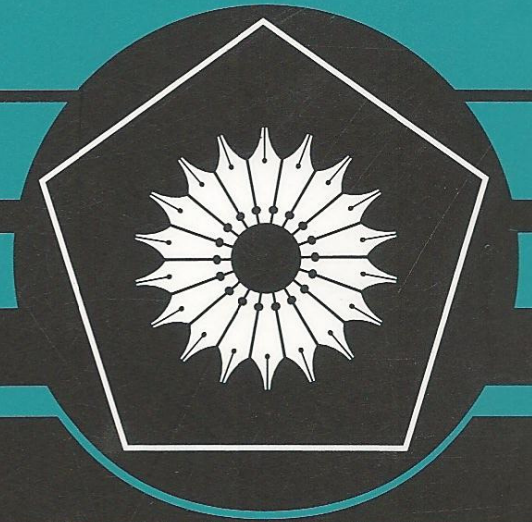




جیمز . مانکرز



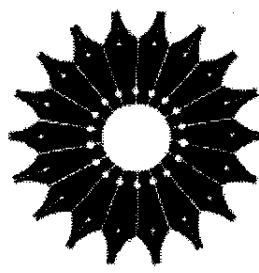
# توپولوژی، نخستین درس

ترجمهٔ یحیی تابش

ابراهیم صالحی

جواد لالی

نادر وکیل



# توپولوژی، نخستین درس

جیمز ر. مانکرز

ترجمه یحیی تابش، ابراهیم صالحی، جواد لالی، نادر وکیل

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری



مرکز نشر دانشگاهی

*Topology A First Course*

James R. Munkres

Prentice-Hall, 1975

توپولوژی، نخستین درس

تألیف جیمز ر. مانکرز

ترجمه یحیی تابش، ابراهیم صالحی، جواد لالی، نادر وکیل

ویراسته فرخ وطن  
ناظر چاپ: علی صادقی  
مرکز نشر دانشگاهی  
چاپ اول ۱۳۶۶  
چاپ چهارم ۱۳۸۹  
تعداد ۱۰۰۰  
لیتوگرافی: وسمه  
چاپ و صحافی: سامان  
۸۸۰۰ تومان

نشانی فروشگاه مرکزی: خیابان انقلاب، روبه‌روی سینما سپیده، پاساژ خیبری، تلفن: ۶۶۴۰۸۹۱، ۶۶۴۱۰۶۸۶

فروش اینترنتی: [www.bookiup.ir](http://www.bookiup.ir)

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است  
فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Munkres, James R

Topology, a first course

مانکرز، جیمز ر

توپولوژی، نخستین درس

عنوان اصلی:

شابک: 978-964-01-0283-1

چاپ چهارم: ۱۳۸۹

واژه‌نامه: ص.

۱. توپولوژی الف. تابش، یحیی، مترجم. ب. عنوان.

۵۱۴ Q ۶۱۱

به یاد مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب که حق بزرگی  
بر جامعه ریاضی ایران دارد.



# بسم الله الرحمن الرحيم

## فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۲	تذکری به خواننده
	<b>قسمت اول</b>
۷	<b>فصل ۱. نظریه مجموعه‌ها و منطق</b>
۷	۱-۱ مفاهیم بنیادی
۲۱	۲-۱ توابع
۲۸	۳-۱ رابطه‌ها
۳۹	۴-۱ اعداد صحیح و اعداد حقیقی
۴۸	۵-۱ حاصل ضرب دکارتی دلخواه
۵۳	۶-۱ مجموعه‌های متناهی
۵۹	۷-۱ مجموعه‌های شمارا و ناشمارا
۶۹	۸-۱* اصل تعریف بازگشتی
۷۲	۹-۱ مجموعه‌های نامتناهی و اصل موضوع انتخاب
۸۲	۱۰-۱ مجموعه‌های خوشترتیب
۸۹	۱۱-۱* اصل ماکزیموم
۹۲	* تمرینهای تکمیلی: خوشترتیبی

۹۹	فصل ۲. فضای توپولوژیک و توابع پیوسته
۹۹	۱-۲ فضاهاى توپولوژیک
۱۰۲	۲-۲ پایه يك توپولوژی
۱۱۰	۳-۲ توپولوژی ترتیبی
۱۱۳	۴-۲ توپولوژی حاصل ضربی در $XY$
۱۱۶	۵-۲ توپولوژی زیر فضایی
۱۲۰	۶-۲ مجموعه‌های بسته و نقاط حدی
۱۳۲	۷-۲ توابع پیوسته
۱۴۵	۸-۲ توپولوژی حاصل ضربی
۱۵۱	۹-۲ توپولوژی مترى
۱۶۳	۱۰-۲ توپولوژی مترى (ادامه)
۱۷۴	* ۱۱-۲ توپولوژی خارج قسمتی
۱۸۶	* تمرینهای تکمیلی: گروههای توپولوژیک
۱۸۹	فصل ۳. همبندی و فشردگی
۱۹۰	۱-۳ فضاهاى همبند
۱۹۶	۲-۳ مجموعه‌های همبند در خط حقیقی
۲۰۶	* ۳-۳ مؤلفه‌ها و مؤلفه‌های راهی
۲۰۸	* ۴-۳ همبندی موضعی
۲۱۲	۵-۳ فضاهاى فشرده
۲۲۳	۶-۳ مجموعه‌های فشرده خط حقیقی
۲۳۰	۷-۳ فشردگی بر حسب نقطه حدی
۲۳۶	* ۸-۳ فشردگی موضعی
۲۴۲	* تمرینهای تکمیلی: تورها
۲۴۷	فصل ۴. اصول جداسازی و شمارایی
۲۴۷	۱-۲ اصول موضوع شمارایی
۲۵۲	۲-۲ اصول جداسازی

۲۷۰	۳-۴	لم اوریسون
۲۸۳	۴-۴	قضیه متریسازی اوریسون
۲۹۰	۵-۴*	افرازهای واحد
۲۹۶	*	تمرینهای تکمیلی : مروری بر قسمت اول

## قسمت دوم

## فصل ۵. قضیه تیخونوف

۲۹۹	۱-۵	قضیه تیخونوف
۳۰۷	۲-۵	فضاهای تماماً منتظم
۳۱۲	۳-۵	فشرده سازی استون - چخ

## فصل ۶. قضایای متریسازی و پیرافشردگی

۳۲۱	۱-۶	متناهی بودن موضعی
۳۲۳	۲-۶	قضیه متریسازی ناگاتا - اسمیرنوف (کفایت)
۳۲۸	۳-۶	قضیه ناگاتا - اسمیرنوف (لزوم)
۳۳۲	۴-۶	پیرافشردگی
۳۴۰	۵-۶	قضیه متریسازی اسمیرنوف

## فصل ۷. فضاهای متری تمام و فضاهای تابعی

۳۴۳	۱-۷	فضاهای متری تمام
۳۴۵	۲-۷	يك منحنی فضا پر کن
۳۵۵	۳-۷	فشرده گی در فضاهای متری
۳۵۹	۴-۷	همگرایی فشرده و همگرایی نقطه به نقطه
۳۶۶	۵-۷	توپولوژی فشرده - باز
۳۷۳	۶-۷	قضیه آسکولی
۳۷۹	۷-۷	فضاهای بئر
۳۸۲	۸-۷	يك تابع هیچ جا مشتق پذیر
۳۸۹	۹-۷	مقدمه ای بر نظریه ابعاد
۳۹۵		

## فصل ۸. گروه بنیادی و فضاهای پوششی

۴۱۵	۱-۸ هموتوپی راهها
۴۱۷	۲-۸ گروه بنیادی
۴۲۷	۳-۸ فضاهای پوششی
۴۳۴	۴-۸ گروه بنیادی دایره
۴۴۰	۵-۸ گروه بنیادی صفحه سفته
۴۴۹	۶-۸ گروه بنیادی $S^n$
۴۵۵	۷-۸ گروههای بنیادی سطوح
۴۵۹	۸-۸ نگاشتهای اساسی و غیراساسی
۴۶۶	۹-۸ قضیه اساسی جبر
۴۷۱	۱۰-۸ میدانهای برداری و نقاط ثابت
۴۷۴	۱۱-۸ نوع هموتوپی
۴۸۰	۱۲-۸ قضیه جداسازی ژوردان
۴۸۷	۱۳-۸ قضیه منحنی ژوردان
۴۹۱	۱۴-۸ رده بندی فضاهای پوششی
۵۰۳	واژه نامه انگلیسی - فارسی
۵۱۹	واژه نامه فارسی - انگلیسی
۵۲۳	فهرست راهنما
۵۲۹	

## پیشگفتار

این کتاب برای تدریس در يك درس يك ترمی یا دو ترمی در سطح لیسانس یا سال اول فوق لیسانس در نظر گرفته شده است.

هر چند توپولوژی خودبسه خود موضوع جالبی است، بسا این حال جزء مبانی پژوهشهای پیشرفته در آنالیز، هندسه، و توپولوژی جبری محسوب می شود. در این باره که مباحث نخستین درس توپولوژی چه باید باشد توافقی وجود ندارد؛ برای چنین درسی مباحث متعدد مناسبی را می توان در نظر گرفت، که هر يك برای منظوری مناسب است. در انتخاب مباحث این کتاب، سعی کرده ام تا بین دیدگاههای مختلف موازنه ای به وجود بیاورم.

پیشنیازها. برای مطالعه این کتاب رسماً به هیچ پیشنیازی احتیاج نیست. حتی فرض نکرده ام که خواننده مقدار زیادی از نظریه مجموعه ها می داند. همین جا باید اضافه کنم که در صورتی که خواننده کمی آنالیز یا «حسابان دقیق» نخوانده باشد، از درك مبانی شهودی مفاهیمی که در بخش اول کتاب معرفی می شوند عاجز خواهد بود. در صورتی که خواننده کمی آشنایی با توابع پیوسته، مجموعه های باز و بسته، فضاها ی متری، و مفاهیم مشابه داشته باشد کار بسیار سهل خواهد شد، هر چند که ما فرض را بر این آشنایی نگذاشته ایم. تنها در فصل ۸ فرض کرده ایم که خواننده مقدمات نظریه گروهها را می داند.

تا جایی که تجربه من نشان می دهد، اکثر دانشجویان درس توپولوژی با بنیادهای ریاضیات آشنایی دارند. البته مقدار این آشنایی از دانشجویی به دانشجوی دیگر بسیار فرق می کند. از این رو، در ابتدای کتاب فصلی را آورده ام که مطالب لازم از منطق و نظریه مجموعه ها را مرور کرده است. این فصل با مطالب مقدماتی آغاز می شود، و به مطالبی ختم می شود که می توان آنها را «نیمه تخصصی» نامید. در این فصل مطالبی که در این کتاب مورد احتیاج هستند (و تنها همین مطالب) آورده شده اند. اکثر دانشجویان با مطالب بخشهای اول این فصل آشنا هستند، اما بسیاری از آنها در اواسط فصل مهارت خود را ناکافی می بینند. از این رو، وقت و زحمتی که معلم لازم است صرف تدریس این فصل بکند عمدتاً به تجربه



و اطلاع ریاضی دانشجویان بستگی دارد. معقولترین معیار برای آنکه دانشجو بفهمد آمادگی آموختن توپولوژی را دارد یا نه، آن است که بتواند تمرین‌ها را به سہولت (و بدرستی) حل کند.

کتاب چگونه سازمان یافته است. در صورتی که این کتاب برای درس يك ترمی به کار گرفته شود، باید مباحثی از آن را برگزید. سعی من آن بوده که چارچوب کتاب به قدری انعطاف پذیر باشد که معلم به آسانی بتواند آنچه را که می‌خواهد بگوید.

در قسمت اول کتاب چهار فصل آمده که به عقیده من باید از مطالب آنها در هر درس مقدماتی توپولوژی نامی برده شود. می‌توان این مطالب را «هسته تحویل ناپذیر» توپولوژی نامید که به فضاهای توپولوژیک، همبندی، فشردگی (و فشردگی حاصل ضرب‌های متناهی)، و اصول موضوع شمارایی و جدا سازی (تا قضیه متریسازی اوریسون) می‌پردازند. بعضی از بخشها با نشانه ستاره مشخص شده‌اند؛ این بخشها جزء آن هسته اصلی نیستند و می‌توان آنها را حذف کرد یا بعداً مطالعه کرد، بی‌آنکه به پیوستگی مطالب لطمه‌ای بخورد.

قسمت دوم کتاب از چهار فصل تشکیل شده است که کاملاً از یکدیگر مستقل هستند. این فصلها تنها به مطالب بخش اول بستگی دارند؛ معلم می‌تواند به هر ترتیبی که بخواهد درس دهد. همچنین، اگر بخواهد تنها بخشی از یکی از این فصلها را درس دهد، می‌تواند به نمودار اول آن فصل مراجعه کند که وابستگی بخشهای آن فصل به یکدیگر را نشان می‌دهد. مثلاً، معلمی که بخواهد درس خود را با برهان قضیه منحنی ژوردان خاتمه دهد، می‌تواند از نمودار فصل ۸ بفهمد که برای این منظور کدام يك از بخشهای فصل ۸ ضروری و کدام يك حاشیه‌ای هستند.

بعضی از مطالب فصلهای آخر به يك یا چند بخش ستاره‌دار قسمت اول کتاب بستگی دارند. این بستگیها در پانوشته اول هر يك از این بخشها و نیز در مقدمه فصل مربوطه تذکر داده شده است. همچنین بعضی از تمرینها به بخشهای ستاره‌دار پیش از خود بستگی دارند، اما این وابستگی آشکار است.

برنامه‌های درسی ممکن. اغلب معلمانی که این کتاب را برای درس يك ترمی به کار می‌برند میل دارند که مطالب «هسته‌ای» قسمت اول را همراه با قضیه تبخونوف (بخش ۵-۱) به کار ببرند. بسیاری موضوعات دیگری را نیز اضافه می‌کنند. مثلاً، ممکن است کسی بخشهای ستاره‌دار قسمت اول را نیز در نظر بگیرد. (مثلاً، خود من حداقل فشردگی موضعی را نیز درس می‌دهم.) یا ممکن است يك یا دو مبحث قسمت دوم را در نظر بگیرد. مثلاً، فشرده سازی استون - چنخ (بخش ۳-۵)، قضیه متریسازی (فصل ۶)، منحنی پثانو (بخش ۷-۲)، يك یا هر دو شکل قضیه آسکولی (بخش ۳-۷ و بخش ۶-۷)، نظریه ابعاد (بخش ۷-۹)، گروههای بنیادی و کاربردهایشان (بخش ۸-۱ تا بخش ۸-۱۰)، یا قضیه منحنی ژوردان (بخش ۸-۱۳). خود من در کلاسهای مختلف هر يك از این مباحث را درس داده‌ام.

معلمی که بخواهد به توپولوژی جبری تکیه کند، یکی از برنامه‌های درسی ممکن

عبارت است از فصلهای ۱ تا ۳ به همراه همه فصل ۸. حذف فصل ۴ مشکلی به وجود نمی آورد، به شرط آنکه از تمرین ۵ در بخش ۸-۱۲ صرف نظر شود، زیرا در این تمرین از مفهوم فضای نرمال استفاده شده است.

برنامه درسی دیگر برنامه‌ای است که کمیته دروس لیسانس ریاضی (وابسته به انجمن ریاضی آمریکا) برای يك درس يك ترمی برای سال اول فوق لیسانس پیشنهاد کرده است. این برنامه شامل فصلهای ۲، ۳، و ۴، و به دنبال آن بخشهای ۵-۱؛ ۶-۱، ۶-۳، ۶-۴؛ ۷-۱؛ ۸-۱ تا ۸-۵، بخشهای ۸-۸ تا ۸-۱۱، و بخش ۸-۱۲. در این برنامه فرض بر این است که خواننده با نظریه مجموعه‌ها در سطح فصل ۱ این کتاب آشنایی دارد. برای يك درس دو ترمی، می‌توان بخوبی همه کتاب را درس داد.

جیمز ر. مانکرز

## تذکری به خواننده

دو نکته محتاج توضیح اند — تمرینها و مثالها.

مسائل بخش کلیدی آموزش ریاضیات هستند. هیچکس با مطالعه صرف تمرینها، قضیه‌ها، و مثالهایی که در کتاب آمده‌اند توپولوژی یاد نخواهد گرفت. او باید قسمتی از کار را خود برعهده بگیرد. تمرینها برای همین منظور آورده شده‌اند.

از لحاظ دشواری تمرینها متفاوت‌اند، تمرینهای ساده‌تر معمولاً در ابتدا آورده شده‌اند. بعضی از تمرینها بررسی سراسر است تعریفها و مثالهای آن بخش هستند تا معلوم شود که آنها را فهمیده‌اید یا نه. بقیه چندان سراسر نیستند. مثلاً، ممکن است در تمرینی خواسته شود که قضیه‌ای از متن را تعمیم دهید. گرچه ممکن است جواب این تمرین به نوبه خود جالب باشد، اما هدف اصلی از این نوع تمرینها آن است که شما اثبات مورد نظر را بدقت مطالعه کنید، به همه ایده‌های آن مسلط شوید، آن قدر مسلط (البته امیدوارم!) که چیزی بیشتر از حفظ کردن معمولی باشد.

بعضی از تمرینها به صورت «باز» عرضه شده‌اند. دانشجویان معمولاً این کار را بیهوده می‌دانند. هنگامی که از آنها پرسیده می‌شود «آیا هر فضای لیند洛夫 منتظم، نرمال است؟» یا خشم جواب می‌دهند «نمی‌دانم چه از جانم می‌خواهید! بالاخره باید آن را ثابت کنم یا برایش مثال ناقص بیاورم؟» اما به اطلاعات برسانم که ریاضیات (خارج از کتابهای درسی) معمولاً همین طور است. اغلب اوقات، ریاضیدان باید حدس یا سؤال سروکار دارد، و او نمی‌داند که پاسخ درست کدام است. شما باید در این زمینه کمی تجربه کسب کنید.

چند تمرین انگشت‌شمار که مشکلتر از بقیه هستند با ستاره مشخص شده‌اند. اما دشواری آنها به قدری است که بهترین شاگرد کلاس من معمولاً می‌تواند آنها را حل کند. قسمت مهم دیگر تسلط بر مباحثی از ریاضیات، آشنایی با مجموعه مفیدی از مثالهاست. البته باید با مثالهای مهمی که منشأ نظریه بوده‌اند، و مثالهایی که مهمترین کاربردهای نظریه هستند آشنا شد. اما دانشجو باید با چند مثال ناقص هم آشنا باشد تا بتواند حدسهای مشکوک را بیازماید.

در مطالعه توپولوژی وقت گذراندن با «مثالهای ناقص عجیب و غریب» ساده‌ترین کار است. ساختن آنها ابتکار می‌خواهد، و معمولاً بسیار جالب است. اما این مثالهای ناقص موضوع توپولوژی نیستند. خوشبختانه، برای نخستین درس توپولوژی به تعداد زیادی از آنها احتیاج نداریم؛ چند مثال ناقص انگشت‌شمار برای اکثر موارد به کار می‌آید. این هم فهرست آنها:

$R^J$ ، حاصل ضرب خط حقیقی در خودش، با توپولوژی یکنواخت و توپولوژی جعبه‌ای.

$R_1$ ، خط حقیقی با توپولوژی‌ای که یک پایه‌اش بازه‌های  $(a, b)$  هستند.

$S_{\mathbb{Q}}$ ، کوچکترین مجموعه خوش‌ترتیب ناشمارا ناپذیر.

$I \times I$ ، مربع واحد بسته، با توپولوژی ترتیب قاموسی.

این مثالها را باید به خاطر بسپارید و بر آنها مسلط شوید؛ آنها را کراراً به کار خواهیم برد.

## قسمت اول

۱

### نظریه مجموعه‌ها و منطق

برای مطالعه نظریه مجموعه‌ها، مانند بیشتر ریاضیدانان، ما نیز ساده‌ترین راه را پیش می‌گیریم. فرض می‌کنیم معنایی که از اصطلاح مجموعه‌ای از اشیاء مستفاد می‌شود به‌طور شهودی روشن است، و بر این اساس، بدون تحلیل بیشتر مفهوم مجموعه، به بررسی مطالب دیگر می‌پردازیم. اصولاً، تحلیل مفهوم مجموعه امری است مربوط به مبانی ریاضیات و منطق ریاضی، و هدف ما مطالعه در این زمینه‌ها نیست.

علمای منطق ریاضی به تفصیل نظریه مجموعه‌ها را تحلیل کرده و اصول موضوعی برای آن تدوین کرده‌اند. هر یک از این اصول موضوع، گویای خاصیتی از مجموعه‌هاست که ریاضیدانان جملگی بر آن توافق دارند، و این اصول روی هم بنیادی به قدر کافی جامع و توانا برای بنا کردن بقیه ریاضیات فراهم می‌کنند.

متأسفانه بی‌دقتی در به کارگیری نظریه مجموعه‌ها، و تنها شهود را اساس کار قرار دادن، می‌تواند موجب بروز تناقضات شود. در واقع، یکی از دلایل اصل موضوعی کردن نظریه مجموعه‌ها، فرمولبندی قواعدی برای کار با مجموعه‌هاست که از بروز این گونه تناقضات جلوگیری می‌کند. اگر چه ما صریحاً این اصول موضوع را بررسی نخواهیم کرد، ولی از قواعدی پیروی می‌کنیم که از این اصول ناشی می‌شوند. در این کتاب، شما با مشاهده مواد گوناگون و با شرکت خودتان در این کار، چگونگی کار با مجموعه‌ها را به روش «نوآموزی» خواهید آموخت. ممکن است در مرحله‌ای از مطالعات خود خواستار بررسی دقیقتر و مفصلتری از نظریه مجموعه‌ها باشید. در این صورت، یک دوره منطق یا مبانی ریاضیات بسیار بجا خواهد بود.

#### ۱-۱ مفاهیم بنیادی

در اینجا مفاهیم مربوط به نظریه مجموعه‌ها را معرفی می‌کنیم و اصطلاحات و علامات اساسی



را متذکر می‌شویم. در ضمن، نکاتی از منطق مقدماتی را که بنا به تجربه ما ممکن است موجب بروز ابهاماتی شوند مورد بحث قرار می‌دهیم.

### علامه اساسی

معمولاً حروف بزرگ  $A, B, \dots$  را برای نمایش مجموعه‌ها و حروف کوچک  $a, b, \dots$  را برای نمایش اشیاء یا اعضای متعلق به این مجموعه‌ها، به کار می‌بریم. اگر شیء  $a$  به مجموعه  $A$  تعلق داشته باشد، این امر را با

$$a \in A$$

نشان می‌دهیم. در صورتی که  $a$  به مجموعه  $A$  تعلق نداشته باشد، می‌نویسیم

$$a \notin A.$$

نماد تساوی،  $=$ ، در سرتاسر این کتاب به معنی تساوی منطقی به کار رفته است. بنا بر این، وقتی که می‌نویسیم  $a = b$ ، مقصود این است که « $a$ » و « $b$ » هر دو اسامی یک شیء‌اند. مثلاً، وقتی که در حساب می‌نویسیم  $1/2 = 2/4$ ، در حقیقت معنای اخیر مورد نظر است. به طریق مشابه، تساوی  $A = B$  مبین این واقعیت است که « $A$ » و « $B$ » نمادهایی برای نمایش یک مجموعه‌اند؛ یعنی،  $A$  و  $B$  دقیقاً از اعضای یکسانی تشکیل شده‌اند. اگر  $a$  و  $b$  دوشیء متمایز باشند، می‌نویسیم  $a \neq b$ ؛ و اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه متمایز باشند، می‌نویسیم  $A \neq B$ . مثلاً، اگر  $A$  مجموعه همه اعداد حقیقی نامنفی و  $B$  مجموعه همه اعداد حقیقی مثبت باشد آنگاه  $A \neq B$ ، زیرا  $0 \in A$  در صورتی که  $0 \notin B$ . اگر هر عضو  $A$  عضوی از  $B$  نیز باشد، گوئیم  $A$  زیر مجموعه  $B$  است؛ و این مطلب را به صورت

$$A \subset B$$

می‌نویسیم. در این تعریف، لازم نیست  $A$  متمایز از  $B$  باشد؛ در حقیقت، اگر  $A = B$  آنگاه  $A \subset B$  و  $B \subset A$  هر دو راست‌اند. در حالتی که  $A \subset B$  و  $A$  متمایز از  $B$  باشد،  $A$  را یک زیر مجموعه سرب  $B$  می‌نامیم و می‌نویسیم

$$A \subsetneq B$$

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که چگونه یک مجموعه را باید مشخص کرد؟ اگر مجموعه مورد نظر تنها چند عضو داشته باشد، به آسانی می‌توان فهرستی از اسامی اشیاء متعلق به آن تهیه کرد و نوشت، « $A$  مجموعه‌ای است متشکل از  $a, b, c$ ». این گزاره را چنین می‌نویسیم

$$A = \{a, b, c\},$$

که در اینجا ابروها جهت احاطه اسامی اعضای  $A$  به کار رفته‌اند.

اما، روش معمولی برای مشخص کردن يك مجموعه چنین است که مجموعه‌ای از اشیاء، مانند  $A$ ، و خاصیتی را که اعضای  $A$  ممکن است واجد یا فاقد آن باشند در نظر می‌گیریم و مجموعه همه اعضای  $A$  را که واجد این خاصیت‌اند تشکیل می‌دهیم. مثلاً، با در نظر گرفتن مجموعه اعداد حقیقی، می‌توان زیرمجموعه‌ای از آن را با خاصیت «عدد صحیح زوج بودن» تشکیل داد. به زبان نمادها، این مطلب را به صورت ذیل می‌نویسیم:

$$B = \{x \mid x \text{ يك عدد صحیح زوج است}\}$$

در اینجا، ابرواخط عمودی، بترتیب، جانشین کلمات «مجموعه» و «که» هستند و تساوی اخیر چنین خوانده می‌شود: « $B$  مجموعه همه  $x$ هایی است که  $x$  يك عدد صحیح زوج است.»

### اجتماع مجموعه‌ها و معنای «یا»

با دو مجموعه مفروض  $A$  و  $B$  می‌توان مجموعه‌هایی متشکل از همه اعضای  $A$  و همه اعضای  $B$  ساخت. این مجموعه را اجتماع  $A$  و  $B$  می‌نامیم و به  $A \cup B$  نمایش می‌دهیم. به بیان صوری

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

در اینجا می‌باید مکتبی کنیم و دقیقاً مقصود خود را از به کار بردن گزاره « $x \in A$  یا  $x \in B$ » توضیح دهیم.

در مکالمات روزمره، لفظ «یا» دارای ابهام است. گزاره « $P$  یا  $Q$ » گاه به معنی « $P$  یا  $Q$  یا هر دو» و گاه به معنی « $P$  یا  $Q$  ولی نه هر دو» به کار می‌رود و معنای مورد نظر از قراین تشخیص داده می‌شود. مثلاً، فرض کنیم معلمی دو تن از محصلین خود را مخاطب قرار می‌دهد و می‌گوید:

«خانم الف، دانشجویانی که در این درس ثبت نام می‌کنند یا درسی در جبر خطی یا درسی در آنالیز را گذرانده‌اند.»  
«آقای ب، یا باید در امتحان آخرترم دست کم ۱۲ بگیرید یا رد خواهید شد.»

خانم الف از فحوای کلام کاملاً متوجه می‌شود که مقصود معلم این است که «دانشجویان درسی در جبر خطی یا درسی در آنالیز یا هر دو را گذرانده‌اند»، و آقای ب می‌داند مقصود این است که «یا باید نمره ۱۲ بیاورد و یا رد می‌شود ولی نه هر دو». در واقع، راست بودن توأم هر دو گزاره، آقای ب را فوق‌العاده متأثر خواهد کرد!  
در ریاضیات نمی‌توان يك چنین ابهامی را تحمل کرد. باید فقط یکی از این معانی را انتخاب کرد و به آن پایبند بود، در غیر این صورت، اشتباهات زیادی رخ می‌دهد. از این رو، ریاضیدانان توافق کرده‌اند که «یا» را به معنای نخست آن به کار ببرند. بنابراین، گزاره « $P$  یا  $Q$ » همواره به معنی « $P$  یا  $Q$  یا هر دو» است. در مواردی که مقصود

« $P$  یا  $Q$  ولی نه هر دو» باشد، باید صریحاً قید «ولی نه هر دو» را ذکر کرد. با این توضیحات، تساوی معرف  $A \cup B$  بدون ابهام است؛ این تعریف بیان می‌کند که  $A \cup B$  مجموعه همه  $x$  هایی است که  $x$  به  $A$  یا به  $B$  یا به هر دو تعلق دارند.

مقطع مجموعه‌ها، مجموعه تهی، و معنای «اگر... آنگاه»

با دو مجموعه مفروض  $A$  و  $B$  به طریقی دیگر می‌توان مجموعه‌هایی ساخت، و آن عبارت است از مجموعه اعضای مشترک بین  $A$  و  $B$ . این مجموعه را مقطع دو مجموعه  $A$  و  $B$  می‌نامیم و به  $A \cap B$  نمایش می‌دهیم. به بیان صوری

$$A \cap B = \{x | x \in B \text{ و } x \in A\}$$

در اینجا نیز مانند تعریف اجتماع مشکلی وجود دارد که البته در معنی «و» نیست بلکه از نوع دیگری است. این مشکل، هنگامی بروز می‌کند که  $A$  و  $B$  هیچ عضو مشترکی نداشته باشند. باید دید در این مورد معنی نماد  $A \cap B$  چیست؟

برای مواجهه با این پیشامد، قرارداد ویژه‌ای وضع می‌کنیم. مجموعه خاصی به نام مجموعه تهی، که با  $\emptyset$  نمایش داده می‌شود به جرگه مجموعه‌ها وارد می‌کنیم و آن را به عنوان «مجموعه بدون عضو» در نظر می‌گیریم.

اگر  $A$  و  $B$  عضو مشترکی نداشته باشند، آنها را دو مجموعه جدا از هم می‌نامیم و بر طبق قرارداد فوق چنین می‌نویسیم:

$$A \cap B = \emptyset.$$

مفهوم «مجموعه تهی»، به نظر بعضی از دانشجویان ناخوشایند جلوه می‌کند. آنها می‌گویند که «چگونه می‌توانید مجموعه‌ای بدون هیچ چیز در آن داشته باشید؟» این مسئله مشابه مسئله‌ای است که قرن‌ها قبل، هنگامی که عدد صفر برای اولین بار معرفی شد، رخ داد.

مجموعه تهی قرار دادی بیش نیست، و بدون آن نیز ریاضیات می‌تواند به خوبی پیشرفت کند. ولی، مجموعه تهی قرارداد بسیار مناسبی است، چون در بیان و اثبات قضایا به میزان قابل ملاحظه‌ای موجب تسهیل کار می‌شود. مثلاً، بدون این قرارداد، قبل از به کار بردن علامت  $A \cap B$  باید ثابت کرد که دو مجموعه  $A$  و  $B$  عضو مشترک دارند؛ همچنین علامت

$$C = \{x | x \in A \text{ و } x \text{ خاصیت مشخصی را دارد}\}$$

را اگر هیچ عضوی از  $A$ ، مانند  $x$ ، آن خاصیت را نداشته باشد، نمی‌توان به کار برد. بسیار آسانتر است توافق کنیم که، در چنین حالتی،  $A \cap B$  و  $C$  مساوی مجموعه تهی اند. چون مجموعه تهی صرفاً قرارداد است، می‌باید ارتباط بین آن و مفاهیم تعریف شده

قبلی را برقرار کرد. از آنجا که  $\emptyset$  را «مجموعه بدون عضو» در نظر می‌گیریم، بدیهی است قرارداد کنیم که به ازای هر شیء  $x$ ، رابطه  $x \in \emptyset$  برقرار نیست. همچنین از تعاریف اجتماع و مقطع نتیجه می‌شود که به ازای هر مجموعه  $A$  داریم

$$A \cup \emptyset = A \quad \text{و} \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

در مورد رابطه جزئیت، مطلب کمی ظریفتر است. آیا برای مجموعه مفروض  $A$ ، می‌توانیم توافق کنیم  $\emptyset \subset A$ ؟ يك بار دیگر می‌باید در مورد نحوه به کارگیری زبان روزمره توسط ریاضیدانان دقت کنیم. عبارت  $\emptyset \subset A$  بیان اختصاری این جمله است: «هر عضو متعلق به مجموعه تهی، به مجموعه  $A$  نیز تعلق دارد.» یا به بیان صورتیتر، «به ازای هر شیء  $x$ ، اگر  $x$  به مجموعه تهی تعلق داشته باشد آنگاه  $x$  به  $A$  نیز تعلق دارد.» آیا گزاره اخیر راست است؟ بعضی ممکن است بگویند «آری» و برخی دیگر «نه». این پرسش را تنها با گونه‌ای توافق می‌توان پاسخ داد و هیچ برهانی برای پاسخگویی به آن وجود ندارد. توجه داشته باشید که این گزاره به شکل «اگر  $P$  آنگاه  $Q$ » است، و در زبان روزمره معنی «اگر... آنگاه» مبهم است. این گزاره همواره بدین معنی است که اگر  $P$  راست باشد آنگاه  $Q$  نیز راست است. گاهی این همه معنی آن است، ولی گاهی اوقات معنی دیگری از آن استنباط می‌شود، بدین ترتیب که اگر  $P$  دروغ باشد،  $Q$  نیز باید دروغ باشد. معمولاً، از فحوای کلام تعبیر صحیح آن تشخیص داده می‌شود.

این وضع کاملاً مشابه ابهامی است که در استعمال لفظ «یا» داشتیم. برای نشان دادن این تشابه اکنون مثالهای مربوط به خانم الف و آقای ب را به صورت شرطی بیان می‌کنیم. معلم به محصلین خود چنین می‌گوید:

«خانم الف، هر دانشجویی که در این درس ثبت نام کرده است اگر درسی در جبر خطی نگذرانده باشد آنگاه درسی در آنالیز گذرانده است.»

«آقای ب، اگر در امتحان آخرترم نمره‌ای کمتر از ۱۲ بیاورد آنگاه رد خواهید شد.»

خانم الف از فحوای کلام متوجه می‌شود که اگر محصلی درسی در جبر خطی نگذرانده باشد آنگاه درسی در آنالیز گذرانده است، اما اگر درسی در جبر خطی گذرانده باشد، ممکن است درسی در آنالیز نیز گذرانده یا نگذرانده باشد. همچنین آقای ب می‌داند که اگر نمره‌ای کمتر از ۱۲ بیاورد، در آن درس رد می‌شود، ولی اگر حداقل نمره ۱۲ بیاورد، قبول می‌شود.

مجدداً یاد آور می‌شویم که در ریاضیات جایی برای ابهام وجود ندارد، بنا بر این، ضرورت گزینش تنها یکی از این معانی کاملاً آشکار است. ریاضیدانان توافق کرده‌اند که جملات شرطی را همواره به معنی نخست آن به کار ببرند، به این ترتیب، گزاره «اگر  $P$  آنگاه  $Q$ » بدین معنی است که اگر  $P$  راست باشد آنگاه  $Q$  نیز راست است، ولی اگر  $P$  دروغ باشد، ممکن است  $Q$  راست یا دروغ باشد.

مثلاً، گزاره زیر را در مورد اعداد حقیقی در نظر بگیرید:

$$\text{اگر } x > 0 \text{ آنگاه } x^2 \neq 0.$$

گزاره اخیر به صورت «اگر  $P$  آنگاه  $Q$ » است، که در اینجا،  $P$  (که فرض گزاره نامیده می‌شود) عبارت « $x > 0$ » و  $Q$  (که نتیجه گزاره نامیده می‌شود) عبارت « $x^2 \neq 0$ » است. این گزاره راست است، زیرا برای هر حالتی که در آن فرض  $x > 0$  برقرار باشد، نتیجه  $x^2 \neq 0$  نیز برقرار است.

گزاره دیگری که در مورد اعداد حقیقی راست می‌باشد، عبارت است از:

$$\text{اگر } x^2 < 0 \text{ آنگاه } x = 23.$$

توجه داشته باشید که در هر حالتی که فرض برقرار باشد، نتیجه نیز برقرار است. البته، در این مثال، هیچ حالتی وجود ندارد که در آن فرض گزاره برقرار باشد. گزاره‌ای از این نوع را گاهی به انتفای مقدم راست می‌نامند.

اکنون به مجموعه تهی و جزئیت بازمی‌گردیم. ملاحظه می‌کنیم که رابطه  $\emptyset \subset A$ ، به معنی «اگر  $x \in \emptyset$  آنگاه  $x \in A$ » است که خود به انتفای مقدم برقرار است. بنا بر این، به ازای هر مجموعه دلخواه  $A$ ، رابطه  $\emptyset \subset A$  به انتفای مقدم راست است.

### عکس نقیض و عکس

بحث ما در مورد ساختمان «اگر... آنگاه» به در نظر گرفتن نکته دیگری از منطق مقدماتی، که گاه مشکلاتی ایجاد می‌کند، منجر می‌شود. این بحث به رابطه بین يك گزاره، عکس نقیض آن، و عکس آن مربوط است.

«اگر  $Q$  راست نباشد آنگاه  $P$  راست نیست» را عکس نقیض گزاره «اگر  $P$  آنگاه  $Q$ » می‌نامیم. مثلاً، عکس نقیض گزاره

$$\text{اگر } x > 0 \text{ آنگاه } x^2 \neq 0،$$

عبارت است از گزاره

$$\text{اگر } x^2 = 0 \text{ آنگاه } x > 0 \text{ راست نیست.}$$

توجه کنید که هم این گزاره و هم عکس نقیض آن راست‌اند. همچنین، گزاره

$$\text{اگر } x \neq 23 \text{ آنگاه } x^2 < 0 \text{ راست نیست}$$

عکس نقیض گزاره ذیل است:

$$\text{اگر } x^2 < 0 \text{ آنگاه } x = 23.$$

در اینجا نیز هم گزاره و هم عکس نقیض آن گزاره‌های راستی در مورد اعداد حقیقی‌اند. با ملاحظه مثال‌های اخیر به نظر می‌رسد که احتمالاً رابطه‌ای بین يك گزاره و عکس نقیض



آن برقرار است. در حقیقت همین طور است ؛ این دو گزاره دو روش برای بیان يك مقصودند و هر يك از آنها راست است اگر فقط اگر دیگری راست باشد ؛ یعنی ، منطقاً معادل اند.

اثبات این مطلب دشوار نیست. ابتدا چند علامت را معرفی می کنیم. برای اختصار در فرمول نویسی ، گزاره «اگر  $P$  آنگاه  $Q$ » را به صورت

$$P \Rightarrow Q,$$

می نویسیم و می خوانیم « $P$  مستلزم  $Q$  است». در نتیجه ، عکس نقیض  $P \Rightarrow Q$  را می توان به صورت

$$(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$$

بیان کرد ، که در اینجا « $\sim Q$ » جانشین « $Q$  راست نیست» شده است.

تنها موردی که « $P \Rightarrow Q$ » می تواند دروغ باشد آن است که فرض  $P$  راست و نتیجه  $Q$  دروغ باشد. در سایر موارد ،  $P \Rightarrow Q$  راست است. به طریقی مشابه ، تنها موردی که « $(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$ » می تواند دروغ باشد ، آن است که فرض « $\sim Q$ » راست و نتیجه « $\sim P$ » دروغ باشد. این درست مثل این است که بگوییم  $Q$  دروغ و  $P$  راست است. و این ، دقیقاً همان وضعیتی است که در آن  $P \Rightarrow Q$  گزاره ای دروغ است. پس ، این دو گزاره یا هر دو راست اند و یا هر دو دروغ ؛ یعنی ، منطقاً معادل اند. به همین مناسبت ، از این به بعد ، اثبات قضیه ای به صورت « $(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$ » را به عنوان استدلالی برای « $P \Rightarrow Q$ » می پذیریم.

از گزاره  $P \Rightarrow Q$  گزاره دیگری می توان ساخت ، و آن گزاره

$$Q \Rightarrow P.$$

است ، که عکس  $P \Rightarrow Q$  نامیده می شود. باید همواره محتاط باشیم که عکس و عکس نقیض يك گزاره را از یکدیگر تمیز دهیم. يك گزاره و عکس نقیض آن منطقاً معادل اند ، و حال آنکه از راست بودن يك گزاره ابداً نمی توان چیزی درباره راستی یا دروغی عکس آن گفت. مثلاً ، عکس گزاره راست

$$\text{اگر } x > 0 \text{ آنگاه } x^2 \neq 0,$$

عبارت است از

$$\text{اگر } x^2 \neq 0 \text{ آنگاه } x > 0,$$

که دروغ است.

مواردی را که  $P \Rightarrow Q$  و عکس آن  $Q \Rightarrow P$  هر دو راست باشند با علامت

$$P \Leftrightarrow Q$$

بیان می کنیم و می خوانیم « $P$  برقرار است اگر و فقط اگر  $Q$  برقرار باشد».

## نقیض

برای به دست آوردن عکس نقیض گزاره  $P \Rightarrow Q$  باید اطلاعاتی در زمینه ساختن گزاره  $\sim P$ ، که نقیض  $P$  خوانده می‌شود، داشته باشیم. ساختن نقیض در بیشتر موارد مشکلی به وجود نمی‌آورد؛ ولی گاه در گزاره‌هایی که شامل عبارات «به ازای هر» و «به ازای دست کم یکی» هستند اشتباهاتی رخ می‌دهد. عبارات اخیر را سودهای منطقی می‌نامیم. برای توضیح بیشتر، فرض کنیم  $X$  یک مجموعه،  $A$  زیر مجموعه‌ای از آن، و  $P$  حکمی در مورد اعضای  $X$  باشد. گزاره ذیل را در نظر بگیرید:

(\*) به ازای هر  $x$  از  $A$ ، حکم  $P$  برقرار است.

نقیض گزاره اخیر را چگونه باید ساخت؟ ابتدا مسئله را به زبان مجموعه‌ها بیان می‌کنیم. فرض کنیم  $B$  مجموعه همه اعضای  $x$  از  $X$  باشد که به ازای آنها  $P$  برقرار است. در این صورت، گزاره (\*) دقیقاً بدین معنی است که  $A$  زیر مجموعه‌ای از  $B$  است. نقیض این گزاره این است که  $A$  زیر مجموعه  $B$  نیست؛ یعنی، دست کم یک عضو در  $A$  وجود دارد که به  $B$  تعلق ندارد. ترجمه عبارت اخیر به زبان معمولی چنین می‌شود:

به ازای دست کم یک  $x \in A$ ،  $P$  برقرار نیست.

بنابراین، برای ساختن نقیض گزاره (\*)، کافی است که سور «به ازای دست کم یکی» را جانشین «به ازای هر» کنیم، و به جای گزاره  $P$  نقیض آن را قرار دهیم. این عمل در جهت عکس نیز به کار می‌رود؛ نقیض گزاره

به ازای دست کم یک  $x \in A$ ، گزاره  $Q$  برقرار است،

عبارت است از گزاره

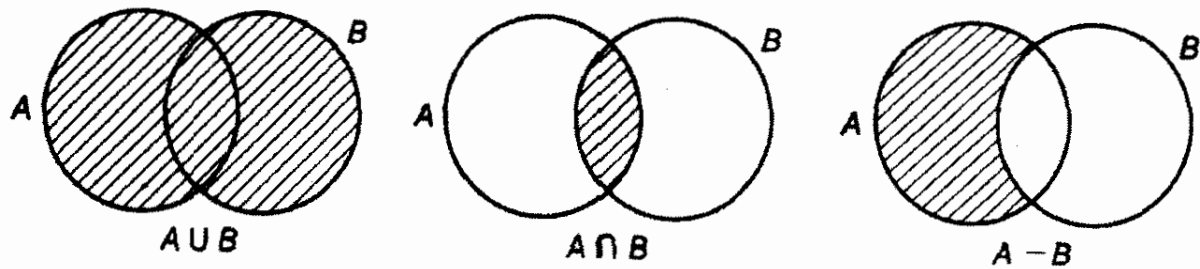
به ازای هر  $x \in A$ ، گزاره  $Q$  برقرار نیست.

## تفاضل دو مجموعه

اکنون به بحث خود در مورد مجموعه‌ها باز می‌گردیم. عمل دیگری بر مجموعه‌ها هست که بعضی مواقع به کار می‌رود، و آن تفاضل دو مجموعه است. این عمل را که با  $A - B$  نمایش داده می‌شود، به صورت مجموعه‌ای متشکل از عضوهایی از  $A$  که در  $B$  نیستند تعریف می‌شود. به بیان صوری،

$$A - B = \{x \mid x \notin B \text{ و } x \in A\}.$$

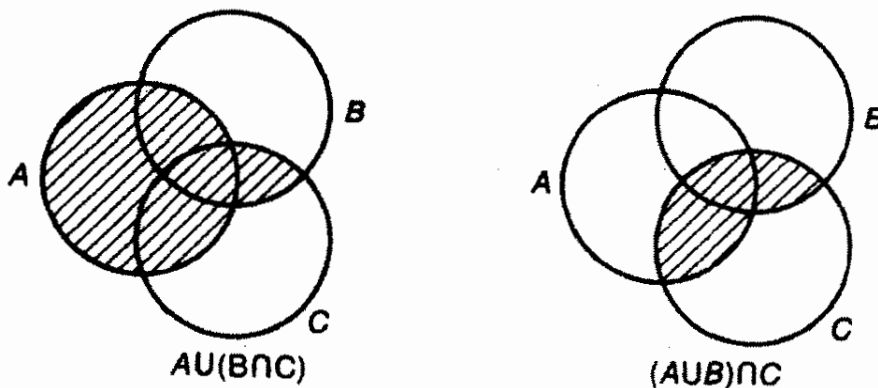
گاهی اوقات،  $A - B$  را متمم  $B$  نسبت به  $A$ ، یا متمم  $B$  در  $A$ ، می‌گویند. اعمال سه گانه فوق در مورد مجموعه‌ها، در شکل ۱ نموده شده‌اند.



شکل ۱

### قواعد نظریه مجموعه‌ها

به وسیله عملهای مجموعه‌ای، می‌توان از مجموعه‌های مفروض مجموعه‌های جدیدی ساخت. مانند جبر، جهت مشخص کردن ترتیب عملهای انجام شده پرانتزهایی به کار می‌بریم. مثلاً،  $A \cup (B \cap C)$  به معنی اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B \cap C$  است، در صورتی که،  $(A \cup B) \cap C$  یعنی مقطع دو مجموعه  $A \cup B$  و  $C$ . همان طور که شکل ۲ نشان می‌دهد، دو مجموعه حاصل، کاملاً متفاوت‌اند.



شکل ۲

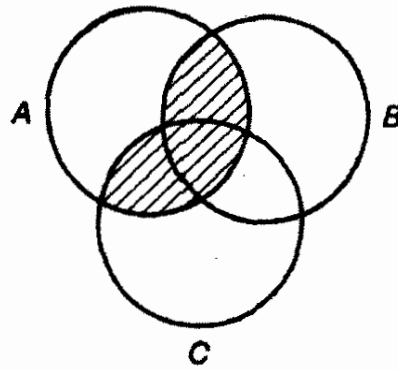
گاهی اوقات ترکیبهای متفاوت این اعمال مجموعه واحدی را به بار می‌آورند؛ چنین مواردی قواعد نظریه مجموعه‌ها را به دست می‌دهند. مثلاً، به ازای هر سه مجموعه  $A$ ،  $B$ ، و  $C$  تساوی ذیل برقرار است:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

این تساوی در شکل ۳ نمایش داده شده است؛ ناحیه پردازدار مجموعه مورد نظر است، این مطلب را می‌توانید با محاسبه ذهنی تحقیق کنید. رابطه فوق را می‌توان به عنوان «قانون توزیع پذیری» اعمال  $\cap$  و  $\cup$  شمرد.

مثالهای دیگر از قوانین نظریه مجموعه‌ها، دومین «قانون توزیع پذیری»

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



شکل ۳

و قوانین دمورگن<sup>۱</sup> هستند:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C),$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$$

بررسی صحت این قواعد را به خواننده واگذار می‌کنیم. روابط فوق، مهمترین قواعد نظریه مجموعه‌ها هستند، اگر چه می‌توان قواعد دیگری را بیان کرد. قوانین دمورگن را می‌توان به صورت لفظی ذیل بیان کرد که به خاطر سپردن آن آسانتر است:

متمم اجتماع برابر است با مقطع متممها.

متمم مقطع برابر است با اجتماع متممها.

### گردایه‌های مجموعه‌ها

اشیاء متعلق به يك مجموعه ممکن است از هر نوعی باشند. مثلاً، می‌توان از مجموعه همه اعداد صحیح زوج، یا مجموعه همه ایرانیان چشم زاغ، و یا مجموعه همه کشورهای قاره آسیا صحبت کرد. قبول داریم که فایده ریاضی بعضی از اینها محدود است. اما، سومین مثال نکته‌ای را مشخص می‌کند که تاکنون به آن اشاره‌ای نکرده‌ایم: یعنی، اینکه اشیاء متعلق به يك مجموعه ممکن است به نوبه خود مجموعه‌هایی باشند. زیرا، يك کشور مجموعه‌ای است متشکل از شهرهای آن. بنابراین، مجموعه همه کشورهای قاره آسیا مجموعه‌ای است که اعضای آن خود مجموعه‌اند.

اکنون طریق دیگری برای ساختن مجموعه‌های جدید از مجموعه‌های مفروض داریم. با داشتن مجموعه  $A$ ، می‌توان مجموعه‌هایی را که اعضای آنها زیرمجموعه‌هایی از  $A$  هستند در نظر گرفت. بویژه، می‌توان مجموعه همه زیرمجموعه‌های  $A$  را ملحوظ داشت، که گاه با نماد  $\mathcal{P}(A)$  نمایش داده می‌شود و (به علی که بعداً توضیح می‌دهیم) مجموعه توانی  $A$  نامیده می‌شود.

مجموعه‌ای را که اعضای آن مجموعه‌اند، اغلب گردایه‌ای از مجموعه‌های نامیم و

با حروف  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  نمایش می‌دهیم. این تدبیر در استدلالها به ما کمک می‌کند تا در آن واحد اشیاء، مجموعه‌هایی از اشیاء، و گردهایی از مجموعه‌هایی از اشیاء را مورد نظر قرار دهیم. مثلاً، ممکن است  $\mathcal{A}$  را برای نمایش مجموعه همه کشورهای قاره آسیا، حرف بزرگ معمولی  $A$  را برای نمایش کشوری آسیایی، و حرف کوچک  $a$  را برای نمایش یکی از شهرها به کار ببریم.

در این مقام تأکید می‌کنیم که در علامت‌گذاری باید دقت کرد. بین شیء  $a$ ، که یک عضو مجموعه  $A$  است، و مجموعه تک‌عضوی  $\{a\}$ ، که زیرمجموعه‌ای از  $A$  است، تفاوت قائلیم. برای آنکه مطلب روشن شود این نکته را در نظر بگیرید که در مورد مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  گزاره‌های

$$a \in A, \{a\} \subset A, \{a\} \in \mathcal{P}(A)$$

همگی راست‌اند، در حالی که گزاره‌های  $\{a\} \in A$  و  $a \subset A$  راست نیستند.

### اجتماعها و مقطعی دلخواه

قبلاً مفاهیم اجتماع و مقطع دو مجموعه را تعریف کردیم. چون می‌توان اجتماع و مقطع تعدادی دلخواه از مجموعه‌ها را نیز ساخت، دلیلی نمی‌بینیم که در مورد این مفاهیم خود را فقط به دو مجموعه مقید کنیم.

فرض کنیم  $\mathcal{A}$  گردهایی از مجموعه‌ها باشد. اجتماع اعضای  $\mathcal{A}$  بنا بر تعریف عبارت است از

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A, A \in \mathcal{A} \text{ يك دست کم يك}\}.$$

مقطع اعضای  $A$  نیز با تساوی ذیل تعریف می‌شود:

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A, A \in \mathcal{A} \text{ هر}\}.$$

در تعاریفات بالا، اگر اتفاقاً یکی از اعضای  $\mathcal{A}$  مجموعه تهی باشد، مشکلی ایجاد نمی‌شود. ولی اگر  $\mathcal{A}$  خود مجموعه تهی باشد آنگاه تصمیم گرفتن در مورد معنایی که این تعاریفات دارند (اگر اصولاً معنایی داشته باشند) اندکی ظریف است. با به کار بردن کلمه به-کلمه تعاریف، ملاحظه می‌کنیم که هیچ عضوی مانند  $x$  وجود ندارد که در خاصیت معرف اجتماع اعضای  $\mathcal{A}$  صدق کند. بنابراین، اگر  $\mathcal{A}$  تهی باشد، موجه است که بگوییم

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$$

از طرف دیگر، هر  $x$  در خاصیت معرف مقطع اعضای  $\mathcal{A}$  به انتهای مقدم صدق می‌کند. در اینجا این سؤال پیش می‌آید که هر  $x$  از کدام مجموعه؟ اگر «عالم سخن» مجموعه وسیع مفروضی مانند  $X$  باشد، و فقط بحث درباره زیرمجموعه‌های آن باشد، هنگامی که  $\mathcal{A}$  تهی است، قرارداد

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = X$$

موجه است. اما همه ریاضیدانان از این قرارداد پیروی نمی‌کنند. ما جهت احتراز از این اشکال، هنگامی که  $\mathcal{A}$  تهی است، مقطع را تعریف نمی‌کنیم.

