کنید.

۱۸۴۹. جعبهٔ بسته‌ای که اندازه‌های بیرونی آن ۱۰ سانتیمتر، ۸ سانتیمتر و ۶ سانتیمتر است از تختهٔ چوبی به ضخامت ۲ میلیمتر ساخته شده است. مطلوبست حجم تقریبی مصالحی که برای جعبه مصرف شده است.

۱۸۵۰.* زاویهٔ مرکزی یك قطاع دایره را که مساوی ۸۰ درجه است، می‌خواهیم به اندازهٔ یك درجه کم کنیم. شعاع قطاع را به‌چه‌اندازه بزرگ کنیم تا سطح آن تغییر نکند؟ طول شعاع اولیهٔ قطاع را مساوی ۲۰ سانتیمتر بگیرید.

۱۸۵۱. بتقریب محاسبه کنید:

a) $(1{,}02)^3\cdot(0{,}97)^2$؛ b) $\sqrt[4]{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$؛

c) $\sin 32^\circ\cdot\cos 59^\circ$ (برای تبدیل درجه به رادیان و برای محاسبهٔ $\sin 60^\circ$، سه رقم اعشار درنظر بگیرید ورقم آخر را گرد کنید).

۱۸۵۲. ثابت کنید که خطای نسبی حاصلضرب، بتقریب برابر است با مجموع خطاهای نسبی عوامل.

۱۸۵۳. برای اندازه‌های مثلث ABC، که در روی زمین است، این مقادیر بدست آمده است:

ضلع a = ۱۰۰ متر $\pm$ ۲ متر؛ ضلع b = ۲۰۰ متر $\pm$ ۳ متر؛ زاویهٔ $C = 60^\circ \pm 1^\circ$

با چه تقریبی می‌توان ضلع c را محاسبه کرد؟

۱۸۵۴. دورهٔ تناوب T نوسان پاندول از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

که در آن l طول پاندول و g شتاب ثقل زمین است. اگر دراندازه‌های l و g اشتباهات کوچك $\Delta l = \alpha$ و $\Delta g = \beta$ رخ داده باشد، خطای T را معین کنید.

۱۸۵۵. فاصلهٔ بین دونقطهٔ $P_0(x_0,y_0)$ و $P(x,y)$ برابر با ρ وزاویه‌ای که بردار $\overline{P_0P}$ با محور OX ساخته است برابر با α است. چه تغییری به‌زاویهٔ α بدهیم تا نقطهٔ P، ضمن ثابت بودن نقطهٔ P_0، به وضع $P_1(x+dx,y+dy)$ درآید؟

۵. دیفرانسیل توابع مرکب

۱°. حالت یك متغیر مستقل. اگر $z = f(x,y)$ تابعی دارای دیفرانسیل به‌آوندهای x و y باشد، وبنوبهٔ خود توابع

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t)$$

از متغیر مستقل t دارای دیفرانسیل باشند، مشتق تابع مرکب $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ را می‌توان از رابطهٔ زیر بدست‌آورد:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (۱)$$

درحالت خاصی که t بر یکی از آوندها، ومثلاً x، منطبق باشد، مشتق «کامل» تابع z نسبت به x چنین است:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} \qquad (۲)$$

مثال ۱. مطلوبست $\frac{dz}{dt}$، بشرطی‌که داشته باشیم:

$$z = e^{۳x+۲y}, \text{ با شرط } x = cost, y = t^{۲}$$

حل. بنابررابطهٔ (۱) داریم:

$$\frac{dz}{dt} = e^{۳x+۲y} \cdot ۳(-sint) + e^{۳x+۲y} \cdot ۲ \cdot ۲t =$$

$$= e^{۳x+۲y}(۴t - ۳sint) = e^{۳cost+۲t^{۲}}(۴t - ۳sint).$$

مثال ۲. مطلوبست‌مشتق جزئی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و مشتق‌کامل $\frac{dz}{dx}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$z = e^{xy}, \text{ با شرط } y = \varphi(x)$$

حل. $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$ بنا بررابطهٔ (۲) بدست‌می‌آید:

$$\frac{dz}{dx}=ye^{xy}+xe^{xy}\varphi'(x)$$

۲°. حالت چند متغیر مستقل. اگر z تابع مرکبی از چند متغیر مستقل باشد، مثلا $z=f(x,y)$ که درآن $x=\varphi(u,v)$، $y=\psi(u,v)$ (u و v متغیرهای مستقل و f ، φ و ψ توابعی دارای دیفرانسیل هستند)، دراینصورت مشتق‌جزئی z نسبت به u و v چنین می‌شود:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial u} \qquad (۳)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial v} \qquad (۴)$$

در تمام حالتهای مذکور رابطهٔ زیر صحیح است:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(خاصیت تغییر ناپذیری دیفرانسیل‌کامل).

مثال ۳. مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial u}$ و $\frac{\partial z}{\partial v}$، بشرطی‌که داشته باشیم:

$$z=f(x,y),\ \text{با شرط}\ x=uv\ ,\ y=\frac{u}{v}$$

حل. با استفاده از روابط (۳) و (۴) بدست می‌آید:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=f_x'(x,y)\cdot v+f_y'(x,y)\frac{1}{v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=f_x'(x,y).u-f_y'(x,y)\ \frac{u}{v^2}.$$

مثال ۴. ثابت‌کنید تابع $z=\varphi(x^2+y^2)$ در معادلهٔ $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ صدق می‌کند.

حل. با فرض $x^2+y^2=t$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dt}\ \frac{\partial t}{\partial x}=\varphi'(x^۲+y^۲)۲x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{dt}\ \frac{\partial t}{\partial y}=\varphi'(x^۲+y^۲)۲y$$

که اگر این مشتقهای جزئی‌را درسمت چپ معادله‌قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y\varphi'(x^۲+y^۲)۲x-x\varphi'(x^۲+y^۲)۲y=$$

$$=۲xy\varphi'(x^۲+y^۲)-۲xy\varphi'(x^۲+y^۲)=۰$$

یعنی تابع z در معادلهٔ مفروض صدق می کند.

۱۸۵۶. مطلوبست $\frac{dz}{dt}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$z=\frac{x}{y},\ \text{با شرط}\ \ x=e^t,\ y=lnt$$

۱۸۵۷. مطلوبست $\frac{du}{dt}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$u=ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}},\ \text{با شرط}\ \ x=۳t^۲,\ y=\sqrt{t^۲+۱}$$

۱۸۵۸. مطلوبست $\frac{du}{dt}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$u=xyz,\ \text{با شرط}\ \ x=t^۲+۱\ ,\ y=lnt\ ,\ z=tgt$$

۱۸۵۹. مطلوبست $\frac{du}{dt}$، اگر داشته باشیم:

$$u=\frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲}},\ \text{با شرط}\ \ x=R\cos t,\ y=R\sin t, zH=$$

۱۸۶۰. مطلوبست $\frac{dz}{dx}$، اگر داشته باشیم:

$$z=u^v,\ \text{با شرط}\ \ u=\sin x,\ v=\cos x$$

۱۸۶۱. مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{dz}{dx}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$z = arctg\frac{y}{x} \text{ , } y = x^2$$

۱۸۶۲. مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{dz}{dx}$، اگر داشته باشیم:

$$z = x^y \text{ , } y = \varphi(x)$$

۱۸۶۳. مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$، اگر داشته باشیم:

$z = f(u,v)$ ، با شرط $u = x^2 - y^2$ ، $v = e^{xy}$

۱۸۶۴. مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial u}$ و $\frac{\partial z}{\partial v}$، بشرطی که داشته باشیم:

$z = arctg\frac{x}{y}$ ، با شرط $x = u\sin v$ ، $y = u\cos v$

۱۸۶۵. مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$z = f(u) \text{ , } u = xy + \frac{y}{x}$$

۱۸۶۶. ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$u = \Phi(x^2 + y^2 + z^2), \quad x = R\cos\varphi\cos\psi,$$
$$y = R\cos\varphi\sin\psi, \quad z = R\sin\varphi$$

داریم: $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$ ، $\frac{\partial u}{\partial \psi} = 0$.

۱۸۶۷. مطلوبست $\frac{du}{dx}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$u = f(x,y,z) \text{ , } y = \varphi(x) \text{ , } z = \psi(x,y)$$

۱۸۶۸. ثابت کنید که اگر داشته باشیم: $z = f(x+ay)$ (f تابعی دارای دیفرانسیل است)، داریم: $\frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x}$.

۱۸۶۹. ثابت کنید که تابع $\omega = f(u,v)$ با شرط $u = x + at$ و $v = y + bt$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}=a\frac{\partial \omega}{\partial x}+b\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

۱۸۷۰. ثابت کنید که تابع $z=y\varphi(x^2-y^2)$ درمعادلهٔ زیرصدق می کند:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$$

۱۸۷۱. ثابت کنید که تابع $z=xy+x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ در معادلهٔ زیر صدق می کند:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$$

۱۸۷۲. ثابت کنید که تابع $z=e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ درمعادلهٔ زیر صدق می کند:

$$(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$$

۱۸۷۳. ضلع x مستطیل بطول ۲۰متر با سرعت ۵متر درثانیه بزرگ می‌شود، ضلع دیگرش y به طول ۳۰ متربا سرعت۴متردرثانیه کوچك می‌شود. محیط ومساحت این‌مستطیل با چه سرعتی تغییر می کند؟

۱۸۷۴. معادلهٔ حرکت یك نقطهٔ مادی چنین است:

$$x=t,\quad y=t^2,\quad z=t^3$$

فاصلهٔ این نقطه ازمبداء مختصات با چه سرعتی اضافه می‌شود؟

۱۸۷۵. دوکشتی دریك زمان ازنقطه‌ای حرکت‌کردند، اولی با سرعت ۲۰ کیلومتردر ساعت بطرف شمال ودومی با سرعت ۴۰ کیلومتر درساعت بطرف شمال شرقی. فاصلهٔ بین کشتیها با چه سرعتی زیاد می‌شود؟

۶. مشتق در امتداد مفروض. گرادین تابع

۱°. مشتق تابع درامتداد مفروض. مشتق تابع $z=f(x,y)$ در امتداد مفروض $l=\overrightarrow{PP_1}$ عبارتست از:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \underset{P_1P \to 0}{\text{حد}} \frac{f(P_1) - f(P)}{P_1P}$$

که در آن $f(P)$ و $f(P_1)$ مقادیر تابع در نقاط P و P_1 هستند. اگر تابع z مشتق داشته باشد، این رابطه صحیح است:

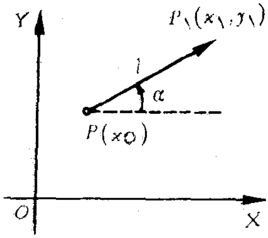
$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha \qquad (1)$$

که در آن α زاویه‌ای است که بردار l با محور OX می‌سازد (شکل ۶۷).

مشتق تابع با سه آوند $u = f(x,y,z)$ را درجهت مفروض l هم بهمبن ترتیب بدست می‌آورند. دراین حالت

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (2)$$

که در آن α،βوγ عبارتست از زاویهٔ بین جهت l با محور مختصات مربوطه. مشتق در جهت مفروض به‌عنوان سرعت تغییر تابع در این جهت، مشخص می‌شود.



شکل ۶۷

مثال ۱. مطلوبست مشتق تابع $z = 2x^2 - 3y^2$ درنقطهٔ $P(1,0)$ درجهتی که با محور OX زاویهٔ ۱۲۰ درجه می‌سازد.

حل. مشتقهای جزئی تابع مفروض و مقادیر آنها را در نقطهٔ P بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6y, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p = 0$$

در اینجا داریم:

$$\cos\alpha = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \sin\alpha = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

که بااستفاده ازرابطهٔ (۱) بدست می‌آید:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2$$

علامت منفی نشان می‌دهد که تابع در نقطهٔ مفروض و درجهت مفروض نزولی است.

۲.۰ گرادین تابع. گرادین تابع $z = f(x,y)$ عبارتست از برداری که تصاویر آن برمحورهای مختصات، مشتقهای جزئی مربوطهٔ تابع مفروض باشد.

$$grad\ z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} \qquad (۳)$$

مشتق تابع مفروض درجهت $\mathbf{l}$ باگرادین تابع، بوسیلهٔ رابطهٔ زیر بهم مربوط میشوند:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = (\text{تصویر})_l grad\ z$$

یعنی، مشتق درجهت مفروض برابر است با تصویرگرادین تابع برجهت مشتق‌گیری.

گرادین تابع درهر نقطه درجهت قائم برمنحنی تراز مربوطه میباشد؛ جهت‌گرادین‌تابع درنقطهٔ مفروض عبارتست ازجهت حداکثر سرعت صعود تابع دراین نقطه، یعنی به‌ازای $\mathbf{l} = gradz$، مشتق حداکثر مقدار خود را قبول میکندکه برابر است‌با:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^۲ + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^۲}$$

بهمین ترتیب‌گرادین تابع سه متغیرهٔ $u = f(x,y,z)$ را معین میکنند:

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (۴)$$

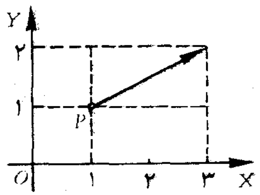
گرادین تابع سه متغیره درهر نقطه درجهت قائم برسطح ترازی است که ازاین‌نقطه عبورمیکند.

مثال ۴. گرادین تابع $z = x^۲y$ را درنقطهٔ $P(۱,۱)$ پیداکنید و رسم نمائید.

حل. مشتقات جزئی ومقادیر آنها را درنقطهٔ P بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ۲xy\ , \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = ۲;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^۲\ , \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p = ۱$$



شکل۶۸

بنابراین داریم: $grad\ z = ۲\mathbf{i} + \mathbf{j}$ (شکل ۶۸).

۱۸۷۶. مطلوبست مشتق تابع $z=x^۲-xy-۲y^۲$ درنقطهٔ $P(۱,۲)$ درجهتی که با محور OX زاویه‌ای مساوی ۶۰ درجه می‌سازد.

۱۸۷۷. مطلوبست مشتق تابع $z=x^۳-۲x^۲y+xy^۲+۱$ درنقطهٔ $M(۱,۲)$ در جهت امتداد این نقطه به نقطهٔ $N(۴,۶)$.

۱۸۷۸. مطلوبست مشتق تابع $z=ln\sqrt{x^۲+y^۲}$ در نقطهٔ $P(۱,۱)$ درجهت نیمساز ربع اول محورهای مختصات.

۱۸۷۹. مطلوبست مشتق تابع $u=x^۲-۳yz+۵$ درنقطهٔ $M(۱,۲,-۱)$ درجهت امتدادی که با همهٔ محورهای مختصات زوایای مساوی می‌سازد.

۱۸۸۰. مطلوبست مشتق تابع $u=xy+yz+zx$ درنقطهٔ $M(۲,۱,۳)$ در جهت امتداد این نقطه به نقطهٔ $N(۵,۵,۱۵)$.

۱۸۸۱. مطلوبست مشتق تابع $u=ln(e^x+e^y+e^z)$ در مبداء مختصات و در جهت امتدادی که با محورهای OX، OY و OZ بترتیب زوایای α، β و γ می‌سازد.

۱۸۸۲. اگر مشتق تابعی دریك نقطه درهرجهت دلخواه مساوی صفر باشد، این نقطه را نقطهٔ ساکن این تابع گویند. نقاط ساکن را درتوابع زیرپیدا کنید:

a) $z=x^۲+xy+y^۲-۴x-۲y$,

b) $z=x^۳+y^۳-۳xy$,

c) $u=۲y^۲+z^۲-xy-yz+۲x$

۱۸۸۳. ثابت کنید مشتق تابع $z=\dfrac{y^۲}{x}$ درهرنقطهٔ دلخواه بیضی $۲x^۲+y^۲=c^۲$ در طول قائم بربیضی مساوی صفراست.

۱۸۸۴. مطلوبست $grad\ z$ درنقطهٔ $(۲,۱)$ بشرطی که داشته باشیم:

$$z=x^۳+y^۳-۳xy$$

۱۸۸۵. مطلوبست $grad\ z$ در نقطهٔ $(۵,۳)$ بشرطی که داشته باشیم:

$$z=\sqrt{x^۲-y^۲}$$

۱۸۸۶. مطلوبست $grad\ u$ درنقطهٔ $(۱,۲,۳)$ با شرط $u=xyz$.

۱۸۸۷. مطلوبست مقدار وامتداد $grad\ u$ درنقطهٔ $(۲,-۲,۱)$ با شرط

$$u=x^۲+y^۲+z^۲$$

۱۸۸۸. مطلوبست زاویهٔ بین‌گرادینهای تابع $z=ln\frac{y}{x}$ در نقاط $A(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ و $B(1,1)$.

۱۸۸۹. مطلوبست مقدار حداکثر ترقی سطح

$$z=x^2+4y^2$$

در نقطهٔ $(2,1,8)$.

۱۸۹۰. ناحیه برداری گرادین توابع زیر را مشخص کنید.

a) $z=x+y$, c) $z=x^2+y^2$

b) $z=xy$, d) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

۷. مشتق و دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر

۱°. مشتقات جزئی مرتبه‌های بالاتر. مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم از تابع $z=f(x,y)$ عبارتست ازمشتقات جزئی مشتقات جزئی مرتبهٔ اول آن.

برای مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم ازعلامتهای زیر استفاده می‌کنند:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),\dots$$

بهمین ترتیب مشتقات جزئی بالاتر ازمرتبهٔ دوم تعریف وعلامتگذاری می‌شوند.

برای مشتقات جزئی، وقتی که با تابع پیوسته سروکار داشته باشیم، نتیجهٔ محاسبه، ارتباطی به ردیف دیفرانسیل‌گیری ندارد (مثلا $z''_{xy}=z''_{yx}$).

مثال ۱. مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم را در مورد تابع زیر بدست‌آورید:

$$z=arctg\frac{x}{y}$$

حل. ابتدا مشتقات جزئی مرتبهٔ اول را بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

وحالا برای مرتبهٔ دوم دیفرانسیل می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{10(x^2+y^2)-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

مشتق جزئی اخیر را می‌توانستیم بترتیب زیرهم بدست‌آوریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-\frac{10(x^2+y^2)-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}=$$
$$=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

۲°. دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر. دیفرانسیل کامل مرتبهٔ دوم از تابع $z=f(x,y)$ عبارتست از دیفرانسیل دیفرانسیل (مرتبهٔ اول) این تابع: $d^2z=d(dz)$
بهمین ترتیب دیفرانسیل کامل تابع z برای مرتبهٔ بالاتراز دوم تعریف می‌شود، مثلا:

$$d^3z=d(d^2z)$$

و بطورکلی
$$d^nz=d(d^{n-1}z)$$

اگر $z=f(x,y)$ باشد، که درآن xوy متغیرهای مستقل و تابع f دارای مشتقات جزئی مستقل ازمرتبهٔ دوم باشد، دیفرانسیل کامل مرتبهٔ دوم تابع z با رابطهٔ زیر محاسبه‌می‌شود:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \qquad (1)$$

وبطورکلی می‌توان ازرابطهٔ سمبلیك زیر استفاده‌کرد:

$$d^n z=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z,$$

که شبیه قانون دوجمله‌ای بسط داده می‌شود.

اگر $z=f(x,y)$ باشد، که در آن x و y عبارتند از توابع یك یا چنــد متغیر مستقل، دراینصورت

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial z}{\partial x}d^2x+\frac{\partial z}{\partial y}d^2y \qquad (2)$$

اگر xوy متغیرهائی مستقل باشند، دراینصورت $d^2x=0$ و $d^2y=0$ می‌شود و رابطهٔ (۲) بهمان رابطهٔ (۱) تبدیل می‌شود.

مثال ۲. مطلوبست دیفرانسیل‌کامل مرتبهٔ اول و دوم ازتابع

$$z=2x^2-3xy-y^2$$

حل. روش اول. داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x-3y\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-3x-2y$$

وبنابراین

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(4x-3y)dx-(3x+2y)dy$$

ازآنجا نتیجه می‌شود:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=4dx^2-6dxdy-2dy^2$$

روش دوم. با دیفرانسیل‌گیری بدست می‌آوریم:

$$dz=4xdx-3(ydx+xdy)-2ydy=(4x-3y)dx-(3x+2y)dy$$

با دیفرانسیل‌گیری‌مجدد، وبا توجه به‌اینکه dx وdy به x و y مربوط نیستند، بدست‌می‌آید:

$$d^2z=(4dx-3dy)dx-(3dx+2dy)dy=4dx^2-6dxdy-2dy^2$$

۱۸۹۱. مطلوبست $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$، $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$$

۱۸۹۲. مطلوبست $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$z=ln(x^2+y)$$

۱۸۹۳. مطلوبست $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$z=\sqrt{2xy+y^2}$$

۱۸۹۴. مطلوبست $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$z=arctg\frac{x+y}{1-xy}$$

۱۸۹۵. مطلوبست $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

۱۸۹۶. مطلوبست مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم از تابع

$$u=xy+yz+zx$$

۱۸۹۷. مطلوبست $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$u=x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

۱۸۹۸. مطلوبست $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$z=sin(xy)$$

۱۸۹۹. مطلوبست $f''_{xx}(0,0)$ ، $f''_{xy}(0,0)$ ، $f''_{yy}(0,0)$ ، بشرطی که داشته باشیم:

$$f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$$

۱۹۰۰. ثابت کنید $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$z = \arcsin\sqrt{\frac{x-y}{x}}$$

۱۹۰۱. ثابت کنید $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$z = x^y$$

۱۹۰۲*. ثابت کنید که برای تابع

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

با شرط اضافی $f(0,0) = 0$ داریم:

$$f_{xy}''(0,0) = -1 \text{ , } f_{yx}''(0,0) = +1$$

۱۹۰۳. مطلوبست $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$، $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$z = f(u,v)$$

که در آن $u = x^2 + y^2$ و $v = xy$.

۱۹۰۴. مطلوبست $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$، بشرطی که داشته باشیم:

$u = f(x,y,z)$, با شرط $z = \varphi(x,y)$

۱۹۰۵. مطلوبست $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$، $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$، بشرطی که داشته باشیم:

$z = f(u,v)$, با شرط $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$.

۱۹۰۶. ثابت کنید تابع

$$u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

در معادلهٔ زیر (معادلهٔ لاپلاس) صدق می‌کند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

۱۹۰۷. ثابت کنید تابع

$$u = \ln\frac{1}{r}$$

که در آن $r=\sqrt{(x-a)^{۲}+(y-b)^{۲}}$، در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند:

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=۰$$

۱۹۰۸. ثابت کنید که تابع

$$u(x,t)=A\sin(a\lambda t+\varphi)\sin\lambda x$$

درمعادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}=a^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}$$

۱۹۰۹. ثابت کنید تابع

$$u(x,y,z,t)=\frac{۱}{(۲a\sqrt{\pi t}\ )^{۳}}e^{-\dfrac{(x-x_{۰})^{۲}+(y-y_{۰})^{۲}+(z-z_{۰})^{۲}}{۴a^{۲}t}}$$

که در آن $x_{۰}$، $y_{۰}$، $z_{۰}$ مقادیری‌ثابت هستند، در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^{۲}\left(\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}+\frac{\partial^{۲}u}{\partial z^{۲}}\right)$$

۱۹۱۰. ثابت کنید تابع

$$u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$$

که در آن φ و ψ توابعی دلخواه وقابل دیفرانسیل‌گیری هستند، درمعادلهٔ زیرصدق می‌کنند:

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}=a^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}$$

۱۹۱۱. ثابت کنید که تابع

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

درمعادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$x^{۲}\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}+۲xy\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}+y^{۲}\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}=۰$$

۱۹۱۲. ثابت کنید تابع

$$u=\varphi(xy)+\sqrt{xy}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

۱۹۱۳. ثابت کنید تابع $z=f[x+\varphi(y)]$ در معادلهٔ زیر صدق می کند:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

۱۹۱۴. مطلوبست $u=u(x,y)$، با شرط

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$$

۱۹۱۵. تابع $u=u(x,y)$ را که درمعادلهٔ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ صدق می کند، پیدا کنید.

۱۹۱۶. مطلوبست d^2z، بشرطی که داشته باشیم:

$$z=e^{xy}$$

۱۹۱۷. مطلوبست d^2u، بشرطی که داشته باشیم:

$$u=xyz$$

۱۹۱۸. مطلوبست d^2z، اگر داشته باشیم:

$$z=\varphi(t)\ ;\ t=x^2+y^2$$

۱۹۱۹. مطلوبست dz و d^2z، بشرطی که داشته باشیم:

$$z=u^v\ ;\ u=\frac{x}{y}\ ,\ v=xy$$

۱۹۲۰. مطلوبست d^2z، بشرطی که داشته باشیم:

$$z=f(u,v)\ ;\ u=ax\ ,\ v=by$$

۱۹۲۱. مطلوبست d^2z، بشرطی که داشته باشیم:

$$z=f(u,v)\ ;\ u=xe^y\ ,\ v=ye^x$$

۱۹۲۲. مطلوبست d^3z، بشرطی که داشته باشیم:

$$z=e^x\cos y$$

۱۹۲۳. مطلوبست دیفرانسیل مرتبهٔ سوم تابع

$$z=x\cos y+y\sin x$$

تمام مشتقهای جزئی مرتبهٔ سوم را بدست آورید.

۱۹۲۴. مطلوبست $df(1,2)$ و $d^2f(1,2)$، بشرطی که داشته باشیم:

$$f(x,y)=x^{2}+xy+y^{2}-4\ln x-10\ln y$$

۱۹۲۵. مطلوبست $d^{2}f(0,0,0)$، اگر داشته باشیم:

$$f(x,y,z)=x^{2}+2y^{2}+3z^{2}-2xy+4xz+2yz$$

۸. انتگرال دیفرانسیلهای کامل

۱°. شرط دیفرانسیل کامل. اگر توابع $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ و مشتقهای جزئی مرتبهٔ اول آنها درحوزهٔ D پیوسته باشد، برای اینکه عبارت $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ در حوزهٔ D دیفرانسیل کامل تابعی مثل $u(x,y)$ باشد، لازم و کافی است که شرط زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

مثال ۱. ثابت کنید که عبارت

$$(2x+y)dx+(x+2y)dy$$

دیفرانسیل کامل یك تابع است و این تابع را پیدا کنید.

حل. در این حالت داریم؛ $P=2x+y$ ، $Q=x+2y$. بنابراین بدست می‌آید:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=1$$

بنابراین:

$$(2x+y)dx+(x+2y)dy=du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

که در آن u تابع مجهول است.

طبق شرط $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y$ و بنابراین

$$u=\int(2x+y)dx=x^{2}+xy+\varphi(y)$$

ولی ازطرف دیگر $\frac{\partial u}{\partial y}=x+\varphi'(y)=x+2y$، ازآنجا داریم: $\varphi'(y)=2y$ و

$$\varphi(y)=y^{2}+c \quad \text{و} \quad u=x^{2}+xy+y^{2}+c$$

وبالاخره

$$(2x+y)dx+(x+2y)dy=d(x^2+xy+y^2+c)$$

۲°. حالت سه متغیره. بهمین ترتیب عبارت

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

که در آن $P(x,y,z)$، $Q(x,y,z)$ و $R(x,y,z)$ توابعی ازسه متغیر x، y و z و همراه با مشتقهای مرتبهٔ اول خود پیوسته هستند، تنها وقتی دیفرانسیل کامل تابعی مثل $u(x,y,z)$ در حوزهٔ فضائی D می‌باشد که دراین حوزه شرایط زیر برقرارباشد:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}\equiv\frac{\partial R}{\partial x}$$

مثال ۲. ثابت کنید که عبارت

$$(3x^2+3y-1)dx+(z^2+3x)dy+(2yz+1)dz$$

دیفرانسیل کامل یك تابع است و این تابع را بدست آورید.

حل. دراینجا داریم:

$$P=3x^2+3y-1\ ,\ Q=z^2+3x\ ,\ R=2yz+1$$

وبسادگی معلوم است که

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=3\ ,\ \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=2z\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=0$$

وبنابراین

$$(3x^2+3y-1)dx+(z^2+3x)dy+(2yz+1)dz=du=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

که درآن u عبارتست از تابع مجهول.

داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+3y-1$$

یعنی

$$u=\int(3x^2+3y-1)dx=x^3+3xy-x+\varphi(y,z)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x+\frac{\partial \varphi}{\partial y}=z^2+3x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial \varphi}{\partial z}=۲yz+۱$$

از آنجا بدست می‌آید: $\frac{\partial \varphi}{\partial y}=z^۲$ و $\frac{\partial \varphi}{\partial z}=۲yz+۱$. مسئله منجر به‌جستجوی یك تابع دو متغیره می‌شود که مشتقهای جزئی آن معلوم است ودرشرایط دیفرانسیل کامل صدق می‌کند.

محاسبهٔ φ:

$$\varphi(y,z)=\int z^۲dy=yz^۲+\psi(z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}=۲yz+\psi'(z)=۲yz+۱$$

$$\psi'(z)=۱\ ,\ \ \psi(z)=z+c$$

یعنی $\varphi(y,z)=yz^۲+z+c$. بالاخره خواهیم داشت:

$$u=x^۳+۳xy-x-yz^۲+z+c$$

ثابت‌کنید هریك ازعبارتهای زیر دیفرانسیل‌کامل یك تابع‌اند واین تابع را بدست‌آورید:

۱۹۲۶. $ydx+xdy$.

۱۹۲۷. $(\cos x+۳x^۲y)dx+(x^۳-y^۲)dy$.

۱۹۲۸. $\dfrac{(x+۲y)dx+ydy}{(x+y)^۲}$.

۱۹۲۹. $\dfrac{x+۲y}{x^۲+y^۲}dx-\dfrac{۲x-y}{x^۲+y^۲}dy$

۱۹۳۰. $\dfrac{۱}{y}dx-\dfrac{x}{y^۲}dy$.

۱۹۳۱. $\dfrac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}dx+\dfrac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}dy$.

۱۹۳۲. مقادیر ثابت a و b را چنان پیداکنیدکه عبارت

$$\frac{(ax^۲+۲xy+y^۲)dx-(x^۲+۲xy+by^۲)dy}{(x^۲+y^۲)^۲}$$

دیفرانسیل کامل تابعی مانند z باشد و این تابع را بدست آورید.

ثابت‌کنیدکه عبارتهای زیر دیفرانسیل کامل توابعی هستند، این توابع را پیداکنید:

۱۹۳۳. $(۲x+y+z)dx+(x+۲y+z)dy+(x+y+۲z)dz$.

۱۹۳۴. $(۳x^۲+۲y^۲+۳z)dx+(۴xy+۲y-z)dy+(۳x-y-۲)dz$.

۱۹۳۵. $(۲xyz-۳y^۲z+۸xy^۲+۲)dx+$
$+(x^۲z-۶xyz+۸x^۲y+۱)dy+(x^۲y-۳xy^۲+۳)dz$

۱۹۳۶. $\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)dy+\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)dz$.

۱۹۳۷. $\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

۱۹۳۸*. تصاویر یك نیرو روی محورهای مختصات داده شده است:

$$X=\frac{y}{(x+y)^2}\quad,\quad Y=\frac{\lambda x}{(x+y)^2}$$

که درآن λ مقدار ثابتی است. ضریب λ چقدر باشد تا نیرو دارای پطانسیل باشد؟

۱۹۳۹. تابع $f(x,y)$ در چه شرطی صدق کند تا عبارت

$$f(x,y)(dx+dy)$$

دیفرانسیل کامل باشد؟

۱۹۴۰. تابع u را چنان پیدا کنید که داشته باشیم:

$$du=f(xy)(ydx+xdy)$$

۹. دیفرانسیل توابع ضمنی

۱°. حالت يك متغیـــر مستقل. اگر در معادلهٔ $f(x,y)=0$ ، که در آن $f(x,y)$ تابعی قابل دیفرانسیل‌گیری از متغیـرهای x و y است، y را به‌عنوان تابعـی از x بگیریم، دراینصورت مشتق تابع ضمنی مفـروض با شرط $f'_y(x,y)\neq 0$ می‌تواند با رابطـهٔ زیر بیان شود:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}\qquad(1)$$

مشتقهای مرتبهٔ بالاتر با محاسبهٔ دیفرانسیلهای متوالی رابطهٔ (۱) بدست می‌آید.

مثال ۱. مطلوبست $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)+1=0$$

حل. سمت چپ این معادله را $f(x,y)$ می‌نامیم، مشتقهای جزئی را محاسبه می‌کنیم:

$$f_x'(x,y)=3(x^2+y^2)^2\cdot 2x-3\cdot 2x=6x[(x^2+y^2)^2-1]$$
$$f_y'(x,y)=3(x^2+y^2)^2\cdot 2y-3\cdot 2y=6y[(x^2+y^2)^2-1]$$

با بکاربردن رابطهٔ (۱) بدست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)}=-\frac{6x[(x^2+y^2)^2-1]}{6y[(x^2+y^2)^2-1]}=-\frac{x}{y}$$

برای محاسبهٔ مشتق مرتبهٔ دوم، از مشتق مرتبهٔ اول نسبت به x دیفرانسیل می‌گیریم، با این شرط که y را تابع x به‌حساب می‌آوریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{y-x\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}$$

۰۲. حالت چند متغیر مستقل. بهمین‌ترتیب اگر درمعادلهٔ $F(x,y,z)=0$، که در آن $F(x,y,z)$ تابعی از متغیرهای xوyوz و دارای دیفرانسیل است، z تابعی ضمنی از متغیرهای مستقل xوy و $F_z'(x,y,z)\neq 0$ باشد، دراینصورت مشتقهای جزئی این تابع ضمنی‌مفروض از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}\qquad (2)$$

طریقهٔ دیگرمحاسبهٔ مشتقهای تابع z چنین است: از معادلهٔ $F(x,y,z)=0$ دیفرانسیل می‌گیریم، بدست می‌آید:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

از اینجا می‌توان dz و سپس $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بدست آورد.

مثال ۲. مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0$$

حل. روش اول. سمت چپ معادلهٔ مفروض را $F(x,y,z)$ می‌نامیم؛ مشتقهای جزئی را بدست می‌آوریم:

$$F_x'(x,y,z)=2x\ ,\ F_y'(x,y,z)=-4y-z+1\ ,\ F_z'(x,y,z)=6z-y$$

با بکار بردن رابطهٔ (۲) بدست می‌آید:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{۲x}{۶z-y};\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{۱-۴y-z}{۶z-y}$$

روش دوم. با دیفرانسیل گرفتن ازمعادلهٔ مفروض بدست می‌آید:

$$۲xdx-۴ydy+۶zdz-ydz-zdy+dy=۰$$

از اینجا dz، یعنی دیفرانسیل کامل تابع ضمنی را بدست می‌آوریم:

$$dz=\frac{۲xdx+(۱-۴y-z)dy}{y-۶z}$$

که با مقایسه با رابطهٔ $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$، می‌بینیم که

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۲x}{y-۶z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۱-۴y-z}{y-۶z}$$

۴°. دستگاه توابع ضمنی. اگر دستگاه دومعادلهٔ

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=۰\\G(x,y,u,v)=۰\end{cases}$$

u و v را به عنوان توابعی دارای دیفرانسیل ازمتغیرهای x و y تعریف کند و ضمناً

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}\neq ۰$$

دراینصورت دیفرانسیلهای این توابع (وبنابراین مشتقهای جزئی آنها) می‌توانند از دستگاه معادله‌های زیر بدست آیند:

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv=۰\\ \frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy+\frac{\partial G}{\partial u}du+\frac{\partial G}{\partial v}dv=۰\end{cases}\qquad(۳)$$

مثال ۴. معادله‌های

$$u+v=x+y\ ,\quad xu+yv=۱$$

u و v را به‌عنوان توابعی از x و y تعریف می‌کنند؛ مطلوبست:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \text{، } \frac{\partial u}{\partial y} \text{، } \frac{\partial v}{\partial x} \text{، } \frac{\partial v}{\partial y}$$

حل. روش اول. از دو معادله نسبت به x دیفرانسیل می‌گیریم، بدست می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=1$$

$$u+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

و از آنجا

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{u+y}{x-y}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u+x}{x-y}$$

بهمین ترتیب بدست می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{v+y}{x-y}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v+x}{x-y}$$

روش دوم. با دیفرانسیل گرفتن، دومعادله بدست می‌آید که دیفرانسیلهای هرچهار متغیر را بهم مربوط می‌کند:

$$du+dv=dx+dy$$

$$xdu+udx+ydv+vdy=0$$

این دومعادله را نسبت به du و dv حل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$du=-\frac{(u+y)dx+(v+y)dy}{x-y}\ ,\ dv=\frac{(u+x)dx+(v+x)dy}{x-y}$$

از آنجا

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{u+y}{x-y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{v+y}{x-y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u+x}{x-y}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v+y}{x-y}$$

۰۴. تابعی که به‌صورت پارامتری داده شده‌باشد. اگر تابع دیفرانسیل‌دار z ازمتغیرهای xوy به‌صورت پارامتری داده شده باشد:

$$x=x(u,v)\ \ ,\ \ x=y(u,v)\ \ ,\ \ z=z(u,v)$$

و
$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$$

دراینصورت دیفرانسیل این تابع را می‌توان ازدستگاه معادلات زیر بدست‌آورد:

$$\begin{cases} dx=\dfrac{\partial x}{\partial u}du+\dfrac{\partial x}{\partial v}dv\\[2ex] dy=\dfrac{\partial y}{\partial u}du+\dfrac{\partial y}{\partial v}dv\\[2ex] dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv\end{cases}\qquad (۴)$$

با دانستن دیفرانسیل $dz=pdx+qdy$ می‌توان مشتقهای جزئی $\frac{\partial z}{\partial x}=p$ و $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ را بدست آورد.

مثال ۴. تابع z از آوندهای x و y با این معادلات داده شده است:

$$x=u+v\ ,\ \ y=u^{۲}+v^{۲}\ ,\ \ z=u^{۳}+v^{۳}\quad (u\neq v)$$

مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$.

حل. روش اول. با دیفرانسیل گرفتن، سه معادله بدست می‌آوریم که دیفرانسیلهای هر پنج متغیر را بهم مربوط می‌کند:

$$\begin{cases} dx=du+dv\\ dy=۲udu+۲vdv\\ dz=۳u^{۲}du+۳v^{۲}dv\end{cases}$$

از دو معادلهٔ اول du و dv را بدست می‌آوریم:

$$du=\frac{۲vdx-dy}{۲(v-u)}\ \ ,\ \ dv=\frac{dy-۲udx}{۲(v-u)}$$

این مقادیر را در معادلهٔ سوم قرار می‌دهیم:

$$dz = ۳u^۲\frac{۲v dx - dy}{۲(v-u)} + ۳v^۲\frac{dy - ۲u dx}{۲(v-u)} =$$

$$= \frac{۶uv(u-v)dx + ۳(v^۲ - u^۲)dy}{۲(v-u)} = -۳uv dx + \frac{۳}{۲}(u+v)dy$$

ازآنجا

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -۳uv\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{۳}{۲}(u+v)$$

روش دوم. از معادلهٔ سوم دستگاه مفروض می‌توان بدست آورد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = ۳u^۲\dfrac{\partial u}{\partial x} + ۳v^۲\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = ۳u^۲\dfrac{\partial u}{\partial y} + ۳v^۲\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \qquad (۵)$$

حالا از دومعادلهٔ اول ابتدا نسبت به x ونسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} ۱ = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\ , & ۰ = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ ۰ = ۲u\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + ۲v\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & ۱ = ۲u\dfrac{\partial u}{\partial y} + ۲v\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

از دستگاه اول بدست می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v-u}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{u-v}$$

واز دستگاه دوم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{۱}{۲(u-v)}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{۱}{۲(v-u)}$$

این مقادیر را درروابط (۵) قرار می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ۳u^۲\frac{v}{v-u} + ۳v^۲\frac{u}{u-v} = -۳uv$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = ۳u^۲\frac{۱}{۲(u-v)} + ۳v^۲\frac{۱}{۲(v-u)} = \frac{۳}{۲}(u+v)$$

۱۹۴۱. اگر y تابعی از x وبا معادلهٔ زیرتعریف شده باشد:

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

مطلوبست $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ و $\frac{d^۳y}{dx^۳}$.

۱۹۴۲. y تابعی است از x و با معادلهٔ زیر معین شده است:

$$x^۲+y^۲+۲axy=۰ \qquad (a>۱)$$

ثابت کنید $\frac{d^۲y}{dx^۲}=۰$ و نتیجه‌ای را که بدست می‌آید توضیح دهید.

۱۹۴۳. مطلوبست $\frac{dy}{dx}$، بشرطی که داشته باشیم: $y=۱+y^x$.

۱۹۴۴. مطلوبست $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^۲y}{dx^۲}$، بشرطی که داشته باشیم: $y=x+lny$.

۱۹۴۵. مطلوبست $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=۱}$ و $\left(\frac{d^۲y}{dx^۲}\right)_{x=۱}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$x^۲-۲xy+y^۲+x+y-۲=۰$$

با استفاده از نتیجه‌هائی که بدست می‌آید، منحنی تابع مفروض را در مجاورت $x=۱$ رسم کنید.

۱۹۴۶. تابع y بوسیلهٔ معادلهٔ زیر معین شده است:

$$ln\sqrt{x^۲+y^۲}=a\ arctg\,\frac{y}{x} \qquad (a\neq ۰)$$

مطلوبست $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^۲y}{dx^۲}$.

۱۹۴۷. مطلوبست $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^۲y}{dx^۲}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$۱+xy-ln(e^{xy}+e^{-xy})=۰$$

۱۹۴۸. تابع z ازمتغیرهای x و y بوسیلهٔ معادله‌های زیر داده شده است:

$$x^۳+۲y^۳+z^۳-۳xyz-۲y+۳=۰$$

مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

۱۹۴۹. مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$x\cos y + y\cos z + z\cos x = 0$$

۱۹۵۰. تابع z با معادلهٔ زیر داده شده است:

$$x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$$

مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ برای دستگاه مقادیر $x=-1$ ، $y=0$ ، $z=1$.

۱۹۵۱. مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

۱۹۵۲. $f(x,y,z) = 0$، ثابت کنید: $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

۱۹۵۳. $z = \varphi(x,y)$ که در آن y تابعی است از x و بوسیلهٔ معادلهٔ $\psi(x,y) = 0$ معین شود. مطلوبست $\frac{dz}{dx}$.

۱۹۵۴. مطلوبست dz و d^2z، بشرطی که داشته باشیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

۱۹۵۵. z را تابعی ازمتغیرهای x و y می‌گیریم که با معادلهٔ زیرمعین شده باشد:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$$

مطلوبست dz و d^2z، برای دستگاه مقادیر $x=2$، $y=0$، $z=1$.

۱۹۵۶. مطلوبست dz و d^2z بشرطی که داشته باشیم: $\ln z = x + y + z - 1$. مشتقهای مرتبهٔ اول ومرتبهٔ دوم تابع z چیست؟

۱۹۵۷. تابع z بوسیلهٔ معادلهٔ زیر معین شده است:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$$

که درآن φ تابع دلخواه قابل دیفرانسیل‌گرفتن و a و b و c مقادیر ثابت‌اند. ثابت کنید:

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$$

۱۹۵۸. اگر z با معادلهٔ زیرمعین شود:

$$F(x-az\ ,\ y-bz)=0$$

که در آن F تابع دلخواهی از آوندهای خود و دارای دیفرانسیل است، ثابت کنید:

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

۱۹۵۹. $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$. ثابت کنید: $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

۱۹۶۰. اگر تابع z بوسیلهٔ معادلهٔ $y=x\varphi(z)+\psi(z)$ معین شده باشد، صحت معادلهٔ زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=0$$

۱۹۶۱. توابع y و z از متغیرمستقل x بوسیلهٔ دستگاه زیر داده شده‌اند:

$$x^2+y^2-z^2=0\quad ,\quad x^2+2y^2+3z^2=4$$

مطلوبست $\frac{dy}{dx}$، $\frac{dz}{dx}$، $\frac{d^2y}{dx^2}$، $\frac{d^2z}{dx^2}$ به ازای $x=1$ ، $y=0$ ، $z=1$.

۱۹۶۲. توابع y و z ازمتغیر مستقل x بوسیلهٔ دستگاه زیر داده شده‌اند:

$$xyz=a\quad ,\quad x+y+z=b$$

مطلوبست dy ، dz ، d^2y ، d^2z.

۱۹۶۳. توابع u و v ازمتغیرهای مستقل x و y بوسیلهٔ دستگاه معادلات زیر داده شده‌اند.

$$u=x+y\quad ,\quad uv=y$$

مطلوبست $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial u}{\partial y}$، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$، $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$، $\frac{\partial v}{\partial x}$، $\frac{\partial v}{\partial y}$، $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$، $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ به‌ازای $x=0$ ، $y=1$.

۱۹۶۴. توابع u و v ازمتغیرهای مستقل x و y بوسیلهٔ دستگاه معادلات زیرداده شده‌اند:

$$u+v=x\quad ,\quad u-yv=0$$

مطلوبست du ، dv ، d^2u ، d^2v.

۱۹۶۵. توابع u و v ازمتغیرهای x و y بوسیلهٔ دستگاه زیر داده شده‌اند:

$$x=\varphi(u,v)\quad و\quad y=\psi(u,v)$$

مطلوبست $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial u}{\partial y}$، $\frac{\partial v}{\partial x}$، $\frac{\partial v}{\partial y}$.

۱۹۶۶. a) مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$x = u\cos v \ , \ y = u\sin v \ , \ z = cv$$

b) مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$x = u + v \ , \ y = u - v \ , \ z = uv$$

c) مطلوبست dz، بشرطی که داشته باشیم:

$$x = e^{u+v} \ , \ y = e^{u-v} \ , \ z = uv$$

۱۹۶۷. $z = F(r, \varphi)$، که در آن r و φ توابعی از متغیرهای x و y هستند و بوسیلهٔ دستگاه زیر معین شده‌اند:

$$x = r\cos\varphi \ , \ y = r\sin\varphi$$

مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

۱۹۶۸. اگر z تابعی از x و y باشد، مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$، بشرطی که داشته باشیم:

$$x = a\cos\varphi\cos\psi \ , \ y = b\sin\varphi\cos\psi \ , \ z = c\sin\psi$$

۱۰. تغییر متغیرها

برای تغییر متغیرها درعبارتهای دیفرانسیلی که شامل مشتقها هم باشند، باید با استفاده از قواعد دیفرانسیل‌گیری توابع مرکب، مشتقها را بوسیلهٔ متغیرهای جدید بیان کرد.

۱°. تغییر متغیرها درعبارتهائی که شامل مشتقهای معمولی هستند.

مثال ۱. معادلهٔ

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2}y = 0$$

را با فرض $x = \frac{1}{t}$ تبدیل کنید.

حل. مشتقهای y نسبت به x را برحسب مشتقهای y نسبت به t بیان می‌کنیم. داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{-\frac{1}{t^2}}=-t^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=-\left(2t\frac{dy}{dt}+t^2\frac{d^2y}{dt^2}\right)\left(-t^2\right)=$$

$$=2t^3\frac{dy}{dt}+t^4\frac{d^2y}{dt^2}$$

مقادیری را که بدست آورده‌ایم در معادلهٔ مفروض قرار می‌دهیم و $x=\frac{1}{t}$ می‌گیریم. بدست می‌آید:

$$\frac{1}{t^2}\cdot t^3\left(2\frac{dy}{dt}+t\frac{d^2y}{dt^2}\right)+2\cdot\frac{1}{t}\left(-t^2\frac{dx}{dt}\right)+a^2t^2y=0$$

یا

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a^2y=0$$

مثال ۲. معادلهٔ زیر را تبدیل کنید:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\frac{dy}{dx}=0$$

y را آوند و x را تابع بگیرید.

حل. مشتقهای y نسبت به x را برحسب مشتقهای x نسبت به y می‌نویسیم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

این مقادیر را در معادلهٔ مفروض قرار می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$x\left[-\frac{\dfrac{d^۲x}{dy^۲}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^۲}\right]+\frac{۱}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^۳}-\frac{۱}{\dfrac{dx}{dy}}=۰$$

ویا بالاخره

$$x\frac{d^۲x}{dy^۲}-۱+\left(\frac{dx}{dy}\right)^۲=۰$$

مثال ۳. معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

را با انتقال به‌مختصات قطبی $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ تبدیل کنید.

حل. r را تابعی از φ می‌گیریم، بدست می‌آید:

$$dx=\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi\ ,\quad dy=\sin\varphi dr+r\cos\varphi d\varphi$$

از آنجا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\varphi dr+r\cos\varphi d\varphi}{\cos\varphi dr-r\sin\varphi d\varphi}=\frac{\sin\varphi\dfrac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\dfrac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi}$$

مقادیر x، y و $\dfrac{dy}{dx}$ را در معادلهٔ مفروض قرار می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$\frac{\sin\varphi\dfrac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\dfrac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi}=\frac{r\cos\varphi+r\sin\varphi}{r\cos\varphi-r\sin\varphi}$$

ویا پس از ساده کردن

$$\frac{dr}{d\varphi}=r$$

۲۰. تغیر متغیرها درعبارتهائی‌که شامل مشتقهای جزئی هستند.

مثال ۴. معادلهٔ حرکت نوسانی سیم

$$\frac{\partial^{2}u}{dt^{2}}=a^{2}\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\qquad(a\neq 0)$$

را برحسب متغیرهای مستقل وجدید αوβ بیان کنید که درآن $\alpha=x-at$ و $\beta=x+at$.

حل. مشتقهای جزئی u نسبت به x و t را برحسب مشتقهای جزئی u نسبت به α و β می‌نویسیم. با استفاده از روابط دیفرانسیل‌گیری توابع مرکب

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}(-a)+\frac{\partial u}{\partial \beta}a=a\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}-\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot 1=\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta}$$

که با دیفرانسیل‌گیری مجدد

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \beta}{\partial t}=$$

$$=a\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha^{2}}\right)(-a)+a\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial\beta^{2}}-\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha\partial\beta}\right)a=a^{2}\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha^{2}}-2\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^{2}u}{\partial\beta^{2}}\right);$$

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \beta}{\partial x}=$$

$$=\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha^{2}}+\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\cdot 1+\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^{2}u}{\partial\beta^{2}}\right)\cdot 1=\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha^{2}}+2\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^{2}u}{\partial\beta^{2}}$$

که با قرار دادن در معادلهٔ مفروض، خواهیم داشت:

$$a^{2}\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha^{2}}-2\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^{2}u}{\partial\beta^{2}}\right)=a^{2}\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha^{2}}+2\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^{2}u}{\partial\beta^{2}}\right)$$

ویا

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial\alpha\partial\beta}=0$$

مثال ۵. معادلهٔ $x^{2}\frac{\partial z}{\partial x}+y^{2}\frac{\partial z}{\partial y}=z^{2}$ را بااستفاده از متغیرهای مستقل جدید $u=x$ و

$v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$ برحسب تابع جدید $w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$ تبدیل کنید.

حل. مشتقهای جزئی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را برحسب مشتقهای جزئی $\frac{\partial w}{\partial u}$ و $\frac{\partial w}{\partial v}$ بیان می‌کنیم. برای این منظور از روابط بین متغیرهای قدیم وجدید دیفرانسیل می‌گیریم:

$$du=dx, dv=\frac{dx}{x^2}-\frac{dy}{y^2}\ ,\ dw=\frac{dx}{x^2}-\frac{dz}{z^2}$$

از طرف دیگر

$$dw=\frac{\partial w}{\partial u}\,du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$$

به‌این ترتیب

$$\frac{\partial w}{\partial u}\,du+\frac{\partial w}{\partial v}\,dv=\frac{dx}{x^2}-\frac{dz}{z^2}$$

یا

$$\frac{\partial w}{\partial u}dx+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{dx}{x^2}-\frac{dy}{y^2}\right)=\frac{dx}{x^2}-\frac{dz}{z^2}$$

از آنجا

$$dz=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx+\frac{z^2}{y^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial u}dy$$

و بنابراین

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

و

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}$$

که اگر این عبارتها را درمعادلهٔ مفروض قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$x^2z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}\right)+z^2\frac{\partial w}{\partial v}=z^2$$

یا

$$\frac{\partial w}{\partial u}=0$$

۱۹۶۹. با فرض $x=e^t$ معادلهٔ زیر را تبدیل کنید:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+y=0$$

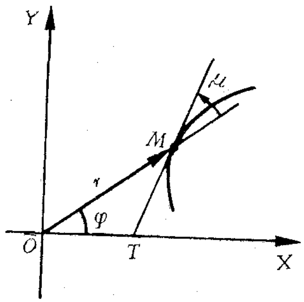
۱۹۷۰. با فرض $x=\cos t$ این معادله را تبدیل کنید:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0$$

۱۹۷۱. معادلات زیر را، وقتی که y آوند باشد، تبدیل کنید:

$$a)\ \frac{d^۲y}{dx^۲}+۲y\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲+۰\ , \qquad b)\ \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^۳y}{dx^۳}-۳\left(\frac{d^۲y}{dx^۲}\right)^۲=۰$$

۱۹۷۲. تانژانت زاویه μ بین مماس TM وشعاع حامل OM نقطهٔ تماس (شکل ۶۹)، با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:



شکل ۶۹

$$tg\mu=\frac{y'-\frac{y}{x}}{۱+\frac{y}{x}y'}$$

این عبارت را، با انتقال به‌مختصات قطبی $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$، تبدیل کنید.

۱۹۷۳. رابطهٔ انحنای منحنی

$$K=\frac{y''}{[۱+(y')^۲]^{\frac{۳}{۲}}}$$

را درمختصات قطبی $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ بیان کنید.

۱۹۷۴. معادلهٔ

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=۰$$

را برحسب متغیرهای مستقل جدید u و v بیان کنید، بشرطی که $u=x$ و $v=x^۲+y^۲$.

۱۹۷۵. با فرض $u=x$ و $v=\frac{y}{x}$، معادلهٔ زیررا برحسب متغیرهای جدید u و v بنویسید:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z=۰$$

۱۹۷۶. معادلهٔ لاپلاس

$$\frac{\partial^۲u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲u}{\partial y^۲}=۰$$

را به‌مختصات قطبی r و φ تبدیل کنید، با فرض

$$x=r\cos\varphi\ ,\ y=r\sin\varphi$$

۱۹۷۷. با فرض $u=xy$ و $v=\frac{x}{y}$، معادلهٔ زیر را تبدیل کنید:

$$x^{۲}\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}-y^{۲}\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}=۰$$

۱۹۷۸. معادلهٔ

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$$

را برحسب متغیرهای مستقل $u=x^{۲}+y^{۲}$ و $v=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$ و تابع جدید $w=\ln z-(x+y)$ بنویسید.

۱۹۷۹. معادلهٔ

$$\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}-۲\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}=۰$$

را برحسب متغیرهای مستقل $u=x+y$ و $v=\frac{y}{x}$ و تابع جدید $w=\frac{z}{x}$ بنویسید.

۱۹۸۰. معادلهٔ زیر را تبدیل کنید:

$$\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}+۲\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}=۰$$

بشرطی که $u=x+y$ ، $v=x-y$ ، $w=xy-z$ که در آن $w=w(u,v)$.

۱۱. صفحهٔ مماس و خط قائم برسطح

۱°. معادلهٔ صفحهٔ مماس و قائم در حالتی‌که معادلهٔ سطح به‌صورت صریح باشد. صفحهٔ مماس برسطح درنقطهٔ M (نقطهٔ تماس) به صفحه‌ای گفته می‌شود که تمام مماسهای در نقطهٔ M، برمنحنی‌هائی که از این نقطه می‌گذرند و روی سطح قرار دارند، روی آن قرارگرفته باشند.

قائم برسطح عبارتست ازخط عمود برصفحهٔ مماس درنقطهٔ تماس.

اگر معادلهٔ سطح در دستگاه دکارتی به‌صورت صریح $z=f(x,y)$ داده شده باشد ،

که در آن $f(x,y)$ تابعی است دارای دیفرانسیل، معادلهٔ صفحهٔ مماس براین‌سطح درنقطهٔ $M(x_0,y_0,z_0)$ چنین است:

$$Z-z_0=f_x'(x_0,y_0)(X-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(Y-y_0) \qquad (۱)$$

دراینجا $z_0=f(x_0,y_0)$ و X، Y و Z مختصات نقطهٔ دلخواهی ازصفحهٔ مماس‌است.

معادلات خط قائم به‌اینصورت است:

$$\frac{X-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{Y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{Z-z_0}{-۱} \qquad (۲)$$

که درآن X، Y و Z مختصات نقطهٔ دلخواهی ازقائم است.

مثال ۱. معادلهٔ صفحهٔ مماس وقائم برسطح $z=\frac{x^۲}{۲}-y^۲$ را در نقطهٔ $M(۲,-۱,۱)$ بنویسید.

حل. مشتقهای جزئی تابع مفروض ومقادیر آنها را درنقطهٔ M پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x\ , \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=۲$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-۲y,\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=۲$$

ازآنجا، با استفاده از روابط (۱) و (۲)، معادلهٔ صفحهٔ مماس وخط قائم بدست می‌آید:

$$۲x+۲y-z-۱=۰ \qquad \text{(صفحهٔ مماس)}$$

$$\frac{x-۲}{۲}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z-۱}{-۱} \qquad \text{(خط قائم)}$$

۲°. معادلهٔ صفحهٔ مماس و خط قائم درحالتی‌که معادله سطح به‌صورت ضمنی باشد.
وقتی‌که معادلهٔ سطح به‌صورت ضمنی داده شده باشد:

$$F(x,y,z)=۰$$

و $F(x_0,y_0,z_0)=۰$، معادله‌های صفحهٔ مماس وخط قائم بترتیب چنین‌اند:

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(X-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(Y-y_0)+$$
$$+F_z'(x_0,{}_0y,z_0)(Z-z_0)=۰ \qquad (۳)$$

$$\frac{X-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{Y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{Z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)} \qquad (۴)$$

مثال ۲. معادلهٔ صفحهٔ مماس وخط قائم برسطح $۳xyz - z^۳ = a^۳$ رادرنقطه‌ای ازآن که $x = ۰$ و $y = a$ است، بنویسید.

حل. با قرار دادن $x = ۰$ و $y = a$ در معادلهٔ سطح $-z^۳ = a^۳$ وازآنجا $z = -a$ بدست می‌آید. بنابراین نقطهٔ تماس $M(۰, a, -a)$ است.

سمت چپ معادله را $F(x, y, z)$ می‌گیریم ومشتقهای جزئی ومقادیر آنها را درنقطهٔ M بدست می‌آوریم:

$$F'_x = ۳yz, \qquad (F'_x)_M = -۳a^۲$$
$$F'_y = ۳xz, \qquad (F'_y)_M = ۰$$
$$F'_z = ۳xy - ۳z^۲, \qquad (F'_z)_M = -۳a^۲$$

که با استفاده از روابط (۳) و (۴) بدست می‌آید:

$$-۳a^۲(x-۰) + ۰(y-a) - ۳a^۲(z+a) = ۰$$

ویا $x + z + a = ۰$ (معادلهٔ صفحهٔ مماس).

$$\frac{x-a}{-۳a^۲} = \frac{y-a}{۰} = \frac{z-a}{-۳a^۲}$$

ویا $\frac{x}{۱} = \frac{y-a}{۰} = \frac{z+a}{۱}$ (معادلات خط قائم).

۱۹۸۱. مطلوبست معادلهٔ صفحهٔ مماس وخط قائم برسطوح زیر درنقاط مربوطه:

a) سهموی دوار $z = x^۲ + y^۲$ درنقطهٔ $(۱, -۲, ۵)$؛

b) مخروط $\frac{x^۲}{۱۶} + \frac{y^۲}{۹} - \frac{z^۲}{۸} = ۰$ در نقطهٔ $(۴, ۳, ۴)$؛

c) کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲Rz$ درنقطهٔ $(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$.

۱۹۸۲. درچه نقطه‌ای ازبیضوی

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$$

قائم برآن با محورهای مختصات زاویه‌های مساوی می‌سازد؟

۱۹۸۳. ازنقطهٔ $M(۳, ۴, ۱۲)$ واقع برکرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱۶۹$ صفحه‌ای عمود برمحورهای OX و OY رسم کرده‌ایم. مطلوبست معادلهٔ صفحه‌ای که ازمماسهای برمقطع بدست آمده درنقطهٔ مشترك آنها M، می‌گذرد.

۱۹۸۴. ثابت کنید که معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح درجه دوم

$$ax^۲+by^۲+cz^۲=k$$

درنقطهٔ $M(x_۰,y_۰,z_۰)$ از آن به‌صورت زیر است:

$$ax_۰x+by_۰y+cz_۰z=k$$

۱۹۸۵. برسطح $x^۲+۲y^۲+۳z^۲=۲۱$، صفحهٔ مماسی رسم کنید که با صفحهٔ $x+۴y+۶z=۰$ موازی باشد.

۱۹۸۶. بربیضوی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ صفحهٔ مماسی رسم کنید که روی محورهای مختصات پاره خطهای مساوی جدا کند.

۱۹۸۷. برسطح $x^۲+y^۲-z^۲-۲x=۰$ نقاطی را بدست آورید که صفحه‌های مماس برآنها موازی صفحه‌های مختصات باشد.

۱۹۸۸. ثابت کنید که صفحه‌های مماس بر سطح $xyz=m^۲$ با صفحه‌های مختصات سه وجهی به‌حجم ثابت می‌سازد.

۱۹۸۹. ثابت کنید که هرصفحهٔ مماس بر سطح $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ پاره‌خط‌هائی روی محورهای مختصات بوجود می‌آورد که مجموع آنها مقداریست ثابت.

۱۹۹۰. ثابت کنید که مخروط $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=\frac{z^۲}{c^۲}$ و کرهٔ

$$x^۲+y^۲+\left(z-\frac{b^۲+c^۲}{c}\right)=\frac{b^۲}{c^۲}(b^۲+c^۲)$$

درنقاط $(۰,\pm b,c)$ بریکدیگر مماس‌اند.

۱۹۹۱. زاویهٔ بین دوسطح درنقطهٔ تقاطع آنها عبارتست از زاویهٔ بین صفحه‌های مماس برسطح مفروض، درنقطهٔ موردنظر.

زاویهٔ بین استوانهٔ $x^۲+y^۲=R^۲$ وکرهٔ $(x-R)^۲+y^۲+z^۲=R^۲$ را در نقطهٔ $M(\frac{R}{۲}, \frac{R\sqrt{۳}}{۲}, ۰)$ پیدا کنید.

۱۹۹۲. دو سطح را عمود برهم گویند، وقتی که در هرنقطهٔ منحنی تلاقی آنها باهم زاویهٔ قائمه بسازند.

ثابت کنید سطوح $x^۲+y^۲+z^۲=r^۲$ (کره)، $y=xtg\varphi$ (صفحه) و $z^۲=(x^۲+y^۲)tg^۲\psi$ (مخروط) دوبه‌دو برهم عمودند.

۱۹۹۳. ثابت کنید هرصفحه‌ای که مماس برسطح مخروطی $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ در نقطهٔ $M(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ آن باشد ($x_{\circ}\neq\circ$)، از مبداء مختصات عبور می‌کند.

۱۹۹۴*. مطلوبست تصویرهای بیضوی

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-xy-۱=\circ$$

برصفحه‌های مختصات.

۱۹۹۵. ثابت کنید قائم برهــر نقطه ازسطح دوار $z=f\left(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\right)$ ($f'\neq\circ$)، محور دوران را قطع می‌کند.

۱۲. رابطهٔ تیلور برای توابع چند متغیره

فرض می‌کنیم تابع $f(x,y)$ درمجاورت نقطهٔ (a,b) دارای مشتقهای نسبی پیوسته تا مرتبهٔ $(n+۱)$ام باشد. دراینصورت درمجاورت این نقطه رابطهٔ تیلور صحیح است:

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{۱}{۱!}[f_x'(a,b)(x-a)+f_y'(a,b)(y-b)]+$$

$$+\frac{۱}{۲!}[f_{xx}''(a,b)(x-a)^{۲}+۲f_{xy}''(a,b)(x-a)(y-b)+$$

$$+f_{yy}''(a,b)(y-b)^{۲}]+\cdots+\frac{۱}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n}\times$$

$$\times f(a,b)+R_n(x,y) \qquad (۱)$$

که درآن داریم:

$$R_n(x,y)=\frac{۱}{(n+۱)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+۱}\times$$

$$\times f[a+\theta(x-a),b+\theta(y-b)] \quad \circ<\theta<۱$$

ویا با علامتگذاری دیگر:

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+\frac{۱}{۱!}[hf_x'(x,y)+kf_y'(x,y)]+$$

$$+\frac{1}{2!}[h^2 f''_{xx}(x,y)+2hk f''_{xy}(x,y)+k^2 f''_{yy}(x,y)]+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x+\theta h,y+\theta k) \quad (2)$$

یا

$$\Delta f(x,y)=d\,f(x,y)+\frac{1}{2!}d^2 f(x,y)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}d^n f(x,y)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x+\theta h,y+\theta k) \quad (3)$$

حالت خاص رابطهٔ (۱) به‌ازای $a=b=0$ رابطهٔ ماکلورن نامیده می‌شود.
شبیه همین روابط برای توابع سه یا چند متغیره هم صحیح است.

مثال. مطلوبست نمو تابع $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$ ضمن عبور از مقادیر $x=1$ و $y=2$ به‌مقادیر $x_1=1+h$ و $y_1=2+k$.

حل. نمو مطلوب را می‌توان بااستفاده از رابطه (۲) بدست‌آورد. بترتیب مشتقهای‌جزئی ومقادیر آنها را درنقطهٔ (۱,۲) محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&f'_x(x,y)=3x^2+3y, && f'_x(1,2)=9,\\
&f'_y(x,y)=-6y^2+3x, && f'_y(1,2)=-21,\\
&f''_{xx}(x,y)=6x, && f''_{xx}(1,2)=6,\\
&f''_{xy}(x,y)=3, && f''_{xy}(1,2)=3,\\
&f''_{yy}(x,y)=-12y, && f''_{yy}(1,2)=-24,\\
&f'''_{xxx}(x,y)=6, && f'''_{xxx}(1,2)=6,\\
&f'''_{xxy}(x,y)=0, && f'''_{xxy}(1,2)=0,\\
&f'''_{xyy}(x,y)=0, && f'''_{xyy}(1,2)=0,\\
&f'''_{yyy}(x,y)=-12, && f'''_{yyy}(1,2)=-12
\end{aligned}$$

همهٔ مشتقهای بعدی متحد با صفرند. نتیجه‌هائی راکه بدست‌آوردیم در رابطهٔ (۲) قرار می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$\Delta f(x,y)=f(1+h,2+k)-f(1,2)=h\cdot 9+k(-21)+$$

$$+\frac{1}{2!}[h^2\cdot 6+2hk\cdot 3+k^2(-24)+\frac{1}{3!}[h^3\cdot 6+3h^2k\cdot 0+3hk^2\cdot 0+$$

$$+k^3(-12)]=9h-21k+3h^2+3hk-12k^2+h^3-2k^3$$

۱۹۹۶. $f(x+h, y+k)$ را برحسب توانهای مثبت h و k بنویسید، بشرطی که داشته باشیم:

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$$

۱۹۹۷. تابع $f(x,y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$ را در مجاورت نقطهٔ $(-2,1)$ طبق رابطهٔ تیلور بسط دهید.

۱۹۹۸. نموی که از تابع $f(x,y)=x^2y$ ضمن عبور از مقادیر $x=1$ ، $y=1$ به‌مقادیر $x_1=1+h$ ، $y_1=1+k$ بدست می‌آید، پیدا کنید.

۱۹۹۹. تابع

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xy-yz-4x-3y-z+4$$

را طبق رابطهٔ تیلور درمجاورت نقطهٔ $(1,1,1)$ بسط دهید.

۲۰۰۰. $f(x+h, y+k, z+l)$ را برحسب قوای مثبت وصحیح h، k و l بسط دهید، بشرطی که

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$$

۲۰۰۱. تابع زیر را طبق رابطهٔ ماکلورن تا جملهٔ درجه سوم بسط دهید:

$$f(x,y)=e^x \sin y$$

۲۰۰۲. تابع زیر را طبق رابطهٔ ماکلورن تا جملهٔ درجه چهارم بسط دهید:

$$f(x,y)=\cos x\cos y$$

۲۰۰۳. این تابع‌را طبق‌رابطهٔ‌تیلور درمجاورت‌نقطهٔ $(1,1)$ تاجمله درجه‌دوم‌بسط دهید:

$$f(x,y)=y^x$$

۲۰۰۴. طبق رابطه تیلور، تابع زیر را درمجاورت نقطهٔ $(1,-1)$ تا جملهٔ درجه سوم بسط دهید:

$$f(x,y)=e^{x+y}$$

۲۰۰۵. روابط تقریبی را با دقت تا جملهٔ درجه دوم نسبت به‌مقادیر αوβ برای عبارتهای زیر بنویسید:

(a $\quad arctg\dfrac{1+\alpha}{1-\beta}$ $\qquad$ (b $\quad \sqrt{\dfrac{(1+\alpha)^m+(1+\beta)^n}{2}}$.

بشرطی که $|\alpha|$ و $|\beta|$ درمقایسه با واحد مقادیر کوچکی باشند.

۲۰۰۶*. با استفاده از رابطهٔ تیلور تا جمله درجه دوم، بتقریب محاسبه کنید:

a) $\sqrt{1{,}03}$ ، $\sqrt[3]{0{,}98}$؛ b) $(0{,}95)^{2{,}01}$.

۲۰۰۷. z را تابع خطی xوy می‌گیریم که بوسیلهٔ معادلهٔ $z^3-2xz+y=0$ معین می‌شود وبه‌ازای $x=1$ و $y=1$ مقدار $z=1$ را قبول می‌کند. چند جمله از بسط تابع z را نسبت به‌قوای صعودی $x-1$ و $y-1$ بنویسید.

۱۳. اکستره مم توابع چند متغیره

۱°. تعیین اکستره مم توابع. گویندتابع $f(x,y)$ دارای ماکزیمم (یامی‌نیمم) $f(a,b)$ در نقطهٔ $P(a,b)$ است، بشرطی که برای هر نقطهٔ $P'(x,y)$ که غیر از P ولی به‌اندازهٔ کافی درمجاورت P باشد نامساوی $f(a,b)>f(x,y)$ برقرارباشد (و یا بـرای می‌نیمم $f(a,b)<f(x,y)$). ماکزیمم یا می‌نیمم تابع را اکستره مم آن گـویند. بهمین‌ترتیب می‌توان اکستره مم توابع سه یا چند متغیره را تعریف کرد.

۲°. شرایط لازم اکستره‌مم. نقاطی کـه در آنجا تابع دارای دیفرانسیل $f(x,y)$ می‌تواند اکستره مم باشد (که آنها را نقاط ساکن هم گوینـد)، ازحل دستگاه معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$f'_x(x,y)=0\quad,\quad f'_y(x,y)=0\qquad(1)$$

(شرایط لازم ااکستره مم). دستگاه (۱) با معادلهٔ $d\,f(x,y)=0$ هم ارز است. در حالت کلی درنقطهٔ اکستره مم $P(a,b)$ از تابع $f(x,y)$ یا $df(a,b)=0$ وجود ندارد.

۳°. شرایط کافی اکستره مم. فرض کنید که $P(a,b)$ نقطـهٔ ساکن تابع $f(x,y)$ باشد، یعنی داشته باشیم $d\,f(a,b)=0$. در اینصورت: a) اگر بـه‌ازی $dx^2+dy^2>0$ داشته باشیم $d^2f(a,b)<0$ ، $f(a,b)$ ماکزیمم تابع $f(x,y)$ است؛ b) اگـر بـه‌ازای $dx^2+dy^2>0$ داشته باشیم: $d^2f(a,b)>0$ ، $f(a,b)$ می‌نیمم تابع $f(x,y)$ است؛ c) اگر $d^2f(a,b)$ تغییرعلامت بدهد، $f(a,b)$ اکستره مم تابع $f(x,y)$ نیست.

شرایطی راکه ذکر کردیم هم‌ارز شرایط زیر است: فرض کنید

$f_x'(a,b)=f_y'(a,b)=0$ و $A=f_{xx}''(a,b)$ ، $B=f_{xy}''(a,b)$ ، $C=f_{yy}''(a,b)$

مبین را تشکیل میدهیم:

$$\Delta=AC-B^2$$

در اینصورت: ۱) اگر $\Delta>0$، تابع درنقطهٔ $P(a,b)$ اکسترمم دارد، و بخصوص اگر $A<0$ (یا $C<0$) ماکزیمم، واگر $A>0$ (یا $C>0$) می‌نیمم دارد؛ ۲) اگر $\Delta<0$ درنقطه $P(a,b)$ اکسترمم وجودندارد؛ ۳) اگر $\Delta=0$، بحث مربوط به‌وجود اکسترمم تابع درنقطهٔ $P(a,b)$ باز می‌ماند (یعنی باید بحث را ادامه داد).

۴°. حالت توابع چند متغیره. برای توابعی‌که سه یا بیشتر متغیر دارند، شرایط لازم وجود اکسترمم شبیه شرایط ۱°، (۱) وشرایط‌کافی شبیه شرایط ۳°، a)، b) و c) است.

مثال ۱ . اکسترممهای تابع زیررا پیداکنید:

$$z=x^3+3xy^2-15x-12y$$

حل. مشتقهای جزئی را بدست می‌آوریم ودستگاه معادله‌های (۱) را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y^2-15=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=6xy-12=0$$

ویا

$$\begin{cases}x^2+y^2-5=0\\ xy-2=0\end{cases}$$

باحل دستگاه چهار نقطهٔ ساکن بدست می‌آید:

$$P_1(1,2);\ P_2(2,1);\ P_3(-1,-2);\ P_4(-2,-1)$$

مشتقهای مرتبهٔ دوم را بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x\ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6y\ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x$$

ومبین $\Delta=AC-B^2$ را برای هریك ازنقاط ساکن تشکیل می‌دهیم.

۱) برای نقطهٔ P_1:

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1}=6\ ,\ B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{P_1}=12\ ,\ C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1}=6;$$

$$\Delta = AC - B^{۲} = ۳۶ - ۱۴۴ < ۰$$

یعنی نقطهٔ $P_{۱}$ اکستره مم تابع نیست.

۲) برای نقطهٔ $P_{۲}$:

$$A = ۱۲,\ B = ۶,\ C = ۱۲;\ \Delta = ۱۴۴ - ۳۶ > ۰,\ A > ۰$$

تابع در نقطهٔ $P_{۲}$ می‌نیمم دارد، این می‌نیمم برابر است با مقدار تابع به‌ازای $x = ۲$، $y = ۱$:

$$z_{Min} = ۸ + ۶ - ۳۰ - ۱۲ = -۲۸$$

۳) برای نقطهٔ $P_{۳}$:

$$A = -۶,\ B = -۱۲,\ C = -۶;\ \Delta = ۳۶ - ۱۴۴ < ۰$$

نقطهٔ $P_{۳}$ اکستره مم تابع نیست.

۴) برای نقطهٔ $P_{۴}$:

$$A = -۱۲,\ B = -۶,\ C = -۱۲;\ \Delta = ۱۴۴ - ۳۶ > ۰,\ A < ۰$$

تابع درنقطهٔ $P_{۴}$ ماکزیمم دارد. مقدار این ماکزیمم چنین است:

$$z_{Max} = -۸ - ۶ + ۳۰ + ۱۲ = ۲۸$$

۵.۱۰اکستره مم مشروط. درساده‌ترین حالت، اکستره مم مشروط تابع $f(x,y)$ عبارتست از ماکزیمم یا می‌نیممی ازاین تابع که با شرطی مثل $\varphi(x,y) = ۰$ بین‌آوندهای آن (معادلهٔ بستگی) بدست آید. برای اینکه اکستره مم مشروط تابع $f(x,y)$ را، با وجود رابطهٔ $\varphi(x,y) = ۰$، بدست آوریم، کافی است تابع زیر راکه به تابع لاگرانژ معروف است، تشکیل دهیم:

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$$

(که در آن λ ضریب ثابت نامعینی است) واکستره مم معمولی این تابع کمکی را پیدا کنیم. شرایط لازم اکستره مم منجر به‌دستگاه سه معادلهٔ زیر می‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = ۰ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = ۰ \\ \varphi(x,y) = ۰ \end{cases} \qquad (۲)$$

(باسه مجهول x،y،λ) که از آنها می‌توان درحالت کلی این مجهولها را پیداکرد.

وجود خصوصیت اکستره‌مم مشروط براساس تعیین علامت دیفرانسیل دوم تابع لاگرانژ

$$d^{۲}F(x,y)=\frac{\partial^{۲}F}{\partial x^{۲}}dx^{۲}+۲\ \frac{\partial^{۲}F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^{۲}F}{\partial y^{۲}}dy^{۲}$$

به‌ازای مقادیر x، y، λ ازدستگاه (۲) بدست آمده‌اند، معلوم می‌شود، بشرطی که بین dx و dy معادلهٔ زیربرقرار باشد:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=۰ \qquad (dx^{۲}+dy^{۲}\neq۰)$$

درحقیقت تابع $f(x,y)$ دارای ماکزیمم مشروط است، اگر $d^{۲}F<۰$ ومی‌نیمم مشروط دارد، بشرطی‌که $d^{۲}F>۰$. بخصوص اگر مبین Δ برای تابع $F(x,y)$ درنقطهٔ ساکن مثبت باشد، این‌نقطه با شرط $A<۰$ (یا $C<۰$) ماکزیمم مشروط تابع $f(x,y)$ است وباشرط $A>۰$ (یا $C>۰$) می‌نیمم مشروط آن.

بهمین‌ترتیب اکستره مم مشروط تابعی‌که سه یا بیشتر متغیر دارد، با وجود یك یا چند معادلهٔ بستگی (که تعداد آنها بهرحال ازتعداد متغیرها کمتراست) پیدا می‌شود. درچنین‌صورتی درمعادلهٔ لاگرانژ به‌تعداد معادله‌های بستگی، ضریب نامعین وجود دارد.

مثال ۲. مطلوبست اکستره مم تابع

$$z=۶-۴x-۳y$$

بشرطی‌که متغیرهای xو y درشرط زیرصدق کنند:

$$x^{۲}+y^{۲}=۱$$

حل. ازلحاظ هندسی این مسئله منجر به‌پیداکردن حداکثر وحداقل ارتفاع z از صفحهٔ $z=۶-۴x-۳y$ برای نقاط تلاقی آن با استوانهٔ $x^{۲}+y^{۲}=۱$ می‌شود.

تابع لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم:

$$F(x,y)=۶-۴x-۳y+\lambda(x^{۲}+y^{۲}-۱)$$

داریم: $\frac{\partial F}{\partial x}=-۴+۲\lambda x$ ، $\frac{\partial F}{\partial y}=-۳+۲\lambda y$. به‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} -۴+۲\lambda x=۰ \\ -۳+۲\lambda y=۰ \\ x^۲+y^۲=۱ \end{cases}$$

که ازحل آن بدست می‌آید:

$$\lambda_۱=\frac{۵}{۲},\quad x_۱=\frac{۴}{۵},\quad y_۱=\frac{۳}{۵}$$

$$\lambda_۲=-\frac{۵}{۲},\quad x_۲=-\frac{۴}{۵},\quad y_۲=-\frac{۳}{۵}$$

وچون

$$\frac{\partial^۲F}{\partial x^۲}=۲\lambda\ ,\quad \frac{\partial^۲F}{\partial x\partial y}=۰,\quad \frac{\partial^۲F}{\partial y^۲}=۲\lambda$$

دراینصورت

$$d^۲F=۲\lambda(dx^۲+dy^۲)$$

اگر $\lambda=\frac{۵}{۲}$ ، $x=\frac{۴}{۵}$ و $y=\frac{۳}{۵}$ باشد $d^۲F>۰$ می‌شود وبنابراین تابع دراین نقطه می‌نیمم مشروط دارد. اگر $\lambda=-\frac{۵}{۲}$ ، $x=-\frac{۴}{۵}$ و $y=-\frac{۳}{۵}$ باشد $d^۲F<۰$ می‌شود وبنابراین تابع دراین نقطه، ماکزیمم مشروط دارد. به‌این ترتیب:

$$z_{Max}=۶+\frac{۱۶}{۵}+\frac{۹}{۵}=۱۱$$

$$z_{Min}=۶-\frac{۱۶}{۵}-\frac{۹}{۵}=۱$$

۶°. حداکثر وحداقل مقدار تابع. تابعی که در حوزهٔ محدودی دارای دیفرانسیل باشد، درنقطهٔ ساکن یا در نقطهٔ حدی حوزه به حداکثر (یا حداقل) مقدار خود می‌رسد.

مثال ۳. حداکثر وحداقل تابع زیر را پیداکنید:

$$z=x^۲+y^۲-xy+x+y$$

در حوزهٔ: $x\leqslant ۰$ ، $y\leqslant ۰$ ، $x+y\geqslant -۳$.

حل. حوزهٔ مفروض یك مثلث است (شکل ۷۰).

۱) نقاط ساکن را پیدا می‌کنیم:

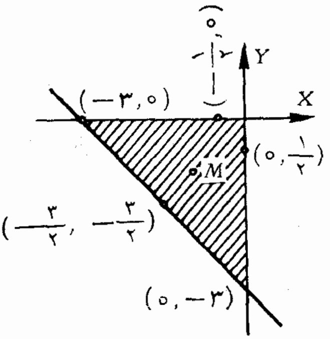
$$\begin{cases} z'_x = 2x - y + 1 = 0 \\ z'_y = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

ازآنجا $x = -1$، $y = -1$ ونقطهٔ $M(-1, -1)$ بدست می‌آید.

درنقطهٔ M، مقدار تابع $z_M = -1$ می‌شود.

بحث در وجود اکسترمم لزومی ندارد.

۲) تابع را در نقاط حدی حوزه بررسی می‌کنیم.



شکل ۷۰

به‌ازای $x = 0$ داریم $z = y^2 + y$ ومسئله منجر به‌جستجوی حداکثر وحداقل مقدار این تابع درفاصلهٔ $-3 \leqslant y \leqslant 0$ می‌شود. با آزمایش معلوم می‌شود:

درنقطهٔ $(0, -3)$: $\qquad (\text{حداکثر } z)_{x=0} = 6$

درنقطهٔ $(0, -\frac{1}{2})$: $\qquad (\text{حداقل } z)_{x=0} = -\frac{1}{4}$

به‌ازای $y = 0$ بدست می‌آید $z = x^2 + x$ وشبیه حالت قبل معلوم می‌شود:

درنقطهٔ $(-3, 0)$: $\qquad (\text{حداکثر } z)_{y=0} = 6$

در نقطهٔ $(-\frac{1}{2}, 0)$: $\qquad (\text{حداقل } z)_{y=0} = -\frac{1}{4}$

به‌ازای $x + y = -3$ یا $y = -3 - x$ داریم: $z = 3x^2 + 9x + 6$ وبدست می‌آید:

درنقطهٔ $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$: $\qquad (\text{حداقل } z)_{x+y=-3} = -\frac{3}{4}$

و $(\text{حداکثر } z)_{x+y=-3} = 6$ بر $(\text{حداکثر } z)_{x=0}$ و $(\text{حداکثر } z)_{y=0}$ منطبق است. می‌توانستیم این بحث را روی خط $x + y = -3$ با بررسی تابع مربوط به‌اکسترمم مشروط و بدون منجر کردن به‌تابع یك متغیره، انجام دهیم.

۳) از بررسی همهٔ آنچه که گفتیم نتیجه می‌شود که حداکثر z مساوی ۶ در نقاط $(0, -3)$ و $(-3, 0)$ وحداقل z مساوی ۱ − درنقطهٔ ساکن M است.

اکسترمم توابع دو متغیره زیر را پیداکنید:

۲۰۰۸. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

۲۰۰۹. $z=(x-1)^2-2y^2$.

۲۰۱۰. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

۲۰۱۱. $z=x^3y^2(6-x-y)$ $(x>0, y>0)$.

۲۰۱۲. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

۲۰۱۳. $z=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

۲۰۱۴. $z=1-(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$.

۲۰۱۵. $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

۲۰۱۶. $z=\frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

۲۰۱۶. ۱. $z=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y$ $(x>0, y>0)$.

۲۰۱۶. ۲. $z=e^{x-y}(x^2-2y^2)$.

مطلوبست اکسترمم توابع سه متغیره زیر:

۲۰۱۷. $u=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$.

۲۰۱۸. $u=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$ $(x>0, y>0, z>0)$.

اکسترمم تابع z را که بطور ضمنی داده شده است، پیداکنید:

۲۰۱۹*. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$.

۲۰۲۰. $x^3-y^2-3x+4y+z^2+z-8=0$.

اکسترممهای مشروط این توابع را پیداکنید:

۲۰۲۱. $z=xy$ به‌ازای $x+y=1$.

۲۰۲۲. $z=x+2y$ به ازای $x^2+y^2=5$.

۲۰۲۳. $z=x^2+y^2$ به‌ازای $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

۲۰۲۴. $z=\cos^2x+\cos^2y$ به‌ازای $y-x=\frac{\pi}{4}$.

۲۰۲۵. $u=x-2y+2z$ به‌ازای $x^2+y^2+z^2=9$.

۲۰۲۶. $u=x^2+y^2+z^2$ به‌ازای $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c>0)$.

۲۰۲۷. $u=xy^2z^3$ به‌ازای $x+y+z=12$ $(x>0, y>0, z>0)$.

۲۰۲۸. $u=xyz$ باشرایط $x+y+z=5$، $xy+yz+zx=8$.

۲۰۲۹. با شرایط $x\geqslant 0$، $y\geqslant 0$، $z\geqslant 0$ نامساوی زیر را ثابت‌کنید:

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant \sqrt[3]{xyz}$$

راهنمائی. ماکزیمم تابع $u=xyz$ را با شرط $x+y+z=S$ پیدا کنید.

۲۰۳۰. مطلوبست حداکثر مقدارتابع $z=1+x+2y$ در حوزه‌های: a) $x\geqslant 0$، $y\geqslant 0$؛ $x+y\leqslant 1$ b) $x\geqslant 0$، $y\leqslant 0$، $x-y\leqslant 1$.

۲۰۳۱. حداکثر و حداقل مقدار توابع: a) $z=x^2y$ و b) $z=x^2-y^2$ را در حوزهٔ $x^2+y^2\leqslant 1$ پیدا کنید.

۲۰۳۲. مطلوبست حداکثر وحداقل مقدار تابع $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ در حوزهٔ $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$، $0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

۲۰۳۳. مطلوبست حداکثر وحداقل مقدار تابع $z=x^3+y^3-3xy$ در حوزهٔ $0\leqslant x\leqslant 2$ و $-1\leqslant y\leqslant 2$.

۱۴. مسائل مربوط به‌جستجوی مقادیر حداکثر وحداقل توابع

مثال. می‌خواهیم عدد مثبت a را به‌سه قسمت غیرمنفی چنان تقسیم‌کنیم که حاصلضرب آنها حداکثر شود.

حل: این سه قسمت را x، y و $a-x-y$ می‌گیریم. ماکزیمم تابع $f(x,y)=xy(a-x-y)$ را جستجو می‌کنیم.

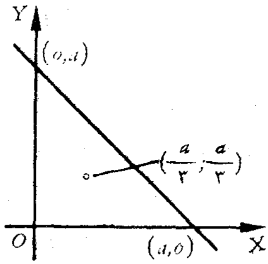
با توجه به‌شرط مسئله، باید تابع $f(x,y)$ را در داخل مثلث بستهٔ $x\geqslant 0$، $y\geqslant 0$، $x+y\leqslant a$ (شکل ۷۱) جستجو کنیم.

این دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f_x'(x,y) \equiv y(a-2x-y)=0 \\ f_y'(x,y) \equiv x(a-2x-y)=0 \end{cases}$$

برای نقاط داخلی مثلث تنها یك نقطهٔ ساکن $\left(\frac{a}{3}\text{ و }\frac{a}{3}\right)$ بدست می‌آید. برای این نقطه شرایط کافی را تحقیق می‌کنیم، داریم:

$$f_{xx}''(x,y)=-2y \text{ و } f'_{xy}(x,y)=a-2x-2y \text{ و } f_{yy}''(x,y)=-2x$$



شکل ۷۱

بنابراین $A=f_{xx}''\left(\frac{a}{3}\text{ و }\frac{a}{3}\right)=-\frac{2}{3}a$ ،

$$B=f_{xy}''\left(\frac{a}{3}\text{ و }\frac{a}{3}\right)=-\frac{1}{3}a,$$

$$C=f_{yy}''\left(\frac{a}{3}\text{ و }\frac{a}{3}\right)=-\frac{2}{3}a$$

$$\Delta=AC-B^2>0\,,\ A<0$$

به‌این‌ترتیب درنقطهٔ $(\frac{a}{3}\text{و}\frac{a}{3})$ تابع مفروض ماکزیمم می‌شود. چون در روی اضلاع مثلث، تابع $f(x,y)=0$ ، این ماکزیمم حداکثر مقدار تابع می‌شود، یعنی حاصلضرب وقتی حداکثر است که داشته باشیم:

$$x=y=a-x-y=\frac{a}{3}$$

ضمناً حداکثر این حاصلضرب مساوی $\frac{a^3}{27}$ است.

تبصره. مسئله را می‌شد با روش اکستره مم مشروط حل کرد، به‌این ترتیب که ماکزیمم تابع $u=xyz$ را با شرط $x+y+z=a$ پیدا کنیم.

۲۰۳۴. ازبین همهٔ مکعب مستطیلهای به‌حجم مفروض V، آنرا پیدا کنید که سطح کل آن حداقل باشد.

۲۰۳۵. بعدهای وان مکعب مستطیل شکل روباز با گنجایش مفروض V چقدر باشد، تا سطح آن حداقل شود؟

۲۰۳۶. ازبین مثلثهای به‌محیط مفروض $2p$، آنرا پیدا کنید که مساحت حداکثر داشته باشد.

۲۰۳۷. مکعب مستطیل با سطح کل S را چنان پیداکنید که حجم حداکثر داشته‌باشد.

۲۰۳۸. عدد مثبت a را به‌صورت حاصلضرب چهار عامل مثبت چنان تبدیل کنید که مجموع آنها حداقل باشد.

۲۰۳۹. روی صفحهٔ XOY نقطهٔ $M(x,y)$ را چنان پیداکنید که مجموع مربعهای فواصل آن ازسه خط $x=0$، $y=0$، $x-y+1=0$ حداقل باشد.

۲۰۴۰. مطلوبست مثلثی به‌محیط مفروض $2p$، بنحوی که ضمن دوران دور یکی از اضلاع خود جسمی با حداکثرحجم بوجود آورد.

۲۰۴۱. روی صفحه سه‌نقطهٔ مادی $P_1(x_1,y_1)$، $P_2(x_2,y_2)$، $P_3(x_3,y_3)$ باجرمهای m_1، m_2، m_3 داده شده است. نقطهٔ $P(x,y)$ درچه وضعی باشد تا گشتاور (گشتآورماند) دستگاه‌نقاط مفروض‌نسبت‌به P (یعنی مجموع $m_1P_1P^2+m_2P_2P^2+m_3P_3P^2$) حداقل باشد؟

۲۰۴۲. ازنقطهٔ $M(a,b,c)$ صفحه‌ای عبور دهید که با صفحه‌های مختصات یك سه وجهی با حجم حداقل بسازد.

۲۰۴۳. دربیضوی مفروض، مکعب مستطیلی محاط کنید که حجم حداکثر داشته باشد.

۲۰۴۴. مطلوبست اندازه‌های خارجی جعبهٔ مکعب مستطیل شکل روبازی که ضخامت دیواره‌های آن مساوی δ وحجم (داخلی) آن مساوی V باشد، بشرطی که برای ساختن آن‌حداقل مصالح مصرف شده باشد.

۲۰۴۵. از چه نقطه‌ای واقع بر بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

مماسی برآن رسم کنیم که با محورهای مختصات مثلثی با حداقل مساحت بسازد؟

۲۰۴۶*. مطلوبست اندازهٔ قطرهای بزرگتر و کوچکتر بیضی

$$5x^2+8xy+5y^2=9$$

۲۰۴۷. درکرهٔ مفروض استوانه‌ای با مساحت‌کل حداکثر محاط کنید.

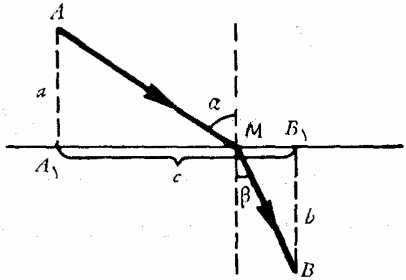
۲۰۴۸. بسترهای دو رودخانه (درحدود یك ناحیه) بتقریب تشکیل سهمی $y=x^2$ و خط $x-y-2=0$ را می‌دهند. می‌خواهیم رودخانه‌های مفروض را باکانال مستقیمی باحداقل

طول بهم وصل کنیم. کانال از چه نقطه‌ای عبور می‌کند؟

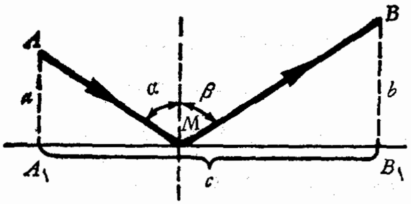
۲۰۴۹. کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(۱,۲,۳)$ را تا خط زیر پیدا کنید:

$$\frac{x}{۱}=\frac{y}{-۳}=\frac{z}{۲}$$

۲۰۵۰*. دونقطهٔ A و B در محیطهای مختلف نوری قرار گرفته‌اند و بوسیلهٔ یك خط راست ازهم جداشده‌اند (شکل ۷۲). سرعت انتشار نور درمحیط اول مساوی $v_۱$ ودر دومی مساوی $v_۲$ است، بااستفاده از «اصل فرما» که برطبق آن شعاع نور درطول خطی مانند AMB منتشر می‌شود



شکل ۷۲



شکل ۷۳

که برای عبور به حداقل زمان احتیاج داشته باشد، قانون شکستگی شعاع نور را معین کنید.

۲۰۵۱. با استفاده از «اصل فرما» قانون انعکاس شعاع نور را ازصفحه در محیط یکنواخت پیدا کنید (شکل ۷۳).

۲۰۵۲*. اگر در رشتهٔ الکتریکی با مقاومت R، جریان I وجود داشته باشد، مقدار حرارتی که در واحد زمان ایجاد می‌شود متناسب با $I^۲R$ است. جریان I را چگونه به کمك سه سیم به جریانهای $I_۱$، $I_۲$ و $I_۳$ تقسیم کنیم که حرارت تلف شده حداقل مقدار ممکن باشد.

۱۵. نقاط استثنائی منحنی‌های مسطح

۱°. تعریف نقاط استثنائی. نقطهٔ $M(x_۰,y_۰)$ از منحنی مسطح $f(x,y)=۰$ را نقطهٔ استثنائی گوئیم، وقتی که مختصات آن در هرسه معادلهٔ زیرصدق کند:

$$f(x_0,y_0)=0,\quad f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0$$

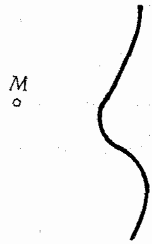
۲°. انواع اصلی نقاط استثنائی . فرض کنید در نقطهٔ استثنائی $M(x_0,y_0)$، همهٔ مشتقهای مرتبهٔ دوم:

$A=f''_{xx}(x_0,y_0),$
$B=f''_{xy}(x_0,y_0),$
$C=f''_{yy}(x_0,y_0),$

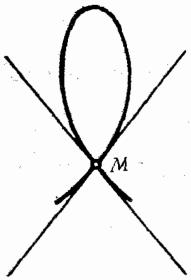
مساوی صفر نباشند و $\Delta = AC-B^2$

در اینصورت:

a) اگر $\Delta>0$ باشد، M نقطهٔ منفرد است (شکل۷۴).



شکل۷۴

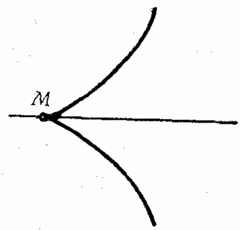


شکل۷۵

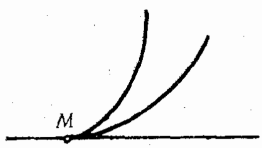
b) اگر $\Delta<0$ باشد، M نقطهٔ گرهی یا نقطهٔ مضاعف است (شکل ۷۵).

c) اگر $\Delta=0$ باشد، M یا نقطهٔ بازگشت نوع اول (شکل ۷۶)، یا نقطهٔ بازگشت نوع دوم (شکل۷۷)، یا نقطهٔ منفرد ویا نقطهٔ بوس (شکل ۷۸) است.

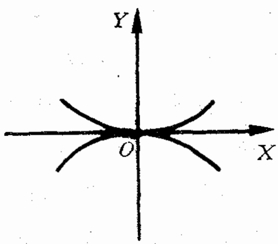
برای حل مسائل این‌قسمت اغلب رسم منحنی مربوطه لازم است.



شکل۷۶



شکل۷۷



شکل۷۸

مثال ۱. ثابت کنید منحنی $y^2=ax^2+x^3$ ودرحالت $a>0$ نقطهٔ گرهی، درحالت $a<0$ نقطهٔ منفرد ودر حالت $a=0$ نقطهٔ بازگشت نوع اول دارد.

حل : اینجا $f(x,y)=ax^2+x^3-y^2$. مشتقهای جزئی را پیدا می‌کنیم و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f'_x(x,y)=2ax+3x^2=0$$

$$f'_y(x,y) = -۲y = ۰$$

این دستگاه دوجواب دارد: $O(۰,۰)$ و $N(-\frac{۲}{۳}a,۰)$، ولی مختصات نقطهٔ N درمعادلهٔمنحنی صدق نمی‌کند. به‌این‌ترتیب منحنی مفروض تنها یك نقطهٔ استثنائی دارد: $O(۰,۰)$.

مشتقهای مرتبهٔ دوم را پیدا می‌کنیم ومقدار آنها را درنقطهٔ O بدست می‌آوریم:

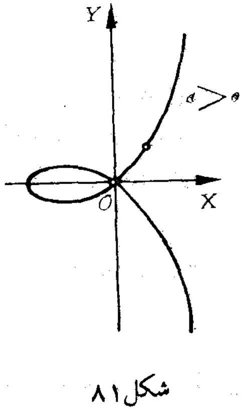
$$\begin{aligned}
&f''_{xx}(x,y) = ۲a+۶x, && A = ۲a\\
&f''_{xy}(x,y) = ۰ && B = ۰\\
&f''_{yy}(x,y) = -۲ && C = -۲\\
&\Delta = AC - B^{۲} = -۴a.
\end{aligned}$$

بنابراین:

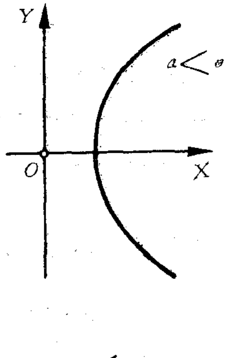
اگر $a>۰$ باشد، $\Delta<۰$ می‌شود و O یك نقطهٔگرهی است (شکل ۷۹)؛

اگر $a<۰$ باشد، $\Delta>۰$ می‌شود و O یك نقطهٔ منفرد است (شکل ۸۰)؛

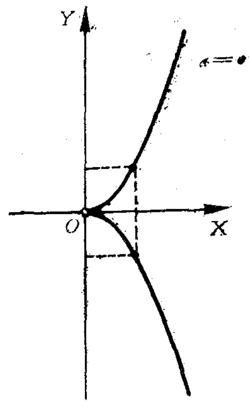
اگر $a=۰$ باشد، $\Delta=۰$ می‌شود. معادلـهٔ منحنی دراینحالت بصورت $y^{۲}=x^{۳}$ یـا $y=\pm\sqrt{x^{۳}}$ با شرط $x\geqslant ۰$ در می‌آید؛ منحنی نسبت به‌محور OX متقارن است ودرنقطهٔ O براین محور مماس است. بنابراین نقطهٔ M، نقطهٔ بازگشت نوع اول است (شکل ۸۱).



شکل ۸۱



شکل ۸۰



شکل ۷۹

نوع نقاط استثنائی منحنی‌های زیر را معین کنید:

۲۰۵۳. $y = -x^2 + x^4$.

۲۰۵۴. $(y - x^2)^2 = x^5$.

۲۰۵۵. $a^4 y^2 = a^2 x^4 - x^6$.

۲۰۵۶. $x^2 y^2 - x^2 - y^2 = 0$.

۲۰۵۷. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (برگ دکارتی).

۲۰۵۸. $y^2(a - x) = x^3$ (سیکلوئید).

۲۰۵۹. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (لمنیسکات).

۲۰۶۰. $(a + x)y^2 = (a - x)x^2$ (استروفوئید).

۲۰۶۱. $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2 x^2$ $(b > 0, a > 0)$ (کونوئید). سه حالت را در نظر بگیرید:

۱) $a > b$ ، ۲) $a = b$ ، ۳) $a > b$.

۲۰۶۲. تغییر خصوصیت نقطهٔ استثنائی منحنی

$$y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$$

را نسبت به‌مقادیر a و b و c روشن کنید ($a \leqslant b \leqslant c$ حقیقی‌اند).

۱۶. پوش

۱°. تعریف پوش. پوش یك خانواده از منحنی‌های مسطح عبارتست ازیك منحنی (یا مجموعهٔ چند منحنی) که برهمهٔ منحنی‌های فامیل مفروض مماس باشد؛ ضمناً منحنی پوش در هرنقطهٔ خود بریکی ازمنحنی‌های فامیل مفروض مماس است.

۲°. معادلهٔ پوش. اگر رابطهٔ بین پارامتر متغیر α با فامیل منحنی‌ها به‌صورت

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

باشد، بشرطی که این فامیل پوش داشته باشد، معادلهٔ پارامتری پوش از دستگاه معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} f(x,y,\alpha)=0 \\ f'_{\alpha}(x,y,\alpha)=0 \end{cases} \qquad (۱)$$

با حذف پارامتر α در دستگاه (۱)، معادله‌ای به‌صورت زیر پیدا می‌شود:

$$D(x,y)=0 \qquad (۲)$$

باید متذکر شد منحنی (۲) که به‌اینطریق بدست می‌آید (و منحنی مبین نامیده می‌شود) علاوه بر پوش (اگر پوش وجود داشته باشد) ممکن است شامل مکـان هنـدسی نقاط استثنائی فامیل مفروض، که درساختمان پوش این خانواده دخالتی ندارد، نیز باشد.

برای حل مسائل این‌بند، رسم منحنی می‌تواند راهنمای خوبی باشد.

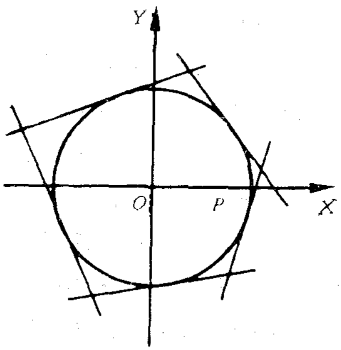
مثال. مطلوبست پوش خانوادهٔ خطهای

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

(p مقداری مثبت وثابت است)

حل. خانوادهٔ خطهای مفروض به‌پارامتـر α بستگی دارد. دستگـاه معادله‌های (۱) را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0 \end{cases}$$



شکل ۸۲

اگر دستگاه را نسبت به‌مجهولهای x و y حل کنیم، معادلهٔ پارامتری پوش بدست می‌آید:

$$x = p\cos\alpha, \quad y = p\sin\alpha$$

که اگرطرفین هردو معادله را مجذوز وسپس با هم جمع کنیم، پارامتر α حذف می‌شود:

$$x^2 + y^3 = p^2$$

بنابراین پوش خانوادهٔ خطهای مفروض دایره‌ای است به‌شعاع p و به‌مرکز مبداء مختصـات. خطهای مفروض خانوادهٔ مماسهای براین دایره را هم تشکیل می‌دهند (شکل ۸۲).

۲۰۶۳. پوش خانوادهٔ دایره‌های زیر را پیداکنید:

$$(x-a)^۲+y^۲=\frac{a^۲}{۲}$$

۲۰۶۴. پوش خانوادهٔ خطهای زیر را پیداکنید:

$$y=kx+\frac{p}{۲k}$$

(k پارامتر و p مقداری ثابت است).

۲۰۶۵. پوش خانوادهٔ دایره‌هائی را پیداکنید که شعاع آنها مساوی R ومرکزشان بر محور OX واقع باشد.

۲۰۶۶. مطلوبست منحنی‌پوش پاره‌خطهای به‌طول l که دوانتهای آن روی محورهای مختصات می‌لغزد.

۲۰۶۷. مطلوبست پوش خانوادهٔ خطهائی که با محورهای مختصات مثلثی به‌مساحت ثابت S می‌سازند.

۲۰۶۸. مطلوبست پوش بیضی به‌مساحت ثابت S، بشرطی که محورهای تقارن آنها تغییر نکنند.

۲۰۶۹. در بارهٔ خصوصیت «منحنی‌های مبین» خانوادهٔ منحنی‌های زیر بحث کنید (C پارامتر است):

a) سهمی‌های مکعبی: $y=(x-C)^۳$؛

b) سهمی‌های نیم مکعبی: $y^۲=(x-C)^۳$؛

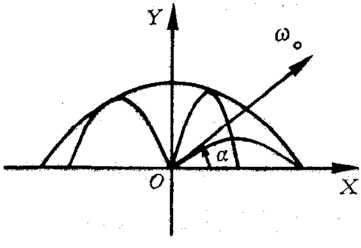
c) سهمی‌های نیل ($Neile$): $y^۳=(x-C)^۲$؛

d) استروفوئیدهای: $(a+x)(y-C)^۲=x^۲(a-x)$.

۲۰۷۰. معادلهٔ مسیرحرکت‌گلوله‌ای که ازمبداء O به زاویهٔ α نسبت به‌افق با سرعت اولیهٔ $v_۰$ پرتاب شده است (بدون درنظرگرفتن مقاومت هوا)، چنین است:

$$y=xtg\alpha-\frac{gx^۲}{۲v_۰^۲cos^۲\alpha}$$

اگر α را به‌عنوان پارامتر درنظربگیریم، مطلوبست پوش همهٔ مسیرهای گلوله، بشرطی که همهٔ آنها در یك صفحهٔ قائم واقع باشند («سهمی ایمنی») (شکل ۸۳).



شکل۸۳

۱۷. طول قوس منحنی فضائی

دیفرانسیل قوس منحنی فضائی در دستگاه قائم مختصات دکارتی چنین است:

$$ds=\sqrt{dx^{2}+dy^{2}+dz^{2}}$$

xوyوz مختصات نقطه‌ای از منحنی‌است.

اگر

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$$

معادله‌های پارامتری منحنی فضائی‌باشند، طول قوس قطعهٔ از $t=t_1$ تا $t=t_2$ چنین است:

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^{2}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^{2}+\left(\frac{dz}{dt}\right)^{2}}\,dt$$

در مسئله‌های ۲۰۷۱-۲۰۷۶ طول قوس منحنی‌ها را پیداکنید:

۲۰۷۱. $x=t$ ، $y=t^{2}$ ، $z=\frac{2}{3}t^{3}$ از $t=0$ تا $t=2$.

۲۰۷۲. $x=2\cos t$ ، $y=2\sin t$ ، $z=\frac{3}{\pi}t$ از $t=0$ تا $t=\pi$.

۲۰۷۳. $x=e^{t}\cos t$ ، $y=e^{t}\sin t$ ، $z=e^{t}$ از $t=0$ تا مقدار دلخواه t.

۲۰۷۴. $y=\frac{1}{2}x^{2}$ ، $z=\frac{1}{6}x^{3}$ از $x=0$ تا $x=6$.

۲۰۷۵. $x^{2}=3y$ ، $2xy=9z$ از نقطهٔ $O(0,0,0)$ تا نقطهٔ $M(3,3,2)$.

۲۰۷۶. $y=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}$ ، $z=\frac{a}{4}\ln\frac{a+x}{a-x}$ از نقطهٔ $O(0,0,0)$ تا نقطهٔ $M(x_0,y_0,z_0)$.

۲۰۷۷. وضع نقطه برای لحظهٔ دلخواه t $(t>0)$ ازمعادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2$$

مطلوبست سرعت متوسط حرکت بین لحظه‌های $t = 1$ و $t = 10$.

۱۸. تابع برداری از آوند عددی*

۱°. مشتق تابع برداری از آوند عددی. تابع برداری $a = a(t)$ را می‌توان به‌کمك تصویرهای روی محورهای مختصات: $a_x(t)$، $a_y(t)$ و $a_z(t)$ معین کرد:

$$a = a_x(t)i + a_y(t)j + a_z(t)k$$

مشتق تابع‌برداری $a = a(t)$ نسبت به‌آوند عددی t عبارتست از بردار جدیدی که با تساوی زیرمعین می‌شود:

$$\frac{da}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t+\Delta t) - a(t)}{\Delta t} = \frac{da_x(t)}{dt}i + \frac{da_y(t)}{dt}j + \frac{da_z(t)}{dt}k$$

کالبد (مدول) مشتق تابع برداری چنین است:

$$\left|\frac{da}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{da_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_z}{dt}\right)^2}$$

انتهای شعاع حامل متغیر $r = r(t)$ یك منحنی فضائی را می‌پیماید

$$r = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

که به‌آن شتاب نگار** بردار r گویند.

مشتق $\frac{dr}{dt}$ عبارتست ازبرداری که برشتاب‌نگار درنقطهٔ مربوطه مماس‌است، ضمناً داریم:

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$$

---

*) Scalaire **) Hadographe

که در آن s عبارتست ازطول قوس شتاب نگار که از مبداء معینی به‌حساب می‌آید و بخصوص

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = ۱$$

اگر پارامتر t به‌معنای زمان باشد. دراینصورت $v = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ بردار سرعت انتهای بردار $\mathbf{r}$ و $w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^{۲}\mathbf{r}}{dt^{۲}}$ بردار شتاب انتهای بردار $\mathbf{r}$ است.

۲°. قاعده‌های اصلی دیفرانسیل‌گرفتن دریك تابع برداری ازآوند عددی.

۱) $\frac{d}{dt}(a+b-c) = \frac{da}{dt} + \frac{db}{dt} - \frac{dc}{dt};$

۲) $\frac{d}{dt}(ma) = m\frac{da}{dt}$ (مقدار ثابتی است m);

۳) $\frac{d}{dt}(\varphi a) = \frac{d\varphi}{dt}a + \varphi\frac{da}{dt}$ (تابع عددی از t است φ);

۴) $\frac{d}{dt}(ab) = \frac{da}{dt}b + a\frac{db}{dt};$

۵) $\frac{d}{dt}(a \times b) = \frac{da}{dt} \times b + a \times \frac{db}{dt};$

۶) $\frac{d}{dt}a[\varphi(t)] = \frac{da}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt};$

۷) $a\frac{da}{dt} = ۰$ (باشرط اینکه $|a|$ مقداری ثابت‌باشد)

مثال ۱. شعاع حامل نقطهٔ متحرکی در لحظهٔ زمانی دلخواه با معادلهٔ زیر داده شده است:

$$\mathbf{r} = i - ۴t^{۲}j + ۳t^{۲}k \qquad (۱)$$

مطلوبست مسیر، سرعت وشتاب حرکت.

حل. از معادلهٔ (۱) بدست می‌آید:

$$x = ۱, \quad y = -۴t^{۲}, \quad z = ۳t^{۲}$$

با حذف t معلوم می‌شود که معادلهٔ مسیر یك خط راست است:

$$\frac{x-۱}{۰}=\frac{y}{-۴}=\frac{z}{۳}$$

با مشتق‌گرفتن ازمعادلهٔ (۱) سرعت حرکت را بدست می‌آوریم:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-۸t\,\mathbf{j}+۶t\mathbf{k}$$

وشتاب حرکت

$$\frac{d^۲\mathbf{r}}{dt^۲}=-۸\,\mathbf{j}+۶\mathbf{k}$$

مقدار سرعت برابراست با:

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|=\sqrt{(-۸t)^۲+(۶t)^۲}=۱۰\,|t|$$

متذکر می‌شویم که شتاب ثابت است ومقدارآن چنین است:

$$\left|\frac{d^۲\mathbf{r}}{dt^۲}\right|=\sqrt{(-۸)^۲+۶^۲}=۱۰$$

۲۰۷۸. ثابت‌کنید معادله برداری $\mathbf{r}-\mathbf{r}_۱=(\mathbf{r}_۲-\mathbf{r}_۱)t$، معادلهٔ یك خط است ($\mathbf{r}_۱$ و $\mathbf{r}_۲$ شعاع حاملهای دونقطهٔ مفروض‌اند).

۲۰۷۹. مطلوبست منحنی شتاب نگارهریك ازتابعهای برداری زیر:

$a)\quad \mathbf{r}=\mathbf{a}t+\mathbf{c};\qquad b)\quad \mathbf{r}=\mathbf{a}\cos t+\mathbf{b}\sin t;$

$c)\quad \mathbf{r}=\mathbf{a}t^۲+\mathbf{b}t;\qquad d)\quad \mathbf{r}=\mathbf{a}\,\mathrm{ch}\,t+\mathbf{b}\,\mathrm{sh}\,t.$

که درآنها $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ بردارهائی ثابت‌اند وضمناً بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برهم عمودند.

۲۰۸۰. مطلوبست مشتق تابع برداری ازتابع

$$\mathbf{a}(t)=a(t)\mathbf{a}^\circ(t)$$

(که درآن $a(t)$ تابع عددی و $\mathbf{a}^\circ(t)$ بردار واحداست) درحالتی که بردار $\mathbf{a}(t)$:

۱) تنها ازلحاظ طول تغییرمی‌کند،

۲) تنها ازلحاظ جهت تغییر می‌کند،

۳) از لحاظ طول و جهت تغییر می‌کند (حالت کلی). نتیجه‌هائی را که بدست می‌آورید تعبیر هندسی کنید.

۲۰۸۱. باستفاده از قاعده‌های مشتق‌گیری تابع برداری از آونـد عـددی، رابطه‌ای برای مشتق حاصلضرب مختلط سه تابع برداری a، b و c بدست آورید.

۲۰۸۲. مشتق حجم متوازی‌السطوحی را که روی سه بردار زیـر ساخته شده است، برحسب t بدست آورید:

$$a = i + tj + t^2k$$

$$b = 2ti - j + t^3k$$

$$c = -t^2i + t^3j + k$$

۲۰۸۳. معادلهٔ حرکتی چنین است:

$$r = 3j\cos t + 4j\sin t,$$

(t زمان است). مطلوبست مسیر، سرعت وشتاب حـرکت. مسیر حرکت و بردارهای سرعت و شتاب را برای لحظه‌هـای $t = 0$، $t = \frac{\pi}{4}$ و $t = \frac{\pi}{2}$ رسم کنید.

۲۰۸۴. معادلهٔ حرکتی چنین‌است:

$$r = 2j\cos t + 2j\sin t + 3kt$$

مطلوبست مسیر، سرعت وشتاب حرکت. مقدار سرعت وشتاب حرکت چقـدراست؟ جهت آنها درلحظه‌های $t = 0$ و $t = \frac{\pi}{2}$ چیست؟

۲۰۸۵. معادلهٔ حرکتی چنین است:

$$r = i\cos\alpha\cos\omega t + j\sin\alpha\cos\omega t + k\sin\omega t,$$

که درآن α و ω ثابت و t زمان است. مطلوبست مسیر حرکت، مقدار وجهت سرعت و شتاب حرکت.

۲۰۸۶. معادلهٔ حرکت گلوله‌ای (بدون درنظر گرفتن مقاومت هوا) چنین است:

$$r = v_0 t - \frac{gt^2}{2}k,$$

که در آن $V_0(V_{0x}, V_{0y}, V_{0z})$ سرعت اولیه است. مطلوبست سرعت و شتاب در لحظهٔ زمانی دلخواه.

۲۰۸۷. ثابت کنید که اگر نقطه‌ای بر سهمی $y = \frac{x^2}{a}$ ، $z = 0$ چنان حرکت کند که تصویر آن برمحــور OX ثابت باشد ($\frac{dx}{dt} =$ ثابت)، شتاب آن هم ثابت خواهد بود.

۲۰۸۸. نقطه‌ای برموج یك میخ پیچ واقع است. میخ دریك تیر می‌پیچد و فــرو می‌رود. معادلهٔ حرکت نقطه چنین‌است:

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = h\theta$$

که درآن θ عبارتست از زاویهٔ چرخش میخ، a شعاع میخ و h ارتفاع فرورفتگی ضمن دوران به‌اندازهٔ یك رادیان است. مطلوبست سرعت حرکت نقطه.

۲۰۸۹. مطلوبست سرعت نقطهٔ واقع بر محیط چرخ به شعاع a ، کــه با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد، بنحوی‌که مرکز آن ضمن این حرکت با سرعت خطی ثابت v_0 حرکت کند.

۱۹. سه وجهی طبیعی منحنی فضائی

به‌هر نقطهٔ غیراستثنائی $M(x,y,z)$ از منحنی فضائی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ می‌توان سه وجهــی طبیعی (کنج سه وجهی) نسبت داد که از سه صفحهٔ دو به دو عمود برهم تشکیل شده بـاشد (شکل۸۴):

۱) صفحهٔ بوسان MM_1M_2 شامل بردارهای $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ و $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$؛

۲) صفحهٔ قائم MM_2M_3 عمود بر بردار $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$؛

۳) صفحهٔ رکتی‌فیان (راستاده) MM_1M_3 عمود بردوصفحهٔ اول.

فصل مشترکهای این سه صفحه چنین است: ۱) MM_1؛ ۲) قائــم اصلی MM_2؛ ۳) بی‌نرمال MM_3 که بترتیب به‌وسیلهٔ‌بردارهای زیرمشخص می‌شوند:

۱) $T = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ (بردار مماس)؛

۲) $B = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \times \dfrac{d^{2}\mathbf{r}}{dt^{2}}$

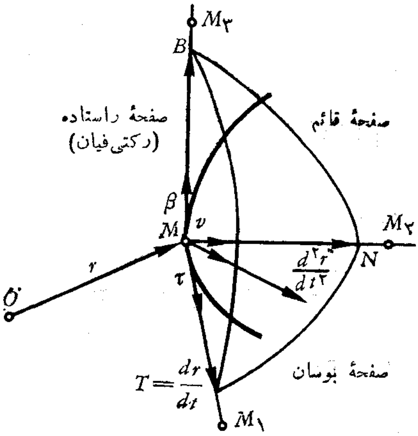
(بردار بی‌نرمال)

۳) $N = B \times T$

(بردارقائم اصلی)

بردارهای واحد متناظر

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{T}{|T|};\ \boldsymbol{\beta} = \frac{B}{|B|};\ \boldsymbol{\nu} = \frac{N}{|N|}$$



شکل۸۴

را می‌توان با روابط زیر بدست آورد:

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\ ;\quad \boldsymbol{\nu} = \frac{\dfrac{d\tau}{ds}}{\left|\dfrac{d\tau}{ds}\right|}\ ;\quad \boldsymbol{\beta} = \tau \times \nu$$

اگر X، Y و Z مختصات نقطهٔ غیرمشخصی از مماس باشد، معادلهٔ مماس در نقطهٔ $M(x,y,z)$ به‌اینصورت است:

$$\frac{X-x}{T_x} = \frac{Y-y}{T_y} = \frac{Z-z}{T_z} \qquad (۱)$$

که در آن داریم: $T_x = \dfrac{dx}{dt}$ ، $T_y = \dfrac{dy}{dt}$ ، $T_z = \dfrac{dz}{dt}$؛ ازشرط عمود بودن خط وصفحه، معادلهٔ صفحهٔ قائم بدست می‌آید.

$$T_x(X-x) + T_y(Y-y) + T_z(Z-z) = 0 \qquad (۲)$$

که اگر درمعادله‌های (۱) و (۲) T_x، T_y و T_z را به B_x، B_y و B_z یا N_x، N_y و N_z تبدیل کنیم، معادله‌های بی‌نرمال وقائم‌اصلی ومتناظر با آنها صفحهٔ بوسان وصفحهٔ راستاده بدست‌می‌آید.

مثال ۱. مطلوبست بردارهای واحد $\boldsymbol{\tau}$، $\boldsymbol{\nu}$ و $\boldsymbol{\beta}$ ازمنحنی

$$x = t,\quad y = t^{2},\quad z = t^{3}$$

درنقطهٔ $t = 1$.

حل. داریم:

$$r = t i + t^{۲} j + t^{۳} k$$

$$\frac{dr}{dt} = i + ۲t j + ۳t^{۲} k$$

$$\frac{d^{۲}r}{dt^{۲}} + ۲j + ۶t k$$

از آنجا به‌ازای $t = ۱$ بدست می‌آید:

$$T = \frac{dr}{dt} = i + ۲j + ۳k;$$

$$B = \frac{dr}{dt} \times \frac{d^{۲}r}{dt^{۲}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۶ \end{vmatrix} = ۶i - ۶j + ۲k;$$

$$N = B \times T = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۶ & -۶ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix} = -۲۲i - ۱۶j + ۱۸k \cdot$$

بنابراین

$$\tau = \frac{i + ۲j + ۳k}{\sqrt{۱۴}}, \quad \beta = \frac{۳i - ۳j + k}{\sqrt{۱۹}}, \quad \nu = \frac{-۱۱i - ۸j + ۹k}{\sqrt{۲۶۶}}$$

چون به‌ازای $t = ۱$ داریم: $x = ۱$، $y = ۱$ و $z = ۱$، درنتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{x-۱}{۱} = \frac{y-۱}{۲} = \frac{z-۱}{۳} \qquad \text{(معادلهٔ مماس)}$$

$$\frac{x-۱}{۳} = \frac{y-۱}{-۳} = \frac{z-۱}{۱} \qquad \text{(معادلهٔ بی‌نرمال)}$$

$$\frac{x-۱}{-۱۱} = \frac{y-۱}{-۸} = \frac{z-۱}{۹} \qquad \text{(معادلهٔ قائم اصلی)}$$

اگرمنحنی فضائی به‌عنوان فصل مشترك دوسطح

$$F(x,y,z) = ۰ \quad \text{و} \quad G(x,y,z) = ۰$$

داده‌شده باشد، بجای بردارهای $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ و $\frac{d^{2}\mathbf{r}}{dt^{2}}$ می‌توان بردارهای $dr(dx,dy,dz)$ و $d^{2}r(d^{2}x,d^{2}y,d^{2}z)$ را انتخاب کرد، ضمناً یکی از متغیرهای x، y و z را می‌توان مستقل به‌حساب آورد و دیفرانسیل مرتبهٔ دوم آنرا مساوی صفر فرض کرد.

مثال ۲. مطلوبست معادلهٔ صفحهٔ بوسان دایرهٔ

$$x^{2}+y^{2}+z^{2}=6 \quad \text{و} \quad x+y+z=0 \qquad (3)$$

درنقطهٔ $M(1,1,-2)$.

حل. از دستگاه (۳) دیفرانسیل می‌گیریم، x را متغیر مستقل به‌حساب می‌آوریم، خواهیم داشت:

$$\begin{gathered} xdx+ydy+zdz=0 \\ dx+dy+dz=0 \\ dx^{2}+dy^{2}+yd^{2}y+dz^{2}+zd^{2}z=0 \\ d^{2}y+d^{2}z=0 \end{gathered}$$

با فرض $x=1$، $y=1$ و $z=-2$ بدست می‌آید:

$$dy=-dx, \quad dz=0$$

$$d^{2}y=-\frac{2}{3}dx^{2},\ d^{2}z=\frac{2}{3}dx^{2}$$

بنابراین صفحهٔ بوسان به‌وسیلهٔ بردارهای زیر معین‌می‌شود:

$$\{dx,dx,0\} \quad \left\{0,\ -\frac{2}{3}dx^{2},\ \frac{2}{3}dx^{2}\right\}$$

یا

$$\{1,-1,0\} \quad \{0,-1,1\}$$

ازآنجا بردارقائم صفحهٔ بوسان چنین است:

$$B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-i-j-k$$

وبنابراین معادلهٔ آن

$$-1(x-1)-(y-1)-(z+2)=0.$$

یا
$$x+y+z=0$$
واین همانست که انتظار داشتیم، زیرا منحنی ما در این صفحه واقع است.

