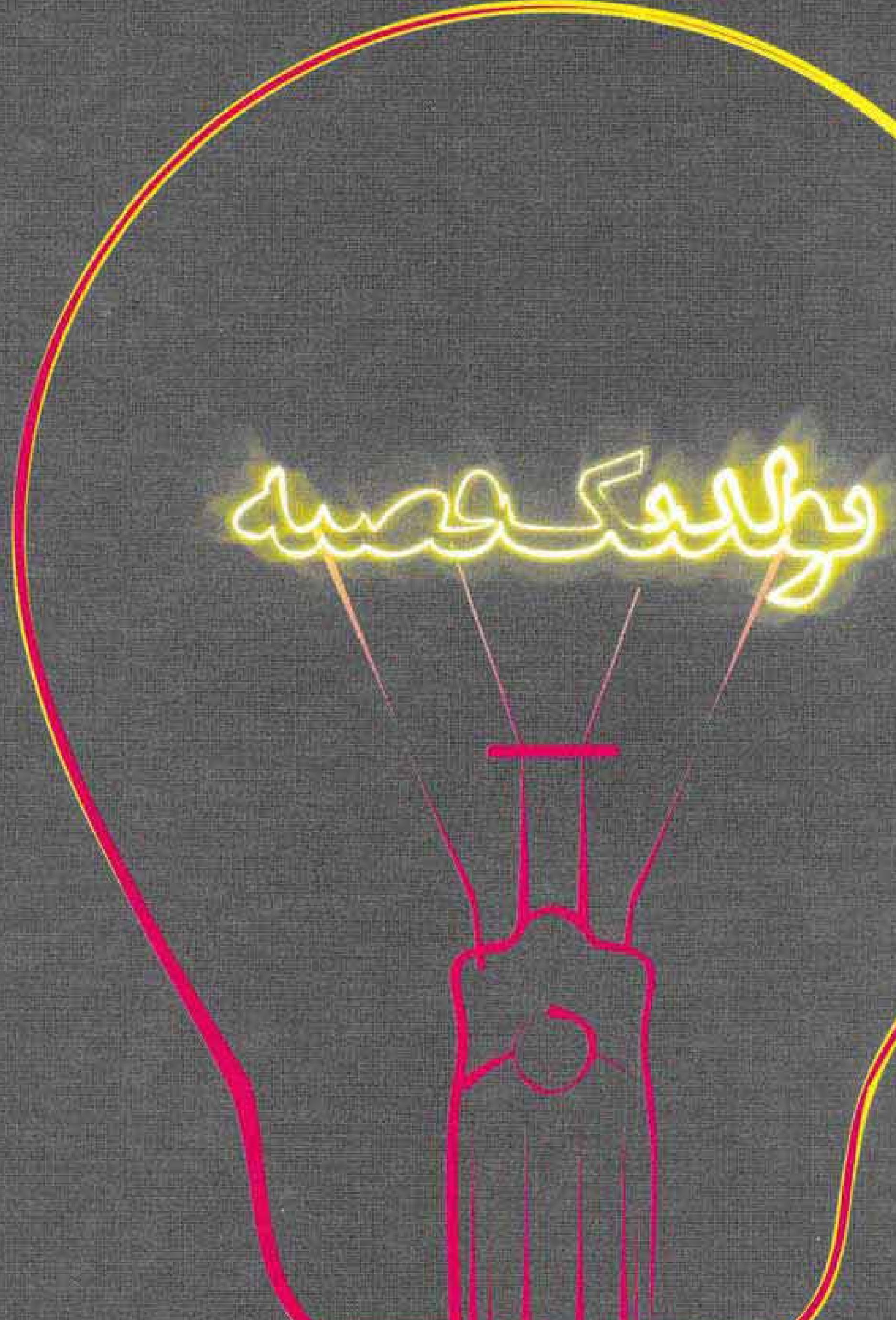


سدریک ویلانی

(برندهٔ مدال فیلدز)

تولد یک قضیه

ترجمهٔ

یوسف امیرارجمند

IPM

Hassan Karimzadeh

تولد یک قضیه

سدریک ویلانی

پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (اطلاع‌رسانی)

تهران، ص.پ. ۵۷۴۶-۱۹۳۹۵
http://www.ipm.ac.ir

Théorème vivant
Cédric Villani
Grasset, Paris, 2012

تولد یک قضیه

مؤلف:	سدریک ویلانی
مترجم:	یوسف امیرارجمند
ویراستار:	لالهٔ قدک‌پور
حروفچین و صفحه‌آرا و نسخه‌پرداز:	سیده فاطمه ولائی
ناشر:	پژوهشگاه دانش‌های بنیادی
چاپ اول	۱۳۹۳
تیراژ	۱۰۰۰

یادداشت

فکر انتشار این کتاب زمانی پیش آمد که جناب برونو فوشه سفیر فرانسه در ایران نسخه‌ای از اصل فرانسوی کتاب را به دکتر محمدجواد لاریجانی رئیس پژوهشگاه دانش‌های بنیادی اهدا کرد. دکتر لاریجانی پس از مطالعه‌ای اجمالی، کتاب را آموزنده و خواندنی یافت و برای بررسی دقیق‌تر، و احیاناً ترجمه و انتشار، در اختیار مرکز اطلاع‌رسانی قرار داد.

کتاب *Théorèm vivant* که ترجمهٔ آن را با عنوان «تولد یک قضیه» در دست دارید، حکایت جذاب یک پژوهش ریاضی است از آغاز تا انجام آن، با همهٔ فراز و نشیب‌هایش. نویسندهٔ آن سدریک ویلانی (Cédric Villani) ریاضیدان برجستهٔ فرانسوی و برندهٔ مدال فیلدز (معتبرترین جایزهٔ ریاضی) در سال ۲۰۱۰ است که در این کتاب تجربهٔ شخصی خود را از یکی از مهمترین پژوهش‌هایش که این مدال را نصیب او کرد بازگو می‌کند. کتاب در عین حال بازگوکنندهٔ احوال پژوهشگر در طی این مسیر دشوار است: امیدها، ناامیدی‌ها، هیجان‌ها، اضطراب‌ها، سرخوشیِ پیروزی، زندگی خانوادگی، سفرها، و البته کار و کار و باز هم کار. تصویرهای زنده و گویایی که نویسنده از حال و هوای محیط پژوهشی و از پژوهشگران نامدار در بعضی مراکز علمی معتبر ارائه می‌کند برگیرایی این متن افزوده است. با ملاحظهٔ این ویژگی‌ها به نظر آمد که مطالعهٔ این کتاب برای پژوهشگران فارسی‌زبان لذت‌بخش و سودمند باشد، و انتشار آن را در قالب برنامه‌های این مرکز برای بزرگداشت بیست‌وپنجمین سال تأسیس پژوهشگاه، مناسب دیدیم. ترجمهٔ به فارسی از روی متن فرانسویِ انتشاریافته در سال ۲۰۱۲ انجام شد. اخیراً ترجمهٔ انگلیسی کتاب هم به بازار آمده که ظاهراً تفاوت‌های اندکی با متن فرانسوی دارد.

ترجمهٔ این کتاب کار آسانی نبود زیرا علاوه بر محتوای پیشرفتهٔ ریاضی، حاوی نکات و اصطلاحات متعدد فرهنگی، هنری، تاریخی، و جغرافیایی است. این کار دشوار بر عهدهٔ یوسف امیرارجمند عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر قرار گرفت. ترجمه را لالهٔ قدک‌پور مقابله و ویرایش کرد. کار حروفچینی را فاطمه ولائی انجام داد و ضمن این کار، اصطلاحات نگارشی سودمندی نیز پیشنهاد کرد. زحمات هر سه نفر سزاوار امتنانِ فراوان است. همچنین از کمک‌های سیامک کاظمی ویراستار ثابت مرکز اطلاع‌رسانی مثل همیشه سپاسگزارم.

غلامرضا خسروشاهی
مرکز اطلاع‌رسانی
۱۳۹۴

اغلب از من سئوال می‌کنند زندگی یک محقق، یک ریاضیدان چگونه است؛ روزها را چگونه می‌گذرانیم، آثارمان را چگونه می‌نویسیم. در این کتاب کوشیده‌ام که به این سئوالات پاسخ گویم.

در این روایت، شکل‌گیری یک پیشرفت در ریاضیات را نقل کرده‌ام: از لحظه‌ای که محقق تصمیم به ورود به این ماجرا می‌گیرد تا لحظه‌ای که مقاله‌ای که نتیجه‌ای جدید ــ یعنی قضیه‌ای جدید ــ را اعلام می‌کند برای چاپ در یک مجلهٔ بین‌المللی پذیرفته می‌شود.

بین این دو لحظه، مسیری که محقق برای رسیدن به هدفش طیّ می‌کند به هیچ وجه مستقیم نیست، بلکه راهی است طولانی با پستی‌وبلندی‌ها و پرپیچ‌وخم، مانند اغلب ماجراهای دیگر در زندگی.

به استثناء برخی تغییرات جزئی که نحوهٔ ارائه اقتضا کرده است همه چیز مطابق با واقعیت، یا حداقل آنطور که خود تجربه کرده‌ام، روایت شده است.

از الیویه نورا[1] برای اینکه در یک ملاقات پیش‌بینی‌نشده باعث طرح این پروژه شد متشکرم؛ از کلِر برای بازخوانی‌های مکرر و دقیق متن و پیشنهادهایش متشکرم؛ از کلود برای تصویرسازی زیبایش تشکر می‌کنم؛ از آریان فاسکل[2] و گروه انتشارات گراسه برای اینکه به حرفهایم با دقت گوش دادند و همچنین کیفیت ویرایش متشکرم؛ بالاخره از کلِمان برای همکاری فراموش‌نشدنی‌اش که بدون آن موضوع این کتاب به وجود نمی‌آمد سپاسگزارم.

از آقایان و خانم‌های خواننده دعوت می‌کنم که پرسش‌ها و نظرهای خود را از طریق پست الکترونیک برای من بفرستند.

سدریک ویلانی

پاریس، دسامبر ۲۰۱۱

1. Olivier Nora   2. Ariane Fasquelle

فصل اول

لیون، ۲۳ مارس ۲۰۰۸

یک روز یکشنبه ساعت ۳؛ اگر همین دو ریاضیدان گرفتار هم نبودند لابراتوار [پژوهشکده] سوت و کور بود. این قراری خودمانی بود برای تشکیل جلسه‌ای کاری در آرامش در دفتری واقع در طبقهٔ سومِ دانشسرای عالی لیون[1] که هشت سال است در اختیار من قرار دارد.

در حالی که در صندلی راحتی پشت میز نشسته‌ام، با شدت انگشتانم را که مانند پاهای عنکبوت بازکرده‌ام روی میز می‌زنم، همان‌طور که استاد پیانو قبلاً یادم داده بود.

در سمت چپ من، روی میز دیگری بساط کامپیوترم پهن است. در سمت راستم گنجه‌ای حاوی صدتایی کتاب دربارهٔ ریاضی و فیزیک قرار دارد. پشت سرم روی قفسه‌هایی طویل هزاران هزار صفحه مقاله که خیلی قدیم، وقتی هنوز مجلات علمی الکترونیکی نشده بودند، فتوکپی شده بود با دقت چیده شده‌اند؛ همچنین کُپی تعداد زیادی آثار تحقیقاتی به چشم می‌خورد که در زمانی که حقوق من برای رفع عطشی که برای کتاب داشتم کفایت نمی‌کرد فراهم آورده بودم. در آنجا یک متری هم چرکنویس چیده شده است که در طی سال‌ها به دقت بایگانی شده‌اند؛ به همین تعداد هم یادداشت دستنویس که حاکی از ساعت‌های بی‌شماری است که صرف گوش دادن به گزارش تحقیقات کرده‌ام. روی میز تحریر پیش روی من گاسپار، لپ‌تاپ من، قرار دارد که نامش برای ادای احترام به گاسپار مونژ ریاضیدان بزرگ انقلابی انتخاب شده، و تلّی از کاغذهایی سیاه‌شده از نمادهای ریاضی که

1. École normale supérieure

در چهارگوشهٔ جهان نُت‌برداری شده‌اند و برای این مناسبت یک‌جا جمع‌شان کرده‌ام نیز دیده می‌شود.

همکارم، کلِمان موهو[1]، که چشمانش برق می‌زنند و ماژیکی به دست دارد، درکنار تختهٔ سفید بزرگی که تمام دیوار روبه‌روی مرا اشغال می‌کند ایستاده است.

ــ خوب بگو چرا به من گفتی بیایم، برنامه‌ات چیست؟ توضیح زیادی در ایمیلت به من نداده‌ای ...

ــ دوباره به فکر ایدهٔ شیطانی قدیمم افتاده‌ام که معلوم است که خیلی بلندپروازانه است؛ همان منظّم بودن جواب‌های معادلهٔ بولتزمانِ ناهمگن.

ــ مُنظم بودنِ مشروط؟ منظورت به شرطِ داشتنِ کرانه‌های نظم حداقلی است؟

ــ نَه، بدون قید و شرط.

ــ همین‌طوری! شاید در حالت‌های اختلالی؟ فکر می‌کنی برای این کار آمادگی داریم؟

ــ بله، من دوباره کار را شروع کرده‌ام، تقریباً پیشرفت خوبی هم داشته‌ام، ایده‌هایی هم در سر دارم، اما اینجا گیر کرده‌ام. مسئله را به کمک چندین مدل ساده شده تجزیه کرده‌ام، اما از عهدهٔ ساده‌ترین مدل‌ها هم برنمی‌آیم. اول فکر می‌کردم بشود از یک نوع استدلال «اصل حداکثری» استفاده کرد، اما نَشد و همه چیز به‌هم‌ریخت. می‌خواهم درباره‌اش صحبت کنم.

ــ باشد، من گوش می‌کنم.

مدت زیادی صحبت کردم: دربارهٔ نتایجی که در نظر دارم، تلاش‌هایی که کرده‌ام، قطعات مختلفی که نمی‌توانم به ترتیب پشت سر هم قرار دهم، پازل منطقی که قطعاتش سرجای خود قرار نمی‌گیرند، و دربارهٔ معادلهٔ بولتزمان که یاغی است.

معادلهٔ بولتزمان زیباترین معادلهٔ دنیاست، این را قبلاً به یک روزنامه‌نگار گفته‌ام! تازه‌کار که بودم، وقت نوشتن رساله‌ام، گرفتار این معادله شدم و تمام جوانب آن را بررسی کردم: فیزیک آماری، پیکان زمان، مکانیک سیالات، نظریهٔ احتمالات، نظریهٔ اطلاعات، آنالیز فوریه ... برخی می‌گویند هیچ کس در دنیا به خوبی من، عالَمِ ریاضی تولید شده توسط این معادله را نمی‌شناسد.

هفت سال قبل کلِمان را وقتی می‌خواست رساله‌اش را تحت سرپرستی من شروع کند با این دنیای اسرارآمیز آشنا کردم. کلِمان با ولع زیاد یاد می‌گرفت و مسلماً او تنها کسی است که تمام کارهایی را که من در مورد معادلهٔ بولتزمان انجام داده‌ام خوانده است: اکنون او پژوهشگری مورد احترام، مستقل، درخشان و پُرانگیزه است.

هفت سال پیش من او را راه انداختم، امروز این من هستم که به او احتیاج دارم. مشغول

1. Clément Mouhot

مسئله‌ای هستم بیش از حد مشکل و به تنهایی نخواهم توانست آن را حل کنم؛ اقلاً باید بتوانم کوشش‌هایم را برای کسی که این نظریه را مثل کف دستش می‌شناسد شرح دهم.

ـــ فرض کنیم برخوردهای مماسی [بین‌ذرات] زیاد باشد، باشه؟ خوب این یک مُدل بدون برش[1] خواهد بود. در این صورت رفتار معادله مانند یک پخش کسری خواهد بود، که البته تبهگن است ولی بالاخره یک پخش است، و به محض اینکه چگالی و دما کران داشته باشند می‌توان از یک روش تکراری شبیه به روش موزِر[2] که در آن غیرموضعی بودن به حساب آورده شده باشد استفاده کرد.

ـــ روش موزِر، هوم ... یک دقیقه صبر کن، این را یادداشت کنم.

ـــ بله، به سبک موزر. نکته اینجاست که عملگر بولتزمان ... درست است که این عملگر دوخطی است، غیرموضعی است، اما با این حال، انصافاً به شکل [عملگر] دیورژانس است، و این باعث می‌شود که روش موزر کارگر بیفتد؛ تو تابع را با یک تبدیل غیرخطی تغییر می‌دهی، به توان می‌رسانی ... و در واقع دما کافی نیست، ماتریس گشتاورهای دوم را باید کنترل کرد. اما در هر صورت اصل کار مثبت بودن است.

ـــ صبر کن، تُند نرو، چرا دما کافی نیست؟

من مفصلاً توضیح می‌دهم؛ بحث می‌کنیم، مجادله می‌کنیم. تخته غرق در نمادهای ریاضی شده است، کلمان می‌خواهد در مورد مثبت بودن بیشتر بداند. چگونه بدون کرانِ نظم می‌توان مثبت بودن اکید را اثبات کرد؟ آیا شدنی است؟

ـــ اگر کمی فکر کنی می‌بینی که این زیاد هم غریب نیست، برخوردها کران‌های پایین تولید می‌کنند، ترابری[3] در یک حوزهٔ محدود هم همین‌طور، این معقول به نظر می‌رسد؛ این دو اثر قاعدتاً باید یکدیگر را تقویت کنند، مگر اینکه واقعاً هیچ شانسی نداشته باشیم. برنت قبلاً امتحان کرده بود اما گیر کرد. خوب، جماعتی امتحان کرده‌اند، بدون موفقیت، اما این ممکن به نظر می‌رسد.

ـــ مطمئنی که ترابری بدون منظم بودن می‌تواند چگالی را مثبت کند؟ آخر، اگر برخوردی در کار نباشد، مقدار چگالی را ترابری می‌کنی ولی مثبت‌تر نمی‌شود ...

ـــ بله، اما وقتی میانگین سرعت‌ها را می‌گیری مثبت بودن تقویت می‌شود ... کمی مانندِ لم‌هایی که برای میانگین‌های جُنبشی داریم، اما اینجا منظم بودن مطرح نیست، مثبت بودن مطرح است. درست است که هنوز کسی از این زاویه چندان مطالعه‌ای انجام نداده. راستی ... یادم می‌آید دو سال پیش در پرینستون یک محقق پسادکتری چینی سئوالی تقریباً از این قُماش مطرح کرد. یک معادلهٔ ترابری در نظر بگیر، مثلاً بر روی چنبره، منظمی را صفر فرض کن، حالا نشان بده که

---
1. cut-off 2. Moser 3. transport

چگالی فضایی اکیداً مثبت می‌شود. بدون منظم بودن! او می‌دانست چگونه مسئله را برای ترابری آزاد یا برای چیزی عام‌تر در زمان‌های کوتاه حل کند، اما برای زمان‌های طولانی‌تر گیر می‌کرد ... در آن زمان سئوال او را به دیگران هم انتقال دادم، اما جواب متقاعدکننده‌ای نشنیدم.

ــ خوب، صبر کن. بگو با همین ترابری آزاد که از هر چیزی آسان‌تر است چکار می‌کنی؟

ترابری آزاد در اصطلاح ما، یعنی گاز ایده‌آلی که در آن ذرات با یکدیگر برهم‌کنش ندارند. این مدل آن‌قدر ساده شده است که دیگر واقع‌گرایانه نیست، در عین حال، غالباً اطلاعات زیادی در بر دارد.

ــ بَه، اگر جواب صریح را داشته باشیم، باید بشود فهمید که چه کار می‌کنیم، صبر کن، بیا جواب را پیدا کنیم.

هر دو مشغول به کار شدیم، هر کدام از یک طرف، برای اینکه بتوانیم استدلالی را که دونگ لی انجام داده بود دوباره پیدا کنیم. البته این یک نتیجهٔ مهم نبود، بیشتر به یک تمرین ساده شبیه بود. اما شاید اگر جواب این تمرین ساده را بفهمیم در راهی قرار بگیریم که بتوانیم پرده از آن راز بزرگ برداریم. بعد هم، این یک بازی بود! پس از چند دقیقه خط‌خطی کردن در سکوت، این من بودم که برنده شدم.

ــ فکر می‌کنم به دست آوردَمِش.

پای تخته رفتم تا جواب را بنویسم، مثل کلاس حل تمرین.

ــ جواب را بر طبق تبدیل‌های چنبره تجزیه می‌کنیم ... در هر قسمت تغییر متغیر می‌دهیم ... یک ژاکوبی پیدا می‌شود، از شرط لیپ‌شیتز استفاده می‌کنیم ... و بالاخره به یک همگرایی از مرتبهٔ $1/t$ («یک روی t») می‌رسیم. همگرایی آهسته است اما خوب به نظر می‌رسد.

ــ چی، پس منظم‌سازی نداری ... همگرایی که از میانگین‌گیری ... میانگین‌گیری به دست می‌آید ...

کلمان در مقابل محاسبات من با صدای بلند فکر می‌کرد. ناگهان گل از گلش شکفت، با هیجان انگشت اشاره را به طرف تخته گرفت:

ــ پس باید ببینیم آیا این به میرایی لانداو[1] کمکی می‌کند!

من رو دست خوردم. سه ثانیه سکوت. احساس مبهمی داشتم که این چیز مهمی است.

از او توضیح خواستم، کلمان قرار نداشت، روی پا بند نبود، به من توضیح داد که این اثبات او را یاد بحثی می‌اندازد که سه سال پیش با پژوهشگر چینی‌الاصل دیگری به نام یَن گو[2] در پرووِیدانس در سواحل شرقی ایالات متحده داشت.

1. Lev Landau 2. Yan Guo

ـــ در میرایی لانداو به دنبال آرام‌گیری[1] برای یک معادلهٔ برگشت‌پذیر هستیم ...

ـــ بله، بله، می‌دانم، اما آیا برهم‌کنش نقشی ایفا نمی‌کند؟ اینجا با معادلهٔ ولاسوف سروکار نداریم، در این معادله فقط ترابری آزاد داریم!

ـــ شاید برهم‌کنش باید نقشی داشته باشد، بله، و بعد ... همگرایی باید نمایی باشد. فکر می‌کنی $1/t$ حداکثر است؟

ـــ به نظر بد نیست، مگر نه؟

ـــ ولی اگر نظم قوی‌تر بود چه می‌شد؟ بهتر نبود؟

ـــ هـــوم.

دلخور بودم، ترکیبی از تردید و تمرکز، علاقه و یأس.

پس از چند لحظه سکوت، نگاه‌ها ثابت و لب‌ها فشرده، گفتگو را از سر می‌گیریم. میرایی افسانه‌ای لانداو، با وجود اینکه بسیار جذاب است، هیچ‌گونه ربطی با پروژهٔ تحقیقاتی اولیهٔ ما نداشت؛ پس از چند دقیقه موضوع را عوض کردیم. بحث ما مدتی طولانی ادامه یافت. پرسش‌های ریاضی یکی پس از دیگری مطرح می‌شد. یادداشت می‌کردیم، بحث می‌کردیم، عصبانی می‌شدیم، یاد می‌گرفتیم، نقشهٔ حمله را آماده کردیم. وقتی از هم جدا می‌شدیم میرایی لانداو را هم در فهرست طولانی تکالیفی که باید در خانه انجام می‌دادیم گنجانده بودیم.

*

معادلهٔ بولتزمان

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} |v - v_*| \Big[f(v') f(v'_*) - f(v) f(v_*) \Big] dv_* d\sigma,$$

که در حدود سال ۱۸۷۰ کشف شد، مدلی است برای تکامل یك گاز رقیق که از میلیاردهامیلیارد ذره که با یکدیگر برخورد می‌کنند تشکیل شده است؛ توزیع آماری موضع و سرعت این ذرات را با تابع $f(t,x,v)$ نشان می‌دهند، که در زمان t معرف چگالی ذراتی است که مواضع آنها (تقریباً) x است و سرعت آنها (تقریباً) برابر v است.

لودویگ بولتزمان مفهوم آماری آنتروپی، یا بی‌نظمی، یك گاز را کشف کرد:

$$S = - \iint f \, \log \, f \, dx \, dv;$$

او با استفاده از معادله‌اش ثابت کرد که با شروع از یك حالت اولیه که به طور دلخواه تعیین می‌شود، آنتروپی نمی‌تواند در گذشت زمان افزایش نیابد؛ هرگز کاهش‌یابنده نیست. تصوری

1. relaxation

لودویگ بولتزمان

که از آنتروپی داریم این است که اگر گاز به حال خود رها شود، خودبه‌خود نامنظم و نامنظم‌تر می‌شود، و این تحول برگشت‌ناپذیر است.

افزایش آنتروپی قانونی بود که چند دهه قبل به طور تجربی کشف شده بود و اصل دوم ترمودینامیک نامیده می‌شد و بولتزمان آن را بازیافت؛ اما او با افزودن چند مفهوم دیگر سهمی استثنائی را در پیشبرد ترمودینامیك از آن خود ساخت. اولاً او یك اثبات استدلالی را جایگزین یك قانون تجربی کرد، که از طریق آزمایش مشاهده شده بود و به صورت یك اصل درآمده بود؛ ثانیاً تفسیری ریاضی از این آنتروپی اسرارآمیز عرضه کرد که فوق‌العاده ثمربخش بود؛ سرانجام او بین فیزیك میکروسکوپیکی ــ که غیرقابل پیش‌بینی، آشوبناك و برگشت‌پذیر است ــ و فیزیك ماکروسکوپیکی قابل پیش‌بینی و برگشت‌ناپذیر آشتی برقرار کرد. آنچه بولتزمان انجام داد او را در موقعیتی ممتاز در بین مشاهیر فیزیك نظری قرار داده است و همچنین توجه فیلسوف‌ها و معرفت‌شناسان را همواره به خود جلب کرده است و می‌کند.

بولتزمان سپس حالت تعادل یك سیستم آماری را به عنوان حالتی که در آن آنتروپی حداکثر است تعریف می‌کند و به این ترتیب میدان بسیار گستردهٔ فیزیك آماری تعادل را بنیان‌گذاری می‌کند: طبیعی‌ترین حالت حالتی است که در آن بی‌نظمی حداکثر است.

بولتزمانِ جوانِ فاتح به تدریج جای خود را به مرد پیری می‌دهد که در رنج است و در سال ۱۹۰۶ خودکشی می‌کند. رسالهٔ نظریهٔ گازهای او، که هنوز هم متنی مطرح است، با گذشت زمان به صورت یکی از مهمترین آثار علمی قرن نوزدهم جلوه می‌کند. اما

پیش‌گویی‌های او، که به تأیید تجربه نیز رسیده‌اند، هنوز در انتظار یک نظریهٔ ریاضی کامل به سر می‌برند؛ یکی از قطعات گمشده در این پازل تحقیق در منظم بودن جواب‌های معادلهٔ بولتزمان است. علی‌رغم سرسختی این راز، و شاید هم به برکت آن، معادلهٔ بولتزمان اکنون موضوع یک تئوری شکوفاست؛ این نظریه مجمعی بین‌المللی از ریاضیدان‌ها، فیزیکدان‌ها و مهندسان را به خود مشغول داشته و هر بار صدها نفر از آنان را در همایش‌های «دینامیک گاز رقیق»[1] و مناسبت‌های بسیار دیگر گردهم می‌آورد.

1. Rarefied Gas Dynamics

فصل دوم

لیون، ماه مارس ۲۰۰۸

میرایی لانداو!

پس از این جلسه، خاطرات مبهمی به ذهنم می‌آید: تکه‌هایی از گفتگو، بحث‌هایی که به جایی نرسیدند ... تمام فیزیکدان‌های متخصص پلاسما با میرایی لانداو آشنا هستند، اما این پدیده برای ریاضیدان‌ها به صورت یک راز باقی مانده است.

در ماه دسامبر سال ۲۰۰۶، در شهر اُبروولفاخ در یک انستیتوی افسانه‌ای که در قلب جنگل‌های سیاه پنهان است اقامت داشتم. جای دنجی است که در آن ریاضیدان‌ها دائماً در حال آمدوشُدند تا در مورد موضوع‌های مختلف گفتگو کنند. در آنجا درها بدون قفل‌اند، آشامیدنی‌ها به طور مجانی در دسترس قرار دارند و شیرینی تا دلت بخواهد. همچنین صندوق‌های کوچک چوبی که در آنها پول را به امانت می‌گذارند و میزهایی که میهمانان باید در جایی بنشینند که به حکم قُرعه تعیین می‌شود.

آن روز در اُبروولفاخ، دست تقدیر مرا بر سر میزی نشاند که رابرت گلاسی[1] و اریک کارلن[2]، دو متخصص آمریکایی نظریهٔ گازها هم نشسته بودند. روز قبل در هنگام افتتاح کنفرانس تَلّی از نتایج جدید را با احساسی توأم با غرور ارائه داده بودم؛ و همین امروز صبح، اریک سخنرانی پرشوری مملو از ایده‌های بسیار ایراد کرده بود که داشتیم دور ظرف سوپ، که از آن بخار برمی‌خاست، درباره‌اش گفتگو می‌کردیم. تمام اینها را که پشت سر هم می‌گذاشتی، کمی برای رابرت سنگین می‌شد. او خود

1. Robert Glassey 2. Eric Carlen

یَن گو

را پیر و از دور خارج شده می‌دید و ناله می‌کرد: «وقتش رسیده که بازنشسته شوم» ...

اریک معترضانه می‌پرسید: چرا بازنشسته بشی، درحالی‌که هیچ زمانی به اندازهٔ حالا برای نظریهٔ گازها هیجان‌انگیز نبوده است. و من هم با حالت اعتراض گفتم: چرا بازنشستگی، درحالی‌که ما به تجربیاتی که رابرت در این سی‌وپنج سال کار به دست آورده آن‌قدر احتیاج داریم.

ـــ رابرت، کمی راجع به این اَثِر مرموز میرایی لانداو بگو، می‌توانی توضیح بدهی، آیا این اثر واقعی است؟

«عجیبه، غریبه» الفاظی بودند که در پاسخ رابرت به گوش می‌خوردند. بله، ماسلوف روی آن کار کرده؛ بله، معمای برگشت‌پذیری هم هست که ظاهراً با میرایی لانداو نمی‌خواند؛ خیر، مسئله روشن نیست. نظر اریک این بود که این میرایی رؤیایی بوده است که از ذهن خلاق فیزیکدان‌ها تراوش کرده بدون اینکه امیدی به فرمول‌بندی ریاضی آن باشد. اطلاعات چندانی از این گفتگو دستگیرم نشده بود، فقط آن را در گوشه‌ای از مغزم بایگانی کرده بودم.

اکنون در سال ۲۰۰۸ هستیم و من چیز بیشتری از آنچه که در سال ۲۰۰۶ می‌دانستم نمی‌دانم. اما کلمان، این فرصت را پیدا کرده بود که دراین‌باره با یَن گو، «برادر کوچک» علمی رابرت ـــ که هر دو پایان‌نامه‌هاشان را تحت نظر یک سرپرست گذرانده بودند ـــ مباحثات مفصلی داشته باشد. یَن می‌گفت که عمق مسئله در اینجاست که لانداو روی مدل اولیه کار نکرد، بلکه یک مدل ساده‌شده، خطی‌شده، را در نظر داشت. هیچ‌کس نمی‌داند آیا کارهای او در مورد مدل «واقعی» غیرخطی نیز معتبر است یا خیر. یَن مجذوب این مسئله است، او تنها نیست.

آیا ما می‌توانیم وارد گود شویم، کلمان و من؟ چرا نشویم. اما برای حل مسئله ابتدا باید دقیقاً بدانیم صورت مسئله چیست! در تحقیقات ریاضی هدف را به وضوح شناختن اولین قدم است، قدمی که اساسی و ظریف است.

هدف هر چه باشد، تنها چیزی است که از آن مطمئن هستیم، نقطهٔ شروع، معادلهٔ ولاسوف است

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \left(\nabla W \, * \int f \, dv \right) \cdot \nabla_v f = ۰,$$

این معادله با دقتی عالی خواص آماری پلاسماها را تعیین می‌کند. ریاضیدان، مانند بانوی شالوت بیچاره در افسانه‌های آرتور شاه نمی‌تواند به دنیا مستقیماً نگاه کند، بلکه فقط انعکاس آن را می‌بیند. انعکاس ریاضی آن را. بنابراین ما باید در دنیای مثالی ریاضیات، که تنها منطق بر آن حاکم است، به دنبال لانداو بگردیم ...

نه کلمان و نه من هرگز روی این معادله کار نکرده بودیم. اما این معادلات متعلق به همه است و ما هم آستین‌ها را بالا خواهیم زد.

*

لِوْ داویدوویچ لانداو، یهودی روس متولد سال ۱۹۰۸ و برندهٔ جایزهٔ نوبل ۱۹۶۲، یکی از بزرگ‌ترین فیزیکدان‌های قرن بیستم است. او مورد آزار و اذیت رژیم شوروی قرار گرفت ولی فداکاری همکارانش باعث شد از زندان آزاد شود. اما او از مستبدین فیزیك نظری زمان خود بود. او با یوگنی لیف‌شیتز[1] مؤلف یك دوره کتاب درسی عظیم است که هنوز هم از مراجع به شمار می‌آید. کارهای بنیادین لو در تمام کتاب‌های فیزیك پلاسما حضور دارد: در رأس آنها معادلهٔ لانداو، خواهر کوچك معادلهٔ بولتزمان است که من آن را سال‌ها در حین آماده کردن رساله‌ام مطالعه می‌کردم؛ بعد هم میرایی معروف لانداو است که می‌گوید پلاسماها به طور خودبه‌خود پایدار می‌شوند و این بازگشت به تعادل بدون افزایش آنتروپی است و این مخالف سازوکاری است که بر معادلهٔ بولتزمان حاکم است.

فیزیك گازها، فیزیك بولتزمان: آنتروپی رو به افزایش است، اطلاعات از دست می‌رود، پیکان زمان به کار افتاده است، حالت اولیه فراموش می‌شود؛ کم‌کم توزیع آماری به یك حالت حداکثری آنتروپی، حداکثر بی‌نظمی ممکن، نزدیك می‌شود.

1. Evgeny Lifshitz

لِو لانداو

فیزیك پلاسماها، فیزیك ولاسوف: آنتروپی ثابت است، اطلاعات حفظ می‌شود، پیکان زمان در کار نیست، همیشه حالت اولیه را به خاطر داریم؛ بی‌نظمی افزایش پیدا نمی‌کند و هیچ دلیلی برای نزدیك شدن به هیچ چیز خاصی وجود ندارد.

اما لانداو دوباره به مطالعهٔ معادلهٔ ولاسوف پرداخت ــ او ولاسوف را حقیر می‌شمرد و بدون اینکه تردیدی به خود راه دهد می‌گفت تقریباً تمام کارهایش غلط است ــ نظر او این بود که نیروهای الکتریکی خودبه‌خود در طول زمان تضعیف می‌شوند، بدون اینکه آنتروپی افزایش یابد یا هیچ نوع اصطکاکی در کار باشد. آیا این کُفرگویی بود؟

محاسبات ریاضی لانداو، که پیچیده و استادانه بودند، جامعهٔ علمی را متقاعد ساخت و این پدیده را میرایی لانداو نامیدند. البته چندصدای حاکی از ناباوری نیز بلند شد.

فصل سوم

لیون، ۲ آوریل ۲۰۰۸

میزکوتاهی که در راهرو قرار داده شده پوشیده است از چرکنویس و تختهٔ سیاه پُر از اَشکال کوچک. از پشت یک دیوار شیشه‌ای بزرگ یک جور عنکبوت سیاه غول‌آسا به سبک کوبیسم که روی پاهایش ایستاده دیده می‌شود این همان لابراتوار مشهور لیون، P۴، است که در آن آزمایش‌هایی روی خطرناک‌ترین ویروس‌های جهان به عمل می‌آید.

میهمان من، فِردی بوشه[1]، کاغذهایش را دسته می‌کند و درکیفش قرار می‌دهد. بیش از یک ساعت در مورد تحقیقات او بحث کردیم، در مورد شبیه‌سازی عددی روی کهکشان‌ها، و در مورد استعداد مرموزی که در ستارگان وجود دارد و باعث می‌شود خودبه‌خود در هیئت‌های پایدار متشکل شوند.

این پایداری در قانون گرانش جهانشمول نیوتون که ۳۴۳ سال قبل کشف شد منظور نشده است با این وجود، وقتی ابری از ستاره‌ها را مشاهده می‌کنیم که تحت این قانون گرانش قرار دارد، به نظر می‌رسد که کل مجموعه پس از گذشت زمانی به اندازهٔ کافی طولانی به حالت پایدار درمی‌آید. محاسبات متعددی که با کامپیوترهای قوی انجام شده این را نشان می‌دهند ...

در این صورت، آیا می‌توان ویژگی پایداری را از قانون گرانش جهانشمول استنتاج کرد؟

لیندن بِل، اخترفیزیکدانی که اعتقادی پروپاقرص، به قُرصی یک سیارک آهنی، به امکان‌پذیر بودن این امر داشت این پدیده را آرام‌گیری پرجنب‌وجوش[2] نامید. عجب جمع اضدادی!

1. Freddy Bouchet 2. relaxation violente

ـــ سدریک، آرام‌گیری پرجنب‌وجوش مِثلِ میرایی لانداو است به جز اینکه میرایی لانداو یک اثر اختلالی است و آرام‌گیری پرجنب‌وجوش یک اثر قویاً غیرخطی است.

فِردی هم تحصیلات ریاضی دارد و هم تحصیلات فیزیک، او قسمتی از زندگی خود را به این نوع مسائل اختصاص داده است. از جمله مسائل بنیادین مورد مطالعهٔ او مسئله‌ای است که امروز به خاطر آن برای گفتگو با من آمده است.

ـــ سدریک، ببین، وقتی برای کهکشان‌ها مُدل‌سازی می‌کنیم، به جای ستاره‌ها، که نقاط کوچکی در عالم هستند، یک سیال مثلاً گازی از ستاره‌ها را در نظر می‌گیریم، از منفصل به متصل می‌رویم. اما اندازهٔ خطایی که در این تقریب مرتکب می‌شویم چقدر است؟ این خطا چگونه به تعداد ستاره‌ها بستگی دارد؟ در یک گاز یک‌میلیاردمیلیارد ذره وجود دارد، در یک کهکشان فقط صد میلیارد ستاره وجود دارد. آیا این تفاوت خیلی چیزها را تغییر می‌دهد؟

فِردی بوشه

مخاطب من بحث‌های طولانی و سئوال‌های بسیار مطرح کرد، نتایجی عرضه نمود، اَشکالی رسم کرد و از مراجعی نیز یادداشت برداشت. دربارهٔ رابطهٔ تحقیقات او با یکی از موضوع‌های مورد علاقهٔ من، نظریهٔ ترابری بهین[1]، که پایه‌گذار آن مونژ است نیز تبادل نظر شد. این تبادل نظر مفید بود و فِردی هم از آن راضی بود. من هم از اینکه فقط چند روز پس از مباحثه با کلمان بحث میرایی لانداو دوباره مطرح می‌شد هیجان‌زده شده بودم.

درحالی‌که فِردی خداحافظی می‌کرد و می‌رفت، همسایهٔ من در دفتر کار که تا آن موقع مشغول مرتب کردن کاغذهایش بود چیزی گفت. موهای بلند خاکستری او که به دقت به یک اندازه اصلاح شده‌اند حالتی کمی معترض به چهره‌اش می‌دهند.

1. theory of optimal transport

ــ سدریک، می‌دانی، می‌خواستم چیزی نگویم، اما این شِکل‌ها، آنجا، روی تخته، این شکل‌ها را از قبل می‌شناسم.

اتین ژیس[1] در آخرین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان از سخنرانان جلسات عمومی بود، عضو آکادمی علوم است، او را اغلب، به حقّ، «بهترین سخنران دنیا» در ریاضی می‌دانند، او خود به تنهایی یک مؤسسه است. او از فعالان مدافع حقوق شهرستانی‌هاست که بیست سال است خود را وقف شکل دادن به یک لابراتوار ریاضی در دانشسرای عالی لیون کرده است و بیش از هر کس دیگر در تبدیل آن به یکی از بهترین مراکز هندسهٔ دنیا سهیم بوده است. اتین که غرغروست و به همان اندازه با هیبت، همیشه در مورد هر موضوعی حرف برای گفتن دارد.

اتین ژیس

ــ شکل‌هایی را که با فِردی کشیدیم می‌شناسی؟

ــ بله، این شکل را در نظریهٔ K.A.M.[2] می‌توان یافت. این یکی را هم قبلاً دیده‌ام ...

ــ مرجع خوبی داری؟

ــ بله، K.A.M. که می‌دانی، تقریباً همه جا پیدا می‌شود: تو با یک سیستم دینامیکی کاملاً انتگرال‌پذیر شروع می‌کنی که شبه‌دوره‌ای است، کمی آن را مختل می‌کنی، مسئلهٔ مقسوم‌علیه‌های مشترک است که برخی مسیرها را در درازمدت از بین می‌برد، با این حال پایداری احتمالاتی را داری.

ــ بله، می‌دانم، اما شکل‌ها چی؟

ــ صبر کن، در مورد شکل‌ها کتاب خوبی برایت پیدا خواهم کرد. اما شکل‌های زیادی را می‌توانی درکتاب‌های کیهان‌شناسی پیدا کنی که معمولاً آن‌ها را درکتاب‌های مربوط به سیستم‌های دینامیکی می‌بینیم.

بسیار جالب. دراین‌باره تحقیق خواهم کرد. آیا اینها کمکی به فهم آنچه در پس پایدارسازی نهفته است خواهند کرد؟

1. Étienne Ghys 2. Kolmogorov-Arnold-Moser

چیزی که بیش از هر چیزی دوست دارم این است که در لابراتوار من که خیلی کوچک است و خیلی هم کارامد، بین پژوهشگرانی که تخصص‌های ریاضی مختلفی دارند، در اطراف یک ماشین قهوه یا در راهروها، موضوع‌های متنوعی در گفتگوها درهم‌آمیخته می‌شوند بدون ترس از سدهایی که بین این رشته‌ها وجود دارد. مسیرهای زیادی برای اکتشاف پیدا می‌شوند!

نمی‌توانم صبر کنم تا اتین مرجعی برای من در کلکسیون وسیعش پیدا کند، پس ببینم در کتابخانهٔ خودم چه می‌توانم پیدا کنم: رساله‌ای تألیف آلیناک و ژرار[1] دربارهٔ روش نَش ـ موزر[2]. چند سال پیش این کتاب را با جدیّت خوانده بودم، و می‌دانم که روش نَش ـ موزر یکی از ستون‌های نظریهٔ کولموگوروف ـ آرنولد ـ موزر معروف به .K.A.M است که اتین دربارهٔ آن حرف می‌زد. این را هم می‌دانم که در پس روش نَش ـ موزر روش تقریب فوق‌العادهٔ نیوتون قرار دارد که با سرعت غیر قابل تصوری همگراست، نمایی در نمایی که کولموگوروف توانست به نحوی بسیار مبتکرانه از آن استفاده کند!

صادقانه بگویم هیچ ارتباطی بین این چیزهای زیبا و مسئلهٔ میرایی لانداوی خودم نمی‌بینم. اما شاید بینش اتین درست باشد؟ خیالبافی فعلاً بس است، کتاب را داخل کوله‌پشتی‌ام که خودش خیلی سنگین است می‌گذارم و دنبال بچه‌هایم به مدرسه‌شان می‌روم.

به محض اینکه وارد مترو می‌شوم، یک مانگا[3] از جیب کُتم درمی‌آورم، در لحظه‌ای کوتاه و ذیقیمت، دنیای خارج ناپدید می‌شود و جایش را به دنیایی می‌دهد که پر از جراحانی است که در حدّ فوق طبیعی ماهرند و چهره‌هایشان وصله‌پینه‌ای است، یاکوزا[4]های سنگدل که جانشان را فدای دخترهای کوچک با چشم‌های دُرشت آهویی می‌کنند، هیولاهای بی‌رحمی که ناگهان تغییر می‌کنند و به قهرمانان تراژدی تبدیل می‌شوند، پسر بچه‌های کوچکی با حلقه موهای بلوند که کم‌کم به هیولاهای بی‌رحم تبدیل می‌شوند. دنیایی شکاک و صمیمی، پرشور و حرارت و بی‌خوش‌خیالی، بدون پیش‌داوری و بدون اعتقاد به خیر و شر که لبریز از احساسات است، که اگر خواننده حاضر باشد ساده‌لوحانه تن به بازی دهد دل او را به درد می‌آورد و اشک به چشمانش می‌نشاند.

ایستگاه هتل دو ویل، باید پیاده شوم. در طول مسیر، قصه در مغز و در رگ‌هایم جریان پیدا کرده، مانند سیلی از جوهر و کاغذ. من از درون تمیز شده‌ام.

تمام افکار ریاضی به حالت توقف درآمده‌اند. مانگاها و ریاضیات مخلوط نمی‌شوند. شاید بعداً در رؤیاها مخلوط شوند؟ چه می‌شد اگر لانداو، پس از تصادف وحشتناکی که قاعدتاً می‌بایست

1. Alinhac & Gérard 2. Nash-Moser 3. Manga (کتابچهٔ مصور هفتگی ژاپنی)
4. Yakuza

منجر به مرگ او می‌شد، به دست بلک جَک[1] عمل جراحی می‌شد؟ حتماً این جراح لانداو را کاملاً احیا می‌کرد و او می‌توانست کارش را که در توان یک اَبَرمرد بود از سر بگیرد.

ببینم، دیگر به حرف اتین و داستان کولموگوروف ـ آرنولد ـ موزر هم فکر نکردم. کولموگوروف و لانداو ... چه ربطی به هم دارند؟ درحالی‌که پایم را از مترو بیرون می‌گذاشتم، دو مرتبه این راز در مغزم شروع به چرخیدن کرد. اگر ربطی وجود داشته باشد، آن را پیدا خواهم کرد.

در واقع، در آن زمان نمی‌توانستم حدس بزنم که به بیشتر از یک سال برای پیدا کردن آن، آن رابطه، احتیاج دارم. این طنز باورنکردنی را هم نمی‌فهمیدم که شکلی که اتین را به واکنش وا داشته بود، و او را به فکر کولموگوروف انداخته بود، شکلی بود که وضعیتی را نشان می‌داد که در آن دیگر رابطه با کولموگوروف قطع شده بود.

در آن روز شهود اتین به دلیل نادرستی درست بود. کمی به این می‌مانست که داروین پس از مقایسهٔ خفاش‌ها و پترواکتیل‌ها به اشتباه در مورد وجود رابطهٔ نزدیکی بین آن دو متقاعد می‌شد و تکامل انواع را حدس می‌زد.

ده روز پس از اینکه جلسهٔ من با کلمان نتایج غیرمنتظره‌ای به بار آورده بود، این دومین تصادف معجزه‌آسایی بود که بسیار به موقع در سر راه من اتفاق می‌افتاد.

اما باید بتوانم از این تصادف استفاده کنم.

*

«این فیزیکدان روسی، اسمش چه بود؟ او را پس از یك تصادف با اتومبیل مرده یافتند، مثل خودم. او از لحاظ طبی مرده بود. من داستان این واقعهٔ فوق‌العاده را خواندم. علم شوروی تمامی امکاناتش را برای نجات این پژوهشگر بی‌بدیل بسیج کرده بود. حتی از پزشکان خارجی هم کمك خواسته بودند. این مرده را احیاء کردند. در طی چندین هفته بزرگ‌ترین جراحان جهان یکی پس از دیگری بر سر بالین او آمدند. این انسان چهار بار مُرد. چهار بار در او حیات مصنوعی دمیدند، جزئیاتش را فراموش کرده‌ام اما یادم می‌آید که خواندن داستان این مبارزه با مرگی نپذیرفتنی حیرت‌انگیز بود. قبر او را کنده بودند، به زور او را از قبر بیرون آوردند. او دوباره بر سر کارش در دانشگاه مسکو بازگشت.»

پل گی‌مار، چیزهای زندگی[2]

*

1. Black Jack 2. Paul Guimard, 1994, *Les Choses de la vie*

قانون جاذبهٔ عمومی نیوتون می‌گوید که هر دو جسمی یکدیگر را با نیرویی که متناسب است با حاصلضرب جرم‌های آنها و به طور معکوس متناسب است با مربع فاصلهٔ میان آن دو جذب می‌کنند:

$$F = \frac{\mathcal{G} M_۱ M_۲}{r^۲}.$$

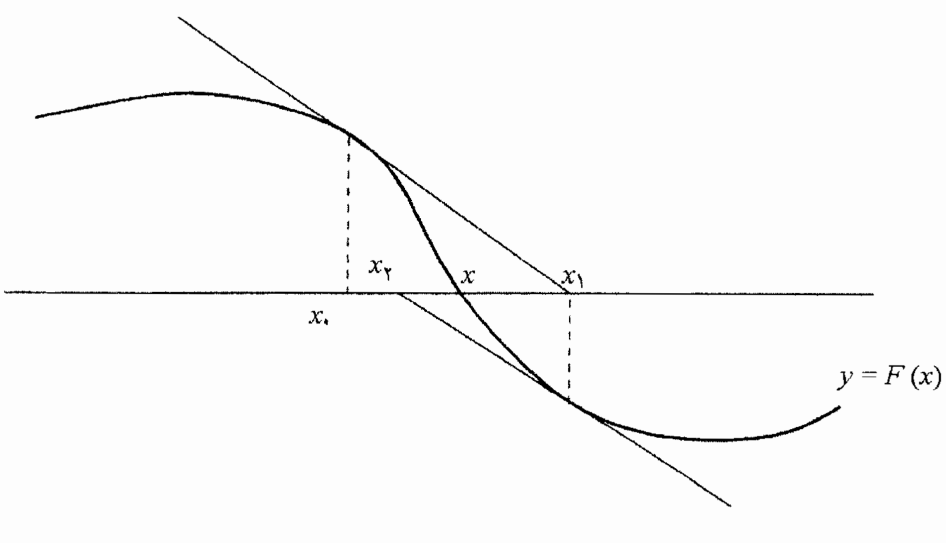
این قانون کلاسیك جاذبه، حرکت ستاره‌ها در کهکشان را به خوبی توضیح می‌دهد. اما، با وجود اینکه قانون نیوتون ساده است، تعداد بی‌شمار ستارگان یك کهکشان باعث می‌شود که این تئوری مشکل شود. با وجود این، برای اینکه بفهمیم [بدن] انسان چگونه کار می‌کند لازم نیست کارکرد تك‌تك اتم‌ها را جداگانه بدانیم ...

چند سال پس از قانون جاذبه، نیوتون موفق به کشف فوق‌العادهٔ دیگری شد: روش تقریب نیوتون، که به کمك آن می‌توان جواب‌های یك معادلهٔ دلخواه

$$F(x) = ۰$$

را یافت. از یك جواب نزدیك $x_۰$ شروع می‌کنیم، و به جای تابع F از مماس آن در نقطهٔ $(x_۰, F(x_۰))$، یعنی $T_{x_۰}$، استفاده می‌کنیم (به اصطلاح فنی، معادله را در حول نقطهٔ $x_۰$ خطی می‌کنیم) و معادلهٔ نزدیك $T_{x_۰}(x) = ۰$ را حل می‌کنیم. به این ترتیب جواب نزدیك جدیدی، $x_۱$، به دست می‌آوریم و کار را دوباره از سر می‌گیریم: به جای F از مماس آن در نقطهٔ $x_۱$، یعنی $T_{x_۱}$، استفاده می‌کنیم و جواب معادلهٔ $T_{x_۱}(x_۲) = ۰$ را $x_۲$ می‌نامیم و همین‌طور ادامه می‌دهیم. با استفاده از نمادهای ریاضی دقیق، رابطهٔ بین x_n و $x_{n+۱}$ عبارت است از

$$x_{n+۱} = x_n - [DF(x_n)]^{-۱} F(x_n).$$



تقریب‌هایی که با این روش به دست می‌آیند، یعنی x_1، x_2، x_3، ... در حد باورنکردنی خوب‌اند: این جواب‌ها با سرعتی باورنکردنی به جواب «واقعی» نزدیك می‌شوند. کافی است چهار یا پنج بار عمل تقریب انجام شود تا به دقتی بالاتر از دقت هر ماشین حساب مدرن دست یابیم. می‌گویند که بابلی‌ها در چهار هزار سال پیش از همین روش برای محاسبهٔ ریشهٔ دوم اعداد استفاده می‌کرده‌اند؛ نیوتون دریافت که این روش را می‌توان نه تنها برای محاسبهٔ ریشه‌های اعداد، بلکه در مورد هر معادلهٔ دلخواه دیگری نیز به کار برد.

مدت‌ها بعد، از همگرایی روش نیوتون، که با سرعتی خارق‌العاده صورت می‌گیرد، برای اثبات برخی از برجسته‌ترین نتایج نظری قرن بیستم، مانند قضیهٔ پایداری کولموگوروف، قضیهٔ غوطه‌ورسازی همان‌متری نَش[1] ... بهره گرفته شد. این روش که از نبوغی شیطانی نشان دارد به تنهایی تمایز تصنعی بین ریاضیات محض و ریاضیات کاربردی را پشت سر می‌گذارد.

اسحاق نیوتون

*

ریاضیدان روس، آندره کولموگوروف، چهره‌ای است افسانه‌ای در تاریخ علوم قرن بیستم. اوست که نظریهٔ مدرن احتمالات را در سال‌های ۱۹۳۰ پایه‌گذاری کرد. نظریهٔ تلاطم سیالات او، که در سال ۱۹۴۱ پرداخته شد، هنوز هم در جهت اثبات و هم در جهت نفی مرجعیت دارد. نظریهٔ پیچیدگی او از شکل‌گیری بحث هوش مصنوعی خبر می‌دهد.

او در سال ۱۹۵۴ در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان پیشنهاد حیرت‌آوری ارائه کرد. پوانکاره، ۷۰ سال پیش از آن، همکارانش را متقاعد ساخته بود که منظومهٔ شمسی ذاتاً ناپایدار است — یك تغییر در موضع سیارات، هر قدر کوچك هم که باشد، هرگونه پیش‌گویی در مورد موضع این سیارات در یك آیندهٔ دور را غیرممکن می‌سازد — کولموگوروف با شجاعتی حیرت‌آور

1. le théorème de plongement isométrique de Nash

احتمالات را با معادلات علیتی مکانیك درهم‌آمیخت و استدلال کرد که منظومهٔ شمسی احتمالاً پایدار است.

قضیهٔ کولموگوروف نشان می‌دهد که اگر یك دستگاه مکانیکی کاملاً حل‌پذیر داشته باشیم (مانند منظومهٔ شمسی، آن‌طور که کپلر تصور می‌کرد، که در آن سیارات سَربه‌راهانه و برای همیشه در مدارهای بیضوی تغییرناپذیر به دور خورشید می‌گردند) و کمی در آن اختلال ایجاد کنیم (نیروهای جاذبی گرانشی بین سیارات را نیز، که کپلر در نظر نمی‌گرفت، به حساب بیاوریم) آنگاه دستگاه حاصله در ازاء اکثریت بزرگی از شرایط اولیه پایدار باقی می‌ماند.

سبك فشردهٔ کولموگوروف و پیچیدگی استدلالش معاصرانش را به شك انداخت. ولادیمیر آرنولدِ روسی و یورگن موزرِ سوئیسی با دو رهیافت مختلف موفق شدند اثبات‌هایی کامل ارائه دهند؛ اولی قضیهٔ اصلی و دومی شکلی کلی‌تر از آن قضیه را اثبات کردند. این تولد نظریهٔ K.A.M. بود که مولد برخی از قوی‌ترین و غیرمنتظره‌ترین صفحات مکانیك کلاسیك شد.


آندره کولموگوروف

زیبایی منحصربه‌فرد این تئوری باعث مقبولیت آن نزد دانش‌پژوهان شد و آنها به مدت سه دهه معتقد به پایداری منظومهٔ شمسی بودند، در حالی که شرایط فنی لازمهٔ نظریهٔ کولموگوروف به طور دقیق در واقعیت برآورده نمی‌شوند. در اواخر سال‌های ۱۹۸۰ کارهای ژاك لاسکار باعث شد که این افکار دوباره تغییر کنند. اما این داستان دیگری است.

فصل چهارم

شایول، ۱۵ آوریل ۲۰۰۸

حضار نَفَس‌ها را در سینه حبس کرده‌اند، استاد علامت می‌دهد و تمام بچه‌ها آرشه‌ها را روی سیم‌ها به رقص درمی‌آورند. طبق روش سوزوکی، والدین هم باید در درس دسته‌جمعی شرکت کنند. در هر صورت، در این خانهٔ بزرگ کوهستانی که تماماً در اشغال کلاس‌های موسیقی است، چه کار دیگر می‌توان کرد؟

وقتی والدین صداهای خارج از نُت را می‌شنوند، سعی می‌کنند اخم نکنند. آنهایی که دیروز پذیرفته بودند آلات موسیقی فرزندانشان را، برای خوشایند آنها، بنوازند و خود را مورد تمسخر قرار دهند، می‌دانند درآوردن صدایی درست از این آلات اهریمنی چقدر مشکل است! اما امروز یک جَوِّ کاری واقعاً زیبا و خوش‌خُلقی بر محیط حاکم است و بچه‌ها خوشحال‌اند.

آنچه مهم است روش سوزوکی یا سایر روش‌ها نیست بلکه بیش از همه، استعداد آموزشی استاد است و استادی که به پسر من ویولن‌سِل می‌آموزد، باید گفت، فوق‌العاده است.

درحالی‌که در ردیف اول نشسته‌ام کتاب «دینامیک کهکشان‌ها» اثر بی‌نی و ترمینْ[1] را می‌بلعم، با شور و شوق بچهٔ کوچکی که دارد دنیای جدیدی را کشف می‌کند. فکر نمی‌کردم معادلهٔ ولاسوف تا این حد در اخترفیزیک مهم باشد. معادلهٔ بولتزمان کماکان زیباترین معادلهٔ جهان است، اما معادلهٔ ولاسوف هم آن‌قدرها بد نیست!

نه تنها احترام معادلهٔ ولاسوف در ذهن من بیشتر شده است بلکه جاذبهٔ ستاره‌ها هم افزایش

1. J. Binney & S. Tremaine, 1987, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press.

یافته است. کهکشان‌های مارپیچی، خوشه‌های ستاره‌ای، همه‌شان خوشگل‌اند، آره آره، بد نیستند ... اما اکنون که یک کلید ریاضی برای ورود به آنها در دست دارم، دیگر دلفریب شده‌اند.

پس از آن جلسه با کلمان، محاسبات را دوباره انجام دادم، کم‌کم ایده‌هایی دارد به سرم می‌آید. دارم زمزمه می‌کنم.

ــ نمی‌فهمم، می‌گویند که میرایی لانداو با اختلاط فازها خیلی فرق دارد ... اما من فکر می‌کنم که این‌دوتا در اصل یکی هستند. هوم هوم.

نگاهی به کله‌های موطلایی عزیز می‌اندازم. همه چیز روبه‌راه است.

ــ هوووم، این محاسبات بدک نیست. این پانوشت در پایین صفحه چیست ... آنچه در معادلهٔ خطی‌شده مهم است آنالیز طیفی نیست بلکه حل مسئلهٔ کوشی است. بله درسته، عقل هم همین را حکم می‌کند! من هم همیشه همین فکر را کرده‌ام. خوب این کار را چگونه انجام می‌دهند ... هوووم. تبدیل فوریه. بله همان آنالیز فوریهٔ قدیمی خودمان، تا حالا هیچ کاری از این بهتر نکرده‌اند. تبدیل لاپلاس، رابطهٔ پاشندگی (پراکندگی) ...

سریع یاد می‌گیرم، خود را در مطالعه غرق می‌کنم، جذب می‌کنم، مانند بچه‌ای که خود را غرق در یادگرفتن یک زبان خارجی می‌کند، دارم مفاهیم اولیه‌ای را که فیزیکدان‌ها نیم قرن است می‌دانند بدون ادعا و متواضعانه یاد می‌گیرم.

شب که شد، چهارزانو زیر شیروانی نشسته بودم، برای اینکه افکارم را عوض کنم، شروع کردم به بلعیدن داستان‌های کوتاه نیل گِی‌مَن به نام «چیزهای شکننده»[1] ــ این کتاب تازه از تنور درآمده است و هنوز ترجمه نشده. نیل می‌گوید این وظیفهٔ ماست که برای یکدیگر قصه بگوییم. حق دارد. داستان یک بدیهه‌نوازی نبوغ‌آمیز با کُنترباس، داستان پیرزنی کهنسال که خاطرات عشق‌های گذشته‌اش را نقل می‌کند، داستان ققنوس که همیشه دوباره زنده می‌شود و هر بار از او غذای لذیذی می‌پزند.

وقتی رفتم بخوابم، مدتی خوابم نبرد. روشن کردن چراغ ممکن نبود: تمام خانواده در یک اتاق خواب بودند. دیگر مغزم پرت‌وپلا می‌گوید، کهکشان‌های شکنندهٔ کهنسال فی‌البداهه داستانی مانند داستان‌های گِی‌مَن می‌سرایند، مسئلهٔ ریاضی همیشه و دوباره زنده می‌شود تا پژوهشگران دومرتبه از آن غذا بپزند. ستاره‌ها در ذهن من رشد می‌کنند. اصلاً قضیه‌ای که می‌خواهم ثابت کنم چیست؟

*

جکی نیوهاوس[2] درحالی که شعله‌ور بود گفت: «کروکراستِل[3] راستش را به من بگو. چند سال است که داری ققنوس را می‌خوری؟»

---

1. Neil Gaiman, 2006, *Fragile Things.*
2. Jackie Newhouse
3. Crawcrustle

زِبدیا گفت: «کمی بیش از ده‌هزار سال. چندهزار کمتر یا بیشتر. اگر راهش را یاد بگیری دیگر کار سختی نیست؛ راهش را یاد گرفتن سخت است. اما این بهترین ققنوسی است که تا به حال پخته‌ام. یا منظورم این است که این بهترین غذایی است که تا به حال با این ققنوس پخته‌ام؟»

ویریجینیا بوت گفت: «این همه سال! دارند تو را از بیخ و بن می‌سوزانند!؟»

زِبدیا پذیرفت: «همین‌طوره. مواظب باش، قبل از اینکه اونو بُخوری باید به حرارت عادت کنی. اگر نکنی می‌سوزی می‌ری.»

اگوستوس توفِذِر مك‌کوی[1] از میان شعله‌های پرنوری که او را احاطه کرده بودند گفت: «چرا این یادم نبود. چرا یادم نبود که پدرم و قبل از او پدرش هم همین راه را رفتند، هر دو برای خوردن ققنوس به خورشیدشهر رفتند؟ و چرا این تازه الان به یادم افتاد؟»

ویرجینیا، که حالا گداخته بود پرسید: «آیا باید بسوزیم و نابود شویم؟ یا باید بسوزیم تا بچه شویم، بسوزیم تا روح شویم و فرشته شویم و دوباره برگردیم سر جای اول؟ مهم نیست. کراستی[2] جان، همهٔ اینها چقدر سرگرم‌کننده‌اند.»

نیل گِی‌مَن، چیزهای شکننده

*

آنالیز فوریه عبارت است از بررسی نوسانات ابتدایی علامت‌ها. فرض کنید می‌خواهیم یك علامت معمولی را، که کمیتی است که با گذشت زمان تغییر می‌کند، تجزیه کنیم: مثلاً، صدا از تغییرات کوچك فشار هوا ایجاد می‌شود. ژوزف فوریه، دانش‌پژوه و سیاستمدار اوائل قرن نوزدهم، به جای اینکه مستقیماً تغییرات پیچیدهٔ چنین علامتی را مورد بررسی قرار دهد، به این فکر افتاد که این علامت را به ترکیبی از علائم ابتدایی تجزیه کند. هر یك از اینها به نحوی بسیار ساده و تکراری تغییر می‌کند: سینوسی‌ها (و برادران دوقلوی آنها کسینوسی‌ها).

ویژگی هر یك از این سینوسی‌ها را دامنه و بسامد تغییرات آن علامت تعیین می‌کند؛ در تجزیهٔ فوریه، دامنهٔ یك علامتْ حاوی اطلاعاتی در مورد اهمیت نسبی بسامد متناظر با آن دامنه است.

بدین‌ترتیب، صداهای اطراف ما از برهم‌نهاده شدن تعداد زیادی بسامدهای مختلف ایجاد می‌شوند. نوسانی که از ۴۴۰ ضربه بر ثانیه تشکیل می‌شود یك «لا» است، هر قدر دامنهٔ این نوسان بزرگ‌تر باشد صدا قوی‌تر شنیده می‌شود. ۸۸۰ ضربه بر ثانیه «لا»یی است که یك اوکتاو بالاتر شنیده می‌شود. اگر بسامد را در ۳ ضرب کنیم به فاصلهٔ پنجم یعنی «می» می‌رسیم؛ همین طور تا آخر. اما در عمل اصوات هرگز خالص نیستند و همیشه از همزمانی

1. Augustus TwoFeathers McCoy 2. Crusty

ژوزف فوریه

تعداد زیادی بسامد که تعیین‌کنندهٔ طنین صدا هستند ایجاد می‌شوند؛ در زمانی که کارشناسی ارشد را می‌گذراندم تمام اینها را در درس جذابی با عنوان «موسیقی و ریاضی» خواندم.

آنالیز فوریه به درد همه‌کار می‌خورد: به درد تجزیهٔ صوت‌ها و حك کردن آن‌ها روی یك CD، همچنین به درد تجزیهٔ تصاویر و انتقال آنها از طریق اینترنت، یا تجزیهٔ تغییرات سطح دریا و پیش‌بینی جذر و مدها ...

ویکتور هوگو، ژوزف فوریه را مسخره می‌کرد، به او فرماندار «کوچك» ایزر[1] می‌گفت و شرط می‌بست که شهرت او به عنوان عضو آکادمی و سیاستمدار دیری نخواهد پایید. در مقابلِ او شارل فوریهٔ سیاستمدار، «فوریهٔ بزرگ»، را قرار می‌داد که افکار اجتماعی او در آینده باقی خواهد ماند.

مطمئن نیستم که شارل فوریه [سوسیالیست] از این تعریف خوشش آمده باشد. سوسیالیست‌ها به هوگو بدگمان بودند، البته او بزرگ‌ترین نویسندهٔ عصر خویش بود اما گذشتهٔ سیاسی او به علت تعلقش به حزب باد لکّه‌دار بود، او به ترتیب سلطنت‌طلب، بناپارتیست، اورلئانیست، و لژیتیمیست بود و پس از تبعید هم به یك جمهوریخواه تبدیل شد.

آنچه مسلم است این است که ــ با تمام احترامی که برای آن نویسندهٔ استثنائی که آثارش را در زمان بچگی می‌بلعیدم قائلم ــ نفوذ ژوزف فوریه هم‌اکنون بسیار گسترده‌تر از نفوذ خود هوگو است؛ «شعر بزرگ ریاضی او» (به گفتهٔ لُرد کلوین) در تمام کشورهای دنیا درس داده می‌شود، و هر روز مورد استفادهٔ میلیاردها انسان است بدون آنکه خودشان بدانند.

*

1. Isère

چرکنویس ۱۹ آوریل ۲۰۰۸

برای به دست آوردن فرمول‌ها باید تبدیل‌ها را نسبت به سه متغیر x، v، و t حساب کنیم.

