ویلیام والاس بل

توابع خاص

برای دانشجویان رشته‌های علوم و مهندسی

برگردان : محمد علی غیر تمند

SPECIAL FUNCTIONS

for Scientists and Engineers

W. W. BELL

Departrment of Engineering

University of Aberdeen

Translated by : Mohammad Ali Gheiratmand

Shabahang Publishers

ویلیام والاس بل

توابع خاص

برای دانشجویان رشته‌های علوم و مهندسی

برگردان: محمدعلی غیرتمند

فهرست مطالب

پیشگفتار مترجم

کتاب حاضر برگردانی است از چاپ سوم کتاب:

Special functions for sceientists and engineers, W.W. Bell

که چاپ اول آن در سال ۱۹۶۸ میلادی توسط بنگاه نشریاتی Van Nostrand انگلیس و چاپ‌های دوم و سوم آن به ترتیب در سال‌های ۱۹۹۶ و ۲۰۰۴ میلادی وارد بازار شده است.

بخش عمده‌ای از مطالب این کتاب به توابعی اختصاص یافته است که دارای کاربردهای فراوانی در مسائل مربوط به فیزیک و مهندسی هستند. کتاب عمدتاً به منظور استفاده دانشجویانی نوشته شده است، که اگرچه مجبورند از ریاضیات به‌عنوان ابزار کارشان استفاده نمایند، ولی ممکن است نه استعداد خوبی در ریاضیات داشته باشند، نه اطلاعاتی بیش از یک دوره مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال در ریاضیات کسب کرده باشند. به همین دلیل، و به دلیل اینکه دانشجویان رشته‌های فیزیک و مهندسی بیشتر از نتایج قضیه‌های ریاضی استفاده می‌کنند تا از شیوه‌های اثبات آنها، مؤلف کتاب در اثبات برخی از قضیه‌ها این محدودیت را داشته است، که از روش‌هایی استفاده نماید، و مطالبی را دانسته شده فرض کند، که ممکن است برای یک دانشجوی خرده‌گیر و تیزبین رشته ریاضی چندان قابل قبول نباشد[۱]، اما، چنین دانشجویی حتی اگر خود قادر نباشد برخی از برهان‌های غیر دقیق کتاب را دقیق‌تر نماید، می‌تواند اطلاعات مورد نیاز خود را از منابع پیشرفته‌تری که در رابطه با تابع‌های خاص برای دانشجویان رشته ریاضی نوشته شده‌اند، کسب نماید.

با وجود اینکه مؤلف کتاب بیشتر به موضوعاتی پرداخته است که دانشجویان رشته‌های فیزیک و

---

۱. در کتاب: استدلال‌های نادرست ریاضی، مطالب نادرست بدون اثبات، و اشتباه‌های چاپی و غیرچاپی در برخی از کتاب‌های دانشگاهی ایران، تألیف محمد علی غیرتمند، که احتمالاً تا پایان سال ۱۳۸۶ چاپ و منتشر خواهد شد، با اشاره نمودن به برخی از این گونه برهان‌ها، اثبات‌هاای دقیق‌تری از آنها ارائه شده است.

مهندسی باید از آنها اطلاع داشته باشند، این کتاب می‌تواند مورد استفاده آن دسته از دانشجویان رشته ریاضی نیز قرار گیرد، که مایلند از ریاضیات در حل مسائلی که در دیگر علوم و فنون مطرح می‌شوند، استفاده نمایند.

مترجم امیدوار است، علیرغم همه خطاها و کاستی‌هایی که ممکن است در کار ترجمه و حروف‌نگاری کتاب حاضر پیش آمده باشد، این کتاب بتواند به درک بهتر دانشجویان رشته‌های علوم و مهندسی از توابع خاص کمک نموده، و نظرات، پیشنهادها و انتقادهای علمی آن‌ها و دیگر دانش‌دوستان بتواند زمینه چاپ و انتشار کتاب‌های علمی به مراتب بهتر و پر محتواتری را فراهم نماید.

در خاتمه، لازم می‌دانم مراتب قدردانی خود را از آقای قاسم احمدزاده مدیر انتشارات شباهنگ که مسئولیت چاپ و انتشار کتاب را به‌عهده گرفته‌اند، و نیز از کلیه کسانی که هر یک به نحوی در حروف‌نگاری، صفحه‌آرایی، چاپ، صحافی و پخش آن مشارکت نموده‌اند، ابراز دارم.

محمدعلی غیرتمند

تهران ـ تابستان ۱۳۸٦

پیشگفتار مؤلف

این کتاب در درجه اول برای استفاده دانشجویان دوره‌های کارشناسی فیزیک و مهندسی دانشگاه‌ها و مدارس عالی فنی در نظر گرفته شده است. اما، به علت اینکه در آن هیچ مثال ویژه‌ای که به حوزه‌های فیزیک، مهندسی، شیمی و غیره کشیده شده باشد، وجود ندارد، می‌تواند برای دانشجویانی که در دیگر شاخه‌های علوم نیز کار می‌کنند، مفید واقع شود. ما اعتقاد داریم، بهتر است به نتایج اصلی مربوط به توابع خاص که در مسائل عملی و کاربردی احتمال برخورد با آنها وجود دارد، پرداخته شود، و کاربردهای آنها در مباحث و موضوعاتی که منشاء طرح این‌گونه توابع بوده‌اند، مورد بررسی قرار گیرد. کتاب برای کسانی طراحی شده است، که اگرچه مجبورند از ریاضیات استفاده کنند، خودشان ریاضی‌دان نیستند، و ممکن است حتی قابلیت و استعداد خوبی در ریاضیات نداشته باشند. به همین خاطر، سعی شده است، بخصوص، در اولین فصل‌ها اختصار و ایجاز فدای بحث‌ها و برهان‌های مستند شود. سطح دانش مورد نیاز برای خواننده، چیزی بیشتر از دوره‌ای مقدماتی از حساب دیفرانسیل و انتگرال نیست، به ویژه، از تئوری متغیرهای مختلط استفاده نشده است. همچنین، در رسیدن به سطحی بالا از دقت و موشکافی ریاضی، تلاش چندانی به عمل نیامده است. به‌عنوان مثال، ما از نتایجی شبیه $\infty = \frac{1}{0}$ و $0 = \frac{1}{\infty}$ استفاده کرده‌ایم، که برای دقت بیشتر، باید حقیقتاً برحسب اصطلاحات مربوط به حدود نوشته می‌شدند.

در فصل ۱، حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم به روش سری‌های توانی، که برای فصل‌های بعدی اهمیت بسیاری دارد، مورد بحث و بررسی قرار گرفته است، این بدان علت است که، غالباً، در کاربردها، یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای از کمیتی مورد توجه داریم، و این معادله ممکن است با روش جدا کردن متغیرها به چند معادله دیفرانسیل معمولی که جواب‌های آنها مورد نیاز است، تجزیه شود. اگر این معادلات دارای جواب‌هایی برحسب توابع مقدماتی نباشند، که غالباً نیز چنین است، باید این جواب‌ها را مورد بررسی قرار داد، و در این رابطه، بهترین شیوه، بررسی جواب‌ها، با استفاده از سری‌های توانی است. این جواب‌ها منجر به تعریف توابعی جدید می‌شوند، و بررسی خواص چنین توابع «خاصی»

موضوع اصلی این کتاب است.

فصل ۲ به توابع گاما و بتا اختصاص یافته است، دو تابعی که به وسیله‌ی انتگرال‌ها تعریف می‌شوند، و ارتباط نزدیکی با یکدیگر دارند. این توابع نه تنها در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، بلکه، در بسیاری از مباحث دیگر نیز با آن‌ها مواجه می‌شویم.

فصل ۳ به بررسی توابع لژاندر مربوط می‌شود. آنها به عنوان جواب‌های معادله لژاندر معرفی می‌شوند، که اغلب وقتی مسئله‌ای دارای تقارن کروی است، روی می‌دهند. چنین مسائلی، به عنوان مثال، می‌توانند در مکانیک کوانتم، تئوری الکترومغناطیس، هیدرودینامیک، و انتقال حرارت روی دهند.

فصل چهار به توابع بسل اختصاص یافته است. این توابع در حوزه وسیعی از کاربردها، از قبیل طراحی بلندگو، پراش نور، ارتعاش غشاء مدور و ورقه‌ها، پراکنش صوت توسط استوانه‌های مدور، و به‌طور کلی، در تعداد زیادی از مسائلی که دارای مرزهایی به شکل دایره یا استوانه هستند، رخ می‌دهند. توابع کلوین که در بخش ۹. ۴ معرفی شده‌اند، بیشترین فایده را در مهندسی برق دارند، حال آنکه، توابع بسل از بخش ۱۰. ۴ در نظریه تفرق در مکانیک کوانتم، بسیار مهم هستند.

چند جمله‌ای‌های هرمیت در فصل ۵ مورد بررسی قرار گرفته‌اند، کاربرد اصلی آنها در مبحث نوسانگر هارمونیک در مکانیک کوانتم می‌باشد، اما، دارای کاربردهای دیگری نیز هستند. همین‌طور، چندجمله‌ای‌های لاگر که در فصل ۶ معرفی شده‌اند، در بررسی اتم هیدروژن در مکانیک کوانتم بسیار مفید هستند، اما، دارای کاربردهای دیگری نیز، به عنوان مثال، در نظریه خطوط انتقال و بررسی زلزله‌شناسی هستند.

در فصل ۷ چند جمله‌ای‌های چبیشف مورد بررسی قرار گرفته است، که نه تنها به خاطر کاربرد آن‌ها در تقریب توابع دلخواه با استفاده از چند جمله‌ای‌ها مهم هستند، بلکه، در تئوری جریان الکتریکی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند.

فصل ۸ به دو تعمیم از چند جمله‌ای‌های لژاندر اختصاص یافته است ـ چند جمله‌ای‌های گِگِنباوئر و چند جمله‌ای‌های ژاکوبی. با این چند جمله‌ای‌ها کمتر از توابعی که فوقاً به آنها اشاره شد، برخورد می‌کنیم، اما، دارای کاربردهایی در شاخه‌های مختلف فیزیک و مهندسی، از جمله، در تبدیل همسازکروی تحت دوران‌های مختصاتی هستند.

در فصل ۹ تابع فوق هندسی مورد بررسی قرار گرفته است. این تابع از همه توابع خاصی که مورد بررسی قرار گرفته‌اند، کلی‌تر می‌باشد. در واقع، همه توابع خاص دیگری که مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، همچنین، بسیاری از توابع مقدماتی تنها حالت‌های خاصی از تابع فوق هندسی هستند.

فصل ۱۰ شامل خلاصه‌ای از توابع مختلف دیگری است، که در کاربردها با آنها برخورد می‌کنیم. این توابع اغلب به‌وسیله‌ی انتگرال‌هایی که نمی‌توان آنها را برحسب توابع شناخته شده محاسبه نمود، تعریف می‌شوند، و اغلب همه اطلاعات مفید مربوط به این انتگرال‌ها در جدولی از مقادیر انتگرال درج شده است.

ضمیمه ۱ به تعریف ثابت اویلر مربوط می‌شود، که در فصل مربوط به توابع بسل با آن مواجه می‌شویم. در ضمیمه ۲ به طور صریح همگرایی جواب‌های معادله لژاندر که در فصل ۳ مطرح شده، مورد بررسی قرار گرفته است. بقیه ضمائم خلاصه‌ای از بعضی خواص توابع خاصی است که در کل کتاب ثابت شده‌اند.

مسائل انتهای هر فصل را باید به عنوان جزئی جدایی‌ناپذیر از درس به حساب آورد. به خواننده تأکید می‌شود، اگر نه همه، حداقل در جهت حل اکثر آنها تلاش نماید. راهنمایی‌ها و جواب‌هایی برای مسائل به جز ساده‌ترین آنها تهیه شده، اما، خواننده نباید قبل از آن که خود برای حل مسائل تلاش کرده باشد، از آن راهنمایی‌ها کمک بگیرد.

اثبات برخی از قضیه‌ها را در اولین قرائت کتاب می‌توان حذف نمود، نه به این خاطر که، این گونه قضیه‌ها دشوار هستند، بلکه، به این خاطر که، آنها نسبتاً طولانی هستند، و شمول چنین اثبات‌هایی در اولین قرائت، ممکن است، باعث اخلال در دنبال نمودن موضوعات کتاب شود.

ویلیام والاس بل

آبردین ـ ۱۹۶۷

فهرست نمادها

بخشی که در آن برای اولین بار نماد ظاهر شده است.	تابع	نماد
۲.۱	تابع بتا	$B(x,y)$
۴.۱۰	توابع کلوین	$\mathrm{ber}_n x, \mathrm{bei}_n x$
۱۰.۳	انتگرال فرنل	$C(x)$
۸.۱	چندجمله‌ای گگنباوئر یا چندجمله‌ای فراکروی	$C_n^\lambda(x)$
۱۰.۲	انتگرال کسینوسی	$Ci(x)$
۱۰.۵	توابع دِبای	$D_n(x)$
۱۰.۶	انتگرال بیضوی نوع دوم	$E(k,\varphi)$
۱۰.۶	انتگرال بیضوی کامل نوع دوم	$E(k)$
۱۰.۲	انتگرال‌های نمائی	$Ei(x), E_1(x)$
۱۰.۳	تابع خطای کلی	$E_n(x)$
۱۰.۳	تاب خطا	$\mathrm{erf}\ (x)$
۱۰.۶	انتگرال بیضوی نوع اول	$F(k,\varphi)$
۹.۱	تابع فوق هندسی	${}_mF_n(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta_1,\cdots,\beta_n;x)$
۹.۱	چندجمله‌ای هرمیت	$H_n(x)$
۴.۱۱	توابع هنکل یا توابع بسل نوع سوم	$H_n^{(1)}(x), H_n^{(2)}(x)$
۴.۷	تابع بسل تعدیل‌یافته	$I_n(x)$
۴.۱	تابع بسل نوع اول	$J_n(x)$
۴.۱۱	تابع بسل کروی	$j_n(x)$
۱۰.۶	انتگرال بیضوی کامل نوع اول	$K(k)$

بخشی که در آن برای اولین بار نماد ظاهر شده است.	تابع	نماد
۴.۷	تابع بسل تعدیل‌یافته	$K_n(x)$
۴.۱۰	توابع کلوین	$\mathrm{ker}_n\, x\ ,\ \mathrm{kei}_n\, x$
۶.۱	چندجمله‌ای لاگر	$L_n(x)$
۶.۷	چندجمله‌ای لاگر وابسته	$L_n^k(x)$
۱۰.۲	انتگرال لگاریتمی	$\mathrm{li}(x)$
۹.۱	تابع فوق هندسی هم‌جریان	$M(\alpha,\beta,x)$
۹.۳	تابع فوق هندسی هم‌جریان ویتیکر	$M_{k,m}(x)$
۴.۱	تابع نویمان یا تابع بسل نوع دوم	$M_n(x)$
۳.۱	چندجمله‌ای لژاندر	$P_l(x)$
۳.۸	چندجمله‌ای لژاندر وابسته	$P_l^m(x)$
۸.۲	چندجمله‌ای ژاکوبی	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$
۳.۱۰	چندجمله‌ای لژاندر نوع دوم	$Q_l(x)$
۱۰.۳	انتگرال فرنل	$S(x)$
۱۰.۲	انتگرال سینوسی	$si(x), Si(x)$
۷.۱	چندجمله‌ای چبیشف نوع اول	$T_n(x)$
۷.۱	چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم	$U_n(x)$
۳.۱۱	همساز کروی	$Y_l^m(\theta,\varphi)$
۴.۱	تابع بسل نوع دوم	$Y_n(x)$
۴.۱۱	تابع بسل کروی	$y_n(x)$
۲.۱	تابع گاما	$\Gamma(x)$
۱۰.۱	توابع گامای ناکامل	$\Gamma(x,\alpha), \gamma(x,\alpha)$
۴.۱	ثابت اویلر	γ
۱۰.۴	تابع زتای ریمان	$\zeta(x)$
۱۰.۶	انتگرال بیضوی نوع سوم	$\Pi(k,\varphi,a)$
۱۰.۶	انتگرال بیضوی کامل نوع سوم	$\Pi(k,a)$
۵.۷	تابع وبر ـ هرمیت	$\psi_n(x)$

فصل ۱

حل معادلات دیفرانسیل به روش سریها

۱.۱ روش فروبنیوس

تعداد زیادی از توابع خاص از بررسی جوابهای معادلات دیفرانسیل به فرم:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0 \tag{۱.۱}$$

بوجود می‌آیند. ما خود را به معادلاتی از نوع:

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}+xq(y)\frac{dy}{dx}+r(x)y=0 \tag{۱.۲}$$

که در آن $q(x)$ و $r(x)$ را می‌توان به سریهایی توانی نسبت به x ،

$$q(x)=\sum_{m=0}^{\infty}q_mx^m \tag{۱.۳}$$

$$r(x)=\sum_{m=0}^{\infty}r_mx^m \tag{۱.۴}$$

که در حوزه‌ای شامل نقطه $x=0$ همگرا هستند، محدود خواهیم کرد.

اساس روش فروبنیوس بررسی جوابی از معادله (۱.۲) به فرم:

$$z(x,s)=x^s(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{s+n} \tag{۱.۵}$$

با $a_0 \neq 0$ است (می‌توان $a_0 \neq 0$ گرفت، زیرا، در غیر اینصورت، ما سری دیگری از نوع (۱.۵) با مقدار متفاوتی از s، و اولین ضریب غیرصفری که اکنون می‌توانیم آن را a_0 بنامیم، خواهیم داشت).

از معادله[1] (۱.۵) خواهیم داشت:

$$\frac{dz}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s+n)x^{s+n-1}$$

و

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-2}$$

حال، برای اینکه z در معادله (۱.۲) صدق کند، باید داشته باشیم:

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2} + xq(x)\frac{dz}{dx} + r(x)z = 0$$

و معادله فوق به معادله:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n} + q(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(s+n)x^{s+n} + r(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n} = 0$$

تبدیل می‌شود، که با استفاده از روابط (۱.۳) و (۱.۴) برای $q(x)$ و $r(x)$ و با حذف عامل مشترک x^s به دست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(s+n)(s+n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n q_m(s+n)x^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n r_m x^{n+m} = 0 \quad (۱.۶)$$

چون سری نامتناهی واقع در سمت چپ معادله (۱.۶) برای همه مقادیر x در یک همسایگی صفر برابر صفر است، باید ضریب هر یک از توانهای x برابر صفر باشد، این شرایط منجر به معادلاتی به شرح زیر می‌شود:

لازم است که ضریب x^0 برابر صفر باشد، اما، ضریب x^0تنها با انتخاب $m = 0$، $n = 0$ به وجود می‌آید، بنابراین، باید داشته باشیم:

$$a_0 s(s-1) + a_0 q_0 s + a_0 r_0 = 0 \quad (۱.۷)$$

۱. خواننده کتاب باید به یاد داشته باشد که، مؤلف اغلب از روابط شماره‌گذاری شده تحت نام معادله ($equation$) استفاده نموده است و نه رابطه. مترجم.

لازم است که ضریب x^1 برابر صفر باشد، اما، برای پدید آوردن x^1 در معادله (۱.۶) باید در اولین عبارت $n = 1$، و در دومین و سومین عبارت $n + m = 1$ (یعنی $n = 1$ و $m = 0$ یا $n = 0$ و $m = 1$) انتخاب شود. در نتیجه، باید داشته باشیم:

$$a_1(s+1)s + \{a_1 q_0(s+1) + a_0 q_1 s\} + (a_1 r_0 + a_0 r_1) = 0 \qquad (۱.۸)$$

اکنون می‌توانیم معادله‌ای کلی برای اینکه ضریب x^i برابر صفر باشد، بنویسیم. با یادآوری اینکه، در معادله (۱.۶)، x^i در اولین عبارت انتخاب $n = i$ و در دومین و سومین عبارت با انتخاب $n + m = i$ (یعنی $n = i$، $m = 0$ یا $n = i - 1$، $m = 1$ یا $n = i - 2$، $m = 2$ و غیره، تا $n = 0$، $m = i$) به وجود می‌آید، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &a_i(s+i)(s+i-1) + \{a_i q_0(s+i) + \ldots + a_{i-1} q_1 (s+i-1) \\ &\quad + a_{i-2} q_2 (s+i-2) + \ldots + a_0 q_i s\} \\ &\quad + (a_i r_0 + a_{i-1} r_1 + \ldots + a_0 r_i) = 0 \qquad (i > 1) \end{aligned} \qquad (۱.۹)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} &a_i f(s+i) + \{a_{i-1} q_1 (s+i-1) + a_{i-2} q_2 (s+i-2) + \ldots + a_0 q_i s\} + \\ &(a_{i-1} r_1 + a_{i-2} r_2 + \ldots + a_0 r_i) = 0 \qquad (i > 1) \end{aligned} \qquad (۱.۱۰)$$

که در آن همه جملات مربوط به a_i را با هم جمع نموده و ضریب آنها را با نماد:

$$f(s+i) \equiv (s+i)(s+i-1) + q_0(s+i) + r_0 \qquad (۱.۱۱)$$

نشان داده‌ایم.

حال، می‌بینیم که، معادله (۱.۷) به:

$$a_0\{s^2 + (q_0 - 1)(s + r_0)\} = 0$$

تبدیل می‌شود، که با توجه به فرض داده شده $a_0 \neq 0$ به

$$s^2 + (q_0 - 1)(s + r_0) = 0 \qquad (۱.۱۲)$$

منجر می‌شود. معادله فوق را معادله شاخص می‌نامند. این معادله، معادله‌ای است درجه دوم نسبت به x، و بنابراین، دارای دو ریشه است، که آنها را به s_1 و s_2 نشان خواهیم داد. در بسیاری از حالات سودمند این ریشه‌ها حقیقی هستند، از این به بعد، در چنین حالتهایی فرض خواهیم کرد $s_1 < s_2$.

با توجه به اینکه معادله (۱.۱۲) اکنون به صورت $f(s)$ است، بلافاصله، خواهیم داشت:

$$f(s) = (s - s_1)(s - s_2) \tag{۱.۱۳}$$

اکنون می‌توان امیدوار بود که این دو مقدار s به دو جواب مستقل از معادله دیفرانسیل اصلی منجر شود. خواهیم دید که صرفنظر از برخی حالات استثنایی، به عبارت دیگر، صرفنظر از حالتهایی که:

(a) دو ریشه معادله شاخص برابر باشند؛ یا

(b) تفاضل دو ریشه معادله شاخص عددی صحیح باشد،

مطلب فوق صحیح است.

حال، می‌توان از مجموعه معادلات (۱.۱۰) برای تعیین ضرایب a_1، a_2، ... برحسب a_0 استفاده نمود.

از معادله (۱.۱۰) به ازاء $i = 1$ به‌دست می‌آید:

$$a_1 f(s+1) + a_0 q_1 s + a_0 r_1 = 0$$

بنابراین:

$$a_1 = \frac{-a_0(q_1 s + r_1)}{f(s+1)} = \frac{a_0 h_1(s)}{f(s+1)} \tag{۱.۱۴}$$

که در آن $h_1(s) = -(q_1 s + r_1)$ یک چندجمله‌ای درجه اول برحسب s است.

از معادله (۱.۱۰) به ازاء $i = 2$ نتیجه می‌شود:

$$a_2 f(t+2) + \{a_1 q_1(s+1) + a_0 q_2 s\} + (a_1 r_1 + a_0 r_2) = 0$$

و از این معادله با استفاده از معادله (۱.۱۰) خواهیم داشت:

$$a_2 f(s+2) + \left\{\frac{a_0 h_1(s)}{f(s+1)} q_1(s+1) + a_0 q_2 s\right\} + \left\{\frac{a_0 h_1(s)}{f(s+1)} r_1 + a_0 r_2\right\} = 0$$

و در نتیجه:

$$a_2 = \frac{-a_0\{q_1(s+1)h_1(s) + q_2 s f(s+1) + r_1 h_1(s) + r_2 f(s+1)\}}{f(s+1)f(s+2)} =$$

$$= a_0 \frac{h_2(s)}{f(s+1)f(s+2)} \tag{۱.۱۵}$$

که در آن $h_2(s) = -\{q_1(s+1)h_1(s) + q_2 s f(s+1) + r_1 h_1(s) + r_2 f(s+1)\}$ یک چندجمله‌ای نسبت به s است.

در حالت کلی به سادگی به دست می‌آید:

$$a_i = a_0 \frac{h_i(s)}{f(s+1)f(s+2)\dots f(s+i)} \qquad (۱.۱۶)$$

که در آن $h_i(s)$ یک چندجمله‌ای برحسب s است.

حال، اگر در معادله (۱.۱۶) قرار دهیم $s = s_1$ عباراتی برای a_i برحسب جملاتی از a_0 بدست می‌آوریم، که به جوابی منجر می‌شود که در آن a_0 به عنوان یک ضریب ثابت دلخواه است؛ به طریق مشابه، با جایگزین نمودن $s = s_2$ به هر دو جواب مورد نیاز دست خواهیم یافت. اما، این کار وقتی ممکن است، که مخرج کسر در رابطه (۱.۱۶) هرگز صفر نشود، یعنی، هرگاه، برای هر عدد صحیح مثبت i، داشته باشیم:

$$f(s_1 + i) \neq 0$$

و

$$f(s_2 + i) \neq 0 \qquad (۱.۱۷)$$

اکنون، با توجه به معادله (۱.۱۳)، می‌توان نوشت:

$$f(s) = (s - s_1)(s - s_2)$$

بنابراین:

$$f(s+i) = (s + i - s_1)(s + i - s_2)$$

و در نتیجه:

$$f(s_1 + i) = i(s_1 - s_2 + i)$$
$$f(s_2 + i) = (s_2 - s_1 + i)i \qquad (۱.۱۸)$$

بنابراین، معادله (۱.۱۷) برقرار خواهد بود، اگر، و تنها اگر، $s_2 - s_1$ یک عدد صحیح مثبت نباشد، یعنی، هرگاه تفاضل ریشه‌های معادله شاخص عددی صحیح نباشد (شماره‌گذاری ریشه‌ها چنان در نظر گرفته شده است که $s_2 > s_1$).

اگر تفاضل ریشه‌ها یک عدد صحیح باشد، روشی که فوقاً به آن اشاره شد، برای ریشه بزرگتر قابل اجرا خواهد بود: اگر $s_2 - s_1 = r$ یک عدد صحیح مثبت باشد، آن گاه از معادلات (۱.۱۸) خواهیم داشت:

$$f(s_1 + i) = i(-r + i) \qquad (۱.۱۹)$$

$$f(s_2 + i) = i(r + i) \qquad (۱.۲۰)$$

و می‌بینیم که، به ازاء $i = r$ ، $f(r_1+i) = 0$، حال آن که، برای هر عدد صحیح مثبت i، $f(s_2+i) \neq 0$. بنابراین، روشی که به آن اشاره شد، برای $s = s_2$ قابل اجرا خواهد بود، اما، برای $s = s_1$ چنین نیست. اکنون، پرسش این است که، چگونه دومین جواب را پیدا کنیم؟ اگر از رابطه (۱.۱۶) قبل از ثابت نگه‌داشتن مقدار s استفاده کنیم، سری زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} z(x,s) =& a_0x^s\left\{1+\frac{h_1(s)}{f(s+1)}x+\frac{h_2(s)}{f(s+1)f(s+2)}x^2\right. \\ &\left.+\ldots+\frac{h_i(s)}{f(s+1)f(s+2)\ldots f(s+i)}x^i+\ldots\right\} \end{aligned} \tag{۱.۲۱}$$

با توجه به ساختمان a_1، a_2، ... می‌دانیم که همه جملات سمت راست خوش تعریف هستند، بنابراین، رابطه زیر برقرار است:

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2}+xq(x)\frac{dz}{dx}+r(x)z = a_0f(s)x^s$$

(از آنجا که معادلات (۱.۱۰) برقرار هستند، ضریب هر یک از توانهای x^{s+i} با $i > 1$ باید صفر باشد، و ضریب x^s، طبق معادلات (۱.۷) و (۱.۱۱)، دقیقاً $a_0f(s)$ است). معادله فوق را می‌توان به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+xq(x)\frac{d}{dx}+r(x)\right\}z(x,s) = a_0f(s)x^s \tag{۱.۲۲}$$

متأسفانه، همه جملات واقع در سمت راست رابطه (۱.۲۱) به ازاء $s = s_1$ خوش تعریف نیستند، صفرهایی در مخرجهای کسرها برای $i \geq r$ وجود دارد. اما، اگر $z(x,s)$ را در $f(s+r)$ ضرب کنیم، عاملی که در مخرجهای کسرهای جملاتی به آنها اشاره کردیم به ازاء $s = s_1$ صفر می‌شود، حذف خواهد شد، و چون:

$$f(s+r) = (s+r-s_1)(s+r-s_2) = (s+s_2-2s_1)(s-s_1)$$

این کار را می‌توان عیناً با ضرب $z(x,s)$ در $s - s_1$ انجام داد. همچنین، از آنجا که این عامل مستقل از x است، با چنین ضربی، معادله (۱.۲۲) با استفاده از رابطه (۱.۱۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \{x^2\frac{d^2}{dx^2}+xq(x)\frac{d}{dx}+r(x)\}(s-s_1)z(x,s) &= a_0(s-s_1)f(s)x^s \\ &= a_0(s-s_1)^2(s-s_2)x^s \end{aligned} \tag{۱.۲۳}$$

با قرار دادن $s = s_2$ خواهیم داشت:

$$\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+xq(x)\frac{d}{dx}+r(x)\right\}(s_2-s_1)z(x,s_2)=0$$

که نشان می‌دهد $z(x,s_2)$ یک جواب است، حقیقتی که اکنون از آن مطلع شدیم.

به طریق مشابه، با قرار دادن $s = s_1$ به این نتیجه می‌رسیم که $[(s-s_1)z(x,s)]_{s=s_1}$ به عنوان یک جواب خواهد بود. در واقع، این سری مستقل از $z(x,s_2)$ نیست، و فقط ضریبی از آن است. علت این مطلب تقریباً به شرح زیر است: فاکتور $s - s_1$ به ازاء $i \geq r$ باعث حذف صفرها در مخرج کسرها می‌شود، اما، برای همه جملات با $i < r$ صورت کسرها صفر می‌شوند، بنابراین، اولین توان در سری اکنون $x^{s_1+r} = x^{s_2}$ است، که دقیقاً اولین جمله در $z(x,s_2)$ است، و از آنجا که قواعدی مشابه برای محاسبه هر یک از ضرایب در سری قبلی مورد استفاده قرار داده‌ایم، در هر دو حالت، صرف‌نظر از ضریبی ثابت، باید سری مشابهی به دست آوریم.

اگر از طرفین معادله (۱.۲۳) نسبت به s مشتق‌گیری کنیم، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+xq(x)\frac{d}{dx}+r(x)\}&\left[\frac{d}{ds}\{(s-s_1)z(x,s)\}\right]\\ &=a_0\left[(s-s_1)^2\frac{d}{ds}\{(s-s_2)x^s\}+2(s-s_1)(s-s_2)x^s\right]\end{aligned} \tag{۱.۲۴}$$

و دیده می‌شود که سمت راست این معادله به ازاء $s = s_1$ برابر صفر است، بنابراین، $\left[(\frac{d}{ds}(s-s_1)z(x,s))\right]_{s=s_1}$ به عنوان جوابی از معادله دیفرانسیل خواهد بود. می‌توان ثابت نمود که، این جواب در واقع مستقل از اولین جواب است (یعنی، صرفاً ضریبی از اولین جواب نیست)، اما، ما این کار را در اینجا انجام نخواهیم داد.

به این ترتیب، می‌توان

$$[(s-s_1)z(x,s_1)]_{s=s_1} \tag{۱.۲۵}$$

و

$$[\frac{d}{ds}\{(s-s_1)z(x,s)\}]_{s=s_1} \tag{۱.۲۶}$$

را به عنوان جوابهای مستقل پذیرفت.

حالتی دیگر ممکن است وقتی رخ دهد که، اختلاف ریشه‌های معادله شاخص عددی صحیح باشد، بعلاوه، برای $s = s_1$ و $i = r$، $f(s+i) = 0$، ممکن است که اتفاق $h_r(s_1) = 0$ رخ دهد. در این حالت a_r مبهم (نامعین) است (زیرا، هم صورت و هم مخرج آن صفر است)، بنابراین، ما در

واقع، ممکن است از آن به عنوان یک ضریب ثابت دلخواه استفاده کنیم، در این صورت، دو جواب مستقل از یک سری به دست می‌آید: در مثالهایی که بعداً مورد بررسی قرار خواهیم داد، خواهیم دید که چگونه این حالت اتفاق می‌افتد.

یک حالت باقیمانده دیگر، حالتی است که، ریشه‌های معادله شاخص با هم برابر هستند. این ریشه‌ها را به $s = s_1$ نشان می‌دهیم. در اینجا $f(s) = (s - s_1)^2$، و اگر از معادله (۱.۲۲) استفاده کنیم، به دست می‌آوریم:

$$\left\{x^2\frac{d^2}{ds^2} + xq(x)\frac{d}{dx} + r(x)\right\} z(x,s) = a_0(s-s_1)^2 x^s \qquad (۱.۲۷)$$

با قرار دادن $s = s_1$ سمت راست رابطه فوق برابر صفر می‌شود، بنابراین $z(x, s_1)$ جوابی از معادله است. اما، اگر از طرفین رابطه (۱.۲۷) مشتق‌گیری کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}&\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2} + xq(x)\frac{d}{dx} + r(x)\right\}\left[\frac{d}{ds}z(x,s)\right]\\ &= a_0\left\{2(s-s_1)x^s + (s-s_1)^2\frac{d}{ds}x^s\right\}\end{aligned} \qquad (۱.۲۸)$$

دوباره سمت راست تساوی فوق به ازاء $s = s_1$ برابر صفر است. بنابراین، $\left[\frac{d}{ds}z(x,s)\right]_{s=s_1}$ یک جواب معادله دیفرانسیل (۱.۲) خواهد بود. در واقع، می‌توان نشان داد، که این جواب مستقل از $z(x, s_1)$ است. بنابراین، در این حالت، دو جواب مستقل:

$$z(x, s_1)$$

و

$$[\frac{d}{ds}z(x,s)]_{s=s_1} \qquad (۱.۲۹)$$

را خواهیم داشت.

اکنون روشهای به دست آوردن جوابهای مستقل را که فوقاً به آنها اشاره شد، خلاصه می‌کنیم.

با استفاده از روابط (۱.۱۰)، سری $z(x, s)$ را تشکیل می‌دهیم. چهار حالت متمایز زیر ممکن است رخ دهد:

(۱) اگر s_1 و s_2 ریشه‌های معادله شاخص متمایز باشند و اختلاف آنها عددی صحیح نباشد، آنگاه جوابهای مستقل معادله (۱.۲) عبارت خواهند بود از:

$$z(x, s_1)$$

و

$$z(x, s_2)$$

(۲) اگر اختلاف ریشه‌های s_1 و s_2 $(s_2 > s_1)$ عددی صحیح باشد و یکی از ضرایب در سری مربوط به $z(x, s)$ به ازاء $s = s_1$ نامتناهی باشد، جوابهای مستقل معادله (۱.۲) از روابط زیر به دست می‌آیند

$$[(s - s_1)z(x, s)]_{s=s_1}$$

و

$$[\frac{d}{ds}(s - s_1)z(x, s)]_{s=s_1}$$

(۳) اگر اختلاف ریشه‌های s_1 و s_2 $(s_2 > s_1)$ عددی صحیح باشد، و یکی از ضرایب سری $z(x, s)$، مثلاً a_r به ازاء $s = s_1$ مبهم (تعریف نشده) باشد، دو جواب مستقل معادله از $z(x, s_1)$ با ثابت گرفتن a_0 و a_r به عنوان ثابتهای دلخواه به دست می‌آیند.

(۴) اگر ریشه‌های معادله شاخص با هم برابر باشند، و این ریشه‌ها را مثلاً به $s = s_1$ نشان دهیم، آنگاه جوابهای مستقل معادله (۱.۲) عبارت خواهند بود از:

$$z(x, s_1)$$

و

$$[\frac{d}{ds}z(x, s)]_{s=s_1}$$

البته، می‌توان مسأله همگرایی سری به دست آمده را مورد بررسی قرار داد. می‌توان ثابت نمود (اگر چه ما در اینجا این کار را انجام نخواهیم داد) که شعاع همگرایی سری مربوط به جواب معادله از مینیمم شعاع همگرایی سریهای مربوط به بسط‌های $q(x)$ و $r(x)$ کمتر نیست.

در بعضی حالتها ممکن است نتوان $q(x)$ یا $r(x)$ را برحسب سریهای توانی نسبت به x بسط داد (به عنوان مثال $\frac{1}{x}$ یا $exp(\frac{1}{x})$). در چنین حالاتی، احتمال این هست که، با تغییر متغیرهایی از قبیل $x' = x - a$، یا $x' = \frac{1}{x}$، بتوان $q(x)$ و $r(x)$ را برحسب سریهای توانی نسبت به x' بسط داد، و جوابی به فرم (۱.۵) بر حسب x' به جای x پیدا نمود.

بالاخره، لازم به یادآوری است که، هنگام محاسبه جواب واقعی معادله‌ای دیفرانسیل از نوع (۱.۱)، اغلب بی‌فایده است که آن را به معادله‌ای از نوع (۱.۲) تبدیل کنیم؛ آن چه که برای برقراری نتایج فوق لازم است، این است که این تبدیل ممکن باشد.

اکنون با ارائه چند مثال، روشهای فوق را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۲ مثالها

مثال ۱ . معادله دیفرانسیل $2x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+y=0$ را به روش سریها حل کنید.
حل. ابتدا باید به فرم:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xq(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=0$$

بودن معادله فوق را، که در آن $q(x)$ و $r(x)$ قابل بسط به سریهای توانی هستند، مورد بررسی قرار دهیم. با ضرب طرفین معادله داده شده در $\dfrac{x}{2}$ به‌دست می‌آوریم:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}x.y=0$$

بنابراین $q(x)=\dfrac{1}{2}$، $r(x)=\dfrac{1}{2}x$ و شرط مورد نظر به وضوح برقرار است.
از آنجا که $q(x)$ و $r(x)$ خود به‌صورت سریهایی توانی با شعاع همگرایی $+\infty$ هستند، از تبصره انتهای قسمت قبل نتیجه می‌شود که، سریهای حاصل از جوابهای معادله به ازاء همه مقادیر x همگرا خواهند بود.

اکنون به معادله اصلی بر می‌گردیم.

قرار می‌دهیم:

$$z=x^s\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{s+n}$$

بنابراین:

$$\frac{dz}{ds}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)x^{s+n-1}$$

و

$$\frac{d^2z}{ds^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-2}$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$2x\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}+z$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}2a_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)x^{s+n-1}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n}\\
=\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-1} &+\sum_{n=0}^{\infty} a_n(s+n)x^{s+n-1}\\
&+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{s+n-1} \qquad (۱.۳۰)
\end{aligned}
$$

که در آن در آخرین مجموع برای اینکه توانها در همه جملات یکسان شوند n را به $n-1$ تبدیل کرده‌ایم.

برای این که z در معادله دیفرانسیل صدق کند، باید ضریب هر یک از توانهای x در رابطه (۱.۳۰) برابر صفر شود. توان با $n=0$ تنها در جمع‌بندی اول، و توانهای با $n \geq 1$ در هر سه جمع‌بندی رابطه (۱.۳۰) ظاهر می‌شوند. در نتیجه، معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$2a_0(s+0)(s+0-1)+a_0(s+0)=0 \qquad (۱.۳۱)$$

و

$$2a_n(s+n)(s+n-1)+a_n(s+n)+a_{n-1}=0 \quad (n \geq 1) \qquad (۱.۳۲)$$

این معادلات به شکل‌های:

$$a_0 s(2s-1)=0 \qquad (۱.۳۳)$$

$$a_n(s+n)\{2(s+n)-1\}+a_{n-1}=0 \quad (n \geq 1) \qquad (۱.۳۴)$$

ساده می‌شوند. از معادله (۱.۳۳) معادله شاخص

$$s(2s-1)=0$$

با ریشه‌های $s=0$ و $s=\frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود. چون تفاضل ریشه‌های معادله شاخص عددی صحیح نیست، می‌توانیم طبق دستور (۱) صفحه ۲۴ عمل کنیم.

از معادله (۱.۳۴) رابطه برگشتی زیر برای ضرایب $z(x,s)$ نتیجه می‌شود:

$$a_n=-\frac{a_{n-1}}{(s+n)\{2(s+n)-1\}} \qquad (۱.۳۵)$$

و بنابراین:

$$a_1=-\frac{a_0}{(s+1)(2s+1)}$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{(s+2)(2s+3)} = \frac{a_0}{(s+1)(s+2)(2s+1)(2s+3)},$$
$$a_3 = -\frac{a_2}{(s+3)(2s+5)} = -\frac{a_0}{(s+1)(s+2)(s+3)(2s+1)(2s+3)(2s+5)}$$

و در حالت کلی:

$$a_n = (-1)^n \frac{a_0}{(s+1)(s+2)\dots(s+n)(2s+1)(2s+3)\dots(2s+2n-1)}$$

به این ترتیب، سری زیر را برای $z(x,s)$ خواهیم داشت:

$$z(x,s) = a_0 x^s \{1 - \frac{x}{(s+1)(2s+1)} + \frac{x^2}{(s+1)(s+2)(2s+1)(2s+3)} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(s+1)(s+2)\dots(s+n)(2s+1)(2s+3)\dots(2s+2n-1)} + \dots\} \tag{۱.۳۶}$$

از آنجا که ریشه‌های معادله شاخص $s=0$ و $s=\frac{1}{2}$ هستند، دو جواب مستقل $z(x,0)$ و $z(x,\frac{1}{2})$ به دست می‌آیند، که طبق رابطه (۱.۳۶) برابر با:

$$z(x,0) = a_0\{1 - \frac{x}{1\cdot 1} + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 3} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 3\cdot 5} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\dots n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)} + \dots\} \tag{۱.۳۷}$$

و

$$z(x,\frac{1}{2}) = a_0 x^{1/2}\{1 - \frac{x}{\frac{3}{2}\cdot 2} + \frac{x^2}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 2\cdot 4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\dots\frac{2n+1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot 6\dots 2n} + \dots\} \tag{۱.۳۸}$$

هستند.

با استفاده از روابط:

$$1\cdot 2\cdot 3\dots n = n! \tag{۱.۳۹}$$
$$1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\dots(2n-1)\cdot 2n}{2\cdot 4\dots(2n-2)\cdot 2n}$$

$$= \frac{(2n)!}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\ldots 2(n-1)\cdot 2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \qquad (۱.۴۰)$$

$$\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdot\ldots\frac{2n+1}{2} = \frac{1}{2^n}3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)$$

$$= \frac{1}{2^n}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}$$

$$= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!} \qquad (۱.۴۱)$$

و

$$2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n = 2^n n! \qquad (۱.۴۲)$$

می‌توان سریهای (۱.۳۷) و (۱.۳۸) را به شکلهایی فشرده‌تر بازنویسی نمود.

نتایج فوق معادله (۱.۳۷) را به صورت:

$$z(x,0) = a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!\{(2n)!/(2^n n!)\}}$$

$$= a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{(2n)!} \qquad (۱.۴۳)$$

و معادله (۱.۳۸) را به فرم:

$$z(x,\frac{1}{2}) = a_0 x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\{(2n+1)!/(2^{2n}n!)\}2^n n!}$$

$$= a_0 x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{(2n+1)!} \qquad (۱.۴۴)$$

در خواهد آورد، که دارای شکلهایی به مراتب فشرده‌تر از فرم‌های قبلی هستند.

بنابراین، جواب عمومی معادله داده شده ترکیب خطی دلخواهی از جوابهای $z(x,0)$ و $z(x,\frac{1}{2})$ خواهد بود، به عبارت دیگر:

$$y = A\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{(2n)!} + Bx^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{(2n+1)!}$$

که در آن AوB ثابتهای دلخواه هستند.

مثال ۲ . معادله دیفرانسیل زیر را به روش سریها حل کنید:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} - y = 0$$

حل. ابتدا ثابت می‌کنیم که این معادله به فرم:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xq(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=0$$

است، که در آن $q(x)$ و $r(x)$ را می‌توان به صورت سریهای توانی برحسب x بسط داد. معادله داده شده به وضوح هم‌ارز معادله زیر است:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-\frac{x}{1-x}y=0$$

بنابراین $q(x)=1$ و $r(x)=-x/(1-x)$، اکنون $q(x)$ خود به صورت یک سری توانی است، که برای همه مقادیر x همگرا است، اما، $r(x)$ چنین نیست. با وجود این، با استفاده از قضیه دوجمله‌ای، می‌توان $r(x)$ را به یک سری توانی که برای مقادیر $|x|<1$ همگرا است، بسط داد.

از تذکرات انتهای قسمت قبل نتیجه می‌شود که، هر جوابی از معادله که به صورت سری توانی حول نقطه $x=0$ به دست آید، حداقل در همه نقاطی که $|x|<1$ است، همگرا خواهد بود.

حال، به معادله اصلی برمی‌گردیم.

قرار می‌دهیم:

$$z=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{s+n}$$

بنابراین:

$$\frac{dz}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)x^{s+n-1}$$

و

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-2}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}&(x-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}+(1-x)\frac{dz}{dx}-z\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n}\\&+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)x^{s+n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)x^{s+n}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{s+n}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(s+n-1)(s+n-2)x^{s+n-1}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s+n)x^{s+n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(s+n-1)x^{s+n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{s+n-1}$$

برای اینکه z جوابی از معادله باشد، باید ضرایب هر یک از توانهای x برابر صفر باشد. بنابراین:

$$a_0 s(s-1) + a_0 s = 0 \qquad (۱.۴۵)$$

و

$$a_0(s+n)(s+n-1) - a_{n-1}(s+n-1)(s+n-2) + a_n(s+n)$$
$$-a_{n-1}(s+n-1) - a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 1). \qquad (۱.۴۶)$$

معادلات فوق پس از ساده کردن به صورتهای زیر در می‌آیند:

$$a_0 s^2 = 0 \qquad (۱.۴۷)$$

$$a_n(s+n)^2 - a_{n-1}\{(s+n-1)^2+1\} = 0 \qquad (۱.۴۸)$$

از معادله (۱.۴۷) معادله شاخص:

$$s^2 = 0 \qquad (۱.۴۹)$$

نتیجه می‌شود، حال آن که، از معادله (۱.۴۸) معادله برگشتی:

$$a_n = a_{n-1}\frac{\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+n)^2} \qquad (۱.۵۰)$$

حاصل می‌شود. معادله (۱.۴۹) دارای ریشه مضاعف $s = 0$ است، بنابراین، طبق دستور (۴) از صفحه ۲۵، دو جواب مستقل معادله عبارت خواهند بود از $z(x,0)$ و $[\frac{d}{ds}z(x,s)]_{s=0}$.

از معادله (۱.۵۰) نتیجه می‌شود:

$$a_1 = a_0\frac{(s^2+1)}{(s+1)^2},$$
$$a_2 = a_1\frac{\{(s+1)^2+1\}}{(s+2)^2} = a_0\frac{\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2}$$

و در حالت کلی:

$$a_n = a_0\frac{\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}\{(s+2)^2+1\}\dots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2\dots(s+n)^2}$$

بنابراین:

$$z(x,s)=a_0x^s\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}\dots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2\dots(s+n)^2}x^n\right] \quad (۱.۵۱)$$

در نتیجه، اولین جواب برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} z(x,0) &= a_0[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\{1^2+1\}\{2^2+1\}\{3^2+1\}\dots\{(n-1)^2+1\}}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\dots n^2}x^n] \\ &= a_0[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 10\cdot 17\dots\{(n-1)^2+1\}}{(n!)^2}x^n] \\ &= a_0y_1(x) \end{aligned} \quad (۱.۵۲)$$

برای دومین جواب به $\frac{d}{ds}z(x,s)$ نیاز داریم، اکنون، از معادله (۱.۵۱) داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}z(x,s) \\ &= a_0(\frac{d}{ds}x^s)[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}\dots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2\dots(s+n)^2}x^n] \\ &+a_0x^s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{ds}[\frac{\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}\dots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2\dots(s+n)^2}]x^n \end{aligned} \quad (۱.۵۳)$$

برای اولین جمله با توجه به رابطه:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}x^s &= \frac{d}{ds}(e^{\ln x})^s = \frac{d}{ds}e^{s\ln x} \qquad \dagger \\ &= (\ln x)e^{s\ln x} = (\ln x)x^s \end{aligned} \quad (۱.۵۴)$$

به دست می‌آید*:

$$[\frac{d}{ds}x^s]_{s=0} = \ln x \quad (۱.۵۵)$$

دومین جمله را با استفاده از تکنیک مشتق‌گیری لگاریتمی محاسبه می‌کنیم. اگر عبارت داخل کروشه را به $f_n(s)$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{d}{ds}\ln f_n(s) = \frac{1}{f_n(s)}\frac{d}{ds}f_n(s)$$

†) یادآوری می‌کنیم که $x = e^{\ln x}$، که در آن از نماد $\ln x = \log_e x$ استفاده شده است.

*) از آنجا که رابطه $x = e^{\ln x}$ تنها برای $x > 0$ معتبر است، مؤلف کتاب عملاً فرض کرده است که $x > 0$. مترجم.

بنابراین:

$$\frac{d}{ds}f_n(s) = f_n(s)\frac{d}{ds}\ln f_n(s) \qquad (۱.۵۶)$$

اما:

$$\begin{aligned}\ln f_n(s) =& \ln\{s^2+1\} + \ln\{(s+1)^2+1\} + \ldots + \ln\{(s+n-1)^2+1\}\\ & - \ln(s+1)^2 - \ln(s+2)^2 - \ldots - \ln(s+n)^2\\ =& \sum_{m=1}^{n}\ln\{(s+m-1)^2+1\} - \sum_{m=1}^{n}\ln(s+m)^2\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\ln f_n(s) =& \sum_{m=1}^{n}\frac{2(s+m-1)}{(s+m-1)^2+1} - \sum_{m=1}^{n}\frac{2}{s+m}\\ =& 2\sum_{m=1}^{n}\{\frac{s+m-1}{(s+m-1)^2+1} - \frac{1}{s+m}\}\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\frac{d}{ds}f_n(s) = \frac{2\{s^2+1\}\ldots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2\ldots(s+n)^2}\sum_{m=1}^{n}\{\frac{s+m-1}{(s+m-1)^2+1} - \frac{1}{s+m}\}$$

و

$$[\frac{d}{ds}f_n(s)]_{s=0} = \frac{2\{1\}\{1^2+1\}\{2^2+1\}\ldots\{(n-1)^2+1\}}{1^2\cdot 2^2\ldots n^2}\cdot\sum_{m=1}^{n}\{\frac{m-1}{(m-1)^2+1} - \frac{1}{m}\}.$$

با نشان دادن عبارت فوق به c_n خواهیم داشت:

$$c_n = \frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 5\cdot 10\cdot 17\ldots\{(n-1)^2+1\}}{(n!)^2}\sum_{m=1}^{n}\frac{m-2}{m\{(m-1)^2+1\}} \qquad (۱.۵۷)$$

بنابراین، با قرار دادن $s=0$ در معادله (۱.۵۳) دومین جواب معادله دیفرانسیل داده شده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&[\frac{d}{ds}z(x,s)]_{s=0}\\ &= a_0(\ln x)[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{1\}\{1^2+1\}\{2^2+1\}\ldots\{(n-1)^2+1\}x^n}{1^2\cdot 2^2\ldots n^2}] + a_0\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n\\ &= a_0 y_1(x)\ln x + a_0\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n = a_0 y_2(x)\end{aligned}$$

که در آن:

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \tag{۱.۵۸}$$

به این ترتیب، جواب عمومی معادله به صورت:

$$y = Ay_1(x) + By_2(x)$$

است، که در آن A و B ثابتهایی دلخواه هستند.

مثال ۳ . معادله دیفرانسیل زیر را به روش سریها حل کنید:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (3-x)y = 0\cdot$$

حل. فوراً دیده می‌شود که، این معادله به شکل معادله (۱.۲) با $q(x) = -3$ و $r(x) = 3 - x$ است، که هر دو به صورت سرهای توانی هستند، که در همه نقاط همگرا می‌باشند.

از تبصره انتهای بخش قبل نتیجه می‌شود که، هر جوابی از معادله دیفرانسیل داده شده که به صورت سری توانی بیان شده باشد، به ازاء کلیه مقادیر x همگرا است.

با قرار دادن $z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n}$ و با روشی شبیه مثال قبلی، وقتی z جوابی از معادله دیفرانسیل داده شده باشد، به نتایج زیر می‌رسیم:

$$a_0(s-1)(s-3) = 0 \tag{۱.۵۹}$$

$$a_n(s+n-1)(s+n-3) - a_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1) \tag{۱.۶۰}$$

معادله (۱.۵۹) منجر به معادله شاخص:

$$(s-1)(s-3) = 0 \tag{۱.۶۱}$$

با ریشه‌های $s = 1$ و $s = 3$ می‌شود. اختلاف این ریشه‌ها عددی صحیح است، بنابراین، با یک حالت استثنایی سروکار داریم.

از معادله (۱.۶۰) رابطه برگشتی:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(s+n-1)(s+n-3)} \qquad (n \geq 1) \tag{۱.۶۲}$$

به دست می‌آید. بنابراین:

$$a_1 = \frac{a_0}{s(s-2)},$$

$$a_2 = \frac{a_1}{(s+1)(s-1)} = \frac{a_0}{s(s+1)(s-2)(s-1)}$$

و در حالت کلی:

$$a_n = \frac{a_0}{s(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)(s-2)(s-1)s\dots(s+n-3)} \quad (۱.۶۳)$$

صریحاً از معادله (۱.۶۳) دیده می‌شود که، وقتی $s = 1$ است، کلیه a_nها با $n \geq 2$ برابر بی‌نهایت هستند، بنابراین، باید از روش (۲) که در صفحه ۲۵ بیان شده است، استفاده کنیم. داریم:

$$z(x,s) = a_0 x^s \{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{s(s+1)\dots(s+n-1)(s-2)(s-1)\dots(s+n-3)}\}$$

بنابراین:

$$(s-1)z(x,s) = a_0 x^s \left\{(s-1) + \frac{(s-1)}{s(s-2)}x \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{s(s+1)\dots(s+n-1)(s-2)s(s+1)\dots(s+n-3)} \right\} \quad (۱.۶۴)$$

اولین جواب معادله دیفرانسیل داده شده از رابطه: *

$$[(s-1)z(x,s)]_{s=1} = a_0 x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{1\cdot 2\dots n(-1)\cdot 1\cdot 2\dots(n-2)}$$
$$= a_0 \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n!(n-2)!}$$

و دومین جواب از رابطه $[\frac{d}{d}s\{(s-1)z(x,s)\}]_{s=1}$ به دست می‌آید.
از معادله (۱.۶۴) داریم:

$$\frac{d}{ds}\{(s-1)z(x,s)\}$$
$$= a_0(\frac{d}{ds}x^s)\{(s-1) + \frac{(s-1)}{s(s-2)}x$$

*) با توجه به اینکه $n-2$ به‌ازای $n=2$ برابر صفر می‌شود، بهتر بود، از ابتدا، در مخرج کسر از نماد! $n!(n-2)$ استفاده می‌شد، تا با توجه به قرار داد $0! = 1$ در به کارگیری از نماد $\sum_{n=2}^{\infty}$ مشکل صفر شدن مخرج کسر جلوی $\sum_{n=2}^{\infty}$ برطرف می‌شد. مترجم.

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{s(s+1)\dots(s+n-1)(s-2)s(s+1)\dots(s+n-3)}\}$$
$$+a_0x^s\{1+\frac{d}{ds}\frac{s-1}{s(s-2)}x$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}x^n\frac{d}{ds}\frac{1}{s(s+1)\dots(s+n-1)(s-2)s(s+1)\dots(s+n-3)}\}\quad (۱.۶۵)$$

برای محاسبه آخرین مشتقها از مشتق‌گیری لگاریتمی استفاده می‌کنیم. عبارت:

$$\frac{1}{s(s+1)\dots(s+n-1)(s-2)s(s+1)\dots(s+n-3)}$$

را به $f_n(s)$ نشان می‌دهیم. دوباره، داریم:

$$\frac{d}{ds}f_n(s)=f_n(s)\frac{d}{ds}\ln f_n(s)$$

و چون

$$\ln f_n(s)=-\ln s-\ln(s+1)-\ln(s+2)-\dots-\ln(s+n-1)$$
$$-\ln(s-2)-\ln s-\ln(s+1)-\dots-\ln(s+n-3)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{d}{ds}\ln f_n(s)=-\{\frac{1}{s}+\frac{2}{s+1}+\dots+\frac{2}{s+n-3}+\frac{1}{s-2}$$
$$+\frac{1}{s+n-2}+\frac{1}{s+n-1}\}$$

بنابراین:

$$[\frac{d}{ds}\ln f_n(s)]_{s=1}=-\{2(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-2})-1+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\}$$
$$=-\{2\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{m}-1+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\}$$

و

$$[f_n(s)]_{s=1}=\frac{1}{1\cdot 2\dots n\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2\dots(n-2)}=-\frac{1}{n!(n-2)!}$$

در نتیجه، اگر سمت چپ تساوی زیر را به c_n نشان دهیم، به دست می‌آید:

$$[\frac{d}{ds}f_n(s)]_{s=1} = \frac{1}{n!(n-2)!}\{2\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{m} - 1 + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\} = c_n$$

همچنین، به سادگی می‌توان نشان داد، که:

$$[\frac{d}{ds}\frac{(s-1)}{s(s-2)}]_{s=1} = -1$$

و شبیه قبل، داریم:

$$\frac{d}{ds}x^s = (\ln x)x^s$$

بنابراین، در خاتمه، از معادله (۱.۶۵) به دست می‌آید:

$$[\frac{d}{ds}(s-1)z(x,s)]_{s=1} = a_0(\ln x)y_1(x) + a_0x\{1 - x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\}$$
$$= a_0y_2(x)$$

و جواب عمومی به صورت:

$$y = Ay_1(x) + A_2y_2(x)$$

خواهد بود، که در آن A و B ثابتهای دلخواه هستند.

مثال ۴ . معادله زیر را به روش سریها حل کنید:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (x^3 - 2x)\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

حل. باز هم معادله فوق معادله‌ای از نوع (۱.۲) با $q(x) = -2 + x^2$ و $r(x) = -2$ است. بنابراین، جوابی که به صورت سری توانی از معادله فوق به دست می‌آید، برای همه مقادیر x همگرا خواهد بود.

با قرار دادن $z = x^s\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، برای اینکه z جوابی از معادله داده شده باشد، باید داشته باشیم:

$$a_0(s-2)(s-1) = 0 \qquad (۱.۶۶)$$

$$a_1(s-1)s = 0 \qquad (۱.۶۷)$$

$$a_n(s+n-2)(s+n-1) + a_{n-2}(s+n-2) = 0 \quad (n \geq 2) \qquad (۱.۶۸)$$

رابطه (۱.۶۶) به معادله شاخص:

$$(s-2)(s-1)=0$$

با ریشه‌های $s=2$، $s=1$ منجر می‌شود. اختلاف این ریشه‌ها عددی صحیح است، بنابراین، با حالتی استثنایی سروکار داریم. وقتی $s=1$ باشد، رابطه (۱.۶۷) صرف‌نظر از اینکه مقدار a_1 چقدر باشد، برقرار است، یعنی a_1 نامعین است، در نتیجه، ما با حالت (۳) از صفحه ... سروکار داریم. می‌دانیم که در این حالت دو جواب مستقل با استفاده از یکی از مقادیر s، یعنی $s=1$، به دست می‌آیند.

از معادله (۱.۶۸) معادله برگشتی:

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(s+n-1)} \qquad (n\geq 2) \tag{۱.۶۹}$$

به دست می‌آید (فاکتور $s+n-2$ را در رابطه (۶۸.۱) می‌توان حذف نمود، زیرا، برای $n\geq 2$ و $s=1$ یا $s=2$ ناصفر است)، که با $s=1$ از آن نتیجه می‌شود:

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n} \qquad (n\geq 2) \tag{۱.۷۰}$$

بنابراین:

$$a_2=-\frac{a_0}{2}, \qquad a_4=-\frac{a_2}{2}=\frac{a_0}{2.4}$$
$$a_3=-\frac{a_1}{3}, \qquad a_5=-\frac{a_3}{5}=\frac{a_1}{3.5}$$

و در حالت کلی:

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\ ,$$
$$a_{2n+1}=(-1)^n\frac{a_1}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}$$

در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}z(x,1)=&x[a_0\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2\cdot 4\ldots 2n}\}\\&+a_1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}]\end{aligned}$$

و به این ترتیب جواب عمومی معادله به صورت:

$$y = Ay_1(x) + By_2(x)$$

خواهد بود، که در آن:

$$y_1(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \ ,$$
$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$$

و A و B ثابتهایی دلخواه هستند.

در مثالهایی که تا کنون مورد بررسی قرار داده‌ایم، همیشه جمله عمومی سریهای ظاهر شده در جوابها، به سادگی به دست می‌آمده‌اند، اما، در بسیاری از موارد ممکن است جمله عمومی را نتوان به سادگی یا استفاده از رابطه برگشتی محاسبه نمود. در حالت کلی، وقتی رابطه برگشتی به جای دو جمله شامل سه یا بیشتر جمله باشد، معمولاً، چنین وضعیتی رخ می‌دهد. در چنین وضعیتی، کل کاری که می‌توانیم انجام دهیم، ارائه تعداد قلیلی از جملات سری توانی مربوط به جواب، و امیدواری به برخی از کاربردهای آن است. مطلب فوق در مثال زیر شرح داده شده است.

مثال ۵ . معادله دیفرانسیل $(x^2-1)\dfrac{dy}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$ را به روش سریها حل کنید.

حل. معادله فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \frac{3x^2}{x^2-1}\frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{x^2-1}y = 0$$

این معادله، معادله‌ای به فرم (۱.۲) با $q(x) = (3x^2)/(x^2-1)$ و $r(x) = x^2/(x^2-1)$ است. هم $q(x)$ و هم $r(x)$ را می‌توان طبق قضیه ببینیم به سریهای توانی همگرایی روی فاصله (۱و۱-) بسط داد. بنابراین، هر جوابی به صورت سری توانی از معادله داده شده حداقل روی فاصله (۱و۱-) همگرا است.

اکنون به معادله اصلی برمی‌گردیم. تلاش برای پیدا کردن جوابی به فرم:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n}$$

از معادله دیفرانسیل فوق، با روشی شبیه مثالهای قبلی، منجر به مجموعه معادلات زیر می‌شود:

$$a_0 s(s-1) = 0 \qquad (۱.۷۱)$$

$$a_1(s+1)s = 0 \quad (۱.۷۲)$$

$$a_0 s(s+2) - a_2(s+2)(s+1) = 0 \quad (۱.۷۳)$$

$$a_{n-3} + a_{n-2}(s+n-2) - a_n(s+n)(s+n-1) = 0 \qquad (n \geq 3) \quad (۱.۷۴)$$

از رابطه (۱.۷۱) معادله شاخص:

$$s(s-1) = 0$$

با ریشه‌های $s = 0$ و $s = 1$ نتیجه می‌شود. معادله (۱.۷۲) نشان می‌دهد که، اگر $s = 0$ باشد، a_1 نامعین (مبهم) است، بنابراین، ما با حالت (۳) که قبلاً به آن اشاره شده است، سروکار داریم. هر دو جواب مستقل معادله را می‌توان از ریشه $s = 0$ با دلخواه فرض کردن ثابتهای a_0 و a_1 به دست آورد.

با $s = 0$ از معادله (۱.۷۳) نتیجه می‌شود:

$$a_2 = 0$$

و از معادله (۱.۷۴) به دست می‌آید:

$$a_{n-3} + n(n-2)a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0$$

و یا:

$$a_n = \frac{a_{n-3} + n(n-2)a_{n-2}}{n(n-1)} \qquad (n \geq 3) \quad (۱.۷۵)$$

برای ما این امکان وجود ندارد، که با استفاده از رابطه برگشتی (۱.۷۵) عبارتی کلی برای a_n به دست آوریم، اما، می‌توانیم هر تعداد از a_nها را که میل داشته باشیم، محاسبه کنیم.

به عنوان مثال:

$$a_3 = \frac{a_0 + 3a_1}{6} = \frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{2}a_1,$$
$$a_4 = \frac{a_1 + 8a_2}{4} = \frac{1}{12}a_1,$$
$$a_5 = \frac{a_2 + 15a_3}{20} = \frac{1}{8}a_0 + \frac{3}{8}a_1$$

و غیره و غیره، هر قدر که بخواهیم.

ما جواب معادله داده شده را به صورت سری توانی حداکثر تا جمله x^5 حساب کرده‌ایم:

$$y = a_0 + a_1 x + (\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{2}a_1)x^3 + \frac{1}{12}a_1 x^4 + (\frac{1}{8}a_0 + \frac{3}{8}a_1)x^5 + \ldots$$
$$= a_0(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \ldots) + a_1(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \ldots)$$

مسائل

(۱). جواب معادلات دیفرانسیل زیر را به صورت سریهای توانی برحسب قوای صعودی x به دست آورده، تعیین کنید به ازاء چه مقادیری از x سریها همگرا هستند:

(i) $$4x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-y=0;$$

(ii) $$x\frac{d^2y}{dx^2}+(x+1)\frac{dy}{dx}+y=0;$$

(iii) $$x\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0;$$

(iv) $$9x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}-12\frac{dy}{dx}+4y=0;$$

(v) $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+y=0;$$

(vi) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(x^2-3x)\frac{dy}{dx}+(4-2x)y=0;$$

(vii) $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0;$$

(viii) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+(x^2-5)y=0;$$

(ix) $$\frac{d^2y}{dx^2}-x^2\frac{dy}{dx}-y=0\cdot$$

(۲). تعیین کنید، که آیا ممکن است جوابهای معادلات دیفرانسیل زیر را برحسب سریهای توانی از قوای صعودی x به دست آورد:

(i) $$x^3\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{dy}{dx}+y=0;$$

(ii) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+x^2y=0;$$

(iii) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{dy}{dx}+y=0\cdot$$

(۳). جواب‌های معادلات دیفرانسیل زیر را برحسب سریهایی توانی از قوای صعودی $\frac{1}{x}$ به دست آورید:

(i) $$2x^2(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+x(3x+1)\frac{dy}{dx}-2y=0;$$

(ii) $$2x^3\frac{d^2y}{dx^2}+(2x+x^2)\frac{dy}{dx}+2y=0\cdot$$

فصل ۲

توابع گاما و بتا

۲.۱ تعریف‌ها

توابع گاما و بتا به ترتیب به صورتهای:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{۲.۱}$$

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \tag{۲.۲}$$

تعریف می‌شوند.

