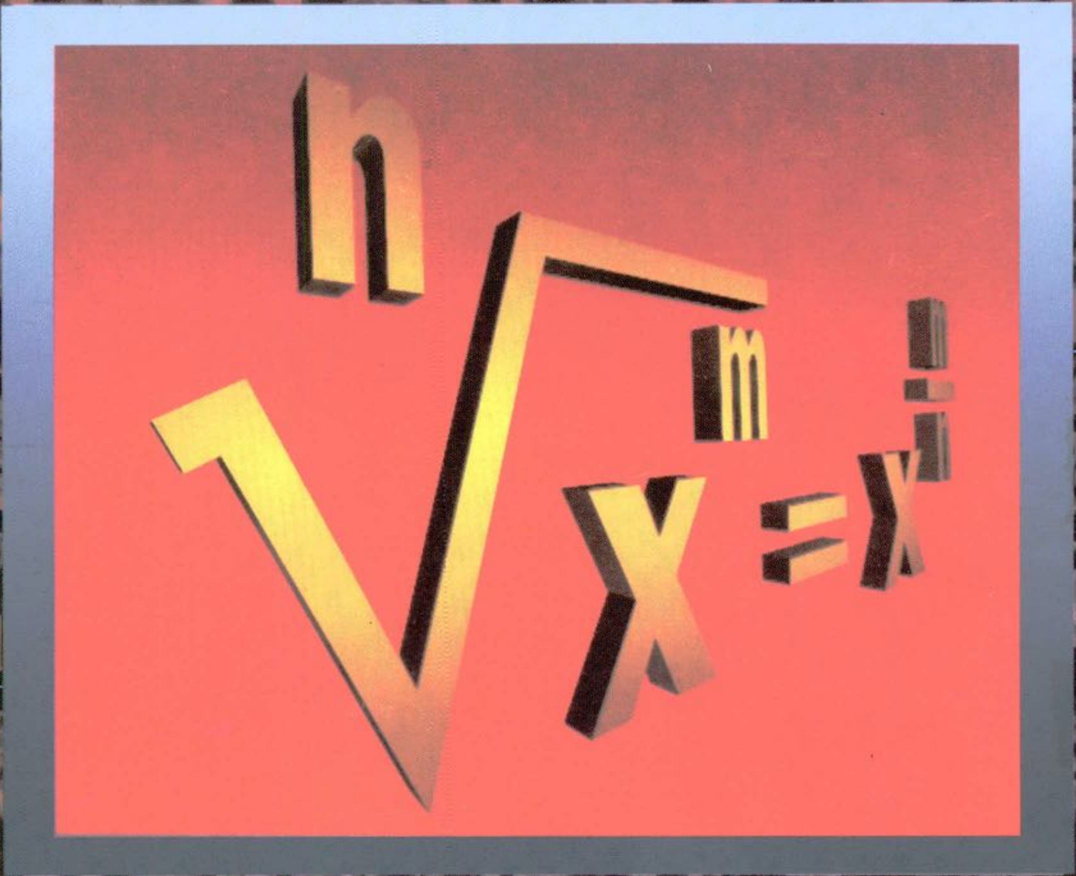
کتاب کوچک ریاضی ۱۱

توان و رادیکال

مؤلف : سیّد محمّد رضا هاشمی موسوی



بسم الله الرحمن الرحیم

توان و رادیکال

مؤلف: سید محمدرضا هاشمی موسوی

QA	هاشمی موسوی، محمدرضا
۱۶۱	
۲ هـ	توان و رادیکال/ مؤلف سیدمحمدرضا هاشمی موسوی. ـ تهران : مدرسه، ۱۳۷۶.
۹ ت	۱۸۸ ص. : جدول. ـ (کتابهای کوچک ریاضی ؛ ۱۱).

I.S.B.N:964-353-852-4.

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
چاپ هفتم : ۱۳۸۴.
۱. توان (جبر). الف. مدرسه. ب. عنوان.

۹ ت ۲ هـ ۱۶۱ QA ۵۱۲/۹۴۲

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
وزارت آموزش و پرورش

توان و رادیکال

مؤلف: سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
طرح جلد از: امیر بابایی
چاپ اول: ۷۶/ چاپ هفتم: ۱۳۸۴
تیراژ چاپ اول تا ششم: ۳۷۰۰۰/ تیراژ چاپ هفتم: ۶۰۰۰ نسخه
لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه

شابک ۴-۸۵۲-۳۵۳-۹۶۴
ISBN 964-353-852-4

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، شماره ۳۶
تلفن: ۹-۸۸۰۰۳۲۴ دورنویس (فاکس): ۸۹۰۳۸۰۹

فهرست

مقدمهٔ مؤلف

از آن‌جا که به طور عمومی حل بیشتر مسائل به یکی از عملیات مربوط به توان و رادیکال منجر می‌شود، کسب معلومات کافی در این دو موضوع درسیِ ریاضیات پایه از اهمیت خاصی برخوردار است. و چون در این زمینه هنوز کتابی به طور جامع و مستقل تألیف و یا ترجمه نشده است تا پاسخگوی سؤالات و مسائل گوناگون دانش‌آموزان عزیز دبیرستانی باشد، ضرورت دیدیم که کتابی برای این دو موضوع درسی ارائه شود تا در حد امکان مشکلات عزیزان دبیرستانی را پاسخگو باشد.

کتاب حاضر حاوی کلیه مفاهیم و نکات مهم و اساسی توان و رادیکال می‌باشد، که پس از ارائه مفاهیم و نکات درسی، مسائل و تمرینهای دوره‌ای جهت احاطه و تسلط کامل بر مطالب طرح شده است که پس از حل آنها می‌توانید با مراجعه به قسمت پاسخ و راهنمایی از راه حل و پاسخ صحیح خود اطمینان حاصل کنید.

در آخر تستهایی جهت پوشش دادن به مطلب و همچنین تستهای کنکورهای سراسری مربوط به این دو موضوع درسیِ رشته‌های تجربی و ریاضی و فنی همراه با پاسخ تشریحی آنان آورده شده است تا معلومات و مهارت کافی را برای داوطلبان شرکت در آزمونهای سراسری فراهم سازد.

در پایان از همهٔ اساتید و همکاران محترم و دیگر صاحب‌نظران ارجمند و دانش‌آموزان گرامی درخواست می‌شود که با ارسال نظرات سودمند خود به آدرس ناشر سبب بهبود بخشیدن به کیفیت علمی این کتاب در چاپهای بعدی گردند. پیشاپیش از این همکاری صمیمانهٔ دوستان سپاسگزاری می‌شود.

سید محمدرضا هاشمی موسوی

توان (نما)

برای آسان شدن محاسبه، عبارتی مانند $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ را به صورت $۲^۵$ می‌نویسیم. و آن را می‌خوانیم «۲ به توان ۵».

به این ترتیب داریم:

$$۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^۴ \qquad \text{و} \qquad ۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۳$$

در عددی مانند $۳^۴$، عدد ۳ را **پایه**، و عدد ۴ را **توان** یا **نمای** آن عدد می‌نامیم.
همین‌طور $(\frac{۲}{۵})^۳$ به معنی «$\frac{۲}{۵} \times \frac{۲}{۵} \times \frac{۲}{۵}$» است و در عدد $(\frac{۲}{۵})^۳$، $\frac{۲}{۵}$ پایه و ۳ توان آن عدد است.

عدد $(۳/۴)^۲$ نیز که خوانده می‌شود «۳/۴ به توان ۲»، به معنی $(۳/۴) \times (۳/۴)$ است. بنابراین اگر a عدد حقیقی و n عدد طبیعی فرض شوند، بنا به تعریف داریم:

$$\underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{(\text{n عامل})} = a^n \qquad (۱) \qquad \text{(تعریف)}$$

در تعریف (۱) عدد حقیقی a را پایه و عدد طبیعی n را توان (نما) می‌نامیم.
لازم به ذکر است که توان دوم یک عدد را مجذور آن عدد و توان سوم یک عدد را مکعب آن عدد می‌نامیم.

مثال ۱: اعداد $۲^۷$، $۱^۵$، $(\frac{۴}{۵})^۳$، $(۲/۳)^۲$ و $۵^۴$ را بخوانید و مفهوم آنها را بنویسید.

حل:

«۲ به توان ۷» : $۲^۷ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$

«۱ به توان ۵» : $۱^۵ = ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱$

«$\frac{۴}{۵}$ به توان ۳» : $(\frac{۴}{۵})^۳ = \frac{۴}{۵} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۴}{۵}$

«۲/۳ به توان ۲» : $(۲/۳)^۲ = ۲/۳ \times ۲/۳$

«۵ به توان ۴» : $۵^۴ = ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵$

مثال ۲ : حاصل هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید.

$$۱)\ ۲^{۴} + ۵^{۲} \qquad ۲)\ ۳^{۳} - ۴^{۲} \qquad ۳)\ ۲^{۳} \times ۳^{۲} \qquad ۴)\ ۱۰^{۳} \div ۵^{۲}$$

حل:

$$۱)\ ۲^{۴} = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۴ \times ۴ = ۱۶ \quad و \quad ۵^{۲} = ۵ \times ۵ = ۲۵$$

$$۲^{۴} + ۵^{۲} = ۱۶ + ۲۵ = ۴۱$$

$$۲)\ ۳^{۳} = ۳ \times ۳ \times ۳ = ۹ \times ۳ = ۲۷ \quad و \quad ۴^{۲} = ۴ \times ۴ = ۱۶$$

$$۳^{۳} - ۴^{۲} = ۲۷ - ۱۶ = ۱۱$$

$$۳)\ ۲^{۳} = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۴ \times ۲ = ۸ \quad و \quad ۳^{۲} = ۳ \times ۳ = ۹$$

$$۲^{۳} \times ۳^{۲} = ۸ \times ۹ = ۷۲$$

$$۴)\ ۱۰^{۳} = ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰ \times ۱۰ = ۱۰۰۰ \quad و \quad ۵^{۲} = ۵ \times ۵ = ۲۵$$

$$۱۰^{۳} \div ۵^{۲} = ۱۰۰۰ \div ۲۵ = ۴۰$$

با توجه به تساویهای زیر:

$$۲^{۵} = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \quad و \quad ۲^{۴} = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$$

$$۲^{۳} = ۲ \times ۲ \times ۲ \quad و \quad ۲^{۲} = ۲ \times ۲$$

می‌نویسیم $۲ = ۲^{۱}$ ، همین‌طور $۳ = ۳^{۱}$ و $۴ = ۴^{۱}$.

پس ۲ به توان ۱ مساوی ۲ و به‌طور کلی هر عدد حقیقی مانند: a به توان ۱ برابر a است.
و یا به بیان ریاضی داریم:

$$(\text{تعریف}) \quad a^{1} = a \quad (۲)$$

این تذکر لازم است که هر عدد حقیقی که دارای توان نباشد، توان آن‌را یک‌منظور می‌کنیم.

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

$$۱)\ ۳^{۲} + ۴^{۲} \qquad ۲)\ ۳^{۳} + ۴^{۳} + ۵^{۳} \qquad ۳)\ ۲^{۶} - ۶^{۲} + ۴^{۲}$$

$$۴)\ ۵^{۴} - ۳^{۵} \qquad ۵)\ ۲^{۵} + (\tfrac{۱}{۲})^{۳} \qquad ۶)\ (۱۰^{۴} \div ۵^{۳}) \div ۲^{۴}$$

ضرب عددهای توان‌دار با پایه‌های مساوی

می‌دانیم:

$$۲^{۳} \times ۲^{۴} = (۲ \times ۲ \times ۲) \times (۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲)$$
$$= ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^{۷}$$

پس می‌توان نوشت:

$$۲^{۳} \times ۲^{۴} = ۲^{۳+۴} = ۲^{۷}$$

همین‌طور داریم:

$$۵^{۴} \times ۵^{۵} = ۵^{۴+۵} = ۵^{۹}$$

$$۳^{۲} \times ۳^{۳} = ۳^{۲+۳} = ۳^{۵}$$

$$(۳/۴)^{۳} \times (۳/۴)^{۴} = (۳/۴)^{۳+۴} = (۳/۴)^{۷}$$

$$۷ \times ۷^{۲} \times ۷^{۳} \times ۷^{۴} \times ۷^{۵} = ۷^{۱+۲+۳+۴+۵} = ۷^{۱۵}$$

مثال ۳: عبارتهای زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $۲^{۵} \times ۲^{۴} \times ۲^{۳} \times ۲^{۲} \times ۲$ ۲) $۵^{۳} \times ۵^{۴} \times ۵^{۵}$ ۳) $(۱/۲)^{۲} \times (۱/۲)^{۳}$

۴) $(\frac{۲}{۵})^{۳} \times (\frac{۲}{۵})^{۴} \times (\frac{۲}{۵})^{۷} \times (\frac{۲}{۵})^{۲۰}$ ۵) $(۰/۲)^{۲} \times (۰/۲)^{۳} \times (۰/۲)^{۵} \times (۰/۲)^{۴}$

۶) $۱۰ \times ۱۰۰ \times ۱۰۰۰ \times ۱۰۰۰۰ \times ۱۰۰۰۰۰ \times ۱۰۰۰۰۰۰$

حل:

۱) $۲^{۵} \times ۲^{۴} \times ۲^{۳} \times ۲^{۲} \times ۲ = ۲^{۵+۴+۳+۲+۱} = ۲^{۱۵}$

۲) $۵^{۳} \times ۵^{۴} \times ۵^{۵} = ۵^{۳+۴+۵} = ۵^{۱۲}$

۳) $(۱/۲)^{۲} \times (۱/۲)^{۳} = (۱/۲)^{۲+۳} = (۱/۲)^{۵}$

۴) $(\frac{۲}{۵})^{۳} \times (\frac{۲}{۵})^{۴} \times (\frac{۲}{۵})^{۷} \times (\frac{۲}{۵})^{۲۰} = (\frac{۲}{۵})^{۳+۴+۷+۲۰} = (\frac{۲}{۵})^{۳۴}$

۵) $(۰/۲)^{۲} \times (۰/۲)^{۳} \times (۰/۲)^{۵} \times (۰/۲)^{۴} = (۰/۲)^{۲+۳+۵+۴} = (۰/۲)^{۱۴}$

۶) $۱۰ \times ۱۰۰ \times ۱۰۰۰ \times ۱۰۰۰۰ \times ۱۰۰۰۰۰ \times ۱۰۰۰۰۰۰$

$$= ۱۰ \times ۱۰^{۲} \times ۱۰^{۳} \times ۱۰^{۴} \times ۱۰^{۵} \times ۱۰^{۶} = ۱۰^{۱+۲+۳+۴+۵+۶} = ۱۰^{۲۱}$$

با توجه به مثالهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۱) در ضرب عددهای توان‌دار، اگر پایه‌ها مساوی باشند، کافی است یک پایه را نوشته و نماها را با هم جمع کنیم.

به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی و m و n عددهای طبیعی باشند، بیان ریاضی دستور (۱) چنین است:

$$a^{m} \times a^{n} = a^{m+n} \qquad (۱)$$

توجه: عبارت $a \times b$ را به شکل a.b یا ab نیز می‌توان نوشت.

مثال ۴: با فرض این که a یک عدد حقیقی است، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به شکل یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $a \cdot a^{۲} \cdot a^{۳} \cdot a^{۴}$ ‏ ۲) $a^{۲۰} \cdot a^{۱۴}$ ‏ ۳) $a^{۳۴} \cdot a^{۳۴}$

۴) $a^{۱۰۰} \cdot a^{۲۰} \cdot a^{۱۰} \cdot a^{۳} \cdot a$ ‏ ۵) $a^{۱۰۰۰} \cdot a^{۳۰۰} \cdot a^{۷۰} \cdot a^{۴}$

حل:

۱) $a \cdot a^{۲} \cdot a^{۳} \cdot a^{۴} = a^{۱+۲+۳+۴} = a^{۱۰}$

۲) $a^{۲۰} \cdot a^{۱۴} = a^{۲۰+۱۴} = a^{۳۴}$

۳) $a^{۳۴} \cdot a^{۳۴} = a^{۶۸}$

۴) $a^{۱۰۰} \cdot a^{۲۰} \cdot a^{۱۰} \cdot a^{۳} \cdot a = a^{۱۰۰+۲۰+۱۰+۳+۱} = a^{۱۳۴}$

۵) $a^{۱۰۰۰} \cdot a^{۳۰۰} \cdot a^{۷۰} \cdot a^{۴} = a^{۱۰۰۰+۳۰۰+۷۰+۴} = a^{۱۳۷۴}$

تمرین: با فرض این که a یک عدد حقیقی است. و m و n اعداد طبیعی باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به شکل یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $a^{۳m+n} \cdot a^{۲m+n} \cdot a^{n} \cdot a^{m} \cdot a^{۳n}$

۲) $a^{m^{۲}+n^{۲}} \cdot a^{۲mn}$

۳) $a^{۲m^{۲}} \cdot a^{۲n^{۲}} \cdot a^{۴mn}$

۴) $a^{۱} \cdot a^{۲} \cdot a^{۳} \cdot a^{۴} \cdot a^{۱۱n-۱۰}$

۵) $a^{n^{۳}} \cdot a^{۳n^{۲}} \cdot a^{۳n} \cdot a^{۱}$

۶) $a \cdot a^{۲} \cdot a^{۳} \cdot \ldots \cdot a^{n}$

(راهنمایی: $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n\,(n+۱)}{۲}$)

ضرب عددهای توان‌دار با نماهای مساوی

می‌دانیم:

$$
\begin{aligned}
۲^{۳} \times ۳^{۳} &= (۲ \times ۲ \times ۲) \times (۳ \times ۳ \times ۳) \\
&= (۲ \times ۳) \times (۲ \times ۳) \times (۲ \times ۳) = (۲ \times ۳)^{۳} = ۶^{۳}
\end{aligned}
$$

پس می‌توان نوشت:

$$۲^{۳} \times ۳^{۳} = (۲ \times ۳)^{۳} = ۶^{۳}$$

همین‌طور می‌توان نوشت:

$$۱^{۵} \times ۲^{۵} \times ۳^{۵} = (۱ \times ۲ \times ۳)^{۵} = ۶^{۵}$$
$$۳^{۴} \times ۳^{۴} = (۳ \times ۳)^{۴} = ۹^{۴}$$
$$۲^{۳۰} \times ۳^{۳۰} = (۲ \times ۳)^{۳۰} = ۶^{۳۰}$$

با توجه به مثالهای اخیر، دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۲) در ضرب عددهای توان‌دار، اگر نماها مساوی باشند، کافی است نمای یکی از عددها را برای حاصلضرب پایه‌ها قرار دهیم.

به‌طور کلی اگر n عدد طبیعی و a و b عددهای حقیقی باشند، بیان ریاضی دستور (۲) چنین است:

$$a^{n} \times b^{n} = (a \times b)^{n} \qquad (۲)$$

مثال ۵: با فرض این‌که a و b عددهای حقیقی و m و n عددهای طبیعی باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به شکل یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $a^{۵} . b^{۶} . a^{۴} . b^{۳}$

۲) $a^{m} . a^{n} . b^{n+m}$

۳) $a^{m} . b^{n} . a^{n} . b^{m}$

۴) $a^{m} . a^{m} . a^{n} . a^{n} . b^{۲n} . b^{۲m}$

۵) $a^{۴۰} . b^{۲۰} . a^{۲۰} . b^{۲۵} . b^{۱۵}$

۶) $a^{۷۰} . b^{۴} . a^{۴} . b^{۷۰}$

حل:

$$
\begin{aligned}
۱)\ a^{۵} . b^{۶} . a^{۴} . b^{۳} &= (a^{۵} . a^{۴})(b^{۶} . b^{۳}) \\
&= (a^{۵+۴})(b^{۶+۳}) \\
&= a^{۹} . b^{۹} = (a . b)^{۹}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
۲)\ a^{m} . a^{n} . b^{n+m} &= (a^{m} . a^{n}) . b^{m+n} \\
&= a^{m+n} . b^{m+n} = (a . b)^{m+n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
۳)\ a^{m} . b^{n} . a^{n} . b^{m} &= (a^{m} . a^{n})(b^{n} . b^{m}) \\
&= (a^{m+n})(b^{n+m}) \\
&= a^{m+n} . b^{m+n} = (a . b)^{m+n}
\end{aligned}
$$

$$۴)\ a^m . a^m . a^n . a^n . b^{2n} . b^{2m} = (a^m . a^m . a^n . a^n)(b^{2n} . b^{2m})$$
$$= (a^{m+m+n+n})\ (b^{2n+2m})$$
$$= a^{2m+2n}\ .\ b^{2m+2n}$$
$$= (a\ .\ b)^{2m+2n}$$

$$۵)\ a^{40} . b^{20} . a^{20} . b^{25} . b^{15} = (a^{40} . a^{20})\ (b^{20} . b^{25} . b^{15})$$
$$= (a^{40+20})\ (b^{20+25+15})$$
$$= a^{60} . b^{60} = (a\ .\ b)^{60}$$

$$۶)\ a^{70} . b^4 . a^4 . b^{70} = (a^{70} . a^4)\ (b^{70} . b^4)$$
$$= (a^{70+4})\ (b^{70+4})$$
$$= a^{74} . b^{74} = (a\ .\ b)^{74}$$

تمرین: با فرض این‌که a و b عددهای حقیقی و m و n عددهای طبیعی باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به شکل یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $a^{30} . b^4 . a^2 . b^{31} . b . a^4$ ‏ ۲) $a^{m+n} . b^m . b^n . a^{m+n} . b^{m+n}$

۳) $a^m . a^n . b^m . b^n . (a\ .\ b)^{m+n}$ ‏ ۴) $a . b . a^2 . b^2 . a^3 . b^3 . a^4 . b^4$

تقسیم عددهای توان‌دار با پایه‌های مساوی

به تقسیم زیر توجه کنید:

$$2^6 \div 2^4 = \frac{2^6}{2^4} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2\times 2}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}} = 2^2 = 4$$

این تقسیم را می‌توان به‌طور مختصر چنین انجام داد:

$$2^6 \div 2^4 = 2^{6-4} = 2^2 = 4$$

همچنین داریم:

$$5^5 \div 5^2 = \frac{\cancel{5}\times\cancel{5}\times 5\times 5\times 5}{\cancel{5}\times\cancel{5}} = 5^3$$

و به‌طور مختصر می‌توان نوشت:

$$5^5 \div 5^2 = 5^{5-2} = 5^3$$

مثال ۶: حاصل تقسیمهای زیر را پیدا کنید.

۱) $5^{20} \div 5^{18}$ ‏ ۲) $2^{12} \div 2^7$ ‏ ۳) $7^{45} \div 7^{44}$ ‏ ۴) $3^{134} \div 3^{132}$

حل:

۱) $۵^{۲۰} \div ۵^{۱۸} = ۵^{۲۰-۱۸} = ۵^{۲} = ۲۵$

۲) $۲^{۱۲} \div ۲^{۷} = ۲^{۱۲-۷} = ۲^{۵} = ۳۲$

۳) $۷^{۴۵} \div ۷^{۴۴} = ۷^{۴۵-۴۴} = ۷^{۱} = ۷$

۴) $۳^{۱۳۴} \div ۳^{۱۳۲} = ۳^{۱۳۴-۱۳۲} = ۳^{۲} = ۹$

با توجه به مثالهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۳) برای تقسیم دو عدد توانی با پایه‌های مساوی، کافی است یک پایه را بنویسیم و نمای مقسوم علیه را از نمای مقسوم کم کنیم.

به‌طور کلی اگر a یک عدد حقیقی و مخالف صفر و m و n عددهای طبیعی باشند، بیان ریاضی دستور (۳) چنین است:

$$a^{m} \div a^{n} = a^{m-n} \qquad (۳)$$

مثال ۷: با فرض این که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر باشند، حاصل هر عبارت را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $a^{۵} \div a^{۳}$ ۲) $\dfrac{a^{۷} . b^{۵}}{b^{۲} . a^{۴}}$ ۳) $\dfrac{a^{۳۷} . b^{۴۰} . a^{۴} . b^{۵} . a^{۳} . a . b^{۳۴}}{a^{۳} . b^{۳۰} . b^{۱۵} . a^{۵} . a^{۳}}$

۴) $\dfrac{a^{۱۳۲} \div a^{۷۲}}{a^{۳۷} \div a^{۱۷}}$ ۵) $\dfrac{a^{۷۶} + a^{۷۸}}{a^{۴} + a^{۲}}$ ۶) $\dfrac{a . a^{۲} . a^{۳} . b . b^{۲} . b^{۳}}{(a . b)^{۴}}$

حل:

۱) $a^{۵} \div a^{۳} = a^{۵-۳} = a^{۲}$

۲) $\dfrac{a^{۷} . b^{۵}}{b^{۲} . a^{۴}} = (\dfrac{a^{۷}}{a^{۴}})(\dfrac{b^{۵}}{b^{۲}}) = a^{۷-۴} . b^{۵-۲} = a^{۳} . b^{۳} = (a . b)^{۳}$

۳) $\dfrac{a^{۳۷} . b^{۴۰} . a^{۴} . b^{۵} . a^{۳} . a . b^{۳۴}}{a^{۳} . b^{۳۰} . b^{۱۵} . a^{۵} . a^{۳}} = \dfrac{(a^{۳۷} . a^{۴} . a^{۳} . a)(b^{۴۰} . b^{۵} . b^{۳۴})}{(a^{۳} . a^{۵} . a^{۳})(b^{۳۰} . b^{۱۵})}$

$= \dfrac{a^{۳۷+۴+۳+۱} . b^{۴۰+۵+۳۴}}{a^{۳+۵+۳} . b^{۳۰+۱۵}} = \dfrac{a^{۴۵} . b^{۷۹}}{a^{۱۱} . b^{۴۵}} = \left(\dfrac{a^{۴۵}}{a^{۱۱}}\right)\left(\dfrac{b^{۷۹}}{b^{۴۵}}\right)$

$= a^{۴۵-۱۱} . b^{۷۹-۴۵} = a^{۳۴} . b^{۳۴} = (a . b)^{۳۴}$

۴) $\dfrac{a^{132} \div a^{72}}{a^{37} \div a^{17}} = \dfrac{a^{132-72}}{a^{37-17}} = \dfrac{a^{60}}{a^{20}} = a^{60-20} = a^{40}$

۵) $\dfrac{a^{76} + a^{78}}{a^{4} + a^{2}} = \dfrac{a^{76}\,(1 + a^{2})}{a^{2}\,(a^{2} + 1)} = \left(\dfrac{a^{76}}{a^{2}}\right)\left(\dfrac{a^{2} + 1}{a^{2} + 1}\right) = a^{76-2} \times 1 = a^{74}$

۶) $\dfrac{a \,.\, a^{2} \,.\, a^{3} \,.\, b \,.\, b^{2} .\, b^{3}}{(a \,.\, b)^{4}} = \dfrac{a^{1+2+3} \,.\, b^{1+2+3}}{(a \,.\, b)^{4}} = \dfrac{a^{6} \,.\, b^{6}}{(a \,.\, b)^{4}} = \dfrac{(a \,.\, b)^{6}}{(a \,.\, b)^{4}}$

$= (a \,.\, b)^{6-4} = (a \,.\, b)^{2}$

تمرین : با فرض این‌که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر باشند، حاصل هر عبارت را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $\dfrac{(a^{7} \div a^{5})\,(b^{5} \div b^{3})}{(b^{36} \div b^{32})\,(a^{12} \div a^{8})} \cdot \left(\dfrac{a^{10} \div a^{2}}{b^{3} \div b}\right)\left(\dfrac{b^{20} \div b^{12}}{a^{6} \div a^{4}}\right)$

۲) $\left(\dfrac{a^{123} \div a^{23}}{b^{154} \div b^{104}}\right)\left(\dfrac{b^{120} \div b^{70}}{a^{7} \div a^{4}}\right)$

۳) $\left(\dfrac{a^{83} + a^{87}}{a^{8} + a^{4}}\right)\left(\dfrac{b^{78} + b^{82}}{b^{8} + b^{4}}\right)$

۴) $\dfrac{a^{1378} \div a^{2}}{a^{50} \div a^{48}}$

تقسیم عددهای توان‌دار با نماهای مساوی

به تقسیم زیر توجه کنید:

$$6^{4} \div 2^{4} = \frac{6^{4}}{2^{4}} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{\cancel{2} \times 3 \times \cancel{2} \times 3 \times \cancel{2} \times 3 \times \cancel{2} \times 3}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{4}$$

این تقسیم را می‌توان به‌طور مختصر چنین انجام داد:

$$۶^۴ \div ۲^۴ = \frac{۶^۴}{۲^۴} = (\frac{۶}{۲})^۴ = ۳^۴$$

همچنین داریم:

$$۹^۶ \div ۳^۶ = \frac{۹^۶}{۳^۶} = (\frac{۹}{۳})^۶ = ۳^۶$$

$$۱۵^۷ \div ۵^۷ = \frac{۱۵^۷}{۵^۷} = (\frac{۱۵}{۵})^۷ = ۳^۷$$

$$۳۲^۵ \div ۸^۵ = \frac{۳۲^۵}{۸^۵} = (\frac{۳۲}{۸})^۵ = ۴^۵$$

با توجه به مثالهای اخیر، دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۴) برای تقسیم دو عدد توانی که دارای نمای مساوی‌اند، کافی است نمای یکی از دو عدد را برای حاصل تقسیم پایه‌ها قرار دهیم.

به‌طور کلی اگر n عدد طبیعی و a یک عدد حقیقی و b عدد حقیقی مخالف صفر باشند، بیان ریاضی دستور (۴) چنین است:

$$a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n \qquad (۴)$$

مثال ۸: با فرض این‌که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر باشند، حاصل هر عبارت را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $a^۷ \div (a^۲ . b^۵)$ ۲) $\frac{a^۷ \div a^۴}{b^۵ \div b^۲}$ ۳) $\frac{a^۴ . b^۴ . a^۳ . b}{b^۷ . a^۲ . b^۲ . a}$ ۴) $\frac{a^۵ . a^۲}{b^{۱۲} \div b^۵}$

حل:

۱) $a^۷ \div (a^۲ . b^۵) = \frac{a^۷}{a^۲ . b^۵} = \frac{\cancel{a^۲} . a^۵}{\cancel{a^۲} . b^۵} = \frac{a^۵}{b^۵} = (\frac{a}{b})^۵$

۲) $\frac{a^۷ \div a^۴}{b^۵ \div b^۲} = \frac{a^{۷-۴}}{b^{۵-۲}} = \frac{a^۳}{b^۳} = (\frac{a}{b})^۳$

۳) $\frac{a^۴ . b^۴ . a^۳ . b}{b^۷ . a^۲ . b^۲ . a} = \frac{a^۴ . a^۳ . (b^۴ . b)}{b^۷ . b^۲ . (a^۲ . a)} = \frac{\cancel{a^۳} . a^۴ . \cancel{b^۵}}{\cancel{b^۵} . b^۲ . b^۲ . \cancel{a^۳}} = \frac{a^۴}{b^۴} = (\frac{a}{b})^۴$

۴) $\frac{a^{5} . a^{2}}{b^{12} \div b^{5}} = \frac{a^{5+2}}{b^{12-5}} = \frac{a^{7}}{b^{7}} = (\frac{a}{b})^{7}$

تمرین: با فرض این که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر و m و n عددهای طبیعی باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\frac{a^{5} . b^{3} . a^{2} . b^{4}}{b^{5} . a^{3} . b^{2} . a^{4}}$ ۲) $\frac{a^{m} . b^{n} . b^{m} . a^{n}}{b^{m} . a^{n} . a^{m} . b^{n}}$ ۳) $\frac{a^{m} . a^{m}}{b^{m} . b^{m}}$

۴) $\frac{a . a^{2} . a^{3} . a^{4} . a^{5}}{b . b^{2} . b^{3} . b^{4} . b^{5}}$ ۵) $\frac{a^{m} . a^{n}}{b^{n} . b^{m}}$ ۶) $\frac{a . a^{2} . \cdots . a^{n}}{b . b^{2} . \cdots . b^{n}}$

توان صفر

به مثال زیر توجه کنید:

$$8 \div 8 = 1 \qquad (1)$$

از طرف دیگر با توجه به دستور تقسیم توانی با پایه‌های مساوی می‌توان نوشت:

$$8 \div 8 = 2^{3} \div 2^{3} = 2^{3-3} = 2^{0} \qquad (2)$$

بنابراین از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$1 = 2^{0}$$

همچنین داریم:

$$5^{0} = 1 \quad و \quad (\frac{2}{3})^{0} = 1 \quad و \quad (3/4)^{0} = 1 \quad و \quad (-1000)^{0} = 1 \quad و \quad (0/0001)^{0} = 1$$

و به‌طور کلی هر عدد حقیقی مخالف صفر مانند : a به توان صفر، برابر ۱ است. و یا به بیان ریاضی:

$$a^{0} = 1 \quad (a \neq 0) \quad (\text{تعریف})$$

لازم به ذکر است که صفر به توان صفر (0^{0}) تعریف نشده (مبهم) است، زیرا اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد، عبارت $\frac{a^{n}}{a^{n}}$ به ازای $a = 0$ تعریف نشده (مبهم) است:

$$a = 0 : \frac{a^{n}}{a^{n}} = \frac{0}{0} \ (\text{مبهم}) \qquad و \qquad \frac{a^{n}}{a^{n}} = a^{n-n} = a^{0} = 0^{0} \ (\text{مبهم})$$

توان رساندن یک عدد تواندار

به مثالهای زیر توجه کنید:

$$(۳^۴)^۳ = (۳^۴) \times (۳^۴) \times (۳^۴) = ۳^{۴+۴+۴} = ۳^{۱۲} = ۳^{(۴\times۳)}$$

$$(۲^۵)^۴ = (۲^۵) \times (۲^۵) \times (۲^۵) \times (۲^۵) = ۲^{۵+۵+۵+۵} = ۲^{۲۰} = ۲^{(۵\times۴)}$$

$$(۵^۳)^۲ = (۵^۳) \times (۵^۳) = ۵^{۳+۳} = ۵^۶ = ۵^{(۳\times۲)}$$

$$(۷^۵)^۳ = (۷^۵) \times (۷^۵) \times (۷^۵) = ۷^{۵+۵+۵} = ۷^{۱۵} = ۷^{(۵\times۳)}$$

با توجه به مثالهای اخیر، دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۵) برای توان رساندن یک عدد تواندار، کافی است پایه را بنویسیم و توانها را درهم ضرب کنیم. به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی و m و n عددهای طبیعی باشند، بیان ریاضی دستور (۵) چنین است:

$$(a^m)^n = a^{m \times n} \qquad (۵)$$

همچنین به مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned}(۲^۳ \times ۳^۲)^۳ &= (۲^۳ \times ۳^۲) \times (۲^۳ \times ۳^۲) \times (۲^۳ \times ۳^۲)\\ &= (۲^۳ \times ۲^۳ \times ۲^۳) \times (۳^۲ \times ۳^۲ \times ۳^۲)\\ &= ۲^{۳+۳+۳} \times ۳^{۲+۲+۲}\\ &= ۲^۹ \times ۳^۶\end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$(۲^۳ \times ۳^۲)^۳ = ۲^۹ \times ۳^۶$$

بنابراین در حالت کلی اگر a و b عددهای حقیقی و k، m و n عددهای طبیعی باشند، داریم:

$$(a^k \times b^m)^n = a^{k \times n} \times b^{m \times n}$$

مثال ۹ : با فرض این که a و b عددهای حقیقی باشند، حاصل هر عبارت را به صورت عددی تواندار بنویسید.

۱) $(a^۳)^۴ . (b^۴)^۳$

۲) $(a^۲)^۳ . (a^۳)^۴ . (b^۳)^۲ . (b^۴)^۳$

حل: با استفاده از دستور (۵) داریم:

$$۱)\ (a^{۳})^{۴} . (b^{۴})^{۳} = a^{۳\times ۴} . b^{۴\times ۳} = a^{۱۲} . b^{۱۲} = (a . b)^{۱۲}$$

$$\begin{aligned} ۲)\ (a^{۲})^{۳} . (a^{۳})^{۴} . (b^{۳})^{۲} . (b^{۴})^{۳} &= a^{۲\times ۳} . a^{۳\times ۴} . b^{۳\times ۲} . b^{۴\times ۳} \\ &= a^{۶} . a^{۱۲} . b^{۶} . b^{۱۲} \\ &= a^{۶+۱۲} . b^{۶+۱۲} \\ &= a^{۱۸} . b^{۱۸} \\ &= (a . b)^{۱۸} \end{aligned}$$

توان منفی

به مثال زیر توجه کنید:

$$۲^{۵} \div ۲^{۷} = ۲^{۵-۷} = ۲^{-۲} \qquad (۱)$$

عدد $۲^{-۲}$ طبق تعریفی که برای توانهای طبیعی کردیم، معنی ندارد. از طرف دیگر می‌دانیم که

$$۲^{۵} \div ۲^{۷} = \frac{۲^{۵}}{۲^{۷}} = \frac{\cancel{۲^{۵}}}{\cancel{۲^{۵}} \times ۲^{۲}} = \frac{۱}{۲^{۲}} \qquad (۲)$$

بنابراین از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$۲^{-۲} = \frac{۱}{۲^{۲}}$$

همچنین داریم:

$$۳^{-۵} = \frac{۱}{۳^{۵}} \quad , \quad (\frac{۲}{۳})^{-۴} = \frac{۱}{(\frac{۲}{۳})^{۴}} = (\frac{۳}{۲})^{۴} \quad , \quad (۲/۵)^{-۷} = \frac{۱}{(۲/۵)^{۷}}$$

$$(۲^{-۵})^{۴} = ۲^{-۲۰} = \frac{۱}{۲^{۲۰}} \quad , \quad \left[(۵^{-۲})^{-۳}\right]^{-۵} = (۵^{۶})^{-۵} = ۵^{-۳۰} = \frac{۱}{۵^{۳۰}}$$

به طور کلی برای هر عدد حقیقی مخالف صفر مانند: a و هر عدد طبیعی n ،بنا به تعریف داریم:

$$a^{-n} = \frac{۱}{a^{n}}$$

توجه داشته باشید که ax^{-n} با $(ax)^{-n}$ فرق دارد.

مثال ۱۰ : عبارتهای زیر را ساده کنید. و هر یک را با توان مثبت نشان دهید.

۱) $\frac{۵^{-۳}}{۵^{-۲}}$ ۲) $\frac{۵^{-۱۵}\times ۵^{۴}}{۵^{-۳}\times ۵^{-۴}}$ ۳) $(\frac{۲}{۳})^{-۳}\times(\frac{۲}{۳})^{۲}$ ۴) $((۳^{-۲})^{۳})^{۳}\times(۳^{۵})^{-۲}$

حل:

۱) $\frac{۵^{-۳}}{۵^{-۲}} = ۵^{-۳-(-۲)} = ۵^{-۳+۲} = ۵^{-۱} = \frac{۱}{۵}$

۲) $\frac{۵^{-۱۵}\times ۵^{۴}}{۵^{-۳}\times ۵^{-۴}} = \frac{۵^{-۱۵+۴}}{۵^{-۳+(-۴)}} = \frac{۵^{-۱۱}}{۵^{-۷}} = ۵^{-۱۱-(-۷)} = ۵^{-۱۱+۷} = ۵^{-۴} = \frac{۱}{۵^{۴}}$

۳) $(\frac{۲}{۳})^{-۳}\times(\frac{۲}{۳})^{۲} = (\frac{۲}{۳})^{-۳+۲} = (\frac{۲}{۳})^{-۱} = \frac{۱}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۳}{۲}$

۴) $((۳^{-۲})^{۳})^{۳}\times(۳^{۵})^{-۲} = (۳^{-۶})^{۳}\times ۳^{-۱۰} = ۳^{-۱۸}\times ۳^{-۱۰}$

$= ۳^{-۱۸-۱۰} = ۳^{-۲۸} = \frac{۱}{۳^{۲۸}}$

مثال ۱۱ : اگر a و x اعداد حقیقی مخالف صفر و m و n عددهای صحیح باشند، حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱) $(a^{-m})^{n}\,.\,(a^{-n})^{-m}$ ۲) $x^{n}\div x^{n+۱}$

۳) $۲\times a^{-۵}\,.\,(۲\times a)^{۵}\,.\,(۲\times a)^{-۳}$ ۴) $\frac{x^{-۳}\,.\,x^{-۲}\,.\,x^{-۴}\,.\,x^{۵}}{x^{۵}\div(x^{-۳})^{-۳}}$

۵) $\frac{a^{m+n}\div a^{m-n}}{a^{۲n-۱}}$ ۶) $\frac{a^{۲}\,.\,a^{-۳}}{a^{۴}\,.\,a^{-۵}}$

۷) $\frac{x^{-۶}\,.\,(x^{-۲})^{-۲}}{x^{۷}\,.\,x^{-۵}}$ ۸) $\frac{x^{-۵}\div x^{-۳}}{x^{۵}\div x^{-۷}}$

حل:

۱) $(a^{-m})^{n}\,.\,(a^{-n})^{-m} = a^{(-m).n}\,.\,a^{(-n)(-m)} = a^{-mn}\,.\,a^{nm}$

$= a^{-mn+mn} = a^{۰} = ۱$

$$۲)\ x^{n} \div x^{n+۱} = x^{n-(n+۱)} = x^{n-n-۱} = x^{-۱} = \frac{۱}{x}$$

$$۳)\ ۲ \times a^{-۵} . (۲\times a)^{۵} . (۲ \times a)^{-۳} = ۲ \times a^{-۵} \times ۲^{۵} \times a^{۵} \times ۲^{-۳} \times a^{-۳}$$

$$= (۲ \times ۲^{۵} \times ۲^{-۳})\ (a^{-۵} . a^{۵} . a^{-۳})$$

$$= (۲^{۱+۵-۳})\ (a^{-۵+۵-۳})$$

$$= ۲^{۳} \times a^{-۳} = \frac{۲^{۳}}{a^{۳}} = (\frac{۲}{a})^{۳}$$

$$۴)\ \frac{x^{-۳} . x^{-۲} . x^{-۴} . x^{۵}}{x^{۵} \div (x^{-۳})^{-۳}} = \frac{x^{-۳-۲-۴+۵}}{x^{۵} \div x^{۹}} = \frac{x^{-۴}}{x^{۵-۹}} = \frac{x^{-۴}}{x^{-۴}} = x^{-۴+۴} = x^{۰} = ۱$$

$$۵)\ \frac{a^{m+n} \div a^{m-n}}{a^{۲n-۱}} = \frac{a^{m+n-(m-n)}}{a^{۲n-۱}} = \frac{a^{m+n-m+n}}{a^{۲n-۱}} = \frac{a^{۲n}}{a^{۲n-۱}} = a^{۲n-(۲n-۱)} = a^{۱} = a$$

$$۶)\ \frac{a^{۲} . a^{-۳}}{a^{۴} . a^{-۵}} = \frac{a^{۲-۳}}{a^{۴-۵}} = \frac{a^{-۱}}{a^{-۱}} = a^{-۱-(-۱)} = a^{-۱+۱} = a^{۰} = ۱$$

$$۷)\ \frac{x^{-۶} . (x^{-۲})^{-۲}}{x^{۷} . x^{-۵}} = \frac{x^{-۶} . x^{۴}}{x^{۷} . x^{-۵}} = \frac{x^{-۶+۴}}{x^{۷-۵}} = \frac{x^{-۲}}{x^{۲}} = x^{-۲-۲} = x^{-۴} = \frac{۱}{x^{۴}}$$

$$۸)\ \frac{x^{-۵} \div x^{-۳}}{x^{۵} \div x^{-۷}} = \frac{x^{-۵-(-۳)}}{x^{۵-(-۷)}} = \frac{x^{-۵+۳}}{x^{۵+۷}} = \frac{x^{-۲}}{x^{۱۲}} = x^{-۲-۱۲} = x^{-۱۴} = \frac{۱}{x^{۱۴}}$$

تمرین: اگر a و b و c اعداد حقیقی مخالف صفر و m و n عددهای صحیح باشند، حاصل عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

$$۱)\ \frac{(a^{-m})^{-m} . (a^{-n})^{-n} . (a^{m})^{۲n}}{(b^{-m})^{-m} . (b^{-n})^{-n} . (b^{۲n})^{m}}$$

(جواب: $(\frac{a}{b})^{(m+n)^{۲}}$)

۲) $\left(\frac{۲^۳ \times ۳^۳ \times a^{-۵} \times b^{-۴} \times c^{-۳}}{۲a^{-۳} \times ۴b^{-۲} \times ۹c^{-۱} \times ۳}\right)^{-۳}$ (جواب: $(abc)^۶$)

۳) $\left(\frac{۱۵a^{-۴} \times ۳b^{-۸} \times ۴c^{-۹}}{۱۲c^{-۸} \times ۳b^{-۷} \times ۵a^{-۳}}\right)^۶$ (جواب: $(abc)^{-۶}$)

۴) $\frac{a^{m+n} \,.\, a^{m-n} \,.\, a^{-m}}{b^{m-n} \,.\, b^{m+n} \,.\, b^{-m}}$ (جواب: $(\frac{a}{b})^m$)

۵) $\left(\frac{a^{m+n} \div a^{m-n}}{b^{m+n} \div b^{m-n}}\right)\left(\frac{b^{n-m} \,.\, b^{n+m}}{c^{n+m} \,.\, c^{n-m}}\right)$ (جواب: $(\frac{a}{c})^{۲n}$)

تمرین: عبارت $(۲x^۲ - ۲)^{۵-۵x^۲}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده (مبهم) و به‌ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟ (جواب: به ازای $x = \pm ۱$ تعریف نشده (مبهم) است و به ازای بقیه عددهای حقیقی تعریف شده است.)

اعداد منفی تواندار

به تساویهای زیر توجه کنید.

$(-۲)^۱ = -۲$

$(-۲)^۲ = (-۲)(-۲) = +۴$

$(-۲)^۳ = (-۲)(-۲)(-۲) = -۸$

$(-۲)^۴ = (-۲)(-۲)(-۲)(-۲) = +۱۶$

$(-۲)^۵ = (-۲)(-۲)(-۲)(-۲)(-۲) = -۳۲$

با توجه به تساویهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۶) هر عدد حقیقی منفی به توان عددی زوج (مضربی از ۲) برسد، حاصل عددی مثبت، و به توان عددی فرد (مضربی از ۲ نباشد) برسد، حاصل عددی منفی خواهد شد.

اگر a عددی حقیقی و k عدد صحیحِ دلخواهی باشد، بیان ریاضی دستور (۶) چنین است:

$$(-a)^{۲k} = a^{۲k} \quad \text{و} \quad (-a)^{۲k+۱} = -a^{۲k+۱}$$

در آینده مفهوم توانهای گویا و اعمال روی آنها را بیان خواهیم کرد.

برهان:

$$(-a)^{2k} = \big((-1)(a)\big)^{2k} = (-1)^{2k} \,.\, a^{2k} = (+1)a^{2k} = a^{2k}$$

و همچنین داریم:

$$(-a)^{2k+1} = (-a)^{2k} \,.\, (-a) = a^{2k} \,.\, (-a) = -a \,.\, a^{2k} = -a^{2k+1}$$

مثال ۱۲: بافرض این که a یک عدد حقیقی مخالف صفر باشد، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

۱) $a \,.\, (-a)^{34} \,.\, (-a)^{7} \,.\, (-a)^{-5} \,.\, (-a)^{-3}$

۲) $((-a)^{5})^{-4} \,.\, ((-a)^{-3})^{-7} \,.\, (-1)^{1376} \,.\, (-1)^{1377}$

حل: با استفاده از دستور (۶) داریم:

۱) $(-a)^{34} = a^{34} \quad , \quad (-a)^{7} = -a^{7} \quad , \quad (-a)^{-5} = \frac{1}{(-a)^{5}} = \frac{1}{-a^{5}} = -\frac{1}{a^{5}}$

$$(-a)^{-3} = \frac{1}{(-a)^{3}} = \frac{1}{-a^{3}} = -\frac{1}{a^{3}}$$

پس خواهیم داشت:

$$a \,.\, (-a)^{34} \,.\, (-a)^{7} \,.\, (-a)^{-5} \,.\, (-a)^{-3} = a \,.\, a^{34} \,.\, (-a^{7}) \left(-\frac{1}{a^{5}}\right) \left(-\frac{1}{a^{3}}\right)$$

$$= (-a^{35+7}) \left(\frac{1}{a^{8}}\right) = -\frac{a^{42}}{a^{8}} = -a^{42-8} = -a^{34}$$

۲) $((-a)^{5})^{-4} = (-a)^{-20} = \frac{1}{(-a)^{20}} = \frac{1}{a^{20}}$

$$((-a)^{-3})^{-7} = (-a)^{(-3)\times(-7)} = (-a)^{21} = -a^{21}$$

$$(-1)^{1376} = +1 \qquad , \qquad (-1)^{1377} = -1$$

پس خواهیم داشت:

$$((-a)^{۵})^{-۴} \cdot ((-a)^{-۳})^{-۷} \cdot (-۱)^{۱۳۷۶} \cdot (-۱)^{۱۳۷۷} = \left(\frac{۱}{a^{۲۰}}\right)(-a^{۲۱})\,(+۱)\,(-۱)$$
$$= \left(\frac{۱}{a^{۲۰}}\right)(a^{۲۱}) = \frac{a^{۲۱}}{a^{۲۰}}$$
$$= a^{۲۱-۲۰} = a^{۱} = a$$

تمرین: با فرض این که a یک عدد حقیقی مخالف صفر و k یک عدد صحیحِ دلخواهی باشد، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱) $((-a)^{k})^{۲}\,(-a)^{k}\,(-a)^{k}\,(-a)$ ۲) $((-a)^{k})^{-۲} \cdot (-a)^{۷۴}$

۳) $(((-a)^{۳k})^{۵})^{-۲k} \cdot ((-a^{k})^{-۵})^{-۶k}$ ۴) $(-a)^{۲k} \cdot (-a)^{۱-۲k} \cdot (a^{-۱})$

مجموع و تفاضل اعداد تواندار

برای ساده کردن عبارتهایی مانند:

$$۶ \times ۲^{۸} + ۵ \times ۲^{۹} + ۶ \times ۲^{۷} - ۲۴ \times ۲^{۵}$$

ابتدا باید توان اعداد نمایی بر پایهٔ یکسان را مساوی کرد. در عبارت اخیر می‌توان نمای تمام اعداد توانی با پایهٔ ۲ را به ۸ رساند. یعنی اعداد تواندار با پایهٔ یکسان را متشابه کرد:

$۶ \times ۲^{۷} = ۳ \times ۲ \times ۲^{۷} = ۳ \times ۲^{۸}$ و $۵ \times ۲^{۹} = ۵ \times ۲ \times ۲^{۸} = ۱۰ \times ۲^{۸}$

$۲۴ \times ۲^{۵} = ۳ \times ۸ \times ۲^{۵} = ۳ \times ۲^{۳} \times ۲^{۵} = ۳ \times ۲^{۸}$

بنابراین داریم:

$$۶ \times ۲^{۸} + ۵ \times ۲^{۹} + ۶ \times ۲^{۷} - ۲۴ \times ۲^{۵} = ۶ \times ۲^{۸} + ۱۰ \times ۲^{۸} + ۳ \times ۲^{۸} - ۳ \times ۲^{۸}$$
$$= (۶ + ۱۰ + ۳ - ۳) \times ۲^{۸}$$
$$= ۱۶ \times ۲^{۸}$$
$$= ۲^{۴} \times ۲^{۸}$$
$$= ۲^{۱۲}$$

همچنین عبارتی مانند:

$$4 \times 3^{34} + 9 \times 3^{32} - 15 \times 3^{33} + 27 \times 3^{31}$$

را به شکل زیر می‌توان ساده کرد:

$$\begin{aligned} 4\times3^{34}+9\times3^{32}-15\times3^{33}+27\times3^{31} &= 4\times3^{34}+3^{2}\times3^{32}-5\times3\times3^{33}+3^{3}\times3^{31} \\ &= 4 \times 3^{34} + 3^{34} - 5 \times 3^{34} + 3^{34} \\ &= (4 + 1 - 5 + 1) \times 3^{34} \\ &= 3^{34} \end{aligned}$$

همین‌طور عبارتی را مانند:

$$A = 20(a^{3})^{2} + 5\,(-a^{2})^{3} - 3(-a^{3})^{2} + (-a)^{2}\,(2a^{2})\,(-a^{2})$$

که در آن a عدد حقیقی است، می‌توان به شکل زیر ساده کرد:

$$A = 20a^{6} - 5a^{6} - 3a^{6} - 2a^{6} = (20 - 5 - 3 - 2) \times a^{6} = 10a^{6}$$

بنابراین حاصل عبارت A برابر $10a^{6}$ است.

با توجه به مثالهای اخیر دستور زیر را می‌توان بیان کرد:

۷) برای مجموع یا تفاضل اعداد توانی، ابتدا عددهای تواندار با پایهٔ یکسان را متشابه می‌کنیم و سپس مانند جمع جبری جملات متشابه عمل می‌کنیم.

مثال ۱۳: با فرض این‌که a یک عدد حقیقی است، حاصل هریک از عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

$$1)\ A = 5\,(a^{3})^{2} - 4\,(a^{2})^{3}$$

$$2)\ B = 7\,(a^{3})^{4} + (-a^{6})^{2} - 3a^{12} + (-a)^{12} - 5\,(-a^{3})^{4}$$

حل:

$$1)\ A = 5a^{6} - 4a^{6} = (5 - 4) \times a^{6} = a^{6}$$

$$2)\ B = 7a^{12} + a^{12} - 3a^{12} + a^{12} - 5a^{12} = (7 + 1 - 3 + 1 - 5) \times a^{12} = a^{12}$$

مثال ۱۴: بافرض این‌که x یک عدد حقیقی است، حاصل هریک از عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

$$1)\ A = 3^{x-1} + 3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2}$$

$$2)\ B = 25^{x} + 5^{2x+1} - 5^{2x+2} + 25^{x+1} - 5^{2x}$$

۳) $C = ۹ \times ۳^{۲x} - ۹^{x} + ۲۷ \times ۳^{۲x-۲} - ۶ \times ۳^{۲x-۱} + ۲ \times ۹^{x+۱}$

۴) $D = \dfrac{۲^{x} + ۲^{x+۱} + ۲^{x+۲} + ۲^{x+۳}}{۴ \times ۲^{x+۳} - ۲ \times ۲^{x+۳} - ۲^{x+۲}}$

حل:

$$A = ۳^{x-۱} + ۳^{x} + ۳^{x+۱} + ۳^{x+۲} = \frac{۳^{x}}{۳} + ۳^{x} + ۳ \times ۳^{x} + ۳^{۲} \times ۳^{x}$$

$$= (\frac{۱}{۳} + ۱ + ۳ + ۹) \times ۳^{x} = \frac{۴۰}{۳} \times ۳^{x} = ۴۰ \times \frac{۳^{x}}{۳} = ۴۰ \times ۳^{x-۱}$$

$$B = ۲۵^{x} + ۵^{۲x} \times ۵ - ۵^{۲x} \times ۵^{۲} + ۲۵^{x} \times ۲۵ - ۵^{۲x}$$

$$= ۵^{۲x} + ۵ \times ۵^{۲x} - ۲۵ \times ۵^{۲x} + ۲۵ \times ۵^{۲x} - ۵^{۲x}$$

$$= (۱ + ۵ - ۲۵ + ۲۵ - ۱) \times ۵^{۲x} = ۵ \times ۵^{۲x} = ۵^{۲x+۱}$$

$$C = ۹ \times ۳^{۲x} - ۳^{۲x} + ۲۷ \times \frac{۳^{۲x}}{۳^{۲}} - ۶ \times \frac{۳^{۲x}}{۳} + ۲ \times ۹^{x} \times ۹$$

$$= ۹ \times ۳^{۲x} - ۳^{۲x} + \frac{۲۷}{۹} \times ۳^{۲x} - \frac{۶}{۳} \times ۳^{۲x} + ۱۸ \times ۳^{۲x}$$

$$= (۹ - ۱ + ۳ - ۲ + ۱۸) \times ۳^{۲x} = ۲۷ \times ۳^{۲x} = ۳^{۳} \times ۳^{۲x} = ۳^{۲x+۳}$$

$$D = \frac{۲^{x} + ۲ \times ۲^{x} + ۲^{۲} \times ۲^{x} + ۲^{۳} \times ۲^{x}}{۴ \times ۲^{۳} \times ۲^{x} - ۲ \times ۲^{۳} \times ۲^{x} - ۲^{۲} \times ۲^{x}} = \frac{۲^{x}(۱ + ۲ + ۴ + ۸)}{۲^{x}(۳۲ - ۱۶ - ۴)} = \frac{۱۵}{۱۲} = \frac{۵}{۴}$$

تمرین: با فرض این‌که x یک عدد حقیقی است. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

۱) $A = ۹^{x} - ۲ \times ۹^{x} + ۵ \times ۳^{۲x} - ۴ \times ۳^{۲x} + ۹ \times ۳^{۲x}$ (جواب: $A = ۳^{۲x+۲}$)

۲) $B = ۲۵^{x} + ۵^{۶} \times ۵^{۲x+۱} - ۴ \times ۲۵^{x+۱} + ۴ \times ۵^{۲x+۲} - ۵^{۲x}$ (جواب: $B = ۵^{۲x+۷}$)

۳) $C = \dfrac{۳^{x} + ۴ \times ۳^{x} + ۳^{x+۱} - ۵ \times ۳^{x+۱} + ۳^{x+۲}}{۳ \times ۳^{x-۱} \times ۳^{x} \times ۳^{۲-x} + ۳^{x+۱}}$ (جواب: $C = \frac{۱}{۶}$)

۴) $D = \dfrac{۲^{x+۲} + ۲^{x+۴} - ۲^{x+۳} + ۵ \times ۲^{x}}{۳ \times ۲^{x} - ۲^{x+۱} + ۲^{x+۴} - ۵ \times ۲^{x+۱}}$ (جواب: $D = \frac{۱۷}{۷}$)

حل معادله‌های توانی (نمایی)

معادلهٔ توانی، معادله‌ای است که در آن مجهول در توان ظاهر شده است، مانند:

$$۲^x = ۱۶$$

برای حل چنین معادله‌ای باید دو طرف معادله را به دو عدد توان‌دار با پایه‌های یکسان تبدیل کنیم:

$$۲^x = ۲^۴$$

سپس توانهای دو طرف تساوی را مساوی هم قرار دهیم و جواب معادله را به‌دست آوریم:

$$x = ۴$$

این تذکر لازم است که برای حل معادله‌های توانی، باید آگاهی کافی از تعاریف و دستورها و عملیات توانی داشته باشیم. زیرا اغلب برای حل کردن یک معادلهٔ توانی باید اعمال جبری مختلفی انجام دهیم تا به یک تساوی قابل حل برسیم.