قرار می‌دهیم

$$\widehat{g}(k) = \int e^{-2i\pi x\cdot k} g(x)dx \qquad (k \in \mathbb{Z}^2)$$

$$\tilde{g}(k,\eta) = \int e^{-2i\pi x\cdot k} e^{-2i\pi v\cdot\eta} g(x,v)dvdx \qquad (k \in \mathbb{Z}^d, \eta \in \mathbb{R}^d).$$

سرانجام قرار می‌دهیم

$$(\mathcal{L}g)(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} g(t)dt$$

(تبدیل لاپلاس).

تا اطلاع ثانوی داریم $k \in \mathbb{Z}^d$.

اگر تبدیل فوریه را نسبت به x در معادلهٔ ولاسوف حساب کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t} + 2i\pi(v\cdot k)\widehat{f} = 2i\pi(k\widehat{W}\,\widehat{\rho})\cdot\nabla_v f_0(v).$$

با استفاده از فرمول دوهامل نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\widehat{f}(t,k,v) =& e^{-2i\pi(v\cdot k)t}\widehat{f}(k,v)\\ &+ \int_0^t e^{-2i\pi(v\cdot k)(t-\tau)} 2i\pi\widehat{W}(k)\widehat{\rho}(\tau,k)k\cdot\nabla_v f_0(v)dv.\end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری روی v خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\widehat{\rho}(t,k) &= \int \widehat{f}(t,k,v)dv\\ &= \int e^{-2i\pi(v\cdot k)t}\widehat{f_i}(k,v)dv + \int_0^t 2i\pi\widehat{W}(k)\\ &\quad\times\left(\int e^{-2i\pi(v\cdot k)(t-\tau)}k\cdot\nabla_v f_0(v)dv\right)\widehat{\rho}(\tau,k)d\tau.\end{aligned}$$

(باید انتگرال‌گیری روی v توجیه شود ... اما همیشه می‌توان فرض کرد که در ابتدا تکیه‌گاه تابع نسبت به سرعت فشرده است و بعد به فشردگی نزدیک شویم و یا فرض کنیم قطعه‌قطعه فشرده است ...)

جملهٔ اول از جملات دست راست همان $\tilde{f}_i(k,kt)$ است (یعنی همان شگردی که قبلاً در مورد همگن‌سازی معادلهٔ ترابری آزاد به کار گرفته شده بود ...).

تحت چند شرط ضعیف در مورد f_0، می‌توان نوشت که به ازاء هر $s \in \mathbb{R}$ داریم

$$\begin{aligned}\int e^{-2i\pi(v\cdot k)s} k\cdot\nabla f_0(v)dv =& +2i\pi|k|^2 s\int e^{-2i\pi(v\cdot k)s} f_0(v)dv\\ =&2i\pi|k|^2 s\tilde{f}_0(ks).\end{aligned}$$

بنابراین

$$\widehat{\rho}(t,k) = \tilde{f}_i(k,kt) - 4\pi^2\widehat{W}(k)\int_0^t |k|^2(t-\tau)\tilde{f}_0(k(t-\tau))\widehat{\rho}(\tau,k)d\tau.$$

قرار می‌دهیم

$$p_0(\eta) = 4\pi^2|\eta|\tilde{f}_0(\eta).$$

(مطمئن نیستم که قرار دادن 4π در اینجا فکر خوبی باشد ...) در برخی موارد (مثلاً اگر f_0 ماکسولی باشد)، p_0 مثبت است؛ اما در حالت کلی دلیلی وجود ندارد. ملاحظه می‌کنیم که $f_0 \in W^{\infty,1}(\mathbb{R}^d)$، p_0 سریعاً نزولی خواهد بود؛ اگر f_0 تحلیلی باشد به طور نمایی نزولی خواهد بود، و غیره. سرانجام به دست می‌آوریم

$$\widehat{\rho}(t,k) = \tilde{f}_i(k,kt) - \widehat{W}(k)\int_0^t p_0(k(t-\tau))\widehat{\rho}(\tau,k)|k|d\tau.$$

با محاسبهٔ تبدیل لاپلاس نسبت به $\lambda \in \mathbb{R}$، و به شرط اینکه همه چیز خوش‌تعریف باشد، به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}\widehat{\rho})(\lambda,k) = \int_0^\infty e^{\lambda t}\tilde{f}_i(k,kt)dt - \widehat{W}(k)&\\ \times\left(\int_0^\infty e^{\lambda t}p_0(kt)|k|dt\right)&(\mathcal{L}\widehat{\rho})(\lambda,k);\end{aligned}$$

و از آنجا نتیجه می‌شود

$$(\mathcal{L}\widehat{\rho})(\lambda,k) = \frac{\int_0^\infty e^{\lambda t}\tilde{f}_i(k,kt)dt}{1+\widehat{W}(k)Z\left(\frac{\lambda}{|k|}\right)},$$

که در آن

$$z(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t}p_0(te)dt, \qquad |e| = 1.$$

فصل پنجم

کیوتو، ۲ اوت ۲۰۰۸

صدای کَرکنندهٔ جیرجیرک‌ها قطع شده است، اما در خوابگاهِ دانشجویی بین‌المللی شوگاکو ـ این[1] گرمای طاقت‌فرسا تا دِلِ شب ادامه دارد.

امروز من یک دوره درس‌هایی راکه به شرکت‌کنندگان در سمینار، شامل پژوهشگران و دانشجویانی از پانزده کشور مختلف، اختصاص داشت به اتمام رساندم. از این دوره استقبال خوبی شد. در ساعت پیش‌بینی شده ــ با یک دقیقه اختلاف ــ شروع کردم و در ساعت مقرر ــ با یک دقیقه اختلاف ــ درس را به پایان رساندم. در این کشور به هیچ وجه نمی‌توان با وقت شوخی کرد، من باید به اندازهٔ قایقی که هفتهٔ پیش مرا به هوکایدو[2] آورد وقت‌شناس باشم.

شب‌هنگام، پس از بازگشت به خوابگاه داستان ماجراجویی‌های کلاغ کوچک ژاپنی، کوراکو، را برای فرزندانم نقل کردم. او که روزی متوجه شد پدر و مادرش او را ترک کرده‌اند، همراه صاحب بسیار جوانش آرتور، سفری طولانی به فرانسه و مصر را در سیرک‌ها و بازارهای عرب و در جستجوی یک رمز پنهان آغاز کرد. داستانی فی‌البداهه و پرشاخ‌وبرگ که طبق گفتهٔ دخترم «یک داستان خیالی» است و این چیزی است که او ترجیح می‌دهد و برای راوی هم مهیج‌ترین چیز است.

اکنون بچه‌ها خوابیده‌اند و یک بار هم که شده معطل نکردم و از کار خوب آنها پیروی کردم. بعد از داستان خیالی ریاضی که برای پژوهشگرانِ جوانِ نوپا حکایت کردم و داستان خیالی کلاغ که برای بچه‌هایم اختراع کردم، حتماً استحقاق این را پیدا کرده‌ام که یک داستان خیالی هم برای خودم نقل کنم: مغز من وارد رؤیایی عجیب‌وغریب شد.

1. Shugaku-in 2. Hokkaido

داستان از ذهنم فرار کرد و از خواب جهیدم، ساعت کمی از ۵ و ۳۰ دقیقه گذشته است. پس از گذشت کسری از ثانیه که در طی آن از خود می‌پرسیم در کدام قاره داریم به هوش می‌آیم، سعی می‌کنم در کامپیوترم تکه‌هایی از رؤیا را که باقی مانده‌اند ثبت کنم، قبل از اینکه توسط مه ذهنی صبحگاهی پراکنده شوند. پیچیدگی و آشفتگی رؤیا باعث شد که حال خوشی به من دست دهد. این را علامت خوبی برای سلامت مغزم تلقی کردم. خواب‌های من به اندازهٔ آنهایی که دیوید ب. در داستان‌های تصویری نشان می‌دهد ژولیده نیستند. اما آن‌قدر پیچ‌درپیچ هستند که در من احساس آرامش ایجاد کنند.

چند ماهی است که میرایی لانداو را به کناری گذاشته‌ام. در هیچ اثباتی پیشرفتی نداشته‌ام، اما مشکلی را پشت سر گذاشته‌ام: الان می‌دانم چه چیزی را می‌خواهم ثابت کنم. می‌خواهم ثابت کنم که جوابی از معادلهٔ ولاسوف غیرخطی و دوره‌ای در فضا که به یک تعادل پایدار نزدیک است خودبه‌خود به سمت تعادلی دیگر حرکت می‌کند. این گزاره‌ای است انتزاعی اما رابطه‌ای محکم با واقعیت دارد، از حیث موضوعی دارای اهمیت علمی و نظری قابل ملاحظه‌ای است؛ مسئله‌ای است که بیان آن آسان اما احتمالاً اثبات آن مشکل است؛ سئوالی است بدیع در مورد مُدلی که خوب شناخته شده است. از همهٔ اینها خیلی خوشم می‌آید: مسئله را در گوشه‌ای از مغزم نگه می‌دارم، و در ماه سپتامبر، آغاز سال تحصیلی جدید، دوباره به آن خواهم پرداخت.

گذشته از جواب سئوال (درست یا غلط)، امیدوارم که اثبات آن حاوی اطلاعات زیادی باشد! ریاضیات هم مثل داستان‌های پلیسی یا یکی از داستان‌های سریال کُلُمبو است: استدلالی که کارآگاه برای به اشتباه انداختن قاتل می‌آورد اقلاً به اندازهٔ حل خود معما حائز اهمیت است.

اما فعلاً، چیزهای دیگری در سر دارم: می‌خواهم ضمیمه‌ای به رساله‌ای که دو سال قبل نوشته‌ام اضافه کنم؛ در کاری که معادلات جنبشی و هندسهٔ ریمانی را درهم‌می‌آمیزد دارم پیشرفت می‌کنم. در میان تقریب‌های مثبت بودن موضعی برای معادلات هیپوالیپتیک از یک طرف و معادلهٔ جنبشی فوکر ـ پلانک در هندسهٔ ریمانی از طرف دیگر، در شب‌های طولانی ژاپنی مشغولیت فراوان خواهم داشت.

*

OPTIMAL TRANSPORT AND GEOMETRY

Kyoto, 28 July - 1 August 2008

Cédric Villani

ENS Lyon
& Institut Universitaire de France
& JSPS

Plan of the course (5 chapters)

- Basic theory
- The Wasserstein space
- Isoperimetric/Sobolev inequalities
- Concentration of measure
- Stability of a 4th order curvature condition

Most of the time statements, sometimes elements of proof

Gromov–Hausdorff stability of dual Kantorovich pb

- $(\mathcal{X}_k, d_k) \xrightarrow[k\to\infty]{GH} (\mathcal{X}, d)$ via ε_k-isometries $f_k : \mathcal{X}_k \to \mathcal{X}$
- $c_k(x, y) = d_k(x, y)^2/2$ on $\mathcal{X}_k \times \mathcal{X}_k$
- $\mu_k, \nu_k \in P(\mathcal{X}_k) \quad (f_k)_\# \mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu$, $(f_k)_\# \nu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \nu$
- $\psi_k : \mathcal{X}_k \to \mathbb{R}$ c_k-convex, $\psi_k^{c_k}(y) = \inf_x[\psi_k(x) + c_k(x, y)]$, achieving $\sup \left\{ \int \psi_k^{c_k}\, d\nu_k - \int \psi_k\, d\mu_k \right\}$

Then up to extr. $\exists\, a_k \in \mathbb{R}$ s.t. $(\psi_k - a_k) \circ f_k' \xrightarrow[k\to\infty]{} \psi$,

$$\psi \text{ } c\text{-convex achieving } \sup \left\{ \int \psi^c\, d\nu - \int \psi\, d\mu \right\}.$$

Moreover $\forall x \in \mathcal{X}$, $\limsup_{k\to\infty} f_k\Big(\partial_{c_k} \psi_k(f_k'(x))\Big) \subset \partial_c \psi(x)$.

وقتش که رسید، کوراکو گلولهٔ بد بویی را به داخل پناهگاه انداخت. این کَلَك را هم در سال‌هایی که در سیرك بود یاد گرفته بود. بوی بد وحشتناك می‌شود و نگهبانان حالشان بهم می‌خورد، و در این حین حَمَد و چی‌چون دهانهٔ هواکش‌ها را پُر از ماسه می‌کنند.

شیپور نواخته می‌شود: طناب‌ها را پاره می‌کنند، سَرپناه خراب می‌شود، حَمَد همه را از پای درمی‌آورد ... (توصیفی طولانی از صحنه‌های وحشتناك) در میانهٔ این بدبیاری، پدر آرتور و همراهش هم پیدا می‌شوند. آنها را دزدیده بودند و می‌خواستند دربارهٔ یك سند سری، یك پاپیروس قدیمی که رمز زنده کردن مومیایی‌ها را دربرداشت از آنها اعتراف بگیرند. همکار پدر آرتور هم مثل خود او یك مصرشناس بود و متخصص هیروگلیف.

تبهکارها همه اسیر شدند و آنها را نزد آقای دیوانه بردند و به آنها گفته شد که اگر اقرار نکنند رئیس‌شان کیست همگی شکنجه و کشته خواهند شد. جلسات بازجوییِ پی‌درپی شروع شد. کوراکو از واکنش پدر آرتور ناراحت بود. به خصوص که او راضی به نظر می‌رسید و با آن مکان‌ها آشنا بود توگویی قبلاً در آنجا زندگی می‌کرده. کوراکو تصمیم می‌گیرد که مخفیانه در یکی از بازجویی‌ها شرکت کند و آنجا به امری بسیار غیرمنتظره پی می‌برد: آقای دیوانه و پدر آرتور از قبل یکدیگر را می‌شناخته‌اند. فردای آن روز نزد آرتور می‌رود و خبر نگران‌کنندهٔ جدید را به او می‌دهد.

*

رؤیای ۲ اوت ۲۰۰۸ (یادداشت)

من، هم جزئی از یک فیلم تاریخی هستم و هم عضو یک خانوادهٔ سلطنتی. رؤیایی آشفته، آمیزه‌ای از تاریخ و فیلم، که در عین حال من هم در داستان نقش دارم. چندین سطحِ مختلفِ روایت. اما واقعاً شاهزاده بد می‌آورد. از آزار او دست برنمی‌دارند. مردم، مطبوعات، فشار بسیار زیاد. پادشاه، پدر شاهزاده خانم، حقّه‌بازی می‌کند، داستان پول و داستان پسری که از مردم پنهانش کرده‌اند. آزادی‌ها درست و حسابی تضمین نشده‌اند. روزنامهٔ لوموند را به خاطر آنچه در صفحهٔ اولش نوشته به باد ناسزا می‌گیرم. باز هم در سیاست حماقت کرده‌اند. اما یک نگرانی مهم بین‌المللی مربوط می‌شود به افزایش قیمت مواد اولیه. کشورهای شمالی، به خصوص ایسلند یا گرینلند که بخش بزرگی از درآمد آنها به حمل و نقل بستگی دارد متضرر می‌شوند. به هر صورت بهبودی در آینده به چشم نمی‌خورد. دربارهٔ امکان رفتن مثلاً به پاریس یا در هر صورت ملاقات با ورزشکاران

مشهور، که مشاهیر واقعی آنها هستند، اظهارنظر می‌کنم، بر پشت، هولوگرام‌هایی که نقش فرزندانم را دارند می‌زنم ... اما تصمیم به خودکشی دسته‌جمعی گرفته شده است. نمی‌دانم وقتش که برسد آیا همه آنجا خواهند بود یا نه. وَنسان بِفارا که نقش یکی از بچه‌ها را بازی می‌کرد آنجا نیست. اما او حالا دیگر خیلی به درد نقشی که باید ایفا کند نمی‌خورد، فیلمبرداری خیلی طول کشیده است و وَنسان بزرگ شده؛ به جای او از بازیگری دو بار استفاده می‌کنیم، برای خاتمهٔ نقشش چیز زیادی برای گفتن ندارد، یک بچه هم برای این کار کافی است. خیلی هیجان‌زده‌ام، می‌خواهیم عملیات را شروع کنیم. به تابلوها و پوسترهای روی دیوار نگاه می‌کنم، موضوع آنها آزار راهبه‌های برخی فرقه‌ها در زمانی قدیم است، قبل از رفتن به سوی مرگ موهایشان را باز می‌کردند، و این کار در مورد دو فرقهٔ مختلف انجام می‌شده است، درصورتی‌که بر طبق اعتقادات تنها کسانی که متعلق به فرقهٔ واحدی بودند می‌بایست در موقعیت یکسان بمیرند، تنها این افراد می‌بایست موهایشان را باز می‌کردند. یک تابلویی هم هست به نام در ستایش مخالفت یا چیزی شبیه به این. مبهم است. در این تابلو هیولا/ پلیس‌هایی دیده می‌شوند که دارند تظاهرکننده‌ها را به شدت می‌زنند. اعتراض آن تظاهرکننده‌ها هم مبهم است. کلِر را برای آخرین‌بار می‌بوسم، همگی بسیار هیجان‌زده هستیم. نزدیک ساعت ۵ صبح است، تمام خانواده دور هم جمع هستیم، باید به جایی مثل اطلاعات راهداری تلفن کنیم، با صدای مبدّل بگوییم که احتیاج به مواد منفجره داریم و آنها می‌توانند مواد را به اینجا بفرستند؛ اگر از رعایت احتیاط و این‌چیزها صحبت کنند، به آنها (به زبان انگلیسی) خواهیم گفت: مرسی، من از دیوانه‌خانه می‌آیم (یعنی من با این مواد منفجره شخص خطرناکی خواهم بود)، یارو متوجه خواهد شد که این یک شوخی است و همه چیز را برای ما می‌فرستد، بعد هم همه چیز منفجر خواهد شد. همه چیز برای ساعت ۵ و ۳۰ دقیقه پیش‌بینی شده است. نمی‌دانم آیا می‌خواهم زندگی‌ام را در دنیایی دیگر ادامه دهم، جهت دیگری را بیازمایم، یا به صورت طفلی دوباره متولد شوم، سال‌ها در حالت مبهم بمانم تا اینکه آگاهی‌ام دوباره سَر برآورد ... بسیار نگرانم. ساعت ۵ و ۳۵ دقیقه (ساعت واقعی) بیدار شدم.

فصل ششم

لیون، پاییز سال ۲۰۰۸

و روزها و شب‌ها
در همنشینی با مسئله‌ام
سپری می‌شوند

در آپارتمانم در طبقهٔ پنجم بدون آسانسور، در اتاق کارم، در تختخوابم ...

در صندلی راحتی‌ام نشسته‌ام؛ شب بعد از شب، چایی بعد از چایی، مسیرهای اصلی و فرعی را یک به یک بررسی می‌کنم، با دقت فراوان تمام امکانات را یادداشت می‌کنم و راه‌های بن‌بست را به تدریج حذف می‌کنم.

یک روز در ماه اکتبر یک ریاضیدان کره‌ای، از شاگردان قدیم یَن گو دستنوشته‌ای در مورد میرایی لانداو برای من فرستاد تا بلکه بتواند آن را در مجله‌ای که من عضو هیئت تحریریه‌اش بودم چاپ کند: «وجود جواب‌هایی برای مسئلهٔ میرایی لانداوِ غیرخطی که به طور نمایی نزولی هستند»[1].

یک لحظه تصور کردم که آن خانم و همکارش نتیجه‌ای را که آن‌قدر مورد علاقهٔ من بود اثبات کرده‌اند: ایشان جواب‌هایی برای معادلهٔ ولاسوف ساخته بودند که خود به خود سَبُک می‌شوند و به سوی تعادل پیش‌می‌روند! من بلافاصله به سردبیر مجله نوشتم که دستنوشت با منافع من تعارض دارد و نمی‌توانم آن را داوری کنم.

اما وقتی از نزدیک بررسی کردم، فهمیدم که آنها از هدف بسیار دورند: تنها چیزی که ثابت

1. "On the existence of exponentially decreasing solutions of the nonlinear Landau damping problem"

کرده بودند وجود برخی جواب‌های میرا بود؛ درحالی‌که باید ثابت کرد تمام جواب‌ها این‌طور هستند! اگر بدانیم فقط برخی جواب‌ها میرا هستند، هیچ‌وقت نخواهیم دانست که آیا به یکی از آنها برخواهیم خورد یا خیر ... به علاوه ده سال پیش در مقاله‌ای متعلق به دو ایتالیایی چیزی اثبات شده بود که به این نتیجه نسبتاً نزدیک بود، و ظاهراً این یکی‌ها از آن مقالهٔ متقدم بی‌اطلاع بوده‌اند.

خیر، کلید **مسئله** پیدا نشده است. هر چند، اگر مسئله به این سادگی‌ها می‌بود که مایهٔ ناامیدی می‌شد! مقاله‌شان تقریباً سی صفحه‌ای می‌شود، سطح خوبی دارد اما فهم آن کار سختی نیست. تَهِ دلم می‌دانم که حل این مسئله به ابزاری کاملاً جدید نیاز دارد و از این رو موجب پیدایش نگاهی نو به مسئله نیز خواهد شد.

ــ به یک نُرم جدید احتیاج دارم.

نُرم در اصطلاح ریاضی، قاعده‌ای است که برای اندازه‌گیری مقدار کمیتی که مورد نظر ماست تعیین می‌کنیم. اگر بخواهیم میزان بارندگی در شهرهای برست و بوردو را با یکدیگر مقایسه کنیم آیا باید حداکثر بارندگی در یک روز را [در این دو شهر] مقایسه کنیم یا جمع بارندگی در سراسر سال را؟ اگر حداکثر بارندگی در روز را مقایسه کنیم نُرم سوپ[1] (سوپریمم = کوچکترین کران بالا) را به کار گرفته‌ایم که نام دلنشین آن نُرم L^∞ است. اگر جمع بارندگی‌ها را مقایسه کنیم، از نُرم دیگری استفاده کرده‌ایم که L^1 نام دارد. نُرم‌های بسیار دیگری نیز وجود دارند.

برای اینکه به چیزی «نُرم» اطلاق شود باید دارای برخی ویژگی‌ها باشد؛ مثلاً، نُرم مجموع دو جمله باید کوچکتر یا مساوی باشد با مجموع نُرم‌های جداگانهٔ این دو جمله. اما این هم هنوز امکانات فراوانی باقی می‌گذارد.

ــ به آن نُرم خوبه احتیاج دارم.

از بیش از یک قرن قبل که مفهوم نُرم تعریف شد ریاضیدان‌ها نُرم‌های بسیاری اختراع کرده‌اند. درسی که من در سال دوم دانشسرای عالی لیون ارائه می‌دهم پُر است از این نُرم‌ها. نُرم لِبگ، نُرم سوبولُف، نُرم هیلبرت، نُرم لورنتس، نُرم بِستوف، نُرم هولدر، نُرم‌های مارسین‌کیویچ[2] و لیزورکین[3]، نُرم‌های L^p، $W^{s,p}$، H^s، $L^{p,q}$، $B^{s,p,q}$، $\mathcal{H}^\alpha$، M^p، $F^{s,p,q}$، و دیگر نمی‌دانم چه!

اما این بار، هیچ‌کدام از نُرم‌هایی که می‌شناسم ظاهراً به کار نمی‌آید. باید یک نُرم جدید از خودم دربیاورم. باید با شعبده‌بازی آن را از آستین ریاضیات دربیاورم.

ــ نُرم رؤیایی من باید تقریباً تحت ترکیب در نزدیکی عنصر همانی پایدار باشد ... و خود را با شاخه‌شاخه شدن[4] مخصوص معادلهٔ ولاسوف به ازاء زمان‌های طولانی تطبیق دهد. خدای من! چه طور چنین چیزی امکان دارد؟ سعی کردم سوپ (sup) را با وزن در نظر بگیرم، شاید

1. la norme de sup 2. Marcinkiewicz 3. Lizorkin 4. filamentation

باید نوعی تأخیر وارد کار کنم ... در صحبت با کلمان، گفته بودیم که باید حافظهٔ زمانِ سپری‌شده نگهداشته شود، با جواب معادلهٔ ترابری آزاد مقایسه شود، OK موافقم، اما چطور باید مقایسه کنم؟

یک روز که داشتم رسالهٔ آلیناک ـ ژرار را دوباره می‌خواندم، تمرینی توجه مرا به خود جلب کرد. باید نشان دهیم که نُرم داده شده، W، یک نُرم جبر است. یعنی اینکه نُرم Wی حاصلضرب دو جمله حداکثر برابر است با حاصلضرب نُرم‌های Wی جداگانهٔ این جملات. این تمرین را مدت‌هاست که بلدم، اما وقتی آن را دوباره دیدم به نظرم آمد که ممکن است برای **مسئلهٔ** من مفید باشد.

ــ بعله، اما باید ارزشیابی در نقطهٔ o را با گذاردن یک سوپ، و شاید هم یک انتگرال تغییر داد، بعد هم این در مورد متغیر موضع کارامد نخواهد بود، به نُرم جبر دیگری احتیاج است ... شاید با فوریه؟ یا اینکه ...

۱۹ نوامبر، پس از چند کوشش بی‌ثمر، فکر کردم که شاید نُرم را پیدا کرده باشم. در آن زمان، هر شب کاغذهایی را سیاه می‌کردم و نتایج را به تدریج برای کلمان می‌فرستادم. ماشین به حرکت درآمده است. سِدوراک به پیش!

*

فرض کنیم D قرص واحد در $\mathbb{C}$، و $W(D)$ فضای توابع هولومورف بر D با شرط زیر باشد

$$||f||_{W(D)} = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(\circ)|}{n!} < +\infty.$$

نشان دهید که، اگر $f \in W(D)$، و g در نزدیکی مقادیری که f روی $\bar{D}$ اتخاذ می کند هولومورف باشد، در این صورت $g \circ f \in W(D)$. راهنمایی: توجه داریم که

$$||h||_{W(D)} \leq C \sup_{z \in D} \left(|h(z)| + |h''(z)|\right)$$

و اینکه $W(D)$ یك جبر است؛ سپس می‌نویسیم $f = f_۱ + f_۲$ که در آن

$$f_s(z) = \sum_{n > N} \frac{f^n(\circ)}{n!} z^n.$$

N را آن‌قدر بزرگ انتخاب می‌کنیم که سری $\sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\circ)}{n!} f_۲^n$ خوش‌تعریف باشد و در $W(D)$ همگرا.[1]

*

1. S. Alinhac & P. Gérard, 1991, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser* (chapitre III, exercice A.1.a).

Date: Tue, 18 Nov 2008 10:13:41 +0100
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: Dimanche IHP

الان آخرین ایمیل‌هایت را دیدم، آن‌ها را با جزئیات خواهم خواند،
این زحمتش با من، سعی می‌کنم آن را در قالب یک قضیه ٔ پایداری
برای جواب معادله ٔ ترابری با یک اختلال کوچک تحلیلی، بگنجانم!
ادامه، به زودی! کلمان

Date: Tue, 18 Nov 2008 16:23:17 +0100
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: Dimanche IHP

یک اظهارنظر مبهم پس از مشاهده ٔ یک مقاله از تائو (منظورم
خلاصه‌ای است که در وبلاگش نوشته) درباره ٔ تلاطم ضعیف و
معادله ٔ شرودینگر مکعبی 2dی پادکانونی‌کننده.

تعریف او از تلاطم ضعیف این است: فرار جرم برحسب متغیر بسامد به طور
مجانبی، و تعریف او از تلاطم قوی این است: فرار جرم برحسب متغیر
بسامد در زمان متناهی. این هم حدسی است که برای معادله‌اش به فرمول
در آورده: حدس. (تلاطم ضعیف) جوابهای هموار چون u(t, x) برای (1) وجود
دارد به طوری که \|u(t)\|_{H^s({\Bbb T}^2)} به سمت بینهایت میل
می‌کند هرگاه t\to\infty به ازاء s>1.

باید ببینیم آیا می‌توانیم این را برای جواب‌هایی که می‌خواهیم بسازیم
هم اثبات کنیم (در مورد معادله ٔ ترابری آزاد، در واقع هم مشتقات
برحسب x منفجر می‌شوند). آنها هم مثل ما احتیاج دارند مسئله را
به چنبره محدود کنند ظاهرا" برای اینکه بتوانند این پدیده را،
بدون اینکه پاشندگی در متغیر حقیقی x بتواند دست بالا را پیدا کند،
مشاهده کنند. بر عکس، چیزی که نمی‌فهمم این است که آنها
اصرار دارند این پدیده غیرخطی است و در موارد خطی مشاهده نمی‌شود.
ظاهرا" در مسئله ٔ ما این پدیده در سطح خطی هم وجود دارد...

ادامه دارد، کلمان

Date: Wed, 19 Nov 2008 00:21:40 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: Dimanche IHP

خب، این هم برای امروز. فکرهایی را که کرده بودم در پرونده‌ی «تقریب‌ها» یادداشت کرده‌ام، قسمت اول را که دیگر به درد نمی‌خورد دور ریختم و تقریب‌های گوناگونی را که در پرونده‌های مختلف پراکنده بودند جمع‌آوری کردم، به طوری که الان همه تقریباً در یک پرونده هستند.

فکر می‌کنم هنوز برای ما واضح نیست باید با کدام نرم کار کنیم:

ــ از آنجا که در مورد یک میدان همگن، معادله نسبت به \rho تنها در زمان (!) کامل است، مجبوریم با یک نرم ثابت کار کنیم، که این نرم هم باید تحت عمل ترکیب با \Om پایدار باشد.

ــ [تبدیل] فوریه ظاهراً اجتناب‌ناپذیر است زیرا این تبدیل [توابع] تحلیلی را به [توابع]ی که به طور نمایی نزولی هستند تبدیل می‌کند. من نمی‌دانم چه طور همگرایی نمایی را مستقیماً بدون تبدیل فوریه انجام دهم، البته این کار باید امکان‌پذیر باشد.

ــ از آنجا که تغییر متغیر در (x, v) است و تبدیل فوریه‌ی \rho یک تابع دیراک در \eta است، به نظر می‌رسد که به یک نرم تحلیلی از نوع L^2 در k و L^1 در \eta احتیاج داشته باشیم.

ــ اما این ترکیب مسلماً هرگز در فضایی از نوع L^1 پیوسته نخواهد بود، پس، این نیست، شاید لازم باشد زرنگ‌تر باشیم و احتمالاً باید اول روی \eta ها «انتگرال» بگیریم. می‌ماند نُرمی از نوع L^2 که در متغیر k تحلیلی باشد.

نتیجه: لازم است از این هم زرنگ‌تر باشیم.

دنباله دارد.
سدریک

Date: Wed, 19 Nov 2008 00:38:53 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: Dimanche IHP

در تاریخ ۲۰۰۸/۱۱/۱۹، ساعت ۰۰.۲۱، سدریک ویلانی نوشت:

> نتیجه: لازم است از این هم زرنگ‌تر باشیم.

احساس من الان این است که برای حل این مشکل به قضیه‌ی پیوستگی ترکیب با امگا نسبت به نرم تحلیلی L^2 تحت [تبدیل فوریه] (بدون از دست دادن وزن...) و در نظر گرفتن \eta به عنوان یک پارامتر نیاز داریم. خب تا فردا :-)

Date: Wed, 19 Nov 2008 10:07:14 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: Dimanche IHP

پس از خواب شب به فکرم آمد که این واقع‌بینانه نیست: عمل ترکیب
با اُمگا ضرورتاً باعث می‌شود کمی از لاندا را از دست بدهیم
(وقتی Id (اپسیلون ـ 1)=امگا همین اتفاق می‌افتد). بنابراین
باید علی‌رغم ظواهر امر خودمان را با این واقعیت وفق دهیم.

دنباله دارد...

Date: Wed, 19 Nov 2008 13:18:40 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: update

به پیوست پرونده‌ٔ به روز [ارسال می‌شود]:

بخش فرعی ۲.۳ را اضافه کرده‌ام که در آن یک اشکال اساسی آشکار
مربوط به چیزی را که درباره‌ٔ آن تلفنی گفتگو کردیم مورد
بررسی قرار داده‌ام، همان مسئله‌ٔ ازدست‌دادن فضای تابعی بر اثر
تغییر متغیر. نتیجه‌ٔ بررسی این است که این فضا از دست نمی‌رود
اما باید در مورد تقریب‌های تغییر متغیر بسیار دقیق باشیم.
سدریک

Date: Wed, 19 Nov 2008 14:28:46 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: update

اضافات جدید در انتهای بخش ۲.۳ الان ریختش نسبتاً" خوب به نظر می آید.

Date: Wed, 19 Nov 2008 18:06:37 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: update

فکر می‌کنم بخش ۵ فعلی غلط است!! مسئله بعد از جایی قرار دارد که
تو نوشته‌ای «با قسمت کردن توان‌ها و فاکتوریل‌ها»: خط بعد به نظر درست
می آید، اما در فرمولی که پایین‌تر از این خط آمده شاخص‌ها با هم

نمی‌خوانند (N_{k-i+1}/(k-i+1)! باید بشود N_k/k! و نه N_k/(k+1)!)

در واقع به نظر من نتیجهٔ به دست آمده زیاده از حد قوی است.
این یعنی اینکه اگر ترکیب با تقریبی از عنصر همانی صورت گیرد
همان شاخص نرم ِ تحلیلی حفظ می‌شود. در حالی که من فکر می‌کنم هدف
را باید چیزی مثل
\|f\circ G\|_\lambda\leq const.\|f\|_{\lambda\|G\|}\|G\|
یا چیزی از این نوع قرار داد.

دنباله دارد،
سدریک

Date: Wed, 19 Nov 2008 22:26:10 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: good news

در نسخه‌ای که پیوست است بخش ۵ غلط‌دار را بیرون انداختم
(اگر احتیاج شد همیشه می‌توانیم آن را بازیابی کنیم) و به جای آن
محاسبات مربوط به ترکیب را قرار دادم و همیشه از شکل‌های تحلیلی
یکسانی استفاده کردم. مثل اینکه این بار ترکیب دارد جواب می‌دهد،
مثل اینکه خواب می‌بینم (فرمولی که پیشنهاد کرده بودم درست
نیست، نهایتاً" از آن هم ساده‌تر است، اما هر دو از یک نوع‌اند).

دنباله دارد، سدریک

Date: Wed, 19 Nov 2008 23:28:56 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: good news

به پیوست نسخهٔ جدید ارسال می‌شود. من دیدم که محاسبات معمول را
می‌توان با نرمی که قاعدهٔ ترکیب (بخش ۵.۱) اقتضا می‌کند انجام داد.
این کمکی پیچیده‌تر است اما ظاهراً" نتیجه‌ای از همان نوع
به دست می‌دهد. برای امروز دیگر کاری ندارم. سدریک

فصل هفتم

بورگوآن ژالیو، ۴ دسامبر ۲۰۰۸

از در خروجی پارکینگ نور چراغ‌های اتومبیل تاریکی شب را می‌شکافد و چشم‌هایم را خیره می‌کند. نزدیک می‌شوم. این سومین بار است:

ــ ببخشید، به لیون می‌روید؟

ــ اِ ... بله.

ــ ممکن است خواهش کنم مرا هم ببرید؟ این ساعت دیگر قطاری نیست!

خانم راننده چند لحظه مردد می‌ماند، نگاهی به مسافرینش می‌اندازد و مرا دعوت به سوار شدن در عقب ماشین می‌کند. سوار می‌شوم.

ــ بینهایت متشکرم.

ــ شما کنسرت بودید، نه؟

ــ بله بله، قشنگ بود، نه؟

ــ بَ...لِه، خیلی خوب بود.

ــ نمی‌خواستم بیستمین سالگرد تِت رِد[1]ها را از دست بدهم! اما از رانندگی بیزارم، بنابراین با قطار آمدم و به خودم گفتم حتماً یک لیونی را پیدا خواهم کرد که مرا با اُتو استاپ برگرداند.

ــ با کمال میل، نگران نباشید، من پسرم را آورده بودم و دوستش که کنار شما نشسته است.

ــ شب به خیر می‌گویم به همگی ...

1. Têtes Raide

ـــ بالا پایین پریدن زیاد سخت نبود، سالن هم بزرگ بود، لازم نبود پای همدیگر را لگد کنیم، جَوّ آرام بود.

ـــ بله، دخترها بهانه‌ای برای شکایت نداشتند.

ـــ اوه، بعضی‌ها وقتی خیلی تُند می‌شود را دوست دارند!

خاطرهٔ خوش یک دخترِ پانکِ سوراخ‌سوراخِ قشنگ و سرشار از انرژی در یک کنسرت در پیگال که همین بالا و پایین پریدن‌ها باعث شد توی بغل من بیفتد.

ـــ عنکبوت شما قشنگ است.

ـــ بله من همیشه یک عنکبوت با خودم دارم، سبک من اینه، من اینها را به آتلیهٔ لیبلول در لیون سفارش می‌دهم برایم بسازند.

ـــ نوازنده هستید؟

ـــ خیر!

ـــ هنرپیشه هستید؟

ـــ ریاضی‌پیشه هستم!

ـــ چی، ریاضی‌پیشه؟

ـــ بله بله ... چنین چیزی وجود دارد!

ـــ روی چه موضوعی کار می‌کنید؟

ـــ هوووم، آیا واقعاً می‌خواهید بدانید؟

ـــ بَله، چرا نخواهم؟

ـــ ببینید، من قصد مسخره کردن ندارم!

نَفَسی می‌کشم.

ـــ من یک مفهوم ترکیبی از انحناء ریچی ابداع کرده‌ام که در فضاهای متردارِ اندازه‌دارِ کامل و به طور موضعی فشرده دارای کران پایین است.

ـــ چی!!

ـــ اینها شوخی است؟

ـــ به هیچ وجه. این مقاله‌ای است که بازتاب خوبی در میان اهل فن داشته است.

ـــ می‌توانید تکرار کنید؟ خیلی خیلی خوبه!

ـــ خیلی خوب دوباره می‌گویم، من یک تئوری ترکیبی برای پایین کراندار کردن انحناء ریچی در فضاهای متردار اندازه‌پذیر تفکیک‌پذیرِ کامل و به طور موضعی فشرده ابداع کرده‌ام.

ـــ اوووه!

ــ خوب، این به چه دردی می‌خورد؟

یخ‌ها شکست و من شروع کردم. مفصلاً توضیح می‌دهم، حرف می‌زنم، افسانه‌زدایی می‌کنم. نظریهٔ نسبیت اینشتین و انحنایی که باعث انحراف پرتوهای نور می‌شود. انحناء، یعنی پایه و اساس هندسهٔ نااقلیدسی. اگر انحناء مثبت باشد پرتوها به یکدیگر نزدیک می‌شوند؛ اگر منفی باشد، پرتوها از یکدیگر دور می‌شوند. انحناء را که به کمک اصطلاحات نورشناسی توضیح داده می‌شود می‌توان به کمک اصطلاحات فیزیک آماری نیز توضیح داد: چگالی، آنتروپی، بی‌نظمی، انرژی جنبشی، انرژی مینیمال، ... این کشفی است که من و تعدادی از همکاران کرده‌ایم. چگونه می‌توان از انحناءِ فضای تیغ‌داری مثل جوجه‌تیغی حرف زد؟ مسئلهٔ ترابری بهینه که در مهندسی، هواشناسی، انفورماتیک و هندسه با آن سروکار پیدا می‌کنیم. کتاب هزار صفحه‌ای من. همین‌طور، به تدریج که کیلومترشمار کیلومتر می‌اندازد، حرف می‌زنم.

ــ رسیدیم، داریم وارد لیون می‌شویم. شما را کجا برسانم؟

ــ من در ناحیهٔ یک زندگی می‌کنم ــ محلهٔ روشنفکران! اما هر جا برای شما مناسب است من را پیاده کنید. خودم می‌روم.

ــ نگران نباشید، شما را به منزلتان می‌رسانم، راه را به من نشان دهید.

ــ عالی است. چقدر تقدیم کنم، می‌توانم سهم خود را در پرداخت عوارض بدهم؟

ــ نَه نَه، لازم نیست.

ــ مرسی شما بزرگوارید.

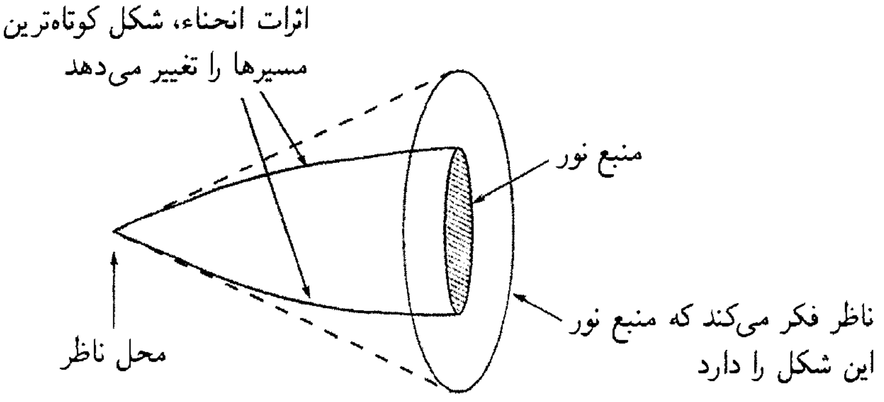
ــ قبل از اینکه بروید، می‌توانید برای من یک فرمول ریاضی بنویسید؟

*

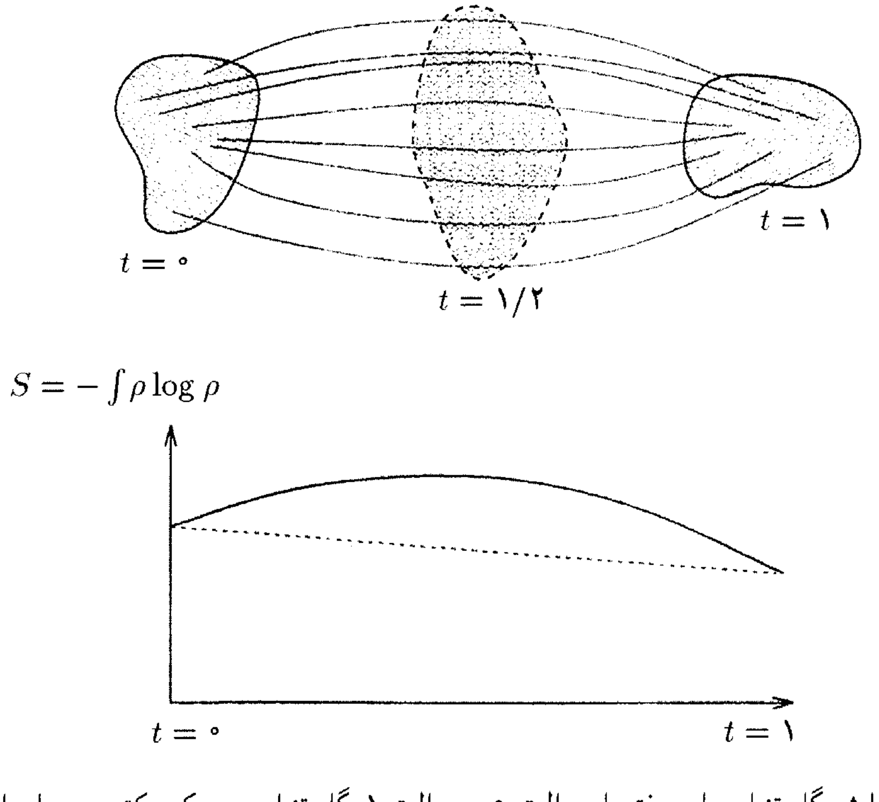
دو تصویر که از کتاب

Optimal transport, old and new, C. Villani, Springer-Verlag, 2008

استخراج شده است.



شکل ۷.۱. معنای ضریب تغییر شکل: ناظر، به علت اثرهای انحناء مثبت سطح نور را بزرگ‌تر از آنچه هست اندازه می‌گیرد؛ در جهانی با انحناء منفی، برعکس این اتفاق می‌افتد.



شکل ۷.۲. آزمایش گاز تنبل: برای رفتن از حالت ۰ به حالت ۱، گاز تنبل مسیر کوچکترین عمل را انتخاب می‌کند. در جهانی با انحناء نامنفی، مسیرهای ذرات ابتدا از یکدیگر دور می‌شوند و بعد به یکدیگر نزدیک می‌شوند، به طوری که در زمان‌های میانی، گاز می‌تواند چگالی کمتری (آنتروپی زیادتری) داشته باشد.

فصل هشتم

در دِهی در دروم[1]، ۲۵ دسامبر ۲۰۰۸

با خانواده در تعطیلات عید. پیشرفت من خوب بوده است. چهار پرونده در کامپیوتر، که با آهنگ پیشرفت ما به‌روز می‌شوند، حاوی تمام چیزهایی است که در مورد میرایی لانداو فهمیده‌ایم. چهار پرونده‌ای که تبادل کرده‌ایم، کامل کرده‌ایم، تصحیح کرده‌ایم، مورد بررسی مجدد قرار داده‌ایم و در سراسر آن یادداشت‌هایی گذاشته‌ایم ــ حروف **NdCM** برای یادداشت‌های کلمان و حروف **NdCV** برای یادداشت‌های سدریک. این پرونده‌ها که با زبان $\TeX$ کِنوث، استاد همهٔ ما نوشته شده‌اند بسیار مناسبِ دستکاری‌های لازم برای رهیافت‌های ما هستند.

چند وقت قبل، ما همدیگر را در لیون دیدیم، و کلمان از من به خاطر یک نابرابری که در یکی از این پرونده‌ها نوشته بودم ایراد گرفت:

$$||e^{if}||_\lambda \leq e^{||f||'_\lambda}.$$

او قسم می‌خورد که نمی‌فهمد من از کجا توانسته‌ام چنین چیزی بنویسم. من هم مجبور شدم بپذیرم که نوشته‌هایم از فکرم جلوتر رفته‌اند. به نظرم می‌آمد که خُب، این نابرابری واضح است، اما وقتی خوب فکر کردم دیدم نمی‌دانم به چه علتی چنین چیزی نوشته‌ام، دیگر نمی‌دانستم چرا این نابرابری به نظرم واضح می‌آمد.

الان هم هنوز نمی‌دانم چرا نابرابری را درست می‌دانستم، اما فهمیده‌ام که چرا این نابرابری درست است! این به خاطر فرمول فاآ دی برونو[2] است.

1. Drôme 2. Faà di Bruno

شانزده سال قبل، در دانشسرای عالی پاریس، استاد هندسهٔ دیفرانسیل ما فرمولی نشان داد که مشتقات پی‌درپی توابع مرکب را به دست می‌داد؛ این فرمول به قدری پیچیده بود که ما از دیدن آن قاه‌قاه خندیدیم و او مجبور به عذرخواهی شد و با قیافه‌ای ترحم‌انگیز و با کمی خودمسخرگی گفت: «نخندید، این خیلی مفید است!»

این فرمول در واقع هم مفید است، او حق داشت: به خاطر این فرمول است که نابرابری من درست است!

با این حال، باید صبر می‌کردم. من (در مقابل بولتزمان، کنوث و لانداو هر سه تا با هم) قسم می‌خورم که این فرمول به مدت شانزده سال اصلاً به درد من نخورده است، به طوری که حتی اسمش را هم که زیاد معمول نیست از یاد برده بودم.

اما این نابرابری در گوشه‌ای از ذهنم باقی مانده بود: فرمولی برای مشتقات توابع مرکب وجود دارد ... به کمک گوگِل و ویکی‌پِدیا چندلحظه بیشتر طول نکشید و توانستم هم اسم فرمول و هم خود فرمول را پیدا کنم.

در هر صورت، ظهور فرمول فاآ دی برونو علامتی بود که نشان می‌داد کار ما دارد به طور غیرمنتظره رنگی ترکیبیاتی به خود می‌گیرد؛ چرکنویس‌های من که معمولاً پر است از شیارهای کاسهٔ ویولون‌سِل (علامت انتگرال: $\int$ — آن‌قدر از اینها نوشته‌ام که به محض اینکه تمرکز می‌کنم این علامت خودبه‌خود به ذهنم می‌آید!)، اکنون پر شده است از توان‌های بین پرانتز (مشتقات مرتبهٔ بالا: $f''' = f^{(۴)}$) و علامت‌های تعجب (فاکتوریل‌ها: $۱۶! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times ۱۶$).

در واقع جوّگیر شده‌ام: درحالی‌که بچه‌ها هیجان‌زده هدیه‌های نوئل خود را باز می‌کنند من توان‌های توابع را مانند گوی‌های کاج نوئل آویزان می‌کنم و فاکتوریل‌ها را مانند شمع‌های وارون به خط می‌کنم.

*

دانلد کنوث خدای زندهٔ انفورماتیك است. روزی یکی از رفقا می‌گفت «اگر او وارد سالن کنفرانس شود، همهٔ شرکت‌کنندگان در مقابل او زانو می‌زنند».

کنوث، پرفسور دانشگاه استنفورد، خود را زودهنگام بازنشسته کرده و پُست الکترونیك خود را نیز قطع کرده تا بتواند تمام‌وقت به اتمام اثر عمدهٔ خود، «هنر برنامه‌نویسی»[1] بپردازد. او این کار را پنجاه سال قبل شروع کرد و مُجلداتی که تابه‌حال به چاپ رسانده است انقلابی در موضوع خود به وجود آورده‌اند.

1. L’Art de la programmation

دانلد کنوث

حین انتشار این آثار شگفتی‌آور بود که کنوث به کیفیت گرافیکی نامطلوب فرمول‌های ریاضی که توسط نرم‌افزارهای موجود در بازار ارائه می‌شدند، پی بُرد؛ او تصمیم گرفت که این نقیصه را برای همیشه جبران کند. تغییر ناشر یا تعویض فونت او را راضی نمی‌کرد. او تصمیم گرفت تمامی فرایند را از ریشه بازبینی کند. در سال ۱۹۸۹ اولین نسخهٔ پایدار نرم‌افزار $\TeX$ را منتشر کرد که امروزه نرم‌افزار استانداردی است که تمام ریاضی‌پیشه‌ها برای تألیف و تبادل آثارشان از آن استفاده می‌کنند.

در ابتدای قرن بیست‌ویکم که اکثریت بزرگی از تبادلات ریاضی به صورت الکترونیك انجام می‌شود، این ابداع که مرحله‌ای از روند جهانی‌شدن روزافزون همه چیز است نقش خود را به طور کامل ایفا کرده است.

زبان کنوث و مشتقات آن نرم‌افزارهای آزادی هستند که کُد آن در دسترس همگان قرار دارد. ریاضی‌پیشه‌ها فقط از پروندهٔ منبع استفاده می‌کنند، پروندهٔ متن که تنها از حروف $ASCII$ تشکیل شده است و همهٔ کامپیوترهای جهان آن را می‌شناسند. این پرونده، به زبانی شفاف، حاوی تمام دستورالعمل‌های لازم برای بازسازی متن‌ها و فرمول‌ها با تمام جزئیاتشان است.

به لطف این نرم‌افزار، کنوث احتمالاً بیش از هر کسی در میان زندگان، زندگی روزمرهٔ ریاضی‌پیشه‌ها را تغییر داده است.

کنوث دائماً محصولات خود را اصلاح می‌کند و شمارهٔ نسخه‌های او تقریب‌های عدد π هستند، هر چه تقریب بهتر باشد نرم‌افزار کامل‌تر است: پس از نسخهٔ ۳٫۱۴، نسخهٔ ۳٫۱۴۱ و پس از آن نسخهٔ ۳٫۱۴۱۵ و غیره منتشر شده است. نسخهٔ جاری شمارهٔ ۳٫۱۴۱۵۹۲۶

است؛ در وصیت‌نامهٔ کنوث آمده که در روز مرگ او این تقریب به π خواهد رسید و به این ترتیب T_EX تا ابد تثبیت خواهد شد.

*

فرمول فاآ دی برونو (Arbogast 1800, Faà di Bruno 1855)

$$(f\circ H)^{(n)} = \sum_{\sum_{j=1}^n j\,m_j = n} \frac{n!}{m_1!\ldots m_n!}\,\bigl(f^{(m_1 + \ldots + m_n)}\circ H\bigr)\,\prod_{j=1}^n\left(\frac{H^{(j)}}{j!}\right)^{m_j}$$

... که در TEX به صورت زیر نوشته می‌شود

```
\[(f\circ H)^{(n)} = \sum_{\sum_{j=1}^n j\,m_j = n}
\frac{n!}{m_1!\ldots m_n!}\,
\bigl(f^{(m_1 + \ldots + m_n)}\circ H\bigr)\,
\prod_{j=1}^n\left(\frac{H^{(j)}}{j!}\right)^{m_j}\]
```

*

```
Date:   Thu, 25 Dec 2008 12:27:14 +0100 (MET)
From:   Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To:   Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject:   Re:   parties 1 et 2, proches de fin
```

بیا، بخش II هم عیدی نوئل برای تو. این قسمت بسیار خوب شده،
تقریبا" همه چیز روبه‌راه شده، از این بهتر نمی‌شد (به جز اینکه
ظاهرا" آنچه از توان از دست می‌رود حداقل از مرتبهٔ ریشهٔ سوم اندازهٔ
جملهٔ اختلالی است، اما دلیلی وجود ندارد برای اینکه نتوانیم آن
را از طریق یک روش تکراری مانند روش نیوتون دوباره به دست آوریم).
هر دو پرونده، هم تحلیلی و هم پراکندگی، را برایت می‌فرستم، و فعلا"
به آنها دست نخواهم زد. باید آنها را دوباره با جزئیات خواند، اما
فکر می‌کنم که الان اولویت ایجاد همگرایی بین بخش‌های ۳ و ۴
است (edp و برونیابی)، پیشنهاد می‌کنم به محض اینکه edp بتواند
تقریبا" سر پا بایستد، حتی اگر زیاد هم لاغر نشده باشد، آن را
برایم بفرستی؛ این طوری خواهیم توانست به موازات هم روی edp و
برونیابی کار کنیم. (نوشتن آن به زبان انگلیسی و تنظیم با من...)
و عید نوئل مبارک!
سدریک

Date: Thu, 25 Dec 2008 16:48:04 +0100
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: parties 1 et 2, proches de fin

نوئل مبارک و از این هدایا متشکرم؛)!!
دارم روی پرونده‌ٔ edp کار می‌کنم و می‌خواهم یک قضیه‌ٔ کامل با استفاده
از نرم‌های سوپ و آمیخته درست کنم. در واقع حتی به نرم آمیخته هم
امیدوارم (بر طبق آخرین پرونده‌ٔ تو، پراکندگی واقعاً" در نرم است
و بنابراین لازم به نظر می‌رسد).
در مورد پرونده‌ٔ برونیابی، [فرم] دقیق نابرابری نش، که به آن احتیاج
داشتیم در نسخه‌ای که برایت فرستاده بودم (به زبان فرانسه) نوشته
شده است، به من بگو آیا لازم است به آن چیزی اضافه کنم؟
ادامه، به زودیِ زود! قربانت، کلمان

Date: Fri, 26 Dec 2008 17:10:26 +0100
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: parties 1 et 2, proches de fin

سلام،
این هم نسخه‌ٔ اولیه‌ٔ قضیه‌ٔ edp کامل در نرمِ آمیخته‌ات به زبان
انگلیسی. مربوط به صفحه‌ٔ ۱۵ پرونده به بعد می‌شود. الان آن را
برایت می‌فرستم برای اینکه ایده‌ای به دست داده باشم، البته چیزهایی
را باید در جزئیاتِ محاسبات و شاخص‌ها ... چک کنم، و محدودیت در
زمان کراندار نیز هست که فعلاً" کمی به نظرم غریب می‌آید. در هر صورت
رفتار نرم آمیخته، با استدلالی که در مورد تبدیل‌های مشتق‌ها با
آن نرم‌ها بدون [تبدیل] فوریه آورده‌ام، اصلاً" بد نیست.
در ابتدای بخش ۴، در کنار قضیه‌ٔ مورد نظر، گفته‌ام چرا به نظر من
این راه خوبی است. از طرف دیگر هنوز هم دارم با نرمی با
چهار شاخص کار می‌کنم (البته این نرم هم، طبق تعریف تو،
یک نرم آمیخته است) و در واقع فعلاً" نمی‌دانم چطور باید به فقط سه شاخص
رسید ...
دارم راجع به آن فکر می‌کنم.
قربانت،
کلمان

Date: Fri, 26 Dec 2008 20:24:12 +0100
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: parties 1 et 2, proches de fin

چیزی که به آن «محدودیتِ زمانِ کراندار» گفتم این است که چون اتلاف در شاخص ناشی از پراکندگی، نسبت به زمان، آن‌طور که در فرض آورده بودم، خطی است، این موجب شده است که زمان کراندار باشد تا اتلاف بزرگ‌تر از یک عدد ثابت نشود. اما ظاهراً با در نظر گرفتن پرونده [۶] «تحلیلی» تو، فرض را می‌توان تقویت کرد تا اتلاف چیزی مانند

$$
\varepsilon \, \min \{ 1, (t-s) \}
$$

باشد و در نتیجه اتلاف به ازاء t بزرگ و s دور از t، کوچک باقی بماند...

+a، کلمان

فصل نهم

پرینستون، ۱ ژانویهٔ ۲۰۰۹

در شب سیاه، رانندهٔ تاکسی راه را کاملاً گم کرده است. GPS او جهتی را نشان می‌دهد که به وضوح ابلهانه است؛ مستقیماً به داخل درخت‌ها.

سعی می‌کنم او را سر عقل بیاورم: قبلاً اینجا آمده‌ام، معلوم است که GPS به‌روز نیست، باید اطراف را کمی بگردیم. مثل اینکه گم شده‌ایم، اگر به حرف‌های این ماشین گوش کنیم حتماً گیر خواهیم کرد.

پُشت ماشین بچه‌ها زیاد نگران نیستند. یکی از آنها خواب است. سَفَر، هواپیما و اختلاف ساعت او را خسته کرده است. دیگری ساکت نشسته و نگاه می‌کند. او فقط هشت سال دارد اما قبلاً در تایوان، ژاپن، ایتالیا، استرالیا، و کالیفرنیا نیز بوده است و بنابراین تاکسی گمشده در وسط جنگل نیوجرزی در دل شب زیاد نگرانش نمی‌کند، او می‌داند همه چیز درست خواهد شد.

دور خودمان می‌چرخیم، نشانه‌هایی از آبادی پیدا کردیم و یک نفر آدم در ایستگاه اتوبوس، تا راه را به ما نشان دهد. حقیقت دربارهٔ مکان‌ها در انحصار دستگاه GPS نیست.

بالاخره مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته[1] ــ یا IAS برای آشنایان ــ خود را بر ما آشکار ساخت. بسیار با ابهت، در وسط بیشه‌زار، یک هوا شبیه قلعه‌هاست. برای رسیدن به آن می‌بایست زمین گلف بزرگی را دور می‌زدیم.

اینشتین بیست سال آخر زندگی‌اش را در اینجا گذرانده است. البته، در آن هنگام او دیگر آن جوان سرزندهٔ سال ۱۹۰۵ نبود که انقلابی در فیزیک به راه انداخته بود. با وجود این حضور او

1. Institute for Advanced Study (IAS)

بیشتر از هرکس دیگر در اینجا نمایان است. کسان دیگری هم مانند جان فون نویمان، کورت گودِل، هرمان وایل، رابرت اوپنهایمر، ارنست کانتورورویچ، و جان نَش در اینجا بوده‌اند که تنها اسم‌هایشان لرزه بر اندام می‌اندازد.

در حال حاضر ژان بورگَن[1]، اِنریکو بومبیری[2]، فریمن دایسون[3]، ادوارد ویتن[4]، ولادیمیر وُوِدسکی[5] و بسیاری دیگر در اینجا هستند ... IAS بیش از هاروارد، برکلی، نیویورک یا هر مؤسسهٔ دیگری می‌تواند شایستهٔ عنوان معبد ریاضی و فیزیک نظری باشد. البته اینجا به اندازهٔ پاریس که پایتخت جهانی ریاضی است ریاضیدان ندارد؛ اما در IAS چکیده و عصارهٔ عصاره را می‌توان یافت. شاید عضویت دائم IAS معتبرترین سِمَت دنیا باشد!

بعلاوه، درست در کنار اینجا دانشگاه پرینستون قرار دارد، با اشخاصی چون چارلز فِفِرمَن[6]، آندرِی اوکُنکوف[7] و بسیاری دیگر. در پرینستون مدال فیلدز داشتن چیز پیش‌پاافتاده‌ای است، گاهی سه یا چهار نفر از برندگان فیلدز سر میز ناهار دور و بر شما می‌نشینند! تازه، اندرو وایلز را به حساب نمی‌آورم که مدال فیلدز نبرده اما از وقتی معمای بزرگی را که از فِرما برجای مانده بود حل کرد، محبوبیتش از هر ریاضیدان دیگری بیشتر شده؛ این معما به مدت سیصد و پنجاه سال به پای شاهزادهٔ محبوبش نشست. خلاصه بگویم، اگر عکاس‌های سِمِجی وجود داشته باشند متخصص در کار ریاضیدان‌های بزرگ، می‌توانند دوربین‌هایشان را در رستوران IAS قرار دهند و هر روز تصاویر تازه‌ای از این جماعت تهیه کنند.

این چیزها را باید در خواب دید ... اما اینها به جای خودش، الان باید محل اقامتمان را پیدا کنم، آپارتمانی که قرار است شش ماه در آن باشیم، و اولین کار، باید بخوابیم!

می‌خواهم در این مدت شش ماه در شهر خیلی کوچک پرینستون چه کنم؟

کارهایی برای انجام دادن دارم! احتیاج به تمرکز دارم. خواهم توانست تمام وقت خود را وقف عشق‌های ریاضی‌ام بکنم! اول باید حساب میرایی لانداو را برسم. خوب پیشرفت کرده‌ام. چارچوب کاری در جای خود قرار گرفته، به خودم دو هفته برای جمع‌وجور کردن آن وقت می‌دهم! پس از آن پروژهٔ دیگری را جمع خواهم کرد، پروژهٔ آلِسیو[8] و لودویک[9]، این مثال نقیض گندیده را پیدا خواهم کرد که ثابت می‌کند که در ابعاد ۳ و بالاتر مجموعهٔ نقاطی که در آن فیزیکِ ریمانیِ تقریباً کروی یک به یک است، لزوماً محدب نیست. آن را پیدا خواهم کرد و این مثال نقیض نظریهٔ منظم بودن ترابری بهینهٔ غیراقلیدسی را نابود خواهد کرد!

و بعد، برای من پنج ماه می‌ماند، که آن را صرف آرزوی بزرگم خواهم کرد، منظم بودن

1. Jean Bourgain
2. Enrico Bombieri
3. Freeman Dyson
4. Edward Witten
5. Vladimir Voevodsky
6. Charles Fefferman
7. Andrei Okounkov
8. Alessio
9. Ludovic

[جواب‌های معادلهٔ] بولتزمان! برای این کار چرکنویس‌هایم را که در یک دوجین کشورِ مختلف خط‌خطی کرده‌ام همراهم آورده‌ام.

پنج ماه، احتمالاً کم است. می‌خواستم دو سال را به این کار اختصاص دهم، یعنی تمامی باقیماندهٔ مأموریتم در مؤسسهٔ دانشگاهی فرانسه[1] را، در مدت این مأموریت ساعات کمی را تدریس می‌کنم تا بتوانم کارهای بزرگ تحقیقاتی را به سرانجام برسانم.

اما گرفتار این و آن پروژه بوده‌ام. کتاب دومم دربارهٔ ترابری بهینه بود که آن را در ماه ژانویهٔ ۲۰۰۵ شروع کرده بودم. در ابتدا قصدم این بود که کتاب به ۱۵۰ صفحه محدود شود و آن را در ماه ژوئیهٔ ۲۰۰۵ تحویل دهم؛ نهایتاً ۱۰۰۰ صفحه در ماه ژوئن ۲۰۰۸ آماده شد. در طی این مدت چندین بار فکر کردم آن را تمام کنم و دوباره به معادلهٔ بولتزمان بپردازم. اما ترجیح دادم ادامه دهم. در واقع، نمی‌دانم آیا این کار را می‌توانستم بکنم یا نه: بالاخره، کتاب خودش تصمیم گرفت، غیر از این هم نمی‌شد.

ماجراهایی که دوست دارم، گاهی از آنها عقب می‌افتم ... اما عیبی ندارد.

اما حالا، فقط هجده ماه وقت دارم با ساعات تدریس کمتر، اما هنوز آنچه را که باید پروژهٔ بزرگ من در مورد مطالعهٔ بولتزمان باشد شروع نکرده‌ام. این دعوت به پرینستون در بهترین موقع صورت گرفته، کتابی نباید بنویسم، هیچ مسئولیت اداری ندارم، هیچ درسی نباید بدهم، خواهم توانست مدام ریاضی کار کنم! تنها چیزی که از من خواسته شده این است که گاهگاه در بحث‌ها و سمینارهای آنالیز هندسی ــ که امسال موضوع مطرح در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته است ــ شرکت کنم.

در لابراتوار [پژوهشکده]، بعضی از کار من خوششان نیامد. انتظار داشتند از ژانویهٔ ۲۰۰۹ مدیریت لابراتوار را بپذیرم. شده که شده! بعضی وقت‌ها باید خودخواه بود. از این گذشته سال‌هاست که دارم برای توسعهٔ گروه ریاضی در دانشسرای عالی لیون زحمت می‌کشم، و این اقامت در پرینستون هم پرانتزی است که باز شده و بسته که شد، دوباره تمام زحمات اداری را برای منفعت عامه متحمل خواهم شد.

اما مدال را چه باید کرد؟

مدال فیلدز، همان مدالی که مُدعیانش با خوف به آن MF می‌گویند. این بزرگ‌ترین پاداش برای ریاضیدانان میانسال است که هر چهار سال یکبار در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدان‌ها به دو، سه، یا چهار ریاضیدان کمتر از ۴۰ سال تعلق می‌گیرد.

درست است که جایزه‌های شیک دیگری در ریاضیات وجود دارد مانند جایزهٔ آبل، جایزهٔ

1. l'Institut universitaire de France

وولف، و جایزهٔ کیوتو، که احتمالاً به دست آوردن آنها از مدال فیلدز مشکل‌تر است اما به اندازهٔ آن بازتاب و نمود ندارند. آنها در انتهای کار می‌رسند و دیگر نقش سکوی پرتاب را نمی‌توانند بازی کنند و باعث تشویق هم نمی‌شوند. MF درخشش بسیار بیشتری دارد.

کسی به این مدال فکر نمی‌کند، برای آن کار هم نمی‌کند. این کار بدبختی می‌آورد.

حتی اسمش را هم نمی‌آوریم، و من از بردن نام آن گریزانم. می‌نویسم MF و مخاطب می‌فهمد.

سال قبل جایزهٔ انجمن ریاضی اروپا[1] را که هر چهار سال یکبار به ده پژوهشگر جوان اروپایی تعلق می‌گیرد بُردم. بسیاری از همکارانم بر این عقیده بودند که این علامتی است که نشان می‌دهد هنوز در مسابقه برای MF شرکت دارم. از نقاط قوت من یکی این است که طیف کارهای من بسیار گسترده است به خصوص در مقایسه با نَسلِ خودم: آنالیز، هندسه، فیزیک، معادلات با مشتقات جزئی ... به‌علاوه تری تائو[2] نابغهٔ جوان استرالیایی دیگر جزو رقبای من نیست: او در آخرین کنگرهٔ بین‌المللی، وقتی هنوز ۳۱ سالش تمام نشده بود، صاحب این مدال شد.