### حاصل ضربهای دکارتی

روشی دیگر برای ساختن مجموعه‌های جدید از مجموعه‌های مفروض هست که متضمن مفهوم «زوج مرتب» اشیاء است. زمانی که هندسه تحلیلی می‌خواندیم، در شروع کار خود را متقاعد کردیم که بعد از انتخاب محور  $x$  ها و محور  $y$  ها در صفحه، هر نقطه صفحه را می‌توان نظیر زوج مرتب منحصر به فردی مانند  $(x, y)$  از اعداد حقیقی قرار داد. (در بررسی دقیقتر هندسه، احتمالاً بهترین راه برای تعریف صفحه همان مجموعه همه زوجهای مرتب اعداد حقیقی است.)

مفهوم زوج مرتب را به مجموعه‌های دلخواه تعمیم می‌دهیم. به ازای دو مجموعه مفروض  $A$  و  $B$  حاصل ضرب دکارتی آنها، که به  $A \times B$  نمایش داده می‌شود، مجموعه همه زوجهای مرتب  $(a, b)$  است که  $a$  عضوی از  $A$  و  $b$  عضوی از  $B$  است. به بیان صوری

$$A \times B = \{(a, b) \mid b \in B \text{ و } a \in A\}.$$

در این تعریف فرض بر این است که مفهوم «زوج مرتب» قبلاً داده شده است. البته می‌توان همان‌طور که در مورد مفهوم «مجموعه» عمل شد، آن را نیز به عنوان مفهومی اولیه اختیار کرد، یا آن را به وسیله عملهای مجموعه‌ای، که قبلاً تعریف شدند، تعریف کرد. یک تعریف زوج مرتب بر حسب عملهای مجموعه‌ای با تساوی ذیل بیان می‌شود:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\};$$

در اینجا زوج مرتب  $(a, b)$  به صورت گردایه‌ای از مجموعه‌ها تعریف شده است. اگر  $a \neq b$ ، بنا بر این تعریف،  $(a, b)$  گردایه‌ای است متشکل از دو مجموعه که یکی از آنها تک‌عضوی است و دیگری دو عضوی. مختص اول زوج مرتب به هر دو مجموعه، و مختص دوم تنها به یکی از این دو مجموعه تعلق دارد. اگر  $a = b$  آنگاه  $(a, b)$  گردایه‌ای است تک‌عضوی که تنها عضو آن  $\{a\}$  است، زیرا در این حالت  $\{a, b\} = \{a, a\} = \{a\}$  و مختص اول و دوم آن هر دو مساوی تنها عضوین مجموعه تک‌عضوی هستند.

تصور می‌کنم دور از حقیقت نیست اگر بگوییم که اغلب ریاضیدانان ترجیح می‌دهند که زوج مرتب را به عنوان مفهومی اولیه در نظر بگیرند تا گردایه‌ای از مجموعه‌ها!

در باب علامت زوج مرتب نکته‌ای را تذکر می‌دهیم. متأسفانه در ریاضیات علامت  $(a, b)$  برای دو معنی کاملاً متفاوت اختصاص یافته است. یکی زوج مرتب اشیاء، که بحث آن گذشت، و با کاربرد دیگر آن در آنالیز آشنا شده‌اید؛ اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند،

نماد  $(a, b)$  برای نمایش بازه‌ای به کار می‌رود که متشکل از همه اعداد حقیقی  $x$  است به طوری که  $a < x < b$ . بیشتر اوقات این ابهام در علامت‌گذاری مشکلی به وجود نمی‌آورد، زیرا معنی  $(a, b)$  از سیاق مطلب روشن است. در مواردی که بیم ابهام می‌رود، برای زوج مرتب  $(a, b)$  علامت دیگری اختیار می‌کنیم و آن را با نماد

$$a \times b$$

نمایش می‌دهیم.

### تمرینها

۱. قوانین توزیع پذیری برای  $\cup$  و  $\cap$ ، و همچنین قوانین د مورگان را ثابت کنید.
۲. تعیین کنید کدامیک از گزاره‌های زیر برای مجموعه‌های دلخواه  $A, B, C, D$  برقرار است. اگر یکی از قضایای دو شرطی برقرار نباشد، مشخص کنید کس کدامیک از دو استلزام برقرار است. همچنین، اگر یکی از تساویها برقرار نباشد، مشخص کنید که از کدام طرف جزئیت برقرار است.

(الف)  $C \subset A$  و  $C \subset B$  اگر و فقط اگر  $C \subset (A \cup B)$ .

(ب)  $C \subset A$  یا  $C \subset B$  اگر و فقط اگر  $C \subset (A \cup B)$ .

(پ)  $C \subset A$  و  $C \subset B$  اگر و فقط اگر  $C \subset (A \cap B)$ .

(ت)  $C \subset A$  یا  $C \subset B$  اگر و فقط اگر  $C \subset (A \cap B)$ .

(ث)  $A - (A - B) = B$ .

(ج)  $A - (B - A) = A - B$ .

(چ)  $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ .

(ح)  $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cap C)$ .

(خ)  $(A \cap B) \cup (A - B) = A$ .

(د) اگر  $A \subset C$  و  $B \subset D$  آنگاه  $A \times B \subset (C \times D)$ .

(ذ) عکس گزاره (د).

(ر) عکس گزاره (د) با فرض نانهی بودن  $A$  و  $B$ .

(ز)  $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ .

(ژ)  $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ .

(س)  $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ .

(ش)  $(A - B) \times (C - D) = (A \times C - B \times C) - A \times D$ .

$$(A \times B) - (C \times D) = (A - C) \times (B - D) \quad (\text{ص})$$

۳. عکس و عکس نقیض گزاره‌های ذیل را بنویسید و تعیین کنید که در هر حالت (احیاناً)، کدامیک از سه گزاره راست است:

(الف) اگر  $x < 0$  آنگاه  $x^2 - x > 0$ .

(ب) اگر  $x > 0$  آنگاه  $x^2 - x > 0$ .

۴. فرض کنید  $A$  و  $B$  مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی باشند. مطلوب است تعیین نقیض هر یک از گزاره‌های ذیل:

(الف) به ازای هر  $a \in A$ ،  $a^2 \in B$ .

(ب) به ازای دست کم یک  $a \in A$ ،  $a^2 \in B$ .

(پ) به ازای هر  $a \in A$ ،  $a^2 \notin B$ .

(ت) به ازای دست کم یک  $a \in A$ ،  $a^2 \notin B$ .

۵. فرض کنید  $\mathcal{A}$  گردایه‌ای ناتهی از مجموعه‌ها باشد. راستی هر یک از گزاره‌های ذیل و عکس آنها را تعیین کنید:

(الف) اگر  $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  آنگاه به ازای دست کم یک  $A \in \mathcal{A}$ ،  $x \in A$ .

(ب) اگر  $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  آنگاه به ازای هر  $A \in \mathcal{A}$ ،  $x \in A$ .

(پ) اگر  $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$  آنگاه به ازای دست کم یک  $A \in \mathcal{A}$ ،  $x \in A$ .

(ت) اگر  $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$  آنگاه به ازای هر  $A \in \mathcal{A}$ ،  $x \in A$ .

۶. عکس نقیض هر یک از گزاره‌های تمرین ۵ را بنویسید.

۷. هر یک از مجموعه‌های ذیل را با سه کار بردن نمادهای  $\cup$ ،  $\cap$ ، و  $-$  بر حسب مجموعه‌های مفروض  $A$  و  $B$  و  $C$  بیان کنید:

$$D = \{x \mid (x \in C \text{ یا } x \in B) \text{ و } x \in A\},$$

$$E = \{x \mid x \in C \text{ یا } (x \in B \text{ و } x \in A)\},$$

$$F = \{x \mid (x \in C \text{ آنگاه } x \in B) \text{ و } x \in A\}.$$

۸. اگر  $A$  مجموعه‌ای دو عضوی باشد، ثابت کنید  $\mathcal{P}(A)$  چهار عضو دارد. اگر  $A$  تنها یک عضو داشته باشد،  $\mathcal{P}(A)$  چند عضو دارد؟ در مورد یک مجموعه سه عضوی یا مجموعه تهی چه می‌توان گفت؟ چرا  $\mathcal{P}(A)$  را مجموعه توانی  $A$  می‌گویند؟

۹. فرض کنید  $R$  نمایش مجموعه اعداد حقیقی باشد. در مورد هر یک از زیرمجموعه‌های



$R \times R$  که در زیر آمده است ، تعیین کنید که آیا مساوی حاصل ضرب دکارتی دو زیرمجموعه  $R$  هست ؟

(الف)  $\{(x, y) \mid x \text{ عددی است صحیح}\}$

(ب)  $\{(x, y) \mid 0 < y \leq 1\}$

(پ)  $\{(x, y) \mid y > x\}$

(ت)  $\{x \text{ عدد صحیح نیست ، ولی } y \text{ عددی است صحیح}\} \mid (x, y)$

(ث)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$

## ۲-۱ توابع

یکی از مفاهیمی که به کرات با آن مواجه شده‌اید مفهوم تابع است ، و بنا بر این ، یادآوری نقش محوری آن در همهٔ ریاضیات ضرورتی ندارد. در این بخش ، تعریف ریاضی دقیقی برای تابع ارائه می‌دهیم و بعضی از مفاهیم وابسته به آن را بررسی می‌کنیم.

معمولاً تابع را به عنوان قاعده‌ای در نظر می‌گیرند که به هر عضوی از مجموعه  $A$  ، عضوی از مجموعه  $B$  را نظیر می‌کند. در حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) ، اغلب تابع را با فرمول ساده‌ای مانند  $f(x) = 3x^2 + 2$  بیان می‌کنند ، یا شاید با فرمولی پیچیده‌تر مانند

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k.$$

اغلب حتی اسمی از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  به میان نمی‌آورند ، با این قرارداد که  $B$  را مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی و  $A$  را مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی‌ای که به‌ازای آنها قاعدهٔ مورد نظر با معنی باشد اختیار می‌کنند.

اما ، هر قدر در مباحث گوناگون ریاضی جلو تر برویم ، لزوم دقت بیشتر در مفهوم تابع آشکارتر می‌شود. ریاضیدانان دربارهٔ توابع به همان گونه که ما توصیف کردیم می‌اندیشند ، ولی تعریفی که به کار می‌برند دقیقتر است. نخست ، تعریف ذیل را می‌آوریم :

تعریف. یک قاعدهٔ تناظر ، زیرمجموعه‌ای مانند  $r$  از حاصل ضرب دکارتی  $C \times D$  است ، با این خاصیت که هر عضو  $C$  حداکثر یک بار به عنوان مختص اول یک زوج مرتب متعلق به  $r$  ظاهر می‌شود.

بنابراین ، زیرمجموعهٔ  $r$  از  $C \times D$  وقتی یک قاعدهٔ تناظر است که

$$[(c, d') \in r \text{ و } (c, d) \in r] \implies [d = d'].$$

ما  $r$  را به عنوان طریقه‌ای در نظر می‌گیریم که به هر عضو  $c$  از  $C$  عضوی مانند  $d$  از  $D$  را که  $(c, d) \in r$  نظیر می‌کند.

به‌ازای قاعدهٔ تناظر مفروض  $r$  ، بنا بر تعریف ، زیرمجموعهٔ  $C$  را که از تمام

مختصهای اول اعضای  $r$  تشکیل شده است حوزه تعریف  $r$ ، و مجموعه همه مختصهای دوم اعضای  $r$  را مجموعه تصویر آن می‌گوییم. به بیان صوری،

{عضوی از  $D$  مانند  $d$  هست که  $(c, d) \in r$ } = حوزه تعریف  $r$

{عضوی از  $C$  مانند  $c$  هست که  $(c, d) \in r$ } = تصویر  $r$

توجه کنید که با داشتن قاعده تناظر  $r$ ، حوزه تعریف و تصویر آن کاملاً مشخص می‌شوند. اکنون می‌توان تابع را تعریف کرد.

تعریف. یک تابع  $f$  قاعده تناظری مانند  $r$  است، توأم با مجموعه‌ای مانند  $B$  حاوی مجموعه تصویر  $r$ . حوزه تعریف قاعده  $r$  را حوزه تعریف تابع  $f$ ، مجموعه تصویر  $r$  را مجموعه تصویر  $f$ ، و مجموعه  $B$  را حوزه مقادیر  $f$  می‌نامیم.<sup>۱</sup>

اگر  $f$  تابعی با حوزه تعریف  $A$  و حوزه مقادیر  $B$  باشد، این مطلب را با علامت

$$f: A \rightarrow B$$

بیان می‌کنیم و چنین می‌خوانیم « $f$  تابعی از  $A$  به  $B$ » یا « $f$  نگاشتی است از  $A$  بتوی  $B$ » یا مختصراً « $f$  مجموعه  $A$  را بتوی  $B$  می‌نگارد». گاه تابع را به عنوان یک تبدیل هندسی تصور می‌کنند که نقاط  $A$  را به نقاط  $B$  تغییر مکان فیزیکی می‌دهد.

اگر  $f: A \rightarrow B$  و  $a$  عضوی از  $A$  باشد، تنها عضو  $B$  را که این قاعده به  $a$  نظیر می‌کند به  $f(a)$  نشان می‌دهیم؛ و آن را مقدار تابع  $f$  در  $a$ ، یا تصویر  $a$  تحت تابع  $f$  می‌گوییم. به بیان صوری، اگر  $r$  قاعده تناظر تابع  $f$  باشد آنگاه  $f(a)$  همان عضو یکتای  $B$  است که  $(a, f(a)) \in r$ .

با به‌کار بردن این علامت، می‌توان به همان روشی که اغلب در تعریف توابع به‌کار می‌رود بساز گشت، بدون آنکه ازدقت مطلب کاسته شود. مثلاً، اگر  $R$  مجموعه اعداد حقیقی باشد، می‌توان چنین نوشت:

« $f$  تابعی است با قاعده  $\{(x, x^2 + 1) \mid x \in R\}$  و با حوزه مقادیر  $R$ »

یا اینکه

«فرض کنیم  $f: R \rightarrow R$  تابعی است با ضابطه  $f(x) = x^2 + 1$ »

هر دو عبارت یک تابع را مشخص می‌کنند. ولی جمله «فرض کنیم  $f$  تابع  $f(x) = x^2 + 1$  باشد» برای مشخص کردن یک تابع کافی نیست، زیرا جمله اخیر نه حوزه تعریف تابع  $f$  را مشخص می‌کند و نه حوزه مقادیر آن را.

۱. در آنالیز، تمایل به این است که واژه «حوزه مقادیر» را برای اشاره به آنچه که «مجموعه تصویر»  $f$  نامیده‌ایم به‌کار ببرند. در آنجا از نامگذاری مجموعه  $B$  اجتناب می‌شود.

تعریف. اگر  $f: A \rightarrow B$  و  $A_0$  زیرمجموعه‌ای از  $A$  باشد، بنا بر تعریف، تحدید  $f$  به  $A_0$  عبارت است از تابعی از  $A_0$  بتوی  $B$  با قاعده

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A_0\},$$

این تابع را به  $f|_{A_0}$  نمایش می‌دهیم و چنین می‌خوانیم «تحدید  $f$  به  $A_0$ ».

مثال ۱. فرض کنیم  $R$  مجموعه اعداد حقیقی و  $R_+$  مجموعه اعداد حقیقی نامنفی باشد. توابع ذیل را در نظر بگیرید،

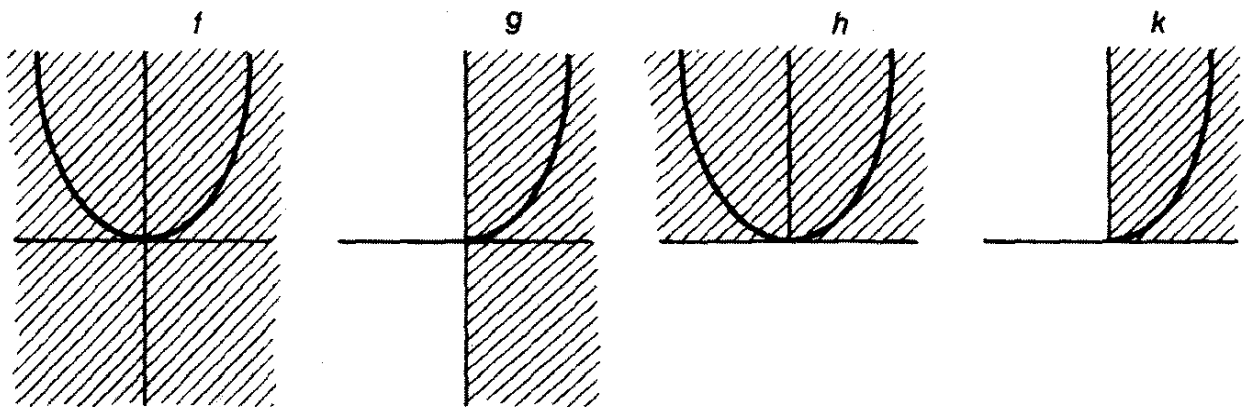
$$f: R \rightarrow R \text{ که با } f(x) = x^2 \text{ تعریف می‌شود،}$$

$$g: R_+ \rightarrow R \text{ که با } g(x) = x^2 \text{ تعریف می‌شود،}$$

$$h: R \rightarrow R_+ \text{ که با } h(x) = x^2 \text{ تعریف می‌شود،}$$

$$k: R_+ \rightarrow R_+ \text{ که با } k(x) = x^2 \text{ تعریف می‌شود.}$$

توابع  $f$  و  $g$  از یکدیگر متمایزند، زیرا قواعد تناظر آنها زیرمجموعه‌های متفاوتی از  $R \times R$  هستند. تابع  $g$  تحدید تابع  $f$  به  $R_+$  است. تابع  $h$  نیز متمایز از  $f$  است، زیرا اگر چه قواعد تناظر توابع  $f$  و  $h$  هر دو یک مجموعه‌اند، ولی حوزه مقادیری که برای  $h$  مشخص شده است با حوزه مقادیر تعیین شده برای  $f$  تفاوت دارد. تابع  $k$  متمایز از هر سه تابع دیگر است. این توابع در شکل ۴ نمایانده شده‌اند.



شکل ۴

فرض کنیم  $f: A \rightarrow B$ . اگر  $A_0$  زیرمجموعه‌ای از  $A$  باشد، مجموعه همه تصاویر نقاط  $A_0$  را تحت  $f$  با  $f(A_0)$  نمایش می‌دهیم و آن را تصویر  $A_0$  تحت  $f$  می‌نامیم. به بیان صوری،

$$f(A_0) = \{b \mid b = f(a) \text{ هست که } a \in A_0\}.$$

از طرف دیگر، اگر  $B_0$  زیرمجموعه‌ای از  $B$  باشد، مجموعه همه اعضای  $A$  را که تصویر

آنها تحت  $f$  در  $B$  قرار دارد، به  $f^{-1}(B_0)$  نشان می‌دهیم و آن را تصویر عکس  $B_0$  تحت  $f$  می‌نامیم. به بیان صوری،

$$f^{-1}(B_0) = \{a \mid f(a) \in B_0\}.$$

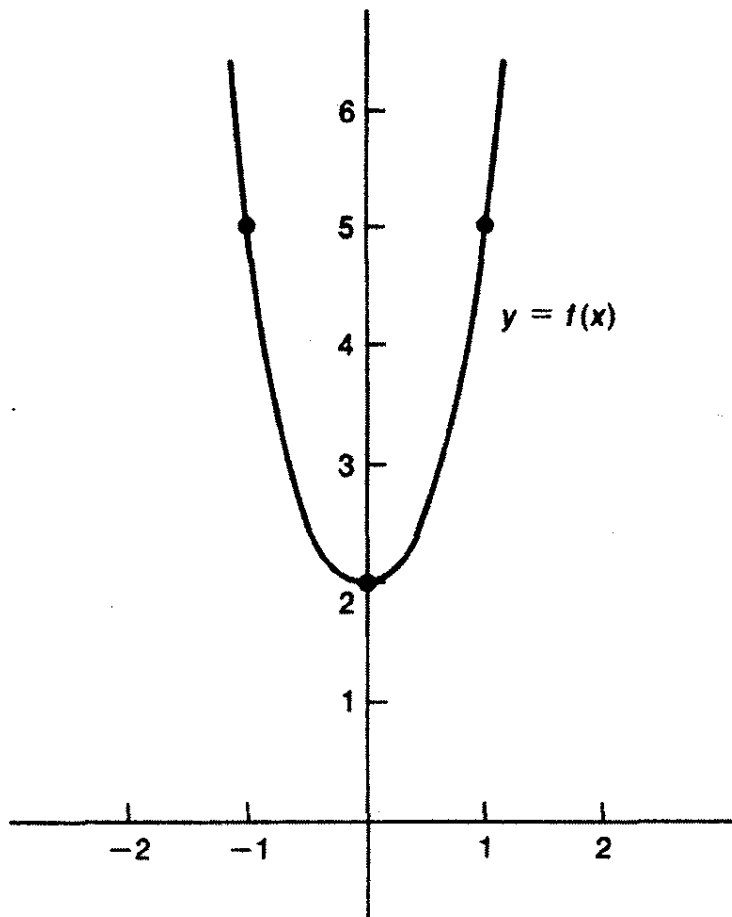
البته، ممکن است تصویر هیچ عضو  $A$  در  $B_0$  قرار نگیرد؛ در این حالت  $f^{-1}(B_0)$  تهی است.

کاربرد درست علامات  $f$  و  $f^{-1}$  مستلزم دقت و رعایت بعضی نکات است. مثلاً، عمل  $f^{-1}$  بر زیرمجموعه‌های  $B$  بسیار دلپذیر است؛ یعنی جزئیت، اجتماع، مقطع، و تفاضل مجموعه‌ها را حفظ می‌کند، اما عمل  $f$  بر زیرمجموعه‌های  $A$ ، همه این عملهای مجموعه‌ای را حفظ نمی‌کند. تمرینات ۳۰۲ و ۳۰۳ ملاحظه شوند.

به عنوان مثالی دیگر، چنانکه مثال ذیل نشان می‌دهد، روابط  $f^{-1}(f(A_0)) = A_0$  و  $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$  در حالت کلی برقرار نیستند؛ قواعد درست، به قرار ذیل اند که بررسی درستی آنها را به خواننده وامی‌گذاریم: اگر  $f: A \rightarrow B$  آنگاه

$$f^{-1}(f(A_0)) \supseteq A_0, \quad A_0 \subset A$$

$$f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0, \quad B_0 \subset B$$



شکل ۵

مثال ۲. تابع  $f: R \rightarrow R$  را به طوری که  $f(x) = 3x^2 + 2$  در نظر می‌گیریم (شکل ۵). فرض کنیم  $[a, b]$  نمایش بازه بسته  $a \leq x \leq b$  باشد. در این صورت،

$$f^{-1}(f([0, 1])) = f^{-1}([2, 5]) = [-1, 1],$$

$$f(f^{-1}([0, 5])) = f([-1, 1]) = [2, 5].$$

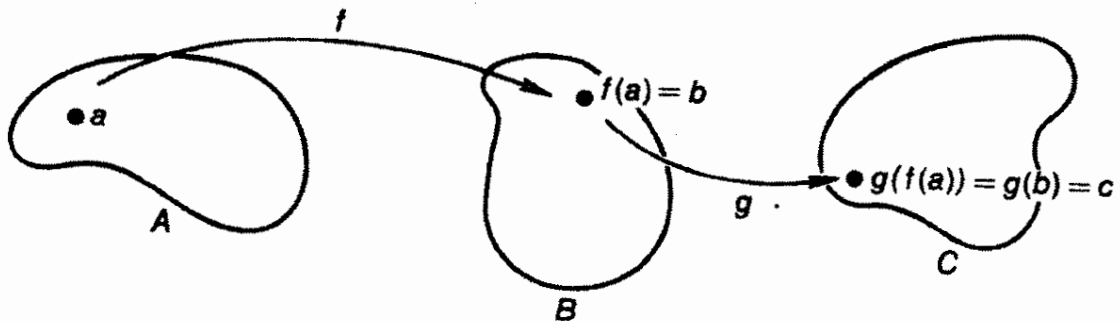
تحدید یک تابع و تغییر دادن حوزه مقادیر آن، دو طریقه برای ساختن توابع جدید از توابع مفروض است. طریقه دیگر، تشکیل تابع مرکب دو تابع است.

تعریف. به ازای دو تابع مفروض  $f: A \rightarrow B$  و  $g: B \rightarrow C$ ، تابع مرکب  $f$  و  $g$ ، که به  $g \circ f$  نشان داده می‌شود، بنا بر تعریف، تابع  $g \circ f: A \rightarrow C$  است که با ضابطه  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$  تعریف می‌شود.

به بیان صوری،  $g \circ f$  تابعی است از  $A$  به  $C$  با قاعده تناظر

$$\{(a, c) \mid g(b) = c \text{ و } f(a) = b\}.$$

اغلب تابع مرکب  $g \circ f$  را، چنانکه در شکل ۶ نمایانده شده است، به صورت یک تغییر مکان فیزیکی نقطه  $a$  به  $f(a)$  و سپس تغییر مکان  $f(a)$  به  $g(f(a))$  مجسم می‌کنیم.



شکل ۶

توجه داشته باشید که  $g \circ f$  تنها وقتی تعریف می‌شود که حوزه مقادیر  $f$  برابر حوزه تعریف  $g$  باشد.

مثال ۳. تابع مرکب توابع  $f: R \rightarrow R$ ، به طوری که  $f(x) = 3x^2 + 2$ ، و  $g: R \rightarrow R$ ، به طوری که  $g(x) = 5x$  عبارت است از تابع  $g \circ f: R \rightarrow R$  به طوری که

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 2) = 5(3x^2 + 2).$$

در این مورد،  $f \circ g$  را نیز می‌توان تشکیل داد؛ تابع  $f \circ g: R \rightarrow R$ ، که با  $g \circ f$  بکلی متفاوت است، چنین تعریف می‌شود،

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x) = 3(5x)^2 + 2.$$

تعریف. تابع  $f: A \rightarrow B$  را يك به يك گوئیم در صورتی که تصاویر هر دو نقطه متمایز  $A$  تحت  $f$  متمایز باشند، و آن را پوشا گوئیم (یا گوئیم  $f$  مجموعه  $A$  را بروی  $B$  می‌نگارد) هر گاه هر عضو  $B$  تصویر عضوی از  $A$  تحت  $f$  باشد. اگر  $f$  هم يك به يك و هم پوشا باشد، آن را دوسویی (یا تناظر يك به يك) می‌نامیم.

به بیان صورتیتر، در صورتی  $f$  يك به يك است که

$$[f(a) = f(a')] \implies [a = a'],$$

و در صورتی پوشاست که

$$[b \in B] \implies [b = f(a), a \in A].$$

يك به يك بودن  $f$  فقط به قاعده تناظر  $f$  بستگی دارد، و حال آنکه پوشا بودن آن به حوزه مقادیر  $f$  نیز مربوط است. بررسی این مطالب را به خواننده واگذار می‌کنیم که تابع مرکب دو تابع يك به يك تابعی است يك به يك؛ و تابع مرکب دو تابع پوشا تابعی است پوشا؛ در نتیجه، تابع مرکب دو تابع دوسویی تابعی است دوسویی.

اگر  $f$  دوسویی باشد، تابعی از  $B$  به  $A$  موسوم به تابع معکوس  $f$  موجود است، و آن را با  $f^{-1}$  نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم: به ازای هر  $b$  از  $B$ ،  $f^{-1}(b)$  را آن عضو یکتای  $a$  از  $A$  اختیار می‌کنیم که  $f(a) = b$ . به ازای عضو مفروض  $b$  از  $B$ ، به موجب پوشا بودن  $f$ ، چنین  $a$  بی در  $A$  موجود است؛ يك به يك بودن  $f$  مستلزم این است که این عضو  $a$  یکتاست. به آسانی می‌توان دریافت که اگر  $f$  تابعی دوسویی باشد آنگاه  $f^{-1}$  نیز دوسویی است.

مثال ۴. به توابع  $f, g, h$ ، و  $k$  مثال ۱ (شکل ۴) بازمی‌گردیم. تابع  $f: R \rightarrow R$  با ضابطه  $f(x) = x^2$  نه يك به يك است و نه پوشا. تحدید  $f$  به اعداد حقیقی نامنفی، یعنی  $g$ ، يك به يك است ولی پوشا نیست. اما تابع  $h: R \rightarrow \bar{R}_+$  که با تغییر دادن حوزه مقادیر  $f$  به دست آمده است پوشاست ولی يك به يك نیست. تابع  $k: \bar{R}_+ \rightarrow \bar{R}_+$  حاصل تحدید حوزه تعریف و تغییر دادن حوزه مقادیر  $f$ ، هم يك به يك است و هم پوشا، در نتیجه معکوس دارد. معکوس آن تابعی است که معمولاً تابع جذر نامیده می‌شود.

لم ذیل، که اثبات آن را به عنوان تمرین به خواننده محول می‌کنیم، ضابطه مفیدی برای نشان دادن دوسویی بودن تابع مفروض  $f$  است:

۱۰۲. لم فرض کنیم  $f: A \rightarrow B$ . اگر توابع  $g: B \rightarrow A$  و  $h: B \rightarrow A$  موجود باشند به قسمتی که به ازای هر  $a$  از  $A$ ،  $g(f(a)) = a$ ، و به ازای هر  $b$  از  $B$ ،  $f(h(b)) = b$  و  $g = h = f^{-1}$ .

توجه کنید که اگر  $f: A \rightarrow B$  دو سویی و  $B_0 \subset B$ ، علامت  $f^{-1}(B_0)$  دو

معنی دارد: یکی تصویر عکس  $B_0$  تحت  $f$  و دیگری تصویر  $B_0$  تحت تابع  $f^{-1}: B \rightarrow A$ ؛ حاصل هر دو درست يك زیر مجموعه  $A$  است. بنابراین، ابهامی پیش نخواهد آمد.

### تمرینها

۱. فرض کنید  $f: A \rightarrow B$  و  $A_0 \subset A$  و  $B_0 \subset B$ .

(الف) ثابت کنید که  $f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0$  و تساوی وقتی برقرار است که  $f$  يك به يك باشد.

(ب) ثابت کنید که  $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$  و تساوی وقتی برقرار است که  $f$  پوشا باشد.

۲. فرض کنید  $f: A \rightarrow B$ ، و به ازای  $i=0$  و  $i=1$ ،  $A_i \subset A$  و  $B_i \subset B$ . ثابت کنید  $f^{-1}$  جزئیت، اجتماع، مقطع، و تفاضل مجموعه‌ها را حفظ می‌کند؛ یعنی،

(الف) اگر  $B_0 \subset B_1$  آنگاه  $f^{-1}(B_0) \subset f^{-1}(B_1)$ .

(ب)  $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$

(پ)  $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$

(ت)  $f^{-1}(B_0 - B_1) = f^{-1}(B_0) - f^{-1}(B_1)$

ثابت کنید  $f$  فقط جزئیت و اجتماع را حفظ می‌کند؛ یعنی،

(ث) اگر  $A_0 \subset A_1$  آنگاه  $f(A_0) \subset f(A_1)$ .

(ج)  $f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$

(چ)  $f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_0) \cap f(A_1)$ ؛ مثالی بیاورید که در آن تساوی برقرار نباشد.

(ح)  $f(A_0 - A_1) \supset f(A_0) - f(A_1)$ ؛ مثالی بیاورید که در آن تساوی برقرار نباشد.

۳. ثابت کنید که قسمتهای (ب)، (پ)، (ج)، و (چ) تمرین ۲ به ازای اجتماعها و مقطعهای دلخواه نیز برقرار است.

۴. فرض کنید  $f: A \rightarrow B$  و  $g: B \rightarrow C$ .

(الف) اگر  $C_0 \subset C$  آنگاه  $(g \circ f)^{-1}(C_0) = f^{-1}(g^{-1}(C_0))$ .

(ب) اگر  $f$  و  $g$  يك به يك باشند آنگاه  $g \circ f$  نیز يك به يك است.

(پ) اگر  $g \circ f$  يك به يك باشد، چه حکمی در مورد يك به يك بودن  $f$  و  $g$  می‌توان کرد؟

(ت) اگر  $f$  و  $g$  پوشا باشد،  $g \circ f$  نیز پوشاست.

(ث) اگر  $g \circ f$  پوشا باشد، چه حکمی در مورد پوشا بودن  $f$  و  $g$  می‌توان کرد؟

(ج) جوابهای قسمتهای (ب) تا (ث) را به صورت قضیه‌ای خلاصه کنید.

۵. در حالت کلی، تابع همانی مجموعه  $C$  را با  $i_C$  نمایش می‌دهیم. یعنی،  $i_C: C \rightarrow C$  تابعی است که به ازای هر  $x$  از  $C$  باقاعده تناظر  $i_C(x) = x$  تعریف می‌شود. تابع  $g: B \rightarrow A$  را معکوس چپ تابع مفروض  $f: A \rightarrow B$  گوئیم، هرگاه  $g \circ f = i_A$ ؛ و تابع  $h: B \rightarrow A$  را معکوس راست  $f$  خوانیم، در صورتی که  $f \circ h = i_B$ .

(الف) ثابت کنید اگر  $f$  معکوس چپ داشته باشد، يك به يك است؛ و اگر معکوس راست داشته باشد، پوشاست.

(ب) مثالی از تابعی ارائه دهید که معکوس چپ داشته باشد ولی معکوس راست نداشته باشد.

(پ) مثالی از تابعی ارائه دهید که معکوس راست داشته باشد ولی معکوس چپ نداشته باشد.

(ت) آیا ممکن است که يك تابع بیش از يك معکوس چپ داشته باشد؟ بیش از يك معکوس راست چطور؟

(ث) ثابت کنید اگر  $f$  دارای معکوس چپ  $g$  و معکوس راست  $h$  باشد آنگاه  $f$  دوسویی است و  $g = h = f^{-1}$ .

۶. فرض کنید  $f: R \rightarrow R$  تابعی با ضابطه  $f(x) = x^2 - x$  باشد. با تحدید مناسب حوزه تعریف و حوزه مقادیر  $f$ ، از روی  $f$  يك تابع دوسویی مانند  $g$  به دست آورید. نمودار  $g$  و  $g^{-1}$  را رسم کنید. (برای انتخاب  $g$  امکانات متعددی وجود دارد.)

### ۱-۳ رابطه‌ها

مفهومی که از بعضی جهات خیلی کلیتر از مفهوم تابع است، مفهوم رابطه (یا نسبت) است. در این بخش، معنی مورد نظر ریاضیدانان را از رابطه تعریف می‌کنیم، و دو نوع رابطه را که در ریاضیات فراوان پیش می‌آیند، یعنی رابطه هم‌ادزی و رابطه ترتیبی ساده را بررسی می‌کنیم.



تعریف. يك رابطه (یا نسبت) در مجموعه  $A$ ، زیر مجموعه  $C$  از حاصل ضرب دکارتی  $A \times A$  است.

اگر  $C$  يك رابطه در  $A$  باشد، علامت  $x C y$  را به همان معنی  $(x, y) \in C$  به کار می‌بریم و چنین می‌خوانیم « $x$  رابطه  $C$  به  $y$  دارد».

قاعده تناظر  $r$  برای تابع  $f: A \rightarrow A$  نیز زیر مجموعه‌ای از  $A \times A$  است. ولی، زیر مجموعه‌ای از نوعی بسیار خاص: یعنی زیر مجموعه‌ای که در آن هر عضو  $A$  دقیقاً يك بار به عنوان مختص اول يك عضو  $r$  ظاهر می‌شود؛ در حالی که هر زیر مجموعه دلخواه  $A \times A$  رابطه‌ای در  $A$  است.

مثال ۱. فرض کنیم  $P$  مجموعه همه مردم جهان باشد، و  $D \subset P \times P$  را چنین تعریف می‌کنیم

$$D = \{(x, y) \mid x \text{ از اعیان } y \text{ است}\}$$

در این صورت،  $D$  رابطه‌ای در  $P$  است. جملات « $x$  نسبت  $D$  به  $y$  دارد» و « $x$  از اعیان  $y$  است» هر دو يك معنی دارند و آن این است که  $(x, y) \in D$ . در ذیل، دو رابطه دیگر در  $P$  ارائه می‌شوند:

$$B = \{(x, y) \mid x \text{ نیایی دارد که از نیاکان } y \text{ است}\},$$

$$S = \{(x, y) \mid x \text{ والدین } y \text{ نیز هستند}\}.$$

می‌توان رابطه  $B$  را «رابطه همخونی» و رابطه  $S$  را «رابطه خواهری و برادری» نامید. این سه رابطه خواص کاملاً متفاوتی دارند. مثلاً، رابطه همخونی  $B$  متقارن است (اگر  $x$  همخون  $y$  باشد آنگاه  $y$  نیز همخون  $x$  است)، در صورتی که رابطه  $D$  چنین نیست. بزودی به این سه رابطه بازمی‌گردیم.

### رابطه‌های هم‌ارزی و افرازاها

رابطه  $C$  در مجموعه  $A$  را رابطه هم‌ارزی خوانیم در صورتی که در شرایط سه گانه ذیل صدق کند:

(۱) (انعکاسی) به ازای هر  $x$  در  $A$ ،  $x C x$ .

(۲) (تقارن) اگر  $x C y$  آنگاه  $y C x$ .

(۳) (تمدی) اگر  $x C y$  و  $y C z$  آنگاه  $x C z$ .

مثال ۲. در میان رابطه‌هایی که در مثال ۱ تعریف شدند، رابطه  $D$  نه منعکس است و نه متقارن، در حالی که رابطه  $B$  متمدی نیست (بچه‌های من با من و همسر من رابطه همخونی دارند، ولی من و همسر من این رابطه را نداریم!) به آسانی می‌توانید ببینید که  $S$  رابطه‌ای هم‌ارزی است.

اگرچه رابطه يك مجموعه است ، ولی دلیلی نمی بینیم که آن را با حروف بزرگ، یا اصلاً بانوع خاصی ازحروف ، نشان دهیم . نمادهای دیگرهم ازعهده این کاربرمی آیند . از آن جمله نماد « $\sim$ » است که اغلب برای نشان دادن رابطه‌ای هم ارزی به کار می رود . خواص رابطه هم ارزی به وسیله این نماد به صورت ذیل بیان می شوند :

- (۱) به ازای هر  $x$  در  $A$  ،  $x \sim x$  .
- (۲) اگر  $x \sim y$  آنگاه  $y \sim x$  .
- (۳) اگر  $x \sim y$  و  $y \sim z$  آنگاه  $x \sim z$  .

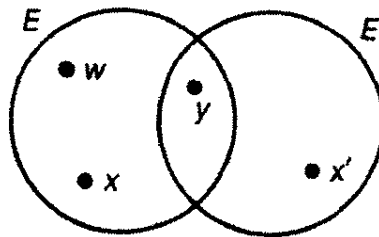
نمادهای بسیار دیگری برای نمایاندن رابطه‌های هم ارزی خاصی ساخته شده‌اند که با بعضی از آنها در این کتاب آشنا خواهید شد . فرض کنیم  $\sim$  رابطه‌ای هم ارزی در مجموعه  $A$  و  $x$  عضوی از  $A$  باشد . زیر مجموعه  $E$  از  $A$  را که رده هم ارزی  $x$  خوانده می شود ، چنین تعریف می کنیم :

$$E = \{y \mid y \sim x\}.$$

توجه کنید که رده هم ارزی  $E$  شامل  $x$  است ، زیرا  $x \sim x$  . رده‌های هم ارزی دارای خاصیت ذیل اند :

۱۰۳ . لم دوده هم ارزی  $E$  و  $E'$  یا مساوی‌اند و یا جدا ازهم .

برهان . فرض کنیم  $E$  رده هم ارزی  $x$  ، و  $E'$  رده هم ارزی  $x'$  باشد . فرض کنیم  $E \cap E'$  تهی نباشد ؛  $y$  را عضوی از  $E \cap E'$  اختیار می کنیم (شکل ۷) . اکنون ثابت می کنیم  $E = E'$  .



شکل ۷

بنابر تعریف ، داریم  $x \sim y$  و  $x' \sim y$  . بنا بر خاصیت تقارن ، نتیجه می شود که  $x \sim x'$  و  $y \sim x'$  ؛ و بنا بر خاصیت تعدی ،  $x \sim x'$  . حال اگر  $w$  عضوی از  $E$  باشد ، بنا بر تعریف ،  $w \sim x$  ؛ با توجه به خاصیت تعدی خواهیم داشت  $w \sim x'$  . نتیجه می گیریم که  $E \subset E'$  .

به همین قیاس می توان نتیجه گرفت که  $E' \subset E$  ، و از آنجا ،  $E = E'$  .  $\square$

اگر رابطه‌ای هم ارزی در مجموعه  $A$  داده شده باشد ، گردایه همه رده‌های هم ارزی

بر حسب این رابطه را به  $\mathcal{E}$  نمایش می‌دهیم. بنابراین فوق، اعضای متمایز  $\mathcal{E}$  جدا از هم اند. علاوه، اجتماع اعضای  $\mathcal{E}$  مساوی  $A$  است، زیرا هر عضو  $A$  به یک رده هم‌ارزی تعلق دارد. گردایه  $\mathcal{E}$  مثالی خاص از مفهومی است که افراز  $A$  نامیده می‌شود:

**تعریف.** یک افراز مجموعه  $A$  گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های جدا از هم  $A$  است به طوری که اجتماع آنها مساوی  $A$  باشد.

مطالعه رابطه‌های هم‌ارزی در مجموعه  $A$  و مطالعه افرازهای مجموعه  $A$  در واقع یک چیز هستند: به ازای هر افراز  $\mathcal{D}$  از  $A$ ، دقیقاً یک رابطه هم‌ارزی در  $A$  موجود است که  $\mathcal{D}$  گردایه رده‌های هم‌ارزی آن است.

برهان آن دشوار نیست. برای نشان دادن اینکه  $\mathcal{D}$  از رابطه‌ای هم‌ارزی به دست می‌آید، رابطه  $C$  را در  $A$  چنین تعریف می‌کنیم:  $xCy$  اگر  $x$  و  $y$  به یک عضو  $\mathcal{D}$  تعلق داشته باشند تقارن  $C$  بدیهی است؛ انعکاسی بودن  $C$  نتیجه این است که اجتماع اعضای  $\mathcal{D}$  برابر مجموعه  $A$  است؛ تعدی  $C$  نتیجه این است که اعضای متمایز  $\mathcal{D}$  جدا از هم هستند. به آسانی ملاحظه می‌شود که گردایه رده‌های هم‌ارزی حاصل از  $C$  دقیقاً همان گردایه  $\mathcal{D}$  است.

برای نشان دادن یکتایی این رابطه هم‌ارزی، فرض کنیم  $C_1$  و  $C_2$  دو رابطه هم‌ارزی باشند که یک گردایه  $\mathcal{D}$  از رده‌های هم‌ارزی را به دست می‌دهند. به ازای عضو مفروض  $x \in A$ ، ثابت می‌کنیم:  $yC_1x$  اگر و فقط اگر  $yC_2x$ ، که از آن نتیجه می‌شود که  $C_1 = C_2$ . فرض کنیم  $E_1$  رده هم‌ارزی  $x$  بر حسب رابطه  $C_1$ ، و  $E_2$  رده هم‌ارزی  $x$  بر حسب رابطه  $C_2$  باشد. در این صورت،  $E_1$  عضوی است از  $\mathcal{D}$ ، بنابراین، مساوی عضو یکتایی از آن مانند  $D$  است که شامل  $x$  است. به دلیلی مشابه،  $E_2$  باید مساوی  $D$  باشد. از طرف دیگر، بنا بر تعریف،  $E_1$  مجموعه‌ای است متشکل از همه  $y$ هایی که  $yC_1x$ ؛ و  $E_2$  مجموعه‌ای است متشکل از همه  $y$ هایی که  $yC_2x$ . چون  $E_1 = D = E_2$ ، حکم برقرار است.

**مثال ۳.** دو نقطه واقع در صفحه را هم‌ارز می‌گیریم اگر فاصله آنها تا مبدأ یکی باشد. بوضوح، خواص انعکاسی، تقارن، و تعدی برقرارند. در این مورد،  $\mathcal{E}$ ، گردایه رده‌های هم‌ارزی عبارت است از همه دایره‌هایی که مرکز آنها مبدأ مختصات است، به علاوه، مجموعه‌ای که فقط مبدأ را دربردارد.

**مثال ۴.** دو نقطه واقع در صفحه را وقتی هم‌ارز خوانیم اگر عرضهای آنها مساوی باشند. در این مورد، گردایه رده‌های هم‌ارزی مجموعه همه خطوط مستقیم موازی محور  $x$ هاست.

**مثال ۵.** فرض کنیم  $\mathcal{E}$  مجموعه همه خطوط مستقیم صفحه و موازی با خط  $y = -x$  باشد. در این صورت،  $\mathcal{E}$  یک افراز صفحه است، زیرا هر نقطه صفحه بر چنین خطی قرار دارد و هر دو خط متمایز از این نوع از هم جدا هستند. افراز  $\mathcal{E}$  از رابطه هم‌ارزی ذیل

به دست می‌آید:  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  فقط وقتی هم‌ارزند که  $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ .

مثال ۶. فرض کنیم  $\mathcal{L}$  مجموعه همه خطوط مستقیم صفحه باشد. در این صورت،  $\mathcal{L}$  یک افزاز صفحه نیست، زیرا لزومی ندارد اعضای متمایز  $\mathcal{L}$  جدا از هم باشند؛ دو خط ممکن است یکدیگر را قطع کنند بی‌آنکه مساوی باشند.

### رابطه‌های ترتیبی

رابطه  $C$  در  $A$  را وقتی یک رابطه ترتیبی (یا یک ترتیب ساده، یا یک ترتیب خطی) گوئیم که واجد خواص ذیل باشد:

(۱) (مقایسه‌پذیری) به ازای هر  $x$  و  $y$  در  $A$  به طوری که  $x \neq y$ ، یا  $xCy$  یا  $yCx$ .

(۲) (نامنعکس بودن) هیچ عضو  $x$  از  $A$  در رابطه  $xCx$  صدق نمی‌کند.

(۳) (تعدی) اگر  $xCy$  و  $yCz$  آنگاه  $xCz$ .

توجه کنید که خاصیت (۱) به تنهایی مانع این نیست که به ازای دو عضو  $x$  و  $y$  از  $A$ ، هر دو رابطه  $xCy$  و  $yCx$  برقرار باشند (چون «یا» بدین معنی است که «یکی یا دیگری یا هر دو»). ولی خواص (۲) و (۳) با هم این امکان را از میان برمی‌دارند؛ زیرا اگر  $xCy$  و  $yCx$  هر دو برقرار باشند، بنا بر تعدی داریم  $xCx$ ، و این با نامنعکس بودن رابطه  $C$  تناقض دارد.

مثال ۷. مجموعه همه ازواج مرتب  $(x, y)$  از اعداد حقیقی را که در آن  $x < y$  در نظر می‌گیریم. این مجموعه رابطه‌ای ترتیبی است که «رابطه ترتیب معمولی» در خط حقیقی خوانده می‌شوند. با رابطه ترتیبی ذیل در خط حقیقی کمتر آشنایی دارید؛ گوئیم  $xCy$  هر گاه  $x^2 < y^2$ ، یا اگر  $x^2 = y^2$  آنگاه  $x < y$ . می‌توانید ترتیبی بودن رابطه  $C$  را خود بررسی کنید.

مثال ۸. مجدداً روابط بین انسانها را، که در مثال ۱ ذکر شد، در نظر می‌گیریم. رابطه همخونی  $B$  در هیچیک از خواص رابطه ترتیبی صدق نمی‌کند، و رابطه  $S$  تنها در شرط (۳) صدق می‌کند. رفتار رابطه  $D$  تا اندازه‌ای بهتر است، زیرا  $D$  واجد خواص (۲) و (۳) است؛ ولی فاقد خاصیت مقایسه‌پذیری است. چون در ریاضیات به اندازه کافی با رابطه‌هایی که در خواص (۲) و (۳) صدق می‌کنند روبرو می‌شویم، ارزش آن را دارد که اسم خاصی بر آنها بگذاریم. رابطه‌هایی از این قبیل را، که بعداً آنها را بررسی خواهیم کرد (بخش ۱-۱۱ ملاحظه شود)، رابطه‌های ترتیبی جزئی اکید می‌نامند.

همان‌طور که نماد  $\sim$  نماد عمومی برای رابطه هم‌ارزی است، نماد «کوچکتری»، یعنی  $<$ ، نیز عموماً برای نمایش رابطه‌ای ترتیبی به کار می‌رود. با این علامتگذاری،

خواص رابطه‌ی ترتیبی چنین بیان می‌شوند:

(۱) اگر  $y \neq x$  آنگاه یا  $x < y$  یا  $x > y$ .

(۲) اگر  $x < y$  آنگاه  $x \neq y$ .

(۳) اگر  $x < y$  و  $y < z$  آنگاه  $x < z$ .

ما علامت  $x \leq y$  را به معنی « $x < y$  و یا  $x = y$ » و علامت  $x > y$  را به معنی « $x < y$ » به کار می‌بریم، و به جای « $x < y$  و  $y < z$ » می‌نویسیم  $x < y < z$ .

تعریف. اگر  $<$  رابطه‌ای ترتیبی در مجموعه  $X$  باشد، مجموعه

$$\{x \mid a < x < b\}$$

را با علامت  $(a, b)$  نمایش می‌دهیم و آن را یک بازه‌ی باز در  $X$  می‌نامیم. اگر این مجموعه تهی باشد،  $a$  را سابق بلافاصل  $b$  و  $b$  را تالی بلافاصل  $a$  می‌نامیم.

تعریف. فرض کنیم  $<_A$  و  $<_B$ ، بترتیب، رابطه‌هایی ترتیبی در مجموعه‌های  $A$  و  $B$  باشند. دو مجموعه  $A$  و  $B$  را وقتی دارای یک نوع ترتیب گوییم که تناظری دوسویی بین آنها برقرار باشد به طوری که ترتیب را حفظ کند؛ یعنی تابعی دوسویی مانند  $f: A \rightarrow B$  وجود داشته باشد که

$$a_1 <_A a_2 \implies f(a_1) <_B f(a_2).$$

مثال ۹. بازه  $(-1, 1)$  از اعداد حقیقی همان نوع ترتیب را داراست که خود  $R$  (مجموعه اعداد حقیقی)، زیرا می‌توانید بررسی کنید که  $f: (-1, 1) \rightarrow R$  با ضابطه

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

تناظری دوسویی و حافظ ترتیب است. این تناظر در شکل ۸ نمایش داده شده است.

مثال ۱۰. زیرمجموعه‌های  $(1, 2) \cup \{0\}$  و  $A = \{0\}$

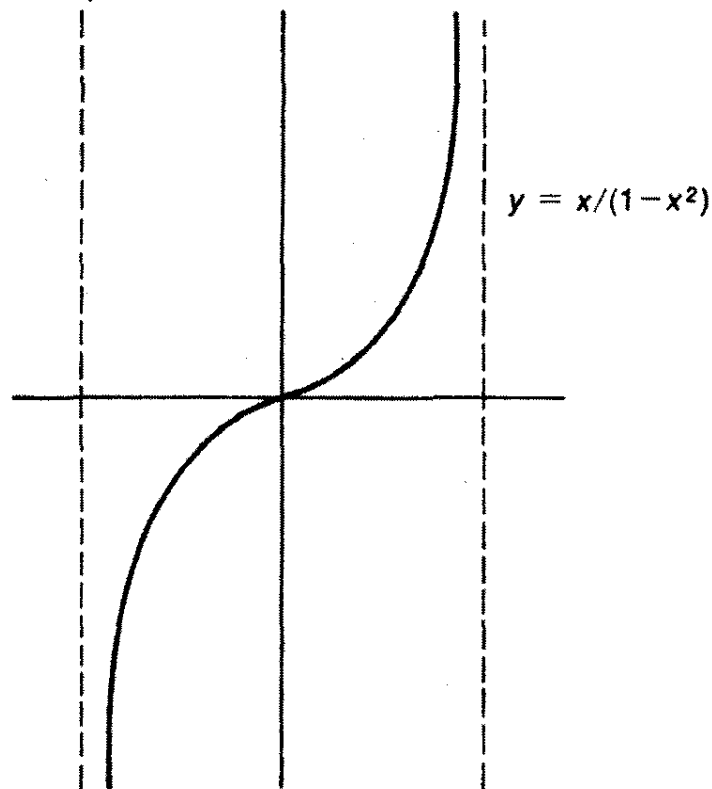
$$[0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$$

از  $R$  دارای یک نوع ترتیب است؛ زیرا تابع  $f: A \rightarrow [0, 1)$  با ضابطه

$$f(0) = 0,$$

$$f(x) = x - 1 \quad x \in (1, 2)$$

تناظری یک به یک و حافظ ترتیب است.