اولین تعریف فقط برای $x > 0$، و دومین تعریف تنها برای $x > 0$ و $y > 0$ معتبر است. زیرا، فقط برای این مقادیر از x و y انتگرالهای فوق همگرا هستند. ما این گزاره را ثابت نخواهیم کرد، اما، حداقل آن را توجیه خواهیم کرد. [۱]

انتگرال مربوط به تعریف (۲.۱) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. می‌دانیم که برای مقادیر بزرگ t تابع نمائی e^t از هر توانی از t بزرگتر است، بنابراین، برای هر مقدار دلخواهی از x، وقتی $t \to \infty$، $e^{-t}t^{x-1} \to 0$، و در نتیجه، از حد بالای انتگرال نباید انتظار مزاحمتی داشت. نزدیک حد پائینی انتگرال داریم $e^{-t} \simeq 1$، در نتیجه، اگر این تقریب بین $t = 0$ و $t = c$ خوب باشد، می‌توانیم معادله (۲.۱) را به فرم زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &\simeq \int_0^c t^{x-1} + \int_c^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= \left[\frac{1}{x} t^x\right]_{t=0}^c + \int_c^\infty e^{-t} t^{x-1} dt\end{aligned}$$

۱. همگرایی انتگرالهای فوق معمولاً در کتابهای آنالیز ریاضی یا کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته به شکل دقیقتری مورد بررسی قرار می‌گیرد. مترجم.

بنابراین، برای اینکه اولین جمله در حد پایینی $t = 0$ متناهی باقی بماند، باید داشته باشیم $x > 0$.

از دلیلی مشابه برای تابع بتا می‌توان استفاده نمود. رفتار در نقطه $t = 0$ منجر می‌شود به محدودیت روی x و رفتار در نقطه $t = 1$ منجر می‌شود به محدودیت روی y.

۲.۲ خواص توابع بتا و گاما

قضیهٔ ۲.۱. مقدار تابع گاما در نقطه $t = 1$ از رابطه $\Gamma(1) = 1$ به دست می‌آید.

اثبات. از تعریف (۲.۱) داریم:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{1-1}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = 1\cdot$$

قضیهٔ ۲.۲. برای مقادیر $x > 0$ داریم:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\cdot \qquad (x > 0)$$

اثبات. با استفاده از تعریف (۲.۱) و انتگرالگیری جزءبه‌جزء می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x}dt = \left[(-e^{-t})t^{x}\right]_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty}(-e^{-t})xt^{x-1}dt\\ &= 0 + x\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt\end{aligned}$$

(اولین جمله در حد بالایی انتگرال به دلیل برقرار بودن رابطه $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}t^{x} = 0$، و در حد پائینی انتگرال به دلیل مثبت بودن x برابر صفر است). بنابراین، با استفاده مجدد از تعریف (۲.۱) خواهیم داشت:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

قضیهٔ ۲.۳. اگر x یک عدد صحیح غیرمنفی باشد، آنگاه:

$$\Gamma(x+1) = x!\cdot$$

اثبات. طبق قضیه (۲.۲):

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

و در نتیجه با استفاده مکرر از رابطه فوق می‌توان نوشت:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x(x-1)\Gamma(x-1) = x(x-1)(x-2)\Gamma(x-2)$$

$$= \ldots = x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\cdot \Gamma(1)$$

(با توجه به اینکه x یک عدد صحیح مثبت است، تفریقهای متوالی از واحد سرانجام به یک منجر خواهد شد [۱]). اما، طبق قضیه (۲.۱)، $\Gamma(1) = 1$، بنابراین:

$$\Gamma(x+1) = x!$$

قضیهٔ ۲.۴. برای مقادیر $x > 0$، داریم:

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} dt.$$

اثبات. با تغییر متغیر $t = u^2$ در تعریف (۲.۱)، خواهیم داشت $dt = 2udu$، و حدود انتگرال از $t = 0$ تا $t = \infty$، به $u = 0$ تا $u = \infty$ تبدیل خواهد شد، بنابراین:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}(u^2)^{x-1} 2udu = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du$$
$$= 2\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} dt$$

(زیرا، در انتگرال معین متغیر انتگرالگیری را می‌توانیم هر طور که میل داشته باشیم، انتخاب کنیم).

قضیهٔ ۲.۵. برای مقادیر $x > 0$ و $y > 0$ داریم:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$$

اثبات. برای اثبات قضیه فوق انتگرال دوگانه:

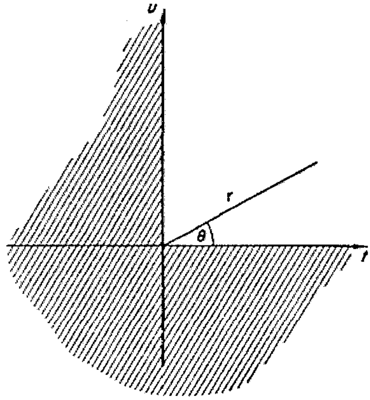
$$I = \int\int_R \exp(-t^2 - u^2) t^{2x-1} u^{2y-1} dtdu$$

را که در آن R چارک اول صفحه tu است، که در شکل ۲.۱ سایه زده نشده است، با دو روش مختلف مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در اولین روش با استفاده از قضیه ۲.۴، I را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$I = \int_{t=0}^{\infty} \left[\int_{u=0}^{\infty} \exp(-t^2 - u^2) t^{2x-1} u^{2y-1} du\right] dt$$

۱. به جای روش فوق که فاقد دقت کافی ریاضی است، بهتر است در اثبات این قضیه ساده از روش استقراء ریاضی استفاده شود. مترجم.



شکل ۲.۱ صفحه tu

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2x-1} dt \cdot \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2y-1} du \\
&= \frac{1}{2}\Gamma(x) \cdot \frac{1}{2}\Gamma(y) = \frac{1}{4}\Gamma(x)\Gamma(y) \qquad (۲.۳)
\end{aligned}$$

سپس، با تغییر متغیر قطبی $t = r\cos\theta$ و $u = r\sin\theta$، و تغییر المان سطح $dtdu$ به المان سطح $rdrd\theta$، و استفاده مجدد از قضیه ۲.۴، انتگرال فوق را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
I &= \int\int_R \exp(-r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)(r\cos\theta)^{2x-1}(r\sin\theta)^{2y-1} r dr d\theta \\
&= \int_{r=0}^\infty \left[\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^{2x-1}\cos^{2x-1}\theta r^{2y-1}\sin^{2y-1}\theta r d\theta\right] dr \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}\Gamma(x+y)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta d\theta \qquad (۲.۴)
\end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن عبارتهای (۲.۳) و (۲.۴)، با توجه به اینکه توابع گامای ظاهر شده در سمت راست تساویها به ازاء $x > 0$ و $y > 0$ معین و مثبت هستند، فوراً نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۲.۶. مقدار تابع گاما در نقطه $t = \frac{1}{2}$ از رابطه $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ به دست می‌آید.

اثبات. با قرار دادن $x = y = \frac{1}{2}$ در قضیه ۲.۴، و با استفاده از رابطه $\Gamma(1) = 1$ به دست می‌آید:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\left\{\Gamma(\frac{1}{2})\right\}^2$$

و از این تساوی با محاسبه انتگرال سمت چپ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\left\{\Gamma(\frac{1}{2})\right\}^2$$

و بنابراین $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pm\sqrt{\pi}$.

اما، از تعریف (۲.۱) دیده می‌شود که $\Gamma(x)$ نمی‌تواند منفی باشد (زیرا، تابع زیر علامت انتگرال مثبت است)، بنابراین، با به دور انداختن جذر منفی $-\sqrt{\pi}$، به دست می‌آوریم $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$، و قضیه به طور کامل ثابت می‌شود.

نتیجه.

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

اثبات. با قرار دادن $x = \frac{1}{2}$ در قضیه ۲.۴ به‌دست می‌آید $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt$، و با استفاده قضیه ۲.۶ فوراً نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۲.۷. برای هر $x > 0$ و $y > 0$، داریم:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

اثبات. با تغییر متغیر $t = \cos^2\theta$ در تعریف (۲.۲) از $B(x,y)$، به دست می‌آید $dt = -2\cos\theta\sin\theta d\theta$، همچنین، حدود $t = 0$ و $t = 1$، به ترتیب، به $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\theta = 0$ تبدیل می‌شوند، و در نتیجه، طبق قضیه ۲.۵، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos^2\theta)^{x-1}(\sin^2\theta)^{y-1}(-2\cos\theta\sin\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta d\theta = 2\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \end{aligned}$$

قضیهٔ ۲.۸. برای هر $x > 0$ و $y > 0$، داریم:

$$B(x,y) = B(y,x)$$

اثبات. مطلب فوق نتیجه فوری قضیه ۲.۷ است.[۱]

قضیهٔ ۲.۹. برای هر $x > 0$ و $y > 0$، داریم:

(الف) $$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$$

(ب) $$B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y)$$

اثبات. (الف). طبق قضیه‌های ۲.۷ و ۲.۲، داریم:

$$B(x+1,y) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+1+y)} = \frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)}$$
$$= \frac{x}{x+y}\cdot\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{x}{x+y}B(x,y)$$

(ب). اثبات قسمت (ب) دقیقاً شبیه قسمت (الف) است.

قضیهٔ ۲.۱۰. (فرمول دو برابر کردن لژاندر). برای هر $x > 0$، داریم:

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

اثبات. طبق قضیه ۲.۷، تعریف (۲.۲)، و سپس با تغییر متغیر $t = \frac{1}{2}(1+s)$، می‌توان نوشت:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(x+x)} = B(x,x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt$$
$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{2^{x-1}}(1+s)^{x-1}\frac{1}{2^{x-1}}(1-s)^{x-1}\frac{1}{2}ds$$
$$= \frac{1}{2^{2x-1}}\int_{-1}^1 (1-s^2)^{x-1}ds = \frac{2}{2^{2x-1}}\int_0^1 (1-s^2)^{x-1}ds$$

---

۱. قضیه فوق را می‌تون با تغییر متغیر $t = 1-\tau$ با استفاده از تعریف:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad (x>0, y>0)$$

نیز به سادگی و بدون نیاز به قضیه ۲.۷ ثابت نمود. در واقع، با این تغییر متغیر داریم:

$$B(x,y) = -\int_1^0 (1-\tau)^{x-1}\tau^{y-1}d\tau = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt = B(y,x)\cdot$$

این اثبات به مراتب بهتر از اثباتی است که دراصل کتاب ارائه شده است، زیرا، در آن از هیچ پیش‌قضیه‌ای استفاده نشده است. مترجم.

$$= 2^{-2x+2}\int_0^1 (1-u)^{x-1}\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$$ (تغییر متغیر $u = s^2$ داده‌ایم.)

$$= 2^{-2x+1}\int_0^1 (1-u)^{x-1}u^{-\frac{1}{2}}du = 2^{-2x+1}B(\frac{1}{2}, x)$$

$$= 2^{-2x+1}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(x)}{\Gamma(\frac{1}{2}+x)}$$ (طبق قضیه ۲.۷)

در نتیجه، با استفاده از قضیه (۲.۶) خواهیم داشت:

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{2^{-2x+1}}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}\sqrt{\pi}$$

و بنابراین:

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

نتیجه. اگر x یک عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه:

$$\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \frac{(2x)!}{2^{2x}x!}\sqrt{\pi}$$

اثبات. با استفاده از قضیه ۲.۳، و با بازنویسی روابط:

$$\Gamma(2x) = (2x-1)!\ ,\ \Gamma(x) = (x-1)!$$

در قضیه قبل، خواهیم داشت:

$$(2x-1)! = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}(x-1)!\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

و با ضرب طرفین تساوی فوق در $2x$ به دست می‌آید:

$$2x(2x-1)! = \frac{2^{2x}}{\sqrt{\pi}}x(x-1)!\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

این معادله را می‌توان به شکل ساده‌تر زیر نوشت:

$$(2x)! = \frac{2^{2x}}{\sqrt{\pi}}x!\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

و بنابراین:

$$\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \frac{(2x)!}{2^{2x}x!}\sqrt{\pi}$$

۲.۳ تعریف تابع گاما برای نقاط منفی متغیر

از قضیه ۲.۲ برای مقادیر $x > 0$ نتیجه می‌شود:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)\cdot \qquad (۲.۵)$$

صرفنظر از نقطه $x = 0$ که به ازاء آن مخرج کسر واقع در سمت راست تساوی فوق برابر صفر است، سمت راست تساوی (۲.۵) برای کلیه مقادیر x که متغیر تابع گاما مثبت است، خوش‌تعریف است زیرا، این شرط، شرطی برای درست بودن تعریف (۲.۱) بود). در نتیجه، برای مقادیری از x که $x+1 > 0$، و یا $x > -1$ است، سمت راست تساوی (۲.۵) خوش‌تعریف است.همچنین، می‌توانیم بگوئیم $\Gamma(0)$ نامتناهی است، زیرا، وقتی $x \to 0$، داریم $\Gamma(x+1) \to T(1) = 1$، بنابراین [۱] $\Gamma(x) = (1/x)\Gamma(x+1) \to \infty$. تاکنون سمت چپ تساوی (۲.۵) فقط برای $x > 0$ تعریف شده بود، اما، اکنون می‌توانیم با استفاده از سمت راست این تساوی، تعریف تابع $\Gamma(x)$ را برای $x > -1$ نیز گسترش دهیم. دلیل این مطلب به شرح زیر است:

(i) تساوی (۲.۵) برای $x > 0$ قبلاً ثابت شده است؛

(ii) سمت راست تساوی (۲.۵) برای $x > -1$ خوش‌تعریف است، و سمت چپ آن برای $x > 0$؛

(iii) با استفاده از سمت راست تساوی (۲.۵) می‌توان سمت چپ را برای $x > -1$ تعریف نمود.

به این ترتیب، اکنون $\Gamma(x)$ را برای مقادیر $x > -1$ تعریف کرده‌ایم، بنابراین، سمت راست تساوی (۲.۵) برای $x + 1 > -1$، و یا $x > -2$ خوش‌تعریف است، و در نتیجه، می‌توانیم سمت چپ تساوی (۲.۵) را برای $x > -2$ نیز تعریف کنیم. این پروسه را می‌توان ادامه داد و $\Gamma(x)$ را برای کلیه

۱. در اثبات فوق، از پیوستگی تابع $\Gamma(x)$ در نقطه $x = 1$ استفاده شده است، مطلبی که در کتاب نه اثبات شده است، نه حتی به آن اشاره‌ای شده است، بعلاوه، مؤلف کتاب عملاً ثابت کرده است $\lim_{x\to 0+}\Gamma(x) = +\infty$، و با گسترش تابع $\Gamma(x)$ در نقاط منفی x، طبق رابطه (۲.۵) خواهیم داشت $\lim_{x\to 0-}\Gamma(x) = -\infty$. تابع $\Gamma(x)$ در نقطه $x = 0$ تعریف نشده است، ولی، اگر در هیأت گسترش یافته اعداد بخواهیم تعریف آن را طبق رابطه (۲.۱) بپذیریم، در این صورت:

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-1}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0+ \\ M \to +\infty}} \int_\varepsilon^M \frac{e^{-t}}{t}dt$$

اما، برای $0 < \varepsilon < 1$ و $M > 1$ می‌توان نوشت:

$$\int_\varepsilon^M \frac{e^{-t}}{t}dt \geq \int_\varepsilon^1 \frac{e^{-t}}{t}dt \geq \int_\varepsilon^1 \frac{e^{-1}}{t}dt = -\frac{1}{e}\ln\varepsilon$$

و چون $\lim_{\varepsilon\to 0+} -\frac{1}{e}\ln\varepsilon = +\infty$، در هیأت گسترش یافته اعداد حقیقی می‌توان نوشت $\Gamma(0) = \infty$. مترجم.

مقادیر منفی x تعریف نمود.

قضیهٔ ۲.۱۱. اگر m صفر یا یک عدد صحیح منفی باشد، آنگاه $\Gamma(m)$ نامتناهی خواهد بود.

اثبات. با یادآوری اینکه $\Gamma(0)=\infty$ از معادله (۲.۵) نتیجه می‌شود[۱]:

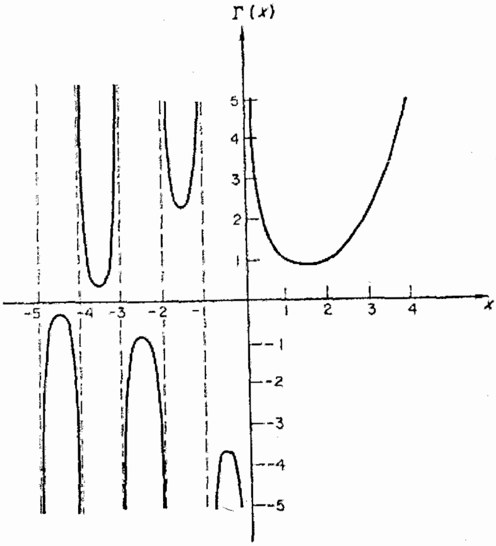
$$\Gamma(-1)=\frac{1}{-1}\Gamma(0)=\infty$$

و

$$\Gamma(-2)=\frac{1}{-2}\Gamma(-1)=\infty$$

و غیره.

اکنون می‌توان گراف تابع $\Gamma(x)$ را رسم نمود.با استفاده از اطلاعاتی که از قضیه‌های مختلف این قسمت به دست آورده‌ایم، به نمودار تابع $\Gamma(x)$ به صورتی که در شکل ۲.۲ نمایش داده شده است، دست خواهیم یافت.



شکل ۲.۲ تابع گاما

۱. تابع $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ برای مقادیر $x>0$ تعریف شده است، بعلاوه $\lim_{x\to 0^+}\Gamma(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to 0^-}\Gamma(x)=-\infty$ ، و از معادله (۲.۵) عملاً نتیجه می‌شود $\lim_{x\to -1^+}\Gamma(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to -1^-}\Gamma(x)=+\infty$؛ $\lim_{x\to -2^+}\Gamma(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to -2^-}\Gamma(x)=-\infty$ ، و غیره. تابع گاما در نقاط $x=0$، $x=-1$، $x=-2$، ... تعریف نشده است، و بهتر بود مؤلف کتاب ثابت می‌کرد حدود $\lim_{x\to -m^+}\Gamma(x)$ و $\lim_{x\to -m^-}\Gamma(x)$ نامتناهی هستند. مترجم.

قضیهٔ ۲.۱۲. برای هر عدد غیرصحیح x، داریم:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

اثبات. [۱] قضیه فوق را در سه گام ثابت خواهیم کرد:

(i) ثابت می‌کنیم که $\sin\theta$ را می‌توان به صورت حاصلضرب نامتناهی زیر نوشت:

$$\sin\theta = \prod_{n=1}^{\infty}\{1-(\theta^2/n^2\pi^2)\};$$

(ii) نشان می‌دهیم که از تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\theta-n\pi}$$

(iii) با استفاده از نتیجه (ii) قضیه ۲.۱۲ را ثابت می‌کنیم.

(i) می‌دانیم که:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) \tag{۲.۶}$$

و بنابراین، با به کار بردن نتیجه فوق برای هر دو فاکتور سمت راست تساوی (۲.۶) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\sin\theta &= 2\left\{2\sin\frac{\theta}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{4}\right)\right\}\left\{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{4}\right)\right\}\\ &= 2^3\sin\frac{\theta}{2^2}\sin\frac{\pi+\theta}{2^2}\sin\frac{2\pi+\theta}{2^2}\sin\frac{3\pi+\theta}{2^2}\end{aligned} \tag{۲.۷}$$

به خواننده واگذار می‌کنیم، که ثابت کند، با به کارگیری نتیجه (۲.۶) برای هر یک از چهار عامل سمت راست تساوی (۲.۷)، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\sin\theta = 2^7\sin\frac{\theta}{2^3}\sin\frac{\pi+\theta}{2^3}\sin\frac{2\pi+\theta}{2^3}\sin\frac{3\pi+\theta}{2^3}\sin\frac{4\pi+\theta}{2^3}\\ \sin\frac{5\pi+\theta}{2^3}\sin\frac{6\pi+\theta}{2^3}\sin\frac{7\pi+\theta}{2^3}\end{aligned} \tag{۲.۸}$$

اگر این پروسه تواماً nبار انجام شود، به تساوی:

$$\sin\theta = 2^{p-1}\sin\frac{\theta}{p}\sin\frac{\pi+\theta}{p}\sin\frac{2\pi+\theta}{p}\dots\sin\frac{(p-1)\pi+\theta}{p} \tag{۲.۹}$$

---

۱. اثبات این قضیه را می‌توان در اولین دور مطالعه حذف نمود، و به جای آن، از قسمتهای (i) و (ii) که اتحادهای استاندارد مثلثاتی هستند، برای اثبات قسمت (iii) استفاده نمود.

خواهیم رسید، که در آن $p = 2^n$ است.

شکل تساوی فوق به عنوان تعمیمی از تساویهای (۲.۶) و (۲.۷) و (۲.۸) توجیه‌پذیر است، اما، در صورت تمایل می‌توانید آن را با روش استقراء ریاضی ثابت کنید.[۱]

آخرین عامل تساوی (۲.۹) برابر است با:

$$\sin\frac{(p-1)\pi+\theta}{p} = \sin\left\{\pi - \frac{(\pi-\theta)}{p}\right\} = \sin\left(\frac{\pi-\theta}{p}\right)$$

به طریق مشابه دومین عامل تساوی (۲.۹) از آخر مساوی است با:

$$\sin\frac{(p-2)\pi+\theta}{p} = \sin\left\{\pi - \frac{(2\pi-\theta)}{p}\right\} = \sin\left(\frac{2\pi-\theta}{p}\right)$$

و در حالت کلی r امین عامل از آخر برابر خواهد با:

$$\sin(\frac{r\pi-\theta}{p})$$

اکنون با دسته‌بندی مجدد عوامل ظاهر شده در تساوی (۲.۹) و با کنار هم قرار دادن دومین عامل و آخرین عامل، سومین عامل و دومین عامل از آخر، و غیره، تساوی (۲.۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin\theta = 2^{p-1}\sin\frac{\theta}{p}\left\{\sin\frac{\pi+\theta}{p}\sin\frac{\pi-\theta}{p}\right\}\left\{\sin\frac{2\pi+\theta}{p}\sin\frac{2\pi-\theta}{p}\right\}\cdots$$
$$\left\{\sin\frac{(2^{-1}p-1)\pi+\theta}{p}\sin\frac{(2^{-1}p-1)\pi-\theta}{p}\right\}\sin\frac{2^{-1}p\pi+\theta}{p} \qquad (۲.۱۰)$$

عوامل داخل هر یک از آکولادها به فرم:

$$\sin(A+B)\sin(A-B) = \frac{1}{2}(\cos 2B - \cos 2A) = \sin^2 A - \sin^2 B$$

می‌باشد، و بنابراین، تساوی (۲.۱۰) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin\theta = 2^{p-1}\sin\frac{\theta}{p}\left\{\sin^2\frac{\pi}{p} - \sin^2\frac{\theta}{p}\right\}\left\{\sin^2\frac{2\pi}{p} - \sin^2\frac{\theta}{p}\right\}\cdots$$
$$\left\{\sin^2\frac{(2^{-1}p-1)\pi}{p} - \sin^2\frac{\theta}{p}\right\}\cos\frac{\theta}{p} \qquad (۲.۱۱)$$

---

۱. برای اثبات دقیق‌تر مطلب فوق، وقتی $p = 2^n$ باشد، بهتر است از استقراء ریاضی استفاده شود، اما، وقتی p یک عدد صحیح مثبت دلخواه باشد، نیز، با استفاده از خواص اعداد مختلط، می‌توان ثابت کرد که تساوی (۲.۹) برقرار است. مترجم.

با تقسیم طرفین تساوی فوق بر $\sin(\theta/p)$ و با میل دادن θ به سمت صفر، و با یادآوری رابطه حدی $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$، خواهیم داشت:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\sin(\theta/p)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\theta/p}{\sin(\theta/p)}\cdot p=p$$

از رابطه فوق با توجه با رابطه (۲.۱۱) به دست می‌آید:

$$p=2^{p-1}\sin^2\frac{\pi}{p}\sin^2\frac{2\pi}{p}\dots\sin^2\frac{(2^{-1}p-1)\pi}{p} \tag{۲.۱۲}$$

حال، اگر تساوی (۲.۱۱) را بر تساوی (۲.۱۲) تقسیم کنیم، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\sin\theta}{p}=\sin\frac{\theta}{p}\left\{1-\frac{\sin^2(\theta/p)}{\sin^2(\pi/p)}\right\}\left\{1-\frac{\sin^2(\theta/p)}{\sin^2(2\pi/p)}\right\}\dots$$
$$\left\{1-\frac{\sin^2(\theta/p)}{\sin^2\frac{(2^{-1}p-1)\pi}{p}}\right\}\cos\frac{\theta}{p} \tag{۲.۱۳}$$

اکنون فرض کنیم $p\to\infty$. در این صورت، با توجه به سه نتیجه:

$$(a)\qquad \lim_{p\to\infty}p\sin\frac{\theta}{p}=\lim_{p\to\infty}\frac{\sin(\theta/p)}{\theta/p}\cdot\theta=\theta$$

$$(b)\qquad \lim_{p\to\infty}\frac{\sin^2(\theta/p)}{\sin^2(r\pi/p)}=$$
$$\lim_{p\to\infty}\left\{\frac{\sin(\theta/p)}{\theta/p}\right\}^2\left(\frac{\theta}{p}\right)^2\left\{\frac{r\pi/p}{\sin(r\pi/p)}\right\}^2\frac{1}{(r\pi/p)^2}$$
$$=\frac{\theta^2}{r^2\pi^2}$$

$$(c)\qquad \lim_{p\to\infty}\cos\frac{\theta}{p}=1$$

تساوی (۲.۱۳) به صورت زیر درمی‌آید[۱]:

$$\sin\theta=\theta\left(1-\frac{\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{3^2\pi^2}\right)\dots$$

۱. مؤلف کتاب به این نکته توجه نکرده است که هر یک از عوامل حاصلضرب ظاهر شده در تساوی (۲.۱۳) به p وابسته بوده، علاوه بر این، تعداد عوامل ضرب نیز به p وابسته است، و انتقال حد به عوامل ضرب نیاز به شرایطی خاص دارد، که مؤلف کتاب کمترین اشاره‌ای به آنها نکرده است، و با استدلالی غیردقیق و با روشی مکانیکی به نتیجه‌ای رسیده است که شاید برای برخی از دانشجویان تیزبین چندان قابل قبول نباشد. خواننده‌ای که مایل به دیدن اثباتهایی دقیقتر از مطلب فوق باشد، می‌تواند به کتاب: استدلالهای نادرست ریاضی، مطالب نادرست بدون اثبات، و اشتباه‌های چاپی و غیرچاپی در برخی از کتابهای ریاضی دانشگاهی ایران، تالیف: محمدعلی غیرتمند مراجعه نماید. مترجم.

$$= \theta \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\theta^2}{n^2\pi^2}\right)$$

(ii) به سادگی می‌توان نشان داد که[۱]:

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{d}{d\theta} \ln \tan \frac{\theta}{2}$$

بنابراین:

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{d}{d\theta} \ln \frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2} = \frac{d}{d\theta} \frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}$$

$$= \frac{d}{d\theta} \ln \frac{2\sin^2(\theta/2)}{\sin\theta} = \frac{d}{d\theta} \{\ln 2 + \ln\sin^2(\theta/2) - \ln\sin\theta\}$$

$$= \frac{d}{d\theta} \{2\ln\sin(\theta/2) - \ln\sin\theta\}$$

$$= \frac{d}{d\theta} \left\{2\ln \prod_{n=1}^{\infty} \theta \left(1 - \frac{\theta^2}{4\pi^2\pi^2}\right) - \ln \prod_{n=1}^{\infty} \theta \left(1 - \frac{\theta^2}{n^2\pi^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{d}{d\theta} \left\{2\ln\theta + 2\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{\theta}{2n\pi}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\theta}{2n\pi}\right) - \ln\theta \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{\theta}{n\pi}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\theta}{n\pi}\right)\right\}$$

$$= \frac{d}{d\theta} \left\{\ln\theta + 2\sum_{n=1}^{\infty} \ln(2n\pi - \theta) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \ln(2n\pi + \theta) \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n\pi - \theta) - \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n\pi + \theta)\right\}$$

$$= \frac{1}{\theta} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n\pi - \theta} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi + \theta} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n\pi - \theta} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi + \theta}$$

$$= \frac{1}{\theta} + \left\{2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\theta - 2n\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\theta - n\pi}\right\} + \left\{2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\theta + 2n\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\theta + n\pi}\right\}$$

۱. مؤلف به حوزه اعتبار تساوی $\frac{d}{d\theta}\ln\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sin\theta}$ که لازم بوده است برای مقادیر $\theta \neq k\pi$ $(k \in Z)$ به صورت $\frac{d}{d\theta}\ln|\tan\frac{\theta}{2}| = \frac{1}{\sin\theta}$ نوشته شود، توجه ننموده، و در ادامه اثبات مکانیکی و غیر دقیق خود، بدون توجه به دامنه تعریف توابع درگیر، واگرائی سری‌های ظاهر شده، و ... از استدلال‌های نادرستی استفاده نموده است که خواننده موشکاف کتاب می‌تواند دلیل نادرست بودن آن‌ها را درکتابی که در پاورقی صفحه قبل به آن اشاره‌شده است، مورد مطالعه قرار دهد. مترجم.

$$= \frac{1}{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\theta - n\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\theta + n\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\theta - n\pi} \quad *$$

(iii) نخست فرض کنیم که $0 < x < 1$ باشد. در این صورت، طبق قضیه ۲.۷ و تعریف ۲.۲ می‌توان نوشت:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = B(x, 1-x)\Gamma(x+1-x) = B(x, 1-x)$$
$$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x} dt$$

حال، با تغییر متغیر $t = 1/(1+u)$، خواهیم داشت:

$$dt = -\frac{du}{(1+u)^2} \text{و} \quad u = \frac{1-t}{t}$$

همچنین، حدود $t = 0$ و $t = 1$ به $u = \infty$ و $u = 0$ تبدیل می‌شوند. بنابراین:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_{\infty}^{0} \frac{1}{(1+u)^{x-1}} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{-x} \left(-\frac{1}{(1+u)^2} du\right)$$
$$= \int_0^{\infty} \frac{u^{-x}}{1+u} du = \int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u} du + \int_1^{\infty} \frac{u^{-x}}{1+u} du$$

در دومین انتگرال با تغییر متغیر $u = \frac{1}{v}$ خواهیم داشت $du = \left(-\frac{1}{v^2}\right) dv$، همچنین، حدود $u = 1$ و $u = \infty$ به حدود$v = 1$ و$v = 0$ تبدیل خواهند شد. بنابراین:

$$\int_1^{\infty} \frac{u^{-x}}{1+u} du = \int_1^0 \frac{v^x}{1+(1/v)} \left(-\frac{1}{v^2} dv\right)$$
$$= \int_0^1 \frac{v^{x-1}}{1+v} dv = \int_0^1 \frac{u^{x-1}}{1+u} du$$

در نتیجه، از معادله (۲.۱۴) به دست می‌آید:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^1 \frac{u^{-x} + u^{x-1}}{1+u} du = \int_0^1 \left\{ (u^{-x} + u^{x-1}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n \right\} du$$

---

*) چنانکه اشاره شد، با توجه به واگرائی سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{\theta}{2n\pi}\right)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\theta}{2n\pi}\right)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(2n\pi - \theta)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(2n\pi + \theta)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi - \theta}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi + \theta}$ اثبات مؤلف کتاب حاوی برخی اشکالات منطقی است و بدون برخی از محاسبات زائدی که مؤلف کتاب انجام داده است، می‌توان به نتیجه $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\theta - n\pi} = \frac{1}{\sin\theta}$ رسید. مترجم.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 (u^{n-x}+u^{n+x-1})du \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{1}{n-x+1}u^{n-x+1}+\frac{1}{n+x}u^{n+x}\right]_{u=0}^{1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left\{\frac{1}{n-x+1}+\frac{1}{n+x}\right\}
\end{aligned}
$$

و از رابطه فوق با توجه به اینکه $0 < x < 1$ است، و نیز، با توجه به قسمت (ii) اثبات، به دست می‌آید:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi}{(x\pi)-(n\pi)} = \frac{\pi}{\sin\pi x}$$

حال، قید $0 < x < 1$ را حذف می‌کنیم. فرض کنیم $x = y + N$، که در آن N عددی صحیح و $0 < y < 1$ است[۱]. در این صورت، با استفاده مکرر از رابطه $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$، و با استفاده از نتیجه‌ای که برای $0 < y < 1$ به دست آوردیم، می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \Gamma(N+y)\Gamma(1-y-N) \\
&= (N+y-1)(N+y-2)\dots y\Gamma(y)\frac{1}{1-y-N}\cdot\frac{1}{2-y-N}\dots\frac{1}{y}\Gamma(1-y) \\
&= (-1)^N\Gamma(y)\Gamma(1-y) = (-1)^N\frac{\pi}{\sin\pi y} = \frac{\pi}{\sin(N\pi+\pi y)} = \frac{\pi}{\sin\pi x}
\end{aligned}
$$

و نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۲.۴ مثالها

مثال ۱ . هریک از انتگرالهای زیر را برحسب عبارتهایی از توابع گاما و بتا نوشته، آنها را تا آنجا که ممکن است ساده کنید.

$$(i)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta \qquad (ii)\quad \int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$$

$$(iii)\quad \int_0^{\infty} t^{-\frac{3}{2}}(1-e^{-t})dt \qquad (iv)\quad \int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}dx$$

حل. (i) از قضیه (۲.۵) استفاده نموده، با نوشتن $\sqrt{\tan\theta}$ به فرم:

$$\sqrt{\tan\theta} = \sin^{1/2}\theta\cos^{-\frac{1}{2}}\theta$$

۱. در واقع، فرض شده است $N = [x]$ و $y = x - [x]$. مترجم.

و با انتخاب $2x-1=-\frac{1}{2}$ و $2y-1=\frac{1}{2}$، و یا $x=\frac{1}{4}$ و $y=\frac{3}{4}$، خواهیم داشت:

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta=\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{2\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})}$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$ (طبق قضیه ۲.۱)

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/4)}$$ (طبق قضیه ۲.۱۲)

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{1/\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(ii) $$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\int_0^1(1-x^3)^{-1/3}dx$$

با تغییر متغیر[۱] $t=x^3$، حدود $x=0$ و $x=1$، به $t=0$ و $t=1$ تبدیل می‌شوند، همچنین $dt=3x^2dx$، و یا $dx=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$. بنابراین:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\int_0^1(1-t)^{-1/3}\frac{1}{3}t^{-2/3}dt$$

$$=\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

(طبق تعریف ۲.۲)

$$=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

(طبق قضیه‌های ۲.۷ و ۲.۸)

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{(\sqrt{3}/2)}$$ (طبق قضیه ۲.۱۲)

$$=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

(iii) برای محاسبه انتگرال:

$$\int_0^\infty t^{-3/2}(1-e^{-t})dt$$

۱. بهتر بود نوشته می‌شد $x=\sqrt[3]{t}$، تا در مطالب بعدی ابهام ایجاد نشود. مترجم.

ابتدا از انتگرالگیری جزءبه‌جزء استفاده می‌کنیم، زیرا، نمی‌توانیم مستقیماً رابطه‌ای بین انتگرال فوق و تابع گاما برقرار نمائیم. داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{-3/2}(1-e^{-t})dt &= \Big[-2t^{-1/2}(1-e^{-t})\Big]_0^\infty - \int_0^\infty -2t^{-1/2}e^{-t}dt\\ &= 0+2\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt \qquad (*)\\ &= 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(طبق تعریف (۲.۱))}\\ &= 2\sqrt{\pi} \qquad \text{(طبق قضیه ۲.۶)}\end{aligned}$$

(iv) برای اینکه انتگرال:

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}dx$$

به فرمی شبیه تابع بتا درآوریم، لازم است که حدود پایین و بالای انتگرال به ۰ و ۱ تبدیل شوند. انجام این کار با تغییر متغیر $t=\frac{1}{2}(1+x)$، و یا $x=2t-1$ امکان‌پذیر است. با این تغییر متغیر به دست می‌آید $dx=2dt$ و

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}dx &= \int_0^1\left(\frac{1+2t-1}{1-2t+1}\right)^{1/2}2dt\\ &= 2\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{1/2}\mathrm{dt}\\ &= 2\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{-1/2}dt\\ &= 2B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(طبق تعریف (۲.۲))}\\ &= 2\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} \qquad \text{(طبق قضیه ۲.۷)}\end{aligned}$$

---

*) محاسبه حد $t^{-1/2}(1-e^{-t})$ در نقطه $t=0$ نیاز به شرح برخی مطالب دارد. یادآوری می‌کنیم که، طبق قاعده هوپیتال، اگر $f(a)=g(a)=0$ آنگاه به شرط اینکه $f'(a)$ و $g'(a)$ هر دو با هم صفر (یا نامتناهی) نباشند، $\lim_{t\to a}\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$. در نتیجه:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{t}}{t^{1/2}}=\frac{[e^{-t}]_{t=0}}{[\frac{1}{2}t^{-1/2}]_{t=0}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$= 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{1!}$$ (طبق قضیه‌های ۲.۲ و ۲.۳)

$$= \pi$$ (طبق قضیه ۲.۶)

مثال ۲ . نشان دهید که $B(n, n+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\{\Gamma(n)\}^2}{\Gamma(2n)}$ و نتیجه بگیرید که:

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^3\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)^{1/4} \cos\theta d\theta = \frac{\left\{\Gamma(\frac{1}{4})\right\}^2}{2\sqrt{\pi}}$$

حل. داریم:

$$B(n, n+1) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)}$$

(طبق قضیه ۷.۲)

$$= \frac{\Gamma(n)n\Gamma(n)}{2n\Gamma(2n)}$$

(طبق قضیه ۲.۲)

$$= \frac{\{\Gamma(n)\}^2}{2\Gamma(2n)}.$$

با قرار دادن $n = \frac{1}{4}$ به دست می‌آید:

$$B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\left\{\Gamma(\frac{1}{4})\right\}}{2\Gamma(\frac{1}{2})}$$

از رابطه فوق با استفاده از تعریف (۲.۲) و قضیه ۲.۶ نتیجه می‌شود:

$$\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{1/4} dt = \frac{\left\{\Gamma(\frac{1}{4})\right\}^2}{2\sqrt{\pi}}$$

با تغییر متغیر $t = \sin\theta$ در انتگرال سمت چپ، حدود پایین و بالای ۰ و ۱ به ۰ و $\frac{\pi}{2}$ تبدیل می‌شوند، همچنین، با توجه به رابطه $dt = \cos\theta d\theta$، خواهیم داشت:

$$\int_0^1 t^{-3/4}(1-t)^{1/4} dt = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{-3/4}(1-\sin\theta)^{1/4} \cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\sin\theta}{\sin^3\theta}\right)^{1/4} \cos\theta d\theta$$
$$= \int_)^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^3\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)^{1/4} \cos\theta d\theta$$

و با این رابطه نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

مسائل

(۱). ثابت کنید که:

$$\text{(i)} \quad \int_0^\infty e^{-ax}x^n dx = \frac{1}{a^n+1}\Gamma(n+1) \qquad (n > -1, a > 0);$$
$$\text{(ii)} \quad \int_0^\infty x^m e^{-x^n} dx = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \qquad (m > -1, n > 0);$$
$$\text{(iii)} \quad \int_0^\infty \exp(2ax - x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\exp(a^2).$$

(۲). ثابت کنید که، اگر $|n| < 1$ باشد، آنگاه:

$$\int_0^{\pi/2} \tan^n\theta d\theta = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{n}\right).$$

(۳). ثابت کنید که:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^n\theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\{(1+n)/2\}}{\Gamma\{(2+n)/2\}}.$$

(۴). انتگرالهای زیر را برحسب عبارتهایی از توابع گاما یا بتا تعریف نموده، و آنها را در صورت امکان ساده کنید:

$$\text{(i)} \quad \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{1/4} dx;$$
$$\text{(ii)} \quad \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{a-1} dx \qquad (a > 0);$$
$$\text{(iii)} \quad \int_a^b (b-x)^{m-1}(x-a)^{n-1} dx \qquad (b > a, m > 0, n > 0);$$
$$\text{(iv)} \quad \int_0^1 x^m(1-x^n)^p dx \qquad (m > -1, p > -1, n > 0);$$
$$\text{(v)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \quad (n > 0);$$
$$\text{(vi)} \quad \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}.$$

(۵). نشان دهید که، سطح محصور شده به وسیله منحنی $x^4 + y^4 = 1$ برابر $\{\Gamma(\frac{1}{4})\}^2/2\sqrt{\pi}$ است.

(۶). مقادیر $\Gamma(-\frac{1}{2})$ و $\Gamma(-\frac{7}{2})$ را محاسبه نمائید.

(۷). نشان دهید که:

$$(i) \qquad \Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{-\pi}{x\sin\pi x};$$

$$(ii) \qquad \Gamma(\frac{1}{2}+x)\Gamma(\frac{1}{2}-x) = \frac{\pi}{\cos\pi x}.$$

فصل ۳

چندجمله‌ایهای لژاندر و توابع لژاندر

۳.۱ معادله لژاندر و جوابهای آن

معادله:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + ky = 0 \qquad (۳.۱)$$

را معادله لژاندر می‌نامند.

به دلائلی که بعداً روشن خواهد شد، k را به صورت $l(l+1)$ می‌نویسیم.

معادله:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0 \qquad (۳.۲)$$

معادله‌ای از نوع (۱.۲) با $q(x) = -2x^2/(1-x^2)$ و $r(x) = \{l(l+1)x^2\}/(1-x^2)$ است. قضیه بینم این امکان را فراهم می‌نماید که $q(x)$ و $r(x)$ را در فاصله $(-1,1)$ به سری توانی بسط دهیم. بنابراین، روش به‌کارگرفته شده در فصل ۱ برای پیداکردن جوابهای این معادله قابل استفاده است، و سریهایی که به عنوان جوابهای این معادله به دست می‌آیند. حداقل برای مقادیر $-1 < x < 1$ همگرا هستند.

قرار می‌دهیم $z(x,s) = x^s \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، در این صورت، طبق مطالب فصل ۱، برای اینکه z جوابی از معادله (۲.۳) باشد، باید داشته باشیم:

$$a_0 s(s-1) = 0, \qquad (۳.۳)$$

$$a_1(s+1)s = 0 \qquad (۳.۴)$$

و

$$a_{n+2}(s+n+2) - a_n\{(s+n)(s+n+1) - l(l+1)\} = 0 \quad (n \geq 0) \qquad (۳.۵)$$

از معادله (۳.۳) معادله شاخص $s(s-1)=0$ با ریشه‌های $s=0$ و $s=1$ نتیجه می‌شود، که تفاضل آنها عددی صحیح است. بنابراین، با حالتی استثنایی سروکار داریم.

معادله (۳.۴) به ازاء $s=0$ برقرار است، بدون توجه به اینکه مقدار a_1 چقدر باشد. مطلب فوق به این معنی است، که a_1 مبهم است، و در نتیجه، یکی از ریشه‌های معادله شاخص $(s=0)$ منجر به دو جواب مستقل از معادله با ثابتهای دلخواه a_0 و a_1 می‌شود.

از معادله (۳.۵) با $s=0$ نتیجه می‌شود:

$$a_{n+2}=a_n\frac{n(n+1)-l(l+1)}{(n+1)(n+2)} \tag{۳.۶}$$

معادله برگشتی فوق را با توجه به رابطه:

$$\begin{aligned}n(n+1)-l(l+1)&=n^2+n-l^2-l=(n^2-l^2)+(n-l)\\&=(n-l)(n+l)+(n-l)=(n-l)(n+l+1)\end{aligned}$$

می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a_{n+2}=-a_n\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)} \tag{۳.۷}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}a_2&=-a_0\frac{l(l+1)}{1\cdot 2}, & a_3&=-a_1\frac{(l-1)(l+2)}{2\cdot 3}\\ a_4&=-a_2\frac{(l-2)(l+3)}{3\cdot 4} & a_5&=-a_3\frac{(l-3)(l+4)}{4\cdot 5}\\ &=a_0\frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} & &=a_1\frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\end{aligned}$$

و در حالت کلی:

$$a_{2n}=(-1)^n a_0\frac{l(l-2)(l-4)\dots(l-2n+2)(l+1)(l+3)\dots(l+2n-1)}{(2n)!} \tag{۳.۸}$$

و

$$a_{2n+1}=(-1)^n a_1\frac{(l-1)(l-3)\dots(l-2n+1)(l+2)(l+4)\dots(l+2n)}{(2n+1)!} \tag{۳.۹}$$

در نتیجه:

$$z(x,0)=a_0\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{l(l-2)\dots(l-2n+2)(l+1)(l+3)\dots(l+2n-1)}{(2n)!}x^n\right\}$$
$$+a_1\left\{x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(l-1)(l-3)\dots(l-2n+1)(l+2)(l+4)\dots(l+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right\}$$
$$=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$$

که در آن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ عبارتهای داخل اولین و دومین آکولاد جوابهای مستقل معادله دیفرانسیل (۳.۲) هستند.

اکنون می‌دانیم که، $y_1(x)$ و $y_2(x)$ در فاصله (۱و۱-) همگرا هستند. برای بسیاری از کاربردها، جوابهایی از معادله لژاندر مورد نیاز هستند، که روی فاصله $[-1,1]$ تعریف شده باشند. قضیه ذکر شده در انتهای بخش ۱.۱ تنها همگرایی جواب را روی فاصله (۱و۱-) تضمین می‌کند، و اصلاً چیزی در باره همگرایی آن در نقاط $x=\pm1$ نمی‌گوید.در واقع، با استفاده از روشهای معمول نظریهٔ همگرایی می‌توان نشان داد که سریهای فوق در نقاط $x=\pm1$ واگرا هستند* (ضمیمه ۱ را ببینید). در این صورت، چگونه ممکن است به جوابهایی دست یافت که در نقاط $x=\pm1$ متناهی باشند؟ تنها راه ممکن این است که سری نامتناهی به سری متناهی تبدیل شود، و این تنها وقتی اتفاق می‌افتد، که l یک عدد صحیح مثبت باشد. زیرا، از معادله (۳.۸) دیده می‌شود که، اگر $l=2n$ یک عدد زوج مثبت باشد، آنگاه $a_{2n}\neq 0$ ولی $a_{2n+2}=0$، و در نتیجه، کلیه ضرایب زوج بعدی نیز باید برابر صفر باشند. به طریق مشابه، اگر در معادله (۳.۹)، $l=2n+1$ یک عدد فرد مثبت باشد، آنگاه $a_{2n+1}\neq 0$، اما a_{2n+3} و همه ضرایب بعدی برابر صفر خواهند شد. بنابراین، دیده می‌شود که، اگر l یک عدد زوج مثبت باشد، $y_1(x)$ به یک چندجمله‌ای تبدیل می‌شود، و در نتیجه، برای همه مقادیر x، متناهی است، حال آن که، اگر l یک عدد مثبت فرد باشد، $y_2(x)$ به یک چندجمله‌ای تبدیل می‌شود** در هر دو حالت بزرگترین توانی از x که ظاهر می‌شود، x^l است، بنابراین، چون از معادله (۳.۷) برای سریهایی هم مربوط به $y_1(x)$ و هم مربوط به $y_2(x)$ استفاده شده است، می‌توان سری واحدی برحسب قوای نزولی x به دست آورد، که هم برای حالت زوج n معتبر باشد، و هم برای حالت فرد n. اولین جمله این سری a_lx^l است، و جملات بعدی از معادله (۳.۷) که می‌توان آن را

*) البته، چنانکه در ادامه بحث نیز روشن شده است، اگر l یک عدد صحیح مثبت نباشد. مترجم.

**) وقتی مقادیر صحیح l را مورد بررسی قرار می‌دهیم، تنها لازم است که مقادیر مثبت l را مورد مطالعه قرار دهیم، زیرا، ثابت ظاهر شده در معادله لژاندر برابر $l(l+1)$ است، و اگر l یک عدد صحیح منفی باشد، می‌توانیم بنویسیم $m=-(l+1)$ و به سادگی می‌توان از این واقعیت که $m(m+1)=l(l+1)$ است، استفاده نمود. این ورود در مقادیر صحیح l، البته، دلیلی است بر اینکه k به فرم $l(l+l)$ نوشته شود.

به‌صورت زیر نوشت، به دست می‌آیند:

$$a_n = -a_{n+2}\frac{(n+2)(n+1)}{(l-n)(l+n+1)} \qquad (۳.۱۰)$$

بنابراین:

$$a_{l-2} = -a_l\frac{l(l-1)}{2(2(l-1)}$$
$$a_{l-4} = -a_{l-2}\frac{(l-2)(l-3)}{4(2l-3)} = a_l\frac{(l-1)(l-2)(l-3)}{2\cdot 4(2l-1)(2l-3)}$$

و به‌طور کلی:

$$a_{l-2r} = (-1)^r a_l\frac{l(l-1)(l-2)\dots(l-2r+1)}{2\cdot 4\dots 2r(2l-1)(2l-3)\dots(2l-2r+1)} \qquad (۳.۱۱)$$

به این ترتیب، وقتی l عددی زوج باشد، $y_1(x)$ به عبارت زیر تبدیل می‌شود، حال آنکه، وقتی l فرد باشد، $y_2(x)$ به عبارتی مشابه تبدیل می‌شود:

$$y(x) = a_l x^l + a_{l-2}x^{l-2} + a_{l-4}x^{l-4} + \dots + \begin{cases} a_0 \text{،اگر } l \text{ عددی زوج باشد} \\ a_1 x \text{،اگر } l \text{ عددی فرد باشد} \end{cases}$$

و یا:

$$y(x) = \sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}l]} a_{l-2r}x^{l-2r}$$

که در آن:

$$[\frac{1}{2}\ l] = \begin{cases} \frac{1}{2}l & \text{اگر } l \text{ زوج باشد،} \\ \frac{1}{2}(l-1) & \text{اگر } l \text{ فرد باشد،} \end{cases} \qquad (۳.۱۲)$$

به عبارت دیگر، $[\frac{1}{2}\ l]$ بزرگترین عدد صحیحی است که کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{2}l$ است. با جایگذاری مقادیر a_{l-2r} از رابطه (۳.۱۱) در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$y(x) = a_i\sum_{r=0}^{[1/2]}(-1)^r\frac{l(l-1)\dots(l-2r+1)}{2\cdot 4\dots(2r)(2l-1)(2l-3)\dots(2l-2r+1)}x^{l-2r} \qquad (۳.۱۳)$$

با توجه به تساوی‌های:

$$l(l-1)\ldots(l-2r+1) = l(l-1)\ldots(l-2r+1)\frac{(l-2r)(l-2r-1)\ldots3\cdot2\cdot1}{(l-2r)(l-2r-1)\ldots3\cdot2\cdot1}$$
$$= \frac{l!}{(l-2r)!} \qquad (۳.۱۴)$$

$$2\cdot4\cdot6\ldots(2r) = (2\cdot1)(2\cdot2)(2\cdot3)\ldots(2\cdot r)$$
$$= 2^r\cdot1\cdot2\cdot3\ldots r = 2^r r! \qquad (۳.۱۵)$$

و

$$(2l-1)(2l-3)\ldots(2l-2r+1)$$
$$= \frac{2l(2l-1)(2l-2)(2l-3)\ldots(2l-2r+1)}{2l(2l-2)(2l-4)\ldots(2l-2r+2)}\cdot\frac{(2l-2r)!}{(2l-2r)!}$$
$$= \frac{(2l)!}{2^r l(l-1)\ldots(l-r+1)(2l-2r)!}$$
$$= \frac{(2l)!(l-r)!}{2^r(2l-2r)!l!} \qquad (۳.۱۶)$$

می‌توان سری (۳.۱۳) را به شکل به مراتب فشرده‌تری بازنویسی نمود.

با به‌کارگیری معادلات (۳.۱۴)، (۳.۱۵) و (۳.۱۶) در معادله (۳.۱۳) به‌دست می‌آید:

$$y_(x) = a_l\sum_{r=0}^{[l/2]}(-1)^r\frac{l!}{(l-2r)!}\cdot\frac{1}{2^r r!}\cdot\frac{2^r(2l-2r)!l!}{(2l)!(l-4)!}x^{l-2r}$$
$$= a_l\sum_{r=0}^{[1/2]}(-1)^r\frac{(l!)^2(2l-2r)!}{r!(l-2r)!(l-r)!(2l)!}x^{l-2r}$$

این جوابی از معادله برای هر مقدار دلخواه از a_l است. با انتخاب $a_l = \dfrac{(2l)!}{2^l(l!)^2}$ جوابی از معادله به‌دست خواهد آمد، که به‌علامت $P_l(x)$ نشان داده می‌شود، و آن را چندجمله‌ای لژاندر مرتبه l می‌نامند:

$$P_l(x) = \sum_{r=0}^{[l/2]}(-1)^r\frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r} \qquad (۳.۱۷)$$

بنابراین، این جوابی از معادله لژاندر است، که روی فاصله $[-1,1]$ متناهی است، و صرفنظر از یک ضریب ثابت دلخواه، تنها جوابی است که دارای این خاصیت است.

۳.۲ تابع مولد برای چندجمله‌ایهای لژاندر

قضیهٔ ۳.۱. اگر $|t| < 1$ و $|x| \leq 1$ باشد، آنگاه:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$$

رابطه فوق به این معنی است که، وقتی $(1-2tx+t^2)^{-1/2}$ به سری توانی نسبت به t بسط داده شود، ضریب t^l برابر $P_l(x)$ خواهد بود. $(1-2tx+t^2)^{-1/2}$ را تابع مولد چندجمله‌ایهای لژاندار می‌نامند.

اثبات. با استفاده از قضیه دوجمله‌ای عبارت $(1-2tx+t^2)^{-1/2}$ را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
(1-2tx+t^2)^{-1/2} &= \{1-t(2x-t)\}^{-1/2} \\
&= 1 + (-\frac{1}{2})\{-t(2x-t)\} + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\{-t(2x-t)\}^2 \\
&+ \ldots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots\{-(2r-1)/2\}}{r!}\{-t(2x-t)\}^r + \ldots \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2r-1)}{2^r r!}(-1)^r t^r (2x-t)^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} t^r (2x-t)^r.
\end{aligned}$$

اکنون $(2x-t)^r$ را با استفاده از قضیه دوجمله‌ای بسط می‌دهیم. با یادآوری اینکه r عددی صحیح و غیرمنفی است، می‌توان نوشت:

$$(2x-t)^r = \sum_{p=0}^{r} C_r^p (2x)^{r-p}(-t)^p$$

که در آن $C_r^p = \dfrac{r!}{p!(r-p)!}$ها ضرایب دوجمله‌ای نیوتون می‌باشند.

از مطالب فوق نتیجه می‌شود:

$$(1-2tx+t^2)^{-1/2} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} \sum_{p=0}^{r} C_r^p (-1)^p t^{r+p}(2x)^{r-p}. \qquad (۳.۱۸)$$

ما می‌خواهیم ضریب t^l را پیدا کنیم، بنابراین، باید قرار دهیم $r+p=l$، و در نتیجه، برای یک مقدار ثابت r، باید p را به صورت $l-r$ بگیریم. اما، p تنها می‌تواند مقادیر $0 \leq p \leq r$ را

بگیرد، بنابراین، باید تنها مقادیری از r را مورد بررسی قرار دهیم، که در رابطه $0 \leq l-r \leq r$ و یا $\frac{1}{2}l \leq r \leq l$ صدق می‌کنند. در نتیجه، اگر l زوج باشد، r تنها می‌تواند مقادیر بین $\frac{1}{2}l$ و l بگیرد، حال آن که، اگر l فرد باشد، r می‌تواند تنها مقادیر بین $\frac{1}{2}(l+1)$ و l بگیرد. برای هر یک از چنین مقادیری از r ضریب t^l در معادله (۳.۱۸) که با قرار دادن $p = l - r$ به دست می‌آید، برابر است با:

$$\frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} C_r^{l-r}(-1)^{l-r}(2x)^{r-(l-r)}$$

و کل ضرایب t^l با جمع نمودن چنین جملاتی به ازاء مقادیر مناسبی از r به دست می‌آید، که به آنها اشاره شد. به این ترتیب:

$$t^l \text{ضریب} = \sum_{r=\begin{cases}\frac{l}{2} & (\text{زوج } l)\\ \frac{l+1}{2} & (\text{فرد } l)\end{cases}}^{l} \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} C_r^{l-r}(-1)^{l-r}(2x)^{2r-l}$$

حال، اگر متغیر جمعبندی را از r به $k = l - r$ تغییر دهیم، خواهیم داشت:

$$t^l \text{ضریب} = \sum_{k=\begin{cases}l/2 & (\text{زوج } l)\\ (l-1)/2 & (\text{فرد } l)\end{cases}}^{0} \frac{(2l-2k)!}{2^{21-2k}\{(1-k)!\}^2} C_{l-k}^k(-1)^k(2x)^{l-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(2l-2k)!}{2^{2l-2k}\{(l-k)!\}^2} \frac{(l-k)!}{(l-2k)!k!}(-1)^k 2^{l-2k} x^{l-2k}$$

(که در آن $[l/2]$ در رابطه (۳.۱۲) تعریف شده است).

$$= \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l (l-k)!(l-2k)!k!} x^{l-2k}$$

$$= P_l(x) \qquad \text{(طبق تعریف ۳.۱۷)}$$

و با این رابطه قضیه به طور کامل ثابت می‌شود.

محدودیت روی متغیر x از شرط همگرایی بسط دوجمله‌ای $\{1 - t(2x-t)\}^{-1/2}$، یعنی، $|t(2x-t)| < 1$، ناشی می‌شود. وقتی $|x| \leq 1$ باشد، می‌توان نشان داد که، شرط فوق هم‌ارز شرط $|t| < 1$ می‌باشد.

۳.۳ عبارتهایی بیشتر برای چندجمله‌ایهای لژاندر

قضیهٔ ۳.۲. (فرمول رودریگز) اگر l عددی طبیعی باشد، آنگاه:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

اثبات. عبارت $(x^2-1)^l$ را با استفاده از قضیه دوجمله‌ای بسط می‌دهیم:

$$(x^2-1)^l = \sum_{r=0}^{l} C_l^r (-1)^r x^{2(l-r)}$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\sum_{r=0}^{l} C_l^r (-1)^r x^{2l-2r} \tag{۳.۱۹}$$

اما، مشتق مرتبه lام توانی از x که کمتر از l است، برابر صفر می‌باشد، در نتیجه، اگر $2l-2r < l$، و یا اگر $r > l/2$ باشد، آنگاه $\frac{d^l}{dx^l}x^{2l-2r} = 0$، بنابراین، می‌توانیم $\sum_{r=0}^{l}$ را با $\sum_{r=0}^{l/2}$ وقتی l زوج باشد، و با $\sum_{r=0}^{(l-1)/2}$ وقتی l فرد باشد، و یا با $\sum_{r=0}^{[l/2]}$ در هر دو حالت عوض کنیم. همچنین:

$$\frac{d^l}{dx^l}x^p = p(p-1)(p-2)\dots(p-l+1)x^{p-l} = \frac{p!}{(p-l)!}x^{p-l}$$

بنابراین:

$$\frac{d^l}{dx^l}x^{2l-2r} = \frac{(2l-2r)!}{(l-2r)!}x^{l-2r}$$

و در نتیجه، با جایگذاری عبارتهای فوق در معادله (۳.۱۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l &= \frac{1}{2^l l!}\sum_{r=0}^{[l/2]} \frac{l!}{r!(l-r)!}(-1)^r \frac{(2l-2r)!}{(l-2r)!}x^{l-2r} \\
&= \sum_{r=0}^{[l/2]}(-1)^r \frac{(2l-2r)!}{2^r r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r} \\
&= P_l(x) \qquad \text{((طبق تعریف (۳.۱۷)}
\end{aligned}$$

قضیهٔ ۳.۳. (نمایش انتگرالی لاپلاس). اگر l عددی طبیعی باشد، آنگاه:

$$P_l(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^l d\theta$$

اثبات. با روشهای مقدماتی (به عنوان مثال، با تغییر متغیر معمول $(t = \tan(\theta/2)$) می‌توان نشان داد که، اگر $|\lambda| < 1$ باشد، آنگاه:

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{1+\lambda\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}} \tag{۳.۲۰}$$

حال، اگر قرار دهیم $\lambda = -\dfrac{u\sqrt{x^2-1}}{1-ux}$، و طرفین رابطه (۳.۲۰) را به صورت سری توانی برحسب u بسط داده، و ضرایب توانهای متناظر u را مساوی قرار دهیم، به نتیجه مورد نظر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\lambda\cos\theta} &= \frac{1}{1-\dfrac{u\sqrt{x^2-1}}{1-ux}\cos\theta}\\
&= (1-ux)[1-u(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta]^{-1}\\
&= (1-ux)\sum_{l=0}^{\infty} u^l\{x+\sqrt{x^2-1})\cos\theta\}^l
\end{aligned}$$

(زیرا، طبق دستور دوجمله‌ای برای $|a| < 1$، $(1-a)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2(x^2-1)}{(1-ux)^2}}} = \frac{1-ux}{\sqrt{(1-ux)^2-u^2(x^2-1)}}\\
&= \frac{1-ux}{\sqrt{1-2ux+u^2}}
\end{aligned}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه (۳.۲۰) به دست می‌آید:

$$\int_0^\pi \sum_{i=0}^{\infty} u^l\{x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta\}^l d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{1-2ux+u^2}}$$

و یا:

$$\sum_{l=0}^{\infty} u^l \int_0^\pi \{x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta\}^l d\theta = \pi\sum_{i=0}^{\infty} u^l P_l(x) \qquad \text{(طبق قضیه ۳.۱)}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب u^l به دست می‌آید:

$$\pi P_l(x) = \int_0^\pi \{x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta\}^l d\theta$$

و با این رابطه قضیه به طور کامل ثابت می‌شود.

۳.۴ عبارتهای صریح برای چندجمله‌ایهای لژاندار و مقادیری خاص از چندجمله‌ایهای لژاندار

از تعریف (۳.۱۷) می‌توان چندجمله‌ای‌های لژاندر را از هر مرتبه داده شده‌ای به دست آورد. در زیر چندتا از نخستین چندجمله‌ایهای لژاندر ارائه شده‌اند:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3). \end{aligned} \qquad (۳.۲۱)$$

قضیهٔ ۳.۴. اگر l عددی طبیعی باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && P_l(1) = 1, \\ &\text{(ii)} && P_l(-1) = (-1)^l, \\ &\text{(iii)} && P_l'(1) = \frac{1}{2}l(l+1), \\ &\text{(iv)} && P_l'(-1) = (-1)^{l-1}\frac{1}{2}l(l+1), \\ &\text{(v)} && P_{2l}(0) = (-1)^l\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}, \\ &\text{(vi)} && P_{2l+1}(0) = 0. \end{aligned}$$

($P_l'(1)$ به معنی $\left[\dfrac{dP_l(x)}{dx}\right]_{x=1}$ است).

اثبات. با قرار دادن $x=1$ در قضیه ۳.۱، برای $|t|<1$ نتیجه زیر به دست می‌آید*:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(1)$$

و یا:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(1)$$

*) در متن اصلی کتاب به قید $|t|<1$ که برای معتبر بودن بسطها ضروری بوده است، اشاره‌ای نشده است، و این قید توسط مترجم به اثبات اضافه شده است.

اما، برای $|t| < 1$ داریم $\sum_{l=0}^{\infty} t^l = \frac{1}{1-t}$ (طبق قضیه دوجمله‌ای، یا با بررسی سمت راست تساوی به عنوان مجموع یک تصاعد هندسی نامتناهی)، بنابراین، $\sum_{l=0}^{\infty} t^l = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(1)$. با توجه به اینکه تساوی فوق برای هر $|t| < 1$ درست است، باید ضرایب توانهای متناظر t در طرفین این تساوی با هم برابر باشند، و در نتیجه، باید داشته باشیم $P_l(1) = 1$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$.

(ii) دقیقاً شبیه قسمت (i)، اما، با قرار دادن $x = -1$ و استفاده از قضیه ۳.۱ می‌توان به نتیجه مطلوب رسید.

(iii) $P_l(x)$ در معادله لژاندر (۳.۲) صدق می‌کند، بنابراین، داریم:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_l(x) - 2x\frac{d}{dx}P(x) + l(l+1)P_l(x) = 0 \qquad (۳.۲۲)$$

با قرار دادن $x = 1$ در معادله فوق به‌دست می‌آوریم:

$$-2P_l'(1) + l(l+1)P_l(1) = 0$$

و از این رابطه با توجه به رابطه $P_l(1) = 1$ که در قسمت (i) ثابت کردیم، به‌دست می‌آید:

$$P_l'(1) = \frac{1}{2}l(l+1)$$

(iv) اثبات این قسمت دقیقاً شبیه قسمت (iii) است. کافیست در رابطه (۳.۲۲) قرار دهیم $x = -1$ و از رابطه $P_l(-1) = (-1)^l$ که در قسمت (ii) ثابت شد، استفاده کنیم.