۲۰۹۰. مطلوبست بردارهای واحد τ، ν، β در نقطهٔ $t=\frac{\pi}{2}$ ازمنحنی

$$x=1-\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=t$$

۲۰۹۱. مطلوبست بردارهای واحد مماس وقائم اصلی پیچ مخروطی

$$\mathbf{r}=e^{t}(\mathbf{i}\cos t+\mathbf{j}\sin t+\mathbf{k})$$

درنقطهٔ غیرمشخص آن وتعیین زاویه‌ای که این خطها با محور OZ می‌سازند.

۲۰۹۲. مطلوبست بردارهای واحد τ، ν، β درنقطهٔ $x=2$ ازمنحنی

$$y=x^2,\quad z=2x$$

۲۰۹۳. برای مارپیچ

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt$$

معادلهٔ خطهائی را بنویسید که در نقطهٔ غیرمشخصی از منحنی تشکیل یك سه‌وجهی طبیعی را بدهند. ضمناً کسینوسهای هادی مماس وقائم اصلی را معین کنید.

۲۰۹۴. مطلوبست معادلهٔ صفحه‌هایی که درنقطهٔ $M(1,1,2)$ ازمنحنی

$$x^2+y^2+z^2=6,\qquad x^2-y^2+z^2=4$$

یك سه‌وجهی طبیعی تشکیل می‌دهند.

۲۰۹۵. معادلهٔ مماس، صفحه قائم وصفحهٔ بوسان ازمنحنی

$$x=t\ ,\quad y=t^2\ ,\quad z=t^3$$

را درنقطهٔ $M(2,4,8)$ آن بنویسید.

۲۰۹۶. مطلوبست معادلهٔ مماس، قائم‌اصلی وبی‌نرمال درنقطهٔ دلخواهی از منحنی

$$x=\frac{1}{4}t^4\ ,\quad y=\frac{1}{3}t^3,\quad z=\frac{1}{2}t^2$$

نقاطی را بدست آورید که مماس درآنها برمنحنی موازی با صفحهٔ $x+3y+2z-10=0$ باشد.

۲۰۹۷. مطلوبست معادلهٔ مماس، صفحهٔ بوسان، قائم اصلی و بی‌نرمال منحنی

$$x = t, \quad y = -t, \quad z = \frac{t^2}{2}$$

درنقطهٔ $t = 2$. کسینوسهای هادی بی‌نرمال را دراین نقطه بدست‌آورید.

۲۰۹۸. مطلوبست معادلهٔ مماس وصفحهٔ قائم درمنحنی‌های زیر:

a) $x = R\cos^2 t$، $y = R\sin t\cos t$، $z = R\sin t$ به‌ازای $t = \frac{\pi}{4}$؛

b) $z = x^2 + y^2$، $x = y$ درنقطهٔ $(1,1,2)$؛

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x + z = 5$ درنقطهٔ $(2; 2\sqrt{3}, 3)$

۲۰۹۹. معادلهٔ صفحهٔ قائم منحنی $z = x^2 - y^2$، $y = x$ رادرمبداء مختصات پیدا کنید.

۲۱۰۰. مطلوبست معادلهٔ صفحهٔ بوسان درنقطهٔ $t = 0$ برمنحنی

$$x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = t\sqrt{2}$$

۲۱۰۱. مطلوبست معادلهٔ صفحهٔ بوسان برمنحنی

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$، $x^2 - y^2 = 3$ درنقطهٔ $(2, 1, 2)$؛

b) $x^2 = 4y$، $x^3 = 24z$ درنقطهٔ $(6, 9, 9)$؛

c) $x^2 + z^2 = a^2$، $y^2 + z^2 = b^2$ درنقطهٔ دلخواه (x_0, y_0, z_0).

۲۱۰۲. معادلهٔ صفحهٔ بوسان، قائم اصلی و بی‌نرمال منحنی زیر را درنقطهٔ $(1, 1, 1)$ پیدا کنید:

$$x^2 = z, \quad y^2 = x$$

۲۱۰۳. مطلوبست معادلهٔ صفحهٔ بوسان، قائم اصلی و بی‌نرمال بر پیچ مخروطی $x = t\cos t$ ، $y = t\sin t$ ، $z = bt$ در مبداء مختصات. بردارهای واحد مماس، قائم اصلی و بی‌نرمال را درمبداء مختصات بدست آورید.

۳۰. انحنا و پیچش* در منحنی‌های فضائی

۱°. انحنا. انحنای منحنی درنقطهٔ M به‌عدد

$$K=\frac{1}{R}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{\Delta s}$$

گفته می‌شود که در آن φ عبارتست از زاویهٔ بین مماسهای دو انتهای قوس MN و ΔS طول قوس این‌قسمت منحنی. R را شعاع انحنا گویند. اگرمنحنی بوسیلهٔ $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ داده شده‌باشد، s طول قوس است، دراینصورت داریم:

$$\frac{1}{R}=\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|$$

برای حالتی که منحنی به‌صورت کلی پارامتری داده شده باشد، داریم:

$$\frac{1}{R}=\frac{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}\qquad(1)$$

۲°. پیچش. پیچش (یا انحنای دوم) منحنی درنقطهٔ M به عدد

$$T=\frac{1}{\rho}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\theta}{\Delta s}$$

گفته می‌شود، که درآن θ عبارتست از زاویهٔ دوران بی‌نرمال در قطعه منحنی MN. مقدار ρ را شعاع پیچش یا شعاع انحنای دوم گویند. اگر $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ باشد، داریم:

$$\frac{1}{\rho}=\pm\left|\frac{d\beta}{ds}\right|=\frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds}\ \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\ \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}}{\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)}$$

*) torsion

علامت منفی برای وقتی است که بردارهای $\frac{d\beta}{ds}$ و $\boldsymbol{\nu}$ یك جهت دارند وعلامت مثبت برای وقتی که جهتهای مختلف دارند.

اگر $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد، که درآن t پارامتر دلخواهی است، داریم:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}}{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2}$$

مثال . مطلوبست انحنا وپیچش منحنی

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + \mathbf{k}bt \qquad (a > 0)$$

حل. داریم:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i}a\sin t + \mathbf{j}a\cos t + \mathbf{k}b$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mathbf{i}a\cos t - \mathbf{j}a\sin t$$

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = -\mathbf{i}a\sin t - \mathbf{j}a\cos t$$

واز آنجا

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}ab\sin t - \mathbf{j}ab\cos t + a^2\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b$$

بنابراین با توجه به‌روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{R} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)}=\frac{b}{a^2+b^2}$$

بنابراین برای این منحنی انحنا وپیچش مقادیری ثابت‌اند.

۲°. روابط فرنه*.

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\frac{\boldsymbol{\nu}}{R} \text{ و } \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}=-\frac{\boldsymbol{\tau}}{R}+\frac{\boldsymbol{\beta}}{\varrho} \text{ و } \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=-\frac{\boldsymbol{\nu}}{\varrho}$$

۲۱۰۴. ثابت کنید که اگر انحنای یك منحنی در تمـام نقاط خود مساوی صفـر باشد، منحنی یك خط راست است.

۲۱۰۵. ثابت کنید که اگر پیچش در تمام نقاط یك منحنی برابر صفر باشد، منحنی مفروض مسطحه است.

۲۱۰۶. ثابت کنید که منحنی زیر مسطحه است:

$$x=1+3t+2t^2 \text{ ، } y=2-2t+5t^2 \text{ ، } z=1-t^2$$

مطلوبست صفحه‌ای که این منحنی بر آن واقع است.

۲۱۰۷. انحنای منحنی‌های زیر را پیدا کنید:

a) $x=\cos t$ ، $y=\sin t$ ، $z=\operatorname{ch} t$ به‌ازای $t=0$؛

b) $x^2-y^2+z^2=1$ ، $y^2-2x+z=0$ درنقطهٔ $(1،1،1)$.

۲۱۰۸. انحنا وپیچش منحنی‌های زیر را درنقطهٔ دلخواه آنها پیدا کنید.

a) $x=e^t\cos t$ ، $y=e^t\sin t$ ، $z=e^t$؛

b) $x=a\operatorname{ch} t$ ، $y=a\operatorname{sh} t$ ، $z=at$ (پیچ هذلولی).

۲۱۰۹. شعاع انحنا وشعاع پیچش منحنی‌های زیر را درنقطهٔ دلخواه (x,y,z) آنها پیدا کنید:

a) $x^2=2ay$ ، $x^3=6a^2z$؛

b) $x^3=3p^2y$ ، $2xz=p^2$.

۲۱۱۰. ثابت کنید مماس وقائمی که بردارشتاب w را تشکیل می‌دهند، از روابط زیر بدست می‌آیند:

---

*) Frenet

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} \;,\quad w_\nu = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{\nu}$$

که درآنها v سرعت، R شعاع انحنای مسیر، $\boldsymbol{\tau}$و$\boldsymbol{\nu}$ بردارهای اصلی‌مماس وقائم اصلی برمنحنی هستند.

۲۱۱۱. روی منحنی $\mathbf{r} = iacost + jasint + btk$ نقطه‌ای با سرعت v حرکت می‌کند. ω شتاب آنرا حساب کنید.

۲۱۱۲. معادلهٔ حرکتی چنین است:

$$\mathbf{r} = ti + t^2 j + t^3 k$$

درلحظه‌های زمانی $t = 0$ و $t = 1$: ۱) انحنای مسیر، ۲) مماس وقائمی که بردار شتاب را تشکیل می‌دهند، پیدا کنید.

فصل هفتم

انتگرالهای مکرر و انتگرالهای منحنی‌الخط

۱. انتگرال مضاعف در مختصات قائم

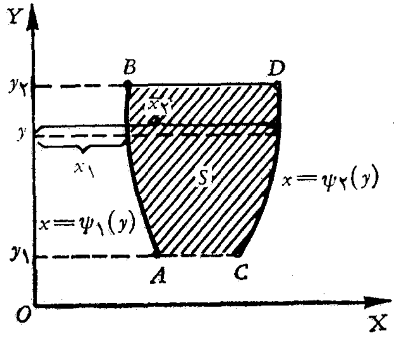
۱°. **محاسبهٔ مستقیم انتگرالهای مضاعف.** انتگرال مضاعف تابع $f(x,y)$ ، که در ناحیهٔ محدود وبستهٔ S از صفحهٔ XOY واقع است، به‌حد مجموع انتگرالی دوگانهٔ زیر گفته می‌شود:

$$\iint\limits_{(s)} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i,y_k)\Delta x_i \Delta y_k \qquad (۱)$$

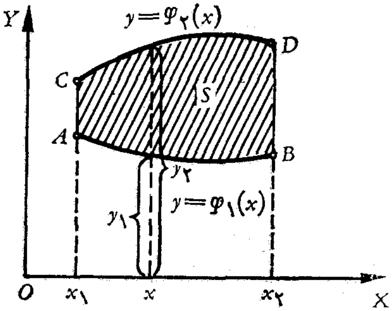
که در آن $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ، $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ ومجموع به‌مقادیر i و k چنان مربوط است که به‌ازای آنها نقطهٔ (x_i, y_k) متعلق به‌ناحیهٔ S است.

۲°. **ترتیب حدود انتگرال‌گیری در انتگرال مضاعف.** برای انتگرال‌گیری دو نوع اساسی ناحیه وجود دارد:

۱) ناحیهٔ انتگرال‌گیری S (شکل ۸۵) که از چپ وراست محدود است به $x=x_1$ و $x=x_2$ $(x_2>x_1)$ واز بالا وپائین به‌منحنی‌های پیوستهٔ $y=\varphi_1(x)$ (AB) و $y=\varphi_2(x)$ (CD) $[\varphi_2(x)\geqslant\varphi_1(x)]$، هریك ازاین‌منحنی‌ها قائم $x=X$ $(x_1<X<x_2)$ را تنها دریك نقطه قطع می‌کند (شکل ۸۵ را ببینید). درناحیهٔ S، متغیر x از x_1 تا x_2 ومتغیر y بشرط ثابت بودن x، از $y_1=\varphi_1(x)$ تا $y_2=\varphi_2(x)$ تغییرمی‌کند. محاسبهٔ انتگرال (۱) را می‌توان باانجام متوالی انتگرال‌گیری ساده طبق رابطهٔ زیر به‌نتیجه رساند:



شکل ۸۵



شکل ۸۶

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

که در آن برای محاسبهٔ $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ ، مقدار x ثابت به‌حساب می‌آید.

۲) ناحیهٔ انتگرال‌گیری S از پائین وبالا به‌خطهـای $y=y_1$ و $y=y_2$ محدود است $(y_2>y_1)$ ، و از راست وچپ به‌منحنی‌هـای $x=\psi_1(y)$ (AB) و $x=\psi_2(y)$ (CD) $[\psi_2(y)\geqslant\psi_1(y)]$؛هریك از این دومنحنی خط افقی $y=Y$ $(y_1<Y<y_2)$ را تنها در يك نقطه قطع می‌کند (شکل ۸۶).

شبیه حالت قبل داریم:

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_{y_1}^{y_2} dx \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

که درآن برای محاسبهٔ انتگرال $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ ، مقدار y ثابت به‌حساب می‌آید.

اگرناحیهٔ انتگرال‌گیری با هیچکدام ازاین دونوع قابل تطبیق نباشد، آنــرا به‌قسمتهائی

تقسیم می‌کنیم، بنحوی که هر کدام از این قسمتها با یکی از دو حالت اصلی قابل تطبیق باشد.

مثال ۱. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$I=\int_{۰}^{۱}dx\int_{۰}^{۱}(x+y)dy$$

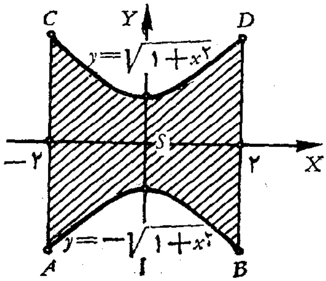
حل.

$$I=\int_{۰}^{۱}\left(xy+\frac{y^{۲}}{۲}\right)\Bigg|_{y=x}^{y=۱}dx=\int_{۰}^{۱}\left[\left(x+\frac{۱}{۲}\right)-\left(x^{۲}+\frac{x^{۲}}{۲}\right)\right]dx=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۲. مطلوبست حدود انتگرال‌گیری درانتگرال

$$\iint_{(S)}f(x,y)dxdy$$

بشرطی که ناحیه انتگرال‌گیری S (شکل۸۷) به هذلولی $y^{۲}-x^{۲}=۱$ و دو خط $x=۲$ و $x=-۲$ محدود باشد (ناحیه‌ای مورد نظراست که شامل مبداء مختصات باشد).



شکل۸۷

حل. ناحیهٔ انتگرال‌گیری $ABCD$ (شکل۸۷) محدود است به‌خطهای $x=-۲$ و $x=۲$ و دوشاخه هذلولی به‌معادله‌های

$$y=\sqrt{۱+x^{۲}} \text{ و } y=-\sqrt{۱+x^{۲}}$$

یعنی ناحیهٔ انتگرال‌گیری ازنوع اول است. داریم:

$$\iint_{(S)}f(x,y)dxdy=\int_{-۲}^{۲}dx\int_{-\sqrt{۱+x^{۲}}}^{\sqrt{۱+x^{۲}}}f(x,y)dy$$

انتگرالهای زیر را محاسبه‌کنید:

۲۱۱۳. $\int_{۰}^{۲}dy\int_{۰}^{۱}(x^{۲}+۲y)dx$.

۲۱۱۴. $\int_{۳}^{۴}dx\int_{۱}^{۲}\frac{dy}{(x+y)^{۲}}$.

۲۱۱۵. $\int_{\circ}^{۱} dx \int_{\circ}^{۱} \frac{x^۲ dy}{۱+y^۲}$

۲۱۱۶. $\int_{۱}^{۲} dx \int_{\frac{۱}{x}}^{x} \frac{x^۲ dy}{y^۲}$

۲۱۱۷. $\int_{-۳}^{۳} dy \int_{y^۲-۴}^{۵} (x+۲y)dx$

۲۱۱۸. $\int_{\circ}^{۲\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} rdr$

۲۱۱۹. $\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} d\varphi \int_{\circ}^{۳\cos\varphi} r^۲\sin^۲\varphi dr$

۲۱۲۰. $\int_{\circ}^{۱} dx \int_{\circ}^{\sqrt{۱-x^۲}} \sqrt{۱-x^۲-y^۲}dy$

مطلوبست معادلهٔ منحنی‌هائی‌که انتگرالهای مضاعف زیر درحدود آنها قرارگـرفته‌اند، سپس این ناحیه‌ها را رسم‌کنید:

۲۱۲۱. $\int_{-۶}^{۲} dy \int_{\frac{y^۲}{۴}-۱}^{۲-y} f(x,y)dx$

۲۱۲۲. $\int_{۱}^{۳} dx \int_{x^۲}^{x+۹} f(x,y)dy$

۲۱۲۳. $\int_{\circ}^{۴} dy \int_{y}^{۱\circ-y} f(x,y)dx$

۲۱۲۴. $\int_{۱}^{۳} dx \int_{\frac{x}{۳}}^{۲x} f(x,y)dy$

۲۱۲۵. $\int_{\circ}^{۳} dx \int_{\circ}^{\sqrt{۲۵-x^۲}} f(x,y)dy$

۲۱۲۶. $\int_{-۱}^{۲} dx \int_{x^۲}^{x+۲} f(x,y)dy$

حـــدود و ناحیهٔ S را در مورد انتگـــرال مضاعف $\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$ درحالتهای زیر پیدا کنید:

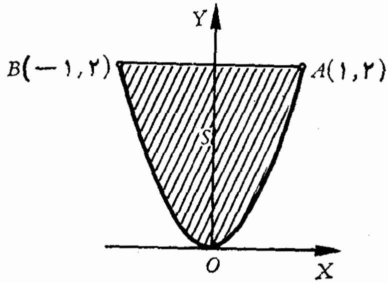
۲۱۲۷. S مستطیلی است به‌رأسهای $O(\circ,\circ)$ ، $A(۲,\circ)$ ، $B(۲,۱)$ و $C(\circ,۱)$.

۲۱۲۸. S مثلثی است به رأسهای $O(۰,۰)$، $A(۱,۰)$ و $B(۱,۱)$.

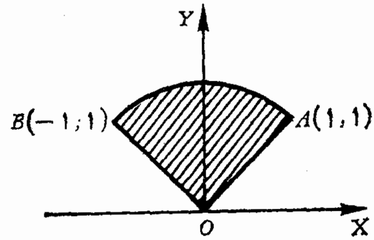
۲۱۲۹. S ذوزنقه‌ای است به‌رأسهای $O(۰,۰)$، $A(۲,۰)$ ، $B(۱,۱)$ و $C(۰,۱)$.

۲۱۳۰. S متوازی‌الاضلاعی است به رأسهای $A(۱,۲)$ ، $B(۲,۴)$ ، $C(۲,۷)$ و $D(۱,۵)$.

۲۱۳۱. S قطاع دایره‌ای OAB است به‌مرکز نقطهٔ $O(۰,۰)$ و دو انتهای قوس $A(۱,۱)$ و $B(-۱,۱)$ (شکل ۸۸).



شکل۸۹



شکل۸۸

۲۱۳۲. S قطاع AOB از سهمی قائمی است که به‌سهمی BOA و پاره‌خط راست BA محدود است، با شرط $B(-۱,۲)$ و $A(۱,۲)$ (شکل۸۹).

۲۱۳۳. S حلقه دایره‌ای است محدود به‌دایره‌های با شعاعهای $r=۱$ و $R=۲$ بـا مرکز مشترك $O(۰,۰)$.

۲۱۳۴. S محدود است به‌هذلولی $y^۲-x^۲=۱$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲=۹$ (ناحیه‌ای را درنظربگیرید که شامل مبداء مختصات است).

۲۱۳۵. حدود انتگرال‌گیری را درانتگرال مضاعف

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy$$

پیداکنید، بشرطی که ناحیهٔ S بوسیلهٔ نامساویهای زیر معین شده باشد:

a) $x\geqslant ۰$ ؛ $y\geqslant ۰$ ؛ $x+y\leqslant ۱$؛ b) $x^۲+y^۲\leqslant a^۲$؛

c) $x^۲+y^۲\leqslant x$؛ d) $y\geqslant x$ ؛ $x\geqslant -۱$ ؛ $y\leqslant ۱$؛

e) $y\leqslant x\leqslant y+۲a$ ؛ $۰\leqslant y\leqslant a$.

ردیف انتگرال‌گیری را درانتگرالهای مضاعف زیر تغییردهید:

۲۱۳۶. $\int_{0}^{4} dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$.

۲۱۳۷. $\int_{0}^{1} dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$.

۲۱۳۸. $\int_{0}^{a} dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$.

۲۱۳۹. $\int_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$.

۲۱۴۰. $\int_{0}^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)dy$.

۲۱۴۱. $\int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.

۲۱۴۲. $\int_{0}^{1} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$.

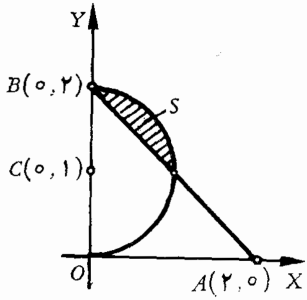
۲۱۴۳. $\int_{0}^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int_{0}^{x} f(x,y)dy + \int_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$.

۲۱۴۴. $\int_{0}^{\pi} dx \int_{0}^{\sin x} f(x,y)dy$.

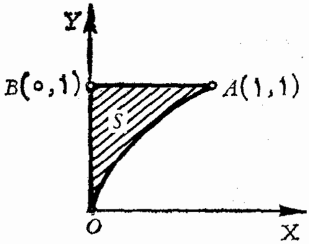
انتگرالهای مضاعف زیر را محاسبه‌کنید:

۲۱۴۵. $\iint\limits_{(S)} x\,dx\,dy$، که در آن S مثلثی است به‌رأسهـای $O(0,0)$، $A(1,1)$ و $B(0,1)$.

۲۱۴۶. $\iint\limits_{(S)} x\,dx\,dy$، که در آن ناحیهٔ انتگرال‌گیری S محدود است به خطی که از نقطه‌های $A(2,0)$ و $B(0,2)$ می‌گذرد وقوس دایرهٔ به‌مرکز $C(0,1)$ وشعاع ۱ (شکل ۹۰).



شکل ۹۰



شکل ۹۱

۲۱۴۷. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ ، که در آن S عبارتست ازقسمتی ازسطح دایـرهٔ به‌شعاع a ومرکز $O(0,0)$ و واقع در ربع اول.

۲۱۴۸. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy$ ، که در آن S مثلثی است به رأسهای $O(0,0)$، $A(1,1)$ و $B(1,1)$.

۲۱۴۹. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$ ، که درآن S مثلثی است به‌رأسهای $O(0,0)$، $A(10,1)$ و $B(1,1)$.

۲۱۵۰. $\iint\limits_{(S)} e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$، که در آن S مثلث مختلطا لخط OAB است محدود به سهمی $y^2=x$ وخطهای $x=0$ و $y=1$ (شکل ۹۱).

۲۱۵۱. $\iint\limits_{(S)} \frac{xdxdy}{x^{2}+y^{2}}$ ، که درآن S عبارتست از قطعه‌ای از سهمی محدود به‌سهمی $y=\frac{x^{2}}{2}$ و خط $y=x$.

۲۱۵۲. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال ورسم ناحیه‌ای که درآن قرار دارد:

a) $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{1+\cos x} y^{2}\sin x dy$ ؛ b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\cos x}^{1} y^{4}dy$ ؛

c) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_{0}^{3\cos y} x^{2}\sin^{2} y dx$.

ضمن حل مسائل ۲۱۵۳–۲۱۵۷ از شکل هم‌کمك بگیرید:

۲۱۵۳. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال مضاعف

$$\iint\limits_{(S)} xy^{2}dxdy$$

بشرطی که S ناحیه‌ای است محدود به‌سهمی $y^{2}=2px$ وخط $x=p$.

۲۱۵۴*. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال مضاعف

$$\iint\limits_{(S)} xydxdy$$

بشرطی که S به‌محور OX ونیمدایرهٔ بالائی $(x-2)^{2}+y^{2}=1$ محدود باشد.

۲۱۵۵. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال مضاعف

$$\iint\limits_{(S)} \frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}$$

که درآن S عبارتست از دایره‌ای به‌شعاع a ومماس برمحورهای مختصات و واقع‌درربع‌اول.

۲۱۵۶*. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال مضاعف

$$\iint\limits_{(S)} ydxdy$$

که درآن S محدود است به‌محور طول وقوس سیکلوئید

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

۲۱۵۷. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال مضاعف

$$\iint\limits_{(S)} xydxdy$$

که درآن ناحیهٔ انتگرال‌گیری S محدود است به‌محورهای مختصات وقوس آستروئید

$$x = R\cos^3 t, \ \ y = R\sin^3 t \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \right)$$

۲۱۵۸. مقدارمیانگین‌تابع $f(x,y) = xy^2$ رادرناحیه: $S\{0 \leqslant x \leqslant 1; 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ پیدا کنید.

توضیح. مقدار میانگین تابع $f(x,y)$ درناحیهٔ S به‌عدد زیر گفته می‌شود:

$$\bar{f} = \frac{1}{S} \iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$$

۲۱۵۹. مطلوبست مقدار میانگین مجذور فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ روی دایرهٔ $(x-a)^2 + y^2 \leqslant R^2$ از مبداء مختصات.

۲. تغییر متغیر در انتگرال مضاعف

۱°. انتگرال مضاعف درمختصات قطبی. برای اینکه درانتگرال مضاعف ازمختصات دکارتی به‌مختصات قطبی r و φ (با روابط $x = r\cos\varphi$، $y = r\sin\varphi$) عبور کنیم، داریم:

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(S)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi \qquad (1)$$

اگر ناحیهٔ انتگرال‌گیری S محدود به نیم‌خطهای $r = \alpha$ و $r = \beta$ $(\alpha < \beta)$ ومنحنی‌های $r = r_1(\varphi)$ و $r = r_2(\varphi)$ باشند، بطوریکه $r_1(\varphi)$ و $r_2(\varphi)$ $(r_1(\varphi) \leqslant r_2(\varphi))$ در فاصلهٔ $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ یك ارزشی باشد، انتگرال مضاعف را می‌توان از رابطهٔ زیر بدست آورد:

$$\iint\limits_{(S)} F(\varphi,r)\, r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r) r dr ،$$

که در آن داریم: $F(\varphi,r) = f(r\cos\varphi\ ,\ r\sin\varphi)$.

برای محاسبهٔ انتگرال $\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r) r dr$ ، مقدار φ را ثابت به‌حساب می‌آوریم.

اگر ناحیهٔ انتگرال‌گیری به‌اینصورت نباشد، آنرا به‌قسمتهائی تقسیم می‌کنیم که هر کدام ازآنها ناحیه‌ای ازنوع مفروض باشند.

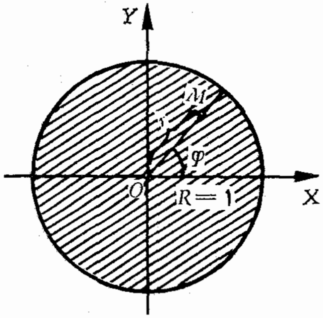
۲°. انتگرال مضاعف در مختصات منحنی الخط. درحالت کلی، اگر در انتگرال مضاعف

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y) dx dy$$

بخواهیم از متغیرهای x و y به‌متغیرهای u و v برسیم، بنحوی که با x و y به‌وسیلهٔ رابطه‌های پیوسته و قابل مشتق‌گیری زیر مربوط باشند:

$$x = \varphi(u,v) \quad \text{و} \quad y = \psi(u,v)$$

ویك تناظر یك‌ارزشی و پیوستگی دوسوئی بین نقاط ناحیهٔ S ازصفحهٔ XOY ونقاط ناحیه‌ای مثل S' از صفحهٔ $UO'V$ برقرار باشد و ضمناً ژاکوبین



شکل ۹۲

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

درناحیهٔ S دارای علامت ثابتی باشد، در اینصورت

رابطهٔ زیر صحیح است:

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(S')} f[\varphi(u,v) \text{ و } \psi(u,v)]|I|dudv$$

حدود انتگرال جدید طبق قاعدهٔ کلی وبنابرنوع ناحیهٔ S' معین می‌شود.

مثال. با انتقال به‌مختصات قطبی، انتگرال

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{۱-x^۲-y^۲}\,dxdy$$

را محاسبه کنید، که در آن ناحیهٔ S دایره‌ای است به‌شعاع $R=۱$ و به‌مرکز مبداء مختصات (شکل۹۲).

حل. بافرض $x = r\cos\varphi$ و $y = r\sin\varphi$ بدست می‌آید:

$$\sqrt{۱-x^۲-y^۲} = \sqrt{۱-(r\cos\varphi)^۲-(r\sin\varphi)^۲} = \sqrt{۱-r^۲}.$$

چون درناحیهٔ S، مختص r به‌ازای مقادیر دلخواه φ از ۰ تا ۱، و φ از ۰ تا ۲π تغییرمی‌کند، دراینصورت:

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{۱-x^۲-y^۲}\,dxdx = \int_۰^{۲\pi} d\varphi \int_۰^۱ \sqrt{۱-r^۲}\,dr = \frac{۲}{۳}\pi$$

در انتگرالهای زیر به‌مختصات قطبی r و φ بروید وحدود انتگرال‌گیری رابرای متغیرهای جدید بدست آورید:

۲۱۶۰. $\int_۰^۱ dx \int_۰^۱ f(x,y)dy$.

۲۱۶۱. $\int_۰^۲ dx \int_۰^x f(\sqrt{x^۲+y^۲})dy$.

۲۱۶۲. $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$، که در آن ناحیه S عبارتست از مثلثی محدود به‌خطهای $y=x$، $y=-x$ و $y=۱$.

۲۱۶۳. $\int_{-۱}^۱ dx \int_{x^۲}^۱ f\left(\frac{y}{x}\right)dy$.

۲۱۶۴. $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$، که در آن ناحیه S به‌لمنیسکات زیر محدود است:

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

۲۱۶۵. با عبور به‌مختصات قطبی، مطلوبست محاسبهٔ انتگرال مضاعف

$$\iint\limits_{(S)} ydxdy$$

که در آن S عبارتست از نیمدایرهٔ به‌قطر a ومرکز $C(\frac{a}{2}, 0)$ (شکل ۹۳).

۲۱۶۶. انتگرال مضاعف زیررا با عبور به‌مختصات قطبی محاسبه کنید:

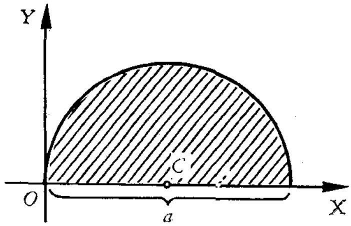
$$\iint\limits_{(S)} (x^3+h^2)dxdy$$

که در آن ناحیه S به‌دایرهٔ $x^2+y^2=2ax$ محدود شده است.

۲۱۶۷. با عبور به‌مختصات قطبی، مطلوبست محاسبهٔ انتگرال مضاعف

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

که در آن ناحیهٔ انتگرال‌گیری S عبارتست از نیمدایره‌ای به‌شعاع a ومرکز مبداء مختصات وواقع دربالای محور OX.



شکل۹۳

۲۱۶۸. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال مضاعف ازتابع $f(r,\varphi)=r$ در ناحیهٔ محدود به‌کاردیوئید $r=a(1+\cos\varphi)$ و دایرهٔ $r=a$ (ناحیه‌ای مورد نظراست که شامل قطب نباشد).

۲۱۶۹. با عبور به‌مختصات قطبی، مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy$$

۲۱۷۰. با عبور به‌مختصات قطبی، مطلوبست محاسبهٔ

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

که در آن ناحیه s به‌حلقهٔ لمنیسکات زیر محدود است:

$$(x^۲+y^۲)^۲=a^۲(x^۲-y^۲)\quad (x\geqslant ۰)$$

۲۱۷۱*. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال مضاعف

$$\iint\limits_{(S)}\sqrt{۱-\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}}\,dxdy$$

که درآن، ناحیهٔ S محدود است به بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$، بشرطی‌که به‌مختصات قطبی r و φ با رابطه‌های زیر عبور کنیم:

$$\frac{x}{a}=r\cos\varphi,\ \frac{y}{b}=r\sin\varphi$$

۲۱۷۲.** با شرط $\beta>\alpha>۰$ و $c>۰$، انتگرال مضاعف

$$\int\limits_{۰}^{c}dx\int\limits_{\alpha x}^{\beta x}f(x,y)dy$$

را با درنظرگرفتن متغیرهای جدید $u=x+y$ و $uv=y$ تبدیل کنید.

۲۱۷۳*. تغییر متغیر $u=x+y$ و $v=x-y$ را درانتگرال زیر انجام دهید:

$$\int\limits_{۰}^{۱}dx\int\limits_{۰}^{۱}f(x,y)dy$$

۲۱۷۴.** مطلوبست محاسبهٔ انتگرال مضاعف

$$\iint\limits_{(S)}dxdy$$

که درآن ناحیهٔ S به‌منحنی زیرمحدود است:

$$\left(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}\right)^۲=\frac{x^۲}{h^۲}-\frac{y^۲}{k^۲}$$

یادآوری. تغییر متغیرهای زیر را درنظربگیرید:

$$x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi$$

۳. محاسبهٔ مساحت شکلها

۱°. مساحت درمختصات قائم. مساحت ناحیهٔ مسطح S برابراست با

$$S_{\text{مساحت}} = \iint\limits_{(S)} dxdy$$

اگر ناحیهٔ S با نامساویهای $a\leqslant x\leqslant b$ ، $\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)$ معین شده باشد، دراینصورت

$$S_{\text{مساحت}} = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy$$

۲°. مساحت درمختصات قطبی. اگر ناحیهٔ S درمختصات قطبی r و φ با نامساویهای $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$ و $f(\varphi)\leqslant r\leqslant F(\varphi)$ معین شود، دراینصورت

$$S_{\text{مساحت}} = \iint\limits_{(S)} r d\varphi dr = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{f(\varphi)}^{F(\varphi)} rdr$$

۲۱۷۵. ناحیه‌هائی را بسازید که مساحت آنها بوسیلهٔ انتگرالهای زیربیان می‌شوند:

$$a) \quad \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} dy; \qquad b) \quad \int\limits_{0}^{a} dy \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx$$

این مساحتها را محاسبه کنید و ردیف انتگرال‌گیری را تغییر دهید.

۲۱۷۶. ناحیه‌هائی را بسازید که مساحت آنها به‌وسیلهٔ انتگرالهای زیر بیان می‌شوند:

$$a) \quad \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{0}^{3\sec\varphi} rdr; \qquad b) \quad \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a}^{a(1+\cos\varphi)} rdr.$$

این مساحتها را حساب کنید.

۲۱۷۷. مطلوبست مساحت محدود به‌خطهای $x=y$ ، $x=۲y$ ، $x+y=a$ ، $x+۳y=a$ $(a>۰)$.

۲۱۷۸. مطلوبست مساحت واقع در بالای محور OX و محدود به‌این محور، سهمی $y^۲=۴ax$ و خط $x+y=۳a$.

۲۱۷۹*. مساحت محدود به‌بیضی زیر را محاسبه کنید:

$$(y-x)^۲+x^۲=۱$$

۲۱۸۰. مطلوبست مساحت محدود به‌سهمی‌های

$$y^۲=۱۰x+۲۵, \quad y^۲=-۶x+۹$$

۲۱۸۱. با عبور به‌مختصات قطبی، مساحت محدود به‌منحنی‌های زیر را پیدا کنید:

$$x^۲+y^۲=۲x, \ x^۲+y^۲=۴x, \ y=x, \ y=۰$$

۲۱۸۲. مطلوبست مساحت محدود به‌خط $r\cos\varphi=۱$ و دایرهٔ $r=۲$ (مساحتی را درنظر بگیرید که شامل قطب نیست).

۲۱۸۳. مطلوبست مساحت محدود به‌منحنی‌های

$$r=a(۱+\cos\varphi), \quad r=a\cos\varphi (a>۰)$$

۲۱۸۴. مطلوبست مساحت محدود به منحنی

$$\left(\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۹}\right)^۲=\frac{x^۲}{۴}-\frac{y^۲}{۹}$$

۲۱۸۵*. مطلوبست مساحت محدود به‌بیضی

$$(x-۲y+۳)^۲+(۳x+۴y-۱)^۲=۱۰۰$$

۲۱۸۶. مطلوبست مساحت چهارضلعی منحنی‌الضلع محدود به‌قوسهای سهمی‌های $x^۲=ay$ ، $x^۲=by$ ، $y^۲=\alpha x$ ، $y^۲=\beta x$ $(۰<a<b$ ، $۰<\alpha<\beta)$.

راهنمائی. متغیرهای جدید u و v را انتخاب کنید، با فرض

$$x^۲=uy, \ y^۲=vx$$

۲۱۸۷. مطلوبست مساحت چهارضلعی منحنی‌الضلع محدود به‌قوسهای منحنی‌های

$$(0<\alpha<\beta \text{،} 0<a<b)\quad xy=\beta \text{،} xy=\alpha \text{،} y^2=bx \text{،} y^2=ax$$

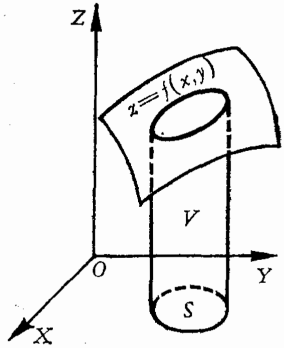
راهنمائی. با فرض $xy=u$ ، $y^2=vx$، متغیرهای جدید u و v را انتخاب کنید.

۴. محاسبهٔ حجم جسمها

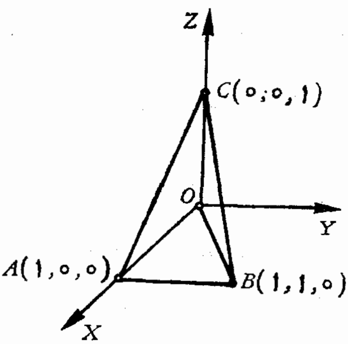
حجم V یك استوانه‌ای که ازبالا محدود باشد به‌سطح پیوستهٔ $z=f(x,y)$ وازپائین صفحهٔ $z=0$ و ازاطراف به سطح استوانه‌ای قائم، که اثر آن روی صفحهٔ XOY ناحیهٔ Sاست (شکل ۹۴)، برابراست با:

$$V=\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$$

۲۱۸۸. به‌کمك انتگرال مضاعف‌حجم هرمی را پیدا کنید که راسهای‌آن $O(0,0,0)$، $A(1,0,0)$ ، $B(1,1,0)$ و $C(0,0,1)$ باشد (شکل ۹۵). حدود انتگرال‌گیری را قرار دهید.



شکل ۹۴



شکل۹۵

درمسئله‌های ۲۱۸۹ــ۲۱۹۲جسمها ئی را رسم‌کنیدکه حجم آنها بوسیلهٔ انتگرالهای مضاعف مفروض بیان شده‌اند:

۲۱۸۹. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)dy$.

۲۱۹۰. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (4-x-y)dy$.

۲۱۹۱. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x)dy$ ۲۱۹۲. $\int_0^2 dx \int_{2-x}^{2} (4-x-y)dy$.

۲۱۹۳. جسمی را رسم کنید که حجم آن به‌وسیلهٔ انتگرال

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy$$

بیان می‌شود و از نمایش هندسی آن مقدار این انتگرال را بدست آورید.

۲۱۹۴. مطلوبست حجم جسم محدود به‌سهموی الیپتیک $z=2x^2+y^2+1$، صفحهٔ $x+y=1$ و صفحه‌های مختصات.

۲۱۹۵. جسمی محدود است به‌سهموی هیپربولیک $z=x^2-y^2$ و صفحه‌های $y=0$، $z=0$، $y=x$ این حجم را محاسبه کنید.

حجم جسمهائی را پیدا کنید که به سطحهای زیر محدود باشند:

۲۱۹۷. $az=y^2$ $x^2+y^2=r^2$ $z=0$.

۲۱۹۸. $y=\sqrt{x}$، $y=2\sqrt{x}$، $x+z=6$، $z=0$.

۲۱۹۹. $z=x^2+y^2$، $y=x^2$، $y=1$، $z=0$.

۲۲۰۰. $x+y+z=a$، $3x+y=a$، $\frac{3}{2}x+y=a$، $y=0$، $z=0$.

۲۲۰۱. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$، $y=\frac{b}{a}x$، $y=0$، $z=0$.

۲۲۰۲. $x^2+y^2=2ax$، $z=\alpha x$، $z=\beta x$ $(\alpha>\beta)$.

در مسئله‌های ۲۲۰۳ـ۲۲۱۱ ازمختصات قطبی ومختصات قطبی تعمیم داده شده استفاده‌کنید:

۲۲۰۳. مطلوبست تمام حجم بین استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$ وهذلولی

$$x^2+y^2-z^2=-a^2$$

۲۲۰۴. مطلوبست تمام حجم بین مخروط $2(x^2+y^2)-z^2=0$ وهذلولی

$$x^2+y^2-z^2=-a^2$$

۲۲۰۵. مطلوبست حجم محدود به‌سطحهای $2az=x^2+y^2$، $x^2+y^2-z^2=a^2$،

$z=0$.

۲۲۰۶. مطلوبست حجم بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

۲۲۰۷. مطلوبست حجم جسم محدود به سهموی $2az=x^2+y^2$ و کرهٔ $x^2+y^2+z^2=3a^2$ (حجمی را درنظر بگیرید که درداخل سهموی قرارگرفته است).

۲۲۰۸. مطلوبست محاسبهٔ حجم جسمی که محدود است به صفحـهٔ XOY، استوانهٔ $x^2+y^2=2ax$ ومخروط $x^2+y^2=z^2$.

۲۲۰۹. مطلوبست محاسبهٔ حجم جسمی که محدود است به صفحـهٔ XOY ، سطح $z=ae^{-(x^2+y^2)}$ و استوانهٔ $x^2+y^2=R^2$.

۲۲۱۰. حجم جسمی را بدست آورید که محدود باشد به‌صفحهٔ XOY ، سهموی $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ واستوانهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{x}{a}$.

۲۲۱۱. سهموی $x^2+y^2-z^2=a^2$ بچه‌نسبتی حجم کرهٔ $x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2$ را تقسیم می‌کند؟

۲۲۱۲*. مطلوبست حجم جسمی که محدود است به‌صفحه‌های $y+x=z$، $xy=1$، $xy=2$، $y=x$، $y=2x$، $z=0$ ($x>0$، $y>0$).

۵. محاسبهٔ مساحت سطـوح

مساحت σ سطح صاف ویک‌ارزشی $z=f(x,y)$، که تصویر آن روی صفحهٔ XOY ناحیهٔ S را تشکیل می‌دهد، برابراست با:

$$\sigma=\iint_{(S)}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\;dxdy$$

۲۲۱۳. مطلوبست مساحت قسمتی ازصفحهٔ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ که بین محورهای مختصات قرار دارد.

۲۲۱۴. مطلوبست مساحت قسمتی ازسطح استوانه‌ای $x^2+y^2=R^2$ $(z\geqslant 0)$، که بین صفحه‌های $z=mx$ و $z=nx$ قرارگرفته است $(m>n>0)$.

***۲۲۱۵.** مطلوبست مساحت قسمتی ازسطح مخروطی $x^2-y^2=z^2$ که در یك‌هشتم اول قرارگرفته و به‌صفحهٔ $y+z=a$ محدود است.

۲۲۱۶. مطلوبست محاسبهٔ مساحت قسمتی ازسطح استوانه‌ای $x^2+y^2=ax$ که بوسیلهٔ کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ جدا شده است.

۲۲۱۷. مطلوبست مساحت قسمتی ازکرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ که بوسیلهٔ سطح $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ جدا می‌شود.

۲۲۱۸. مطلوبست مساحت قسمتی ازسطح سهموی $y^2+z^2=2ax$ که بین استوانهٔ $y^2=ax$ وصفحهٔ $x=a$ قرارگرفته است.

۲۲۱۹. مطلوبست مساحت قسمتی ازسطح استوانه‌ای $x^2+y^2=2ax$ که بین صفحهٔ XOY ومخروط $x^2+y^2=z^2$ قرارگرفته است.

***۲۲۲۰.** مطلوبست مساحت قسمتی ازسطح مخروطی $x^2-y^2=z^2$ که در داخل استوانهٔ $x^2+y^2=2ax$ قرار دارد.

***۲۲۲۰. ۱.** مطلوبست سطح قسمتی ازاستوانهٔ $y^2=4x$ که بوسیلهٔ کرهٔ $x^2+y^2+z^2=5x$ جدا می‌شود.

***۲۲۲۰. ۲.** مطلوبست مساحت قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ که بوسیلهٔاستوانهٔ $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ جدا می‌شود.

***۲۲۲۱.** ثابت‌کنید مساحتهای قسمتی از سطوح سطوح سهموی $x^2+y^2=2az$ و $x^2-y^2=2az$ که بوسیلهٔ استوانهٔ $x^2+y^2=R^2$ جدا می‌شوند، باهم برابر است.

***۲۲۲۲.** کره‌ای به شعاع a دواستوانه دایره‌ای را بریده است. قطرقاعدهٔ هریك از استوانه‌ها مساوی شعاع‌کره است و دو استوانه در طول یکی از قطرهای‌کره برهم مماس‌اند. مطلوبست حجم ومساحت سطح قسمتی ازکره‌که باقیمانده است.

***۲۲۲۳.** درکرهٔ به‌شعاع a روزنه‌ای باقاعدهٔ مربع‌شکل (که ضلع آن مساوی aاست) به‌وجودآورده‌ایم.محور روزنه برقطرکره منطبق است. مطلوبست مساحت سطح‌کره‌که به‌وسیلهٔ روزنه بریده شده است.

***۲۲۲۴.** مطلوبست محاسبهٔ مساحت قسمتی از سطح $z=c\cdot arctg\frac{y}{x}$ که‌دریك‌هشتم اول

وبین استوانه‌های $x^۲+y^۲=a^۲$ و $x^۲+y^۲=b^۲$ قرارگرفته است.

۶. کاربرد انتگرال مضاعف در مکانیک

۱°. جرم و گشتاور پلاك. اگر S ناحیه‌ای ازصفحهٔ XOY که به‌وسیلهٔ یك پلاك داده شده است، $\rho(x,y)$ چگالی این‌پلاك‌در نقطهٔ (x,y) باشد، جرم M پلاك و گشتاورهای M_X و M_Y آن نسبت به‌محورهای OXوOY با انتگرالهای مضاعف زیر بیان می‌شوند:

$$M=\iint_{(S)}\rho(x,y)dxdy, \qquad (۱)$$

$$M_X=\iint_{(S)}y\rho(x,y)dxdy, \quad M_Y=\iint_{(S)}x\rho(x,y)dxdy$$

اگرپلاك متجانس باشد، $\rho(x,y)$ مقداری ثابت می‌شود.

۲°. مختصات مرکز ثقل. اگر $C(\bar{x}$ و $\bar{y})$ مرکز ثقل پلاك باشد، دراینصورت

$$=\frac{M_Y}{M}, \quad \bar{y}=\frac{M_X}{M}$$

که درآن M عبارتست ازجرم پلاك و M_XوM_Y گشت آوره ‌ی ساکن آن نسبت به‌محورهای مختصات (۱°. را ببینید). اگرپلاك متجانس باشد، در رابطهٔ (۱) می‌توان ۱ $=\rho$ فرض کرد.

۳°. گشتاور ماند پلاك. گشتاور ماند پلاك نسبت به‌محورهای OXوOY بترتیب برابرند با:

$$I_X=\iint_{(S)}y^۲\rho(x,y)dxdy, \quad I_Y=\iint_{(S)}x^۲\rho(x,y)dxdy \qquad (۲)$$

گشتاورماند پلاك نسبت به مبداء مختصات چنین است:

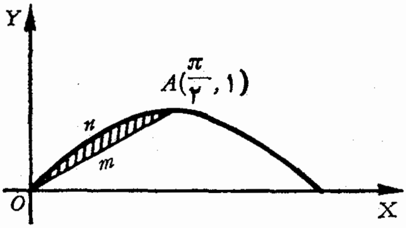
$$I_o=\iint_{(S)}(x^۲+y^۲)\rho(x,y)dxdy=I_X+I_Y \qquad (۳)$$

که بافرض ۱ $=\rho(x,y)$ در رابطه‌های (۲) و (۳)، گشتاورماند هندسی یك شکل مسطحه

بدست می‌آید.

۲۲۲۵. مطلوبست جرم یك‌پلاك گرد به‌شعاع R، بشرطی‌که چگالی آن در هر نقطه متناسب با فاصلهٔ آن نقطه تا مرکز ودرهرنقطهٔ محیطی آن مساوی δ باشد.

۲۲۲۶. پلاکی به‌شکل‌مثلث قائم‌الزاویه مفروض است. اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه $OB=a$ و $OA=b$ است‌وضمناً چگالی آن درهرنقطه برابراست با فاصلهٔ آن نقطه ازضلع OA. مطلوبست گشت‌آورساکن پلاك نسبت به‌اضلاع OA و OB.

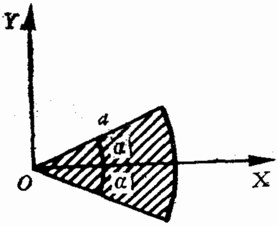


شکل ۹۶

۲۲۲۷. مطلوبست مختصات مرکز ثقل شکل $OmAnO$ (شکل۹۶)، که محدود است به منحنی $y=\sin x$ وخط OA که ازمبداء مختصات و رأس $A(\frac{\pi}{2},1)$ ازمنحنی سینوسی می‌گذرد.

۲۲۲۸. مطلوبست مختصات مرکز ثقل شکلی‌که به کاردیوئید $r=a(1+\cos\varphi)$ محدود است.

۲۲۲۹. مطلوبست مختصات مرکز ثقل قطاع دایره‌ای به شعاع a و زاویهٔ رأس 2α (شکل۹۷).



شکل۹۷

۲۲۳۰. مطلوبست مختصات مرکز ثقل شکل محدود به سهمی $y^2=4x+4$ و $y^2=-2x+4$.

۲۲۳۱. مطلوبست محاسبهٔ‌گشت‌آورماند مثلثی‌که محدود است به خطهای $x+y=2$، $x=2$ و $y=2$ نسبت به‌محور OX.

۲۲۳۲. مطلوبست گشت‌آور ماند حلقهٔ دایره‌ای به قطرهای d و D $(d<D)$:

a) نسبت به‌مرکز آن، b) نسبت به‌قطر آن.

۲۲۳۳. مطلوبست محاسبهٔ گشت‌آور ماند مربعی به ضلع a، نسبت به‌محوری‌که از رأس آن عمود برصفحهٔ مربع رسم شده است.

۲۲۳۴*. مطلوبست محاسبهٔ‌گشت‌آور ماند قطعه‌ای‌که ازسهمی $y^2=ax$ بوسیلهٔ خط $y=a$ جدا شده است، نسبت به‌خط $y=-a$.

۲۲۳۵*. مطلوبست گشت‌آور ماند مساحت محدود به هذلولی $xy = ۴$ و خط $x+y = ۵$، نسبت به‌خط $x = y$.

۲۲۳۶*. در پلاك مربعی شکل به‌ضلع a، چگالی متناسب است با فاصله تا یکی از رأسهای آن. مطلوبست گشت‌آورماند پلاك نسبت به‌ضلعی که از این رأس عبور کرده است.

۲۲۳۷. مطلوبست گشت‌آور ماندکاردیوئید $r = a(۱ + cos\varphi)$ نسبت به‌قطب.

۲۲۳۸. مطلوبست گشت‌آورماند مساحت لمنیسکات $r^۲ = ۲a^۲cos۲\varphi$ نسبت به‌محوری که درنقطهٔ قطب برصفحهٔ آن عمود است.

۲۲۳۹*. مطلوبست گشت‌آور ماند پلاك متجانس محدود به یك قوس سیکلوئید

$$x = a(t - sint)\ ,\ y = a(۱ - cost)$$

ومحور OX، نسبت به‌محور OX.

۷. انتگرال سه‌گانه (تریبل)

۱°. انتگرال سه‌گانه درمختصات قائم. انتگرال سه‌گانه از تابع $f(x,y,z)$ درناحیهٔ V عبارتست ازحد مجموع سه‌کرانه‌ای نظیر

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{max\Delta x_i \to ۰ \\ max\Delta y_j \to ۰ \\ max\Delta z_k \to ۰}} \sum_i\sum_j\sum_k f(x_i,y_j,z_k)\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$$

محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه منجر به‌محاسبهٔ متوالی سه‌انتگرال معمولی یا یك انتگرال مضاعف و یك انتگرال معمولی می‌شود.

مثال ۱. مطلوبست محاسبهٔ:

$$I = \iiint\limits_{(V)} x^۲y^۲zdxdydz$$

که درآن ناحیهٔ V ازنامساویهای زیر معین می‌شود:

$$۰ \leqslant x \leqslant ۱,\ ۰ \leqslant y \leqslant x,\ ۰ \leqslant z \leqslant xy$$

حل. داریم:

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} x^3y^2z\,dz=\int_0^1 dx\int_0^x x^3y^2\frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy}dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{x^5y^4}{2}dy=\int_0^1\frac{x^5}{2}\cdot\frac{y^5}{5}\Big|_0^x dx=\int_0^1\frac{x^{10}}{10}dx=\frac{1}{110}$$

مثال ۲. مطلوبست محاسبهٔ

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz،$$

واقع در حجم بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

حل. داریم:

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz=\int_{-a}^{a}x^2dx\iint\limits_{(S_{yz})}dy\,dz=\int_{-a}^{a}x^3S_{yz}\,dx$$

که در آن S_{yz} عبارتست از مساحت بیضی $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ (x مقدار ثابتی است) وبنابراین

$$S_{yz}=\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

به‌این ترتیب خواهیم داشت:

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz=\pi bc\int_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{15}\pi a^3bc$$

۲°. تغییر متغیر درانتگرالهای سه‌گانه. اگر درانتگرال سه‌گانهٔ

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$$

ازمتغیرهای xوyوz بخواهیم به‌متغیرهای u و v وw برسیم، بنحوی‌که با x و y و z با روابط $x=\varphi(u$وvو$w)$، $y=\psi(u$وvو$w)$، $z=\chi(u$وvو$w)$ مربوط باشند وتوابع φ و ψ و χ:

۱) همراه با مشتقهای مرتبهٔ اول خود پیوسته باشند؛

۲) تناظر دوسوئی واز دوطرف پیوسته بین نقطه‌های ناحیهٔV ازفضای $OXYZ$ ونقاط ناحیه‌ای مثل V' ازفضای $O'UVW$ برقرار باشد؛

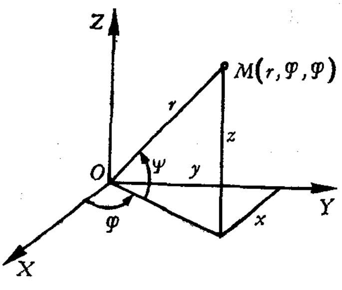
۳) دترمینان تابعی (ژاکوبین) این توابع

$$I=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

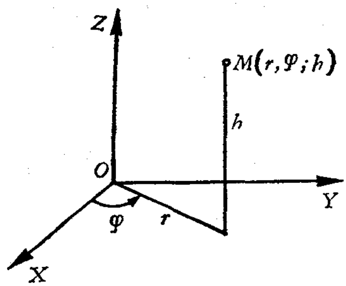
در ناحیهٔV علامت ثابتی داشته باشد، دراینصورت رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_{(V')} f[\varphi(u,v,w)\ ,\ \psi(u,v,w)\ ,\ \chi(u,v,w)]|I|dudvdw$$



شکل۹۹



شکل ۹۸

در حالتهای خاص

۱) در مختصات استوانه‌ای r،φ،h (شکل ۹۸) که درآن داریم:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = h$$

بدست می‌آید: $I = r$؛

۲) درمختصات کروی φ،Ψ،r (φطول، Ψ عرض و r شعاع حامل است) (شکل ۹۹)
که در آن داریم:

$$x = r\cos\Psi\cos\varphi,\ y = r\cos\psi\sin\varphi,\ z = r\sin\Psi$$

بدست می‌آید: $I = r^{2}\cos\psi$

مثال ۳. با عبور به مختصات کروی، مطلوبست محاسبهٔ

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}\,dx\,dy\,dz$$

که در آن V کره‌ای است به شعاع R.

حل. برای کره، حدود تغییرات مختصات کرویφ (طول)، ψ(عرض) و r (شعاع‌حامل) چنین است:

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},\ \ 0\leqslant r\leqslant R$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}\,dx\,dy\,dz = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{0}^{R} r r^{2}\cos\psi\,dr = \pi R^{4}$$

۳۰. موارد استعمال انتگرال سه‌گانه. حجم ناحیهٔ فضای سه‌بعدی $OXYZ$ برابر است با

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz$$

جرم جسمی که ناحیهٔ V را اشغال کرده است، برابر است با:

$$M = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

که درآن $\gamma(x,y,z)$ چگالی جسم درنقطهٔ (x,y,z) است.

گشت‌آور جسم نسبت به‌صفحه‌های مختصات چنین است:

$$M_{XY}=\iiint\limits_{(V)}\gamma(x,y,z)z\,dx\,dy\,dz.$$

$$M_{YZ}=\iiint\limits_{(V)}\gamma(x,y,z)x\,dx\,dy\,dz$$

$$M_{ZX}=\iiint\limits_{(V)}\gamma(x,y,z)y\,dx\,dy\,dz$$

مختصات مرکز ثقل از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\bar{x}=\frac{M_{YZ}}{M},\ \bar{y}=\frac{M_{ZX}}{M},\ \bar{z}=\frac{M_{XY}}{M}$$

اگر جسم متجانس باشد، در روابط مربوط به‌مختصات مرکز ثقل می‌توان فرض کرد: $\gamma(x,y,z)=1$.

گشت آور ماند نسبت به‌محورهای مختصات

$$I_X=\iiint\limits_{(V)}(y^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

$$I_Y=\iiint\limits_{(V)}(z^2+x^2)\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$I_Z=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

بافرض $\gamma(x,y,z)=1$ دراین روابط، گشت‌آور ماند هندسی جسم بدست می‌آید.

A . محاسبهٔ انتگرال سه‌گانه

حدود انتگرال سه‌گانهٔ زیر را در ناحیهٔ مربوطهٔ V بدست آورید

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

۲۲۴۰. V عبارتست ازیك سه‌وجهی محدود به‌صفحه‌های

$$x+y+z=1,\ \ x=0,\ \ y=0, z=0$$

۲۲۴۱. V استوانه‌ای است محدود به‌سطوح

$$x^2+y^2=R^2, z=0,\ \ z=H$$

*۲۲۴۲. V مخروطی است محدود به‌سطوح

$$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=\frac{z^{2}}{c^{2}},\quad z=c$$

۲۲۴۳. V حجمی است محدود به سطوح

$$z=1-x^{2}-y^{2},\, z=0$$

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۲۲۴۴. $\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1}dy\int_{0}^{1}\frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$.

۲۲۴۵. $\int_{0}^{2}dx\int_{0}^{2\sqrt{x}}dy\int_{0}^{\sqrt{\frac{4x-y^{2}}{2}}}x\,dz$.

۲۲۴۶. $\int_{0}^{a}dx\int_{0}^{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}dy\int_{0}^{\sqrt{a^{2}-x^{2}-y^{2}}}\frac{dz}{\sqrt{a^{2}-x^{2}-y^{2}-z^{2}}}$

۲۲۴۷. $\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1-x}dy\int_{0}^{1-x-y}xyz\,dz$.

۲۲۴۸. مطلوبست محاسبهٔ

$$\iiint_{(V)}\frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^{3}}$$

که در آن V ناحیهٔ انتگرال‌گیری محدود است به‌صفحه‌های مختصات و صفحهٔ $x+y+z=1$.

۲۲۴۹. مطلوبست محاسبهٔ

$$\iiint_{(V)}(x+y+z)^{2}dx\,dy\,dz$$

که در آن V عبارتست ازقسمت مشترك سهمی $2az\geqslant x^{2}+y^{2}$ و کرهٔ $x^{2}+y^{2}+z^{2}\leqslant 3a^{2}$.

۲۲۵۱. مطلوبست محاسبهٔ

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz$$

که در آن V حجمی است محدود به‌صفحهٔ $z=0$ و نیمهٔ بالائی بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

۲۲۵۲. مطلوبست محاسبهٔ

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz$$

که در آن V عبارتست از داخل بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

۲۲۵۳. مطلوبست محاسبهٔ

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz$$

که درآن V عبارتست از ناحیهٔ محدود بمخروط $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ وصفحهٔ $z=h$.

۲۲۵۴. با عبور به‌مختصات استوانه‌ای، مطلوبست محاسبهٔ

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz$$

که درآن V ناحیه‌ای است محدود بـه‌سطوح $x^2+y^2+z^2=2Rz$، $x^2+y^2=z^2$ و شامل نقطهٔ $(0,0,R)$.

۲۲۵۵. مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$$

با تبدیل متوالی آن به‌مختصات استوانه‌ای.

۲۲۵۶. مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_{0}^{2r} dx \int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int_{0}^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz$$

با تبدیل متوالی آن به‌مختصات استوانه‌ای.

۲۲۵۷. مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz$$

با تبدیل متوالی آن به‌مختصات کروی.

۲۲۵۸. با عبور به‌مختصات کروی، مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$$

که در آن V عبارتست از قسمت داخلی کرهٔ $x^2+y^2+z^2 \leqslant x$.

B. محاسبهٔ حجم به‌کمک انتگرال سه‌گانه

۲۲۵۹. به‌کمک انتگرال سه‌گانه، حجم جسمی را پیدا کنید که محدود است به‌سطوح

$$y^2=4a^2-3ax \ , y^2=ax \ , z=\pm h$$

۲۲۶۰.** مطلوبست حجم قسمتی از استوانهٔ $x^2+y^2=2ax$ که بین سهموی $x^2+y^2=2az$ و صفحهٔ XOY قرارگرفته است.

۲۲۶۱*. مطلوبست‌حجم جسمی که محدود است به‌کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ ومخروط $z^2=x^2+y^2$ (آن قسمت که در داخل مخروط قرارگرفته است).

۲۲۶۲*. مطلوبست حجم‌جسمی که محدود است به‌کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ و سهموی $x^2+y^2=3z$ (آن‌قسمت که درداخل سهموی قرارگرفته‌است).

۲۲۶۳. مطلوبست حجم جسمی که محدود است به‌صفحهٔ XOY، استوانهٔ $x^2+y^2=ax$ و کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ (آن قسمت که در داخل استوانه است).

۲۲۶۴. مطلوبست محاسبهٔ حجم جسمی که محدود است به سهموی

$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2\frac{x}{a}$ وصفحهٔ $x=a$.

۲۲۶۴. ۱. مطلوبست حجم جسمی که محدود است به‌سطح

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$$

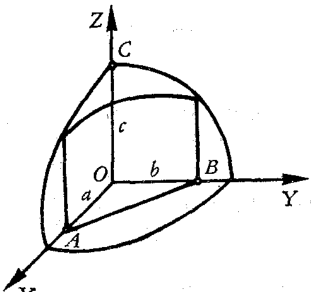
۲۲۶۴. ۲. مطلوبست حجم جسمی که محدود است به‌سطوح

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (z\geqslant 0)$$

C. مورد استعمال انتگرال سه‌گانه در مکانیك و فیزیك

۲۲۶۵. مطلوبست جرم M مکعب مستطیل $0\leqslant x\leqslant a$ ، $0\leqslant y\leqslant b$ ، $0\leqslant z\leqslant c$ ، بشرطی که چگالی آن درنقطهٔ (x,y,z) چنین است: $\rho(x,y,z)=x+y+z$.

۲۲۶۶. در یك هشتم کرهٔ $x^2+y^2+z^2\leqslant c^2$ ، $x\geqslant 0$ ، $y\geqslant 0$ ، $z\geqslant 0$ ، جسم $OABC$ را بریده‌ایم که محدود است به صفحه‌های مختصات وصفحهٔ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a\leqslant c، b\leqslant c)$ (شکل ۱۰۰). مطلوبست جرم این جسم، به‌شرطی که‌چگالی‌آن در هر نقطهٔ (x,y,z) برابر با ارتفاع این نقطه باشد.



شکل ۱۰۰

۲۲۶۷*. در جسمی که به شکل نیمکرهٔ $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$، $z\geqslant 0$ است. چگالی‌متناسب با فاصلهٔ نقطه از مرکز تغییر می کند. مطلوبست مرکز ثقل این جسم.

۲۲۶۸. مطلوبست مرکزثقل جسمی که محدود است به سهموی $y^2+2z^2=4x$ و صفحهٔ $x=2$.

۲۲۶۹*. مطلوبست‌گشتاور ماند استوانهٔ دواری که ارتفاع آن h وشعاع قاعده‌اش a باشد، نسبت به‌محوری که برقطر قاعدهٔ استوانه منطبق است.

۲۲۷۰*. مطلوبست‌گشتاورماند مخروط دواری که ارتفاع آن h، شعاع قاعده‌اش a و چگالیش ρ باشد، نسبت به‌قطر قاعده.

۲۲۷۱.** مطلوبست نیروی جاذبهٔ مؤثر مخروط متجانس به‌ارتفاع h وزاویهٔ رأس α

(درمقطع محوری آن) برنقطهٔ مادی به‌جرم واحد و واقع در رأس آن.

۲۲۷۲.** ثابت کنید نیروی جاذبه‌ای که از اطراف یك کرهٔ متجانس برنقطهٔ مادی خارجی عمل می‌شود، تغییر نمی‌کند، به‌شرطی که تمام جرم کره در مرکز آن متمرکز شده باشد.

۸. انتگرالهای ناخالص وابسته به‌پارامتر انتگرالهای ناخالص مکرر

۱°. دیفرانسیل‌گیری نسبت به‌پارامتر. اگر بعضی محدودیتها دربارهٔ توابع $f(x,\alpha)$ ، $f_{\alpha}'(x,\alpha)$ و انتگرالهای ناخالص متناظر آنها وجود داشته باشد، قاعدهٔ زیر (قاعدهٔ لایپ نیتز) صحیح است:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{a}^{\infty} f(x,\alpha)dx=\int_{a}^{\infty} f_{\alpha}(x,\alpha)dx$$

مثال ۱. به‌کمك دیفرانسیل‌گیری نسبت به‌پارامتر، مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha x^{2}}-e^{-\beta x^{2}}}{x}dx \quad (\alpha>0,\beta>0)$$

حل. فرض می‌کنیم:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha x^{2}}-e^{-\beta x^{2}}}{x}dx=F(\alpha,\beta)$$

دراینصورت

$$\frac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=-\int_{0}^{\infty} xe^{-\alpha x^{2}}dx=\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^{2}}\Big|_{0}^{\infty}=-\frac{1}{2\alpha}$$

از آنجا بدست می‌آید:

$$F(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}ln\alpha + C(\beta)$$

برای محاسبهٔ $C(\beta)$ فرض می‌کنیم: $\alpha = \beta$، بدست می‌آید:

$$0 = -\frac{1}{2}ln\beta + C(\beta)$$

از آنجا $C(\beta) = \frac{1}{2}ln\beta$ وبنابراین

$$F(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}ln\alpha + \frac{1}{2}ln\beta = \frac{1}{2}ln\frac{\beta}{\alpha}$$

۴۰. انتگرالهای مضاعف ناخالص. a) حالت حوزهٔ نامحدود. اگر تابع $f(x,y)$ درحوزهٔ نامحدود S پیوسته باشد، فرض می‌کنند:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \lim_{\sigma \to S} \iint_{(\sigma)} f(x,y)dxdy. \qquad (1)$$

که درآن σ حوزهٔمحدودی است بطورکامل‌درداخل S، ضمنا وقتی‌که می‌گوئیم $\sigma \to S$، به‌این معناست‌که حوزهٔ σ را طبق قانون دلخواهی چنان بسط می‌دهیم‌که هرنقطهٔ S درداخل آن واقع شود. اگرحد سمت راست تساوی (۱) وجود داشته باشد و به نوع انتخاب حوزهٔ σ مربوط نباشد، انتگرال مضاعف ناخالص متناظربا آنرا متقارب، ودر غیراینصورت متباعد گویند.

وقتی‌که تابع $f(x,y)$ (تابعی‌که ازآن باید انتگرال‌گرفت) غیر منفی باشد ($f(x,y) \geqslant 0$)، برای متقارب بودن انتگرال ناخالص لازم وکافی‌است‌که حد سمت راست تساوی (۱)، لااقل برای یکی از انواع حوزهٔ σ (که حوزهٔ S را می‌پوشاند)، وجود داشته باشد.

b) حالت توابع منفصل. اگرتابع $f(x,y)$ درتمام نقاط حوزهٔ محدود بستهٔ S، بجز نقطهٔ $P(a,b)$ پیوسته باشد، فرض می‌کنند:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{(S_\varepsilon)} f(x,y)dxdy. \qquad (2)$$

که در آن S_ε حوزه‌ای است که از S، وازطریق‌جدا کردن حوزهٔ بی‌نهایت کوچك به‌قطر ε وشامل نقطهٔ P، بدست آمده است. درحالتی که حد (۲) وجود داشته باشد، بدون اینکه این‌حد مربوط به‌نوع جدا کردن حوزهٔ بی‌نهایت کوچك از حوزهٔ S باشد، انتگـرال ناخالص را متقارب و درغیر اینصورت متباعد گویند.

وقتی که $f(x,y)\geqslant 0$ ، حد سمت راست تساوی (۲) به‌نوع جدا کردن حوزهٔ بی‌نهایت کوچك ازحوزهٔ S بستگی ندارد؛ بخصوص این حوزه را می‌توان دایره‌ای به‌شعاع $\frac{\varepsilon}{2}$ و مرکز نقطهٔ P گرفت.

مفهوم انتگرالهای مضاعف ناخالص رابطور مشابه درمورر انتگرالهای سه‌گانهٔ ناخالص هم می‌توان بکاربرد.

مثال ۲. دربارهٔ تقارب انتگرال زیر، وقتی که S شامل تمام صفحهٔ XOY است، بحث کنید:

$$\iint\limits_{(S)}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p} \tag{3}$$

حل. σ را دایره‌ای به‌شعاع ρ و مرکز مبداء مختصات می‌گیریم. باعبور به‌مختصات قطبی با شرط $\rho\neq 1$، داریم:

$$I(\sigma)=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\rho}\frac{rdr}{(1+r^2)^p}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+r^2)^{1-p}}{1-p}\Big|_0^{\rho}d\varphi=\frac{\pi}{1-p}[(1+\rho^2)^{1-p}-1]$$

اگر $p<1$ باشد، دراینصورت داریم:

$$\lim_{\sigma\to\infty}I(\sigma)=\lim_{\rho\to\infty}I(\sigma)=\infty$$

وانتگرال متباعد است. اگر $p>1$ باشد، دراینصورت:

$$\lim_{\rho\to\infty}I(\sigma)=\frac{\pi}{p-1}$$

وانتگرال متقارب است. اگر $p=1$ باشد، داریم:

$$I(\sigma)=\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{0}^{\rho}\frac{rdr}{1+r^{2}}=\pi ln(1+\rho^{2})$$

وازآنجا
$$\lim_{\rho\to\infty} I(\sigma)=\infty$$

یعنی انتگرال متباعد است.

به‌این‌ترتیب انتگرال (۳) به‌ازای $p>1$ متقارب است.

۲۲۷۳. مطلوبست $f'(x)$ بشرطی که

$$f(x)=\int_{x}^{\infty}e^{-xy}dy \quad (x>0)$$

۲۲۷۴. ثابت‌کنید که تابع

$$u=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x f(z)}{x^{2}+(y-z)^{2}}dz$$

در معادلهٔ زیر (معادلهٔ لاپلاس) صدق می‌کند:

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}=0$$

۲۲۷۵. تبدیل لاپلاس $F(p)$ برای تابع $f(t)$ با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود:

$$F(p)=\int_{0}^{\infty}e^{-pt}f(t)dt$$

مطلوبست $F(p)$ بشرطی که: a) $f(t)=1$ ؛ b) $f(t)=e^{\alpha t}$ ؛ c) $f(t)=sin\beta t$ ؛ d) $f(t)=cos\beta t$.

۲۲۷۶. با استفاده از رابطهٔ

$$\int_{0}^{1}x^{n-1}dx=\frac{1}{n} \quad (n>0)$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int_0^1 x^{n-1} \ln x dx$$

***۲۲۷۷.** با استفاده از رابطهٔ

$$\int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \qquad (p > 0)$$

مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_0^\infty t^2 e^{-pt} dt$$

با استفاده از دیفرانسیل‌گیری نسبت به پارامتر، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۲۲۷۸. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx \qquad (\alpha > 0، \beta > 0)$$

۲۲۷۹. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx \qquad (\alpha > 0، \beta > 0)$$

۲۲۸۰. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)} dx$$

۲۲۸۱. $$\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx \qquad (|\alpha| < 1)$$

۲۲۸۲. $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx \qquad (\alpha \geqslant 0)$$

انتگرالهای ناخالص زیر را محاسبه‌کنید:

۲۲۸۳. $$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(x+y)} dy$$

۲۲۸۴. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y^{2}} e^{\frac{x}{y}} dx$.

۲۲۸۵. $\iint\limits_{(S)} \frac{dxdy}{x^{4}+y^{2}}$ ، که در آن حوزهٔ S از نامساویهای $x \geqslant 1$، $y \geqslant x^{2}$ معین می‌شود.

۲۲۸۶*. $\int_{0}^{\infty} dx \int_{0}^{\infty} \frac{dy}{(x^{2}+y^{2}+a^{2})^{2}}$ $(a > 0)$.

۲۲۸۷. انتگرالهای اولر ـ پواسون با رابطهٔ $I = \int_{0}^{\infty} e^{-x^{2}} dx$ معین می‌شود که می‌توان آنرا به‌صورت $I = \int_{0}^{\infty} e^{-y^{2}} dy$ هم نوشت. با استفاده از این رابطه‌ها وسپس عبور به مختصات قطبی، I را محاسبه کنید.

۲۲۸۸. مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_{0}^{\infty} dx \int_{0}^{\infty} dy \int_{0}^{\infty} \frac{dz}{(x^{2}+y^{2}+z^{2}+1)^{2}}$$

دربارهٔ تقارب انتگرالهای مضاعف ناخالص زیر بحث کنید:

۲۲۸۹**. $\iint\limits_{(S)} ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}\,dxdy$ ، که در آن S عبارتست از دایرهٔ $x^{2}+y^{2} \leqslant 1$.

۲۲۹۰. $\iint\limits_{(S)} \frac{dxdy}{(x^{2}+y^{2})^{\alpha}}$ ، که در آن حوزهٔ S از نامساوی $x^{2}+y^{2} \geqslant 1$ (ناحیهٔ خارجی دایره) معین می‌شود.

۲۲۹۱*. $\iint\limits_{(S)} \frac{dxdy}{\sqrt[3]{(x^{2}+y^{2})^{2}}}$ ، که در آن S عبارتست از مربع $|x| \leqslant 1$ ؛ $|y| \leqslant 1$.

۲۲۹۲. $\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{\alpha}}$ ، که در آن حوزهٔ V از نامساوی $x^{2}+y^{2}+z^{2} \geqslant 1$ بدست می‌آید (ناحیهٔ خارجی کره).

۹. انتگرالهای منحنی‌الخط

۱°. انتگرالهای منحنی‌الخط نوع اول. $f(x,y)$ را تابعی پیوسته و $y=\varphi(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ را معادلهٔ منحنی C می‌گیریم، بنحوی‌که مماس بر C دارای تغییرات پیوسته‌باشد.

دستگاه نقطه‌های $M_i(x_i,y_i)$ $(t=0,1,2,\cdots,n)$ درنظر می‌گیریم‌که منحنی C را به قوسهای جزئی $\widehat{M_{i-1}M_i}=\Delta S_i$ تقسیم‌کند، ومجموع انتگرالی $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i$ را تشکیل می‌دهیم، حداین مجموع، وقتی‌که $n\to\infty$ و $Max\Delta S_i\to 0$ انتگرال منحنی‌الخط نوع اول نامیده می‌شود:

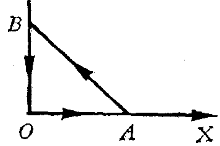
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta s_i=\int_C f(x,y)ds$$

(ds دیفرانسیل قوس است) واز رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_C f(x,y)ds=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx$$

در حالتی‌که منحنی مفروض به‌صورت پارامتری داده شده باشد: $x=\varphi(t)$، $y=\Psi(t)$ $[\alpha\leqslant t\leqslant\beta]$، داریم:

$$\int_C f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\Psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\Psi'^2(t)}\,dt$$



شکل ۱۰۱

بهمین ترتیب می‌توان انتگرالهای منحنی‌الخط نوع اول را ازتوابع سه متغیره $f(x,y,z)$ مورد بحث قرار داد که روی یك منحنی فضائی انتخاب و بطریق مشابه محاسبه می‌شوند. انتگرال منحنی‌الخط نوع اول به‌جهت راه انتگرال‌گیری ارتباط ندارد؛ اگر تابع f زیر علامت انتگرال به‌عنوان چگالی خطی

منحنی C انتگرال‌گیری‌شود، دراینصورت این انتگرال عبارتست ازجرم منحنی C.

مثال ۱. انتگرال منحنی‌الخط زیر را محاسبه کنید:

$$\int_C (x+y)ds$$

که درآن C عبارتست از محیط مثلث ABO به‌رأسهای $A(۱,۰)$ ، $B(۰,۱)$ و $O(۰,۰)$ (شکل ۱۰۱).

حل. معادله‌های اضلاع مثلث چنین‌اند:

معادلهٔ ضلع AB: $y = ۱ - x$

معادلهٔ ضلع OB: $x = ۰$

معادلهٔ ضلع OA: $y = ۰$

به‌این‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\int_C (x+y)ds = \int_{AB} (x+y)ds + \int_{BO} (x+y)ds + \int_{OA} (x+y)ds =$$

$$= \int_۰^۱ \sqrt{۲}\, dx + \int_۰^۱ y dy + \int_۰^۱ x dx = \sqrt{۲} + ۱$$

۲°. انتگرالهای منحنی‌الخط نوع دوم. اگر $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ توابعی پیوسته و منحنی C $y = \varphi(x)$ دارای مماس با تغییرات پیوسته باشد، بشرط اینکه وقتی x از a تا b تغییر می‌کند، این منحنی پیموده شود، انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم نظیر آن به‌شکل زیر بیان می‌شود:

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)Q(x,\varphi(x))]dx$$

در حالت کلی‌تر، وقتی که منحنی C به‌صورت پارامتری داده شده باشد: $x = \varphi(t)$، $y = \psi(t)$ ، که درآن t از α تا β تغییر می‌کند، داریم:

$$\int\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}[P(\varphi(t),\Psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\Psi(t])\Psi'(t)]dt$$

رابطه‌های مشابهی برای انتگرالهای منحنی‌الخط نوع دوم روی منحنی‌های فضائی‌وجود دارد.

اگرجهت راه انتگرال‌گیری را عوض کنیم، علامت انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم تغییر می‌کند. ازلحاظ مکانیك، این انتگرال را می‌توان به‌عنوان کاری تعبیر کرد که نیروی متغیر $[P(x,y)$ و $Q(x,y)]$ درطول منحنی C انجام می‌دهد.

مثال ۴. انتگرال منحنی‌الخط زیر را محاسبه‌کنید:

$$\int\limits_C y^2dx+x^2dy$$

که در آن C عبارتست از نیمهٔ بالائی بیضی $x=acost$ ، $y=bsint$ که در جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

حل. داریم:

$$\int\limits_C y^2dx+x^2dy=\int\limits_{\pi}^{0}[b^2sin^2t\cdot(-asint)+a^2cos^2t\cdot bcost]dt=$$

$$=-ab^2\int\limits_{\pi}^{0} sin^3tdt+a^2b\int\limits_{\pi}^{0} cos^3tdt=\frac{4}{3}ab^2$$

۳°. حالت دیفرانسیل کامل. اگر عبارت زیرانتگرال در انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم، دیفرانسیل کامل یك تابع یك‌ارزشی $U=U(x,y)$ باشد، یعنی

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dU(x,y),$$

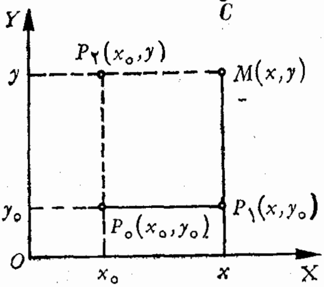
دراینصورت چنین انتگرال منحنی‌الخطی به راه انتگرال‌گیری مربوط نخواهد بود و رابطهٔ

نیوتون ـ لایپ‌نیتز در مورد آن برقرار است:

$$\int_{(x_1,\, y_1)}^{(x_2,\, y_2)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=U(x_2,y_2)-U(x_1,y_1) \quad (1)$$

که در آن (x_1,y_1) نقطهٔ شروع و (x_2,y_2) نقطهٔ انتهای مسیراست. در حالت خاص، وقتی که دورهٔ انتگرش C بسته باشد، داریم:

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \quad (2)$$



شکل ۱۰۲

اگر ۱) دورهٔ انتگرش C بطور کامل در داخل حوزهٔ S واقع باشد و ۲) توابع $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ همراه بامشتقهای جزئی مرتبهٔ اول‌خود در حوزهٔ S پیوسته باشند، شرط لازم وکافی برای تابع U اینست‌که تساوی

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \quad (3)$$

در حوزهٔ S بطور اتحادی برقرار باشد (انتگرال‌گیری دیفرانسیل‌کامل را ببینید). اگرشرطهای ۱) و ۲) وجود نداشته باشد، وجود شرط (۳) به معنای وجود تابع یك ارزشی U نیست و رابطه‌های (۱) و (۲) ممکن است نادرست باشند (مسئلهٔ ۲۳۳۲ را ببینید). برای پیدا کردن تابع $U(x,y)$ از روی دیفرانسیل کامل آن، ازانتگرالهای منحنی‌الخط استفاده می‌کنیم (یعنی روش‌انتگرال‌گیری ازدیفرانسیل‌کامل). به‌عنوان دورهٔ انتگرال‌گیری C، خط شکستهٔ P_0P_1M (شکل ۱۰۲) را انتخاب می‌کنیم، که در آن $P_0(x_0,y_0)$ نقطهٔ ثابت و $M(x,y)$ نقطهٔ متغیر است. دراینصورت در طول P_0P_1 داریم: $y=y_0$ و $dy=0$ و در طول P_1M داریم: $dx=0$. بدست می‌آید:

$$U(x,y)-U(x_0,y_0)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$= \int_{x_\circ}^{x} P(x,y_\circ)dx + \int_{y_\circ}^{y} Q(x,y)dy$$

بهمین‌ترتیب با انتگرال‌گیری در طول خط شکستهٔ $P_\circ P_\text{۲} M$ داریم:

$$U(x,y)-U(x_\circ,y_\circ) = \int_{y_\circ}^{y} Q(x_\circ,y)dy + \int_{x_\circ}^{x} P(x,y)dx$$

مثال ۳. مطلوبست U، بشرطی که داشته باشیم:

$$(\text{۴}x+\text{۲}y)dx+(\text{۲}x-\text{۶}y)dy = dU$$

حل. دراینجا داریم:

$$P(x,y) = \text{۴}x+\text{۲}y \text{ و } Q\ (x,y) = \text{۲}x-\text{۶}y$$

ضمناً واضح است که شرط (۳) برقرار است. فرض می‌کنیم: $x_\circ = \circ$ و $y_\circ = \circ$، دراینصورت

$$U(x,y) = \int_\circ^x \text{۴}x dx + \int_\circ^y (\text{۲}x-\text{۶}y)dy + C = \text{۲}x^\text{۲}+\text{۲}xy-\text{۳}y^\text{۲}+C$$

یا

$$U(x,y) = \int_\circ^y -\text{۶}y dy + \int_\circ^x (\text{۴}x+\text{۲}y)dx + C = -\text{۳}y^\text{۲}+\text{۲}x^\text{۲}+\text{۲}xy+C$$

که درآن $C = U(\circ,\circ)$ مقدار ثابت دلخواهی است.

۴°. رابطهٔ گرین (Green) برای صفحه. اگر C مرز حوزه S وتوابع $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ همراه بامشتقهای جزئی مرتبهٔ اولشان درحوزهٔبستهٔ $S+C$ پیوسته باشد، رابطهٔگرین صحیح است:

$$\oint_C Pdx+Qdy = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

که درآن دور زدن روی دورهٔ C طوری انتخاب می‌شود که حوزهٔ C سمت چپ قرارگیرد.

۵°. موارد استعمال انتگرالهای منحنی‌الخط. ۱) مساحت محدود به‌دورهٔ بستهٔ C برابر است با

$$S = -\oint_C y\,dx = \oint_C x\,dy$$

(جهت حرکت روی دوره عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت انتخاب می‌شود).

بکار بردن رابطهٔ زیر برای مساحت راحت‌تر است:

$$S = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\oint_C x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)$$

۲°. کار یك نیرو که دارای تصویرهای $X = X(x,y,z)$ ، $Y = Y(x,y,z)$ ، $Z = Z(x,y,z)$ است (یا کار یك میدان‌نیروها)، درطول مسیر C با انتگرال زیر بیان می‌شود:

$$A = \int_C X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

اگر نیرو دارای پتانسیل باشد، یعنی اگر تابع $U = U(x,y,z)$ (تابع پتانسیلی یا تابع نیروئی) وجود داشته باشد، بنحوی که

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X \text{ و } \frac{\partial U}{\partial y} = Y \text{ و } \frac{\partial U}{\partial z} = Z$$

دراینصورت کار انجام شده، بدون ارتباط به نوع مسیر C، برابراست با:

$$A = \int_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} dU =$$
$$= U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)$$

که درآن (x_1, y_1, z_1) ابتدا و (x_2, y_2, z_2) نقطهٔ انتهائی مسیر است.

A . انتگرالهای منحنی‌الخط نوع اول

انتگرالهای منحنی‌الخط زیر را محاسبه‌کنید:

۲۲۹۳. $\int_C xy\,ds$ ، که در آن C عبارتست ازمحیط مربع $|x| + |y| = a$ $(a > 0)$.

۲۲۹۴. $\int\limits_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ ، C پاره خط راستی است که نقطه‌های $O(0,0)$ و $A(1,2)$ را بهم وصل می‌کند.

۲۲۹۵. $\int\limits_C xyds$ ، C عبارتست از ربع بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ واقع در ربع‌اول.

۲۲۹۶. $\int\limits_C y^2ds$، که در آن C عبارتست ازقوس اول سیکلوئید $x=a(t-sint)$، $y=a(1-cost)$.

۲۲۹۷. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}ds$ ، که درآن C عبارتست ازقوس گستردهٔ دایرهٔ

$$x=a(cost+tsint)\,,\ y=a(sint-tcost) \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

۲۲۹۸. $\int\limits_C (x^2+y^2)^2ds$ ، که در آن C عبارتست ازقوس پیچ لگاریتمی $r=ae^{m\varphi}$ $(m>0)$ ازنقطهٔ $A(0,a)$ تا نقطهٔ $O(-\infty,0)$.

۲۲۹۹. $\int\limits_C (x+y)ds$، که در آن C عبارتست از اولین برگ لمنیسکات $r^2=a^2cos2\varphi$.

۲۳۰۰. $\int\limits_C (x+z)ds$ ، که درآن C عبارتست از قوس‌منحنی $x=t$، $y=\frac{3t^2}{\sqrt{2}}$، $z=t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$.

۲۳۰۱. $\int\limits_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$ ،که درآن C عبارتست از پیچ اول منحنی $x=acost$، $y=asint$، $z=bt$.

۲۳۰۲. $\int\limits_C \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$ ، که درآن C عبارتست از محیط دایرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ ، $x=y$.

۲۳۰۳*. مطلوبست مساحت سطح جانبی‌استوانهٔ پارابولیك $y=\frac{3}{8}x^2$ که به‌صفحه‌های

$z=0$، $x=0$، $z=x$، $y=6$ محدود شده است.

۲۳۰۴. مطلوبست طول قوس منحنی $x=ae^t\cos t$، $y=ae^t\sin t$، $z=ae^t$ از نقطهٔ $O(0,0,0)$ تا نقطهٔ $A(0,0,a)$.

۲۳۰۵. مطلوبست جرم دورهٔ بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$، به‌شرطی که چگالی خطی آن در هر نقطهٔ $M(x,y)$ مساوی $|y|$ باشد.

۲۳۰۶. مطلوبست جرم پیچ اول منحنی مارپیچی $x=a\cos t$، $y=a\sin t$، $z=bt$، به‌شرطی که چگالی درهر نقطهٔ آن برابر است با شعاع حامل این نقطه.

۲۳۰۷. مطلوبست مختصات مرکز ثقل نیم قوس سیکلوئید

$$x=a(t-\sin t)\ ,\ y=a(1-\cos t)\quad (0\leqslant t\leqslant\pi)$$

۲۳۰۸. مطلوبست گشت‌آور ماند پیچ اول منحنی مارپیچی $x=a\cos t$، $y=a\sin t$، $z=bt$ نسبت به‌محور OZ.

۲۳۰۹. با چه‌نیروئی جرم M، که با چگالی ثابت روی دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$، $z=0$ پخش شده است، به‌جرم m، که درنقطهٔ $A(0,0,a)$ واقع است، تاثیر می‌کند؟

B. انتگرالهای منحنی‌الخط نوع دوم

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای منحنی‌الخط زیر:

۲۳۱۰. $\int\limits_{AB}(x^2-2xy)dx+(2xy+y^2)dy$، که در آن AB عبارتست ازقوس سهمی $y=x^2$ از نقطهٔ $A(1,1)$ تا نقطهٔ $B(2,4)$.

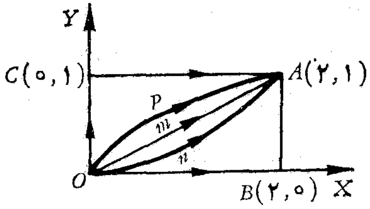
۲۳۱۱. $\int\limits_{C}(2a-y)dx+xdy$، که در آن C عبارتست از اولین قوس‌سیکلوئید

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$$

که در جهت صعودی پارامتر t پیموده می‌شود.

۲۳۱۲. $\int\limits_{OA}2xydx-x^2dy$، که درطول مسیرهای مختلفی که ازمبداء $O(0,0)$ به‌نقطهٔ انتهائی $A(2,1)$ می‌رود، انتخاب شده است (شکل۱۰۳):

a) در طول خط راست OmA؛



شکل ۱۰۳

b) در طول سهمی OnA، که محور تقارن آن محور OY است؛

c) درطول سهمی OpA، که محور تقارن آن محور OX است؛

d) در طول خط شکستهٔ OBA؛

e) درطول خط شکستهٔ OCA.

۲۳۱۳. $\int\limits_{oA} 2xydx + x^2dy$ با همان شرایط مسئلهٔ ۲۳۱۲.

۲۳۱۴*. $\oint \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$، که درطول دایـرهٔ $x^2+y^2=a^2$ و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت انتخاب شده است.

۲۳۱۵. $\int\limits_{C} y^2dx + x^2dy$، که در آن C عبارتست از نیمهٔبالائی بیضی $x=a\cos t$، $y=b\sin t$ وحرکت درجهت حرکت عقربه‌های ساعت.

۲۳۱۶. $\int\limits_{AB} \cos y dx - \sin x dy$ ، که درطول پاره خط AB نیمساز ربع دوم‌انتخاب شده است، بشرطی که‌طول نقطهٔ A مساوی ۲ وعرض نقطهٔ B مساوی ۲ است.

۲۳۱۷. $\oint\limits_{C} \frac{xy(ydx-xdy)}{x^2+y^2}$، که در آن C عبارتست از برگ راست لمنیسکات $r^2=a^2\cos 2\varphi$ که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

۲۳۱۸. مطلوبست‌محاسبهٔ انتگرالهای منحنی‌الخط‌ازعبارتهائی که به‌صورت دیفرانسیل کامل‌اند:

a) $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx$ ، b) $\int\limits_{(0,1)}^{(3,4)} xdx + ydy$ ،

c) $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)(dx+dy)$ ،

d) $\displaystyle\int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{ydx - xdy}{y^2}$ (از مسیری که محور OX را قطع نمی‌کند)،

e) $\displaystyle\int_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}^{(x,y)} \frac{dx+dy}{x+y}$ (ازمسیری که خط $x+y=0$ را قطع نمی‌کند)،

f) $\displaystyle\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy$.

۲۳۱۹. مطلوبست تبدیل توابع عبارتهای زیر علامت انتگرال ؛ انتگرالها را محاسبه کنید:

a) $\displaystyle\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^2)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$ ،

b) $\displaystyle\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$ (مسیر انتگرال‌گیری، خط $y=x$ را قطع نمی‌کند)،

c) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(3,1)} \frac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$ (مسیر انتگرال‌گیری، خط $y=-x$ را قطع نمی‌کند)،

d) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy$

۲۳۲۰. مطلوبست محاسبهٔ

$$I = \int \frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

که در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و در طول ربع بیضـی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ واقع در ربــع اول انتخاب شده است.

۲۳۲۱. ثابت‌کنیدکه اگر $f(u)$ تابعی پیوسته و C دورهٔ بسته‌ای‌کــه مماس بر آن تغیرات پیوسته‌ای دارد، باشد، دراینصورت

$$\oint_C f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=0$$

۲۳۲۲. مطلوبست شکل اولیهٔ تابع U، بشرطی‌که

a) $du=(2x+3y)dx+(3x-4y)dy$؛

b) $du=(3x^2-2xy+y^2)dx-(x^2-2xy+3y^2)dy$؛

c) $du=e^{x-y}[(1+x+y)dx+(1-x+y)dy]$؛

d) $du=\frac{dx}{x+y}+\frac{dy}{x+y}$.

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای منحنی‌الخط، درطول منحنی فضائی مربوطه.

۲۳۲۳. $\int_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$، که درآن C عبارتست ازپیچ منحنی مارپیچ

$$x=a\cos t\ ,\ y=a\sin t\ ,\ z=bt$$

ومتناظر با تغییر پارامتر t از 0 تا 2π است.

۲۳۲۴. $\int_C ydx+zdy+xdz$، که درآن C عبارتست ازدایرهٔ

$$\begin{cases} x=R\cos\alpha\cos t, \\ y=R\cos\alpha\sin t, \\ z=R\sin\alpha \end{cases}$$

(α مقداری است ثابت)

و درجهت صعودی پارامتر حرکت می‌کند.

۲۳۲۵. $\int_{OA} xydx+yzdy+zxdz$ ، که در آن OA قوسی است از دایرهٔ

$$x^2+y^2+z^2=2Rx،\qquad z=x$$

در طرفی از صفحهٔ XOZ که در آن $y > 0$ است.

۲۳۲۶. مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای منحنی‌الخط از دیفرانسیلهای کامل زیر:

$$\int_{(1,0,-3)}^{(6,4,8)} xdx + ydy - zdz \quad (a$$

$$\int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} yzdx + zxdy + xydz \quad (b$$

$$\int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (c$$

$$\int_{(1,1,1)}^{(x,y,\frac{1}{xy})} \frac{yzdx + zxdy + xydz}{xyz} \quad (d$$

(مسیر انتگرال‌گیری در یک هشتم اول واقع است).

C. رابطهٔ گرین

۲۳۲۷. به‌کمک رابطهٔ گرین انتگرال منحنی‌الخط زیر را تبدیل کنید:

$$I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2}\,dx + y[xy + ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]dy$$

که در آن دورهٔ C، حوزهٔ S را محدود می‌کند.

۲۳۲۸. با استفاده از رابطهٔ گرین، مطلوبست محاسبهٔ

$$I = \oint_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$$

که در آن C عبارتست از حرکت درجهت مثبت دورهٔ مثلث به‌رأسهای $A(1,1)$ ، $B(2,2)$ و $C(1,3)$. با انتگرال مستقیم، نتیجهٔ محاسبه را آزمایش کنید.

۲۳۲۹. با استفاده از رابطهٔ گرین، این انتگرال را محاسبه کنید:

$$\oint_C -x^2 yx + xy^2 dy$$

که در آن C عبارتست از دایرهٔ $x^۲+y^۲=R^۲$ با حرکت در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

۲۳۳۰. ازنقطه‌های $A(۱,۰)$ و $B(۲,۳)$ سهمی AmB را گذرانده‌ایم، بنحوی که محورآن OY و وتر آن AnB باشد. مطلوبست محاسبهٔ

$$\oint_{AmBnA}(x+y)dx-(x-y)dy$$

هم بطور مستقیم وهم با بکار بردن رابطهٔ گرین.

۲۳۳۱. مطلوبست $\int_{AmB} e^{xy}[y^۲dx+(۱+xy)dy]$ ، بشرطی کـه نقطه‌های A و B روی محور OX واقع و مساحت محدود به مسیر انتگرش AmB و پاره خط AB مساوی S باشد.

۲۳۳۲*. مطلوبست محاسبهٔ $\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^۲+y^۲}$. دوحالت درنظر بگیرید:

a) وقتی که مبداء مختصات در خارج دورهٔ C باشد.

b) وقتی که دوره، n مرتبه مبداء مختصات رادوربزند.

۲۳۳۳.** ثابت کنیدکه اگر C منحنی بسته‌ای باشد، داریم:

$$\oint_C cos(X,n)ds=۰$$

که در آن s طول قوس و n قائم خارجی است.

۲۳۳۴. با استفاده از رابطهٔ گرین، مطلوبست انتگرال

$$I=\oint_C[x cos(X,n)+y sin(X,n)]ds$$

که در آن ds عبارتست از دیفرانسیل قوس و n قائم خارجی بر دورهٔ C.

۲۳۳۵*. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\oint_C\frac{dx-dy}{x+y}$$

که در طول دورهٔ مربع به رأسهـای $A(۱,۰)$ ، $B(۱,۰)$ ، $C(-۱,۰)$ و $D(۰,-۱)$

انتخاب شده است، با این شرط که حرکت درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت انجام گیرد.

D. مورد استعمال انتگرال منحنی‌الخط

مساحت شکلهای محدود به‌منحنی‌های زیر را محاسبه کنید:

۲۳۳۶. بیضی $x = a\cos t$ ، $y = b\sin t$.

۲۳۳۷. آستروئید $x = a\cos^3 t$ ، $y = b\sin^3 t$.

۲۳۳۸. کاردیوئید $x = a(2\cos t - \cos 2t)$ ، $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

۲۳۳۹*. حلقهٔ برگ دکارتی $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$.

۲۳۴۰. منحنی $(x+y)^3 = axy$.

۲۳۴۱*. دایرهٔ به‌شعاع r بدون لغزش روی محیط و درخارج دایرهٔ ثابتی به‌شعاع R می‌غلطد اگر $\frac{R}{r}$ عددی صحیح باشد، مطلوبست مساحت محدود به منحنی (اپیسیکلوئید) که به‌وسیلهٔ نقطه‌ای از دایرهٔ متحرك رسم می‌شود. حالت خاص $r = R$ را جدا کنید (کاردیوئید).

۲۳۴۲*. دایره‌ای به‌شعاع r بدون لغزش روی محیط و در داخل دایرهٔ ثابتی به‌شعاع R می‌غلطد. بافرض اینکه $\frac{R}{r}$ عددی صحیح باشد ، مطلوبست مساحت محدود به منحنی (هیپوسیکلوئید) که به‌وسیلهٔ نقطه‌ای از دایرهٔ متحرك رسم می‌شود. حالت خاص $r = \frac{R}{4}$ (یعنی آستروئید) را جدا کنید.

۲۳۴۳. میدانی از نیروئی که مقدار آن ثابت و مساوی F است و درجهت مثبت نیم محور OX قرار دارد، تولید شده است. مطلوبست کار این میدان، بشرطی که نقطهٔ مادی درجهت عقربه‌های ساعت ربع دایرهٔ $x^2 + y^2 = R^2$ را، که در ربع اول واقع است، طی می‌کند.

۲۳۴۴. یك نقطهٔ مادی به‌جرم m از وضع $A(x_1, y_1, z_1)$ به وضع $B(x_2, y_2, z_2)$ تغییر مکان می‌دهد. مطلوبست کاری که به وسیلهٔ نیروی ثقل انجام می‌شود (جهت مثبت محور OZ ازپائین به‌بالا است).

۲۳۴۵. مطلوبست کار یك نیروی لاستیکی که جهت آن به طرف مبداء مختصات و مقدار آن متناسب به‌فاصلهٔ آن تا مبداء مختصات باشد، بشرطی که نقطهٔ اثر نیرو درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت ربع بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ واقع در ربع اول را طی کند.

۲۳۴۶. مطلوبست تابع پتانسیلی نیروی $R(X,Y,Z)$ وکاری که به وسیلهٔ این نیرو انجام می‌شود درقسمتهای معلوم مسیر، بشرطی که:

a) $X=0$ ، $Y=0$ ، $Z=mg$ (نیروی ثقل) ونقطهٔ مادی از وضع $A(x_1,y_1,z_1)$ به وضع $B(x_2,y_2,z_2)$ تغییر مکان می‌دهد.

b) $X=-\frac{\mu x}{r^3}$ ، $Y=-\frac{\mu y}{r^3}$ ، $z=-\frac{\pi z}{r^3}$، که در آن μ مقداری ثابت و $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (نیروی جاذبهٔ نیوتونی) ونقطهٔ مادی ازوضع $A(a,b,c)$ به بی‌نهایت برود.

c) $X=-k^2x$ ، $Y=-k^2y$ ، $Z=-k^2z$، که درآن k مقداری‌است ثابت (نیروی لاستیکی)، ضمناً نقطهٔ شروع مسیر برکرهٔ $x^2+y^2+z^2=R^2$ ونقطهٔ انتهائی مسیر روی‌کرهٔ $x^2+y^2+z^2=r^2$ واقع باشد ($R>r$).

۱۰. انتگرال روی سطح

۱°. انتگرال روی سطح نوع اول. $f(x,y,z)$ را تابعی پیوسته و $z=\varphi(x,y)$ را سطحی مانند S که دارای صفحهٔ مماس با تغییرات پیوسته باشد، می‌گیریم.

انتگرال روی سطح نوع اول عبارتست ازحد مجموع انتگرالی

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$$

که درآن ΔS_i عبارتست از مساحت جزء i ام سطح S ونقطهٔ (x_i,y_i,z_i) متعلق به‌این جزء است، ضمناً بزرگترین قطر جزءهائی‌که از تقسیم S بدست می‌آید بسمت صفرمیل‌کند.

مقدار این انتگرال به‌انتخاب طرف سطح S، که انتگرال‌گیری روی آن انجام‌می‌شود، بستگی ندارد.

اگر σ، تصویرسطح S روی صفحهٔ XOY یك‌ارزشی باشد، یعنی هرخط‌موازی محور OZ سطح S را تنها دریك نقطه قطع‌کند. دراینصورت انتگرال روی سطح نوع اول مربوطه

را می‌توان از رابطهٔ زیر بدست آورد:

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS =$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} f[x,y,\varphi(x,y)]\sqrt{1+\varphi'^2_x(x,y)+\varphi'^2_y(x,y)}\, dxdy$$

مثال ۱. مطلوبست محاسبهٔ انتگرال روی سطح

$$\iint\limits_{S}(x+y+z)ds$$

که در آن S عبارتست از سطح مکعب $0 \leqslant x \leqslant 1$ ، $0 \leqslant y \leqslant 1$ ، $0 \leqslant z \leqslant 1$.

حل. مجموع انتگرالهای روی‌سطح را روی وجه فوقانی ($z=1$) و روی وجه‌تحتانی مکعب ($z=0$) محاسبه می‌کنیم:

$$\int_0^1\int_0^1 (x+y+1)dxdy + \int_0^1\int_0^1 (x+y)dxdy =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (2x+2y+1)dxdy = 3$$

واضح است که انتگرال روی سطح مجهول سه‌برابر این مقدار و برابر است با

$$\iint\limits_{S}(x+y+z)ds = 9$$

۲°. انتگرال روی سطح نوع دوم . اگر $P=P(x,y,z)$ و $Q=Q(x,y,z)$ و $R=R(x,y,z)$ توابعی پیوسته و S^+ طرفی ازسطح Sــ که دارای مماس با تغییرات پیوسته است ــ باشد که به‌وسیلهٔ قائم $n\ \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ مشخص شده است، در اینصورت انتگرال روی سطح نوع دوم مربوطه بترتیب زیر بیان می‌شود:

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \iint\limits_{S}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

با عبور به‌طرف دیگر S^{-1} از سطح، علامت این انتگرال تغییر می کند.

اگر سطح S به‌صورت ضمنی $F(x,y,z)=0$ داده شده باشد، کسینوسهای هادی قائم این سطح از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\cos\alpha=\frac{1}{D}\ \frac{\partial F}{\partial x}\ ,\quad \cos\beta=\frac{1}{D}\ \frac{\partial F}{\partial y}\ ,\quad \cos\gamma=\frac{1}{D}\ \frac{\partial F}{\partial z}$$

که در آن داریم:

$$D=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

علامت جلو رادیکال با توجه به‌طرف موردنظر سطح S انتخاب می‌شود.

۳°. رابطهٔ ستوکس. اگر توابع $P=P(x,y,z)$ و $Q=Q(x,y,z)$ و $R=R(x,y,z)$ بطور پیوسته قابل دیفرانسیل گرفتن و C دورهٔ بسته‌ای باشد که سطح دو رویهٔ S را محدود کند، رابطهٔ ستوکس برقرار است:

$$\oint\limits_C Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS$$

که در آن $\cos\alpha$،$\cos\beta$ و $\cos\gamma$ کسینوسهای هادی قائم برسطح‌اند و ضمناً جهت قائم طوری انتخاب‌می‌شود که ازطرف قائم، حرکت روی دورهٔ C درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت انجام‌گیرد (در دستگاه مختصات راست).

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای روی سطح نوع اول:

۲۳۴۷. $\iint\limits_S(x^2+y^2)ds$ ، که در آن S عبارتست از سطح کرهٔ

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

۲۳۴۸. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,ds$، که در آن S عبارتست از سطح جانبی مخروط

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \qquad (0\leqslant z\leqslant b)$$

۲۳۴۹. $\iint\limits_S yz\,dy\,dz+xz\,dz\,dx+xy\,dx\,dy$، که در آن S عبارتست از سمت خارجی سطح سه وجهی که به صفحه‌های $x=0$،$y=0$،$z=0$، $x+y+z=a$ محدود است.

۲۳۵۰. $\iint\limits_S z\,dx\,dy$، که در آن S عبارتست از سمت خارجی بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

۲۳۵۱. $\iint\limits_S x^2dy\,dz+y^2dz\,dx+z^2dx\,dy$، که در آن S عبارتست از سمت خارجی سطح نیمکرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (z\geqslant 0)$.

۲۳۵۲. مطلوبست جرم سطح مکعب $0\leqslant x\leqslant 1$، $0\leqslant y\leqslant 1$، $0\leqslant z\leqslant 1$، بشرطی که چگالی سطح درنقطهٔ $M(x,y,z)$ برابر است با xyz.

۲۳۵۳. مطلوبست مختصات مرکز ثقل غشای سهموی متجانس

$$az=x^2+y^2 \qquad (0\leqslant z\leqslant a)$$

۲۳۵۴. مطلوبست گشتاور ماند قسمتی از سطح جانبی مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ نسبت به‌محور OZ.

۲۳۵۵. با استفاده از رابطهٔ ستوکس، این انتگرالها را تبدیل کنید:

$$a)\quad \oint\limits_C (x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$$

$$b)\quad \oint\limits_C y\,dx+z\,dy+x\,dz\ .$$

با استفاده از رابطهٔ ستوکس، این انتگرالها را محاسبه‌کنید و با محاسبهٔ مستقیم درستی نتیجه‌ها را امتحان‌کنید:

۲۳۵۶. $\oint\limits_C (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$، که درآن C عبارتست از دایرهٔ:

$$x^2+y^2+z^2=a^2\ ,\ x+y+z=0$$

۲۳۵۷. $\oint\limits_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$ ، که در آن C عبارتست از بیضی:

$$x^۲+y^۲=۱ \ , \ x+z=۱$$

۲۳۵۸. $\oint\limits_C xdx+(x+y)dy+(x+y+z)dz$ ، که در آن C عبارتست از منحنی:

$$x=a\sin t \ , \ y=a\cos t \ , \ z=a(\sin t+\cos t) \qquad (۰\leqslant t\leqslant ۲\pi)$$

۲۳۵۹. $\oint\limits_{ABCA} y^۲dx+z^۲dy+x^۲dz$ ، که در آن $ABCA$ عبارتست از محیط مثلث ABC به‌رأسهای $A(a,۰,۰)$، $B(۰,a,۰)$، $C(۰,۰,a)$.

۲۳۶۰. در چه حالتی انتگرال منحنی‌الخط زیر برای هر دورهٔ بستهٔ C مساوی صفر است؟

$$I=\oint\limits_C Pdx+Qdy+Rdz$$

۱۱. رابطهٔ اوستروگرادسکی-گوس

اگر S سطح پیوسته‌ای باشد که صفحهٔ مماس بر آن تغییرات پیوسته داشته باشد و حجم V را محدود کند، و توابع $P=P(x,y,z)$ ، $Q=Q(x,y,z)$ ، $R=R(x,y,z)$ همراه با مشتقهای مرتبهٔ اول خود در حوزهٔ بستهٔ V پیوسته باشند، دراینصورت رابطهٔ استروگرادسکی-گوس برقرار است:

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds=$$

$$=\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

که در آن $\cos\alpha$، $\cos\beta$، $\cos\gamma$ کسینوسهای هادی قائم خارجی برسطح S است.

با استفاده از رابطهٔ اوستروگرادسکی–گوس، انتگرالهای روی سطح زیر را در سطح بستهٔ S، که حجم v را محدود می‌کند، تبدیل‌کنید ($Cos\alpha$، $Cos\beta$، $Cos\gamma$ کسینوسهای هادی قائم برسطح Sاند):

۲۳۶۱. $\iint\limits_S xydxdy+yzdydz+zxdzdx$.

۲۳۶۲. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$.

۲۳۶۳. $\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}ds$.

۲۳۶۴. $\iint\limits_S (\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)ds$

به‌کمك رابطهٔ اوستروگرادسکی–گوس انتگرالهای روی سطح زیر را محاسبه‌کنید:

۲۳۶۵. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$، که در آن S عبارتست از سمت خارجی سطح مکعب $0\leqslant x\leqslant a$ ، $0\leqslant y\leqslant a$ ، $0\leqslant z\leqslant a$.

۲۳۶۶. $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$، که در آن S عبارتست ازسمت‌بیرونی هرم محدود به‌صفحه‌های $x+y+z=a$ ، $x=0$ ، $y=0$ ، $z=0$.

۲۳۶۷. $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$، که در آن S عبارتست از سمت خارجی کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$.

۲۳۶۸. $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)ds$، که درآن S عبارتست ازسطح کل خارجی مخروط .

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (0\leqslant z\leqslant b)$$

۲۳۶۹. اگر S یك سطح بسته و l جهت ثابت دلخواهی باشد، ثابت‌کنید.

$$\iint\limits_S \cos(n\ ,\ l)ds=0$$

n عبارتست از قائم خارجی بر سطح S.

۲۳۷۰. ثابت‌کنیدکه حجم V از جسم محدود به‌سطح S برابر است با

$$V=\frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)ds$$

که در آن $\cos\alpha$،$\cos\beta$،$\cos\gamma$ کسینوسهای هادی قائم خارجی بر سطح S هستند.

۱۲. مبانی نظریهٔ میدان

۱°. میدان عددی (اسکالر) ومیدان برداری. میدان عددی به وسیلهٔ تابع عددی نقطهٔ $u=f(P)=f(x,y,z)$ تعریف می‌شود که در آن $P(x,y,z)$ نقطه‌ای از فضاست. سطح $f(x,y,z)=C$ را (C مقدار ثابتی است)، سطح تراز میدان عددی‌گویند.

میدان برداری به‌وسیلهٔ تابع برداری $\mathbf{a}=\mathbf{a}(P)=\mathbf{a}(\mathbf{r})$ تعریف می‌شود که در آن P نقطه‌ای ازفضا و $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ شعاع نقطهٔ P است. در شکل مختصاتی

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$$

که در آن

$$a_x=a_x(x,y,z) \text{ و } a_y=a_y(x,y,z) \text{ و } a_z=a_z(x,y,z)$$

تصاویر بردار $\mathbf{a}$ روی محورهای مختصات‌اند. خطهای برداری (خطهای نیرو یا خطهای جریان) یك میدان‌برداری از دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی زیربدست می‌آید:

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z}$$

میدان عددی یا برداری، وقتی‌که به‌زمان t بستگی‌نداشته باشد، میدان ایستی* و در غیر اینصورت (یعنی وقتی‌که به‌زمان بستگی داشته باشد) میدان غیر ایستی نامیده می‌شود.

۲°. گرادیــن $(gradient)$. بردار

$$\text{grad}\,U(P)=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}=\nabla U$$

---

*) *Stationnaire*

که در آن $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}$ (بنام اوپراتور هامیلتون یا اوپراتور نابلا)، گرادین میدان $U = f(P)$ در نقطهٔ مفروض P نامیده می‌شود (فصل ششم، بند ۶ را ببینید). گرادین در امتداد قائم n بر سطح تراز درنقطهٔ P و درجهت صعودی تابع U قرار دارد و طول آن از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial U}{\partial n}=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^{2}+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^{2}}$$

اگرجهت بوسیلهٔ بردار واحد $i\,(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ داده شده باشد،دراینصورت‌داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial l}=gradU\cdot l=grad_{l}U=\frac{\partial U}{\partial x}cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}cos\gamma$$

(مشتق تابع u درجهت l).

۳°. دیورژانس و روتاسیونل. دیورژانس میدان برداری

$$a(P)=a_x\,i+a_y\,j=a_z k$$

عبارتست از اسکالر

$$div\ a=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\nabla a$$

روتاسیونل میدان برداری $a(P)=a_x\ i+a_y\ j+a_z k$ عبارتست از

$$rot\ a=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)k\equiv\nabla\times a$$

۴°. شار*بردار. شار میدان برداری $a(P)$ از سطح S در امتدادی که به وسیلهٔ بردار واحد قائم $n\{cos\alpha, cos\beta, cos\gamma\}$ برسطح S معین شده است، به‌انتگرال زیر گفته می‌شود:

$$\iint_S and s=\iint_S a_n dS=\iint_S (a_x cos\alpha+a_y cos\beta+a_z cos\gamma)dS$$

*) Flux-

اگر S سطح بسته‌ای باشد که حجم V را محدود می‌کند، و n بردار واحد قائم خارجی برسطح S باشد، رابطهٔ اوستروگراسکی–گوس صحیح است که به شکل برداری خود به‌اینصورت است:

$$\oiint\limits_{S} a_n dS = \iiint\limits_{(V)} div\, a dx dy dz$$

۵°. گردش* بردار–کار میدان. انتگرال خطی بردار a روی منحنی C با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\int\limits_{C} a dr = \int\limits_{C} a_s ds = \int\limits_{C} a_x dx + a_y dy + a_z dz \qquad (۱)$$

وعبارتست از کار میدان a درطول c (a_s تصویر بردار a روی مماس بر C است).

اگرمنحنی C بسته باشد، انتگرال خطی (۱) راگردش میدان برداری a درطول دورهٔ C گویند.

اگر C منحنی بسته‌ای باشد که سطح دو رویهٔ S را محدود کند، رابطهٔ ستوکس برقرار خواهد بود که به‌شکل برداری به‌اینصورت است:

$$\oint\limits_{C} a dr = \iint\limits_{S} n\, rot\, a dS = \iint\limits_{S} (rot\ a)_n dS$$

که در آن a عبارتست از بردار قائم برسطح S وجهت آن باید طوری انتخاب شود که وقتی ناظری در جهت n نگاه می‌کند، حرکت دورهٔ C در دستگاه مختصات راست برخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد.

۶°. میدان پتانسیلی و میدان سوله‌نوئیدی.** میدان برداری $a(r)$ را پتانسیلی گویند، وقتی که

$$a = grad U$$

که در آن $U = f(r)$ یك تابع عددی است (پتانسیل میدان)

برای اینکه میدان مفروض a دریك حوزهٔ پیوسته از یك پتانسیل بدست آید، لازم و کافی است که غیر روتاسیونل باشد، یعنی داشته باشیم: $rot\ a = 0$. در این حالت پتانسیل U

(* Circulation- (** Solénoidal

وجود دارد که از معادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$dU = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

اگر پتانسیل U، تابعی یك‌ارزشی باشد، داریم:

$$\int_{AB} \mathbf{a} d\mathbf{r} = U(B) - U(A)$$

بخصوص گردش بردار $\mathbf{a}$ برابر است با صفر: $\oint_C \mathbf{a} d\mathbf{r} = 0$

میدان برداری $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ را سوله‌نوئیدی گویند، وقتی که درهر نقطهٔ میدان داشته باشیم: $div\ \mathbf{a} = 0$؛ دراین حالت جریان بردار ازهرسطح بسته‌ای برابر صفراست.

اگر یك میدان درعین حال هم پتانسیلی وهم سوله‌نوئیدی باشد، دراینصورت داریم: $div(grad U) = 0$ وتابع‌پتانسیلی U همساز (هارمونیك) است، یعنی درمعادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad \text{یا} \quad \Delta U = 0$$

که در آن $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ اوپراتور لاپلاس است.

۲۳۷۱. مطلوبست سطح تراز میدان اسکالر $U = f(\mathbf{r})$، که در آن داشته‌باشیم: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. سطح تراز $U = F(\rho)$ کدام است، بشرطی که $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد؟

۲۳۷۲. مطلوبست سطح تراز میدان اسکالر

$$U = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

۲۳۷۳. ثابت کنید که خطوط برداری میدان‌برداری $\mathbf{a}(P) = \mathbf{c}$ ($\mathbf{c}$ بردار ثابتی‌است)، خطوطی موازی بردار $\mathbf{c}$ هستند.

۲۳۷۴. مطلوبست خطوط برداری میدان $\mathbf{a} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$ بشرطی که ω ثابت باشد.

۲۳۷۵. رابطه‌های زیر را ثابت کنید:

a) $grad(C_1U+C_2V)=C_1gradU+C_2gradV$، که در آن C_1 و C_2 مقادیر ثابت‌اند؛

b) $grad(UV)=UgradV+VgradU$؛

c) $grad(U^2)=2UgradU$؛

d) $grad\left(\frac{U}{V}\right)=\frac{VgradU-UgardV}{V^2}$؛

e) $grad\varphi(U)=\varphi'(U)gradU$.

۲۳۷۶. مطلوبست مقدار وامتداد گرادین میدان

$$U=x^2+y^2+z^2-3xyz$$

درنقطهٔ $A(2,1,1)$. درچه نقاطی گرادین میدان برمحور OZ عمود است ودرچه نقاطی مساوی صفر است؟

۲۳۷۷. مطلوبست محاسبهٔ $gradU$، بشرطی که U برابر است با

a) r، b) r^2 c) $\frac{1}{r}$، d) $f(r)$ $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$.

۲۳۷۸. مطلوبست گرادین‌میدان‌اسکالر $U=\mathbf{c}\mathbf{r}$، که درآن $\mathbf{c}$ بردار ثابتی است. سطوح تراز این میدان چگونه است ونسبت به بردار $\mathbf{c}$ چگونه قرارگرفته‌اند؟

۲۳۷۹. مطلوبست مشتق تـابع $U=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ درنقطهٔ‌مفروض $P(x,y,z)$ ودرجهت شعاع حامل $\mathbf{r}$ این نقطه. در چه حالتی این مشتق مساوی مقدارگرادین است؟

۲۳۸۰. مطلوبست مشتق تابع $U=\frac{1}{r}$ در جهت $l\{cos\alpha,cos\beta,cos\gamma\}$. درچه‌حالتی این مشتق مساوی صفر است؟

۲۳۸۱. روابط زیر را ثابت‌کنید:

a) $div(C_1\mathbf{a}_1+C_2\mathbf{a}_2)=C_1div\,\mathbf{a}_1+C_2div\,\mathbf{a}_2$ (C_1وC_2 مقادیر ثابت‌اند)؛

b) $div(U\mathbf{c})=gradU\cdot\mathbf{c}$، که درآن $\mathbf{c}$ بردار ثابتی‌است؛

c) $div(U\mathbf{a})=gradU\cdot\mathbf{a}+Udiv\,\mathbf{a}$

۲۳۸۲. مطلوبست محاسبهٔ $div\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$

۲۳۸۳. مطلوبست $div a$ برای میدان برداری مرکـزی $a(P)=f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$ ، که در آن $r=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$.

۲۳۸۴. روابط زیر را ثابت‌کنید:

a) $rot(C_۱ a_۱+C_۲ a_۲)=C_۱ rot\, a_۱+C_۲ rot\, a_۲$، که درآن $C_۱$ و $C_۲$ مقادیر ثابت‌اند؛

b) $rot(Uc)=gradU\times c$، که در آن c بردار ثابت است؛

c) $rot(Ua)=gradU\times a+Urota$

۲۳۸۵. مطلوبست محاسبهٔ دیورژانس وروتاسیونل بردار a ، بشرطی‌که a بتـرتیب برابر باشد با:

۱) $\mathbf{r}$ ؛ ۲) $\mathbf{r}c$ ؛ ۳) $f(r)c$ ؛ که در آن c بردار ثابت است.

۲۳۸۶. مطلوبست دیورژانس و روتاسیونل میدان سرعتهای خطی نقاط جسمی‌که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دور محور OZ می‌چرخد.

۲۳۸۷. مطلوبست روتاسیونل سرعتهای $V=\omega\times\mathbf{r}$ نقاط جسمی‌کـه بـا سرعت زاویه‌ای ثابت ω دور محوری‌که از مبداء مختصات می‌گذرد، می‌چرخد.

۲۳۸۸. مطلوبست دیورژابس و روتاسیونل‌گرادین میدان اسکالر U.

۲۳۸۹. ثابت‌کنید: $div(rota)=۰$

۲۳۹۰. با استفاده ازقضیهٔ اوستروگرادسکی‌ـگوس ثابت‌کنید که شار بردار $a=\mathbf{r}$ از سطح بسته‌ای که حجم اختیاری v را محدود می‌کند، برابر است باسه برابرحجم.

۲۳۹۱. مطلوبست شار بردار $\mathbf{r}$ از سطح‌کل استوانهٔ $x^۲+y^۲\leqslant R^۲$، $۰\leqslant z\leqslant H$.

۲۳۹۲. مطلوبست شاربردار $a=x^۲\, i+y^۲\, j+z^۲k$ از:a) سطح جانبی‌مخروط $\frac{x^۲+y^۲}{R^۲}\leqslant\frac{z^۲}{H^۲}$، $۰\leqslant z\leqslant H$؛ b) سطح‌کل مخروط.