شکل ۸

طریقه‌ای جالب برای تعریف رابطه‌ای ترتیبی، که در بعضی از مثالهای آتی مفید خواهد بود، به قرار ذیل است:

تعریف. فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو مجموعه، بترتیب، دارای رابطه‌های ترتیبی  $<_A$  و  $<_B$  باشند. رابطه‌ی ترتیبی  $<$  را در  $A \times B$  چنین تعریف می‌کنیم:

$$a_1 \times b_1 < a_2 \times b_2$$

در صورتی که  $a_1 <_A a_2$ ، یا آنکه  $a_1 = a_2$  و  $b_1 <_B b_2$ . این رابطه را رابطه‌ی ترتیبی قاموسی می‌خوانند.

بررسی اینکه رابطه‌ی اخیر رابطه‌ی ترتیبی است مستلزم ملاحظه‌ی چندین حالت است که آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

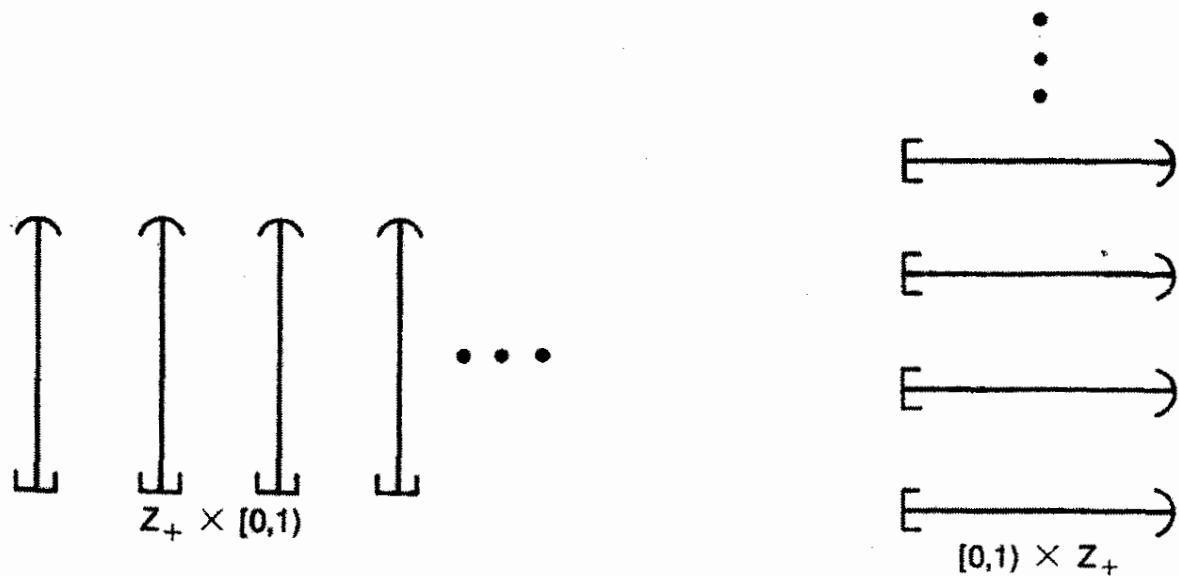
دلیل انتخاب این اصطلاح کاملاً آشکار است. ضابطه‌ی تعریف  $<$  مشابه ضابطه‌ی است که برای مرتب کردن واژه‌ها در لغت‌نامه‌ها به کار می‌رود. برای دو واژه مفروض، نخست حروف اول آن دو را مقایسه می‌کنند و آنها را بر طبق ترتیب قرار گرفتن حروف اول آنها در الفبای زبان مرتب می‌کنند. اگر حروف اول دو واژه یکی باشد، حروف دوم آنها را مقایسه می‌کنند و بر طبق آن واژه‌ها را مرتب می‌کنند، و این کار را ادامه می‌دهند.

مثال ۱۱. ترتیب قاموسی را در صفحه‌ی  $R \times R$  در نظر می‌گیریم. در این ترتیب نقطه‌ی  $p$  از کلیه‌ی نقاطی که روی خط قائم‌گذرنده بر  $p$  قرار دارند و در بالای این نقطه هستند کوچکتر است، همچنین  $p$  از همه‌ی نقاط سمت راست این خط قائم کوچکتر است.

مثال ۱۲. مجموعه  $(0, 1)$  از اعداد حقیقی و  $Z_+$ ، یعنی مجموعه اعداد صحیح مثبت، را با ترتیب معمولی در نظر می‌گیریم، مجموعه  $Z_+ \times (0, 1)$  با ترتیب قاموسی، و مجموعه اعداد حقیقی نامنفی یک نوع ترتیب دارند؛ زیرا تابع

$$f(n \times t) = n + t - 1$$

تناظر دوسویی حافظ ترتیب مورد نظر است. از طرف دیگر، مجموعه  $(0, 1) \times Z_+$  با ترتیب قاموسی دارای نوع ترتیب کاملاً متفاوتی است. مثلاً، هر عضو این مجموعه مرتب دارای یک تالی بلا فصل است. این دو مجموعه در شکل ۹ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۹

یکی از خواص مجموعه اعداد حقیقی که ممکن است قبلاً با آن مواجه شده باشید «خاصیت کوچکترین کران بالا» است. این خاصیت را می‌توان برای هر مجموعه مرتب دلخواهی تعریف کرد. برای این منظور ابتدا به چند تعریف مقدماتی نیازمندیم.

فرض کنیم  $A$  مجموعه‌ای مرتب بر حسب رابطه  $<$ ، و  $A_0$  زیرمجموعه‌ای از  $A$  باشد. عضو  $b$  را بزرگترین عضو  $A_0$  گوئیم در صورتی که  $b \in A_0$  و به ازای هر  $x \in A_0$ ،  $x \leq b$ . به طریقی مشابه،  $a$  را در صورتی کوچکترین عضو  $A_0$  گوئیم که  $a \in A_0$  و به ازای هر  $x \in A_0$ ،  $a \leq x$ . به آسانی دیده می‌شود که هر مجموعه حداکثر یک بزرگترین عضو، و حداکثر یک کوچکترین عضو دارد.

زیرمجموعه  $A_0$  از  $A$  را از بالا کراندار خوانیم در صورتی که عضوی مانند  $b$  در  $A$  موجود باشد به طوری که به ازای هر  $x \in A_0$ ،  $x \leq b$ ؛ در این صورت،  $b$  را یک کران بالای  $A_0$  می‌نامیم. اگر مجموعه همه کرانهای بالای  $A_0$  دارای کوچکترین عضو باشد، آن عضورا کوچکترین کران بالای  $A_0$  می‌نامیم و آن را با علامت  $\text{lub } A_0$  نمایش می‌دهیم؛  $\text{lub } A_0$  ممکن است به  $A_0$  تعلق داشته یا نداشته باشد؛ اگر به  $A_0$  تعلق داشته باشد، در این صورت بزرگترین عضو  $A_0$  است.

به طریق مشابه،  $A_0$  را از پایین کراندار گوئیم هر گاه عضوی مانند  $a$  در  $A$  موجود باشد به طوری که به ازای هر  $x \in A_0$ ،  $a \leq x$ ؛  $a$  را يك کران پایین  $A_0$  می‌نامیم. اگر مجموعه همه کرانهای پایین  $A_0$  دارای بزرگترین عضو باشد، آن عضورا بزرگترین کران پایین  $A_0$  می‌نامند و با  $\text{glb } A_0$  نمایش می‌دهیم؛  $\text{glb } A_0$  ممکن است به  $A_0$  تعلق داشته یا نداشته باشد. اگر به  $A_0$  تعلق داشته باشد، در این صورت کوچکترین عضو  $A_0$  است.

اکنون می‌توانیم خاصیت کوچکترین کران بالا را تعریف کنیم:

**تعریف.** مجموعه مرتب  $A$  را دارای خاصیت کوچکترین کران بالا گوئیم هر گاه هر زیرمجموعه ناتهی  $A_0$  از  $A$  که از بالا کراندار باشد دارای يك کوچکترین کران بالا باشد.

به همین ترتیب، اگر هر زیرمجموعه ناتهی  $A_0$  از  $A$  که از پایین کراندار است دارای يك بزرگترین کران پایین باشد، گوئیم  $A$  دارای خاصیت بزرگترین کران پایین است. اثبات این حکم را که  $A$  دارای خاصیت کوچکترین کران بالاست اگر فقط اگر دارای خاصیت بزرگترین کران پایین باشد، به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

**مثال ۱۳.** زیرمجموعه  $A = (-1, 1)$  از اعداد حقیقی را با ترتیب معمولی در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه اعداد حقیقی دارای خاصیت کوچکترین کران بالاست، نتیجه می‌گیریم که این مجموعه نیز خاصیت کوچکترین کران بالا را دارد. زیرا به ازای هر زیرمجموعه  $A$  که کران بالایی در  $A$  داشته باشد، کوچکترین کران بالای آن (در اعداد حقیقی) باید متعلق به  $A$  باشد. مثلاً، زیرمجموعه  $\{-1/2n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$  از  $A$  را در نظر می‌گیریم. اگر چه این مجموعه فاقد بزرگترین عضو است، ولی در  $A$  کوچکترین کران بالا دارد، و آن صفر است.

از طرف دیگر مجموعه  $B = (-1, 0) \cup (0, 1)$  خاصیت کوچکترین کران بالا را ندارد. مثلاً، هر عضو  $(0, 1)$  يك کران بالای زیرمجموعه  $\{-1/2n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$  از  $B$  است، در نتیجه این مجموعه از بالا کراندار است ولی در  $B$  کوچکترین کران بالا ندارد.

## تمرینها

### رابطه‌های هم‌ارزی

۱. دو نقطه  $(x_0, y_0)$  و  $(x_1, y_1)$  از صفحه را هم‌ارز می‌گیریم در صورتی که  $y_1 - x_1^2 = y_0 - x_0^2$ . بررسی کنید که این رابطه رابطه‌ای هم‌ارزی است و رده‌های هم‌ارزی آن را مشخص کنید.

۴. فرض کنید  $C$  رابطه‌ای در مجموعه  $A$  باشد. اگر  $A_0 \subset A$  رابطه  $C \cap (A_0 \times A_0)$  را تحدید  $C$  به  $A_0$  می‌خوانیم. ثابت کنید که تحدید يك رابطه هم‌ارزی خود رابطه‌ای هم‌ارزی است.



۳. آنچه در زیر می‌آید برای «اثبات» این حکم است که هر رابطه‌ی متقارن و متعدی مانند  $C$  منعکس نیز هست: «چون  $C$  متقارن است،  $aCb$  مستلزم  $bCa$  است، از  $aCb$  و  $bCa$  نتیجه می‌گیریم  $aCa$ ، و این همان نتیجه‌ی مطلوب است.» نقص این استدلال در کجاست؟

۴. فرض کنید تابع  $f: A \rightarrow B$  پوشا باشد. رابطه‌ی  $\sim$  را در  $A$  چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(a_0) = f(a_1) \text{ هر گاه } a_0 \sim a_1$$

(الف) ثابت کنید  $\sim$  رابطه‌ای هم‌ارزی است.

(ب) فرض کنید  $A^*$  مجموعه‌ی رده‌های هم‌ارزی باشد. ثابت کنید تناظری دوسویی بین  $A^*$  و  $B$  برقرار است.

۵. زیر مجموعه‌های  $S$  و  $S'$  از صفحه را که چنین تعریف شده‌اند در نظر بگیرید:

$$S = \{(x, y) \mid y = x + 1 \text{ و } 0 < x < 2\},$$

$$S' = \{(x, y) \mid y - x \text{ عددی صحیح است}\}.$$

(الف) ثابت کنید  $S'$  رابطه‌ای هم‌ارزی در خط حقیقی است و  $S \subset S'$ . رده‌های هم‌ارزی  $S'$  را مشخص کنید.

(ب) به ازای هر گردایه از رابطه‌های هم‌ارزی در مجموعه  $A$ ، ثابت کنید مقطع آنها نیز رابطه‌ای هم‌ارزی در  $A$  است.

(پ) فرض کنید  $T$  مقطع همه‌ی رابطه‌های هم‌ارزی خط حقیقی که حاوی  $S$  اند باشد. رابطه‌ی هم‌ارزی  $T$  و رده‌های هم‌ارزی آن را توصیف کنید.

### رابطه‌های ترتیبی

۶. رابطه‌ی ذیل را در صفحه تعریف می‌کنیم:

$$(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$$

هر گاه  $y_0 - x_0^2 < y_1 - x_1^2$ ، یا آنکه  $y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$  و  $x_0 < x_1$ . ثابت کنید که  $<$  رابطه‌ای ترتیبی در صفحه است و تعبیر هندسی آن را شرح دهید.

۷. ثابت کنید که تحدید رابطه‌ای ترتیبی يك رابطه‌ی ترتیبی است.

۸. بررسی کنید رابطه‌ای که در مثال ۷ تعریف شده رابطه‌ای ترتیبی است.

۹. بررسی کنید که ترتیب قاموسی رابطه‌ای ترتیبی است.

۱۰. (الف) ثابت کنید که نگاشت  $f: (-1, 1) \rightarrow R$  که در مثال ۹ تعریف شد حافظه‌ی ترتیب است.

(ب) ثابت کنید که ضابطه  $g(y) = 2y / [1 + (1 + 4y^2)^{1/2}]$  تابعی مسانده  $g: R \rightarrow (-1, 1)$  را تعریف می‌کند که هم معکوس چپ و هم معکوس راست  $f$  است.

۱۱. ثابت کنید که هر عضو هر مجموعه مرتب حداکثر یک سابق بلافصل و حداکثر یک تالی بلافصل دارد. نشان دهید هر زیر مجموعه مجموعه‌ای مرتب حداکثر یک کوچک‌ترین عضو و حداکثر یک بزرگترین عضو دارد.

۱۲. فرض کنید  $Z_+$  مجموعه اعداد صحیح مثبت باشد. رابطه‌های ترتیبی ذیل را در  $Z_+ \times Z_+$  در نظر بگیرید:  
(الف) ترتیب قاموسی.

(ب)  $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$  هر گاه  $x_0 - y_0 < x_1 - y_1$ ، یا آنکه  $x_0 - y_0 = x_1 - y_1$  و  $y_0 < y_1$ .

(پ)  $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$  هر گاه  $x_0 + y_0 < x_1 + y_1$ ، یا آنکه  $x_0 + y_0 = x_1 + y_1$  و  $y_0 < y_1$ .

در این سه رابطه اعضایی که سابق بلافصل دارند کدام‌اند؟ در هر مورد، آیا مجموعه مورد بحث کوچکترین عضو دارد؟ ثابت کنید که این سه رابطه نوع ترتیبهای متفاوت دارند.

۱۳. ثابت کنید:

قضیه. اگر مجموعه مرتب  $A$  خاصیت کوچکترین کران بالا را داشته باشد آنگاه خاصیت بزرگترین کران پایین را نیز دارد.

۱۴. فرض کنید  $C$  رابطه‌ای در  $A$  باشد. رابطه جدید  $D$  در  $A$  را چنین تعریف می‌کنیم:  
 $(b, a) \in D$  هر گاه  $(a, b) \in C$ .

(الف) ثابت کنید که  $C$  متقارن است اگر و فقط اگر  $C = D$ .

(ب) اگر  $C$  رابطه‌ای ترتیبی باشد،  $D$  نیز رابطه‌ای ترتیبی است.

(پ) عکس قضیه تمرین ۱۳ را ثابت کنید.

۱۵. فرض کنید خط حقیقی دارای خاصیت کوچکترین کران بالا است.

(الف) ثابت کنید مجموعه‌های

$$[0, 1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\},$$

$$[0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$$

خاصیت کوچکترین کران بالا را دارند.

(ب) آیا مجموعه  $[0, 1] \times [0, 1]$  با ترتیب قاموسی دارای خاصیت کوچکترین کران بالا هست؟ در مورد مجموعه‌های  $[0, 1] \times [0, 1]$  و  $[0, 1) \times [0, 1)$  چه می‌توان گفت؟

## ۱-۲ اعداد صحیح و اعداد حقیقی

آنچه را که تاکنون گفته‌ایم شاید بتوان بنیادهای منطقی مطالعه ما در توپولوژی نامید - یعنی مفاهیم مقدماتی نظریه مجموعه‌ها. اینک، به آنچه که ممکن است بنیادهای ریاضی این تحقیق نامیده شود می‌پردازیم - یعنی دستگاه اعداد صحیح و اعداد حقیقی. در مثالها و تمرینهای بخشهای گذشته به‌طور غیر رسمی آنها را به کار برده‌ایم. ولی، اکنون می‌خواهیم به روشی رسمیت و دقیقتری آنها را بررسی کنیم.

یک طریق تأسیس این بنیادها، ساختن دستگاه اعداد حقیقی فقط به وسیله اصول موضوعه نظریه مجموعه‌هاست - به طوری که می‌توان گفت ساختن آنها با دست خالی انجام می‌شود. این طریقه دستیابی به این بنیادها، به کوشش و زمان بسیار نیاز دارد، و بیشتر از دیدگاه منطقی مورد توجه است تا ریاضی.

طریق دوم، فرض کردن مجموعه‌ای از اصول موضوع برای اعداد حقیقی و کار با این اصول است. در این بخش، ما نیز همین شیوه را برای ساختن اعداد حقیقی برگزیده‌ایم. به بیان دقیقتر، مجموعه‌ای از اصول موضوع برای اعداد حقیقی ارائه می‌کنیم، و چگونگی استخراج خواص مانوس اعداد صحیح و حقیقی را از آنها بیان می‌کنیم. لیکن اثبات بیشتر آنها را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. اگر با این مطالب از پیش آشنایی دارید، توصیف ما آنها را در یادتان تازه می‌کند. اگر چنین نیست، برای اطمینان از آگاهی خود درباره بنیادهای ریاضی، بد نیست به تفصیل تمرینها را انجام دهید. در ابتدا، به تعریفی از نظریه مجموعه‌ها نیاز داریم.

**تعریف.** عمل دوتایی در مجموعه  $A$  تابعی است که  $A \times A$  را بتوی  $A$  می‌نگارد.

در مورد عملی دوتایی مانند  $f$  در مجموعه  $A$ ، معمولاً علامتگذاری متفاوت از علامتگذاری استاندارد برای توابع، که در بخش ۱-۲ به کار برده شدند، به کار می‌بریم. به جای آنکه مقدار تابع  $f$  را در نقطه  $(a, a')$  به  $f(a, a')$  نشان دهیم، معمولاً علامت تابع را بین دو مختص نقطه مورد نظر قرار می‌دهیم، و مقدار تابع را در  $(a, a')$  به صورت  $a f a'$  می‌نویسیم. بعلاوه، (همان گونه که در مورد رابطه‌ها دیدیم) معمولتر آن است که برای نمایش عملی دوتایی نمادی غیر از حروف به کار می‌برند. نمادهایی که اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارت‌اند از نماد جمع  $+$ ، نماد ضرب  $\cdot$ ، و ستاره  $*$ ؛ ولی نمادهای متعدد دیگری نیز به کار می‌روند.

## فرض

فرض می‌کنیم مجموعه‌ای مانند  $R$ ، موسوم به مجموعه اعداد حقیقی، دو عمل دوتایی  $+$  و  $\cdot$  در  $R$  که آنها را به ترتیب اعمال جمع و ضرب می‌نامیم، و یک رابطه ترتیبی مانند  $<$  در  $R$  موجودند به طوری که خواص زیر برقرارند:

## خواص جبری

(۱) به ازای هر  $x, y, z$  از  $R$ ،

$$(x+y)+z = x+(y+z),$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(۲) به ازای هر  $x$  و  $y$  از  $R$ ،

$$x+y = y+x,$$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(۳) عضو یکتایی از  $R$  موسوم به صفر، که آن را با  $0$  نشان می‌دهیم، موجود است به طوری که به ازای هر  $x \in R$ ،  $x+0 = x$ ، عضو یکتایی از  $R$ ، متمایز از صفر، موسوم به یک، که آن را با  $1$  نشان می‌دهیم، موجود است به طوری که به ازای هر  $x \in R$ ،  $x \cdot 1 = x$ ،

(۴) به ازای هر  $x$  از  $R$ ، عضو یکتای  $y$  از  $R$  موجود است به طوری که  $x+y=0$ . به ازای هر  $x$  از  $R$  و متمایز از صفر،  $y$  یکتایی در  $R$  موجود است به طوری که  $x \cdot y = 1$ .

(۵) به ازای هر  $x, y, z$  از  $R$ ،

$$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

## خاصیت توأم جبری و ترتیبی

(۶) اگر  $x > y$  آنگاه  $x+z > y+z$ .

اگر  $x > y$  و  $z > 0$  آنگاه  $x \cdot z > y \cdot z$ .

## خواص ترتیبی

(۷) رابطه ترتیبی  $<$  دارای خاصیت کوچکترین کران بالاست.

(۸) اگر  $x < y$  آنگاه عضوی مانند  $z$  موجود است به طوری که  $x < z < y$ .

از خواص (۱) - (۵) ، «قوانین جبری» ای که با آنها آشنایی دارید نتیجه می شوند. به ازای هر  $x$  ، عدد  $y$  را که  $x + y = 0$  ، با  $-x$  نشان می دهیم و آن را قرینه  $x$  می نامیم. عمل تفریق را با فرمول  $z - x = z + (-x)$  تعریف می کنیم. به سه طریق مشابه به ازای هر  $x$  ناصفر ، عدد  $y$  را که  $x \cdot y = 1$  با  $1/x$  نشان می دهیم ، و آن را عکس  $x$  می نامیم. خارج قسمت  $z/x$  را با فرمول  $z/x = z \cdot (1/x)$  تعریف می کنیم. قوانین معمولی علامات ، وقوانین جمع و ضرب کسرها به عنوان قضیه ثابت می شوند. این قوانین جبری را در تمرین ۱ در آخرین بخش آورده ایم. اغلب به جای  $x \cdot y$  مختصراً می نویسیم  $xy$ .

با افزودن خاصیت (۶) به خواص (۱) - (۵) می توان «قوانین نامساویها» را ثابت کرد ، که از آن جمله اند :

$$\text{اگر } x > y \text{ و } z < 0 \text{ آنگاه } z \cdot x < z \cdot y .$$

$$0 < -1 \text{ و } 1 < 0$$

قوانین نامساویها را در تمرین ۲ آورده ایم.

بنابر تعریف ، عدد  $x$  را مثبت خوانیم در صورتی که  $x > 0$  ؛ و اگر  $x < 0$  آنگاه گوئیم  $x$  منفی است. مجموعه اعداد حقیقی مثبت را با  $R_+$  ، و اعداد حقیقی نامنفی را (به عللی که بعداً توضیح خواهیم داد) با  $\bar{R}_+$  نشان می دهیم.

خواص (۱) - (۶) در جبر نوین خواص شناخته شده ای هستند. هر مجموعه با دو عمل دوتایی که در خواص (۱) - (۶) صدق کند ، در جبر ، یک میدان نامیده می شود ؛ اگر این میدان رابطه ای ترتیبی واجد خاصیت (۶) هم داشته باشد ، آن را میدان مرتب می نامند.

از طرف دیگر ، خواص (۷) و (۸) در توپولوژی خواص شناخته شده ای هستند. این خواص فقط متضمن رابطه ترتیبی اند ؛ هر مجموعه با رابطه ای ترتیبی که در شرایط (۷) و (۸) صدق کند ، در توپولوژی پیوستار خطی نامیده می شود.

اکنون اگر به خواص میدان مرتب [خواص (۱) - (۶)] اصول موضوع پیوستار خطی [خواص (۷) و (۸)] را ملحق کنیم ، فهرست حاصل مشتمل بر زوایدی است. بخصوص ، خاصیت (۸) را می توان از سایرین نتیجه گرفت ؛ به فرض آنکه  $x < y$  ، می توان نشان داد که  $z = (x + y) / (1 + 1)$  در شرط (۸) صدق می کند. با وجود این ، برای تأکید این نکته که (۸) و خاصیت کوچکترین کران بالا دو خاصیت مهم رابطه ترتیبی  $R$  هستند ، خاصیت (۸) را در فهرست خواص اساسی اعداد حقیقی درج کرده ایم. چنانچه در فصل ۳ خواهید دید ، بیشتر خواص توپولوژیک  $R$  را از همین دو خاصیت می توان نتیجه گرفت.

در این فهرست ، چیزی وجود ندارد که به ما بگوید عدد صحیح چیست. اینک ، فقط با به کار گرفتن خواص (۱) - (۶) ، اعداد صحیح را تعریف می کنیم. برای این

منظور، نخست تعریف ذیل را می‌آوریم: زیر مجموعه  $A$  از اعداد حقیقی را استقرایی می‌نامیم در صورتی که به ازای هر  $x$  از  $A$ ،  $x+1$  نیز عضوی از  $A$  باشد.

تعریف. فرض کنیم  $A$  گردایه همه زیر مجموعه‌های استقرایی  $R$  باشد که شامل  $1$  هستند. مجموعه اعداد صحیح مثبت را، که به  $Z_+$  نمایش داده می‌شود، با معادله ذیل تعریف می‌کنیم:

$$Z_+ = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A.$$

توجه کنید که  $R_+$ ، مجموعه اعداد حقیقی مثبت، مجموعه‌ای است شامل  $1$  و در ضمن استقرایی (اگر  $x > 0$  آنگاه  $x+1 > 0$ ). پس،  $R_+$  عضوی است از  $\mathcal{A}$ ، در نتیجه  $Z_+ \subset R_+$ ، بنابراین، چنانکه از گزینش نام  $Z_+$  برمی‌آید، اعضای  $Z_+$  در واقع مثبت‌اند. در حقیقت، به آسانی دیده می‌شود که  $1$  کوچکترین عضو  $Z_+$  است. زیرا مجموعه همه اعداد حقیقی  $x$  که  $x \geq 1$ ، استقرایی است و شامل  $1$  است. خواص اساسی  $Z_+$ ، که به‌سبب از تعریف آن نتیجه می‌شوند، عبارت‌اند:

$$(1) 1 \in Z_+$$

(۲)  $Z_+$  استقرایی است.

(۳) (اصل استقرا). اگر  $Z_0$  مجموعه‌ای استقرایی از اعداد صحیح مثبت و شامل  $1$  باشد آنگاه  $Z_0 = Z_+$ .

مجموعه اعداد صحیح که به  $Z$  نمایش داده می‌شود، بنا بر تعریف، مجموعه‌ای است متشکل از اعداد صحیح مثبت  $Z_+$ ، عدد  $0$ ، و قرینه‌های اعضای  $Z_+$ . ثابت می‌شود که حاصل جمع، تفاضل، و حاصل ضرب دو عدد صحیح عددی است صحیح، ولی خارج قسمت آنها ضرورت ندارد که عددی صحیح باشد. مجموعه خارج قسمتهای اعداد صحیح را مجموعه اعداد گویا می‌نامیم و آن را با  $Q$  نمایش می‌دهیم.

همچنین، ثابت می‌شود که به ازای هر عدد صحیح مفروض  $n$ ، هیچ عدد صحیح دیگری مانند  $a$  موجود نیست که  $n < a < n+1$ .

همه اینها مطالبی مأنوس‌اند. خاصیتی از اعداد صحیح مثبت که ممکن است چندان شناخته شده نباشد، عبارت است از:

۱۰۴. قضیه (خاصیت خوشترتیبی) هر زیر مجموعه ناتهی  $Z_+$  دارای کوچکترین عضو است.

پرهان. اگر  $n \in Z_+$  آنگاه مجموعه  $\{x \mid x \in Z \text{ و } 1 \leq x \leq n\}$  را با علامت  $\{1, \dots, n\}$  نشان می‌دهیم. چون هیچ عدد صحیحی بین  $n$  و  $n+1$  وجود ندارد پس

$$\{1, \dots, n+1\} = \{1, \dots, n\} \cup \{n+1\}.$$

نخست « به استقرا » ثابت می کنیم که به ازای هر  $n \in \mathbb{Z}_+$  ، حکم ذیل برقرار است :  
 هر زیرمجموعه ناتهی مجموعه  $\{1, \dots, n\}$  کوچکترین عضو دارد.  
 فرض کنیم  $\mathbb{Z}_0$  مجموعه همه اعداد صحیح مثبتی باشد که حکم بالا در مورد آنها برقرار است. در این صورت  $1 \in \mathbb{Z}_0$  . زیرا اگر  $n=1$  ، تنها زیرمجموعه ناتهی  $\{1, \dots, n\}$  خود مجموعه  $\{1\}$  است. حال ، به فرض آنکه  $n \in \mathbb{Z}_0$  نشان می دهیم که  $n+1 \in \mathbb{Z}_0$  . بدین منظور ، فرض کنیم  $C$  زیر مجموعه ای ناتهی از مجموعه  $\{1, \dots, n+1\}$  باشد. اگر  $C$  فقط  $n+1$  را در برداشته باشد آنگاه  $n+1$  کوچکترین عضو  $C$  است. در غیر این صورت ، مجموعه  $C \cap \{1, \dots, n\}$  ، که ناتهی است ، در نظر می گیریم. چون  $n \in \mathbb{Z}_0$  ، مجموعه اخیر کوچکترین عضو دارد ، که خود به خود کوچکترین عضو  $C$  نیز هست. بنابراین ،  $\mathbb{Z}_0$  مجموعه ای است استقرایی و شامل ۱ ، پس  $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}_+$  . در نتیجه ، گزاره فوق به ازای هر  $n \in \mathbb{Z}_+$  راست است.  
 اکنون به اثبات قضیه می پردازیم. فرض کنیم  $D$  زیر مجموعه ای ناتهی از  $\mathbb{Z}_+$  باشد. عضوی از  $D$  مانند  $n$  انتخاب می کنیم. در این صورت ، مجموعه  $A = D \cap \{1, \dots, n\}$  ناتهی است ، و در نتیجه کوچکترین عضو دارد. این کوچکترین عضو خود به خود کوچکترین عضو  $D$  نیز هست.  $\square$

تا کنون هرچه انجام داده ایم ، بر پایه اصول موضوع میدان مرتب ، یعنی خواص (۱) - (۶) اعداد حقیقی ، استوار شده است. پس چه وقت (۷) ، یعنی خاصیت کوچکترین کران بالا ، لازم می شود؟

یکی از کاربردهای اصل موضوع کوچکترین کران بالا در اثبات این قضیه است که  $\mathbb{Z}_+$  مجموعه اعداد صحیح مثبت در  $R$  کران بالا ندارد. این ، خاصیت ارشمیدسی قویست خط حقیقی است. برای اثبات آن ، فرض می کنیم  $\mathbb{Z}_+$  کران بالایی دارد و از آن تناقضی درمی آوریم. اگر  $\mathbb{Z}_+$  کران بالایی داشته باشد ، کوچکترین کران بالایی مانند  $b$  خواهد داشت. عدد صحیح مثبتی مانند  $n$  وجود دارد که  $n > b - 1$  ؛ زیرا در غیر این صورت ،  $b - 1$  کران بالایی کوچکتر از  $b$  برای  $\mathbb{Z}_+$  خواهد بود. بنابراین  $n + 1 > b$  ، که خلاف این حقیقت است که  $b$  کران بالایی برای  $\mathbb{Z}_+$  است.

اصل موضوع کوچکترین کران بالا همچنین برای اثبات احکام دیگری در مورد  $R$  نیز به کار می رود. به عنوان نمونه ، این اصل برای اثبات وجود یک جذر مثبت یکتای  $\sqrt{x}$  ، به ازای هر عدد حقیقی مثبت ، به کار گرفته می شود. این مطلب به نوبه خود می تواند برای اثبات وجود اعداد حقیقی غیر گویا به کار رود ،  $\sqrt{2}$  مثال ساده ای از آن است.

ما ، نماد ۲ را برای نمایش  $1+1$  ، نماد ۳ را برای نمایش  $2+1$  ، و همین طور تمامی نمادهای استاندارد صحیح مثبت را به کار می بریم. در واقع ، به این طریق به هر عدد صحیح مثبت ، نمادی یکتا تعلق می گیرد ، ولی چون ما نیازی به این مطلب نداریم از اثبات آن در می گذریم.

اثبات این خواص اعداد صحیح و اعداد حقیقی همراه با اثبات چند خاصیت مورد نیاز دیگر را به اجمال در تمرینهای زیر متذکر شده‌ایم.

## تمرینها

۱. به کمک اصول موضوع (۱) - (۵) «قوانین جبری» ذیل را برای  $R$  ثابت کنید:

(الف) اگر  $x + y = x$  آنگاه  $y = 0$ .

(ب)  $x = 0$  . . . [دانهمایی:  $x \cdot (x + 0)$  را محاسبه کنید].

(پ)  $-0 = 0$ .

(ت)  $-(-x) = x$ .

(ث)  $x(-y) = -(xy) = (-x)y$ .

(ج)  $(-1)x = -x$ .

(ح)  $x(y - z) = xy - xz$ .

(خ)  $-(x - y) = -x + y$ ؛  $-(x + y) = -x - y$ .

(د) اگر  $x \neq 0$  و  $x \cdot y = x$  آنگاه  $y = 1$ .

(ذ) اگر  $x \neq 0$  آنگاه  $\frac{x}{x} = 1$ .

(ز)  $\frac{x}{1} = x$ .

(ر) اگر  $x \neq 0$  و  $y \neq 0$  آنگاه  $xy \neq 0$ .

(ز) اگر  $y \neq 0$  و  $z \neq 0$  آنگاه  $\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{yz}$ .

(ژ) اگر  $y \neq 0$  و  $z \neq 0$  آنگاه  $\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{w}{z}\right) = \frac{xw}{yz}$ .

(س) اگر  $y \neq 0$  و  $z \neq 0$  آنگاه  $\frac{x}{y} + \frac{w}{z} = \frac{xz + wy}{yz}$ .

(ش) اگر  $x \neq 0$  آنگاه  $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$ .

(ص) اگر  $w \neq 0$  و  $z \neq 0$  آنگاه  $\frac{1}{\frac{w}{z}} = \frac{z}{w}$ .



$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{w}{z}} = \frac{xz}{yw} \quad \text{اگر } y \neq 0 \text{ و } z \neq 0 \text{ و } w \neq 0 \text{ آنگاه}$$

$$\frac{ax}{y} = a \left( \frac{x}{y} \right) \quad \text{اگر } y \neq 0 \text{ آنگاه}$$

$$\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = - \left( \frac{x}{y} \right) \quad \text{اگر } y \neq 0 \text{ آنگاه}$$

۲. به کمک اصول موضوع (۱) - (۶) و نتایج تمرین ۱، «قوانین نامساویها»ی ذیل را برای  $R$  ثابت کنید:

(الف) اگر  $x > y$  و  $w > z$  آنگاه  $x + w > y + z$ .

(ب) اگر  $x > 0$  و  $y > 0$  آنگاه  $x + y > 0$  و  $x \cdot y > 0$ .

(پ)  $x > 0 \iff -x < 0$ .

(ت)  $x > y \iff -x < -y$ .

(ث) اگر  $x > y$  و  $z < 0$  آنگاه  $xz < yz$ .

(ج) اگر  $x \neq 0$  آنگاه  $x^2 > 0$ ، که در آن،  $x^2 = x \cdot x$ .

(چ)  $-1 < 0 < 1$ .

(ح)  $xy > 0$  اگر و فقط اگر  $x$  و  $y$  هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند.

(خ) اگر  $x > 0$  آنگاه  $\frac{1}{x} > 0$ .

(د) اگر  $x > y > 0$  آنگاه  $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ .

(ذ) اگر  $x < y$  آنگاه  $x < \frac{x+y}{2} < y$ .

۳. (الف) اگر  $A$  گردابه‌ای از مجموعه‌های استقرایی باشد، ثابت کنید که مقطع اعضای  $A$  نیز مجموعه‌ای استقرایی است.

(ب) خواص اساسی (۱) و (۲) و (۳) را برای  $Z_+$  ثابت کنید.

۴. (الف) ثابت کنید اگر  $a \in Z_+$  آنگاه  $a - 1 \in Z_+ \cup \{0\}$ . [داهنمایی: ثابت کنید که مجموعه  $X = \{x \mid x \in R \text{ و } x - 1 \in Z_+ \cup \{0\}\}$  استقرایی و شامل ۱ است.]

(ب) ثابت کنید که اگر  $n \in Z$ ، هیچ عضوی مانند  $a$  که  $a \in Z$  وجود ندارد.

به طوری که  $n < a < n+1$ . [دانهمایی: ابتدا به‌ازای  $n \in \mathbb{Z}_+$  ثابت کنید.]

۵. (الف) به استقرا ثابت کنید که به‌ازای هر  $n \in \mathbb{Z}_+$ ، هر زیر مجموعه ناتهی مجموعه  $\{1, \dots, n\}$  بزرگترین عضو دارد.

(ب) توضیح دهید که چرا از (الف) نمی‌توان نتیجه گرفت که هر زیر مجموعه ناتهی  $\mathbb{Z}_+$  بزرگترین عضو دارد.

۶. خواص ذیل را برای  $\mathbb{Z}$  و  $\mathbb{Z}_+$  ثابت کنید:

(الف) اگر  $a$  و  $b$  عضو  $\mathbb{Z}_+$  باشند آنگاه  $a+b \in \mathbb{Z}_+$ . [دانهمایی: به‌ازای عضو مفروض  $a \in \mathbb{Z}_+$ ، ثابت کنید که مجموعه

$$X = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ و } a+x \in \mathbb{Z}_+\}$$

استقرایی و شامل ۱ است.]

(ب) اگر  $a \in \mathbb{Z}_+$  و  $b \in \mathbb{Z}_+$  آنگاه  $a \cdot b \in \mathbb{Z}_+$ .

(پ) اگر  $c \in \mathbb{Z}$  و  $d \in \mathbb{Z}$  آنگاه  $c+d \in \mathbb{Z}$ . [دانهمایی: نخست حکم را به‌ازای  $d=1$  ثابت کنید.]

(ت) اگر  $c \in \mathbb{Z}$  و  $d \in \mathbb{Z}$  آنگاه  $c-d \in \mathbb{Z}$ .

(ث) اگر  $c \in \mathbb{Z}$  و  $d \in \mathbb{Z}$  آنگاه  $c \cdot d \in \mathbb{Z}$ .

(ج) اگر  $x > 1$  آنگاه  $\frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$ .

۷. فرض کنید  $a \in \mathbb{R}$ ، به‌ازای  $n \in \mathbb{Z}$  نمای  $a$  را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^1 = a,$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

(برای بحث در تعاریفات استقرایی، بخش ۱-۷ را ملاحظه کنید.) ثابت کنید که به‌ازای  $m$  و  $n$  از  $\mathbb{Z}$  و  $a$  و  $b$  از  $\mathbb{R}$ ،

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

$$a^m b^m = (ab)^m.$$

فرمولهای فوق، قوانین نماها نامیده می‌شوند. [دانهمایی:  $n$  را ثابت بگیرید و تساویها را به استقرا نسبت به  $m$  ثابت کنید.]

۸. فرض کنید  $a \in R$  و  $a \neq 0$ . تعریف می‌کنیم  $a^0 = 1$ ، و به‌ازای  $n \in \mathbb{Z}_+$ ،  $a^{-n} = 1/a^n$ . ثابت کنید قوانین نماها به‌ازای هر دو عضو ناصفر  $R$  مانند  $a$  و  $b$  و هر دو عدد صحیح  $m$  و  $n$  برقرار است.

۹. فرض کنید اصل موضوع کوچکترین کران بالا در  $R$  برقرار باشد.

(الف) ثابت کنید که  $\text{glb} \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_+ \right\} = 0$ .

(ب) ثابت کنید به‌ازای هر  $a$  که  $0 < a < 1$ ،  $\text{glb} \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}_+\} = 0$ .

[دانشنامه‌ای: فرض کنید  $h = \frac{1-a}{a}$ ، ثابت کنید که  $a^n \leq \frac{1}{1+nh}$ ]

۱۰. فرض کنید اصل موضوع کوچکترین کران بالا برقرار باشد.

(الف) ثابت کنید هر زیر مجموعه ناتهی  $Z$  که از بالا کراندار باشد بزرگترین عضو دارد.

(ب) ثابت کنید اگر  $x \notin Z$  آنگاه تنها یک عدد صحیح مانند  $n$  هست که  $n < x < n+1$ .

(پ) ثابت کنید اگر  $x - y > 1$  آنگاه دست کم یک عدد صحیح مانند  $n$  هست که  $y < n < x$ .

(ت) ثابت کنید اگر  $y < x$  آنگاه عددی گویا مانند  $z$  موجود است که  $y < z < x$ .

۱۱. فرض کنید اصل موضوع کوچکترین کران بالا برقرار باشد، به‌طریق ذیل ثابت کنید

که هر عدد مثبتی مانند  $a$  درست یک ریشه مثبت دارد:

(الف) ثابت کنید که اگر  $x > 0$  و  $0 \leq h < 1$  آنگاه

$$(x+h)^2 \leq x^2 + h(2x+1),$$

$$(x-h)^2 \geq x^2 - h(2x).$$

(ب) فرض کنید  $x > 0$ . ثابت کنید که اگر  $x^2 < a$  آنگاه به‌ازای یک  $h > 0$ ،

$(x+h)^2 < a$ ؛ و اگر  $x^2 > a$  آنگاه به‌ازای یک  $h > 0$ ،  $(x-h)^2 > a$ .

(پ) فرض کنید  $a > 0$ ، و  $B$  مجموعه همه اعداد حقیقی  $x$  باشد به‌طوری که

$x^2 < a$ . ثابت کنید که  $B$  از بالا کراندار است و دست کم یک عضو مثبت دارد.

فرض کنید  $b = \text{lub } B$ ؛ ثابت کنید که  $b^2 = a$ .

(ت) ثابت کنید که اگر  $b$  و  $c$  دو عدد مثبت باشند و  $b^2 = c^2$  آنگاه  $b = c$ .

۱۴. عدد صحیح  $m$  را زوج گوئیم در صورتی که  $m/2 \in \mathbb{Z}$ ، و در غیر این صورت گوئیم  $m$  فرد است.

(الف) ثابت کنید اگر  $m$  فرد باشد آنگاه  $n$  در  $\mathbb{Z}$  هست که  $m = 2n + 1$ .

[داهنمایی:  $n$  را چنان انتخاب کنید که  $n < m/2 < n + 1$ ]

(ب) اگر  $p$  و  $q$  فرد باشند آنگاه  $p \cdot q$  و  $p^n$  به ازای هر  $n \in \mathbb{Z}$  نیز فرد هستند.

(پ) ثابت کنید که اگر  $a$  عدد گویای مثبتی باشد آنگاه  $m$  و  $n$  در  $\mathbb{Z}$  هستند

که  $a = m/n$  که در آن  $m$  و  $n$  هر دو زوج نیستند. [داهنمایی: فرض کنید  $n$  کوچکترین

عضو مجموعه  $\{x \mid x \in \mathbb{Z}_+ \text{ و } x \cdot a \in \mathbb{Z}_+\}$  باشد.]

(ت) قضیه  $\sqrt{2}$  گنگ است.

## ۵-۱ حاصل ضرب دکارتی دلخواه

قبلاً  $A \times B$  یعنی حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه  $A$  و  $B$  را تعریف کردیم. اکنون حاصل ضرب دکارتی تعداد دلخواهی از مجموعه‌ها را تعریف می‌کنیم. ابتدا چند حالت خاص را در نظر می‌گیریم، و سپس تعریف کلی را بیان می‌کنیم.

طبق معمول  $\{1, \dots, m\}$  نمایش مجموعه همه اعداد صحیح مثبت  $a$  است به طوری که  $1 \leq a \leq m$ . برای مجموعه مفروض  $X$ ، یک  $m$  تایی از اعضای  $X$  را به صورت تابعی مانند

$$x: \{1, \dots, m\} \rightarrow X$$

تعریف می‌کنیم. اگر  $x$  یک  $m$  تایی باشد، اغلب مقدار  $x$  را در  $i$  به جای  $x(i)$  به  $x_i$ ، و خود  $x$  را با نماد

$$(x_1, \dots, x_m)$$

نشان می‌دهیم. مجموعه همه  $m$  تایی‌ها از اعضای  $X$  را به  $X^m$  نمایش می‌دهیم. حال می‌توانیم حاصل ضرب دکارتی را تعریف کنیم.

تعریف. فرض کنیم  $\{A_1, \dots, A_m\}$  گردایه‌ای از مجموعه‌ها باشد که با اعداد صحیح مثبت از ۱ تا  $m$  اندیس‌گذاری شده‌اند و  $X = A_1 \cup \dots \cup A_m$  حاصل ضرب دکارتی این گردایه اندیس‌دار از مجموعه‌ها، که به

$$A_1 \times \dots \times A_m \quad \text{یا} \quad \prod_{i=1}^m A_i$$

نمایش داده می‌شود، عبارت است از مجموعه همه  $m$  تایی‌های  $(x_1, \dots, x_m)$  از اعضای  $X$  که به ازای هر  $i$ ،  $x_i \in A_i$ .

مثال ۱. اینک برای نماد  $A \times B$  دو تعریف داریم. یکی از اینها همان تعریف سابق است، که برطبق آن مجموعه همه زوجهای مرتبی است مانند  $(a, b)$  که  $a \in A$  و  $b \in B$ . تعریف دوم، که هم اکنون ملاحظه شد،  $A \times B$  را به عنوان مجموعه همه توابعی مانند  $A \cup B \rightarrow \{1, 2\}$  معرفی می کند که  $x(1) \in A$  و  $x(2) \in B$ . در اینجا، یک تناظر یک به یک بدیهی بین این دو مجموعه موجود است که تحت آن زوج مرتب  $(a, b)$  نظیر تابع  $x$  است به طوری که  $x(1) = a$  و  $x(2) = b$ . چون عموماً این تابع  $x$  را نیز با نماد  $(a, b)$  نمایش می دهیم، خود این نماد تناظر مذکور را به ذهن می آورد. بنابراین، در مورد حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه، تعریف کلی حاصل ضرب دکارتی اساساً به همان تعریف سابق بازمی گردد.

مثال ۲. حاصل ضرب دکارتی  $A \times B \times C$  با حاصل ضرب دکارتی  $A \times (B \times C)$  و  $(A \times B) \times C$  چه تفاوتی دارد؟ اختلاف آنها بسیار اندک است. تناظرهای دوسویی بدیهی بین این مجموعه ها وجود دارند که به شرح زیر نموده شده اند:

$$(a, b, c) \longleftrightarrow (a, (b, c)) \longleftrightarrow ((a, b), c).$$

برای تعمیم تعریف سابق به همان قیاس عمل می کنیم. فرض کنیم  $X$  مجموعه ای مفروض باشد، یک  $\omega$  تایی از اعضای  $X$  عبارت است از تابعی مانند

$$x: Z_+ \rightarrow X;$$

چنین تابعی را دنباله، یا دنباله نامتناهی، از اعضای  $X$  نیز می نامیم. اگر  $x$  یک  $\omega$  تایی باشد، اغلب مقدار تابع  $x$  را در  $i$  به جای  $x(i)$  به  $x_i$  و خود تابع  $x$  را با نماد

$$(x_1, x_2, \dots) \text{ یا } (x_n)_{n \in Z_+}$$

نشان می دهیم. مجموعه همه  $\omega$  تایی ها از اعضای  $X$  را به  $X^\omega$  نمایش می دهیم.

تعریف. فرض کنیم  $\{A_1, \dots, A_n, \dots\}$  گردایه ای از مجموعه ها باشد که با اعداد صحیح مثبت اندیس گذاری شده اند. همچنین، فرض کنیم  $X$  اجتماع مجموعه های واقع در این گردایه باشد. حاصل ضرب دکارتی این گردایه اندیس دار از مجموعه ها، که به

$$A_1 \times A_2 \times \dots \text{ یا } \prod_{i \in Z_+} A_i$$

نمایش داده می شود، عبارت است از مجموعه همه  $\omega$  تایی هایی مانند  $(x_1, x_2, \dots)$  از اعضای  $X$  به طوری که به ازای هر  $i$ ،  $x_i \in A_i$ .

ملاحظه کنید که این تعاریف مستلزم متمایز بودن مجموعه های  $A_i$  نیستند. در واقع، ممکن است همه آنها مساوی مجموعه ای مانند  $X$  باشند. در این حالت، حاصل ضرب

دکارتی  $A_1 \times \dots \times A_m$  چیزی جز مجموعه  $X^m$  متشکل از همه  $m$  تایی‌ها از اعضای  $X$  نیست؛ و حاصل ضرب  $A_1 \times A_2 \times \dots$  نیز همان مجموعه  $X^\omega$  متشکل از همه  $\omega$  تایی‌ها از اعضای  $X$  است.

مثال ۳. اگر  $R$  مجموعه اعداد حقیقی باشد آنگاه  $R^\omega$  عبارت است از مجموعه همه  $m$  تایی‌ها از اعداد حقیقی، که اغلب فضای اقلیدسی  $m$  بعدی نامیده می‌شود (اگر چه اقلیدس هرگز اطلاعی از آن نداشته است). به همین قیاس،  $R^\omega$ ، که گاهی «فضای اقلیدسی بینهایت بعدی» نامیده می‌شود عبارت است از مجموعه همه  $\omega$  تایی‌های  $(x_1, x_2, \dots)$  از اعداد حقیقی، یعنی مجموعه همه توابع  $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow R$ .

اکنون به تعریف کلی حاصل ضرب دکارتی، که این تعاریف را به عنوان حالاتی خاص در برمی‌گیرد، باز می‌گردیم. نخست، باید منظور خود را از یک «گردایه اندیسدار از مجموعه‌ها» که به طور ضمنی در بالا آمده است به صورتی دقیقتر در آوریم.

تعریف. فرض کنیم  $I$  گردایه‌ای از مجموعه‌ها باشد. یک تابع اندیسگذار برای  $I$  عبارت از تسابعی است پوشا مانند  $f$  از مجموعه‌ای مانند  $J$ ، موسوم به مجموعه اندیس، به  $I$ . گردایه  $I$  توأم با تابع اندیسگذار  $f$  را یک خانواده اندیسدار از مجموعه‌ها می‌خوانیم.

به ازای عضو مفروض  $\alpha$  از  $J$ ، از این به بعد مجموعه  $f(\alpha)$  را با نماد  $A_\alpha$  و خود این خانواده اندیسدار را با نماد

$$\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$$

نمایش می‌دهیم و آن را چنین می‌خوانیم: «خانواده همه  $A_\alpha$  ها، وقتی که  $\alpha$  بر  $J$  تغییر می‌کند.» موقعی که مجموعه اندیس مشخص است، تنها به نوشتن  $\{A_\alpha\}$  اکتفا می‌کنیم. توجه کنید که اگر چه یک تابع اندیسگذار باید پوشا باشد، لازم نیست یک به یک باشد و کاملاً امکان دارد که  $\alpha \neq \beta$ ، ولی مجموعه‌های  $A_\alpha$  و  $A_\beta$  هر دو یک عضو  $A$  باشند.

یکی از موارد کاربرد توابع اندیسگذار، در نمادگذاری جدید برای اجتماع و مقطع دلخواه مجموعه‌هاست. فرض کنیم  $f: J \rightarrow I$  یک تابع اندیسگذار برای  $I$ ، و  $A_\alpha$  نمایش  $f(\alpha)$  باشد. در این صورت، بنا بر تعریف:

$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha, \alpha \in J \text{ يك}\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha, \alpha \in J \text{ هر}\}.$$

در واقع، اینها فقط علامات جدیدی برای مفاهیم تعریف شده سابق هستند؛ به آسانی (و به کمک پوشا بودن تابع اندیسگذار) دیده می‌شود که اولی برابر اجتماع همه اعضای

$A$  و دومی مساوی مقطع همه اعضای  $A$  است.

کاربرد اصلی توابع اندیسگذار در تعریف حاصل ضربهای دکارتی دلخواه است: فرض کنیم  $J$  یک مجموعه اندیس و  $X$  مجموعه‌ای دلخواه باشد. یک  $J$ تایی از اعضای  $X$  را به صورت تسامبی مانند  $x: J \rightarrow X$  تعریف می‌کنیم. اگر  $\alpha$  عضوی از  $J$  باشد، اغلب مقدار تابع  $x$  در  $\alpha$  را به جای  $x(\alpha)$  با  $x_\alpha$  و خود تابع  $x$  را با نماد

$$(x_\alpha)_{\alpha \in J}$$

نشان می‌دهیم، که به ازای یک مجموعه اندیس دلخواه مانند  $J$  حتی الامکان تفاوتی بایک «نماد  $J$ تایی» ندارد. مجموعه همه  $J$ تایی از اعضای  $X$  را به  $X^J$  نمایش می‌دهیم.

تعریف. فرض کنیم  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  یک خانواده اندیسدار از مجموعه‌ها باشد، و  $X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ . حاصل ضرب دکارتی این خانواده اندیسدار، که به

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$$

نمایش داده می‌شود، عبارت است از مجموعه همه  $J$ تایی‌هایی مانند  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$  از اعضای  $X$  به طوری که به ازای هر  $\alpha$  از  $J$ ،  $x_\alpha \in A_\alpha$ .

به بیانی دیگر، این حاصل ضرب دکارتی، همان مجموعه همه توابع

$$x: J \rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$$

است که به ازای هر  $\alpha$  از  $J$ ،  $x(\alpha) \in A_\alpha$ .