(v, vi) با قرار دادن $x = 0$ در قضیه ۳.۱، برای $|t| < 1$، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(0)$$

سمت راست تساوی فوق را با استفاده از قضیه دوجمله‌ای بسط می‌دهیم، در این صورت، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = (1+t^2)^{-1/2} &= 1 + (-\frac{1}{2})t^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(t^2)^2 + \ldots \\ &+ \ldots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{2l-l}{2})}{l!}(t^2)^l + \ldots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^l \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(21-1)}{2^l l!}t^{2l}\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^l \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ldots(2l-2)(2l-1)(2l)}{2^l l!\cdot 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2l-2)(2l)} t^{2l}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^l \frac{(2l)!}{2^l l! 2^l l!} t^{2l}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} t^{2l}$$

بنابراین:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} t^{2l} = \sum_{i=0}^{\infty} t^l P(0)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب توانهای متناظر t در طرفین تساوی فوق به دست می‌آید:

$$P_{2l}(0) = (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}$$
$$P_{2l+1}(0) = 0\cdot$$

۳.۵ خواص تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر

قضیهٔ ۳.۵. اگر l و m دو عدد صحیح غیرمنفی دلخواه باشند، آنگاه:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } l \neq m، \\ \dfrac{2}{2l+l} & \text{اگر } l = m، \end{cases}$$

(این نتیجه را می‌توان با استفاده از دلتای کرونکر که به‌صورت:

$$\delta_{lm} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } l \neq m، \\ 1 & \text{اگر } l = m، \end{cases}$$

تعریف می‌شود، به شکل مختصرتر:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}$$

نوشت).

اثبات. $P_l(x)$ و $P_m(x)$ در معادله لژاندر (۳.۲) صدق می‌کنند، بنابراین:

$$(1-x^2)\frac{d^2P_l}{dx^2} - 2x\frac{dP_l}{dx} + l(l+1)P_l = 0$$

و

$$(1-x^2)\frac{d^2P_m}{dx^2}-2x\frac{dP_m}{dx}+m(m+1)P_m=0,\ \dagger$$

معادلات فوق را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right\}+l(l+1)P_l=0 \tag{۳.۲۳}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right\}+m(m+1)P_m=0 \tag{۳.۲۴}$$

با ضرب معادله (۳.۲۳) در $P_m(x)$، و معادله (۳.۲۴) در $P_l(x)$، و تفریق نتایج حاصله از یکدیگر و انتگرالگیری از آن از ۱- تا ۱ به دست می‌آید:

$$\int_{-1}^{1}\left[P_m\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right\}-P_l\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right\}\right]dx$$
$$+\{l(l+1)-m(m+1)\}\int_{-1}^{1}P_lP_m dx=0\cdot$$

اما، از رابطه:

$$\frac{d}{dx}\left\{P_m(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right\}=\frac{dP_m}{dx}(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}+P_m\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right\}$$

خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{d}{dx}\left\{P_m(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right\}-\frac{dP_m}{dx}(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}-\frac{d}{dx}\left\{P_l(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{dP_l}{dx}(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right]dx+(l^2+l-m^2-m)\int_{-l}^{l}P_lP_m dx=0$$

با انتگرالگیری از اولین عبارت، به دست می‌آید:

$$\left[P_m(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}-P_l(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\right]_{-1}^{1}+(l-m)(l+m+1)\int_{-1}^{1}P_lP_m dx=0$$

اما، اکنون، اولین عبارت در رابطه فوق، هم در حد پایین و هم در حد بالا، به دلیل وجود عامل $(1-x^2)$، برابر صفر است، بنابراین:

$$(l-m)(l+m+l)\int_{-1}^{1}P_lP_m dx=0$$

† در سرتاسر اثبات $P_l(x)$ را به P_l و $P_m(x)$ را به P_m نشان داده‌ایم. در همه حالتها P_m و P_l باید به عنوان توابعی از متغیر x درک شوند.

که اگر $l \neq m$ باشد، ضریب خارج از انتگرال را می‌توان حذف نموده، و به رابطه زیر رسید:

$$\int_{-1}^{1} P_l P_m dx = 0$$

آن چه که باقی می‌ماند، اثبات رابطه $\int_{-1}^{1}\{P_l(x)\}^2 dx = \dfrac{2}{2l+1}$ است. برای این کار از تابع مولد برای چندجمله‌ای‌های لژاندر که در قضیه ۳.۱ به آن اشاره شده است، استفاده می‌کنیم. برای $|t| < 1$ و $|x| \leq 1$ داریم*:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-2tx+t^2} &= \{\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)\}^2 \\ &= \{\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)\}\{\sum_{m=0}^{\infty} t^m P_m(x)\} \\ &= \sum_{l,m=0}^{\infty} t^{l+m} P_l(x) P_m(x)\end{aligned}$$

حال، با انتگرالگیری از طرفین رابطه فوق نسبت به x در فاصله -1 تا 1 به دست می‌آید:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)-2tx} dx = \sum_{l,m=0}^{\infty} t^{l+m} \int_{-1}^{1} P_l(x) P_m(x) dx$$

اما، سمت چپ حالت خاصی از انتگرال به فرم:

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln|a+bx| + c \qquad **$$

است. در حالیکه، سمت راست طبق اولین قسمت اثبات تنها شامل جملاتی است، که برای آنها $l = m$ است، بنابراین:

$$\left[-\frac{1}{2t}\ln(1+t^2-2tx)\right]_{x=-1}^{1} = \sum_{l=0}^{\infty} t^{2l} \int_{-1}^{1} \{P_l(x)\}^2 dx$$

*) قیود $|t| < 1$ و $|x| \leq 1$ که برای برقراری تساویها ضروری است، در متن اصلی کتاب جا افتاده است. مترجم.

**) علامت | | در عبارت $\ln|a+bx|$ در متن اصلی کتاب جا افتاده است. مترجم.

و از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty} t^{2l} \int_{-1}^{1} \{P_l(x)\}^2 dx &= -\frac{1}{2t}\ln(1+t^2-2t) + \frac{1}{2t}\ln(1+t^2+2t) \\ &= -\frac{1}{2t}\ln(1-t)^2 + \frac{1}{2t}\ln(1+t)^2 \\ &= \frac{1}{t}\{\ln(1+t) - \ln(1-t)\} \\ &= \frac{1}{t}(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots)\end{aligned}$$

(با ا ستفاده از بسط $\ln(1+t)$ به سری توانی)

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{t}(2t + 2\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} + \ldots) \\ &= 2(1 + \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \ldots) \\ &= 2\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l}}{2l+l}\end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب توانهای متناظر t در طرفین تساوی فوق به‌دست می‌آید:

$$\int_{-1}^{1} \{P_l(x)\}^2 dx = \frac{2}{2l+l}$$

و با این رابطه قضیه به‌طور کامل ثابت می‌شود.

۳.۶ سریهای لژاندر

قضیهٔ ۳.۶. اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n باشد، آنگاه:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n} c_r P_r(x)$$

که در آن $c_r = (r + \frac{1}{2}) \int_{-1}^{1} f(x) P_r(x) dx$ $(r = 0,\ 1, 2, \ldots, n)$. بعلاوه، اگر $f(x)$ زوج (یا فرد) باشد، آنگاه، فقط c_rهای با اندیس زوج (یا فرد) ناصفر هستند.

اثبات. $f(x)$ را می‌توان به عنوان مثال به صورت:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

و $P_n(x)$ را به صورت:

$$P_n(x) = k_n x^n + k_{n-2}x^{n-2} + \ldots + k_0$$

فرض کرد (زیرا، طبق معادله (۳.۱۷)، $P_n(x)$ یک چندجمله‌ای با درجه n است، و برحسب اینکه n فرد یا زوج باشد، تنها شامل توانهای فرد یا زوج است). بنابراین، عبارت $f(x) - \frac{a_n}{k_n}P_n(x)$ یا صفر است (که در این حالت اولین قسمت قضیه ثابت شده است) یا یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر $n-1$ است. در نتیجه، در هر دو حالت می‌توان نوشت:

$$f(x) = c_n P_n(x) + g_{n-1}(x)$$

که در آن $c_n = \frac{a_n}{k_n}$ و $g_{n-1}(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر $n-1$ است*.
بااستدلالی مشابه $g_{n-1}(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$g_{n-1}(x) = c_{n-1}P_{n-1}(x) + g_{n-2}(x)$$

و بنابراین:

$$f(x) = c_n P_n(x) + c_{n-1}P_{n-1}(x) + g_{n-2}(x)$$

با بحثی مشابه برای $g_{n-2}(x)$ و غیره، سرانجام به فرمول زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_n P_n(x) + c_{n-1}P_{n-1}(x) + \ldots + c_1 P_1(x) + c_0 P_0(x) \\ &= \sum_{r=0}^{n} c_r P_r(x) \end{aligned}$$

حال، اگر طرفین رابطه فوق را در $P_s(x)$ ضرب نموده**، از نتیجه حاصل از -1 تا ۱ انتگرال بگیریم، به دست می‌آید:

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_s(x)dx = \sum_{r=0}^{n} c_r \int_{-1}^{1} P_r(x)P_s(x)dx$$

اما، طبق معادله ۳.۶، انتگرال سمت راست تنها زمانی ناصفر است، که r مساوی s باشد، و در چنین حالتی مقدار آن برابر $\frac{2}{2s+1}$ خواهد بود. بنابراین:

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_s(x)dx = c_s \frac{2}{2s+1}$$

*) هر دو حالت را برای سهولت محاسبات بعدی به صورت خلاصه فوق در آورده‌ایم. مترجم.
**) $s = 0, 1, 2, \ldots, n$ فرض شده است. مترجم.

و در نتیجه $c_r = (r+\frac{1}{2}) \int_{-1}^{1} f(x)P_r(x)dx$ $(r=0,1,2,\ldots,n)$ و این همان چیزی است که باید ثابت می‌کردیم.

حال، فرض کنیم $f(x)$ تابعی زوج باشد. در این صورت، چون $P_r(x)$ وقتی r زوج باشد تابعی زوج است، و وقتی r فرد باشد تابعی فرد است، بنابراین، $f(x)P_r(x)$ تابع زیر علامت انتگرال نیز وقتی r زوج یا فرد باشد، به ترتیب، تابعی زوج یا فرد خواهد بود. اما، انتگرال یک تابع فرد روی فاصله ۱- تا ۱ برابر صفر است، زیرا، مقادیر مثبت و منفی آن یکدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین c_r وقتی r فرد باشد، برابر صفر است. به طریق مشابه، وقتی $f(x)$ تابعی فرد باشد، c_rها به ازاء مقادیر زوج r برابر صفر خواهند بود.

نتیجه. اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه کمتر از l باشد، آنگاه:

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)dx = 0$$

اثبات. فرض کنیم $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد. در این صورت، طبق قضیه فوق خواهیم داشت:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n} c_r P_r(x)$$

بنابراین، طبق قضیه ۳.۵،

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)dx = \sum_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} P_r(x)P_l(x)dx = 0$$

زیرا $r \le n < l$، و در نتیجه r هرگز نمی‌تواند مساوی l شود.

نتایج قضیه ۳.۶ را می‌توان به توابعی که به صورت چندجمله‌ای نباشد نیز تعمیم داد. ما این تعمیم را ثابت نخواهیم کرد، و تنها به بیان نتیجه زیر خواهیم پرداخت (اثبات آن دشوار نیست، اما، کاملاً مفصل است).

قضیهٔ ۳.۷. فرض کنیم $f(x)$ روی فاصله $-1 \le x \le 1$ در شرایط زیر صدق کند:

(i) $f(x)$ روی فاصله $[-1,1]$ به طور قطعه‌ای پیوسته باشد (یعنی، $f(x)$ در همه نقاط فاصله $[-1,1]$ به جز حداکثر در تعدادی متناهی از نقاط که ناپیوستگی از نوع اول دارد، پیوسته باشد)؛

(ii) تعداد نقاط ماکسیمم یا مینیمم $f(x)$ متناهی باشد.

در اینصورت، سری $\sum_{r=0}^{\infty} c_r P_r(x)$ که در آن:

$$c_r = (r+\frac{1}{2}) \int_{-1}^{1} f(x)P_r(x)dx$$

در نقاط پیوستگی $f(x)$ به $f(x)$ همگرا است، و در نقاط ناپیوستگی* $f(x)$ به

$$\frac{1}{2}\{f(x+)+f(x-)\}$$

همگرا است. همچنین؛ در نقاط $x=\pm 1$ از فاصله $[-1,1]$، سری فوق به ترتیب به $f(1-)$ و $f(-1+)$ همگرا خواهد بود. این سری را سری لژاندار برای تابع $f(x)$ می‌نامند.

۳.۷ روابط بین چندجمله‌ایهای لژاندر و مشتقات آنها، روابط برگشتی

قضیهٔ ۳.۸. چندجمله‌ایهای لژاندر در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\text{(i)}\quad P_l'(x)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}(l-1)\right]}(2l-4r-1)P_{l-2r-1}(x)\cdot$$

$$\text{(ii)}\quad xP_l(x)=\frac{l-1}{2l+1}P_{l+1}(x)+\frac{1}{2l+l}P_{l-1}(x)\cdot$$

$$\text{(iii)}\quad (l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0\cdot$$

$$\text{(iv)}\quad P_{l+1}'(x)-P_{l-1}'(x)=(2l+1)P_l(x)\cdot$$

$$\text{(v)}\quad xP_l'(x)-P_{l-1}'(x)=lP_l(x)\cdot$$

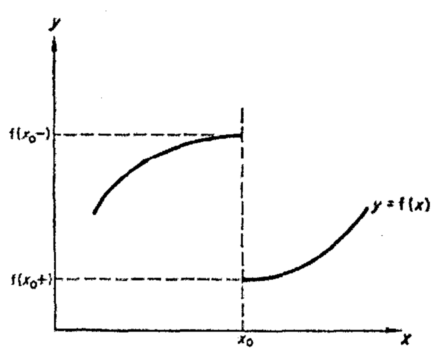
$$\text{(vi)}\quad P_l'(x)-xP_{l-1}'(x)=lP_{l-1}(x)\cdot$$

$$\text{(vii)}\quad (x^2-1)P_l'(x)=lxP_l(x)-lP_{l-1}(x)\cdot$$

$$\text{(viii)}\quad (x^2-1)P_l'(x)=(l+1)P_{l+1}(x)-(l+1)xP_l(x)\cdot$$

---

*) $f(x_0+)$ به معنی $\lim_{\epsilon\to 0+} f(x_0+\epsilon)$ و $f(x_0-)$ به معنی $\lim_{\epsilon\to 0-} f(x_0+\epsilon)$ می‌باشد. به عنوان مثال، شکل ۳.۱ را ببینید.



شکل ۳.۱ حد راست و چپ در یک نقطه ناپیوستگی

$$\text{(ix)} \qquad \sum_{k=0}^{l}(2k+1)P_k(x)P_k(y) = \frac{l+1}{x-y}\{P_{l+1}(x)P_l(y) - P_l(x)P_{l+1}(y)\}\cdot$$

اثبات. (i) میدانیم که $P_l(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه l است، که وقتی l زوج باشد فقط شامل توانهای زوج x است، و وقتی l فرد باشد فقط شامل توانهای فرد x است. در نتیجه P_{l-1} کثیرالجمله‌ای از درجه $l-1$ است، که فقط شامل توانهای فرد یا زوج از x است برحسب اینکه l زوج یا فرد باشد. بنابراین، طبق قضیه ۳.۶، داریم:

$$P_l'(x) = c_{l-1}P_{l-1}(x) + c_{l-3}P_{l-3}(x) + \\ \ldots + c_{l-2r-1}P_{l-2r-1}(x) + \ldots + \begin{cases} c_1P_1(x) & \text{اگر } l \text{ زوج باشد،} \\ c_0P_0(x) & \text{اگر } l \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} c_s &= (s+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} P_l'(x)P_s(x)dx \\ &= (s+\frac{1}{2})\left\{[P_l(x)P_s(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_l(x)P_s'(x)dx\right\} \end{aligned}$$

(با انتگرالگیری جزءبه‌جزء)

$$= (s+\frac{1}{2})\{P_l(1)P_s(1) - P_l(-1)P_s(-1) - 0\}$$

(که در آن، طبق نتیجه قضیه ۳.۶، مقدار انتگرال صفر است، زیرا، $P_s'(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $s-1$ است، و $s-1$ همواره کمتر از l است)

$$= (s+\frac{1}{2})\{1-(-1)^{s+l}\}$$

(طبق قسمتهای (i) و (ii) قضیه ۳.۴)

اما، s مقادیر $l-1$، $l-3$، ... را می‌گیرد، بنابراین، $l+s$ مقادیر $2l-1$، $2l-3$، ... را خواهد گرفت، که بدون توجه به مقادیر l یا s همیشه فرد است. در نتیجه، $(-1)^{s+l} = -1$، و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} c_0 &= (s+\frac{1}{2})\{1-(-1)\} \\ &= 2s+1 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} c_{l-2r-1} &= 2(l-2r-1)+1 \\ &= 2l-4r-1 \end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned} P_l'(x) &= (2l-1)P_{l-1}(x) + (2l-5)P_{l-3} + \dots \\ &+ (2l-4r-1)P_{l-2r-1}(x) + \dots + \begin{cases} 3P_1(x) & \text{اگر } l \text{ زوج باشد،} \\ P_0(x) & \text{اگر } l \text{ فرد باشد،} \end{cases} \\ &= \sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}(l-1)]} (2l-4r-1)P_{l-2r-1}(x) \end{aligned}$$

(ii) $xP_l(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $l+1$ است، بعلاوه، اگر l عددی فرد باشد، $xP_l(x)$ یک تابع زوج است، و اگر l عددی زوج باشد، $xP_l(x)$ یک تابع فرد است. بنابراین، طبق قضیه ۳.۶، داریم:

$$xP_l(x) = c_{l+1}P_{l+1}(x) + c_{l-1}P_{l-1}(x) + \dots + \begin{cases} c_1P_1(x) & \text{اگر } l \text{ زوج باشد،} \\ c_0P_0(x) & \text{اگر } l \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} c_r &= (r+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} xP_l(x)P_r(x)dx \\ &= (r+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} P_l(x)\{xP_r(x)\}dx \end{aligned}$$

اما، طبق نتیجه قضیه ۳.۶، اگر $l > r+1$، و یا $r < l-1$ باشد، آنگاه، انتگرال برابر صفر خواهد بود (زیرا، در این صورت $xP_r(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه کمتر از l است). بنابراین، داریم:

$$xP_l(x) = c_{l+1}P_{l+1}(x) + c_{l-1}P_{l-1}(x) \tag{۳.۲۵}$$

برای تعیین c_{l+1} و c_{l-1} ابتدا در معادله (۳.۲۵) قرار می‌دهیم $x=1$، سپس، از طرفین همین معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم، به دست می‌آید:

$$P_l(x) + xP_l'(x) = c_{l+1}P_{l+1}'(x) + c_{l-1}P_{l-1}'(x) \tag{۳.۲۶}$$

با قرار دادن $x = 1$ در معادلات (۳.۲۵) و (۳.۲۶) و با استفاده از قسمتهای (i) و (iii) خواهیم داشت:

$$1 = c_{l+1} + c_{l-1} \tag{۳.۲۷}$$

و

$$1 + \frac{1}{2}l(l+1) = c_{l+1}\left\{\frac{1}{2}(l+1)(l+2)\right\} + c_{l-1}\left\{\frac{1}{2}(l-1)l\right\} \tag{۳.۲۸}$$

با حل معادلات (۳.۲۷) و (۳.۲۸) ضرایب c_{l+1} و c_{l-1} طبق روابط:

$$c_{l+1} = \frac{l+1}{2l+1} \quad \text{و} \quad c_{l-1} = \frac{l}{2l+1}$$

محاسبه می‌شوند، و با جایگذاری این مقادیر در معادله (۳.۲۵) به دست می‌آید:

$$xP_1(x) = \frac{l+1}{2l+1}P_{l+1}(x) + \frac{l}{2l+1}P_{l-1}(x)$$

(iii) با ضرب طرفین معادله (ii) فوق در $(2l+l)$ نتیجه می‌شود:

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$$

و با مرتب کردن مجدد این معادله خواهیم داشت:

$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0$$

که همان رابطه (iii) است.

(iv) از نتیجه (i) برای $P'_{l+1}(x)$ و $P'_{l-1}(x)$ استفاده می‌کنیم:

$$P'_{l+1}(x) = (2l+1)P_l(x) + (2l-3)P_{l-2}(x) + (2l-7)P_{l-4}(x) + \dots$$
$$P'_{l-1}(x) = (2l-3)P_{l-2}(x) + (2l-7)P_{l-4}(x) + \dots$$

از تفریق دو رابطه فوق به دست می‌آید:

$$P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+1)P_l(x)\cdot$$

(v) با مشتق‌گیری از نتیجه (iii) نسبت به x خواهیم داشت:

$$(l+1)P'_{l+1}(x) - (2l+1)\{P_l(x) + xP'_l(x)\} + lP'_{l-1}(x) = 0$$

اکنون اگر از رابطه (iv) برای جایگذاری $P'_{l+1}(x)$ استفاده کنیم، به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$(l+1)\{P'_{l-1}(x)+(2l+1)P_l(x)\}-(2l+1)\{P_l(x)+xP'_l(x)\}+lP'_{l-1}(x)=0$$

با گردآوری جملات مربوط به P'_{l-1}، P_l وP'_l معادله:

$$(2l+1)P'_{l-1}(x)(2l+1)(l+1-1)P_l(x)-(2l+1)xP'_l(x)=0$$

که می‌توان آن را به صورت:

$$P'_{l-1}(x)+lP_l(x)-xP'_l(x)=0$$

نوشت، به‌دست می‌آید، و با جابجایی مناسب جملات این معادله، خواهیم داشت:

$$xP'_l(x)-P'_{l-1}(x)=P_l(x)$$

(vi) با ضرب طرفین رابطه (iv) در x به دست می‌آوریم:

$$xP'_{l+1}(x)-xP'_{l-1}(x)=(2l+1)xP_l(x)$$

و با جایگذاری $(2l+1)xP(x)$ از رابطه فوق در رابطه (iii) خواهیم داشت:

$$(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l-1}(x)=xP'_{l+1}(x)-xP'_{l-1}(x) \tag{۳.۲۹}$$

اکنون رابطه (v) را با تبدیل l به $l+1$ بازنویسی می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$xP'_{l+1}(x)-P'_l(x)=(l+1)P_{l+1}(x)$$

با جایگذاری مقدار $(l+1)P_{l+1}(x)$ از این معادله در معادله (۳.۲۹) خواهیم داشت:

$$xP'_{l+1}(x)-P'_l(x)+lP_{l-1}(x)=xP'_{l+1}(x)-xP'_{l-1}(x)$$

و از این معادله نتیجه می‌شود:

$$P'_l(x)-xP'_{l-1}(x)=lP_{l-1}(x)$$

که همان رابطه‌ای است که باید ثابت می‌کردیم.

(vii) اگر طرفین رابطه (v) را در x ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$x^2P_l'(x) - xP_{l-1}'(x) = lxP_l(x)$$

با تفریق رابطه (vi) از رابطه فوق خواهیم داشت:

$$x^2P_l'(x) - P_l'(x) = lxP_l(x) - lP_{l-1}(x)$$

و این رابطه را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$(x^2-1)P_l'(x) = lxP_l(x) - lP_{l-1}(x)$$

(viii) با تبدیل l به $l+1$ در قسمتهای (v) و (vi) به دست می‌آید:

$$xP_{l+1}'(x) - P_l'(x) = (l+1)P_{l+1}(x)$$

و

$$P_{l+1}'(x) - xP_l'(x) = (l+1)P_l(x)$$

با حذف $P_{l+1}'(x)$ مابین این دو معادله (دومین معادله را در x ضرب نموده و از معادله اول کم می‌کنیم) خواهیم داشت:

$$-P_l'(x) + x^2P_l'(x) = (l+1)P_{l+1}(x) - (l+1)xP_l(x)$$

و معادله فوق را می‌توان به صورت زیر درآورد:

$$(x^2-1)P_l'(x) = (l+1)P_{l+1}(x) - (l+1)xP_l(x)$$

(ix) با استفاده از قسمت (iii) داریم:

$$\begin{aligned}P_{k+1}(x)P_k(y) - P_k(x)P_{k+1}(y) &= \frac{1}{k+1}[\{(2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x)\}P_k(y)\\ &- P_k(x)\{(2k+1)yP_k(y) - kP_{k-1}(y)\}]\\ &= \frac{2k+1}{k+1}(x-y)P_k(x)P_k(y) + \frac{k}{k+1}\{P_k(x)P_{k-1}(y) - P_{k-1}(x)P_k(y)\}\end{aligned}$$

با ضرب طرفین این معادله در $k+1$ به دست می‌آید:

$$(k+1)\{P_{k+1}(x)P_k(y) - P_k(x)P_{k+1}(y)\}$$

$$= (2k+1)(x-y)P_k(x)P_k(y) + k\{P_k(x)P_{k-1}(y) - P_{k-1}(x)P_k(y)\} \quad (۳.۳۰)$$

اگر $(k+1)\{P_{k+1}(x)P_k(y) - P_k(x)P_{k+1}(y)\}$ را به f_k نشان دهیم، معادله (۳.۳۰) به صورت زیر در می‌آید:

$$f_k = (2k+1)(x-y)P_k(x)P_k(y) + f_{k-1} \quad (۳.۳۱)$$

(اگر بخواهیم دقیق شویم، این معادله برای $k \geq 1$ درست است، به ازاء این مقادیر k همه کمیتهای درگیر خوش تعریف هستند، اما، می‌توان رابطه فوق را برای $k = 0$ نیز درست پنداشت، به شرط اینکه f_{-1} به صورت $f_{-1} = 0$ تعریف شود. زیرا، در این صورت:

$$\begin{aligned} f_0 &= P_1(x)P_0(y) - P_0(x)P_1(y) \\ &= x - y \qquad (\text{طبق معادلات (۳.۲۱)}) \end{aligned}$$

و $x - y$ نیز با $k = 0$ با عبارت $(2k+1)(x-y)P_k(x)P_k(y) + f_{k-1}$ به ازاء $k = 0$ برابر است).

اکنون اگر مجموعه معادلات (۳.۳۱) را از $k = 0$ تا $k = l$ با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{l} f_k &= \sum_{k=0}^{l}(2k+1)(x-y)P_k(x)P_k(y) + \sum_{k=0}^{l} f_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{l}(2k+l)(x-y)P_k(x)P_k(y) + \sum_{k=1}^{l} f_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{l}(2k+1)(x-y)P_k(x)P_k(y) + \sum_{k=0}^{l-1} f_k \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\sum_{k=0}^{l} f_k - \sum_{k=0}^{l-1} f_k = \sum_{k=0}^{l}(2k+1)(x-y)P_k(x)P_k(y)$$

و یا:

$$f_l = (x-y)\sum_{k=0}^{l}(2k+1)(x-y)P_k(x)P_k(y)$$

از رابطه فوق با توجه به تعریف f_l به دست می‌آید:

$$\frac{(l+1)}{x-y}\{P_{l+1}(x)P_l(y) - P_l(x)P_{l+1}(y)\} = \sum_{k=0}^{l}(2k+1)P_k(x)P_k(y)$$

۳.۸ توابع لژاندر وابسته

قضیهٔ ۳.۹. اگر z جواب معادله لژاندر:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y=0$$

باشد، آنگاه $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mz}{dx^m}$ جوابی از معادله:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left\{l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0$$

(موسوم به معادله لژاندر وابسته) خواهد بود.

اثبات. . از آنجا که z جوابی از معادله لژاندر است، باید داشته باشیم:

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+l(l+1)z=0 \qquad (۳.۳۲)$$

حال، از معادله (۳.۳۲)، m بار نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d^m}{dx^m}\left\{(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}\right\}-2\frac{d^m}{dx^m}\left\{x\frac{dz}{dx}\right\}+l(l+1)\frac{d^mz}{dx^m}=0$$

در اینصورت، با استفاده از دستور لایبنیتس برای مشتق مرتبه mام حاصلضرب* خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(1-x^2)&\frac{d^{m+2}z}{dx^{m+2}}+m\frac{d}{dx}(1-x^2)\cdot\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}}\\&+\frac{m(m-1)}{2}\cdot\frac{d^2}{dx^2}(1-x^2)\cdot\frac{d^mz}{dx^m}\\&-2\left\{x\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}}+m\frac{d}{dx}x\cdot\frac{d^mz}{dx^m}\right\}+l(l+1)\frac{d^mz}{dx^m}=0\end{aligned}$$

(زیرا، مشتقات بالاتر عبارتهای $1-x^2$ و x برابر صفر هستند).

با جمع کردن عبارتهای شامل $\frac{d^{m+2}z}{dx^{m+2}}$، $\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}}$ و $\frac{d^mz}{dx^m}$، به دست می‌آوریم:

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}z}{dx^{m+2}}-2x(m+1)\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}}+\{l(l+1)-m(m-1)-2m\}\frac{d^mz}{dx^m}=0$$

---

*)

$$\frac{d^m}{dx^m}(uv)=\sum_{r=0}^{m}C_m^r\frac{d^ru}{dx^r}\frac{d^{m-r}v}{dx^{m-r}}$$

که از آن با نشان دادن $\frac{d^m z}{dx^m}$ به z_1 به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$(1-x^2)\frac{d^2 z_1}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{dz_1}{dx} + \{l(l+1) - m(m+1)\}z_1 = 0 \qquad (۳.۳۳)$$

حال، اگر قرار دهیم:

$$z_2 = (1-x^2)^{m/2} z_1 = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m z}{dx^m}$$

معادله (۳.۳۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\{z_2(1-x^2)^{-m/2}\} - 2(m+1)x \cdot \frac{d}{dx}\{z_2(1-x^2)^{-m/2}\} = 0\\ + \{l(l+1) - m(m+1)\}z_2(1-x^2)^{-m/2} = 0 \qquad (۳.۳۴)\end{aligned}$$

اما:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{z_2(1-x^2)^{-m/2}\} &= \frac{dz_2}{dx}(1-x^2)^{-m/2}\\ &\quad + z_2 \cdot \left\{-\frac{m}{2}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}\right\}(-2x)\\ &= \frac{dz_2}{dx}(1-x^2)^{-m/2} + mz_2x(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dx^2}\{z_2(1-x^2)^{-m/2}\} = \frac{d^2 z_2}{dx^2}(1-x^2)^{-m/2}\\ &+ \frac{dz_2}{dx}\cdot(-\frac{m}{2})(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}(-2x)\\ &+ m\left\{\frac{dz_2}{dx}x(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1} + z_2(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}\right.\\ &\left.+z_2x(-\frac{m}{2}-1)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-2}(-2x)\right\}\\ &= \frac{d^2 z_2}{dx^2}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} + \frac{dz_2}{dx}mx(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1} + m\frac{dz_2}{dx}x(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}\\ &+ mz_2(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1} + mz_2x^2(m+2)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-2}\end{aligned}$$

با توجه به روابط فوق از معادله (۳.۳۴) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2z_2}{dx^2}(1-x^2)^{-(m/2)+1}+2mx(1-x^2)^{-m/2}\frac{dz_2}{dx}\\
&+mz_2(1-x^2)^{-m/2}\\
&+m(m+2)(1-x^2)^{-(m/2)-1}x^2z_2\\
&-2(m+1)x\left\{(1-x^2)^{-m/2}\frac{dz_2}{dx}+mx(1-x^2)^{-(m/2)-1}z_2\right\}\\
&+\{l(l+1)-m(m+1)\}z_2(1-x^2)^{-m/2}=0
\end{aligned}$$

با حذف عامل مشترک $(1-x^2)^{-m/2}$ و جمع جملات مشابه، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}+\{2mx-2(m+1)x\}\frac{dz_2}{dx}\\
&+\left\{m+\frac{m(m+2)}{1-x^2}x^2-\frac{2(m+1)mx^2}{1-x^2}+l(l+1)-m(m+1)\right\}z_2=0
\end{aligned}\tag{۳.۳۵}$$

ضریب $\frac{dz_2}{dx}$ اکنون برابر $-2x$ و ضریب z_2 برابر:

$$\begin{aligned}
&l(l+1)+\frac{(m^2+2m-2m^2-2m)x^2}{1-x^2}+m-m^2-m\\
&=l(l+1)-\frac{m^2x^2}{1-x^2}-m^2=l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}
\end{aligned}$$

است. بنابراین، معادله (۳.۳۵) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$(1-x^2)\frac{d^2z_2}{dx^2}-2x\frac{dz_2}{dx}+\left\{l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}z_2=0$$

یعنی، z_2 در معادله لژاندر وابسته صدق می‌کند، و در نتیجه، با توجه به تعریف z_2 قضیه ثابت می‌شود.

نتیجه. تابع لژاندر وابسته $P_l^m(x)$ که با رابطه:

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\tag{۳.۳۶}$$

تعریف می‌شود، در معادله لژاندر وابسته صدق می‌کند.

اثبات. مطلب فوق نتیجه فوری قضیه ۳.۹ است، زیرا $P_l(x)$ در معادله لژاندر صدق می‌کند.

با استفاده از فرمول رودریگز (قضیه ۳.۲)، می‌توان تعریف (۳.۳۶) را به فرم:

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{t+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$

بازنویسی نمود. سمت راست عبارت فوق برای مقادیری منفی از m که $l+m \geq 0$ و یا $m \geq -l$، خوش‌تعریف است، از آنجا که تعریف اصلی (۳.۳۶) از $P_l^m(x)$ تنها برای مقادیر $m \geq 0$ معتبر بود، بنابراین، می‌توان از این فرم جدید در تعریف $P_l^m(x)$ برای مقادیری از m که در شرط $m \geq -l$ صدق می‌کنند، استفاده نمود.

به سادگی می‌توان تحقیق کرد، که اگر m مثبت در نظر گرفته شود، تابع $P_l^{-m}(x)$ که با چنین روشی تعریف می‌شود، همچون $P_l^m(x)$ جوابی از معادله لژاندر وابسته است، اما، در واقع، جوابی مستقل نیست، و می‌توان ثابت کرد که:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x) \tag{۳.۳۷}$$

(مسأله ۳ انتهای این فصل را ببیند).

۳.۹ خواص توابع لژاندر وابسته

قضیهٔ ۳.۱۰. توابع لژاندر وابسته در روابط زیر صدق می‌کنند:

(i) $P_l^0(x) = P_l(x)$.

(ii) اگر $m > l$ باشد، آنگاه $P_l^m(x) = 0$.

اثبات. (i) این قسمت فوراً از تعریف (۳.۳۶) نتیجه می‌شود.

(ii) از آنجا که $P_l(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه l است، اگر بیش از lبار از آن مشتق بگیریم حاصل برابر صفر خواهد شد. بنابراین، برای $m > 1$ داریم $\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) = 0$، از این رابطه با توجه به تعریف (۳.۳۶) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۳.۱۱. (رابطه تعامد). توابع لژاندر در رابطه تعامد زیر صدق می‌کنند:

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_{l'}^m(x)dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+l)(l-m)!}\delta_{ll'}$$

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که، اگر $l \neq l'$، آنگاه:

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_{l'}^m(x)dx = 0$$

اثبات این مطلب نیز دقیقاً شبیه اثباتی است که در اولین قسمت قضیه ۳.۵ به کار بردیم، بنابراین، آن را دوباره در اینجا تکرار نخواهیم کرد.

آن چه که باقی می‌ماند اثبات رابطه:

$$\int_{-1}^{1}\{P_l^m(x)\}^2dx=\frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}$$

است.

ابتدا فرض کنیم $m>0$ باشد. در اینصورت، طبق تعریف (۳.۳۶)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\{P_l^m(x)\}^2dx&=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\left\{\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\right\}\left\{\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\right\}dx\\&=\left[\left\{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l(x)\right\}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\right\}\right]_{-1}^{1}\\&\quad-\int_{-1}^{1}\left\{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l(x)\right\}\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\right\}dx\end{aligned}$$

(با انتگرالگیری جزءبه‌جزء)

$$=-\int_{-1}^{1}\left\{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l(x)\right\}\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\right\}dx$$

(۳.۳۸)

(به دلیل وجود عامل $(1-x^2)$، اولین عبارت در حدود بالا و پایین انتگرال برابر صفر می‌شود).

حال، از معادله (۳.۳۳) با تبدیل m به $m-1$ خواهیم داشت:

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_l(x)-2mx\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)+\{l(l+1)-(m-1)m\}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l(x)=0$$

با ضرب معادله فوق در $(1-x^2)^{m-1}$ به دست می‌آید:

$$(1-x^2)^m\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_l(x)-2mx(1-x^2)^{m-1}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)+(l+m)(l-m+1)(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l(x)=0$$

و این معادله را می‌توان به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\right\}=-(l+m)(l-m+1)(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l(x)$$

با جایگذاری این نتیجه در معادله (۳.۳۸) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\{P_l^m(x)\}^2dx\\
&\quad=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l(x)\right\}(l+m)(l-m+l)(1-x^2)^{m-1}\left\{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_l(x)\right\}dx\\
&\quad=(l+m)(l-m+1)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m-1}\left\{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P(x)\right\}^2dx\\
&\quad=(l+m)(l-m+1)\int_{-1}^{1}\{P_l^{m-1}(x)\}^2dx\cdot
\end{aligned}$$

با به کارگیری مجدد نتیجه فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\{P_l^m(x)\}^2dx\\
&=(l+m)(l-m+1)(l+m-1)(l-m+2)\int_{-1}^{1}\{P_l^{m-2}(x)\}^2dx\\
&=(l+m)(l+m-1)(l-m+1)(l-m+2)\int_{-1}^{1}\{P_l^{m-2}(x)\}dx
\end{aligned}$$

و با تکرار پروسه فوق به تعداد mبار به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\{P_l^m(x)\}^2dx\\
&=(l+m)(l+m-1)\ldots(l+1)(l-m+1)(l-m+2)\ldots l\cdot\int_{-1}^{1}\{P_l^0(x)\}^2dx\\
&=(l+m)(l+m-1)\ldots(l+1)\cdot l(l-1)\ldots(l-m+2)(l-m+1)\frac{2}{2l+1}
\end{aligned}$$

(با استفاده از قضیه ۳.۵)

$$=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\cdot\frac{2}{2l+1}$$

که همان مطلبی است که باید ثابت می‌کردیم.

اکنون فرض کنیم که $m<0$، و مثلاً $m=-n$ باشد، که در آن $n>0$. در این صورت:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\{P_l^m(x)\}^2dx&=\int_{-1}^{1}\{P_l^{-n}(x)\}^2dx\\
&=\int_{-1}^{1}\left\{(-1)^n\frac{(l-n)!}{(l+n)!}\right\}^2\{P_l^n(x)\}^2dx
\end{aligned}$$

(طبق معادله (۳.۳۷))

$$= \left\{\frac{(l-n)!}{(l+n)!}\right\}^2 \int_{-1}^{1} \{P_l^n(x)\}^2 dx$$

$$= \left\{\frac{(l-n)!}{(l+n)!}\right\}^2 \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \cdot \frac{2}{2l+1}$$

(طبق نتیجه‌ای که اکنون برای $n > 0$ ثابت شد)

$$= \frac{(l-n)!}{(l+n)!} \cdot \frac{2}{2l+1}$$

$$= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \cdot \frac{2}{2l+1}$$

و با این رابطه قضیه به طور کامل ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۳.۱۲. (روابط برگشتی). توابع لژاندر وابسته در معادلات برگشتی زیر صدق می‌کنند:

(i) $$P_l^{m+1}(x) - \frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}} P_l^m(x) + \{l(l+1) - m(m-1)\} P_l^{m-1}(x) = 0\cdot$$

(ii) $$(2l+1) x P_l^m(x) = (l+m) P_{l-1}^m(x) + (l-m+1) P_{l+1}^m(x)\cdot$$

(iii) $$\sqrt{1-x^2} P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1} \{P_{l+1}^{m+1}(x) - P_{l-1}^{m+1}(x)\}\cdot$$

(iv) $$\sqrt{1-x^2} P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1} \{(l+m)(l+m-1) P_{l-1}^{m-1}(x) - (l-m+1)(l-m+2) P_{l+1}^{m-1}(x)\}.$$

اثبات. (i) اولین رابطه رابطه‌ای اساسی بین سه تابع لژاندار وابسته با l یکسان و سه مقدار متوالی از m است.

$\frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$ را به $P_l^{(m)}(x)$ نشان می‌دهیم. در این صورت، می‌توان تعریف (۳.۳۶) را به صورت زیر نوشت:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} P_l^{(m)}(x) \qquad (۳.۳۹)$$

حال، می‌دانیم که در معادله (۳.۳۳) می‌توان قرارداد $z = P_l(x)$ و در نتیجه $z_1 = P_l^{(m)}(x)$، بنابراین، به دست می‌آوریم:

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_l^{(m)}(x) - 2(m+1) x \frac{d}{dx} P_l^{(m)}(x) + \{l(l+1) - m(m+1)\} P_l^{(m)}(x) = 0$$

با استفاده از تعریف $P_l^{(m)}(x)$، این معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$(1-x^2)P_l^{(m+2)}(x) - 2(m+1)xP_l^{(m+1)}(x) \\ + \{l(l+1) - m(m+1)\}P_l^{(m)}(x) = 0$$

و با ضرب طرفین معادله فوق در $(1-x^2)^{m/2}$ به دست می‌آید:

$$(1-x^2)^{\frac{m}{2}+1}P^{(m+2)}(x) - 2(m+1)x(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_l^{(m+1)}(x) \\ + \{l(l+1) - m(m+1)\}(1-x^2)^{m/2}P_l^{(m)}(x) = 0$$

در نتیجه، با استفاده از معادله (۳.۳۹)، خواهیم داشت:

$$P_l^{m+2}(x) - 2(m+1)x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}P_l^{m+1}(x) \\ + \{l(l+1) - m(m+1)\}P_l^m(x) = 0$$

با تبدیل m به $m-1$ از معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$P_l^{m+1}(x) - \frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}}P_l^m(x) + \{l(l+1) - (m-1)m\}P_l^{m-1}(x) = 0$$

و با این رابطه قسمت (i) ثابت می‌شود.

(ii) دومین رابطه رابطه‌ای اساسی بین سه تابع لژاندر وابسته است، وقتی m ثابت است، اما، l سه مقدار متوالی می‌گیرد:

طبق قسمت (iii) قضیه (۳.۸)، داریم:

$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0$$

با m بار مشتق‌گیری از رابطه فوق (و استفاده از دستور لایبنیتس برای دومین جمله) خواهیم داشت:

$$(l+1)P_{l+1}^{(m)}(x) - (2l+1)\{xP_l^{(m)}(x) + mP_l^{(m-1)}(x)\} + lP_{l-1}^{(m)}(x) = 0 \quad (۳.۴۰)$$

به طریق مشابه، طبق قسمت (iv) قضیه ۳.۸، داریم:

$$P_{l+1}^{(1)}(x) - P_{l-1}^{(1)}(x) = (2l+1)P_l(x)$$

و با $m-1$ بار مشتق‌گیری از این رابطه به دست می‌آید:

$$P_{l+1}^{(m)}(x) - P_{l-1}^{(m)}(x) = (2l+1)P_l^{(m-1)}(x) \qquad (۳.۴۱)$$

با استفاده از معادله (۳.۴۱) عبارت $P_l^{(m-1)}(x)$ را در رابطه (۳.۴۰) جایگذاری می‌کنیم. با این کار نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}(l+1)P_{l+1}^{(m)}(x) &- (2l+1)xP_l^{(m)}(x)\\ &- m\{P_{l+1}^{(m)}(x) - P_{l-1}^{(m)}(x)\} + lP_{l-1}^{(m)}(x) = 0\end{aligned}$$

با ضرب طرفین این معادله در $(1-x^2)^{m/2}$ و استفاده از معادله (۳.۳۹) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}(l+1)P_{l+1}^m(x) &- (2l+1)xP_l^m(x)\\ &- mP_{l+1}^m(x) + mP_{l-1}^m(x) + lP_{l-1}^m(x) = 0\end{aligned}$$

با جمعبندی جملات مشابه خواهیم داشت:

$$(l+1-m)P_{l+1}^m(x) - (2l+1)xP_l^m(x) + (l+m)P_{l-1}^m(x) = 0$$

که با تجدید ترتیب جملات آن نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

(iii) با ضرب طرفین معادله (۳.۴۱) در $(1-x^2)^{m/2}$ به دست می‌آید:

$$(1-x^2)^{m/2}P_{l+1}^{(m)}(x) - (1-x^2)^{m/2}P_{l-1}^{(m)}(x) = (2l+1)(1-x^2)^{m/2}P_l^{(m-1)}(x)$$

با استفاده از معادله (۳.۳۹) از معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$P_{l+1}^m(x) - P_{l-1}^m(x) = (2l+1)\sqrt{1-x^2}P_l^{m-1}(x) \qquad (۳.۴۲)$$

با تبدیل m به $m+1$ خواهیم داشت:

$$P_{l+1}^{m+1}(x) - P_{l-1}^{m+1}(x) = (2l+1)\sqrt{1-x^2}P_l^m(x)$$

و با تقسیم طرفین رابطه فوق بر $2l+1$ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

(iv) از رابطه (ii) استفاده نموده، در (i) به جای $xP_l^m(x)$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{2l+1}\{(l+m)P_{l-1}^m(x) + (l-m+1)P_{l+1}^m(x)\}$$

به دست می‌آید:

$$P_l^{m+1}(x) - \frac{2m}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{2l+1}\{(l+m)P_{l-1}^m(x) + (l-m+1)P_{l+1}^m(x)\} + \{l(l+1) - m(m-1)\}P_l^{m-1}(x) = 0$$

حال، اگر از معادله (۳.۴۲) برای $P_l^{m-1}(x)$ استفاده کنیم، به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$P_l^{m+1}(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{2m}{2l+1}\{(l+m)P_{l-1}^m(x) + (l-m+1)P_{l+1}^m(x)\} + \{l(l+1) - m(m-1)\}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{2l+1}\{P_{l+1}^m(x) - P_{l-1}^m(x)\} = 0$$

با انجام عملیات ساده جبری بر روی عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\sqrt{1-x^2}P_l^{m+1}(x) = \frac{1}{2l+1}\{(l+m)(l+m+1)P_{l-1}^m(x) - (l-m)(l-m+1)P_{l+1}^m(x)\}$$

که با تعویض m به $m-1$ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۳.۱۰ توابع لژاندر نوع دوم

در نخستین بخش این فصل دو جواب مستقل $y_1(x)$ و $y_2(x)$ به صورت سری توانی از معادله لژاندر به دست آوردیم. در رابطه با جوابهای متناهی روی فاصله $[-1,1]$ (و در واقع، متناهی برای مقادیر متناهی x)، دیدیم که وقتی l عددی زوج باشد، $y_1(x)$ به یک چندجمله‌ای تبدیل می‌شود، و وقتی l عددی فرد باشد، $y_2(x)$ به یک چندجمله‌ای تبدیل می‌شود، که روی فاصله $[-1,1]$ متناهی هستند. در هر دو حالت فوق سری باقیمانده مربوط به دومین جواب نامتناهی است، و می‌توان نشان داد که این سری برای $|x| < 1$ همگرا و برای $|x| \geq 1$ واگرا است. در برخی حالات فیزیکی ما به جوابهایی نیاز داریم که در ناحیه $|x| > 1$ تعریف شده باشند. مسلماً، یکی از جوابها $P_l(x)$ است، در حالیکه دومین جواب با استفاده از قضیه زیر به دست می‌آید (توجه داشته باشید که، این جواب باز در $x = \pm 1$ نامتناهی است).

قضیهٔ ۳.۱۳. دومین جواب مستقل معادله لژاندر از روابط زیر به دست می‌آید:

$$Q_l(x) = \frac{1}{2}P_l(x)\ln\frac{1+x}{1-x} - \sum_{r=0}^{[\frac{l-1}{2}]} \frac{(2l-4r-1)}{2r+1)(l-r)}P_{l-2r-1}(x) \qquad (l \geq 1)$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

که در آن:

$$\left[\frac{l-1}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{l-1}{2} & \text{اگر } l \text{ فرد باشد،} \\ \dfrac{l-2}{2} & \text{اگر } l \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

$Q_l(x)$ را تابع لژاندر نوع دوم می‌نامند.

اثبات.* در معادله لژاندر، قرار می‌دهیم $y = zP_l(x)$، که در آن z تابعی وابسته به x است. در این صورت، خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx} = P_l(x)\frac{dz}{dx} + z\frac{dP_l}{dx}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = P_l(x)\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dP_l}{dx} + z\frac{d^2P_l}{dx^2}$$

و در نتیجه معادله لژاندر به صورت زیر در می‌آید:

$$(1-x^2)P_l(x)\frac{d^2z}{dx^2} + 2(1-x^2)\frac{dz}{dx}\frac{dP_l}{dx} + (1-x^2)z\frac{d^2P_l}{dx^2} - 2xP_l(x)\frac{dz}{dx} - 2xz\frac{dP_l}{dx} + l(l+1)zP_l(x) = 0$$

با گردآوری جملات شامل z، $\frac{dz}{dx}$ و $\frac{d^2z}{dx^2}$، خواهیم داشت:

$$z\left\{(1-x^2)\frac{d^2P_l}{dx^2} - 2x\frac{dP_l}{dx} + l(l+1)P_l(x)\right\} + \left\{2(1-x^2)\frac{dP_l}{dx} - 2xP_l(x)\right\}\frac{dz}{dx} + (1-x^2)P_l(x)\frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

از معادله فوق، با استفاده از این حقیقت که P_l در معادله لژاندر صدق می‌کند، نتیجه می‌شود:

$$(1-x^2)P_l(x)\frac{d^2z}{dx^2} + \left\{2(1-x^2)\frac{dP_l}{dx} - 2xP_l(x)\right\}\frac{dz}{dx} = 0$$

بنابراین:

$$\frac{d^2z/dx^2}{dz/dx} + 2\frac{dP_l/dx}{P_l(x)} - \frac{2x}{1-x^2} = 0$$

و این معادله هم‌ارز معادله زیر است:

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{dz}{dx}\right) + 2\frac{d}{dx}\ln P_l(x) + \frac{d}{dx}\ln(1-x^2) = 0$$

*) اثبات این قضیه را می‌توان در اولین دور مطالعه حذف نمود، اثبات در صفحه ۱۰۴ به پایان می‌رسد.

با انتگرالگیری از معادله فوق به دست می‌آید*:

$$\ln \frac{dz}{dx} + \ln\{P_l(x)\}^2 + \ln(1-x^2) = \text{constant}$$

بنابراین، ثابتی مانند A وجود دارد، به‌طوری که:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)\{P_l(x)\}^2(1-x^2) = \text{constant} = A$$

و یا:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{A}{\{P_l(x)\}^2(1-x^2)}$$

و در نتیجه:

$$z = A\int \frac{dx}{\{P_l(x)\}^2(1-x^2)}$$

رابطه فوق به این معنی است که، ما جوابی از معادله لژاندر داریم، که با رابطه:

$$Q_l(x) = P_l(x)\int \frac{dx}{\{P_l(x)\}^2(1-x^2)} \qquad (۳.۴۳)$$

تعریف می‌شود.

اکنون باید نشان دهیم که، $Q_l(x)$ را می‌توان به فرمی که در قضیه بیان شده است، نوشت. برای این کار ابتدا حالت $l = 0$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= P_0(x)\int \frac{dx}{P_0(x)^2(1-x^2)} \\ &= \int \frac{dx}{1-x^2} \\ &= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\{-\ln(1-x) + \ln(1+x)\} \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}. \end{aligned}$$

حال، فرض کنیم $l \neq 0$. با توجه به اینکه $P_l(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه l است، می‌توان آن را به فرم زیر نوشت:

$$P_l(x) = k_l(x-\alpha_1)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n).$$

*) در جریان اثبات در روابطی که باید از فرمول $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ استفاده می‌شده است (u یک تابع حقیقی ناصفر مشتق‌پذیر است)، مؤلف کتاب علامت | | را جاانداخته است. مترجم.

بنابراین، طبق قانون تجزیه کسرهای مرکب به کسرهای ساده، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{(1-x^2)\{P_l(x)\}^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)k_l^2(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2\dots(x-\alpha_l)^2}$$
$$= \frac{a_0}{1-x} + \frac{b_0}{1+x} + \sum_{r=1}^{l}\left\{\frac{c_r}{x-\alpha_r} + \frac{d_r}{(x-\alpha_r)^2}\right\} \qquad (۳.۴۴)$$

می‌توان با روشی کاملاً ساده ضرایب a_0 و b_0 و c_r را تعیین نمود. با ضرب طرفین معادله (۳.۴۴) در $(1-x^2)\{P_l(x)\}^2$ خواهیم داشت:

$$1 = a_0(1+x)\{P(x)\}^2 + b_0(1-x)\{P_l(x)\}^2$$
$$+ (1-x^2)\{P_l(x)\}^2\{\sum_{i=1}^{l}\frac{c_r}{x-\alpha_r} + \frac{d_r}{(x-\alpha_r)^2}\}.$$

با قرار دادن $x = 1$ در این معادله، و با یادآوری اینکه $P_l(1) = 1$ است، خواهیم داشت $a_0 = \frac{1}{2}$، همچنین، با قرار دادن $x = -1$ در معادله فوق، و با توجه به رابطه $P_l(-1) = (-1)^l$، به دست می‌آید $b_0 = \frac{1}{2}$.

حال، نشان می‌دهیم که:

$$c_i = \left[\frac{d}{dx}\left\{(x-\alpha_i)^2\frac{1}{(1-x^2)\{P_l(x)\}^2}\right\}\right]_{x=\alpha_i}.$$

برای اثبات رابطه فوق، کافی است توجه کنیم که:

$$\frac{d}{dx}\{(x-\alpha_i)^2 f(x)\} = 2(x-\alpha_i)f(x) + (x-\alpha_i)^2\frac{df(x)}{dx}$$

و مقدار سمت راست به ازاء $x = \alpha_i$، به شرط اینکه $f(x)$ متناهی باشد، برابر صفر است.

تنها جملاتی که در سمت راست معادله (۳.۴۴) به ازاء $x = \alpha_i$ متناهی نیستند، جملات $\frac{c_i}{x-\alpha_i}$ و $\frac{d_i}{(x-\alpha_i)^2}$ هستند. بنابراین، داریم:

$$\left[\frac{d}{dx}(x-\alpha_i)^2\ \frac{1}{(1-x^2)\{P_l(x)\}^2}\right]_{x=\alpha_i}$$
$$= \left[\frac{d}{dx}(x-\alpha_i)^2\left\{\frac{c_i}{x-\alpha_i} + \frac{d_i}{(x-\alpha_i)^2}\right\}\right]_{x=\alpha_i}$$

$$= \left[\frac{d}{dx}\{c_i \cdot (x-\alpha_i) + d_i\}\right]_{x=\alpha_i}$$
$$= [c_i]_{x=\alpha_i}$$
$$= c_i$$

در نتیجه، اگر $P_l(x)$ را به‌صورت $P_l(x) = (x-\alpha)L(x)$ بنویسیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} c_l &= \left[\frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x^2)\{L(x)\}^2}\right]_{x=\alpha_i} \\ &= \left[\frac{2x}{(1-x^2)\{L(x)\}^2} - \frac{2L'(x)}{(1-x^2)\{L(x)\}^2}\right]_{x=\alpha_i} \\ &= \left[\frac{2xL(x) - 2(1-x^2)L'(x)}{(1-x^2)\{L(x)\}^2}\right]_{x=\alpha_i} \\ &= \frac{2\{\alpha_i \cdot L(\alpha_i) - (1-\alpha_i^2)L'(\alpha_i)\}}{(1-\alpha_i^2)\{L(\alpha_i)\}^2} \end{aligned} \tag{۳.۴۵}$$

اما، با قرار دادن $P_l(x) = (x-\alpha_i)L(x)$ در معادله لژاندر، می‌توان نوشت:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\{(x-\alpha_i)L(x)\} - 2x\frac{d}{dx}\{(x-\alpha_i)L(x)\} + l(l+1)(x-\alpha_i)L(x) = 0$$

و با انجام عمل مشتق‌گیری از رابطه فوق، به دست می‌آید:

$$(1-x^2)\{(x-\alpha_i)L''(x) + 2L'(x)\} - 2x\{(x-\alpha_i)L'(x) + L(x)\} + l(l+1)(x-\alpha_i)L(x) = 0$$

با قرار دادن $x = \alpha_i$ در این معادله خواهیم داشت:

$$(1-\alpha_i^2)2L'(\alpha_i) - 2\alpha_i \cdot L(\alpha_i) = 0$$

و با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۳.۴۵) به دست می‌آوریم $c_i = 0$.

بنابراین، از رابطه (۳.۴۴) به رابطه:

$$\frac{1}{(1-x^2)\{P_l(x)\}^2} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} + \sum_{r=1}^{l}\frac{d_r}{(x-\alpha_r)^2}$$

می‌رسیم، که در آن d_rها ثابتهایی هستند، که مقادیر آنها هنوز مورد بحث و بررسی ما قرار نگرفته است. از رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$\int \frac{1}{(1-x^2)\{P_l(x)\}^2}dx$$
$$= -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) - \sum_{r=1}^{l}\frac{d_r}{x-\alpha_r}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \sum_{r=l}^{l}\frac{d_r}{x-\alpha_r}$$

بنابراین، از معادله (۳.۴۳) خواهیم داشت:

$$Q_l(x) = \frac{1}{2}P_l(x)\ln\frac{1+x}{1-x} - \sum_{r=1}^{l} d_r\frac{P_l(x)}{x-\alpha_r}$$

اما، $x-\alpha_r$ برای همه α_rها فاکتوری از $P_l(x)$ است، در نتیجه $\frac{P_l(x)}{x-\alpha_r}$ یک چندجمله‌ای از درجه $l-1$ است. بنابراین، $\sum_{r=1}^{l} d_r\frac{P_l(x)}{x-\alpha_r}$ یک چندجمله‌ای از درجه $l-1$ است. این کثیرالجمله را به $W_{l-1}(x)$ نشان می‌دهیم. در این صورت، خواهیم داشت:

$$Q_l(x) = \frac{1}{2}P_l(x)\ln\frac{1+x}{1-x} - W_{l-1}(x)\cdot \qquad (۳.۴۶)$$

برای تعیین $W_{l-1}(x)$، یادآوری می‌کنیم، که $Q_1(x)$ جوابی از معادله لژاندر است، بنابراین:

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)\frac{dQ_l}{dx}\} + l(l+1)Q_l = 0$$

که با استفاده از معادله (۳.۴۶) از آن نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{d}{dx}P_l(x)\ln\frac{1+x}{1-x}\right\} + l(l+1)\cdot\frac{1}{2}P_l(x)\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}$$
$$-\frac{d}{dx}\{(1-x^2)\frac{dW_{l-1}}{dx}\} - l(l+1)W_{l-1} = 0 \qquad (۳.۴۷)$$

اما:

$$\frac{d}{dx}P_l(x)\ln\frac{1+x}{1-x} = P_l'(x)\ln\frac{1+x}{1-x} + P_l(x)\left\{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right\}$$

$$= P_l'(x)\ln\frac{1+x}{1-x} + P_l(x)\frac{2}{1-x^2}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}&\left\{(1-x^2)\frac{d}{dx}P_l(x)\ln\frac{1+x}{1-x}\right\}\\ &= \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)P_l'(x)\ln\frac{1+x}{1-x} + 2P_l(x)\right\}\\ &= \left\{\ln\frac{1+x}{1-x}\right\}\cdot\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P_l'(x)\} + (1-x^2)P_l'(x)\frac{2}{1-x^2} + 2P_l'(x)\cdot\end{aligned}$$

در نتیجه، معادله (۳.۴۷) به صورت:

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right\}&[\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P_l'(x)\} + l(l+1)P_l(x)] + 2P_l'(x)\\ &- \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dW_{l-1}}{dx}\right\} - l(l+1)W_{l-1} = 0\end{aligned}$$

در می‌آید. اما، با توجه به اینکه $P_l(x)$ در معادله لژاندر صدق می‌کند، معادله فوق به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dW_{l-1}}{dx}\right\} + l(l+1)W_{l-1} = 2\frac{dP_l}{dx} \tag{۳.۴۸}$$

حال، طبق قسمت (i) قضیه ۳.۸، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{dP_l}{dx} &= (2l-1)P_{l-1}(x) + (2l-5)P_{l-2}(x) + \dots\\ &\quad + (2l-4r-1)P_{l-2r-1}(x) + \dots\\ &= \sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}(l-1)]}(2l-4r-1)P_{l-2r-1}(x)\end{aligned} \tag{۳.۴۹}$$

بنابراین، اگر فرض کنیم $W_{l-1}(x)$ (که چنانکه می‌دانیم کثیرالجمله‌ای از درجه $l-1$ است) به فرم:

$$\begin{aligned}W_{l-1}(x) &= a_0P_{l-1}(x) + a_1P_{l-2}(x) + \dots\\ &= \sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}(l-1)]}a_rP_{l-2r-1}(x)\end{aligned} \tag{۳.۵۰}$$

است، و معادلات (۳.۴۹) و (۳.۵۰) را در معادله (۳.۴۸) جایگذاری کنیم، به‌دست خواهیم آورد:

$$\sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}(l-1)]} a_r \frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_{l-2r-1}(x)\} + l(l+1) \sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}(l-1)]} a_r P_{l-2r-1}(x)$$
$$= 2 \sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}(l-1)]} (2l-4r-1)P_{l-2r-1}(x) \quad (۳.۵۱)$$

اما، طبق معادله لژاندر، داریم:

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P'_{l-2r-1}(x)\} + (l-2r-1)(l-2r)P_{l-2r-1}(x) = 0$$

بنابراین، از معادله (۳.۵۱) نتیجه می‌شود:

$$\sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}(l-1)]} a_r\{-(l-2r-1)(l-2r) + l(l+1)\}P_{l-2r-1}(x)$$
$$= \sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}(l-1)]} 2(2l-4r-1)P_{l-2r-1}(x)\cdot$$

ضرایب هر یک از چندجمله‌ایهای مشابه در دو طرف تساوی فوق باید مساوی باشد، در نتیجه، باید داشته باشیم:

$$\{-(l-2r-1)(l-2r) + l(l+1)\}a_r = 2(2l-4r-1)\cdot \quad (۳.۵۲)$$

اما:

$$\begin{aligned} -(l-2r-1)(l-2r) + l(l+1) & \\ &= -(l-2r)^2 + (l-2r) + l(l+1) \\ &= -l^2 + 4rl - 4r^2 + l - 2r + l^2 + l \\ &= 4r(l-r) + 2(l-r) \\ &= 2(l-r)(2r+1) \end{aligned}$$

بنابراین، معادله (۳.۵۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$2(l-r)(2r+1)a_r = 2(2l-4r-1)$$

و از این معادله نتیجه می‌شود:

$$a_r = \frac{2l - 4r - l}{(l - r)(2r + 1)} \tag{۳.۵۳}$$

اکنون با ترکیب معادلات (۳.۵۳)، (۳.۵۰) و (۳.۴۶) فوراً نتیجه مورد نظر در قضیه حاصل می‌شود.

به سادگی دیده می‌شود که، جواب $Q_l(x)$ که از معادله لژاندر به دست آوردیم، مستقل از $P_l(x)$ است. زیرا، به دلیل وجود عامل $\ln \frac{1+x}{1-x}$ در $Q_l(x)$، این جواب در نقاط $x = \pm 1$ نامتناهی است، در حالی که، چنان که می‌دانیم $P_l(x)$ در نقاط $x = \pm 1$ متناهی است.

با استفاده از قضیه فوق صراحتاً می‌توان تعدادی از نخستین توابع لژاندر نوع دوم را به دست آورد:

$$\begin{aligned}
Q_0(x) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \\
Q_1(x) &= \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1 \\
Q_2(x) &= \frac{1}{4}(3x^2 - 1) \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x \\
Q_3(x) &= \frac{1}{4}(5x^3 - 3x) \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

اکنون چند قضیه مربوط به توابع لژاندر نوع دوم را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۳.۱۴. اگر $x > 1$ و $|y| \leq 1$ باشد، آنگاه:

$$\frac{1}{x - y} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) P_l(x) Q_l(y)$$

قضیهٔ ۳.۱۵. (فرمول نویمان). اگر l یک عدد صحیح غیرمنفی باشد، آنگاه:

$$Q_l(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_l(y)}{x - y} dy.$$

قضیهٔ ۳.۱۶. نتایج مندرج در قضیه ۳.۸ (ii-ix) وقتی به جای $P_l(x)$، $Q_l(x)$ گذاشته شود، معتبر باقی می‌ماند.

قضیهٔ ۳.۱۷. تابع لژاندر وابسته نوع دوم که با رابطه:

$$Q_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Q_l(x)$$

تعریف می‌شود، در معادله لژاندر وابسته صدق می‌کند.

۳.۱۱ همسازهای کروی

در بسیاری از شاخه‌های فیزیک و مهندسی از معادله:

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+l(l+1)\psi=0 \qquad (۳.۵۴)$$

که آن را همساز کروی می‌نامند، استفاده می‌شود. (این معادله معمولاً از حل معادلاتی مانند معادله لاپلاس یا معادله شرودینگر که برحسب مختصات کروی ϕ, θ, r نوشته شده باشند، ناشی می‌شود. بنابراین، دامنه متغیرهای مورد بحث از روابط $0 \leq \theta \leq \pi$ ،$0 \leq \phi \leq 2\pi$ به دست می‌آیند، و ما اغلب به جوابی نیاز داریم، که برای این مقادیر متناهی و پیوسته باشند. پیوستگی ایجاب می‌کند، که مقادیر ψ در $\phi = 2\pi$ و $\phi = 0$ یکسان باشد.)

یک روش برای پیدا کردن جواب معادله (۳.۵۴) که روش جدا کردن متغیرها نامیده شده است، جستجو برای پیدا کردن جوابی به فرم $\psi(\theta و \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ از معادله است. با جایگذاری این عبارت در معادله (۳.۵۴) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\Phi(\phi)}{\sin\theta}\left\{\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\right\}+\frac{\Theta(\theta)}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+l(l+1)\Theta(\theta)\Phi(\phi)=0$$

و با تقسیم طرفین رابطه فوق بر $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ و ضرب نمودن آن در $\sin^2\theta$ به دست می‌آید:

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+l(l+1)\sin^2\theta=0$$

با تجدید ترتیب جملات این معادله، خواهیم داشت:

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}.$$

اکنون سمت چپ این معادله تابعی است فقط از متغیر θ، در حالی که، سمت راست آن تابعی فقط از متغیر ϕ است. از آنجا که متغیرهای θ و ϕ مستقل هستند، نتیجه می‌گیریم که، سمت چپ و سمت راست باید برابر با مقدار ثابتی باشند، که ما آن را به m^2 نشان می‌دهیم *.