۲۳۹۳*. مطلوبست دیورژانس وشار نیروی جاذبهٔ $F=-\frac{m\mathbf{r}}{\mathbf{r}^۳}$ نقطهٔای به‌جرم m که در مبداء مختصات واقع است ازسطح بستهٔ دلخواهی‌که شامل این نقطه باشد.

۲۳۹۴. مطلوبست انتگرال خطی بردار $\mathbf{r}$ درطول یك پیچ ازمنحنی

$$x=Rcost,\; y=Rsint,\; z=ht$$

از $t=۰$ تا $t=۲\pi$.

۲۳۹۵. با استفاده از قضیهٔ ستوکس، مطلوبست محاسبهٔ گردش بردار

$$a = x^2y^2\, i + j + zk$$

درطول‌محیط دایرهٔ $x^2 + y^2 = R^2$، $z = 0$ درحالتی که سطح نیمکرهٔ $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ را درنظر بگیریم.

۲۳۹۶. اگر نیروی F مرکزی باشد، یعنی‌جهت آن به‌طرف نقطهٔ ثابت O وتنهاوابسته به فاصلهٔ r آن از این نقطه باشد، ثابت کنید: $F = f(r)\mathbf{r}$، که در آن $f(r)$ عبارتست ازتابع پیوستهٔ یك ارزشی این میدان پتانسیل. مطلوبست پتانسیل U میدان.

۲۳۹۷. مطلوبست پتانسیل U میدان ثقل ناشی ازنقطهٔ مادی به‌جرم m واقع در مبداء مختصات: $a = -\frac{m}{r^3}\mathbf{r}$. ثابت کنیدکه پتانسیل U درمعادلهٔ لاپلاس: $\Delta U = 0$، صدق می کند.

۲۳۹۸. ببینیدکه آیا میدان برداری مفروض، پتانسیل U را دارد و دراینصورت U را پیدا کنید:

۱) $a = (5x^2y - 4xy)\, i + (3x^2 - 2y)\, j$؛

۲) $a = yz\, i + zx\, j + xyk$؛

۳) $a = (y+z)\, i + (x+z)\, j + (x+y)k$.

۲۳۹۹. ثابت کنیدکه میدان مرکزی $a = f(r)\mathbf{r}$ تنها وقتی سوله‌نوئیدی است که $f(r) = \frac{k}{r^3}$ باشد (k مقدارثابتی‌است).

۲۴۰۰. آیامیدان‌برداری سوله‌نوئیدی $a = r(c \times \mathbf{r})$ وجود دارد (c بردارثابتی‌است)؟

فصل هشتم

رشته‌ها

۱. رشته‌های عددی

۱°. مفاهیم اصلی. رشتهٔ عددی

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

را متقارب گویند، وقتی که مجموع جزئی

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

به‌ازای $n \to \infty$ دارای حدی باشد. مقدار $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ رامجموع این رشته وعدد

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

راجملهٔمتمم‌یا باقیماندهٔرشته‌گویند. اگر $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ وجود نداشته باشد، رشته را متباعدگویند.

اگر رشته متقارب باشد، داریم: $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$ (شرط لازم‌تقارب). عکس این حکم صحیح نیست.

برای اینکه رشتهٔ (۱) متقارب باشد، لازم و کافی‌است که برای هرعدد مثبت ε بتوان N را چنان انتخاب کرد که به‌ازای $n > N$ و عدد مثبت و دلخواه p نامساوی زیر برقـرار باشد (شرط کوشی):

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

با اضافه کردن یا کم کردن تعداد محدودی جمله، تقارب و یا تباعد رشته تغییر نمی‌کند.

۲°. نشانه‌های تقارب و تباعد رشته‌های با جمله‌های مثبت.

a) نشانهٔ مقایسهٔ I. اگر نـامساویهای $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ از $n = n_0$ به‌بعد برقرارباشند و رشتهٔ

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (2)$$

متقارب باشد، رشتهٔ (۱) هم متقارب است. اگر رشتهٔ (۱) متباعـد باشد ؛ رشتهٔ (۲) هم متباعد است.

بخصوص انتخاب تصاعد هندسی زیر به عنوان رشتهٔ مورد مقایسه، اغلب کـار را ساده می‌کند:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \qquad (a \neq 0)$$

این تصاعد به‌ازای $|q| < 1$ متقارب و به‌ازای $|q| \geqslant 1$ متباعد است، همچنین رشتهٔ توافقی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

هم که یك رشتهٔ متباعد است، برای مقایسه مفید است.

مثال ۱. رشتهٔ

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot 2^n} + \cdots$$

متقارب است، زیرا داریم:

$$a_n = \frac{1}{n\cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$$

وضمناً تصاعد هندسی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

که قدر نسبت آن $q=\frac{۱}{۲}$ است، متقارب است.

مثال ۲. رشتهٔ

$$\frac{ln۲}{۲}+\frac{ln۳}{۳}+\dots+\frac{lnn}{n}+\dots$$

متباعد است، زیرا جملهٔ عمومی آن $\frac{lnn}{n}$ از جملهٔ متناظر آن $\frac{۱}{n}$ در رشتهٔ توافقی بزرگتراست.

b) نشانهٔ مقایسهٔ II. اگر $\underset{n\to\infty}{\text{حـــد}}\frac{a_n}{b_n}$ معین و مخالف صفر باشد، رشته‌های (۱) و (۲) باهم متقارب و یا باهم متباعدند، بخصوص وقتی که $a_n\sim b_n$.

مثال ۳. رشتهٔ

$$۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\dots+\frac{۱}{۲n-۱}+\dots$$

متباعد است، زیرا

$$\underset{n\to\infty}{\text{حـــد}}\left(\frac{۱}{۲n-۱}:\frac{۱}{n}\right)=\frac{۱}{۲}\neq ۰$$

وضمناً می‌دانیم که رشتهٔ با جملهٔ عمومی $\frac{۱}{n}$ متباعد است.

مثال ۴. رشتهٔ

$$\frac{۱}{۲-۱}+\frac{۱}{۲^۲-۲}+\frac{۱}{۲^۳-۳}+\dots+\frac{۱}{۲^n-n}+\dots$$

متقارب است، زیرا

$$\underset{n\to\infty}{\text{حـــد}}\left(\frac{۱}{۲^n-n}:\frac{۱}{۲^n}\right)=۱$$

یعنی $\frac{۱}{۲^n}\sim\frac{۱}{۲^n-n}$ و رشتهٔ با جملهٔ عمومی $\frac{۱}{۲^n}$ هم متقارب است.

c) نشانهٔ دالامبر. فرض کنید $a_n>۰$ (از $n=n_۰$ به‌بعد) و حد زیر وجود داشته باشد:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{a_{n+۱}}{a_n}=q$$

دراینصورت با شرط $q<۱$ رشتهٔ (۱) متقارب وباشرط $q>۱$ رشتهٔ (۱) متباعد است. اگر $q=۱$ باشد، تقارب یا تباعد رشته معلوم نیست.

مثال ۵. تقارب رشتهٔ زیر را بررسی کنید:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲^۲}+\frac{۵}{۲^۳}+\dots+\frac{۲n-۱}{۲^n}+\dots$$

حل. در اینجا

$$a_n=\frac{۲n-۱}{۲^n},\ a_{n+۱}=\frac{۲n+۱}{۲^{n+۱}},$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{a_{n+۱}}{a_n}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{(۲n+۱)۲^n}{۲^{n+۱}(۲n-۱)}=\frac{۱}{۲}\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{۱+\frac{۱}{۲n}}{۱-\frac{۱}{۲n}}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین رشتهٔ مفروض متقارب است.

d) نشانهٔ کوشی. اگر $a_n\geqslant ۰$ (از $n=n_۰$ به‌بعد) وحد زیر وجود داشته باشد:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \sqrt[n]{a_n}=q$$

در اینصورت باشرط $q<۱$ رشتهٔ (۱) متقارب وباشرط $q>۱$ متباعد است. در حالت $q=۱$، در بارهٔ تقارب یا تباعد رشته‌نمی‌توان نظر داد.

e) نشانهٔ انتگرالی کوشی. اگر $a_n=f(n)$ وتابع $f(n)$ به‌ازای $x\geqslant a\geqslant ۱$ مثبت، نزولی وپیوسته باشد، دراینصورت رشتهٔ (۱) وانتگرال

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

باهم متقارب و باهم متباعدند.

به‌کمك نشانهٔ انتگرالی ثابت می‌شود که رشتهٔ دیریکله

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad (3)$$

به‌ازای $p > 1$ متقارب و به‌ازای $p \leqslant 1$ متباعد است. تقارب بسیاری از رشته‌ها را می‌توان به‌کمك مقایسه با رشتهٔ دیریکله بحث کرد.

مثال ۶. تقارب رشتهٔ زیر را بررسی کنید:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}+\cdots$$

حل. داریم:

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{4n^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2n}}\sim\frac{1}{4n^2}$$

چون رشتهٔ دیریکله به‌ازای $p=2$ متقارب است، به‌کمك نشانهٔ مقایسهٔ II می‌توان حکم کرد که رشتهٔ مفروض متقارب است.

۳°. نشانهٔ تقارب رشته‌های غیر مثبت. اگر رشتهٔ

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots \qquad (4)$$

که ازمقادیر قدر مطلق جمله‌های رشتهٔ (۱) تشکیل شده است، متقارب باشد، رشتهٔ (۱) هم متقارب است و دراینصورت آنرا متقارب مطلق گویند. اگر رشتهٔ (۱) متقارب و رشتهٔ (۴) متباعد باشد، رشتهٔ (۱) را متقارب مشروط (یا نیمه متقارب) گویند.

برای بحث درتقارب مطلق رشتهٔ (۱) می‌توان برای رشتهٔ(۴)ازنشانه‌های مختلف تقارب رشته‌های مثبت استفاده کرد. بخصوص رشتهٔ (۱) وقتی متقارب مطلق است که

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$$

در حالت‌کلی از متباعد بودن رشتهٔ (۴) نمی‌توان متباعد بودن رشتهٔ (۱) را نتیجه گرفت، ولی در حالتهای

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1 \quad \text{یا} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$$

هم رشتهٔ (۴) وهم رشتهٔ (۱) متباعدند.

نشانهٔ لایب نیتس. اگر در رشتهٔ متناوب

$$b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots+ \quad (b_n\geqslant 0) \qquad (5)$$

شرایط: ۱) $b_1\geqslant b_2\geqslant b_3>\cdots$ ؛ ۲) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$ برقرار باشد، رشتهٔ (۵) متقارب است.

دراین حالت باقیماندهٔ رشته، یعنی R_n در تخمین زیر صدق می‌کند:

$$|R_n|\leqslant b_{n+1}$$

مثال ۷. تقارب رشتهٔ زیر را بررسی کنید:

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\cdots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\cdots$$

حل. رشته‌ای با قدرمطلق جمله‌های رشتهٔ مفروض تشکیل می‌دهیم:

$$1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\cdots+\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\cdots$$

چون داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2},$$

بنابراین رشتهٔ مفروض متقارب مطلق است.

مثال ۸. رشتهٔ

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}+\cdots$$

متقارب است، زیرا نشانهٔ لایب‌نیتس درمورد آن صدق می‌کند. این رشته متقارب مشروط‌است،

زیرا رشتهٔ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

متباعد است (رشتهٔ توافقی).

تبصره. برای متقارب بودن یك رشتهٔ متناوب کافی نیست که جملـهٔ عمومی آن بسمت صفر میل کند. نشانهٔ لایب نیتس حکم می‌کند که یك رشتهٔ متناوب تنها وقتی متقـارب است که قدر مطلق جملهٔ عمومی آن بطور یکنوا (مونوتون) بسمت صفر میل کند. مثلا رشتهٔ

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{k}-\frac{1}{5^k}+\cdots$$

متباعد است، با وجودی که جملهٔ عمومی آن بسمت صفرمیل می‌کند (البته دراینجا تغییرقدرمطلق جمله‌ها یکنوا نیست). درحقیقت داریم: $S_{2k}=S'_k+S''_k$ که در آن

$$S'_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k},\quad S_k''=-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^k}\right)$$

و ضمناً $\lim\limits_{k\to\infty} S'_k=\infty$ (S'_k مجموع جزئی رشتهٔ توافقی است)، از طـرف دیگر $\lim\limits_{k\to\infty} S''_k$ وجود دارد و محدود است (S''_k **مجموع** جـزئی یك تصاعد هندسی است) و بنابراین: $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k}=\infty$.

ازطرف دیگر برای متقارب بودن رشتهٔ متناوب، وجود نشانهٔ لایب نیتس لازم نیست: یك رشتهٔ متناوب ممکن‌است در حالتی که جملهٔ عمومی آن بطور غیر یکنوا بسمت صفر میل‌می‌کند، متقارب باشد. مثلا رشتهٔ

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n)^2}+\cdots$$

متقارب وضمناً متقارب مطلق است، اگرچه نشانهٔ لایب‌نیتس در مورد آن صدق نمی‌کنـد: جملهٔ عمومی این رشته بسمت صفر میل می‌کند ولی نه بطور یکنوا.

۴°. رشتهٔ با جمله‌هـــای مختلط. رشتهٔ با جملهٔ عمومی $c_n = a_n + ib_n$ $(i^2 = 1)$ تنها وقتی متقارب است که رشته‌های با جمله‌های حقیقی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ با هم‌متقارب باشند، ضمناً در این حالت داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (6)$$

رشتهٔ (۶) را متقارب مطلق گوئیم وقتی که رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

متقارب باشد که جمله‌های آن از کالبدهای جمله‌های رشتهٔ (۶) تشکیل شده است.

۵°. عملیات روی رشته‌ها :

a) یك رشتهٔ متقارب را می‌توان جمله به جمله در عدد دلخواه h ضرب کرد، یعنی اگر داشته باشیم:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

خواهیم داشت :

$$ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n + \cdots = kS$$

b) منظور ازمجموع یا تفاضل دو رشتهٔ متقارب

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S_1 \qquad (7)$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = S_2 \qquad (8)$$

رشتهٔ زیر است:

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots = S_1 \pm S_2$$

c) حاصلضرب دو رشتهٔ (۷) و (۸) به رشتهٔ

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots \qquad (9)$$

گفته می‌شود که در آن داریم : $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$ $\quad (n = 1, 2, \cdots)$.

اگر رشته‌های (۷) و (۸) متقارب مطلق باشند ، رشتهٔ (۹) هم متقارب مطلق خواهد بود ومجموعی مساوی $S_1 S_2$ خواهد داشت.

d) اگر رشته‌ای متقارب مطلق باشد، مجموع آن با تغییرجای جمله‌های آن تغییر نمی‌کند. این خاصیت برای موردی که رشتهٔ مفروض متقارب مطلق نباشد، برقرار نیست.

از روی جمله‌های داده شده ، جملهٔ عمومی هر رشته را بنویسید:

۲۴۰۱. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$

۲۴۰۲. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$

۲۴۰۳. $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \cdots$

۲۴۰۴. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$

۲۴۰۵. $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \cdots$

۲۴۰۶. $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \cdots$

۲۴۰۷. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \cdots$

۲۴۰۸. $1 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \cdots$

۲۴۰۹. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

۲۴۱۰. $1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + \cdots$

در تمرینهای ۲۴۱۱ ــ ۲۴۱۵ چهار یا پنج جملهٔ اول رشته را با معلوم بودن جملهٔ عمومی a_n بنویسید:

۲۴۱۱. $a_n = \frac{3n - 2}{n^2 + 1}$

۲۴۱۲. $a_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}$

۲۴۱۳. $a_n = \frac{2 + (-1)^n}{n^2}$

۲۴۱۴. $a_n = \frac{1}{[3 + (-1)^n]^n}$

۲۴۱۵. $a_n = \frac{\left(2 + \sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!}$

با استفاده از نشانهٔ مقایسه (یا شرط لازم)، تقارب رشته‌های زیر را بررسی کنید:

۲۴۱۶. $1-1+1-1+\dots+(-1)^{n-1}+\dots$

۲۴۱۷. $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3+\dots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\dots$

۲۴۱۸. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\dots+\frac{n+1}{2n+1}+\dots$

۲۴۱۹. $\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt[3]{10}}+\frac{1}{\sqrt[4]{10}}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}+\dots$

۲۴۲۰. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{2n}+\dots$

۲۴۲۱. $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\dots+\frac{1}{10n+1}+\dots$

۲۴۲۲. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\dots$

۲۴۲۳. $2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\dots+\frac{2^n}{n}+\dots$

۲۴۲۴. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\dots$

۲۴۲۵. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\dots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\dots$

۲۴۲۶. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{2}}+\frac{\sqrt[3]{3}}{4\sqrt{3}}+\dots+\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}+\dots$

به‌کمك نشانهٔ دالامبر تقارب رشته‌های زیر را بررسی کنید:

۲۴۲۷. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\dots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\dots$

۲۴۲۸. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\dots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}+\dots$

به‌کمك نشانهٔ کوشی، تقارب رشته‌های زیر را بررسی کنید:

۲۴۲۹. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\dots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\cdots$

۲۴۳۰. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^5+\dots+\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}+\cdots$

تقارب رشته‌های مثبت زیر را بررسی کنید:

۲۴۳۱. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\cdots$

۲۴۳۲. $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\dots+\frac{1}{(n+1)^2-1}+\cdots$

۲۴۳۳. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$

۲۴۳۴. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+\dots+\frac{n^2}{2n^2+1}+\cdots$

۲۴۳۵. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\dots+\frac{n}{n^2+1}+\cdots$

۲۴۳۶. $\frac{3}{3^2\cdot 3^2}+\frac{5}{3^2\cdot 4^2}+\frac{7}{4^2\cdot 5^2}+\dots+\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\cdots$

۲۴۳۷. $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\dots+\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n+\cdots$

۲۴۳۸. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{7}+\left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{3}{2}}+\dots+\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}+\cdots$

۲۴۳۹. $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\dots+\frac{n^3}{e^n}+\cdots$

۲۴۴۰. $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^3}+\dots+\frac{2^{n-1}}{n^n}+\cdots$

۲۴۴۱. $\frac{1!}{2+1}+\frac{2!}{2^2+1}+\frac{3!}{2^3+1}+\dots+\frac{n!}{2^n+1}+\cdots$

۲۴۴۲. $1+\frac{2}{1!}+\frac{4}{2!}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots$

۲۴۴۳. $\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdots 4n}+\cdots$

۲۴۴۴. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}+\cdots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\cdots$

۲۴۴۵. $1000+\frac{1000\cdot 1002}{1\cdot 4}+\frac{1000\cdot 1002\cdot 1004}{1\cdot 4\cdot 7}+\cdots$

$$\cdots+\frac{1000\cdot 1002\cdot 1004\cdots(998+2n)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}+\cdots$$

۲۴۴۶. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\cdots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14\cdots(6n-7)(6n-4)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot 17\cdots(8n-11)(8n-7)}+\cdots$

۲۴۴۷. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdots(4n-4)(4n-2)}+\cdots$

۲۴۴۸. $\frac{1}{1!}+\frac{1\cdot 11}{3!}+\frac{1\cdot 11\cdot 21}{5!}+\cdots+\frac{1\cdot 11\cdot 21\cdots(10n-9)}{(2n-1)!}+\cdots$

۲۴۴۹. $1+\frac{1\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\cdots+\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdots n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdots(4n-3)}+\cdots$

۲۴۵۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$

۲۴۵۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$

۲۴۵۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

۲۴۵۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+1}{n^2}$

۲۴۵۴. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

۲۴۵۵. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

۲۴۵۶. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$

۲۴۵۷. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$

۲۴۵۸. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$.

۲۴۵۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

۲۴۶۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

۲۴۶۱. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n+\sqrt{\ln^3 n}}$.

۲۴۶۲. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$.

۲۴۶۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}$.

۲۴۶۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

۲۴۶۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

۲۴۶۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

۲۴۶۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

۲۴۶۸*. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$.

۲۴۶۹. ثابت کنید که رشتهٔ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$.

a) به‌ازای مقادیر دلخواه q وقتی متقارب است که $p>1$ باشد، و به‌ازای $q>1$ وقتی که $p=1$ باشد.

b) به‌ازای مقادیر دلخواه q متباعد است بشرطی کــه $p<1$ باشد، و به‌ازای $q\leqslant 1$ بشرطی که $p=1$ باشد.

تقارب رشته‌های متناوب زیر را بررسی کنید. در حالتی که رشته متقارب است، تقارب مطلــق و تقارب مشروط آنرا بررسی کنید :

۲۴۷۰. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots$.

۲۴۷۱. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\cdots$.

۲۴۷۲. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\dots$.

۲۴۷۳. $1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}+\dots$.

۲۴۷۴. $\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}+\dots$.

۲۴۷۵. $-\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}-\dots+(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}+\dots$.

۲۴۷۶. $-\frac{2}{2\sqrt{2}-1}+\frac{3}{3\sqrt{3}-1}-\frac{4}{4\sqrt{4}-1}+\dots$

$$\dots+(-1)^n\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}+\dots$$

۲۴۷۷. $-\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{7}\right)^2-\left(\frac{7}{10}\right)^3+\dots+(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n+\dots$.

۲۴۷۸. $\frac{3}{2}-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 5\cdot 8}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{3\cdot 5\cdot 7\dots(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\dots(3n-1)}+\dots$.

۲۴۷۹. $\frac{1}{7}-\frac{1\cdot 4}{7\cdot 9}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{7\cdot 9\cdot 11}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\dots(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\dots(2n+5)}+\dots$.

۲۴۸۰. $\frac{\sin\alpha}{\ln 10}+\frac{\sin 2\alpha}{(\ln 10)^2}+\dots+\frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}+\dots$.

۲۴۸۱. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

۲۴۸۲. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

۲۴۸۳. ثابت کنید که نشانهٔ تقارب دالامبر نمی‌تواند به تقارب مربوط به رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ جواب بدهد، که در آن داریم:

$$a_{2k-1}=\frac{2^{k-1}}{3^{k-1}},\quad a_{2k}=\frac{2^{k-1}}{3^k}\quad (k=1,2,\dots)$$

در حالیکه به‌کمک نشانهٔ کوشی می‌توان ثابت کرد که این رشته متقارب است.

*۲۴۸۴. ثابت کنید که در مورد بررسی تقارب رشته‌های متناوب زیر نمی‌توان از نشانه لایپ‌نیتس استفاده کرد. معلوم کنید کدامیك از این رشته‌ها متباعد، کدامیك متقارب مشروط و کدامیك متقارب مطلق‌اند:

a) $$\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}-\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{۳}-۱}-\frac{۱}{\sqrt{۳}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{۴}-۱}-\frac{۱}{\sqrt{۴}+۱}+\cdots$$

$$\left(a_{۲k-۱}=\frac{۱}{\sqrt{k+۱}-۱}\ ,\ a_{۲k}=-\frac{۱}{\sqrt{k+۱}+۱}\right),$$

b) $$۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳^۳}+\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{۳^۵}+\cdots$$

$$\left(a_{۲k-۱}=\frac{۱}{۲^{k-۱}}\ ,\ a_{۲k}=-\frac{۱}{۳^{۲k-۱}}\right)$$

c) $$۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}-\frac{۵}{۳^۲}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۳^۳}+\cdots$$

$$\left(a_{۲k-۱}=\frac{۱}{۲k-۱}\ ,\ a_{۲k}=-\frac{۱}{۳^k}\right)$$

d) $$\frac{۱}{۳}-۱+\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۱}-\frac{۱}{۹}+\cdots$$

$$\left(a_{۲k-۱}=\frac{۱}{۴k-۱}\ ,\ a_{۲k}=-\frac{۱}{۴k-۳}\right)$$

تقارب رشته‌های با جمله‌های مختلط زیر را بررسی کنید:

۲۴۸۵. $\sum \frac{n(۲+i)^n}{۲^n}$.

۲۴۸۶. $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n(۲i-۱)^n}{۳^n}$.

۲۴۸۷. $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(۳+i)^n}$.

۲۴۸۸. $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{i^n}{n}$.

۲۴۸۹. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+i}}$.

۲۴۹۰. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$.

۲۴۹۱. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[n+(2n-1)i]^2}$.

۲۴۹۲. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3i}\right]^n$.

۲۴۹۳. بین منحنی‌های $y=\frac{1}{x^3}$ و $y=\frac{1}{x^2}$ در سمت راست نقطهٔ‌تلاقی آنها، پاره خطهائی موازی محور OY ساخته‌ایم، بنحوی که فاصلهٔ یکی ازدیگری مقدار ثابتی باشد. آیا مجموع طولهای این پاره خطها مقدار محدودی است؟

۲۴۹۴. اگر در مسئلهٔ قبل منحنی $y=\frac{1}{x^2}$ را به منحنی $y=\frac{1}{x}$ تغییردهیم، آیامجموع پاره خطهائی که دربارهٔ آنها صحبت کردیم محدود است؟

۲۴۹۵. مجموع رشته‌های $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{3^n}$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-n}{3^n}$ را تشکیل دهید. آیا این مجموع متقارب است؟

۲۴۹۶. تفاضل رشته‌های متباعد $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ را تشکیل دهید و تقارب آنرا بررسی کنید.

۲۴۹۷. آیا رشته‌ای که ازکم کردن رشتهٔ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ از رشتهٔ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ بدست می‌آید متقارب است؟

۲۴۹۸. دو رشته چنان انتخاب کنید که مجموعشان متقارب وتفاضلشان متباعد باشد.

۲۴۹۹. حاصلضرب رشته‌های $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ راتشکیل دهید. آیااین حاصلضرب متقارب است؟

۲۵۰۰. رشتهٔ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}+\dots\right)^2$ را تشکیل دهید.آیااین‌رشته

متقارب است؟

۲۵۰۱. رشتهٔ $-۱+\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+\dots+\frac{(-۱)^n}{n!}+\dots$ داده شده است. اگـر بجای مجموع این رشته، مجموع چهار جملهٔ آنرا در نظر بگیریم خطای حاصل را برآورد کنیـد؛ همچنین وقتی‌که مجموع پنج جملهٔ آنرا درنظر بگیریم. دربارهٔ علامت این خطاها چه می‌توان گفت؟

۲۵۰۲*. اگر در رشتهٔ

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲!}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}+\frac{۱}{۳!}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}+\dots+\frac{۱}{n!}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n}+\dots$$

بجای مجموع رشته، مجموع n جملهٔ آنرا درنظربگیریم، خطای حاصل را برآورد کنید.

۲۵۰۳. بجای مجموع رشتهٔ $۱+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\dots+\frac{۱}{n!}+\dots$، مجموع n جملـهٔ اول آنرا درنظرگرفته‌ایم، خطای حاصل را برآورد کنید. درحالت $n=۱۰$ دقت این تقریب را برآورد کنید.

۲۵۰۴.** مطلوبست برآورد خطا، وقتی‌که بجای مجموع رشتهٔ

$$۱+\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۳^{۲}}+\dots+\frac{۱}{n^{۲}}+\dots$$

مجموع n جملهٔ اول آنرا انتخاب کنیم. دقت این تقریب را به‌ازای $n=۱۰۰۰$ برآورد کنید.

۲۵۰۵.** مطلوبست‌برآورد خطا، وقتی‌که بجای مجموع رشتهٔ

$$۱+۲\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}+۳\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۴}+\dots+n\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲n-۱}+\dots$$

مجموع n جملهٔ اول آنرا درنظر بگیریم.

۲۵۰۶. چند جمله از رشتهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$ باید انتخاب‌کرد تا مجموع آن بـا دقت تا ۰/۰۱ یا تا ۰/۰۰۱ بدست آید؟

۲۵۰۷. چند جمله از رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)5^n}$ را باید انتخاب کرد تا مجموع آن با دقت تا ۰٫۰۱، ۰٫۰۰۱، ۰٫۰۰۰۱ بدست آید؟

۲۵۰۸*. مجموع رشتهٔ زیر را بدست آورید:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots$$

۲۵۰۹. مطلوبست مجموع رشتهٔ

$$\sqrt[3]{x}+(\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x})+(\sqrt[7]{x}-\sqrt[5]{x})+\dots+(\sqrt[2k+1]{x}-\sqrt[2k-1]{x})+\dots$$

۲. رشته‌های تابعی

۱°. حوزهٔ تقارب. مجموعهٔ مقادیر آوند x، که به‌ازای آنها رشتهٔ تابعی

$$f_1(x)+f_2(x)+\dots f_n(x)+\dots \qquad (1)$$

متقارب است، حوزهٔ تقارب این رشته نامیده می‌شود. تابع

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

که در آن $S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)+\dots$ و x متعلق به حوزهٔ تقارب است، مجموع رشته و $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ باقیماندهٔ رشته نامیده می‌شود.

در حالتهای ساده، برای تعیین حوزهٔ تقارب رشتهٔ (۱) کافی است نشانه‌های تقارب را با فرض ثابت بودن x بکار ببریم.

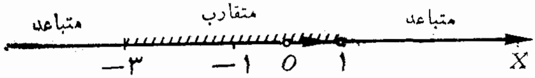
مثال ۱. حوزهٔ تقارب رشتهٔ زیر را معین کنید:

$$\frac{x+1}{1\cdot 2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3}+\dots+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}+\dots \qquad (2)$$

حل. جملهٔ عمومی رشته را u_n می‌نامیم، داریم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{|u_{n+۱}|}{|u_n|}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{|x+۱|^{n+۱}۲^n n}{۲^{n+۱}(n+۱)|x+۱|^n}=\frac{|x+۱|}{۲}$$

براساس نشانهٔ دالامبر می‌توان حکم کرد که رشتهٔ مفروض وقتی متقارب است (وضمناً متقارب مطلق) که $\frac{|x+۱|}{۲}<۱$، یعنی $-۳<x<۱$ باشد؛ و رشته متباعد است وقتی که $\frac{|x+۱|}{۲}>۱$، یعنی $-\infty<x<-۳$ یا $۱<x<\infty$ باشد (شکل ۱۰۴) . به‌ازای $x=۱$ رشتهٔ توافقی... $+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}+۱$ بدست می‌آید که متباعد است و به‌ازای $x=-۳$ رشتهٔ $...+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}+۱-$ بدست می‌آید که (با توجه به نشانهٔ لایب نیتس) متقارب (ولی غیر مطلق) است.



شکل ۱۰۴

به‌این ترتیب رشتهٔ مفروض به‌ازای $-۳\leqslant x<۱$ متقارب است.

۲۰. رشته‌های توانی . برای هر رشتهٔ توانی

$$c_۰+c_۱(x-a)+c_۲(x-a)^۲+\cdots+c_n(x-a)^n+\cdots \qquad (۳)$$

(C_n و a عددهائی حقیقی‌اند) فاصله‌ای (بنام فاصلهٔ تقارب) مثل $|x-a|<R$ وجود دارد که مرکز آن نقطهٔ $x=a$ است ودرداخل آن رشتهٔ (۳) متقارب مطلق است؛ به‌ازای $|x-a|>R$ رشته متباعد است. در حالت خاص، شعاع تقارب R می‌تواند مساوی ۰ یا ∞ باشد. در نقطه‌های انتهائی $x=a\pm R$ ممکن است رشته متقارب یامتباعد باشد. فاصلهٔ تقارب‌رامی‌توان معمولا به‌کمك نشانه‌های دالامبر یا کوشی، با بکاربردن آنها در رشته‌ای که جمله‌های آن ازمقادیر مطلق جمله‌های رشتهٔ مفروض (۳) تشکیل شده است، معین کرد.

اگر در رشتهٔ با مقادیر مطلق

$$|c_۰|+|c_۱|\,|x-a|+\cdots+|c_n|\,|x-a|^n+\cdots$$

نشانه‌های دالامبر و کوشی را بکارببریم، برای شعاع تقارب رشتهٔ توانی (۳) بترتیب‌رابطه‌های زیر بدست می‌آید:

$$R = \frac{۱}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \qquad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+۱}}\right|$$

ولی استفاده از این رابطه‌ها باید با احتیاط انجام بگیرد، زیرا حدهائی‌که در سمت راست این رابطه‌ها قرار دارند، اغلب وجود ندارند. مثلا اگر مجموعهٔ نامحدود ضریبهای C_n بسمت صفر میل کند (و این بخصوص درحالتی که رشته تنها ازتوانهای زوج یا تنها ازتوانهای فرد $(x-a)$ تشکیل شده باشد، پیش می‌آید)، ازاین رابطه‌ها نمی‌توان استفاده‌کرد. بهمین مناسبت توصیه می‌شودکه برای تعیین فاصلهٔ تقارب بجای استفاده از رابطه‌های مربوط به شعاع تقارب، بطور غیرمستقیم نشانه‌های دالامبر وکوشی مورد استفاده قرار گیرد، هما‌نطورکه در مورد رشتهٔ (۲) انجام‌گرفت.

اگر $z=x+iy$ متغیر مختلط باشد، برای رشتهٔ توانی

$$c_۰+c_۱(z-z_۰)+c_۲(z-z_۰)^۲+\cdots+c_n(z-z_۰)^n+\cdots \qquad (۴)$$

$(z_۰=x_۰+iy_۰ \ ، \ c_n=a_n+ib_n)$ دایرهٔ (بنام دایرهٔ تقارب) $|z-z_۰|<R$ وجود داردکه مرکز آن نقطهٔ $z=z_۰$ و در داخل آن رشتهٔ مفروض متقارب مطلق است؛ به‌ازای $|z-z_۰|>R$ رشته متباعد است. روی محیط دایرهٔ تقارب، رشتهٔ(۴) ممکن‌است متقارب یا متباعد باشد. دایرهٔ تقارب را معمولا می‌توان با بکاربردن نشانهٔ دالامبر یاکوشی در رشتهٔ

$$|c_۰|+|c_۱|\cdot|z-z_۰|+|c_۲|\cdot|z-z_۰|^۲+\cdots+|c_n|\cdot|z-z_n|^n+\cdots$$

بدست‌آورد؛ جمله‌های رشتهٔ اخیر کالبدهای جمله‌های رشتهٔ مفروض‌اند. مثلا به‌کمك نشانهٔ‌دالامبر بسادگی معلوم می‌شودکه دایرهٔ تقارب رشتهٔ

$$\frac{z+۱}{۱\cdot۲}+\frac{(z+۱)^۲}{۲\cdot۲^۲}+\frac{(z+۱)^۳}{۳\cdot۲^۳}+\cdots+\frac{(z+۱)^n}{n\cdot۲^n}+\cdots$$

ازنامساوی $|z+۱|<۲$ بدست می‌آید (می‌توان شبیه روش مثال ۱ درابتدای این بند عمل‌کرد بااین تفاوت‌که x را به z تبدیل‌کنیم). مرکز دایرهٔ تقارب درنقطهٔ $z=-۱$ واقع است وشعاع R این دایره (شعاع تقارب) مساوی است با ۲.

۳°. تقارب یکنواخت. رشتهٔ تابعی (۱) در فاصله‌ای دارای تقارب یکنواخت است، که به‌ازای هرمقدار دلخواه $\varepsilon>0$، بتوان عددی مانند N مستقل از x پیداکرد بنحوی‌که برای $n>N$ و همهٔ مقادیر x ازفاصلهٔ مفروض نامساوی $|R_n(x)|<\varepsilon$ برقرار باشد ($R_n(x)$ باقیماندهٔ رشتهٔ مفروض است).

اگر به‌ازای $a\leqslant x\leqslant b$ داشته باشیم: $f_n(x)\leqslant c_n \quad (n=1,2,\dots)$ و ضمناً رشتهٔ عددی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ متقارب باشد، رشتهٔ تابعی (۱) در فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ متقارب مطلق و یکنواخت است (نشانهٔ وایرشتراس) .

رشتهٔ توانی (۳) درهر فاصلهٔ بستهٔ واقع در داخل فاصلهٔ تقارب، بطور مطلق ویکنواخت متقارب می‌شود. از رشتهٔ توانی (۳) می‌توان جمله به جمله در داخل فاصلهٔ تقارب‌دیفرانسیل یا انتگرال‌گرفت (به‌ازای $|x-a|<R$)، یعنی اگر داشته باشیم:

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n+\cdots=f(x) \quad (۵)$$

دراینصورت برای هرمقدار x از فاصلهٔ تقارب رشتهٔ (۳) داریم:

$$c_1+2c_2(x-a)+\cdots+nc_n(x-a)^{n-1}+\cdots=f'(x) \quad (۶)$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} c_0dx+\int\limits_{x_0}^{x} c_1(x-a)dx+\int\limits_{x_0}^{x} c_2(x-a)^2dx+\dots+\int\limits_{x_0}^{x} c_n(x-a)^n dx+\dots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}(x_0-a)^{n+1}}{n+1}=\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx \quad (۷)$$

(عدد x_0 هم درفاصلهٔ تقارب رشتهٔ (۳) قرار دارد). ضمنا رشته‌های (۶) و(۷) هم دارای همان فاصلهٔ تقارب رشتهٔ (۳) هستند.

حوزهٔ تقارب رشته‌های زیر را پیدا کنید:

۲۵۱۰. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.

۲۵۱۱. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$.

۲۵۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^{\ln x}}$.

۲۵۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^{2}}$.

۲۵۱۴. $\sum_{n=0}^{\infty}2^{n}\sin\frac{x}{3^{n}}$.

۲۵۱۵**. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$.

۲۵۱۶. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot e^{-n\sin x}$.

۲۵۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^{n}}$.

۲۵۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!x^{n}}$.

۲۵۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)x^{n}}$.

۲۵۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^{n}}$.

۲۵۲۱. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^{5}x^{2n}}$.

۲۵۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^{n}(x-5)^{n}}$.

۲۵۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{n^{n^{n}}}$.

۲۵۲۴*. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n}+\frac{1}{2^{n}x^{n}}\right)$.

۲۵۲۵. $\sum_{n=-1}^{\infty}x^{n}$.

فاصلهٔ تقارب رشته‌های توانی زیر را پیدا کنید ودربارهٔ تقارب در دوانتهای این فاصله بحث کنید:

۲۵۲۶. $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}$.

۲۵۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n\cdot 2^{n}}$.

۲۵۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

۲۵۲۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^{2}}$.

۲۵۳۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n}}{n}$.

۲۵۳۱. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{5}x^{2n}}{2n+1}$.

۲۵۳۲. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot(2n+1)^{2}\cdot x^{n}$.

۲۵۳۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$.

۲۵۳۴. $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

۲۵۳۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

۲۵۳۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} \cdot x^n$.

۲۵۳۷. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} \cdot x^{n^2}$.

۲۵۳۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

۲۵۳۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$.

۲۵۴۰. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \cdot \ln n}$.

۲۵۴۱. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$.

۲۵۴۲**. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n!}$.

۲۵۴۳*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1} \cdot n}$.

۲۵۴۴*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}$.

۲۵۴۵. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$.

۲۵۴۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$.

۲۵۴۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$.

۲۵۴۸. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

۲۵۴۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

۲۵۵۰. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$.

۲۵۵۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}$.

۲۵۵۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$.

۲۵۵۳. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$.

۲۵۵۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}$.

۲۵۵۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

۲۵۵۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

۲۵۵۷. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

۲۵۵۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

* ۲۵۵۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$.

۲۵۶۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n=1}\cdot n^n}$.

۲۵۶۱. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$.

۲۵۶۲. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\cdot 2^{n+1}}$.

۲۵۶۳. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$.

دایرهٔ تقارب را در رشته‌های زیر پیداکنید :

۲۵۶۴. $\sum_{n=0}^{\infty}i^n\cdot z^n$.

۲۵۶۵. $\sum_{n=0}^{\infty}(1+ni)z^n$.

۲۵۶۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{n\cdot 3^n}$.

۲۵۶۷. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2^n}$.

۲۵۶۸. $(1+2i)+(1+2i)(3+2i)z+\cdots$
$$\cdots+(1+2i)(3+2i)\cdots(2n+1+2i)z^n+\cdots$$

۲۵۶۹. $1+\dfrac{z}{1-i}+\dfrac{z^2}{(1-i)(1-2i)}+\dfrac{z^3}{(1-i)(1-2i)(1-3i)}+\cdots$
$$\cdots+\frac{z^n}{(1-i)(1-2i)\cdots(1-ni)}+\cdots$$

۲۵۷۰. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1+2ni}{n+2i}\right)^n\cdot z^n$.

۲۵۷۱. با شروع از تعیین تقارب یکنواخت، ثابت کنید رشتهٔ
$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$
درفاصلهٔ $(-1, 1)$ بطور یکنواخت متقارب نمی‌شود، ولی در هرفاصلهٔ بستهٔ دلخواهی واقع در داخل این فاصله بطور یکنواخت متقارب است.

حل. با استفاده از رابطهٔ مجموع درتصاعد هندسی، به‌ازای $|x|<1$، بدست می‌آید:
$$R(x)=x^{n+1}+x^{n+2}+\cdots=\frac{x^{n+1}}{1-x}$$
فاصلهٔ بستهٔ $[-1+\alpha, 1-\alpha]$ را در داخل فاصلهٔ $(-1, 1)$ انتخاب می‌کنیم (α عددی است مثبت و به‌دلخواه کوچك). دراین فاصلهٔ بسته داریم: $|x|\leqslant 1-\alpha$ و $|1-x|\geqslant\alpha$ وبنابراین:
$$|R_n(x)|\leqslant\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha}$$
برای اینکه تقارب یکنواخت رشتهٔ مفروض را درفاصلهٔ بستهٔ $[-1+\alpha, 1-\alpha]$ نتیجه‌بگیریم، باید ثابت‌کنیم‌که برای هر $\varepsilon>0$ می‌توان N را، که تنها به ε بستگی دارد، چنان پیدا کرد که برای هر $n>N$ نامساوی $|R_n(x)|<\varepsilon$ به‌ازای همهٔ مقادیر x از فاصلهٔ بستهٔ مورد نظر، برقرار باشد.

$\varepsilon>0$ را چنان می‌گیریم که داشته باشیم: $\dfrac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha}<\varepsilon$؛ از اینجابدست می‌آید:

$(1-\alpha)^{n+1}<\varepsilon\alpha$ و یا $(n+1)\ln(1-\alpha)<\ln(\varepsilon\alpha)$، یعنی $n+1>\dfrac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)}$ (زیرا $\ln(1-\alpha)<0$) و $n>\dfrac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)}-1$. به‌این ترتیب اگر $N=\dfrac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)}-1$ فرض کنیم، معلوم می‌شود که به‌ازای $n>N$ نامساوی $|R_n(x)|<\varepsilon$ به‌ازای همهٔ مقادیر x از فاصلهٔ بستهٔ $[-1+\alpha, 1-\alpha]$ برقرار است، یعنی رشتهٔ مفروض درهر فاصلهٔ بسته‌ای واقع در داخل فاصلهٔ $(-1, 1)$ متقارب یکنواخت است.

واما درمورد فاصلهٔ $(-1, 1)$: این فاصله شامل نقطه‌ای است که می‌تواند به دلخواه به نقطهٔ $x=1$ نزدیک باشد وچون.

$$\lim_{x\to 1} R_n(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}}{1-x}=\infty$$

بنابراین هرچقدر n بزرگ باشد، نقطه x وجود داردکه برای آن $R_n(x)$ بزرگتر از هرعدد به‌اندازهٔ کافی بزرگ است. بنابراین نمی‌توان N را چنان پیدا کرد که برای $n>N$ نامساوی $|R_n(x)|<\varepsilon$ به‌ازای همهٔ نقاط واقع درفاصلهٔ $(-1, 1)$ برقرار باشد، واین به‌معنای آنست که تقارب رشتهٔ مفروض درفاصلهٔ $(-1, 1)$ یکنواخت نیست.

۲۵۷۲. با توجه به تعریف تقارب یکنواخت ثابت کنید:

a) رشتهٔ

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

در هر فاصلهٔ باز ومعین متقارب یکنواخت است؛

b) رشتهٔ

$$\frac{x^2}{1}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}+\cdots$$

در تمام فاصلهٔ تقارب $(-1, 1)$ بطور یکنواخت متقارب می‌شود؛

c) رشتهٔ

$$1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\dots+\frac{1}{n^x}+\cdots$$

در فاصلهٔ $(1+\delta, \infty)$ متقارب یکنواخت است (δ عدد مثبت دلخواهی است)؛

d) رشتهٔ

$$(x^2-x^4)+(x^4-x^6)+(x^6-x^8)+\dots+(x^{2n}-x^{2n+2})+\dots$$

نه تنها در داخل فاصلهٔ $(-1, 1)$، بلکه در دوانتهای این فاصله هم متقارب است، ولی تقارب رشته در فاصلهٔ $(-1, 1)$ یکنواخت نیست.

تقارب یکنواخت رشته‌های تابعی زیر را در فواصل مربوطه ثابت‌کنید:

۲۵۷۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ درفاصلهٔ بستهٔ $[-1, 1]$.

۲۵۷۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ روی تمام‌محورعددی.

۲۵۷۵. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ در فاصلهٔ بستهٔ $[0, 1]$.

با استفاده ازمشتق‌گیری وانتگرال‌گیری جمله به جمله، مجموع رشته‌های زیر را بدست آورید:

۲۵۷۶. $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots$.

۲۵۷۷. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots$.

۲۵۷۸. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\dots$.

۲۵۷۹. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots+(-1)^{n=1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\dots$.

۲۵۸۰. $1+2x+3x^2+\dots+(n+1)x^n+\dots$.

۲۵۸۱. $1-3x^2+5x^4-\dots+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}+\dots$.

۲۵۸۲. $1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\dots+n(n+1)x^{n-1}+\dots$.

مجموع رشته‌های زیر را بدست آورید:

۲۵۸۳. $\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x^{۲}}+\frac{۳}{x^{۳}}+\dots+\frac{n}{x^{n}}+\dots$

۲۵۸۴. $x+\frac{x^{۵}}{۵}+\frac{x^{۹}}{۹}+\dots+\frac{x^{۴n-۳}}{۴n-۳}+\dots$

۲۵۸۵*. $۱-\frac{۱}{۳\cdot۳}+\frac{۱}{۵\cdot۳^{۲}}-\frac{۱}{۷\cdot۳^{۳}}+\dots+\frac{(-۱)^{n-۱}}{(۲n-۱)۳^{n+۱}}+\dots$

۲۵۸۶. $\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲^{۲}}+\frac{۵}{۲^{۳}}+\dots+\frac{۲n-۱}{۲^{n}}+\dots$

۳. رشتهٔ تیلور

۱°. بسط تابع به رشتهٔ توانی. اگر تابع $f(x)$ در ناحیه‌ای مثل $|x-a|<R$ مجاور نقطهٔ a به رشتهٔ توانی برحسب توانهای $x-a$ قابل بسط باشد، این رشته (رشتهٔ تیلور) به‌اینصورت خواهد بود:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^{۲}+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n}+\dots \qquad (۱)$$

در حالت $a=۰$، رشتهٔ تیلور را رشتهٔ ماکلورن هم گویند. تساوی (۱) به ازای $|x-a|<R$ وقتی صحیح است که جملهٔ متمم رشتهٔ تیلور به‌ازای $n\to\infty$

$$R_n(x)=f(x)-\left[f(a)+\sum_{k=۱}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}\right]\to ۰$$

برای برآورد جملهٔ متمم می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد (صورت لاگرانژ):

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+۱}}{(n+۱)!}f^{(n+۱)}[a+\theta(x-a)] \qquad (۰<\theta<۱) \qquad (۲)$$

مثال ۱. تابع $f(x)=chx$ را به رشته‌ای برحسب توانهای x بسط دهید.

حل. مشتقهای متوالی تابع مفروض را بدست می‌آوریم:

$$f(x)=chx\ ,\ f'(x)=shx\ ,\ f''(x)=chx,\ f'''(x)=shx,\dots$$

وبطورکلی با شرط زوج بودن n: $f^{(n)}(x)=chx$ وبا شرط فرد بودن x: $f^{(n)}(x)=shx$.

که با فرض $a=\text{۰}$ بدست می‌آید: $f(\text{۰})=\text{۱}$ ، $f'(\text{۰})=\text{۰}$ ، $f''(\text{۰})=\text{۱}$ ،... واگر n زوج باشد: $f^{(n)}(\text{۰})=\text{۱}$ و اگر n فرد باشد: $f^{(n)}(\text{۰})=\text{۰}$. از آنجا بنا بررابطهٔ (۱) داریم:

$$chx=\text{۱}+\frac{x^{\text{۲}}}{\text{۲}!}+\frac{x^{\text{۴}}}{\text{۴}!}+\dots+\frac{x^{\text{۲}n}}{(\text{۲}n)!}+\dots \qquad (\text{۳})$$

برای تعیین فاصلهٔ تقارب رشتهٔ (۳) ازنشانهٔ دالامبر استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{\text{۲}n+\text{۲}}}{(\text{۲}n+\text{۲})!}:\frac{x^{\text{۲}n}}{(\text{۲}n)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\text{۲}}}{(\text{۲}n+\text{۱})(\text{۲}n+\text{۲})}=\text{۰}$$

که برای هرمقدار x صحیح است. بنابراین رشتهٔ مفروض در فاصلهٔ $-\infty<x<\infty$ متقارب است. جملهٔ متمم بنابررابطهٔ (۲) به اینصورت است:

با شرط فرد بودن n: $$R_n(x)=\frac{x^{n+\text{۱}}}{(n+\text{۱})!}ch\theta x$$

با شرط زوج بودن n: $$R_n(x)=\frac{x^{n+\text{۱}}}{(n+\text{۱})!}sh\theta x$$

وچون $\text{۰}<\theta<\text{۱}$ است، بنابراین

$$|ch\theta x|=\frac{e^{\theta x}+e^{-\theta x}}{\text{۲}}\leqslant e^{|x|}\ ,\ |sh\theta x|=\left|\frac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{\text{۲}}\right|\leqslant e^{|x|}$$

وبنابراین: $|R_n(x)|\leqslant\frac{|x|^{n+\text{۱}}}{(n+\text{۱})!}e^{|x|}$. رشتهٔ با جملهٔعمومی $\frac{|x|^n}{n!}$ به‌ازای هرمقدار x متقارب است (این نتیجه را به‌کمك نشانهٔ دالامبرهم می‌توان بدست آورد)، به‌این‌ترتیب بنابرنشانهٔلازم تقارب داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

وبنابراین $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (به‌ازای هر مقدار x). این نتیجه‌گیری به آن معناست که مجموع رشتهٔ (۳) برای هر مقدار x مساوی chx است.

۲۰. روشهای بسط به رشتهٔ توانی. بااستفاده ازقاعدهٔ بسط داریم:

$$\text{I.}\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\text{II.}\qquad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$
$$(-\infty < x < \infty)$$

$$\text{III.}\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$
$$(-\infty < x < \infty)$$

$$\text{IV.}\qquad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1)^*$$

$$\text{V.}\qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$$
$$(-1 < x \leqslant 1)$$

در بسیاری موارد از رابطهٔ مجموع درتصاعد هندسی هم می‌توان برای بسط تابع مفروض بــه رشتهٔ توانی استفاده کرد، ضمناً دراین مورد احتیاج به بررسی جملهٔ متمم نخواهد بود. گاهی هم برای بسط می‌توان از مشتق‌گیری یا دیفرانسیل‌گیری جمله به جمله استفاده کرد. بــرای بسط

---

*) در مرزهای فاصلهٔ تقارب (یعنی به‌ازای $x=-1$ و $x=1$) تجزیهٔ IV به اینصورت درمی‌آید: وقتی $m \geqslant 0$ باشد، درهر دو مرز متقارب مطلق است؛ وقتی $-1 < m < 0$ باشد، به‌ازای $x=-1$ متباعد و به‌ازای $x=1$ متقــارب مشروط است؛ وقتــی $m \leqslant -1$ باشد، در هر دو مرز متباعد است.

کسرهای گویا به رشته‌های توانی بهتراست آنها را به کسرهای ساده‌تر تبدیل کنیم.

مثال ۲. تابع زیر را برحسب توانهای x* بسط دهید:

$$f(x)=\frac{۳}{(۱-x)(۱+۲x)}$$

حل. تابع را به کسرهای ساده‌تر تبدیل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$f(x)=\frac{۱}{۱-x}+\frac{۲}{۱+۲x}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{۱}{۱-x}=۱+x+x^{۲}+\cdots=\sum_{n=۰}^{\infty}x^{n} \qquad (۴)$$

$$\frac{۱}{۱+۲x}=۱-۲x+(۲x)^{۲}-\cdots=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}۲^{n}x^{n} \qquad (۵)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}x^{n}+۲\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}۲^{n}x^{n}=\sum_{n=۰}^{\infty}[۱+(-۱)^{n}۲^{n+۱}]x^{n} \qquad (۶)$$

تصاعدهای هندسی (۴) و (۵) بترتیب با شرطهای $|x|<۱$ و $|x|<\frac{۱}{۲}$ متقاربند، بنابراین رابطهٔ (۶) به‌ازای $|x|<\frac{۱}{۲}$، یعنی $-\frac{۱}{۲}<x<\frac{۱}{۲}$ صحیح‌است.

۰۳. رشتهٔ تیلور برای توابع دومتغیره. بسط تابع دو متغیرهٔ $f(x,y)$ به رشتهٔ تیلور در مجاورت نقطهٔ (a,b) به‌اینصورت است:

---

*) چه در مورد این مثال و چه بعد از این همه جا منظور توانهای مثبت و صحیح x است.

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(a,b)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(a,b)+\cdots+\frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a,b)+\cdots \qquad (۷)$$

در حالتی که $a=b=0$ باشد، رشتهٔ تیلور را رشتهٔ ماکلورن هم گویند. معنای آنچه‌که در رابطهٔ (۷) داده شده چنین است:

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(a,b)=\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(x-a)+$$

$$+\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(y-b);$$

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(a,b)=\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(x-a)^2+$$

$$+2\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(x-a)(y-b)+\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(y-b)^2;\cdots$$

بسط (۷) وقتی برقراراست که جملهٔ متمم به‌ازای $x\to\infty$ به‌سمت صفر میل کند:

$$R_n(x,y)=f(x,y)-\left\{f(a,b)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(a,b)\right\}\to 0$$

جملهٔ متمم را به‌صورت زیر هم می‌توان نشان داد:

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1}f(x,y)\Bigg|_{\substack{x=a+\theta(x-a)\\y=b+\theta(y-b)}}$$

که در آن $0<\theta<1$.

توابع زیر را برحسب توانهای مثبت و صحیح x بسط دهید، تقارب رشته‌های بدست‌آمده را معین‌کنید و وضع جملهٔ متمم را بررسی نمائید:

۲۵۸۷. a^x $(a>0)$.

۲۵۸۸. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

۲۵۸۹. $\cos(x+a)$.

۲۵۹۰. $\sin^2 x$.

۲۵۹۱*. $\ln(2+x)$.

با استفاده از بسطهای اساسی I تا V وتصاعد هندسی، بسط توابع زیر را برحسب توانهای x بنویسید و فاصلهٔ تقارب رشته‌ها را معین‌کنید:

۲۵۹۲. $\frac{2x-3}{(x-1)^2}$.

۲۵۹۳. $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$.

۲۵۹۴. xe^{-2x}.

۲۵۹۵. e^{x^2}.

۲۵۹۶. $\operatorname{sh}x$.

۲۵۹۷. $\cos 2x$.

۲۵۹۸. $\cos^2 x$.

۲۵۹۹. $\sin 3x + x\cos 3x$.

۲۶۰۰. $\frac{x}{9+x^2}$.

۲۶۰۱. $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

۲۶۰۲. $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

۲۶۰۳. $\ln(1+x-2x^2)$.

با استفاده از دیفرانسیل‌گیری، توابع زیر را برحسب توانهای x بسط دهید وفاصله‌ای راکه در مورد آن این بسط وجود دارد، معین‌کنید:

۲۶۰۴. $(1+x)\ln(1+x)$.

۲۶۰۵. $\operatorname{arctg}x$.

۲۶۰۶. $\arcsin x$.

۲۶۰۷. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

با روشهای مختلف توابع زیر را برحسب توانهای x بسط دهید و درهرمورد فاصله‌ای را که در مورد آن این بسط وجود دارد، معین‌کنید:

۲۶۰۸. $\sin^2 x\cos^2 x$.

۲۶۰۹. $(1+x)e^{-x}$.

۲۶۱۰. $(1+e^x)^3$.

۲۶۱۱. $\sqrt[3]{8+x}$.

۲۶۱۲. $\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6}$.

۲۶۱۳. ch^3x.

۲۶۱۴. $\dfrac{1}{4-x^4}$.

۲۶۱۵. $ln(x^2+3x+2)$.

۲۶۱۶. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx$.

۲۶۱۷. $\displaystyle\int_0^x e^{-x^2}dx$.

۲۶۱۸. $\displaystyle\int_0^x \frac{ln(1+x)dx}{x}$.

۲۶۱۹. $\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

سه جملهٔ اول مخالف صفر را از رشتهٔ بسط هریك از توابع زیر برحسب توانهای x بنویسید:

۲۶۲۰. tgx.

۲۶۲۱. thx.

۲۶۲۲. $e^{\cos x}$.

۲۶۲۳. $\sec x$.

۲۶۲۴. $ln\cos x$.

۲۶۲۵. $e^x \sin x$.

۲۶۲۶*. ثابت کنید که برای محاسبهٔ طول محیط بیضی می‌توان از رابطهٔ تقریبی زیر استفاده کرد:

$$s\approx 2\pi a\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)$$

که در آن ε عبارتست ازخروج ازمرکز و $2a$ طول قطر بزرگتر بیضی.

۲۶۲۷. نخ وزینی تحت تاثیر وزن خود به‌شکل منحنی $y=ach\dfrac{x}{a}$ می‌ایستد، ضمناً $a=\dfrac{H}{q}$ که در آن H عبارتست از کشش افقی نخ و q وزن واحد طول. ثابت کنید که برای مقادیر کوچك x، با دقت تا مقدار ردیف x^4، می‌توان قبول کرد که نخ به صورت سهمی $y=a+\dfrac{x^2}{2a}$ می‌ایستد.

۲۶۲۸. تابع x^3-2x^2-5x-2 را به رشته‌ای برحسب توانهای $x+4$ بسط دهید.

۲۶۲۹. $f(x)=5x^3-4x^2-3x+2$. مطلوبست بسط $f(x+h)$ به رشته‌ای برحسب توانهای h.

۲۶۳۰. lnx را برحسب توانهای $x-1$ بسط دهید.

۲۶۳۱. $\frac{1}{x}$ را برحسب توانهای $x-1$ بسط دهید.

۲۶۳۲. $\frac{1}{x^2}$ را برحسب توانهای $x+1$ بسط دهید.

۲۶۳۳. $\frac{1}{x^2+3x+2}$ را به رشته‌ای برحسب توانهای $x+4$ بسط‌دهید.

۲۶۳۴. $\frac{1}{x^2+4x+7}$ را به رشته‌ای برحسب توانهای $x+2$ بسط‌دهید.

۲۶۳۵. e^x را برحسب توانهای $x+2$ بسط دهید.

۲۶۳۶. $\sqrt{x}$ را به رشته‌ای برحسب توانهای $x-4$ بسط دهید.

۲۶۳۷. مطلوبست بسط $cosx$ برحسب توانهای $x-\frac{\pi}{2}$.

۲۶۳۸. مطلوبست بسط cos^2x برحسب توانهای $x-\frac{\pi}{4}$.

۲۶۳۹*. مطلوبست بسط lnx برحسب توانهای $\frac{1-x}{1+x}$.

۲۶۴۰. مطلوبست بسط $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ برحسب توانهای $\frac{x}{1+x}$.

۲۶۴۱. اگر مقدار تقریبی e را به‌اینصورت بگیریم:

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$$

میزان خطای حاصل را پیدا کنید.

۲۶۴۲. عدد $\frac{\pi}{4}$ با چه دقتی بدست می‌آید، اگر از پنج جملهٔ اول رشتهٔ

$$arctg x = x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \cdots$$

به‌ازای $x = ۱$ استفاده کنیم؟

۲۶۴۳*. با استفاده از بسط تابع $arcsin x$ (مسئلهٔ **۲۶۰۶** را ببینید) برحسب توانهای x، مقدار عدد $\frac{\pi}{۶}$ را تا ۰٫۰۰۱ تقریب بدست آورید.

۲۶۴۴. از رشتهٔ

$$cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \cdots$$

چند جمله انتخاب کنیم تا مقدار $cos ۱۸^\circ$ بادقت ۰٫۰۰۱ بدست آید؟

۲۶۴۵. از رشتهٔ

$$sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \cdots$$

چند جمله انتخاب کنیم تا مقدار $sin ۱۵^\circ$ با دقت ۰٫۰۰۰۱ بدست آید؟

۲۶۴۶. چند جمله از رشتهٔ

$$e^x = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots$$

انتخاب کنیم تا مقدار e با دقت ۰٫۰۰۰۱ بدست آید؟

۲۶۴۷. چند جمله از رشتهٔ

$$ln(۱ + x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \cdots$$

انتخاب کنیم تا $ln ۲$ با دقت ۰٫۰۱ یا ۰٫۰۰۱ بدست آید؟

۲۶۴۸. $\sqrt[۳]{۷}$ را به کمك بسط تابع $\sqrt[۳]{۸ + x}$ برحسب توانهای x تا ۰٫۰۱ تقریب محاسبه کنید.

۲۶۴۹. منشاء رابطهٔ تقریبی $\sqrt{a^۲ + x} \approx a + \frac{x}{۲a}$ $(a > ۰)$ را پیدا کنید و به کمك آن با فرض $a = ۵$ مقدار $\sqrt{۲۳}$ را محاسبه و خطای حاصل از این محاسبه را معین کنید.

۲۶۵۰. $\sqrt[۴]{۱۹}$ را تا ۰٫۰۰۱ تقریب محاسبه کنید.

۲۶۵۱. به‌ازای چه مقادیری از x، رابطهٔ تقریبی

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

دارای خطائی است که از ۰/۰۱ یا ۰/۰۰۱ یا ۰/۰۰۰۱ تجاوز نمی‌کند؟

۲۶۵۲. به‌ازای چه مقادیری از x، خطای ناشی از رابطهٔ تقریبی

$$\sin x \approx x$$

از ۰/۰۱ یا ۰/۰۰۱ تجاوز نمی‌کند؟

۲۶۵۳. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ را تا ۰/۰۰۰۱ تقریب محاسبه کنید.

۲۶۵۴. مقدار $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ را تا ۰/۰۰۰۱ تقریب محاسبه کنید.

۲۶۵۵. مطلوبست محاسبهٔ $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx$ تا ۰/۰۰۱ تقریب.

۲۶۵۶. مطلوبست محاسبهٔ $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ تا ۰/۰۰۱ تقریب.

۲۶۵۷. مطلوبست محاسبهٔ $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+x^3}\, dx$ تا ۰/۰۰۰۱ تقریب.

۲۶۵۸. مطلوبست محاسبهٔ $\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^x dx$ تا ۰/۰۰۱ تقریب.

۲۶۵۹. تابع $\cos(x-y)$ را برحسب توانهای x و y بسط دهید، حوزهٔ تقارب رشتهٔ بدست‌آمده را معین وجملهٔ متمم آنرا بررسی نمائید.

بسط توابع زیر را برحسب توانهای x و y بنویسید و حوزهٔ تقارب رشته‌ها را معین کنید:

۲۶۶۰. $\sin x \cdot \sin y$ · ۲۶۶۱. $\sin(x^2+y^2)$ ·

۲۶۶۲*. $\dfrac{1-x-y}{1+x-y}$ · ۲۶۶۳*. $\ln(1-x-y+xy)$ ·

۲۶۶۴*. $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$ ·

۲۶۶۵. اگر داشته باشیم: $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$. مطلوبست بسط تابع $f(x+h,y+k)$ برحسب توانهای h و k.

۲۶۶۶. $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$. مطلوبست نمو این تابع ضمن عبور از $x=1$، $y=2$ به‌ازای $x=1+h$ ، $y=2+k$.

۲۶۶۷. بسط تابع e^{x+y} را برحسب توانهای $x-2$ و $y+2$ پیدا کنید.

۲۶۶۸. تابع $\sin(x+y)$ را برحسب توانهای x و $y-\frac{\pi}{2}$ بسط دهید.

سه یا چهار جملهٔ اول بسط توابع زیر را برحسب توانهای x و y بنویسید:

۲۶۶۹. $e^x\cos y$ · ۲۶۷۰. $(1+x)^{1+y}$ ·

۴. رشتهٔ فوریه

۱°. **قضیهٔ دیریکله.** گویند تابع $f(x)$ در فاصلهٔ (a,b) در شرط دیریکله صدق می‌کند وقتی که در این فاصله:

۱) تابع بطور یکنواخت محدود باشد، یعنی به‌ازای $a<x<b$ داشته باشیم: $|f(x)|\leqslant M$، که در آن M مقدار ثابتی است؛

۲) تابع دارای تعداد محدودی نقاط انفصال نوع اول باشد (یعنی تابع درهر نقطهٔ انفصال ξ، دارای حد چپ محدود $f(\xi-0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\xi-\varepsilon)$ و حد راست محدود $f(\xi+0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\xi+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ باشد.

۳) تابع دارای تعداد معینی اکستره مم محدود باشد.

طبق قضیهٔ دیریکله، وقتی که تابع $f(x)$ درفاصلهٔ $(-\pi, \pi)$ با شرایط دیریکله بسازد، درهر نقطهٔ x ازاین فاصله، که در آن $f(x)$ متصل است، می‌توان آنرا به‌صورت رشتهٔ فوریه بسط داد:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots +$$
$$+ a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots \qquad (1)$$

که در آن ضریبهای فوریه a_n و b_n از رابطهٔ زیر بدست می‌آیند:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

اگر نقطهٔ x در فاصلهٔ $(-\pi, \pi)$، نقطهٔ انفصال تابع $f(x)$ باشد، مجموع $S(x)$ رشتهٔ فوریه برابر است با واسطهٔ حسابی حدهای چپ و راست تابع در این نقطه:

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$$

و در دوانتهای فاصله، یعنی نقطه‌های $x = -\pi$ و $x = \pi$:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)]$$

۲°. رشتهٔ فوریهٔ غیرکامل. اگر تابع $f(x)$ زوج باشد، یعنی داشته باشیم: $f(-x) = f(x)$ ، دراینصورت در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,2\cdots)$$

واگر تابع $f(x)$ فرد باشد، یعنی داشته باشیم: $f(-x)=-f(x)$ ، دراینصورت داریم:

$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \ (n=1,2,\cdots)$$

با توجه به‌آنچه‌گفتیم، تابعی راکه در فاصلهٔ $(0,\pi)$ داده شده باشد، یا به‌عنوان تابع زوج ویا به‌عنوان تابع فرد می‌توان درفاصلهٔ $(-\pi,0)$ امتداد داد، بنابراین در صورت تمایل می‌توان آنرا در فاصلهٔ $(0,\pi)$ به‌صورت رشتهٔ غیرکامل فوریه برحسب سینوس یاکسینوس مضربهای قوس بسط داد.

۳°. رشتهٔ فوریه با تناوب $2l$. اگرتابع $f(x)$ باشرط دیریکله درفاصلهٔ $(-l,l)$ به‌طول $2l$ بسازد، دراینصورت درنقطه‌های پیوستگی تابع، که دراین فاصله باشد، در بسط زیر صدق‌می‌کند:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}+a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}+\cdots$$

$$\cdots+a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}+\cdots$$

که در آن داریم:

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos nx dx & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin nx dx & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \quad (2)$$

در نقطه‌های انفصال تابع $f(x)$ و در دو انتهای $x=\pm l$، مجموع رشتهٔ فوریه شبیه حالتی است که درمورد فاصلهٔ $(-\pi,\pi)$ شرح دادیم.

در حالت بسط تابع $f(x)$ به رشتهٔ فوریه در فاصلهٔ دلخواه $(a,a+2l)$ به‌طول $2l$، باید حدود انتگرال‌گیری رابطه‌های (۲) را به‌ترتیب به $a+2l, a$ تغییر داد.

توابع زیر را در فاصلهٔ $(-\pi$ و $\pi)$ به رشتهٔ فوریه بسط دهید، مجموع رشته را درنقاط انفصال و در انتهای فاصله ($x=-\pi$ و $x=\pi$) معین‌کنید، منحنی خود تابع و مجموع رشتهٔ متناظر آنرا (حتی در خارج فاصلهٔ (π و $-\pi$)) رسم‌کنید:

۲۶۷۱. $f(x)=\begin{cases} c_1 & (-\pi<x\leqslant 0) \\ c_2 & (0<x<\pi) \end{cases}$، حالت خاص $c_1=-1$، $c_2=1$ را بررسی کنید.

۲۶۷۲. $f(x)=\begin{cases} ax & (-\pi<x\leqslant 0) \\ bx & (0\leqslant x<\pi) \end{cases}$. حالتهای خاص زیر را هم بررسی‌کنید:

۱) $a=b=1$؛ ۲) $a=-1$، $b=1$؛ ۳) $a=0$، $b=1$؛ ۴) $a=1$، $b=0$.

۲۶۷۳. $f(x)=x^2$.　　۲۶۷۴. $f(x)=e^{ax}$.

۲۶۷۵. $f(x)=\sin ax$.　　۲۶۷۶. $f(x)=\cos ax$.

۲۶۷۷. $f(x)=\operatorname{sh} ax$.　　۲۶۷۸. $f(x)=\operatorname{ch} ax$.

۲۶۷۹. تابع $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ را درفاصلهٔ $(0,2\pi)$ به رشتهٔ فوریه بسط دهید.

۲۶۸۰. تابع $f(x)=\frac{\pi}{4}$ را درفاصلهٔ $(0,\pi)$ به‌سینوس مضربهای قوس بسط‌دهید. از بسطی‌که بدست می‌آورید برای محاسبهٔ مجموع رشته‌های عددی زیر استفاده‌کنید:

$a)\quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots;$　　$b)\quad 1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots;$

$c)\quad 1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\cdots$

توابع زیر را در فاصلهٔ $(\pi\ و\ 0)$ به‌رشتهٔ غیرکامل فوریه بسط دهید، $a)$ برحسب سینوس‌مضربهای قوس، $d)$ برحسب کسینوس مضربهای قوس. منحنی تابع ومنحنی مجموع رشتهٔ متناظر آنها را درحوزه‌ای که وجود دارند، رسم کنید:

۲۶۸۱. $f(x)=x$. به‌کمك بسطی که بدست می‌آورید، مجموع رشتهٔ زیر را محاسبه کنید:

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

۲۶۸۲. $f(x)=x^2$. به‌کمك بسطی که بدست می‌آورید، مجموعهای زیر را محاسبه کنید:

$$1)\quad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots;\qquad 2)\quad 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$$

۲۶۸۳. $f(x)=e^{ax}$.

۲۶۸۴. $f(x)=\begin{cases}1 & \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)\\ 0 & \left(\frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi\right)\end{cases}$.

۲۶۸۵. $f(x)=\begin{cases}x & \left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\\ \pi-x & \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right)\end{cases}$.

توابع زیر را در فاصلهٔ $(\pi\ و\ 0)$ برحسب سینوس مضربهای قوس بسط دهید:

۲۶۸۶. $f(x)=\begin{cases}x & \left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\\ 0 & \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right)\end{cases}$.

۲۶۸۷. $f(x)=x(\pi-x)$.

۲۶۸۸. $f(x)=\sin\frac{x}{۲}$.

توابع زیر را در فاصلهٔ $(\circ,\pi)$ برحسب کسینوس مضربهای قوس بسط دهید:

۲۶۸۹. $f(x)=\begin{cases} ۱ & (\circ<x\leqslant h) \\ \circ & (h<x<\pi) \end{cases}$.

۲۶۹۰. $f(x)=\begin{cases} ۱-\frac{x}{۲h} & (\circ<x\leqslant ۲h) \\ \circ & (۲h<x<\pi) \end{cases}$.

۲۶۹۱. $f(x)=x\sin x$.

۲۶۹۲. $f(x)=\begin{cases} \cos x & \left(\circ<x\leqslant\frac{\pi}{۲}\right) \\ -\cos x & \left(\frac{\pi}{۲}<x<\pi\right) \end{cases}$.

۲۶۹۳. با استفاده ازبسط توابع x و $x^۲$ درفاصلهٔ $(\circ,\pi)$ برحسب کسینوس مضربهای قوس (مسئله‌های ۲۶۸۱ و ۲۶۸۲ را ببینید)، تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^۲}=\frac{۳x^۲-۶\pi x+۲\pi^۲}{۱۲}\qquad(\circ\leqslant x\leqslant\pi)$$

۲۶۹۴**. اگر تابع $f(x)$ زوج باشد وضمنا داشته باشیم:

$$f\left(\frac{\pi}{۲}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)$$

ثابت‌کنید رشتهٔ فوریهٔ آن درفاصلهٔ $(-\pi,\pi)$ برحسب کسینوس مضربهای فرد قوس خواهد بود؛ واگر تابع $f(x)$ فرد باشد و $f\left(\frac{\pi}{۲}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)$ ، ثابت‌کنید بسط آن در فاصلهٔ $(-\pi,\pi)$ برحسب سینوس مضربهای فرد قوس است.

توابع زیر را در فاصله‌های مربوطه به رشتهٔ فوریه بسط دهید:

۲۶۹۵. $f(x)=|x|$ $\qquad(-۱<x<۱)$.

۲۶۹۶. $f(x)=۲x$ $\qquad(\circ<x<۱)$.

۲۶۹۷. $f(x)=e^x$ $(-1<x<1)$.

۲۶۹۸. $f(x)=10-x$ $(5<x<15)$.

توابع زیر را درفاصله‌های مربوطه به رشتهٔ غیرکامل فوریه بسط دهید: a) برحسب سینـوس مضربهای قوس؛ b) برحسب کسینوس مضربهای قوس:

۲۶۹۹. $f(x)=1$ $(0<x<1)$.

۲۷۰۰. $f(x)=x$ $(0<x<b)$.

۲۷۰۱. $f(x)=x^2$ $(0<x<2\pi)$.

۲۷۰۲. $$f(x)=\begin{cases} x & (0<x\leqslant 1) \\ 2-x & (1<x<2) \end{cases}.$$

۲۷۰۳. تابع زیر را برحسب کسینوس مضربهای قوس در فاصلهٔ $(\frac{3}{2},3)$ بسط‌دهید:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (\frac{3}{2}<x\leqslant 2) \\ 3-x & (2<x<3) \end{cases}.$$

فصل نهم

معادله‌های دیفرانسیلی

۱. امتحان جواب. تشکیل معادله‌های دیفرانسیلی خانوادهٔ منحنی‌ها. شرطهای اولیه.

۱°. مفهومهای اولیه. معادلهٔ به صورت

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

را، که در آن $y = y(x)$ تابع مجهول است، معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ n گویند. هر تابع $y = \varphi(x)$ که معادلهٔ (۱) را به‌اتحاد تبدیل کند، جواب این معادله‌ومنحنی این تابع را منحنی انتگرالی گویند. اگـرجواب به‌صورت ضمنی $\Phi(x,y) = 0$ داده شده باشد، آنرا معمولا یك انتگرال گویند.

مثال ۱. تحقیق‌کنید که تابع $y = \sin x$ جوابی ازمعادلهٔ زیر است:

$$y'' + y = 0$$

حل. داریم:

$$y' = \cos x,\ \ y'' = -\sin x$$

وبنابراین:

$$y'' + y = -\sin x + \sin x = 0$$

انتگرال

$$\Phi(x,y,C_1\cdots,C_n)=0 \qquad (۲)$$

از معادلهٔ دیفرانسیلی (۱)، که شامل n مقدارثابت مستقل C_1،...،C_n و درحوزهٔ مفروض هم‌ارز معادلهٔ (۱) است، انتگرال کلی این معادله در حوزهٔ مربوطه گویند. با قرار دادن مقادیر معینی بجای C_1،...،C_n درمعادلهٔ (۲)، انتگرال خاص معادلهٔ (۱) بدست می‌آید.

برعکس، با دردست داشتن خانوادهٔ منحنی‌های (۲) و حذف پارامترهای C_1،...،C_n در دستگاه معادلات

$$\Phi=0\ ,\ \frac{d\Phi}{dx}=0,\ \cdots,\ \frac{d^n\Phi}{dx}=0$$

درحالت کلی، معادلهٔ دیفرانسیلی (۱) بدست می‌آید که انتگرال کلی آن درحوزهٔ مربوطه همان رابطه (۲) است.

مثال ۲. مطلوبست معادلهٔ دیفرانسیلی خانوادهٔ سهمی‌های

$$y=C_1(x-C_2)^2 \qquad (۳)$$

حل. ازمعادلهٔ (۳) دوبارمشتق می‌گیریم، بدست می‌آید:

$$y'=2C_1(x-C_2)\ \text{و}\ y''=2C_1 \qquad (۴)$$

بین معادله‌های (۳) و (۴) پارامترهای C_1وC_2 را حذف می‌کنیم، معادلهٔ دیفرانسیلی موردنظر بدست می‌آید:

$$2yy''=y'^2$$

وبسادگی می‌توان تحقیق کردکه تابع (۳) این معادله را به‌اتحاد تبدیل می‌کند.

۲°. شرطهای اولیه. اگر برای‌جواب خاص مورد نظر$y=y(x)$ازمعادلهٔ دیفرانسیلی.

$$y^{(n)}=f\,(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}\,) \qquad (۵)$$

شرطهای اولیهٔ زیرداده شده باشد (مسئلهٔ‌کوشی)

$$y(x_0)=y_0\ ,\ y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0{}^{(n-1)}$$

وجواب کلی معادلهٔ (۵) معلوم باشد:

$$y=\varphi(x,C_1,\cdots,C_n)$$

دراینصورت مقادیر ثابت دلخواه C_1،...،C_n بشرطی‌معین می‌شوند که از دستگاه معادله‌های زیر بدست آیند:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, \cdots, C_n) \\ y_0{}' = \varphi'(x_0, C_1, \cdots, C_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_0{}^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \cdots, C_n) \end{cases}$$

مثال ۳. مطلوبست منحنی خانوادهٔ

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} \qquad (7)$$

بشرطی‌که $y(0) = 1$ و $y'(0) = -2$ باشد.

حل. داریم:

$$y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x} \qquad (8)$$

در رابطه‌های (۷) و (۸) مقدار $x = 0$ را قرار می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$1 = C_1 + C_2 \; ; \; -2 = C_1 - 2C_2$$

وازآنجا

$$C_1 = 0 \, , \, C_2 = 1$$

وبنابراین

$$y = e^{-2x}$$

ببینید آیا تابع مربوطه جوابی ازمعادلهٔ دیفرانسیلی است:

۲۷۰۴. $xy' = 2y$ ، $y = 5x^2$.

۲۷۰۵. $y'' = x^2 + y^2$ ، $y = \dfrac{1}{x}$.

۲۷۰۶. $(x+y)dx + xdy = 0$ ، $y = \dfrac{c^2 - x^2}{2x}$.

۲۷۰۷. $y'' + y = 0$ ، $y = 3\sin x - 4\cos x$.

۲۷۰۸. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ ، $x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$.

۲۷۰۹. $y'' - 2y' + y = 0$ ، a) $y = xe^x$ ، b) $y = x^2 e^x$.

۲۷۱۰. $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0$ ، $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

ثابت‌کنید که برای معادله‌های دیفرانسیلی مفروض ، رابطه‌های مربوطه، انتگرالهای آنها هستند:

۲۷۱۱. $(x - 2y)y' = 2x - y$ ، $x^2 - xy + y^2 = C^2$.

۲۷۱۲. $(x-y+1)y'=1$، $y=x+Ce^{y}$.

۲۷۱۳. $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$، $y=ln(xy)$.

از هر خانوادهٔ منحنی‌های زیر، معادلهٔ دیفرانسیلی را تشکیل دهید (C، C_1، C_2، C_3 ثابتهای دلخواه‌اند):

۲۷۱۴. $y=Cx$.

۲۷۱۵. $y=Cx^2$.

۲۷۱۶. $y^2=2Cx$.

۲۷۱۷. $x^2+y^2=C^2$.

۲۷۱۸. $y=Ce^{x}$.

۲۷۱۹. $x^3=C(x^2-y^2)$.

۲۷۲۰. $y^2+\frac{1}{x}=2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}$.

۲۷۲۱. $ln\frac{x}{y}=1+ay$

(a پارامتراست).

۲۷۲۲. $(y-y_0)^2=2px$

(y_0 و p پارامترند).

۲۷۲۳. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$.

۲۷۲۴. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

۲۷۲۵. $y=(C_1+C_2x)e^{x}+C_3$.

۲۷۲۶. معادلهٔ دیفرانسیلی همهٔ خطهای واقع برصفحهٔ XOY را تشکیل دهید.

۲۷۲۷. مطلوبست معادلهٔ دیفرانسیلی همهٔ سهمی‌های با محور قائم روی صفحهٔ XOY.

۲۷۲۸. معادلهٔ دیفرانسیلی همهٔ دایره‌های واقع برصفحهٔ XOY را بنویسید.

منحنی را پیداکنیدکه با شرط اولیهٔ مفروض، درخانوادهٔ منحنی‌ها صدق‌کند:

۲۷۲۹. $x^2-y^2=C$، $y(0)=5$.

۲۷۳۰. $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$، $y(0)=0$، $y'(0)=1$، $y'(0)=0$.

۲۷۳۱. $y=C_1\sin(x-C_2)$، $y(\pi)=1$، $y'(\pi)=0$.

۲۷۳۲. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3e^{2x}$، $y(0)=0$، $y'(0)=1$، $y''(0)=-2$.

۲. معادله های دیفرانسیلی مرتبهٔ اول

۱°. **صورت معادله‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ اول.** معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ اول که تابع y مجهول آنست و نسبت به y' حل شده است به‌اینصورت است:

$$y' = f(x,y) \qquad (۱)$$

که در آن $f(x,y)$ تابعی مفروض است. دربعضی موارد بهتراست که تابع مجهول را متغیر x به حساب بیاوریم ومعادلهٔ (۱) را بهاینصورت بنویسیم:

$$x' = g(x,y) \qquad (۱')$$

که در آن داریم: $g(x,y) = \dfrac{1}{f(x,y)}$.

با درنظرگرفتن $y' = \dfrac{dy}{dx}$ و $x' = \dfrac{dx}{dy}$، می‌توان معادله‌های دیفرانسیلی (۱) و (۱') را بهصورت متقارن نوشت:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (۲)$$

که در آن $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ توابعی مفروض اند.

جوابهای معادلهٔ (۲) عبارتند ازتوابعی بهصورت $y = \varphi(x)$ یا $x = \psi(y)$ که در این معادله صدق کنند. انتگرال کلی معادلهٔ (۱) یا (۱') یا معادلهٔ (۲) بهاینصورت است:

$$\Phi(x,y,C) = 0$$

که درآن C عبارتست ازمقدار ثابت دلخواه.

۲°. میدان امتدادها، مجموعهٔ امتدادهای

$$tg\alpha = f(x,y)$$

میدان امتدادهای معادلهٔ (۱) نامیده می‌شودکه معمولا با پاره‌خطهای کوتاه یا پیکانهائی که شیب α دارند نشان داده می‌شود.

منحنی‌های $f(x,y) = k$ که در نقاط آن شیب میدان مقدار ثابتی مساوی k دارد ایزوکلین‌ها نامیده می‌شوند. درموارد ساده بارسم ایزوکلینها ومیدان امتدادها، می‌توان به‌تقریب میدان منحنی‌های انتگرالی را رسم کرد، با توجه به‌اینکه منحنی‌های اخیر درهرنقطهٔ خود امتداد میدان مفروضی می‌باشند.

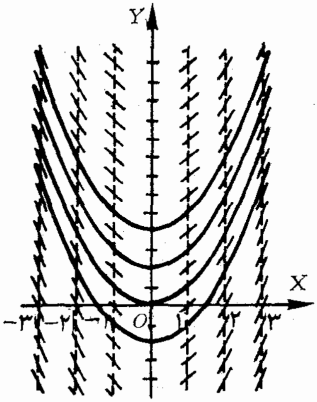
مثال ۱. با استفاده از روش ایزوکلینها، میدان منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ زیر را رسم کنید:

$$y' = x$$

حل. ایزوکلینهای $x = k$ (خطهای راست) و میدان امتدادها را رسم می‌کنیم و سپس میدان منحنی‌های انتگرالی را به تقریب بدست می‌آوریم (شکل ۱۰۵ را ببینید).

جواب کلی عبارتست از خانوادهٔ سهمی‌های

$$y = \frac{x^{۲}}{۲} + C$$



شکل ۱۰۵

با استفاده از روش ایزوکلینها میدان منحنی‌های انتگرالی را برای معادله‌های دیفرانسیلی زیر به تقریب رسم کنید:

۲۷۳۳. $y' = -x$.　　**۲۷۳۴.** $y' = -\frac{x}{y}$.

۲۷۳۵. $y' = ۱ + y^{۲}$.　　**۲۷۳۶.** $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

۲۷۳۷. $y' = x^{۲} + y^{۲}$.

۳°. قضیهٔ کوشی. اگر تابع $f(x,y)$ درحوزه‌ای مانند

$$U\{a<x<A\ ,\ b<y<B\}$$

پیوسته و دارای مشتق محدود $f_y'(x,y)$ باشد، ازهر نقطهٔ $(x_{۰},y_{۰})$ متعلق به U تنها یك منحنی انتگرالی $y = \varphi(x)$ از معادلهٔ (۱) می‌گذرد $(\varphi(x_{۰}) = y_{۰})$.

۴°. روش خطهای شکستهٔ اولر. برای رسم تقریبی منحنی انتگرالی معادلهٔ (۱) که از نقطهٔ مفروض $M_{۰}(x_{۰},y_{۰})$ می‌گذرد، این منحنی را به خط شکسته‌ای تبدیل می‌کنیم که درمورد رأسهای آن $M_i(x_i,y_i)$ داشته باشیم:

$$x_{i+۱} = x_i + \Delta x_i\ ;\ y_{i+۱} = y_i + \Delta y_i,$$
$$\Delta x_i = h,$$

$$\Delta y_i = h\,f(x_i, y_i) \quad (i = ۰, ۱, ۲ \ldots),$$

مثال ۲. با روش اولر برای معادلهٔ

$$y' = \frac{xy}{۲}$$

مطلوبست $y(۱)$، به‌شرطی که $y(۰) = ۱$ باشد ($h = ۰/۱$).

حل. این جدول را تشکیل می‌دهیم:

i	x_i	y_i	$\Delta y_i = \frac{x_i y_i}{۲۰}$
۰	۰	۱	۰
۱	۰/۱	۱	۰/۰۰۵
۲	۰/۲	۰/۰۰۵	۰/۰۱۰
۳	۰/۳	۰/۰۱۵	۰/۰۱۵
۴	۰/۴	۱/۰۳۰	۰/۰۲۱
۵	۰/۵	۰/۰۵۱	۰/۰۲۶
۶	۰/۶	۱/۰۷۷	۰/۰۳۲
۷	۰/۷	۱/۱۰۹	۰/۰۳۹
۸	۰/۸	۱/۱۴۸	۰/۰۴۶
۹	۰/۹	۱/۱۹۴	۰/۰۵۴
۱۰	۱/۰	۱/۲۴۸	

به‌این ترتیب $y(۱) = ۱/۲۴۸$. برای مقایسه، مقدار دقیق آنرا می‌دهیم:

$$y(۱) = e^{\frac{۱}{۴}} \approx ۱/۲۸۴ .$$

با استفاده از روش اولر، جوابهای خاص معادله‌های دیفرانسیلی مفروض را به‌ازای مقادیرداده شدهٔ x پیدا کنید:

۲۷۳۸. $y'=y$، $y(\circ)=۱$؛ مطلوبست $y(۱)$ $(h=\circ/۱)$.

۲۷۳۹. $y'=x+y$، $y(۱)=۱$؛ مطلوبست $y(۲)$ $(h=\circ/۱)$.

۲۷۴۰. $y'=-\frac{y}{۱+x}$، $y(\circ)=۲$؛ مطلوبست $y(۱)$ $(h=\circ/۱)$.

۲۷۴۱. $y'=y-\frac{۲x}{y}$، $y(\circ)=۱$؛ مطلوبست $y(۱)$ $(h=\circ/۲)$.

۳. معادله‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ اول با متغیرهای جداشدنی. مسیرهای قائم

۱°. معادله‌های نوع اول با متغیرهای جدا شدنی. معادلهٔ با متغیرهای جداشدنی به معادلهٔ نوع اول به‌صورت زیر گویند:

$$y'=f(x)g(y) \qquad (۱)$$

یا

$$X(x)Y(y)dx+X_۱(x)Y_۱(y)dy=\circ \qquad (۱')$$

دوطرف معادلهٔ (۱) رابر $g(y)$ تقسیم وسپس در dx ضرب می‌کنیم، دراینصورت بدست می‌آید: $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$. از آنجا با انتگرال‌گیری، انتگرال کلی معادلهٔ (۱) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C \qquad (۲)$$

بهمین ترتیب با تقسیم دوطرف معادلهٔ (۱) بر $X_۱(x)\,Y(y)$ وسپس انتگرال‌گیری، انتگرال کلی معادلهٔ $(۱')$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\int\frac{X(x)}{X_۱(x)}dx+\int\frac{Y_۱(y)}{Y(y)}dy=C \qquad (۲')$$

اگر به‌ازای مقداری مانند $y = y_\circ$ داشته باشیم: $g(y_\circ) = \circ$، تابع $y = y_\circ$ هم جوابی ازمعادلهٔ (۱) خواهد بود (واین مطلب را مستقیماً وبسادگی می‌توان ثابت‌کرد). بهمین ترتیب خطهای $x = a$, $y = b$ منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ ('۱) است به‌شرطی که a،b بترتیب ریشهٔ معادله‌های $X_1(x) = \circ$, $Y(y) = \circ$ باشند.

مثال ۱. این معادله را حل‌کنید:

$$y' = -\frac{y}{x} \qquad (۳)$$

ودرحالت خاص جوابی را پیدا کنیدکه در شرط اولیهٔ $y(1) = 2$ صدق کند.

حل. معادلهٔ (۳) را می‌توان به‌اینصورت نوشت:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

ازآنجا با جداکردن متغیرها، بدست می‌آید:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

وبنابراین

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1$$

که درآن مقدارثابت به‌صورت لگاریتمی انتخاب شده است. ازاینجاجواب کلی بدست‌می‌آید:

$$y = \frac{C}{x} \qquad (۴)$$

که درآن $C = \pm C_1$ است.

با تقسیم طرفین معادله بر y ممکن است جواب $y = \circ$ را ازدست داده باشیم، ولی این جواب از رابطهٔ (۴) به‌ازای $C = \circ$ بدست می‌آید.

با استفاده ازشرط اولیه $C = 2$ بدست می‌آید، وبنابراین جواب‌خاص موردنظرچنین‌است:

$$y = \frac{2}{x}$$

۲°. معادله‌های دیفرانسیلی که به‌معادله‌های با متغیرهای جداشدنی تبدیل می‌شوند. معادلهٔ دیفرانسیلی به‌صورت

$$y' = f(ax+by+c) \qquad (b \neq ۰)$$

به کمك تبدیل $u = ax+by+c$ به به‌صورت معادلهٔ (۱) تبدیل می‌شود(u تابع مجهول جدیداست)

۳°. مسیرهای قائم. مسیرهای قائم عبارت ازمنحنی‌هائی هستند که منحنی‌های خانوادهٔ مفروض $\Phi(x,y,a) = ۰$ (a پارامتراست) را به‌زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند. اگر $F(x,y,y') = ۰$ معادلهٔ دیفرانسیلی خانواده باشد، دراینصورت

$$F\left(x,y,-\frac{۱}{y'}\right) = ۰$$

معادلهٔ دیفرانسیلی مسیرهای قائم خواهدبود.

مثال ۲. مطلوبست مسیرهای قائم خانوادهٔ بیضویهای

$$x^۲ + ۲y^۲ = a^۲ \qquad (۵)$$

حل. از دوطرف معادلهٔ (۵) دیفرانسیل می‌گیریم، به معادلهٔ دیفرانسیلی زیر می‌رسیم:

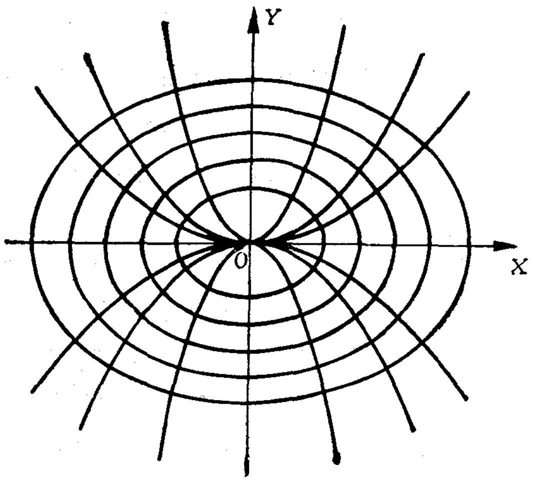
$$x + ۲yy' = ۰$$

ازآنجا، با تبدیل y' به $-\frac{۱}{y'}$ معادلهٔ دیفرانسیلی مسیرهای قائم بدست می‌آید:

$$x - \frac{۲y}{y'} = ۰ \quad \text{یا} \quad y' = \frac{۲y}{x}$$

که با انتگرال‌گیری $y = Cx^۲$ (خانوادهٔ سهمی‌ها) بدست می‌آید (شکل ۱۰۶).

۴°. تشکیل معادله‌های دیفرانسیلی. برای تشکیل معادله‌های دیفرانسیلی درمسئله‌های هندسی اغلب می‌توان از مفهوم هندسی مشتق، به‌عنوان تانژانت زاویه‌ای که مماس برمنحنی با جهت مثبت محور OX می‌سازد، استفاده کرد؛ این روش دربسیاری موارد رابطهٔ بین عرض y منحنی مجهول، طول آن x و y' را برقرار می‌کند، یعنی معادلهٔ دیفرانسیلی را بدست می‌دهد. درحالتهای دیگر (شماره‌های ۲۷۸۳، ۲۸۹۰، ۲۸۹۵ را ببینید) ازمفهوم هندسی انتگرال‌معین



شکل۱۰۶

به‌عنوان مساحت ذوزنقهٔ منحنی‌الضلع یا طول قوس استفاده می‌شود. ازشرط مسئله ساده‌ترین معادلهٔ انتگرالی بدست می‌آید (زیرا تابع مجهول زیرعلامت انتگرال قرار می‌گیرد)، ولی از طریق دیفرانسیل‌گرفتن ازدوطرف آن می‌توان به‌سادگی به‌معادلهٔ دیفرانسیلی رسید.

مثال ۳ . مطلوبست منحنی‌که ازنقطهٔ (۲و۳) می‌گذرد وبرای آن هر پاره خط مماس محدود به محورهای مختصات درنقطهٔ تماس نصف شود.

حل. نقطهٔ $M(x,y)$ را وسط مماس AB می‌گیریم که طبق شرط باید نقطهٔ تماس باشد (A وB به‌ترتیب‌محل تلاقی مماس با محورهای OY و OX هستند). بنا برشرط $OA=2y$ و$OB=2x$ می‌شود. ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی درنقطهٔ $M(x,y)$ برابر است با

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{OA}{OB}=-\frac{y}{x}$$

واین همان معادلهٔ دیفرانسیلی منحنی مورد نظراست. با تبدیل این معادله بدست می‌آید:

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$$

وبنابراین:

$$\ln x+\ln y=\ln C \Longrightarrow xy=C$$

که با استفاده ازشرط اولیه $C=6$ می‌شود ومنحنی مورد نظرعبارتست از هذلولی $xy=6$.

معادله‌های دیفرانسیلی زیر را حل کنید:

۲۷۴۲. $tgx \sin^2 y dx+\cos^2 x \cot g y dy=0$.

۲۷۴۳. $xy'-y=y^3$.

۲۷۴۴. $xyy'=1-x^2$.

۲۷۴۵. $y-xy'=a(1+x^2y')$.

۲۷۴۶. $3e^x tg y dx+(1-e^x)\sec^2 y dy=0$.

۲۷۴۷. $y' tg x=y$.

جوابهای خاص این معادله‌ها را با توجه به شرط اولیهٔ آنها، پیداکنید:

۲۷۴۸. $(1+e^x)\cdot y\cdot y'=e^x$؛ $y=1$ به‌ازای $x=0$.

۲۷۴۹. $(xy^2+x)dx+(x^2y-y)dy=0$؛ $y=1$ به‌ازای $x=0$.

۲۷۵۰. $y'\sin x=y\ln y$؛ $y=1$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{2}$.

با استفاده ازتغییر متغیرها، معادله‌های دیفرانسیلی زیر را حل کنید:

۲۷۵۱. $y'=(x+y)^2$.

۲۷۵۲. $y'=(8x+2y+1)^2$.

۲۷۵۳. $(2x+3y-1)dx+(4x+6y-5)dy=0$.

۲۷۵۴. $(2x-y)dx+(4x-2y+3)dy=0$.

در دومسئلهٔ ۲۷۵۵ و ۲۷۵۶ به مختصات قطبی بروید:

۲۷۵۵. $y'=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}$

۲۷۵۶. $(x^2+y^2)dx-xydy=0$.

۲۷۵۷*. مطلوبست معادلهٔ منحنی که درآن پاره خط مماس برابر باشد با فاصلهٔ نقطهٔ تماس ازمبداء مختصات.

۲۷۵۸. مطلوبست معادلهٔ منحنی که درآن پاره خط قائم درهر نقطهٔ منحنی کـه محدود

به محورهای مختصات است، درهمین نقطه نصف شود.

۲۷۵۹. مطلوبست معادلهٔ منحنی که درآن تحت مماس مساوی مقدار ثابت a باشد.

۲۷۶۰. مطلوبست معادلهٔ منحنی که در آن تحت مماس مساوی دوبرابر طول نقطهٔ تماس باشد.

۲۷۶۱*. مطلوبست معادلهٔ منحنی که درآن طول مرکز ثقل شکل مسطحه‌ای که محدود است به‌محورهای مختصات، خود منحنی وعرض هرنقطهٔ آن، مساوی با $\frac{۳}{۴}$ طول این‌نقطه باشد.

۲۷۶۲. مطلوبست معادلهٔ منحنی که ازنقطهٔ (۱,۳) می‌گذرد و برای‌آن پاره‌خط مماس بین نقطهٔ تماس ومحور OX درنقطهٔ تلاقی‌آن با محور OY نصف شود.

۲۷۶۳. معادلهٔ منحنی را پیدا کنید که از نقطهٔ (۰,۲) بگذرد و قطعه مماس بر آن که بین نقطهٔ تماس ومحور OY قرارگرفته است مساوی طول ثابت ۲ باشد.

مسیرهای قائم خانوادهٔ منحنی‌های زیر را پیداکنید (a پارامتر است)، خانواده و مسیرهای‌قائم را رسم‌کنید:

۲۷۶۴. $x^2+y^2=a^2$. ۲۷۶۵. $y^2=ax$.

۲۷۶۶. $xy=a$. ۲۷۶۷. $(x-a)^2+y^2=a^2$.

۴. معادله‌های دیفرانسیلی متجانس‌مرتبهٔ‌اول

۱°. **معادله‌های متجانس.** معادلهٔ دیفرانسیلی

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (۱)$$

را وقتی متجانس گویند که تابعهای $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ متجانس و از یك درجه باشند. معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

نوشت وبه‌کمك تغییر $y=xu$ (u تابع مجهول جدیدی است) به‌معادله‌ای با متغیرهای جدا-

شدنی تبدیل می‌شود. همچنین می‌توان تبدیل را با انتخاب $x = yu$ انجام داد.

مثال ۱. جواب کلی این معادله را پیدا کنید

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

حل. $y = ux$ می‌گیریم، دراینصورت $u + xu' = e^{u} + u$ یا

$$e^{-u} du = \frac{dx}{x}$$

که با انتگرال گرفتن بدست می‌آید: $u = -\ln\ln\frac{C}{x}$ و ازآنجا:

$$y = -x\ln\ln\frac{C}{x}$$

۲°. معادله‌هائی که قابل تبدیل به معادله‌های متجانس‌اند. اگر داشته باشیم:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad (2)$$

و $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$، دراینصورت اگر در معادلهٔ (۲) $x = u + \alpha$ و $y = v + \beta$ فرض کنیم، که در آن ثابتهای α و β از دستگاه معادله‌های زیر بدست می‌آید:

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \;,\; a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$$

به معادلهٔ دیفرانسیلی متجانسی نسبت به متغیرهای u و v می‌رسیم. در حالتی که $\delta = 0$ باشد، در معادلهٔ (۲) فرض می‌کنیم $a_1x + b_1y = u$ ومعادله‌ای با متغیرهای جداشدنی بدست می‌آوریم.

معادله‌های دیفرانسیلی زیر را حل کنید:

۲۷۶۸. $y' = \frac{y}{x} - 1$.

۲۷۶۹. $y' = -\frac{x+y}{x}$.

۲۷۷۰. $(x-y)y\,dx - x^2 dy = 0$.

۲۷۷۱. برای معادلهٔ $(x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$ مطلوبست خانوادهٔ منحنی‌های

انتگرالی، همچنین منحنی‌هائی راکه بترتیب ازنقطه‌های (۴,۰) و (۱,۱) می‌گذرند،جدا کنید.

۲۷۷۲. $ydx+(2\sqrt{yx}-x)dy=0$.

۲۷۷۳. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$.

۲۷۷۴. $(4x^2+3xy+y^2)dx+(4y^2+3xy+x^2)dy=0$.

۲۷۷۵. مطلوبست جواب خاص معادلهٔ $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0$ به‌شرطی که به‌ازای $x=2$ داشته باشیم: $y=1$.

این معادله‌ها را حل کنید:

۲۷۷۶. $(2x-y+4)dy+(x-2y+5)dx=0$

۲۷۷۷. $y'=\dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$. **۲۷۷۸.** $y'=\dfrac{x+2y+1}{2x+4y+3}$.

۲۷۷۹. مطلوبست معادلهٔ منحنی‌که ازنقطهٔ (۱,۰) بگذرد وقطعه‌ای از محور OY که به‌وسیلهٔمماس برمنحنی جدا می‌شود برابرشعاع حامل نقطه تماس باشد.

۲۷۸۰.** شکل آیینهٔ نورافکن چگونه باشد تا شعاعهای نوری که ازمنبع نورانــی منعکس می‌شود به‌صورت موازی باشد؟

۲۷۸۱. مطلوبست معادلهٔ منحنی‌که برای آن‌تحت مماس‌مساوی واسطهٔ حسابی‌مختصات نقطهٔ تماس باشد

۲۷۸۲. مطلوبست معادلهٔمنحنی‌که برای هرنقطهٔ آن‌پاره خطی‌که قائم روی‌محورهای مختصات جدا می‌کند برابربا فاصلهٔ این نقطه ازمبداء مختصات باشد.

۲۷۸۳.* مساحت بین‌یك منحنی، محور طول‌ودوعرض‌که یکی ازآنها ثابت‌ودیگری متغیراست، برابراست با نسبت مکعب عرض متغیر به‌طول متناظر آن. معادلهٔ این منحنی را پیدا کنید.

۲۷۸۴. مطلوبست معادلهٔ منحنی‌که درمورد آن پاره خطی‌که مماس روی محورعرض جدا می‌کند، برابر با طول نقطهٔ تماس باشد.

۵. معادله‌های دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ اول. معادلهٔ برنولی

۱°. معادله‌های خطی. معادلهٔ دیفرانسیلی به‌صورت

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (۱)$$

که نسبت به y و y' از درجهٔ اول است، خطی نامیده می‌شود

اگر $Q(x) \equiv 0$ باشد، معادلهٔ (۱) به‌اینصورت درمی‌آید:

$$y' + P(x)y = 0 \qquad (۲)$$

که معادلهٔ دیفرانسیلی خطی متجانس نامیده می‌شود. دراین حالت متغیرها ازهم جدا می‌شوند وجواب کلی معادلهٔ (۲) چنین است:

$$y = C.e^{-\int P(x)dx} \qquad (۳)$$

برای حل معادلهٔ خطی غیر متجانس (۱) از روش تغییر مقدار ثابت استفاده می‌کنیم؛ به‌این ترتیب که ابتدا جواب کلی معادلهٔ خطی متجانس نظیر آن، یعنی رابطهٔ (۳)، را بدست می‌آوریم؛ سپس دراین رابطه، مقدار C را تابعی از x می‌گیریم وجواب معادلهٔ غیر متجانس (۱) را به‌صورت (۳) جستجو می‌کنیم. برای این منظور y و y' را که از (۳) معین شده‌است در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم واز معادلهٔ دیفرانسیلی که پیدا می‌شود، تابع $C(x)$ را بدست می‌آوریم. بنابراین جواب کلی معادلهٔ غیرمتجانس (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y = C(x).e^{-\int P(x)dx}$$

مثال ۱. این معادله را حل کنید:

$$y' = tgx.y + cosx \qquad (۴)$$

حل. معادلهٔ متجانس متناظر آن چنین است:

$$y' - tgx \cdot y = 0$$

که با حل آن، بدست می‌آید:

$$y = C.\frac{۱}{cosx}$$

C را تابعی از x می‌گیریم، با دیفرانسیل گرفتن بدست می‌آید:

$$y' = \frac{۱}{cosx}\cdot\frac{dC}{dx} + \frac{sinx}{cos^۲x}.C$$

y' و y را در معادلهٔ (۴) قرار می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$\frac{۱}{cosx}\cdot\frac{dC}{dx} + \frac{sinx}{cos^۲x}.\ C = tgx\ .\ \frac{C}{cosx} + cosx$$

و یا

$$\frac{dC}{dx} = cos^۲x$$

از آنجا

$$C(x) = \int\ cos^۲x dx = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}sin۲x + C_۱$$

بنابراین جواب کلی معادلهٔ (۴) به‌اینصورت است:

$$y = \left(\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}\ sin۲x + C_۱\right)\cdot\frac{۱}{cosx}$$

برای حل معادلهٔ خطی (۱) می‌توان از تبدیل زیرهم استفاده کرد:

$$y = uv \qquad (۵)$$

که در آن u و v توابعی از x هستند. دراینصورت معادلهٔ (۱) به‌اینصورت درمی‌آید:

$$[u' + P(x)u]v + v'u = Q(x) \qquad (۶)$$

اگر بخواهیم داشته باشیم:

$$u' + P(x)u = ۰ \qquad (۷)$$

از (۷) جواب u وسپس از (۶) جواب v را بدست می‌آوریم که در نتیجه از (۵) جواب y بدست می‌آید.

۲°. معادلهٔ برنولی. معادلهٔ مرتبهٔ اول به‌صورت

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$$

که‌در آن $\alpha \neq ۰$ و $\alpha \neq ۱$، معادلهٔ برنولی نامیده می‌شود. این معادله را می‌توان به‌کمك تبدیل $z = y^{۱-\alpha}$ می‌توان به‌معادلهٔ خطی تبدیل کرد. بطور مستقیم هم‌می‌توان از تبدیل $y = uv$ یا روش تغییر مقدار ثابت استفاده کرد.

مثال ۲. این معادله را حل کنید:

$$y' = \frac{۴}{x}y + x\sqrt{y}$$

حل. این یك معادلهٔ برنولی است $(\alpha = \frac{۱}{۲})$. فرض می‌کنیم:

$$y = uv$$

بدست می‌آید:

$$u'v + v'u = \frac{۴}{x}uv + x\sqrt{uv} \implies v\left(u' - \frac{۴}{x}u\right) + v'u = x\sqrt{uv} \qquad (۸)$$

برای تعیین تابع u می‌نویسیم:

$$u' - \frac{۴}{x}u = ۰$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$u = x^{۴}$$

این عبارت را درمعادلهٔ (۸) قرار می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$v'x^{۴} = x\sqrt{ux^{۴}}$$

که از آنجا v بدست می‌آید:

$$v = \left(\frac{۱}{۲}\ln|x| + C\right)^{۲}$$

وبنابراین‌جواب کلی معادله چنین می‌شود:

$$y = x^{4}(\frac{1}{2}ln|x| + C)^{2}$$

انتگرالهای کلی این معادله‌ها را پیداکنید:

۲۷۸۵. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$.

۲۷۸۶. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^{3}$.

۲۷۸۷*. $(1+y^{2})dx = (\sqrt{1+y^{2}}\,siny - xy)dy$.

جوابهای خاص را با توجه به شرط مربوطه پیداکنید:

۲۷۸۹. $xy' + y - e^{x} = 0$؛ $y = b$ به‌ازای $x = a$.

۲۷۹۰. $y' - \frac{y}{1-x^{2}} - 1 - x = 0$؛ $y = 0$ به‌ازای $x = 0$.

۲۷۹۱. $y' - ytgx = \frac{1}{cosx}$؛ $y = 0$ به‌ازای $x = 0$.

جواب کلی این معادله‌ها را پیداکنید:

۲۷۹۲. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^{2}$.

۲۷۹۳. $2xy\frac{dy}{dx} - y^{2} + x = 0$.

۲۷۹۴. $ydx + (x - \frac{1}{2}x^{3}y)dy = 0$.

۲۷۹۵. $3xdy = y(1 + xsinx - 3y^{3}sinx)dx$.

۲۷۹۶. سه جواب خاص y، y_1 و y_2 از یك معادلهٔ خطی داده شده است. ثابت کنید عبارت $\frac{y_2 - y}{y - y_1}$ مقدار ثابت را به‌ازای هرمقدار x ثابت نگاه می‌دارد. چطور می‌شود این نتیجه را تعبیرهندسی کرد؟

۲۷۹۷. مطلوبست معادلهٔ منحنی که درمورد آن مساحت مثلثی که ازمحور OX، مماس

و شعاع حامل نقطهٔ تماس تشکیل شده است، مقدار ثابتی باشد.

۲۷۹۸. مطلوبست معادلهٔ منحنی که درمورد آن پاره خطی که مماس روی محورطول جدا می‌کند، برابر با مجذورعرض نقطهٔ تماس باشد.

۲۷۹۹. مطلوبست معادلهٔ منحنی که در موردآن پاره خطی که مماس روی‌محورعرض جدا می‌کند مساوی تحت قائم باشد.

۲۸۰۰. مطلوبست معادلهٔ منحنی که درمورد آن پاره خطی که مماس روی محورعرض جدا می‌کند متناسب با مجذور عرض نقطهٔ تماس باشد.

۲۸۰۱. مطلوبست معادلهٔ منحنی که در مورد آن پاره خط مماس مساوی فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی این مماس با محور OX ازنقطهٔ $M(0,a)$ باشد.

۶. معادله‌های به‌صورت دیفرانسیل کامل. عامل انتگرالی

۱°. معادله‌های به‌صورت دیفرانسیل کامل. اگر برای معادله دیفرانسیلی

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

تساوی $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ برقرار باشد، می‌توان معادلهٔ (۱) را به‌صورت $dU(x,y)=0$ نوشت کەمعادله به‌صورت دیفرانسیل کامل نامیده می‌شود. انتگرال کلی معادلهٔ (۱) عبارتست از $U(x,y)=C$. تابع $U(x,y)$ با روشی که درفصل ششم بند ۸ گفته شد ویا از رابطهٔ

$$U=\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

معین می‌شود (فصل هفتم بند ۹ را ببینید).

مثال ۱. مطلوبست انتگرال کلی معادلهٔ دیفرانسیلی

$$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$$

حل. این معادله به‌صورت دیفرانسیل کامل است، زیرا

$$\frac{\partial(3x^2+6xy^2)}{\partial y}=\frac{\partial(6x^2y+4y^3)}{\partial x}=12xy$$

وبنابراین معادله به‌صورت $dU=0$ است. اینجا داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=3x^2+6xy^2 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}=6x^2y+4y^3$$

ازآنجا

$$U=\int(3x^2+6xy^2)dx+\varphi(y)=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)$$

با دیفرانسیل‌گرفتن U نسبت به y بدست می‌آید

$$\frac{\partial U}{\partial y}=6x^2y+\varphi'(y)=6x^2y+4y^3$$

ازآنجا $\varphi'(y)=4y^3$ و $\varphi(y)=y^4+C_0$. بالاخره داریم:

$$U(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4+C_0$$

وبنابراین $x^3+3x^2y^2+y^4=C$ انتگرال کلی مورد نظر ازمعادلهٔ مفروض است.

۲°. عامل انتگرالی. اگرسمت چپ معادلهٔ (۱) دیفرانسیل کامل نباشد ولی شرط‌قضیهٔ کوشی در مورد آن صـادق باشد، تابعی مثل $\mu=\mu(x,y)$ (عامل انتگرالی) وجود دارد بنحوی که

$$\mu(Pdx+Qdy)=du \qquad (2)$$

از اینجا معلوم می‌شود که تابع μ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

عامل انتگرالی μ را می‌توان به‌سادگی در دوحالت بدست‌آورد:

۱) $\quad \dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=F(x) \;;\; \mu=\mu(x)$

$$۲)\quad \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=F_1(y)\ ;\ \ \mu=\mu(y)$$

مثال ۲. این معادله را حل کنید:

$$(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+(x^2+y^2)dy=0$$

حل. دراینجا داریم:

$$P=2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\ ,\ \ Q=x^2+y^2,$$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{2x+x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}=1$$

و بنابراین $\mu=\mu(x)$.

چون $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ یا $\mu\frac{\partial P}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{d\mu}{dx}$، دراینصورت

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx=dx, ln\mu=x, \mu=e^x$$

دوطرف معادله را در $\mu=e^x$ ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$e^x(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+e^x(x^2+y^2)dy=0$$

معادله به‌صورت دیفرانسیل کامل در می‌آید که با انتگرال‌گیری، انتگرال کلی بدست می‌آید:

$$xe^x\left(x^2+\frac{y^3}{3}\right)=C$$

انتگرال کلی این معادله‌ها را بدست آورید:

۲۸۰۲. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$.

۲۸۰۳. $(y^2+y^2+2x)dx+2xydy=0$.

۲۸۰۴. $(x^3-3xy^2+2)dx-(3x^2y-y^2)dy=0$.

۲۸۰۵. $xdx+ydy=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

۲۸۰۶. $\frac{2xdx}{y^3}+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$.

۲۸۰۷. انتگرال خاص معادلهٔ

$$\left(x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

را بدست آورید، بنحوی که درشرط اولیهٔ $y(0)=2$ صدق کند.

با پیداکردن عامل انتگرالی به‌صورت $\mu=\mu(x)$ یا $\mu=\mu(y)$، معادله‌های زیر را حل کنید:

۲۸۰۸. $(x+y^2)dx-2xydy=0$.

۲۸۰۹. $y(1+xy)dx-xdy=0$.

۲۸۱۰. $\frac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)dy=0$.

۲۸۱۱. $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0$.

۷. معادله‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ اول که نسبت به مشتق حل نشده‌اند.

۱°. معادله‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ اول از درجه‌های بالاتر. اگر معادله

$$F(x,y,y')=0 \qquad (1)$$

نسبت به y' مثلا از درجهٔ دوم باشد، با حل معادلهٔ (۱) نسبت به y'، دو معادله بدست می‌آید:

$$y'=f_1(x,y) \quad , \quad y'=f_2(x,y) \qquad (2)$$

بنابراین ازهر نقطهٔ $M_0(x_0,y_0)$ حوزه‌ای ازصفحه، درحالت کلی دومنحنی انتگرالی می‌گذرد. انتگرال کلی معادلهٔ (۱) دراینحالت به‌اینصورت است:

$$\Phi(x,y,C)\equiv\Phi_1(x,y,C)\Phi_2(x,y,C)=0 \qquad (3)$$

که در آن Φ_1 و Φ_2 انتگرالهای کلی معادله (۲) هستند.

علاوه براین ممکن است یك انتگرال استثنائی هم‌برای معادلهٔ (۱) وجود داشته باشد. ازنظرهندسی انتگرال‌استثنائی‌عبارتست ازپوش خانوادهٔ منحنی‌های(۳) و می‌توان آنرا ازحذف C بین معادله‌های دستگاه

$$\Phi(x,y,C)=0\ ,\ \Phi_C'(x,y,C)=0 \qquad (۴)$$

و یا از حذف $p=y'$ بین معادله‌های دستگاه

$$F(x,y,p)=0\ ,\ F_p'(x,y,p)=0 \qquad (۵)$$

بدست آورد.

متذکر می‌شویم که منحنی‌های حاصل از معادله‌های (۴) و (۵) همیشه جوابهای معادلهٔ (۱) نیستند، بنابراین درهرمورد باید مورد تحقیق قرارگیرند.

مثال ۱. انتگرال کلی واستثنائی این معادله را پیدا کنید:

$$xy'^2+2xy'-y=0$$

حل. از حل معادله نسبت به y'، دومعادلهٔ متجانس بدست می‌آید:

$$y'=-1+\sqrt{1+\frac{y}{x}},\quad y'=-1-\sqrt{1+\frac{y}{x}}$$

که در حوزهٔ $x(x+y)>0$ معین هستند وانتگرالهای کلی آنها چنین است:

$$\left(\sqrt{1+\frac{y}{x}}-1\right)^2=\frac{C}{x},\quad \left(\sqrt{1+\frac{y}{x}}+1\right)^2=\frac{C}{x}$$

ویا

$$(2x+y-C)-2\sqrt{x^2+xy}=0\ ,\quad (2x+y-C)+2\sqrt{x^2+xy}=0$$

که از ضرب آنها در یکدیگر، انتگرال کلی معادلهٔ مفروض بدست می‌آید:

$$(2x+y-C)^2-4(x^2+xy)=0$$

ویا

$$(y-C)^2=4Cx \qquad \text{(خانوادهٔ سهمی‌ها)}$$

اگر از رابطـهٔ اخیر نسبت به C مشتق بگیریـم و C را حذف کنیم، انتگرال استثنائی بدست می‌آید:

$$y+x=0$$

وبا تحقیق معلوم می‌شود که $x+y=0$ جوابی ازمعادلهٔ مفروض است.

انتگرال استثنائی را با مشتق‌گرفتن نسبت به p از $xp^2+2xp-y=0$ و حذف p هم می‌توان بدست آورد.

۲°. حل معادله‌های دیفرانسیلی با روش واردکردن پارامتر. اگرمعادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ اول به‌صورت زیر باشد:

$$x=\varphi(y,y')$$

متغیرهای xوy را می‌توان ازدستگاه معادله‌های زیر بدست‌آورد:

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\ ,\ \ x=\varphi(y,p)$$

که درآن $p=y'$ نقش پارامتر را دارد.

بهمین ترتیب اگر $y=\psi(x,y')$ باشد، xوy از دستگاه معادله‌های زیر معین می‌شود:

$$p=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x},\ \ y=\Psi(x,y)$$

مثال ۲. مطلوبست انتگرال کلی واستثنائی معادلهٔ

$$y=y'^2-xy'+\frac{x^2}{2}$$

حل. $y'=p$ می‌گیریم ومعادله را به‌اینصورت می‌نویسیم:

$$y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}$$

نسبت به x دیفرانسیل می‌گیریم، p تابعی از x به حساب می‌آید:

$$p=2p\frac{dp}{dx}-p-x\frac{dp}{dx}+x$$

یا $(2p-x)=\frac{dp}{dx}(2p-x)$ و یا $\frac{dp}{dx}=1$. ازآنجا $p=x+C$ می‌شود که اگر درمعادلهٔ

اصلی قرار دهیم، انتگرال کلی بدست می‌آید:

$$y=(x+C)^{۲}-x(x+C)+\frac{x^{۲}}{۲} \quad \text{یا} \quad y=\frac{x^{۲}}{۲}+Cx+C^{۲}$$

اگر از جواب کلی نسبت به C مشتق بگیریم و C را حذف کنیم، جواب استثنائی $y=\frac{x^{۲}}{۴}$ پیدا می‌شود (بتحقیق معلوم می‌کند که $y=\frac{x^{۲}}{۴}$ جوابی ازمعادلهٔ مفروض است).

اگر عامل $۲p-x$ را مساوی صفر قرار دهیم (که طرفین معادله را به‌آن تقسیم کردیم) $p=\frac{x}{۲}$ بدست می‌آید؛ اگـر این مقدار p را در معادله قرار دهیم به همان جـواب استثنائی $y=\frac{x^{۲}}{۴}$ می‌رسیم.

جوابهای کلی و استثنائی معادله‌های زیر را پیدا کنید (درمسئله‌های ۲۸۱۲ و ۲۸۱۳ حوزهٔ منحنی‌های انتگرالی را رسم کنید).

۲۸۱۲. $y'^{۲}-\frac{۲y}{x}y'+۱=۰$.

۲۸۱۳. $۴y'^{۲}-۹x=۰$.

۲۸۱۴. $yy'^{۲}-(xy+۱)y'+x=۰$.

۲۸۱۵. $yy'^{۲}-۲xy'+y=۰$.

۲۸۱۶. مطلوبست منحنی‌های انتگـرالی معادلهٔ $y'^{۲}+y^{۲}=۱$ کـه از نقطهٔ $M\left(۰,\frac{۱}{۲}\right)$ می‌گذرند.

با واردکردن پارامتر $y'=p$ این معادله‌ها را حل کنید:

۲۸۱۷. $x=\sin y'+\ln y'$.

۲۸۱۸. $y=y'^{۲}e^{y'}$.

۲۸۱۹. $y=y'^{۲}+۲\ln y'$.

۲۸۲۰. $۴y=x^{۲}+y'^{۲}$.

۲۸۲۱. $e^{x}=\frac{y^{۲}+y'^{۲}}{۲y'}$.

۸. معادله‌های لاگرانژ و کلرو

۱°. معادلهٔ لاگرانژ. معادلهٔ به‌صورت:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \qquad (۱)$$

که درآن $p = y'$، معادلهٔ لاگرانژ نامیده می‌شود. به‌کمك دیفرانسیل گـرفتن و با توجه به‌اینکه $dy = pdx$، معادلهٔ (۱) منجر بیك معادلهٔ خطی نسبت به x می‌شود:

$$pdx = \varphi(p)dx + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]dp \qquad (۲)$$

اگر $p \not\equiv \varphi(p)$ باشد، ازمعادله‌های (۱) و(۲) جواب کلی به‌صورت پارامتری بدست می‌آید:

$$x = Cf(p) + g(p) \;,\; y = [Cf(p) + g(p)]\varphi(p) + \psi(p)$$

که درآنها p پارامتر و $f(p)$ و $g(p)$ توابعی مفروض‌اند. علاوه برآن ممکن است جواب استثنائی هم وجود داشته باشدکه با روش معمولی بدست می‌آید.

۲°. معادلهٔ کلرو. اگردرمعادلهٔ (۱) داشته باشیم:$\varphi(p) = p$،معادله کلروبدست‌می‌آید:

$$y = xp + \psi(p)$$

که جواب کلی آن به‌صورت $y = Cx + \psi(C)$ (خانوادهٔ خطهای‌راست) می‌باشد. علاوه‌برآن جواب استثنائی (پوش) هم وجودداردکه‌از حذف p بین معادله‌های دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$x = -\psi'(p) \;,\; y = px + \psi(p)$$

مثال ۱. این معادله را حل کنید:

$$y = ۲y'x + \frac{۱}{y'} \qquad (۳)$$

حل. $y' = p$ می‌گیریم، دراینصـورت $y = ۲px + \frac{۱}{p}$؛ دیفرانسیل می‌گیریم و dy را به pdx تبدیل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$pdx = ۲pdx + ۲xdp - \frac{dp}{p^۲}$$

و یا

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{۲}{p}x + \frac{۱}{p^۲}$$

با حل این معادلهٔ خطی خواهیم داشت:

$$x = \frac{۱}{p^۲}(\ln p + C)$$

بنابراین جواب کلی به‌اینصورت است:

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{p^۲}(\ln p + C) \\ y = ۲px + \frac{۱}{p} \end{cases}$$

برای جستجوی انتگرال استثنائی طبق قاعده کلی، دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$y = ۲px + \frac{۱}{p}, \quad ۰ = ۲x - \frac{۱}{p^۲}$$

و ازآنجا

$$x = \frac{۱}{۲p^۲}, \quad y = \frac{۲}{p}$$

و یا

$$y = \pm ۲\sqrt{۲x}$$

ولی اگر y را در معادلهٔ (۳) قرار دهیم، معلوم می‌شود که درآن صدق نمی‌کند و به‌این‌ترتیب معادلهٔ (۳) انتگرال استثنا ئی ندارد.