اگر مجموعه اندیس  $J$  مشخص باشد، گاهی این حاصل ضرب را مختصراً به  $\prod A_\alpha$ ، و عضو عمومی آن را به  $(x_\alpha)$  نمایش می‌دهیم.

اگر همه مجموعه‌های  $A_\alpha$  مساوی مجموعه‌ای مانند  $X$  باشند، حاصل ضرب  $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$  همان مجموعه  $X^J$ ، یعنی مجموعه همه  $J$ تایی‌ها از اعضای  $X$  است. در هنگام کار با  $X^J$ ، برای نمایش اعضای آن، بسته به اینکه کدامیک مناسبتر باشد، گاه «نماد  $J$ تایی» و گاه علامتگذاری مربوط به توابع را به کار می‌بریم.

## تمرینها

۱. ثابت کنید که تناظری دوسویی بین  $A \times B$  و  $B \times A$  موجود است.

۲. (الف) نشان دهید که اگر  $n > 1$  آنگاه تناظری دوسویی بین مجموعه‌های ذیل برقرار است:

$$A_1 \times \cdots \times A_n \quad \text{و} \quad (A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$$

(ب) فرض کنید  $J$  يك مجموعه اندیس باشد؛ و  $J = K \cup L$ ، که در آن،  $K$  و  $L$  جدا از هم و ناتهی اند. ثابت کنید که تناظری دوسویی بین مجموعه‌های

$$\prod_{\alpha \in J} A_{\alpha} \quad \text{و} \quad (\prod_{\alpha \in K} A_{\alpha}) \times (\prod_{\alpha \in L} A_{\alpha})$$

برقرار است.

۳. فرض کنید  $J$  مجموعه‌ای اندیس (ناتهی) باشد. دو خانواده اندیسدار  $\{A_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$  و  $\{B_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$  را در نظر بگیرید و ثابت کنید که:

(الف) اگر به ازای هر  $\alpha$  از  $J$ ،  $A'_{\alpha} \subset A_{\alpha}$ ، آنگاه  $\prod_{\alpha \in J} A'_{\alpha} \subset \prod_{\alpha \in J} A_{\alpha}$ .  
 (ب) عکس (الف)، در صورتی که  $\prod_{\alpha \in J} A'_{\alpha}$  ناتهی باشد، برقرار است.

(پ)  $(\prod_{\alpha \in J} A_{\alpha}) \cap (\prod_{\alpha \in J} B_{\alpha}) = \prod_{\alpha \in J} (A_{\alpha} \cap B_{\alpha})$

(ت)  $(\prod_{\alpha \in J} A_{\alpha}) \cup (\prod_{\alpha \in J} B_{\alpha}) \subset \prod_{\alpha \in J} (A_{\alpha} \cup B_{\alpha})$

(ث) اگر دست کم یکی از  $A_{\alpha}$  ها تهی باشد آنگاه  $\prod_{\alpha \in J} A_{\alpha}$  تهی است. در حالتی که هر  $A_{\alpha}$  ناتهی است، چه حکمی می‌توانید بکنید؟ (تمرین ۴ از بخش ۱-۹ ملاحظه شود).

۴. فرض کنید  $m \in \mathbb{Z}_+$ ،  $n \in \mathbb{Z}_+$  و  $X \neq \emptyset$ .

(الف) اگر  $m \leq n$  آنگاه نگاشتی يك به يك مانند  $f: X^m \rightarrow X^n$  بیابید.

(ب) نگاشتی دوسویی مانند  $g: X^m \times X^n \rightarrow X^{m+n}$  بیابید.

(پ) نگاشتی يك به يك مانند  $h: X^n \rightarrow X^{\omega}$  بیابید.

(ت) نگاشتی دوسویی مانند  $k: X^n \times X^{\omega} \rightarrow X^{\omega}$  بیابید.

(ث) نگاشتی دوسویی مانند  $l: X^{\omega} \times X^{\omega} \rightarrow X^{\omega}$  بیابید.

(ج) اگر  $A \subset B$ ، نگاشتی يك به يك مانند  $m: X^A \rightarrow X^B$  بیابید.

۵. کداميك از زیر مجموعه‌های ذیل از  $R^{\omega}$  را می‌توان به صورت حاصل ضرب دکارتی زیر مجموعه‌هایی از  $R$  بیان کرد؟

(الف)  $\{x \mid \text{به ازای هر } i, x_i \text{ عددی است صحیح}\}$

(ب)  $\{x \mid \text{به ازای هر } i, x_i \geq i\}$

(پ)  $\{x \mid \text{به ازای هر } i, x_i \geq 100\}$

(ت)  $\{x \mid x_1 = x_2\}$

۱. به بیان دقیقتر، به ازای تابع مفروضی مانند  $\cup A'_{\alpha} : J \rightarrow X$ ، قبل از اینکه آن را به عنوان تابعی از  $J$  به  $\cup A_{\alpha}$  در نظر بگیریم، باید حوزه مقادیر آن را تغییر دهیم. این تغییر حوزه مقادیر را، در مواقع کار با حاصل ضربهای دکارتی، عملاً نادیده می‌گیریم.



## ۱-۶ مجموعه‌های متناهی

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ، مجموعه‌های شمارا و ناشمارا ، انواعی از مجموعه‌ها هستند که احتمالاً پیش از این با آنها برخورد کرده‌اید. با وجود این ، در این بخش و بخش بعدی به بررسی آنها می‌پردازیم ، این نه تنها بدین جهت است که می‌خواهیم از آگاهی شما از آنها اطمینان حاصل کنیم ، بلکه بیشتر به دلیل توضیح بعضی نکات ویژه منطقی است که بعداً با آنها مواجه خواهیم شد. نخست ، مجموعه‌های متناهی را در نظر می‌گیریم.

یادآوری می‌کنیم که اگر  $n$  عدد صحیح مثبتی باشد آنگاه

$$\{x \mid 1 \leq x \leq n \text{ و } x \in \mathbb{Z}_+\}$$

را به  $\{1, \dots, n\}$  نمایش می‌دهیم. این مجموعه را یک قطعه از اعداد صحیح مثبت می‌نامیم. مجموعه‌های  $\{1, \dots, n\}$  نمونه نخستین آن مجموعه‌هایی هستند که متناهی خوانده می‌شوند.

**تعریف.** مجموعه  $A$  را **متناهی** گوئیم در صورتی که یا تهی باشد و یا به ازای  $n \in \mathbb{Z}_+$  تناظری دوسویی مانند

$$f: A \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

موجود باشد. در حالت اول ، گوئیم  $A$  دارای **صفر عضو** است ؛ و در حالت دوم ، گوئیم  $A$  دارای  $n$  **عضو** است.

مثلاً ، خود مجموعه  $\{1, \dots, n\}$  دارای  $n$  عضو است. زیرا تابع همانی تناظری دوسویی است بین این مجموعه و خودش.

اینک ، بدقت توجه کنید که : تا اینجا هنوز ثابت نکرده‌ایم که به ازای مجموعه متناهی مفروض  $A$  ، عدد اعضایی «که  $A$  دارد» ، به طور یکتا توسط  $A$  معین می‌شود. بر طبق آنچه که تا به حال در این کتاب گفته‌ایم ، ممکن است تناظرهایی دوسویی بین مجموعه مفروض  $A$  و مجموعه‌های متفاوتی مانند  $\{1, \dots, n\}$  و  $\{1, \dots, m\}$  موجود باشد. شاید این امکان مضحك به نظر آید ، زیرا درست مثل این است که بگوئیم ممکن است دو نفر مهره‌های داخل یک جعبه را بشمارند و دو جواب متفاوت به دست آورند ، و هر دو جواب درست باشند. تجربه زندگی روزمره ما از شمردن ، این امکان را رد می‌کند ، و در حقیقت اثبات این مطلب برای مقادیر کوچک  $n$  ، مانند ۱ ، ۲ ، و یا ۳ آسان است. اما وقتی که  $n$  ، مثلاً ، ۵ میلیون باشد ، اثبات مستقیم آن خواسته‌ای است ناممکن.

حتی اثبات تجربی نیز برای چنین مقادیر بزرگ  $n$  دشوار است. مثلاً ، می‌توان آزمایشی بدین گونه انجام داد که ده نفر را مستقل از یکدیگر به کار شمردن گردوهای یک انبار پر از گردو گمارد. بسا در نظر گرفتن مسائل فیزیکی ، محتمل به نظر می‌رسد که شمارشگران همگی به یک جواب نخواهند رسید. البته ، می‌توان این طور نتیجه‌گیری کرد

که دست کم یکی از افراد اشتباه کرده است. ولی، این خود به معنی پذیرش درستی نتیجه‌ای است که می‌خواستیم آن را به روش تجربی ثابت کنیم. توضیح دیگری که می‌توان برای متفاوت بودن نتیجه‌ها آورد این است که واقعاً بین این مجموعه‌گردوها و دو قطعه متفاوت از اعداد صحیح مثبت تناظرهایی دوسویی برقرار است.

در زندگی واقعی، ما توضیح نخست را می‌پذیریم. یعنی، براساس تجربه‌های خود در شمردن عددهای اعضای مجموعه‌های نسبتاً کوچک، می‌پذیریم که این نتایج در مورد مجموعه‌های بزرگ دلخواه نیز برقرارند.

ولی، در ریاضیات (برخلاف زندگی واقعی)، شخص اجباری ندارد که این حکم را تنها براساس اعتقاد بپذیرد. اگر این حکم به جای اینکه برحسب عمل فیزیکی شمردن بیان شده باشد، به زبان وجود تناظرهای دوسویی فرمولبندی شود، قابل اثبات ریاضی است. ما بزودی ثابت خواهیم کرد که اگر  $m \neq n$  آنگاه تناظرهایی دوسویی که مجموعه  $A$  را هم بر  $\{1, \dots, n\}$  و هم بر  $\{1, \dots, m\}$  بنگارد وجود ندارند.

واقعیات «شهوداً بدیهی» دیگری درباره‌ی مجموعه‌های متناهی موجودند که قابل اثبات ریاضی‌اند؛ در این بخش پاره‌ای از آنها را ثابت می‌کنیم و بقیه را به عنوان تمرین باقی می‌گذاریم. مطلب را با این واقعیت ساده آغاز می‌کنیم:

۱۰۶. لم فرض کنیم  $n$  یک عدد صحیح مثبت،  $A$  یک مجموعه، و  $a_0$  عضوی از  $A$  باشد. در این صورت، تناظری دوسویی مانند  $f$  بین مجموعه  $A$  و مجموعه  $\{1, \dots, n+1\}$  موجود است اگر و فقط اگر تناظری دوسویی مانند  $g$  بین مجموعه‌های  $A - \{a_0\}$  و  $\{1, \dots, n\}$  وجود داشته باشد.

برهان. باید دو استلزام را ثابت کنیم. ابتدا، فرض می‌کنیم که تناظری دوسویی مانند

$$g: A - \{a_0\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

موجود باشد. تابع  $f: A \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = g(x) \quad , \quad x \in A - \{a_0\}$$

$$f(a_0) = n+1.$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که  $f$  دوسویی است.

برای اثبات عکس آن، فرض کنیم تناظری دوسویی مانند

$$f: A \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$$

موجود باشد. اگر  $f(a_0) = n+1$ ، کار آسان است؛ در این حالت تحدید تابع  $f$  به  $A - \{a_0\}$ ، یعنی  $f|_{A - \{a_0\}}$  تناظر دوسویی مطلوب بین  $A - \{a_0\}$  و  $\{1, \dots, n\}$

است. در غیر این صورت، فرض کنیم  $f(a_0) = m$  و  $a_1$  عضوی از  $A$  باشد که  $f(a_1) = n+1$ . در این صورت،  $a_1 \neq a_0$ . حال تابع جدیدی مانند

$$h: A \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$$

را چنین تعریف می‌کنیم:

$$h(a_0) = n+1,$$

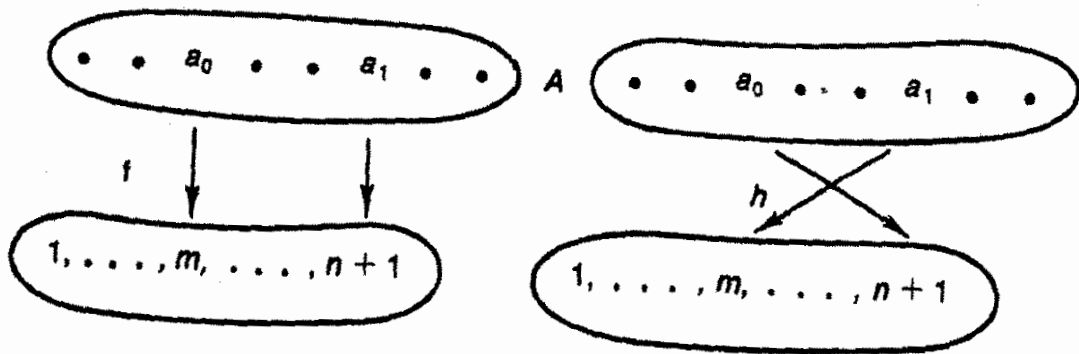
$$h(a_1) = m,$$

$$h(x) = f(x) \quad , x \in A - \{a_0\} - \{a_1\}$$

(شکل ۱۰ ملاحظه شود.) به آسانی می‌توان تحقیق کرد که  $h$  دوسویی است.

اکنون به همان حالت ساده سابق باز گشتیم؛ تحدید  $h|_{A - \{a_0\}}$  تناظر دوسویی

مطلوب بین  $A - \{a_0\}$  و  $\{1, \dots, n\}$  است.  $\square$



شکل ۱۰

از این لم چند نتیجه مفید به دست می‌آید:

۲.۶. قضیه فرض کنیم  $A$  یک مجموعه باشد، و به ازای عددی مانند  $n \in \mathbb{Z}_+$ ، تناظری دوسویی مانند  $f: A \rightarrow \{1, \dots, n\}$  موجود باشد. در این صورت، اگر  $B$  زیر مجموعه سرهای  $A$  باشد، هیچ تناظر دوسویی بین  $B$  و مجموعه  $\{1, \dots, n\}$  وجود ندارد؛ ولی (به شرط آنکه  $B \neq \emptyset$ ) عضوی از  $\mathbb{Z}_+$  مانند  $m$  هست که  $m < n$ ، و تناظری دوسویی مانند  $h: B \rightarrow \{1, \dots, m\}$  موجود است.

پرهان. در حالتی که  $B = \emptyset$  حکم بدیهی است. زیرا هیچ تناظر دوسویی بین مجموعه تهی  $B$  و مجموعه ناتهی  $\{1, \dots, n\}$  نمی‌تواند موجود باشد. اکنون قضیه را «به استقرای» ثابت می‌کنیم. فرض کنیم  $\mathbb{Z}_0$  مجموعه آن اعداد صحیح مثبتی باشد که به ازای آنها قضیه برقرار است. ثابت می‌کنیم  $\mathbb{Z}_0$  شامل یک و استقرایی

است. از اینجا، تساوی  $Z_0 = Z_+$  نتیجه می‌شود. بنابراین، قضیه به‌ازای هر عدد صحیح مثبت  $n$  برقرار است.

ابتدا، حکم را در حالتی که  $n = 1$  ثابت می‌کنیم. در این حالت  $A$  مجموعه تک-عضوی  $\{a\}$  است، و تنها زیر مجموعه سره آن مجموعه تهی است.

اکنون فرض می‌کنیم قضیه به‌ازای  $n$  برقرار باشد؛ ثابت می‌کنیم که به‌ازای  $n+1$  نیز برقرار است. فرض کنیم  $f: A \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$  تابعی دوسویی و  $B$  یک زیر مجموعه سره ناتهی  $A$  باشد. یک عضو  $a_0$  از  $B$  و یک عضو  $a_1$  از  $A - B$  را انتخاب می‌کنیم. با به‌کار بستن لم سابق نتیجه می‌گیریم که تناظری دوسویی مانند

$$g: A - \{a_0\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

موجود است. حال می‌گوییم  $B - \{a_0\}$  زیر مجموعه سره  $A - \{a_0\}$  است. زیرا  $a_1$  به  $A - \{a_0\}$  تعلق دارد ولی به  $B - \{a_0\}$  تعلق ندارد. چون فرض کردیم قضیه به‌ازای  $n$  برقرار است، نتیجه می‌گیریم که:

(۱) هیچ تناظر دوسویی  $h: B - \{a_0\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  موجود نیست.

(۲) یا  $B - \{a_0\} = \emptyset$ ؛ و یا به‌ازای عددی مانند  $p$ ، که  $p < n$ ، تناظری

دوسویی مانند

$$k: B - \{a_0\} \rightarrow \{1, \dots, p\}$$

موجود است. ترکیب لم پیش و (۱) ایجاب می‌کند که هیچ تناظر دوسویی بین  $B$  و  $\{1, \dots, n+1\}$  موجود نیست. بدین گونه، نیمی از خواسته ما ثابت می‌شود. برای اثبات نیمه دوم، ملاحظه کنید که اگر  $B - \{a_0\} = \emptyset$  آنگاه تناظری دوسویی بین  $B$  و  $\{1\}$  موجود است؛ و اگر  $B - \{a_0\} \neq \emptyset$ ، می‌توان با به‌کار بستن لم سابق همراه با (۲)، نتیجه گرفت که تناظری دوسویی بین  $B$  و  $\{1, \dots, p+1\}$  موجود است. در هر حال، چنانکه می‌خواستیم، به‌ازای عددی مانند  $m$  که  $m < n+1$ ، تناظری دوسویی بین  $B$  و  $\{1, \dots, m\}$  موجود است.

حال اصل استقرا نشان می‌دهد که قضیه برای هر  $n \in Z_+$  برقرار است.  $\square$

۳.۶. نتیجه اگر  $A$  متناهی باشد آنگاه هیچ تناظر دوسویی بین  $A$  و زیر مجموعه سره‌ای از آن وجود ندارد.

برهان. فرض کنیم  $B$  زیر مجموعه سره‌ای از  $A$  و  $f: A \rightarrow B$  تابعی دوسویی باشد. با توجه به فرض، به‌ازای عددی مانند  $n$ ، تابعی دوسویی مانند  $g: A \rightarrow \{1, \dots, n\}$  موجود است. بنابراین، تابع مرکب  $g \circ f^{-1}$  تناظری دوسویی بین  $B$  و  $\{1, \dots, n\}$  است، و این با قضیه قبل متناقض است.  $\square$

۴.۶. نتیجه عده‌اعضای مجموعه متناهی  $A$  به‌طوریکتا توسط  $A$  مشخص می‌شود.

برهان. فرض کنیم  $m < n$ ، و تناظرهای دوسویی ذیل موجود باشند:

$$f: A \rightarrow \{1, \dots, n\},$$

$$g: A \rightarrow \{1, \dots, m\}.$$

در این صورت، تابع مرکب

$$g \circ f^{-1}: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$$

تناظری دوسویی بین  $\{1, \dots, n\}$  و یک زیر مجموعه سره خودش است که با نتیجه پیش تناقض دارد.  $\square$

۵.۶. نتیجه اگر  $B$  زیر مجموعه‌ای از مجموعه متناهی  $A$  باشد آنگاه  $B$  نیز متناهی است. اگر  $B$  زیر مجموعه سره  $A$  باشد آنگاه عده اعضای  $B$  از عده اعضای  $A$  کمتر است.

۶.۶. نتیجه  $Z_+$  متناهی نیست.

برهان. تابع  $f: Z_+ \rightarrow Z_+ - \{1\}$  با ضابطه  $f(n) = n + 1$  تناظری دوسویی بین  $Z_+$  و یک زیر مجموعه سره آن است.  $\square$

۷.۶. قضیه فرض کنیم  $B$  مجموعه‌ای ناتهی و  $n$  عدد صحیح مثبتی باشد. در این صورت، گزاره‌های ذیل با یکدیگر معادل اند:

(۱) تابعی پوشا مانند  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow B$  موجود است.

(۲) تابعی یک به یک مانند  $g: B \rightarrow \{1, \dots, n\}$  موجود است.

(۳)  $B$  متناهی و حداکثر  $n$  عضو دارد.

برهان. ثابت می‌کنیم که

$$(1) \implies (2) \implies (3) \implies (1);$$

این برای اثبات معادل بودن گزاره‌های فوق کافی است. فرض کنیم  $A = \{1, \dots, n\}$ .  $(1) \implies (2)$ . با داشتن تابع پوشای  $f: A \rightarrow B$ ، تابع  $g: B \rightarrow A$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$g(b) = f^{-1}(\{b\})$$

از آنجا که  $f$  پوشاست، مجموعه  $f^{-1}(\{b\})$  ناتهی است. می‌دانیم که چون  $Z_+$  خوشترتیب است، هر زیر مجموعه ناتهی آن کوچکترین عضو یکتایی دارد. بنابراین،  $g$  خوشتعریف است. تابع  $g$  یک به یک است، زیرا اگر  $b \neq b'$  آنگاه مجموعه‌های  $f^{-1}(\{b\})$  و  $f^{-1}(\{b'\})$  جدا از هم اند، و در نتیجه، کوچکترین اعضای آنها نیز باید متفاوت باشند.

(۲)  $\implies$  (۳). فرض کنیم  $g: B \rightarrow A$  يك به يك و  $C$  مجموعه تصویر  $g(B)$  باشد. در این صورت، تابع  $g': B \rightarrow C$ ، که با تغییر دادن حوزه مقادیر تابع  $g$  به دست آمده است، دوسویی است. چون  $C$  زیر مجموعه‌ای از  $A = \{1, \dots, n\}$  است، به ازای عددی مانند  $p$ ، که  $p \leq n$ ، تناظری دوسویی مانند  $h: C \rightarrow \{1, \dots, p\}$  موجود است. تابع مرکب  $h \circ g'$  تناظری دوسویی بین  $B$  و  $\{1, \dots, p\}$  است. (۱)  $\implies$  (۳). فرض کنیم مجموعه  $B$  دارای  $m$  عضو باشد، که در آن  $1 \leq m \leq n$ . در این صورت، تناظری دوسویی مانند

$$h: \{1, \dots, m\} \rightarrow B$$

موجود است. اگر  $m = n$  آنگاه  $h$  يك تابع پوشا از  $A$  بروی  $B$  است، و این همان است که می‌خواستیم. اگر  $m < n$  آنگاه به ازای هر  $i$ ، که  $m < i \leq n$ ، با قرار دادن  $f(i) = h(1)$ ، تابع  $h$  را به تابع پوشای  $B$   $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow B$  گسترش می‌دهیم.  $\square$

۸.۶. نتیجه فرض کنیم  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  خانواده‌ای اندیسدار از مجموعه‌ها باشد. اگر مجموعه اندیس  $I$  و هر يك از مجموعه‌های  $A_\alpha$  متناهی باشند آنگاه مجموعه‌های

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \quad \text{و} \quad \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$$

نیز متناهی اند.

به بیان مختصر، این قضیه بیان می‌کند که اجتماعهای متناهی و حاصل ضربهای متناهی از مجموعه‌های متناهی، متناهی اند. اثبات را به عنوان تمرین باقی می‌گذاریم.

## تمرینها

۱. (الف) کلیه نگاشتهای يك به يك

$$f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$$

را بنویسید. ثابت کنید که هیچیک از آنها دوسویی نیست. (این، برهانی مستقیم برای این مطلب است که يك مجموعه سه عضوی، چهار عضو ندارد.)  
(ب) چند نگاشت يك به يك

$$f: \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$$

موجود است؟ (از اینجا متوجه می‌شوید که چرا کسی میل ندارد مستقیماً ثابت کند که هیچ تناظر دوسویی بین این دو مجموعه وجود ندارد.)

۲. ثابت کنید که اگر  $B$  متناهی نباشد و  $B \subset A$  آنگاه  $A$  هم متناهی نیست.

۳. فرض کنید  $X$  مجموعه دو عضوی  $\{0, 1\}$  باشد. تناظری دوسویی بین  $X^{\omega}$  و  $Y$  زیر مجموعه سره آن بیابید.
۴. فرض کنید  $A$  يك مجموعه متناهی ناتهی و مرتب به ترتیب ساده باشد.  
 (الف) ثابت کنید که  $A$  دارای بزرگترین عضو است. [دانهمایی: به استقرا نسبت به عدد اعضای  $A$  استدلال کنید].  
 (ب) ثابت کنید که  $A$  و قطعه‌ای از اعداد صحیح مثبت يك نوع ترتیب دارند.
۵. (الف) ثابت کنید که  $A \cup B$  متناهی است اگر و فقط اگر  $A$  و  $B$  متناهی باشند.  
 (ب) فرض کنید  $J \neq \emptyset$ . ثابت کنید اگر  $J$  متناهی و به ازای هر  $\alpha \in J$  مجموعه  $A_{\alpha}$  متناهی باشد آنگاه  $\bigcup_{\alpha \in J} A_{\alpha}$  مجموعه‌ای است متناهی.  
 (پ) عکس (ب) تا چه اندازه برقرار است؟
۶. (الف) ثابت کنید که اگر  $A$  و  $B$  متناهی باشند آنگاه  $A \times B$  نیز متناهی است.  
 (ب) فرض کنید  $J \neq \emptyset$ . ثابت کنید که اگر  $J$  و هر يك از مجموعه‌های  $A_{\alpha}$  متناهی باشند آنگاه  $\prod_{\alpha \in J} A_{\alpha}$  نیز متناهی است.  
 (پ) عکس (ب) تا چه اندازه برقرار است؟
۷. ثابت کنید که اگر  $A$  متناهی باشد آنگاه  $\mathcal{P}(A)$ ، مجموعه همه زیر مجموعه‌های  $A$ ، نیز متناهی است. [دانهمایی: فرض کنید  $X$  مجموعه دو عضوی  $\{0, 1\}$  باشد. تناظری دوسویی بین  $\mathcal{P}(A)$  و حاصل ضرب دکارتی  $X^A$  تعریف کنید].
۸. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه مفروض باشند و  $f$  مجموعه همه توابع  $f: A \rightarrow B$  باشد. ثابت کنید که اگر  $A$  و  $B$  متناهی باشند،  $f$  نیز متناهی است.

## ۱-۷ مجموعه‌های شمارا و ناشمارا

همان گونه که مجموعه‌های  $\{1, \dots, n\}$  نخستین نمونه مجموعه‌های متناهی اند،  $Z_+$  مجموعه همه اعداد صحیح مثبت نخستین نمونه مجموعه‌های موسوم به شمارای نامتناهی است. در این بخش، به بررسی چنین مجموعه‌هایی خواهیم پرداخت؛ همچنین، مجموعه‌هایی می‌سازیم که نه متناهی و نه شمارای نامتناهی اند. این بررسی، به نوبه خود ما را به بحثی در «تعریفات استقرایی» رهنمون می‌سازد.

تعریف. مجموعه  $A$  را نامتناهی گوئیم در صورتی که متناهی نباشد. اگر تناظری دوسویی مانند

$$f: Z_+ \rightarrow A$$

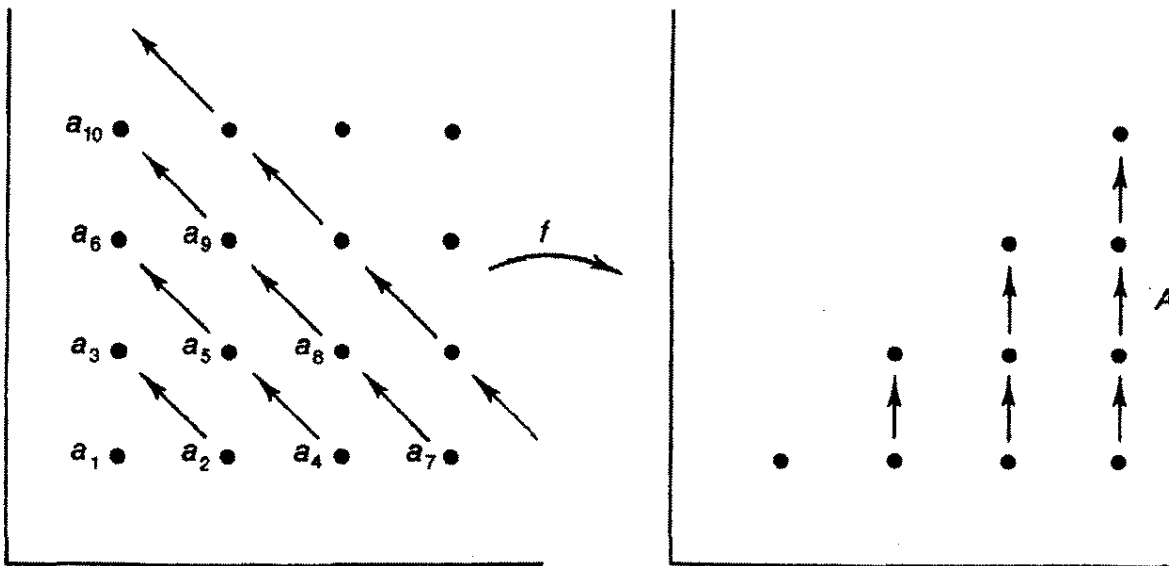
موجود باشد آنگاه  $A$  را شمارای نامتناهی می‌نامیم.

مثال ۰۱. مجموعه همه اعداد صحیح، شمارای نامتناهی است. زیرا بسهولت می‌توان دید که تابع  $f: Z \rightarrow Z_+$  با ضابطه

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{اگر } n > 0 \\ -2n + 1 & \text{اگر } n \leq 0 \end{cases}$$

تناظری دوسویی است.

مثال ۰۲. حاصل ضرب  $Z_+ \times Z_+$  شمارای نامتناهی است. اگر اعضای حاصل ضرب  $Z_+ \times Z_+$  را با نقاط صحیح واقع در ربع اول صفحه نمایش دهیم آنگاه قسمت چپ شکل ۱۱ چگونگی «شمردن» این نقاط را، یعنی چگونگی برقرار کردن تناظری دوسویی بین آنها و اعداد صحیح نامنفی راه پیشنهاد می‌کند.



شکل ۱۱

البته، شکل را نمی‌توان جایگزین استدلال کرد. ولی، شکل راه استدلال را به ذهن القا می‌کند.  $A$  را زیرمجموعه‌ای از  $Z_+ \times Z_+$ ، متشکل از همه زوجهای  $(x, y)$  که  $x \leq y$ ، اختیار کنید. ابتدا، تناظری دوسویی مانند  $f: Z_+ \times Z_+ \rightarrow A$  با ضابطه

$$f(x, y) = (x + y - 1, y)$$

تعریف می‌کنیم. سپس، با تعریف تابع  $g: A \rightarrow Z_+$  با ضابطه

$$g(x, y) = \frac{1}{y}(x - 1)x + y$$

تناظری دوسویی بین  $A$  و اعداد صحیح مثبت برقرار می‌سازیم. برای اثبات اینکه مجموعه  $Z_+ \times Z_+$  شمارای نامتناهی است، بعداً برهان دیگری ارائه می‌کنیم.



تعریف. مجموعه‌ای را شمارا گوئیم در صورتی که متناهی و یا شمارای نامتناهی باشد. اگر مجموعه‌ای شمارا نباشد آن را ناشمارا می‌نامیم.

در مورد مجموعه‌های شمارا قضیه‌ای مشابه قضیه ۷.۶ داریم که بدین شرح است:

۱۰۷. قضیه فرض کنیم  $B$  مجموعه‌ای ناتمی باشد. در این صورت، گزاره‌های ذیل با یکدیگر معادل‌اند:

(۱) تابعی پوشا مانند  $f: Z_+ \rightarrow B$  موجود است.

(۲) تابعی یک به یک مانند  $g: B \rightarrow Z_+$  موجود است.

(۳)  $B$  شماراست.

برهان. استلزامهای  $(۱) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۳) \Rightarrow (۱)$  را ثابت می‌کنیم.

$(۱) \Rightarrow (۲)$ . فرض کنیم  $f: Z_+ \rightarrow B$  تابعی پوشا باشد. تابع  $g: B \rightarrow Z_+$

را چنین تعریف می‌کنیم

$$g(b) = f^{-1}(\{b\}) \text{ کوچکترین عضو مجموعه}$$

چون  $f$  پوشاست،  $f^{-1}(\{b\})$  ناتمی است، بنابراین  $g$  خوشتعریف است. نگاشت  $g$  یک به یک است. زیرا اگر  $b \neq b'$  آنگاه  $f^{-1}(\{b\})$  و  $f^{-1}(\{b'\})$  دو مجموعه جدا از هم‌اند، و در نتیجه کوچکترین اعضای آنها متمایزند.

$(۲) \Rightarrow (۳)$ . فرض کنیم  $g: B \rightarrow Z_+$  یک به یک باشد. ثابت می‌کنیم  $B$

شماراست. با تغییر دادن حوزه مقادیر  $g$  می‌توان به تناظری دوسویی از  $B$  به زیر-مجموعه‌ای از  $Z_+$  دست یافت. بنابراین، برای رسیدن به نتیجه مورد نظر کافی است ثابت کنیم هر زیر مجموعه  $Z_+$  شماراست. پس، فرض کنیم  $C$  زیر مجموعه‌ای از  $Z_+$  باشد.

اگر  $C$  متناهی باشد، بنا بر تعریف، شماراست. پس، فرض کنیم  $C$  نامتناهی

باشد. در این صورت، باید ثابت کنیم که  $C$  شمارای نامتناهی است. یعنی، باید تناظری دوسویی مانند  $h: Z_+ \rightarrow C$  برقرار کنیم.

$h$  را «به استقرا» چنین تعریف می‌کنیم:  $h(۱)$  را کوچکترین عضو  $C$  می‌گیریم؛

این عضو وجود دارد، زیرا هر زیر مجموعه ناتمی  $C$  از  $Z_+$  دارای کوچکترین عضو است. حال فرض کنیم  $h(۱), \dots, h(n-1)$  تعریف شده باشند.  $h(n)$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$h(n) = [C - h(\{1, \dots, n-1\})] \text{ کوچکترین عضو}$$

مجموعه  $C - h(\{1, \dots, n-1\})$  تهی نیست؛ زیرا اگر تهی باشد آنگاه  $h: \{1, \dots, n-1\} \rightarrow C$  پوشاست، و در نتیجه،  $C$  متناهی خواهد بود (بنا بر قضیه ۷.۶). بنابراین،  $h$  خوشتعریف است. به این ترتیب، به ازای هر  $n \in Z_+$ ، تابع  $h(n)$  را به استقرا تعریف کرده‌ایم.



مثال ۳.  $Q_+$  مجموعه اعداد گویای مثبت شمارای نامتناهی است. زیرا تابع

$$g: Z_+ \times Z_+ \rightarrow Q_+$$

$$g(n, m) = \frac{m}{n}$$

پوشاست. چون  $Z_+ \times Z_+$  شماراست، تابعی پوشا مانند  $f: Z_+ \rightarrow Z_+ \times Z_+$  نیز موجود است. در نتیجه، تابع مرکب  $g \circ f: Z_+ \rightarrow Q_+$  پوشاست. بنابراین،  $Q_+$  شماراست. البته،  $Q_+$  نامتناهی هم هست، زیرا حاوی  $Z_+$  است. به‌عنوان تمرین ثابت کنید که مجموعه همه اعداد گویا شمارای نامتناهی است.

در برهان قضیه ۱.۷، که در آن ما کمی پارا فراتر از اصول منطق گذاشته‌ایم، نکته‌ای وجود دارد. این نکته در اثبات استلزام (۳)  $\Rightarrow$  (۲) واقع است، در آنجا که گفتیم «بنابر اصل استقرا» به‌ازای هر عدد صحیح مثبت  $n$  تابع  $h$  تعریف شده است. احتمالاً قبل از این هم استدلالهایی این چنین را، بی هیچ چون و چرایی درباره مجاز بودن آنها، دیده‌اید. ما نیز در تمرینهای بخش ۱-۴، برای تعریف  $a^n$ ، چنین استدلالی را به‌کار بردیم.

اما در اینجا مسئله‌ای مطرح است، و آن اینکه اصل استقرا فقط می‌گوید که اگر  $Z_0$  زیر مجموعه‌ای استقرایی از اعداد صحیح مثبت و شامل یک باشد آنگاه  $Z_0 = Z_+$ . به‌منظور استفاده از این اصل در اثبات یک قضیه «به استقرا» برهان را چنین شروع می‌کنند: «فرض کنیم  $Z_0$  مجموعه همه اعداد صحیح مثبتی باشد که به‌ازای آنها قضیه راست است»، سپس ثابت می‌کنند که  $1 \in Z_0$  و  $Z_0$  استقرایی است، و در نتیجه  $Z_0$  باید همان  $Z_+$  باشد.

ولی، ما در قضیه فوق در حقیقت قضیه‌ای را به استقرا ثابت نکرده‌ایم، بلکه چیزی را به استقرا تعریف کردیم. در این مورد، شروع برهان باید چگونه باشد؟ آیا می‌توانیم جمله «فرض کنیم  $Z_0$  مجموعه همه اعداد صحیحی باشد که به‌ازای آنها تابع  $h$  تعریف شده است» را آغاز کار خود قرار دهیم؟ از آنجا که  $h$  در ابتدای برهان هیچ معنایی ندارد، این کار ناموجه است. نماد  $h$  تنها در ضمن برهان معنی پیدا می‌کند. بنابراین چیز بیشتری مورد نیاز است.

آنچه مورد نیاز است اصل دیگری است موسوم به اصل تعریف بازگشتی. در برهان قضیه فوق می‌خواستیم حکم کنیم به‌اینکه:

زیر مجموعه نامتناهی  $C$  از  $Z_+$  مفروض است، تابع یکتایی مانند  $h: Z_+ \rightarrow C$  موجود است که در دستور ذیل صدق می‌کند:

$$h(1) = C \text{ کوچکترین عضو}$$

(\*)

$$h(i) = [C - h(\{1, \dots, i-1\})] \text{ کوچکترین عضو} \quad , i > 1$$

دستور (\*) را يك دستور بازگشتی برای  $h$  می‌خوانند؛ این دستور  $h$  را برحسب خودش تعریف می‌کند. تعریفی را که با يك چنین دستوری ارائه شود تعریف بازگشتی می‌نامیم. اما، در به‌کارگیری تعریف بازگشتی ممکن است که شخص با پاره‌ای مشکلات منطقی مواجه شود. همه دستوره‌ای بازگشتی بامعنی نیستند. مثلاً، دستور بازگشتی

$$h(i) = [C - h(\{1, \dots, i+1\})]$$

ناقض خود است؛ زیرا اگرچه  $h(i)$  الزاماً به مجموعه  $h(\{1, \dots, i+1\})$  تعلق دارد، ولی این دستور می‌گوید به آن متعلق نیست. مثال دیگر پارادوکس قدیمی ذیل است:

فرض کنیم آرایشگر شهر سویل<sup>۱</sup> صورت کسانی را می‌تراشد که خودشان صورت خود را نمی‌تراشند. صورت آرایشگر را چه کسی خواهد تراشید؟

در این گزاره آرایشگر دو بار ظاهر می‌شود، يك بار در عبارت « آرایشگر شهر سویل » و بار دیگر به عنوان عضوی از مجموعه «مردان شهر سویل»؛ و این تعریف برای کسی که آرایشگر صورتش را می‌تراشد تعریفی بازگشتی است و ناقض خود است.

باوجود این، بعضی از دستوره‌ای بازگشتی با معنی‌اند. به بیان صریح‌تر، اصل ذیل برقرار است:

اصل تعریف بازگشتی. فرض کنیم  $A$  مجموعه‌ای باشد. اگر دستوری داشته باشیم که  $h(1)$  را به عنوان عضوی یکتا از  $A$  تعریف کند و به‌ازای هر  $i > 1$ ،  $h(i)$  را به‌طور یکتا به عنوان عضوی از  $A$  و برحسب مقادیر  $h$ ، به‌ازای اعداد صحیح مثبت کوچکتر از  $i$ ، تعریف کند آنگاه این دستور تابع یکتای  $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow A$  را مشخص می‌کند.

این اصلی است که ما عملاً آن را در برهان قضیه ۱.۷ به‌کار بردیم. اگر بخواهید می‌توانید آن را بدون هیچ دلیلی بپذیرید. اما، با استفاده از اصل استقرار، می‌توان آن را بدقت اثبات کرد. در بخش آتی آن را دقیقتر بیان می‌کنیم و چگونگی اثبات آن را می‌نمایانیم.

ریاضیدانان بندرت صریحاً به این اصل اشاره می‌کنند. برهانهایی که آنها می‌نویسند اغلب شبیه برهان ما برای قضیه ۱.۷ است؛ یعنی برهانی که در آن برای تعریف يك تابع به «اصل استقرار» استناد می‌کنند، و حال آنکه در حقیقت اصل تعریف بازگشتی را به‌کار می‌برند. در این کتاب ما نیز از وسواس و موشکافی غیر ضروری اجتناب کرده از آنان پیروی می‌کنیم.

اکنون قواعد بیشتری برای شناسایی شماره‌های مجموعه‌ها می‌آوریم.

۴.۷. قضیه اجتماع شمارای مجموعه‌های شمارا، شمارا است.

برهان. فرض کنیم  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  خانواده‌ای اندیسدار از مجموعه‌های شمارا باشد،

که در آن مجموعه اندیس  $J$  شماراست. حالتی که  $J = \emptyset$  بدیهی است. پس فرض کنیم  $J \neq \emptyset$ . همچنین، برای سهولت، هر يك از مجموعه‌های  $A_\alpha$  را ناتهی می‌گیریم؛ این فرض هیچ چیزی را تغییر نمی‌دهد.

چون هر مجموعه  $A_\alpha$  شماراست، به ازای هر  $\alpha$ ، می‌توان تابع پوشای  $f_\alpha: Z_+ \rightarrow A_\alpha$  را اختیار کرد. همچنین، می‌توان تابع پوشای  $g: Z_+ \rightarrow J$  را برگزید. اکنون تابع

$$h: Z_+ \times Z_+ \rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$$

را چنین تعریف می‌کنیم:

$$h(n, m) = f_{g(n)}(m)$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که  $h$  پوشاست. چون بین  $Z_+ \times Z_+$  و  $Z_+$  تناظری دوسویی وجود دارد، شمارایی اجتماع موردنظر از قضیه ۱.۷ نتیجه می‌شود.  $\square$

### ۵.۷. قضیه هر حاصل ضرب متناهی از مجموعه‌های شمارا، شماراست.

پرهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که حاصل ضرب دو مجموعه شمارای  $A$  و  $B$  شماراست. حکم در حالتی که  $A$  یا  $B$  تهی باشد بدیهی است. در غیر این صورت، توابع پوشای  $f: Z_+ \rightarrow A$  و  $g: Z_+ \rightarrow B$  را برمی‌گزینیم. تابع  $h: Z_+ \times Z_+ \rightarrow A \times B$  با ضابطه  $h(n, m) = (f(n), g(m))$  پوشاست، و بنا بر این شماراست.

در حالت کلی، به استقرا استدلال می‌کنیم. فرض کنیم که اگر هر يك از  $A_i$  ها شمارا باشند، در این صورت  $A_1 \times \dots \times A_{n-1}$  شماراست. مطلب را در مورد  $A_1 \times \dots \times A_n$  ثابت می‌کنیم. نخست، ملاحظه می‌کنیم که تناظر دوسویی

$$g: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow (A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$$

با ضابطه

$$g(x_1, \dots, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$$

موجود است. چون، بنا بر فرض استقرا، مجموعه  $A_1 \times \dots \times A_{n-1}$  شماراست، و بنا بر فرض،  $A_n$  نیز شماراست، همان‌طور که در قسمت اول قضیه ثابت شد، حاصل ضرب این دو مجموعه نیز شمارا خواهد بود. در نتیجه،  $A_1 \times \dots \times A_n$  نیز شماراست.  $\square$

در اینجا حکم بسیار وسوسه‌انگیز «حاصل ضرب شمارای مجموعه‌های شمارا، شماراست» به ذهن می‌رسد. ولی این حکم برقرار نیست:

۶.۷. قضیه فرض کنیم  $X$  مجموعه دو عضوی  $\{0, 1\}$  باشد. در این صورت، مجموعه  $X^\omega$  شمارا نیست.

پرهان. ثابت می‌کنیم که به ازای هر تابع مفروضی مانند

$$g: Z_+ \rightarrow X^\omega$$

این تابع نمی‌تواند پوشا باشد. برای این منظور، فرض کنیم

$$g(n) = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots, x_{nm}, \dots)$$

که در آن هر  $x_{ij}$  مساوی ۰ و یا ۱ است. اکنون نقطه  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$  از  $X^\omega$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{به ازای } x_{nn} = 1 \\ 1 & \text{به ازای } x_{nn} = 0 \end{cases}$$

(اگر اعداد  $x_{nn}$  را در یک آرایه مستطیلی بنویسیم،  $x_{nn}$ ها عناصر قطری این آرایه خواهند بود؛ ما  $y$  را چنان برگزیده‌ایم که  $n$ مین مختص آن با دزایه قطری  $x_{nn}$  متفاوت است.)  $y$  عضوی است از  $X^\omega$  و در تصویر تابع  $g$  قرار ندارد؛ زیرا به ازای هر مقدار مفروض  $n$ ، دو نقطه  $g(n)$  و  $y$  دست کم در  $n$ مین مختص تفاوت دارند. بنابراین،  $g$  پوشا نیست.  $\square$

حاصل ضرب دکارتی  $\{0, 1\}^\omega$  مثالی از مجموعه‌های ناشماراست. مثال دیگر از این قرار است:

۷.۷. قضیه  $\mathcal{P}(Z_+)$  یعنی مجموعه همه زیرمجموعه‌های  $Z_+$  ناشماراست.

برهان. یک روش اثبات این قضیه این است که ثابت کنیم تناظری دوسویی بین  $\mathcal{P}(Z_+)$  و  $\{0, 1\}^\omega$  برقرار است. این برهان به صورت مسئله‌ای در تمرینهای این بخش آمده است.

استدلال دیگر سرداست تراست. ثابت می‌کنیم که اگر  $A$  مجموعه دلخواهی باشد، هیچ تابع پوشایی مانند  $g: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  وجود ندارد. از اینجا، بویژه نتیجه می‌گیریم که  $\mathcal{P}(Z_+)$  شمارا نیست.

پس فرض کنیم  $g: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  تابعی باشد. به ازای هر  $a \in A$ ، تصویر  $a$ ، یعنی  $g(a)$ ، یک زیرمجموعه  $A$  است که ممکن است شامل  $a$  باشد یا نباشد. فرض کنیم  $B$  مجموعه همه اعضای  $a$  از  $A$  باشد به طوری که  $a$  به  $g(a)$  تعلق ندارد؛

$$B = \{a \mid a \in A - g(a)\}.$$

حال ممکن است که  $B$  تهی و یا ممکن است خود  $A$  باشد، اما این امر موجب اشکالی نمی‌شود. مدعی هستیم که  $B$  زیرمجموعه  $A$  است و در تصویر  $g$  قرار ندارد. برای اثبات، فرض کنیم به ازای عضوی از  $A$  مانند  $a_0$ ،  $B = g(a_0)$ . می‌پرسیم که  $a_0$  به  $B$  تعلق دارد یا نه؟ بنا بر تعریف  $B$ ،

$$a_0 \in B \iff a_0 \in A - g(a_0) \iff a_0 \in A - B.$$

پس در هر حالت به تناقض برمی‌خوریم. □

تا اینجا وجود مجموعه‌های ناشمارا را ثابت کرده‌ایم. اما هنوز سخنی از مأنوسترین مجموعه‌ی ناشمارا، یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی به میان نیاورده‌ایم. احتمالاً اثبات ناشمارایی  $R$  را قبلاً دیده‌اید. اگر فرض کنیم هر عدد حقیقی دارای نمایشی یکتا توسط کسرها  $R$  نامتناهی باشد (به شرط آنکه منتهی شدن نمایش یک عدد به یک ردیف نامتناهی از  $q$ ها ممنوع باشد) آنگاه با مختصر تغییر در روش قطری برهان قضیه ۶.۷، می‌توان ناشمارایی اعداد حقیقی را ثابت کرد. اما، این برهان از جهاتی بسیار رضایت بخش نیست؛ یکی اینکه نمایش اعشاری نامتناهی عددی حقیقی به هیچ وجه از نتایج مقدماتی اصول موضوع نیست و اثبات آن مستلزم بحث مفصلی است؛ دلیل دیگر اینکه ناشمارایی  $R$  در واقع به بسط اعشاری نامتناهی اعضای  $R$  و یا، در واقع، به هیچیک از خواص جبری  $R$  بستگی ندارد. فقط به خواص ترتیبی  $R$  مربوط است. مابعداً (بخش ۳-۶) ناشمارایی  $R$  را تنها به کمک خواص ترتیبی آن ثابت می‌کنیم.

## تمرینها

۱. ثابت کنید که  $Q$  شمارای نامتناهی است.
۲. ثابت کنید که نگاشتهای  $f$  و  $g$  ی مثالهای ۱ و ۲ دوسویی اند.
۳. فرض کنید  $A$  یک مجموعه و  $X$  مجموعه‌ی دو عضوی  $\{0, 1\}$  باشد. ثابت کنید که تناظری دوسویی بین  $\mathcal{P}(A)$ ، مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های  $A$ ، و حاصل ضرب دکارتی  $X^A$  موجود است.
۴. (الف) عدد حقیقی  $x$  را جبری (روی اعداد گویا) خوانیم در صورتی که در معادله‌ای بسجمله‌ای با درجه‌ی مثبت مانند
 
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$
 باضرایب گویای  $a_i$ ، صدق کند. با فرض اینکه هر معادله‌ی بسجمله‌ای تنها تعداد متناهی ریشه داشته باشد، ثابت کنید که مجموعه‌ی اعداد جبری شماراست.  
 (ب) عددی حقیقی را وقتی متعالی خوانیم که جبری نباشد. با فرض ناشمارایی مجموعه‌ی اعداد حقیقی، ثابت کنید مجموعه‌ی اعداد متعالی نیز ناشماراست. (تا حدی شگفت‌انگیز است که تنها با دو عدد متعالی  $e$  و  $\pi$  مأنوسیم. حتی اثبات متعالی بودن این دو عدد هم کاری است دشوار.)
۵. مطلوب است تعیین شمارایی هر یک از مجموعه‌های ذیل. برای جوابهای خود دلیل بیاورید.

- (الف) مجموعه  $A$  متشکل از همه توابعی مانند  $f: \{0, 1\} \rightarrow Z_+$ .
- (ب) مجموعه  $B_n$  متشکل از همه توابعی مانند  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow Z_+$ .
- (پ) مجموعه  $C = \bigcup_{n \in Z_+} B_n$ .
- (ت) مجموعه  $D$  متشکل از همه توابعی مانند  $f: Z_+ \rightarrow Z_+$ .
- (ث) مجموعه  $E$  متشکل از همه توابعی مانند  $f: Z_+ \rightarrow \{0, 1\}$ .
- (ج) مجموعه  $F$  متشکل از همه توابعی مانند  $f: Z_+ \rightarrow \{0, 1\}$  که «سرانجام صفرند». [وقتی که می‌گوییم تابع  $f$  سرانجام صفر است، مقصود این است که عدد صحیح مثبتی مانند  $N$  هست که، به ازای هر  $n$ ، اگر  $n \geq N$  آنگاه  $f(n) = 0$ ].
- (چ) مجموعه  $G$  متشکل از همه توابعی مانند  $f: Z_+ \rightarrow Z_+$  که سرانجام ۱ هستند.
- (ح) مجموعه  $H$  متشکل از همه توابعی مانند  $f: Z_+ \rightarrow Z_+$  که سرانجام ثابت‌اند.
- (خ) مجموعه  $I$  متشکل از همه زیرمجموعه‌های دو عضوی  $Z_+$ .
- (د) مجموعه  $J$  متشکل از همه زیرمجموعه‌های متناهی  $Z_+$ .

۶. اگر تناظری دوسویی بین مجموعه‌های  $A$  و  $B$  برقرار باشد، گوییم این دو مجموعه يك عدد اصلی دارند.

(الف) ثابت کنید که اگر  $B \subset A$  و نگاشتی يك به يك مانند

$$f: A \rightarrow B$$

موجود باشد آنگاه  $A$  و  $B$  يك عدد اصلی دارند. [داهنمایی:  $A_n$  ها و  $B_n$  ها را چنین تعریف می‌کنیم؛  $A_1 = A$ ،  $B_1 = B$ ، و به ازای  $n > 1$ ،  $A_n = f(A_{n-1})$  و  $B_n = f(B_{n-1})$ . (بازهم تعریفی بازگشتی!) توجه کنید که

$$A_1 \supset B_1 \supset A_2 \supset B_2 \supset A_3 \supset \dots$$

اکنون تابع  $h: A \rightarrow B$  را با ضابطه ذیل تعریف کنید:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر به ازای } n \text{ ی } x \in A_n - B_n \\ x & \text{[در غیر این صورت،]} \end{cases}$$

(ب) قضیه (قضیه شرودر - برنشتاین<sup>۱</sup>) اگر توابع يك به يك  $f: A \rightarrow C$  و  $g: C \rightarrow A$  وجود داشته باشند آنگاه  $A$  و  $B$  يك عدد اصلی دارند.

۷. ثابت کنید که مجموعه‌های  $D$  و  $E$  تمرین ۵ يك عدد اصلی دارند.