بنابراین، داریم:

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=m^2 \qquad (۳.۵۵)$$

$$-\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=m^2 \qquad (۳.۵۶)$$

*) این مقدار ثابت می‌تواند برابر $-m^2$ نیز باشد، اما به دلیل اینکه از نتایج حاصل از آن کمتر در مسائل فیزیکی استفاده می‌شود، مورد بحث مؤلف کتاب قرار نگرفته است. مترجم.

اکنون معادله (۳.۵۶) را می‌توان به صورت:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2\Phi \qquad (۳.۵۷)$$

نوشت، حال آن که، معادله (۳.۵۵) پس از ساده کردن به صورت:

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left\{l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}\Theta \qquad (۳.۵۸)$$

در می‌آید.

معادله (۳.۵۷) دارای جواب عمومی:

$$\Phi = Ae^{im\phi} + Be^{-im\phi}$$

است، که در آن، اگر جواب پیوسته باشد، باید داشته باشیم $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$، بنابراین، m باید عددی صحیح باشد (که می‌توان آن را به طور قراردادی مثبت گرفت).

در معادله (۳.۵۸) تغییر متغیر $x = \cos\theta$ می‌دهیم. در این صورت، خواهیم داشت $dx = -\sin\theta d\theta$، و در نتیجه:

$$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta} = -\frac{d}{dx}$$

و

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta} = (\sin^2\theta)\left(-\frac{d}{dx}\right) = -(1-x^2)\frac{d}{dx}$$

با توجه به روابط فوق، معادله (۳.۵۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right\} + \left\{l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}\Theta = 0$$

که ما آن را به عنوان معادله لژاندر وابسته می‌شناسیم. معادله فوق تنها وقتی l یک عدد صحیح باشد، دارای جوابی است که در $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ ($x = 1$ و $x = -1$) متناهی است. در چنین حالتی جواب متناهی طبق فرمول $\Theta = P_l^m(x) = P_l^m(\cos\theta)$ به دست می‌آید.

بنابراین، جوابی عمومی که در نقاط $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ متناهی و پیوسته است، باید به صورت:

$$\psi(\theta, \phi) = (Ae^{im\phi} + Be^{-im\phi})P_l^m(\cos\theta)$$

باشد، که با توجه به معادله (۳.۳۷)، می‌توان آن را به فرم:

$$\psi = A_1 e^{im\phi}P_l^m(\cos\theta) + A_2 e^{-m\phi}P_l^{-m}(\cos\theta)$$

نوشت، که در آن:

$$A_1 = A$$
$$A_2 = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} B\cdot$$

حال، اگر قرار دهیم:

$$y_l^m(\theta,\phi) = e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta) \qquad (۳.۵۹)$$

می‌توانیم جواب عمومی را به صورت زیر بنویسیم:

$$\psi = A_1 y_l^m(\theta,\phi) + A_2 y_l^{-m}(\theta,\phi)$$

البته، برای هر مقدار دلخواه m، این جوابی از معادله اصلی (۳.۵۴) است، و چون معادله (۳.۵۴) معادله‌ای همگن است،

$$\psi = \sum_{m=0}^{l} \{A_1(m) y_l^m(\theta,\phi) + A_2^{(m)} y_l^{-m}(\theta,\phi)\}$$

نیز جوابی از معادله (۳.۵۴) خواهد بود.

برای بسیاری اهداف، مفیدتر این است که، به جای y_l^m ضریبی از آن (که به علامت Y_l^m نشان خواهیم داد) به عنوان جواب پایه (جواب اساسی) مورد بررسی قرار گیرد. ضریب انتخاب شده چنان است که جوابها نرمال شده و متعامد به مفهوم:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} (\sin\theta)\{Y_l^m(\theta,\phi)\}^* Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi) d\theta = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \qquad (۳.۶۰)$$

باشند، که در آن * به عنوان مزدوج مختلط در نظر گرفته شده است.

به سادگی می‌توان ثابت نمود، که این کار با انتخاب:

$$\begin{aligned} Y_l^m(\theta,\phi) &= (-1)^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} y_l^m(\theta,\phi) \\ &= (-1)^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta) \qquad (۳.۶۱) \end{aligned}$$

تحقق می‌یابد. زیرا، در این صورت، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \{Y_l^m(\theta,\phi)\}^* Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi) \sin\theta d\theta \\ &= (-1)^{m+m'} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l-m)!(l'-m')!}{4(l+m)(l'+m')}} \\ &\int_0^{2\pi} e^{i(m'-m)\phi} d\phi \int_0^{\phi} P_l^m(\cos\theta) P_{l'}^{m'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

(با استفاده از این حقیقت که $P_l^m(x)$ حقیقی است)،

$$= (-1)^{m+m'}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l-m)!(l'-m')!}{4(l+m)!(l'+m')!}}$$

$$\cdot\, 2\pi\delta_{m'm}\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_{l'}^{m'}(x)dx$$

(زیرا، اولین انتگرال به جز در حالت $m = m'$ برابر صفر است، و در حالت $m = m'$ برابر 2π است، و در دومین انتگرال تغییر متغیر $x = \cos\theta$ داده‌ایم)

$$= (-1)^{2m}\sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l-m)!(l-m)!}{4(l+m)!(l'+m)!}}\delta_{m'm}\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_{l'}^m(x)dx$$

$$= \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)(l-m)!(l'-m)!}{(l+m)!(l'+m)!}}\delta_{m'm}\frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\delta_{ll'}$$

(طبق قضیه ۳.۱۱)

$$= \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

فاکتور $(-1)^m$ در تعریف (۳.۶۱) از $Y_l^m(\theta,\phi)$ که ما آن را به عنوان همسازکروی پایه خواهیم گرفت، برای خاصیت متعامدیکه بودن ضروری نیست، با وجود این، استفاده از آن معمول است (هر چند خواننده باید بداند که، در برخی از مباحث مربوط به همسازهای کروی که توسط نویسندگان مختلفی نوشته‌اند، از قراردادهای متفاوتی استفاده شده است).

قضیهٔ ۳.۱۸. بین همسازهای کروی $Y_l^m(\theta,\phi)$ و $Y_l^{-m}(\theta,\phi)$ رابطه زیر برقرار است:

$$\{Y_l^m(\theta,\phi)\}^* = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta,\phi)$$

اثبات. داریم:

$$\{Y_l^m(\theta,\phi)\}^* = (-1)^m\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}e^{-im\phi}P_l^m(\cos\theta)$$

(طبق معادله (۳.۶۱))

$$= (-1)^m\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}e^{-im\phi}(-1)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!}P_l^{-m}(\cos\theta)$$

(طبق معادله (۳.۳۷))

$$= (-1)^m(-1)^{-m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}e^{-im\phi}P_l^{-m}(\cos\theta)$$

$$= (-1)^m Y^{-m}(\theta,\phi) \qquad \text{((طبق معادله (۳.۶۱}$$

با استفاده از تعریفهای مربوط به $Y_l^m(\theta,\phi)$ و $P_l^m(\cos\theta)$ می‌توان عبارتهای صریحی برای تعدادی از همسازه‌های کروی به دست آورد:

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

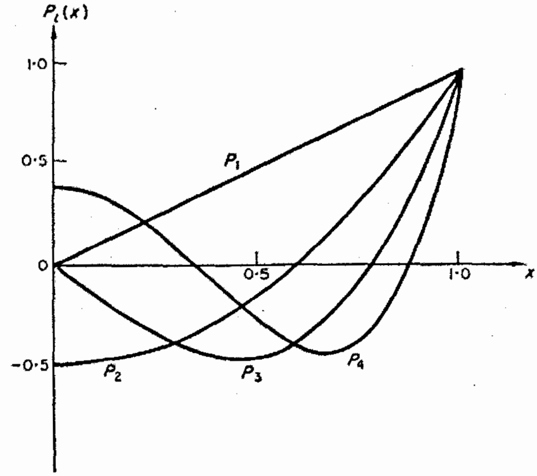
$$Y_1^{\pm1} = \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi},\ Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_2^{\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi},\ Y_2^{\pm1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}$$

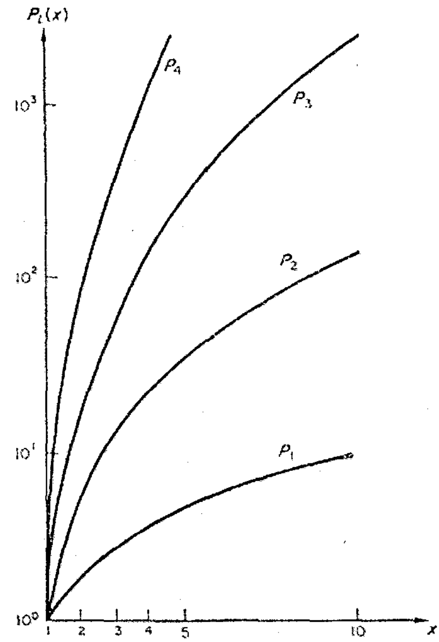
$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1) \qquad (۳.۶۲)$$

۳.۱۲ نمودارهای توابع لژاندر

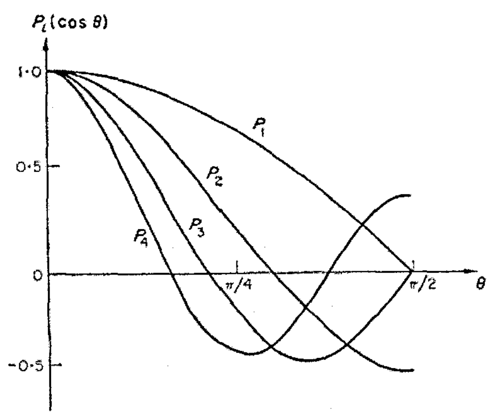
در این بخش نمودار چند تابع که در این فصل با آنها مواجه شده‌ایم، رسم شده است.



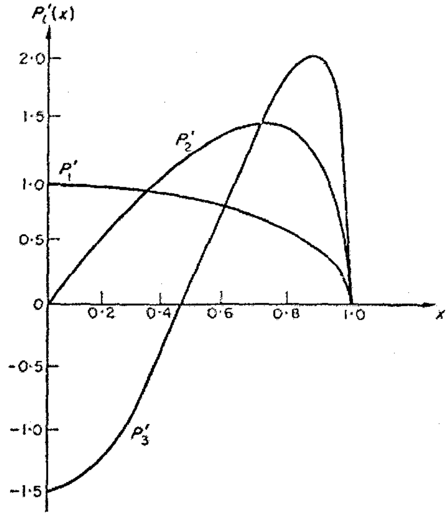
شکل ۳.۲ نمودار تابع $P_l(x)$ برای $0 \le x \le 1$ و $l = 1, 2, 3, 4$



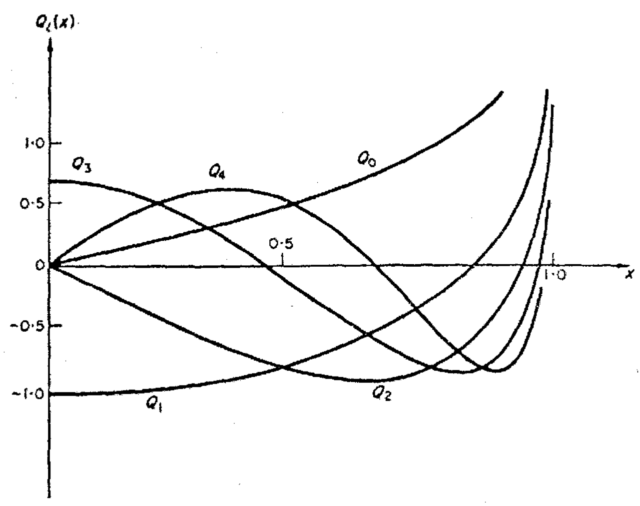
شکل ۳.۳ $P_l(x)$ برای $x \geq 1$ و $l = 1, 2, 3, 4$ (توجه کنید که مقیاس روی محور عمودی لگاریتمی است.)



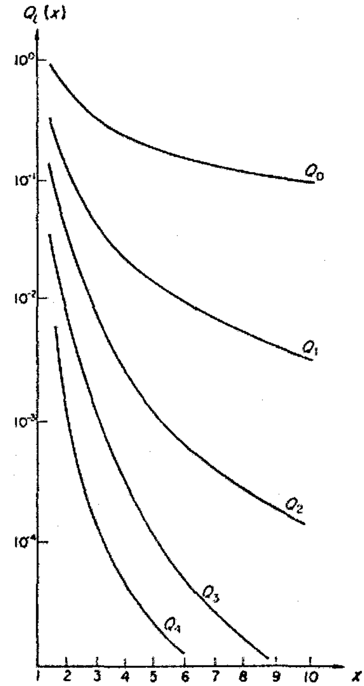
شکل ۳.۴ $P_l(\cos\theta)$ برای $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ و $l = 1, 2, 3, 4$



شکل ۳.۵ $P_l'(x)$ برای $0 \leq x \leq 1$ و $l = 1, 2, 3$.



شکل ۳.۶ $Q_l(x)$ برای $0 \leq x \leq 1$ و $l = 0, 1, 2, 3, 4$



شکل ۳.۷ $Q_l(x)$ برای $x \geq 1$ و $l = 0,1,2,3,4$ (توجه کنید که مقیاس روی محور عمودی لگاریتمی است.)

۳.۱۳ مثالها

مثال ۱ . نشان دهید که:

$$\int_{-1}^{1} x^2 P_{l+1}(x) P_{l-1}(x) dx = \frac{2l(l+1)}{(4l^2-1)(2l+3)}$$

با استفاده از رابطه فوق مقدار

$$\int_{0}^{1} x^2 P_{l+1}(x) P_{l-1}(x) dx$$

را به دست آورید.

حل. برای مصرف کردن x^2 که در تابع زیر علامت انتگرال ظاهر شده است، از قسمت (ii) قضیه ۳.۸ استفاده نموده، سپس، خاصیت اورتونرمالیتی (متعامد بودن) را که در قضیه ۳.۵ بیان شده است، مورد

استفاده قرار می‌دهیم. داریم:

$$\int_{-1}^{1} x^2 P_{l+1}(x)P_{l-1}(x)dx = \int_{-1}^{1}\{xP_{l+1}(x)\}\{xP_{l-1}(x)\}dx$$
$$= \int_{-1}^{1}\{\frac{l+2}{2l+3}P_{l+2}(x) + \frac{l+1}{2l+3}P_l(x)\}\{\frac{1}{2l-3}P_l(x) + \frac{l-1}{2l-1}P_{l-2}(x)\}dx$$
$$= \int_{-1}^{1}\frac{l+1}{2l+3}P_l(x)\frac{1}{2l-1}P_l(x)dx$$

(به علت اینکه طبق قضیه ۳.۵ برای $l \neq m$، $\int_{-1}^{1} P_l(x)P_m(x)dx = 0$ است، بقیه جملات صفر هستند).

$$= \frac{l(l+1)}{(2l+3)(2l-1)}\int\{P_l(x)\}^2 dx$$
$$= \frac{l(l+1)}{(2l+3)(2l-1)}\cdot\frac{2}{2l+1}$$

(طبق قضیه ۳.۵)

$$= \frac{2l(l+1)}{(4l^2-1)(2l+3)}$$

می‌دانیم که $P_l(x)$ کثیرالجمله‌ای از درجه l است، بنابراین، عبارت $x^2P_{l+1}(x)P_{l-1}(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $2 + (l+1) + (l-1) = 2(l+1)$، یعنی، از درجه زوج است، و در نتیجه، تابع $x^2P_{l+1}(x)P_{l-1}(x)$ تابعی زوج است، بنابراین:

$$\int_{-1}^{1} x^2P_{l+1}(x)P_{l-1}(x)dx = 2\int_{0}^{1} x^2P_{l+1}(x)P_{l-1}dx$$

و در نتیجه:

$$\int_{0}^{1} x^2P_{l+1}(x)P_{l-1}(x)dx = \frac{l(l+1)}{(4l^2-1)(2l+3)}$$

مثال ۲ . انتگرال $\int_0^1 P_l(x)dx$ را وقتی l عددی فرد باشد، محاسبه کنید.

حل. طبق قسمت (iv) قضیه ۳.۸، داریم:

$$\int_0^1 P_l(x)dx = \frac{1}{2l+1}\int_0^1[P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)]dx$$
$$= \frac{1}{2l+1}[P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)]_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2l+1}\{P_{l+1}(1) - P_{l-1}(1) - P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0)\}$$

$$= \frac{1}{2l+1}\left\{1-1-\frac{(-1)^{(l+1)/2}}{2^{l+1}}\cdot\frac{(l+1)}{(\{(l+1)/2\}!)^2}+\frac{(-1)^{(l-1)/2}}{2^{l-1}}\cdot\frac{(l-1)!}{[\{(l-1)/2\}!]^2}\right\}$$

(طبق قسمتهای (i) و (v) قضیه ۳.۴، با توجه به اینکه $l+1$ و $l-1$ هر دو فرد هستند)

$$= \frac{1}{2l+1}\cdot\frac{(-1)^{(1-1)/2}}{2^{l-1}}\cdot\frac{(l-1)!}{[\{(l-1)/2\}!]^2}\left[1-\frac{(-1)(l+1)l}{2^2\{(l+1)/2\}^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2l+1}.\frac{(-1)^{(l-1)/2}}{2^{l-1}}.\frac{(l-1)!}{[\{(l-1)/2!\}]^2}\left[1+\frac{l}{l+1}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{(l-1)/2}(l-1)!}{2^l(\frac{1}{2}l+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}l-\frac{1}{2})!(\frac{1}{2}l-\frac{1}{2})!}$$

$$= \frac{(-1)^{(l-1)/2}(l-1)!}{2^l(\frac{1}{2}l+\frac{1}{2})!(\frac{1}{2}l-\frac{1}{2})!}$$

مثال ۳ . اگر برای $-1 \leq x \leq 1$، $f(x) = |x|$ باشد، تابع $f(x)$ را به فرم:

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r P_r(x)$$

بسط دهید.

حل. طبق قضیه ۳.۷، می‌دانیم که چنین بسطی ممکن است، و c_r از فرمول:

$$c_r = (r+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1}|x|P_r(x)dx$$

به دست می‌آید.

اما، $|x|$ تابعی زوج است، و $P_r(x)$ اگر r عدد زوج باشد تابعی زوج، و اگر r عددی فرد باشد تابعی فرد است، بنابراین، اگر r عددی فرد باشد $|x|P_r(x)$ تابعی فرد است، و در این حالت $\int_{-1}^{1}|x|P_r(x)dx = 0$، و در نتیجه $c_r = 0$. از طرف دیگر، اگر r عددی زوج باشد، $|x|P_r(x)$ تابعی زوج خواهد بود، بنابراین:

$$\int_{-1}^{1}|x|P_r(x)dx = 2\int_{0}^{1}|x|P_r(x)dx = 2\int_{0}^{1}xP_r(x)dx$$

و در نتیجه:

$$c_r = (2r+1)\int_{0}^{1}xP_r(x)dx \qquad (۳.۶۳)$$

برای محاسبه این انتگرال از قسمت (ii) قضیه ۳.۸ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} c_r &= (2r+1)\int_0^1 \left\{\frac{r+1}{2r+1}P_{r+1}(x) + \frac{r}{2r+1}P_{r-1}(x)\right\}dx \\ &= \int_0^1 \{(r+1)P_{r+1}(x) + rP_{r-1}(x)\}dx\cdot \end{aligned}$$

حال، چون r زوج فرض شده است، $r+1$ و $r-1$ فرد هستند، و می‌توانیم از نتیجه مثال ۲ استفاده نموده، انتگرال فوق را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} c_r &= (r+1)\frac{(-1)^{r/2}r!}{2^{r+1}(\frac{1}{2}r+1)!(\frac{1}{2}r)!} + r\frac{(-1)^{(r/2)-1}(r-2)!}{2^{r-1}(\frac{1}{2}r)!(\frac{1}{2}r-1)!} \\ &= \frac{(-1)^{r/2}(r-2)!}{2^{r-1}(\frac{1}{2}r)!(\frac{1}{2}r-1)!}\left\{\frac{(r+1)r(r-1)}{2^2(\frac{1}{2}r+1)\frac{1}{2}r} - r\right\} \\ &= \frac{(-1)^{r/2}(r-2)!}{2^{r-1}(\frac{1}{2}r)!(\frac{1}{2}r-1)!}\left\{\frac{(r+1)(r-1)}{r+2} - r\right\} \\ &= \frac{(-1)^{r/2}(r-2)!}{2^{r-1}(\frac{1}{2}r)!(\frac{1}{2}r-1)!}\left\{\frac{r^2-1-r^2-2r}{2(\frac{1}{2}r+1)}\right\} \\ &= \frac{(-1)^{(r/2)+1}(2r+1)(r-2)!}{2^r(\frac{1}{2}r+1)!(\frac{1}{2}r-1)!}. \end{aligned} \tag{۳.۶۴}$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n+1)!(n-1)!}P_{2n}(x)$$

مثال ۴ . نشان دهید که، اگر $x > 1$ باشد، آنگاه $P_l(x) < P_{l+1}(x)$.

حل. مطلب فوق را با روش استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم. برای $l = 0$، داریم $P_0(x) = 1$ و $P_1(x) = x$، و واضح است که اگر $x > 1$ باشد، آنگاه $P_0(x) < P_1(x)$. فرض کنیم $P_{l-1}(x) < P_l(x)$. ثابت می‌کنیم $P_l(x) < P_{l+1}(x)$، که در این صورت قضیه برای کلیه مقادیر l ثابت خواهد شد.

در سرتاسر اثبات می‌توانیم فرض کنیم که برای $x > 1$، $P_l(x) > 0$، زیرا، از فرمول رودریگز (قضیه ۳.۲) به سادگی دیده می‌شود که*، اگر $x > 1$ باشد، آنگاه برای کلیه مقادیر l، $P_l(x) > 0$.
حال، طبق قسمت (iii) قضیه ۳.۸، می‌توان نوشت:

$$(l+1)\frac{P_{l+1}}{P_l} - (2_l+1)x + \frac{lP_{l-1}}{P_l} = 0$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\frac{P_{l+1}}{P_l} &= \frac{(2l+1)x}{l+1} - \frac{l}{l+1}\cdot\frac{P_{l-1}}{P_l}\\ &> \frac{2l+1}{l+1} - \frac{l}{l+l}\end{aligned}$$

(زیرا $x > 1$، و فرض کرده‌ایم $P_{l-1}/P_l < 1$)

$$\begin{aligned}&= \frac{l+1}{l+1}\\ &= 1\cdot\end{aligned}$$

و چون P_l برای همه مقادیر $x > 1$ مثبت است، از رابطه فوق نتیجه می‌شود $P_{l+1} > P_l$، و حکم به استقراء ثابت می‌شود.

مثال ۵ . ثابت کنید که:

$$\begin{aligned}&l\{Q_l(x)P_{l-1}(x) - Q_{l-1}(x)P_l(x)\}\\ &\qquad = (l-1)\{Q_{l-1}(x)P_{l-2}(x) - Q_{l-2}(x)P_{l-1}(x)\}\end{aligned}$$

و نتیجه بگیرید که:

$$l\{Q_l(x)P_{l-1}(x) - Q_{l-1}(x)P_(x)\} = -1$$

حل. با تبدیل l به $l-1$ در قسمت (iii) قضیه ۳.۸ خواهیم داشت:

$$lP_l(x) - (2l-1)xP_{l-1}(x) + (l-1)P_{l-2}(x) = 0 \qquad (۳.۶۵)$$

*) فرمول رودریگز به صورت: $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dxl}(x^2-1)^l$ است، و با توجه به رابطه $(x^2-1)^l = (x-1)^l(x+1)^l$ باروشهای مختلفی از جمله با استفاده از فرمول لایبنیتس می‌توان نشان داد که، مشتق مرتبه lام تابع $(x^2-1)^l$ برای $x > 1$ مثبت است، و در نتیجه، برای $x > 1$، $P_l(x) > 0$ است. مترجم.

همچنین، طبق قضیه ۳.۱۶، داریم:

$$lQ_l(x) - (2l-1)xQ_{l-1}(x) + (l-1)Q_{l-2}(x) = 0 \qquad (۳.۶۶)$$

با ضرب معادله (۳.۶۵) در $Q_{l-1}(x)$، و معادله (۳.۶۶) در $P_{l-1}(x)$ و با تفریق آنها از یکدیگر خواهیم داشت:

$$l\{P_l(x)Q_{l-1}(x)-Q_l(x)P_{l-1}(x)\}+(l-1)\{P_{l-2}(x)Q_{l-1}(x)-Q_{l-2}(x)P_{l-1}(x)\}=0$$

معادله فوق هم‌ارز معادله زیر است:

$$l\{Q_l(x)P_{l-1}(x)-Q_{l-1}(x)P_l(x)\} = (l-1)\{Q_{l-1}(x)P_{l-2}(x)-Q_{l-2}(x)P_{l-1}(x)\}$$

و این همان رابطه‌ای است که باید ثابت می‌کردیم.

حال، اگر تعریف کنیم:

$$F(l) = l\{Q_l(x)P_{l-1}(x) - Q_{l-1}(x)P_l(x)\}$$

نتیجه فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F(l) = F(l-1)$$

و از این رابطه به دست می‌آید:

$$F(l) = F(l-1) = F(l-1) = F(l-2) = \ldots = F(1)\cdot$$

بنابراین $F(l) = F(1)$، و در نتیجه:

$$l\{Q_l(x)P_{l-1}(x) - Q_{l-1}(x)P_l(x)\} = Q_1(x)P_0(x) - Q_0(x)P_1(x)$$

اما، می‌دانیم که:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ Q_0(x) &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \\ Q_1(x) &= \frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x} - 1 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$l\{Q_l(x)P_{l-1}(x) - Q_{l-1}(x)P_l(x)\} = \frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x} - 1 - \frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x} = -1$$

و نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

مسائل

(۱). نشان دهید که:

$$\int_{-1}^{1} xP_l(x)P_{l-1}(x)dx = \frac{2l}{4l^2-1}.$$

(۲). نشان دهید که:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_l'(x)P_m'(x)dx = \frac{2l(l+1)}{2l+1}\delta_{lm}$$

(۳). اگر $D \equiv \frac{d}{dx}$ ، با استفاده از دستور لایبنیتس ثابت کنید که*:

$$(1-x^2)^m D^{l+m}(x^2-1)^l = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} D^{l-m}(x^2-1)^l$$

$$(0 \leq m \leq l)$$

و از فرمول فوق نتیجه بگیرید که:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x).$$

(۴). اگر

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 1 \quad \text{برای} \\ -\frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \quad \text{برای} \end{cases}$$

باشد، $f(x)$ را به صورت:

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r P_r(x)$$

بسط دهید.

(۵). نشان دهید که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+m}^m(x)t^n = \frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!(1-2tx+t^2)^{m+\frac{1}{2}}}$$

(۶). اگر

$$u_n = \int_{-1}^{1} x^{-1}P_n(x)P_{n-1}(x)dx$$

*) در متن اصلی کتاب l توان x^2-1 در سمت راست جا افتاده است. مترجم.

باشد، نشان دهید که:

$$nu_n + (n-1)u_{n-1} = 2$$

و سپس مقدار u_n را محاسبه نمائید.

(۷). نشان دهید که:

$$\sum_{r=0}^{n}(2r+1)P_r(x) = P'_{n+1}(x) + P'_n(x)$$

(۸). نشان دهید که:

$$(1-x)\sum_{r=0}^{n}(2r+1)P_r(x) = (n+1)\{P_n(x) - P_{n+1}(x)\}$$

(۹). قضیه ۱۵.۳ را با استفاده از نتیجه قضیه ۳.۱۴ ثابت کنید.

(۱۰). نشان دهید که:

$$P_l(x)Q'_l(x) - P'_l(x)Q_l(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

(۱۱). نشان دهید که:

$$Y_l^m(0,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{mo}.$$

(۱۲). اگر $x > 1$ باشد، ثابت کنید:

$$Q_l(x) = \frac{1}{2^{l+1}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^l}{(x-t)^{l+1}}dt$$

و نتیجه بگیرید که:

(i) با تغییر متغیر:

$$t = \frac{e^\theta\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{e^\theta\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

به دست می‌آید:

$$Q_l(x) = \int_0^\infty \frac{d\theta}{\{x + \sqrt{x^2-1}\cosh\theta\}^{l+1}};$$

$$Q_l(x) = \frac{2^l}{x^{l+1}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(l+r)!(l+2r)!}{r!(2l+2r+1)!}\cdot\frac{1}{x^{2r}}. \qquad \text{(ii)}$$

فصل ۴

توابع بسل

۴.۱ معادله بسل و جوابهای آن؛ توابع بسل نوع اول و نوع دوم

معادله بسل مرتبه n با رابطه:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0 \qquad (۴.۱)$$

تعریف می‌شود (از آنجا که در معادله فوق تنها n^2 وارد شده است، همواره میتوان n را غیرمنفی فرض کرد).

چون معادله (۴.۱) معادله‌ای از نوع (۱.۲) با $q(x)=1$ و $r(x)=x^2-n^2$ است، می‌توان از روش‌هائی که در فصل ۱ بیان شده است، برای حل این معادله استفاده نمود، و مطمئن بود که، جوابهائی که به‌صورت سری توانی برای معادله فوق به‌دست می‌آیند، برای کلیه مقادیر x همگرا هستند.

با قرار دادن $z(x,s)=\sum\limits_{r=0}^{\infty}a_rx^{s+r}$ در معادله (۴.۱)، و با به کارگیری روشهای مشابهی که در حالت‌های قبلی مورد استفاده قرار داده‌ایم، به این نتیجه می‌رسیم که، z جوابی از معادله (۴.۱) خواهد بود، هرگاه:

$$\{s(s-1)+s-n^2\}a_0=0 \qquad (۴.۲)$$

$$\{(s+1)s+(s+1)-n^2\}a_1=0 \qquad (۴.۳)$$

$$\{(s+r)(s+r-1)+(s+r)-n^2\}a_r+a_{r-2}=0 \qquad (r\geq 2) \qquad (۴.۴)$$

از معادله (۴.۲) معادله شاخص $s^2-n^2=0$ با ریشه‌های $s=\pm n$ نتیجه می‌شود. وقتی تفاضل این ریشه‌ها، یعنی، $2n$ عددی صحیح نباشد، دو جواب مستقل از معادله به دست خواهد آمد.

معادله (۴.۳) را پس از ساده کردن میتوان به فرم زیر نوشت:

$$\{(s+1)^2 - n^2\}a_1 = 0$$

و چون $s^2 = n^2$ است، ممکن نیست که داشته باشیم* $(s+1)^2 = n^2$، بنابراین، $(s+1)^2 - n^2 \neq 0$ و در نتیجه $a_1 = 0$.

معادله (۴.۴) را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\{(s+r)^2 - n^2\}a_r + a_{r-2} = 0$$

از این معادله نتیجه می‌شود:

$$a_r = -\frac{a_{r-2}}{(s+r)^2 - n^2} \qquad (r \geq 2)$$

با قراردادن $s = n$ در معادله فوق به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_r &= -\frac{a_{r-2}}{(n+r)^2 - n^2} \\ &= -\frac{a_{r-2}}{(n+r-n)(n+r+n)} \\ &= -\frac{a_{r-2}}{r(2n+2)} \qquad (r \geq 2) \end{aligned} \tag{۴.۵}$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2(2n+2)} = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1(n+1)} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{4(2n+2)} = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2(n+2)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2!(n+1)(n+2)} \\ a_6 &= -\frac{a_4}{6(2n+6)} = -\frac{a_4}{2^2 \cdot 3(n+3)} = -\frac{a_0}{2^6 \cdot 3!(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

و در حالت کلی:

$$a_{2r} = (-1)^r \frac{a_0}{2^{2r} r!(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}$$

---

*) رابطه فوق تنها وقتی ممکن است که $s^2 = (s+1)^2 = n^2$، و یا $n = \frac{1}{2}$، $s = -\frac{1}{2}$ باشد. در این حالت a_1 مبهم (نامعین) است، و با قراردادن $s = -\frac{1}{2}$ و دلخواه فرض نمودن a_0 و a_1 میتوان به هر دو جواب مستقل معادله دست یافت، اما، نتایج متن درس هنوز معتبر است، زیرا، صفر انتخابی برای a_1 است، و دومین جواب مستقل معادله را می‌توان با استفاده از $s = \frac{1}{2}$ به‌دست آورد.

رابطه فوق را با استفاده از رابطه:

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)\cdots(n+r)&\\ &= (n+r)(n+r-1)\cdots(n+2)(n+1)\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)}\\ &= \frac{\Gamma(n+r+1)}{\Gamma(n+1)}\end{aligned}$$

که با استفاده مکرر از فرمول $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ (قضیه ۲.۲) به‌دست آمده است، قدری ساده می‌کنیم. در اینصورت، خواهیم داشت:

$$a_{2r} = (-1)^r \frac{a_0\Gamma(n+1)}{2^{2r} r!\Gamma(n+r+1)}.$$

همچنین، اگر از معادله (۴.۵) و این حقیقت که $a_1 = 0$ است، استفاده کنیم، نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2n+1} = \cdots = 0$$

با جایگذاری مقادیری که برای a_r به‌دست آوردیم، در سری مربوط به $z(x, s)$، جواب:

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_0(-1)^r \frac{\Gamma(n+1)}{2^{2r} r!\Gamma(n+r+1)} x^{2r+n}$$

به عنوان جوابیْ از معادله بسل به‌دست خواهیم آورد.

در جواب فوق a_0 مقداری دلخواه است. با انتخاب $a_0 = 1/\{2^n\Gamma(n+1)\}$ به جوابی دست خواهیم یافت، که به‌صورت $J_n(x)$ نشان داده می‌شود، و به آن تابع بسل نوع اول از مرتبه n می‌گویند:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n} \tag{۴.۶}$$

با توجه به مطالبی که در آغاز این بخش بیان شد، واضح است که، سری نامتناهی تعریف شده در معادله (۴.۶) به ازاء همه مقادیر x همگرا است.

تاکنون ما فقط ریشه $s = n$ را از معادله شاخص مورد بررسی قرار داده‌ایم، از ریشه دیگر $s = -n$ نیز جوابی دیگر از معادله بسل حاصل می‌شود، که برای به‌دست آوردن آن کافی است در تمام معادلات قبلی n را به $-n$ تبدیل کنیم، در این صورت، خواهیم داشت:

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(-n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} \tag{۴.۷}$$

حال، فرض کنیم که n عددی صحیح نباشد. در این صورت، چون r همواره یک عدد صحیح غیرمنفی است، در عامل $\Gamma(-n+r+1)$ از معادله (۴.۷) متغیر $-n+r+1$ نمی‌تواند برابر صفر یا یک عدد صحیح منفی باشد، و در نتیجه $\Gamma(-n+r+1)$ همواره متناهی و غیرصفر خواهد بود. از این مطلب نتیجه می‌شود که، $J_{-n}(x)$ شامل توان‌هائی منفی از x است (این توان‌های منفی برای rهائی ایجاد می‌شوند که $2r < n$ است)، حال آن که، معادله (۴.۶) نشان می‌دهد که $J_n(x)$ شامل هیچ توان منفی از x نیست. در نتیجه، در نقطه $x=0$، $J_n(x)$ متناهی است، حال آن که، در این نقطه $J_{-n}(x)$ نامتناهی است، بنابراین، این جوابها نمی‌توانند مضربی از یکدیگر باشند، و در نتیجه، وقتی n عددی صحیح نباشد $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ جوابهای مستقل معادله بسل خواهند بود (که شرطی است قوی‌تر از این شرط که $2n$ عددی صحیح نباشد، مطلبی که از تئوری عمومی به‌دست آوردیم). رابطه بین $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ وقتی n عددی صحیح باشد، در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۴.۱. وقتی n عددی صحیح باشد $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

اثبات. ابتدا حالت $n > 0$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این حالت، از معادله (۴.۷) خواهیم داشت:

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(-n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n}$$

اما، $\Gamma(-n+r+1)$ برای مقادیری از r که $-n+r+1$ صفر یا یک عدد صحیح منفی است، یعنی، برای مقادیر $r=0,1,2,\cdots,(n-1)$ (چون n یک عدد صحیح مثبت است، چنین مقادیری وجود دارند) نامتناهی و در نتیجه $1/\{\Gamma(-n+r+1)\}$ برابر صفر است. بنابراین، اندیس $r=0$ را در جمع‌بندی سری مربوط به $J_{-n}(x)$ می‌توان به $r=n$ تبدیل نمود، و در این صورت، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}J_{-n}(x) &= \sum_{r=n}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(-n+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+n} \frac{1}{(m+n)!\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(m+n)-n}\end{aligned}$$

(در جمع‌بندی تغییر متغیر $m=r-n$ داده‌ایم)

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m} \frac{1}{(m+n)!\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

اما:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m} \frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

(طبق رابطه (۴.۶))

بنابراین، آن چه که برای کامل کردن اثبات باقی می‌ماند، این است، که نشان دهیم برای اعداد طبیعی n و m،

$$(m+n)!\Gamma(m+1) = m!\Gamma(n+m+1)$$

اما، با استفاده مکرر از رابطه $(x > 0)\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(m+n)!\Gamma(m+1) &= (m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)m!\Gamma(m+1)\\ &= m!\Gamma(m+n+1)\end{aligned}$$

و حکم در حالتی که n یک عدد صحیح مثبت باشد ثابت می‌شود.

حال، فرض کنیم $n < 0$ باشد. در این صورت، می‌توان نوشت $n = -p$، که در آن $p > 0$ یک عدد صحیح مثبت است. با توجه به مطلبی که برای $n > 0$ ثابت کردیم، می‌توان نوشت:

$$J_p(x) = (-1)^{-p} J_{-p}(x)$$

و یا

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

و قضیه به‌طور کامل ثابت می‌شود.

آن چه تاکنون در رابطه با توابع بسل ثابت کرده‌ایم، خلاصه می‌کنیم:

اگر n عددی صحیح نباشد، آنگاه $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ به ترتیب در معادلات (۴.۶) و (۴.۷) بیان شده‌اند، جوابهای مستقل معادله بسل خواهند بود، و جواب عمومی معادله از رابطه $AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$ به‌دست می‌آید، حال آن که، اگر n عددی صحیح باشد $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ جوابهای معادله بسل هستند، اما، بین آنها رابطه:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

برقرار است.

قضیه ۴.۲ برای کلیه مقادیر n، جوابهای مستقل معادله بسل را می‌توان به‌صورت:

$$J_n(x)$$

و

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

انتخاب نمود*.

اثبات. حالتی که n یک عدد غیرصحیح و حالتی که n یک عدد صحیح باشد، به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

(i) اگر n عددی غیرصحیح باشد، آنگاه $\sin n\pi \neq 0$، و بنابراین، $Y_n(x)$ ترکیبی خطی از $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ خواهد بود. اما، طبق بحث قبلی، می‌دانیم که در این حالت $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ جوابهای مستقل معادله بسل هستند، بنابراین، $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ نیز جوابهای مستقل معادله خواهند بود.

(ii) اگر n عددی صحیح باشد، آنگاه $\sin n\pi = 0$ و $\cos n\pi = (-1)^n$، بنابراین، طبق قضیه ۴.۱، خواهیم داشت:

$$J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) - (-1)^n J_n(x) = 0$$

در نتیجه، $Y_n(x)$ به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید. با وجود این، می‌توان $Y_n(x)$ را به صورت حدی زیر تعریف نمود:

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \lim_{v\to n} Y_v(x) \\ &= \lim_{v\to n} \frac{J_v(x)\cos \pi v - J_{-v}(x)}{\sin v\pi} \qquad (۴.۸) \\ &= \frac{\left[\dfrac{\partial}{\partial v}\{J_v(x)\cos \pi v - J_{-v}(x)\}\right]_{v=n}}{\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial v}\right)\sin v\pi\right]_{v=n}} \end{aligned}$$

(طبق قاعده هوپیتال) **

$$= \frac{\left[-\pi J_v(x)\sin v\pi + \dfrac{\partial J_v(x)}{\partial v}\cos v\pi - \dfrac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v}\right]_{v=n}}{[v\cos v\pi]_{v=n}}$$

---

*) برای اعداد صحیح n، تعریف تابع $Y_n(x)$ به‌صورتی که در متن اصلی کتاب ارائه شده است، درست نیست، و باید آن را به‌صورت حدی: $Y_n(x) = \lim_{p\to n} \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}$ تعریف نمود، کاری که اجباراً در جریان اثبات انجام شده است. مترجم.

**) قاعده هوپیتال بیان می‌کند، که اگر $f(a) = g(a) = 0$، آنگاه:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(r)}(a)}{g^{(r)}(a)}$$

که در آن $f^{(r)}(a)$ و $g^{(r)}(a)$ به ترتیب مشتقاتی با پائین‌ترین مرتبه از توابع $f(x)$ و $g(x)$ هستند، که در نقطه $x = a$ هر دو با هم صفر نیستند.

$$= \frac{\left[\dfrac{\partial J_v(x)}{\partial v}\right]_{v=n} \cdot \cos n\pi - \left[\dfrac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v}\right]_{v=n}}{\pi \cos n\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_v(x)}{\partial v} - (-1)^n \frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v}\right]_{v=n} \qquad (۴.۹)$$

حال، باید دو گزاره ثابت کنیم؛ نخست اینکه، تابع $Y_n(x)$ که با معادله (۴.۹) تعریف شده است، واقعاً جوابی از معادله بسل است، و دوم اینکه، این جواب مستقل از $J_n(x)$ است. برای اثبات اولین گزاره، یادآوری می‌کنیم که $J_v(x)$ در معادله بسل مرتبه vام صدق می‌کند:

$$x^2\frac{d^2 J_v}{dx^2} + x\frac{dJ_v}{dx} + (x^2 - v^2)J_v = 0$$

با مشتق‌گیری از این معادله نسبت به v، به‌دست می‌آید:

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial J_v}{\partial v} + x\frac{d}{dx}\frac{\partial J_v}{\partial v} + (x^2 - v^2)\frac{\partial J_v}{\partial v} - 2vJ_v = 0 \qquad (۴.۱۰)$$

همچنین، $J_{-v}(x)$ نیز در معادله بسل مرتبه v صدق می‌کند، در نتیجه، با روشی مشابه روش فوق خواهیم داشت:

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial J_{-v}}{\partial v} + x\frac{d}{dx}\frac{\partial J_{-v}}{\partial v} + (x^2 - v^2)\frac{\partial J_{-v}}{\partial v} - 2vJ_{-v} = 0 \qquad (۴.۱۱)$$

با ضرب معادله (۴.۱۱) در $(-1)^v$ و با تفریق نتیجه به‌دست آمده از رابطه (۴.۱۰) به‌دست می‌آید:

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\left\{\frac{\partial J_v}{\partial v} - (-1)^v\frac{\partial J_{-v}}{\partial v}\right\} + x\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial J_v}{\partial v} - (-1)^v\frac{\partial J_{-v}}{\partial v}\right\}$$
$$+ (x^2 - v^2)\left\{\frac{\partial J_v}{\partial v} - (-1)^v\frac{\partial J_{-v}}{\partial v}\right\} - 2v\left\{J_v - (-1)^v J_{-v}\right\} = 0$$

با قرار دادن $v = n$ در معادله آخر و با استفاده از رابطه (۴.۹) خواهیم داشت:

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}Y_n(x) + x\frac{d}{dx}Y_n(x) + (x^2 - n^2)Y_n(x)$$
$$- \frac{2n}{\pi}\left\{J_n(x) - (-1)^n J_{-n}(x)\right\} = 0$$

اما، اکنون n عددی صحیح است، بنابراین، با توجه به قضیه ۴.۱، $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$، و در نتیجه، معادله فوق را می‌توانیم به‌صورت:

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}Y_n(x) + x\frac{d}{dx}Y_n(x) + (x^2 - n^2)Y_n(x) = 0$$

بنویسیم، که مُبین این است که $Y_n(x)$ در معادله بسل مرتبه n صدق می‌کند.

استقلال $Y_n(x)$ از $J_n(x)$ را می‌توان از قضیه زیر نتیجه گرفت، که نشان می‌دهد، تابع $Y_n(x)$ در نقطه $x = 0$ نامتناهی است، حال آن که $J_n(x)$ در این نقطه متناهی است.

قضیه ۴.۳. (عبارتی صریح برای $Y_n(x)$ وقتی n عددی صحیح باشد).

$$\begin{aligned}
Y_n(x) &= \frac{2}{\pi}\left\{\ln\frac{x}{2} + \gamma - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}\right\} J_n(x) \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{1}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}\sum_{r=1}^{s}\left\{\frac{1}{r}+\frac{1}{r+n}\right\} \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(n-s-1)!}{s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2s}
\end{aligned}$$

که در آن γ ثابت اویلر است (ضمیمه ۲ را ببینید).

اثبات. ما اثبات این قضیه را حذف خواهیم کرد، و فقط اشاره می‌کنیم که، روش استنتاج، استفاده از بسط‌های سری‌وار (۴.۶) و (۴.۷) در معادله (۴.۹) است. ظاهر شدن ثابت اویلر، به دلیل خواص مشتق تابع گاما است.

قضیه ۴.۴. اگر n عددی صحیح باشد، آنگاه:

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$$

اثبات. از معادله (۴.۹) داریم:

$$\begin{aligned}
Y_{-n}(x) &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial v}J_v(x) - (-1)^{-n}\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)\right]_{v=-n} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial(-v)}J_{-v}(x) - (-1)^{n}\frac{\partial}{\partial(-v)}J_{v}(x)\right]_{v=n} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x) + (-1)^{n}\frac{\partial}{\partial v}J_{v}(x)\right]_{v=n} \\
&= (-1)^n\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial v}J_{v}(x) - (-1)^{n}\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)\right]_{v=n} \\
&= (-1)^n Y_n(x)
\end{aligned}$$

توابع $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ را به ترتیب توابع بسل مرتبه nام نوع اول و نوع دوم می‌نامند. ($Y_n(x)$ را بعضی اوقات تابع نویمان مرتبه nام نامیده، و به علامت $N_n(x)$ نشان می‌دهند.) چنانکه دیدیم، وقتی

n عددی مثبت باشد، $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ دو جواب مستقل از معادله بسل هستند، $J_n(x)$ همواره در نقطه $x = 0$ متناهی است، اما، $Y_n(x)$ همیشه در نقطه $x = 0$ نامتناهی است.

۴.۲ تابع مولد برای توابع بسل

قضیه ۴.۵. برای هر $t \neq 0$ داریم:

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x)$$

اثبات. عبارت $\exp\left\{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}$ را برحسب توان‌های t بسط داده، نشان می‌دهیم، که ضریب t^n برابر $J_n(x)$ است:

$$\begin{aligned}
\exp\left\{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\} &= \exp\left(\frac{1}{2}xt\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{t}\right) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}xt\right)^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{t}\right)^s}{s!} \\
&= \sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^r x^r t^r (-1)^s (\frac{1}{2})^s x^s t^{-s}}{r!s!} \\
&= \sum_{r,s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{2}\right)^{r+s}\frac{x^{r+s}t^{r-s}}{r!s!} \qquad (۴.۱۲)
\end{aligned}$$

اکنون با در نظرگرفتن $n > 0$، ضریب t^n را پیدا می‌کنیم. برای یک مقدار ثابت r ، برای به‌دست آوردن توانی از t همچون t^n باید داشته باشیم $s = r - n$. بنابراین، برای این مقدار مخصوص r ضریب t^n برابر است با:

$$(-1)^{r-n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r-n}\frac{x^{2r-n}}{r!(r-n)!}$$

برای به‌دست آوردن ضریب کامل t^n باید به ازای همه مقادیر مجاز r مجموع کلیه جملاتی که به صورت فوق هستند محاسبه کنیم. از آنجا که $s = r - n$ و $s \geq 0$، باید داشته باشیم $r \geq n$، در نتیجه، ضریب کامل t^n از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\sum_{r=n}^{\infty}(-1)^{r-n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r-n}\frac{x^{2r-n}}{r!(r-n)!} = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{(p+n)!p!}$$

(قرار داده‌ایم $p = r - n$)

$$= \sum_{P=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(\frac{x}{2})^{2p+n}}{p!\Gamma(p+n+1)}$$

(چون p و n هر دو اعدادی صحیح هستند، طبق قضیه ۲.۳، می‌توان از رابطه $\Gamma(p+n+1) = (p+n)!$ استفاده نمود)

$$= J_n(x)$$

(طبق قضیه ۴.۶).

حال، فرض کنیم $n < 0$، در این صورت، باز هم ضریب t^n برای یک مقدار ثابت r از رابطه:

$$(-1)^{r-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r-n} \frac{x^{2r-n}}{r!(r-n)!}$$

به‌دست می‌آید، اما، در این حالت با توجه به رابطه $s = r - n$، شرط $s \geq 0$، برای کلیه اعداد صحیح $r \geq 0$ برقرار است، بنابراین، ضریب t^n برابر است با:

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r-n} \frac{x^{2r-n}}{r!(r-n)!} = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(x/2)^{2r-n}}{r!\Gamma(r-n+1)}$$

$$= (-1)^n J_{-n}(x)$$

(طبق رابطه (۴.۷))

$$= J_n(x)$$

(طبق قضیه (۴.۱))

۴.۳ نمایش‌های انتگرالی برای توابع بسل

قضیه ۴.۶. برای هر عدد صحیح n داریم:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin\varphi) d\varphi$$

اثبات. از آنجا که برای هر عدد صحیح n، $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$، قضیه ۴.۵ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\exp\left\{\frac{1}{2}x\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{t^n + (-1)^n t^{-n}\right\} J_n(x)$$

حال، اگر قرار دهیم $t = e^{i\varphi}$، خواهیم داشت:

$$t - \frac{1}{t} = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$e^{ix\sin\varphi} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{e^{in\varphi} + (-1)^n e^{-in\varphi}\right\} J_n(x)$$

اما، اگر n زوج باشد، آنگاه:

$$e^{in\varphi} + (-1)^n e^{-in\varphi} = e^{in\varphi} + e^{-in\varphi} = 2\cos n\varphi$$

حال آن که، اگر n فرد باشد، آنگاه:

$$e^{in\varphi} + (-1)^n e^{-in\varphi} = e^{in\varphi} - e^{-in\varphi} = 2i\sin n\varphi$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} e^{ix\sin\varphi} &= J_0(x) + \sum_{n\ \text{زوج}} 2J_n(x)\cos n\varphi + \sum_{n\ \text{فرد}} 2iJ_n(x)\sin n\varphi \\ &= J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} 2J_{2k}(x)\cos 2k\varphi + i\sum_{k=1}^{\infty} 2J_{2k-1}(x)\sin(2k-1)\varphi \end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی تساوی فوق به‌دست می‌آید:

$$\cos(x\sin\varphi) = J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\cos 2k\varphi \qquad (۴.۱۳)$$

$$\sin(x\sin\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x)\sin(2k-1)\varphi \qquad (۴.۱۴)$$

اگر طرفین رابطه (۴.۱۳) را در $\cos n\varphi$ $(n \geq 0)$، و طرفین رابطه (۴.۱۴) را در $\sin n\varphi$ $(n \geq 1)$، ضرب نموده، از نتایج حاصل شده از $\varphi = 0$ تا $\varphi = \pi$ انتگرال بگیریم، آنگاه، با توجه به تساوی‌های

$$\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m \neq n، \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{اگر } m = n \neq 0، \\ \pi & \text{اگر } m = n = 0، \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \sin m\varphi \sin n\varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m \neq n، \\ \frac{\pi}{2} & \text{اگر } m = n، \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$\int_0^\pi \cos n\varphi \cos(x \sin\varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi J_n(x) & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \sin n\varphi \sin(x \sin\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \\ \pi J_n(x) & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

با جمع کردن تساوی‌های فوق به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\pi \{\cos n\varphi \cos(x\sin\varphi) + \sin n\varphi \sin(x\sin\varphi)\}\, d\varphi = \pi J_n(x)$$

که در آن n یک عدد طبیعی دلخواه است. بنابراین، برای هر عدد طبیعی n، خواهیم داشت:

$$\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi) d\varphi = \pi J_n(x)$$

و با این رابطه قضیه برای حالتی که n یک عدد صحیح غیرمنفی باشد، ثابت می‌شود.

حال، اگر n یک عدد صحیح منفی باشد، قرار می‌دهیم $n = -m$، که در آن m یک عدد طبیعی است، در نتیجه، باید ثابت کنیم:

$$\int_0^\pi \cos(-m\varphi - x\sin\varphi) d\varphi = \pi J_{-m}(x)$$

اما:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \cos(-m\varphi - x\sin\varphi) d\varphi \\
&= \int_\pi^0 \cos\{-m(\pi-\theta) - x\sin(\pi-\theta)\}\,(-d\theta)
\end{aligned}$$

(که در آن تغییر متغیر $\theta = \pi - \varphi$ داده شده است)

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \cos(-m\pi + m\theta - x\sin\theta) d\theta \\
&= \int_0^\pi \{\cos(m\theta - x\sin\theta)\cos m\pi + \sin(m\theta - x\sin\theta)\sin m\pi\}\, d\theta
\end{aligned}$$

$$= (-1)^m \int_0^\pi \cos(m\theta - x\sin\theta)d\theta$$
$$= (-1)^m \pi J_m(x)$$

(زیرا، می‌دانیم که قضیه برای مقادیر مثبت m برقرار است)

$$= \pi J_{-m}(x)$$
$$= \pi J_n(x)$$

قضیه ۴.۷. اگر $n > -\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه:

$$J_n(x) = \frac{(\frac{1}{2}x)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{ixt} dt$$

اثبات. انتگرال I را که به صورت زیر تعریف شده است، مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$I = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{ixt} dt$$
$$= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^\infty \frac{(ixt)^r}{r!} dt$$
$$= \sum_{r=0}^\infty \frac{(ix)^r}{r!} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} t^r dt$$

حال، اگر r عددی فرد باشد، تابع زیر علامت انتگرال $\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} t^r dt$ تابعی فرد از t، و در نتیجه، مقدار انتگرال برابر صفر خواهد بود، و اگر r زوج و مثلاً برابر $2s$ باشد، تابع زیر علامت انتگرال زوج، و بنابراین، خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} t^r dt = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} t^{2s} dt$$
$$= 2\int_0^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} t^{2s} dt$$
$$= \int_0^1 (1-u)^{n-\frac{1}{2}} u^{s-\frac{1}{2}} du$$

(تغییر متغیر $u = t^2$ داده‌ایم، $du = 2t\,dt$)

$$= B(n+\frac{1}{2}, s+\frac{1}{2})$$

(طبق تعریف تابع بتا؛ برای تأمین همگرائی انتگرال
باید داشته باشیم $n > -\frac{1}{2}$ (بخش ۲.۱ را ببینید))

$$= \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+s+1)}$$

(طبق قضیه ۲.۷)

بنابراین:

$$I = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2s}}{(2s)!} \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+s+1)}$$

$$= \Gamma(n+\frac{1}{2}) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s}}{(2s)!} \cdot \frac{1}{\Gamma(n+s+1)} \cdot \frac{(2s)!}{2^{2s}s!}\sqrt{\pi}$$

(با استفاده از نتیجه قضیه ۲.۱۰)

$$= \Gamma(n+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}(\frac{x}{2})^{-n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n}}{\Gamma(n+s+1)s!}$$

$$= \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} J_n(x)$$

(طبق رابطه (۴.۶))

بنابراین:

$$J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^n I$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{ixt} dt.$$

۴.۴ روابط برگشتی

قضیه ۴.۸. توابع بسل در روابط برگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$\text{(i)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x)$$

$$\text{(ii)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{x^{-n} J_n(x)\} = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

$$\text{(iii)} \quad J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x).$$

$$\text{(iv)} \quad J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x).$$

$$\text{(v)} \quad J_n'(x) = \frac{1}{2}\{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\}.$$

$$\text{(vi)} \quad J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x).$$

اثبات. (i) از معادله (۴.۶) داریم:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}$$

بنابراین:

$$\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = \frac{d}{dx} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)} \cdot \frac{1}{2^{2r+n}} x^{2r+2n}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)2^{2r+n}} (2r+2n) x^{2r+2n-1}$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!(n+r)\Gamma(n+r)2^{2r+n}} 2(n+r) x^{2r+(n-1)}$$

(با استفاده از رابطه $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ از قضیه ۲.۲)

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+(n-1)}$$

$$= x^n J_{n-1}(x)$$

(طبق رابطه ۴.۶)

(دقت کنید که در این قضیه هیچ محدودیتی روی n قرار نداده‌ایم، n می‌تواند صحیح یا غیرصحیح، مثبت یا منفی باشد.)

(ii) داریم:

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n} J_n(x)\} = \frac{d}{dx} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)2^{2r+n}} x^{2r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)} \cdot \frac{1}{2^{2r+n}} 2r x^{2r-1}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)} \cdot \frac{1}{2^{2r+(n-1)}} r x^{2r-1}$$

(زیرا، عامل r در صورت کسر به ازاء $r = 0$ برابر
صفر است. یادآوری می‌کنیم که $0! = 1$)

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{1}{(s+1)!\Gamma(n+s+2)} \cdot \frac{1}{2^{2(s+1)+n-1}} (s+1) x^{2(s+1)-1}$$

(که در آن قرار داده‌ایم $s = r - 1$)

$$= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{1}{s!\Gamma(n+s+2)} \cdot \frac{1}{2^{2s+n+1}} x^{2s+1}$$

$$= -x^{-n} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s} \frac{1}{s!\Gamma(n+s+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n+1}$$

$$= -x^{n} J_{n+1}(x)$$

(با استفاده از رابطه (۴.۶))

(iii) از رابطه (i) فوق، با انجام عمل مشتق‌گیری از حاصل‌ضرب سمت چپ تساوی، خواهیم داشت:

$$n x^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

با تقسیم طرفین این تساوی بر x^n به‌دست می‌آید:

$$\frac{n}{x} J_n(x) + J_n'(x) = J_{n-1}(x)$$

و بنابراین:

$$J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x)$$

(iv) با انجام عمل مشتق‌گیری از رابطه (ii) فوق، خواهیم داشت:

$$-n x^{(-n-1)} J_n(x) + x^{-n} J_n'(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

با ضرب طرفین این تساوی در x^n به‌دست می‌آید:

$$-\frac{n}{x} J_n(x) + J_n'(x) = -J_{n+1}(x)$$

بنابراین:

$$J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x)$$

(v) از جمع روابط (iii) و (iv) نتیجه مطلوب فوراً حاصل می‌شود.

(vi) به طریق مشابه، اگر رابطه (iv) را از رابطه (iii) کم کنیم، رابطه موردنظر در قضیه به‌دست خواهد آمد.

قضیه ۴.۹. همه نتایجی که در قضیه ۴.۸ برای توابع بسل نوع اول بیان شد، اعتبار خود را حفظ می‌کنند وقتی که به جای تابع بسل نوع اول تابع بسل نوع دوم متناظر با آن قرار داده شود.

اثبات. ثابت می‌کنیم، که نتیجه (i) برای $Y_n(x)$ نیز درست است. با روشی مشابه نتیجه (ii) برای تابع $Y_n(x)$ ثابت خواهد شد، و سپس، نتایج (iii-vi) را می‌توان با روشی شبیه روشی که در قضیه ۴.۸ به کار بردیم، ثابت نمود.

بنابراین، آن چه که ما در اینجا باید ثابت کنیم، این است که:

$$\frac{d}{dx}\{x^n Y_n(x)\} = x^n Y_{n-1}(x)$$

برای این کار حالت‌هائی که n عددی صحیح و غیرصحیح است، از یکدیگر جدا می‌کنیم.

(a) اگر n عددی غیرصحیح باشد، آنگاه:

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\{x^n Y_n(x)\}\\
&\quad= \frac{1}{\sin n\pi}\left[(\cos n\pi)\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} - \frac{d}{dx}\{x^n J_{-n}(x)\}\right]\\
&\quad= \frac{1}{\sin n\pi}[(\cos n\pi)\cdot x^n J_{n-1}(x) - \{-x^n J_{-n+1}(x)\}]
\end{aligned}$$

(که در آن از قسمت (i) قضیه ۴.۸ برای اولین مشتق و از قسمت (ii) قضیه ۴.۸ برای دومین مشتق استفاده کرده‌ایم)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sin n\pi}x^n[J_{n-1}(x)\cos n\pi + J_{-(n-1)}(x)]\\
&= \frac{1}{\sin\{(n-1)\pi+\pi\}}x^n[J_{n-1}(x)\cos\{(n-1)\pi+\pi)\} + J_{-(n-1)}(x)]\\
&= \frac{1}{-\sin(n-1)\pi}x^n\cdot[-J_{n-1}(x)\cos(n-1)\pi + J_{-(n-1)}(x)]\\
&= x^n\frac{J_{n-1}(x)\cos(n-1)\pi - J_{-(n-1)}}{\sin(n-1)\pi}\\
&= x^n Y_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

(b) اگر n عددی صحیح باشد، با توجه به رابطه $Y_n(x) = \lim_{v \to n} Y(x)$، و با استفاده از قسمت (a) می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dx}\{x^v Y_v(x)\} = x^v Y_{v-1}(x)$$

با گرفتن حد از رابطه فوق وقتی $v \to n$ نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید[۱].

۴.۵ توابع هَنکل

توابع هَنکل (که گاهی آنها را توابع بسل نوع سوم می‌نامند) طبق روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x),$$
$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x).$$

واضح است که توابع فوق جوابهای مستقل معادله بسل هستند. البته، هر دوی آنها در نقطه $x = 0$ نامتناهی هستند. سودمندی آنها مربوط به رفتارشان برای مقادیر بزرگ x است، که آخر این بخش مورد بررسی قرار گرفته است.

قضیه ۴.۱۰. همه روابط برگشتی قضیه ۴.۸ وقتی به جای $J_n(x)$، $H_n^{(1)}(x)$ یا $H_n^{(2)}(x)$ گذاشته شود، معتبر باقی می‌ماند.

اثبات. دوباره، ما فقط رابطه (i) را ثابت می‌کنیم، باقیمانده روابط را میتوان شبیه قبل اثبات نمود. اما، می‌دانیم که رابطه (i) هم برای $J_n(x)$ و هم برای $Y_n(x)$ برقرار است، بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x)$$

و

$$\frac{d}{dx}\{x^n Y_n(x)\} = x^n Y_{n-1}(x)$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} \pm i\frac{d}{dx}\{x^n Y_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x) \pm ix^n Y_{n-1}(x)$$

بنابراین:

$$\frac{d}{dx}[x^n\{J_n(x) \pm iY_n(x)\}] = x^n\{J_{n-1}(x) \pm iY_{n-1}(x)\}$$

۱. مؤلف کتاب در رابطه با مسأله حدود، در بسیاری از موارد، از جمله، در مورد فوق، مطالبی را بدیهی فرض کرده است، که برای یک دانشجوی خرده‌گیر رشته ریاضی، چندان هم بدیهی نیست، اما از آنجا که این کتاب عمدتاً برای دانشجویان رشته‌های فیزیک و مهندسی نوشته شده است، دانشجویانی که بیشتر به اثبات دقیق قضیه‌ها علاقه‌مند هستند تا توجیه آنها، باید از کتابهای تخصصی‌تری که برای دانشجویان رشته ریاضی نوشته شده است استفاده کنند. مترجم

که از آن با توجه به تعریف توابع $H_n^{(1)}(x)$ و $H_n^{(2)}(x)$، نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dx}\{x^n H_n^{(1)}(x)\} = x^n H_{n-1}^{(1)}(x)$$

(با انتخاب علامت مثبت)

$$\frac{d}{dx}\{x^n H_n^{(2)}(x)\} = x^n H_{n-1}^{(2)}(x)$$

(با انتخاب علامت منفی)

۴.۶ معادلات قابل تبدیل به معادله بسل

قضیه ۴.۱۱. جواب عمومی معادله:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (\lambda^2x^2 - n^2)y = 0$$

از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$y = AJ_n(\lambda x) + BY_n(\lambda x)$$

اثبات. با تغییر متغیر $t = \lambda x$ خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2\frac{d^2y}{dt^2}$$

با جایگذاری روابط فوق در معادله داده شده به معادله:

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - n^2)y = 0$$

خواهیم رسید، که معادله بسل مرتبه nام است، و جواب عمومی آن به صورت:

$$y = AJ_n(t) + BY_n(t)$$

می‌باشد. با جایگذاری $t = \lambda x$ جواب عمومی:

$$y = AJ_n(\lambda x) + BY_n(\lambda x)$$

برای معادله داده شده حاصل خواهد شد.

قضیه ۴.۱۲. جواب عمومی معادله:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(1-2\alpha)x\frac{dy}{dx}+\{\beta^2\gamma^2x^{2\gamma}+(\alpha^2-n^2\gamma^2)\}y=0$$

از رابطه:

$$y=Ax^nJ_n(\beta x^\gamma)+Bx^nY_n(\beta x^\gamma)$$

به‌دست می‌آید.

اثبات. ابتدا تغییر متغیر $y=x^\alpha z$ می‌دهیم. در این صورت، خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx}=x^\alpha\frac{dz}{dx}+\alpha x^{\alpha-1}z$$

و

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x^\alpha\frac{d^2z}{dx^2}+2\alpha x^{\alpha-1}\frac{dz}{dx}+\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}z$$

با توجه به روابط فوق معادله داده شده به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}&x^{\alpha+2}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+2\alpha x^{\alpha+1}\frac{dz}{dx}+\alpha(\alpha-1)x^\alpha z+\\&(1-2\alpha)\left\{x^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\alpha x^\alpha z\right\}+\{\beta^2\gamma^2x^{2\gamma}+(\alpha^2-n^2\gamma^2)\}x^\alpha z=0\end{aligned}$$

از این معادله با گردآوری جملات مربوط به $\frac{d^2z}{dx^2}$، $\frac{dz}{dx}$ و z به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}x^2\frac{d^2z}{dx^2}&+\{2\alpha x+(1-2\alpha)x\}\frac{dz}{dx}\\&+\{\alpha(\alpha-1)+(1-2\alpha)\alpha+\beta^2\gamma^2x^{2\gamma}+(\alpha^2-n^2\gamma^2)\}z=0\end{aligned}$$

و معادله فوق را پس از ساده کردن می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2}+x\frac{dz}{dx}+(\beta^2\gamma^2x^{2\gamma}-n^2\gamma^2)z=0 \tag{۴.۱۵}$$

حال، با تغییر متغیر $t=x^\gamma$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx}&=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\gamma x^{\gamma-1}\frac{dz}{dt}\\\frac{d^2z}{dx^2}&=\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}\frac{dz}{dt}+\gamma x^{\gamma-1}\frac{d}{dx}\frac{dz}{dt}\end{aligned}$$

$$= \gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}\frac{dz}{dt} + \gamma x^{\gamma-1}\cdot\gamma x^{\gamma-1}\frac{d^2z}{dt^2}$$
$$= \gamma^2 x^{2\gamma-2}\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}\frac{dz}{dt}$$

بنابراین، معادله (۴.۱۵) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\gamma^2 x^{2\gamma}\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma(\gamma-1)x^{\gamma}\frac{dz}{dt} + \gamma x^{\gamma}\frac{dz}{dt} + \{\beta^2\gamma^2x^{2\gamma} - n^2\gamma^2\}z = 0$$

از معادله فوق پس از جمع نمودن جملات مشابه و تقسیم طرفین معادله بر عامل مشترک γ^2 معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + (\beta^2t^2 - n^2)z = 0$$

اما، معادله فوق طبق قضیه ۴.۱۱ دارای جواب:

$$z = AJ_n(\beta t) + BY_n(\beta t)$$

می‌باشد. در نتیجه، جواب معادله اصلی داده شده، با تغییر متغیرهای قبلی $y = x^\alpha z$ و $t = x^\gamma$ به‌صورت:

$$y = Ax^\alpha J_n(\beta x^\gamma) + Bx^\alpha Y_n(\beta x^\gamma)$$

در می‌آید.