اما دستاوردهای من هم بی‌نقص نیستند. در قضیهٔ همگرایی مشروط برای معادلهٔ بولتزمان شرط منظم‌بودن وجود دارد؛ برای اینکه این قضیه کامل باشد باید این شرط را اثبات کرد. نظریهٔ کران‌های ریچی ضعیف به تازگی مطرح شده است، بعد هم معیار کلی ما برای انحناء-بُعد هنوز مقبولیت عام نیافته، و گسترهٔ وسیع کارهای ریاضی من هم جنبه‌های مثبت دارد و هم نواقصی دربردارد: احتمالاً هیچ متخصصی بر تمامی پرونده‌های من احاطه پیدا نخواهد کرد. در هر صورت، برای اینکه شانسی داشته باشم، و همچنین برای تعادل شخصی خودم، الان باید یک قضیهٔ مشکل دربارهٔ یک مسئلهٔ فیزیکی مهم را به اثبات برسانم.

محدودیت سنی ۴۰ سال، چه فشاری! من الان ۳۵ سال دارم ... اما این قانون در آخرین کنگرهٔ بین‌المللی که در سال ۲۰۰۶ در مادرید برگزار شد تشدید شد. از این به بعد باید در اول ژانویهٔ سالی که کنگره برگزار می‌شود کمتر از ۴۰ سال داشت. به محض اینکه قانون جدید علناً اعلام شد، فهمیدم که معنای آن برای من چیست: در سال ۲۰۱۴ سه ماه پیرتر خواهم بود: بنابراین MF یا در سال ۲۰۱۰ خواهد بود و یا هرگز.

از آن پس، حتی یک روز هم نشده است که فکر **مدال** به ذهنم راه نیافته باشد، و هر بار آن را بیرون می‌رانم، سیاسی‌کاری و دمِ این‌وآن را دیدن هم کار به جایی نمی‌برد زیرا رقابت برای مدال فیلدز علنی نیست و به هر حال هیئت داوران نیز مخفی است. من دربارهٔ آن با هیچ‌کس صحبتی نمی‌کنم. برای اینکه شانسم را برای دریافت این مدال افزایش دهم نباید به آن فکر کنم. به MF

1. Société mathématique européenne

2. Terry Tao

فکر نکنم، باید به یک مسئلهٔ ریاضی فکر کنم که جسم و روح مرا به خود مشغول کند. و اینجا در IAS مکان ایده‌آلی برای من است که پا جای پای بزرگان گذشته بگذارم و روی کارم تمرکز کنم.
فکرش را بکنید، در خیابان فون نویمان زندگی خواهم کرد!

*

هنگامی که بحران رکود اقتصادی سال ۱۹۲۹ اتفاق افتاد، بامبرگر[1]ها می‌توانستند خود را خوشبخت احساس کنند. ثروت زیادی در پخش عمدهٔ کالا در نیوجرزی به‌هم‌زده بودند و شش هفته قبل از اینکه همه چیز فرو بپاشد دارایی‌های خود را فروخته بودند. در اقتصادی که اکنون به خرابه‌ای تبدیل شده بود، آنها ثروتمند بودند، بسیار ثروتمند.

اگر از پولت استفاده نکنی ثروتمند بودن به هیچ دردی نمی‌خورد؛ بنابراین بامبرگرها تصمیم گرفتند خدمت شریفی انجام دهند، آرزوی آنها تغییر جامعه بود. به یك مدرسهٔ بزرگ خدمات دندانپزشکی فکر می‌کردند، اما آنها را متقاعد ساختند که تأسیس یك مؤسسهٔ جدید علوم نظری کارامدترین راهِ استفاده از پولشان است. تئوری زیاد گران تمام نمی‌شود، با ثروتی که دارند، چرا این کار را نکنند؟ می‌توانند بهترین مؤسسهٔ جهان را تأسیس کنند، مؤسسه‌ای که بتواند در آن‌سوی دریاها و اقیانوس‌ها بدرخشد!

به‌علاوه، در ریاضی یا در فیزیك نظری، حتی اگر متخصصان دربارهٔ همه‌چیز اتفاق آرا نداشته باشند، دربارهٔ اینکه بهترین‌ها کدام هستند با یکدیگر به توافق می‌رسند. و اگر این بهترین‌ها درست شناسایی شوند، می‌توان آنها را به مؤسسه آورد!

بدین ترتیب بهترین‌ها را برای این مؤسسهٔ جدید بامبرگر در نظر گرفتند. پس از سال‌ها مذاکره، آنها یکی پس از دیگری پذیرفتند. اینشتین، گودل، وایل، فون نویمان و کسان دیگر ... جوّ حاکم بر اروپا برای پژوهشگران یهودی و دوستانشان غیرقابل تحمل شده بود، و این به جابه‌جایی مرکز ثقل علم جهان از آلمان به سوی ایالات متحده کمك کرد. در سال ۱۹۳۱ رؤیای بامبرگر به حقیقت پیوست: مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته، درست در کنار دانشگاه صاحب نام و تقریباً دویست سالهٔ پرینستون (که خود از طرف خانوادهٔ ثروتمند خیّر دیگری، راکفلرهای افسانه‌ای، حمایت می‌شد) قرار داشت. در IAS، اعضاء پژوهشگر دائم حقوقی کاملاً مکفی دریافت می‌کنند و هیچ اجباری برای تدریس ندارند.

مؤسسه گسترش یافته است: امروزه در بخش علوم طبیعی، نه تنها فیزیك نظری در تمام اَشکالش (اختر فیزیك، فیزیك ذرات، مکانیك کوانتومی، نظریهٔ ریسمان ...) وجود دارد، بلکه

1. Bamberger

زیست‌شناسی نظری نیز هست. بخش علوم اجتماعی و بخش تاریخ نیز به تازگی اضافه شده است. سنت کیفیت اعلا هم کماکان حفظ شده است.

در این معبد دانش ریاضی، ریاضیدان‌ها صف می‌کشند تا یکی پس از دیگری، آخرین یافته‌های خود را بگویند و می‌کوشند توجه بزرگ‌ترین‌ها را به خود جلب کنند. کسانی که برای چندماه و یا چندسال دعوت به اقامت می‌شوند، در اینجا باید فقط به یك چیز فکر کنند و برای آن مزد هم دریافت می‌کنند: بهترین قضیه‌های جهان را زیر نگاه‌های تمسخرآمیز اینشتین که به صورت مجسمهٔ برنز، عکس، و نقاشی همه جا حضور دارد، تولید کنند.

همه چیز طوری تدارك دیده شده است که ریاضیدان‌ها نگران چیزی جز ریاضی نباشند. اگر با خانواده بیایید، از خیلی وقت قبل فرزندانتان را در مدرسه ثبت‌نام می‌کنند. لشکری از منشی‌ها احتیاجات مادی شما را برطرف می‌کنند. مسکنی در چنددقیقه‌ای مؤسسه به شما اختصاص داده خواهد شد. غذاخوری عالی آن شما را از جستجوی رستوران بی‌نیاز می‌کند. جنگل هم برای گردش در اختیار شماست. هنوز وارد کتابخانهٔ ریاضیِ به سبك قدیم نشده‌اید که دستیاری جلو می‌آید تا شما را در یافتن کتابی که به دنبالش می‌گردید کمك کند یا سیستم پرونده را که در عین منسوخ بودن کارامد است توضیح دهد. ظاهراً همه چیز دارد به شما می‌گوید: گوش کن کوچولو، اینجا هر چه بخواهی برایت هست، پس تمام نگرانی‌هایت را فراموش کن، فقط به ریاضی فکر کن. ریاضی، ریاضی.

اگر در تابستان به مؤسسه می‌روید، سری هم به کتابخانهٔ علوم انسانی که در طرف دیگر دریاچه نسبت به بخش ریاضی قرار دارد، بزنید ــ شب‌ها کسی در آنجا نیست ــ خود را مانند کاشفی احساس خواهید کرد که مشغول اکتشاف غاری پر از گنج‌های قدیم است، مجموعه‌ای از نقشه‌های قدیمی که یك متر یا بیشتر طول دارند، لغت‌نامه‌های غول‌آسا و دایرةالمعارف‌های سنگین.

وقتی هم که می‌خواهید از کتابخانه خارج شوید، روی نیمکتی که در آن نزدیکی است بنشینید؛ در شب، آنجا زیباترین مکان دنیاست. اگر خوش‌شانس باشید صدای فریاد گوزن‌ها را می‌شنوید، روشنایی شبح‌گونهٔ کرم‌های شب‌تاب را می‌بینید، انعکاس نور ماه را در آینهٔ آب‌های سیاه مشاهده می‌کنید، و احساس می‌کنید که روح صدها تن از قوی‌ترین اذهان قرن بیستم مِهی نامریی را روی دریاچه تشکیل می‌دهند.

فصل دهم

پرینستون، ۱۲ ژانویهٔ ۲۰۰۹

دیروقتِ شب در آپارتمان پرینستونی‌ام روی زمین روی موکت نشسته‌ام و اطرافم را ورق‌های چرکنویس احاطه کرده‌اند، روبه‌رو شیشهٔ بزرگی است که صبح‌ها بچه‌هایم پشت آن سنجاب‌های خاکستری رنگ را تماشا می‌کنند. فکر می‌کنم و بدخط می‌نویسم بدون اینکه حرفی بزنم.

در اتاق دفتر، درست کنار این اتاق، کلِر دارد کارتون دفترچه یادداشت مرگ[1] را روی لپ‌تاپ می‌بیند. آن‌چنان سینمایی در پرینستون نیست و بنابراین باید شب‌ها خودمان را مشغول کنیم. من آن‌قدر از این سری کارتون‌های اهریمنی برایش تعریف کردم ... که او هم به نوبهٔ خود علاقه‌مند شده است. این فرصتی است که بتوانیم زبان ژاپنی گوش کنیم.

امروز تلفنی با کلمان صحبت کردم. این چند روز اخیر با سرعت زیادی حرکت می‌کنیم. در پرینستون من درسی ندارم؛ و او هم که در CNRS پژوهشگر است الزامی در تدریس ندارد. بنابراین هر قدر بخواهیم می‌توانیم کار کنیم.

بعد هم، اختلاف ساعت بین همکاران مزایایی هم دارد. با هفت ساعت اختلاف، تقریباً می‌شود به طور پیوسته کارکرد. اگر کلمان تا نصف شب در پاریس کار کند، دو ساعت بعد من در پرینستون در دفتر هستم و آمادهٔ تحویل گرفتن کار.

خودمان را مشغول نوعی محاسبه کرده‌ایم. او شگرد نسبتاً زیبایی دارد، روی زمانِ وجودِ جواب حقّه‌ای سوار می‌کند. به این کار خیلی امیدوار است. من حاضرم بپذیرم که این ایدهٔ او نقش مهمی خواهد داشت (و در واقع هم همین‌طور شد، بسیار بیشتر از آنچه می‌توانستم تصورش را بکنم)، اما

1. Death Note

به هیچ وجه نمی‌توانم خودم را متقاعد کنم که این شگرد برای نجات ما کافی باشد. به یک تقریب دیگر احتیاج داریم.

یک شگرد جدید.

*

Date: Mon, 12 Jan 2009 17:07:07 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: bad news

ببین، من نمی‌توانم انتقال نظم را، وقتی تقریب در کار است،
به‌خوبی تو انجام بدهم (پس از انجام تبدیل در فضا های ۳ شاخصی، یک چیزی
پایش می‌لنگد). من محاسبات را دوباره انجام دادم. در دو جا می‌لنگید:
(الف) شاخص آخر در صفحه‌ٔ ۳۹، ۸.۱ (قبل از «ما در اینجا از تقریب بدیهی
استفاده می‌کنیم») ظاهرا "باید به جای \lambda+\eta باشد \lambda+2\eta؛
(ب) به نظرم با فرض (۱۲.۵) غیرممکن است جملهٔ تقریبی به \kappa بستگی
نداشته باشد (حدود \kappa\to 0 و \kappa\to\infty فضا را از این
رو به آن رو می‌کند). نتیجه: به نظر من در اینجا یک مشکل وجود دارد...
ادامه دارد،
سدریک

Date: Mon, 12 Jan 2009 23:19:27 +0100
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: bad news

فردا بعدازظهر با دقت بیشتری نگاه خواهم کرد. اما با نکتهٔ (الف) موافقم
به هر حال حتما "باید pbsهای شاخص‌دارِ دیگری هم باشند. در مورد نکتهٔ
(ب) برای اینکه بگویم (۱۲.۵) به kappa بستگی ندارد (kappa در یک مجموعهٔ
فشرده) فکر می‌کردم بتوانم از وابستگی ضعیف میدان پراکندگی
$X^{scat}_{s, t}$ به v استفاده کنم: از آنجا که $\Omega_{s, t}$
با تقریب O(t-s) به عنصر همانی نزدیک است، داریم
$X^{scat}_{s, t} = x + O(t-s)$، از آنجا نتیجه می‌شود که هر مشتقی
نسبت به x در O(t-s) «له» می‌شود؟
به امید دیدار، کلمان

Date: Sun, 18 Jan 2009 13:12:44 +0100
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: transfert

سدریک سلام،
از این جهت که به بررسی لم‌های مربوط به میانگین، که توسط جابن* (درس‌های پورتو ارکل_** او) انجام شده ارجاع داده‌ام، مقداری هم محاسبه انجام داده‌ام تا ربط آنها را با محاسبات خودمان ببینم و احساس من این است که در تقریب خطی، انتقال منظم‌بودن به لم‌های میانگین وابسته است. اما بیان آن به صورت L^1/L^\infty به نظرم غیر عادی می‌رسد. مثلا" اگر بخواهیم مقداری از نظم x را به v انتقال بدهیم بدون اینکه افزایش در x متناسب با (t-s) باشد، باید به افزایشی کمتر از 1 اکتفا کنیم زیرا باید انتگرال‌پذیری نسبت به زمان را داشته باشیم، و این با حد 1/2 در L^2 می‌خواند. در اینجا یک چیز تازهٔ دیگر در محاسبات این است که ظاهرا"، اگر افزایش با (t-s) متناسب باشد دیگر حد 1 وجود ندارد ... این را هم باید ببینیم که آیا این افزایش متناسب با (t-s) ممکن است در نظریهٔ نظم غیرخطی (سئوال اول تو) مفید باشد ... تو چه خبرهای تازه‌ای داری؟
قربانت،
کلمان

* Jabin ** Porto Ercole

فصل یازدهم

پرینستون، ۱۵ ژانویهٔ ۲۰۰۹

امروز صبح هم مانند هر روز، برای چای به سالن نشیمن رفتم. در اینجا خبری از حضور صمیمانهٔ اینشتین نیست. به جای آن، خطوط خشن چهرهٔ آندره ویل در مجسمهٔ نیم‌تنهٔ برنز او جلب نظر می‌کند.

سالن نشیمن خیلی پُر نیست. یک تخته سیاه بزرگ هست، که خُب، واضح است، وسائل آماده کردن چای و چند میز شطرنج و تَلّی از مجلات مربوط به بازی شطرنج.

یکی از مجلات توجه مرا به خود جلب می‌کند. در آن از بابی فیشر، بزرگ‌ترین شطرنج‌باز تمام اعصار، تجلیل شده است که تقریباً یک سال پیش از دنیا رفت. او دچار پارانویای شدید شده بود. زندگی‌اش در حالی به پایان رسید که مردم‌گریزی پریشان‌فکر شده بود. اما گذشته از جنون، بازی‌های شطرنج فوق‌العاده‌ای از این شطرنج‌باز برجای مانده که هرگز کسی همانندی برای او نیافته است.

در ریاضی هم چندین نفر هستند که دچار این نوع سرنوشت‌های غمناک شده‌اند.

پال اِردوش، ریاضیدان سرگردان که دارای ۱۵۰۰ مقاله بود (رکورد جهانی)، یکی از بنیان‌گذاران نظریهٔ احتمالاتی اعداد بود که با لباس‌های مُندرسش دور دنیا می‌گشت، بدون خانه، بدون خانواده، بدون شغل و تنها مایملک او یک ساک، یک چمدان، یک دفتر یادداشت و نبوغش بود.

گریگوری پرلمان[1]، که هفت سال در انزوا به سر برد تا بتواند مخفیانه به اسرار حدس معروف پوانکاره رسوخ کند و دنیای ریاضیات را با ارائهٔ راه‌حلی غیرمنتظره که آن را غیرممکن می‌دانستند

1. Grigori Prelman

شگفت‌زده سازد. شاید برای اینکه به پاکی این راه‌حل خدشه وارد نشود، او یک میلیون‌دلاری را که مؤسسهٔ ریاضی کلِی[1] اهدا کرده بود قبول نکرد و از شغل خود نیز استعفا داد.

الکساندر گروتندیک[2]، اسطورهٔ زنده‌ای که ریاضیات را عمیقاً دگرگون ساخت و مکتبی فکری تأسیس کرد که جزء انتزاعی‌ترین مکاتبی است که تاکنون بشریت ایجاد کرده است. او از سِمَتش در کُلِژ دو فرانس استعفا داد و به ده کوچکی در کوه‌های پیرنه پناهنده شد. او اغواگری بود که به راهبی تبدیل شد و در چنگال دیوانگی و جنون نوشتن گرفتار آمد.

کورت گودل، بزرگ‌ترین منطق‌دان تمام دوران‌ها که، برخلاف انتظار همگان، ثابت کرد که هیچ نظریهٔ ریاضی‌ای کامل نیست و در هر نظریه‌ای همیشه گزاره‌هایی وجود دارد که نه درست است و نه غلط. در اواخر عمرش دچار پارانویای فرساینده‌ای شده بود و بالاخره از ترس اینکه مسمومش کنند، آن‌قدر گرسنگی کشید که مرد.

و جان نَش، قهرمان ریاضی من، که در مدت ده سال و با سه قضیه آنالیز و هندسه را دگرگون ساخت و بعد او هم قربانی پارانویا شد.

می‌گویند فاصلهٔ بین نبوغ و جنون کوتاه است. اما هیچ یک از این دو مفهوم درست تعریف نشده‌اند. به‌علاوه چه در مورد گروتندیک، چه در مورد گودل و چه در مورد نَش، مشاهده می‌کنیم که دوران دیوانگی آنها با دوره‌های فعالیت ریاضی آنها مطابقت نمی‌کند.

ذاتی یا اکتسابی، این هم یک بحث قدیمی دیگر است. فیشر، گروتندیک، اِردوش، پِرلمان همگی یهودی‌الاصل بودند. در میان آنها فیشر و اردوش مجارستانی‌الاصل نیز بودند. هر کسی که در محافل ریاضی رفت‌وآمد داشته می‌داند چقدر استعداد ریاضی در میان یهودی‌ها زیاد است و همین‌طور نمی‌تواند از تعداد فوق‌العاده زیاد برندگان جایزهٔ مجارستانی شگفت‌زده نشود. مثلی که در برخی محافل علمی آمریکا در دههٔ ۴۰ بر زبان‌ها افتاده بود می‌گوید: «مریخی‌ها وجود دارند: هوش فوق بشری دارند، به زبانی غیرقابل فهم صحبت می‌کنند، و وانمود می‌کنند از جایی به نام مجارستان آمده‌اند».

ولی، نَش یک آمریکایی خالص است و هیچ چیز در تبارش نیست که نشان از سرنوشت استثنایی او داشته باشد. در هر صورت سرنوشت آدم به خیلی چیزها بستگی دارد! مخلوط ژن‌ها، مخلوط ایده‌ها، مخلوط تجربه‌ها و ملاقات‌ها، اینها همگی در قرعه‌کشی شگفت‌انگیز و مهیج زندگی شرکت دارند. نه ژن و نه محیط نمی‌تواند همه‌چیز را توضیح دهد و همین‌طور که هست خوب است.

*

1. Clay Mathematical Institute
2. Alexander Grothendieck

اگر ۲۰۰ نفر از جدی‌ترین دانشمندان جهان را گردهم بیاورید، در مجتمعی پر از درخت منزوی کنید و آنها را از قید مشغولیت‌های پیش‌پاافتادهٔ زندگی دانشگاهی خلاص کنید و به آنها بگویید آنچه در توان دارید انجام دهید، چه می‌شود؟ چیزی نمی‌شود. درست است، تحقیقات زیادی در مرزهای دانش در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفتهٔ مشهور در نزدیکی پرینستون انجام می‌گیرد. به علت میهمان‌نوازی فوق‌العادهٔ مؤسسه، هیچ جایی بهتر از آنجا، برای اینکه یك دانشگاهی بنشیند و فکر کند وجود ندارد. با وجود این، به عقیدهٔ بسیاری از اعضاء، تنها کاری که می‌توان در مؤسسه انجام داد «بنشین و فکر کن» است. اگر بگوییم IAS برج عاج است کم گفته‌ایم زیرا جایی رفیع‌تر از آنجا نیست. اکثر مؤسسات آکادمیك در سطح جهانی، حتی آنها که خیلی جدی هستند، جایی دارند که در آن کرمِ کتاب‌های خسته می‌توانند دمی به خمره بزنند و به موسیقی مورد علاقه‌شان گوش دهند. در IAS این‌طور نیست. قدیمی‌ها از روزهای خوش دهه‌های ۴۰ و ۵۰ می‌گویند. در آن روزها مؤسسه مرکز میهمانی‌های نُخبگانِ روشنفکر پرینستون بود. جان فون نویمان محاسبات مدرن را اختراع کرد، اما شایع است که او انواع کُکتل‌های روان‌گردان هم درست می‌کرد و سخاوتمندانه در میهمانی‌های بزن‌وبکوب پخش می‌کرد. اینشتین فیزیك را از این رو به آن رو کرد، اما گاهی هم دستی به ویولن می‌برد. ظاهراً بزرگان مؤسسه، به پیروی از یونانی‌های باستان، معتقد بودند که مردان (به گفتهٔ ایشان) باید جامع‌الاطرف باشند و بر طبق قاعدهٔ اعتدال باید وارد فعالیت‌های بلند و پست شوند. اما اکنون در مؤسسه آپولون‌خواهی آن‌قدر بر دیونوسوس‌خواهی غلبه پیدا کرده که بسیاری از اعضاء برآن‌اند که حتی فکر خوش‌گذرانی هم باید یك مفهوم انتزاعی در نظر گرفته شود. اگر در محوطهٔ مؤسسه قدم بزنید، ممکن است به یك برندهٔ جایزهٔ نوبل و یا یك صاحب مدال فیلدز بربخورید. با بهره‌گیری از حمایت‌های سخاوتمندانهٔ مؤسسه، خود شما هم ممکن است یکی از آنها شوید، اما مطمئناً نمی‌توانید، نه با این و نه با آن، گیلاسی بزنید و بگویید و بخندید.

(برگفته از مقالهٔ «*DNE*، تنها گروه راك که تا به حال در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته بوده است»، نوشتهٔ مارشال پو، *Encyclopedia of Memory*، [*DNE* = پاك نکنید؛ *Do Not Erase*])

فصل دوازدهم

پرینستون، ۱۷ ژانویهٔ ۲۰۰۹

شنبه شب، شام با خانواده.

امروز را تماماً در سفری گذراندیم که مؤسسه برای میهمانانش ترتیب داده بود. سفر به اقدسِ مقدس‌ها برای تمام کسانی که تاریخ حیات را دوست دارند: موزهٔ تاریخ طبیعی در نیویورک.

من اولین دیدارم از این موزه را نزدیک به ده سال قبل به خوبی به یاد دارم. دیدن بعضی از مشهورترین فسیل‌های جهان چقدر هیجان‌انگیز بود، فسیل‌هایی که تصاویرشان در راهنماها و فرهنگ‌هایی مربوط به دایناسورها کشیده شده بود که من در نوجوانی با ولع می‌خواندم.

امروز به ده سال قبل بازگشته‌ام و نگرانی‌هایم در مورد ریاضی را فراموش کرده‌ام. اما اکنون سر میز شام، این نگرانی‌ها دوباره بازگشته‌اند. کلِر متوجهٔ تیک‌های صورت مشوش من شده و کمی هول کرده است.

اثبات میرایی لانداو هنوز هم استحکام ندارد. در سَرَم، جُنب‌وجوشی برپاست.

چکار باید بکنی، آدم خوب، چکار باید بکنی که وقتی سرعت‌ها را ترکیب می‌کنی، از طریق انتقال منظمی در موضع، بتوانی کاهشی به دست آوری ... همین ترکیب است که باعث وابستگی به سرعت می‌شود، اما من این را نمی‌خواهم، سرعت نمی‌خواهم!

چه بل‌بشویی.

زیاد حرف نمی‌زنم و جواب‌هایم هم حداقلی است، بهترینش چند کلمه‌ای است و بدترینش غُرغُر کردن.

ـــ امروز هوا سرد بود! می‌توانستیم لوژسواری کنیم ... دیدی امروز پرچم دریاچه چه رنگی بود؟
ـــ هووم. فکر می‌کنم قرمز بود.

پرچم قرمز: یعنی اینکه حتی اگر دریاچه یخ‌زده باشد، راه رفتن روی آن ممنوع است، بسیار خطرناک است. پرچم سفید: مردم، می‌توانید بروید، جای پایتان محکم است، اگر می‌خواهید روی یخ بپرید، بخندید، برقصید.

این را بگو؛ من پذیرفته بودم که نتایجم را در سمینار فیزیک آماری راتگرز که در ۱۵ ژانویه برگزار می‌شد، ارائه دهم! آخر **چطور** این را پذیرفته بودم، در حالی که اثبات هنوز کامل نشده است؟؟ به آنها چه می‌خواهم بگویم؟

قضیه از این قرار بود، وقتی همان اوائل ژانویه به اینجا رسیدم، خیلی مطمئن بودم که می‌توانم پروژه را درست ظرف دو هفته به پایان برسانم! از بخت خوب این سخنرانی دو هفتهٔ دیگر به تعویق افتاد! حتی با این تغییر، آیا خواهم توانست به موقع آماده شوم؟ این تاریخ الان خیلی نزدیک شده!! اما تصورش را هم نمی‌کردم که آن‌قدر مشکل باشد، هرگز چنین چیزی ندیده بودم!

سرعت‌ها را چه بکنیم، مسئلهٔ سرعت‌ها در کار است! وقتی وابستگی به سرعت وجود نداشته باشد، می‌شود متغیرها را، پس از تبدیل فوریه، از یکدیگر جدا ساخت، اما با وجود سرعت، چه کار باید کرد؟ و در معادلهٔ غیرخطی، لزوماً باید سرعت‌ها را در نظر بگیرم!

ـــ چطوری؟ خودت را که نباید بیمار کنی! راحت باش، خودت را رها کن.
ـــ باشد ...شه!
ـــ خیلی به فکر فرو رفتی.
ـــ گوش کن، من اینجا یک رسالتی دارم. اسم آن میرایی غیرخطی لانداو است.
ـــ مگر قرار نبود روی معادلهٔ بولتزمان کار کنی، پروژهٔ بزرگ تو مگر همین نبود، فکر نمی‌کنی داری اصل کار را فراموش می‌کنی؟
ـــ آن را ول کن. الان مسئله میرایی لانداو است.

اما میرایی لانداو هنوز دارد نقش زیباروی سَردِ دست‌نیافتنی را بازی می‌کند. در توان من نیست به طرفش بروم.

... حداقل این محاسبهٔ کوچکی که در راه بازگشت از موزه انجام دادم هست، کمی باعث امیدواری است، نَه؟ اما چقدر پیچیده است! دو پارامتر دیگر به نُرم اضافه کرده‌ام. نرم‌های ما به پنج شاخص بستگی داشت، همین هم رکورد جهانی است، الان که می‌شود هفت تا!! چه عیبی دارد؟ وقتی دو شاخص به تابعی اضافه کنیم که به سرعت بستگی ندارد، همان نرم قبل را به دست می‌دهد، و این منطقی است ... این محاسبه را باید درست انجام دهم. اما اگر الان زیاد

نگاهش کنم، غلط از آب در خواهد آمد، باید تا فردا صبر کنم! آدم خوب، باید همهٔ محاسبات را دوباره انجام بدهی، همهٔ محاسبات را با این نرمِ هفت شاخصی ملعون.

خیلی گرفته به نظر می‌آیم، کلِر دلش برایم سوخت، فهمید که برای تسکین من باید کاری انجام دهد.

ـــ خُب، فردا یکشنبه است، اگر می‌خواهی می‌توانی به دفترت بروی وآنجا بمانی. من مواظب بچه‌ها خواهم بود.

در این لحظه، هیچ چیز در دنیا نمی‌توانست مرا این‌قدر خوشحال کند.

*

Date: Sun, 18 Jan 2009 10:28:01 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: transfert

در تاریخ ۲۰۰۹/۱/۱۸ ساعت ۱۲:۱۳، کلمان موهو نوشت: > آنجا چه خبر؟

من پیش می‌روم ... اول مردد بودم، اما بالاخره متقاعد شده‌ام که با روشی که تو در پیش گرفته‌ای، به ازاء زمان‌های بزرگ چیزی به دست نمی آید. من روش دیگری پیدا کرده‌ام که درست بر متغیر زمان عمل می‌کند، ظاهرا" نتیجه‌بخش است اما یک نقص دارد، باید فضاهای کمی پیچیده را دخالت داد، با دو شاخص بیشتر :-)
با وجود این به نظر می آید نتیجهٔ تمام تقریب‌ها برای این خانوادهٔ جدید یکسان باشد، این را باید ببینم درست است یا نه. در هر صورت اینها چیزهای فوق ظریفی هستند و به عقیدهٔ من یکی از مهمترین اجزاء مسئله. اگر کارها خوب پیش برود امشب نسخهٔ جدیدی برایت می‌فرستم با تعدادی جای خالی که باید پر شود، و قاعدتا" باید بتوانیم دوباره به موازات هم کار کنیم.
قربانت
سدریک

Date: Sun, 18 Jan 2009 17:28:12 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: transfert

وضعیت جدید پرونده از این قرار است. برای اینکه این را سرپا نگه داریم (هنوز دربارهٔ روش نیوتون صحبت نمی‌کنم)، باید (یک) ببینیم که آیا نرم‌های «دوپیوندی»ای که من در انتهای بخش ۴ معرفی کرده‌ام دارای همان ویژگی‌های نرم‌های پیوندی «ساده» هستند یا خیر و در نتیجه آیا با این نرم‌ها تقریب‌های مشابهی از مشخصه‌ها به دست می آید یا خیر (!) (دو) راهی برای ترکیب دو اثر

متمایزی که در بخش ۵ جدید توصیف شده، پیدا کنیم؛ (سه) تمام اینها را در انتهای بخش ۷ قرار دهیم و کامل کنیم تا تقریب بر مبنای چگالی کامل صورت گرفته باشد؛ (چهار) درستی همه چیز را تحقیق کنیم! این برای این است که بگویم خیلی کار داریم. فعلا" پیشنهاد من این است که تو ببینی آیا چیزهایی که نوشته‌ام درست‌اند یا نه، و اگر به چیز مشکوکی برخوردی خبرم کنی.
اگر بعدا" به مطالبی بر بخورم که معلوم باشد می‌توانیم با هم کار کنیم، به تو خواهم گفت ...

چند نکته‌ٔ قابل توجه دیگر:
در مورد تقریب‌های انتقالِ نظمِ تو، باید بگویم که گمراه‌کننده بودند، نتیجه بیش از حد قوی بود. من نتوانستم این نتایج را به کمک نرم‌های معمولی به دست آورم؛ در عوض از استراتژی تو استفاده کردم و در بخش ۵ یک انتقال انجام دادم. اما وقتی می‌خواهیم آن را به ازاء زمان‌های بزرگ (\tau، t\to\infty کوچک می‌ماند) به کار ببریم ظاهرا" دیگر کارامد نیست. نماهای مجاز باعث می‌شوند که انتگرال برحسب زمان همگرا نشود.
من آشی پخته‌ام (نپرس چطور) برای اینکه انتگرال‌گیری بر حسب زمان درست شود، اما این بار منظمی از دست می‌رود. باید این دو را با یکدیگر ترکیب کرد.
ادامه دارد، قربانت
سدریک

Date: Mon, 19 Jan 2009 00:50:44 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: transfert

من دوباره پرونده را خواندم و کمی اشکالاتش را برطرف کردم، بنابراین نسخه‌ای که به پیوست می‌فرستم ملاک است. فعلا" پیشنهاد من این است که کارها را به صورت زیر تقسیم کنیم.

— تو سعی کن حکم ۱۷.۴ و قضیه‌ٔ ۳.۶ را سرپا نگاه داری، کمی چموش‌اند اما خوبی‌اش این است که تو مجبور می‌شوی تمام تقریب‌های مرا در بخش‌های ۴ و ۶ (با تفصیل) بخوانی :-) و این کار بیهوده‌ای نیست زیرا جان ما بستگی دارد به یک اشتباه در محاسبهٔ شرایطی که باید در مورد نماها صادق باشد. الان در این دو مکان گزاره‌های «گول‌زنک» گذاشته‌ام با تقریب‌هایی که تقریبا" همین‌طوری نوشته‌ام، ممکن است درست باشند و ممکن هم هست که واقعیت از این پیچیده‌تر باشد.
لازم نیست اثبات‌ها را پاکنویس کنی، اما باید از کران‌هایی که به دست می‌آید مطئمن باشی، بقیهٔ چیزها به کران‌ها بستگی دارد.

— در این مدت من مشغول اتمام بخش‌های ۵ و ۷ خواهم شد (به استثناء پی‌آمدهایی که از قضیهٔ ۳.۶ ناشی خواهد شد).

ـــ فردا هم با ترمن در مورد قسمت فیزیکیِ مقدمه صحبت خواهم کرد.

ـــ اگر بتوانی به آنچه که در ذیل گفتی شکل بدهی، می‌توانی آن را در مقدمهٔ بخش ۵ جا بدهی، در آنجا من به رابطهٔ بین لم‌های میانگین اشاره کرده‌ام (توجه داشته باش، چون در کلاس تحلیلی کار می‌کنیم نمی‌توان کاملا" پذیرفت که با یک پدیدهٔ L^1/L^\infty سروکار داریم؟؟).

اگر وقت داری که فورا" مشغول انجام این کار بشوی، و اگر همه چیز بر وفق مراد پیش برود، قاعدتا" خواهیم توانست هدفمان را جمع کردن همهٔ اینها در ۲ یا ۳ روز آینده قرار دهیم، و دیگر چیزی باقی نمی‌ماند مگر نیوتون/نش ـ موزر که باید در جای خودش به کار گرفته شود (اما من فکر می‌کنم که اصلاح گزاره‌های ۱۷.۴ و ۳.۶ در اولویت قرار دارد برای اینکه مطمئن شویم که ساختمان را روی «هوا» نمی‌سازیم).

قربانت
سدریک

Date: Mon, 19 Jan 2009 13:42:27 +0100
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: transfert

سلام سدریک،
این دارد هر روز وحشتناک‌تر می‌شود؛) !!

<u>بخشی از پروندهٔ کلی ـ ۳ (۱۸ ژانویهٔ ۲۰۰۹)</u>

۷.۴ نُرم‌های دوپیوندی

لازم می‌شود که از نرم‌های پیچیده‌تر زیر استفاده کنیم:

تعریف ۱۵.۴. فضای $\mathcal{Z}^{(\lambda,\lambda'),\mu;p}_{(\tau,\tau')}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$||f||_{\mathcal{Z}^{(\lambda,\lambda'),\mu;p}_{(\tau,\tau')}} = \sum_n \sum_m \frac{1}{n!(n-m)!}$$
$$\times \left|\left|\Big(\lambda(\nabla_v + 2i\pi\tau k)\Big)^m \Big(\lambda'(\nabla_v + 2i\pi\tau' k)\Big)^{n-m} \widehat{g}(k,v)\right|\right|_{L^p(dv)}.$$

$(\cdots)$

پس از آزمون و خطا، بهترین کاری که توانستیم انجام دهیم بازیافت این واپاشی در نرم‌های «دوپیوندی» بود که در بخش فرعی ۷.۴ توصیف شده است:

حکم ۶.۵ (تقریب از نظم ـ به ـ واپاشی در فضاهای پیوندی)
فرض می‌کنیم $f = f_t(x,v)$ و $g = g_t(x,v)$ و

$$\sigma(t,x) = \int_0^t \int f_\tau(x - v(t-\tau), v)\; g_\tau(x - v(t-\tau), v) dv\; d\tau.$$

که در این صورت

$$||\sigma(t)||_{\mathcal{F}^{\lambda t+\mu}} \leq \left(\frac{C}{\bar{\lambda} - \lambda}\right) \sup_{0 \leq \tau \leq t} ||f_\tau||_{\mathcal{Z}_\tau^{\bar{\lambda},\mu;1}} \sup_{0 \leq \tau \leq t} ||g_\tau||_{\mathcal{Z}_{\tau,0}^{(\lambda,\bar{\lambda}-\lambda),\mu}}.$$

فصل سیزدهم

پرینستون، ۲۱ ژانویهٔ ۲۰۰۹

شگردی که در شب دیدار از موزه به ذهنم رسید باعث شد که بتوانم دوباره شروع کنم. و امروز پُر شده‌ام از مخلوطی از بیم و امید. به مشکل عمده‌ای برخوردم و مقداری محاسبه انجام دادم و در آخر فهمیدم چطور از پس جمله‌ای که زیاده از حد بزرگ است برآیم. در عین حال از پیچیدگیِ آنچه کم‌کم در برابرم شکل می‌گیرد دچار سرگیجه شده‌ام.

پَس این معادلهٔ خوبِ ولاسوف که فکر می‌کردم دیگر دارم آن را می‌شناسم جهشی کار می‌کند؟ محاسبات روی کاغذ نشان می‌دهند که زمان‌های خاصی وجود دارد که در آن معادله در مقابل محرک‌ها با سرعت بیش از حد از خود واکنش نشان می‌دهد. هرگز چیزی شبیه به این نشنیده بودم، در مقالات و کتاب‌هایی که خوانده‌ام چنین چیزی نبوده است.

*

Date: Wed, 21 Jan 2009 23:44:49 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: !!

درست شد. پس از ساعت‌ها درماندگی اسفناک، الان فکر می‌کنم که علت حذف شدن جمله‌ٔ O(t) را، که امروز تلفنی از آن شکایت می‌کردم، شناسایی کرده‌ام. وحشتناک است!

ظاهرا" این در تقریب های دوخطی وجود ندارد، در روش موزر هم نیست،
اما در معادله‌ی «دوگرونوال*» این هست که \rho را به صورت
تابعی از خودش تقریب می‌زنند ... نکته در اینجاست که چیزی شبیه به

u(t) \leq   source + \int_0^t   a(s, t)   u(s)   ds

داریم که در آن u(t) کرانی بر \|\rho(t)\| است. اگر
\int_0^t a(s, t) ds = O(1) باشد، که چه بهتر. مسئله در اینجاست که
\int_0^t a(s, t) ds ظاهرا" می‌تواند با O(t) برابر باشد (واقعا"
هیچ چیز جلودارش نیست، من کاملترین موارد ممکن را در نظر گرفته‌ام،
اما این پدیده باز هم می‌تواند تولید شود). اما وقتی تولید می‌شود،
در نقطه‌ای اکیدا" درون بازه‌ی [0, t] است، مثلا" در نزدیکی های وسط (این
هنگامی اتفاق می‌افتد که k و \ell طوری هستند که (k+\ell/2) = 0)؛
یا در 2/3 راه اگر (2/3)k+\ell/3 = 0، و غیره. اما در این صورت
معادله‌ی بازگشتی برحسب u(s) چیزی شبیه

u(t) \leq source + epsilon t u(t/2)

و جواب های این از پیش کراندار نیستند، اما افزایش آنها آهسته!
(زیرنمایی) است. اما چون نرم بر \rho حاوی نزولی بودن نمایی است،
چیزی که بالاخره به دست می آید این نزولی بودن است ...

شکل دادن به این چیز ظاهرا" وحشتناک است (تقریبا" باید تشدیدها را
فهرست کرد). این کار فردای من است. در هر صورت اینها باعث نمی‌شود
که برنامه‌ی تحقیق درستی ویژگی های نرم های دوپیوندی زیر سئوال برود.
قربانت
سدریک

Date: Wed, 21 Jan 2009 09:25:21 +0100
Subject: Re: !!
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

واقعا" هم قیافه‌اش وحشتناک است! من هم قسمت نش ـ موزر را نگاه کردم و
من هم موافقم که احتمال اینکه بتوانیم عامل t را در داخل آن جذب
کنیم کم است ... در عوض اگر برهان کران بر u(t) را درست فهمیده باشم
مطلقا" لازم است که فاصله‌ی نقطه‌ی s، که در آن a(s, t) بزرگ است، از t،
به طور یکنواخت اکیدا" مثبت باقی بماند ... مسئله‌ی دیگر این است که در
هنگام حل مسئله‌ی غیرخطی، یک کران زیرنمایی برحسب زمان خواهیم داشت.
و برای اینکه این کران توسط نرم بر \rho خورده شود باید از دست دادن
کمی از شاخص را بپذیریم، و این چیزی است که به عقیده‌ی من باید در
قسمت نش ـ موزر مطلقا" از آن اجتناب کرد ...؟
قربانت، کلمان

---

* de Gronwall

فصل چهاردهم

پرینستون، ۲۸ ژانویهٔ ۲۰۰۹

سیاه! من احتیاج به تاریکی دارم، اینکه تنها در سیاهی بمانم. اتاق بچه‌ها، کرکره‌ها بسته، خیلی خوب است. منظم کردن. روش نیوتون. ثابت‌های نمایی. همهٔ اینها در سرم می‌چرخند.

بلافاصله پس از اینکه بچه‌ها را به خانه آوردم، به اتاق آنها پناه بردم تا بتوانم افکارم را به حرکت درآورم. فردا باید در راتگرز کارم را ارائه دهم و آن اثبات هنوز نمی‌تواند سَرِ پا بایستد. احتیاج دارم تنهایی قدم بزنم و فکر کنم. وضعیتْ اضطراری است!

کلِر حالتی مثل این را قبلاً تحمل کرده است بدون اینکه به روی خود بیاورد؛ با وجود این، اینکه تنها در یک اتاق تاریک دور خودم بچرخم، در حالی که او غذا را آماده می‌کند، کمی بی‌انصافی است.

ــ این کارَت دیگر خیلی عجیب است!!

من جوابی ندادم، تمام کانال‌های ذهنی‌ام را افکار ریاضی و احساس اضطرار اشباع کرده بود. با وجود این رفتم و با سایر اعضاء خانواده شام خوردم، و بعد هم تمام شب را کار کردم. یک نوع محاسبه‌ای که روی آن خیلی حساب می‌کردم دیگر به کار نمی‌آمد، حتماً جایی اشتباه کرده بودم. مهم یا بی‌اهمیت؟

حدود ساعت دوی صبح دست از کار کشیدم، احساسم این است که بالاخره کارها خوب از آب درخواهد آمد.

*

Date: Thu, 29 Jan 2009 02:00:55 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: global-10

!!!! الان فکر می‌کنم قطعات مفقود را پیدا کرده باشم.

ــ اولاً، بالاخره فهمیدم (در صورتی که اشتباه نکرده باشم) چگونه می‌توان از دست اپسیلونی که به دلخواه کوچک باشد راحت شد (به قیمت از دست دادن یک ثابت بسیار بزرگ، از نوع نمایی یا نمایی به توان دو بر حسب ۱/epsilon). این هم نتیجهٔ یک محاسبهٔ کاملاً فوق‌بشری است که فعلاً، در انتهای بخش ۶، دارم واردش می‌کنم. کاملاً معجزه آسا به نظر می‌رسد اما درست به موقع و همان‌طور است که انتظار داشتم، ظاهری قابل قبول دارد.

ــ ثانیاً، فکر می‌کنم جاهایی را هم که کمی از شاخص‌ها و پراکندگی را از دست می‌دهیم، شناسایی کرده‌ام. لازم است تمام محاسبات این بخش دوباره انجام شود، این کار به اندازهٔ کافی هولناک خواهد بود ... در انتهای این بخش در یکی از بخش‌های فرعی شرح‌هایی نوشته‌ام. فکر می‌کنم که الان با اینها تمام عناصری را که در روش نش ـ موزر احتیاج است در دست داریم.
فردا، پنج‌شنبه، اینجا نخواهم بود. طرح پیشنهادی من برای ادامهٔ کار این است: مسئولیت بخش ۶ با افزایشی بودن زیرنمایی با من، و در این مدت تو مشغول تقریب‌های پراکندگی بشو که چیز ناجوری نیست.
قرار ما بر این باشد که تا اوائل هفتهٔ آینده همه چیز را پاکنویس کرده باشیم به جز بخش آخر. قبول؟
قربانت
سدریک

فصل پانزدهم

راتگرز، ۲۹ ژانویهٔ ۲۰۰۹

امروز روزی است که آن‌قدر از آن می‌ترسیدم. من به سمینار فیزیک آماری دانشگاه راتگرز که تقریباً در سی کیلومتری پرینستون واقع است دعوت شده‌ام. اریک کارلن و جول لِبوویتس[1]، که هر دو در پرینستون زندگی می‌کنند و کارشان در راتگرز است در ماشین همراه من هستند.

این دومین گشت من در راتگرز است؛ بار اول در روز یادمان کروسکال، مخترع سولیتون و متفکری بزرگ، شرکت کردم. لطیفه‌های دلپذیری که سخنرانان نقل می‌کردند هنوز در یاد من زنده مانده‌اند ــ کروسکال با دو نفر از همکارانش در آسانسور مشغول گفتگو شد و چنان حواسشان متوجه بحث بود که به مدت بیست دقیقه در آسانسور بالا و پایین می‌رفتند در حالی که دیگران داخل و خارج می‌شدند.

اما امروز کمتر دلپذیر است. تحت فشار قرار دارم!

معمولاً در جلسهٔ ارائهٔ تحقیقات[2] («سمینار») چیزی گفته می‌شود که به دقت بررسی و تکرار شده. این کاری است که تا به حال همیشه انجام می‌دادم. اما امروز این‌طور نیست: کاری که می‌خواهم ارائه دهم هنوز جزئیاتش آن‌طور که باید بررسی نشده و حتی اثباتش هم کامل نیست.

درست است که دیشب خودم را قانع کرده بودم که کارم درست است و فقط باید آخرش را بنویسم. اما امروز صبح تردیدها بازگشتند. اما دوباره پراکنده شدند. در ماشین، هنوز در فکرم.

در لحظه‌ای که داشتم سخنرانی می‌کردم صادقانه بر این باور بودم که کارم درست است. آیا

1. Joel Lebowitz　　2. exposé

مایکل کیس‌لینگ

این ناشی از تلقین بود؟ زیاد در جزئیات ریاضی وارد نشدم، اما بر اهمیت مسئله و تعبیر فیزیکی آن تأکید کردم. نُرم معروف را نشان دادم، پیچیدگی آن لرزه بر تَن حاضران انداخت. من هم به ارائهٔ نسخهٔ پنج شاخصی و نَه هفت شاخصی اکتفا کردم ...

پس از سخنرانی، ده دوازده نفری با هم ناهار می‌خوریم، بازار گفتگو گرم است. کمی پیش در بین حُضّار شیطانکی بزرگ با چشمانی درخشان و خیلی سرحال وجود داشت: او مایکل کیس‌لینگ[1] بود. او با شور و شوقی سرایت‌کننده دربارهٔ عشق‌های جوانی‌اش به فیزیکِ پلاسما، اثر پرده، پژواک پلاسما، نظریهٔ شبه‌ـخطی با من حرف می‌زد ...

پژواک پلاسما تمام توجه من را به خود جلب می‌کند. چه آزمایش زیبایی! یک پلاسما، یعنی گازی که در آن الکترون‌ها از هسته‌ها جدا شده‌اند، آماده می‌کنیم؛ گاز را در حالت سکون قرار می‌دهیم، و در ابتدای آزمایش، این آرامش را با اِعمال یک میدان مغناطیسی به مدت کوتاه، بر هم می‌زنیم، یک «تکان» می‌دهیم. صبر می‌کنیم تا جریانی که از این طریق به راه افتاده خاموش شود، بعد میدان دیگری اِعمال می‌کنیم. باز صبر می‌کنیم تا جریان خاموش شود، و در اینجاست که معجزه به وقوع می‌پیوندد: اگر دو تکان را درست انتخاب کنیم، در لحظه‌ای معین، جوابی خودبه‌خود دریافت خواهیم کرد، این جواب را پژواک گویند ...

عجیب است، نَه؟ یک فریاد (الکتریکی) در پلاسما می‌کشیم، بعد یک فریاد دیگر (با بسامدی متفاوت)، و پس از مدتی پلاسما جواب می‌دهد (با بسامدی که با دوتای دیگر تفاوت دارد!).

اینها همه من را به یاد محاسباتی که چند روز قبل انجام دادم می‌اندازد: یک تشدید در زمان ... پلاسمای من هم در لحظات معین خیلی خاصی واکنش نشان می‌دهد ... فکر می‌کردم دیوانه

1. Michael Kiessling

شده‌ام، اما شاید این همین پدیدهٔ پژواک باشد که در فیزیک پلاسما به خوبی شناخته شده است؟

این باشد برای بعد، فعلاً می‌خواهم با پروفسورهای اینجا گفتگو کنم. خُب، الان چه کسانی در گروه شما هستند؟ آیا توانسته‌اید افراد خوبی را جذب کنید؟ بله، بله، وضع‌مان خوب است، ایشان و ایشان، و بعد ایشان ...

یکی از نام‌ها مرا از جایم پراند.

ــ چی، ولادیمیر شِفِر اینجا کار می‌کند!!

ــ بله، خیلی وقت است. چطور مگر، سدریک، با کارهای او آشنا هستی؟

ــ معلوم است که آشنا هستم، من یک سمینار بورباکی دربارهٔ قضیهٔ معروف وجود جواب‌های تناقض‌آمیز معادلهٔ اویلر او ارائه کرده‌ام ... باید او را ببینم!

ــ می‌دانی، ما هم او را زیاد نمی‌بینیم، خیلی وقت است که با او صحبتی نکرده‌ام. بعد از ناهار سعی می‌کنم او را برایت پیدا کنم.

جول موفق شد او را پیدا کند و شِفِر در دفتر جول به ما پیوست. من این گفتگو را فراموش نخواهم کرد.

شِفِر ابتدا مفصلاً عذرخواهی کرد که نتوانسته زودتر بیاید. دربارهٔ مشغولیتش صحبت کرد که این است که برخی شکایت‌های قانونی علیه دانشگاه را ــ که شاگردهای ناراضی مطرح می‌کنند؟ ــ در نطفه خفه کند.

بعد هم ما دو نفر در یک اتاق کوچک در اطراف یک تخته سیاه گفتگوی ریاضی کردیم.

ــ من یک سمینار بورباکی در مورد کارهای شما ارائه داده‌ام و متن آن را برای شما چاپ کرده‌ام! سمینار به زبان فرانسه است، اما شاید بتوانید از آن استفاده کنید. توضیحات مفصلی دربارهٔ اینکه چگونه قضیهٔ وجود جواب‌های تناقض‌آمیز شما را کامیلو دو لُلیس[1] و لاسلو سکی‌هیدی[2] اصلاح و ساده‌تر کرده‌اند.

ــ آه، خیلی جالب است، متشکرم.

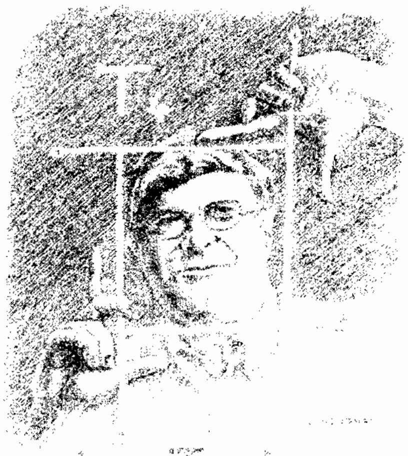
ــ می‌خواهم بدانم، چطور این ایده به خاطر شما خطور کرد. فکر ساختن این جواب‌های باورنکردنی را در کدام دکان عطاری پیدا کردید؟

ــ الان برای شما توضیح می‌دهم. خیلی ساده است. در رسالهٔ دکترایم نشان داده بودم که چیزهای غیرممکن وجود دارند، چیزهایی که نباید در دنیای ما وجود داشته باشد. روش من از این قرار است.

او چند برآمدگی روی تخته رسم می‌کند، نوعی ستارهٔ چهارشاخه. شکل را می‌شناسم.

---

1. Camillo De Lellis 2. László Székelyhidi



لوک تارتار

ــ بله، اینها را می‌شناسم، شکلِ T_4 تارتار است!

ــ راست می‌گویید؟ خوب، شاید، نمی‌دانم، در هر صورت من این کار را برای این کرده بودم که جواب‌های غیرممکنی برای برخی معادلات بیضوی بسازم. و فهمیدم که یک دستورالعمل کلی برای این کار وجود دارد.

او دستورالعمل را توضیح می‌دهد.

ــ بله، این را هم می‌دانم، این همان انتگرال‌گیری محدب گروموف است!

ــ آ ... خوب؟ نه، فکر نمی‌کنم، کار من از این چیزها خیلی ساده‌تر است، دلیل اینکه این جواب‌ها را می‌شود ساخت ساده است و این است که ما در یک پوش محدب قرار داریم، و می‌توانیم هر بار جواب تقریبی را به صورت یک ترکیب محدب بیان کنیم و بعد ... .

در آنچه او به من می‌گوید تمام اجزاء نظریه‌ای را که به نام انتگرال‌گیری محدب معروف است تشخیص می‌دهم. این آدم همهٔ اینها را به تنهایی دوباره پیدا کرده بدون اینکه از کارهای دیگران مطلع باشد. او در سیارهٔ مریخ زندگی می‌کرده؟

ــ پس، مکانیک سیالات چطور؟

ــ آه ـ بله! داشتم می‌گفتم، یک روز در سخنرانی مندلبرو شرکت کرده بودم. و به خودم گفتم: من هم دوست دارم کاری مشابه این انجام دهم؛ پس مشغول مطالعهٔ معادلهٔ اویلر از یک دیدگاه فراکتالی [برخالی] شدم، و فهمیدم که می‌توانم از همان نوع کارهایی که در رساله‌ام انجام داده بودم با این معادله نیز انجام دهم. اما کار مشکلی بود.

حرف‌های او را با بینهایت دقت گوش می‌دادم. اما او پس از گفتن دو سه جملهٔ کلی ناگهان حرفش را قطع کرد.

ـــ خُب حالا، معذرت می‌خواهم، باید برگردم، از وسائل نقلیهٔ عمومی استفاده می‌کنم و الان با این برفی که آمده زمین خیلی لیز است و نمی‌توانم تعادلم را خوب نگهدارم، راهم هم خیلی طولانی است و ...

گفتگو به این ترتیب ختم شد که او تمام دلایلی که وی را وادار به رفتن می‌کند برای من ردیف کند. بحث ریاضی ما تقریباً پنج دقیقه به طول انجامید و من در این مدت هیچ چیزی یاد نگرفتم. فکرش را بکنید که او همان کسی است که منشاء شگفت‌انگیزترین قضیه در تمامی مکانیک سیالات شده است! وجود او ثابت می‌کند که کسی می‌تواند صاحب ذهنی برتر باشد اما در انتقال معلوماتش ناشی.

برگشتم پیش جول و از گفتگویم صحبت کردم و متأسف بودم از اینکه بیشتر از پنج دقیقه نتوانسته بودم با او حرف بزنم.

ـــ می‌دانی سدریک، پنج دقیقه با ولاد صحبت کردن تقریباً برابر است با مجموع مدتی که ما توانسته‌ایم در طول پنج سال گذشته با او صحبت کنیم.

موقع آن رسیده که این ملاقات را که در حافظه‌ام حکّ شده خط بزنم ... می‌خواهم برگردم به کار میرایی لانداو.

در حین برگشت به پرینستون تردیدها دوباره بازگشتند.

درست که فکر می‌کنم، می‌بینم این اثبات درست نیست.

سمینار راتگرز در تحقیقات من مرحله‌ای کلیدی بود. اعلام نتایجی که هنوز ثابت نشده‌اند خلافی سنگین است، شکستن پیمان اعتماد متقابل بین سخنران و شنونده‌هایش است. برای اینکه این خطا زیاده از حد بزرگ نباشد، چاره‌ای ندارم، باید به هر قیمتی که شده آنچه را که اعلام کرده‌ام اثبات کنم.

می‌گویند که جان نَش، قهرمان ریاضی من، عادت داشت با اعلام نتایجی که هنوز نمی‌دانست چگونه اثبات کند خود را تحت فشاری باورنکردنی قرار دهد. در هر صورت در مورد قضیهٔ غوطه‌ورسازی ایزومتریک این‌طور بود.

پس از سمینار راتگرز، من هم کمی این نوع فشار را احساس می‌کنم. این احساس اضطرار در ماه‌های آینده در من از بین نخواهد رفت. یا باید این اثبات را کامل کنم، یا آبرویم خواهد ریخت!

*

تصور کنید: عصر آرام یك روز تابستان، مشغول گردش در جنگل هستید و در کنار برکه‌ای توقف می‌کنید. همه چیز آرام است و اصلاً بادی نمی‌وزد.

ناگهان در سطح آب آشوبی برپا می‌شود، گردابی مهیب همه جا را فرامی‌گیرد.

بعد هم، پس از یك دقیقه، دوباره همه چیز آرام می‌شود. هنوز هم بادی نمی‌وزد، ماهی‌ای در برکه نیست، پس چه چیزی اتفاق افتاده؟

تناقض‌نمای شِفِر ـ اشنیرلمن، که مسلماً شگفت‌انگیزترین نتیجه در کُل مکانیك سیالات است، ثابت می‌کند که یك چنین عجیب‌الخلقه‌ای امکان‌پذیر است، لااقل در عالم ریاضیات.

این تناقض‌نما از یك مُدل غیرمتعارف از قبیل احتمالات کوانتومی، انرژی تاریك یا از این قبیل چیزها ناشی نمی‌شود. این جواب‌ها برمبنای معادلهٔ اویلرِ تراکم‌ناپذیر، پیشکسوت تمام معادلات با مشتقات جزئی قرار دارد، مدلی که همگی، هم ریاضیدان‌ها و هم فیزیکدان‌ها برای توصیف یك سیالِ کاملِ تراکم‌ناپذیر بدون اصطکاك داخلی پذیرفته‌اند.

۲۵۰ سال است که معادلهٔ اویلر متولد شده و با این حال هنوز به تمام اسرار آن دست نیافته‌ایم. از این هم بدتر: معادلهٔ اویلر را یکی از خیانت‌پیشه‌ترین معادلات می‌دانند. هنگامی که مؤسسهٔ ریاضی کِلی هفت مسئلهٔ ریاضی مطرح کرد و برای هر یك، یك میلیون دلار جایزه تعیین کرد، عمداً منظم بودن جواب‌های معادلهٔ ناویه ـ استوکس را جزء این مسائل قرار داد، اما با دقت تمام از اشاره به معادلهٔ اویلر، که بسیار هولناك‌تر است، اجتناب ورزید.

با این همه، معادلهٔ اویلر در نگاه اول آن‌قدر ساده و معصوم به نظر می‌آید که می‌خواهی بدون شنیدن اعتراف، عفو خدای مکانیك سیالات را به او بدهی! هیچ احتیاجی نیست که تغییرات چگالی را مدل‌سازی کنی یا چسبندگی اسرارآمیز را بفهمی، کافی است قوانین پایستاری را بنویسی: پایستاری جرم، پایستاری اندازهٔ حرکت، پایستاری انرژی.

اما ... شِفِر در سال ۱۹۹۴ نشان داد که معادلهٔ اویلر در صفحه تولید خودبه‌خود انرژی را مُجاز می‌شمارد! تولید انرژی از هیچ! در طبیعت هیچ‌وقت مشاهده نشده است که سیالی چنین عجایبی خلق کند! همین بس که بگوییم معادلهٔ اویلر هنوز شگفتی‌های بزرگی در نهان دارد.

اثبات شِفِر نمایشی است از چیره‌دستی استادانه در ریاضی، این اثبات همان‌قدر که مبهم بود مشکل هم بود. شك دارم کسی، به جز خود مؤلف، هرگز آن را به تفصیل خوانده باشد، و مطمئن هستم کسی نمی‌تواند آن را دوباره ایجاد کند.

در سال ۱۹۹۷ ریاضیدان روسی الکساندر اشنیرلمن[1]، که به مبتکر بودن شهرت داشت اثبات جدیدی از این قضیهٔ شگفت‌انگیز ارائه داد. کمی بعد پیشنهاد کرد که برای جواب‌های

1. Alexander Shnirelman

معادلهٔ اویلر ضابطه‌ای قائل شویم؛ جواب باید از لحاظ فیزیکی واقع‌بینانه باشد، و هدف از آن ضابطه ممنوعیت رفتارهای غیرعادی بود.

افسوس! چند سال پیش دو ریاضیدان جوان برجسته، دو لُلیس ایتالیایی و سکی‌هیدیِ مجار، یك قضیهٔ عمومی به اثبات رساندند که شوك قوی‌تری وارد آورد، و در ضمن نشان می‌داد که ضابطهٔ اشنیرلمن قادر نیست مسئلهٔ جواب‌های تناقض‌نما را حل کند. به علاوه، این دو، با استفاده از فن‌های انتگرال‌گیری محدب، روش جدیدی هم برای تولید این جواب‌های عجیب‌الخلقه پیشنهاد می‌کردند که فرایندی شفاف بود و در مسیری قرار داشت که قبل از آنها توسط محققان زیادی از جمله ولادیمیر سِوِرَك[1]، اشتفان مولر[2]، برنت کِرچ‌هایم[3] ... پیموده شده بود ... بدین ترتیب، دو للیس و سکی‌هیدی معلوم کردند که معلومات ما دربارهٔ معادلهٔ اویلر از آنچه تصور می‌کردیم کمتر است.

*

بخشی از سمینار بورباکی من در سال ۲۰۰۸

قضیه (**شفر ۱۹۹۳، اشنیرلمن ۱۹۹۷**). معادلهٔ اویلر تراکم‌ناپذیری دوبعدی،

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla\cdot(v\otimes v) + \nabla p = f, \qquad \nabla\cdot v = 0,$$

بدون نیروی وادارندهٔ $f \equiv 0$، با پایهٔ فشرده در فضا ـ زمان دارای جواب ضعیف، غیرصفر است.

قضیه (**دو للیس و سکی‌هیدی ۲۰۰۷ و ۲۰۰۸**). فرض می‌کنیم Ω یك بازهٔ باز در $\mathbb{R}^n$، $T > 0$ و $\bar e$، یك تابع به طور یکنواخت پیوسته از $\Omega\times]0,T[\to]0,+\infty[$ باشد و $\bar e \in L^\infty(]0,T[;L^1(\Omega))$. در این صورت به ازاء هر $\eta > 0$، یك جواب ضعیفِ (v,p) معادلهٔ اویلر، بدون نیروی وادارندهٔ $(f\equiv 0)$ وجود دارد به طوری که

الف) $v \in C(\mathbb{R}; L^2_w(\mathbb{R}^n))^n$؛

ب) اگر $(x,t)\notin\Omega\times]0,T[$ آنگاه $v(x,t)=0$؛ به ویژه $v(\cdot,0)=v(\cdot,T)\equiv 0$؛

ج) $\frac{|v(x,t)|^2}{2} = -\frac{n}{2}p(x,t) = \bar e(x,t)$ به ازاء هر $t\in]0,T[$ و به ازاء تقریباً هر $x\in\Omega$؛

1. Vladimir Šverák 2. Stefan Müller 3. Bernd Kirchheim

د) $\sup_{0 \leq t \leq T} ||v(\cdot, t)||_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)} \leq \eta$.

به علاوه در $L^2(dx\, dt)$ داریم

ه) $(v, p) = \lim_{k \to \infty} (v_k, p_p)$،

که در آن (v_k, p_p) یك جفت تابع C^∞ بر پایهٔ فشرده و جواب کلاسیك معادلهٔ اویلر با یك نیروی وادارندهٔ خوش‌انتخاب $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ می‌باشد، و $f_k \to 0$ به معنای حد توابع توزیع است.

فصل شانزدهم

پرینستون، ۲۵ فوریهٔ ۲۰۰۹

زندگیِ آرام در پرینستون! جنگل، سنجاب‌های خاکستری، دریاچه، دوچرخه.

و غذای خوب! چند روز پیش یک کباب فیلهٔ شمشیر ماهی، تُرد و با چاشنی خوشمزه، همراه با حریرهٔ کدو حلوایی خوب‌پخته، همان‌جور که در خانه می‌پزند، خوردیم، دسر در دهان آب می‌شد و شاه‌توت و خامه هم داشت ...

هنوز ناهار را کاملاً تمام نکرده بودیم که زنگ ساعت ۱۵ زده شد: وقت آن است که برای صرف چای به سالن قدیمی فولد هال در محل ورودی IAS برویم و در آنجا از شیرینی‌های خانگی که هر روز تغییر می‌کند بچشیم. به خصوص در مقابل شیرینی مادلن نمی‌توانم مقاومت کنم، مادلن‌های اینجا به همان خوشمزگی مادلن‌هایی هستند که من پانزده سال قبل در مدرسهٔ شبانه‌روزی برای پسر و دخترهای همسایه می‌پُختم.

درست است که در اینجا وضع نان خوب نیست و باگت برشته در پرینستون یافت نمی‌شود؛ اما آنچه در میان محصولات ضروری اولیه فقدان آن از همه آشکارتر است و تمام افراد خانواده از آن رنج می‌برند وضع اسفناک پنیر است! پنیر کُنتهٔ [1] تر و تازه، پنیر لطیف رُوْ [2]، پنیر اِشورنیاک [3] معطر، پنیر بریا ـ ساوارَن [4] نرم، شماها کجا هستید؟ کجا باید ناوتِ [5] تُرد، اولیویای [6] تند و تیز و می‌مولت [7] خراب‌نشدنی پیدا کرد؟

این ماه اقامت کوتاهی در غرب آمریکا، در برکلی، برای دیداری سرزده از مؤسسهٔ تحقیقات علوم ریاضی ــ یا به اختصار MSRI ــ داشتم که رهبر جهانی مؤسساتی است که اختصاص

1. comté 2. rove 3. échourgnac 4. brillat-savarin 5. navette
6. olivia 7. mimolette

به پذیرش و همایش ریاضیدانان دارد. من از اینکه دوباره به شهری که در سال ۲۰۰۴ پنج ماه در آن اقامت داشتم می‌آیم هیجان‌زده هستم!

البته یادم نرفت که به مغازهٔ چیزبورد، جایی که در برکلی از همه‌جا بیشتر دوست دارم، سری بزنم. چیزبورد یک تعاونی پنیرفروشی است که طبق اصول سوسیالیستی که موافق افسانه‌های محلی است اداره می‌شود و در آن گزیده‌ای از پنیرهایی می‌توان یافت که برخی پنیرفروشی‌های فرانسه را روسیاه می‌کند.

در چیزبورد، باکَم را پُر کردم، توانستم پنیر رُوْ بخرم، و می‌دانستم که بچه‌ها حریصانه به آن حمله خواهند کرد. دربارهٔ فقر پنیری ایالت نیوجرزی با فروشنده‌ها درددل کردم؛ آنها هم مرا به رفتن به ماریز[1] نیویورک تشویق کردند. ببینم چه می‌شود!