۸. فرض کنید  $X = \{0, 1\}$ ، و  $\mathcal{B}$  مجموعه همه زیرمجموعه‌های شمارای  $X^\omega$  باشد. ثابت کنید که  $X^\omega$  و  $\mathcal{B}$  يك عدد اصلی دارند.

۹. (الف) دستور بازگشتی

$$h(1) = 1,$$

$$(*) \quad h(2) = 2,$$

$$h(n) = [h(n+1)]^2 - [h(n-1)]^2 \quad n \geq 2$$

به ازای  $n \geq 2$

از نوعی نیست که اصل تعریف بازگشتی شامل آن شود. با وجود این، ثابت کنید که تابعی مانند  $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  وجود دارد که در این دستور صدق می‌کند. [داهنمایی: دستور (\*) را چنان بازنویسی کنید که اصل مذکور را بتوان در مورد آن به کار برد و فرض کنید  $h$  مثبت است.]

(ب) ثابت کنید که دستور (\*) در قسمت (الف)، تابع  $h$  را به طور یکتا مشخص نمی‌کند. [داهنمایی: اگر  $h$  تابع مثبتی باشد که در دستور (\*) صدق کند آنگاه تابع

$$f \text{ را چنین تعریف کنید: به ازای } i \neq 3, f(i) = h(i), \text{ و } f(3) = -h(3).$$

(پ) ثابت کنید که تابعی مانند  $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  وجود ندارد که در دستور بازگشتی ذیل صدق کند

$$h(1) = 1,$$

$$h(2) = 2,$$

$$h(n) = [h(n+1)]^2 + [h(n-1)]^2 \quad n \geq 2$$

به ازای  $n \geq 2$

### \* ۸-۱ اصل تعریف بازگشتی

پیش از اینکه صورت کلی اصل تعریف بازگشتی را در نظر بگیریم، آن را در حالت خاص، که در قضیه ۱۰۷ به کار گرفته شد، ثابت می‌کنیم. این کار، هنگام در نظر گرفتن حالت کلی، ایده اصلی اثبات را روشنتر می‌کند.

بنابراین، به ازای زیرمجموعه نامتناهی مفروض  $C$  از  $\mathbb{Z}_+$ ، دستور بازگشتی ذیل را برای تابعی مانند  $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow C$  در نظر می‌گیریم:

$$h(1) = C \text{ کوچکترین عضو مجموعه } C,$$

$$(*) \quad h(i) = [C - h(\{1, \dots, i-1\})] \text{ کوچکترین عضو مجموعه } [C - h(\{1, \dots, i-1\})]$$

به ازای  $i > 1$

ثابت می‌کنیم که تابع یکتای  $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow C$  وجود دارد که در این دستور بازگشتی صدق می‌کند.

نخستین گام، اثبات وجود توابعی است که بر قطعات  $\{1, \dots, n\}$  از  $Z_+$  تعریف می‌شوند و در شرط (\*) صدق می‌کنند:

۱.۸. لم اگر  $n \in Z_+$  آنگاه تابعی مانند

$$f: \{1, \dots, n\} \rightarrow C$$

موجود است به طوری که به ازای هر  $i$  در حوزه تعریف خود در (\*) صدق می‌کند.

برهان. نکته اصلی این است که این لم گزاره‌ای وابسته به  $n$  است. بنابراین، قابل اثبات به وسیله استقراست. فرض کنیم  $Z_0$  مجموعه همه  $n$  هایی باشد که به ازای آنها این لم برقرار است. ثابت می‌کنیم که  $Z_0$  شامل یک واستقرایی است؛ و از اینجا نتیجه می‌شود که  $Z_0 = Z_+$ . لم به ازای  $n=1$  برقرار است، زیرا تابع  $f: \{1\} \rightarrow C$  با ضابطه

$$f(1) = C$$

در (\*) صدق می‌کند.

فرض کنیم لم به ازای  $n-1$  برقرار باشد. ثابت می‌کنیم به ازای  $n$  نیز برقرار است. بنا بر فرض استقرا، تابعی مانند  $f': \{1, \dots, n-1\} \rightarrow C$  موجود است که به ازای هر  $i$  در حوزه تعریف خود در (\*) صدق می‌کند. اکنون تابع  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow C$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(i) = f'(i) \quad i \in \{1, \dots, n-1\}$$

$$f(n) = [C - f'(\{1, \dots, n-1\})]$$

چون  $C$  نامتناهی است،  $f'$  پوشا نیست؛ در نتیجه، مجموعه  $C - f'(\{1, \dots, n-1\})$  ناتهی است، و  $f(n)$  خوشتعریف است. توجه کنید که این تعریف قابل قبول است، چون  $f$  را بر حسب  $f'$  تعریف کردیم نه بر حسب خودش.

به آسانی ملاحظه می‌شود که  $f$  به ازای هر  $i$  در حوزه تعریف خود در (\*) صدق می‌کند. به ازای  $i \leq n-1$ ، چون تابع  $f$  مساوی  $f'$  است،  $f$  در (\*) صدق می‌کند. همچنین، به ازای  $i=n$ ،  $f$  در (\*) صدق می‌کند، زیرا بنا بر تعریف،

$$f(n) = [C - f'(\{1, \dots, n-1\})]$$

$$\square \cdot f'(\{1, \dots, n-1\}) = f(\{1, \dots, n-1\})$$

۲.۸. لم اگر توابع  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow C$  و  $g: \{1, \dots, m\} \rightarrow C$  به ازای

هر  $i$  از حوزه تعریف خود در (\*) صدق کنند آنگاه به ازای هر  $i$  که در حوزه تعریف هر دو تابع قرار داشته باشد،  $f(i) = g(i)$ .

برهان. فرض کنیم چنین نباشد.  $i$  را کوچکترین عدد صحیح مثبتی قرار می‌دهیم که

$$f(i) \neq g(i) \quad \text{البته } i \neq 1, \text{ زیرا بنا بر (*)}$$

$$f(1) = C = g(1) \text{ کوچکترین عضو}$$

پس،  $i > 1$  و به ازای هر  $z < i$ ،  $f(z) = g(z)$ ، زیرا  $f$  و  $g$  در (\*) صدق می کنند،

$$f(i) = [C - f(\{1, \dots, i-1\})] \text{ کوچکترین عضو،}$$

$$g(i) = [C - g(\{1, \dots, i-1\})] \text{ کوچکترین عضو.}$$

چون  $f(\{1, \dots, i-1\}) = g(\{1, \dots, i-1\})$ ، خواهیم داشت  $f(i) = g(i)$ ، و این با انتخاب  $i$  متناقض است.  $\square$

۳.۰۸ قضیه تابعی یکتا مانند  $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow C$  وجود دارد که به ازای هر  $i \in \mathbb{Z}_+$ ،  $h(i) = f(i) = g(i)$  صدق می کند.

برهان. بنا بر لم ۱.۰۸، به ازای هر  $n$ ، تابعی از  $\{1, \dots, n\}$  بتوی  $C$  وجود دارد که به ازای هر  $i$  از حوزه تعریف خود در (\*) صدق می کند. بنا بر لم ۲.۰۸، به ازای  $n$  مفروض، این تابع منحصر به فرد است؛ یعنی هر دو تابعی که در (\*) صدق کنند و حوزه تعریفشان یکی باشد باید مساوی باشند. فرض کنیم  $f_n: \{1, \dots, n\} \rightarrow C$  این تابع یکتا باشد.

اینک مرحله اساسی برهان پیش می آید. تابع  $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow C$  را چنان تعریف می کنیم که قاعده تناظر آن،  $U$ ، اجتماع همه قاعده های تناظر توابع  $f_n$  باشد. قاعده تناظر تابع  $f_n$  زیر مجموعه ای از  $\{1, \dots, n\} \times C$  است؛ بنابراین،  $U$  زیر مجموعه ای از  $\mathbb{Z}_+ \times C$  است. باید ثابت کنیم که  $U$  قاعده تناظری برای تابعی مانند  $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow C$  است.

یعنی باید ثابت کنیم که هر عضو  $i$  از  $\mathbb{Z}_+$  به عنوان مختص اول تنها یک عضو  $U$  ظاهر می شود. اثبات این موضوع آسان است. عدد صحیح  $i$  در حوزه تعریف تابع  $f_n$  قرار دارد اگر و فقط اگر  $n \geq i$ . بنابراین، مجموعه اعضای  $U$  که  $i$  مختص اول آنهاست، دقیقاً همان مجموعه همه زوجهای مرتبی است به صورت  $(i, f_n(i))$ ، که در آن  $n \geq i$ . اکنون بنا بر لم ۲.۰۸، اگر  $n \geq i$  و  $m \geq i$  آنگاه  $f_m(i) = f_n(i)$ . در نتیجه، همه این اعضای  $U$  متساوی اند؛ یعنی فقط یک عضو در  $U$  هست که  $i$  مختص اول آن است. اثبات صدق کردن  $h$  در (\*) نیز آسان است؛ و آن نتیجه این واقعیت است که:

$$h(i) = f_n(i), \quad i \leq n$$

و  $f_n$  به ازای هر  $i$  در حوزه تعریف خود در (\*) صدق می کند.

برهان یکتایی کاملاً مشابه برهان لم ۲.۰۸ است.  $\square$

اینک، اصل کلی تعریف بازگشتی را فرمولبندی می کنیم. برای اثبات آن چیز تازه ای

لازم نیست، بنا بر این، آن را به عنوان تمرین باقی می‌گذاریم.

۴.۸. قضیه (اصل تعریف بازگشتی) فرض کنیم  $A$  یک مجموعه باشد و  $a_0 \in A$ . فرض کنیم  $\rho$  تابعی باشد که به هر تابع  $f$  که قطعه‌ای از اعداد صحیح مثبت را در  $A$  می‌نگارد، عضوی از  $A$  را نظیر کند. در این صورت، تابعی یکتا مانند

$$h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow A$$

موجود است به طوری که

$$(*) \quad \begin{aligned} h(1) &= a_0, \\ h(i) &= \rho(h|_{\{1, \dots, i-1\}}) \quad i > 1 \end{aligned}$$

دستور  $(*)$  را یک دستور بازگشتی برای  $h$  می‌خوانیم. این دستور  $h(1)$  را معین می‌کند، و به ازای هر  $i$  که  $i > 1$ ، مقدار  $h$  را در  $i$  بر حسب مقادیر آن به ازای اعداد صحیح مثبت کوچکتر از  $i$  بیان می‌کند.

مثال ۱. می‌خواهیم ثابت کنیم قضیه ۳.۸ حالت خاصی از قضیه فوق است. زیر مجموعه نامتناهی  $C$  از  $\mathbb{Z}_+$  مفروض است. فرض کنیم  $a_0$  کوچکترین عضو  $C$  باشد، تابع  $\rho$  را چنین تعریف می‌کنیم.

$$\rho(f) = [C - (f \text{ تصویر } f)].$$

چون  $C$  نامتناهی و  $f$  نگاشتی است که قطعه‌ای از  $\mathbb{Z}_+$  را بتوی  $C$  می‌نگارد، مجموعه تصویر  $f$  نمی‌تواند همه مجموعه  $C$  باشد. پس  $\rho$  خوشتعریف است. بنا بر قضیه ۴.۸، تابعی یکتا مانند  $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow C$  موجود است به طوری که  $h(1) = a_0$  و به ازای  $i > 1$ ,

$$\begin{aligned} h(i) &= \rho(h|_{\{1, \dots, i-1\}}) \\ &= [C - (h|_{\{1, \dots, i-1\}} \text{ تصویر } h|_{\{1, \dots, i-1\}})] \\ &= [C - h(\{1, \dots, i-1\})] \end{aligned}$$

و این همان است که می‌خواستیم.

مثال ۲. به ازای عدد حقیقی مفروض  $a$ ، در تمرینات بخش ۴-۱،  $a^n$  را با دستور بازگشتی ذیل تعریف کردیم:

$$a^1 = a,$$

$$a^n = a^{n-1} \cdot a.$$

هدف این است که با به کار بردن قضیه ۴.۸، دقیقاً تابعی مانند  $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  چنان تعریف کنیم که  $h(n) = a^n$ . برای این منظور، فرض کنیم که  $a_0$  همان عدد حقیقی  $a$  باشد،

و تابع  $\rho$  را با ضابطه  $\rho(f) = f(m).a$  تعریف می‌کنیم، که در آن  $f$  قطعه‌ای از  $Z_+$  را بتوی  $R$  می‌نگارد و  $m$  بزرگترین عضو حوزه تعریف  $f$  است. در این صورت، تابعی یکتا مانند  $h: Z_+ \rightarrow R$  وجود دارد که

$$h(1) = a.$$

$$h(i) = \rho(h|_{\{1, \dots, i-1\}}), \quad i > 1$$

منظور این است که  $h(1) = a$ ، و به ازای  $i > 1$ ،  $h(i) = h(i-1)a$ ، حال اگر  $h(i)$  را به  $a^i$  نمایش‌دهیم داشت:

$$a^1 = a,$$

$$a^i = a^{i-1} a.$$

و این همان است که می‌خواستیم.

### تمرینها

۱. فرض کنید  $(b_1, b_2, \dots)$  دنباله‌ای نامتناهی از اعداد حقیقی باشد. مجموع  $\sum_{k=1}^n b_k$  به استقرا چنین تعریف می‌شود:

$$\sum_{k=1}^n b_k = b_1, \quad \text{به ازای } n=1$$

$$\sum_{k=1}^n b_k = (\sum_{k=1}^{n-1} b_k) + b_n, \quad \text{به ازای } n > 1$$

فرض کنید  $A$  مجموعه اعداد حقیقی باشد.  $\rho$  را چنان برگزینید که قضیه ۴.۸ را بتوان برای تعریف دقیق این مجموعه به کار بست. گاه مجموع  $\sum_{k=1}^n b_k$  را با نماد  $b_1 + b_2 + \dots + b_n$  نشان می‌دهیم.

۲. فرض کنید  $(b_1, b_2, \dots)$  دنباله‌ای نامتناهی از اعداد حقیقی باشند. حاصل ضرب  $\prod_{k=1}^n b_k$  را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم:

$$\prod_{k=1}^n b_k = b_1, \quad \text{به ازای } n=1$$

$$\prod_{k=1}^n b_k = (\prod_{k=1}^{n-1} b_k) \cdot b_n, \quad \text{به ازای } n > 1$$

این حاصل ضرب را دقیقاً به کمک قضیه ۴.۸ تعریف کنید. گاه  $\prod_{k=1}^n b_k$  را با نماد  $b_1 b_2 \dots b_n$  نمایش می‌دهیم.

۳. به عنوان حالت خاصی از تمرین ۲، به ازای  $n \in Z_+$ ، تعریف  $a^n$  و  $n!$  را به دست آورید.

۴. اعداد فیبوناتچی<sup>۱</sup> را در نظریه اعداد با دستور بازگشتی ذیل تعریف می‌کنند:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$$

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \lambda_{n-2} \quad , n > 2 \text{ به ازای}$$

این اعداد را دقیقاً، با استفاده از قضیه ۴.۸، تعریف کنید.

۵. ثابت کنید که تابعی یکتا مانند  $h: Z_+ \rightarrow R_+$  وجود دارد که در دستور ذیل صدق می‌کند:

$$h(1) = 3,$$

$$h(i) = [h(i-1) + 1]^{1/2} \quad , i > 1 \text{ به ازای}$$

۶. (الف) ثابت کنید که هیچ تابعی مانند  $h: Z_+ \rightarrow R_+$  در دستور ذیل صدق نمی‌کند:

$$h(1) = 3,$$

$$h(i) = [h(i-1) - 1]^{1/2} \quad , i > 1 \text{ به ازای}$$

توضیح دهید که چرا این مثال اصل تعریف بازگشتی را نقض نمی‌کند؟  
(ب) دستور بازگشتی ذیل را در نظر بگیرید:

$$h(1) = 3,$$

$$h(i) = \begin{cases} [h(i-1) - 1]^{1/2} & \text{اگر } h(i-1) > 1 \\ 5 & \text{اگر } h(i-1) \leq 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} i > 1 \text{ به ازای}$$

ثابت کنید که تابعی یکتا مانند  $h: Z_+ \rightarrow R_+$  وجود دارد که در این دستور صدق می‌کند.

۷. قضیه ۴.۸ را ثابت کنید.

## ۹-۱ مجموعه‌های نامتناهی و اصل موضوع انتخاب

قبلاً معیارهایی چند برای نامتناهی بودن یک مجموعه به دست آوردیم. برای نمونه، می‌دانیم که اگر مجموعه  $A$  یک زیر مجموعه شمارای نامتناهی داشته باشد، یا نگاشتی دوسویی بین  $A$  و یک زیر مجموعه سره آن موجود باشد، آنگاه  $A$  خود نامتناهی است. ثابت می‌شود که هر یک از این خواص برای مشخص کردن مجموعه‌های نامتناهی کافی است. این مطلب را اکنون ثابت می‌کنیم، برهان آن ما را به بحث درباره نکتته‌ای منطقی می‌کشاند که تا به حال از آن سخنی به میان نیاورده‌ایم، و آن اصل موضوع انتخاب است.

۹.۱. قضیه فرض کنیم  $A$  مجموعه‌ای باشد. گزاره‌های ذیل معادل‌اند:

- (۱) تابعی یک به یک مانند  $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow A$  موجود است.  
 (۲) تابعی دوسویی بین  $A$  و یک زیرمجموعه سرآن موجود است.  
 (۳) نامتناهی  $A$  است.

پرهان. ثابت می‌کنیم که  $(۱) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۳) \Rightarrow (۱)$ . برای اثبات  $(۱) \Rightarrow (۲)$ ، فرض کنیم تابعی یک به یک مانند  $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow A$  موجود باشد. تصویر  $\mathbb{Z}_+$  تحت  $f$  را به  $B$  و  $f(n)$  را به  $a_n$  نمایش می‌دهیم. چون  $f$  یک به یک است، اگر  $n \neq m$  آنگاه  $a_n \neq a_m$ . اکنون نگاشت

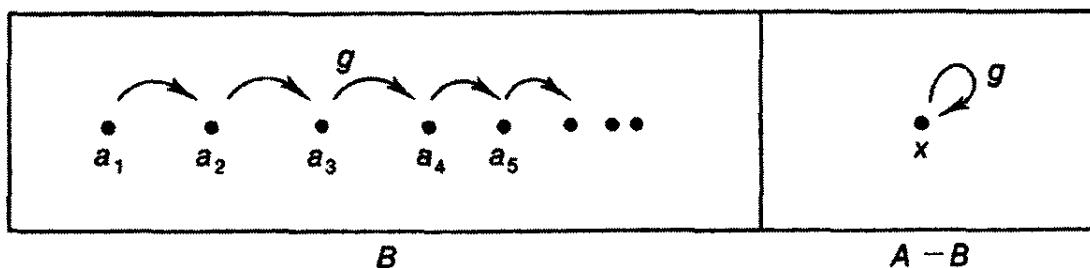
$$g: A \rightarrow A - \{a_1\}$$

را با ضابطه

$$g(a_n) = a_{n+1}, \quad a_n \in B$$

$$g(x) = x, \quad x \in A - B$$

تعریف می‌کنیم. در شکل ۱۲ نگاشت  $g$  با یک طرح کلی نشان داده شده است؛ سهولت می‌توان ثابت کرد که  $g$  دوسویی است.



شکل ۱۲

استلزام  $(۳) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۱)$  چیزی جز عکس نقیض نتیجه ۳.۶ نیست، بنا بر این، قبلاً ثابت شده است. برای اثبات  $(۱) \Rightarrow (۳)$ ، فرض می‌کنیم  $A$  نامتناهی باشد و «به استقرا» تابعی یک به یک مانند  $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow A$  می‌سازیم.

نخست، چون  $A$  ناتهی است، می‌توان عضوی از آن مانند  $a_1$  را برگزید، و  $f(۱)$  را مساوی همین عضو برگزیده شده تعریف کرد.

سپس، بنا فرض اینکه  $f(۱), \dots, f(n-1)$  تعریف شده باشند، می‌خواهیم  $f(n)$  را تعریف کنیم. مجموعه  $A - f(\{1, \dots, n-1\})$  ناتهی است؛ زیرا اگر تهی باشد آنگاه نگاشت  $f: \{1, \dots, n-1\} \rightarrow A$  پوشا، و در نتیجه  $A$  متناهی است. بنا بر این، می‌توان عضوی از مجموعه  $A - f(\{1, \dots, n-1\})$  برگزید و  $f(n)$  را مساوی همین عضو تعریف کرد. پس، به ازای هر  $n \in \mathbb{Z}_+$  مقدار  $f(n)$  را «بنا استفاده از اصل استقرا» تعریف کردیم.

به آسانی می‌توان دید که  $f$  یک به یک است. زیرا اگر  $m < n$  آنگاه  $f(m)$

به مجموعه  $f(\{1, \dots, n-1\})$  تعلق دارد، و حال آنکه  $f(n)$ ، بنا بر تعریف، چنین نیست. پس  $f(n) \neq f(m)$ .

جهت آشکار کردن چگونگی استفاده از اصل تعریف بازگشتی در برهان بالا، اجازه دهید این استدلال «استقرایی» را دوباره با دقت بیشتر بیان کنیم.

مجموعه نامتناهی  $A$  مفروض است، بر آنیم که تابع  $f: Z_+ \rightarrow A$  را به روش بازگشتی با دستور ذیل تعریف کنیم:

$$f(1) = a_1,$$

$$f(i) = [A - f(\{1, \dots, i-1\})] \quad \text{به‌ازای } i > 1, \quad (*)$$

ولی این دستور به‌عنوان یک دستور بازگشتی به‌هیچ روی پذیرفتنی نیست! زیرا  $f(i)$  را به‌طور یکتا برحسب  $f|_{\{1, \dots, i-1\}}$  تعریف نمی‌کند.

از این لحاظ دستور اخیر به‌طور قابل ملاحظه‌ای با آن دستور بازگشتی، که در برهان قضیه ۱۰۷ در نظر گرفته شده، تفاوت دارد. در آنجا با داشتن یک زیرمجموعه نامتناهی از  $Z_+$  مانند  $C$ ، تابع  $h$  را با دستور ذیل تعریف کردیم:

$$h(1) \stackrel{\#}{=} C, \quad \text{کوچکترین عضو}$$

$$h(i) = [C - f(\{1, \dots, i-1\})] \quad \text{به‌ازای } i > 1, \quad \text{کوچکترین عضو}$$

این دستور  $h(i)$  را به‌طور یکتا برحسب  $h|_{\{1, \dots, i-1\}}$  تعریف می‌کند.

طریقه دیگری که غیر قابل قبول بودن  $(*)$  را به‌عنوان دستوری بازگشتی تأیید می‌کند، این است که اگر به‌فرض دستوری بازگشتی باشد آنگاه، بنا بر اصل تعریف بازگشتی، باید تابعی یکتا مانند  $f: Z_+ \rightarrow A$  موجود باشد که در  $(*)$  صدق کند. اما  $(*)$  به‌هیچ وجه تابع  $f$  را به‌طور یکتا مشخص نمی‌کند. در واقع، این «تعریف»  $f$ ، متضمن انتخابهایی دلخواه به‌تعداد نامتناهی است.

مطلب این است که برهان ارائه شده برای قضیه ۱۰۹، در واقع، برهان نیست. در حقیقت، بر اساس خواصی از نظریه مجموعه‌ها که تا کنون بحث کردیم، امکان ندارد که بتوان این قضیه را ثابت کرد. چیز بیشتری مورد نیاز است.

قبلاً، بعضی از روشهای مجاز را برای مشخص کردن مجموعه‌ها متذکر شدیم:

(۱) تعریف کردن مجموعه با فهرست کردن اعضای آن، و یا با اختیار کردن مجموعه مفروضی مانند  $A$  و مشخص کردن زیرمجموعه‌ای از آن مانند  $B$ ، به‌وسیله خاصیتی که اعضای  $B$  واجد آن هستند.

(۲) با تشکیل اجتماع یا مقطع اعضای گردایه‌ای مفروض از مجموعه‌ها، یا با تشکیل تفاضل دو مجموعه.

(۳) با در نظر گرفتن گردایه همه زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای مفروض.

(۴) با تشکیل حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌ها.



اکنون توجه داشته باشید که قاعده تناظر تابع  $f$  (در قضیه ۱۰.۹) یک مجموعه است: زیرمجموعه‌ای از  $Z + X A$ . بنابراین، برای اثبات وجود تابع  $f$  باید با بهره‌گیری از روشهای مجاز برای تشکیل مجموعه‌ها، زیرمجموعه مناسبی از  $Z + X A$  را ساخت. اما، فقط روشهای داده شده قبلی برای این منظور کافی نیستند؛ بلکه طریقی نو برای حکم به وجود یک مجموعه مورد نیاز است. بنا بر این، به فهرست روشهای مجاز برای تشکیل مجموعه‌ها این اصل موضوع را اضافه می‌کنیم:

**اصل موضوع انتخاب.** اگر  $\mathcal{A}$  گردایه مفروضی از مجموعه‌های ناتهی جدا از هم باشد آنگاه مجموعه‌ای مانند  $C$  موجود است که دادای دست یک عضو مشترك با هر عضو  $A$  است؛ یعنی، به ازای هر  $A \in \mathcal{A}$  مجموعه  $C \cap A$  فقط یک عضو دارد.

این اصل موضوع حکم به وجود مجموعه‌ای می‌کند که می‌توان آن را مجموعه‌ای در نظر گرفت که با انتخاب یک عضو از هر مجموعه  $A$  از  $\mathcal{A}$  به دست آمده است.

اصل موضوع انتخاب حکمی کاملاً معقول به نظر می‌رسد و، در واقع، امروزه بیشتر ریاضیدانان این اصل موضوع را به عنوان جزئی از نظریه مجموعه‌ها می‌پذیرند و ریاضیات خود را بر آن بنیان می‌نهند. اما، در سالهای گذشته مجادلات بسیاری پیرامون این حکم خاص نظریه مجموعه‌ها پیاختاست. زیرا، به یاری این اصل موضوع می‌توان قضایایی ثابت کرد که بعضی از ریاضیدانان از پذیرفتن آنها اکراه داشتند. یکی از اینها قضیه خوشترتیبی است که بزودی وارد بحث آن خواهیم شد. فعلاً، به استفاده از اصل موضوع انتخاب برای برطرف کردن اشکال مذکور در برهان قضیه قبل قناعت می‌کنیم. نخست، نتیجه ساده‌ای از اصل موضوع انتخاب را ثابت می‌کنیم:

**۲.۹. لم (وجود تابع انتخاب)** اگر  $\mathcal{B}$  گردایه‌ای مفروضی از مجموعه‌های ناتهی (که الزاماً جدا از هم نیستند) باشد آنگاه تابعی مانند

$$c: \mathcal{B} \rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

موجود است که به ازای هر  $B \in \mathcal{B}$ ،  $c(B)$  عضوی از مجموعه  $B$  است.

تابع  $c$  یک تابع انتخاب برای گردایه  $\mathcal{B}$  نامیده می‌شود.

تفاوت این لم با اصل موضوع انتخاب این است که در این لم ضرورت ندارد که مجموعه‌های تشکیل دهنده  $\mathcal{B}$  جدا از هم باشند. مثلاً، می‌توان  $\mathcal{B}$  را گردایه همه زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه مفروضی اختیار کرد.

برهان لم. به ازای عضو  $B$  از  $\mathcal{B}$  مجموعه  $B'$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$B' = \{(B, x) \mid x \in B\}.$$

یعنی،  $B'$  گردایه همه زوجهای مرتبی است که مختص اول آنها مجموعه  $B$  و مختص

دومشان عضوی از  $B$  است. مجموعه  $B'$  زیرمجموعه‌ای است از حاصل ضرب دکارتی

$$\mathcal{B} \times \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

چون  $B$  دست کم یک عضو مانند  $x$  دارد، مجموعه  $B'$  هم دست کم عضو  $(B, x)$  را دربردارد، و بنابراین ناتهی است.

اکنون ملاحظه می‌کنیم که اگر  $B_1$  و  $B_2$  دو عضو متمایز  $\mathcal{B}$  باشند آنگاه  $B'_1$  و  $B'_2$  جدا از هم خواهند بود. زیرا عضو نوعی  $B'_1$  به صورت زوج مرتب  $(B_1, x_1)$  است و عضو نوعی  $B'_2$  به صورت زوج مرتب  $(B_2, x_2)$ ، و هیچ‌گاه این دو زوج نمی‌توانند مساوی باشند، چرا که مختص اول آنها با یکدیگر تفاوت دارند.  
اینک گردایه

$$\mathcal{C} = \{B' \mid B \in \mathcal{B}\}$$

را تشکیل می‌دهیم، که گردایه‌ای است از زیرمجموعه‌های ناتهی و جدا از هم

$$\mathcal{B} \times \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

بنابراین موضوع انتخاب، مجموعه‌ای مانند  $c$  موجود است که با هر عضو  $\mathcal{C}$  تنها در یک عضو مشترک است. ادعای ما این است که  $c$  قاعده تناظری برای تابع انتخاب مطلوب است. اولاً،  $c$  زیرمجموعه‌ای است از

$$\mathcal{B} \times \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

ثانیاً،  $c$  شامل درست یک عضو از هر مجموعه  $B'$  است؛ بنابراین، به ازای هر  $B \in \mathcal{B}$ ، مجموعه  $c$  شامل درست یک زوج مرتب مانند  $(B, x)$  است که مختص اول آن  $B$  است. پس،  $c$  براساس قاعده تناظری برای تابعی از گردایه  $\mathcal{B}$  به مجموعه  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  است. بالاخره، اگر  $(B, x) \in c$  آنگاه  $x$  به  $B$  تعلق دارد، در نتیجه، همان‌طور که می‌خواستیم  $\square \cdot c(B) \in B$

برهان دوم قضیه ۱.۹. به کمک این‌لم، می‌توان برهان قضیه ۱.۹ را دقیقتر بیان کرد. مجموعه نامتناهی  $A$  مفروض است. می‌خواهیم تابعی یک به یک مانند  $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow A$  بسازیم. اگر  $\mathcal{B}$  گردایه همه زیرمجموعه‌های ناتهی  $A$  باشد آنگاه بنا برلم ۲.۹، تابع انتخابی برای  $\mathcal{B}$  موجود است؛ یعنی، تابعی مانند

$$c: \mathcal{B} \rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = A$$

که به ازای هر  $B \in \mathcal{B}$ ،  $c(B) \in B$ . اکنون تابعی مانند  $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow A$  بادستور بازگشتی ذیل تعریف می‌کنیم:

$$(*) \quad \begin{aligned} f(1) &= c(A), \\ f(i) &= c(A - f(\{1, \dots, i-1\})) \quad , i > 1 \end{aligned}$$

چون  $A$  نامتناهی است،  $A - f(\{1, \dots, i-1\})$  ناتهی است؛ بنابراین، طرف راست

این تساوی با معنی است. حال، چون این دستور  $f(i)$  را به‌طور یکتا بر حسب  $\{1, \dots, i-1\}$  تعریف می‌کند، می‌توان اصل تعریف بازگشتی را به‌کار بست. نتیجه اینکه، تابعی یکتا مانند  $f: Z_+ \rightarrow A$  موجود است که به‌ازای هر  $i \in Z_+$  در (\*) صدق می‌کند. يك به يك بودن  $f$  مانند برهان اول ثابت می‌شود.  $\square$

ضمن تأکید بر این نکته که برای ساختن برهانی منطقاً درست برای قضیه ۱.۹ می‌باید از تابع انتخاب استفاده کرد، در اینجا می‌پذیریم که در عمل اکثر ریاضیدانسان چنین نمی‌کنند. ایشان بی‌هیچ دغدغه‌ی خاطر با ارائه برهانهایی از آن‌سان که ما نخست آوردیم عمل می‌کنند؛ یعنی برهانهایی که متضمن تعدادی نامتناهی انتخاب دلخواه است. آنان به این امر واقف‌اند که در واقع اصل موضوع انتخاب را به‌کار می‌برند؛ و می‌دانند که اگر لازم باشد، می‌توانند با معرفی تابع انتخاب معینی به‌استدلال خود صورت منطقی رضایت‌بخشتری بدهند. ولی معمولاً زحمت آن‌را به‌خود نمی‌دهند.

ما نیز چنین می‌کنیم. در این کتاب چند مورد دیگر از کاربرد مشخص تابع انتخاب خواهید یافت؛ مآتها وقتی تابع انتخاب را معرفی می‌کنیم که بدون آن برهان مغشوش شود. ولی برهانهای زیادی هم هستند که در آنها تعدادی نامتناهی انتخاب دلخواه انجام می‌دهیم، و در هرچنین موردی در واقع به‌طور ضمنی از اصل موضوع انتخاب استفاده می‌کنیم.

اینک باید اقرار کنیم که در یکی از بخشهای گذشته این کتاب برهانی هست که در آن تابع معینی را با انجام تعدادی نامتناهی انتخاب دلخواه ساخته‌ایم؛ و ما حتی بدون تذکری درباره‌ی اصل موضوع انتخاب از آن برهان گذشتیم. به‌خاطر این «فریب» پوزش می‌خواهیم. یافتن آن برهان را به‌خواننده واگذار می‌کنیم!

حال نکته‌ای را که آخرین تذکر ما درباره‌ی اصل موضوع انتخاب است بیان می‌کنیم. برای اصل موضوع انتخاب دوشکل وجود دارد. یکی از آنها، که می‌توان آن‌را اصل موضوع انتخاب متناهی نامید، حکم بر این می‌کند که به‌ازای هر گردایه‌ی متناهی  $A$  از مجموعه‌های ناتهی جدا از هم، مجموعه‌ای مانند  $C$  موجود است که با هر عضو  $A$  درست در يك عضو شريك است. این شکل ضعیف اصل موضوع انتخاب همواره موردنیاز است؛ ما نیز آن‌را در بخشهای گذشته بی‌هیچ قیدی به‌کار برده‌ایم. هیچ ریاضیدانی در مورد اصل موضوع انتخاب متناهی تردیدی به‌خود راه نمی‌دهد؛ این اصل جزئی از نظریه‌ی مجموعه‌ها برطبق درك همگان است.

شکل قویتر اصل موضوع انتخاب، یعنی آنکه در مورد گردایه‌ی دلخواه  $A$  از مجموعه‌های ناتهی به‌کار می‌رود، همان است که بدرستی «اصل موضوع انتخاب» خوانده می‌شود، و هرگاه ریاضیدانی می‌نویسد «این برهان به‌اصل موضوع انتخاب بستگی دارد»، بدون استثنا منظورش همان شکل قویتر اصل موضوع انتخاب است.

## تمرینها

۱. فرض کنید  $X = \{0, 1\}$ . بدون کمک اصل موضوع انتخاب نگاشتی يك به يك مانند  $f: Z_+ \rightarrow X^\omega$  تعريف کنید.
۲. بدون کمک اصل موضوع انتخاب، در صورت امکان، برای هر يك از گردایه‌های ذیل يك تابع انتخاب بیابید:
- (الف)  $A$ ، گردایه همه زیرمجموعه‌های ناتهی  $Z_+$ .
- (ب)  $B$ ، گردایه همه زیرمجموعه‌های ناتهی  $Z$ .
- (پ)  $C$ ، گردایه همه زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه اعداد گویا  $Q$ .
- (ت)  $D$ ، گردایه همه زیرمجموعه‌های ناتهی  $X^\omega$ ، که در آن  $X = \{0, 1\}$ .
۳. فرض کنید  $A$  مجموعه‌ای مفروض و  $\{f_n\}_{n \in Z_+}$  خانواده‌اندیساری از توابع يك به يك مانند

$$f_n: \{1, \dots, n\} \rightarrow A$$

- باشد. ثابت کنید که  $A$  نامتناهی است. آیا می‌توانید بدون کمک اصل موضوع انتخاب تابعی يك به يك مانند  $f: Z_+ \rightarrow A$  تعريف کنید؟
۴. ثابت کنید که اصل موضوع انتخاب معادل این گزاره است: به ازای هر خانواده‌اندیسدار  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  از مجموعه‌های ناتهی، که در آن  $J \neq \emptyset$ ، حاصل ضرب دکارتی

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$$

ناتهی است.

۵. در بخش ۱-۷، قضیه‌ای هست که برهان آن مستلزم تعدادی نامتناهی انتخاب دلخواه است. این کدام قضیه است؟ برهان آن را به طریقی بازنویسی کنید که کاربرد اصل موضوع انتخاب صریحاً در آن آشکار شود. (اصل موضوع انتخاب در تعدادی از تمرینهای قبلی نیز به کار رفته است.)

۶. (الف) به کمک اصل موضوع انتخاب ثابت کنید که اگر تابع  $f: A \rightarrow B$  پوشا باشد آنگاه  $f$  معکوس راستی مانند  $h: B \rightarrow A$  دارد.
- (ب) ثابت کنید که اگر تابع  $f: A \rightarrow B$  يك به يك و  $A$  ناتهی باشد آنگاه  $f$  معکوس چپ دارد. آیا اصل موضوع انتخاب مورد نیاز است؟
- (پ) اگر  $A$  مجموعه‌ای دلخواه و  $\mathcal{P}(A)$  مجموعه همه زیرمجموعه‌های آن باشد، ثابت کنید که هیچ نگاشت يك به يکی مانند  $f: \mathcal{P}(A) \rightarrow A$  وجود ندارد.

۷. بیشتر پارادوکسهای مشهور نظریه غیر اصول موضوعی مجموعه‌ها به طریقی به مفهوم

«مجموعه همه مجموعه‌ها» مربوط می‌شوند. هیچکدام از قواعدی که ما برای تشکیل دادن مجموعه‌ها بیان کرده‌ایم به‌ما اجازه در نظر گرفتن چنین مجموعه‌ای را نمی‌دهد. برای این کار دلیل خوبی وجود دارد، چون این مفهوم نناقض خود است. زیرا فرض کنید  $A$  «مجموعه همه مجموعه‌ها» باشد.

(الف) ثابت کنید که  $\mathcal{P}(A) \subset A$ ، و از اینجا تناقضی استخراج کنید.

(ب) (پارادوکس راسل<sup>۱</sup>). فرض کنید  $\mathcal{B}$  زیرمجموعه‌ای از  $A$  و متشکل از همه مجموعه‌هایی باشد که عضو خود نیستند؛

$$\mathcal{B} = \{A \mid A \notin A \text{ و } A \in A\}.$$

(البته، ممکن است که هیچ مجموعه‌ای مانند  $A$  وجود نداشته باشد که  $A \in A$ ؛ اگر چنین باشد آنگاه  $\mathcal{B} = A$ ). آیا  $\mathcal{B}$  عضو خود هست یا نه؟

۸. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه ناتهی باشند. اگر تابعی یک‌به‌یک از  $B$  بتوی  $A$  وجود داشته باشد ولی هیچ تابع یک‌به‌یکی از  $A$  بتوی  $B$  وجود نداشته باشد، گوییم  $A$  عدد اصلی بزرگتر از  $B$  دارد.

(الف) از قضیه ۱.۹ نتیجه بگیرید که هر مجموعه‌ناشمارا دارای عدد اصلی بزرگتر از  $Z_+$  است.

(ب) ثابت کنید که اگر  $A$  عدد اصلی بزرگتر از  $B$  و  $B$  عدد اصلی بزرگتر از  $C$  داشته باشد آنگاه  $A$  عدد اصلی بزرگتر از  $C$  دارد.

(پ) دنباله‌ای از مجموعه‌های نامتناهی مانند  $A_1, A_2, \dots$  بیابید که به‌ازای هر  $n \in Z_+$ ،  $A_{n+1}$  عدد اصلی بزرگتر از  $A_n$  داشته باشد.

(ت) مجموعه‌ای بیابید که به‌ازای هر  $n$ ، عدد اصلی بزرگتر از  $A_n$  داشته باشد.

۹\*. ثابت کنید که  $\mathcal{P}(Z_+)$  و  $R$  یک عدد اصلی دارند.

به موجب یک حدس مشهور نظریه مجموعه‌ها، که به فرض پیوستاد موسوم است، هیچ مجموعه‌ای نیست که عدد اصلی بزرگتر از  $Z_+$  و کوچکتر از  $R$  داشته باشد.

فرض تعمیم یافته پیوستاد حکم بر آن دارد که به‌ازای هر مجموعه مفروض  $A$ ، هیچ مجموعه‌ای وجود ندارد که عدد اصلی بزرگتر از  $A$  و کوچکتر از  $\mathcal{P}(A)$  داشته باشد.

شگفت‌انگیز آنکه ثابت شده است که این هر دو حکم مستقل از اصول موضوع معمولی نظریه مجموعه‌ها هستند. برای مطالعه‌ای ژرف و مشاهده شرحی خواندنی در این

موضوع به  $[S_m]$  مراجعه کنید.

## ۱-۱۰ مجموعه‌های خوشترتیب

یکی از خواص سودمند  $Z_+$ ، مجموعه اعداد صحیح مثبت، این است که هر زیرمجموعه ناتهی آن دارای يك کوچکترین عضو است. تعمیم این خاصیت ما را به مفهوم مجموعه خوشترتیب رهنمون می‌کند.

تعریف. مجموعه  $A$  با رابطه ترتیبی  $<$  خوشترتیب خوانیم در صورتی که هر زیرمجموعه ناتهی  $A$  دارای يك کوچکترین عضو باشد.

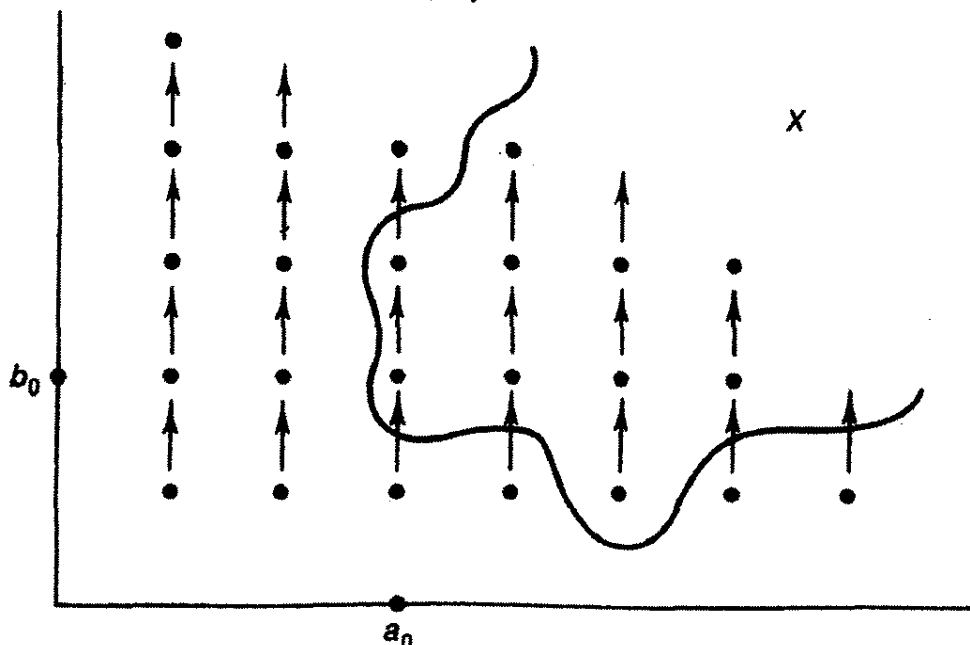
مثال ۱. مجموعه  $Z_+ \times \{1, 2\}$  را با ترتیب قاموسی در نظر می‌گیریم. این مجموعه را می‌توان به صورت دنباله‌ای نامتناهی که به دنبال آن دنباله نامتناهی دیگری قرار دارد نمایش داد،

$$a_1, a_2, a_3, \dots; b_1, b_2, b_3, \dots$$

با این قرارداد که هر عضو از همه اعضای سمت راست خود کوچکتر باشد. به آسانی می‌توان دید که هر زیرمجموعه ناتهی این مجموعه مرتب، مانند  $C$ ، دارای کوچکترین عضو است؛ اگر  $C$  شامل دست کم یکی از  $a_n$ ها باشد، کافی است که کوچکترین عضو مقطع  $C$  را با دنباله  $a_1, a_2, \dots$  اختیار کنیم؛ و اگر  $C$  شامل هیچک از  $a_n$ ها نباشد آنگاه زیرمجموعه‌ای از دنباله  $b_1, b_2, \dots$  است که طبیعتاً کوچکترین عضو دارد.

مثال ۲. مجموعه  $Z_+ \times Z_+$  را با ترتیب قاموسی در نظر می‌گیریم. این مجموعه را می‌توان به صورت دنباله‌ای نامتناهی از دنباله‌های نامتناهی نمایش داد. مدعی هستیم که این مجموعه خوشترتیب است. فرض کنیم  $X$  زیرمجموعه‌ای ناتهی از  $Z_+ \times Z_+$  باشد،  $A$  را زیرمجموعه‌ای از  $Z_+$  می‌گیریم که متشکل از همه مختصه‌های اول اعضای  $X$  است. مجموعه  $A$  دارای کوچکترین عضو است؛ آن را  $a_0$  می‌نامیم. در این صورت، گردایه

$$\{b \mid a_0 \times b \in X\}$$



شکل ۱۳

زیرمجموعه‌ای ناتهی از  $Z_+$  است. فرض کنیم  $b_0$  کوچکترین عضو آن باشد. بنا بر تعریف رابطه ترتیب قاموسی،  $a_0 \times b_0$  کوچکترین عضو مجموعه  $X$  است. (شکل ۱۳ دیده شود).

**مثال ۳.** مجموعه اعداد صحیح با ترتیب معمولی خوشترتیب نیست. زیرا زیرمجموعه‌ای از آن که از همه اعداد صحیح منفی تشکیل شده است، دارای کوچکترین عضو نیست. مجموعه اعداد حقیقی در بازه  $0 \leq x \leq 1$  نیز خوشترتیب نیست. زیرا زیرمجموعه‌ای از آن که متشکل است از همه  $x$  هایی که  $0 < x < 1$  کوچکترین عضو ندارد (اگر چه، البته، بزرگترین کران پایین دارد).

برای ساختن مجموعه‌های خوشترتیب چندین طریق وجود دارد؛ دوتای آنها عبارتند از:

(۱) اگر  $A$  مجموعه‌ای خوشترتیب باشد آنگاه هر زیرمجموعه  $A$ ، با تحدید رابطه ترتیبی  $A$  به آن زیرمجموعه، خوشترتیب است.

(۲) اگر  $A$  و  $B$  خوشترتیب باشند آنگاه  $A \times B$  نیز با ترتیب قاموسی خوشترتیب است. اثبات (۱) بدیهی است. اثبات (۲) بر طبق الگویی است که در مثال ۲ ارائه شد.

از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که مجموعه  $Z_+ \times (Z_+ \times Z_+)$  با ترتیب قاموسی خوشترتیب است؛ این مجموعه را می‌توان به صورت دنباله‌ای نامتناهی که از دنباله‌هایی نامتناهی از دنباله‌های نامتناهی تشکیل شده است نمایش داد. همچنین  $(Z_+)^4$ ، با ترتیب قاموسی، خوشترتیب است؛ و الی آخر. اما اگر بخواهید که این حکم را به حاصل ضربی نامتناهی از  $Z_+$  در خودش تعمیم دهید، با مشکلاتی روبرو خواهید شد. این وضع را بزودی بررسی می‌کنیم.

اکنون این سؤال طبیعی مطرح می‌شود که اگر  $A$  مجموعه مفروضی بدون رابطه ترتیبی باشد آیا رابطه‌ای ترتیبی در  $A$  هست که از  $A$  مجموعه‌ای خوشترتیب بسازد؟ اگر  $A$  متناهی باشد به وسیله هر نگاشت دوسویی

$$f: A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

می‌توان رابطه‌ای ترتیبی در  $A$  تعریف کرد که تحت آن  $A$  دارای همان نوع ترتیب مجموعه  $\{1, \dots, n\}$  باشد. در واقع، هر رابطه ترتیبی در هر مجموعه متناهی را می‌توان به همین طریق به دست آورد:

۱۰۱۵. قضیه هر مجموعه مرتب متناهی ناتهی دارای نوع ترتیب قطعه‌ای مانند  $\{1, \dots, n\}$  از اعداد صحیح مثبت است. بنا بر این، ضرورتاً خوشترتیب است.

برهان. این قضیه در بخش ۱-۶ به عنوان تمرین آمده است؛ در اینجا آن را ثابت می‌کنیم. نخست، ثابت می‌کنیم که هر مجموعه متناهی مرتب مانند  $A$  دارای بزرگترین عضو است؛ اگر  $A$  مجموعه‌ای یک‌عضوی باشد، این حکم بدیهی است. فرض کنیم این

حکم به‌ازای مجموعه‌های  $n-1$  عضوی درست باشد، مجموعه  $A$  دارای  $n$  عضو باشد، و نیز  $a_0 \in A$ . در این صورت،  $A - \{a_0\}$  دارای بزرگترین عضوی مانند  $a_1$  است. بزرگترین عضو مجموعه  $\{a_0, a_1\}$  همانا بزرگترین عضو مجموعه  $A$  است.

ثانیاً، ثابت می‌کنیم که به‌ازای عدد صحیح مثبتی مانند  $n$ ، یک‌نگاشت دوسویی حافظ ترتیب بین  $A$  و  $\{1, \dots, n\}$  موجود است: اگر  $A$  مجموعه‌ای یک‌عضوی باشد، حکم بدیهی است. پس، فرض کنیم حکم به‌ازای مجموعه‌های  $n-1$  عضوی درست باشد، و فرض کنیم  $b$  بزرگترین عضو مجموعه  $A$  باشد. بنا بر فرض استقرا، یک‌نگاشت دوسویی حافظ ترتیب مانند

$$f': A - \{b\} \rightarrow \{1, \dots, n-1\}$$

موجود است. حال نگاشت دوسویی حافظ ترتیب  $f: A \rightarrow \{1, \dots, n\}$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = f'(x) \quad , x \neq b$$

$$f(b) = n. \square$$

بنابراین، هر مجموعه مرتب متناهی فقط یک‌نوع ترتیب می‌تواند داشته باشد. اما، در مورد مجموعه‌های نامتناهی وضع کلی متفاوت است. مجموعه‌های خوشترتیب

$$\mathbb{Z}_+,$$

$$\{1, \dots, n\} \times \mathbb{Z}_+,$$

$$\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+,$$

$$\mathbb{Z}_+ \times (\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)$$

همگی شمارای نامتناهی‌اند، ولی نوع ترتیب آنها متفاوت است.

همه مثالهایی که تاکنون از مجموعه‌های خوشترتیب آوردیم در باب مجموعه‌های شماراست. سؤال طبیعی‌ای که پیش می‌آید این است که آیا می‌توان مجموعه خوشترتیب ناشمارایی یافت؟

مجموعه ناشمارای واضحی که برای آزمایش به نظر می‌رسد عبارت است از حاصل ضرب شمارای نامتناهی  $\mathbb{Z}_+$  در خودش، یعنی

$$X = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \dots = (\mathbb{Z}_+)^{\omega}.$$

به روش عادی می‌توان ترتیب قاموسی را با تعریف ذیل برای این مجموعه تعمیم داد:   
 گوییم

$$(a_1, a_2, \dots) < (b_1, b_2, \dots)$$



در صورتی که  $n$  ی وجود داشته باشد که  $n \geq 1$  و

$$\text{به‌ازای } n \text{ } a_i = b_i, i < n \text{ و } a_n < b_n.$$

درحقیقت، این رابطه رابطه‌ای ترتیبی در  $X$  است؛ اما متأسفانه  $X$  را خوشترتیب نمی‌کند. فرض کنیم  $A$  مجموعه همه اعضای  $X$  باشد که به صورت

$$x = (1, \dots, 1, 2, 1, 1, \dots),$$

هستند، یعنی درست يك مختص  $x$  برابر ۲ باشد و سایرین همگی مساوی ۱ باشند. واضح است که مجموعه  $A$  کوچکترین عضو ندارد.

مثال گذشته نشان می‌دهد که لااقل ترتیب قاموسی، مجموعه  $(Z_+)$  را خوشترتیب نمی‌کند. آیا رابطه ترتیبی دیگری وجود دارد که، تحت آن رابطه، این مجموعه خوشترتیب باشد؟ هیچکس تاکنون موفق نشده است رابطه‌ای بسازد که تحت آن  $(Z_+)$  خوشترتیب باشد. با وجود این، قضیه مشهور ذیل حکم می‌کند که چنین رابطه خوشترتیب‌کننده‌ای وجود دارد:

**قضیه (قضیه خوشترتیبی).** اگر  $A$  مجموعه دلخواهی باشد آنگاه رابطه‌ای ترتیبی در  $A$  موجود است که آن را خوشترتیب می‌کند.

این قضیه در سال ۱۹۰۴ به توسط تسرملو ثابت شد، و جهان ریاضی را تکان داد. مناظرات قابل ملاحظه‌ای در باب درستی برهان آن در گرفت؛ فقدان هر گونه طریق سازنده‌ای برای خوشترتیب کردن يك مجموعه ناشمارای دلخواه شك بسیاری را برانگیخت. بالاخره، وقتی که برهان دقیقاً تجزیه و تحلیل شد، تنها نکته‌ای که پیدا شد و ممکن بود مورد ایراد واقع شود، ساختمانی بود متضمن تعدادی نامتناهی از انتخابهای دلخواه؛ یعنی، ساختمانی متضمن اصل موضوع انتخاب.