۴.۷ معادله بسل تعدیل‌یافته

معادله دیفرانسیل:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2)y = 0 \qquad (۴.۱۶)$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

معادله فوق با $\lambda^2 = -1$ به همان فرمی است که در قضیه ۴.۱۱ مورد بررسی قرارگرفته است. بنابراین، دارای جواب عمومی:

$$y = AJ_n(ix) + BY_n(ix)$$

می‌باشد.

اما، جواب‌های $J_n(ix)$ و $Y_n(ix)$ دارای این عیب هستند، که به ازاء مقادیر حقیقی x لزوماً حقیقی نیستند. با وجود این، می‌توان با ضرب ثابت i^{-n} در $J_n(x)$ تابع $I_n(x)$ را به‌صورت:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$$

تعریف نموده، و از آن به عنوان یکی از جوابهای مستقل معادله ۴.۱۶ استفاده نمود. به سادگی می‌توان نشان داد که $I_n(x)$ تابعی حقیقی از x است:

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= i^{-n} J_n(ix) \\
&= i^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{ix}{2}\right)^{2r+n} \\
&= i^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)} i^{2r} i^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}
\end{aligned} \tag{۴.۱۷}$$

$I_n(x)$ را که به صورت فوق تعریف شده است، تابع بسل تعدیل یافته نوع اول، و معادله (۴.۱۶) را معادله بسل تعدیل یافته می‌نامند.

قضیه ۴.۱۳. اگر n عددی صحیح باشد، آنگاه $I_{-n}(x) = I_n(x)$

اثبات.

$$\begin{aligned}
I_{-n}(x) &= i^n J_{-n}(ix) \\
&= i^n (-1)^n J_n(ix)
\end{aligned}$$

(طبق قضیه ۴.۱)

$$\begin{aligned}
&= i^n (-1)^n i^n I_n(x) \\
&= (-1)^{2n} I_n(x) \\
&= I_n(x)
\end{aligned}$$

دومین جواب معادله بسل تعدیل یافته را می‌توان با بررسی $Y_n(ix)$، یا به جای آن، با به‌کارگیری روشی مشابه با آن چه که برای تعریف $Y_n(x)$ به کار بردیم، به‌دست آورد.

$I_n(x)$ و $I_{-n}(x)$ هر دو جواب‌های معادله (۴.۱۶) هستند. وقتی n عددی صحیح نباشد، این جوابها مستقل هستند (زیرا، در چنین حالتی، $J_n(ix)$ و $J_n(-ix)$ مستقل هستند). اما، وقتی n

عددی صحیح باشد $I_{-n}(x) = I_n(x)$. اکنون تابع $K_n(x)$ را به‌صورت:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi} \tag{۴.۱۸}$$

تعریف می‌کنیم. وقتی n عددی صحیح نباشد، $K_n(x)$ درست تعریف شده است و $I_n(x)$ و $K_n(x)$ جواب‌های مستقل معادله (۴.۱۶) خواهند بود، اما، وقتی n عددی صحیح باشد، $K_n(x)$ به‌صورتی مبهم در می‌آید، و برای رفع این ابهام باید آن را به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \lim_{v \to n} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-v}(x) - I_v(x)}{\sin v\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\left[\frac{\partial}{\partial v} I_{-v}(x) - \frac{\partial}{\partial v} I_v(x)\right]_{v=n}}{\pi [\cos v\pi]_{v=n}} \\ &\qquad \text{(طبق قاعده هوپیتال)} \\ &= \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial}{\partial v} I_{-v}(x) - \frac{\partial}{\partial v} I_v(x)\right]_{v=n} \end{aligned}$$

مشابه آن چه که در قضیه ۴.۲ بیان شد، می‌توان نشان داد که $K_n(x)$ که طبق رابطه فوق تعریف شده است، دومین جواب مستقل معادله بسل تعدیل یافته را برای مقادیر صحیح n تولید می‌کند. با استفاده از قضیه زیر و با استفاده از بسط $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ به صورت سری، می‌توان سری صریحی برای $K_n(x)$ به‌دست آورد.

قضیه ۴.۱۴.

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} \{J_n(ix) + iY_n(ix)\} = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix)$$

اثبات.

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi} \\ &\qquad \text{(طبق تعریف (۴.۱۸))} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{i^n J_{-n}(ix) - i^{-n} J_n(ix)}{\sin n\pi} \end{aligned}$$

اما، از تعریف $Y_n(x)$ در قضیه ۴.۲ داریم:

$$J_{-n}(ix) = J_n(ix) \cos n\pi - Y_n(ix) \sin n\pi$$

بنابراین:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{i^n J_n(ix)\cos n\pi - i^{-n}J_n(ix) - i^n Y_n(ix)\sin n\pi}{\sin n\pi}$$
$$= \frac{\pi}{2}i^{n+1}\left\{iY_n(ix) + \frac{-i\cos n\pi - i^{-2n-1}}{\sin n\pi}J_n(ix)\right\} \qquad (۴.۱۹)$$

اما:

$$-i\cos n\pi - i^{-2n-1} = -i\cos n\pi + ii^{-2n}$$
$$= -i\cos n\pi + i(e^{i\pi/2})^{-2n}$$

(با نوشتن $i = e^{i\pi/2}$)

$$= -i\cos n\pi + ie^{-in\pi}$$
$$= -i\cos n\pi + i(\cos n\pi - i\sin n\pi)$$
$$= \sin n\pi$$

در نتیجه، با استفاده از معادله (۴.۱۹) خواهیم داشت *:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}i^{n+1}\{iY_n(ix) + J_n(ix)\}$$

۴.۸ روابط برگشتی برای توابع بسل تعدیل‌یافته

توابع بسل تعدیل یافته نیز در روابط برگشتی مشابه، ولی نه کاملاً یکسانی، با آن چه که در قضیه ۴.۸ بیان شده است، صدق می‌کنند. همچنین، در مقایسه با توابع $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ که در روابط برگشتی مشابه یکدیگر صدق می‌کنند، $I_n(x)$ و $K_n(x)$ در روابط برگشتی متفاوتی از یکدیگر صدق می‌کنند.

قضیه ۴.۱۵. توابع بسل تعدیل یافته $I_n(x)$ در روابط برگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$\text{(i)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{x^n I_n(x)\} = x^n I_{n-1}(x).$$
$$\text{(ii)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{-x^n I_n(x)\} = x^{-n} I_{n+1}(x).$$
$$\text{(iii)} \qquad I_n'(x) = I_{n-1}(x) - \frac{n}{x}I_n(x).$$
$$\text{(iv)} \qquad I_n'(x) = \frac{n}{x}I_n(x) + I_{n+1}(x).$$

*) استدلال مؤلف کتاب چه در حالتی که n عددی صحیح باشد، و چه در حالتی که n عددی صحیح نباشد، حاوی برخی ابهام‌ها و اشکالات منطقی است، که باید تصحیح شوند. مترجم.

$$\text{(v)} \qquad I_n'(x) = \frac{1}{2}\{I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)\}.$$

$$\text{(vi)} \qquad I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} I_n(x).$$

اثبات. ما روابط (i) و (ii) را ثابت خواهیم کرد. بقیه روابط را می‌توان شبیه قضیه ۴.۸ از روابط (i) و (ii) نتیجه گرفت.

(i) طبق قسمت (i) قضیه ۴.۸، داریم:

$$\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x)$$

از رابطه فوق با تعویض x به ix نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{d(ix)}\{i^n x^n J_n(ix)\} = i^n x^n J_{n-1}(x)$$

و از این رابطه با توجه به این حقیقت که $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\{i^n x^n i^n I_n(x)\} = i^n x^n i^{n-1} I_{n-1}(x)$$

با حذف فاکتور i^{2n-1} از طرفین معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dx}\{x^n I_n(x)\} = x^n I_{n-1}(x)$$

(ii) از قسمت (ii) قضیه ۴.۸ داریم:

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n} J_n(x)\} = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

که از آن با تعویض x به ix نتیجه می‌شود:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(ix)}\{i^{-n} x^{-n} J_n(ix)\} = -i^{-n} x^{-n} J_{n+1}(ix)$$

بنابراین:

$$\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{i^{-n} x^{-n} i^n I_n(x)\} = -i^{-n} x^{-n} i^{n+1} I_{n+1}(x)$$

و در نتیجه:

$$\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{x^{-n} I_n(x)\} = -i x^{-n} I_{n+1}(x)$$

و یا:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{x^{-n}I_n(x)\} = x^{-n}I_{n+1}(x)$$

قضیه ۴.۱۶. توابع $K_n(x)$ در روابط برگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$\text{(i)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{x^n K_n(x)\} = -x^n K_{n-1}(x).$$

$$\text{(ii)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{x^{-n} K_n(x)\} = -x^{-n} K_{n+1}(x).$$

$$\text{(iii)} \qquad K_n'(x) = -K_{n-1}(x) - \frac{n}{x}K_n(x).$$

$$\text{(iv)} \qquad K_n'(x) = \frac{n}{x}K_n(x) = K_{n+1}(x).$$

$$\text{(v)} \qquad K_n'(x) = -\frac{1}{2}\{K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x)\}.$$

$$\text{(vi)} \qquad K_{n-1}(x) - K_{n+1}(x) = -\frac{2n}{x}K_n(x).$$

اثبات. دوباره، تنها روابط (i) و (ii) را ثابت می‌کنیم. همچنین، با روشی مشابه با آن چه که در قضیه ۴.۹ بیان شد، ابتدا، روابط فوق را برای حالتی که n عددی غیرصحیح باشد، ثابت می‌کنیم، در این صورت، با استفاده از خاصیت پیوستگی می‌توان قضیه را در حالتی که n عددی صحیح باشد، ثابت نمود.

(i) طبق قضیه ۴.۱۴، داریم:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix)$$

و طبق قضیه ۴.۱۰، می‌دانیم که $H_n^{(1)}(x)$ در اولین رابطه برگشتی قضیه ۴.۸ صدق می‌کند. بنابراین:

$$\frac{d}{dx}\{x^n H_n^{(1)}(x)\} = x^n H_{n-1}^{(1)}(x).$$

از رابطه فوق با تعویض x به ix به‌دست می‌آید:

$$\frac{d}{d(ix)}\{i^n x^n H_n^{(1)}(ix)\} = i^n x^n H_{n-1}^{(1)}(ix).$$

بنابراین:

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\left\{i^n x^n \frac{2}{\pi} i^{-n-1} K_n(x)\right\} = i^n x^n \frac{2}{\pi} i^{-n} K_{n-1}(x)$$

و از این رابطه پس از ساده‌کردن نتیجه می‌شود:

$$-\frac{d}{dx}\{x^n K_n(x)\} = x^n K_{n-1}(x)$$

که هم ارز رابطه:

$$\frac{d}{dx}\{x^n K_n(x)\} = -x^n K_{n-1}(x)$$

می‌باشد.

(ii) به‌طریق مشابه، $H_n^{(1)}(x)$ طبق قضیه ۴.۱۰، در دومین رابطه برگشتی قضیه ۴.۸ صدق می‌کند. بنابراین:

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n} H_n^{(1)}(x)\} = -x^n H_{n+1}^{(1)}(x)$$

از این معادله با تعویض x به ix به‌دست می‌آید:

$$\frac{d}{d(ix)}\{i^{-n}x^{-n} H_n^{(1)}(ix)\} = -i^{-n}x^{-n} H_{n+1}^{(1)}(ix)$$

و از رابطه فوق، با توجه به قضیه ۴.۱۴، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{d}{dx}\{i^{-n}x^{-n}\frac{2}{\pi}i^{-n-1}K_n(x)\} = -i^{-n}x^{-n}\frac{2}{\pi}i^{-n-2}K_{n+1}(x)$$

بنابراین:

$$i^{-2n-2}\frac{d}{dx}\{x^{-n}K_n(x)\} = -i^{-2n-2}K_{n+1}(x)$$

و با حذف فاکتور i^{-2n-2} از طرفین این معادله، به‌دست می‌آید:

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}K_n(x)\} = -K_{n+1}(x)\cdot$$

۴.۹ نمایش‌های انتگرالی برای توابع بسل تعدیل یافته

قضیه ۴.۱۷. توابع $I_n(x)$ و $K_n(x)$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\text{(i)}I_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n\int_{-1}^{1} e^{-xt}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}dt \qquad (n > -\frac{1}{2})$$

$$\text{(ii)}K_n(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n\int_{1}^{\infty} e^{-xt}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}dt \qquad (n > -\frac{1}{2}, x > 0)$$

اثبات. (i) طبق معادله (۴.۱۷)، داریم:

$$I_n(x) = i^{-n}J_n(ix)$$

و طبق قضیه (۴.۷)، داریم:

$$J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{ixt}dt \qquad (n > -\frac{1}{2})$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} I_n(x) &= i^{-n}\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})}i^n\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{-xt}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{-xt}dt \end{aligned}$$

(ii) ابتدا نشان می‌دهیم، که انتگرال:

$$P = x^n \int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}dt \qquad (n > -\frac{1}{2}, x > 0) \qquad (۴.۲۰)$$

در معادله بسل تعدیل یافته:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2+n^2)y = 0$$

صدق می‌کند.

داریم:

$$\frac{dP}{dx} = nx^{n-1}\int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}dt + x^n\int_1^\infty -te^{-xt}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}dt$$

و

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{dx^2} =& n(n-1)x^{n-2}\int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}dt \\ &+ 2nx^{n-1}\int_1^\infty -te^{-xt}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}dt \\ &+ x^n\int_1^\infty t^2e^{-xt}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}dt \end{aligned}$$

بنابراین:

$$
\begin{aligned}
&x^2\frac{d^2P}{dx^2}+x\frac{dP}{dx}-(x^2+n^2)P\\
&=x^n\int_1^\infty\{n(n-1)-2nxt+x^2t^2+n-xt-x^2-n^2\}e^{-xt}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}dt\\
&=x^{n+1}\int_1^\infty\{x(t^2-1)-2(n+\frac{1}{2})t\}e^{-xt}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}dt\\
&=x^{n+1}\int_1^\infty\{xe^{-xt}(t^2-1)^{n+\frac{1}{2}}-(n+\frac{1}{2})(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}2te^{-xt}\}dt\\
&=-x^{n+1}\int_1^\infty\frac{d}{dt}\{e^{-xt}(t^2-1)^{n+\frac{1}{2}}\}dt\\
&=-x^{n+1}\left[e^{-xt}(t^2-1)^{n+\frac{1}{2}}\right]_{t=1}^{\infty}\\
&=0
\end{aligned}
$$

زیرا، مقدار انتگرال در حد بالائی $t=\infty$ به علت وجود عامل e^{-xt} (یادآوری می‌کنیم، که $x>0$ فرض شده است)، و در حد پائینی $t=1$ به علت وجود عامل $(t^2-1)^{n+\frac{1}{2}}$ (یادآوری می‌کنیم، که $n+\frac{1}{2}>0$) برابر صفر است.

به این ترتیب، P در معادله بسل تعدیل یافته صدق می‌کند، و در نتیجه، باید به فرم:

$$P=AI_n(x)+BK_n(x)$$

باشد.

حال، نشان می‌دهیم که $A=0$. برای این کار حدود طرفین تساوی فوق را وقتی $x\to\infty$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. از سری (۴.۱۸) برای $I_n(x)$ دیده می‌شود که، $I_n(x)$ یک سری توانی با ضرائب مثبت است، و در نتیجه، وقتی $x\to\infty$، $I_n(x)\to\infty$. اکنون $P(x)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. از تعریف $P(x)$ داریم $P(x)>0$، نشان می‌دهیم که، وقتی $x\to\infty$، $P(x)\to 0$.

از آنجا که، تابع $\exp x$ از هر توانی از x بزرگتر است، پس، برای مقادیر به حد کافی بزرگ x (مثلاً برای $x>X$)، باید داشته باشیم $(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}<e^{xt/2}$.

بنابراین، برای $x>X$، داریم:

$$P(x)<x^n\int_1^\infty e^{-xt}\cdot e^{xt/2}$$

$$= x^n \int_1^\infty e^{-xt/2} dt$$
$$x^n \left[-\frac{2}{x} e^{-xt/2}\right]_1^\infty$$
$$= 2x^{n-1} e^{-x/2}$$

که دوباره، با توجه به این که، تابع $\exp x$ از هر توانی از x بزرگتر است، وقتی $x \to \infty$، $P(x)$ به سمت صفر میل می‌کند.

بنابراین، ما نشان داده‌ایم که $\lim_{x\to\infty} P(x) = 0$، و حال آنکه $\lim_{x\to\infty} I_n(x) = \infty$. در نتیجه، $P(x)$ نمی‌تواند شامل مضربی از $I_n(x)$ باشد، و باید داشته باشیم:

$$P(x) = BK_n(x)$$

برای تعیین ضریب B رفتار توابع $P(x)$ و $K_n(x)$ را وقتی $x \to 0$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای $K_n(x)$ فقط پائین‌ترین توان x در این حد مهم است، و ما می‌توانیم از تعریف:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi}$$

با

$$I_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}$$

استفاده کنیم. می‌بینیم که پائین‌ترین توان x در $I_n(x)$ برابر:

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

و در نتیجه در $K_n(x)$ برابر:

$$\frac{!}{2\sin n\pi} \cdot \frac{1}{\Gamma(-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}$$

است. بنابراین، وقتی x نزدیک به صفر باشد، $K_n(x)$ نزدیک به $\dfrac{\pi}{2\Gamma(1-n)\sin n\pi} \left(\dfrac{2}{x}\right)^n$ خواهد بود، اما، با استفاده از قضیه ۲.۱۲، داریم:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

در نتیجه، در مجاورت نقطه $x = 0$، $K_n(x)$ نزدیک $\dfrac{\Gamma(n)2^{n-1}}{x^n}$ خواهد بود.

برای بررسی رفتار تابع $P(x)$ در مجاورت نقطه $x = 0$ تغییر متغیر:

$$t = 1 + \frac{u}{x}$$

می‌دهیم، در این صورت:

$$dt = \frac{1}{x}du$$

همچنین، حدود $t = 1$ و $t = \infty$، به ترتیب به $u = 0$ و $u = \infty$ تبدیل می‌شوند.
بنابراین، با استفاده از معادله (۴.۲۰)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^n \int_0^\infty e^{-x-u} \left(\frac{2u}{x} + \frac{u^2}{x^2}\right)^{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{x}du \\ &= \frac{1}{x^n} e^{-x} \int_0^\infty e^{-u} (1 + \frac{2x}{u})^{n-\frac{1}{2}} u^{2n-1} du \end{aligned}$$

برای مقادیر کوچک x با استفاده از تقریبهای $e^{-x} \simeq 1$ و $(1 + \frac{2x}{u})^{n-\frac{1}{2}} \simeq 1$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P(x) &\sim \frac{1}{x^n} \int_0^\infty e^{-u} u^{2n-1} du \\ &= \frac{1}{x^n}\Gamma(2n) \end{aligned}$$

(طبق تعریف تابع گاما)

بنابراین، برای مقادیر کوچک x نتیجه $P(x) = BK_n(x)$ منجر می‌شود، به:

$$\frac{1}{x^n}\Gamma(2n) = B\frac{\Gamma(n)2^{n-1}}{x^n}$$

و در نتیجه:

$$B = \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)2^{n-1}}$$

اما، طبق قضیه ۲.۱۰، داریم:

$$\Gamma(2n) = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n)\Gamma(n + \frac{1}{2})$$

بنابراین:

$$B = \frac{2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(n)2^{n-1}}$$
$$= \frac{2^n\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$$

از رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$P(x) = \frac{2^n\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}K_n(x)$$

که می‌توان آن را به‌صورت:

$$K_n(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n\Gamma(n+\frac{1}{2})}P(x)$$

نوشت، و بنابراین، با استفاده از تعریف $P(x)$ خواهیم داشت:

$$K_n(x) = \frac{\sqrt{x}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}dt.$$

۴.۱۰ توابع کلوین

معادله دیفرانسیل:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (ik^2x^2+n^2)y = 0 \qquad (۴.۲۱)$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

این معادله از نوع معادله بسل تعدیل یافته:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (\lambda^2x^2+n^2)y = 0$$

با $\lambda^2 = ik^2$ است. در نتیجه، چون جواب عمومی معادله بسل تعدیل یافته به صورت:

$$y = AI_n(\lambda x) + BK_n(\lambda x)$$

است، جواب معادله (۴.۲۱) باید به‌صورت:

$$y = AI_n(i^{\frac{1}{2}}kx) + BK_n(i^{\frac{1}{2}}kx) \quad \dagger$$

† اگر بخواهیم دقیق شویم، $i^{1/2}$ دارای دو مقدار است $e^{i\pi/4}$ و $e^{i3\pi/4}$. برای حذف این ابهام ما مقدار آن را برابر $e^{i\pi/4}$ می‌گیریم.

باشد.

همچنین، چون $I_n(x) = i^{-n}J_n(ix)$، می‌توانیم $J_n(i^{3/2}kx)$ و $K_n(i^{1/2}kx)$ را به عنوان جواب‌های مستقل معادله (۴.۲۱) در نظر بگیریم.

البته، وقتی x عددی حقیقی باشد، $J_n(i^{3/2}x)$ و $K_n(i^{1/2}x)$ لزوماً حقیقی نیستند؛ اما، با تعریف‌های زیر توابعی حقیقی به‌دست می‌آیند:

$$\mathrm{ber}_n x = \mathrm{Re} J_n(i^{3/2}x)$$

$$\mathrm{bei}_n x = \mathrm{Im} J_n(i^{3/2}x)$$

$$J_n(i^{3/2}x) = \mathrm{ber}_n x + i\mathrm{bei}_n x \tag{۴.۲۲}$$

$$\mathrm{ker}_n x = Rei^{-n}K_n(i^{1/2}x)$$

$$\mathrm{kei}_n x = \mathrm{Imi}^{-n}K_n(i^{1/2}x)$$

$$i^{-n}K_n(i^{1/2}x) = \mathrm{ker}_n x + i\mathrm{kei}_n x \tag{۴.۲۳}$$

(اگر $n = 0$ باشد، اغلب از نماد $\mathrm{ber}x$، و غیره، استفاده می‌شود.)

بنابراین، جواب عمومی معادله (۴.۲۱) از رابطه:

$$y = A_1(\mathrm{ber}_n(kx) + i\mathrm{bei}_n(kx)) + A_2(\mathrm{ker}_n(kx) + i\mathrm{kei}_n(kx)) \tag{۴.۲۴}$$

به دست می‌آید.

۴.۱۱ توابع بسل کروی

معادله دیفرانسیل:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \{k^2x^2 - l(l+1)\}y = 0 \tag{۴.۲۵}$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

معادله فوق صورتی از معادله قضیه ۴.۱۲ با

$$1 - 2\alpha = 2$$

$$\gamma = 1$$

$$\beta^2\gamma^2 = k^2$$

$$\alpha^2 - n^2\gamma^2 = -l(l+1)$$

است. از حل دستگاه معادلات فوق، به‌دست می‌آید:

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = k, \gamma = 1, n = l + \frac{1}{2}$$

بنابراین، طبق قضیه ۴.۱۲، جواب عمومی معادله (۴.۱۲) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} y &= Ax^{-\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kx) + Bx^{-\frac{1}{2}} Y_{l+\frac{1}{2}}(kx) \\ &= A_1 j_l(kx) + A_2 y_l(kx) \end{aligned}$$

که در آن توابع بسل کروی $j_1(x)$ و $j_2(x)$ به‌صورت:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x)\ , \tag{۴.۲۶}$$

$$y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x) \tag{۴.۲۷}$$

تعریف شده‌اند، و ثابت‌های جدید دلخواه A_1، A_2 با فرمول $A_1 = \sqrt{\frac{2k}{\pi}} A$ و $A_2 = \sqrt{\frac{2k}{\pi}} B$ با A و B در ارتباط هستند.

توابع هنکل کروی را نیز می‌توان به روشی کاملاً مشابه توابع هنکل تعریف کرد:

$$h_l^{(1)}(x) = j_1(x) + iy_l(x) \tag{۴.۲۸}$$

$$h_l^{(2)}(x) = j_1(x) - iy_l(x) \tag{۴.۲۹}$$

در کاربردها معلوم شده است که، توابع بسل کروی با مرتبه صحیح فوائد بیشتری دارند. نشان خواهیم داد که، توابع بسل کروی را می‌توان به فرمی کاملاً نزدیک به توابع مقدماتی نوشت اما، ابتدا به اثبات روابطی برگشتی می‌پردازیم، که مشابه آنها را قبلاً در قضیه‌های ۴.۸، ۴.۹ و ۴.۱۰ برای توابع بسل دیده‌ایم.

قضیه ۴.۱۸. اگر $f_n(x)$ نمادی برای یکی از توابع $j_n(x)$، $y_n(x)$، $h_n^{(1)}(x)$ یا $h_n^{(2)}(x)$ باشد، آنگاه:

$$\text{(i)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{x^{n+1} f_n(x)\} = x^{n+1} f_{n-1}(x).$$

$$\text{(ii)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{x^{-n} f_n(x)\} = -x^{-n} f_{n+1}(x).$$

$$\text{(iii)} \qquad f_n'(x) = f_{n-1}(x) - \frac{n+1}{x} f_n(x).$$

$$\text{(iv)} \qquad f_n'(x) = \frac{n}{x} f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

$$\text{(v)} \qquad (2n+1)f_n'(x) = nf_{n-1}(x) - (n+1)f_{n+1}(x).$$

$$\text{(vi)} \qquad f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} f_n(x).$$

اثبات. ابتدا روابط فوق را برای $j_n(x)$ ثابت می‌کنیم.

(i) از قسمت (i) قضیه ۴.۸ با تبدیل n به $n + \frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{x^{n+\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(x)\} = x^{n+\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}-1}(x)$$

رابطه فوق را با استفاده از تعریف (۴.۲۶) می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dx}\{x^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\frac{1}{2}} j_n(x)\} = x^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\frac{1}{2}} j_{n-1}(x)$$

و این معادله را می‌توان به فرم:

$$\frac{d}{dx}\{x^{n+1} j_n(x)\} = x^{n+1} j_{n-1}(x)$$

نوشت.

(ii) از قسمت (ii) قضیه ۴.۸ با تبدیل n به $n + \frac{1}{2}$ خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(x)\} = -x^{n-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}+1}(x).$$

با استفاده مجدد از تعریف (۴.۲۶) به‌دست می‌آید:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{x^{-n-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\frac{1}{2}} j_n(x)\} = -x^{-n-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\frac{1}{2}} j_{n+1}(x)$$

و بنابراین:

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n} j_n(x)\} = -x^{-n} j_{n+1}(x).$$

(iii) با انجام عمل مشتق‌گیری از سمت چپ رابطه (i) فوق، خواهیم داشت:

$$x^{n+1} j_n'(x) + (n+1)x^n j_n(x) = x^{n+1} j_{n-1}(x)$$

با تقسیم طرفین این تساوی بر x^{n+1} به‌دست می‌آید:

$$j_n'(x) + \frac{n+1}{x} j_n(x) = j_{n-1}(x)$$

و بنابراین:

$$j_n'(x) = j_{n-1}(x) - \frac{n+1}{x} j_n(x).$$

(iv) با انجام عمل مشتق‌گیری از سمت چپ رابطه (ii) فوق، خواهیم داشت:

$$x^{-n} j_n'(x) - n x^{-n-1} j_n(x) = -x^{-n} j_{n+1}(x)$$

با حذف عامل مشترک x^{-n} از طرفین این تساوی به‌دست می‌آید:

$$j_n'(x) - \frac{n}{x} j_n(x) = -j_{n+1}(x)$$

و بنابراین:

$$j_n'(x) = \frac{n}{x} j_n(x) - j_{n+1}(x)$$

(v) با ضرب رابطه (iii) در n، و رابطه (iv) در $(n+1)$ و جمع نمودن نتایج به‌دست آمده، رابطه (v) نیز ثابت می‌شود.

(vi) با تفریق رابطه (iv) از رابطه (iii)، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

با روشی مشابه می‌توان قضیه را برای $y_n(x)$، $h_n^{(1)}(x)$، و $h_n^{(2)}(x)$ ثابت نمود. زیرا، این توابع با روابطی شبیه آن چه که $j_n(x)$ از $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ به‌دست آمد، از توابع $Y_{n+\frac{1}{2}}(x)$، $H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(x)$ و $H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(x)$ تولید می‌شوند، و طبق قضیه‌های ۴.۹ و ۴.۱۰، توابع بسل گوناگون همگی در روابط برگشتی مشابهی صدق می‌کنند.

قضیه ۴.۱۹. توابع $j_0(x)$ و $y_0(x)$ و $h_0^{(1)}(x)$ و $h_0^{(2)}(x)$ از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\text{(i)} \quad j_0(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

$$\text{(ii)} \quad y_0(x) = -\frac{\cos x}{x}.$$

$$\text{(iii)} \quad h_0^{(1)}(x) = -i\frac{e^{ix}}{x}.$$

$$\text{(iv)} \quad h_0^{(2)}(x) = i\frac{e^{-ix}}{x}$$

اثبات. (i) طبق رابطه (۴.۲۶)، داریم:

$$j_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(\frac{1}{2}+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\frac{1}{2}}$$

(طبق معادله ۴.۶)

اما، طبق نتیجه قضیه ۲.۱۰، داریم:

$$\Gamma(r+1+\frac{1}{2}) = \frac{(2r+2)!}{2^{2r+2}(r+1)!}\sqrt{\pi}$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{2^{2r+2}(r+1)!}{r!(2r+2)!\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x^{2r+\frac{1}{2}}}{2^{2r+\frac{1}{2}}} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{2(r+1)}{(2r+2)!} x^{2r} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r+1)!} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!} = \frac{1}{x}\sin x \end{aligned}$$

(با توجه به شناختی که از سری نامتناهی مربوط به $\sin x$ داریم).

(ii) داریم:

$$y_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{\frac{1}{2}}(x)$$

(طبق تعریف (۴.۲۷))

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \frac{J_{\frac{1}{2}}(x)\cos\frac{\pi}{2} - J_{-\frac{1}{2}}(x)}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

(طبق تعریف $Y_n(x)$ در قضیه ۴.۲)

$$\begin{aligned} &= -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-\frac{1}{2}}(x) \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(-\frac{1}{2}+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(طبق سری (۴.۷))

اما، دوباره، طبق نتیجه قضیه ۲.۱۰، داریم:

$$\Gamma(-\frac{1}{2}+r+1)=\Gamma(r+\frac{1}{2})$$
$$=\frac{(2r)!}{2^{2r}r!}\sqrt{\pi}$$

بنابراین:

$$y_0(x)=-\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{2^{2r}r!}{r!(2r)!\sqrt{\pi}}\cdot\frac{x^{2r-\frac{1}{x}}}{2^{2r-\frac{1}{2}}}$$
$$=-\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{x^{2r-1}}{(2r)!}$$
$$=-\frac{1}{x}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{x^{2r}}{(2r)!}$$
$$=-\frac{1}{x}\cos x$$

(با توجه به شناختی که از سری نامتناهی مربوط به $\cos x$ داریم).

(iii) داریم:

$$h_0^{(1)}(x)=j_0(x)+iy_0(x)$$

(طبق تعریف (۴.۲۸))

$$=\frac{1}{x}\sin x-i\frac{1}{x}\cos x$$
$$=-\frac{i}{x}(\cos x+i\sin x)$$
$$=-i\frac{e^{ix}}{x}.$$

(iv) داریم:

$$h_0^{(2)}(x)=j_0(x)-iy_0(x)$$
$$=\frac{1}{x}\sin x+i\frac{1}{x}\cos x$$
$$=\frac{i}{x}(\cos x-i\sin x)$$

$$= i\frac{e^{-x}}{x}$$

قضیه ۴.۲۰ (فرمول‌های رایلی). اگر n عددی غیرصحیح باشد، آنگاه

$$\text{(i)} \quad j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right);$$

$$\text{(ii)} \quad y_n(x) = -(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right);$$

$$\text{(iii)} \quad h_n^{(1)}(x) = -i(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \left(\frac{e^{ix}}{x}\right);$$

$$\text{(iv)} \quad h_n^{(2)}(x) = i(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \left(\frac{e^{-ix}}{x}\right).$$

اثبات. ما تنها رابطه (i) را ثابت می‌کنیم، اثبات بقیه روابط مشابه است. از روش استقراء ریاضی استفاده می‌کنیم. طبق قضیه ۴.۱۹، رابطه (i) برای $n = 0$ برقرار است. فرض کنیم رابطه (i) برای $n = N$ درست باشد، ثابت می‌کنیم که این رابطه برای $n = N + 1$ نیز برقرار است، که در اینصورت، قضیه برای همه اعداد صحیح مثبت ثابت خواهد شد.

از درست فرض نمودن رابطه (i) برای $n = N$، نتیجه می‌شود:

$$j_N(x) = (-1)^N x^N \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^N \left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

طبق قسمت (ii) قضیه ۴.۱۸، داریم:

$$\begin{aligned} j_{N+1}(x) &= -x^N \frac{d}{dx}\{x^{-N} j_N(x)\} \\ &= -x^N \frac{d}{dx}\left\{x^{-N}(-1)^N x^N \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^N \left(\frac{\sin x}{x}\right)\right\} \end{aligned}$$

(با استفاده از این حقیقت که فرض کرده‌ایم رابطه (i) برای $n = N$ برقرار است.)

$$\begin{aligned} &= -(-1)^N x^N \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^N \left(\frac{\sin x}{x}\right) \\ &= (-1)^{N+1} x^{N+1} \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^N \left(\frac{\sin x}{x}\right) \\ &= (-1)^{N+1} x^{N+1} \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{N+1} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \end{aligned}$$

که ثابت می‌کند، نتیجه برای $n = N+1$ نیز برقرار است.

در نتیجه، رابطه (i) برای هر عدد صحیح مثبت n، طبق اصل استقرا و ریاضی، ثابت می‌شود.

از نتایج فوق می‌توان برای به‌دست آوردن تعدادی از نخستین توابع بسل کروی با مرتبه صحیح استفاده نمود. فرمول‌های زیر از این طریق به‌دست آمده‌اند.

$$\begin{aligned} j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \\ j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3}{x^2}\cos x, \\ j_3(x) &= \left(\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2}\right)\sin x - \left(\frac{15}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x; \end{aligned} \tag{۴.۳۰}$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}, \\ y_2(x) &= -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3}{x^2}\sin x, \\ y_3(x) &= -\left(\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2}\right)\cos x - \left(\frac{15}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x \end{aligned} \tag{۴.۳۱}$$

توجه به این نکته ضروری است که، به‌دلیل روابط (۴.۲۶) و (۴.۲۷)، همه اطلاعات فوق در رابطه با توابع بسل کروی با مرتبه صحیح، مقدار اطلاعات برابری را در رابطه با توابع بسل از مرتبه صحیح نیمه فرد تأمین می‌نماید.

۴.۱۲ رفتار توابع بسل برای مقادیر بزرگ و کوچک متغیر

قضیه ۴.۲۱. وقتی $x \to \infty$، خواهیم داشت*:

$$\text{(i)} \quad J_n(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left\{x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\};$$

$$\text{(ii)} \quad Y_n(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin\left\{x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\};$$

$$\text{(iii)} \quad H_n^{(1)}(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \exp\left[i\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

$$\text{(iv)} \quad H_n^{(2)}(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \exp\left[-i\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

$$\text{(v)} \quad I_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x;$$

*) اگر زیاد دقیق نباشیم، در اینجا از نماد $\sim$ به معنی «رفتار مشابه داشتن» استفاده شده است. کمی دقیقتر، رابطه $f(x) \sim g(x)$ وقتی $x \to a$، به‌صورت $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ تعریف می‌شود.

$$\text{(vi)} \quad K_n(x) \sim \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x};$$

$$\text{(vii)} \quad j_n(x) \sim \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$\text{(viii)} \quad y_n(x) \sim -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$\text{(ix)} \quad h_n^{(1)}(x) \sim -\frac{i}{x} \exp\left[i\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\right];$$

$$\text{(x)} \quad h_n^{(2)}(x) \sim \frac{i}{x} \exp\left[-i\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

اثبات. ابتدا رابطه (vi) را ثابت نموده، سپس، بقیه روابط را از این رابطه نتیجه می‌گیریم.

(vi). طبق رابطه (ii) از قضیه ۴.۱۷، داریم:

$$K_n(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_1^\infty e^{-xt}(t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} dt.$$

اکنون با تغییر متغیر:

$$t = 1 + \frac{u}{x}$$

$$dt = \frac{1}{x} du$$

خواهیم داشت:

همچنین، حدود $t = 1$ و $t = \infty$، به $u = 0$ و $u = \infty$ تبدیل خواهند شد. بنابراین:

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^\infty e^{-(x+u)} \left(\frac{u^2}{x^2} + \frac{2u}{x}\right)^{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} du \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^n e^{-x} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{2x} + 1\right)^{n-\frac{1}{2}} u^{n-\frac{1}{2}} du \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{2}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} e^{-x} \int_0^u e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du.
\end{aligned}$$

برای مقادیر بزرگ x، $\frac{u}{2x}$ کوچک خواهد بود، بنابراین، می‌توان از تقریب:

$$\left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} \sim 1$$

استفاده نمود، و در این صورت، خواهیم داشت:

$$K_n(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot e^{-x} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot e^{-x} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

(طبق تعریف (۲.۱))

$$= \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}$$

(iii) از قضیه ۴.۱۴، داریم:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix)$$

که در آن، اگر n عددی غیرصحیح باشد، مقدار i^{n+1} را برابر مقدار اصلی آن، یعنی، $e^{\frac{i\pi}{2}(n+1)}$ می‌گیریم. در این صورت:

$$H_n^{(1)}(ix) = \frac{2}{\pi} \exp\left\{\left(-\frac{i\pi}{2}\right)(n+1)\right\} K_n(x)$$

و در نتیجه، با تغییر x به $-ix$ خواهیم داشت:

$$H_n^{(1)}(x) = \frac{2}{\pi} \exp\left\{\left(-\frac{i\pi}{2}\right)(n+1)\right\} K_n(-ix)$$

بنابراین:

$$H_n^{(1)}(x) \sim \frac{2}{\pi} \exp\left\{\left(-\frac{i\pi}{2}\right)(n+1)\right\} \left(\frac{\pi}{-2ix}\right)^{1/2} e^{ix}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} (-i)^{-1/2} \exp\left\{\left(-\frac{i\pi}{2}\right)(n+1)\right\} e^{ix}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} e^{i\pi/4} \exp\left\{\left(-\frac{i\pi}{2}\right)(n+1)\right\} e^{ix}$$

(با نوشتن $-i = e^{-i\pi/2}$)

$$= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \exp\left[i\left(x - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

(iv) از روابط:

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$$

و

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$$

نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} H_n^{(2)}(x) &= \{H_n^{(1)}(x)\}^\star \\ &\sim \left[\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \exp\left\{i(x - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2})\right\}\right]^\star \\ &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \exp\left[-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

(i) داریم:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= ReH_n^{(1)}(x) \\ &\sim Re\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \exp\left[i\left(x - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left\{x - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\}. \end{aligned}$$

(ii). به طریق مشابه:

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= ImH_n^{(1)}(x) \\ &\sim Im\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \exp\left\{i(x - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2})\right\} \\ &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin\left\{x - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\}. \end{aligned}$$

(v) طبق تعریف، داریم $I_n(x) = i^{-n}J_n(ix)$، بنابراین، طبق قسمت (i) فوق، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I_n(x) &\sim i^{-n}\left(\frac{2}{\pi i x}\right)^{1/2} \cos\left\{ix - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\} \\ &= i^{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left[\exp\left\{-x - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}i\right\} + \exp\left\{x + \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}i\right\}\right] \end{aligned}$$

$$= i^{-n-\dfrac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left\{x + \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} i\right\}$$

(وقتی $x \to \infty$ اولین جمله به سمت صفر میل می‌کند)

$$= i^{-n-\dfrac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} i^{n+\dfrac{1}{2}} \exp(x)$$

(با نوشتن $\exp\left(\dfrac{i\pi}{2}\right) = i$)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x.$$

(vii) طبق تعریف (۴.۲۶)، داریم:

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \\ &\sim \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left\{x - (n+1)\frac{\pi}{2}\right\} \end{aligned}$$

(طبق رابطه (i) فوق)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{x}\sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

(viii) طبق تعریف (۴.۲۷)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} Y_{n+\frac{1}{2}}(x) \\ &\sim \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin\left\{x - (n+1)\frac{\pi}{2}\right\} \end{aligned}$$

(طبق رابطه (ii) فوق)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x}\sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{x}\sin\left\{\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

(ix) داریم:

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + i y_n(x)$$

$$\begin{aligned}&\sim \frac{1}{x}\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{i}{x}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\\&=-\frac{i}{x}\left\{\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)+i\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\\&=-\frac{i}{x}\exp\left\{i\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right\}.\end{aligned}$$

(x) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}h_n^{(2)}(x)&=\{h_n^{(1)}(x)\}^\star\\&\sim\left[-\frac{i}{x}\exp\left\{i\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\right]^\star\\&=\frac{i}{x}\exp\left[-i\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

قضیه ۴.۲۲. وقتی $x \to 0$، خواهیم داشت:

(i) $J_n(x) \sim \dfrac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$;

(ii) $Y_n(x) \sim \begin{cases}-\dfrac{1}{x}\Gamma(n)\left(\dfrac{2}{x}\right)^n & \text{اگر } n\neq 0 \text{ باشد،}\\ \dfrac{2}{\pi}\ln x & \text{اگر } n=0 \text{ باشد،}\end{cases}$;

(iii) $j_n(x) \sim \dfrac{x^n}{(2n+1)!!}$ اگر n عددی صحیح باشد؛*

(iv) $y_n(x) \sim \dfrac{(2n-1)!!}{x^{n+1}}$ اگر n عددی صحیح باشد.

اثبات. (i). سری (۴.۶) را برای $J_n(x)$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. وقتی $x \to 0$، تنها پائین‌ترین توان x مهم خواهد بود. اما، این پائین‌ترین توان از جمله با $r=0$ به‌دست می‌آید، بنابراین، خواهیم داشت:

$$J_n(x) \sim \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

*) نماد $n!!$ (فاکتوریل دوگانه n) به معنی:

$$n!!=\begin{cases}1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1) & \text{اگر } n=2k-1 \text{ فرد باشد،}\\ 2\cdot4\cdot6\cdots(2k) & \text{اگر } n=2k \text{ زوج باشد،}\end{cases}$$

می‌باشد.

(ii) وقتی n عددی صحیح نباشد، داریم:

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

حال، پائین‌ترین توان x که در عبارت فوق ظاهر شده است، جدا می‌کنیم. این پائین‌ترین توان در $J_{-n}(x)$ واقع شده، و طبق نتیجه (i) فوق به‌دست می‌آید، بنابراین:

$$\begin{aligned} Y_n(x) &\sim -\frac{1}{\sin n\pi} \cdot \frac{1}{\Gamma(-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \\ &= -\frac{\Gamma(n)}{n} \left(\frac{2}{x}\right)^{n} \end{aligned}$$

که در آن به جای $\Gamma(1-n)$ با استفاده از قضیه ۲.۱۲ مقدار:

$$\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\Gamma(n)\sin n\pi}$$

گذاشته‌ایم.

وقتی n عددی صحیح باشد، جمله غالب را از سری مربوط به $Y_n(x)$، که در قضیه ۴.۳ بیان شده است، جدا می‌کنیم. با توجه به غالب بودن هر توان معلومی از x بر لگاریتم x، دیده می‌شود که:

$$Y_n(x) \sim \frac{2}{\pi}\ln x \qquad (n=0)$$

و

$$\begin{aligned} Y_n(x) &\sim -\frac{1}{\pi}(n-1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \qquad (n \neq 0) \\ &= -\frac{1}{\pi}\Gamma(n) \left(\frac{2}{x}\right)^{n}. \end{aligned}$$

(iii) از تعریف (۴.۲۶) داریم:

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \\ &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \frac{1}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}x^n}{2^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

(با استفاده مکرر از این واقعیت که $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ است.)

$$= \frac{\sqrt{\pi}x^n}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1\sqrt{\pi}}$$

(که در آن از رابطه $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ که در قضیه ۲.۶ ثابت شده است، استفاده کرده‌ایم.)

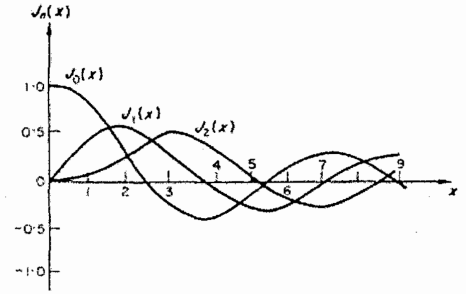
$$= \frac{x^n}{(2n+1)!!}.$$

(iv). داریم:

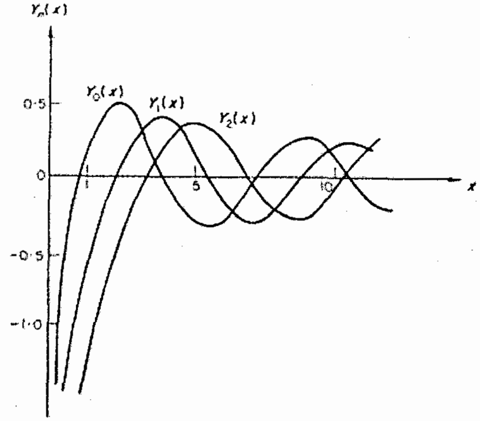
$$\begin{aligned} y_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}Y_{n+\frac{1}{2}}(x) \\ &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left\{-\frac{1}{\pi}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{x}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2^n}{x^{n+1}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{x^{n+1}}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}}{x^{n+1}} \\ &= -\frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

۴.۱۳ نمودارهای توابع بسل

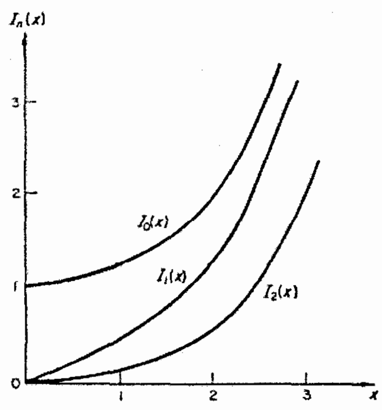
در این قسمت نمودارهائی از توابع بسل گوناگون رسم شده است. این نمودارها به طور نسبتاً واضحی رفتار این گونه توابع را برای مقادیر بزرگ و کوچک x که در بخش قبل مورد بررسی قرار گرفته‌اند، نشان می‌دهند.



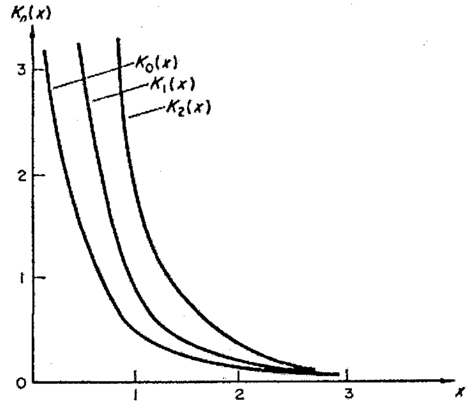
شکل ۴.۱ $J_n(x)$ برای $n = 0, 1, 2$



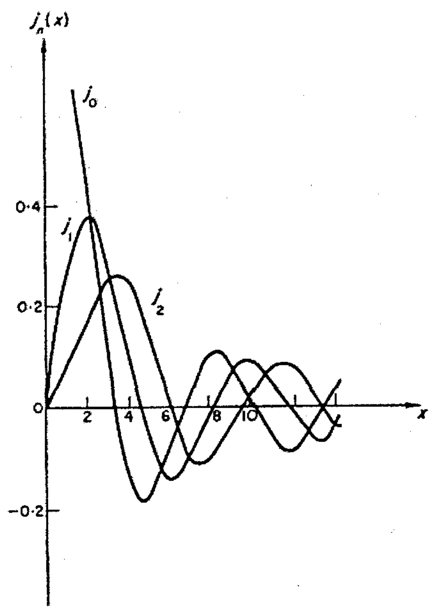
شکل ۴.۲ $Y_n(x)$ برای $n = 0, 1, 2$



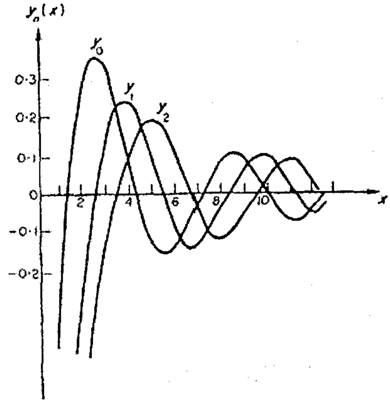
شکل ۴.۳ $I_n(x)$ برای $n = 0, 1, 2$



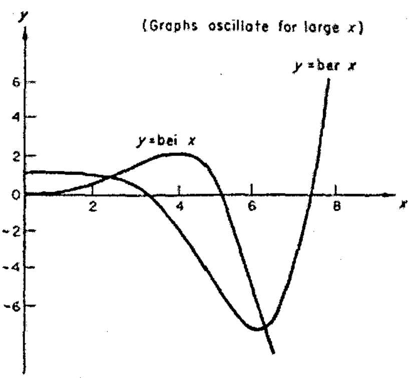
شکل ۴.۴ $K_n(x)$ برای $n = 0, 1, 2$



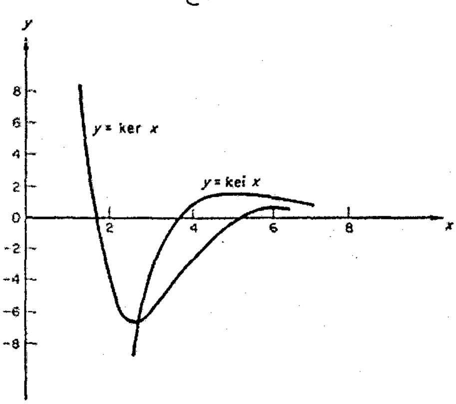
شکل ۴.۵ $j_n(x)$ برای $n = 0, 1, 2$



شکل ۴.۶ $y_n(x)$ برای $n = 0, 1, 2$



شکل ۴.۷ نمودارهای توابع $\text{ber}x$ و $\text{bei}x$



شکل ۴.۸ نمودارهای توابع $\text{ker}x$ و $\text{kei}x$

۴.۱۴ تعامد توابع بسل، سری بسل

قضیه ۴.۲۳. اگر ξ_i و ξ_j ریشه‌های معادله $J_n(\xi a)=0$ باشند، آنگاه:

$$\int_0^a xJ_n(\xi_i x)J_n(\xi_j x)\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\left\{J_{n+1}(\xi_i a)\right\}^2\delta_{ij}.$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر ξ_i و ξ_j دو ریشه متمایز معادله $J_n(\xi a)=0$ باشند، آنگاه:

$$\int_0^a xJ_n(\xi_i x)J_n(\xi_j x)dx = 0$$

توابع بسل $J_n(\xi_i x)$ و $J_n(\xi_j x)$ در معادلات بسل زیر صدق می‌کنند:

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}J_n(\xi_i x) + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\xi_i x) + (\xi_i^2x^2-n^2)J_n(\xi_i x)=0$$

و

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}J_n(\xi_j x) + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\xi_j x) + (\xi_j^2x^2-n^2)J_n(\xi_j x)=0$$

معادلات فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\xi_i\cdot x)\right\} + (\xi_i^2x^2-n^2)J_n(\xi_i x)=0 \tag{۴.۳۲}$$

و

$$x\frac{d}{dx}\left\{x\frac{d}{dx}J_n(\xi_j x)\right\} + (\xi_j^2x^2-n^2)J_n(\xi_j x)=0 \tag{۴.۳۳}$$

با ضرب معادله (۴.۳۲) در $\frac{1}{x}J_n(\xi_j x)$، و معادله (۴.۳۳) در $\frac{1}{x}J_n(\xi_i x)$ و تفریق نتایج به‌دست آمده از یکدیگر، خواهیم داشت:

$$J_n(\xi_j x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\xi_i x)\right\} - J_n(\xi_i x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\xi_j x)\right\}$$
$$+(\xi_i^2-\xi_j^2)xJ_n(\xi_i x)J_n(\xi_j x)=0$$

با بکارگیری فرمول $u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(uv)}{dx}-v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ در جملات اول و دوم رابطه فوق به‌دست می‌آید:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{J_n(\xi_j x)\cdot x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\xi_i x)\right\} - \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\xi_j x)\right\}x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\xi_i x)$$
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{J_n(\xi_i x)\cdot x\cdot\frac{d}{dx}J_n(\xi_j x)\right\} + \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\xi_i x)\right\}x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\xi_j x)$$
$$+(\xi_i^2-\xi_j^2)J_n(\xi_i x)J_n(\xi_j x)=0$$

و بنابراین:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{J_n(\xi_j x)\cdot x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\xi_i x)\right\}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{J_n(\xi_i x)\cdot x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\xi_j x)\right\}$$
$$+(\xi_i^2-\xi_j^2)xJ_n(\xi_i x)J_n(\xi_j x)=0$$

با انتگرال‌گیری از رابطه فوق از 0 تا a خواهیم داشت:

$$\left[xJ_n(\xi_j x)\frac{d}{dx}J_n(\xi_j x)-xJ_n(\xi_i x)\frac{d}{dx}J_n(\xi_j x)\right]_{x=0}^{a}$$
$$+(\xi_i^2-\xi_j^2)\int_0^a xJ_n(\xi_i x)J_n(\xi_j x)dx=0$$

اولین جمله به دلیل روابط:

$$J_n(\xi_i a)=J_n(\xi_j a)=0$$

و وجود فاکتور x به ترتیب در حد بالا و حد پائین انتگرال برابر صفر است. بنابراین:

$$(\xi_i^2-\xi_j^2)\int_0^a xJ_n(\xi_i x)J_n(\xi_j x)dx=0$$

و در نتیجه، اگر $\xi_i \neq \xi_j$، باشد، آنگاه:

$$\int_0^a xJ_n(\xi_i x)J_n(\xi_j x)dx=0$$

برای کامل کردن اثبات، باید نشان دهیم که، اگر $J_n(\xi a)=0$ باشد، آنگاه:

$$\int_0^a x\{J_n(\xi x)\}^2dx=\frac{a^2}{2}\{J_{n+1}(\xi a)\}^2$$

حال، اگر $J_n(\xi x)$ را به z نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$x^2z''+xz'+(\xi^2x^2-n^2)z=0$$

با ضرب معادله فوق در $2z'$ به‌دست می‌آید:

$$2x^2z''z'+2xz'^2+2(\xi^2x^2-n^2)zz'=0$$

به سادگی دیده می‌شود، که معادله فوق هم ارز معادله زیر است:

$$\frac{d}{dx}\{x^2z'^2-n^2z^2+\xi^2x^2z^2\}-2\xi^2xz^2=0$$

با انتگرالگیری از این معادله از فاصله ۰ تا a خواهیم داشت:

$$\left[x^2 z'^2 - n^2 z^2 + \xi^2 x^2 z\right]_{x=0}^{x=a} - 2\xi^2 \int_0^a x z^2 dx = 0$$

حال، اگر در معادله فوق به جای z تابع $J_n(\xi x)$ قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\left[x^2 \left\{\frac{d}{dx} J_n(\xi x)\right\}^2 - n^2 \{J_n(\xi x)\}^2 + \xi^2 x^2 \{J_n(\xi x)\}^2\right]_{x=0}^{a} - 2\xi^2 \int_0^a x \{J_n(\xi x)\}^2 dx = 0$$

و در نتیجه، با استفاده از روابط $J_n(\xi a) = 0$ و $nJ_n(0) = 0$، خواهیم داشت:

$$\left[a^2 \left\{\frac{d}{dx} J_n(\xi x)\right\}^2\right]_{x=a} - 2\xi^2 \int_0^a x \{J_n(\xi x)\}^2 dx = 0$$

بنابراین:

$$\int_0^a x \{J_n(\xi x)\}^2 dx = \frac{1}{2\xi^2} \left[a^2 \left\{\frac{d}{dx} J_n(\xi x)\right\}^2\right]_{x=a}$$

اما، طبق قسمت (iv) قضیه ۴.۸، داریم:

$$\frac{d}{d(\xi x)} J_n(\xi x) = \frac{n}{\xi x} J_n(\xi x) - J_{n+1}(\xi x)$$

این معادله را می‌توان به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\frac{d}{dx} J_n(\xi x) = \frac{n}{x} J_n(\xi x) - \xi J_{n+1}(\xi x)$$

بنابراین:

$$\int_0^a x \{J_n(\xi x)\}^2 dx = \frac{1}{2\xi^2} \left[a^2 \left\{\frac{n}{x} J_n(\xi x) - \xi J_{n+1}(\xi x)\right\}^2\right]_{x=a}$$

$$= \frac{1}{2\xi^2} a^2 \xi^2 \{J_{n+1}(\xi a)\}^2$$

(با استفاده مجدد از این حقیقت که $J_n(\xi a) = 0$)

$$= \frac{a^2}{2} \{J_{n+1}(\xi a)\}^2.$$

قضیه ۴.۲۴. اگر تابع $f(x)$ روی فاصله $0 \le x \le a$ تعریف شده باشد، و بتوان آن را به صورت $\sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\xi_i x)$

بسط داد، که در آن ξ_iها ریشه‌های معادله $J_n(\xi a) = 0$ هستند، آنگاه *:

$$c_i = \frac{2\int_0^a xf(x)J_n(\xi_i x)dx}{a^2\{J_{n+1}(\xi_i a)\}^2}$$

اثبات. داریم:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_1 J_n(\xi_i x)$$

بنابراین:

$$xf(x)J_n(\xi_j x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x J_n(\xi_i x) J_n(\xi_j x)$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned}\int_0^a xf(x)J_n(\xi_j x)dx &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_0^a xJ_n(\xi_i x)J_n(\xi_j x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \frac{a^2}{2}\{J_{n+1}(\xi_i a)\}^2 \delta_{ij}\end{aligned}$$

(طبق قضیه ۴.۲۳)

$$= c_j \frac{a^2}{2}\{J_{n+1}(\xi_j a)\}^2$$

بنابراین:

$$c_j = \frac{2\int_0^a xf(x)J_n(\xi_j x)dx}{a^2\{J_{n+1}(\xi_j a)\}^2}$$

و با این رابطه اثبات کامل می‌شود:

سری $\sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\xi_i x)$ با ضرائب c_i که طبق قضیه ۴.۲۴ تعریف شده‌اند، سری بسل برای تابع $f(x)$ می‌نامند. در قضیه زیر که ما آن را بدون اثبات شرح داده‌ایم، به شرایطی اشاره شده است، که تحت آن می‌توان $f(x)$ را به روش فوق به سری بسل بسط داد.

قضیه ۴.۲۵. اگر تابع $f(x)$ روی فاصله $[0, a]$ معین و به‌طور قطعه‌ای پیوسته باشد*، و $\int_0^a \sqrt{x} f(x)dx$

*) مؤلف کتاب روشن نکرده است، که همگرائی سری $\sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\xi_i x)$ به سمت تابع $f(x)$ از چه نوعی است (یکنواخت، نقطه‌وار، میانگین مربعی، ...) و چرا رابطه:

$$\int_0^a \sum_{i=1}^{\infty} c_i x J_n(\xi_i x) J_n(\xi_j x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_0^a xJ_n(\xi_i x)J_n(\xi_j x)dx$$

که با توجه به نوع همگرائی سری $\sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\xi_i x)$ به تابع $f(x)$ چندان هم بدیهی نبوده است، بدیهی فرض کرده است؟! مترجم.

*) در متن اصلی کتاب پیوستگی قطعه‌وار تابع $f(x)$ جا افتاده است. مترجم.

متناهی باشد، آنگاه سری:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\xi_i x)$$

که در آن $c_i = \dfrac{2\int_0^a x f(x) J_n(\xi_i x)\mathrm{d}x}{a^2\{J_{n+1}(\xi_i a)\}^2}$ ، همگرا خواهد بود، و مجموع آن در نقطه x برابر $f(x)$ است اگر تابع $f(x)$ در نقطه x پیوسته باشد، و برابر $\frac{1}{2}\{f(x+)+f(x-)\}$ است اگر تابع $f(x)$ در نقطه x ناپیوستگی نوع اول داشته باشد.

۴.۱۵ انتگرال‌های حاوی توابع بسل

قضیه ۴.۲۶. برای $n > m > -1$، داریم:

$$J_n(x) = \frac{2(x/2)^{n-m}}{\Gamma(n-m)} \int_0^1 (1-t^2)^{n-m-1} t^{m+1} J_m(xt)dt$$

اثبات. انتگرال:

$$I = \int_0^1 (1-t^2)^{n-m-1} t^{m+1} J_m(xt)dt$$

را مورد بررسی قرار داده، با جایگذاری سری (۴.۶) به جای J_m، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 (1-t^2)^{n-m-1} t^{m+1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(xt/2)^{m+2r}}{r!\Gamma(m+r+1)} dt \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(x/2)^{m+2r}}{r!\Gamma(m+r+1)} \int_0^1 (1-t^2)^{n-m-1} t^{2m+2r+1} dt \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(x/2)^{m+2r}}{\Gamma(m+r+1)} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u)^{n-m-1} u^{m+r} du
\end{aligned}$$

(با تغییر متغیر $u = t^2$)

اما، طبق تعریف تابع بتا، به شرط اینکه $n-m>0$ و $m+r+1>0$ باشد (شرط اخیر هم‌ارز این است که، $m > -1$، زیرا، r مقادیر بین ۰ تا ∞ را می‌گیرد)، داریم:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-u)^{n-m-1} u^{m+r} du &= B(n-m, m+r+1) \\
&= \frac{\Gamma(n-m)\Gamma(m+r+1)}{\Gamma(n+r+1)}
\end{aligned}$$

(طبق قضیه ۲.۷)

بنابراین:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\Gamma(n-m)\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(x/2)^{m+2r}}{r!\Gamma(n+r+1)} \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(n-m)\left(\frac{x}{2}\right)^{m-n}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(x/2)^{n+2r}}{r!\Gamma(n+r+1)} \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(n-m)\left(\frac{x}{2}\right)^{m-n}J_n(x). \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$J_n(x) = 2\frac{(x/2)^{n-m}}{\Gamma(n-m)}I$$

و قضیه به‌طور کامل ثابت می‌شود.

قضیه ۴.۲۷. اگر $a > 0$ باشد، آنگاه:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}J_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

اثبات. از قضیه ۴.۶ داریم:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi)d\varphi$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ax}J_0(bx)dx &= \int_0^{\infty} e^{-ax}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(bx\sin\varphi)d\varphi\right]dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_0^{\infty} e^{-ax}\frac{1}{2}\left\{\exp(ibx\sin\varphi)+\exp(-ibx\sin\varphi)\right\}dx\right]d\varphi \end{aligned}$$

(با تعویض ترتیب انتگرالگیری)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\exp\{-(a-ib\sin\varphi)x\}}{-a+ib\sin\varphi}+\frac{\exp\{-(a+ib\sin\varphi)x\}}{-a-ib\sin\varphi}\right]_{x=0}^{\infty}d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{a-ib\sin\varphi}+\frac{1}{a+ib\sin\varphi)}\right)d\varphi \\ &= \frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{a^2+b^2\sin^2\varphi}d\varphi. \end{aligned}$$

اما، انتگرال اخیر را می‌توان با روشهای مقدماتی، و مثلاً، با تغییر متغیر $u\cot\varphi$ محاسبه نمود. با محاسبه انتگرال فوق به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ax}J_0(bx)dx &= \frac{a}{\pi}\cdot\frac{\pi}{a\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}$$

قضیه ۴.۲۸. اگر n یک عدد صحیح غیرمنفی، و $b > 0$ باشد، آنگاه:

$$\int_0^\infty J_n(bx)dx = \frac{1}{b}.$$

اثبات. ابتدا قضیه را برای $n = 0$ و $n = 1$ ثابت می‌کنیم، سپس، ثابت می‌کنیم، اگر قضیه برای $n = N$ درست باشد، آنگاه برای $n = N + 2$ نیز درست خواهد بود، با اثبات این مطلب، قضیه برای هر عدد صحیح غیرمنفی n ثابت خواهد شد.

برای $n = 0$، با حدگیری از نتیجه قضیه ۴.۲۷، وقتی $a \to 0^+$، خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty J_0(bx)dx = \frac{1}{b}$$

برای $n = 1$، طبق قسمت (ii) قضیه ۴.۸، داریم:

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\} = -x^n J_{n+1}(x)$$

با قراردادن $n = 0$ در رابطه فوق به‌دست می‌آید:

$$\frac{d}{dx}J_0(x) = -J_1(x)$$

و با تبدیل x به bx در این تساوی، خواهیم داشت:

$$\frac{d}{d(bx)}J_0(bx) = -J_1(bx)$$

که معادل رابطه:

$$\frac{1}{b}\frac{d}{dx}J_0(bx) = -J_1(bx)$$

است. بنابراین،

$$\begin{aligned}\int_0^\infty J_1(bx)dx &= -\frac{1}{b}[J_0(bx)]_{x=0}^\infty \\ &= \frac{1}{b}\end{aligned}$$

زیرا $J_0(\infty) = 0$ و $J_0(0) = 1$ (این روابط مستتر در قسمت (i) قضیه ۴.۲۱، و قسمت (i) قضیه ۴.۲۲ هستند.)