مثال ۱۵ : معادلهٔ توانی زیر را حل کنید.

$$۲^{۲x+۱} + ۴^{x+۲} + ۲ = ۷۴$$

حل:

$$۲^{۲x+۱} + ۴^{x+۲} = ۷۴ - ۲ \Rightarrow ۲^{۲x} \times ۲ + ۴^۲ \times ۴^x = ۷۲ \Rightarrow ۲ \times ۲^{۲x} + ۱۶ \times ۲^{۲x} = ۷۲$$

$$\Rightarrow (۲ + ۱۶) \times ۲^{۲x} = ۷۲ \Rightarrow ۱۸ \times ۲^{۲x} = ۷۲ \Rightarrow ۲^{۲x} = \frac{۷۲}{۱۸} = ۴$$

$$\Rightarrow ۲^{۲x} = ۲^۲ \Rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow \boxed{x = ۱}$$

بنابراین تنها جواب معادله $x = ۱$ است.

مثال ۱۶ : معادله‌های نمایی زیر را حل کنید.

۱) $۴^{۲x} = ۲۵۶$

۲) $۹^{x+۱} = ۲۷ \times ۳^{x+۲}$

۳) $۵^x + ۵^{x+۱} = ۶$

۴) $۵^{۲x+۲} \times ۲^{۲x} = ۰/۰۰۲۵$

۵) $۸ \times ۲^{۲x^۲} + ۲ = ۲۰۵۰$

۶) $(\frac{۱}{۳})^{۲-x} = ۲۴۳$

۷) $(\frac{۱}{۲۵})^{۲x} \times ۵^{x-۲} = ۵$

۸) $۲^{۲^{x}-۱} + ۱ = ۹$

۹) $(\frac{۱}{۴۹})^{x-\frac{۳}{۲}} \times ۷^{x} = ۷^{۴}$

۱۰) $۸^{x+۲} = ۸ \times ۳^{۴x+۴}$

۱۱) $۳^{x} + ۳^{x+۱} + ۳^{x+۲} + ۳^{x+۳} = ۳۶۰$

۱۲) $۵^{۲x+۱} + ۲۵^{x} - ۵^{۲x+۲} + ۲۵^{x+۱} - ۵^{۲x} = ۵^{۱۰۱}$

۱۳) $\frac{۳^{۲x} + ۳^{۲x-۱}}{۲ \times ۸^{x} + ۸ \times ۲^{۳x}} = \frac{۳}{۲۰}$

۱۴) $۳^{x} \times (۲\frac{۲}{۳})^{x} \times (\frac{۹}{۶۴})^{۲x-۱} = \frac{۹}{۸}$

۱۵) $(۰/۵)^{x-۴} \times \left(\frac{۱}{۰/۱۲۵}\right)^{۴-x} = (۰/۲۵)^{۲}$

۱۶) $۲^{x+۱} - ۲^{۶-x} = ۸$

۱۷) $۲^{x+۱} + ۲^{۲-x} = ۶$

۱۸) $۳ \times ۹ \times ۲۷ \times ۸۱ \times ۳^{۲x} - ۳^{۲x+۹} = ۲ \times ۳^{۱۹}$

حل:

۱) $۴^{۲x} = ۲۵۶ \Rightarrow ۴^{۲x} = ۴^{۴} \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow \boxed{x = ۲}$

۲) $۹^{x+۱} = ۲۷ \times ۳^{x+۲} \Rightarrow ۳^{۲x+۲} = ۳^{۳} \times ۳^{x+۲} \Rightarrow ۳^{۲x+۲} = ۳^{x+۵}$

$\Rightarrow ۲x + ۲ = x + ۵ \Rightarrow ۲x - x = ۵ - ۲ \Rightarrow \boxed{x = ۳}$

۳) $۵^{x} + ۵^{x+۱} = ۶ \Rightarrow ۵^{x} + ۵ \times ۵^{x} = ۶ \Rightarrow (۱ + ۵) \times ۵^{x} = ۶$

$\Rightarrow ۶ \times ۵^{x} = ۶ \Rightarrow ۵^{x} = ۱ \Rightarrow ۵^{x} = ۵^{۰} \Rightarrow \boxed{x = ۰}$

۴) $۵^{۲x+۲} \times ۲^{۲x} = ۰/۰۰۲۵ \Rightarrow ۵^{۲} \times ۵^{۲x} \times ۲^{۲x} = \frac{۲۵}{۱۰۰۰۰} = \frac{۲۵}{۱۰^{۴}}$

$\Rightarrow ۲۵ \times (۵ \times ۲)^{۲x} = ۲۵ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow ۱۰^{۲x} = ۱۰^{-۴} \Rightarrow ۲x = -۴ \Rightarrow \boxed{x = -۲}$

۵) $8 \times 2^{2x^2} + 2 = 2050 \Rightarrow 2^3 \times 2^{2x^2} = 2050 - 2 \Rightarrow 2^{2x^2+3} = 2048$

$\Rightarrow 2^{2x^2+3} = 2^{11} \Rightarrow 2x^2 + 3 = 11 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$

۶) $(\frac{1}{3})^{2-x} = 243 \Rightarrow (3^{-1})^{2-x} = 3^5 \Rightarrow 3^{x-2} = 3^5 \Rightarrow x - 2 = 5 \Rightarrow \boxed{x = 7}$

۷) $(\frac{1}{25})^{2x} \times 5^{x-2} = 5 \Rightarrow (5^{-2})^{2x} \times 5^{x-2} = 5 \Rightarrow 5^{-4x} \times 5^{x-2} = 5$

$\Rightarrow 5^{-4x+x-2} = 5 \Rightarrow 5^{-3x-2} = 5^1 \Rightarrow -3x - 2 = 1 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

۸) $2^{2^x-1} + 1 = 9 \Rightarrow 2^{2^x-1} = 9 - 1 \Rightarrow 2^{2^x-1} = 8 \Rightarrow 2^{2^x-1} = 2^3 \Rightarrow 2^x - 1 = 3$

$\Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

۹) $(\frac{1}{49})^{x-\frac{3}{2}} \times 7^x = 7^4 \Rightarrow (7^{-2})^{x-\frac{3}{2}} \times 7^x = 7^4$

$\Rightarrow 7^{-2x+3} \times 7^x = 7^4 \Rightarrow 7^{-2x+3+x} = 7^4 \Rightarrow 7^{-x+3} = 7^4$

$\Rightarrow -x + 3 = 4 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

۱۰) $8^{x+2} = 8 \times 3^{4x+4} \Rightarrow \frac{8^{x+2}}{8} = \frac{8 \times 3^{4x+4}}{8} \Rightarrow 8^{x+2-1} = 3^{4(x+1)}$

$\Rightarrow 8^{x+1} = (3^4)^{(x+1)} \Rightarrow 8^{x+1} = 81^{x+1}$

در معادلهٔ اخیر نماهای دو طرف برابر، ولی پایه‌ها برابر نیست. بنابراین معادله وقتی جواب دارد که نمای دو طرف معادله برابر صفرشود.

$x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

معادله به ازای $x = -1$ به تساوی عددی $8^0 = 81^0$ تبدیل می‌شود، که یک تساوی درست است.

۱۱) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 360 \Rightarrow 3^x + 3 \times 3^x + 3^2 \times 3^x + 3^3 \times 3^x = 360$

$\Rightarrow (1 + 3 + 9 + 27) \times 3^x = 360 \Rightarrow 40 \times 3^x = 360 \Rightarrow 3^x = \frac{360}{40} = 9$

$\Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

۱۲) $5^{2x+1} + 25^x - 5^{2x+2} + 25^{x+1} - 5^{2x} = 5^{101} \Rightarrow$

$$۵\times۵^{۲x}+۵^{۲x}-۵^{۲}\times۵^{۲x}+۲۵\times۵^{۲x}-۵^{۲x}=۵^{۱۰۱}\Rightarrow(۵+۱-۲۵+۲۵-۱)\times۵^{۲x}=۵^{۱۰۱}$$

$$\Rightarrow ۵\times۵^{۲x}=۵^{۱۰۱}\Rightarrow۵^{۲x+۱}=۵^{۱۰۱}\Rightarrow۲x+۱=۱۰۱\Rightarrow۲x=۱۰۰\Rightarrow\boxed{x=۵۰}$$

$$۱۳)\ \frac{۳^{۲x}+۳^{۲x-۱}}{۲\times۸^{x}+۸\times۲^{۳x}}=\frac{۳}{۲۰}\Rightarrow\frac{۳^{۲x}+\frac{۱}{۳}\times۳^{۲x}}{۲\times۸^{x}+۸\times۸^{x}}=\frac{۳}{۲۰}\Rightarrow\frac{(۱+\frac{۱}{۳})\times۳^{۲x}}{(۲+۸)\times۸^{x}}=\frac{۳}{۲۰}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{۴}{۳}\times۹^{x}}{۱۰\times۸^{x}}=\frac{۳}{۲۰}\Rightarrow\frac{۴}{۳۰}\times(\frac{۹}{۸})^{x}=\frac{۳}{۲۰}\Rightarrow(\frac{۹}{۸})^{x}=\frac{۹}{۸}$$

$$\Rightarrow(\frac{۹}{۸})^{x}=(\frac{۹}{۸})^{۱}\Rightarrow\boxed{x=۱}$$

$$۱۴)\ ۳^{x}\times(۲\tfrac{۲}{۳})^{x}\times(\frac{۹}{۶۴})^{۲x-۱}=\frac{۹}{۸}\Rightarrow۳^{x}\times(\frac{۸}{۳})^{x}\times(\frac{۹}{۶۴})^{۲x}\times(\frac{۹}{۶۴})^{-۱}=\frac{۹}{۸}$$

$$\Rightarrow(۳\times\frac{۸}{۳})^{x}\times(\frac{۹^{۲}}{۶۴^{۲}})^{x}\times\frac{۶۴}{۹}=\frac{۹}{۸}\Rightarrow(\frac{۸\times۹^{۲}}{۶۴\times۶۴})^{x}=\frac{۹^{۲}}{۶۴\times۸}$$

$$\Rightarrow(\frac{۹^{۲}}{۶۴\times۸})^{x}=(\frac{۹^{۲}}{۶۴\times۸})^{۱}\Rightarrow(\frac{۸۱}{۵۱۲})^{x}=(\frac{۸۱}{۵۱۲})^{۱}\Rightarrow\boxed{x=۱}$$

$$۱۵)\ (۰/۵)^{x-۴}\times\left(\frac{۱}{۰/۱۲۵}\right)^{۴-x}=(۰/۲۵)^{۲}\Rightarrow(۰/۵)^{x-۴}\times(۰/۱۲۵)^{x-۴}=(۰/۵)^{۴}$$

$$\Rightarrow(۰/۵)^{x-۴}\times(۰/۵)^{۳x-۱۲}=(۰/۵)^{۴}\Rightarrow(۰/۵)^{x-۴+۳x-۱۲}=(۰/۵)^{۴}$$

$$\Rightarrow(۰/۵)^{۴x-۱۶}=(۰/۵)^{۴}\Rightarrow۴x-۱۶=۴\Rightarrow۴x=۲۰\Rightarrow\boxed{x=۵}$$

$$۱۶)\ ۲^{x+۱}-۲^{۶-x}=۸\Rightarrow۲\times۲^{x}-۲^{۶}\times۲^{-x}=۸$$

دو طرف معادله را بر ۲ تقسیم و در ۲^{x} ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۲^{x}}{۲}(۲\times۲^{x}-۲^{۶}\times۲^{-x})=۸\times\frac{۲^{x}}{۲}\Rightarrow۲^{۲x}-۲^{۵}=۴\times۲^{x}$$

با فرض $A=۲^{x}$، داریم:

$$A^{۲}-۳۲=۴A\Rightarrow A^{۲}-۴A-۳۲=۰\Rightarrow(A+۴)(A-۸)=۰\Rightarrow A+۴=۰\ \text{یا}\ A-۸=۰$$

$$\Rightarrow ۲^{x}+۴=۰\ \text{یا}\ ۲^{x}-۸=۰\Rightarrow۲^{x}=-۴\ \text{یا}\ ۲^{x}=۸=۲^{۳}\Rightarrow\boxed{x=۳}$$

معادلهٔ $۲^{x}=-۴$ جواب ندارد.

$$17)\ 2^{x+1}+2^{2-x}=6 \Rightarrow 2\times 2^{x}+2^{2}\times 2^{-x}=6$$

دو طرف معادله را بر ۲ تقسیم و در 2^x ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2^x}{2}(2\times 2^x+4\times 2^{-x})=\frac{2^x}{2}\times 6 \Rightarrow 2^{2x}+2=3\times 2^x$$

با فرض $A=2^x$ ، داریم:

$$A^2+2=3A \Rightarrow A^2-3A+2=0 \Rightarrow (A-1)(A-2)=0$$

$$\Rightarrow A-1=0 \text{ یا } A-2=0 \Rightarrow A=1 \text{ یا } A=2 \Rightarrow 2^x=1 \text{ یا } 2^x=2$$

$$\Rightarrow 2^x=2^0 \text{ یا } 2^x=2^1 \Rightarrow \boxed{x=0} \text{ یا } \boxed{x=1}$$

بنابراین معادله دارای دو جواب $x=0$ و $x=1$ است.

$$18)\ 3\times 9\times 27\times 81\times 3^{2x}-3^{2x+9}=2\times 3^{19} \Rightarrow 3\times 3^2\times 3^3\times 3^4\times 3^{2x}-3^{2x+9}=2\times 3^{19}$$

$$\Rightarrow 3\times 3^9\times 3^{2x}-3^{2x+9}=2\times 3^{19} \Rightarrow 3\times 3^{2x+9}-3^{2x+9}=2\times 3^{19}$$

$$\Rightarrow (3-1)\times 3^{2x+9}=2\times 3^{19} \Rightarrow 2\times 3^{2x+9}=2\times 3^{19} \Rightarrow 3^{2x+9}=3^{19}$$

$$\Rightarrow 2x+9=19 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

تمرین: معادله‌های نمایی زیر را حل کنید.

1) $5^{5x}=5^{100}$

2) $4^{5x+1}=2^{762}$

3) $3^{3x-1}+1=10$

4) $9^{3x}=3\times 3^{x+4}\times 3^{x-1}$

5) $3^{x+1}+3^{x-1}=30$

6) $(\frac{1}{2})^{5-x}=2^{95}$

7) $3^{10}\times 3^{20}\times 3^{30}\times 3^{40}\times 3^{x}-3^{x+99}=2\times 3^{9}$

۸) $2^{x-1} + 2^{x} + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 15$

۹) $\dfrac{3^{2x+1} + 3^{2x}}{4 \times 8^{x} + 2^{3x+4}} = \dfrac{9}{40}$

۱۰) $3^{x-2} \times 2^{3} \times (2\frac{2}{3})^{x} \times (\frac{9}{64})^{2x} = \frac{9}{64}$

۱۱) $(\frac{1}{49})^{x-\frac{3}{2}} = 7^{4-x}$

۱۲) $5^{x+3} = 25 \times 2^{5x+5}$

۱۳) $7^{2x^2+1} - 49^{x^2} = 6 \times 7^{4} \times 49^{2}$

۱۴) $(\frac{1}{2})^{x} \times (\frac{1000}{125})^{4-x} = 0/0625$

۱۵) $2^{x+2} = 16 + 2^{7-x}$

۱۶) $25^{2x+2} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3} + 21 = 25^{x+2} + 5^{2x+2} + 5^{2x} + 5^{3}$

۱۷) $7^{x+1} + 7^{2-x} = 56$

۱۸) $2^{2^x} + 2 = 17 + (1376)^{x} \times (1376)^{-x}$

رادیکال

عددهای گنگ

هر عددی که قابل تبدیل به نسبت دو عدد درست نباشد، عددی گنگ (اصم) است. می‌دانیم طول قطر مربعی به ضلع ۱ واحد، برابر $\sqrt{۲}$ است؛ که یک عدد گنگ است. بدیهی است که هیچ عدد گویایی نمی‌توان یافت که دقیقاً برابر $\sqrt{۲}$ باشد، زیرا:

$$۱/۴^۲ = ۱/۹۶ < ۲ < ۱/۵^۲ = ۲/۲۵$$
$$۱/۴۱^۲ = ۱/۹۸۸۱ < ۲ < ۱/۴۲^۲ = ۲/۰۱۶۴$$
$$۱/۴۱۴^۲ = ۱/۹۹۹۳۹۶ < ۲ < ۱/۴۱۵^۲ = ۲/۰۰۲۲۲۵$$
$$۱/۴۱۴۲^۲ = ۱/۹۹۹۹۶۱۶۴ < ۲ < ۱/۴۱۴۳^۲ = ۲/۰۰۰۲۴۴۴۹$$

و هرچه کار را ادامه دهیم، به عددی دهدهی نخواهیم رسید که مجذور آن برابر ۲ باشد. به عبارت دیگر، اگر m و n عددهایی درست فرض شوند، نمی‌توان $\sqrt{۲}$ را به صورت نسبت $\frac{m}{n}$ نوشت. در این جا این مطلب را با روش «برهان خلف» به اثبات می‌رسانیم: اگر $\frac{m}{n}$ را کسری ساده نشدنی فرض کنیم، یعنی m و n نسبت به‌هم، اول باشند. به بیان دیگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد m و n برابر واحد باشد (دو عدد m و n، هر دو، جز واحد بر هیچ عدد دیگری، بخش‌پذیر نباشند).

و فرض کنیم $\sqrt{۲}$ عدد گویا باشد و داشته باشیم:

$$\sqrt{۲}=\frac{m}{n} \Rightarrow ۲=\frac{m^۲}{n^۲} \Rightarrow m^۲=۲n^۲ \quad (۱)$$

از تساوی (۱) نتیجه می‌شود که سمت راست برابری بر ۲ بخش‌پذیر است، پس باید $m^۲$، یعنی m هم بر ۲ بخش‌پذیر باشد و داشته باشیم:

$$m = ۲k \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

در برابری (۱)، $2k$ را به جای m می‌گذاریم:

$$(2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \qquad (2)$$

از برابری (۲) هم باید نتیجه گرفت که عدد n نیز بر ۲ بخش‌پذیر است.
ولی از آن‌جا که m و n را نسبت به هم اول گرفته بودیم، نتیجه می‌گیریم که فرض ما نادرست بوده است و نمی‌توان $\sqrt{2}$ را به صورت کسر $\frac{m}{n}$ نوشت: $\sqrt{2}$ یک عدد گنگ است. تعداد عددهای گنگ، بی‌نهایت است؛ از این جالبتر، بین هر دو عدد گویا، یا بین هر دو عدد گنگ، یا بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد. مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا و گنگ را، مجموعهٔ عددهای حقیقی ($\mathbb{R}$) می‌نامند.

ریشهٔ دوم یک عدد

مساحت مربعی ۱۶ سانتیمتر مربع است، طول ضلع مربع چند سانتی‌متر است؟
برای حل این مسأله، طول ضلع مربع را x سانتی‌متر فرض می‌کنیم، در این‌صورت مساحت مربع x^2 خواهد بود:

$$x^2 = 16 \qquad (1)$$

در تساوی (۱) باید عدد x را پیدا کنیم؛ یعنی عددی را بیابیم که توان دوم آن ۱۶ باشد. با کمی دقت ملاحظه می‌شود که دو عدد ۴ و ۴− وجود دارند که توان دوم آنها ۱۶ است، زیرا:

$$(-4)^2 = 16 \qquad \text{و} \qquad 4^2 = 16$$

و چون طول ضلع، عدد منفی نمی‌تواند باشد، بنابراین طول ضلع مربع یعنی x برابر ۴ سانتیمتر می‌شود:

$$x = 4$$

عددهای ۴ و ۴− را ریشهٔ دوم عدد ۱۶ می‌نامند.
ریشه‌های دوم عدد $\frac{1}{16}$ عددهای $\frac{1}{4}$ و $-\frac{1}{4}$ می‌باشند، زیرا:

$$(-\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16} \qquad \text{و} \qquad (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$$

ریشهٔ دوم ۰ نیز ۰ است، زیرا:

$$0^2 = 0$$

آیا عدد ۱۶− ریشهٔ دوم دارد؟

عدد ۱۶− ریشهٔ دوم ندارد، زیرا اگر فرض کنیم عددهای ۴ و ۴− و یا هر عدد

حقیقی دیگر ریشهٔ دوم ۱۶- باشد؛ باید توان دوم این عددها (۴ و ۴- و یا هر عدد حقیقی دیگر که ریشهٔ دوم ۱۶- فرض می‌شود) مساوی ۱۶- شود؛ ولی می‌دانیم که توان دوم هر عدد حقیقی هیچگاه عدد منفی نیست؛ از این‌رو عدد ۱۶- ریشهٔ دوم حقیقی ندارد. و به همین دلیل:

اعداد منفی ریشهٔ دوم حقیقی ندارند

همان‌طور که گفته شد، ۴ و ۴- ریشه‌های دوم ۱۶ می‌باشند.

ریشه‌های دوم ۱۶را با $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ نشان‌می‌دهیم و به‌ترتیب‌می‌خوانیم‌رادیکال ۱۶ و منهای رادیکال ۱۶.

ریشه‌های دوم ۰/۰۱ عبارتند از:

$$\sqrt{0/01} = 0/1 \qquad \text{و} \qquad -\sqrt{0/01} = -0/1$$

زیرا:

$$(0/1)\times(0/1) = 0/01 \quad \text{و} \quad (-0/1)\times(-0/1) = 0/01$$

ریشه‌های دوم ۲ عبارتند از $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$. ($\sqrt{2}$ همان جذر ۲ است که مقدار آن را با هر تقریبی می‌توان حساب کرد.)

ریشه‌های‌دوم‌عدد a (a بزرگتریامساوی‌صفر) را با $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ نشان‌می‌دهیم. $\sqrt{a}$ ریشهٔ دوم مثبتِ a و $-\sqrt{a}$ ریشهٔ دوم منفیِ a است.

به طور کلی اگر x یک عدد حقیقی و a یک عدد مثبت و $x^2 = a$ باشد، داریم:

$$x = \sqrt{a} \quad \text{و} \quad x = -\sqrt{a} \qquad (a \geq 0)$$

به بیان دیگر اگر a یک عدد حقیقی مثبت یا صفر باشد؛ b را ریشهٔ دوم عدد حقیقی a گویند؛ هرگاه: $b^2 = a \; (a \geq 0)$

مثال ۱ : ریشه‌دوم‌عددهای ۳۶، ۹، ۱۰۰، ۰/۰۰۰۱، ۰/۸۱، $\frac{9}{16}$، $\frac{4}{81}$، ۱، ۲، ۴-، ۱۰۰- و $\frac{-1}{9}$ را در صورت وجود بیابید.

حل:

$$\pm\sqrt{36} = \pm 6 \quad \text{و} \quad \pm\sqrt{9} = \pm 3 \quad \text{و} \quad \pm\sqrt{100} = \pm 10 \quad \text{و} \quad \pm\sqrt{0/0001} = \pm 0/01$$

$$\pm\sqrt{0/81} = \pm 0/9 \quad \text{و} \quad \pm\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm\frac{3}{4} \quad \text{و} \quad \pm\sqrt{\frac{4}{81}} = \pm\frac{2}{9} \quad \text{و} \quad \pm\sqrt{1} = \pm 1 \quad \text{و}$$

$$\pm\sqrt{2} \simeq \pm 1/414$$

عددهای ۴- و ۱۰۰- و $\frac{-1}{9}$، چون عددی منفی هستند، ریشهٔ دوم ندارند.

مثال ۲: حاصل عبارتهای $\sqrt{169}$ ، $(\sqrt{36})^2$ ، $\sqrt{144}$ ، $\sqrt{0/04}$ ، $\sqrt{\frac{16}{81}}$،

$\sqrt{\frac{25}{4}}$ ، $-\sqrt{(-9)^2}$ ، $\sqrt{(-2)^2}$ ، $\sqrt{-9^2}$ ، $\sqrt{-16}$ ، $\sqrt{-1}$ ، $\sqrt{-(-2)^2}$

و $\sqrt{-(-9)^3}$ را در صورت وجود بیابید.

حل:

$$\sqrt{169}=\sqrt{13^2}=13 \quad , \quad (\sqrt{36})^2=(6)^2=36 \quad , \quad \sqrt{144}=\sqrt{12^2}=12$$

$$\sqrt{0/04}=\sqrt{(0/2)^2}=0/2 \quad , \quad \sqrt{\frac{16}{81}}=\sqrt{\frac{4^2}{9^2}}=\sqrt{(\frac{4}{9})^2}=\frac{4}{9}$$

$$\sqrt{\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{5^2}{2^2}}=\sqrt{(\frac{5}{2})^2}=\frac{5}{2} \quad , \quad -\sqrt{(-9)^2}=-\sqrt{81}=-9 \quad ,$$

$$\sqrt{-(-9)^3}=\sqrt{9^3}=\sqrt{(3^2)^3}=\sqrt{(3^3)^2}=3^3=27 , \sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$$

عددهای $\sqrt{-9^2}=\sqrt{-81}$ و $\sqrt{-16}$ و $\sqrt{-1}$ و $\sqrt{-(-2)^2}=\sqrt{-4}$، غیر حقیقی هستند. زیرا عددهای منفی جذر و ریشهٔ دوم حقیقی ندارند.

توجه: ریشهٔ دوم مثبت عدد $(-2)^2$ و یا ۴ برابر ۲ است، یعنی:

$$\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$$

و ریشهٔ دوم منفی عدد $(-2)^2$ و یا ۴ برابر ۲- است، یعنی:

$$-\sqrt{(-2)^2}=-\sqrt{4}=-2$$

همچنین توجه داشته باشید که عبارت $\sqrt{(-9)^2}$ و $\sqrt{-9^2}$ یکی نیست. زیرا:

$\sqrt{(-9)^2}=\sqrt{81}=9$ و $\sqrt{-9^2}=\sqrt{-81}$ (عدد ۸۱- ریشهٔ دوم حقیقی ندارد)
یعنی ریشهٔ دوم مثبت $(-9)^2$ برابر ۹ است. و -9^2 ریشهٔ دوم حقیقی ندارد.

محاسبهٔ $\sqrt{x^2}$

برای مثال عبارت $\sqrt{x^2}$ را به ازای برخی از مقادیر مختلف x محاسبه می‌کنیم.

$$x = ۴ \quad : \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{۴^2} = ۴$$
$$x = ۰/۲ \quad : \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{۰/۲^2} = ۰/۲$$
$$x = -۵ \quad : \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{(-۵)^2} = \sqrt{۲۵} = ۵$$
$$x = \frac{-۲}{۳} \quad : \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{(\frac{-۲}{۳})^2} = \sqrt{\frac{۴}{۹}} = \frac{۲}{۳}$$

بادقت‌درمحاسبات اخیر ملاحظه می‌شود در محاسبه $\sqrt{x^2}$ اگر به‌جای x اعداد مثبت یا صفر قرار دهیم، $\sqrt{x^2} = x$ و اگر به‌جای x عددهای منفی قرار دهیم، $\sqrt{x^2} = -x$ ، یعنی:

اگر x عددی مثبت یا صفر باشد $(x \geq ۰)$: $\sqrt{x^2} = x$

و اگر x عددی منفی باشد $(x < ۰)$: $\sqrt{x^2} = -x$

برای مثال:

$$\sqrt{(+۵)^2} = +۵ \quad , \quad \sqrt{(-۷)^2} = -(-۷) = ۷$$
$$\sqrt{(-\sqrt{۲})^2} = -(-\sqrt{۲}) = \sqrt{۲} \quad , \quad \sqrt{(+\frac{۴}{۹})} = +\frac{۲}{۳}$$
$$-\sqrt{(-\frac{۵}{۷})^2} = -(-(-\frac{۵}{۷})) = -\frac{۵}{۷} \quad , \quad -\sqrt{(-۵)^2} = -(-(-۵)) = -۵$$

مثال ۳: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $۵\sqrt{۹} + \sqrt{(-۴)^2} - ۴\sqrt{(-۳)^2}$

۲) $۲\sqrt{\frac{۲۵}{۳۶}} - \sqrt{(-\frac{۵}{۶})^2}$

۳) $۴\sqrt{(۰/۰۱)^2} - ۴\sqrt{(-۰/۰۱)^2} - ۲۰\sqrt{\frac{۱}{۱۰۰}} + \sqrt{۴}$

۴) $\sqrt{۱\frac{۱۶}{۹}} - \sqrt{(-\frac{۵}{۹})^2}$

حل:

۱) $۵\sqrt{۹} + \sqrt{(-۴)^2} - ۴\sqrt{(-۳)^2} = ۵(۳) - (-۴) - ۴(-(-۳)) = ۱۵ + ۴ - ۱۲ = ۷$

۲) $۲\sqrt{\frac{۲۵}{۳۶}} - \sqrt{(-\frac{۵}{۶})^2} = ۲(\frac{۵}{۶}) - (-(-\frac{۵}{۶})) = \frac{۱۰}{۶} - \frac{۵}{۶} = \frac{۱۰-۵}{۶} = \frac{۵}{۶}$

۳) $۴\sqrt{(۰/۰۱)^۲} - ۴\sqrt{(-۰/۰۱)^۲} - ۲۰\sqrt{\frac{۱}{۱۰۰}} + \sqrt{۴} = ۴(۰/۰۱) - ۴(-(-۰/۰۱)) - ۲۰(\frac{۱}{۱۰}) + ۲$

$= ۰/۰۴ - ۰/۰۴ - ۲ + ۲ = ۰$

۴) $\sqrt{۱\frac{۱۶}{۹}} - \sqrt{(-\frac{۵}{۹})^۲} = \sqrt{\frac{۲۵}{۹}} - (-(-\frac{۵}{۹})) = \frac{۵}{۳} - \frac{۵}{۹} = \frac{۱۵-۵}{۹} = \frac{۱۰}{۹}$

مثال ۴ : کدام یک از تساویهای زیر به ازای هر مقدار حقیقی x همواره درست است.

۱) $-\sqrt{x} = ۷$ ۲) $\sqrt{x} + ۴ = ۰$ ۳) $\sqrt{(-x^۲)^۲} = -x^۲$ ۴) $\sqrt{x^۴} = x^۲$

حل: فقط تساوی $\sqrt{x^۴} = x^۲$ درست است، زیرا در تساوی $-\sqrt{x} = ۷$ طرف اول تساوی یعنی $-\sqrt{x}$، به ازای هر x حقیقی مثبت، همواره منفی است و طرف دوم عددی است مثبت که در نتیجه این تساوی در مجموعهٔ اعداد حقیقی غیرممکن است. تساوی $\sqrt{x} + ۴ = ۰$ نیز در مجموعهٔ اعداد حقیقی غیرممکن است، زیرا طرف اول تساوی یعنی عبارت $\sqrt{x} + ۴$ به ازای هر x حقیقی مثبت، همواره مثبت و مخالف صفر است. همچنین تساوی $\sqrt{(-x^۲)^۲} = -x^۲$ فقط به ازای $x = ۰$ برقرار است. زیرا طرف اول تساوی یعنی $\sqrt{(-x^۲)^۲} = \sqrt{x^۴} = x^۲$، همواره مثبت است و طرف دوم تساوی یعنی $-x^۲$ همواره منفی است.

بدیهی است تساوی $\sqrt{x^۴} = x^۲$ به ازای هر مقدار حقیقی x همواره درست است، زیرا:

$$\sqrt{x^۴} = \sqrt{(x^۲)^۲} = x^۲$$

مثال ۵ : عبارت $\sqrt{(x^۲ - ۱)^۲}$ را به ازای $x = ۰$، $x = -۲$، $x = ۱$، $x = \sqrt{۲}$، $x = -\sqrt{۳}$، $x = ۴$، $x = -\frac{۱}{۲}$ و $x = ۰/۱$ حساب کنید.

حل:

$x = ۰ \quad : \quad \sqrt{(۰-۱)^۲} = \sqrt{(-۱)^۲} = -(-۱) = ۱$

$x = -۲ \quad : \quad \sqrt{(۴-۱)^۲} = \sqrt{۳^۲} = ۳$

$x = ۱ \quad : \quad \sqrt{(۱-۱)^۲} = \sqrt{۰^۲} = ۰$

$$x=\sqrt{۲} \quad : \quad \sqrt{(۲-۱)^{۲}}=\sqrt{۱^{۲}}=۱$$

$$x=-\sqrt{۳} \quad : \quad \sqrt{(۳-۱)^{۲}}=\sqrt{۲^{۲}}=۲$$

$$x=۴ \quad : \quad \sqrt{(۱۶-۱)^{۲}}=\sqrt{۱۵^{۲}}=۱۵$$

$$x=-\frac{۱}{۲} \quad : \quad \sqrt{(\frac{۱}{۴}-۱)^{۲}}=\sqrt{(-\frac{۳}{۴})^{۲}}=-(-\frac{۳}{۴})=\frac{۳}{۴}$$

$$x=۰/۱ \quad : \quad \sqrt{(۰/۰۱-۱)^{۲}}=\sqrt{(-۰/۹۹)^{۲}}=-(-۰/۹۹)=۰/۹۹$$

قدر مطلق

علی ۲۰۰ ریال موجودی دارد و حمید ۲۰۰ ریال مقروض است. در این جا، برای علی و حمید از عدد ۲۰۰ استفاده کردیم؛ در حالی که علی ۲۰۰+ ریال و حمید ۲۰۰− ریال دارد.

پس، وقتی فقط از خود عدد یاد شود و علامت آن (یعنی مثبت یا منفی بودن آن) مورد نظر نباشد، گوییم با قدرمطلق عدد روبرو هستیم. برای نشان دادن قدر مطلق، از دو پاره‌خط راست کوتاه و موازی که در دوطرف عدد قرار می‌دهیم، استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$|+۲۰۰| = ۲۰۰ \quad \text{و} \quad |-۲۰۰| = ۲۰۰$$

به بیان ساده‌تر، می‌توان گفت: منظور از قدر مطلق یک عدد، مقدار عددی آن، با علامت مثبت است. زیرا وقتی می‌نویسیم ۲۰۰ ، منظور ما در واقع ۲۰۰+ است.

مثال ۱ : قدر مطلق عددهای $-\sqrt{۲}$ ، $+\sqrt{۲}$ ، $۷-\sqrt{۵}$ ، $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ و $۲-\sqrt{۵}$ را بیابید.

حل:

$$|+\sqrt{۲}| = \sqrt{۲} \quad \text{و} \quad |-\sqrt{۲}| = \sqrt{۲}$$

می‌دانیم $\sqrt{۵} < ۷$ ؛ پس: $۷-\sqrt{۵} > ۰$ ، بنابراین قدر مطلق عدد $۷-\sqrt{۵}$ با خودش برابر است:

$$|۷-\sqrt{۵}| = ۷-\sqrt{۵}$$

همچنین می‌دانیم $\sqrt{۲} < \sqrt{۳}$ ؛ پس: $\sqrt{۳}-\sqrt{۲} > ۰$ ، بنابراین قدر مطلق عدد $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ با خودش برابر است:

$$|\sqrt{۳}-\sqrt{۲}| = \sqrt{۳}-\sqrt{۲}$$

و همین‌طور:

$$\sqrt{5} > 2 \quad : \quad \sqrt{5} - 2 > 0 \Rightarrow |\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$$

با توجه به مثال (۱)، قدر مطلق عدد حقیقی a را می‌توان به شکل برابری زیر نشان داد:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \quad (1)$$

تعبیر تساوی (۱) این است که اگر a عددی مثبت یا صفر باشد، قدر مطلق آن با خودش برابر است. ولی اگر a عددی منفی باشد، قدر مطلق آن، برابر با قرینهٔ آن عدد است.

توجه داشته باشید که $\sqrt{9}$ با ریشهٔ دوم ۹ فرق دارد:

ریشهٔ دوم عدد ۹، می‌تواند ۳+ یا ۳− باشد؛ ولی $\sqrt{9}$ همیشه برابر ۳ یعنی قدر مطلق ۳+ و ۳− می‌باشد:

$$\sqrt{9} = \sqrt{(\pm 3)^2} = |\pm 3| = 3$$

به این ترتیب، همیشه باید نوشت:

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad (2)$$

تساوی (۲) نشان می‌دهد که جذر هر عدد حقیقی مثبت، همیشه برابر یک عدد حقیقی مثبت است.

مثال ۲ : حاصل عبارتهای زیر را پیدا کنید.

$$1)\ |-\sqrt{2}| \qquad 2)\ \left|\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right| \qquad 3)\ \left|-\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}\right| \qquad 4)\ |7 - \sqrt{50}|$$

$$5)\ \left|\sqrt{(-3)^2} - \sqrt{(-5)^2}\right| \quad 6)\ \left|\,|3 - \sqrt{10}| - |4 + \sqrt{10}|\,\right| \quad 7)\ \sqrt{(\sqrt{3} - 4)^2}$$

حل: با توجه به تعریف قدرمطلق داریم:

$$1)\ |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

$$2)\ \left|\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{4-9}{6}\right| = \left|\frac{-5}{6}\right| = \frac{5}{6}$$

$$3)\ \left|-\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}\right| = \left|\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}\right| = \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$$

$$۴)\ \left| ۷-\sqrt{۵۰} \right| = \left| -(\sqrt{۵۰}-۷) \right| = \left| \sqrt{۵۰}-۷ \right| = \sqrt{۵۰}-۷$$

$$۵)\ \left| \sqrt{(-۳)^۲}-\sqrt{(-۵)^۲} \right| = \left| \,|-۳|-|-۵|\, \right| = |۳-۵| = |-۲| = ۲$$

$$۶)\ \left| \,|۳-\sqrt{۱۰}|-|۴+\sqrt{۱۰}|\, \right| = \left| \,|-(\sqrt{۱۰}-۳)|-(۴+\sqrt{۱۰})\, \right|$$

$$= \left| \,|\sqrt{۱۰}-۳|-۴-\sqrt{۱۰}\, \right|$$

$$= \left| \sqrt{۱۰}-۳-۴-\sqrt{۱۰} \right| = |-۷| = ۷$$

$$۷)\sqrt{(\sqrt{۳}-۴)^۲} = \left| \sqrt{۳}-۴ \right| = \left| -(۴-\sqrt{۳}) \right| = \left| ۴-\sqrt{۳} \right| = ۴-\sqrt{۳}$$

برای هر x و y حقیقی همیشه داریم:

$$۱)\ \sqrt{(xy)^۲} = \sqrt{x^۲y^۲} = \sqrt{x^۲}\,.\sqrt{y^۲} \Rightarrow |x.y| = |x|\,.\,|y|$$

$$۲)\ \sqrt{(\frac{x}{y})^۲} = \sqrt{\frac{x^۲}{y^۲}} = \frac{\sqrt{x^۲}}{\sqrt{y^۲}} \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq ۰)$$

$$۳)\ \sqrt{x^{۲n}} = \sqrt{(x^n)^۲} = (\sqrt{x^۲})^n \Rightarrow |x^n| = |x|^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

مثال ۳: حاصل عبارتهای $|-۵x^۲|$ ، $\left|\frac{-۷}{x^۴}\right|$ ، $\frac{|x|}{x}$ و $\left|(-۱۳)^{۷۵}\right|$ را پیدا کنید. $(x \neq ۰)$

حل:

$$۱)\ |-۵x^۲| = |-۵|\ |x^۲| = ۵x^۲ \qquad ۲)\ \left|\frac{-۷}{x^۴}\right| = \frac{|-۷|}{|x^۴|} = \frac{۷}{x^۴}$$

$$۳)\ \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > ۰ \\ \frac{-x}{x} & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{|x|}{x} = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

$$۴)\ \left|(-۱۳)^{۷۵}\right| = |(-۱۳)|^{۷۵} = ۱۳^{۷۵}$$

ریشهٔ n ام یک عدد

به همان ترتیب که از تعریف توان دوم یک عدد، ریشهٔ دوم را تعریف کردیم؛ می‌توان از تعریف توان سوم، توان چهارم، توان پنجم و ... توان n ام (n عدد طبیعی) ، ریشه‌های سوم، چهارم، پنجم و ... ریشهٔ n ام را تعریف کرد.

مثال:

از $۱۲۵ = ۵^۳$ نتیجه می‌شود $\sqrt[۳]{۱۲۵} = ۵$ و می‌خوانیم «ریشهٔ سوم ۱۲۵ برابر ۵ است».

از $۱۶ = ۲^۴$ نتیجه می‌شود $\sqrt[۴]{۱۶} = ۲$ ومی‌خوانیم«ریشهٔ چهارم(مثبت)۱۶برابر۲ است».

از $۲۴۳ = ۳^۵$ نتیجه می‌شود $\sqrt[۵]{۲۴۳} = ۳$ و می‌خوانیم «ریشهٔ پنجم ۲۴۳ برابر ۳ است».

از $۶۴ = ۲^۶$ نتیجه‌می‌شود $\sqrt[۶]{۶۴} = ۲$ومی‌خوانیم«ریشهٔ‌ششم(مثبت)۶۴برابر۲است».

به‌طور کلی:

برای هر عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq ۲)$ و عددهای حقیقی a و b ،

اگر $a^n = b$ و n عددی فرد باشد:

$$a = \sqrt[n]{b}$$

و اگر n عددی زوج و $b \geq ۰$ باشد:

$$|a| = \sqrt[n]{b}$$

برای مثال:

$\sqrt[۳]{-۸} = -۲$ ، زیرا $(-۲)^۳ = -۸$ است.

$\sqrt[۵]{۳۲} = ۲$ ، زیرا $۲^۵ = ۳۲$ است .

$\sqrt[۶]{۶۴} = ۲$ ، زیرا $۲^۶ = ۶۴$ است.

$\sqrt[۴]{\frac{۸۱}{۱۶}} = \frac{۳}{۲}$ ، زیرا $(\frac{۳}{۲})^۴ = \frac{۸۱}{۱۶}$ است.

عبارتهایی مانند:

$\sqrt[۶]{-۶۴}$ ، $\sqrt[۴]{-۱۶}$ ، $\sqrt[۸]{-۲^{۸}}$ ، $\sqrt[۱۰]{-۱۰^{۱۰}}$ ، $\sqrt{-۸۱}$ ، $\sqrt[۷۴]{-۲}$ ، $\sqrt[۱۰۰]{-۱}$

عدد حقیقی نیستند. زیرا **عددهای منفی ریشهٔ زوج ندارند.**

مثال ۶: حاصل عبارتهای زیر را در صورت وجود بیابید.

$$۱)\ \sqrt[۵]{\frac{-۱}{۳۲}} \quad ۲)\ \sqrt{(-۳)(-۳)^{۳}}-\sqrt{۸۱} \quad ۳)\ ۲+\sqrt[۳]{-۸} \quad ۴)\ ۲\sqrt{۵^{۲}}-\sqrt[۴]{۸۱}-\sqrt[۴]{۶۲۵}$$

$$۵)\ -\sqrt[۱۱]{(-۷)(-۷)^{۲}(-۷)^{۳}(-۷)^{۵}} \quad ۶)\ -\sqrt[۳]{۶\times(-۴)(-۹)} \quad ۷)\ \sqrt[۵]{۳۲}-\sqrt[۴]{(-۴)^{۲}}$$

$$۸)\ \sqrt[۳]{۸}\times\sqrt[۶]{۲\times۴\times۸} \quad ۹)\ \sqrt[۳]{-۸}-\sqrt{۴} \quad ۱۰)\ ۲\sqrt[۳]{۶۴}-\sqrt{۱۶}$$

حل:

$$۱)\ \sqrt[۵]{\frac{-۱}{۳۲}}=\sqrt[۵]{(-\frac{۱}{۲})^{۵}}=-\frac{۱}{۲}$$

$$۲)\ \sqrt{(-۳)(-۳)^{۳}}-\sqrt{۸۱}=\sqrt{(-۳)^{۴}}-۹=(-۳)^{۲}-۹=۹-۹=۰$$

$$۳)\ ۲+\sqrt[۳]{-۸}=۲+\sqrt[۳]{(-۲)^{۳}}=۲-۲=۰$$

$$۴)\ ۲\sqrt{۵^{۲}}-\sqrt[۴]{۸۱}-\sqrt[۴]{۶۲۵}=۲\times۵-\sqrt[۴]{۳^{۴}}-\sqrt[۴]{۵^{۴}}=۱۰-۳-۵=۲$$

$$۵)\ -\sqrt[۱۱]{(-۷)(-۷)^{۲}(-۷)^{۳}(-۷)^{۵}}=-\sqrt[۱۱]{(-۷)^{۱۱}}=-(-۷)=۷$$

$$۶)\ -\sqrt[۳]{۶\times(-۴)(-۹)}=-\sqrt[۳]{۶\times۳۶}=-\sqrt[۳]{۶^{۳}}=-۶$$

$$۷)\ \sqrt[۵]{۳۲}-\sqrt[۴]{(-۴)^{۲}}=\sqrt[۵]{۲^{۵}}-\sqrt[۴]{۱۶}=۲-\sqrt[۴]{۲^{۴}}=۲-۲=۰$$

$$۸)\ \sqrt[۳]{۸}\times\sqrt[۶]{۲\times۴\times۸}=\sqrt[۳]{۲^{۳}}\times\sqrt[۶]{۲\times۲^{۲}\times۲^{۳}}=۲\times\sqrt[۶]{۲^{۶}}=۲\times۲=۴$$

$$۹)\ \sqrt[۳]{-۸}-\sqrt{۴}=\sqrt[۳]{(-۲)^{۳}}-\sqrt{۲^{۲}}=-۲-۲=-۴$$

$$۱۰)\ ۲\sqrt[۳]{۶۴}-\sqrt{۱۶}=۲\sqrt[۳]{۴^{۳}}-\sqrt{۴^{۲}}=۲\times۴-۴=۸-۴=۴$$

تعریف (توان n ام کامل)

هرگاه عدد حقیقی k توان n ام عدد حقیقی a باشد، k را توان n ام کامل a می‌نامند؛ برای مثال: «۲۵ توان دوم کامل ۵+ یا ۵−» و «۸ توان سوم کامل ۲» و «۶۲۵ توان چهارم کامل ۵+ یا ۵−» و «۳۲ توان پنجم کامل ۲» و «۶۴ توان ششم کامل ۲+ یا ۲−» است.

به همین ترتیب اگر عبارت جبری D توانْ n ام عبارت جبری A باشد، D را توان n ام کامل A می‌نامند. برای مثال:
«$a^2+2ab+b^2$ یا $(a+b)^2$ توان دوم کامل $(a+b)$ یا $-(a+b)$» و «$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ یا $(a-b)^3$ توان سوم کامل $(a-b)$» و «x^{74} توان هفتاد و چهارم کامل x یا $-x$» و «$a^{12}b^6c^{18}$ توان ششم کامل (a^2bc^3)» است. بنابراین هر توان کاملی که زیر رادیکال بوده و نمای آن برابر با فرجهٔ رادیکال باشد، از زیر رادیکال بیرون می‌آید. برای مثال:

$$\sqrt[6]{7^6}=7 \quad , \quad \sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2 \quad , \quad \sqrt[7]{5^7}=5 \quad , \quad \sqrt[3]{x^9}=\sqrt[3]{(x^3)^3}=x^3$$

$$\sqrt[75]{(x^3+1)^{75}}=x^3+1 \quad , \quad \sqrt[5]{a^{10}b^{20}c^{35}}=\sqrt[5]{(a^2b^4c^7)^5}=a^2b^4c^7$$

توجه:

۱) اگر فرجهٔ رادیکال (n) عددی زوج باشد، عدد یا عبارتی که از زیر رادیکال بیرون می‌آید نمی‌تواند منفی باشد. برای مثال:

$$\sqrt[8]{(-2)^8}=-(-2)=2 \quad , \quad \sqrt[10]{(-10)^{10}}=-(-10)=10$$

$$\sqrt[74]{(-2)^{74}}=-(-2)=2 \quad , \quad \sqrt[2k]{(-5)^{2k}}=-(-5)=5 \quad (k\in\mathbb{N})$$

$$\sqrt[2k]{x^{4k}}=\sqrt[2k]{(x^2)^{2k}}=x^2 \quad , \quad \sqrt[6]{(-4)(-4)^2(-4)^3}=\sqrt[6]{(-4)^6}=-(-4)=4$$

$$\sqrt{x^4+2x^2+1}=\sqrt{(x^2+1)^2}=x^2+1 , \quad \sqrt[4k]{(-a)^{8k}}=\sqrt[4k]{((-a)^2)^{4k}}=\sqrt[4k]{(a^2)^{4k}}=a^2$$

$$\sqrt[4]{a^8b^{16}c^{40}}=\sqrt[4]{(a^2b^4c^{10})^4}=a^2b^4c^{10}$$

۲) اگر توان اعداد و یا عبارات جبری زیر رادیکال مضربی صحیح از فرجهٔ رادیکال نباشند، آن رادیکال را گنگ (اصم) می‌نامند. به‌طور مثال:

$$\sqrt{2} \ , \ \sqrt[3]{9} \ , \ \sqrt[5]{34} \ , \ \sqrt{x^2+1} \ , \ \sqrt[4]{(x^2+1)^3} \ , \ \sqrt[74]{2^{75}}$$

۳) اگر فرجهٔ رادیکال عددی زوج و عدد یا عبارت زیر رادیکال همواره منفی باشد، در این صورت آن عدد یا عبارت رادیکالی در مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) بی‌معنی است. برای مثال تمام اعداد عبارات رادیکالی زیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) بی‌معنی می‌باشند:

$$\sqrt[100]{-10^{100}} \text{ و } \sqrt[20]{-5^{20}} \text{ و } \sqrt[8]{-2^{8}} \text{ و } \sqrt[6]{-64} \text{ و } \sqrt[4]{-81} \text{ و } \sqrt{-4}$$

$$\sqrt[4k]{-(-2)^{4k}} \text{ و } \sqrt[2k]{-5^{2k}} \text{ و } \sqrt[2k]{-2^{2k}}\ (k \in \mathbb{N}) \text{ و } \sqrt[74]{-1} \text{ و } \sqrt[4]{-\sqrt{4}}$$

$$\sqrt[8]{-(x^4+2)} \text{ و } \sqrt{-(x^2+4)} \text{ و } \sqrt[4]{-(x^2+1)^4}\ (x \in \mathbb{R}) \text{ و } \sqrt[5]{2\sqrt[4]{-16}}$$

$$\sqrt[74]{\frac{-1}{x^{74}}} \text{ و } \sqrt[4]{\frac{-16}{(x^2+1)^4}} \text{ و } \sqrt[10]{\frac{-1}{2x^2+1}} \text{ و } \sqrt{-(x^4+2x^2+1)} \text{ و } \sqrt[6]{-4x^2-8}$$

$$\sqrt{-\sqrt[4]{(x^2+1)^4}}$$

مثال ۷: عبارتهای زیر به ازای چه مقادیری از مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) معنی دارند.

۱) $\sqrt{x}$ ۲) $\sqrt{-x}$ ۳) $\sqrt{x^2}$ ۴) $\sqrt{-x^2}$

۵) $\sqrt[4]{1-x}$ ۶) $\sqrt{-\sqrt[3]{x}}$ ۷) $\sqrt[8]{1-x^2}$ ۸) $\sqrt[100]{\frac{1}{x}}$

۹) $\sqrt[6]{x^4+1}$ ۱۰) $\sqrt[5]{-\sqrt{-2\sqrt[3]{-\sqrt{x^2}}}}$ ۱۱) $\sqrt[4]{-x^2-4}$ ۱۲) $\sqrt[74]{\frac{x+x^3}{x^2+1}}$

حل:

۱) $\sqrt{x}$ به ازای هر $x \geq 0$ معنی دارد.

۲) $\sqrt{-x}$ به ازای هر $-x \geq 0$ یا $x \leq 0$.

۳) $\sqrt{x^2}$ به ازای هر $x^2 \geq 0$ یا $x \in \mathbb{R}$.

۴) $\sqrt{-x^2}$ به ازای هر $-x^2 \geq 0$ یا $x^2 \leq 0$. چون $x = 0$ تنها جواب $x^2 \leq 0$ است، بنابراین عبارت $\sqrt{-x^2}$ فقط به ازای $x = 0$ معنی دارد.

۵) $\sqrt[4]{1-x}$ به ازای هر $1 - x \geq 0$ یا $x \leq 1$.

۶) $\sqrt{-\sqrt[3]{x}}$ به ازای هر $-\sqrt[3]{x} \geq 0$ یا $\sqrt[3]{x} \leq 0$ یا $x \leq 0$.

۷) $\sqrt[8]{1-x^2}$ به ازای هر $1-x^2 \geq 0$ یا $x^2 \leq 1$ یا $-1 \leq x \leq 1$.

۸) $\sqrt[100]{\frac{1}{x}}$ به ازای هر $\frac{1}{x} > 0$ یا $x > 0$.

۹) $\sqrt[6]{x^4+1}$ به ازای هر $x^4 + 1 > 0$ یا $x \in \mathbb{R}$.

۱۰) $\sqrt[5]{-\sqrt{-2\sqrt[3]{-\sqrt{x^2}}}}$ به ازای هر $-2\sqrt[3]{-\sqrt{x^2}} \geq 0$ یا $\sqrt[3]{-\sqrt{x^2}} \leq 0$ یا $-\sqrt{x^2} \leq 0$
یا $\sqrt{x^2} \geq 0$ یا $x \in \mathbb{R}$.