در نتیجه بعضی از ریاضیدانان اصل موضوع انتخاب را طرد کردند، و سالها این سؤال معقول در مورد يك قضیه جدید برسر زبانها بود که: آیا برهان آن اصل موضوع انتخاب را دربردارد یا نه؟ هر قضیه‌ای را که اثبات آن متضمن کار بست اصل موضوع انتخاب بود، کما بیش سست بنیان می‌شمردند. ریاضیدانان امروزی، روی هم رفته، چنین تشویش‌خاطری ندارند. ایشان اصل موضوع انتخاب را به عنوان فرضی معقول در نظریه مجموعه‌ها می‌پذیرند، و همراه آن، قضیه خوشترتیبی را هم قبول دارند.

در این کتاب قضیه خوشترتیبی را ثابت نمی‌کنیم. برهان آن طولانی است. (اگرچه زیاد هم دشوار نیست) و در درجه اول بیشتر مورد توجه علمای منطق است. برای علاقه‌مندان در تمرینات تکمیلی پایان این فصل طرح برهانی را بیان کرده‌ایم.

به هر حال، در اثبات قضایای توپولوژی بندرت از قضیه خوشترتیبی استفاده

می‌شود؛ ما تنها برای اثبات دو قضیه آن‌را به کار می‌بریم، یکبار در تمرینهای بخش ۴-۵ و بار دیگر در بخش ۶-۳. نقش عمده قضیه خوشترتیبی برای ما در فراهم آوردن مثال نقض خاصی است که بسیار سودمند است.

در حقیقت، برای ساختن این مثال نقض نیازی به تمام قدرت قضیه خوشترتیبی نداریم، بلکه آنچه نیاز ما را برمی‌آورد نتیجه ضعیفتر ذیل است، که آن‌را می‌پذیریم:

نتیجه. مجموعه خوشترتیب ناشمارایی وجود دارد.

(قابل توجه اینکه، می‌توان این حکم ضعیفتر را بدون استفاده از اصل موضوع انتخاب ثابت کرد؛ تمرینات تکمیلی دیده شود.)  
برای ساختن مثال مورد نظر اصطلاحاتی چند مورد نیاز است.

تعریف. فرض کنیم  $X$  مجموعه‌ای مرتب باشد. به ازای عضو مفروضی از  $X$  مانند  $\alpha$ ، مجموعه

$$S_\alpha = \{x \mid x < \alpha \text{ و } x \in X\}$$

را قطعه  $X$  در  $\alpha$  می‌نامیم.

۲.۱۰. قضیه مجموعه خوشترتیب ناشمارایی موجود است که هر قطعه آن شماراست.

پرهان. بنا بر فرض، مجموعه خوشترتیب ناشمارایی مانند  $X$  وجود دارد. از این حکم نتیجه می‌شود که مجموعه خوشترتیب ناشمارایی مانند  $Y$  هست به طوری که دست کم یک قطعه آن شماراست. مجموعه  $X \times \{1, 2\}$ ، با ترتیب قاموسی، چنین مجموعه‌ای است. زیرا، قطعه آن در هر عضو که به صورت  $x \times 2$  باشد شماراست. اکنون زیر مجموعه‌ای از  $Y$  را در نظر می‌گیریم که تشکیل شده است از همه اعضایی مانند  $\alpha$  که به ازای آنها قطعه  $S_\alpha$  ناشماراست. اگر  $\Omega$  را کوچکترین چنین اعضایی بگیریم آنگاه  $S_\Omega$  مجموعه‌ای است خوشترتیب، ناشمارا، و هر قطعه آن شماراست.  $\square$

مجموعه خوشترتیب این قضیه موسوم است به مجموعه خوشترتیب ناشمارای مینیمال؛ دلیل این نامگذاری تا حدی آشکار است. در واقع، شرایط قضیه، نوع ترتیب آن‌را به طور یکتا مشخص می‌کند. (تمرینات تکمیلی دیده شود.) در سراسر کتاب این مجموعه‌ها را به  $S_\Omega$  نمایش خواهیم داد، و نماد  $\bar{S}_\Omega$  را برای مجموعه خوشترتیب  $\{\Omega\} \cup S_\Omega$  به کار خواهیم برد.

مفیدترین خاصیت مجموعه  $S_\Omega$ ، برای مقصود ما، در نتیجه ذیل آمده است:

۳.۱۰. نتیجه اگر  $A$  زیرمجموعه‌ای شمارا از  $S_\Omega$  باشد آنگاه  $A$  کران بالایی در

$S_\Omega$  دارد.

پوهان. فرض کنیم  $A$  زیرمجموعه‌ای شمارا از  $S_{\Omega}$  باشد. به ازای هر  $a \in A$ ،  
 قطعه  $S_a$  شماراست. بنابراین، مجموعه  $B = \bigcup_{a \in A} S_a$  نیز شماراست. چون  $S_{\Omega}$   
 ناشماراست، مجموعه  $B$  نمی‌تواند مساوی آن باشد؛ فرض کنیم  $x$  عضوی از  $S_{\Omega}$  باشد  
 که به  $B$  تعلق ندارد. در این صورت،  $x$  کران بالایی برای  $A$  است. زیرا، در غیر این صورت،  
 اگر برای عضوی از  $A$  مانند  $a$  داشته باشیم  $x < a$  آنگاه  $x$  به  $S_a$ ، و در نتیجه، به  $B$   
 تعلق دارد، و این با انتخاب  $a$  متناقض است.  $\square$

### تمرینها

۱. ثابت کنید که هر مجموعه خوشترتیب دارای خاصیت کوچکترین کران بالاست.
۲. (الف) ثابت کنید در هر مجموعه خوشترتیب، هر عضو آن به استثنای بزرگترین عضو  
 (اگر وجود داشته باشد) یک تالی بلافصل دارد.  
 (ب) مجموعه‌ای بی‌پایید که خوشترتیب نباشد و هر عضو آن یک تالی بلافصل  
 داشته باشد.
۳. با ترتیب قاموسی مجموعه‌های  $\{1, 2\} \times Z_+$  و  $Z_+ \times \{1, 2\}$  خوشترتیب‌اند.  
 آیا نوع ترتیب آنها یکی است؟
۴. (الف) فرض کنید  $Z_-$  مجموعه همه اعداد صحیح منفی با ترتیب معمولی باشد.  
 ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه مجموعه مرتب ساده  $A$  خوشترتیب نباشد  
 آن است که حاوی زیرمجموعه‌ای با نوع ترتیب  $Z_-$  باشد.  
 (ب) ثابت کنید که اگر  $A$  مرتب ساده و هر زیرمجموعه شمارای آن خوشترتیب  
 باشد آنگاه  $A$  خوشترتیب است.
۵. فرض کنید  $S_{\Omega}$  مجموعه خوشترتیب ناشمارای مینیمال باشد.  
 (الف) ثابت کنید که  $S_{\Omega}$  دارای بزرگترین عضو نیست.  
 (ب) نشان دهید که به ازای هر  $\alpha$  به طوری که  $\alpha < \Omega$ ، مجموعه

$$\{x \mid \alpha < x < \Omega\}$$

ناشماراست.

- (پ) فرض کنید زیرمجموعه  $X_0$  از  $S_{\Omega}$  متشکل از همه اعضای مانند  $x$  باشد  
 که  $x$  فاقد سابق بلافصل است. ثابت کنید که  $X_0$  ناشماراست.
۶. فرض کنید  $J$  مجموعه‌ای خوشترتیب باشد. زیرمجموعه  $J_0$  از  $J$  را استقرایی  
 خوانیم در صورتی که به ازای هر عضو  $J$  مانند  $\alpha$ ،

$$(S_{\alpha} \subset J_0) \Rightarrow \alpha \in J_0.$$

قضیه (اصل استقرای ترانسفینی). اگر  $J$  خوشترتیب و  $J_0$  يك زیرمجموعه استقرایی آن باشد آنگاه  $J_0 = J$ .

۷. زیرمجموعه  $J_0$  از مجموعه خوشترتیب  $J$  را وقتی «نیمه استقرایی» خوانیم که به ازای هر عضو  $J_0$  مانند  $\alpha$ ، تالی بلافصل  $\alpha$  (در صورت وجود) به  $J_0$  تعلق داشته باشد. با يك مثال ثابت کنید که اگر  $J_0$  شامل کوچکترین عضو  $J$  و نیمه استقرایی باشد، ضرورت ندارد که  $J_0$  مساوی  $J$  باشد.

۸. (الف) فرض کنید مجموعه‌های جدا از هم  $A_1$  و  $A_2$ ، بترتیب، با رابطه‌های  $<_1$  و  $<_2$  خوشترتیب باشند. در رابطه ترتیبی  $<$  را چنین تعریف می‌کنیم:  $a < b$  در صورتی که  $a$  و  $b$  عضو  $A_1$  و  $a <_1 b$ ، یا  $a$  و  $b$  عضو  $A_2$  و  $a <_2 b$ ، یا  $a \in A_1$  و  $b \in A_2$ . ثابت کنید که  $<$  يك خوشترتیبی است. (ب) قسمت (الف) را برای خانواده‌اندیس‌داری از مجموعه‌های جدا از هم که با مجموعه‌ای خوشترتیب اندیس‌گذاری شده است تعمیم دهید.

۹. (الف) ثابت کنید که اگر  $(Z_+)^n$  و  $(Z_+)^{n+1}$  با ترتیب قاموسی مرتب باشند آنگاه  $(Z_+)^n$  دارای نوع ترتیب قطعه‌ای از  $(Z_+)^{n+1}$  است. (ب) مجموعه‌ای خوشترتیب بی‌سایید که به ازای هر  $n$ ، دارای قطعه‌ای از نوع ترتیب  $(Z_+)^n$  باشد.

۱۰. قضیه. فرض کنید  $J$  و  $C$  دو مجموعه خوشترتیب باشند و هیچ تابع پوشایی که قطعه‌ای از  $J$  را بروی  $C$  بنگارد وجود نداشته باشد. ثابت کنید که تابعی یکتا مانند  $h: J \rightarrow C$  وجود دارد که به ازای هر  $x \in J$ ،

$$(*) \quad h(x) = [C - h(S_x)] \text{ کوچکترین عضو}$$

که در آن،  $S_x$  قطعه  $J$  در  $x$  است.

برهان.

(الف) اگر نگاشته‌های  $h$  و  $k$  قطعاتی از  $J$ ، یا همه  $J$ ، را بتوی  $C$  بنگارند و به ازای هر  $x$  متعلق به حوزه تعریفشان در  $(*)$  صدق کنند آنگاه ثابت کنید که به ازای هر  $x$  متعلق به هر دو حوزه تعریف،  $h(x) = k(x)$ .

(ب) اگر تابعی مانند  $h: S_\alpha \rightarrow C$  موجود باشد که در  $(*)$  صدق کند، ثابت کنید که تابعی مانند  $k: S_\alpha \cup \{\alpha\} \rightarrow C$  نیز هست که در  $(*)$  صدق می‌کند.

(پ) فرض کنید  $K \subset J$  و به ازای هر  $\alpha \in K$ ، تابعی مانند  $h_\alpha: S_\alpha \rightarrow C$  وجود داشته باشد که در  $(*)$  صدق کند. ثابت کنید که تابعی مانند

$$k: \bigcup_{\alpha \in K} S_\alpha \rightarrow C$$

هست که در (\*) صدق می کند.

- (ت) به وسیله استقرای ترانسفینی ثابت کنید که به ازای هر  $\alpha \in J$ ، تابعی مانند  $h: S_\alpha \rightarrow C$  هست که در (\*) صدق می کند.
- (ث) قضیه را ثابت کنید.

۱۱. با فرض قضیه خوشترتیبی، ثابت کنید که به ازای هر دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، یا آنها يك عدد اصلی دارند یا یکی عدد اصلی بزرگتر از دیگری دارد. [داهنمایی: اگر تابع پوشایی مانند  $f: A \rightarrow B$  وجود نداشته باشد می توان تمرین قبل را به کار بست.]

۱۲. قضیه (اصل تعریف سازگشتی ترانسفینی). فرض کنید  $C$  يك مجموعه،  $J$  مجموعه ای خوشترتیب، و  $\alpha$  کوچکترین عضو آن باشد. همچنین، فرض کنید  $\mathcal{F}$  مجموعه همه توابعی باشد که قطعه ای از  $J$  را بتوی  $C$  می نگارند (از جمله تابع تهی که  $S_\alpha$  را بتوی  $C$  می نگارد). به ازای تابع مفروض  $\rho: \mathcal{F} \rightarrow C$ ، ثابت کنید که تابعی یکتا مانند  $h: J \rightarrow C$  وجود دارد که به ازای هر  $x \in J$

$$h(x) = \rho(h \upharpoonright S_x).$$

[داهنمایی: برهان بر طبق طرحی است که در تمرین ۱۰ به اختصار شرح داده شده است.]

### \* ۱-۱۱ اصل ماکزیموم

چنانکه پیشتر اشاره کردیم، اصل موضوع انتخاب به این قضیه عمیق منجر می شود که هر مجموعه را می توان خوشترتیب کرد. اصل موضوع انتخاب نتیجه دیگری نیز دارد که در ریاضیات از آن هم مهمتر است و آن اصلی است موسوم به اصل ماکزیموم، که اینک به بحث درباره آن می پردازیم.

نخست، يك تعریف می آوریم. اگر  $A$  مجموعه مفروضی باشد، رابطه  $<$  را يك رابطه ترتیبی جزئی اکید در  $A$  نامیم در صورتی که دارای دو خاصیت ذیل باشد:

(۱) (نامنعکسی) رابطه  $a < a$  هیچ گاه برقرار نباشد.

(۲) (تعدي) اگر  $a < b$  و  $b < c$  آنگاه  $a < c$ .

اینها همان خاصیت های دوم و سوم رابطه های ترتیبی ساده اند (بخش ۱-۳ ملاحظه شود)؛ خاصیت مقایسه پذیری در اینجا حذف شده است. به بیان دیگر، رابطه ترتیبی جزئی اکید درست مانند رابطه ترتیبی ساده عمل می کند، با این تفاوت که به ازای هر زوج از اعضای متمایز آن مجموعه، مانند  $x$  و  $y$ ، ضرورت ندارد  $x < y$  یا  $y < x$ .

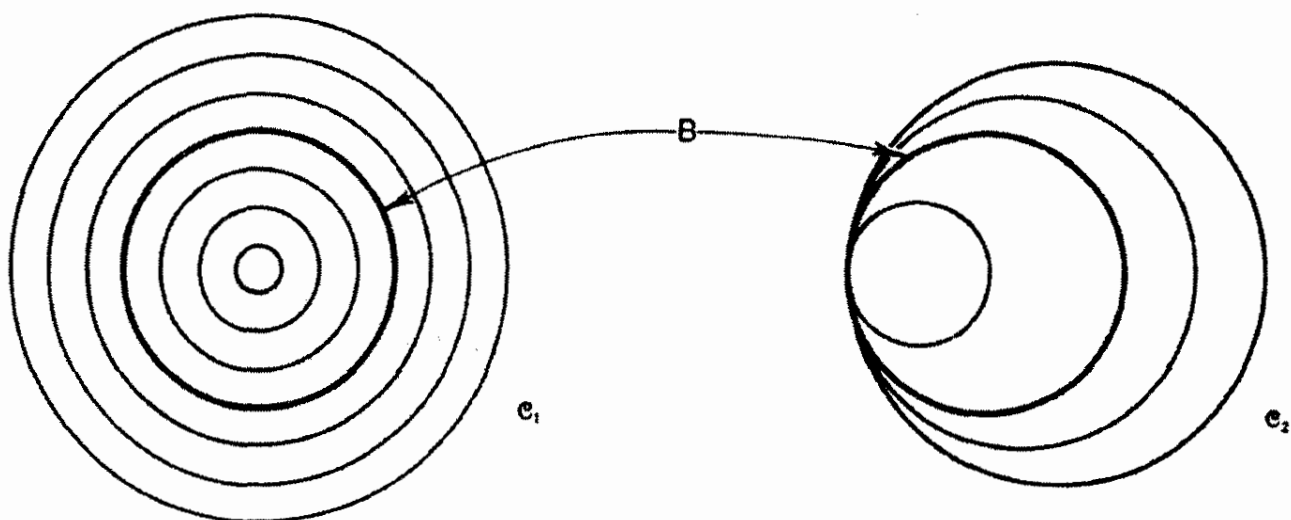
اگر  $<$  رابطه ترتیبی جزئی اکیدی در مجموعه  $A$  باشد، امکان دارد که زیر مجموعه ای

از  $A$  مانند  $B$  با این رابطه مرتب ساده باشد؛ تنها چیز مورد نیاز این است که هر زوج از اعضای  $B$  تحت  $<$  مقایسه پذیر باشند.  
 اکنون می‌توان اصل ماکزیموم را بیان کرد.

**قضیه (اصل ماکزیموم).** فرض کنیم  $<$  رابطه ترتیبی جزئی اکیدی در مجموعه  $A$  باشد، و زیرمجموعه  $B$  از  $A$  با  $<$  مرتب ساده باشد. در این صورت، زیرمجموعه مرتب ساده ماکزیمالی از  $A$  مانند  $C$  حاوی  $B$  وجود دارد.

به بیان دیگر، زیرمجموعه‌ای از  $A$  مانند  $C$  هست که حاوی  $B$  است، و  $C$  با رابطه  $<$  مرتب ساده است و هیچ زیرمجموعه دیگری از  $A$  که با  $<$  مرتب ساده و  $C$  یک زیرمجموعه سره آن باشد وجود ندارد.

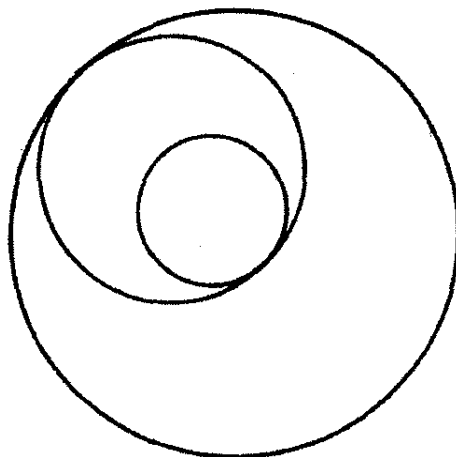
**مثال ۰۱.** اگر  $\mathcal{A}$  گردایه دلخواهی از مجموعه‌ها باشد، رابطه «جزئیت سره» رابطه ترتیبی جزئی اکیدی در  $\mathcal{A}$  است. فرض کنیم  $\mathcal{A}$  گردایه همه ناحیه‌های دایره‌ای (داخل دایره‌ها) واقع در یک صفحه باشد. یک زیرگردایه مرتب ساده ماکزیمالی  $\mathcal{A}$  عبارت است از همه ناحیه‌های دایره‌ای که مرکز آنها مبدأ مختصات است. زیرگردایه دیگری که مرتب ساده ماکزیمالی است عبارت است از جميع ناحیه‌های دایره‌ای که کرانه‌های آنها دایره‌ای هستند که از طرف راست در مبدأ مختصات بر محور  $Y$  مماس‌اند. شکل ۱۴ دیده شود.



شکل ۱۴

اکنون، اصل ماکزیموم نه تنها وجود یک زیرگردایه مرتب ساده ماکزیمالی را در  $\mathcal{A}$  تضمین می‌کند، بلکه، به موجب آن، اگر از یک زیرگردایه مرتب ساده دلخواه مانند  $\mathcal{B}$  از  $\mathcal{A}$  آغاز کنیم، زیرگردایه مرتب ساده ماکزیمالی مانند  $\mathcal{C}$  از  $\mathcal{A}$  وجود دارد که حاوی  $\mathcal{B}$  است. اگر  $\mathcal{B}$  تنها از یک ناحیه دایره‌ای، مانند  $B$ ، تشکیل شده باشد، به آسانی می‌توان

زیر گردایه‌های مرتب ساده ماکزیمالی متفاوتی از  $A$  یافت که حاوی  $B$  باشند. زیر گردایه‌های  $\mathcal{C}_1$  و  $\mathcal{C}_2$ ، که در شکل ۱۴ نمایش داده شده‌اند، دو نمونه از این نوع‌اند. اما اگر  $\mathcal{B}$  از گردایه پیچیده‌تری تشکیل شده باشد، نظیر سه ناحیه دایره‌ای که در شکل ۱۵ نمایش داده شده‌اند، یافتن زیر گردایه مرتب ساده ماکزیمالی که حاوی  $\mathcal{B}$  باشد متضمن کار بیشتری است، که آنرا به خواننده واگذار می‌کنیم.



شکل ۱۵

مثال ۲. اگر  $(x_0, y_0)$  و  $(x_1, y_1)$  دو نقطه از صفحه  $R^2$  باشند، رابطه  $<$  را چنین تعریف می‌کنیم

$$(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$$

هر گاه  $x_0 < x_1$  و  $y_0 = y_1$ . رابطه  $<$  یک رابطه ترتیبی جزئی در  $R^2$  است که تحت آن دو نقطه فقط وقتی مقایسه پذیرند که بر یک خط افقی قرار داشته باشند. مجموعه‌های مرتب ساده ماکزیمال، خطوط افقی در  $R^2$  هستند.

می‌توان «برهان» شهودی نسبتاً قابل قبولی برای اصل ماکزیموم ارائه کرد. این برهان متضمن طریقه‌ای مرحله به مرحله است که می‌توان آنرا عملاً چنین توصیف کرد. جعبه‌ای اختیار می‌کنیم و همه اعضای  $B$  را داخل آن قرار می‌دهیم، سپس، باقی اعضای  $A$  را یک به یک می‌آزماییم. ابتدا یک عضو  $A$  را که در  $B$  نیست برمی‌داریم، اگر با همه اعضای  $B$  مقایسه پذیر بود، آن را داخل جعبه قرار می‌دهیم؛ وگرنه، کنارش می‌گذاریم. در حالت کلی، مجموعه‌ای از اعضای داخل جعبه و مجموعه‌ای از اعضای که آنها را کنار گذاشته‌ایم خواهیم داشت. یکی از اعضای به جا مانده  $A$  را برمی‌داریم، اگر با همه اعضای موجود در جعبه مقایسه پذیر بود، آن را هم داخل جعبه قرار می‌دهیم؛ در غیر این صورت، کنارش می‌گذاریم، و کار را به همین روش ادامه می‌دهیم. پس از بررسی همه اعضای  $A$ ، اعضای که در جعبه‌اند جملگی با یکدیگر مقایسه پذیر خواهند بود، بنا بر این، مجموعه مرتب ساده‌ای را تشکیل می‌دهند. از طرف دیگر، هر عضوی که در جعبه نباشد، دست کم با یکی از اعضای داخل جعبه مقایسه پذیر نیست، زیرا به همین دلیل کنار گذاشته شده است. در نتیجه،

مجموعه مرتب ساده داخل جعبه ما کزیمال است، زیرا هیچ زیرمجموعه بزرگتر از  $A$  نمی‌تواند در شرط مقایسه‌پذیری صدق کند.

البته، ضعف «برهان» فوق وقتی پدیدار می‌شود که می‌گوییم «پس از بررسی همه اعضای  $A$ ». از کجا بدانیم که اصلاً زمان بررسی همه اعضای  $A$  به «پایان می‌رسد»؟ اگر اتفاقاً  $A - B$  شما ۱ باشد، تبدیل این استدلال شهودی به برهانی واقعی دشوار نیست. موردی را که  $A$  شمارای نامتناهی است در نظر می‌گیریم؛ حالت متناهی بودن به مراتب آسانتر است. اعضای  $A - B$  را به وسیله اعداد صحیح مثبت اندیسگذاری می‌کنیم:

$$A - B = \{a_1, a_2, \dots\},$$

به طوری که به اعضای متمایز  $A - B$  اعداد متمایزی نظیر شود. این اندیسگذاری طریقه‌ای به دست می‌دهد برای تشخیص اینکه به چه ترتیب اعضای  $A - B$  را آزمایش کنیم، و چگونگی زمان پایان آزمایش تمامی آنها را بدانیم.

بویژه، تابعی مانند  $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \{0, 1\}$  چنان تعریف می‌کنیم که مقدارش در  $i$  اگر « $a_i$  در جعبه قرار گیرد» مساوی ۰ و اگر « $a_i$  کنار گذاشته شود» مقدارش ۱ باشد. به بیان صورتیتر، دستور بازگشتی ذیل را در نظر بگیرید:

$$h(i) = 0 \quad \text{اگر } a_i \text{ با هر عضو مجموعه } B \cup \{a_j \mid h(j) = 0 \text{ و } 1 \leq j \leq i-1\} \text{ مقایسه پذیر باشد،}$$

$$h(i) = 1 \quad \text{در غیر این صورت،}$$

بنا بر اصل تعریف بازگشتی، این دستور تابعی یکتا مانند  $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \{0, 1\}$  را معین می‌کند. به سهولت می‌توان ثابت کرد که مجموعه

$$B \cup \{a_j \mid h(j) = 0\},$$

یک زیرمجموعه مرتب ساده ما کزیمال  $A$  است.

اگر  $A - B$  شمارا نباشد، در صورتی که قضیه خوشترتیبی را مفروض بگیریم، گونه دیگری از این طریقه کارگر خواهد بود. به جای اندیسگذاری اعضای  $A - B$  با مجموعه  $\mathbb{Z}_+$ ، آنها را به وسیله تابعی دوسویی با اعضای مجموعه خوشترتیبی مانند  $J$  اندیسگذاری می‌کنیم:

$$A - B = \{a_\alpha \mid \alpha \in J\}.$$

برای این منظور، قضیه خوشترتیبی برای تضمین وجود تناظری دوسویی بین  $A - B$  و مجموعه خوشترتیبی مانند  $J$  مورد نیاز است. در این صورت، با قراردادن قطعه  $S_\alpha$  به جای قطعه  $\{1, \dots, i-1\}$  در استدلال بالا، می‌توان به همان شیوه ادامه داد. به بیان دقیقتر، ضروری است که اصل تعریف بازگشتی را در مورد مجموعه‌های خوشترتیب تعمیم دهیم. (تمرین ۱۲ در بخش قبل دیده شود.)



بحث فوق به هیچ وجه کامل نیست، ولی چگونگی ارتباط قضیه خوشترتیبی و اصل ماکزیموم را نشان می‌دهد. در واقع، ثابت می‌شود که آنها معادل‌اند؛ هر یک مستلزم دیگری است. بعلاوه، هر یک از آنها با اصل موضوع انتخاب معادل است.

در این کتاب به اثبات اصل ماکزیموم نمی‌پردازیم، زیرا این کار ما را از بحث اصلی خود منحرف می‌کند. برای خواستاران، نکات اصلی برهانی از این حکم را در تمرینات تکمیلی آورده‌ایم.

نکته‌ای دیگر می‌گوییم و به این گفتار پایان می‌دهیم. مقصود خود را از رابطه ترتیبی جزئی اکید تعریف کردیم، ولی هنوز سخنی از خود رابطه ترتیبی جزئی به میان نیاورده‌ایم. فرض کنیم  $<$  رابطه ترتیبی جزئی اکیدی در مجموعه  $A$  باشد.  $a \leq b$  را چنین تعریف می‌کنیم:  $a < b$  یا  $a = b$ ؛ این رابطه را رابطه ترتیبی جزئی در  $A$  می‌نامیم. مثلاً، رابطه جزئیت در گردایه‌ای از مجموعه‌ها رابطه ترتیبی جزئی است، و حال آنکه جزئیت سره رابطه ترتیبی جزئی اکید است.

بسیاری از نویسندگان، کار با رابطه‌های ترتیبی جزئی را بر کار با رابطه‌های ترتیبی جزئی اکید ترجیح می‌دهند؛ اصل ماکزیموم اغلب با این اصطلاحات بیان می‌شود. به هر حال، انتخاب اصطلاحات فقط بستگی به سلیقه و سهولت در کار دارد.

## تمرینها

۱. به ازای دو عدد حقیقی  $a$  و  $b$  رابطه  $<$  را چنین تعریف می‌کنیم: اگر  $b - a$  مثبت و گویا باشد آنگاه  $a < b$ . ثابت کنید که  $<$  يك رابطه ترتیبی جزئی اکید در  $R$  است. زیر مجموعه‌های مرتب ساده ماکزیمال آن کدام‌اند؟

۲. بحث مثال ۱ را تکمیل کنید.

۳. (الف) فرض کنید  $<$  رابطه ترتیبی جزئی اکیدی در مجموعه  $A$  باشد. رابطه  $\leq$  را در  $A$  چنین تعریف می‌کنیم:  $a \leq b$  هر گاه  $a < b$  یا  $a = b$ . ثابت کنید که این رابطه دارای خواص ذیل موسوم به اصول موضوع ترتیب جزئی است:

$$(۱) \text{ به ازای هر عضو } a \in A, a \leq a.$$

$$(۲) \text{ اگر } a \leq b \text{ و } b \leq a \text{ آنگاه } a = b.$$

$$(۳) \text{ اگر } a \leq b \text{ و } b \leq c \text{ آنگاه } a \leq c.$$

(ب) فرض کنید  $P$  رابطه‌ای در  $A$  و واجد خواص (۱) - (۳) باشد. رابطه  $S$  را در  $A$  چنین تعریف می‌کنیم:  $a S b$  هر گاه  $a P b$  و  $a \neq b$ . ثابت کنید که  $S$  يك رابطه ترتیبی جزئی اکید در  $A$  است.

۴. فرض کنید  $A$  مجموعه‌ای با رابطه ترتیبی جزئی اکید  $<$  باشد، و  $x \in A$ . فرض کنید می‌خواهیم زیر مجموعه مرتب ساده ماکزیمالی از  $A$  مانند  $C$  بیابیم به طوری که

$x \in C$ . یکی از راههایی که برای تعریف مجموعه  $C$  قابل قبول به نظر می‌رسد این است که آن را مجموعه همه اعضایی از  $A$  بگیریم که با  $x$  مقایسه پذیرند؛

$$C = \{y \mid y \in A \text{ و یا } x < y \text{ یا } y < x\}.$$

اما این راه همیشه مؤثر نیست. در کدامیک از مثالهای ۱ و ۲ این راه مؤثر و در کدامیک مؤثر نیست؟

۵. با اثبات اینکه  $B \cup \{a_j \mid h(j) = 0\}$  زیرمجموعه مرتب ساده ماکزیمالی از  $A$  است، برهان اصل ماکزیموم رادرحالت شمارا بودن  $A - B$  تکمیل کنید.

۶\*. به ازای دو نقطه  $(x_0, y_0)$  و  $(x_1, y_1)$  از  $R^2$ ، چنین تعریف می‌کنیم:

$$(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$$

هرگاه  $x_0 < x_1$  و  $y_0 \leq y_1$ . ثابت کنید که منحنیهای  $y = x^2$  و  $y = 2$  زیرمجموعه‌های مرتب ساده ماکزیمالی  $R^2$  اند، ولی  $y = x^2$  چنین نیست. همه زیرمجموعه‌های مرتب ساده ماکزیمالی را بیابید.

### \* تمرینهای تکمیلی:

#### خوشترتیبی

در تمرینهای ذیل از خواننده می‌خواهیم که بدون استفاده از اصل موضوع انتخاب، وجود يك مجموعه خوشترتیب ناشمارا را ثابت کند. همچنین، اثبات معادل بودن اصل موضوع انتخاب، قضیه خوشترتیبی، و اصل ماکزیموم را نیز خواسته‌ایم.

۱. تحقیق کنید که در برهان اصل تعریف بازگشتی ترانسفینی، اصل موضوع انتخاب به کار نمی‌رود. (تمرین ۱۲ در بخش ۱ - ۱۵ دیده شود.)

۲. بدون استفاده از اصل موضوع انتخاب ثابت کنید که:

قضیه. فرض کنید  $J$  و  $E$  مجموعه‌های خوشترتیبی باشند. اگر  $J$  دارای نوع ترتیب زیرمجموعه‌ای از  $E$  باشد آنگاه  $J$  دارای نوع ترتیب  $E$  یا دارای نوع ترتیب قطعه‌ای یکتا از  $E$  است؛ ولی هر دو این حالتها پیش نمی‌آید.

برهان. فرض کنید  $e_0$  عضو ثابتی از  $E$  باشد. تابع  $h: J \rightarrow E$  را با ضابطه ذیل تعریف می‌کنیم:

$$h(\alpha) = \begin{cases} \text{کوچکترین عضو } (E - h(S_\alpha)) & \text{اگر } h(S_\alpha) \neq E \\ e_0 & \text{اگر } h(S_\alpha) = E \end{cases}$$

(الف) بنا بر فرض، تابعی حافظ ترتیب مانند  $i: J \rightarrow E$  وجود دارد. ثابت کنید که به ازای هر  $\alpha \in J$ ،  $h(\alpha) \leq i(\alpha)$ ؛ نتیجه بگیرید که  $h$  به ازای هر  $\alpha$  در دستور ذیل صدق می کند:

$$(*) \quad h(\alpha) = (E - h(S_\alpha)) \text{ کوچکترین عضو}$$

(ب) ثابت کنید که به ازای هر  $\alpha$ ، مجموعه  $h(S_\alpha)$  قطعه‌ای از  $E$  است؛ نتیجه بگیرید که  $h(J)$  مساوی  $E$  یا مساوی قطعه‌ای از  $E$  است.

(پ) ثابت کنید که  $h$  حافظ ترتیب است.

(ت) ثابت کنید که به ازای هر تابع حافظ ترتیب  $k: J \rightarrow E$ ، اگر  $k(J)$  مساوی  $E$  یا مساوی قطعه‌ای از  $E$  باشد آنگاه  $k$  در  $(*)$  صدق می کند، و در نتیجه یکتاست.

۳. بدون استفاده از اصل موضوع انتخاب ثابت کنید که:

قضیه. اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه خوشترتیب باشند آنگاه یا یک نوع ترتیب دارند و یا یکی دارای نوع ترتیب قطعه‌ای از دیگری است.

[داهنمایی. مجموعه خوشترتیبی را که در تمرین ۸ (الف) در بخش ۱-۱۵ ساخته شد در نظر بگیرید.]

نتیجه. اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه خوشترتیب ناشمارا باشند و همه قطعات آنها شمارا باشند آنگاه  $A$  و  $B$  دارای یک نوع ترتیب اند.

۴. بدون استفاده از اصل موضوع انتخاب، به طریق ذیل یک مجموعه خوشترتیب ناشمارا

بسازید: فرض کنید  $A$  گردایه همه زوجهای  $(A, <)$  باشد که در آن  $A$  زیرمجموعه‌ای از  $Z_+$  و با رابطه  $<$  خوشترتیب است. ( $A$  ممکن است تهی باشد.) رابطه  $\sim$  را در  $A$  چنین تعریف می کنیم:  $(A', <') \sim (A, <)$  هر گاه  $(A, <)$  و  $(A', <')$  دارای یک نوع ترتیب باشند. به آسانی می توان ثابت کرد که  $\sim$  یک رابطه هم‌ارزی است. فرض کنید  $[(A, <)]$  رده هم‌ارزی  $(A, <)$  و  $E$  گردایه همه این رده‌های هم‌ارزی باشد. رابطه  $\ll$  را چنین تعریف می کنیم:

$$[(A, <)] \ll [(A', <')]$$

هر گاه  $(A, <)$  دارای نوع ترتیب قطعه‌ای از  $(A', <')$  باشد.

(الف) ثابت کنید که  $\ll$  خوشترتیب است و یک ترتیب ساده در  $E$  است. ملاحظه کنید که رده هم‌ارزی  $[(\emptyset, \emptyset)]$  کوچکترین عضو  $E$  است.

(ب) ثابت کنید که اگر  $\alpha = [(A, <)]$  عضوی از  $E$  باشد آنگاه  $(A, <)$  دارای همان نوع ترتیب قطعه  $S_\alpha(E)$  از  $E$  در  $\alpha$  است. [داهنمایی: نگاشت

$f: A \rightarrow E$  را چنین تعریف کنید: به ازای هر  $x$  از  $A$ ،

$$[f(x) = [(S_\alpha(A), <)]$$

(پ) نتیجه بگیرید که  $E$  با  $\ll$  خوشترتیب است.

(ت) ثابت کنید که  $E$  ناشماراست. [دانهمایی: اگر  $h: E \rightarrow Z_+$  تابعی

دوسویی باشد آنگاه  $h$  در  $Z_+$  یک خوشترتیبی القا می‌کند.]

استدلالی مشابه، با اختیار کردن مجموعه خوشترتیب دلخواهی مانند  $X$  به جای  $Z_+$ ،

(بدون استفاده از اصل موضوع انتخاب) وجود مجموعه‌ای خوشترتیب را که دارای

عدد اصلی بزرگتر از  $X$  است ثابت می‌کند.

۵. فرض کنید  $X$  مجموعه‌ای دلخواه و  $\mathcal{A}$  گردایه همه زوجهای مانند  $(A, <)$  باشد

که در آن  $A$  زیرمجموعه‌ای از  $X$  و رابطه  $<$  خوشترتیب کننده  $A$  است. رابطه  $<$

را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(A, <) < (A', <')$$

در صورتی که  $(A, <)$  مساوی قطعه‌ای از  $(A', <')$  باشد.

(الف) ثابت کنید که  $<$  رابطه ترتیبی جزئی اکیدی در  $\mathcal{A}$  است.

(ب) فرض کنید  $\mathcal{B}$  زیرگردایه‌ای از  $\mathcal{A}$  باشد که تحت  $<$  مرتب ساده است.

$B'$  و  $<'$  را، بترتیب، مساوی اجتماع همه زیرمجموعه‌های  $B$  و اجتماع همه

رابطه‌های  $<$  به طوری که  $(B, <) \in \mathcal{B}$  تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که  $(B', <')$

مجموعه‌ای خوشترتیب است.

۶. با استفاده از تمرینهای ۱ و ۵ ثابت کنید که:

قضیه. اصل ماکزیموم و قضیه خوشترتیبی معادل‌اند.

۷. با استفاده از تمرینهای ۱-۳ و ۵ ثابت کنید:

قضیه. اصل موضوع انتخاب و قضیه خوشترتیبی معادل‌اند.

برهان. فرض کنید  $X$  یک مجموعه و  $c$  تابع انتخاب ثابتی برای زیرمجموعه‌های

ناتهی  $X$  باشد. اگر  $T$  زیرمجموعه‌ای از  $X$  و  $<$  رابطه‌ای در  $T$  باشد، زوج

$(T, <)$  را یک بوج در  $X$  خوانیم در صورتی که  $<$  خوشترتیب کننده  $T$  باشد

و به ازای هر  $x$  از  $T$ ،

$$x = c(X - S_x(T)),$$

که در آن  $S_x(T)$  قطعه  $T$  در  $x$  است.

(الف) به ازای هر دو برج  $(T_1, <_1)$  و  $(T_2, <_2)$  در  $X$ ، ثابت کنید که یا این دو

مجموعه مرتب متساوی‌اند یا یکی از آنها مساوی قطعه‌ای از دیگری است. [دانهمایی:

اگر  $T_1$  و  $T_2$  مجموعه‌هایی خوشترتیب باشند، نگاشت  $h: T_1 \rightarrow T_2$  حافظ - ترتیب باشد، و  $h(T_1)$  مساوی  $T_2$  یا مساوی قطعه‌ای از  $T_2$  باشد آنگاه به ازای هر  $x \in h(S_x(T_1)) = S_{h(x)}(T_2)$ ، اگر  $T_1$  و  $T_2$  دو برج باشند آنگاه به ازای هر  $x$ ،  
 $[h(x) = x$

(ب) فرض کنید  $\{(T_k, <_k) \mid k \in K\}$  گردایه همه برجهای  $X$  باشد. قرار دهید

$$T = \bigcup_{k \in K} T_k \quad \text{و} \quad < = \bigcup_{k \in K} <_k$$

ثابت کنید که  $(T, <)$  برجی در  $X$  است. نتیجه بگیرید که  $T = X$ .

## فضای توپولوژیک و توابع پیوسته

منشأ پیدایش مفهوم فضای توپولوژیک، بررسی خط حقیقی و فضای اقلیدسی و بررسی توابع پیوسته در این فضاها بوده است. در این فصل، فضای توپولوژیک را تعریف می‌کنیم، و طرقی چند برای ساختن توپولوژی در یک مجموعه به نحوی که آن را به فضای توپولوژیک مبدل سازد، بررسی می‌کنیم. همچنین، بعضی از مفاهیم مقدماتی مربوط به فضاهای توپولوژی را مورد نظر قرار می‌دهیم. مجموعه‌های باز و بسته، نقاط حدی، و توابع پیوسته را به صورت تعمیم طبیعی مفاهیم مشابه برای خط حقیقی و فضای اقلیدسی تعریف می‌کنیم.

### ۱-۲ فضاهای توپولوژیک

تعریف فضاهای توپولوژیک، که اکنون تعریفی است استاندارد، مدتها طول کشید تا تدوین شد. ریاضیدانان مختلفی مانند فرشه<sup>۱</sup>، هاوسدورف<sup>۲</sup>، و دیگران در طی دهه‌های اولیه این قرن تعریفات گوناگونی پیشنهاد کردند، ولی توافق آنان بر سر مناسبترین تعریف، پس از زمان نسبتاً مدید حاصل شد. البته آنها خواستار چنان تعریفی، تا حد امکان جامع، بودند که همه نمونه‌های گونه‌گونی را که در ریاضیات سودمندند به عنوان حالت‌های خاص دربرگیرد؛ از جمله می‌توان فضای اقلیدسی، فضاهای اقلیدسی بینهایت بعدی، و فضاهای تابعی را نام برد؛ اما، همچنین خواستار آن بودند که این تعریف به حد کافی مانع باشد تا قضایای معمول و متعارف این فضاهای شناخته شده در حالت کلی در فضاهای توپولوژیک نیز برقرار باشند. تعیین حدود جامعیت تعریف یک مفهوم جدید ریاضی مسئله‌ای است که

همواره در بیان این گونه تعریفات با آن مواجه هستیم. تعریفی که سرانجام پذیرفته شد ممکن است کمی مجرد به نظر آید، ولی بتدریج که با راههای گوناگون ساختن فضاهای توپولوژیک آشنا می شوید، معنای این مفهوم را بهتر درک خواهید کرد.

**تعریف.** یک توپولوژی در مجموعه  $X$  گردایه‌ای مانند  $\mathcal{C}$  از زیر مجموعه‌های  $X$  است که در شرایط زیر صدق می کند:

(۱)  $\emptyset$  و  $X$  به  $\mathcal{C}$  متعلق اند.

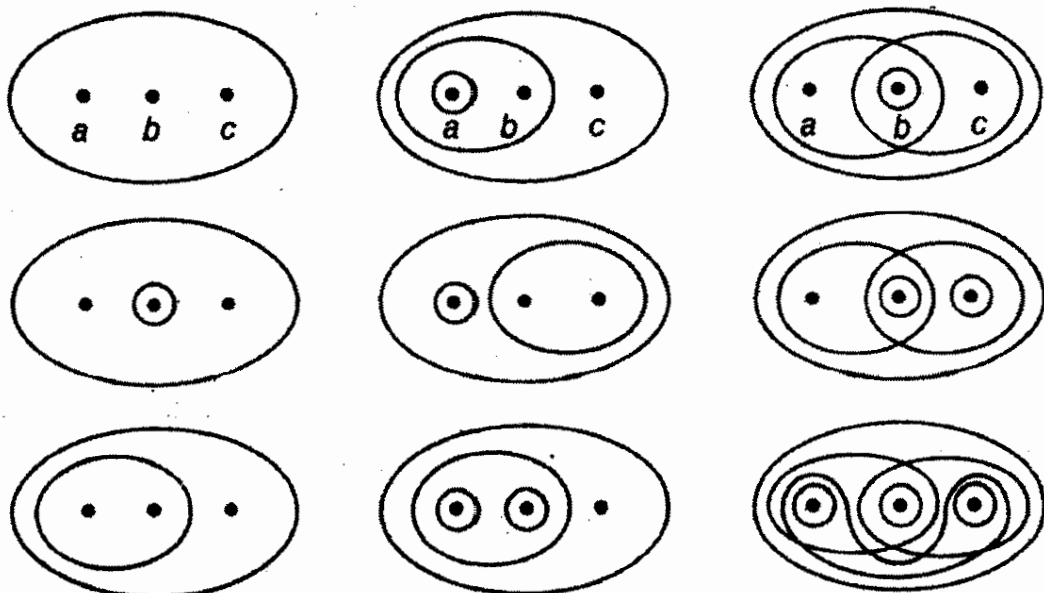
(۲) اجتماع اعضای هر زیر گردایه  $\mathcal{C}$  متعلق است به  $\mathcal{C}$ .

(۳) مقطع اعضای هر زیر گردایه متناهی  $\mathcal{C}$  متعلق است به  $\mathcal{C}$ .

مجموعه  $X$  را که برای آن توپولوژی‌ای مانند  $\mathcal{C}$  مشخص شده است فضای توپولوژیک می نامیم.

درستتر آن است که بگوییم فضای توپولوژیک عبارت است از زوج مرتب  $(X, \mathcal{C})$  که تشکیل شده است از مجموعه  $X$  و توپولوژی  $\mathcal{C}$  در  $X$ ، ولی هر جا که بیم ابهامی نرود از ذکر  $\mathcal{C}$  درمی گذریم. اگر  $X$  فضایی توپولوژیک با توپولوژی  $\mathcal{C}$  باشد، زیر مجموعه  $U$  از  $X$  را یک مجموعه باز  $X$  خوانیم هر گاه  $U$  متعلق به  $\mathcal{C}$  باشد. با به کار بستن این اصطلاح، می توان گفت که فضای توپولوژیک عبارت است از مجموعه‌ای مانند  $X$  همراه با گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های آن، موسوم به مجموعه‌های باز، به طوری که  $\emptyset$  و  $X$  هر دو بازند و اجتماع دلخواه و مقطع متناهی مجموعه‌های باز نیز باز است.

**مثال ۱.** فرض کنیم  $X$  مجموعه سه عضوی  $X = \{a, b, c\}$  باشد. در  $X$  توپولوژیهای متعددی می توان تعریف کرد، بعضی از آنها در شکل (۱) نموده شده‌اند. نمودار گوشه سمت راست بالایی نمایش دهنده توپولوژی‌ای است که در آن مجموعه‌های باز عبارت‌اند از



شکل ۱

$\emptyset$ ،  $\{a, b\}$ ،  $\{b\}$ ، و  $\{b, c\}$ . توپولوژی گوشه سمت چپ بالایی فقط شامل  $X$  و  $\emptyset$  است، در حالی که توپولوژی گوشه سمت راست پایینی شامل همه زیر مجموعه‌های  $X$  است. با جابجا کردن نقش  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  می‌توان توپولوژیهای دیگر  $X$  را به دست آورد. از این مثال دانسته می‌شود که حتی یک مجموعه سه عضوی دارای توپولوژیهای متعدد متفاوت است. اما چنین نیست که هر گردایه از زیرمجموعه‌های  $X$  یک توپولوژی در  $X$  باشد. مثلاً هیچیک از گردایه‌هایی که در شکل ۲ نمایش داده شده است توپولوژی نیست.



شکل ۲

مثال ۲. اگر  $X$  مجموعه دلخواهی باشد، گردایه همه زیرمجموعه‌های آن تشکیل توپولوژی‌ای در  $X$  می‌دهد که به توپولوژی گسسته موسوم است. گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های  $X$  که فقط شامل  $X$  و  $\emptyset$  باشد نیز یک توپولوژی در  $X$  است؛ ما آن را توپولوژی ناگسسته یا توپولوژی بیمایه می‌خوانیم.

مثال ۳. مجموعه دلخواه  $X$  را در نظر می‌گیریم؛ و  $\mathcal{J}$  را گردایه همه زیرمجموعه‌هایی از  $X$  مانند  $U$  اختیار می‌کنیم که  $X - U$  یا متناهی است یا خود  $X$  است. در این صورت  $\mathcal{J}$  یک توپولوژی در مجموعه  $X$  است، که به توپولوژی متمم متناهی موسوم است.  $X$  و  $\emptyset$  هر دو در  $\mathcal{J}$  هستند، زیرا  $X - X$  متناهی، و  $X - \emptyset$  مساوی  $X$  است. فرض کنیم که  $\{U_\alpha\}$  گردایه اندیس‌داری از اعضای  $\mathcal{J}$  باشد؛ برای اثبات اینکه  $\bigcup U_\alpha$  در  $\mathcal{J}$  است ملاحظه می‌کنیم که

$$X - \bigcup U_\alpha = \bigcap (X - U_\alpha).$$

مجموعه اخیر متناهی است، زیرا هر یک از مجموعه‌های  $X - U_\alpha$  متناهی است. اکنون فرض می‌کنیم  $U_1, \dots, U_n$  عضو  $\mathcal{J}$  باشند، برای اثبات اینکه  $\bigcap U_i$  عضو  $\mathcal{J}$  است، ملاحظه می‌کنیم که

$$X - \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n (X - U_i).$$

مجموعه اخیر اجتماع تعدادی متناهی از مجموعه‌های متناهی است و در نتیجه خود نیز متناهی است.

مثال ۴. مجموعه دلخواه  $X$  را در نظر می‌گیریم؛  $\mathcal{J}$  را گردایه همه زیرمجموعه‌هایی از  $X$  مانند  $U$  اختیار می‌کنیم که  $X - U$  شمارا و یا خود  $X$  است. به آسانی معلوم می‌شود که  $\mathcal{J}$  یک توپولوژی در  $X$  است.



تعریف. فرض کنیم که  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{C}'$  دو توپولوژی در مجموعه مفروض  $X$  باشند؛ اگر  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ ، می‌گوییم  $\mathcal{C}'$  از  $\mathcal{C}$  ظریفتر است؛ اگر  $\mathcal{C}'$  اکیداً حاوی  $\mathcal{C}$  باشد، می‌گوییم  $\mathcal{C}'$  اکیداً ظریفتر از  $\mathcal{C}$  است.

این دو وضع را بترتیب با عبارات  $\mathcal{C}$  درشتتر از  $\mathcal{C}'$  است یا اکیداً درشتتر از آن است نیز بیان می‌کنیم.

این اصطلاح با این ملاحظه انتخاب شده است که می‌توان يك فضای توپولوژیک را چیزی شبیه کامیونی پر از پاره سنگ تصور کرد که مجموعه‌های باز آن عبارت‌اند از قلوه‌سنگها و همه اجتماعهای گردایه‌های قلوه‌سنگها. حال اگر این قلوه سنگها را به تکه‌های کوچکتر خرد کنیم، گردایه مجموعه‌های باز بزرگتر می‌شود، و گوییم این توپولوژی، همچون پاره سنگها، با این عمل ظریفتر شده است.

البته، لازم نیست که هر دو توپولوژی در  $X$  قابل مقایسه باشند. مثلاً در شکل ۱، توپولوژی گوشه سمت راست بالایی از هر يك از توپولوژیهای ستون اول اکیداً ظریفتر، و از هر يك از توپولوژیهای دیگر ستون سوم اکیداً درشتتر است. ولی با هیچیک از توپولوژیهای ستون دوم قابل مقایسه نیست.

برای این مفهوم، گاه اصطلاحات دیگری نیز به کار می‌رود. وقتی که  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ ، بعضی از ریاضیدانان می‌گویند  $\mathcal{C}'$  بزرگتر از  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{C}$  کوچکتر از  $\mathcal{C}'$  است. این اصطلاح اگر چه به اندازه «ظریفتر» و «درشتتر» گویا نیست، یقیناً پذیرفتنی است.

بسیاری از ریاضیدانان واژه‌های «ضعیفتر» و «قویتر» را در این مورد به کار می‌برند. متأسفانه، بعضی از ایشان (بویژه دست اندرکاران آنالیز) تمایل دارند وقتی بگویند  $\mathcal{C}'$  قویتر از  $\mathcal{C}$  است که  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ ، در حالی که بقیه (بویژه دست اندرکاران توپولوژی) تمایل دارند در همان وضع بگویند  $\mathcal{C}'$  ضعیفتر از  $\mathcal{C}$  است! اگر در کتابی به اصطلاح «توپولوژی قوی» یا «توپولوژی ضعیف» برخوردید، باید از سیاق مطلب معنی اصطلاح مورد نظر را دریابید. ما، در این کتاب این اصطلاحات را به کار نخواهیم برد.