حال، اگر از قسمت (v) قضیه ۴.۸ استفاده نموده، از ۰ تا ∞ انتگرالگیری کنیم، به‌دست می‌آید:

$$[J_n(x)]_{x=0}^\infty = \frac{1}{2}\int_0^\infty \{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\}dx.$$

با یادآوری اینکه $n > 0$ است، خواهیم داشت $J_n(\infty) = J_n(0) = 0$، و

$$0 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\}dx$$

و بنابراین:

$$\int_0^\infty J_{n+1}(x)dx = \int_0^\infty J_{n-1}(x)dx$$

با تبدیل $n-1$ به N و x به bx به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty J_{N+2}(bx)dx = \int_0^\infty J_N(bx)dx.$$

در نتیجه، اگر $\int_0^\infty J_N(bx) = \frac{1}{b}$ باشد، آنگاه رابطه $\int_0^\infty J_{N+2}(bx) = \frac{1}{b}$ نیز برقرار خواهد بود، و با این مطلب اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۴.۲۹. اگر $a > 0$ و $b > 0$ باشد، آنگاه:

$$\text{(i)} \int_0^\infty J_n(bx)x^n e^{-ax}dx = \frac{2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{b^n}{(a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}};$$

$$\text{(ii)} \int_0^\infty J_n(bx)x^{n+1} e^{-ax}dx = \frac{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{ab^n}{(a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

اثبات. (i). از معادله (۴.۶) داریم:

$$J_n(bx) = \sum_{r=0}^\infty (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{bx}{2}\right)^{2r+n}$$

بنابراین:

$$\int_0^\infty J_n(bx)x^n e^{-ax}dx$$
$$= \sum_{r=0}^\infty (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2r+n}\int_0^\infty e^{-ax}x^{2r+2n}dx$$

اما:

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{2r+2n}dx = \int_0^\infty e^{-t}\frac{t^{2r+2n}}{a^{2r+2n+1}}dt$$

(با تغییر متغیر $t = ax$)

$$= \frac{1}{a^{2r+2n+1}}\Gamma(2r+2n+1)$$

(طبق تعریف (۲.۱) از تابع گاما)

بنابراین:

$$\int_0^\infty J_n(bx)x^n e^{-ax}dx$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2r+n}\frac{1}{a^{2r+2n+1}}\Gamma(2r+2n+1)$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!}\cdot\frac{2\Gamma(2r+2n)}{\Gamma(r+n)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2r+n}\frac{1}{a^{2r+2n+1}}$$

(با استفاده از قضیه ۲.۲، که طبق آن $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ است).

اما، طبق قضیه ۲.۱۰، داریم:

$$\frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)} = \Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}$$

بنابراین:

$$\int_0^\infty J_n(bx)x^n e^{-ax}dx$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!}2\Gamma(r+n+\frac{1}{2})\frac{2^{2r+2n-1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{b}{2}\right)^{2r+n}\frac{1}{a^{2r+2n+1}}$$
$$= \frac{2^n b^n}{\sqrt{\pi}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\Gamma(r+n+\frac{1}{2})b^{2r}}{a^{2r+2n+1}r!}$$
$$= \frac{2^n b^n}{\sqrt{\pi}a^{2n+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\Gamma(r+n+\frac{1}{2})}{r!}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^r.$$

اما:

$$\frac{1}{(a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a^{2n+1}}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{-n-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{a^{2n+1}}\left\{1+\left(-n-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{(-n-\frac{1}{2})(-n-\frac{3}{2})}{2!}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(-n-\frac{1}{2})(-n-\frac{3}{2})\cdots(-n-\frac{1}{2}-r+1)}{r!}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^r+\cdots\right\}$$

(طبق قضیه بینم)

$$= \frac{1}{a^{2n+1}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})\cdots(n+r-\frac{1}{2})}{r!} \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^r$$

$$= \frac{1}{a^{2n+1}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})\cdots(n+r-\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})r!} \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^r$$

$$= \frac{1}{a^{2n+1}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\Gamma(n+r+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})r!} \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^r$$

(با استفاده مکرر از رابطه $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ (قضیه ۲.۲)).

در نتیجه:

$$\int_0^\infty J_n(bx)x^n e^{-ax}dx = \frac{2^n b^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2^n\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{b^n}{(a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

(ii) اگر از طرفین رابطه (i) مشتق‌گیری کنیم، فوراً رابطه (ii) حاصل می‌شود.

قضیه ۴.۳۰ اگر $a > 0$ باشد، آنگاه:

$$\text{(i)} \int_0^\infty J_n(bx)x^{n+1}\exp(-ax^2)dx = \frac{b^n}{(2a)^{n+1}}\exp(-b^2/4a);$$

$$\text{(ii)} \int_0^\infty J_n(bx)x^{n+2}\exp(-ax^2)dx = \frac{b^n}{2^{n+1}a^{n+2}}(n+1-\frac{b^2}{4a})\exp(-b^2/4a).$$

اثبات. قضیه فوق را می‌توان به روشی کاملاً مشابه قضیه ۴.۲۹ ثابت نمود، بنابراین، ما در اینجا به شرح آن نخواهیم پرداخت.

قضیه ۴.۳۱ اگر $a \neq b$ باشد، آنگاه:

$$(i) \int_0^\infty J_0(bx)\sin ax dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } a < b \text{ باشد،} \\ \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} & \text{اگر } a > b \text{ باشد،} \end{cases}$$

$$(ii) \int_0^\infty J_0(bx)\cos ax dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} & \text{اگر } a < b \text{ باشد،} \\ 0 & \text{اگر } a > b \text{ باشد،} \end{cases}$$

اثبات. ما این نتایج را از طریق تبدیل a به ia از قضیه ۴.۲۷ به‌دست خواهیم آورد، هرچند باید توجه نمود که، اگر بخواهیم دقیق شویم، این کار مجاز نیست، زیرا، اثبات قضیه ۴.۲۷، مبتنی بر این است، که a دارای قسمت حقیقی مثبت است. می‌توان توجیهی برای صفر فرض نمودن قسمت حقیقی a ارائه نمود، اما، ما در اینجا به شرح آن نخواهیم پرداخت.

بنابراین، داریم:

$$\int_0^\infty J_0(bx)e^{-iax}dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

رابطه فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\int_0^\infty J_0(bx)\cos axdx - i\int_0^\infty J_0(bx)\sin axdx = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

با مساوی قرار دادن قسمت‌های موهومی طرفین این تساوی، به‌دست می‌آید:

اگر $a > b$ باشد، $\int_0^\infty J_0(bx)\sin axdx = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$

اگر $a < b$ باشد، $\int_0^\infty J_0(bx)\sin axdx = 0$

همچنین، با مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی طرفین تساوی، خواهیم داشت:

اگر $b > a$ باشد، $\int_0^\infty J_0(bx)\cos axdx = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}$

اگر $b < a$ باشد، $\int_0^\infty J_0(bx)\cos axdx = 0$

۴.۱۶ مثالها

مثال ۱ . با استفاده از تابع مولد، ثابت کنید که:

$$J_n(x+y) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(x)J_{n-r}(y).$$

حل. طبق قضیه ۴.۵، داریم:

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(x+y)(t-\frac{1}{t})\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y)t^n$$

بنابراین، $J_n(x+y)$ برابر است با ضریب t^n در بسط:

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(x+y)(t-\frac{1}{t})\right\}.$$

اما:

$$\begin{aligned}\exp\left\{\frac{1}{2}(x+y)(t-\frac{1}{t})\right\} &= \exp\left\{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}\cdot\exp\left\{\frac{1}{2}y\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}\\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(x)t^r\cdot\sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(y)t^s\\ &= \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} J_r(x)J_s(y)t^{r+s}\end{aligned}$$

برای یک مقدار خاص از r، t^n را می‌توان با قرار دادن $s=n-r$ به‌دست آورد، در نتیجه، برای این مقدار خاص از r، ضریب t^n برابر خواهد بود با $J_r(x)J_{n-r}(y)$، و بنابراین، کل ضریب t^n از طریق جمع‌بندی روی همه مقادیر مجاز r به‌دست خواهد آمد. در نتیجه، ضریب t^n برابر است با $\sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(x)J_{n-r}(y)$، و بنابراین:

$$J_n(x+y)=\sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(x)J_{n-r}(y).$$

مثال ۲ . نشان دهید که:

$$\int_0^\infty \frac{J_n(x)}{x}dx=\frac{1}{n}.$$

حل. از قضیه ۴.۲۸، داریم:

$$\int_0^\infty J_n(x)dx=1.$$

اما، از قسمت (vi) قضیه ۴.۸، داریم:

$$\frac{2n}{x}J_n(x)=J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}2n\int_0^\infty \frac{J_n(x)}{x}dx &= \int_0^\infty J_{n-1}(x)dx+\int_0^\infty J_{n+1}(x)dx\\ &= 1+1\end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$\int_0^\infty \frac{J_n(x)}{x}dx=\frac{1}{n}.$$

مثال ۳ . اگر ξ_iها ریشه‌های معادله $J_0(\xi)=0$ باشند، نشان دهید که، برای $0<x<1$، خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0(\xi_i x)}{\{\xi_i J_1(\xi_i)\}^2}=-\frac{1}{2}\ln x$$

حل. با استفاده از قضیه ۴.۲۵ می‌توان نوشت*:

$$-\frac{1}{2}\ln x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_0(\xi_i x)$$

که در آن :

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{2\int_0^1 x(-\frac{1}{2}\ln x)J_0(\xi_i x)dx}{\{J_1(\xi_i)\}^2} \\ &= -\frac{\int_0^1 (x\ln x)J_0(\xi_i x)dx}{\{J_1(\xi_i)\}^2} \end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال ظاهر شده در صورت کسر، از سری (۴.۶) برای J_0 استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} J_0(\xi_i x) &= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(r+1)}\left(\frac{\xi_i x}{2}\right)^{2r} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{(r!)^2}\left(\frac{\xi_i}{2}\right)^{2r} x^{2r} \end{aligned}$$

(و با توجه به اینکه $J_0(\xi_i) = 0$، خواهیم داشت:

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{(r!)^2}\left(\frac{\xi_i}{2}\right)^{2r} = 0). \qquad (۴.۳۴)$$

ما به انتگرال $\int_0^1 x^n \ln x dx$ نیز نیاز داریم.
با انتگرالگیری جزء به جزء می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n \ln x dx &= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x\right]_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1}x^{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= 0 - \int_0^1 \frac{1}{n+1}x^n dx \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned} \qquad (۴.۳۵)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (x\ln x)J_0(\xi_i x)dx \\ &\qquad = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{(r!)^2}\left(\frac{\xi_i}{2}\right)^{2r}\int_0^1 x^{2r+1}\ln x dx \end{aligned}$$

*) قضیه ۴.۲۵ برای توابع به طور قطعه‌ای پیوسته بیان شده است، برای دیدن اثبات این قضیه و تعمیم‌های آن می‌توانید به کتابهای تخصصی مراجعه نمائید. مترجم.

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{(r!)^2}\left(\frac{\xi_i}{2}\right)^{2r}\left\{-\frac{1}{(2r+2)^2}\right\}$$

(با استفاده از معادله (۴.۳۵))

$$= \frac{1}{\xi_i^2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r+1}\frac{1}{\{(r+1)!\}^2}\left(\frac{\xi_i}{2}\right)^{2r+2}$$

$$= \frac{1}{\xi_i^2}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r}\frac{1}{(r!)^2}\left(\frac{\xi_i}{2}\right)^{2r}$$

$$= \frac{1}{\xi_i^2}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r}\frac{1}{(r!)^2}\left(\frac{\xi_i}{2}\right)^{2r} - 1\right\}$$

$$= -\frac{1}{\xi_i^2}$$

(با استفاده از معادله (۴.۳۴)).

در نتیجه:

$$c_i = \frac{1}{\xi_i^2\{J_1(\xi_i)\}^2}$$

و بنابراین:

$$-\frac{1}{2}\ln x = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0(\xi_i x)}{\{\xi_i J_1(\xi_i)\}^2}.$$

مثال ۴ . نشان دهید، که:

$$J_n(x)Y_n'(x) - J_n'(x)Y_n(x) = \frac{A}{x}$$

که در آن A یک عدد ثابت است، و با بررسی رفتار توابع درگیر در رابطه فوق برای مقادیر کوچک x، نشان دهید که $A = \frac{2}{\pi}$.

حل. داریم:

$$\frac{d}{dx}\{J_nY_n' - J_n'Y_n\}$$
$$= J_nY_n'' + J_n'Y_n' - J_n''Y_n - J_n'Y_n'$$
$$= J_nY_n'' - J_n''Y_n$$

(همه توابع دارای متغیر x هستند)

اما، هر دو تابع $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ در معادله:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

صدق می‌کنند، بنابراین:

$$x^2 \frac{d}{dx}\{J_n Y_n' - J_n' Y_n\} = J_n\{-xY_n' - (x^2-n^2)Y_n\} - \{-xJ_n' - (x^2-n^2)J_n\}Y_n$$
$$= -x\{J_n Y_n' - J_n' Y_n\}.$$

در نتیجه، با قراردادن $z = J_n Y_n' - J_n' Y_n$، خواهیم داشت:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x}$$

و یا:

$$\frac{dz}{z} + \frac{dx}{x} = 0$$

با انتگرالگیری از این رابطه به‌دست می‌آید*:

$$\ln|z| + \ln|x| = \text{constant}$$

که هم ارز است با رابطه:

$$\ln|zx| = \text{constant}$$

در نتیجه، ثابتی مانند A وجود خواهد داشت، به‌طوری که:

$$zx = \text{constant} = A$$

بنابراین، $z = \frac{A}{x}$، و در نتیجه، طبق تعریف z،

$$J_n Y_n' - J_n' Y_n = \frac{A}{x}.$$

برای مقادیر کوچک x، طبق قضیه ۴.۲۲، داریم:

$$J_0(x) \sim 1 \quad , \quad Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi}\ln x$$

بنابراین، با بررسی رابطه به‌دست آمده برای $n = 0$ خواهیم داشت:

$$J_n Y_n' - J_n' Y_n \sim 1 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x} - 0.\frac{2}{\pi} \cdot \ln x$$
$$= \frac{2}{\pi x}$$

در نتیجه:

$$\frac{2}{\pi x} = \frac{A}{x}$$

*) در متن اصلی کتاب علامت | | جا افتاده است. مترجم

و یا:

$$A = \frac{2}{\pi}$$

و بنابراین:

$$J_n(x)Y_n'(x) - J_n'(x)Y_n(x) = \frac{2}{\pi x}.$$

مثال ۵ . نشان دهید که:

$$\int_0^x t\{J_n(t)\}^2 \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\{J_n^2(x) - J_{n-1}(x)J_{n+1}(x)\}. \qquad \dagger$$

حل. ابتدا نشان می‌دهیم که:

$$t\{J_n(t)\}^2 = \frac{d}{dt}\left[\frac{t^2}{2}\left\{J_n^2(t) - J_{n-1}(t)J_{n+1}(t)\right\}\right]$$

و سپس، از رابطه فوق از ۰ تا x انتگرال‌گیری می‌کنیم.

داریم:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{t^2}{2}\left(J_n^2 - J_{n-1}J_{n+1}\right)\right\}$$

$$= t(J_n^2 - J_{n-1}J_{n+1}) + \frac{t^2}{2}(2J_nJ_n' - J_{n-1}'J_{n+1} - J_{n-1}J_{n+1}')$$

(همه توابع بسل در اینجا توابعی از متغیر t فرض شده‌اند)

$$= t(J_n^2 - J_{n-1}J_{n+1}) + \frac{t^2}{2}\left\{2J_n \cdot \frac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1})\right.$$

$$\left. - \left(\frac{n-1}{t}J_{n-1} - J_n\right)J_{n+1} - J_{n-1}\left(J_n - \frac{n+1}{t}J_{n+1}\right)\right\}$$

(با استفاده از قسمت‌های (iii)، (iv) و (v) قضیه ۴.۸)

$$= t(J_n^2 - J_{n-1}J_{n+1}) + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{2}{t}J_{n-1}J_{n+1}$$

$$= tJ_n^2.$$

با انتگرال‌گیری از ۰ تا x از رابطه فوق به‌دست می‌آید:

$$\int_0^x tJ_n^2 dt = \left[\frac{t^2}{2}\left\{J_n^2(t) - J_{n-1}(t)J_{n+1}(t)\right\}\right]_{t=0}^x$$

$$= \frac{x^2}{2}\left\{J_n^2(x) - J_{n-1}(x)J_{n+1}(x)\right\}.$$

---

†) $J_n^2(x) = \{J_n(x)\}^2$.

مثال ۶ . با استفاده از تابع مولد نشان دهید که $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$.
حل. طبق قضیه ۴.۵، داریم:

$$\exp\left\{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-x)t^n &= \exp\left[\frac{1}{2}\left\{-x\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}\right]\\ &= \exp\left[\frac{x}{2}\left\{(-t)-\frac{1}{(-t)}\right\}\right]\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)(-t)^n\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n t^n J_n(x).\end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن ضرائب t^n در طرفین تساوی فوق به‌دست می‌آید:

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$$

مسائل

(۱). نشان دهید که:

$$\frac{d}{dx}\{xJ_n(x)J_{n+1}(x)\} = x\{J_n^2(x) - J_{n+1}^2(x)\}.$$

(۲). نشان دهید که:

$$\text{(i)} \int_0^{\pi/2} J_0(x\cos\theta)\cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\sin x}{x};$$
$$\text{(ii)} \int_0^{\pi/2} J_1(x\cos\theta)d\theta = \frac{1-\cos x}{x}.$$

(۳). نشان دهید که:

$$J_n'(x)J_{-n}(x) - J_n(x)J_{-n}'(x) = \frac{A}{x}$$

که در آن A عددی ثابت است. با بررسی رفتار توابع درگیر در رابطه فوق برای مقادیر بزرگ x، نشان دهید که:

$$A = \frac{2\sin n\pi}{\pi}$$

(۴). جوابی از معادله دیفرانسیل:

$$\sqrt{x}\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

پیدا کنید، که در نقطه $x = 0$ برابر صفر باشد.

(۵). نشان دهید که $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} J_n(a) = J_0(\sqrt{a^2 - 2ax})$.

(۶). با استفاده از تابع مولد ثابت کنید که:

$$1 = \{J_0(x)\}^2 + 2\{J_1(x)\}^2 + 2\{J_2(x)\}^2 + \cdots$$

و از رابطه فوق نتیجه بگیرید که:

$$|J_0(x)| \le 1, \quad |J_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(۷). نشان دهید که، اگر $n > -\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{n+1}(x)}{x^n} \mathrm{d}x = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}.$$

(۸). ثابت کنید که

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kx)t^n = \exp\left\{\frac{x}{2t}(k - \frac{1}{k})\right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} k^n t^n J_n(x)$$

و نتیجه بگیرید که:

$$I_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} J_{n+m}(x).$$

(۹). نشان دهید که:

$$\exp\left\{\frac{x}{2}(t + \frac{1}{t})\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) t^n.$$

(۱۰). نشان دهید که $J_n(x)$، $Y_n(x)$، $K_n(x)$ و $I_n(x)$ در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{2}{x}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{2n^2+1}{x^2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n^2+1}{x^3}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{n^4 - 4n^2}{x^4} - 1\right) y = 0$$

(۱۱). تابع $f(x) = x^2$ را به یک سری به فرم $\sum_{r=1}^{\infty} c_r J_0(\lambda_2 x)$ که روی فاصله $0 \le x \le a$ معتبر باشد، بسط دهید. λ_rها ریشه‌های معادله $J_0(\lambda a) = 0$ هستند.

(۱۲). با استفاده از معادله دیفرانسیلی که $J_n(x)$ در آن صدق می‌کند، نشان دهید که:

$$\{n(n+1) - m(m+1)\} j_n(x) j_m(x) = \frac{d}{dx}\left\{x^2 j_n'(x) j_m(x) - j_n(x) j_m'(x)\right\}.$$

سپس، با استفاده از رابطه فوق، ثابت کنید که، اگر $m \neq n$ باشد، آنگاه:

$$\int_0^{\infty} j_m(x) j_n(x) dx = \frac{\sin\{(n-m)\pi/2\}}{n(n+1) - m(m+1)}$$

همچنین، با استفاده از قاعده هوپیتال از رابطه فوق نتیجه بگیرید که:

$$\int_0^{\infty} \{j_n(x)\}^2 dx = \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

و مقادیر $\int_{-\infty}^{\infty} j_m(x)j_n(x)dx$ $(m \neq n)$ و $\int_{-\infty}^{\infty}\{j_n(x)\}^2 dx$ را به‌دست آورید.

(۱۳). نشان دهید که:

$$\text{(i)} \qquad \mathrm{ber}_n x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(x/2)^{n+2k}\cos\{\frac{3}{4}(n+2k)\pi\}}{k!(n+k)!};$$

$$\text{(ii)} \qquad \mathrm{bei}_n x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(x/2)^{n+2k}\sin\{\frac{3}{4}(n+2k)\pi\}}{k!(n+k)!}$$

(۱۴). ثابت کنید که:

$$\text{(i)} \qquad \int_0^x t\cdot \mathrm{ber}\, t dt = x\mathrm{bei}' x;$$

$$\text{(ii)} \qquad \int_0^x t\cdot \mathrm{bei}\, t dt = -x\mathrm{ber}' x.$$

(۱۵). نشان دهید که، برای مقادیر بزرگ x،

$$\text{(i)} \qquad \mathrm{ber}\, x \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{x/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right);$$

$$\text{(ii)} \qquad \mathrm{bei}\, x \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{x/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right).$$

فصل ۵

چند جمله‌ایهای هرمیت

۵.۱ معادله هرمیت و جواب آن

معادله هرمیت به صورت:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2ny = 0 \tag{۵.۱}$$

تعریف می‌شود. درکاربردها نیاز به جوابی داریم که برای کلیه مقادیر متناهی x متناهی باشد، و علاوه بر آن، وقتی $x \to \infty$، $y(x)\exp(\frac{1}{2}x^2) \to 0$.

روش‌های فصل ۱ برای حل معادله فوق قابل استفاده است، و با تلاش برای پیدا کردن جوابی به فرم:

$$z(x, s) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{s+r}$$

به ریشه‌های $s = 0$ و $s = 1$ از معادله شاخص خواهیم رسید، وقتی $s = 0$ باشد، a_1 مبهم (غیرمشخص) خواهد بود، و بنابراین با $s = 0$ هر دو جواب مستقل معادله (۵.۱) به صورت سری به‌دست می‌آید. معادله برگشتی برای ضرائب به ازاء $s = 0$ به‌صورت:

$$\frac{a_{r+z}}{a_r} = \frac{2(r-n)}{(r+1)(r+2)} \tag{۵.۲}$$

می‌باشد.

اکنون از این رابطه برگشتی می‌توان برای پیدا کردن هر دو جواب معادله (۵.۱) به‌صورت سری استفاده نمود. اما، می‌توان نشان داد که، برای مقادیر بزرگ x، هر دوی این جوابها رفتاری مشابه $\exp(x^2)$ دارند. بنابراین، آنها در شرط مورد نیاز $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = 0$ صدق نمی‌کنند، مگر اینکه

تعداد جملات سری مربوط به جواب متناهی باشد. از معادله (۵.۲) دیده می‌شود که، سری مربوط به جواب زمانی و تنها زمانی شامل تعداد متناهی جمله است، که n یک عدد صحیح غیرمنفی باشد. در این صورت، a_{n+2} و همه ضرائب بعدی در سری مربوط به آن برابر صفر خواهد شد. حال، این سری را برحسب قوای نزولی x به‌دست می‌آوریم.

از معادله (۵.۲) استفاده نموده، با بازنویسی آن به‌صورت:

$$a_r = -\frac{(r+1)(r+2)}{2(n-r)} a_{r+2}$$

به سری زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} y &= a_n \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2 \cdot 2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2 \cdot 2 \cdot 4} x^{n-4} + \cdots \right. \\ &\left. + (-1)^r \frac{n(n-1)\cdots(n-2r+1)}{2^r \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2r)} x^{n-2r} + \cdots \right\} \\ &= a_n \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \frac{n(n-1)\cdots(n-2r+1)}{2^r \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2r)} x^{n-2r} \end{aligned}$$

(که در آن:

$$(\left[\frac{1}{2}n\right] = \begin{cases} \frac{1}{2}n & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \\ \frac{1}{2}(n-1) & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

$$= a_n \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \frac{n!}{2^{2r} r!(n-2r)!} x^{n-2r}$$

جواب استاندارد با انتخاب 2^n برای ثابت دلخواه a_n به‌دست می‌آید، این جواب را به $H_n(x)$ نشان داده، و به آن چندجمله‌ای هرمیت مرتبه n می‌گویند:

$$H_n(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \frac{n!}{r!(n-2r)!} (2x)^{n-2r} \tag{۵.۳}$$

۵.۲ تابع مولد

قضیه ۵.۱ اگر t و x اعدادی حقیقی باشند، آنگاه:

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x).$$

اثبات. ضریب t^n را در بسط توانی $\exp(2tx - t^2)$ پیدا می‌کنیم.
داریم:

$$\begin{aligned} e^{2tx-t^2} &= e^{2tx}e^{-t^2} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2tx)^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^s}{s!} \\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(2x)^r}{r!s!}t^{r+2s} \end{aligned}$$

برای یک مقدار ثابت s، t^n را می‌توان با قراردادن $r + 2s = n$ یا $r = n - 2s$ به‌دست آورد، بنابراین، برای این مقدار s ضریب t^n برابر خواهد بود با:

$$(-1)^s\frac{(2x)^{n-2s}}{(n-2s)!s!}$$

و کل ضریب t^n از طریق جمع‌بندی روی همه مقادیر مجاز s به‌دست می‌آید، و چون $r = n - 2s$، لازم است که داشته باشیم $n - 2s \geq 0$، و یا $s \leq \frac{1}{2}n$. در نتیجه، اگر n زوج باشد، s مقادیر 0 تا $\frac{1}{2}n$ را طی خواهد کرد، حال آن که، اگر n فرد باشد، مقادیر 0 تا $\frac{1}{2}(n-1)$ را طی خواهد کرد، یعنی، در همه حالت‌ها، s از 0 تا $[\frac{1}{2}n]$ تغییر خواهد کرد، که در آن $[\frac{1}{2}n]$ (قسمت صحیح $\frac{1}{2}n$) قبلاً تعریف شده است.

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} t^n \text{ ضریب } &= \sum_{s=0}^{[\frac{1}{2}n]}(-1)^s\frac{1}{(n-2s)!s!}(2x)^{n-2s} \\ &= \frac{1}{n!}H_n(x) \end{aligned}$$

(طبق تعریف (۵.۳)).

۵.۳ عبارت‌هائی دیگر برای چند جمله‌ایهای هرمیت

قضیه ۵.۲. برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

اثبات. با استفاده از تابع مولد که در قضیه ۵.۱ به آن اشاره شد، و با استفاده از قضیه تیلور، که می‌توان آن به‌صورت:

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d^nF}{dt^n}\right)_{t=0}\frac{t^n}{n!}$$

بیان نمود، داریم:

$$\begin{aligned}H_n(x)&=\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{2tx-t^2}\right]_{t=0}\\&=\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{x^2-(x-t)^2}\right]_{t=0}\\&=e^{x^2}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0}\end{aligned}$$

اما:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x-t)=-\frac{\partial}{\partial x}f(x-t)$$

بنابراین:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}f(x-t)=(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}f(x-t)$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned}H_n(x)&=(-1)^ne^{x^2}\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0}\\&=(-1)^ne^{x^2}\frac{\partial^n}{\partial x^n}e^{-x^2}\\&=(-1)^ne^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-x^2}\end{aligned}$$

قضیه ۵.۳. برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$H_n(x)=2^n\left\{\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\right\}x^n \qquad *$$

اثبات. داریم:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{2tx}=te^{2tx}$$

---

*) $\exp$ یک عملگر از طریق بسط به سری توانی تعریف می‌شود. بنابراین، به‌عنوان مثال، $\exp\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ ، در نتیجه $\exp\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}$.

و در نتیجه:

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n e^{2tx} = t^n e^{2tx}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\exp(2tx) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)^n e^{2tx}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{2n} e^{2tx}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}e^{2tx}\\ &= e^{-t^2}\cdot e^{2tx}\\ &= e^{-t^2+2tx}\end{aligned}$$

با بسط طرفین تساوی فوق به سری توانی خواهیم داشت:

$$\exp\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

(از خاصیت تابع مولد که در قضیه ۵.۱ بیان شده است، استفاده کرده‌ایم).

حال، با مساوی قرار دادن ضرائب t^n در دو طرف تساوی فوق به‌دست می‌آید:

$$\left\{\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\right\}\frac{2^n x^n}{n!} = \frac{H_n(x)}{n!}$$

و در نتیجه

$$H_n(x) = 2^n\left\{\exp\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\right\}x^n.$$

۵.۴ عبارت‌هائی صریح برای چندجمله‌ایهای هرمیت، و مقادیری خاص از چندجمله‌ایهای هرمیت

با استفاده از تعریف (۵.۳)، یا قضیه ۵.۲ یا قضیه ۵.۳ می‌توان عبارت صریحی برای چند جمله‌ای هرمیت از هر مرتبه دلخواهی به‌دست آورد. برای تعدادی از اولین رتبه‌ها، داریم:

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^2 + 120x$$

قضیه ۵.۴. اگر n عددی طبیعی باشد، آنگاه:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \quad ; \quad H_{2n+1}(0) = 0$$

اثبات. از تابع مولد به ازاء $x = 0$، طبق قضیه ۵.۱، خواهیم داشت:

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(0) \frac{t^n}{n!}$$

با بسط سمت چپ تساوی فوق به سری توانی برحسب t، به تساوی زیر خواهیم رسید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(0) \frac{t^n}{n!}.$$

و با مساوی قرار دادن ضرائب توان‌های متناظر t در طرفین این تساوی به‌دست می‌آید:

اگر n فرد باشد ، $H_n(0) = 0$

که معادل رابطه $H_{2n+1}(0) = 0$ است، وقتی n یک عدد صحیح غیرمنفی باشد، و

$$(-1)^n \frac{1}{n!} = \frac{H_{2n}(0)}{(2n)!}$$ (n یک عدد صحیح غیرمنفی است)

که از آن نتیجه می‌شود:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$

۵.۵ خواص تعامد چندجمله‌ایهای هرمیت

قضیه ۵.۵. اگر m و n دو عدد صحیح غیرمنفی باشند، آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$$

اثبات. داریم:

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$
$$e^{-s^2+2sx} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x)\frac{s^m}{m!}$$

بنابراین، $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x)dx$ ضریب $\frac{t^n s^m}{n!m!}$ دربسط $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-t^2+2tx} e^{-s^2+2sx}dx$ است.

اما:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-t^2+2tx} e^{-s^2+2sx}\mathrm{d}x$$
$$= e^{-t^2-s^2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-x^2+2(s+t)x\}\mathrm{d}x$$
$$= e^{-t^2-s^2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\{x-(s+t)\}^2+(s+t)^2]\mathrm{d}x$$
$$= e^{2st}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\{x-(s+t)\}^2]\mathrm{d}x$$
$$= e^{2st}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2)\mathrm{d}u$$

(با تغییر متغیر $u = x-(s+t)$)

$$= e^{2st}\sqrt{\pi}$$

(با استفاده از نتیجه قضیه ۲.۶)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\pi}\frac{2^n s^n t^n}{n!}.$$

در نتیجه، اگر $n \neq m$ باشد، ضریب $\frac{t^n s^m}{n!m!}$ برابر صفر است، و اگر $n = m$ باشد، ضریب $\frac{t^n s^m}{n!m!}$ برابر $\sqrt{\pi}2^n n!$ است.

بنابراین:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x)H_m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \neq m، \\ \sqrt{\pi}2^n n! & \text{اگر } n = m، \end{cases}$$

از رابطه فوق با استفاده از دلتای کرونکر نتیجه می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn}.$$

۵.۶ روابط بین چندجمله‌ایهای هرمیت و مشتقات آنها، روابط برگشتی

قضیه ۵.۶. اگر n عددی طبیعی باشد، آنگاه:

$$\text{(i)} \quad H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \ (n \geq 1); \qquad H_0'(x) = 0$$

$$\text{(ii)} \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \ (n \geq 1); \quad H_1(x) = 2xH_0(x).$$

اثبات. (i) با مشتق‌گیری از طرفین رابطه تابع مولد نسبت به x به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(2tx - t^2) \\
&= 2t\exp(2tx - t^2) \\
&= 2t\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

با مساوی قراردادن ضرائب t^n، برای $n = 0$، رابطه:

$$H_0'(x) = 0$$

و برای $n \geq 1$، رابطه:

$$\frac{H_n'(x)}{n!} = \frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

که می‌توان آن را به‌صورت:

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

نوشت، حاصل می‌شود.

(ii) با مشتق‌گیری از طرفین رابطه تابع مولد نسبت به t به‌دست می‌آید:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(2tx-t^2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)$$

و از این رابطه با انجام عمل مشتق‌گیری نتیجه می‌شود:

$$(2x-2t)\exp(2tx-t^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nt^{n-1}}{n!}H_n(x).$$

حال، با توجه به اینکه جمله با $n=0$ در جمع‌بندی سمت راست مشارکت ندارد (یادآوری می‌کنیم که $0!=1$)، با استفاده از قضیه ۵.۱، رابطه فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$2(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}H_n(x)$$

و این رابطه هم ارز است با رابطه:

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}H_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}H_n(x)$$

که می‌توان آن را به‌صورت:

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}H_{n-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_{n+1}(x)$$

نوشت. با مساوی قرار دادن ضرائب t^n، برای $n\geq 1$، خواهیم داشت:

$$2x\frac{1}{n!}H_n(x)-\frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!}=\frac{1}{n!}H_{n+1}(x)$$

و با ضرب طرفین این تساوی در $n!$ به‌دست می‌آید:

$$2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)=H_{n+1}(x)\qquad (n\geq 1)$$

به طریق مشابه، با مساوی قرار دادن ضریب t^0 خواهیم داشت:

$$2xH_0(x)=H_1(x).$$

۵.۷ توابع وبر ـ هرمیت

معادله:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + (\lambda - x^2)y = 0 \tag{۵.۴}$$

دارای ارتباطی نزدیک با معادله هرمیت است.

با تغییر متغیر $y = ze^{-x^2/2}$ معادله فوق به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (\lambda - 1)z = 0 \tag{۵.۵}$$

این معادله هرمیت از مرتبه n با $\lambda - 1 = 2n$ است. اگر طبق معمول به دنبال جوابی از معادله (۵.۴) باشیم، که برای همه مقادیر x متناهی باشد، باید جوابی از معادلهٔ (۵.۵) داشته باشیم، که وقتی $x \to \infty$ سریعتر از $\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$ به سمت بی‌نهایت میل نکند، و طبق آن چه در بخش ۵.۱ بیان شد، باید $\frac{1}{2}(\lambda - 1)$ یک عدد صحیح غیرمنفی باشد. در این صورت، با قرار دادن $n = \frac{1}{2}(\lambda - 1)$ جواب معادله (۵.۴) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\Psi_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x)$$

$\Psi_n(x)$ را تابع وبر-هرمیت مرتبه n می‌نامند.

۵.۸ مثالها

مثال ۱ . ثابت کنید که، اگر $m < n$ باشد، آنگاه:

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\{H_n(x)\} = \frac{2^m n!}{(n-m)!}H_{n-m}(x).$$

حل. از تابع مولد قضیه ۵.۱ نتیجه می‌شود که

$$\left(\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\right)\{H_n(x)\}$$

برابر است با ضریب $\frac{t^n}{n!}$ در بسط:

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\exp(2tx - t^2)$$

اما:

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\exp(2tx - t^2) = (2t)^m \exp(2tx - t^2)$$

$$= 2^m t^m \sum_{n!}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

$$= 2^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^{m+n}$$

$$= 2^m \sum_{r=m}^{\infty} \frac{1}{(r-m)!} H_{r-m}(x) t^r$$

(با قراردادن $r = m + n$).

بنابراین، ضریب t^n برابر است با:

$$2^m \frac{1}{(n-m)!} H_{n-m}(x)$$

و در نتیجه، ضریب $\frac{t^n}{n!}$ مساوی:

$$2^m \frac{n!}{(n-m)!} H_{n-m}(x)$$

است، که همان مطلبی است که باید ثابت می‌کردیم.

مثال ۲ . انتگرال:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \mathrm{d}x$$

را محاسبه کنید.

حل. از قسمت (ii) قضیه ۵.۶ داریم:

$$x H_n(x) = n H_{n-1}(x) + \frac{1}{2} H_{n+1}(x)$$

بنابراین:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \{n H_{n-1}(x) + \frac{1}{2} H_{n+1}(x)\} H_m(x) \mathrm{d}x$$

$$= n 2^{n-1} (n-1)! \sqrt{\pi} \delta_{n-1,m} + \frac{1}{2} 2^{n+1} (n+1)! \sqrt{\pi} \delta_{n+1,m}$$

(طبق قضیه ۵.۵)

$$= \sqrt{\pi} 2^{n-1} n! \delta_{n-1,m} + \sqrt{\pi} 2^n (n+1)! \delta_{n+1,m}.$$

مثال ۳ . نشان دهید که:

$$P_n(x) = \frac{z}{\sqrt{\pi}n!}\int_0^\infty t^n e^{-t^2} H_n(xt)\mathrm{d}t.$$

حل. از معادله (۵.۳) داریم:

$$H_n(xt) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \frac{n!}{r!(n-2r)!}(2xt)^{n-2r}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\sqrt{\pi}n!}\int_0^\infty t^n e^{-t^2} H_n(xt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}n!}\int_0^\infty t^n e^{-t^2} \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \frac{n!}{r!(n-2r)!} 2^{n-2r} x^{n-2r} t^{n-2r} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} \frac{2^{n-2r+1}(-1)^r x^{n-2r}}{\sqrt{\pi}r!(n-2r)!}\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n-2r}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} \frac{2^{n-2r+1}(-1)^r x^{n-2r}}{\sqrt{\pi}r!(n-2r)!} \cdot \frac{1}{2}\Gamma(n-r+\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

(طبق قضیه ۲.۴)

$$= \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} \frac{2^{n-2r}(-1)^r x^{n-2r}}{\sqrt{\pi}r!(n-2r)!} \cdot \frac{(2n-2r)!}{2^{2n-2r}(n-r)!}\sqrt{\pi}$$

(طبق نتیجه قضیه ۲.۱۰)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-2r)!(n-r)!} x^{n-2r} \\
&= P_n(x)
\end{aligned}$$

(طبق معادله(۳.۱۷))

مسائل

(۱). نشان دهید که:

$$\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2}\{H_n(x)\}^2\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}2^n n!\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

(۲).اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه m باشد، نشان دهید که $f(x)$ را می‌توان به فرم:

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty} c_r H_r(x)$$

نوشت، که در آن:

$$c_r=\frac{1}{2^r r!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_r(x)\mathrm{d}x.$$

از مطلب فوق نتیجه بگیرید، که اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه کمتر از n باشد، آنگاه:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x)\mathrm{d}x=0$$

(۳).نشان دهید که:

$$e^{-x^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\cos 2xt\mathrm{d}t.$$

با $2n$ بار مشتق‌گیری از رابطه فوق، ثابت کنید که:

$$H_{2n}(x)=\frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n}\cos 2xt\mathrm{d}t$$

و عبارتی مشابه برای $H_{2n+1}(x)$ به‌دست آورید.
از مطالب فوق نتیجه بگیرید که:

$$H_n(x)=\frac{2^n(-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2itx} t^n\mathrm{d}t.$$

(۴).با استفاده از نتیجهٔ مسأله ۳ نشان دهید که:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!}t^n=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{2xyt-(x^2+y^2)t^2}{1-t^2}\right\}$$

و از رابطه فوق نتیجه بگیرید که:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{H_n(x)\}^2}{2^n n!}t^n=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{2x^2t}{1+t}\right\}.$$

(۵).با استفاده از نتیجه مسأله ۴ نشان دهید که:

$$\text{(i)}\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\{H_n(x)\}^2 e^{-2x^2}\mathrm{d}x=2^{n-\frac{1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right);$$

$$\text{(ii)} \qquad \frac{1}{2^n n!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\{H_n(x)\}^2 e^{-x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n\frac{e^{-x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

(۶). ثابت کنید که:

$$\text{(i)} \qquad 2n\Psi_{n-1}(x)=x\Psi_n(x)+\Psi_n'(x);$$

$$\text{(ii)} \qquad 2x\Psi_n(x)-2n\Psi_{n-1}(x)=\Psi_{n+1}(x);$$

$$\text{(iii)} \qquad \Psi_n'(x)=x\Psi_n(x)-\Psi_{n+1}(x).$$

(۷). انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

$$\text{(i)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x)\Psi_n(x)\mathrm{d}x;$$

$$\text{(ii)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_m(x)\Psi_n'(x)\mathrm{d}x\cdot$$

فصل ۶

چندجمله‌ایهای لاگر

۶.۱ معادله لاگر و جواب آن

معادله لاگر به‌صورت:

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ny=0 \tag{۶.۱}$$

است، و در کاربردها معمولاً به جوابی از این معادله نیاز داریم، که برای همه مقادیر متناهی x متناهی بوده، و وقتی x به سمت ∞ میل می‌کند، سریعتر از $e^{x/2}$ به سمت ∞ میل نکند.

روش‌هائی که در فصل ۱ بیان شده است، برای حل این معادله قابل استفاده است، و جستجو برای یافتن جوابی به فرم $z(x,s)=\sum\limits_{r=0}^{\infty}a_rx^{s+r}$ ، ما را به معادله شاخص با ریشه مضاعف $s=0$، و رابطه برگشتی:

$$a_{r+1}=a_r\frac{s+r-n}{(s+r+1)^2}$$

هدایت می‌کند. جوابهای مستقل معادله (۶.۱) را می‌توان از روابط:

$$z(x,0) \quad , \quad \left[\frac{\partial z}{\partial s}\right]_{s=0}$$

به‌دست آورد. از فصل ۱ می‌دانیم که دومین جواب شامل جمله‌ای به فرم $\ln x$ است، و در نتیجه در $x=0$ نامتناهی است. از آنجا که ما به جوابی نیاز داریم که برای همه مقادیر متناهی x متناهی باشد، چنین جوابی را می‌توان فقط از $z(x,0)$ به‌دست آورد. در این حالت رابطه برگشتی به‌صورت زیر در می‌آید:

$$a_{r+1}=a_r\frac{r-n}{(r+1)^2} \tag{۶.۲}$$

اما، می‌توان نشان داد، که سری نامتناهی به‌دست آمده از $z(x,0)$ برای مقادیر بزرگ x رفتاری شبیه e^x دارد، بنابراین، طبق نکاتی که فوقاً به آن اشاره شد، وقتی $x \to \infty$ رفتار خوبی نخواهد داشت. راه برطرف کردن این مشکل، این است که سری $z(x,0)$ فقط شامل تعدادی متناهی جمله باشد، و از معادله (۶.۲) می‌بینیم، که این وقتی اتفاق می‌افتد، که n یک عدد صحیح غیرمنفی باشد. زیرا، در این حالت، $a_n \neq 0$، اما، a_{n+1} و همه ضرائب بعدی صفر خواهد بود. در چنین حالتی بهتر است رابطه (۶.۲) به‌صورت زیر نوشته شود:

$$a_{r+1} = -a_r \frac{(n-r)}{(r+1)^2}$$

و جواب به‌دست آمده در این حالت به شکل:

$$\begin{aligned} y &= a_0 \left\{1-\frac{n}{1^2}x+\frac{n(n-1)}{(2!)^2}x^2+\cdots+(-1)^r\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{(r!)^2}x^r+\cdots\right\} \\ &= a_0 \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{(r!)^2}x^r \\ &= a_0 \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{(n-r)!(r!)^2}x^r \end{aligned}$$

خواهد بود.

وقتی $a_0 = 1$ انتخاب شود، جواب حاصل را چندجمله‌ای لاگر مرتبه n نامیده، و به علامت $L_n(x)$ نشان می‌دهند:

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{(n-r)!(r!)^2}x^r \tag{۶.۳}$$

۶.۲ تابع مولد

قضیه ۶.۱. اگر $|t| < 1$ باشد، آنگاه*:

$$\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

اثبات. داریم:

$$\frac{1}{1-t}\exp\{-xt/(1-t)\} = \frac{1}{1-t}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(-\frac{xt}{1-t}\right)^r$$

*) در متن اصلی کتاب $|t| < 1$ جا افتاده است، در حالی که، در جریان اثبات قضیه فوق، مؤلف کتاب عملاً از این شرط استفاده نموده است. مترجم.

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \cdot \frac{x^r t^r}{(1-t)^{r+1}}.$$

اما*:

$$\frac{1}{(1-t)^{r+1}}$$
$$= 1 + (r+1)t + \frac{(r+1)(r+2)}{2!}t^2 + \frac{(r+1)(r+2)(r+3)t^3}{3!} + \cdots$$
(طبق قضیه دوجمله‌ای)
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+s)!}{r!s!} t^s$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{1-t}\exp\{-xt/(1-t)\} = \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(r+s)!}{(r!)s!} x^r t^{r+s}$$

برای یک مقدار ثابت r، ضریب t^n در بسط فوق با انتخاب $r+s=n$ یا $s=n-r$ به‌دست می‌آید. بنابراین، برای این مقدار r ضریب t^n برابر خواهد بود با:

$$(-1)^r \frac{n!}{(r!)^2(n-r)!} x^r.$$

کل ضریب t^n از طریق جمع‌بندی روی همه مقادیر مجاز r به‌دست می‌آید. از آنجا که $s=n-r$، و باید $s \geq 0$ باشد، خواهیم داشت $r \leq n$. بنابراین، کل ضریب t^n برابر با:

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^n \frac{n!}{(r!)^2(n-r)!} x^r = L_n(x) \qquad \text{(طبق معادله (۶.۳))}$$

خواهد بود، و به این ترتیب، قضیه به‌طور کامل ثابت می‌شود.

۶.۳ عبارت‌هائی دیگر برای چندجمله‌ایهای لاگر

قضیه ۶.۲. برای هر عدد طبیعی n، داریم:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

---

*) در این قسمت از اثبات مؤلف کتاب عملاً از رابطه $|t| < 1$ استفاده نموده است، بدون اینکه در صورت قضیه به آن اشاره کرده باشد مترجم.

اثبات. طبق قضیه لایبنیتس برای مشتق مرتبه nام حاصل‌ضرب داریم:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(uv) = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!r!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-r}u}{\mathrm{d}x^{n-r}} \cdot \frac{\mathrm{d}^r v}{\mathrm{d}x^r}$$

بنابراین:

$$\frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x}) = \frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!r!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-r}}{\mathrm{d}x^{n-r}}x^n \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}e^{-x}$$

اما:

$$\begin{aligned}\frac{d^p}{dx^p}x^q &= q(q-1)\cdots(q-p+1)x^{q-p}\\ &= \frac{q!}{(q-p)!}x^{q-p}\end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x}) &= \frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!r!} \cdot \frac{n!}{r!}x^r(-1)^r e^{-x}\\ &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{n!}{(r!)^2(n-r)!}x^r\\ &= L_n(x)\end{aligned}$$

(طبق تعریف (۶.۳)).

۶.۴ عبارت‌هائی صریح برای چندجمله‌ایهای لاگر، و مقادیری خاص از چندجمله‌ایهای لاگر

ما سری صریحی برای $L_n(x)$ داریم، که طبق رابطه (۶.۳) تعریف شده است. از این سری می‌توان به سهولت نخستین چندجمله‌ایهای لاگر را به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}L_0(x) &= 1\\ L_1(x) &= -x+1\\ L_2(x) &= \frac{1}{2!}(x^2-4x+2)\\ L_3(x) &= \frac{1}{3!}(-x^3+9x^2-18x+6)\end{aligned}$$

$$L_4(x) = \frac{1}{4!}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24).$$

قضیه ۶.۳. اگر n یک عدد صحیح غیرمنفی باشد، آنگاه:

$$\text{(i)} \quad L_n(0) = 1.$$

$$\text{(ii)} \quad L_n'(0) = -n.$$

اثبات. (i) با قرار دادن $x = 0$ در تابع مولد قضیه ۶.۱، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(0)t^n = \frac{1}{1-t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \qquad \text{(با استفاده از قضیه دو جمله‌ای)}$$

و با مساوی قرار دادن ضرائب t^n در دو طرف تساوی فوق، به‌دست می‌آید:

$$L_n(0) = 1.$$

(ii) تابع $L_n(x)$ در معادله لاگر (۶.۱) صدق می‌کند، بنابراین، داریم:

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}L_n(x) + (1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n(x) + nL_n(x) = 0.$$

با قرار دادن $x = 0$ در معادله فوق و با استفاده از قسمت (i)، خواهیم داشت:

$$L_n'(0) + n = 0$$

و در نتیجه:

$$L'(0) = -n.$$

۶.۵ خواص تعامد چندجمله‌ایهای لاگر

قضیه ۶.۴. اگر m و n اعداد صحیح غیرمنفی باشند، آنگاه:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}L_n(x)L_m(x)\mathrm{d}x = \delta_{nm}.$$

اثبات. از تابع مولد قضیه ۶.۱ داریم:

$$\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

و

$$\frac{\exp\{-xs/(1-s)\}}{1-s}=\sum_{m=0}^{\infty}L_m(x)s^m$$

بنابراین:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}e^{-x}L_n(x)L_m(x)t^n s^m=e^{-x}\cdot\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t}\cdot\frac{\exp\{-xs/(1-s)\}}{1-s}$$

و در نتیجه، $\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)\mathrm{d}x$ ضریب $t^n s^m$ در بسط:

$$I=\int_0^\infty e^{-x}\cdot\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t}\cdot\frac{\exp\{-xs/(1-s)\}}{1-s}\mathrm{d}x$$

خواهد بود.

اما:

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{(1-t)(1-s)}\int_0^\infty\exp\left\{-x\left(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right)\right\}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{(1-t)(1-s)}\left[-\frac{1}{1+\{t/(1-t)\}+\{s/(1-s)\}}\right.\\
&\quad\left.\cdot\exp\left\{-x\left(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right)\right\}\right]_{x=0}^{\infty}\\
&=\frac{1}{(1-t)(1-s)}\cdot\frac{1}{1+\{t/(1-t)\}+\{s/(1-s)\}}\\
&=\frac{1}{(1-t)(1-s)+t(1-s)+s(1-t)}\\
&=\frac{1}{1-st}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}s^n t^n.
\end{aligned}$$

بنابراین، ضریب $t^n s^m$ برابر 1 است اگر $n=m$ باشد، و برابر 0 است اگر $n\neq m$ باشد، یعنی، ضریب $t^n s^m$ برابر δ_{nm} است، و در نتیجه:

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)\mathrm{d}x=\delta_{nm}.$$

۶.۶ روابط بین چندجمله‌ایهای لاگر و مشتق‌های آنها، روابط برگشتی

قضیه ۶.۵. اگر n یک عدد صحیح غیرمنفی باشد، آنگاه:

$$\text{(i)}\quad (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x).$$

$$\text{(ii)}\quad xL_n'(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x).$$

$$\text{(iii)}\quad L_n'(x) = -\sum_{r=0}^{n-1} L_r(x).$$

اثبات. (i) با مشتق‌گیری از تابع مولد نسبت به t، و با استفاده از این حقیقت که:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{t}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

به‌دست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\cdot nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}\exp\{-xt/(1-t)\} - \frac{x}{(1-t)^2}\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{(1-t)}$$

و از این رابطه با استفاده از قضیه ۵.۱ نتیجه می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\cdot nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n - \frac{x}{(1-t)^2}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n.$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در $(1-t)^2$ به‌دست می‌آید:

$$(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)nt^{n-1} = (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)nt^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)nt^n + \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^{n+1}\\ = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^{n+1} - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n.\end{aligned}$$

با اندیس‌گذاری مجدد مجموع‌های پدید آمده در طرفین تساوی فوق به‌طوری که در همه آنها توان عمومی به‌صورت t^n ظاهر شود، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=-1}^{\infty} L_{n+1}(x)(n+1)t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)nt^n + \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x)(n-1)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(t)t^n - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

با مساوی قرار دادن ضرایب t^n در طرفین تساوی فوق به‌دست می‌آید:

$$(n+1)L_{n+1}(x) - 2nL_n(x) + (n-1)L_{n-1}(x)$$
$$= L_n(x) - L_{n-1}(x) - xL_n(x) \qquad (n \geq 1)$$

این معادله نیز پس از ساده کردن به‌صورت زیر در می‌آید:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x).$$

(ii) با مشتق‌گیری از طرفین تابع مولد نسبت به x به‌دست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)t^n = -\frac{t}{1-t} \cdot \frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t}$$
$$= -\frac{t}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \qquad (۶.۴)$$

بنابراین:

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)t^n = -t\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

و در نتیجه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)t^{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^{n+1}$$

که با اندیس‌گذاری مجدد، به صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}'(x)t^n = -\sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x)t^n.$$

با مساوی قرار دادن ضرائب t^n در طرفین تساوی فوق به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$L_n'(x) - L_{n-1}'(x) = -L_{n-1}(x) \qquad (n \geq 1) \qquad (۶.۵)$$

اکنون اگر از رابطه (i) فوق نسبت به x مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$(n+1)L_{n+1}'(x) = (2n+1-x)L_n'(x) - L_n(x) - nL_{n-1}'(x)$$

و اگر رابطه (۶.۵) را به‌صورت‌های زیر بازنویسی کنیم:

$$L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$$

و

$$L'_{n-1}(x) = L'_n(x) + L_{n-1}(x)$$

خواهیم داشت:

$$(n+1)\{L'_n(x) - L_n(x)\} = (2n+1-x)L'_n(x) - L_n(x) - n\{L'_n(x) + L_{n-1}(x)\}.$$

با ساده کردن معادله فوق به‌دست می‌آید:

$$-nL_n(x) = -xL'_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

و بنابراین:

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

(iii) اگر در رابطه (۶.۴) عبارت $\dfrac{1}{1-t}$ را به‌صورت $\sum\limits_{r=0}^{\infty} t^r$ بسط دهیم، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x)t^n = -t(\sum_{r=0}^{\infty} t^r) \cdot \sum_{s=0}^{\infty} L_s(x)t^s$$
$$= -\sum_{r,s=0}^{\infty} L_s(x)t^{r+s+1}$$

بنابراین، $L'_n(x)$ برابر است با ضریب t^n در سمت راست تساوی فوق. برای یک مقدار ثابت s، ضریب t^n با انتخاب $n = r+s+1$ و یا $r = n-s-1$ به‌دست می‌آید، و در این صورت، ضریب t^n برابر $-L_s(x)$ خواهد بود، اما، کل ضریب t^n از جمع‌بندی روی همه مقادیر مجاز s به‌دست می‌آید، که چون $r \geq 0$ است، باید داشته باشیم $n-s-1 \geq 0$، و یا $s \leq n-1$. به این ترتیب:

$$t^n \text{ ضریب} = \sum_{s=0}^{n-1} -L_s(x)$$

و در نتیجه:

$$L'_n(x) = -\sum_{s=0}^{n-1} L_s(x).$$

۶.۷ چندجمله‌ایهای لاگر وابسته

معادله لاگر وابسته به‌صورت:

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(k+1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ny=0 \tag{۶.۶}$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۶.۶. اگر z جوابی از معادله لاگر مرتبه $n+k$ باشد، آشکار $\dfrac{\mathrm{d}^kz}{\mathrm{d}x^k}$ در معادله لاگر وابسته صدق خواهد کرد.

اثبات. از آنجا که z جوابی از معادله لاگر (۶.۱) از مرتبه $n+k$ است، داریم:

$$x\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+(1-x)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(n+k)z=0$$

با k بار مشتق‌گیری از رابطه فوق و با استفاده از قانون لایبنیتس برای مشتق حاصل‌ضرب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}x\frac{\mathrm{d}^{k+2}}{\mathrm{d}x^{k+2}}z+k\frac{d^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}z+(1-x)\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}z\\+k\cdot(-1)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}z+(n+k)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}z=0\end{aligned}$$

بنابراین:

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^kz}{\mathrm{d}x^k}+(k+1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^kz}{\mathrm{d}x^k}+n\frac{\mathrm{d}^kz}{\mathrm{d}x^k}=0$$

که از آن نتیجه می‌شود $\dfrac{\mathrm{d}^kz}{\mathrm{d}x^k}$ در معادله (۶.۶) صدق می‌کند.

از قضیه فوق و این حقیقت که چند جمله‌ای لاگر $L_n(x)$ در معادله لاگر صدق می‌کند، نتیجه می‌شود که $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k}(x)$ در معادله لاگر وابسته صدق می‌کند. چند جمله‌ایهای لاگر وابسته توسط این جواب همراه با ضریب ثابت $(-1)^k$ تعریف می‌شوند:

$$L_n^k(x)=(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k}(x) \tag{۶.۷}$$

قضیه ۶.۷. اگر n و k اعداد صحیح غیرمنفی باشند، آنگاه:

$$L_n^k(x)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!}x^r.$$

اثبات. از معادله (۶.۳) داریم:

$$L_{n+k}(x)=\sum_{r=0}^{n+k}(-1)^r\frac{(n+k)!}{(n+k-r)!(r!)^2}x^r$$

بنابراین، طبق معادله (۶.۷)،

$$\begin{aligned}
L_n^k(x)&=(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\sum_{r=0}^{n+k}(-1)^r\frac{(n+k)!}{(n+k-r)!(r!)^2}x^r\\
&=(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\sum_{r=k}^{n+k}(-1)^r\frac{(n+k)!}{(n+k-r)!(r!)^2}x^r
\end{aligned}$$

(زیرا، برای هر عدد طبیعی r کوچکتر از k، داریم $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}x^r=0$)

$$=(-1)^k\sum_{r=k}^{n+k}(-1)^r\frac{(n+k)!}{(n+k-r)!(r!)^2}\cdot\frac{r!}{(r-k)!}x^{r-k}$$

(زیرا $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}x^r=r(r-1)\cdots(r-k+1)x^{r-k}=\frac{r!}{(r-k)!}x^{r-k}$)

$$=(-1)^k\sum_{s=0}^{n}(-1)^{k+s}\frac{(n+k)!}{(n+k-k-s)!(k+s)!s!}x^s$$

(با تغییر متغیر جمعبندی به $s=r-k$)

$$=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{(n+k)!}{(n-s)!(k+s)!s!}x^s$$

که همان مطلبی است که باید ثابت می‌کردیم.

۶.۸ خواص چندجمله‌ایهای لاگر وابسته

قضیه ۶.۸ (تابع مولد). اگر $|t|<1$ باشد، آنگاه: *

$$\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{(1-t)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^k(x)t^n$$

اثبات. از قضیه ۶.۱ داریم:

$$\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n.$$

*) شرط $|t|<1$ در متن اصلی کتاب جا افتاده است. مترجم.

با k بار مشتق‌گیری از رابطه فوق نسبت به x، خواهیم داشت:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t}=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\sum_{n=k}^{\infty}L_n(x)t^n$$

(زیرا، $L_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n است، و بنابراین، اگر $n<k$ باشد، مشتق مرتبه kام آن صفر خواهد شد).

با انجام دادن عمل مشتق‌گیری در سمت چپ تساوی فوق، به‌دست می‌آید:

$$\left(-\frac{t}{1-t}\right)^k\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t}=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\sum_{n=0}^{\infty}L_{n+k}(x)t^{n+k}$$

و در نتیجه، با استفاده از معادله (۶.۷)، می‌توان نوشت:

$$(-1)^k\frac{t^k}{(1-t)^{k+1}}\exp\{-xt/(1-t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^kL_n^k(x)t^{n+k}$$

با حذف فاکتور مشترک $(-1)^kt^k$ از طرفین تساوی فوق خواهیم داشت:

$$\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{(1-t)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^k(x)t^n.$$

قضیه ۶.۹. اگر n و k اعداد صحیح غیرمنفی باشند، آنگاه:

$$L_n^k(x)=\frac{e^xe^{-k}}{n!}\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x}x^{n+k}).$$

اثبات. به علت اینکه اثبات قضیه فوق تقریباً مشابه قضیه ۶.۲ است، ما در اینجا آن را بیان نخواهیم کرد.

قضیه ۶.۱۰ (خاصیت تعامد). اگر m و n و k اعداد صحیح غیرمنفی باشند، آنگاه:

$$\int_0^{\infty}e^{-x}x^kL_n^k(x)L_m^k(x)dx=\frac{(n+k)!}{n!}\delta_{nm}$$

اثبات. دوباره، اثبات این قضیه نیز خیلی شبیه قضیه ۶.۴ است، و ما آن را حذف کرده‌ایم.

قضیه ۶.۱۱ (روابط برگشتی). اگر n و k اعداد صحیح غیرمنفی باشند، آنگاه:

$$\text{(i)}\qquad L_{n-1}^k(x)+L_n^{k-1}(x)=L_n^k(x).$$

$$\text{(ii)} \qquad (n+1)L_{n-1}^{k}(x) = (2n+k+1-x)L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x).$$

$$\text{(iii)} \qquad x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^k(x) = nL_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x).$$

$$\text{(iv)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^k(x) = -\sum_{r=0}^{n-1} L_r^k(x).$$

$$\text{(v)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^k(x) = -L_{n-1}^{k+1}(x).$$

$$\text{(vi)} \qquad L_n^{k+1}(x) = \sum_{r=0}^{n} L_r^k(x).$$

اثبات. (i) با استفاده از قضیه ۶.۷ داریم:

$$\begin{aligned}
&L_{n-1}^k(x) + L_n^{k-1}(x)\\
&= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n-1+k)!}{(n-1-r)!(k+r)!r!}x^r + \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r)!(k-1+r)!r!}x^r\\
&= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r-1)!(k+r)!r!}x^r + \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r)!(k+r-1)!r!}x^r\\
&\qquad + (-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(n-n)!(k-1+n)!n!}x^n\\
&= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r-1)!(k+r-1)!r!}\left\{\frac{1}{k+r} + \frac{1}{n-r}\right\}x^r\\
&\qquad + (-1)^n \frac{1}{n!}x^n\\
&= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r-1)!(k+r-1)!r!} \cdot \frac{n-r+k+r}{(k+r)(n-r)}x^r\\
&\qquad + (-1)^n \frac{1}{n!}x^n\\
&= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!}x^r + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\\
&= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!}x^n\\
&= L_n^k(x)
\end{aligned}$$

(با استفاده مجدد از قضیه ۶.۷).

(ii) با تبدیل n به $n+k$، و با k بار مشتق‌گیری از رابطه (i) قضیه ۶.۵، به‌دست می‌آید:

$$(n+k+1)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k+1}(x) = (2n+2k+1)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k}(x) - \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\{xL_{n+k}(x)\} - (n+k)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k-1}(x)$$

و در نتیجه، با استفاده از قضیه لایبنیتس برای مشتق مرتبه kام حاصل‌ضرب، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(n+k+1)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+1+k}(x) =&(2n+2k+1)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k}(x)\\ &- x\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k}(x) - k\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}L_{n+k}(x)\\ &- (n+k)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n-1+k}(x)\cdot\end{aligned}$$

حال، با استفاده از تعریف (۶.۷)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&(n+k+1)(-1)^k L_{n+1}^k(x)\\ &\quad= (2n+2k+1)(-1)^k L_n^k(x) - x(-1)^k L_n^k(x) - k(-1)^{k-1}L_{n+1}^{k-1}(x)\\ &\qquad - (n+k)(-1)^k L_{n-1}^k(x)\end{aligned}$$

که با در نظر گرفتن رابطه (i) فوق، وقتی در آن n به $n+1$ تبدیل شده باشد، به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned}(n+k+1)L_{n+1}^k(x)=&(2n+2k+1)L_n^k(x)\\ -xL_n^k(x)+&k\{L_{n+1}^k(x) - L_n^k(x)\}-(n+k)L_{n-1}^k(x)\end{aligned}$$

و این رابطه را می‌توان به‌صورت زیر ساده نمود:

$$(n+1)L_{n+1}^k(x) = (2n+k+1-x)L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x).$$

(iii) اگر در رابطه (ii) قضیه ۶.۵، n را به $n+k$ تبدیل نموده، از آن k بار نسبت به x مشتق‌گیری کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\{xL'_{n-k}(x)\} = (n+k)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k}(x) - (n+k)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k-1}(x)$$

و از این رابطه با استفاده از قضیه لایبنیتس برای مشتق مرتبه kام حاصل‌ضرب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L'_{n+k}(x)+k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k}(x) =&(n+k)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k}(x) \\ &-(n+k)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{n+k-1}(x). \end{aligned}$$

در نتیجه، با توجه به معادله (۶.۷)، می‌توان نوشت:

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^k(x)+kL_n^k(x)=(n+k)L_n^k(x)-(n+k)L_{n-1}^k(x)$$

و بنابراین:

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^k(x)=nL_n^k(x)-(n+k)L_{n-1}^k(x).$$

(iv) با k با مشتق‌گیری نسبت به x از رابطه (iii) قضیه ۶.۵، وقتی n به $n+k$ تبدیل شده باشد، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L'_{n+k}(x)=-\sum_{r=0}^{n+k-1}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_r(x)$$

بنابراین:

$$(-1)^k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^k(x)=-\sum_{r=k}^{n+k-1}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_r(x)$$

(زیرا، برای $r<k$، $L_r(x)$ یک چند جمله‌ای درجه کمتر از k است، و در نتیجه، با k بار مشتق‌گیری برابر صفر می‌شود)

$$=-\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}L_{s+k}(x)$$

(با تغییر متغیر جمعبندی به $s=r-k$)

$$=-\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^kL_s^k(x)$$

بنابراین:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^k(x)=-\sum_{r=0}^{n-1}L_r^k(x).$$

(v) طبق قضیه ۶.۷، داریم:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^k(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!}x^r$$

$$= -\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!(r-1)!}x^{r-1}$$

(جمله با $r=0$ در مشتق‌گیری برابر صفر می‌شود)

$$= \sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{s+1}\frac{(n+k)!}{(n-s-1)!(k+s+1)!s!}x^s$$

(با تغییر متغیر جمعبندی به $s=r-1$)

$$= -\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\frac{(n-1+k+1)!}{(n-1-s)!(k+1+s)!s!}x^s$$

$$= -L_{n-1}^{k+1}(x)$$

(طبق قضیه ۶.۷).