۱۱) $\sqrt{-x^2-4}$ به ازای هر $-x^2 - 4 > 0$ یا $x^2 + 4 < 0$ یا $x \in \varnothing$.
یعنی به ازای هر مقدار حقیقی بی‌معنی است.

۱۲) $\sqrt[74]{\frac{x+x^3}{x^2+1}}$ به ازای هر $\frac{x + x^3}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} = x \geq 0$ معنی دارد.

اعمال روی عددها و عبارتهای رایکالی

۱) ضرب عددها و عبارتهای رادیکالی

می‌دانیم $20 = 4 \times 5 = \sqrt{16} \times \sqrt{25}$ و $\sqrt{400} = 20$، بنابراین:

$$\sqrt{16} \times \sqrt{25} = \sqrt{16 \times 25} = \sqrt{400} = 20$$

و همچنین:

$$\sqrt[3]{-8} \times \sqrt[3]{8} = (-2) \times 2 = -4 \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{-64} = -4$$

بنابراین:

$$\sqrt[3]{-8} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(-8) \times 8} = \sqrt[3]{-64} = -4$$

به‌طورکلی: برای عددهای حقیقی a و b و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq 2)$، اگر n عددی فرد باشد:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad (1)$$

و اگر n زوج باشد، a و b باید بزرگتر یا مساوی صفر باشند:

$$\sqrt[n]{|a|} \times \sqrt[n]{|b|} = \sqrt[n]{|ab|}$$

مثال ۸: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\sqrt{2}\times\sqrt{18}$

۲) $\sqrt{14}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}$

۳) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\times\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}$

۴) $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{5}{7}}\times\sqrt{14}\times\sqrt{10}$

۵) $\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{\frac{3}{5}}\times\sqrt[5]{\frac{5}{9}}\times\sqrt[5]{27}$

۶) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\times\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}$

۷) $\sqrt[3]{a^2+b^2}\times\sqrt[3]{a^4+2a^2b^2+b^4}$

۸) $\sqrt[5]{x}\times\sqrt[5]{x^2}\times\sqrt[5]{x^2}$

۹) $\sqrt[3]{a^2bc}\times\sqrt[3]{ab^2c}\times\sqrt[3]{c}$

۱۰) $\sqrt[5]{a^2b^3}\times\sqrt[5]{a^3b^2}$

۱۱) $\sqrt[7]{a^2b^3c}\times\sqrt[7]{a^3b^2c^4}\times\sqrt[7]{a^2b^2c^2}$

۱۲) $\sqrt[3]{a-b}\times\sqrt[3]{a^2+ab+b^2}\times\sqrt[3]{(a^3-b^3)^2}$

حل:

۱) $\sqrt{2}\times\sqrt{18}=\sqrt{2\times 18}=\sqrt{36}=6$

۲) $\sqrt{14}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}=\sqrt{14\times 7\times 2}=\sqrt{14\times 14}=\sqrt{14^2}=14$

۳) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\times\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}=\sqrt[3]{9^2-17}=\sqrt[3]{81-17}=\sqrt[3]{64}=4$

۴) $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{5}{7}}\times\sqrt{14}\times\sqrt{10}=\sqrt{\frac{2}{3}\times6\times\frac{5}{7}\times14\times10}=\sqrt{2\times2\times5\times2\times10}$

$$=\sqrt{20^2}=20$$

۵) $\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{\frac{3}{5}}\times\sqrt[5]{\frac{5}{9}}\times\sqrt[5]{27}=\sqrt[5]{3\times9\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}\times27}=\sqrt[5]{3\times3^2\times3\times3}$

$$=\sqrt[5]{3^5}=3$$

۶) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\times\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}=\sqrt[4]{(10-\sqrt{19})(10+\sqrt{19})}=\sqrt[4]{100-19}$

$$=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$$

۷) $\sqrt[3]{a^2+b^2}\times\sqrt[3]{a^4+2a^2b^2+b^4}=\sqrt[3]{(a^2+b^2)(a^4+2a^2b^2+b^4)}$

$$=\sqrt[3]{(a^2+b^2)(a^2+b^2)^2}=\sqrt[3]{(a^2+b^2)^3}=a^2+b^2$$

۸) $\sqrt[5]{x}\times\sqrt[5]{x^2}\times\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[5]{x\times x^2\times x^2}=\sqrt[5]{x^5}=x$

۹) $\sqrt[3]{a^2bc}\times\sqrt[3]{ab^2c}\times\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{a^2bc\times ab^2c\times c}=\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=\sqrt[3]{(abc)^3}=abc$

۱۰) $\sqrt[5]{a^2b^3}\times\sqrt[5]{a^3b^2}=\sqrt[5]{a^2b^3\times a^3b^2}=\sqrt[5]{a^5b^5}=\sqrt[5]{(ab)^5}=ab$

۱۱) $\sqrt[7]{a^2b^3c}\times\sqrt[7]{a^3b^2c^4}\times\sqrt[7]{a^2b^2c^2}=\sqrt[7]{a^2b^3c\times a^3b^2c^4\times a^2b^2c^2}$

$$=\sqrt[7]{x^7b^7c^7}=\sqrt[7]{(abc)^7}=abc$$

۱۲) $\sqrt[3]{a-b}\times\sqrt[3]{a^2+ab+b^2}\times\sqrt[3]{(a^3-b^3)^2}=\sqrt[3]{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^3-b^3)^2}$

$$=\sqrt[3]{(a^3-b^3)^3}=a^3-b^3$$

توجه داشته باشید که از رابطهٔ (۱) می‌توان برای ساده کردن عددها و عبارتهای رادیکالی و یا بیرون آوردن عاملهایی از زیر رادیکال استفاده کرد:

مثال ۹:

۱) $\sqrt{۱۲}=\sqrt{۴\times۳}=\sqrt{۴}\times\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$

۲) $\sqrt[۵]{۶۴}=\sqrt[۵]{۳۲\times۲}=\sqrt[۵]{۳۲}\times\sqrt[۵]{۲}=\sqrt[۵]{۲^۵}\times\sqrt[۵]{۲}=۲\sqrt[۵]{۲}$

۳) $\sqrt[۳]{۲۴}=\sqrt[۳]{۸\times۳}=\sqrt[۳]{۸}\times\sqrt[۳]{۳}=\sqrt[۳]{۲^۳}\times\sqrt[۳]{۳}=۲\sqrt[۳]{۳}$

۴) $\sqrt[۴]{۲۴۳}=\sqrt[۴]{۸۱\times۳}=\sqrt[۴]{۸۱}\times\sqrt[۴]{۳}=\sqrt[۴]{۳^۴}\times\sqrt[۴]{۳}=۳\sqrt[۴]{۳}$

۵) $\sqrt[۳]{(a+b)^۴}=\sqrt[۳]{(a+b)^۳(a+b)}=\sqrt[۳]{(a+b)^۳}\times\sqrt[۳]{(a+b)}=(a+b)\sqrt[۳]{a+b}$

۶) $\sqrt[۵]{a^۷b^۶c^{۱۰}}=\sqrt[۵]{a^۵.a^۲.b^۵.b.(c^۲)^۵}=\sqrt[۵]{a^۵b^۵(c^۲)^۵}\times\sqrt[۵]{a^۲b}=abc^۲\sqrt[۵]{a^۲b}$

۷) $\sqrt[۷۰]{x^{۷۴}y^{۷۵}}=\sqrt[۷۰]{x^{۷۰}.x^۴.y^{۷۰}.y^۵}=\sqrt[۷۰]{x^{۷۰}}\times\sqrt[۷۰]{y^{۷۰}}\times\sqrt[۷۰]{x^۴y^۵}$

با فرض $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$، می‌توان نوشت:

$\sqrt[۷۰]{x^{۷۴}y^{۷۵}}=xy\sqrt[۷۰]{x^۴y^۵}$ (زیرا از داخل رادیکال با فرجهٔ زوج عدد منفی بیرون نمی‌آید.)

۸) $\sqrt[۶]{x^{۱۴}y^{۲۶}z^{۲۸}}=\sqrt[۶]{x^{۱۲}.x^۲.y^{۲۴}.y^۲.z^{۲۴}.z^۴}=\sqrt[۶]{x^{۱۲}y^{۲۴}z^{۲۴}}\times\sqrt[۶]{x^۲y^۲z^۴}$

$=\sqrt[۶]{(x^۲)^۶(y^۴)^۶(z^۴)^۶}\times\sqrt[۶]{x^۲y^۲z^۴}=x^۲y^۴z^۴\sqrt[۶]{x^۲y^۲z^۴}$

با توجه به تساویهای اخیر به این قانون، پی‌می‌بریم که اگر بخواهیم در عبارت $۲\sqrt{۳}$ عدد ۲ که ضریب $\sqrt{۳}$ است را به داخل رادیکال ببریم، باید آن‌را به توان ۲ (فرجهٔ رادیکال) برسانیم و سپس آن را در عدد زیر رادیکال ضرب کنیم.

مثال ۱۰:

۱) $۲\sqrt{۳}=\sqrt{۲^۲\times۳}=\sqrt{۴\times۳}=\sqrt{۱۲}$

۲) $۲\sqrt[۵]{۲} = \sqrt[۵]{۲^۵ \times ۲} = \sqrt[۵]{۳۲ \times ۲} = \sqrt[۵]{۶۴}$

۳) $۲\sqrt[۳]{۳} = \sqrt[۳]{۲^۳ \times ۳} = \sqrt[۳]{۸ \times ۳} = \sqrt[۳]{۲۴}$

۴) $۳\sqrt[۴]{۳} = \sqrt[۴]{۳^۴ \times ۳} = \sqrt[۴]{۸۱ \times ۳} = \sqrt[۴]{۲۴۳}$

۵) $-۵\sqrt{۲} = -\sqrt{۵^۲ \times ۲} = -\sqrt{۵۰}$

۶) $-۲\sqrt[۴]{۳} = -\sqrt[۴]{۲^۴ \times ۳} = -\sqrt[۴]{۴۸}$

۷) $x\sqrt[۵]{x^۳} = \sqrt[۵]{x^۵ . x^۳} = \sqrt[۵]{x^۸}$

۸) $xy^۲\sqrt[۷]{x^۳y^۴} = \sqrt[۷]{(xy^۲)^۷x^۳y^۴} = \sqrt[۷]{x^۷y^{۱۴}x^۳y^۴} = \sqrt[۷]{x^{۱۰}y^{۱۸}}$

۹) $-a^۲\sqrt[۴]{۲a^۲} = -\sqrt[۴]{(a^۲)^۴(۲a^۲)} = -\sqrt[۴]{a^۸(۲a^۲)} = -\sqrt[۴]{۲a^{۱۰}}$

توجه کنید که در عبارتهای $-۵\sqrt{۲}$ و $-۲\sqrt[۴]{۳}$ و $-a^۲\sqrt[۴]{۲a^۲}$ نمی‌توان (-۵) و (-۲) و $(-a^۲)$ را به زیر رادیکال ببریم، زیرا فرجهٔ رادیکالها زوج است و می‌دانیم از داخل رادیکال با فرجهٔ زوج عدد منفی بیرون نمی‌آید:

$$-۵\sqrt{۲} \neq \sqrt{(-۵)^۲(۲)} \quad \text{و} \quad -۲\sqrt[۴]{۳} \neq \sqrt[۴]{(-۲)^۴(۳)}$$

همچنین اگر a عدد حقیقی مخالف صفر باشد:

$$-a^۲\sqrt[۴]{۲a^۲} \neq \sqrt[۴]{(-a^۲)^۴(۲a^۲)} \qquad (a \in \mathbb{R} - \{۰\})$$

به طور کلی: برای عددهای حقیقی a و b و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq ۲)$، اگر n عددی فرد باشد:

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb} \qquad (۲)$$

و اگر n عددی زوج و $b \geq ۰$ باشد:

$$\sqrt[n]{a^nb} = |a|\sqrt[n]{b}$$

۲) تقسیم عددها و عبارتهای رادیکالی

می‌دانیم $\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$ و $\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$ ، بنابراین:

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

و همین‌طور $\frac{3}{4}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}$ و $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$ ، بنابراین:

$$\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$$

به‌طور کلی: برای عددهای حقیقی a و b و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ ($n \geq 2$) و $b \neq 0$ ، اگر n عددی فرد باشد:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (3)$$

و اگر n عددی زوج و $\frac{a}{b} \geq 0$ باشد:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$$

مثال ۱۱ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

۲) $\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

۳) $\frac{\sqrt{15}\times\sqrt{50}\times\sqrt{3}}{\sqrt{6}\times\sqrt{30}\times\sqrt{2}}$

۴) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

۵) $\sqrt[3]{\frac{16}{125}}$

۶) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$

۷) $\sqrt[4]{\frac{5^4}{2^{12}}}$

۸) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}$

۹) $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$

۱۰) $\frac{\sqrt[7]{4}}{\sqrt[7]{4\times 10^7}}$

۱۱) $\frac{\sqrt[5]{(a^2+1)^{70}}}{\sqrt[5]{(a^2+1)^{20}}}$

۱۲) $\frac{\sqrt[3]{(x^2+4)^2}\times\sqrt[3]{(x^2+4)^2}}{\sqrt[3]{(x^2+4)^7}}$

۱۳) $\frac{\sqrt[9]{x^2y^3}\times\sqrt[9]{xy^{12}}}{\sqrt[9]{xy^{21}}\times\sqrt[9]{x^{20}y^3}}$

۱۴) $\frac{x^2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^{10}}}$

حل:

$$۱)\ \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{20}{5}}=\sqrt{4}=2$$

$$۲)\ \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3\times 6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3\times 6}{2}}=\sqrt{9}=3$$

$$۳)\ \frac{\sqrt{15}\times\sqrt{50}\times\sqrt{3}}{\sqrt{6}\times\sqrt{30}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{15\times 50\times 3}}{\sqrt{6\times 30\times 2}}=\sqrt{\frac{15\times 50\times 3}{6\times 30\times 2}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$۴)\ \frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\frac{32}{2}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$$

$$۵)\ \sqrt[3]{\frac{16}{125}}=\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{\sqrt[3]{8\times 2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{2}}{5}=\frac{\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2}}{5}=\frac{2\sqrt[3]{2}}{5}$$

$$۶)\ \sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\sqrt[5]{\frac{2^5}{3^5}}=\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5}=\frac{2}{3}$$

$$۷)\ \sqrt[4]{\frac{5^4}{2^{12}}}=\sqrt[4]{\frac{5^4}{(2^3)^4}}=\sqrt[4]{\left(\frac{5}{8}\right)^4}=\frac{5}{8}$$

$$۸)\ \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[3]{\frac{2}{16}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{2}$$

$$۹)\ \frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\frac{108}{4}}=\sqrt[3]{\frac{4\times 27}{4}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$$

$$۱۰)\ \frac{\sqrt[7]{4}}{\sqrt[7]{4\times 10^7}}=\sqrt[7]{\frac{4}{4\times 10^7}}=\sqrt[7]{\frac{1}{10^7}}=\sqrt[7]{\left(\frac{1}{10}\right)^7}=\frac{1}{10}$$

$$۱۱)\ \frac{\sqrt[5]{(a^2+1)^{70}}}{\sqrt[5]{(a^2+1)^{20}}}=\sqrt[5]{\frac{(a^2+1)^{70}}{(a^2+1)^{20}}}=\sqrt[5]{(a^2+1)^{50}}=\sqrt[5]{[(a^2+1)^{10}]^5}=(a^2+1)^{10}$$

$$۱۲)\ \frac{\sqrt[۳]{(x^۲+۴)^۲}\times\sqrt[۳]{(x^۲+۴)^۲}}{\sqrt[۳]{(x^۲+۴)^۷}}=\frac{\sqrt[۳]{(x^۲+۴)^۲\times(x^۲+۴)^۲}}{\sqrt[۳]{(x^۲+۴)^۷}}=\frac{\sqrt[۳]{(x^۲+۴)^۴}}{\sqrt[۳]{(x^۲+۴)^۷}}$$

$$=\sqrt[۳]{\frac{(x^۲+۴)^۴}{(x^۲+۴)^۷}}=\sqrt[۳]{\frac{۱}{(x^۲+۴)^۳}}=\frac{۱}{x^۲+۴}$$

$$۱۳)\ \frac{\sqrt[۹]{x^۲y^۳}\times\sqrt[۹]{xy^{۱۲}}}{\sqrt[۹]{xy^{۲۱}}\times\sqrt[۹]{x^{۲۰}y^۳}}=\frac{\sqrt[۹]{x^۲y^۳.xy^{۱۲}}}{\sqrt[۹]{xy^{۲۱}.x^{۲۰}y^۳}}=\sqrt[۹]{\frac{x^۳y^{۱۵}}{x^{۲۱}y^{۲۴}}}=\sqrt[۹]{\frac{۱}{x^{۱۸}y^۹}}=\sqrt[۹]{(\frac{۱}{x^۲y})^۹}$$

$$=\frac{۱}{x^۲y}$$

$$۱۴)\ \frac{x^۲\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}}=\frac{\sqrt[۳]{(x^۲)^۳.x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}}=\frac{\sqrt[۳]{x^۶.x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}}=\sqrt[۳]{\frac{x^۷}{x^{۱۰}}}=\sqrt[۳]{\frac{۱}{x^۳}}=\sqrt[۳]{(\frac{۱}{x})^۳}=\frac{۱}{x}$$

۳) جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی

بامقایسهٔ تساوی $۷x+۴x=(۷+۴)x=۱۱x$ و $۷\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}=(۷+۴)\sqrt{۲}=۱۱\sqrt{۲}$ و تساوی $۷y-۴y=(۷-۴)y=۳y$ و $۷\sqrt[۷]{a}-۴\sqrt[۷]{a}=(۷-۴)\sqrt[۷]{a}=۳\sqrt[۷]{a}$ ملاحظه می‌کنیم که جمع جبری عددها وعبارتهای رادیکالی شبیه جمع جبری یک‌جمله‌ایها است. یعنی جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی را وقتی می‌توان به صورت ساده نوشت که عدد فرجهٔ رادیکال و عبارت زیر رادیکال با هم مساوی (و یا عددها و عبارتهای رادیکالی با هم معادل) باشند.

مثال ۱۲ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

$۱)\ ۵\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}-\sqrt{۲}$

$۲)\ ۷\sqrt[۴]{۴}-۵\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}-۴\sqrt[۴]{۴}$

$۳)\ ۲\sqrt[۱۵]{۸}-۳\sqrt[۵]{۲}-۴\sqrt[۱۵]{۸}+۵\sqrt[۵]{۲}$

$۴)\ ۵\sqrt[۳]{۵}+۲\sqrt[۳]{۵}-۱۴\sqrt[۹]{۱۲۵}+۴\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۹]{۱۲۵}$

حل:

$$۱)\ ۵\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=(۵+۳-۴+۲-۱)\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$$

$$۲)\ ۷\sqrt[۴]{۴}-۵\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}-۴\sqrt[۴]{۴}=(۷-۴)\sqrt[۴]{۴}+(-۵+۴)\sqrt{۲}$$

$$=۳\sqrt[۴]{۴}-\sqrt{۲}$$

با توجه به معادل بودن $\sqrt[۴]{۴}$ با $\sqrt{۲}$: $\sqrt[۴]{۴}=\sqrt[۴]{۲^۲}=\sqrt{۲}$

داریم:

$$۳\sqrt[۴]{۴}-\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=(۳-۱)\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$$

$$۳)\ ۲\sqrt[۱۵]{۸}-۳\sqrt[۵]{۲}-۴\sqrt[۱۵]{۸}+۵\sqrt[۵]{۲}=(۲-۴)\sqrt[۱۵]{۸}+(-۳+۵)\sqrt[۵]{۲}$$

$$=-۲\sqrt[۱۵]{۸}+۲\sqrt[۵]{۲}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[۱۵]{۸}$ با $\sqrt[۵]{۲}$: $\sqrt[۱۵]{۸}=\sqrt[۱۵]{۲^۳}=\sqrt[۵]{۲}$

داریم:

$$-۲\sqrt[۱۵]{۸}+۲\sqrt[۵]{۲}=-۲\sqrt[۵]{۲}+۲\sqrt[۵]{۲}=(-۲+۲)\sqrt[۵]{۲}=(۰)\sqrt[۵]{۲}=۰$$

$$۴)\ ۵\sqrt[۳]{۵}+۲\sqrt[۳]{۵}-۱۴\sqrt[۹]{۱۲۵}+۴\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۹]{۱۲۵}=(۵+۲+۴)\sqrt[۳]{۵}+(-۱۴+۱)\sqrt[۹]{۱۲۵}$$

$$=۱۱\sqrt[۳]{۵}-۱۳\sqrt[۹]{۱۲۵}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[۹]{۱۲۵}$ با $\sqrt[۳]{۵}$: $\sqrt[۹]{۱۲۵}=\sqrt[۹]{۵^۳}=\sqrt[۳]{۵}$

داریم:

$$۱۱\sqrt[۳]{۵}-۱۳\sqrt[۹]{۱۲۵}=۱۱\sqrt[۳]{۵}-۱۳\sqrt[۳]{۵}=(۱۱-۱۳)\sqrt[۳]{۵}=-۲\sqrt[۳]{۵}$$

توجه‌داشته باشید که در جمع جبری عبارتهای رادیکالی، ابتدا باید عاملهایی را که توان‌کامل فرجهٔ‌رادیکال‌هستند، از زیر رادیکال بیرون آورد و سپس عبارت را ساده کرد.

مثال ۱۳ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

$$۱)\ \sqrt{۵۴}+۳\sqrt{۶}-۵\sqrt{۲۴}+۴\sqrt{۶}-\sqrt{۲۴}+\sqrt[۴]{۳۶}$$

$$۲)\ ۲\sqrt[۳]{۱۶}-۷\sqrt[۳]{۲}+۵\sqrt[۳]{۱۶}-\sqrt[۳]{۵۴}+۴\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۱۶}+\sqrt[۶]{۴}$$

$$۳)\ ۳\sqrt[۴]{۴۰۵}+۵\sqrt[۴]{۵}-۲\sqrt[۴]{۸۰}+۴\sqrt[۴]{۵}-\sqrt[۴]{۴۰۵}+\sqrt[۴]{۸۰}$$

$$۴)\ \sqrt[۳]{a^۷}-۲\sqrt[۳]{a^۴}+۵\sqrt[۳]{a^۴}-\sqrt[۳]{a^{۱۰}}+۳\sqrt[۳]{a^۴}+\sqrt[۳]{a^{۱۰}}-\sqrt[۳]{a^۷}$$

$$۵)\ \sqrt[۵]{a^۶b^۶}-۲b\sqrt[۵]{a^۶b}-۵\sqrt[۵]{a^۶b^۶}+۳a\sqrt[۵]{ab^۶}+۳ab\sqrt[۵]{ab}$$

حل:

$$۱)\ \sqrt{۵۴}+۳\sqrt{۶}-۵\sqrt{۲۴}+۴\sqrt{۶}-\sqrt{۲۴}+\sqrt[۴]{۳۶}$$
$$=\sqrt{۹\times۶}+(۳+۴)\sqrt{۶}+(-۵-۱)\sqrt{۴\times۶}+\sqrt[۴]{۳۶}$$
$$=۳\sqrt{۶}+۷\sqrt{۶}-۶\times۲\sqrt{۶}+\sqrt[۴]{۳۶}$$
$$=(۳+۷-۱۲)\sqrt{۶}+\sqrt[۴]{۳۶}$$
$$=-۲\sqrt{۶}+\sqrt[۴]{۳۶}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[۴]{۳۶}$ با $\sqrt{۶}$: $\sqrt[۴]{۳۶}=\sqrt[۴]{۶^۲}=\sqrt{۶}$

داریم:

$$-۲\sqrt{۶}+\sqrt[۴]{۳۶}=-۲\sqrt{۶}+\sqrt{۶}=(-۲+۱)\sqrt{۶}=-\sqrt{۶}$$

$$۲)\ ۲\sqrt[۳]{۱۶}-۷\sqrt[۳]{۲}+۵\sqrt[۳]{۱۶}-\sqrt[۳]{۵۴}+۴\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۱۶}+\sqrt[۶]{۴}$$
$$=(۲+۵-۱)\sqrt[۳]{۱۶}+(-۷+۴)\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۵۴}+\sqrt[۶]{۴}$$
$$=۶\sqrt[۳]{۲^۳\times۲}-۳\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳^۳\times۲}+\sqrt[۶]{۴}$$
$$=۶\times۲\sqrt[۳]{۲}-۳\sqrt[۳]{۲}-۳\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۶]{۴}$$
$$=(۱۲-۳-۳)\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۶]{۴}$$
$$=۶\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۶]{۴}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[۶]{۴}$ با $\sqrt[۳]{۲}$: $\sqrt[۶]{۴}=\sqrt[۶]{۲^۲}=\sqrt[۳]{۲}$

داریم:

$$۶\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۶]{۴}=۶\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۲}=(۶+۱)\sqrt[۳]{۲}=۷\sqrt[۳]{۲}$$

$$۳)\ ۳\sqrt[۴]{۴۰۵}+۵\sqrt[۴]{۵}-۲\sqrt[۴]{۸۰}+۴\sqrt[۴]{۵}-\sqrt[۴]{۴۰۵}+\sqrt[۴]{۸۰}$$
$$=(۳-۱)\sqrt[۴]{۴۰۵}+(۵+۴)\sqrt[۴]{۵}+(-۲+۱)\sqrt[۴]{۸۰}$$
$$=۲\sqrt[۴]{۳^۴\times۵}+۹\sqrt[۴]{۵}--\sqrt[۴]{۲^۴\times۵}$$
$$=۲\times۳\sqrt[۴]{۵}+۹\sqrt[۴]{۵}-۲\sqrt[۴]{۵}$$
$$=(۶+۹-۲)\sqrt[۴]{۵}$$
$$=۱۳\sqrt[۴]{۵}$$

۴) $\sqrt[3]{a^7} - 2\sqrt[3]{a^4} + 5\sqrt[3]{a^4} - \sqrt[3]{a^{10}} + 3\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^{10}} - \sqrt[3]{a^7}$

$$= (1-1)\sqrt[3]{a^7} + (-2+5+3)\sqrt[3]{a^4} + (-1+1)\sqrt[3]{a^{10}}$$
$$= (0)\sqrt[3]{a^7} + 6\sqrt[3]{a^3.a} + (0)\sqrt[3]{a^{10}}$$
$$= 6a\sqrt[3]{a}$$

۵) $\sqrt[5]{a^6b^6} - 2b\sqrt[5]{a^6b} - 5\sqrt[5]{a^6b^6} + 3a\sqrt[5]{ab^6} + 3ab\sqrt[5]{ab}$

$$= (1-5)\sqrt[5]{a^5b^5.ab} - 2b\sqrt[5]{a^5.ab} + 3a\sqrt[5]{ab^5.b} + 3ab\sqrt[5]{ab}$$
$$= -4ab\sqrt[5]{ab} - 2ab\sqrt[5]{ab} + 3ab\sqrt[5]{ab} + 3ab\sqrt[5]{ab}$$
$$= (-4-2+3+3)ab\sqrt[5]{ab}$$
$$= (0)ab\sqrt[5]{ab}$$
$$= 0$$

تذکر: جمع دو عدد $\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ به صورت $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ نوشته می‌شود. همچنین دو عدد $\sqrt{2}$ و $\sqrt[3]{2}$ به صورت $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ نوشته می‌شود.

توان رساندن عددها و عبارتهای رادیکالی

بنا به تعریف توان می‌توانیم بنویسیم:

۱) $(\sqrt[5]{3})^4 = \sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3\times3\times3\times3} = \sqrt[5]{3^4}$

۲) $(\sqrt[4]{5})^3 = \sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5\times5\times5} = \sqrt[4]{5^3}$

$(\sqrt{y})^2 \quad \sqrt{y^2}$

به‌طور کلی:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

m عدد صحیح و n عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq 2)$ و a عدد حقیقی $(a \in \mathbb{R})$ می‌باشد. اگر n زوج باشد، باید a بزرگتر یا مساوی صفر $(a \geq 0)$ باشد:

$$(\sqrt[n]{|a|})^m = \sqrt[n]{|a|^m}$$

مثال ۱۴ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $(\sqrt[3]{5})^6$ ۲) $(-\sqrt{2})^4$ ۳) $(\sqrt[5]{3})^7$

۴) $(\sqrt[3]{-3})^2$ ۵) $(\sqrt[3]{-4})^5$ ۶) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$

۷) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ ۸) $(\sqrt[3]{-a^2})^4$ ۹) $(\sqrt[5]{a^3b^2})^3$

۱۰) $(-\sqrt[7]{a^4})^6$

حل:

۱) $(\sqrt[3]{5})^6=\sqrt[3]{5^6}=\sqrt[3]{(5^2)^3}=5^2=25$

۲) $(-\sqrt{2})^4=(\sqrt{2})^4=\sqrt{2^4}=\sqrt{(2^2)^2}=2^2=4$

۳) $(\sqrt[5]{3})^7=\sqrt[5]{3^7}=\sqrt[5]{3^5\times 3^2}=3\sqrt[5]{3^2}=3\sqrt[5]{9}$

۴) $(\sqrt[3]{-3})^2=\sqrt[3]{(-3)^2}=\sqrt[3]{9}$

۵) $(\sqrt[3]{-4})^5=\sqrt[3]{(-4)^5}=\sqrt[3]{-4^5}=-\sqrt[3]{(2^2)^5}=-\sqrt[3]{2^{10}}=-\sqrt[3]{2^9\times 2}$
$=-\sqrt[3]{(2^3)^3\times 2}=-2^3\sqrt[3]{2}=-8\sqrt[3]{2}$

۶) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2=(\sqrt{6})^2-2(\sqrt{6})(\sqrt{3})+(-\sqrt{3})^2$
$=\sqrt{6^2}-2\sqrt{6\times 3}+\sqrt{3^2}=6-2\sqrt{2\times 3^2}+3$
$=9-2\times 3\sqrt{2}=9-6\sqrt{2}$

۷) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2-2(\sqrt{3})(\sqrt{2})+(-\sqrt{2})^2$
$+(\sqrt{3})^2+2(\sqrt{3})(\sqrt{2})+(\sqrt{2})^2=\sqrt{3^2}-2\sqrt{6}+\sqrt{2^2}+\sqrt{3^2}+2\sqrt{6}+\sqrt{2^2}$
$=3+2+3+2=10$

۸) $(\sqrt[3]{-a^2})^4=\sqrt[3]{(-a^2)^4}=\sqrt[3]{a^8}=\sqrt[3]{a^6\times a^2}=\sqrt[3]{(a^2)^3\times a^2}=a^2\sqrt[3]{a^2}$

۹) $(\sqrt[5]{a^3b^2})^3=\sqrt[5]{(a^3b^2)^3}=\sqrt[5]{a^9b^6}=\sqrt[5]{a^5.a^4.b^5.b}=ab\sqrt[5]{a^4b}$

۱۰) $(-\sqrt[7]{a^4})^6=\sqrt[7]{(a^4)^6}=\sqrt[7]{a^{24}}=\sqrt[7]{a^{21}.a^3}=\sqrt[7]{(a^3)^7.a^3}=a^3\sqrt[7]{a^3}$

توجه داشته باشید که عبارتهایی نظیر: $(\sqrt{-۴})^۲$ ، $(-\sqrt[۴]{-۳})^۲$ ، $(\sqrt[۶]{-۵})^۳$ ، $(\sqrt[۸]{-۲})^۸$ و $(\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{-۲}})^۴$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی بی‌معنی است، زیرا $\sqrt{-۴}$ ، $\sqrt[۴]{-۳}$ ، $\sqrt[۶]{-۵}$ ، $\sqrt[۸]{-۲}$ و $\sqrt[۴]{-۲}$ عددهای حقیقی نیستند.

حالت خاص - به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $(\sqrt{۲})^۲ = \sqrt{۲^۲} = ۲$

۲) $(\sqrt[۵]{۷})^۵ = \sqrt[۵]{۷^۵} = ۷$

۳) $(\sqrt[۳]{۴})^۳ = \sqrt[۳]{۴^۳} = ۴$

۴) $(\sqrt[۴]{۳})^۴ = \sqrt[۴]{۳^۴} = ۳$

به‌طور کلی: برای عدد حقیقی a و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq ۲)$ ، اگر n عددی فرد باشد:

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad (۵)$$

و اگر n عددی زوج باشد:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \text{و} \quad (\sqrt[n]{|a|})^n = |a|$$

ریشهٔ یک عدد و یا عبارت رادیکالی

به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $\sqrt[۲]{\sqrt[۲]{۸۱}} = \sqrt[۲]{۹} = ۳$

و

$$\sqrt[۴]{۸۱} = \sqrt[۴]{۳^۴} = ۳$$

بنابراین:

$$\sqrt[۲]{\sqrt[۲]{۸۱}} = \sqrt[۴]{۸۱}$$

همچنین:

۲) $\sqrt[۳]{\sqrt[۲]{۶۴}} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$

و

$$\sqrt[۶]{۶۴} = \sqrt[۶]{۲^۶} = ۲$$

بنابراین:

$$\sqrt[۳]{\sqrt[۲]{۶۴}} = \sqrt[۶]{۶۴}$$

در مثال (۱) ملاحظه می‌کنیم که ریشهٔ دوم مثبت $\sqrt[2]{81}$ برابر با ریشهٔ چهارم مثبت ۸۱ است.

در مثال (۲) مشاهده می‌کنید که ریشهٔ سوم $\sqrt{64}$ برابر با ریشهٔ ششم مثبت ۶۴ است.

به‌طور کلی:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

ریشه m ام مثبت $\sqrt[n]{a}$، برابر با ریشه mn ام مثبت a است.

m و n عددهای طبیعی هستند و $m \geq 2$ و $n \geq 2$ و $a \in R$ است.

اگر m یا n و یا هر دو زوج باشند؛ a نمی‌تواند منفی باشد.

مثال ۱۵ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}})^{4}$ ۲) $(\sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{2}}})^{12}$ ۳) $(\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[4]{4}}})^{24}$

۴) $\sqrt[3]{(\sqrt{5\sqrt{2}})^{4}}$ ۵) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4^{60}}}}}$ ۶) $(\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}})^{32}$

۷) $(\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a}})^{15}$ ۸) $\sqrt[7]{(\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{7}}}})^{45}}$

حل:

۱) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}})^{4}=(\sqrt{\sqrt[4]{4}})^{4}=\sqrt{(\sqrt[4]{4})^{4}}=\sqrt{4}=2$

۲) $(\sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{2}}})^{12}=(\sqrt[6]{\sqrt{2^{2}\times 2}})^{12}=(\sqrt[12]{8})^{12}=8$

۳) $(\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[4]{4}}})^{24}=(\sqrt[3]{\sqrt{2^{2}\times 2\sqrt[4]{4}}})^{24}=(\sqrt[6]{\sqrt[4]{(2^{3})^{4}\times 4}})^{24}=(\sqrt[24]{2^{12}\times 4})^{24}$

$$=2^{12}\times 4=2^{12}\times 2^{2}=2^{14}$$

۴) $\sqrt[3]{(\sqrt{5\sqrt{2}})^{4}}=\sqrt[3]{(\sqrt{\sqrt{5^{2}\times 2}})^{4}}=\sqrt[3]{(\sqrt[4]{50})^{4}}=\sqrt[3]{50}$

$$۵)\quad \sqrt[۵]{\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{\sqrt{۴^{۶۰}}}}}=\sqrt[۲۰]{\sqrt[۳]{\sqrt{۴^{۶۰}}}}=\sqrt[۶۰]{\sqrt{۴^{۶۰}}}=\sqrt[۶۰]{(\sqrt{۴})^{۶۰}}=\sqrt{۴}=۲$$

$$۶)\quad \left(\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲}}}}}\right)^{۳۲}=\left(\sqrt{\sqrt{۲^۲\times ۲\sqrt{\sqrt{۲^۲\times ۲\sqrt{۲}}}}}\right)^{۳۲}=\left(\sqrt[۴]{۸\sqrt[۴]{۸\sqrt{۲}}}\right)^{۳۲}$$

$$=\left(\sqrt[۴]{\sqrt[۴]{۸^۴\times ۸\sqrt{۲}}}\right)^{۳۲}=\left(\sqrt[۱۶]{\sqrt{(۸^۵)^۲\times ۲}}\right)^{۳۲}$$

$$=\left(\sqrt[۳۲]{۸^{۱۰}\times ۲}\right)^{۳۲}=۸^{۱۰}\times ۲=(۲^۳)^{۱۰}\times ۲=۲^{۳۰}\times ۲=۲^{۳۱}$$

در حالت کلی اگر $a \geq ۰$ و تعداد رادیکالها n باشد داریم:

$$\underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a...\sqrt{a}}}}}_{n\ \text{مرتبه}}=\sqrt[۲^n]{a^{۲^n-۱}}\qquad (a\geq ۰)$$

برای مثال داریم:

$$\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳}}}}}}=\sqrt[۲^۶]{۳^{۲^۶-۱}}=\sqrt[۶۴]{۳^{۶۳}}$$

$$۷)\quad \left(\sqrt[۳]{a\sqrt[۵]{a}}\right)^{۱۵}=\left(\sqrt[۳]{\sqrt[۵]{a^۵.a}}\right)^{۱۵}=\left(\sqrt[۱۵]{a^۶}\right)^{۱۵}=a^۶$$

$$۸)\quad \sqrt[۷]{\left(\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{\sqrt[۳]{a^۷}}}\right)^{۴۵}}=\sqrt[۷]{\left(\sqrt[۱۵]{\sqrt[۳]{a^۷}}\right)^{۴۵}}=\sqrt[۷]{\left(\sqrt[۴۵]{a^۷}\right)^{۴۵}}=\sqrt[۷]{a^۷}=a$$

با توجه به مثالهای اخیر، در حالت کلی خواهیم داشت:

$$\sqrt[k]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}}}=\sqrt[kpqmn]{a}$$

n، m، p، q و k عددهای طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ می‌باشند؛ که اگر لااقل یکی از آنها زوج باشد، a نمی‌تواند منفی باشد، برای مثال داریم:

$$\sqrt[۱۰]{\sqrt[۳]{\sqrt[۵]{\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۷۵}}}}}=\sqrt[۱۸۰۰]{۷۵}\quad \text{و}\quad \sqrt[۳]{\sqrt{\sqrt[۵]{\sqrt[۴]{۲}}}}=\sqrt[۱۲۰]{۲}$$

توجه:

می‌دانیم که $2=\sqrt{4^1}$ و $2=\sqrt[4]{2^4}=\sqrt[4]{4^2}=\sqrt[2\times 2]{4^{1\times 2}}$ ، بنابراین:

$$\sqrt{4}=\sqrt[2\times 2]{4^{1\times 2}}$$

همچنین $a=\sqrt[5]{a^5}$ و $a=\sqrt[15]{a^{15}}=\sqrt[5\times 3]{(a^5)^3}$ ، بنابراین:

$$\sqrt[5]{a^5}=\sqrt[5\times 3]{a^{5\times 3}}$$

> به‌طور کلی:
> برای عدد حقیقی a^m و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq 2)$ ، اگر p عددی فرد باشد:
>
> $$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}} \quad (7)$$
>
> اگر n زوج باشد، a^m نمی‌تواند منفی باشد. و اگر p عددی زوج باشد:
>
> $$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{|a|^m}$$

یعنی: عدد فرجه رادیکال و توان عبارت زیر رادیکال را می‌توانیم در یک عدد طبیعی ضرب و یا بر یک عدد طبیعی تقسیم کنیم.

مثال:

۱) $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[7\times 3]{2^{7\times 2}}=\sqrt[21]{2^{14}}$

۲) $\sqrt[4]{2x^2}=\sqrt[2\times 4]{(2x^2)^2}=\sqrt[8]{4x^4}$

۳) $\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[3\times 4]{3^4}=\sqrt[3]{3}$

۴) $\sqrt[15]{\sqrt[3]{a^9}}=\sqrt[45]{a^9}=\sqrt[9\times 5]{a^9}=\sqrt[5]{a}$

نکته مهم:

در مورد تقسیم فرجه رادیکال و توان عبارت زیر رادیکال بر یک عدد زوج و یا ضرب فرجه رادیکال و توان عدد زیر رادیکال در یک عدد زوج، توجه به علامت عدد زیر رادیکال بسیار ضروری است.

مثال:

۱) $\sqrt[4]{(-9)^2}=\sqrt[4]{81}=3$ ؛ $\sqrt[4]{(-9)^2}=\sqrt{|-9|}=\sqrt{9}=3$

در نتیجه:

$$\sqrt[۴]{(-۹)^{۲}} \neq \sqrt[۲]{-۹}$$

۲) $\sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$

همچنین:

$$\sqrt[۳]{-۲۷} \neq \sqrt[۳\times۲]{(-۲۷)^{۲}}$$

از خاصیتهای اخیر برای ضرب یا تقسیم عبارتهای رادیکالی با فرجه‌های نامساوی استفاده می‌کنند، بدین‌ترتیب که ابتدا فرجه‌های رادیکالها را به فرجه مشترک تبدیل کرده و سپس عمل ضرب یا تقسیم را انجام می‌دهیم.

مثال:

۱) $\sqrt[۴]{۲}\times\sqrt{۲}=\sqrt[۴]{۲}\times\sqrt[۲\times۲]{۲^{۲}}=\sqrt[۴]{۲}\times\sqrt[۴]{۴}=\sqrt[۴]{۲\times۴}=\sqrt[۴]{۸}$

۲) $۲\sqrt[۳]{-۴}\times۳\sqrt{۲}=-۲\sqrt[۳]{۴}\times۳\sqrt{۲}=-۲\sqrt[۳\times۲]{۴^{۲}}\times۳\sqrt[۲\times۳]{۲^{۳}}$

$$=-۲\sqrt[۶]{۴^{۲}}\times۳\sqrt[۶]{۲^{۳}}=-۶\sqrt[۶]{۴^{۲}\times۲^{۳}}=-۶\sqrt[۶]{۲^{۴}\times۲^{۳}}$$

$$=-۶\sqrt[۶]{۲^{۷}}=-۶\sqrt[۶]{۲^{۶}\times۲}=-۶\times۲\sqrt[۶]{۲}=-۱۲\sqrt[۶]{۲}$$

۳) $\sqrt[۳]{۴}\div\sqrt[۵]{۸}=\sqrt[۳\times۵]{۴^{۵}}\div\sqrt[۵\times۳]{۸^{۳}}=\sqrt[۱۵]{۴^{۵}}\div\sqrt[۱۵]{۸^{۳}}$

$$=\sqrt[۱۵]{۴^{۵}\div۸^{۳}}=\sqrt[۱۵]{۲^{۱۰}\div۲^{۹}}=\sqrt[۱۵]{۲^{۱۰-۹}}=\sqrt[۱۵]{۲}$$

۴) $\sqrt[۴]{۳۶}\div\sqrt{۳}=\sqrt[۴]{۳۶}\div\sqrt[۲\times۲]{۳^{۲}}=\sqrt[۴]{۳۶}\div\sqrt[۴]{۹}=\sqrt[۴]{۳۶\div۹}=\sqrt[۴]{۴}=\sqrt{۲}$

مثال ۱۶ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt{۲}$

۲) $۵\sqrt{۲}\times۲\sqrt[۳]{-۲}$

۳) $\sqrt[۵]{۸}\times\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt{۲}$

۴) $۵\sqrt[۳]{۲۵}\times۲\sqrt{۳\sqrt{۴}}$

۵) $\sqrt{۱۵}\div\sqrt[۳]{۵}$

۶) $\sqrt[۴]{۲۲۵}\div\sqrt{۲۵}$

۷) $\sqrt[۳]{a\sqrt[۳]{a}}\times\sqrt[۳]{a^{۲}\sqrt[۵]{a}}$

۸) $\dfrac{\sqrt[۳]{a^{۲}}\div\sqrt[۷]{a^{۳}}}{\sqrt[۲۱]{a^{۱۲}}}$

۹) $\dfrac{\sqrt[۵]{a^{۳}}\times\sqrt[۳]{a^{۲}}}{\sqrt[۷]{a^{۱۲}}\div\sqrt[۵]{a^{۲}}}$

حل:

۱) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}=\sqrt[3\times2]{4^2}\times\sqrt[2\times3]{2^3}=\sqrt[6]{4^2}\times\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{4^2\times2^3}=\sqrt[6]{2^4\times2^3}$

$$=\sqrt[6]{2^7}=\sqrt[6]{2^6\times2}=2\sqrt[6]{2}$$

۲) $5\sqrt{2}\times2\sqrt[3]{-2}=-5\sqrt{2}\times2\sqrt[3]{2}=-5\sqrt[6]{2^3}\times2\sqrt[6]{2^2}=-10\sqrt[6]{2^3\times2^2}$

$$=-10\sqrt[6]{2^5}=-10\sqrt[6]{32}$$

۳) $\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}=\sqrt[30]{8^6}\times\sqrt[30]{4^{10}}\times\sqrt[30]{2^{15}}=\sqrt[30]{8^6\times4^{10}\times2^{15}}$

$$=\sqrt[30]{2^{18}\times2^{20}\times2^{15}}=\sqrt[30]{2^{53}}=\sqrt[30]{2^{30}\times2^{23}}=2\sqrt[30]{2^{23}}$$

۴) $5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{3\sqrt{4}}=5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{3\times2}=5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{6}$

$$=5\sqrt[6]{25^2}\times2\sqrt[6]{6^3}=10\sqrt[6]{25^2\times6^3}=10\sqrt[6]{135000}$$

۵) $\sqrt{15}\div\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{15^3}\div\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{15^3\div5^2}=\sqrt[6]{\dfrac{5^3\times3^3}{5^2}}=\sqrt[6]{5\times3^3}$

$$=\sqrt[6]{5\times27}=\sqrt[6]{135}$$

۶) $\sqrt[4]{225}\div\sqrt{25}=\sqrt[4]{225}\div\sqrt[4]{25^2}=\sqrt[4]{225\div25^2}=\sqrt[4]{\dfrac{5^2\times3^2}{5^4}}=\sqrt[4]{\dfrac{3^2}{5^2}}$

$$=\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{5}}$$

۷) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a}}=\sqrt[3]{a^3\sqrt[3]{a}\times\sqrt[5]{a}}=a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^5}\times\sqrt[15]{a^3}}$

$$=a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^5.a^3}}=a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^8}}=a\sqrt[45]{a^8}$$

۸) $\frac{\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}} = \frac{\sqrt[21]{(a^2)^7} \div \sqrt[21]{(a^3)^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}} = \sqrt[21]{\frac{a^{14} \div a^9}{a^{12}}} = \sqrt[21]{\frac{a^5}{a^{12}}} = \sqrt[21]{\frac{1}{a^7}}$

$$= \sqrt[21]{\left(\frac{1}{a}\right)^7} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}}$$

۹) $\frac{\sqrt[5]{a^3} \times \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}} \div \sqrt[5]{a^2}} = \frac{\sqrt[5]{a^3} \times \sqrt[3]{a^2}}{\frac{\sqrt[7]{a^{12}}}{\sqrt[5]{a^2}}} = \frac{\sqrt[5]{a^2} \times \sqrt[5]{a^3} \times \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}}} = \frac{\sqrt[5]{a^2 . a^3} \times \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}}}$

$$= \frac{\sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[21]{(a^2)^7}}{\sqrt[21]{(a^{12})^3}} = \frac{a \sqrt[21]{a^{14}}}{\sqrt[21]{a^{36}}} = a \sqrt[21]{\frac{a^{14}}{a^{36}}} = a \sqrt[21]{\frac{1}{a^{22}}}$$

$$= \sqrt[21]{\frac{a^{21}}{a^{22}}} = \sqrt[21]{\frac{1}{a}}$$

توانهای کسری (گویا)

پیش از این موضوع، توانهای صحیح (مثبت و منفی و صفر) و اعمال مربوط به آنها را مطالعه کردیم؛ در این جا توانهای کسری اعداد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

رابطهٔ $2^x \times 2^x = 2^1$ را در نظر می‌گیریم؛ اگر دستور ضرب توانهای صحیح را به‌کار بریم خواهیم داشت:

$$2^{x+x} = 2^1 \Rightarrow 2^{2x} = 2^1 \Rightarrow 2x = 1$$

در این صورت x نمی‌تواند عدد صحیح باشد و اگر فرض کنیم این دستور در این مورد نیز درست است، $x = \frac{1}{2}$ خواهد شد و در نتیجه:

$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^1 \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \qquad (2)$$

با مقایسهٔ (۱) و (۲) می‌توانیم بنویسیم:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

و همچنین داریم:

$$(۲^{\frac{۱}{۲}})^{۲} = ۲^{\frac{۱}{۲}\times ۲} = ۲^{۱} = ۲$$

به طور کلی:
اگر a برابر عددی مثبت و یا صفر باشد؛ بنا به تعریف می‌توان نوشت:

$$a^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{a} \qquad (a \geq ۰)$$

مثال:

$$۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵} \quad , \quad \sqrt{۳} = ۳^{\frac{۱}{۲}} \quad , \quad \sqrt{۴۹} = \sqrt{۷^{۲}} = (۷^{۲})^{\frac{۱}{۲}} = ۷$$

به طریق مشابه می‌توانیم $a^{\frac{۱}{n}}$ (n عدد طبیعی و $n \geq ۲$) را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

اگر n زوج باشد؛ a نمی‌تواند منفی باشد.

مثال:

$$\sqrt[۵]{۳۲} = \sqrt[۵]{۲^{۵}} = (۲^{۵})^{\frac{۱}{۵}} = ۲ \quad و \quad \sqrt[۳]{۱۲۵} = \sqrt[۳]{۵^{۳}} = (۵^{۳})^{\frac{۱}{۳}} = ۵ \quad و \quad ۵^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۵}$$

$$\sqrt[۴]{۹} = (۳^{۲})^{\frac{۱}{۴}} = ۳^{\frac{۱}{۲}} \quad و \quad \sqrt[۷]{۳} = ۳^{\frac{۱}{۷}}$$

می‌دانیم $\sqrt[۴]{۳} = ۳^{\frac{۱}{۴}}$ ، اگر دو طرف این تساوی را به توان ۵ برسانیم، خواهیم داشت:

$$(۳^{\frac{۱}{۴}})^{۵} = (\sqrt[۴]{۳})^{۵}$$

و یا

$$۳^{\frac{۵}{۴}} = \sqrt[۴]{۳^{۵}}$$

به‌طور کلی:
اگر m و n اعداد طبیعی و $n \geq ۲$ باشد، بنا به تعریف می‌توان نوشت:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}} \qquad (۸)$$

اگر n زوج باشد؛ a^{m} نمی‌تواند منفی باشد.

مثال:

$$7^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{7^4} \quad , \quad 2\times 5^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{5^2} = 2\sqrt[3]{25}$$

$$9\sqrt[4]{27} = 3^2\times\sqrt[4]{3^3} = 3^2\times 3^{\frac{3}{4}} = 3^{2+\frac{3}{4}} = 3^{\frac{11}{4}} = \sqrt[4]{3^{11}}$$

$$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[5]{8} = \sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{5}} = 2^{\frac{19}{15}} = 2^{\frac{15+4}{15}} = 2^{1+\frac{4}{15}}$$

$$= 2^1\times 2^{\frac{4}{15}} = 2\sqrt[15]{2^4} = 2\sqrt[15]{16}$$

با توجه به مطالب اخیر می‌توان نتیجه گرفت که دستورهای عملیات توان در مورد توانهای صحیح می‌تواند در مورد توانهای کسری (گویا) نیز به‌کار رود؛ بنابراین اگر m و n عددهایی گویا باشند و a عدد حقیقی باشد:

$$a^m . a^n = a^{m+n} \qquad (m,n\in \mathbb{Q} \quad , \quad a\in\mathbb{R})$$
$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (a\neq 0)$$

مثال:

۱) $a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{5}{2}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{5}{2}} = a^{\frac{13}{4}}$

۲) $b^{\frac{5}{3}}\times b^{-\frac{4}{9}} = b^{\frac{5}{3}-\frac{4}{9}} = b^{\frac{11}{9}}$

۳) $b^{\frac{7}{4}} : b^{\frac{7}{3}} = b^{\frac{7}{4}-\frac{7}{3}} = b^{\frac{-7}{12}}$

۴) $a^{\frac{2}{3}} : a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}-(-\frac{1}{2})} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$

۵) $7^{\frac{3}{4}}\times 7^{-\frac{4}{3}} = 7^{\frac{3}{4}-\frac{4}{3}} = 7^{-\frac{7}{12}}$

۶) $3^{\frac{1}{4}} : 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{5}{12}}$

در این‌جا عبارت $7^{-\frac{7}{12}}$ را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$7^{-\frac{7}{12}} = (7^{\frac{7}{12}})^{-1} = \frac{1}{7^{\frac{7}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{7^7}}$$

به همین ترتیب عبارت $3^{-\frac{5}{12}}$ را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$3^{-\frac{5}{12}} = (3^{\frac{5}{12}})^{-1} = \frac{1}{3^{\frac{5}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{3^5}}$$

به طور کلی:
اگر $a \neq 0$ و m و n اعداد طبیعی و $n \geq 2$، بنا به تعریف می‌توان نوشت:

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad (9)$$

اگر n زوج باشد؛ a^m نمی‌تواند منفی باشد.

مثال:

1) $5^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ 2) $a^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$ 3) $2^{-\frac{9}{7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{2^9}}=\frac{1}{\sqrt[7]{2^7\times 2^2}}=\frac{1}{2\sqrt[7]{4}}$

مثال ۱۷ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

1) $\sqrt[5]{8}\times 2^{-\frac{1}{5}}\times\sqrt[5]{16}\times 2^{-\frac{7}{5}}\times 2^{\frac{3}{5}}\times 2^{-\frac{2}{5}}$ 2) $\sqrt[3]{4}\times 2^{-\frac{5}{3}}\times\sqrt[3]{2}\times 2^{-\frac{2}{3}}$

3) $2^{-2.5}\times\frac{1}{\sqrt[5]{4^{-10}}}\times 2^{1.5}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\times\frac{1}{\sqrt[8]{3}}\times 3^{-\frac{1}{16}}$

5) $a^{-\frac{4}{3}}\times a^{\frac{5}{9}}\times\sqrt[3]{a^{-2}}\times a^{-\frac{4}{9}}\times\sqrt[9]{a^2}$ 6) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\times b^{-\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[3]{a^{-8}}\times\frac{\sqrt[9]{b^3}}{\sqrt[3]{a^4}}$

حل:

1) $\sqrt[5]{2^3}\times 2^{-\frac{1}{5}}\times\sqrt[5]{2^4}\times 2^{-\frac{7}{5}}\times 2^{\frac{3}{5}}\times 2^{-\frac{2}{5}}=2^{\frac{3}{5}-\frac{1}{5}+\frac{4}{5}-\frac{7}{5}+\frac{3}{5}-\frac{2}{5}}=2^{\frac{0}{5}}=2^0=1$

2) $\sqrt[3]{2^2}\times 2^{-\frac{5}{3}}\times\sqrt[3]{2}\times 2^{-\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\times 2^{-\frac{5}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}$

$$=2^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$

3) $2^{-2.5}\times\frac{1}{\sqrt[5]{2^{-20}}}\times 2^{1.5}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=2^{-2.5}\times 2^{-\left(\frac{-20}{5}\right)}\times 2^{1.5}\times 2^{-\frac{1}{2}}\times 2^{-\frac{5}{10}}$

$$=2^{-2.5+4+1.5-0.5-0.5}=2^2=4$$

$$۴)\ 3^{-\frac{1}{2}}\times 3^{-\frac{1}{4}}\times 3^{-\frac{1}{8}}\times 3^{-\frac{1}{16}}=3^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}}=3^{-\frac{15}{16}}=\frac{1}{3^{\frac{15}{16}}}=\frac{1}{\sqrt[16]{3^{15}}}$$

$$۵)\ a^{-\frac{4}{3}}\times a^{\frac{5}{9}}\times \sqrt[3]{a^{-2}}\times a^{-\frac{4}{9}}\times \sqrt[9]{a^{2}}=a^{-\frac{4}{3}}\times a^{\frac{5}{9}}\times a^{-\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{4}{9}}\times a^{\frac{2}{9}}$$

$$=a^{-\frac{4}{3}+\frac{5}{9}-\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}}=a^{-\frac{15}{9}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[9]{a^{15}}}=\frac{1}{\sqrt[9]{a^{9}\times a^{6}}}=\frac{1}{a\sqrt[9]{a^{6}}}$$

$$۶)\ \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\times b^{-\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}\times \sqrt[3]{a^{-8}}\times \frac{\sqrt[9]{b^{3}}}{\sqrt[3]{a^{4}}}=a^{-\frac{1}{3}}\times b^{-\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{8}{3}}\times b^{\frac{3}{9}}\times a^{-\frac{4}{3}}$$

$$=a^{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{8}{3}-\frac{4}{3}}\times b^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{9}}$$

$$=a^{-\frac{11}{3}}\times b^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{a^{11}}}\times\frac{1}{\sqrt[3]{b}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^{9}\times a^{2}}}\times\frac{1}{\sqrt[3]{b}}$$

$$=\frac{1}{a^{3}\sqrt[3]{a^{2}b}}$$

نکته: با فرض $a \geq 0$، برابری $\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}}$ وقتی برقرار است که دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ عددهای طبیعی بزرگتر یا برابر ۲ ($x \geq 2$) باشد.