## ۲-۲ پایه يك توپولوژی

در هر يك از مثالهای بخش پیش، توانستیم توپولوژی  $\mathcal{C}$  را با ارائه همه اعضایش مشخص کنیم. این کار معمولاً بسیار دشوار است. در اغلب موارد گردایه کوچکتری از زیر-مجموعه‌های  $X$  را مشخص می‌کنیم و بعد توپولوژی مورد نظر را بر حسب اعضای این گردایه تعریف می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم  $X$  مجموعه‌ای باشد، يك پایه توپولوژی‌ای در  $X$  گردایه‌ای است از زیر مجموعه‌های  $X$  (موسوم به اعضای پایه) به طوری که:

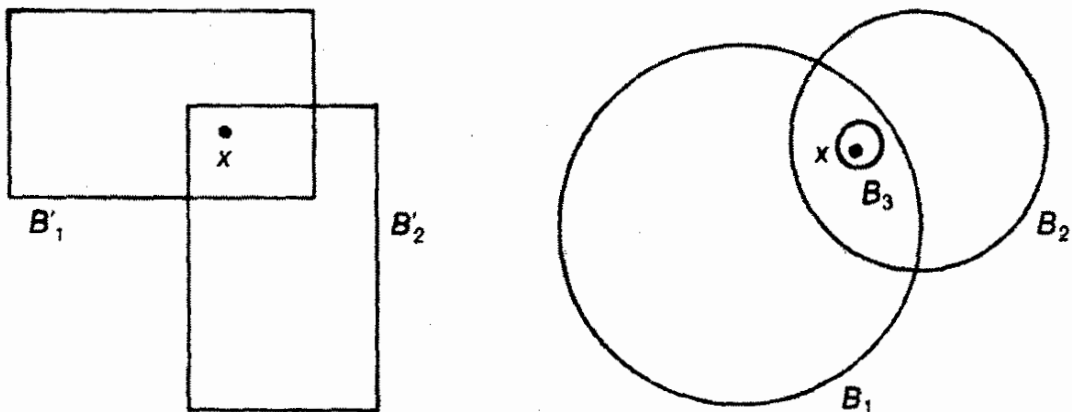
(۱) به ازای هر  $x \in X$ ، دست کم يك عضو پایه مانند  $B$  شامل  $x$  موجود است.

(۲) اگر  $x$  متعلق به مقطع دو عضو پایه مانند  $B_1$  و  $B_2$  باشد آنگاه عضوی از پایه مانند  $B_3$  وجود دارد به طوری که  $x \in B_3$  و  $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

تعریف. اگر  $\mathcal{B}$  پایه توپولوژی ای در  $X$  باشد آنگاه  $\mathcal{C}$ ، توپولوژی تولید شده به وسیله  $\mathcal{B}$ ، چنین تعریف می شود: زیر مجموعه  $U$  از  $X$  را در  $X$  باز گوئیم (یعنی عضوی از  $\mathcal{C}$  است) اگر به ازای هر  $x \in U$ ، عضوی از پایه مانند  $B \in \mathcal{B}$  وجود داشته باشد به طوری که  $x \in B$  و  $B \subset U$ .

ملاحظه می شود که بنا بر تعریف بالا، هر عضو  $B$  در  $X$  باز است، بنابراین  $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$  به آسانی می توان تحقیق کرد که این گردایه از زیر مجموعه های  $X$  يك توپولوژی در  $X$  است. پیش از اینکه این حکم را ثابت کنیم، چند مثال می آوریم.

مثال ۱. فرض کنید  $\mathcal{B}$  گردایه همه نواحی دایره ای (داخل دواير) صفحه باشد. در این صورت  $\mathcal{B}$  در هر دو شرط تعریف پایه صدق می کند. برقراری شرط دوم را در شکل ۳ نمایش داده ایم. در توپولوژی تولید شده به وسیله  $\mathcal{B}$ ، زیر مجموعه ای از صفحه مانند  $U$  وقتی باز است که هر عضو  $x$  در  $U$  متعلق به يك ناحیه دایره ای باشد که زیر مجموعه  $U$  است.



شکل ۳

شکل ۴

مثال ۲. فرض کنیم  $\mathcal{B}'$  گردایه همه نواحی مستطیلی (داخل مستطیلها) صفحه باشد به طوری که اضلاع مستطیلها موازی محورهای مختصات باشند. در این صورت  $\mathcal{B}'$  در هر دو شرط تعریف پایه صدق می کند. برقراری شرط دوم را در شکل ۴ نمایش داده ایم؛ در این حالت، برقراری شرط دوم بدیهی است، زیرا مقطع هر دو عضو پایه خود يك عضو پایه است (یا تهی است). همان طور که بعداً خواهیم دید، پایه  $\mathcal{B}'$  همان توپولوژی ای را در صفحه تولید می کند که پایه  $\mathcal{B}$  که در مثال قبلی تعریف شد.

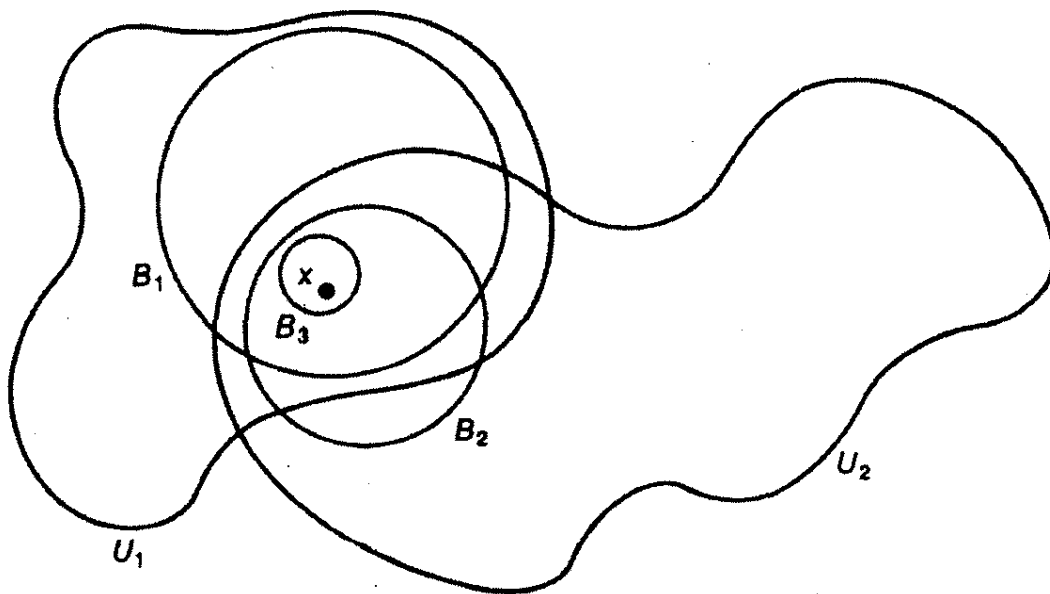
مثال ۳. به ازای هر مجموعه دلخواه  $X$ ، گردایه همه زیر مجموعه‌های يك عضوی  $X$  پایه‌ای برای توپولوژی گسسته در  $X$  است.

حال بررسی می‌کنیم که گردایه  $\mathcal{B}$ ، تولید شده به وسیله پایه  $\mathcal{B}$ ، در واقع يك توپولوژی در  $X$  است. اگر مجموعه  $U$  تهی باشد آنگاه  $U$  به انتهای مقدم در تعریف باز بودن صدق می‌کند. همچنین، مجموعه  $X$  در  $\mathcal{B}$  است. زیرا به ازای هر  $x \in X$ ، عضوی از پایه‌ای مانند  $B$  هست که شامل  $x$  است و  $B \subset X$ . اکنون خانواده‌ای اندیسدار  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  از اعضای  $\mathcal{B}$  را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که

$$U = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$$

به  $\mathcal{B}$  تعلق دارد. فرض کنیم  $x$  عضو دلخواهی از  $U$  باشد؛ پس اندیسی مانند  $\alpha$  وجود دارد به طوری که  $x \in U_\alpha$ . چون  $U_\alpha$  باز است، يك عضو پایه  $B$  وجود دارد به طوری که  $x \in B \subset U_\alpha$ . پس  $x \in B \subset U$  و در نتیجه، بنا بر تعریف،  $U$  باز است.

حال دو عضو  $U_1$  و  $U_2$  از  $\mathcal{B}$  را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم  $U_1 \cap U_2$  متعلق به  $\mathcal{B}$  است. فرض کنیم  $x \in U_1 \cap U_2$ ، عضو پایه  $B_1$  که شامل  $x$  است را طوری انتخاب می‌کنیم که  $B_1 \subset U_1$ . همچنین، عضوی مانند  $B_2$  از پایه برمی‌گزینیم که شامل  $x$  باشد و  $B_2 \subset U_2$ . بنا بر شرط دوم عضوی مانند  $B_3$  از پایه هست به طوری که  $B_3 \subset B_1 \cap B_2$  (شکل ۵). در نتیجه،  $x \in B_3$  و  $B_3 \subset U_1 \cap U_2$ ، پس بنا بر تعریف،  $U_1 \cap U_2$  متعلق است به  $\mathcal{B}$ .



شکل ۵

سرانجام به استقرا ثابت می‌کنیم که مقطع هر تعداد متناهی  $U_1 \cap \dots \cap U_n$  در  $\mathcal{B}$

است. به ازای  $n = 1$  حکم بدیهی است، فرض کنیم حکم برای  $n - 1$  برقرار باشد و آن را برای  $n$  ثابت می کنیم. چون

$$(U_1 \cap \dots \cap U_n) = (U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}) \cap U_n,$$

و بنا بر استقرا،  $U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}$  متعلق به  $\mathcal{J}$  است، به موجب آنچه در مورد دو مجموعه ثابت شد، مقطع  $U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}$  و  $U_n$  نیز به  $\mathcal{J}$  تعلق دارد.

بدین ترتیب محقق شد که گردایه مجموعه های باز تولید شده به وسیله پایه  $\mathcal{B}$  در واقع يك توپولوژی است.

طریقه دیگر توصیف توپولوژی تولید شده به وسیله يك پایه در لم زیر ارائه شده است:

۱.۲. لم فرض کنیم  $X$  مجموعه ای دلخواه و  $\mathcal{B}$  پایه ای برای توپولوژی  $\mathcal{J}$  در  $X$  باشد. در این صورت،  $\mathcal{J}$  برابر است با گردایه همه اجتماعهای اعضای  $\mathcal{B}$ .

برهان. فرض می کنیم  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$  خانواده اندیسدار دلخواهی از اعضای  $\mathcal{B}$  باشد. چون به ازای هر  $\alpha$ ،  $B_\alpha \in \mathcal{J}$  و  $\mathcal{J}$  يك توپولوژی است، پس  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} B_\alpha$  نیز به  $\mathcal{J}$  تعلق خواهد داشت، بالعکس، فرض کنیم  $U \in \mathcal{J}$ ، بنا بر تعریف، به ازای هر  $x \in U$  عضوی از  $\mathcal{B}$  مانند  $B_x$  هست که  $x \in B_x \subset U$ . در این صورت  $U = \bigcup_{x \in U} B_x$ ، و در نتیجه  $U$  برابر است با اجتماعی از اعضای  $\mathcal{B}$ .  $\square$

وقتی که توپولوژیها به وسیله پایه داده می شوند، مفید است که معیاری بر حسب پایه ها برای مقایسه ظرافت آنها در دست باشد. چنین ضابطه ای در لم زیر آمده است:

۲.۲. لم فرض کنیم  $\mathcal{B}$  و  $\mathcal{B}'$ ، بترتیب، پایه هایی برای توپولوژیهای  $\mathcal{J}$  و  $\mathcal{J}'$  در  $X$  باشند. در این صورت، دو حکم زیر با هم معادل اند.

- (۱)  $\mathcal{J}'$  از  $\mathcal{J}$  ظریفتر است.
- (۲) به ازای هر  $x \in X$  و هر عضو پایه  $B \in \mathcal{B}$  که شامل  $x$  باشد، يك عضو پایه  $B' \in \mathcal{B}'$  وجود دارد به طوری که  $x \in B' \subset B$ .

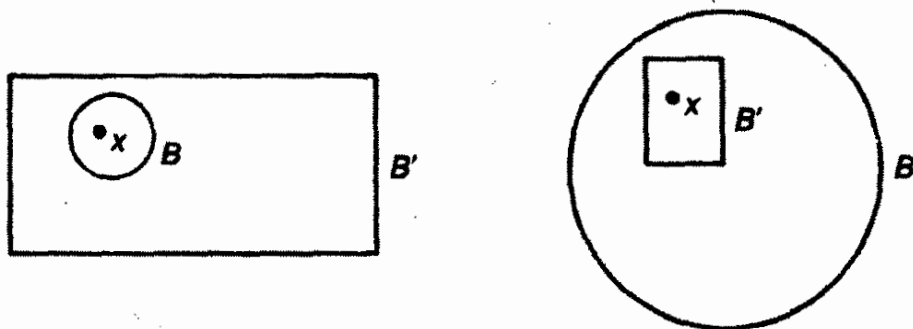
بعضی از محصلین به خاطر سپردن شرط اخیر را کمی دشوار می یابند. آنها می پرسند «شمول از کدام طرف برقرار است؟» شاید اگر تمثیل فضای توپولوژیک با کامیون پر از پاره سنگ را به یاد بیاورید، به خاطر سپردن این شرط آسانتر شود. قلوه سنگها را به جای اعضای پایه توپولوژی بگیرید؛ بعد از اینکه قلوه سنگها خرد شدند و به سنگ ریزه بدل گشتند، سنگ ریزه ها اعضای پایه توپولوژی جدید می شوند. توپولوژی جدید ظریفتر

از توپولوژی اولیه است، و همان طور که شرط بالا بیان می کند، هر یک از سنگ ریزه ها جزئی از یک قلوه سنگ است.

برهان لم. (۱)  $\Rightarrow$  (۲). می خواهیم ثابت کنیم که اگر  $U$  عضو مفروضی از  $\mathcal{C}$  باشد آنگاه  $U \in \mathcal{C}'$ . فرض کنیم  $x \in U$ . چون  $\mathcal{C}$  به وسیله  $\mathcal{B}$  تولید می شود، عضوی از  $\mathcal{B}$  مانند  $B$  هست که  $x \in B \subset U$ . اما، بنا بر شرط (۲)، عضوی از  $\mathcal{B}'$  مانند  $B'$  هست که  $x \in B' \subset B$ . پس  $x \in B' \subset U$ . در نتیجه، بنا بر تعریف،  $U \in \mathcal{C}'$ .

(۲)  $\Rightarrow$  (۱). فرض کنیم  $x \in X$ ،  $B \in \mathcal{B}$ ، و  $x \in B$ . بنا بر تعریف،  $B$  به  $\mathcal{C}$  تعلق دارد و بنا بر شرط (۱)،  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ ؛ پس  $B \in \mathcal{C}'$ . اما چون  $\mathcal{C}'$  به وسیله  $\mathcal{B}'$  تولید شده است، عضوی مانند  $B'$  از  $\mathcal{B}'$  هست به طوری که  $x \in B' \subset B$ .  $\square$

مثال ۴. حال می توان مشاهده کرد که گردایه  $\mathcal{B}$ ، تشکیل شده از همه نواحی دایره ای در صفحه، همان توپولوژی را تولید می کند که گردایه  $\mathcal{B}'$  از همه نواحی مستطیلی در آن صفحه به وجود می آورد. شکل ۶ برهان این مطلب را مجسم می کند. بررسی دقیقتر این مسئله را به مبحث فضاهاى مترى موکول می کنیم.



شکل ۶

تا اینجا دو طریقه مختلف برای رسیدن از یک پایه به توپولوژی تولید شده به وسیله آن بیان کرده ایم. گاه لازم است که در جهت عکس حرکت کنیم، یعنی از یک توپولوژی به پایه ای که آن را تولید کرده است برسیم. لم زیر طریقه ای برای به دست آوردن یک پایه برای توپولوژی مفروضی به دست می دهد، و آن را بسیار به کار خواهیم برد.

۳.۲. لم فرض کنیم  $X$  یک فضای توپولوژیک و  $\mathcal{C}$  گردایه ای از مجموعه های باز  $X$  باشد به طوری که به ازای هر  $x$  از  $X$  و هر مجموعه  $C$  از  $\mathcal{C}$  مانند  $U$  که شامل  $x$  است، عضوی از  $\mathcal{C}$  مانند  $C$  وجود داشته باشد که  $x \in C \subset U$ . در این صورت،  $\mathcal{C}$  پایه ای برای توپولوژی  $X$  است.

۱. در متن اصلی مؤلف ذکر اینکه  $x \in U$  را حذف کرده است. -م.

پوهان. نخست باید ثابت کرد که  $\mathcal{C}$  یک پایه است. بررسی شرط اول پایه آسان است: چون  $X$  مجموعه‌ای است باز، به‌ازای هر  $x \in X$ ، بنابر فرض، عضوی از  $\mathcal{C}$  مانند  $C$  هست که  $x \in C \subset X$ . برای تحقیق در شرط دوم فرض کنیم  $x \in C_1 \cap C_2$ ، که در آن  $C_1$  و  $C_2$  از اعضای  $\mathcal{C}$  اند. چون  $C_1$  و  $C_2$  هر دو بازند، پس  $C_1 \cap C_2$  نیز باز است. در نتیجه، بنابر فرض، عضوی از  $\mathcal{C}$  مانند  $C_3$  هست که  $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$ . اکنون فرض کنیم  $\mathcal{C}'$  توپولوژی تولید شده به وسیله  $\mathcal{C}$  در  $X$  باشد و  $\mathcal{C}$  توپولوژی‌ای باشد که از ابتدا بر  $X$  مفروض بوده است. لم قبلی نشان می‌دهد که  $\mathcal{C}'$  از  $\mathcal{C}$  ظریفتر است. بالعکس، چون هر عضو  $\mathcal{C}$  عضوی از  $\mathcal{C}'$  است، اجتماع هر تعداد از اعضای  $\mathcal{C}$  نیز به  $\mathcal{C}$  تعلق دارد. پس بنابر لم ۱.۲،  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ ، در نتیجه  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ .  $\square$

دو توپولوژی در خط حقیقی وجود دارد که آنها را می‌توان برحسب پایه‌ها توصیف کرد:

تعریف. اگر  $\mathcal{B}$  گردایه همه بازه‌های باز اعداد حقیقی مانند

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

باشد، آنگاه توپولوژی تولید شده به وسیله  $\mathcal{B}$  را توپولوژی استاندارد در خط حقیقی می‌نامند. اگر  $\mathcal{B}'$  گردایه همه بازه‌های نیم باز اعداد حقیقی به صورت

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

باشد که در آن  $a < b$ ، آنگاه توپولوژی تولید شده به وسیله  $\mathcal{B}'$  را توپولوژی حد پایینی در  $R$  می‌خوانند. وقتی که  $R$  از توپولوژی حد پایینی برخوردار باشد، آن را به  $R_1$  نمایش می‌دهیم.

سهولت معلوم می‌شود که  $\mathcal{B}$  و  $\mathcal{B}'$  پایه‌اند؛ مقطع هر دو عضو پایه تهی یا عضو دیگری از پایه است.

هر گاه  $R$  را در نظر می‌گیریم، فرض این است که از توپولوژی استاندارد برخوردار است، مگر اینکه خلافش تصریح شود. توپولوژی حد پایینی در ساختن مثالهای نقض بسیار مفید است. ارتباط بین این دو توپولوژی به قرار زیر است:

۴.۲. لم اگر  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{C}'$ ، به ترتیب، توپولوژی استاندارد و توپولوژی حد پایینی در  $R$  باشند آنگاه  $\mathcal{C}'$  اکیداً ظریفتر از  $\mathcal{C}$  است.

پوهان. فرض کنیم  $(a, b)$  عضوی از پایه توپولوژی  $\mathcal{C}$  باشد و  $x \in (a, b)$ . در این صورت، بازه  $[x, b)$  عضوی است از پایه توپولوژی  $\mathcal{C}'$  که شامل  $x$  و جزء  $(a, b)$  است. پس،  $\mathcal{C}'$  از  $\mathcal{C}$  ظریفتر است. از سوی دیگر، به‌ازای عضو  $[x, d)$  از

پایه توپولوژی 'ج هیچ بازه بازی وجود ندارد که در شرط

$$x \in (a, b) \subset [x, d)$$

صدق کند. بنا بر این، ج از 'ج ظریفتر نیست. □

چون توپولوژی تولید شده به وسیله پایه  $\mathcal{B}$  را می توان به صورت گردایه اجتماعهای دلخواه اعضای  $\mathcal{B}$  توصیف کرد، اکنون ممکن است این سؤال به ذهن خطور کند که اگر کار را با گردایه ای از مجموعه ها شروع کنیم و مقاطع متناهی و اجتماعهای دلخواه آنها را در نظر بگیریم، چه وضعی رخ خواهد داد؟ این پرسش منجر به مفهوم زیر پایه یک توپولوژی می شود.

**تعریف.** گردایه  $\mathcal{J}$  از زیر مجموعه های  $X$  را یک زیر پایه برای یک توپولوژی بر  $X$  می خوانند اگر اجتماع اعضای آن برابر  $X$  باشد. در این صورت، بنا بر تعریف، توپولوژی تولید شده به وسیله زیر پایه  $\mathcal{J}$  عبارت است از گردایه  $\mathcal{J}$  متشکل از همه اجتماعهای مقاطع متناهی اعضای  $\mathcal{J}$ .

البته باید توپولوژی بودن ج را بررسی کنیم. برای این منظور کافی است ثابت کنیم که  $\mathcal{B}$ ، گردایه همه مقاطع متناهی اعضای  $\mathcal{J}$ ، یک پایه است. زیرا در این صورت گردایه  $\mathcal{J}$  که از همه اجتماعهای اعضای  $\mathcal{B}$  تشکیل شده است، بنا بر لم ۱.۲، یک توپولوژی در  $X$  خواهد بود. به ازای عضو مفروضی از  $X$  مانند  $x$ ، بنا بر تعریف  $\mathcal{J}$ ،  $x$  متعلق به عضوی از  $\mathcal{J}$  و در نتیجه متعلق به عضوی از  $\mathcal{B}$  است. پس،  $\mathcal{B}$  واجد اولین شرط پایه است. برای بررسی شرط دوم، فرض کنیم

$$B_\gamma = S_1' \cap \dots \cap S_n' \quad \text{و} \quad B_\alpha = S_1 \cap \dots \cap S_m$$

دو عضو دلخواه  $\mathcal{B}$  باشند. مقطع آنها عبارت است از

$$B_\alpha \cap B_\gamma = (S_1 \cap \dots \cap S_m) \cap (S_1' \cap \dots \cap S_n')$$

که آن نیز مقطعی متناهی از اعضای  $\mathcal{J}$  است، و در نتیجه به  $\mathcal{B}$  تعلق دارد. چون زیر پایه ها در این کتاب در مواردی محدود به کار می آیند، آنها را بتفصیل بررسی نخواهیم کرد.

## تمرینها

۱. فرض کنید  $X$  فضایی توپولوژیک باشد و  $A \subset X$ . فرض کنیم به ازای هر  $x \in A$  مجموعه بازی شامل  $x$  مانند  $U$  وجود داشته باشد به طوری که  $U \subset A$ . ثابت کنید که  $A$  در  $X$  باز است.

۲. در بخش ۱-۲ مثال ۱، در مجموعه  $X = \{a, b, c\}$ ، ۹ توپولوژی ساختیم. این توپولوژیها را باهم مقایسه کنید، یعنی به ازای هر دو توپولوژی تعیین کنید که آیا مقایسه پذیر هستند یا نه، و اگر هستند کدامیک ظریفتر است.

۳. ثابت کنید که گردایه  $\mathcal{C}$  در مثال ۴ از بخش ۱-۲، يك توپولوژی در مجموعه  $X$  است. آیا گردایه

$$\mathcal{C}_\infty = \{U \mid X - U \text{ یا نامتناهی، یا خالی، و یا همه } X \text{ است}\}$$

يك توپولوژی در  $X$  است؟

۴. (الف) اگر  $\{\mathcal{C}_\alpha\}$  گردایه ای از توپولوژیهای  $X$  باشد، ثابت کنید که  $\bigcap \mathcal{C}_\alpha$  نیز يك توپولوژی در  $X$  است. آیا  $\bigcup \mathcal{C}_\alpha$  نیز يك توپولوژی در  $X$  است؟  
(ب) فرض کنید  $\{\mathcal{C}_\alpha\}$  گردایه ای از توپولوژیهای  $X$  باشد. ثابت کنید که توپولوژی یکتایی در  $X$  هست به طوری که کوچکترین توپولوژی حاوی همه  $\mathcal{C}_\alpha$  هاست و همچنین توپولوژی یکتایی وجود دارد که بزرگترین توپولوژی جزء همه  $\mathcal{C}_\alpha$  هاست.

(پ) فرض کنید  $X = \{a, b, c\}$ ، و

$$\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\} \quad \text{و} \quad \mathcal{C}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$$

کوچکترین توپولوژی شامل  $\mathcal{C}_1$  و  $\mathcal{C}_2$  و بزرگترین توپولوژی جزء  $\mathcal{C}_1$  و  $\mathcal{C}_2$  را بیابید.

۵. ثابت کنید که اگر  $\mathcal{A}$  پایه ای برای يك توپولوژی در  $X$  باشد آنگاه توپولوژی تولید شده به وسیله  $\mathcal{A}$  برابر است با مقطع همه توپولوژیهای در  $X$  که حاوی  $\mathcal{A}$  هستند. همین حکم را وقتی که  $\mathcal{A}$  يك زیر پایه است ثابت کنید.

۶. گردایه های زیر از زیر مجموعه های  $\mathcal{R}$  را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{B}_1 = \{(a, b) \mid a < b\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{[a, b) \mid a < b\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(a, b] \mid a < b\} \quad \text{که در آن } (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_1 \cup \{B - K \mid B \in \mathcal{B}_1\} \quad \text{که در آن } K = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

$$\mathcal{B}_5 = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \quad \text{که در آن } (a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$\mathcal{B}_6 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \quad \text{که در آن } (-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$$

$$\mathcal{B}_7 = \{B \mid B \text{ متناهی است}\}$$

(الف) ثابت کنید که هر  $\mathcal{B}_i$  پایه ای است برای يك توپولوژی در  $\mathcal{R}$ .

(ب) این هفت توپولوژی را با یکدیگر مقایسه کنید.



(پ) ثابت کنید که  $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$  زیر پایه‌ای است که توپولوژی تولید شده به وسیله آن همان توپولوژی تولید شده به وسیله  $\mathcal{B}_1$  است.

۷. (الف) به وسیله  $\mathcal{B}_2$  ثابت کنید که گردایه شمارای

$$\mathcal{B}' = \{(a, b) \mid a < b, \text{ گویا هستند}\}$$

پایه‌ای است که توپولوژی معمولی  $R$  را تولید می‌کند.

(ب) ثابت کنید که گردایه

$$\mathcal{B}' = \{[a, b) \mid a < b, \text{ گویا هستند}\}$$

پایه‌ای است که توپولوژی تولید شده به وسیله آن با توپولوژی حد پایینی  $R$  تفاوت دارد.

## ۳-۲ توپولوژی ترتیبی

فرض کنیم  $X$  مجموعه مرتب ساده‌ای باشد. برای  $X$  توپولوژی استاندارد وجود دارد که با به کار بردن رابطه ترتیبی تعریف می‌شود. این توپولوژی، به توپولوژی ترتیبی موسوم است، در این قسمت این توپولوژی را مدنظر قرار می‌دهیم و به مطالعه بعضی از خواص آن می‌پردازیم.

فرض کنیم  $X$  مجموعه‌ای باشد که در آن رابطه ترتیبی ساده  $<$  تعریف شده است. به ازای هر دو عضو  $X$  مانند  $a$  و  $b$ ، به طوری که  $a < b$ ، چهار زیرمجموعه  $X$  موسوم به بازه‌ها به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

قبلاً با این علامات، درحالتی که  $X$  خط حقیقی باشد، آشنا شده‌اید. ولی باید توجه داشت که در اینجا این علامات بازه‌هایی در یک مجموعه مرتب دلخواه‌اند. مجموعه‌ای از نوع اول را بازه باز و مجموعه‌ای از نوع آخر را بازه بسته در  $X$  می‌خوانند، و مجموعه‌های نوع دوم و سوم را بازه‌های نیم باز می‌گویند. استعمال اصطلاح «باز» در اینجا چنین به ذهن می‌رساند که هرگاه توپولوژی‌ای در  $X$  تعریف شود، بازه‌های باز باید مجموعه‌هایی باز باشند، و چنین نیز خواهد بود.

تعریف. فرض کنیم  $X$  مجموعه‌ای باشد با یک رابطه ترتیبی ساده، و  $\mathcal{B}$  گردایه

همه مجموعه‌هایی که به صورت یکی از انواع زیر باشند:

- (۱) همه بازه‌های باز  $(a, b)$  در  $X$ .
- (۲) همه بازه‌های به صورت  $[a_0, b)$ ، که در آن،  $a_0$  کوچکترین عضو مجموعه  $X$  است (در صورت وجود).
- (۳) همه بازه‌های به صورت  $(a, b_0]$ ، که در آن،  $b_0$  بزرگترین عضو مجموعه  $X$  است (در صورت وجود).

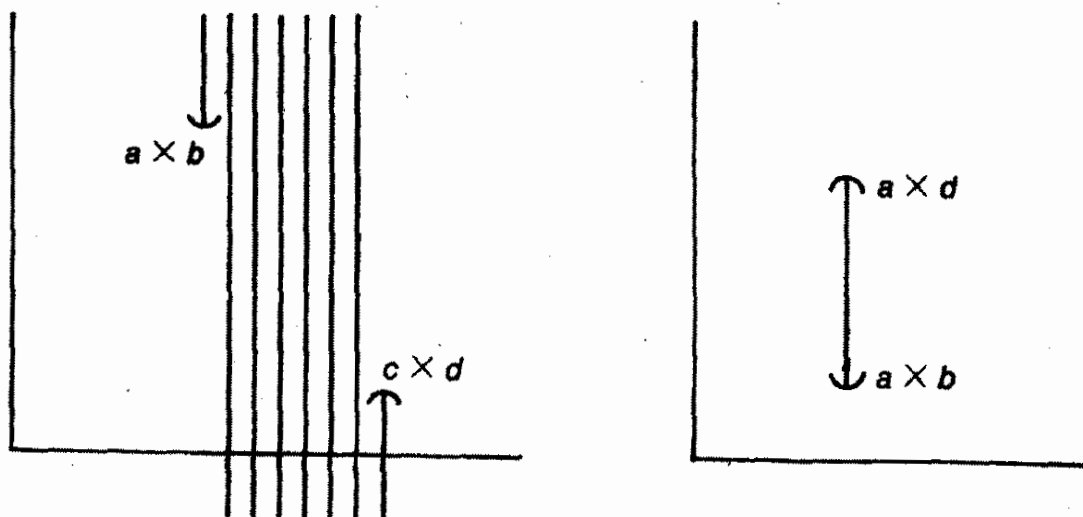
گردایه  $\mathcal{B}$  پایه‌ای است برای یک توپولوژی در  $X$  موسوم به توپولوژی ترتیبی.

اگر  $X$  دارای کوچکترین عضو نباشد، مجموعه‌هایی از نوع (۲) وجود نخواهند داشت؛ و اگر  $X$  دارای بزرگترین عضو نباشد، مجموعه‌هایی از نوع (۳) وجود نخواهند داشت.

بایستی برقراری شرایط پایه را در مورد  $\mathcal{B}$  بررسی کرد. نخست، ملاحظه می‌کنیم که هر عضو  $X$  مانند  $x$  دست‌کم به یک عضو  $\mathcal{B}$  تعلق دارد: کوچکترین عضو (در صورت وجود) به همه مجموعه‌های نوع (۲) متعلق است، بزرگترین عضو (در صورت وجود) به همه مجموعه‌های نوع (۳) تعلق دارد، و هر عضو دیگر  $X$  در مجموعه‌ای از نوع (۱) قرار دارد. ثانیاً، ملاحظه می‌کنیم که مقطع هر دو مجموعه از این انواع مجموعه‌ای است متعلق به یکی از این انواع، و یا تهی است. در این مورد باید چندین حالت را بررسی کرد؛ این کار را به خواننده محول می‌کنیم.

مثال ۱. توپولوژی استاندارد  $R$ ، که قبلاً تعریف شد، همان توپولوژی ترتیبی است که از ترتیب معمولی  $R$  نتیجه شده است.

مثال ۲. مجموعه  $R \times R$  را با ترتیب قاموسی در نظر می‌گیریم، به منظور پیشگیری از تشتت در علامت، عضو دلخواهی از  $R \times R$  را به  $x \times y$  نمایش می‌دهیم. مجموعه



شکل ۷

$R \times R$  نه بزرگترین عضو دارد و نه کوچکترین عضو، بنابراین توپولوژی ترتیبی آن دارای پایه‌ای است متشکل از گردایه همه بازه‌های باز به صورت  $(a \times b, c \times d)$ ، که در آن  $a < c$ ، یا آنکه  $a = c$  و  $b < d$ . در شکل ۷ این دو نوع بازه را نمایش داده‌ایم. به آسانی می‌توان بررسی کرد که زیرگردایه‌ای متشکل از بازه‌های نوع دوم نیز پایه‌ای برای توپولوژی ترتیبی  $R \times R$  است.

**مثال ۳.**  $Z_+$  مجموعه اعداد صحیح مثبت، مجموعه‌ای است مرتب که دارای کوچکترین عضو است. توپولوژی ترتیبی  $Z_+$  توپولوژی گسسته است، زیرا هر مجموعه تک عضوی در آن باز است، اگر  $n > 1$ ، آنگاه مجموعه تک عضوی

$$\{n\} = (n-1, n+1)$$

یک عضو پایه است، و اگر  $n = 1$  مجموعه تک عضوی  $\{1\} = [1, 2)$  یک عضو پایه است.

**مثال ۴.** مجموعه  $X = \{1, 2\} \times Z_+$  با ترتیب قاموسی مثال دیگری است از مجموعه مرتبی که دارای کوچکترین عضو است. اگر  $1 \times n$  را به  $a_n$  و  $2 \times n$  را به  $b_n$  نمایش دهیم،  $X$  را می‌توان چنین نمایش داد،

$$a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots$$

توپولوژی ترتیبی در  $X$  توپولوژی گسسته نیست. بیشتر مجموعه‌های تک عضوی بسازند ولی استثنایی نیز وجود دارد و آن مجموعه تک عضوی  $\{b_1\}$  است. زیرا، بنا بر تعریف، هر مجموعه باز که شامل  $b_1$  باشد باید شامل عضوی از پایه باشد که شامل  $b_1$  است، و هر عضو پایه که شامل  $b_1$  باشد شامل نقاطی از دنباله  $a_n$  است.

**تعریف.** فرض کنیم  $X$  مجموعه‌ای مرتب و  $a$  عضوی از  $X$  باشد. چهار زیر-مجموعه زیر از  $X$  را شعاع‌های مشخص شده به وسیله  $a$  می‌خوانند:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\},$$

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}.$$

مجموعه‌های ازدونوع اول را شعاع‌های باز، و مجموعه‌های از دونوع آخر را شعاع‌های بسته می‌خوانیم.

استعمال اصطلاح «باز» چنین به ذهن می‌آورد که در توپولوژی ترتیبی شعاع‌های باز مجموعه‌هایی باز هستند، و چنین نیز هست. مثلاً شعاع  $(a, +\infty)$  را در نظر بگیرید. اگر  $X$  دارای بزرگترین عضو  $b$  باشد آنگاه  $(a, +\infty)$  برابر عضو پایه  $[a, b_0]$  خواهد بود.

اگر  $X$  بزرگترین عضو نداشته باشد آنگاه  $(a, +\infty)$  برابر اجتماع جمیع اعضای پایه به صورت  $(a, x)$  است، که در آن  $x > a$ . در هر حال،  $(a, +\infty)$  باز است. همین حکم در مورد  $(-\infty, a)$  با استدلالی مشابه برقرار است. شاعهای باز، در واقع، برای توپولوژی ترتیبی  $X$  تشکیل یک زیر پایه می دهند، که تحقیق درستی این مطلب به خواننده واگذار می شود.

### ۲-۲ توپولوژی حاصل ضربی در $XXY$

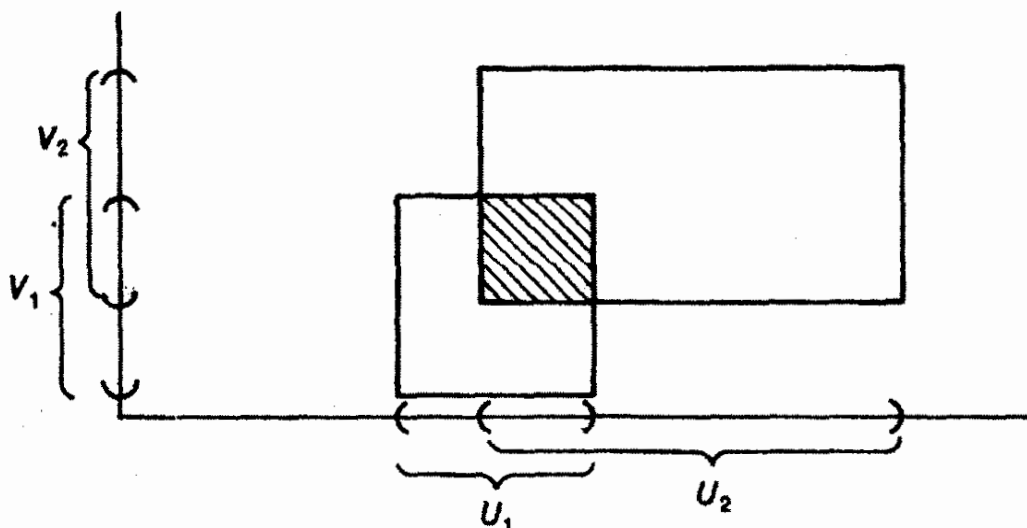
اگر  $X$  و  $Y$  دو فضای توپولوژیک باشند، برای تعریف یک توپولوژی در حاصل ضرب دکارتی  $XXY$  طریقه ای استاندارد موجود است. در اینجا این توپولوژی را مورد توجه قرار می دهیم و در برخی از خواص آن تحقیق می کنیم.

**تعریف.** فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو فضای توپولوژیک باشند. توپولوژی حاصل ضربی در  $XXY$  توپولوژی ای است که پایه آن گسردایه  $\mathcal{B}$  متشکل از همه مجموعه هایی به صورت  $U \times V$  است که در آن  $U$  زیر مجموعه بازی از  $X$  و  $V$  زیر مجموعه بازی از  $Y$  است.

باید پایه بودن  $\mathcal{B}$  را بررسی کنیم. برقراری شرط اول بدیهی است، چرا که  $XXY$  خود یک عضو پایه است. اثبات برقراری شرط دوم هم تقریباً به همان آسانی است، زیرا مقطع هر دو عضو از پایه مانند  $U_1 \times V_1$  و  $U_2 \times V_2$  عضو دیگری است از پایه، چون

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

و مجموعه طرف دوم یک عضو پایه است. زیرا  $U_1 \cap U_2$  و  $V_1 \cap V_2$ ، بترتیب، در  $X$  و  $Y$  باز هستند (شکل ۸).



شکل ۸

توجه کنید که گردایه  $\mathcal{B}$  خود يك توپولوژی در  $X \times Y$  نیست. مثلاً اجتماع دو مستطیلی که در شکل ۸ دیده می‌شوند به صورت حاصل ضرب دو مجموعه نیست، در نتیجه نمی‌تواند به  $\mathcal{B}$  تعلق داشته باشد؛ ولی در  $X \times Y$  باز است. هر بار که مفهوم تازه‌ای را معرفی می‌کنیم، کوشش می‌کنیم تا آن را با مفاهیمی که پیش از آن معرفی کرده‌ایم مرتبط کنیم. در حال حاضر سؤال این است: اگر توپولوژیهای  $X$  و  $Y$  به وسیله پایه مشخص شده باشند، در مورد توپولوژی  $X \times Y$  چه می‌توان گفت؟ جواب از این قرار است:

۱.۴. قضیه اگر  $\mathcal{B}$  پایه‌ای برای توپولوژی  $X$  و  $\mathcal{C}$  پایه‌ای برای توپولوژی  $Y$  باشد، آنگاه گردایه

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{C} \text{ و } C \in \mathcal{B}\}$$

پایه‌ای برای توپولوژی  $X \times Y$  است.

پرهان. لم ۳.۲ را به کار می‌بریم. مجموعه باز  $W$  از  $X \times Y$  و نقطه دلخواه  $x \times y$  را از آن اختیار می‌کنیم. بنابر تعریف توپولوژی حاصل ضربی، عضوی از پایه مانند  $U \times V$  هست که  $x \times y \in U \times V \subset W$ . چون  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{B}$ ، به ترتیب، پایه‌هایی برای  $X$  و  $Y$  هستند، می‌توان عضوی مانند  $B$  از  $\mathcal{B}$  و عضوی مانند  $C$  از  $\mathcal{C}$  اختیار کرد به طوری که  $x \in B \subset U$  و  $y \in C \subset V$ . در این صورت،  $x \times y \in B \times C \subset W$ . پس گردایه  $\mathcal{D}$  در شرط لم ۳.۲ صدق می‌کند، و در نتیجه پایه‌ای برای  $X \times Y$  است.  $\square$

مثال ۱. در  $R$  يك توپولوژی استاندارد داریم که همان توپولوژی ترتیبی است. حاصل ضرب این توپولوژی در خودش توپولوژی استاندارد  $R \times R = R^2$  نام دارد. گردایه همه حاصل ضربهای زیر مجموعه‌های باز  $R$  پایه‌ای برای این توپولوژی است. ولی قضیه‌ای که هم اکنون ثابت کردیم بیان می‌کند که همچنین می‌توان گردایه بسیار کوچکتری از همه حاصل ضربهای  $(a, b) \times (c, d)$  از بازه‌های باز  $R$  را به عنوان پایه‌ای برای توپولوژی استاندارد  $R^2$  به کار گرفت. همچنین می‌توان هر کدام از این مجموعه‌ها را به صورت درون مستطیلی در  $R^2$  مجسم کرد. بنابراین، توپولوژی استاندارد  $R^2$  درست همان توپولوژی‌ای است که در مثال ۲ بخش ۲-۲ در نظر گرفتیم.

گاهی اوقات بیان توپولوژی حاصل ضربی بر حسب يك زیر پایه مفید واقع می‌شود. برای این منظور نخست توابع خاصی را که تصویرخوانده می‌شوند تعریف می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم  $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$  با ضابطه

$$\pi_1(x, y) = x,$$

و  $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$  با ضابطه

$$\pi_2(x, y) = y,$$

تعریف شده باشند. نگاشتهای  $\pi_1$  و  $\pi_2$ ، بترتیب، نگاشتهای تصویری  $XY$  بروی عوامل اول و دوم آن خوانده می‌شوند.

واژه «بروی» را به این دلیل به کار می‌بریم که  $\pi_1$  و  $\pi_2$  پوشا هستند (مگر در حالتی که یکی از فضاها  $X$  یا  $Y$  تهی باشد، که در این صورت  $XY$  و همچنین همه بحث ما تهی خواهد بود!).

اگر  $U$  زیر مجموعه‌ی بازی از  $X$  باشد آنگاه  $\pi_1^{-1}(U)$  دقیقاً مجموعه  $U \times Y$  است که در  $XY$  باز است. همچنین، اگر  $V$  در  $Y$  باز باشد آنگاه

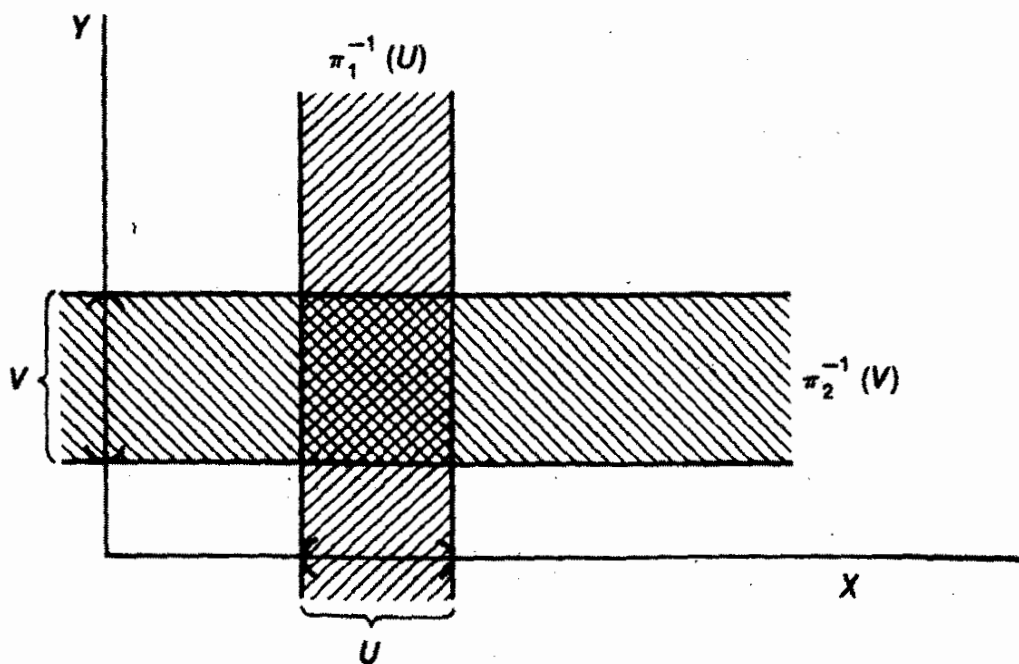
$$\pi_2^{-1}(V) = X \times V$$

که این نیز در  $XY$  باز است. مقطع این دو مجموعه، مجموعه  $U \times V$  است که در شکل ۹ نموده شده است. این مطلب منجر به قضیه زیر می‌شود:

#### ۲.۴. قضیه گردایی

$$\mathcal{S} = \{ \pi_1^{-1}(U) \mid U \text{ در } X \text{ باز است} \} \cup \{ \pi_2^{-1}(V) \mid V \text{ در } Y \text{ باز است} \}$$

زیر پایه توپولوژی حاصل ضربی در  $XY$  است.



شکل ۹

برهان. فرض کنیم  $\mathcal{C}$  توپولوژی حاصل ضربی در  $XY$  و  $\mathcal{C}'$  توپولوژی

تولید شده به وسیله  $\mathcal{J}$  باشد. چون هر عضو  $\mathcal{J}$  به  $\mathcal{J}$  تعلق دارد، هراجماع دلخواه از مقاطع متناهی اعضای  $\mathcal{J}$  نیز چنین است. بنابراین،  $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$ . از طرف دیگر، هر عضو پایه مانند  $U \times V$  برای توپولوژی  $\mathcal{J}$  عبارت است از مقطع تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{J}$ . زیرا

$$U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V).$$

پس  $U \times V$  به  $\mathcal{J}$  تعلق دارد، و در نتیجه  $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$ .  $\square$

## ۵-۲ توپولوژی زیر فضایی

تعریف. فرض کنیم  $X$  یک فضای توپولوژیک با توپولوژی  $\mathcal{J}$  باشد. اگر  $Y$  زیر-مجموعه‌ای از  $X$  باشد، گردایه

$$\mathcal{J}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{J}\}$$

یک توپولوژی در  $Y$  است و به توپولوژی زیر فضایی موسوم است. با این توپولوژی،  $Y$  را یک زیر فضای  $X$  می‌خوانند؛ مجموعه‌های باز این توپولوژی عبارت‌اند از همه مقاطع مجموعه‌های باز  $X$  با  $Y$ .

اثبات توپولوژی بودن  $\mathcal{J}_Y$  آسان است. مجموعه‌های  $\emptyset$  و  $Y$  هر دو متعلق به  $\mathcal{J}_Y$  هستند، زیرا

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \quad \text{و} \quad Y = Y \cap X$$

که  $\emptyset$  و  $X$  از اعضای  $\mathcal{J}$  هستند. این امر که  $\mathcal{J}_Y$  تحت مقاطع متناهی و اجتماع‌های دلخواه بسته است، نتیجه‌ای است از تساویهای زیر

$$(U_1 \cap Y) \cap \dots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap \dots \cap U_n) \cap Y,$$

$$\bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap Y) = (\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha) \cap Y.$$

۱۰۵. لم اگر  $\mathcal{B}$  پایه‌ای برای توپولوژی  $X$  باشد آنگاه گردایه

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

پایه‌ای برای توپولوژی زیر فضایی در  $Y$  است.

برهان. فرض کنیم  $U$  مجموعه‌ای دلخواهی از  $X$  باشد و  $y \in U \cap Y$ . می‌توان عضوی مانند  $B$  از  $\mathcal{B}$  چنان اختیار کرد که  $y \in B \subset U$ . در نتیجه،  $y \in B \cap Y \subset U \cap Y$ . پس بنا بر لم ۳۰۲،  $\mathcal{B}_Y$  پایه‌ای برای توپولوژی زیر فضایی در  $Y$  است.  $\square$

هر گاه در مورد فضای  $X$  و زیر فضای  $Y$  بحث می‌کنیم، باید در استعمال اصطلاح «مجموعه باز» دقت کنیم. چه در این حال این سؤال پیش می‌آید که مراد عضوی از توپولوژی  $Y$  است یا عضوی از توپولوژی  $X$ ؟ بدین جهت، تعریف زیر را می‌آوریم: اگر  $Y$  زیر فضای  $X$  باشد، مجموعه  $U$  را در  $Y$  باز (بسا نسبت به  $Y$  باز) خوانیم در صورتی که به توپولوژی  $Y$  تعلق داشته باشد؛ بویژه، این امر مستلزم آن است که  $U$  زیر مجموعه‌ای از  $Y$  باشد. گوییم  $U$  در  $X$  باز است هر گاه  $U$  به توپولوژی  $X$  تعلق داشته باشد.

حالت خاصی هست که در آن هر مجموعه باز در  $Y$ ، در  $X$  نیز باز است:

۲۰۵. لم فرض کنیم  $Y$  یک زیر فضای  $X$  باشد. اگر  $U$  در  $Y$  و  $Y$  در  $X$  باز باشد آنگاه  $U$  در  $X$  باز است.

پروهان. فرض کنیم  $U$  در  $Y$  باز باشد. پس، مجموعه بازی در  $X$  مانند  $V$  هست که  $U = Y \cap V$ . چون  $Y$  و  $V$  در  $X$  بازند، مجموعه  $Y \cap V$  نیز در  $X$  باز است.  $\square$

مثال ۱. زیر مجموعه  $Y = [0, 1]$  از  $R$  را با توپولوژی زیر فضایی در نظر می‌گیریم. یک پایه این توپولوژی عبارت است از همه مجموعه‌هایی به صورت  $(a, b) \cap Y$  که در آن  $(a, b)$  بازه بازی در  $R$  است. چنین مجموعه‌ای به صورت یکی از انواع زیر است:

$$(a, b) \cap Y = \begin{cases} (a, b) & \text{اگر } a \text{ و } b \text{ در } Y \text{ باشند،} \\ [0, b) & \text{اگر تنها } b \text{ در } Y \text{ باشد،} \\ (a, 1] & \text{اگر تنها } a \text{ در } Y \text{ باشد،} \\ Y \text{ یا } \emptyset & \text{اگر هیچک از } a \text{ و } b \text{ در } Y \text{ نباشد،} \end{cases}$$

بنابر تعریف، هر یک از این مجموعه‌ها در  $Y$  بازند. اما، مجموعه‌های نوع دوم و سوم در فضای بزرگتر  $R$  باز نیستند.

توجه کنید که مجموعه‌های سه نوع اول اعضای پایه برای توپولوژی ترتیبی  $Y$  هستند. بنابراین می‌بینیم که در مورد مجموعه  $Y = [0, 1]$  توپولوژی زیر فضایی آن (به عنوان یک زیر فضای  $R$ ) و توپولوژی ترتیبی آن یکی هستند.

برای آنکه فکر نکنید که این تذکر کاملاً پیش پا افتاده است، در زیر مثالی از یک زیر مجموعه  $R$  می‌آوریم که در آن این دو توپولوژی یکی نیستند:

مثال ۲. فرض کنیم  $Y$  زیر مجموعه  $\{2\} \cup [0, 1]$  از  $R$  باشد. در توپولوژی زیر فضایی  $Y$  مجموعه تک عضوی  $\{2\}$  باز است، زیرا مقطع مجموعه باز  $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$  با  $Y$  است. ولی در توپولوژی ترتیبی  $Y$ ، مجموعه  $\{2\}$  باز نیست، زیرا هر عضو پایه



توپولوژی ترتیبی  $Y$  که شامل  $\gamma$  باشد، به ازای عضوی از  $Y$  مانند  $a$ ، به صورت

$$\{x \mid a < x \leq \gamma \text{ و } x \in Y\}$$

است؛ چنین مجموعه‌ای ضرورتاً شامل نقاطی از  $Y$  است که از  $\gamma$  کوچکترند.

اگر  $Y$  بازه‌ای یا شعاعی در مجموعه مرتب  $X$  باشد، حالت ناهنجاری که در مثال ۲ توضیح داده شد رخ نمی‌دهد. در این مورد قضیه زیر برقرار است، که اثبات آن را به عنوان تمرین می‌گذاریم:

**۳.۵. قضیه** اگر  $X$  مجموعه‌ای مرتب با توپولوژی ترتیبی و  $Y$  بازه‌ای یا شعاعی در  $X$  باشد آنگاه توپولوژی زیر فضایی و توپولوژی ترتیبی در  $Y$  یکی هستند.

برای احتراز از هرگونه ابهام، توافق می‌کنیم که هرگاه زیر مجموعه‌ای از یک مجموعه مرتب را در نظر می‌گیریم، آن را با توپولوژی زیر فضایی فرض می‌کنیم، مگر آنکه خلافش تصریح شود.