(vi). با مقایسه روابط (iv) و (v) فوق، خواهیم داشت:

$$-\sum_{r=0}^{n-1}L_r^k(x) = -L_{n-1}^{k+1}(x)$$

و از این رابطه، با تبدیل n به $n+1$ به‌دست می‌آید:

$$L_n^{k+1}(x) = \sum_{r=0}^{n}L_r^k(x).$$

۶.۹ نمادگذاری

توجه به این نکته حائز اهمیت است، که برخی از مؤلفان از تعریف‌هائی متفاوت از تعریف‌هائی که ما در این‌جا از چند جمله‌ایهای لاگر و چند جمله‌ایهای لاگر وابسته ارائه نمودیم، استفاده می‌نمایند.

بعضی اوقات چند جمله‌ایهای لاگر چنان تعریف می‌شوند، که دارای تابع مولدی فرم:

$$\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

باشند. با چنین تعریفی $\mathcal{L}_n(x)$ برابر $n!L_n(x)$ خواهد بود *.

*) ما از نماد $\mathcal{L}$ برای نشان دادن شق‌های دیگری از تعریف‌ها استفاده کرده‌ایم، برای اینکه تفاوتی بین آن چه که دیگران انتخاب کرده‌اند، با آن چه که ما انتخاب کرده‌ایم، ایجاد کرده باشیم، اما، باید به خاطر سپرد که، مؤلفان تعریف‌های گوناگونی در استفاده از L پذیرفته‌اند.

چند جمله‌ایهای لاگر وابسته را می‌توان به‌طریق زیر تعریف کرد:

$$\mathcal{L}_n^k(x) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\mathcal{L}_n(x)$$

با این تعریف، رابطه $\mathcal{L}_n^k(x) = (-1)^k L_{n-k}^k(x)$ برقرار خواهد بود.

۶.۱۰ مثالها

مثال ۱ . ثابت کنید که:

$$L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y) = \sum_{r=0}^{n} L_r^\alpha(x) L_{n-r}^\beta(y).$$

حل. طبق قضیه ۶.۸، داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y)\cdot t^n = \frac{\exp\{-(x+y)t/(1-t)\}}{(1-t)^{\alpha+\beta+2}}$$

بنابراین، $L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y)$ برابر ضریب t^n در سری توانی بسط عبارت:

$$\frac{\exp\{-(x+y)t/(1-t)\}}{(1-t)^{\alpha+\beta+2}}$$

است. اما:

$$\begin{aligned}\frac{\exp\{-(x+y)t/(1-t)\}}{(1-t)^{\alpha+\beta+2}} &= \frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{(1-t)^{\alpha+1}}\cdot\frac{\exp\{-yt/(1-t)\}}{(1-t)^{\beta+1}}\\ &= \left(\sum_{r=0}^{\infty} L_r^\alpha(x)t^r\right)\sum_{s=0}^{\infty} L_s^\beta(y)t^s\\ &\qquad\text{(با استفاده مجدد از قضیه ۶.۸)}\\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty} L_r^\alpha(x)L_s^\beta(y)t^{r+s}.\end{aligned}$$

t^n با قرار دادن $r+s=n$ به‌دست می‌آید، بنابراین، برای یک مقدار ثابت r، داریم $s=n-r$، و در نتیجه، برای این مقدار r، ضریب t^n برابر $L_r^\alpha(x)L_{n-r}^\beta(y)$، و کل ضریب t^n با جمعبندی روی همه مقادیر مجاز r به‌دست می‌آید، اما، با توجه به اینکه $s=n-r$ است، و باید $s\geq 0$ باشد، $r\leq n$ خواهد بود. به این ترتیب، ضریب t^n برابر:

$$\sum_{r=0}^{n} L_r^\alpha(x)L_{n-r}^\beta(y)$$

خواهد بود، و بنابراین:

$$L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y)=\sum_{r=0}^{n}L_r^{\alpha}(x)L_{n-r}^{\beta}(y).$$

مثال ۲ . نشان دهید که:

$$J_m(2\sqrt{xt})=e^{-t}(xt)^{m/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^m(x)}{(n+m)!}t^n.$$

(که در آن J_m تابع بسل از مرتبه صحیح m است).

حل. رابطه:

$$e^t(xt)^{-m/2}J_m(2\sqrt{xt})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^m(x)}{(n+m)!}t^n$$

را که هم ارز رابطه فوق است، ثابت می‌کنیم.

از معادله (۴.۶) داریم:

$$J_m(2\sqrt{xt})=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!(m+r)!}\left(\frac{2\sqrt{xt}}{2}\right)^{2r+m}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
e^t(xt)^{-m/2}J_m(2\sqrt{xt})&=e^t(xt)^{-m/2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!(m+r)!}(xt)^{r+\frac{m}{2}}\\
&=e^t\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!(m+r)!}(xt)^r\\
&=\left(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{t^s}{s!}\right)\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!(m+r)!}x^rt^r\\
&=\sum_{r,s=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!(m+r)!s!}x^rt^{r+s}
\end{aligned}$$

حال، باید نشان دهیم، که ضریب t^n در این بسط برابر

$$L_n^m(x)/(n+m)!$$

است.

برای به‌دست آوردن ضریب t^n، قرار می‌دهیم $r + s = n$، بنابراین، برای یک مقدار ثابت r، خواهیم داشت $s = n - r$، و برای این مقدار از r ضریب t^n برابر است با:

$$(-1)^r \frac{1}{r!(m+r)!(n-r)!} x^r$$

و کل ضریب t^n از طریق جمعبندی روی همه مقادیر مجاز r به‌دست می‌آید. اما، چون $s = n - r$ و باید $s \geq 0$ باشد، $n - r \geq 0$ و یا $r \leq n$ خواهد بود. در نتیجه، ضریب t^n برابر است با:

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{1}{r!(m+r)!(n-r)!} x^r \\
&\qquad = \frac{1}{(n+m)!} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(n+m)!}{r!(m+r)!(n-r)!} x^r \\
&\qquad = \frac{1}{(n+m)!} L_n^m(x)
\end{aligned}$$

(با استفاده از قضیه ۶.۷)

و نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

مثال ۳ . نشان دهید که:

$$\int_x^\infty e^{-t} L_n^k(t) \mathrm{d}t = e^{-x} \{ L_n^k(x) - L_{n-1}^k(x) \}.$$

حل. با انتگرالگیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\int_x^\infty e^{-t} L_n^k(t) \mathrm{d}t &= \left[-e^{-t} L_n^k(t) \right]_{t=x}^{\infty} - \int_x^\infty -e^{-t} \{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_n^k(t) \} \mathrm{d}t \\
&= e^{-x} L_n^k(x) + \int_x^\infty e^{-t} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_n^k(t) \right\} \mathrm{d}t \\
&= e^{-x} L_n^k(x) - \int_x^\infty e^{-t} \left\{ \sum_{r=0}^{n-1} L_r^k(t) \right\} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(طبق قسمت (iv) قضیه ۶.۱۱)

بنابراین:

$$\int_x^\infty e^{-t} L_n^k(t) \mathrm{d}t + \sum_{r=0}^{n-1} \int_x^\infty e^{-t} L_r^k(t) \mathrm{d}t = e^{-x} L_n^k(x)$$

و در نتیجه:

$$\sum_{r=0}^{n}\int_{x}^{\infty} e^{-t}L_r^k(t)\mathrm{d}t = e^{-x}L_n^k(x). \qquad (۶.۸)$$

بنابراین:

$$\int_x^{\infty} e^{-t}L_n^k(t)\mathrm{d}t = \sum_{r=0}^{n}\int_x^{\infty} e^{-t}L_r^k(t)\mathrm{d}t - \sum_{r=0}^{n-1}\int_x^{\infty} e^{-t}L_r^k(t)\mathrm{d}t$$

$$= e^{-x}L_n^k(x) - e^{-x}L_{n-1}^k(x)$$

(طبق رابطه (۶.۸) فوق)

$$= e^{-x}\{L_n^k(x) - L_{n-1}^k(x)\}$$

مسائل

(۱). نشان دهید که $L_n''(0) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

(۲). اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه m باشد، نشان دهید که، $f(x)$ را می‌توان به شکل:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{m} c_r L_r(x)$$

با

$$c_r = \int_0^{\infty} e^{-x}L_r(x)f(x)\mathrm{d}x$$

بسط داد. از مطلب فوق نتیجه بگیرید که:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^k L_n(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{اگر } k < n \text{ باشد،} \\ (-1)^n n! & \text{اگر } k = n \text{ باشد،} \end{cases}$$

(۳). ثابت کنید که:

$$\int_0^{x}(x-t)^m L_n(t)\mathrm{d}t = \frac{m!n!}{(m+n+r)!}x^{m+1}L_n^{m+1}(x).$$

(۴). نشان دهید که:

$$L_n^k(x) = (-1)^n\frac{2^{2k}k!(n+k)!}{\pi(2k)!(2n)!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{k-\frac{1}{2}}H_{2n}(\sqrt{x}t)\mathrm{d}t.$$

(۵). ثابت کنید که:

$$n!\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\{\mathrm{e}^{-x}e^k L_n^k(x)\} = (m+n)!\mathrm{e}^{-x}x^{k-m}L_{m+n}^{k-m}(x).$$

(۶). نشان دهید که:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{k+1}\{L_n^k(x)\}^2\mathrm{d}x = \frac{(n+k)!}{n!}(2n+k+1).$$

(۷). اگر $L_n^k(x)$ برای عدد غیرصحیح k از طریق تعمیم نتیجه قضیه ۶.۷ به‌صورت:

$$L_n^k(x) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{\Gamma(n+k+1)}{(n-r)!\Gamma(k+r+1)r!}x^r$$

تعریف شده باشد، نشان دهید که :

$$L_n^{1/2}(x) = (-1)^n\frac{1}{2^{2n+1}n!x}H_{2n+1}(\sqrt{x})$$

و

$$L_n^{-1/2}(x) = (-1)^n\frac{1}{2^{2n}n!}H_{2n}(\sqrt{x}).$$

(۸). با کمک $L_n^k(x)$ که برای عدد غیرصحیح n در مسأله ۷ تعریف شده است، نشان دهید که:

$$L_n^{k+1}(x) = \frac{\Gamma(n+k+l+r)}{\Gamma(l)\Gamma n+k+1)}\int_0^1 t^k(1-k)^{l-1}L_n^k(xt)\mathrm{d}t.$$

فصل ۷

چندجمله‌ایهای چبیشف*

۷.۱ تعریف چند جمله‌ایهای چبیشف؛ معادله چبیشف

$T_n(x)$ چند جمله‌ای نوع اول چبیشف، و $U_n(x)$ چند جمله‌ای چبیشف نوع دوم برای عدد صحیح غیرمنفی n به صورت‌های:

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \qquad (۷.۱)$$

$$U_n(x) = \sin(n \cos^{-1} x) \quad ** \qquad (۷.۲)$$

تعریف می‌شوند***

قضیه ۷.۱. اگر n یک عدد صحیح غیرمنفی باشد، آنگاه:

$$\text{(i)} \quad T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left\{x + i\sqrt{1-x^2}\right\}^n + \left\{x - i\sqrt{1-x^2}\right\}^n\right].$$

$$\text{(ii)} \quad U_n(x) = -\frac{1}{2}i\left[\left\{x + i\sqrt{1-x^2}\right\}^n - \left\{x - i\sqrt{1-x^2}\right\}^n\right]$$

---

*) علاوه بر نقل حروفی Chebyshev که ما در اینجا از آن استفاده کرده‌ایم، در منابع دیگر می‌توان نقل‌های حروفی Tchebichef، Tchebicheff و Tschebycheff نیز یافت.

**) بعضی اوقات چند جمله‌ای چبیشف نوع دوم با رابطه:

$$u_n(x) = \sin\{(n+1)\cos^{-1} x\}/\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} U_{n+1}(x)$$

تعریف می‌شود.

***) با تعریفی که مؤلف کتاب از $U_n(x)$ کرده است، $U_n(x)$ یک چند جمله‌ای نیست، و تعریفی که در پاورقی مربوط به ** از آن کرده است، $U_n(x)$ را به‌صورت یک چندجمله‌ای در می‌آورد. مترجم.

اثبات. با قراردادن $\theta = \cos^{-1} x$، به‌دست می‌آید $x = \cos\theta$ و

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \cos(n\cos^{-1}\cos\theta) \\
&= \cos(n\theta) \\
&= \frac{1}{2}\{e^{in\theta} + e^{-in\theta}\} \\
&= \frac{1}{2}\{(e^{i\theta})^n + (e^{-i\theta})^n\} \\
&= \frac{1}{2}\{(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\} \\
&= \frac{1}{2}\{(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n\}.
\end{aligned}$$

(ii) اثبات شبیه قسمت (i) است، و بنابراین، به شرح آن نپرداخته‌ایم.

قضیه ۷.۲. اگر n یک عدد صحیح غیرمنفی باشد، آنگاه:

$$\text{(i)}\qquad T_n(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} (-1)^r \frac{n!}{(2r)!(n-2r)!}(1-x^2)^r x^{n-2r}.$$

$$\text{(ii)}\qquad U_n(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]} (-1)^r \frac{n!}{(2r+1)!(n-2r-1)!}(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}} x^{n-2r-1}$$

اثبات. از قسمت (i) قضیه ۷.۱ داریم:

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \frac{1}{2}[\{x + i\sqrt{1-x^2}\}^n + \{x - i\sqrt{1-x^2}\}^n] \\
&= \frac{1}{2}[\sum_{r=0}^{n} C_n^r x^{n-r}\{i\sqrt{1-x^2}\}^r + \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^{n-r}\{-i\sqrt{1-x^2}\}^r]
\end{aligned}$$

(طبق قضیه دو جمله‌ای)

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n} C_n^r x^{n-r}(1-x^2)^{r/2} i^r\{1 + (-1)^r\}.$$

حال، اگر r فرد باشد، $(-1)^r = -1$، و بنابراین $1 + (-1)^r = 0$، و اگر r زوج باشد، $(-1)^r = 1$ و بنابراین $1 + (-1)^r = 2$. در نتیجه:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{r \text{ زوج}, r \leq n} C_n^r x^{n-r}(1-x^2)^{r/2} \cdot i^r \cdot 2.$$

اما، اگر r زوج باشد، می‌توان نوشت $r = 2s$ که در آن s یک عدد صحیح غیرمنفی است، و چون $r \le n$، پس $s \le \frac{n}{2}$ خواهد بود. اما، به علت اینکه s یک عدد صحیح غیر منفی است، رابطه فوق هم ارز این است که $0 \le s \le \left[\frac{n}{2}\right]$ که در آن $\left[\frac{n}{2}\right]$ قبلاً تعریف شده است، و برابر بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $n/2$ است. بنابراین:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{s=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} C_n^{2s} x^{n-2s}(1-x^2)^s i^{2s} \\ &= \sum_{s=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} \frac{n!}{(n-2s)!(2s)!} x^{n-2s}(1-x^2)^s(-1)^s. \end{aligned}$$

(ii) اثبات رابطه (ii) نیز شبیه رابطه (i) است.

از قضیه ۷.۲ می‌توان برای محاسبه تعدادی از نخستین چندجمله‌ایهای چبیشف استفاده نمود:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 &&, \quad U_0(x) = 0; \\ T_1(x) &= x &&, \quad U_1(x) = \sqrt{1-x^2}; \\ T_2(x) &= 2x^2-1 &&, \quad U_2(x) = \sqrt{1-x^2}(2x); \\ T_3(x) &= 4x^3-3x &&, \quad U_3(x) = \sqrt{1-x^2}(4x^2-1); \\ T_4(x) &= 8x^4-8x^2+1 &&, \quad U_4(x) = \sqrt{1-x^2}(8x^3-4x); \\ T_5(x) &= 16x^5-20x^3+5x &&, \quad U_5(x) = \sqrt{1-x^2}(16x^4-12x^2+1). \end{aligned}$$

توجه به این نکته ضروری است، که $U_n(x)$ واقعاً یک چند جمله‌ای نیست، اما، برابر حاصلضرب یک کثیرالجمله در عامل $\sqrt{1-x^2}$ است، در حالی که، $U_n(x)$ که قبلاً تعریف شده است، یک چندجمله‌ای از درجه n است.

از آنجا که $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ و $U_n(\cos\theta) = \sin n\theta$، با چند جمله‌ایهای چبیشف می‌توان بسط‌های $\cos n\theta$ و $\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ را برحسب جملاتی از توان‌های $\cos\theta$ به‌دست آورد.

قضیه ۷.۳. $T_n(x)$ و $U_n(x)$ جوابهای معادله چبیشف:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + n^2y = 0$$

هستند.

اثبات. قضیه را برای $T_n(x)$ ثابت می‌کنیم، اثبات برای $U_n(x)$ مشابه است. از تعریف ۷.۱ داریم:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(n\cos^{-1}x)$$

$$= -\sin(n\cos^{-1}x)\cdot n\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(یادآوری می‌کنیم که $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

$$= n\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\cos^{-1}x)$$

همچنین:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}T_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\cos^{-1}x)\right\}$$
$$= \frac{nx}{(1-x^2)^{3/2}}\sin(n\cos^{-1}x) + \frac{n}{(1-x^2)^{1/2}}\cos(n\cos^{-1}x)\cdot\frac{-n}{(1-x^2)^{1/2}}$$
$$= \frac{nx}{(1-x^2)^{3/2}}\sin(n\cos^{-1}x) - \frac{n^2}{1-x^2}\cos(n\cos^{-1}x).$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2T_n(x)}{\mathrm{d}x^2} - x\frac{\mathrm{d}T_n(x)}{\mathrm{d}x} + n^2T_n(x) &= \frac{nx}{(1-x^2)^{1/2}}\sin(n\cos^{-1}x) - n^2\cos(n\cos^{-1}x)\\ &\quad - \frac{nx}{(1-x^2)^{1/2}}\sin(n\cos^{-1}x) + n^2\cos(n\cos^{-1}x)\\ &= 0\end{aligned}$$

که ثابت می‌کند $T_n(x)$ در معادله چبیشف صدق می‌کند.

این حقیقت که $T_n(x)$ و $U_n(x)$ جوابهای مستقل معادله چبیشف هستند، با توجه به روابط $T_n(1) = 1$، $U_n(1) = 0$ واضح است، زیرا، $U_n(x)$ نمی‌تواند مضرب غیرصفری از $T_n(x)$ باشد.

۷.۲ تابع مولد

قضیه ۷.۴. اگر $|t| < 1$ باشد*، آنگاه:

$$\text{(i)}\qquad \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)t^n,$$

$$\text{(ii)}\qquad \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}U_{n+1}(x)t^n.$$

*) مؤلف. شرط اساسی $|t| < 1$ که در جریان اثبات قضیه از آن استفاده نموده، در متن اصلی کتاب از قلم انداخته است. مترجم.

اثبات. دوباره، فقط رابطه (i) را ثابت می‌کنیم، اثبات رابطه (ii) مشابه است. قرار می‌دهیم $\theta = \cos^{-1} x$، در این صورت، $x = \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$، و بنابراین:

$$\begin{aligned}\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} &= \frac{1-t^2}{1-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})t+t^2}\\ &= \frac{1-t^2}{(1-e^{i\theta}t)(1-e^{-i\theta}t)}\\ &= (1-t^2)\Big(\sum_{r=0}^{\infty}(e^{i\theta}t)^r\Big)\cdot\sum_{s=0}^{\infty}(e^{-i\theta}t)^s\end{aligned}$$

(طبق قضیه دو جمله‌ای)

$$\begin{aligned}&= (1-t^2)\sum_{r,s=0}^{\infty} e^{i(r-s)\theta}t^{r+s}\\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty} e^{i(r-s)}t^{r+s} - \sum_{r,s=0}^{\infty} e^{i(r-s)}t^{r+s+2}\end{aligned}$$

حال، باید ضریب t^n را در عبارت فوق پیدا نموده، نشان دهیم که این ضریب به ازاء $n = 0$ برابر $T_0(x)$، و در بقیه حالت‌ها برابر $2T_n(x)$ است.

حالت‌های $n = 0$ و $n = 1$ را به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم، زیرا، برای این مقادیر n، ضریب t^n تنها از اولین مجموع به‌دست می‌آید، در حالی که، برای $n \geq 2$، ضریب t^n را باید از هر دو مجموع به‌دست آورد.

$n = 0$ تنها با انتخاب $r = 0$ و $s = 0$ در اولین مجموع به‌دست می‌آید، بنابراین، ضریب t^o برابر است با:

$$e^{i(0-0)\theta} = 1 = T_0(x)$$

$n = 1$ با قرار دادن $r = 1$ و $s = 0$، یا $r = 0$ و $s = 1$ به‌دست می‌آید، در نتیجه، ضریب t^1 برابر خواهد شد با:

$$\begin{aligned}e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= 2\cos\theta\\ &= 2T_1(x)\end{aligned}$$

(یادآوری می‌کنیم که $T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$).

برای $n \geq 2$ ضریب t^n با قراردادن $r + s = n$ (و یا $s = n - r$) در اولین مجموع و $r + s + 2 = n$ (یا $s = n - r - 2$) در دومین مجموع به‌دست می‌آید. بنابراین، ضریب t^n برابر

است با:

$$\sum_{r=0}^{n} e^{i\{r-(n-r)\}\theta} - \sum_{r=0}^{n-2} e^{i\{r-(n-r-2)\}\theta}$$

$$= e^{-in\theta}\sum_{r=0}^{n} e^{i2r\theta} - e^{i(n-2)\theta}\sum_{r=0}^{n-2} e^{i2r\theta}$$

$$= e^{-in\theta}\frac{1-(e^{i2\theta})^{n+1}}{1-e^{2i\theta}} - e^{-i(n-2)\theta}\frac{1-(e^{i2\theta})^{n-1}}{1-e^{2i\theta}}$$

(مجموع‌های به ترتیب $n+1$ و $n-1$ جمله از دو تصاعد هندسی با قدرنسبت مشترک $e^{2i\theta}$)

$$= \frac{e^{-in\theta}-e^{i(n+2)\theta}}{1-e^{2i\theta}} - \frac{e^{-i(n-2)\theta}-e^{in\theta}}{1-e^{2i\theta}}$$

$$= \frac{e^{-in\theta}(1-e^{2i\theta})}{1-e^{2i\theta}} + \frac{e^{in\theta}(1-e^{2i\theta})}{1-e^{2i\theta}}$$

(با تجدید آرایش جملات)

$$= e^{in\theta}+e^{-in\theta}$$

$$= 2\cos n\theta$$

$$= 2T_n(x)$$

(با یادآوری مجدد رابطه $T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$)

قضیه ۷.۵. (مقادیری خاص از چند جمله‌ایهای چبیشف). اگر n یک عدد صحیح غیرمنفی باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned}
\text{(i)}\quad & T_n(1) = 1,\\
& T_n(-1) = (-1)^n,\\
& T_{2n}(0) = (-1)^n,\\
& T_{2n+1}(0) = 0\\
\text{(ii)}\quad & U_n(1) = 0\\
& U_n(-1) = 0,\\
& U_{2n}(0) = 0,\\
& U_{2n+1}(0) = (-1)^n.
\end{aligned}$$

اثبات. دوباره، فقط روابط مربوط به قسمت (i) را ثابت می‌کنیم.

با قرادادن $x = 1$ در تعریف (۷.۱) خواهیم داشت:

$$T_n(1) = \cos(n\cos^{-1} 1) = \cos n \cdot 0 = \cos 0 = 1.$$

با قرار دادن $x = -1$ به‌دست می‌آید:

$$T_n(-1) = \cos(n\cos^{-1}(-1)) = \cos n\pi = (-1)^n$$

و با قراردادن $x = 0$ به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$T_n(0) = \cos(n\cos^{-1} 0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ (-1)^{n/2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

به این ترتیب، هر چهار رابطه قسمت (i) ثابت می‌شود.

۷.۳ خواص تعامد

قضیه ۷.۶. اگر m و n دو عدد صحیح غیرمنفی باشند، آنگاه:

$$\text{(i)} \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{اگر } m \neq n \text{ باشد} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{اگر } m = n \neq 0 \text{ باشد} \\ \pi, & \text{اگر } m = n = 0 \text{ باشد} \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \int_{-1}^{1} \frac{U_m(x)U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{اگر } m \neq n \text{ باشد} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{اگر } m = n \neq 0 \text{ باشد} \\ 0, & \text{اگر } m = n = 0 \text{ باشد} \end{cases}$$

اثبات. ما فقط رابطه (i) را ثابت می‌کنیم، اثبات رابطه (ii) مشابه است.

اگر قرار دهیم $\theta = \cos^{-1} x$، در اینصورت، خواهیم داشت $x = \cos\theta$ و

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \int_{x}^{0} \frac{T_m(\cos\theta)T_n(\cos\theta)}{\sin\theta}(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

(طبق تعریف (۷.۱))

$$= \int_0^\pi \frac{1}{2}\{\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta\}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)\theta - \frac{1}{m-n}\sin(m-n)\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

(به شرط اینکه $m-n \neq 0$ باشد)

$$= 0$$

اگر $m-n=0$ باشد، در اینصورت، از معادله (۷.۳) خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos^2 n\theta \mathrm{d}\theta \tag{۷.۴}$$

$$= \int_0^\pi \frac{1}{2}(1+\cos 2n\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2n}\sin 2n\theta\right]_{\theta=0}^{\pi}$$

(به شرط اینکه $n \neq 0$ باشد)

$$= \frac{1}{2}\pi$$

اگر $n=m=0$ باشد، از معادله (۷.۴) نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_0(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\mathrm{d}\theta = \pi$$

و با این رابطه اثبات کامل می‌شود.

۷.۴ روابط برگشتی

قضیه ۷.۴. اگر n یک عدد صحیح غیرمنفی باشد، آنگاه:

$$\text{(i)} \quad T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0.$$

$$\text{(ii)} \quad (1-x^2)T_n'(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x).$$

$$\text{(iii)} \quad U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0.$$

$$\text{(iv)} \quad (1-x^2)U_n'(x) = -nxU_n(x) + nU_{n-1}(x).$$

اثبات. باز هم قضیه را فقط برای چند جمله‌ایهای چبیشف نوع اول ثابت می‌کنیم.

(i) با قراردادن $\theta = \cos^{-1} x$، کافی است ثابت کنیم:

$$\cos(n+1)\theta - 2\cos\theta\cos n\theta + \cos(n-1)\theta = 0$$

اما:

$$\cos(n+1)\theta - 2\cos\theta\cos\theta + \cos(n-1)\theta =$$
$$\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta - 2\cos\theta\cos n\theta$$
$$+ \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta = 0,$$

و این همان رابطه‌ای است که باید ثابت می‌کردیم.

(ii) با نوشتن $\theta = \cos^{-1} x$، باید نشان دهیم:

$$(1-\cos^2\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\cos\theta)}\cos n\theta = -n\cos\theta\cos n\theta + n\cos(n-1)\theta.$$

اما :

$$\begin{aligned}(1-\cos^2\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\cos\theta)}\cos n\theta &= (\sin^2\theta)\left(-\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cos n\theta\right)\\ &= -(\sin\theta)(-n\sin n\theta)\\ &= n\sin\theta\sin n\theta\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}-n\cos\theta\cos n\theta + n\cos(n-1)\theta\\ &= -\,n\cos\theta\cos n\theta + n(\cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta)\\ &= n\sin n\theta\sin\theta\end{aligned}$$

و به این ترتیب، رابطه مورد نظر ثابت می‌شود.

۷.۵ مثالها

مثال ۱ . نشان دهید که:

$$\sqrt{1-x^2}T_n(x) = U_{n+1}(x) - xU_n(x)$$

حل. اگر قرار دهیم $\theta = \cos^{-1} x$ و از نتایج تعریف‌های (۷.۱) و (۷.۲)، یعنی:

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

و

$$U_n(\cos\theta) = \sin n\theta$$

استفاده کنیم، برای اثبات رابطه مورد نظر کافی است نشان دهیم که:

$$\sin\theta\cos n\theta = \sin(n+1)\theta - \cos\theta\sin n\theta.$$

اما:

$$\begin{aligned}\sin(n+1)\theta - \cos\theta\sin n\theta \\ &= \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta - \cos\theta\sin n\theta \\ &= \cos n\theta\sin\theta\end{aligned}$$

و با این رابطه نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

مثال ۲ . نشان دهید که

$$\sum_{r=0}^{n} T_{2r}(x) = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}U_{2n+1}(x)\right\}.$$

حل. دوباره، با قرار دادن $\theta = \cos^{-1} x$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{n} T_{2r}(x) \\ &= \sum_{r=0}^{n} T_{2r}(\cos\theta) \\ &= \sum_{r=0}^{n} \cos 2r\theta \\ &= Re\sum_{r=0}^{n} e^{i2r\theta} \\ &= Re\frac{1-e^{i(2n+2)\theta}}{1-e^{2i\theta}}\end{aligned}$$

(با استفاده از مجموع $n+1$ جمله از یک تصاعد هندسی)

$$= Re\frac{(1-e^{i(2n+2)\theta})(1-e^{-2i\theta})}{(1-e^{2i\theta})(1-e^{-2i\theta})}$$

$$= Re\frac{\{1-\cos(2n+2)\theta - i\sin(2n+2)\theta\}\{1-\cos 2\theta + i\sin 2\theta\}}{1+1-e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}}$$
$$= \frac{1}{2-2\cos 2\theta}[(1-\cos 2\theta)(1-\cos(2n+2)\theta) + \sin 2\theta \sin(2n+2)\theta]$$
$$= \frac{1}{2}\left\{1-\cos(2n+2)\theta + \frac{\sin 2\theta}{2\sin^2\theta}\sin(2n+2)\theta\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{1+\frac{\sin(2n+2)\theta\cos\theta - \cos(2n+2)\theta\sin\theta}{\sin\theta}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left[1+\frac{\sin\{(2n+2)\theta-\theta\}}{\sin\theta}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left\{1+\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{1+\frac{U_{2n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right\}.$$

مسائل

(۱). نشان دهید که:

$$\sqrt{1-x^2}U_n(x) = xT_n(x) - T_{n+1}(x).$$

(۲). نشان دهید که:

$$T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x) = 2T_m(x)T_n(x).$$

(۳). ثابت کنید که:

$$T_n^{'}(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}U_n(x).$$

(۴). نشان دهید که:

$$2\{T_n(x)\}^2 = 1 + T_{2n}(x).$$

(۵). نشان دهید که:

$$\{T_n(x)\}^2 - T_{n+1}(x)T_{n-1}(x) = 1 - x^2.$$

(۶). نشان دهید که:

$$T_m\{T_n(x)\} = T_n\{T_m(x)\} = T_{mn}(x).$$

(۷). نشان دهید که، تابع $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}U_n(x)$ در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(n^2-1)y=0\cdot$$

(۸). با استفاده از معادله دیفرانسیل چبیشف و معادله دیفرانسیل مسأله ۷ فوق، نشان دهید که:

$$T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]}(-1)^r\frac{(n-r-1)!}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r}$$

و

$$U_n(x)=\sqrt{1-x^2}\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]}(-1)^r\frac{(n-r-1)!}{r!(n-2r-1)!}(2x)^{n-2r-1}.$$

فصل ۸

چندجمله‌ایهای گگنباوئر و ژاکوبی

۸.۱ چند جمله‌ایهای گگنباوئر

می‌توان مجموعه‌های جدیدی از چندجمله‌ایها از طریق تعمیم برخی از نتایجی که قبلاً برای چندجمله‌ایهای لژاندر، هرمیت، لاگر یا چبیشف به‌دست آورده‌ایم، تعریف کرد. در اینجا تنها دو مجموعه مفید مخصوص ارائه شده است، آنها با تعمیم از دو راه مختلف از تابع مولد چند جمله‌ایهای لژاندر، که در قضیه ۳.۱ بیان شده است، به‌دست می‌آیند. ما چندجمله‌ای گگنباوئر* از درجه n و مرتبه λ، $C_n^\lambda(x)$، را به عنوان ضریب t^n در بسط:

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\lambda}$$

تعریف خواهیم کرد (توجه به این نکته ضروری است، که $P_n(x)$ در حقیقت برابر $C_n^1(x)$ است). بنابراین:

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^\lambda(x)t^n \tag{۸.۱}$$

می‌توان نشان داد که، چنین بسطی به سری توانی برای $|t|<1$ و $|x|\leq 1$ و $\lambda>-\dfrac{1}{2}$ معتبر است.

ما اثبات خواص زیر را حذف خواهیم کرد. همه این نتایج را می‌توان با روشهائی مشابه با روشهائی که در فصل‌های قبلی دیده‌ایم، به‌دست آورد.

قضیه ۸.۱ (بسط به سری توانی)

$$C_n^\lambda(x)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]}(-1)^r\frac{\Gamma(n-r+\lambda)}{\Gamma(\lambda)r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r}.$$

*) چندجمله‌ای گگنباوئر را گاهی اوقات چند جمله‌ای مافوق کروی (فراکروی) نیز می‌نامند.

قضیه ۸.۲ (خاصیت تعامد).

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}C_n^{\lambda}(x)C_m^{\lambda}(x)\mathrm{d}x=2^{1-2\lambda}\pi\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{(n+\lambda)\{\Gamma(\lambda)\}^2\Gamma(n+1)}\delta_{nm}\cdot$$

قضیه ۸.۳ (روابط برگشتی).

(i) $(n+2)C_{n+2}^{\lambda}(x)=2(\lambda+n+1)xC_{n+1}^{\lambda}(x)-(2\lambda+n)C_n^{\lambda}(x).$

(ii) $nC_n^{\lambda}(x)=2\lambda\{xC_{n-1}^{\lambda+1}(x)-C_{n-2}^{\lambda+1}(x)\}.$

(iii) $(n+2\lambda)C_n^{\lambda}(x)=2\lambda\{C_n^{\lambda+1}(x)-xC_{n-1}^{\lambda+1}(x)\}.$

(iv) $nC_n^{\lambda}(x)=(n-1+2\lambda)xC_{n-1}^{\lambda}(x)-2\lambda(1-x^2)C_{n-2}^{\lambda-1}(x).$

(v) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C_n^{\lambda}(x)=2\lambda C_{n+1}^{\lambda+1}(x).$

قضیه ۸.۴ (معادله دیفرانسیل). $C_n^{\lambda}(x)$ در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-(2\lambda+1)x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n(n+2\lambda)y=0\cdot$$

۸.۲ چندجمله‌ایهای ژاکوبی

می‌توان تابع مولد چندجمله‌ایهای لژاندر را حتی بیشتر از آن چه که بیان شد، تعمیم داد. ما چند جمله‌ای $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ را به عنوان ضریب t^n در بسط:

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{(1-2xt+t^2)^{1/2}\{1-t+(1-2xt+t^2)^{1/2}\}^{\alpha}\{1+t+(1-2xt+t^2)^{1/2}\}^{\beta}}$$

تعریف می‌کنیم، یعنی:

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{(1-2xt+t^2)^{1/2}\{1-t+(1-2xt+t)^{1/2}\}^{\alpha}\{1+t+(1-2xt+t^2)^{1/2}\}^{\beta}}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n \qquad (۸.۲)$$

توجه به این نکته ضروری است که $P_n(x)$ در واقع برابر $P_n^{(0,0)}(x)$ است.

دوباره، خواص زیر را می‌توان با روشهائی مشابه با روشهائی که در فصل‌های قبلی مورد استفاده قرار داده‌ایم، ثابت نمود.

قضیه ۸.۵ (بسط‌ها به سری).

$$\text{(i)}\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)\Gamma(n+\beta-r+1)(n-r)!r!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^r \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-r}.$$

$$\text{(ii)}\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+r+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(n-r)!r!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^r.$$

$$\text{(iii)}\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{n-r}\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+r+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+r+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(n-r)!r!} \left(\frac{x+1}{2}\right)^r.$$

قضیه ۸.۶ (خاصیت تعامد).

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\mathrm{d}x = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\delta_{nm}.$$

قضیه ۸.۷ (روابط برگشتی).

$$\text{(i)}\quad 2n(\alpha+\beta+n)(\alpha+\beta+2n-2)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (\alpha+\beta+2n-1)\{\alpha^2-\beta^2+x(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-2)\}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) - 2(\alpha+n-1)(\beta+n-1)(\alpha+\beta+2n)P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(1+\alpha+\beta+n)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$$

$$\text{(iii)}\quad (x+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = nP_n^{(\alpha,\beta)}(x) + (\beta+n)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta)}(x).$$

$$\text{(iv)}\quad (x-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = nP_n^{(\alpha,\beta)}(x) - (\alpha+n)P_{n-1}^{(\alpha+\beta+1)}(x).$$

$$\text{(v)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}\{(\beta+n)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta)}(x) + (\alpha+n)P_{n-1}^{(\alpha+\beta+1)}(x)\}.$$

$$\text{(vi)}\quad (\alpha+\beta+2n)P_n^{(\alpha,\beta-1)}(x) = (\alpha+\beta+n)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + (\alpha+n)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

$$\text{(vii)}\quad (\alpha+\beta+2n)P_n^{(\alpha-1,\beta)}(x) = (\alpha+\beta+n)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - (\beta+n)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

قضیه ۸.۸ (معادله دیفرانسیل). چند جمله‌ای ژاکوبی $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n(n+\alpha+\beta+1)y=0$$

شبیه ارتباطی که بین توابع لژاندار و توابع ژاکوبی و گلگنباوئر وجود دارد (یادآوری می‌کنیم که $P_n(x)=P_n^{(0,0)}(x)=C_n^{1/2}(x)$)، چند جمله‌ایهای گگنباوئر و ژاکوبی با یکدیگر و با چند جمله‌ایهای چبیشف رابطه دارند. در واقع، چند جمله‌ایهای گگنباوئر حالت خاصی از چند جمله‌ایهای ژاکوبی، و چند جمله‌ایهای چبیشف حالت خاصی از چند جمله‌ایهای گگنباوئر هستند:

$$C_n^\lambda(x)=\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})}P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x); \tag{۸.۳}$$

$$T_n(x)=\frac{n}{2}\lim_{\lambda\to 0}\frac{C_n^\lambda(x)}{\lambda}\qquad (n\geq 1); \tag{۸.۴}$$

$$U_n(x)=\sqrt{1-x^2}C_{n-1}^1(x). \tag{۸.۵}$$

این روابط در فصل بعدی ثابت خواهند شد (مثال ۵، صفحه ۲۵۸)

بین چند جمله‌ایهای ژاکوبی و گگنباوئر و چندجمله‌ایهای لاگر و هرمیت نیز روابطی وجود دارد. این روابط در زیر بیان شده‌اند، اما، ثابت نخواهند شد:

$$L_n^\alpha(x)=\lim_{\beta\to\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x/\beta). \tag{۸.۶}$$

$$H_n(x)=n!\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-n/2}C_n^\lambda(x/\sqrt{\lambda}). \tag{۸.۷}$$

۸.۳ مثالها

مثال ۱ . نشان دهید که:

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}C_n^\lambda(x)=2^m\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}C_{n-m}^{\lambda+m}(x).$$

حل. از قسمت (v) قضیه ۸.۳ داریم:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C_n^\lambda(x)=2\lambda C_{n-1}^{\lambda+1}(x)$$

بنابراین:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}C_n^\lambda(x) = 2\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C_{n-1}^{\lambda+1}(x)$$
$$= 2\lambda 2(\lambda+1)C_{n-2}^{\lambda+2}(x)$$
$$= 2^2\lambda(\lambda+1)C_{n-2}^{\lambda+2}(x)$$

با m بار تکرار پروسه فوق، به وضوح به‌دست می‌آید:

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}C_n^\lambda(x) = 2^m\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+m-1)C_{n-m}^{\lambda+m}(x)$$
$$= 2^m\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}C_{n-m}^{\lambda+m}(x).$$

مثال ۲ . نشان دهید که:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\}.$$

حل. طبق قضیه لایبنیتس برای مشتق مرتبه nام حاصل‌ضرب، داریم:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\}$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}(1+x)^{\beta+n}\right\}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-r}}{\mathrm{d}x^{n-r}}(1-x)^{\alpha+n}\right\}$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-r+1)(1+x)^{\beta+n-r}$$
$$(-1)^{n-r}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+n-n+r+1)(1-x)^{\alpha+n-n+r}$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}(-1)^{n-r}\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\beta+n-r+1)\Gamma(\alpha+r+1)}$$
$$(1+x)^{\beta+n-r}(1-x)^{\alpha+r}.$$

بنابراین:

$$\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)\Gamma(\beta+n-r+1)}(1-x)^r(1+x)^{n-r}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)\Gamma(\beta+n-r+1)r!(n-r)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^r \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-r}$$

$$= P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

(طبق قسمت (i) قضیه ۸.۵).

مسائل

(۱). نشان دهید که:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x).$$

(۲). نشان دهید که:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!}.$$

(۳). نشان دهید که:

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-m} \frac{\Gamma(m+n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} P_{n-m}^{(\alpha+m,\beta+m)}(x).$$

(۴). با روش استقراء ریاضی نشان دهید که:

$$\sum_{r=0}^{n} (r+\lambda) C_r^{\lambda}(x) = \frac{(n+2\lambda)C_n^{\lambda}(x) - (n+1)C_{n+1}^{\lambda}(x)}{2(1-x)}.$$

(۵). نشان دهید که:

$$P_n^{(\alpha,\beta-1)}(x) - P_n^{(\alpha-1,\beta)}(x) = P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

(۶). نشان دهید که:

$$C_{n-1}^{\,l+\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{(2l-1)!!} \frac{d^l}{\mathrm{d}x^l} P_n(x).$$

فصل ۹

توابع فوق هندسی

۹.۱ تعریف توابع فوق هندسی

$(\alpha)_r$ موسوم به نماد و پوچهامر* وقتی r یک عدد صحیح مثبت باشد، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}(\alpha)_r &= \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+r-1)\\ &= \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} \qquad (\text{یک عدد صحیح مثبت است } r)\\ (\alpha)_0 &= 1\end{aligned}$$

با استفاده از این نماد، تابع فوق هندسی کلی

$$_mF_n(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n;x)$$

را به‌صورت:

$$_mF_n(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n;x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r\cdots(\alpha_m)_r x^r}{(\beta_1)_r(\beta_2)_r\cdots(\beta_n)_r r!} \quad (۹.۱)$$

تعریف می‌کنیم.

نماد

$$_mF_n\left[\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \cdots, & \alpha_m;\\ \beta_1, & \beta_2, & \cdots, & \beta_n;\end{matrix}\quad x\right]$$

نیز اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

*) Pochhammer symbol

نشان خواهیم داد، که بسیاری از توابع مخصوص که تا به حال با آنها مواجه شده‌ایم (و در واقع، بسیاری از توابع مقدماتی) را می‌توان برحسب عبارتهائی از توابع فوق هندسی بیان کرد. ما خود را محدود به دو حالت جدا از هم $m = n = 1$ (در این حالت، تابع فوق هندسی پدید آمده را تابع فوق هندسی هم جریان (هم ریز) یا تابع کومر می‌نامند) و $m = 2, n = 1$ (در این حالت فقط آن را تابع فوق هندسی می‌نامند) خواهیم کرد. *

لازم است که همگرائی سری (۹.۱) مورد بررسی قرار گیرد. نتایج زیر را می‌توان با استفاده از تکنیک‌های استاندارد تئوری همگرائی سریها اثبات نمود:

(i) سری فوق هندسی هم جریان (هم ریز) برای همه مقادیر x همگرا است.

(ii) سری فوق هندسی همگرا است اگر $|x| < 1$ باشد و واگرا است اگر $|x| > 1$ باشد.
برای $x = 1$، اگر $\beta > \alpha_1+\alpha_2$ باشد سری همگرا است، و برای $x = -1$، اگر $\beta > \alpha_1+\alpha_2-1$ باشد سری همگرا است.

قضیه زیر نشان می‌دهد که، روابطی نزدیک بین توابع فوق هندسی و توابع خاصی که قبلاً مورد بررسی قرار گرفته‌اند وجود دارد.

قضیه ۹.۱.

$$\text{(i)}\quad P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right).$$

$$\text{(ii)}\quad P_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!}$$
$$ {}_2F_1(m-n, m+n+1; m+1; \frac{1-x}{2}).$$

$$\text{(iii)}\quad J_n(x) = \frac{e^{-ix}}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n {}_1F_1\left(n+\frac{1}{2}; 2n+1; 2ix\right).$$

$$\text{(iv)}\quad H_{2n}(x) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}{}_1F_1(-n; \frac{1}{2}; x^2).$$

$$\text{(v)}\quad H_{2n+1}(x) = (-1)^n\frac{2(2n+1)!!}{n!}x\,{}_1F_1(-n; \frac{3}{2}; x^2).$$

$$\text{(vi)}\quad L_n(x) = {}_1F_1(-n; 1; x).$$

$$\text{(vii)}\quad L_n^k(x) = \frac{\Gamma(n+k+1)}{n!\Gamma(k+1)}{}_1F_1(-n; k+1; x).$$

$$\text{(viii)}\quad T_n(x) = {}_2F_1(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}).$$

---

*) تابع فوق هندسی هم جریان (هم ریز) ${}_1F_1(\alpha;\beta;x)$ اغلب با نماد $M(\alpha,\beta,x)$، و تابع فوق هندسی ${}_2F_1(\alpha_1,\alpha_2;\beta;x)$ اغلب با نماد $F(\alpha_1,\alpha_2,\beta,x)$ نشان داده می‌شود.

$$\text{(ix)}\quad U_n(x) = \sqrt{1-x^2}\,n\,{}_2F_1(-n+1, n+1; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}).$$

$$\text{(x)}\quad C_n^{\lambda}(x) = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{n!\Gamma(2\lambda)}{}_2F_1(-n, n+2\lambda; \lambda+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}).$$

$$\text{(xi)}\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}{}_2F_1(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}).$$

اثبات. کلیه روابط فوق را می‌توان از طریق بسط تابع فوق هندسی به عنوان یک سری، و استفاده از تعریف (۹.۱)، و مقایسه با بسط‌هائی که قبلاً برای توابع مخصوص مطرح شده در قضیه به‌دست آورده‌ایم، ثابت نمود. ما این روش را فقط با اثبات رابطه (i) شرح خواهیم داد.

از تعریف (۹.۱) داریم:

$${}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-n)_r(n+1)_r}{(1)_r}\frac{\{(1-x)2\}^r}{r!}$$

با توجه به اینکه چند جمله‌ایهای لژاندر فقط برای مقادیر صحیح غیرمنفی n تعریف شده‌اند، می‌توان n را غیرمنفی گرفت. در این صورت، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(-n)_r &= (-n)(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+r-1)\\ &= (-1)^r n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\\ &= (-1)^r n!/(n-r)! \quad \text{اگر } r \le n \text{ باشد،}\end{aligned}$$

اگر $r \ge n+1$ باشد، آنگاه $(-n)_r = 0$، زیرا، در اینصورت $(-n)_r$ شامل فاکتوری از صفر است.

همچنین:

$$\begin{aligned}(n+1)_r &= (n+1)(n+2)\cdots(n+r)\\ &= (n+r)!/n!\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(1)_r &= 1\cdot 2\cdot 3\cdots r\\ &= r!\end{aligned}$$

بنابراین، اکنون خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}{}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right) &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{n!}{(n-r)!}\frac{(n+r)!}{n!}\frac{1}{r!}\frac{(1-x)^r}{2^r r!}\\ &= \sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{2^r}\frac{(n+r)!}{(n-r)!(r!)^2}(1-x)^r\end{aligned}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{(n+r)!}{2^r (n-r)!(r!)^2}(x-1)^r \qquad (۹.۲)$$

برای اینکه نشان دهیم عبارت فوق با $P_n(x)$ برابر است، ساده‌ترین راه این است که $P_n(x)$ را به یک سری توانی برحسب $(x-1)$ بسط دهیم. ما تا به حال چنین کاری را انجام نداده‌ایم، اما، با استفاده از قضیه تیلور می‌توان نوشت:

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{n} P_n^{(r)}(1)\frac{(x-1)^r}{r!} \qquad (۹.۳)$$

که در آن منظور از $P_n^{(r)}(1)$ مشتق مرتبه rام تابع $P_n(x)$ در نقطه $x=1$ است.

برای محاسبه $P_n^{(r)}(1)$ از تابع مولد برای چند جمله‌ایهای لژاندر که در قضیه ۳.۱ شرح داده شده است، استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

و در نتیجه، با r بار مشتق‌گیری از رابطه فوق نسبت به x، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(r)}(x)t^n &= \frac{\partial^r}{\partial x^r}(1-2tx+t^2)^{-1/2} \\
&= (-2t)^r\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}-r} \\
&= 2^r t^r\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+r-1\right)(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}-r} \\
&= t^r 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}-r} \\
&= t^r\frac{(2r)!}{2^r r!}(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}-r}
\end{aligned}$$

اکنون با قراردادن $x=1$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(r)}(1)t^n &= \frac{t^r(2r)!}{2^r r!}(1-2t+t^2)^{-\frac{1}{2}-r} \\
&= \frac{t^r(2r)!}{2^r r!}(1-t)^{-1-2r} \\
&= \frac{t^r(2r)!}{2^r r!}\left\{1+(1+2r)t+\frac{(2r+1)(2r+2)}{2!}t^2\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{(2r+1)(2r+2)(2r+3)}{3!}t^3+\cdots\Big\}$$

(طبق قضیه بینم)

$$=\frac{t^r(2r)!}{2^r r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2r+s)!}{(2r)!s!}t^s$$
$$=\frac{1}{2^r r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2r+s)!}{s!}t^{r+s}$$
$$=\frac{1}{2^r r!}\sum_{n=r}^{\infty}\frac{(r+n)!}{(n-r)!}t^n$$

. (با نوشتن $r+s=n$)

با مساوی قراردادن ضرائب t^n در طرفین تساوی فوق، خواهیم داشت:

$$P_n^{(r)}(1)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^r r!}\cdot\dfrac{(n+r)!}{(n-r)!} & \text{اگر } n\geq r \text{ باشد،}\\ 0 & \text{اگر } n<r \text{ باشد،}\end{cases}$$

در نتیجه، از معادله (۹.۳)، به‌دست می‌آید:

$$P_n(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{2^r r!}\cdot\frac{(n+r)!}{(n-r)!}\frac{(x-1)^r}{r!}$$
$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!}{2^r(n-r)!(r!)^2}(x-1)^r$$
$$={}_2F_1\left(-n,n+1;1;\frac{1-x}{2}\right)$$

(طبق قضیه (۹.۲)).

۹.۲ خواص تابع فوق هندسی

قضیه ۹.۲.

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)={}_2F_1(\beta,\alpha;\gamma;x).$$

اثبات. رابطه فوق نتیجه فوری تعریف (۹.۱) است:

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r}\cdot\frac{x^r}{r!}.$$

قضیه ۹.۳. تابع $_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ جوابی از معادله دیفرانسیل:

$$x(1-x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \alpha\beta y = 0$$

(معادله فوق هندسی یا معادله گوس) است. اگر γ عددی صحیح نباشد،

$$x^{1-\gamma}{}_2F_1(\alpha+1-\gamma; \beta+1-\gamma; 2-\gamma; x).$$

یک جواب مستقل دیگر از معادله فوق است.

اثبات. نتایج فوق را می‌توان با روش حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سریهای توانی، که در فصل ۱ بیان شده است، ثابت کرد. با این روش، برای معادله شاخص جوابهای ۰ و $1-\gamma$ به‌دست خواهد آمد. بنابراین، اگر γ عددی صحیح نباشد، جوابهای معادله شاخص ما را به جوابهای مستقل معادله دیفرانسیل داده شده خواهد رساند. به سادگی می‌توان نشان داد، جوابهای مستقلی که به‌صورت سری توانی به‌دست می‌آیند، همان توابع فوق هندسی هستند، که در قضیه به آنها اشاره شده است.

قضیه ۹.۴ (نمایش انتگرالی). اگر $0 < \beta < \gamma$ باشد، آنگاه:

$$_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\mathrm{d}t.$$

اثبات. از تعریف (۹.۱) داریم:

$$\begin{aligned}
&{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)\\
&\quad= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r}\cdot\frac{x^r}{r!}\\
&\quad= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(\beta+r)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+r)}\cdot\frac{x^r}{r!}\\
&\quad= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\sum_{r=0}^{\infty}\Gamma(\alpha+r)\frac{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta+r)}{\Gamma(\gamma+r)}\cdot\frac{x^r}{r!}\\
&\quad= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\sum_{r=0}^{\infty}\Gamma(\alpha+r)B(\gamma-\beta, \beta+r)\cdot\frac{x^r}{r!}
\end{aligned}$$

(طبق قضیه ۲.۷)

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\sum_{r=0}^{\infty}\Gamma(\alpha+r)\int_0^1(1-t)^{\gamma-\beta-1}t^{\beta+r-1}\frac{x^r}{r!}\mathrm{d}t$$

(طبق تعریف (۲.۲) از تابع بتا، که اگر $\gamma-\beta>0$
و $\beta+r>0$ باشد، معتبر است)

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1}t^{\beta-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{(xt)^r}{r!}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1}t^{\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\mathrm{d}t$$

(با استفاده از قضیه دو جمله‌ای).

قضیه ۹.۵. هر یک از بیست و چهار تابع زیر جوابی از معادله فوق هندسی است:

$$V_1 = {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$$

$$V_2 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;x)$$

$$V_3 = (1-x)^{-\alpha}{}_2F_1\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{x}{x-1}\right)$$

$$V_4 = (1-x)^{-\beta}{}_2F_1(\gamma-\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{x-1})$$

$$V_5 = {}_2F_1(\alpha,\beta;\alpha+\beta+1-\gamma;1-x)$$

$$V_6 = x^{1-\gamma}{}_2F_1(\alpha+1-\gamma;\beta+1-\gamma;\alpha+\beta+1-\gamma;1-x)$$

$$V_7 = x^{-\alpha}{}_2F_1(\alpha,\alpha+1-\gamma;\alpha+\beta+1-\gamma;1-\frac{1}{x})$$

$$V_8 = x^{\beta}{}_2F_1(\beta+1-\gamma,\beta;\alpha+\beta+1-\gamma;1-\frac{1}{x})$$

$$V_9 = (-x)^{-\alpha}{}_2F_1(\alpha,\alpha+1-\gamma;\alpha+1-\beta,\frac{1}{x})$$

$$V_{10} = (-x)^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(1-\beta,\gamma-\beta;\alpha+1-\beta;\frac{1}{x})$$

$$V_{11} = (1-x)^{-\alpha}{}_2F_1\left(\alpha,\gamma-\beta;\alpha+1-\beta;\frac{1}{1-x}\right)$$

$$V_{12} = (-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+1-\gamma,1-\beta;\alpha+1-\beta;\frac{1}{1-x}\right)$$

$$V_{13} = (-x)^{-\beta}{}_2F_1\left(\beta+1-\gamma,\beta,\beta+1-\alpha,\frac{1}{x}\right)$$

$$V_{14} = (-x)^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1\left(1-\alpha,\gamma-\alpha;\beta+1-\alpha;\frac{1}{x}\right)$$

$$V_{15} = (1-x)^{-\beta}{}_2F_1\left(\beta,\gamma-\alpha;\beta+1-\alpha;\frac{1}{1-x}\right)$$

$$V_{16} = (-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}{}_2F_1\left(\beta+1-\gamma,1-\alpha;\beta+1-\alpha;\frac{1}{1-x}\right)$$

$$V_{17} = x^{1-\gamma}{}_2F_1(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma; 2-\gamma; x)$$
$$V_{18} = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1\left(1-\alpha, 1-\beta; 2-\gamma; x\right)$$
$$V_{19} = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+1-\gamma, 1-\beta; 2-\gamma; \frac{x}{x-1}\right)$$
$$V_{20} = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}{}_2F_1\left(\beta+1-\gamma, 1-\alpha; 2-\gamma; \frac{x}{x-1}\right)$$
$$V_{21} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma+1-\alpha-\beta; 1-x\right)$$
$$V_{22} = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(1-\alpha, 1-\beta; \gamma+1-\alpha-\beta; 1-x)$$
$$V_{23} = x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha; \gamma+1-\alpha-\beta; 1-\frac{1}{x}\right)$$
$$V_{24} = x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1\left(\gamma-\beta, 1-\beta; \gamma+1-\alpha-\beta; 1-\frac{1}{x}\right).$$

اثبات. به کمک تغییر متغیر می‌توان تحقیق کرد که هر یک از این توابع جوابی از معادله فوق هندسی است، با جایگذاری مستقیم و استفاده از قضیه ۹.۳ نیز می‌توان این کار را انجام داد.

از آنجا که معادله فوق هندسی معادله‌ای مرتبه دو است، تنها دو جواب مستقل خواهد داشت، بنابراین، بین هر سه تابع از ۲۴ تابع فوق یک وابستگی خطی وجود دارد، در واقع، می‌توان نشان داد که:

$$\begin{aligned}
V_1 &= V_2 = V_3 = V_4,\\
V_5 &= V_6 = V_7 = V_8,\\
V_9 &= V_{10} = V_{11} = V_{12},\\
V_{13} &= V_{14} = V_{15} = V_{16},\\
V_{17} &= V_{18} = V_{19} = V_{20},
\end{aligned}$$

و

$$V_{21} = V_{22} = V_{23} = V_{24}.$$

برای بقیه روابط خواننده می‌تواند به کتاب توابع عالی متعالی (غیرجبری)، جلد اول، صفحات ۱۰۶ـ۸ تألیف. اردلی و ...مراجعه نماید.

شش تابع فوق هندسی $_2F_1(\alpha\pm1, \beta; \gamma; x)$، $_2F_1(\alpha, \beta\pm1; \gamma; x)$، $_2F_1(\alpha, \beta; \gamma\pm1; x)$ را مجاور* تابع $_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ می‌نامند. می‌توان نشان داد که، بین $_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ و هر دو تابع که مجاور یکدیگرند، رابطه‌ای خطی وجود دارد، که ضرائب آنها توابعی خطی از x هستند. از آنجا که برای انتخاب دو شی از ۶ شی $C_6^2 = 15$ راه وجود دارد، روی هم‌رفته ۱۵ تا از چنین روابط مجاوری

*) contiguous

وجود خواهد داشت. خواننده برای دیدن جزئیات مطالب فوق می‌تواند به کتاب اردلی و ...جلد ۱، صفحات ۴ـ۳ـ۱۰۳ مراجعه نماید.

۹.۳ خواص تابع فوق هندسی هم جریان (هم ریز)

قضیه ۹.۶. تابع فوق هندسی هم جریان (هم ریز) $_1F_1(\alpha;\beta;x)$ جوابی از معادله دیفرانسیل:

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(\beta-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\alpha y=0$$

(معادله فوق هندسی هم جریان یا معادله کومر) است. اگر β عددی صحیح نباشد، تابع:

$$x^{1-\beta}1F_1(\alpha-\beta+1;2-\beta;x)$$

دومین جواب مستقل معادله دیفرانسیل فوق است.

اثبات. قضیه ۹.۶ را نیز می‌توان شبیه قضیه ۹.۳ همین فصل ثابت کرد.

قضیه ۹.۷ (نمایش انتگرالی). اگر $0<\alpha<\beta$ باشد، آنگاه:

$$_1F_1(\alpha;\beta;x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^1(1-t)^{\beta-\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{xt}\mathrm{d}t.$$

اثبات. این قضیه نیز می‌توان شبیه قضیه ۹.۴ فوق ثابت نمود.

قضیه ۹.۸ جوابهای معادله دیفرانسیل:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{k}{x}+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{x^2}\right\}y=0 \tag{۹.۴}$$

به‌صورت:

$$y=x^{\frac{1}{2}-m}e^{-x/2}z$$

هستند، که در آن z جوابی از معادله فوق هندسی هم جریان با

$$\alpha=\frac{1}{2}-k-m \quad , \quad \beta=1-2m$$

است.

اثبات. قضیه فوق را می‌توان با جایگذاری مستقیم و با استفاده از قضیه ۹.۶ فوراً ثابت نمود.

نتیجه. جوابهای مستقل معادله (۹.۴) از روابط:

$$M_{k,m}(x) = x^{\frac{1}{2}+m} e^{-x/2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - k + m; 1 + 2m; x\right)$$

و

$$M_{k,-m}(x) = x^{\frac{1}{2}-m} e^{-x/2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - k - m, 1 - 2m; x\right)$$

به‌دست می‌آیند.

اثبات. از آنجا که

$$ {}_1F_1(\alpha; \beta; x)$$

و

$$x^{1-\beta} {}_1F_1(\alpha - \beta + 1; 2 - \beta; x)$$

جوابهای مستقل معادله فوق هندسی هم جریان هستند، از قضیه فوق نتیجه می‌شود که، دو انتخاب مستقل برای z، انتخاب‌های:

$$ {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - k - m; 1 - 2m; x\right)$$

و

$$x^{2m} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - k + m; 1 + 2m; x\right)$$

هستند. بنابراین، جوابهای متناظر عبارتند از:

$$x^{\frac{1}{2}-m} e^{-x/2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - k - m; 1 - 2m; x\right)$$

و

$$x^{\frac{1}{2}+m} e^{-x/2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - k + m; 1 + 2m; x\right).$$

$M_{k,m}(x)$ و $M_{k,-m}(x)$ به عنوان توابع فوق هندسی هم جریان (هم ریز) ویتاکر [1] معروف شده‌اند.

قضیه ۹.۹. هر یک از چهار تابع زیر جوابی از معادله فوق هندسی هم جریان (هم ریز) است:

$$V_1 = {}_1F_1(\alpha; \beta; x)$$

$$V_2 = x^{1-\beta} {}_1F_1(1 + \alpha - \beta; 2 - \beta; x)$$

---
1. Whittaker's Confluent hypergeometric functions

$$V_3 = e^x {}_1F_1(\beta - \alpha; \beta; -x)$$

$$V_4 = x^{1-\beta} e^x {}_1F_1(1 - \alpha; 2 - \beta; -x).$$

اثبات. قضیه فوق را می‌توان از طریق تغییر متغیر، جایگذاری مستقیم و با استفاده از قضیه ۹.۶ ثابت نمود.

چهار تابع فوق هندسی هم جریان (هم ریز) ${}_1F_1(\alpha \pm 1; \beta; x)$، ${}_1F_1(\alpha; \beta \pm 1; x)$ را مجاور تابع ${}_1F_1(\alpha; \beta; x)$ می‌نامند. می‌توان نشان داد که، بین ${}_1F_1(\alpha; \beta; x)$ و هر دو تابع مجاور به آن یک رابطه خطی وجود دارد، که ضرائب آن توابعی خطی از x هستند. از آنجا که برای انتخاب دو شئی از چهار شئی $C_4^2 = 6$ راه وجود دارد، رویهمرفته ۶ تا از چنین روابط مجاوری وجود خواهد داشت. برای دیدن جزئیات مطالب فوق خواننده می‌تواند به کتاب اردلی و ...، جلد ۱، صفحه ۲۵۴ مراجعه نماید (کتابنامه را ببینید).

۹.۴ مثالها

مثال ۱ . نشان دهید که:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}.$$

حل. از قضیه ۹.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{-\alpha}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} B(\beta, \gamma - \alpha - \beta)
\end{aligned}$$

(طبق تعریف (۲.۲) از تابع تبا)

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \cdot \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)}$$

(طبق قضیه ۲.۷)

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

مثال ۲ . نشان دهید که:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = (1 - x)^{-\alpha} {}_2F_1\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma; \frac{x}{x - 1}\right)$$

(با استفاده از نمادهای قضیه ۹.۵، رابطه فوق به معنی $V_1 = V_3$ است).

حل. اگر در قضیه ۹.۴ قرار دهیم $\tau = 1 - t$، و از قضیه ۹.۴ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)\\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\tau^{\gamma-\beta-1}\{1-x(1-\tau)\}^{-\alpha}\mathrm{d}\tau\\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{\beta-1}\tau^{\gamma-\beta-1}(1-x)^{-\alpha}\left(1-\frac{x}{x-1}\tau\right)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau\\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma\{\gamma-(\gamma-\beta)\}}(1-x)^{-\alpha}\int_0^1 \tau^{\gamma-\beta-1}(1-\tau)^{\beta-1}\left(1-\frac{x}{x-1}\tau\right)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau\\
&= (1-x)^{-\alpha}{}_2F_1\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{x}{x-1}\right).
\end{aligned}$$

مثال ۳ . رابطه مجاورت* زیر را ثابت کنید:

$$\begin{aligned}
\gamma\{\gamma-1-(2\gamma-1-\alpha-\beta)x\}&{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)\\
&+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)x{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+1;x)\\
&-\gamma(\gamma-1)(1-x){}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-1;x)=0
\end{aligned}$$

حل. ما رابطه فوق را از طریق بسط توابع فوق هندسی به سری توانی ثابت می‌کنیم.
از آنجا که:

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma,x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r r!}x^r$$

دیده می‌شود که ضریب x^n در سمت چپ رابطه داده شده در صورت مسأله برابر مقدار زیر است:

$$\begin{aligned}
&\gamma(\gamma-1)\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}-\gamma(2\gamma-1-\alpha-\beta)\frac{(\alpha)_{n-1}(\beta)_{n-1}}{(\gamma)_{n-1}(n-1)!}\\
&+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\frac{(\alpha)_{n-1}(\beta)_{n-1}}{(\gamma+1)_{n-1}(n-1)!}-\gamma(\gamma-1)\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma-1)_n n!}\\
&+\gamma(\gamma-1)\frac{(\alpha)_{n-1}(\beta)_{n-1}}{(\gamma-1)_{n-1}(n-1)!}\\
&=\gamma(\gamma-1)\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)n!}\\
&-\gamma(2\gamma-1-\alpha-\beta)\frac{\Gamma(\alpha+n-1)\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n-1)(n-1)!}
\end{aligned}$$

*) relation of contiguity

$$+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\frac{\Gamma(a+n-1)\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)(n-1)!}$$

$$-\gamma(\gamma-1)\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n-1)n!}$$

$$+\gamma(\gamma-1)\frac{\Gamma(\alpha+n-1)\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n-2)(n-1)!}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+n-1)\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n-2)(n-1)!}\left\{\frac{\gamma(\gamma-1)(\alpha+n-1)(\beta+n-1)\gamma}{(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)n}\right.$$

$$-\frac{\gamma(2\gamma-1-\alpha-\beta)(\gamma-1)}{(\gamma+n-2)}+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)}$$

$$\left.-\frac{\gamma(\gamma-1)(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{(\gamma+n-2)n}+\gamma(\gamma-1)\right\}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+n-1)\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n-2)(n-1)!}$$

$$\cdot\frac{1}{n(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)}\gamma(\gamma-1)$$

$$\cdot\{\gamma(\alpha+n-1)(\beta+n-1)-n(\gamma+n-1)(2\gamma-1-\alpha-\beta)$$

$$+n(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)-(\gamma+n-1)(\alpha+n-1)(\beta+n-1)$$

$$+n(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)\}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+n-1)\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\gamma-1)\gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n-2)(n-1)!n(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)}$$

$$.[\gamma^2(-2n+n+n)+\gamma\{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)+n(\alpha+\beta+1)$$

$$-2(n-1)n-n\alpha-n\beta-(\alpha+n-1)(\beta+n-1)$$

$$+n(n-2)+n(n-1)\}+n(n-1)(\alpha+\beta+1)+n\alpha\beta$$

$$-(n-1)(\alpha+n-1)(\beta+n-1)+n(n-1)(n-2)]$$

$$=0$$

و به این ترتیب، رابطه داده شده ثابت می‌شود.