در فرانسه، معادل مؤسسهٔ تحقیقات علوم ریاضی را می‌توان انستیتو هانری پوانکاره، یا IHP برای خودمانی‌ها، دانست که در سال ۱۹۲۸ با کمک مالی دو شخص خیّر، راکفلر و روشیلد، تأسیس شد. دو ماه قبل هیئت مدیرهٔ IHP، زره و شمشیر مدیریت جدید را ــ شنیدم به اتفاق آرا ــ به من تقدیم کرد. اما من هنوز قبول نکرده‌ام، چند شرط گذاشته‌ام که طول می‌کشد تا جا بیفتند، خیلی وقت لازم دارد.

چهار ماه پیش این سِمَت مدیریت به من پیشنهاد شد. از شگفت‌زدگی که بیرون آمدم، به خودم گفتم که تجربهٔ جالبی خواهد بود و پذیرفتم برای این سِمَت نامزد شوم. من دراین‌باره با همکاران ENS لیون صحبتی نکردم، از ترس اینکه ناراحت شوند ... چرا می‌خواهم سِمَتِ مدیریت انستیتو را بپذیرم درحالی‌که مدیریت لابراتوار را نپذیرفتم؟ چرا به پاریس بروم درحالی‌که در لیون رُشد یافته‌ام؟ و در روزگار ما، چه کسی می‌خواهد مدیر یک مؤسسهٔ علمی باشد، زیر بار انبوهی از وظایف اداری قرار گیرد و تحت مقرراتی که هر سال دست‌وپاگیرتر می‌شوند کمر خم کند.

اینکه فکر می‌کردم نامزدی من برای این سمت مخفی می‌ماند چقدر ساده‌اندیشی بود! در فرانسه این امکان‌پذیر نیست ... همکاران لیونی من سریعاً فهمیدند و دیگر دست‌بردار نیستند. این کار مناسبتی نداشت، یک پژوهشگر به سن‌وسال من بخواهد سِمَتی را بپذیرد که همه می‌دانند بسیار سنگین است، همکاران به خودشان می‌گویند حتماً دارد چیزی را از ما پنهان می‌کند، حتماً در پس نامزدی او رازی شخصی نهفته است.

رازی وجود ندارد، خیر، فقط تمایلی است صادقانه برای پذیرفتن این چالش. اما تحت شرایطی مناسب! در حال حاضر اخبار خیلی امیدوارکننده نیستند. در فرانسه بحث‌ها طولانی می‌شود ... خُب، در پاریس پیاده خواهم شد یا به لیون بازخواهم گشت؟

---

1. Murrays

احتمالاً نه این می‌شود و نه آن. با پنیر یا بی‌پنیر، زندگی در اینجا بسیار دلپذیر است و به من پیشنهاد شده یک سال دیگر در پرینستون بمانم، حتی بیشتر اگر مایل باشم، با شرایط مالی و مادی عالی. به‌علاوه، کلر هم برای اولین‌بار وارد خدمات تحقیقاتی شده و در دروس دکتری علوم زمین دانشگاه پرینستون شرکت می‌کند. در آنجا به گروهی ملحق شده که روی یک کشف جدید فوق‌العاده کار می‌کنند ــ ممکن است فسیل‌های حیوانات کشف‌شده قدیمی‌ترین فسیل‌های شناخته شده باشد، فقط همین! مدیر گروه او را تشویق به شرکت در یک دورهٔ کارآموزی پسادکتری می‌کند. در هر حال، وقتی به دنبال من به پرینستون آمد، شغل معلمی‌اش در لیون را از دست داد و اکنون هم برای شرکت در نوبت بعدی آزمون استخدام معلم خیلی دیر شده است: این چیزها واقعاً انگیزه‌ای برای بازگشت ایجاد نمی‌کند. از نظر او ماندن در اینجا مسلماً ساده‌تر و ارضاکننده‌تر خواهد بود.

در این شرایط، مقاومت در مقابل وسوسه‌های پرینستونی مشکل است. البته، من فکر این را هم نمی‌کنم که به طور دائم در کشوری زندگی کنم که تا این حد از لحاظ کیفیت نان عقب‌ماندگی دارد ... اما برای چند سال، چرا نکنم؟ از آن گذشته اگر آنها نمی‌توانند پیشنهاد خوبی برای رفتن به پاریس به من بدهند، من چه کار کنم!

هفته‌هاست که تمام این چیزها در سرم می‌چرخد و این‌ور و آن‌ور می‌رود، و دقیقاً همین امشب تصمیم گرفتم که ایمیلی به فرانسه بفرستم و در مورد مدیریت IHP جواب رد بدهم.

اما امروز صبح، وقتی پُست الکترونیکم را باز کردم، آنچه انتظارش را نداشتم اتفاق افتاد: درست شد، تمام شرایطم پذیرفته شده بود! موضوع مکمل حقوق درست شده بود، معافیت از تدریس درست شده بود، تمدید بورس شخصی من درست شده بود. این چیزها در ایالات متحده پیش‌پاافتاده است اما در فرانسه معامله‌ای است فوق‌العاده. کلر پیشنهاد را از پشت سر من به دقت می‌خواند.

ــ اگر همهٔ این چیزها را درست انجام بدهند، تو باید برگردی.

او فکر مرا به زبان آورد. بنابراین آخر ماه ژوئن به فرانسه بازخواهم گشت؛ با پرینستون خداحافظی خواهم کرد.

باید همکارهای آمریکایی جدیدم را از این امر مطلع کنم که در میان آنها نخواهم ماند. برخی آن را مثبت تلقی خواهند کرد (موفق باشی سدریک، کار بسیار پرجاذبه‌ای است) برخی دیگر برای من اظهار نگرانی می‌کنند (سدریک، آیا درست فکر کرده‌ای، ادارهٔ یک مؤسسه به این پیچیدگی، یعنی پایان کار تحقیقاتی‌ات) برخی هم بسیار رنجیده‌خاطر خواهند شد (مانند این پژوهشگر بسیار معروف در پرینستون که سه ماه با من حرف نخواهد زد). روابط دیپلماتیک من باز هم پیچیده‌تر خواهد شد، هم در ایالات متحده و هم در فرانسه.

در میان این سردرگمی یک اطمینان نیز وجود دارد: مهمترین چیزی که دارد برای من اتفاق می‌افتد، کاری است که با کلمان در جریان است.

*

انستیتو هانری پوانکاره (IHP)، یا «خانهٔ ریاضیات و فیزیك نظری» که در مجتمع دانشگاهی پی‌یر و ماری کوری قرار دارد در سال ۱۹۲۸ با هدف پایان دادن به انزوای ریاضیات در فرانسه آن زمان تأسیس شد؛ انستیتو به سرعت تبدیل به مکانی رفیع برای تحصیلات علمی و فرهنگ فرانسوی شد. اینشتین در آنجا نسبیت عام تدریس کرد و ولترا آنالیزِ ریاضیِ زیست‌شناسی را به فرانسه آورد. همچنین اولین مؤسسهٔ فرانسوی آمار و اولین پروژهٔ کامپیوتر فرانسوی در آنجا شروع به کار کرد. حتی هنرمندان هم به این انستیتو آمده‌اند، زیرا سورئالیست‌ها از آنجا الهام می‌گرفته‌اند، شاهد این مدعا عکس‌ها و تابلوهای نقاشی مَنْ رِی[1] است.

IHP در دهه‌های ۵۰ و ۶۰ محل تحصیلات ریاضی دانشگاه پاریس بود و در سال‌های ۱۹۷۰ دچار رکود گردید و در اوائل سال‌های ۱۹۹۰ بازسازی و تجدید بنا شد و به شکل امروزی خود درآمد: هم یك مدرسهٔ داخلیِ پی‌یر و ماری کوری (UPMC) است و هم ابزاری برای سیاستگذاری علمی ملی است که توسط مرکز ملی تحقیقات علمی (CNRS) حمایت می‌شود. مدیریتِ از نزدیك توسط یك دانشگاه بسیار بزرگ، IHP را از آسیب سوانح مصون نگه می‌دارد و از نظارت دائم (تکنیکی و اداری) گروهی بزرگ، که مؤسسه‌ای به این اندازه نمی‌تواند در خود جای دهد، برخوردار می‌سازد. حمایت CNRS باعث می‌شود انستیتو امکانات اضافی در اختیار داشته باشد و از یك شبکهٔ ملی مهارت‌ها بهره جوید.

IHP دارای وظایف متعددی است: محل تبادلات علمی ملی و بین‌المللی است، پذیرای برنامه‌های موضوعی گوناگون، دوره‌های دکتری در سطح بالا و تعداد زیادی گردهمایی و سمینار است. نقش هماهنگ‌کننده را بین دانشگاه‌های فرانسوی ایفا می‌کند و حکم سفیر ریاضیات فرانسه نزد جامعه را دارد. غنای زندگی علمی در پاریس باعث شده است که در محل انستیتو شاهد شکوفایی بی‌نظیری در ریاضیات در صحنهٔ بین‌المللی باشیم. هیئت مدیرهٔ IHP، که قسمتی از آن از طریق انتخابات ملی تعیین می‌شود، شامل نمایندگان تعداد زیادی مؤسسهٔ علمی فرانسوی است؛ شورای علمی آن، که کاملاً مستقل است، از شخصیت‌های علمی درجهٔ اول تشکیل شده است. اماکن تاریخی آن، کتابخانهٔ مرجع آن،

1. Man Ray

تخصص آن در دعوت از پژوهشگران خارجی، همکاری نزدیك آن با مجامع فرهیخته و مؤسسات دیگری که به ریاضیات اختصاص دارند، همگی عواملی هستند که در درخشش این انستیتو سهیم‌اند.

برگرفته از یادداشت‌های تلفیقی در مورد انستیتو هانری پوانکاره (سدریك ویلانی، سپتامبر ۲۰۱۰).

فصل هفدهم

پرینستون، بعدازظهر ۲۵ فوریهٔ ۲۰۰۹

بچه‌ها از مدرسه برگشته‌اند و مشغول ساختن آلونک و مشاهدهٔ سنجاب‌های روی چمن ...

اما آن طرف خط، کلمان آرامش کمتری دارد.

ــ طبقه‌بندی تقریب‌ها باعث می‌شود بتوان برخی از مسائلی را که به آنها اشاره داشتم حل کرد ... اما مسائل زیاد دیگری باقی می‌ماند.

ــ خُب، به هر حال داریم پیشرفت می‌کنیم.

ــ روش آلیناک ـ ژرارد را خوب مطالعه کردم، در تقریب‌ها یک نگرانی عمده وجود دارد: برای اینکه جملهٔ منظم‌کننده به سمت صفر همگرا باشد، باید کمی حاشیهٔ نظم وجود داشته باشد، و منظم کردن می‌تواند همگرایی دونمایی این روش را از بین ببرد.

ــ هوم ... من به این توجه نکرده بودم. آیا مطمئنی که آهنگ همگرایی روش نیوتون را از دست می‌دهیم؟ خُب، این را معلوم خواهیم کرد.

ــ و ثابت‌های نظم در توابع تحلیلی غول‌آسا هستند!

ــ خُب، در واقع هم این ثابت‌های نمایی نگران‌کننده‌اند، اما از این مشکل هم خلاص خواهیم شد، در این مورد مطمئن هستم.

ــ بعد هم، به هر حال، این ثابت‌ها سریع‌تر از آنکه بتوان آن‌ها را توسط همگرایی روش نیوتون از بین برد، منفجر خواهند شد! برای اینکه باید زمینه را منظم کرد تا بتوان خطایی را که تابع b به وجود آورده کنترل کرد. این تابع برحسب معکوس زمان است، اما یک ثابت وجود دارد، و این ثابت

قاعدتاً باید بتواند نُرم‌هایی را که از پراکندگی ناشی می‌شوند کنترل کند ... اما این نُرم‌ها در مسیر اجرای این تلاقی می‌کنند، زیرا اتلاف‌هایی مورد نظر ماست که نسبت به λ جمع‌پذیر باشند.

ـــ خُب، در واقع با تو موافقم، هنوز درست نمی‌دانم راهش چیست. اما مطمئنم که راهش را خواهیم یافت.

ـــ صبر کن ببینم، تو هنوز، واقعاً، فکر می‌کنی که با منظم کردن می‌توان مشکل را حل کرد؟

ـــ بله که فکر می‌کنم، الان ما گرفتار جزئیات تکنیکی هستیم، اما در کل باید پذیرفت که پیشرفت‌های خوبی داشته‌ایم! ما اثر تشدیدها و پژواک پلاسما را فهمیده‌ایم، اصل فریب زمان[1] را فهمیده‌ایم، تقریب‌های خوبی برای پراکندگی در دست داریم، نُرم‌های درست را یافته‌ایم، تقریباً کار تمام است!

آن روز حتماً کلمان فکر کرده که من به طرز بیمارگونه‌ای خوشبینم، از آن کسانی هستم که درباره‌شان می‌گویند دیوانهٔ زنجیری است، که هنوز و برخلاف تمام شواهد امیدوار است درحالی‌که هیچ راه خروجی دیده نمی‌شود. بُن‌بستِ جدیدِ پیش‌آمده ظاهراً وحشتناک است، اما من هنوز امیدوارم. باید بگویم که در طی سه هفتهٔ گذشته سه بار در بُن‌بَست قرار گرفتیم، و هر بار موفق شدیم راه خروجی پیدا کنیم. این هم هست که موانعی که فکر می‌کردیم پشت سر گذاشته‌ایم دوباره به صورتی متفاوت برای دست‌انداختن ما پیدایشان شد ... واقعاً که میرایی لانداوی غیرخطی مارِ نُه سَرِ لِرن[2] است! اما آن روز، با وجود همهٔ آن مشکلات، متقاعد شدم که هیچ چیز نمی‌تواند ما را متوقف کند. قلب من گواهی می‌دهد که به راحتی بر مشکلات غلبه خواهیم کرد.

*

```
Date:   Mon, 2 Feb 2009 12:40:04 +0100
Subject:   Re:   globar-10
From:   Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To:   Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
```

نظرهایم را همین‌جور پشت سر هم برایت می‌گویم:

ـــ در مورد نرم‌های دوانتقالی فعلا" مطمئن هستم. دارم پراکندگی را به دقت
بررسی می‌کنم، می‌خواهم بدانم آیا تقریب‌هایی که در اختیار دارم
برای اینکه بتوانم از نرم‌های دوانتقالی در پراکندگی استفاده کنم
کفایت می‌کنند یا خیر.

ـــ بخش ۵ روبه‌راه است، در واقع انتقال نظم، محکم به سریع‌تر شدن روند
کاهشی وصل شده است، و چیز بسیار زیبایی از آب در آمده! اگر درست فهمیده

1. time cheating 2. Hydre de Lerne

باشم دستاورد قسمت «سریع‌تر شدن روند کاهشی» این است که جابه‌جایی «بزرگ»
در انتقال را تنها به یکی از توابع منتقل کند (این می‌شود یک جابه‌جایی
بین دو انتقال ِ نرم ِ دوانتقالی)، با این امید که اگر این را
در مورد میدانی که چگالی تولید می‌کند به کار ببریم،
بی‌دردسر باشد؟

ـــ در مورد بخش ۶، ایده‌ٔ کلی و محاسبات درست هستند، اما (۱) اگر من
بودم این کار را بدون اینکه روی k و l جمع بزنم انجام می‌دادم،
زیرا به نظر من ضرایب جمع‌زدنی نمی‌آیند (خیلی مهم نیست)،
(۲) برای اینکه بتوانیم در مقدمات قضیهٔ ۳.۶ اپسیلونی را کوچک
فرض کنیم، به نظر من باید c را هم کوچک بگیریم، آیا این در ادامه
در نظر گرفته شده است؟ نکات دیگری را هم برایت خواهم نوشت...
قربانت، کلمان

```
Date:    Sun, 8 Feb 2009 23:48:32 -0500
From:    Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To:   Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject:   news
```

خب، دو تا خبر خوش

ـــ خواندن مقالاتی دربارهٔ پژواک پلاسما نشان می‌دهد که علت این پدیده
دقیقاً" همان «تشدید»هایی هستند که باعث این همه نگرانی در بخش ۶
شده‌اند. در واقع اینکه آنها از نمادهایی تقریباً" عین نمادهای ما،
با یک \tau استفاده کرده‌اند، برای من سئوال‌برانگیز است.
من در اینکه خطری که در بخش ۶ شناسایی کرده بودم
از نظر فیزیکی مهم است راسخ‌تر شده‌ام، خلاصه اینکه باید بدانیم
آیا پــــژواک‌هــــای خــــودمنسجــــم* آن‌قدر در پلاسما تجمیع خواهند
شد تا کم‌کم میرایی را از بین ببرند؟

ـــ فکر می‌کنم راه درست برخورد با جملهٔ \ell = 0 را که در بخش ۵ «موقتاً"»
به کناری گذاشته بودم پیدا کرده‌ام (در \sigma_0 قضیهٔ ۸.۵):
آن را هم مثل بقیه تقریب می‌زنیم، اما تمام جملات را نگه می‌داریم،
و از اینکه به ازاء زمان‌های بزرگ \| \int f(t, x, v) dx \| = O(1)
استفاده می‌کنیم (یا بهتر، \|\int \nabla_v f(t, x, v) dx \| = O(1)).
این نتیجهٔ تقریب ما از f(t, x, v) با نرم لغزنده** نیست،
یک تقریب دیگر است در یک جواب ترابری آزاد \int f(t, x, v) dx
در طول زمان ثابت باقی می‌ماند، بنابراین کاملاً" معقول است.
وقتی پراکندگی را اضافه می‌کنیم، دیگر O(1) به کار نمی‌آید،

* echos autoconsistants ** norme glissante

بلکه O(t-\tau) یا چیزی شبیه به این، و در این صورت باید توسط
کاهش نمایی برحسب t-\tau که به همین صورت از قضیهٔ ۸.۵ نگه داشته‌ام
خنثی شود.

اصلاحاتی که در نسخهٔ پیوست انجام داده‌ام عبارت‌اند از:

* تغییراتی در بخش‌های ۱ و ۲ داده‌ام تا بتوانم مقاله‌هایی را که راجع
به پژواک پلاسما خوانده‌ام به حساب بیاورم (من درست نفهمیده بودم
که آزمایش مورد نظر چه بود، و احتمالاً تمام ریاضیدان‌ها نیز از اهمیت
حیاتی آن غافل مانده‌اند، فکر می‌کنم در این مورد کیلومترها
از دیگران جلو باشیم)

* اضافه کردن یک بخش فرعی در آخر بخش ۴ برای اینکه بگوییم با کدام
نرم‌های برحسب زمان می‌خواهیم کار کنیم؛ در آنجا داستان منظم کردن
از طریق میانگین فضایی را نقل کرده‌ام که با منابعی که کیس‌لینگ
بدان اشاره کرده بود همخوانی دارد.

* تغییراتی در بخش ۵ داده‌ام تا برخورد با جملهٔ \ell = 0 را به حساب آورم.

* اضافه کردن یک ارجاع به آزمایش پلاسما

یک نتیجهٔ مهم این است که در بخش ۸ می‌بایست نه تنها منظم بودنِ
لغزنده را بر f پخش کنیم، بلکه باید منظم بودن (برحسب v) یکنواخت
بودن (برحسب t) را بر \int f dx نیز پخش کنیم.

هیچ تغییری در بخش ۷ نداده‌ام اما، همان‌طور که حتماً متوجه شده‌ای،
آنچه که در بخش ۴.۷ به عنوان «اصلاحات» قرار داده بودم بی‌اعتبار شده،
به این معنا که آن را قبل از این‌که متوجه شوم تفاضلی مانند
(\lambda \tau + \mu) - (\lambda' \tau' + \mu') یا چیزی شبیه
به این است که در واقع باید به حساب آورده شود، نوشته بودم.

بخش ۸ را هم تغییر ندادم اما در این بخش هم خیلی چیزها هستند
که دربارهٔ «مد صفرِ» f_\tau نوشته بودم که دیگر اعتبار ندارند.

تو چه خبری داری؟ اکنون همه چیز بر بخش ۷ تکیه دارد.
قربانت
سدریک

Date: Sat, 14 Feb 2009 17:35:28 +0100
Subject: Re: global-18 final
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

این هم نسخهٔ ۱۹ همراه با یک نسخهٔ کامل از صورت قضایای ۱.۷ و ۳.۷
پراکندگی بر حسب نرم دوپیوندی با یک و با دو انتقال.
ظاهرا" (اوف!) قضیهٔ ترکیب با دو انتقال مربوط به بخش ۴ برای
اثبات کافی است. به نظر درست می آید اما خودت باید ببینی درست است
یا نه، صورت دو انتقالی آن هنوز وحشتناک است. هنوز از تصحیح
سوبولف انتگرال نگرفته‌ام، اما مطمئنا" این نقطه کم‌خطرتر است.
به جز این یک چیز را هم تغییر داده‌ام (که شامل قضیهٔ یک انتقالی
هم می‌شود): تقریب اتلاف مشخصه ها و دامنه اکنون نه تنها
یکنواخت هستند، بلکه برحسب `\tau \to + \infty` به صفر میل می‌کنند،
همان‌طور که در بخش ۸ خواسته شده بود. و این اتلاف ها به ازاء
`(t-\tau)` های کوچک از مرتبهٔ `O(t-\tau)` هستند. فردا ادامه می‌دهم،
تصحیح سوبولف را اضافه می‌کنم، و بخش ۸ را برحسب تابعی از فصل ۷
کامل می‌کنم.
قربانت، کلمان

Date: Fri, 20 Feb 2009 18:05:36 +0100
Subject: Re: Version 20 en cours
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

این هم نسخهٔ ۲۰ جاری با قضیهٔ طبقه‌بندی شدهٔ دو انتقالیِ کامل.
اکنون یک مسئلهٔ اساسی در مورد قضیهٔ ۹.۵ وجود دارد: در این نتایج،
b نمی‌تواند طی روش نش ـ موزر، به صفر میل کند (آن‌طور
که در قضیهٔ ۹.۵ خواسته شده) زیرا b یک جملهٔ خطا را تصحیح می‌کند
که ناشی از خود پراکندگی است، که به صفر میل نمی‌کند زیرا به میدان
وابسته است... الان دارم قضیهٔ ۹.۵ را با جزئیات بررسی می‌کنم.
قربانت
سدریک

فصل هجدهم

پرینستون، ۲۷ فوریهٔ ۲۰۰۹

امروز، در مؤسسه کم‌وبیش حال‌وهوای جشن حاکم است: کنفرانسی دربارهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی هندسی جریان دارد. انتخاب شرکت‌کنندگان عالی است، با چندین ستاره: تمام کسانی که دعوت شده بودند، افتخار آمدن و سخنرانی در پرینستون را پذیرفتند.

عقب سالن کنفرانس، پشت میز تحریر بزرگی که در صورت لزوم جهت ادارهٔ جلسه از آن استفاده می‌شود ایستاده‌ام. این بهترین جاست، آن را از پیتر سرنک یکی از پروفسورهای دائم مؤسسه غصب کرده‌ام. مطمئن هستم که اینجا بیدار می‌مانم و در ضمن می‌توانم کاغذهایم را هم روی میز پخش کنم، در صورتی که کسانی که نشسته‌اند از چُرت‌زدن در امان نیستند و باید به میزی کوچک بسنده کنند.

در حالی که به سخنرانی گوش می‌دهم، گاهی با جوراب از این ور به آن ور سالن می‌روم. این کار برای فعال کردن ایده‌ها ایده‌آل است.

وقت زنگ تفریح، با همان جوراب‌ها می‌دوم و به دفترم در طبقهٔ بالا می‌روم. به کلمان تلفن می‌زنم.

ــ کلمان، پیغام دیروزم را دیدی، پروندهٔ جدید را چطور؟

ــ روش جدیدی که ابتدا با نوشتن فرمول مشخصه‌ها به دست می‌آوری؟ آره، این را می‌فهمم، شروع به نوشتن محاسبات کرده‌ام، اما به نظرم خیلی وحشتناک می‌آید.

واقعاً، این کلمهٔ «وحشتناک» دائماً در گفتگوهای ما پیدایش می‌شود ...

ــ احساس من این است که مسائل همگرایی دارد پیش می‌آید. این جواب کلمان بود. من حتی برای روش نیوتون و جملات خطای ناشی از خطی‌سازی نگرانم. یک چیز دیگر هم هست که بیشتر تکنیکی است، و آن این است که در هر صورت ما با پراکندگی مرحلهٔ قبل نیز مواجه هستیم که کوچک نیست!

از اینکه چرا ایدهٔ درخشان من او را متقاعد نساخته ناراحت شدم.

ــ خُب، خواهیم دید، اگر به نتیجه نرسید عیبی ندارد، با همین روش فعلی خواهیم ساخت.

ــ در هر حال، سرگیجه‌آور است، ما تا به حال صد صفحه اثبات نوشته‌ایم و هنوز هم به نتیجه نرسیده‌ایم!! تو واقعاً فکر می‌کنی که به نتیجه خواهیم رسید؟

ــ صبر داشته باش، صبر داشته باش، چیزی نمانده ...

آنجا در آن پایین، زنگ تفریح تمام شده، با عجله پایین می‌روم تا بتوانم به دنبالهٔ کنفرانس برسم.

*

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (EDP) روابطی هستند بین آهنگ تغییر برخی کمیت‌ها برحسب پارامترهای مختلف. این شاخه از ریاضیات یکی از پویاترین و متنوع‌ترین قلمروهای علوم ریاضی است، که تا به حال، با وجود کوشش‌های فراوان، تن به وحدت نداده است. EDPها در تمامی پدیده‌های فیزیك محیط‌های پیوسته ظاهر می‌شوند و به تمام حالت‌های ماده اعم از گاز، مایع، جامد و پلاسما و تمام نظریه‌های فیزیکی، اعم از فیزیك کلاسیك، نسبیتی و کوانتومی و غیره مربوط می‌شوند.

اما، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در پس بسیاری از مسائل هندسی نیز قرار می‌گیرند؛ در این صورت به آنها EDPهای هندسی گفته می‌شود. به کمك این معادلات می‌توان اشیاء هندسی را بر طبق قواعد کاملاً معین تغییر شکل داد. در این زمینه، نوعی تفکر مختص آنالیز در هندسه به کار گرفته می‌شود: این گونه ترکیب مباحث ریاضی در طول قرن بیستم همواره رو به افزایش بوده است.

کنفرانس ماه فوریهٔ سال ۲۰۰۹ در پرینستون سه موضوع اصلی را دربرمی‌گرفت: هندسه‌های همدیس (یعنی تغییرات هندسی‌ای که فاصله‌ها را برهم‌می‌زنند اما زوایا را بدون تغییر باقی می‌گذارند)؛ ترابری بهینه (چگونه می‌توان جرمی را که دارای یك ریخت اولیهٔ ازپیش‌تعیین‌شده است به یك ریخت نهایی، که آن هم ازپیش‌تعیین‌شده است، درآورد به طوری که انرژی مصرف‌شده در این ترابری حداقل باشد)؛ و مسئلهٔ مرزهای آزاد (در این مسائل به دنبال شکل

مرزی هستیم که دو حالت از ماده، یا مواد گوناگون را از یکدیگر جدا می‌کند). در این سه رشته هم هندسه و آنالیز دخیل‌اند و هم فیزیك.

در سال‌های دهۀ ۱۹۵۰، جان نَش تعادل بین هندسه و آنالیز آن زمان را دگرگون ساخت. او کشف کرد که می‌توان مسئلۀ هندسی انتزاعی غوطه‌ور ساختن ایزومتریك را با استفاده از تکنیك تجزیۀ ریزمعادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حل کرد.

چند سال پیش، گریگوری پرلمان برای اثبات حدس پوانکاره از یك EDPی هندسی به نام شارش ریچی[1] استفاده کرد که توسط ریچارد همیلتون ابداع شده بود. این راه حل تحلیلی برای یك مسئلۀ نمادین هندسه دوباره تعادل بین رشته‌ها را دگرگون ساخت، و باعث رونق بی‌سابقۀ EDPهای هندسی شد. بُمب پرلمان به مثابۀ پژواکی از بُمبِ نَش با پنجاه سال فاصله منفجر شد.

1. flot de Ricci

فصل نوزدهم

پرینستون، اول مارس ۲۰۰۹

ناباورانه پیغامی را که الان روی صفحهٔ کامپیوترم ظاهر شده بارها می‌خوانم.

کلمان طرحِ جدیدی دارد؟ او دیگر نمی‌خواهد منظم‌سازی کند؟ او دیگر نمی‌خواهد از دست رفتن نظم را که از تبعات تغییر در زمان است بازیابی کند؟

این را از کجا آورده؟ چند ماه است که می‌خواهیم طوری روش نیوتون را به کار ببریم که نظم را دربر داشته باشد مانند روش نَش ـ موزر؛ و حالا کلمان به من می‌گوید که باید به دنبال روش نیوتون بدون نظم باشیم!؟ و او می‌گوید که باید، با حفظ زمان اولیه و زمان نهایی، امتداد مسیرها را با دو زمان مختلف تقریب بزنیم؟؟

خُب، با وجود همهٔ این حرف‌ها، چرا که نه؟ اما، بالاخره که چی! سدریک، باید مواظب باشی، از جوان‌ها باید ترسید، دارند از تو جلو می‌زنند!

موافقم، این اجتناب‌ناپذیر است، همیشه جوان‌ها درآخر برنده می‌شوند ... اما ... هنوز هیچی نشده؟

گریه‌وزاری باشد برای بعد، الان باید بفهمم او چه می‌خواهد بگوید. داستان این تقریب چیست، چرا باید زمان اولیه را در حافظه نگهداشت؟

درآخرکار، من وکلمان باید یافته‌های این پروژه را تقسیم‌کنیم: نرم‌ها، تقریب زدن انحراف‌ها، نزولی بودن به ازاء زمان‌های بزرگ و پژواک‌ها از من؛ زمان‌فریبی، طبقه‌بندی خطاها، تقریب‌های دوزمانی و روش بدون نظم از او. به علاوه ایدهٔ نُرم‌های لغزنده هم هست که در یک جلسهٔ کاری مشترک پیدا شد و حقیقتاً نمی‌دانیم مال کدامیک از ما بود ... علاوه بر اینها صدها ترفند کوچک دیگر هم زده شد.

اگر دوباره در این مورد فکر کنیم، می‌بینیم که خیلی هم بد نیست، در وسط پروژه اختلاف پیدا کردیم: به مدت یک یا دو ماه ذهن هر یک از ما روی ایدهٔ خودش متمرکز بود و گوش شنوا برای استدلال‌های دیگری نداشت، اما الان فهمیده‌ایم که باید این دو دیدگاه را تلفیق کرد.

در هر صورت، اگر حق با کلمان باشد، آخرین قفل بزرگ مفهومی شکسته شده است. در این یکشنبهٔ اول ماه مارس، کار ما وارد مرحلهٔ جدیدی می‌شود، مرحله‌ای که باید در آن وسواس بیشتری به خرج داد، اما مرحله‌ای است مطمئن‌تر. روش کلی تعیین شده است، اکتشافاتی که در تمام جهات انجام می‌دادیم خاتمه یافته است. اکنون باید مواضع را مستحکم کنیم، اثبات کنیم، اثبات کنیم، اثبات کنیم ... این لحظه‌ای خواهد بود که باید قدرت آتش‌مان در آنالیز را به کار گیریم!

بعدها، کلمان اقرار کرد که تصمیم گرفته بود که در آن آخرِ هفته تمام کارها را تعطیل کند. شنبه صبح او نوشتن پیغامی نحس را شروع کرد: «همهٔ امیدها تبدیل به یأس شده است ... مشکلات فنی پیش روی ما غلبه‌ناپذیرند ... هیچ راهی در افق دید پیدا نیست ... من که ول می‌کنم.» اما در لحظهٔ فرستادن پیغام عقب نشست، می‌خواست کلماتی را برای متقاعد ساختن من و دلداری دادن به من پیدا کند. پیغامش را بایگانی کرد. شب که شد، وقتی دوباره مشغول نوشتن شد، به یک برگ کاغذ و یک مداد مسلح بود و می‌خواست دوباره تمام راه‌های بی‌ثمر طی شده را به ذهن بیاورد، با کمال حیرت مشاهده کرد که طریقهٔ درست در مقابل او گشوده شده است. صبح آن روز، پس از چند ساعت خواب پریشان، ساعت ۶ صبح از خواب برخاست، همه چیز را دوباره نوشت تا بتواند ایدهٔ کلیدی خود را که می‌بایست ما را از این بن‌بست خارج کند درست بیان کند.

در آن روز یک قدم مانده بود که پروژه را رها کنیم. نزدیک بود چند ماه تلاشمان بی‌ثمر شود — در بهترین حالت در سردابه فراموش شود و در بدترین حالت دود شود و به هوا رود.

اما در آن طرف اقیانوس آتلانتیک، من فکرش را هم نمی‌کنم که در مرز فاجعه قرار داریم، تنها چیزی که مشاهده می‌کنم شور و هیجانی است که از پیغام کلمان تراوش می‌شود.

فردا بچه‌ها را من نگه می‌دارم، مدرسه به علت طوفان برف تعطیل است؛ اما از پس‌فردا می‌خواهم با خشونت رفتار کنم. **مسئله** باید آمادهٔ زورآزمایی شود. مسئلهٔ لانداو را همه جا با خودم خواهم برد، در جنگل، در پلاژ، در تختخوابم، حالش را جا خواهم آورد.

در ماه فوریهٔ ۲۰۰۹ بیش از صد ایمیل بین من و کلمان رد و بدل شد؛ در ماه مارس این رقم به بیش از ۲۰۰ خواهد رسید.

*

Date: Sun, 1 Mar 2009 19:28:25 +0100
Subject: Re: global-27
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

شاید از یک مسیر دیگر امیدی باشد: منظم‌سازی نکنیم، اما سعی کنیم نرم را، در هر مرحله‌ای از این روش که احتیاج باشد، با یک انتقال پخش کنیم. اما در امتداد مشخصه های مرحلهٔ قبل از آن. بنابراین به ترتیب نرم‌های زیر را تا مرتبهٔ n تقریب می‌زنیم (دیگر هر بار جملات اتلافی قابل جمع روی lambda و mu را نمی‌نویسم):

۱) نرم F چگالی \rho_n با اندیس‌های lambda t + mu

۲) نرم Z توزیع h_n با اندیس lambda، mu و t

۳) نرم C میانگین فضایی <h_n> با اندیس lambda

۴) نرم Z در زمان tau با انتقالی برابر با -bt/(1+b) در امتداد مشخصه ها(ی کامل) S_{t, tau} از مرتبهٔ n-1. نسبت به tau مشتق می‌گیریم تا معادله‌ای برحسب

H_tau := h^n_tau\circ S_{t, tau}^{n-1}

از نوع (علائم منفی احتمالی را دیگر نمی‌گذارم)

\partial_tau H = (F[h^n]\cdot \nabla f^{n-1}) \circ S_{t, tau}^{n-1} + (F[h^{n-1}]\cdot \nabla h^{n-1}) \circ S_{t, tau}^{n-1}

بنابراین تقریبا "در این معادله دیگر اصلا" میدان وجود ندارد و تمام جملات سمت راست را چشمه در نظر می‌گیریم، با استفاده از نرم‌های مورد (۱) مربوط به چگالی: نرم Z با انتقال b را تخمین می‌زنیم: در مورد چگالی، خطای ناشی از این انتقال را که به علت مشخصه ها پیدا می‌شود محاسبه می‌کنیم (زیرا نرم روی x تصویر می‌شود) و در مورد جملات دیگر از فرض بازگشت نقطهٔ قبلی برای یافتن کرانی برای نرم‌های حاضر استفاده می‌کنیم.

۵) اکنون باید یک کران (برحسب نرم انتقال‌یافته) برای f^n\circ S_{t, tau}^n (با مشخصه هایی از مرتبهٔ مناسب n) داشته باشیم و برای این کار باید از کران فرض بازگشتی (برحسب نرم انتقال‌یافته) برای f^{n-1}\circ S_{t, tau}^{n-1} استفاده کنیم.

به یمن ردیف ۴) فوق، با جمع کردن می‌توان کرانی برای f^n\circ S_{t, tau}^{n-1} یافت. سپس باید از این واقعیت بهره جست که می‌توان f^n\circ S_{t, tau}^n (مشخصه های از درجه n) را برحسب f^n\circ S_{t, tau}^{n-1} (مشخصه های از درجه n-1) به پیمانهٔ یک جملهٔ اتلافی کراندار کرد که وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند جمع‌پذیر باشد.

کلیات ایده به صورت زیر خلاصه می‌شود:

— برای تقریب زدن چگالی، راه دیگری وجود ندارد. باید روی توزیع درجهٔ قبل، در امتداد مشخصه های درجهٔ قبل، مشخصه ها و یک نرم انتقال یافته (با انتقالی از مرتبهٔ ۱) را داشته باشیم.

ـــ اما به محض اینکه کرانی برای مشخصه ها داشته باشیم، می‌توانیم با نرم انتقال‌یافته در امتداد مشخصه ها کار کنیم زیرا این دو پدیده هرگاه روی چگالی تصویر شوند یکدیگر را خنثی می‌کنند.

بر عکس در آنچه که الان گفتم به یک نکته اشاره نکردم و آن گرادیان برحسب v یِ زمینه است که با ترکیب توسط مشخصه ها جابه‌جا نمی‌شود، اما می‌توان امیدوار بود که چیزی شبیه به نرم انتقال‌یافته ٔ (\nabla_v f^{n-1}) \circ S_{t, \tau}^{n-1} کوچکتر از یک ثابت ضربدر نرم انتقال یافته ٔ ... \nabla_v (f^{n-1} \circ S_{t, \tau}^{n-1}) داشته باشیم.

اگر در دسترس باشی، می‌توانیم در این مورد تلفنی صحبت کنیم. من تا یک ساعت دیگر در منزل هستم. فکر می‌کنم که اینها تاحدود زیادی با طرح تو همخوانی دارد با این تفاوت که باید دو مرحله را به طور اساسی از یکدیگر متمایز کرد و فقط در مرحله ٔ دوم چیز ها را در امتداد مشخصه ها نگاه کرد.

قربانت، کلمان

Date: Mon, 2 Mar 2009 12:34:51 +0100
Subject: Version 29
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

خب، این هم نسخه ٔ ۲۹، در این نسخه واقعا" کوشیده‌ام استراتژی‌ای را که دیروز درباره‌اش با تو صحبت می‌کردم پیاده کنم: بخش ۹ از پایداری خطی را کاملا" بازنویسی کردم، در بخش‌های فرعی ۵.۱۱ و ۶.۱۱ از بخش روش نیوتون خطوط کلی مطالعه ٔ همگرایی را ترسیم کرده‌ام. اگر اشتباه لپی مرتکب نشده باشم، واقعا" احساسم این است که داریم به انتها می‌رسیم!!

فصل بیستم

پرینستون، ۱۱ مارس ۲۰۰۹

پس از بازگشت از محیط دلچسب غذاخوری، گفتگویی داشتیم پُر از شور و شوق، از ریاضیات گفتیم و غیبت کردیم.

امروز پیتر سرنک[۱] سرِ میز روبه‌روی من نشسته بود و من سر صحبت را با او باز کردم دربارهٔ استاد راهنمای رساله‌اش، پال کوهن، کسی که تصمیم‌ناپذیری فرضیهٔ پیوستار را ثابت کرده بود و سپس به افق‌های دیگری از ریاضیات روی آورده بود. پیتر جوان که در پی هیجان‌های پژوهش بود به خاطر او کشور زادگاهش آفریقای جنوبی را ترک کرده بود. با عشق و علاقه‌ای که همه در او می‌شناسند از کوهن و علاقهٔ او به حل مسائلی که از عدم[۲] و بدون اتکا به کارهای دیگران به وجود می‌آورد یاد کرد.

ــ کوهن به رشد تدریجی ریاضیات اعتقادی نداشت!

ــ رشد تدریجی؟

ــ بله، او فکر می‌کرد که ریاضیات با جهش‌های ناگهانی پیش می‌رود. تو و من، مانند دیگران، بیشتر از طریق بهبود بخشیدن به کارهای دیگران پیش می‌رویم، اما کوهن این‌طور نبود! نباید به او می‌گفتی می‌خواهی چیزی را اصلاح کنی، او سرجایت می‌نشاند. فقط به انقلاب اعتقاد داشت.

بودن در کنار پیتر همیشه لذت‌بخش است. هم‌اتاقی جوانِ دفترکارم، امانوئل میلمن[۳] هم سر میز بود. او اسرائیلی است و ستاره‌ای است که دارد در هندسهٔ اشیاء محدّب طلوع می‌کند. پدر،

1. Peter Sarnak 2. ex nihilo 3. Emanuel Milman

پیتر سرنک

پدربزرگ، و عموی امانوئل ریاضیدان بوده‌اند و خودش اخیراً پدر شده است. پدر یک ریاضیدان آینده؟ در هر صورت، او با همان علاقه و امیدی که دربارهٔ ریاضیات صحبت می‌کند دربارهٔ فرزند نازنینش هم صحبت می‌کند.

نزدیک امانوئل، سرجو کلاینرمن[1] نشسته که در دههٔ ۷۰ از رومانیِ کمونیست فرار کرده است. او با همکاری ریاضیدان خارق‌العادهٔ یونانی دیمیتری کریستودولو[2] یک نتیجهٔ اساسی در نسبیت عام به اثبات رساند، اثباتی روان در ۵۰۰ صفحه و هر دو با این کار شهرت جهانی کسب کردند. من خیلی دوست دارم با سرجو دربارهٔ ریاضی، سیاست و محیط‌زیست بحث کنم، در اغلب این موارد عقاید ما متفاوت است.

علت اینکه بحث در سر میز ما آن‌قدر داغ بود، یکی هم حضور جول لِبوویتس بود که با وجود هشتاد سالی که از سنش گذشته هنوز سرشار از انرژی است. جول به همه چیز علاقه‌مند است، می‌خواهد همه چیز را بداند، و اگر او را به فیزیک آماری، رشتهٔ مورد علاقه‌اش سوق دهیم، دیگر نمی‌شود جلویش را گرفت.

من از حضور جول در آنجا استفاده کردم و از او خواستم برای امانوئل مسئلهٔ گذار فازِ یک گاز متشکل از کره‌های صُلب را توضیح دهد. طرح مسئله آسان و مسئله اساسی است و نیم قرن است که مُخیّلهٔ تمامی جامعهٔ فیزیک آماری را به چالش کشیده است.

خُب، آیا این قابل قبول است که در سال ۲۰۰۹ هنوز ندانیم چطور راز تغییر حالت را توضیح دهیم: چرا یک مایع، وقتی حرارت داده می‌شود به گاز تبدیل می‌گردد، چرا وقتی آن را سرد می‌کنیم جامد می‌شود؟ کسی چه می‌داند، جوانی مانند امانوئل ممکن است ایدهٔ جدیدی داشته باشد ...

پس از وقفه‌ای که غذاخوردن ایجاد کرد، تمام مسائل جاری دوباره به فکرم آمدند. مسائل اداری انستیتو پوانکاره هنوز مانده‌اند و باید حل شوند. مهمترین مشکل رابطهٔ من با لیون است

1. Sergiu Klainerman   2. Demetri Christodoulou

جول لِبوویتس

چون می‌خواهم با حفظ سِمَت، مأموریت مدیر تیم را انجام دهم. در لابراتوار، همدست همیشگی من آلیس گیونه[1] از منافع من دفاع می‌کند، اما همه چیز بسیار پیچیده است ... و باید چند سمینار آماده کنم، و مسئلهٔ میرایی لانداو هنوز روی پاهای خودش نایستاده! در ده روز گذشته، من و کلمان ده شکل جدید از مقاله‌مان نوشته‌ایم؛ آخرین آن تا این تاریخ به شمارهٔ ۳۶ است و شامل ۱۳۰ صفحه می‌شود. چند غلط پیدا و اصلاح کردیم، بخش بسیار آموزنده‌ای شامل مثال‌های نقیض اضافه کردیم، همکار لیونی من فرانسیس فیلبر[2] تصاویر بسیار زیبایی از میرایی لانداو که با کامپیوتر ترسیم شده بود در اختیار من قرار داد. با وجود اینها، هنوز خیلی کارها باقی مانده که باید انجام شود! در سَرَم، بی‌سروصدا، مرور می‌کنم: باید تقریب‌های مشخصه‌ها را ظریف‌تر کرد و سوپریمم را به داخل نُرم بُرد، فکر را بر برهم‌کنش‌های کولنی تمرکز داد، اینجا و آنجا یک اندیس تصحیح نظم سوبولف اضافه کرد (هفت تا اندیس؛ ناقابل[3])!، باید قشربندی[4] را در تابع نمایی در طول روش نیوتون حفظ کرد و روش بازگشتی را با همهٔ عظمت به کار انداخت ...

اما جولِ خستگی‌ناپذیر مرا به یک جلسهٔ کاری با یک همکار فرانسوی کشاند. یأس عمیقی مرا فرا گرفته است. آن‌قدر چیزها هستند که باید به آنها فکر کنم، و اکنون چندین روز است که تا ساعت دوی صبح کار می‌کنم ... در حالت رخوت بعد از غذا، در وضعی نیستم که بتوانم ایده‌هایم را جمع‌وجور کنم. اصلاً نمی‌توانم به جول نَه بگویم، اما چون می‌بینم که جلسهٔ کاری به طول خواهد انجامید و من خسته شده‌ام، یک بهانهٔ حقیر می‌آورم: اجازهٔ مرخصی می‌گیرم و می‌گویم باید بروم بچه‌ها را از مدرسه بیاورم (درحالی‌که امروز مادر آنها این کار را انجام خواهد داد)؛ سپس منتظر می‌مانم تا دو همکارم بروند و در اتاق دیگری کار کنند، یواشکی به دفترم برمی‌گردم، روی زمین خالی دراز می‌کشم، می‌خوابم و می‌گذارم مغزِ در عذابم افکارش را مرتب کند.

1. Alice Guionnet 2. Francis Filbet 3. porca miseria 4. stratification

به محض اینکه بیدار شدم کار را از سر گرفتم.

*

پال کوهِن، همکار جوان و رقیب بلندپرواز نَش در دانشگاه پرینستون، یکی از خلاق‌ترین ذهن‌های قرن بیستم است. افتخارآمیزترین دستاوردش حل فرضیهٔ پیوستار است که مسئلهٔ کاردینال واسط نیز نامیده می‌شود. این معما یکی از ۲۳ مسئلهٔ راهبردی‌ای بود که در سال ۱۹۰۰ توسط هیلبرت مطرح شده بود و در آن زمان یکی از مهمترین مسائل ریاضی به حساب می‌آمد؛ حل این مسئله، البته، مدال فیلدز سال ۱۹۶۶ را نصیب او ساخت.

برای توضیح مسئلهٔ پیوستار، یادآوری چند نکته مفید خواهد بود. تعداد اعداد صحیح (۱، ۲، ۳، ۴، ...) البته بینهایت است. تعداد اعداد کسری (۱/۲، ۳/۵، ۴/۲۷، ۵۳۴۱۷۸۴۳/۱۴۳۶۶۵۳۲، ...) هم همین‌طور. ظاهراً تعداد اعداد کسری بیشتر از تعداد اعداد صحیح است، اما این توهمی بیش نیست: اعداد کسری را می‌توان شمرد، مثلاً

۱, ۱/۲, ۲/۱, ۱/۳, ۳, ۱/۴, ۲/۳, ۳/۲, ۴, ۱/۵, ۵, ۱/۶, ۲/۵, ۳/۴, ۴/۳, ۵/۲, ۶, ...

و همین‌طور تا آخر. هر بار مجموع (صورت + مخرج) را اضافه می‌کنیم ــ همان‌طور که ایوار اِکلَند در قصهٔ شادی‌بخش «گربه در سرزمین اعداد»[1] توضیح می‌دهد. بنابراین تعداد اعداد کسری از اعداد صحیح بیشتر نیست، تعدادشان دقیقاً برابر است.

در عوض، اگر اعداد حقیقی را در نظر بگیریم، اعدادی که با بینهایت رقم اعشار نوشته می‌شوند (این اعداد را می‌توان به صورت حدّ اعداد کسری نیز در نظر گرفت)، در این صورت یك استدلال باشکوه کانتور نشان می‌دهد که تعداد اعداد حقیقی بسیار بیشتر است، غیرممکن است بتوان آن‌ها را شمرد.

بنابراین، بینهایت عدد صحیح داریم، و بینهایت عدد حقیقی داریم که تعدادشان بیشتر از اعداد صحیح است. حال، آیا بینهایتی وجود دارد که هم از بینهایت اعداد صحیح بزرگ‌تر و هم از بینهایت اعداد حقیقی کوچك‌تر باشد؟

چند نسل از منطق‌دان‌ها با این مسئله کلنجار رفته‌اند. برخی می‌خواسته‌اند نشان دهند که بله، این بینهایتِ واسط وجود دارد، و برخی برعکس می‌خواسته‌اند نشان دهند که خیر، چنین بینهایتی وجود ندارد.

پال کوهن متخصص منطق نبود، اما به توانایی مغز خود ایمان داشت؛ روزی مشغول کار روی این مسئله شد و در مقابل شگفت‌زدگی همگان ثابت کرد که جواب نَه بله است و نَه

1. Ivar Ekeland, 2006, *The Cat in Numberland.*

خیر. یك جهان ریاضیاتی وجود دارد با یك بینهایت واسط و جهان دیگری هم وجود دارد بدون بینهایت واسط و ما باید بگوییم کدام جهان را می‌خواهیم انتخاب کنیم. هر کدام مطابق میل ما باشد درست است.

*

جول لبوویتس مرجع تقلید فیزیك آماری است، علمی که موضوع آن کشف ویژگی‌های سیستم‌هایی است که از تعداد بسیار زیادی ذره تشکیل شده‌اند. گاز از میلیاردهامیلیارد مولکول تشکیل شده است. جمعیت زیستی شامل میلیون‌ها نفر می‌شود، کهکشان‌ها حاوی صدها میلیارد ستاره هستند، یك شبکهٔ کریستالی از میلیاردهامیلیارد اتم تشکیل می‌شود ... مسائلی که مربوط به فیزیك آماری می‌شود بسیارند! و تقریباً شصت سال است که جول انرژی پایان‌ناپذیر خود را در راه عشقش به خدمت گرفته و بدون وقفه با همکاران ریاضیدان و فیزیکدانش کار می‌کند. سری کنفرانس‌هایی که او سازمان می‌دهد و از بیش از نیم قرن قبل تا به حال هر ساله دو جلسه برگزار شده است، مسلماً قدیمی‌ترین و پُربارترین سری کنفرانس‌هایی است که تاکنون توسط یك پژوهشگر فعال سازمان‌دهی شده است.

بیش از هشتاد سال قبل جول در کشور چك‌واسلواکی متولد شد و زندگی بسیار پرماجرایی داشت، مملو از خاطرات خوب و بد. روی بازویش شماره‌ای خالکوبی شده، او هیچ‌وقت دراین‌باره چیزی نمی‌گوید. در تمام مجالس، جول اولین کسی است که می‌خندد و می‌نوشد و البته در مورد فیزیك آماری بحث می‌کند، با هر آهنگ و هر لحنی که باشد. باید انرژی افراد را با میلی‌جول، یك هزارم‌جول، اندازه گرفت، یکی از همکاران با خنده می‌گفت: یك هزارم انرژی جول هم خودش خوب است. حالا که دارم درباره‌اش فکر می‌کنم می‌بینم شاید حتی یك پیکوجول هم خوب باشد.

*

```
Date:   Mon, 9 Mar 2009 21:42:10 +0100
From:   Francis FILBET <filbet@math.univ-lyon1.fr>
To:   Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Cc:   Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
```

سلام

این هم نتایج کار آخر هفته. فیلم‌های کوچک، چیز مهمی نیست

(ارزش یک \دپلشن* را هم ندارد): در قسمت شبیه‌سازی عددی ذرات باردار

* Desplechin

http://math.univ-lyon1.fr/~filbet/publication.html

این در مورد پلاسما است. هنوز برای مورد گرانش تغییر علامت نداده‌ام
اما از آنچه تو گفتی بسیار متعجب شده‌ام. فکر می‌کنم برای
اینکه بتوانیم یک پتانسیل دوره‌ای، یعنی \int_۰^L E(t, x)dx = ۰ را،
وقتی شرایط حدی دوره‌ای هستند، حفظ کنیم باید زمینه‌ای خنثی‌کننده
داشته باشیم.

Date: Mon, 9 Mar 2009 22:11:10 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Francis FILBET <filbet@math.univ-lyon1.fr>
Cc: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>,
Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

تصاویر عالی هستند! دیدن «واقعی» اثرات معادلاتی که روی آنها «به طور
انتزاعی» کار کرده‌ای بسیار هیجان‌انگیز است ...
سدریک

فصل بیست‌ویکم

پرینستون، ۱۳ مارس ۲۰۰۹

درب اتاق بچه‌ها را می‌بندم، دخترم هنوز در تختخوابش به ماجراهای گوفی، قهرمان داستان تخیلی روز، فکر می‌کند و هِرهِر می‌خندد. بخوابید کوچولوهای نازنین، فردا هوا روشن خواهد شد.

کلِر هم در تختخوابش دارد از آخرین فرصت برای دوره کردن زبان ژاپنی‌اش، قبل از رفتن به میدان با همکاران زمین‌شناسش، استفاده می‌کند، فردا صبح زود حرکت می‌کنند. الان موقع مناسب برای شروع به کار است. چای را آماده می‌کنم، کاغذهایم را پخش می‌کنم. هنوز کوهی از مسائل تکنیکی در پیش‌رو داریم که من و کلمان داریم یکی‌یکی آنها را از میان برمی‌داریم.

بزرگ‌ترین قسمت اثبات، یعنی بخش ۱۰، در حال ساخت است. مطمئن بودم که این کنترل مُدِ صفر لعنتی برای من مشکل ایجاد خواهد کرد. و من باید ده روز دیگر نتایج را ارائه دهم! ده روز کوتاه برای اینکه همه چیز را محکم‌کاری کنم.

*

Date: Fri, 13 Mar 2009 21:18:58 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: 38 !

به پیوست: نسخه‌ی ۳۸. تغییرات:

ـــ دوسه‌تا غلط تایپی را اینجا و آنجا تصحیح کرده‌ام که اگر لازم باشد می‌توانی با مقایسه‌ی نسخه‌ها ببینی.

ـــ بخش ۹ اکنون کامل است به پیمانه‌ی تعدادی فرمول، الان موقعی است که باید شجاعت به خرج داد و محاسبات را تا آخر انجام داد! دیدن اینکه چطور تمام تکه‌ها با هم جور می‌شوند تا به نتیجه برسیم به اندازه‌ی کافی زیباست. سازماندهی این بخش، پس از انجام، طرح کل مقاله را توجیه می‌کند (به خصوص اینکه مشخصه‌ها را در ابتدا قرار داده‌ایم). قاعدتاً" کمی اطوکشی به این بخش شکل خواهد داد و آن وقت برای انتخاب ثابت‌ها (سلام بر محاسبات!) آماده خواهد بود.

ـــ تقریباً" تمام توضیحات قدیمی، به خصوص آنهایی را که به منظم‌سازی مربوط می‌شدند حذف کرده‌ام.

ـــ با وجود این، هنوز دو سوراخ مربوط به میانگین‌های مکانی باقی مانده است!

* اولی مربوط می‌شود به ضرورت قشربندی تقریب‌های <\nabla h^k\circ\Om^n> (بخش ۴.۹). این کاری است ظریف، همان‌طور که در فیش‌ها توضیح داده‌ام، نمی‌توانیم روی بازگشت حساب کنیم، روی منظمی هم نمی‌توانیم تکیه کنیم زیرا \Om^n از نظم بسیار اندک برخوردار است. تنها راه حلی که می‌بینم استفاده از نظم سوبولف ِ اضافی ِ مشخصه‌هاست که به طور یکنواخت برحسب n پخش می‌شوند. توجه: ما به نظم در سرعت احتیاج داریم، اما معمولاً" برقرار است زیرا نظم سوبولف ِ نیرو باعث منظمی تمام متغیرها می‌شود. باید دقیقاً" یک مشتق صرفه‌جویی کنیم، و این یعنی اینکه در اینجا هم نیروی کولن بحرانی ظاهر می‌شود...

* دومی نحوه‌ی برخورد با مد از مرتبه‌ی صفر در تقریب‌های بخش ۶ است که تا این لحظه نتیجه نداده است (ثابت‌ها بیش از حد بزرگ‌اند و نمی‌توان آزمون‌های پایداری را در مورد آنها به کار برد). من هنوز خوشبین هستم و در نظر دارم ایده‌ی قدیمم را در مورد استفاده از تغییر متغیر پراکندگی و تقریب مشخصه‌های مستقیم بازیافت کنم. قبلاً" که در این راه کوشش می‌کردم، مرتبه‌های بزرگی صحیح را در ذهن نداشتم، هنوز قشربندی نکرده بودیم، و خلاصه تجهیزاتمان بسیار کمتر بود.

پیشنهاد من این است که کار را به صورت زیر تقسیم کنیم: اولاً" تو به

همگرا کردن بخش ۹ بپرداز و دو سوراخ بالا را فراموش کن؛ بعدا" سرنوشت تقریب را در سوراخ اول تعیین کن. در این مدت هم من روی سوراخ دوم کار خواهم کرد. در چند روز آینده، پیش از وقت به سراغ پرونده ٔ حاوی متن نخواهم رفت.

اما در مورد [نیروی] کولنی: بعدا" خواهیم دید، فکر می‌کنم پر کردن سوراخ‌ها اولویت دارد ...

این هفته، برای من هفته ٔ سختی خواهد بود زیرا باید بچه‌ها را به تنهایی اداره کنم. به علاوه در انستیتو هم میهمانانی خواهم داشت. اما این همان خیز آخر است.

قربانت
سدریک

فصل بیست‌ودوم

پرینستون، شب ۱۵ تا صبح ۱۶ مارس ۲۰۰۹

روی موکت نشسته‌ام. کاغذهای خط‌خطی شده و چرکنویس در اطرافم پراکنده‌اند. می‌نویسم، تایپ می‌کنم با شور و هیجان و دستپاچگی.

امروز که یکشنبه است مواظب بودم که در طول روز کار ریاضی انجام ندهم. برای شروع بچه‌ها را برای صبحانه ـ ناهار به خانهٔ آلیس چانگ[1] بردم، در آنجا صاحب‌نامان بزرگ ریاضی رفت و آمد دارند. آلیس استاد دانشگاه پرینستون است و چند سال قبل سخنران عمومی کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان بود. او متخصصی صاحب نام در آنالیز هندسی است؛ هم اوست که مرا برای شرکت در برنامه‌ای که امسال تدارک دیده است به IAS دعوت کرد.

امروز سر میز صبحانه ـ ناهار تقریباً از همه چیز صحبت به میان آمد، مثلاً از رتبه‌بندی معروف شانگهای که رتبه‌بندی تمام دانشگاه‌های جهان است و سیاستمداران و رسانه‌های فرانسوی آن قدر به آن علاقه‌مندند. وقتی با آلیس در این مورد وارد گفتگو شدم از واکنش او مطمئن نبودم. او که هم در یکی از معروف‌ترین دانشکده‌های ریاضی جهان استاد است و هم چینی‌الاصل است، آیا از اهمیتی که این رتبه‌بندیِ چینی پیدا کرده اظهار غرور خواهد کرد؟ عکس‌العمل او آب پاکی بود که روی دستم ریخت.

ــ سدریک، طبقه‌بندی شانگهای دیگر چیست؟

وقتی به او توضیح دادم به چه چیزی مربوط می‌شود، طوری نگاهم کرد که گویی دارم رویِ سَرم راه می‌روم. سدریک، نمی‌فهمم، چرا این رتبه‌بندی چینی را در فرانسه برایش این‌قدر اعتبار قائل‌اند؟ (آدم حسابی، فکر نمی‌کنی جاها رو عوضی گرفتی؟). من هم بدم نمی‌آید بعضی از

1. Alice Chang

آلیس چانگ

همکارانم را که در سیاست واردند به آلیس معرفی کنم.

سرانجام، دیروقت شب، بعد از اینکه بچه‌ها به خواب رفتند، مشغول کار شدم. آن‌وقت بود که معجزه اتفاق افتاد، تو گویی بر اثر سحر و جادو همه چیز جور در می‌آمد! من در حالی که می‌لرزیدم ۶ یا ۷ صفحهٔ آخر را پاکنویس کردم و مُطمئنم که اینها زنگ اتمام اثبات را، لااقل برای برهم‌کنش‌های منظم‌تر از برهم‌کنش کولنی، به صدا درخواهند آورد. هنوز دام‌های زیادی بر سر راه‌اند، اما گریز از هیچ‌کدام غیرممکن به نظر نمی‌آید.

ساعت ۲و ۳۰ دقیقه می‌روم بخوابم، اما آن‌قدر ذهنم در غلیان است که مدتی طولانی، بسیار طولانی، با چشمانی کاملاً باز بیدار می‌مانم.

ساعت ۳ و ۳۰ دقیقه به خواب می‌روم.

ساعت ۴، پسرم آمد و من را بیدارکرد، جایش را خیس کرده است. سال‌ها بود که چنین چیزی اتفاق نیفتاده بود، چرا امشب باید این اتفاق می‌افتاد ...

زندگی همین است، بلند شو، باید ملافه‌ها و باقی دردسرها را عوض کرد.

بعضی‌وقت‌ها همه چیز دست‌به‌دست هم می‌دهند برای اینکه نگذارند شما بخوابید. اصلاً مهم نیست!

هر ریاضیدان شایستهٔ این نام، حتی اگر یکی‌دوباری بیشتر نباشد، هوشیارانه حالت‌هایی از هیجان را تجربه کرده است که در آن فکری به طور معجزه‌آسا به دنبال فکری دیگر می‌آید ... این احساس، برعکس لذت جنسی، ممکن است ساعت‌ها، بلکه روزها ادامه داشته باشد.

آندره وِیل[1]

1. André Weil (1906-1998)

فصل بیست‌وسوم

پرینستون، ۲۲ مارس ۲۰۰۹

بالاخره، راه حل من غلط ازآب‌درآمد، یک هفته طول کشید تا متقاعد شدم. قسمت اعظم اثبات درست بود، اما این مُد لعنتی صفر ما را به مسخره گرفته بود ... با این حال، به اثبات نزدیک می‌شدیم!

کلمان در تایوان شروع به ارائهٔ کارهایمان در معرض عموم کرده بود و از همان‌جا ایده‌های مرا هضم کرده و با ایده‌های خودش درهم‌آمیخته، با سُس مخصوص خودش پخته و بعد هم من آنها را پس گرفته و با سُسِ خودم خوردم.

الان ایده‌ها خیلی ساده‌تر از اولین‌باری‌اند که آنها را آسیاب کردم، و کارامد هم هستند. درست یکسال تمام است که داریم روی این اثبات کار می‌کنیم و برای اولین بار به نظر می‌رسد که می‌تواند سَرِ پا بایستد!

وقتش رسیده است: دو روز دیگر نتایج را در پرینستون اعلام خواهم کرد.

*

Date: Sun, 22 Mar 2009 12:04:36 +0800
Subject: Re: fignolage
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

درست شد، فکر می‌کنم فهمیده‌ام منظور تو از میانگین مکانی چه بود!! و فکر می‌کنم باید آن را با ایده‌ای که تلفنی به تو گفتم ترکیب کنی (در واقع این دو ایده مکمل یکدیگرند)، طرح از این قرار است:

(۱) فکر می‌کنم محاسبه‌ای که برای استفاده از نظم بهتر و قشربندی زمینه در نظر داشتی همان محاسبات صفحات ۶۵-۶۶ در ابتدای بخش ۶ هستند:
اگر این‌طور باشد (بدون وجود پراکندگی)، در واقع می‌توانیم «مجانا"» از حاشیهٔ نظم در زمینه برای ایجاد افزایش (مستقل از سطح منظمی روی میدان نیرو) استفاده کنیم.

(۲) در این صورت باید از طریق ایده‌ای که تلفنی به تو گفتم («باقیمانده»ای که دربارهٔ آن صحبت کردیم صفر نیست، باید به وسیلهٔ (۱) به حساب آن رسید) مسئله را به این حالت برگردانیم:

الف) $F[h^{n+1}] \circ \Omega^n_{t, \tau} \circ S^0_{\tau, t}$ را با $F[h^{n+1}] \circ S^0_{\tau, t}$ جایگزین می‌کنیم. کاهش بقیه نسبت به زمان خوب است و این براثر تقریب‌های $\Omega^n - Id$ است.

>> بنابراین باقی می‌ماند

\int_0^t \int_v F[h^{n+1}] \cdot < ((\nabla_v f^n)
\circ \Omega^n) > (x-v (t-\tau), v) \, d\tau \, dv

ب) اکنون ایدهٔ تغییر متغیر را برای جایگزینی \Omega^n توسط \Omega^k در \nabla_v f^n (k دلخواه بین 1 و n) اعمال می‌کنیم: مسئله‌ای را که قبلا" با نگاشت \Lambda داشتیم دیگر نداریم زیرا حالا دیگر X \Omega^n را با \Omega^k (\Omega^n)^{-1} ترکیب نمی‌کنیم اما فقط \Omega^k (\Omega^n)^{-1} است که برای آن تقریب‌هایی هم داریم.

ج) دوباره از دست نگاشت \Omega^k (\Omega^n)^{-1}، که با همان ترفند مرحلهٔ الف با F[h^{n+1}] ترکیب کرده بودیم خلاص می‌شویم، و این باعث به وجود آمدن یک جملهٔ جدید باقیماندهٔ ملایم می‌شود که کاهش آن برحسب زمان خوب است،

>> بنابراین باقی می‌ماند

\sum_{k=1}^n \int_0^t \int_v F[h^{n+1}] \cdot

< ((\nabla_v h^k) \circ \Omega^k) (x-v(t-\tau), v) >
\, d\tau \, dv

د) اکنون فقط جای گرادیان برحسب v را با ترکیب با پراکندگی عوض می‌کنیم:

< (\nabla_v f^n) \circ \Omega^k > = \nabla_v
(< f^n \circ \Omega^k >)
+ باقیمانده که کاهش آن برحسب \tau خوب است.

>> بنابراین باقی می‌ماند

\sum_{k=1}^n \int_0^t \int_v F[h^{n+1}] (x-v(t-\tau), v)\,
\nabla_v U_k (v) \, d\tau \, dv

که توابع U_k (v) دارای منظمی \mu_k، \lambda_k هستند.

ه) سرانجام در این مرحله محاسبات (۱) در صفحات ۶۵-۶۶ را در مورد هر k انجام می‌دهیم و این باید یک تقریب قشربندی‌شده و یکنواخت به دست دهد.

نظرت را در این موارد به من بگو و بگو آیا محاسباتت هم با محاسبات من یکی هستند ...
قربانت، کلمان

فصل بیست‌وچهار

پرینستون، ۲۴ مارس ۲۰۰۹

اولین سمینار در پرینستون، در مقابل همکاران برجسته و دقیق، و به خصوص در مقابل الیوت لیب[1] که صمیمی است اما سخت‌گیر.

کلمان هم الان در تایپه است و همین نتایج را در آنجا ارائه می‌دهد. دوازده ساعت اختلاف زمان داریم و این بهترین حالت برای کار مفید است! دنیا را هم بین خودمان تقسیم کرده‌ایم: او در آسیا خبر خوش را بشارت می‌دهد و من در ایالات متحده.

این بار دیگر می‌توانم سمینار بدهم، این دیگر هیچ ربطی به سمینار لرزان من در راتگرز ندارد، اقلاً ۹۰٪ اثبات درست است، و تمام عناصر مهم دخیل شناسایی شده‌اند؛ ازکارم مطمئنم و آمادهٔ مقاومت در مقابل سئوال‌ها و ادای توضیحات دربارهٔ اثبات هستم.