گویا کردن مخرج کسرها

برای گویا کردن مخرج کسرها می‌توان از اتحادهای زیر و نتایج آنها استفاده کرد:

۱) $(a-b)(a+b)=a^{2}-b^{2}$ اتحاد مزدوج (تفاضل مربع دو عبارت)

۲) $(a-b)(a^{2}+ab+b^{2})=a^{3}-b^{3}$ (تفاضل مکعب دو عبارت)

۳) $(a+b)(a^{2}-ab+b^{2})=a^{3}+b^{3}$ (مجموع مکعب دو عبارت)

۴) $(a+b+c)(a^{2}+b^{2}+c^{2}-ab-ac-bc)=a^{3}+b^{3}+c^{3}-3abc$

با توجه به اتحاد (۴) بدیهی است که اگر $a + b + c = 0$، آنگاه:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$5)\ (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+b^{n-1})=a^n-b^n$$ (تفاضل توان nام دو عبارت)

اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل b به b− از اتحاد (۵) به اتحاد زیر می‌رسیم:

$$6)\ (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots+b^{n-1})=a^n+b^n$$ (مجموع توان n ام دو عبارت)

نتیجه ۱: اگر در اتحادهای (۵) و (۶)، $a=\sqrt[n]{x}$ و $b=\sqrt[n]{y}$ را قرار دهیم، به اتحادهای زیر می‌رسیم. در حالتی که n زوج باشد، x و y نمی‌توانند منفی باشند: ($x \geq 0$ و $y \geq 0$).

$$7)\ (\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y})(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\sqrt[n]{x^{n-3}y^2}+\dots+\sqrt[n]{y^{n-1}})=x-y$$

اگر n فرد باشد، داریم:

$$8)\ (\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y})(\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\sqrt[n]{x^{n-3}y^2}-\dots+\sqrt[n]{y^{n-1}})=x+y$$

نتیجه ۲: اگر در اتحاد (۴)، $a=\sqrt[3]{x}$ و $b=\sqrt[3]{y}$ و $c=\sqrt[3]{z}$ را قرار دهیم، به اتحاد زیر می‌رسیم.

$$9)\ (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}-\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{xz}-\sqrt[3]{yz})$$
$$=x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}$$

با توجه به اتحاد (۹)، بدیهی است که اگر $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0$، آنگاه:

$$x+y+z=3\sqrt[3]{xyz}$$

نتیجه ۳: اگر در اتحادهای (۲) و (۳)، $a=\sqrt[3]{x}$ و $b=\sqrt[3]{y}$ را قرار دهیم، به اتحادهای زیر می‌رسیم.

$$10)\ (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})=x-y$$ (اتحاد (۷) به ازای $n = 3$)

$$11)\ (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})=x+y$$ (اتحاد (۸) به ازای $n = 3$)

نتیجه ۴: اگر در اتحاد (۱)، $a=\sqrt{x}$ و $b=\sqrt{y}$ (با فرض منفی نبودن x و y) را

قرار دهیم، به اتحاد زیر می‌رسیم:

$$۱۲)\ (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=x-y \qquad (x \geq ۰ , y \geq ۰)$$

۱ـ اگر مخرج کسر فقط شامل یک عبارت رادیکالی به شکل $\sqrt[n]{a^m}$ باشد، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\frac{k}{s\sqrt[n]{a^m}}=\frac{k}{s\sqrt[n]{a^m}}\times\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{k\sqrt[n]{a^{n-m}}}{s\sqrt[n]{a^n}}$$

(m و n عددهای طبیعی و k و s عددهای گویا و $a \neq ۰$ و $s \neq ۰$ می‌باشند.)

با فرض این‌که a عددی مثبت باشد، داریم:

$$\frac{k}{s\sqrt[n]{a^m}}=\frac{k\sqrt[n]{a^{n-m}}}{sa} \qquad (a>۰)$$

مثال: مخرج کسر $\frac{۲}{۵\sqrt[۳]{-۴}}$ به صورت زیر گویا می‌شود.

$$\frac{۲}{۵\sqrt[۳]{-۴}}=\frac{-۲}{۵\sqrt[۳]{۲^۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{-۲\sqrt[۳]{۲}}{۵\sqrt[۳]{۲^۳}}=\frac{-۲\sqrt[۳]{۲}}{۵\times۲}=-\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۵}$$

۲ـ اگر مخرج کسر شامل دو عبارت رادیکالی با فرجه‌های زوج باشد، برای گویا کردن مخرج کسر به طور مکرر از اتحاد مزدوج (۱) یا (۱۲) استفاده می‌کنیم.

مثال: با فرض $a>۰$ و $b>۰$ ، مخرج کسر $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ را گویا کنید.

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲}{(\sqrt{a})^۲-(\sqrt{b})^۲}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲}{a-b}$$

مثال ۱۸ : مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$۱)\ \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$ $\qquad ۲)\ \frac{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}{\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۳}}$ $\qquad ۳)\ \frac{۷\sqrt{۵}-۴}{۷\sqrt{۵}+۴}$ $\qquad ۴)\ \frac{۳\sqrt[۴]{۵}+۴\sqrt[۴]{۲}}{۳\sqrt[۴]{۵}-۴\sqrt[۴]{۲}}$

حل: می‌دانیم دو جمله‌ایهای «$A - B$ و $A + B$» را مزدوج می‌گویند. همچنین

دوجمله‌ایهایی نظیر: «$a+\sqrt{b}$ و $a-\sqrt{b}$» و «$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $\sqrt{a}-\sqrt{b}$» و «$\sqrt[۴]{a}-\sqrt[۴]{b}$ و $\sqrt[۴]{a}+\sqrt[۴]{b}$» را مزدوج می‌نامند.

برای گویاکردن مخرج کسرها می‌توان صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کرد.

$$۱)\ \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۵}(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}{(\sqrt{۳})^{۲}-(\sqrt{۲})^{۲}}=\frac{\sqrt{۱۵}-\sqrt{۱۰}}{۳-۲}=\frac{\sqrt{۱۵}-\sqrt{۱۰}}{۱}$$
$$=\sqrt{۱۵}-\sqrt{۱۰}$$

$$۲)\ \frac{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}{\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۳}}\times\frac{\sqrt[۴]{۵}-\sqrt[۴]{۳}}{\sqrt[۴]{۵}-\sqrt[۴]{۳}}=\frac{(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})(\sqrt[۴]{۵}-\sqrt[۴]{۳})}{(\sqrt[۴]{۵})^{۲}-(\sqrt[۴]{۳})^{۲}}=\frac{(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})(\sqrt[۴]{۵}-\sqrt[۴]{۳})}{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}$$
$$=\sqrt[۴]{۵}-\sqrt[۴]{۳}$$

$$۳)\ \frac{۷\sqrt{۵}-۴}{۷\sqrt{۵}+۴}\times\frac{۷\sqrt{۵}-۴}{۷\sqrt{۵}-۴}=\frac{(۷\sqrt{۵}-۴)^{۲}}{(۷\sqrt{۵})^{۲}-۴^{۲}}=\frac{(۷\sqrt{۵}-۴)^{۲}}{۲۴۵-۱۶}=\frac{(۷\sqrt{۵}-۴)^{۲}}{۲۲۹}$$

روش اول:

$$۴)\ \frac{۳\sqrt[۴]{۵}+۴\sqrt[۴]{۲}}{۳\sqrt[۴]{۵}-۴\sqrt[۴]{۲}}\times\frac{۳\sqrt[۴]{۵}+۴\sqrt[۴]{۲}}{۳\sqrt[۴]{۵}+۴\sqrt[۴]{۲}}=\frac{(۳\sqrt[۴]{۵}+۴\sqrt[۴]{۲})^{۲}}{(۳\sqrt[۴]{۵}-۴\sqrt[۴]{۲})(۳\sqrt[۴]{۵}+۴\sqrt[۴]{۲})}$$

$$=\frac{(۳\sqrt[۴]{۵}+۴\sqrt[۴]{۲})^{۲}}{(۳\sqrt[۴]{۵})^{۲}-(۴\sqrt[۴]{۲})^{۲}}=\frac{(۳\sqrt[۴]{۵}+۴\sqrt[۴]{۲})^{۲}}{۹\sqrt{۵}-۱۶\sqrt{۲}}\times\frac{۹\sqrt{۵}+۱۶\sqrt{۲}}{۹\sqrt{۵}+۱۶\sqrt{۲}}$$

$$=\frac{(۳\sqrt[۴]{۵}+۴\sqrt[۴]{۲})^{۲}(۹\sqrt{۵}+۱۶\sqrt{۲})}{(۹\sqrt{۵})^{۲}-(۱۶\sqrt{۲})^{۲}}=\frac{(۳\sqrt[۴]{۵}+۴\sqrt[۴]{۲})^{۲}(۹\sqrt{۵}+۱۶\sqrt{۲})}{-۱۰۷}$$

روش دوم: می‌توان به‌طور مستقیم از اتحاد زیر که حالت خاصی از اتحاد (۷) است، استفاده کرد.

$$(\sqrt[۴]{x}-\sqrt[۴]{y})(\sqrt[۴]{x^{۳}}+\sqrt[۴]{x^{۲}y}+\sqrt[۴]{xy^{۲}}+\sqrt[۴]{y^{۳}})=x-y \qquad (x\geq ۰\ ,\ y\geq ۰)$$

$$\frac{۳\sqrt[۴]{۵}+۴\sqrt[۴]{۲}}{۳\sqrt[۴]{۵}-۴\sqrt[۴]{۲}}=\frac{۳\sqrt[۴]{۵}+۴\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt[۴]{۳^{۴}\times ۵}-\sqrt[۴]{۴^{۴}\times ۲}}=\frac{۳\sqrt[۴]{۵}+۴\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt[۴]{۴۰۵}-\sqrt[۴]{۵۱۲}}\times\frac{(\sqrt[۴]{(۴۰۵)^{۳}}+\dots+\sqrt[۴]{(۵۱۲)^{۳}})}{(\sqrt[۴]{(۴۰۵)^{۳}}+\dots+\sqrt[۴]{(۵۱۲)^{۳}})}$$

$$=\frac{(۳\sqrt[۴]{۵}+۴\sqrt[۴]{۲})(\sqrt[۴]{(۴۰۵)^{۳}}+\sqrt[۴]{(۴۰۵)^{۲}(۵۱۲)}+\sqrt[۴]{(۴۰۵)(۵۱۲)^{۲}}+\sqrt[۴]{(۵۱۲)^{۳}})}{-۱۰۷}$$

۳ ـ اگر مخرج کسر شامل بیش از دو رادیکال با فرجه‌های زوج یا شامل چند رادیکال با فرجهٔ زوج و یک عدد گویا باشد، از اتحاد مزدوج می‌توان استفاده کرد.

مثال ۱۹ : مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

۱) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{18}}{2\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ۳) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

حل:

۱)
$$\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}=\frac{4}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}\times\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{3+2\sqrt{2}-3}$$
$$=\frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2}=\sqrt{2}+2-\sqrt{6}$$

۲)
$$\frac{\sqrt{18}}{(2\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}\times\frac{(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{9\times 2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{23+4\sqrt{15}-2}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{21+4\sqrt{15}}\times\frac{21-4\sqrt{15}}{21-4\sqrt{15}}=\frac{3\sqrt{2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(21-4\sqrt{15})}{201}$$
$$=\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(21-4\sqrt{15})}{67}$$

۳)
$$\frac{1}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\times\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(7+2\sqrt{35}-2\sqrt{6})}\times\frac{(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})}{(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})}$$

$$=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})}{(7+2\sqrt{35})^2-(2\sqrt{6})^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})}{28\sqrt{35}+165}\times\frac{28\sqrt{35}-165}{28\sqrt{35}-165}$$

$$=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})(7+2\sqrt{35}+2\sqrt{6})(28\sqrt{35}-165)}{215}$$

۴) اگر مخرج کسر شامل دو رادیکال یا بیش از دو رادیکال با فرجه‌های فرد باشد، از اتحادهای (۷) و (۸) و (۹) و (۱۰) و (۱۱) استفاده می‌کنیم. اگر مخرج کسر شامل رادیکالهایی با فرجه‌های فرد و زوج باشد، از اتحادهای (۱) و (۲) و (۳) و (۴) و (۵) و (۶) نیز استفاده می‌کنیم.

مثال ۲۰: مخرج کسر $\frac{a^2+b^2}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$ راگویا کنید ($ab \neq 0$).

حل: با استفاده از اتحاد (۱۱) داریم:

$$\frac{a^2+b^2}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}\times\frac{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}=\frac{(a^2+b^2)(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4})}{a^2+b^2}$$

$$=a\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^2b^2}+b\sqrt[3]{b} \qquad (ab\neq 0)$$

مثال ۲۱: مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ راگویا کنید.

حل: با استفاده از اتحاد (۱۰) داریم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\times\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b}$$

مثال ۲۲: مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}$ راگویا کنید ($b > 0$).

حل: ابتدا از اتحاد (۱) و سپس از اتحاد (۲) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt{b^2}}\xlongequal{(b>0)}\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2}-b}\times\frac{\sqrt[3]{a^4}+b\sqrt[3]{a^2}+b^2}{\sqrt[3]{a^4}+b\sqrt[3]{a^2}+b^2}$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt{b})(a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{a^2}+b^2)}{a^2-b^3}$$

مثال ۲۳: مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$1)\ \frac{7}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}\qquad 2)\ \frac{6-3\sqrt[3]{6}}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}\qquad 3)\ \frac{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}\qquad 4)\ \frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$$

حل: برای گویا کردن کسرهای فوق از اتحادهای (۱۱) و (۱۰) و (۹) استفاده می‌کنیم.

$$1)\ \frac{7}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}\times\frac{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3\times4}+\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3\times4}+\sqrt[3]{4^2}}=\frac{7(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16})}{3+4}$$

$$=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{2}$$

$$2)\ \frac{6-3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}\times\frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}}$$

$$=\frac{(6-3\sqrt[3]{6})(1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6})}{(\sqrt[3]{1})^3+(\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{3})^3-3\sqrt[3]{6}}$$

$$=\frac{(6-3\sqrt[3]{6})(1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6})}{6-3\sqrt[3]{6}}$$

$$=1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}$$

$$3)\ \frac{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}\times\frac{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\times5}+\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\times5}+\sqrt[3]{5^2}}=\frac{(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25})}{7-5}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25})$$

$$۴)\ \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\times 2}+\sqrt[3]{2^2}}\times\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$$

مثال ۲۴: حاصل عبارت زیر را پیدا کنید.

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\qquad (n\in\mathbb{N}-\{1\})$$

حل: با استفاده از تساوی $(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})=1$ و یا:

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

خواهیم داشت:

$$S=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\sqrt{n}-1$$

تبدیل رادیکال مرکب به جمع جبری چند رادیکال ساده

اگر بخواهیم یک رادیکال مرکب، مانند:

$$\sqrt[n]{x+a\sqrt[m]{y}+b\sqrt{z}+\dots}$$

را به صورت حاصل جمع چند رادیکال ساده بنویسیم، آن‌را مساوی عبارتی مانند:

$$K+A\sqrt[m]{y}+B\sqrt[p]{z}+\dots$$

قرار داده و سپس دو طرف برابری را به توان n می‌رسانیم. پس از مساوی قرار دادن اجزای گنگ و گویای متناظر، مقادیر K و A و B و ... را پیدا می‌کنیم. برای مثال، در مورد $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ با فرض $b>0$ و $(a\pm\sqrt{b})>0$ داریم:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\quad\Rightarrow a\pm\sqrt{b}=x+y\pm 2\sqrt{xy}\qquad (x>0,y>0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=a\\ \sqrt{b}=2\sqrt{xy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=a\\ xy=\frac{b}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\\ y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\end{cases}\qquad (a^2-b\geq 0)$$

با فرض $c^{۲} = a^{۲} - b$ و $c \geq ۰$، خواهیم داشت:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{۲}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{۲}} \qquad (۱)$$

مثال ۲۵ : عبارت $\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$ را به جمع جبری دو رادیکال ساده تبدیل کنید.
حل: با استفاده از تساوی (۱) داریم:

$$c^{۲} = a^{۲} - b = ۲^{۲} - ۳ = ۴ - ۳ = ۱ \,,\, c > ۰ \Rightarrow c = ۱$$

$$\sqrt{۲-\sqrt{۳}} = \sqrt{\frac{۲+۱}{۲}} - \sqrt{\frac{۲-۱}{۲}} = \sqrt{\frac{۳}{۲}} - \sqrt{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\frac{۶}{۴}} - \sqrt{\frac{۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۶}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲-\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})$$

مثال ۲۶ : حاصل عبارت $A = \sqrt{۴+\sqrt{۷}} - \sqrt{۴-\sqrt{۷}} - \sqrt{۲}$ را حساب کنید.

حل: ابتدا عبارتهای $\sqrt{۴+\sqrt{۷}}$ و $\sqrt{۴-\sqrt{۷}}$ را با استفاده از تساوی (۱) ساده می‌کنیم:

$$c^{۲} = ۴^{۲} - ۷ = ۱۶ - ۷ = ۹ \,,\, c > ۰ \Rightarrow c = ۳$$

$$\sqrt{۴+\sqrt{۷}} = \sqrt{\frac{۴+۳}{۲}} + \sqrt{\frac{۴-۳}{۲}} = \sqrt{\frac{۷}{۲}} + \sqrt{\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۱۴}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sqrt{۴-\sqrt{۷}} = \sqrt{\frac{۴+۳}{۲}} - \sqrt{\frac{۴-۳}{۲}} = \sqrt{\frac{۷}{۲}} - \sqrt{\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۱۴}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$A = \frac{\sqrt{۱۴}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۱۴}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۲} = \sqrt{۲} - \sqrt{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{A = ۰}$$

مثال ۲۷ : حاصل عبارت $B = \sqrt{۳+\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}} - \frac{\sqrt{۶}}{۲}$ را حساب کنید.

حل: ابتدا عبارت $\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}$ یا $\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}$ را با استفاده از تساوی (۱) ساده می‌کنیم:

$$c^{۲} = ۴^{۲} - ۱۲ = ۱۶ - ۱۲ = ۴ \,,\, c > ۰ \Rightarrow c = ۲$$

$$\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}} = \sqrt{۴-\sqrt{۱۲}} = \sqrt{\frac{۴+۲}{۲}} - \sqrt{\frac{۴-۲}{۲}} = \sqrt{۳} - \sqrt{۱} = \sqrt{۳} - ۱$$

بنابراین داریم:

$$B=\sqrt{3+\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

همچنین عبارت $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ را با استفاده از تساوی (۱) ساده می‌کنیم:

$$c^2=2^2-3=4-3=1, c>0 \Rightarrow c=1$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس خواهیم داشت:

$$B=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{B=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

مسأله‌های زیر را حل کنید

۱ - به‌ازای چه مقادیری از x عبارت $\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^3-8}}}}$ دارای معنی است؟

۲ـ عبارت $\sqrt[3]{7-5\sqrt[4]{4}}$ را به جمع جبری دو عبارت ساده بنویسید.

۳ـ حاصل عبارت :

$$D=\sqrt[5]{2\sqrt[3]{0/2\sqrt{2}}}+\left(\sqrt[6]{\sqrt[5]{2}}\right)^9-2^{0/3}-\sqrt[20]{64}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}-3\sqrt[4]{3^{-4}}$$

را حساب کنید.

۴ـ ثابت کنید برای هر $a \geq 0$ و $b \geq 0$، همواره داریم:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$$

۵ـ با فرض $a \geq 0$ و $b \geq 0$، عبارت زیر را ساده کنید:

$$P=-7a^3\sqrt{ab^4} \qquad 4b^2\sqrt[4]{a^4b^2}$$

۶ـ اگر n عدد طبیعی فرد و $n > 1$ و a و b عددهای حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

۷ـ اگر m عدد طبیعی و $\sqrt[n]{a}$ یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

۸ ـ مخرج کسر زیر را گویا کنید:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[5]{2\sqrt[4]{2\sqrt{2}}} + (\sqrt[30]{2})^9 - 2^{0.3} - (\sqrt[20]{8})^2}$$

۹ ـ مخرج کسر زیر را گویا کنید:

$$\frac{14}{\sqrt[6]{4} + 5\sqrt[3]{16} - 7\sqrt[6]{4} + 2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16}}$$

۱۰ ـ اگر a و b عددهای نامنفی باشند، ثابت کنید:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$$

۱۱ ـ اگر $a \geq 0$ و $b > 0$ و n عدد طبیعی و $n > 1$ باشد، ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

۱۲ ـ معادله‌های زیر را حل کنید و جوابها را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

۱) $x + 34 = 153$ ۲) $3x^4 - 48 = 0$ ۳) $4x^2 = 7$

۴) $(x^2)^2 + x^4 = 32$ ۵) $a^7 + 4^{21} = 0$ ۶) $x^{1375} + 2^{125} = 0$

حل:

۱ ـ عبارت را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^3 - 8}}}} = \sqrt[420]{x^3 - 8}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$x^3 - 8 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 8 \Rightarrow x \geq 2$$

در نتیجه عبارت به ازای هر عدد حقیقی $x \geq 2$ دارای معنی است.

۲ ـ عبارت را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sqrt[3]{7 - 5\sqrt[4]{4}} = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt[4]{2^2}} = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$$

در این‌جا فرض می‌کنیم عبارت به شکل زیر تحویل می‌شود:

$$\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=x+y\sqrt{2} \qquad (1)$$

دو طرف تساوی (۱) را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$7-5\sqrt{2}=(x+y\sqrt{2})^3=x^3+3x^2y\sqrt{2}+6xy^2+2y^3\sqrt{2}$$

$$7-5\sqrt{2}=x^3+6xy^2+(3x^2y+2y^3)\sqrt{2}$$

از مقایسهٔ دو طرف تساوی، دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}x^3+6xy^2=7\\ 3x^2y+2y^3=-5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x(x^2+6y^2)=1\times 7\\ y(3x^2+2y^2)=(-1)\times 5\end{cases}$$

اگر x و y عددهای درست باشند، ۱ = x و ۱ − = y می‌تواند باشد. این مقادیر در دستگاه صدق می‌کنند؛ پس:

$$\sqrt[3]{7-5\sqrt[4]{4}}=1-\sqrt{2}$$

۳ـ داریم:

$$\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^3\times 2\sqrt{2}}}=\sqrt[15]{\sqrt{2^8\times 2}}=\sqrt[30]{2^9}=2^{\frac{9}{30}}=2^{\frac{3}{10}}=2^{0.3}$$

$$(\sqrt[6]{\sqrt[5]{2}})^9=(\sqrt[30]{2})^9=\sqrt[30]{2^9}=2^{\frac{9}{30}}=2^{\frac{3}{10}}=2^{0.3}$$

$$\sqrt[20]{64}=\sqrt[20]{2^6}=2^{\frac{6}{20}}=2^{\frac{3}{10}}=2^{0.3}\ ,\quad 3\sqrt[4]{3^{-4}}=3\times 3^{\frac{-4}{4}}=3\times 3^{-1}=3^0=1$$

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+3+2\sqrt{3}}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow D=2^{0.3}+2^{0.3}-2^{0.3}-2^{0.3}+1+\sqrt{3}-\sqrt{3}-1=0 \Rightarrow \boxed{D=0}$$

۴ـ با توجه به فرض: ۰ ≤ a و ۰ ≤ b، می‌توان نوشت:

$$(\sqrt{ab})^2=ab \qquad (1)$$

و همچنین:

$$(\sqrt{a}.\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2.(\sqrt{b})^2=ab \qquad (2)$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که عبارتهای $\sqrt{ab}$ و $\sqrt{a}.\sqrt{b}$ ریشهٔ دوم مثبت ab هستند. چون ریشهٔ دوم مثبت، یگانه است، پس:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$$

۵ـ با توجه به فرض: $a \geq 0$ و $b \geq 0$، می‌توان نوشت:

$$P = -7a^3\sqrt{ab^4}\,.\,4b^2\sqrt[4]{a^4b^2} = (-7a^3)(4b^2)\sqrt{ab^4}\,.\,a\sqrt[4]{b^2}$$
$$= (-28\,a^4b^2)\,.\,b^2\sqrt{a}\,.\sqrt{b}$$
$$= -28\,a^4b^4\sqrt{ab}$$

۶ـ با توجه به فرض: n عدد طبیعی فرد و $n > 1$ و a و b عددهای حقیقی هستند، می‌توان نوشت:

$$(\sqrt[n]{ab})^n = ab \qquad (1)$$

و همچنین:

$$(\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n\,.\,(\sqrt[n]{b})^n = ab \qquad (2)$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که عبارتهای $\sqrt[n]{ab}$ و $\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}$ ریشهٔ nام ab هستند. چون ریشهٔ nام (در صورتی‌که n فرد باشد) یگانه است، پس:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}$$

۷ـ با توجه به فرض: m عدد طبیعی و $\sqrt[n]{a}$ عدد حقیقی است، می‌توان نوشت:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\dots.\,\sqrt[n]{a}}_{\text{مرتبه } m} = \sqrt[n]{\underbrace{a.a.\,\dots\,.a}_{\text{مرتبه } m}}$$
$$= \sqrt[n]{a^m}$$

پس:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

۸ـ با توجه به حل مسأله (۳):

$$\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = 2^{0.3} \text{ و } (\sqrt[30]{2})^9 = 2^{0.3} \text{ و } (\sqrt[20]{8})^2 = \sqrt[20]{8^2} = \sqrt[20]{2^6} = 2^{\frac{6}{20}} = 2^{0.3}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} + (\sqrt[30]{2})^9 - 2^{0.3} - (\sqrt[20]{8})^2} = \frac{2}{\sqrt[3]{2} + 2^{0.3} + 2^{0.3} - 2^{0.3} - 2^{0.3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}$$

۹ـ ابتدا مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt[6]{4}+5\sqrt[3]{16}-7\sqrt[6]{4}+2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}=$$

$$\sqrt[6]{2^2}+5\sqrt[3]{2^3\times 2}-7\sqrt[6]{2^2}+2\sqrt[3]{2^3\times 2}-\sqrt[3]{3^3\times 2}+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2^3\times 2}=$$

$$\sqrt[3]{2}+10\sqrt[3]{2}-7\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}=7\sqrt[3]{2}$$

پس کسر را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{14}{7\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{14\sqrt[3]{4}}{7\sqrt[3]{8}}=\frac{14\sqrt[3]{4}}{14}=\sqrt[3]{4}$$

۱۰ـ با توجه به فرض: a و b عددهای نامنفی هستند، می‌توان دو طرف نامساوی را به توان ۲ رساند:

$$\sqrt{a^2+b^2}\le a+b \Rightarrow (\sqrt{a^2+b^2})^2\le(a+b)^2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2\le a^2+b^2+2ab$$

$$\Rightarrow 2ab\ge 0 \Rightarrow ab\ge 0$$

نامساوی $ab \ge 0$ برای عددهای نامنفی a و b همواره درست است. بنابراین:

$$\sqrt{a^2+b^2}\le a+b$$

۱۱ – راهنمایی: مشابه طریقهٔ حل مسألهٔ ۶ عمل کنید.

۱۲ـ داریم:

$$1)\ x^2+34=153 \Rightarrow x^2=153-34=119 \Rightarrow x^2=119 \Rightarrow x=\pm\sqrt{119}$$

$$2)\ 3x^4-48=0 \Rightarrow 3x^4=48 \Rightarrow x^4=16=2^4 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$3)\ 4x^2=7 \Rightarrow x^2=\frac{7}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$4)\ (x^2)^2+x^4=32 \Rightarrow x^4+x^4=32 \Rightarrow 2x^4=32 \Rightarrow x^4=16=2^4 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$5)\ a^7+4^{21}=0 \Rightarrow a^7=-4^{21} \Rightarrow a=-\sqrt[7]{4^{21}}=-4^{\frac{21}{7}}=-4^3=-64$$

$$6)\ x^{1375}+2^{125}=0 \Rightarrow x^{1375}=-2^{125} \Rightarrow x^{11\times 125}=-2^{125} \Rightarrow x=-\sqrt[11]{2}$$

حل معادله‌های رادیکالی (گنگ)

در حل معادله‌های رادیکالی باید به نکات زیر توجه کرد:

۱) برای حل معادله‌های رادیکالی با فرجهٔ زوج ابتدا حوزهٔ تعریف معادله را مشخص می‌کنیم (در بعضی مواقع خاص، به‌وسیلهٔ حوزهٔ تعریف می‌توان ریشه‌های معادله را مشخص کرد و یا تعیین کرد که معادله جواب حقیقی ندارد). سپس با به توان رساندن معادله به معادله‌ای خواهیم رسید که اگر قابل حل باشد ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم، در این صورت ریشه‌هایی که در حوزهٔ تعریف معادلهٔ نخست قرار داشته باشند، ریشه‌های معادلهٔ اصلی می‌باشند.

همچنین می‌توان بدون مشخص کردن حوزهٔ تعریف، معادله را به یک معادلهٔ قابل حل تبدیل‌کرد و پس از حل معادله، جوابهای آن‌را در معادلهٔ اولیه آزمایش کرد، هر کدام صدق کند ریشهٔ معادلهٔ اصلی می‌باشد ولی بهتر است همیشه ریشه‌ها را امتحان کنیم.

۲) اگر برای دو معادله مانند:

$$A(x) = B(x) \quad (۱) \quad ; \quad C(x) = D(x) \quad (۲)$$

هر ریشهٔ معادلهٔ اول، ریشه‌ای از معادلهٔ دوم باشد، آنگاه معادلهٔ دوم را نتیجهٔ معادلهٔ اول گویند و می‌نویسند: $A(x) = B(x) \Rightarrow C(x) = D(x)$

اگر به جای معادلهٔ مفروض، نتیجهٔ آن‌را در نظر بگیریم، آنگاه مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ دوم، شامل همهٔ ریشه‌های معادلهٔ اول است، ولی در بین مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ دوم، ممکن است عددهای دیگری هم وجود داشته باشد که آنها را، ریشه‌های خارجی (ریشه‌های بیگانهٔ) معادلهٔ اصلی می‌نامند. بدیهی است با آزمایش ریشه‌ها می‌توان ریشه‌های خارجی معادله را از ریشه‌های حقیقی آن جدا کرد.

برای مثال:

$$\sqrt[۴]{x^۴ - ۱} = \sqrt[۴]{x^۲ - ۱} \Rightarrow x^۴ - ۱ = x^۲ - ۱ \quad (x^۲ - ۱ \geq ۰)$$

پس از حل معادلهٔ دوم، به‌دست می‌آید: $x_۱ = -۱ , x_۲ = ۰ , x_۳ = ۱$

که با آزمایش ریشه‌ها، نتیجه می‌شود که $x_2 = 0$، ریشهٔ معادلهٔ اصلی نیست و در واقع ریشهٔ خارجی معادلهٔ اصلی می‌باشد.

دومعادلهٔ (۱) و (۲) را هم‌ارز (معادل) گویند، هرگاه مجموعهٔ همهٔ جوابهای یکی بر مجموعهٔ همهٔ جوابهای دیگری منطبق باشد؛ یا مجموعه جوابهای هر دو معادله تهی باشد.

از تعریف هم‌ارزی معادله‌ها نتیجه می‌شود که، به جای حل یک معادله، می‌توان معادلهٔ هم‌ارز با آن‌را حل کرد.

مثال ۱ : معادلهٔ $\sqrt[3]{x} = 1$ با معادلهٔ $x = 1$ هم‌ارز است، زیرا عدد ۱ ریشهٔ هر یک ازاین معادله‌ها می‌باشد؛ وهیچ‌کدام ازاین دومعادله، ریشهٔ حقیقی دیگری به‌جز ۱ ندارد.

مثال ۲ : معادلهٔ $\sqrt{\frac{x}{2}+1} = \sqrt{2-\frac{x}{2}}$ با معادلهٔ $\frac{x}{2}+1 = 2-\frac{x}{2}$ هم‌ارز است.

زیراباتوجه‌به‌شرایط $\frac{x}{2}+1 \geq 0$ و $2-\frac{x}{2} \geq 0$، اگر دو طرف معادلهٔ اصلی را مجذور کنیم:

$$\sqrt{\frac{x}{2}+1} = \sqrt{2-\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2}+1 = 2-\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{x}{2} = 2-1 \Rightarrow x = 1$$

در واقع عدد ۱ ، تنها ریشهٔ هر دو معادله است.

مثال ۳ : آیا دو معادلهٔ زیر هم‌ارزند؟

$$4x^2+2x-5 = 2x-1 \quad , \quad \sqrt[4]{4x^2+2x-5} = \sqrt[4]{2x-1}$$

حل: مجموعه همهٔ ریشه‌های معادلهٔ دوم، شامل دو عدد است:

$$x_1 = -1 \text{ و } x_2 = 1$$

آزمایش نشان می‌دهد که، عدد -1، به حوزهٔ تعریف معادلهٔ اول تعلق ندارد و در نتیجه نمی‌تواند ریشهٔ آن باشد، یعنی $x_1 = -1$، ریشهٔ خارجی معادلهٔ اول است. به این ترتیب، این دو معادله، هم‌ارز نیستند.

۳) اگر معادله به صورت $x^2 = a$ و $a \geq 0$، باشد؛ جوابهای معادله، $x = \sqrt{a}$ یا $x = -\sqrt{a}$ است.

۴) اگر معادله‌ای به صورت $x^2 = a$ و $a < 0$، باشد؛ معادله دارای ریشه حقیقی نیست، زیرا طرف اول تساوی عددنامنفی وطرف‌دوم تساوی عددی همیشه منفی است.

۵) اگر معادله‌ای به صورت $A(x) . B(x) . C(x) = 0$ باشد؛ که در آن $A(x)$، $B(x)$ و $C(x)$ عبارتهایی بر حسب یک متغیر x باشند، در این‌صورت $C(x) = 0$ یا $B(x) = 0$ یا $A(x) = 0$، برای مثال از معادلهٔ $x\sqrt{x}\sqrt{x+1} = 0$ نتیجه می‌شود: $\sqrt{x+1} = 0$ یا $\sqrt{x} = 0$ یا $x = 0$

۶) می‌دانیم اگر $A(x) = B(x)$، آنگاه: $A^۲(x) = B^۲(x)$. اما عکس این مطلب درست‌نیست؛ یعنی اگر $A^۲(x) = B^۲(x)$، آنگاه $A(x) = B(x)$ یا $A(x) = -B(x)$.
برای مثال معادلهٔ $\sqrt{x} = \sqrt{۲ - x}$ را می‌توان به صورت $x = ۲ - x$ یا $۲x = ۲$ یا $x = ۱$ نوشت. از معادلهٔ $x^۲ = ۴$ نتیجه می‌شود: $x = ۲$ یا $x = -۲$

۷) اگر $A^۲(x) = B^۲(x)$ و $A(x) \geq ۰$ و $B(x) \geq ۰$ ($A(x)$ و $B(x)$ هم‌علامت باشند)، دراین‌صورت‌می‌توان‌نوشت: $A(x)=B(x)$. برای‌مثال‌معادلهٔ $(\sqrt{۲x+۱})^۲ = (\sqrt{۲ - ۲x})^۲$ را می‌توان به‌صورت $۲x + ۱ = ۲ - ۲x$ یا $۴x = ۱$ یا $x = \frac{۱}{۴}$ نوشت.

مثال ۴: معادلهٔ $۷ + \sqrt{x} = ۹$ را حل کنید.

حل: دامنهٔ متغیر x (حوزهٔ تعریف معادله) عبارت است از $x \geq ۰$؛ بنابراین جواب معادله باید در شرط فوق صدق کند. داریم:

$$\sqrt{x} = ۹ - ۷ \Rightarrow \sqrt{x} = ۲$$

اگر دو طرف معادله را به توان ۲ برسانیم، نتیجه می‌شود $x = ۴$، که در شرط $x \geq ۰$ صدق می‌کند.

مثال ۵: معادلهٔ $۷\sqrt{۴x - ۱} + ۵ = ۱۹$ را حل کنید.

حل: متغیر x باید در شرط $۴x - ۱ \geq ۰$ یا $x \geq \frac{۱}{۴}$ صدق کند و داریم:

$$۷\sqrt{۴x - ۱} + ۵ = ۱۹ \Rightarrow ۷\sqrt{۴x - ۱} = ۱۴ \Rightarrow \sqrt{۴x - ۱} = ۲$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم)}} ۴x - ۱ = ۴ \Rightarrow ۴x = ۵ \Rightarrow \boxed{x = \frac{۵}{۴}}$$

که در شرط $x \geq \frac{۱}{۴}$ صدق می‌کند.

مثال ۶: معادلهٔ $۳\sqrt{x - ۴} + ۱۴ = ۵$ را حل کنید.

حل: دامنهٔ متغیر x، $x - ۴ \geq ۰$ یا $x \geq ۴$ است و داریم:

$$۳\sqrt{x - ۴} + ۱۴ = ۵ \Rightarrow ۳\sqrt{x - ۴} = -۹ \Rightarrow \sqrt{x - ۴} = -۳$$

چون طرف اول تساوی همیشه نامنفی و طرف دوم تساوی یک عدد منفی است، معادله دارای جواب نیست. در صورتی‌که به این نکته توجه نکنیم، و دو طرف معادلهٔ به‌دست آمده را به توان ۲ برسانیم، خواهیم داشت:

$$x - ۴ = ۹ \Rightarrow x = ۱۳$$

با این که $x = ۱۳$ در شرط $x \geq ۴$ صدق می‌کند. ولی با قرار دادن $x = ۱۳$ در معادله به

تناقض خواهیم رسید:

$x=۱۳: \quad ۳\sqrt{۱۳-۴}+۱۴=۵ \Rightarrow ۲۳=۵$ (تناقض)

بنابراین قبل از به توان ۲ رساندن دو طرف تساوی باید به هم‌علامت بودن دو طرف تساوی توجه کرد، تا گرفتار تناقض نشویم.

پس با توجه به تناقض اخیر نتیجه می‌شود که معادله دارای جواب نیست و مجموعهٔ جواب معادله تهی است.

مثال ۷: معادلهٔ $۴+\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{۸a^۲}=۸(۱+\sqrt[۳]{\frac{a^۲}{۶۴}})$ را حل کنید.

حل: حوزهٔ تعریف معادله مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است. و داریم:

$$۴+\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{۸a^۲}=۸(۱+\sqrt[۳]{\frac{a^۲}{۶۴}}) \Rightarrow ۴+\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{۲^۳a^۲}=۸+۸\sqrt[۳]{\frac{a^۲}{۴^۳}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{a^۲}+۲\sqrt[۳]{a^۲}=۴+۲\sqrt[۳]{a^۲} \Rightarrow \sqrt[۳]{a^۲}=۴ \xrightarrow{\text{(دوطرف به‌توان ۳)}} a^۲=۴^۳ \Rightarrow a^۲=۶۴$$

$\Rightarrow a^۲=۸^۲ \Rightarrow a=-۸$ یا $a=۸ \Rightarrow$ مجموعه جوابهای معادله $=\{۸$ و $-۸\}$

مثال ۸: معادلهٔ $x^۸-۳x^۴+۲=۰$ را حل کنید.

حل: با فرض $x^۴=t$، داریم:

$x^۴=t: t^۲-۳t+۲=۰ \Rightarrow (t-۱)(t-۲)=۰ \Rightarrow t=۱$ یا $t=۲$

بنابراین:

$x^۴=۱$ یا $x^۴=۲ \Rightarrow x=\pm ۱$ یا $x=\pm\sqrt[۴]{۲}$

پس معادله دارای چهار ریشهٔ حقیقی است:

مجموعه جوابهای معادله $=\{-\sqrt[۴]{۲}$ و -۱ و ۱ و $\sqrt[۴]{۲}\}$

مثال ۹: معادلهٔ $\sqrt{y}-y=-۲$ را حل کنید.

حل: معادله را می‌توان به‌صورت $\sqrt{y}=y-۲$ نوشت. باتوجه به‌این معادله داریم:

$y\geq ۰$ و $y-۲\geq ۰$ یا $y\geq ۲$

که در نتیجه دامنهٔ متغیر معادله $y\geq ۲$ است و داریم:

$$\sqrt{y}-y=-۲ \Rightarrow \sqrt{y}=y-۲ \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} y=(y-۲)^۲ \Rightarrow y=y^۲-۴y+۴$$

$$\Rightarrow y^۲-۵y+۴=۰ \Rightarrow (y-۱)(y-۴)=۰ \Rightarrow y=۱ \text{ یا } \boxed{y=۴}$$

پس فقط جواب $y=۴$ قابل قبول است. زیرا در شرط $y\geq ۲$ صدق می‌کند.

مثال ۱۰ : معادلهٔ $\sqrt{z^{۲}-۱۶}=۳$ را حل کنید.

حل: متغیر x باید در شرط $z^{۲}-۱۶ \geq ۰$ صدق کند و داریم:

$$\sqrt{z^{۲}-۱۶}=۳ \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} z^{۲}-۱۶=۹ \Rightarrow z^{۲}=۲۵ \Rightarrow \boxed{z=۵} \text{ یا } \boxed{z=-۵}$$

هر دو جواب قابل قبول است، زیرا در شرط $z^{۲}-۱۶ \geq ۰$ صدق می‌کنند.

مثال ۱۱ : معادلهٔ $\sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۲}=۱$ را حل کنید.

حل: متغیر x باید در شرایط $x-۲ \geq ۰$ و $x-۱ \geq ۰$ و یا $x \geq ۲$ و $x \geq ۱$ و در نتیجه در شرط $x \geq ۲$ صدق کند و داریم:

$$\sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۲}=۱ \Rightarrow \sqrt{x-۲}=۱-\sqrt{x-۱} \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} x-۲=۱+x-۱-۲\sqrt{x-۱}$$

$$\Rightarrow -۲\sqrt{x-۱}=-۲ \Rightarrow \sqrt{x-۱}=۱ \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} x-۱=۱ \Rightarrow \boxed{x=۲}$$

جواب $x=۲$ قابل قبول است، زیرا در شرط $x \geq ۲$ صدق می‌کند.

مثال ۱۲ : معادلهٔ $\frac{۶}{\sqrt{۲m+۱}}=۲$ را حل کنید.

حل: متغیر m باید در شرط $۲m+۱>۰$ یا $m>-\frac{۱}{۲}$ صدق کند و داریم:

$$\frac{۶}{\sqrt{۲m+۱}}=۲ \Rightarrow ۲\sqrt{۲m+۱}=۶ \Rightarrow \sqrt{۲m+۱}=۳ \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} ۲m+۱=۹$$

$$\Rightarrow ۲m=۸ \Rightarrow \boxed{m=۴}$$

جواب $m=۴$ قابل قبول است، زیرا در شرط $m>-\frac{۱}{۲}$ صدق می‌کند.

مثال ۱۳ : معادلهٔ $\sqrt{u-۱}=\frac{۷۴}{\sqrt{u-۱}}$ را حل کنید.

حل: متغیر u باید در شرط $u-۱>۰$ یا $u>۱$ صدق کند و داریم:

$$\sqrt{u-۱}=\frac{۷۴}{\sqrt{u-۱}} \Rightarrow (\sqrt{u-۱})^{۲}=۷۴ \Rightarrow u-۱=۷۴ \Rightarrow \boxed{u=۷۵}$$

جواب $u=۷۵$ قابل قبول است، زیرا در شرط $u>۱$ صدق می‌کند.

مثال ۱۴ : معادلهٔ $\sqrt{۴x}=-۲x$ را حل کنید.

حل: متغیر x باید در شرایط $۴x \geq ۰$ و $-۲x \geq ۰$ و یا $x \geq ۰$ و $x \leq ۰$ و در نتیجه

در شرط ۰=x صدق کند. با قرار دادن ۰=x در معادله داریم: $\sqrt{۴(۰)} = -۲(۰) \Rightarrow ۰ = ۰$
پس ۰ = x جواب معادله است.

مثال ۱۵ : معادلهٔ $x\sqrt{۳} - \sqrt{۱۲} = \sqrt{۷۵} - \sqrt{۲۷x^۲}$ را حل کنید.

حل: دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است $(x \in \mathbb{R})$ و داریم:

$$x\sqrt{۳} - \sqrt{۴\times۳} = \sqrt{۲۵\times۳} - \sqrt{۹\times۳x^۲} \Rightarrow x\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۳} = ۵\sqrt{۳} - ۳|x|\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{۳} + ۳|x|\sqrt{۳} = ۵\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{۳}(x + ۳|x|) = ۷\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow x + ۳|x| = ۷$$

$$x \geq ۰ \ : \ x + ۳x = ۷ \Rightarrow ۴x = ۷ \Rightarrow \boxed{x = \frac{۷}{۴}}$$

$$x < ۰ \ : \ x - ۳x = ۷ \Rightarrow -۲x = ۷ \Rightarrow \boxed{x = -\frac{۷}{۲}}$$

$\{-\frac{۷}{۲}, \frac{۷}{۴}\}$ = مجموعهٔ جوابهای معادله

معادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\sqrt[۳]{۴x-۳} + \sqrt[۳]{۲x-۱} = ۲$

۲) $\sqrt{۲x+۷}\sqrt{۶x-۲} = ۶\sqrt{۳x-۲}\sqrt{x}$

۳) $\frac{۶x-۲}{\sqrt[۴]{(۴x-۱)^۳}} = \sqrt[۴]{۴x-۱}$

۴) $\sqrt[۳]{x+۲} = \sqrt{۲x+۳}$

۵) $\frac{\sqrt{۲x+۲} + \sqrt{۲-۲x}}{\sqrt{۲x+۲} - \sqrt{۲-۲x}} = \frac{۱}{x}$

۶) $\sqrt[۳]{x-۱} + \sqrt[۳]{x-۲} = \sqrt[۳]{۲x-۳}$

۷) $\sqrt{۲+\sqrt{x^۴+۲}} = x$

۸) $\sqrt{۲۲x+۳} + \sqrt{۲x-۲} - \sqrt{۱۸x+۷} = \sqrt{۲-۲x}$

۹) $\sqrt{۲x+۲\sqrt{۲x-۱}} + \sqrt{۲x-۲\sqrt{۲x-۱}} = ۲$

۱۰) $\sqrt[۳]{x^۵+۳۲} + \sqrt[۶]{x^۵+۳۲} = ۲$

۱۱) $(x^۲-۱)^{۷۴} + |x^{۷۵}+۱| + \sqrt[۷۶]{x^۲+۳x+۲} = ۰$

۱۲) $\sqrt[۵]{x\sqrt[۳]{x\sqrt{۶۴x}}} = ۲$

۱۳) $\sqrt{۲-x+x^۲} + \sqrt{۱-x+x^۲} = ۳$

۱۴) $(\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}})^x + (\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۳}})^x = ۲$

۱۵) $\sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{۱-۲x} + \sqrt[۳]{x-۱} = ۰$

حل:

۱) دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است $(x \in \mathbb{R})$ و با مکعب کردن دو طرف معادله به‌دست می‌آید:

$$۴x - ۳ + ۲x - ۱ + ۳\sqrt[۳]{۴x - ۳}\sqrt[۳]{۲x - ۱}\left(\sqrt[۳]{۴x - ۳} + \sqrt[۳]{۲x - ۱}\right) = ۸$$

بنا بر شرط، عبارت $\sqrt[۳]{۴x - ۳} + \sqrt[۳]{۲x - ۱}$ برابر ۲ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$۶\sqrt[۳]{(۴x - ۳)(۲x - ۱)} = ۱۲ - ۶x \qquad (۱)$$

پس از مکعب کردن دو طرف معادله (۱) و اختصار لازم خواهیم داشت:

$$(۴x - ۳)(۲x - ۱) = (۲ - x)^۳ \quad ;$$
$$۸x^۲ - ۱۰x + ۳ = ۸ - ۱۲x + ۶x^۲ - x^۳ \quad ;$$
$$x^۳ + ۲x^۲ + ۲x - ۵ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x^۲ + ۳x + ۵) = ۰$$
$$\Rightarrow x - ۱ = ۰ \text{ یا } x^۲ + ۳x + ۵ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۱}$$

جواب $x = ۱$ در معادله صدق می‌کند. و معادلهٔ $x^۲ + ۳x + ۵ = ۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد. بنابراین معادله تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۲) با حل دستگاه نامعادله‌های زیر:

$$\begin{cases} ۲x + ۷ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -\frac{۷}{۲} \\ ۶x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq \frac{۱}{۳} \\ ۳x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq \frac{۲}{۳} \\ x \geq ۰ \end{cases}$$

دامنهٔ متغیر x به‌دست می‌آید: $x \geq \frac{۲}{۳}$

با مجذور کردن دو طرف معادله، داریم:

$$(۲x + ۷)(۶x - ۲) = ۳۶(۳x - ۲)x \quad ;$$
$$۱۲x^۲ + ۳۸x - ۱۴ = ۱۰۸x^۲ - ۷۲x \quad ;$$
$$۹۶x^۲ - ۱۱۰x + ۱۴ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)(۹۶x - ۱۴) = ۰$$
$$\Rightarrow x - ۱ = ۰ \text{ یا } ۹۶x - ۱۴ = ۰$$
$$\Rightarrow \boxed{x = ۱} \; ; \; x = \frac{۷}{۴۸} \text{ (قابل قبول نیست)}$$

فقط جواب $x = 1$ در شرط $x \geq \frac{2}{3}$ و همچنین در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند.

۳) دامنه متغیر x از حل نامعادلهٔ $4x - 1 > 0$ ، به‌دست می‌آید: $x > \frac{1}{4}$

اگر دو طرف معادله را در $\sqrt[4]{(4x-1)^3}$ ضرب کنیم:

$$\frac{6x-2}{\sqrt[4]{(4x-1)^3}} = \sqrt[4]{4x-1} \Rightarrow 6x-2 = \sqrt[4]{(4x-1)^4} \Rightarrow 6x-2 = 4x-1$$

$$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

جواب $x = \frac{1}{2}$ در شرط $x > \frac{1}{4}$ و همچنین در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند.

۴) دامنهٔ متغیر x از $2x + 3 \geq 0$ یا $x \geq -\frac{3}{2}$ به‌دست می‌آید و داریم:

$$\sqrt[3]{x+2} = \sqrt{2x+3} \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۶)}} (x+2)^2 = (2x+3)^3$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$$

$$\Rightarrow 8x^3 + 35x^2 + 50x + 23 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(8x^2 + 27x + 23) = 0$$

$$\Rightarrow x+1 = 0\ ;\ 8x^2 + 27x + 23 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

جواب $x = -1$ در شرط $x \geq -\frac{3}{2}$ و همچنین در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند. و معادلهٔ $8x^2 + 27x + 23 = 0$ ریشهٔ حقیقی ندارد. بنابراین معادله فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۵) از حل دستگاه نامعادله‌های زیر:

$$\begin{cases} 2x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ 2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ x \neq 0 \\ \sqrt{2x+2} - \sqrt{2-2x} \neq 0 \end{cases}$$

دامنهٔ متغیر x به‌دست می‌آید: $-1 \leq x < 0$ یا $0 < x \leq 1$.

دو طرف معادله را در $x(\sqrt{2x+2} - \sqrt{2-2x})$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{2-2x}}{\sqrt{2x+2} - \sqrt{2-2x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow x(\sqrt{2x+2} + \sqrt{2-2x}) = \sqrt{2x+2} - \sqrt{2-2x}$$

$$\Rightarrow (x-1)\sqrt{2x+2} + (x+1)\sqrt{2-2x} = 0$$

دو طرف معادلهٔ اخیر را بر $-\sqrt{2}$ تقسیم می‌کنیم:

$$(1-x)\sqrt{x+1}-(x+1)\sqrt{1-x}=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x}\sqrt{x+1}\quad(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x}=0 \quad ; \quad \sqrt{x+1}=0 \quad ; \quad \sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=1} \;;\; \boxed{x=-1} \;; x=0$$ (قابل قبول نیست)

جواب $x=0$ به دامنهٔ متغیر تعلق ندارد، ولی آزمایش مستقیم نشان می‌دهد که دو عدد ۱ و ۱− ریشه‌های معادلهٔ اصلی می‌باشند.

۶) دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است $(x \in \mathbb{R})$؛ با مکعب کردن دو طرف معادله به‌دست می‌آید:

$$x-1+x-2+3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}\,(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2})=2x-3$$

بنا بر شرط، عبارت $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}$ برابر $\sqrt[3]{2x-3}$ است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{2x-3}=0$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x-1}=0 \;;\; \sqrt[3]{x-2} \;;\; \sqrt[3]{2x-3}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=1} \;;\; \boxed{x=2} \;;\; \boxed{x=\frac{3}{2}}$$

هر سه جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند؛ بنابراین:

$$\{1, \frac{3}{2}, 2\} =$$ مجموعهٔ جوابهای معادله

۷) دامنهٔ متغیر x از حل دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases} x\geq 0 \\ x^4+2\geq 0 \end{cases}$ به‌دست می‌آید: $x\geq 0$
و داریم:

$$\sqrt{2+\sqrt{x^4+2}}=x \xRightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} 2+\sqrt{x^4+2}=x^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^4+2}=x^2-2$$

از $x \geq 0$ و معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود:

$$x^2-2\geq 0 \;\Rightarrow\; x^2\geq 2 \;\Rightarrow\; x\geq\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} x^4+2=(x^2-2)^2$$
$$\Longrightarrow x^4+2=x^4-4x^2+4$$
$$\Longrightarrow 4x^2=2 \Rightarrow x^2=\frac{2}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ریشه‌های به‌دست آمده در شرط $x\geq\sqrt{2}$ ، صدق نمی‌کنند. بنابراین مجموعهٔ جواب معادله، مجموعهٔ تهی ($\varnothing$) است.

۸) با حل دستگاه نامعادله‌های زیر:

$$\begin{cases} 22x+3\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq\frac{-3}{22} \\ 2x-2\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq 1 \\ 18x+7\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq\frac{-7}{18} \\ 2-2x\geq 0 \;\Rightarrow\; x\leq 1 \end{cases}$$

دامنهٔ متغیر x به‌دست می‌آید: $x=1$

و با قرار دادن $x=1$ در معادله، خواهیم داشت:

$$x=1 \;:\; \sqrt{22x+3}+\sqrt{2x-2}-\sqrt{18x+7}=\sqrt{2-2x} \;\Rightarrow\; \sqrt{25}-\sqrt{25}=0$$

بنابراین معادله فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد: $\boxed{x=1}$

۹) حوزه تعریف معادله از حل دستگاه نامعادله‌های زیر:

$$\begin{cases} 2x-1\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq\frac{1}{2} \\ 2x-2\sqrt{2x-1}\geq 0 \\ 2x+2\sqrt{2x-1}\geq 0 \end{cases}$$

به‌دست می‌آید: $x\geq\frac{1}{2}$ و داریم:

$$\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}=2$$

دو طرف معادله را مجذور می‌کنیم:

$$۲x + ۲\sqrt{۲x - ۱} + ۲x - ۲\sqrt{۲x - ۱} + ۲\sqrt{۴x^۲ - ۴(۲x - ۱)} = ۴$$

پس از ساده کردن معادله خواهیم داشت:

$$۴x + ۴|x - ۱| = ۴ \Rightarrow x + |x - ۱| = ۱$$

$$x \geq ۱ : x + x - ۱ = ۱ \Rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow \boxed{x = ۱}$$

$$\frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱ : x - (x - ۱) = ۱ \Rightarrow ۱ = ۱$$

بنابراین هر عدد حقیقی که در شرط $\frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱$ صدق کند، جواب معادله است؛ یعنی مجموعهٔ جوابهای معادله چنین است:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱\} = \text{مجموعهٔ جوابهای معادله}$$

۱۰) دامنهٔ متغیر x از $x^۵ + ۳۲ \geq ۰$ یا $x \geq -۲$ به‌دست می‌آید.