این معادله‌ها را حل‌کنید:

۲۸۲۲. $y = \frac{۱}{۲}x\left(y' + \frac{۴}{y}\right)$.

۲۸۲۳. $y = y' + \sqrt{۱ - y'^۲}$.

۲۸۲۴. $y = (۱ + y')x + y'^۲$.

۲۸۲۵*. $y = -\frac{۱}{۲}y'(۲x + y')$.

مطلوبست انتگرالهای کلی وخاص معادلهٔ کلرو و رسم ناحیهٔ منحنی انتگرالی:

۲۸۲۶. $y = xy' + y'^{۲}$ ؛ **۲۸۲۷.** $y = xy' + y'$ ؛

۲۸۲۸. $y = xy' + \sqrt{۱ + (y')^{۲}}$ ؛ **۲۸۲۹.** $y = xy' + \frac{۱}{y'}$.

۲۸۳۰. مطلوبست معادلهٔ منحنی‌که در مورد آن مساحت مثلثی که از مماس برهر نقطهٔ دلخواه آن با محورهای مختصات می‌سازد، مقدار ثابتی باشد.

۲۸۳۱. مطلوبست معادلهٔ منحنی‌که فاصلهٔ یك نقطهٔ مفروض از مماسهای بر آن مقدار ثابتی باشد.

۲۸۳۲. مطلوبست معادلهٔ منحنی‌که برای آن پاره خط مماس محدود به محـورهای مختصات مساوی مقدار ثابت l باشد.

۹. انواع مختلف معادله‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ اول

۲۸۳۳. نوع معادله‌های دیفرانسیلی زیر و روش حل آنها را معین‌کنید:

a) $(x+y)y' = x\,arctg\frac{y}{x}$ ؛ b) $(x-y)y' = y^{۲}$ ؛

c) $y' = ۲xy + x^{۳}$ ؛ d) $y' = ۲xy + y^{۳}$ ؛

e) $xy' + y = sin y$ ؛ f) $(y - xy')^{۲} = y'^{۳}$ ؛

g) $y = xe^{y'}$ ؛ h) $(y' - ۲xy)\sqrt{y} = x^{۳}$ ؛

i) $y' = (x+y)^{۲}$ ؛ j) $x cos y' + y sin y' = ۱$ ؛

k) $(x^{۲} - xy)y' = y^{۴}$ ؛

l) $(x^{۲} + ۲xy^{۳})dx + (y^{۲} + ۳x^{۲}y^{۲})dy = ۰$ ؛

m) $(x^{۳} - ۳xy)\,dx + (x^{۲} + ۳)\,dy = ۰$ ؛

n) $(xy^{۳} + lnx)dx = y^{۲}dy$.

این معادله‌ها را حل‌کنید:

۲۸۳۴. a) $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = ۰$ ؛

b) $x\ln\frac{x}{y}dy - ydx = 0$.

۲۸۳۵. $xdx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy$.

۲۸۳۶. $(2xy^2 - y)dx + xdy = 0$.

۲۸۳۷. $xy' + y = xy^2\ln x$.

۲۸۳۸. $y = xy' + y'\ln y'$.

۲۸۳۹. $y = xy' + \sqrt{-ay'}$.

۲۸۴۰. $x^2(y+1)dx + (x^3-1)(y-1)dy = 0$.

۲۸۴۱. $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0$.

۲۸۴۲. $y' - y\frac{2x-1}{x^2} = 1$.

۲۸۴۳. $ye^y = (y^3 + 2xe^y)y'$.

۲۸۴۴. $y' + y\cos x = \sin x\cos x$.

۲۸۴۵. $(1-x^2)y' + xy = a$.

۲۸۴۶. $xy' - \frac{y}{x+1} - x = 0$.

۲۸۴۷. $y'(x\cos y + a\sin 2y) = 1$.

۲۸۴۸. $(x^2y - x^2 + y - 1)dx + (xy + 2x - 3y - 6)dy = 0$.

۲۸۴۹. $y' = \left(1 + \frac{y-1}{2x}\right)^2$.

۲۸۵۰. $xy^3dx = (v^2y + 2)dy$.

۲۸۵۱. $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$.

۲۸۵۲. $2dx + \sqrt{\frac{x}{y}}dy - \sqrt{\frac{y}{x}}dx = 0$.

۲۸۵۳. $y' = \frac{y}{x} + tg\,\frac{y}{x}$.

۲۸۵۴. $yy' + y^2 = \cos x$.

۲۸۵۵. $xdy + ydx = y^2dx$.

۲۸۵۶. $y'(x + \sin y) = 1$.

۲۸۵۷. $y\frac{dp}{dy} = -p + p^2$.

۲۸۵۸. $x^3dx - (x^4 + y^3)dy = 0$.

۲۸۵۹. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.

۲۸۶۰. $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xdy - ydx}{y^2} = 0$.

۲۸۶۱. $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$.　　۲۸۶۲. $y=2xy'+\sqrt{1+y'^2}$.

۲۸۶۳. $y'=\frac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$.　　۲۸۶۴. $(2e^x+y^4)dy-ye^x dx=0$.

۲۸۶۵. $y'=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.　　۲۸۶۶. $xy(xy^2+1)dy-dx=0$.

۲۸۶۷. $a(xy'+2y)=xyy'$.　　۲۸۶۸. $xdy-ydx=y^2dx$.

۲۸۶۹. $(x^2-1)^{\frac{3}{2}}dy+(x^3+3xy\sqrt{x^2-1})\,dx=0$.

۲۸۷۰. $tgx\frac{dy}{dx}-y=a$.

۲۸۷۱. $\sqrt{a^2+x^2}\,dy+(x+y-\sqrt{a^2+x^2})\,dx=0$.

۲۸۷۲. $xyy'^2-(x^2+y^2)y'+xy=0$.

۲۸۷۳. $y=xy'+\frac{1}{y'^2}$.

۲۸۷۴. $(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-3y^2)dy=0$.

۲۸۷۵. $2yp\frac{dp}{dy}=3p^2+4y^2$.

این معادله‌ها را با توجه به شرایط اولیهٔ آنها حل کنید:

۲۸۷۶. $y'=\frac{y+1}{x}$؛ $y=0$ به‌ازای $x=1$.

۲۸۷۷. $e^{x-y}y'=1$؛ $y=1$ به‌ازای $x=1$.

۲۸۷۸. $y'cotgx+y=2$؛ $y=2$ به‌ازای $x=0$.

۲۸۷۹. $e^y(y'+1)=1$؛ $y=0$ به‌ازای $x=0$.

۲۸۸۰. $y'+y=\cos x$؛ $y=\frac{1}{2}$ به‌ازای $x=0$.

۲۸۸۱. $y'-2y=-x^2$؛ $y=\frac{1}{4}$ به‌ازای $x=0$.

۲۸۸۲. $y'+y=2x$؛ $y=-1$ به‌ازای $x=0$.

۲۸۸۳. $xy'=y$؛ a) $y=1$ به‌ازای $x=1$؛ b) $y=0$ به‌ازای $x=0$.

۲۸۸۴. $2xy'=y$؛ a) $y=1$ به‌ازای $x=1$؛ b) $y=0$ به‌ازای $x=0$.

۲۸۸۵. $2xyy'+x^2-y^2=0$؛ a) $y=0$ به‌ازای $x=0$؛ b) $y=1$ به‌ازای $x=0$؛ c) $y=0$ به‌ازای $x=1$.

۲۸۸۶. مطلوبست معادلهٔ منحنی که از نقطهٔ $(1,0)$ می‌گذرد و تحت مماس آن مساوی مجموع مختصات نقطهٔ تماس است.

۲۸۸۷. مطلوبست معادلهٔ منحنی که مجموع پاره خطهائی که مماس بر آن روی محورهای مختصات به‌وجود می‌آورد، ثابت ومساوی $2a$ باشد.

۲۸۸۸. مجموع طولهای قائم و تحت قائم مساوی واحد است. معادلهٔ منحنی را بدست آورید، به‌شرطی که بدانیم منحنی ازمبداء مختصات می‌گذرد.

۲۸۸۹*. معادلهٔ منحنی را پیدا کنید که زاویهٔ بین مماس وشعاع حامل نقطهٔ تماس آن مقدارثابتی باشد.

۲۸۹۰. مطلوبست معادلهٔ منحنی که درمورد آن مساحت بین محورهای مختصات، خود منحنی وعرض نقطهٔ دلخواهی ازآن، مساوی مکعب این عرض باشد.

۲۸۹۱. مطلوبست معادلهٔ منحنی که مساحت قطاع آن که بین محور قطبی، منحنی و شعاع قطبی نقطهٔ دلخواه واقع است، متناسب با مکعب این شعاع باشد.

۲۸۹۲. مطلوبست معادلهٔ منحنی، به‌شرطی که پاره خطی که مماس روی محور OX جدا می‌کند، مساوی طول این‌پاره خط باشد.

۲۸۹۳. دریك منحنی پاره خطی ازمماس که بین محورهای مختصات است به‌وسیلهٔ سهمی $y^2=2x$ نصف می‌شود، معادلهٔ منحنی را بدست‌آورید.

۲۸۹۴. درمورد یك منحنی، قائم برهرنقطهٔ دلخواه برابر است با فاصلهٔ این نقطه تا مبداء مختصات، معادلهٔ این منحنی را پیدا کنید.

۲۸۹۵*. مساحت شکلی که بین منحنی، محورهای مختصات و عرض نقطهٔ دلخواهی ازآن واقع است، مساوی با طول قوس منحنی مربوطه است. مطلوبست معادلهٔ این منحنی، به‌شرطی که بدانیم از نقطهٔ $(1,0)$عبور می‌کند.

۲۸۹۶. مطلوبست معادلهٔ منحنی که درمورد آن مساحت مثلثی که ضلعهای آن محور طول، مماس وشعاع حامل نقطهٔ تماس است، مقداری ثابت ومساوی a^2 باشد.

۲۸۹۷. مطلوبست معادلهٔ یك منحنی، به‌شرطی که وسط پاره خطی که مماس و قائم بر منحنی روی محور OX به‌وجود می‌آورد، نقطهٔ ثابت $(a,0)$ باشد.

برای تشکیل معادله‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ اول، بخصوص در مسائل فیزیکی، اغلب بهتر است از روش دیفرانسیلها استفاده کنیم، محتوی این روش بر این اساس است که رابطـهٔ تقریبی بین بی‌نهایت کوچکهای مقادیر مجهول، با تقریب بی‌نهایت کوچك مرتبهٔ بالاتر، بجای رابطهٔ بین دیفرانسیلهای آنها قرار می‌گیرد، که درنتیجه تغییری به‌وجود نمی‌آورد.

مسئله. در مخزنی ۱۰۰ لیتر محلول مایع حاوی ۱۰ کیلوگرم نمك وجود دارد. درهر دقیقه ۳ لیتر آب وارد مخزن می‌شود، و مایع مخلوط در هردقیقه ۲ لیتر ازآن خارج می‌شود، ضمناً محلول با بهم زدن آن همیشه یکنواخت نگه داشته می‌شود. بعد از یك ساعت چقدرنمك در مخزن خواهد بود؟

حل. غلظت C از مادهٔ مفروض، به مقدار این ماده در واحد حجم گفته می‌شود. اگـر تمرکز یکنواخت باشد، مقدار ماده در حجم V، مساوی CV خواهدبرد.

فرض کنید مقدار نمك‌واقع‌درمخزن بعداز tدقیقه مساویx کیلوگرم‌باشد. مقدارمایع‌مخزن در این لحظه $(100+t)$ لیتر و بنابراین غلظت آن $C=\dfrac{x}{100+t}$ کیلوگرم در یك لیتراست.

درجریان فاصلهٔ زمانی dt به اندازهٔ $2dt$ لیتر مایع ازمخـزن خارج می‌شود که شامل $2Cdt$ کیلوگرم نمك است. به‌این ترتیب تغییر dx مقدار نمك در مخزن با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود

$$-dx=2Cdt \quad \text{یا} \quad -dx=\frac{2x}{100+t}dt$$

واین همان معادلهٔ دیفرانسیلی مورد نظراست. با تقسیم متغیرها وانتگرال‌گیری بدست می‌آید:

$$lnx=-2ln(100+t)+lnC$$

یا

$$x=\frac{C}{(100+t)^{2}}$$

مقدار ثابت C ازاین‌شرط بدست می‌آید که‌بازای $t=0$ داریم $x=10$، یعنی $C=100000$. بنابراین بعد از یکساعت مقدار نمکی که در مخزن وجود دارد برابر است با:

$$x=\frac{100000}{160^2}\approx 3/9 \quad (\text{کیلوگرم})$$

*۲۸۹۸. ثابت کنید برای مایع وزینی که دور محورقائم دوران می کند، سطح آزاد به‌شکل پارابولوئید دوار است.

*۲۸۹۹. مطلوبست رابطهٔ بین فشار وهوا و ارتفاع، به‌شرطی که‌بدانیم این فشار در سطح دریا مساوی ۱ کیلوگرم بر ۱ سانتیمتر مربع و در ارتفاع ۵۰۰ متری مساوی با ۰/۹۲ کیلوگرم بر یك سانتیمتر مربع است.

*۲۹۰۰. بنابرقانون‌گوکا،رشتهٔ کش‌داربه‌طول l تحت عمل نیروی کششی F، نموطولی به‌اندازهٔ klF (k مقدار ثابتی است) پیدا می کند. طول این رشته تحت نیروی وزن w خـود چقدر زیاد می‌شود، به‌شرطی که رشته را بیکی‌از دوانتهای خودآویخته باشیم (طول‌اولیه lاست).

۲۹۰۱. همین مسئله را برای حالتی حل کنیدکه به‌انتهای رشته، وزنهٔ P آویزان شده باشد.

برای حل مسئله‌های ۲۹۰۲ و ۲۹۰۳ ازقانون نیوتون استفاده کنیدکه برطبق آن سرعت سرد شدن جسم‌متناسب است با اختلاف‌درجهٔ حرارت جسم و محیطی که آنرا احاطه‌کرده است.

۲۹۰۲. مطلوبست‌رابطهٔ بین درجهٔ حرارت T و زمان t، به‌شرطی که جسم با T_0 درجهٔ حرارت در محلی گذاشته شده است‌که درجهٔ حرارت آن ثابت و مساوی a درجه است.

۲۹۰۳. بعداز چه مدتی، درجهٔ حرارت جسمی که تا ۱۰۰ درجه‌گرم شده است تا ۳۰ درجه پائین می آید، به‌شرطی که‌درجهٔ حرارت محل ۲۰ درجه باشد و در ۲۰ دقیقهٔ اول جسم تا ۶۰ درجه سرد شده باشد.

۲۹۰۴. عمل کندکنندهٔ اصطکاك در مـورد قرصی که دریك مایع می‌چرخد، متناسب است با سرعت زاویه‌ای دوران. رابطهٔ این سرعت زاویه‌ای را با دوران پیدا کنید، به‌شرطی که بدانیم قرص با سرعت اولیهٔ ۱۰۰ دور در دقیقه شروع به چرخش کرده است وبعداز یك‌دقیقه به سرعت ۶۰ دور در دقیقه رسیده است.

*۲۹۰۵. سرعت تلاشی رادیوم با مقدار موجود آن متناسب است، می‌دانیم کـه در جریان ۱۶۰۰ سال نصف مقدار ذخیرهٔ رادیوم باقی می‌ماند. مطلوبست درصد رادیومی که در جریان ۱۰۰ سال مورد تلاشی قرار می‌گیرد.

*۲۹۰۶. سرعت جریان آب از سوراخی کـه در فاصله h از سطح آزاد آب قـرار

گرفته است، با رابطهٔ زیر معین می‌شود:

$$v = c\sqrt{2gh}$$

که در آن $c \approx 0/6$ و g نیروی شتاب ثقل است.

دیگی به‌شکل نیمکره به‌قطر ۲متر وجود دارد که سوراخ گردی در ته آن به‌شعاع ۰/۱ متر قرار گرفته‌است چقدر طول می‌کشد تا آب دیگ خالی شود؟

۲۹۰۷.* مقدار نوری که ضمن عبور از قشر نازك آب جذب می‌شود، با مقدار نوری که فرود می‌آید و با ضخامت قشر آب متناسب است. اگر بدانیم که دراثر عبور از قشر آب به‌ضخامت ۳متر، نصف مقدار اولیهٔ نور جذب می‌شود، چه قسمتی ازاین مقدار به عمق ۳۰متری می‌رسد؟

۲۹۰۸.* نیروی مقاومت هوا ضمن سقوط جسمی باچتر نجات، متناسب با مربع سرعت حرکت آنست. مطلوبست حد سرعت سقوط.

۲۹۰۹.* ته یك مخزن که گنجایش آن ۳۰۰ لیتر است، ازمخلوط نمك و یك مادهٔ غیرقابل حل پوشیده‌شده‌است. با فرض اینکه سرعت انحلال نمك، متناسب با اختلاف بین غلظت محظهٔ مفروض با غلظت حالت اشباع (۱ کیلو گرم نمك در ۳ لیتر آب) باشد و مقدار مفروض آب خالص، $\frac{1}{2}$ کیلو گرم نمك را در ۱ دقیقه حل کند، مقدار نمکی که در محلول بعد از یکساعت وجود دارد، پیدا کنید.

۲۹۱۰.* نیروی الکتروموتور e درمدار با جریان i، که دارای مقاومت R والقای L است، افت پتانسیلی Ri ونیروی ضدالکتروموتوری خـود القائی $L\dfrac{di}{dt}$ دارد. مطلـوبست جریان i درلحظه زمانی t، به شرطی که داشته باشیم: $e = E\sin\omega t$ (E و ω مقادیری ثابت‌اند) و به‌ازای $t = 0$ داشته باشیم $i = 0$.

۱۰ معادله‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ بالاتر

۱°. حالت انتگرال‌گیری مستقیم. اگر داشته باشیم:

$$y^{(n)} = f(x)$$

دراینصورت داریم:

$$y=\underbrace{\int dx\int\cdots\int}_{n \text{ مرتبه}} f(x)dx+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots+C_n$$

۲° حالت پائین آوردن مرتبهٔ معادله. ۱) وقتی که معادلهٔ دیفرانسیلی شامل y نباشد، مثلا

$$F(x,y',y'')=0$$

با فرض $y'=p$، به معادله‌ای از مرتبهٔ پائین‌تر می‌رسیم،

$$F(x,p,p')=0$$

مثال ۱. جواب خاص معادلهٔ

$$xy''+y'+x=0$$

را با شرط $y=0$ و $y'=0$ به‌ازای $x=0$ پیدا کنید.

حل. با فرض $y'=p$ بدست می‌آید: $y''=p'$ وازآنجا

$$xp'+p+x=0$$

این معادله را مثل یك معادلهٔ خطی نسبت به تابع p حل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$px=C_1-\frac{x^2}{2}$$

از شرط $y'=p=0$ به‌ازای $x=0$ بدست می‌آید: $C_1=0$. بنابراین

$$p=-\frac{x}{2}$$

و یا

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2}$$

که ازآنجا، با انتگرال‌گیری مجدد، بدست می‌آید:

$$y=-\frac{x^2}{4}+C_2$$

وبا فرض $y=0$ به‌ازای $x=0$ معلوم‌می‌شود: $C_2=0$. بنابراین جواب‌خاص مورد نظرچنین‌است:

$$y=-\frac{1}{4}x^2$$

۲) وقتی که معادلهٔ دیفرانسیلی شامل x نباشد، مثلا

$$F(y, y', y'')=0$$

با فرض $y'=p$، $y''=p\frac{dp}{dy}$، به معادله‌ای که مرتبهٔ آن یك واحدکمتر است، می‌رسیم:

$$F(y, p, p\frac{dp}{dy})=0$$

مثال ۲. جواب خاص معادلهٔ زیر را پیدا کنید:

$$yy''-y'^2=y^4$$

به‌شرطی که به‌ازای $x=0$ داشته‌باشیم $y=1$، $y'=1$

حل. فرض‌می کنیم: $y'=p$ ودراینصورت $y''=y\frac{dp}{dy}$ ومعادلهٔمفروض‌به‌اینصورت درمی آید

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=y^4$$

به‌این ترتیب به معادلهٔ نوع برنولی نسبت به p می‌رسیم (y را آونـد به حساب می‌آوریم). با حل آن بدست می‌آید:

$$p=\pm y\sqrt{C_1+y^2}$$

از شرط $y'=p=0$ به‌ازای $y=1$ داریم: $C_1=-1$ بنابراین

$$p=\pm y\sqrt{y^2-1}$$

ویا

$$\frac{dy}{dx}=\pm y\sqrt{y^2-1}$$

وبا انتگرال‌گرفتن از این معادله داریم:

$$arccos\frac{1}{y}\pm x=C_2$$

که با استفاده از شرط $y=1$ و $x=0$ مقدار $C_2=0$ می‌شود وازآنجا

$$\frac{1}{y}=\cos x \Longrightarrow y=\sec x$$

این معادله‌ها را حل کنید:

۲۹۱۱. $y''=\frac{1}{x}$.

۲۹۱۲. $y''=-\frac{1}{2y^3}$.

۲۹۱۳. $y''=1-y'^2$.

۲۹۱۴. $xy''+y'=0$.

۲۹۱۵. $yy''=y'^2$.

۲۹۱۶. $yy''+y'^2=0$.

۲۹۱۷. $(1+x^2)y''+y'^2+1=0$.

۲۹۱۸. $y'(1+y'^2)=ay''$.

۲۹۱۹. $x^2y''+xy'=1$.

۲۹۲۰. $yy''=y^2y'+y'^2$.

۲۹۲۱. $yy''-y'(1+y')=0$.

۲۹۲۲. $y''=-\frac{x}{y'}$.

۲۹۲۳. $(x+1)y''-(x+2)y'+x+2=0$.

۲۹۲۴. $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$.

۲۹۲۵. $y'+\frac{1}{4}(y'')^2=xy''$.

۲۹۲۶. $xy'''+y''=1+x$.

۲۹۲۷. $(y''')^2+(y'')^2=1$.

با توجه به شرایط متناظر، جوابهای خاص معادله‌های زیر را پیدا کنید:

۲۹۲۸. $(1+x^2)y''-2xy'=0$؛ $y=0$؛ $y'=3$ به‌ازای $x=0$.

۲۹۲۹. $1+y'^2=2yy''$؛ $y=1$، $y'=1$ به‌ازای $x=1$.

۲۹۳۰. $yy''+y'^2=y'^3$؛ $y=1$، $y'=1$ به‌ازای $x=0$.

۲۹۳۱. $xy''=y'$؛ $y=0$، $y'=0$ به‌ازای $x=0$.

انتگرالهای کلی این معادله‌ها را پیدا کنید:

۲۹۳۲. $yy'=\sqrt{y^2+y'^2}\,y''-y'y''$.

۲۹۳۳. $yy''=y'^2+y'\sqrt{y^2+8y'^2}$.

۲۹۳۴. $y'^2-yy''=y^2y'$.

۲۹۳۵. $yy''+y'^2-y'^3\ln y=0$.

جوابهائی را پیداکنیدکه در شرایط مفروض صدق کنند:

۲۹۳۶. $y''y^۳=۱$؛ $y=۱$، $y'=۱$ به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$.

۲۹۳۷. $yy''+y'^۲=۱$؛ $y=۱$، $y'=۱$ به‌ازای $x=۰$.

۲۹۳۸. $xy''=\sqrt{۱+y'^۲}$: $y=۰$ به‌ازای $x=۱$، $y=۱$ به‌ازای $x=e^۲$.

۲۹۳۹. $y''(۱+lnx)+\frac{۱}{x}y'=۲+lnx$؛ $y=\frac{۱}{۲}$، $y'=۱$ به‌ازای $x=۱$.

۲۹۴۰. $y''=\frac{y'}{x}\left(۱+ln\frac{y'}{x}\right)$؛ $y=\frac{۱}{۲}$، $y'=۱$ به‌ازای $x=۱$.

۲۹۴۱. $y''-y'^۲+y'(y-۱)=۰$؛ $y=۲$، $y'=۲$ به‌ازای $x=۰$.

۲۹۴۲. $۳y'y''=y+y'^۳+۱$؛ $y=-۲$، $y'=۰$ به‌ازای $x=۰$.

۲۹۴۳. $y^۲+y'^۲-۲yy''=۰$؛ $y=۱$، $y'=۱$ به‌ازای $x=۰$.

۲۹۴۴. $yy'+y'^۲+yy''=۰$؛ $y=۱$ به‌ازای $x=۰$ و $y=۰$ به‌ازای $x=-۱$.

۲۹۴۵. $۲y'+(y'^۲-۶x)y''=۰$؛ $y=۰$، $y'=۲$ به‌ازای $x=۲$.

۲۹۴۶. $y'y^۲+yy''-y'^۲=۰$؛ $y=۱$، $y'=۲$ به‌ازای $x=۰$.

۲۹۴۷. $۲yy''-۳y'^۲=۴y^۲$؛ $y=۱$، $y'=۰$ به‌ازای $x=۰$.

۲۹۴۸. $۲yy''+y^۲-y'^۲=۰$؛ $y'=۱$ به‌ازای $x=۰$.

۲۹۴۹. $y''=y'^۲-y$؛ $y=-\frac{۱}{۴}$، $y'=\frac{۱}{۲}$ به‌ازای $x=۱$.

۲۹۵۰. $y''+\frac{۱}{y^۲}e^{y^۲}\cdot y'-۲yy'^۲=۰$؛ $y=۱$، $y'=e$ به ازای $x=-\frac{۱}{۲e}$.

۲۹۵۱. $۱+yy''+y'^۲=۰$: $y=۰$، $y'=۱$ به‌ازای $x=۱$.

۲۹۵۲. $(۱+yy')y''+y'^۲=۰$؛ $y=۰$، $y'=۱$ به‌ازای $x=۱$.

۲۹۵۳. $(x+۱)y''+xy'^۲=y'$؛ $y=-۲$، $y'=۴$ به‌ازای $x=۱$.

این معادله‌ها را حل کنید:

۲۹۵۴. $y'=xy''^۲+y''^۲$. ۲۹۵۵. $y'=xy''+y''-y''^۲$.

۲۹۵۶. $(y''')^۳=۴y''$.

۲۹۵۷. $yy'y''=y'^۳+y''^۲$. منحنی انتگرالی را بدست آورید که از نقطهٔ $(۰,۰)$

عبور کند و خط $x+y=0$ بر آن مماس باشد.

۲۹۵۸. مطلوبست معادلهٔ منحنی‌هائی که شعاع انحنای آنها ثابت است.

۲۹۵۹. مطلوبست معادلهٔ منحنی که شعاع انحنای آن متناسب با مکعب قائم باشد.

۲۹۶۰. معادلهٔ منحنی را پیدا کنید که شعاع انحنای آن مساوی قائم باشد.

۲۹۶۱. معادلهٔ منحنی را پیدا کنید که شعاع انحنای آن دوبرابر قائم باشد.

۲۹۶۲. مطلوبست معادلهٔ منحنی که تصویر شعاع انحنای آن بر محور OY مقدار ثابتی باشد.

۲۹۶۳. مطلوبست معادلهٔ طناب سیمی پل معلق، به‌شرطی که بار روی آن به‌طور یکنواخت روی تصویر سیم بر خط افقی تقسیم شده باشد. از وزن طناب صرفنظر می کنیم.

***۲۹۶۴.** مطلوبست حالت تعادل نخ قابل انحنا وغیر کش‌داری که دوانتهای آن به‌دو نقطه محکم شده باشد و وزنهٔ ثابت q (با درنظر گرفتن وزن نخ) را بر واحد طول داشته باشد.

***۲۹۶۵.** جسم وزن‌داری بدون سرعت اولیه روی سطح شیب‌داری می لغزد. اگر زاویهٔ شیب مساوی α وضریب اصطکاك مساوی μ باشد، قانون حرکت را پیدا کنید.

راهنمائی. نیروی اصطکاك مساوی μ^N است که در آن N نیروی عکس‌العمل سطح است.

***۲۹۶۶.** نیروی مقاومت هوا ضمن سقوط جسم را می توان متناسب با مجذور سرعت آن به‌حساب آورد. قانون حرکت را پیدا کنید، به‌شرطی که سرعت اولیه مساوی صفر باشد.

***۲۹۶۷.** قایق موتوری با وزن ۳۰۰ کیلوگرم بطور مستقیم و با سرعت اولیهٔ ۶۶ متر در ثانیه حرکت می کند. مقاومت آب متناسب با سرعت است و در سرعت ۱ متر در ثانیه مساوی ۱۰ کیلوگرم است. بعد از چه مدتی سرعت قایق مساوی ۸ متر درثانیه می‌شود؟

۱۱. معادله‌های دیفرانسیلی خطی

۱°. معادله‌های متجانس. گویند توابع $y_1=\varphi_1(x)$، $y_2=\varphi_2(x)$، ...، $y_n=\varphi_n(x)$ بطور خطی بهم مربوطاند، وقتی که مقادیر ثابت C_1، C_2، ...، C_n (که همه با هم مساوی صفر نیستند) وجود داشته باشند بنحوی که داشته باشیم:

$$c_1y_1+c_2y_2+\cdots+C_ny_n=0$$

درحالت عکس گویند این توابع بطور خطی بهم مربوط نیستند.

جواب کلی معادلهٔ دیفرانسیلی خطی متجانس

$$y^{(n)}+P_{1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n}(x)y=0 \qquad (1)$$

باضریبهای پیوستهٔ $P_{i}(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$، به‌اینصورت است:

$$y=c_{1}y_{1}+c_{2}y_{2}+\cdots+c_{n}y_{n}$$

که درآن y_{2}،y_{2}،...،y_{n} جوابهای معادلهٔ (۱)اند که بطور خطی بهم مربوط نیستند (دستگاه اساسی جواب).

۲° معادله‌های غیرمتجانس. جواب کلی معادلهٔ دیفرانسیلی خطی غیرمتجانس

$$y^{(n)}+P_{n}(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n}(x)y=f(x) \qquad (2)$$

با ضریبهای پیوستهٔ $P_{i}(x)$ با طرف دوم $f(x)$ به‌اینصورت است:

$$y=y_{0}+Y$$

که درآن y_{0} جواب کلی معادلهٔ متجانس نظیر (۱) و Y جواب خاص معادلهٔ غیرمتجانس مفروض (۲) است.

اگر دستگاه اساسی جواب y_{1}،y_{2}،...،y_{n} از معادلهٔ متجانس (۱) معلوم باشد، جواب کلی معادلهٔ غیرمتجانس (۲) را می‌توان از رابطهٔ زیر بدست آورد:

$$y=C_{1}(x)y_{1}+C_{2}(x)y_{2}+\cdots+C_{n}(x)y_{n}$$

که درآن تابعهای $C_{i}(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ از دستگاه معادله‌های زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} C'_{1}(x)y_{1}+C'_{2}(x)y_{2}+\cdots+C'_{n}(x)y_{n}=0 \\ C'_{1}(x)y'_{1}+C'_{2}(x)y'_{2}+\cdots+C'_{n}(x)y'_{n}= \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{1}'(x)y_{1}^{(n-2)}+C'_{2}(x)y_{2}^{(n-2)}+\cdots+C'(x)y_{n}^{(n-2)}=0 \\ C'_{1}(x)y_{1}^{(n-1)}+C'_{2}(x)y_{2}^{(n-1)}+\cdots+C'_{n}(x)y_{n}^{(n-1)}=f(x) \end{cases} \qquad (3)$$

روش تغییر مقادیر ثابت یا روش لاگرانژ).

مثال. این معادله را حل کنید:

$$xy''+y'=x^{2} \qquad (۴)$$

حل. با حل معادلهٔ متجانس $xy''+y'=0$، بدست می‌آید:

$$y=C_{1}\ln x+C_{2} \qquad (۵)$$

بنابراین می‌توان قبول کرد:

$$y_{1}=\ln x, y_{2}=1$$

وجواب معادلهٔ (۴) را به‌صورت زیر جستجو می‌کنیم:

$$y=C_{1}(x)\ln x+C_{2}(x)$$

دستگاه (۳) را تشکیل می‌دهیم وضمناً معادلهٔ (۴) را به‌صورت $y''+\frac{y'}{x}=x$ در نظر می‌گیریم، بدست می‌آید:

$$\begin{cases} C'_{1}(x)\ln x+C'_{2}(x)\cdot 1=0 \\ C_{1}(x)\frac{1}{x}+C'_{2}(x)\cdot 0=x \end{cases}$$

و از آنجا

$$C_{1}(x)=\frac{x^{3}}{3}+A, \qquad C_{2}(x)=-\frac{x^{3}}{3}\ln x+\frac{x^{3}}{9}+B$$

و بنابراین

$$y=\frac{x^{3}}{9}+A\ln x+B$$

که در آن A و B مقادیر ثابت دلخواه‌اند.

۲۹۶۸. تحقیق کنید که آیا دستگاه تابعهای زیر بطورخطی بهم مربوط‌اند:

a) x، $x+1$؛ b) x^{2}، $-2x^{2}$؛

c) 0، 1، x؛ d) x، $x+1$، $x+2$؛

e) x، x^{2}، x^{3}؛ f) e^{x}، e^{2x}، e^{3x}؛

g) $\sin x$، $\cos x$، 1؛ h) $\sin^{2}x$، $\cos^{2}x$، 1.

۲۹۶۹. معادله‌های متجانس خطی‌را، بامعلوم بودن دستگاه اساسی جواب، تشکیل دهید.

a) $y_{1}=\sin y$، $y_{2}=\cos x$؛

b) $y_{1}=e^{X}$، $y_{2}=xe^{X}$؛

e) $y_1 = x$ ، $y_2 = x^2$؛

d) $y_1 = e^x$ ، $y_2 = e^x \sin x$، $y_3 = e^x \cos x$؛

۲۹۷۰. اگر دستگاه اساسی جواب از یك معادلهٔ دیفرانسیلی خطی چنین باشد:

$$y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = x^3$$

جواب خاص آن y را، که درشرایط اولیهٔ زیرصدق می کند، پیدا کنید:

$$y\Big|_{x=1} = 0, y'\Big|_{x=1} = -1, y''\Big|_{x=1} = 2$$

۲۹۷۱*. این معادله را حل کنید:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

به‌شرطی که جواب خاص آن $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ باشد.

۲۹۷۲. این معادله را حل کنید:

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$$

به‌شرطی که جواب خاص آن $y_1 = x$ باشد.

معادله‌های خطی غیرمتجانس زیررا باروش تغییر مقادیر ثابت حل کنید:

۲۹۷۳. $x^2 y'' - xy' = 3x^3$.

۲۹۷۴*. $x^2 y'' + xy' - y = x^2$.

۲۹۷۵. $y''' + y' = \sec x$.

۱۲. معادله‌های دیفرانسیلی خطی مرتبهٔ دوم با ضریبهای ثابت

۱*. معادلهٔ متجانس. معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم با ضریبهای ثابت p و q بدون طرف دوم به‌این‌صورت است:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1)$$

اگر k_1 و k_2 ریشه‌های معادلهٔ مشخصه (کاراکتریستیك) باشند:

$$\varphi(k)=k^2+pk+q=0 \qquad (2)$$

در اینصورت جواب معادلهٔ (۱) به‌یکی از سه صورت زیر نوشته می‌شود:

۱) اگر k_1 و k_2 حقیقی و $k_1\neq k_2$: $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$؛

۲) اگر $k_1=k_2$: $y=e^{k_1x}(C_1+C_2x)$؛

۳) اگر $k_1=\alpha+\beta i$ و $k_2=\alpha-\beta i$ $(\beta\neq 0)$: $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

۲° معادلهٔ غیرمتجانس. جواب کلی معادلهٔ دیفرانسیلی خطی غیرمتجانس.

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad (3)$$

را می‌توان به‌صورت مجموع زیرنوشت:

$$y=y_0+Y$$

که درآن y_0 عبارتست از جواب کلی‌معادلهٔ متناظر(۱) بدون طرف دوم، که طبق رابطه‌های ۱)، ۲) یا ۳) معین می‌شود، و Y عبارتست ازجواب خاص معادلهٔ مفروض (۳).

تابع Y را می‌توان با **روش ضریبهای نامعین** درحالتهای سادهٔ زیر پیدا کرد:

۱. $f(x)=e^{ax}P_n(x)$، که درآن $P_n(x)$ کثیرالجمله‌ای از درجهٔ n است.

اگر a ریشهٔ معادلهٔ مشخصهٔ (۲) نباشد، یعنی $\varphi(a)\neq 0$، فرض می کنیم: $Y=e^{ax}Q_n(x)$، که درآن $Q_n(x)$ کثیرالجمله‌ای از درجهٔ n و با ضریبهای نامعین است.

اگر a ریشهٔ‌معادلهٔ مشخصهٔ(۲)باشد، یعنی $\varphi(a)=0$، فرض می کنیم: $Y=x^re^{ax}Q_n(x)$، که درآن r عبارتست ازتعداد تکرار ریشهٔ a ($r=1$ یا $r=2$).

۲. $f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx]$.

اگر $\varphi(a\pm bi)\neq 0$ باشد، فرض می کنیم:

$$Y=e^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx]$$

که درآن $S_N(x)$ و $T_N(x)$ کثیرالجمله‌هائی از درجهٔ N هستند و $N=Max\{n,m\}$.

اگر $\varphi(a\pm bi)=0$ باشد، دراینصورت:

$$Y=x^re^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx]$$

که درآن r عبارتست ازتعداد تکرار ریشهٔ $a \pm bi$ (برای معادلهٔ درجه دوم $r = ۱$).

درحالت کلی، برای حل معادلهٔ (۳) از روش تغییر مقادیر ثابت استفاده می‌شود (بند ۱۱ را ببینید).

مثال ۱. مطلوبست جواب کلی معادلهٔ $۲y'' - y' - y = ۴xe^{۲x}$.

حل. ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ $۲k^۲ - k - ۱ = ۰$ عبارتست از $k_۱ = ۱$ و $k_۲ = -\frac{۱}{۲}$.

جواب کلی معادلهٔ متجانس متناظر آن (نوع اول): $y_۰ = C_۱e^x + C_۲e^{-\frac{x}{۲}}$. طرف اول معادلهٔ مفروض $f(x) = ۴xe^{۲x} = e^{ax}P_n(x)$. بنابراین $Y = e^{۲x}(Ax + B)$، زیرا $n = ۱$ و $r = ۰$.
از Y دومرتبه مشتق می‌گیریم و درمعادلهٔ مفروض قرار می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$۲e^{۲x}(۴Ax + ۴B + ۴A) - e^{۲x}(۲Ax + ۲B + A) - e^{۲x}(Ax + B) = ۴xe^{۲x}$$

طرفین را به $e^{۲x}$ ساده می‌کنیم وضریبهای x ومقادیر ثابت را در دوطرف مساوی قرار می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$۵A = ۴, ۷A + ۵B = ۰ \Longrightarrow A = \frac{۴}{۵}, \ B = -\frac{۲۸}{۲۵}$$

به‌این‌ترتیب $Y = e^{۲x}\left(\frac{۴}{۵}x - \frac{۲۸}{۲۵}\right)$، وجواب کلی معادلهٔ مفروض چنین است:

$$y = C_۱e^x + C_۲e^{-\frac{۱}{۲}x} + e^{۲x}\left(\frac{۴}{۵}x - \frac{۲۸}{۲۵}\right)$$

مثال ۲. جواب کلی معادلهٔ $y'' - ۲y' + y = xe^x$ را پیدا کنید.

حل. معادلهٔ مشخصهٔ $k^۲ - ۲k + ۱ = ۰$ دارای ریشهٔ مضاعف $k = ۱$ است. طرف اول معادله به‌صورت $f(x) = xe^x$ است؛ دراینجا $a = ۱$ و $n = ۱$. جواب خاص $Y = x^۲e^x(Ax + B)$ زیرا a برریشهٔ مضاعف $k = ۱$ منطبق است وبنابراین $r = ۲$.

از Y دوبار مشتق می‌گیریم، درمعادله قرار می‌دهیم وضریبها را مساوی می‌گیریم، بدست می‌آید: $A = \frac{۱}{۶}$، $B = ۰$. بنابراین جواب کلی معادلهٔ مفروض به‌اینصورت است:

$$y = (C_۱ + C_۲x)e^x + \frac{۱}{۶}x^۳e^x$$

مثال ۳. جواب کلی معادلهٔ $y''+y=x\sin x$ را پیدا کنید.

حل. ریشه‌های معادلـهٔ مشخصهٔ $k^{۲}+۱=۰$ عبارتست از $k_{۱}=i$ و $k_{۲}=-i$. جواب کلی معادلهٔ متجانس متناظر چنین است [۳) را ببینید که درآن $\alpha=۰$ و $\beta=۱$]:

$$y_{۰}=C_{۱}\cos x+C_{۲}\sin x$$

طرف اول به‌اینصورت است:

$$f(x)=e^{ax}[P_{n}(x)\cos bx+Q_{m}(x)\sin bx]$$

که درآن $a=۰$، $b=۱$، $P_{n}(x)=۰$ و $Q_{m}(x)=x$. جواب خاص متناظر آن.

$$Y=x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$$

(در اینجا $N=۱$، $a=۰$، $b=۱$، $r=۱$).

دوبار مشتق می‌گیریم و درمعادله قرار می‌دهیم، بـا مساوی قراردادن ضریبهای $\cos x$، $x\cos x$، $\sin x$ و $x\sin x$ در دوطرف تساوی به‌چهار معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$۲A+۲D=۰, ۴C=۰, -۲B+۲C=۰, -۴A=۱$$

که ازآنها بدست می‌آید:

$$A=-\frac{۱}{۴}, B=۰, C=۰, D=\frac{۱}{۴}$$

و بنابراین

$$Y=-\frac{x^{۲}}{۴}\cos x+\frac{x}{۴}\sin x$$

وجواب کلی

$$y=C_{۱}\cos x+C_{۲}\sin x-\frac{x^{۲}}{۴}\cos x+\frac{x}{۴}\sin x$$

۳°. اصل رویهم‌گذاری جوابها. اگر سمت راست معادلهٔ (۳) مساوی مجموع چند تابع باشد:

$$f(x)=f_{۱}(x)+f_{۲}(x)+\cdots+f_{n}(x)$$

و Y_i $(i=1,2,\cdots,n)$ جواب متناظر معادلهٔ

$$y''+py'+qy=f_i(x) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

باشد، دراینصورت مجموع

$$y=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$$

جوابی ازمعادلهٔ (۳) است.

جوابهای‌کلی معادلات زیررا پیداکنید.

۲۹۷۶. $y''-5y'+6y=0$.

۲۹۷۷. $y''-9y=0$.

۲۹۷۸. $y''-y'=0$.

۲۹۷۹. $y''+y=0$.

۲۹۸۰. $y''-2y'+2y=0$.

۲۹۸۱. $y''+4y'+13y=0$.

۲۹۸۲. $y''+2y'+y=0$.

۲۹۸۳. $y''-4y'+2y=0$.

۲۹۸۴. $y''-ky=0$ $(k\neq 0)$.

۲۹۸۵. $y=y''+y'$.

۲۹۸۶. $\dfrac{y'-y}{y''}=3$.

جوابهای خاصی راکه درشرایط مربوطه صدق می‌کنند، پیداکنید:

۲۹۸۷. $y''-5y'+4y=0$؛ $y=5$، $y'=8$ به‌ازای $x=0$.

۲۹۸۸. $y''+3y'+2y=0$؛ $y=1$، $y'=-1$ به‌ازای $x=0$.

۲۹۸۹. $y''+4y=0$؛ $y=0$، $y'=2$ به‌ازای $x=0$.

۲۹۹۰. $y''+2y'=0$؛ $y=1$، $y'=0$ به‌ازای $x=0$.

۲۹۹۱. $y''=\dfrac{y}{a^2}$؛ $y=a$، $y'=0$ به‌ازای $x=0$.

۲۹۹۲. $y''+3y'=0$؛ $y=0$ به‌ازای $x=0$ و $y=0$ به‌ازای $x=3$.

۲۹۹۳. $y''+n^2y=0$؛ $y=0$ به‌ازای $x=0$ و $y=0$ به‌ازای $x=1$.

۲۹۹۴. شکل جوابهای خاص‌را برای معادله‌های غیر متجانس زیر پیداکنید:

a) $y''-4y=x^2e^{2x}$؛

b) $y''+9y=\cos 2x$؛

c) $y''-4y'+4y=\sin 2x+e^{2x}$؛

d) $y''-5y'+6y=(x^2+1)e^{x}+xe^{2x}$؛

e) $y''-2y'+5y=xe^{x}\cos 2x-x^2e^{x}\sin 2x$.

جواب‌های کلی معادله‌های زیر را پیدا کنید:

۲۹۹۵. $y''-4y'+4y=x^2$.

۲۹۹۶. $y''-y'+y=x^3+6$.

۲۹۹۷. $y''+2y'+y=e^{2x}$.

۲۹۹۸. $y''-8y'+7y=14$.

۲۹۹۹. $y''-y=e^x$.

۳۰۰۰. $y''+y=\cos x$.

۳۰۰۱. $y''+y'-2y=8\sin 2x$.

۳۰۰۲. $y''+y'-6y=xe^{2x}$.

۳۰۰۳. $y''-2y'+y=\sin x+\operatorname{sh} x$.

۳۰۰۴. $y''+y'=\sin^2 x$.

۳۰۰۵. $y''-2y'+5y=e^x\cos 2x$.

۳۰۰۶. جوابی ازمعادلهٔ $y''+4y=\sin x$ را پیدا کنید که درشرط $y=1$، $y'=1$ به‌ازای $x=0$ صدق کند.

این معادله‌ها را حل کنید:

۳۰۰۷. $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=A\sin pt$. حالتهای ۱) $p\neq\omega$؛ ۲) $p=\omega$ را بررسی کنید.

۳۰۰۸. $y''-7y'+12y=-e^{4x}$.

۳۰۰۹. $y''-2y'=x^2-1$.

۳۰۱۰. $y''-2y'+y=2e^x$.

۳۰۱۱. $y''-2y'=e^{2x}+5$.

۳۰۱۲. $y''-2y'-8y=e^x-8\cos 2x$.

۳۰۱۳. $y''+y'=5x+2e^x$.

۳۰۱۴. $y''-y'=2x-1-3e^x$.

۳۰۱۵. $y''+2y'+y=e^x+e^{-x}$.

۳۰۱۶. $y''-2y'+10y=\sin 3x+e^x$.

۳۰۱۷. $y''-4y'+4y=2e^{2x}+\frac{x}{2}$.

۳۰۱۸. $y''-3y'=x+\cos x$.

۳۰۱۹. ریشه‌ای از معادلهٔ $y''-2y'=e^{2x}+x^2-1$ را پیدا کنید که در شرط $y=\frac{1}{8}$، $y'=1$ به‌ازای $x=0$ صدق کند.

این معادله‌ها را حل کنید:

۳۰۲۰. $y''-y=2x\sin x$.

۳۰۲۱. $y''-4y=e^{2x}\sin 2x$.

۳۰۲۲. $y''+4y=2\sin 2x-3\cos 2x+1$.

۳۰۲۳. $y''-2y'+2y=4e^{x}\sin x$.

۳۰۲۴. $y''=xe^{x}+y$.

۳۰۲۵. $y''+9y=2x\sin x+xe^{3x}$.

۳۰۲۶. $y''-2y'-3y=x(1+e^{3x})$.

۳۰۲۷. $y''-2y'=3x+2xe^{x}$.

۳۰۲۸. $y''-4y'+4y=xe^{2x}$.

۳۰۲۹. $y''+2y'-3y=2xe^{-3x}+(x+1)e^{x}$.

*۳۰۳۰. $y''+y=2x\cos x\cos 2x$

۳۰۳۱. $y''-2y=2xe^{x}(\cos x-\sin x)$.

با استفاده ازروش تغییرمقادیر ثابت، این معادله‌ها را حل‌کنید:

۳۰۳۲. $y''+y=tg\,x$. ۳۰۳۳. $y''+y=cotg\,x$.

۳۰۳۴. $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x}$. ۳۰۳۵. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x}$.

۳۰۳۶. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$. ۳۰۳۷. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

۳۰۳۸. (a $y''-y=th\,x$ ؛ (b $y''-2y=4x^{2}e^{x^{2}}$.

۳۰۳۹. دووزنهٔ یکنواخت به‌انتهای فنری‌آویزانند. مطلوبست معادلهٔ حرکتی‌که یکی از این وزنه‌ها انجام می‌دهد، وقتی‌که دیگری پاره شود.

حل. فرض‌کنید فنر تحت تأثیرعمل یکی از وزنه‌ها در حالت‌آرامش به‌اندازهٔ a بزرگ شود، جرم وزنه را هم m می‌گیریم. اگـر مختص وزنه را x بگیریم، ضمن حذف وزنـهٔ اول داریم:

$$m\frac{d^{2}x}{dt^{2}}=mg-k(x+a),$$

که درآن واضح است $k=\dfrac{mg}{a}$ وبنابراین $\dfrac{d^{2}x}{dt^{2}}=-\dfrac{g}{a}x$. جواب‌کلی چنین است:

$$x=C_{1}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t+C_{2}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$$

ازشرط اولیه معلوم می‌شود که به‌ازای $t = 0$ داریم : $x = a$ و $\frac{dx}{dt} = 0$؛ ازآنجا $C_1 = a$ و $C_2 = 0$،

بنابراین

$$x = a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,r$$

*۳۰۴۰. نیرو وقتی که فنری را می کشد، متناسب با افزایش طول فنر است و وقتی که افزایش طول فنر مساوی ۱ سانتیمتر باشد، مساوی ۱ کیلوگرم است. به‌فنر وزنهٔ دو کیلوگرمی آویخته‌ایم. دورهٔ تناوب نوسان حرکت این وزنه‌را بدست‌آورید بشرطی‌که آنرا کمی به‌پائین بکشیم وسپس آزاد کنیم.

*۳۰۴۱. یك وزنهٔ۴کیلوگرمی به‌فنری آویخته‌ایم وطول‌آن به‌اندازهٔ ۱سانتیمتراضافه شده‌است. مطلوبست قانون حرکت وزنه، بشرطی‌که انتهای‌بالای‌فنرنوسان همساز (هارمونیك) قائم (سانتیمتر) $y = 2\sin 30t$ انجام دهد ودر لحظهٔ شروع وزنه درآرامش باشد.

۳۰۴۲. یك‌نقطهٔ مادی به‌جرم m به‌طرف هریك از دومرکز بانیروئی متناسب بافاصله کشیده می‌شود (ضریب تناسب مساوی k است). مطلوبست قانون حرکت نقطه، بشرطی‌که بدانیم فاصلهٔ بین دومرکز مساوی $2b$ است و درلحظهٔ شروع، نقطه برپاره خطی‌که از دومرکز می‌گذرد وبه‌فاصلهٔ c ازوسط‌آن قرار دارد وسرعت‌آن دراین لحظه مساوی صفر است.

۳۰۴۳. زنجیری به‌طول۶متر روی پایه‌ای بدون اصطکاك به‌پائین می‌لغزد. اگرحرکت از لحظه‌ای شروع شده باشدکه ۱متر زنجیرآویزان است، چه‌مدت طول می کشد تا تمام زنجیر بلغزد؟

*۳۰۴۴. لولهٔ باریك بلندی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دور محور قائم عمود برآن می‌چرخد.گلوله‌ای که در داخل لوله واقع است، بدون‌اصطکاك درآن می‌لغزد. مطلوبست قانون حرکت‌گلوله نسبت به‌لوله، بشرطی‌که:

a) درلحظهٔ شروع، گلوله بـه‌فاصلهٔ a ازمحور دوران واقع باشد و سرعت اولیهٔ گلوله صفر درنظرگرفته شود؛

b) در لحظهٔ شروع، گلوله برمحور دوران واقع باشد وسرعت اولیه‌ای مساوی v_0 داشته باشد.

۱۳. معادله‌های دیفرانسیلی خطی بالاتر از مرتبهٔ دوم با ضریبهای ثابت

۱°. معادلهٔ متجانس. دستگاه اساسی جوابهای $y_1، y_2، \ldots، y_n$ ازمعادلهٔ خطی متجانس باضریبهای ثابت

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (1)$$

براساس نوع ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ

$$k^n+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0 \qquad (2)$$

معین می‌شوند، به‌این ترتیب که: ۱) اگر k ریشهٔ حقیقی معادلهٔ (۲) بامرتبهٔ تکرار m باشد، دراینصورت m جواب معادلهٔ (۱) (که بطور خطی مستقل ازیکدیگرند)، چنین خواهد بود:

$$y_1=e^{kx}, y_2=xe^{kx}, \ldots, y_m=x^{m-1}e^{kx}$$

۲) اگر $\alpha\pm\beta i$ یک‌زوج ریشهٔ مختلط معادلهٔ (۲) بامرتبهٔ تکرار m باشد، دراینصورت $2m$ جواب معادلهٔ (۱) (که بطورخطی مستقل ازیکدیگرند)، چنین است:

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x, y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x, y_4=xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots$$
$$\ldots, y_{2m-1}=x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, y_{2m}=x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

۲°. معادلهٔ غیرمتجانس. جواب خاص معادلهٔ

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \qquad (3)$$

براساس قاعدهائی که دربند ۱۲، ۲° و۳° دیدیم، جستجو می‌شود.

جوابهای کلی این معادله‌ها را پیداکنید:

۳۰۴۵. $y'''-13y''+12y'=0$.
۳۰۴۶. $y'''-y'=0$.
۳۰۴۷. $y'''+y=0$.
۳۰۴۸. $y^{IV}-2y''=0$.
۳۰۴۹. $y'''-3y''+3y'-y=0$.
۳۰۵۰. $y^{IV}+4y=0$.
۳۰۵۱. $y^{IV}+8y''+16y=0$.
۳۰۵۲. $y^{IV}+y'=0$.

۳۰۵۳. $y^{IV}-2y''+y=0$.　　۳۰۵۴. $y^{IV}-a^4y=0$.

۳۰۵۵. $y^{IV}-6y''+9y=0$.　　۳۰۵۶. $y^{IV}+a^2y''=0$.

۳۰۵۷. $y^{IV}+2y'''+y''=0$.　　۳۰۵۸. $y^{IV}+2y''+y=0$.

۳۰۵۹. $y^{(n)}+\frac{n}{1}y^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^{(n-2)}+\cdots+\frac{n}{1}y'+y=0$.

۳۰۶۰. $y^{IV}-4y'''+y''=e^x$.　　۳۰۶۱. $y^{IV}-2y'''+y''=x^3$.

۳۰۶۲. $y'''-y=x^3-1$.　　۳۰۶۳. $y^{IV}+y'''=\cos 4x$.

۳۰۶۴. $y''+y'''=x^2+1+3xe^x$.　　۳۰۶۵. $y'''+y''+y'+y=xe^x$.

۳۰۶۶. $y'''+y'=tgx\cdot secx$.

۳۰۶۷. جواب خاص معادلهٔ

$$y'''+2y''+2y'+y=x$$

که درشرط اولیهٔ $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$ صدق می‌کند، پیدا کنید.

۱۴. معادلهٔ اولـر

معادلهٔ خطی به‌صورت

$$(ax+b)^n y^{(n)}+A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots$$
$$\cdots+A_{n-1}(ax+b)y'+A_ny=f(x) \qquad (1)$$

که در آن a، b، A_1، ...، A_{n-1} و A_n مقادیر ثابت‌اند، معادلهٔ اولر نامیده می‌شود.

برای حوزهٔ $ax+b>0$، متغیر مستقل جدید t درنظر می‌گیریم، بنحوی که

$$ax+b=e^t$$

دراینصورت خواهیم داشت:

$$y'=ae^{-t}\frac{dy}{dt},\ y''=a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$
$$y'''=a^3e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right),\cdots$$

و به‌این ترتیب معادلهٔ اولر به‌معادله‌ای خطی باضریبهای ثابت تبدیل می‌شود.

مثال ۱. معادلهٔ $x^2y''+xy'+y=1$ را حل کنید.

حل. بافرض $x=e^t$ بدست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}\,,\ \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

بنابراین معادلهٔ مفروض به‌اینصورت درمی‌آید:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=1$$

و از آنجا

$$y=C_1\cos t+C_2\sin t+1$$

یا

$$y=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)+1$$

وقتی که معادلهٔ اولر متجانس باشد:

$$x^ny^{(n)}+A_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+A_{n-1}xy'+A_ny=0 \qquad (2)$$

به‌ازای $x>0$ می‌توان جواب را به‌صورت زیر جستجو کرد:

$$y=x^k \qquad (3)$$

از رابطهٔ (۳) مقادیر y، y'، ...، $y^{(n)}$ را تعیین ودر (۲) قرار می‌دهیم ، معادلهٔ مشخصه بدست می‌آید که از آن می‌توان نمای k را پیدا کرد.

اگر k ریشهٔ حقیقی و تکراری مرتبهٔ m از معادلهٔ مشخصه باشد، دراینصورت m جواب متناظر (که بطور خطی مستقل ازیکدیگرند) چنین است:

$$y_1=x^k,y_2=x^k\ln x,y_3=x^k(\ln x)^2,\cdots,y_m=x^k(\ln x)^{m-1}$$

اگر $\alpha\pm\beta i$ زوج ریشه‌های مختلط تکراری مرتبهٔ m باشد، در اینصورت $2m$ جواب متناظر (که بطور خطی مستقل ازیکدیگرند)، چنین است:

$$y_1=x^\alpha\cos(\beta\ln x),y_2=x^\alpha\sin(\beta\ln x),y_3=x^\alpha\ln x\cos(\beta\ln x),$$
$$y_4=x^\alpha\ln x\sin(\beta\ln x),\cdots,y_{2m-1}=x^\alpha(\ln x)^{m-1}\cos(\beta\ln x),$$
$$y_{2m}=x^\alpha(\ln x)^{m-1}\sin(\beta\ln x)$$

مثال ۲. این معادله را حل کنید:

$$x^۲y''-۳xy'+۴y=۰$$

حل. فرض می‌کنیم:

$$y=x^k, y'=kx^{k-۱}, y''=k(k-۱)x^{k-۲}$$

که اگر درمعادلهٔ مفروض قراردهیم، بعداز ساده کردن به x^k، معادلهٔ مشخصهٔ زیر بدست می‌آید:

$$k^۲-۴k+۴=۰$$

که از حل آن به‌دست می‌آید:

$$k_۱=k_۲=۲$$

بنابراین جواب کلی معادله چنین خواهد بود:

$$y=C_۱x^۲+C_۲x^۲lnx$$

این معادله‌ها را حل کنید:

۳۰۶۸. $x^۲\frac{d^۲y}{dx^۲}+۳x\frac{dy}{dx}+y=۰$.

۳۰۶۹. $x^۲y''-xy'-۳y=۰$.

۳۰۷۰. $x^۲y''+xy'+۴y=۰$.

۳۰۷۱. $x^۳y'''-۳x^۲y''+۶xy'-۶y=۰$.

۳۰۷۲. $(۳x+۲)y''+۷y'=۰$.

۳۰۷۳. $y''=\frac{۲y}{x^۲}$.

۳۰۷۴. $y''+\frac{y}{x}+\frac{y}{x^۲}=۰$.

۳۰۷۵. $x^۲y''+۴xy'+۶y=x$.

۳۰۷۶. $(۱+x^۲)y''-۳(۱+x)y'+۴y=(۱+x)^۳$.

۳۰۷۷. جواب خاص معادلهٔ

$$x^۲y''-xy'+y=۲x$$

راکه درشرط اولیهٔ $y=۰$، $y'=۱$ به‌ازای $x=۱$ صدق می‌کند، پیدا کنید.

۱۵. دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی

روش حذفی، برای پیدا کردن جواب یك دستگاه دو معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ اول، یعنی دستگاه به‌صورت

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,z),\frac{dz}{dx}=g(x,y,z) \qquad (۱)$$

که نسبت به‌مشتقهای تابعهای مجهول y و z صریح هستند، از یکی از آنها نسبت به x مشتق می‌گیریم. مثلا بدست می‌آید:

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{f\partial}{\partial y}f+\frac{\partial f}{\partial z}z \qquad (۲)$$

z را ازمعادلهٔ اول دستگاه (۱) بدست می‌آوریم:

$$z=\varphi(x,y,\frac{dy}{dx}) \qquad (۳)$$

در معادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم، به معادلهٔ مرتبهٔ دومی با یك تابع مجهول y می‌رسیم. باحل این معادله بدست می‌آید:

$$y=\Psi(x,C_{۱},C_{۲}) \qquad (۴)$$

که درآن $C_{۱}$ و $C_{۲}$ مقدارهای ثابت دلخواهند. با قرار دادن تابع (۴) در رابطهٔ (۳)، بدون انتگرش جدید بدست می‌آید. مجموعهٔ رابطه‌های (۳) و (۴)، که درآن بجای y باید Ψ را قرار داد، جواب‌کلی دستگاه (۱) را معین می‌کند.

مثال. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+۲y+۴z=۱+۴x\\[2ex]\dfrac{dz}{dx}+y-z=\dfrac{۳}{۲}x^{۲}\end{cases}$$

حل. از معادلهٔ اول دستگاه نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+۲\frac{dy}{dx}+۴\frac{dz}{dx}=۴$$

از معادلهٔ اول معلوم می‌شود.

$$z=\frac{۱}{۴}(۱+۴x-\frac{dy}{dx}-۲y)$$

و در اینصورت معادلهٔ دوم به‌اینصورت درمی‌آید:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{۳}{۲}x^۲+x+\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{۲}y-\frac{۱}{۴}\frac{dy}{dx}$$

z و $\frac{dz}{dx}$ را در معادله‌ای که بعد از مشتق‌گرفتن بدست‌آوردیم، قرار می‌دهیم، به‌معادلهٔ مرتبهٔ دومی نسبت به‌مجهول y می‌رسیم:

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+\frac{dy}{dx}-۶y=۶x^۲-۴x+۳$$

که از حل‌آن بدست می‌آید:

$$y=C_۱e^{۲x}+C_۲e^{-۳x}+x^۲+x$$

و از آنجا:

$$z=\frac{۱}{۴}(۱+۴x-\frac{dy}{dx}-۲y)=-C_۱e^{۲x}+\frac{C_۲}{۴}e^{-۳x}-\frac{۱}{۲}x^۲$$

در مواردی‌هم که تعداد معادله‌ها بیشتر باشد، بهمین ترتیب می‌توان عمل کرد:

این دستگاههارا حل کنید:

۳۰۷۸.
$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z\\ \dfrac{dz}{dx}=-y\end{cases}$$

۳۰۷۹.
$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=y+۵z\\ \dfrac{dz}{dx}+y+۳z=۰\end{cases}$$

.۳۰۸۰
$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-3y-z\\[2ex]\dfrac{dz}{dx}=y-z\end{cases}$$

.۳۰۸۱
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=z\\[2ex]\dfrac{dz}{dt}=x\end{cases}$$

.۳۰۸۲
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+z\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x+z\\[2ex]\dfrac{dz}{dt}=x+y\end{cases}$$

.۳۰۸۳
$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=y+z\\[2ex]\dfrac{dz}{dx}=x+y+z\end{cases}$$

.۳۰۸۴
$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+2y+z=\sin x\\[2ex]\dfrac{dz}{dx}-4y-2z=\cos x\end{cases}$$

.۳۰۸۵
$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+3y+4z=2x\\[2ex]\dfrac{dz}{dx}-y-z=x\end{cases}$$

($y=0$ ، $z=0$ به‌ازای $x=0$)

.۳۰۸۶
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-4x-y+36t=0\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}+2x-y+2e^t=0\end{cases}$$

($x=0$ ، $y=1$ به‌ازای $t=0$)

.۳۰۸۷
$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{z}\\[2ex]\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{2}y\end{cases}$$

.۳۰۸۸*

a) $\dfrac{dx}{x^3+3xy^2}=\dfrac{dy}{2y^3}=\dfrac{dz}{2y^2z}$؛

b) $\dfrac{dx}{x-y}=\dfrac{dy}{x+y}=\dfrac{dz}{z}$؛

c) $\dfrac{dx}{y-z}=\dfrac{dy}{z-x}=\dfrac{dz}{x-y}$

منحنی انتگرالی راکه ازنقطهٔ $(1, 1, -2)$ می‌گذرد، بدست آورید.

۳۰۸۹.
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+z=1 \\ \dfrac{dz}{dx}+\dfrac{2}{x^2}y=\ln x \end{cases}$$

۳۰۹۰.
$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+2y+4z=e^x \\ \dfrac{d^2z}{dx^2}-y-3z=-x \end{cases}$$

**۳۰۹۱. گلوله‌ای با سرعت اولیهٔ v_0 تحت زاویهٔ α نسبت به‌افق ازتوپ خارج شده است. مطلوبست معادلهٔ حرکت گلوله، بشرطی که مقاومت هوا متناسب باسرعت باشد.

*۳۰۹۲. نقطهٔ مادی M با نیروئی متناسب بافاصله، بطرف مرکز O کشیده می‌شود. حرکت ازنقطهٔ A، که به‌فاصلهٔ a ازمرکز قرار دارد، وسرعت اولیهٔ v_0، که عمود برپاره‌خط OA است، شروع شده است. مسیر نقطهٔ M را پیدا کنید.

۱۶. انتگرال گیری معادله‌های دیفرانسیلی به‌کمك رشته‌های توانی (کامل)

وقتی که به‌کمك تابعهای ساده‌نتوانیم ازیك معادلهٔ دیفرانسیلی انتگرال بگیریم، دربعضی حالتها می‌توان جواب‌آنرا به‌صورت رشتهٔ توانی جستجو کرد:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n \qquad (1)$$

ضریبهای نامعین C_n $(n=0, 1, 2, \dots)$ راباقراردادن رشتهٔ (۱) درمعادله، ومساوی کردن ضریبهای توانهای دوجمله‌ای $x-x_0$ درسمت چپ وسمت راست تساوی، بدست می‌آوریم.

همچنین می‌توان جواب معادلهٔ

$$y'=f(x,y);y(x_0)=y_0 \qquad (2)$$

را به‌صورت رشتهٔ تیلور

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (3)$$

بدست آورد، که‌در آن $y(x_0) = y_0$، $y'(x_0) = f(x, y_0)$ وسایر مشتقهای $y^{(n)}(x_0)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ بترتیب با مشتق‌گرفتن ازمعادلهٔ (۲) و قراردادن x_0 بجای x بدست می‌آید.

مثال ۱. جواب معادلهٔ

$$y'' - xy = 0$$

را بدست‌آورید به‌شرطی‌که به‌ازای $x = 0$ داشته باشیم:

$$y = y_0, \quad y' = y_0'.$$

حل. فرض می‌کنیم:

$$y = C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n + \cdots$$

که با مشتق‌گرفتن ازآن بدست می‌آید:

$$y'' = 2\cdot1 C_2 + 3\cdot2 C_3 x + \cdots + n(n-1) C_n x^{n-2} + (n-1) n C_{n+1} x^{n-1} + \\ + (n+2)(n+1) C_{n+2} x^n + \cdots$$

y و y'' را درمعادلهٔ مفروض قرار می‌دهیم، به‌اتحاد زیر می‌رسیم:

$$[2\cdot1 C_2 + 3\cdot2 C_3 x + \cdots + n(n-1) C_n x^{n-2} + (n+1) n C_{n+1} x^{n-1} + \\ + (n+2)(n+1) C_{n+2} x^n + \cdots] - x[C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n + \cdots] \equiv 0$$

اگر جمله‌های متشابه را در سمت چپ تساوی با هم جمع کنیم و سپس ضریبهای مربوط به توانهای مختلف x را مساوی صفر قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$C_2 = 0;\ 3\cdot2 C_3 - C_0 = 0 \Longrightarrow C_3 = \frac{C_0}{3\cdot2};\ 4\cdot3 C_4 - C_1 = 0 \Longrightarrow C_4 = \frac{C_1}{4\cdot3};$$

$$5\cdot4 C_5 - C_2 = 0 \Longrightarrow C_5 = \frac{C_2}{5\cdot4}, \ldots$$

و بطور کلی

$$C_{3k} = \frac{C_0}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdots(3k-1)3k}, \quad C_{3k+1} = \frac{C_1}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdots+3k(3k+1)}, \\ C_{3k+2} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

بنابراین

$$y=C_\circ\left(۱+\frac{x^۳}{۲\cdot۳}+\frac{x^۶}{۲\cdot۳\cdot۵\cdot۶}+\cdots+\frac{x^{۳k}}{۲\cdot۳\cdot۵\cdot۶\cdots(۳k-۱)۳k}+\cdots\right)+$$
$$+C_۱\left(x+\frac{x^۴}{۳\cdot۴}+\frac{x^۷}{۳\cdot۴\cdot۶\cdot۷}+\cdots+\frac{x^{۳k+۱}}{۳\cdot۴\cdot۶\cdot۷\cdots۳k(۳k+۱)}+\cdots\right)(۴)$$

که در آن $C_\circ=y_\circ$ و $C_۱=y'_\circ$.

بااستفاده از نشانهٔدالامبر، بسادگی معلوم‌می‌شود که رشتهٔ(۴) به‌ازای $-\infty<x<+\infty$ متقارب است.

مثال ۲. این معادله را حل کنید:

$$y'=x+y;y_\circ=y(\circ)=۱$$

حل. فرض می کنیم:

$$y=y_\circ+y'_\circ x+\frac{y''_\circ}{۲!}x^۲+\frac{y'''_\circ}{۳!}x^۳+\cdots$$

داریم $y_\circ=۱$ ، $y'_\circ=\circ+۱=۱$: از دو طرف معادلهٔ $y'=x+y$ مشتق می گیریم، بترتیب بدست می آید:

$$y''=۱+y',y''_\circ=۱+۱=۲;y'''=y'',y'''_\circ=۲;\cdots$$

و بنابراین

$$y=۱+x+\frac{۲}{۲!}x^۲+\frac{۲}{۳!}x^۳+\cdots$$

باکمی توجه روشن می‌شود که این جواب را می‌توان به‌اینصورت نوشت:

$$y=۱+x+۲(e^x-۱-x)\Longrightarrow y=۲e^x-۱-x$$

درمورد معادله‌های دیفرانسیلی‌مرتبه‌های بالاترهم می‌توان بهمین‌ترتیب عمل‌کرد. بررسی تقارب رشته‌هائی که بدست می‌آید بطورکلی مشکل است و برای حل مسئله‌های این‌بند از این بحث صرفنظر می کنیم.

به‌کمك رشته‌های توانی جواب معادله‌های زیررا باتوجه به‌شرط اولیهٔ آنها پیدا کنید. درمورد مسئله‌های ۳۰۹۷، ۳۰۹۸، ۳۰۹۹ و۳۱۰۰، تقارب جواب را بررسی‌کنید:

۳۰۹۳. $y'=y+x^۲$؛ $y=-۲$ به‌ازای $x=\circ$.

۳۰۹۴. $y' = 2y + x - 1$؛ $y = y_0$ به‌ازای $x = 1$.

۳۰۹۵. $y' = y^2 + x^3$؛ $y = \frac{1}{2}$ به‌ازای $x = 0$.

۳۰۹۶. $y' = x^2 - y^2$؛ $y = 0$ به‌ازای $x = 0$.

۳۰۹۷. $(1 - x)y' = 1 + x - y$؛ $y = 0$ به‌ازای $x = 0$.

*۳۰۹۸. $xy'' + y = 0$؛ $y = 0$، $y' = 1$ به‌ازای $x = 0$.

۳۰۹۹. $y'' + xy = 0$؛ $y = 1$، $y' = 0$ به‌ازای $x = 0$.

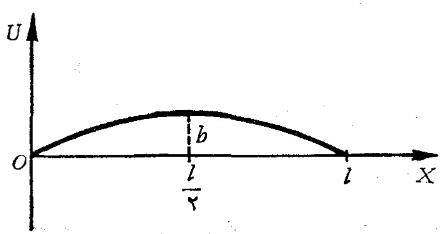
*۳۱۰۰. $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$؛ $y = 1$، $y' = 0$ به‌ازای $x = 0$.

*۳۱۰۱. $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$؛ $y = 1$، $y' = 0$ به‌ازای $x = 0$.

۳۱۰۲. $\frac{d^2x}{dt^2} + x\cos t = 0$؛ $x = a$، $\frac{dx}{dt} = 0$ به‌ازای $x = 0$.

۱۷. مسأله‌هائی با روش فوریه

برای پیداکردن جواب معادلهٔ دیفرانسیلی خطی متجانس بامشتقهای جزئی طبق روش فوریه، ابتدا جوابهای خاص این معادله را از نوع اختصاصی بدست می‌آوریم، که هر کدام از آنها عبارتست از حاصلضرب تابعهائی که تنها بیك متغیر مربوطند. در حالتهای ساده مجموعهٔنامحدودی ازاینگونه جوابهای U_n $(n = 1, 2, \dots)$ بدست می‌آید که بطورخطی مستقل ازیکدیگرند ودرشرط حدی مفروض‌صدق می‌کنند. جواب مورد نظر U به‌صورت رشته‌ای‌است که بوسیلهٔ این‌جوابهای خصوصی تنظیم شده است:



شکل ۱۰۷

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} C_1 u_n \qquad (1)$$

ضریبهای نامعین C_n به‌کمك شرطهای اولیه معین می‌شوند.

مسئله. جابجائی عرضی $u=u(x,t)$ نقطه‌ای از یك سیم به‌طول x درلحظهٔ زمانی t در معادلهٔ زیرصدق می‌کند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2)$$

که در آن $a^2=\frac{T_0}{\rho}$ (T_0 نیروی کشش و ρ چگالی خطی سیم‌است). شکل سیم‌را درلحظهٔ زمانی t پیداکنید، به‌شرطی‌که دو انتهای‌آن $x=0$ و $x=l$ ثابت باشند ودرلحظهٔ اولیهٔ $t=0$، سیم به شکل سهمی $u=\frac{4h}{l^2}x(l-x)$ (شکل ۱۰۷) ونقطه‌های دارای سرعتی مساوی صفر باشد.

حل. باتوجه‌به‌شرط مسئله بایدجواب $u=u(x,t)$ معادلهٔ(۲) را پیداکردکه درشرطهای حدی

$$u(0,t)=0, u(l,t)=0 \qquad (3)$$

وشرطهای اولیهٔ

$$u(x,0)=\frac{4h}{l^2}x(l-x), u'_t(x,0)=0 \qquad (4)$$

صدق کند.

جوابهای غیرصفر معادلهٔ (۲) رابه‌صورت اختصاصی

$$u=X(x)T(t)$$

جستجو می‌کنیم. این عبارت را در معادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم ومتغیرها را جدا می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (5)$$

چون متغیرهای xوt مستقل ازیکدیگرند، اتحاد (۵) تنها درصورتی ممکن است که‌مقدار

مشترك نسبتهای (۵) مساوی مقدار ثابتی باشد. این‌مقدار ثابت‌را مساوی $-\lambda^{۲}$ می‌گیریم، به‌دو معادلهٔ دیفرانسیلی معمولی می‌رسیم:

$$X'(x)+\lambda^{۲}X(x)=\circ \text{ و } T''(t)+(a\lambda)^{۲}\cdot T(t)=\circ$$

ازحل این معادله‌ها بدست می‌آید:

$$T(t)=A\cos a\lambda t+B\sin a\lambda t$$
$$X(x)=C\cos\lambda x+D\sin\lambda x$$

که درآن A، B، C و D مقادیر ثابت دلخواه‌اند. ازشرط (۳) داریم: $X(\circ)=\circ$ و $X(l)=\circ$ بنابراین $C=\circ$ و $\sin\lambda l=\circ$ (زیرا D نمی‌تواند همراه با C مساوی صفرشود). به‌این ترتیب $\lambda_k=\frac{k\pi}{l}$، که درآن k عددی صحیح است. به‌سادگی معلوم می‌شود که اگر برای k تنها مقادیر مثبت را اختیار کنیم $(k=۱,۲,۳,\ldots)$ به‌کلی‌بودن‌آن لطمه‌ای نمی‌زند. هرمقدار λ_k متناظر با جواب خاصی است:

$$u_k=(A_k\cos\frac{ka\pi}{l}t+B_k\sin\frac{ka\pi}{l}t)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

که درشرطهای حدی (۳) صدق می‌کند.

رشته را تشکیل می‌دهیم:

$$u=\sum_{k=۱}^{\infty}(A_k\cos\frac{ka\pi t}{l}+B_k\sin\frac{ka\pi t}{l})\sin\frac{k\pi x}{l}$$

و واضح است که مجموع آن درمعادلهٔ (۲) وشرطهای حدی (۳) صدق می‌کند.

ثابتهای A_k و B_k راطوری انتخاب‌می‌کنیم که‌مجموع‌رشته‌درشرطهای‌اولیهٔ(۴)صدق کندچون

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{ka\pi}{l}\left(-A_k\sin\frac{ka\pi t}{l}+B_k\cos\frac{ka\pi t}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

دراینصورت بافرض $t=\circ$ بدست می‌آید:

$$u(x,\circ)=\sum_{k=۱}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l}\equiv\frac{۴h}{l^{۲}}x(l-x)$$

و
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ka\pi}{l}B_k \sin\frac{k\pi x}{l}\equiv 0$$

بنابراین برای پیداکردن ضریبهای A_k و B_k باید تابع $u(x,0)=\frac{4h}{l^2}x(l-x)$ و تابع $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\equiv 0$ را به‌رشتهٔ فوریه برحسب سینوس بسط داد.

بنابررابطه‌ای که می‌دانیم (فصل هشتم، بند۴،۳° را ببینید) باشرط فروبردن k داریم:

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l \frac{4h}{l^2}\,x(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{32h}{\pi^3 k^3}$$

واگر k عددی زوج باشد داریم: $A_k=0$. ازطرف دیگر

$$\frac{ka\pi}{l}B_k=\frac{2}{l}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx=0\Longrightarrow B_k=0$$

وجواب مورد نظر چنین است:

$$u=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{l}}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

۳۱۰۳*. درلحظهٔ اولیهٔ $t=0$ یك سیم در دو انتهای $x=0$ و$x=l$ ثابت شده‌است، در این‌موقع به‌شکل منحنی سینوسی$u=A\sin\frac{\pi x}{l}$ و سرعت نقطه‌هــای آن مساوی صفر است. مطلوبست شکل سیم درلحظهٔ زمانی t.

۳۱۰۴*. درلحظهٔ اولیهٔ$t=0$، به‌نقطه‌های‌سیم مستقیم‌الخط $0<x<l$ سرعتی مساوی $\frac{\partial u}{\partial t}=l$ وارد می کنیم. مطلوبست شکل‌سیم درلحظهٔ زمانیt، بشرطی که دوانتهای‌آن $x=0$ و $x=l$ ثابت باشند (مسئلهٔ ۳۱۰۳ را ببینید).

۳۱۰۵*. سیمی به‌طول (سانتیمتر) $l=100$ در دوانتهای خود $x=0$ و $x=l$ثابت شده‌است. درلحظهٔ اولیه، سیم‌را درنقطهٔ (سانتیمتر)$x=50$به‌ارتفاع (سانتیمتر) $h=7$ می کشیم

وسپس بدون لرزش آنرا رها می‌کنیم. مطلوبست شکل سیم برای لحظه زمانی دلخواه t.

***۳۱۰۶.** ضمن نوسانهای طولی میلهٔ مستقیم نازك و متجانسی که محور آن برمحور OX منطبق است، جابجائی $u=u(x,t)$ مقطع عرضی میله به‌طول x درلحظهٔ زمانی t دراین معادله صدق می‌کند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

که در آن $a^2=\dfrac{E}{\rho}$ (Eمدول یونگ و ρ چگالـی میله است). مطلوبست قوسهای طولـی میلهٔ افقی قابل‌ارتجاع به‌طول (سانتیمتر)$l=100$ که درانتهای $x=0$ ثابت ودر انتهای $x=100$ به‌طول (سانتیمتر)$\Delta l=1$ کشیده می‌شود وسپس بدون تکان برمی‌گردد.

***۳۱۰۷.** برای میلهٔ متجانس مستقیمی که محورآن برمحور OX منطبق است، درجـه حرارت $u=u(x,t)$ درمقطع به‌طول x درلحظهٔ زمانی t، ضمن حذف حرارت منبع، درمعادلهٔ هدایت حرارتی زیرصدق می‌کند:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

که درآن a مقدار ثابتی است. مطلوبست انتشار حرارت برای لحظهٔ زمانی دلخواه t در میلهٔ به‌طول (سانتیمتر)$l=100$، به‌شرطی که انتشار اولیهٔ حرارت را بدانیم:

$$u(x,0)=0/01x(100-x)$$

فصل دهم

محاسبه‌های تقریبی

۱. عمل روی عددهای تقریبی

۱°. خطای مطلق. خطای مطلق عدد تقریبی a، که بجای A انتخاب شده‌است، به‌قدر مطلق تفاضل آنها گفته می‌شود. عدد Δ که درنامساوی

$$|A-a|\leqslant\Delta \qquad (۱)$$

صدق می کند، حداعلای خطای مطلق نامیده می‌شود. عدد A به‌صورت $a-\Delta\leqslant A\leqslant a+\Delta$ ویا به‌طور خلاصه $A=a\pm\Delta$ نشان داده می‌شود.

۲°. خطای نسبی. خطای نسبی عدد تقریبی a، که بجای عـدد A انتخاب شده است، عبارتست‌ازنسبت خطای مطلق عدد a برعدد تحقیقی A. عدد δ که درنامساوی زیرصدق می کند:

$$\frac{|A-a|}{A}\leqslant\delta \qquad (۲)$$

حد اعلای خطای نسبی عدد a نامیده می‌شود. چون درعمل $A\approx a$، اغلب بجای حداعلای خطای نسبی، عدد $\delta=\frac{\Delta}{a}$ را درنظر می گیرند.

۳°. عدد بارقمهای اعشاری صحیح. گویند عدد تقریبی مثبت a به‌صورت اعشاری‌خود دارای n رقم اعشاری صحیح به‌مفهوم دقیق است، وقتی که خطای مطلق این‌عدد از $\frac{1}{2}$ واحـد مرتبهٔ nام اعشار تجاوز نکند. در این‌حالت به‌ازای $n>1$ می توان به‌عنوان حـد اعلای خطای نسبی، عدد زیررا انتخاب کرد:

$$\delta = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

که در آن k عبارتست از اولین رقم معنی‌دار عدد a. برعکس اگر بدانیم:

$$\delta \leqslant \frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

دراینصورت عدد a دارای n رقم اعشاری صحیح به‌مفهوم دقیق‌است. مخصوصاً، وقتی که داشته باشیم :

$$\delta \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}$$

عدد a دارای n رقم اعشاری صحیح به‌مفهوم دقیق است.

اگر خطای مطلق عدد تقریبی a ازواحد آخرین رقم اعشار تجاوز نکند (یعنی عدد با یك واحد تقریب نسبت به‌آخرین‌رقم اعشار اندازه‌گرفته شده باشد)، گویندکه همهٔ رقمهای اعشاری این‌عدد تقریبی، به‌مفهوم وسیع صحیح‌اند. وقتی کـه تعداد زیادی رقم معنی‌دار در عدد تقریبی باشد، آخرین رقم‌را چنان‌گرد می‌کنندکه همهٔ بقیهٔ رقمها به‌مفهوم دقیق یاوسیع، صحیح باشند.

ازاین به‌بعد فرض‌را براین می‌گیریم‌که درمعلومات اولیه همهٔ رقمها صحیح به‌مفهوم‌دقیق باشند (مگراینکه عکس‌آن تأکید شده‌باشد). درمواردی‌که بانتیجه‌های بین‌راهی سروکار داریم، یکی دو رقم اعشار ذخیره می‌کنیم.

متذکرمی‌شویم که مثالهای این‌بند عبارتندازنتیجهٔ محاسبه‌های نهائی، وبنابراین جوابهای آنها به‌صورت عددهای تقریبی‌که شامل رقمهای اعشاری صحیح‌اند، داده می‌شود.

۰۴. جمع و تفریق عددهای تقریبی. حد اعلای خطای مطلق مجموع جبری چند عـدد برابر است بامجموع حد اعلای خطاهای مطلق این‌عددها. به‌این‌ترتیب برای اینکه مجموع‌چند عدد تقریبی را (که لااقل به‌مفهوم وسیع، همه رقمهای اعشاری‌آنها صحیح‌اند) بدست آوریم، باید تعداد رقمهای اعشاری همهٔ جمله‌های جمع را یکی بیشتر ازتعداد رقمهای‌اعشاری‌جمله‌ای که رقمهای‌اعشاری کمتری دارد، درنظربگیریم‌وسپس عددهائی راکه به‌این‌ترتیب بدست می‌آید باهم‌جمع کنیم وحاصلجمع را در رقم‌آخر گرد کنیم.

اگر بخواهیم مجموع چند عدد تقریبی‌گردنشده را بدست آوریم، باید هریك ازآنها را ضمن نگاهداشتن یکی دو رقم اضافی،گردکرد وسپس قاعدهٔ فوق را برای جمع‌آنها بکار برد؛

رقمهای اضافی مجموع را دراینمورد باید تاآخرعمل حفظ کرد.

مثال ۱.

$$۲۱۵/۲۱+۱۴/۱۸۲+۲۱/۴=۲۱۵/۲(۱)+۱۴/۱(۸)+۲۱/۴=۲۵۰/۸$$

خطای نسبی مجموع چندعدد مثبت از بزرگترین خطای نسبی این عددها تجاوز نمی کند.

خطای نسبی تفاضل دوعدد مثبت را نمی توان بسادگی حساب کرد. ازاین نظر، بخصوص تفاضل دوعدد نزدیك بهم بهاشکال برخورد می کند.

مثال ۲. ضمن محاسبهٔ تفاضل دوعدد تقریبی ۶/۱۳۵ و ۶/۱۳۱، عدد ۰/۰۰۴ بدست می آید.

حد اعلای خطای نسبی آن چنین است:

$$\delta=\frac{\frac{۱}{۲}\times ۰/۰۰۱+\frac{۱}{۲}۰/۰۰۱}{۰/۰۰۴}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$$

بنابراین هیچیك ازرقمهای تفاضل کاملا درست نیست. بنابراین حتی الامکان باید ازتفاضل دوعدد تقریبی پرهیز کرد و تا جائی که می شود ترتیب عمل را چنان داد که احتیاجی به انجام تفاضل نباشد.

۵°. ضرب و تقسیم عددهای تقریبی. حد اعلای خطای نسبی حاصلضرب وخارج قسمت دوعدد تقریبی برابر است بامجموع حد اعلای خطاهای نسبی این عددها. باتوجه به این مطلب و بادرنظر گرفتن قاعدهٔ تعداد رقمهای درست (۳°)، درنتیجهٔ عمل می توانیم تعداد معینی رقم را حفظ کنیم

مثال ۳. حاصلضرب دوعدد تقریبی ۲۵/۳۰۴/۱۲ = ۱۰۴/۲۳۶.

فرض می کنیم همهٔ رقمهای عاملهای ضرب درست باشند، حداعلای خطای نسبی حاصلضرب چنین می شود:

$$\delta=\frac{۱}{۲۰۲}۰/۰۱+\frac{۱}{۴۰۲}۰/۰۱\approx ۰/۰۰۳$$

از اینجا تعداد رقمهای درست حاصلضرب مساوی ۳ می شود و باید نوشت:

$$۲۵/۳۰۴/۱۲=۱۰۴$$

و یا دقیق تر

$$۲۵/۳۰۴/۱۲=۱۰۴/۲\pm ۰/۳$$

۶°. به‌توان‌رساندن عددهای تقریبی و یا ریشه‌گرفتن از آنها. حد اعلای خطای‌نسبی توان mام عدد تقریبی a مساوی است با m برابر حد اعلای خطای نسبی این‌عدد.

حد اعلای خطای نسبی ریشهٔ mام عدد تقریبی a مساویست با $\frac{1}{m}$ حداعلای خطای‌نسبی عدد a.

۷°. محاسبهٔ خطا درحالتی‌که‌روی عددهای‌تقریبی عملهای مختلفی انجام می‌گیرد. اگر Δa_1،...،Δa_n حد اعلای خطای مطلق عددهای تقریبی a_2،...،a_n باشد، حد اعلای خطای مطلق Δs نتیجه عمل

$$S = f(a_1, \cdots, a_n)$$

را می‌توان بتقریب ازرابطهٔ زیر برآورد کرد:

$$\Delta S = \left|\frac{\partial f}{\partial a_1}\right| \Delta a_1 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial a_n}\right| \Delta a_n$$

و دراینصورت حد اعلای خطای نسبی S چنین است:

$$\partial S = \frac{\Delta S}{|S|} = \left|\frac{\partial f}{\partial a_1}\right| \cdot \frac{\Delta a_1}{|f|} + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial a_n}\right| \cdot \frac{\Delta a_n}{|f|} =$$
$$= \left|\frac{\partial \ln f}{\partial a_1}\right| \Delta a_1 + \cdots + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial a_n}\right| \Delta a_n$$

مثال ۴. مطلوبست محاسبهٔ $S = \ln(10.3 + \sqrt{4.4})$ ؛ عددهـای تقریبی ۱۰/۳ و ۴/۳ دررقمهائی که نوشته شده‌اند، درست‌اند.

حل. ابتدا حد اعلای خطای مطلق ΔS را به‌صورت کلی پیدا می‌کنیم:

$$S = \ln(a + \sqrt{b}), \Delta S = \frac{1}{a + \sqrt{b}}\left(\Delta a + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta b}{\sqrt{b}}\right)$$

ازطرف‌دیگرداریم: $\sqrt{4.4} = 2.0976\ldots$؛ $\Delta a = \Delta b \approx \frac{1}{20}$ که ما ۲/۱ به‌حساب می‌آوریم،

چون خطای نسبی عدد تقریبی $\sqrt{4.4}$ تقریباً مساوی $\frac{1}{80} = \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2}$ است؛ دراینصورت‌خطای

مطلق تقریباً مساوی $\frac{۱}{۸۰} = \frac{۱}{۴۰}\cdot ۲$ می‌شود ومحاسبه تارقم اول اعشار درست است. بنابراین

$$\Delta S = \frac{۱}{۱۰/۳+۲/۱}\left(\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۲۰\cdot۲/۱}\right)=\frac{۱}{۱۲/۴\cdot۲۰}\left(۱+\frac{۱}{۴/۲}\right)=$$

$$=\frac{۱۳}{۲۶۰۴}\approx ۰/۰۰۵$$

یعنی رقمهای صدم نیز درست است

حالا محاسبه را با یك رقم اضافی انجام می‌دهیم:

$$lg(۱۰/۳+\sqrt{۴/۴})\approx lg۱۲/۴=۱/۰۹۳;$$

$$lg(۱۰/۳+\sqrt{۴/۴})\approx ۱/۰۹۳\cdot۲/۳۰۳=۲/۵۱۷$$

جواب چنین است: ۲/۵۲.

۸°. تعیین خطای‌قابل‌قبول عددهای تقریبی، به‌شرط معلوم‌بودن خطای نتیجهٔ عمل روی‌آنها. بابکاربردن رابطهٔ قسمت ۷°، با معلوم‌بودن ΔS یا δS وبه‌فرض اینکه دیفرانسیلهای جزئی $\left|\frac{\partial f}{\partial a_k}\right|\Delta a_k$ یا مقدارهای $\left|\frac{\partial f}{\partial a_k}\right|\frac{\Delta a_k}{|f|}$ مساوی باشند، خطای مطلق قابل‌قبول Δa_1،...، Δa_n،... ازعددهای تقریبی a_1،...، a_n،...، راکه در عمل وارد شده‌اند، محاسبه می کنیم (اصل تأثیرهای‌مساوی).

باید توجه‌کرد که گاهی محاسبهٔ خطای قابل‌قبول آوندهای تابع از روی اصل تأثیرهای مساوی، مفید نیست، زیرا اصل اخیر ممکن است درعمل مستلزم قیدهائی باشد که مقدور نشود. در چنین مواردی باید خطا را بطور عاقلانه تقسیم‌کرد (اگر این‌کار ممکن باشد) ، بنحوی که مجموع خطاها از مقدار مفروض تجاوز نکند. به‌این‌ترتیب این مسئله درمفهوم دقیق‌کلی خود مبهم است.

مثال ۵. حجم یك«قطعه استوانه» یعنی جسمی که ازیك استوانهٔ دوار به‌وسیلهٔ صفحه‌ای که ازقطر قاعده می‌گذرد و باآن زاویه‌ای مساوی α می‌سازد، ازرابطهٔ $V=\frac{۲}{۳}R^۳tg\alpha$ بدست می‌آید (R شعاع قاعدهٔ استوانه است). شعاع (سانتیمتر) $R\approx ۶۰$ وزاویهٔ α را باچه دقتی باید اندازه‌گرفت تاحجم «قطعه استوانهٔ» مفروض تا یکصدم تقریب بدست‌آید؟

حل. اگر ΔV، ΔR و $\Delta\alpha$ حداعلای خطای مطلق مقدارهای V،R و α باشند، حداعلای خطای نسبی حجم مورد محاسبهٔ V چنین است:

$$\delta = \frac{۳\Delta R}{R} + \frac{۲\Delta\alpha}{sin\,۲\alpha} \leqslant \frac{۱}{۱۰۰}$$

فرض می‌کنیم: $\frac{۳\Delta R}{R} \leqslant \frac{۱}{۲۰۰}$ و $\frac{۲\Delta\alpha}{sin\,۲\alpha} \leqslant \frac{۱}{۲۰۰}$. از آنجا

$$\Delta R \leqslant \frac{R}{۶۰۰} \approx \frac{۶۰}{۶۰۰}(\text{سانتیمتر}) = ۱\ (\text{میلیمتر});$$

$$\Delta\alpha \leqslant \frac{sin\,۲\alpha}{۴۰۰} \leqslant \frac{۱}{۴۰۰}(\text{رادیان}) \approx ۹'$$

به‌این‌ترتیب حجم مطلوب وقتی باتقریب ۰٫۰۱ بدست می‌آید که شعاع قاعدهٔ استوانه را بادقت ۱میلیمتر وزاویهٔ α را بادقت ۹دقیقه اندازه‌گرفته باشیم.

۳۱۰۸. درنتیجهٔ اندازه‌گیری، رقمهای درست به‌مفهوم وسیع بدست‌آورده‌ایم:

a) $۱۲^\circ ۰۷' ۱۴''$؛ b) ۳۸٫۵ سانتیمتر؛ c) ۶۲٫۲۱۵ کیلوگرم.

خطای نسبی و خطای مطلق‌آنها را محاسبه‌کنید.

۳۱۰۹. مطلوبست محاسبهٔ خطای مطلق وخطای‌نسبی عددهای تقریبی زیرکه رقمهای آنها درست به‌مفهوم دقیق است:

a) ۲۴۱٫۷ ؛ b) ۰٫۰۳۵ ؛ c) ۳٫۱۴.

۳۱۱۰. مطلوبست تعیین تعداد رقمهای درست (به مفهوم دقیق) و عددهای تقریبی متناظر آنها:

a) ۴۸۳۶۱ تایکصدم تقریب؛ b) ۱۴٫۹۳۶۰ تا یکصدم تقریب؛
c) ۵۹۲٫۸ تادوصدم تقریب؛

۳۱۱۱. مجموعهای زیررا بدست‌آورید، بشرطی‌که عددهای تقریبی بارقمهای‌صحیح به‌مفهوم دقیق باشند:

a) $۲۵٫۳۸۶+۰٫۴۹+۳٫۱۰+۰٫۵$؛ b) $۱٫۲\cdot ۱۰^۲+۴۱٫۷۲+۰٫۰۹$؛
c) $۳۸٫۱+۲٫۰+۳٫۱۲۴$.

۳۱۱۲. تفاضل این عددهای تقریبی را، که بارقمهای درست به‌مفهوم دقیق نوشته‌شده‌اند، بدست آورید:

a) ۱۴۸/۱ − ۶۳/۸۷۱؛ b) ۲۹/۷۲ − ۱۱/۲۵؛
c) ۳۴/۲۲ − ۳۴/۲۱.

***۳۱۱۳.** مطلوبست محاسبهٔ تفاضل مساحتهای دومربع، بشرطی که طول ضلعهای آنها طبق اندازه‌گیری بترتیب مساوی ۱۵/۲۸ سانتیمتر و ۱۵/۲۲ سانتیمتر شده است (با تقریب ۰/۰۵ میلیمتر).

۳۱۱۴. حاصلضرب عددهای تقریبی زیررا، که بارقمهای درست به‌مفهوم دقیق نوشته شده‌اند، بدست آورید:

a) ۳/۴۹·۸/۶؛ b) ۲۵/۱۰·۱/۷۴۳؛ c) ۰/۵۰۲·۱۶/۵.

حدودممکن نتیجه‌را معلوم کنید

۳۱۱۵. ضلعهای مستطیلی مساوی ۴/۰۲متر و ۴/۹۶متر است (باتقریب ۱سانتیمتر). مطلوبست محاسبهٔ مساحت مستطیل.

۳۱۱۶. خارج‌قسمت عددهای تقریبی زیررا، که بارقمهای درست بامفهوم دقیق نوشته شده‌اند، بدست آورید:

a) ۵/۶۸۴ : ۵/۰۳۲؛ b) ۰/۱۴۴ : ۱/۲؛ c) ۲۱۶ : ۴.

۳۱۱۷. ضلعهای مجاور به‌زاویهٔ قائمه درمثلث قائم‌الزاویه‌ای مساوی ۱۲/۱۰ سانتیمتر و ۲۵/۲۱سانتیمترند (باتقریب ۰/۰۱سانتیمتر). مطلوبست‌محاسبهٔ تانژانت‌زاویهٔ‌مقابل به‌ضلع اول.

۳۱۱۸. توانهای عددهای تقریبی زیررا، که بارقمهای درست به‌مفهوم دقیق نوشته‌اند، حساب کنید:

a) $۰/۴۱۵۸^{۲}$؛ b) $۶۵/۲^{۳}$؛ c) $۱/۵^{۲}$.

۳۱۱۹. ضلع مربعی مساوی ۴۵/۳ سانتیمتر است (با تقریب ۱میلیمتر). مطلوبست مساحت مربع.

۳۱۲۰. مقدار هریك از این ریشه‌ها را محاسبه کنید (عددهای زیر رادیکالها بارقمهای درست به‌مفهوم دقیق‌اند):

a) $\sqrt{۲/۷۱۵}$؛ b) $\sqrt[۳]{۶۵/۲}$؛ c) $\sqrt{۸۱/۱}$.

۳۱۲۱. شعاعهای دوقاعده ومولد مخروط ناقصی بترتیب چنین‌اند:

$R = ۲۳/۶۴$(سانتیمتر)$\pm ۰/۰۱$(سانتیمتر)؛ $r = ۱۷/۳۱$(سانتیمتر)$\pm ۰/۰۱$(سانتیمتر)؛
$l = ۱۰/۲۱$ (سانتیمتر) $\pm ۰/۰۱$ (سانتیمتر) ؛ $\pi = ۳/۱۴$

با این مفروضات سطح کل مخروط ناقص‌را بدست‌آورید. خطای مطلق وخطای نسبی نتیجه را بدست‌آورید.

۳۱۲۲. وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای مساوی (سانتیمتر) $۱۵/۴ \pm ۰/۱$ (سانتیمتر) و یکی از ضلعهای مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ آن مساوی (سانتیمتر) $۶/۸ \pm ۰/۱$ (سانتیمتر) است. باچه دقتی می‌توان ضلع دیگر وزاویهٔ حادهٔ مجاور آنرا محاسبه‌کرد؟ این‌مقدارها را پیدا کنید.

۳۱۲۳. مطلوبست وزن مخصوص‌آلومی‌نیوم، بشرطی‌که استوانهٔ آلومی‌نیومی به‌قطر ۲سانتیمتر و ارتفاع ۱۱سانتیمتر ۹۳/۴گرم وزن داشته باشد. خطای نسبی اندازه‌گیری طول مساوی ۰/۰۱ وخطای نسبی وزن‌کردن مساوی ۰/۰۰۱ است.

۳۱۲۴. مطلوبست شدت جریان، بشرطی‌که نیروی الکتریسیته مساوی ۲۲۱ ± ۱ولت ومقاومت مساوی ۸۰۹ ± ۱ اهم باشد.

۳۱۲۵. دورهٔ نوسان پاندولی به‌طول l برابر است با

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

که درآن g عبارتست ازشتاب نیروی ثقل، باچه دقتی باید طول پاندولی راکه دورهٔ نوسان آن نزدیك به۲ ثانیه است، اندازه‌گرفت تادورهٔ نوسان باخطای نسبی ۰/۵٪ بدست‌آید؟ باچه دقتی باید عدد π و g را انتخاب‌کرد؟

۳۱۲۶. می‌خواهیم سطح جانبی مخروط ناقصی راکه شعاع قاعده‌های‌آن ۲متر و ۱ متر ومولدآن ۵متر (بتقریب) است بادقت ۱٪ اندازه بگیریم. شعاع قاعده‌ها ومولد استوانه را باچه دقتی اندازه بگیریم وعدد π را باچند رقم اختیارکنیم.

۳۱۲۷. برای تعیین مدول یونگ درخمش یك میلهٔ بامقطع مستطیلی از این رابطه استفاده می‌کنند:

$$E = \frac{۱}{۴} \cdot \frac{l^۳P}{d^۳ls}$$

که درآن l عبارتست ازطول میله، d و b بترتیب قاعده وارتفاع مقطع‌عرضی میله و P بارآنست. با چه دقتی باید l و s را اندازه گرفت تا خطای E از ۵/۵٪ تجاوز نکند، بااین شرط‌که P

با دقت ۱٫۰٪ و b، d با دقت ۱٪ معلوم‌اند و $l \approx 50$ (سانتیمتر)، $s \approx 2{,}5$ (سانتیمتر).

۲. درج توابع

۱°. رابطهٔ درج نیوتون. فرض کنید x_0، x_1، ...، x_n ردیفی از مقادیر متغیر باشند که تفاضل آنها $h = \Delta x_i$ ($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, \dots, n-1$) مقدار ثابتی است و y_0، y_1، ...، y_n مقادیر متناظر آنها از تابع y باشند. دراین‌صورت مقدار تابع y به‌ازای مقداری از x که درفاصلهٔ دومقدار مفروض باشد، به‌تقریب به‌وسیلهٔ رابطهٔ درج نیوتون داده می‌شود:

$$y = y_0 + q \cdot \Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (1)$$

که درآن داریم:

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \dots$$

مقادیر اخیر یعنی Δy_0، $\Delta^2 y_0$، ... تفاضلهای معین تابع y هستند. به‌ازای $x = x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) همان مقادیر y_i ($i = 0, 1, \dots, n$) از کثیرالجملهٔ (۱) بدست می‌آید. در حالت خاص $n = 1$، رابطهٔ نیوتون را درج خطی ودرحالت خاص $n = 3$ درج مربعی گویند.

اگر $y = f(x)$ کثیرالجمله‌ای ازدرجهٔ n باشد، دراینصورت

$$\Delta^n y_i = \text{مقدار ثابت} \quad \text{و} \quad \Delta^{n+1} y_i = 0$$

و درنتیجه رابطهٔ (۱) دقیق می‌شود.

درحالت کلی، اگر $f(x)$ دارای مشتق پیوستهٔ $f^{(n+1)}(x)$ درفاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$، که شامل نقطه‌های x_0، x_1، ...، x_n و x است، باشد، دراینصورت خطای رابطهٔ (۱) برابر است با

$$R_n(x) = y - \sum_{i=0}^{n} \frac{q(q-1)\cdots(q-i+1)}{i!}\Delta^i y_0 =$$

$$= h^{n+1}\frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \qquad (2)$$

که درآن ξ عبارتست ازمقدار واسطه‌ای بین x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) و x. درعمل از رابطهٔ تقریبی ولی ساده‌تر زیر استفاده می‌کنند:

$$R_n \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)\cdots(q-n)$$

اگر عدد n را بتوان به‌دلخواه اختیار کرد، باید آنرا بنحوی گرفت که تفاضل $\Delta^{n+1} y_0 \approx 0$ در حدود دقت مفروض باشد، به‌عبارت دیگر باید تفاضل $\Delta^n y_0$ در ردیف مفروض مقدار ثابتی باشد.

مثال ۱. اگر بدانیم:

$$\sin 26^\circ = 0{,}43837, \sin 27^\circ = 0{,}45399, \sin 28^\circ = 0{,}46947$$

مطلوبست محاسبهٔ $\sin 26^\circ 15'$.

حل. جدول را تشکیل می‌دهیم:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
۰	۲۶°	۰٫۴۳۸۳۷	۱۵۶۲	‎−۱۴
۱	۲۷°	۰٫۴۵۳۹۹	۱۵۴۸	
۲	۲۸°	۰٫۴۶۹۴۷		

در اینجا $h = 60'$، $q = \frac{26^\circ 15' - 26^\circ}{60'} = \frac{1}{4}$.

باتوجه به‌رابطهٔ (۱) و استفاده ازسطر اول جدول داریم:

$$\sin 26^\circ 15' = 0{,}43837 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}01562 + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\cdot(-0{,}00014) =$$
$$= 0{,}44229$$

خطای R_2 را برآورد می‌کنیم. بااستفاده ازرابطهٔ (۲) وباتوجه به‌اینکه اگر $y = \sin x$، داریم: $|y^{(n)}| \leqslant 1$، خواهیم داشت:

$$|R_2| \leqslant \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 = \frac{7}{128}\cdot\frac{1}{57{,}33^3} \approx \frac{1}{4}\cdot 10^{-6}$$

بنابراین تمام رقمهائی که برای $\sin 26^\circ 15'$ بدست‌آورده‌ایم، درست است.

همچنین به کمك رابطهٔ نیوتون می‌توان با در دست داشتن مقدارهای بینابینی تـابع y ، مقدار متغیر متناظر آنرا بدست‌آورد (درج معکوس). برای این منظور ابتدا مقدار q را با روش تقریبهای متوالی بدست می‌آوریم، فرض می‌کنیم:

$$q^{(\circ)} = \frac{y - y_\circ}{\Delta y_\circ},$$

$$q^{(i+1)} = q^{(\circ)} - \frac{q^{(i)}(q^{(i)} - 1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_\circ}{\Delta y_\circ} - \ldots - \frac{q^{(i)}(q^{(i)} - 1)\cdots(q^{(i)} - n + 1)}{n!} \cdot \frac{\Delta^n y_\circ}{\Delta y_\circ} \quad (i = \circ, 1, 2, \cdots)$$

برای q مقدار مشترکی (باتقریب مفروض) از دوتقریب متوالی $q^{(m)} = q^{(m+1)}$قبول می‌کنیم. ازآنجا $x = x_\circ + q \cdot h$.

مثال۲ . بااستفاده ازجدول

x	$y = shx$	Δy	$\Delta^2 y$
۲/۲	۴/۴۵۷	۱/۰۰۹	۰/۲۲۰
۲/۴	۵/۴۶۶	۱/۲۲۹	
۲/۶	۶/۶۹۵		

ریشهٔ معادلهٔ $shx = ۵$ را به‌تقریب بدست‌آورید.

حل. بافرض $y_\circ = ۴/۴۵۷$، داریم:

$$q^{(\circ)} = \frac{۵ - ۴/۴۵۷}{۱/۰۰۹} = \frac{۰/۵۴۳}{۱/۰۰۹} = ۰/۵۳۸ ;$$

$$q^{(1)} = q^{(\circ)} + \frac{q^{(\circ)}(1 - q^{(\circ)})}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_\circ}{\Delta y_\circ} = ۰/۵۳۸ + \frac{۰/۵۳۸ \cdot ۰/۴۶۲}{۲} \cdot \frac{۰/۲۲۰}{۱/۰۰۹} =$$

$$= ۰/۵۳۸ + ۰/۰۲۷ = ۰/۵۶۵;$$

$$q^{(2)} = ۰/۵۳۸ + \frac{۰/۵۶۵ \quad ۰/۴۳۵}{۲} \cdot \frac{۰/۲۲۰}{۱/۰۰۹} = ۰/۵۳۸ + ۰/۰۲۷ = ۰/۵۶۵$$

بنابراین می‌توان قبول کرد:

$$x = ۲/۲ + ۰/۵۶۵۰ \cdot ۰/۲ = ۲/۲ + ۰/۱۱۳ = ۲/۳۱۳$$

۲°. رابطهٔ درج لاگرانژ. درحالت کلی، کثیر الجملهٔ درجهٔ n که به‌ازای $x = x_i$ مقدارهای معلوم y_i $(i = ۰, ۱, \ldots, n)$ را قبول می‌کند، با رابطهٔ درج لاگرانژ داده می‌شود:

$$y = \frac{(x-x_۱)(x-x_۲)\cdots(x-x_n)}{(x_۰-x_۱)(x_۰-x_۲)\cdots(x_۰-x_n)}y_۰ +$$

$$+ \frac{(x-x_۰)(x-x_۲)\cdots(x-x_n)}{(x_۱-x_۰)(x_۱-x_۲)\cdots(x_۱-x_n)}y_۱ + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(x-x_۰)(x-x_۱)\cdots(x-x_{k-۱})(x-x_{k+۱})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_۰)(x_k-x_۱)\cdots(x_k-x_{k-۱})(x_k-x_{k+۱})\cdots(x_k-x_n)}y_k + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(x-x_۰)(x-x_۱)\cdots(x-x_{n-۱})}{(x_n-x_۰)(x_n-x_۱)\cdots(x_n-x_{n-۱})}y_n$$

۳۱۲۸. جدول مقدارهای x و y به‌این‌ترتیب داده شده است:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۳	۱۰	۱۵	۱۲	۹	۵

جدول تفاضلهای محدود تابع y را تشکیل دهید.

۳۱۲۹. جدول تفاضلهای تابع $y = x^۳ - ۵x^۲ + x - ۱$ را برای مقدارهای ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱ ازمتغیر x تشکیل دهید. تحقیق کنید که تفاضلهای محدود مرتبهٔ سوم باهم مساوی‌اند.

۳۱۳۰*. بااستفاده ازثابت‌بودن تفاضلهای مرتبهٔ چهارم، جدول تفاضلهای تابع $y = x^۴ - ۱۰x^۳ + ۲x^۲ + ۳x$ را برای مقدارهای x که در فاصلهٔ $۱ \leqslant x \leqslant ۱۰$ واقع‌اند، تشکیل دهید.

۳۱۳۱. این‌جدول داده شده است:

$$lg۱ = ۰/۰۰۰$$
$$lg۲ = ۰/۳۰۱$$
$$lg۳ = ۰/۴۷۷$$
$$lg۴ = ۰/۶۰۲$$
$$lg۵ = ۰/۶۹۹$$

به کمك درج خطی عددهای lg۱/۷ ، lg۲/۵ ، lg۳/۱ و lg۴/۶ را محاسبه کنید.

۳۱۳۲. اینجدول داده شده است:

$$\sin 10^\circ = 0/1736, \qquad \sin 13^\circ = 0/2250,$$
$$\sin 11^\circ = 0/1908, \qquad \sin 14^\circ = 0/2419,$$
$$\sin 12^\circ = 0/2079, \qquad \sin 15^\circ = 0/2588$$

به کمك رابطهٔ نیوتون (بهازای $n = 2$) مقدار سینوس‌های $10^\circ 30'$ ، $11^\circ 30'$ ، $12^\circ 30'$ ، $13^\circ 30'$ ، $14^\circ 30'$ را محاسبه وجدول راکامل کنید.

۳۱۳۳. کثیرالجملهٔ درج نیوتون را برای تابعی که با جدول زیر داده شده است ، تشکیل دهید:

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۴	۱۵	۴۰	۸۵

۳۱۳۴*. کثیرالجملهٔ درج نیوتون را برای تابعی‌که با این جدول داده شده است، تشکیل دهید:

x	۲	۴	۶	۸	۱۰
y	۳	۱۱	۲۷	۵۰	۸۳

y را بهازای $x = 5/5$ پیدا کنید. بهازای چه‌مقداری از x داریم: $y = 20$؟

۳۱۳۵. تابعی باجدول زیرداده شده است:

x	-2	۱	۲	۴
y	۲۵	-8	-15	-23

کثیرالجملهٔ درج لاگرانژ را تشکیل دهید و بهازای $x = 0$ مقدار y را بدست‌آورید.

۳۱۳۶. مقدار کوتاه شدن فنر (x میلیمتر) را به‌مناسبت وزنه‌ای که به‌آن‌آویخته‌اند (P کیلوگرم)، باتجربه پیدا کرده‌اند:

x	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰
P	۴۹	۱۰۵	۱۷۲	۲۵۳	۳۵۲	۴۷۳	۶۱۹	۷۹۳

اگر کوتاه‌شدن فنر ۱۴میلیمتر باشد، وزن P را پیدا کنید.

۳۱۳۷. مقدارهای xو y دراین جدول داده شده است:

x	۰	۱	۳	۴	۵
y	۱	۳−	۲۵	۱۲۹	۳۸۱

مقدار yرا به‌ازای۰٫۵ = x وبرای ۲ = x پیدا کنید: a) به‌کمك درج‌خطی؛ b) به‌کمك رابطهٔ لاگرانژ.

۳. محاسبهٔ ریشه‌های حقیقی معادله

۱°. تقریب اولیهٔ ریشه. پیدا کردن ریشهٔ تقریبی معادلهٔ مفروض

$$f(x)=0 \qquad (۱)$$

شامل دومرحله است: ۱) جداکردن جواب ، یعنی پیدا کردن فاصله‌ای (وتا حد ممکن کوچك)، که در داخل آن تنها یك‌ریشه از معادلهٔ (۱) وجود داشته باشد ؛ ۲) محاسبهٔ ریشه با تقریب مورد نظر.

اگرتابع$f(x)$ معین‌ودرفاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته‌باشد وداشته‌باشیم: $f(a)\cdot f(b)<0$، در اینصورت درفاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ لااقل یك ریشهٔ ξ ازمعادلهٔ (۱) وجود دارد. این‌ریشه وقتی منحصر بفرد است که به‌ازای $a<x<b$ ، $f'(x)>0$ یا $f'(x)<0$ باشد.

برای پیدا کردن مقدار تقریبی ξ بهتر است منحنی تابع$y=f(x)$ را روی‌کاغذ میلیمتری رسم‌کنیم. طولهای نقطه‌های تلاقی این‌منحنی بامحور OX، ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ است. گاهی بهتراست‌که معادلهٔ مفروض‌را به‌معادلهٔ هم‌ارز آن $\varphi(x)=\psi(x)$ تبدیل‌کنیم، دراینصورت ریشه‌های معادله عبارتست ازطولهای نقطه‌های تلاقی منحنی‌های $y=\varphi(x)$ و $y=\psi(x)$.

۲°. قاعدهٔ قسمتهای متناسب (روش وترها). اگر معادلهٔ $f(x)=0$ در فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ دارای ریشهٔ منحصربفرد ξ باشد وتابع $f(x)$ دراین فاصله پیوسته باشد، باتبدیل منحنی $y=f(x)$ به‌وتری که از نقطه‌های $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد ، اولین تقریب ریشه بدست می‌آید:

$$c_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a) \quad (۲)$$

برای بدست‌آوردن تقریب دوم $c_{۲}$، ازرابطهٔ (۲) برای فاصلهٔ بستهٔ $[a,c_{۱}]$ یا $(c_{۱},b)$ (هر کدام که تابع $f(x)$ در دو انتهای‌آن علامتهای مختلف دارد) بکار مـی بریم. بهمین‌ترتیب تقریبهای بعدی بدست خواهدآمد. رشتهٔ عددهای $c_n(n=۱,۲,\cdots)$ بسمت ریشهٔ ξ متقارب می‌شود، یعنی

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\; c_n=\xi$$

محاسبه‌های تقریبی $c_{۱}$ ، $c_{۲}$ ، ... باید تاجائی ادامه پیدا کندکه دیگرتعداد مورد لـزوم رقمهای اعشاری (تقریبی‌که مورد احتیاج است) ثابت‌بماند؛ ضمن محاسبه‌های بینابینی **بهتراست همیشه** چند رقم اضافی درنظر گرفته شود.

اگر تابع $f(x)$ درفاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ دارای مشتق پیوسته ومخالف صفر $f'(x)$ باشد، برای برآورد خطای مطلق ریشهٔ تقریبی c_n می‌توان ازرابطهٔ زیر استفاده‌کرد:

$$|\xi-c_n|\leqslant\frac{|f(c_n)|}{\mu}$$

که درآن داریم: $\mu=\underset{a\leqslant x\leqslant b}{\min}|f(x)|$

۳°. طریقهٔ نیوتون (روش مماسها). اگر در فاصلهٔ بستهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ داشته باشیم: $f'(x)\neq ۰$ و $f''(x)\neq ۰$ و ضمناً $f(a)f(b)<۰$ و $f(a)f''(a)<۰$.،دراینصورت دنبالهٔ تقریبهای $x_n(n=۰,۱,۲,\cdots)$ ریشهٔ ξ ازمعادلهٔ $f(x)=۰$ بارابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$x_{۰}=a,\quad x_n=x_{n-۱}-\frac{f(x_{n-۱})}{f'(x_{n-۱})}(n=۱,۲,\cdots)\qquad (۳)$$

باتوجه به‌شرایط داده‌شده، دنبالهٔ $x_n(n=۱,۲,\cdots)$ یکنواست و

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\; x_n=\xi$$

برای برآورد خطا می‌توان ازرابطهٔ زیر استفاده‌کرد:

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{\mu}$$

که درآن داریم: $\mu=\underset{a\leqslant x\leqslant b}{\min}|f'(x)|$.

درعمل می‌توان از رابطه‌های ساده‌تر زیر استفاده کرد:

$$x_0 = a, x_n = x_{n-1} - \alpha f(x_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \cdots) \qquad (3')$$

که در آن $\alpha = \frac{1}{f'(a)}$ تقریباً همان تقریب رابطهٔ (۳) را می‌دهد.

اگر $f(b) \cdot f''(b) > 0$ باشد، باید در رابطه‌های (۳)و(۳′) فرض کرد: $x_0 = b$.

۴°. طریقهٔ تکرار. فرض کنید معادلهٔ مفروض به‌صورت

$$x = \varphi(x) \qquad (4)$$

داده شده‌باشد،که درآن به‌ازای $a \leqslant x \leqslant b$ داشته‌باشیم: $|\varphi'(x)| \leqslant r < 1$ (r مقدار ثابتی‌است). باشروع از مقدار اولیهٔ x_0، که متعلق به‌فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ است، دنبالهٔ عددهای x_1، x_2، ... را طبق قانون زیر می‌سازیم:

$$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \cdots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \cdots \qquad (5)$$

اگر داشته باشیم: $a \leqslant x_n \leqslant b$ $(n = 1, 2, \cdots)$، دراینصورت حد

$$\xi = \lim_{n \to \infty} x_n$$

ریشهٔ منحصربه‌فرد معادلهٔ (۴) در فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ است، یعنی x_n تقریبهای متوالی ریشهٔ ξ را بدست می‌دهد.

برآورد خطای مطلق x_n (تقریب nام) بارابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 - r}$$

بنابراین اگر x_n و x_{n+1} با دقت ε برهم منطبق باشند، خطای مطلق برای x_n عبارتست از $\frac{\varepsilon}{1-r}$.

برای تبدیل معادلهٔ $f(x) = 0$ به‌صورت (۴)، تبدیل هم‌ارزی زیررا انجام می‌دهیم:

$$x = x - \lambda f(x)$$

که درآن $\lambda \neq 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که تابع $\frac{d}{dx}[x - \lambda f(x)] = 1 - \lambda f'(x)$ از

لحاظ قدر مطلق درحوالی نقطهٔ $x_\circ$ کوچك باشد (مثلا بتوان فرض کرد: $\circ = (۱ - \lambda f'(x))$).

مثال ۱. معادلهٔ $۲x - lnx - ۴ = \circ$ را به‌ازای ریشهٔ تقریبی اولیهٔ ۲/۵ به‌صورت(۴) دربیاورید.

حل. در اینجا $f(x) = ۲x - lnx - ۴$ و $f'(x) = ۲ - \frac{۱}{x}$. معادلهٔ‌هم‌ارز را می‌نویسیم:

$$x = x - \lambda(۲x - lnx - ۴)$$

به‌عنوان مقدار λ، عدد ۰/۵ را اختیار می‌کنیم؛ این عدد به ریشهٔ معادلهٔ

$$۱ - \lambda(۲ - \frac{۱}{x})\Big|_{x=۲/۵} = \circ$$

یعنی به $\frac{۱}{۱/۶} \approx \circ/۶$ نزدیك است.

به‌این‌ترتیب معادلهٔ اصلی به‌اینصورت درمی‌آید:

$$x = x - \circ/۵(۲x - ln - ۴)$$

یا

$$x = ۲ + \frac{۱}{۲}lnx$$

مثال ۲. ریشهٔ ξ ازمعادلهٔ مثال۱ راکه بین ۲و۳ واقع‌است تا ۰/۰۱ تقریب پیدا کنید.

محاسبهٔ ریشه‌باطریقهٔ تکرار. بااستفاده ازنتیجهٔ مثال۱ فرض می‌کنیم $x_\circ = ۲/۵$. محاسبه را باتوجه به‌رابطه‌های (۵) دنبال می‌کنیم و درهرمورد یك‌رقم اضافی احتیاطی نگه می‌داریم:

$$x_۱ = ۲ + \frac{۱}{۲}ln۲/۵ \approx ۲/۴۵۸,$$

$$x_۲ = ۲ + \frac{۱}{۲}ln۲/۴۵۸ \approx ۲/۴۵\circ,$$

$$x_۳ = ۲ + \frac{۱}{۲}ln۲/۴۵\circ \approx ۲/۴۴۸,$$

$$x_۴ = ۲ + \frac{۱}{۲}ln۲/۴۴۸ \approx ۲/۴۴۸$$

به‌این‌ترتیب $\xi \approx ۲/۴۵$ (ادامهٔ محاسبه لازم‌نیست، زیرا محاسبه‌های بعدی‌تکرار محاسبهٔ آخر خواهد بود).

خط را برآورد می کنیم. دراینجا.

$$\varphi(x) = ۲ + \frac{۱}{۲} ln x \text{ و } \varphi'(x) = \frac{۱}{۲x}$$

باتوجه‌به‌اینکه همهٔ مقدارهای‌تقریبی x_n درفاصلهٔ‌بستهٔ $[۲/۴, ۲/۵]$ واقع‌است، بدست می آید:

$$r = max|\varphi'(x)| = \frac{۱}{۲ \cdot ۲/۴} = ۰/۲۱$$

بنابراین حد اعلای خطای مطلق تقریب $x_۳$ عبارتست از

$$\Delta = \frac{۰/۰۰۱}{۱ - ۰/۲۱} = ۰/۰۰۱۲ \approx ۰/۰۰۱$$

به‌این‌ترتیب مقدار دقیق ریشهٔ ξ ازمعادلهٔ مفروض چنین است:

$$۲/۴۴۷ < \xi < ۲/۴۴۹$$

ومی‌توان قبول‌کرد $\xi \approx ۲/۴۵$، ضمناً تمام رقمهای این‌عدد تقریبی به‌مفهوم دقیق درست‌است.