نتایج من تأثیر خودشان را می‌کنند، اما الیوت از فرض شرایط حدی دوره‌ای راضی نیست و آن را نامعقول می‌داند.

ـــ اگر این فرض در سراسر فضا درست نباشد، بی‌معناست!

ـــ الیوت، در سراسر فضا مثال‌های نقیض وجود دارد، مجبوریم حدودی قائل شویم!

ـــ بله، نتیجه باید مستقل از حدود باشد، درغیراین‌صورت فیزیک نیست!

ـــ الیوت، خود لانداو این را با شرایط حدی انجام می‌داد و نشان داده که نتیجه قویاً به حدود بستگی دارد، تو که نمی‌گویی او فیزیکدان نبوده است؟

ـــ اما این هیچ معنایی ندارد!

1. Elliott Lieb

الیوت لیب

آن روز الیوت از کوره در رفته بود. و گرگ هَمِت[1] هم که فیزیکدان آزمایشگاه فیزیک پلاسمای پرینستون (PPPL)[2] است، فرض پایداری مرا در مورد پلاسما هضم نمی‌کرد و می‌گفت که این فرض بیش از حدی که واقع‌بینی اجازه می‌دهد قوی است.

اگر امیدوار بودم که استقبالی پیروزمندانه از من بشود، نشد!

*

الیوت لیب یکی از معروف‌ترین و هراسناک‌ترین متخصصان ریاضی فیزیك است. او عضو دو دانشکدهٔ دانشگاه پرینستون است، هم ریاضی و هم فیزیك، بخشی از زندگی خود را در جستجوی پایداری ماده وقف کرده است: چه چیز اتم‌ها را مجبور می‌کند که به جای اینکه با آرامش از یکدیگر جدا باقی بمانند دور هم جمع شوند؟ چرا ما موجوداتی منسجم هستیم و در جهان اطرافمان منحل نمی‌شویم؟ فریمن دایسون، مظهر یك فیزیکدان قرن بیستم و استاد ممتاز کنونی در IAS، برای اولین‌بار این مسئله را به زبان ریاضی مطرح کرد و رمزگشایی نمود؛ او این ویروس را به جوانترها و از جمله الیوت انتقال داد.

الیوت که کاملاً محو این مطلب شده بود در فیزیك، آنالیز، و محاسبهٔ انرژی‌ها به دنبال جواب می‌گشت. او توانست تعدادی پژوهشگر را به دنبال خود بِکشد و مکتب فکری تأسیس کند. در ین راه اثبات‌هایی تماشایی به دست آورد، دانه‌های جواهری که چهرهٔ آنالیز ریاضی را تغییر دادند.

1. Greg Hammett 2. Princeton Plasma Physics Laboratory

از نظر الیوت، برای فهمیدن یك مسئله هیچ چیز به اندازهٔ یك نابرابری خوب ارزش ندارد. یك نابرابری بیانگر غلبهٔ یك جمله بر جملهٔ دیگر در یك معادله، غلبهٔ یك نیرو بر نیروی دیگر، یك موجود بر موجود دیگر است. الیوت برخی نابرابری‌های مشهور را عمیقاً بهبود بخشیده مانند نابرابری‌های هاردی ـ لیتل‌وود ـ سوبولوف، نابرابری‌های یانگ، نابرابری‌های هاوسدورف ـ یانگ؛ و نام خود را هم بر برخی نابرابری‌های اساسی گذارده است، مانند نابرابری‌های لیب ـ تیرینگ[1]، یا نابرابری‌های براسکمپ[2] ـ لیب، که هم‌اکنون مورد استفادهٔ تعداد زیادی پژوهشگر در سراسر جهان است.

الیوت نزدیك به ۸۰ سال دارد و هنوز فعال است. خوش‌اندامی بدون ایرادش منعکس‌کنندهٔ یك زندگیِ سالمِ بدون عیب‌ونقص است، همه از اظهارنظرهای گزنده‌اش در هراس‌اند. وقتی دربارهٔ ژاپن، نابرابری‌ها و یا آشپزی ناب (که در زبان ژاپنی به معنای آنالیز ریاضی هم هست) صحبت می‌کند چهره‌اش باز می‌شود.

1. Thirring 2. Brascamp

فصل بیست‌وپنجم

پرینستون، ۱ آوریل ۲۰۰۹

اول آوریل، روز حوت‌ها و دلقک‌ها[۱]!

امروز تمام خانواده سریال بانو اُسکار[۲] را تماشا کرد. ماری آنتوانت، اَکسل دو فِرسِن[۳] و اسکار دو ژارژایِس[۴] دستخوش احساسات بودند، و در همین حال انقلاب فرانسه در حال وقوع بود.

شب هم قبل از خواب از طریق یوتیوب به گرُیْبوی[۵] گوش دادیم، «ملوان و گل رُز»[۶]، چه قدر خوب بود! اینترنت چه چیزهای خوبی دارد.

در طول هفتهٔ گذشته در حین سخنرانی‌هایم در مورد میرایی لانداو خیلی چیزها یاد گرفتم.

الیوت، بعد از سخنرانی اولم، وقتی اعصابش آرام گرفت، در مورد مشکلات مفهومی ناشی از مُدلِ کولنی دوره‌ای نکات درستی را گوشزد کرد.

در سخنرانی دوم، ایده‌های اصلی فیزیکیِ اثبات را اعلام کردم. الیوت از اختلاط ریاضی و فیزیک خوشش آمد، خود را خیرخواه و علاقه‌مند نشان داد.

در سخنرانی سوم، جواب انتقاد هَمِت را پیدا کردم و توانستم فرض‌هایی را ارائه کنم که تقریباً در مورد شرط پایداری و طول اختلال بهینه بودند.

نتایج را تازه‌تازه و فقط نیمه‌پخته ارائه کردم، اما استراتژی من موفق بود: انتقادها باعث می‌شود که کار من با سرعت قابل ملاحظه‌ای پیشرفت کند! یک بار دیگر می‌بایست خود را در موقعیتی آسیب‌پذیر قرار دهم تا قوی‌تر شوم.

۱. اشاره به شوخی روز اول آوریل (Poisson d'avril) که نماد آن، ماهی، نشان از برج فلکی حوت دارد.

2. *Lady Oscar* 3. Axel de Fersen 4. Oscar de Jarjayes 5. Gribouille

6. *Le Marin et la Rose*

و ... بالاخره فهمیدم، رابطه با .K.A.M را!

کشف رابطهٔ پنهان بین حوزه‌های مختلف ریاضیات باعث شهرت من به عنوان پژوهشگر شده‌اند. این روابط بسیار ارزشمند هستند! و باعث روشن شدن هر دو حوزهٔ مرتبط با هم می‌شوند، در پینگ‌پونگ، هر کشفی در یک طرف باعث کشفی در طرف دیگر می‌شود.

در ۲۳ سالگی، با همکار ایتالیایی‌ام جیوزپه توسکانی[1] اولین نتیجهٔ مهم، رابطهٔ بین تولید آنتروپی بولتزمان، معادلهٔ فوکر ـ پلانک و تولید آنتروپی پلاسماها را به دست آوردیم.

دو سال بعد، با همکار آلمانی‌ام فلیکس اُتو[2] نوبت به رابطهٔ پنهان بین نابرابری سوبولفِ لگاریتم و نابرابری تمرکزی تالاگراند[3] رسید. تا به حال دو اثبات دیگر هم پیشنهاد داده‌ام ... این کار آغازی شد برای ماجراجویی‌هایم در حوزهٔ ترابری بهینه؛ این کارم باعث شد که برای دادن درسی در سطح تحقیقاتی به آتلانتا دعوت شوم و همین درس منجر به تولد اولین کتابم شد.

ایو مِیر[4]، هنگام دفاع از رساله‌ام به من گفته بود: در رسالهٔ شما روابط و اتحادهای معجزه‌آسایی وجود دارند! بیست سال پیش این کار را کار مسخره‌ای می‌دانستند، آنوقت‌ها به معجزه اعتقاد نداشتند. اما من به معجزه اعتقاد دارم، و چیزهای دیگری را هم از مخفیگاهشان بیرون خواهم کشید.

در رساله‌ام از چهار پدر معنوی تقدیر و تشکر کرده بودم ـــ استاد راهنمایم پی‌یر ـ لویی لیون[5]، استاد مشاور زمان دانشجویی‌ام یان برنی‌یر[6] و همچنین اریک کارلن و میشل لودو[7] که آثارشان را می‌بلعیدم. اینها دروازه‌های دنیای نابرابری‌ها را بر من تمام‌قد گشودند. من تأثیرات این چهار نفر را ترکیب کرده بودم اما عناصر دیگری را هم برای ایجاد سبک ریاضی خاص خودم بر آن افزوده بودم که به تدریج بر اثر ملاقات‌های دیگر کامل‌تر می‌شد.

سه سال پس از دفاع از رساله‌ام، با همکار باوفایم لوران دِویلت[8] رابطهٔ نامحتملی را بین نابرابری کورن در نظریهٔ کشسانی، و تولید آنتروپی بولتزمان پیدا کردم.

در این بین، به تکمیل نظریهٔ کم مغناطزدایی[9] پرداختم که برمبنای قیاسی جدید بین مسائل منظم‌سازی و مسائل همگرایی به سوی تعادل در معادلات با مشتقات جزئیِ اتلافیِ تبهگن قرار دارد.

بعد نوبت به این رابطهٔ پنهان بین ترابری بهینه و نابرابری‌های سوبولف رسید که من با کمک داریو کوردِرو ـ اروسکین[10] و برونو نازارِت[11] آشکار کردم و این باعث شگفتی برخی از متخصصان آنالیز شد که فکر می‌کردند این نابرابری‌ها را می‌شناسند!

در سال ۲۰۰۴، به عنوان استاد مدعو در انستیتو میلر در دانشگاه برکلی، با همکار آمریکایی‌ام

1. Giuseppe Toscani
2. Felix Otto
3. Talagrand
4. Yves Meyer
5. Pierre-Louis Lions
6. Yann Brenier
7. Michel Ledoux
8. Laurent Desvillettes
9. hypocoercivité
10. Dario Cordero-Erausquin
11. Bruno Nazaret

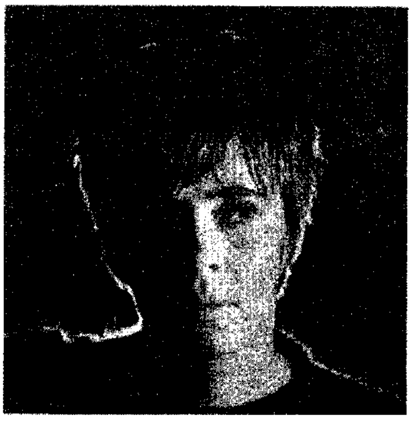
جان لات[1] که در آن سال از مدعوین مؤسسهٔ تحقیقات علوم ریاضی[2] بود ملاقات کردم؛ به کمک یکدیگر نشان دادیم که چگونه می‌توان ایده‌های ترابری بهینه را که در اقتصاد ریشه دارند برای حل مسائل هندسهٔ نااقلیدسی و ناهموار به کار گرفت، مسئله‌ای که اصطلاحاً به آن انحناء ریچیِ ترکیبی گویند. نظریه‌ای که از آن حاصل شد، که گاهی به آن نظریهٔ لات ـ اشتورم ـ ویلانی گفته می‌شود، برخی دیوارها بین آنالیز و هندسه را با سروصدا شکست.

در سال ۲۰۰۷، حدس زدم در جایی باید یک هارمونی پنهان وجود داشته باشد، یک رابطهٔ قوی بین هندسهٔ محل شکستگیِ مُماس و شرایط انحناء لازم برای منظمی ترابری بهینه؛ رابطه‌ای که ظاهراً از هیچ سر بر می‌آورد و من و گراگوار لوپِر[3] آن را ثابت کردیم.

هر بار یک ملاقات است که باعث شروع همه چیز می‌شود. مثل اینکه من نقش کاتالیزور را بازی می‌کنم! بعد هم اعتقادی راسخ به جستجوی هارمونی‌هایی که از قبل وجود دارند لازم است ــ مگر نیوتون و کِپلِر و این‌همه کسان دیگر راه را نشان نداده‌اند. دنیا آن‌قدر از رابطه‌هایی که حتی فکرش را هم نمی‌کنیم پُر است که نگو!

هیچ کس، هیچ وقت، فکر نمی‌کند
کوچک‌ترین رابطه‌ای هم باشد
بین ملوانی در فُرمَز
و در دوبلین گُلی رُز

و تنها انگشت به دهان ...



هیچ کس هم فکر نمی‌کرد رابطه‌ای بین میرایی لانداو و قضیهٔ کولموگوروف وجود داشته باشد.

یا، بهتر بگویم، چرا، اتین ژیس به این فکر رسیده بود، حالا آیا اشتباهاً و یا روح خبیثی او را افسون کرده بود، نمی‌دانم. یک سال پس از گفتگوی ما الان تمام ورق‌های برنده را در دست دارم و این رابطه را حالا می‌فهمم!

ــ هوو...م از دست رفتن نظم در یک روند اختلالی، اگر ناشی از پدیده‌های تشدید باشد، با به کارگیری روش نیوتون و بهره بردن از ویژگی کاملاً انتگرال‌پذیر بودن دستگاهِ مختل شده، جبران می‌شود ...

ببین، تا ابد هم اگر فکر می‌کردم، یک چنین چیز پیچیده‌ای به فکر چه کسی می‌رسید؟ همین میرایی لانداو، چه کسی می‌توانست تصور کند که در اصل این یک مسئلهٔ نظم است!؟

1. John Lott
2. Mathematical Sciences Research Institute
3. Grégoire Loeper

Le marin et la rose (Huard)

(ملوان و گل رُز)

Y'avait un' fois une rose
Une rose et un marin
L'marin était à Formose
La rose était à Dublin

Jamais au monde ils n'se virent
Ils étaient beaucoup trop loin
Lui quittait pas son navire
Ell' quittait pas son jardin

Au-d'ssus de la rose sage
Des oiseaux passaient tout l'temps
Et puis aussi des nuages
Des soleils et des printemps

Au-d'ssus du marin volage
Des rêv's étaient tout pareils
Aux printemps et aux soleils
Aux oiseaux et aux nuages

L'marin périt en septembre
Et la ros', le même jour
Vient se flétrir dans la chambre
D'une fille en mal d'amour

Personn' jamais ne suppose
Qu'il y ait le moindre lien
Entre l'marin de Formose
Et la rose de Dublin

Et seul un doigt sur la bouche
Un ang' beau comme un éclair
Jett' quand le soleil se couche
Des pétales sur la mer.

فصل بیست‌وششم

پرینستون، از شب ۸ آوریل تا صبح ۹ آوریل ۲۰۰۹

نسخهٔ ۵۵. در حین فرایند ملال‌آورِ دوباره‌خوانی و دقت در جزئیات، سوراخ جدید ظاهر شد.

منفجر شدم، دیگر دارد طاقتم طاق می‌شود!

ـــ از این داستان خسته شده‌ام! قبلاً قسمت غیرخطی بود، الان قسمت خطی که ظاهراً تحت کنترل بود دارد تَرَک برمی‌دارد!

دربارهٔ نتایجی که به دست آورده‌ایم خیلی جاها حرف زده‌ایم. هفتهٔ قبل نتایج را در نیویورک اعلام کردم، فردا کلمان آنها را در نیس خواهد گفت، حالا دیگر حق اشتباه نداریم، نتایج باید واقعاً درست باشند!!

به هر صورت مشکلی وجود دارد و باید این قضیهٔ لعنتی ۴.۷ را دوباره شکل داد ...

من در خانه تنها هستم و بچه‌ها خوابیده‌اند، ساعت‌ها را در مقابل در شیشه‌ای بزرگی که آن طرف آن شب سیاه است می‌گذرانم. روی کاناپه می‌نشیم، دراز می‌کشم، دوزانو در مقابلش می‌نشینم، تمام شگردهایی را که می‌دانم به کار می‌گیرم، با عجله می‌نویسم و می‌نویسم، اما فایده‌ای ندارد.

ساعت چهار صبح می‌روم بخوابم، در حالتی نزدیک به یأس کامل.

Date: Mon, 6 Apr 2009 20:03:45 +0200
Subject: Landau version 51
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

تا آنجایی که رسیده‌ام برایت می‌فرستم. پس از خواندن ۱۲۰ صفحه با دقت در جزئیات، دیگر نمی‌کشم، امشب را استراحت می‌کنم. نسخهٔ ۵۱ را برایت می‌فرستم، که قاعدتا" (پس از بررسی مفصل ایمیل‌ها) شامل تمام تغییراتی است که داده‌ای و تمام خواسته هایی است که از طریق ایمیل مطرح کرده‌ای (شکل‌ها، نظرها، وابستگی به ثابت‌ها ...)، همچنین بخش ۱۰ بازنویسی‌شدهٔ تو (متعاقب آخرین نسخه، نسخهٔ ۵۰ که برایم فرستاده بودی) و بخش ۱۲ جدید.

اما من، تا بخش ۹ و خود این بخش را (بنابراین تا صفحهٔ ۱۱۸) به طور کامل بازخوانی کرده‌ام. تعداد نسبتا" زیادی NdCM* وجود دارد که باید نگاه کنی، به علاوه تعدادی تصحیح جزئی انجام شده که به نظر من بحث ندارد.
فقط دو تا از NdCMها مربوط می‌شود به نگرانی‌هایی که از اثبات‌ها وجود دارد (اما در این دو مورد نمی‌توان نتیجه را زیر سئوال برد): بخش ۷ صفحهٔ ۱۰۰ و بخش ۹ صفحهٔ ۱۱۶.

چیزی که برای ادامهٔ کار توصیه می‌کنم این است: تو هم، از نسخهٔ ۵۱ام شروع کن و بخش ۱ تا ۹ را برای دیدن NdCMهای من مرور کن و دربارهٔ هر یک از آنها تصمیم بگیر و آنها را حذف کن که بشود نسخهٔ مثلا" cv-۵۱، و من هم با دقت بخش‌های ۱۰-۱۱-۱۲-۱۳-۱۴ را بازخوانی خواهم کرد؟ (قرار بر این باشد که فرداشب یا چهارشنبه صبح بفرستیم؟)

قربانت، کلمان

* NdCM=notes de Clement Mouhot: یادداشت‌های کلمان موهو

فصل بیست‌وهفتم

پرینستون، صبح روز ۹ آوریل ۲۰۰۹

اوه ... از خواب بیدار شدن چقدر سخت است. با زحمت زیاد بیدار می‌شوم، روی تخت می‌نشینم.

ها؟ صدایی در سرم می‌گوید: باید جملهٔ دوم را به طرف دیگر ببری، تبدیل فوریهٔ آن را حساب کنی و در $L^۲$ آن را معکوس کنی.

اینکه ممکن نیست!

سَرسری جمله‌ای روی یک تکه کاغذ نوشتم، تَشری به بچه‌ها زدم تا زودتر حاضر شوند، برایشان صبحانه درست کردم و با قدم‌های تند از روی چمن‌های خیس تا ایستگاه اتوبوس مدرسه بُردمشان. اتوبوس زرد و سیاه قشنگی بود، مثل همان‌هایی که در فیلم‌های آمریکایی می‌بینیم!

همهٔ بچه‌ها، مثل بچه‌های خوب سوار اتوبوس شدند و به مدرسه‌شان در لیتل‌بروک رفتند. وقتی به تراکم پسرها و دخترهایِ دانشمندانِ سطح بالا در این اتوبوس فکر می‌کنم به نظرم جالب می‌آید. بیا، آنها بچه‌های هم‌وطن من اِنگو بائو چو[1] هستند که از محدودهٔ پاریس به پرینستون آمده. اِنگو یک مسئلهٔ قدیمی به نام لِم اساسی را به روشی چشمگیر حل کرد و تمام اخبار را به خود اختصاص داد. این شاخه‌ای از ریاضیات است که به مُشکل‌بودن شهرت دارد، و من با آن کاملاً بیگانه‌ام. در هر صورت همه اِنگو را برای مدال فیلدز بعدی مناسب‌ترین نامزد می‌دانند!

بچه‌ها رفتند. در لیتل‌بروک به آنها خیلی می‌رسند، در طی روز درس انگلیسی خصوصی به آنها داده می‌شود و می‌کوشند به آنها اعتماد به نفس بدهند ـــ و برای این کار می‌توان روی معلمان آمریکایی حساب کرد. امروز بعدازظهر خوشحال از روزی که گذرانده‌اند به خانه بازخواهند گشت

1. Ngô Bao Châu

و تکالیفشان را هم با خوشحالی انجام خواهند داد ــ بسیار جای خوشحالی است که بیزاری از انجام تکالیف در خانه هنوز به ایالات متحده نرسیده است، اقلاً به پرینستون نرسیده است.

سریعاً به خانه بازمی‌گردم، روی صندلی راحتی می‌نشینم و ایده‌ای را که امروز صبح به طور سحرآمیزی به فکرم رسید برای پُر کردن آن سوراخ امتحان می‌کنم.

ــ همان‌طور که مایکل سیگال[1] به من توصیه کرده بود، با تبدیل فوریه می‌مانم و اصلاً به دنبال تبدیل لاپلاس نخواهم رفت، اما قبل از معکوس کردن، اول این طور جدا خواهم کرد، و سپس در دو زمان ...

سرسری چیزی می‌نویسم و نگاه می‌کنم. یک لحظه به فکر فرو می‌روم.

داره حل می‌شه! فکر می‌کنم ...

داره حل می‌شه! مطمئنم!

معلوم است که باید از این راه می‌رفتم. از اینجا می‌توانم بسط بدهم، عناصری اضافه کنم، اما از اینجا دیگر روند کار معلوم است.

الان فقط به صبر نیاز دارم. دارم می‌بینم که اگر این ایده را پیش ببرم به مسیرهایی می‌رسم که آنها را می‌شناسم. جزئیات را با تفصیل می‌نویسم. الان وقتش رسیده که هجده سال ریاضی‌کاری خودم را وارد بازی کنم!

ــ هوم‌مم، الان شبیه به نابرابری یانگ شده است ... و بعد هم مانند اثبات نابرابری مینکوفسکی است ... باید تغییر متغیر داد، انتگرال‌ها را جدا کرد ...

وارد دندهٔ نیمه‌اتوماتیک می‌شوم. در حال حاضر می‌توانم از تمام تجربیاتم استفاده کنم ... اما برای این کار یک زنگ کوچک مستقیم لازم بود. همان خط مستقیم معروف، وقتی خدای ریاضیات به شما تلفن می‌زند، و صدایی در سَر شما طنین می‌اندازد. البته باید اذعان کرد که این خیلی به ندرت اتفاق می‌افتد.

من یک تجربهٔ خط مستقیم دیگر را به یاد دارم. زمستان سال ۲۰۰۱ در لیون استاد بودم و برای مدتی هر چهارشنبه در انستیتو پوانکاره درس می‌دادم. شِبه‌راه‌حل خودم برای حدس چرچی‌نیانی[2] را درس می‌دادم تا اینکه یک چهارشنبه تی‌یِری بُدینو[3] پیش من آمد و پرسید آیا نمی‌توانی فلان قسمت آن گزاره را بهتر کنی. در راه بازگشت، در قطار سریع‌السیر (TGV) در این مورد فکر می‌کردم، مثل اینکه برایم روشنایی‌ای آمد و انگشتم را روی روشی گذاشتم که بسیار قدرتمندتر بود و در واقع این امکان را برای من فراهم می‌آورد که اثبات حدس را کامل کنم. در روزهای بعد، استدلال لازم برای رویارویی با موردی عام‌تر، یعنی توسیع آن حدس را کامل کردم و خود را آماده کردم که چهارشنبهٔ آینده این‌دو نتیجهٔ جدید را با مباهات عرضه کنم.

1. Michael Sigal 2. Carlo Cercignani 3. Thierry Bodineau

اما روز سه‌شنبه در اثبات قضیهٔ دوم یک اشتباه مهلک کشف کردم! تمام شَبَم را برای ترمیم این اشتباه صرف کردم بدون آنکه موفق شوم، و نزدیک ساعت سه یا چهار صبح خوابیدم.

صبح آن روز، هنوز درست بیدار نشده، مسئله را در سرم می‌چرخاندم، نمی‌توانستم خود را از ارائهٔ نتیجه‌ام منصرف کنم. به ایستگاه راه‌آهن رفتم، ذهنم هنوز پر از مسیرهایی بود که به جایی نمی‌رسید، اما به محض اینکه در TGV مستقر شدم روشنایی پیش آمد و من می‌دانستم چگونه باید اثبات را تصحیح کرد.

این بار دیگر وقتم را در قطار صرف راست و ریس کردن آن نتیجه کردم و با غروری تصورناپذیر آن را اعلام کردم. کمی بعد این نتیجه به چاپ رسید و اثباتی که «ساخت TGV» بود مادهٔ اولیهٔ یکی از بهترین مقالات من را فراهم آورد.

در این صبحگاه ۹ آوریل ۲۰۰۹ یک روشنایی کوچک جدید برایم پیش آمد که بر درب مغز من کوبید و همه چیز را واضح کرد. افسوس که خواننده‌های این مقاله احتمالاً متوجه آن حالت خوش نخواهند شد، آن روشنایی در تکنیک غرق خواهد شد ...

*

برای بیان نتیجهٔ اصلی این بخش می‌نویسیم $\mathbb{Z}^d_* = \mathbb{Z}^d \backslash \{0\}$؛ و اگر دنبالهٔ توابع $\Phi(k,t)$ $(k \in \mathbb{Z}^d_*,\ t \in \mathbb{R})$ داده شده باشد، قرار می‌دهیم $\|\Phi(t)\|_\lambda = \sum_k e^{2\pi\lambda|k|}|\Phi(k,t)|$. برای اختصار به جای $(K(k,s)\Phi(k,t))_{k\in\mathbb{Z}^d_*}$ می‌نویسیم $K(s)\Phi(t)$، و غیره.

قضیهٔ ۷.۷ (کنترل رُشد از طریق نابرابری‌های انتگرالی). فرض می‌کنیم $f^\circ = f^\circ(v)$ و $W = W(x)$، شرط $(\mathbf{L})$ از بخش فرعی ۲.۲ را به ازاء ثابت‌های C_0، λ_0، κ برآورده می‌سازند و به‌خصوص $|\tilde{f}^\circ(\eta)| \le C_0 e^{-2\pi\lambda_0|\eta|}$. به‌علاوه فرض می‌کنیم

$$C_W = \max\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*}|\widehat{W}(k)|,\ \sup_{k\in\mathbb{Z}^d_*}|k|\,|\widehat{W}(k)|\right\}.$$

فرض می‌کنیم $0 < \lambda^* < \lambda_0$ که $\lambda \in (0,\lambda^*]$، $\mu \ge 0$، $A \ge 0$. همچنین فرض می‌کنیم $(\Phi(k,t))_{k\in\mathbb{Z}^d_*,\, t\ge 0}$ تابعی پیوسته از $t \ge 0$ باشد و مقدار آن در $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d_*}$، در نظر گرفته شود به طوری که

$$\forall t \ge 0, \qquad \left\|\Phi(t) - \int_0^t K^\circ(t-\tau)\Phi(\tau)d\tau\right\|_{\lambda t+\mu}$$
$$\le A + \int_0^t \left[K_0(t,\tau) + K_1(t,\tau) + \frac{c_0}{(1+\tau)^m}\right]\left\|\Phi(\tau)\right\|_{\lambda\tau+\mu} d\tau, \quad (۲۲.۷)$$

که در آن $c_\circ \geq \circ$، $m > ۱$، و $K_\circ(t,\tau)$، $K_۱(t,\tau)$ هسته‌های نامنفی باشند. فرض می‌کنیم $\varphi(t) = \|\Phi(t)\|_{\lambda t+\mu}$. در این صورت

(i) تصور کنید $\gamma > ۱$ و $K_۱ = cK^{(\alpha),\gamma}$ و به ازاء یك $c > \circ$ داشته باشیم $\alpha \in (\circ, \bar{\alpha}(\gamma))$ که در آن $K^{(\alpha),\gamma}$ به صورت

$$K^{(\alpha),\gamma}(t,\tau) = (۱+\tau)d \sup_{k\neq\circ,\ell\neq\circ} \frac{e^{-\alpha|\ell|}e^{-\alpha\left(\frac{t-\tau}{t}\right)|k-\ell|}e^{-\alpha|k(t-\tau)+\ell\tau|}}{۱+|k-\ell|^\gamma},$$

تعریف شده و $\bar{\alpha}(\gamma)$ در نتیجهٔ ۱.۷ آمده است. در این صورت ثابت‌های مثبتی مانند C و χ وجود دارند که تنها به γ، λ^*، $\lambda_\circ$، κ، $c_\circ$، C_W، و m بستگی دارند و هرگاه $\gamma \to ۱$، یکنواخت‌اند، به طوری که اگر

$$\sup_{t\geq\circ}\int_\circ^t K_\circ(t,\tau)d\tau \leq \chi \qquad (۲۳.۷)$$

و

$$\sup_{t\geq\circ}\left(\int_\circ^t K_\circ(t,\tau)^۲ d\tau\right)^{۱/۲} + \sup_{\tau\geq\circ}\int_\tau^\infty K_\circ(t,\tau)dt \leq ۱, \qquad (۲۴.۷)$$

آنگاه به ازاء هر $\varepsilon \in (\circ, \alpha)$،

$$\forall t \geq \circ, \qquad \varphi(t) \leq C\,A\frac{(۱+c_\circ^۲)}{\sqrt{\varepsilon}}e^{C\,c_\circ}\left(۱+\frac{c}{\alpha\varepsilon}\right)$$
$$\times\, e^{CT}\,e^{C\,c(۱+T^۲)}\,e^{\varepsilon t}, \qquad (۲۵.۷)$$

که در آن

$$T = C\max\left\{\left(\frac{c^۲}{\alpha^۵\varepsilon^{۲+\gamma}}\right)^{\frac{۱}{\gamma-۱}};\ \left(\frac{c}{\alpha^۲\varepsilon^{\gamma+\frac{۱}{۲}}}\right)^{\frac{۱}{\gamma-۱}};\ \left(\frac{c_\circ^۲}{\varepsilon}\right)^{\frac{۱}{۲m-۱}}\right\}. \qquad (۲۶.۷)$$

(ii) فرض می‌کنیم به ازاء $\alpha_i \in (\circ, \bar{\alpha}(۱))$، $K_۱ = \sum_{۱\leq i\leq N} c_i K^{(\alpha_i),۱}$ که $\bar{\alpha}(۱)$ در نتیجهٔ ۱.۷ آمده است؛ در این صورت یك ثابت عددی $\Gamma > \circ$ وجود دارد به طوری که هرگاه

$$۱ \geq \varepsilon \geq \Gamma\sum_{i=۱}^N \frac{c_i}{\alpha_i^۳},$$

با استفاده از نمادگذاری (i)، خواهیم داشت،

$$\forall t \geq 0, \qquad \varphi(t) \leq C\,A \frac{(1+c_0^2)e^{C c_0}}{\sqrt{\varepsilon}}\, e^{CT}\, e^{C c(1+T^2)}\, e^{\varepsilon t}, \qquad (27.7)$$

که در آن

$$c = \sum_{i=1}^{N} c_i, \qquad T = C \max\left\{ \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{\alpha_i^3}\right);\ \left(\frac{c_0^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2m-1}} \right\}.$$

اثبات قضیهٔ ۷.۷. فقط (i) را اثبات می‌کنیم زیرا اثبات (ii) تاحدودی شبیه آن است؛ نتیجه را هم فقط به صورت یک تخمین از پیش موجود اثبات می‌کنیم و از استدلال پیوستگی/ تقریب که برای یک تخمین‌زنی متقن لازم است صرف‌نظر می‌کنیم. اثبات در سه مرحله انجام می‌شود.

مرحلهٔ ۱: کران‌های نقطه‌ای خام. از (۲۲.۷) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^d} |\Phi(k,t)| e^{2\pi(\lambda t+\mu)|k|} \qquad (28.7)\\
&\leq A + \sum_k \int_0^t |K^\circ(k,t-\tau)| e^{2\pi(\lambda t+\mu)|k|} |\Phi(t,\tau)|\, d\tau \\
&\quad + \int_0^t \left[K_0(t,\tau) + K_1(t,\tau) + \frac{c_0}{(1+\tau)^m} \right] \varphi(\tau)\, d\tau \\
&\leq A + \int_0^t \Bigg[\left(\sup_k |K^\circ(k,t-\tau)| e^{2\pi\lambda(t-\tau)|k|} \right) \\
&\quad + K_1(t,\tau) + K_0(t,\tau) + \frac{c_0}{(1+\tau)^m} \Bigg] \varphi(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

مشاهده می‌کنیم که به ازاء هر $k \in \mathbb{Z}_*^d$ و $t \geq 0$، داریم

$$\begin{aligned}
|K^\circ(k,t-\tau)| e^{2\pi\lambda|k|(t-\tau)} &\leq 4\pi^2 |\widehat{W}(k)| C_0\, e^{-2\pi(\lambda_0-\lambda)|k|t} |k|^2 t \\
&\leq \frac{CC_0}{\lambda_0-\lambda} \left(\sup_{k\neq 0} |k|\, |\widehat{W}(k)| \right) \leq \frac{CC_0 C_W}{\lambda_0-\lambda},
\end{aligned}$$

که در آن (اینجا هم مانند پایین) C یک ثابت عددی است که ممکن است از خطی به خط دیگر تغییر کند. با فرض اینکه $\int K_0(t,\tau)d\tau \le 1/2$، از (۲۸.۷) نتیجه می‌گیریم که

$$\varphi(t) \le A + \frac{1}{2}\Big(\sup_{0\le\tau\le t}\varphi(\tau)\Big) + C\int_0^t\Big(\frac{C_0 C_W}{\lambda_0-\lambda} + c(1+t) + \frac{c_0}{(1+\tau)^m}\Big)\varphi(\tau)d\tau,$$

و لِم گرونوال می‌گوید

$$\varphi(t) \le 2Ae^{C\left(\frac{C_0C_W}{\lambda_0-\lambda}t+c(t+t^2)+c_0C_m\right)}, \tag{۲۹.۷}$$

که در آن $C_m = \int_0^\infty(1+\tau)^{-m}d\tau$.

مرحلهٔ ۲: کران L^2. این مرحله‌ای است که در آن فرض کوچک بودن (۲۳.۷) بیشترین اهمیت را خواهد داشت. به ازاء هر $t\ge 0$ و $k\in\mathbb{Z}^d_*$، طبق تعریف

$$\Psi_k(t) = e^{-\varepsilon t}\Phi(k,t)e^{2\pi(\lambda t+\mu)|k|}, \tag{۳۰.۷}$$

$$\mathcal{K}^0_k(t) = e^{-\varepsilon t}K^0(k,t)e^{2\pi(\lambda t+\mu)|k|}, \tag{۳۱.۷}$$

$$R_k(t) = e^{-\varepsilon t}\Big(\Phi(k,t) - \int_0^t K^0(k,t-\tau)\Phi(k,\tau)d\tau\Big) \times e^{2\pi(\lambda t+\mu)|k|} \tag{۳۲.۷}$$

$$= \big(\Psi_k - \Psi_k * \mathcal{K}^0_k\big)(t),$$

و تمام این توابع را برای مقادیر منفی t از طریق ۰ توسعه می‌دهیم. با گرفتن تبدیل فوریه نسبت به متغیر زمان داریم $\widehat{R}_k = (1-\widehat{\mathcal{K}}^0_k)\widehat{\Psi}_k$؛ از آنجا که از شرط $(\mathbf{L})$ لازم می‌آید $|1-\widehat{\mathcal{K}}^0_k| \ge \kappa$، نتیجه می‌گیریم که $\|\widehat{\Psi}_k\|_{L^2} \le \kappa^{-1}\|\widehat{R}_k\|_{L^2}$، یعنی

$$\|\Psi_k\|_{L^2(dt)} \le \frac{\|R_k\|_{L^2(dt)}}{\kappa}. \tag{۳۳.۷}$$

از قرار دادن (۳۳.۷) در (۳۲.۷)، نتیجه می‌شود

$$\forall k\in\mathbb{Z}^d_*,\quad \|\Psi_k - R_k\|_{L^2(dt)} \le \frac{\|\mathcal{K}^0_k\|_{L^1(dt)}}{\kappa}\|R_k\|_{L^2(dt)}. \tag{۳۴.۷}$$

در این صورت

$$
\begin{aligned}
\|\varphi(t)e^{-\varepsilon t}\|_{L^۲(dt)} &= \left\|\sum_k |\Psi_k|\right\|_{L^۲(dt)} \\
&\leq \left\|\sum_k |R_k|\right\|_{L^۲(dt)} + \sum_k \|R_k - \Psi_k\|_{L^۲(dt)} \qquad (۳۵.۷)\\
&\leq \left\|\sum_k |R_k|\right\|_{L^۲(dt)} \left(۱ + \frac{۱}{\kappa}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d_*} \|\mathcal{K}^\circ_\ell\|_{L^۱(dt)}\right).
\end{aligned}
$$

(تذکر: برای $\|R_\ell\|$ کران $\| \sum_k |R_k| \|$ را تعیین کردیم که ظاهراً بسیار خام است؛ اما نزول $\mathcal{K}^\circ_k$ به عنوان تابعی از k ما را نجات خواهد داد.) اکنون، مشاهده می‌کنیم که

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{K}^\circ_k\|_{L^۱(dt)} &\leq ۴\pi^۲|\widehat{W}(k)| \int_\circ^\infty C_\circ e^{-۲\pi(\lambda_\circ-\lambda)|k|t}|k|^۲ t\, dt \\
&\leq ۴\pi^۲|\widehat{W}(k)| \frac{C_\circ}{(\lambda_\circ - \lambda)^۲}, \\
\sum_k \|\mathcal{K}^\circ_k\|_{L^۱(dt)} &\leq ۴\pi^۲\left(\sum_k |\widehat{W}(k)|\right)\frac{C_\circ}{(\lambda_\circ - \lambda)^۲}.
\end{aligned}
$$

این را در (۳۵.۷) قرار می‌دهیم و دوباره با استفاده از (۲۲.۷) به دست می‌آوریم

$$
\begin{aligned}
\|\varphi(t)e^{-\varepsilon t}\|_{L^۲(dt)} &\leq \left(۱ + \frac{CC_\circ C_W}{\kappa(\lambda_\circ - \lambda)^۲}\right)\left\|\sum_k |R_k|\right\|_{L^۲(dt)} \\
&\leq \left(۱ + \frac{CC_\circ C_W}{\kappa(\lambda_\circ - \lambda)^۲}\right)\left\{\int_\circ^\infty e^{-۲\varepsilon t}\left(A + \int_\circ^t \left[K_۱ + K_\circ \right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left. + \frac{c_\circ}{(۱+\tau)^m}\right]\varphi(\tau)\, d\tau\right)^۲ dt\right\}^{\frac{۱}{۲}}. \qquad (۳۶.۷)
\end{aligned}
$$

این را (با استفاده از نابرابری مینکوفسکی) به چند جمله تقسیم می‌کنیم و هر یک را جداگانه تخمین می‌زنیم. در مرحلهٔ اول، البته

$$
\left(\int_\circ^\infty e^{-۲\varepsilon t} A^۲\, dt\right)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{A}{\sqrt{۲\varepsilon}}. \qquad (۳۷.۷)
$$

پس از آن، با در نظر داشتن مرحلهٔ ۱ و اینکه $\int_{\circ}^{t} K_{\backslash}(t,\tau)d\tau \le Cc(\backslash+t)/\alpha$، به ازاء هر $T \ge \backslash$، داریم

$$\left\{\int_{\circ}^{T} e^{-\text{۲}\varepsilon t}\left(\int_{\circ}^{t} K_{\backslash}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau\right)^{\text{۲}} dt\right\}^{\frac{\backslash}{\text{۲}}} \tag{۳۸.۷}$$

$$\le \left[\sup_{\circ\le t\le T} \varphi(t)\right]\left(\int_{\circ}^{T} e^{-\text{۲}\varepsilon t}\left(\int_{\circ}^{t} K_{\backslash}(t,\tau)\,d\tau\right)^{\text{۲}} dt\right)^{\frac{\backslash}{\text{۲}}}$$

$$\le CAe^{C\left[\frac{C_{\circ}C_W}{\lambda_{\circ}-\lambda}T+c(T+T^{\text{۲}})\right]}\frac{c}{\alpha}\left(\int_{\circ}^{\infty} e^{-\text{۲}\varepsilon t}(\backslash+t)^{\text{۲}}dt\right)^{\frac{\backslash}{\text{۲}}}$$

$$\le CA\frac{c}{\alpha\varepsilon^{\text{۳}/\text{۲}}}e^{C\left[\frac{C_{\circ}C_W}{\lambda_{\circ}-\lambda}\,T+c(T+T^{\text{۲}})\right]}.$$

با در نظر گرفتن رابطه‌های ینسِن و فوبینی، همچنین داریم

$$\left\{\int_{T}^{\infty} e^{-\text{۲}\varepsilon t}\left(\int_{\circ}^{t} K_{\backslash}(t,\tau)\,\varphi(\tau)d\tau\right)^{\text{۲}} dt\right\}^{\frac{\backslash}{\text{۲}}} \tag{۳۹.۷}$$

$$=\left\{\int_{T}^{\infty}\left(\int_{\circ}^{t} K_{\backslash}(t,\tau)e^{-\varepsilon(t-\tau)}e^{-\varepsilon t}\varphi(\tau)d\tau\right)^{\text{۲}} dt\right\}^{\frac{\backslash}{\text{۲}}}$$

$$\le\left\{\int_{T}^{\infty}\left(\int_{\circ}^{t} K_{\backslash}(t,\tau)e^{-\varepsilon(t-\tau)}d\tau\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\int_{\circ}^{t} K_{\backslash}(t,\tau)e^{-\varepsilon(t-\tau)}e^{-\text{۲}\varepsilon\tau}\varphi(\tau)^{\text{۲}}d\tau\right)dt\right\}^{\frac{\backslash}{\text{۲}}}$$

$$\le\left(\sup_{t\ge T}\int_{\circ}^{\text{۲}} e^{-\varepsilon t}K_{\backslash}(t,\tau)e^{\varepsilon\tau}\,d\tau\right)^{\frac{\backslash}{\text{۲}}}$$

$$\times\left(\int_{T}^{\infty}\int_{\circ}^{t} K_{\backslash}(t,\tau)e^{-\varepsilon(t-\tau)}e^{-\text{۲}\varepsilon\tau}\varphi(\tau)^{\text{۲}}d\tau\,dt\right)^{\frac{\backslash}{\text{۲}}}$$

$$=\left(\sup_{t\ge T}\int_{\circ}^{t} e^{-\varepsilon t}K_{\backslash}(t,\tau)e^{\varepsilon\tau}\,d\tau\right)^{\frac{\backslash}{\text{۲}}}$$

$$\times\left(\int_{\circ}^{\infty}\int_{\max\{\tau;T\}}^{+\infty} K_{\backslash}(t,\tau)e^{-\varepsilon(t-\tau)}e^{-\text{۲}\varepsilon\tau}\varphi(\tau)^{\text{۲}}\,dt\,d\tau\right)^{\frac{\backslash}{\text{۲}}}$$

$$\leq \left(\sup_{t\geq T} \int_{0}^{t} e^{-\varepsilon t}K_{1}(t,\tau)e^{\varepsilon\tau}\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\sup_{\tau\geq 0}\int_{\tau}^{\infty} e^{\varepsilon\tau}K_{1}(t,\tau)e^{-\varepsilon t}dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\int_{0}^{\infty} e^{-2\varepsilon\tau}\varphi(\tau)^{2}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(در واقع اثبات نابرابری یانگ را کُپی کرده‌ایم.) همین‌طور

$$\left\{\int_{0}^{\infty} e^{-2\varepsilon t}\left(\int_{0}^{t} K_{0}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau\right)^{2} dt\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{40.7}$$

$$\leq \left(\sup_{t\geq 0} \int_{0}^{t} e^{-\varepsilon t}K_{0}(t,\tau)e^{\varepsilon\tau}\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\sup_{\tau\geq 0} \int_{\tau}^{\infty} e^{\varepsilon\tau}K_{0}(t,\tau)e^{-\varepsilon t}dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\int_{0}^{\infty} e^{-2\varepsilon\tau}\varphi(\tau)^{2}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sup_{t\geq 0}\int_{0}^{t} K_{0}(t,\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sup_{\tau\geq 0}\int_{\tau}^{\infty} K_{0}(t,\tau)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\int_{0}^{\infty} e^{-2\varepsilon\tau}\varphi(\tau)^{2}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

جملهٔ آخر را نیز تقسیم می‌کنیم، این بار با در نظر گرفتن اینکه $\tau \leq T$ یا $T < \tau$:

$$\left\{\int_{0}^{\infty} e^{-2\varepsilon t}\left(\int_{0}^{T} \frac{c_{0}\varphi(\tau)}{(1+\tau)^{m}}d\tau\right)^{2} dt\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{41.7}$$

$$\leq c_{0}\left(\sup_{0\leq\tau\leq T} \varphi(\tau)\right)$$

$$\times\left\{\int_{0}^{\infty} e^{-2\varepsilon t}\left(\int_{0}^{T} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{m}}\right)^{2} dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c_{0}\frac{C\, A}{\sqrt{\varepsilon}}e^{C\left[\left(\frac{C_{0}C_{W}}{\lambda_{0}-\lambda}\right)T+c(T+T^{2})\right]}C_{m},$$

و

$$\left\{\int_{۰}^{\infty} e^{-۲\varepsilon t}\left(\int_T^t \frac{c_{۰}\varphi(\tau)d\tau}{(۱+\tau)^m}\right)^{۲} dt\right\}^{\frac{۱}{۲}} \tag{۴۲.۷}$$

$$\begin{aligned}
&=c_{۰}\left\{\int_{۰}^{\infty}\left(\int_T^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\frac{e^{-\varepsilon\tau}\varphi(\tau)}{(۱+\tau)^m}d\tau\right)^{۲} dt\right\}^{\frac{۱}{۲}}\\
&\leq c_{۰}\left\{\int_{۰}^{\infty}\left(\int_T^t \frac{e^{-۲\varepsilon(t-\tau)}}{(۱+\tau)^{۲m}}d\tau\right)\left(\int_T^t e^{-۲\varepsilon\tau}\varphi(\tau)^{۲}d\tau\right)dt\right\}^{\frac{۱}{۲}}\\
&\leq c_{۰}\left(\int_{۰}^{\infty} e^{-۲\varepsilon t}\varphi(t)^{۲}dt\right)^{\frac{۱}{۲}}\left(\int_{۰}^{\infty}\int_T^t \frac{e^{-۲\varepsilon(t-\tau)}}{(۱+\tau)^{۲m}}d\tau\, dt\right)^{\frac{۱}{۲}}\\
&=c_{۰}\left(\int_{۰}^{\infty} e^{-۲\varepsilon t}\varphi(t)^{۲}dt\right)^{\frac{۱}{۲}}\\
&\quad\times\left(\int_T^{\infty}\frac{۱}{(۱+\tau)^{۲m}}\left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-۲\varepsilon(t-\tau)}dt\right)d\tau\right)^{\frac{۱}{۲}}\\
&=c_{۰}\left(\int_{۰}^{\infty} e^{-۲\varepsilon t}\varphi(t)^{۲}dt\right)^{\frac{۱}{۲}}\left(\int_T^{\infty}\frac{d\tau}{(۱+\tau)^{۲m}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\\
&\quad\times\left(\int_{۰}^{\infty} e^{-۲\varepsilon s}\,ds\right)^{\frac{۱}{۲}}\\
&=\frac{C_{۲m}^{۱/۲}c_{۰}}{\sqrt{\varepsilon}T^{m-۱/۲}}\left(\int_{۰}^{\infty} e^{-۲\varepsilon t}\varphi(t)^{۲}dt\right)^{\frac{۱}{۲}}.
\end{aligned}$$

تخمین‌های (۳۷.۷) تا (۴۲.۷) را با هم در نظر گرفته و از (۳۶.۷) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t)e^{-\varepsilon t}\|_{L^{۲}(dt)} \leq &\left(۱+\frac{CC_{۰}C_W}{\kappa(\lambda_{۰}-\lambda)^{۲}}\right)\frac{CA}{\sqrt{\varepsilon}}\left[۱+\left(\frac{c}{\alpha\varepsilon}+c_{۰}C_m\right)\right]\\
&\times e^{C\left[\frac{C_{۰}C_W}{\lambda_{۰}-\lambda}T+c(T+T^{۲})\right]}+a\|\varphi(t)e^{-\varepsilon t}\|_{L^{۲}(dt)},
\end{aligned} \tag{۴۳.۷}$$

که در آن

$$a=\left(۱+\frac{CC_{۰}C_W}{\kappa(\lambda_{۰}-\lambda)^{۲}}\right)\left[\left(\sup_{t\geq T}\int_{۰}^t e^{-\varepsilon t}K_{۱}(t,\tau)e^{\varepsilon\tau}d\tau\right)^{\frac{۱}{۲}}\right.$$

$$\times \left(\sup_{\tau \geq 0} \int_{\tau}^{\infty} e^{\varepsilon \tau} K_1(t,\tau) e^{-\varepsilon t} dt \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \left(\sup_{t \geq 0} \int_0^t K_0(t,\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sup_{\tau \geq 0} \int_{\tau}^{\infty} K_0(t,\tau) dt \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C_{2m}^{1/2} c_0}{\sqrt{\varepsilon} T^{m-1/2}} \Bigg].$$

با استفاده از گزاره‌های ۱.۷ (مورد $\gamma > 1$) و ۵.۷، و فرض‌های (۲۳.۷) و (۲۴.۷)، مشاهده می‌کنیم که اگر χ به اندازهٔ کافی کوچک باشد و T در (۲۶.۷) صدق کند، آنگاه $a \leq 1/2$. در این صورت (۴۳.۷) نتیجه می‌شود

$$\|\varphi(t) e^{-\varepsilon t}\|_{L^2(dt)} \leq \left(1 + \frac{C C_0 C_W}{\kappa (\lambda_0 - \lambda)^2} \right) \frac{CA}{\sqrt{\varepsilon}}$$
$$\times \left[1 + \left(\frac{c}{\alpha \varepsilon} + c_0 C_m \right) \right] e^{C\left[\frac{C_0 C_W}{\lambda_0 - \lambda} T + c(T + T^2) \right]}.$$

مرحلهٔ ۳: کران‌های نقطه‌ای ظریف. اکنون برای بار سوم از (۲۲.۷) استفاده می‌کنیم، این بار برای $t \geq T$:

$$\begin{aligned}
e^{-\varepsilon t} \varphi(t) \leq & A e^{-\varepsilon t} \\
& + \int_0^t \left(\sup_k |K^0(k, t-\tau)| e^{2\pi\lambda(t-\tau)|k|} \right) \varphi(\tau) e^{-\varepsilon\tau} d\tau \\
& + \int_0^t \left[K_0(t,\tau) + \frac{c_0}{(1+\tau)^m} \right] \varphi(\tau) e^{-\varepsilon\tau} d\tau \\
& + \int_0^t \left(e^{-\varepsilon t} K_1(t,\tau) e^{\varepsilon\tau} \right) \varphi(\tau) e^{-\varepsilon\tau} d\tau \\
\leq & A e^{-\varepsilon t} + \Bigg[\left(\int_0^t \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}^d_*} |K^0(k, t-\tau)| e^{2\pi\lambda(t-\tau)|k|} \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_0^t K_0(t,\tau)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^{\infty} \frac{c_0^2}{(1+\tau)^{2m}} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_0^t e^{-2\varepsilon t} K_1(t,\tau)^2 e^{2\varepsilon\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg] \left(\int_0^{\infty} \varphi(\tau)^2 e^{-2\varepsilon\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \qquad (۴۴.۷)$$

ملاحظه می‌کنیم که، به ازاء هر $k \in \mathbb{Z}_*^d$، داریم

$$\begin{aligned}\left(|K^\circ(k,t)|e^{۲\pi\lambda|k|t}\right)^۲ &\leq ۱۶\pi^۴|\widehat{W}(k)|^۲\,|\tilde{f}^\circ(kt)|^۲\,|k|^۴t^۲e^{۴\pi\lambda|k|t} \\ &\leq CC_\circ^۲|\widehat{W}(k)|^۲e^{-۴\pi(\lambda_\circ-\lambda)|k|t}|k|^۴t^۲ \\ &\leq \frac{CC_\circ^۲}{(\lambda_\circ-\lambda)^۲}|\widehat{W}(k)|^۲e^{-۲\pi(\lambda_\circ-\lambda)|k|t}|k|^۲ \\ &\leq \frac{CC_\circ^۲}{(\lambda_\circ-\lambda)^۲}C_W^۲e^{-۲\pi(\lambda_\circ-\lambda)|k|t} \\ &\leq \frac{CC_\circ^۲}{(\lambda_\circ-\lambda)^۲}C_W^۲e^{-۲\pi(\lambda_\circ-\lambda)t};\end{aligned}$$

و از این رو

$$\int_\circ^t\left(\sup_{k\in\mathbb{Z}_*^d}|K^\circ(k,t-\tau)|e^{۲\pi\lambda(t-\tau)|k|}\right)^۲d\tau \leq \frac{CC_\circ^۲C_W^۲}{(\lambda_\circ-\lambda)^۳}.$$

با این حساب، نتیجه از (۴۴.۷)، حُکم ۴.۷، شرایط (۲۶.۷) و (۲۴.۷)، و مرحلهٔ ۲ به دست می‌آید. □

فصل بیست‌وهشتم

پرینستون، ۱۴ آوریل ۲۰۰۹

امروز رسماً سِمَت مدیریت انستیتو هانری پوانکاره را پذیرفتم.

و قضیهٔ ما هم دارد به خوبی روال خود را طی می‌کند. روزهای قبل دوبار تا ساعت چهار صبح کار کردم، از انگیزه‌ام ذره‌ای هم کاسته نشده است.

امشب هم خودم را برای یک جلسهٔ طولانی دو نفره با **مسئله** آماده کرده‌ام. مرحلهٔ اول عبارت است از گرم کردن آب.

اما وقتی فهمیدم که در خانه دیگر چایی نداریم وحشت کردم! بدون حمایت برگ‌های کاملیا سیننسیس[1]، حتی تصورش را هم نمی‌توانم بکنم چگونه وارد ساعت‌ها محاسبه‌ای که پیش‌رو دارم بشوم.

الان شب شده است، و دیگر امیدی ندارم بتوانم مغازهٔ بازی در پرینستون پیدا کنم. فقط به ندای شجاعتم گوش می‌دهم، سوار دوچرخه‌ام می‌شوم و می‌روم چند چای کیسه‌ای از سالن نشیمن بخش ریاضی بدزدم.

به درِ مؤسسه که رسیدم کُد ورود را وارد کردم، از پله‌ها بالا رفتم. همه جا تاریک است، فقط پرتو نوری از زیر درِ اتاق ژان بورگَن می‌تابد. اصلاً متعجب نشدم: هر چند که ژان بزرگ‌ترین افتخارات را کسب کرده و او را یکی از تواناترین آنالیزکاران چند دههٔ اخیر می‌دانند، اما هنوز به اندازهٔ یک گرگِ جوان با دندان‌های تیز کار می‌کند و تازه دوست دارد با اوقات سواحل غرب[2] آمریکا هماهنگ

1. *Camellia sinensis* 2. Côte Ouest

باشد زیرا مرتباً به آنجا می‌رود. می‌توانم شرط ببندم که او هم تا نیمه‌های شب کار خواهد کرد.

به سالن نشیمن می‌خزم، یواشکی، زیر نگاه‌های ملامت‌بار آندره ویل، چند چای کیسه‌ای که آن‌قدر به دنبالشان بودم برمی‌دارم. سریعاً پایین می‌آیم.

اما در راه بازگشت به تام اسپنسر، از متخصصان بزرگ فیزیک آماری و یکی از بهترین دوستانم در مؤسسه برمی‌خورم. مجبور می‌شوم به گناهم اعتراف کنم.

ــ آهان، چای! سَرِ پا نِگَهِت می‌داره، آره؟

بازگشت به خانه. الان چای کیسه‌ای ارزشمند اینجاست، جلوی چشمان من، می‌توانم مراسم را شروع کنم.

و خواهش می‌کنم یک کمی موسیقی، وگرنه می‌میرم.

این روزها ترانه زیاد گوش می‌دهم. کاترین ریبِرو[1]، ریبرویی که مدام تکرار می‌شود. دانیل مسیا[2]، آن مطرود مصیبت‌کشیده. کاترین ریبرو، آن زن بی‌قرار. ماما بِه‌آ تکیلسکی[3]، آن زخم‌خورده که فریادش باشکوه است. موسیقی برای من در لحظاتی که به تنهایی مشغول تحقیق هستم همنشینی است بی‌بدیل.

چیزی نیست که به اندازهٔ موسیقی در یادآوری خاطرات فراموش‌شده مؤثر باشد. یادم می‌آید، اولین باری که پدربزرگم قطعه‌ای را که از فرانسیس پولانک[4] می‌نواختم شنید چه شوکی در چهره‌اش آشکار شد؛ در یک لحظه شصت سال به عقب پرتاب شده بود، در آن موقع در آپارتمان حقیری که دیوارهایش بیش از حد باریک بودند تمام اجراهای همسایه‌اش را می‌شنید که یک آهنگساز کلاسیک بود و در همان جریان هنری غوطه‌ور بود که پولانک.

من هم وقتی به گوندولا یانویتس[5] گوش می‌دهم که “Gretchen am Spinnrade” را می‌خواند، دوباره همان پسر جوانی می‌شوم که به علت ابتلا به گاز قفسهٔ سینه در سرویس احیای بیمارستان کوشَن[6] بستری شده بود و یک قسمت از روزهایش را به بلعیدن *Carmen Cru* می‌گذراند و شب‌ها را هم به بحث دربارهٔ موسیقی با کارآموزان پزشکی، و با یک عروسک ایرلندی که یکی از دوستانش به او قرض داده بود به خواب می‌رفت.

“Polka Cemetery” که تام ویتس[7] نثار گوش ما می‌کند مرا به یاد دومین ابتلا به گاز قفسهٔ سینه و بیمارستانی بزرگ در لیون می‌اندازد. هم‌اتاقی من شوخی‌های مستهجن می‌کرد و پرستارها را حسابی می‌خنداند.

«مَسخِ» جان لنون و تبدیل او به فیل دریایی (Walrus) مرا به یاد سالنی در مدرسهٔ پلی‌تکنیک

---

1. Catherine Ribeiro 2. Danielle Messia 3. Mama Béa Tekielski
4. Francis Poulenc 5. Gundula Janowitz 6. Cochin 7. Tom Waits

می‌اندازد که در هجده سالگی بین دو امتحان شفاهی در آن انتظار می‌کشیدیم، آن زمانی که آینده شکل علامت سئوال زیبایی به خود گرفته بود.

سه سال بعد، آغاز پرشور اولین کنسرتو پیانوی برامس، درست همان زمانی که در اتاق کوچک خوابگاه من در دانشسرای عالی طنین افکنده بود که یک دختر جوان که توضیحی برای کارش نداشت هیجان‌زده دَرِ اتاقم را زد.

هیچ چیز به اندازهٔ "Porque Te Vas" که همه را جادو کرده بود و باعث شهرت ژانت[1] شد، یا «نهنگ آبی» استیو وارینگ[2] که لحن آن نیش ملایمی داشت، یا «گرگ بزرگ درندهٔ» تَشان[3] که همه چیز را زیروزبر می‌کرد، خاطرات کودکی را در من زنده نمی‌کند. یا، چرا؟ نمی‌دانم، تِمی از کنسرتو برای ویولون بتهوون که مادرم دوست داشت زمزمه کند.

وقتی دوازده ساله بودم برخی از قطعاتی که پدر و مادرم دوست داشتند اینها بودند: «شاعران» آراگون و فِرا، «تربیت احساساتِ» ماکسیم لو فورسیته، «نانسیِ» لئونارد کوهِن، «فُکِ» بو دوماژ[4]، «ساعت دیواریِ تَهِ آب» و «نخ سفید» اثر گروه آنفان تریبل[5]، «اکسیژن» ژان میشل ژار، همین‌طور پیرِ خِرف ترانهٔ گرم اَل‌رایت[6] که اصرار داشت به راهش ادامه دهد درحالی‌که «تا کمرش» را آب گرفته بود.

در نوجوانی، بین کلیپ‌هایی که در کانال شش تماشا می‌کردم و نوار(کاست)هایی که از اینجا و آنجا ضبط می‌کردم می‌توانم به طور درهم از

"Airport", "Envole-moi", "Tombé du Ciel", "Poulailler Song", "Le Jerk", "King Kong 5", "Marcia Baïla", "lætitia", "Barbara", "L'Aigle Noir", "L'Oiseau de Nuit", "Les Nuits sans soleil", "Madame Rêve", "Sweet Dreams", "Les Mots Bleus", "Sounds of Silence", "The Boxer", "Still Loving You", "L'Étrange Comédie", "Snas contrefaçon", "Maldon"', "Changer la Vie", "Le Bagad de Lann-Bihoué", "Aux Sombres Héros de l'Amer", "La Ligne Holworth", "Armstrong", "Mississippi River", "Le Connemara", "Sidi H'Bibi", "Bloody Sunday", "Wind of Change", "Les Murs de poussière", "Mon Copain Bismarck", "Hexagone", "Le France", "Russians", "J'ai vu", "Oncle Archibald", "Sentimental Bourreau"...

نام ببرم.

بارها و بارها عاشق آهنگ‌های کلاسیک و پاپ و راک شده بودم؛ این آهنگ‌ها را بارها گوش می‌دادم، بعضی از آنها را صدها بارگوش داده‌ام و از شور و حالی که می‌بایست بر به‌وجودآورندگان

1. Jeanette 2. Steve Waring 3. Tachan 4. Beau Dommage
5. Enfants Terribles 6. Graeme Allwright

آنها حاکم بوده باشد شگفت‌زده می‌شدم. پس از «سمفونی دنیای جدید» دِورژاک[1]، که در واقع ورود من به دنیای جدید موسیقی‌ای که بدان کلاسیک گفته می‌شود به حساب می‌آید، پنجمین کنسرت براندبوژوایِ باخ و بعد هم سمفونی هفتم بتهوون، کنسرتوی سوم راخمانینُف، سمفونی دوم مالِر، سمفونی چهارم برامس، سونات ششم پروکُفیف، سونات اول برگ ... سونات لیتز، اتودهای پیانوی لی‌جتی، سمفونی پنجم مبهم شاستاکویچ، سونات D784 شوبرت، پرلود شانزدهم شوپَن (لطفاً با اجرای هُنری مناسب) قرار می‌گیرند. «توکوتا»یِ بوئل‌مَن، «مرثیه برای جنگ» برتِین، آهنگ شگفت‌انگیز «نیکسون در چینِ» جان آدامز، «یک روز در زندگی» بیتلز، «داستان قصاب» زامبیز، «امروز اینجا» بیچ بویز، «سه خواهر» دیواین کمدی، «جینو» تِتْرِدز، «لیزا گوئه‌لِتْ» آن سیلوستر، «اِکس‌کالیبور» ویلیام شِلِر، «موسیو» توماس فِرسِن. «چیزی نیستِ» رُدا ـ ژیل فقط در ظاهر سطحی است اما «ماخنوف‌جاینا» و آن قصر با ستون‌های جرم‌گرفته‌اش که می‌گوید در جنوب یا شمال ژوئیه است به نظر عمیق می‌رسد ولی عمقش خیلی خیلی تصنعی است. فرانسوا هاجی ـ لازارو و خاکریزها، کشتی‌های باری و پاریس شورش‌زده‌اش. مور شومن که برای پلاژِ بروکلین، و پاگانی که برای ونیزِ در حال غرق شدن، به هیجان می‌آیند. لئو فِرِ و «ناشناس لندن» مرموزش با تنظیم جدید، و «سگِ هارِ» او که وقتی «دیگر هیچ چیز نیست» تنها مانده است. دیلان که از کمین‌گاهش سرنوشت وحشتناک جان براون را نقل می‌کند، پینک فلوید که برای علف سبز آن قدیم‌ها دلتنگی می‌کند، پیازولا که بوئنوس‌ایرس را در ساعت صفر می‌خواند. «رومانسِ» پروکُفیِف و «رومانزو»یِ موریکُن. «مانوئلِ» تأثرانگیز آدامو که در مُسکو متن آن را برای میهمانانی که عاشق موسیقی و زبان فرانسه بودند نوشتم، در آن زمان اینترنت نبود که گفتار آهنگ‌ها را در اختیارشان قرار دهد. فابریزیو دو آندره بر ژوردی که با طنابی طلا به دار آویخته شده بود می‌گریست، جورجیو گابر که خود را خدا می‌دانست، پائولو کُنته که از محبوب خود می‌خواست به دنبالش بیاید. رِنه سیمار کوچک با «پرندهٔ» بلورین و «گریه نکن / Midori Iro No Yane» خود که نفس را در سینه حبس می‌کرد، اشک از چشمان مادران کِبِکی و دختران ژاپنی جاری می‌ساخت. برادران ژاک که ژنرال پنج ستارهٔ خود را از فرانسیس بلانش می‌خریدند، وییِرز سیرکِس به شغال‌ها پیشنهاد عشق می‌دادند، الیویا روئیز[2] قلب‌ها و شیشه‌های شکسته را تعمیر می‌کرد، اِیو[3] (اجداد) من که با نُت چنگ فاسد شده حشیش قاچاق می‌کردند. ویان[4] که برای یک رقصِ جاوای انفجاری از خودبی‌خود می‌شود و بِکو[5] که یک حراج اهریمنی او را از کوره به‌در می‌برد، رُنو[6] که حماسهٔ ژِرار لامبر[7] را خواند و کوربیه[8] که حماسهٔ فیل‌دوستِ نفرین شده را. تیه‌فِن[9] و دنیای او که مملو است

1. Dvořàk 2. Olivia Ruiz 3. Aïeux 4. Vian 5. Bécaud
6. Renaud 7. Gérard Lambert 8. Corbier 9. Thiéfaine

از دختر، تابوت چرخ‌دار، سوسمارهای هسته‌ای و دیوژن لَزج، که در اوج بیست‌سالگی من پسرها و دخترها را به رقص درمی‌آورد. نمایش‌های پرشور بِرل[1] که فریاد می‌زد و به خرس بزرگ میخکوب شده بود، اوتگه‌رویو[2] که آهنگ ممنوع «سرباز فراری ۱۹۱۷» دبرونکارت[3] را احیا کرد، فِرا[4] که به بچه‌ای که از خواب بیدار می‌شد سلام می‌کرد و برای آنهایی که زمین خورده بودند و باعث ناراحتی ماریا شده بودند گریه می‌کرد، تَشان غُر می‌زد و می‌گفت بچه نمی‌خواهد! و جن‌هایی که روی تو را کم می‌کنند، کِیت بوش[5] و «کسی که خواب ارتش را می‌بیند»، فرانس گال[6] و «سرباز کوچک»اش، لورینا مک‌کِنیت[7] و «راهزن بزرگ‌راه»، تُری آموس[8] که در خواب می‌بیند یک «شَبَح شاد» است، آمِلی مورَن[9] که با ملایمت کفر می‌گوید، «دیگر فایده ندارد، همه چیز تمام شد». و خواننده‌های مورد علاقهٔ من، ماده‌ببرهایی که مو را بر تن راست می‌کنند: مِلانی[10] که اطرافیانش را مخاطب قرار می‌داد، دانیل مسیا از اینکه او را رها کرده‌اند گِلِه می‌کرد، پَتی اسمیت[11] که «به خاطر شب» را خواند، اوته لامپر[12] که به سرنوشت ماری سَندرِرز افسوس می‌خورد، فرانچسکا سولویل[13] که کمون پاریس را احیا می‌کند، ژولیت[14] که نقش دختر پسرنما را بازی می‌کند، نینا هاگن[15] که بر سر کِرت وِیل[16] نعره می‌کشید و گِرِیْ‌بوی که بر سر کلاغهایش فریاد می‌زد، اجرای دو نفرهٔ موله[17] ـ رِیپِرو که در مقابل در سرود صلح، مرگ و پرنده می‌خواندند.