و با انتخاب $t = \sqrt[۶]{x^۵ + ۳۲}$ ، داریم:

$$t^۲ + t = ۲ \Rightarrow t^۲ + t - ۲ = ۰ \Rightarrow (t - ۱)(t + ۲) = ۰ \Rightarrow t = ۱ \; ; \; t = -۲$$

چون $t \geq ۰$ است، پس فقط جواب $t = ۱$ قابل قبول است:

$$\sqrt[۶]{x^۵ + ۳۲} = ۱ \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۶)}} x^۵ + ۳۲ = ۱ \Rightarrow x^۵ = -۳۱ \Rightarrow \boxed{x = -\sqrt[۵]{۳۱}}$$

جواب $x = -\sqrt[۵]{۳۱}$ در شرط $x \geq -۲$ صدق می‌کند. بنابراین ریشهٔ معادله اصلی است.

۱۱) متغیر x باید در شرط $x^۲ + ۳x + ۲ \geq ۰$، صدق کند.

باتوجه‌به‌این‌که عبارتهای $(x^۲ - ۱)^{۷۴}$ و $|x^{۷۵} + ۱|$ و $\sqrt[۷۶]{x^۲ + ۳x + ۲}$، همیشه نامنفی هستند، نتیجه می‌شود که طرف اول معادله همیشه نامنفی است و بنابراین معادله وقتی جواب دارد که هر سه عبارت با هم صفر شوند.

$$(x^۲ - ۱)^{۷۴} = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

$$|x^{۷۵} + ۱| = ۰ \Rightarrow x^{۷۵} + ۱ = ۰ \Rightarrow x^{۷۵} = -۱ \Rightarrow x = -۱$$

$$x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow (x + ۱)(x + ۲) = ۰ \Rightarrow x = -۱ \; ; \; x = -۲$$

جواب $x = -۱$ در شرط $x^۲ + ۳x + ۲ \geq ۰$ صدق می‌کند و همچنین ریشهٔ هر سه عبارت می‌باشد؛ بنابراین معادله تنها یک ریشه حقیقی دارد: $\boxed{x = -۱}$

۱۲) متغیر x باید در شرط $۶۴x \geq ۰$ یا $x \geq ۰$، صدق کند؛ و داریم:

$$\sqrt[۵]{x^۳\sqrt{x\sqrt{۶۴x}}} = ۲ \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۵)}} x\sqrt[۳]{x\sqrt{۶۴x}} = ۲^۵$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۳)}} x^{3}.x\sqrt{64x}=2^{15}$$

$$\xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} x^{8}(64x)=2^{30}$$

$$\Rightarrow 2^{6}x^{9}=2^{30} \quad \Rightarrow \quad x^{9}=2^{24}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[9]{2^{24}}=\sqrt[9]{2^{18}\times 2^{6}}=4\sqrt[9]{2^{6}}=4\sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x=4\sqrt[3]{4}}$$

جواب $x=4\sqrt[3]{4}$ در شرط $x\geq 0$ و در معادله اصلی صدق می‌کند. پس معادله تنها یک ریشه حقیقی دارد.

۱۳) متغیر x باید در شرایط $x^{2}-x+2\geq 0$ و $x^{2}-x+1\geq 0$ یا $(x-\frac{1}{2})^{2}+\frac{7}{4}\geq 0$ و $(x-\frac{1}{2})^{2}+\frac{3}{4}\geq 0$ صدق کند: $x\in R$. با انتخاب $x^{2}-x+1=t$، داریم:

$$\sqrt{t+1}+\sqrt{t}=3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{t+1}=3-\sqrt{t} \quad \Rightarrow \quad t+1=9-6\sqrt{t}+t \quad \Rightarrow \quad 6\sqrt{t}=8$$

$$\Rightarrow \sqrt{t}=\frac{4}{3} \quad \xrightarrow{\text{(دو طرف به توان ۲)}} t=\frac{16}{9}$$

بنابراین:

$$x^{2}-x+1=\frac{16}{9} \quad \Rightarrow \quad x^{2}-x-\frac{7}{9}=0 \quad \Rightarrow \quad 9x^{2}-9x-7=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{9\pm\sqrt{333}}{18}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_{1}=\dfrac{9+\sqrt{333}}{18}\simeq 1/514 \\ x_{2}=\dfrac{9-\sqrt{333}}{18}\simeq 0/514 \end{array}\right.$$

بنابراین معادله، دارای دو ریشهٔ حقیقی x_{1} و x_{2} است.

۱۴) دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است $(x\in \mathbb{R})$ و داریم:

$$(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}})(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})=1\Rightarrow \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}$$

بنابراین:

$$(\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}})^x + \frac{۱}{(\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}})^x} = ۲$$

و با انتخاب $y = (\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}})^x$ ، داریم:

$$y + \frac{۱}{y} = ۲ \Rightarrow y^۲ + ۱ = ۲y \Rightarrow y^۲ - ۲y + ۱ = ۰ \Rightarrow (y-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow y = ۱$$

$$\Rightarrow (\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۳}})^x = ۱ \Rightarrow \boxed{x = ۰}$$ (جواب معادله)

۱۵) دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ اعداد حقیقی است $(x \in \mathbb{R})$ و با توجه به این نکته که اگر $u + v + t = ۰$ ، آن‌گاه:

$$u^۳ + v^۳ + t^۳ = ۳\,uvt$$

خواهیم داشت:

$$\sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{۱-۲x} + \sqrt[۳]{x-۱} = ۰ \Rightarrow x + ۱ - ۲x + x - ۱ = ۳\sqrt[۳]{x(۱-۲x)(x-۱)}$$

$$\Rightarrow ۳\sqrt[۳]{x(۱-۲x)(x-۱)} = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰ \;;\; ۱ - ۲x = ۰ \;;\; x - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{x = ۰} \;;\; \boxed{x = \frac{۱}{۲}} \;;\; \boxed{x = ۱}$$

پس، معادله دارای سه ریشهٔ حقیقی است:

$\{۰ , \frac{۱}{۲} , ۱\}$ = مجموعهٔ جوابهای معادله

تمرین

معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $\sqrt[۸]{۴x^۲-۱}=\sqrt[۸]{۲x-۱}$

۲) $\sqrt[۵]{x^۳}+\sqrt[۵]{۸}=۰$

۳) $\sqrt[۴]{\frac{x}{۳}+۱}=\sqrt[۴]{۲-\frac{x}{۳}}$

۴) $\sqrt[۱۰]{۸x+۱}=\sqrt[۱۰]{۲-۸x}$

۵) $\sqrt[۶]{x^۳}+۷=۶$

۶) $۹\sqrt[۱۴]{۴x-۲}+\sqrt{۳}=\frac{۳}{۲}$

۷) $۲\sqrt[۹]{x^۶}+۴\sqrt[۱۲]{x^۸}+۸=۱۶\left(۱+\frac{\sqrt[۶]{x^۴}}{۴}\right)$

۸) $x^{۳۲}+۲=۳x^{۱۶}$

۹) $\sqrt[۱۸]{y^۹}-\sqrt[۹]{y^۹}+۲=۰$

۱۰) $\sqrt[۱۰۰]{x^۵-۳۱}=۱$

۱۱) $\sqrt{۲x-۲}+\sqrt{۲x-۳}=۱$

۱۲) $\frac{۶}{\sqrt{۱۶x+۱}}=۱$

۱۳) $\sqrt{x^۴-۱}=\frac{۱۳۷۶}{\sqrt{x^۴-۱}}$

۱۴) $x\sqrt{۶}+\sqrt{۵۴x^۲}=۲$

۱۵) $\sqrt[۳]{۴x-۳}+\sqrt[۳]{۳x-۲}=۲$

۱۶) $\sqrt[۹]{(۶x+۲)^۳}=\sqrt{۱۲x+۳}$

۱۷) $\left(\sqrt[۳]{۲x-۲}+\sqrt[۳]{۲x-۳}\right)^{۷۵}=-۱$

۱۸) $\sqrt[۳]{۲x-۲}+\sqrt[۳]{۲x-۳}+\sqrt[۳]{۵-۴x}=۰$

۱۹) $\sqrt[۶]{۲+\sqrt{۴x^۸+۲}}=\sqrt[۳]{x\sqrt{۲}}$

۲۰) $\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}+\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}=۲$

۲۱) $\sqrt[۷۶]{x^۲+x}+|x^{۷۵}+x^{۷۴}|+(x^۲-۱)^{۷۶}=۰$

۲۲) $\frac{\sqrt{x+۲}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{x+۲}+\sqrt{۲-x}}=\frac{x}{۲}$

تمرینهای دوره‌ای ۱ (توان)

۱ ـ حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\dfrac{3^4-4^4}{(-5^2)}$ ۲) $2^7 \times (\frac{1}{2})^5$ ۳) $(10^3 \div 2^3) \times 5^2$

۲ ـ عبارتهای زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۴) $(\frac{-2}{3})^4 \times (\frac{2}{3})^5 \times (\frac{-2}{3})$ ۵) $2 \times 2^3 \times 2^7 \times 2^5$

۶) $(0/2)^7 \times (0/2)^{15} \times (0/2)^3 \times (0/3)^4 \times (0/3)^5 \times (0/3)^{25} \times (0/2)^9$

۷) $(-10) \times (-10)^2 \times (-10)^3 \times (-10)^4 \times (-10)^5 \times (-10)^7$

۳ ـ با فرض این‌که a یک عدد حقیقی است؛ حاصل هر یک از عبارتهای زیـر را به‌شکل یک عدد توان‌دار بنویسید.

۸) $(-a)^2 . (-a)^3 . (a)^4 . (-a)^5$ ۹) $a^{m^2} . a^{2m} . a$

۱۰) $a . a^2 . a^3 . a^4 . \dots . a^{100}$ ۱۱) $a^{1000} . a^{300} . a^{70} . a^5$

۱۲) $(-a)^3 . (-a)^4 . (-a)^4 . (-a)^3 . (a)^6$

۱۳) $(2a)\ (3a^2)\ (4a^3)\ (5a^4)\ (-2a^2)^2\ (-a^3)^5$

۴ ـ با فرض این‌که a و b و c عددهای حقیقی و m و n عددهای طبیعی باشند، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به‌شکل یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱۴) $a^2 . b^3 . a^3 . b^4 . a^4 . b^5 . a^3 . c^2 . c^{10}$

۱۵) $(-a)^{2} (-b)^{3} (-a)^{4} (-b)^{4} (-c)^{5} (-c)^{2} (-a)$

۱۶) $a^{m} . b^{n} . a^{m^{2}} . a^{m} . a . b^{n^{2}} . b^{n} . b . c^{n^{2}+1} . (-c^{n})^{2}$

۱۷) $(a^{2})^{3} (a^{3})^{2} (-b^{3})^{4} (-c^{2})^{6} (abc)^{3} (abc)^{2}$

۵ـ با فرض این‌که a و b عددهای حقیقی مخالف صفر باشند ($ab \neq 0$)، حاصل هر عبارت را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱۸) $\dfrac{a^{5} . b^{3} . a^{2} . b^{4} . a . b}{(ab)^{3} . (ab)^{4}}$

۱۹) $\dfrac{a^{7} . b^{4} . a^{3} . b^{6}}{(ab)^{2} . (ab)^{8}}$

۲۰) $\dfrac{(a^{1375} \div a^{74}) . a^{99}}{b^{200} . b^{500} . b^{700}}$

۲۱) $\dfrac{(a^{5} + a^{3} + a^{2}) . b^{2}}{(ab)^{5} + (ab)^{3} + (ab)^{2}}$

۶ـ با فرض این‌که a و b عددهای حقیقی باشند، حاصل هر عبارت را به‌صورت عددی توان‌دار بنویسید.

۲۲) $(a^{5})^{3} . (b^{3})^{5} . (ab)^{15}$

۲۳) $((a^{2})^{3})^{4} . (-a^{7}) (-b)^{31}$

۲۴) $(-a^{3})^{4} . (a^{2})^{5} . (b^{3})^{5} . (-b)^{2} . (b^{3})^{2} . a^{2}b$

۲۵) $(-a^{7})^{5} . (-b^{5})^{7} . (-a^{2})^{4} . (-a)^{8}$

۷ـ اگر a و b و c و x اعداد حقیقی مخالف صفر و m و n عددهای صحیح باشند، حاصل عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

۲۶) $(a^{n})^{-m} . (b^{-m})^{n} . (c^{-n})^{m}$

۲۷) $x^{2} . (x^{n+2})^{n} \div x^{(n+1)^{2}}$

۲۸) $5a^{-7} . (2a)^{5} . (2a)^{-2} . (-a^{2})^{2}$

۲۹) $\dfrac{x^{7} . x^{15} . x^{-3} . x^{-9}}{(x^{3} \div x^{-9}) . x^{-2}}$

۳۰) $\dfrac{a^{(m+n)^{2}} \div (a^{n})^{n+2}}{a^{1-n}} \times \dfrac{a^{n+1} \div a}{a^{2n}}$

۳۱) $\dfrac{(x^{-2})^{3} \div (x^{-2})^{2}}{x^{-7} . x^{5}}$

۳۲) $\dfrac{(a^{n})^{2m} . (a^{-n})^{-n} . a^{m^{2}}}{(b^{m})^{2n} . (b^{-m})^{-m} . b^{n^{2}}}$

۳۳) $\dfrac{a^{m} . a^{n} . a^{-m} . a^{m-n}}{b^{n} . b^{m} . b^{m-n} . b^{-m}}$

۳۴) $\left(\dfrac{۶^۳ \times a^{-۳} . b^{-۲} . a^{-۲} . b^{-۲} . c^{-۳} . a^۲ . a^۳}{a^۵ . ۸a^{-۶} . b^{-۳} . c^{-۲} . ۹a^{-۳} . b . c}\right)^{-۳}$

۳۵) $\left(\dfrac{a^m . a^n \div a^{m-n}}{c^n . c^m . c^{n-m}} \times \dfrac{b^n . b^m . b^{n-m}}{b^{m+n} \div b^{m-n}}\right)^m$

۳۶) عبارت $(۷x^۴ - ۷)^{۶-۶x^۲}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده (مبهم) و به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟

۸ـ با فرض این‌که a یک عدد حقیقی مخالف صفر و k یک عدد صحیح باشد، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

۳۷) $((-a)^۴)^k . (-a)^k . (-a)^{۳k} . (-a) . (-a)^{k-۱}$

۳۸) $[((-a)^{۵k})^۳]^{-۲k} . [(-a^k)^{-۱۰k}]^{-۳}$

۹ـ حاصل عبارتهای زیر را به‌صورت یک عدد تواندار بنویسید.

۳۹) $۵ \times ۲^۹ - ۶ \times ۲^۵ + ۶ \times ۲^۷ - ۱۸ \times ۲^۵ + ۶ \times ۲^۸ + ۳ \times ۲^{۱۲}$

۴۰) $۳ \times ۳^{۳۴} - ۱۰ \times ۳^{۳۳} + ۹ \times ۳^{۳۲} + ۳^{۳۴} - ۵ \times ۳^{۳۳} + ۲۷ \times ۳^{۳۱}$

۱۰ـ با فرض این‌که a یک عدد حقیقی است، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

۴۱) $A = ۷(a^۴)^۵ - ۳(-a^۵)^۴$

۴۲) $B = ۷(a^۴)^۳ + (-a^۲)^۶ - ۳(a^۲)^۶ + (-a^۳)^۴ - ۵a^{۱۲}$

۱۱ـ با فرض این‌که x یک عدد حقیقی است، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

۴۳) $A = ۳^{x+۲} + ۳ \times ۳^x + ۳^{x-۱}$

۴۴) $B = ۵^{۲x+۱} - ۲۵ \times (۵^۲)^x - (۵^x)^۲ + ۲۵^x + ۵ \times ۵^{۲x}$

۴۵) $C = ۳ \times ۳^{۲x+۱} - ۳ \times ۳^{۲x} - ۹^x - ۱۸ \times ۳^{۲x-۲} + ۱۸ \times ۹^x$

۴۶) $D = \dfrac{۸ \times ۲^x + ۴ \times ۲^x + ۲^{x+۱} + ۴ \times ۲^{x-۲}}{۱۶ \times ۲^{x+۱} - ۴ \times ۲^{x+۲} - ۲ \times ۲^{x+۱}}$

۴۷) عبارت زیر به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است.

$$K = \frac{۵ \times ۲^{x} - ۳ \times ۲^{x+۱} + ۲^{x}}{۲^{x+۲} - ۲^{x+۱} - ۲^{۷۵}}$$

۱۲ـ معادله‌های نمایی زیر را حل کنید.

۴۸) $۲^{۲x} = ۴^{۵۰}$

۴۹) $۵^{۵x-۱} + ۷ = ۶۳۲$

۵۰) $۷^{x+۱} - ۷^{x} = ۴۲$

۵۱) $۴ \times ۲^{x} + ۲ \times ۲^{x-۲} + ۲^{x} = ۲۲$

۵۲) $(\frac{۱}{۲})^{۲-x} = ۴^{۷۵}$

۵۳) $۳ \times ۳^{x+۲} = ۹ \times ۲^{۵x+۵}$

۵۴) $(۰/۵)^{x} \times (\frac{۱}{۰/۱۲۵})^{۴-x} = \frac{۶۲۵}{۱۰۰۰۰}$

۵۵) $۲^{۲^{x}} + ۲ = ۱۷ + ۷۵^{x} \times ۷۵^{-x}$

تمرینهای دوره‌ای ۲ (رادیکال)

۵۶) ثابت کنید $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{7}$ و $\sqrt{13}$ عددهایی گنگ (اصم) می‌باشند.

۵۷) ریشه‌های دوم عددهای 1 , 4 , 25 , 10000 , $0/01$, $\frac{(-3)^2}{36}$, $-(-2)^2$ و $-(-\frac{1}{27})(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{9})^3$ را در صورت وجود بیابید.

۵۸) حاصل عبارتهای $\sqrt{49}$, $(-\sqrt{25})^3$, $(-\sqrt{(-2)^2})^2$, $\sqrt{0/01}$, $\sqrt{\frac{9}{4}}$, $-\sqrt{\sqrt{\frac{16}{81}}}$, $(\sqrt{(-2)^3})^2$, $\sqrt{-4^2}$, $(-\sqrt{-1})^2$, $\sqrt{(-16)^2}$, $\sqrt{-\sqrt{\frac{81}{16}}}$, $\sqrt{-(-4)^3}$ را در صورت وجود بیابید.

۱۳ـ حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۵۹) $5\sqrt{9}+2\sqrt{(-4)^2}-3\sqrt{(-3)^2}+2\sqrt{9}-\sqrt{64}$

۶۰) $7\sqrt{\frac{4}{9}}-\sqrt{(\frac{-2}{3})^2}+\frac{10}{3}-11\sqrt{\frac{4}{9}}$

۶۱) $2\sqrt{(-0/1)^2}-5\sqrt{\frac{1}{100}}+4\sqrt{0/25}-7\sqrt{0/09}$

۶۲) $3\sqrt{1\frac{5}{4}}-\sqrt{(\frac{-3}{2})^2}-2\sqrt{\frac{9}{4}}+\frac{\sqrt{9}}{2}-\frac{3}{\sqrt{4}}$

۶۳) $7\sqrt{(-4)^2}-5\sqrt{(-2)^4}+\sqrt{(-4)^4}-\sqrt{(-2)^2}$

۱۴ ـ کدام‌یک از تساویهای زیر به ازای هر مقدار حقیقی x همواره درست است.

۶۴) $\sqrt{(-x)^{۲}}=-x$ ۶۵) $\sqrt{(-x^{۴})^{۲}}=x^{۴}$

۶۶) $x\sqrt{x^{۲}}\sqrt{x^{۴}}=x^{۴}$ ۶۷) $\sqrt{x^{۶}}=x^{۳}$

۶۸) $\sqrt{\sqrt{x^{۴}}}=x$ ۶۹) $\sqrt{(x^{۲}+۱)^{۲}}=x^{۲}+۱$

۷۰) $x\sqrt{(-x)^{۲}}-\sqrt{x^{۴}}=۰$ ۷۱) $۲\sqrt{x}+x-\sqrt{۴x}=x$

۷۲) $\dfrac{\sqrt{(x^{۲}+۱)^{۲}}-۱}{\sqrt{x^{۴}}}+\dfrac{\sqrt{x^{۲}}}{\sqrt{(-x)^{۲}}}=۲$ ۷۳) $\dfrac{\sqrt{(x^{۲}+۱)^{۴}-۲x^{۲}}}{\sqrt{(x^{۴}+۱)^{۲}}}=۱$

۷۴) عبارت $\sqrt{(۴-x^{۲})^{۲}}$ را به ازای $x=۰$, $x=-۲$, $x=۱$, $x=\sqrt{۳}$, $x=-\frac{۱}{۲}$, $x=-\frac{۱}{۱۰}$ و $x=-\sqrt{۲}$ ، حساب کنید.

۱۵ ـ حاصل عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

۷۵) $|-\sqrt{۵}|$ ۷۶) $\left|\frac{۵}{۲}-\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}\right|$ ۷۷) $\left|-\sqrt{(-\frac{۳}{۲})^{۲}}\right|$

۷۸) $\left|\sqrt{(-۷)^{۲}}-\sqrt{(-۵)^{۲}}\right|$ ۷۹) $\big|\,|۱/۴-\sqrt{۲}|-|۱/۷-\sqrt{۳}|\,\big|$

۸۰) $\sqrt{\sqrt{(۱۰-۳/۱۴)^{۲}}}-\sqrt{\sqrt{(-۱۰۰)^{۲}}}-\sqrt{(۳/۱۴)^{۲}}+\sqrt{(-\sqrt{۱۰})^{۲}}$

۸۱) $\left|(-۱۳)^{۷۴}+(-۱۳)^{۷۵}\right|$ ۸۲) $\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}$

۱۶ ـ در صورتی‌که x عدد حقیقی غیر صفر باشد، حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به‌دست آورید.

۸۳) $|-۷x^{۵}|\,.\,|۲x|\sqrt{(-۲x^{۲})^{۲}}$ ۸۴) $\left|\dfrac{۱-x^{۴}}{x^{۲}+۱}\right|-|x^{۲}-۱|$

۸۵) $\left|\frac{-۲}{x^{۵}}\right| \cdot \left|\frac{-x^{۴}}{۲}\right| \cdot |-x| \sqrt{\frac{۱}{x^{۲}}}$

۸۶) $\frac{\sqrt{x^{۲}}}{x}+\frac{x}{\sqrt{x^{۲}}}$

۱۷ ـ حاصل عبارتهای زیر را در صورت وجود بیابید.

۸۷) $\sqrt[۷]{(-\frac{۱}{۲})^{۷}}$

۸۸) $\sqrt[۱۰]{(-۲)^{۳}(-۲)^{۵}(-۲)^{۲}}+\sqrt[۳]{-۸}$

۸۹) $۵\sqrt[۴]{(-۲۵)^{۲}}-\sqrt[۴]{(-۹)^{۲}}+\sqrt[۴]{(-۶۲۵)^{۲}}-\sqrt{۲\sqrt{۶۴}}$

۹۰) $-\sqrt[۸]{(-۵)^{۱۳}.(-۵)^{۷۵}}$

۹۱) $\sqrt[۳]{(-۴)(-۶)(-۳)^{۲}}$

۹۲) $\sqrt[۵]{۳۲}\times\sqrt[۴]{(-۲)(-۸)}$

۹۳) $\sqrt[۳]{-۲۷}+\sqrt{(-۳)^{۲}}$

۹۴) $۵\sqrt[۳]{۶۴}-۴\sqrt[۴]{(-۵)^{۴}}$

۹۵) $\sqrt[۳]{(-۲۰)^{۲}}\times\sqrt[۶]{(-۲۰)^{۲}}$

۹۶) $\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۶]{(-۲)^{۲}}\times\sqrt[۱۲]{(-۴)^{۲}}\times\sqrt[۱۸]{(-۸)^{۲}}$

۹۷) $\sqrt{۲}\times\sqrt[۴]{۴}\times\sqrt[۸]{۱۶}\times\sqrt[۱۶]{(-۱۶)^{۲}}$

۹۸) $\sqrt[۵]{۳}\times\sqrt[۱۰]{۹}\times\sqrt[۲۰]{۸۱}\times\sqrt[۴۰]{(-۹)^{۴}}\times\sqrt[۸۰]{(-۸۱)^{۴}}$

۱۸ ـ تعیین کنید کدام‌یک از عبارتهای رادیکالی زیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی($\mathbb{R}$) بی‌معنی است. ($n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$)

۹۹) $\sqrt[۳]{(-۲)^{۳}\sqrt{-۲^{۳}}}$

۱۰۰) $\sqrt{-\sqrt[۳]{-\sqrt{(-۲)^{۲}}}}$

۱۰۱) $\sqrt[۱۰۱]{-۲^{۱۰۰}}$

۱۰۲) $\sqrt[۱۰۰]{(-۲)^{۱۰۱}}$

۱۰۳) $\sqrt[۲n]{(-۲)^{۲n}}$

۱۰۴) $\sqrt[۴]{۸\sqrt[۵]{-۳۲}}$

۱۰۵) $\sqrt[۴n]{-\sqrt[۳]{-x^{۶}}}$

۱۰۶) $\sqrt[۴]{-(x^{۲}+۱)}$

۱۰۷) $\sqrt[۲n]{-(x^{۴}+۲x^{۲}+۱)}\times\sqrt[۶n]{-(x+۱)^{۲}}$

۱۰۸) $\sqrt{\dfrac{-۴}{(x^{۲}+۱)^{۲}}}$

۱۰۹) $\sqrt[۳]{-\sqrt{x^{۲}}}\times\sqrt{-\sqrt[۳]{-x^{۲}}}$

۱۱۰) $\sqrt{-\sqrt{(۱+x^{۲})^{۲}}}$

۱۹ ـ عبارتهای زیر به ازای چه مقادیری از مجموعهٔ اعداد حقیقی معنی دارند.

۱۱۱) $\sqrt[۴]{-\sqrt[۳]{x}}$

۱۱۲) $\sqrt[۳]{-\sqrt[۴]{x^{۲}}}$

۱۱۳) $\sqrt[۵]{\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{x}}}$

۱۱۴) $\sqrt[۶]{۱-x^{۳}}$

۱۱۵) $\sqrt{۱-x^{۲}}$

۱۱۶) $\sqrt[۴]{\dfrac{۱}{x^{۳}}}$

۱۱۷) $\sqrt[۸]{x^{۲}+x^{۴}}$

۱۱۸) $\sqrt[۷۴]{-x^{۲}-۱۶}$

۱۱۹) $\sqrt[۷۵]{\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{-x}+۱}}$

۱۲۰) $\sqrt{x^{۲}+|x|}$

۱۲۱) $\sqrt[۳]{-\sqrt{-۵\sqrt[۷]{-|x|}}}$

۱۲۲) $\sqrt{\dfrac{-x}{x^{۲}}}$

۱۲۳) $\sqrt[۷]{۱-\sqrt[۴]{x}}$

۱۲۴) $\sqrt[۷]{۲+\sqrt[۵]{۱-\sqrt[۳]{-x}}}$

۲۰ ـ حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید. $(a, b, c, x \in \mathbb{R})$

۱۲۵) $\sqrt{۳}\times\sqrt{۲۷}$

۱۲۶) $\sqrt[۴]{۵}\times\sqrt[۸]{۲۵}\times\sqrt[۴]{۲۵}$

۱۲۷) $\sqrt[۴]{\frac{۲}{۵}} \times \sqrt[۸]{\frac{۴}{۲۵}} \times \sqrt[۱۶]{\frac{۱۶}{۶۲۵}} \times \sqrt[۳۲]{(-\frac{۲}{۵})^{۸}}$

۱۲۸) $\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۳}} \times \sqrt[۶]{۷+۴\sqrt{۳}}$

۱۲۹) $\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۳]{۴}} \times \sqrt[۵]{۱۶}$

۱۳۰) $\sqrt[۴]{\sqrt{۲}-۱} \times \sqrt[۴]{\sqrt{۲}+۱}$

۱۳۱) $\sqrt{a^{۴}+b^{۴}} \times \sqrt[۴]{a^{۸}+b^{۸}+۲(ab)^{۴}}$

۱۳۲) $\sqrt[۳]{x^{۲}+۱} \times \sqrt[۳]{x^{۴}-x^{۲}+۱} \times \sqrt[۳]{(x^{۸}+۱)^{۲}}$

۱۳۳) $\sqrt[۴]{x^{۴}-x^{۲}+۱} \times \sqrt[۴]{(x^{۲}+۱)(x^{۶}+۱)^{۳}}$

۱۳۴) $\sqrt[۷]{x^{۲}} \times \sqrt[۷]{x^{۴}} \times \sqrt[۷]{x}$

۱۳۵) $\sqrt[۷]{a^{۴}b^{۵}} \times \sqrt[۷]{a^{۳}bc^{۳}} \times \sqrt[۷]{bc^{۴}}$

۱۳۶) $\sqrt[۳]{(a-b)^{۲}} \times \sqrt[۳]{(a^{۲}+ab+b^{۲})^{۲}} \times \sqrt[۹]{(a-b)^{۲}} \times \sqrt[۹]{a-b}$

۲۱ـ حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید. $(x, y \neq ۰ , a, x, y \in \mathbb{R})$

۱۳۷) $\dfrac{\sqrt{۴۰}}{\sqrt{\frac{۲}{۵}}}$

۱۳۸) $\dfrac{\sqrt{۵۰} \times \sqrt{۶} \times \sqrt[۴]{۴}}{\sqrt{۲} \times \sqrt[۶]{۲۷}}$

۱۳۹) $\dfrac{\sqrt[۵]{۳۰} \times \sqrt[۵]{۱۶}}{\sqrt[۵]{۳} \times \sqrt[۵]{۵}}$

۱۴۰) $\dfrac{\sqrt{۱۲۵}}{\sqrt[۴]{۲۵}}$

۱۴۱) $\sqrt[۳]{\frac{۶}{۵۴}} \times \sqrt[۶]{\frac{۱}{۹}}$

۱۴۲) $\dfrac{\sqrt[۵]{۲}}{\sqrt[۵]{۶۴}}$

۱۴۳) $\dfrac{\sqrt[۶]{۱۶}}{\sqrt[۳]{۱۰۸}}$

۱۴۴) $\dfrac{\sqrt[۷]{۷ \times ۱۰^{۷}}}{\sqrt[۱۴]{۴۹}}$

۱۴۵) $\dfrac{\sqrt[۵]{(a^{۴}+۴)^{۳}}}{\sqrt[۱۵]{(a^{۴}+۴)^{-۶}}}$

۱۴۶) $\frac{x^3\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^4}}\times\frac{\sqrt[10]{x^4}}{x^4}$ ۱۴۷) $\frac{\sqrt[3]{x^2y}\times\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{x^2y^3}\times\sqrt[6]{x^4y^4}\times\sqrt[9]{x^6}}$ ۱۴۸) $\frac{\sqrt[7]{x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[14]{x^{20}}}$

۲۲ـ حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید. $(a , b \in \mathbb{R})$

۱۴۹) $3\sqrt{2}-5\sqrt[4]{4}+2\sqrt[8]{16}-4\sqrt{8}-\sqrt[4]{64}$

۱۵۰) $3\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[6]{4}+5\sqrt[9]{8}-7\sqrt[15]{32}$

۱۵۱) $7\sqrt[5]{3}-4\sqrt[10]{9}+9\sqrt[15]{27}-4\sqrt[5]{81}\times3\sqrt[20]{81}$

۱۵۲) $13\sqrt[7]{5}-5\sqrt[14]{25}+2\sqrt[21]{125}-10\sqrt[28]{625}$

۱۵۳) $\sqrt{54}-2\sqrt[4]{36}+5\sqrt{24}-2\sqrt{6}+3\sqrt[4]{36}$

۱۵۴) $\sqrt[4]{405}+3\sqrt[8]{25}+7\sqrt[16]{625}+5\sqrt[8]{25}-16\sqrt[4]{5}$

۱۵۵) $\sqrt[3]{a^4}-5\sqrt[6]{a^8}+3\sqrt[12]{a^{16}}-2\sqrt[3]{a^4}+7a\sqrt[3]{a}$

۱۵۶) $\sqrt[5]{a^6b^6}-b\sqrt[5]{a^6b}+\sqrt[10]{a^{12}b^{12}}+12a\sqrt[5]{ab^6}-9\sqrt[15]{a^{18}b^{18}}$

۲۳ـ حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱۵۷) $(\sqrt[4]{(-2)^3})(\sqrt[8]{(-2)^2})$ ۱۵۸) $(-\sqrt[3]{4})^2(-\sqrt[6]{2})^4$

۱۵۹) $(\sqrt[3]{7})^5(\sqrt[9]{7})^3$ ۱۶۰) $(\sqrt[3]{-2})^2(\sqrt[6]{-2})^2$

۱۶۱) $(\sqrt[5]{-3})^7(\sqrt[10]{9})^2(-\sqrt[5]{3})(-\sqrt[15]{-3})^{30}$

۱۶۲) $(\sqrt[7]{-a^3})^4(-\sqrt[7]{a})^2$ ۱۶۳) $(\sqrt[3]{a^2b^3c})^5(\sqrt[3]{a^8b^3c})$

۱۶۴) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2(5+2\sqrt{6})$

۱۶۵) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2+2\sqrt{15}$

۱۶۶) $(\sqrt{3}-\sqrt{7})^2(10-2\sqrt{21})(10+2\sqrt{21})^2$

۲۴ـ حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید. $(a \in \mathbb{R})$

۱۶۷) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^{16}$

۱۶۸) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{2\sqrt{2}}}\right)^{72}$

۱۶۹) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

۱۷۰) $\sqrt[13]{\left(\sqrt{7\sqrt{5}}\right)^4}$

۱۷۱) $\left(\sqrt[4]{\sqrt[7]{\sqrt[5]{16}}}\right)^{35}$

۱۷۲) $\left(\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}\right)^{16}$

۱۷۳) $\left(\sqrt[7]{a\sqrt[5]{a}}\right)\left(\sqrt[35]{a}\right)^{29}$

۱۷۴) $\sqrt[3]{\left(\sqrt[7]{\sqrt[5]{a^4}}\right)^2} \times \sqrt[3]{\left(\sqrt[5]{\sqrt[7]{a^3}}\right)^9} \times \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$

۲۵ـ حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید. $(a \neq 0)$

۱۷۵) $\sqrt[3]{7} \times \sqrt[4]{7} \times \sqrt{7}$

۱۷۶) $2\sqrt[3]{-2} \times 3\sqrt[4]{(-2)^2}$

۱۷۷) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{4} \times \sqrt[4]{2}$

۱۷۸) $3\sqrt[3]{4} \times 4\sqrt{2\sqrt{2}}$

۱۷۹) $\sqrt{9} \div \sqrt[3]{3}$

۱۸۰) $\sqrt[4]{225} \div 5$

۱۸۱) $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[3]{a\sqrt[5]{a^4}}}{\sqrt[3]{a^4}}$

۱۸۲) $\dfrac{\sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[7]{a^3 \div \sqrt[3]{a^2}}}$

۲۶ـ حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید. (a و b عددهای حقیقی غیر صفر می‌باشند.)

۱۸۳) $\sqrt[3]{4} \times 2^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[5]{8} \times 2^{-\frac{3}{5}} \times 2^{\frac{7}{5}} \times 2^{-\frac{4}{5}}$

۱۸۴) $\sqrt[5]{4} \times 2^{-\frac{2}{5}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{4}{3}} \times \sqrt[5]{2^{-2}} \times \left(\sqrt[3]{2^{-2}}\right)^2$

۱۸۵) $3^{-2/5}\times\left(\frac{1}{\sqrt[5]{9}}\right)^{-10}\times 3^{1/5}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(\sqrt[10]{\frac{1}{3}}\right)^{5}$

۱۸۶) $\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{5}{\sqrt[4]{5}}\times\frac{25}{\sqrt[8]{5}}\times 5^{-\frac{1}{16}}\times\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)^{-2}$

۱۸۷) $a^{-\frac{1}{3}}\times a^{-\frac{4}{9}}\times\sqrt[6]{a^{-4}}\times a^{\frac{5}{9}}\times\sqrt[27]{a^{6}}\times\sqrt[3]{a^{-3}}\times a^{\frac{15}{9}}$

۱۸۸) $\frac{2a^{2}}{\sqrt[6]{b^{4}}}\times a^{\frac{8}{3}}\times\left(\sqrt[3]{a^{-2}}\right)^{4}\times\frac{\sqrt[27]{b^{9}}}{\sqrt[9]{a^{12}}}\times\sqrt[5]{a^{-15}}\times 3a^{4}\times\sqrt[3]{a^{2}b}$

۱۸۹) $\sqrt[5]{a^{15}b^{5}}\times\left(\sqrt[3]{a^{-2}}\right)^{2}\times a^{\frac{4}{3}}\times\frac{2}{a^{3}b^{2}}\times\sqrt[7]{a^{-7}}$

۲۷ـ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

۱۹۰) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

۱۹۱) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}$

۱۹۲) $\frac{7\sqrt{3}-5}{7\sqrt{3}+5}$

۱۹۳) $\frac{2\sqrt[4]{5}+3\sqrt[4]{2}}{2\sqrt[4]{5}-3\sqrt[4]{2}}$

۱۹۴) $\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$

۱۹۵) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$

۱۹۶) $\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

۱۹۷) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\sqrt[4]{6}}$

۱۹۸) $\frac{1+2\sqrt{14}-2\sqrt{15}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

۱۹۹) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

۲۰۰) $\frac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5}}$

۲۰۱) $\frac{12-6\sqrt[6]{36}}{1+\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{9}}$

۲۰۲) حاصل عبارت زیر را به دست آورید. ($n\in\mathbb{N}$)

$$S=1+\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}}{4+\sqrt{12}}+\dots+\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n^{2}-n}}$$

۲۸ـ عبارتهای زیر را به جمع جبری دو رادیکال ساده بنویسید.

۲۰۳) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

۲۰۴) $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$

۲۰۵) $\sqrt[4]{13-2\sqrt{3}+6\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

۲۰۶) $\sqrt[6]{99-70\sqrt[4]{4}}$

۲۰۷) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A=\sqrt[5]{2\sqrt[6]{8}}+\left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^{3}-2^{\frac{3}{10}}-\sqrt[40]{128}+\sqrt{2\sqrt{3}+4}$$

۲۰۸) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$B=\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

۲۰۹) با فرض $a \geq 0$ و $b \geq 0$ و $c \geq 0$، عبارت زیر را ساده کنید.

$$P=-7a^{4}\sqrt[3]{a^{3}b^{12}c^{6}}\ .\ 5b^{3}\sqrt[8]{a^{8}b^{4}c^{4}}$$

۲۱۰) اگر n عدد طبیعی فرد و $n > 1$ و a و b و c عددهای حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}$$

۲۹ـ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

۲۱۱) $$\frac{4}{\sqrt[6]{4}+\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4}}}+\left(\sqrt[10]{2}\right)^{3}-\sqrt[20]{64}-2^{0.3}}$$

۲۱۲) $$\frac{21}{\sqrt[3]{2}-7\sqrt[6]{4}+5\sqrt[3]{16}+4\sqrt[6]{4}-2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}}$$

۳۰ـ اگر a و b عددهای حقیقی باشند، ثابت کنید:

۲۱۳) $\sqrt[4]{a^{8}+b^{8}+\left(\sqrt[8]{4}ab\right)^{4}}\leq a^{2}+b^{2}$

۲۱۴) $\left(\sqrt[n]{a^{2}}\right)^{k}=\sqrt[n]{a^{2k}}\quad (k,n\in\mathbb{N},\ n>1)$

۲۱۵) $\sqrt[4]{a^{2}b^{2}}=\sqrt{|a|}\,.\sqrt{|b|}$

۲۱۶) $\sqrt[4]{\frac{a^{2}}{b^{2}}}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$

۳۱ـ معادله‌های زیر را حل کنید و جوابها را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۲۱۷) $(x^2-2)^2=3$

۲۱۸) $6x^4-96=0$

۲۱۹) $16x^4=49$

۲۲۰) $(x^3)^4+(x^2)^6=4^6$

۲۲۱) $a^{42}+4^{63}=0$

۲۲۲) $b^{1375}+32^{25}=0$

۳۲ـ معادله‌های زیر را حل کنید.

۲۲۳) $\sqrt[4]{x^2-1}=\sqrt[4]{x-1}$

۲۲۴) $\sqrt[3]{x}+8=0$

۲۲۵) $\sqrt[6]{\frac{x}{6}+1}=\sqrt[6]{2-\frac{x}{6}}$

۲۲۶) $\sqrt{4x+1}=\sqrt{2-4x}$

۲۲۷) $\sqrt{x}+7=5$

۲۲۸) $3\sqrt[100]{2x-4}+\sqrt{2}=1$

۲۲۹) $\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[6]{a^4}+4=8(1+\frac{\sqrt[12]{a^8}}{4})$

۲۳۰) $x^{16}-3x^8+2=0$

۲۳۱) $\sqrt[6]{y^3}-\sqrt[3]{y^3}+2=0$

۲۳۲) $\sqrt{z^4-40}=3$

۲۳۳) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}=1$

۲۳۴) $\frac{3}{\sqrt{8m+1}}=1$

۲۳۵) $\sqrt{u^2-1}=\frac{1374}{\sqrt{u^2-1}}$

۲۳۶) $\sqrt[6]{64x^3}=-2x$

۲۳۷) $x\sqrt{3}+\sqrt{27x^2}=1$

۲۳۸) $\sqrt[3]{8x-3}+\sqrt[3]{4x-1}=2$

۲۳۹) $\frac{12x-2}{\sqrt[4]{(8x-1)^3}}=\sqrt[4]{8x-1}$

۲۴۰) $\sqrt{6x+7}\sqrt{18x-2}=6\sqrt{9x-2}\sqrt{3x}$

۲۴۱) $\sqrt[3]{3x+2}=\sqrt{6x+3}$

۲۴۲) $\frac{\sqrt{4x+2}-\sqrt{2-4x}}{\sqrt{4x+2}+\sqrt{2-4x}}=2x$

۲۴۳) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{5-2x}=0$

۲۴۴) $\sqrt{2+\sqrt{4x^4+2}}=x\sqrt{2}$

۲۴۵) $\sqrt{5x+4}+\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}=\sqrt{4-2x}$

۲۴۶) $\sqrt{4x+2\sqrt{4x-1}}+\sqrt{4x-2\sqrt{4x-1}}=2$

۲۴۷) $2\sqrt[3]{4x^5+4}+\sqrt[6]{32x^5+32}=2$

۲۴۸) $(x^4-1)^{74}+|x^{73}+1|^{75}+\sqrt[76]{x^2-3x-4}=0$

۲۴۹) $\sqrt[7]{x^5\sqrt{x\sqrt[3]{8x}}}=2$

۲۵۰) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}=1$

۲۵۱) $\sqrt{2-2x+4x^2}+\sqrt{1-2x+4x^2}=3$

۲۵۲) $(\sqrt[5]{2-\sqrt{3}})^x+(\sqrt[5]{2+\sqrt{3}})^x=2$

۲۵۳) حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$\left(\frac{2-\sqrt[4]{9}}{\sqrt[4]{4}-\sqrt{2-\sqrt[4]{9}}}+\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[6]{8}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^{1376}$$

۲۵۴) درستی برابری زیر را تحقیق کنید.

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{75}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{74}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{75}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{74}=$$
$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{76}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{76}$$

۲۵۵) حاصل عبارت $P=\sqrt[55]{\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}}$ را حساب کنید.

تستهای توان

۱ـ حاصل عبارت $128 \times 64 \times 32 \times 16 \times 8 \times 4 \times 2$ کدام است؟

۱) 2^{24} ۲) 2^{28} ۳) 2^{30} ۴) 2^{34}

۲ـ حاصل عبارت $(\frac{3}{4})^{7} \times (\frac{3}{4})^{5} \times (\frac{3}{4})^{7} \times (\frac{3}{4})^{6} \times \frac{27}{64}$ کدام است؟

۱) $(\frac{3}{4})^{22}$ ۲) $(\frac{3}{4})^{24}$ ۳) $(\frac{3}{4})^{26}$ ۴) $(\frac{3}{4})^{28}$

۳ـ حاصل عبارت $(0/5)^{1} \times (0/5)^{3} \times (0/5)^{7} \times (0/5)^{6}$ کدام است؟

۱) $(0/5)^{14}$ ۲) $(0/5)^{15}$ ۳) $(0/5)^{17}$ ۴) $(0/5)^{19}$

۴ـ حاصل عبارت $P = 10 \times 10^{2} \times 10^{3} \times 10^{4} \times \cdots \times 10^{100}$ کدام است؟

۱) 10^{1010} ۲) 10^{3030} ۳) 10^{4040} ۴) 10^{5050}

۵ـ حاصل عبارت $A = a^{2} . a^{4} . a^{6} . a^{8} . \dots . a^{1376}$ کدام است؟

۱) a^{474032} ۲) a^{474034} ۳) a^{474132} ۴) a^{474134}

۶ـ حاصل عبارت $a^{m^2+n^2} . a^{10mn} . a^{5n^2} . a^{5m^2} . a^{5(m-n)^2}$ کدام است؟

۱) $a^{5(m^2+n^2)}$ ۲) $a^{11(m^2+n^2)}$ ۳) $a^{15(m^2+n^2)}$ ۴) $a^{20(m^2+n^2)}$

۷ـ اگر a و b عددهای حقیقی باشند، حاصل عبارت $a^{100} . b^{5} . a^{34} . b^{129}$ کدام است؟

۱) $a^{105} . b^{134}$ ۲) $(a . b)^{134}$ ۳) $a^{134} . b^{105}$ ۴) $(a . b)^{105}$

۸ـ اگر a و b عددهای حقیقی و m و n عددهای طبیعی باشند، حاصل عبارت $a^{n^2} . b^{m^2} . a^{2mn} . b^{n^2} . a^{m^2} . b^{2mn}$ کدام است؟

۱) $a^{(m+1)^2} . b^{(n+1)^2}$ ۲) $(a.b)^{(m+1)^2(n+1)^2}$ ۳) $(a . b)^{(2m+2n)^2}$ ۴) $(a . b)^{(m+n)^2}$

۹ـ اگر a و b عددهای حقیقی باشند و n عددی طبیعی باشد، حاصل عبارت $a . b . a^2 . b^2 . a^3 . b^3 . \dots . a^n . b^n$ کدام است؟

۱) $(a . b)^n$ ۲) $(a . b)^{n+1}$ ۳) $(a . b)^{n(n+1)}$ ۴) $(a.b)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

۱۰ـ اگر a و b عددهای حقیقی مخالف صفر باشند ($ab \neq 0$)، حاصل عبارت $\frac{a^{30} . b^{20} . a^4 . b^{25} . a^8 . b^4 . a^2}{a^{22} . b^{16} . b^{29} . a^7 . a^5 . a^6}$ کدام است؟

۱) $(a . b)^4$ ۲) $(a . b)^3$ ۳) $(a . b)^2$ ۴) $a . b$

۱۱ـ اگر a عدد حقیقی غیر صفر باشد، حاصل عبارت $\left(\frac{a^{78} + a^{80}}{a^6 + a^4}\right)\left(\frac{a^{76} : a^{42}}{a^{75} : a^5}\right)$ کدام است؟

۱) a^{32} ۲) a^{34} ۳) a^{36} ۴) a^{38}

۱۲ـ اگر a و b عددهای حقیقی مخالف صفر ($ab \neq 0$) و m و n اعداد طبیعی باشند، حاصل عبارت $A=\frac{(a.a^2.a^3. \dots a^n)(b.b^2.b^3.\dots.b^m)}{a^{\frac{n^2+n}{2}}.b^{\frac{m^2+m}{2}}}$ کدام است؟

۱) $(a.b)^{nm}$ ۲) $(a.b)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ۳) $(a.b)^{\frac{m(m+1)}{2}}$ ۴) 1

۱۳ـ اگر a عدد حقیقی غیر صفر باشد، حاصل عبارت $\frac{a^{-1} . a^{-3} . a^{-7} . a^{-6}}{a^{-15} : (a^{-2})^{-5}}$ کدام است؟

۱) a^{23} ۲) a^{25} ۳) a^4 ۴) a^2

۱۴ـ اگر a و b عددهای حقیقی مخالف صفر ($ab \neq 0$) و m و n اعداد صحیح باشند، حاصل عبارت $\left(\frac{3^7 \times 5^6 \times a^{-3} \times b^{-4} \times c^{-2}}{81a^{-5} \times 15b^{-6} \times 125c^{-4}}\right)^{55}$ کدام است؟

۱) $(15abc)^{110}$ ۲) $(15\,a^2b^2c^2)^{55}$ ۳) $(15\,abc)^{165}$ ۴) $(15\,a^2b^2c^2)^{110}$

۱۵ـ عبارت $(7x^6 - 7)^{x-x^3}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده (مبهم) است؟

۱) $x \in \{0 , 1\}$ ۲) $x \in \{-1 , 1\}$ ۳) $x \in \{-1 , 0\}$ ۴) $x \in \{-1 , 0 , 1\}$

۱۶ـ اگر a عدد حقیقی غیر صفر و k یک عدد صحیح باشد، حاصل عبارت $A = [(-a)^{-4}]^{3k} . [(-a)^{-2}]^{-6k} . (-a)^{1376} . (-a)^{-1377}$ کدام است؟

۱) a^{-1} ۲) a^{-2} ۳) $-a^{-1}$ ۴) $-a^{-2}$

۱۷ـ حاصل عبارت $2^{14} - 2^7 - 24\times2^7 - 12\times2^8 + 10 \times 2^{10} + 12 \times 2^9$ کدام‌است؟

۱) 2^{14} ۲) 2^7 ۳) 4 ۴) صفر

۱۸ـ حاصل عبارت $5^{10} - 5^{12} \times 4 + 25^6 \times 4 - 5^{11} \times 5^6 + 25^5$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 5^{17} ۳) 5^{12} ۴) 5^{10}

۱۹ـ حاصل عبارت $B = 3 \times 9^{x+1} - 6 \times 9^{x+1} + 15 \times 3^{2x+2} - 45 \times 3^{2x+1}$ کدام است؟

۱) -3^{2x+3} ۲) -3^{2x+2} ۳) 3^{2x+2} ۴) صفر

۲۰ـ حاصل عبارت $C = \frac{3^{x+2} + 12 \times 3^{x+1} + 3^{x+3} - 15 \times 3^{x+2} + 3^{x+4}}{3^{x+1} + 3^{x-1} \times 3^{x+1} \times 3^{2-x}}$ کدام است؟

۱) 2×3^x ۲) 3^{x+2} ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{9}{2}$

۲۱ـ حاصل عبارت $D = \frac{12 \times 2^x - 2^{x+4} + 2^{x+5} + 2^{x+3} - 2^{x+1}}{9 \times 2^x - 3 \times 2^{x+1} + 6 \times 2^{x+3} - 15 \times 2^{x+1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{2^x}{3}$ ۲) 3×2^x ۳) $\frac{17}{7}$ ۴) $\frac{34}{21}$

۲۲ـ مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $2^{x^2+4} = 64$ کدام است؟

۱) $\{-1, 0, 1\}$ ۲) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ ۳) $\{-2, 2\}$ ۴) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

۲۳ـ مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $4^{x^2-x-3} = \frac{1}{64}$ کدام است؟

۱) $\{-2, 2\}$ ۲) $\{-1, 1\}$ ۳) $\{-2, 0, 2\}$ ۴) $\{-1, 0, 1\}$

۲۴ـ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادلهٔ $2^{2x^2+1} + 4^{x^2+2} + 4 = 76$ کدام است؟

۱) $\{-2, 0, 2\}$ ۲) $\{-1, 0, 1, 2\}$ ۳) $\{-1, 1\}$ ۴) $\{-1, 0, 1\}$

۲۵ـ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادلهٔ $9^{x^2+2} = 81 \times 3^{x^2+3}$ کدام است؟

۱) $\{-3, 3\}$ ۲) $\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$ ۳) $\{\sqrt[3]{3}\}$ ۴) $\{\sqrt{3}\}$

۲۶ـ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادلهٔ $2^{4x^2} + 2^{4x^2-1} = 24$ کدام است؟

۱) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ۲) $\{-2, 0, 2\}$ ۳) $\{-2, -1, 1, 2\}$ ۴) $\{-1, 1\}$

۲۷ـ مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $5^{2x^2+2} \times 2^{2x^2+1} = 0/005$ کدام است؟

۱) $\{-2, 2\}$ ۲) $\{-1, 1\}$ ۳) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ۴) $\varnothing$

۲۸ـ مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $8 \times 4^{x^2} - 51 = 1997$ کدام است؟

۱) $\{-2, 2\}$ ۲) $\{-1, 1\}$ ۳) $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ ۴) $\varnothing$

۲۹ـ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادلهٔ $(\frac{1}{625})^{x^3} \times 5^{x^3-1} = 25$ کدام است؟

۱) $\{-1, 0, 1\}$ ۲) $\{-1, 1\}$ ۳) $\{-1\}$ ۴) $\varnothing$

۳۰ـ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادلهٔ $(\frac{1}{49})^{x^5-\frac{3}{2}} \times 7^{x^5-4} = 1$ کدام است؟

۱) $\{-1, 1\}$ ۲) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ۳) $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ ۴) $\{-1\}$

۳۱) مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادلهٔ $5^{x^7+4} = 125 \times 4^{2x^7+2}$ کدام است؟

۱) $\{-1, 1\}$ ۲) $\{-1, 0, 1\}$ ۳) $\{-1\}$ ۴) $\varnothing$

۳۲ـ مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $5^{4x^2+1} + 5^{4x^2} - 5^{4x^2+2} + 25^{2x^2+1} = 25^{2x^2} + 5^{101}$ کدام است؟

۱) $\{-9, 9\}$ ۲) $\{-7, 7\}$ ۳) $\{-5, 5\}$ ۴) $\{-3, 3\}$

۳۳ـ مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $3^{x^2-2} \times (1\frac{5}{3})^{x^2} \times (\frac{3}{8})^{4x^2-2} = 2^{-3}$ کدام است؟

۱) $\{-2, 2\}$ ۲) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ۳) $\{-1, 1\}$ ۴) $\varnothing$

۳۴ـ مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $(0/5)^{x^2-6} \times (\frac{1}{0/125})^{4-x^2} = 0/25$ کدام است؟

۱) $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$ ۲) $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$ ۳) $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ ۴) $\{-1, 1\}$

۳۵ـ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادلهٔ $\frac{9^{x^4}+3^{2x^4-1}}{2^{3x^4+1} + 8 \times 2^{3x^4}} = 0/15$ کدام است؟

۱) $\{-2, -1, 1, 2\}$ ۲) $\{-2, 2\}$ ۳) $\{-1, 1\}$ ۴) $\varnothing$

۳۶ـ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادلهٔ $2^{x+4} - 61 = 2^{9-x} + 3$ کدام است؟