محاسبهٔ ریشه باطریقهٔ نیوتون. دراینجا داریم:

$$f(x) = ۲x - ln x - ۴,\ f'(x) = ۲ - \frac{۱}{x},\ f''(x) = \frac{۱}{x^۲}$$

درفاصلهٔ بستهٔ $۲ \leqslant x \leqslant ۳$ داریم:

$$f'(x) > ۰, f''(x) > ۰ ؛ f(۲) \cdot f(۳) < ۰ ؛ f(۳) \cdot f''(۳) > ۰$$

بنابراین شرط ۳° برای $x_۰ = ۳$ برقرار است. فرض می کنیم:

$$\alpha = (۲ - \frac{۱}{۳})^{-۱} = ۰/۶$$

محاسبه را طبق رابطهٔ $(۳')$ بادورقم ذخیره انجام می‌دهیم:

$$x_۱ = ۳ - ۰/۶(۲ \cdot ۳ - ln ۳ - ۴) = ۲/۴۵۹۲,$$
$$x_۲ = ۲/۴۵۹۲ - ۰/۶(۲ \cdot ۲/۴۵۹۲ - ln ۲/۴۵۹۲ - ۴) = ۲/۴۴۸۱,$$

$$x_۳ = ۲/۴۴۸۱ - ۰/۶(۲\cdot۲/۴۴۸۱ - ln۲/۴۴۸۱ - ۴) = ۲/۴۴۷۷,$$
$$x_۴ = ۲/۴۴۷۷ - ۰/۶(۲\cdot۲/۴۴۷۷ - ln۲/۴۴۷۷ - ۴) = ۲/۴۴۷۵$$

از آنجا که رقم هزارم تغییر نمی‌کند، می‌توان محاسبه را ادامه نداد. جواب چنین است: $\xi = ۲/۴۵$. برآورد خطا را قبلا حساب کرده‌ایم.

۳°. حالت دستگاه دومعادله. فرض کنید بخواهیم ریشه‌های حقیقی دستگاه دومعادلهٔ دو مجهولی

$$\begin{cases} f(x,y) = ۰ \\ \varphi(x,y) = ۰ \end{cases} \qquad (۶)$$

را بادقت مفروض محاسبه کنیم وفرض کنید تقریب اولیهٔ یکی‌از جوابها (ξ,η) مربوط به‌دستگاه را به‌صورت $x = x_۰$ و $y = y_۰$ دردست داشته باشیم.

این تقریب اولیه را می‌توان مثلا ازراه رسم منحنی‌های $f(x,y) = ۰$ و $\varphi(x,y) = ۰$ دریك دستگاه محورهای مختصات وتعیین مختصات نقطه‌های تلاقی این‌منحنی‌ها بدست‌آورد.

a) طریقهٔ نیوتون. فرض می‌کنیم دترمینان تابعی

$$I = \frac{\partial(f,\varphi)}{\partial(x,y)}$$

درمجاورت تقریب اولیهٔ $x = x_۰$ و $y = y_۰$ به‌سمت صفر میل نکند. دراینصورت اولین تقریب جواب دستگاه (۶)، طبق طریقهٔ نیوتون، به‌صورت زیر است:

$$x_۱ = x_۰ + \alpha_۰, y_۱ = y_۰ + \beta_۰$$

که درآن $\alpha_۰$و$\beta_۰$ جواب دستگاه دومعادلهٔ خطی زیر است:

$$\begin{cases} f(x_۰,y_۰) + \alpha_۰ f'_x(x_۰,y_۰) + \beta_۰ f'_y(x_۰,y_۰) = ۰ \\ \varphi(x_۰,y_۰) + \alpha_۰\varphi'_x(x_۰,y_۰) + \beta_۰\varphi'_y(x_۰,y_۰) = ۰ \end{cases}$$

تقریب دوم هم بهمین‌ترتیب بدست می‌آید:

$$x_۲ = x_۱ + \alpha_۱, y_۲ = y_۱ + \beta_۱$$

که درآن $\alpha_۱$و$\beta_۱$ عبارتند ازجواب دستگاه معادله‌های خطی زیر:

$$\begin{cases} f(x_1,y_1)+\alpha_1 f'(x_1,y_1)+\beta_1 f'_y(x_1,y_1)=0 \\ \varphi(x_1,y_1)+\alpha_1\varphi'_x(x_1,y_1)+\beta_1\varphi'_x(x_1,y_1)=0 \end{cases}$$

باهمین روش می‌توان تقریبهای سوم وبعدازآن را بدست‌آورد.

b) طریقهٔ تکرار. برای‌بدست‌آوردن جوابهای دستگاه معادله‌های (۶) ازطریقهٔ تکـرار هم می‌توان استفاده کرد. برای این‌منظور دستگاه را به‌هم‌ارزآن

$$\begin{cases} x=F(x,y) \\ y=\Phi(x,y) \end{cases} \qquad (۷)$$

تبدیل می‌کنیم وفرض می‌کنیم نامساویهای

$$|F'_x(x,y)|+|\Phi'_x(x,y)|\leqslant r<1;|F'_y(x,y)|+\Phi_y'(x,y)|\leqslant r<1 \qquad (۸)$$

در یك ناحیهٔ دوبعدی U ازتقریب اولیهٔ (x_0,y) کـه شامل جواب دستگاه (ξ,η) هم باشد، برقرار باشد.

دنبالهٔ تقریبهای (x_n,y_n) $(n=1,2,\ldots)$ که باقانون زیرساخته می‌شوند:

$$\begin{aligned} x_1&=F(x_0,y_0),y_1=\Phi(x_0,y_0), \\ x_2&=F(x_1,y_1),y_2=\Phi(x_1,y_1), \\ x_3&=F(x_2,y_2),y_3=\Phi(x_2,y_2), \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{aligned}$$

بسمت جواب دستگاه(۷)، ودرنتیجه به‌سمت جواب دستگاه(۶) میل‌می‌کند. اگرهمهٔ (x_n,y_n) ها متعلق به‌U باشند، دراینصورت داریم:

$$\text{حد}_{n\to\infty} x_n=\xi \; , \; \text{حد}_{n\to\infty} y_n=\eta$$

برای تبدیل دستگاه معادله‌های (۶) به‌صورت (۷)، باحفظ شرطهای (۸)، می‌توان بـه اینطریق عمل‌کرد. دستگاه معادله‌های زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \alpha f(x,y)+\beta\varphi(x,y)=0 \\ \gamma f(x,y)+\delta\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

این دستگاه باشرط $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} \neq 0$ بادستگاه (۶) هم‌ارز است. آنرا به‌این‌ترتیب می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x = x + \alpha f(x,y) + \beta\varphi(x,y) \equiv F(x,y) \\ y = y + \gamma f(x,y) + \delta\varphi(x,y) \equiv \Phi(x,y) \end{cases}$$

پارامترهای α،β،γ،δ را چنان انتخاب می‌کنیم که مشتقهای نسبی تابعهای $F(x,y)$ و $\Phi(x,y)$ به‌ازای تقریب اولیه مساوی یانزدیك به‌صفر باشند، یعنی α،β،γ،δ را به‌عنوان جوابهای تقریبی دستگاه معادله‌های زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 1 + \alpha f'_x(x_0,y_0) + \beta\varphi'_x(x_0,y_0) = 0 \\ \alpha f'_y(x_0,y_0) + \beta\varphi'_y(x_0,y_0) = 0 \\ \gamma f'_x(x_0,y_0) + \delta\varphi'_x(x_0,y^0) = 0 \\ 1 + \gamma f'_y(x_0,y_0) + \delta\varphi'_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

بااین ترتیب انتخاب پارامترهای α، β، γ و δ، بااین فرض‌که مشتقهای جزئی تابعهای $f(x,y)$ و $\varphi(x,y)$ درمجاورت تقریب اولیهٔ (x_0,y_0) تغییر تند ندارند، شرطهای (۸) برقرار خواهند بود.

مثال ۳. دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$$

را به‌ازای تقریب اولیهٔ جواب $x_0 = 0/8$ ، $y_0 = 0/55$ به‌صورت (۷) تبدیل کنید.

حل. دراینجا داریم:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1, \varphi(x,y) = x^3 - y \; ; \; f'_x(x_0,y_0) = 1/6,$$
$$f'_y(x_0,y_0) = 1/1 \; ; \; \varphi'_x(x_0,y_0) = 1/92, \varphi'_y(x_0,y_0) = -1$$

معادلهٔ هم‌ارز معادلهٔ اصلی

$$\begin{cases} \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y) = 0 \\ \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y) = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} \neq 0\right)$$

را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$x = x + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y)$$

$$y = y + \gamma(x^۲ + y^۲ - ۱) + \delta(x^۳ - y)$$

جواب دستگاه زیررا برای مقدارهای عددی α، β، γ و δ انتخاب می کنیم:

$$\begin{cases} ۱ + ۱/۶\alpha + ۱/۹۲\beta = ۰ \\ ۱/۱\alpha - \beta = ۰ \\ ۱/۶\gamma + ۱/۹۲\delta = ۰ \\ ۱ + ۱/۱\gamma - \delta = ۰ \end{cases}$$

یعنی فرض می کنیم: $\alpha \approx -۰/۳$ ، $\beta \approx -۰/۳$ ، $\gamma \approx -۰/۵$ ، $\delta \approx ۰/۴$.

به‌این‌ترتیب دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x = x - ۰/۳(x^۲ + y^۲ - ۱) - ۰/۳(x^۳ - y) \\ y = y - ۰/۵(x^۲ + y^۲ - ۱) + ۰/۴(x^۳ - y) \end{cases}$$

هم‌ارز معادلهٔ اصلی و به‌صورت (۷) است، ضمناً در مجاورت نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ شرایط (۸) برقرار است.

به‌کمك روش وترها(قاعدهٔ قسمتهای متناسب)، ریشه‌های حقیقی معادله‌های زیر را تا ۰/۰۱ تقریب محاسبه‌کنید:

۳۱۳۸. $x^۳ - x + ۱ = ۰$. **۳۱۳۹.** $x^۴ - ۰/۵x - ۱/۵۵ = ۰$.

۳۱۴۰. $x^۳ - ۴x - ۱ = ۰$.

ابتدا به‌کمك رسم منحنی ، تقریبهای اولیه را بدست آورید وسپس با استفاده از روش نیو نون، ریشه‌های حقیقی معادله‌های زیررا تا ۰/۰۱ تقریب محاسبه‌کنید :

۳۱۴۱. $x^۳ - ۲x - ۵ = ۰$. **۳۱۴۲.** $۲x - \ln x - ۴ = ۰$.

۳۱۴۳. $۲^x = ۴x$. **۳۱۴۴.** $tg\, x = \frac{۱}{x}$.

با استفاده از تقریبهای اولیه،که به‌وسیلهٔ رسم منحنی بدست می‌آورید، ریشه‌های حقیقی معادله‌های زیررا به‌کمك طریقهٔ تکرار تا ۰/۰۱ تقریب بدست‌آورید:

۳۱۴۵. $x^۳ - ۵x + ۰/۱ = ۰$. **۳۱۴۶.** $۴x = \cos x$.

۳۱۴۷. $x^۵ - x - ۲ = ۰$.

تقریبهای اولیه را بارسم منحنی بدست آورید وسپس ریشه‌های حقیقی معادله‌ها ودستگاههای زیر را تا ۰/۰۱ تقریب محاسبه‌کنید :

۳۱۴۸. $x^3 - 3x + 1 = 0$.
۳۱۴۹. $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$.
۳۱۵۰. $x^4 + x^2 - 2x - 2 = 0$.
۳۱۵۱. $x \cdot lnx - 14 = 0$.
۳۱۵۲. $x^3 + 3x - 0/5 = 0$.
۳۱۵۳. $4x - 7\sin x = 0$.
۳۱۵۴. $x^x + 2x - 6 = 0$.
۳۱۵۵. $e^x + e^{-3x} - 4 = 0$.
۳۱۵۶.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$$
۳۱۵۷.
$$\begin{cases} x^2 + y - 4 = 0 \\ y - lgx - 1 = 0 \end{cases}$$
۳۱۵۸. کوچکترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ $tgx = x$ را تا ۰/۰۰۱ تقریب بدست‌آورید.
۳۱۵۹. ریشهٔ معادله $x \cdot thx + 1$ را تا ۰/۰۰۰۱ تقریب محاسبه کنید.

۴. انتگرش عددی تابع

۱°. رابطهٔ ذوزنقه‌ها. برای محاسبهٔ تقریبی انتگرال

$$\int_a^b f(x)dx$$

(تابع $f(x)$ درفاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته است)، فاصلهٔ $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و $h = \frac{b-a}{n}$ را مبنای محاسبه قرار می‌دهیم. فرض کنید $x_i = x_0 + ih$ ($x_0 = a$، $x_n = b$، $i = 0, 1, 2, \cdots, n$) طول نقطهٔ تقسیم و $y_i = f(x_i)$ مقدارهای متناظر تابع $y = f(x)$ باشد. دراینصورت طبق رابطهٔ ذوزنقه‌ها داریم:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right) \qquad (1)$$

که خطای مطلق آن دراین نامساوی صدق می‌کند:

$$R_n \leqslant \frac{h^2}{12}(b-a) \cdot M_2$$

که در آن درفاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ داریم: $M_۲=max|f''(x)|$.

برای رسیدن به‌دقت مفروض ε درمحاسبهٔ انتگرال، مبنای محاسبهٔ h ازنامساوی زیر بدست می‌آید:

$$h^۲\leqslant\frac{۱۲\varepsilon}{(b-a)M_۲} \qquad (۲)$$

یعنی h باید ازمرتبهٔ $\sqrt{\varepsilon}$ باشد. مقدارh راکه به‌این‌ترتیب بدست می‌آید درجهت نقصانی گرد می‌کنند، بنحوی که

$$\frac{b-a}{h}=n$$

مساوی با عددی صحیح باشد واز اینجا تعداد تقسیمها بدست می‌آید. مقدارهائی که برای nوh بدست می‌آید دررابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم وانتگرال را محاسبه می‌کنیم. در تمام محاسبه‌ها **باید** یکی دورقم احتیاطی درنظر گرفت.

۲°. رابطهٔ سیمسون* (رابطهٔ سهمی‌ها). اگرn عددی زوج باشد، بادرنظرگرفتن قرار-دادهای ۱°، رابطهٔ سیمسون صحیح است:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{۳}[(y_۰+y_n)+۴(y_۱+y_۳+\cdots+y_{n-۱})+ \qquad (۳)$$
$$+۲(y_۲+y_۴+\cdots+y_{n-۲})]$$

باخطای مطلق

$$R_n\leqslant\frac{h^۴}{۱۸۰}(b-a)M_۴ \qquad (۴)$$

که درآن $M_۴=max|f^{IV}(x)|$ به‌ازای $a\leqslant x\leqslant b$.

برای رسیدن به‌دقت مفروضε درمحاسبهٔ انتگرال، مبنای محاسبهٔ h ازنامساوی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{h^۴}{۱۸۰}(b-a)M_۴\leqslant\varepsilon \qquad (۵)$$

---

*) Simpson

یعنی h ازمرتبهٔ $\sqrt[۴]{\varepsilon}$ است. عدد h را باید درجهت نقصانی گردکرد، بنحوی که $n = \frac{b-a}{h}$ عدد صحیح وزوج شود.

تبصره. تعیین مبنای محاسبهٔ h و عدد مربوط به‌آن n ازروی نامساویهای (۲) و(۵) در حالت کلی مشکل است، درعمل h را باجستجو بدست می‌آورند. نتیجه‌ای راکه ازاین‌راه بدست می‌آید بدین‌ترتیب موردآزمایش قرار می‌دهند: n را دوبرابر، یعنی hرا نصف می‌کنند، اگر نتیجهٔ جدیدی‌که بدست‌آید ازلحاظ رقمهای اعشاری شبیه نتیجهٔ قبلی بود، محاسبه را متوقف می‌کنند ودر غیراینصورت همین روش را ادامه می‌دهند.

برای محاسبهٔ تقریبی خطای مطلق R دررابطهٔ سیمسون (۳) می‌توان از اصل رونگ هم استفاده‌کرد، که برطبق‌آن

$$R = \frac{|\Sigma - \bar{\Sigma}|}{۱۵}$$

که درآن Σو$\bar{\Sigma}$ عبارتند ازنتیجهٔ محاسبه‌های طبق رابطهٔ (۳) متناظر باh و $H = ۲h$.

۳۱۶۰. تحت اثرنیروی متغیر $\bar{F}$، که‌درطول محور OX عمل می‌کند، نقطهٔ مادی‌روی محور OX ازوضع $x = ۰$ تاوضع $x = ۴$ تغییر مکان می‌دهد. مطلوبست محاسبهٔ تقریبی کار A حاصل ازنیروی $\bar{F}$، به‌شرطی‌که جدول مقدارهای مدول‌آن F داده شده باشد:

x	۰/۰	۰/۵	۱/۰	۱/۵	۲/۰	۲/۵	۳/۰	۳/۵	۴/۰
F	۱/۵۰	۱/۷۵	۰/۵۰	۰/۷۵	۱/۵۰	۲/۷۵	۴/۵۰	۶/۷۵	۱۰/۰۰

محاسبه را طبق رابطهٔ ذوزنقه‌ها و رابطهٔ سیمسون انجام دهید.

۳۱۶۱. بافرض $n = ۱۰$، مقدار تقریبی انتگرال زیرراطبق رابطهٔ‌ذوزنقه‌ها محاسبه‌کنید:

$$\int_{۰}^{۱} (۳x^{۲} - ۴x)\,dx$$

مقدار دقیق این‌انتگرال را محاسبه‌کنید وخطای مطلق و خطای نسبی‌نتیجه را پیداکنید. حداعلای خطای مطلقΔ را به‌ازای $n = ۱۰$، بااستفاده ازرابطهٔ خطاکه درمتن داده‌شده است، بدست‌آورید.

۳۱۶۲. مطلوبست محاسبهٔ $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x+1}$ طبق رابطـهٔ سیمسون با دقت 10^{-4} ($n=10$ بگیرید). حداعلای خطای مطلق Δ را بااستفاده ازرابطهٔ خطا که در متن داده شده است، بدست آورید.

انتگرالهای معین زیررا تا ۰/۰۱ تقریب محاسبه‌کنید :

۳۱۶۳. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$.　　**۳۱۶۴.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

۳۱۶۵. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$.　　**۳۱۶۶.** $\int\limits_0^2 x\lg x dx$.

۳۱۶۷. $\int\limits_0^2 \frac{\lg x}{x}dx$.　　**۳۱۶۸.** $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$.

۳۱۶۹. $\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx$.　　**۳۱۷۰.** $\int\limits_0^2 \frac{\cos x}{x}dx$.

۳۱۷۱. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x}dx$.　　**۳۱۷۲.** $e^{-x^2}dx$.

۳۱۷۳. مطلوبست محاسبهٔ انتگـرال $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ با تغییر متغیر $x=\frac{1}{t}$ تـا ۰/۰۱ تقریب. نتیجه را بانتیجه‌ای که ازطریقه رابطهٔ سیمسون در انتگـرال $\int\limits_1^b \frac{dx}{1+x^2}$ بدست می‌آید، مقایسه‌کنید؛ در انتگرال اخیر b را چنان انتخاب کنید که داشته باشیم:

$$\int\limits_b^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-2}.$$

۳۱۷۴. شکل مسطحه‌ای که محدود است به‌نیم موج از منحنی سینوسی $y = sinx$ و محور OX ، دور محور OX دوران‌داده‌ایم. حجم جسمی را که بدست می‌آیدتا ۰٫۰۱ تقریب بدست‌آورید.

۳۱۷۵*. طول قوس بیضی $\frac{x^۲}{۱}+\frac{y^۲}{(۰٫۶۲۲۲)^۲}=۱$ را، آن‌قسمت‌که در ربع اول دستگاه مختصات قرارگرفته است، طبق رابطهٔ سیمسون تا ۰٫۰۱ تقریب بدست‌آورید.

۵. انتگرال گیری عددی از معادله‌های دیفرانسیلی عادی

۱°. روش تقریبهای‌متوالی (روش پیکار). فرض‌کنید معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ اول

$$y' = f(x,y) \qquad (۱)$$

باشرط اولیهٔ $y = y_۰$ به‌ازای $x = x_۰$ داده شده باشد.

جواب $y(x)$ معادلهٔ (۱) را،که درشرط اولیهٔ مفروض صدق‌کند، درحالت‌کلی می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$y(x) = \lim_{i \to \infty} y_i(x) \qquad (۲)$$

که درآن تقریبهای متوالی $y_i(x)$ ازرابطه‌های زیر بدست می‌آید:

$$y_۰(x) = y_۰$$

$$y_i(x) = y_۰ + \int_{x_۰}^{x} f(x, y_{i-۱}(x))dx$$

$$(i = ۰, ۱, ۲, \ldots)$$

اگر سمت راست معادله ، یعنی $f(x,y)$ درناحیهٔ

$$R\{|x - x_۰| \leqslant a, |y - y_۰| \leqslant b\}$$

معین وپیوسته باشد ودر این‌ناحیه شرط لیپ‌شیتز برقرار باشد:

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\leqslant L\left|y_1-y_2\right|$$

(L مقدار ثابتی است)، دراینصورت رشتهٔ تقریبهای متوالی (۲) درفاصلهٔ

$$|x-x_0|\leqslant h$$

متقارب می‌شود که در آن

$$h=\min_R\left(a,\ \frac{b}{M}\right)$$

و

$$M=\max_R\left|f(x,y)\right|$$

ضمناً خطای

$$R_n=\left|y(x)-y_n(x)\right|\leqslant ML^n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

تنها بشرطی که $|x-x_0|\leqslant h$

روش تقریبهای متوالی (روش پیکار) را بدون تغییر شکل زیاد می‌توان درمورد دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی عادی هم بکار برد. درمورد معادله‌های دیفرانسیلی مرتبهٔ بالاتر ، می‌توان آنها را به‌صورت دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی نوشت.

۴°. روش رونگ ـ کوتا. فرض کنید بخواهیم درفاصلهٔ مفروض $x_0\leqslant x\leqslant X$ جواب $y(x)$ مسئلهٔ (۱) را بادقت مفروض ε پیدا کنیم.

برای این‌منظور ابتدا $h=\dfrac{X-x_0}{n}$ را انتخاب می‌کنیم (مبنای محاسبه)؛ فاصلهٔ‌بستهٔ (x_0,X) را به n قسمت مساوی چنان تقسیم می‌کنیم که $h^4<\varepsilon$ باشد. نقطه‌های تقسیم x_i ازرابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$x_i=x_0+ih\qquad (i=0,1,2,\cdots,n)$$

مقدارهای متناظر $y_i=y(x_i)$ از تابع مجهول طبق‌روش‌رونگ‌ـ‌کوتا بطور متوالی از رابطهٔ زیر بدست می‌آیند:

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right),$$

$$i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

که در آن داریم:

$$k_1^{(i)} = f(x_i, y_i)h,$$

$$k_2^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)h,$$

$$k_3^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)h, \qquad (3)$$

$$k_4^{(i)} = f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})h$$

روش‌رونگ‌ــ کوتا دارای درجهٔ دقت h^4 است. برآورد خطای‌این‌روش درفاصلهٔ مفروض $[x_0, X]$ را می‌توان ازاصل رونگ بدست‌آورد:

$$R = \frac{|y_{2m} - \overline{y}_m|}{15}$$

که درآن $n = 2m$، y_{2m} و $\overline{y}_m$ نتیجهٔ محاسبهٔ طبق‌طرح (۳) بـه‌مبنـای h ومبنای $2h$ است.

روش رونگ ـ‌کاتا را برای حل دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی به‌صورت زیرهم می‌توان بکار برد:

$$y' = f(x, y, z), z' = \varphi(x, y, z) \qquad (4)$$

باشرط اولیهٔ $y = y_0$ ، $z = z_0$ به‌ازای $x = x_0$.

۳°. روش میلن. برای حل مسئلهٔ (۱) طبق روش میلن ، با شرط اولیهٔ $y = y_0$ به‌ازای $x = x_0$ ، به‌طریقی مقدارهای متوالی

$$y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), y_3 = y(x_3)$$

را ازتابع مجهول $y(x)$ پیدا می‌کنیم (مثلا می‌توان ازتبدیل جواب $y(x)$ به‌رشته استفاده‌کرد (فصل نهم، بند۱۷) یا این‌مقدارها را باروش تقریبهای متوالی بدست‌آورد، یا ازروش رونگ‌ــ کوتا استفاده‌کرد و غیره. تقریبهای $\overline{y}_i$ و $\overline{\overline{y}}_i$ برای مقدارهای y_i $(i = 4, 5, \cdots, n)$ را می‌توان‌از رابطه‌های زیر بدست‌آورد:

$$\begin{cases} \bar{y}_i = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-1} + 2f_{i-1}) \\ \bar{\bar{y}}_i = y_{i-2} + \frac{h}{3}(\bar{f}_i + 4f_{i-1} + f_{i-2}) \end{cases} \qquad (5)$$

که در آن داریم:

$$f_i = f(x_i, y_i), \bar{f}_i = f(x_i, \bar{y}_i)$$

برای کنترل کار ، مقدار زیررا محاسبه می کنیم:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{29}(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i) \qquad (6)$$

اگر ε_i از واحد ردیف اعشاری 10^{-m} برای $y(x)$ که در جواب حفظ کرده‌ایم تجاوز نکند، به‌عنوان y_i، $\bar{\bar{y}}_i$ را انتخاب می کنیم و به‌محاسبهٔ مقدار بعدی y_{i+1} مـی‌پردازیم و عمل را بهمین‌ترتیب ادامه می‌دهیم. واگر $10^{-m} < \varepsilon_i$ باشد، بایدکاررا از اول شروع کرد ومبنای محاسبه را پائین‌آورد. مقدار مبنای اولیه به‌تقریب ازنامساوی $h^4 < 10^{-m}$ بدست می آید.

درمورد حالت حل‌دستگاه (۴)، رابطهٔ میلن بطور جداگانه برای تابعهای $y(x)$ و$z(x)$ نوشته می‌شود. ردیف محاسبه مثل حالت قبل است.

مثال ۱. معادلهٔ دیفرانسیلی $y' = y - x$ با شرط اولیهٔ $y(0) = 1/5$ داده شده است. مطلوبست محاسبهٔمقدارجواب این‌معادله به‌ازای مقدار آوند$x = 1/5$ تا ۰٫۰۱ تقریب. محاسبه‌را باترکیب روشهای رونگ ــ کوتا ومیلن انجام دهید.

حل. اولین مبنای محاسبهٔ h را باشرط $h^4 < 0/01$ انتخاب می کنیم. برای اینکه hعدد بغرنجی نباشد، $h = 0/25$می گیریم. تمام‌فاصلهٔ از $x = 0$ تا$x = 1/5$را به‌شش‌قسمت‌مساوی تقسیم می کنیم،طول هریك‌ازاین‌فاصله‌هامساوی ۰٫۲۵ می‌شود وآنهارا بهx_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ نشان می‌دهیم؛مقدارهای متناظر جواب y ومشتق y' را بهy_i وy'_i نشان می‌دهیم.

سه‌مقدار اول y (بدون‌درنظرگرفتن مقدار اولیه)را باروش رونگ ــ کوتا محاسبه می کنیم (طبق رابطهٔ (۳)) ؛ سه‌مقدار بعدی y_4 ، y_5 ، y_6 را با روش میلن بـدست می‌آوریم (طبق رابطهٔ (۵)).

واضح است که مقدار y_6، جواب مسئله است.

محاسبه‌را بادورقم اضافی انجام می‌دهیم و آنهارا در دوجدول متوالی ۱و ۲ تعیین کرده‌ایم.

در پایان جدول ۲، جواب بدست آمده است.

محاسبهٔ مقدار $y_۱$. در اینجا داریم:

$$f(x,y)=-x+y, x_۰=۰, y_۰=۱/۵, h=۰/۲۵$$

خواهیم داشت:

$$\Delta y_۰=\frac{۱}{۶}(k_۱^{(۰)}+۲k_۲^{(۰)}+۲k_۳^{(۰)}+k_۴^{(۰)})=$$

$$=\frac{۱}{۶}(۰/۳۷۵۰+۲\cdot ۰/۳۹۰۶+۲\cdot ۰/۳۹۲۶+۰/۴۱۰۶)=۰/۳۹۲۰;$$

$$k_۱^{(۰)}=f(x_۰,y_۰)h=(-۰+۱/۵۰۰۰)۰/۲۵=۰/۳۷۵۰;$$

$$k_۲^{(۰)}=f(x_۰+\frac{h}{۲},y_۰+\frac{k_۱^{(۰)}}{۲})h=(-۰/۱۲۵+۱/۵۰۰۰+$$
$$+۰/۱۸۷۵)۰/۲۵=۰/۳۹۰۶;$$

$$k_۳^{(۰)}=f(x_۰+\frac{h}{۲},y_۰+\frac{k_۲^{(۰)}}{۲})k=(-۰/۱۲۵+۱/۵۰۰۰+$$
$$+۰/۱۹۵۳)۰/۲۵=۰/۳۹۲۶;$$

$$k_۴^{(۰)}=f(x_۰+h,y_۰+k_۳^{(۰)})h=(-۰/۲۵+۱/۵۰۰۰+$$
$$+۰/۳۹۲۶)۰/۲۵=۰/۴۱۰۶;$$

$$y_۱=y_۰+\Delta y_۰=۱/۵۰۰۰+۰/۳۹۲۰=۱/۸۹۲۰$$

(سه‌رقم اول این‌عدد تقریبی تضمین شده است).

بهمین ترتیب مقدارهای $y_۲$ و $y_۳$ محاسبه می‌شود. نتیجهٔ محاسبه‌ها درجدول I داده شده است.

جدول I. محاسبهٔ $y_۱$،$y_۲$،$y_۳$ باروش رونگ ـ کوتا.

$$f(x,y)=-x+y; h=۰/۲۵$$

مقدار i	x_i	y_i	$y'_i \equiv \equiv f(x_i, y_i)$	$k_۱^{(i)}$	$f(x_i+\frac{h}{۲}, y_i+\frac{k_۱^{(i)}}{۲})$	$k_۲^{(i)}$
۰	۰	۱/۵۰۰۰	۱/۵۰۰۰	۰/۳۷۵۰	۱/۵۶۲۵	۰/۳۹۰۶
۱	۰/۲۵	۱/۸۹۲۰	۱/۶۴۲۰	۰/۴۱۰۵	۱/۷۲۲۳	۰/۴۳۰۶
۲	۰/۵۰	۲/۳۲۴۳	۱/۸۲۸۳	۰/۴۵۶۱	۱/۹۲۷۳	۰/۴۸۱۸
۳	۰/۷۵	۲/۸۰۸۴	۲/۰۵۸۴	۰/۵۱۴۶	۲/۱۹۰۷	۰/۵۴۱۷

مقدار i	$f(x_i+\frac{h}{۲}, y_i+\frac{h_۲^{(i)}}{۲})$	$k_۳^{(i)}$	$f(x_i+h, y_i+k_۳^{(i)})$	$k_۴^{(i)}$	Δy_i	$y_{i+۱}$
۰	۱/۵۷۰۳	۰/۳۹۲۶	۱/۶۴۲۶	۰/۴۱۰۶	۰/۳۹۳۰	۱/۸۹۲۰
۱	۱/۷۳۲۳	۰/۴۳۳۱	۱/۸۲۵۱	۰/۴۵۶۲	۰/۴۲۲۳	۲/۳۲۴۳
۲	۱/۹۴۰۲	۰/۴۸۵۰	۲/۰۵۹۳	۰/۵۱۴۸	۰/۴۸۴۱	۲/۸۰۸۴
۳	۲/۲۰۷۳	۰/۵۵۱۸	۲/۳۶۰۲	۰/۵۹۰۰	۰/۵۵۰۶	۳/۳۵۹۰

محاسبهٔ مقدار $y_۴$. داریم:

$$f(x,y) = -x+y, h = ۰/۲۵, x_۴ = ۱;$$
$$y_۰ = ۱/۵۰۰۰, \quad y_۱ = ۱/۸۹۲۰, \quad y_۲ = ۲/۳۲۴۳, \quad y_۳ = ۲/۸۰۸۴;$$
$$y'_۰ = ۱/۵۰۰۰, \quad y'_۱ = ۱/۶۴۲۰, \quad y'_۲ = ۱/۸۲۴۳, \quad y'_۳ = ۲/۰۵۸۴$$

با استفاده ازرابطهٔ (۵) بدست می‌آید:

$$\bar{y}_۴ = y_۰ + \frac{۴h}{۳}(۲y'_۱ - y'_۲ + ۲y'_۳) =$$

$$= ۱/۵۰۰۰ + \frac{۴\cdot۰/۲۵}{۳}(۲\cdot۱/۶۴۲۰ - ۱/۸۲۴۳ + ۲\cdot۲/۰۵۸۴) = ۳/۳۵۸۸;$$

$$\bar{y}'_4 = f(x, \bar{y}_4) = -1 + 3.3588 = 2.3588;$$

$$\bar{\bar{y}}_4 = y_2 + \frac{h}{3}(\bar{y}'_4 + 4y'_3 + y'_2) =$$

$$= 2.3243 + \frac{0.25}{3}(2.3588 + 4 \cdot 2.0584 + 1.8243) = 3.3590;$$

$$\varepsilon_4 = \frac{|\bar{y}_4 - \bar{\bar{y}}_4|}{29} = \frac{|3.3588 - 3.3590|}{29} =$$

$$= \frac{0.0002}{29} \approx 7 \cdot 10^{-6} < \frac{1}{2} \cdot 0.001;$$

بنابراین تجدیدنظر درمبنای محاسبه لزومی ندارد.

بدست می‌آید: $y_4 = \bar{y}_4 = 3.3590$ (سه‌رقم اول این‌مقدار تقریبی حتماً درست است). بهمین‌ترتیب می‌توان مقدارهای y_5 و y_6 را بدست‌آورد. نتیجهٔ این‌محاسبه‌ها درجدول II داده شده است.

به‌این‌ترتیب درپایان محاسبه خواهیم داشت:

$$y(1.5) = 4.74$$

۴°. روش آدامس. برای حل مسئلهٔ (۱) با روش آدامس، با شروع از مقدار اولیهٔ $y(x_0) = y_0$، به‌طریقی سه‌مقدار زیررا برای تابع مجهول $y(x)$ بدست می‌آوریم:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h), y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h), y(x_3) = y(x_3) = (x_0 + 3h)$$

(این‌مقدار را مثلا ازراه تبدیل $y(x)$ به‌رشته می‌توان بدست‌آورد (فصل نهم بند۱۶)، یاآنهارا به‌طریقهٔ تقریبهای متوالی حساب‌کرد، یاروش رونگ ــ کوتا را بکاربرد وغیره).

بـه‌کمك عددهای x_0، x_1، x_2، x_3 و y_0، y_1، y_2، y_3 می‌توان‌مقدارهای q_0، q_1، q_2، q_3 را حساب‌کرد، که درآن

$$q_0 = hy'_0 = hf(x_0, y_0), \quad q_1 = hy'_1 = hf(x_1, y_1),$$
$$q_2 = hy'_2 = hf(x_2, y_2), \quad q_3 = hy'_3 = hf(x_3, y_3)$$

بالاخره جدول قطری تفاضلهای محدود مقدارهای q را تشکیل می‌دهیم:

x	y	$\Delta y = y_{n-۱} - y_n$	$q = y'h$	$\Delta q = q_{n+۱} - q_n$	$\Delta^۲ q = \Delta q_{n+۱} - \Delta q_n$	$\Delta^۳ q = \Delta^۲ q_{n+۱} - \Delta^۲ q_n$
$x_۰$	$y_۰$	$f(x_۰, y_۰)$	$q_۰$	$\Delta q_۰$	$\Delta^۲ q_۰$	$\Delta^۳ q_۰$
$x_۱$	$y_۱$	$f(x_۱, y_۱)$	$q_۱$	$\Delta q_۱$	$\Delta^۲ q_۰$	$\Delta^۳ q_۱$
$x_۲$	$y_۲$	$f(x_۲, y_۲)$	$q_۲$	$\Delta q_۲$	$\Delta^۲ q_۲$	$\Delta^۳ q_۲$
$x_۳$	$y_۳$	$f(x_۳, y_۳)$	$q_۳$	$\Delta q_۳$	$\Delta^۳ q_۳$	
$x_۴$	$y_۴$	$f(x_۴, y_۴)$	$q_۴$	$\Delta q_۴$		
$x_۵$	$y_۵$	$f(x_۵, y_۵)$	$q_۵$			
$x_۶$	$y_۶$					

محتوی روش آدامس عبارتست از ادامهٔ این‌جدول به‌کمك رابطهٔ آدامس:

$$\Delta y_n = q_n + \frac{۱}{۲}\Delta q_{n-۱} + \frac{۵}{۱۲}\Delta^۲ q_{n-۲} + \frac{۳}{۸}\Delta^۳ q_{n-۳} \qquad (۷)$$

به‌این‌ترتیب بااستفاده ازعددهای $q_۳$،$\Delta q_۲$،$\Delta^۲ q_۱$،$\Delta^۳ q_۰$، که درجدول تفاضلها به‌صورت قطری قرارگرفته‌اند، به‌کمك رابطهٔ (۷) می‌توانیم محاسبه‌کنیم:

$$\Delta y_۳ = q_۳ + \frac{۱}{۲}\Delta q_۲ + \frac{۵}{۱۲}\Delta^۲ q_۱ + \frac{۳}{۸}\Delta^۳ q_۰$$

بـا دردست داشتن $\Delta y_۳$ می‌توانیم $y_۴ = y_۳ + \Delta y_۳$ را محاسبه کنیم. وقتی $x_۴$و$y_۴$ را بدانیم می‌توانیم محاسبه‌کنیم: $q_۴ = hf(x_۴, y_۴)$؛ با وارد کردن $y_۴$،$\Delta y_۳$و$q_۳$ درجدول وسپس تکمیل آن به‌وسیلهٔ تفاضلهای محدود $\Delta q_۳$،$\Delta^۲ q_۲$،$\Delta^۳ q_۱$ که با$q_۴$ دریك ردیف قطری‌قرارگرفته‌اند،قطری موازی‌قطرقبل را بدست می‌آوریم.

سپس‌با استفاده ازعددهای قطرجدید، به‌کمك رابطهٔ(۷) وبافرض $n = ۴$، می‌توانیم$\Delta y_۴$، $y_۵$ و$q_۵$ را محاسبه‌کنیم و ازآنجا قطربعدی: $q_۵$،$\Delta q_۴$،$\Delta^۲ q_۳$،$\Delta^۳ q_۲$ را بدست آوریم. به‌کمك

جدول *II*. محاسبهٔ y_4، y_5، y_6 بادوش میلن. $f(x,y) = -x + y$؛ $h =$ ۰/۲۵

مقدار i	x_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$\bar{y}_i$	$\bar{y}'_i = f(x_i, \bar{y}_i)$	$\bar{\bar{y}}_i$	ε_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	تجدید نظر در مبنای محاسبه
۰	۰	۱/۵۰۰۰	۱/۵۰۰۰							
۱	۰/۲۵	۱/۸۹۲۰	۱/۶۴۲۰							
۲	۰/۵۰	۲/۳۲۴۳	۱/۸۲۴۳							
۳	۰/۷۵	۲/۸۰۸۴	۲/۰۵۸۴							
۴	۱/۰۰			۳/۳۵۸۸	۲/۳۵۸۸	۳/۳۵۹۰	$\approx$ ۷.۱۰$^{-۵}$	۳/۳۵۹۰	۲/۳۵۹۰	لازم نیست
۵	۱/۲۵			۳/۹۹۴۷	۲/۷۴۴۷	۳/۹۹۵۰	$\approx$ ۱۰$^{-۵}$	۳/۹۹۵۰	۲/۷۴۵۰	لازم نیست
۶	۱/۵۰			۴/۷۴۰۲	۳/۲۴۰۲	۴/۷۴۰۶	$\approx$ ۱/۴.۱۰$^{-۵}$	$\boxed{۴/۷۴۰۶}$		لازم نیست
							جواب : $y($۱/۵$) =$ ۴/۷۴			

اینقطر، مقدار y_6 ازجواب مجهول $y(x)$ بدست می‌آید وغیره.

رابطهٔ (۷) آدامس برای محاسبهٔ Δy ازاین فرض شروع می‌کند که سه‌تفاضل محدود $\Delta^3 q$ ثابت‌اند. باتوجه به‌این مطلب، مقدار h، مبنای اولیهٔ محاسبه، ازنامساوی $h^4 < 10^{-m}$ بدست می‌آید (به‌شرطی که بخواهیم مقدار $y(x)$ را باتقریب 10^{-m} بدست‌آوریم).

به‌این مفهوم رابطهٔ (۷) آدامس هم ارز است بارابطهٔ (۵) میلن ورابطهٔ (۳) رونگ ـ کاتا.

برآورد خطا در روش آدامس مشکل و درعمل نامطبوع است. درعمل باشروع ازسومین تفاضلهای محدود، مبنای hرا آنقدر کوچك می‌گیرند که تفاضلهای مجاور $\Delta^3 q_i$ و $\Delta^3 q_{i+1}$ بیش ازیکی دو واحد مرتبهٔ مفروض باهم اختلاف نداشته باشند.

برای دقت بیشتر درنتیجهٔ رابطهٔ آدامس می‌توان ازجمله‌هائی که شامل تفاضلهای چهارم و یامرتبهٔ بالاتر مقدارهای q است، استفاده کرد.

جدول III. جدول اصلی برای محاسبهٔ y_4، y_5، y_6 باروش آدامس

$$f(x,y) = -x + y \; ; \; h = 0{,}25$$

مقدار i	x_i	y_i	Δy_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$q_i = y'_i h$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
۰	۰	۱/۵۰۰۰		۱/۵۰۰۰	۰/۳۷۵۰	۰/۰۳۵۵	۰/۰۱۰۱	۰/۰۰۲۸
۱	۰/۲۵	۱/۸۹۲۰		۱/۶۴۲۰	۰/۴۱۰۵	۰/۰۴۵۶	۰/۰۱۲۹	۰/۰۰۳۷
۲	۰/۵۰	۲/۳۲۴۳		۱/۸۲۴۳	۰/۴۵۶۱	۰/۰۵۸۵	۰/۰۱۶۶	۰/۰۰۴۷
۳	۰/۷۵	۲/۸۰۸۴	۰/۵۵۰۴	۲/۰۵۸۴	۰/۵۱۴۶	۰/۰۷۵۱	۰/۰۲۱۳	
۴	۱/۰۰	۳/۳۵۸۸	۰/۶۳۵۶	۲/۳۵۸۸	۰/۵۸۹۷	۰/۰۹۶۴		
۵	۱/۲۵	۳/۹۹۴۴	۰/۷۴۵۰	۲/۷۴۴۴	۰/۶۸۶۱			
۶	۱/۵۰	۴/۷۳۹۴						

مثال ۲. تا ۰٫۰۱ تقریب جواب معادلهٔ دیفرانسیلی $y' = y - x$ را به‌ازای $x = ۱٫۵$ و با شرط اولیهٔ $y(۰) = ۱٫۵$ محاسبه کنید. از روشهای رونگ‌ـ‌کاتا و آدامس مشترکا استفاده کنید.

حل. ازمقدارهای $y_۱$، $y_۲$، $y_۳$ که درمثال ۱ بدست آوردیم، استفاده می کنیم. این محاسبه‌ها درجدول I داده‌شده‌است.

مقدارهـای بعدی $y_۴$، $y_۵$، $y_۶$ را باروش آدامس محاسبه می کنیم (جدولهای III و IV را ببینید).

جدول IV. جدول کمکی برای محاسبه باروش آدامس

$$\Delta y_i = q_i + \frac{۱}{۲}\Delta q_{i-۱} + \frac{۵}{۱۲}\Delta^۲ q_{i-۲} + \frac{۳}{۸}\Delta^۳ q_{i-۳}$$

مقدار i	q_i	$\frac{۱}{۲}\Delta q_{i-۱}$	$\frac{۵}{۱۲}\Delta^۲ q_{i-۲}$	$\frac{۳}{۸}\Delta^۳ q_{i-۳}$	Δy_i
۳	۰٫۵۱۴۶	۰٫۰۲۹۳	۰٫۰۰۵۴	۰٫۰۰۱۱	۰٫۵۵۰۴
۴	۰٫۵۸۹۷	۰٫۰۳۷۶	۰٫۰۰۶۹	۰٫۰۰۱۴	۰٫۶۳۵۶
۵	۰٫۶۸۶۱	۰٫۰۴۸۲	۰٫۰۰۸۹	۰٫۰۰۱۸	۰٫۷۴۵۰

مقدار $y_۶ = ۴٫۷۴$ جواب مسئله‌است.

برای حالت حل‌دستگاه(۴) به‌کمك رابطهٔ (۷) آدامس وطرح محاسبه، باید جدول III را بطور جداگانه برای هریك ازدوتابع $y(x)$ و $z(x)$ تشکیل داد.

سه تقریب متوالی جواب را درمعادله‌ها ودستگاه زیر پیداکنید:

۳۱۷۶. $y' = x^۲ + y^۲$ ؛ $y(۰) = ۰$.

۳۱۷۷. $y' = x + y + z$ ، $z' = y - z$ ؛ $y(۰) = ۱$ ، $z(۰) = -۲$.

۳۱۷۸. $y'' = -y$ ؛ $y(۰) = ۰$ ، $y'(۰) = ۱$.

با روش رونگ ـ‌کاتا وبامبنای محاسبهٔ $h = ۰٫۲$ برای فاصله‌های مفروض، جوابهای معادله‌ها ودستگاه زیررا پیداکنید:

۳۱۷۹. $y' = y - x$ ؛ $y(۰) = ۱٫۵$ $(۰ \leqslant x \leqslant ۱)$.

۳۱۸۰. $y' = \frac{y}{x} - y^۲$ ؛ $y(۱) = ۱$ $(۱ \leqslant x \leqslant ۲)$.

۳۱۸۱. $y' = z + ۱$ ، $z' = y - x$ ؛ $y(۰) = ۱$ ، $z(۰) = ۱$ $(۰ \leqslant x \leqslant ۱)$.

با استفادهٔ مشترک ازروشهای رونگ ـ کاتا ومیلن یارونگ ـ کاتا وآدامس باتقریب ۰/۰۱ مقدار جوابهای معادله‌ها ودستگاههای دیفرانسیلی زیررا به‌ازای مقادیر معلوم آوند پیداکنید:

۳۱۸۲. $y' = x + y$ ؛ $y = ۱$ به‌ازای $x = ۰$. y را به‌ازای $x = ۰/۵$ محاسبه کنید.

۳۱۸۳. $y' = x^۲ + y$ ؛ $y = ۱$ به‌ازای $x = ۰$. y را به‌ازای $x = ۱$ محاسبه کنید.

۳۱۸۴. $y' = ۲y - ۳$ ؛ $y = ۱$ به‌ازای $x = ۰$. yرا به‌ازای $x = ۰/۵$ محاسبه کنید.

۳۱۸۵. $\begin{cases} y' = -x + ۲y + z \\ z' = x + ۲y + ۳z \end{cases}$ ؛ $y = ۲$، $z = -۲$ به‌ازای $x = ۰$. yوz را به‌ازای $x = ۰/۵$ محاسبه کنید.

۳۱۸۶. $\begin{cases} y' = -۳y - z \\ z' = y - z \end{cases}$ ؛ $y = ۲$، $z = -۱$ به‌ازای $x = ۰$. yوzرا به‌ازای $x = ۰/۵$ محاسبه کنید.

۳۱۸۷. $y'' = ۲ - y$ ؛ $y = ۲$ ، $y' = -۱$ به‌ازای $x = ۰$. y را بـه‌ازای $x = ۱$ محاسبه کنید.

۳۱۸۸. $y^۳y'' + ۱ = ۰$ ؛ $y = ۱$ ، $y' = ۰$ به‌ازای $x = ۰$. yرا به‌ازای $x = ۱/۵$ محاسبه کنید.

۳۱۸۹. $\frac{d^۲x}{dt^۲} + \frac{x}{۲}\cos ۲t = ۰$ ؛ $x = ۰$ ، $x' = ۱$ به‌ازای $t = ۰$. مطلوبست $x(\pi)$ و $x'(\pi)$.

۶. محاسبهٔ تقریبی ضریبهای فوریه

طرح ۱۲ عوض. فرض کنید $y_n = f(x_n)$ $(n = ۰, ۱, \ldots, ۱۲)$ مقدارهای تابع $y = f(x)$ در نقطه‌های $x_n = \frac{\pi n}{۶}$ درفاصلهٔ بستهٔ $[۰, ۲\pi]$ باشد و ضمناً $y_۰ = y_{۱۲}$. این جدولها را تشکیل می‌دهیم :

$$\begin{array}{r|l} & y_0\, y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5\, y_6 \\ & \quad y_{11}\, y_{10}\, y_9\, y_8\, y_7 \\ \hline \text{مجموعها } (\Sigma) & u_0\, u_1\, u_2\, u_3\, u_4\, u_5\, u_6 \\ \text{تفاضلها } (\Delta) & \quad v_1\, v_2\, v_3\, v_4\, v_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & u_0\; u_1\; u_2\; u_3 \\ & u_6\; u_5\; u_4 \\ \hline \text{مجموعها} & s_0\; s_1\; s_2\; s_3 \\ \text{تفاضلها} & t_0\; t_1\; t_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & v_1\; v_2\; v_3 \\ & v_5\; v_4 \\ \hline \text{مجموعها} & \sigma_1\; \sigma_2\; \sigma_3 \\ \text{تفاضلها} & \tau_1\; \tau_2 \end{array}$$

ضریبهای فوریه a_n، $b_n (n = 0, 1, 2, 3)$ از تـابع $y = f(x)$ را می‌توان به‌تقریب از رابطهٔ زیر تعیین کرد:

$$\begin{aligned} &6a_0 = s_0 + s_1 + s_2 + s_3, && 6b_1 = 0/5\sigma_1 + 0/866\sigma_2 + \sigma_3, \\ &6a_1 = t_0 + 0/866 t_1 + 0/5 t_2, && 6b_2 = 0/866(\tau_1 + \tau_2), \\ &6a_2 = s_0 - s_3 + 0/5(s_1 - s_2), && 6b_3 = \sigma_1 - \sigma_3 \\ &6a_3 = t_0 - t_2, && \qquad (1) \end{aligned}$$

که در آنها: $0/866 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30}$.

داریم :

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{3} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

طرحهای دیگری هم معمول است. برای سهولت محاسبه می‌توان از جدولهای نمونـه استفاده کرد.

مثال. کثیرالجملهٔ فوریه را برای تابع $y = f(x) (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ با جدول مفروض زیر پیدا کنید:

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
۳۸	۳۸	۱۲	۴	۱۴	۴	−۱۸	−۲۳	−۲۷	−۲۴	۸	۳۲

حل. جدولها را تشکیل می‌دهیم.

y	۳۸	۳۸	۱۲	۴	۱۴	۳	−۱۸
		۳۲	۸	−۲۴	−۲۷	−۲۳	
u	۳۸	۷۰	۲۰	−۲۰	−۱۳	−۱۹	−۱۸
v		۶	۴	۲۸	۴۱	۲۷	

u	۳۸	۷۰	۲۰	−۲۰
	−۱۸	−۱۹	−۱۳	
s	۲۰	۵۱	۷	−۲۰
t	۵۶	۸۹	۳۳	

v	۶	۴	۲۸
	۲۷	۴۱	
σ	۲۳	۴۵	۲۸
τ	−۲۱	−۳۷	

طبق رابطهٔ (۱) داریم:

$$a_{۰}=۹/۷,\quad a_{۱}=۲۴/۹,\quad a_{۲}=۱۰/۳,\quad a_{۳}=۳/۸;$$
$$b_{۱}=۱۳/۹,\quad b_{۲}=-۸/۴,\quad b_{۳}=-۸/۴,$$

بنابراین

$$f(x)\approx ۴/۸+(۲۴/۹\cos x+۱۳/۹\sin x)+(۱۰/۳\cos ۲x-۸/۴\sin ۲x)+$$
$$+(۳/۸\cos ۳x+۰/۸\sin ۳x)$$

با استفاده از طرح ۱۲عرض، مطلوبست کثیرالجملهٔ فوریه برای تابعهای زیر، که‌مقدارهای آنها در فاصلهٔ بستهٔ $[۰,۲\pi]$ داده شده است؛ $(y_{۰}=y_{۱۲})$:

۳۱۹۰. $y_{۰}=-۷۲۰۰$ $\quad y_{۳}=۴۳۰۰$ $\quad y_{۶}=۷۴۰۰$ $\quad y_{۹}=۷۶۰۰$

$y_{۱}=۳۰۰$ $\quad y_{۴}=۰$ $\quad y_{۷}=-۲۲۵۰$ $\quad y_{۱۰}=۴۵۰۰$

$y_{۲}=۷۰۰$ $\quad y_{۵}=-۵۲۰۰$ $\quad y_{۸}=۳۸۵۰$ $\quad y_{۱۱}=۲۵۰$

۳۱۹۱. $y_{۰}=۰$ $\quad y_{۳}=۹/۷۲$ $\quad y_{۶}=۷/۴۲$ $\quad y_{۹}=۵/۶۰$

$y_{۱}=۶/۶۸$ $\quad y_{۴}=۸/۹۷$ $\quad y_{۷}=۶/۸۱$ $\quad y_{۱۰}=۴/۸۸$

$y_{۲}=۹/۶۸$ $\quad y_{۵}=۸/۱۸$ $\quad y_{۸}=۶/۲۲$ $\quad y_{۱۱}=۳/۶۷$

۳۱۹۲. $y_{۰}=۲/۷۱۴$ $\quad y_{۳}=۱/۲۷۳$ $\quad y_{۶}=۰/۳۷۰$ $\quad y_{۹}=-۰/۳۵۷$

$y_{۱}=۳/۰۴۲$ $\quad y_{۴}=۰/۷۸۸$ $\quad y_{۷}=۰/۵۴۰$ $\quad y_{۱۰}=-۰/۴۳۷$

$$y_{۲}=۲/۱۳۴ \quad y_{۵}=۰/۴۹۵ \quad y_{۸}=۰/۱۹۱ \quad y_{۱۱}=۰/۷۶۷$$

۳۱۹۳. چند ضریب اولیهٔ فوریه‌را طبق طرح ۱۲عرض برای‌تابعهای زیر محاسبه کنید:

$$a)\, f(x)=\frac{۱}{۲\pi^{۲}}(x^{۳}-۳\pi x^{۲}+۲\pi^{۲}x) \quad (۰\leqslant x\leqslant ۲\pi)$$

$$b)\, f(x)=\frac{۱}{\pi^{۲}}(x-\pi)^{۲} \quad (۰\leqslant x\leqslant ۲\pi)$$

جواب و راهنمای حل مسئله‌ها

فصل اول

۱. حل. چون $a=(a-b)+b$، بنا بر این $|a|\leqslant|a-b|+|b|$. از آنجا $|a-b|\geqslant|a|-|b|$ و $|a-b|=|b-a|\geqslant|b|-|a|$. بنا بر این $|a-b|\geqslant\big||a|-|b|\big|$. علاوه بر آن $|a-b|=|a+(-b)|\leqslant|a|+|-b|=|a|+|b|$ **۳.** a) $-2<x<4$؛ b) $x<-3$، $x>1$؛ c) $-1<x<0$؛ d) $x>0$. **۴.** -24، -6، 0، 0، 0، 6. **۵.** 1، $1\frac{1}{4}$، $\sqrt{1+x^2}$، $\sqrt{1+x^2}$، $|x|^{-1}$، $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ **۶.** π، $\frac{\pi}{2}$، 0. **۷.** $f(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$. **۸.** $f(x)=\frac{7}{6}x^2-\frac{13}{6}x+1$. **۹.** $0/4$. **۱۰.** $\frac{1}{2}(x+|x|)$. **۱۱.** a) $-1\leqslant x<+\infty$، b) $-\infty<x<+\infty$. **۱۲.** $(-\infty,-2)$ و $(-2,2)$، $(2,+\infty)$. **۱۳.** a) $-\infty<x\leqslant-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}\leqslant x<+\infty$، b) $|x|\geqslant\sqrt{2}, x=0$. **۱۴.** $-1\leqslant x\leqslant 2$.

حل. باید داشته باشیم: $0\leqslant 2+x-x^2$ یا $x^2-x-2\leqslant 0$، یعنی $(x+1)(x-2)\leqslant 0$. از آنجا یا $x+1\geqslant 0$ و $x-2\leqslant 0$ که بدست می‌آید: $-1\leqslant x\leqslant 2$، و یا $x+1\leqslant 0$ و $x-2\geqslant 0$ یعنی $x\leqslant -1$ و $x\geqslant 2$ که ممکن نیست. بنا بر این جواب چنین است: $-1\leqslant x\leqslant 2$.

۱۵. $-2<x\leqslant 0$. **۱۶.** $-\infty<x\leqslant -1$ و $0\leqslant x\leqslant 1$. **۱۷.** $-2<x<2$. **۱۸.** $-1<x<1$ و $2<x<+\infty$. **۱۹.** $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$. **۲۰.** $1\leqslant x\leqslant 100$. **۲۱.** $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k=0,\pm1,\pm2,\dots)$. **۲۲.** $\varphi(x)=2x^4-5x^2-10$، $\psi(x)=-3x^3+6x$. **۲۳.** a) زوج، b) فرد، c) زوج، d) فرد، e) فرد. **۲۴. راهنمایی.** از این اتحاد استفاده کنید: $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

۲۶. a) متناوب؛ $T=\frac{2}{3}\pi$، b) متناوب؛ $T=\frac{2\pi}{8}$، c) متناوب؛ $T=\pi$، d) متناوب؛

$T=\pi$، e) غیرمتناوب. **۲۷.** اگر داشته باشیم: $0\leqslant x\leqslant c$: $y=\frac{b}{c}x$ و اگر $c<x\leqslant a$
$y=b$؛ اگر $0\leqslant x\leqslant c$: $S=\frac{b}{2c}x^2$ واگر $c<x\leqslant a$: $S=bx-\frac{bc}{2}$. **۲۸.** به‌ازای
$0\leqslant x\leqslant l_1$: $m=q_1x$، به‌ازای $l_1<x\leqslant l_1+l_2$: $m=q_1l_1+q_2(x-l_1)$، به‌ازای
$l_1+l_2<x\leqslant l_1+l_2+l_3=l$: $m=q_1l_1+q_2l_2+q_3(x-l_1-l_2)$.
۲۹. $\varphi(\psi(x))=2^{2^x}$، $\psi(\varphi(x))=2^{x^2}$. **۳۰.** x. **۳۱.** $(x+2)^2$.
۳۷. $-\frac{\pi}{2}$، 0، $\frac{\pi}{4}$. **۳۸.** a) $y=0$ به‌ازای $x=-1$، $y>0$ به‌ازای $x>-1$،
$y<0$ به‌ازای $x<-1$؛ b) $y=0$ به‌ازای $x=-1$ و $x=2$، $y>0$ به‌ازای
$-1<x<2$، $y<0$ به‌ازای $-\infty<x<-1$ و $2<x<+\infty$؛ c) $y>0$ به‌ازای
$-\infty<x<+\infty$؛ d) $y=0$ به‌ازای $x=0$ و $x=-\sqrt{3}$ و $x=\sqrt{3}$، $y>0$
به‌ازای $-\sqrt{3}<x<0$ و $\sqrt{3}<x<+\infty$، $y<0$ به‌ازای $-\infty<x<-\sqrt{3}$ و
$0<x<\sqrt{3}$؛ e) $y=0$ به‌ازای $x=1$، $y>0$ به‌ازای $-\infty<x<-1$ و $1<x<\infty$
$y<0$ به‌ازای $0<x<1$. **۳۹.** a) $x=\frac{1}{2}(y-3)$ $(-\infty<y<+\infty)$،
b) $x=\sqrt{y+1}$ و $x=-\sqrt{y+1}$ $(-1\leqslant y<+\infty)$، c) $x=\sqrt[3]{1-y^3}$
$(-\infty<y<+\infty)$، d) $x=2\cdot 10^y$ $(-\infty<y<+\infty)$،
e) $x=\frac{1}{3}tg\,y$ $(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2})$. **۴۰.** $x=y$ به‌ازای $-\infty<y\leqslant 0$، $x=\sqrt{y}$
به‌ازای $0<y<+\infty$. **۴۱.** a) $y=u^{10}$، $u=2x-5$؛ b) $y=2^u$، $u=\cos x$؛
c) $y=\lg u$، $u=tg\,v$، $v=\frac{x}{2}$؛ d) $y=arc\,\sin u$، $u=3^v$، $v=-x^2$. **۴۲.** a)
$y=\sin^2 x$، b) $y=arc\,tg\sqrt{tg\,x}$، c) $y=2(x^2-1)$ با شرط $|x|\leqslant 1$ و $y=0$
با شرط $|x|>1$. **۴۳.** a) $y=-\cos x^2$ $(\sqrt{\pi}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2\pi})$، b) $y=\lg(10-10^x)$
$(-\infty<x<1)$، c) $y=\frac{x}{3}$ با شرط $-\infty<x<0$ و $y=x$ با شرط
$0<x<+\infty$. **۴۶. راهنمایی.** ضمیمه VI شکل ۱ را ببینید. **۵۱. توضیح.** سه‌-
جمله‌ای درجه دوم را به‌صورت مجذور کامل بنویسید، بدست می‌آید: $y=y_0+a(x-x_0)^2$،

که در آن $x_{\circ}=-\frac{b}{۲a}$ و $y_{\circ}=\frac{۴ac-b^{۲}}{۴a}$. از اینجا منحنی مورد نظر عبارتست از سهمی $y=ax^{۲}$ که در طول محور OX به‌اندازهٔ $x_{\circ}$ و درطول محور OY به اندازهٔ $y_{\circ}$ انتقال‌یافته است. **۵۳ . راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۲ را ببینید. **۵۸. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۳ را ببینید. **۶۱. راهنمایی.** منحنی مورد نظر را می‌توان ازمنحنی $y=\frac{m}{x}$ با انتقال‌به‌اندازهٔ $x_{\circ}$ در طول محور OX و به‌اندازهٔ $y_{\circ}$ در طول محور OY بدست آورد .

۶۴. راهنمایی. قسمت صحیح را جدا کنید بدست می‌آید: $y=\frac{۳}{۲}-\frac{\frac{۱۳}{۵}}{x+\frac{۳}{۲}}$ (با مسئلهٔ ۶۱ مقایسه کنید). **۶۵.** ضمیمهٔ VI شکل ۴ را ببینید. **۶۷.** ضمیمهٔ VI شکل ۵ را ببینید. **۷۱.** ضمیمهٔ VI شکل ۶ را ببینید . **۷۲ .** ضمیمهٔ VI شکل ۷ را ببینید . **۷۳.** ضمیمهٔ VI شکل ۸ را ببینید. **۷۵.** ضمیمهٔ VI شکل ۱۹ را ببینید. **۷۸.** ضمیمهٔ VI شکل ۲۳ را ببینید، **۸۰.** ضمیمهٔ VI شکل ۹ را ببینید. **۸۱.** ضمیمهٔ VI شکل۹ را بنید. **۸۲.** ضمیمهٔ VI شکل ۱۰ را ببینید. **۸۳.** ضمیمهٔ VI شکل ۱۰ را ببینید. **۸۴.** ضمیمهٔ VI شکل ۱۱ را ببینید، **۸۵.** ضمیمهٔ VI شکل ۱۱ را ببینید . **۸۷. راهنمایی.** دورهٔ تناوب تابع عبارتست‌از $T=\frac{۲\pi}{n}$. **۸۹. راهنمایی.** منحنی‌موردنظرعبارتست از منحـــنی سینـــوسی $y=۵sin۲x$ با دامنهٔ ۵ و دورهٔ تناوب π که از طرف راست در جهت محور OX به‌اندازهٔ $۱\frac{۱}{۲}$ منتقل شده است. **۹۰. راهنمایی.** فرض می‌کنیم $a=Acos\varphi$ و $b=-Asin\varphi$، در اینصورت خواهیم داشت: $y=Asin(x-\varphi)$، که درآن $A=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$ و $\varphi=Arc\,tg\left(-\frac{b}{a}\right)$، در این مسئله داریم $A=۱۰$، $\varphi=۰/۹۲۷$. **۹۲. راهنمایی.** $cos^{۲}x=\frac{۱}{۲}(۱+cos۲x)$. **۹۳ . راهنمایی.** منحنی مـــورد نظر عبارتست از مجموع منحنی‌های $y_{۱}=x$ و $y_{۲}=sinx$. **۹۴. راهنمائی.** منحنی‌این‌تابع عبارتست ازحاصلضرب منحنی‌های $y_{۱}=x$ و $y_{۲}=sinx$. **۹۹. راهنمایی.** تابع زوج‌است. برای $x>۰$ نقطه‌هائی را پیدا می‌کنیم که درآنها داشته باشیم: ۱) $y=۰$ ، ۲) $y=۱$ و ۳) $y=-۱$. ضمناً به‌ازای $x\to+\infty$ داریم: $y=۱$. **۱۰۱. راهنمایی .** ضمیمهٔ VI شکل ۱۴ را ببینید .

۱۵۲. راهنمایی. ضمیمهٔ VI شکل ۱۵ را ببینید. **۱۵۳. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۱۷ را ببینید. **۱۵۴. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۱۷ را ببینید. **۱۵۵. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۱۸ را ببینید. **۱۵۷. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۱۸ را ببینید. **۱۱۸. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۱۲ را ببینید، **۱۱۹. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۱۲ را ببینید. **۱۲۰. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۱۳ را ببینید. **۱۲۱. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۱۳ را ببینید. **۱۳۲. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۳۰ را ببینید. **۱۳۳. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۳۲ را ببینید. **۱۳۴. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۳۱ را ببینید. **۱۳۸. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۳۳ را ببینید. **۱۳۹. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۲۸ را ببینید. **۱۴۰. راهنمایی.** ضمیمهٔ VI شکل ۲۵ را ببینید. **۱۴۱. راهنمایی.** جدول مقدارها را تشکیل می‌دهیم:

t	۰	۱	۲	۳	...	۱−	۲−	۳−
x	۰	۱	۸	۲۷	...	۱−	۸−	۲۷−
y	۰	۱	۴	۹	...	۱	۴	۹

با در دست داشتن نقطه‌های بدست آمده (x,y)، منحنی مورد نظر بدست می‌آید. (ضمیمهٔ VI شکل a–۸ را ببینید). **۱۴۲.** ضمیمهٔ VI شکل ۱۹ را ببینید. **۱۴۳.** ضمیمهٔ VI شکل ۲۷ را ببینید. **۱۴۴.** ضمیمهٔ VI شکل ۲۹ را ببینید. **۱۴۵.** ضمیمهٔ VI شکل ۲۲ را ببینید. **۱۵۰.** ضمیمهٔ VI شکل ۲۸ را ببینید. **۱۵۱. راهنمایی.** معادله را نسبت به y حل کنید، بدست می‌آید: $y=\pm\sqrt{25-x^2}$. حالا می‌توان منحنی را با بدست آوردن نقطه‌های آن به‌سادگی رسم کرد. **۱۵۳.** ضمیمهٔ VI شکل ۲۱ را ببینید.

۱۵۶. ضمیمهٔ VI شکل ۲۷ را ببینید. کافی است نقطه‌های متناظر با طولهای ۰، $\pm\frac{a}{2}$، و $\pm a$ را بدست آورد. **۱۵۷. راهنمایی.** معادله را نسبت به x حل می‌کنیم، بدست می‌آید: $x=10\lg y-y$. ازروی این معادله نقطه‌های (x,y) از منحنی را باانتخاب مقدارهای دلخواه y بدست می‌آوریم $(y>0)$. باید توجه داشت که وقتی $y\to 0$ داریم: $\lg y\to-\infty$.

۱۵۹. راهنمایی. با عبور به‌مختصات قطبی $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $tg\varphi=\frac{y}{x}$ بدست می‌آید.

$r=e^{\varphi}$ (ضمیمهٔ VI شکل ۳۲ را ببینید). **۱۶۰. راهنمایی.** با عبور به‌مختصات قطبی یعنی؛ $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ خواهیم داشت؛ $r=\frac{۳\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^۳\varphi+\cos^۳\varphi}$ (ضمیمهٔ VI شکل ۳۲ را ببینید). **۱۶۱.** $F=۳۲+۱/۸C$. **۱۶۲.** $y=۰/۶x(۱۰-x)$؛ $y_{max}=۱۵$ به‌ازای $x=۵$. **۱۶۳.** $y=\frac{ab}{۲}\sin x$؛ $y_{max}=\frac{ab}{۲}$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۲}$.

۱۶۴. a) $x_۱=\frac{۱}{۲}$، $x_۲=۲$؛ b) $x=۰/۶۸$؛ c) $x_۱=۱/۳۷$، $x_۲=۱۰$؛ d) $x=۰/۴۰$؛ e) $۱/۵۰$؛ f) $x=۰/۸۶$. **۱۶۵.** a) $x_۱=۲$، $y_۱=۵$؛ $x_۲=۵$، $y_۲=۲$؛ b) $x_۱=-۳$، $y_۱=-۲$؛ $x_۲=-۲$، $y_۲=-۳$ ۰ $x_۳=۳$، $y_۳=۲$؛ $x_۴=۲$، $y_۴=۳$، c) $x_۱=۲$، $y_۱=۲$؛ $x_۲\approx۳/۱$، $y_۲=-۲/۵$؛ d) $x_۱\approx-۳/۶$، $y_۱\approx-۳/۱$: $x_۲\approx-۲/۷$، $y_۲\approx۲/۹$؛ $x_۳\approx۲/۹$، $y_۳\approx۱/۸$؛ $x_۴\approx۳/۴$، $y_۴\approx-۱/۶$؛ e) $x_۱=\frac{\pi}{۴}$، $y_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$؛ $x_۲=\frac{۵\pi}{۴}$، $y_۲=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$؛

۱۶۶. $n>\frac{۱}{\sqrt{\varepsilon}}$، a) $n\geqslant۴$: b) $n>۱۰$؛ $n\geqslant۳۲$. **۱۶۷.** $N=\frac{۱}{\varepsilon}-۱$، $n>$ a) $n=۹$؛ b) $n=۹۹$؛ c) $n=۹۹۹$. **۱۶۸.** $\delta=\frac{\varepsilon}{a}$ $(\varepsilon>۱)$: a) $۰/۰۲$؛ b) $۰/۰۰۲$؛ c) $۰/۰۰۰۲$. **۱۶۹.** a) $\lg x<-N$ به‌ازای $۰<x<\delta(N)$؛ b) $۲^{x}>N$ به‌ازای $x>X(N)$؛ c) $|f(x)|>N$ به‌ازای $|x|>X(N)$. **۱۷۰.** a) ۰؛ b) ۱؛ c) ۲؛ d) $\frac{۷}{۳۰}$. **۱۷۱.** $\frac{۱}{۲}$. **۱۷۲.** ۱. **۱۷۳.** $-\frac{۳}{۲}$.

۱۷۴. ۱. **۱۷۵.** ۳. **۱۷۶.** ۱. **۱۷۷.** $\frac{۳}{۴}$. **۱۷۸.** $\frac{۱}{۳}$.

راهنمائی. از رابطهٔ $۱^۲+۲^۲+\dots+n^۲=\frac{۱}{۶}n(n+۱)(۲n+۱)$ استفاده کنید.

۱۷۹. ۰. **۱۸۰.** ۰. **۱۸۱.** ۱. **۱۸۲.** ۰. **۱۸۳.** ∞. **۱۸۴.** ۰. **۱۸۵.** ۷۲. **۱۸۶.** ۲. **۱۸۷.** ۲. **۱۸۸.** ∞. **۱۸۹.** ۰. **۱۹۰.** ۱. **۱۹۱.** ۰. **۱۹۲.** ∞. **۱۹۳.** -۲. **۱۹۴.** ∞.

۱۹۵. $\frac{1}{2}$. ۱۹۶. $\frac{a-1}{3a^2}$. ۱۹۷. $3x^2$. ۱۹۸. -1. ۱۹۹. $\frac{1}{2}$.

۲۰۰. 3. ۲۰۱. $\frac{4}{3}$. ۳۰۲. $\frac{1}{9}$. ۲۰۳. $-\frac{1}{56}$. ۲۰۴. 12.

۲۰۵. $\frac{3}{2}$. ۲۰۶. $-\frac{1}{3}$. ۲۰۷. 1. ۲۰۸. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. ۲۰۹. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

۲۱۰. $-\frac{1}{3}$. ۲۱۱. 0. ۲۱۲. $\frac{a}{2}$. ۲۱۳. $-\frac{5}{2}$. ۲۱۴. $\frac{1}{2}$.

۲۱۵. 0. ۲۱۶. $a)$ $\frac{1}{2}\sin 2$؛ $b)$ 0. ۲۱۷. 3. ۲۱۸. $\frac{5}{2}$.

۲۱۹. $\frac{1}{3}$. ۲۲۰. π. ۲۲۱. $\frac{1}{2}$. ۲۲۲. $\cos a$. ۲۲۳. $-\sin a$.

۲۲۴. π. ۲۲۵. $\cos x$. ۲۲۶. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. ۲۲۷. $a)$ 0؛ $b)$ 1.

۲۲۸. $\frac{2}{\pi}$. ۲۲۹. $\frac{1}{2}$. ۲۳۰. 0. ۲۳۱. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. ۲۳۲. $\frac{1}{2}(n^2-m^2)$.

۲۳۳. $\frac{1}{2}$. ۲۳۴. 1. ۲۳۵. $\frac{2}{3}$. ۲۳۶. $\frac{2}{\pi}$. ۲۳۷. $-\frac{1}{4}$. ۲۳۸. π.

۲۳۹. $\frac{1}{4}$. ۲۴۰. 1. ۲۴۱. 1. ۲۴۲. $\frac{1}{4}$. ۲۴۳. 0. ۲۴۴. $\frac{3}{2}$.

۲۴۵. 0. ۲۴۶. e^{-1}. ۲۴۷. e^2. ۲۴۸. e^{-1}. ۲۴۹. e^{-4}.

۲۵۰. e^x. ۲۵۱. e. ۲۵۲. $a)$ 1. حل. بترتیب داریم؛

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1-(1-\cos x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)}$$

از طرف دیگر داریم؛

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)=-2\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{x^2}{4x}\right]=-2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{4}=0$$

دراینصورت بدست می‌آید: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$ ؛ b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **حل.** شبیه حالت قبل بدست می‌آید:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)=-2\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{x^2}{4x^2}\right]=-\frac{1}{2}$$

وبنابراین خواهیم داشت: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$. **۲۵۳.** $\ln 2$.

۲۵۴. $10\lg e$. **۲۵۵.** 1. **۲۵۶.** 1. **۲۵۷.** $-\frac{1}{2}$. **۲۵۸.** 1.

راهنمائی. $e^x-1=\alpha$ فرض کنید که در آن $\alpha\to 0$. **۲۵۹.** $\ln a$. **راهنمائی.** از اتحاد $a=e^{\ln a}$ استفاده کنید. **۲۶۰.** $\ln a$. **راهنمائی.** $\frac{1}{n}=\alpha$ فرض کنید که در ان $\alpha\to 0$.

۲۶۱. $a-b$. **۲۶۲.** 1. **۲۶۳.** a) 1؛ b) $\frac{1}{2}$. **۲۶۴.** a) -1؛ b) 1. **۲۶۵.** a) -1؛ b) 1. **۲۶۶.** a) 1؛ b) 0. **۲۶۷.** a) 0؛ b) 1. **۲۶۸.** a) -1؛ b) 1. **۲۶۹.** a) -1؛ b) 1. **۲۷۰.** a) $-\infty$؛ b) $+\infty$. **۲۷۱. حل.** با شرط $x\neq k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$ داریم: $\cos^2 x<1$ و $y=0$ وبا شرط $x=k\pi$ داریم: $\cos^2 x=1$ و $y=1$.

۲۷۲. $y=x$ به‌ازای $0\leqslant x<1$؛ $y=\frac{1}{2}$ به‌ازای $x=1$؛ $y=0$ به‌ازای $x>1$.

۲۷۳. $y=|x|$. **۲۷۴.** $y=-\frac{\sigma}{2}$ به‌ازای $x<0$؛ $y=0$ به‌ازای $x=0$؛ $y=\frac{\pi}{2}$ به‌ازای $x>0$. **۲۷۵.** $y=1$ به‌ازای $0\leqslant x\leqslant 1$؛ $y=x$ به‌ازای $1<x<+\infty$.

۲۷۶. $\frac{61}{450}$. **۲۷۷.** $x_1\to-\frac{c}{b}$، $x_2\to\infty$. **۲۷۸.** π. **۲۷۹.** $2\pi R$.

۲۸۰. $\frac{e}{e-1}$. **۲۸۱.** $1\frac{1}{3}$. **۲۸۲.** $\frac{\sqrt{e^{\pi}+1}}{e^{\frac{\pi}{2}}-1}$. **۲۸۴.** $\lim_{n\to\infty} AC_n=\frac{1}{3}$

۲۸۵. $\frac{ab}{2}$. **۲۸۶.** $k=1$؛ $b=0$؛ خط $y=x$ مجانب منحنی $y=\frac{x^3+1}{x^2+1}$ است.

۲۸۷. $Q_t^{(n)}=Q_0\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n$ که در آن k عبارتست ازضریب تناسب (قانون ربح‌مرکب) $Q_t=Q_0e^{kt}$.

۲۸۸. $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$؛ a) $|x|>10$؛ b) $|x|>100$؛ c) $|x|>1000$

۲۸۹. $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$ به‌ازای $0<\varepsilon<1$؛ a) $|x-1|<0/05$؛ b) $|x-1|<0/005$؛ c) $|x-1|<0/0005$. **۲۹۰.** $\delta=\frac{1}{N}$؛ $|x-2|<\frac{1}{N}$؛ a) $\delta=0/1$، b) $\delta=0/01$؛ c) $\delta=0/001$.

۲۹۱. a) دوم؛ b) سوم؛ $\frac{1}{2}$، $\frac{3}{2}$. **۲۹۲.** a) ۱؛ b) ۲؛ c) ۳. **۲۹۳.** a) ۱؛ b) $\frac{1}{4}$؛ c) $\frac{2}{3}$؛ d) ۲؛ e) ۳. **۲۹۵.** نه. **۲۹۶.** ۱۵. **۲۹۷.** ۱-.

۲۹۸. ۱-. **۲۹۹.** ۳. **۳۰۰.** a) ۱/۰۳(۱/۰۲۹۶)؛ b) ۰/۹۸۵(۰/۹۸۴۹)؛ c) ۳/۱۶۷ (۳/۱۶۲۳). **راهنمائی.** $\sqrt{10}=\sqrt{9+1}=3\sqrt{1+\frac{1}{9}}$، d) ۱۰/۹۵۴ (۱۰/۹۵۴).

۳۰۱. ۱) ۰/۹۸(۰/۹۸۰۴)، ۲) ۱/۰۳ (۱/۰۳۰۹)، ۳) ۰/۰۰۹۵ (۰/۰۰۹۵۲)، ۴) ۳/۸۷۵ (۳/۸۷۳۰)؛ ۵) ۱/۱۲(۱/۱۲۵)؛ ۶) ۰/۷۲(۰/۷۴۸۰)؛ ۷) ۰/۰۴۳(۰/۰۴۱۳۹)؛ **۳۰۳.** a) ۲؛ b) ۴؛ c) $\frac{1}{2}$؛ d) $\frac{2}{3}$. **۳۰۷. راهنمائی.** اگر $x>0$ باشد، به‌ازای $|\Delta x|<x$ داریم،

$$\left|\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right|=\frac{|\Delta x|}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\leqslant\frac{|\Delta x|}{\sqrt{x}}$$

۳۰۹. راهنمائی. از نامساوی

$|\cos(x+\Delta x)-\cos x|\leqslant|\Delta x|$. **۳۱۰.** a) $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ که در آن k عددی صحیح است، b) $x\neq k\pi$ که در آن k عددی صحیح است. **۳۱۱. راهنمائی.** از نامساوی $||x+\Delta x|-|x||\leqslant|\Delta x|$ استفاده کنید. **۳۱۳.** $A=4$. **۳۱۴**: $f(0)=1$.

۳۱۵. نه. **۳۱۶.** a) $f(0)=n$؛ b) $f(0)=\frac{1}{2}$؛ c) $f(0)=2$؛ d) $f(0)=2$؛ e) $f(0)=0$، f) $f(0)=1$ **۳۱۷.** $x=2$ نقطهٔ انفصال از نوع دوم است.
۳۱۸. $x=-1$ نقطهٔ انفصال قابل حذف است. **۳۱۹.** $x=-2$ نقطهٔ انفصال از نوع دوم است، $x=2$ نقطهٔ انفصال قابل حذف است. **۳۲۰.** $x=0$ نقطهٔ انفصال نوع اول است. **۳۲۱.** a) $x=0$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است؛ b) $x=0$ نقطهٔ انفصال قابل حذف است. **۳۲۲.** $x=0$ نقطهٔ انفصال قابل حذف است، $x=k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ نقطهٔ انفصال بی‌نهایت است. **۳۲۳.** $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ نقطهٔ انفصال بی‌نهایت است؛ **۳۲۴.** $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ نقطهٔ انفصال بی‌نهایت است. **۳۲۵.** $x=0$ نقطهٔ انفصال نوع اول است. **۳۲۶.** $x=-1$ نقطهٔ انفصال قابل حذف است؛ $x=1$ نقطهٔ انفصال نوع اول است. **۳۲۷.** $x=-1$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است. **۳۲۸.** $x=0$ نقطهٔ انفصال قابل حذف است. **۳۲۹.** $x=1$ نقطهٔ انفصال نوع اول است. **۳۳۰.** $x=3$ نقطهٔ انفصال نوع اول است، **۳۳۲.** $x=1$ نقطهٔ انفصال نوع اول است. **۳۳۳.** تابع پیوسته است. **۳۳۴.** a) $x=0$ نقطهٔ انفصال نوع اول است؛ b) تابع پیوسته است؛ c) $x=k\pi$ (k عددی است صحیح) نقطهٔ انفصال نوع اول است. **۳۳۵.** a) $x=k$ (k عددی است صحیح) نقطه انفصال نوع اول است. b) $x=k$ ($k\neq0$ عددی صحیح است) نقطهٔ انفصال نوع اول است. **۳۳۷.** نه، زیرا تابع $y=E(x)$ به‌ازای $x=1$ منفصل است. **۳۳۸.** ۱/۵۳. **۳۳۹. راهنمائی.** ثابت کنید که به‌ازای x_0 که به‌اندازهٔ کافی بزرگ است داریم: $P(-x_0)P(x_0)<0$

فصل دوم

۳۴۱. a) ۳؛ b) ۰/۲۱؛ c) $2h+h^2$. **۳۴۲.** a) ۰/۱؛ b) -3؛ c) $\sqrt[3]{a+h}-\sqrt[3]{a}$، -1. **۳۴۴.** a) ۶۲۴، ۱۵۶۰؛ b) ۰/۰۱، ۱۰۰؛ c) ۰/۰۰۰۰۱۱. **۳۴۵.** a) $a\Delta x$، a؛ b) $3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$؛ c) $3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2$؛ $-\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$، $-\frac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$؛ d) $\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$، $\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$؛ e) $2^x(2^{\Delta x}-1)$، $\frac{2^x(2^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$؛ f) $\ln\frac{x+\Delta x}{x}$، $\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$؛ **۳۴۶.** a) -1؛ b) ۰/۱؛ c) $-h$، ۰.

۳۴۷. ۰/۲۱. **۳۴۸.** ۱۵ سانتیمتر در ثانیه. **۳۴۹.** ۷/۵. **۳۵۰.** $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$؛ **۳۵۱.** $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

۳۵۲. a) $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$؛ b) $\frac{d\varphi}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$، که در آن φ عبارتست از مقدار زاویهٔ دوران در لحظهٔ t. **۳۵۳.** a) $\frac{\Delta T}{\Delta t}$؛ b) $\frac{dT}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}$ که در آن T عبارتست از درجهٔ حرارت در لحظهٔ t. **۳۵۴.** $\frac{dQ}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ که در آن Q عبارتست از مقدار ماده در لحظهٔ t. **۳۵۵.** a) $\frac{\Delta m}{\Delta x}$؛ b) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}$

۳۵۶. a) $-\frac{1}{6}\approx -0/16$؛ b) $-\frac{5}{21}\approx -0/238$؛ c) $-\frac{50}{201}\approx -0/249$، $y'_{x=2}=-0/25$. **۳۵۷.** $\sec^2 x$. حل. داریم:

$$y'=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{tg(x+\Delta x)-tg x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x\cos x\cos(x+\Delta x)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۱}{\cos x\cdot\cos(x+\Delta x)}=\frac{۱}{\cos^{۲}x}=\sec^{۲}x$$

۳۵۸. (a $۳x^{۲}$؛ (b $-\frac{۲}{x^{۳}}$؛ (c $\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$؛ (d $\frac{-۱}{\sin^{۲}x}$. **۳۵۹.** $\frac{۱}{۱۲}$. **حل.** داریم:

$$f'(۸)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۸+\Delta x)-f(۸)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{۸+\Delta x}-\sqrt[۳]{۸}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۸+\Delta x-۸}{\Delta x\left[\sqrt[۳]{(۸+\Delta x)^{۲}}+\sqrt[۳]{۸(۸+\Delta x)}+\sqrt[۳]{۸^{۲}}\right]}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt[۳]{(۸+\Delta x)^{۲}}+۲\sqrt[۳]{۸+\Delta x}+۴}=\frac{۱}{۱۲}.$$

۳۶۰. $f'(۰)=-۸$، $f'(۱)=۰$، $f'(۲)=۰$. **۳۶۱.** $x_{۱}=۰$، $x_{۲}=۳$. **راهنمائی.** معادلهٔ $f'(x)=f(x)$ برای تابع مفروض به‌صورت $۳x^{۲}=x^{۳}$ درمی‌آید. **۳۶۲.** ۳۰ متر در ثانیه. **۳۶۳.** ۱/۲. **۳۶۴.** ۱-. **۳۶۵.** $f'(x_{۰})=\frac{-۱}{x_{۰}^{۲}}$.

۳۶۶. $tg\varphi=۳،۲،-۱$. **راهنمائی.** از نتیجه‌های مثال ۳ و مسئلهٔ ۴۶۵ استفاده کنید.

۳۶۷. حل. (a $f'(۰)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{(\Delta x)^{۲}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt[۳]{\Delta x}}=\infty$؛ (b

$$f'(۱)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\sqrt[۵]{۱+\Delta x}-۱}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt[۵]{(\Delta x)^{۴}}}=+\infty$$ ؛ (c

$$f'_{-}\left(\frac{۲k+۱}{۲}\pi\right)=\lim_{\Delta x\to -۰}\frac{\left|\cos\left(\frac{۲k+۱}{۲}\pi+\Delta x\right)\right|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -۰}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x}=-۱$$ ؛

$$f'_{+}\left(\frac{۲k+۱}{۲}\pi\right)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x}=۱.$$

۳۶۸. $۵x^{۴}-۱۲x^{۲}+۲$.

۳۶۹. $-\frac{1}{3}+2x-2x^{3}$. ۳۷۰. $2ax+b$. ۳۷۱. $-\frac{15x^{2}}{a}$.

۳۷۲. $mat^{m-1}+b(m+n)t^{m+n-1}$. ۳۷۳. $\frac{6ax^{5}}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}$. ۳۷۴. $-\frac{\pi}{x^{2}}$.

۳۷۵. $2x^{-\frac{1}{3}}-5x^{\frac{3}{2}}-3x^{-4}$. ۳۷۶. $\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$. راهنمائی. $y=x^{2}\cdot x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{8}{3}}$.

۳۷۷. $\frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^{2}}}-\frac{4b}{3x^{2}\sqrt[3]{x}}$. ۳۷۸. $\frac{bc-ad}{(c+dx)^{2}}$. ۳۷۹.

$\frac{-2x^{2}-6x+25}{(x^{2}-5x+5)^{2}}$. ۳۸۰. $\frac{1-4x}{x^{2}(2x-1)^{2}}$. ۳۸۱. $\frac{1}{\sqrt{z}\,(1-\sqrt{z})^{2}}$.

۳۸۲. $5\cos x-3\sin x$. ۳۸۳. $\frac{4}{\sin^{2}2x}$. ۳۸۴. $\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^{2}}$. ۳۸۵. $t^{2}\sin t$.

۳۸۶. $y'=0$. ۳۸۷. $\cot g x-\frac{x}{\sin^{2}x}$. ۳۸۸. $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}$.

۳۸۹. $x\,\mathrm{arctg}\,x$. ۳۹۰. $x^{6}e^{x}(x+7)$. ۳۹۱. xe^{x}. ۳۹۲. $e^{x}\frac{x-2}{x^{3}}$.

۳۹۳. $\frac{5x^{4}-x^{5}}{e^{x}}$. ۳۹۴. $e^{x}(\cos x-\sin x)$. ۳۹۵. $x^{2}\cdot e^{x}$.

۳۹۶. $e^{x}\left(\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\right)$. ۳۹۷. $\frac{x(2\ln x-1)}{\ln^{2}x}$. ۳۹۸. $2x^{2}\ln x$.

۳۹۹. $\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x^{2}}-\frac{2}{x^{2}}$. ۴۰۰. $\frac{2\ln x}{x\ln 10}-\frac{1}{x}$. ۴۰۱. $\mathrm{sh}\,x+x\,\mathrm{ch}\,x$.

۴۰۲. $\frac{2x\,\mathrm{ch}\,x-x^{2}\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^{2}x}$. ۴۰۳. $-\mathrm{th}^{2}x$. ۴۰۴. $\frac{-3(x\ln x+\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x)}{x\ln^{2}x\cdot\mathrm{sh}^{2}x}$.

۴۰۵. $\frac{-2x^{2}}{1-x^{4}}$. ۴۰۶. $\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{Ar\,sh}\,x$.

۴۰۷. $\frac{x-\sqrt{x^{2}-1}\,\mathrm{Ar\,ch}\,x}{x^{2}\sqrt{x^{2}-1}}$. ۴۰۸. $\frac{1+2x\,\mathrm{Ar\,cth}\,x}{(1-x^{2})^{2}}$.

۴۱۰. $\frac{۳a}{C}\left(\frac{ax+b}{c}\right)^{۲}$. ۴۱۱. $۱۲ab+۱۸b^{۲}y$. ۴۱۲. $۱۶x(۳+۲x^{۲})^{۲}$.

۴۱۳. $\frac{x^{۲}-۱}{(۲x-۱)^{۳}}$. ۴۱۴. $\frac{-x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$. ۴۱۵. $\frac{bx^{۲}}{\sqrt[۳]{(a+bx^{۲})^{۲}}}$.

۴۱۶. $-\sqrt{\sqrt[۳]{\frac{a^{۲}}{x^{۲}}}-۱}$. ۴۱۸. $\frac{۱-tg^{۲}x+tg^{۴}x}{cos^{۲}x}$.

۴۱۹. $\frac{-۱}{۲sin^{۲}x\sqrt{cotg x}}$. ۴۲۰. $۲-۱۵cos^{۲}x\,sin x$. ۴۲۱. $\frac{-۱۶cos۲t}{sin^{۳}۲t}$.

راهنمائی. $x=sin^{-۲}t+cos^{-۲}t$. ۴۲۲. $\frac{sin x}{(۱-۳cos x)^{۳}}$. ۴۲۳. $\frac{sin^{۳}x}{cos^{۴}x}$.

۴۲۴. $\frac{۳cos x+۲sin x}{۲\sqrt{۱۵sin x-۲۰cos x}}$. ۴۲۵. $\frac{۳sin x}{cos^{۴}x}+\frac{۲cos x}{۳\sqrt[۳]{sin x}}$.

۴۲۶. $\frac{۱}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}\sqrt{۱+arcsin x}}$. ۴۲۷. $\frac{۳(arcsin x)^{۲}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}-\frac{۱}{۲(۱+x^{۲})\sqrt{arctg x}}$.

۴۲۸. $\frac{-۱}{(۱+x^{۲})(arctg x)^{۲}}$. ۴۲۹. $\frac{e^{x}+xe^{x}+۱}{۲\sqrt{xe^{x}+x}}$. ۴۳۰. $\frac{۵ln^{۴}x}{x}+\frac{۲e^{x}-۲^{x}ln۲}{۳\sqrt[۳]{(۲e^{x}-۲^{x}+۱)^{۲}}}$.

۴۳۲. $(۲x-۵)cos(x^{۲}-۵x+۱)-\frac{a}{x^{۲}cos^{۲}\frac{a}{x}}$.

۴۳۳. $-\alpha sin(\alpha x+\beta)$. ۴۳۴. $sin(۲t+\varphi)$. ۴۳۵. $-۲\frac{cos x}{sin^{۳}x}$.

۴۳۶. $\frac{-۱}{sin^{۲}\frac{x}{a}}$. ۴۳۷. $x cos ۲x^{۲} sin ۳x^{۲}$. ۴۳۹. $\frac{-۲}{x\sqrt{x^{۴}-۱}}$.

۴۴۰. $\frac{-۱}{۲\sqrt{x-x^{۲}}}$. ۴۴۱. $\frac{-۱}{۱+x^{۲}}$. ۴۴۲. $\frac{-۱}{۱+x^{۲}}$.

۴۴۳. $-۱۰xe^{-x^{۲}}$. ۴۴۴. $-۲x\cdot ۵^{-x^{۲}}\cdot ln۵$. ۴۴۵. $۲x۱۰^{۲x}(۱+xln۱۰)$.

۴۴۶. $\sin 2^t + 2^t t \cos 2^t \ln 2$. ۴۴۷. $\dfrac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. ۴۴۸. $\dfrac{2}{2x+7}$.

۴۴۹. $\operatorname{cotg} x \lg e$. ۴۵۰. $\dfrac{-2x}{1-x^2}$. ۴۵۱. $\dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{1}{x\ln x}$.

۴۵۲. $\dfrac{(e^x+5\cos x)\sqrt{1-x^2}-4}{(e^x+5\sin x-4\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$.

۴۵۳. $\dfrac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}+\dfrac{1}{(1+\ln^2 x)x}$. ۴۵۴.

$\dfrac{1}{2(\sqrt{x}+x)}+\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}}$. ۴۵۵. حل. داریم:

$$y' = (\sin^3 5x)'\cos^2\frac{x}{3} + \sin^3 5x\left(\cos^2\frac{x}{3}\right)' = 3\sin^2 5x\cos 5x\cdot 5\cos^2\frac{x}{3} +$$

$$+\sin^3 5x\cdot 2\cos\frac{x}{3}\left(-\sin\frac{x}{3}\right)\frac{1}{3} = 15\sin^2 5x\cos 5x\cos^2\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\sin^3 5x\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$$

۴۵۶. $\dfrac{4x+3}{(x-2)^3}$. ۴۵۷. $\dfrac{x^2+4x-6}{(x-3)^5}$. ۴۵۸. $\dfrac{x^7}{(1-x^2)^5}$.

۴۵۹. $\dfrac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$. ۴۶۰. $\dfrac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. ۴۶۱. $\dfrac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$.

۴۶۲. $\dfrac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}$. ۴۶۳. $x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}$.

۲۶۴. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$. ۴۶۵. $4x^3(a-2x^3)(a-5x^3)$.

۴۶۶. $\dfrac{2abmnx^{n-1}(a+bx^n)^{m-1}}{(a-bx^n)^{m+1}}$. ۴۶۷. $\dfrac{x^3-1}{(x+2)^6}$. ۴۶۸. $\dfrac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$.

۴۶۹. $\dfrac{3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ac}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$. ۴۷۰. $\dfrac{1+2\sqrt{y}}{6\sqrt{y}\sqrt[3]{(y+\sqrt{y})^2}}$.

۴۷۱. $3(7t+4)\sqrt[3]{3t+2}$. ۴۷۲. $\dfrac{y-a}{\sqrt{(2ay-y^2)^3}}$. ۴۷۳. $\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}}$.

۴۷۴. $\sin^۳ x\cos^۲ x$ ۴۷۵. $\frac{۱}{\sin^۴ x\cos^۴ x}$ ۴۷۶. $۱۰tg۵x\sec^۲ ۵x$

۴۷۷. $x\cos x^۲$ ۴۷۸. $۳t^۲\sin ۲t^۳$ ۴۷۹. $۳\cos x\cos ۲x$ ۴۸۰. $tg^۴ x$

۴۸۱. $\frac{\cos ۲x}{\sin^۴ x}$ ۴۸۲. $\frac{(\alpha-\beta)\sin ۲x}{۲\sqrt{\alpha\sin^۲ x+\beta\cos^۲ x}}$ ۴۸۳. $y'=۰$

۴۸۴. $\frac{۱}{۲}\cdot\frac{\arcsin x(۲\arccos x-\arcsin x)}{\sqrt{۱-x^۲}}$ ۴۸۵. $\frac{۲}{x\sqrt{۲x^۲-۱}}$

۴۸۶. $\frac{۱}{۱+x^۲}$ ۴۸۷. $\frac{x\arccos x-\sqrt{۱-x^۲}}{(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ ۴۸۸. $\frac{۱}{\sqrt{a-bx^۲}}$

۴۸۹. $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\ (a>۰)$ ۴۹۰. $۲\sqrt{a^۲-x^۲}\ (a>۰)$ ۴۹۱. $\frac{-x}{\sqrt{۲x-x^۲}}$

۴۹۲. $\arcsin\sqrt{x}$ ۴۹۳. $\frac{۵}{(\arcsin ۵x)\sqrt{۱-۲۵x^۲}}$

۴۹۴. $\frac{۱}{x\sqrt{۱-\ln^۲ x}}$ ۴۹۵. $\frac{\sin\alpha}{۱-۲x\cos\alpha+x^۲}$ ۴۹۶. $\frac{۱}{۵+۴\sin x}$

۴۹۷. $۴x\sqrt{\frac{x}{b-x}}$ ۴۹۸. $\frac{\sin^۲ x}{۱+\cos^۲ x}$ ۴۹۹. $\frac{a}{۲}\sqrt{e^{ax}}$

۵۰۰. $\sin ۲x\cdot e^{\sin^۲ x}$ ۵۰۱. $۲m^۲p(۲ma^{mx}+b)^{p-۱}a^{mx}\ln a$

۵۰۲. $e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t-\beta\sin\beta t)$ ۵۰۳. $e^{\alpha x}\sin\beta x$ ۵۰۴. $e^{-x}\cos ۳x$

۵۰۵. $x^{n-۱}a^{-x^۲}(n-۲x^۲\ln a)$ ۵۰۶. $-\frac{۱}{۲}\,ytgx\,(۱+\sqrt{\cos x}\ln a)$

۵۰۷. $\frac{۳^{\cot g\frac{۱}{x}}\ln ۳}{\left(x\sin\frac{۱}{x}\right)^۲}$ ۵۰۸. $\frac{۲ax+b}{ax^۲+bx+c}$ ۵۰۹. $\frac{۱}{\sqrt{a^۲+x^۲}}$

۵۱۰. $\frac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$ ۵۱۱. $\frac{۱}{\sqrt{۲ax+x^۲}}$ ۵۱۲. $\frac{-۲}{x\ln^۳ x}$

۵۱۳. $\frac{۱}{x^۲}tg\frac{x-۱}{x}$ ۵۱۴. $\frac{۲x+۱۱}{x^۲-x-۲}$. راهنمائی.

$$y=۵\ln(x-۲)-۳\ln(x+۱)$$

۵۱۵. $\frac{۳x^۲-۱۶x+۱۹}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)}$. ۵۱۶. $\frac{۱}{\sin^۳ x\cos x}$. ۵۱۷. $\sqrt{x^۲-a^۲}$.

۵۱۸. $\frac{-۶x^۲}{(۳-۲x^۳)\ln(۳-۲x^۳)}$. ۵۱۹. $\frac{۱۵a\ln^۲(ax+b)}{ax+b}$.

۵۲۰. $\frac{۲}{\sqrt{x^۲+a^۲}}$. ۵۲۱. $\frac{mx+n}{x^۲-a^۲}$. ۵۲۲. $\sqrt{۲}\sin\ln x$. ۵۲۳. $\frac{۱}{\sin^۳x}$.

۵۲۴. $\frac{\sqrt{۱+x^۲}}{x}$. ۵۲۵. $\frac{x+۱}{x^۳-۱}$.

۵۲۶، $\frac{۳}{\sqrt{۱-۹x^۲}}[۲^{\arcsin ۳x}\ln ۲+۲(۱-\arccos ۳x)]$.

۵۲۷. $\frac{a\cos ax\cos ax+b\sin ax\sin bx}{\cos^۲bx}\left(۳^{\frac{\sin ax}{\cos bx}}\ln ۳+\frac{\sin^۲ax}{\cos^۲bx}\right)$.

۵۲۸. $\frac{۱}{۱+۲\sin x}$. ۵۲۹. $\frac{۱}{x(۱+\ln^۲x)}$. ۵۳۰.

$\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}\arcsin x}+\frac{\ln x}{x}+\frac{۱}{x\sqrt{۱-\ln^۲x}}$. ۵۳۱. $-\frac{۱}{x(۱+\ln^۲x)}$.

۵۳۲. $\frac{x^۲}{x^۴+x^۲-۲}$. ۵۳۳. $\frac{۲}{\cos x\sqrt{\sin x}}$. ۵۳۴. $\frac{x^۲-۳x}{x^۴-۱}$.

۵۳۵. $\frac{۱}{۱+x^۳}$. ۵۳۶. $\frac{\arcsin x}{(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$. ۵۳۷. $۶sh^۲۲x\cdot ch۲x$.

۵۳۸. $e^{\alpha x}(ch\beta x+\beta sh\beta x)$. ۵۳۹. $۶th^۲۲x(۱-th^۲۲x)$. ۵۴۰. $۲cth۲x$.

۵۴۱. $\frac{۲x}{\sqrt{a^۴+x^۴}}$، ۵۴۲. $\frac{۱}{x\sqrt{\ln^۲x-۱}}$. ۵۴۳. $\frac{۱}{\cos ۲x}$. ۵۴۴. $\frac{-۱}{\sin x}$.

۵۴۵. $\frac{۲}{۱-x^۲}$. ۵۴۶. $x\,Arthx$. ۵۴۷. $x\,Arshx$. ۵۴۸. a) $y'=۱$ به‌ازای $x>۰$؛ $y'=-۱$ به‌ازای $x<۰$؛ $y'(۰)$ وجود ندارد؛ b) $y'=|۲x|$.

۵۴۹. $y'=\frac{۱}{x}$. ۵۵۰. $f'(x)=-۱$ به‌ازای $x\leqslant ۰$؛ $f'(x)=-e^{-x}$ به‌ازای $x>۰$

۵۵۲. $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}$.   **۵۵۳.** 6π.   **۵۵۴.** a) $f'_-(0)=-1$ ، $f'_+(0)=1$؛

b) $f'_-(0)=\frac{2}{a}$ ، $f'_+(0)=-\frac{2}{a}$؛ c) $f'_-(0)=1$؛ $f'_+(0)=0$؛

d) $f'_-(0)=f'_+(0)=0$؛ e) $f'_-(0)$, $f'_+(0)$ وجود ندارد.   **۵۵۵.** $x-1$.

۵۵۶. $\frac{x-3}{4}+2$.   **۵۵۷.** -1.   **۵۵۸.** 0.   **۵۶۱.** حل. داریم:

$y'=e^{-x}(1-x)$. چون $\frac{y}{x}=e^{-x}$، بنابراین $y'=\frac{y}{x}(1-x)$ یا $xy'=y(1-x)$.

۵۶۶. $(1+2x)(1+3x)+2(1+x)(1+3x)+3(x+1)(1+2x)$

۵۶۷. $-\frac{(x+2)(5x^2+19x+20)}{(x+1)^4(x+3)^5}$.   **۵۶۸.** $\frac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$.

۵۶۹. $\frac{3x^2+5}{3(x^2+1)}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$.   **۵۷۰.** $\frac{(x-2)^8(x^2-7x+1)}{(x-1)(x-3)\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

۵۷۱. $\frac{5x^2+x-24}{3(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{5}{2}}}$.   **۵۷۲.** $x^x(1+\ln x)$.

۵۷۳. $x^{x^2+1}(1+2\ln x)$.   **۵۷۴.** $\sqrt[x]{x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$.

۵۷۵. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}\ln x)$.   **۵۷۶.** $x^{x^x}\cdot x^x(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x)$.

۵۷۷. $x^{\sin x}(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x)$.   **۵۷۸.** $(\cos x)^{\sin x}(\cos x\ln\cos x-\sin x\, tg x)$.

۵۷۹. $(1+\frac{1}{x})^x\left[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}\right]$.

۵۸۰. $(arctg x)^x\left[\ln arctg x+\frac{x}{(1+x^2)arctg x}\right]$.   **۵۸۱.** a) $x'_y=\frac{1}{3(1+x^2)}$؛

b) $x'_y=\frac{2}{2-\cos x}$؛ c) $x'_y=\frac{10}{1+5e^{\frac{x}{2}}}$.   **۵۸۲.** $\frac{3}{2}t^2$.   **۵۸۳.** $\frac{-2t}{t+1}$.

۵۸۴. $\frac{-2t}{1-t^2}$. ۵۸۵. $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. ۵۸۶. $\frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$.

۵۸۷. $\frac{t+1}{t(t^2+1)}$. ۵۸۸. $tg\,t$. ۵۸۹. $-\frac{b}{a}$. ۵۹۰. $-\frac{b}{a}tg\,t$.

۵۹۱. $-tg\,3t$. ۵۹۲. $y'_x=-1$ به‌ازای $t<0$ و $y'_x=1$ به‌ازای $t>0$.

۵۹۳. $-2e^{3t}$. ۵۹۴. $tg\,t$. ۵۹۶. 1. ۵۹۷. ∞. ۵۹۹. نه.

۶۰۰. بله. زیرا تساوی یك اتحاد است. ۶۰۱. $\frac{2}{5}$. ۶۰۲. $-\frac{b^2x}{a^2y}$.

۶۰۳. $-\frac{x^2}{y^2}$. ۶۰۴. $-\frac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$. ۶۰۵. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. ۶۰۶. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

۶۰۷. $\frac{1-y^3}{1+3xy^2+4y^3}=\frac{2y^2}{3(x^2-y^2)+2xy}$. ۶۰۸. $\frac{10}{10-3\cos y}$.

۶۰۹. -1. ۶۱۰. $\frac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$. ۶۱۱. $\frac{y}{x}\cdot\frac{1-x^2-y^2}{1+y^2+y^2}$.

۶۱۲. $(x+y)^2$. ۶۱۳. $y'=\frac{1}{e^y-1}=\frac{1}{x+y-1}$. ۶۱۴. $\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$.

۶۱۵. $\frac{y}{x-y}$. ۶۱۶. $\frac{x+y}{x-y}$. ۶۱۷. $\frac{cy+x\sqrt{x^2+y^2}}{cx-y\sqrt{x^2+y^2}}$.

۶۱۸. $\frac{y}{x}\cdot\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$. ۶۲۰. a) 0؛ b) $\frac{1}{2}$؛ c) 0.

۶۲۲. $45°$؛ $\arctg 2\approx 63°26'$. ۶۲۳. $45°$. ۶۲۴. $\arctg\frac{2}{e}\approx 36°21'$.

۶۲۵. $(0,20)$، $(1,15)$، $(-2,-12)$. ۶۲۶. $(1,-3)$.

۶۲۷. $y=x^2-x+1$. ۶۲۸. $k=-\frac{1}{11}$. ۶۲۹. $(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16})$.

۶۳۱. $y-5=0$، $x+2=0$. ۶۳۲. $x-1=0$، $y=0$. ۶۳۳. a) $y=2x$، $y=-\frac{1}{2}x$؛ b) $x-2y-1=0$، $2x+y-2=0$؛ c) $6x+2y-\pi=0$،

$۲x-۶y+۳\pi=۰$؛ d) $y=x-۱$، $y=۱-x$:e) $۲x+y-۳=۰$، $x-۲y+۱=۰$
برای نقطهٔ $x+۲y-۱=۰$، $۲x-y+۳=۰$:$(۱,۱)$؛ برای نقطهٔ $(-۱,۱)$.

۶۳۴. $۷x-۱۰y+۶=۰$، $۱۰x+۷y-۳۴=۰$. **۶۳۵.** $y=۰$؛

$(\pi+۴)x+(\pi-۴)y-\frac{\pi^۲\sqrt{۲}}{۴}=۰$. **۶۳۶.** $۵x+۶y-۱۳=۰$،

$۶x-۵y+۲۱=۰$. **۶۳۷.** $x+y-۲=۰$. **۶۳۸.** در نقطهٔ $(۱,۰)$:

$y=۲x-۲$، $y=\frac{۱-x}{۲}$؛ در نقطهٔ $(۲,۰)$: $y=-x+۲$؛ $y=x-۲$؛ در نقطهٔ $(۳,۰)$

$y=۲x-۶$، $y=\frac{۳-x}{۲}$. **۶۳۹.** $۱۴x-۱۳y+۱۲=۰$، $۱۳x+۱۴-۴۱=۰$.

۶۴۰. راهنمائی. معادلهٔ مماس چنین است: $\frac{x}{۲x_۰}+\frac{y}{۲y_۰}=۱$ بنابراین مماس محور OX را در نقطهٔ $A(۲x_۰,۰)$ و محور OY را درنقطهٔ $B(۰,۲y_۰)$ قطع می‌کند و واضح است که نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ وسط پاره خط AB است. **۶۴۳.** $۴۰°۳۶'$.

۶۴۴. سهمی‌ها در نقطهٔ $(۰,۰)$ برهم مماس‌اند و درنقطهٔ $(۱,۱)$ یکدیگر را تحت زاویهٔ $arctg\frac{۱}{۷}\approx ۸°۸'$ قطع می‌کنند. **۶۴۷.** $S_t=S_n=۲$؛ $t=n=۲\sqrt{۲}$.

۶۴۸. $\frac{۱}{ln۲}$. **۶۵۲.** $T=۲a\sin\frac{t}{۲}\,tg\frac{t}{۲}$؛ $N=۲a\sin\frac{t}{۲}$.

$S_t=۲a\sin^۲\frac{t}{۲}\,tg\frac{t}{۲}$؛ $S_n=a\sin t$. **۶۵۳.** $arctg\frac{۱}{k}$. **۶۵۴.** $\frac{\pi}{۲}+۲\varphi$.

۶۵۵. $S_t=۴\pi^۲a$؛ $S_n=a$؛ $t=۲\pi a\sqrt{۱+۴\pi^۲}$؛ $n=a\sqrt{۱+۴\pi^۲}$؛

$tg\mu=۲\pi$. **۶۵۶.** $S_t=a$؛ $S_n=\frac{a}{\varphi_۰^۲}$؛ $t=\sqrt{a^۲+\rho_۰^۲}$؛ $n=\frac{\rho_۰}{a}\sqrt{a^۲+\rho_۰^۲}$؛

$tg\mu=-\varphi_۰$. **۶۵۷.** ۳ سانتیمتر در ثانیه؛ -۹ سانتیمتردرثانیه **۶۵۸.** ۱۵سانتیمتر

در ثانیه. **۶۵۹.** $-\frac{۳}{۲}$ متر در ثانیه؛ **۶۶۰.** معادلهٔ مسیر

$y=x\,tg\alpha-\frac{g}{۲v_۰^۲\cos^۲\alpha}x^۲$. فاصلهٔ سقوط برابراست با $\frac{v_۰^۲\sin۲\alpha}{g}$. مقدار سرعت

$\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\alpha+g^2t^2}$. ضریب زاویهٔ بردار سرعت $\frac{v_0\sin\alpha-gt}{v_0\cos\alpha}$ **راهنمائی.** برای تعیین مسیر حرکت باید پارامتر t را از دستگاه مفروض حذف کرد . فاصلهٔ سقوط عبارتست از طول نقطهٔ A (شکل ۱۷). تصویرهای سرعت روی محورها، $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$؛ مقدار سرعت: $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$. بردار سرعت در امتداد مماس بر مسیر است. **۶۶۱.** باسرعت ۰/۴ پائین می‌آید. **۶۶۲.** $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{8}\right)$. **۶۶۳.** قطر با سرعت ۳/۸ سانتیمتر در ثانیه و مساحت با سرعت ۴۰ سانتیمتر مربع درثانیه بزرگ می‌شود. **۶۶۴.** سطح کره با سرعت ۰/۲π مترمربع‌درثانیه و حجم آن با سرعت ۰/۵π مترمکعب درثانیه نمو می‌کند.

۶۶۵. $\frac{\pi}{3}$ سانتیمتر در ثانیه. **۶۶۶.** جرم تمام میله ۳۶۰ گرم و تکاثف آن در نقطهٔ M مساوی $5x$ گرم بر سانتیمتر است؛ تکاثف در نقطهٔ A مساوی صفر و درنقطهٔ B مساوی ۶۰ گرم برسانتیمتر است. **۶۶۷.** $56x^6+210x^4$. **۶۶۸.** $e^{x^2}(4x^2+2)$.

۶۶۹. $2\cos 2x$. **۶۷۰.** $\frac{2(1-x^2)}{3(1+x^2)^2}$. **۶۷۱.** $\frac{-x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$.

۶۷۲. $2\,arctg\,x+\frac{2x}{1+x^2}$. **۶۷۳.** $\frac{2}{1-x^2}+\frac{2x\arcsin x}{(1-x^3)^{\frac{3}{2}}}$.

۶۷۴. $\frac{1}{a}\,ch\frac{x}{a}$. **۶۷۹.** $y'''=6$. **۶۸۰.** $f'''(3)=4320$.

۶۸۱. $y^{V}=\frac{24}{(x+1)^5}$. **۶۸۲.** $y^{VI}=-64\sin 2x$، **۶۸۴.** ۰، ۱، ۲، ۲.

۶۸۵. سرعت v: ۵، ۴/۹۹۷، ۴/۷؛ شتاب a: ۰، ۰/۰۰۶-، ۰/۰۶- . **۶۸۶.** قانون حرکت نقطهٔ M_1 عبارتست از $x=a\cos\omega t$؛ سرعت درلحظه t مساوی‌است با $-a\omega\sin\omega t$؛ شتاب در لحظه t: $-a\omega^2\cos\omega t$. سرعت اولیه مساوی صفر؛ شتاب اولیه مساوی $-a\omega^2$؛ سرعت به‌ازای $x=0$، $\pm\infty$، شتاب به‌ازای $x=0$: صفر. حداکثر مقدار مطلق سرعت: $a\omega$. حداکثر مقدار مطلق شتاب: $a\omega^2$. **۶۸۷.** $y^{(n)}=n!\;a^n$. **۶۸۸.** $(a$

۶۸۹. a) $\sin(x+n\frac{\pi}{2})$؛ b) $n!(1-x)^{-(n+1)}$؛ $(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n - x^{n-\frac{1}{2}}}$.

b) $2^n\cos(2x+n\frac{\pi}{2})$، c) $(-3)^n\cdot e^{-3x}$؛ d) $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$؛

e) $\frac{(-1)^{n+1}n!}{(1+x)^{n+1}}$؛ f) $\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$؛ g) $2^{n-1}\sin[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}]$؛

h) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$. ۶۹۰. a) $x\cdot e^x+ne^x$؛

b) $2^{n-1}e^{-2x}[2(-1)^n x^2+2n(-1)^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}$،

c) $(1-x^2)\cos\left(x+\frac{\pi\pi}{2}\right)-2nx\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)-n(n-1)\times$
$\times\cos\left(x+\frac{n(-2)\pi}{2}\right)$

d) $\frac{(-1)^{n=1}\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n x^{\frac{2n+1}{2}}}[x-(2n-1)]$؛

e) $\frac{(-1)^n 6(n-4)!}{x^{n-2}}$ برای $n\geqslant 4$. ۶۹۱. $f^{(n)}(0)=(n-1)!$.

۶۹۲. a) $9t^3$؛ b) $2t^2+2$؛ c) $-\sqrt{1-t^2}$. ۶۹۳. a) $\frac{-1}{a\sin^3 t}$،

b) $\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$، c) $\frac{-1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$، d) $\frac{-1}{at\sin^3 t}$. ۶۹۴. a) 0، b) 2^{3at}.

۶۹۵. a) $(1+t^2)(1+3t^2)$؛ b) $\frac{t(1+t)}{(1-t)^3}$. ۶۹۶. $\frac{-2e^{-t}}{(\cos t+\sin t)^3}$.

۶۹۷. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=0}=1$. ۶۹۹. $\frac{3\cot g^4 t}{\sin t}$. ۷۰۰. $\frac{4e^{2t}(2\sin t-\cos t)}{(\sin t+\cos t)^5}$.

۷۰۱. $-6e^{3t}(1+3t+t^2)$. ۷۰۲. $m^n\cdot t^m$. ۷۰۳. $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{-f''(x)}{[f'(x)]^2}$.

$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}$، ۷۰۵. $-\frac{p^2}{y^3}$. ۷۰۶. $-\frac{b^4}{a^2y^3}$.

۷۰۷. $-\frac{2y^2+2}{y^5}$. ۷۰۸. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{(1-y)^3}$؛ $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1}{y^2}$. ۷۰۹. $\frac{111}{256}$.

۷۱۰. $-\frac{1}{16}$. ۷۱۱. $a)$ $\frac{1}{3}$؛ $b)$ $-\frac{3a^2x}{y^5}$. ۷۱۲. $\Delta y=0{,}009001$، $dy=0{,}009$. ۷۱۳. $d(1-x^3)=1$ به‌ازای $x=1$ و $\Delta x=-\frac{1}{3}$. ۷۱۴. $2x\Delta x$، $\Delta S=2x\Delta x+(\Delta x)^2$. ۷۱۷. به‌ازای $x=0$. ۷۱۸. نه. ۷۱۹. $dy=-\frac{\pi}{72}\approx-0{,}0436$. ۷۲۰. $dy=\frac{1}{2700}\approx0{,}00037$. ۷۲۱. $dy=\frac{\pi}{45}\approx0{,}0698$. ۷۲۲. $\frac{-m\,dx}{x^{m+1}}$. ۷۲۳. $\frac{dx}{(1-x)^2}$. ۷۲۴. $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

۷۲۵. $\frac{a\,dx}{x^2+a^2}$. ۷۲۶. $-2xe^{-x^2}dx$. ۷۲۷. $\ln x\,dx$.

۷۲۸. $\frac{-2dx}{1-x^2}$. ۷۲۹. $-\frac{1+\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi$. ۷۳۰. $-\frac{e^t dt}{1+e^{2t}}$.

۷۳۲. $\frac{10x+8y}{7x+5y}dx$. ۷۳۳. $\frac{y}{x-y}dx=\frac{-ye^{-\frac{x}{y}}dx}{y^2-xe^{-\frac{x}{y}}}$. ۷۳۴. $\frac{x+y}{x-y}dx$.

۷۳۵. $\frac{12}{11}dx$. ۷۳۷. $a)$ $0{,}485$؛ $b)$ $0{,}965$؛ $c)$ $1{,}2$؛ $d)$ $-0{,}045$، $e)$ $\frac{\pi}{4}+0{,}025\approx0{,}81$. ۷۳۸. ۵۶۵ سانتیمتر مکعب. ۷۳۹. $\sqrt{5}\approx2{,}25$، $\sqrt{17}\approx4{,}13$، $\sqrt{70}\approx8{,}38$، $\sqrt{640}\approx25{,}3$. ۷۴۰. $\sqrt[3]{10}\approx2{,}16$، $\sqrt[3]{70}\approx4{,}13$، $\sqrt[3]{200}\approx5{,}85$. ۷۴۱. $a)$ $0{,}5$، $b)$ $1{,}1$، $c)$ $0{,}93$، $d)$ $0{,}9$. ۷۴۲. $1{,}0019$. ۷۴۳. $0{,}57$. ۷۴۴. $2{,}03$. ۷۴۸. $\frac{-(dx)^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. ۷۴۹. $\frac{-x(dx)^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. ۷۵۰. $\left(-\sin x\ln x+\frac{2\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)(dx)^2$.

۷۵۱. $\frac{2\ln x-3}{x^3}(dx)^2$. ۷۵۲. $-e^{-x}(x^2-6x+6)(dx)^3$.

۷۵۳. $\frac{۳۸۴(dx)^۴}{(۲-x)^۵}$. **۷۵۴.** $۳\cdot ۲^n \sin(۲x+۵+\frac{n\pi}{۲})(dx)^n$.

۷۵۵. $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha+n\alpha)(dx)^n$. **۷۵۷.** نه،زیرا $f'(۲)$ وجود ندارد.

۷۵۸. نه. نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ نقطهٔ انفصال تابع است. **۷۶۲.** $\xi=۰$. **۷۶۳.** $(۲,۴)$.

۷۶۵. a) $\xi=\frac{۱۴}{۹}$؛ $\xi=\frac{\pi}{۴}$. **۷۶۸.** $\ln x=(x-۱)-\frac{۱}{۲}(x-۱)^۲+\frac{۲(x-۱)^۳}{۳!\xi^۳}$،

که در آن $\xi=۱+\theta(x-۱)$ و $۰<\theta<۱$. **۷۶۹.** $\sin x=x-\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}\cos\xi_۱$،

که در آن $\xi_۱=\theta_۱ x$ و $۰<\theta_۱<۱$؛ $\sin x=x-\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}-\frac{x^۷}{۷!}\cos\xi_۲$، که در آن

$\xi_۲=\theta_۲ x$ و $۰<\theta_۲<۱$. **۷۷۰.** $e^x=۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\dots+\frac{x^{n-۱}}{(n-۱)!}+\frac{x^n}{n!}e^\xi$

که در آن $\xi=\theta x$ و $۰<\theta<۱$. **۷۷۲.** مقدار خطا: a) $\frac{۱}{۱۶}\cdot\frac{x^۳}{(۱+\xi)^{\frac{۵}{۲}}}$؛

b) $\frac{۵}{۸۱}\cdot\frac{x^۳}{(۱+\xi)^{\frac{۸}{۳}}}$ در هر دو حالت $\xi=\theta x$ و $۰<\theta<۱$. **۷۷۳.** خطا از $\frac{۱}{۴۰}=\frac{۳}{۵!}$

کمتر است. **۷۷۵.** **حل.** داریم $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\left(۱+\frac{x}{a}\right)^{\frac{۱}{۲}}\left(۱-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{۱}{۲}}$. اگر هر دو

عامل‌را برحسب توانهای x بنویسیم، بدست‌می‌آید: $\left(۱+\frac{x}{a}\right)^{\frac{۱}{۲}}\approx ۱+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{x}{a}-\frac{۱}{۸}\cdot\frac{x^۲}{a^۲}$

$\left(۱-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{۱}{۲}}\approx ۱+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{x}{a}+\frac{۳}{۸}\cdot\frac{x^۲}{a^۲}$؛ از ضرب آنها خواهیم داشت:

$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\approx ۱+\frac{x}{a}+\frac{x^۲}{۲a^۲}$. حالا $e^{\frac{x}{a}}$ را برحسب قوای $\frac{x}{a}$ می‌نویسیم، بهمان

کثیرالجملهٔ قبل می‌رسیم: $e^{\frac{x}{a}}\approx ۱+\frac{x}{a}+\frac{x^۲}{۲a^۲}$. **۷۷۷.** $-\frac{۱}{۳}$. **۷۷۸.** ∞.

۷۷۹. ۱. **۷۸۰.** ۳. **۷۸۱.** $\frac{1}{2}$. **۷۸۲.** ۵. **۷۸۳.** ∞. **۷۸۴.** ۰.

۷۸۵. $\frac{\pi^2}{2}$. **۷۸۶.** ۱. **۷۸۸.** $\frac{2}{\pi}$. **۷۸۹.** ۱. **۷۹۰.** ۰. **۷۹۱.** a. **۷۹۲.** ∞.

برای $n>1$ ؛ a برای $n=1$؛ ۰ برای $n<1$. **۷۹۳.** ۰. **۷۹۵.** $\frac{1}{5}$.