برای کشف موسیقی‌های جدید از هیچ مسیری نباید غافل شد. کنسرت، جلسات بحث و گفتگو، سایت‌های موسیقی رایگان ... و البته وب‌رادیوی مثال‌زدنی بید و موزیک[18]، که از طریق آن اِواریست[19]، آدونیس[20]، ماری، آمِلی مورَن، برنارد بْرَبان[21]، یا ژاک ایشر[22]، باندهای پرواز خیابان شانزه‌لیزه و سرودهای دیسکو در ستایش مسکو را کشف کردم.

در امر پژوهش هم همین‌طور است: در تمام جهات جستجو می‌کنیم، در کمین نشسته‌ایم، به همه چیز گوش می‌دهیم، و بعضی‌وقت‌ها هم یکدفعه عاشق می‌شویم و جسم و روحمان را درگیر یک پروژه می‌کنیم، این صدها و صدها بار اتفاق می‌افتد، و بعد دیگر هیچ چیز برای ما مهم نیست یا خیلی کم‌اهمیت است.

بعضی وقت‌ها هم این دو جهان با یکدیگر مربوط می‌شوند، برخی موسیقی‌ها، که در حین کار مرا پشتیبانی می‌کنند، برای همیشه با لحظاتی که تحقیقاتم در اوج خود هستند پیوند می‌خورند.

1. Brel 2. Utgé-Royo 3. Debronckart 4. Ferrat 5. Kate Bush 6. France Gall 7. Loreena McKennitt 8. Tori Amos 9. Amélie Morin 10. Melanie 11. Patti Smith 12. Ute Lemper 13. Francesca Solleville 14. Juliette 15. Nina Hagen 16. Kurt Weill 17. Moullet 18. *Bide & Musique* 19. Évariste 20. Adonis 21. Bernard Brabant 22. Jacques Icher

وقتی به ژولیت گوش می‌دهم که آقای ونوس را فریاد می‌زند، خودم را زیر یک سقف شیشه‌ای می‌بینم در لیون، سال ۲۰۰۶، که مشغول نوشتن مقاله‌ای هستم که سهم من از مجموعهٔ مقالات کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان بود.

«مانند گذشتهٔ» آملی مورن تند و تیز، یا «آویزان یک رؤیا»ی زامبی‌های خوش‌نوا مرا به آپارتمانی در استرالیا می‌فرستند که در تابستان سال ۲۰۰۷ در حضور بهترین متخصصان فن، نظریهٔ نظام‌مندی انتقال بهینه را یاد گرفتم (و در همان‌جا شوقی برای ماجرای‌های L، M و N در دفترچه یادداشت مرگ برایم ایجاد شد، که البته داستانی است دیگر).

وقتی ماری لافوره[۱] شروع به خواندن «این ابرها چرا» می‌کند، با آن تغییرات ظریف بی‌بدیل در صدایش، صدایی که هم ضعیف است و هم قوی، من خود را در رِدینگ[۲] می‌بینم که در زمستان سال ۲۰۰۳ داشتم رازهای مغناطیس‌زدایی زیراجباری[۳] را بررسی می‌کردم.

آواز بدون عنوانِ ژَن شِرهال[۴] مرا به یاد مدرسهٔ تابستانی احتمالات سَن فلور[۵] می‌اندازد، به سال ۲۰۰۵، در آن مدرسه بود که در مسابقات پینگ‌پونگ درحالی‌که جمعیت تشویقم می‌کرد پیروز شدم.

کنسرتوی دوم پروکفیف[۶] را، همانی که موومان دومش مرا به گریه می‌اندازد، تقریباً هر روز در پاییز سال ۱۹۹۹ که در آتلانتا بودم گوش می‌دادم درحالی‌که داشتم روی اولین کتابم دربارهٔ ترابری بهینه کار می‌کردم.

رِکوییمِ موزارت، وقتی که در سال ۱۹۹۴ مشغول گذراندن کنکور برای دبیری در ریاضیات بودم، مرا هر روز صبح، از خواب بیدار می‌کرد.

«قطعات باروکِ» پار لیند پروژه[۷] برای همیشه در اعماق شب زمستانی ایسلندی، پس از یک سخنرانی موفقیت‌آمیز، در شب کنفرانس سال ۲۰۰۵، طنین‌افکن شده است.

تجربیاتی که هم در آن امید به کشفی تازه وجود دارد و هم سرخوردگی از نواقص، یا اثباتی که می‌دانی فرّار است. مخلوطی از خوشحالی و درد در کار تحقیق وجود دارد، لذت احساس زنده بودن، که با موسیقی‌ای که از شور و نشاط لبریز است همراهی می‌شود.

امشب جای دیگری نیستم، در اینجا، در خود پرینستون هستم، و قرار است ریبرو در تلاش‌هایی که می‌کنم مرا همراهی کند. غیرممکن است بتوان او را در فروشگاه‌ها پیدا کرد، خوشبختانه وِب وجود دارد؛ چند قطعه‌ای که در سایت او در اینترنت قرار دارد و به‌خصوص برگزیدهٔ فوق‌العادهٔ لانگ‌باکس[۸] که در میوزیک‌می[۹] قابل دسترس است.

1. Marie Laforêt 2. Reading 3. hypocoercivité 4. Jeanne Cherhal
5. Saint-Flour 6. Prokofiev 7. Pär Lindh Project 8. LongBox
9. MusicMe

«شعر غیرحماسی» باورنکردنی و فراتر از آن چیزی است که بتوان تصور کرد، قطعه‌ای استثنایی در تاریخ ترانه‌های فرانسوی است، اما بار احساسی آن زیاده از حد است، حتی وقتی به آن فکر می‌کنم موهای بدنم سیخ می‌شود، نمی‌توانم با آن کار کنم.

به جای آن، «روز عید» را گوش می‌دهم که فوق‌العاده است. در این آهنگ قدرت، بی‌پیرایگی، عاطفه و قدرت تداعی وجود دارد.

می‌خواستم جای دیگر باشم
این جای دیگر مکانی نداشت ...

لحظه‌ای که دوستش دارم فرامی‌رسد، صدایی که تا آن لحظه نگه‌داشته شده بود رسا می‌شود، قدرت خود را نشان می‌دهد. صدایی که «مرده‌ها، مرده‌های زنده و زنده‌ها را می‌لرزاند».

نه گرسنه بودم نه تشنه،
می‌خواستم عشق بورزم،
هر جا که شده، هر طور که شده،
به شرط اینکه عشق ورزیدن باشد،
حتی اگر روی زمین باشد
به شرط اینکه احساسش بگذرد

کار کن، سدریک، کار کن. چای، معادلات، ریبرو.

... همین امشب چند مریض
سعی خواهند کرد که عشق بورزند
در ملافه‌های سپیده‌دم مردگان
با نَفَس‌هایی که بوی بد الکل می‌دهد ...

اُووووف ...

به محض اینکه آهنگ تمام می‌شود، دوباره آن را می‌گذارم، دوباره و چندباره. من به این تکرار برای پیشرفت احتیاج دارم. کار کن، سدریک، کار کن.

*

“Jour de Fête” Catherine Ribeiro

(«روز عید» کاترین ریبرو)

Le grand jour était arrivé
De partout la fête éclatait
Derrière chaque fenêtre luisaient
Guirlandes bougies et boules de gomme
Ce soir-là chacun se devait
De s'éclater au tiroir-caisse
Des magasins pochettes surprises
Jour du formidable gâchis-

Paris scintillait de lumières
Mais tout mon être était absent
J'avais croisé un satellite
Bien mal placé sur mon orbite
Qu'est-ce que j'foutais sur les trottoirs
Dans les boutiques endimanchées
À chercher l'objet pseudo rare
À chercher le dernier cadeau-

J'aurais voulu être ailleurs
Cet ailleurs n'avait pas de lieu
Je n'avais plus ni faim ni soif
J'avais envie de faire l'amour
N'importe où - n'importe comment
Pourvu que ce soit de l'amour
Même de l'amour au ras du sol
Pourvu que passe l'émotion-

Le téléphone n'a pas sonné
Sûrement à cause des PTT
Le champagne n'avait aucun goût
Je veillais pour être debout
Le temps passait à fendre l'âme
Et la pluie frappait les carreaux
Il n'y a rien de plus dérisoire
Qu'un corps chaud dans un lit désert-

Ce soir-là combien de malades
S'évertuèrent à faire l'amour
Dans des draps d'aube macabre
L'haleine empuantie d'alcool
Cétait le Grand Jour - Jour de Paix
Au fin fond de mes Amériques
Je rêvais de mon satellite
Bien mal placé sur mon orbite

فصل بیست‌ونهم

پرینستون، ۲۰ آوریل ۲۰۰۹

پیرمرد درحالی‌که فنجانی چای در دست داشت به طرف من برگشت و مصرانه نگاهم کرد، بدون اینکه چیزی بگوید. معلوم بود که سبک لباس پوشیدنم، که عادی نبود، برای او سئوال‌برانگیز است.

به این نوع اشخاص که از دیدن لباس و عنکبوتم ناراحت می‌شوند و خوششان نمی‌آید عادت کرده‌ام. معمولاً برخورد من با آنها محبت‌آمیز است و بازیگوشانه. اما این بار من هم اقلاً به اندازهٔ کسی که نگاهم می‌کند دستپاچه شده‌ام. او جان نَش است، شاید بزرگ‌ترین آنالیزدان قرن و قهرمان ریاضی من که در سال ۱۹۲۸ متولد شده است. او مدال فیلدز را نبُرد و ده‌ها سال مرتب از این شکست با تلخکامی یاد می‌کرد. البته او به خاطر تحقیقات دورهٔ جوانی‌اش دربارهٔ آنچه بعداً به «تعادل‌های نش» معروف شد جایزهٔ نوبل اقتصاد را برد و در نظریهٔ بازی‌ها، اقتصاد و زیست‌شناسی مشهور شد. اما آنچه متعاقباً انجام داد از نظر خبرگان بسیار مهمتر بود؛ این کارها مستحق یک، دو، سه مدال فیلدز بود.

نَش در سال ۱۹۵۴ غوطه‌ورساختنِ غیرهموار را معرفی کرد، خرق عادتی که می‌شود با آن کارهای غیرممکن انجام داد، مثل چروک کردن یک توپ پینگ‌پونگ بدون تغییر شکل دادن آن، یا ساختن یک حلقهٔ کاملاً مسطح. گروموف گفته است این نمی‌توانست حقیقت داشته باشد، اما حقیقت داشت، او کسی است که کارهای هندسی نَش را بهتر از هر کسی روی این کرهٔ زمین فهمیده و با استفاده از آن تمامی نظریهٔ انتگرال‌گیری محدب را تدوین کرده است.

در سال ۱۹۵۶ نَش جواب همکارش را، که او را ناباورانه به مبارزه طلبیده بود داد، او نشان

داد که تمامی هندسه‌های مجرد پرنس ریمان ــ شوپنِ ریاضیات ــ عملاً تحقق‌پذیر است. بدین ترتیب او به یک رویای تقریباً صدساله تحقق بخشید.

در سال ۱۹۵۸، نَش در جواب به سئوالی که نیرنبرگ[1] مطرح کرده بود ثابت کرد که جواب‌های معادلات خطی سهموی با ضرایب بیضویِ اندازه‌پذیر منظم‌اند ــ یعنی پیوستگی در فضا ـ زمانِ حرارت در یک جسم صلب کاملاً ناهمگن را به اثبات رساند و این سرآغاز نظریهٔ مدرن معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی شد.

تقدیر این‌طور خواسته بود که نابغهٔ صومعه‌نشین، اِنی‌یو دو جیورجی[2]، این مسئلهٔ آخر را همزمان با نَش، اما با روشی کاملاً متفاوت حل کند؛ اما این چیزی از امتیازِ نَش کم نکرد.

نَش از نادر دانشگران زنده‌ای است که قهرمان یک فیلم هالیوودی نیز بوده است. خیلی از آن فیلم خوشم نیامد اما زندگی‌نامه‌ای را که فیلم براساس آن تهیه شده بود؛ جان نَش، یک ذهن زیبا[3]، بسیار پسندیدم.

اگر نَش توانست هالیوود را جذب خود کند تنها به علت شاهکارهای ریاضی‌اش نبود، داستان زندگی اسف‌بار او نیز در این امر دخالت داشت. در ۳۰ سالگی به جنون مبتلا شد؛ او تقریباً سه دهه را در تیمارستان گذراند و بالاخره این شبح قابل ترحم توانست دوباره در راهروهای پرینستون رفت‌وآمد کند.

و نَش از مرزهای جنون بازگشته است. اکنون که بیش از ۸۰ سال دارد آدمی است عادی مثل شما و من. با این تفاوت که هاله‌ای اطراف او را فراگرفته که نه شما و نه من آن را نداریم، شواهدی که بر دستاوردهای خارق‌العادهٔ او وجود دارد، دستاوردهای نبوغ‌آمیز او و نحوهٔ موشکافی، تجربه و تحلیل مسائل که از نش چهره‌ای ساخته است که بر تمامی متخصصان آنالیز مدرن، اولین آنها خود من، قیمومیت دارد.

مردی که به من خیره شده بسیار بیشتر از یک آدم معمولی است، او یک افسانهٔ زنده است و امروز جرأت ندارم که نزدیکش شوم و با او صحبت کنم.

دفعهٔ دیگر جرأت خواهم کرد به او نزدیک شوم و به او بگویم چگونه با اثباتی که قضیهٔ غوطه‌ورساختن غیرهموار او الهام‌بخش آن بود توانستم یک سخنرانی در مورد پارادوکس شِفِر ـ اشنیرلمن ایراد کنم. با وی در مورد اینکه قصد دارم در کتابخانهٔ ملی فرانسه کنفرانسی دربارهٔ او بدهم حرف خواهم زد. شاید این را هم به او بگویم که او قهرمان من است. آیا فکر خواهد کرد که این حرف خنده‌آور است؟

*

1. Nirenberg 2. Ennio De Giorgi

3. Sylvia Nasar, 1994, *John Nash, A Beautiful Mind.*

جان نِش

در سال ۱۹۵۶ در نیویورک، یك آدم قوی‌هیکل پرانرژی درِ ورودی یك بلوك ضخیم بتونی را که در بالای آن نوشته شده **مؤسسهٔ علوم ریاضی کورانت**[1] هُل می‌دهد. ظاهر مغرور او چیزی از هیکل راس کرو که نیم‌قرن بعد نقش او را در هالیوود بازی خواهد کرد کم ندارد. نام او نش است و در ۲۸ سالگی به خاطر ابداع تعادل‌های نش و اثبات قضیهٔ غوطه‌ورسازی: کارهایی که او در دانشگاه پرینستون و سپس در مؤسسهٔ فناوری ماساچوست انجام داده، به شهرت جهانی رسیده است. به نیویورك آمده است تا همکاران جدید و مسائل جدید کشف کند.

مسئله‌ای که لویی نیرنبرگ به او داد تمام توجهش را به خود جلب کرد. مسئله‌ای که بهترین متخصصان را با شکست مواجه کرده بود... شاید حریفی در قد و اندازهٔ او پیدا شده باشد! پیوستگی جواب‌های معادلات سهموی با ضرایب ناپیوسته.

در سال ۱۸۱۸، فوریهٔ بزرگ معادلهٔ حرارت را که ناظر بر تغییرات دما به عنوان تابعی از مکان و زمان است برای جسم صلب همگنی که در حال سرد شدن است نوشته بود:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = C\ \nabla T.$$

از آن به بعد، معادلهٔ او به صورت یکی از شایسته‌ترین نمایندگان رستهٔ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی درآمده است، این معادلات تمامی پدیده‌های پیوستهٔ اطراف ما را توصیف می‌کنند، از جریان‌های دریایی گرفته تا مکانیك کوانتومی.

حتی اگر جسمی را به نحو بسیار ناهمگنی حرارت دهیم و در لحظه‌ای معین بر آن دمایی تحمیل کنیم که از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر به طور ناگهانی و نامنظم تغییر کند، باز هم اگر

1. Courant Institute of Mathematical Sciences

اجازه دهیم این جسم برای کسری از ثانیه سرد شود، همین کافی است که توزیع دما هموار شود، به طور منظم تغییر کند. این پدیده که به آن منظم‌سازی سهموی گفته می‌شود یکی از اولین چیزهایی است که دانشجویان در درس معادلات با مشتقات جزئی یاد می‌گیرند، بیان ریاضی این پدیده دارای چنان اهمیتی است که از حیطهٔ فیزیك بسیار فراتر می‌رود.

اکنون اگر جسم ناهمگن باشد، یعنی از مواد مختلف تشکیل شده باشد، در هر مکان x دارای یك رسانایی ویژهٔ $C(x)$ است که ممکن است کوچك یا بزرگ باشد، یعنی امکان اینکه سریعتر یا کُندتر سرد شود وجود دارد، در نتیجه معادله به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \Big(C(x)\nabla T\Big).$$

آیا خاصیت منظم‌سازی در این مورد هم صدق خواهد کرد؟

نش، برعکس نیرنبرگ، متخصص این نوع معادلات نیست، اما شروع کرد به نوك زدن به قلاب. هر هفته می‌آمد و با نیرنبرگ بحث می‌کرد و از او سئوالاتی می‌پرسید.

در ابتدا سئوال‌های او ساده بودند، سئوال‌های یك فرد تازه‌کار. نیرنبرگ با خود می‌گفت که شاید نش شهرت بیخودی کسب کرده باشد. باید جرئت داشته باشی ــ و یا یك اعتماد به نفس غیرعادی ــ که وقتی مشهور هستی و مورد تحسین، بتوانی در رشته‌ای که هنوز بر آن مسلط نشده‌ای مثل یك مبتدی سئوال کنی! بتوانی نیش غیرمنتظرهٔ جوابی را که احتمالاً ناخواسته طعنه‌آمیز است تحمل کنی. اما پیشرفت به این قیمت حاصل می‌شود ... و کم‌کم سئوال‌های نش دقیق‌تر و به جاتر می‌شوند و چیزی شکل می‌گیرد.

او با همکاران دیگر وارد بحث می‌شود، اطلاعاتی به زور از یکی و کمکی از دیگری می‌گیرد، مسئله‌ای برای سومی مطرح می‌کند.

لِنارت کارلسون،[1] آنالیزدان سوئدی بسیار بااستعداد با او دربارهٔ بولتزمان و آنتروپی صحبت می‌کند. کارلسون یکی از ریاضیدان‌های نادری است که در این موضوع وارد است؛ او را باید مجری وصیت‌نامهٔ معنوی تورستن کارلمَن،[2] اولین ریاضیدانی که به مطالعهٔ معادلهٔ بولتزمان پرداخت دانست. کارلمن در هنگام مرگش یك دست‌نوشتهٔ ناتمام در مورد این معادله از خود برجای گذاشت و زحمت تکمیل و تصحیح آن برعهدهٔ کارلسون قرار گرفت؛ به این ترتیب کارلسون مفهوم آنتروپی را یاد گرفت و او اکنون می‌تواند نش را هم بهره‌مند سازد.

اما معادلهٔ بولتزمان و معادلهٔ فوریه شبیه نیستند؛ آنتروپی و منظم بودن هیچ ربطی به یکدیگر ندارند!

---

1. Lennart Carleson 2. Torsten Carleman

با وجود این، در مغز نش، جرقه‌ای زده شد، یك طرح کلی ترسیم شد. این ریاضیدان جوان بدون اینکه برگ‌های برنده‌اش را رو کند به مصاحبه‌هایش ادامه می‌دهد، از اینجا و آنجا لِم و گزاره جمع‌آوری می‌کند.

یك روز صبح، باید آنچه را که عیان است پذیرفت: با به هم آمیختن تمام کمك‌های همکارانش نش آن قضیه را ثابت کرد، مانند رهبر ارکستری که هر یك از نوازندگان را وادار به نواختن قسمت خود می‌کند.

در بطن اثباتِ او آنتروپی قرار داشت که تحت رهبری او، در جایی غیر از جای خودش، نقشِ بینهایت مؤثری ایفا می‌کرد. نحوهٔ استفادهٔ نش از نابرابری‌های دیفرانسیل با دخالت دادن برخی کمیت‌ها که الهام گرفته از تعبیری نیمه‌ریاضی—نیمه‌فیزیکی بود، سبك جدیدی را بنیاد نهاد که من هم خود را ادامه‌دهندهٔ این سنت می‌دانم.

فصل سی‌ام

پرینستون، ۴ مه ۲۰۰۹

دقیقاً به محض اینکه پُشت گردنم با موکت تماس پیدا کرد، موجی از خوشحالی در بدنم پخش شد، از سَر شروع شد و تا پا رسید. ساعت سیزده یا سیزده و سی دقیقه است، دوباره پس از ناهار به دفترم بازگشته‌ام، اکنون وقت آرام گرفتن رسیده است، نه آن «آرام‌گیری پرجنب‌وجوشی» که همکاران اختر فیزیک‌کار من در ساختمان بغلی به دنبالش هستند.

اما محل استراحت من هم به هر حال خیلی گرم و نرم نیست، چیزی بین من و زمین وجود ندارد جز همان ضخامت اندک موکت دفتر بی‌تجمل من، گرچه گردنم حس‌اش می‌کند. خود را در این وضع قرار دادم و صادقانه قدر این تماسی را که فاقد لطافت است می‌دانم.

تصاویر جلوی چشمان بسته‌ام رژه می‌روند، صداها درگوشم می‌پیچند و هر دم بلندتر می‌شوند، و در این حین تمام وقایع صبح دوباره از سرم می‌گذرد.

امروز صبح بچه‌های مدرسهٔ ابتدایی لیتل‌بروک برای بازدید از مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته، دریاچهٔ آن، درخت‌های باشکوه گُل‌دار آن و مجسمهٔ بزرگ نیم‌تنهٔ اینشتین درکتابخانهٔ قدیمی به اینجا آمدند. بچه‌ها نگاه کنید، قصر جادویی علم! هشت سالگی برای خواب دانشمندان بزرگ را دیدن زود نیست.

من برای آنها یک سخنرانی بیست دقیقه‌ای آماده کرده بودم، برای آنها از حرکت براونی صحبت کردم که منجر به آشکار ساختن اتم‌ها شد، از مسئلهٔ معروف سیراکوز گفتم که آن‌قدر ساده است که یک بچهٔ هشت ساله می‌تواند آن را بفهمد و آن‌قدر پیچیده است که بهترین ریاضیدان جهان نیز در مقابل آن به درماندگی اعتراف می‌کند.

در سالن بزرگ مؤسسه مثل بچه‌های خوب گوش کردند درحالی‌که با چشمانِ گِردِ باز تصاویر شگفت‌انگیز حرکت براونی را در لپ‌تاپ من مشاهده می‌کردند. در صف آخر، یک کوچولوی موطلایی با چشمان بزرگ، از دیگران هم بهتر گوش می‌داد؛ فقط چهار ماه بود که در اینجا زندگی می‌کرد، اما هیچ مشکلی در فهمیدن سخنرانی پدرش به زبان انگلیسی و با لهجهٔ فرانسوی غلیظ نداشت.

بعد هم باقیماندهٔ صبح، بعد هم ناهار خوب، و بعد هم مغزم شروع به تار شدن می‌کند، وقتی موقع این می‌رسد که کنتور را دوباره صفر کنم، موقع توقف ناگهانی، توقفی که من به آن ری‌بوت[1] می‌گویم، یعنی دوباره به کار انداختن کامپیوتر، حافظه را پاک می‌کنم و دوباره شروع می‌کنم.

گوشم وِزوِز می‌کند، بچه‌ها صحبت می‌کنند و باز هم صحبت می‌کنند و همه چیز دور خودش می‌چرخد. صورت من که گرفته بود باز می‌شود، وِزوِز شدیدتر می‌شود، تکه‌هایی از جملات به هر سو پرتاب می‌شوند، بعضی شدیدتر از بعضی دیگر، صداها و آوازها، دو مرتبه وقت ناهار می‌شود. قاشق یادشان رفته، یک مراسم استقبال، یک دریاچهٔ یخ‌نزده، یک مجسمهٔ نیم‌تنه در کتابخانهٔ من، $۳n + ۱$، $۳n + ۲$، $۳n + ۳$، پارکت و سایه‌ها و تو یک بچهٔ کوچک را یادت رفت و ...

یک تکان کوچک ناگهانی در اندام‌هایم، و سایه‌ها به کناری می‌روند و خودآگاهم واضح می‌شود.

در کمین‌ام، چند لحظهٔ دیگر هم دراز می‌کشم درحالی‌که مورچه‌ها در کف پاهای برهنه‌ام این‌طرف و آن‌طرف می‌روند.

پاهایم از صفحهٔ رادار درونی‌ام ناپدید شده‌اند و آن‌قدر سنگین هستند که حرکت دادن آنها غیرممکن است. مثل وقتی که با اسکی به گردش می‌روی و یک تکه برف سرسخت تَهِ اسکی‌هایت می‌چسبد.

با این حال، با اولین حرکت به طور سحرآمیزی پاهایم بازگشتند، من دوباره کامل هستم. توقف تمام شده است، ده دقیقه به گفتهٔ ساعت مچی طول کشیده است، اما من یک ریاضیدان نو هستم.

ری‌بوت_ سدریک (کامل شد)

یک سدریک جدید آغاز به کار می‌کند. دوباره خودم را در محاسبات و در این مقاله دربارهٔ میرایی لانداو، که نیم قرن عمر دارد و با وجود این آن‌قدر تازگی دارد و الان درکتابخانه پیدایش کردم، غرق خواهم کرد. قبل از چای دو ساعت کار سخت در پیش دارم.

*

مسئلهٔ سیراکوز، یا مسئلهٔ کولاتز،[2] یا مسئلهٔ $۳n + ۱$، یکی از مشهورترین معماهای حل‌نشدهٔ

1. reboot 2. Collatz

تمام زمان‌هاست. مگر پال اردُش خودش نگفته است که ریاضیات زمان ما این آمادگی را ندارد که با چنین هیولاهایی در بیفتد؟

می‌گویند "$۳n + ۱$" را به یك جستجوگر اینترنت بدهید، و مسیر را به راحتی تا آن حدس نحس که مثل یك ترجیع‌بندِ عامیانه ساده و لجوج است بپیمایید.

یك عدد صحیح، هر عددی، مثلاً ۳۸ را انتخاب کن.

این عدد زوج است، تقسیم بر ۲ می‌کنیم می‌شود ۱۹.

این عدد فرد است، در سه ضرب و با ۱ جمعش می‌کنیم، می‌شود $۵۸ = ۱ + ۳ \times ۱۹$

این عدد زوج است، تقسیم بر ۲ می‌کنیم ...

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم، با قاعده‌ای ساده از عددی به عدد دیگر می‌رسیم: هر بار که به یك عدد زوج می‌رسیم آن را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و هر بار که به یك عدد فرد می‌رسیم آن را در ۳ ضرب و با ۱ جمع می‌کنیم.

در مثالی که از عدد ۳۸ شروع کردیم، به ترتیب، به اعداد زیر می‌رسیم: ۱۹، ۵۸، ۲۹، ۸۸، ۴۴، ۲۲، ۱۱، ۳۴، ۱۷، ۵۲، ۲۶، ۱۳، ۴۰، ۲۰، ۱۰، ۵، ۱۶، ۸، ۴، ۲، ۱، ۴، ۲، ۱، ۴، ۲، ۱، ۴، ۲، ۱، ۴، ۲، ۱، ۴، ۲، ۱ ...

البته، به محض اینکه به عدد ۱ می‌رسیم، می‌دانیم که بعد از آن تا ابد ۴، ۲، ۱، ۴، ۲، ۱، ۴، ۲، ۱ خواهد آمد.

هر بار در تاریخ بشر که این محاسبه انجام شده است همیشه به ۴، ۲، ۱ ... رسیده‌اند. آیا این بدین معناست که همیشه، با هر عددی که شروع کنیم، این طور خواهد بود؟

البته، چون تعداد اعداد صحیح بینهایت است، نمی‌توانیم تمام آنها را امتحان کنیم. تا به امروز، با ماشین حساب جیبی، ماشین حساب، رایانه و ابررایانه، توانسته‌ایم میلیاردها و میلیاردها عدد را امتحان کنیم، و همیشه در آخر به دنبالهٔ سرسخت ۴، ۲، ۱ رسیده‌ایم.

هر کس می‌تواند امتحان کند و ببیند که این قاعده‌ای است کلی. فکر می‌کنند که این قاعده درست باشد، ولی نمی‌توانیم آن را ثابت کنیم: پس یك حدس است. در ریاضی دموکراسی برقرار است، هر کس بتواند این حدس را ثابت یا نقض کند مانند یك قهرمان از او استقبال خواهد شد.

من که مسلماً امتحان نخواهم کرد: علاوه بر اینکه مسئله‌ای است فوق‌العاده غامض، با روحیهٔ من هم سازگاری ندارد؛ مغز من برای تفکر در این سبك از مسائل تعلیم ندیده است.

*

Date: Mon, 4 May 2009 17:25:09 +0200
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Backus

این هم مقالهٔ باکوس که در JMP سال ۱۹۶۰ چاپ شده است (سال اول، شمارهٔ سوم، حیف! اگر در سال اول، شمارهٔ اول چاپ شده بود بهتر بود!)

باورنکردنی است! بخش ماقبل آخر مقالهٔ باکوس و بعد آخرین جملهٔ مقاله را نگاه کن! قبل از این مقالاتی که در این سال‌ها ی آخر چاپ شده‌اند هیچ‌کس را نمی‌شناختم که صریحا "ابراز تردید کرده باشد و این بسیار درخور توجه است ...

قربانت
سدریک

From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Date: Sun, 10 May 2009 05:21:28 +0800
Subject: Re: Backus

مقالهٔ باکوس را در هواپیما کمی خواندم. درواقع هم بسیار جالب است، او مشکلات خطی بودن و این را که جملهٔ زمینه، به محض اینکه از طریق رشته‌رشته شدن به فضا بستگی داشته باشد در زمان صعودی می‌شود به خوبی درک کرد. به طور کلی مقاله در مقایسه با «استاندارد» مقالاتی که دربارهٔ میرایی لانداو نوشته می‌شوند به نحو چشمگیر ی مستحکم است ... باید آن را جزء ارجاعات قرار دهیم به خصوص بحث عددی آن را در صفحهٔ ۱۹۰، و نتیجه‌گیر ی آن و تردیدی که در مورد اعتبار غیرخطی یک بررسی خطی ابراز شده است. این بر مشکلات مفهومی مقدمهٔ ما مشکلی دیگر می‌افزاید.

قربانت، کلمان

فصل سی‌ویکم

پرینستون، یک شب زیبا در ماه مه ۲۰۰۹

در ماه مه، در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته درخت‌ها به گُل می‌نشینند و این بسیار زیباست.

اوائل شب است و من تنها در هوای تاریک و روشن گردش می‌کنم، به صورت دَرهمی از تاریکی، از احساس آرامش، و از لطافت هوا لذت می‌برم.

وقتی در دانشسرای عالی شاگرد بودم دوست داشتم شب‌ها در راهروهای تاریک خوابگاه پرسه بزنم، پرتوهای نوری که از زیر درها رد می‌شدند مانند موج‌های نورافشانی بودند که در تصور من از پنجره‌های زیردریایی داستان‌های ژول ورن عبور می‌کردند.

اما اینجا، در چمنزار و با نسیمی که می‌وزد، چیز دیگری است؛ و اینجا هم نورهایی هستند، اما این نورها متمدن نیستند، اینها کرم‌های شب‌تاب و بی‌شمار ستاره‌های چشمک‌زنی هستند که روی چمن نور می‌اندازند.

آره، یادم می‌آید ... در مقاله‌ای که خوانده‌ام، نظریهٔ میرایی لانداو را در مورد چشمک‌زنی کرم‌های شب‌تاب به کار برده بودند.

اما، سدریک، تو را به خدا دست از سَرِ میرایی لانداو بردار و آن را به حال خودش رها کن! تو روزها و شب‌های زیادی را با آن گذرانده‌ای. پس از کرم‌های شب‌تاب لذت ببر و این‌قدر هم از خودت سئوال نکن.

نگاه کن، این موقع شب کی دارد اینجا گردش می‌کند؟ این چهره را می‌شناسم ... عجب اتفاقی! ولادیمیر وُوِدسکی است، ریاضیدان روس که در نسل خود از درخشان‌ترین ریاضیدانان، برندهٔ

ولادیمیر وُوِدسکی

مدال فیلدز سال ۲۰۰۲ و یکی از وارثان معنوی گروتندیک است. این برخورد از نوع برخوردهای بدی است که شب دیروقت در پرینستون اتفاق می‌افتد.

وُوِدسکی هم به گردش می‌رود. راه رفتن، فقط راه رفتن، راه رفتن برای هوا خوردن، بدون هدفی دقیق، مانند پیادهٔ «رِی برادبری».[1]

وارد گفتگو می‌شویم. مشکل بتوان تصور کرد کسی باشد که ریاضیاتی انجام دهد که از آنچه وُوِدسکی انجام می‌دهد بیشتر با ریاضیات من متفاوت باشد. من هیچ چیز از کارهای او را نمی‌فهمم، و احتمالاً برعکس آن نیز درست است. اما به جای اینکه سعی کند دربارهٔ کارهایش با من صحبت کند از رویاهایش با من می‌گوید، از موضوعی صحبت می‌کند که به آن بسیار علاقه‌مند است و می‌خواهد تمام و کمال وارد آن شود، و آن عبارت است از زبان‌های خبره و برهان‌های خودکار.

او در مورد قضیهٔ مشهور چهار رنگ می‌گوید و اثبات بحث‌برانگیز آن که به وسیلهٔ کامپیوتر صورت گرفت و نه به دست انسان، و اخیراً بر اثر کارهایی که پژوهشگران فرانسویِ INRIA به کمک زبان خُبرهٔ کُک[2] انجام دادند دچار تحول شد.

ولادیمیر عقیده دارد که در آینده‌ای نه چندان دور، برنامه‌های کامپیوتر می‌توانند استدلال‌های پیچیده و طولانی را راستی‌آزمایی کنند، او می‌گوید که الان هم در فرانسه این کار در مورد نتایج مشهور انجام می‌گیرد. من اول در مورد حرف او شک کردم، اما کسی که در مقابل من است تنها یک استعداد درخشان نیست، او یک دانش‌پژوه در بالاترین سطح است، باید حرف او را جدی بگیرم.

من هرگز به این مسائل نپرداخته‌ام، خیلی کم الگوریتم کار کرده‌ام. الگوریتم‌های ازدواج

---

1. Ray Bradbury   2. Coq

(جور کردن دوتایی[1])، سیمپلکس و حراج کردن در شبیه‌سازی عددی ترابری بهینه که در تخصص من است نقشی مهم ایفا می‌کنند؛ اما چیزی که ولادیمیر دارد دربارهٔ آن با من صحبت می‌کند بسیار متفاوت است. من که به این زمینهٔ جدید بسیار ترغیب شده‌ام. آن‌قدر چیزهای خیلی جالب برای خواندن هست که حد ندارد.

گل‌ها، زبان‌ها، چهار رنگ، ازدواج ... تمام عناصر برای سرودن یک ترانهٔ قشنگ جمع‌اند ... شاید هم تا به حال این ترانه سروده شده باشد؟

*

حدود سال ۱۸۵۰، ریاضیدانی به نام فرانسیس گوتری[2] که نقشهٔ کُنت‌نشین‌های انگلستان را رنگ می‌کرد، دقت داشت که کنت‌نشین‌هایی که قطعه‌ای مرز مشترك دارند حتماً دارای رنگ‌های متمایز باشند. چند رنگ مختلف برای این کار لازم است؟

گوتری درمی‌یابد که چهار رنگ برای این کار کفایت می‌کند و به خودش می‌گوید شاید برای رنگ کردن هر نقشهٔ دلخواهی چهار رنگ کافی باشد به شرط آنکه نقشه از کشورهایی تشکیل شده باشد که خود شامل چند تکهٔ جداگانه نباشد.

سه رنگ کافی نیست: به نقشهٔ آمریکای جنوبی نگاه کنید و کشورهای برزیل، آرژانتین، بولیوی و پاراگوئه را ببینید، هر یك از این چهار کشور با سه کشور دیگر مرز مشترك دارد، و بنابراین اقلاً به چهار رنگ مختلف نیاز است.

اما چهار رنگ کفایت می‌کند، شما می‌توانید این را با رنگ کردن نقشهٔ مورد انتخاب خودتان بیازمایید. حداقل می‌توانید روی چندین نمونهٔ مختلف امتحان کنید. اما چگونه می‌توان ثابت کرد که این در مورد هر نقشه‌ای درست است؟ نمی‌توان همهٔ نقشه‌ها را امتحان کرد، زیرا بینهایت از آنها وجود دارد! بنابراین به یك استدلال منطقی نیاز است و این هم کار آسانی نیست.

در سال ۱۸۷۹ کمپ[3] خیال می‌کرد توانسته این نتیجه را ثابت کند. اما اثبات او اشتباه بود، و می‌توانست فقط ثابت کند که پنج رنگ کافی است.

بیایید این کار را گام به گام انجام دهیم. برای نقشهٔ چهار کشور می‌توانیم این کار را انجام دهیم. اگر این‌طور شروع کنیم، برای پنج کشور هم کار راحت است. بعد از آن برای شش کشور. آیا می‌توانیم همین‌طور ادامه دهیم؟

فرض کنید که می‌دانیم چگونه هر نقشه‌ای را که شامل ۱۰۰۰ کشور می‌شود با چهار

1. bipartite matching 2. Francis Guthrie 3. Kempe

رنگ، رنگ کنیم و حالا می‌خواهیم نقشه‌ای با ۱۰۰۱ کشور را در دست بگیریم. چطور این کار را انجام دهیم؟ برای شروع می‌توانیم نشان دهیم که در میان این ۱۰۰۱ کشور، حداقل یك کشور و حداکثر پنج کشور وجود دارد که تعداد کشورهای هم‌مرزش کم هستند. اگر روی این کشور و همسایگانش تمرکز کنیم، رنگ کردن آن آسان است؛ اگر مانند فاتحان عمل کنیم و در میان این گروه از کشورها چند ادغام و تلفیق انجام دهیم، نقشه‌ای حاصل خواهد شد که کمتر از ۱۰۰۰ کشور دارد، و از این رو می‌دانیم چگونه آن را رنگ کنیم. ایدهٔ خوبی است ... اما جور کردن رنگ‌آمیزی موضعی با رنگ‌آمیزی سراسری نقشه، کاری است مشکل، باید موارد بسیاری را در نظر گرفت: هزارها و بلکه میلیاردها مورد مختلف!

در سال ۱۹۷۶، اَپِل[1] و هَکِن[2] این تعداد را به حدود هزار شکل قابل امتحان رساندند و تمام این اشکال را به کمك یك برنامهٔ کامپیوتری مرور کردند. پس از دو ماه کار کشیدن از ماشین، به این نتیجه رسیدند که چهار رنگ همیشه کافی است، و به این ترتیب حدسی را که بیش از صد سال از طرح آن می‌گذشت حل کردند.

جامعهٔ ریاضی در مقابل این اثبات عمیقاً دچار اختلاف شد. آیا این ماشین تفکر را نکُشته است؟ آیا واقعاً این استدلال را که به صورت خوراکی به یك موجود ساخته شده از سیلیکوم و مدارهای تجمیعی داده شده، می‌فهمیم؟ اَپِل ـ هَکِنی‌ها و پاد اَپِل ـ هَکِنی‌ها در مقابل هم قرار گرفتند، بدون اینکه به توافقی دست یابند.

مردم یاد گرفتند با این مناقشه بسازند، و ما در زمان به جلو می‌آییم و برمی‌گردیم به فرانسه، به INRIA (مؤسسهٔ ملی تحقیقات انفورماتیك و اتوماتیك[3]) در اوان تغییر هزاره. ژُرژ گونتیه[4] متخصص زبان‌هایی که اثبات‌ها را راستی‌آزمایی می‌کنند یکی از پژوهشگرانی است که به استخدام این مؤسسهٔ تخصصی در انفورماتیك و محاسبات درآمده است. زمینهٔ کار او در اروپا، در همان زمانی که اَپِل و هَکِن سَرِ زبان‌ها بودند، توسط چند نظریه‌پرداز خیال‌پرداز گسترش داده شده بود. این زبان‌ها یك اثبات ریاضی را راستی‌آزمایی می‌کنند، همان طور که شما استحکام یك درخت را شاخه به شاخه امتحان می‌کنید: یك درخت منطق را تصور کنید که در آن استدلال ثبت شده است و می‌توان درستی آن را به طور اتوماتیك، مانند یك تصحیح‌کنندهٔ غلط املایی، تحقیق کرد.

اما تصحیح‌کنندهٔ غلط املایی فقط درستی تك‌تك کلمات را بررسی می‌کند، در حالی که تحلیل‌گر اثبات شما باید انسجام مجموعه را بسنجد و درستی همه چیز را تحقیق کند.

1. Apple 2. Haken

3. Institut national de recherche en informatique et en automatique

4. Georges Gonthier

گونتیه تصمیم می‌گیرد که به کمك همکارش بنیامین وِرنِر[1] اثبات قضیهٔ چهار رنگ را، با استفاده از زبانی که برای تقدیر از پدیدآورنده‌اش تی‌یری کوکاند[2] زبان کُك نام نهاده‌اند، برعهده گیرد. برخلاف برنامه‌ای که مورد استفادهٔ اپل و هَکن قرار گرفت، کُك دارای گواهینامه است: می‌دانیم که نمی‌تواند اشتباه تولید کند. به علاوه، درواقع کُك محاسبه‌ای انجام نمی‌دهد بلکه با استفاده از الگوریتمی که به آن داده شده به طور اتوماتیك اثبات تولید می‌کند. گونتیه از این امکان برای بازنویسی قسمت «خوانا»ی اثبات استفاده می‌کند و بدین‌گونه چیز ساده و کارامدی به دست می‌آورد، چیزی زیبا! اثباتی که ۰٫۲٪ آن را یك انسان نوشته و ۹۹٫۸٪ دیگر آن را ماشین تکمیل کرده ــ اما همین ۰٫۲٪ انسانی است که اهمیت دارد، و می‌دانیم که برای بقیه می‌توانیم به کُك اعتماد کنیم.

کارهای گونتیه و همکارانش پیشینه‌ای برای نرم‌افزارهای اعتبارسنجی هستند که در آینده‌ای نه چندان دور می‌توانند به طور خودکار برنامه‌های پیچیده‌ای را که پرتاب موشك‌ها، پرواز هواپیماها یا ریزپردازشگرهای کامپیوترهای شخصی ما را مدیریت می‌کنند راستی‌آزمایی کنند. درآمد چیزی که سی سال پیش خیال‌پردازی شیرینی بیش نبود اکنون به میلیاردها یورو می‌رسد.

اما گونتیهٔ خستگی‌ناپذیر اکنون وارد پروژه‌ای بینهایت بلندپروازانه شده است، یعنی راستی‌آزمایی برخی قضیه‌های مربوط به طبقه‌بندی گروه‌های متناهی، که اثبات آنها جزو طولانی‌ترین اثبات‌های قرن بیستم شناخته می‌شود.

*

1. Benjamin Werner 2. Thierry Coquand

برای حرفی که آرام می‌کند
یك حرف بد
شعله‌ها برافروخته خواهد شد
در تمام جهان
دهان‌ها بزرگ‌اند
برای زدن حرف‌های خوب
اما پوست‌ها فروخته می‌شوند
پوست‌هایی برای طبل

روزی زبان‌های ما
از گل‌ها سخن خواهند گفت
و از ازدواج
و از چهار رنگ
آیا خواهی فهمید
که از عشق سخن می‌گویند
من که منتظرت خواهم ماند
پای بُرج

فعلاً که، قابیل هنوز در تعقیب هابیل است
اما من با دست‌های خودم برج بابل را ساخته‌ام

برج بابل(برگزیده)، گای به‌آر[1]

1. *La Tour de Babel* (extrait),Guy Béart

فصل سی‌ودوم

پرینستون، ۲۶ ژوئن ۲۰۰۹

امروز آخرین روز من در پرینستون است. این هفته‌های آخر آن‌قدر و آن‌قدر باریده است که انگار کلکی در کار است. اما امشب آسمان صاف شده و باز می‌توانم گردش کنم. کرم‌های شب‌تاب درخت‌های بزرگ را به کاج‌های نوئل شاعرانه تبدیل کرده‌اند که با تعداد زیادی شمع چشمک‌زن تزیین شده‌اند. قارچ‌های عظیم، خرگوش‌های کوچکی که خود را پنهان می‌سازند، شبح فرّار روباهی که از دور در شب پیداست، گوزن سرگردانی که صدای فریادش آدم را از جا می‌پراند.

این اواخر، در جبههٔ میرایی لانداو اتفاقاتی افتاده است! بالاخره توانستیم اثبات را سَرِپا نگه داریم، همه چیز را بازخوانی کردیم. چه احساسی داشتیم وقتی مقاله را در اینترنت قرار دادیم! بالاخره توانستیم مُدِ صفر را کنترل کنیم، و کلمان متوجه شد که می‌توان شگردی را که در بازگشت از موزهٔ تاریخ طبیعی به فکرم رسیده بود، یعنی تأخیرِ مضاعفِ زمانی را کاملاً کنار گذاشت. البته دِلِمان نمی‌آمد که همه چیز را از سر بگیریم و به خودمان گفتیم که از این می‌توانیم در مسائل دیگر استفاده کنیم، و بنابراین آن را جایی گذاشتیم که دیگر مزاحم ما نباشد ... بعداً، همیشه می‌توانیم در صورت نیاز آن را ساده کنیم.

کارهایمان را در مجامع زیادی ارائه کردم؛ هر بار توانستم نتایج و نحوهٔ ارائه را بهترکنم، و در حال حاضر جا افتاده و باصلابت شده است. البته همیشه ممکن است در جایی اشتباهی باقی مانده باشد، اما الان آن‌قدر همه چیز با هم جور است که من از آن مطمئنم: اگر رخنه‌ای کشف شود خیلی مهم نخواهد بود، می‌دانیم چگونه آن را ترمیم کنیم.

در آزمایشگاه فیزیک پلاسمای پرینستون، به مدت دو ساعت برای جماعتی از فیزیک‌پیشه‌ها سخنرانی کردم، بعد هم اجازه یافتم از تأسیسات شگفت‌انگیزشان و محل انجام آزمایش‌هایشان در این مؤسسه بازدید کنم. در اینجا می‌کوشند تا اسرار پلاسما را کشف کنند و ــ چه کسی می‌داند؟ ــ جوش هسته‌ای را رام سازند.

سخنرانی من در مینیاپولیس ولادیمیر شِوِراک[1] را تحت تأثیر قرار داد. من برای این شخص که مفهوم مرموز شبه ـ تحدب را بهتر از هر کس دیگر فهمیده است احترام بسیار قائلم، و اکنون او یکی از بهترین متخصصان نظم معادلات ناویه ـ استوکس است؛ حرف‌های گرم و صمیمانهٔ او برای من خیلی اطمینان‌بخش بود.

به‌علاوه، در مینیاپولیس به یک پیروزی هم دست یافتم: دختر بسیار جوان، بسیار بلوند و بسیار خجالتیِ همکار من مارکوس کیل قبول کرد که با من در هنگام میهمانی کنفرانس بازی کند، تا جایی که چهچهه می‌زد و با صدای بلند می‌خندید. مارکوس باور نمی‌کرد که دخترش، که هرگز با غریبه‌ها صحبت نمی‌کرد، این چنین با بیگانه‌ای صمیمانه رفتار کند.

در راتگرز هم دوباره نتایجم را در یکی از کنفرانس‌های فیزیک آماریِ جولِ خستگی‌ناپذیر ارائه دادم، اما این بار هیچ ربطی به سخنرانی قبلی من نداشت، این بار درست و حسابی بود!

در پرینستون، در سالنی که تمام حاضران یا قریب به اتفاق آنها دختر بودند، در چارچوب برنامهٔ «زن‌ها در ریاضیات»، کنفرانسی ارائه دادم. این ریاضی‌کارهای جوان به تعداد زیاد می‌آیند تا طلسمی را که ریاضی را به رشته‌ای تبدیل کرده که اکثریت بسیار بزرگی در آن مذکر هستند بِشکنند ــ البته ریاضی بعد از رشتهٔ کامپیوتر یا مهندسی برق قرار دارد ولی بالاخره. شاید این دخترها جانشین‌های ریاضیدانان زنِ بزرگی مانند سوفیا کوالفسکایا،[2] اِمی نویتر،[3] اُلگا اولینیک[4] یا اُلگا لادیژنسکایا[5] شوند که نسل‌ها آنها را به خواب می‌دیدند.

این زن‌های جوان که محوطهٔ دانشگاه را اشغال کرده‌اند با خود نسیم تازه‌ای آورده‌اند و امشب هم به بعضی از آنها که در گروه‌های کوچک در هوای آزاد گردش می‌کنند برمی‌خورم.

دیشب همهٔ خانواده برای آخرین دیدار از زمین گلف به آنجا رفتیم. چقدر دوست داشتم تنها، هنگامی که شب شده بود، در بازگشت از یکی از این کنفرانس‌ها، از راهی که ایستگاه کوچک قطار را به مؤسسه وصل می‌کند، از این زمین عبور کنم درحالی‌که نور ماه تپه‌ها را به شبحی از امواج تبدیل کرده است ... بچه‌ها طی مراسمی با دقت گنجینهٔ ارزشمندی را روی زمین قرار دادند که

1. Vladimir Šverák
2. Sofia Kowalevskaya
3. Emmy Noether
4. Olga Oleinik
5. Olga Ladyzhenskaya

عبارت بود از تمام توپ‌های گلفِ گمشده‌ای که آنها از روز رسیدنشان به اینجا جمع‌آوری کرده بودند. به این زودی شش ماه گذشت!

ماه عسل من با ریاضیات، تمام مدتی که در پرینستون بودم طول کشید. پس از حل مسئلهٔ میرایی لانداو، برنامهٔ بزرگ جاری دیگرم را، با همکارانم لودویک[1] و آلِسیو[2]، دوباره به دست گرفتم، و در اینجا هم، ظاهراً همه چیز زیر سئوال رفته بود. توانستیم از تمام موانع عبور کنیم و همه چیز، تو گویی با سحر و جادو، حل شد. البته یک معجزهٔ واقعی هم اتفاق افتاد، یک محاسبهٔ بسیار طولانی که در آن پانزده جمله را با هم ترکیب کردیم و شد یک مربع کامل ... معجزه‌ای که نه امیدی به آن داشتیم و نه انتظار آن را، زیرا بالاخره دقیقاً خلاف آن چیزی را که فکر می‌کردیم ثابت کردیم!

در مورد میرایی لانداو، همه چیز را به طور کامل حل نکردیم: ثابت کردیم که در برهم‌کنش‌های الکترواستاتیک یا گرانشی که با آنها بیشتر از همه سروکار داریم، میرایی در طی زمانی بسیار بسیار طولانی، اما نه بینهایت، وجود دارد و چون ما اینجا گیر کردیم موضوع نظم هم گیر کرده است، نتوانستیم از چارچوب تحلیلی بودن خارج شویم. اغلب پس از سخنرانی‌های من دراین‌باره یکی از این دو سئوال مطرح می‌شود. آیا در مورد برهم‌کنش کولُنی یا نیوتونی، در زمان بینهایت هم میرایی وجود دارد؟ آیا می‌توان از فرض تحلیلی بودن صرف‌نظر کرد؟ هر بار جواب من این است که در غیاب وکیلم چیزی نخواهم گفت، و می‌گویم راستش این است که نمی‌دانم آیا این مسئله‌ای است عمیق و یا اینکه ما به اندازهٔ کافی باهوش نبوده‌ایم.

آه، این هم یک ریاضی‌کار دخترِ جوان که تنهایی گردش می‌کند، مثل من. می‌پذیرد مرا در ادامهٔ گردش همراهی کند. او در کنفرانس من راجع به ترابری بهینه شرکت کرده بود که برای آغاز گفتگو موضوع خوبی است، می‌خواهیم دو نفری، در این شبِ ملایمِ پرینستونی دربارهٔ ریاضی صحبت کنیم.

گردش تمام می‌شود، باید به مؤسسه برگردم. دفتر من تقریباً خالی است، فقط مانده تَلّی از کاغذ، تَلِّ عظیمی از کاغذ که من روزْ بعد از روز، با تمام کوشش‌های موفق و ناموفق، با تمام نسخه‌های واسطی که با دقت نوشته‌ام و سیاه کرده‌ام، با وسواس چاپ کرده‌ام و با خشم تصحیح کرده‌ام.

دلم می‌خواست که آنها را بیاورم، اما در هواپیما بیش از حد دست‌وپاگیر خواهد بود، ما هم که این‌قدر بار داریم! پس باید همه را دور بیندازم ...

ریاضی‌کار جوانی که مرا هنگام تماشای این چرکنویس‌های مزاحم دید فوراً فهمید از اینکه

1. Ludovic 2. Alessio

باید این تَلِّ پُر از بار عاطفی را به دور بیندازم چه حالی دارم. او به من کمک کرد و همه را در سبد کاغذهای باطله ریختیم.

بهتر بگویم، اطراف سبد کاغذهای باطله ریختیم ـــ چون به اندازهٔ چهار تا سبد کاغذ بود! تمام شد، اقامت من در پرینستون واقعاً به پایان رسید.

*

مدت‌ها به اصل گردهمایی‌های ریاضی‌کارهای زَنِ جوان با تردید می‌نگریستم ... تا اینکه خودم، به عنوان سخنران، در برنامهٔ سال ۲۰۰۹ «زن‌ها در ریاضیات» که هر ساله در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته در پرینستون تشکیل می‌شود شرکت کردم. جَوّ پویا و پرشور و شوق این گردهمایی برای من خاطره‌ای فراموش‌ناشدنی شد. امیدوارم که گفتگوها و مباحثه‌های «نهمین گردهمایی ریاضی‌کارهای زن جوان در انستیتو هانری پوانکاره» نیز در فضایی همان‌قدر آرام و جدی برگزار شوند. به «خانهٔ خانم‌های ریاضی‌کار» خوش آمدید!

(نطق خوش‌آمدگویی درگردهمایی ریاضی‌کارهای زَنِ جوان در انستیتو هانری پوانکاره توسط مدیر انستیتو، ۶ نوامبر ۲۰۰۹.)

فصل سی‌وسوم

لیون، ۲۸ ژوئن ۲۰۰۹

چه احساس غریبی است بازگشت به خانه و کاشانه پس از این همه مدت.

درواقع آدم هیچ‌وقت قبل از اینکه به بازار برود به خانهٔ خودش برنگشته است. در بازار مغازه‌دارهای آشنا را دوباره می‌بینی، نان و پنیرهایت را انتخاب می‌کنی، از اینکه همهٔ مردم به زبان فرانسه صحبت می‌کنند متعجب می‌شوی. وقتی بعد از شش ماه اولین لیوان شیر خام را نوشیدم، اشک از چشمانم جاری شد. نان سیاباتا[1]یِ لطیف و باگِتِ بِرشته، که دیگر نگو.

من سَرِ جای خودم برگشتم، اما دیگر هیچ چیز مانند قبل نیست. درست است که استادکارها در غیاب ما کارکرده‌اند و آپارتمان را به سختی می‌توان شناخت ... اما این چیزی نیست؛ آنچه بسیار مهمتر است تحولی است که در درون من رُخ داده. کاری که در پرینستون انجام دادم مرا دگرگون ساخت، مانند کوهنوردی که وقتی به روی زمین بازمی‌گردد و هنوز ذهنش پر است از ارتفاعاتی که اکتشاف کرده. دست تصادف مسیر علمی مرا به جایی سوق داده که شش ماه پیش تصورش را هم نمی‌توانستم بکنم.

در دههٔ ۱۹۵۰، فهمیدیم که برای بررسی سیستم‌هایی که ممکنات در آنها بیش از حد است، به جای اینکه آن را در چارچوبی روشمند قرار دهیم و یا به نحوی کاملاً تصادفی پی‌درپی نمونه‌هایی از آن را انتخاب کنیم، اغلب ترجیح دارد در آن سیستم به طور شانسی اینجا و آنجا برویم، و همین باعث شد انقلابی علمی به وجود آید. در آن زمان الگوریتم متروپولیس ـ هستینگز[2] باب بود، و

1. ciabatta 2. Metropolis-Hastings

امروز تمام رشته‌های الگوریتم‌های MCMC، یعنی زنجیرهای مارکوفِ مونت کارلو[1] باب شده‌اند؛ کارامدی نامعقول این الگوریتم‌ها در فیزیک، شیمی و زیست‌شناسی هنوز توضیح داده نشده است. این نوع بررسی مبتنی بر جبرِ عِلّی نیست، کاملاً تصادفی هم نیست بلکه بررسی براساس اتفاق است.

درواقع هم این چیز جدیدی نیست، در زندگی هم همین‌طور است: اگر برحسب اتفاق از یک وضعیت به وضعیت دیگر برویم. امکان‌های بسیار بیشتری را می‌آزماییم، مانند پژوهشگری که به تَبَعِ ملاقات‌هایش قارهٔ علمی‌اش را تغییر می‌دهد.

همه‌چیز به جای خودش بازگشت، همه‌چیز دوباره شروع خواهد شد. اسباب و اثاثم هم‌اکنون در جعبه‌ها چیده شده‌اند و به زودی کسانی که برای اسباب‌کشی آمده‌اند هر چیزی را که برای من آشناست خواهند بُرد. رختخواب ژاپنی[2] که مادرم بعد از اینکه امتحانش کرد به بتن‌آرمه تشبیهش کرد، دستگاه صوتی که پانزده سال سن دارد و از این رو مستحق برچسب بسیار وفادار است. صدها CD که گاهی تمام حقوق دانشجویی من در دانشسرا را می‌بلعید، نوارهای ضبط‌شده، و صفحه‌های گرامافون دستِ دوم. و میز تحریر بزرگ تمام چوب، قفسه‌های کتاب مستعمراتیِ پُر از کتاب، صندلی دسته‌دار سنگینی که از چوب یک تکه ساخته شده و از لندن آورده شده، مجسمه‌هایی که از دروم خریداری شده، تابلوهای پدربزرگم ... تمام اینها در زندگی جدیدم، مرا همراهی خواهند کرد: سه روز دیگر مأموریت جدیدم را به عنوان مدیر انستیتو هانری پوانکاره در پاریس شروع خواهم کرد. سَلَف من دفترش را روز ۳۰ ژوئن تحویل خواهد داد و من روز اول ژوئیه به آنجا اسباب‌کشی خواهم کرد. کار را باید در محل یاد گرفت، این یک دورهٔ جدید زندگی من است که شروع می‌شود.

گام جدیدی در MCMCی شخصی خودم.

*

پس از یك دوران بلاتكلیفی در دهه‌های ۷۰ و ۸۰، *IHP*، «خانهٔ ریاضیات»، در سال ۱۹۹۰ رسماً تولدی دیگر پیدا می کند. دولت، در چارچوب قراردادی چهار ساله که با دانشگاه پی‌یر و ماری کوری منعقد می‌سازد مبلغ هنگفتی برای بازسازی انستیتو سرمایه‌گذاری می کند و دانشگاه هم با حمایت *CNRS* ادارهٔ *IHP*ی جدید را برعهده می گیرد.

اجرای ساختار جدید تحت مدیریت یك ریاضیدان، به نام پی‌یر گریزوار[3] انجام می گیرد که در سال ۱۹۹۴، چند ماه قبل از افتتاح رسمی انستیتو توسط وزیر آموزش عالی و تحقیقات زودهنگام از دنیا می‌رود. ژوزف اُسترله[4] (از دانشگاه پی‌یر و ماری کوری)، و سپس میشل

1. Monte Carlo Markov Chains
2. futon
3. Pierre Grisvard
4. Joseph Oesterlé

بروئه[1] (از دانشگاه دُنی ـ دیدرو) در سال ۱۹۹۹ و بعد از این دو سدریك ویلانی (از دانشسرای عالی لیون) در سال ۲۰۰۹ جانشین او می‌شوند.

(بخشی از یك گزارش در مورد انستیتو هانری پوانکاره)

1. Michel Broué

فصل سی‌وچهارم

پراگ، ۴ اوت ۲۰۰۹

اگر بتوان شهری در اروپا را اسطوره‌ای خواند همان پراگ است. افسانهٔ گولِم، آواز مسیا، زندگی‌نامهٔ کافکا با طراحی کرامب و مِرووویتس،[1] همهٔ اینها و بسیاری چیزهای دیگر در سَرَم طنین می‌افکنند در حالی که مشغول عبور از خیابان‌هایی هستم که ساعت‌های هزارسالهٔ آن در کنار بارهایی قرار دارند که رقاصه‌های آن نیمه‌لخت‌اند، و دانشجویان با شاخ‌های شیطانی و شنل‌های اَبَرقهرمان‌ها برای رقص به کلوپ می‌روند.

چند هفتهٔ پیش، در راه اُبرولفاخ، چشم عابرین از دیدن لباس‌های من گرد می‌شد؛ اما در پراگ، من تقریباً مثل یک سرحسابدار معمولی لباس پوشیده‌ام.

مراسم افتتاح کنگرهٔ بین‌المللی فیزیک ریاضی که توسط انجمنی به همین نام برگزار می‌شد دیروز بود. ما چهار نفر بودیم که جایزهٔ هانری پوانکاره را که شاید عالی‌ترین جایزه در ریاضی فیزیک باشد طی مراسمی باشکوه دریافت می‌کردیم. علاوه بر رابرت سیرینجر[2] آمریکایی (در ردهٔ سنّی جوان مثل من)، یورگ فرولیش[3] سوئیسی و یاشا سینایی[4] روس نیز در میان برندگان جایزه بودند. این متخصصان مکانیک کوانتومی و کلاسیک، فیزیک آماری و سیستم‌های دینامیک، همگی دوستان من هستند، و جول لبوویتس بابصیرت مدتهاست که همهٔ این افراد را در هیئت تحریریهٔ مجلهٔ فیزیک آماری‌اش جای داده. من خوشحال و مفتخرم که چنین همراهان خوبی دارم.

دریافت این جایزه حق یک سخنرانی عمومی در این کنگره را به من می‌دهد، هر چند که ابتدا

1. Crumb et Mairowitz   2. Robert Seiringer   3. Jürg Fröhlich
4. Yasha Sinai

من در برنامه نبودم. با وجود اینکه جایزهٔ پوانکاره را برای کارهایم در مورد معادلهٔ بولتزمان دریافت می‌کردم، اما میرایی لانداو را برای سخنرانی انتخاب کردم: این برای معرفی نتایج جدید در مقابل بهترین شنوندگان فیزیک‌ریاضیِ قابل تصور فرصتی غیرمنتظره بود.

سه دقیقهٔ پیش، قبل از آغاز سخنرانی قلبم گرومپ‌گرومپ می‌تپید، آدرنالین در رگ‌هایم سرازیر شده بود. اما حالا که شروع به حرف زدن کرده‌ام، آرام و از خود مطمئنم.

ــ اتفاقاً به تازگی به سِمَت مدیریت انستیتو هانری پوانکاره منسوب شده‌ام، همزمان با دریافت جایزهٔ هانری پوانکاره. این فقط یک تصادف است، اما از این تصادف خوشم می‌آید ...

این سخنرانی، که خیلی با دقت تهیه شده بود، خوب انجام شد، و درست سرِ ساعت آن را به اتمام رساندم.

ــ در پایان، اجازه بدهید به این تصادف جالب اشاره کنم! برای برخورد با تکینگی برهم‌کنش نیوتون، شما از تمام توان روش نیوتون استفاده می‌کنید. نیوتون می‌تواند به خود ببالد! این فقط یک تصادف است، اما از این تصادف خوشم می‌آید.

مثل فاتحی از من استقبال می‌کنند، در برخی از نگاه‌ها مخلوطی از شگفتی و تحسین با اندکی وحشتِ می‌خوانم ــ باید بگویم که اثبات خیلی مرعوب‌کننده است، خودم هم آن را نمی‌فهمم!

دخترها هم هستند، دخترهای جوان پراگی، قبل از کنفرانس مرا نگاه می‌کردند بدون اینکه توجهی بکنند، اما بعد از کنفرانس همه‌چیز عوض شده بود، هجوم آوردند، برای شفاف بودن سخنرانی‌ام تبریک گفتند؛ یکی از آنها متن کوتاهی را در تمجید از من با احساس و به زبان فرانسه‌ای مردّد خواند.

البته سئوال‌های همیشگی دوباره مطرح شدند، باز هم همان سئوال‌ها. آیا می‌توان شرط منظم بودن تحلیلی را تعدیل کرد؟ برای یک برهم‌کنش نیوتونی، آیا نمی‌توان زمان بینهایت را در نظر گرفت؟ اما این حرف‌ها دوستِ پرتغالیِ من ژان کلود زامبرینی[1] را نگران نمی‌کرد، او در پایان سخنرانی در گوش من گفت: «حالا که تو تصادف‌ها را جذب می‌کنی، سدریک، تنها چیزی که می‌توانم برایت آرزو کنم این است که از طرف انستیتو فیلدز دعوت شوی!»

مَقَرِ انستیتو فیلدز ــ که هیچ‌گونه نقشی در اعطای جایزه‌ای به همین نام ندارد ــ در تورنتو قرار دارد، و در آنجا به طور منظم کنفرانس‌هایی برای انواع ریاضیدانان برگزار می‌شود.

با ژان کلود شوخی می‌کردم ... اما پس از گذشت تنها یک ماه و نیم، صرفاً به طور تصادفی، دعوتنامه به دستم رسید.

*

1. Jean-Claude Zambrini

Date: Tue, 22 Sep 2009 16:10:51 -0400 (EDT)
From: Robert McCann <mccann@math.toronto.edu>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Fields 2010

سدریک عزیز،

من ترم آینده جزو برگزارکنندگان یک کارگاه در موضوع «احتمالات هندسی و ترابری بهینه» هستم که از ۱ تا ۵ نوامبر به عنوان بخشی از موضوع نیمسال فیلدز با مضمون «آنالیز هندسی مجانبی» برگزار خواهد شد. تو حتما" به این کارگاه دعوت خواهی شد و تمام مخارج هم پرداخت خواهد شد، امیدوارم بتوانی بیایی. می‌خواستم بدانم آیا برایت امکان دارد که مدت طولانی‌تری در شهر تورنتو و انستیتو فیلدز بمانی. اگر این طور باشد ما سعی خواهیم کرد این فرصت برایت جذاب باشد.
خواهش می‌کنم به من اطلاع بده.
رابرت

فصل سی‌وپنجم

نیویورک، ۲۳ اکتبر ۲۰۰۹

در فرانسه، بچه‌ها دارند با یک بچه گراز کوچک که عموشان با دست خالی گرفته آشنا می‌شوند. خیلی دوست داشتم آن را می‌دیدم!