۱) $\{3, 8\}$ ۲) $\{-3, 3\}$ ۳) $\{3\}$ ۴) $\varnothing$

۳۷ـ مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $2^{x^2+2} + 2^{3-x^2} = 12$ کدام است؟

۱) $\{-1, 0, 1\}$ ۲) $\{-2, 0, 2\}$ ۳) $\{-1, 0, 2\}$ ۴) $\{0, 1, 2\}$

۳۸ـ مجموعهٔ جواب معادلهٔ $3 \times 9 \times 27 \times 81 \times 3^{\frac{x}{11}+1} - 3^{\frac{x}{11}+10} = 6 \times 3^{19}$ کدام است؟

۱) $\{\frac{10}{11}\}$ ۲) $\{10\}$ ۳) $\{11\}$ ۴) $\{110\}$

۳۹ـ مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $2^{x^2} + 2^{x^2+1} + 2^{x^2+2} + 2^{x^2+3} = 30$ کدام است؟

۱) $\{-1, 0, 2\}$ ۲) $\{-2, 2\}$ ۳) $\{0, 1, 2\}$ ۴) $\{-1, 1\}$

۴۰ـ مجموعهٔ جواب معادلهٔ $2^{2x-1} - 256 = 0$ کدام است؟

۱) $\{16\}$ ۲) $\{14\}$ ۳) $\{8\}$ ۴) $\{4\}$

تستهای رادیکال

۴۱ـ حاصل عبارت $۲\sqrt{۹}+\sqrt{(-۳)^۲}-۵\sqrt{(-۳)^۴}$ کدام است؟

۱) -۳۶ ۲) ۳۶ ۳) ۵۴ ۴) -۴۵

۴۲ـ حاصل عبارت $\sqrt{(-۱\frac{۱}{۳})^۲}+۳\sqrt{\frac{۱۶}{۹}}-۴\sqrt{(\frac{-۴}{۳})^۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۴۳ـ حاصل عبارت $۵\sqrt{(-۰/۰۱)^۲}+\frac{۳}{۱۰}\sqrt{\frac{۱}{۱۰۰}}-\sqrt{(\frac{-۲}{۱۰})^۴}$ کدام است؟

۱) $۰/۰۱$ ۲) $۰/۰۲$ ۳) $۰/۰۳$ ۴) $۰/۰۴$

۴۴ـ به ازای هر عدد حقیقی x کدام تساوی همواره درست است؟

۱) $\sqrt{x^۲}=x$ ۲) $\sqrt[۴]{x^۲}=\sqrt{x}$ ۳) $\frac{\sqrt{x^۲}}{|x|}=۱$ ۴) $\sqrt[۸]{x^۴}=\sqrt{|x|}$

۴۵ـ در صورتی‌که $x<۰$ باشد، عبارت $\sqrt[۱۸]{x^۶}$ معادل کدام گزینه است؟

۱) $-\sqrt[۳]{x}$ ۲) $-\sqrt{|x|}$ ۳) $\sqrt{|x|}$ ۴) $\sqrt[۳]{x}$

۴۶ـ اگر $x=۷-\sqrt{۵}$ ، حاصل عبارت $\sqrt{(x-۱۴)^۲}+\sqrt{x^۲}$ کدام است؟

۱) $۱۴-۲\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) ۱۴ ۴) $۷+\sqrt{۵}$

۴۷ـ اگر $x=۲-\sqrt{۵}$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x^۲}+\sqrt{(x-۲)^۲}-\sqrt{۲۰}$ کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۵}$ ۲) -۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) صفر

۴۸ـ اگر a عددی حقیقی باشد؛ کدام یک از تساویهای زیر همیشه درست است؟

۱) $\sqrt{a^{۲}}=a$ ‏ ۲) $\sqrt{a^{۲}}=(\sqrt{a})^{۲}$ ‏ ۳) $\frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$ ‏ ۴) $\sqrt{a^{۲}}=|a|$

۴۹ـ به ازای چه مقادیری از x عبارت $\sqrt[۴]{|x|\sqrt[۵]{x^{۲}\sqrt[۳]{-x^{۳}}}}$ دارای معنی است؟

۱) $x\le ۰$ ‏ ۲) $x\ge ۰$ ‏ ۳) $x\in\mathbb{R}$ ‏ ۴) $۰\le x<۱$

۵۰ـ مقدار عبارت $\sqrt{\frac{۲۰\sqrt{۸}}{\sqrt{۳۲۰}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ‏ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ‏ ۳) $\sqrt[۴]{۲}$ ‏ ۴) $\sqrt[۴]{۱۰}$

۵۱ـ کسر $\frac{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۵}}{\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۴}}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۴}$ ‏ ۲) $\frac{\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۴}}{۳}$ ‏ ۳) $\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۲}$ ‏ ۴) $\frac{\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۲}}{۳}$

۵۲ـ اگر $x=\sqrt[۵]{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}$ ، $x^{۶}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $۲\sqrt[۵]{۲}$ ‏ ۲) $۲\sqrt[۵]{۴}$ ‏ ۳) $۲\sqrt[۵]{۸}$ ‏ ۴) $۲\sqrt[۵]{۱۶}$

۵۳ـ اگر $۳>x^{۲}$، عبارت $\sqrt{x^{۴}-۶x^{۲}+۹}$ معادل کدام گزینه است؟

۱) $x-۳$ ‏ ۲) $x^{۲}-۹$ ‏ ۳) $۳-x^{۲}$ ‏ ۴) $x^{۲}-۳$

۵۴ـ حاصل $\sqrt[۶]{۲\sqrt[۳]{۹-\sqrt{۱۷}}\;\sqrt[۳]{۹+\sqrt{۱۷}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ‏ ۲) $\sqrt{۲}$ ‏ ۳) $\sqrt[۶]{۲}$ ‏ ۴) $\sqrt[۳]{۴}$

۵۵ـ عبارت $\sqrt[۴]{(\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۵]{۳})^{۲}}$ معادل کدام گزینه است؟

۱) $\sqrt{\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۵]{۳}}$ ‏ ۲) $\sqrt[۴]{۵-\sqrt[۳]{۶}}$ ‏ ۳) $\sqrt{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۵]{۹}}$ ‏ ۴) $\sqrt{\sqrt[۵]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}$

۵۶ـ به ازای چه مقادیری از x عبارت $\sqrt{x-۲}\times\sqrt{x+۲}$ برابر عبارت $\sqrt{x^{۲}-۴}$ است؟

۱) به‌ازای هر x حقیقی ‏ ۲) $-۲\le x\le ۲$ ‏ ۳) $x\ge ۲$ ‏ ۴) $x\le -۲$

۵۷ـ تساوی $\sqrt[۱۴]{(x+۵)^۲}=\sqrt[۷]{x+۵}$ به ازای چه مقادیری از x برقرار است؟

۱) به ازای هر x حقیقی   ۲) $x \ge -۵$

۳) $x \le -۵$ ۴) $x \le ۵$

۵۸ـ اگر $x \le ۱$، حاصل عبارت $\sqrt[۳]{(-x)^۳}-\sqrt[۴]{(x-۱)^۴}+\frac{\sqrt{(x-۲)^۲}}{x-۲}$ کدام‌است؟

۱) ۲   ۲) $-۲x$ ۳) صفر   ۴) -۲

۵۹ـ اگر $x = ۱-\sqrt{۲}$ ، حاصل عبارت $\sqrt[۴]{(۲-x)^۴}+\sqrt[۶]{x^۶}$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}-۲$ ۴) ۲

۶۰ـ حاصل عبارت $\frac{\sqrt[۴]{(۷+۴\sqrt{۳})^۲}+\sqrt[۶]{(۷-۴\sqrt{۳})^۳}}{|۱-\sqrt{۵}|}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}-۱$ ۲) $\sqrt{۵}+۱$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}$

۶۱ـ حاصل عبارت $\sqrt[۶۰]{(\sqrt{۲۲}-۷)^{۱۰}}\times\sqrt[۱۲]{(۷+\sqrt{۲۲})^۲}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۳}$ ۲) $\sqrt[۶]{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۳

۶۲ـ اگر $b < a < ۰$، حاصل عبارت $\sqrt{(a^۲+b^۲+۲ab)^۳}+\sqrt{a^۲+b^۲-۲ab}$ کدام است؟

۱) $|a-b|$ ۲) $|a+b|$ ۳) $-۲a$ ۴) $-۲b$

۶۳ـ حاصل عبارت $\sqrt[۶]{\sqrt{۹+۴\sqrt{۵}}-\sqrt{۹-۴\sqrt{۵}}}\times\sqrt[۳]{۴}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $\sqrt[۶]{۲}$ ۳) ۴   ۴) ۲

۶۴ـ اگر $x^۴=۱۷-۱۲\sqrt{۲}$ ، حاصل $|x|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}-۱$ ۲) $\sqrt{۲}+۱$ ۳) $۲-\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

۶۵ـ عبارت $\frac{۱}{۲\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۲۰}+\sqrt[۳]{۲۵}}$ معادل کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۴}$ ۳) $\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۳}$ ۴) $\sqrt[۳]{۵}-۲$

۶۶ـ عبارت $\frac{-۲}{\sqrt{۷}+\sqrt{۵}}$ معادل کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}-\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۷}-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}-\sqrt{۷}$ ۴) $\sqrt{۲}-\sqrt{۵}$

۶۷ـ حاصل عبارت $\frac{\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}}{\sqrt[۱۶]{(\sqrt{۳}-۲)^{۸}}}$ کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $۲+\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۶۸ـ حاصل عبارت $۴\sqrt[۸]{۲}\times\sqrt{۰/۲۵\sqrt{۰/۲۵\sqrt{۰/۲۵\sqrt{۰/۲۵}}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۴]{۲}$ ۲) $\sqrt[۸]{۲}$ ۳) $\sqrt[۴]{۰/۵}$ ۴) ۱

۶۹ـ عبارت $\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}-۱}$ معادل کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱$ ۲) $(۱-\sqrt[۳]{۴})^{۲}+۳\sqrt[۳]{۴}$

۳) $\sqrt[۳]{۴}+۱$ ۴) $۲\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۴}+۱$

۷۰ـ عبارت $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۹}}$ معادل کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۳}$ ۲) $\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۳}$ ۳) $\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۳}$ ۴) $\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}$

۷۱ـ حاصل عبارت $\sqrt[۶]{۳-۲\sqrt{۲}}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۲}+۱}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}-۱$ ۲) $\sqrt{۲}+۱$ ۳) -۱ ۴) ۱

۷۲ـ اگر a و b گویا (منطق) باشند و داشته باشیم $\frac{a(\sqrt{b}-۲)}{\sqrt{۲}-۲}=-\frac{۱}{۲}$ ، آنگاه $a+b$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۷۳ـ حاصل عبارت $\sqrt[۳]{۷-۴\sqrt{۳}}\times\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۳}}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\sqrt{۳}-۲$ ۳) $۲-\sqrt{۳}$ ۴) $۲+\sqrt{۳}$

۷۴ـ عبارت $x^{\frac{9}{2}} + 8$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟ $(x \geq 0)$

۱) $x\sqrt{x} - 2$ ۲) $x^3 - x\sqrt{x} + 4$

۳) $x^3 + 2x\sqrt{x} + 4$ ۴) $x^3 - 2x\sqrt{x} + 4$

۷۵ـ حاصل عبارت $\sqrt[4]{(-4)^2} - \sqrt[7]{2\sqrt{(-64)^2}} + \sqrt[8]{(-x^2)^4} - (\sqrt[9]{(-x)^3})^3$ وقتی که $x \leq 0$، کدام است؟

۱) $2x + 4$ ۲) $4 - 2x$ ۳) صفر   ۴) 4

۷۶ـ حاصل عبارت $\dfrac{6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{54} - 6\sqrt[3]{2}}$ کدام است؟

۱) $2 + \sqrt[3]{2}$ ۲) $-2 - \sqrt[3]{2}$ ۳) $2 - \sqrt[3]{2}$ ۴) $\sqrt[3]{2} - 2$

۷۷ـ حاصل عبارت $\dfrac{\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{54} + 3}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[6]{2} - \sqrt{3}$ ۲) $\sqrt[6]{2} - \sqrt[6]{3}$ ۳) $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ ۴) $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$

۷۸ـ حاصل عبارت $\dfrac{19\sqrt{12} + 3\sqrt{8}}{\sqrt{48} + 3\sqrt[4]{4} + 3\sqrt{75}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 2 ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) 4

۷۹ـ حاصل عبارت $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ کدام است؟ $(n \in \mathbb{N})$

۱) $\sqrt{n-1} + 1$ ۲) $\sqrt{n} + 1$ ۳) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ۴) $\sqrt{n+1} - 1$

۸۰ـ اگر $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ و $a > 0$، مقدار عبارت $\dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}}{3\sqrt[3]{abc}}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) 1

۸۱ـ اگر $x \geq ۲$، عبارت $y=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}-\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{x-۱}-۲$ ۴) $۲\sqrt{x-۱}$

۸۲ـ اگر A و B گویا باشند و داشته باشیم $\frac{A}{۲+\sqrt{۳}}+\frac{B}{۲-\sqrt{۳}}=۱$، آنگاه $(B-A)^{۱۳۷۷}$ برابر کدام است؟

۱) -۱ ۲) $(\frac{۱}{۲})^{۱۳۷۷}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۸۳ـ حاصل $y=\sqrt{x^۲-۴x+۴}-\sqrt{۴x^۲-۴x+۱}$ به ازای هر $x \geq ۲$ کدام است؟

۱) $-x-۱$ ۲) $x+۱$ ۳) $-x+۱$ ۴) $x-۱$

۸۴ـ عبارت $\sqrt{x+\sqrt{۲x-۱}}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{x-۱}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{x-\frac{۱}{۲}}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{x+\frac{۱}{۲}}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{x-۱}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۸۵ـ اگر $\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}=\sqrt[۳]{c}$، کدام درست است؟

۱) $(a+b-c)^۳=-۳abc$ ۲) $a+b-c=۳\sqrt[۳]{abc}$

۳) $(c-b-a)^۳=۲۷abc$ ۴) $c-b-a=۲۷\sqrt[۳]{abc}$

۸۶ـ اگر $|x| \leq \frac{۱}{۲}$، حاصل عبارت $y=\sqrt{x^۲-۲x+۱}+\sqrt{x^۲+۲x+۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲x$ ۴) $-۲x$

۸۷ـ اگر $x=\sqrt[۶]{-۱+۲x^۳\sqrt{-۱+۲x^۳\sqrt{-۱+۲x^۳\sqrt{...}}}}$، مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $\sqrt[۶]{۲}$

۸۸ـ برابری $\sqrt{\frac{a^۵c^۸}{b^۶}}=-\frac{a^۲c^۴}{b^۳}\sqrt{a}$ در کدام یک از حالتهای زیر صحیح است؟

۱) $ab>۰$ ۲) $b \leq ۰, a \geq ۰$ ۳) $b>۰, a \geq ۰$ ۴) $b<۰, a \geq ۰$

۸۹ـ حاصل $\sqrt[۷]{\frac{۷۶۸}{\sqrt{۶}}} \div \sqrt[۵]{\frac{۶۴}{\sqrt{۲}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۷۰]{\frac{۲۴۳}{۴}}$ ۲) $\sqrt[۷۰]{\frac{۳۲}{۹}}$ ۳) $\sqrt[۷۰]{۲}$ ۴) $\sqrt[۷۰]{۳}$

۹۰ـ عدد $\frac{۱۷}{۳\sqrt[۳]{۳}-۲\sqrt[۶]{۸۱}+۴}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۹}-۲$ ۲) $\sqrt[۳]{۹}+۲$ ۳) $\sqrt[۳]{۳}-۲$ ۴) $\sqrt[۳]{۳}+۲$

۹۱ـ اگر $x>۰$، حاصل $y=\sqrt[۳]{\frac{\sqrt{۴x^۲}}{۲x}}-\sqrt[۷]{x^۲\sqrt[۴]{\frac{۱}{x^۸}}}-\sqrt[۵]{۴x\sqrt{\frac{۱}{۱۶x^۲}}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -۲ ۴) -۱

۹۲ـ حاصل عبارت $A=۵\sqrt[۴]{۶۴}-۳\sqrt{۷۲}+۸\sqrt[۶]{۸}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $-۲\sqrt{۲}$ ۴) صفر

۹۳ـ حاصل عبارت $B=\frac{۲}{۲+\sqrt{۱۲}}+\frac{۲}{\sqrt{۱۲}+\sqrt{۲۰}}+\frac{۱}{\sqrt{۷}+\sqrt{۵}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۷}-۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۷}-\sqrt{۳}}{۲}$

۹۴ـ عبارت $Z=\sqrt[۹]{x^{۱۲}}+\sqrt[۶]{x^۴y^۴}-۲\sqrt[۳]{x^۳y}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{x^۲}(\sqrt[۳]{y}-\sqrt[۳]{x})^۲$ ۲) $\sqrt[۳]{x}(\sqrt[۳]{y^۲}-\sqrt[۳]{x^۲})^۲$

۳) $\sqrt[۳]{x}(\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y})^۲$ ۴) $(\sqrt[۳]{xy^۲}-\sqrt[۳]{x^۲})^۲$

۹۵ـ حاصل $P=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}\left[\left(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۳}{۲}}}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}\right):\left(\sqrt{\frac{۳}{۴}}+۱\right)\right]$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۹۶ـ حاصل کسر $\frac{1}{1+\sqrt[12]{8}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}-1$ ۲) $\sqrt[4]{2}+1$ ۳) $\sqrt[4]{2}-\sqrt{2}-1$ ۴) $(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt{2}+1)$

۹۷ـ حاصل $D=\sqrt[6]{(1-\sqrt{2})^6}-\sqrt[8]{(2\sqrt{2}-3)^4}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}-2$ ۲) $\sqrt{2}-1$ ۳) $\sqrt{2}+1$ ۴) صفر

۹۸ـ حاصل عبارت $T=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt[4]{36}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ۴) $2\sqrt{6}-\sqrt{2}$

۹۹ـ حاصل عبارت $K=\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{375}+\sqrt[3]{192}-\sqrt[6]{576}$ کدام است؟

۱) $-2\sqrt[3]{3}$ ۲) $5\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{5}$ ۳) صفر ۴) $\sqrt[3]{3}$

۱۰۰ـ حاصل عبارت $x=\frac{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\dots}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots}}}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱

۱۰۱ـ اگر $n>2$ و n و m عددهای طبیعی باشند، حاصل $x=\sqrt[n]{m\sqrt[n]{m\sqrt[n]{m\sqrt[n]{\dots}}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[n+1]{m(n-1)}$ ۲) $\sqrt[n]{\frac{m}{n+1}}$ ۳) $\sqrt[n-1]{m}$ ۴) $\sqrt[n]{m}$

۱۰۲ـ حاصل $(\sqrt{32}+\sqrt[10]{32}-\sqrt{50})^{1377}$ کدام است؟

۱) $(2\sqrt{2})^{1377}$ ۲) $(\sqrt{2})^{1377}$ ۳) $(-\sqrt{2})^{1377}$ ۴) صفر

۱۰۳ـ حاصل $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ کدام است؟

۱) $2^{\frac{15}{128}}$ ۲) $2^{\frac{15}{64}}$ ۳) $2^{\frac{15}{32}}$ ۴) $2^{\frac{15}{16}}$

۱۰۴ـ حاصل عبارت $S=\sqrt[75]{\frac{3-2\sqrt[6]{8}}{3+2\sqrt{2}}+\frac{24}{\sqrt{2}}-18}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\sqrt[75]{2}$ ۳) $\sqrt[150]{2}$ ۴) صفر

۱۰۵ـ حاصل عبارت $x=2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\dots}}}$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{6}$ ۴) 6

۱۰۶ـ حاصل عبارت $x=\sqrt{-1+2\sqrt{-1+2\sqrt{-1+2\sqrt{\dots}}}}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $\sqrt{2}+1$

۱۰۷ـ حاصل عبارت $N=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{7}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

۱۰۸ـ اگر $x \geq 1$، عبارت $\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$ ۲) $\sqrt{4x-2}$ ۳) $2\sqrt{x-1}+\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{x+1}-\sqrt{2}$

۱۰۹ـ برابری $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}=\sqrt[8]{8}$ به ازای چه مقداری از x برقرار است؟

۱) $\sqrt[3]{2}$ ۲) 2 ۳) $\sqrt[3]{4}$ ۴) 4

۱۱۰ـ برابری $\sqrt[25]{a^{49}}=a^{\frac{5}{7x^3}}$ به ازای چه مقداری از x برقرار است؟

۱) $\frac{5}{7}$ ۲) $\frac{7}{5}$ ۳) 5 ۴) $\frac{1}{5}$

۱۱۱ـ برابری $\sqrt[4]{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}=2^{\frac{31}{8}x^3}$ به ازای چه مقداری از x برقرار است؟

۱) 2 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۱۱۲ـ حاصل عبارت $x=\sqrt[6]{10+3\sqrt{10+3\sqrt{\dots}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt[3]{5}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt[3]{2}$

۱۱۳ ـ حاصل $\sqrt[۴]{\left(\frac{۲\sqrt[۴]{۵}}{\sqrt[۳]{۲\sqrt{۵}}}\right)^{۳}} : \sqrt[۸]{۱۶\sqrt{۵}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt[۴]{۲}$ ۴) $\sqrt{۵}$

۱۱۴ ـ حاصل عبارت $x=\sqrt[۷۶]{\sqrt{\frac{۳}{۲}-\sqrt{۲}}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt[۷۶]{۲}$ ۳) $\sqrt[۷۶]{۳}$ ۴) صفر

۱۱۵ ـ حاصل $P=\sqrt[۴]{۴-\sqrt{۹-۴\sqrt{۳}}}\ .\ \sqrt[۴]{۴+\sqrt{۹-۴\sqrt{۳}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $۲-\sqrt{۳}$ ۴) $۲+\sqrt{۳}$

۱۱۶ ـ حاصل عبارت $S=\sqrt{\frac{۴}{۱۵}}+\sqrt[۴]{\frac{۹}{۲۵}}+۲\sqrt[۴]{\frac{۲۵}{۹}}-\sqrt{۶۰}+\sqrt[۴]{۲۲۵}$ کدام‌است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۱۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۳}$ ۴) صفر

۱۱۷ ـ حاصل عبارت $K=\frac{\sqrt[۶]{۸}}{\sqrt[۴]{۴}}+\frac{\sqrt[۶]{۲۷}-\sqrt[۴]{۴}}{\sqrt[۴]{۹}+\sqrt[۱۰]{۳۲}}+۲\sqrt[۴]{\frac{۹}{۴}}$ کدام است؟

۱) $۶-۳\sqrt{۶}$ ۲) $۶-۲\sqrt{۶}$ ۳) $۶-\sqrt{۶}$ ۴) ۶

۱۱۸ ـ اگر $x > ۰$، حاصل عبارت $y=\sqrt{x^{۴}+۱-۲x\sqrt{x^{۲}}}$ کدام است؟

۱) $x^{۲}-۱$ ۲) $x^{۲}+۱$ ۳) $x-۱$ ۴) $x+۱$

۱۱۹ ـ معادلهٔ $\sqrt{x-۱}=\sqrt[۶]{\frac{۱}{۸}}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ با کدام معادله هم‌ارز است؟

۱) $x-\sqrt{۲}=۰$ ۲) $x-۱=۰$ ۳) $x-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۰$ ۴) $x-۲=۰$

۱۲۰ ـ مجموعهٔ ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt[۷۶]{x^{۴}-۱}=\sqrt[۷۶]{x^{۸}-۱}$ کدام است؟

۱) $\{-۱, ۰, ۱\}$ ۲) $\{۰, ۱\}$ ۳) $\{-۱, ۰\}$ ۴) $\{-۱, ۱\}$

۱۲۱ ـ مجموعهٔ جواب حقیقی معادلهٔ $\sqrt[4]{2-\frac{x^3}{2}}=\sqrt[4]{\frac{x^3}{2}+1}$ کدام است؟

۱) $\{-2\}$ ۲) $\{-1\}$ ۳) $\{1\}$ ۴) $\varnothing$

۱۲۲ ـ مجموعهٔ جواب حقیقی معادلهٔ $\sqrt[8]{4x^6+2x^3-5}=\sqrt[8]{2x^3-1}$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{-1\}$ ۳) $\{-2\}$ ۴) $\{1\}$

۱۲۳ ـ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادلهٔ $x^7.\sqrt[7]{x}.\sqrt[4]{x^2-1}.\sqrt{x^4-4}=0$ کدام است؟

۱) $\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ ۲) $\{-\sqrt{2},-1,0,1,\sqrt{2}\}$ ۳) $\{-\sqrt[4]{2},\sqrt[4]{2}\}$ ۴) $\varnothing$

۱۲۴ ـ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادلهٔ $\sqrt[3]{64x^2}+\sqrt[3]{8x^2}+8=16\left(1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{64}}\right)$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{-2,2\}$ ۳) $\{-4,4\}$ ۴) $\{-8,8\}$

۱۲۵ ـ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادلهٔ $\sqrt[3]{64\sqrt[3]{x^{18}}}=\sqrt[5]{32\sqrt[3]{x^{30}}}+4\sqrt[6]{x^{12}}-8$ کدام است؟

۱) $\{-8,8\}$ ۲) $\{-4,4\}$ ۳) $\{-2,2\}$ ۴) $\varnothing$

۱۲۶ ـ مجموعهٔ جواب حقیقی معادلهٔ $\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}=\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{16}}}$ کدام است؟

۱) $\{256\}$ ۲) $\{128\}$ ۳) $\{64\}$ ۴) $\varnothing$

۱۲۷ ـ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادلهٔ $\sqrt{2\sqrt{x^2-16}}=\sqrt[6]{216}$ کدام است؟

۱) $\{5,3\}$ ۲) $\{-5,5\}$ ۳) $\{-5,4\}$ ۴) $\{-5,3,4,5\}$

۱۲۸ ـ مجموعهٔ جواب حقیقی معادلهٔ $\frac{12}{\sqrt[3]{4x+1}}=4$ کدام است؟

۱) {۱۲/۵} ۲) {۸/۲۵} ۳) {۶/۲۵} ۴) {۶/۵}

۱۲۹ ـ مجموعهٔ جواب حقیقی معادلهٔ $\frac{75}{\sqrt{2x-3}}=\sqrt{2x-3}$ کدام است؟

۱) $\{9\}$ ۲) $\{19\}$ ۳) $\{29\}$ ۴) $\{39\}$

۱۳۰ـ مجموعهٔ جواب حقیقی معادلهٔ $\sqrt[۷]{x\sqrt[۳]{x\sqrt{۱۶x}}} = \sqrt[۶۳]{۸}$ کدام است؟

۱) $\left\{\frac{\sqrt[۹]{۱۲۸}}{۴}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{\sqrt[۹]{۴}}{۲}\right\}$ ۳) $\left\{\frac{\sqrt[۹]{۱۲۸}}{۲}\right\}$ ۴) $\{\sqrt[۹]{۴}\}$

۱۳۱ـ اگر در معادلهٔ $x^{x^{x^{\cdots}}} = ۲۵۶$ تعداد xها نامتناهی باشد، مقدار مثبت x $(x>۰)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt[۸]{۲}$ ۳) $\sqrt[۱۶]{۲}$ ۴) $\sqrt[۳۲]{۲}$

۱۳۲ـ معادلهٔ $۴\sqrt[۶]{x^۹} + ۴x^{-\frac{۳}{۲}} = ۱۰$ با شرط $x > ۰$، با کدام‌یک از معادله‌های زیر هم‌ارز است؟

۱) $x > ۰ : x^۶ - \frac{۱۷}{۴}x^۳ + ۱ = ۰$ ۲) $x > ۰ : x^۶ - \frac{۱۷}{۴}x^۳ - ۱ = ۰$

۳) $x > ۰ : x^۶ + \frac{۱۷}{۴}x^۳ + ۱ = ۰$ ۴) $x > ۰ : x^۶ + \frac{۱۷}{۴}x^۳ - ۱ = ۰$

۱۳۳ـ اگر $x = \frac{x^۲ + ۱}{۴}$ و $S = \sqrt[۶]{\left(۱ + \frac{(۱ - x^۴)^۲}{۶۴x^۴}\right)^۳}$، حاصل S کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۳۴ـ اگر n عدد طبیعی و $a \geq ۱$ باشد، حاصل $A = \frac{a}{۱ + \sqrt[n]{\sqrt{a} + \sqrt{a - ۱}}} + \frac{a}{۱ + \sqrt[n]{\sqrt{a} - \sqrt{a - ۱}}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{a}$ ۳) $۱ + \sqrt{a}$ ۴) a

۱۳۵ـ حاصل $K = \left(\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۶]{۸} + \sqrt{\sqrt{۵} - ۱}} + \frac{\sqrt[۴]{۴}}{\sqrt[۸]{۱۶} + \sqrt{\sqrt{۵} + ۱}}\right)^{۱۳۷۷}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲^{۶۸۸}$ ۴) $۲^{۱۳۷۷}$

۱۳۶ـ اگر $۴^{۲x} = ۶۴$، حاصل $\frac{۱}{\sqrt{۲^x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $۲^{-۰/۷۵}$ ۴) $۲^{-۱/۵}$

۱۳۷ـ حاصل عبارت $A=\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{\dots}}}}}$ با شرط این‌که $a>0$ و $b>0$ و تعداد رادیکالها نامتناهی باشد، کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{ab^2}$ ۲) $\sqrt[3]{a^2b}$ ۳) $\sqrt[3]{a\sqrt{b}}$ ۴) $\sqrt{a\sqrt{b}}$

۱۳۸ـ معادلهٔ $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+3}=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۹ـ اگر $\sqrt[9]{x^3}+\sqrt[3]{x^2}=1$، حاصل $D=x-\frac{1}{x}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۱۴۰ـ معادلهٔ $\sqrt{2-3x}+\sqrt{3x+2}=2\sqrt{2}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۴۱ـ حاصل عبارت $\frac{x^2-36x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+6x^{\frac{2}{3}}}$ به ازای عددهای حقیقی غیرصفر $(x\neq 0)$ کدام‌است؟

۱) $\sqrt[3]{x}-6$ ۲) $\sqrt[3]{x}+6$ ۳) $\sqrt[3]{x^2}-6$ ۴) $\sqrt[3]{x^2}+6$

۱۴۲ـ حاصل $T=\sqrt[4]{4}+\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{7}}{2}-\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{7}}{2}+\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{2}$ ۴) صفر

۱۴۳ـ معادلهٔ $\sqrt[6]{(x^4+1)^3}+\sqrt[4]{x^2+1}=2$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶

۱۴۴ـ معادلهٔ $\sqrt[6]{1-\sqrt{x^4+4x^2+2}}=\sqrt[3]{x-1}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۴۵ـ معادلهٔ $\sqrt[6]{(x-1)^3}+\sqrt{x-2\sqrt[6]{(x-1)^3}}=1$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۴۶ـ کدام یک ریشهٔ معادلهٔ $\sqrt[4]{\frac{x+3}{2-x}}+\sqrt[12]{(\frac{2-x}{x+3})^3}=2$ است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۱۴۷ـ اگر $\sqrt[3]{x}=\sqrt[9]{2\sqrt[4]{4}}$ ، حاصل $\sqrt[5]{x^3}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{4}$ ۲) $\sqrt[5]{2}$ ۳) $\sqrt[10]{8}$ ۴) $\sqrt[15]{16}$

۱۴۸ـ مقدار y از معادلهٔ $\sqrt[18]{(x^3-4)^3}+|x^6-y^3-8|=0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۴۹ـ معادلهٔ $(x^8-1)^{76}+|x^{75}+1|^{75}+\sqrt[8]{7-7x^4}=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۵۰ـ معادلهٔ $\sqrt[4]{4}+\sqrt[6]{4-x^2}+\sqrt[4]{x^2-4}=\sqrt{2}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۵۱ـ معادلهٔ $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt{x-2}=4$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۵۲ـ معادلهٔ $\sqrt[3]{x^9}+\sqrt{x^2}=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۵۳ـ حاصل $(\sqrt{7}+\sqrt{6})^n(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{n-1}$ کدام است؟

۱) $(\sqrt{7}+\sqrt{6})^{-1}$ ۲) $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ ۳) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ ۴) ۱

۱۵۴ـ اگر $\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[9]{x^6}}=2$ ، حاصل $P=x^{76}+\frac{1}{x^{76}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt[3]{4}$

تستهای توان، رادیکال و قدرمطلق آزمونهای سراسری دانشگاهها و مؤسسات آموزش عالی کشور مربوط به گروههای آزمایشی علوم تجربی و ریاضی و فنی

تستهای گروه آزمایشی علوم تجربی

۱۵۵ـ حاصل $|x-2|+|1-2x|$ وقتی $-1<x<0$ باشد، کدام است؟ (۶۳ـ۶۲)

۱) $-3-3x$ ۲) $3-3x$ ۳) $-3+3x$ ۴) $1+x$

۱۵۶ـ اگر $x=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ ، حاصل x^2 کدام است؟ (۶۵ـ۶۴)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt[3]{2}$ ۳) $\sqrt[3]{4}$ ۴) ۲

۱۵۷ـ معادلهٔ $|x+1|+|x-3|=3$ در دامنهٔ اعداد حقیقی چند جواب دارد؟ (۶۵ـ۶۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۵۸ـ معادلهٔ $\sqrt{x^2-x-6}+\sqrt{x^3-5x^2-2x+24}=0$ چند جواب دارد؟ (۶۶ـ۶۵)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۵۹ـ حاصل عبارت $\dfrac{(-y)^{-2}\cdot x^3}{(-x^{-2}\cdot y)^{-3}\cdot x^{-2}}$ ، $(xy\neq 0)$ چیست؟ (۶۹ـ۶۸)

۱) $\dfrac{y}{x}$ ۲) $\dfrac{-y}{x}$ ۳) xy ۴) $-xy$

۱۶۰ـ حاصل $\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}\times\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\times\sqrt[3]{4}$ کدام است؟ (۶۹ـ۶۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۱ـ اگر $A=x^{\frac{t+1}{t}}$ و $B=x^{\frac{1}{t+1}}$ $(t\neq -1$ و $t\neq 0)$، کدام رابطه بین A و B برقرار است؟ (۷۰ـ۶۹)

۱) $A^{\frac{t}{t+1}}=B^{\frac{t+1}{t}}$ ۲) $A^{\frac{t}{t+1}}=B^{t+1}$ ۳) $A^{\frac{1}{t+1}}=B^{t+1}$ ۴) $A^{t+1}=B^{\frac{1}{t+1}}$

۱۶۲ـ اگر $x=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ ، مقدار x^3-3x کدام است؟ (۷۰-۷۱)

۱) ۱ ‏ ۲) $\sqrt{2}$ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) $2\sqrt{2}$

۱۶۳ـ اگر $x<0$، حاصل $\sqrt[4]{x^4}+2\sqrt[3]{x^3}$ کدام است؟ (۷۱-۷۲)

۱) $3x$ ‏ ۲) x ‏ ۳) $-x$ ‏ ۴) $-3x$

۱۶۴ـ حاصل $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\times\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ کدام است؟ (۷۱-۷۲)

۱) $-\sqrt{2}$ ‏ ۲) -1 ‏ ۳) ۱ ‏ ۴) $\sqrt{2}$

۱۶۵ـ خلاصه شدهٔ عبارت $9^{0/25}+\frac{(4)^{0/75}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ کدام است؟
(تجربی و ریاضی ۷۳-۷۲)

۱) $\sqrt{2}-1$ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) $\sqrt{2}$ ‏ ۴) $1+\sqrt{2}$

۱۶۶ـ تعداد جوابهای معادلهٔ $|x+1|+|x-3|=2$ کدام است؟ (۷۲-۷۳)

۱) صفر ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۳

تستهای گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

۱۶۷ ـ به ازای هر $x \in [۱ , +\infty)$، مقدار $\sqrt{۴x^۲ - ۴x + ۱} - \sqrt{x^۲ - ۲x + ۱}$ کدام است؟ (۶۳ ـ ۶۲)

۱) $-x$ ۲) $۲ - ۳x$ ۳) $۳x - ۲$ ۴) x

۱۶۸ ـ مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $|x - ۱| + |x - ۳| = ۱$ کدام است؟ (۶۶ ـ ۶۵)

۱) $\varnothing$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $[-۳ , ۱]$ ۴) $\mathbb{R} - (-۳ , ۱)$

۱۶۹ ـ اگر $a > ۰ > b$ و $|b| > |a|$، آنگاه حاصل عبارت

$$|a + b| + |b| + |a|$$

برابر کدام است؟ (۶۸ ـ ۶۷)

۱) $-۲b$ ۲) $-۲a$ ۳) $۲a$ ۴) $۲b$

۱۷۰ ـ کدام یک از معادله‌های زیر:

(الف) $۲\sqrt{۳x - ۶} + \sqrt{x^۲ - ۲x} = ۰$

(ب) $\sqrt{x + ۲} + \sqrt{x + ۳} = ۰$

(ج) $۲ + \sqrt{x - ۴} = ۰$

دارای ریشهٔ حقیقی است ؟ (۶۸ ـ ۶۷)

۱) الف ۲) ب ۳) الف و ب ۴) ج

۱۷۱ ـ حاصل عبارت $\sqrt{(-۲)^۲} + \sqrt{x^۲} + \sqrt[۳]{(-x)^۳}$ وقتی که $x < ۰$، کدام است؟ (۶۸ ـ ۶۷)

۱) $-۲x - ۲$ ۲) -۲ ۳) $۲x + ۲$ ۴) ۲

۱۷۲ ـ مجموعهٔ جوابهای $|x| + |x + ۲| = ۲$، چیست؟ (۶۹ ـ ۶۸)

۱) $\varnothing$ ۲) $\{-۲ , ۰\}$ ۳) $]-۲ , ۰[$ ۴) $[-۲ , ۰]$

۱۷۳ـ حاصل $\left(-\sqrt[10]{۳^۶}\right)^{\frac{۵}{۳}}$ کدام است؟

۱) -۹ ۲) ۹ ۳) -۳ ۴) ۳

۱۷۴ـ حاصل عبارت $\frac{۱}{\sqrt{۱۸}+\sqrt{۲۵}}+\frac{۱}{\sqrt{۱۱}+\sqrt{۱۸}}+\frac{۱}{\sqrt{۴}+\sqrt{۱۱}}$ برابر کدام است؟ (۷۱ ـ ۷۰)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۷۵ـ حاصل $\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}\times\sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}}$ کدام است؟ (۷۲ ـ ۷۱)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۴

۱۷۶ـ اگر $x=۱-\sqrt{۲}$ ، حاصل $(x+x^{-۱})^{\frac{۱}{۳}}$ کدام است؟ (۷۴ ـ ۷۳)

۱) $-\sqrt{۲}$ ۲) -۱ ۳) $\sqrt[۳]{۲}$ ۴) ۱

۱۷۷ـ حاصل $\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\times\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}$ کدام است؟ (۷۵ ـ ۷۴)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ تشریحی تستهای توان

۱ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$۲ \times ۴ \times ۸ \times ۱۶ \times ۳۲ \times ۶۴ \times ۱۲۸ = ۲ \times ۲^{۲} \times ۲^{۳} \times ۲^{۴} \times ۲^{۵} \times ۲^{۶} \times ۲^{۷}$$
$$= ۲^{۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷} = ۲^{۲۸}$$

۲ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$(\frac{۳}{۴})^{۷} \times (\frac{۳}{۴})^{۵} \times (\frac{۳}{۴})^{۷} \times (\frac{۳}{۴})^{۶} \times (\frac{۳}{۴})^{۳} = (\frac{۳}{۴})^{۷+۵+۷+۶+۳}$$
$$= (\frac{۳}{۴})^{۲۸}$$

۳ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$(۰/۵)^{۱} \times (۰/۵)^{۳} \times (۰/۵)^{۷} \times (۰/۵)^{۶} = (۰/۵)^{۱+۳+۷+۶} = (۰/۵)^{۱۷}$$

۴ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$P = ۱۰ \times ۱۰^{۲} \times ۱۰^{۳} \times \cdots \times ۱۰^{۱۰۰} = ۱۰^{۱+۲+۳+۴+...+۱۰۰}$$

می‌دانیم:

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

پس:

$$n = ۱۰۰ : ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \cdots + ۱۰۰ = \frac{۱۰۰(۱۰۰+۱)}{۲} = ۵۰۵۰$$

بنابراین:

$$\boxed{P = ۱۰^{۵۰۵۰}}$$

۵ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$A = a^{۲} . a^{۴} . a^{۶} . a^{۸} . \ldots . a^{۱۳۷۶} = a^{۲+۴+۶+۸+...+۱۳۷۶}$$

می‌دانیم:

$$۲ + ۴ + ۶ + ۸ + \cdots + ۲n = ۲(۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ... + n)$$
$$= ۲\,[\frac{n\,(n + ۱)}{۲}] = n\,(n + ۱)$$

پس:

$$۲n = ۱۳۷۶ \Rightarrow n = ۶۸۸$$

$$n = ۶۸۸ : ۲ + ۴ + ۶ + ۸ + \cdots + ۱۳۷۶ = ۶۸۸\,(۶۸۸ + ۱)$$
$$= ۶۸۸ \times ۶۸۹$$
$$= ۴۷۴۰۳۲$$

بنابراین:

$$\boxed{A = a^{۴۷۴۰۳۲}}$$

۶ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$a^{۵(m-n)^۲} . a^{۵m^۲} . a^{۵n^۲} . a^{۱۰mn} . a^{m^۲+n^۲} = a^{۵\,(m-n)^۲+۵m^۲+۵n^۲+۱۰mn+m^۲+n^۲}$$
$$= a^{۵\,(m^۲+n^۲-۲mn)+۶m^۲+۶n^۲+۱۰mn}$$
$$= a^{۱۱m^۲+۱۱n^۲} = a^{۱۱(m^۲+n^۲)}$$

۷ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$a^{۱۰۰} . b^{۵} . a^{۳۴} . b^{۱۲۹} = a^{۱۰۰} . a^{۳۴} . b^{۵} . b^{۱۲۹} = a^{۱۳۴} . b^{۱۳۴} = (a . b)^{۱۳۴}$$

۸ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$a^{n^۲} . b^{m^۲} . a^{۲mn} . b^{n^۲} . a^{m^۲} . b^{۲mn} = a^{n^۲} . a^{۲mn} . a^{m^۲} . b^{n^۲} . b^{۲mn} . b^{m^۲}$$
$$= a^{m^۲+۲mn+n^۲} . b^{m^۲+۲mn+n^۲}$$
$$= (a . b)^{m^۲+۲mn+n^۲} = (a . b)^{(m+n)^۲}$$

۹ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$a . b . a^۲ . b^۲ . a^۳ . b^۳ . ... . a^n . b^n = (a . b) . (a . b)^۲ . (a . b)^۳ ... (a . b)^n$$

$$= (a . b)^{۱+۲+۳+...+n} = (a . b)^{\frac{n\,(n + ۱)}{۲}}$$

۱۰ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\frac{a^{30}\,.\,b^{20}\,.\,a^{4}\,.\,b^{25}\,.\,a^{8}\,.\,b^{4}\,.\,a^{2}}{a^{22}\,.\,b^{16}\,.b^{29}\,.\,a^{7}\,.\,a^{5}\,.\,a^{6}}=\frac{a^{30+4+8+2}\,.\,b^{20+25+4}}{a^{22+7+5+6}\,.\,b^{16+29}}=\frac{a^{44}\,.\,b^{49}}{a^{40}\,.\,b^{45}}=a^{44-40}.b^{49-45}$$

$$=a^{4}.b^{4}=(a\,.\,b)^{4}$$

۱۱ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\left(\frac{a^{76}:a^{42}}{a^{75}:a^{5}}\right)\left(\frac{a^{78}+a^{80}}{a^{6}+a^{4}}\right)=\left(\frac{a^{76-42}}{a^{75-5}}\right)\left(\frac{a^{78}(1+a^{2})}{a^{4}(a^{2}+1)}\right)=\frac{a^{34}}{a^{70}}\cdot\frac{a^{78}}{a^{4}}=\frac{a^{34+78}}{a^{70+4}}$$

$$=\frac{a^{112}}{a^{74}}=a^{112-74}=a^{38}$$

۱۲ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$a\,.\,a^{2}.\,a^{3}.\,\dots\,.\,a^{n}=a^{1+2+3+\dots+n}=a^{\frac{n(n+1)}{2}}=a^{\frac{n^{2}+n}{2}}$$

$$b\,.\,b^{2}.\,b^{3}.\,\dots\,b^{m}=b^{1+2+3+\dots+m}=b^{\frac{m(m+1)}{2}}=b^{\frac{m^{2}+m}{2}}$$

بنابراین:

$$A=\frac{a^{\frac{n^{2}+n}{2}}\,.\,b^{\frac{m^{2}+m}{2}}}{a^{\frac{n^{2}+n}{2}}\,.\,b^{\frac{m^{2}+m}{2}}}\ \underset{}{\overset{(ab\neq 0)}{=\!=\!=}}\ 1$$

۱۳ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\frac{a^{-1}\,.\,a^{-3}\,.\,a^{-7}\,.\,a^{-6}}{a^{-15}:(a^{-2})^{-5}}=\frac{a^{-1-3-7-6}}{a^{-15}:a^{10}}=\frac{a^{-17}}{a^{-15-10}}=\frac{a^{-17}}{a^{-25}}$$

$$=a^{-17+25}=a^{8}=a^{2^{3}}\ (a\neq 0)$$

۱۴ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\left(\frac{3^{7}\times 5^{6}\times a^{-3}\times b^{-4}\times c^{-2}}{81a^{-5}\times 15b^{-6}\times 125c^{-4}}\right)^{55}=\left(\frac{3^{7}\times 5^{6}\times a^{-3}\times b^{-4}\times c^{-2}}{3^{4}a^{-5}\times 3\times 5\times b^{-6}\times 5^{3}c^{-4}}\right)^{55}$$

$$=(3^{7-5}\times 5^{6-4}\times a^{-3+5}\times b^{-4+6}\times c^{-2+4})^{55}=(3^{2}\times 5^{2}\times a^{2}\times b^{2}\times c^{2})^{55}$$

$$=[(15abc)^{2}]^{55}=(15abc)^{110}$$

۱۵ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

عبارت $(\text{۷}x^{\text{۶}}-\text{۷})^{x-x^{\text{۳}}}$ وقتی مبهم است که به صورت $\text{۰}^{\text{۰}}$ تبدیل شود:

$$\begin{cases}\text{۷}x^{\text{۶}}-\text{۷}=\text{۰}\\ x-x^{\text{۳}}=\text{۰}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{۷}x^{\text{۶}}=\text{۷}\\ x(\text{۱}-x^{\text{۲}})=\text{۰}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^{\text{۶}}=\text{۱}\\ x=\text{۰}\;\;;\;\;x^{\text{۲}}=\text{۱}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\text{۱}\\ x=\text{۰}\;\;;\;\;x=\pm\text{۱}\end{cases}\Rightarrow\boxed{x=\pm\text{۱}}$$

۱۶ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$[(-a)^{-\text{۴}}]^{\text{۳}k}=(-a)^{-\text{۱۲}k}\;,\;[(-a)^{-\text{۲}}]^{-\text{۶}k}=(-a)^{\text{۱۲}k}\;,\;(-a)^{\text{۱۳۷۶}}=a^{\text{۱۳۷۶}}$$

$$(-a)^{-\text{۱۳۷۷}}=\frac{\text{۱}}{(-a)^{\text{۱۳۷۷}}}=\frac{\text{۱}}{-a^{\text{۱۳۷۷}}}=-a^{-\text{۱۳۷۷}}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}A&=(-a)^{-\text{۱۲}k}\,.\,(-a)^{\text{۱۲}k}\,.\,a^{\text{۱۳۷۶}}\,.\,(-a^{-\text{۱۳۷۷}})\\&=(-a)^{-\text{۱۲}k+\text{۱۲}k}\,.\,(-a^{\text{۱۳۷۶}-\text{۱۳۷۷}})\\&=(-a)^{\circ}\,.\,(-a^{-\text{۱}})\overset{(a\neq\text{۰})}{=}\text{۱}\times(-a^{-\text{۱}})=-a^{-\text{۱}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\boxed{A=-a^{-\text{۱}}}$$

۱۷ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\text{۱۲}\times\text{۲}^{\text{۹}}+\text{۱۰}\times\text{۲}^{\text{۱۰}}+\text{۱۲}\times\text{۲}^{\text{۸}}-\text{۲۴}\times\text{۲}^{\text{۷}}-\text{۲}^{\text{۱۴}}$$

$$=\text{۶}\times\text{۲}^{\text{۱۰}}+\text{۱۰}\times\text{۲}^{\text{۱۰}}+\text{۳}\times\text{۲}^{\text{۱۰}}-\text{۳}\times\text{۲}^{\text{۱۰}}-\text{۱۶}\times\text{۲}^{\text{۱۰}}=(\text{۶}+\text{۱۰}+\text{۳}-\text{۳}-\text{۱۶})\times\text{۲}^{\text{۱۰}}=\text{۰}$$

۱۸ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\text{۲۵}^{\text{۵}}+\text{۵}^{\text{۶}}\times\text{۵}^{\text{۱۱}}-\text{۴}\times\text{۲۵}^{\text{۶}}+\text{۴}\times\text{۵}^{\text{۱۲}}-\text{۵}^{\text{۱۰}}=\text{۵}^{\text{۱۰}}+\text{۵}^{\text{۷}}\times\text{۵}^{\text{۱۰}}-\text{۱۰۰}\times\text{۵}^{\text{۱۰}}+\text{۱۰۰}\times\text{۵}^{\text{۱۰}}-\text{۵}^{\text{۱۰}}$$

$$=\text{۵}^{\text{۷}}\times\text{۵}^{\text{۱۰}}=\text{۵}^{\text{۷}+\text{۱۰}}=\text{۵}^{\text{۱۷}}$$

۱۹ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\begin{aligned}B&=\text{۳}\times\text{۹}^{x+\text{۱}}-\text{۶}\times\text{۹}^{x+\text{۱}}+\text{۱۵}\times\text{۳}^{\text{۲}x+\text{۲}}-\text{۴۵}\times\text{۳}^{\text{۲}x+\text{۱}}\\&=\text{۳}\times\text{۳}^{\text{۲}x+\text{۲}}-\text{۶}\times\text{۳}^{\text{۲}x+\text{۲}}+\text{۱۵}\times\text{۳}^{\text{۲}x+\text{۲}}-\text{۱۵}\times\text{۳}^{\text{۲}x+\text{۲}}\\&=(\text{۳}-\text{۶}+\text{۱۵}-\text{۱۵})\times\text{۳}^{\text{۲}x+\text{۲}}=(-\text{۳})\times\text{۳}^{\text{۲}x+\text{۲}}=-\text{۳}^{\text{۲}x+\text{۳}}\end{aligned}$$

۲۰ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$C = \frac{۳^{x+۲} + ۱۲ \times ۳^{x+۱} + ۳^{x+۳} - ۱۵ \times ۳^{x+۲} + ۳^{x+۴}}{۳^{x+۱} + ۳^{x-۱} \times ۳^{x+۱} \times ۳^{۲-x}}$$

$$= \frac{۳^{x+۲} + ۴ \times ۳^{x+۲} + ۳ \times ۳^{x+۲} - ۱۵ \times ۳^{x+۲} + ۹ \times ۳^{x+۲}}{۳^{x+۱} + ۳^{x-۱+x+۱+۲-x}}$$

$$= \frac{(۱ + ۴ + ۳ - ۱۵ + ۹) \times ۳^{x+۲}}{۳^{x+۱} + ۳^{x+۲}} = \frac{۲ \times ۳^{x+۲}}{۴ \times ۳^{x+۱}} = \frac{۳^{x+۲-x-۱}}{۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \boxed{C = \frac{۳}{۲}}$$

۲۱ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$D = \frac{۱۲ \times ۲^{x} - ۲^{x+۴} + ۲^{x+۵} + ۲^{x+۳} - ۲^{x+۱}}{۹ \times ۲^{x} - ۳ \times ۲^{x+۱} + ۶ \times ۲^{x+۳} - ۱۵ \times ۲^{x+۱}}$$

$$= \frac{۱۲ \times ۲^{x} - ۲^{۴} \times ۲^{x} + ۲^{۵} \times ۲^{x} + ۲^{۳} \times ۲^{x} - ۲ \times ۲^{x}}{۹ \times ۲^{x} - ۳ \times ۲ \times ۲^{x} + ۶ \times ۲^{۳} \times ۲^{x} - ۱۵ \times ۲ \times ۲^{x}}$$

$$= \frac{(۱۲ - ۱۶ + ۳۲ + ۸ - ۲) \times ۲^{x}}{(۹ - ۶ + ۴۸ - ۳۰) \times ۲^{x}} = \frac{۳۴ \times ۲^{x}}{۲۱ \times ۲^{x}} = \frac{۳۴}{۲۱}$$

۲۲ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$۲^{x^{۲}+۴} = ۶۴ \Rightarrow ۲^{x^{۲}+۴} = ۲^{۶} \Rightarrow x^{۲} + ۴ = ۶ \Rightarrow x^{۲} = ۲ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$$

مجموعهٔ جوابهای معادله = $\{-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}\}$

۲۳ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$۴^{x^{۳}-x-۳} = \frac{۱}{۶۴} \Rightarrow ۲^{۲x^{۳}-۲x-۶} = ۲^{-۶} \Rightarrow ۲x^{۳} - ۲x - ۶ = -۶$$

$$۲x^{۳} - ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x(x^{۲} - ۱) = ۰ \Rightarrow ۲x = ۰ \ ; \ x^{۲} - ۱ = ۰$$

$\Rightarrow x = ۰ \ ; \ x = \pm ۱ \Rightarrow$ مجموعهٔ جوابهای معادله = $\{-۱, ۰, ۱\}$

۲۴ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$۲^{۲x^{۴}+۱} + ۴^{x^{۴}+۲} + ۴ = ۷۶ \Rightarrow ۲^{۲x^{۴}+۱} + ۲^{۲x^{۴}+۴} = ۷۲$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۲^{۲x^{۴}} + ۲^{۴} \times ۲^{۲x^{۴}} = ۷۲ \Rightarrow (۲ + ۱۶) \times ۲^{۲x^{۴}} = ۷۲$$

$$\Rightarrow ۲^{۲x^{۴}} = \frac{۷۲}{۱۸} = ۴ \Rightarrow ۲^{۲x^{۴}} = ۲^{۲} \Rightarrow ۲x^{۴} = ۲ \Rightarrow x^{۴} = ۱$$

$\Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow$ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادله = $\{-۱, ۱\}$

۲۵ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$9^{x^3+2} = 81 \times 3^{x^3+3} \Rightarrow 3^{2x^3+4} = 3^4 \times 3^{x^3+3} \Rightarrow 3^{2x^3+4} = 3^{x^3+7}$$

$$\Rightarrow 2x^3 + 4 = x^3 + 7 \Rightarrow x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب حقیقی معادله $= \{\sqrt[3]{3}\}$

۲۶ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$2^{4x^4} + 2^{4x^4-1} = 24 \Rightarrow 2^{4x^4} + \frac{2^{4x^4}}{2} = 24 \Rightarrow 2^{4x^4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 24$$

$$\frac{3}{2} \times 2^{4x^4} = 24 \Rightarrow 2^{4x^4} = 16 = 2^4 \Rightarrow 4x^4 = 4 \Rightarrow x^4 = 1$$

$\Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادله $= \{-1, 1\}$

۲۷ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$5^{2x^2+2} \times 2^{2x^2+1} = 0/005 \Rightarrow 5^{2x^2} \times 5^2 \times 2^{2x^2} \times 2 = \frac{5}{1000}$$

$$\Rightarrow (5 \times 2)^{2x^2} \times 50 = \frac{5}{1000} \Rightarrow 10^{2x^2} = \frac{1}{10000} \Rightarrow 10^{2x^2} = 10^{-4}$$

$\Rightarrow 2x^2 = -4 \Rightarrow x^2 = -2$ (معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد)

$\Rightarrow$ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادله $= \varnothing$