۷۹۶. $\frac{1}{12}$. **۷۹۷.** -1. **۷۹۹.** ۱. **۸۰۰.** e^3. **۸۰۱.** ۱.

۸۰۲. ۱. **۸۰۳.** ۱. **۸۰۴.** $\frac{1}{e}$. **۸۰۵.** $\frac{1}{e}$. **۸۰۶.** $\frac{1}{e}$.

۸۰۷. ۱. **۸۰۸.** ۱. **۸۱۰.** **راهنمائی.** $\lim_{\alpha\to 0}\frac{S}{\frac{2}{3}bh}$ را پیدا می‌کنیم که در آن $S=\frac{R^2}{2}(\alpha-\sin\alpha)$ مقدار دقیق مساحت قطعه است (R شعاع دایرهٔ مربوطه است).

فصل سوم

۸۱۱. در فاصلهٔ $(-\infty,-2)$ صعودی و در فاصلهٔ $(-2,\infty)$ نزولی است. **۸۱۲.** در فاصلهٔ $(-\infty,2)$ نزولی و در فاصلهٔ $(2,\infty)$ صعودی است. **۸۱۳.** در فاصلهٔ $(-\infty,\infty)$ صعودی است. **۸۱۴.** در فاصله‌های $(-\infty,0)$ و $(2,\infty)$ صعودی و در فاصلهٔ $(0,2)$ نزولی است. **۸۱۵.** در فاصله‌های $(-\infty,2)$ و $(2,\infty)$ نزولی است. **۸۱۶.** در فاصلهٔ $(-\infty,1)$ صعودی و در فاصلهٔ $(1,\infty)$ نزولی است. **۸۱۷.** در فاصله‌های $(-\infty,-2)$، $(-2,8)$ و $(8,\infty)$ نزولی است. **۸۱۸.** در فاصلهٔ $(0,1)$ نزولی و درفاصلهٔ $(1,\infty)$ صعودی است. **۸۱۹.** در فاصله‌های $(-\infty,-1)$ و $(1,\infty)$ صعودی ودر فاصلهٔ $(-1,1)$ نزولی است. **۸۲۰.** در فاصلهٔ $(-\infty,\infty)$ صعودی است.

۸۲۱. در فاصلهٔ $(0, \frac{1}{e})$ نزولی و در فاصلهٔ $(\frac{1}{e}, \infty)$ صعودی است. **۸۲۲.** در فاصلهٔ $(-2, 0)$ صعودی است. **۸۲۳.** درفاصلهٔ $(-\infty, 2)$ نزولی و در فاصلهٔ $(2, \infty)$صعودی است. **۸۲۴.** در فاصله‌های $(-\infty, a)$ و (a, ∞) نزولی است. **۸۲۵.** درفاصله‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, 1)$ نزولی و در فاصلهٔ $(1, \infty)$ صعودی است. **۸۲۷.** $y_{max} = \frac{9}{4}$ به‌ازای $x = \frac{1}{2}$. **۸۲۸.** اکستره مم ندارد. **۸۳۰.** $y_{min} = 0$ به‌ازای $x = 0$، $y_{min} = 0$ به‌ازای $x = 12$؛ $y_{max} = 1296$ به‌ازای $x = 6$. **۸۳۱.** $y_{min} \approx -0/76$ به‌ازای $x \approx 0/23$؛ $y_{max} = 0$ به‌ازای $x = 1$؛ $y_{min} \approx -0/05$ به‌ازای $x \approx 1/43$. به‌ازای $x = 2$ اکستره مم وجود ندارد. **۸۳۲.** اکستره مم ندارد. **۸۳۳.** $y_{max} = -2$ به‌ازای $x = 0$؛ $y_{min} = 2$ به‌ازای $x = 2$. **۸۳۴.** $y_{max} = \frac{9}{16}$ به‌ازای $x = 3/2$. **۸۳۵.** $y_{max} = -3\sqrt{3}$ به‌ازای $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$؛ $y_{min} = 3\sqrt{3}$ به‌ازای $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. **۸۳۶.** $y_{max} = \sqrt{2}$ به‌ازای $x = 0$. **۸۳۷.** $y_{max} = -\sqrt{3}$ به‌ازای $x = -2\sqrt{3}$؛ $y_{min} = \sqrt{3}$ به‌ازای $x = 2\sqrt{3}$. **۸۳۸.** $y_{min} = 0$ به‌ازای $x = \pm 1$؛ $y_{max} = 1$ به‌ازای $x = 0$. **۸۳۹.** $y_{min} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$ به‌ازای $x = (k - \frac{1}{6})\pi$؛ $y_{max} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ به‌ازای $x = (k + \frac{1}{6})\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. **۸۴۰.** $y_{max} = 5$ به‌ازای $x = 12k\pi$، $y_{max} = 5\cos\frac{2\pi}{5}$ به‌ازای $x = 12(k \pm \frac{2}{5})\pi$؛ $y_{min} = -5\cos\frac{\pi}{5}$ به‌ازای $x = 12(k \pm \frac{1}{5})\pi$، $y_{min} = 1$ به‌ازای $x = 6(2k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. **۸۴۱.** $y_{min} = 0$ به‌ازای $x = 0$. **۸۴۲.** $y_{min} = \frac{-1}{e}$ به‌ازای $x = \frac{1}{e}$. **۸۴۳.** $y_{max} = \frac{4}{e^2}$ به‌ازای $x = \frac{1}{e^2}$؛ $y_{min} = 0$ به‌ازای $x = 1$. **۸۴۴.** $y_{min} = 1$ به‌ازای $x = 0$.

۸۴۵. $y_{min}=-\frac{1}{e}$ به‌ازای $x=-۱$. **۸۴۶.** $y_{min}=۰$ به‌ازای $x=۰$؛

$y_{max}=\frac{۴}{e^۲}$ به‌ازای $x=۲$. **۸۴۷.** $y_{min}=e$ به‌ازای $x=۱$. **۸۴۸.** اکسترمم

وجود ندارد **۸۴۹.** حداقل مقدار $m=-\frac{۱}{۲}$ به‌ازای $x=-۱$؛ حداکثرمقدار $M=\frac{۱}{۲}$

به‌ازای $x=۱$. **۸۵۰.** $m=۰$ به‌ازای $x=۰$ و $x=۱۰$، $M=۵$ به‌ازای $x=۵$.

۸۵۱. $m=\frac{۱}{۲}$ به‌ازای $x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۴}$؛ $M=۱$ به‌ازای $x=\frac{k\pi}{۲}$ $(k=۰,\pm۱,\pm۲,\cdots)$.

۸۵۲. $m=۰$ به‌ازای $x=۱$؛ $M=\pi$ به‌ازای $x=-۱$. **۸۵۳.** $m=-۱$ به‌ازای

$x=-۱$؛ $M=۲۷$ به‌ازای $x=۳$. **۸۵۴.** a) $m=-۶$ به‌ازای $x=۱$؛

$M=۲۶۶$ به‌ازای $x=۵$، b) $m=-۱۵۷۹$ به‌ازای $x=-۱۰$، $M=۳۷۴۵$ به‌ازای

$x=۱۲$. **۸۵۶.** $p=-۲$، $q=۴$. **۸۶۱.** هریك از جمله‌ها باید مساوی $\frac{a}{۲}$ باشد.

۸۶۲. مستطیل باید به‌صورت مربعی به‌ضلع $\frac{b}{۴}$ درآید. **۸۶۳.** متساوی الساقین.

۸۶۴. باید ضلعی از محوطه‌که به دیوار تکیه دارد دوبرابر ضلع دیگر باشد. **۸۶۵.** باید

ضلع هریك از مربعهائی که ازچهار گوشه بریده می‌شود مساوی $\frac{a}{۶}$ باشد. **۸۶۶.** باید

ارتفاع نصف ضلع قاعده باشد. **۸۶۷.** استوانه‌ای که ارتفاع آن مساوی قطر قاعده‌اش باشد.

۸۶۸. ارتفاع استوانه مساوی $\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ و شعاع قاعدهٔ آن $R\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ است‌که در آن R عبارتست

از شعاع کرهٔ مفروض. **۸۶۹.** ارتفاع استوانه مساوی $R\sqrt{۲}$ است‌که در آن R عبارتست از

شعاع کرهٔ مفروض. **۸۷۰.** ارتفاع مخروط، $\frac{۴}{۳}R$ (R شعاع کرهٔ مفروض است).

۸۷۱. ارتفاع مخروط: $\frac{۴}{۳}R$ (R شعاع کرهٔ مفروض است). **۸۷۲.** شعاع قاعدهٔ مخروط:

$\frac{۳}{۲}r$ (r شعاع قاعدهٔ استوانهٔ مفروض است). **۸۷۳.** مخروطی‌که ارتفاع آن دوبرابر قطر

کره باشد. **۸۷۴.** $\varphi = \pi$، یعنی باید مقطع باریکهٔ آهن نیمدایره باشد، **۸۷۵.** زاویهٔ مرکزی قطاع مساوی $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. **۸۷۶.** بایدارتفاع قسمت استوانه‌ای مساوی صفرباشد، یعنی باید ظرف به‌صورت نیمکره باشد. **۸۷۷.** $h = \left(b^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. **۸۷۸.** $\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1$. **۸۷۹.** ضلعهای‌مستطیل $a\sqrt{2}$ و $b\sqrt{2}$ که در آن a و b بترتیب نیم قطرهای بیضی هستند. **۸۸۰.** مختصات رأسهائی از مستطیل که روی سهمی واقع‌اند، چنین‌است: $(\frac{3}{2}a\ ,\ \pm 2\sqrt{\frac{pa}{3}})$. **۸۸۱.** $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$. **۸۸۲.** زاویهٔ مطلوب برابر است با بزرگترین زاویهٔ بین دو مقدار $\arccos\frac{1}{k}$ و $arctg\frac{h}{d}$. **۸۸۳.** $AM = a\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}}$. **۸۸۴.** $\frac{r}{\sqrt{2}}$. **۸۸۵.** (a $x = y = \frac{d}{\sqrt{2}}$، (b $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$؛ $y = d\sqrt{\frac{2}{3}}$. **۸۸۶.** $x = \sqrt{\frac{2aQ}{q}}$؛ $P_{min} = \sqrt{2aqQ}$. **۸۸۷.** $\sqrt{Mm}$.

راهنمائی. اگر کرهٔ به‌جرم m_2 که با سرعت v حرکت می‌کند به کرهٔ بدون حرکت به‌جرم m_1 برخورد کند، سرعتی مساوی $\frac{2m_2v}{m_1+m_2}$ می‌دهد. **۸۸۸.** $n = \sqrt{\frac{NR}{r}}$ (اگر این‌عدد صحیح ویا مقسوم علیه عدد N نباشد، نزدیکترین عدد صحیح به‌آنرا انتخاب می‌کنند که ضمنا مقسوم‌علیه N هم‌باشد). چون مقاومت‌داخلی‌باطری‌مساوی $\frac{n^2r}{N}$ است، مفهوم فیزیکی‌جوابی که بدست آورده‌ایم چنین می‌شود، مقاومت داخلی باطری باید نزدیکترین مقدار ممکن به‌ـ مقاومت خارجی باشد. **۸۸۹.** $y = \frac{2}{3}h$. **۸۹۱.** در فاصلهٔ $(-\infty, 2)$ تقعر به‌طرف پائین و در فاصلهٔ $(2, \infty)$ تقعر بطرف‌بالاست. $M(2, 12)$ نقطهٔ عطف است. **۸۹۲.** در فاصلهٔ $(-\infty, \infty)$ تقعر بطرف بالاست. **۸۹۳.** در فاصلهٔ $(-\infty, -3)$ تقعر به‌طرف

پائین و در فاصلهٔ $(-۳,\infty)$ تقعر بطرف بالاست؛ نقطهٔ عطف وجود ندارد. **۸۹۴.** در فاصله‌های $(-\infty,-۶)$ و $(۰,۶)$ تقعر به‌طرف بالا و در فاصله‌های $(-۶,۰)$ و $(۶,\infty)$ تقعر به‌طرف پائین است، $M_۱(-۶,-\frac{۹}{۲})$، $O(۰,۰)$، $M_۲(۶,\frac{۹}{۲})$ نقطه‌های عطف منحنی‌اند.

۸۹۵. درفاصله‌های $(-\infty,-\sqrt{۳})$ و $(۰,\sqrt{۳})$ تقعر بطرف بالا و در فاصله‌های $(-\sqrt{۳},۰)$ و $(\sqrt{۳},\infty)$ تقعر بطرف پائین است؛ $M_{۱,۲}(\pm\sqrt{۳},۰)$ و $O(۰,۰)$ نقطه‌های عطف منحنی‌اند: **۸۹۶.** درفاصله‌های $\left((۴k+۱)\frac{\pi}{۲},(۴k+۳)\frac{\pi}{۲}\right)$ تقعربه‌طرف بالا و درفاصله‌های $\left((۴k+۳)\frac{\pi}{۲},(۴k+۵)\frac{\pi}{۲}\right)$ تقعر به‌طرف پائین است.

$(k=۰,\pm۱,\pm۲,\dots)$؛ نقطه‌های عطف: $\left((۲k+۱)\frac{\pi}{۲},۰\right)$. **۸۹۷.** در فاصله‌های $\left(۲k\pi,(۲k+۱)\pi\right)$ تقعر به‌طرف بالا و در فاصله‌های $\left((۲k-۱)\pi,۲k\pi\right)$ تقعر به‌طرف پائین است. $(k=۰,\pm۱,\pm۲,\dots)$؛ طولهای نقطه‌های عطف چنین است: $x=k\pi$.

۸۹۸. درفاصلهٔ $\left(۰,\frac{۱}{\sqrt{e^۳}}\right)$ تقعر به‌طرف پائین و در فاصلهٔ $\left(\frac{۱}{\sqrt{e^۳}},\infty\right)$ تقعر به‌طرف بالاست. $M\left(\frac{۱}{\sqrt{e^۳}},-\frac{۳}{۲e^۳}\right)$ نقطهٔ عطف منحنی است. **۸۹۹.** در فاصلهٔ $(-\infty,۰)$ تقعر به‌طرف بالا و در فاصلهٔ $(۰,\infty)$ تقعر به‌طرف پائین است؛ $O(۰,۰)$ نقطهٔ عطف منحنی‌است.

۹۰۰. در فاصله‌های $(-\infty,-۳)$ و $(-۱,\infty)$ تقعر به‌طرف بالا و درفاصلهٔ $(-۳,-۱)$ تقعر به‌طرف پائین است؛ $M_۱\left(-۳,\frac{۱۰}{e^۳}\right)$ و $M_۲\left(-۱,\frac{۲}{e}\right)$ نقطه‌های عطف منحنی‌اند.

۹۰۱. $x=۲$، $y=۰$. **۹۰۲.** $x=۱$، $x=۳$، $y=۰$. **۹۰۳.** $x=\pm۲$، $y=۱$. **۹۰۴.** $y=x$. **۹۰۵.** $y=-x$ (چپ)، $y=x$ (راست). **۹۰۶.** $y=-۱$ (چپ) $y=۱$ (راست). **۹۰۷.** $x=\pm۱$، $y=-x$ (چپ)، $y=x$ (راست). **۹۰۸.** $y=-۲$ (چپ)، $y=۲x-۲$ (راست). **۹۰۹.** $y=۲$. **۹۱۰.** $x=۰$، $y=۱$ (چپ)، $y=۰$ (راست). **۹۱۱.** $x=۰$، $y=۱$. **۹۱۲.** $y=۰$. **۹۱۳.** $x=-۱$.

۹۱۴. $y=x-\pi$ (چپ)، $y=x+\pi$ (راست). **۹۱۵.** $y=a$. **۹۱۶.** $y_{max}=0$
به‌ازای $x=0$؛ $y_{min}=-4$ به‌ازای $x=2$، نقطهٔ عطف $M_1(1,-2)$. **۹۱۷.** $y_{max}=1$
به‌ازای $x=\pm\sqrt{3}$؛ $y_{min}=0$ به‌ازای $x=0$؛ نقطه‌های عطف: $M_{1,2}(\pm1,\frac{5}{9})$.

۹۱۸. $y_{max}=4$ به‌ازای $x=-1$؛ $y_{min}=0$ به‌ازای $x=1$؛ نقطهٔ عطف $M_1(0,2)$.
۹۱۹. $y_{max}=8$ به‌ازای $x=-2$؛ $y_{min}=0$ به‌ازای $x=2$؛ نقطهٔ عطف $M(0,4)$.
۹۲۰. $y_{min}=-1$ به‌ازای $x=0$؛ نقطه‌های عطف: $M_{1,2}(\pm\sqrt{5},0)$ و
$M_{3,4}\left(\pm1,-\frac{64}{125}\right)$. **۹۲۱.** $y_{max}=-2$ به‌ازای $x=0$؛ $y_{min}=2$ به‌ازای $x=2$؛
مجانبها، $x=1$، $y=x-1$. **۹۲۲.** نقطه‌های عطف، $M_{1,2}(\pm1,\mp2)$، مجانب،
$x=0$. **۹۲۳.** $y_{max}=-4$ به‌ازای $x=-1$؛ $y_{min}=4$ به‌ازای $x=1$؛ مجانب، $x=0$.
۹۲۴. $y_{min}=3$ به‌ازای $x=1$، نقطهٔ عطف: $M(-\sqrt[3]{2},0)$؛ مجانب، $x=0$.
۹۲۵. $y_{max}=\frac{1}{3}$ به‌ازای $x=0$؛ نقطه‌های عطف: $M_{1,2}\left(\pm1,\frac{1}{4}\right)$؛ مجانب، $y=0$.
۹۲۶. $y_{max}=-2$ به‌ازای $x=0$، مجانب‌ها: $x=\pm2$؛ $y=0$. **۹۲۷.** $y_{min}=-1$ به‌ازای
$x=-2$، $y_{max}=1$ به‌ازای $x=2$؛ نقطه‌های عطف، $O(0,0)$ و $M_{1,2}\left(\pm2\sqrt{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:
مجانب، $y=0$. **۹۲۸.** $y_{max}=1$ به‌ازای $x=4$، نقطهٔ عطف، $M\left(5,\frac{8}{9}\right)$ مجانب‌ها،
$x=2$، $y=0$. **۹۲۹.** نقطهٔ عطف، $O(0,0)$؛ مجانب‌ها: $x=\pm2$؛ $y=0$.
۹۳۰. $y_{max}=-\frac{27}{16}$ به‌ازای $x=\frac{8}{3}$؛ مجانب‌ها، $x=0$؛ $x=4$؛ $y=0$. **۹۳۱.**
$y_{max}=-4$ به‌ازای $x=-1$؛ $y_{min}=4$ به‌ازای $x=1$؛ مجانب‌ها، $x=0$؛ $y=3x$.
۹۳۲. $A(0,2)$ و $B(4,2)$ نقطه‌های انتهائی، $y_{max}=2\sqrt{2}$ به‌ازای $x=2$؛ **۹۳۳.**
$A(-8,-4)$ و $B(8,4)$ نقطه‌های انتهائی؛ نقطهٔ عطف، $O(0,0)$. **۹۳۴.** نقطهٔ انتهائی
$A(-3,0)$، $y_{min}=-2$ به‌ازای $x=-2$. **۹۳۵.** نقطهٔ انتهائی: $A(-\sqrt{3},0)$،
$O(0,0)$ و $B(\sqrt{3},0)$ ؛ $y_{max}=\sqrt{2}$ به‌ازای $x=-1$؛ نقطهٔ عطف،
$M\left(\sqrt{3+2\sqrt{3}},\sqrt{6\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}}\right)$. **۹۳۶.** $y_{max}=1$ به‌ازای $x=0$؛ نقطه‌های

عطف: $M_{1,2}(\pm 1, 0)$. **۹۳۷.** نقطه‌های عطف: $M_1(0,1)$، $M_2(1,0)$، مجانب:
$y=-x$. **۹۳۸.** $y_{max}=0$ به‌ازای $x=-1$؛ $y_{min}=-1$ به‌ازای $x=0$. **۹۳۹.**
$y_{max}=2$ به‌ازای $x=0$؛ نقطه‌های عطف: $M_{1,2}(\pm 1, \sqrt[3]{2})$؛ مجانب: $y=0$. **۹۴۰.**
$y_{min}=-4$ به‌ازای $x=-4$؛ $y_{max}=4$ به‌ازای $x=4$، نقطهٔ عطف: $O(0,0)$؛ مجانب:
$y=0$. **۹۴۱.** $y_{min}=\sqrt[3]{4}$ به‌ازای $x=2$، $y_{min}=\sqrt[3]{4}$ به‌ازای $x=4$؛ $y_{max}=2$ به
ازای $x=3$. **۹۴۲.** $y_{min}=2$ به‌ازای $x=0$، مجانب‌ها: $x=\pm 2$.

۹۴۳. مجانب‌ها: $x=\pm 2$ و $y=0$. **۹۴۴.** $y_{min}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ به‌ازای $x=\sqrt{3}$،
$y_{max}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ به‌ازای $x=-\sqrt{3}$؛ نقطه‌های عطف: $M_1(-3,-\frac{3}{2})$، $O(0,0)$ و
$M_2(3,\frac{3}{2})$؛ مجانب‌ها: $x=\pm 1$. **۹۴۵.** $y_{min}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ به‌ازای $x=6$؛ نقطهٔ عطف:
$M\left(12,\frac{12}{\sqrt[3]{100}}\right)$؛ مجانب: $x=2$. **۹۴۶.** $y_{max}=\frac{1}{e}$ به‌ازای $x=1$؛ نقطهٔ عطف:
$M\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$؛ مجانب: $y=0$. **۹۴۷.** نقطه‌های عطف: $M_1\left(-3a,\frac{10a}{e^3}\right)$ و
$M_2\left(-a,\frac{2a}{e}\right)$؛ مجانب: $y=0$. **۹۴۸.** $y_{max}=e^2$ به‌ازای $x=4$؛ نقطه‌های عطف
$M_{1,2}\left(\frac{8\pm\sqrt{2}}{2}, e^{\frac{3}{2}}\right)$؛ مجانب: $y=0$. **۹۴۹.** $y_{max}=2$ به‌ازای $x=0$؛ نقطه‌های
عطف: $M_{1,2}\left(\pm 1, \frac{3}{e}\right)$. **۹۵۰.** $y_{max}=1$ به‌ازای $x=\pm 1$، $y_{min}=0$ به‌ازای
$x=0$. **۹۵۱.** $y_{max}=0/74$ به‌ازای $x=e^2\approx 7/39$؛ نقطهٔ عطف:
$M\left(e^{\frac{8}{3}}\approx 14/39, 0/70\right)$؛ مجانب‌ها: $x=0$ و $y=0$. **۹۵۲.** $y_{min}=\frac{a^2}{4e}$ به
ازای $x=\frac{a}{\sqrt{e}}$؛ نقطهٔ عطف: $M\left(\frac{a}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3a^2}{4e^3}\right)$. **۹۵۳.** $y_{min}=e$ به‌ازای $x=e$؛
نقطهٔ عطف: $M\left(e^2,\frac{e^2}{2}\right)$؛ مجانب: $x=1$؛ وقتی $x\to 0$ داریم: $y\to 0$. **۹۵۴.**

$y_{max}=\frac{۴}{e^۲}\approx ۰/۵۴$ به‌ازای $x=\frac{۱}{e^۲}-۱\approx -۰/۸۶$، $y_{min}=۰$ به‌ازای $x=۰$؛

نقطهٔ عطف: $M(\frac{۱}{e}-۱\approx -۰/۶۳\ ,\ \frac{۱}{e}\approx ۰/۳۷)$؛ وقتی $x\to -۱+۰$ داریم:

$y\to ۰$ (نقطهٔ حدی انتهائی). **۹۵۵.** $y_{min}=۱$ به‌ازای $x=\pm\sqrt{۲}$؛ نقطه‌های عطف:

$M_{۱,۲}(\pm ۱/۸۹, ۱/۳۳)$؛ مجانب‌ها: $x=\pm ۱$. **۹۵۶.** مجانب‌ها: $xy=۰$.

۹۵۷. مجانب‌ها: $y=۰$ (وقتی $x\to +\infty$) و $y=-x$ (وقتی $x\to -\infty$).

۹۵۸. مجانب‌ها: $x=-\frac{۱}{e}$، $x=۰$، $y=۱$؛ تابع در فاصلهٔ بستهٔ $[-\frac{۱}{e}, ۰]$ معین نیست.

۹۵۹. تابع متناوب است با دورهٔ تناوب ۲π؛ $y_{min}=-\sqrt{۲}$ به‌ازای

$x=\frac{۵}{۴}\pi+۲k\pi$؛ $y_{max}=\sqrt{۲}$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۴}+۲k\pi$ $(k=۰,\pm ۱,\pm ۲,\dots)$؛ نقطه‌های

عطف: $M_k(\frac{۳}{۴}\pi+k\pi\ ,\ ۰)$. **۹۶۰.** تابع متناوب است با دورهٔ تناوب ۲π؛

$y_{min}=-\frac{۳}{۴}\sqrt{۳}$ به‌ازای $x=\frac{۵}{۳}\pi+۲k\pi$؛ $y_{max}=\frac{۳}{۴}\sqrt{۳}$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۳}+۲k\pi$

$(k=۰,\pm ۱,\pm ۲,\dots)$؛ نقطه‌های عطف: $M_k(k\pi, ۰)$ و

$N_k(arccos(-\frac{۱}{۴})+۲k\pi,\ \frac{۳}{۱۶}\sqrt{۱۵})$. **۹۶۱.** تابع متناوب است با دورهٔ تناوب

۲π. درفاصلهٔ بستهٔ $[-\pi,\pi]$ داریم: $y_{max}=\frac{۱}{۴}$ به‌ازای $x=\pm\frac{\pi}{۳}$؛ $y_{min}=-۲$ به‌ازای

$x=\pm\pi$؛ $y_{min}=۰$ به‌ازای $x=۰$؛ نقطه‌های عطف: $M_{۱,۲}(\pm ۰/۵۷, ۰/۱۳)$ و

$M_{۳,۴}(\pm ۲/۲۰, -۰/۹۵)$. **۹۶۲.** تابع فرد و متناوب است با دورهٔ تناوب ۲π.

در فاصلهٔ بستهٔ $[۰, ۲\pi]$: $y_{max}=۱$ به‌ازای $x=۰$؛ $y_{min}=۰/۷۱$ به‌ازای $x=\frac{۵}{۴}\pi$؛

$y_{min}=-۱$ به‌ازای $x=\frac{۳}{۲}\pi$. $y_{max}=۱$ به‌ازای $x=۲\pi$؛ نقطه‌های عطف:

$M_۱(۰/۳۶, ۰/۸۶)$، $M_۲(۱/۲۱, ۰/۸۶)$، $M_۳(۲/۳۶, ۰)$، $M_۴(۳/۵۱, -۰/۸۶)$،

$M_5(4/35, -0/86)$، $M_6(3/50, 0)$. **۹۶۳.** تابع متناوب است با دورهٔ تناوب 2π. $y_{min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$؛ $y_{max} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ به‌ازای $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$؛ مجانب‌ها: $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$. **۹۶۴.** تابع متناوب است با

دورهٔ تناوب π؛ نقطه‌های عطف: $M_k\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$؛

مجانب‌ها: $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$. **۹۶۵.** تابع زوج و متناوب است با دورهٔ تناوب 2π.

در فاصلهٔ بستهٔ $[0, \pi]$: $y_{min} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ به‌ازای $x = arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. $y_{max} = 0$ به‌ازای $x = \pi$؛

$y_{min} = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$ به‌ازای $x = arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$؛ $y_{min} = 0$ به‌ازای $x = 0$. نقطه‌های عطف:

$M_1\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$، $M_2\left(arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{4\sqrt{7}}{27}\right)$، $M_3\left(\pi - arcsin\frac{\sqrt{7}}{3}, -\frac{4\sqrt{7}}{27}\right)$. **۹۶۶.**

تابع زوج و متناوب است با دورهٔ تناوب 2π. در فاصلهٔ بستهٔ $[0, \pi]$: $y_{max} = 1$ به‌ازای

$x = 0$؛ $y_{max} = \frac{2}{3\sqrt{6}}$ به‌ازای $x = arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$، $y_{min} = -\frac{2}{3\sqrt{6}}$ به‌ازای

$x = arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$؛ $y_{min} = -1$ به‌ازای $x = \pi$؛ نقطه‌های عطف: $M_1(\frac{\pi}{2}, 0)$، $\frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}$,

$M_2\left(arccos\sqrt{\frac{13}{18}}\right.$، $M_3\left(arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{18}}\right), -\frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$. **۹۶۷.** تابع

فرد است. نقطه‌های عطف: $M_k(k\pi, k\pi)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. **۹۶۸.** تابع زوج

است. نقطه‌های انتهائی: $A_{1,2}(\pm 2/83, -1/57)$. $y_{max} \approx 1/57$ به‌ازای $x = 0$

(نقطهٔ برگشت)؛ نقطه‌های عطف: $M_{1,2}(\pm 1/54, -0/34)$. **۹۶۹.** تابع فرد است؛

حوزهٔ وجود: $-1 < x < 1$. نقطهٔ عطف $O(0, 0)$؛ مجانب‌ها: $x = \pm 1$. **۹۷۰.** تابع

فرد است. $y_{max} = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$؛ $y_{min} = \frac{3}{2}\pi + 1 + 2k\pi$ به‌ازای

$x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$؛ نقطه‌های عطف: $M_k(k\pi,2k\pi)$، مجانب‌ها: $x=\frac{2k+1}{2}\pi$

مجانب: $x=0$؛ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. **۹۷۱.** تابع زوج است. $y_{min}=0$ به‌ازای $x=0$؛ مجانب:

$y=-\frac{\pi}{2}x-1$ (وقتی‌که $x\to-\infty$) و $y=\frac{\pi}{2}x-1$ (وقتی $x\to+\infty$). **۹۷۲.**

$y_{min}=0$ به‌ازای $x=0$ (نقطهٔ زاویه‌ای)؛ مجانب: $y=1$. **۹۷۳.** $y_{min}=1+\frac{\pi}{2}$ به‌ازای

$x=1$. $y_{max}=\frac{3\pi}{2}-1$ به‌ازای $x=-1$؛ نقطهٔ عطف (مرکز تقارن): $(0,\pi)$ ؛ مجانب‌ها:

$y=x+2\pi$ (چپ) و $y=x$ (راست). **۹۷۴.** $y_{min}\approx1/285$ به‌ازای $x=1$ ؛

$y_{max}\approx1/856$ به‌ازای $x=-1$؛ نقطهٔ عطف: $M(0,\frac{\pi}{2})$؛ مجانب‌ها: $y=\frac{x}{2}+\pi$ (وقتی‌که

$x\to-\infty$) و $y=\frac{x}{2}$ (وقتی‌که $x\to+\infty$). **۹۷۵.** مجانب‌ها: $x=0$ و $y=x-ln2$.

۹۷۶. $y_{min}\approx1/32$ به‌ازای $x=1$؛ مجانب: $x=0$. **۹۷۷.** تابع متناوب است با دورهٔ تناوب 2π. $y_{min}=\frac{1}{e}$ به‌ازای $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$. $y_{max}=e$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$؛ نقطه‌های عطف: $M_k\left(arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi,e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$ و

$N_k\left(-arcsin\frac{\sqrt{5}+1}{2}+(2k+1)\pi,e^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)$. **۹۷۸.** نقطه‌های انتهائی: $A(0,1)$

و $B(1,4/81)$؛ نقطهٔ عطف: $M(0/28,1/74)$. **۹۷۹.** نقطهٔ عطف: $M(0/5,1/59)$؛

مجانب‌ها: $y\approx0/21$ (وقتی‌که $x\to-\infty$) و $y\approx4/81$ (وقتی‌که $x\to+\infty$).

۹۸۰. حوزهٔ تعریف تابع عبارتست از مجموعهٔ فاصله‌های $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ که در آن

$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$؛ تابع متناوب است با تناوب 2π؛ $y_{max}=0$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$؛ مجانب‌ها: $x=k\pi$. **۹۸۱.** حوزهٔ تعریف تابع عبارتست از

مجموعهٔ فاصله‌های $\left((۲k+\frac{۱}{۲})\pi \text{ و } (۲k-۱)\pi\right)$ که در آن k عددی است صحیح. تابع متناوب است با دورهٔ تناوب ۲π. نقطه‌های عطف: $M_k(۲k\pi,۰)$ $(k=۰,\pm۱,\pm۲,\ldots)$ مجانب‌ها: $x=\pm\frac{\pi}{۲}+۲k\pi$. **۹۸۲.** حوزهٔ تعریف تابع $x>۰$. تابع بطوریکنواخت صعودی است. مجانب: $x=۰$. **۹۸۳.** حوزهٔ تعریف تابع $\left|x-۲k\pi\right|<\frac{\pi}{۲}$ $(k=۰,\pm۱,\pm۲,\ldots)$. تابع متناوب است با دورهٔ تناوب ۲π. $y_{min}=۱$ به‌ازای $x=۲k\pi$ $(k=۰,\pm۱,\pm۲,\ldots)$. مجانب‌ها: $x=\frac{\pi}{۲}+k\pi$. **۹۸۴.** مجانب: $y\approx۱/۵۷$. وقتی که $x\to۰$ داریم: $y\to-\frac{\pi}{۲}$ (نقطهٔ انتهائی حدی). **۹۸۵.** نقطه‌های انتهائی: $A_{۱,۲}(\pm۱/۳۱,۱/۵۷)$. $y_{min}=۰$ به‌ازای $x=۰$. **۹۸۶.** $y_{min}=\left(\frac{۱}{e}\right)^{\frac{۱}{e}}\approx۰/۶۹$ به‌ازای $x=\frac{۱}{e}\approx۰/۳۷$. وقتی‌که $x\to+۰$ داریم: $y\to۱$. **۹۸۷.** نقطهٔ حدی انتهائی $A(+۰,۰)$. $y_{max}=e^{\frac{۱}{e}}\approx۱/۴۴$ به‌ازای $x=e\approx۲/۷۲$. مجانب: $y=۱$. نقطه‌های عطف: $M_۱(۰/۵۸,۰/۱۲)$ و $M_۲(۴/۳۵,۱/۴۰)$. **۹۸۸.** $x_{min}=-۱$ به‌ازای $t=۱$ $(y=۳)$. $y_{min}=-۱$ به‌ازای $t=-۱$ $(x=۳)$. **۹۸۹.** برای بدست آوردن منحنی کافی است t را در حدود ۰ تا ۲π تغییر دهیم. $x_{min}=-a$ به‌ازای $t=\pi$ $(y=۰)$. $x_{max}=a$ به‌ازای $t=۰$ $(y=۰)$. $y_{min}=-a$ (نقطهٔ برگشت) به‌ازای $t=+\frac{۳\pi}{۲}$ $(x=۰)$ $y_{max}=+a$ (نقطهٔ برگشت) به‌ازای $t=\frac{\pi}{۲}$ $(x=۰)$. نقطه‌های عطف به‌ازای $t=\frac{\pi}{۴}$، $t=\frac{۳\pi}{۴}$، $t=\frac{۵\pi}{۴}$، $t=\frac{۷\pi}{۴}$ $\left(x=\pm\frac{a}{۲\sqrt{۲}}, y=\pm\frac{a}{\sqrt{۲}}\right)$. **۹۹۰.** $m_{min}=-\frac{۱}{e}$ به‌ازای $t=-۱$ $(y=-e)$؛ $y_{max}=\frac{۱}{e}$ به‌ازای $t=۱$ $(x=e)$؛ نقطه‌های عطف:

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}, -\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}}\right)$ به‌ازای $t=-\sqrt{2}$ و $\left(\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ به‌ازای $t=\sqrt{2}$.

مجانب‌ها: $x=0$ و $y=0$. **۹۹۱.** $x_{min}=1$ و $y_{min}=1$ به‌ازای $t=0$ (نقطهٔ برگشت).

مجانب: $y=2x$ به‌ازای $t\to+\infty$. **۹۹۲.** $y_{min}=0$ به‌ازای $t=0$. **۹۹۳.**

$ds=\frac{a}{y}dx$ ؛ $\cos\alpha=\frac{y}{a}$ ؛ $\sin\alpha=-\frac{x}{a}$. **۹۹۴.** $ds=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-c^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx$ ؛

$\cos\alpha=\frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^4-a^2x^2}}$ ؛ $\sin\alpha=-\frac{bx}{\sqrt{a^2-c^2x^2}}$ که در آن $c=\sqrt{a^2-b^2}$. **۹۹۵.**

$ds=\frac{1}{y}\sqrt{p^2+y^2}\,dx$ ؛ $\cos\alpha=\frac{y}{\sqrt{p^2+y^2}}$ ؛ $\sin\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+y^2}}$. **۹۹۶.**

$ds=\sqrt[3]{\frac{a}{x}}\,dx$ ؛ $\cos\alpha=\sqrt[3]{\frac{x}{a}}$ ؛ $\sin\alpha=-\sqrt[3]{\frac{y}{a}}$. **۹۹۷.** $ds=ch\frac{x}{a}dx$ ؛

$\cos\alpha=\frac{1}{ch\frac{x}{a}}$ ؛ $\sin\alpha=th\frac{x}{a}$. **۹۹۸.** $ds=2a\sin\frac{t}{2}\,dt$ ؛ $\cos\alpha=\sin\frac{t}{2}$ ؛

$\sin\alpha=\cos\frac{t}{2}$. **۹۹۹.** $ds=3a\sin t\cos t\,dt$ ؛ $\cos\alpha=-\cos t$ ؛ $\sin\alpha=\sin t$.

۱۰۰۰. $ds=a\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$ ؛ $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$. **۱۰۰۱.** $ds=\frac{a}{\varphi^2}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$ ؛

$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$. **۱۰۰۲.** $ds=\frac{a}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}d\varphi$ ؛ $\sin\beta=\cos\frac{\varphi}{2}$. **۱۰۰۳.**

$ds=a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$ ؛ $\sin\beta=\cos\frac{\varphi}{2}$. **۱۰۰۴.** $ds=r\sqrt{1+(\ln a)^2}\,d\varphi$ ؛

$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{1+(\ln a)^2}}$. **۱۰۰۵.** $ds=\frac{a^2}{r}d\varphi$ ؛ $\sin\beta=\cos 2\varphi$. **۱۰۰۶.**

$k=36$. **۱۰۰۷.** $k=\frac{1}{3\sqrt{2}}$. **۱۰۰۸.** $K_A=\frac{a}{b^2}$ ؛ $K_B=\frac{b}{a^2}$.

۱۰۰۹. $K=\frac{۶}{۱۳\sqrt{۱۳}}$. ۱۰۱۰. $K=\frac{۳}{a\sqrt{۲}}$ درهردو رأس. ۱۰۱۱. $(\frac{۹}{۸},۳)$ و $(\frac{۹}{۸},-۳)$. ۱۰۱۲. $(-\frac{ln۲}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲})$. ۱۰۱۳. $R=\left|\frac{(۱+۹x^{۴})^{\frac{۳}{۲}}}{۶x}\right|$.

۱۰۱۴. $R=\frac{(b^{۴}x^{۲}+a^{۴}y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{a^{۴}b^{۴}}$. ۱۰۱۵. $R=\frac{(y^{۲}+۱)^{۲}}{۴y}$. ۱۰۱۶. $R=\left|\frac{۳}{۲}a\sin ۲t\right|$. ۱۰۱۷. $R=|at|$. ۱۰۱۸. $R=\left|r\sqrt{۱+k^{۲}}\right|$. ۱۰۱۹. $R=\left|\frac{۴}{۳}a\cos\frac{\varphi}{۲}\right|$. ۱۰۲۰. $R_{\text{حداقل}}=|p|$. ۱۰۲۲. $(۲,۲)$. ۱۰۲۳. $(-\frac{۱۱}{۲}a,\frac{۱۶}{۳}a)$. ۱۰۲۴. $(x-۳)^{۲}+(y-\frac{۳}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۴}$. ۱۰۲۵. $(x+۴)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۸$. ۱۰۲۶. $pY^{۲}=\frac{۸}{۲۷}(X-p)^{۳}$ (سهمی نیم مکعبی).

۱۰۲۷. $(aX)^{\frac{۲}{۳}}+(bY)^{\frac{۲}{۳}}=c^{\frac{۴}{۳}}$ که در آن داریم: $c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}$.

فصل چهارم

در جوابهای این قسمت برای سهولت کار، مقدار ثابت c را ننوشته‌ایم.

۱۰۳۱. $\frac{۵}{۷}a^{۲}x^{۷}$. ۱۰۳۲. $۲x^{۳}+۴x^{۲}+۳x$. ۱۰۳۳. $\frac{x^{۴}}{۴}+\frac{(a+b)x^{۳}}{۳}+\frac{abx^{۲}}{۲}$. ۱۰۳۴. $a^{۲}x+\frac{abx^{۴}}{۲}+\frac{b^{۲}x^{۷}}{۷}$. ۱۰۳۵ $\frac{۲x}{۳}\sqrt{۲px}$.

۱۰۳۶. $\frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}}$ ۱۰۳۷. $\sqrt[n]{nx}$ ۱۰۳۸. $a^2x-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{x^3}{3}$

۱۰۳۹. $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+x$ ۱۰۴۰. $\frac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13}-\frac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7}-6\sqrt[3]{x}$. ۱۰۴۱.

$\frac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1}-\frac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1}+\frac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1}$. ۱۰۴۲.

$2a\sqrt{ax}-4ax+4x\sqrt{ax}-2x^2+\frac{2x^3}{5\sqrt{ax}}$. ۱۰۴۳. $\frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{x}{\sqrt{7}}$.

۱۰۴۴. $\frac{1}{2\sqrt{10}}ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|$. ۱۰۴۵. $ln(x+\sqrt{4+x^2})$. ۱۰۴۶.

$arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}$. ۱۰۴۷. $ln-(x+\sqrt{x^2+2})$ $arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$. ۱۰۴۸. a) $tgx-x$.

راهنمائی. فرض کنید: $tg^2x=sec^2x-1$. b) $x-thx$. راهنمائی. فرض کنید:

$th^2x=1-\frac{1}{ch^2x}$. ۱۰۴۹. a) $-cotgx-x$؛ b) $x-cthx$. ۱۰۵۰.

$\frac{(3e)^x}{ln3+1}$. ۱۰۵۱. $aln\left|\frac{c}{a-x}\right|$. حل. بترتیب داریم:

$$\int\frac{a}{a-x}dx=-a\int\frac{d(a-x)}{a-x}=-aln|a-x|+alnC=aln\left|\frac{C}{a-x}\right|$$

۱۰۵۲. $x+ln|2x+1|$. حل. با تقسیم صورت برمخرج بدست می‌آید:

$\frac{2x+3}{2x+1}=1+\frac{2}{2x+1}$. از آنجا:

$$\int\frac{2x+3}{2x+1}dx=\int dx+\int\frac{2dx}{2x+1}=x+\int\frac{d(2x+1)}{2x+1}=x+ln|2x+1|$$

۱۰۵۳. $-\frac{3}{2}x+\frac{11}{4}ln|3+2x|$. ۱۰۵۴. $\frac{x}{b}-\frac{a}{b^2}ln|a+bx|$. ۱۰۵۵.

$\frac{a}{\alpha}x+\frac{b\alpha-a\beta}{\alpha^2}ln|\alpha x+\beta|$. ۱۰۵۶. $\frac{x^2}{2}+x+2ln|x-1|$.

۱۰۵۷. $\frac{x^2}{2}+2x+ln|x+3|$. ۱۰۵۸. $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2+2x+3ln|x-1|$.

۱۰۵۹. $a^2x+2abln|x-a|-\frac{b^2}{x-a}$. ۱۰۶۰. $ln|x+1|+\frac{1}{x+1}$.

راهنمائی. داریم:

$$\int\frac{x\,dx}{(x+1)^2}=\int\frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}.$$

۱۰۶۱. $-2b\sqrt{1-y}$. ۱۰۶۲. $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-bx)^3}$. ۱۰۶۳. $\sqrt{x^2+1}$.

حل. داریم: $\sqrt{x^2+1}=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$. ۱۰۶۴. $2\sqrt{x}+\frac{\ln^2 x}{2}$.

۱۰۶۵. $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$. ۱۰۶۶. $\frac{1}{4\sqrt{14}}\ln\left|\frac{x\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{x\sqrt{7}+2\sqrt{2}}\right|$.

۱۰۶۷. $\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+b}+x\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-x\sqrt{a-b}}\right|$. ۱۰۶۸. $x-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$.

۱۰۶۹. $-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{2}\ln|a^2-x^2|\right)$. ۱۰۷۰. $x-\frac{5}{2}\ln(x^2+4)+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

۱۰۷۱. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(2\sqrt{2}x+\sqrt{7+8x^2})$. ۱۰۷۲. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{5}{7}}\right)$.

۱۰۷۳. $\frac{1}{3}\ln|3x^2-2|-\frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right|$.

۱۰۷۴. $\frac{3}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{7}}x\right)-\frac{1}{5}\ln(5x^2+7)$.

۱۰۷۵. $\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{5}}\ln(x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2+1})$.

۱۰۷۶. $\sqrt{x^2-4}+3\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|$. ۱۰۷۷. $\frac{1}{2}\ln|x^2-5|$.

۱۰۷۸. $\frac{1}{4}\ln(2x^2+3)$. ۱۰۷۹. $\frac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2)+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{ax}{b}$.

۱۰۸۰. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2}$. ۱۰۸۱. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3$. ۱۰۸۲. $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6-1}\right|$.

۱۰۸۳. $\frac{2}{3}\sqrt{(arcsin x)^3}$. ۱۰۸۴. $\frac{\left(arclg\,\frac{x}{2}\right)^2}{4}$. ۱۰۸۵. $\frac{1}{8}ln(1+4x^2)-\frac{\sqrt{(arctg\,2x)^3}}{3}$. ۱۰۸۶. $2\sqrt{ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

۱۰۸۷. $-\frac{a}{m}e^{-mx}$. ۱۰۸۸. $-\frac{1}{3ln4}4^{2-3x}$. ۱۰۸۹. e^t+e^{-t}.

۱۰۹۰. $\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}$. ۱۰۹۱. $\frac{1}{lna-lnb}\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x$.

۱۰۹۲. $\frac{2}{lna}\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}x}+a^{-\frac{1}{2}x}\right)$. ۱۰۹۳. $-\frac{1}{2e^{x^2+1}}$. ۱۰۹۴. $\frac{1}{2ln7}\,7^{x^2}$. ۱۰۹۵. $-e^{\frac{1}{x}}$. ۱۰۹۶. $\frac{2}{ln5}5^{\sqrt{x}}$. ۱۰۹۷. $ln|e^x-1|$. ۱۰۹۸. $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-be^x)^3}$. ۱۰۹۹. $\frac{3a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+1\right)^{\frac{4}{3}}$.

۱۱۰۰. $\frac{x}{3}-\frac{1}{3ln2}ln(2^x+3)$. راهنمائی. $\frac{1}{2^x+3}\equiv\frac{1}{3}\left(1-\frac{2^x}{2^x+3}\right)$.

۱۱۰۱. $\frac{1}{lna}arctg(a^x)$. ۱۱۰۲. $-\frac{1}{2b}ln\left|\frac{1+e^{-bx}}{1-e^{-bx}}\right|$. ۱۱۰۳. $arcsin\,e^t$.

۱۱۰۴. $-\frac{1}{b}cos(a+bx)$. ۱۱۰۵. $\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$. ۱۱۰۶. $x-\frac{1}{2a}cos\,2ax$.

۱۱۰۷. $2\sin\sqrt{x}$. ۱۱۰۸. $-ln10\,cos(lgx)$. ۱۱۰۹. $\frac{x}{2}-\frac{sin\,2x}{4}$. راهنمائی. فرض کنید: $sin^2x=\frac{1}{2}(1-cos\,2x)$.

۱۱۱۰. $\frac{x}{2}+\frac{sin\,2x}{4}$. راهنمائی. فرض کنید: $cos^2x=\frac{1}{2}(1+cos\,2x)$.

۱۱۱۱. $\frac{1}{a}tg(ax+b)$. ۱۱۱۲. $-\frac{cotg\,ax}{a}-x$.

۱۱۱۳. $a\ln\left|tg\,\frac{x}{2a}\right|$. ۱۱۱۴. $\frac{1}{15}\ln\left|tg\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. ۱۱۱۵.

$\frac{1}{a}\ln\left|tg\,\frac{ax+b}{2}\right|$. ۱۱۱۶. $\frac{1}{2}tg(x^2)$. ۱۱۱۷. $\frac{1}{2}\cos(1-x^2)$.

۱۱۱۸. $\sqrt{2}\ln\left|tg\frac{x\sqrt{2}}{2}\right|$ — $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\,cotg\,x\sqrt{2}-\sqrt{2}\ln\left|tg\frac{x\sqrt{2}}{2}\right|$. ۱۱۱۹. $-\ln|\cos x|$.

۱۱۲۰. $\ln|\sin x|$. ۱۱۲۱. $(a-b)\ln\left|\sin\frac{x}{a-b}\right|$. ۱۱۲۲. $5\ln\sin\left|\frac{x}{5}\right|$.

۱۱۲۳. $-2\ln|\cos\sqrt{x}|$. ۱۱۲۴. $\frac{1}{2}\ln|\sin(x^2+1)|$. ۱۱۲۵. $\ln|tg\,x|$.

۱۱۲۶. $\frac{a}{2}\sin^2\frac{x}{a}$. ۱۱۲۷. $\frac{\sin^4 6x}{24}$. ۱۱۲۸. $-\frac{1}{4a\sin^4 ax}$.

۱۱۲۹. $-\frac{1}{3}\ln(3+\cos 3x)$. ۱۱۳۰. $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}$. ۱۱۳۱.

$-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2x)^3}$. ۱۱۳۲. $\frac{3}{4}tg^4\frac{x}{3}$. ۱۱۳۳. $\frac{2}{3}\sqrt{tg^3x}$.

۱۱۳۴. $-\frac{3\,cotg^{\frac{5}{3}}x}{5}$. ۱۱۳۵. $\frac{1}{3}\left(tg\,3x+\frac{1}{\cos 3x}\right)$. ۱۱۳۶.

$\frac{1}{a}\left(\ln\left|tg\frac{ax}{2}\right|+2\sin ax\right)$. ۱۱۳۷. $\frac{1}{3a}\ln|b-a\,cotg\,3x|$. ۱۱۳۸.

$\frac{2}{5}ch5x-\frac{3}{5}sh5x$. ۱۱۳۹. $-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}sh2x$. ۱۱۴۰. $\ln\left|th\frac{x}{2}\right|$.

۱۱۴۱. $2\,arctg\,e^x$. ۱۱۴۲. $\ln|th\,x|$. ۱۱۴۳. $\ln|ch\,x|$. ۱۱۴۴.

$\ln|sh\,x|$. ۱۱۴۵. $-\frac{5}{12}\sqrt[5]{(5-x^2)^6}$. ۱۱۴۶. $\frac{1}{4}\ln|x^4-4x+1|$.

۱۱۴۷. $\frac{1}{4\sqrt{5}}arctg\frac{x^4}{\sqrt{5}}$. ۱۱۴۸. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. ۱۱۴۹.

$\sqrt{\frac{3}{2}}\,arctg\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(x\sqrt{3}+\sqrt{2+3x^2}\right)$. ۱۱۵۰.

$\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|$.

۱۱۵۱. $-\frac{2}{\sqrt{e^x}}$.

۱۱۵۲. $\ln|x+\cos x|$.

۱۱۵۳. $\frac{1}{3}\left(\ln\left|\sec 3x+tg 3x\right|+\frac{1}{\sin 3x}\right)$.

۱۱۵۴. $\frac{1}{\ln x}$.

۱۱۵۵. $\ln\left|tg x+\sqrt{tg^2 x-2}\right|$.

۱۱۵۶. $\sqrt{2}\, arctg(x\sqrt{2})-\frac{1}{4(2x^2+1)}$.

۱۱۵۷. $\frac{a^{\sin x}}{\ln a}$.

۱۱۵۸. $\frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{2}$.

۱۱۵۹. $\frac{1}{2}\arcsin(x^2)$.

۱۱۶۰. $\frac{1}{a}\, tg\, ax-x$.

۱۱۶۱. $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}$.

۱۱۶۲. $\arcsin\frac{tg x}{2}$.

۱۱۶۳. $a\ln\left|tg\left(\frac{x}{2a}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

۱۱۶۴. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}$.

۱۱۶۵. $-2\ln\left|\cos\sqrt{x-1}\right|$.

۱۱۶۶. $\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x^2}{2}\right|$.

۱۱۶۷. $e^{arctg x}+\frac{\ln^2(1+x^2)}{4}+arctg x$.

۱۱۶۸. $-\ln|\sin x+\cos x|$.

۱۱۶۹. $\sqrt{2}\ln\left|tg\frac{x}{2\sqrt{2}}\right|-2x-\sqrt{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$.

۱۱۷۰. $x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$.

۱۱۷۱. $\ln|x|+2\, arctg x$.

۱۱۷۲. $e^{\sin^2 x}$.

۱۱۷۳. $\frac{5}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{2}+\sqrt{4-3x^2}$.

۱۱۷۴. $x-\ln(1+e^x)$.

۱۱۷۵. $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\, arctg\, x\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.

۱۱۷۶. $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-2})$.

۱۱۷۷. $\frac{1}{a}\ln|tg\, ax|$.

۱۱۷۸. $-\frac{T}{2\pi}\cos(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0)$.

۱۱۷۹. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|$.

۱۱۸۰. $-\frac{\left(\arccos\frac{x}{2}\right)^2}{2}$.

۱۱۸۱. $-e^{-tg x}$.

۱۱۸۲. $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right)$.

۱۱۸۳. $-2\, cotg\, 2x$.

۱۱۸۴. $\frac{(\arcsin x)^2}{2}-\sqrt{1-x^2}$.

۱۱۸۵. $\ln(\sec x+\sqrt{\sec^2 x+1})$.

۱۱۸۶. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\sin 2x}{\sqrt{5}-\sin 2x}\right|$.

۱۱۸۷. $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)$. **راهنمائی.** داریم:

$$\int\frac{dx}{1+cos^2x}=\int\frac{dx}{sin^2x+2cos^2x}=\int\frac{\frac{dx}{cos^2x}}{tg^2x+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right).$$

۱۱۸۸. $\frac{2}{3}\sqrt{[ln(x+\sqrt{1+x^2})]^3}$. **۱۱۸۹.** $\frac{1}{3}sh(x^3+3)$. **۱۱۹۰.** $\frac{1}{ln3}3^{thx}$.

۱۱۹۱. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}arccos\frac{\sqrt{2}}{x}$ به‌ازای $x>\sqrt{2}$؛ b) $-ln(1+e^{-x})$؛ c) $\frac{1}{80}(5x^2-3)^8$؛ d) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}$؛ e) $ln(sinx+\sqrt{1+sin^2x})$.

۱۱۹۲. $\frac{1}{4}\left[\frac{(2x+5)^{12}}{12}-\frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right]$. **۱۱۹۳.** $2(\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2ln|1+\sqrt{x}|)$.

۱۱۹۴. $ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$. **۱۱۹۵.** $2arctg\sqrt{e^x-1}$. **۱۱۹۶.** $lnx-ln2ln|lnx+2ln2|$. **۱۱۹۷.** $\frac{(arcsinx)^3}{3}$.

۱۱۹۸. $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}$. **۱۱۹۹.** $\frac{2}{5}(cos^2x-5)\sqrt{cosx}$.

۱۲۰۰. $ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|$. **راهنمائی.** $x=\frac{1}{t}$ فرض کنید. **۱۲۰۱.** $-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}arcsinx$.

۱۲۰۲. $-\frac{x^2}{3}\sqrt{2-x^2}-\frac{4}{3}\sqrt{2-x^2}$.

۱۲۰۳. $\sqrt{x^2-a^2}-a\,arccos\frac{a}{x}$. **۱۲۰۴.** $arccos\frac{1}{x}$ با شرط $x>0$ و $arccos(-\frac{1}{x})$ با شرط $x<0$*. **راهنمائی.** $x=\frac{1}{t}$ فرض کنید.

---

*) از این به‌بعد، در حالتهای مشابه، گاهی جوابی داده می‌شود که تنها برای قسمتی از حوزهٔ وجود تابع زیر انتگرال مناسب است.

۱۲۰۵. $\sqrt{x^2+1}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$. **۱۲۰۶.** $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}$.

تبصره. بجای تبدیل مثلثاتی، می‌توان ازتبدیل $x=\frac{1}{z}$ استفاده کرد.

۱۲۰۷. $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$. **۱۲۰۸.** $2\arcsin\sqrt{x}$.

۱۲۱۰. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$. **۱۲۱۱.** $x\ln x-x$.

۱۲۱۲. $x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **۱۲۱۳.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

۱۲۱۴. $\sin x-x\cos x$. **۱۲۱۵.** $\frac{x\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}$. **۱۲۱۶.** $-\frac{x+1}{e^x}$.

۱۲۱۷. $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}$. **۱۲۱۸.** $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)$. **حل.** بجای استفاده ازانتگرال گیری جزء به جزء، می‌توان از روش ضرایب نامعین استفاده کرد، یعنی فرض می‌کنیم:

$$\int x^2e^{3x}dx=(Ax^2+Bx+C)e^{3x}$$

که بعداز دیفرانسیل گرفتن از طرفین بدست می‌آید:

$$x^2e^{3x}=(Ax^2+Bx+C)3e^{3x}+(2Ax+B)e^{3x}$$

اگر طرفین را به e^{3x} ساده کنیم و سپس ضریبهای توانهای مساوی x را در دو طرف برابر قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$1=3A,\quad 0=3B+2A,\quad 0=3C+B$$

واز آنجا پیدا می‌شود: $A=\frac{1}{3}$، $B=-\frac{2}{9}$، $C=\frac{2}{27}$. در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$\int P_n(x)e^{ax}dx=Q_n(x)e^{ax}$$

که در آن $p_n(x)$ کثیرالجملهٔ مفروض از درجهٔ n و $Q_n(x)$ کثیرالجمله‌ای از درجهٔ n با ضریبهای نامعین است. **۱۲۱۹.** $-e^{-x}(x^2+5)$. **راهنمائی.** مسئلهٔ ۱۲۱۸ را ببینید.

۱۲۲۰. $-3e^{-\frac{x}{3}}(x^3+9x^2+54x+162)$. **راهنمائی.** مسئلهٔ ۱۲۱۸ را ببینید.

۱۲۲۱. $\frac{\sin 2x}{8}-\frac{x\cos 2x}{4}$.

۱۲۲۲. $\frac{2x+5}{4}\cos 2x+\frac{2x^2+10x+11}{4}\sin 2x$.

راهنمائی. دراین مورد هم می‌توان از روش ضریبهای نامعین استفاده کرد:

$$\int P_n(x)\cos\beta x\,dx = Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x$$

که در آن $P_n(x)$ کثیرالجملهٔ مفروض و از درجهٔ n، $Q_n(x)$ و $R_n(x)$ کثیرالجمله‌هائی از درجهٔ n با ضریبهای نامعین هستند (مسئلهٔ ۱۲۱۸) را ببینید).

۱۲۲۳. $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}$.

۱۲۲۴. $x\ln^2 x-2x\ln x+2x$.

۱۲۲۵. $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}$.

۱۲۲۶. $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}$.

۱۲۲۷. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}$.

۱۲۲۸. $\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$.

۱۲۲۹. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

۱۲۳۰. $-x\operatorname{cotg}x+\ln|\sin x|$.

۱۲۳۱. $-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

۱۲۳۲. $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}$.

۱۲۳۳. $\frac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+(\ln 3)^2}$.

۱۲۳۴. $\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$.

۱۲۳۵. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$.

۱۲۳۶. $\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)$.

۱۲۳۷. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$.

۱۲۳۸. $(\frac{x^3}{3}-x^2+3x)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x$.

۱۲۳۹. $\frac{x^2-1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|-x$.

۱۲۴۰. $-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}$.

۱۲۴۱. $[\ln(\ln x)-1]\ln x$.

۱۲۴۲. $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg}x)^2-x\operatorname{arctg}x+$

۱۲۴۳. $\frac{x^5}{3}\operatorname{arctg}3x-\frac{x^2}{18}+\frac{1}{162}\ln(9x^2+1)$.

$+\frac{۱}{۲}ln(۱+x^۲)$. **۱۲۴۴.** $x(arcsin x)^۲+۲\sqrt{۱-x^۲}arcsin x-۲x$.

۱۲۴۵. $-\frac{arcsin x}{x}+ln\left|\frac{x}{۱+\sqrt{۱-x^۲}}\right|$. **۱۲۴۶.** $-۲\sqrt{۱-x}arcsin\sqrt{x}+۲\sqrt{x}$.

۱۲۴۷. $\frac{xtg۲x}{۲}+\frac{ln|cos۲x|}{۴}-\frac{x^۲}{۲}$. **۱۲۴۸.** $\frac{e^{-x}}{۲}\left(\frac{cos۲x-۲sin۲x}{۵}-۱\right)$. **۱۲۴۹.** $\frac{x}{۲}+\frac{xcos(۲lnx)+۲xsin(۲lnx)}{۱۰}$.

۱۲۵۰. $\frac{۱}{۲}arctgx-\frac{x}{۲(x^۲+۱)}$. **حل.** فرض می‌کنیم: $u=x$ و $dv=\frac{xdx}{(x^۲+۱)^۲}$، بدست می‌آید: $du=dx$ و $v=-\frac{۱}{۲(x^۲+۱)}$. از آنجا خواهیم داشت:

$$\int\frac{x^۲dx}{(x^۲+۱)^۲}=-\frac{x}{۲(x^۲+۱)}+\int\frac{dx}{۲(x^۲+۱)}=-\frac{x}{۲(x^۲+۱)}+$$

$$+\frac{۱}{۲}arctgx+C$$

۱۲۵۱. $\frac{۱}{۲a^۲}\left(\frac{۱}{a}arctg\frac{x}{a}+\frac{x}{x^۲+a^۲}\right)$. **راهنمائی.** از این اتحاد استفاده کنید: $۱\equiv\frac{۱}{a^۲}[(x^۲+a^۲)-x^۲]$.

۱۲۵۲. $\frac{x}{۲}\sqrt{a^۲-x^۲}+\frac{a^۲}{۲}arcsin\frac{x}{a}$. **حل.** فرض می‌کنیم $u=\sqrt{a^۲-x^۲}$ و $dv=dx$؛ از آنجا $du=-\frac{xdx}{\sqrt{a^۲-x^۲}}$ و $v=x$.

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int\sqrt{a^۲-x^۲}\,dx=x\sqrt{a^۲-x^۲}-\int\frac{-x^۲dx}{\sqrt{x^۲-x^۲}}=x\sqrt{a^۲-x^۲}-$$

$$-\int\frac{(a^۲-x^۲)-a^۲}{\sqrt{a^۲-x^۲}}dx=\sqrt{a^۲-x^۲}-\int\sqrt{a^۲-x^۲}\,dx+a^۲\int\frac{dx}{\sqrt{a^۲-x^۲}}$$

بنابراین:

$$2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$$

۱۲۵۳. $\frac{x}{2}\sqrt{A+x^2}+\frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{A+x^2}\right|$. **راهنمائی.** مسئلهٔ ۱۲۵۲ را ببینید.

۱۲۵۴. $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}$. **راهنمائی.** مسئلهٔ ۱۲۵۲ را ببینید.

۱۲۵۵. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$. **۱۲۵۶.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|$. **۱۲۵۷.** $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x-1}{\sqrt{11}}$.

۱۲۵۸. $\frac{1}{2}\ln(x^2-7x+13)+\frac{7}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x-7}{\sqrt3}$. **۱۲۵۹.** $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5)+4\operatorname{arctg}(x-2)$. **۱۲۶۰.** $x-\frac{5}{2}\ln(x^2+3x+4)+\frac{9}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt7}$. **۱۲۶۱.** $x+3\ln(x^2-6x+10)+8\operatorname{arctg}(x-3)$.

۱۲۶۲. $\frac{1}{\sqrt2}\arcsin\frac{4x-3}{5}$. **۱۲۶۳.** $\arcsin(2x-1)$. **۱۲۶۴.** $\ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|$. **۱۲۶۵.** $3\sqrt{x^2-4x+5}$. **۱۲۶۶.** $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt5}$. **۱۲۶۷.** $\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+$

$$+\frac{1}{5\sqrt5}\ln\left(x\sqrt5-\frac{1}{\sqrt5}+\sqrt{5x^2-2x+1}\right)$$

۱۲۶۸. $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|$. **۱۲۶۹.** $-\arcsin\frac{2-x}{x\sqrt5}$.

۱۲۷۰. $\arcsin\frac{2-x}{(1-x)\sqrt2}\ (x>\sqrt2)$. **۱۲۷۱.** $-\arcsin\frac{1}{x+1}$.

۱۲۷۲. $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})$. **۱۲۷۳.**

$\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)$. **۱۲۷۴.** $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2}+$

$+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x+1}{3}$. ۱۲۷۵. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right|$. ۱۲۷۶. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{3-\sin x}{\sqrt{3}}$.

۱۲۷۷. $\ln(e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+e^x+e^{2x}})$. ۱۲۷۸. $-\ln|\cos x+2+$

$+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}\,|$. ۱۲۷۹. $-\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}-2\arcsin\frac{2+\ln x}{\sqrt{5}}$.

۱۲۸۰. $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|\ (a\neq b)$. ۱۲۸۱. $x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|$.

۱۲۸۲. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|$. ۱۲۸۳. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|$

۱۲۸۴. $5x+\ln\left|\frac{x^{\frac{1}{2}}\ (x-4)^{\frac{161}{6}}}{(x-1)^{\frac{7}{3}}}\right|$. ۱۲۸۵. $\frac{1}{1+x}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$.

۱۲۸۶. $\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9}\right|$. ۱۲۸۷. $\frac{x^2}{2}-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}$.

۱۲۸۸. $-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}$. ۱۲۸۹. $\frac{8}{49(x-5)}-\frac{27}{49(x+2)}+\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|$

۱۲۹۰. $-\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2}$. ۱۲۹۱. $x+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|$. ۱۲۹۲.

$x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$. ۱۲۹۳. $\frac{1}{52}\ln|x-3|-\frac{1}{20}\ln|x-1|+$

$+\frac{1}{65}\ln(x^2+4x+5)+\frac{7}{130}\operatorname{arctg}(x+2)$. ۱۲۹۴.

$\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. ۱۲۹۵. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+$

$+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. ۱۲۹۶. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$.

۱۲۹۷. $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\operatorname{arctg} x}{2}$. ۱۲۹۸. $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\operatorname{arctg}(x+1)$

۱۲۹۹. $\ln|x+1|+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{5}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$.

۱۳۰۰. $\frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)}+\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+\frac{15}{2}arctg(x-2)$.

۱۳۰۱. $\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)}-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}arctg\,x$.

۱۳۰۲. $\frac{3}{8}arctg\,x-\frac{x}{4(x^4-1)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

۱۳۰۳. $x-\frac{x-3}{x^2-2x+2}+2\ln(x^2-2x+2)+arctg(x-1)$.

۱۳۰۴. $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\frac{15}{48}arcctg\,x$.

۱۳۰۵. $\frac{1}{21}(8\ln|x^3+8|-\ln|x^3+1|)$.

۱۳۰۶. $\frac{1}{2}\ln|x^4-1|-\frac{1}{4}\ln|x^8+x^4-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x^4+1-\sqrt{5}}{2x^4+1+\sqrt{5}}\right|$.

۱۳۰۷. $-\frac{13}{2(x-4)^2}+\frac{3}{x-4}+2\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|$.

۱۳۰۸. $\frac{1}{3}\left(2\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|-\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^3+1}\right)$.

۱۳۰۹. $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$.

۱۳۱۰. $\ln|x|-\frac{1}{7}\ln|x^7+1|$. **راهنمائی.** فرض کنید. $1=(x^7+1)-x^7$.

۱۳۱۱. $\ln|x|-\frac{1}{5}\ln|x^5+1|+\frac{1}{5(x^5+1)}$.

۱۳۱۲. $\frac{1}{3}arctg(x+1)-\frac{1}{6}arctg\frac{x+1}{2}$.

۱۳۱۳. $-\frac{1}{9(x-1)^9}-\frac{1}{4(x-1)^8}-\frac{1}{7(x-1)^7}$.

۱۳۱۴. $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-arctg\,x$.

۱۳۱۵. $2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right]$.

۱۳۱۶. $\frac{3}{10a^3}\left[2\sqrt[3]{(ax+b)^5}-5b\sqrt[3]{(ax+b)^2}\right]$.

۱۳۱۷. $2arctg\sqrt{x+1}$.

۱۳۱۸. $6\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})$.

۱۳۱۹. $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-3\ln|1+\sqrt[3]{x}|+6arctg\sqrt[6]{x}$

۱۳۲۰. $\ln\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}$.

۱۳۲۱. $2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}$. ۱۳۲۲. $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}$.

۱۳۲۳. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$. ۱۳۲۴.

$\frac{1}{3}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+\frac{z}{z^3-1}$ که در آن $z=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

۱۳۲۵. $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}$. ۱۳۲۶. $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1}-$

$-\frac{1}{8}\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1})$. ۱۳۲۷. $-\frac{8+4x^2+3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}$.

۱۳۲۸. $\left(\frac{5}{16}x-\frac{5}{24}x^3+\frac{1}{6}x^5\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{5}{16}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

۱۳۲۹. $\left(\frac{1}{4x^4}+\frac{3}{8x^2}\right)\sqrt{x^2-1}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x}$. ۱۳۳۰. $-\frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}$

$-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1}$. ۱۳۳۱. $R+\ln|x|+\frac{3}{2}\ln(x-\frac{1}{2}+R)-\ln(1-\frac{x}{2}+R)$، که در آن $R=\sqrt{x^2-x+1}$. ۱۳۳۲. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}$. ۱۳۳۳.

$\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^{-4}+1}$. ۱۳۳۴. $\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$.

۱۳۳۵. $\frac{1}{10}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$، که در آن $z=\sqrt[5]{1+x^5}$.

۱۳۳۶. $-\frac{1}{8}\cdot\frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{\frac{2}{3}}}$. ۱۳۳۷. $2\sqrt[3]{(x^{-\frac{3}{4}}+1)^2}$.

۱۳۳۸. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$. ۱۳۳۹. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x$.

۱۳۴۰. $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x$. ۱۳۴۱. $\frac{1}{4}\cos^8\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos^6\frac{x}{2}$.

۱۳۴۲. $\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln|\sin x|$. ۱۳۴۳. $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$.

۱۳۴۴. $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}$. ۱۳۴۵. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}$. ۱۳۴۶.

$\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{64}\sin 12x-\frac{1}{144}\sin^3 6x$. ۱۳۴۷. $-\operatorname{cotg} x-\frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3}$.

۱۳۴۸. $\operatorname{tg} x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$. ۱۳۴۹. $-\frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3}-\frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5}$.

۱۳۵۰. $\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-2\operatorname{cotg} 2x$. ۱۳۵۱. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+3\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x}-\frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x}$.

۱۳۵۲. $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. ۱۳۵۳. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

۱۳۵۴. $-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. ۱۳۵۵. $\frac{\sin 4x}{16\cos^4 4x}+$

$+\frac{3\sin 4x}{32\cos^2 4x}+\frac{3}{32}\ln\left|\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. ۱۳۵۶. $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x-x$.

۱۳۵۷. $-\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|$. ۱۳۵۸. $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x+\operatorname{cotg} x+x$.

۱۳۵۹. $\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}+\operatorname{tg}^3\frac{x}{3}-3\operatorname{tg}\frac{x}{3}+3\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right|+x$. ۱۳۶۰. $\frac{x^2}{4}-\frac{\sin 2x^2}{8}$.

۱۳۶۱. $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x$. ۱۳۶۲. $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x}-\frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x}$.

۱۳۶۳. $2\sqrt{\operatorname{tg} x}$. ۱۳۶۴. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}$

که در آن $z=\sqrt{tgx}$. ۱۳۶۵. $\frac{\cos 2x}{4}+\frac{\cos 8x}{16}$-. ۱۳۶۶. $\frac{\sin 5x}{10}+\frac{\sin 25x}{50}$-.

۱۳۶۷. $3\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}$. ۱۳۶۸. $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x$. ۱۳۶۹. $\frac{x\cos 2b}{2}+\frac{\sin 2ax}{4a}$.

۱۳۷۰. $\frac{t\cos\varphi}{2}-\frac{\sin(2\omega t+\varphi)}{4\omega}$. ۱۳۷۱. $\frac{\sin 7x}{28}+\frac{\sin 5x}{20}+\frac{\sin x}{2}$.

۱۳۷۲. $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x$. ۱۳۷۳. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|$.

۱۳۷۴. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. ۱۳۷۵. $x-tg\frac{x}{2}$. ۱۳۷۶. $-x+tgx+secx$.

۱۳۷۷. $\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|$. ۱۳۷۸. $arctg(1+tg\frac{x}{2})$. ۱۳۷۹.

$\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|$. **حل.** فرض می‌کنیم:

$$3\sin x+2\cos x\equiv\alpha(2\sin x+3\cos x)+\beta(2\sin x+3\cos x)'$$

از آنجا بدست می‌آید: $2\alpha-3\beta=3$ و $3\alpha+2\beta=2$ وبنابراین:

$$\beta=-\frac{5}{13} \quad \text{و} \quad \alpha=\frac{12}{13}$$

و داریم:

$$\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{12}{13}\int dx-\frac{5}{13}\int\frac{(2\sin x+3\cos x)'}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{12}{13}x-$$

$$-\frac{5}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|$$

۱۳۸۰. $-\ln|\cos x-\sin x|$. ۱۳۸۱. $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{tgx}{2}\right)$. **راهنمائی.** صورت‌ومخرج کسر را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنید. ۱۳۸۲. $\frac{1}{\sqrt{15}}arctg\left(\frac{\sqrt{3}tgx}{\sqrt{5}}\right)$. **راهنمائی.** مسئلهٔ ۱۳۸۱ را

ببینید: ۱۳۸۳. $\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}ln\left|\frac{۲tgx+۳-\sqrt{۱۳}}{۲tgx+۳+\sqrt{۱۳}}\right|$. **راهنمائی.** مسئلهٔ ۱۳۸۱ را ببینید.

۱۳۸۴. $\frac{۱}{۵}ln\left|\frac{tgx-۵}{tgx}\right|$. راهنمائی. مسئلهٔ ۱۳۸۱ را ببینید. ۱۳۸۵. $-\frac{۱}{۲(۱-cosx)^۲}$

۱۳۸۶. $ln(۱+sin^۲x)$. ۱۳۸۷. $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}ln\frac{\sqrt{۲}+sin۲x}{\sqrt{۲}-sin۲x}$.

۱۳۸۸. $\frac{۱}{۴}ln\frac{۵-sinx}{۱-sinx}$. ۱۳۸۹. $\frac{۲}{\sqrt{۲}}arctg\frac{۲tg\frac{x}{۲}-۱}{\sqrt{۳}}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}arctg\frac{۳tg\frac{x}{۲}-۱}{۲\sqrt{۲}}$

راهنمائی. از این اتحاد استفاده کنید:

$$\frac{۱}{(۲-sinx)(۳-sinx)}\equiv\frac{۱}{۲-sinx}-\frac{۱}{۳-sinx}$$

۱۳۹۰. $x+۲ln\frac{tg\frac{x}{۲}}{tg\frac{x}{۲}+۱}$. **راهنمائی.** از این اتحاد استفاده کنید:

$$\frac{۱-sinx+cosx}{۱+sinx-cosx}\equiv-۱+\frac{۲}{۱+sinx-cosx}$$

۱۳۹۱. $\frac{ch^۳x}{۳}-chx$. ۱۳۹۲. $\frac{۳x}{۸}+\frac{ch۲x}{۴}+\frac{ch۴x}{۳۲}$. ۱۳۹۳. $\frac{ch^۴x}{۴}$.

۱۳۹۴. $-\frac{x}{۸}+\frac{sh۴x}{۳۲}$. ۱۳۹۵. $ln\left|th\frac{x}{۲}\right|+\frac{۱}{chx}$. ۱۳۹۶. $-۲coth۲x$.

۱۳۹۷. $ln(chx)-\frac{th^۲x}{۲}$. ۱۳۹۸. $x-cthx-\frac{cth^۳x}{۳}$. ۱۳۹۹. $arctg(thx)$.

۱۴۰۰. $\frac{۲}{\sqrt{۵}}arctg\left(\frac{۳th\frac{x}{۲}+۲}{\sqrt{۲}}\right)$ (یا $\frac{۲}{\sqrt{۵}}arctg(e^x\sqrt{۵})$).

۱۴۰۱. $-\frac{sh^۲x}{۲}-\frac{sh۲x}{۴}-\frac{x}{۲}$. **راهنمائی.** از این اتحاد استفاده کنید:

$$\frac{-۱}{shx-chx}\equiv shx+chx$$

۱۴۰۲. $\frac{۱}{\sqrt{۲}}ln(\sqrt{۲}chx+\sqrt{ch۲x})$. ۱۴۰۳. $\frac{x+۱}{۲}\sqrt{۳-۲x-x^۲}+$

$+۲arccos\frac{x+۱}{۲}$ ۱۴۰۴. $\frac{x}{۲}\sqrt{۲+x^۲}+ln(x+\sqrt{۲+x^۲})$.

۱۴۰۵. $\frac{x}{۲}\sqrt{۹+x^{۲}}-\frac{۹}{۲}\ln\left(x+\sqrt{۹+x^{۲}}\right)$.

۱۴۰۶. $\frac{x-۱}{۲}\sqrt{x^{۲}-۲x+۲}+\frac{۱}{۲}\ln\left(x-۱+\sqrt{x^{۲}-۲x+۲}\right)$.

۱۴۰۷. $\frac{۲x+۱}{۴}\sqrt{x^{۲}+x}-\frac{۱}{۸}\ln\left|۲x+۱+۲\sqrt{x^{۲}+x}\right|$.

۱۴۰۸. $\frac{x}{۲}\sqrt{x^{۲}-۴}-۲\ln\left|x+\sqrt{x^{۲}-۴}\right|$.

۱۴۰۹. $\frac{x-۳}{۲}\sqrt{x^{۲}-۶x-۷}-۸\ln\left|x-۳+\sqrt{x^{۲}-۶x-۷}\right|$.

۱۴۱۰. $\frac{۱}{۶۴}(۲x+۱)(۸x^{۲}+۸x+۱۷)\times\sqrt{x^{۲}+x+۱}+\frac{۲۷}{۱۲۸}\ln\left(۲x+۱+۲\sqrt{x^{۲}+x+۱}\right)$.

۱۴۱۱. $۲\sqrt{\frac{x-۲}{x-۱}}$.

۱۴۱۲. $\frac{x-۱}{۴\sqrt{x^{۲}-۲x+۵}}$.

۱۴۱۳. $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{۲}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$.

۱۴۱۴. $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\ln\left|\frac{\sqrt{۱+x^{۲}}+x\sqrt{۲}}{\sqrt{۱+x^{۲}}-x\sqrt{۲}}\right|$.

۱۴۱۵. $\frac{e^{۲x}}{۲}\left(x^{۴}-۲x^{۳}+۵x^{۲}-۵x+\frac{۷}{۲}\right)$.

۱۴۱۶. $\frac{۱}{۶}\left(x^{۳}+\frac{x^{۲}}{۲}\sin۶x+\frac{x}{۶}\sin۶x-\frac{۱}{۳۶}\sin۶x\right)$.

۱۴۱۷. $-\frac{x\cos۳x}{۶}+\frac{\sin۳x}{۱۸}+\frac{x\cos x}{۲}-\frac{\sin x}{۲}$.

۱۴۱۸. $\frac{e^{۲x}}{۸}\left(۲-\sin۲x-\cos۲x\right)$.

۱۴۱۹. $\frac{e^{x}}{۲}\left(\frac{۲\sin۲x+\cos۲x}{۵}-\frac{۴\sin۴x+\cos۴x}{۱۷}\right)$

۱۴۲۰. $\frac{e^{x}}{۲}\left[x(\sin x+\cos x)-\sin x\right]$.

۱۴۲۱. $-\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۳}\ln\left(e^{x}-۱\right)+\frac{۱}{۶}\ln\left(e^{x}+۲\right)$.

۱۴۲۲. $x-\ln\left(۲+e^{x}+۲\sqrt{e^{۲x}+x+۱}\right)$.

۱۴۲۳. $\frac{۱}{۳}\left[x^{۳}\ln\frac{۱+x}{۱-x}+\ln(۱-x^{۲})+x^{۲}\right]$.

.۱۴۲۴ $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$.

.۱۴۲۵ $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{9}{100}\right)\arccos(5x-2)-\frac{5x+6}{100}\sqrt{20x-25x^2-3}$.

.۱۴۲۶ $\frac{\sin x\,\mathrm{ch}x-\cos x\,\mathrm{sh}x}{2}$.

.۱۴۲۷ $I_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right]$؛ $I^2=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]$؛ $I_3=\frac{1}{4a^2}\left[\frac{x(3x^2+5a^2)}{2a^2(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{3a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]$.

.۱۴۲۸ $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$؛ $I_4=\frac{3x}{8}-\frac{\cos x\cdot\sin^3x}{4}-\frac{3\sin 2x}{16}$؛ $I_5=-\frac{\cos x\sin^4x}{5}-\frac{4}{15}\cos x\sin^2x-\frac{8}{15}\cos x$.

.۱۴۲۹ $I_n=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$؛ $I_3=\frac{\sin x}{2\cos^2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$؛ $I_4=\frac{\sin x}{3\cos^3x}+\frac{2}{3}\operatorname{tg}x$.

.۱۴۳۰ $I_n=-x^ne^{-x}+nI_{n-1}$؛ $I_{10}=-e^{-x}(x^{10}+10x^9+10\cdot9x^8+\dots+10\cdot9\cdot8\cdots2x+10\cdot9\cdots1)$.

.۱۴۳۱ $\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{7}}$.

.۱۴۳۲ $\ln\sqrt{x^2-2x+2}-4\operatorname{arctg}(x-1)$.

.۱۴۳۳ $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+1)$.

.۱۴۳۴ $\frac{1}{5}\ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2+5}}$.

.۱۴۳۵ $2\ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right|-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$.

.۱۴۳۶ $\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right|-\frac{1}{x+1}\right)$.

.۱۴۳۷ $\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

.۱۴۳۸ $\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{1-x^2}+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)$.

۱۴۳۹. $\frac{۱}{۶}\cdot\frac{x-۲}{(x^۲-x+۱)^۲}+\frac{۱}{۶}\cdot\frac{۲x-۱}{x^۲-x+۱}+\frac{۲}{۳\sqrt{۳}}\,arctg\frac{۲x-۱}{\sqrt{۳}}$.

۱۴۴۰. $\frac{x(۳+۲\sqrt{x})}{۱-۲\sqrt{x}}$. ۱۴۴۱. $-\frac{۱}{x}-\frac{۴}{۳x\sqrt{x}}-\frac{۱}{۲x^۲}$.

۱۴۴۲. $ln(x+\frac{۱}{۲}+\sqrt{x^۲+x+۱})$. ۱۴۴۳. $\sqrt{۲x}-\frac{۳}{۵}\sqrt[۶]{(۲x)^۵}$.

۱۴۴۴. $-\frac{۳}{\sqrt[۳]{x}+۱}$. ۱۴۴۵. $\frac{۲x-۱}{\sqrt{۴x^۲-۲x+۱}}$.

۱۴۴۶. $-۲(\sqrt[۴]{۵-x}-۱)^۲-۴ln\,(۱+\sqrt[۴]{۵-x})$.

۱۴۴۷. $ln\left|x+\sqrt{x^۲-۱}\right|-\frac{x}{\sqrt{x^۲-۱}}$. ۱۴۴۸. $-\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}}$.

۱۴۴۹. $\frac{۱}{۲}arcsin\frac{x^۲+۱}{\sqrt{۲}}$. ۱۴۵۰. $\frac{x-۱}{\sqrt{x^۲+۱}}$.

۱۴۵۱. $\frac{۱}{۸}ln\left|\frac{\sqrt{۴-x^۲}-۲}{x}\right|-\frac{۱}{۸\sqrt{۳}}arcsin\frac{۲(x+۱)}{x+۴}$. راهنمائی. $\frac{۱}{x^۲+۴x}=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+۴}\right)$.

۱۴۵۲. $\frac{x}{۲}\sqrt{x^۲-۹}-\frac{۹}{۲}ln\left|x+\sqrt{x^۲-۹}\right|$.

۱۴۵۳. $\frac{۱}{۱۶}(۸x-۱)\sqrt{x-۴x^۲}+\frac{۱}{۶۴}arcsin(۸x-۱)$.

۱۴۵۴. $ln\left|\frac{x}{x+۲+۲\sqrt{x^۲+x+۱}}\right|$. ۱۴۵۵. $\frac{(x^۲+۲x+۲)\sqrt{x^۲+۲x+۲}}{۳}-\frac{(x+۱)}{۲}\sqrt{x^۲+۲x+۲}-\frac{۱}{۲}ln(x+۱+\sqrt{x^۲+۲x+۲})$

۱۴۵۶. $\frac{\sqrt{x^۲-۱}}{x}-\frac{\sqrt{(x^۲-۱)^۳}}{۳x^۳}$. ۱۴۵۷. $\frac{۱}{۳}ln\left|\frac{\sqrt{۱-x^۳}-۱}{\sqrt{۱-x^۳}+۱}\right|$.

۱۴۵۸. $-\frac{۱}{۳}ln|z-۱|+\frac{۱}{۶}ln\,(z^۲+z+۱)-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\,arctg\frac{۲z+۱}{\sqrt{۳}}$، که در آن $z=\frac{\sqrt[۳]{۱+x^۳}}{x}$.

۱۴۵۹. $\frac{۵}{۲}\,ln(x^۲+\sqrt{۱+x^۴})$. ۱۴۶۰. $\frac{۳x}{۸}+\frac{\sin ۲x}{۴}+\frac{\sin ۴x}{۳۲}$.

۱۴۶۱. $\ln|tgx| - cotg^2 x - \frac{1}{4}cotg^4 x$.

۱۴۶۲. $-cotgx - \frac{2\sqrt{(cotgx)^3}}{3}$.

۱۴۶۳. $\frac{5}{12}(\cos^2 x - 6)\sqrt[5]{\cos^2 x}$.

۱۴۶۴. $-\frac{\cos 5x}{20\sin^4 5x} - \frac{3\cos 5x}{40\sin^2 5x} + \frac{3}{40}\ln\left|tg\frac{5x}{2}\right|$.

۱۴۶۵. $\frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5}$.

۱۴۶۶. $\frac{1}{4}\sin 2x$.

۱۴۶۷. $tg^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + 2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

۱۴۶۸. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\, arctg\frac{4tg\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$.

۱۴۶۹. $\frac{1}{\sqrt{10}}\, arctg\left(\frac{2tgx}{\sqrt{10}}\right)$.

۱۴۷۰. $arctg(2tgx+1)$.

۱۴۷۱. $\frac{1}{2}\ln|tgx+secx| - \frac{1}{2}cosecx$.

۱۴۷۲. $\frac{2}{\sqrt{3}}\, arctg\left(\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\, arctg\left(\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)$.

۱۴۷۳. $\ln\left|tgx+2+\sqrt{tg^2 x+4tgx+1}\right|$.

۱۴۷۴. $\frac{1}{a}\ln(\sin ax+\sqrt{a^2+\sin^2 ax})$.

۱۴۷۵. $\frac{1}{3}xtg3x + \frac{1}{9}\ln|\cos 3x|$.

۱۴۷۶. $\frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}$.

۱۴۷۷. $\frac{1}{3}e^{x^3}$.

۱۴۷۸. $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)$.

۱۴۷۹. $\frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x} - \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{6}$.

۱۴۸۰. $\sqrt{1+x^2}\, arctgx - \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

۱۴۸۱. $\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{2} - \frac{1}{10}\sin\frac{5x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$.

۱۴۸۲. $-\frac{1}{1+tgx}$.

۱۴۸۳. $\ln|1+cotgx| - cotgx$.

۱۴۸۴. $\frac{sh^2 x}{2}$.

۱۴۸۵. $-2ch\sqrt{1-x}$.

۱۴۸۶. $\frac{1}{4}\ln ch2x$.

۱۴۸۷. $-xcotgx+\ln|shx|$.

۱۴۸۸. $-\frac{۱}{۲e^x}-\frac{x}{۴}+\frac{۱}{۴}\ln|e^x-۲|$. **۱۴۸۹.** $\frac{۱}{۲}\operatorname{arctg}\frac{e^x-۳}{۲}$.

۱۴۹۰. $\frac{۴}{۷}\sqrt[۴]{(e^x+۱)^۷}-\frac{۴}{۳}\sqrt[۴]{(e^x+۱)^۳}$. **۱۴۹۱.** $\frac{۱}{\ln ۴}\ln\frac{۱+۲^x}{۱-۲^x}$.

۱۴۹۲. $-\frac{۱۰^{-۲x}}{۲\ln ۱۰}\left(x^۲-۱+\frac{x}{\ln ۱۰}+\frac{۱}{۲\ln^۲ ۱۰}\right)$.

۱۴۹۳. $۲\sqrt{e^x+۱}+\ln\frac{\sqrt{e^x+۱}+۱}{\sqrt{e^x+۱}-۱}$. **۱۴۹۴.** $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}\right|-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$.

۱۴۹۵. $\frac{۱}{۴}\left(x^۴\arcsin\frac{۱}{x}+\frac{x^۲+۲}{۳}\sqrt{x^۲-۱}\right)$. **۱۴۹۶.** $\frac{x}{۲}(\cos\ln x+\sin\ln x)$.

۱۴۹۷. $\frac{۱}{۵}\left(-x^۲\cos ۵x+\frac{۲}{۵}x\sin ۵x+۳x\cos ۵x+\frac{۲}{۲۵}\cos ۵x-\frac{۳}{۵}\sin ۵x\right)$.

۱۴۹۸. $\frac{۱}{۲}\left[(x^۲-۲)\operatorname{arctg}(۲x+۳)+\frac{۳}{۴}\ln(۲x^۲+۶x+۵)-\frac{x}{۲}\right]$.

۱۴۹۹. $\frac{۱}{۲}\sqrt{x-x^۲}+\left(x-\frac{۱}{۲}\right)\arcsin\sqrt{x}$. **۱۵۰۰.** $\frac{x|x|}{۲}$.

فصل پنجم

۱۵۰۱. $b-a$. **۱۵۰۲.** $v_۰T-g\frac{T^۲}{۲}$. **۱۵۰۳.** ۳. **۱۵۰۴.** $\frac{۲^{۱۰}-۱}{\ln ۲}$.

۱۵۰۵. ۱۶۵. **راهنمائی.** پاره خط محور OX را از $x=۱$ تا $x=۵$ چنان تقسیم کنید که طولهای نقطه‌های تقسیم تشکیل تصاعد هندسی بدهند:

$$x_۰=۱, x_۱=x_۰q, x_۲=x_۰q^۲, \cdots, x_n=x_۰q^n$$

۱۵۰۶. $\ln\frac{b}{a}$. **راهنمائی.** مسئلهٔ ۱۵۰۵ را ببینید. **۱۵۰۷.** $۱-\cos x$.

راهنمائی. صحت این اتحاد را تحقیق کنید:

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]$$

۱۵۰۸. ۱) $\frac{dI}{da}=-\frac{1}{\ln a}$، ۲) $\frac{dI}{db}=\frac{1}{\ln b}$. **۱۵۰۹.** $\ln x$.

۱۵۱۰. $-\sqrt{1+x^4}$. **۱۵۱۱.** $2xe^{-x^4}-e^{-x^2}$. **۱۵۱۲.** $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$.

۱۵۱۳. $x=n\pi$ $(n=1,2,3,\dots)$. **۱۵۱۴.** $\ln 2$. **۱۵۱۵.** $-\frac{3}{8}$.

۱۵۱۶. $e^x-e^{-x}=2\,sh\,x$. **۱۵۱۷.** $\sin x$. **۱۵۱۸.** $\frac{1}{2}$. **حل.** مجموع

$$S_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)$$

را می‌توان به‌عنوان انتگرال تابع $f(x)=x$ در فاصلهٔ بستهٔ $[0,1]$ درنظر گرفت به‌این‌ترتیب خواهیم داشت: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$. **۱۵۱۹.** $\ln 2$. **حل.** مجموع

$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{n}\quad\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}$$

رامی‌توان به‌عنوان انتگرال تابع $f(x)=\frac{1}{1+x}$ در فاصلهٔ بستهٔ $[0,1]$ درنظر گرفت، که درآن نقطه‌های تقسیم به‌صورت $x_k=1+\frac{k}{n}$ $(k=1,2,\dots,n)$ هستند : به‌این‌ترتیب خواهیم‌داشت: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$. **۱۵۲۰.** $\frac{1}{p+1}$. **۱۵۲۱.** $\frac{7}{3}$.

۱۵۲۲. $\frac{۱۰۰}{۳}=۳۳\frac{۱}{۳}$. **۱۵۲۳.** $\frac{۷}{۴}$. **۱۵۲۴.** $\frac{۱۶}{۳}$. **۱۵۲۵.** $-\frac{۲}{۳}$.

۱۵۲۶. $\frac{۱}{۲}\ln\frac{۲}{۳}$. **۱۵۲۷.** $\ln\frac{۹}{۸}$. **۱۵۲۸.** $۳۵\frac{۱}{۱۵}-۳۲\ln ۳$.

۱۵۲۹. $arctg\,۳-arctg\,۲=arctg\frac{۱}{۷}$. **۱۵۳۰.** $\ln\frac{۴}{۳}$. **۱۵۳۱.** $\frac{\pi}{۱۶}$.

۱۵۳۲. $۱-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$. **۱۵۳۳.** $\frac{\pi}{۴}$. **۱۵۳۴.** $\frac{\pi}{۶}$. **۱۵۳۵.** $\frac{۱}{۳}\ln\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$.

۱۵۳۶. $\frac{\pi}{۸}+\frac{۱}{۴}$. **۱۵۳۷.** $\frac{۲}{۳}$. **۱۵۳۸.** $\ln ۲$. **۱۵۳۹.** $۱-\cos ۱$.

۱۵۴۰. ۰. **۱۵۴۱.** $\frac{۸}{۹\sqrt{۳}}+\frac{\pi}{۶}$. **۱۵۴۲.** $arctg\,e-\frac{\pi}{۴}$.

۱۵۴۳. $sh\,۱=\frac{۱}{۲}\left(e-\frac{۱}{e}\right)$. **۱۵۴۴.** $th(\ln ۳)-th(\ln ۲)=\frac{۱}{۵}$.

۱۵۴۵. $-\frac{\pi}{۲}+\frac{۱}{۴}sh\,۲\pi$. **۱۵۴۶.** ۲. **۱۵۴۷.** متباعد است. **۱۵۴۸.** باشرط $p<۱$: $\frac{۱}{۱-p}$؛ با شرط $p\geqslant ۱$ متباعداست. **۱۵۴۹.** متباعداست. **۱۵۵۰.** $\frac{\pi}{۲}$.

۱۵۵۱. متباعداست. **۱۵۵۲.** ۱. **۱۵۵۳.** با شرط $p>۱$: $\frac{۱}{p-۱}$؛ با شرط $p\leqslant ۱$ متباعد است. **۱۵۵۴.** π. **۱۵۵۵.** $\frac{\pi}{\sqrt{۵}}$. **۱۵۵۶.** متباعداست.

۱۵۵۷. متباعداست. **۱۵۵۸.** $\frac{۱}{\ln ۲}$. **۱۵۵۹.** متباعداست. **۱۵۶۰.** $\frac{۱}{\ln a}$.

۱۵۶۱. متباعداست. **۱۵۶۲.** $\frac{۱}{k}$. **۱۵۶۳.** $\frac{\pi^{۲}}{۸}$. **۱۵۶۴.** $\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}\ln ۳$.

۱۵۶۵. $\frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}$. **۱۵۶۶.** متباعداست. **۱۵۶۷.** متقارب است. **۱۵۶۸.** متباعد است. **۱۵۶۹.** متقارب است. **۱۵۷۰.** متقارب است. **۱۵۷۱.** متقارب است.

۱۵۷۲. متباعداست. **۱۵۷۳.** متقارب است. **۱۵۷۴.** **راهنمائی.**

$$B(p,q)=\int_{\circ}^{\frac{۱}{۲}} f(x)dx+\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} f(x)dx$$

که در آن $f(x)=x^{p-۱}(۱-x)^{q-۱}$ ؛ چون $\lim\limits_{x\to\circ} f(x)x^{۱-p}=۱$ و $\lim\limits_{x\to۱}(۱-x)^{۱-q} f(x)=۱$، بنابراین هردوانتگرال به‌ازای $۱-p<۱$ و $۱-q<۱$ یعنی $p>\circ$ و $q>\circ$ متقاربند.

۱۵۷۵. **راهنمائی.** $\Gamma(p)=\int_{\circ}^{۱} f(x)dx+\int_{۱}^{\infty} f(x)dx$

که در آن $f(x)=x^{p-۱}.e^{-x}$. انتگرال اول به‌ازای $p>\circ$ و انتگرال دوم به‌ازای هر مقدار دلخواه p متقارب است. **۱۵۷۶.** نه. **۱۵۷۷.** $۲\sqrt{۲}\int_{۱}^{۲}\sqrt{t}\cdot dt$.

۱۵۷۸. $\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dt}{\sqrt{۱+\sin^{۲}t}}$. **۱۵۷۹.** $\int_{\ln ۲}^{\ln ۳} dt$. **۱۵۸۰.** $\int_{\circ}^{\infty}\frac{f(arctgt)}{۱+t۲}dt$.

۱۵۸۱. $x=(b-a)t+a$. **۱۵۸۲.** $۴-۲\ln ۳$. **۱۵۸۳.** $۸-\frac{۹}{۲\sqrt{۳}}\pi$.

۱۵۸۴. $۲-\frac{\pi}{۲}$. **۱۵۸۵.** $\frac{\pi}{\sqrt{۵}}$. **۱۵۸۶.** $\frac{\pi}{۲\sqrt{۱+a^{۲}}}$.

۱۵۸۷. $۱-\frac{\pi}{۴}$. **۱۵۸۸.** $\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳}$. **۱۵۸۹.** $۴-\pi$. **۱۵۹۰.** $\frac{۱}{۵}\ln ۱۱۲$.

۱۵۹۱. $\ln\frac{۷+۲\sqrt{۷}}{۹}$. **۱۵۹۲.** $\frac{۱}{۲}+\frac{\pi}{۴}$. **۱۵۹۳.** $\frac{\pi a^{۲}}{۸}$. **۱۵۹۴.** $\frac{\pi}{۲}$.

۱۵۹۹. $\frac{\pi}{۲}-۱$. **۱۶۰۰.** ۱. **۱۶۰۱.** $\frac{e^{۲}+۳}{۸}$. **۱۶۰۲.** $\frac{۱}{۲}(e^{\pi}+۱)$.

۱۶۰۳. ۱. ۱۶۰۴. $\frac{a}{a^2+b^2}$. ۱۶۰۵. $\frac{b}{a^2+b^2}$. ۱۶۰۶. حل.

$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty x^p e^{-x}dx$. از رابطهٔ انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم: $x^p=u$ ، $e^{-x}dx=dv$. ازآنجا:

$$du=px^{p-1}dx \ , \ v=-e^{-x}$$

$$\Gamma(p+1)=[-x^p e^{-x}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx=p\Gamma(p) \qquad (*)$$

اگر p عددی طبیعی‌باشد، رابطهٔ $(*)$ را p مرتبه بکار می‌بریم و درنظر می‌گیریم:

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$$

در اینصورت بدست می‌آید:

$$\Gamma(p+1)=p!$$

۱۶۰۷. $I_{2k}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2k}\cdot\frac{\pi}{2}$، بشرطی‌که $n=2k$ عددی زوج باشد.

$I_{2k+1}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2k}{1\cdot3\cdot5\cdots(2k+1)}$ بشرطی که $n=2k+1$ عددی فردباشد

$$I_9=\frac{128}{315} \ , \ I_{10}=\frac{63\pi}{512}$$

۱۶۰۸. $\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$. ۱۶۰۹. $\frac{1}{2}B(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2})$. راهنمائی. $\sin^2x=t$ فرض کنید. ۱۶۱۰. a) مثبت، b) منفی، c) مثبت: **راهنمائی.** منحنی تابع زیر انتگرال را در فاصلهٔ انتگرال‌گیری رسم کنید. ۱۶۱۱. a) انتگرال اول، b) انتگرال دوم، c) انتگرال سوم. ۱۶۱۲. $\frac{1}{3}$. ۱۶۱۳. a. ۱۶۱۴. $\frac{1}{2}$.

۱۶۱۵. $\frac{۳}{۸}$. ۱۶۱۶. $۲\arcsin\frac{۱}{۳}$. ۱۶۱۷. $۲<I<\sqrt{۵}$.

۱۶۱۸. $\frac{۲}{۹}<I<\frac{۲}{۷}$. ۱۶۱۹. $\frac{۲}{۱۳}\pi<I<\frac{۲}{۷}\pi$. ۱۶۲۰. $۰<I<\frac{\pi^{۲}}{۳۲}$.

راهنمائی. تابع زیر علامت انتگرال بطور یکنوا صعودی است.

۱۶۲۱. $\frac{۱}{۲}<I<\frac{\sqrt{۲}}{۲}$. ۱۶۲۳. $s=\frac{۳۲}{۳}$. ۱۶۲۴. ۱. ۱۶۲۵. $\frac{۱}{۲}$.

راهنمائی. از علامت تابع صرفنظر کنید. ۱۶۲۶. $۴\frac{۱}{۴}$. ۱۶۲۷. ۲. ۱۶۲۸. $\ln ۲$.

۱۶۲۹. $m^{۲}\ln ۳$. ۱۶۳۰. $\pi a^{۲}$. ۱۶۳۱. ۱۲. ۱۶۳۲. $\frac{۴}{۳}p^{۲}$.

۱۶۳۳. $۴\frac{۱}{۲}$. ۱۶۳۴. $۱۰\frac{۲}{۳}$. ۱۶۳۵. ۴. ۱۶۳۶. $\frac{۳۲}{۳}$.

۱۶۳۷. $\frac{\pi}{۲}-\frac{۱}{۳}$. ۱۶۳۸. $e+\frac{۱}{e}-۲=۲(ch۱-۱)$.

۱۶۳۹. $ab[۲\sqrt{۳}-\ln(۲+\sqrt{۳})]$. ۱۶۴۰. $\frac{۳}{۸}\pi a^{۲}$. **راهنمائی.** ضمیمهٔ VI شکل ۲۷ را ببینید. ۱۶۴۱. $۲a^{۲}e^{-۱}$. ۱۶۴۲. $\frac{۴}{۳}a^{۲}$. ۱۶۴۳. ۱۵π.

۱۶۴۴. $\frac{۹}{۲}\ln ۳$. ۱۶۴۵. ۱. ۱۶۴۶. $۳\pi a^{۲}$. **راهنمائی.** ضمیمهٔ VI شکل ۲۳ را ببینید. ۱۶۴۷. $a^{۲}\left(۲+\frac{\pi}{۲}\right)$. **راهنمائی.** ضمیمهٔ VI شکل ۲۴ را ببینید.

۱۶۴۸. $۲\pi+\frac{۴}{۳}$ و $۶\pi-\frac{۴}{۳}$. ۱۶۴۹. $\frac{۱۶}{۳}\pi-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ و $\frac{۳۲}{۳}\pi+\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$.

۱۶۵۰. $\frac{۳}{۸}\pi ab$. ۱۶۵۱. $۳\pi a^{۲}$. ۱۶۵۲. $\pi(b^{۲}+۲ab)$.

۱۶۵۳. $۶\pi a^{۲}$. ۱۶۵۴. $\frac{۳}{۲}a^{۲}$. **راهنمائی.** برای پیچ، پارامتر t در حدود $۰\leqslant t\leqslant +\infty$ تغییر می‌کند. ضمیمهٔ VI شکل ۲۲ را ببینید.

۱۶۵۵. $\frac{3}{2}\pi a^2$. **راهنمائی.** ضمیمهٔ VI شکل ۲۸ را ببینید. **۱۶۵۶.** $8\pi^3 a^2$.
راهنمائی. ضمیمهٔ VI شکل ۳۰ را ببینید. **۱۶۵۷.** $\frac{\pi a^2}{8}$. **۱۶۵۸.** a^2.

۱۶۵۹. $\frac{\pi a^2}{4}$. **راهنمائی.** ضمیمهٔ VI شکل ۳۳ را ببینید. **۱۶۶۰.** $\frac{9}{2}\pi$.

۱۶۶۱. $\frac{14-8\sqrt{2}}{3}a^2$. **۱۶۶۲.** $\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$. **۱۶۶۳.** $a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

۱۶۶۴. $\pi\sqrt{2}$. **راهنمائی.** به‌مختصات قطبی ببرید. **۱۶۶۵.** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$.

۱۶۶۶. $\sqrt{h^2-a^2}$. **راهنمائی.** از رابطهٔ $ch^2x-sh^2x=1$ استفاده کنید.

۱۶۶۷. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.

۱۶۶۸. $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{1+e^2}-1)(\sqrt{2}+1)}{e}$. **۱۶۶۹.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

۱۶۷۰. $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$. **۱۶۷۱.** $\ln(2+\sqrt{3})$. **۱۶۷۲.** $\frac{1}{4}(e^2+1)$.

۱۶۷۳. $a\ln\frac{a}{b}$. **۱۶۷۴.** $2a\sqrt{3}$. **۱۶۷۵.** $\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}+a-b=\ln\frac{shb}{sha}$.

۱۶۷۶. $\frac{1}{2}aT^2$. **راهنمائی.** ضمیمهٔ VI شکل ۲۹ را ببینید. **۱۶۷۷.** $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$.

۱۶۷۸. $16a$. **۱۶۷۹.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2n+\sqrt{1+4\pi^2})$.

۱۶۸۰. $8a$. **۱۶۸۱.** $2a[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$.

۱۶۸۲. $\frac{\sqrt{5}}{2}+\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **۱۶۸۳.** $\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}$.

۱۶۸۴. $\frac{1}{2}(4+\ln 3)$. **۱۶۸۵.** $\frac{\pi a^5}{30}$. **۱۶۸۶.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

۱۶۸۷. $\frac{a^2\pi}{4}(e^2+4-e^{-2})$. ۱۶۸۸. $\frac{3}{8}\pi^2$. ۱۶۸۹. $v_x=\frac{\pi}{4}$.

۱۶۹۰. $v_y=\frac{4}{7}\pi$. ۱۶۹۱. $v_x=\frac{\pi}{2}$، $v_y=2\pi$. ۱۶۹۲. $\frac{16\pi a^3}{5}$.

۱۶۹۳. $\frac{32}{15}\pi a^3$. ۱۶۹۴. $\frac{4}{3}\pi p^3$. ۱۶۹۵. $\frac{3}{10}\pi$. ۱۶۹۶. $\frac{\pi a^3}{2}(15-16\ln 2)$.

۱۶۹۷. $2\pi^2 a^3$. ۱۶۹۸. $\frac{\pi R^2 H}{2}$. ۱۶۹۹. $\frac{16}{15}\pi h^2 a$.

۱۷۰۱. a) $5\pi^2 a^3$: b) $6\pi^3 a^3$؛ c) $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2-16)$. ۱۷۰۲. $\frac{32}{195}\pi a^3$.

۱۷۰۳. $\frac{8}{3}\pi a^3$. ۱۷۰۴. $\frac{4}{21}\pi a^3$. ۱۷۰۵. $\frac{h}{3}\left(AB+\frac{Ab+aB}{2}+ab\right)$.

۱۷۰۶. $\frac{\pi abh}{6}$. ۱۷۰۷. $\frac{128}{105}a^3$. ۱۷۰۸. $\frac{8}{3}\pi a^2 b$. ۱۷۰۹. $\frac{1}{2}\pi a^2 h$.

۱۷۱۰. $\frac{16}{3}a^3$. ۱۷۱۱. $\pi a^2\sqrt{pq}$. ۱۷۱۲. $\pi abh\left(1+\frac{h^2}{3c^2}\right)$.

۱۷۱۳. $\frac{4}{3}\pi abc$. ۱۷۱۴. $\frac{8\pi}{3}(\sqrt{17^3}-1)$؛ $\frac{16}{3}\pi a^2(5\sqrt{5}-8)$.

۱۷۱۵. $2\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$. ۱۷۱۶. $\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\pi\ln\frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1}$.

۱۷۱۷. $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. ۱۷۱۸. $\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)=\frac{\pi a^2}{2}(2+\operatorname{sh}2)$.

۱۷۱۹. $\frac{12}{5}\pi a^2$. ۱۷۲۰. $\frac{\pi}{3}(e-1)(e^2+e+4)$. ۱۷۲۱. $4\pi^2 ab$.

راهنمائی. در اینجا $y=b\pm\sqrt{a^2-x^2}$. با انتخاب علامت مثبت سطح خارجی چنبره و با علامت منفی سطح داخلی آن بدست می‌آید.

۱۷۲۲. ۱) $2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon$ ؛ ۲) $2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$، که در آنها $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ (خروج از مرکز بیضی). **۱۷۲۳.** a) $\frac{64\pi a^2}{3}$؛ b) $16\pi^2 a^2$؛

c) $\frac{۳۲}{۳}\pi a^{۲}$. **۱۷۲۴.** $\frac{۱۲۸}{۵}\pi a^{۲}$. **۱۷۲۵.** $۲\pi a^{۲}(۲-\sqrt{۲})$.

۱۷۲۶. $\frac{۱۲۸}{۵}\pi a^{۲}$. **۱۷۲۷.** $M_X=\frac{b}{a}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$ ؛ $M_Y=\frac{a}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$.

۱۷۲۸. $M_a=\frac{ab^{۲}}{۲}$ ؛ $M_b=\frac{a^{۲}b}{۲}$. **۱۷۲۹.** $M_X=M_Y=\frac{a^{۳}}{۶}$ ؛ $\bar{x}=\bar{y}=\frac{a}{۳}$.

۱۷۳۰. $M_X=M_Y=\frac{۳}{۵}a^{۲}$ ؛ $\bar{x}=\bar{y}=\frac{۲}{۵}a$. **۱۷۳۱.** $۲\pi a^{۲}$.

۱۷۳۲. $\bar{x}=۰$، $\bar{y}=\frac{a}{۴}\cdot\frac{۲+sh۲}{sh۱}$. **۱۷۳۳.** $\bar{x}=\frac{a\sin\alpha}{\alpha}$ ؛ $\bar{y}=۰$.

۱۷۳۴. $\bar{x}=\pi a$ ؛ $\bar{y}=\frac{۴}{۳}a$. **۱۷۳۵.** $\bar{x}=\frac{۴a}{۳\pi}$ ؛ $\bar{y}=\frac{۴b}{۳\pi}$.

۱۷۳۶. $\bar{x}=\bar{y}=\frac{۹}{۲۰}$. **۱۷۳۷.** $\bar{x}=\pi a$ ؛ $\bar{y}=\frac{۵}{۶}a$. **۱۷۳۸.** $(۰,۰,\frac{a}{۲})$.

حل. نیمکره را به وسیلهٔ صفحه‌های افقی به نوارهای باریک $d\sigma$ تقسیم‌می‌کنیم. داریم: $d\sigma=۲\pi a dz$، که در آن dz عبارتست از ارتفاع نوار، به‌این‌ترتیب از آنجا بدست می‌آید:

$$\bar{z}=\frac{۲\pi\int_{۰}^{a}azdz}{۲\pi a^{۲}}=\frac{a}{۲}$$

۱۷۳۹. $\bar{x}=\bar{y}=۰$ با توجه به‌تقارن. در فاصلهٔ $\frac{۳}{۴}$ ارتفاع از رأس مخروط. **حل.** مخروط را به عناصر سطحی موازی قاعده تقسیم می‌کنیم. جرم قشر عنصر $dm_i=\gamma\pi\rho^{۲}dz$ که در آن γ چگالی، z فاصلهٔ صفحهٔ قاطع از رأس مخروط و $\rho=\frac{r}{h}z$. از آنجا:

$$\bar{z}=\frac{\pi\int_{۰}^{h}\frac{r^{۲}}{h^{۲}}z^{۳}dz}{\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h}=\frac{۳}{۴}h$$

۱۷۴۰. $(۰,۰,\frac{۳}{۸}a)$. **حل.** با توجه به تقارن $\bar{x}=\bar{y}=۰$. برای تعیین $\bar{z}$ نیمکره را

بوسیلهٔ صفحه‌هائی موازی با صفحهٔ افقی تقسیم می‌کنیم. جرم هر کدام ازاین تقسیمها مساوی $dm=\gamma\pi r^{2}dz$، که در آن γ چگالی و z فاصلهٔ صفحهٔ قاطع از قاعدهٔ نیمکره و همچنین $r=\sqrt{a^{2}-z^{2}}$ شعاع مقطع است. داریم:

$$\bar{z}=\frac{\pi\int_{0}^{a}(a^{2}-z^{2})zdz}{\frac{2}{3}\pi a^{3}}=\frac{3}{8}a$$

۱۷۴۱. $I=\pi a^{3}$. **۱۷۴۲.** $I_a=\frac{1}{3}ab^{3}$ ؛ $I_b=\frac{1}{3}a^{3}b$.

۱۷۴۳. $I=\frac{4}{15}hb^{3}$. **۱۷۴۴.** $I_a=\frac{1}{4}\pi ab^{3}$ ؛ $I_b=\frac{1}{4}\pi a^{3}b$.

۱۷۴۵. $I=\frac{1}{2}\pi(R_2^{4}-R_1^{4})$. **حل.** حلقه را به حلقه‌های متحدالمرکز تقسیم می‌کنیم. جرم هریك از این تقسیمها $dm=\gamma 2\pi rdr$ و گشتاور ماند چنین می‌شود:

$$I=2\pi\int_{R_1}^{R_2}r^{3}dr=\frac{1}{2}\pi(R_2^{4}-R_1^{4})\,;\,(\gamma=1)$$

۱۷۴۶. $I=\frac{1}{10}\pi R^{4}H\gamma$. **حل.** مخروط را به‌لوله‌های استوانه‌ای جزئی موازی محور مخروط تقسیم می‌کنیم. حجم چنین لولهٔ جزئی عبارتست از $dV=2\pi rhdr$ ، که در آن r شعاع لوله (فاصله تا محورمخروط)؛ $h=H\left(1-\frac{r}{R}\right)$ ارتفاع لوله، در اینصورت گشت‌آور ماند چنین می‌شود (γ چگالی مخروط است):

$$I=\gamma\int_{0}^{R}2\pi H\left(1-\frac{r}{R}\right)r^{3}dr=\frac{\gamma\pi R^{4}H}{10}$$

۱۷۴۷. $I=\frac{2}{5}Ma^{2}$. **حل.** کره را به لوله‌های استوانه‌ای جزئی تقسیم می‌کنیم، بنحوی که محور آنها قطر مفروض باشد. حجم جزئی $dV=2\pi rhdr$ که در آن r شعاع و $h=2a\sqrt{1-\frac{a^{2}}{r^{2}}}$ ارتفاع آنست. در اینصودت گشت‌آور ماند چنین است،

$$I = ۴\pi a\pi \int_{۰}^{a} \sqrt{۱ - \frac{r^{۲}}{a^{۲}}}\, r^{۳}dr = \frac{۸}{۱۵}\pi a^{۵}\gamma$$

که در آن γ چگالی کره است و چون جرم $M = \pi a^{۳}\gamma$، بنابراین $I = \frac{۲}{۵} Ma^{۲}$.

۱۷۴۸. $V = ۲\pi^{۲}a^{۲}b$ ؛ $S = ۴\pi^{۲}ab$. **۱۷۴۹.** a) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{۲}{۵}a$ ؛

b) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{۹}{۱۰}p$. **۱۷۵۰.** a) $\bar{x} = ۰$، $\bar{y} = \frac{۴}{۳}\cdot\frac{r}{\pi}$. **راهنمائی.** محورهای مختصات را چنان انتخاب می‌کنیم که محور OX منطبق برقطرو مبداء مختصات درمرکزدایره باشد؛ b) $\bar{x} = \frac{h}{۳}$. **حل.** حجم جسم حاصل از دوران مثلث دور قاعدهٔ آن (دو مخروطی که در قاعده مشترکند) برابراست با: $V = \frac{۱}{۳}\pi bh^{۲}$ ، که در آن b قاعده و h ارتفاع مثلث است. طبق قضیهٔ گولدن همین حجم‌چنین‌است: $V = ۲\pi \bar{x}\frac{۱}{۲}bh$، که در آن $\bar{x}$ عبارتست ازفاصلهٔ مرکز ثقل تا قاعده. از آنجا $\bar{x} = \frac{h}{۳}$. **۱۷۵۱.** $v_{۰}t - \frac{gt^{۲}}{۲}$. **۱۷۵۲.** $\frac{c^{۲}}{۲g}ln\left(۱ + \frac{v_{۰}^{۲}}{c^{۲}}\right)$.

۱۷۵۳. $x = \frac{v_{۰}}{\omega}sin\omega t$ ؛ $v = \frac{۲}{\pi}v_{۰}$ (مقدارمتوسط). **۱۷۵۴.** $S = ۱۰^{۴}$(متر).

۱۷۵۵. $v = \frac{A}{b}ln\left(\frac{b}{a - bt}\right)$ ؛ $h = \frac{A}{b^{۲}}\left[bt_{۱}(a - bt_{۱})ln\frac{a}{a - bt_{۱}} \right]$.

۱۷۵۶. $A = \frac{\pi\gamma}{۲}R^{۲}H^{۲}$. **راهنمائی.** نیروی جزئی (نیروی‌ثقل) برابر است با وزن آب درحجم قشر به ضخامت dx، یعنی $dF = \gamma\pi R^{۲}dx$ که درآن γ عبارتست از وزن واحدحجم آب. بنابراین کار جزئی نیرو $dA = \gamma\pi R^{۲}(H - x)dx$. **۱۷۵۷.** $A = \frac{\pi}{۱۲}\gamma R^{۲}H^{۲}$.

۱۷۵۸. $A = \frac{\pi\gamma}{۴}R^{۴}TM$، یعنی $A \approx ۰/۷۹\cdot۱۰^{۴} = ۰/۷۹\cdot۱۰^{۷}$ (کیلوگرم‌متر)

۱۷۵۹. $A = \gamma\pi R^{۳}H$. **۱۷۶۰.** $A = \frac{mgh}{۱ + \frac{h}{R}}$ ؛ $A_{\infty} = mgR$. **حل.** نیروئی که بر جسم به‌جرم m عمل می‌کند برابر است با $F = k\frac{mM}{r^{۲}}$، که درآن r عبارتست از فاصلهٔ

تا مرکز زمین. چون به‌ازای $r=R$ داریم: $F=mg$، بنابراین $kM=gR^2$.

کار مورد نظر به‌این‌صورت است:

$$\int_R^{R+h} k\frac{mM}{r^2}dr = kmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right) = \frac{mgh}{1+\frac{h}{R}}$$

وبه‌ازای $h=\infty$ داریم: $A_\infty = mgR$.

۱۷۶۱. $1/8\cdot10^4$ ارگ. **حل.** نیروی عمل متقابل بارها، (دین) $F=\frac{e_0e_1}{x^2}$. بنابراین کاری که برای جابجاشدن بار e_1 از نقطهٔ x_1 به x_2 انجام می‌شود برابر است:

$$A = e_0e_1\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2} = e_0e_1\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right) = 1/8\cdot10^4 \text{ (ارگ)}$$

۱۷۶۲. $A=800\pi ln2$ کیلوگرم‌متر. حل. برای درجهٔ حرارت ثابت داریم: $pv=p_0v_0$. کاری که برای تبدیل حجم گاز از v_0 به v_1 لازم است برابر است با:

$$A=\int_{v_0}^{v_1} pdv = p_0v_0 ln\frac{v_1}{v_0}.$$

۱۷۶۳. $A\approx 15000$ کیلوگرم‌متر. **حل.** برای سیر آدیاباتیك قانون پواسون صحیح است: $pv^k=p_0v_0^k$، که در آن $k\approx1/4$. از آنجا:

$$A=\int_{v_0}^{v_1}\frac{p_0v_0^k}{v^k}dv = \frac{p_0v_0}{k-1}\left[1-\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}\right].$$

۱۷۶۴. $A=\frac{4}{3}\pi\mu Pa$. **حل.** اگر a شعاع قاعدهٔ غلطك باشد، فشار بر واحد سطح تکیه‌گاه $p=\frac{P}{\pi a^2}$. نیروی اصطکاك از حلقهٔ به‌عرض dr که از مرکز به‌فاصلهٔ r است، برابراست با $\frac{2\mu P}{a^2}rdr$. کار نیروی اصطکاك برای یك دور کامل عبارتست از $dA=\frac{4\pi\mu P}{a^2}r^2dr$.

به‌این‌ترتیب مقدارکار چنین است:

$$A = \frac{4\pi\mu P}{a^2}\int_0^a r^2 dr = \frac{4}{3}\pi\mu P a$$

۱۷۶۵. $\frac{1}{4}MR^2\omega^2$. **حل.** انرژی جنبشی عنصر دیسک $dK = \frac{v^2 dm}{2} = \frac{\rho r^2\omega^2}{2}d\sigma$، که در آن $d\sigma = 2\pi r dr$ عنصر سطح، r فاصلهٔ آن از محور دوران و $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ ضخامت سطحی است. به‌این ترتیب $dK = \frac{M\omega^2}{2\pi R^2}r^2 d\sigma$. ازآنجا $K = \frac{M\omega^2}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2\omega^2}{4}$.

۱۷۶۶. $K = \frac{3}{20}MR^2\omega^2$.

۱۷۶۷. $K = \frac{M}{5}R^2\omega^2 = 2/3\cdot 10^8$ کیلوگرم متر. **راهنمائی.** مقدار کار لازم برابر است با ذخیرهٔ انرژی جنبشی.

۱۷۶۸. $p = \frac{bh^2}{6}$.

۱۷۶۹. $P = \frac{(a+2b)h^2}{6} \approx 11/3\cdot 10^3 T$. **۱۷۷۰.** $P = ab\gamma\pi h$.

۱۷۷۱. $P = \frac{\pi R^2 H}{3}$ (قائم وازپائین به بالا). **۱۷۷۲.** $533\frac{1}{3}$ گرم. **۱۷۷۳.** ۹۹/۸ کالری.

۱۷۷۴. $M = \frac{hb^2 p}{2}$ گرم سانتیمتر. **۱۷۷۵.** $\frac{kMm}{a(a+1)}$ (k جاذبهٔ ثابت است)

۱۷۷۶. $\frac{\pi p a^4}{8\mu l}$. **حل.** داریم:

$$Q = \int_0^a v\cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi p}{4\mu l}\int_0^a (a^2 - r^2) r dr = \frac{\pi p}{2\mu l}\left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi p a^4}{8\mu l}$$

۱۷۷۷. $\frac{2}{3}p\frac{ab^3}{\mu l}$ $= \int_0^{2b} v a dy = Q$. **راهنمائی.** محور طول را در جهت ضلع بزرگتر

پائینی مستطیل عمود بر وسط آن انتخاب کنید. **۱۷۷۸.** $S=\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{a}dv$؛ از طرف دیگر

$a=\frac{dv}{dt}$، از آنجا $dt=\frac{1}{a}dv$، بنابراین زمان مورد نظر $S=\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{a}=t$.