اما ترجیح دادم از تعطیلاتم برای یک سفر طاقت‌فرسا به آمریکا استفاده کنم، این سفر تنها در چند روز مرا به دور ایالات متحده می‌برد. تا حالا از بوستون عبور کرده‌ام و (به دنبال جای پای وینر و نَش) از ام‌آی‌تی و دانشگاه هاروارد بازدید کرده‌ام. الان هم در نیویورک هستم. به خودم دلداری می‌دهم و می‌گویم به محض ورود به فرانسه، می‌روم گراز کوچولو را ببینم و بِبَرَمِش جنگل برای گردش.

شب است، نامه‌های الکترونیکم را باز می‌کنم. قلبم پایین می‌ریزد: پیامی از طرف اکتا مَتِمَتیکا،[1] مجله‌ای مختص تحقیقات ریاضی که بسیاری آن را معتبرترینِ مجلات می‌دانند. برای همین مجله است که کلمان و من مقالهٔ غول‌آسای ۱۸۰ صفحه‌ای‌مان را برای چاپ فرستادیم. مطمئناً مجله دربارهٔ همین موضوع برایم نوشته است.

اما ... ما این مقاله را کمتر از چهار ماه قبل فرستاده‌ایم! با در نظر گرفتن اندازهٔ دست نوشته، این مدت، برای اینکه داوران بتوانند رأی خود را بدهند و هیئت تحریریه بتواند تصمیم مثبتی بگیرد بسیار کوتاه است. یک توضیح باقی می‌ماند: مجله اطلاع می‌دهد که مقاله رد شده است.

پیام را باز می‌کنم، آن را به صورت قطری می‌خوانم، هیجان‌زده گزارش‌های خُبره‌ها را می‌خوانم. لب‌هایم را به هم فشار می‌دهم و گزارش‌ها را دوباره می‌خوانم. شش گزارش، که مجموعاً بسیار مثبت است، همه چیز خوب است. اما ... بله، مثل همیشه، تحلیلی بودن است که آنها را نگران می‌کند، و مورد

1. *Acta Mathematica*

حدی در زمان طولانی. همیشه همین دو سئوال که من می‌بایست ده‌ها بار جواب آنها را در ارائه‌های گذشته‌ام می‌دادم، و الان باعث شده‌اند که دست‌نوشتهٔ من پذیرفته نشود! ناشر مطمئن نیست که نتایج قطعی باشند و مقاله آن‌قدر طولانی است که او فکر می‌کند باید بیش از معمول سخت‌گیر باشد.

چه ظلمی! با وجود آن همه نوآوری‌هایی که در این مقاله به خرج دادیم و تمام نکات اساسی موضوع را بررسی کردیم؟ بر آن همه موانع فنی غلبه کردیم، آن همه شب‌های کسل‌کننده را به صبح رساندیم ... و این مقاله هنوز برایشان به اندازهٔ کافی خوب نیست؟؟ این خبر مرا بیمار کرد!

نگاه کن ... یک نامهٔ دیگر به من اطلاع می‌دهد که همین الان جایزهٔ فرما را برده‌ام. این جایزه به نام پی‌یر دو فرما ریاضیدان فرانسوی است، شاه آماتورها که در قرن هفدهم تمام اروپا را با معماهای ریاضی‌اش عصبانی می‌کرد. او انقلابی در نظریهٔ اعداد، حساب تغییرات و حساب احتمالات به وجود آورد؛ امروزه جایزهٔ فرما هر دو سال یکبار به یک یا دو پژوهشگر کمتر از ۴۵ سال که سهم عمده‌ای در پیشرفت یکی از این زمینه‌ها داشته‌اند اعطا می‌شود.

اعلام این جایزه قلبم را تسکین داد، اما برای جبران سرخوردگی ناشی از رَد مقاله‌ام کافی نبود. برای آرام کردنم باید درست و حسابی نازم کنند.

*

در سال ۱۸۸۲، گوستا میتتاگ ـ لفلر[1] ریاضیدان سوئدی، همکاران اسکاندیناوی خود را متقاعد ساخت که با هم یك مجلهٔ ریاضی اسکاندیناوی منتشر کنند که به تحقیقات در بالاترین سطح اختصاص داشته باشد. حاصل اَکتا مَتِمَتیکا بود، که میتتاگ ـ لفلر به سردیری آن منصوب شد.

میتتاگ ـ لفلر دارای نظری صائب بود و بهرهٔ خوبی از جسارت داشت. او توانست با مکاتبات منظم با بهترین ریاضیدانان جهان در مدت کوتاهی بهترین مقالات ریاضی آن زمان را جذب کند. در فهرست مؤلفانش، قطعاً نام نوچهٔ مورد علاقه‌اش هانری پوانکاره، نابغهٔ غیرقابل‌پیش‌بینی بود و میتتاگ ـ لفلر از اینکه مقالات طولانی و انقلابی او را چاپ کند باکی نداشت.

معروفترین واقعهٔ حیات این مجله منطبق است با یکی از معروف‌ترین وقایع زندگی حرفه‌ای پوانکاره. اُسکار دوم، پادشاه سوئد، به توصیهٔ میتتاگ ـ لفلر یك مسابقهٔ بزرگ ریاضی برگزار کرد؛ شرکت‌کنندگان می‌بایست موضوعی را از فهرست کوتاهی انتخاب کنند. پوانکاره در مسابقه شرکت کرد و موضوع پایداری منظومهٔ شمسی را که از زمانِ نیوتون مسئلهٔ مطرح و حل‌نشده‌ای بود انتخاب کرد! درواقع، نیوتون معادلات سیارات منظومهٔ شمسی را نوشته بود (سیارات جذب خورشید می‌شوند و یکدیگر را نیز جذب می‌کنند)، اما نتوانست ثابت

1. Gösta Mittag-Leffler

کند که پایداری منظومهٔ شمسی از این معادلات نتیجه می‌شود، یا اینکه برعکس، فاجعه‌ای قابل‌پیش‌بینی ــ چه کسی می‌داند، شاید برخورد دو سیاره ــ را در بطن خود دارد. در ریاضی فیزیك همه با این مسئله آشنا هستند.

نیوتون فکر می‌کرد که منظومه ذاتاً ناپایدار است، و ثباتی را که مشاهده می‌کنیم ناشی از دَستِ یاری‌دهندهٔ الهی می‌دانست. اما بعداً، لاپلاس و لاگرانژ، و بعد هم گاوس، نشان دادند که منظومهٔ نیوتون در یك زمان بسیار طولانی، شاید یك میلیون سال، یعنی بسیار بیشتر از آنچه نیوتون تصور می‌کرد پایدار است. این اولین بار در تاریخ بشر بود که رفتار ستاره‌ها به لحاظ کمی در یك مقیاس زمانی فوق‌العاده بزرگ، بسیار طولانی‌تر از تمام وقایع‌نگاری‌هایی که تاکنون انجام شده پیش‌بینی می‌شد!

با این حال مسئله هنوز مطرح بود: آیا پس از گذشت این زمان‌های عظیم، فاجعه امکان‌پذیر است؟ اگر یك میلیون سال نه، بلکه صد میلیون سال منتظر بمانیم، آیا ممکن است زمین و مریخ با یکدیگر برخورد کنند؟ در پَسِ این مسئلهٔ خاص، سئوال‌های اساسی در مورد فیزیك، مطرح است.

پوانکاره منظومهٔ شمسیِ کامل را مورد بررسی قرار نمی‌دهد، زیرا بیش از حد پیچیده است! به جای این کار او یك منظومهٔ کوچك‌تر و ایده‌آل را در نظر می‌گیرد که فقط شامل دو سیاره می‌شود که به دور خورشید می‌گردند و یکی نسبت به دیگری بسیار کوچك است. کمی به این می‌ماند که تمام سیارات را، به جز مشتری و زمین، فراموش کنیم ... پوانکاره این مسئلهٔ پالایش‌شده را مورد مطالعه قرار داد، آن را باز هم ساده‌تر کرد، تا جایی که قلب تپندهٔ آن را استخراج نمود. او برای حل این مسئله روش‌های جدیدی ابداع کرد و پایداری ابدی این منظومهٔ کوچك‌شده را به اثبات رساند.

برای این کار بزرگ جایزهٔ اُسکار شاه نصیبش شد. دست‌نوشتهٔ برنده می‌بایست در اکتا متمتیکا چاپ شود. اما دستیاری که متن را ویرایش می‌کرد از دیدن چند جملهٔ مبهم در راه‌حل پوانکاره نگران شد. این چیز غیرمنتظره‌ای نبود: همه می‌دانستند که پوانکاره الگوی شفافیت نیست. او پرسش‌هایش را به اطلاع غول ریاضیات فرانسه رساند.

تا پوانکاره بفهمد که اشتباهی فاحش سُر خورده و وارد اثباتش شده است، مقاله‌اش به چاپ رسیده بود! غلط‌نامه هم کافی نبود، خود نتیجهٔ مقاله عمیقاً آفت‌زده بود.

میتتاگ ـ لفلر بدون اینکه یأسی به خود راه دهد تمام مجله‌های آن شماره را، تك تك، به بهانه‌های واهی، و قبل از اینکه کسی متوجه اشتباه شود پس گرفت و همه یا تقریباً همهٔ آنها را خمیر کرد. پوانکاره هزینه‌ها را پرداخت ــ بیشتر از قیمت جایزهٔ اسکار شاه برایش تمام شد!

اما این داستان وقتی تبدیل به داستانی فوق‌العاده می‌شود که پوانکاره اشتباه خود را به

انگیزه‌ای برای سرآغازی دیگر تبدیل می‌کند. او موفق می‌شود همه‌چیز را سَرِ پا نگه دارد، نتایجی را که به دست آورده بود تغییر دهد، متوجه شود آن چیزی که اثبات کرده بود برعکس آن چیزی است که فکر می‌کرد: ناپایداری امکان‌پذیر است.

مقاله، پس از تصحیح دوباره به چاپ رسید و متنی شد که مبنای نظریهٔ سیستم‌های دینامیکی قرار گرفت که امروزه هزاران پژوهشگر در سراسر جهان به مطالعهٔ آن مشغول‌اند، نظریهٔ آشوب، اثر پروانه، جوانه‌های همهٔ اینها در مقالهٔ پوانکاره به چشم می‌خورند. چیزی که می‌توانست برای اکتا متمتیکا یك فاجعه باشد به یك پیروزی تبدیل شد.

میتتاگ ـ لفلر

هانری پوانکاره

شهرت این مجله مرتباً افزایش می‌یافت، و به یکی از معتبرترین، و شاید هم معتبرترین مجلهٔ [ریاضی] دنیا تبدیل شد. امروزه اگر بتوانید یك مقالهٔ تحقیقاتی را در میان ۶۰۰ صفحه‌ای که این مجله سالانه به چاپ می‌رساند جای دهید، تقریباً برای تضمین آیندهٔ حرفهٔ شما در جامعهٔ ریاضی کافی خواهد بود.

وقتی پوانکاره در سال ۱۹۱۲ از دنیا رفت، در فرانسه از او به عنوان قهرمان ملی تجلیل به عمل آمد. در سال ۱۹۱۶، میتتاگ ـ لفلر هم به نوبهٔ خود چشم از جهان فرو بست؛ محل سکونت او به مرکز بین‌المللی تحقیقات تبدیل شد، در آنجا ریاضیدان‌هایی که از اقصی نقاط دنیا آمده‌اند می‌توانند با هم در مورد مسائل جدید گفتگو و تبادل نظر کنند. این محل انستیتو میتتاگ ـ لفلر نام دارد و در نوع خود اولین است و تا به امروز هم وجود دارد به فعالیت‌های خود ادامه می‌دهد. در سال ۱۹۲۸، مرکز دومی در پاریس بر مبنای همان اصول اختلاط بین‌المللی تأسیس شد و با تأکید بر دوره‌های درسی در سطح تحقیقات؛ این مرکز انستیتو هانری پوانکاره نام نهاده شد.

فصل سی‌وششم

اَن آربر، ۲۷ اکتبر ۲۰۰۹

در اتاقم، در متل اَن آربر. چند روزی را در دانشگاه میشیگان می‌گذرانم ــ دانشگاهی است بزرگ با چند ریاضیدان تراز اول.

کلمان از جواب رد اکتا متمتیکا بسیار سرخورده شده بود، او می‌خواست ما سعی کنیم آنها را از نظرشان برگردانیم، و برایشان توضیح بدهیم که نتایج ما چقدر ابتکاری و مهم است، حتی اگر هنوز یک بخش کوچک تاریک در آن باقی مانده باشد ...

اما من این مجله‌های معتبر را بهتر از او می‌شناسم. خودم در هیئت تحریریهٔ مجلهٔ رقیب اَنوانسیونه مَتِمَتیکا[1] عضو هستم، و می‌دانم در داوری دست‌نوشته‌هایی که دریافت می‌کنیم چقدر باید بی‌رحم باشیم. هیئت تحریریهٔ اکتا قسی‌القلب‌ترند، هیچ چیز نمی‌تواند دل آنها را به رحم آورد مگر اینکه بتوان اثبات کرد که یک داور سوءنیت دارد (اما برای این کار هیچ‌گونه شواهدی وجود ندارد)، یا اینکه عضو جدیدی به هیئت تحریریه اضافه شود.

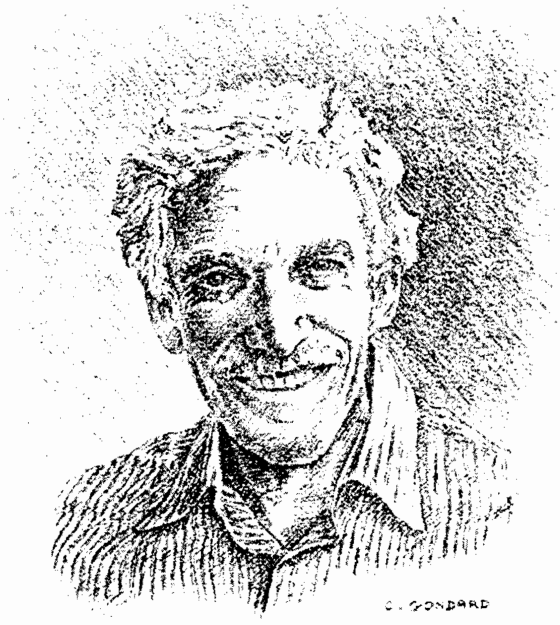
یک راه این است که این مقالهٔ خیلی دراز را به دو قسمت تقسیم کنیم تا بتوانیم راحت‌تر چاپ کنیم، اما من از این کار نفرت دارم ... پس فعلاً کاری نمی‌کنیم.

سخنرانی‌های من در اَن آربر به خوبی برگزار شدند، اما باز هم همان سئوال‌ها مطرح شد. من با جِف روش[2] که متخصص معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است و مدت‌ها با فرانسوی‌ها همکاری کرده بحث کردم. جف از اینکه نتیجه به ازاء زمان بینهایت معتبر نیست شوکه نشد اما از

---

1. *Inventiones Mathematicae* 2. Jeff Rauch

فرضیهٔ تحلیلی بودن خوشش نیامد. درست است که دیگران، برعکس، دنبال زمان بینهایت هستند و چندان نگران تحلیلی بودن نیستند، پس می‌توانم به خودم بگویم که این مهم نیست؛ اما به نظر جِف در این مورد اعتماد دارم و انتقادش مرا نگران می‌کند. به این علت است که امشب استدلالی روی کاغذ خواهم آورد برای اینکه به او نشان دهم که اثبات ما بهترین است و بعید است بتوان آن را بهتر کرد. البته، این کار همان‌قدر که برای اوست برای خودم هم هست.



جِف روش

زمان می‌گذرد، روی تخت متل مدام کاغذها را خط‌خطی می‌کنم، هِی خط‌خطی می‌کنم، اما نمی‌توانم خودم را متقاعد کنم ... و اگر خودم نتوانم به خودم بقبولام، احتمال اینکه بتوانم جِف را متقاعد کنم کم است!!

ـــ اگر راهِ اشتباه رفته باشم چی؟ اگر تقریب‌هایم بیش از حد خام باشد چی؟ با این حال چیزی از دست نداده‌ام ... آنجا اگر چیزی را از قلم انداخته باشم خیلی بد می‌شود ... اینجا که بهینه است ... آنجا ساده‌سازی من حتماً کارها را بهتر می‌کند، اگر طلسمی در کار نباشد ...

مانند دوچرخه‌سواری که زنجیر چرخش را برای یافتن کوچک‌ترین نقطهٔ ضعف وارسی می‌کند، من هم سراسر اثبات را بررسی می‌کنم و دقت اثبات را در هر مرحله می‌سنجم.

آهان،اینجا!؟!؟

اینجا! در این قسمت شاید زیادی سَر به هوا بودم!

آخر چطور چنین چیزی ممکن است؟

ـــ این یعنی چی، آدم حسابی؟ متوجه نشدم که مُدها از یکدیگر فاصله می‌گیرند، و مقایسه‌ای

که با حاصل جمع کردم شاید زیادی زمخت بوده؟ اگر به جای حاصل جمع می‌بایست از sup استفاده می‌کردم، معلوم است که در اینجا بازنده می‌شدم! درست است که این توی پیچیدگی‌های فنی غرق شده بود ...

غُرغُرکنان، در سَرَم، ادامه می‌دهم.

ــ همین است ... مُدها از یکدیگر فاصله دارند، و وزن هم جابه‌جا می‌شود، اگر همه را با هم نگاه کنم چیز غول‌آسایی را از دست می‌دهم!! اما اگر این طور باشد، باید آنها را جداگانه کنترل کنم!!

این یک بارقه بود، اینجا، مداد در دست، روی تختخواب. بلند می‌شوم، عصبی، کاغذ در دست، در اتاق قدم می‌زنم و زُل‌زده به فرمول‌های سحرآمیز نگاه می‌کنم. سرنوشت این مقاله یک بار دیگر تغییر می‌کند. این بار نباید اشتباهی را تصحیح کرد بلکه باید نتایج را بهبود بخشید.

ــ چطور می‌توانم از این بارقه استفاده کنم؟ نمی‌دانم، اما کار شروع شده، همه چیز را مرور خواهم کرد. بالاخره راهی برای جواب دادن به آن دو انتقاد همیشگی پیدا شده است.

*

از آنجا که $\gamma = ۱$ جالب‌توجه‌ترینِ موارد است، آسان است که فکر کنیم با مشکل بزرگی مواجه شده‌ایم. اما این یك دام است: تقریب بسیار دقیق‌تری را می‌توان از طریق جداسازی مُدها و تقریب زدن یك‌یك آنها به دست آورد و نه با سعی در تقریب زدن نُرم کلی. یعنی اینکه، اگر قرار دهیم

$$\varphi_k(t) = e^{۲\pi(\lambda t+\mu)|k|}|\widehat{\rho}(t,k)|,$$

دستگاهی به صورت زیر خواهیم داشت

$$\varphi_k(t) \leq a_k(t) + \frac{ct}{(k+۱)^{\gamma+۱}}\,\varphi_{k+۱}\left(\frac{kt}{k+۱}\right). \qquad (۱۵.۷)$$

فرض می‌کنیم $a_k(t) = O(e^{-ak}e^{-۲\pi\lambda|k|t})$. ابتدا وابستگی به زمان را با قرار دادن

$$A_k(t) = a_k(t)e^{۲\pi\lambda|k|t}, \qquad \Phi_k(t) = \varphi_k(t)e^{۲\pi\lambda|k|t}$$

ساده می‌کنیم. در این صورت (۱۵.۷) می‌شود

$$\Phi_k(t) \leq A_k(t) + \frac{ct}{(k+۱)^{\gamma+۱}}\,\Phi_{k+۱}\left(\frac{kt}{k+۱}\right). \qquad (۱۶.۷)$$

(عامل نمایی در جملهٔ آخر درست است زیرا $kt = (k+۱)(kt/(k+۱))$.) اکنون اگر یك تقریب زیرنمایی برای $\Phi_k(t)$ در نظر بگیریم، یك تبهگنی نمایی برای $\varphi_k(t)$ حاصل می‌شود.

یك بار دیگر، باید به دنبال یك سری توانی بگردیم، و فرض کنیم A_k در زمان ثابت است و وقتی $k \to \infty$، مانند e^{-ak} نزول می‌کند؛ پس با یك حدس صائب می‌نویسیم $\Phi_k(t) = \sum_m a_{k,m} t^m$ که در آن $a_{k,۰} = e^{-ak}$. به عنوان تمرین، خواننده می‌تواند تقریب تکراری مضاعفی برای ضرایب $a_{k,m}$ محاسبه کند و نتیجه بگیرد که

$$a_{k,m} \le const.\ A(ke^{-ak})k^m c^m \frac{e^{-am}}{(m!)^{\gamma+۲}},$$

و از آنجا نشان دهد که

$$\Phi_k(t) \le const.\ Ae^{(۱-\alpha)(ckt)^\alpha}, \qquad \forall \alpha < \frac{۱}{\gamma+۱}. \qquad (۱۷.۷)$$

این تقریب حتی به ازاء $\gamma = ۱$ زیرنمایی است: در واقع، ما از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که پژواک‌ها به ازاء مقادیر مختلف k به طور مجانبی در فاصلهٔ زمانی نسبتاً خوبی از یکدیگر قرار دارند.

نتیجه اینکه، براثر تکینیِ برهم‌کنش، انتظار می‌رود که آهنگ همگرایی به صورت نمایی کسری کاهش پیدا کند: اگر نزول مُدِ kی مبداء مثل $e^{-۲\pi\lambda|k|t}$ باشد، در این صورت نزول مُدِ kِی جواب باید مانند $e^{-۲\pi\lambda|k|t}e^{(c|k|t)^\alpha}$ باشد. به طور کلی‌تر، اگر مُدِ k مثل $A(kt)$ نزول کند، انتظار می‌رود که نزول $\varphi_k(t)$ مانند $A(kt)e^{(c|k|t)^\alpha}$ باشد. در این صورت، مانند قبل، کاری که می‌کنیم این است که تابع نمایی کسری را در یك تابع نمایی بسیار آهسته جذب می‌کنیم و این به قیمت یك ثابت بسیار بزرگ تمام می‌شود: مثلاً

$$e^{t^\alpha} \le \exp(c\varepsilon^{-\frac{\alpha}{۱-\alpha}})e^{\varepsilon t}.$$

(قسمتی از یادداشت‌های من برای درس میرایی لانداو که برای تدریس در یك مدرسهٔ تابستانی در سال ۲۰۱۰ در مرکز بین‌المللی گردهمایی‌های ریاضی[1] در لومینی[2] تنظیم شده بود.)

1. Centre international de rencontres mathématiques
2. Luminy

فصل سی‌وهفتم

فرودگاه شارلوت‌ویل، اول نوامبر ۲۰۰۹

در یک فرودگاه گمنام، در گذار از پالم بیچ به پرُویدانس. همین الان زحمت گذشتن از کنترل امنیتی را متحمل شدم. خالی کردن وسایل فلزی برای هیچ‌کس آسان نیست، اما وقتی آستین کُتَت هم دکمه دارد و ساعت جلیقه‌ای داری و علاوه بر آن یکی‌دوتا فلَش هم همراه با شش‌هفت تا خودکار در جیب‌هایت است ...

در پالم بیچ، در کنفرانسی که امانوئل میلمن برگزار می‌کرد خوش می‌گذشت! بین شهر و پلاژ چند متر فاصله بود. و دریا هم مثل حمام گرم بود. شب دمای هوا ایده‌آل بود و هیچ‌کس هم نبود، احتیاجی به پوشیدن مایو نبود ... واقعاً مثل حمام بود! حمامی به بزرگی اقیانوس به اضافهٔ موج و ماسه‌های نرم. و همهٔ این چیزها در ماه نوامبر!

در این گذر از پالم بیچ توانستم یکی دو روز میرایی لانداو را فراموش کنم، اما حالا این مسئله دوباره تمام فکرم را به خودش مشغول کرده. کم‌کم در راستای بارقه‌ای که در آن آر بر جرقه زد، دارم می‌فهمم برای اینکه کل مقاله را بهتر کنم چه باید کرد. اما به نظرم این کار عظیمی باشد! آیا این اعتمادبه‌نفس را خواهم داشت که دراین‌باره در پرُویدانس صحبت کنم، درحالی‌که هنوز اول کارم؟ یَن گو، که مسئله توسط او مطرح شد، آنجا خواهد بود و این سخنرانی بسیار مهم خواهد بود.

روی کاغذ چرکنویس، شروع به ریختن طرح اصلاح مقاله و انجام دوبارهٔ محاسبات می‌کنم، این برایم واضح است: چیزی اینجا هست که درست نیست، یک تناقض.

ــ امکان ندارد بتوانم تقریبی به این قدرت را ثابت کنم ...

چند دقیقهٔ دیگر هم می‌گذرد. به خودم می‌قبولانم که اشتباهی در برخی قسمت‌های پیچیدهٔ اثبات وجود دارد. آیا همه‌اش اشتباه است؟ فرودگاه در اطرافم پایین و بالا می‌رود.

باز به خود می‌آیم. اشتباه، سدریک، نمی‌تواند زیاد بزرگ باشد. مقاله در کُل بسیار محکم است، اشتباه باید موضعی باشد، تنها در این قسمت. و این برای این است که محاسبات را این دو انتقال چرت تیره‌وتار کرده‌اند، همان جابه‌جایی مضاعف در زمان که تو در بازگشت از موزه وارد کردی! اما کلمان بعداً نشان داد که چطور می‌توان آن را کنار گذاشت!! پس باید آنها را دور انداخت، زیادی خطرناک‌اند ــ در اثباتی به این پیچیدگی کوچکترین منبع ابهام باید حذف شود.

با وجود این، اگر این جابه‌جایی مضاعف به فکرم نرسیده بود، شاید برای همیشه گیر می‌کردیم. این بود که ما را دوباره امیدوار کرد، و باعث شد که بتوانیم دوباره کار را پیش ببریم، اگرچه بعداً متوجه شدیم که می‌توانستیم آن را کنار بگذاریم. و بالاخره غلط از آب درآمد! عیبی ندارد، همه را بازنویسی خواهم کرد بدون استفاده از آن.

فعلاً می‌خواهم ببینم چطور می‌شود این را در پرُویدانس اعلام کرد. باید بگویم که محلی را که اصلاح باید در آن صورت گیرد شناسایی کرده‌ام و این مهم است زیرا به دو انتقادی که همیشه از نتیجه شده است پاسخ داده خواهد شد ... اما در عین حال نباید جِرزَنی کنم، این بار دیگر بلوف نباید زد!

بالاخره، سفر از پالم بیچ به پرُویدانس چقدر پرماجرا شد.

*

یادآوری رزرو پرواز وست پالم بیچ - پرُویدانس

اطلاعات پرواز: یک‌شنبه اول نوامبر ۲۰۰۹

مدت پرواز: ۶ ساعت و ۳۹ دقیقه

ساعت حرکت: ۰۰ : ۱۵

وست پالم بیچ، PBI (فلوریدا، ایالات متحده)

ساعت ورود: ۵۳ : ۱۶

شارلوت دوگلاس (کارولینای شمالی، ایالات متحده)

US Airways 1476 Boeing 737-400 Classe Économique.

ساعت حرکت: ۴۹ : ۱۹

شارلوت دوگلاس (کارولینای شمالی، ایالات متحده)

ساعت ورود: ۳۹ : ۲۱

پرُویدانس TF گرین (رُدآیلند، ایالات متحده)

US Airways 828 Airbus Industrie A319 Classe Économique.

*

کولُن/ نیوتون (جالب توجه‌ترین مورد)

در این اثبات، برهم‌کنش کولُن/ نیوتون و منظمی تحلیلی **هر دو** بحرانی هستند؛ اما به ازاء زمان‌های از مرتبهٔ نمایی، اثبات به اعتبار خود باقی می‌ماند «زیرا»

- تبهگنی خطیِ مورد انتظار نمایی است
- رشد غیرخطیِ مورد انتظار نمایی است
- روش نیوتون به طور دو- نمایی همگراست

با وجود این، ظاهراً این امکان وجود دارد که با استفاده از این امر که پژواک‌هایی که بسامد فضایی آنها متفاوت است، به طور مجانبی، نسبتاً خوب تفکیک شده‌اند، کار را پیش برد.

(قسمتی از سخنرانی من در دانشگاه براون در ۲ نوامبر ۲۰۰۹.)

فصل سی‌وهشتم

سَن‌رِمی - لِه - شِورُز[1]، ۲۹ نوامبر ۲۰۰۹

صبح یکشنبه، در تختخوابم مشغول خط‌خطی کردن هستم، اینها جزو لحظات برجستهٔ یک ریاضیدان به حساب می‌آیند.

مشغول خواندن آخرین نسخهٔ مقاله‌مان شدم، بعضی چیزها را خط می‌زنم، تصحیح می‌کنم. آرام هستم، ماه‌هاست که این‌قدر احساس آرامش نکرده‌ام! همه‌چیز را بازنویسی کردیم. انتقال‌های مضاعف خائن را حذف کردیم. موفق شدیم از جداییِ زمانِ مجانبیِ پژواک‌ها بهره‌برداری کنیم، قسمت اصلی اثبات را تغییر دادیم، مُدها را که قبلاً با هم در نظر گرفته بودیم، یک به یک بررسی کردیم، شرط تحلیلی بودن را تعدیل کردیم، مورد کولُنی در زمان بینهایت را هم که همه یک‌ریز در گوشمان خوانده بودند اضافه کردیم ... همه‌چیز را دوباره انجام دادیم، همه‌چیز را ساده‌تر کردیم، همه‌چیز را بهتر کردیم، همه‌چیز را باز دوباره خواندیم.

انجام همهٔ این کارها می‌توانست سه ماه وقت ما را بگیرد، اما هیجان‌زدگی باعث شد سه هفته‌ای کار را تمام کنیم.

وقتی که مشغول بازبینی جزئیات بودیم، چندین بار اتفاق افتاد که از خودمان بپرسیم چطور این یا آن حقه به ذهنمان رسیده است.

نتایج اکنون از استحکام بسیار بیشتری برخوردار است. در این گیرودار موفق شدیم مسئله‌ای را هم حل کنیم که مدت‌هاست متخصصانی مانند گو را به خود مشغول داشته است، این مسئله را به اصطلاح فنی «پایداری مداری تعادل‌های همگن و غیریکنوا که از پایداری خطی برخوردارند» می‌گویند.

1. Saint-Rémy-lés-Chevreuse

عباراتی به مقاله اضافه کردیم، در عوض چیزهایی را هم ساده کردیم، به طوری که مقاله خیلی طولانی‌تر از قبل نشده است.

چند شبیه‌سازی عددی جدید به دستم رسیده. هفتهٔ پیش وقتی نتایج اولیه را دیدم از جا پریدم: محاسباتی که فرانسیس با استفاده از دستورالعمل‌های بسیار دقیق توسط کامپیوتر انجام داده بود ظاهراً با نتایج نظری ما کاملاً مغایرت داشت! اما جا نَزدَم، به فرانسیس گفتم به محاسبات شک دارم، او محاسبات را، این بار با روشی که قاعدتاً می‌بایست دقتش از روش قبل زیادتر باشد، دوباره انجام داد. وقتی نتایج جدید را دریافت کردم دیدم این بار توافق با پیش‌بینی نظری خوب است. نفس راحتی کشیدم! این که می‌گویند محاسبات جایگزین درک کیفی نمی‌شود درست است.

فردا، برای قرار دادن این نسخهٔ جدید در اینترنت آماده خواهیم بود. و در آخر هفته می‌توانیم دوباره آن را برای چاپ در اَکتا متمتیکا ارسال کنیم، این بار شانس موفقیت بسیار بیشتر است.

نمی‌توانم در گوشه‌ای از ذهنم، به پوانکاره فکر نکنم. یکی از معروف‌ترین مقالاتش را اَکتا رد کرد و پس از تصحیح بالاخره به چاپ رساند. شاید برای من هم اتفاق بیفتد؟ الان هم برای من سال پوانکاره است، زیرا جایزهٔ پوانکاره را دریافت کرده‌ام و مدیر انستیتو پوانکاره شده‌ام ...

*

پاریس، ۶ دسامبر، ۲۰۰۹

Cédric Villani
École Normale Supérieure de Lyon
& Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre & Marie Curie
F-75005 Paris, FRANCE
cvillani@umpa.ens-lyon.fr

To Johannes Sjöstrand
Editor of Acta Mathematica
IMB, Université de Bourgogne
9, Av. A. Savarey, BP 47870
F-21078 Dijon, FRANCE
johannes.sjostrand@u-bourgogne.fr

ارسال مجدد به اَکتا متمتیکا

پروفسور شوسترند عزیز،
عطف به نامهٔ مورخ ۲۳ اکتبر شما، بدین‌وسیله نسخهٔ جدید مقاله‌مان "On Landau Damping"، برای چاپ احتمالی در اکتا متمتیکا ارسال می‌شود.

ما از نظرهای ابرازشده در گزارش‌های داوری دربارهٔ نسخهٔ اولیهٔ مقاله بسیار استفاده کردیم. به اعتقاد ما این نظرها در نسخهٔ حاضر، که به اندازهٔ قابل‌ملاحظه‌ای اصلاح شده است، کاملاً اعمال شده‌اند.

اولین، و شاید مهمترین مورد، گنجانده شدن پتانسیل‌های کولُن و نیوتون در نتیجهٔ اصلی مقاله است؛ در یك زمینهٔ تحلیلی، این تنها خلاء باقیمانده در تحلیل ما بود.

شرط تحلیلی بودن در بررسی میرایی لانداو، هم در فیزیك و هم در ریاضی، یك فرض کلاسیك است؛ این شرط برای همگرایی نمایی الزامی است. از طرف دیگر این شرط بسیار محدودکننده است و شکایت یکی از داوران این بود که نتایج ما وابسته به تحلیلی بودن است. در نسخهٔ جدید این‌طور نیست، زیرا ما اکنون می‌توانیم برخی از رسته‌های داده‌های ژِوری[1] را هم در نظر بگیریم.

در نسخهٔ اول نوشته بودیم «ادعای ما این است اگر یك اثر پایدارکنندهٔ جدید شناسایی نشود، دلیلی وجود نخواهد داشت که میرایی لانداوِ غیرخطی برای، مثلاً، برهم‌کنش گرانشی،

1. Gevrey

در مرتبه‌ای از نظم، کمتر از تحلیلی بودن، وجود داشته باشد». بعد از آن تاریخ چنین اثری را دقیقاً شناسایی کردیم (پژواك‌هایی که با بسامدهای مختلف ظاهر می‌شوند به طور مجانبی به خوبی از یکدیگر تفکیك می‌شوند). با استفاده از این اثر اصلاحاتی که در بالا اشاره شد صورت گرفت.

یکی از نتایج فرعی کار ما نتایج جدیدی است در مورد پایداری تعادل‌های همگن معادلهٔ ولاسوف ـ پواسون مانند پایداری برخی توزیع‌های غیریکنوا در مورد نیروهای دافعه (یك مسئلهٔ حل‌نشدهٔ قدیمی)، و پایداری در کمتر از طول جین[1] در مورد نیروهای جاذبه.

ایراد دیگری که یکی از داوران وارد آورده در مورد فضاهای تابعیِ نامتعارفی است که مورد استفادهٔ ما قرار گرفته است. ممکن است این ایراد در مورد «نُرم کاری» ما صحت داشته باشد، اما در مورد نرم ساده‌ای که در فرض‌ها و نتایج ما به کار رفته و دیگران نیز به کار برده‌اند، درست نیست. گذر از یك نُرم به نُرم دیگر از طریق قضیهٔ ۲۰.۴ صورت می‌گیرد.

برای گنجاندن این اصلاحات، مقاله را تماماً بازنویسی و با دقت ویرایش کردیم. برای اینکه طولانی‌تر نشود، تمام مراحل و توضیحاتی که اکیداً به نتیجهٔ اصلی ربطی نداشته‌اند حذف شده است؛ بیشتر توضیحات باقیمانده فقط در مورد نتایج و روش‌هاست.

سرانجام در مورد طولانی بودن مقاله باید بگوییم که آماده‌ایم دربارهٔ تغییر نحوهٔ تدوین آن مذاکره کنیم و یادآور می‌شویم که معرفی ابزار ریاضی مورد استفاده در کار به صورت بخش‌بخش انجام گرفته تا شاید داوران بتوانند کاری تیمی انجام دهند و بدین‌وسیله از زحماتشان کاسته شود.

امید بسیار داریم که این مقاله مورد تایید داوران واقع شود.

ارادتمند شما

کلمان موهو و سدریك ویلانی

1. Jeans

ON LANDAU DAMPING

C. MOUHOT AND C. VILLANI

ABSTRACT. Going beyond the linearized study has been a longstanding problem in the theory of Landau damping. In this paper we establish exponential Landau damping in analytic regularity. The damping phenomenon is reinterpreted in terms of transfer of regularity between kinetic and spatial variables, rather than exchanges of energy; phase mixing is the driving mechanism. The analysis involves new families of analytic norms, measuring regularity by comparison with solutions of the free transport equation; new functional inequalities; a control of nonlinear echoes; sharp scattering estimates; and a Newton approximation scheme. Our results hold for any potential no more singular than Coulomb or Newton interaction; the limit cases are included with specific technical effort. As a side result, the stability of homogeneous equilibria of the nonlinear Vlasov equation is established under sharp assumptions. We point out the strong analogy with the KAM theory, and discuss physical implications.

CONTENTS

Keywords. Landau damping; plasma physics; galactic dynamics; Vlasov-Poisson equation.

AMS Subject Classification. 82C99 (85A05, 82D10)

فصل سی‌ونهم

سَنْ - رِمی - لِه - شِورِن، ۱۷ ژانویهٔ ۲۰۱۰

به محض اینکه از خواب بیدار می‌شوم، خواندن ایمیل‌ها برایم مثل اولین تزریق مادهٔ مخدر در ذهن است.

در میان پیام‌ها، پیامی از همکارم لوران دِویلت[1] حاوی یک خبر ناخوشایند بود: دوست مشترکمان کارلو چرچی‌نیانی درگذشته است.

نام چرچی‌نیانی با نام بولتزمان عجین شده است. کارلو زندگی حرفه‌ای خود را وقف بولتزمان، نظریه‌های او، معادلهٔ او، و تمام کاربردهای آن کرده است. او سه کتاب مرجع دربارهٔ این موضوع نوشته است؛ کتابی که او در سال ۱۹۷۵ منتشر کرد، اولین کتاب تحقیقاتی‌ای است که من در زندگی خوانده‌ام. با وجود وسواس فکری‌اش درمورد بولتزمان، چرچی‌نیانی فوق‌العاده تنوع‌طلب بود. به واسطهٔ معادلهٔ بولتزمان، شاخه‌های زیادی را در ریاضیات، که از نزدیک و یا از بسیار دور به معادلهٔ عزیزش مربوط می‌شدند، مورد مطالعه قرار داد.

به‌علاوه، این مرد جهانی، چندزبانه و با فرهنگ، تنها به علوم اکتفا نکرد؛ آثار او شامل یک نمایش‌نامه، یک جُنگِ اشعار و ترجمه‌هایی از هومر می‌شود.

اولین نتیجهٔ مهم، یا لااقل اولین نتیجه‌ای که من به آن واقعاً افتخار می‌کنم، دربارهٔ «حدس چرچی‌نیانی» بود. بیست‌وسه سال داشتم با اشتیاقی تازهٔ تازه، میهمان جوزِپه توسکانی[2] در شهر پاوی[3] بودم. جوزِپه فکرش را در مورد نحوهٔ پیشرفت در این حدس مشهور با من در میان گذاشته

1. Laurent Desvillettes 2. Giuseppe Toscani 3. Pavie

بود، و به من پیشنهاد داده بود که در این اقامت کوتاه آن را امتحان کنم. پس از گذشت چند ساعت به خوبی دریافتم که فکر سادهٔ او هیچ شانسی برای عملی شدن ندارد ... اما در این حین متوجهٔ محاسبهٔ جالب‌توجهی شدم، محاسبه‌ای که به نظر خوب می‌آمد. چیزی شبیه به یک اتحاد جدید قابل‌ملاحظه. و از آنجا بود که ایدهٔ جدیدی را مطرح کردم؛ موشک ریاضی آمادهٔ پرتاب شده بود.

بعد به جوزپه گفتم که چگونه می‌توانیم مسئلهٔ چرچی‌نیانی درمورد تولید آنتروپی در معادلهٔ بولتزمان را به یک تقریبِ تولید آنتروپی در یک مسئلهٔ فیزیک پلاسما که اتفاقاً قبلاً با لوران مورد مطالعه قرار داده بودم تبدیل کنیم. به‌علاوه کمی هم نظریهٔ اطلاعات را، این عشق همیشگی من، بدان اضافه کرده بودم. یک سری شرایط باورنکردنی که اگر جوزپه دقیقاً در هنگام دیدار من آن فکر غلط به سرش نزده بود فراهم نمی‌شد!

در آن زمان تقریباً حدس را حل کردیم، و کمی بعد در کنفرانسی در تولوز آن نتایج را با هیجان به بهترین متخصصان معادلهٔ بولتزمان ارائه دادم. کارلو هم، مانند بسیاری دیگر، مرا در آن گردهمایی کشف کرد، او در آسمانها سیر می‌کرد و این را به من گفت. او با صدایی لرزان با من دادِ سخن داد: «سدریک حدس من را ثابت کن!»

در بیست‌وسه سالگی، آن مقاله یکی از اولین مقاله‌های من بود. اما پنج سال بعد، برای بیست‌وسومین مقاله‌ام، دوباره به این مسئله پرداختم. این بار با تجربه‌ای بیشتر و تکنیکی بهتر، و سرانجام موفق شدم آن حدس معروف را اثبات کنم؛ کارلو از این کار احساس غرور می‌کرد.

کارلو انتظار داشت که من برخی از هارترین و مهمترین مسائل باقیمانده در زمینهٔ معادلهٔ بولتزمان را حل کنم. اینها در بخشی از رویاهای من نیز بود، اما من بدون اینکه هشداری بدهم از آن دور شدم، ابتدا به سوی ترابری بهینه و هندسه، و سپس به سوی معادلهٔ ولاسوف و میرایی لانداو رفتم.

خیال دارم در آینده به معادلهٔ بولتزمان برگردم. اما حتی اگر رویاهایم هم در آن مورد به واقعیت تبدیل شوند، هرگز نخواهم توانست با خوشحالی و غرور به کارلو اعلام کنم که آن هیولایی را که از همه بیشتر دوست داشتی رام کرده‌ام، همان که حاضر بودی به خاطرش همه چیزت را بدهی.

*

حدس چرچی‌نیانی مربوط می‌شود به رابطهٔ بین آنتروپی و تولید آنتروپی در یك گاز. برای سهولت، ناهمگنی‌های فضایی گاز را در نظر نمی‌گیریم، به طوری که فقط توزیع سرعت‌ها مؤثر باشد. بنابراین فرض می‌کنیم توزیع سرعت‌ها در یك گازِ در حال تعادل $f(v)$ باشد: این توزیع برابر توزیع گاوسی $\gamma(v)$ نیست، و در نتیجه آنتروپی آن‌قدر که جا دارد زیاد نیست.

معادلهٔ بولتزمان می‌گوید که آنتروپی افزایش خواهد یافت، اما آیا افزایش آن زیاد خواهد بود یا خیلی کم؟

طبق حدس چرچی‌نیانی امید می‌رود که افزایش لحظه‌ای آنتروپی اقلاً متناسب باشد با تفاضل بین آنتروپیِ توزیع گاوسی و آنتروپیِ توزیعی که مورد نظر ماست:

$$\dot{S} \geq K[S(\gamma) - S(f)].$$

این حدس تبعاتی در مورد سرعتی دارد که با آن، توزیع به سمت تعادل همگرا می‌شود و این مسئله‌ای است اساسی زیرا به کشف شگفت‌انگیز برگشت‌ناپذیری توسط بولتزمان ربط دارد.

در اوائل دههٔ ۹۰، لوران دِویلِت، و پس از او اریك کارلِن و ماریا کاروالْهُو،[1] روی این حدس کار کردند و برخی نتایج جزئی نیز به دست آوردند؛ اما با وجود اینکه افق‌های کاملاً جدیدی گشودند، هنوز از هدف بسیار دور بودند. و خودِ چرچی‌نیانی با کمك یك ریاضیدان روس، ساشا بوبیلف،[2] نشان دادند که حدس او بیش‌ازحد خوش‌بینانه بوده و نمی‌توانسته درست باشد ... مگر احتمالاً در حالتی که برخوردها بینهایت شدید در نظر گرفته شوند، برهم‌کنش‌هایی که از کره‌های سفت سفت‌ترند، و مقطع مؤثر آنها حداقل متناسب با سرعت نسبی‌شان افزایش می‌یابد ــ به زبان نظریهٔ جنبشی گازها به آنها «کره‌های خیلی سفت» می‌گویند.

اما در سال ۱۹۹۷، جوزِپه توسکانی و من کرانی را معرفی کردیم که «تقریباً» به همان خوبی بود:

$$\dot{S} \geq K_\varepsilon[S(\gamma) - S(f)]^{1+\varepsilon},$$

که در آن ε می‌تواند به دلخواه کوچك باشد، و این به شرط این است که چند فرض فنی در مورد برخوردها درست باشد.

در سال ۲۰۰۳ نشان دادم که این نتیجه در مورد تمام برهم‌کنش‌های معقول صدق می‌کند؛ مهمتر از همه موفق شدم ثابت کنم که آن حدس در صورتی درست است که برخوردهایی که با سرعت بالا انجام می‌شوند از نوع کره‌های خیلی سفت باشد. در سال ۱۹۹۷ با توسکانی یك اتحاد اساسی کشف کردیم که عبارت است از:

فرض می‌کنیم $(S_t)_{t\geq 0}$ نیم‌گروه وابسته به معادلهٔ فوکر ـ پلانك، $\partial_t f = \nabla_v \cdot (\nabla_v f + fv)$

1. Maria Carvalho 2. Sasha Bobylev

باشد و $\mathcal{E}(F,G) := (F-G)\log(F/G)$، آنگاه

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}[S_t,\mathcal{E}] = -\mathcal{J},$$

که در آن $\mathcal{J}(F,G) = |\nabla \log F - \nabla \log G|^2 (F+G)$.
این اتحاد نقش کلیدی در نمایش

$$\dot{S}(f) \geq K\int_0^{+\infty} e^{-4Nt}\int_{\mathbb{R}^{2N}} (1+|v-v_*|^2) \\ \times \mathcal{J}(S_tF, S_tG)dv\,dv_*\,dt,$$

ایفا می‌کند. در این نمایش، $F(v,v_*) = f(v)f(v_*)$ و $G(v,v_*)$ میانگین تمام حاصلضرب‌های $f(v')f(v'_*)$ است و (v',v'_*) تمام جفت‌سرعت‌های پس از برخوردی را توصیف می‌کند که با سرعت‌های پیش از برخورد (v,v_*) سازگارند. این فرمول اساس حل حدس چرچی‌نیانی را تشکیل می‌دهد.

کارلو چرچی‌نیانی

قضیه (ویلانی، ۲۰۰۳). فرض می‌کنیم که $S(f) = -\int f\log f$ آنتروپی بولتزمان وابسته به توزیع سرعت $f = f(v)$ باشد. فرض می‌کنیم که B هستهٔ برخورد بولتزمان باشد که در رابطهٔ $B(v-v_*,\sigma) \geq K_B(1+|v-v_*|^2)$ به ازاء یك ثابت $K_B > 0$ صدق می‌کند، و $\dot{S}$ تابعك تولید آنتروپی وابسته را نشان دهد:

$$\dot{S} = \frac{۱}{۴} \iiint \Big(f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*) \Big)$$
$$\times \log \frac{f'(v)f'(v_*)}{f(v)f(v_*)} B \, dv \, dv_* \, d\sigma.$$

فرض می‌کنیم که $f = f(v)$ یك توزیع احتمال در $\mathbb{R}^N$ باشد با میانگین صفر و دمای واحد. در این صورت

$$\dot{S}(f) \geq \left(\frac{K_B |S^{N-۱}|}{۴(۲N+۱)} \right) (N - T^*(f))[S(\gamma) - S(f)],$$

که در آن

$$T^*(f) = \max_{e \in S^{N-۱}} \int_{\mathbb{R}^N} f(v)(v \cdot e)^۲ dv.$$

فصل چهلم

پاریس، ۱۶ فوریهٔ ۲۰۱۰

نزدیک غروب، در اتاق کار بزرگم در انستیتو هانری پوانکاره. دادم تخته سیاهِ زیبا را بزرگ‌تر کردند و چندتا از اثاثیه را بیرون بردند تا جا کمی باز شود. خیلی فکر کردم چطوری چیدمان این اتاق را تغییر دهم.

قبل از هر چیز، دستگاه سرمایش که جاگیر است باید ناپدید شود، اشکالی ندارد که در تابستان آدم گرمش شود!

بر یکی از دیوارها ویترین بزرگی تکیه دارد که در آن برخی اشیای شخصی، و برخی از بهترین اشیای کلکسیون مَدل‌های هندسی انستیتو قرار داده شده است.

در سمت چپ می‌خواهم مجسمهٔ نیم‌تنهٔ کمی خُشکِ هانری پوانکاره را، که نوه‌اش، فرانسوا پوانکاره، به من قول داده، بگذارم.

پشت سرم، فضای بزرگی را برای تصویر کاترین ریبرو درنظر گرفته‌ام! تصویر را هم انتخاب کرده‌ام، در اینترنت پیدا کردم، کاترین به علامت مبارزه، صلح، قدرت و امید، دستهایش را باز کرده است، مانند شورشی تْرِ دو مایو[1] در تابلوی نقاشی گویا، که در مقابل سربازهای ناپلئون دستهایش را باز کرده یا مانند **ناسیکایِ**[2] میازاکی[3] در مقابل سربازان پِژیته.[4] این تصویری است از قدرت، و در عین حال، از واگذاری و آسیب‌پذیری. این را هم خیلی دوست دارم: اگر نپذیریم که خود را در موقعیتی آسیب‌پذیر قرار دهیم، پیشرفتی هم نخواهیم داشت. این تصویر از بانوی شوریدهٔ خواننده

---

1. *Tres de Mayo* 2. Nausicaä 3. Miyazaki 4. Péjité

که بودوان[1] در اثر عالی خودش سالاد نیسی[2] هم آورده، به درد من می‌خورد برای اینکه حواسم جمع باشد، این را باید مستقیماً با خودِ کاترین هم در میان بگذارم.

امروز هم مانند روزهای دیگر چند وعده ملاقات و مذاکره و جلسه در پیش دارم. با رئیس هیئت مدیره‌ام مکالمهٔ تلفنی طولانی‌ای داشتم، مدیر عامل یکی از مؤسسات مالی حسابرسی که بسیار علاقه‌مند به تعهد بخش خصوصی به خدمت در تحقیقات علمی است. و امروز بعدازظهر عکاس آمده بود عکس بگیرد تا در مصاحبه‌ای در یک مجلهٔ علمی برای عموم چاپ شود. هیچ کدام از این کارها برایم سنگین نبود، شش ماه است که در حال کشف دنیایی پرشور و جذاب هستم؛ آشنایی‌های جدید، روابط جدید، بحث‌های جدید.

درحالی‌که عکاس وسایل خود را در دفتر من آماده و سه پایه و لامپش را مستقر می‌کرد، تلفن زنگ می‌زند و من هم بی‌هوا جواب می‌دهم.

ـــ اَلو، بله.

ـــ سلام، شما سدریک ویلانی هستید؟

ـــ بله، خودم هستم.

ـــ من لاسلو لواس[3] هستم از بوداپست.

برای یک لحظه قلبم از کار افتاد. لاسلو رئیس اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی است، و در این مقام، رئیس کمیتهٔ مدال فیلدز نیز هست. تنها اطلاعی که من دربارهٔ این کمیته دارم هم همین است: به جز او، هیچ یک از اشخاصی را که در این کمیته هستند اصلاً نمی‌شناسم.

ـــ سلام، پرفسور لواس، حالتان چطور است؟

ـــ خوب، حالم خوب است، خبرهایی دارم، خبرهای خوبی برای شما دارم.

ـــ اِ، راست می‌گویید؟

مثل یک فیلم می‌ماند ... می‌دانم که وندلین ورنر[4] هم همین جمله را چهار سال پیش شنید. اما امسال چرا این‌قدر زود؟

ـــ بله، خوشحالم به شما اعلام کنم که برندهٔ مدال فیلدز شده‌اید.

ـــ باور نمی‌کنم! امروز یکی از زیباترین روزهای زندگی من است. چه باید بگویم؟

ـــ فکر می‌کنم فقط باید خوشحال باشید و مدال را بپذیرید.

از وقتی که گریگوری پرلمان مدال فیلدز را رد کرد، کمیته حق دارد نگران باشد: الان اگر دیگران هم این جایزه را رد کنند چی؟ اما من از سطح پرلمان بسیار پایین‌ترم، و بدون اینک حساسیتی نشان دهم می‌پذیرم.

---

1. Baudoin 2. *Salade niçoise* 3. László Lovász 4. Wendelin Werner

لاسلو به صحبت در مورد مدال ادامه می‌دهد. کمیته تصمیم گرفته است که به برندگان زود خبر بدهد برای اینکه مطمئن شود که اطلاعات از خود کمیته می‌آید و از جای دیگری درز نمی‌کند.

ـــ خیلی مهم است که این را کاملاً محرمانه نگه دارید، می‌توانید به خانواده‌تان بگویید، نه کَسِ دیگر. هیچ یک از همکاران شما نباید بداند.

بنابراین راز را نگهداری خواهم کرد، به مدت ... شش ماه. چقدر طولانی است! دقیقاً شش ماه و سه روز دیگر، تلویزیون‌های سراسر دنیا این خبر را پخش خواهند کرد. تا آن موقع باید این راز سنگین را نگهدارم و خود را از درون آماده کنم.

این شش ماه، چقدر آهسته می‌گذرد. در این مدت، چه حدس و گمان‌هایی در مورد برندگان این مدال زده نمی‌شود؟ اما دهان من مُهر شده باقی خواهد ماند. همان طور که همکار لیونی من خانم میشل شاتزمن[1] یادآوری کرد، «آنهایی که می‌دانند نمی‌گویند و آنهایی که می‌گویند نمی‌دانند».

قبل از تلفن لواس به خودم ۴۰٪ شانس برنده شدن مدال را می‌دادم. الان شانس را ۹۹٪ می‌دانم! هنوز ۱۰۰٪ نیست، در واقع ممکن هم هست که یک شوخی در کار باشد. لانداو و یکی از رفیق‌هایش برای اینکه همکاری را که موی دماغشان می‌شد دست بیندازند، همین کار را کردند: آن حرامزاده‌ها یک تلگراف تبریک قلابی از طرف آکادمی سلطنتی سوئد برایش فرستاده بودند: تبریکات صمیمانه‌ز شما برندهٔ جایزهٔ نوبل شده‌اید، و غیره.

پس، سدریک، هنوز کاملاً خوشحال نباش، کی گفته که لواس پای تلفن بود؟ منتظر تایید این خبر از طریق نامه باش و بعد خودت را کاملاً وِل کن!

اِ، راز، بله ... اما عکاسی که در دفتر من است چه می‌شود؟

ظاهراً چیزی نشنیده، لابد انگلیسی بلد نیست. امیدوارم این‌طور باشد. عکاسی از سَر گرفته می‌شود. یک عکس جلوی انستیتو، یک عکس با جایزهٔ فیزیک ریاضی من، ...

ـــ فکر می‌کنم عکس‌هایی را که برای مقاله لازم است گرفته باشم. خوب شده‌اند. راستی می‌خواستم از شما سئوال کنم، در مقاله گفته شده که شاید شما جایزه‌ای، چیزی ببرید؟

ـــ منظورتان مدال فیلدز است؟ نویسندهٔ مقاله حدسی در این مورد زده است، اما هنوز خیلی مانده در این مورد تصمیم بگیرند، کنگره ماه اوت آینده تشکیل خواهد شد.

ـــ خیلی‌خوب، باشد، امیدی دارید؟

ـــ خُب، می‌دانید، پیش‌گویی واقعاً مشکل است ... هیچ کس نمی‌تواند زیاد بداند!

*

1. Michelle Schatzman

پس از پایان جنگ جهانی اول، می‌بایست تکه‌های همزیستی شکسته‌شده، در اروپایی که از هم پاشیده شده بود و بار سنگین پیمان ورشو شانه‌هایش را خُرد می‌کرد، دوباره به یکدیگر چسبانده می‌شدند. آنچه در مورد جامعه صدق می‌کند دربارهٔ علوم نیز صادق است: می‌بایست نهادها را بازسازی کرد.

همان زمانی که در فرانسه امیل بورِل، ریاضیدان و سیاستمدار، طرح انستیتو هانری پوانکاره را می‌ریخت، در کانادا جان چارلز فیلدز، ریاضیدان و عضو بانفوذ اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان، به فکر ایجاد مدالی برای ریاضی‌پیشه‌ها بود که هم، مثل جایزهٔ نوبل، جایزه‌ای باشد برای تقدیر از کارهای بزرگ؛ و هم وسیله‌ای برای تشویق استعدادهای جوان. برای تکمیل مدال، جایزهٔ نقدی مختصری هم در نظر گرفته شده بود.

فیلدز موفق شد منابع مالی لازم برای تحقق پروژه‌اش را بیابد، نقش‌های روی مدال را به یك مجسمه‌ساز کانادایی سپرد، و نوشته‌های روی آن را به زبان لاتین انتخاب کرد، زبانی که عمومیت داشت و جهانی بودن ریاضیات را منعکس می‌کرد.

روی آن تصویری از ارشمیدس همراه با نوشتهٔ زیر حك شده است

TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI

از خود فراتر رویم و جهان را فتح کنیم.

پشت مدال، چند برگ غار، قضیهٔ مصور ارشمیدس دربارهٔ محاسبهٔ حجم کره و استوانه و نوشتهٔ زیر به چشم می‌خورد:

CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBUERE

ریاضیدانان از سراسر جهان گرد هم آمده‌اند تا کارهای استثنایی را مورد تقدیر قرار دهند.

و روی لبهٔ سکه، اسم برندهٔ مدال و سال اهدا جایزه.

همهٔ اینها از طلای خالص.

او نمی‌خواست نامی برای این جایزه تعیین کند، اما پس از مرگش طبیعی بود که نام مدال فیلدز بر آن نهاده شود. این مدال برای اولین‌بار در سال ۱۹۳۶ اهدا شد و پس از آن از سال ۱۹۵۰ هر چهار سال یکبار در هنگام تشکیل کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان اهدا می‌شود. این کنگره وعدهٔ ملاقات بزرگ سیارهٔ ریاضی است، رویدادی است که در روزگار ما می‌تواند

تا ۵۰۰۰ شرکت‌کننده را در محلی که از یك کنگره به کنگرهٔ دیگر عوض می‌شود گرد هم آورد.

برای احترام به خواستهٔ فیلدز مبنی بر اینکه جایزه باید تشویقی باشد، جایزه به پژوهشگرانی که کمتر از ۴۰ سال دارند تعلق می‌گیرد. قاعدهٔ محاسبهٔ سن در سال ۲۰۰۶ دقیقاً تدوین شد. در اول ژانویهٔ سالی که کنگره تشکیل می‌شود، باید حداکثر سن ۴۰ سال باشد. اما تعداد مدال‌ها هر بار می‌تواند بین ۲ تا ۴ عدد باشد.

مخفی نگهداشتن رأی هیئت داوران، همراه با سازماندهی جدی خبرنگاران، باعث می‌شود که مراسم اهداء مدال‌های فیلدز بازتابی بی‌نظیر در دنیای ریاضی داشته باشد. مدال را اغلب رئیس کشور میزبان کنگره اهدا می‌کند و خبر آن فوراً در دنیا پخش می‌شود.

فصل چهل‌ویکم

قطار خط B، ۶ مارس ۲۰۱۰

در میان وسایل حمل‌ونقل پاریسی، همهٔ خطوط شبکهٔ سریع استانی (RER) جالب توجه‌اند، هر یک به دلیل خاص خودش. در مورد خط RER B که هر روز سوار آن می‌شوم، باید بگویم که هر روز، یا تقریباً هر روز، خراب می‌شود، و گاهی تا نصف شب یا تا یکِ صبح پُر است از مسافر (باید انصاف داشت، خوبی‌هایی هم دارد: خط B مدام به این فکر است که مسافرینش از فعالیت جسمی منظم برخوردار باشند، برای این کار اغلب آنها را وادار می‌کند که در مسیرْ قطار عوض کنند؛ و به فکر هوشیاری ذهنی مسافرین نیز هست و آنان را تا آخرین لحظه از ساعات ورود قطارها و همچنین ایستگاه‌هایی که قرار است قطار در آنها توقف داشته باشد بی‌خبر می‌گذارد).

اما امروز، صبحِ خیلی خیلی زود است و واگن تقریباً خالی است. از کنفرانسی در قاهره برمی‌گردم و می‌روم منزل.

سفر به قاهره شاهانه بود، همراه من دوست‌داشتنی‌ترین مسافری بود که تا به حال دیده‌ام. با هم فیلمی را روی لپ‌تاپ من دیدیم و گوشی‌هایمان را مانند برادر و خواهر با هم تقسیم کردیم (همیشه باید با بلیط «اکونومی کلاس» (درجهٔ اقتصادی) پرواز کرد، در این قسمت از لحاظ آماری دخترها دوست‌داشتنی‌ترند).

بازگشت از هر نظر زرق‌وبرق کمتری داشت. به خصوص اینکه من بعد از ساعت ۲۲ به فرودگاه شارل دوگل رسیدم و بدترین دردسرها را برای خودم درست کردم (هرگز بلیط هواپیمایی را نخرید که بعد از ساعت ۲۲ وارد فرودگاه شارل دوگل می‌شود). دیگر نمی‌توانید با RER به پاریس بروید،

اما من نمی‌خواستم تسلیم شوم و با تاکسی بروم، این است که منتظر سرویس رفت‌وبرگشت شدم ... اولی پُر بود و حتی قبل از رسیدن من به ایستگاه، دومی هم پُر شد؛ اما سوار شدن در سومی، اگر می‌خواستم ــ مانند بعضی مسافرهای دیگر ــ به زور سوار شوم و از توصیه‌های راننده سرپیچی کنم، امکان‌پذیر بود. خلاصه اینکه ساعت دوی صبح به پاریس رسیدم. تصادفاً آپارتمان قدیمی‌ام در پاریس خالی بود و توانستم چند ساعتی در آنجا بخوابم بعد راهیِ حومهٔ جنوب پاریس شوم.

در RER، نامه‌هایم را مرور می‌کنم، مثل همیشه بدون سیم رابط. نامه پشتِ نامه ... اما بعد از تلفن لواس در ماه فوریه، و تأییدیه‌ای که چند روز بعد به دستم رسید، کم‌کم فشار کمتری روی شانه‌هایم احساس می‌کنم. این حالت یک‌مرتبه به من دست نداد: هنوز هم باید ماه‌ها صبر کنم تا این احساس فوریت من را رها کند. به علاوه، سه ماه و نیم دیگر هم باید با فشارهای دیگری رویارویی کنم. فعلاً باید این احساس آرامش را مزه‌مزه کنم.

پیامی به اطلاع من می‌رساند که تنها کسی هستم که برای انتقال به دانشگاه لیون ـ ۱ در سمت شمارهٔ ۱۹۲۸ در نظر گرفته شده‌ام. به هر صورت، ۱۹۲۸ فقط می‌تواند برایم خوشبختی بیاورد، چون سال تأسیس انستیتو پوانکاره است! انتقال به دانشگاه لیون ـ ۱ باعث می‌شود بتوانم رابطهٔ علمی‌ام با شهر لیون را حفظ کنم بدون اینکه سِمتی در دانشسرای عالی لیون را اشغال کنم که در آن مدرس زیاد ندارند.

گدایی شانسش را نزد مسافرین اندکی که در قطار نشسته‌اند می‌آزماید. این زن با صدای شکسته‌اش باب صحبت را باز می‌کند.

ــ با این چمدانهای بزرگ از تعطیلات برمی‌گردی؟

ــ تعطیلات؟ نَخیر! آخرین تعطیلات من عید نوئل بود ... تعطیلات بعدی هم هنوز خیلی مانده برسد.

ــ از کجا می‌آیی؟

ــ در قاهره بودم، در مصر، کار داشتم.

ــ خُب خوبه! کارِت چیه؟

ــ من کارَم ریاضیه.

ــ اِ، خُب خوبه. برَم دیگه، خداحافظ. درساتو خوب بخون!

لبخندی می‌زنم، از اینکه هنوز فکر می‌کنند دانشجو هستم خوشم می‌آید. اما، گذشته از هر چیز، او راست می‌گوید، من هنوز دانشجو هستم ... شاید تا آخر عمر.

*

امروز در هواپیما بودم و برای اینکه خودم را «سرگرم» کنم ۵ دقیقه را صرف این کردم که سعی کنم تمام پدیده‌های الکتریکی، الکترونیکی، الکترومغناطیسی، آیرودینامیکی و مکانیکی‌ای را که داخل هواپیما و اطراف آن روی می‌دهد احساس کنم. تمام این پدیده‌های کوچکِ جداگانه یك کل را تشکیل می‌دهند و این کل کارکردی دارد! آگاهی از آنچه در اطراف ما می‌گذرد شگفت‌انگیز است ... شگفت‌انگیز!

متأسفانه، وقتی فرمان هواپیما را در دست داری، به ندرت بیش از ۵ دقیقه برای این نوع تفکر وقت داری.

ارادتمند.

(بخشی از ایمیلی که در تاریخ ۹ سپتامبر ۲۰۱۰ از یک ناشناس دریافت شد.)

فصل چهل‌ودوم

کلیسای سَن - لویی - آن - لیل[1]، ۸ ژوئن ۲۰۱۰

مجمری را که به طرف من گرفته شده بود کمی سریعتر از حد کنار زدم ــ با لباس سیاه و شالی سیاه دور گردن به نشانهٔ عزاداری و عنکبوتی سبز روی یقهٔ کتم به نشانهٔ امید، زیر گنبد عظیم کلیسا، به طرف تابوت قدم برمی‌دارم، آن را لمس می‌کنم و با احترام سر تعظیم فرو می‌آورم. در چند سانتی‌متری من جسد پُل مَلیاوَن[2] آرمیده است، شخصیتی که نظریهٔ احتمالات نیمهٔ دوم قرن بیستم تحت قیمومیت او بود. مخترع «حساب ملیاونِ» معروف، که بیش از هرکس دیگر در نزدیک کردن احتمالات، هندسه و آنالیز سهیم بوده است و من هم با کارهایی که در مورد ترابری بهینه انجام داده‌ام در این تقریب شرکت داشته‌ام. همان‌طورکه دوست دارم گاهی برای خودم تکرار کنم «در ملیاون می‌شود ویلانی را پیدا کرد».[3]

ملیاون شخصیتی پیچیده و جذاب داشت، هم محافظه‌کار بود و هم بُت‌شکن، دارای مغزی استثنایی بود. از ابتدای کارم مراقب من بود، مرا تشویق می‌کرد و پایم را روی پله‌های نردبان ترقی نهاد. مسئولیت‌های مهمی هم در هیئت تحریریهٔ مجلهٔ عزیزدُردانه‌اش، مجلهٔ آنالیز تابعی[4]، که آن را همراه با دو محقق آمریکایی در سال ۱۹۶۶ تاسیس کرده بود، برعهده‌ام قرار داده بود.