مثال ۴ . نشان دهید که:

$${}_1F_1(\alpha;\beta;x)=e^x_1F_1(\beta-\alpha;\beta;-x).$$

حل. از قضیه ۹.۷ داریم:

$$ {}_1F_1(\alpha;\beta;x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^1(1-t)^{\beta-\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{xt}\mathrm{d}t. $$

از رابطه فوق با تغییر متغیر $t=1-\tau$ به‌دست می‌آید:

$$ \begin{aligned} {}_1F_1(\alpha;\beta;x)&=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^1\tau^{\beta-\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}e^{x(1-\tau)}\mathrm{d}\tau\\ &=e^x\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-\alpha-1}e^{-x\tau}\mathrm{d}\tau\\ &=e^x_1F_1(\beta-\alpha;\alpha;-x) \end{aligned} $$

(با استفاده مجدد از قضیه ۹.۷).

مثال ۵ . نشان دهید که:

$$ \text{(i)}\qquad C_n^\lambda(x)=\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)}P_n^{\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}}(x); $$

$$ \text{(ii)}\qquad T_n(x)=\frac{n}{2}\lim_{\lambda\to0}\frac{C_n^\lambda(x)}{\lambda}; $$

$$ \text{(iii)}\qquad U_n(x)=\sqrt{1-x^2}C_{n-1}^1(x). $$

حل. (i). از قسمت (xi) قضیه ۹.۱ داریم:

$$ \begin{aligned} P_n^{\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}}(x)&=\frac{\Gamma(n+\lambda-\frac{1}{2}+1)}{n!\Gamma(\lambda-\frac{1}{2}+1)}{}_2F_1(-n,n+\lambda-\frac{1}{2}\\ &\qquad+\lambda-\frac{1}{2}+1;\lambda-\frac{1}{2}+1;\frac{1-x}{2})\\ &=\frac{\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})}{n!\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{}_2F_1(-n,n+2\lambda;\lambda+\frac{1}{2};\frac{1-x}{2})\\ &=\frac{\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})}{n!\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\frac{n!\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)}C_n^\lambda(x) \end{aligned} $$

(طبق قسمت (x) قضیه ۹.۱)

$$= \frac{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)} C_n^\lambda(x).$$

(ii). با استفاده از قسمت (x) قضیه ۹.۱ می‌توان نوشت:

$$C_n^\lambda(x) = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{n!\Gamma(2\lambda)} {}_2F_1\left(-n, n+2\lambda; \lambda+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right)$$

در نقطه $\lambda = 0$ از جانب $\Gamma(2\lambda)$ دردسر ایجاد می‌شود. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{2}\lim_{\lambda\to 0}\frac{C_n^\lambda(x)}{\lambda} \\
&= \frac{n}{2}\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda\Gamma(2\lambda)} \cdot \lim_{\lambda\to 0}\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{n!} {}_2F_1\left(-n, n+2\lambda; \lambda+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \\
&= \frac{n}{2}\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda\Gamma(2\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(n)}{n!} {}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2\lambda\Gamma(2\lambda)} \cdot {}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\Gamma(2\lambda+1)} \cdot {}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \\
&= 1 \cdot {}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \\
&= T_n(x)
\end{aligned}$$

(طبق قسمت (viii) قضیه ۹.۱)

(iii) از قسمت (x) قضیه ۹.۱ داریم:

$$\begin{aligned}
C_{n-1}^1(x) &= \frac{\Gamma(n-1+2)}{(n-1)!\Gamma(2)} {}_2F_1\left(-n+1, n-1+2; 1+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \\
&= \frac{\Gamma(n+1)}{n!\Gamma(2)} n {}_2F_1\left(-n+1, n+1; \frac{3}{2}, \frac{1-x}{2}\right) \\
&= n {}_2F_1\left(-n+1, n+1; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} U_n(x)
\end{aligned}$$

(طبق قسمت (ix) قضیه ۹.۱)

مسائل

(۱). نشان دهید که:

$$\text{(i)} \quad (1-x)^{-\alpha} = {}_2F_1(\alpha, \beta; \beta; x);$$

$$\text{(ii)} \quad \ln(1-x) = -x\,{}_2F_1(1, 1; 2; x);$$

$$\text{(iii)} \quad e^x = {}_1F_1(\alpha; \alpha; x).$$

(۲). نشان دهید که:

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = \lim_{\beta \to \infty} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x/\beta).$$

(۳). نشان دهید که:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \beta - \alpha + 1; -1) = \frac{\Gamma(1 + \beta - \alpha)\Gamma(1 + \frac{1}{2}\beta)}{\Gamma(1 + \beta)\Gamma(1 + \frac{1}{2}\beta - \alpha)}$$

و با استفاده از مثال ۲ بخش ۹.۴ نتیجه بگیرید که:

$${}_2F_1(\alpha, 1 - \alpha; \gamma; \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\gamma)\Gamma(\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma)\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma)}.$$

(۴). نشان دهید که:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}{}_2F_1(\alpha + 1, \beta + 1; \gamma + 1; x)$$

و نتیجه بگیرید که:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}{}_2F_1(\alpha + n, \beta + n; \gamma + n; x).$$

(۵). روابط مجاورت* زیر را ثابت کنید:

$$\text{(i)} \quad (\alpha - \beta)\,{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \alpha\,{}_2F_1(\alpha + 1, \beta; \gamma; x) - \beta\,{}_2F_1(\alpha, \beta + 1; \gamma; x);$$

$$\text{(ii)} \quad (\alpha - \beta)x\,{}_1F_1(\alpha; \beta + 1; x) + \beta(x + \beta - 1)\,{}_1F_1(\alpha; \beta; x)$$

*) Contiguity relationships

$$- \beta(\beta-1)\,{}_1F_1(\alpha;\beta-1;x) = 0$$

(۶).با استفاده از تابع فوق هندسی هم جریان (هم ریز)، نشان دهید که:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{-\frac{1}{2}}(x^2)$$

و

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{\frac{1}{2}}(x^2)$$

(۷).انتگرال:

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,{}_1F_1(\alpha;\beta;x)\mathrm{d}x$$

را محاسبه کنید.

فصل ۱۰

توابع خاص دیگر

در این فصل به‌طور مختصر به بررسی توابع خاص دیگری خواهیم پرداخت، که خواننده احتمالاً با آنها مواجه خواهد شد. بعضی از آنها توسط انتگرال‌هائی تعریف می‌شوند، که نمی‌توان آنها را برحسب توابع شناخته شده بیان نمود، و این انتگرال‌ها چندان خواص جالی ندارند، همه اطلاعات مفید درباره هر یک از این نوع توابع خاص در جداولی از مقادیر آنها گنجانده شده است.

۱۰.۱ توابع گامای ناکامل

این نوع توابع به‌صورت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$\Gamma(x,\alpha)=\int_{\alpha}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \qquad (۱۰.۱)$$

$$\gamma(x,\alpha)=\int_{0}^{\alpha} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \qquad (۱۰.۲)$$

با توجه به تعریف (۲.۱) از تابع گاما، داریم:

$$\Gamma(x,\alpha)+\gamma(x,\alpha)=\Gamma(x). \qquad (۱۰.۳)$$

۱۰.۲ انتگرال نمائی و توابع وابسته

انتگرال‌های نمائی با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$Ei(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{t}}{t}\mathrm{d}t, \qquad (۱۰.۴)$$

$$E_1(x)=\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t. \qquad (۱۰.۵)$$

ملاحظه می‌شود که:

$$E_1(x) = -Ei(-x). \tag{۱۰.۶}$$

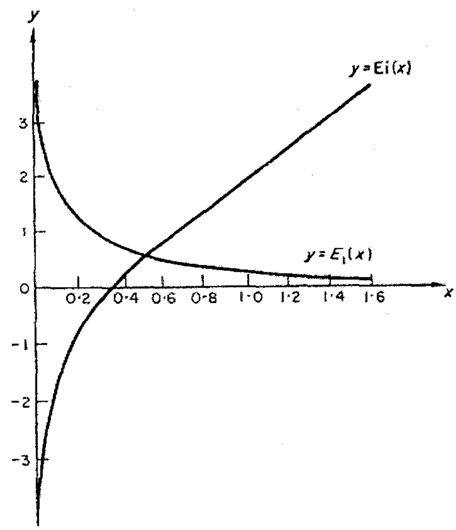
(بعضی از مؤلفان برای $E_1(x)$ از نماد $ei(x)$ استفاده کرده‌اند.)

انتگرال لگاریتمی با رابطه:

$$li(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \tag{۱۰.۷}$$

تعریف می‌شود. به سادگی دیده می‌شود که:

$$li(x) = Ei(\ln x) = -E_1(-\ln x) \tag{۱۰.۸}$$



شکل ۱۰.۱ انتگرال‌های نمائی

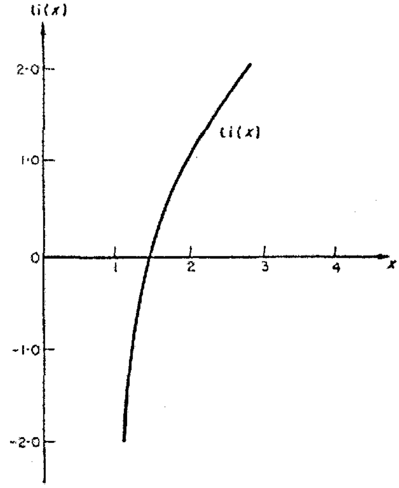
انتگرال‌های سینوسی و کسینوسی به ترتیب به‌صورت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$si(x) = \int_\infty^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t; \tag{۱۰.۹}$$

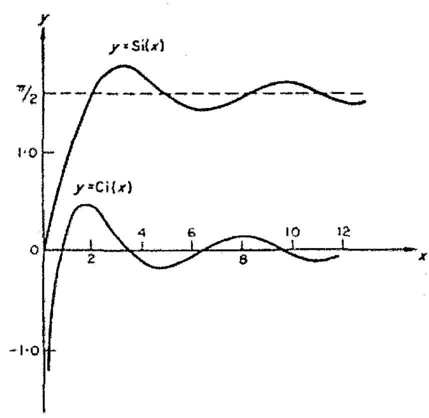
$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t; \tag{۱۰.۱۰}$$

$$Ci(x) = \int_\infty^x \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t. \tag{۱۰.۱۱}$$

(دوباره، خواننده باید متوجه تفاوت بین نمادها باشد).



شکل ۱۰.۲ انتگرال لگاریتمی



شکل ۱۰.۳ انتگرال‌های سینوسی و کسینوسی

نتایج زیر را می‌توان به سادگی ثابت نمود:

$$si(0) = -\frac{\pi}{2}, \qquad (۱۰.۱۲)$$

(مثال ۱ صفحه ۲۷۰ را ببینید).

$$Si(x) = \frac{\pi}{2} + si(x), \qquad (۱۰.۱۳)$$

$$si(x) = \frac{1}{2^i}\{Ei(ix) - Ei(-ix)\}, \qquad (۱۰.۱۴)$$

$$Ci(x) = \frac{1}{2}\{Ei(ix) + Ei(-ix)\}, \qquad (۱۰.۱۵)$$

$$Ei(\pm ix) = Ci(x) \pm isi(x). \qquad (۱۰.۱۶)$$

نمودار توابع فوق در شکل‌های ۱۰.۳ ـ ۱۰.۱ نشان داده شده‌اند.

۱۰.۳ تابع خطا و توابع وابسته

تابع خطا به‌صورت:

$$\text{erf } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad (۱۰.۱۷)$$

تعریف می‌شود.

طبق نتیجه قضیه ۲.۶، دیده می‌شود که:

$$\text{erf } \infty = 1. \qquad (۱۰.۱۸)$$

به عنوان تعمیمی از تابع خطا، توابع:

$$E_n(x) = \frac{1}{\Gamma\{(n+1)/n\}}\int_0^x e^{-t^n}\mathrm{d}t \qquad (۱۰.۱۹)$$

را تعریف می‌کنیم.

(**تبصره.** تابع $E_1(x)$ که توسط رابطه فوق تعریف می‌شود، با تابع $E_1(x)$ که در بخش قبلی تعریف شده است، یکسان نیست.)

ملاحظه می‌شود که:

$$\text{erf } x = E_2(x) \qquad (۱۰.۲۰)$$

انتگرال‌های فرنل با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$S(x) = \int_0^\infty \sin\frac{\pi}{2}t^2\mathrm{d}t, \qquad (۱۰.۲۱)$$

$$C(x) = \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}t^2\mathrm{d}t. \qquad (۱۰.۲۲)$$

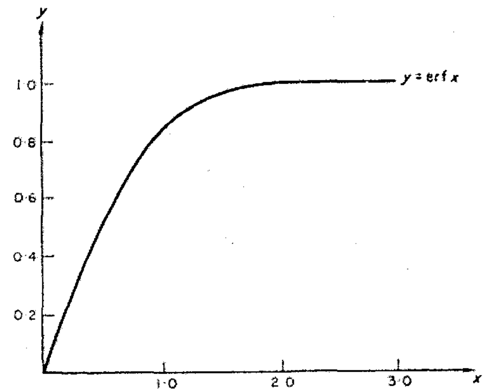
;

می‌توان نشان داد که:

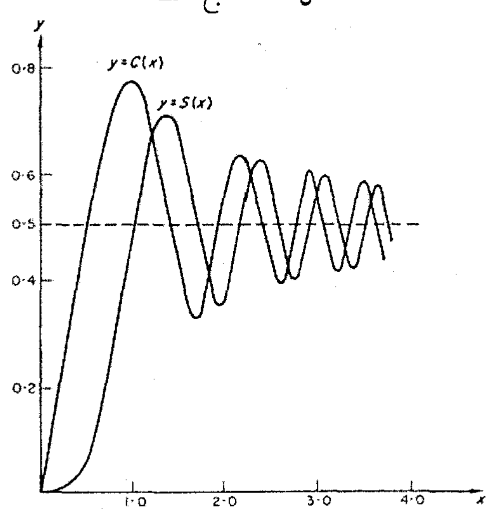
$$S(\infty) = C(\infty) = \frac{1}{2} \qquad (۱۰.۲۳)$$

و بین انتگرال‌های فرنل و تابع خطا رابطه زیر برقرار است:

$$C(x)+iS(x)=\frac{1+i}{2}\mathrm{erf}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-i)x\right\}. \qquad (۱۰.۲۴)$$



شکل ۱۰.۴ تابع خطا



شکل ۱۰.۵ انتگرال‌های فرنل

نمودار تابع خطا در شکل ۱۰.۴، و نمودار انتگرال‌های فرنل در شکل ۱۰.۵ نشان داده شده‌اند.

۱۰.۴ تابع زتای ریمان

تابع زتای ریمان به‌صورت:

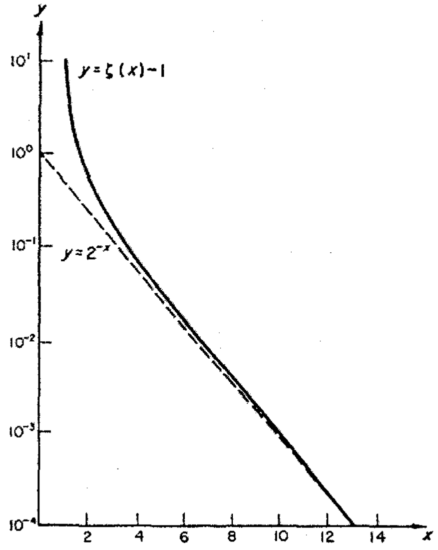
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \qquad (۱۰.۲۵)$$

تعریف می‌شود.

این سری به ازاء $x \leq 1$ واگرا، و به ازاء $x > 1$ همگرا است.

می‌توان نشان داد که:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \qquad (۱۰.۲۶)$$



شکل ۱۰.۶ تابع زتای ریمان (نمودار تابع $\zeta(x) - 1$). مقیاس محور عمودی لگاریتمی است. برای مقایسه، خط نقطه‌چین نمودار 2^{-x} است).

و در حالت کلی، $\zeta(2n)$ را وقتی n یک عدد صحیح مثبت باشد، می‌توان به فرمی بسته بیان نمود*

نمودار $\zeta(x) - 1$ در شکل ۱۰.۶ رسم شده است. مقیاس لگاریتمی قابل ذکر است؛ برای مقایسه، گراف 2^{-x} به‌صورت نقطه چین رسم شده است.

*) در واقع، می‌توان ثابت کرد که، وقتی n یک عدد صحیح مثبت باشد، $\zeta(2n)$ را می‌توان به‌صورت مضرب معلومی از π^{2n} نوشت. مترجم.

۱۰.۵ توابع دبای

توابع دبای با فرمول:

$$D_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{e^t - 1}\mathrm{d}t. \qquad (۱۰.۲۷)$$

تعریف می‌شوند.

می‌توان نشان داد که، این توابع با تابع زتای ریمان به وسیله فرمول:

$$D_n(\infty) = n!\zeta(n+1)$$

در ارتباط هستند.

۱۰.۶ انتگرال‌های بیضوی (الیپتیک)

انتگرال‌های بیضوی (الیپتیک) نوع‌های اول، دوم، سوم به ترتیب با فرمول‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$F(k,\phi) = \int_0^\phi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta \qquad (0<k<1), \qquad (۱۰.۲۸)$$

$$E(k,\phi) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \qquad (0<k<1), \qquad (۱۰.۲۹)$$

$$\Pi(k,\phi,a) = \int_0^\phi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)(1+a^2\sin^2\theta)}} \qquad (۱۰.۳۰)$$

$$(0<k<1, a\neq k)$$

در قضیه زیر که بدون اثبات بیان شده است، به برخی از انتگرال‌های مهم الیپتیک اشاره شده است.

قضیه ۱۰.۱ اگر $R(x,y)$ تابعی گویا از x و y باشد، و $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر ۴ با ضرائب حقیقی باشد، آنگاه:

$$\int R(x,\sqrt{P(x)})\mathrm{d}x$$

را می‌توان برحسب عبارت‌هائی از انتگرال‌های بیضوی بیان نمود.

اگر حد بالائی در هر یک از تعریف‌های (۱۰.۲۸)، (۱۰.۲۹) و (۱۰.۳۰) برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه انتگرال‌های الیپتیک پدید آمده را انتگرال‌های الیپتیک کامل می‌نامند:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad (۱۰.۳۱)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \qquad (۱۰.۳۲)$$

$$\Pi(k,a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\theta)(1 + a^2 \sin^2\theta)}} \qquad (۱۰.۳۳)$$

۱۰.۷ مثالها

مثال ۱ . نشان دهید که:

$$si(0) = -\frac{\pi}{2}.$$

حل. از تعریف (۱۰.۹) داریم:

$$si(0) = \int_\infty^0 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = -\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

برای محاسبه انتگرال فوق، انتگرال:

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\sin t}{t}\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0)$$

را محاسبه می‌کنیم*. در این صورت $si(0)$ برابر $-I(0)$ خواهد بود.

داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} &= -\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin t\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2i}\int_0^\infty (e^{(-\alpha+i)t} - e^{(-\alpha-i)t})\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{-\alpha+i}e^{(-\alpha+i)t} - \frac{1}{-\alpha-i}e^{(-\alpha-i)t}\right]_{t=0}^{t=\infty} \\
&= -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\alpha-i} - \frac{1}{\alpha+i}\right) \\
&= -\frac{1}{1+\alpha^2}
\end{aligned}$$

---

*) انتگرال $I(\alpha)$ برای $\alpha \geq 0$ همگرا است، علاوه بر این، برای اینکه استدلال مؤلف کتاب دارای اعتبار باشد، لازم است، که فرض شود $\alpha > 0$، این شرط در متن اصلی کتاب از قلم افتاده است، اما، مؤلف کتاب عملاً از آن ، و از رابطه $\lim_{\alpha\to 0+} I(\alpha) = I(0)$ که درکتاب ثابت نشده است، استفاده نموده است. مترجم.

با انتگرال‌گیری نسبت به α به‌دست می‌آوریم:

$$I(\alpha) = -\tan^{-1}\alpha + \text{constant}.$$

اما:

$$I(\infty) = 0$$

بنابراین، باید داشته باشیم $0 = -\tan^{-1}\infty + \text{constant}$، و در نتیجه:

$$0 = -\frac{\pi}{2} + \text{constant}$$

و از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$\text{constant} = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین:

$$I(\alpha) = -\tan^{-1}\alpha + \frac{\pi}{2}$$

در نتیجه *:

$$I(0) = -\tan^{-1}0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

و به این ترتیب:

$$si(0) = -I(0) = -\frac{\pi}{2}.$$

مثال ۲ . نشان دهید که**:

$$\int_0^\infty e^{-st}si(t)\mathrm{d}t = -\frac{\mathbf{1}}{s}\tan^{-1}s. \qquad (s>0)$$

حل. با انتگرال‌گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty e^{-st}si(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}si(t)\right]_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty -\frac{1}{s}e^{-st}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}si(t)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{s}si(0) + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}si(t)\mathrm{d}t$$

---

*) در درسهای آنالیز ریاضی ثابت می‌شود، انتگرال $I(\alpha)$ به ازاء $\alpha = 0$ نیز همگرا است، و علاوه بر آن $\lim_{\alpha\to 0+} I(\alpha) = I(0)$ ، یعنی، $I(\alpha)$ در نقطه $\alpha = 0$ از سمت راست پیوسته است. مترجم.

**) در این مثال نیز مؤلف کتاب شرط $s > 0$ را از قلم انداخته است، در حالیکه در عمل از آن استفاده کرده است، و به همین دلیل این شرط توسط مترجم کتاب به‌صورت مسئله اضافه شده است.

$$= \frac{1}{s}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

(با استفاده از معادله (۱۰.۱۲) و تعریف (۱۰.۹))

$$= -\frac{\pi}{2s} + \frac{1}{s}I(s)$$

($I(s)$ طبق مثال ۱ فوق تعریف شده است)

$$= -\frac{\pi}{2s} + \frac{1}{s}(-\tan^{-1}s + \frac{\pi}{2})$$

(طبق آن چه که در مثال ۱ فوق ثابت کردیم)

$$= -\frac{\tan^{-1}s}{s}.$$

مثال ۳ . نشان دهید که:

$$\text{(i)}\quad \text{erf }(-x) = -\text{erf }x;$$
$$\text{(ii)}\quad |\text{erf }x| \leq 1$$

حل. (i) از تعریف (۱۰.۱۷) داریم:

$$\text{erf }x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

بنابراین:

$$\text{erf }(-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{-x} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}(-\mathrm{d}u)$$

(با تغییر متغیر $u = -t$)

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u$$
$$= -\text{erf }x.$$

(ii) ابتدا فرض کنیم $x \geq 0$، در اینصورت، چون $e^{-t^2} > 0$، پس $\text{erf }x \geq 0$. همچنین:

$$\text{erf }x \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t + \int_x^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t$$
$$= \text{erf }(\infty)$$

$$= 1$$

(طبق معادله ۱۰.۱۸).

برای حالت $x < 0$ نیز می‌توان دلیلی مشابه آورد.

مثال ۴ . نشان دهید که:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-\cos x}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

حل. داریم:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-\cos x}} = \int_\pi^{\pi/2} \frac{-\mathrm{d}y}{\sqrt{2-\cos(\pi-y)}}$$

(با تغییر متغیر $y = \pi - x$)

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2+\cos y}}$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2+1-2\sin^2(y/2)}}$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2\mathrm{d}z}{\sqrt{3-2\sin^2 z}}$$

(با تغییر متغیر $z = y/2$)

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2 z}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2 z}} - \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2 z}}\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

(طبق تعریف (۱۰.۲۸)).

مسائل

(۱). نشان دهید که:

$$\text{(i)} \int_0^\infty Ci(x)\cos x\mathrm{d}x = \int_0^\infty si(x)\sin x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4};$$
$$\text{(ii)} \int_0^\infty \{Ci(x)\}^2\mathrm{d}x = \int_0^\infty \{si(x)\}^2\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

(۲). اگر *:

$$I(\alpha) = \int_0^\infty (1-e^{-\alpha t})\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \qquad (\alpha > 0)$$

نشان دهید که:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}$$

و از آن نتیجه بگیرید:

$$I(\alpha) = \frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2).$$

ثابت کنید که:

$$\int_0^\infty e^{-st}Ci(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2s}\ln(1+s^2)$$

(۳). نشان دهید که:

$$\mathrm{erf}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\gamma(\frac{1}{2},x^2) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}}{}_1F_1\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-x^2\right).$$

(۴). نشان دهید که، تابع $T(x,t) = C\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\text{(i)} \quad T(0,t) = 0;$$
$$\text{(ii)} \quad T(x,0) = C;$$
$$\text{(iii)} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

(۵). نشان دهید که:

$$\text{(i)} \quad \int_0^x C(t)\mathrm{d}t = xC(x) - \frac{1}{x}\sin\frac{\pi}{2}x^2;$$
$$\text{(ii)} \quad \int_0^x S(t)\mathrm{d}t = xS(x) + \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x^2 - \frac{1}{\pi}.$$

*) شرط $\alpha > 0$ در متن اصلی کتاب از قلم افتاده است. مترجم

(۶). نشان دهید که:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x}} = \sqrt{2}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(۷). با تغییر متغیر $x = 2\sin\theta$، نشان دهید که:

$$\int_0^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}} = \frac{1}{3}K\left(\frac{2}{3}\right).$$

(۸). نشان دهید که:

$$\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)(1+2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

ضمائم

۱. همگرائی سری‌های لژاندر

می‌خواهیم همگرائی سریهای لژاندر که در بخش ۳.۱ به عنوان جوابهائی از معادله دیفرانسیل لژاندر به‌دست آوردیم، مورد بررسی قرار دهیم.

این سریها به فرم‌های:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} \qquad (A1\cdot 1)$$

و

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} \qquad (A1\cdot 2)$$

هستند، که در هر دو حالت، طبق رابطه (۳.۷) داریم:

$$a_{n+2} = a_n\frac{(n-l)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)} \qquad (A1\cdot 3)$$

ما تنها سری $(A1\cdot 1)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم، زیرا، بحث درباره سری دیگر کاملاً مشابه است.

ابتدا یادآوری می‌کنیم که، کلیه جملات سری $(A1\cdot 1)$ برای $n > l$ دارای علائم مشابهی هستند، بنابراین، می‌توانیم از تست‌های مربوط به سریهای با جملات مثبت استفاده کنیم.

اگر $x \neq 1$ باشد، می‌توانیم تست دالامبر را مورد استفاده قرار دهیم:

اگر $\sum u_n$ یک سری با جملات مثبت باشد، و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}} = \alpha$، آنگاه، اگر $\alpha < 1$ باشد سری واگرا، و اگر $\alpha > 1$ باشد سری همگرا است، در حالتی که $\alpha = 1$ باشد، این تست اطلاعاتی درباره همگرائی یا واگرائی سری به ما نمی‌دهد.

در اینجا $u_n = a_{2n}x^{2n}$، بنابراین، داریم:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{a_{2n}x^{2n}}{a_{2n+2}x^{2n+2}}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n-l)(2n+l+1)} \cdot \frac{1}{x^2}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{x^2}$$

و در نتیجه، سری برای $x^2 > 1$ واگرا و برای $x^2 < 1$ همگرا است، به عبارت دیگر، سری به ازاء $|x| > 1$ واگرا و به ازاء $|x| < 1$ همگرا است.

اگر $x = \pm 1$ باشد، باید از تست نسبت گاوس استفاده کنیم:

اگر $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ یک سری با جملات مثبت باشد، و عدد طبیعی ثابتی مانند N موجود باشد، به‌طوری که، برای $n \geq N$ داشته باشیم:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

که در آن $p > 1$ (منظور از $O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ تابعی مانند $f(n)$ است، به‌طوری که $\lim\limits_{n\to\infty} \{f(n)/(1/n^p)\}$ متناهی باشد)، آنگاه، سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ همگرا است اگر $\mu > 1$ باشد، و واگرا است اگر $\mu \leq 1$ باشد.

در اینجا، چون باید نقاط $x = \pm 1$ را مورد بررسی قرار دهیم، داریم:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n-l)(2n+l+1)}$$

و با یک محاسبه ساده جبری می‌توان نشان داد که:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{l(l+1)(1+n)}{\{4n^2+2n-l(l+1)\}n}.$$

حال، مشاهده می‌کنیم که آخرین جمله $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ است، زیرا، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{l(l+1)(1+n)}{\{4n^2+2n-l(l+1)\}n} / \frac{1}{n^2}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{l(l+1)(1+n)n^2}{\{4n^2+2n-l(l+1)\}n}$$
$$= l(l+1)/4$$

که متناهی است.

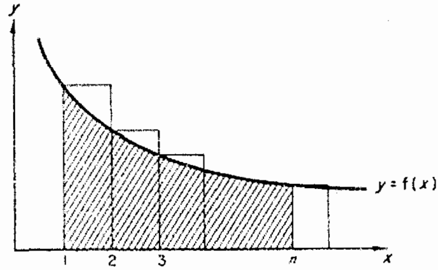
در نتیجه شرایط تست نسبت گاوس برقرار است، داریم $\mu = 1$، و بنابراین، سری لژاندر به ازاء $x = \pm 1$ واگرا است.

۲. ثابت اویلر

فرض کنیم $f(x)$ روی فاصله $[1,\infty)$ تابعی پیوسته، مثبت و نزولی باشد. دنباله:

$$u_n = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل A2.1

ابتدا نشان می‌دهیم که $u_n > 0$. این مطلب را می‌توان فوراً از شکل $A2 \cdot 1$ نتیجه گرفت، زیرا $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ برابر است با مجموع سطوح مستطیل‌هائی که در شکل نشان داده شده‌اند، حال آن که، $\int_1^\infty f(x)dx$ برابر با سطح سایه زده شده است، که به وضوح کمتر از مجموع سطوح مستطیل‌ها است، و بنابراین $u_n > 0$.

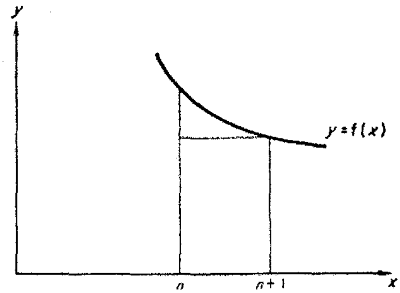
حال، نشان می‌دهیم که $u_{n+1} < u_n$. زیرا، داریم:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(1) + f(2) + \cdots + f(n+1) - \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \\ &\quad - f(1) - f(2) - \cdots - f(n) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx. \end{aligned}$$

و از شکل $A2 \cdot 2$ فوراً دیده می‌شود که، $f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$ منفی است*
در نتیجه $u_{n+1} - u_n < 0$، و یا $u_{n+1} < u_n$.

به این ترتیب، u_n دنباله‌ای نزولی و مثبت است، و بنابراین، طبق یکی از قضیه‌های نظریه دنباله‌ها، وقتی $n \to \infty$ دارای حدی متناهی است، یعنی $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ وجود دارد.

*) در دروس ریاضی با اینکه گاهی شکل‌ها می‌توانند راهنمای ما در اثبات قضیه‌ها باشند، ولی، اثبات تنها با استفاده از شکل فاقد اعتبار ریاضی است. در دروس فیزیک و مهندسی از شکل‌ها برای توجیه برخی موضوعات ریاضی استفاده می‌کنند، و احتمالاً، مؤلف کتاب نیز ترجیح داده است، به جای اثبات دقیق مطالب فوق که چندان هم دشوار نبوده است، آنها را از روی شکل توجیه کند. مترجم.



شکل A2.2

با انتخاب $f(x) = \frac{1}{x}$، به سادگی دیده می‌شود که، $f(x)$ روی فاصله $[1,\infty)$ پیوسته، مثبت و نزولی است. بنابراین، دنباله:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

طبق مطالبی که بیان شد، همگرا است، یعنی،

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

موجود است. مقدار این حد را عدد ثابت اویلر نامیده، و معمولاً با حرف یونانی γ نشان می‌دهند. می‌توان نشان داد که، دقیقاً تا چهار رقم اعشار $\gamma = 0.5772$.

۳. معادلات دیفرانسیل

جوابها	معادله
$P_l(x)$ چند جمله‌ایهای لژاندر $Q_l(x)$ توابع لژاندر نوع دوم $P_l^m(x)$ چند جمله‌ایهای لژاندر وابسته $Q_l^m(x)$ توبع لژاندر وابسته نوع دوم	$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$ $(1-x^2)y'' - 2xy' + \left\{l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}y = 0$
$J_n(x)$ توابع بسل نوع اول $Y_n(x)$ توابع بسل نوع دوم توابع هنکل $\left\{\begin{array}{l}H_n^{(1)}(x)\\ H_n^{(2)}(x)\end{array}\right.$	$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$

جوابها	معادله
توابع بسل تعدیل یافته $\begin{cases} I_n(x) \\ K_n(x) \end{cases}$	$x^2y'' + xy' - (x^2+n^2)y = 0$
$\begin{cases} x^\alpha J_n(\beta x^\gamma) \\ x^\alpha Y_n(\beta x^\gamma) \end{cases}$	$x^2y'' + (1-2\alpha)xy' + \{\beta^2\gamma^2x^{2\gamma} + (\alpha^2 - n^2\gamma^2)\}y = 0$
توابع بسل کروی $\begin{cases} j_l(x) \\ y_l(x) \end{cases}$	$x^2y'' + 2xy' + \{x^2 - l(l+1)\}y = 0$
$H_n(x)$ چندجملهایهای هرمیت	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$
$\Psi_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) H_n(x)$ توابع وبر-هرمیت	$y'' + (\lambda - x^2)y = 0$
$L_n(x)$ چند جملهایهای لژاندر	$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$
$L_n^k(x)$ چند جملهایهای لژاندر وابسته	$xy'' + (k+1-x)y' + ny = 0$
چندجملهایهای چبیشف $\begin{cases} T_n(x) \\ U_n(x) \end{cases}$	$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$
$C_n^\lambda(x)$ چند جملهایهای گگنباوئر	$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0$
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ چند جملهایهای ژاکوبی	$(1-x^2)y'' + \{\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x\}y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0$
${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ تابع فوق هندسی $x^{1-\gamma}{}_2F_1(\alpha+1-\gamma;\beta+1-\gamma;2-\gamma;x)$	$x(1-x)y'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}y' - \alpha\beta y = 0$
${}_1F_1(\alpha,\beta,x)$ تابع فوق هندسی هم جریان (همریز) $x^{1-\beta}{}_1F_1(\alpha-\beta+1;2-\beta;x)$	$x^2y'' + (\beta - x)y' - \alpha y = 0$
توابع فوق هندسی هم جریان ویتاکر $\begin{cases} M_{k,m}(x) \\ M_{k,-m}(x) \end{cases}$	$y'' + \left\{-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{x^2}\right\} y = 0$

۴. روابط تعامد

تابع	رابطه
چند جمله‌ایهای لژاندر	$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}$
چند جمله‌ایهای لژاندر وابسته	$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_{l'}^m(x)\mathrm{d}x = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\delta_{ll'}$ $\int_{-1}^{1} \frac{P_l^m(x)P_l^{m'}(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{(l+m)!}{m(l-m)!}\delta_{mm'}$
توابع بسل	$\int_0^a xJ_n(\lambda_i x)J_n(\lambda_j x)\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\{J_{n+1}(\lambda_i a)\}^2\delta_{ij}$ که در آن λ_i و λ_j ریشه‌های معادله $J_n(\lambda a) = 0$ هستند.
توابع بسل کروی	$\int_{-\infty}^{\infty} j_n(x)j_m(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2n+1}\delta_{mn}$
چند جمله‌ایهای هرمیت	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)\mathrm{d}x = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{nm}$
توابع وبر - هرمیت	$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(x)\Psi_m(x)\mathrm{d}x = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{nm}$
چند جمله‌ایهای لاگر	$\int_0^{\infty} e^{-x}L_m(x)L_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}$
چند جمله‌ایهای لاگر وابسته	$\int_0^{\infty} e^{-x}x^k L_m^k(x)L_n^k(x)\mathrm{d}x = \frac{(n+k)!}{n!}\delta_{mn}$
چند جمله‌ایهای چبیشف	$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m \neq n، \\ \frac{\pi}{2} & \text{اگر } m = n \neq 0، \\ \pi & \text{اگر } m = n = 0، \end{cases}$ $\int_{-1}^{1} \frac{U_m(x)U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m \neq n، \\ \frac{\pi}{2} & \text{اگر } m = n \neq 0، \\ 0 & \text{اگر } m = n = 0، \end{cases}$
چند جمله‌ایهای گگنباوئر	$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-1}C_n^\lambda(x)C_m^\lambda(x)\mathrm{d}x = \pi\frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(n+2\lambda)}{n!(n+\lambda)\{\Gamma(\lambda)\}^2}\delta_{mn}$
چند جمله‌ایهای ژاکوبی	$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\mathrm{d}x$ $= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\delta_{mn}$

۵. توابع مولد

تابع	تابع مولد $(R=(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}})$
چند جمله‌ایهای لژاندر	$\frac{1}{R}=\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$
چندجمله‌ایهای لژاندر وابسته	$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m! R^{m+1}}=\sum\limits_{r=0}^{\infty} t^r P_{r+m}^m(x)$
توابع بسل	$\exp\left\{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x)$
چند جمله‌ایهای هرمیت	$\exp(2tx-t^2)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)$
چندجمله‌ایهای لاگر	$\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n L_n(x)$
چند جمله‌ایهای لاگر وابسته	$\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{(1-t)^{k+1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n L_n^k(x)$
چند جمله‌ایهای چبیشف	$\frac{1-t^2}{R^2}=T_0(x)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^n T_n(x)$ $\frac{\sqrt{1-x^2}}{R^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n U_{n+1}(x)$
چند جمله‌ایهای گگنباوئر	$\frac{1}{R^{2\lambda}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n C_n^{\lambda}(x)$
چند جمله‌ایهای ژاکوبی	$\frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1-t+R)^{\alpha}(1+t+R)^{\beta}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

راهنمائی‌ها و جواب‌های مسائل

فصل ۱

(۱). در هر یک از قسمت‌های (i) تا (ix) جواب عمومی به‌صورت $y = Ay_1(x) + By_2(x)$ است، که در آن A و B ثابت‌هائی دلخواه هستند، و $y_1(x)$ و $y_2(x)$ از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\text{(i)} \qquad y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)} x^n,$$

$$y_2(x) = x^{3/4}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!7\cdot 11\cdot 15\cdots(4n+3)} x^n\right\}$$

حوزه اعتبار جواب $y_1(x)$ کلیه مقادیر x، و حوزه اعتبار دومین جواب کلیه مقادیر مثبت x است*.

$$\text{(ii)} \qquad y_1(x) = e^{-x},$$

$$y_2(x) = e^{-x}\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

حوزه اعتبار جواب $y_1(x)$ کلیه مقادیر x، و حوزه اعتبار دومین جواب کلیه مقادیر مثبت x است*.

$$\text{(iii)} \qquad y_1(x) = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n!(n-3)!} x^n,$$

$$\begin{aligned} y_2(x) = & y_1(x)\ln x + 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{36}x^3 \\ & + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!(n-3)!}\left\{-2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-3}\right. \\ & \left. - \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{3}{2}\right\} x^n \end{aligned}$$

---

*) در متن اصلی کتاب حوزه اعتبار جواب‌ها هم برای $y_1(x)$ و هم برای $y_2(x)$ کلیه مقادیر x فرض شده است، در حالی که، $y_2(x)$ یا $y_2'(x)$ برای مقادیر منفی x تعریف نشده‌اند. البته، این امکان وجود داشته است، که جواب‌ها طوری تعریف شوند، که برای مقادیر منفی x نیز دارای معنی باشند، اما، مؤلف کتاب این کار را نکرده است. مترجم.

حوزه اعتبار جواب $y_1(x)$ کلیه مقادیر x، و حوزه اعتبار دومین جواب مقادیر مثبت x است*.

$$(iv) \qquad y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3^n n!} x^n,$$

$$= (1-x)^{-\frac{1}{3}}$$

$$y_2(x) = x^{7/3} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cdot 11 \cdot 14 \cdots (3n+5)}{10 \cdot 13 \cdot 16 \cdots (3n+7)} x^n \right\}$$

حوزه اعتبار جوابها فاصله باز $(-1,1)$ است.

$$(v) \qquad y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(-3) \cdots (4n^2 - 14n + 9)}{(2n)!} x^{2n},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)(-1) \cdots (4n^2 - 10n + 3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

حوزه اعتبار جوابها فاصله باز $(-1,1)$ است.

$$(vi) \qquad y_1(x) = x^2,$$

$$y_2(x) = x^2 \ln x + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot n!} x^n$$

حوزه اعتبار جواب $y_1(x)$ کلیه مقادیر x و حوزه اعتبار جواب $y_2(x)$ مقادیر مثبت x است*.

$$(vii) \qquad y_1(x) = x,$$

$$y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-3)^2}{(2n)!} x^{2n}$$

حوزه اعتبار اولین جواب کلیه مقادیر x، و حوزه اعتبار دومین جواب فاصله باز $(-1,1)$ است.

$$(viii) \qquad y_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^{2n-1}(n-1)!n!} x^{3n-1};$$

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{-1} + \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{324}x^5$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^{2n}(n-2)!n!} \left\{ 1 - 2\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2}\right) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right\} x^{3n-1}$$

*) در متن اصلی کتاب حوزه اعتبار جواب‌ها هم برای $y_1(x)$ و هم برای $y_2(x)$ کلیه مقادیر x فرض شده است، در حالی که $y_2(x)$ برای مقادیر منفی x تعریف نشده است. البته، این امکان وجود داشته است، که جوابها طوری تعریف شوند، که برای مقادیر منفی x نیز دارای معنی باشند، اما، مؤلف کتاب این کار را نکرده است. مترجم.

حوزه اعتبار جواب $y_1(x)$ کلیه مقادیر x، و حوزه اعتبار جواب $y_2(x)$ مقادیر مثبت x است*.

$$(ix) \qquad y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{13}{2520}x^7 + \cdots ,$$
$$y_2(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{7}{360}x^6 + \frac{41}{5040}x^7 + \cdots$$

حوزه اعتبار جواب‌ها کلیه مقادیر x است.

(۲). (i) ممکن نیست؛ (ii) ممکن نیست؛ (iii) ممکن است.

(۳). جواب عمومی هر یک از معادلات (i) و (ii) به‌صورت $y = Ay_1(x) + By_2(x)$ می‌باشد که در آن A و B ثابت‌های دلخواه هستند، و در معادله (i)،

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 7 \cdot 16 \cdots (2n^2 - n + 1)}{n! 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{x^n} ,$$
$$y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 11 \cdot 22 \cdots (2n^2 + n + 1)}{n! 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \cdot \frac{1}{x^n} \right\}$$

و در معادله (ii)،

$$y_1(x) = 1 - \frac{2}{3x} ,$$
$$y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)(-1) \cdots (2n-5)}{n! 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{x^n} \right\}$$

فصل ۲

(۱). با یک تغییر متغیر مناسب، از تعریف (۲.۱) در رابطه با تابع گاما استفاده نماید.

(۲). از قضیه ۲.۵ استفاده کنید.

(۳). از قضیه ۲.۵ استفاده نمائید.

(۴). (i) $B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

(ii) $\Gamma(a)$ (تغییر متغیر $1/x = e^y$ بدهید.)

(iii) $(b-a)^{m+n-1}B(m,n)$. (تغییر متغیر $y = (x-a)/(b-a)$ بدهید.)

(iv) $\frac{1}{n}B\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right)$ (تغییر متغیر $y = x^n$ بدهید.)

(v) $\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \cdot \frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma(\frac{1}{n} + \frac{1}{2})}$ (تغییر متغیر $y = x^n$ بدهید.)

---

*) در متن اصلی کتاب حوزه اعتبار جواب‌ها هم برای $y_1(x)$ و هم برای $y_2(x)$ کلیه مقادیر x فرض شده است، در حالی که $y_2(x)$ برای مقادیر منفی x تعریف نشده است. البته، این امکان وجود داشته است، که جوابها طوری تعریف شوند، که برای مقادیر منفی x نیز دارای معنی باشند، اما، مؤلف کتاب این کار را نکرده است. مترجم.

(vi) $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$. (تغییر متغیر $u = 1/(1+t)$ بدهید.)

(۶). $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$؛ $\Gamma(-\frac{7}{2}) = \frac{16}{105}\sqrt{\pi}$.

(۷). از قضیه ۲.۱۲ استفاده کنید.

فصل ۳

(۱). از قسمت (ii) قضیه ۳.۸ و از قضیه ۳.۵ استفاده کنید.

(۲). از قسمت‌های (vii) و (ii) قضیه ۳.۸ و از قضیه ۳.۵ استفاده کنید.

(۳). $(x^2-1)^l$ را به‌صورت حاصل‌ضرب $(x-1)^l(x+1)^l$ در نظر بگیرید.

(۴).

$$c_r = \begin{cases} (-1)^{(r-1)/2}\dfrac{(r+\frac{1}{2})(r-1)!}{2^r\{(r+1)/2\}!\{(r-1)/2\}!} & \text{اگر } r \text{ فرد باشد،} \\ 0 & \text{اگر } r \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

از نتیجه مثال ۲ استفاده کنید.

(۵). از تابع مولد چند جمله‌ایهای لژاندر m بار مشتق بگیرید، و از تعریف (۳.۳۶) استفاده کنید.

(۶). از قسمت (ii) قضیه ۳.۸ و قضیه ۳.۵ استفاده کنید.

$$u_n = \begin{cases} 2/n & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

(۷). از قسمت (i) قضیه ۳.۸ استفاده کنید.

(۸). از قسمت (ix) قضیه ۳.۸ استفاده کنید.

(۱۰). از قسمت (viii) قضیه ۳.۸، قضیه ۳.۱۶، و مثال ۵ استفاده کنید.

(۱۱). از تعریف‌های (۳.۶۱) و (۳.۳۶) استفاده کنید.

(۱۲). از قضیه‌های ۳.۲ و ۳.۱۵ و l بار انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده نمائید.

فصل ۴

(۱). از قسمت‌های (iii) و (iv) قضیه ۴.۸ استفاده کنید.

(۲). از سریهای نامتناهی برای J_0 و J_1 استفاده کنید.

(۳). با مثال ۴ مقایسه کنید.

(۴). $y = Ax^{\frac{1}{2}} J_{2/3}\left(\frac{4}{3}\sqrt{\lambda} x^{\frac{2}{3}}\right)$ (A یک ثابت دلخواه است). از قضیه ۴.۱۲ استفاده کنید.

(۵). از سری نامتناهی برای J_0 استفاده کنید.

(۶). از این حقیقت که

$$1 = \exp\left[x(t - \frac{1}{t})\right] \cdot \exp\left[-x(t - \frac{1}{t})\right]$$

استفاده نموده و ضریب t^0 را در سمت راست تساوی فوق محاسبه کنید.

(۷). از قسمت (ii) قضیه ۴.۸، قسمت (i) قضیه ۴.۲۱، و قسمت (i) قضیه ۴.۲۲ استفاده کنید.

(۸). از تابع مولد استفاده نمائید.

(۹). از تابع مولد برای توابع J_n استفاده کنید.

(۱۰). نشان دهید که هم معادله بسل و هم معادله بسل تعدیل یافته را می‌توان از طریق مشتق‌گیری بیشتری به‌صورت معادله داده شده در مسأله در آورد.

(۱۱). $c_r = \dfrac{2}{a\lambda^2} \dfrac{\{(\lambda_r a)^2 - 4\}}{J_1(\lambda_r a)}$.

(۱۲). $\int_{-\infty}^{\infty} j_m(x) j_n(x) \mathrm{d}x = 0$ اگر $m \neq n$ باشد، و $\int_{-\infty}^{\infty} \{j_n(x)\}^2 \mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2n+1}$

(۱۳). قسمت‌های حقیقی و موهومی سری نامتناهی $j_n(i^{3/2}x)$ را پیدا کنید.

(۱۴). قسمت‌های حقیقی و موهومی انتگرال $\int_0^x tJ_0(i^{3/2}t)\mathrm{d}t$ را پیدا کنید؛ برای محاسبه این انتگرال از قسمت (i) قضیه ۴.۸ استفاده نمائید.

(۱۵). قسمت‌های حقیقی و موهومی فرم مجانبی $J_0(i^{3/2}x)$، که در قسمت (i) قضیه ۴.۲۱ بیان شده است، پیدا کنید.

فصل ۵

(۱). از قسمت (ii) قضیه ۵.۶ و از قضیه ۵.۵ استفاده کنید.

(۳). از روابط:

$$2\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos 2xt\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos 2xt\mathrm{d}t = Re\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2 + 2ixt)\mathrm{d}t$$

استفاده کنید.

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2^{2n+2}}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \sin 2xt\mathrm{d}t.$$

(۴). از نتیجه مسأله ۳ هم برای $H_n(x)$ و هم برای $H_n(y)$ استفاده نموده، نتیجه بگیرید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} t^n = \frac{1}{\pi} \exp(x^2 + y^2) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2 - v^2 + 2iux$$

$$+ 2ivy - 2uvt)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

با انجام عمل انتگرال‌گیری نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

(۷). (i) $2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn}.$

(ii) $2^{n-1}n!\sqrt{\pi}\delta_{m,n-1} - 2^n(n+1)!\sqrt{\pi}\delta_{m,n+1}$

فصل ۶

(۳). از معادله (۶.۳) و انتگرالگیری جزء به جزء استفاده کنید.

(۴). از معادله (۵.۳) و انتگرالگیری جزء به جزء استفاده کنید.

(۵). از قضیه ۶.۹ استفاده کنید.

(۶). از قسمت (ii) قضیه ۶.۱۱ و قضیه ۶.۱۰ استفاده کنید.

(۷). از معادله (۵.۳) استفاده کنید.

فصل ۷

(۶_۱). از تغییر متغیر $x = \cos\theta$ استفاده کنید.

(۸). از روش حل معادلات دیفرانسیل به روش سریها که در فصل ۱ بیان شده است، استفاده نموده، به یاد بیاورید که n عددی صحیح است.

فصل ۸

(۱).از تعریف (۸.۲) یا از قضیه ۸.۵ استفاده کنید.

(۲).از تعریف (۸.۲) استفاده کنید.

(۳).از قسمت (ii) قضیه (۸.۵) استفاده کنید.

(۴).از قسمت (i) قضیه (۸.۳) استفاده کنید.

(۵).از تعریف (۸.۲) استفاده کنید.

(۶).از قضیه (۸.۱) و معادله (۳.۱۷) استفاده کنید.

فصل ۹

(۳). از قضیه ۹.۴ استفاده کنید.

(۶). از قضیه ۹.۱ استفاده کنید.

(۷). $\frac{1}{s}\ {}_2F_1(\alpha, 1; \beta; s)$. از قضیه ۹.۷ استفاده کنید.

فصل ۱۰

(۱). از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده کنید.

(۲). $\int_0^\infty e^{-st}Ci(t)\mathrm{d}t$ را به عنوان یک انتگرال دوگانه نوشته ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنید.

(۵). از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده نمائید.

(۶). ابتدا با تغییر متغیر $y = \frac{\pi}{2} - x$ تساوی دو انتگرال را ثابت کنید. سپس، دومین انتگرال را مورد بررسی قرار داده، تغییر متغیر $\cos x = \cos^2 u$ بدهید.

(۸). تغییر متغیر $x = \tan\theta$ بدهید.

کتابنامه

*Abramowitz, M., and Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York (1965).

Artin, E. *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1964).

Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., and Tricomi, F. G. *Higher Transcendental Functions* (Bateman Manuscript Project), Vols. 1–3, McGraw-Hill, New York (1953).

Fletcher, A., Miller, J. C. P., Rosenhead, L., and Comrie, L. J. *An Index of Mathematical Tables*, Vols. 1 and 2, 2nd edn., Addison-Wesley, Reading, Mass. (1962).

Hobson, E. W. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Cambridge University Press, London (1931).

*Hochstadt, H. *Special Functions of Mathematical Physics*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1961).

Jahnke, E., Emde, F., and Lösch, F. *Tables of Higher Functions*, 6th edn., McGraw-Hill, New York (1960).

Lebedev, A. V., and Fedorova, R. M. *A Guide to Mathematical Tables*, Pergamon Press, Oxford (1960).

Lebedev, N. N. *Special Functions and their Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1965).

MacRobert, T. M. *Spherical Harmonics*, 2nd edn., Methuen, London (1947).

Magnus, W., Oberhettinger, F., and Soni, R. P. *Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics*, 3rd edn., Springer-Verlag, New York (1966).

McLachlan, N. W. *Bessel Functions for Engineers*, 2nd edn., Oxford University Press, London, (1955).

Rainville, E. D. *Special Functions*, Macmillan, New York (1960).

Relton, F. E. *Applied Bessel Functions*, Blackie, London (1946).

Slater, L. J. *Confluent Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press, London (1960).

Sneddon, I. N. *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, 2nd edn., Oliver and Boyd, Edinburgh (1961).

Watson, G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd edn., Cambridge University Press, London (1931).

* Available as a Dover reprint. Log onto www.doverpublications.com for availability and pricing.

فهرست راهنما (الفبایی)

کتاب‌هایی چاپ شده از مترجم این کتاب

۱. منتخب مسائل آنالیز حقیقی

نویسندگان: *بوریس میخائیلوویچ ماکاروف، ماریا گنادییونا گُلوزینا، آندری آلکساندرُویچ لودکین، آناتولی نااوموویچ پودکُریتُف*

ترجمه: **محمد علی غیرتمند**

چاپ اول: ۱۳۸۴

ناشر: **انتشارات شباهنگ**

قیمت: **۲۵۰۰ تومان**

مسائل این کتاب که در ده فصل با عنوان‌های: مقدمه، توابع، سری‌ها، انتگرال، رفتار مجانبی، توابع (ادامه)، اندازه و انتگرال لبگ، دنباله‌های توابع اندازه‌پذیر، تکرارهای تبدیل فاصله تنظیم شده است، می‌تواند مورد استفاده دانشجویان رشته‌های علوم و مهندسی و نیز دانشجویانی که می‌خواهند خود را برای شرکت در المپیادهای ریاضی دانشجویی یا کنکورهای دوره‌های بعد از لیسانس آماده کنند، قرار گرفته، و به تعمیق دانش ریاضی آنها کمک کند.

۲. درس‌هائی در تکمیل سرفصل‌های آنالیز ریاضی

تألیف: *ولادیمیر ایوانوویچ سوبولف*

ترجمه: **محمد علی غیرتمند**

چاپ اول: ۱۳۸۴

ناشر: **انتشارات شباهنگ**

قیمت: **۳۰۰۰ تومان**

مباحث این کتاب با سرفصل‌های: اصول کلی تئوری مجموعه‌ها، فضاهای متریک، مجموعه‌ها در فضاهای متریک، مجموعه‌های نقطه‌ای روی خط حقیقی و صفحه، انتگرال‌ها روی مجموعه‌های مجرد، اندازه و انتگرال روی خط حقیقی و صفحه، فضاهای لبگ $L(a, b)$ و $L_2(a, b)$، توابع با تغییرات محدود و توابع مطلقاً پیوسته، انتگرال استیلیس، فضاهای خطی نرم‌دار و عملگرهای خطی، عملگرهای کاملاً پیوسته، می‌تواند هم مورد استفاده دانشجویان رشته ریاضی قرار گیرد، و هم برخی خلاءهای آموزشی دانشجویانی که قصد دارند تحصیلات خود را در یکی از شاخه‌های آنالیز ریاضی ادامه دهند، پرنماید.

۳. دوره مختصر تئوری توابع با متغیر حقیقی

تألیف: *بوریس زاخاژویچ وولیخ*

ترجمه: **محمدعلی غیرتمند**

چاپ اول: ۱۳۸۴

ناشر: **انتشارات شباهنگ**

قیمت: **۳۵۰۰ تومان**

مباحث این کتاب که در سیزده فصل با عنوان‌های: اطلاعات عمومی درباره مجموعه‌ها؛ مجموعه‌های نقطه‌ای در فضای اقلیدسی، فضاهای متریک، اندازه روی مجموعه‌های مجرد؛ اندازه لبگ در فضای اقلیدسی، توابع اندازه‌پذیر، انتگرال لبگ توابع کراندار، توابع جمع‌پذیر، توابع با مجذور جمع‌پذیر، فضای L^p، انتگرال رادون، توابع مجموعه‌ای مطلقاً پیوسته، انتگرال نامعین لبگ، تنظیم شده است، می‌تواند هم مورد استفاده دانشجویان دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد رشته‌های ریاضی و فیزیک قرار گیرد، هم مورد استفاده آن دسته از دانشجویان رشته‌های مهندسی قرار گیرد که برای رفع نیازهای علمی و عملی خود باید با مفاهیم اساسی درس‌های آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی آشنا شوند.

۴. توابع خاص

تألیف: *ویلیام والاس بل*

ترجمه: **محمدعلی غیرتمند**

چاپ اول: ۱۳۸۶

ناشر: **انتشارات شباهنگ**

قیمت: **۴۰۰۰ تومان**

بخش عمده‌ای از مطالب این کتاب به توابعی اختصاص یافته است که دارای کاربردهای فراوانی در مسائل مربوط به فیزیک و مهندسی هستند. کتاب برای کسانی طراحی شده است که، اگرچه مجبورند از ریاضیات استفاده کنند، خودشان ریاضی‌دان نیستند، و ممکن است اطلاعاتی بیش از یک دوره مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال در ریاضیات کسب نکرده باشند. فهرست عنوان‌های فصل‌های ده‌گانه این کتاب از این قرار است: حل معادلات دیفرانسیل به روش سری‌ها، توابع گاما و بتا، چند جمله‌ایها و توابع لژاندر، توابع بسل، چند جمله‌ایهای لاگر، چند جمله‌ایهای چبیشف، چند جمله‌ایهای گگنباوئر و ژاکوبی، توابع فوق هندسی، توابع خاص دیگر.

کتاب‌هایی آماده چاپ از مترجم این کتاب

۱. مبانی آنالیز جدید

تألیف: *ژان دیودونه*

ترجمه: **محمدعلی غیرتمند**

کتاب فوق که توسط ریاضی‌دان برجسته فرانسوی، عضو سابق گروه بورباکی، ژان دیودونه، نوشته شده است، به بسیاری از زبان‌های زنده دنیا، از جمله به زبان روسی، ترجمه شده است، و از آن به عنوان مرجعی مناسب در درس‌های آنالیز ریاضی ۱، ۲ و ۳، آنالیز حقیقی، آنالیز مختلط، تئوری معادلات دیفرانسیل و آنالیز تابعی استفاده می‌شود. فهرست عنوان‌های فصل‌های یازده‌گانه این کتاب از این قرار است: اصول تئوری مجموعه‌ها، اعداد حقیقی، فضاهای متریک، خواص بیشتری از خط حقیقی، فضاهای نرم‌دار، فضاهای هیلبرت، فضای توابع پیوسته، حساب دیفرانسیل، توابع تحلیلی، کاربرد توابع تحلیلی در توپولوژی روی صفحه، قضایای وجودی، اصول تئوری طیفی، اصول جبر خطی.

۲. آنالیز تابعی

تألیف: *ولادیلن الکساندرُویچ ترینوگین*

ترجمه: **محمدعلی غیرتمند**

این کتاب با سرفصل‌های: فضاهای خطی، نرمدار و باناخ؛ فضاهای لبگ و سوبولف؛ عملگرهای خطی؛ فضاها و عملگرهای دوآل (الحاقی)؛ فضاهای فشرده و عملگرهای کاملاً پیوسته؛ اصول تئوری طیفی عملگرهای خطی؛ تقریبات مجرد شماتیک؛ قضایایی درباره نقاط ثابت عملگرهای غیرخطی؛ عملگرهای ضمنی؛ طرح‌های تقریبی غیر خطی و اصول آنالیز محدب، حاصل درس‌هایی است که، مؤلف در طول سالیان متوالی، ابتدا، به دانشجویان فاکولته کنترل و ریاضیات کاربسته انستینوی فیزیکوتکنیک مسکو، و سپس، به دانشجویان انستیتوی فولاد و آلیاژهای مسکو که در رشته سیبرنتیک در فرآیندهای متالوژیکی تخصص می‌بینند، تدریس نموده است، و مطالب آن به نحوی بیان شده است، که برای دانشجویان رشته‌های ریاضی، فیزیک و مهندسی قابل استفاده باشد.

۳. برخی کاربردهای آنالیز تابعی در فیزیک ریاضی

تألیف: *سرگی لووویچ سوبولف*

ترجمه: **محمدعلی غیرتمند**

این کتاب که با سرفصل‌های: مطالبی خاص از آنالیز تابعی، روش‌های وردشی در فیزیک ریاضی، تئوری معادلات با مشتقات جزئی هذلولوی، روش جدید حل مسئله کوشی برای معادله خطی متعارف هذلولوی، توسط ریاضی‌دان برجسته روسی، مبدع تئوری فضاهای سوبولف، سرگی لووویچ سوبولف، نوشته شده است، می‌تواند به عنوان مرجعی مناسب مورد استفاده دانشجویانی قرار گیرد که مایلند از آنالیز تابعی به‌عنوان ابزاری مناسب برای حل مسائل فیزیک و مهندسی استفاده کنند.

۴ . استدلال‌های نادرست ریاضی

مطالب نادرست بدون اثبات، اشتباه‌های چاپی و غیرچاپی در برخی از کتاب‌های ریاضی دانشگاهی ایران

تألیف: *محمد علی غیرتمند*

مباحث این کتاب که در هفت فصل با عنوان‌های: برخی از علل بروز اشتباهات و نارسائی‌ها و کاستی‌ها در بعضی از کتاب‌ها و متون ریاضی دانشگاهی و روش‌های کاهش آنها؛ استدلال‌های نادرست ریاضی و مطالب نادرست بدون اثبات در برخی از کتاب‌های درسی دانشگاهی؛ اشتباه‌های غیرچاپی و برخی نکات مبهم در بیان فرمول‌ها، اثبات قضایا و حل مسائل؛ اشتباه‌های چاپی و فرمول‌ها و روابط نادرست ریاضی در بعضی از کتاب‌ها و متون ریاضی دانشگاهی و برخی از مشکلات ناشی از این گونه اشتباهات؛ اختلاف نظرها در نحوه به کارگیری نمادهای ریاضی، تعریف مفاهیم ریاضی، پذیرش اصول ریاضی و نتایج حاصل از این گونه اختلاف نظرها؛ اختلاف نظرها در معادل سازی، واژه‌گزینی و نحوه به کارگیری اصطلاحات ریاضی و برخی از مشکلات ناشی از این گونه اختلاف نظرها؛ شیوه‌های نادرست آموزش ریاضی در مدارس و دانشگاه‌های کشور ما، و نتایج به کارگیری این گونه شیوه‌ها، تنظیم شده است، می‌تواند مورد استفاده دانشجویان و مدرسان رشته‌های علوم و مهندسی و مؤلفان و مترجمان کتاب‌های ریاضی قرار گرفته؛ و آنها را با برخی از اشتباهاتی که در مراحل مختلف نگارش، ترجمه، حروف‌نگاری؛ و ویرایش و ... کتاب‌های ریاضی پیش می‌آید، آشنا نماید.

۵ . واژه‌نامه ریاضی (روسی ـ فارسی)

ترجمه: *محمد علی غیرتمند*

این واژه‌نامه می‌تواند مورد استفاده دانشجویان فارسی زبان رشته‌های علوم و مهندسی که در کشورهای روسی زبان تحصیل می‌کنند، دانشجویان خارجی روسی زبان که در کشور ما تحصیل می‌کنند، و نیز کسانی که در کار یا تحصیل خود مایلند از منابع علمی به زبان روسی استفاده کنند، قرار گرفته، در قرائت متون ریاضی به زبان روسی به آنها کمک نماید.

۶ . فرهنگ ریاضی (روسی ـ انگلیسی ـ فارسی)

ترجمه: *محمد علی غیرتمند*

این فرهنگ به منظور استفاده کسانی نوشته شده است، که در کار یا تحصیل خود مایلند از متون ریاضی به زبان‌های روسی، انگلیسی یا فارسی استفاده کنند.

۷ . فرهنگ ریاضی (روسی ـ انگلیسی ـ آلمانی ـ فرانسه ـ فارسی)

ترجمه: *محمد علی غیرتمند*

فرهنگ فوق که برگردانی از فرهنگ ریاضی روسی ـ انگلیسی ـ آلمانی ـ فرانسه، تألیف و. ب. اورلوف، ن. س سکورخود، آ.ب. سوسینسکی است، می‌تواند به عنوان ابزاری مناسب مورد استفاده دانشجویان فارسی زبان رشته‌های علوم و مهندسی که در خارج از ایران تحصیل می‌کنند، دانشجویان خارجی که در کشورهای فارسی زبان تحصیل می‌کنند، و نیز، کلیه کسانی که تمایل دارند از منابع ریاضی به زبان‌های زنده دنیا استفاده کنند، قرار گرفته، و در مطالعه آثار ریاضی‌دان‌های برجسته‌ای که در خارج از مرزهای جغرافیائی کشور ما کار می‌کنند، به آنها کمک نماید.