۱۷۷۹.
$$M_x=-\int_0^x\frac{Q}{l}(x-t)dt+\frac{Q}{2}x=$$
$$=-\frac{Q}{l}\left[xt-\frac{t^2}{2}\right]_0^x+\frac{Q}{2}x=\frac{Qx}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right)$$

۱۷۸۰. $M_x=-\int_0^x(x-t)kt\,dt+Ax=\frac{kx}{6}(t^2-x^2)$.

۱۷۸۱. $Q=0{,}12TRI_0^2$ کالری. **راهنمائی.** از قانون ژول ـ لنتس استفاده کنید.

فصل ششم

۱۷۸۲. $V=\frac{2}{3}(y^2-x^2)x$. **۱۷۸۳.** $S=\frac{2}{3}(x+y)\sqrt{4z^2+3(x-y)^2}$.

۱۷۸۴. $f(\frac{1}{2},3)=\frac{5}{3}$، $f(1,-1)=-2$. **۱۷۸۵.** $\frac{y^2-x^2}{2xy}$، $\frac{x^2-y^2}{2xy}$،

$\frac{y^2-x^2}{2xy}$، $\frac{2xy}{x^2-y^2}$. **۱۷۸۶.** $f(x,x^2)=1+x-x^2$. **۱۷۸۷.** $z=\frac{R^4}{1-R^2}$.

۱۷۸۸. $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$. **راهنمائی.** تابع مفروض را به‌اینصورت می‌نویسیم:

$f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^{2}+1}$ وسپس $\frac{y}{x}$ را به x تبدیل می‌کنیم.

۱۷۸۹. $f(x,y)=\frac{x^{2}-xy}{2}$. **حل.** $u=y+x$ ، $x-y=v$ فرض می‌کنیم. دراینصورت داریم: $x=\frac{u+v}{2}$ و $y=\frac{u-v}{2}$ و $f(u,v)=\frac{u+v}{2}\cdot\frac{u-v}{2}+\left(\frac{u-v}{2}\right)^{2}=\frac{u^{2}-uv}{2}$.

اکنون u و v را به x و y تبدیل می‌کنیم. **۱۷۹۰.** $f(u)=u^{2}+2v$ ، $z=x-1+\sqrt{y}$.

راهنمائی. در اتحاد $x=1+f(\sqrt{x}-1)$ فرض می‌کنیم $\sqrt{x}-1=u$؛ در اینصورت داریم: $x=(u+1)^{2}$ و بنابراین $f(u)=u^{2}+2u$. **۱۷۹۱.** $f(y)=\sqrt{1+y^{2}}$؛

$z=\frac{x}{|x|}\sqrt{x^{2}+y^{2}}$. **حل.** به‌ازای $x=1$ اتحاد زیر را داریم:

$$\sqrt{1+y^{2}} = 1\cdot f\left(\frac{y}{1}\right)$$

یعنی $f(y)=\sqrt{1+y^{2}}$ ، دراینصورت $f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{2}}$ وبنابراین بدست می‌آید:

$z=x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{2}}=\frac{x}{|x|}\sqrt{x^{2}+y^{2}}$. **۱۷۹۲.** a) نقاط واقع در داخل و روی محیط دایرهٔ به‌مرکز مبداء مختصات و شعاع واحد $(x^{2}+y^{2}\leqslant 1)$؛ b) $y=x$، نیمساز ربعهای اول و سوم؛ c) نیم صفحهٔ واقع در بالای خط $x+y=0$ $(x+y>0)$ ؛ d) نوار واقع در بین خطهای $y=\pm 1$ با خود این خطها $(-1\leqslant y\leqslant 1)$؛ e) مربعی که از خطهای $x=\pm 1$ و $y=\pm 1$ تشکیل می‌شود و خود این ضلعها $(-1\leqslant x\leqslant 1$ ، $-1\leqslant y\leqslant 1)$؛ f) قسمتی از صفحه که مجاور محور OX و بین خطهای $y=\pm x$ قرارگرفته است باخود این خطها به‌استثنای مبداء مختصات $(-x\leqslant y\leqslant x)$ به‌ازای $x>0$ و $x\leqslant y\leqslant -x$ به‌ازای $x<0$)؛ g) دونوار $x\geqslant 2$ ، $-2\leqslant y\leqslant 2$ و $x\leqslant -2$ ، $-2\leqslant y\leqslant 2$؛ h) حلقهٔ بین دایره‌های $x^{2}+y^{2}=a^{2}$ و $x^{2}+y^{2}=2a^{2}$ با مرزهای آن؛ i) نوارهای $2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi$ ، $y\geqslant 0$ و $(2n+1)\pi\leqslant x\leqslant(2n+2)\pi$ ، $y\leqslant 0$ که در آن n عددی صحیح است؛ j) قسمتی از صفحه که در بالای سهمی $y=-x^{2}$ $(x^{2}+y>0)$ قرار

گرفته است؛ k) تمام صفحهٔ XOY؛ l) تمام صفحهٔ XOY به استثنای مبداء مختصات؛ m) قسمتی از صفحه که در بالای سهمی $x=y^{2}$ وسمت راست محور OY قرار گرفته است با خود نقطه‌های محور OY و به‌استثنای نقطه‌های سهمی ($x\leqslant 0$، $y>\sqrt{x}$)؛ n) تمام صفحه به‌استثنای خطهای $x=1$ و $y=0$؛ o) خانوادهٔ حلقه‌های متحدالمرکز $2k\pi\leqslant x^{2}+y^{2}\leqslant (2k+1)\pi$ $(k=0,1,2,\cdots)$. **۱۷۹۳.** a) یك هشتم اول (باخود مرزها)؛ b) یك هشتمهای I، III، VI و $VIII$ (به‌استثنای مرزها)؛ مکعبی که به‌صفحه‌های $x=\pm 1$، $y=\pm 1$ و $z=\pm 1$ محدود است با خود مرزها؛ d) کرهٔ به‌شعاع‌واحدومرکز مبداء مختصات با سطح آن. **۱۷۹۴.** صفحه؛ منحنی‌های تراز عبارتند از خطهای موازی خط $x+y=0$؛ b) سهموی‌دوار ؛ منحنی‌های تراز: دایره‌های متحدالمرکز به‌مرکزمبداء مختصات؛ c) سهموی هیپربولیك؛ منحنی‌های تراز: هذلولیهای متساوی‌القطرین؛ d)مخروط درجه دوم؛ منحنی‌های تراز: هذلولیهای متساوی‌القطرین؛ e) استوانهٔ پارابولیك که مولدآن با خط $x+y+1=0$ موازی است؛ منحنی‌های تراز: خطهای موازی؛ f) سطح جانبی‌هرم با قاعدهٔ چهار ضلعی؛ منحنی‌های تراز: محیطهای مربعها؛ g) منحنی‌های تراز: سهمی‌های $y=Cx^{2}$؛ h) منحنی‌های تراز: سهمی‌های $y=C\sqrt{x}$؛ i) منحنی‌های تراز: دایره‌های $C(x^{2}+y^{2})=2x$. **۱۷۹۵.** a) سهمی‌های $y=C-x^{2}$ $(C>0)$؛ b) هذلولیهای $xy=C$ $(|C|\leqslant 1)$؛ c) دایره‌های $x^{2}+y^{2}=C^{2}$؛ d) خطهای $y=ax+C$؛ e) خطهای $y=Cx$ $(x\neq 0)$. **۱۷۹۶.** a) صفحه‌های موازی با صفحهٔ $x+y+z=0$؛ b) کره‌های متحدالمرکز به‌مرکز مبداء مختصات ؛ c) به‌ازای $u>0$ هذلولویهای یك شاخه دوار دور محور OZ؛ به‌ازای $u<0$ هذلولویهای دو شاخهٔ دوار دور همان محور؛ هر دو خانوادهٔ سطح، مخروط $x^{2}+y^{2}-z^{2}=0$ را قطع می‌کنند $(u=0)$. **۱۷۹۷.** a) ۰؛ b) ۰؛ c) ۲؛ d) e^{k}؛ e) حدی وجود ندارد؛ f) حدی وجود ندارد. **راهنمائی.** درحالت b) به‌مختصات‌قطبی‌بروید. درحالتهای e) و f) تغییرات x و y را در طول خطهای $y=kx$ مورد مطالعه قرار دهید ونشان بدهید که عبارتهای مفروض می‌توانندبسته‌به‌انتخاب k به‌سمت مقدارهای مختلف‌میل کنند. **۱۷۹۸.** پیوسته است. **۱۷۹۹.** a) نقطهٔ انفصال به‌ازای $x=0$، $y=0$؛ b) همهٔ نقطه‌های خط $x=y$ (خط انفصال) ؛ c) منحنی انفصال: دایرهٔ $x^{2}+y^{2}=1$؛ d) خطهای انفصال: محورهای مختصات. **۱۸۰۰.** **راهنمائی.**

$y=y_1$ را ثابت می‌گیریم، به‌تابع $\varphi_1(x)=\frac{2xy_1}{x^2+y_1^2}$ که همیشه پیوسته است، زیرا به‌ازای $y_1\neq 0$ مخرج $x^2+y_1^2\neq 0$ و به‌ازای $y_1=0$ داریم، $\varphi_1(x)=0$ بهمین‌ترتیب وقتی‌که $x=x_1$ ثابت باشد، تابع $\varphi_2(y)=\frac{2x_1y}{x_1^2+y^2}$ همیشه پیوسته است. در حالتی‌که y و x متغیر باشند. تابع z درنقطهٔ $(0,0)$ منفصل است، زیرا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z$ وجود ندارد. در حقیقت اگر به‌مختصات قطبی $(x=r\cos\varphi$ ، $y=r\sin\varphi)$ برویم، بدست‌می‌آید $z=\sin 2\varphi$، ازآنجا دیده می‌شودکه اگر $x\to 0$ و $y\to 0$ بنحوی‌که φ ثابت باشد $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ ، در اینصورت $z\to\sin 2\varphi$. چون این مقدارهای حدی تابع z به‌جهت φ مربوط است، دراینصورت به‌ازای $x\to 0$ و $y\to 0$ حدی برای z وجود ندارد.

۱۸۰۱. $\frac{\partial z}{\partial x}=3(x^2-ay)$؛ $\frac{\partial z}{\partial y}=3(y^2-ax)$.

۱۸۰۲. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y}{(x+y)^2}$؛ $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{(x+y)^2}$.

۱۸۰۳. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$؛ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$.

۱۸۰۴. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$؛ $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

۱۸۰۵. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$؛ $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$؛

۱۸۰۶. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$؛ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})}$؛

۱۸۰۷. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$؛ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$.

۱۸۰۸. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$؛ $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

۱۸۰۹. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$؛ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$.

۱۸۱۰. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$؛ $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yx^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$.

۱۸۱۱. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y}}\cot g\frac{x+a}{\sqrt{y}}$؛ $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+a}{2y\sqrt{y}}\cot g\frac{x+a}{\sqrt{y}}$.

۱۸۱۲. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz(xy)^{z-1}$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial y}=xz(xy)^{z-1}$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy)$.

۱۸۱۳. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz^{xy}\ln z$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial y}=xz^{xy}\ln z$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial z}=xyz^{xy-1}$.

۱۸۱۴. $f_x'(2,1)=\frac{1}{2}$ ، $f_y'(2,1)=0$. **۱۸۱۵.** $f_x'(1,2,0)=1$ ، $f_y'(1,2,0)=\frac{1}{2}$ ، $f_z'(1,2,0)=\frac{1}{2}$.

۱۸۲۰. $-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$. **۱۸۲۱.** r. **۱۸۲۶.** $z=arctg\frac{y}{x}+\varphi(x)$.

۱۸۲۷. $z=\frac{x^2}{2}+y^2\ln x+\sin y-\frac{1}{2}$. **۱۸۲۸.** ۱) $tg\alpha=4$ ، $tg\beta=\infty$؛ $tg\gamma=\frac{1}{4}$ ؛ ۲) $tg\alpha=\infty$ ، $tg\beta=4$ ، $tg\gamma=\frac{1}{4}$.

۱۸۲۹. $\frac{\partial s}{\partial a}=\frac{1}{2}h$ ، $\frac{\partial s}{\partial b}=\frac{1}{2}h$ ، $\frac{\partial s}{\partial h}=\frac{1}{2}(a+b)$.

۱۸۳۰. راهنمائی. تحقیق کنید که تابع در تمام نقطه‌های محور OX و درتمام نقطه‌های محور OY مساوی صفر است و ازتعریف مشتقهای جزئی استفاده کنید، نتیجه خواهید گرفت که $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$.

۱۸۳۱. $\Delta f=4\Delta x+\Delta y+2\Delta x^2+2\Delta x\Delta y+\Delta x^2\Delta y$. $df=4dx+dy$؛ (a $\Delta f-df=8$؛ (b $\Delta f-df=0/062$.

۱۸۳۳. $dz=3(x^2-y)dx+3(y^2-x)dy$.

۱۸۳۴. $dz=2xy^3dx+3x^2y^2dy$.

۱۸۳۵. $dz=\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}(ydx-xdy)$. **۱۸۳۶.** $dz=\sin 2x\,dx-\sin 2y\,dy$.

۱۸۳۷. $dz=y^2x^{y-1}dx+x^y(1+y\ln x)dy$.

۱۸۳۸. $dz=\frac{2}{x^2+y^2}(xdx+ydy)$. **۱۸۳۹.** $df=\frac{1}{x+y}(dx-\frac{x}{y}dy)$.

۱۸۴۰. $dz=۰$. **۱۸۴۱.** $dz=\frac{۲}{x\sin\frac{۲y}{x}}\left(dy-\frac{y}{x}dx\right)$.

۱۸۴۲. $df(۱,۱)=dx-۲dy$. **۱۸۴۳.** $du=yzdx+zxdy+xydz$.

۱۸۴۴. $du=\frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}(xdx+ydy+zdz)$.

۱۸۴۵.

$$du=\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{z-۱}\left[\left(y+\frac{۱}{y}\right)zdx+\left(۱-\frac{۱}{y^۲}\right)xzdy+\left(xy+\frac{x}{y}\right)\ln\left(xy+\frac{x}{y}\right)dz\right]$$

۱۸۴۶. $du=\frac{z^۲}{x^۲y^۲+z^۴}\left(ydx+xdy-\frac{۲xy}{z}dz\right)$.

۱۸۴۷. $df(۳,۴,۵)=\frac{۱}{۲۵}(۵dz-۳dx-۴dy)$. **۱۸۴۸.** $dl=۰/۰۶۲$ (سانتیمتر)؛ $\Delta l=۰/۰۶۵$ (سانتیمتر). **۱۸۴۹.** ۷۵ سانتیمتر مربع (نسبت به‌اندازه‌های داخلی).

۱۸۵۰. $\frac{۱}{۸}$ سانتیمتر **راهنمائی.** دیفرانسیل سطح قطاع را مساوی صفر فرض کنید و از آنجا دیفرانسیل شعاع را پیدا کنید. **۱۸۵۱.** a) ۱/۰۰؛ b) ۴/۹۹۸؛ c) ۰/۲۷۳.

۱۸۵۳. با دقت ۴ متر (دقیق با دقت ۴/۲۵ متر)؛ **۱۸۵۴.** $\pi\frac{\alpha g-\beta l}{g\sqrt{lg}}$.

۱۸۵۵. $d\alpha=\frac{۱}{\rho}(dy\cos\alpha-dx\sin\alpha)$. **۱۸۵۶.** $\frac{dz}{dt}=\frac{e^t(t\ln t-۱)}{t\ln^۲t}$.

۱۸۵۷. $\frac{du}{dt}=\frac{t}{\sqrt{y}}\,\mathrm{cotg}\,\frac{x}{\sqrt{y}}\left(۶-\frac{x}{۲y^۲}\right)$.

۱۸۵۸. $\frac{du}{dt}=۲t\ln t\,\mathrm{tg}\,t+\frac{(t^۲+۱)\mathrm{tg}\,t}{t}+\frac{(t^۲+۱)\ln t}{\cos^۲t}$. **۱۸۵۹.** $\frac{du}{dt}=۰$.

۱۸۶۰. $\frac{dz}{dx}=(\sin x)^{\cos x}(\cos x\,\mathrm{cotg}\,x-\sin x\ln\sin x)$.

۱۸۶۱. $\frac{dz}{dx}=\frac{۱}{۱+x^۲}$؛ $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^۲+y^۲}$.

۱۸۶۲. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$ ؛ $\frac{dz}{dx}=x^y[\varphi'(x)\ln x+\frac{y}{x}]$.

۱۸۶۳. $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y\,f_u'(u,v)+xe^{xy}\,f_v'(u,v)$ ؛

$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\,f_u'(u,v)+ye^{xy}\,f_v'(u,v)$،

۱۸۶۴. $\frac{\partial z}{\partial u}=0$ ، $\frac{\partial z}{\partial v}=1$. ۱۸۶۵. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\left(1-\frac{1}{x^2}\right)f'\left(xy+\frac{y}{x}\right)$ ؛

$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x+\frac{1}{x}\right)f'\left(xy+\frac{y}{x}\right)$.

۱۸۶۷.

$$\frac{du}{dx}=f_x'(x,y,z)+\varphi'(x)\,f_y'(x,y,z)+f_z'(x,y,z)[\psi_x'(x,y)+\psi_y'(x,y)\varphi'(x)]$$

۱۸۷۳. محیط باسرعت ۲متردرثانیه ومساحت با سرعت ۷۰مترمربع‌درثانیه بزرگ می‌شود.

۱۸۷۴. $\frac{1+2t^2+3t^4}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$. ۱۸۷۵. $20\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ کیلومتردر ساعت.

۱۸۷۶. $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$. ۱۸۷۷. ۱. ۱۸۷۸. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ۱۸۷۹. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

۱۸۸۰. $\frac{68}{13}$. ۱۸۸۱. $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}$. ۱۸۸۲. a) $(2,0)$ ؛ b) $(0,0)$ و

$(1,1)$ ؛ c) $(7,2,1)$. ۱۸۸۴. $9i-3j$. ۱۸۸۵. $\frac{1}{4}(5i-3j)$.

۱۸۸۶. $6i+3j+2k$. ۱۸۸۷. $|grad\,u|=6$ ؛ $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ ؛ $\cos\beta=-\frac{2}{3}$،

$\cos\gamma=\frac{1}{3}$. ۱۸۸۸. $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$. ۱۸۸۹. $tg\varphi\approx 8/944$ ؛ $\varphi\approx 83^\circ 37'$.

۱۸۹۱. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{abcy^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ؛ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{abcyx}{(b^2x^2+a^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ؛

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{abcx^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

۱۸۹۲. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$؛ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{(x^2+y)^2}$؛ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x^2+y)^2}$.

۱۸۹۳. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. **۱۸۹۴.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

۱۸۹۵. $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2-x^2}{r^3}$. **۱۸۹۶.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 1$. **۱۸۹۷.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \alpha\beta\gamma x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1}$.

۱۸۹۸. $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -x^2 y\cos(xy) - 2x\sin(xy)$.

۱۸۹۹. $f_{xx}''(0,0) = m(m-1)$؛ $f_{xy}''(0,0) = mn$؛ $f_{yy}''(0,0) = n(n-1)$.

۱۹۰۲. راهنمائی. با استفاده از قاعده‌های دیفرانسیل‌گیری و تعیین مشتقهای جزئی، تحقیق کنید که $f_x'(x,y) = y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$ (وقتی که $x^2+y^2 \neq 0$)، $f_x'(0,0) = 0$ و بنابراین $f_x'(0,y) = -y$ به‌ازای $x=0$ و به‌ازای هرمقدار دلخواه y. از آنجا $f_{xy}''(0,y) = -1$ و بخصوص $f_{xy}''(0,0) = -1$. بهمین ترتیب بدست می‌آید. $f_{yx}''(0,0) = 1$.

۱۹۰۳. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f_u'(u,v) + 4x^2 f_{uu}''(u,v) + 4xy f_{uv}''(u,v) + y^2 f_{vv}''(u,v)$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_v'(u,v) + 4xy f_{uu}''(u,v) + 2(x^2+y^2) f_{uv}''(u,v) + xy f_{vv}''(u,v) \; ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 f_u'(u,v) + 4y^2 f_{uu}''(u,v) + 4xy f_{uv}''(u,v) + x^2 f_{vv}''(u,v)$$

۱۹۰۴. $f_{xx}'' + 2 f_{xz}''\varphi_x' + f_{zz}''(\varphi_x')^2 + f_z'\varphi_{xx}''$.

۱۹۰۵. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{uu}''(\varphi_x')^2 + 2 f_{uv}''\varphi_x'\psi_x' + f_{vv}''(\psi_x')^2 + f_u'\varphi_{xx}'' + f_v'\psi_{xx}''$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f_{uu}\varphi'_x\varphi'_y+f''_{uv}(\varphi'_x\psi'_y+\psi'_x\varphi'_y)+f''_{vv}\psi'_x\psi'_y+f'_u\varphi''_{xy}+f'_v\psi''_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{uu}(\varphi'_y)^2+2f''_{uv}\varphi'_y\psi'_y+f''_{vv}(\psi'_y)^2+f'_u\varphi''_{yy}+f'_v\psi''_{yy}$$

۱۹۱۴. $u(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)$. ۱۹۱۵. $u(x,y)=x\varphi(y)+\Psi(y)$.

۱۹۱۶. $d^2z=e^{xy}[(ydx+xdy)^2+2dxdy]$.

۱۹۱۷. $d^2u=2(xdydz+ydxdz+zdxdy)$.

۱۹۱۸. $d^2z=4\varphi''(t)(xdx+ydy)^2+2\varphi'(t)(dx^2+dy^2)$.

۱۹۱۹. $dz=\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left(y\ln\frac{ex}{y}dx+x\ln\frac{x}{ey}dy\right)$؛

$$d^2z=\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left[\left(y^2\ln^2\frac{ex}{y}+\frac{y}{x}\right)dx^2+2\left(xy\ln\frac{ex}{y}\ln\frac{x}{ey}+\ln\frac{x}{y}\right)dxdy+\right.$$
$$\left.+\left(x^2\ln^2\frac{x}{ey}-\frac{x}{y}\right)dy^2\right]$$

۱۹۲۰. $d^2z=a^2f''_{uu}(u,v)dx^2+2ab\,f''_{uv}(u,v)dxdy+b^2f''_{vv}(u,v)dy^2$.

۱۹۲۱. $d^2z=(ye^x f'_v+e^{2y}f''_{uu}+2ye^{x+y}f''_{uv}+y^2e^{2x}f''_{vv})dx^2+$
$+2(e^yf'_u+e^xf'_v+xe^{2y}f''_{uu}+e^{x+y}(1+xy)f''_{uv}+ye^{2x}f''_{vv})dxdy+$
$+(xe^yf'_u+x^2e^{2y}f''_{uu}+2xe^{x+y}f''_{uv}+e^{2x}f''_{vv})dy^2$

۱۹۲۲. $d^3z=e^x(\cos y\,dx^3-3\sin y\,dx^2dy-3\cos y\,dxdy^2+\sin y\,dy^3)$.

۱۹۲۳. $d^3z=-y\cos x\,dx^3-3\sin x\,dx^2dy-3\cos y\,dxdy^2+x\sin y\,dy^3$.

۱۹۲۴. $df(1,2)=0$؛ $d^2f(1,2)=6dx^2+2dxdy+4/5dy^2$.

۱۹۲۵. $d^2f(0,0,0)=2dx^2+4dy^2+6dz^2-4dxdy+8dxdz+4dydz$.

۱۹۲۶. $xy+C$. ۱۹۲۷. $x^3y-\frac{y^3}{3}+\sin x+C$.

۱۹۲۸. $\frac{x}{x+y}+\ln(x+y)+C$. ۱۹۲۹. $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+2\,\mathrm{arctg}\frac{x}{y}+C$.

۱۹۳۰. $\frac{x}{y}+C$. ۱۹۳۱. $\sqrt{x^2+y^2}+C$. ۱۹۳۲. $a=-1$ ، $b=-1$ ،

$z=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}+C$. ۱۹۳۳. $x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+C$.

۱۹۳۴. $x^3+2xy^2+3xz+y^2-yz-2z+C$.

۱۹۳۵. $x^2yz-3xy^2z+4x^2y^2+2x+y+3z+C$.

۱۹۳۶. $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}+C$. ۱۹۳۷. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C$

۱۹۳۸. $\lambda=-1$. **راهنمائی.** شرط دیفرانسیل کامل را برای عبارت $Xdx+Ydy$ بنویسید. ۱۹۳۹. $f'_x=f'_y$. ۱۹۴۰. $u=\int_a^{xy} f(z)dz+C$.

۱۹۴۱. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$؛ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$؛ $\dfrac{d^3y}{dx^3}=-\dfrac{3b^6x}{a^4y^5}$.

۱۹۴۲. معادله‌ای که y را معین می‌کند، معادلهٔ دو خط است.

۱۹۴۳. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^x\ln y}{1-xy^{x-1}}$. ۱۹۴۴. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{y-1}$؛ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y}{(1-y)^3}$.

۱۹۴۵. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=1}=3$ یا -1؛ $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}=8$ یا -8. ۱۹۴۶. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+ay}{ax-y}$؛ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(a^2+1)(x^2+y^2)}{(ax-y)^3}$. ۱۹۴۷. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$؛ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2y}{x^2}$.

۱۹۴۸. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^2-yz}{xy-z^2}$؛ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}$.

۱۹۴۹. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z}$؛ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$. ۱۹۵۰. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$؛ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$.

۱۹۵۱. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{c^2x}{a^2z}$؛ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{c^2y}{b^2z}$؛ $\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}=-\dfrac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3}$؛ $\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{c^4xy}{a^2b^2z^3}$؛ $\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=-\dfrac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^3}$.

۱۹۵۳. $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\begin{vmatrix}\varphi'_x & \varphi'_y\\ \psi'_x & \psi'_y\end{vmatrix}}{\psi'_y}$. ۱۹۵۴. $dz=-\dfrac{x}{z}dx-\dfrac{y}{z}dy$؛

$d^2z = \frac{y^2-a^2}{z^3}\,dx^2 - 2\frac{xy}{z^3}dxdy + \frac{x^2-a^2}{z^3}\,dy^2$.

۱۹۵۵. $dz = 0$ ؛ $d^2z = \frac{4}{15}(dx^2+dy^2)$. **۱۹۵۶.** $dz = \frac{z}{1-z}(dx+dy)$؛

$d^2z = \frac{z}{(1-z)^3}(dx^2+2dxdy+dy^2)$. **۱۹۶۱.** $\frac{dy}{dx} = \infty$؛ $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{5}$؛

$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{25}$. **۱۹۶۲.** $dy = \frac{y(z-x)}{x(y-z)}dx$ ؛ $dz = \frac{z(x-y)}{x(y-z)}dx$؛

$d^2y = -d^2z = -\frac{a}{x^2(y-z)^3}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]dx^2$.

۱۹۶۳. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 1$ ؛ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ؛ $\frac{\partial v}{\partial x} = -1$؛

$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ؛ $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2$ ؛ $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = 1$ ؛ $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

۱۹۶۴. $du = \frac{y}{1+y}dx + \frac{v}{1+y}dy$ ؛ $dv = \frac{1}{1+y}dx - \frac{v}{1+y}dy$؛

$d^2u = -d^2v = \frac{2}{(1+y)^2}dx\,dy - \frac{2v}{(1+y)^2}\,dy^2$.

۱۹۶۵. $du = \dfrac{\psi'_v dx - \varphi'_v dy}{\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v\\ \psi'_u & \psi'_v\end{vmatrix}}$؛ $dv = \dfrac{-\psi'_u dx + \varphi'_u dy}{\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v\\ \psi'_u & \psi'_v\end{vmatrix}}$.

۱۹۶۶. (a $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c\sin v}{u}$؛ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\cos v}{u}$؛ (b $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(u+v)$؛

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(v-u)$ ؛ (c $dz = \frac{1}{2e^{2u}}[e^{u-v}(v+u)dx + e^{u+v}(v-u)dy]$.

۱۹۶۷. $\frac{\partial z}{\partial x} = F_r'(r,\varphi)\cos\varphi - F_\varphi'(r,\varphi)\frac{\sin\varphi}{r}$؛

$\frac{\partial z}{\partial y} = F_r'(r,\varphi)\sin\varphi + F_\varphi'(r,\varphi)\frac{\cos\varphi}{r}$. **۱۹۶۸.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c}{a}\cos\varphi\,\mathrm{cotg}\,\psi$؛

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c}{b}\sin\varphi \, cotg\,\psi$. ۱۹۶۹. $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0$. ۱۹۷۰. $\frac{d^2y}{dt^2}=0$.

۱۹۷۱. a) $\frac{d^2x}{dy^2}-2y\frac{dx}{dy}=0$؛ b) $\frac{d^3x}{dy^3}=0$. ۱۹۷۲. $tg\mu = \frac{r}{r'}$.

۱۹۷۳.
$$k=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$
۱۹۷۴. $\frac{\partial z}{\partial u}=0$.

۱۹۷۵. $u\frac{\partial z}{\partial u}-z=0$. ۱۹۷۶. $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}=0$.

۱۹۷۷. $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$. ۱۹۷۸. $\frac{\partial w}{\partial v}=0$. ۱۹۷۹. $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

۱۹۸۰. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$. ۱۹۸۱. a) $2x-4y-z-5=0$؛ $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-5}{-1}$؛ b) $3x+4y-6x=0$؛ $\frac{z-4}{-6}=\frac{y-3}{4}=\frac{x-4}{3}$؛

c) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-R=0$؛ $\frac{z-R}{0}=\frac{y-R\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{x-R\cos\alpha}{\cos\alpha}$.

۱۹۸۲. $\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$؛ $\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$؛ $\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

۱۹۸۳. $3x+4y+12z-169=0$. ۱۹۸۵. $x+4y+6z=\pm 21$.

۱۹۸۶. $x\pm y\pm z=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. ۱۹۸۷. در نقطه‌های $(1,\pm 1,0)$ صفحه‌های مماس موازی با صفحهٔ XOZ هستند و در نقطه‌های $(0,0,0)$ و $(2,0,0)$ موازی صفحهٔ YOZ. در سطح نقطه‌ای وجود ندارد که صفحهٔ مماس در آن با صفحهٔ XOY موازی باشد. ۱۹۹۱. $\frac{\pi}{3}$. ۱۹۹۴. تصویرهای روی صفحهٔ XOY:

تصویرهای روی صفحهٔ $\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2-xy-1=0 \end{cases}$: YOZ $\begin{cases} x=0 \\ \frac{3y^2}{4}+z^2-1=0 \end{cases}$

تصویرهای روی صفحهٔ XOZ: $\begin{cases} y=0 \\ \frac{3x^2}{4}+z^2-1=0 \end{cases}$ **راهنمائی.** منحنی‌های تماس سطح با استوانه‌ای که این سطح را برصفحه تصویر می‌کند. عبارتست ازمکان هندسی نقطه‌هائی که در آنها صفحهٔ مماس برسطح مفروض عمود بر صفحهٔ تصویر باشد.

۱۹۹۶. $f(x+h,y+k)=ax^2+2bxy+cy^2+2(ax+by)h+$
$+2(bx+cy)k+ah^2+2bhk+ck^2$

۱۹۹۷. $f(x,y)=1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2$.

۱۹۹۸. $\Delta f(x,y)=2h+k+h^2+2hk+h^2k$.

۱۹۹۹. $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+$
$+2(x-1)(y-1)-(y-1)(z-1)$.

۲۰۰۰. $f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)+$
$+2[h(x-y-z)+k(y-x-z)+l(z-x-y)]+f(h,k,l)$.

۲۰۰۱. $y+xy+\frac{3x^2y-y^3}{3!}$. **۲۰۰۲.** $1-\frac{x^2+y^2}{2!}+\frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!}$.

۲۰۰۳. $1+(y-1)+(x-1)(y-1)$.

۲۰۰۴. $1+[(-1)+(y+1)]+\frac{[(x-1)+(y+1)]^2}{2!}+\frac{[(x-1)+(y+1)]^3}{3!}$.

۲۰۰۵. (a $arctg\frac{1+\alpha}{1-\beta}\approx\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\frac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2)$؛

(b $\sqrt{\frac{(1+\alpha)^m+(1+\beta)^n}{2}}\approx 1+\frac{1}{4}(m\alpha+n\beta)+$
$+\frac{1}{32}[(3m^2-4m)\alpha^2-2mn\alpha\beta+(3n^2-4n)\beta^2]$

۲۰۰۶. a) ۱٫۰۰۸۱؛ b) ۰٫۹۰۲. **راهنمائی.** از رابطهٔ تیلور برای تابعهای زیر استفاده کنید: a) $f(x,y)=\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}$ در مجاورت نقطهٔ (۱,۱)؛ b) $f(x,y)=y^x$ در مجاورت نقطهٔ (۲,۱).

۲۰۰۷. $z=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+\dots$. **۲۰۰۸.** $z_{min}=0$ به‌ازای $x=1$، $y=0$. **۲۰۰۹.** اکسترمم ندارد. **۲۰۱۰.** $z_{min}=-1$ به‌ازای $x=1$، $y=0$. **۲۰۱۱.** $z_{max}=108$ به‌ازای $x=3$، $y=2$. **۲۰۱۲.** $z_{min}=-8$ به‌ازای $x=\sqrt{2}$، $y=-\sqrt{2}$ و به‌ازای $x=-\sqrt{2}$، $y=\sqrt{2}$. و به‌ازای $x=y=0$ اکسترمم وجود ندارد.

۲۰۱۳. $z_{max}=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ در نقطه‌های $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$، $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$ و $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$، $y=-\frac{b}{\sqrt{3}}$؛

$z_{min}=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ در نقطه‌های $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$، $y=-\frac{b}{\sqrt{3}}$ و $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$، $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$.

۲۰۱۴. $z_{max}=1$ به‌ازای $x=y=0$. **۲۰۱۵.** $z_{min}=0$ به‌ازای $x=y=0$؛ ماکزیمم $z=\frac{1}{e}$ در نقطه‌های دایرهٔ $x^2+y^2=1$. **۲۰۱۶.** $z_{max}=\sqrt{3}$ به‌ازای $x=1$، $y=-1$. **۲۰۱۶.۱.** $z_{min}=6$ به‌ازای $x=4$، $y=2$. **۲۰۱۶.۲.** $z_{max}=8e^{-2}$ به‌ازای $x=-4$، $y=-2$؛ به‌ازای $x=0$، $y=0$ اکسترمم وجودندارد. **۲۰۱۷.** $u_{min}=-\frac{4}{3}$ به‌ازای $x=-\frac{2}{3}$، $y=-\frac{1}{3}$، $z=1$.

۲۰۱۸. $u_{min}=4$ به‌ازای $x=\frac{1}{2}$، $y=1$، $z=1$. **۲۰۱۹.** معـادله دو تابع را معین می‌کند که یکی از آنها به‌ازای $x=1$، $y=-2$ ماکزیمم دارد $(z_{max}=8)$، دیگری به‌ازای $x=1$، $y=-2$ می‌نیمم دارد $(z_{min}=-2)$؛ در نقطه‌های محیط دایرهٔ $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ هردوتابع اکسترمم مطلق $z=3$ دارند. **راهنمائی.** تساوی صریح $z=3\pm\sqrt{25-(x-1)^2-(y+2)^2}$ تنها در نقطه‌های داخلی و روی محیط دایرهٔ $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ وجود دارد، بنحوی که به‌ازای نقطه‌های محیط این دایره مقدار $z=3$ برای تابع بدست می‌آید. این مقدار برای تابع اول حداقل و برای تابع دوم حداکثر است. **۲۰۲۰.** یکی از تابعهائی که به‌وسیلهٔ معادله معین می‌شود به‌ازای $x=-1$، $y=2$ ماکزیمم دارد $(z_{max}=-2)$. دیگری به‌ازای $x=-1$، $y=2$ می‌نیمم دارد $(z_{min}=1)$؛

هر دو تابع در نقطه‌های منحنی $4x^3-4y^2-12x+16y-33=0$ دارای اکسترمم مطلق هستند.

۲۰۲۱. $z_{max}=\frac{1}{4}$ به‌ازای $x=y=\frac{1}{2}$. **۲۰۲۲.** $z_{max}=5$ به‌ازای $x=1$، $y=2$؛ $z_{min}=-5$ به‌ازای $x=-1$، $y=-2$. **۲۰۲۳.** $z_{min}=\frac{36}{13}$ به‌ازای $x=\frac{18}{13}$، $y=\frac{12}{13}$. **۲۰۲۴.** $z_{max}\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ به‌ازای $x=\frac{7\pi}{8}+k\pi$، $y=\frac{9\pi}{8}+k\pi$؛ ${}_{min}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ به‌ازای $x=\frac{3\pi}{8}+k\pi$، $y=\frac{5\pi}{8}+k\pi$. **۲۰۲۵.** $u_{min}=-9$ به‌ازای $x=-1$، $y=2$، $z=-2$؛ $u_{max}=9$ به‌ازای $x=1$، $y=-2$، $z=2$. **۲۰۲۶.** $u_{max}=a$ به‌ازای $x=\pm a$، $y=z=0$؛ $u_{min}=c$ به‌ازای $x=y=0$، $z=\pm c$. **۲۰۲۷.** $u_{max}=2\cdot 4^2\cdot 6^3$ به‌ازای $x=2$، $y=4$، $z=6$.

۲۰۲۸. $u_{max}=\frac{112}{27}$ در نقطه‌های $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$؛ $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$؛ $\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$؛ $u_{min}=4$ در نقطه‌های $(2,2,1)$، $(2,1,2)$، $(1,2,2)$. **۲۰۳۰.** a) حداکثر مقدار $z=3$ به‌ازای $x=0$، $y=1$؛ b) حداقل مقدار $z=2$ به‌ازای $x=1$، $y=0$.

۲۰۳۱. a) حد اکثر مقدار $z=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ به‌ازای $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$، $y=\sqrt{\frac{1}{3}}$؛ حداقل‌مقدار $z=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ به‌ازای $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$، $y=-\sqrt{\frac{1}{3}}$؛ b) حداکثر مقدار $z=1$ به‌ازای $x=\pm1$، $y=0$؛ حداقل مقدار $z=-1$ به‌ازای $x=0$، $y=\pm1$.

۲۰۳۲. حداکثرمقدار $z=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ به‌ازای $x=y=\frac{\pi}{3}$ (ماکزیمم داخلی)؛ حداقل مقدار $z=0$ به‌ازای $x=y=0$ (ماکزیمم حدی). **۲۰۳۳.** حداکثر مقدار $z=13$ به‌ازای $x=2$، $y=-1$ (ماکزیمم حدی)؛ حداقل مقدار $z=-1$ به‌ازای $x=y=1$ (می‌نیمم داخلی) و به‌ازای $x=0$، $y=-1$ (می‌نیمم حدی). **۲۰۳۴.** مکعب.

۲۰۳۵. $\sqrt[3]{2V}$، $\sqrt[3]{2V}$، $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. **۲۰۳۶.** مثلث متساوی‌الاضلاع.

۲۰۳۷. مکعب، **۲۰۳۸.** $a=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$.

۲۰۳۹. $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ **۲۰۴۰.** ضلعهای مثلث: $\frac{3}{4}p$، $\frac{3}{4}p$ و $\frac{p}{2}$.

۲۰۴۱. $x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$، $y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$.

۲۰۴۲. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$. **۲۰۴۳.** اندازه‌های متوازی‌السطوح: $\frac{2a}{\sqrt{3}}$، $\frac{2b}{\sqrt{3}}$، $\frac{2c}{\sqrt{3}}$ که در آن a، b و c نیم محورهای بیضی هستند. **۲۰۴۴.** $x=y=2\delta+\sqrt[3]{2V}$، $z=\frac{x}{2}$. **۲۰۴۵.** $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$، $y=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}$. **۲۰۴۶.** محور بزرگتر $2a=6$، محورکوچکتر $2b=2$. **راهنمائی.** مجذور فاصلهٔ نقطهٔ (x,y) بیضی از مرکز آن (مبداء مختصات) برابر است با x^2+y^2 مسئله منجر به‌جستجوی اکستره‌مم تابع x^2+y^2 باشرط $5x^2+8xy+5y^2=9$ می‌شود. **۲۰۴۷.** شعاع قاعدهٔ استوانه $\frac{R}{2}\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}$، ارتفاع آن $R\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}$ می‌شود که درآن R مساوی شعاع کره است.

۲۰۴۸. کانال باید نقطهٔ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ سهمی را به‌نقطهٔ $\left(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8}\right)$ خط‌وصل کند؛ طول‌آن مساوی $\frac{7\sqrt{2}}{8}$ می‌شود. **۲۰۴۹.** $\frac{1}{14}\sqrt{2730}$. **۲۰۵۰.** $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}$. **راهنمائی.** روشن است نقطهٔ M که درآن شعاع از محیطی به‌محیط دیگر عبور می کند، باید بین A_1 و B_1 واقع باشد ؛ ضمناً $AM=\frac{\alpha}{\cos\alpha}$، $BM=\frac{b}{\cos\beta}$، $A_1M=a\,tg\alpha$، $B_1M=b\,tg\beta$.

مدت حرکت شعاع مساوی است با $\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$. مسئله منجر به‌جستجوی می‌نیمم تابع $f(\alpha,\beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$ با شرط $a\,tg\alpha+b\,tg\beta=c$ می‌شود.

۲۰۵۱. $\alpha=\beta$. **۲۰۵۲.** $I_1:I_2:I_3=\frac{1}{R_1}:\frac{1}{R_2}:\frac{1}{R_3}$. **راهنمائی.** باید می‌نیمم تابع $f(I_1,I_2,I_3)=l_1^2R_1+l_2^2R_2+l_3^2R_3$ را با شرط $I_1+I_2+I_3=I$ پیدا کرد.

۲۰۵۳. نقطهٔ منفرد $(0,0)$. **۲۰۵۴.** نقطهٔ برگشت نوع دوم $(0,0)$.

۲۰۵۵. نقطهٔ بوس $(0,0)$. **۲۰۵۶.** نقطهٔ منفرد $(0,0)$. **۲۰۵۷.** گره $(0,0)$.

۲۰۵۸. نقطهٔ برگشت نوع اول $(0,0)$. **۲۰۵۹.** گره $(0,0)$. **۲۰۶۰.** گره $(0,0)$.

۲۰۶۱. اگر $a>b$ باشد، مبداء مختصات نقطهٔ منفرد است؛ اگر $a=b$ باشد، مبداء مختصات نقطهٔ برگشت نوع اول است واگر $a<b$ باشد، مبداء مختصات نقطهٔ گره است.

۲۰۶۲. اگر بین a،b و c مقدارهای مساوی نباشد، منحنی دارای نقطهٔ خاص نیست. اگر $a=b<c$، نقطه $A(a,0)$ نقطهٔ منفرد است؛ اگر $a<b=c$ نقطهٔ $B(b,0)$ گره‌است؛ اگر $a=b=c$، نقطهٔ $A(a,0)$ نقطهٔ برگشت نوع اول است. **۲۰۶۳.** $y=\pm x$.

۲۰۶۴. $y^2=2px$. **۲۰۶۵.** $y=\pm R$. **۲۰۶۶.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$. **۲۰۶۷.** $xy=\frac{1}{2}S$.

۲۰۶۸. دوهذلولی متساوی‌الساقین مزدوج که معادله‌های آنها به‌شرط اینکه محورهای‌تقارن بیضی‌ها، محورهای مختصات باشد عبارتست از $xy=\pm\frac{S}{2\pi}$. **۲۰۶۹.** a) منحنی‌مبین $y=0$ مکان هندسی نقطه‌های عطف وپوش خانوادهٔ مفروض است؛ b) منحنی مبین $y=0$ عبارتست از مکان هندسی نقطه‌های رأس وپوش خانواده است؛ c) منحنی مبین $y=0$ مکان هندسی نقطه‌های رأس است وپوش نیست؛ d) منحنی مبین‌عبارتست از خطهای $x=0$(مکان هندسی نقطه‌های گرهی) و $x=a$ (پوش). **۲۰۷۰.** $y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}$.

۲۰۷۱. $7\frac{1}{3}$. **۲۰۷۲.** $\sqrt{9+4\pi^2}$. **۲۰۷۳.** $\sqrt{3}(e^t-1)$. **۲۰۷۴.** 42.

۲۰۷۵. 5. **۲۰۷۶.** x_0+z_0. **۲۰۷۷.** $11+\frac{ln10}{9}$. **۲۰۷۹.** a) خط راست، b) سهمی؛ c) بیضی؛ d) هذلولی. **۲۰۸۰.** ۱) $\frac{da}{dt}a^\circ$؛ ۲) $a\frac{d\,a^\circ}{dt}$؛ ۳) $\frac{da}{dt}a^\circ+a\frac{d\,a^\circ}{dt}$. **۲۰۸۱.** $\frac{d}{dt}(abc)=(\frac{da}{dt}bc)+(a\frac{db}{dt}c)+(ab\frac{dc}{dt})$.

۲۰۸۲. $۴t(t^۲+۱)$. ۲۰۸۳. $x=۳\cos t$؛ $y=۴\sin t$ (بیضی)؛ $v=۴j$، $w=-۳i$

به‌ازای $t=۰$؛ $v=-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}i+۲\sqrt{۲}j$، $w=-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}i-۲\sqrt{۲}j$ به‌ازای $t=\frac{\pi}{۴}$؛

$v=-۳i$، $w=-۴j$ به‌ازای $t=\frac{\pi}{۲}$. ۲۰۸۴. $x=۲\cos t$، $y=۲\sin t$، $z=۳t$؛

$v=-۲i\sin t+۲j\cos t+۳k$؛ $v=\sqrt{۱۳}$ به‌ازای هر مقدار t؛

$w=-۲i\cos t-۲j\sin t$؛ $w=۲$ به‌ازای هرمقدار t؛ $v=۲j+۳k$، $w=-۲i$

به‌ازای $t=۰$؛ $v=-۲i+۳k$، $w=-۲j$ به‌ازای $t=\frac{\pi}{۲}$. ۲۰۸۵. $x=\cos\alpha\cos\omega t$؛

$y=\sin\alpha\cos\omega t$؛ $z=\sin\omega t$ (دایره)؛ $v=-\omega i\cos\alpha\sin\omega t-\omega j\sin\alpha\sin\omega t+\omega k\cos\omega t$؛

$v=|\omega|$؛ $w=-\omega^۲ i\cos\alpha\cos\omega t-\omega^۲ j\sin\alpha\cos\omega t-\omega^۲ k\sin\omega t$؛ $\omega=\omega^۲$.

۲۰۸۶. $v=\sqrt{v_{0x}^۲+v_{0y}^۲+(v_{0z}-gt)^۲}$؛ $w_x=w_y=۰$؛ $w_z=-g$؛ $w=g$.

۲۰۸۸. $\omega\sqrt{a^۲+h^۲}$ که در آن $\omega=\frac{d\theta}{dt}$ سرعت زاویه‌ای دوران میخ است.

۲۰۸۹. $\sqrt{a^۲w^۲+v_۰^۲-۲awv_۰\sin wt}$. ۲۰۹۰. $\tau=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(i+k)$؛ $\Upsilon=-j$؛

$\beta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(i-k)$. ۲۰۹۱. $\tau=\frac{۱}{\sqrt{۳}}[(\cos t-\sin t)i+(\sin t+\cos t)j+k]$؛

$\Upsilon=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}[(\sin t+\cos t)i+(\sin t-\cos t)j]$؛ $\cos(\widehat{\tau,z})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$؛ $\cos(\widehat{\Upsilon,z})=۰$.

۲۰۹۲. $\tau=\frac{i+۴j+۲k}{\sqrt{۲۱}}$؛ $\Upsilon=\frac{-۴i+۵j-۸k}{\sqrt{۱۰۵}}$؛ $\beta=\frac{-۲i+k}{\sqrt{۵}}$.

۲۰۹۳. $\frac{x-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{z-bt}{b}$ (مماس)؛ $\frac{x-a\cos t}{b\sin t}=\frac{y-a\sin t}{-b\cos t}=\frac{z-bt}{a}$

(قائم)؛ $\frac{x-a\cos t}{\cos t}=\frac{y-a\sin t}{\sin t}=\frac{z-bt}{۰}$ (قائم اصلی). وکسینوسهای هادی مماس:

$\cos\alpha=-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$؛ $\cos\beta=\frac{a\cos t}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$؛ $\cos\gamma=\frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$. کسینوسهای قائم اصلی:

$\cos\alpha_1=\cos t$ ؛ $\cos\beta_1=\sin t$ ؛ $\cos\gamma_1=0$. **۲۰۹۴.** $2x-z=0$ (صفحهٔ قائم)؛ $y-1=0$ (صفحهٔ بوسان) ؛ $x+2z-5=0$ (صفحهٔ راستاده).

۲۰۹۵. $\frac{x-2}{1}=\frac{z-4}{4}=\frac{z-8}{12}$ (مماس)؛ $x+4y+12z-114=0$ (صفحهٔ قائم)؛

$12x-6y+z-8=0$ (صفحهٔ بوسان). **۲۰۹۶.** $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{t^2}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{t}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{1}$ (مماس)

(قائم اصلی)؛ $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{t^3+2t}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{1-t^4}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{-2t^3-t}$

(بی‌نرمال)؛ $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{1}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{-2t}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{t^2}$

$M_1\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ ؛ $M_2\left(4,-\frac{8}{3},2\right)$. **۲۰۹۷.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{2}$ (مماس) ؛

$x+y=0$ (صفحهٔ بوسان)؛ $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{-1}$ (قائم اصلی)؛

$\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{0}$ (بی‌نرمال)؛ $\cos\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ $\cos\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ $\cos\gamma_2=0$.

۲۰۹۸. a) $\frac{x-\frac{R}{2}}{2}=\frac{y-\frac{R}{2}}{0}=\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}R}{-\sqrt{2}}$ (مماس)؛ $x\sqrt{2}-z=0$

(صفحهٔ قائم)؛ b) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{4}$ (مماس) $x+y+4z-10=0$ (صفحهٔ قائم)؛

c) $\frac{x-2}{2\sqrt{3}}=\frac{y-2\sqrt{3}}{1}=\frac{z-3}{-2\sqrt{3}}$ (مماس)؛ $2\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}z=0$ (صفحهٔ قائم).

۲۰۹۹. $x+y=0$. **۲۱۰۰.** $x-y-z\sqrt{2}=0$. **۲۱۰۱.** a) $4x-y-z-9=0$؛

b) $9x-6y+2z-18=0$ ؛

c) $b^2x_0^3x-a^2y_0^3y+(a^2-b^2)z_0^3z=a^2b^2(a^2-b^2)$.

۲۱۰۲. $6x-8y-z+3=0$ (صفحهٔ بوسان)؛ $\frac{x-1}{31}=\frac{y-1}{26}=\frac{z-1}{-22}$ (قائم اصلی)؛ $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{1}$ (بی‌نرمال).

۲۱۰۳. $bx-z=0$ (صفحهٔ بوسان)؛ $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ (قائم اصلی)؛ $\begin{cases} x+bz=0 \\ y=0 \end{cases}$ (بی‌نرمال)؛ $\tau=\frac{i+bk}{\sqrt{1+b^2}}$، $\beta=\frac{-b\,i+k}{\sqrt{1+b^2}}$؛ $v=j$.

۲۱۰۶. $2x+3y+19z-27=0$. **۲۱۰۷.** a) $\sqrt{2}$؛ b) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

۲۱۰۸. a) $K=\frac{\omega^{-1}\sqrt{2}}{3}$ ؛ $T=\frac{e^{-t}}{3}$ ؛ b) $K=T=\frac{1}{2a\,ch^2 t}$.

۲۱۰۹. a) $R=\rho=\frac{(y+a)^2}{a}$؛ b) $R=\rho=\frac{(p^4+2x^4)^3}{8p^4x^3}$. **۲۱۱۱.** $\frac{av^2}{a^2+b^2}$.

۲۱۱۲. $K=2$ ، $\omega_t=0$ ، $\omega_n=2$ به‌ازای $t=0$ ؛ $K=\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$، $\omega_t=\frac{22}{\sqrt{14}}$، $\omega_n=2\sqrt{\frac{19}{14}}$ به‌ازای $t=1$.

فصل هفتم

۲۱۱۳. $4\frac{2}{3}$. **۲۱۱۴.** $\ln\frac{25}{24}$. **۲۱۱۵.** $\frac{\pi}{12}$. **۲۱۱۶.** $\frac{9}{4}$. **۲۱۱۷.** $50/4$.

۲۱۱۸. $\frac{\pi a^2}{2}$. **۲۱۱۹.** $2/4$. **۲۱۲۰.** $\frac{\pi}{6}$. **۲۱۲۱.** $x=\frac{y^2}{4}-1$؛ $x=2-y$ ؛ $y=-6$ ؛ $y=2$.

۲۱۲۲. $y=x^2$ ؛ $y=x+9$ ؛ $x=1$ ؛ $x=3$.

۲۱۲۳. $y=x$ ؛ $y=۱۰-x$ ؛ $y=۰$ ؛ $y=۴$. **۲۱۲۴.** $y=\frac{x}{۳}$ ؛ $y=۲x$ ؛ $x=۱$ ؛ $x=۳$.

۲۱۲۵. $y=۰$ ؛ $y=\sqrt{۲۵-x^{۲}}$ ؛ $x=۰$ ؛ $x=۳$.

۲۱۲۶. $y=x^{۲}$ ؛ $y=x+۲$ ؛ $x=-۱$ ؛ $x=۲$.

۲۱۲۷. $$\int_{۰}^{۱} dy\int_{۰}^{۲} f(x,y)dx=\int_{۰}^{۲} dx\int_{۰}^{۱} f(x,y)dy.$$

۲۱۲۸. $$\int_{۰}^{۱} dy\int_{۰}^{۱} f(x,y)dx=\int_{۰}^{۱} dx\int_{۰}^{x} f(x,y)dy.$$

۲۱۲۹. $$\int_{۰}^{۱} dy\int_{۰}^{۲-y} f(x,y)dx=\int_{۰}^{۱} dx\int_{۰}^{۱} f(x,y)dy+\int_{۱}^{۲} dx\int_{۰}^{۲-x} f(x,y)dy.$$

۲۱۳۰. $$\int_{۱}^{۲} dx\int_{۲x}^{۲x+۳} f(x,y)dy=\int_{۲}^{۴} dy\int_{۱}^{\frac{y}{۲}} f(x,y)dx+$$
$$+\int_{۴}^{۵} dy\int_{۱}^{۲} f(x,y)dx+\int_{۵}^{۷} dy\int_{\frac{y-۳}{۲}}^{۲} f(x,y)dx$$

۲۱۳۱. $$\int_{۰}^{۱} dy\int_{-y}^{y} f(x,y)dx+\int_{۰}^{\sqrt{۲}} dy\int_{-\sqrt{۲-y^{۲}}}^{\sqrt{۲-y^{۲}}} f(x,y)dx=$$
$$=\int_{-۱}^{۰} dx\int_{-x}^{\sqrt{۲-x^{۲}}} f(x,y)dy+\int_{۰}^{۱} dx\int_{x}^{\sqrt{۲-x^{۲}}} f(x,y)dy$$

۲۱۳۲. $$\int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{2} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{2} dy \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)\,dx \cdot$$

۲۱۳۳. $$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy +$$

$$+\int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx +$$

$$+\int_{-1}^{1} dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx$$

۲۱۳۴. $$\int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\,dy +$$

$$+\int_{2}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\,dx +$$

$$+\int_{-\sqrt{۵}}^{-۱} dy \int_{\sqrt{y^۲-۱}}^{\sqrt{۹-y^۲}} f(x,y)dx + \int_{-۱}^{۱} dy \int_{-\sqrt{۹-y^۲}}^{\sqrt{۹-y^۲}} f(x,y)dx +$$

$$+\int_{۱}^{\sqrt{۵}} dy \int_{-\sqrt{۹-y^۲}}^{-\sqrt{y^۲-۱}} f(x,y)dx + \int_{۱}^{\sqrt{۵}} dy \int_{\sqrt{y^۲-۱}}^{\sqrt{۹-y^۲}} f(x,y)dx$$

۲۱۳۵. a) $\int_{۰}^{۱} dx \int_{۰}^{۱-x} f(x,y)dy = \int_{۰}^{۱} dy \int_{۰}^{۱-y} f(x,y)dx$ ؛

b) $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^۲-x^۲}}^{\sqrt{a^۲-x^۲}} f(x,y)dy = \int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^۲-y^۲}}^{\sqrt{a^۲-y^۲}} f(x,y)dx$ ؛

c) $\int_{۰}^{۱} dx \int_{-\sqrt{x-x^۲}}^{\sqrt{x-x^۲}} f(x,y)dy = \int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} dy \int_{\frac{۱-\sqrt{۱-۴y^۲}}{۲}}^{\frac{۱+\sqrt{۱-۴y^۲}}{۲}} f(x,y)dx$ ؛

d) $\int_{-۱}^{۱} dx \int_{x}^{۱} f(x,y)dy = \int_{-۱}^{۱} dy \int_{-۱}^{y} f(x,y)dx$ ؛

e) $\int_{۰}^{a} dy \int_{y}^{y+۲a} f(x,y)dx = \int_{۰}^{a} dx \int_{۰}^{x} f(x,y)dy +$

$$+\int_{a}^{۲a} dx \int_{۰}^{a} f(x,y)dy + \int_{۲a}^{۳a} dx \int_{x-۲a}^{a} f(x,y)dy$$

۲۱۳۶. $\int_{۰}^{۴۸} dy \int_{\frac{y}{۱۲}}^{\sqrt{\frac{y}{۳}}} f(x,y)dx$.

۲۱۳۷. $$\int_{2}^{3} dy \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{2} dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx.$$

۲۱۳۸. $$\int_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int_{a}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{\frac{a}{2}} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

۲۱۳۹. $$\int_{\frac{a\sqrt{2}}{2}}^{a} dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} dy \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x,y)\,dx.$$

۲۱۴۰. $$\int_{0}^{a} dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{a} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

$$+\int_{0}^{2\sqrt{2a}} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x,y)\,dx$$

۲۱۴۱. $$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

۲۱۴۲. $$\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{1} f(x,y)\,dy + \int_{0}^{\frac{1}{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy +$$

$$+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx+\int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

۲۱۴۳. $\int_{0}^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dy \int_{y}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx$. ۲۱۴۴. $\int_{0}^{1} dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx$.

۲۱۴۵. $\frac{1}{6}$. ۲۱۴۶. $\frac{1}{3}$. ۲۱۴۷. $\frac{\pi}{2}a$. ۲۱۴۸. $\frac{\pi}{6}$. ۲۱۴۹. 6.

۲۱۵۰. $\frac{1}{2}$. ۲۱۵۱. $\ln 2$. ۲۱۵۲. a) $\frac{4}{3}$؛ b) $\frac{15\pi-16}{150}$؛ c) $2\frac{2}{5}$.

۲۱۵۳. $\frac{8\sqrt{2}}{21}p^5$. ۲۱۵۴. $\int_{1}^{3} dx \int_{0}^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xydy=\frac{4}{3}$.

۲۱۵۵. $\frac{8}{3}a\sqrt{2a}$. ۲۱۵۶. $\frac{5}{2}\pi R^3$ راهنمائی:

$$\iint_{(S)} ydxdy=\int_{0}^{2\pi R} dx \int_{x}^{y=f(x)} ydy=\int_{0}^{2\pi} R(1-\cos t)dt \int_{0}^{R(1-\cos t)} ydy$$

که در آن انتگرال اخیر از انتگرال قبلی در نتیجهٔ تبدیل $x=R(1-\sin t)$ بدست آمده است. ۲۱۵۷. $\frac{R^4}{80}$. ۲۱۵۸. $\frac{1}{6}$. ۲۱۵۹. $a^2+\frac{R^2}{2}$.

۲۱۶۰. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{0}^{\frac{1}{\cos\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr+$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{\frac{1}{\sin\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$$

۲۱۶۱. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{0}^{\frac{1}{\cos\varphi}} r f(r)\,dr$.

۲۱۶۲. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_{0}^{\frac{1}{\sin\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$.

۲۱۶۳.
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(tg\varphi)\,d\varphi \int_{0}^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} r\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(tg\varphi)\,d\varphi \int_{0}^{\frac{1}{\sin\varphi}} r\,dr +$$
$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} f(tg\varphi)\,d\varphi \int_{0}^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} r\,dr$$

۲۱۶۴.
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr +$$
$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$$

۲۱۶۵. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{a\cos\varphi} r^2 \sin\varphi\,dr = \frac{a^3}{12}$.

۲۱۶۶. $\frac{3}{2}\pi a^4$

۲۱۶۷. $\frac{\pi a^3}{3}$. ۲۱۶۸. $(\frac{22}{9}+\frac{\pi}{2})a^3$. ۲۱۶۹. $\frac{\pi a^3}{6}$.

۲۱۷۰. $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{16\sqrt{2}-20}{9}\right)\frac{a^3}{2}$ ۲۱۷۱. $\frac{2}{3}\pi ab$. **راهنمائی.** ژاکوبین $I=abr$.
حدود انتگرال‌گیری $2\pi \geqslant \varphi \geqslant 0$ ، $1 \geqslant r \geqslant 0$.

۲۱۷۲. $$\int_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} dv \int_{0}^{\frac{e}{1-v}} f(u-uv, uv)u\,du.$$

حل. داریم، $x=u(1-v)$ و $y=uv$ ژاکوبین $I=u$. حدود u را از تابع v معین می‌کنیم: به‌ازای $x=0$ داریم، $u(1-v)=0$، از آنجا $u=0$ (زیرا $1-v\neq 0$)؛ به‌ازای $x=c$ داریم: $u=\frac{c}{1-v}$. حدود v: چون $y=\alpha x$، از آنجا $uv=\alpha u(1-v)$. بنابراین، $v=\frac{\alpha}{1+\alpha}$؛ برای $y=\beta x$ بدست می‌آید $v=\frac{\beta}{1+\beta}$.

۲۱۷۳. $$I=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 du \int_{-u}^{u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)dv + \int_1^2 du \int_{u-2}^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)dv\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} dv \int_{-v}^{2+v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)du + \int_0^1 dv \int_{v}^{2-v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)du\right]$$

راهنمائی. بعد از تغییر متغیرها، معادله‌های ضلعهای مربع چنین می‌شود،
$u=v$ ؛ $u+v=2$ ؛ $u-v=2$ ؛ $u=-v$.

۲۱۷۴. $ab\left[\left(\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{k^2}\right)arctg\frac{ak}{bh}+\frac{ab}{hk}\right]$ **حل.** معادلهٔ منحنی چنین است،

$r^4 = r^2\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi\right)$ ، از آنجا حد پایین برای r مساوی صفر و حد بالا

$r = \sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}$. چون r باید مقداری حقیقی باشد داریم:

$\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi \geqslant 0$؛ از آنجا برای اولین زاویهٔ مختصاتی داریم: $tg\varphi \leqslant \frac{ak}{bh}$.

با توجه به‌تقارن حوزهٔ انتگرال‌گیری نسبت به محورها می‌توان $\frac{1}{4}$ تمام انتگرال را

که محدود به‌ربع اول است محاسبه کرد:

$$\iint\limits_{(S)} dxdy = 4\int\limits_0^{arctg\frac{ah}{bk}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}} abrdr$$

۲۱۷۵. a) $4\frac{1}{2}$؛ $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx + \int\limits_1^4 dy\int\limits_{y-2}^{\sqrt{y}} dx$؛ b) $\frac{\pi^2 a^2}{4} - \frac{a^2}{2}$؛ $\int\limits_0^a dx\int\limits_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$.

۲۱۷۶. a) $\frac{9}{2}$؛ b) $(2+\frac{\pi}{4})a^2$. **۲۱۷۷.** $\frac{7a^2}{120}$.

۲۱۷۸. $\frac{10}{3}a^2$. **۲۱۷۹.** π. راهنمائی. $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **۲۱۸۰.** $\frac{16}{3}\sqrt{15}$.

۲۱۸۱. $3(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})$. **۲۱۸۲.** $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$. **۲۱۸۳.** $\frac{4}{5}\pi a^2$. **۲۱۸۴.** ۶.

۲۱۸۵. 10π. **راهنمائی.** تغییر متغیرها را انجام دهید: $x - 2y = u$ ، $3x + 4y = v$.

۲۱۸۶. $\frac{1}{3}(b-a)(\beta-\alpha)$. **۲۱۸۷.** $\frac{1}{3}(\beta-\alpha)ln\frac{b}{a}$.

۲۱۸۸. $v=\int_{۰}^{۱}dy\int_{y}^{۱}(۱-x)dx=\int_{۰}^{۱}dx\int_{۰}^{x}(۱-x)dy$. **۲۱۹۳.** $\frac{\pi a^۳}{۶}$.

۲۱۹۴. $\frac{۳}{۴}$. **۲۱۹۵.** $\frac{۱}{۶}$. **۲۱۹۶.** $\frac{a^۳}{۳}$. **۲۱۹۷.** $\frac{\pi r^۴}{۴a}$. **۲۱۹۸.** $\frac{۴۸\sqrt{۶}}{۵}$.

۲۱۹۹. $\frac{۸۸}{۱۰۵}$. **۲۲۰۰.** $\frac{a^۳}{۱۸}$. **۲۲۰۱.** $\frac{abc}{۳}$. **۲۲۰۲.** $\pi a^۳(\alpha-\beta)$.

۲۲۰۳. $\frac{۴}{۳}\pi a^۳(۲\sqrt{۲}-۱)$. **۲۲۰۴.** $\frac{۴}{۳}\pi a^۳(\sqrt{۲}-۱)$. **۲۲۰۵.** $\frac{\pi a^۳}{۳}$.

۲۲۰۶. $\frac{۴}{۳}\pi abc$. **۲۲۰۷.** $\frac{\pi a^۳}{۳}(۶\sqrt{۳}-۵)$. **۲۲۰۸.** $\frac{۳۲}{۹}a^۳$.

۲۲۰۹. $\pi a(۱-e^{-R^۲})$. **۲۲۱۰.** $\frac{۳\pi ab}{۲}$. **۲۲۱۱.** $\frac{۳\sqrt{۳}-۲}{۲}$.

۲۲۱۲. $(۲\sqrt{۲}-۱)\frac{\sqrt{۲}}{۳}$. **راهنمائی.** این تغییر متغیرها را انجام دهید، $xy=u$ ، $\frac{y}{x}=v$. **۲۲۱۳.** $\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲b^۲+b^۲c^۲+c^۲a^۲}$. **۲۲۱۴.** $۴(m-n)R^۲$.

۲۲۱۵. $\frac{\sqrt{۲}}{۲}a^۲$. **راهنمائی.** در صفحهٔ YOZ انتگرال بگیرید. **۲۲۱۶.** $۴a^۲$.

۲۲۱۷. $۸a^۲\arcsin\frac{b}{a}$. **۲۲۱۸.** $\frac{۱}{۳}\pi a^۲(۳\sqrt{۳}-۱)$. **۲۲۱۹.** $۸a^۲$.

۲۲۲۰. $۳\pi a^۲$. **راهنمائی.** به‌مختصات قطبی بروید. **۱.۲۲۲۰.** **راهنمائی.** سطح را بر صفحهٔ XOY تصویر کنید. **۲.۲۲۲۰.** $a^۲\sqrt{۲}$.

۲۲۲۱. $\sigma=\frac{۲}{۳}\pi a^۲\left[\left(۱+\frac{R^۲}{a^۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}-۱\right]$. **راهنمائی.** به‌مختصات قطبی بروید.

۲۲۲۲. $\frac{۱۶}{۹}a^۳$ و $۸a^۲$. **راهنمائی.** به‌مختصات قطبی بروید.

۲۲۲۳. $۸a^۲\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{۲}}{۵}$. **راهنمائی:**

$$\sigma = \int_{\circ}^{\frac{a}{۲}} dx \int_{\circ}^{\frac{a}{۲}} \frac{a\,dy}{\sqrt{a^۲-x^۲-y^۲}} = ۸a \int_{\circ}^{\frac{a}{۲}} \arcsin \frac{a}{۲\sqrt{a^۲-x^۲}}\,dx.$$

انتگرال جزء به جزء بگیرید و سپس تبدیل $x=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\sin t$ را انجام دهید.

۲۲۲۴. $\frac{\pi}{۴}\left(b\sqrt{b^۲+c^۲}-a\sqrt{a^۲+c^۲}+c^۲\ln\frac{b+\sqrt{b^۲+c^۲}}{a+\sqrt{a^۲+c^۲}}\right)$. **راهنمائی.** به‌مختصات قطبی بروید.

۲۲۲۵. $\frac{۲\pi\delta R^۲}{۳}$. **۲۲۲۶.** $\frac{a^۳b}{۱۲}$ ؛ $\frac{a^۲b^۲}{۲۴}$.

۲۲۲۷. $\bar{x}=\frac{۱۲-\pi^۲}{۳(۴-\pi)}$ ؛ $\bar{y}=\frac{\pi}{۶(۴-\pi)}$. **۲۲۲۸.** $\bar{x}=\frac{۵}{۶}a$ ؛ $\bar{y}=\circ$.

۲۲۲۹. $\bar{x}=\frac{۲a\sin\alpha}{۳\alpha}$ ؛ $\bar{y}=\circ$. **۲۲۳۰.** $\bar{x}=\frac{۲}{۵}$ ؛ $\bar{y}=\circ$. **۲۲۳۱.** $I_X=۴$.

۲۲۳۲. (a $I_\circ=\frac{\pi}{۳۲}(D^۴-d^۴)$ ؛ (b $I_X=\frac{\pi}{۶۴}(D^۴-d^۴)$.

۲۲۳۳. $I=\frac{۲}{۳}a^۴$. **۲۲۳۴.** $\frac{۸}{۵}a^۴$. **راهنمائی.** $I=\int_{\circ}^{a}dx\int_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}}(y+a)^۲dy$.

۲۲۳۵. $۹\frac{۳}{۸}-۱۶\ln ۲$. **راهنمائی.** فاصلهٔ نقطهٔ (x,y) از خط $x=y$ برابراست با $d=\frac{x-y}{\sqrt{۲}}$ که به‌کمک معادلهٔ قائم‌برخط بدست‌می‌آید.

۲۲۳۶. $I=\frac{۱}{۴۰}ka^۵[۷\sqrt{۲}+۳\ln(\sqrt{۲}+۱)]$ که در آن k عبارتست از ضریب تناسب. **راهنمائی.** مبداء مختصات را در راسی‌که فاصله از آن متناسب با تکاثف صفحه است و محورها را در جهت ضلعهای مربع قرار دهید. گشت‌آور ماند نسبت به‌محور OX معین می‌شود. با عبور به‌مختصات قطبی داریم:

$$I_X = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} d\varphi \int_{۰}^{a\sec\varphi} kr(r\sin\varphi)^{۲} r\,dr \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} d\varphi \int_{۰}^{a\operatorname{cosec}\varphi} kr(r\sin\varphi)^{۲} r\,dr.$$

۲۲۳۷. $I_{۰} = \frac{۳۵}{۱۶}\pi a^{۴}$. **۲۲۳۸.** $I_{۰} = \frac{\pi a^{۴}}{۲}$. **۲۲۳۹.** $\frac{۳۵}{۱۲}\pi a^{۴}$.

راهنمائی. متغیرهای انتگرال را t و y بگیرید (مسئلهٔ ۲۱۵۶ را ببینید).

۲۲۴۰. $\int_{۰}^{۱} dx \int_{۰}^{۱-x} dy \int_{۰}^{۱-x-y} f(x,y,z)dz$.

۲۲۴۱. $\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^{۲}-x^{۲}}}^{\sqrt{R^{۲}-x^{۲}}} dy \int_{۰}^{H} f(x,y,z)dz$.

۲۲۴۲. $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}} dy \int_{\sqrt{\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}}}^{c} f(x,y,z)dz$.

۲۲۴۳. $\int_{-۱}^{۱} dx \int_{-\sqrt{۱-x^{۲}}}^{\sqrt{۱-x^{۲}}} dy \int_{۰}^{\sqrt{۱-x^{۲}-y^{۲}}} f(x,y,z)dz$.

۲۲۴۴. $\frac{۸}{۱۵}(۳۱+۱۲\sqrt{۲}-۲۷\sqrt{۳})$. **۲۲۴۵.** $\frac{۴\pi\sqrt{۲}}{۳}$. **۲۲۴۶.** $\frac{\pi^{۲}a^{۲}}{۸}$.

۲۲۴۷. $\frac{۱}{۷۲۰}$. **۲۲۴۸.** $\frac{۱}{۲}\ln ۲ - \frac{۵}{۱۶}$. **۲۲۴۹.** $\frac{\pi a^{۵}}{۵}\left(۱۸\sqrt{۳}-\frac{۹۷}{۶}\right)$.

۲۲۵۰. $\frac{۵۹}{۴۸۰}\pi R^{۵}$. **۲۲۵۱.** $\frac{\pi abc^{۲}}{۴}$. **۲۲۵۲.** $\frac{۴}{۵}\pi abc$. **۲۲۵۳.** $\frac{\pi h^{۲}R^{۲}}{۴}$.

۲۲۵۴. πR^3. **۲۲۵۵.** $\frac{8}{9}a^2$. **۲۲۵۶.** $\frac{8}{3}r^3(\pi-\frac{4}{3})$.

۲۲۵۷. $\frac{4}{15}\pi R^5$. **۲۲۵۸.** $\frac{\pi}{10}$. **۲۲۵۹.** $\frac{32}{9}a^2h$. **۲۲۶۰.** $\frac{3}{4}\pi a^3$.

حل.

$$v=2\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}dy\int_0^{\frac{x^2+y^2}{2a}}dz=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}rdr\int_0^{\frac{r^2}{2a}}dh=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\frac{r^3dr}{2a}=$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2a\cos\varphi)^4}{4}d\varphi=\frac{3}{4}\pi a^3.$$

۲۲۶۱. $\frac{2\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **راهنمائی.** به‌مختصات کروی بروید. **۲۲۶۲.** $\frac{19}{6}\pi$.

۲۲۶۳. $\frac{a^3}{9}(3\pi-4)$ **راهنمائی.** به‌مختصات استوانه‌ای بروید. **۲۲۶۴.** πabc.

۲۲۶۴.۱. $\frac{\pi^2abc}{4\sqrt{2}}$. **۲۲۶۴.۲.** $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1)abc$.

۲۲۶۵. $\frac{abc}{2}(a+b+c)$. **۲۲۶۶.** $\frac{ab}{24}(6c^2-a^2-b^2)$

۲۲۶۷. $\bar{x}=0$ ؛ $\bar{y}=0$ ؛ $\bar{z}=\frac{2}{5}a$ **راهنمائی.** از مختصات کروی استفاده کنید.

۲۲۶۸. $\bar{x}=\frac{4}{3}$ ؛ $\bar{y}=0$ ؛ $\bar{z}=0$ **۲۲۶۹.** $\frac{\pi a^2h}{12}(3a^2+4h^2)$ **راهنمائی.** محور استوانه را محور OZ وصفحهٔ قاعدهٔ استوانهٔ را صفحهٔ XOY بگیرید. گشتاور ماند نسبت

به محور OX محاسبه می‌شود. پس ازعبور به‌مختصات استوانه‌ای‌مربع‌فاصلهٔ عنصر $rd\varphi drdz$ از محور OX برابر است با $r^۲sin^۲\varphi+z^۲$. **۲۲۷۰.** $\frac{\pi\rho ha^۲}{۶۰}(۲h^۲+۳a^۲)$.

راهنمائی. قاعدهٔ مخروط را صفحهٔ XOY و محور مخروط را محور OZ انتخاب کنید. گشت‌آور ماند نسبت به‌محور OX محاسبه می‌شود. ضمن عبور به‌مختصات استوانه‌ای، برای نقطه‌های سطح مخروط داریم: $r=\frac{a}{h}(h-z)$، ضمناً مجذور فاصلهٔ عنصر $rd\varphi drdz$ از محور OX برابر است با: $r^۲sin^۲\varphi+z^۲$. **۲۲۷۱.** $۲\pi k\rho h(۱-cos\alpha)$، که در آن k عبارتست ازضریب تناسب و ρ تکاثف (چگالی). **حل.** رأس مخروط رابه‌عنوان مبداء مختصات و محور آنرا به‌عنوان محور OZ می‌گیریم. اگر به‌مختصات کروی برویم، معادلهٔ سطح جانبی مخروط به‌صورت $\psi=\frac{\pi}{۲}-\alpha$ و معادلهٔ صفحهٔ قاعدهٔ آن $r=\frac{h}{sin\psi}$ می‌شود. ازتقارن نتیجه می‌شود که برآیندنیروهای‌جاذبه‌درجهت OZ است. جرم عنصر حجم ... که در آن ρ عبارتست ازتکاثف (چگالی). مولفه روی محور ... می‌کند برابر است با

$\frac{kdm}{r^۲}sin\psi=k\rho sin\psi\ldots$ وبرآیندکل نیروهای جاذبه برابراست‌با

$$\int_۰^{۲\pi}d\varphi\int_۰^{\frac{\pi}{۲}-\alpha}d\Psi\int_۰^{\mathrm{hcosec}\psi}k\rho\, sin\psi\ldots$$

۲۲۷۲. حل. مختصات استوانه‌ای (ρ,φ,z) را درنظر می‌گیریم‌که مبداء آن مرکزکره باشد و محور OZ آن از نقطهٔ مادی عبورکرده باشد، جرم نقطهٔ مادی‌را مساوی m می‌گیریم فاصلهٔ‌این‌نقطه ازمرکزکره را به ξ نشان دهیم. $r=\sqrt{\rho^۲+(\xi-z)^۲}$ را فاصلهٔ عنصر حجم dv تا جرم m فرض می‌کنیم. نیروی‌جاذبهٔ عنصر حجمی dv ونقطهٔ مادی m در جهت r است و از لحاظ عددی برابراست با $-k\gamma m\frac{dv}{r^۲}$، که درآن $\gamma=\frac{M}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}$ چگالی‌کره و

$dv=\rho d\varphi d\rho dz$ عنصر حجم است. اگر این نیرو را روی OZ تصویر کنیم بدست‌می‌آید:

$$dF=-\frac{km\gamma dv}{r^{2}}\cos(\hat{rz})=-km\gamma\frac{\xi-z}{r^{3}}\rho d\varphi d\rho dz$$

ازآنجا $F=-km\gamma\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{-R}^{R}(\xi-z)dz\int_{0}^{\sqrt{R^{2}-z^{2}}}\frac{\rho d\rho}{r^{3}}=km\gamma\frac{4}{3}\pi R^{3}\frac{1}{\xi^{2}}$،

اما چون داریم، $\frac{4}{3}\gamma\pi R^{3}=M$، بنابراین $F=\frac{kMm}{\xi^{2}}$.

۲۲۷۳. $\int_{x}^{\infty}y^{2}e^{-xy^{2}}dy-e^{-x^{3}}$. **۲۲۷۵.** a) $\frac{1}{p}$ $(p>0)$؛ b) $\frac{1}{p-\alpha}$ به‌ازای $p>\alpha$؛ c) $\frac{\beta}{p^{2}+\beta^{2}}$ $(p>0)$؛ d) $\frac{p}{p^{2}+\beta^{2}}$ $(p>0)$.

۲۲۷۶. $-\frac{1}{n^{2}}$. **۲۲۷۷.** $\frac{2}{p^{3}}$. **راهنمائی.** از $\int_{0}^{\infty}e^{-pt}dt=\frac{1}{p}$ دو بار دیفرانسیل بگیرید.

۲۲۷۸. $\ln\frac{\beta}{\alpha}$. **۲۲۷۹.** $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$.

۲۲۸۰. $\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$. **۲۲۸۱.** $\pi(\sqrt{1-\alpha^{2}}-1)$. **۲۲۸۲.** $\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$.

۲۲۸۳. ۱. **۲۲۸۴.** $\frac{1}{2}$. **۲۲۸۵.** $\frac{\pi}{4}$. **۲۲۸۶.** $\frac{\pi}{4a^{2}}$. **راهنمائی.** به‌مختصات قطبی بروید.

۲۲۸۷. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **۲۲۸۸.** $\frac{\pi^{2}}{8}$. **۲۲۸۹.** متقارب. **حل.** از S مبداء مختصات را با ε مجاور آن جدا می‌کنیم، یعنی $I_{\varepsilon}=\iint_{(S_{\varepsilon})}\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}dxdy$ را مورد مطالعه قرارمی‌دهیم که درآن حوزهٔ جدا شده دایره‌ای است‌به شعاع ε و مرکزمبداء مختصات.

اگر به‌مختصات قطبی برویم، داریم

$$I_s = \int_{\circ}^{2\pi} d\varphi \int_{S}^{1} r\ln r\,dr = \int_{\circ}^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\ln r\Big|_{\circ}^{1} - \frac{1}{2}\int_{\circ}^{1} r\,dr\right] d\varphi =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon - \frac{1}{4}\right)$$

ازآنجا $\lim\limits_{\varepsilon\to\circ} I_s = -\frac{\pi}{2}$ **۲۲۹۰.** به‌ازای $\alpha > \circ$ متقارب است.

۲۲۹۱. متقارب. **راهنمائی.** خط $y = x$ را با سطح باریکی احاطه‌کنید وفرض کنید:

$$\iint_{(S)} \frac{dxdy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} + \lim_{\varepsilon\to\circ}\int_{\circ}^{1} dx \int_{\circ}^{x-\varepsilon} \frac{dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} +$$

$$+ \lim_{\delta\to\circ}\int_{\circ}^{1} dx \int_{x+\delta}^{1} \frac{dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$$

۲۲۹۲. به‌ازای $\alpha > \frac{3}{2}$ متقارب است. **۲۲۹۳.** $\circ$. **۲۲۹۴.** $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$.

۲۲۹۵. $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. **۲۲۹۶.** $\frac{256}{15}a^3$.

۲۲۹۷. $\frac{a^2}{3}\left[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$. **۲۲۹۸.** $\frac{a^5(1+m^2)}{5m}$. **۲۲۹۹.** $a^2\sqrt{2}$.

۲۳۰۰. $\frac{1}{54}(56\sqrt{7}-1)$. **۲۳۰۱.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\,\mathrm{arctg}\frac{2\pi b}{a}$. **۲۳۰۲.** $2\pi a^2$.

۲۳۰۳. $\frac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)$. **راهنمائی.** $\int_C f(x,y)ds$ را می‌توان ازلحاظ هندسی

به‌عنوان مساحت سطح استوانه‌ای تعبیرکردکه مولد آن موازی OZ وقاعدهٔ آن دورهٔ انتگرال‌گیری و ارتفاعهای مساوی مقادیر زیر انتگرال‌گیری است. به‌این‌ترتیب:

$S=\int_C x\,ds$ که در آن C عبارتست از قوس OA از سهمی $y=\frac{3}{8}x^2$ که دو نقطهٔ $(0,0)$ و $(4,6)$ را بهم وصل می‌کند. **۲۳۰۴.** $a\sqrt{3}$.

۲۳۰۵. $2\left(b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$.

۲۳۰۶. $\sqrt{a^2+b^2}\left(\pi\sqrt{a^2+4\pi b^2}+\frac{a^2}{2b}\ln\frac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}\right)$.

۲۳۰۷. $(\frac{4}{3}a, \frac{4}{3}a)$. **۲۳۰۸.** $2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}$. **۲۳۰۹.** $\frac{kMmb}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}}$.

۲۳۱۰. $40\frac{19}{30}$. **۲۳۱۱.** $-2\pi a^2$. **۲۳۱۲.** a) $\frac{4}{3}$؛ b) 0؛ c) $\frac{12}{5}$؛ d) -4؛ e) 4. **۲۳۱۳.** در تمام حالتها ۴. **۲۳۱۴.** -2π. **راهنمائی.** معادلهٔ پارامتری دایره را جستجو کنید. **۲۳۱۵.** $\frac{4}{3}ab^2$. **۲۳۱۶.** $-2\sin 2$.

۲۳۱۷. 0. **۲۳۱۸.** a) 8؛ b) 12؛ c) 2؛ d) $\frac{3}{2}$؛ e) $\ln(x+y)$؛ f) $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\int_{y_1}^{y_2}\varphi(y)dy$. **۲۳۱۹.** a) 62؛ b) 1؛ c) $\frac{1}{4}+\ln 2$؛ d) $1+\sqrt{2}$.

۲۳۲۰. $\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}$. **۲۳۲۲.** a) $x^2+3xy-2y^2+C$؛ b) $x^3-x^2y+xy^2-y^3+C$؛ c) $e^{x-y}(x+y)+C$؛ d) $\ln|x+y|+C$.

۲۳۲۳. $-2\pi\alpha(a+b)$. **۲۳۲۴.** $-\pi R^2\cos^2\alpha$. **۲۳۲۵.** $\left(\frac{1}{6}+\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)R^3$.

۲۳۲۶. a) -2؛ b) $abc-1$؛ c) $5\sqrt{2}$؛ d) 0. **۲۳۲۷.** $I=\iint_{(S)} y^2dxdy$.

۲۳۲۸. $-\frac{4}{3}$. **۲۳۲۹.** $\frac{\pi R^4}{2}$. **۲۳۳۰.** $-\frac{1}{3}$. **۲۳۳۱.** 0. **۲۳۳۲.** a) 0؛ b) $2n\pi$. **راهنمائی.** در حالت b) رابطهٔ گرین را درحوزهٔ بین دورهٔ C و دایره‌ای با شعاع به‌اندازهٔ کافی کوچك وبه‌مرکز مبداء مختصات بکار ببرید. **۲۳۳۳. حل.** اگر فرض کنیم که جهت مماس برجهت حرکت مثبت دوره منطبق باشد، داریم:

$cos(X,n)=cos(Y,t)=\dfrac{dy}{ds}$؛ بنابراین، $\oint\limits_{c} cos(X,n)ds=\oint\limits_{c}\dfrac{dy}{ds}\,ds=\oint\limits_{c} dy=0$

۲۳۳۴. $2S$، که در آن S عبارت است از مساحت محدود به‌دورهٔ C.

۲۳۳۵. -4. **راهنمائی.** از رابطهٔ گرین نمی‌شود استفاده کرد. **۲۳۳۶.** πab.

۲۳۳۷. $\frac{3}{8}\pi a^2$. **۲۳۳۸.** $6\pi a^2$. **۲۳۳۹.** $\frac{3}{2}a^2$.

راهنمائی. $y=tx$ فرض کنید که در آن t پارامتر است.

۲۳۴۰. $\frac{a^2}{60}$. **۲۳۴۱.** $\pi(R+r)(R+2r)$؛ $6\pi R^2$ به‌ازای $R=r$. **راهنمائی.**

معادلهٔ اپیسیکلوئید به‌صورت،

$$x=(R+r)cost-rcos\frac{R+r}{r}t \quad ; \quad y=(R+r)sint-rsin\frac{R+r}{r}t$$

است، که در آن t عبارتست از زاویهٔ چرخش شعاعی از دایرهٔ بدون حرکت که از نقطهٔ تماس عبور می‌کند، **۲۳۴۲.** $\pi(R-r)(R-2r)$ ؛ $\frac{3}{8}\pi R^2$ به‌ازای $r=\frac{R}{4}$.

راهنمائی. معادلهٔ هیپوسیکلوئید از معادلهٔ اپیسیکلوئید متناظر (مسئله ۲۳۴۱ را ببینید) با تبدیل r به $-r$ بدست می‌آید. **۲۳۴۳.** FR. **۲۳۴۴.** $mg(z_1-z_2)$.

۲۳۴۵. $\frac{k}{2}(a^2-b^2)$ که در آن k عبارتست از ضریب تناسب. **۲۳۴۶.** a) پتانسیل $U=-mgz$، کار $mg(z_1-z_2)$ ؛ b) پتانسیل $U=\frac{\mu}{r}$، کار $-\frac{\mu}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ؛

c) پتانسیل $U=-\frac{k^2}{2}(x^2+y^2+z^2)$ کار $\frac{h^2}{2}(R^2-r^2)$. **۲۳۴۷.** $\frac{8}{3}\pi a^4$.

۲۳۴۸. $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$. **۲۳۴۹.** 0. **۲۳۵۰.** $\frac{3}{4}\pi abc$.

۲۱۳۵. $\frac{ya^4}{2}$. **۲۳۵۲.** $\frac{3}{4}$.

۲۳۵۳. $\frac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}a$. **۲۳۵۴.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}h^4$. **۲۳۵۵.** a) 0 ؛

b) $-\iint\limits_{(S)}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)ds$. **۲۳۵۶.** 0. **۲۳۵۷.** 4π.

۲۳۵۸. $-\pi a^2$. **۲۳۵۹.** $-a^3$. **۲۳۶۰.** $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$ ، $\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$ ، $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. **۲۳۶۱.** 0. **۲۳۶۲.** $2\iiint\limits_{(v)}(x+y+z)dxdydz$.

۲۳۶۳. $2\iiint\limits_{(v)}\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

۲۳۶۴. $\iiint\limits_{(v)}\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\right)dxdydz$. **۲۳۶۵.** $3a^4$. **۲۳۶۶.** $\frac{a^3}{2}$.

۲۳۶۷. $\frac{12}{5}\pi a^5$. **۲۳۶۸.** $\frac{\pi a^2b^2}{2}$. **۲۳۷۱.** کره؛ استوانه. **۲۳۷۲.** مخروط.

۲۳۷۳. دایرهٔ $x^2+y^2=c_1^2$ ، $z=c_2$. **۲۳۷۶.** $gradU(A)=9i-3j-3k$؛
$|gradU(A)|=\sqrt{99}=3\sqrt{11}$ ؛ $z^2=xy$ ؛ $x=y=z$.

۲۳۷۷. a) $\frac{\mathbf{r}}{r}$ ؛ b) $2\mathbf{r}$ ؛ c) $-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ ؛ d) $f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$.

۲۳۷۸. $grad(\mathbf{c}\mathbf{r})=\mathbf{c}$ ، سطح تراز صفحه‌ای است عمود بر بردار $\mathbf{c}$.

۲۳۷۹. $\frac{2U}{r}=\frac{\partial u}{\partial r}$ ، $|gradU|=\frac{\partial U}{\partial r}$ به‌ازای $a=b=c$.

۲۳۸۰. $\frac{\partial U}{\partial l}=-\frac{\cos(l,\mathbf{r})}{r^2}$ ؛ $\frac{\partial U}{\partial l}=0$ وقتی‌که $\mathbf{r}\perp l$. **۲۳۸۲.** $\frac{2}{r}$.

۲۳۸۳. $div\,a=\frac{2}{r}f(r)+f'(r)$. **۲۳۸۵.** a) $div\,\mathbf{r}=3$ ، $rot\,\mathbf{r}=0$؛

b) $div(\mathbf{r}\mathbf{c})=\frac{\mathbf{r}\mathbf{c}}{r}$ ، $rot(\mathbf{r}\mathbf{c})=\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{c}}{r}$ ؛ c) $div(f(\mathbf{r})\mathbf{c})=\frac{f'(r)}{r}(\mathbf{c}\mathbf{r})$ ،

$rot(f(\mathbf{r})\mathbf{c})=\frac{f'(r)}{r}\mathbf{c}\times\mathbf{r}$ ، **۲۳۸۶.** $div\,v=0$ ، $rot\,v=2w$ که در آن

$w=\omega k$. **۲۳۸۷.** $2\omega n^\circ$ که در آن n° عبارتست از بردار واحد موازی محور دوران.

۲۳۸۸. $divgradU=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ؛ $rotgradU=0$.

۲۳۹۱. $3\pi R^2H$. ۲۳۹۲. a) $\frac{1}{10}\pi R^2H(3R^2+2H^2)$؛ b) $\frac{3}{10}\pi R^2H(R^2+2H^2)$. ۲۳۹۳. $divF=0$ در همهٔ نقطه‌ها بجز مبداء مختصات جریان مساوی $4\pi m$. **راهنمائی.** برای محاسبهٔ جریان از قضیهٔ اوستروگرادسکی ــ گوس استفاده کنید. ۲۳۹۴. $2\pi^2h^2$. ۲۳۹۵. $\frac{-\pi R^6}{8}$.

۲۳۹۶. $U=\int_{r_0}^{r} rf(r)dr$. ۲۳۹۷. $\frac{m}{r}$. ۲۳۹۸. a) ندارد؛ b) $U=xyz+c$؛ c) $u=xy+xz+yz+c$. ۲۴۰۰. بله.

فصل هشتم

۲۴۰۱. $\frac{1}{2n-1}$. ۲۴۰۲. $\frac{1}{2n}$. ۲۴۰۳. $\frac{n}{2^{n-1}}$. ۲۴۰۴. $\frac{1}{n^2}$.

۲۴۰۵. $\frac{n+2}{(n+1)^2}$. ۲۴۰۶. $\frac{2n}{3n+2}$. ۲۴۰۷. $\frac{1}{n(n+1)}$.

۲۴۰۸. $\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}$. ۲۴۰۹. $(-1)^{n+1}$. ۲۴۱۰. $n^{(n-1)^{n+1}}$.

۲۴۱۶. متباعد است. ۲۴۱۷. متقارب. ۲۴۱۸. متباعد. ۲۴۱۹. متباعد.

۲۴۲۰. متباعد. ۲۴۲۱. متباعد. ۲۴۲۲. متباعد. ۲۴۲۳. متباعد.

۲۴۲۴. متباعد. ۲۴۲۵. متقارب. ۲۴۲۶. متقارب. ۲۴۲۷. متقارب.

۲۴۲۸. متقارب. **۲۴۲۹.** متقارب. **۲۴۳۰.** متقارب. **۲۴۳۱.** متقارب.

۲۴۳۲. متقارب. **۲۴۳۳.** متقارب. **۲۴۳۴.** متباعد. **۲۴۳۵.** متباعد.

۲۴۳۶. متقارب. **۲۴۳۷.** متباعد. **۲۴۳۸.** متقارب. **۲۴۳۹.** متقارب.

۲۴۴۰. متقارب. **۲۴۴۱.** متباعد. **۲۴۴۲.** متقارب. **۲۴۴۳.** متقارب.

۲۴۴۴. متقارب. **۲۴۴۵.** متقارب. **۲۴۴۶.** متقارب. **۲۴۴۷.** متقارب.

۲۴۴۸. متقارب. **۲۴۴۹.** متقارب. **۲۴۵۰.** متباعد. **۲۴۵۱.** متقارب.

۲۴۵۲. متباعد. **۲۴۵۳.** متقارب. **۲۴۵۴.** متباعد. **۲۴۵۵.** متباعد.

۲۴۵۶. متقارب. **۲۴۵۷.** متباعد. **۲۴۵۸.** متقارب. **۲۴۵۹.** متباعد.

۲۴۶۰. متقارب. **۲۴۶۱.** متباعد. **۲۴۶۲.** متقارب. **۲۴۶۳.** متباعد.

۲۴۶۴. متقارب. **۲۴۶۵.** متقارب. **۲۴۶۶.** متقارب. **۲۴۶۷.** متباعد.

۲۴۶۸. متباعد. **راهنمائی.** $\frac{U_{n+1}}{U_n}>1$. **۲۴۷۰.** متقارب مشروط.

۲۴۷۱. متقارب مشروط. **۲۴۷۲.** متقارب مطلق. **۲۴۷۳.** متباعد.

۲۴۷۴. متقارب مشروط. **۲۴۷۵.** متقارب مطلق. **۲۴۷۶.** متقارب مشروط.

۲۴۷۷. متقارب مطلق. **۲۴۷۸.** متقارب مطلق. **۲۴۷۹.** متقارب مشروط.

۲۴۸۰. متقارب مطلق. **۲۴۸۱.** متقارب مشروط. **۲۴۸۲.** متقارب مطلق.

۲۴۸۴. a) متباعد؛ b) متقارب مطلق؛ c) متباعد؛ d) متقارب مشروط.

راهنمائی. در نمونه‌های a) و d) رشتهٔ $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k-1}+a_{2k})$ را مورد مطالعه قرار دهید، در نمونه‌های b) و c) بطور جداگانه رشته‌های $\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}$ و $\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}$ را بررسی کنید. **۲۴۸۵.** متباعد. **۲۴۸۶.** متقارب مطلق. **۲۶۸۷.** متقارب مطلق.

۲۴۸۸. متقارب مشروط. **۲۴۸۹.** متباعد. **۲۴۹۰.** متقارب مطلق.

۲۴۹۱. متقارب مطلق. **۲۴۹۲.** متقارب مطلق. **۲۴۹۳.** بله. **۲۴۹۴.** نه.

۲۴۹۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}$؛ متقارب. **۲۴۹۶.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$؛ متقارب.

۲۴۹۷. متباعد. **۲۴۹۹.** متقارب. **۲۵۰۰.** متقارب.

۲۵۰۱. $|R_4|<\frac{1}{120}$ ، $|R_5|<\frac{1}{720}$ ؛ $R_4<0$ ، $R_5>0$.

۲۵۰۲. $R_n<\frac{a_n}{2n+1}=\frac{1}{2^n(2n+1)n!}$. **راهنمائی.** باقیماندهٔ رشته را می‌توان به‌کمك مجموع جمله‌های تصاعد هندسی که از این باقیمانده بیشتر است تخمین زد:

$$R_n=a_n\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\right]<$$

$$<a_n\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right]$$

۲۵۰۳. $R_n<\frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}$ ؛ $R_{10}<3\cdot10^{-8}$.

۲۵۰۴. $\frac{1}{n+1}<R_n<\frac{1}{n}$.

حل.

$$R_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots>\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots=$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots=\frac{1}{n+1};$$

$$R_n<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots=\frac{1}{n}$$

۲۵۰۵. برای این رشته می‌توان مقدار باقیمانده را بدقت محاسبه کرد:

$$R_n=\frac{1}{15}\left(n+\frac{16}{15}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}$$

حل. $R_n=(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}+(n+2)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}+\cdots$.

طرفین تساوی را در $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{16}R_n=(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2}+(n+2)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+4}+\cdots$$

این دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$\frac{15}{16}R_n = n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+4}+\dots=$$

$$=n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}}{1-\frac{1}{16}}=\left(n+\frac{16}{15}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

که ازآنجا مقدار R_n بدست می‌آید. اگر $n=0$ فرض کنیم مجموع رشته: $S=\left(\frac{16}{15}\right)^2$ بدست می‌آید. **۲۵۰۶.** ۹۹، ۹۹۹. **۲۵۰۷.** ۲، ۳، ۵.

۲۵۰۸. $S=1$. **راهنمائی.** $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. **۲۵۰۹.** $S=1$ به‌ازای $x>0$، $S=-1$ به‌ازای $x<0$، $S=0$ به‌ازای $x=0$. **۲۵۱۰.** به‌ازای $x>1$ متقارب مطلق، به‌ازای $x\leqslant 1$ متباعد. **۲۵۱۱.** به‌ازای $x>1$ متقارب مطلق، به‌ازای $0<x\leqslant 1$ متقارب غیر مطلق، به‌ازای $x\leqslant 0$ متباعد. **۱۵۱۲** به‌ازای $x>e$ متقارب مطلق به ازای $1<x\leqslant e$ متقارب غیرمطلق، به‌ازای $x\leqslant 1$ متباعد. **۲۵۱۳.** $-\infty<x<\infty$. **۲۵۱۴.** $-\infty<x<\infty$. **۲۵۱۵.** به‌ازای $x>0$ متقارب مطلق، به‌ازای $x\leqslant 0$ متباعد. **حل.** ۱) به‌ازای $x>0$ رشتهٔ با جملهٔ عمومی $\frac{1}{e^{nx}}$ متقارب است؛ ولی $|a_n|\leqslant\frac{1}{e^{nx}}$، ۲) به‌ازای $x\leqslant 0$، $\frac{1}{e^{nx}}\geqslant 1$ ولی وقتی $n\to\infty$ مقدار $\cos nx$ بسمت صفر میل نمی‌کند، زیرا از $\cos nx\to 0$ معلوم می‌شود که $\cos 2nx\to -1$؛ بنابراین به‌ازای $x\leqslant 0$ شرط لازم تقارب نقض می‌شود. **۲۵۱۶.** متقارب مطلق است به‌ازای $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$؛ درنقطه‌های دیگرمتباعداست. **۲۵۱۷.** همه‌جا متقارب است. **۲۵۱۸.** به‌ازای $x\neq 0$ متقارب مطلق است.

۲۵۱۹. $x>1$، $x\leqslant -1$. **۲۵۲۰.** $x>3$، $x<1$. **۲۵۲۱.** $x\geqslant 1$، $x\leqslant -1$.

۲۵۲۲. $x\geqslant 5\frac{1}{3}$، $x<4\frac{2}{3}$. **۲۵۲۳.** $x>1$ ، $x<-1$.

۲۵۲۴. $-1<x<-\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}<x<1$. **راهنمائی.** به‌ازای این مقادیر x هم رشتهٔ

$\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ وهم رشتهٔ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k x^k}$ متقارب است، به‌ازای $|x| \geqslant 1$ و به‌ازای $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ جملهٔ عمومی رشته بسمت صفر میل نمی‌کند. **۲۵۲۵.** $-1 < x < 0$ ، $0 < x < 1$.

۲۵۲۶. $-1 < x < 1$. **۲۵۲۷.** $-2 \leqslant x < 2$. **۲۵۲۸.** $-1 < x < 1$.

۲۵۲۹. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. **۲۵۳۰.** $-1 < x \leqslant 1$. **۲۵۳۱.** $-1 < x < 1$.

۲۵۳۲. $-1 < x < 1$. **۲۵۳۳.** $-\infty < x < \infty$. **۲۵۳۴.** $x = 0$.

۲۵۳۵. $-\infty < x < \infty$. **۲۵۳۶.** $-4 < x < 4$. **۲۵۳۷.** $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

۲۵۳۸. $-2 < x < 2$. **۲۵۳۹.** $-e < x < e$. **۲۵۴۰.** $-3 < x < 3$.

۲۵۴۱. $-1 < x < 1$. **۲۵۴۲.** $-1 < x < 1$. **حل.** تباعد رشته به‌ازای $|x| \geqslant 1$ واضح است (ضمنا جالب است توجه کنیم‌که تباعد رشته در دوانتهای فاصلهٔ تقارب $x = \pm 1$ نه‌تنها به‌کمك شرط لازم تقارب، بلکه به‌کمك علامت دالامبر هم آشکار می‌شود). به‌ازای $|x| < 1$ داریم:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)!\, x^{(n+1)!}}{n!\, x^{n!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| (n+1) x^{n!n} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n \to \infty} (n+1)|x|^n = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{\left|\frac{1}{x}\right|^n} = 0$$

(تساوی اخیر را می‌توان بسادگی و به‌کمك قاعدهٔ هوپیتال بدست آورد).

۲۵۴۳. $-1 < x \leqslant 1$. **راهنمائی.** به‌کمك علامت دالامبر می‌توان نه‌تنها فاصلهٔ تقارب را پیدا کرد، بلکه تقارب رشتهٔ مفروض را در دو انتهای فاصلهٔ تقارب هم بررسی کرد.

۲۵۴۴. $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **راهنمائی.** به‌کمك علامت کوشی می‌توان نه‌تنها فاصلهٔ تقارب را پیدا کرد، بلکه تقارب رشتهٔ مفروض را در دوانتهای فاصلهٔ تقارب هم جستجو کرد.

۲۵۴۵. $2 < x \leqslant 8$. **۲۵۴۶.** $-2 \leqslant x < 8$. **۲۵۴۷.** $-2 < x < 4$.

۲۵۴۸. $1 \leqslant x \leqslant 3$. **۲۵۴۹.** $-4 \leqslant x \leqslant -2$. **۲۵۵۰** $x = -3$.

۲۵۵۱. $-7<x<-3$. ۲۵۵۲. $0\leqslant x<4$. ۲۵۵۳. $-\frac{5}{4}<x<\frac{13}{4}$.

۲۵۵۴. $-e-3<x<e-3$. ۲۵۵۵. $-2\leqslant x\leqslant 0$. ۲۵۵۶. $2<x<4$.

۲۵۵۷. $1<x\leqslant 3$. ۲۵۵۸. $-3\leqslant x\leqslant -1$. ۲۵۵۹. $1-\frac{1}{e}<x<1+\frac{1}{e}$.

راهنمائی. به‌ازای $x=1\pm\frac{1}{e}$ رشته متقارب‌است،زیرا:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}=\frac{1}{\sqrt{e}}\neq 0$$

۲۵۶۰. $-2<x<0$. ۲۵۶۱. $1<x\leqslant 3$.

۲۵۶۲. $1\leqslant x<5$. ۲۵۶۳. $2\leqslant x\leqslant 4$. ۲۵۶۴. $|z|<1$.

۲۵۶۵. $|z|<1$. ۲۵۶۶. $|z-2i|<3$. ۲۵۶۷. $|z|<\sqrt{2}$. ۲۵۶۸. $z=0$.

۲۵۶۹. $|z|<\infty$. ۲۵۷۰. $|z|<\frac{1}{2}$. ۲۵۷۶. $-\ln(1-x)\ (-1\leqslant x<1)$.

۲۵۷۷. $\ln(1+x)\ (-1<x\leqslant 1)$. ۲۵۷۸. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (|x|<1)$.

۲۵۷۹. $\operatorname{arctg}x\ (|x|\leqslant 1)$. ۲۵۸۰. $\frac{1}{(x-1)^2}\ (|x|<1)$.

۲۵۸۱. $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\ (|x|<1)$. ۲۵۸۲. $\frac{2}{(1-x)^3}\ (|x|<1)$.

۲۵۸۳. $\frac{x}{(x-1)^2}\ (|x|>1)$.

۲۵۸۴. $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\ (|x|<1)$. ۲۵۸۵. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ **راهنمائی.** مجموع رشتهٔ زیر را به‌ازای $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ مطالعه کنید (مسئله ۲۵۷۹ را ببینید):

$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$. ۲۵۸۶. 3. ۲۵۸۷. $a^x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\ln^n a}{n!}$

$(-\infty<x<\infty)$.

۲۵۸۸. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\right.$

$$+\frac{x^{۴}}{۴!}+\frac{x^{۵}}{۵!}-\cdots+(-۱)^{\frac{n^{۲}-n}{۲}}\frac{x^{n}}{n!}+\cdots\Big]$$

۲۵۸۹. $$\cos(x+a)=\cos a-x\sin a-\frac{x^{۲}}{۲!}\cos a+\frac{x^{۳}}{۳!}\sin a+\frac{x^{۴}}{۴!}\cos a+\cdots+$$
$$+\frac{x^{n}}{n!}\sin\left[a+\frac{(n+۱)\pi}{۲}\right]+\cdots\quad(-\infty<x<\infty).$$

۲۵۹۰. $$\sin^{۲}x=\frac{۲x^{۲}}{۲!}-\frac{۲^{۳}x^{۴}}{۴!}+\frac{۲^{۵}x^{۶}}{۶!}-\cdots+$$
$$+(-۱)^{n-۱}\frac{۲^{۲n-۱}x^{۲n}}{(۲n)!}+\cdots\quad(-\infty<x<\infty)$$

۲۵۹۱. $$\ln(۲+x)=\ln ۲+\frac{x}{۲}-\frac{x^{۲}}{۲\cdot ۲^{۲}}+\frac{x^{۳}}{۳\cdot ۲^{۳}}-\cdots+(-۱)^{n-۱}\frac{x^{n}}{n\cdot ۲^{n}}+\cdots$$

$(-۲<x\leqslant ۲)$. **راهنمائی.** برای بررسی جملهٔ متمم از قضیهٔ مربوط به‌انتگرال‌گیری رشتهٔ توانی استفاده کنید.

۲۵۹۲. $$\frac{۲x-۳}{(x-۱)^{۲}}=-\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۳)x^{n}\quad(|x|<۱).$$

۲۵۹۳. $$\frac{۳x-۵}{x^{۲}-۴x+۵}=-\sum_{n=۰}^{\infty}\left(۱+\frac{۲}{۳^{n+۱}}\right)x^{n}\quad(|x|<۱).$$

۲۵۹۴. $$xe^{-۲x}=x+\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}۲^{n-۱}x^{n}}{(n-۱)!}\quad(-\infty<x<\infty).$$

۲۵۹۵. $$e^{x^{۲}}=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{x^{۲n}}{n!}\quad(-\infty<x<\infty).$$

۲۵۹۶. $$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}\quad(-\infty<x<\infty).$$

۲۵۹۷. $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$.

۲۵۹۸. $1+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}\quad(-\infty<x<\infty)$.

۲۵۹۹. $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)3^{2n}\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(-\infty<x<\infty)$.

۲۶۰۰. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n=1}}\quad(-3<x<3)$. ۲۶۰۱. $(-2<x<2)$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{x^4}{2^5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\,\frac{x^6}{2^7}+\dots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\,\frac{x^{2n}}{2^{2n+1}}$$

۲۶۰۲. $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(|x|<1)$.

۲۶۰۳. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{n}x^n\quad\left(-\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

۲۶۰۴. $x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{(n-1)n}\quad(|x|\leqslant1)$.

۲۶۰۵. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(|x|\leqslant1)$.

۲۶۰۶. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\dots+$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots\quad(|x|\leqslant1).$$

۲۶۰۷. $x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,\frac{x^5}{5}-\dots+$

$$+\cdots+(-۱)^n\frac{۱\cdot۳\cdot۵\cdots(۲n-۱)}{۲\cdot۴\cdot۶\cdots۲n}\cdot\frac{x^{۲n-۱}}{۲n+۱}+\cdots\quad(|x|\leqslant۱).$$

۲۶۰۸. $$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{۲^{۴n-۳}x^{۲n}}{(۲n)!}\quad(-\infty<x<\infty).$$

۲۶۰۹. $$۱+\sum_{n=۲}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{n-۱}{n!}x^n\quad(-\infty<x<\infty).$$

۲۶۱۰. $$۸+۳\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱+۲^n+۳^{n-۱}}{n!}x^n\quad(-\infty<x<\infty).$$

۲۶۱۱. $$۲+\frac{x}{۲^۲\cdot۳\cdot۱!}-\frac{۲\cdot x^۲}{۲^۵\cdot۳^۲\cdot۲!}+\frac{۲\cdot۵x^۳}{۲^۸\cdot۳^۳\cdot۳!}+\cdots+$$
$$+(-۱)^{n-۱}\frac{۲\cdot۵\cdot۸\cdots(۳n-۴)x^n}{۲^{۳n-۱}\cdot۳^n\cdot n!}+\cdots\quad(-\infty<x<\infty)$$

۲۶۱۲. $$\frac{۱}{۶}-\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲^{n+۱}}+\frac{۱}{۳^{n+۱}}\right)x^n\quad(-۲<x<۲).$$

۲۶۱۳. $$۱+\frac{۳}{۴}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۱+۳^{۲n-۱})x^{۲n}}{(۲n)!}\quad(|x|<\infty).$$

۲۶۱۴. $$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۴n}}{۴^{n+۱}}\quad(|x|<\sqrt{۲}).$$

۲۶۱۵. $$\ln ۲+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}(۱+۲^{-n})\frac{x^n}{n}\quad(-۱<x\leqslant۱).$$

۲۶۱۶. $$\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)(۲n+۱)!}\quad(-\infty<x<\infty).$$

۲۶۱۷. $$x+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)n!}\quad(|x|<\infty).$$

۲۶۱۸. $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{x^n}{n^۲}$ $(|x|\leqslant ۱)$.

۲۶۱۹. $x+\frac{۱}{۲\cdot ۵}x^۵+\frac{۱\cdot ۳}{۲^۲\cdot ۹\cdot ۲!}x^۹+\cdots+$

$+\frac{۱\cdot ۳\cdot ۵\cdots(۲n-۱)}{۲^n(۴n+۱)n!}x^{۴n+۲}+\cdots$ $(|x|<۱)$.

۲۶۲۰. $x+\frac{x^۳}{۳}+\frac{۲x_۵}{۱۵}+\cdots$. **۲۶۲۱.** $x-\frac{x^۳}{۳}+\frac{۲x^۵}{۱۵}-\cdots$.

۲۶۲۲. $e\left(۱-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۴}{۶}-\cdots\right)$.

۲۶۲۳. $۱+\frac{x^۲}{۲}+\frac{۵x^۴}{۲۴}+\cdots$. **۲۶۲۴.** $-(\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۴}{۱۲}+\frac{x^۶}{۴۵}+\cdots)$.

۲۶۲۵. $x+x^۲+\frac{۱}{۳}x^۳+\cdots$. **۲۶۲۶. راهنمائی.** ازمعادلهٔ پارامتری بیضی شروع کنید، $x=a\cos t$ ، $y=b\sin t$ ، طول قوس بیضی را محاسبه‌کنید و عباراتی راکه‌بدست می‌آید به‌رشته‌ای برحسب قوای ε تبدیل کنید.

۲۶۲۸. $x^۳-۲x^۲-۵x-۲=-۷۸+۵۹(x+۴)-۱۴(x+۴)^۲+(x+۴)^۳$ $(-\infty<x<\infty)$.

۲۶۲۹. $f(x+h)=۵x^۳-۴x^۲-۳x+۲+$ $+(۱۵x^۲-۸x-۳)h+(۱۵x-۴)h^۲+۵h^۳$ $(-\infty<x<\infty ؛ -\infty<h<\infty)$.

۲۶۳۰. $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{(x-۱)^n}{n}$ $(۰<x\leqslant ۲)$.

۲۶۳۱. $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(x-۱)^n$ $(۰<x<۲)$.

۲۶۳۲. $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}(n+۱)(x+۱)^n$ $(-۲<x<۰)$.

۲۶۳۳. $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}(۲^{-n-۱}-۳^{-n-۱})(x+۴)^n$ $(-۶<x<-۲)$.

۲۶۳۴. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$ $(-2-\sqrt{3}<x<-2+\sqrt{3})$.

۲۶۳۵. $e^{-2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right]$ $(|x|<\infty)$.

۲۶۳۶.

$$2+\frac{x-4}{2^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{(x-4)^2}{2^4}+\frac{1\cdot3}{4\cdot6}\cdot\frac{(x-4)^3}{2^6}-\frac{1\cdot3\cdot5}{4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{(x-4)^4}{2^8}+\dots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{4\cdot6\cdot8\cdots2n}\cdot\frac{(x-4)^n}{2^{2n}}+\dots\quad(0\leqslant x\leqslant 8).$$

۲۶۳۷. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(|x|<\infty)$.

۲۶۳۸. $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(|x|<\infty)$.

۲۶۳۹. $-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2n+1}$ $(0<x<\infty)$. **راهنمائی.** تبدیل $\frac{1-x}{1+x}=t$ را انجام دهید و $\ln x$ را برحسب قوای t بنویسید.

۲۶۴۰.

$$\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\dots+$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n+\dots\quad\left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\infty\right).$$

۲۶۴۱. $|R|<\frac{e}{5!}<\frac{1}{40}$. ۲۶۴۲. $|R|<\frac{1}{11}$.

۲۶۴۳. $\frac{\pi}{۶}\approx\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}}{۳}+\frac{۱\cdot۳}{۲\cdot۴}\cdot\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}}{۵}\approx ۰/۵۲۳$ **راهنمائی.** برای اینکه ثابت کنیم که خطا از ۰/۰۰۱ تجاوز نمی‌کند، باید مانده را به‌کمک تصاعد هندسی که از این مانده بزرگتر است، برآورد کرد. **۲۶۴۴.** دو جمله؛ یعنی $۱-\frac{x^{۲}}{۲}$.

۲۶۴۵. دو جمله، یعنی $x-\frac{x^{۳}}{۶}$. **۲۶۴۶.** هشت جمله، یعنی $۱+\sum_{n=۱}^{۷}\frac{۱}{n!}$.

۲۶۴۷. ۹۹؛ ۹۹۹. **۲۶۴۸.** ۱/۹۲. **۲۶۴۹.** $|R|<۰/۰۰۰۳$.

۲۶۵۰. ۲/۰۸۷. **۲۶۵۱.** $|x|<۰/۶۹$؛ $|x|<۰/۳۹$؛ $|x|<۰/۲۲$.

۲۶۵۲. $|x|<۰/۳۹$؛ $|x|<۰/۱۸$. **۲۶۵۳.** $\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲^{۳}\cdot۳\cdot۳!}\approx ۰/۴۹۳۱$.

۲۶۵۴. ۰/۷۴۶۸. **۲۶۵۵.** ۰/۶۰۸. **۲۶۵۶.** ۰/۶۲۱.

۲۶۵۷. ۰/۲۵۰۵. **۲۶۵۸.** ۰/۰۲۶.

۲۶۵۹. $۱+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{(x-y)^{۲n}}{(۲n)!}$ ($-\infty<x<\infty$ ؛ $-\infty<y<\infty$).

۲۶۶۰. $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{(x-y)^{۲n}-(x+y)^{۲n}}{۲\cdot(۲n)!}$ ($-\infty<x<\infty$؛ $-\infty<y<\infty$).

۲۶۶۱. $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{(x^{۲}+y^{۲})^{۲n-۱}}{(۲n-۱)!}$ ($-\infty<x<\infty$؛ $-\infty<y<\infty$).

۲۶۶۲. $۱+۲\sum_{n=۱}^{\infty}(y-x)^{n}$؛ $|x-y|<۱$. **راهنمائی.** $\frac{۱-x+y}{۱+x-y}=-۱+\frac{۲}{۱-(y-x)}$. از تصاعد هندسی استفاده کنید.

.۲۶۶۳ $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{x^n+y^n}{n}$ − ($-۱\leqslant x<۱$ ؛ $-۱\leqslant y<۱$). راهنمائی. $(۱-x)(۱-y)=۱-x-y+xy$.

.۲۶۶۴ $\sum_{n=\circ}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۲n+۱}+y^{۲n+۱}}{۲n+۱}$ ($-۱\leqslant x\leqslant ۱$ ؛ $-۱\leqslant y\leqslant ۱$).

راهنمائی. $arctg\,x+arctg\,y=arctg\frac{x+y}{۱-xy}$ (به ازای $|x|\leqslant ۱$ ، $|y|\leqslant ۱$).

.۲۶۶۵ $f(x+h,y+k)=ax^۲+۲bxy+cy^۲+$

$+۲(ax+by)h+۲(bx+cy)k+ah^۲+۲bh+ck^۲$

.۲۶۶۶ $f(۱+h,۲+k)-f(۱,۲)=۹h-۲۱k+۳h^۲+۳hk-۱۲k^۲+h^۳-۲k^۳$

.۲۶۶۷ $۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{[(x-۲)+(y+۲)]^n}{n!}$.

.۲۶۶۸ $۱+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{\left[x+\left(y-\frac{\pi}{۲}\right)\right]^{۲n}}{(۲n)!}$.

.۲۶۶۹ $۱+x+\frac{x^۲-y^۲}{۲!}+\frac{x^۳-۳xy^۲}{۳!}+\cdots$.

.۲۶۷۰ $۱+x+xy+\frac{۱}{۲}x^۲y+\cdots$.

.۲۶۷۱ $\frac{c_۱+c_۲}{۲}-\frac{۲(c_۱-c_۲)}{\pi}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{\sin(۲n+۱)x}{۲n+۱}$ ؛ $S(\circ)=\frac{c_۱+c_۲}{۲}$ ؛

$S(\pm\pi)=\frac{c_۱+c_۲}{۲}$.

.۲۶۷۲ $\frac{b-a}{۴}\pi-\frac{۲(b-a)}{\pi}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{\cos(۲n+۱)x}{(۲n+۱)^۲}+(a+b)\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{\sin nx}{n}$ ؛

$S(\pm\pi)=\frac{b-a}{2}\pi$.

۲۶۷۳. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$؛ $S(\pm\pi)=\pi^2$.

۲۶۷۴. $\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}a\pi\Big[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx-n\sin nx)$؛ $S(\pm\pi)=\operatorname{ch}a\pi$.

۲۶۷۵. $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2}$ وقتی a عدد غیر صحیح باشد؛ $\sin ax$ وقتی که a عددی صحیح باشد؛ $S(\pm\pi)=0$.

۲۶۷۶. $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2}\right]$ اگر a عدد غیرصحیح باشد؛ $\cos ax$ اگر a صحیح باشد؛ $S(\pm\pi)=\cos a\pi$.

۲۶۷۷. $\frac{2\operatorname{sh}a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}$؛ $S(\pm\pi)=0$.

۲۶۷۸. $\frac{2\operatorname{sh}a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2+n^2}\right]$؛ $S(\pm\pi)=\operatorname{ch}a\pi$.

۲۶۷۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

۲۶۸۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$؛ (a $\frac{\pi}{4}$؛ (b $\frac{\pi}{3}$؛ (c $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

۲۶۸۱. (a $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$؛ (b $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$؛ $\frac{\pi^2}{8}$.

۲۶۸۲. (a $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$، که در آن $b_{2k-1}=\frac{2\pi}{2k-1}-\frac{8}{\pi(2k-1)^3}$، $b_{2k}=-\frac{\pi}{k}$؛ (b $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$؛ (۱ $\frac{\pi^2}{6}$؛ (۲ $\frac{\pi^2}{12}$.

۲۶۸۳. a) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n e^{a\pi}]\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}$؛

b) $\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n e^{a\pi}-1]\cos nx}{a^2+n^2}$.

۲۶۸۴. a) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin nx$؛

b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos nx$.

۲۶۸۵. a) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$؛

b) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

۲۶۸۶. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ که در آن $b_{2k}=(-1)^{k-1}\frac{1}{2k}$، $b_{2k+1}=(-1)^k\frac{2}{\pi(2k+1)^2}$.

۲۶۸۷. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

۲۶۸۸. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{4n^2-1}$.

۲۶۸۹. $\frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cos nx\right)$.

۲۶۹۰. $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\cos nx\right]$.

۲۶۹۱. $1-\frac{\cos x}{2}+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2-1}$.

۲۶۹۳. $\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\right]$.

۲۶۹۴. حل. ۱)

$$a_{۲n}=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} f(x)\cos ۲nx dx=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} f(x)\cos ۲nx dx+$$

$$+\frac{۲}{\pi}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} f(x)\cos ۲nx dx$$

اگر درانتگرال اول‌تغییر متغیر $t=\frac{\pi}{۲}-x$ و درانتگرال دوم تغییر متغیر $t=x-\frac{\pi}{۲}$ را بدهیم و از اتحاد $f(\frac{\pi}{۲}+t)=-f(\frac{\pi}{۲}-t)$ استفاده کنیم، بسادگی معلوم می‌شود که $a_{۲n}=\circ$ $(n=\circ,۱,۲,\cdots)$؛

۲) $$b_{۲n}=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} f(x)\sin ۲nx dx=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} f(x)\sin ۲nx dx+$$

$$+\frac{۲}{\pi}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} f(x)\sin ۲nx dx$$

که با درنظر گرفتن همان تغییـــر متغیرهای ۱) و استفاده از اتحاد:

$f(\frac{\pi}{۲}+t)=f(\frac{\pi}{۲}-t)$ به‌تساوی $b_{۲n}=\circ$ می‌رسیم. $(n=\circ,۱,۲,\cdots)$.

۲۶۹۵. $\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{\cos(۲n+۱)\pi x}{(۲n+۱)^۲}$.   **۲۶۹۶.** $۱-\frac{۲}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin ۲n\pi x}{n}$.

۲۶۹۷. $sht\left[\frac{۱}{t}+۲\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{l\cos\frac{n\pi x}{l}-\pi n\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^۲+n^۲\pi^۲}\right]$.

۲۶۹۸. $\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin\frac{n\pi x}{5}}{n}$. ۲۶۹۹. (a $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2(n-1)\pi x}{2n-1}$؛ (b ۱.

۲۷۰۰. (a $\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}$؛ (b $\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^{2}}$.

۲۷۰۱. (a $\sum_{n=1}^{\infty}b_{n}\sin\frac{nx}{2}$، که در آن $b_{2k+1}=\frac{8}{\pi}\left[\frac{\pi^{2}}{2k+1}-\frac{4}{(2k+1)^{3}}\right]$، $b_{2k}=-\frac{4\pi}{k}$؛ (b $\frac{4\pi^{2}}{3}-16\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{nx}{2}}{n^{2}}$.