با وجود ۵۲ سال اختلاف سنی، با هم دوست شده بودیم. ذائقهٔ ریاضی او نزدیک به سلیقهٔ من بود، و احتمالاً احساس تحسین متقابل بود. البته ما هیچ وقت از فرمول «دوست عزیز» فراتر نرفتیم، اما این الفاظ تنها برای اظهار ادب نبود بلکه صادقانه بود.

---

1. Église de Saint-Louis-en-l'Île
2. Paul Malliavin
3. dans Malliavin il y a Villani
4. *Journal of Functional Analysis*

یک روز هر دو در کنفرانسی در تونس شرکت داشتیم ــ ملیاون در آن وقت ۷۸ سال داشت اما هنوز خیلی فعال بود! در وقت جمع‌بندی من وظیفهٔ مجری را داشتم، چند کلمه دربارهٔ تأثیر استثنایی او گفتم؛ دیگر یادم نیست آیا او را اسطورهٔ زنده خوانده بودم یا خیر، در هر صورت منظورم همان بود. به نظرم آمد ملیاون از این حرف که در مقابل آن جمعیت زده شده بود کمی دست‌وپای خود را گم کرد. کمی بعد پیش من آمد و خیلی مهربانانه، بدون آنکه لبخندی بزند، به من گفت: «می‌دانید، این اسطوره دیگر کمی خسته شده».

اما منظورش هر چه بوده باشد، واقعیت این است که پل ملیاون مُرد بدون اینکه اسلحه‌اش را زمین بگذارد، همان طور که دامادش اعلام کرد «تا آخرین دقایق عمرش به ریاضیات مشغول بود». مرگ او در همان روزی اتفاق افتاد که ولادیمیر آرنولد، این غول دیگر ریاضیات قرن بیستم، که سبکی کاملاً متفاوت داشت، درگذشت.

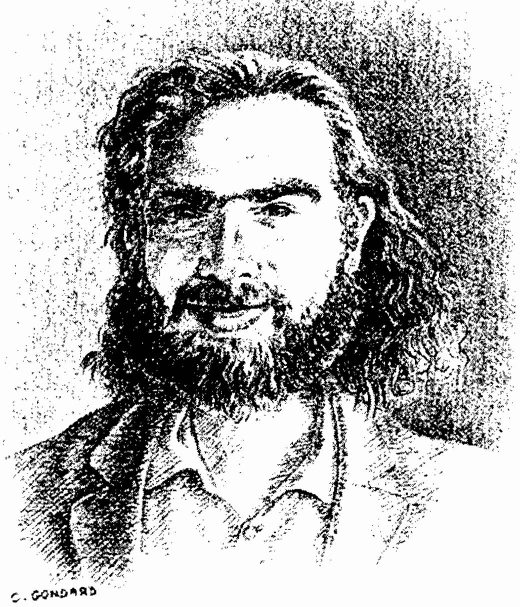
پل ملیاون

باید راه را بدون او ادامه داد. می‌توانید روی من حساب کنید، دوست عزیز، مجلهٔ آنالیز تابعی در دستان مطمئنی قرار دارد.

و ... چقدر مایهٔ مباهات من می‌شد اگر می‌توانستم در مورد آن تلفن مخفی‌ای که در ماه فوریه دریافت کردم با شما سخن بگویم، چون می‌دانستم خیلی خوشحال می‌شوید.

هنوز مراسم تمام نشده، باید با عجله به انستیتو هانری پوانکاره برگردم چون امروز اختتامیهٔ کنفرانس بزرگی است که همراه با مؤسسهٔ ریاضی کلی برگزار کرده‌ایم تا حل حدس پوانکاره توسط پرلمان را جشن بگیریم. باید در آخرِ آخرین سخنرانی حضور داشته باشم و چند کلمه به عنوان

اختتامیه بگویم؛ برای اینکه هیچ ریسک نکنم و دیر نرسم، باید با تمام قوا در خیابان‌های پاریس، از ایل سَن ـ لویی تا وسط ناحیهٔ پنج را بدوم. اگر «موسیو پُل» من را با این وضع می‌دید، با صورت قرمز، عرق‌ریزان، در لباس رسمی، لکوموتیووار نفس‌زنان، حتماً لبخند کوتاهی می‌زد. ابلهانه است، اما از خود می‌پرسم آیا آن‌طور که باید در مقابل تابوت خم شده‌ام یا خیر. در هر صورت، کارم صادقانه بود، و مهم همین است.



گریگوری پرِلمان

در اوائل قرن بیستم، هانری پوانکاره عرصهٔ کاملاً جدیدی در ریاضیات، توپولوژی دیفرانسیل، را گشود که هدف از آن طبقه‌بندی اَشکالی بود که در اطراف ما هستند با تغییراتی که ممکن است در شکل‌های آنها داده شود.

می‌توانیم با تغییر شکل یك حلقه (دونات) یك فنجان بسازیم اما هرگز نمی‌توانیم آن را به شکل یك کُره درآوریم: فنجان یك سوراخ (دسته) دارد اما کره سوراخ ندارد. به طور کلی، برای اینکه یك رویه (شکلی که روی آن هر نقطه در ناحیه‌ای کوچك اطراف نقطه توسط دو مختصه، مانند طول و عرض جغرافیایی مشخص می‌شود) را بشناسیم، کافی است که تعداد دسته‌های آن را بشماریم.

اما ما در جهانی زندگی می‌کنیم که سه‌بعد دارد. آیا برای طبقه‌بندی چنین اشیائی کافی است که تعداد سوراخ‌ها را شمارش کنیم؟ این سوالی است که در سال ۱۹۰۴ پوانکاره طی شش مقالهٔ با هیبت مطرح کرد. او در این مقالات به نحوی نه چندان مرتب، اما با نبوغی غیرقابل انکار، توپولوژی را که داشت تازه به دنیا می‌آمد پایه‌گذاری کرد. سئوال پوانکاره بنا

بر این این بود که آیا تمام اشکال ۳بعدی کراندار (بگوییم جهان‌های محدود)، بدون سوراخ، معادل یکدیگرند. یکی از این اشکال کاملاً شناخته‌شده بود و آن ۳ ـ کره یا کره‌ای با سه مختصه در فضای ۴بعدی است. در اصطلاح اهل فن، حدس پوانکاره این‌طور بیان می‌شود: هر مانیفُلد (خمینهٔ) هموار ۳بعدیِ فشرده بدون مرز و همبند ساده، با کرهٔ ۳ بعدی دیفئومورف است.

آیا این گزارهٔ معقول درست است؟ پوانکاره این سئوال را مطرح کرد و با کلماتی تحسین‌برانگیز، که تقریباً به اندازهٔ «حاشیهٔ باریك» فرما ارزش دارد، گفت: «اما این مسئله ما را به جاهای بسیار دوری خواهد کشاند.»

زمان‌ها پس از زمان‌ها گذشتند ...

حدس پوانکاره به مشهورترین معمای تمامی هندسه بدل شد و سراسر قرن بیستم را سیراب کرد، و باعث اعطاء سه مدال فیلدز و نه بیشتر و نه کمتر به کسانی شد که به پیشرفت‌هایی جزئی در حل این مسئله نایل آمده بودند.

وقتی ویلیام ترستن[1] به این مسئله پرداخت، مسئله به مرحله‌ای تعیین‌کننده رسید. ترستن که هندسه‌دانی صاحب کشف بود، شهود فوق‌العاده‌ای دربارهٔ مجموعهٔ تمامی شکل‌های ۳بعدی ــ یعنی تمام جهان‌های ممکن ــ داشت. او نوعی طبقه‌بندی، شبیه به رده‌بندی در جانورشناسی، از این اَشکال ۳بعدی پیشنهاد کرد؛ این رده‌بندی چنان باشکوه بود که شکاکان هم همراه شدند، کسانی که هنوز در مورد حدس پوانکاره تردید داشتند، در مقابل این کشف زیبا، که از فرط زیبایی می‌بایست حقیقت داشته باشد سَرِ تسلیم فرود آوردند. پس این شد برنامهٔ ترستن، که حدس پوانکاره را نیز دربر می‌گرفت، و خودِ ترستن موفق شد تنها قسمتی از آن را حل‌وفصل کند.

در سال ۲۰۰۰، طبیعی بود که مؤسسهٔ ریاضی کِلی حدس پوانکاره را به عنوان یکی از هفت مسئلهٔ جایزه‌دار، یك میلیون دلار برای هر یك، انتخاب کند. در آن زمان فکر می‌کردند به احتمال زیاد این مسئلهٔ مشهور یك قرن دیگر هم مقاومت خواهد کرد.

اما هنوز سال ۲۰۰۲ تمام نشده بود که ریاضیدان روس گریگوری پرلمان با اعلام اینکه حدس را پس از هفت سال کار مخفیانه روی آن حل کرده است، جامعهٔ ریاضی را بُهت‌زده کرد!!

پرلمان در سال ۱۹۶۶ در لنینگراد ــ یا سَن پترزبورگ ــ متولد شد. ویروس ریاضی از مادرش، که زنی دانش‌پیشه و بااستعداد بود، از یك مکتب ریاضی روسیِ استثنایی، تحت سرپرستی آندرِی کُولْموگوروف و از یك کلوپ ریاضی که در آن معلم‌های بسیار علاقه‌مند او را برای شرکت در المپیادهای بین‌المللی آماده کرده بودند، به او سرایت کرد. پس از آن او

1. William Thurston

تحت سرپرستی چند تن از بهترین هندسه‌دانان قرن: الکساندروف، بوراگو و گروموف، درس خواند؛ پس از چند سال رهبر تحقیقات در زمینهٔ نظریهٔ فضاهای تکین با انحناء مثبت شد. اثبات او از «حدس روح» سبب شهرت او شد، و به نظر می‌رسید که آینده‌ای درخشان در پیش دارد ... ولی بعد از نظرها ناپدید شد!

از سال ۱۹۹۵ به بعد دیگر خبری از پرلمان نشد. اما او نه تنها کارهایش را متوقف نکرده بود بلکه نظریهٔ شارش ریچی را هم از ریچارد همیلتون گرفته بود. طبق این نظریه، می‌توان به طور پیوسته اشیاء هندسی را تغییر شکل داد و انحناء آنها را پهن کرد، همان‌طور که معادلهٔ گرما دما را می‌گستراند. هدف بلند همیلتون این بود که از این نظریه برای اثبات حدس پوانکاره استفاده کند، اما سال‌ها بود که او سر مسائل فنی کلان گیر کرده بود. این راه محکوم به شکست به نظر می‌رسید.

تا اینکه در سال ۲۰۰۲ پرلمان آن ایمیل مشهور را برای تعدادی از همکاران آمریکایی‌اش فرستاد. پیامی بود در چند خط که از دستنوشتی خبر می‌داد که در همان موقع او برای اطلاع عموم در اینترنت قرار داده بود و در آن بر طبق گفتهٔ خودش «گزیدهٔ طرح اولیهٔ اثبات» حدس پوانکاره و در واقع قسمت بزرگی از برنامهٔ ترستن را ترسیم کرده بود.

پرلمان با الهام گرفتن از فیزیك نظری، نشان داده بود که یك کمیت معلوم که او آن را، به علت تشابهی که با آنتروپی بولتزمان داشت، آنتروپی نامیده بود، به تدریج که هندسهٔ یك شیء بر اثر شارش ریچی تغییر شکل می‌دهد، کاهش پیدا می‌کند. پرلمان موفق شد به برکت این کشف بدیع، که احتمالاً هنوز به طور کامل عمق آن را نسنجیده‌ایم، ثابت کند که می‌توان شارش ریچی را به حال خود رها کرد تا کارش را انجام دهد بدون اینکه هرگز بیمی از وقوع انفجار، یعنی پیدایش یك تکینگی بیش از حد خشن، برود. بهتر بگوییم: اگر یك تکینگی هم تولید شود، می‌توان آن را توصیف و کنترل کرد.

پرلمان به ایالات متحده آمد و چند کنفرانس دربارهٔ کارهایش داد، و حضار تحت تأثیر احاطه‌اش بر مسئله قرار گرفتند. او از فشار رسانه‌های گروهی ناراحت شده بود و همچنین از کُندی جامعهٔ ریاضی در هضم اثباتش عصبانی بود. او به سن پترزبورگ بازگشت و راستی‌آزمایی استدلال‌هایش را، بدون حضور خود، به دیگران واگذار کرد. نه کمتر و نه بیشتر از چهار سال طول کشید تا چند گروه مختلف توانستند اثبات پرلمان را دوباره تولید کنند و کوچك‌ترین جزئیاتش را هم کامل کنند!

اهمیت قابل ملاحظهٔ این اثبات، و کناره‌گیری پرلمان، جامعهٔ ریاضی را در وضعیتی

بی‌سابقه قرار داد و باعث ایجاد تنش‌ها و مشاجراتی در مورد مالکیت این اثبات شد. به هر حال، بالاخره ریاضیدان‌ها اطمینان حاصل کردند که پرلمان حدس بزرگ هندسی سازی ترستن را همراه با حدس پوانکاره ثابت کرده است. در چند دهۀ اخیر این شاهکار نظیری ندارد، شاید به استثناء اثبات قضیۀ بزرگ فرما توسط اندرو وایلز در دهۀ ۹۰.

پرلمان جایزه‌باران شد: مدال فیلدز در سال ۲۰۰۵، و سپس عنوان مهمترین پیشرفت علمی سال، عنوانی که تقریباً هیچ‌وقت به ریاضیدانان تعلق نمی‌گیرد. به دنبال آن در سال ۲۰۱۰ جایزۀ هزارۀ کلِی آمد، و این اولین‌باری بود که این جایزۀ گرانبها اهدا می‌شد! پرلمان نمی‌دانست با این همه جایزه چه کند، او یکی را پس از دیگری رَد می‌کرد.

عدۀ زیادی گزارشگر از سراسر جهان هجوم آوردند تا دربارۀ رد جایزۀ یك میلیون دلاری، هدیۀ لاندن کلی، اظهارنظر کنند و از رویِ چشم و هم‌چشمی موضوع ریاضیدان دیوانه را مطرح کردند. آنها در اشتباه بودند: آنچه در مورد پرلمان خارق‌العاده بود نه امتناع از دریافت پول و پذیرفتن افتخار آن بود و نه شخصیت غیرعادی او ــ نمونه‌هایی از این نوع و آن نوع را قبلاً دیده‌ایم ــ بلکه این قوت شخصیت او بود و رسوخ فوق‌العاده‌ای که داشت و توانست با هفت سال کار انفرادی و شجاعانه بر معمای ریاضی نمادین قرن بیستم غلبه کند.

در ماه ژوئن سال ۲۰۱۰، مؤسسۀ ریاضی کلی و انستیتو هانری پوانکاره مشترکاً در پاریس همایشی به افتخار این کار درخشان برگزار کردند. پانزده ماه بعد، این دو اعلام کردند که پولی که پرلمان رد کرده بود به ایجاد یك کرسی بسیار خاص مستقر در انستیتو پوانکاره اختصاص خواهد یافت: «کرسی پوانکاره» از جوانان ریاضی‌کاری که آیندۀ بسیار روشنی برایشان پیش‌بینی می‌شود با شرایط ایده‌آل، بدون الزام به تدریس با برخورداری از مسکن، استقبال خواهد کرد تا بتوانند شکوفا شوند، همان‌طور که پرلمان توانست با بهره گرفتن از میهمان‌نوازی انستیتو میلر در برکلی پیشرفت کند.

فصل چهل‌وسوم

حیدرآباد، ۱۹ اوت ۲۰۱۰

نام من در سالن بی‌انتها طنین انداخته بود و تصویرم، که پی‌یر ماراوال عکاس آن را پرداخته بود ــ دستمال گردن به رنگ قرمز جگری، عنکبوت سفیدی که به ارغوانی روشن می‌زد ــ روی پرده‌ای عظیم افکنده شده بود. شب را نخوابیده بودم، با این حال احساسم این است که هرگز آن‌قدر بیدار نبوده‌ام. این مهمترین لحظه در زندگی حرفه‌ای من است، لحظه‌ای که ریاضیدان‌ها در خواب می‌بینند اما جرأت ندارند اعترافش کنند. دانش‌پیشهٔ کم‌وبیش گمنامی که در فهرست «هزار پژوهشگر»ی که ماراوال از آنها عکسبرداری کرده بود با شمارهٔ ۳۳۳ به چشم می‌خورد، اکنون در روز روشن ظاهر می‌شود.

من از جای خودم بلند می‌شوم و به طرف صحنه می‌روم درحالی‌که این کلمات در سالن طنین می‌اندازند: سدریک ویلانی برای اثبات میرایی لانداوِ غیرخطی و اثبات همگرایی به حالت تعادل در معادلهٔ بولتزمان به دریافت مدال فیلدز نایل می‌آید.

از پله‌ها بالا می‌روم و سعی می‌کنم قدم‌هایم نه خیلی کُند و نه خیلی تُند باشد، و به خانم رئیس جمهور هند که در وسط صحنه قرارگرفته نزدیک می‌شوم. خانم رئیس جمهور کوچک است اما قدرتی از او تراوش می‌کند که در رفتار اطرافیان او مشهود است. در مقابل او می‌ایستم، او کمی خم می‌شود، و من هم در پاسخ خم می‌شوم، خیلی بیش از حد، سلام به سبک هندی، ناماسته[1]، می‌دهم.

او مدال را به سوی من دراز می‌کند، و من مدال را به جمعیت نشان می‌دهم، تنه‌ام را طور

1. *Namaste*

غریبی خم می‌کنم، طوری که نَه صورتم به طرف جمعیت باشد و نَه به طرف رئیس دولت هند، بلکه ۴۵ درجه برای هر کدام.

حدود سه هزار نفر برای من دست می‌زنند، در سالن بسیار بزرگ کنگره در جوار هتل مجللی که شرکت‌کنندگان در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان ۲۰۱۰، در آن اقامت دارند. هجده سال پیش، کسانی که پس از نطق افتتاحیهٔ من در جشن دویستمین سالگرد تأسیس دانشسرای عالی دست می‌زدند مگر چند نفر بودند؟ شاید هزار نفر؟ چه روزهایی بود ... چقدر پدرم ناراحت بود از اینکه نتوانسته به علت یک سهل‌انگاری در سازماندهی، تصاویری از این مراسم به یادگار داشته باشد. آن هم برای خودش رویدادی بود، اما آن مراسم، الان چقدر در مقایسه با خیل عظیم عکاسان و فیلمبرداران که صحنه را به مسلسل بسته‌اند، حقیر جلوه می‌کند. اینجا مثلِ فستیوال کَن است ...

مدال را دریافت می‌کنم، دوباره در مقابل خانم رئیس جمهور خم می‌شوم، سه قدم به عقب می‌روم، چرخی می‌زنم و به طرف دیوار می‌روم، تقریباً عیناً همان‌طور که دیشب با برگزارکنندگان کنفرانس تمرین کردیم.

بد نبود. من از اِلون لیندن‌اشتراوس،[1] که اول مزین به این مدال شد کارم را بهتر انجام دادم، او مثل اینکه در ابرها سیر می‌کرد، تمام توصیه‌های تشریفاتی را زیرِ پا له کرد. وقتی پایین آمد، استاس اِسمیرنوف،[2] یکی دیگر از برندگان، دمِ گوشم گفت: «ما دیگه از این بدتر نمی‌شیم.»

پس از آن لحظه که توسطِ دوربین‌ها جاودانه شد، دیگر نمی‌دانم چه اتفاقی افتاد. بعد نوبت اهداء جوایز نقدی رسید، در برابر انبوهی از دیجیتال‌ها ــ دوربین‌های عکاسی، دستگاه‌های ویدئو، ماشین‌های گیرنده و ثبت‌کننده ــ بعد هم کنفرانس مطبوعاتی ...

در سالنی که مراسم برگزار می‌شد، کامپیوتر و تلفن همراه نمی‌شد آورد. یک کمی بعد ۳۰۰ نامهٔ تبریک در صندوق پستی‌ام خواهد بود. خیلی بیشتر از این هم بعداً خواهد رسید. نامه‌هایی از همکاران، دوستان، آشنایان دور، کسانی که بعد از ده، بیست یا سی سال تازه پیدایشان می‌شود، کسانی که مطلقاً برایم ناآشنا هستند، رفقای قدیم دبستان ... بعضی از این نامه‌ها خیلی احساساتی نوشته شده‌اند. یکی از این پیام‌های تبریک خبر از مرگ یکی از دوستان دوران نوجوانی‌ام را می‌دهد که چند سال پیش فوت شده است. خوب می‌دانم، زندگی پُر است از خوشی و ناخوشی که به طور تفکیک‌ناپذیری درهم‌آمیخته‌اند.

و پیام تبریک رسمی ریاست جمهوری که از طریق مطبوعات اعلام شده است. همان‌طور که پیش‌بینی می‌شد اِنگو هم صاحب مدال شد؛ کمی طول کشید تا کاملاً متوجه شوم تا چه حد این پیروزی مضاعفِ فرانسه در برانگیخته شدن غرور ملی مؤثر است. اِیو مِیر[3] را هم به حساب

1. Elon Lindenstrauss 2. Stas Smirnov 3. Yves Meyer

نیاورده‌ام که جایزهٔ بسیار معتبر گاوس را برای مجموعهٔ کارهایش دریافت کرد! اکنون فرانسوی‌ها کشف خواهند کرد که چهار قرن است که فرانسه بر قلهٔ تحقیقات ریاضی بین‌المللی ایستاده است. در این روز ۱۹ اوت سال ۲۰۱۰، کشور ما تا به حال جمعاً، نه کمتر و نه بیشتر، ۱۱ مدال فیلدز را از مجموع ۵۳ مدالی که تا به امروز اهدا شده است از آنِ خود ساخته!

کلمان هم البته اینجاست، سرحال و بشاش. کمتر از ده سال پیش بود که برای اولین بار وارد دفتر کار من در ENS لیون شد و دنبال موضوعی برای رساله‌اش می‌گشت ... این شانسی برای او بود و شانسی برای من.

جمعیت را ترک می‌کنم و وارد اتاقم در هتل می‌شوم. اتاقی است بی‌مزه، هیچ نشانی از هندوستان در آن نیست؛ ممکن بود به جای هندوستان در مجمع‌الجزایر ماژلان باشم! اما آمده‌ام اینجا برای انجام وظیفه.

به مدت چهار ساعت، بدون وقفه، به تلفن روزنامه‌نگاران جواب می‌دادم، و با مهارت هم تلفن ثابت را برمی‌داشتم هم تلفن همراه را. هنوز یک تلفن تمام نشده، به منشی تلفنی نگاه می‌کردم و می‌دیدم پیام جدیدی رسیده است، تمامی نداشت. سئوال‌ها هم شخصی بودند، هم علمی و هم مربوط به انستیتو. اما سئوال‌هایی که اغلب تکرار می‌شدند و تقریباً یکسان بودند این بود: احساس شما از دریافت چنین جایزه‌ای چیست؟

بالاخره از اتاقم پایین می‌آیم، کمی رنگ پریده و گرسنه ــ اما این حالت‌ها برایم تازگی ندارد. یک چای ماسالای پُرادویه سفارش می‌دهم، و برای مواجهه با جمعیت برمی‌گردم. انبوهی از جوانان دور و بَرِ مرا می‌گیرند، البته خیلی‌هاشان هندی هستند. صدها امضا می‌دهم و کمی گیج، بارها برای گرفتن عکس، ژست می‌گیرم.

برعکس بقیهٔ برندگان جایزه، من تنها آمده بودم: زن و بچه‌هایم در فرانسه مانده بودند، به دور از شلوغی. من این را ترجیح می‌دهم! و به توصیه‌ها گوش دادم، دربارهٔ مدال با هیچ کس به جز زنم صحبت نکردم ــ حتی به پدر و مادرم هم نگفتم، آنها از طریق مطبوعات باخبر شدند!

و ... کاترین ریبرو یک دسته گل رُز بسیار زیبا به منزلم فرستاد!

در همان هنگامی که در حیدرآباد مشغول ژست گرفتن در مقابل آن‌همه دوربینی بودم که با عجله عکس می‌گرفتند، در شهر لیون همکارم میشل شاتزمن در حال احتضار بود، و این را، حتی تصورش را هم نمی‌توانستم بکنم. میشل دختر اخترفیزیکدان بزرگ فرانسوی اِوری شاتزمن[1] و یکی از پرابتکارترین ریاضیدانانی بود که تا به حال دیده‌ام، همیشه برای ورود به یک چالش آموزشی لاینحل و یا بررسی روابطی که هیچ کس دیگر جرئتش را نداشت، مانند اکتشاف مرز بین جبر و

1. Évry Schatzman

آنالیز عددی، آماده بود. فرانتیرز[1] نام یک برنامهٔ تحقیقاتی بود که میشل با سروصدای زیاد نوشته بود و شکل یک بیانیه را داشت. میشل از زمانی که در سال ۲۰۰۰ به لیون آمدم دوست من بود؛ در سمینارهای مشترک شرکت می‌کردیم، و بیش از یک بار برای جذب این یا آن ریاضیدان عالی به دانشگاه لیون توطئه چیدیم.

میشل شاتزمن

میشل هیچ‌وقت مواظب حرف زدنش نبود و همیشه دسته‌گل به آب می‌داد، وگاهی از طنز تلخ ویرانگری استفاده می‌کرد. پنج سال بود که مبتلا به سرطانی غیرقابل‌علاج شده بود، مرتباً بین شیمی‌درمانی و اتاق عمل در رفت‌وآمد بود و در حالی که پلک می‌زد به ما می‌گفت از وقتی که هزینهٔ شامپو را صرفه‌جویی می‌کند زندگی‌اش چقدر بهتر شده است. چند ماه پیش شصتمین سال تولدش را در لیون جشنِ ریاضی گرفتیم. در میان سخنرانانی که کم‌وبیش از همه جا آمده بودند یوریل فریشِ[2] متلون‌المزاج نیز بود. او فیزیکدانی است با شهرت جهانی که قبلاً شاگرد پدر میشل بوده است. من هم حضور داشتم که پسر معنوی یکی از پسرهای معنوی او می‌شوم. میشل، بسیار هوشمندانه، متوجه رابطه‌ای بین سخنرانی من در مورد میرایی لانداو و «تایگر»هایی که یوریل بدان‌ها اشاره کرده بود شد. چه کلاسی داشت!

اما این هفته‌های آخر حال او ناگهان رو به وخامت گذاشته بود. میشل که در بیماری هم، مانند تمام دوران زندگی‌اش، باشخصیت و سلیم‌النفس بود، برای اینکه هوشیاری خود را حفظ کند نخواست از مرفین استفاده کند. در بستر مرگ، خبر برندگان مدال فیلدز را که بی‌صبرانه منتظرش بود شنید؛ و چند ساعت بعد چشم از جهان فرو بست. این را می‌دانیم: زندگی پر است از خوشی و ناخوشی که به طور تفکیک‌ناپذیری درهم آمیخته‌اند.

*

1. Frontières 2. Uriel Frisch

از امروز صبح، هتل بزرگ حیدرآباد محل بزرگ‌ترین تجمع ریاضی‌پیشه‌ها در دنیاست. از همهٔ قاره‌ها آمده‌اند و همگی مهارت‌های ریاضی خاص خود را همراه آورده‌اند: آنالیز، جبر، هندسه، احتمالات، آمار، معادلات با مشتقات جزئی، هندسهٔ جبری و جبر هندسی، منطق سخت و نرم، هندسهٔ متری و اولترامتری، آنالیز هارمونیك و آنالیز با هارمونی، نظریهٔ احتمالاتی عددها و معدودها، کاشفان مدل‌ها و اَبَرمدل‌ها، پدیدآورندگان نظریه‌های اقتصادی خُرد کلان، مفهوم‌پردازان ابرمحاسبه‌گرها و الگوریتم‌های ژنتیك، متخصصان تصویرپردازی و هندسهٔ باناخی، ریاضیات تابستان، پاییز، زمستان و بهار، و هزار تخصص دیگر که از این جماعت یك الههٔ شیوای بزرگ با هزار دست ریاضی ساخته است.

می‌خواهند چهار برندهٔ مدال فیلدز، برندگان جایزهٔ گاوس[1]، نِوانلینا[2] و چِرن[3] را، یکی پس از دیگری به پای الههٔ شیوا قربانی کنند. خانم رئیس جمهوری هند، راهبهٔ بزرگ، این هفت ریاضیدان وحشت‌زده را در میان تشویق حضار به جمعیت معرفی می‌کند.

جشن بزرگ کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌پیشه‌ها، بدین ترتیب شروع می‌شود، و در مدت دو هفته به ترتیب سخنرانی‌ها و مباحثات، پذیرایی‌ها، میهمانی‌های کُکتِل، مصاحبه‌ها، عکاسی‌ها، هیئت‌های نمایندگی، شب‌نشینی‌های رقصان و خندان، گردش در تاکسی‌های دولوکس و ریکشاهای شاعرانه یکی به دنبال دیگری اتفاق خواهد افتاد. در این جشن از وحدت و کثرت در عالم ریاضی تجلیل خواهد شد: هندسهٔ آن که همیشه پویاست، لذت کاری که به ثمر رسیده، شگفتی در مقابل کشف‌های جدید، رویاپردازی در مقابل مجهولات.

پس از اینکه جشن پایان می‌یابد، همهٔ ریاضی‌پیشه‌ها به دانشگاه‌های خود، به پژوهشگاه‌ها، به کارخانه‌ها یا خانه‌های خود بازمی‌گردند و هر یك، به شیوهٔ خود به این ماجرای عظیم اکتشافات ریاضی ادامه می‌دهند و همگی مسلح به سلاح منطق و سخت‌کوشی، و همچنین، تخیل و عشق، به اتفاق، مرزهای دانش بشر را گسترش می‌دهند.

و هنوز این کنگره تمام نشده به فکر کنگرهٔ بین‌المللی بعدیِ ریاضی‌پیشه‌ها هستند، چهار سال دیگر، در مرکز محل زندگی ببر ارزشمند کره‌ای. موضوع‌های مطرح کدام خواهند بود؟ قربانیان بعدی چه کسانی خواهند بود؟

وقتش که برسد، هزاران ریاضی‌پیشه خواهند آمد تا به ببر پیر ادای احترام کنند. آنها هندسهٔ شکل‌های سینوسی او را مورد مطالعه قرار خواهند داد، تقارن بدون خطای او را به

1. Gauss 2. Nevanlinna 3. Chern

صورت اصل موضوعی در خواهند آورد، تصادفی بودن پرچنب‌وجوش او را خواهند آزمود، سهم واکنش ـ پخش را در راه‌راه‌های او مورد تجزیه‌وتحلیل قرار خواهند داد، روی موهای سبیلش جراحی دیفرانسیل انجام خواهند داد، انحناء چنگال‌های تیزش را اندازه خواهند گرفت، او را از دست چاه‌های کوانتومی پتانسیل رها خواهند کرد و با او نظریه‌های اثیری ریسمان‌ها و سبیل‌های مرتعش را دود خواهند کرد.

برای چند روز، ببر پرزور از ابتدای دُمش تا انتهای پوزه‌اش ریاضیدان خواهد شد.
(مقالهٔ من در چاپ کره‌ای کتاب رمزگشایان، ویرایش مؤسسهٔ مطالعات عالی علمی[1])

*

پدیدهٔ ببر در معادلات برگرز و اویلرِ گالرکین ـ بریده‌شده *(1h00')*
توسط یوریل فریش[2]

نشان داده می‌شود که جواب‌های معادلات هیدرودینامیکی رقیق، با حذف تمام مدهای فوریهٔ فضایی که عدد موج آنها از یك عدد آستانهٔ k_g بیشتر است، ویژگی‌های غیرمنتظره‌ای از خود بروز می‌دهند. هم معادلهٔ یك‌بعدی برگرز و هم معادلهٔ ۲بعدی تراکم‌ناپذیر اویلر، هر دو مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به ازاء k_g بزرگ و شرایط اولیهٔ هموار، اولین نشانهٔ بُرش، ایجاد یك نوسان موج کوتاه است که به آن «ببر» می‌گوییم، علت آن برهم‌کنش تشدیدی بین حرکت ذرات سیال و امواج برش است که براثر ویژگی‌های کوچك‌مقیاس (شوك‌ها، لایه‌هایی که دارای شیب چرخشی تند هستند و غیره) تولید می‌شود. این ببرها وقتی ظاهر می‌شوند که تکینگی‌های فضای مختلط به اندازهٔ یك طول موج گالرکین $\lambda_g = ۲\pi/k_g$ با ناحیهٔ حقیقی فاصله دارند و اکثراً بسیار دور از ساختارهای کوچك‌مقیاس موجود، در محل‌هایی که سرعت آنها با سرعت‌های چنین ساختارهایی وفق می‌دهد، پدید می‌آیند: ببرها در ابتدا ضعیف‌اند و مکان آنها به شدت محدود است ـــ در مورد معادلهٔ برگرز، در زمان ظهور اولین شوك، دامنه و پهنای آنها به ترتیب متناسب‌اند با $k_g^{-۲/۳}$ و $k_g^{-۱/۳}$ ـــ اما رشد می‌کنند و بالاخره به سراسر جریان هجوم می‌آورند. بدین ترتیب ببرها اولین تجلیات گرمایی‌سازی[3] هستند که در سال ۱۹۵۲ توسط تی.دی. لی[4] پیش‌بینی شدند. ناهنجاری اتلافی ناگهانی ـــ حضور یك

1. *Les Déchiffreurs* (Belin), édité par l'Institut des hautes études scientifiques
2. Tyger phenomenon for the Galerkin-truncated Burgers and Euler equations (1h00') by Uriel Frisch
3. thermalization 4. T.D. Lee

اتلاف متناهی در حد امحاء و تجلیات چسبندگی در یك زمان متناهی ــ که در مورد معادلهٔ برگرز به خوبی شناخته شده است و گاهی هم در مورد معادلهٔ ۳بعدی اویلر حدس زده می‌شود، در مورد معادلهٔ بریده‌شده نیز مابه‌ازائی دارد: توانایی ببرها در ذخیره‌سازی مقدار محدودی انرژی درحد $k_g \to \infty$. این منجر می‌شود به تنش‌های رِینولدز که بر مقیاس‌هایی بزرگ‌تر از طول موج گالرکین عمل می‌کنند و بدین‌ترتیب از اینکه جریان به جوابِ حد ــــ رقیق همگرا شود جلوگیری می‌کند، شواهدی وجود دارد که نشان می‌دهد شاید بتوان ببرها را تصفیه کرد و رفتار در حد ــــ رقیق را برقرار ساخت.

(خلاصهٔ مقاله‌ای متعلق به سَمْرِیزی سانکار ری،[1] یوریل فریش، سرگئی نازارِنکو،[2] و تاکِشی ماتسوموتو[3] که توسط فریش در کنفرانسی بین‌المللی ارائه شده است.)

*

1. Samriddhi Sankar Ray 2. Sergei Nazarenko 3. Takeshi Matsumoto

The Tyger (William Blake, 1794)

ببر[۱] (ویلیام بلیک، ۱۷۹۴)

Tyger Tyger burning bright
In the forests of the night
What immortal hand or eye
Could frame thy fearful symmetry

In what distant deeps or skies
Burnt the fire of thine eyes
On what wings dare he aspire
What the hand dare seize the fire

And what shoulder & what art
Could twist the sinews of thy heart
And when thy heart began to beat
What dread hand & what dread feet

What the hammer what the chain
In what furnace was thy brain
What the anvil what dread grasp
Dare its deadly terrors clasp

When the stars threw down their spears
And water'd heaven with their tears
Did he smile his work to see
Did he who made the Lamb make thee

Tyger Tyger burning bright
In the forests of the night
What immortal hand or eye
Dare frame thy fearful symmetry

---

۱. هرچند این شعر معروف اساساً ترجمه‌ناپذیر است، اما به سادگی می‌توان چندین ترجمهٔ آزمایشی این شعر به زبان فرانسه را، هم به صورت مکتوب و هم در اینترنت یافت؛ هیچ‌یک از این ترجمه‌ها از نظر من رضایت‌بخش نیست. تنها کاری که می‌توانم بکنم این است که خواننده را به سعی در خواندن و درک شعر به زبان اصلی تشویق کنم. تفسیرهای متعدد و همچنین نسخه‌های مختلفی از این شعر وجود دارد که به سبب تردیدهای شاعر و ناشران او، با یکدیگر اختلاف جزئی دارند. در اینجا من از متن اصلی استفاده کرده‌ام و (مانند بلیک که در یکی از دست‌نوشته‌هایش به طور آزمایشی نقطه‌گذاری نکرده بود) نقطه‌گذاری‌ها را، که خود از یک چاپ به چاپ دیگر متحمل تغییرات زیادی شده است، حذف کرده‌ام.

فصل چهل‌وچهارم

سَنْ ـ رِمی ـ لِه ـ شِورِز، ۱۷ نوامبر ۲۰۱۰

پاییز، سراسر طلایی، قرمز و سیاه: برگ‌های طلایی، برگ‌های قرمز، کلاغ‌های سیاه براق مانند ترانهٔ نوامبرِ تام وِیتس.[۱]

از ایستگاه RER Bی عزیز قدیمی خارج می‌شوم، و به دلِ شب می‌زنم.

این سه ماه آخر خیلی سرم شلوغ بود!

امضاءها.

مطبوعات.

رادیوها.

برنامه‌های تلویزیونی.

فیلمبرداری سینما.

نمایش دونفرهٔ خودم و فرانک دوبوسک[۲] (طنزپرداز فرانسوی) را در یک برنامه تلویزیونی که از کانال‌پلوس[۳] پخش می‌شد دیدم ... چند نفر به من ایراد گرفتند که چرا تن به این «مسخره‌بازی» داده‌ام، اما هیچ مهم نیست! فردای آن روز در خیابان همه مرا متوقف می‌کردند، همه من را «در تلویزیون دیده بودند».

و ملاقات با سیاستمدارها، هنرپیشگان، دانشجویان، صاحبان صنایع، کارفرماها، انقلابیون، اعضاء مجلس، مدیران عالیرتبه، رئیس جمهور ...

1. Tom Waits 2. Franck Dubosc 3. Canal+

سؤال‌هایی که همیشه تکرار می‌شدند. چطور شد که به ریاضیات علاقه‌مند شدید، چرا فرانسوی‌ها در ریاضی این‌قدر خوب هستند، آیا مدال فیلدز زندگی شما را تغییر داده است، حالا که عالی‌ترین نشان را دریافت کرده‌اید انگیزهٔ شما چیست، آیا نابغه هستید، معمای عنکبوت شما چیست ...؟

بائو چو به ایالات متحده برگشت و مرا در رویارویی با این موج تنها گذاشت. من از این کار او ناراحت نیستم، کشف این عوالم پرهیجان است. پشت صحنهٔ دکور تلویزیون و مطبوعات. به این مطلب پی بردم که یک مصاحبه اغلب از آنچه شخص مصاحبه‌شونده می‌گوید منحرف می‌شود، که یک شخص رسانه‌ایِ انتزاعی به نام سدریک ویلانی دارد به وجود می‌آید که درواقع من نیستم و نمی‌توانم او را کنترل کنم.

همهٔ اینها، علاوه بر این که هنوز هم مدیر هستم ... روزی که جواب دوبوسک را دادم، رادیوی RTL هم از من مصاحبه‌ای به عمل آورد، در جلسه‌ای در مورد خوابگاه‌های دانشجویی در شهرداری شرکت کردم، با رئیس هیئت مدیره‌ام بحثی طولانی داشتم و برنامه‌ای هم برای یک برنامهٔ ادبی شبانگاهی حرف‌های نصف شب ضبط کردم.

بعد هم برای پروژه‌ای که هدف از آن احیاء دوبارهٔ یک یارانهٔ ملی از طریق «سرمایه‌گذاری برای آینده» (استقراض بزرگ، آن‌طورکه می‌گویند) است هماهنگی‌هایی انجام دادم. پروژه‌ای است حساس، که چهار مؤسسهٔ ملی و بین‌المللی ریاضی در فرانسه را گردهم می‌آورد: انستیتو هانری پوانکاره در پاریس (IHP)، مؤسسهٔ مطالعات عالی علمی در بور ـ سور ـ ایوت (IHÉS)، مرکز بین‌المللی نشست‌های ریاضی در لومینی (CIRM)، مرکز بین‌المللی ریاضیات محض و کاربردی در نیس (CIMPA). IHÉS نسخهٔ فرانسوی IAS پرینستون است، همان‌جا که شش ماه اقامت داشتم. جایی است دنج و عالی که در پاییز صدای افتادن و شکستن شاه‌بلوط‌ها در آن طنین می‌اندازد، همان‌جا که گروتندیکِ نابغه بهترین قسمت از کارهای بی‌نظیرش را تولید کرد، و همان‌جا که پژوهشگران جوان می‌توانند در حضور برخی از بهترین ریاضیدانان جهان پروژه‌های خود را پیش ببرند. CIRM هم با کنفرانس‌های هفتگی‌اش بیشتر شبیه مابه‌ازای فرانسوی انستیتو اوبروولفاخ است، به جز اینکه خورهای باشکوه مارسی جایگزین جنگل سیاه خَشن شده‌اند. اما CIMPA که تشکیلاتی است قطعاً بین‌المللی، از ریاضیات درکشورهای در حال توسعه، هر جا که لازم باشد و از آن استقبال شود، حمایت می‌کند.

برای گردهم‌آوردن این چهار مؤسسه و سرپرستی آنها با این همه تفاوت و توافق بر سر یک قرارداد مجبور شدم وقت و انرژی گرانبهایی را صرف مذاکرات کنم. پس از گذشت یک سال تمام که در رأس IHP بودم، و از سرگذراندن چند بَلوای دیپلماتیک، برای انجام این هماهنگی حساس آماده

شده بودم. این مجمع CARMIN: **مراکز پذیرش و نشست‌های ریاضیِ بین‌المللی**[1] نامیده شد.

در کنار این فعالیت‌ها، دو کنفرانس جدید برای عموم تهیه کردم، برای سمینار فیزیک نظری متنی طولانی دربارهٔ «زمان» نوشتم ... و مجبور شدم بعضی از کارهای اداری اضافی را خودم انجام دهم و غیبت چندین نفر از پرسنل IHP را که دچار بیماری‌های گوناگون شده بودند، جبران کنم. جای خوشبختی است که کارمندانی که از سلامت برخوردار بودند آن‌قدر ازخودگذشتگی نشان دادند!

در مدت این سه ماه تمام ذخائرم را خرج کردم، به جایی رسیده بودم که حتی اوقات خوابم را هم از چند روز قبل برنامه‌ریزی می‌کردم. «تا آنجا که توان دارم!» به راه رفتنم ادامه می‌دهم درحالی‌که در مورد این پاییز طاقت‌فرسا فکر می‌کنم، الان به قسمت سیاه مسیرم رسیده‌ام.

در سمت چپم جنگل قرار دارد که در آن روباه‌ها وگوزن‌ها می‌گردند؛ در سمت راستم، مزرعه‌ای قرار دارد که در آن گاوهای آرام خوابیده‌اند. اما، به خصوص این سیصدمتری که در پیش است، راهی است کاملاً تاریک، بدون کوچکترین روشنایی عمومی، بدون کوچکترین آلودگی نوری.

یک راه بدون روشنایی، نمی‌توان برایش قیمتی پیدا کرد! وقتی ماه پنهان است سه متری جلوی پایت را هم نمی‌بینی. گامهایت شتاب پیدا می‌کنند، قلبت کمی تندتر می‌تپد، حواست جمع است. یک صدای خِش‌وخِش در جنگل وگوش‌ها تیز می‌شود، به خودت می‌گویی مثل اینکه راه طولانی‌تر از معمول شده است، می‌ترسی یک آدم ولگرد در کمین باشد، از دویدن خودداری می‌کنی.

این تونلِ تاریک کمی شبیه به مرحلهٔ کاملاً تاریکی است که مشخصهٔ ابتدای پروژه‌های تحقیقاتی در ریاضی است. یک ریاضی‌کار مثل کوری است که در اتاقی تاریک قرار دارد و به دنبال گربهٔ سیاهی می‌گردد که شاید اصلاً آنجا نباشد ... داروین این حرف را زده است و راست می‌گفته! تاریکی مطلق، بیلبو در تونل گولوم.

این دورهٔ تاریک که ویژگی گام‌های اول یک ریاضیدان در سرزمینی ناشناخته است، اولین مرحله از چرخهٔ معمول است.

بعد از تاریکی نوبت به کوچک بارقهٔ کوچک و شکننده‌ای می‌رسد و ما فکر می‌کنیم که چیزی در حال اتفاق افتادن است ... بعد، پس از آن کوچک بارقهٔ کوچک، اگر درست پیش بروی، گِره را باز می‌کنی و به روز روشن می‌رسی! به خودت مباهات می‌کنی و از کارت مطمئنی، می‌روی همه جا کنفرانس می‌دهی. اغلب این مرحله یکباره پیش می‌آید، اما بعضی وقت‌ها داستان طوری دیگر پیش می‌رود، من به این داستان‌ها کمی وارد شده‌ام.

و بعد، پس از روز روشن و نور، همیشه به دنبال دستاوردهای بزرگ مرحلهٔ افسردگی می‌آید و

1. Centres d'Accueil et de Rencontres Mathématiques INternationales

شخص کار خودش را پیش خودش کوچک جلوه می‌دهد. خوب ببین، کاری را که تو انجام دادی هر ابله دیگری هم می‌توانست انجام دهد، حالا برو یک مسئلهٔ جدی‌تر پیدا کن و در زندگی کاری بکن. چرخهٔ تحقیقات ریاضی ...

اما فعلاً واقعاً در تاریکی، به معنای واقعی کلمه، پیش می‌روم. و همین طور که راه می‌روم، پرده را روی روزی که در سرتاسرش احساساتم تحریک شده است می‌کشم. اِنگو، مِیر و من با رئیس مجلس ملی ملاقات داشتیم و به محض اینکه فهمیدیم که او قبلاً پژوهشگر بوده است او را یک هم‌رزم تلقی کردیم؛ و بعد هم قبل از جلسهٔ تماشایی طرحِ سئوال از دولت، مورد تشویق تمامی نمایندگان مجلس قرار گرفتیم. و در کتابخانهٔ مجلس ملی گنجی را دیدم غیرقابل توصیف، در آنجا گنجه‌ای بود که سفارشی ساخته شده بود تا آثاری را که دانش‌پیشگان در سفر اکتشافی به مصر نوشته بودند در خود جای دهد. مونژها، فوریه‌ها و بسیاری دیگر حاصل کارهایشان را در این مجلدات به ودیعه گذاشته بودند، و در زیست‌شناسی، تاریخ، معماری، و همه چیز، انقلابی برپا کرده بودند. زیبایی تصاویر، تصاویری که با دست کشیده شده بودند و در آن از موادی استفاده شده بود که در همان مکان ساخته بودند تا آنچه غرق شده و از بین رفته بود بازسازی شود، شکوه کتاب‌های قدیمی، که تنها خبرگان اجازه دارند به آنها دست بزنند، تمام اینها مرا دگرگون کرد و احساس روشنایی وجودم را فراگرفت.

با وجود این، در گوشه‌ای از ذهنم، یک نگرانی پنهان اما سمج وجود داشت که کم‌کم در این ماه‌های گذشته در حال بزرگ شدن بود ... هنوز خبری از اکتا ندارم، هنوز خبری از داورها ندارم! تنها مرجعی که می‌تواند نتایج ما را تایید کند همین داوری مستقل است که توسط متخصصانی انجام می‌شود که گمنام ماندن آنها با دقت محفوظ خواهد ماند.

بعد از این همه افتخارات که نصیب من شده است، اگر مقاله غلط باشد چه بگویم؟ تصورم این است که هیئت فیلدز با در نظر داشتن اهمیت موضوع، درستی میرایی لانداوی ما را مورد تایید قرار داده اما مطابق معمول من در جریان هیچ چیز نیستم. و چه می‌شود اگر یکی از داورها در فرایند آهستهٔ بازخوانی و تایید اشخاص ثالث اشتباهی را از آن‌توها بیرون بکشد؟ سدریک، تو پدر خانواده هستی، و خودکشیِ مرسوم برای تو جزء گزینه‌ها نیست.

شوخی بَس است، این وضعیت بالاخره سروسامان خواهد یافت. و به علاوه دارم به انتهای تونل تاریکی خودم می‌رسم. در آنجا، آن آخر، یک کوچک بارقهٔ کوچک و شکننده دیده می‌شود، نور کُدِ دیجیتال است. نجات یافتم!

این عواطف روزانه، این تاریکی‌ای که دارای بار احساسی شدید است، نمی‌توان قیمتی برایشان تعیین کرد، اما وقتی آنها را از سر می‌گذرانیم چه احساس خوبی به ما دست می‌دهد! دَرِ بزرگِ

سدریک ویلانی و کلمان موهو

سنگین را باز می‌کنم، از حیاط رد می‌شوم، وارد خانه‌ام می‌شوم، چراغ را روشن می‌کنم و می‌روم بالا در دفتر کارم، لپ‌تاپم را به برق می‌زنم و نامه‌هایم را روی مونیتور مشاهده می‌کنم. چی، فقط ۸۸ نامهٔ جدید در دوازده ساعت اخیر برایم رسیده؟ روز بی‌برکتی بود ...

اما در وسط جریان نامه‌ها، یکی از آنها فوراً نگاه مرا به خود جلب می‌کند: اَکتا متمتیکا! پیام یوهان شوسترند[1]، عضو هیئت تحریریهٔ مسئول مقالهٔ ما. نامه را با ترس و لرز باز می‌کنم.

اخبار در مورد مقالهٔ شما خوب هستند.[2]

او باید می‌نوشت خوب است:[3] «اخبار»[4] مانند «ریاضیات»، با وجود علامت جمعی که دارد مفرد است. اما این چه اهمیتی دارد. چیزی بیشتر از این جمله نمی‌خواهم، فوراً نامه را برای کلمان می‌فرستم و دو کلمه هم به آن اضافه می‌کنم: اخبار خوووووب.

این بار دیگر قضیهٔ ما واقعاً تولد یافته است.

*

قضیه (موهو، ویلانی، ۲۰۰۹):

فرض می‌کنیم $d \geq ۱$ یك عدد صحیح باشد، و $W : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ تابعی متناوب و زوج به طور موضعی انتگرال‌پذیر باشد که تبدیل فوریهٔ آن در شرط $|\widehat{W}(k)| = O(۱/|k|^۲)$ صدق می‌کند.

فرض می‌کنیم $f^\circ = f^\circ(v)$ یك تابع توزیع تحلیلی از $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ باشد، به طوری

1. Johannes Sjöstrand 2. *The news about your paper are good.* 3. is good
4. *news*

که به ازاء یك $\lambda_\circ > \circ$ معلوم، داشته باشیم

$$\sum_{n\geq \circ} \frac{\lambda_\circ^n}{n!} \|\nabla_v^n f^\circ\|_{L^{\text{۱}}(dv)} < +\infty,$$

$$\sup_{\eta\in\mathbb{R}^d} \left(|\tilde{f}^\circ(\eta)| e^{\text{۲}\pi\lambda_\circ|\eta|} \right) < +\infty$$

که در آن $\tilde{f}$ تبدیل فوریهٔ f را نشان می‌دهد.

فرض می‌کنیم که W و f° شرط پایداری خطی تعمیم‌یافتهٔ پِن‌رُز[1] را برآورده می‌سازند، یعنی: به ازاء هر $k \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\circ\}$، اگر قرار دهیم $\sigma = k/|k|$ و به ازاء هر $u \in \mathbb{R}$، قرار دهیم $f_\sigma(u) = \int_{u\sigma+\sigma^\perp} f^\circ(z)\, dz$، آنگاه به ازاء هر $w \in \mathbb{R}$ به طوری که $f'_\sigma(w) = \circ$، داریم

$$\widehat{W}(k) \int_{\mathbb{R}} \frac{f'_\sigma(u)}{u-w} du < \text{۱}.$$

برای موضع‌ها و سرعت‌ها یك هیئت اولیهٔ $f_i(x,v) \geq \circ$ فرض می‌کنیم که خیلی به حالت تحلیلی f° نزدیك باشد، به این معنا که تبدیل فوریهٔ آن $\tilde{f}$، نسبت به موضع و سرعت، در رابطهٔ زیر صدق کند

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^d, \eta\in\mathbb{R}^d} |\tilde{f}(k,\eta) - \tilde{f}^\circ(\eta)| e^{\text{۲}\pi\mu|k|} e^{\text{۲}\pi\lambda|\eta|} + \iint |f_i(x,v) - f^\circ(v)| e^{\text{۲}\pi\lambda|v|} dx\, dv \leq \varepsilon,$$

که در آن λ، $\mu > \circ$، و $\varepsilon > \circ$ به اندازهٔ کافی کوچك‌اند.

در این صورت، هیئت‌های تحلیلی $f_{+\infty}(v)$ و $f_{-\infty}(v)$ وجود دارند به طوری که جواب معادلهٔ ولاسوفِ خطی، با پتانسیل برهم‌کنش W و شرط اولیهٔ f_i در زمان $t = \circ$، به طور ضعیف در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$f(t,\cdot) \xrightarrow{t\to\pm\infty} f_{\pm\infty} \qquad \text{به طور ضعیف}$$

به بیان دقیق‌تر، این همگرایی در مورد مُدهای فوریه، یك همگرایی ساده و به طور نمایی سریع است.

سرعت همگرایی معادلهٔ غیرخطی به دلخواه به سرعت همگرایی معادلهٔ خطی‌شده نزدیك است، به شرط اینکه $\varepsilon > \circ$ به اندازهٔ کافی کوچك باشد. به علاوه، انتگرال‌های فرعی $\int f\, dv$ و $\int f\, dx$ با سرعت نمایی، در سراسر فضای C^r به سوی مقدار تعادلشان همگرا هستند.

تمامی تقریب‌هایی که در گزارهٔ غیرخطی ظاهر می‌شوند ساختنی هستند.

1. Penrose

سخن آخر

بوداپست، ۲۴ فوریهٔ ۲۰۱۱

چهار بطری پشت سر هم در یک خط روی میزِ لقِ کوچکی قرار گرفته‌اند. شراب مرغوب، محصول ویلانیی،[1] کله‌ام را کمی گرم کرده است، سعی می‌کنم از گابور[2] در توصیفی که با جزئیات زیاد از امتیازات نسبی این چهار شرابِ انگورِ توکی[3] کرده است پیروی کنم. نُو، خشک، ملایم، ... من صلاحیت انتخاب کردن ندارم.

بچه‌ها، پس از اینکه دوبار گولاش خوردند و دوبار تارت سیب خواستند همه‌شان رفتند به آپارتمان کوچک که در آن پردهٔ عظیمی نصب شده عکس بگیرند. کلر در انتخاب یک بطری توکج ارگانیک و شیرین کمک کرد، خانم خانه یک کاپوچینوی عالی که با شیرِ خامه‌دار لذیذی تهیه شده بود، آورد.

گابور از مجارستان، از دورهٔ جوانی‌اش، از هفته‌ای دوازده ساعت ریاضی برای بچه‌های مجارستانی بسیار علاقه‌مند، از صورت مسئله‌های المپیاد که از تلویزیون پخش می‌شود و همسرش هنوز آنها را به خاطر دارد تعریف می‌کند.

از زبان فوق‌العاده‌اش سخن می‌گوید که نسبت دوری با زبان فنلاندی دارد و هزار سال پیش از آن جدا شده است. زبانی که شنونده را وادار می‌کند همیشه مواظب باشد و دائماً از خود سئوال کند آیا آخرین کلمه‌ای که شنیده است معنایی را که داشت افاده می‌شد دگرگون نمی‌سازد. آیا زبان باعث شده که مجارستان بزرگ‌ترین خاستگاه/ فراهم‌آورندهٔ دانشمندان و دانش‌پیشگان افسانه‌ایِ

1. Villanyi 2. Gabor 3. Tokay

نیمهٔ اول قرن بیستم باشد؟ مجارستان موطن اِردوش‌ها، فون نویمان‌ها، فیر[1] ها، ریتس[2] ها، تِلِر[3] ها، ویگنر[4] ها، سیلارد[5] ها، لَکس[6] ها، لواس‌ها و بسیاری کسان دیگر ... بوده است.

ــ یهودی‌ها نقشی حیاتی داشته‌اند! گابور با تأکید این را می‌گوید، کشور ما، در این قسمت از کرهٔ زمین، در دوره‌ای از همه کمتر ضدّ یهودی بوده است، روشنفکران یهودی زیاد شدند و سهم تعیین‌کننده‌ای از ثروت معنوی این کشور را از آن خود ساختند. بعد، جهت وزش باد عوض شد، از آنها دیگر استقبالی نمی‌شد، و بنابراین از اینجا رفتند، حیف شد ...

گابور کاشف گومبوتس[7] است، این شکل باورنکردنی که ولادیمیر آرنولد به وجود آن اعتقاد داشت؛ این شکل ساده و همگن که فقط یک تعادل پایدار دارد و یک تعادل ناپایدار. یک شکل اَبَرپایدارِ حداقلی، که هر طوری روی زمین قرارش بدهی به وضعیت پایدارش بازمی‌گردد. مثل عروسک‌های پشتک‌زن که معلق می‌زنند و سرِ جای اولشان بازمی‌گردند. اما قسمت‌هایی از این عروسک‌ها سنگین‌تر ساخته شده، در صورتی که گومبوتس کاملاً همگن است.

وقتی به بوداپست رسیدم، فوراً خبر این کشف را شنیدم و فکر کردم می‌توانم گومبوتس را در کتابخانهٔ انستیتوی خودم به نمایش بگذارم. اما قبل از هر چیزی می‌خواستم آن را ببینم و مطمئن شوم واقعاً وجود دارد! یک ایمیل کافی بود. انستیتوی من بسیار مفتخر خواهد شد کشف شگفت‌انگیز شما را به نمایش بگذارد. برای من افتخار بزرگی است که کشف من بر غنای کلکسیون انستیتوی صاحب‌نام شما بیفزاید؛ من فردا در کنفرانس شما خواهم بود، وعدهٔ ملاقات ما پس‌فردا برای ناهار در منزل. بسیار خوب، بی‌صبرانه در انتظار دیدار شما هستم.

ــ گابور درحالی‌که کاملاً هیجان‌زده بود تکرار می‌کرد دیروز در دانشگاه چه کنفرانس زیبایی دادی. چه سخنرانی‌ای! چه سخنرانی زیبایی! چقدر خوب بود، مثل اینکه خود بولتزمان در سالن بود. در میان ما! هان! چه سخنرانی زیبایی!

او کلر را شاهد می‌گیرد:

ــ سالن که خیلی گرم بود، به اندازهٔ کافی جا نداشت، پروژکتور را نمی‌آوردند، شوهرت مجبور بود از روی سیم‌هایی که پخش‌وپلا بود بپرد، تخته‌سیاه هم که مدام پایین می‌افتاد، اما او از این چیزها ناراحت نبود! یک ساعت و نیم سخنرانی! چقدر کیف داشت!

به سلامتی بولتزمان و برادری بین ریاضیدان‌های تمام کشورها و به سلامتی مقالهٔ من دربارهٔ میرایی لانداو که دیروز، بعد از رد و بدل چند نامه با داوران، قطعاً توسط اکتا متمتیکا پذیرفته شد، نوشیدیم.

توکج شیرین هم همین‌طور از گلوها پایین می‌رود، گابور هم به حرف زدن ادامه می‌دهد. از

1. Féjer 2. Riesz 3. Teller 4. Wigner 5. Szilard 6. Lax
7. Gömböc

سفرش به کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات کاربردی که در سال ۱۹۹۵ در هامبورگ برگزار شد، می‌گوید. در آنجا ناهاری با حضور آرنولد ترتیب داده شده بود که مجانی نبود و گابور بدون اینکه تردیدی به خود راه دهد ثبت نام کرد؛ برای این کار مجبور شد نیمی از بودجهٔ ناچیز سفرش را بپردازد. بعد هم ترس به او غلبه کرد و جرئت نکرد حتی با آن مرد بزرگ حرف بزند!

اما فردای آن روز، گابور به طور تصادفی از کنار قهرمانش که گرفتار یک مزاحم شده بود (من مسئلهٔ شما را ده سال پیش حل کردم، الان هم وقت ندارم اثبات شما را بشنوم) گذشت، آرنولد هم فوراً از این فرصت برای رها شدن از آن دام استفاده کرد (نه، واقعاً وقت ندارم، متاسفم، با همین آقا که اینجاست قرار دارم).

پس از این اتفاق، آرنولد می‌خواست دربارهٔ این میهمان غریب بیشتر بداند. «تو را دیروز وقتِ ناهار دیدم، می‌دانم که از مجارستان می‌آیی و ناهار برایت خیلی گران تمام شد، خُب حالا اگر می‌خواهی به من چیزی بگویی وقتش الان است!»

گابور در مورد تحقیقاتش با او صحبت کرد و آرنولد هم به او گفت جهتی که انتخاب کرده جهت درست نیست. متعاقباً در حین بحث، آرنولد به او گفته بود که به وجود **شکل پایدار حداقلی** اعتقاد دارد. شکلی که دو حالت تعادل بیشتر ندارد که تنها یکی از آنها پایدار است.

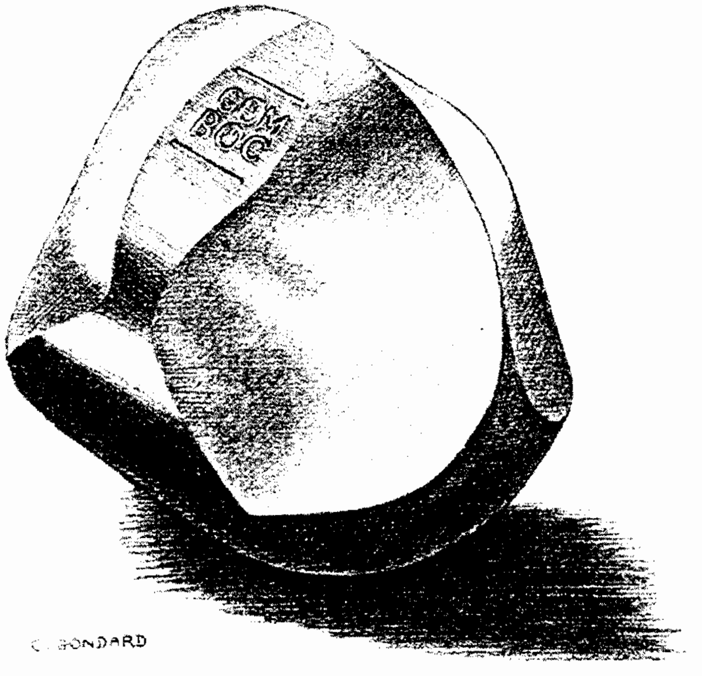
این چند دقیقه سرنوشت گابور را که دوازده سال تمام در جستجوی آن شکل کذایی بود، تغییر داد. گابور هزارها سنگ صیقلی جمع کرد و پس از بررسی متقاعد شد که آن شکل در طبیعت وجود ندارد و باید آن را از اول به وجود آورد، شاید یک کرهٔ تغییرشکل‌یافته باشد، شاید یک کُره‌وار باشد ــ چون کُره‌وارها در طبیعت نادرند.

بالاخره، در سال ۲۰۰۷، او موفق شد با کمک پیتر، یکی از دانشجویانش که حالا در این ماجراجویی با او هم‌قسم شده بود این شکل را پیدا کند. این شکل کره‌ای است که به طور نامحسوس تغییرشکل یافته، هُنَر از نوع عالی آن است. گابور این شکل راگومبوتس نامید که به زبان مجارستانی یعنی کُره‌وار.

اولین گومبوتس شیئی انتزاعی بود، آن‌قدر نزدیک به کره بود که با چشم غیرمسلح نمی‌شد آن را از یک کره تشخیص داد. اما به‌وجودآورندگان آن کم‌کم موفق شدند آن را بیشتر تغییرِ شکل دهند به طوری که الان گومبوتس چیزی است بین یک توپ تنیس و سنگی که یک انسان ماقبل‌تاریخ تراش داده است و دارای همان ویژگی است؛ تنها دارای یک وضعیت پایدار و یک وضعیت ناپایدار است!

گابور یک گومبوتس عظیم را که از پلاستیک شیشه‌ای ساخته شده بود به طرف من دراز می‌کند.

ــ قشنگ نیست؟ حاصل دوازده سال تحقیق! وقتی چینی‌ها این شکل را دیدند فکر کردند



نمایشی است حجمی از یین و یانگ[1]! اولین گومبوتس را به آرنولد هدیه دادند. من برای تو یک گومبوتس قشنگ فلزیِ شماره‌خورده، به شمارهٔ ۱۹۲۸، سال تولد انستیتوی تو، می‌فرستم!

یک قُلُپ توکاچ دیگر. بچه‌ها از عکس‌هایی که پشتِ سرِ هم روی پردهٔ عظیم‌الجثه می‌افتند، عکس می‌گیرند: همسر گابور هم که عکاسی است آماتور و ماهر، از بچه‌ها عکس می‌گیرد. گابور به حرف زدن ادامه می‌دهد و من هم، شگفت‌زده، به داستان او گوش می‌کنم. داستانی همیشگی، داستان ریاضی، داستان طلب، رویا و عشق.

1. Yin & Yang

تولد یک قضیه روایتی است از شکل‌گیری یک پیشرفت در ریاضیات. خواننده گویی ناگهان غرق در زندگی روزمرهٔ پژوهشگری جوان و بس توانا می‌شود: در «طی طریق» بی‌کم و کسری از کیوتو تا پرینستون و از لیون تا حیدرآباد که سدریک ویلانی سفرنامه‌اش را روز به روز رقم می‌زند. در میان برقِ نامه‌های پرهیجانی که با همکار و همراه ماجرایش رد و بدل می‌کند، چند برگردان از ترانه‌هایی که حین حل معادله‌ها به زمزمه می‌خواند، و قصه‌های شگفت‌آوری که برای فرزندانش می‌گوید، می‌توان شکل‌گیری آهسته و آشوبناک قضیه‌ای را دنبال کرد که کشف و اثبات آن سرانجام او را به بالاترین رتبه در جمع ریاضیدانان جهان رساند. برعکس تمام آثار سنتی‌ای از این دست که می‌خواهند یک رشتهٔ علمی را ساده کنند، ***تولد یک قضیه*** سرود پرشوری است که می‌توان آن را چون یک رمان پرماجرا خواند، ماجرایی که در هر گامْ شرح حال نام‌آورترین چهره‌های تاریخ ریاضیات را در بر دارد و گاه با معادله‌هایی شگفت‌انگیز سرسخت‌ترین خواننده را هم جادو می‌کند.

Cédric Villani

هشدار به همهٔ کسانی که از یادگیری هر چه تابع است و حل هر چه معادلهٔ با بیش از یک مجهول است خاطره‌ای دردناک دارند: ***تولد یک قضیه*** شما را با این علم آشتی می‌دهد، علمی که افسون‌گری و زیبایی و شعرگونگی آن را سدریک ویلانی، به لطف عشقی که به آن دارد، بهتر از هر کسی توانسته است بیان کند.

IPM
پژوهشگاه دانش‌های بنیادی

صندوق پستی ۵۷۴۶-۱۹۳۹۵
تلفن ۱۴و۲۲۲۸۷۰۱۳ : دورنگار ۲۲۲۹۹۰۱۵۱
www.ipm.ir