۲۸ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$8 \times 4^{x^2} - 51 = 1997 \Rightarrow 2^3 \times 2^{2x^2} = 2048 \Rightarrow 2^{2x^2+3} = 2^{11}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3 = 11 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 1$$

$\Rightarrow$ مجموعهٔ جوابهای معادله $= \{-2, 2\}$

۲۹ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\left(\frac{1}{625}\right)^{x^3} \times 5^{x^3-1} = 25 \Rightarrow (5^{-4})^{x^3} \times 5^{x^3-1} = 5^2$$

$$\Rightarrow 5^{-4x^3} \times 5^{x^3-1} = 5^2 \Rightarrow 5^{-4x^3+x^3-1} = 5^2$$

$$\Rightarrow -4x^3 + x^3 - 1 = 2 \Rightarrow -3x^3 = 3 \Rightarrow x^3 = -1$$

$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow$ مجموعه جواب حقیقی معادله $= \{-1\}$

۳۰ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{x^5-\frac{3}{2}} \times 7^{x^5-4} = 1 \Rightarrow (7^{-2})^{x^5-\frac{3}{2}} \times 7^{x^5-4} = 1$$

$$\Rightarrow 7^{-2x^5+3} \times 7^{x^5-4} = 1 \Rightarrow 7^{-2x^5+3+x^5-4} = 7^0$$

$$\Rightarrow -2x^5 + 3 + x^5 - 4 = 0 \Rightarrow -x^5 = 1 \Rightarrow x^5 = -1$$

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow$$ مجموعه جواب حقیقی معادله $= \{-1\}$

۳۱ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$5^{x^7+4} = 125 \times 4^{2x^7+2} \Rightarrow 5^{x^7+4} = 5^3 \times 4^{2x^7+2}$$

$$\Rightarrow 5^{x^7+4-3} = 4^{2x^7+2} \Rightarrow 5^{x^7+1} = 16^{x^7+1}$$

در معادلهٔ اخیر نمای دو طرف مساوی، ولی پایه‌ها مساوی نیست. بنابراین معادله وقتی جواب دارد که نمای دو طرف برابر صفر باشد:

$$x^7 + 1 = 0 \Rightarrow x^7 = -1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$$ مجموعه‌جواب حقیقی معادله $= \{-1\}$

۳۲ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$5^{4x^2+1} + 5^{4x^2} - 5^{4x^2+2} + 25^{2x^2+1} = 25^{2x^2} + 5^{101}$$

$$\Rightarrow 5^{4x^2} \times 5 + 5^{4x^2} - 5^{4x^2} \times 5^2 + 5^{4x^2} \times 25 = 5^{4x^2} + 5^{101}$$

$$\Rightarrow (5 + 1 - 25 + 25 - 1) \times 5^{4x^2} = 5^{101} \Rightarrow 5 \times 5^{4x^2} = 5^{101}$$

$$\Rightarrow 5^{4x^2+1} = 5^{101} \Rightarrow 4x^2 + 1 = 101 \Rightarrow 4x^2 = 100$$

$$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \boxed{x = \pm 5} \Rightarrow$$ مجموعهٔ جوابهای معادله $= \{-5, 5\}$

۳۳ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$3^{x^2-2} \times (1\tfrac{5}{3})^{x^2} \times (\tfrac{3}{8})^{4x^2-2} = 2^{-3} \Rightarrow$$

$$3^{x^2} \times 3^{-2} \times (\tfrac{8}{3})^{x^2} \times (\tfrac{3}{8})^{4x^2} \times (\tfrac{3}{8})^{-2} = 2^{-3} \Rightarrow$$

$$(3 \times \tfrac{8}{3})^{x^2} \times [(\tfrac{3}{8})^4]^{x^2} \times (3 \times \tfrac{3}{8})^{-2} = 2^{-3} \Rightarrow$$

$$\left(8 \times \frac{3^4}{8^4}\right)^{x^2} = \frac{1}{8} \times (\tfrac{9}{8})^2 \Rightarrow (\tfrac{81}{512})^{x^2} = (\tfrac{81}{512})^1$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1} \Rightarrow$$ مجموعهٔ جوابهای معادله $= \{-1, 1\}$

۳۴ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$(0.5)^{x^2-6} \times (\frac{1}{0.125})^{4-x^2} = 0.25 \Rightarrow (0.5)^{x^2-6} \times (0.125)^{x^2-4} = 0.25$$

$$(0.5)^{x^2-6} \times (0.5)^{3x^2-12} = (0.5)^2 \Rightarrow (0.5)^{x^2-6+3x^2-12} = (0.5)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 6 + 3x^2 - 12 = 2 \Rightarrow 4x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{5}}$$

مجموعهٔ جوابهای معادله = $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

۳۵ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\frac{9^{x^4} + 3^{2x^4-1}}{2^{3x^4+1} + 8 \times 2^{3x^4}} = 0/15 \Rightarrow \frac{3^{2x^4} + 3^{2x^4-1}}{2 \times 8^{x^4} + 8 \times 8^{x^4}} = \frac{15}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+\frac{1}{3}) \times 3^{2x^4}}{(2+8) \times 8^{x^4}} = \frac{3}{20} \quad \Rightarrow \frac{\frac{4}{3} \times 9^{x^4}}{10 \times 8^{x^4}} = \frac{3}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \times (\frac{9}{8})^{x^4} = \frac{3}{2} \Rightarrow (\frac{9}{8})^{x^4} = (\frac{9}{8})^1 \Rightarrow x^4 = 1$$

$\Rightarrow \boxed{x = \pm 1} \Rightarrow$ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادله = $\{-1, 1\}$

۳۶ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$2^{x+4} - 61 = 2^{9-x} + 3 \Rightarrow 2^x \times 2^4 - 2^9 \times 2^{-x} = 64$$

$$\Rightarrow 2^4 \times 2^x - 2^4 \times 2^5 \times 2^{-x} = 2^2 \times 2^4 \Rightarrow 2^x - 32 \times 2^{-x} = 4$$

دو طرف معادله را در 2^x ضرب می‌کنیم:

$$2^{2x} - 32 = 4 \times 2^x \Rightarrow (2^x)^2 - 4(2^x) - 32 = 0$$

با فرض $A = 2^x$، داریم:

$$A^2 - 4A - 32 = 0 \Rightarrow (A+4)(A-8) = 0 \Rightarrow$$

$A + 4 = 0$ یا $A - 8 = 0 \Rightarrow 2^x = -4$ (جواب ندارد) ; $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3$

$\Rightarrow \boxed{x = 3} \Rightarrow$ مجموعه جواب معادله = $\{3\}$

۳۷ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$2^{x^2+2} + 2^{3-x^2} = 12 \Rightarrow 2^{x^2} \times 2^2 + 2^3 \times 2^{-x^2} = 12 \Rightarrow$$

$$4 \times 2^{x^2} + 8 \times 2^{-x^2} = 3 \times 4 \Rightarrow 2^{x^2} + 2 \times 2^{-x^2} = 3$$

دو طرف معادله را در 2^{x^2} ضرب می‌کنیم:

$$2^{2x^2} + 2 = 3 \times 2^{x^2} \Rightarrow (2^{x^2})^2 - 3(2^{x^2}) + 2 = 0$$

با فرض $A = ۲^{x^۲}$ ، داریم:

$$A^۲ - ۳A + ۲ = ۰ \Rightarrow (A-۱)(A-۲) = ۰ \Rightarrow A-۱=۰ \; ; \; A-۲=۰ \Rightarrow$$

$$A = ۱ \; ; A = ۲ \Rightarrow ۲^{x^۲} = ۱ \; ; ۲^{x^۲} = ۲ \Rightarrow ۲^{x^۲} = ۲^۰ \; ; ۲^{x^۲} = ۲^۱ \Rightarrow$$

$x^۲ = ۰ \; ; x^۲ = ۱ \Rightarrow x = ۰ \; ; x = \pm ۱ \Rightarrow$ مجموعهٔ جوابهای معادله $= \{-۱, ۰, ۱\}$

۳۸ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$۳ \times ۹ \times ۲۷ \times ۸۱ \times ۳^{\frac{x}{۱۱}+۱} - ۳^{\frac{x}{۱۱}+۱۰} = ۶ \times ۳^{۱۹} \Rightarrow$$

$$۳ \times ۳^۲ \times ۳^۳ \times ۳^۴ \times ۳^{\frac{x}{۱۱}} \times ۳ - ۳^{\frac{x}{۱۱}} \times ۳^{۱۰} = ۲ \times ۳^{۲۰} \Rightarrow (۳-۱) \times ۳^{\frac{x}{۱۱}} \times ۳^{۱۰} = ۲ \times ۳^{۲۰}$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۳^{\frac{x}{۱۱}+۱۰} = ۲ \times ۳^{۲۰} \Rightarrow ۳^{\frac{x}{۱۱}+۱۰} = ۳^{۲۰} \Rightarrow \frac{x}{۱۱} + ۱۰ = ۲۰$$

$\Rightarrow \frac{x}{۱۱} = ۱۰ \Rightarrow \boxed{x = ۱۱۰} \Rightarrow$ مجموعهٔ جواب معادله $= \{۱۱۰\}$

۳۹ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$۲^{x^۲} + ۲^{x^۲+۱} + ۲^{x^۲+۲} + ۲^{x^۲+۳} = ۳۰ \Rightarrow ۲^{x^۲} + ۲ \times ۲^{x^۲} + ۲^۲ \times ۲^{x^۲} + ۲^۳ \times ۲^{x^۲} = ۳۰$$

$$\Rightarrow (۱+۲+۴+۸) \times ۲^{x^۲} = ۳۰ \Rightarrow ۱۵ \times ۲^{x^۲} = ۳۰ \Rightarrow ۲^{x^۲} = ۲^۱ \Rightarrow x^۲ = ۱$$

$\Rightarrow \boxed{x = \pm ۱} \Rightarrow$ مجموعهٔ جوابهای معادله $= \{-۱, ۱\}$

۴۰ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$۲^{۲^{x-۱}} - ۲۵۶ = ۰ \Rightarrow ۲^{۲^{x-۱}} = ۲۵۶$$

$$\Rightarrow ۲^{۲^{x-۱}} = ۲^۸$$

$$\Rightarrow ۲^{x-۱} = ۸$$

$$\Rightarrow ۲^{x-۱} = ۲^۳$$

$$\Rightarrow x-۱ = ۳ \Rightarrow \boxed{x = ۴}$$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب معادله $= \{۴\}$

پاسخ تشریحی تستهای رادیکال

۴۱ ـگزینه (۱) صحیح است، زیرا:

$$۲\sqrt{۹}+\sqrt{(-۳)^۲}-۵\sqrt{(-۳)^۴}=۲\times ۳-(-۳)-۵\times(-۳)^۲$$

$$=۶+۳-۴۵=-۳۶$$

۴۲ ـگزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{(-۱\frac{۱}{۳})^۲}+۳\sqrt{\frac{۱۶}{۹}}-۴\sqrt{(\frac{-۴}{۳})^۲}=\sqrt{(-\frac{۴}{۳})^۲}+۳\times\frac{۴}{۳}-۴\times\frac{۴}{۳}$$
$$=\frac{۴}{۳}-\frac{۴}{۳}=۰$$

۴۳ـگزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$۵\sqrt{(-۰/۰۱)^۲}+\frac{۳}{۱۰}\sqrt{\frac{۱}{۱۰۰}}-\sqrt{(\frac{-۲}{۱۰})^۴}=۵\times ۰/۰۱+\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰}-(\frac{-۲}{۱۰})^۲$$
$$=\frac{۵}{۱۰۰}+\frac{۳}{۱۰۰}-\frac{۴}{۱۰۰}=\frac{۴}{۱۰۰}=۰/۰۴$$

۴۴ ـگزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

برای هر عدد حقیقی x:

$$\sqrt{x^۲}=|x| \quad ; \quad \sqrt[۴]{x^۲}=\sqrt{\sqrt{x^۲}}=\sqrt{|x|} \quad ; \quad \frac{\sqrt{x^۲}}{|x|}=\frac{|x|}{|x|}$$

با فرض $x\neq ۰$ خواهیم داشت: $\frac{\sqrt{x^۲}}{|x|}=\frac{|x|}{|x|}\xlongequal{(x\neq ۰)}۱$

۴۵ ـگزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۱۸]{x^۶}=\sqrt[۳\times ۶]{(x^۲)^۳}=\sqrt[۶]{x^۲}=\sqrt[۳]{\sqrt{x^۲}}=\sqrt[۳]{|x|}=\begin{cases}\sqrt[۳]{x} & x\geq ۰\\ -\sqrt[۳]{x} & x< ۰\end{cases}$$

۴۶ـگزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{(x-14)^2}+\sqrt{x^2}=|x-14|+|x|$$

$$x=7-\sqrt{5}\quad:\quad |x-14|+|x|=|7-\sqrt{5}-14|+|7-\sqrt{5}|$$

$$=7+\sqrt{5}+7-\sqrt{5}=14$$

۴۷ـگزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{20}=|x|+|x-2|-2\sqrt{5}$$

$$x=2-\sqrt{5}\quad:\quad |x|+|x-2|-2\sqrt{5}=\left|2-\sqrt{5}\right|+|2-\sqrt{5}-2|-2\sqrt{5}$$

$$=\sqrt{5}-2+\sqrt{5}-2\sqrt{5}=-2$$

۴۸ـگزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

فقط در تساوی $\sqrt{a^2}=|a|$ دامنهٔ تغییرات a مجموعهٔ عددهای حقیقی است.

۴۹ـگزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم: $|x|\geq 0$ و $x^2\geq 0$

بنابراین: $-x^3\geq 0 \Rightarrow x^3\leq 0 \Rightarrow x\leq 0$

۵۰ـگزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\frac{20\sqrt{8}}{\sqrt{320}}}=\sqrt{20\sqrt{\frac{8}{320}}}=\sqrt{\frac{20}{\sqrt{40}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{400}}{\sqrt{40}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{400}{40}}}=\sqrt[4]{10}$$

۵۱ـگزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}\times\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{4}}{5-2}=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{4}}{3}$$

۵۲ـگزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

روش اول:

$$x=\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\ \Rightarrow x^5=2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ x^{15}=16\sqrt{2}\Rightarrow\ x^{30}=2^9$$

$$\Rightarrow (x^6)^5=2^5\times 2^4\ \Rightarrow\ x^6=2\sqrt[5]{16}$$

روش دوم:

$$x=\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\ \Rightarrow x=\sqrt[5]{\sqrt{2^4\sqrt{2}}}\ \Rightarrow x=\sqrt[15]{\sqrt{2^9}}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[30]{2^9}\ \Rightarrow\ x=\sqrt[6]{\sqrt[5]{2^5\times 2^4}}\ \Rightarrow\ x^6=2\sqrt[5]{16}$$

۵۳ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{x^4-6x^2+9}=\sqrt{(x^2-3)^2}=|x^2-3|=\begin{cases}x^2-3 & x^2\geq 3\\ 3-x^2 & x^2<3\end{cases}$$

۵۴ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[6]{2\sqrt[3]{(9-\sqrt{17})(9+\sqrt{17})}}=\sqrt[6]{2\sqrt[3]{81-17}}=\sqrt[6]{2\times 4}$$

$$=\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$$

۵۵ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[4]{(\sqrt[5]{3}-\sqrt[3]{2})^2}=\sqrt{|\sqrt[5]{3}-\sqrt[3]{2}|}$$

چون $\sqrt[3]{2}>\sqrt[5]{3}$ و یا $\sqrt[5]{3}-\sqrt[3]{2}<0$ است، پس:

$$\sqrt{|\sqrt[5]{3}-\sqrt[3]{2}|}=\sqrt{\sqrt[3]{2}-\sqrt[5]{3}}$$

۵۶ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

به ازای $x\geq 2$ مقدار عبارتهای $\sqrt{x-2}$ و $\sqrt{x+2}$ و $\sqrt{x^2-4}$ حقیقی هستند و داریم:

$$\sqrt{x-2}\times\sqrt{x+2}=\sqrt{(x-2)(x+2)}=\sqrt{x^2-4}$$

۵۷ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[14]{(x+5)^2}=\sqrt[7]{|x+5|}=\begin{cases}\sqrt[7]{x+5} & x\geq -5\\ -\sqrt[7]{x+5} & x<-5\end{cases}$$

۵۸ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$x \le ۱ \quad : \quad \sqrt[۳]{(-x)^۳} - \sqrt[۴]{(x-۱)^۴} + \frac{\sqrt{(x-۲)^۲}}{x-۲} = -x - |x-۱| + \frac{|x-۲|}{x-۲}$$

$$= -x + x - ۱ + \frac{-(x-۲)}{x-۲} = -۲$$

۵۹ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$x = ۱-\sqrt{۲} \quad : \quad \sqrt[۶]{x^۶} + \sqrt[۴]{(۲-x)^۴} = |x| + |۲-x|$$

$$= |۱-\sqrt{۲}| + |۲-(۱-\sqrt{۲})|$$

$$= \sqrt{۲} - ۱ + ۱ + \sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}$$

۶۰ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۴]{(۷+۴\sqrt{۳})^۲} = \sqrt{۷+۴\sqrt{۳}} = \sqrt{\frac{۷+۱}{۲}} + \sqrt{\frac{۷-۱}{۲}} = ۲+\sqrt{۳}$$

$$\sqrt[۶]{(۷-۴\sqrt{۳})^۳} = \sqrt{۷-۴\sqrt{۳}} = \sqrt{\frac{۷+۱}{۲}} - \sqrt{\frac{۷-۱}{۲}} = ۲-\sqrt{۳}$$

$$|۱-\sqrt{۵}| = \sqrt{۵} - ۱$$

بنابراین عبارت به شکل ساده شدهٔ زیر در می‌آید:

$$\frac{۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}-۱} = \frac{۴}{\sqrt{۵}-۱} \times \frac{\sqrt{۵}+۱}{\sqrt{۵}+۱} = \frac{۴(\sqrt{۵}+۱)}{۵-۱} = \sqrt{۵}+۱$$

۶۱ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۶۰]{(\sqrt{۲۲}-۷)^{۱۰}} \times \sqrt[۱۲]{(۷+\sqrt{۲۲})^۲} = \sqrt[۶]{|\sqrt{۲۲}-۷|} \times \sqrt[۶]{۷+\sqrt{۲۲}}$$

$$= \sqrt[۶]{(۷-\sqrt{۲۲})(۷+\sqrt{۲۲})} = \sqrt[۶]{۲۷} = \sqrt{۳}$$

۶۲ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۶]{(a^۲+b^۲+۲ab)^۳} + \sqrt{a^۲+b^۲-۲ab} = \sqrt[۶]{(a+b)^۶} + \sqrt{(a-b)^۲}$$

$$= |a+b| + |a-b|$$

از شرط $۰ > a > b$ نتیجه می‌شود $a - b > ۰$ و $a + b < ۰$، بنابراین:

$$|a + b| + |a - b| = -(a + b) + (a - b) = -۲b$$

۶۳ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{۹ + ۴\sqrt{۵}} = \sqrt{\frac{۹ + ۱}{۲}} + \sqrt{\frac{۹ - ۱}{۲}} = \sqrt{۵} + ۲$$

$$\sqrt{۹ - ۴\sqrt{۵}} = \sqrt{\frac{۹ + ۱}{۲}} - \sqrt{\frac{۹ - ۱}{۲}} = \sqrt{۵} - ۲$$

بنابراین عبارت به شکل ساده شده زیر در می‌آید:

$$\sqrt[۳]{۴} \times \sqrt[۴]{\sqrt{۵} + ۲ - (\sqrt{۵} - ۲)} = \sqrt[۳]{۴} \times \sqrt[۴]{۴} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

۶۴ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$x^۴ = ۱۷ - ۱۲\sqrt{۲} \Rightarrow x^۲ = \sqrt{۱۷ - ۱۲\sqrt{۲}} = \sqrt{(۳ - ۲\sqrt{۲})^۲} = ۳ - ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{۳ - ۲\sqrt{۲}} = \sqrt{(۱ - \sqrt{۲})^۲} = |۱ - \sqrt{۲}| = \sqrt{۲} - ۱$$

۶۵ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\frac{۱}{۲\sqrt[۳]{۲} + \sqrt[۳]{۲۰} + \sqrt[۳]{۲۵}} \times \frac{\sqrt[۳]{۵} - \sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۵} - \sqrt[۳]{۴}} = \frac{\sqrt[۳]{۵} - \sqrt[۳]{۴}}{۵ - ۴} = \sqrt[۳]{۵} - \sqrt[۳]{۴}$$

۶۶ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\frac{-۲}{\sqrt{۷} + \sqrt{۵}} \times \frac{\sqrt{۷} - \sqrt{۵}}{\sqrt{۷} - \sqrt{۵}} = \frac{-۲(\sqrt{۷} - \sqrt{۵})}{۷ - ۵} = \sqrt{۵} - \sqrt{۷}$$

۶۷ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\frac{\sqrt[۴]{۷ - ۴\sqrt{۳}}}{\sqrt[۱۶]{(\sqrt{۳} - ۲)^۸}} = \frac{\sqrt[۴]{(۲ - \sqrt{۳})^۲}}{\sqrt{|\sqrt{۳} - ۲|}} = \frac{\sqrt{|۲ - \sqrt{۳}|}}{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}} = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}} = ۱$$

۶۸ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$4\sqrt[8]{2}\times\sqrt{0/25\sqrt{0/25\sqrt{0/25\sqrt{0/25}}}} = 2\sqrt[8]{2}\times\sqrt{0/5\sqrt{0/5\sqrt{0/5}}}$$

$$= 2\sqrt[8]{2}\times\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} = 2\sqrt[8]{2}\times\sqrt[8]{\frac{1}{2^7}} = 2\sqrt[8]{\frac{2}{2^7}} = \sqrt[8]{\frac{2^9}{2^7}} = \sqrt[8]{2^2} = \sqrt[4]{2}$$

۶۹ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4}-1}\times\frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1} = \frac{3(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1)}{4-1}$$

$$= \sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1 = (1-\sqrt[3]{4})^2+3\sqrt[3]{4}$$

۷۰ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}\times\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2} = \sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$$

۷۱ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}} = \sqrt[3]{|1-\sqrt{2}|} = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$$

بنابراین:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt[3]{2-1} = \sqrt[3]{1} = 1$$

۷۲ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\frac{a(\sqrt{b}-2)}{\sqrt{2}-2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2a\sqrt{b}-4a = 2-\sqrt{2}$$

a و b گویا هستند، پس:

$$\begin{cases} 2a\sqrt{b} = -\sqrt{2} \\ -4a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-\frac{1}{2})\sqrt{b} = -\sqrt{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b+a = 2-\frac{1}{2} \Rightarrow a+b = \frac{3}{2}$$

۷۳ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^2}$$

بنابراین:

$$\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۳}}\times\sqrt[۳]{(۲-\sqrt{۳})^{۲}}=\sqrt[۳]{(۲-\sqrt{۳})^{۳}}=۲-\sqrt{۳}$$

۷۴ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$x^{\frac{۹}{۲}}+۸=(x^{\frac{۳}{۲}})^{۳}+۲^{۳}=(\sqrt{x^{۳}}+۲)(x^{۳}-۲\sqrt{x^{۳}}+۴)$$

$$=(x\sqrt{x}+۲)(x^{۳}-۲x\sqrt{x}+۴)\qquad(x\geq ۰)$$

۷۵ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$(\sqrt[۹]{(-x)^{۳}})^{۳}=\sqrt[۹]{(-x)^{۹}}=-x \quad \text{و} \quad \sqrt[۸]{(-x^{۲})^{۴}}=\sqrt[۸]{x^{۸}}=|x|$$

$$\sqrt[۷]{۲\sqrt{(-۶۴)^{۲}}}=\sqrt[۷]{۲\,|-۶۴|}=\sqrt[۷]{۲\times ۲^{۶}}=\sqrt[۷]{۲^{۷}}=۲,$$

$$\sqrt[۴]{(-۴)^{۲}}=\sqrt[۴]{۴^{۲}}=\sqrt[۴]{۲^{۴}}=۲$$

و با توجه به شرط $x\leq ۰$:

$$-x-|x|+۲-۲=-x-|x| \;\underset{}{\overset{(x\leq ۰)}{=\!=}}\; -x+x=۰$$

۷۶ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\frac{۶\sqrt[۳]{۲}+۳\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۵۴}-۶\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۳(۲\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴})}{۳\sqrt[۳]{۲}-۶\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴}}{-\sqrt[۳]{۲}}$$

$$=-۲-\frac{\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۲}}=-۲-\sqrt[۳]{۲}$$

۷۷ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\frac{\sqrt{۲}-۳\sqrt{۳}}{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۶]{۵۴}+۳}=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۲۷}}{(\sqrt[۶]{۲})^{۲}+\sqrt[۶]{۲\times ۲۷}+(\sqrt[۶]{۲۷})^{۲}}\times\frac{\sqrt[۶]{۲}-\sqrt[۶]{۲۷}}{\sqrt[۶]{۲}-\sqrt[۶]{۲۷}}$$

$$=\frac{(\sqrt{۲}-\sqrt{۲۷})(\sqrt[۶]{۲}-\sqrt[۶]{۲۷})}{(\sqrt[۶]{۲})^{۳}-(\sqrt[۶]{۲۷})^{۳}}$$

$$=\frac{(\sqrt{۲}-\sqrt{۲۷})(\sqrt[۶]{۲}-\sqrt{۳})}{\sqrt{۲}-\sqrt{۲۷}}$$

$$=\sqrt[۶]{۲}-\sqrt{۳}$$

۷۸ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\frac{19\sqrt{12}+3\sqrt{8}}{\sqrt{48}+3\sqrt[4]{4}+3\sqrt{75}}=\frac{38\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}+15\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2(19\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{19\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=2$$

۷۹ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

....

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\times\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

بنابراین:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-1$$

۸۰ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc \Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2=2(ab+ac+bc)$$

$$\Rightarrow (a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)=0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0 \quad (1)$$

طرف اول تساوی (۱) به ازای هر مقدار حقیقی a و b و c همیشه مثبت است و تنها وقتی صفر می‌شود که داشته باشیم:

$$a=b=c$$

بنابراین:

$$a=b=c:\quad \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}{3\sqrt[3]{abc}}=\frac{\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2}+\sqrt{a^2}}{3\sqrt[3]{a^3}}$$

$$=\frac{3\sqrt{a^2}}{3a}=\frac{|a|}{a}$$

$$a<0:\quad \frac{|a|}{a}=\frac{-a}{a}=-1$$

۸۱ـگزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$x \geq 2: \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x + \sqrt{4x-4}} = \sqrt{\frac{x+x-2}{2}} + \sqrt{\frac{x-x+2}{2}}$$

$$= \sqrt{x-1} + 1$$

$$x \geq 2: \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x - \sqrt{4x-4}} = \sqrt{\frac{x+x-2}{2}} - \sqrt{\frac{x-x+2}{2}}$$

$$= \sqrt{x-1} - 1$$

$$x \geq 2 \quad : \quad y = \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} + 1 = 2 \Rightarrow y = 2$$

۸۲ـگزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\frac{A}{2+\sqrt{3}} + \frac{B}{2-\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \frac{A(2-\sqrt{3}) + B(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2A - A\sqrt{3} + 2B + B\sqrt{3}}{4-3} = 1 \Rightarrow 2A + 2B + (B-A)\sqrt{3} = 1$$

a و bگویا هستند، پس:

$$\begin{cases} 2A + 2B = 1 \\ B - A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = \frac{1}{2} \\ B = A \end{cases} \Rightarrow 2A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A = B = \frac{1}{4} \Rightarrow B - A = 0 \Rightarrow (B-A)^{1377} = 0$$

۸۳ـگزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$x \geq 2 \quad : \quad \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = x - 2$$

$$x \geq 2 \quad : \quad \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| = 2x - 1$$

$$x \geq 2 \quad : \quad y = x - 2 - (2x-1) = x - 2 - 2x + 1 = -x - 1$$

۸۴ـگزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

می‌دانیم با شرط $A^۲ - B = C^۲$ داریم:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{۲}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{۲}}$$

بنابراین:

$$\sqrt{x+\sqrt{۲x-۱}} = \sqrt{\frac{x+x-۱}{۲}} + \sqrt{\frac{x-x+۱}{۲}} = \sqrt{x-\frac{۱}{۲}} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۸۵ـگزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۳]{a} + \sqrt[۳]{b} = \sqrt[۳]{c} \Rightarrow (\sqrt[۳]{a} + \sqrt[۳]{b})^۳ = c$$

$$\Rightarrow a+b+۳\sqrt[۳]{ab}(\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}) = c$$

$$\Rightarrow a+b+۳\sqrt[۳]{ab}(\sqrt[۳]{c}) = c \Rightarrow a+b-c = -۳\sqrt[۳]{abc}$$

$$\Rightarrow c-b-a = ۳\sqrt[۳]{abc} \Rightarrow (c-b-a)^۳ = ۲۷abc$$

۸۶ـگزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$|x| \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \le x \le \frac{۱}{۲}$$

$$-\frac{۱}{۲} \le x \le \frac{۱}{۲} \;:\; \sqrt{x^۲-۲x+۱} = \sqrt{(x-۱)^۲} = |x-۱| = -(x-۱)$$

$$-\frac{۱}{۲} \le x \le \frac{۱}{۲} \;:\; \sqrt{x^۲+۲x+۱} = \sqrt{(x+۱)^۲} = |x+۱| = x+۱$$

$$|x| \le \frac{۱}{۲} \;:\; y = -(x-۱)+x+۱ = -x+۱+x+۱ = ۲$$

۸۷ـگزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$x = \sqrt[۶]{-۱+۲x^۳\sqrt{-۱+۲x^۳\sqrt{\dots}}} \Rightarrow x^۳ = \sqrt{-۱+۲x^۳\underbrace{\sqrt{-۱+۲x^۳\sqrt{\dots}}}_{x^۳}}$$

$$\Rightarrow x^۳ = \sqrt{-۱+۲x^۳(x^۳)} \Rightarrow x^۶ = -۱+۲x^۶$$

$$\Rightarrow x^۶ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \;,\; x > ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۱}$$

۸۸ـگزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\frac{a^۵c^۸}{b^۶}} = \frac{\sqrt{a^۵c^۸}}{\sqrt{b^۶}} = \frac{\sqrt{a^۵}.\sqrt{(c^۴)^۲}}{\sqrt{(b^۳)^۲}} = \frac{a^۲\sqrt{a}.c^۴}{|b^۳|} = \frac{a^۲c^۴}{|b|^۳}\sqrt{a}$$

با شرط $a \ge ۰$ و $b < ۰$ می‌توان نوشت:

$$\frac{a^۲c^۴}{|b|^۳}\sqrt{a} \overset{(b<۰)}{=\!=} \frac{a^۲c^۴}{-b^۳}\sqrt{a} = -\frac{a^۲c^۴}{b^۳}\sqrt{a}$$

۸۹ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[7]{\frac{768}{\sqrt{6}}}=\sqrt[7]{\frac{6\times 128}{\sqrt{6}}}=\sqrt[7]{128\sqrt{6}}=2\sqrt[7]{\sqrt{6}}=2\sqrt[14]{6}$$

$$\sqrt[5]{\frac{64}{\sqrt{2}}}=\sqrt[5]{\frac{2\times 32}{\sqrt{2}}}=\sqrt[5]{32\sqrt{2}}=2\sqrt[5]{\sqrt{2}}=2\sqrt[10]{2}$$

بنابراین:

$$2\sqrt[14]{6}\div 2\sqrt[10]{2}=\frac{\sqrt[14]{6}}{\sqrt[10]{2}}=\frac{\sqrt[70]{6^5}}{\sqrt[70]{2^7}}=\sqrt[70]{\frac{2^5\times 3^5}{2^5\times 2^2}}=\sqrt[70]{\frac{243}{4}}$$

۹۰ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\frac{17}{3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[6]{81}+4}=\frac{17}{\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{9}+4}\times\frac{\sqrt[3]{9}+2}{\sqrt[3]{9}+2}=\sqrt[3]{9}+2$$

۹۱ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{4x^2}}{2x}}=\sqrt[3]{\frac{|2x|}{2x}}\overset{(x<0)}{=}\sqrt[3]{\frac{-2x}{2x}}=\sqrt[3]{-1}=-1$$

$$\sqrt[7]{x^2\sqrt[4]{\frac{1}{x^8}}}=\sqrt[7]{x^2.\frac{1}{x^2}}\overset{(x<0)}{=}\sqrt[7]{1}=1$$

$$\sqrt[5]{4x\sqrt{\frac{1}{16x^2}}}=\sqrt[5]{4x.\frac{1}{|4x|}}\overset{(x<0)}{=}\sqrt[5]{\frac{4x}{-4x}}=\sqrt[5]{-1}=-1$$

بنابراین:

$$x<0\quad:\quad y=-1-1-(-1)=-1$$

۹۲ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[4]{64}=\sqrt[4]{8^2}=\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72}=\sqrt{9\times 4\times 2}=3\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

$$\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$A=5\times 2\sqrt{2}-3\times 6\sqrt{2}+8\sqrt{2}=18\sqrt{2}-18\sqrt{2}=0$$

۹۳ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\frac{۲}{۲+\sqrt{۱۲}}=\frac{۲}{۲+\sqrt{۴\times۳}}=\frac{۲}{۲+۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}+۱}\times\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$$

$$\frac{۲}{\sqrt{۱۲}+\sqrt{۲۰}}=\frac{۲}{\sqrt{۴\times۳}+\sqrt{۴\times۵}}=\frac{۲}{۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}$$

$$=\frac{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۷}+\sqrt{۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۷}+\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۷}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۷}-\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۷}-\sqrt{۵}}{۲}$$

بنابراین:

$$B=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}+\frac{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۷}-\sqrt{۵}}{۲}=\frac{\sqrt{۷}-۱}{۲}$$

۹۴ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۹]{x^{۱۲}}=\sqrt[۹]{(x^{۴})^{۳}}=\sqrt[۳]{x^{۴}}=(\sqrt[۳]{x^{۲}})^{۲}$$

$$\sqrt[۶]{x^{۴}y^{۴}}=\sqrt[۶]{(x^{۲}y^{۲})^{۲}}=\sqrt[۳]{x^{۲}y^{۲}}=\sqrt[۳]{x^{۲}}\,.\,\sqrt[۳]{y^{۲}}$$

$$\sqrt[۳]{x^{۳}y}=\sqrt[۳]{x^{۲}}\,.\,\sqrt[۳]{xy}$$

بنابراین:

$$Z=(\sqrt[۳]{x^{۲}})^{۲}+\sqrt[۳]{x^{۲}}\,.\,\sqrt[۳]{y^{۲}}-۲\sqrt[۳]{x^{۲}}\,.\,\sqrt[۳]{xy}\ \Rightarrow$$

$$Z=\sqrt[۳]{x^{۲}}(\sqrt[۳]{x^{۲}}-۲\sqrt[۳]{xy}+\sqrt[۳]{y^{۲}})=\sqrt[۳]{x^{۲}}(\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y})^{۲}$$

و یا:

$$Z=\sqrt[۳]{x^{۲}}(\sqrt[۳]{y}-\sqrt[۳]{x})^{۲}$$

۹۵ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}=\frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=\sqrt{۲}\quad,\quad\frac{۱}{\sqrt{\frac{۳}{۲}}}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱+\sqrt{\frac{۳}{۴}}}{\sqrt{\frac{۳}{۲}}}$$

بنابراین:

$$P=\sqrt{۲}\left[\left(\frac{۱+\sqrt{\frac{۳}{۴}}}{\sqrt{\frac{۳}{۲}}}\right)\times\frac{۱}{۱+\sqrt{\frac{۳}{۴}}}\right]=\sqrt{۲}\times\frac{۱}{\sqrt{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۹۶ـگزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\frac{۱}{۱+\sqrt[۱۲]{۸}}=\frac{۱}{۱+\sqrt[۱۲]{۲^۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}+۱}\times\frac{\sqrt[۴]{۲}-۱}{\sqrt[۴]{۲}-۱}=\frac{\sqrt[۴]{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}$$

$$=\frac{\sqrt[۴]{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}=\frac{(\sqrt[۴]{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)}{۲-۱}$$

$$=(\sqrt[۴]{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)$$

۹۷ـگزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۶]{(۱-\sqrt{۲})^۶}=|۱-\sqrt{۲}|=|\sqrt{۲}-۱|=\sqrt{۲}-۱$$

$$\sqrt[۸]{(۲\sqrt{۲}-۳)^۴}=\sqrt{|۲\sqrt{۲}-۳|}=\sqrt{|۳-۲\sqrt{۲}|}=\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}$$

$$=\sqrt{۳-\sqrt{۸}}=\sqrt{\frac{۳+۱}{۲}}-\sqrt{\frac{۳-۱}{۲}}=\sqrt{۲}-۱$$

$$D=\sqrt{۲}-۱-(\sqrt{۲}-۱)=\sqrt{۲}-۱-\sqrt{۲}+۱=۰$$

۹۸ـگزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{۲-\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۲+۱}{۲}}-\sqrt{\frac{۲-۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۲+۱}{۲}}+\sqrt{\frac{۲-۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\quad,\quad\sqrt[۴]{۳۶}=\sqrt{۶}$$

بنابراین:

$$T=\frac{\sqrt{۶}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۶}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\sqrt{۶}=\sqrt{۶}-\sqrt{۶}=۰$$

۹۹ـگزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۳]{۸۱}=\sqrt[۳]{۳^۴}=\sqrt[۳]{۳^۳\times۳}=۳\sqrt[۳]{۳}\quad,\quad\sqrt[۳]{۱۹۲}=\sqrt[۳]{۴^۳\times۳}=۴\sqrt[۳]{۳}$$

$$\sqrt[۳]{۳۷۵}=\sqrt[۳]{۵^۳\times۳}=۵\sqrt[۳]{۳}\quad,\quad\sqrt[۶]{۵۷۶}=\sqrt[۶]{۲۴^۲}=\sqrt[۳]{۲۴}=۲\sqrt[۳]{۳}$$

بنابراین:

$$K = ۳\sqrt[۳]{۳} - ۵\sqrt[۳]{۳} + ۴\sqrt[۳]{۳} - ۲\sqrt[۳]{۳} = ۰$$

۱۰۰ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$u = \sqrt{۲ + \underbrace{\sqrt{۲ + \sqrt{۲ + \sqrt{\dots}}}}_{u}} \Rightarrow u = \sqrt{۲ + u}$$

$$\Rightarrow u^۲ = ۲ + u \Rightarrow u^۲ - u - ۲ = ۰ \Rightarrow (u - ۲)(u + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow u - ۲ = ۰ \;;\; u + ۱ = ۰ \;,\; u > ۰ \Rightarrow u - ۲ = ۰ \Rightarrow \boxed{u = ۲}$$

$$V = \sqrt{۳\underbrace{\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{\dots}}}}_{V}} \Rightarrow V = \sqrt{۳V} \Rightarrow V^۲ = ۳V$$

$$\Rightarrow V^۲ - ۳V = ۰ \Rightarrow V(V - ۳) = ۰ \Rightarrow V - ۳ = ۰ \;;\; V = ۰ \;,\; V > ۰$$
$$\Rightarrow V - ۳ = ۰ \Rightarrow \boxed{V = ۳}$$

بنابراین:

$$x = \frac{V}{u} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \boxed{x = \frac{۳}{۲}}$$

۱۰۱ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$x = \sqrt[n]{m\sqrt[n]{m\sqrt[n]{m\sqrt[n]{\dots}}}} \Rightarrow x = \sqrt[n]{mx}$$

$$\Rightarrow x^n = mx \Rightarrow x^n - mx = ۰ \Rightarrow x(x^{n-۱} - m) = ۰$$

$$\Rightarrow x^{n-۱} - m = ۰ \;;\; x = ۰ \;,\; x > ۰ \Rightarrow x^{n-۱} - m = ۰ \;,\; x > ۰$$

$$\Rightarrow x^{n-۱} = m \;,\; x > ۰ \Rightarrow x = \sqrt[n-۱]{m}$$

با توجه به شرط $x > ۰$، اگر n زوج و یا فرد باشد، جواب $x = \sqrt[n-۱]{m}$ است.

۱۰۲ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{۳۲} = \sqrt{۱۶ \times ۲} = ۴\sqrt{۲} \;,\; \sqrt[۱۰]{۳۲} = \sqrt[۱۰]{۲^۵} = \sqrt{۲}$$

$$\sqrt{۵۰} = \sqrt{۲۵ \times ۲} = ۵\sqrt{۲}$$

بنابراین:

$$(\sqrt{۳۲}+\sqrt[۱۰]{۳۲}-\sqrt{۵۰})^{۱۳۷۷}=(۴\sqrt{۲}+\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲})^{۱۳۷۷}$$
$$=(۵\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲})^{۱۳۷۷}$$
$$=(۰)^{۱۳۷۷}$$
$$=۰$$

۱۰۳ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲}}}}=\sqrt{\sqrt{۸\sqrt{\sqrt{۸}}}}=\sqrt[۴]{۸\sqrt[۴]{۸}}=\sqrt[۴]{\sqrt[۴]{۸^۵}}$$

$$=\sqrt[۱۶]{(۲^۳)^۵}=\sqrt[۱۶]{۲^{۱۵}}=۲^{\frac{۱۵}{۱۶}}$$

۱۰۴ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\frac{۳-۲\sqrt[۶]{۸}}{۳+۲\sqrt{۲}}=\frac{۳-۲\sqrt[۶]{۲^۳}}{۳+۲\sqrt{۲}}=\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۳+۲\sqrt{۲}}\times\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۳-۲\sqrt{۲}}=\frac{۱۷-۱۲\sqrt{۲}}{۹-۸}=۱۷-۱۲\sqrt{۲}$$

$$\frac{۲۴}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۲۴\sqrt{۲}}{۲}=۱۲\sqrt{۲}$$

بنابراین:

$$S=\sqrt[۷۵]{۱۷-۱۲\sqrt{۲}+۱۲\sqrt{۲}-۱۸}=\sqrt[۷۵]{-۱}=-۱$$

۱۰۵ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$x=۲\sqrt{۳+\underbrace{۲\sqrt{۳+۲\sqrt{\dots}}}_{x}}\ \Rightarrow\ x=۲\sqrt{۳+x}\ \Rightarrow$$

$$x^۲=۴(۳+x)\ \Rightarrow\ x^۲-۴x-۱۲=۰\ \Rightarrow\ (x+۲)(x-۶)=۰$$
$$\Rightarrow x-۶=۰\ ;\ x+۲=۰\ ,\ x>۰\ \Rightarrow\ x-۶=۰\Rightarrow \boxed{x=۶}$$

۱۰۶ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$x=\sqrt{-۱+۲\underbrace{\sqrt{-۱+۲\sqrt{\dots}}}_{x}}\ \Rightarrow\ x=\sqrt{-۱+۲x}\ \Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)^۲=۰$$
$$\Rightarrow\ \boxed{x=۱}$$

۱۰۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$N=\frac{۱}{\sqrt{۷}-\sqrt{۵}}+\frac{۱}{\sqrt{۷}+\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۷}+\sqrt{۵}+\sqrt{۷}-\sqrt{۵}}{(\sqrt{۷}-\sqrt{۵})(\sqrt{۷}+\sqrt{۵})}=\frac{۲\sqrt{۷}}{۷-۵}=\sqrt{۷}$$

۱۰۸ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

می‌دانیم با شرط $A^۲ - B = C^۲$ داریم:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{۲}}$$

پس:

$$\sqrt{۲x+۲\sqrt{x^۲-۱}}=\sqrt{۲x+\sqrt{۴x^۲-۴}}$$

$$=\sqrt{\frac{۲x+۲}{۲}}+\sqrt{\frac{۲x-۲}{۲}}=\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱}$$

۱۰۹ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۴]{x\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}}=\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{x^۴\sqrt{x}}}=\sqrt[۱۲]{\sqrt{x^۹}}=\sqrt[۲۴]{x^۹}=\sqrt[۸]{۸}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۸]{x^۳}=\sqrt[۸]{۸} \Rightarrow x^۳=۸ \Rightarrow x=\sqrt[۳]{۸} \Rightarrow \boxed{x=۲}$$

۱۱۰ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$a^{\frac{۵}{۷x^۳}}=a^{\frac{۴۹}{۲۵}} \Rightarrow \frac{۵}{۷x^۳}=\frac{۴۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow x^۳=\frac{۵\times۲۵}{۷\times۴۹}=\frac{۵^۳}{۷^۳}=(\frac{۵}{۷})^۳ \Rightarrow \boxed{x=\frac{۵}{۷}}$$

۱۱۱ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲}}}}=۲^{\frac{۱۵}{۱۶}} \quad , \quad ۲^{\frac{۳۱}{۸}x^۳}=\sqrt[۴]{۲\times۲^{\frac{۱۵}{۱۶}}}$$

$$\Rightarrow ۲^{\frac{۳۱}{۸}x^۳}=\sqrt[۴]{۲^{\frac{۳۱}{۱۶}}}=۲^{\frac{۳۱}{۶۴}} \Rightarrow \frac{۳۱}{۸}x^۳=\frac{۳۱}{۶۴}$$

$$\Rightarrow x^۳=\frac{۱}{۸} \Rightarrow x^۳=(\frac{۱}{۲})^۳ \Rightarrow \boxed{x=\frac{۱}{۲}}$$

۱۱۲ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$x=\sqrt[۶]{۱۰+۳\sqrt{۱۰+۳\sqrt{\dots}}} \Rightarrow x^{۳}=\sqrt{۱۰+۳\underbrace{\sqrt{۱۰+۳\sqrt{\dots}}}_{x^{۳}}}$$

$$\Rightarrow x^{۳}=\sqrt{۱۰+۳x^{۳}} \Rightarrow x^{۶}=۱۰+۳x^{۳} \quad , \quad x^{۳}=A$$

$$\Rightarrow A^{۲}-۳A-۱۰=۰ \Rightarrow (A+۲)(A-۵)=۰$$

$$\Rightarrow A+۲=۰ \;;\; A-۵=۰ \quad , \quad A>۰ \Rightarrow A-۵=۰ \Rightarrow A=۵$$

$$\Rightarrow x^{۳}=۵ \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[۳]{۵}}$$

۱۱۳ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۴]{\left(\frac{۲\sqrt[۴]{۵}}{\sqrt[۳]{\sqrt{۲\sqrt{۵}}}}\right)^{۳}}=\sqrt[۴]{\frac{۸\sqrt[۴]{۱۲۵}}{۲\sqrt{۵}}}=\sqrt[۴]{\frac{۴\sqrt[۴]{۱۲۵}}{\sqrt[۴]{۲۵}}}=\sqrt[۴]{۴\sqrt[۴]{\frac{۱۲۵}{۲۵}}}$$

$$=\sqrt[۴]{۴\sqrt[۴]{۵}}=\sqrt[۴]{\sqrt[۴]{۴^{۴}\times ۵}}=\sqrt[۱۶]{۴^{۴}\times ۵} \quad , \quad \sqrt[۸]{۱۶\sqrt{۵}}=\sqrt[۸]{\sqrt{۱۶^{۲}\times ۵}}=\sqrt[۱۶]{۴^{۴}\times ۵}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۴]{\left(\frac{۲\sqrt[۴]{۵}}{\sqrt[۳]{\sqrt{۲\sqrt{۵}}}}\right)^{۳}} \div \sqrt[۸]{۱۶\sqrt{۵}}=\sqrt[۱۶]{۴^{۴}\times ۵} \div \sqrt[۱۶]{۴^{۴}\times ۵}=۱$$

۱۱۴ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\frac{۳}{۲}-\sqrt{۲}}=\sqrt{\frac{\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}}{۲}}-\sqrt{\frac{\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}}{۲}}=\sqrt{\frac{۴}{۴}}-\sqrt{\frac{۱}{۲}}=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[۷۶]{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\sqrt[۷۶]{۱}=۱ \Rightarrow \boxed{x=۱}$$

۱۱۵ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$P=\sqrt[۴]{۴-\sqrt{۹-۴\sqrt{۳}}} \;\cdot\; \sqrt[۴]{۴+\sqrt{۹-۴\sqrt{۳}}}=\sqrt[۴]{۱۶-(۹-۴\sqrt{۳})}$$

$$=\sqrt{\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{۷+۱}{۲}}+\sqrt{\frac{۷-۱}{۲}}}=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

$$=\sqrt{\frac{۲+۱}{۲}}+\sqrt{\frac{۲-۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۱۶ـگزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{\frac{۴}{۱۵}}=\frac{۲}{\sqrt{۱۵}}=\frac{۲\sqrt{۱۵}}{۱۵} \quad , \quad \sqrt[۴]{\frac{۹}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۳}{۵}}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۵}$$

$$\sqrt[۴]{\frac{۲۵}{۹}}=\sqrt{\frac{۵}{۳}}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۳} \quad , \quad \sqrt{۶۰}=۲\sqrt{۱۵} \quad , \quad \sqrt[۴]{۲۲۵}=\sqrt[۴]{۱۵^۲}=\sqrt{۱۵}$$

$$S=\frac{۲\sqrt{۱۵}}{۱۵}+\frac{\sqrt{۱۵}}{۵}+\frac{۲\sqrt{۱۵}}{۳}-۲\sqrt{۱۵}+\sqrt{۱۵}$$

$$=\frac{۲+۳+۱۰-۱۵}{۱۵}\sqrt{۱۵}=\frac{۱۵-۱۵}{۱۵}\sqrt{۱۵}=۰ \Rightarrow \boxed{S=۰}$$

۱۱۷ ـگزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۶]{۸}=\sqrt[۶]{۲^۳}=\sqrt{۲} \quad , \quad \sqrt[۴]{۴}=\sqrt[۴]{۲^۲}=\sqrt{۲} \quad , \quad \sqrt[۴]{۹}=\sqrt[۴]{۳^۲}=\sqrt{۳}$$

$$\sqrt[۶]{۲۷}=\sqrt[۶]{۳^۳}=\sqrt{۳} \quad , \quad \sqrt[۱۰]{۳۲}=\sqrt[۱۰]{۲^۵}=\sqrt{۲} \quad , \quad \sqrt[۴]{\frac{۹}{۴}}=\sqrt[۴]{(\frac{۳}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

بنابراین:

$$K=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}+\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}+۲\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

$$=۱+\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}+\sqrt{۶}=۱+\frac{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲}{۳-۲}+\sqrt{۶}$$

$$=۱+۳+۲-۲\sqrt{۶}+\sqrt{۶}=۶-\sqrt{۶} \Rightarrow \boxed{k=۶-\sqrt{۶}}$$

۱۱۸ ـگزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$x<۰ \ : \ \sqrt{x^۲}=|x|=-x \Rightarrow y=\sqrt{x^۴+۱-۲x(-x)}$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{x^۴+۲x^۲+۱}=\sqrt{(x^۲+۱)^۲}=|x^۲+۱|=x^۲+۱$$

۱۱۹ ـگزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۶]{\frac{۱}{۸}}=\sqrt[۶]{(\frac{۱}{۲})^۳}=\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sqrt{x-۱}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-۱}=۰ \Rightarrow x-۱=۰$$

۱۲۰ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۷۶]{x^۴-۱}=\sqrt[۷۶]{x^۸-۱} \Rightarrow x^۴-۱=x^۸-۱ \Rightarrow x^۸-x^۴=۰$$
$$\Rightarrow x^۴(x^۴-۱)=۰ \Rightarrow x^۴=۰ \;;\; x^۴-۱=۰ \Rightarrow x=۰ \;;\; x^۴=۱$$
$$\Rightarrow \boxed{x=۰} \;;\; \boxed{x=\pm ۱}$$

با آزمایش ریشه‌ها، نتیجه می‌شود که $x=۰$ ریشهٔ معادلهٔ اصلی نیست و در واقع ریشهٔ خارجی معادلهٔ اصلی است. بنابراین مجموعهٔ ریشه‌های معادله، چنین است:

$\{۱ , -۱\}$ = مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادله

۱۲۱ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۴]{\frac{x^۳}{۲}+۱}=\sqrt[۴]{۲-\frac{x^۳}{۲}} \Rightarrow \frac{x^۳}{۲}+۱=۲-\frac{x^۳}{۲} \Rightarrow x^۳=۱$$

$\Rightarrow \boxed{x=۱} \Rightarrow$ **$\{۱\}$ = مجموعهٔ جواب حقیقی معادله**

۱۲۲ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۸]{۴x^۶+۲x^۳-۵}=\sqrt[۸]{۲x^۳-۱} \Rightarrow ۴x^۶+۲x^۳-۵=۲x^۳-۱ \;,\; x^۳=t$$
$$\Rightarrow ۴t^۲+۲t-۵=۲t-۱ \Rightarrow ۴t^۲=۴ \Rightarrow t^۲=۱ \Rightarrow t=\pm ۱$$
$$\Rightarrow x^۳=\pm ۱ \Rightarrow x=\pm ۱$$

آزمایش نشان می‌دهد، که عدد -۱، به حوزهٔ تعریف معادلهٔ اول تعلق ندارد و در نتیجه نمی‌تواند ریشهٔ آن باشد، یعنی $x=-۱$، ریشهٔ خارجی معادله است:

$\{۱\}$ = مجموعهٔ جواب حقیقی معادله

۱۲۳ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$x\sqrt[۷]{x}\sqrt[۴]{x^۲-۱}\sqrt{x^۴-۴}=۰ \Rightarrow x^۷=۰; \quad \sqrt[۷]{x}=۰ \;;\; \sqrt[۴]{x^۲-۱}=۰$$
$$;\; \sqrt{x^۴-۴}=۰ \Rightarrow x=۰ \;;\; x^۲-۱=۰ \;;\; x^۴-۴=۰$$
$$\Rightarrow x=۰ \;;\; x=\pm ۱ \;;\; x=\pm\sqrt{۲}$$

از ریشه‌های به‌دست آمده فقط $x=\sqrt{۲}$ و $x=-\sqrt{۲}$ جزو حوزهٔ تعریف معادله می‌باشند و در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند:

$\{-\sqrt{۲} , \sqrt{۲}\}$ = مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادله

۱۲۴ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$۱۶+۱۶\sqrt[۳]{\frac{x^۲}{۶۴}}=۸+۲\sqrt[۳]{x^۲}+۴\sqrt[۳]{x^۲} \Rightarrow ۸+۴\sqrt[۳]{x^۲}=۶\sqrt[۳]{x^۲}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt[۳]{x^۲}=۸ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲}=۴ \Rightarrow x^۲=۶۴ \Rightarrow x^۲=۸^۲ \Rightarrow \boxed{x=\pm۸}$$

$\{۸ , ۸-\}$ = مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادله

۱۲۵ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۳]{۶۴\sqrt[۳]{x^{۱۸}}}=\sqrt[۵]{۳۲\sqrt[۳]{x^{۳۰}}}+۴\sqrt[۶]{x^{۱۲}}-۸ \Rightarrow ۴x^۲=۲x^۲+۴x^۲-۸$$

$$\Rightarrow ۲x^۲=۸ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow \boxed{x=\pm۲} \Rightarrow$$ مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادله $=\{۲ , ۲-\}$

۱۲۶ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۶]{x}=\sqrt{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۱۶}}} \Rightarrow \sqrt[۳]{x}-\sqrt{\sqrt[۳]{x}}=\sqrt{\sqrt[۳]{۸\times۸}} \quad , \quad \sqrt[۳]{x}=y$$

$$\Rightarrow y-\sqrt{y}=\sqrt[۶]{۲^۶} \Rightarrow \sqrt{y}=y-۲$$

$$\Rightarrow y=(y-۲)^۲ \Rightarrow y=y^۲-۴y+۴ \Rightarrow y^۲-۵y+۴=۰$$

$$\Rightarrow (y-۱)(y-۴)=۰ \Rightarrow y-۱=۰ \;;\; y-۴=۰ \Rightarrow y=۱ \;;\; y=۴$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{x}=۱ \;;\; \sqrt[۳]{x}=۴ \Rightarrow x=۱ \;;\; x=۶۴$$

آزمایش نشان می‌دهد که، ریشهٔ $x = ۱$، ریشهٔ خارجی معادله است:

$\{۶۴\}$ = مجموعهٔ جواب حقیقی معادله

۱۲۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{۲\sqrt{x^۲-۱۶}}=\sqrt{۲۱۶} \Rightarrow \sqrt{۲\sqrt{x^۲-۱۶}}=\sqrt{\sqrt[۳]{۶^۳}} \Rightarrow ۲\sqrt{x^۲-۱۶}=۶$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^۲-۱۶}=۳ \Rightarrow x^۲-۱۶=۹ \Rightarrow x^۲=۲۵ \Rightarrow \boxed{x=\pm۵}$$

$\Rightarrow$ $\{۵ , ۵-\}$ = مجموعهٔ جوابهای حقیقی معادله $\Leftarrow$

۱۲۸ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\frac{12}{\sqrt[3]{4x+1}} = 4 \Rightarrow 4\sqrt[3]{4x+1} = 12 \Rightarrow \sqrt[3]{4x+1} = 3$$

$$4x+1 = 27 \Rightarrow 4x = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{4} \Rightarrow x = \frac{13}{2} = 6/5$$

$\Rightarrow$ $\{6/5\}$ = مجموعهٔ جواب حقیقی معادله

۱۲۹ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{2x-3} = \frac{75}{\sqrt{2x-3}} \Rightarrow (\sqrt{2x-3})^2 = 75$$

$$\Rightarrow 2x-3 = 75 \Rightarrow 2x = 78 \Rightarrow x = \frac{78}{2} = 39$$

عدد ۳۹ جزو حوزهٔ تعریف معادله ($x > \frac{3}{2}$) است، بنابراین:

$\{39\}$ = مجموعهٔ جواب حقیقی معادله

۱۳۰ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[7]{x\sqrt[3]{x\sqrt{16x}}} = \sqrt[63]{8} \Rightarrow \sqrt[7]{\sqrt[3]{x^4\sqrt{16x}}} = \sqrt[63]{2^3}$$

$$\sqrt[21]{\sqrt{16x^9}} = \sqrt[21]{2} \Rightarrow \sqrt{16x^9} = 2 \Rightarrow 16x^9 = 4$$

$$\Rightarrow x^9 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^9 = \frac{2^7}{2^9} \Rightarrow x = \frac{\sqrt[9]{2^7}}{2} = \frac{\sqrt[9]{128}}{2}$$

عدد $\frac{\sqrt[9]{128}}{2}$ جزو دامنهٔ متغیر x ($x \geq 0$) است، بنابراین:

$\left\{\frac{\sqrt[9]{128}}{2}\right\}$ = مجموعهٔ جواب حقیقی معادله

۱۳۱ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\overbrace{x^{x^{x^{\cdots}}}}^{256} = 256 \Rightarrow x^{256} = 256 \Rightarrow x = \pm\sqrt[256]{2^8}\ ,\quad x > 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[32]{2}}$$

۱۳۲ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$x > 0 \ :\ 4\sqrt[6]{x^9} + 4x^{-\frac{3}{2}} = 10 \Rightarrow \sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{10}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x^6 - \frac{17}{4}x^3 + 1 = 0$$

۱۳۳ ـگزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\frac{x^{2}+1}{4}=x , S=\sqrt[6]{\left(1+\frac{(1-x^{4})^{2}}{64x^{4}}\right)^{3}}=\sqrt{1+\frac{(1-x^{2})^{2}(1+x^{2})^{2}}{64x^{4}}}$$

$$\Rightarrow \quad 1+x^{2}=4x \quad , \quad S=\sqrt{1+\frac{(1-x^{2})^{2}(4x)^{2}}{64x^{4}}}$$

$$\Rightarrow \quad S=\sqrt{1+\frac{1-2x^{2}+x^{4}}{4x^{2}}}=\sqrt{\frac{4x^{2}+1-2x^{2}+x^{4}}{4x^{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^{4}+2x^{2}+1}{4x^{2}}}=\sqrt{\frac{(x^{2}+1)^{2}}{4x^{2}}} \quad , \quad x^{2}+1=4x$$

$$\Rightarrow \quad S=\sqrt{\frac{(4x)^{2}}{4x^{2}}}=\sqrt{\frac{16x^{2}}{4x^{2}}} \quad , \quad x^{2}+1=4x \quad (x\neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad S=\sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S=2}$$

۱۳۴ ـگزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$A=\frac{a}{1+\sqrt[n]{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}}+\frac{a}{1+\sqrt[n]{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}}$$

$$=a\left[\frac{1+\sqrt[n]{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}+1+\sqrt[n]{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}}{(1+\sqrt[n]{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}})(1+\sqrt[n]{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}})}\right]$$

$$=a\left(\frac{2+\sqrt[n]{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}+\sqrt[n]{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}}{1+\sqrt[n]{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}+\sqrt[n]{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}+\sqrt[n]{(\sqrt{a})^{2}-(\sqrt{a-1})^{2}}}\right)$$

$$=a\left(\frac{2+\sqrt[n]{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}+\sqrt[n]{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}}{2+\sqrt[n]{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}+\sqrt[n]{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}}\right)=a \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=a}$$

۱۳۵ ـگزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{2^{2}}=\sqrt{2} \quad , \quad \sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^{3}}=\sqrt{2} \quad , \quad \sqrt[8]{16}=\sqrt[8]{2^{4}}=\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$K=\left(\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۱}}+\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}\right)^{۱۳۷۷}$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۱}}+\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}=\sqrt{۲}\left[\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{\sqrt{۵}+۱}+\sqrt{۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۱}}{(\sqrt{۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۱})(\sqrt{۲}+\sqrt{\sqrt{۵}+۱})}\right]$$

$$=\sqrt{۲}\left[\frac{۲\sqrt{۲}+\sqrt{\sqrt{۵}+۱}+\sqrt{\sqrt{۵}-۱}}{۴+\sqrt{۲}(\sqrt{\sqrt{۵}-۱}+\sqrt{\sqrt{۵}+۱})}\right]$$

$$=\frac{۴+\sqrt{۲}(\sqrt{\sqrt{۵}+۱}+\sqrt{\sqrt{۵}-۱})}{۴+\sqrt{۲}(\sqrt{\sqrt{۵}+۱}+\sqrt{\sqrt{۵}-۱})}$$
$$=۱$$

$$\Rightarrow K=(۱)^{۱۳۷۷}=۱\Rightarrow \boxed{K=۱}$$

۱۳۶ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$۴^{۲x}=۶۴\Rightarrow ۴^{۲x}=۴^{۳}\Rightarrow ۲x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲^{x}}}=۲^{-\frac{x}{۲}}\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}:۲^{-\frac{x}{۲}}=۲^{-\frac{۳}{۴}}=۲^{-۰/۷۵}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}:\frac{۱}{\sqrt{۲^{x}}}=۲^{-۰/۷۵}$$

۱۳۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$(a>۰$ و $b>۰)$

$$A=\sqrt{a\underbrace{\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{\dots}}}}}_{A}}\Rightarrow A=\sqrt{a\sqrt{bA}}\overset{(A>۰)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow A^{۴}=a^{۲}(bA)\Rightarrow A^{۴}-a^{۲}bA=۰\Rightarrow A(A^{۳}-a^{۲}b)=۰$$

$$\Rightarrow A=۰\ ;\ A^{۳}-a^{۲}b=۰\ ,\quad A>۰\Rightarrow A^{۳}=a^{۲}b\Rightarrow \boxed{A=\sqrt[۳]{a^{۲}b}}$$

۱۳۸ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

می‌دانیم اگر $A + B + C = ۰$ ، آنگاه:

$$A^{۳} + B^{۳} + C^{۳} = ۳ABC$$

بنابراین با فرض $A = \sqrt[۳]{۲x + ۱}$ و $B = \sqrt[۳]{۲x + ۲}$ و $C = \sqrt[۳]{۲x + ۳}$ ، داریم:

$$\sqrt[۳]{۲x + ۱} + \sqrt[۳]{۲x + ۲} + \sqrt[۳]{۲x + ۳} = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x + ۱ + ۲x + ۲ + ۲x + ۳ = ۳\sqrt[۳]{(۲x + ۱)(۲x + ۲)(۲x + ۳)}$$

$$\Rightarrow ۶x + ۶ = ۳\sqrt[۳]{۲(۲x + ۱)(x + ۱)(۲x + ۳)}$$

$$\Rightarrow ۸(x + ۱)^{۳} = ۲(x + ۱)(۲x + ۱)(۲x + ۳)$$

$$\Rightarrow (x + ۱)[۴(x + ۱)^{۲} - (۴x^{۲} + ۸x + ۳)] = ۰$$

$$\Rightarrow (x + ۱)(۴x^{۲} + ۸x + ۴ - ۴x^{۲} - ۸x - ۳) = ۰$$

$$\Rightarrow x + ۱ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = -۱}$$ (معادله یک ریشهٔ حقیقی دارد.)

۱۳۹ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا.

$$\sqrt[۹]{x^{۳}} + \sqrt[۳]{x^{۲}} = ۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{x} = ۱ - \sqrt[۳]{x^{۲}}$$

$$\Rightarrow ۱ = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} - \sqrt[۳]{x}$$

$$\Rightarrow ۱ = (\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} - \sqrt[۳]{x})^{۳}$$

$$\Rightarrow ۱ = \frac{۱}{x} - x - ۳(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} - \sqrt[۳]{x})$$

$$\Rightarrow x - \frac{۱}{x} = -۱ - ۳$$

$$\Rightarrow x - \frac{۱}{x} = -۴ \Rightarrow \boxed{D = -۴}$$

۱۴۰ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{۲ - ۳x} + \sqrt{۳x + ۲} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow (\sqrt{۲ - ۳x} + \sqrt{۳x + ۲})^{۲} = ۸$$

$$-\frac{۲}{۳} \leq x \leq \frac{۲}{۳} \;:\; ۲-۳x+۳x+۲+۲\sqrt{(۲-۳x)(۳x+۲)}=۸$$

$$\Rightarrow \sqrt{۴-۹x^۲}=۲ \Rightarrow ۴-۹x^۲=۴ \Rightarrow -۹x^۲=۰$$

$$\Rightarrow x^۲=۰ \Rightarrow \boxed{x=۰}$$ (معادله یک ریشهٔ حقیقی دارد.)

۱۴۱ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\frac{x^۲-۳۶x^{\frac{۲}{۳}}}{x^{\frac{۴}{۳}}+۶x^{\frac{۲}{۳}}}=\frac{x^{\frac{۲}{۳}}(x^{\frac{۴}{۳}}-۳۶)}{x^{\frac{۲}{۳}}(x^{\frac{۲}{۳}}+۶)} \underset{(x\neq ۰)}{=} \frac{(x^{\frac{۲}{۳}}-۶)(x^{\frac{۲}{۳}}+۶)}{x^{\frac{۲}{۳}}+۶}$$

$$=x^{\frac{۲}{۳}}-۶=\sqrt[۳]{x^۲}-۶$$

۱۴۲ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{۴-\sqrt{۷}}=\sqrt{\frac{۴+۳}{۲}}-\sqrt{\frac{۴-۳}{۲}}=\sqrt{\frac{۷}{۲}}-\sqrt{\frac{۱}{۲}} \;,$$

$$\sqrt{۴+\sqrt{۷}}=\sqrt{\frac{۴+۳}{۲}}+\sqrt{\frac{۴-۳}{۲}}=\sqrt{\frac{۷}{۲}}+\sqrt{\frac{۱}{۲}} \;,$$

$$\sqrt[۴]{۴}=\sqrt[۴]{۲^۲}=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow T=\sqrt{۲}+\sqrt{\frac{۷}{۲}}-\sqrt{\frac{۱}{۲}}-\sqrt{\frac{۷}{۲}}-\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}-۲\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=۰$$

$$\Rightarrow \boxed{T=۰}$$

۱۴۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۶]{(x^۴+۱)^۳}+\sqrt[۴]{x^۲+۱}=۲ \Rightarrow \sqrt{x^۴+۱}+\sqrt[۴]{x^۲+۱}=۲$$

طرف اول معادله به ازای هر عدد حقیقی همیشه بزرگتر یا برابر ۲ است. طرف اول معادله فقط به ازای $x=۰$ برابر ۲ می‌شود:

$$x=۰ \;:\; \sqrt{x^۴+۱}+\sqrt[۴]{x^۲+۱}=\sqrt{۰+۱}+\sqrt[۴]{۰+۱}=۲$$

بنابراین معادله فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۴۴ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[6]{1-\sqrt{x^4+4x^2+2}}=\sqrt[3]{x-1} \Rightarrow \sqrt{1-\sqrt{x^4+4x^2+2}}=x-1$$

طرف اول معادله به ازای هر عدد حقیقی، عددی غیر حقیقی است؛ بنابراین دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ تهی است و در نتیجه معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد.

۱۴۵ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[6]{(x-1)^3}+\sqrt{x-2\sqrt[6]{(x-1)^3}}=1 \Rightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1-\sqrt{x-1} \Rightarrow x\geq 1 \ : \ x-2\sqrt{x-1}=1+x-1-2\sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow x\geq 1 \ : \ x-2\sqrt{x-1}=x-2\sqrt{x-1}$$

برای هر $x \geq 1$ معادله به یک اتحاد عددی تبدیل می‌شود. بنابراین معادله بی‌شمار ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۴۶ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[12]{\left(\frac{2-x}{x+3}\right)^3}+\sqrt[4]{\frac{x+3}{2-x}}=2 \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{2-x}{x+3}}+\sqrt[4]{\frac{x+3}{2-x}}=2$$

$$-3<x<2 \ : \ \sqrt[4]{\frac{2-x}{x+3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{2-x}{x+3}}}=2$$

با فرض $A=\sqrt[4]{\frac{2-x}{x+3}}$ ، داریم:

$$A+\frac{1}{A}=2 \Rightarrow A^2-2A+1=0 \Rightarrow (A-1)^2=0 \Rightarrow A=1$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{\frac{2-x}{x+3}}=1 \Rightarrow \frac{2-x}{x+3}=1 \Rightarrow 2-x=x+3$$

$$\Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{2}}$$

۱۴۷ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[3]{x}=\sqrt[9]{2\sqrt[4]{4}} \Rightarrow x=\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \Rightarrow x^3=2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{x^3}=\sqrt[5]{2\sqrt{2}}=\sqrt[5]{\sqrt{8}}=\sqrt[10]{8} \Rightarrow \boxed{\sqrt[5]{x^3}=\sqrt[10]{8}}$$

۱۴۸ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[18]{(x^3-4)^3}+|x^6-y^3-8|=0 \Rightarrow \sqrt[6]{x^3-4}+|x^6-y^3-8|=0$$

طرف اول معادله وقتی صفر می‌شود که داشته باشیم:

$$\begin{cases}x^3-4=0\\x^6-y^3-8=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^3=4\\(x^3)^2-y^3-8=0\end{cases} \Rightarrow y^3=4^2-8=16-8=8$$

$$\Rightarrow y^3=8 \Rightarrow \boxed{y=2}$$

۱۴۹ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$(x^8-1)^{76}+|x^{75}+1|^{75}+\sqrt[8]{7-7x^4}=0$$

طرف اول معادله وقتی صفر می‌شود که داشته باشیم:

$$\begin{cases}x^8-1=0\\x^{75}+1=0\\7-7x^4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^8=1\\x^{75}=-1\\7x^4=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\pm 1\\x=-1\\x=\pm 1\end{cases} \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

بنابراین معادله فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۵۰ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[4]{4}+\sqrt[6]{4-x^2}+\sqrt[4]{x^2-4}=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt[6]{4-x^2}+\sqrt[4]{x^2-4}=\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\sqrt[6]{4-x^2}+\sqrt[4]{x^2-4}=0$$

دامنهٔ متغیر x چنین است:

$$\begin{cases}4-x^2\geq 0\\x^2-4\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2\leq 4\\x^2\geq 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2\leq x\leq 2\\x\geq 2 \;;\; x\leq -2\end{cases} \Rightarrow$$
$$x=-2\;;\quad x=2 \Rightarrow x\in\{-2,2\}$$

آزمایش نشان می‌دهد که عددهای ۲− و ۲ ریشه‌های معادله می‌باشند؛ بنابراین معادله تنها دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۵۱ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt{x-2}=4$$

دامنهٔ متغیر x چنین است:

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ x-2\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2\leq 1\\ x\geq 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ x\geq 2\end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing$$

بنابراین معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۱۵۲ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[3]{x^9}+\sqrt{x^2}=0 \Rightarrow x^3+|x|=0$$

$$x\geq 0 : x^3+x=0 \Rightarrow x(x^2+1)=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$x<0 : x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0\,;x^2=1$$

پس :

$$x<0 : x=0\,;x=\pm 1 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

بنابراین معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۵۳ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$(\sqrt{7}+\sqrt{6})^n(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{n-1}=\left[(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})\right]^n\times\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$$

$$=(7-6)^n\times\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6}=\sqrt{7}+\sqrt{6}$$

۱۵۴ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[9]{x^6}}=2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=2$$

با فرض $A=\sqrt[3]{x^2}$ ، داریم:

$$A+\frac{1}{A}=2 \Rightarrow A^2-2A+1=0 \Rightarrow (A-1)^2=0 \Rightarrow A=1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \boxed{x=\pm 1}$$

بنابراین:

$$x=\pm 1 : P=x^{76}+\frac{1}{x^{76}}=(\pm 1)^{76}+\frac{1}{(\pm 1)^{76}}=1+\frac{1}{1}=2$$

$$\Rightarrow \boxed{P=2}$$

پاسخ تشریحی تستهای گروه آزمایشی علوم تجربی

۱۵۵ ـگزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

روش اول:

$$-۱ < x < ۰ : ۲x - ۱ < ۰ \text{ و } ۲ - x > ۰ \Rightarrow$$
$$|۲x - ۱| + |۲ - x| = -(۲x - ۱) + ۲ - x = ۳ - ۳x$$

روش دوم:

با قرار دادن $x = ۰$ در عبارت $|۲x - ۱| + |۲ - x|$ داریم:

$$x = ۰ : |۲x - ۱| + |۲ - x| = |۲(۰) - ۱| + |۲ - ۰| = ۳$$

با قراردادن $x=۰$ در عبارتهای داده شده، تنها حاصل عبارت $۳ - ۳x$ برابر ۳ است.

۱۵۶ ـگزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$x = \sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}} \Rightarrow x^۲ = (\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}})^۲ = \sqrt[۳]{(۲\sqrt{۲})^۲} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

۱۵۷ ـگزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

در معادلهٔ عمومی $|x - a| + |x - b| = k$ ، اگر $|a - b| > k$ باشد، معادله در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب ندارد.

برای معادلهٔ $|x + ۱| + |x - ۳| = ۳$ ، داریم:

$$|a - b| = |-۱ - ۳| = |-۴| = ۴ > k = ۳$$

۱۵۸ ـگزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt{x^۲ - x - ۶} + \sqrt{x^۳ - ۵x^۲ - ۲x + ۲۴} = ۰$$

طرف اول معادله وقتی صفر می‌شود که هر دو عبارت زیر رادیکال صفر شود:

$$\begin{cases} x^۲ - x - ۶ = ۰ \\ x^۳ - ۵x^۲ - ۲x + ۲۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + ۲)(x - ۳) = ۰ \\ x^۳ - ۵x^۲ - ۲x + ۲۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = -۲ ; x = ۳$$

اگر هر دو جواب معادلهٔ اول دستگاه را در معادلهٔ دوم آزمایش کنیم، می‌بینیم که هر دو صدق می‌کنند؛ پس، معادله دو جواب دارد.

۱۵۹ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\frac{(-y)^{-2}.x^3}{(-x^{-2}.y)^{-3}.x^{-2}}=\frac{y^{-2}.x^3}{-x^6.y^{-3}.x^{-2}}\ \underset{}{\overset{(xy\neq 0)}{=\!=}}\ \frac{1}{-x^3.y^{-1}.x^{-2}}=-\frac{y}{x}$$

۱۶۰ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ، زیرا:

$$\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}=\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}$$

بنابراین:

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}\times\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{3-1}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2$$

۱۶۱ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\begin{cases}A=x^{\frac{t+1}{t}}\\ B=x^{\frac{1}{t+1}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A^{\frac{t}{t+1}}=x\\ B^{t+1}=x\end{cases}\Rightarrow A^{\frac{t}{t+1}}=B^{t+1}$$

۱۶۲ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

با فرض $a=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ و $b=\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ داریم:

$$x=a-b\Rightarrow x^3=(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$$
$$\Rightarrow x^3=a^3-b^3-3abx$$

بنابراین:

$$x^3=(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})^3-(\sqrt[3]{1-\sqrt{2}})^3-3\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}\ \ x\ \Rightarrow$$

$$x^3=1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}-3\sqrt[3]{1-2}\ x\Rightarrow x^3-3x=2\sqrt{2}$$

۱۶۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

روش اول:

$$x<0\ :\ |x|=-x\ \Rightarrow\ 2\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[4]{x^4}=2x+|x|=2x-x=x$$

روش دوم:

با قرار دادن $x = -1$ در عبارت $2\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[4]{x^4}$ داریم:

$$x = -1 \ : \ 2\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[4]{x^4} = 2\sqrt[3]{(-1)^3} + \sqrt[4]{(-1)^4} = -2 + 1 = -1$$

با قرار دادن $x = -1$ در عبارتهای داده شده، تنها حاصل عبارت x برابر -1 است.

۱۶۴ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \times \sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} = -\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} \times \sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}}$$

$$= -\sqrt[6]{(\sqrt{5} - 2)^2} \times \sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} = -\sqrt[6]{(9 - 4\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})}$$
$$= -\sqrt[6]{81 - 80} = -1$$

۱۶۵ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

روش اول:

$$\frac{(4)^{0/75}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + 9^{0/25} = \frac{4^{\frac{3}{4}} \times (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} + 9^{\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})}{2\sqrt{2}} + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{2}$$

روش دوم:

می‌دانیم $9^{0/25} = \sqrt{3}$ و از آن‌جا که حاصل کسر نیز مثبت است، نتیجه می‌شود که حاصل عبارت از $\sqrt{3}$ بزرگتر است. با توجه به گزینه‌ها، تنها عدد $1 + \sqrt{2}$ از $\sqrt{3}$ بزرگتر است.

۱۶۶ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

در معادلهٔ عمومی $|x - a| + |x - b| = k$ ، اگر $|a - b| > k$ ، معادله در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب ندارد. برای معادلهٔ $|x + 1| + |x - 3| = 2$ ، داریم:

$$|a - b| = |(-1) - 3| = |-4| = 4 > k = 2$$

پاسخ تشریحی تستهای گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

۱۶۷ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

روش اول:

با توجه به $x \in [\,1\,, +\infty)$ یا $x \geq 1$، داریم:

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| \quad , \quad 2x - 1 > 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \quad , \quad x - 1 \geq 0$$

بنابراین:

$$x \geq 1: |2x-1| - |x-1| = 2x - 1 - (x-1) = 2x - 1 - x + 1 = x$$

روش دوم:

با قرار دادن $x=2$ در عبارت $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ داریم:

$$\begin{aligned} x = 2: \sqrt{4x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} &= \sqrt{16 - 8 + 1} - \sqrt{4 - 4 + 1} \\ &= 3 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

با قرار دادن $x = 2$ در عبارتهای داده شده، تنها حاصل عبارت x برابر ۲ می‌شود.

۱۶۸ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

روش اول:

در معادلهٔ عمومی $|x-a| + |x-b| = k$ اگر $|a-b| > k$، معادله در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب ندارد. برای معادلهٔ $|x-1| + |x-3| = 1$، داریم:

$$|a-b| = |1-3| = |-2| = 2 > k = 1$$

روش دوم:

با قرار دادن $x = 1$ در معادله، به‌برابری نادرست $2 = 1$ خواهیم‌رسید. پس، $x = 1$ جواب معادله نیست و چون $1 \in \mathbb{R}$ و $1 \in [-3, 1]$ و $1 \in \mathbb{R} - (-3, 1)$ است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) و (۴) نادرست‌اند و در نتیجه گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۶۹ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$a > 0$ و $b < 0$: $|a| = a \ , \ |b| = -b$

همچنین $|b| < |a|$ و $a > 0$ و $b < 0$ است، پس:

$$a + b > 0$$

بنابراین:

$a > 0$ و $b < 0$ و $|a| > |b|$: $|a + b| + |b| + |a| = a + b - b + a = 2a$

۱۷۰ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

عبارتهای $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}$ و $\sqrt{x-4}+2$ همواره‌مثبت‌هستند، درنتیجه‌معادله‌های (ب) و (ج) دارای ریشهٔ حقیقی نیستند. ریشهٔ معادلهٔ (الف) از حل دستگاه زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} 3x - 6 = 0 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x(x-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

۱۷۱ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

روش اول:

$$x > 0 \ : \ \sqrt{x^2} = |x| = x$$

بنابراین:

$$x > 0 \ : \ \sqrt[3]{(-x)^3} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(-2)^2} = -x + x + 2 = 2$$

روش دوم:

با قرار دادن $x = 1$ در عبارت $\sqrt[3]{(-x)^3} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(-2)^2}$ عدد ۲ حاصل می‌شود. حاصل عبارتهای $-2x - 2$ و $2x + 2$ به ازای $x = 1$ برابر ۲ نمی‌شود و در نتیجه با توجه به گزینه‌ها تنها گزینهٔ (۴) درست است.

۱۷۲ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

جواب معادلهٔ عمومی $|x - a| + |x - b| = k$ با شرط $|a - b| = k$، $(a < b)$ فاصلهٔ $[a, b]$ است. پس، جواب معادلهٔ $|x| + |x + 2| = 2$ فاصلهٔ $[-2, 0]$ است.

۱۷۳ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$(-\sqrt[۱۰]{۳^{۶}})^{\frac{۵}{۳}}=(-۳^{\frac{۶}{۱۰}})^{\frac{۵}{۳}}=\left(-۳^{\frac{۳}{۵}}\right)^{\frac{۵}{۳}}=(-۳)^{\frac{۳}{۵}\times\frac{۵}{۳}}=-۳$$

۱۷۴ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

اگر مخرج هریک از کسرها را گویا کنیم، یعنی صورت و مخرج هر کسر را در مزدوج مخرج آن ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{۱۱}-\sqrt{۴}+\sqrt{۱۸}-\sqrt{۱۱}+\sqrt{۲۵}-\sqrt{۱۸}}{۷}=\frac{۵-۲}{۷}=\frac{۳}{۷}$$

۱۷۵ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

روش اول:

با توجه به برابری $(۲+\sqrt{۲})^{۲}=۶+۴\sqrt{۲}$ ، داریم:

$$\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}\times\sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}}=\sqrt{۲(۲-\sqrt{۲})}\times\sqrt{(۲+\sqrt{۲})}$$

$$=\sqrt{۲(۴-۲)}=\sqrt{۴}=۲$$

روش دوم:

$$\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}\times\sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\times\sqrt{۲-\sqrt{۲}}\times\sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}}$$

$$=\sqrt{۲}\times\sqrt[۴]{۶-۴\sqrt{۲}}\times\sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}}$$

$$=\sqrt{۲}\times\sqrt[۴]{۳۶-۳۲}=\sqrt{۲}\times\sqrt[۴]{۴}=\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۲$$

۱۷۶ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$x=۱-\sqrt{۲}\quad,\quad x^{-۱}=\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱-۲}=-۱-\sqrt{۲}\ \Rightarrow$$

$$x+x^{-۱}=۱-\sqrt{۲}-۱-\sqrt{۲}=-۲\sqrt{۲}=(-\sqrt{۲})^{۳}\ \Rightarrow\ (x+x^{-۱})^{\frac{۱}{۳}}=-\sqrt{۲}$$

۱۷۷ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}\times\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=\sqrt[۴]{(۲-\sqrt{۳})^{۲}}\times\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

$$=\sqrt{|۲-\sqrt{۳}|}\times\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

$$=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\times\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

$$=\sqrt{(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}$$

$$=\sqrt{۴-۳}=\sqrt{۱}=۱$$

پاسخ تمرینهای دوره‌ای ۱ (توان)

۱) -۷	۲) ۴	۳) ۳۱۲۵
۴) $-(\frac{۲}{۳})^{۱۰}$	۵) $۲^{۱۶}$	۶) $(۰/۰۶)^{۳۴}$
۷) $۱۰^{۲۲}$	۸) $a^{۱۴}$	۹) $a^{(m+۱)^{۲}}$
۱۰) $a^{۵۰۵۰}$	۱۱) $a^{۱۳۷۵}$	۱۲) $a^{۲۰}$
۱۳) $-۴۸۰a^{۲۹}$	۱۴) $(abc)^{۱۲}$	۱۵) $-(abc)^{۷}$
۱۶) $a^{(m+۱)^{۲}} \quad (bc)^{(n+۱)^{۲}}$	۱۷) $(abc)^{۱۷}$	۱۸) ab
۱۹) ۱	۲۰) $(\frac{a}{b})^{۱۴۰۰}$	۲۱) $\frac{a^{۳}+a+۱}{a^{۳}b^{۳}+ab+۱}$
۲۲) $(ab)^{۳۰}$	۲۳) $(ab)^{۳۱}$	۲۴) $(ab)^{۲۴}$
۲۵) $a^{۵۱} . b^{۳۵}$	۲۶) $(abc)^{-mn}$	۲۷) x
۲۸) ۴۰	۲۹) ۱	۳۰) $a^{(m+n)^{۲}-(n+۱)^{۲}}$
۳۱) ۱	۳۲) $(\frac{a}{b})^{(m+n)^{۲}}$	۳۳) $(\frac{a}{b})^{m}$
۳۴) $\frac{۱}{۲۷} a^{-۱۲} . b^{۶} . c^{۶}$	۳۵) $(\frac{a}{c})^{۲mn}$	

۳۶) به ازای ۱ ± = x تعریف نشده (مبهم) و به ازای {۱ , ۱-} − x ∈ IR تعریف شده است.

۳۷) $(-a)^{9k}$ ۳۸) ۱ ۳۹) 2^{14}

۴۰) 3^{34} ۴۱) $A = 4a^{20}$ ۴۲) $B = a^{12}$

۴۳) $A = 37 \times 3^{x-1}$ ۴۴) $B = -3 \times 5^{2x+1}$ ۴۵) $C = 19 \times 3^{2x}$

۴۶) $D = \frac{5}{4}$

۴۷) به ازای ۷۴ = x تعریف نشده است.

۴۸) $x = 50$ ۴۹) $x = 1$ ۵۰) $x = 1$

۵۱) $x = 2$ ۵۲) $x = 152$ ۵۳) $x = -1$

۵۴) $x = 4$ ۵۵) $x = 2$

پاسخ و راهنمایی برای حل تمرینهای دوره‌ای ۲ (رادیکال)

۵۶) ابتدا فرض می‌کنیم که $\sqrt{۵}$ عددی گویا مانند کسر ساده نشدنی $\frac{m}{n}$ باشد. سپس به این نتیجه می‌رسیم که m و n باید مضربی از ۵ باشند، که این خلاف فرض (m و n نسبت به‌هم اولند) است و در نتیجه با برهان خلف، گنگ بودن $\sqrt{۵}$ و بـــه‌طریق مشابه $\sqrt{۷}$ و $\sqrt{۱۳}$ ، ثابت می‌شود.

$$۵۷)\ \pm ۱\,,\ \pm ۲\,,\ \pm ۵\,,\ \pm ۱۰۰\,,\ \pm ۰/۱\,,\ \pm \frac{۱}{۲}\,,\ \pm \frac{۱}{۲۴۳}$$

(عدد $-۴ = (-۲)^۲$ – ریشهٔ دوم حقیقی ندارد.)

$$۵۸)\ ۷, -۱۲۵, ۴, ۰/۱, \frac{۳}{۲}, -\frac{۲}{۳}, ۱۶, ۸, \Big((-\sqrt{-۱})^۲ = (\sqrt{-۱})^۲\,,\ \sqrt{-۴^۲} = ۴\sqrt{-۱}\,,$$

$$\left(\sqrt{(-۲)^۳}\right)^۲ = (\sqrt{-۸})^۲\ \sqrt{-\sqrt{\frac{۸۱}{۱۶}}} = \sqrt{-\frac{۹}{۴}} = \frac{۳}{۲}\sqrt{-۱}$$ عددهای غیر حقیقی هستند.)

۵۹) ۱۲   ۶۰) ۰   ۶۱) $-۰/۴$ ۶۲) ۰   ۶۳) ۲۲

$$۶۴)\ \sqrt{(-x)^۲} = |-x| = |x| \Rightarrow x \le ۰ \ :\ \sqrt{(-x)^۲} = -x$$

(برابری به ازای عددهای حقیقی نامثبت درست است.)

$$۶۵)\ \forall x \in \mathrm{IR} :\ \sqrt{(-x^۴)^۲} = |-x^۴| = |x^۴| = x^۴$$

(برابری به ازای هر عدد حقیقی، همیشه درست است.)

$$۶۶)\ x\sqrt{x^۲}\sqrt{x^۴} = x\,.\,|x|\,.\,|x^۲| = x\,.x^۲.\,|x| = x^۳.\,|x|$$

$$\Rightarrow x \ge ۰ \ :\ x\sqrt{x^۲}\sqrt{x^۴} = x^۳.x = x^۴$$

(برابری به ازای عددهای حقیقی نامنفی درست است.)

۶۷) $\sqrt{x^{۶}}=\sqrt{(x^{۳})^{۲}}=|x^{۳}| \Rightarrow x \geq ۰ : \sqrt{x^{۶}}=x^{۳}$

(برابری به ازای عددهای حقیقی نامنفی درست است.)

۶۸) $\sqrt{\sqrt{x^{۴}}}=\sqrt[۴]{x^{۴}}=|x| \Rightarrow x \geq ۰ \ : \ \sqrt{\sqrt{x^{۴}}}=x$

(برابری به ازای عددهای حقیقی نامنفی درست است.)

۶۹) $\sqrt{(x^{۲}+۱)^{۲}}=|x^{۲}+۱|=x^{۲}+۱ \quad (x \in \mathbb{R})$

(برابری به ازای هر عدد حقیقی همیشه درست است.)

۷۰) $x\sqrt{(-x)^{۲}}-\sqrt{x^{۴}}=x\,.\,|-x|-|x^{۲}|=x\,|x|\,-x^{۲}$

$\Rightarrow x \geq ۰ : x\sqrt{(-x)^{۲}}-\sqrt{x^{۴}}=x^{۲}-x^{۲}=۰$

(برابری به ازای عددهای حقیقی نامنفی درست است.)

۷۱) $۲\sqrt{x}+x-\sqrt{۴x}=۲\sqrt{x}+x-۲\sqrt{x} \overset{(x\geq ۰)}{=\!=} x$

(برابری به ازای عددهای حقیقی نامنفی درست است.)

۷۲) $\dfrac{\sqrt{(x^{۲}+۱)^{۲}}-۱}{\sqrt{x^{۴}}}+\dfrac{\sqrt{x^{۲}}}{\sqrt{(-x)^{۲}}}=\dfrac{|x^{۲}+۱|-۱}{|x^{۲}|}+\dfrac{|x|}{|-x|}$

$$=\frac{x^{۲}+۱-۱}{x^{۲}}+\frac{|x|}{|x|}$$

$$=\frac{x^{۲}}{x^{۲}}+\frac{|x|}{|x|} \overset{(x\neq ۰)}{=\!=} ۲$$

(برابری به ازای هر عدد حقیقی به جز صفر ($x \in \mathbb{R}-\{۰\}$) درست است.)

۷۳) $\dfrac{\sqrt{(x^{۲}+۱)^{۴}}-۲x^{۲}}{\sqrt{(x^{۴}+۱)^{۲}}}=\dfrac{(x^{۲}+۱)^{۲}-۲x^{۲}}{|x^{۴}+۱|}=\dfrac{x^{۴}+۱}{x^{۴}+۱}=۱$

(برابری به ازای هر عدد حقیقی، همیشه درست است.)

۷۴) $۴, ۰, ۳, ۱, \frac{۱۵}{۴}, ۳/۹۹, ۲$

۷۵) $\sqrt{۵}$ ۷۶) $\dfrac{\sqrt{۲۶}-۵}{۲}$ ۷۷) $\dfrac{۳}{۲}$

۷۸) ۲ ۷۹) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-۰/۳$ ۸۰) $۲\sqrt{۱۰}-۱۶/۲۸$

۸۱) ۱۲×۱۳^{۷۴} ۸۲) $\sqrt{۲} - ۱$ ۸۳) $۲۸x^{۸}$

۸۴) ۰ ۸۵) $\frac{۱}{|x|}$ ۸۶) $\frac{۲x}{|x|}$

۸۷) $-\frac{۱}{۲}$ ۸۸) ۰ ۸۹) ۴۳

۹۰) $-۵^{۱۱}$ ۹۱) ۶ ۹۲) ۴

۹۳) ۰ ۹۴) ۰ ۹۵) ۲۰

۹۶) $۲\sqrt[۳]{۴}$ ۹۷) ۴ ۹۸) ۳

۹۹) $\sqrt[۳]{(-۲)^{۳}\sqrt{-۲^{۳}}} = -۲\sqrt[۶]{-۸} \quad \notin \mathbb{R}$ (در $\mathbb{R}$ بی‌معنی است.)

۱۰۰) $\sqrt{-\sqrt[۳]{-\sqrt{(-۲)^{۲}}}} = \sqrt[۶]{۲} \quad \in \mathbb{R}$

۱۰۱) $\sqrt[۱۰۱]{-۲^{۱۰۰}} = -\sqrt[۱۰۱]{۲^{۱۰۰}} \in \mathbb{R}$

۱۰۲) $\sqrt[۱۰۰]{(-۲)^{۱۰۱}} = \sqrt[۱۰۰]{-۲^{۱۰۱}} = ۲\sqrt[۱۰۰]{-۲} \quad \notin \mathbb{R}$ (در $\mathbb{R}$ بی‌معنی است.)

۱۰۳) $\sqrt[۲n]{(-۲)^{۲n}} = |-۲| = ۲ \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N})$

۱۰۴) $\sqrt[۴]{۸\sqrt[۵]{-۳۲}} = \sqrt[۴]{-۱۶} = ۲\sqrt[۴]{-۱} \notin \mathbb{R}$ (در $\mathbb{R}$ بی‌معنی است.)

۱۰۵) $\sqrt[۴n]{-\sqrt[۳]{-x^{۶}}} = \sqrt[۴n]{x^{۲}} = \sqrt[۲n]{|x|}$ (به ازای هر عدد حقیقی، معنی دارد.)

۱۰۶) $\sqrt[۴]{-(x^{۲}+۱)}$ (به ازای هر عدد حقیقی، در $\mathbb{R}$، بی‌معنی است.)

۱۰۷) $\sqrt[۲n]{-(x^{۲}+۱)^{۲}} \times \sqrt[۶n]{-(x+۱)^{۲}}$ (به‌ازای‌هر‌عدد‌حقیقی،در $\mathbb{R}$،بی‌معنی‌است.)

۱۰۸) $\sqrt{\frac{-4}{(x^2+1)^2}} = \frac{2\sqrt{-1}}{x^2+1}$ (به‌ازای هر عدد حقیقی، در IR، بی‌معنی است.)

۱۰۹) $\sqrt[3]{-\sqrt{x^2}} \times \sqrt{-\sqrt[3]{-x^2}} = -\sqrt[3]{|x|} \times \sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$

$$= -\sqrt[3]{|x|} \times \sqrt[3]{|x|} = -\sqrt[3]{|x|^2} = -\sqrt[3]{x^2}$$

(به ازای هر عدد حقیقی، معنی دارد.)

۱۱۰) $\sqrt{-\sqrt{(1+x^2)^2}} = \sqrt{-|x^2+1|}$ (به‌ازای هر عدد حقیقی، در IR، بی‌معنی است.)

۱۱۱) $\sqrt[4]{-\sqrt[3]{x}} = \sqrt[12]{-x}$ (به‌ازای هر $x \le 0$، معنی دارد.)

۱۱۲) $\sqrt[3]{-\sqrt[4]{x^2}} = -\sqrt[3]{\sqrt{|x|}} = -\sqrt[6]{|x|}$ (به‌ازای هر $x \in IR$، معنی دارد.)

۱۱۳) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}} = \sqrt[60]{x}$ (به‌ازای هر $x \ge 0$، معنی دارد.)

۱۱۴) $\sqrt[6]{1-x^3}$ $(1-x^3 \ge 0 \Rightarrow x^3 \le 1 \Rightarrow x \le 1)$

(به‌ازای هر $x \le 1$، معنی دارد.)

۱۱۵) $\sqrt{1-x^2}$ $(1-x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \le 1 \Rightarrow |x| \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1)$

(به‌ازای هر $-1 \le x \le 1$، معنی دارد.)

۱۱۶) $\sqrt[4]{\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ $(x^3 > 0 \Rightarrow x > 0)$ (به ازای هر $x > 0$، معنی دارد.)

۱۱۷) $\sqrt[8]{x^2+x^4}$ (به ازای هر $x \in IR$، معنی دارد.)

۱۱۸) $\sqrt[74]{-x^2-16}$ (به ازای هر عدد حقیقی، در IR، بی‌معنی است.)

۱۱۹) $\sqrt[75]{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{-x}+1}}$ (فقط به ازای $x = 0$، معنی دارد.)

۱۲۰) $\sqrt{x^2+|x|}$ (به ازای هر $x \in IR$، معنی دارد.)

۱۲۱) $\sqrt[3]{-\sqrt{-5\sqrt[7]{-|x|}}} = -\sqrt[6]{5\sqrt[7]{|x|}}$ (به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، معنی دارد.)

۱۲۲) $\sqrt{\frac{-x}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-x}}$ (به ازای هر $x > 0$، معنی دارد.)

۱۲۳) $\sqrt[7]{1-\sqrt[4]{x}}$ (به ازای هر $x \geq 0$، معنی دارد.)

۱۲۴) $\sqrt[7]{2+\sqrt[5]{1-\sqrt[3]{-x}}} = \sqrt[7]{2+\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}$ (به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، معنی دارد.)

۱۲۵) ۹	۱۲۶) ۵	۱۲۷) $\frac{2}{5}$
۱۲۸) ۱	۱۲۹) ۲	۱۳۰) ۱
۱۳۱) $a^4 + b^4$	۱۳۲) $\sqrt[3]{(x^6+1)(x^8+1)^2}$	۱۳۳) $x^6 + 1$
۱۳۴) x	۱۳۵) abc	۱۳۶) $\sqrt[3]{(a^3-b^3)^2(a-b)}$
۱۳۷) ۱۰	۱۳۸) ۱۰	۱۳۹) ۲
۱۴۰) ۵	۱۴۱) $\frac{1}{3}$	۱۴۲) $\frac{1}{2}$
۱۴۳) $\frac{1}{3}$	۱۴۴) ۱۰	۱۴۵) $a^4 + 4$
۱۴۶) $\frac{1}{x}$	۱۴۷) $\frac{1}{xy}$	۱۴۸) $\frac{\sqrt[35]{x^{26}}}{x^2}$
۱۴۹) $-10\sqrt{2}$	۱۵۰) $5\sqrt[3]{2}$	۱۵۱) $12\sqrt[5]{3} - 36$
۱۵۲) ۰	۱۵۳) $12\sqrt{6}$	۱۵۴) $2\sqrt[4]{5}$
۱۵۵) $4a\sqrt[3]{a}$	۱۵۶) $4ab\sqrt[5]{ab}$	۱۵۷) ۲
۱۵۸) ۴	۱۵۹) ۴۹	۱۶۰) ۲
۱۶۱) ۸۱	۱۶۲) a^2	۱۶۳) $(a^3b^3c)^2$
۱۶۴) ۱	۱۶۵) ۸	۱۶۶) ۲۵۶
۱۶۷) ۴	۱۶۸) ۵۱۲	۱۶۹) $\sqrt[8]{128}$

۱۷۰) $\sqrt[۱۳]{۲۴۵}$ ۱۷۱) ۲ ۱۷۲) $۳^{۱۵}$

۱۷۳) a ۱۷۴) a ۱۷۵) $۷\sqrt[۱۲]{۷}$

۱۷۶) $-۶\sqrt[۶]{۳۲}$ ۱۷۷) $\sqrt[۶۰]{۲^{۵۹}}$ ۱۷۸) $۲۴\sqrt[۱۲]{۳۲}$

۱۷۹) $\sqrt[۳]{۹}$ ۱۸۰) $\sqrt{۰/۶}$ ۱۸۱) $\frac{\sqrt[۴۵]{a^{۳۲}}}{a}$

۱۸۲) $a\sqrt[۱۰۵]{a^{۵۳}}$ ۱۸۳) $\sqrt[۳۰]{۲^{۲۳}}$ ۱۸۴) $\frac{\sqrt[۱۵]{۱۶}}{۸}$

۱۸۵) ۹ ۱۸۶) $\frac{۱۲۵\sqrt[۱۶]{۵}}{۴}$ ۱۸۷) ۱

۱۸۸) $\frac{۶\sqrt[۳]{a^{۲}}}{a}$ ۱۸۹) $\frac{۲}{ab}$ ۱۹۰) $\frac{\sqrt{۱۰}-\sqrt{۶}}{۲}$

۱۹۱) $\sqrt[۴]{۳}-\sqrt[۴]{۲}$ ۱۹۲) $\frac{۸۶-۳۵\sqrt{۳}}{۶۱}$

۱۹۳) $-\frac{(۲\sqrt[۴]{۵}+۳\sqrt[۴]{۲})^{۲}(۴\sqrt{۵}+۹\sqrt{۲})}{۸۲}$

۱۹۴) $۳\sqrt[۳]{۳}+۲\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۳۶}$

۱۹۵) $\sqrt[۳]{۲۵}+\sqrt[۳]{۱۵}+\sqrt[۳]{۹}$

۱۹۶) $۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$

۱۹۷) $\frac{۱}{۱۸۸}(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})(۱۴+۸\sqrt{۶})(۲\sqrt[۴]{۶}+۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$

۱۹۸) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۵}+\sqrt{۷}$

۱۹۹) $\frac{۱}{۵}(\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲})$

۲۰۰) $\frac{۱}{۱۲}(\sqrt[۳]{۷}-\sqrt[۳]{۵})(\sqrt[۳]{۴۹}-\sqrt[۳]{۳۵}+\sqrt[۳]{۲۵})$

۲۰۱) $۲(۱+\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۶})$

۲۰۲) پس از ساده کردن هر یک از کسرها خواهیم داشت:

$$S=۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۴}+\sqrt{۳}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}+\sqrt{n-۱}}$$

$$=۱+\sqrt{۲}-۱+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+\sqrt{۴}-\sqrt{۳}+\dots+\sqrt{n}-\sqrt{n-۱}=\sqrt{n}\quad\Rightarrow\quad\boxed{S=\sqrt{n}}$$

۲۰۳) $۲-\sqrt{۳}$ ۲۰۴) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})$ ۲۰۵) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})$

۲۰۶) $\sqrt{۲}-۱$ ۲۰۷) $A=\sqrt[۱۰]{۸}-\sqrt[۴۰]{۱۲۸}+\sqrt{۳}+۱$

۲۰۸) $B=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۲۰۹) $P=-۳۵a^{۶}b^{۷}c^{۲}\sqrt{bc} \quad (a\geq ۰ \ , \ b\geq ۰ \ , \ c\geq ۰)$

۲۱۰) با استفاده از قانون ضرب رادیکالها ثابت می‌شود.

۲۱۱) $۲\sqrt[۳]{۴}$ ۲۱۲) $\frac{۷\sqrt[۳]{۴}}{۲}$

۲۱۳) با توجه به برابری:

$$\sqrt[۴]{a^{۸}+b^{۸}+(\sqrt[۸]{۴}ab)^{۴}}=\sqrt[۴]{(a^{۴}+b^{۴})^{۲}}$$

داریم:

$$\sqrt{a^{۴}+b^{۴}}\leq a^{۲}+b^{۲} \Rightarrow a^{۴}+b^{۴}\leq(a^{۲}+b^{۲})^{۲}$$
$$\Rightarrow a^{۴}+b^{۴}\leq a^{۴}+b^{۴}+۲a^{۲}b^{۲}$$
$$\Rightarrow ۲a^{۲}b^{۲}\geq ۰ \Rightarrow a^{۲}b^{۲}\geq ۰$$

چون به یک رابطه همیشه درست رسیدیم، بنابراین نامساوی به ازای هر عدد حقیقی a و b برقرار است.

۲۱۴) با استفاده از قانون توانِ رادیکالها، برابری ثابت می‌شود:

$$(\sqrt[n]{a^{۲}})^{k}=\underbrace{(\sqrt[n]{a^{۲}})(\sqrt[n]{a^{۲}})\dots(\sqrt[n]{a^{۲}})}_{\text{مرتبه}\ k}$$
$$=\sqrt[n]{\underbrace{a^{۲}.a^{۲}.\ \dots\ .a^{۲}}_{\text{مرتبه}\ k}}=\sqrt[n]{(a^{۲})^{k}}=\sqrt[n]{a^{۲k}}$$

۲۱۵) با استفاده از قانون ضرب رادیکالها ثابت می‌شود:

$$\sqrt[۴]{a^{۲}.b^{۲}}=\sqrt[۴]{a^{۲}}.\sqrt[۴]{b^{۲}}=\sqrt{\sqrt{a^{۲}}}.\sqrt{\sqrt{b^{۲}}}=\sqrt{|a|}.\sqrt{|b|}$$

۲۱۶) با استفاده از قانون تقسیم رادیکالها ثابت می‌شود:

$$\sqrt[۴]{\frac{a^{۲}}{b^{۲}}}=\frac{\sqrt[۴]{a^{۲}}}{\sqrt[۴]{b^{۲}}}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$$

۲۱۷) $x=\pm\frac{۱}{۲}(\sqrt{۶}\pm\sqrt{۲})$ (معادله چهار جواب دارد.)

۲۱۸) $x=\pm ۲$ ۲۱۹) $x=\pm\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ ۲۲۰) $x=\pm\sqrt[۱۲]{۲^{۱۱}}$

۲۲۱) طرف اول معادله به ازای هر عدد حقیقی a همیشه مثبت است. بنابراین معادله ریشهٔ حقیقی ندارد و مجموعهٔ جواب آن تهی ($\varnothing$) است.

۲۲۲) $b=-\sqrt[۱۱]{۲}$ ۲۲۳) $x=۱$ ۲۲۴) $x=-۲^{۹}$

۲۲۵) $x=۳$ ۲۲۶) $x=\frac{۱}{۸}$

۲۲۷) معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۲۲۸) معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۲۲۹) $a=\pm ۸$ ۲۳۰) $x=\pm ۱ ; x=\pm\sqrt[۸]{۲}$ ۲۳۱) $y=۴$

۲۳۲) $\pm\sqrt{۷}$ ۲۳۳) $x=۳$ ۲۳۴) $m=۱$

۲۳۵) $u=\pm ۵\sqrt{۵۵}$ ۲۳۶) $x=۰$ ۲۳۷) $x=\frac{\sqrt{۳}}{۱۲} ; x=-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

۲۳۸) $x=\frac{۱}{۲}$ ۲۳۹) $x=\frac{۱}{۴}$ ۲۴۰) $x=\frac{۱}{۳}$

۲۴۱) $x=-\frac{۱}{۳}$ ۲۴۲) $x=-\frac{۱}{۲} ; x=۰ ; x=\frac{۱}{۲}$ ۲۴۳) $x=۲ ; x=۳ ; x=\frac{۵}{۲}$

۲۴۴) معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۲۴۵) $x=۰$ ۲۴۶) $x=\frac{۱}{۴}$ ۲۴۷) $x=-\frac{\sqrt[۵]{۳۱}}{۲}$

۲۴۸) $x=-۱$ ۲۴۹) $x=۳۲\sqrt[۱۹]{۱۲۸}$ ۲۵۰) $x=۱$

۲۵۱) $x=\frac{۳\pm\sqrt{۳۷}}{۱۲}$ ۲۵۲) $x=۰$

۲۵۳) با توجه به برابریهای $\sqrt[۴]{۴}=\sqrt{۲}$ ، $\sqrt[۴]{۹}=\sqrt{۳}$ ، $\sqrt[۶]{۸}=\sqrt{۲}$ ، ...

$\sqrt{۲-\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ، داریم:

$$\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}-\frac{\sqrt{۶}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}$$

$$\frac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\frac{\sqrt{۶}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}$$

بنابراین:

$$k=\left(\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}+\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}\right)^{۱۳۷۶}=(\sqrt{۲})^{۱۳۷۶}=۲^{۶۸۸}\Rightarrow \boxed{k=۲^{۶۸۸}}$$

۲۵۴) داریم:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۷۵}+\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۷۴}&=\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۷۴}\left[\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}+۱\right]\\
&=\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۷۴}\left(\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\right)\\
&=\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۷۴}\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۲}=\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۷۶}
\end{aligned}$$

و همچنین:

$$\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۷۵}+\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۷۴}=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۷۴}\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۲}=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۷۶}$$

۲۵۵) با توجه به برابریهای $\sqrt{۴-\sqrt{۷}}=\frac{\sqrt{۱۴}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\sqrt{۴+\sqrt{۷}}=\frac{\sqrt{۱۴}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$،

داریم:

$$P=\sqrt[۵۵]{\sqrt{۲}}=\sqrt[۱۱۰]{۲}\quad\Rightarrow\quad\boxed{P=\sqrt[۱۱۰]{۲}}$$

ناشر برگزیده سالهای ۷۳، ۷۵، ۷۹

کتابهای کوچک ریاضی انتشارات مدرسه

- آشنایی با روشهای عددی در حل مسائل ریاضی / محمدعلی فریبرزی عراقی
- آنالیز ترکیبی و بسط دو جمله ای / پرویز شهریاری
- استقرای ریاضی / پرویز شهریاری
- انتگرال معین و کاربردهای آن / محمد عابدی
- بخش‌پذیری در جبر / پرویز شهریاری
- بردارها / سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- پیوستگی و مشتق‌پذیری / احمد قندهاری
- تابع / احمدقندهاری / حمیدرضا امیری
- تثلیث زاویه، تربیع دایره / پرویز شهریاری ، شیامک جعفری
- تاریخ ریاضیات / پرویز شهریاری
- تصاعدهای حسابی و هندسی / سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- تقارن جبری و روش ضرایب نامعین / پرویز شهریاری
- تعیین دامنه و برد توابع به روش حل مسأله / سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- حد و مفهوم حد / سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- دنباله‌ها و سریها / احمد قندهاری
- دیفرانسیل و انتگرال نامعین / محمد عابدی
- روشهایی از جبر / حمیدرضا امیری
- عبارتها و معادله‌های جبری / علی حسن‌زاده ماکویی
- قدر مطلق / پرویز شهریاری
- ماتریس و . . . / حمید رضا امیری
- مبانی ریاضیات / حمیدرضا امیری / یدالله ایلخانی‌پور
- مثلثات / احمد فیروزنیا
- مجانبها و رسم منحنی / احمد قندهاری
- نابرابری‌ها و نامعادله‌ها / میرشهرام صدر
- نظریهٔ گراف / حسین ابراهیم زاده قُلزم
- ورودی به نظریه احتمال / عین الله پاشا
- ورودی به نظریهٔ اعداد / حمیدرضا امیری
- ورودی به آمار / دکتر عین الله پاشا
- هندسه تحلیلی / محمدهاشم رستمی

هدف از انتشار این سری کتابها طرح دقیق و اساسی موضوعات مهم ریاضیات دبیرستانی و برطرف کردن کمبودهای احتمالی موجود در مباحث مختلف ریاضیات دبیرستانی است. در هر کتاب و به نسبت حجم مباحث، یک یا چند مبحث به طور مبسوط شرح و توضیح داده شده و مثالها و مسائل لازم در لابه‌لای مطالب آمده است. بیشتر این کتابها که مخاطبین آنها دانش‌آموزان دبیرستانی هستند، توسط نویسندگان مجرب و استادان ریاضی تألیف شده است. البته ممکن است یک یا چند مجلد از این کتابها ترجمه آثار برتر ریاضیات جهان باشد که در این صورت سعی شده است مباحث آن با نظام آموزشی ما منطبق باشد.

ISBN 964-353-852-4
1000522
۱۰۰۰ ریال - کد ۵۹۷/۷
انتشارات مدرسه