۲۷۰۲. (a $\frac{8}{\pi^{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^{2}}$؛ (b $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2}}$.

۲۷۰۳. $\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{n^{2}}$.

فصل نهم

۲۷۰۴. بله. ۲۷۰۵. نه. ۲۷۰۶. بله. ۲۷۰۷. بله. ۲۷۰۸. بله.
۲۷۰۹. (a بله؛ (b نه. ۲۷۱۰. بله. ۲۷۱۴. $y-xy'=0$.
۲۷۱۵. $xy'-2y=0$. ۲۷۱۶. $y-2xy'=0$. ۲۷۱۷. $xdx+ydy=0$.
۲۷۱۸. $y'=y$. ۲۷۱۹. $3y^{2}-x^{2}=2xyy'$. ۲۷۲۰. $xyy'(xy^{2}+1)=1$.

۲۷۲۱. $y=xy'\ln\frac{C}{y}$. **۲۷۲۲.** $2xy''+y'=0$. **۲۷۲۳.** $y''-y'-2y=0$.
۲۷۲۴. $y''+4y=0$. **۲۷۲۵.** $y'''-2y''+y'=0$. **۲۷۲۶.** $y''=0$.
۲۷۲۷. $y'''=0$ **۲۷۲۸.** $(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0$. **۲۷۲۹.** $y^2-x^2=25$.
۲۷۳۰. $y=xe^{2x}$. **۲۷۳۱.** $y=-\cos x$.

۲۷۳۲. $y=\frac{1}{6}(-5e^{-x}+9e^{x}-4e^{2x})$. **۲۷۳۸.** ۲٫۵۹۳ (مقدار دقیق $y=e$).

۲۷۳۹. ۴٫۷۸۰ (مقدار دقیق $y=3(e-1)$). **۲۷۴۰.** ۰٫۹۴۶ (مقدار دقیق $y=1$).
۲۷۴۱. ۱٫۸۲۶ (مقدار دقیق $y=\sqrt{3}$). **۲۷۴۲.** $\mathrm{cotg}^2 y=\mathrm{tg}^2 x+C$.
۲۷۴۳. $x=\frac{cy}{\sqrt{1+y^2}}$، $y=0$. **۲۷۴۴.** $x^2+y^2=\ln Cx^2$.

۲۷۴۵. $y=\frac{a+Cx}{1+ax}$. **۲۷۴۶.** $\mathrm{tg}\,y=C(1-e^x)^3$، $x=0$. **۲۷۴۷.** $y=C\sin x$.

۲۷۴۸. $2e^{\frac{y^2}{2}}=\sqrt{e}\,(1+e^x)$. **۲۷۴۹.** $1+y^2=\frac{2}{1-x^2}$.

۲۷۵۰. $y=1$. **۲۷۵۱.** $\mathrm{arctg}(x+y)=x+C$.
۲۷۵۲. $8x+2y+1=2\,\mathrm{tg}(4x+C)$. **۲۷۵۳.** $x+2y+3\ln|2x+3y-7|=C$.
۲۷۵۴. $5x+10y+C=3\ln|10x-5y+6|$. **۲۷۵۵.** $\rho=\frac{C}{1-\cos\varphi}$ یا

$y^2=2Cx+C^2$. **۲۷۵۶.** $\ln\rho=\frac{1}{2\cos^2\varphi}-\ln|\cos\varphi|+C$. یا

$\ln|x|-\frac{y^2}{2x^2}=C$. **۲۷۵۷.** خط راست $y=Cx$ یا هذلولی $y=\frac{C}{x}$. **راهنمائی.**
پاره خط مماس برابراست با $\sqrt{y^2+\left(\frac{y}{y'}\right)^2}$. **۲۷۵۸.** $y^2-x^2=C$.

۲۷۵۹. $y=Ce^{\frac{x}{a}}$. **۲۷۶۰.** $y^2=2px$. **۲۷۶۱.** $y=ax^2$. **راهنمائی.** طبق

شرط $\frac{3}{4}x=\frac{\int_0^x xy\,dx}{\int_0^x y\,dx}$. دومرتبه نسبت به x دیفرانسیل می‌گیریم، معادلهٔ دیفرانسیلی بدست می‌آید. **۲۷۶۲.** $y^2=\frac{1}{3}x$. **۲۷۶۳.** $y=\sqrt{4-x^2}+2\ln\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$.

۲۷۶۴. دسته خطهای $y=kx$. **۲۷۶۵.** خانوادهٔ بیضیهای متشابه $2x^2+y^2=C^2$.

۲۷۶۶. خانوادهٔ هذلولیهای $x^2-y^2=C$. **۲۷۶۷.** خانوادهٔ دایره‌های $x^2+(y-b)^2=b^2$. **۲۷۶۸.** $y=x\ln\frac{C}{x}$. **۲۷۶۹.** $y=\frac{C}{x}-\frac{x}{2}$.

۲۷۷۰. $x=Ce^{\frac{x}{y}}$. **۲۷۷۱.** $(x-C)^2-y^2=C^2$؛ $(x-2)^2-y^2=4$؛ $y=\pm x$. **۲۷۷۲.** $\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|y|=C$. **۲۷۷۳.** $y=\frac{C}{2}x^2-\frac{1}{2c}$؛ $x=0$.

۲۷۷۴. $(x^2+y^2)^3(x+y)^2=C$. **۲۷۷۵.** $y=x\sqrt{1-\frac{3}{8}x}$.

۲۷۷۶. $(x+y-1)^3=C(x-y+3)$. **۲۷۷۷.** $3x+y+2\ln|x+y-1|=C$.

۲۷۷۸. $\ln|4x+8y+5|+8y-4x=C$. **۲۷۷۹.** $x^2=1-2y$.

۲۷۸۰. سهموی (پارابولوئید) دوار. **حل.** با توجه به متقارن بودن، آینه مطلوب یک‌سطح دوار است. مبداء مختصات در منبع نور و محور OX در جهت اشعهٔ نور است. اگر مماس بر نقطهٔ $M(x,y)$ از منحنی مقطع سطح مطلوب با صفحهٔ XOY، با محور OX زاویه‌ای‌مساوی φ و پاره خطی‌که مبداء مختصات را به نقطهٔ $M(x,y)$وصل‌می‌کند زاویه‌ای مساوی α بسازد، داریم، $tg\alpha=tg2\varphi=\frac{2tg\varphi}{1-tg^2\varphi}$. ولی می‌دانیم $tg\alpha=\frac{y}{x}$ و $tg\varphi=y'$ معادلهٔدیفـرانسیلی مورد نظر $y-yy'^2=2xy'$ وجواب آن $y^2=2Cx+C^2$است. مقطع مطلوب سهمی وسطح مطلوب سهموی دوار است. **۲۷۸۱.** $(x-y)^2-Cy=0$. **۲۷۸۲.** $x^2=C(2y+C)$.

۲۷۸۳. $Cx^2 = (x^2 - y^2)^3 (2y^2 - x^2)$. **راهنمائی.** از این مطلب استفاده کنید که مساحت برابر است با $\int_a^x y\,dy$. **۲۷۸۴.** $y = Cx - x\ln|x|$. **۲۷۸۵.** $y = Cx + x^2$.

۲۷۸۶. $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{c}{x^2}$. **۲۷۸۷.** $x\sqrt{1+y^2} + \cos y = C$. **راهنمائی.** معادله بطور خطی متناسب است با x و $\frac{dx}{dy}$. **۲۷۸۸.** $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$. **۲۷۸۹.** $y = \frac{e^x}{x} + \frac{ab - e^a}{x}$.

۲۷۹۰. $y = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. **۲۷۹۱.** $y = \frac{x}{\cos x}$.

۲۷۹۲. $y(x^2 + Cx) = 1$. **۲۷۹۳.** $y^2 = x\ln\frac{C}{x}$. **۲۷۹۴.** $x^2 = \frac{1}{y + Cy^2}$.

۲۷۹۵. $y^3(3 + Ce^{\cos x}) = x$. **۲۷۹۷.** $xy = cy^2 + a^2$.

۲۷۹۸. $y^2 + x + ay = 0$. **۲۷۹۹.** $x = y\ln\frac{y}{a}$. **۲۸۰۰.** $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$.

۲۸۰۱. $x^2 + y^2 - Cy + a^2 = 0$. **۲۸۰۲.** $\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$.

۲۸۰۳. $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$. **۲۸۰۴.** $\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2x + \frac{y^3}{3} = C$.

۲۸۰۵. $x^2 + y^2 - 2\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = C$. **۲۸۰۶.** $x^2 - y^2 = cy^3$.

۲۸۰۷. $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$. **۲۸۰۸.** $\ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$.

۲۸۰۹. $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$. **۲۸۱۰.** $\frac{1}{y}\ln x + \frac{1}{2}y^2 = C$.

۲۸۱۱. $(x\sin y + y\cos y - \sin y)e^x = C$.

۲۸۱۲. $(x^2C^2 + 1 - 2Cy)(x^2 + C^2 - 2Cy) = 0$؛ انتگرال خاص $x^2 - y^2 = 0$.

۲۸۱۳. انتگرال عمومی $(y+C)^2 = x^3$؛ انتگرال خاص ندارد. **۲۸۱۴.** انتگرال عمومی

۲۸۱۵. انتگرال عمومی $(\frac{x^2}{2}-y+C)(x-\frac{y^2}{2}+C)=0$؛ انتگرال خاص ندارد.

$y^2+C^2=2Cx$؛ انتگرال خاص $x^2-y^2=0$. **۲۸۱۶.** $y=\frac{1}{2}\cos x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$.

۲۸۱۷. $\begin{cases} x=\sin p+\ln p \\ y=p\sin p+\cos p+p+C \end{cases}$. **۲۸۱۸.** $\begin{cases} x=e^p+pe^p+C \\ y=p^2e^p \end{cases}$، جواب خاص $y=0$.

۲۸۱۹. $\begin{cases} x=2p-\frac{2}{p}+C \\ y=p^2+2\ln p \end{cases}$.

۲۸۲۰. $4y=x^2+p^2$ ، $\ln|p-x|=C+\frac{x}{p-x}$.

۲۸۲۱. $\ln\sqrt{p^2+y^2}+\operatorname{arctg}\frac{p}{y}=C$ ، $x=\ln\frac{y^2+p^2}{2p}$ ، جواب‌خاص $y=e^x$.

۲۸۲۲. $y=\pm 2x$; $y=C+\frac{x^2}{C}$. **۲۸۲۳.** $\begin{cases} x=\ln|p|-\arcsin p+C \\ y=p+\sqrt{1-p^2} \end{cases}$.

۲۸۲۴. $\begin{cases} x=Ce^{-p}-2p+2 \\ y=C(1+p)e^{-p}-p^2+2 \end{cases}$. **۲۸۲۵.** $\begin{cases} x=\frac{1}{3}(Cp^{-\frac{1}{2}}-p) \\ y=\frac{1}{6}(2Cp^{\frac{1}{2}}+p^2) \end{cases}$

راهنمائی. معادلهٔ دیفرانسیلی‌که از آن x به‌عنوان تابعی از p معین می‌شود، متجانس است.

۲۸۲۶. $y=Cx+C^2$؛ $y=-\frac{x^2}{4}$. **۲۸۲۷.** $y=Cx+C$؛جواب خاص ندارد.

۲۸۲۸. $y=Cx+\sqrt{1+C^2}$؛ $x^2+y^2=1$. **۲۸۲۹.** $y=Cx+\frac{1}{C}$؛ $y^2=4x$.

۲۸۳۰. $xy=C$. **۲۸۳۱.** دایره وخانوادهٔ مماسهای آن.

۲۸۳۲. آستروئید. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. **۲۸۳۳.** a) متجانس، $y=xu$؛ b) خطی نسبت به x ، $x=uv$ ؛ c) خطی نسبت به y ، $y=uv$؛ d) معادلهٔ برنولی ؛ $y=uv$ ؛

e) با متغیرهای جدا ازهم؛ f) معادلهٔ کلرو، به‌صورت $y=xy'\pm\sqrt{y'^۳}$ منجر می‌شود؛ g) معادلهٔ لاگرانژ، نسبت به x دیفرانسیل بگیرید؛ h) معادلهٔ برنولی، $y=uv$؛ i) منجر به معادله‌ای با متغیرهای جدا ازهم می‌شود، $u=x+y$؛ j) معادلهٔ لاگرانژ، نسبت به x دیفرانسیل بگیرید؛ k) معادلهٔ برنولی نسبت به x، $x=uv$؛ l) معادله با دیفرانسیل کامل؛ m) خطی، $y=uv$؛ n) معادلهٔ برنولی، $y=uv$.

۲۸۳۴. a) $\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C$؛ b) $x=y\cdot e^{Cy+۱}$. **۲۸۳۵.** $x^۲+y^۴=Cy^۲$.

۲۸۳۶. $y=\frac{x}{x^۲+C}$. **۲۸۳۷.** $xy(C-\frac{۱}{۲}\ln^۲x)=۱$.

۲۸۳۸. $y=Cx+C\ln C$؛ جواب خاص $y=-e^{-(x+۱)}$. **۲۸۳۹.** $y=Cx+\sqrt{-aC}$؛ جواب خاص $y=\frac{a}{۴x}$.

۲۸۴۰. $۳y+\ln\frac{|x^۳-۱|}{(y+۱)^۶}=C$.

۲۸۴۱. $\frac{۱}{۲}e^{۲x}-e^y-\operatorname{arctg}y-\frac{۱}{۲}\ln(۱+y^۲)=C$.

۲۸۴۲. $y=x^۲(۱+Ce^{\frac{۱}{x}})$. **۲۸۴۳.** $x=y^۲(C-e^{-y})$.

۲۸۴۴. $y=Ce^{-\sin x}+\sin x-۱$. **۲۸۴۵.** $y=ax+C\sqrt{۱-x^۲}$.

۲۸۴۶. $y=\frac{x}{x+۱}(x+\ln|x|+C)$. **۲۸۴۷.** $x=Ce^{\sin y}-۲a(۱+\sin y)$.

۲۸۴۸. $\frac{x^۲}{۲}+۳x+y+\ln[(x-۳)^{۱۰}|y-۱|^۳]=C$.

۲۸۴۹. $۲\operatorname{arctg}\frac{y-۱}{۲x}=\ln Cx$. **۲۸۵۰.** $x^۲=۱-\frac{۲}{y}+Ce^{-\frac{۲}{y}}$.

۲۸۵۱. $x^۳=Ce^y-y-۲$.

۲۸۵۲. $\sqrt{\frac{y}{x}}+\ln|x|=C$. **۲۸۵۳.** $y=x\arcsin(Cx)$.

۲۸۵۴. $y^۲=Ce^{-۲x}+\frac{۲}{۵}\sin x+\frac{۴}{۵}\cos x$. **۲۸۵۵.** $xy=C(y-۱)$.

۲۸۵۶. $x=Ce^y-\frac{۱}{۲}(\sin y+\cos y)$. **۲۸۵۷.** $py=C(p-۱)$.

۲۸۵۸. $x^4 = Ce^{4y} - y^3 - \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{8}y - \frac{3}{32}$. ۲۸۵۹. $(xy+C)(x^2y+C) = 0$.

۲۸۶۰. $\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{y} = C$. ۲۸۶۱. $xe^y - y^2 = C$.

۲۸۶۲. $\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{\sqrt{1+p^2}}{2p} + \frac{1}{2p^2}\ln(p+\sqrt{1+p^2}) \\ y = 2px + \sqrt{1+p^2} \end{cases}$

۲۸۶۳. $y = xe^{Cx}$. ۲۸۶۴. $2e^x - y^4 = Cy^2$.

۲۸۶۵. $\ln|y+2| + 2\,arctg\frac{y+2}{x-3} = C$. ۲۸۶۶. $y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}} + \frac{1}{x} - 2 = 0$.

۲۸۶۷. $x^2 \cdot y = Ce^{\frac{y}{a}}$. ۲۸۶۸. $x + \frac{x}{y} = C$. ۲۸۶۹. $y = \frac{C-x^4}{4(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

۲۸۷۰. $y = C\sin x - a$. ۲۸۷۱. $y = \frac{a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C}{x+\sqrt{a^2+x^2}}$.

۲۸۷۲. $(y-Cx)(y^2-x^2-C)+0$. ۲۸۷۳. $y = Cx + \frac{1}{C^2},\ y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x^2}$.

۲۸۷۴. $x^3+x^2y-y^2x-y^3=C$. ۲۸۷۵. $p^2+4y^2=Cy^3$.

۲۸۷۶. $y=x-1$. ۲۸۷۷. $y=x$. ۲۸۷۸. $y=2$. ۲۸۷۹. $y=0$.

۲۸۸۰. $y=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$. ۲۸۸۱. $y=\frac{1}{4}(2x^2+2x+1)$.

۲۸۸۲. $y=e^{-x}+2x-2$. ۲۸۸۳. a) $y=x$؛ b) $y=Cx$ که در آن C مقداری است دلخواه؛ نقطهٔ $(0,0)$ نقطهٔ خاص معادلهٔ دیفرانسیلی است. ۲۸۸۴. a) $y^2=x$؛ b) $y^2=2px$؛ $(0,0)$ نقطهٔ خاص است. ۲۸۸۵. a) $(x-C)^2+y^2=C^2$؛ b) جواب ندارد؛ c) $x^2+y^2=x$ ، $(0,0)$ نقطهٔ خاص است. ۲۸۸۶. $y=e^{\frac{x}{y}}$.

۲۸۸۷. $y=(\sqrt{2a}\pm\sqrt{x})^2$. ۲۸۸۸. $y^2=1-e^{-x}$. ۲۸۸۹. $r=Ce^{a\varphi}$.

۲۸۹۰. **راهنمائی.** به‌مختصات قطبی بروید؛ $3y^2-2x=0$. ۲۸۹۱. $r=k\varphi$.

۲۸۹۲. $x^{۲}+(y-b)^{۲}=b^{۲}$. **۲۸۹۳.** $y^{۲}+۱۶x=۰$. **۲۸۹۴.** هذلولی $y^{۲}-x^{۲}=C$ یا دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}=C^{۲}$. **۲۸۹۵.** $y=\frac{۱}{۲}(e^{x}+e^{-x})$. **راهنمائی.** از این مطلب استفاده کنید که مساحت برابر است با $\int_{۰}^{x} y\,dy$ و طول قوس $\int_{۰}^{x}\sqrt{۱+y'^{۲}}\,dx$.

۲۸۹۶. $x=\frac{a^{۲}}{y}+Cy$. **۲۸۹۷.** $y^{۲}=۴C(C+a-x)$.

۲۸۹۸. راهنمائی. از این مطلب استفاده کنید که برآیند نیروی ثقل و نیروی گریز از مرکز بر سطح عمود است. محور دوران را محور OY و ω را سرعت زاویه‌ای دوران می‌گیریم. برای صفحهٔ مقطع محوری سطح معادلهٔ دیفرانسیلی مجهول بدست می‌آید: $g\frac{dy}{dx}=\omega^{۲}x$. **۲۸۹۹.** $p=e^{-۰/۰۰۰۱۶۷h}$. **راهنمائی.** فشار برهر سطحی راکه عمود برستون هوا باشد می‌توان تنها فشار قشری‌که در بالا قرار گرفته است به‌حساب آورد. از قانون **بویل ـ ماریوت** که برطبق آن غلظت متناسب با فشار است، استفاده کنید. معادلهٔ دیفرانسیلی مجهول چنین است، $dp=-k\,pdh$. **۲۹۰۰.** $s=\frac{۱}{۲}kt\omega$. **راهنمائی.** معادلهٔ $ds=k\omega\frac{l-x}{l}dx$. **۲۹۰۱.** $s=(p+\frac{۱}{۲}\omega)kl$.

۲۹۰۲. $T=a+(T_{۰}-a)e^{-kt}$. **۲۹۰۳.** بعداز یك ساعت. **۲۹۰۴.** $\omega=۱۰۰(\frac{۳}{۵})^{t}$ دور در دقیقه. **۲۹۰۵.** در ۱۰۰ سال ۴/۲٪ مقدار اولیه $Q_{۰}$ مورد تلاشی قرار می‌گیرد. **راهنمائی.** معـادلهٔ $\frac{dQ}{dt}=kQ$؛ $Q=Q_{۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۱}{۱۰۰۰}}$. **۲۹۰۶.** $t=۳۵/۲$ ثانیه. **راهنمائی.** معادلـهٔ $\pi(h^{۲}-۲h)dh=\pi\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۲}vdt$. **۲۹۰۷.** $\frac{۱}{۱۰۲۴}$. **راهنمائی.** معادلهٔ $dQ=-kQdh$، $Q=Q_{۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{h}{۲}}$. **۲۹۰۸.** $v\to\sqrt{\frac{gm}{k}}$ به‌ازای $t\to\infty$ (k ضریب تناسب است). **راهنمائی.** معادلهٔ $\frac{dv}{dt}=mg-kv^{۲}$؛

$v=\sqrt{\frac{gm}{k}}\,th\left(t\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)$. ۲۹۰۹. ۱۸/۱ کیلوگرم. **راهنمائی.** معادلهٔ $\frac{dx}{dt}=k\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{300}\right)$.

۲۹۱۰. $i=\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}\left[(R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t)+L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right]$. **راهنمائی.** معادلهٔ $Ri+L\frac{di}{dt}=E\sin\omega t$. ۲۹۱۱. $y=x\ln|x|+C_1x+C_2$.

۲۹۱۲. $1+C_1y^2=\left(C_2+\frac{C_1x}{\sqrt{2}}\right)^2$. ۲۹۱۳. $y=\ln|e^{2x}+C_1|-x+C_2$.

۲۹۱۴. $y=C_1+C_2\ln|x|$. ۲۹۱۵. $y=C_1e^{C_2x}$. ۲۹۱۶. $y=\pm\sqrt{C_1x+C_2}$.

۲۹۱۷. $y=(1+C_1^2)\ln|x+C_1|-C_1x+C_2$.

۲۹۱۸. $(x-C_1)=a\ln\left|\sin\frac{y-C_2}{a}\right|$. ۲۹۱۹. $y=\frac{1}{2}(\ln|x|)^2+C_1\ln|x|+C_2$.

۲۹۲۰. $x=\frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|+C_2$ ؛ $y=C$. ۲۹۲۱. $y=C_1e^{C_2x}+\frac{1}{C_2}$.

۲۹۲۲. $y=\pm\frac{1}{2}\left[x\sqrt{C_1^2-x^2}+C_1^2\arcsin\frac{x}{C_1}\right]+C_2$.

۲۹۲۳. $y=(C_1e^x+1)x+C_2$. ۲۹۲۴. $y=(C_1x-C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2$ ؛

$y=\frac{e}{2}x^2+C$ (جواب‌خاص). ۲۹۲۵. $y=C_1x+(x-C_1)+C_2$ ؛

$y=\frac{x^3}{3}+C$ (جواب‌خاص). ۲۹۲۶. $y=\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+C_1x\ln|x|+C_2x+C_3$.

۲۹۲۷. $y+\sin(C_1+x)+C_2x+C_3$. ۲۹۲۸. $y=x^3+3x$.

۲۹۲۹. $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$. ۲۹۳۰. $y=x+1$. ۲۹۳۱. $y=Cx^2$.

۲۹۳۲. $y=C_1\frac{1+C_2e^x}{1-C_2e^x}$ ؛ $y=C$. ۲۹۳۳. $x=C_1+\ln\left|\frac{h-C_2}{y+C_2}\right|$.

۲۹۳۴. $x = C_1 - \frac{1}{C_2} ln\left|\frac{y}{y+C_2}\right|$. **۲۹۳۵.** $x = C_1 y^2 + y ln y + C_2$.

۲۹۳۶. $2y^2 - 4x^2 = 1$. **۲۹۳۷.** $y = x + 1$.

۲۹۳۸. $y = \frac{x^2-1}{2(e^2-1)} - \frac{e^2-1}{4} ln|x|$ یا $y = \frac{1-x^2}{2(e^2+1)} + \frac{e^2+1}{4} ln|x|$.

۲۹۳۹. $y = \frac{1}{2}x^2$. **۲۹۴۰.** $y = \frac{1}{2}x^2$. **۲۹۴۱.** $y = 2e^x$.

۲۹۴۲. $x = -\frac{3}{2}(y+2)^{\frac{2}{3}}$. **۲۹۴۳.** $y = e^y$. **۲۹۴۴.** $y^2 = \frac{e}{e-1} + \frac{e^{-x}}{1-e}$.

۲۹۴۵. $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}$. **۲۹۴۶.** $y = \frac{3e^{3x}}{2+e^{3x}}$. **۲۹۴۷.** $y = sec^2 x$.

۲۹۴۸. $y = sin x + 1$. **۲۹۴۹.** $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}$. **۲۹۵۰.** $x = -\frac{1}{2}e^{-y^2}$.

۲۹۵۱. جواب ندارد. **۲۹۵۲.** $y = e^x$. **۲۹۵۳.** $y = 2ln|x| - \frac{2}{x}$.

۲۹۵۴. $y = \frac{(x+C_1^2+1)^2}{2} + \frac{4}{3}C_1(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$. جواب‌خاص $y = C$.

۲۹۵۵. $y = C_1\frac{x^2}{2} + (C_1 - C_1^2)x + C_2$. جواب‌خاص: $y = \frac{(x+1)^3}{12} + C$.

۲۹۵۶. $y = \frac{1}{12}(C_1 + x)^4 + C_2 x + C_3$. **۲۹۵۷.** $y = C_1 + C_2 e^{C_1 x}$؛ $y = 1 - e^x$؛ $y = -1 + e^{-x}$؛ جواب‌خاص $y = \frac{4}{C-x}$. **۲۹۵۸.** دایره.

۲۹۵۹. $(x-C_1)^2 - C_2 y^2 + kC_2^2 = 0$. **۲۹۶۰.** منحنی‌زنجیری $y = cah\frac{x-x_0}{2}$.

دایرهٔ $(x-x_0)^2 + y^2 = a^2$. **۲۹۶۱.** سهمی $(x-x_0)^2 = 2ay - a^2$. سیکلوئید $x - x_0 = a(t - sint)$ ، $y = a(1 - cost)$. **۲۹۶۲.** $e^{ay+c_2} = sec(on + C_1)$.

۲۹۶۳. سهمی. **۲۹۶۴.** $y=\frac{C_1}{2}\cdot\frac{H}{q}e^{\frac{q}{H}x}+\frac{1}{2C_1}\cdot\frac{H}{q}e^{-\frac{q}{H}x}+C_2$ یا

$y=ach\frac{x+C}{a}+C_2$، که در آن H عبارتست از کشش افقی ثابت و $\frac{H}{q}=a$.

راهنمائی. معادلهٔ دیفرانسیلی: $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

۲۹۶۵. معادلهٔ حرکت: $\frac{d^2s}{dt^2}=g(sin\alpha-\mu cos\alpha)$. قانون حرکت: $s=\frac{gt^2}{2}(sin\alpha-\mu cos\alpha)$. **۲۹۶۶.** $s=\frac{m}{k}lnch\left(t\sqrt{g\frac{k}{m}}\right)$.

راهنمائی. معادلهٔ حرکت: $m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$.

۲۹۶۷. بعد از ۶/۴۵ ثانیه. **راهنمائی.** معادلهٔ حرکت $\frac{300}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-10v$.

۲۹۶۸. a) نه؛ b) بله؛ c) بله؛ d) بله؛ e) نه؛ f) نه؛ g) نه؛ h) بله.

۲۹۶۹. a) $y''+y=0$؛ b) $y''-2y'+y=0$؛ c) $x^2y''-2xy'+2y=0$؛ d) $y'''-3y''+4y'-2y=0$. **۲۹۷۰.** $y=3x-5x^2+2x^3$.

۲۹۷۱. $y=\frac{1}{x}(C_1sinx+C_2cosx)$. **راهنمائی.** تبدیل $y=y_1u$ را بکار ببرید.

۲۹۷۲. $y=C_1x+C_2lnx$. **۲۹۷۳.** $y=A+Bx^2+x^3$.

۲۹۷۴. $y=\frac{x^2}{3}+Ax+\frac{B}{x}$. **راهنمائی.** جوابهای خاص معادله‌های متجانس $y_1=x$ و $y_2=\frac{1}{x}$. با روش تغییر مقادیر ثابت بدست می‌آید: $C_1=\frac{x}{2}+A$؛ $C_2=-\frac{x^3}{6}+B$.

۲۹۷۵. $y=A+Bsinx+Ccosx+ln|secx+tgx|+sinxln|cosx|-xcosx$.

۲۹۷۶. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. **۲۹۷۷.** $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}$.

۲۹۷۸. $y=C_1+C_2e^{x}$. **۲۹۷۹.** $y=C_1cosx+C_2sinx$.

۲۹۸۰. $y=e^{x}(C_1cosx+C_2sinx)$. **۲۹۸۱.** $y=e^{-2x}(C_1cos3x+C_2sin3x)$.

۲۹۸۲. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$. **۲۹۸۳.** $y=e^{2x}(C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}})$.

۲۹۸۴. اگر $k>0$: $y=C_1e^{x\sqrt{k}}+C_2e^{-x\sqrt{k}}$؛
و اگر $k<0$: $y=C_1\cos\sqrt{-k}x+C_2\sin\sqrt{-k}x$.

۲۹۸۵. $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x}+C_2e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}x}\right)$.

۲۹۸۶. $y=e^{\frac{x}{6}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{11}}{6}x+C_2\sin\frac{\sqrt{11}}{6}x\right)$. **۲۹۸۷.** $y=4e^{x}+e^{4x}$.

۲۹۸۸. $y=e^{-x}$. **۲۹۸۹.** $y=\sin 2x$. **۲۹۹۰.** $y=1$.

۲۹۹۱. $y=a\,ch\frac{x}{a}$. **۲۹۹۲.** $y=0$. **۲۹۹۳.** $y=C\sin\pi x$.

۲۹۹۴. a) $xe^{2x}(Ax^2+Bx+C)$؛ b) $A\cos 2x+B\sin 2x$؛
c) $A\cos 2x+B\sin 2x+Cx^2e^{2x}$؛ d) $e^{x}(A\cos x+B\sin x)$؛
e) $e^{x}(Ax^2+Bx+C)+xe^{2x}(Dx+E)$؛
f) $xe^{x}[(Ax^2+Bx+C)\cos 2x+(Dx^2+Ex+F)\sin 2x]$.

۲۹۹۵. $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{8}(2x^2+4x+3)$.

۲۹۹۶. $y=e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}C_2+\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+x^3+3x^2$.

۲۹۹۷. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{9}e^{2x}$. **۲۹۹۸.** $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+2$.

۲۹۹۹. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^{x}$. **۳۰۰۰.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$.

۳۰۰۱. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}-\frac{2}{5}(3\sin 2x+\cos 2x)$.

۳۰۰۲. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x\left(\frac{x}{10}-\frac{1}{25}\right)e^{2x}$.

۳۰۰۳. $y=(C_1+C_2x)c^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{x^2}{4}e^x-\frac{1}{8}e^{-x}$.

۳۰۰۴. $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}(2\cos 2x-\sin 2x)$.

۳۰۰۵. $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{x}{4}e^x\sin 2x$.

۳۰۰۶. $y=\cos 2x+\frac{1}{3}(\sin x+\sin 2x)$.

۳۰۰۷. ۱) $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\frac{A}{\omega^2-p^2}\sin pt$؛ ۲) $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t-\frac{A}{2\omega}t\cos\omega t$.

۳۰۰۸. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}-xe^{4x}$.

۳۰۰۹. $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}$.

۳۰۱۰. $y=e^x(C_1+C_2x+x^2)$.

۳۰۱۱ $y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{5}{2}x$.

۳۰۱۲. $y=C_1e^{-2x}+C_2n^{4x}-\frac{1}{9}e^x+\frac{1}{5}(3\cos 2x+\sin 2x)$.

۳۰۱۳. $y=C_1+C_2e^{-x}+e^x+\frac{5}{2}x^2-5x$.

۳۰۱۴. $y=C_1+C_2e^x-3xe^x-x-x^2$.

۳۰۱۵. $y=(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2)e^{-x}+\frac{1}{4}e^x$.

۳۰۱۶. $y=(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)e^x+\frac{1}{37}(\sin 3x+6\cos 3x)+\frac{e^x}{9}$.

۳۰۱۷. $y=(C_1+C_2x+x^2)e^{2x}+\frac{x+1}{8}$.

۳۰۱۸. $y=C_1+C_2e^{3x}-\frac{1}{10}(\cos x+3\sin x)-\frac{x^2}{6}-\frac{x}{9}$.

.۳۰۱۹ $y=\frac{1}{8}e^{2x}(4x+1)-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}$.

.۳۰۲۰ $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-x\sin x-\cos x$.

.۳۰۲۱ $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{e^{2x}}{20}\ (\sin 2x+2\cos 2x)$.

.۳۰۲۲ $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{x}{4}\ (3\sin 2x+2\cos 2x)\ +\frac{1}{4}$.

.۳۰۲۳ $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x)$.

.۳۰۲۴ $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{4}(x^2-x)e^{x}$.

.۳۰۲۵ $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{4}\ x\sin x-\frac{1}{16}\cos x\ +\ \frac{1}{54}(3x-1)e^{3x}$.

.۳۰۲۶ $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{9}(2-3x)+\frac{1}{16}\ (2x^2-x)e^{3x}$.

.۳۰۲۷ $y=C_1+C_2e^{2x}-2xe^{x}-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}x^2$.

.۳۰۲۸ $y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^3}{6}\right)e^{2x}$.

.۳۰۲۹ $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}-\frac{1}{8}\ (2x^2+x)e^{-3x}+\frac{1}{16}\ (2x^2+3x)e^{x}$.

.۳۰۳۰ $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{4}\cos x\ +\ \frac{x^2}{4}\sin x\ -\ \frac{x}{8}\cos 3x+\frac{3}{32}\sin 3x$.

راهنمائی. صورت ضرب کسینوسها را به مجموع کسینوسها تبدیل کنید.

.۳۰۳۱ $y=C_1e^{-x\sqrt{2}}+C_2e^{x\sqrt{2}}+xe^{x}\sin x+e^{x}\cos x$.

.۳۰۳۲ $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|\ \mathrm{cotg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

.۳۰۳۳ $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin x\ln\left|\ \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|$.

.۳۰۳۴ $y=(C_1+C_2x)e^{x}+xe^{x}\ln|x|$.

۳۰۳۵. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+xe^{-x}\ln|x|$.

۳۰۳۶. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\cdot\ln|\cos x|$.

۳۰۳۷. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+\sin x\cdot\ln|\sin x|$.

۳۰۳۸. a) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+(e^{x}+e^{-x})\operatorname{arctg}e^{x}$؛

b) $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}+e^{x^2}$. ۳۰۴۰. معادلهٔ حرکت:

$\frac{2}{g}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=2-k(x+2)$ $(k=1)$ ؛ $T=2\pi\sqrt{\frac{2}{g}}$ ثانیه.

۳۰۴۱. $x=\frac{2g\sin 30t-60\sqrt{g}\sin\sqrt{g}t}{g-900}$ سانتیمتر. **راهنمائی.** اگر x از وضع آرام وزنه به‌حساب آید داریم، $\frac{4}{g}x''=4-k(x_0+x-y-l)$، که در آن x_0 فاصلهٔ نقطهٔ وزنهٔ آرام از نقطهٔ اولیهٔ فنر آویزان و l طول فنردر حالت آرامش است؛ به‌این‌ترتیب بدست می‌آید، $k(x_0-l)=4$ ، بنابراین داریم، $\frac{4}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-k(x-y)$

که در آن $k=4$ و $g=981$ سانتیمتر برثانیه ثانیه است.

۳۰۴۲. $m\frac{d^2x}{dt^2}=k(b-x)-k(b+x)$ ؛ $x=C\cos\left(t\sqrt{\frac{2k}{m}}\right)$.

۳۰۴۳. $6\frac{d^2s}{dt^2}=gs$ ؛ $t=\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6+\sqrt{35})$.

۳۰۴۴. a) $r=\frac{a}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$ ؛ b) $r=\frac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})$.

راهنمائی. معادلهٔ دیفرانسیلی حرکت ، $\frac{d^2r}{dt^2}=\omega^2r$.

۳۰۴۵. $y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{12x}$. ۳۰۴۶. $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{x}$.

۳۰۴۷. $y=C_1e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

۳۰۴۸. $y=C_1+C_2x+C_3e^{x\sqrt{2}}+C_4e^{-x\sqrt{2}}$.

۳۰۴۹. $y=e^{x}(C_1+C_2x+C_3x^2)$.

۳۰۵۰. $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$.

۳۰۵۱. $y=(C_1+C_2x)\cos 2x+(C_3+C_4x)\sin 2x$.

۳۰۵۲. $y=C_1+C_2e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

۳۰۵۳. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+(C_3+C_4x)e^{x}$.

۳۰۵۴. $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax$.

۳۰۵۵. $y=(C_1+C_2x)e^{x\sqrt{3}}+(C_3+C_4x)e^{-x\sqrt{3}}$.

۳۰۵۶. $y=C_1+C_2x+C_3\cos ax+C_4\sin ax$.

۳۰۵۷. $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^{-x}$.

۳۰۵۸. $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$.

۳۰۵۹. $y=e^{-x}(C_1+C_2x+\cdots+C_nx^{n-1})$.

۳۰۶۰. $y=C_1+C_2x+\left(C_3+C_4x+\frac{x^2}{2}\right)e^{x}$.

۳۰۶۱. $y=C_1+C_2x+12x^2+3x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{20}x^5+(C_3+C_4x)e^{x}$.

۳۰۶۲. $y=C_1e^{x}+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-x^3-5$.

۳۰۶۳. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-x}+\frac{1}{1088}(4\cos 4x-\sin 4x)$.

۳۰۶۴. $y=C_1e^{+x}+C_2+C_3x+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4+e^{x}\left(\frac{3}{2}x-\frac{15}{4}\right)$.

۳۰۶۵. $y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+e^{x}\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{8}\right)$.

۳۰۶۶. $y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x+\sec x+\cos x\cdot\ln|\cos x|-\operatorname{tg}x\cdot\sin x+x\sin x$.

۳۰۶۷. $y=e^{-x}+e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+x-2$.

۳۰۶۸. $y=(C_1+C_2\ln x)\frac{1}{x}$. **۳۰۶۹.** $y=C_1x^3+\frac{C_2}{x}$.

۳۰۷۰. $y=C_1\cos(2\ln x)+C_2\sin(2\ln x)$. **۳۰۷۱.** $y=C_1x+C_2x^2+C_3x^3$.

۳۰۷۲. $y=C_1+C_2(3x+2)^{-\frac{4}{3}}$. **۳۰۷۳.** $y=C_1x^2+\frac{C_2}{x}$.

۳۰۷۴. $y=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)$.

۳۰۷۵. $y=C_1x^3+C_2x^2+\frac{1}{2}x$.

۳۰۷۶. $y=(x+1)^2[C_1+C_2\ln(x+1)]+(x+1)^3$.

۳۰۷۷. $y=x(\ln x+\ln^2 x)$. **۳۰۷۸.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x$، $z=C_3\cos x+C_4\sin x$.

۳۰۷۹. $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$، $z=\frac{1}{5}e^{-x}[(C_2-2C_1)\cos x-(C_1+2C_2)\sin x]$.

۳۰۸۰. $y=(C_1-C_2-C_1x)e^{-2x}$، $z=(C_1x+C_2)e^{-2x}$.

۳۰۸۱. $x=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

$$y=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{C_3\sqrt{3}+C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{C_2\sqrt{3}+C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

$$z=C_1e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{-C_3\sqrt{3}-C_2}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{C_2\sqrt{3}-C_3}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

۳۰۸۲. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}$؛ $y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}$؛ $z=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t}$.

۳۰۸۳. $y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{1}{4}(x^2+x)$؛ $z=C_2e^{2x}-C_1+\frac{1}{4}(x^2-x-1)$.

۳۰۸۴. $y=C_1+C_2x+2\sin x$؛ $z=-2C_1-C_2(2x+1)-3\sin x-2\cos x$.

۳۰۸۵. $y=(C_2-2C_1-2C_2x)e^{-x}-6x+14$؛

$z=(C_1+C_2x)e^{-x}+5x-9$؛ $C_1=9,\ C_2=4$

$y=14(1-e^{-x})-2x(3+4e^{-x})$؛ $z=-9(1-e^{-x})+x(5+4e^{-x})$.

۳۰۸۶. $x=10e^{2t}-8e^{3t}-e^t+6t-1$؛ $y=-20e^{2t}+8e^{3t}+3e^t+12t+10$.

۳۰۸۷. $y=\frac{2C_1}{(C_2-x)^2}$ ؛ $z=\frac{C_1}{C_2-x}$. **۳۰۸۸.** a) $\frac{(x^2+y^2)y}{x^2}=C_1$ ؛ $\frac{z}{y}=C_2$ ؛ b) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C_1$ ، $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_2$ **راهنمائی.** ضمن انتگرال‌گیری از معادلهٔ متجانس $\frac{dx}{x-y}=\frac{dx}{x+y}$ ، انتگرال اول بدست می‌آید: $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C_1$. سپس با استفاده از خواص مشتقهای متناسب:

$$\frac{dz}{z}=\frac{xdx}{x(x-y)}=\frac{ydy}{y(x+y)}=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$$

از آنجا، $\ln z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\ln C_2$ و بنابراین $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_2$ ؛

c) $x+y+z=0$ ، $x^2+y^2+z^2=6$. **راهنمائی.** با استفاده ازخواص مشتقهای‌متناسب بدست می‌آید:

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}=\frac{dx+dy+dz}{0}$$

ازآنجا $dx+dy+dz=0$ و بنابراین $x+y+z=C_1$ بهمین‌ترتیب:

$$\frac{xdx}{x(y-z)}=\frac{ydy}{y(z-x)}=\frac{zdz}{z(x-y)}=\frac{xdx+ydy+zdz}{0}$$

و در نتیجه $xdx+ydy+zdz=0$ و $x^2+y^2+z^2=C_2$. بنابراین منحنی انتگرال عبارتست از دایرهٔ: $x+y+z=C_1$ ، $x^2+y^2+z^2=C_2$. از شرط $x=1$ ، $y=1$ ، $z=-2$ بدست می‌آید: $C_1=0$ ، $C_2=6$.

۳۰۸۹. $y=C_1x^2+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{18}(3\ln^2x-2\ln x)$.

$z=1-2C_1x+\frac{C_2}{x^2}+\frac{x}{9}(3\ln^2x+\ln x-1)$.

۳۰۹۰. $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}+C_3\cos x+C_4\sin x+e^x-2x$.

$$z = -C_1 e^{x\sqrt{2}} - C_2 e^{-x\sqrt{2}} - \frac{C_3}{4}\cos x - \frac{C_4}{4}\sin x - \frac{1}{2}e^x + x.$$

۳۰۹۱.

$$x = \frac{v_0 m\cos\alpha}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)، \quad y = \frac{m}{k^2}(kv_0\sin\alpha + mg)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mgt}{k}.$$

حل. $m\frac{dv_x}{dt} = -kv_x$ ؛ $m\frac{dv_y}{dt} = -kv_y - mg$ به‌ازای شرایط اولیه $x_0 = y_0 = 0$، $v_{x_0} = v_0\cos\alpha$ ، $v_{y_0} = v_0\sin\alpha$ به‌ازای $t = 0$. با انتگرال‌گیری بدست می‌آید:

$$v_x = v_0\cos\alpha\cdot e^{-\frac{k}{m}t}, \quad kv_y + mg = (kv_0\sin\alpha + mg)e^{-\frac{k}{m}t}$$

۳۰۹۲. $x = \alpha\cos\frac{k}{\sqrt{m}}t$ ، $y = \frac{\sqrt{m}}{k}\sin\frac{k}{\sqrt{m}}t$ ، $\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2y^2}{mv_0^2} = 1$.

راهنمائی. معادله‌های دیفرانسیلی حرکت: $m\frac{d^2x}{dt} = -k^2x$ ؛ $m\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y$.

۳۰۹۳. $y = -2 - 2x - x^2$. ۳۰۹۴. $y = \left(y_0 + \frac{1}{4}\right)e^{2(x-1)} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

۳۰۹۵. $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \frac{21}{320}x^5 + \dots$.

۳۰۹۶. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7\cdot 9}x^7 + \frac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11} - \dots$.

۳۰۹۷. $y = x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \dots$؛ رشته به‌ازای $-1 \leqslant x \leqslant 1$ متقارب است.

۳۰۹۸. $y = x - \frac{x^2}{(1!)^2\cdot 2} + \frac{x^3}{(2!)^2\cdot 3} - \frac{x^4}{(3!)^2\cdot 4} + \dots$؛ رشته به‌ازای $-\infty < x < +\infty$ متقارب است. راهنمائی. از روش ضرایب نامعین استفاده کنید.

۳۰۹۹. $y = 1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1\cdot 4}{6!}x^6 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9 + \dots$. رشته به‌ازای $-\infty < x < +\infty$ متقارب است.

.۳۱۰۰ $y=\frac{\sin x}{x}$. **راهنمائی.** از روش ضریبهای نامعین استفاده کنید.

.۳۱۰۱ $y=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}+\cdots$. رشته به‌ازای $|x|<+\infty$ متقارب است. **راهنمائی.** از روش ضریبهای نامعین استفاده کنید.

.۳۱۰۲ $x=a\left(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{2}{4!}t^4-\frac{9}{6!}t^6+\frac{55}{8!}t^8-\ \cdots\right)$.

.۳۱۰۳ $u=A\cos\frac{a\pi t}{l}\sin\frac{\pi x}{l}$. **راهنمائی.** از این شرایط استفاده کنید:

$$u(0,t)=0\ ،\ u(l,t)=0\ ،\ u(x,0)=A\sin\frac{\pi x}{l}\ ،\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

.۳۱۰۴ $u=\frac{2l}{\pi^2 a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$.

راهنمائی. ازاین شرایط استفاده کنید:

$$u(0,t)=0\ ،\ u(l,t)=0\ ،\ u(x,0)=0\ ،\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=1.$$

.۳۱۰۵ $u=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$.

راهنمائی. از شرایط زیر استفاده کنید:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ u(x,0)=\begin{cases}\frac{2hx}{l} & (0<x\leqslant\frac{1}{2})\\ 2h(1-\frac{x}{l}) & (\frac{1}{2}<x<l)\end{cases}$$

.۳۱۰۶ $u=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ ، که در آن

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^1\frac{x}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx=\frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}\cdot$$

راهنمائی. از این شرایط استفاده کنید:

$$u(0,t)=0\ ،\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0\ ،\ u(x,0)=\frac{x}{l}\ ،\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$$

۳۱۰۷. $$u=\frac{400}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(-\cos n\pi)\sin\frac{n\pi x}{100}e^{\frac{a^2n^2\pi^2 l}{100^2}}\cdot$$

راهنمائی. ازاین شرایط استفاده کنید:

$$u(0,t)=0\ ،\ u(100,t)=0\ ،\ u(x,0)=0{,}01x(100-x)\cdot$$

فصل دهم

۳۱۰۸. a) ⩽۱″؛ ⩽٪۰٫۰۰۲۳؛ b) ⩽۱mm؛ ⩽٪۰٫۲۶؛ c) ⩽۱؛ d) ⩽٪۰٫۰۰۱۶. **۳۱۰۹.** a) ⩽۰٫۰۵؛ ⩽٪۰/۰۲۱؛ b) ⩽۰/۰۰۰۵؛ ⩽٪۱٫۴۵؛ c) ⩽۰/۰۰۵؛ ⩽٪۰/۱۶. **۳۱۱۰.** a) دورقم؛ 48×10^3 یا 49×10^3، زیرا عددمفروض بین دوعدد ۴۷۸۷۷ و ۴۸۸۴۵ واقع است؛ b) دو رقم، ۱۵؛ c) یك رقم؛ 6×10^2. درعمل باید نتیجه را بهصورت $(5/9\pm0{,}1)\cdot10^2$ نوشت. **۳۱۱۱.** a) ۲۹/۵؛ b) $1{,}6\cdot10^2$؛ c) ۴۳٫۲. **۳۱۱۲.** a) ۴۸/۲؛ b) ۱۸٫۵ یا ۱۸٫۴۷±۰/۰۱؛ c) نتیجهٔ تفاضل،رقمهای صحیح ندارد، زیرا تفاضل برابر است با یکصدم بهازای مقدار ممکن خطای مطلق در یکصدم. **۳۱۱۳.** ۱/۸±۰/۳ سانتیمتر مربع. **راهنمائی.** از رابطهٔ نمو مساحت مربع استفاده کنید. **۳۱۱۴.** a) ۳۰٫۰±۰/۲؛ b) ۰/۱۲۰±۰٫۰۰۶؛ c) ۰٫۳±۰/۱. **۳۱۱۵.** ۱۹/۹±۰٫۱ میلیمتر مربع.

۳۱۱۶. (a ۱/۱۲۹۵±۰٫۰۰۰۲؛ (b ۰/۱۲۰±۰٫۰۰۶؛ (c خارج‌قسمت می‌تواند بین مقادیر ۴۸ و ۶۲ نوسان کند. بنابراین در نوشتن خارج‌قسمت نمی‌شود حتی یك رقم اعشاری را به‌مفهوم دقیق نوشت. **۳۱۱۷.** ۰/۴۸۰. رقم بعدی روی ۱ نوسان می‌کند. **۳۱۱۸.** (a ۰٫۱۷۲۹؛ (b $۲۷۷\cdot۱۰^{۳}$؛ (c ۲. **۳۱۱۹.** $(۲/۰۵\pm۰/۰۱)\cdot۱۰^{۳}$ سانتیمتر مربع. **۳۱۲۰.** (a ۱٫۶۴۸؛ (b ۴/۰۲۵±۰/۰۰۱؛ (c ۹/۰۰۶±۰/۰۰۳. **۳۱۲۱.** $۴/۰۱\cdot۱۰^{۳}$ سانتیمترمربع. خطای مطلق ۶/۵ سانتیمتر مربع. خطای نسبی ۰/۱۶٪. **۳۱۲۲.** ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه مساوی ۱۳/۸+۰/۲ سانتیمتر؛ $sin\alpha = ۰/۴۴\pm۰/۰۱$ ؛ $\alpha = ۲۶°۱۵'\pm۳۵'$. **۳۱۲۳.** ۲/۷±۰/۱. **۳۱۲۴.** ۰/۲۷ آمپر. **۳۱۲۵.** باید طول پاندول را با دقت ۰/۳ سانتیمتر اندازه گرفت؛ عددهای π و q با سه رقم انتخاب شوند. **۳۱۲۶.** شعاعها و مولد با خطای نسبی ۱/۳۰۰ اندازه‌گرفته می‌شود. عدد π باسه‌رقم انتخاب می‌شود. **۳۱۲۷.** مقدار l با دقت ۰/۲٪ اندازه‌گرفته می‌شود، و s با دقت ۰/۷٪.

۳۱۲۸.

x	y	Δy	$\Delta^{۲} y$	$\Delta^{۳} y$	$\Delta^{۴} y$	$\Delta^{۵} y$
۱	۳	۷	−۲	−۶	۱۴	−۲۳
۲	۱۰	۵	−۸	۸	−۹	
۳	۱۵	−۳	۰	−۱		
۴	۱۲	−۳	−۱			
۵	۹	−۴				
۶	۵					

۳۱۲۹.

x	y	Δy	$\Delta^{۲}y$	$\Delta^{۳}y$
۱	−۴	−۱۲	۳۲	۴۸
۳	−۱۶	۲۰	۸۰	۴۸
۵	۴	۱۰۰	۱۲۸	۴۸
۷	۱۰۴	۲۲۸	۱۷۶	
۹	۳۳۲	۴۰۴		
۱۱	۷۳۶			

۳۱۳۰.

x	y	Δy	$\Delta^{۲}y$	$\Delta^{۳}y$	$\Delta^{۴}y$
۰	۰	−۴	−۴۲	−۲۴	۲۴
۱	−۴	−۴۶	−۶۶	۰	۲۴
۲	−۵۰	−۱۱۲	−۶۶	۲۴	۲۴
۳	−۱۶۲	−۱۷۸	−۴۲	۴۸	۲۴
۴	−۳۴۰	−۲۲۰	۶	۷۲	۲۴
۵	−۵۶۰	−۲۱۴	۷۸	۹۶	۲۴
۶	−۷۷۴	−۱۳۶	۱۷۴	۱۲۰	۲۴
۷	−۹۱۰	۳۸	۲۹۴	۱۴۴	
۸	−۸۷۲	۳۳۲	۴۳۸		
۹	−۵۴۰	۷۷۰			
۱۰	۲۳۰				

راهنمائی. پنج مقدار اولیهٔ y را بدست آورید، $\Delta^{۴}y_{۰}=۲۴$ بدست می‌آید، عدد ۲۴ را در تمام ستون تفاضلهای مرتبهٔ چهارم تکرار کنید. سپس بقیهٔ قسمتهای جدول را به‌کمك عمل جمع (با حرکت از راست به‌چپ) بدست آورید.

۳۱۳۱. a) ۰/۲۱۱؛ ۰/۳۸۹؛ ۰/۴۹۰؛ ۰/۶۶۰ b) ۰/۲۲۹؛ ۰/۳۹۹؛ ۰/۴۹۱؛ ۰/۶۶۴. **۳۱۳۲.** ۰/۱۸۲۲؛ ۰/۱۹۹۳؛ ۰/۲۱۶۵؛ ۰/۲۳۳۴؛ ۰/۲۵۰۳. **۳۱۳۳.** $۱+x+x^{۲}+x^{۳}$.

۳۱۳۴. $y=\frac{۱}{۹۶}x^{۴}-\frac{۱۱}{۴۸}x^{۳}+\frac{۶۵}{۲۴}x^{۲}-\frac{۸۵}{۱۲}x+۸$؛ $y\approx ۲۲$ به‌ازای $x=۵/۵$؛ $y=۲۰$ به‌ازای $x\approx ۵/۲$. **راهنمائی.** برای محاسبهٔ x وقتی که $y=۲۰$ است $y_{۰}=۱۱$ بگیرید. **۳۱۳۵.** کثیرالجملهٔ درج $y=x^{۲}-۱۰x+۱$؛ $y=۱$ به‌ازای $x=۰$.

۳۱۳۶. ۱۵۸ کیلوگرم (بتقریب). **۳۱۳۷.** a) $y(۰/۵)=-۱$، $y(۲)=۱۱$؛ b) $y(۰/۵)=-\frac{۱۵}{۱۶}$، $y(۲)=-۳$. **۳۱۳۸.** $-۱/۳۲۵$. **۳۱۳۹.** ۱/۰۱.

۳۱۴۰. $-۱/۸۶$؛ $-۰/۲۵$؛ ۲/۱۱. **۳۱۴۱.** ۲/۰۹. **۳۱۴۲.** ۲/۴۵؛ ۰/۰۱۹. **۳۱۴۳.** ۰/۳۱؛ ۴. **۳۱۴۴.** ۲/۵۰۶. **۳۱۴۵.** ۰/۰۲. **۳۱۴۶.** ۰/۲۴.

۳۱۴۷. ۱/۲۷. **۳۱۴۸.** $-۱/۸۸$؛ ۰/۳۵؛ ۱/۵۳، **۳۱۴۹.** ۱/۸۴.

۳۱۵۰. ۱/۳۱، $-۰/۶۷$. **۳۱۵۱.** ۷/۱۳. **۳۱۵۲.** ۰/۱۶۵. **۳۱۵۳.** $\pm ۱/۷۳$ و ۰. **۳۱۵۴.** ۱/۷۲. **۳۱۵۵.** ۱/۳۸. **۳۱۵۶.** $x=۰/۸۳$؛ $y=۰/۵۶$؛ $x=-۰/۸۳$ $y=-۰/۵۶$. **۳۱۵۷.** $x=۱/۶۷$؛ $y=۱/۲۲$. **۳۱۵۸.** ۴/۴۹۳.

۳۱۵۹. $\pm ۱/۱۹۹۷$. **۳۱۶۰.** طبق رابطهٔ ذوزنقه ۱۱/۶۲۵؛ طبق رابطهٔ سیمپسون ۱۱/۴۱۷. **۳۱۶۱.** $-۰/۹۹۵$؛ -۱؛ ۰/۰۰۵؛ ۰/۵٪؛ $\Delta=۰/۰۰۵$.

۳۱۶۲. ۰/۳۰۶۸؛ $\Delta=۱/۳\cdot ۱۰^{-۵}$. **۳۱۶۳.** ۰/۶۹. **۳۱۶۴.** ۰/۷۹.

۳۱۶۵. ۰/۸۴. **۳۱۶۶.** ۰/۲۸ **۳۱۶۷.** ۰/۱۰ **۳۱۶۸.** ۱/۶۱.

۳۱۶۹. ۱/۸۵. **۳۱۷۰.** ۰/۰۹. **۳۱۷۱.** ۰/۶۷، **۳۱۷۲.** ۰/۷۵.

۳۱۷۳. ۰/۷۹. **۳۱۷۴.** ۴/۹۳. **۳۱۷۵.** ۱/۲۹. **راهنمائی.** از معادلهٔ پارامتری بیضی استفاده کنید: $x=cost$، $y=۰/۶۲۲۲sint$ و رابطهٔ طول قوس را به‌صورت:

$\int\limits_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱-\varepsilon^{۲}\cos^{۲}t}\,dt$ تشکیل دهید که در آن ε عبارتست از خروج ازمرکز بیضی.

۳۱۷۶. $y_۱(x)=\frac{x^۳}{۳}$ ، $y_۲(x)=\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۷}{۶۳}$ ،

$y_۳(x)=\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۷}{۶۳}+\frac{۲x^{۱۱}}{۲۰۷۹}+\frac{x^{۱۵}}{۵۹۵۳۵}$.

۳۱۷۷. $y_۱(x)=\frac{x^۲}{۲}-x+۱$ ، $y_۲(x)=\frac{x^۳}{۶}+\frac{۳x^۲}{۲}-x+۱$ ،

$y_۳(x)=\frac{x^۴}{۱۲}-\frac{x^۳}{۶}+\frac{۳x^۲}{۲}-x+۱$ ؛

$z_۱(x)=۳x-۲$ ، $z_۲(x)=\frac{x^۳}{۶}-۲x^۲+۳x-۲$ ،

$z_۳(x)=\frac{۷x^۳}{۶}-۲x^۲+۳x-۲$. **۳۱۷۸.** $y_۱(x)=x$ ،

$y_۲(x)=x-\frac{x^۳}{۶}$ ، $y_۳(x)=x-\frac{x^۳}{۶}+\frac{x^۵}{۱۲۰}$.

۳۱۷۹. $y(۱)=۳/۳۶$. **۳۱۸۰.** $y(۲)=۰/۸۰$.

۳۱۸۱. $y(۱)=۳/۷۲$ ؛ $z(۱)=۲/۷۲$.

۳۱۸۲. $y=۱/۸۰$. **۳۱۸۳.** ۳/۱۵. **۳۱۸۴.** ۰/۱۴.

۳۱۸۵. $y(۰/۵)=۳/۱۵$ ؛ $z(۰/۵)=-۳/۱۵$. **۳۱۸۶.** $y(۰/۵)=۰/۵۵$ ؛

$z(۰/۵)=-۰/۱۸$. **۳۱۸۷.** ۱/۱۶. **۳۱۸۸.** ۰/۸۷.

۳۱۸۹. $x(\pi)=۳/۵۸$ ؛ $x'(\pi)=۰/۷۹$.

۳۱۹۰. $۴۲۹+۱۷۳۹\cos x-۱۰۳۷\sin x-۶۳۲۱\cos ۲x+$

$+۱۲۶۳\sin ۲x-۱۲۴۲\cos ۳x-۳۳\sin ۳x$

۳۱۹۱. $۶/۴۹ - ۱/۹۶\cos x + ۲/۱۴\sin x - ۱/۶۸\cos ۲x +$
$+ ۰/۵۳\sin ۲x - ۱/۱۳\cos ۳x + ۰/۰۴\sin ۳x$

۳۱۹۲. $۰/۹۶۰ + ۰/۸۵۱\cos x + ۰/۹۱۵\sin x + ۰/۵۴۲\cos ۲x +$
$+ ۰/۶۲۰\sin ۲x + ۰/۲۷۱\cos ۳x + ۰/۱۰۰\sin ۳x$

۳۱۹۳. (a $۰/۶۰۸\sin x + ۰/۰۷۶\sin ۲x + ۰/۰۲۲\sin ۳x$.

(b $۰/۳۳۸ + ۰/۴۱۴\cos x + ۰/۱۱۱\cos ۲x + ۰/۰۵۶\cos ۳x$

I– الفبای یونانی

Aα آلفا	Hη اتا	Nν نو	Tτ تو
Bβ بتا	Θθ تتا	Ξξ کسی	Υυ ایپسیلون
Γγ گاما	Iι یوتا	Oo اومیکرون	Φφ فی
Δδ دلتا	Kκ کاپا	Ππ پی	Xχ خی
Eε اپسیلون	Λλ لاندا	Pρ رو	Ψψ پسی
Zζ زتا	Mμ مو	Σσ زیگما	Ωω اومگا

II– بعضی مقادیر ثابت

مقدار	x	lgx	مقدار	x	lgx
π	۳/۱۴۱۵۹	۰/۴۹۷۱۵	$\frac{\text{۱}}{e}$	۰/۳۶۷۸۸	$\overline{\text{۱}}$/۵۶۵۷۱
۲π	۶/۲۸۳۱۸	۰/۷۹۸۱۸	$e^{\text{۲}}$	۷/۳۸۹۰۶	۰/۸۶۸۵۹
$\frac{\pi}{\text{۲}}$	۱/۵۷۰۸۰	۰/۱۹۶۱۲	$\sqrt{e}$	۱/۶۴۸۷۲	۰/۲۱۷۱۵
$\frac{\pi}{\text{۴}}$	۰/۷۸۵۴۰	$\overline{\text{۱}}$/۸۹۵۰۹	$\sqrt[\text{۳}]{e}$	۱/۳۹۵۶۱	۰/۱۴۴۷۶
$\frac{\text{۱}}{\pi}$	۰/۳۱۸۳۱	$\overline{\text{۱}}$/۵۰۲۸۵	$M = lge$	۰/۴۳۴۲۹	$\overline{\text{۱}}$/۶۳۷۷۸
$\pi^{\text{۲}}$	۹/۸۶۹۶۰	۰/۹۹۴۳۰	$\frac{\text{۱}}{M} = ln\text{۱۰}$	۲/۳۰۲۵۸	۰/۳۶۲۲۲
$\sqrt{\pi}$	۱/۷۷۲۵۴	۰/۲۴۸۵۷	یك رادیان	۵۷°۱۷′۴۵″	
$\sqrt[\text{۳}]{\pi}$	۱/۴۶۴۵۹	۰/۱۶۵۷۲	$arc\text{۱}°$	۰/۰۱۷۴۵	$\overline{\text{۲}}$/۲۴۱۸۸
e	۲/۷۱۸۲۸	۰/۴۳۴۲۹	g	۹/۸۱	۰/۹۹۱۶۷

III. مقادیر معکوس، توانها، ریشه‌ها، لگاریتمها

x	$\frac{1}{x}$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$lg x$ مانتیس	$ln x$
۱,۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۳,۱۶۲	۱,۰۰۰	۲,۱۵۴	۴,۶۴۲	۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰
۱,۱	۰,۹۰۹	۱;۲۱۰	۱,۳۳۱	۱,۰۴۹	۳,۳۱۷	۱,۰۳۲	۲,۲۲۴	۴,۷۹۱	۰۴۱۴	۰,۰۹۵۳
۱,۲	۰,۸۳۳	۱,۴۴۰	۱,۷۲۸	۱,۰۹۵	۳,۴۶۴	۱,۰۶۳	۲,۲۸۹	۴,۹۳۲	۰۷۹۲	۰,۱۸۲۳
۱,۳	۰,۷۶۹	۱,۶۹۰	۲,۱۹۷	۱,۱۴۰	۳,۶۰۶	۱,۰۹۱	۲,۳۵۱	۵,۰۶۶	۱۱۳۹	۰,۲۶۲۴
۱,۴	۰,۷۱۴	۱,۹۶۰	۲,۷۴۴	۱,۱۸۳	۳,۷۴۲	۱,۱۱۹	۲,۴۱۰	۵,۱۹۲	۱۴۶۱	۰,۳۳۶۵
۱,۵	۰,۶۶۷	۲,۲۵۰	۳,۳۷۵	۱,۲۲۵	۳,۸۷۳	۱,۱۴۵	۲,۴۶۶	۵,۳۱۳	۱۷۶۱	۰,۴۰۵۵
۱,۶	۰,۶۲۵	۲,۵۶۰	۴,۰۴۶	۱,۲۶۵	۴,۰۰۰	۱,۱۷۰	۲,۵۲۰	۵,۴۲۹	۲۰۴۱	۰,۴۷۰۰
۱,۷	۰,۵۸۸	۲,۸۹۰	۴,۹۱۳	۱,۳۰۴	۴,۱۲۳	۱,۱۹۳	۲,۵۷۱	۵,۵۴۰	۲۳۰۴	۰,۵۳۰۶
۱,۸	۰,۵۵۶	۳,۲۴۰	۵,۸۳۲	۱,۳۴۲	۴,۲۴۳	۱,۲۱۶	۲,۶۲۱	۵,۶۴۶	۲۵۵۳	۰,۵۸۷۸
۱,۹	۰,۵۲۶	۳,۶۱۰	۶,۸۵۹	۱,۳۷۸	۴,۳۵۹	۱,۲۳۹	۲,۶۶۸	۵,۷۴۹	۲۷۸۸	۰,۶۴۱۹
۲,۰	۰,۵۰۰	۴,۰۰۰	۸,۰۰۰	۱,۴۱۴	۴,۴۷۲	۱,۲۶۰	۲,۷۱۴	۵,۸۴۸	۳۰۱۰	۰,۶۹۳۱
۲,۱	۰,۴۷۶	۴,۴۱۰	۹,۲۶۱	۱,۴۴۹	۴,۵۸۳	۱,۲۸۱	۲,۷۵۹	۵,۹۴۴	۳۲۲۲	۰,۷۴۱۹
۱,۲	۰„۴۵۴	۴,۸۴۰	۱۰,۶۵	۱,۴۸۳	۴,۶۹۰	۱,۳۰۱	۲,۸۰۲	۶,۰۳۷	۳۴۲۴	۰,۷۸۸۵
۲,۳	۰,۴۳۵	۵,۲۹۰	۱۲,۱۷	۱,۵۱۷	۴,۷۹۶	۱,۳۲۰	۲,۸۴۴	۶,۱۲۷	۳۶۱۷	۰,۸۳۲۹
۲,۴	۰,۴۱۷	۵,۷۶۰	۱۳,۸۲	۱,۵۴۹	۴,۸۹۹	۱,۳۳۹	۲,۸۸۴	۶,۲۱۴	۳۸۰۲	۰,۸۷۵۵
۲,۵	۰,۵۰۰	۶,۲۵۰	۱۵,۶۲	۱,۵۸۱	۵,۰۰۰	۱,۳۵۷	۲,۹۲۴	۶,۳۰۰	۳۹۷۹	۰,۹۱۶۳
۲,۶	۰,۳۸۵	۶,۷۶۰	۱۷,۵۸	۱,۶۱۲	۵,۰۹۹	۱,۳۷۵	۲,۹۶۲	۶,۳۸۳	۴۱۵۰	۰,۹۵۵۵
۲,۷	۰,۳۷۰	۷,۲۹۰	۱۹,۶۸	۱,۶۴۳	۵,۱۹۶	۱,۳۹۲	۳,۰۰۰	۶,۴۶۳	۴۳۱۴	۰,۹۹۳۳
۲,۸	۰,۳۵۷	۷,۸۴۰	۲۱,۹۵	۱,۶۷۳	۵,۲۹۲	۱,۴۰۹	۳,۰۳۷	۶,۵۴۲	۴۴۷۲	۱,۰۲۹۶
۲,۹	۰,۳۴۵	۸,۴۱۰	۲۴,۳۹	۱,۷۰۳	۵,۳۸۵	۱,۴۲۶	۳,۰۷۲	۶,۶۱۹	۴۶۲۴	۱,۰۶۴۷
۳,۰	۰,۳۳۳	۹,۰۰۰	۲۷,۰۰	۱,۷۳۲	۵,۴۷۷	۱,۴۴۲	۳,۱۰۷	۶,۶۹۴	۴۷۷۱	۱,۰۹۸۶
۳,۱	۰,۳۲۳	۹,۶۱۰	۲۹,۷۹	۱,۷۶۱	۵,۵۶۸	۱,۴۵۸	۳,۱۴۱	۶,۷۶۸	۴۹۱۴	۱,۱۳۱۴
۳,۲	۰,۳۱۲	۱۰,۲۴	۳۲,۷۷	۱,۷۸۹	۵,۶۵۷	۱,۴۷۴	۳,۱۷۵	۶,۸۴۰	۵۰۵۱	۱,۱۶۳۲
۳,۳	۰,۳۰۳	۱۰,۸۹	۳۵,۹۴	۱,۸۱۷	۵,۷۴۵	۱,۴۸۹	۳,۲۰۸	۶,۹۱۰	۵۱۸۵	۱,۱۹۳۹
۳,۴	۰,۲۹۴	۱۱,۵۶	۳۹,۳۰	۱,۸۴۴	۵,۸۳۱	۱;۵۰۴	۳,۲۴۰	۶,۹۸۰	۵۳۱۵	۱,۲۲۳۸
۳,۵	۰,۲۸۶	۱۲,۲۵	۴۲,۸۸	۱,۸۷۱	۵,۹۱۶	۱,۵۱۸	۳,۲۷۱	۷,۰۴۷	۵۴۴۱	۱,۲۵۲۸
۳,۶	۰,۲۷۸	۱۲,۹۶	۴۶,۶۶	۱,۸۹۷	۶,۰۰۰	۱,۵۳۳	۳,۳۰۲	۷,۱۱۴	۵۵۶۳	۱,۲۸۰۹
۳,۷	۰,۲۷۰	۱۳,۶۹	۵۰,۶۵	۱,۹۲۴	۶,۰۸۳	۱,۵۴۷	۳,۳۳۲	۷,۱۷۹	۵۶۸۲	۱,۳۰۸۳
۳,۸	۰,۲۶۳	۱۴,۴۴	۵۴,۸۷	۱,۹۴۹	۶,۱۶۴	۱,۵۶۰	۳,۳۶۲	۷,۲۴۳	۵۷۹۸	۱,۳۳۵۰
۳,۹	۰,۲۵۶	۱۵,۲۱	۱,۹۷۵	۱,۹۷۵	۶,۲۴۵	۱,۵۷۴	۳,۳۹۱	۷,۳۰۶	۵۹۱۱	۱,۳۶۱۰
۴,۰	۰,۲۵۰	۱۶,۰۰	۶۴,۰۰	۲,۰۰۰	۶,۳۲۵	۱,۵۸۷	۳,۴۲۰	۷,۳۶۸	۶۰۲۱	۱,۳۸۶۳
۴,۱	۰,۲۴۴	۱۶,۸۱	۶۸,۹۲	۲,۰۲۵	۶,۴۰۳	۱,۶۰۱	۳,۴۴۸	۷,۴۲۹	۶۱۲۸	۱,۴۱۱۰
۴,۲	۰,۲۳۸	۱۷,۶۴	۷۳,۰۹	۲,۰۴۹	۶,۴۸۱	۱,۶۱۳	۳,۴۷۶	۷,۴۸۹	۶۲۳۲	۱,۴۳۵۱
۴,۳	۰,۲۳۳	۱۸,۴۹	۷۹,۵۱	۳,۰۷۴	۶,۵۵۷	۱,۶۲۶	۳,۵۰۳	۷,۵۴۸	۶۳۳۵	۱,۴۵۸۶
۴,۴	۰,۲۲۷	۱۹,۳۶	۸۵,۱۸	۲,۰۹۸	۶,۶۳۳	۱,۶۳۹	۳,۵۳۰	۷,۶۰۶	۶۴۳۵	۱,۴۸۱۶
۴,۵	۰,۲۲۲	۲۰,۲۵	۹۱,۱۲	۲,۱۲۱	۶,۷۰۸	۱,۶۵۱	۳,۵۵۷	۷,۶۶۳	۶۵۳۲	۱,۵۰۴۱
۴,۶	۰,۲۱۷	۲۱,۱۶	۹۷,۳۴	۲,۱۴۵	۶,۷۸۲	۱,۶۶۳	۳,۵۸۳	۷,۷۱۹	۶۶۲۸	۱,۵۲۶۱
۴,۷	۰,۲۱۳	۲۲,۰۹	۱۰۳,۸	۲,۱۶۸	۶,۸۵۶	۱,۶۷۵	۳,۶۰۹	۷,۷۷۵	۶۷۲۱	۱,۵۴۷۶
۴,۸	۰,۲۰۸	۲۳,۰۴	۱۱۰,۶	۲,۱۹۱	۶,۹۲۸	۱,۶۸۷	۳,۶۳۴	۷,۸۳۰	۶۸۱۲	۱,۵۶۸۶
۴,۹	۰,۲۰۴	۲۴,۰۱	۱۱۷,۶	۲,۲۱۴	۷,۰۰۰	۱,۶۹۸	۳,۶۵۹	۷,۸۸۴	۶۹۰۲	۱,۵۸۹۲
۵,۰	۰,۲۰۰	۲۵,۰۰	۱۲۵,۰	۲,۲۳۶	۷,۰۷۱	۱,۷۱۰	۳,۶۸۴	۷,۹۳۷	۶۹۹۰	۱,۶۰۹۴
۵,۱	۰,۱۹۶	۲۶,۰۱	۱۳۲,۷	۲,۲۵۸	۷,۱۴۱	۱,۷۲۱	۳,۷۰۸	۷,۹۹۰	۷۰۷۶	۱,۶۲۹۲
۵,۲	۰,۱۹۲	۲۷,۰۴	۱۴۰,۶	۲,۲۸۰	۷,۲۱۱	۱,۷۳۲	۳,۷۳۳	۸,۰۴۱	۷۱۶۰	۱,۶۴۸۷
۵,۳	۰,۱۸۹	۲۸,۰۹	۱۴۸,۹	۲,۳۰۲	۷,۲۸۰	۱,۷۴۴	۳,۷۵۶	۸,۰۹۳	۷۲۴۳	۱,۶۶۷۷
۵,۴	۰,۱۸۵	۲۹,۱۶	۱۵۷,۵	۲,۳۲۴	۷,۳۴۸	۱,۷۵۴	۵,۷۸۰	۸,۱۴۳	۷۳۲۴	۱,۶۸۶۴

IV. توابع مثلثاتی

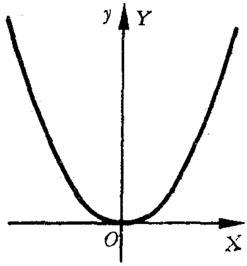
x°	x رادیان	$\sin x$	$tg x$	$cotg\ x$	$\cos x$		
۰	۰,۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰	∞	۱,۰۰۰۰	۱,۵۷۰۸	۹۰
۱	۰,۰۱۷۵	۰,۰۱۷۵	۰,۰۱۷۵	۵۷,۲۹	۰,۹۹۹۸	۱,۵۵۳۳	۸۹
۲	۰,۰۳۴۹	۰,۰۳۴۹	۰,۰۳۴۹	۲۸,۶۴	۰,۹۹۹۴	۱,۵۳۵۹	۸۸
۳	۰,۰۵۲۴	۰,۰۵۲۳	۰,۰۵۲۴	۱۹,۰۸	۰,۹۹۸۶	۱,۵۱۸۴	۸۷
۴	۰,۰۶۹۸	۰,۰۶۹۸	۰,۰۶۹۹	۱۴,۳۰	۰,۹۹۷۶	۱,۵۰۱۰	۸۶
۵	۰,۰۸۷۳	۰,۰۸۷۲	۰,۰۸۷۵	۱۱,۴۳	۰,۹۹۶۲	۱,۴۸۳۵	۸۵
۶	۰,۱۰۴۷	۰,۱۰۴۵	۰,۱۰۵۱	۹,۵۱۴	۰,۹۹۴۵	۱,۴۶۶۱	۸۴
۷	۰,۱۲۲۲	۰,۱۲۱۹	۰,۱۲۲۸	۸,۱۴۴	۰,۹۹۲۵	۱,۴۴۸۶	۸۳
۸	۰,۱۳۹۶	۰,۱۳۹۲	۰,۱۴۰۵	۷,۱۱۵	۰,۹۹۰۳	۱,۴۳۱۲	۸۲
۹	۰,۱۵۷۱	۰,۱۵۶۴	۰,۱۵۸۴	۶,۳۱۴	۰,۹۸۷۷	۱,۴۱۳۷	۸۱
۱۰	۰,۱۷۴۵	۰,۱۷۳۶	۰,۱۷۶۳	۵,۶۷۱	۰,۹۸۴۸	۱,۳۹۶۳	۸۰
۱۱	۰,۱۹۲۰	۰,۱۹۰۸	۰,۱۹۴۴	۵,۱۴۵	۰,۹۸۱۶	۱,۳۷۸۸	۷۹
۱۲	۰,۲۰۹۴	۰,۲۰۷۹	۰,۲۱۲۶	۴,۷۰۵	۰,۹۷۸۱	۱,۳۶۱۴	۷۸
۱۳	۰,۲۲۶۹	۰,۲۲۵۰	۰,۲۳۰۹	۴,۳۳۱	۰,۹۷۴۴	۱,۳۴۳۹	۷۷
۱۴	۰,۲۴۴۳	۰,۲۴۱۹	۰,۲۴۹۳	۴,۰۱۱	۰,۹۷۰۳	۱,۳۲۶۵	۷۶
۱۵	۰,۲۶۱۸	۰,۲۵۸۸	۰,۲۶۷۹	۳,۷۳۲	۰,۹۶۵۹	۱,۳۰۹۰	۷۵
۱۶	۰,۲۷۹۳	۰,۲۷۵۶	۰,۲۸۶۷	۳,۴۸۷	۰,۹۶۱۳	۱,۲۹۱۵	۷۴
۱۷	۰,۲۹۶۷	۰,۲۹۲۴	۰,۳۰۵۷	۳,۲۷۱	۰,۹۵۶۳	۱,۲۷۴۱	۷۳
۱۸	۰,۳۱۴۲	۰,۳۰۹۰	۰,۳۲۴۹	۳,۰۷۸	۰,۹۵۱۱	۱,۲۵۶۶	۷۲
۱۹	۰,۳۳۱۶	۰,۳۲۵۶	۰,۳۴۴۳	۲,۹۰۴	۰,۹۴۵۵	۱,۲۳۹۲	۷۱
۲۰	۰,۳۴۹۱	۰,۳۴۲۰	۰,۳۶۴۰	۲,۷۴۷	۰,۹۳۹۷	۱,۲۲۱۷	۷۰
۲۱	۰,۳۶۶۵	۰,۳۵۸۴	۰,۳۸۳۹	۲,۶۰۵	۰,۹۳۳۶	۱,۲۰۴۳	۶۹
۲۲	۰,۳۸۴۰	۰,۳۷۴۶	۰,۴۰۴۰	۲,۴۷۵	۰,۹۲۷۲	۱,۱۸۶۸	۶۸
۲۳	۰,۴۰۱۴	۰,۳۹۰۷	۰,۴۲۴۵	۲,۳۵۶	۰,۹۲۰۵	۱,۱۶۹۴	۶۷
۲۴	۰,۴۱۸۹	۰,۴۰۶۷	۰,۴۴۵۲	۲,۲۴۶	۰,۹۱۳۵	۱,۱۵۱۹	۶۶
۲۵	۰,۴۳۶۳	۰,۴۲۲۶	۰,۴۶۶۳	۲,۱۴۵	۰,۹۰۶۳	۱,۱۳۴۵	۶۵
۲۶	۰,۴۵۳۸	۰,۴۳۸۴	۰,۴۸۷۷	۲,۰۵۰	۰,۸۹۸۸	۱,۱۱۷۰	۶۴
۲۷	۰,۴۷۱۲	۰,۴۵۴۰	۰,۵۰۹۵	۱,۹۶۳	۰,۸۹۱۰	۱,۰۹۹۶	۶۳
۲۸	۰,۴۸۸۷	۰,۴۶۹۵	۰,۵۳۱۷	۱,۸۸۱	۰,۸۸۲۹	۱,۰۸۲۱	۶۲
۲۹	۰,۵۰۶۱	۰,۴۸۴۸	۰,۵۵۴۳	۱,۸۰۴	۰,۸۷۴۶	۱,۰۶۴۷	۶۱
۳۰	۰,۵۲۳۶	۰,۵۰۰۰	۰,۵۷۷۴	۱,۷۳۲	۰,۸۶۶۰	۱,۰۴۷۲	۶۰
۳۱	۰,۵۴۱۱	۰,۵۱۵۰	۰,۶۰۰۹	۱,۶۶۴۳	۰,۸۵۷۲	۱,۰۲۹۷	۵۹
۳۲	۰,۵۵۸۵	۰,۵۲۹۹	۰,۶۲۴۹	۱,۶۰۰۳	۰,۸۴۸۰	۱,۰۱۲۳	۵۸
۳۳	۰,۵۷۶۰	۰,۵۴۴۶	۰,۶۴۹۴	۱,۵۳۹۹	۰,۸۳۸۷	۰,۹۹۴۸	۵۷
۳۴	۰,۵۹۳۴	۰,۵۵۹۲	۰,۶۷۴۵	۱,۴۸۲۶	۰,۸۲۹۰	۰,۹۷۷۴	۵۶
۳۵	۰,۶۱۰۹	۰,۵۷۳۶	۰,۷۰۰۲	۱,۴۲۸۱	۰,۸۱۹۲	۰,۹۵۹۹	۵۵
۳۶	۰,۶۲۸۳	۰,۵۸۷۸	۰,۷۲۶۵	۱,۳۷۶۴	۰,۸۰۹۰	۰,۹۴۲۵	۵۴
۳۷	۰,۶۴۵۸	۰,۶۰۱۸	۰,۷۵۳۶	۱,۳۲۷۰	۰,۷۹۸۶	۰,۹۲۵۰	۵۳
۳۸	۰,۶۶۳۲	۰,۶۱۵۷	۰,۷۸۱۳	۱,۲۷۹۹	۰,۷۸۸۰	۰,۹۰۷۶	۵۲
۳۹	۰,۶۸۰۷	۰,۶۲۹۳	۰,۸۰۹۸	۱,۲۳۴۹	۰,۷۷۷۱	۰,۸۹۰۱	۵۱
۴۰	۰,۶۹۸۱	۰,۶۴۲۸	۰,۸۳۹۱	۱,۱۹۱۸	۰,۷۶۶۰	۰,۸۷۲۷	۵۰
۴۱	۰,۷۱۵۶	۰,۶۵۶۱	۰,۸۶۹۳	۱,۱۵۰۴	۰,۷۵۴۷	۰,۸۵۵۲	۴۹
۴۲	۰,۷۳۳۰	۰,۶۶۹۱	۰,۹۰۰۴	۱,۱۱۰۶	۰,۷۴۳۱	۰,۸۳۷۸	۴۸
۴۳	۰,۷۵۰۵	۰,۶۸۲۰	۰,۹۳۲۵	۱,۰۷۲۴	۰,۷۳۱۴	۰,۸۲۰۳	۴۷
۴۴	۰,۷۶۷۹	۰,۶۹۴۷	۰,۹۶۵۷	۱,۰۳۵۵	۰,۷۱۹۳	۰,۸۰۲۹	۴۶
۴۵	۰,۷۸۵۴	۰,۷۰۷۱	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۰,۷۰۷۱	۰,۷۸۵۴	۴۵
		$\cos x$	$cotg x$	$tg x$	$\sin x$	x رادیان	x°

۷. توابع نمائی، هذلولی، مثلثاتی

x	e^x	e^{-x}	shx	chx	thx	$\sin x$	$\cos x$
۰,۰	۱;۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰
۰,۱	۱,۱۰۵۲	۰,۹۰۴۸	۰,۱۰۰۲	۱,۰۰۵۰	۰,۰۹۹۷	۰,۰۹۹۸	۰,۹۹۵۰
۰,۲	۱,۲۲۱۴	۰,۸۱۸۷	۰,۲۰۱۳	۱,۰۲۰۱	۰,۱۹۷۴	۰,۱۹۸۷	۰,۹۸۰۱
۰,۳	۱,۳۴۹۹	۰,۷۴۰۸	۰,۳۰۴۵	۱,۰۴۵۳	۰,۲۹۱۳	۰,۲۹۵۵	۰,۹۵۵۳
۰,۴	۱,۴۹۱۸	۰,۶۷۰۳	۰,۴۱۰۸	۱,۰۸۱۱	۰,۳۷۹۹	۰,۳۸۹۴	۰,۹۲۱۱
۰,۵	۱,۶۴۸۷	۰,۶۰۶۵	۰,۵۲۱۱	۱,۱۲۷۶	۰,۴۶۲۱	۰,۴۷۹۴	۰,۸۷۷۶
۰,۶	۱,۸۲۲۱	۰,۵۴۸۸	۰,۶۳۶۷	۱,۱۸۵۵	۰,۵۳۷۰	۰,۵۶۴۶	۰,۸۲۵۳
۰,۷	۲,۰۱۳۸	۰,۴۹۶۶	۰,۷۵۸۶	۱,۲۵۵۲	۰,۶۰۴۴	۰,۶۴۴۲	۰,۷۶۴۸
۰,۸	۲;۲۲۵۵	۰,۴۴۹۳	۰,۸۸۸۱	۱,۳۳۷۴	۰,۶۶۴۰	۰,۷۱۷۴	۰,۶۹۶۷
۰,۹	۲,۴۵۹۶	۰,۴۰۶۶	۱,۰۲۶۵	۱,۴۳۳۱	۰,۷۱۶۳	۰,۷۸۳۳	۰,۶۲۱۶
۱,۰	۲,۷۱۸۳	۰,۳۶۷۹	۱,۱۷۵۲	۱,۵۴۳۱	۰,۷۶۱۶	۰,۸۴۱۵	۰,۵۴۰۳
۱,۱	۳,۰۰۴۲	۰,۳۳۲۹	۱,۳۳۵۶	۱,۶۶۸۵	۰,۸۰۰۵	۰,۸۹۱۲	۰,۴۵۳۶
۱,۲	۳;۳۲۰۱	۰,۳۰۱۲	۱,۵۰۹۵	۱,۸۱۰۷	۰,۸۳۳۷	۰,۹۳۲۰	۰,۳۶۲۴
۱,۳	۳,۶۶۹۳	۰,۲۷۲۵	۱,۶۹۸۴	۱,۹۷۰۹	۰,۸۶۱۷	۰,۹۶۳۶	۰,۲۶۷۵
۱,۴	۴,۰۵۵۲	۰,۲۴۶۶	۱,۹۰۴۳	۲,۱۵۰۹	۰,۸۸۵۴	۰,۹۸۵۴	۰,۱۷۰۰
۱,۵	۴,۴۸۱۷	۰,۲۲۳۱	۲,۱۲۹۳	۲,۳۵۲۴	۰,۹۰۵۱	۰,۹۹۷۵	۰,۰۷۰۷
۱,۶	۴,۹۵۳۰	۰,۲۰۱۹	۲,۳۷۵۶	۲,۵۷۷۵	۰,۹۲۱۷	۰,۹۹۹۶	−۰,۰۲۹۲
۱,۷	۵,۴۷۳۹	۰,۱۸۲۷	۲,۶۴۵۶	۲,۸۲۸۳	۰,۹۳۵۴	۰,۹۹۱۷	−۰,۱۲۸۸
۱,۸	۶,۰۴۹۶	۰,۱۶۵۳	۲,۹۴۲۲	۳,۱۰۷۵	۰,۹۴۶۸	۰,۹۷۳۸	−۰,۲۲۷۲
۱,۹	۶,۶۸۵۹	۰,۱۴۹۶	۳,۲۶۸۲	۳,۴۱۷۷	۰,۹۵۶۲	۰,۹۴۶۳	−۰,۳۲۳۳
۲,۰	۷,۳۸۹۱	۰,۱۳۵۳	۳,۶۲۶۹	۳,۷۶۲۲	۰,۹۶۴۰	۰,۹۰۹۳	−۰,۴۱۶۱
۲,۱	۸,۱۶۶۲	۰,۱۲۲۵	۴,۰۲۱۹	۴,۱۴۴۳	۰,۹۷۰۴	۰,۸۶۳۲	−۰,۵۰۴۸
۲,۲	۹,۰۲۵۰	۰,۱۱۰۸	۴,۴۵۷۱	۴,۵۶۷۹	۰,۹۷۵۷	۰,۸۰۸۵	−۰,۵۸۸۵
۲,۳	۹,۹۷۴۲	۰,۱۰۰۳	۴,۹۳۷۰	۵,۰۳۷۲	۰,۹۸۰۱	۰,۷۴۵۷	−۰,۶۶۶۳
۲,۴	۱۱,۰۲۳۲	۰,۰۹۰۷	۵,۴۶۶۲	۵,۵۵۶۹	۰,۹۸۳۷	۰,۶۷۵۵	−۰,۷۳۷۴
۲,۵	۱۲,۱۸۲۵	۰,۰۸۲۱	۶,۰۵۰۲	۶,۱۳۲۳	۰,۹۸۶۶	۰,۵۹۸۵	−۰,۸۰۱۱
۲,۶	۱۳,۴۶۳۷	۰,۰۷۴۳	۶,۶۹۴۷	۶,۷۶۹۰	۰,۹۸۹۰	۰,۵۱۵۵	−۰,۸۵۶۹
۲,۷	۱۴,۸۷۹۷	۰,۰۶۷۲	۷,۴۰۶۳	۷,۴۷۳۵	۰,۹۹۱۰	۰,۴۲۷۴	−۰,۹۰۴۱
۲,۸	۱۶,۴۴۴۶	۰,۰۶۰۸	۸,۱۹۱۹	۸,۲۵۲۷	۰,۹۹۲۶	۰,۳۳۵۰	−۰,۹۴۲۲
۲,۹	۱۸,۱۷۴۱	۰,۰۵۵۰	۹,۰۵۹۶	۹,۱۱۴۶	۰,۹۹۴۰	۰,۲۳۹۲	−۰,۹۷۱۰
۳,۰	۲۰,۰۸۵۵	۰,۰۴۹۸	۱۰,۰۱۷۹	۱۰,۰۶۷۷	۰,۹۹۵۰	۰,۱۴۱۱	−۰,۹۹۰۰
۳,۱	۲۲,۱۹۷۹	۰,۰۴۵۰	۱۱,۰۷۶۴	۱۱,۱۲۱۵	۰,۹۹۵۹	۰,۰۴۱۶	−۰,۰۹۹۱
۳,۲	۲۴,۵۳۲۵	۰,۰۴۰۸	۱۲,۲۴۵۹	۱۲,۲۳۶۶	۰,۹۹۶۷	−۰,۰۵۸۴	−۰;۹۹۸۳
۳,۳	۲۷,۱۱۲۶	۰,۰۳۶۹	۱۳,۵۳۷۹	۱۳,۵۷۴۸	۰,۹۹۷۳	−۰,۱۵۷۷	−۰,۹۸۷۵
۳,۴	۲۹,۹۶۴۱	۰,۰۳۳۴	۱۴,۹۶۵۴	۱۴,۹۹۸۷	۰,۹۹۷۸	−۰,۲۵۵۵	−۰,۹۶۶۸
۳,۵	۳۳,۱۱۵۴	۰,۰۳۰۲	۱۶,۵۴۲۶	۱۶,۵۷۲۸	۰,۹۹۸۲	−۰,۳۵۰۸	−۰,۹۳۶۵

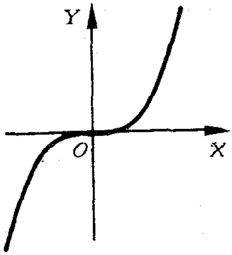
x	$\frac{1}{x}$	$x^{۲}$	$x^{۳}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{۱۰x}$	$\sqrt[۳]{x}$	$\sqrt[۳]{۱۰x}$	$\sqrt[۳]{۱۰۰x}$	lgx مانتیس	lnx
۵,۵	۰,۱۸۲	۳۰,۲۵	۱۶۶,۴	۲,۳۴۵	۷,۴۱۶	۱,۷۶۵	۳,۸۰۳	۸,۱۹۳	۷۴۰۴	۱,۷۰۴۷
۵,۶	۰,۱۷۹	۳۱,۳۶	۱۷۵,۶	۲,۳۶۶	۷,۴۸۳	۱,۷۷۶	۳,۸۲۶	۸,۲۴۳	۷۴۸۲	۱,۷۲۲۸
۵,۷	۰,۱۷۵	۳۲,۴۹	۱۸۵,۲	۲,۳۸۷	۷,۵۵۰	۱,۷۸۶	۳,۸۴۹	۸,۲۹۱	۷۵۵۹	۱,۷۴۰۵
۵,۸	۰,۱۷۲	۳۳,۶۴	۱۹۵,۱	۲,۴۰۸	۷,۶۱۶	۱,۷۹۷	۳,۸۷۱	۸,۳۴۰	۷۶۳۴	۱,۷۵۷۹
۵,۹	۰,۱۶۹	۳۴,۸۱	۲۰۵,۴	۲,۴۲۹	۷,۶۸۱	۱,۸۰۷	۳,۸۹۳	۸,۳۸۷	۷۷۰۹	۱,۷۷۵۰
۶,۰	۰,۱۶۷	۳۶,۰۰	۲۱۶,۰	۲,۴۴۹	۷,۷۴۶	۱,۸۱۷	۳,۹۱۵	۸,۴۳۴	۷۷۸۲	۱,۷۹۱۸
۶,۱	۰,۱۶۴	۳۷,۲۱	۲۲۷,۰	۲,۴۷۰	۷,۸۱۰	۱,۸۲۷	۳,۹۳۶	۸,۴۸۱	۷۸۵۳	۱,۸۰۸۳
۶,۲	۰,۱۶۱	۳۸,۴۴	۲۳۸,۳	۲,۴۹۰	۷,۸۷۴	۱,۸۳۷	۳,۹۵۸	۸,۵۲۷	۷۹۲۴	۱,۸۲۴۵
۶,۳	۰,۱۵۹	۳۹,۶۹	۲۵۰,۰	۲,۵۱۰	۷,۹۳۷	۱,۸۴۷	۳,۹۷۹	۸,۵۷۳	۷۹۹۳	۱,۸۴۰۵
۶,۴	۰,۱۵۶	۴۰,۹۶	۲۶۲,۱	۲,۵۳۰	۸,۰۰۰	۱,۸۵۷	۴,۰۰۰	۸,۶۱۸	۸۰۶۲	۱,۸۵۶۳
۶,۵	۰,۱۵۴	۴۲,۲۵	۲۷۴,۶	۲,۵۵۰	۸,۰۶۲	۱,۸۶۶	۴,۰۲۱	۸,۶۶۲	۸۱۲۹	۱,۸۷۱۸
۶,۶	۰,۱۵۱	۴۳,۵۶	۲۸۷,۵	۲,۵۶۹	۸,۱۲۴	۱,۸۷۶	۴,۰۴۱	۸,۷۰۷	۸۱۹۵	۱,۸۸۷۱
۶,۷	۰,۱۴۹	۴۴,۸۹	۳۰۰,۸	۲,۵۸۸	۸,۱۸۵	۱,۸۸۵	۴,۰۶۲	۸,۷۵۰	۸۲۶۱	۱,۹۰۲۱
۶,۸	۰,۱۴۷	۴۶,۲۴	۳۱۴,۴	۲,۶۰۸	۸,۲۴۶	۱,۸۹۵	۴,۰۸۲	۸,۷۹۴	۸۳۲۵	۱,۹۱۶۹
۶,۹	۰,۱۴۵	۴۷,۶۱	۳۲۸,۵	۲,۶۲۷	۸,۳۰۷	۱,۹۰۴	۴,۱۰۲	۸,۸۳۷	۸۳۸۸	۱,۹۳۱۵
۷,۰	۰,۱۴۳	۴۹,۰۰	۳۴۳,۰	۲,۶۴۶	۸,۳۶۷	۱,۹۱۳	۴,۱۲۱	۸,۸۷۹	۸۴۵۱	۱,۹۴۵۹
۷,۱	۰,۱۴۱	۵۰,۴۱	۳۵۷,۹	۲,۶۶۵	۸,۴۲۶	۱,۹۲۲	۴,۱۴۱	۸,۹۲۱	۸۵۱۳	۱,۹۶۰۱
۷,۲	۰,۱۳۹	۵۱,۸۴	۳۷۳,۲	۲,۶۸۳	۸,۴۸۵	۱,۹۳۱	۴,۱۶۰	۸,۹۶۳	۸۵۷۳	۱,۹۷۴۱
۷,۳	۰,۱۳۷	۵۳,۲۹	۳۸۹,۰	۲,۷۰۲	۸,۵۴۴	۱,۹۴۰	۴,۱۷۹	۹,۰۰۴	۸۶۳۳	۱,۹۸۷۹
۷,۴	۰,۱۳۵	۵۴,۷۶	۴۰۵,۲	۲,۷۲۰	۸,۶۰۲	۱,۹۴۹	۴,۱۹۸	۹,۰۴۵	۸۶۹۲	۲,۰۰۱۵
۷,۵	۰,۱۳۳	۵۶,۲۵	۴۲۱,۹	۲,۷۳۹	۸,۶۶۰	۱,۹۵۷	۴,۲۱۷	۹,۰۸۶	۸۷۵۱	۲,۰۱۴۹
۷,۶	۰,۱۳۲	۵۷,۷۶	۴۳۹,۰	۲,۷۵۷	۸,۷۱۸	۱,۹۶۶	۴,۲۳۶	۹,۱۲۶	۸۸۰۸	۲,۰۲۸۱
۷,۷	۰,۱۳۰	۵۹,۲۹	۴۵۶,۵	۲,۷۷۵	۸,۷۷۵	۱,۹۷۵	۴,۲۵۴	۹,۱۶۶	۸۸۶۵	۲,۰۴۱۲
۷,۸	۰,۱۲۸	۶۰,۸۴	۴۷۴,۶	۲,۷۹۳	۸,۸۳۲	۱,۹۸۳	۴,۲۷۳	۹,۲۰۵	۸۹۲۱	۲,۰۵۴۱
۷,۹	۰,۱۲۷	۶۲,۴۱	۴۹۳,۰	۲,۸۱۱	۸,۸۸۸	۱,۹۹۲	۴,۲۹۱	۹,۲۴۴	۸۹۷۶	۲,۰۶۶۹
۸,۰	۰,۱۲۵	۶۴,۰۰	۵۱۲,۰	۲,۸۲۸	۸,۹۴۴	۲,۰۰۰	۴,۳۰۹	۹,۲۸۳	۹۰۳۱	۲,۰۷۹۴
۸,۱	۰,۱۲۳	۶۵,۶۱	۵۳۱,۴	۲,۸۴۶	۹,۰۰۰	۲,۰۰۸	۴,۳۲۷	۹,۳۲۲	۹۰۸۵	۲,۰۹۱۹
۸,۲	۰,۱۲۲	۶۷,۲۴	۵۵۱,۴	۲,۸۶۴	۹,۰۵۵	۲,۰۱۷	۴,۳۴۴	۹,۳۶۰	۹۱۳۸	۲,۱۰۴۱
۸,۳	۰,۱۲۰	۶۸,۸۹	۵۷۱,۸	۲,۸۸۱	۹,۱۱۰	۲,۰۲۵	۴,۳۶۲	۹,۳۹۸	۹۱۹۱	۲,۱۱۶۳
۸,۴	۰,۱۱۹	۷۰,۵۶	۵۹۲,۷	۲,۸۹۸	۹,۱۶۵	۲,۰۳۳	۴,۳۸۰	۹,۴۳۵	۹۲۴۳	۲,۱۲۸۲
۸,۵	۰,۱۱۸	۷۲,۲۵	۶۱۴,۱	۲,۹۱۵	۹,۲۲۰	۲,۰۴۱	۴,۳۹۷	۹,۴۷۳	۹۲۹۴	۲,۱۴۰۱
۸,۶	۰,۱۱۶	۷۳,۹۶	۶۳۶,۱	۲,۹۳۳	۹,۲۷۴	۲,۰۴۹	۴,۴۱۴	۹,۵۱۰	۹۳۴۵	۲,۱۵۱۸
۸,۷	۰,۱۱۵	۷۵,۶۹	۶۵۸,۵	۲,۹۵۰	۹,۳۲۷	۲,۰۵۷	۴,۴۳۱	۹,۵۴۶	۹۳۹۵	۲,۱۶۳۳
۸,۸	۰,۱۱۴	۷۷,۴۴	۶۸۱,۵	۲,۹۶۶	۹,۳۸۱	۲,۰۶۵	۴,۴۴۸	۹,۵۸۳	۹۴۴۵	۲,۱۷۴۸
۸,۹	۰,۱۱۲	۷۹,۲۱	۷۰۵,۰	۲,۹۸۳	۹,۴۳۴	۲,۰۷۲	۴,۴۶۵	۹,۶۱۹	۹۴۹۴	۲,۱۸۶۱
۹,۰	۰,۱۱۱	۸۱,۰۰	۷۲۹,۰	۳,۰۰۰	۹,۴۸۷	۲,۰۸۰	۴,۴۸۱	۹,۶۵۵	۹۵۴۲	۲,۱۹۷۲
۹,۱	۰,۱۱۰	۸۲,۸۱	۷۵۳,۶	۳,۰۱۷	۹,۵۳۹	۲,۰۸۸	۴,۴۹۸	۹,۶۹۱	۹۵۹۰	۲,۲۰۸۳
۹,۲	۰,۱۰۹	۸۴,۶۴	۷۷۸,۷	۳,۰۳۳	۹,۵۹۲	۲,۰۹۵	۴,۵۱۴	۹,۷۲۶	۹۶۳۸	۲,۲۱۹۲
۹,۳	۰,۱۰۸	۸۶,۴۹	۸۰۴,۴	۳,۰۵۰	۹,۶۴۴	۲,۱۰۳	۴,۵۳۱	۹,۷۶۱	۹۶۸۵	۲,۲۳۰۰
۹,۴	۰,۱۰۶	۸۸,۳۶	۸۳۰,۶	۳,۰۶۶	۹,۶۹۵	۲,۱۱۰	۴,۵۴۷	۹,۷۹۶	۹۷۳۱	۲,۲۴۰۷
۹,۵	۰,۱۰۵	۹۰,۲۵	۸۵۷,۴	۳,۰۸۲	۹,۷۴۷	۲,۱۱۸	۴,۵۶۳	۹,۸۳۰	۹۷۷۷	۲,۲۵۱۳
۹,۶	۰,۱۰۴	۹۲,۱۶	۸۸۴,۷	۳,۰۹۸	۹,۷۹۸	۲,۱۲۵	۴,۵۷۹	۹,۸۶۵	۹۸۲۳	۲,۲۶۱۸
۹,۷	۰,۱۰۳	۹۴,۰۹	۹۱۲,۷	۳,۱۱۴	۹,۸۴۹	۲,۱۳۳	۴,۵۹۵	۹,۸۹۹	۹۸۶۸	۲,۲۷۲۱
۹,۸	۰,۱۰۲	۹۶,۰۴	۹۴۱,۲	۳,۱۳۰	۹,۸۹۹	۲,۱۴۰	۴,۶۱۰	۹,۹۳۳	۹۹۱۲	۲,۲۸۲۴
۹,۹	۰,۱۰۱	۹۸,۰۱	۹۷۰,۳	۳,۱۴۶	۹,۹۵۰	۲,۱۴۷	۴,۶۲۶	۹,۹۶۷	۹۹۵۶	۲,۲۹۲۵
۱۰,۰	۰,۱۰۰	۱۰۰,۰۰	۱۰۰,۰	۳,۱۶۲	۱۰,۰۰۰	۲,۱۵۴	۴,۶۴۲	۱۰,۰۰۰	۰۰۰۰	۲,۳۰۲۶

VI. بعضی منحنی‌ها



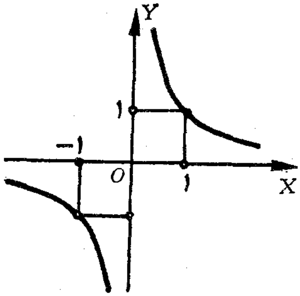
۱. سهمی

$y = x^2$



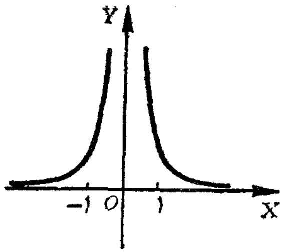
۲. سهمی مکعبی

$y = x^3$



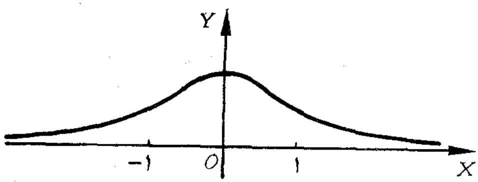
۳. هذلولی متساوی‌الساقین

$y = \frac{1}{x}$



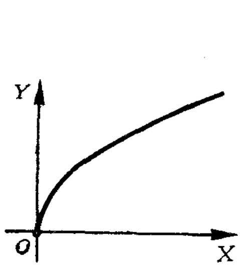
۴. تابع کسری

$y = \frac{1}{x^2}$



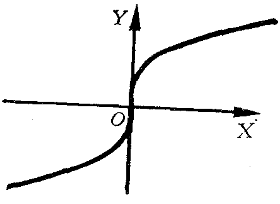
۵. حلقهٔ آنه زا

$y = \frac{1}{1 + x^2}$



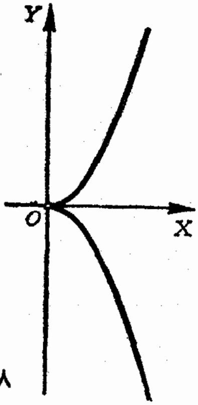
۶. سهمی (شاخه بالائی)

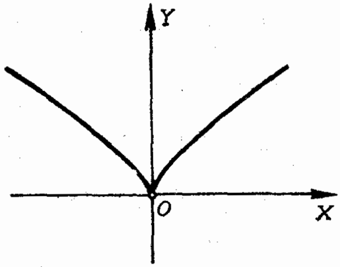
$y = \sqrt{x}$



۷. سهمی مکعبی

$y = \sqrt[3]{x}$



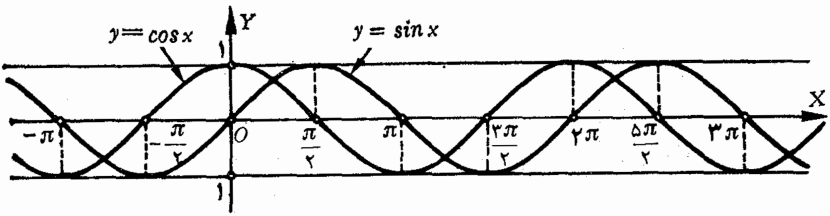


*a*۸. سهمی نیل

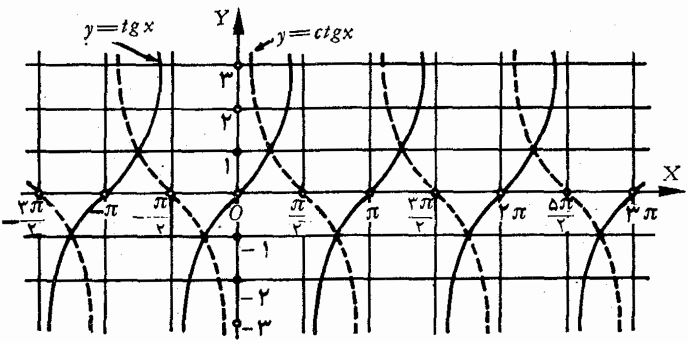
$$\begin{cases} x = t^{۳} \\ y = t^{۲} \end{cases} \text{ یا } y = x^{\frac{۲}{۳}}$$

*b*۸. سهمی نیم مکعبی

$$\begin{cases} x = t^{۲} \\ y = t^{۳} \end{cases} \text{ یا } y^{۲} = x^{۳}$$

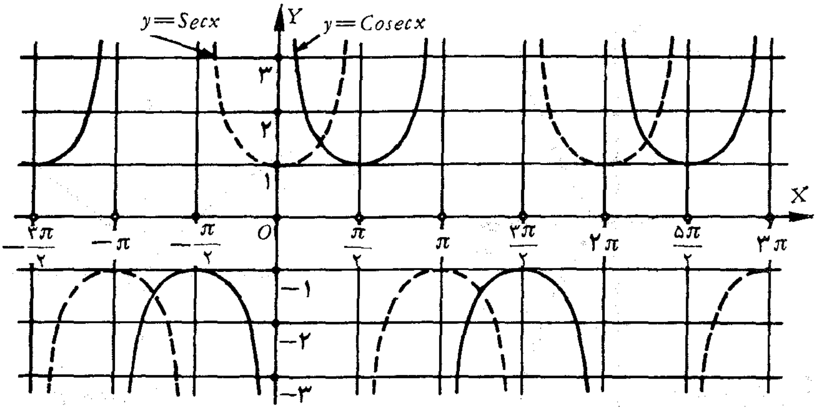


۹. منحنی سینوسی و منحنی کسینوسی



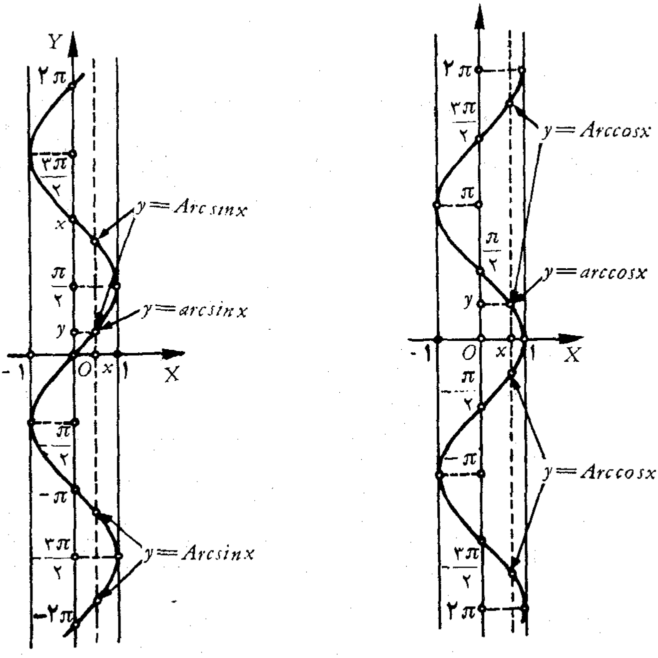
۱۰. منحنی تانژانتی ومنحنی کتانژانتی

$y = cotg\, x$ ، $y = tg\, x$



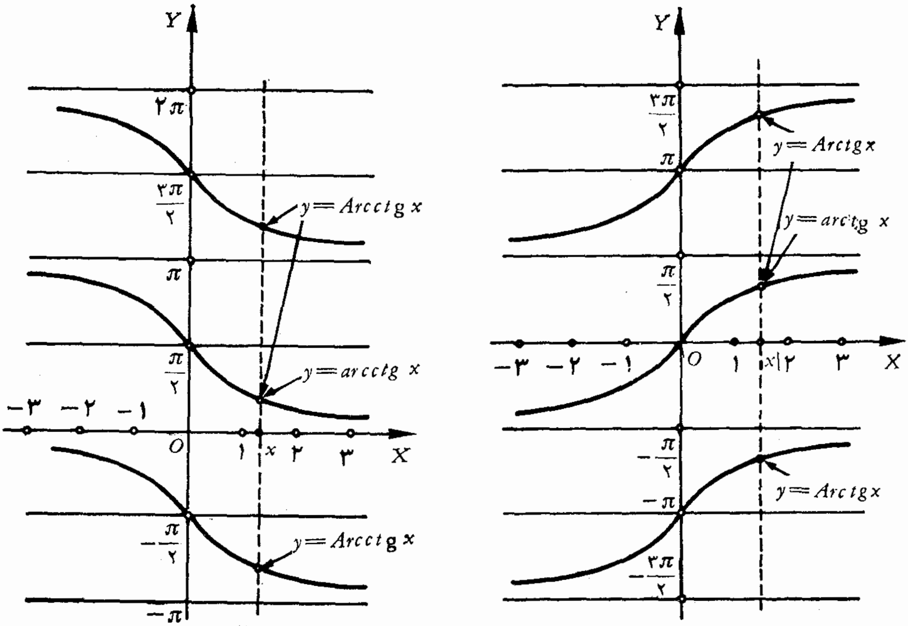
۱۱. منحنی توابع

$y = cosecx$ ، $y = secx$



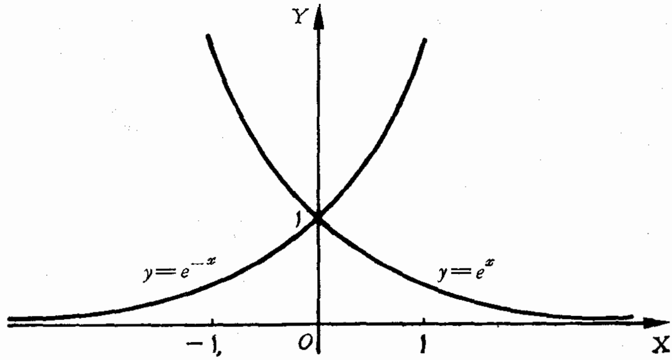
۱۲. منحنی توابع معکوس مثلثاتی

$y = Arccos x$ ، $y = Arcsin x$



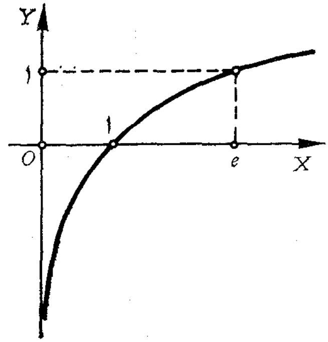
۱۳. منحنی توابع معکوس مثلثاتی

$y = Arccotgx$ ، $y = Arctgx$



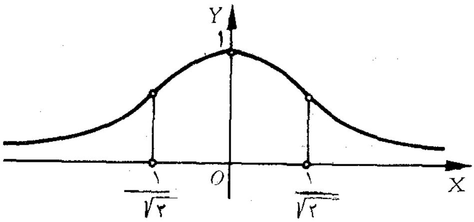
۱۴. منحنی توابع نمائی

$y = e^{-x}$ ، $y = e^{x}$



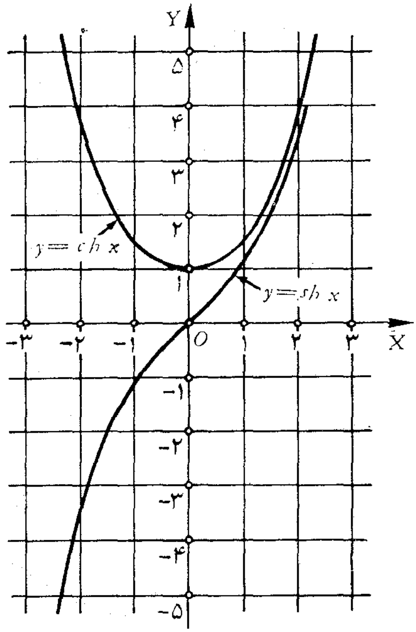
۱۵. منحنی لگاریتمی

$y = \ln x$



۱۶. منحنی گوس (منحنی احتمال)

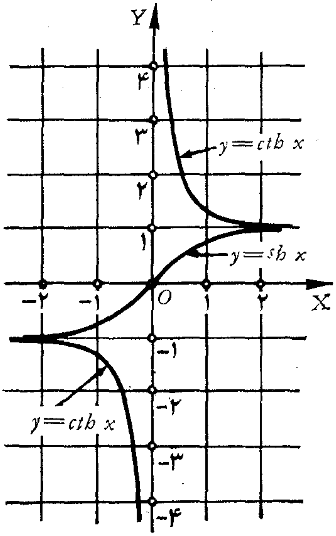
$y = e^{-x^2}$



۱۷. منحنی توابع هذلولی

$$y = shx \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

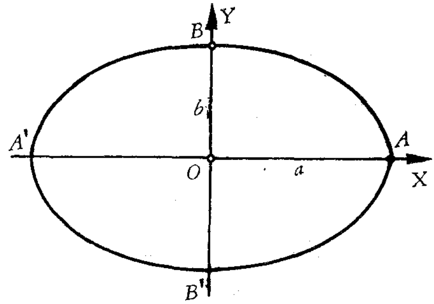
$$y = chx \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$ (منحنی زنجیری)



۱۸. منحنی توابع هذلولی

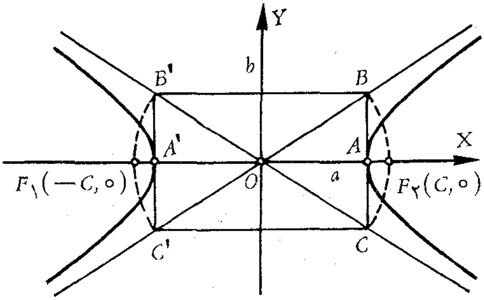
$$y = thx \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ,$$

$$u = cthx \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



۱۹. بیضی

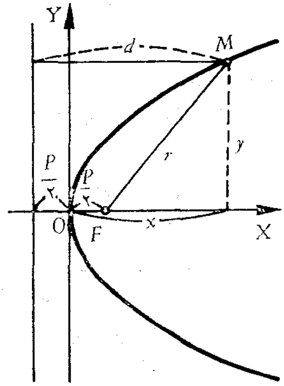
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$



۲۰. هذلولی

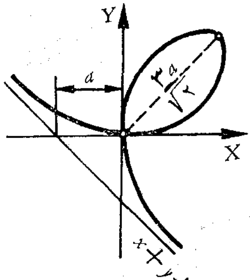
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ ,$$

$$\begin{vmatrix} x=a\,\mathrm{ch}\,t \\ y=b\,\mathrm{sh}\,t \end{vmatrix} \quad \text{یا}$$ (برای شاخه راست)



۲۱. سهمی

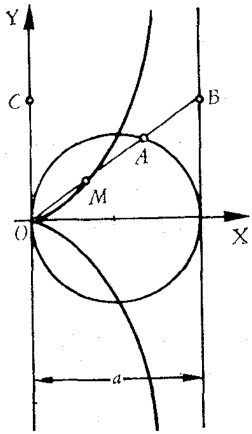
$$y^2=2px$$



۲۲. برگهای دکارتی

$$x^3+y^3-3axy=0\ ,$$

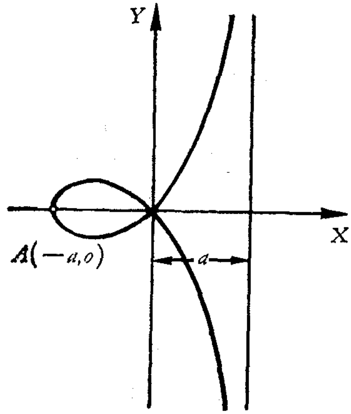
$$\text{یا}\quad \begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\[2ex] y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$



۲۳. سیکلوئید دیوکلس

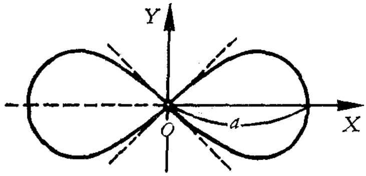
$$y^2=\frac{x^3}{a-x}$$

$$\text{یا}\quad \begin{cases} x=\dfrac{at^2}{1+t^2} \\[2ex] y=\dfrac{at^3}{1+t^2} \end{cases}$$



۲۴. استروفوئید

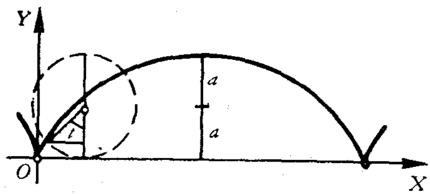
$$y^2 = x^2\frac{a+x}{a-x}$$



۲۵. لمینسکات برنولی

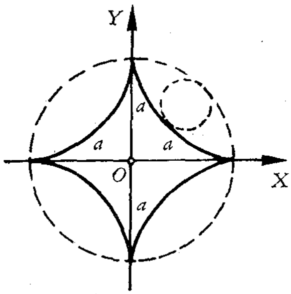
$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

یا $r^2 = a^2\cos 2\varphi$



۲۶، سیکلوئید

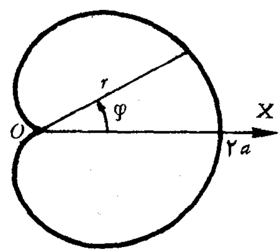
$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$$



۲۷. هیپوسیکلوئید (آستروئید)

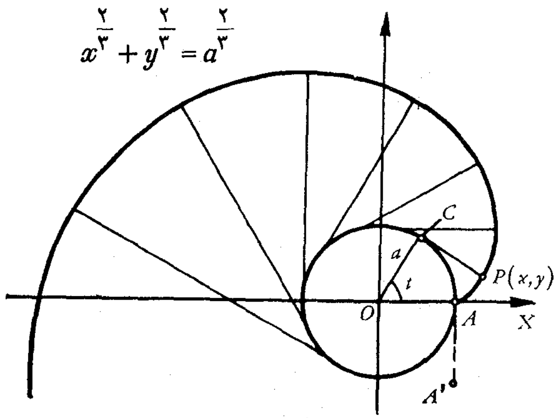
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$



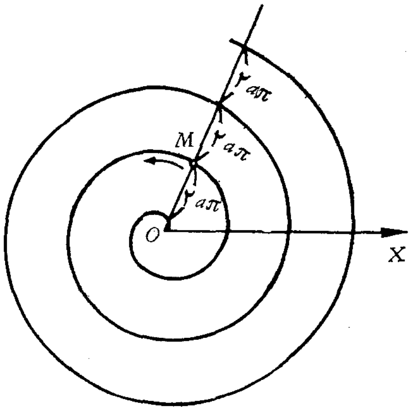
۲۸. کاردیوئید

$$r = a(1+\cos\varphi)$$



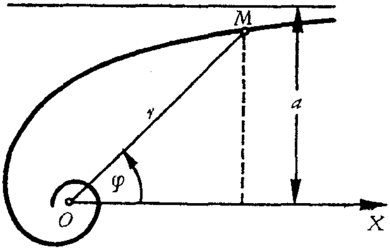
۲۹. گسترده دایره

$$x = a(\cos t + t\sin t)$$
$$y = a(\sin t - t\cos t)$$



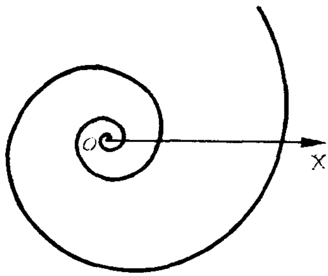
۳۰. پیچ ارشمیدس

$r = a\varphi \quad (r \geqslant ۰)$



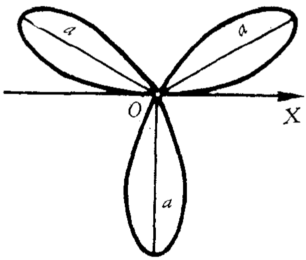
۳۱. پیچ هذلولی

$r = \dfrac{a}{\varphi} \quad (r > ۰)$



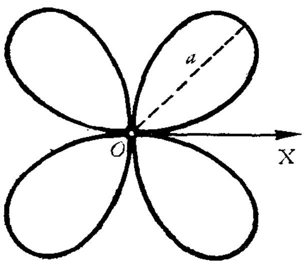
۳۲. پیچ لگاریتمی

$r = a^{e\varphi}$



۳۳. گل سه برگی

$r = a\sin ۳\varphi (r \geqslant ۰)$



۳۴. گل چهار برگی

$r = a|\sin ۲\varphi|$