خوشبختانه وقتی که توپولوژی حاصل ضربی موضوع بحث است، زیر فضاها منشأ هیچ ابهامی نیستند.

**۴.۵. قضیه** اگر  $A$  زیر فضایی از  $X$  و  $B$  زیر فضایی از  $Y$  باشد آنگاه توپولوژی حاصل ضربی در  $A \times B$  همان توپولوژی‌ای است که در  $A \times B$  به عنوان یک زیر فضای  $X \times Y$  القا می‌شود.

پرهان. مجموعه  $U \times V$  عضو نوعی پایه  $X \times Y$  است که در آن  $U$  در  $X$  باز است و  $V$  در  $Y$ . بنابراین، مجموعه  $(U \times V) \cap (A \times B)$  عضو نوعی پایه توپولوژی زیر فضایی در  $A \times B$  است. حال ملاحظه می‌کنیم که

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B).$$

چون  $U \cap A$  و  $V \cap B$ ، بترتیب، مجموعه‌های باز توپولوژیهای زیر فضایی در  $A$  و  $B$  هستند، مجموعه  $(U \cap A) \times (V \cap B)$  عضو پایه توپولوژی حاصل ضربی در  $A \times B$  است.

نتیجه اینکه پایه‌های توپولوژیهای زیر فضایی و حاصل ضربی در  $A \times B$  یکی هستند. پس این توپولوژیها نیز یکی هستند.  $\square$

## تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر  $Y$  زیر فضایی از  $X$  و  $A$  زیر مجموعه‌ای از  $Y$  باشد آنگاه

توپولوژی زیر فضایی در  $A$  ، به عنوان زیر فضایی از  $Y$  ، همان توپولوژی زیر - فضایی در  $A$  به عنوان زیر فضایی از  $X$  است.

۲. اگر  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{C}'$  توپولوژیهای در  $X$  باشند، و  $\mathcal{C}'$  اکیداً ظریفتر از  $\mathcal{C}$  باشد، در مورد توپولوژیهای زیر فضایی نظیر هر یک از این توپولوژیها در زیر مجموعه  $Y$  از  $X$  چه حکمی می توان کرد؟

۳. مجموعه  $Y = [-1, 1]$  را به عنوان زیر فضایی از  $R$  در نظر بگیرید. کدامیک از مجموعه های زیر در  $Y$  و کدامیک در  $R$  باز است؟

$$A = \left\{ x \mid \frac{1}{2} < |x| < 1 \right\}.$$

$$B = \left\{ x \mid \frac{1}{2} < |x| \leq 1 \right\}.$$

$$C = \left\{ x \mid \frac{1}{2} \leq |x| < 1 \right\}.$$

$$D = \left\{ x \mid \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1 \right\}.$$

$$E = \left\{ x \mid 0 < |x| < 1, \frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

۴. نگاشت  $f: X \rightarrow Y$  را نگاشت باز خوانیم در صورتی که به ازای هر زیر مجموعه  $U$  از  $X$  مانند  $f(U)$  در  $Y$  باز باشد. ثابت کنید که  $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$  و  $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$  نگاشتهای باز هستند.

۵. فرض کنید  $X$  و  $X'$  نمایش یک مجموعه با توپولوژیهای  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{C}'$  باشند. همچنین فرض کنید  $Y$  و  $Y'$  نمایش یک مجموعه باشند، بترتیب، با توپولوژیهای  $\mathcal{U}$  و  $\mathcal{U}'$ .  
 (الف) ثابت کنید که اگر  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$  و  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$  آنگاه توپولوژی حاصل ضربی در  $X' \times Y'$  ظریفتر از توپولوژی حاصل ضربی در  $X \times Y$  است.  
 (ب) آیا عکس (الف) برقرار است؟ برای جواب خود دلیلی بیاورید.  
 (پ) درباره حالتی که  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$  و  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$  و  $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}'$  چه حکمی می توان کرد؟

۶. (الف) ثابت کنید که گسردایه شعاعهای باز در یک مجموعه مرتب  $A$  یک زیر پایه توپولوژی ترتیبی  $A$  است.  
 (ب) فرض کنید  $X$  مجموعه ای مرتب با توپولوژی ترتیبی،  $Y$  یک شعاع یا بازه در  $X$ ، و  $(-\infty, a)$  و  $(a, +\infty)$  شعاعهای بازی در  $X$  باشند. ثابت کنید

که اگر  $a \in Y$  آنگاه هر يك از مجموعه‌های  $(-\infty, a) \cap Y$  و  $(a, +\infty) \cap Y$  شعاع بازی در مجموعه مرتب  $Y$  است، و اگر  $a \notin Y$ ، هر يك از این مجموعه‌ها یا خالی است یا همه  $Y$ .

(پ) نتیجه بگیرید که اگر  $Y$  بازه‌ای یا شعاعی در  $X$  باشد آنگاه توپولوژی ترتیبی و توپولوژی زیرفضایی در  $Y$  یکی هستند.

۷. ثابت کنید که گردایه شمارای

$$\{(a, b) \times (c, d) \mid c < d \text{ و } a < b \text{ و } d, c, b, a\}$$

یک پایه  $R^2$  است.

۸. ثابت کنید که توپولوژی ترتیب قاموسی در مجموعه  $R \times R$  همان توپولوژی حاصل ضربی  $R_1 \times R$  است که در آن  $R_1$  نمایش مجموعه  $R$  با توپولوژی گسسته است. این توپولوژی را با توپولوژی استاندارد  $R^2$  مقایسه کنید.

۹. فرض کنید  $R$  نمایش اعداد حقیقی با توپولوژی استاندارد و  $R_1$  نمایش اعداد حقیقی با توپولوژی حد پایینی باشد. اگر  $L$  خط مستقیمی در صفحه باشد، هر يك از توپولوژی‌هایی را که در  $L$  به عنوان زیرفضایی از  $R_1 \times R$  و به عنوان زیرفضایی از  $R_1 \times R_1$  القا می‌شود توصیف کنید. در هر حالت، یک توپولوژی شناخته شده به دست می‌آید.

۱۰. فرض کنید  $I$  نمایش زیر فضای  $[0, 1]$  از  $R$  باشد. توپولوژی حاصل ضربی در  $I \times I$ ، توپولوژی ترتیب قاموسی در  $I \times I$ ، و توپولوژی  $I_1 \times I$  را، که در آن  $I_1$  نمایش  $I$  با توپولوژی گسسته است، مقایسه کنید.

## ۹-۲ مجموعه‌های بسته و نقاط حدی

اکنون که مثالهایی چند در دست است، می‌توان برخی از مفاهیم اساسی مربوط به فضاهای توپولوژیک را تعریف کرد. در این قسمت مفاهیم مجموعه بسته، بستار یک مجموعه و نقطه حدی را بررسی خواهیم کرد. این بررسی به طور طبیعی منجر به بررسی اصلی برای فضاهای توپولوژیک می‌گردد که به اصل هاوسدورف موسوم است.

### مجموعه‌های بسته

زیر مجموعه  $A$  از فضای توپولوژیک  $X$  را بسته خوانیم در صورتی که مجموعه  $X - A$  باز باشد.

مثال ۱. زیر مجموعه  $[a, b]$  از  $R$  بسته است؛ زیرا متمم آن

$$R - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

بازاست. همچنین، مجموعه  $[a, +\infty)$  بسته است، زیرا متمم آن  $(-\infty, a)$  باز است. این مطالب استعمال اصطلاحات «بازه بسته» و «شعاع بسته» را موجه می‌کنند. زیر مجموعه  $[a, b]$  از  $R$  نه باز است و نه بسته.

مثال ۲. در صفحه  $R^2$ ، مجموعه

$$\{x \times y \mid y \geq 0 \text{ و } x \geq 0\}$$

بسته است. زیرا متمم آن اجتماع دو مجموعه

$$R \times (-\infty, 0) \text{ و } (-\infty, 0) \times R$$

است که هر يك از آنها حاصل ضرب مجموعه‌های بازی از  $R$  هستند و در نتیجه در  $R^2$  بازند.

مثال ۳. در توپولوژی گسسته مجموعه  $X$ ، هر مجموعه باز است؛ در نتیجه هر مجموعه بسته نیز هست.

مثال ۴. زیرمجموعه

$$Y = [0, 1] \cup (2, 3)$$

از خط حقیقی را با توپولوژی زیرفضایی در نظر می‌گیریم. در این فضا، مجموعه  $[0, 1]$  باز است، زیرا مساری است با مقطع مجموعه باز  $(-1/2, 3/2)$  از  $R$  با  $Y$ . به همین قیاس  $(2, 3)$  به عنوان زیرمجموعه‌ای از  $Y$  باز است، و حتی به عنوان زیرمجموعه‌ای از  $R$  نیز باز است. چون  $[0, 1]$  و  $(2, 3)$  در  $Y$  متمم یکدیگرند، نتیجه می‌گیریم که هر دو به عنوان زیرمجموعه‌های  $Y$  بسته هستند.

از این مثالها چنین برمی‌آید که جواب این چیستان ریاضی که «فرق مجموعه با در چیست؟» باید این باشد که «در باید یا بسته باشد یا باز و نمی‌تواند هر دو حالت را با هم دارا باشد، اما مجموعه می‌تواند باز باشد، یا بسته باشد، یا هر دو حالت را داشته باشد، و یا هیچیک را!»

گردایه زیر مجموعه‌های بسته فضای  $X$  دارای خواص مشابه با خواص گردایه زیرمجموعه‌های باز  $X$  است.

۱۰۶. قضیه اگر  $X$  يك فضای توپولوژیک باشد آنگاه احکام زیر برقرارند:

(۱)  $\emptyset$  و  $X$  بسته‌اند.

(۲) مقاطع دلخواه مجموعه‌های بسته، بسته‌اند.

(۳) اجتماعهای متناهی مجموعه‌های بسته، بسته‌اند.

پرهان. (۱)  $\emptyset$  و  $X$  بسته‌اند، زیرا بترتیب متمم مجموعه‌های باز  $X$  و  $\emptyset$  هستند.

(۲) به ازای گردایه مفروض  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  از مجموعه‌های بسته، بنا بر قانون دمورگن

$$X - \bigcap_{\alpha \in J} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in J} (X - A_{\alpha}).$$

چون مجموعه‌های  $X - A_{\alpha}$ ، بنا بر تعریف، باز هستند، طرف دوم تساوی فوق اجتماع دلخواهی از مجموعه‌های باز است، و در نتیجه مجموعه‌ای است باز. بنابراین،  $\bigcap A_{\alpha}$  بسته است.

(۳) به طریق مشابه، اگر به ازای  $i = 1, \dots, n$ ، مجموعه  $A_i$  بسته باشد، تساوی زیر را در نظر می‌گیریم

$$X - \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (X - A_i).$$

مجموعه طرف راست این تساوی مقطعی است متناهی از مجموعه‌های باز، و بنا بر این باز است. در نتیجه  $\bigcup A_i$  بسته است.  $\square$

برای مشخص کردن یک توپولوژی در یک فضا، به جای استفاده از مجموعه‌های باز می‌توان از گردایه دیگری از مجموعه‌ها موسوم به «مجموعه‌های بسته» استفاده کرد که دارای سه خاصیت مذکور در قضیه فوق باشند. در آن صورت، می‌توان مجموعه‌های باز را به عنوان متمم مجموعه‌های بسته تعریف کرد، و مطلب را درست به طریق گذشته ادامه داد. این طریقه مزیتی بر طریقه‌ای که ما اختیار کرده‌ایم ندارد، و بیشتر ریاضیدانان برای تعریف توپولوژیها استفاده از مجموعه‌های باز را ترجیح می‌دهند.

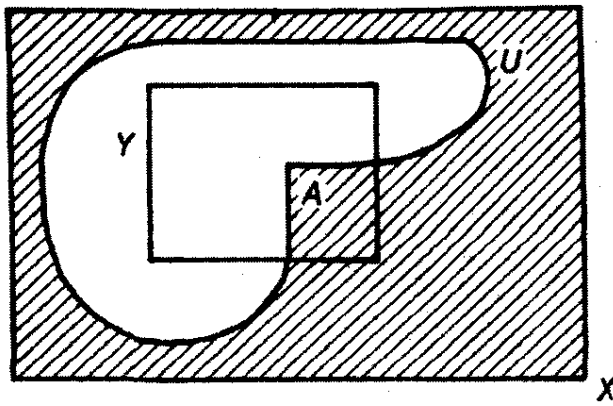
از این پس، هنگام بحث در مورد زیر فضاها باید در استفاده از اصطلاح «مجموعه بسته» دقیق بود. اگر  $Y$  زیر فضای  $X$  باشد، مجموعه  $A$  را در صورتی در  $Y$  بسته می‌گوییم که  $A$  زیر مجموعه‌ای از  $Y$  و در توپولوژی زیر فضایی  $Y$  بسته باشد (یعنی،  $Y - A$  در  $Y$  باز باشد). در این باب قضیه زیر را داریم.

۲۰۶. قضیه فرض کنیم  $Y$  زیر فضای  $X$  باشد. در این صورت، مجموعه  $A$  در  $Y$

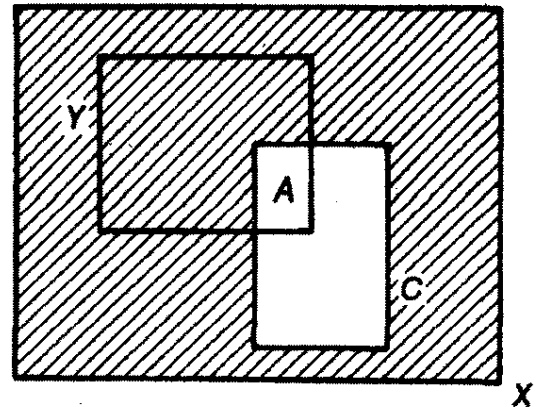
بسته است اگر و فقط اگر  $A$  مسای مقطع مجموعه بسته‌ای از  $X$  با  $Y$  باشد.

پرهان. فرض کنیم  $A = C \cap Y$ ، که در آن مجموعه  $C$  در  $X$  بسته است (شکل ۱۰). در این صورت  $X - C$  در  $X$  باز است، در نتیجه، بنا بر تعریف توپولوژی زیر فضایی،  $(X - C) \cap Y$  در  $Y$  باز است ولی می‌دانیم که  $(X - C) \cap Y = Y - A$ . پس  $Y - A$  در  $Y$  باز، و در نتیجه  $A$  در  $Y$  بسته است. بالعکس، فرض کنیم  $A$  در  $Y$  بسته باشد (شکل ۱۱). در این صورت  $Y - A$  در  $Y$  باز است، در نتیجه بنا بر تعریف،  $Y - A$  برابر است با مقطع مجموعه‌بازی از  $X$  مانند  $U$  با  $Y$ . مجموعه  $X - U$  در  $X$  بسته است، و  $A = Y \cap (X - U)$ . بنابراین،  $A$  برابر است با مقطع مجموعه بسته‌ای از  $X$  با  $Y$ .  $\square$

مجموعه‌ای مانند  $A$  که در زیر فضای  $Y$  بسته است، ممکن است در فضای بزرگتر  $X$  بسته نباشد. نظیر مجموعه‌های باز، برای اینکه  $A$  در  $X$  بسته باشد ضابطه‌ای وجود دارد؛ اثبات آن را بر عهده خواننده می‌گذاریم:



شکل ۱۱



شکل ۱۰

۳.۶. قضیه فرض کنیم  $Y$  زیر فضای  $X$  باشد. اگر  $A \supset Y$  و  $Y \supset X$  بسته باشد آنگاه  $A \supset X$  بسته است.

### بستار و درون يك مجموعه

فرض کنیم  $A$  زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک  $X$  باشد. بنا بر تعریف، درون مجموعه  $A$  عبارت است از اجتماع همه مجموعه‌های باز جزء  $A$ ؛ و بستار مجموعه  $A$  عبارت است از مقطع همه مجموعه‌های بسته حاوی  $A$ .

درون مجموعه  $A$  را به  $\text{Int } A$ ، یا  $A^\circ$ ، و بستار  $A$  را به  $\text{Cl } A$ ، یا  $\bar{A}$ ، نمایش می‌دهیم. واضح است که  $A^\circ$  مجموعه‌ای است باز و  $\bar{A}$  مجموعه‌ای است بسته. بعلاوه،

$$A \subset A^\circ \subset \bar{A}$$

اگر  $A$  باز باشد  $A^\circ = A$ ، و اگر  $A$  بسته باشد  $\bar{A} = A$ . از مفهوم درون مجموعه استفاده چندانی نمی‌کنیم، اما بستار يك مجموعه اهمیت بسیاری دارد.

هنگام بحث در مورد فضای توپولوژیک  $X$  و زیر فضایی از آن مانند  $Y$ ، باید در به دست آوردن بستار مجموعه‌ها دقت خاصی کرد. اگر  $A$  زیر مجموعه‌ای از  $Y$  باشد، در حالت کلی بستار  $A$  در  $Y$  و بستار  $A$  در  $X$  متفاوت‌اند. در چنین وضعی، علامت  $\bar{A}$  را همواره برای بستار  $A$  در  $X$  محفوظ خواهیم داشت. بستار  $A$  در  $Y$  را می‌توان بر حسب  $\bar{A}$  بیان کرد، چنانکه در قضیه زیر دیده می‌شود:

۴.۶. قضیه فرض کنیم  $Y$  زیر فضایی از  $X$  و  $A$  زیر مجموعه‌ای از  $Y$  باشد. اگر  $\bar{A}$  بستار  $A$  در  $X$  باشد آنگاه بستار  $A$  در  $Y$  برابر است با  $\bar{A} \cap Y$ .

برهان. فرض کنیم  $B$  بستار  $A$  در  $Y$  باشد. مجموعه  $\bar{A}$  در  $X$  بسته است، پس

بنابر قضیه ۲.۶،  $\bar{A} \cap Y$  در  $Y$  بسته است. چون  $\bar{A} \cap Y$  شامل  $A$  است، و بنا بر تعریف،  $B$  برابر مقطع همه زیر مجموعه‌های بسته  $Y$  است که حاوی  $A$  هستند، خواهیم داشت  $B \subset (\bar{A} \cap Y)$ .

از طرف دیگر، می‌دانیم که  $B$  در  $Y$  بسته است. پس، بنا بر قضیه ۲.۶ مجموعه بسته‌ای از  $X$  مانند  $C$  وجود دارد که  $B = C \cap Y$ . در این صورت،  $C$  مجموعه بسته‌ای از  $X$  است که حاوی  $B$  است. چون  $\bar{A}$  برابر است با مقطع همه مجموعه‌های بسته از این نوع، پس  $\bar{A} \subset C$ ، و از آنجا  $\square. (\bar{A} \cap Y) \subset (C \cap Y) = B$ .

تعریف بستاریك مجموعه طریقه عملی ساده‌ای برای یافتن بستار مجموعه‌های مشخص به دست نمی‌دهد، زیرا گردایه همه مجموعه‌های بسته  $X$ ، مانند گردایه همه مجموعه‌های باز، معمولاً بسیار بزرگتر از آن است که بتوان با آن کار کرد. در قضیه زیر، طریقه دیگری برای توصیف بستاریك مجموعه آمده است، که چون فقط مفهوم پایه توپولوژی  $X$  را دربر دارد، مفید است.

نخست برای سهولت اصطلاحی را تعریف می‌کنیم. گوئیم مجموعه  $A$  مجموعه  $B$  را قطع می‌کند اگر  $A \cap B$  تهی نباشد.

۵.۶. قضیه فرض کنیم  $A$  زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک  $X$  باشد.

(الف) اگر  $x \in A$  و فقط اگر هر مجموعه باز شامل  $x$ ، مجموعه  $A$  را قطع کند.  
 (ب) اگر توپولوژی  $X$  با یک پایه مشخص شده باشد آنگاه  $x \in \bar{A}$  اگر و فقط اگر هر عضو پایه مانند  $B$  که شامل  $x$  است مجموعه  $A$  را قطع کند.

پرهان. گزاره قسمت (الف) را در نظر می‌گیریم. این گزاره به صورت  $P \iff Q$  است. با تبدیل هر یک از این دو استلزام به عکس نقیض آن، گزاره‌ای به صورت

$$(P \text{ چنین نیست که } Q) \iff (Q \text{ چنین نیست که } P)$$

به دست می‌آید که منطقاً معادل گزاره اولی است. گزاره اخیر چنین نوشته می‌شود:

$x \notin \bar{A}$  اگر و فقط اگر مجموعه بازی شامل  $x$  مانند  $U$  وجود داشته باشد که  $A$  را قطع نکند. بدین صورت، اثبات قضیه آسان است. اگر  $x$  در  $\bar{A}$  نباشد آنگاه  $U = X - \bar{A}$  مجموعه بازی است شامل  $x$  که  $A$  را قطع نمی‌کند، و این همان است که می‌خواستیم. بالعکس، اگر مجموعه بازی مانند  $U$  شامل  $x$  وجود داشته باشد که  $A$  را قطع نکند آنگاه  $x \in X - U$  مجموعه‌ای بسته و حاوی  $A$  است. بنا بر تعریف  $\bar{A}$ ، مجموعه  $X - U$  باید شامل  $\bar{A}$  باشد، بنابراین  $x$  نمی‌تواند در  $\bar{A}$  باشد.

اثبات گزاره (ب) آسان است. اگر هر مجموعه باز شامل  $x$  مجموعه  $A$  را قطع کند، هر عضو پایه مانند  $B$  که شامل  $x$  باشد نیز  $A$  را قطع می‌کند، زیرا  $B$  مجموعه‌ای است باز. بالعکس، اگر هر عضو پایه که شامل  $x$  باشد مجموعه  $A$  را قطع کند، هر مجموعه

بازمانند  $U$  که شامل  $x$  باشد نیز  $A$  را قطع می‌کند، زیرا  $U$  حاوی عضوی از پایه است که شامل  $x$  است.  $\square$

در اینجا ریاضیدانان اغلب اصطلاح خاصی به کار می‌برند. آنها جمله « $U$  مجموعه‌ای باز شامل  $x$  است» را به صورت

« $U$  يك همسایگی  $x$  است»

خلاصه می‌کنند. با استفاده از این اصطلاح نیمه اول قضیه بالا را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

اگر  $A$  زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک  $X$  باشد آنگاه  $x \in \bar{A}$  اگر و فقط اگر هر همسایگی  $x$  مجموعه  $A$  را قطع کند.

مثال ۵. فرض کنیم  $X$  خط حقیقی  $R$  باشد. اگر  $A = (0, 1]$  آنگاه  $\bar{A} = [0, 1]$ . زیرا هر همسایگی  $0$  مجموعه  $A$  را قطع می‌کند، در حالی که هر نقطه خارج از  $[0, 1]$  يك همسایگی جدا از  $A$  دارد. استدلالهایی مشابه در مورد زیر مجموعه‌های دیگر  $X$ ، که ذیلاً می‌آید، برقرار است،

اگر  $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$  آنگاه  $\bar{B} = \{0\} \cup B$ . اگر  $C = \{0\} \cup (1, 2)$  آنگاه  $\bar{C} = \{0\} \cup [1, 2]$ . اگر  $Q$  مجموعه اعداد گویا باشد، آنگاه  $\bar{Q} = R$ . اگر  $\mathbb{Z}_+$  مجموعه اعداد صحیح مثبت باشد آنگاه  $\bar{\mathbb{Z}_+} = \mathbb{Z}_+$ . اگر  $R_+$  مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد آنگاه بستار مجموعه  $R_+$  عبارت است از مجموعه  $R_+ \cup \{0\}$ . (به همین دلیل در بخش ۱-۲ علامت  $\bar{R}_+$  را برای  $R_+ \cup \{0\}$  اختیار کردیم.)

مثال ۶. زیر فضای  $Y = (0, 1]$  از خط حقیقی  $R$  را در نظر می‌گیریم. مجموعه  $A = (0, 1/2)$  زیر مجموعه‌ای از  $Y$  است، بستار آن در  $R$  مجموعه  $[0, 1/2]$  و در  $Y$  مجموعه  $[0, 1/2] \cap Y = (0, 1/2]$  است.

بعضی از ریاضیدانان اصطلاح «همسایگی» را به گونه‌ای دیگر به کار می‌برند. آنها  $A$  را وقتی همسایگی  $x$  می‌گویند که فقط حاوی مجموعه باز شامل  $x$  باشد. ما این معنی را به کار نمی‌بریم.

### نقاط حدی

طریقه‌ای دیگر برای توصیف بستار يك مجموعه وجود دارد که در آن مفهوم مهم نقطه حدی وارد می‌شود، و ما اکنون آن را بررسی می‌کنیم. اگر  $A$  زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک  $X$  و  $x$  نقطه‌ای از  $A$  باشد آنگاه  $x$  را يك نقطه حدی (بسا «نقطه انباشتگی») مجموعه  $A$  خوانیم در صورتی که هر همسایگی  $x$  مجموعه  $A$  را در نقطه‌ای غیر از خود  $x$  قطع کند. به بیان دیگر،  $x$  يك نقطه



حدی  $A$  است، هر گاه به بستار مجموعه  $\{x\} - A$  تعلق داشته باشد. نقطه  $x$  ممکن است در  $A$  باشد یا نباشد، اما این امر در تعریف مذکور تأثیری ندارد.

مثال ۷. خط حقیقی  $R$  را در نظر می‌گیریم. اگر  $A = (0, 1]$  آنکاه نقطه  $0$  يك نقطه حدی  $A$  است و همچنین  $1/2$  نیز نقطه حدی دیگر آن است. در واقع، هر نقطه بازه  $[0, 1]$  يك نقطه حدی  $A$  است، ولی هیچ عضو دیگر  $R$  نقطه حدی  $A$  نیست. اگر  $B = \{(1/n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$  آنکاه  $0$  تنها نقطه حدی  $B$  است. هر نقطه دیگر  $R$  مانند  $x$  همسایگی‌ای دارد که  $B$  را قطع نمی‌کند و یا آن را تنها در خود  $x$  قطع می‌کند. اگر  $C = \{0\} \cup (1, 2)$  آنکاه نقاط حدی  $C$  نقاط بازه  $[1, 2]$  هستند. اگر  $Q$  مجموعه نقاط گویا باشد آنکاه هر نقطه  $R$  يك نقطه حدی  $Q$  است. اگر  $\mathbb{Z}_+$  مجموعه اعداد صحیح مثبت باشد آنکاه هیچ عضو  $R$  نقطه حدی  $\mathbb{Z}_+$  نیست. اگر  $R_+$  مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد آنکاه هر عضو مجموعه  $\{0\} \cup R_+$  يك نقطه حدی  $R_+$  است.

از مقایسه مثالهای ۵ و ۷ به نتیجه جالبی حاکی از وجود ارتباطی بین بستار يك مجموعه و مجموعه نقاط حدی آن می‌رسیم. این رابطه در قضیه زیر آمده است:

۶.۶. قضیه فرض کنیم  $A$  زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک  $X$  و  $A'$  مجموعه نقاط حدی  $A$  باشد. در این صورت،

$$\bar{A} = A \cup A'$$

پرهان. اگر  $x$  در  $A'$  باشد، هر همسایگی  $x$  مجموعه  $A$  را در نقطه‌ای جز  $x$  قطع می‌کند. در نتیجه، بنا بر قضیه ۵.۶،  $x$  به  $\bar{A}$  تعلق دارد، و از آنجا  $A' \subset \bar{A}$ . چون بنا بر تعریف،  $A \subset \bar{A}$ ، نتیجه می‌شود  $A \cup A' \subset \bar{A}$ .

برای اثبات جزئیت از طرف دیگر، فرض می‌کنیم  $x$  نقطه دلخواهی از  $\bar{A}$  باشد و ثابت می‌کنیم  $x \in A \cup A'$ . اگر  $x \in A$ ، در این صورت واضح است که  $x \in A \cup A'$ ؛ حال فرض می‌کنیم  $x \notin A$  نباشد. چون  $x \in \bar{A}$ ، بنا بر تعریف، هر همسایگی  $x$  مجموعه  $A$  را قطع می‌کند؛ و چون  $x \notin A$ ، پس هر همسایگی  $x$  مجموعه  $A$  را در نقطه‌ای غیر از  $x$  قطع می‌کند. در نتیجه  $x \in A'$ . و از آنجا همان‌طور که می‌خواستیم،  $x \in A \cup A'$ .  $\square$

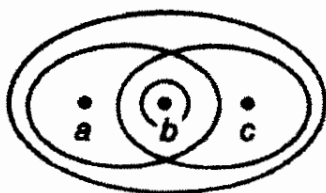
۷.۶. نتیجه زیر مجموعه‌ای از يك فضای توپولوژیک بسته است اگر و فقط اگر شامل همه نقاط حدی خود باشد.

پرهان. مجموعه  $A$  بسته است اگر و فقط اگر  $A = \bar{A}$ ، و این حکم برقرار است اگر و فقط اگر  $A' \subset A$ .  $\square$

## فضاهای هاوسدورف

تجربه ما در مورد مجموعه‌های باز و بسته و نقاط حدی در خط حقیقی و صفحه ممکن است که در بررسی فضاهای توپولوژیک کلی موجب گمراهی گردد. مثلاً، در توپولوژی ترتیبی  $R$ ، نقطه  $b$  همیشه يك نقطه حدی بازه  $(a, b)$  است، و حال آنکه در حالت کلی در مورد توپولوژیهای ترتیبی چنین نیست.

به عنوان مثالی دیگر، ملاحظه کنید که در  $R$  یا  $R^2$  هر مجموعه  $T_k$  عضوی مانند  $\{x_0\}$  بسته است؛ اثبات این حکم آسان است، زیرا هر نقطه غیر از  $x_0$  يك همسایگی دارد که مجموعه  $\{x_0\}$  را قطع نمی کند، پس بستار مجموعه  $\{x_0\}$  با خودش برابر است. اما این حکم در مورد فضاهای توپولوژیک دلخواه برقرار نیست. یکی از اولین مثالهایی را که از فضاهای توپولوژیک داشتیم در نظر بگیرید: توپولوژی ای در مجموعه سه عضوی  $\{a, b, c\}$  که در شکل ۱۲ نشان داده شده است. در این فضا، مجموعه  $T_k$  عضوی  $\{b\}$  بسته نیست، زیرا متمم آن باز نیست.



شکل ۱۲

این قبیل توپولوژیها، از آن جهت که بندرت در شاخه‌های دیگر ریاضی پیش می آیند، در حقیقت، برای ریاضیدانان چندان جالب نیستند. بعلاوه، اگر بخواهیم این گونه توپولوژیها را نیز ملحوظ بداریم، تعداد قضایایی که می توان در مورد فضاهای توپولوژیک ثابت کرد بسیار محدود خواهد شد. از این رو، اغلب با وارد کردن شرطی اضافی، مواردی نظیر مثال فوق را کنار می گذاریم، و بدین ترتیب، دسته فضاهای توپولوژیک مورد بررسی را بیش از پیش به شهود هندسی خود نزدیک می کنیم. این شرط توسط فلیکس هاوسدورف<sup>۱</sup> پیشنهاد شد و ریاضیدانان آن را به نام او می خوانند.

**تعریف.** فضای توپولوژیک  $X$  را فضای هاوسدورف خوانیم در صورتی که به ازای هر دو نقطه متمایز  $x_1$  و  $x_2$  از  $X$ ، همسایگیهایی مانند  $U_1$  و  $U_2$ ، بترتیب، از  $x_1$  و  $x_2$  یافت شوند که از هم جدا باشند.

۸.۶. قضیه در فضای هاوسدورف  $X$  هر مجموعه متناهی بسته است.

پرهان. کافی است ثابت کنیم که هر مجموعه  $T_k$  عضوی  $\{x_0\}$  بسته است. اگر

$x$  نقطه دلخواهی از  $X$  و متمایز از  $x_0$  باشد آنگاه  $x$  و  $x_0$ ، بترتیب، همسایگیهایی جدا از هم مانند  $U$  و  $V$  دارند. چون  $U$  مجموعه  $\{x_0\}$  را قطع نمی کند، نقطه  $x$  نمی تواند در بستار مجموعه  $\{x_0\}$  باشد. در نتیجه، بستار مجموعه  $\{x_0\}$  خود این مجموعه است، پس،  $\{x_0\}$  بسته است.  $\square$

۹.۶. قضیه فرض کنیم  $X$  یک فضای هاوسدورف و  $A$  زیر مجموعه ای از  $X$  باشد. در این صورت، نقطه  $x$  نقطه حدی  $A$  است اگر و فقط اگر هر همسایگی  $x$  شامل بینهایت نقطه از  $A$  باشد.

برهان. اگر هر همسایگی  $x$  مجموعه  $A$  را در بینهایت نقطه قطع کند، مسلماً  $A$  را در نقطه ای غیر از  $x$  قطع می کند، پس،  $x$  یک نقطه حدی  $A$  است. بعکس، فرض کنیم  $x$  یک نقطه حدی  $A$  باشد، و  $U$  یک همسایگی  $x$  که  $A$  را فقط در تعدادی متناهی از نقاط قطع می کند. در این صورت،  $U$  مجموعه  $A - \{x\}$  را نیز در تعدادی متناهی از نقاط قطع خواهد کرد. فرض کنیم

$$U \cap (A - \{x\}) = \{x_1, \dots, x_m\}.$$

چون مجموعه متناهی  $\{x_1, \dots, x_m\}$  بسته است، مجموعه  $X - \{x_1, \dots, x_m\}$  یک مجموعه باز فضای  $X$  است، و در نتیجه

$$U \cap (X - \{x_1, \dots, x_m\})$$

یک همسایگی  $x$  است که  $A - \{x\}$  را قطع نمی کند، و این با فرض اینکه  $x$  یک نقطه حدی  $A$  است متناقض است.  $\square$

شرط هاوسدورف قویتر از آن چیزی است که برای اثبات قضایای ۸.۶ و ۹.۶ ضروری است. برهان آن قضایا با شرط ضعیفتری نیز معتبر است، این شرط را معمولاً اصل  $T_1$  می نامند:

به ازای هر دو نقطه متمایز مفروض  $a$  و  $b$  از  $X$ ، هر کدام یک همسایگی دارد که شامل دیگری نیست.

در آتیه معدودی تمرین خواهیم داشت که این اصل در آنها به کار می آید، گذشته از این تمرینات ما اصل  $T_1$  را در این کتاب به کار نخواهیم برد.

در حال، شرط هاوسدورف در اثبات بسیاری از قضایای جالب توپولوژی مورد نیاز است. بعلاوه بیشتر فضاهایی که در نزد ریاضیدانان اهمیت دارند، فضاهای هاوسدورف اند. قضیه زیر، که اثباتش را به عنوان تمرین واگذار می کنیم، تأییدی است بر نکته اخیر.

۹.۱۰.۶. قضیه هر مجموعه مرتب ساده با توپولوژی ترتیبی، یک فضای هاوسدورف

است حاصل ضرب دو فضای هاوسدورف فضایی است هاوسدورف. هر زیر فضای فضایی هاوسدورف فضای هاوسدورف است.

بدین جهت، شرط هاوسدورف را عموماً شرط اضافی بسیار ملایمی برای تحمیل بر فضاهای توپولوژیک می‌شمارند. در واقع، بعضی از ریاضیدانان تا آنجا پیش می‌روند که در اولین درس توپولوژی از فضاهای غیر هاوسدورف اجتناب می‌کنند و از همان ابتدا شرط هاوسدورف را بر فضاهای توپولوژیک تحمیل می‌کنند. ما تا این حد پیش نخواهیم رفت، ولی هر جا که شرط هاوسدورف برای برهانی لازم باشد، بی آنکه تشویشی از محدود شدن جدی دامنه کاربردهای نتایج حاصل به خود راه دهیم، شرط هاوسدورف را مفروض می‌گیریم.

شرط هاوسدورف فقط یکی از شرایط اضافی است که می‌توان بر یک فضای توپولوژیک تحمیل کرد. هر بار که شرطی اضافی بر فضاهای توپولوژیک تحمیل می‌شود، می‌توان قضایای تواناتری ثابت کرد، ولی رده فضاهایی که این قضایا در آنها صادق اند محدودتر می‌گردد. از آغاز پیدایش توپولوژی، بیشتر پژوهشهایی که در این علم صورت گرفته متمرکز در حول این مسئله بوده است که چه شرایطی بر فضاهای توپولوژیک تحمیل کنیم تا در ضمن اینکه توانایی کافی برای اثبات قضایای جالب در مورد فضاهایی که در این شرط صدق می‌کند داشته باشند، با وجود این چنان قوی نباشند که دامنه کاربردهای نتایج حاصل را شدیداً محدود کنند.

در دو فصل آتی تعدادی از این شرایط را بررسی می‌کنیم. شرط هاوسدورف و اصل موضوع  $T_1$  فقط دو شرط از رده شرایط مشابهی هستند که جمعیاً اصول موضوع جدا-سازی خوانده می‌شوند. از جمله شرایط دیگری می‌توان از اصول موضوع شماردایی و انواع شرایط فشردگی و همبندی نام برد چنانکه خواهید دید، بعضی از این شرایط بسیار مفید کننده‌اند.

## تمرینها

۱. فرض کنید  $\mathcal{C}$  گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های مجموعه  $X$  باشد. فرض کنید  $\emptyset$  و  $X$  در  $\mathcal{C}$ ، و اجتماعهای متناهی و مقاطع دلخواه اعضای  $\mathcal{C}$  نیز در  $\mathcal{C}$  باشند. ثابت کنید که گردایه

$$\mathcal{C} = \{X - C \mid C \in \mathcal{C}\}$$

یک توپولوژی در  $X$  است.

۲. ثابت کنید که اگر  $A$  در  $Y$  و  $Y$  در  $X$  بسته باشد آنگاه  $A$  در  $X$  بسته است.

۳. ثابت کنید که اگر  $A$  در  $X$  و  $B$  در  $Y$  بسته باشد آنگاه  $A \times B$  در  $X \times Y$  بسته است.

۴. ثابت کنید که اگر  $U$  در  $X$  باز و  $A$  در  $X$  بسته باشد آنگاه  $U - A$  در  $X$  باز و  $A - U$  در  $X$  بسته است.

۵. فرض کنید  $X$  مجموعه‌ای مرتب با توپولوژی ترتیبی باشد. ثابت کنید که  $(a, b) \subset [a, b]$ . در چه شرایطی تساوی برقرار است؟

۶. فرض کنید  $A, B, A_\alpha$  زیر مجموعه‌هایی از فضای  $X$  باشند. روابط زیر را ثابت کنید:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (\text{الف})$$

(ب)  $\bigcup \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup A_\alpha}$ ؛ مثالی بیاورید که در آن تساوی برقرار نیست.

۷. چه ایرادی به «استدلال» زیر برای اثبات  $\bigcup \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup A_\alpha}$  وارد است؟ اگر  $\{A_\alpha\}$  گردابه‌ای از زیر مجموعه‌های  $X$  باشد و اگر  $x \in \bigcup \overline{A_\alpha}$  آنگاه هر همسایگی  $x$  مانند  $U$ ، مجموعه  $\bigcup A_\alpha$  را قطع می‌کند. پس،  $U$  باید یکی از  $A_\alpha$ ها را قطع کند، و در نتیجه  $x$  باید به‌بستاری یکی از  $A_\alpha$ ها متعلق باشد. بنابراین،  $x \in \bigcup \overline{A_\alpha}$ .

۸. فرض کنید  $A, B, A_\alpha$  زیر مجموعه‌هایی از فضای  $X$  باشند، و  $A'$  مجموعه نقاط حدی  $A$  باشد. در برقراری هر یک از تساویهای زیر تحقیق کنید. در مورد آنهایی که برقرار نیستند، تعیین کنید که کدامیک از روابط  $\supset$  یا  $\subset$  برقرار است.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (\text{الف})$$

$$\overline{\bigcap A_\alpha} = \bigcap \overline{A_\alpha} \quad (\text{ب})$$

$$\overline{A - B} = \overline{A} - \overline{B} \quad (\text{پ})$$

$$(A \cup B)' = A' \cup B' \quad (\text{ت})$$

$$(A \cap B)' = A' \cap B' \quad (\text{ث})$$

۹. فرض کنید  $A \subset X$  و  $B \subset Y$ . ثابت کنید که در فضای  $X \times Y$ ،

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

۱۰. ثابت کنید که هر توپولوژی ترتیبی، هاوسدورف است.

۱۱. ثابت کنید که حاصل ضرب دو فضای هاوسدورف، هاوسدورف است.

۱۲. ثابت کنید که هر زیر فضای فضایی هاوسدورف، هاوسدورف است.

۱۳. ثابت کنید که  $X$  هاوسدورف است اگر و فقط اگر قطر  $\Delta = \{x \times x \mid x \in X\}$  در  $X \times X$  بسته باشد.

۱۴. (الف) ثابت کنید که اصل موضوع  $T_1$  معادل با این شرط است که مجموعه‌های متناهی بسته‌اند.

(ب) اگر  $X$  مجموعه‌ای مفروض باشد. ثابت کنید که توپولوژی متمم متناهی  $\mathcal{T}_f$ ،

که در مثال ۳ از بخش ۲-۱ تعریف شد، در اصل موضوع  $T_1$  صدق می‌کند و جزء هر توپولوژی  $T_1$  در  $X$  است. آیا  $\mathcal{T}_f$  در اصل موضوع هاوسدورف صدق می‌کند؟

۱۵. هفت توپولوژی در  $R$  را که در تمرین ۱۶ از بخش ۲-۲ آوردیم در نظر بگیرید.  
(الف) بستار مجموعه  $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$  را تحت هر یک از این توپولوژیها به دست آورید.

(ب) کدامیک از این توپولوژیها در اصل موضوع هاوسدورف صدق می‌کند و کدامیک در اصل موضوع  $T_1$ ؟

۱۶. دو توپولوژی در  $R$  را که در تمرین ۷ از بخش ۲-۲ آورده شدند در نظر بگیرید.  
بستار مجموعه‌های

$$B = (\sqrt{2}, 3) \quad \text{و} \quad A = (0, \sqrt{2})$$

را تحت هر یک از این توپولوژیها تعیین کنید.

۱۷. مجموعه  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  را با توپولوژی ترتیب قاموسی در نظر بگیرید.  
مطلوب است تعیین بستار هر یک از زیر مجموعه‌های زیر از  $X$ :

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \times 0 \mid n \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

$$B = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \frac{1}{4} \mid n \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

$$C = \{x \times 0 \mid 0 < x < 1\},$$

$$D = \left\{ x \times \frac{1}{4} \mid 0 < x < 1 \right\},$$

$$E = \left\{ \frac{1}{4} \times y \mid 0 < y < 1 \right\}.$$

۱۸. اگر  $A \subset X$ ، کرانه  $A$  را به  $Bd A$  نمایش می‌دهیم و آنرا چنین تعریف می‌کنیم،

$$Bd A = \bar{A} \cap (\overline{X - A}).$$

(الف) ثابت کنید که  $Int A$  و  $Bd A$  جدا از هم‌اند. و  $\bar{A} = Int A \cup Bd A$ .

(ب) ثابت کنید که  $A$  هم باز است و هم بسته اگر و فقط اگر  $Bd A = \emptyset$ .

(پ) ثابت کنید که  $U$  باز است اگر و فقط اگر  $Bd U = \bar{U} - U$ .

(ت) اگر  $U$  باز باشد، آیا درست است که  $U = Int(\bar{U})$ ؟ برای جواب خود

دلیل بیاورید.

۱۹. کرانه و درون هر يك از زیر مجموعه‌های زیر از  $R^2$  را بیابید:

(الف)  $A = \{x \times y \mid y = 0\}$  ،

(ب)  $B = \{x \times y \mid y \neq 0 \text{ و } x > 0\}$  ،

(پ)  $C = A \cup B$  ،

(ت)  $D = \{x \times y \mid x \text{ گویاست}\}$  ،

(ث)  $E = \{x \times y \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$  ،

(ج)  $F = \left\{x \times y \mid y \leq \frac{1}{x} \text{ و } x \neq 0\right\}$  .

\*۲۰. (کوراتوفسکی<sup>۱</sup>) گردایه همه زیر مجموعه‌های  $A$  از فضای توپولوژیک  $X$  را در نظر بگیرید. عملهای بستارگیری  $A \rightarrow \bar{A}$  و متمم‌گیری  $A \rightarrow X - A$  توابعی از این گردایه در خودش هستند.

(الف) ثابت کنید که اگر از مجموعه مفروضی مانند  $A$  شروع کنیم و این عملها را متوالیاً انجام دهیم، حداکثر ۱۴ مجموعه متمایز می‌توان به دست آورد.

(ب) زیرمجموعه‌ای مانند  $A$  از  $R$  (با توپولوژی معمولی) بیابید که برای آن تعداد مجموعه‌های متمایز به دست آمده در قسمت (الف) همان عدد ماکزیموم ۱۴ باشد.

## ۲-۷ توابع پیوسته

مفهوم تابع پیوسته، از مفاهیم اساسی بخش اعظم ریاضیات است، توابع پیوسته برخط حقیقی در صفحات اولیه هر کتاب حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) به چشم می‌خورند، و کمی پس از آن توابع پیوسته بر صفحه و فضا نیز به دنبال آن می‌آیند. انواع کلیتر این توابع در مراحل پیشرفته‌تر ریاضیات مطرح می‌شوند. در این بخش، تعریفی از پیوستگی تدوین می‌کنیم که همه این موارد خاص را شامل می‌شود؛ سپس در خواص گوناگون توابع پیوسته تحقیق می‌کنیم. بسیاری از این خواص تعمیم مستقیم همان چیزهایی است که در حسابان و آنالیز پیرامون توابع پیوسته آموخته‌اید.

### پیوستگی یک تابع

فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو فضای توپولوژیک باشند. تابع  $f: X \rightarrow Y$  را وقتی پیوسته خوانیم اگر به ازای هر زیرمجموعه باز  $V$  مانند  $Y$  باز  $f^{-1}(V)$  یک زیرمجموعه باز  $X$  باشد.

به یاد آورید که  $f^{-1}(V)$  عبارت است از مجموعه همه  $x$ هایی از  $X$  که  $f(x) \in V$ . این مجموعه در صورتی که  $V$  مجموعه تصویر  $f(X)$  را قطع نکند تهی است.

پیوستگی يك تابع نه تنها به خود تابع  $f$  بستگی دارد ، بلکه توپولوژیهای مشخص شده بر حوزه تعریف و حوزه مقادیر  $f$  نیز در این امر دخالت دارند. اگر بخواهیم بر این مطلب تأکید کنیم، می گوییم  $f$  نسبت به توپولوژیهای مشخص شده در  $X$  و  $Y$  پیوسته است. ملاحظه می کنیم که اگر توپولوژی فضای حوزه مقادیر، یعنی  $Y$ ، بر حسب پایه ای مانند  $\mathcal{B}$  از آن مشخص شده باشد آنگاه برای اثبات پیوستگی تابع  $f$  کافی است ثابت کنیم که تصویر معکوس هر عضو پایه در  $X$  باز است؛ زیرا هر مجموعه باز دلخواه از  $Y$  مانند  $V$  را می توان به صورت اجتماعی از اعضای پایه مانند

$$V = \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha}$$

نوشت ، در نتیجه

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_{\alpha}).$$

بنابراین ، اگر هر  $f^{-1}(B_{\alpha})$  باز باشد ،  $f^{-1}(V)$  نیز باز است. اگر توپولوژی  $Y$  به وسیله زیر پایه ای از آن مانند  $\mathcal{S}$  داده شده باشد ، برای اثبات پیوستگی  $f$  حتی کافی خواهد بود که ثابت کنیم تصویر معکوس هر عضو زیر پایه در  $X$  باز است ؛ زیرا هر عضو دلخواه پایه  $Y$  مانند  $B$  را می توان به صورت مقطعی متناهی از اعضای زیر پایه ، مانند  $S_1 \cap \dots \cap S_n$  ، نوشت ؛ از تساوی

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \dots \cap f^{-1}(S_n)$$

نتیجه می شود که تصویر معکوس هر عضو پایه باز است.

مثال ۱. مثالی از يك «تابع حقیقی از يك متغیر حقیقی» را که معمولاً در آنالیز

مطالعه می شود در نظر می گیریم. در آنالیز پیوستگی تابعی مانند

$$f: R \rightarrow R$$

را از طریق « $\delta - \epsilon$ » تعریف می کنند، طریقه ای که سالها عامل وحشت هر محصل ریاضی بوده است. همان طور که انتظار می رود ، تعریف به طریقه  $\delta - \epsilon$  و تعریف ما معادل اند. مثلاً ، برای اثبات اینکه تعریف ما مستلزم تعریف به طریقه  $\delta - \epsilon$  است چنین استدلال می کنیم : فرض کنیم  $x_0$  عضو مفروضی از  $R$  و  $\epsilon > 0$  مفروض باشد ، بازه

$$V = (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$$

يك مجموعه باز فضای حوزه مقادیر، یعنی  $R$ ، است. بنابراین ،  $f^{-1}(V)$  مجموعه بازی در  $R$  ، فضای حوزه تعریف ، است. چون  $f^{-1}(V)$  شامل  $x_0$  است ، شامل عضوی از پایه مانند  $(a, b)$  است که  $x_0$  را دربردارد.  $\delta$  را کوچکترین دو عدد  $x_0 - a$  و  $b - x_0$  اختیار می کنیم. در این صورت ، اگر  $|x - x_0| < \delta$  آنگاه نقطه  $x$  در  $(a, b)$  است ، در نتیجه  $f(x) \in V$  ، یعنی  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  ، و این همان است که می خواستیم. اثبات اینکه تعریف به طریقه  $\delta - \epsilon$  نیز مستلزم تعریف ما است مشکل نیست و آن را به عهده خواننده می گذاریم. هنگام مطالعه فضاهای متری به این مثال باز می گردیم.



مثال ۲. در حسابان پیوستگی انواع گوناگونی از توابع را در نظر می‌گیرند. مثلاً توابعی از انواع زیر را بررسی می‌کنند.

$$f: R \rightarrow R^2 \quad (\text{منحنیهای صفحه})$$

$$f: R \rightarrow R^3 \quad (\text{منحنیهای فضا})$$

$$f: R^2 \rightarrow R \quad (\text{توابع } f(x, y) \text{ از دو متغیر حقیقی})$$

$$f: R^3 \rightarrow R \quad (\text{توابع } f(x, y, z) \text{ از سه متغیر حقیقی})$$

$$f: R^2 \rightarrow R^2 \quad (\text{میدانهای برداری } \nabla(x, y) \text{ در صفحه})$$

در آنجا، مفهوم پیوستگی برای هر يك از این توابع جداگانه تعریف می‌شود. تعریف کلی ما برای پیوستگی، همه اینها را به عنوان موارد خاص دربر می‌گیرد؛ این مطلب نتیجه قضایای کلی‌ای است که در مورد توابع پیوسته در فضاهای حاصل‌ضربی و فضاهای متریک ثابت می‌کنیم.

مثال ۳. فرض کنیم  $R$  مجموعه اعداد حقیقی با توپولوژی معمولی در آن و  $R_1$  نمایش همان مجموعه با توپولوژی حد پایینی باشد. فرض کنیم

$$f: R \rightarrow R_1$$

تابع همانی باشد، یعنی، به‌ازای هر عدد حقیقی  $x$ ،  $f(x) = x$ . در این صورت  $f$  پیوسته نیست. زیرا تصویر عکس مجموعه باز  $[a, b]$  از  $R_1$  با خودش مساوی است. ولی در  $R$  باز نیست. از طرف دیگر، تابع همانی

$$g: R_1 \rightarrow R$$

پیوسته است، زیرا تصویر عکس  $(a, b)$ ، خود این مجموعه است، که در  $R_1$  باز است.

در آنالیز چندین راه متفاوت، ولی معادل، برای تدوین تعریف پیوستگی بررسی می‌شود. بعضی از آنها به فضاهای دلخواه نیز تعمیم می‌یابند، و ما آنها را در قضایای آتی بررسی می‌کنیم. روشهای شناخته شده «تعریف به وسیله  $\epsilon - \delta$ » و «تعریف به وسیله دنباله‌های همگرا» قابل تعمیم در فضاهای کلی نیستند؛ بررسی آنها را به مبحث فضاهای متریک که در بخش ۲-۱۵ خواهد آمد موکول می‌کنیم.

۱۰۷. قضیه فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو فضای توپولوژیک باشند،  $f: X \rightarrow Y$ . در این صورت، گزاره‌های ذیل معادل‌اند:

(۱)  $f$  پیوسته است.

(۲) به‌ازای هر زیرمجموعه  $X$  مانند  $A$ ،  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .

(۳) به‌ازای هر مجموعه بسته  $Y$  مانند  $B$ ، مجموعه  $f^{-1}(B)$  در  $X$  بسته است.

برهان. (۲)  $\implies$  (۱). فرض کنیم  $f$  پیوسته و  $A$  زیر مجموعه‌ای از  $X$  باشد. ثابت می‌کنیم که اگر  $x \in \bar{A}$  آنگاه  $f(x) \in \overline{f(A)}$ . فرض کنیم  $V$  يك همسایگی  $f(x)$  باشد. در این صورت  $f^{-1}(V)$  يك مجموعه باز  $X$  و شامل  $x$  است، و باید  $A$  را در نقطه‌ای مانند  $y$  قطع کند. در این صورت،  $V$  مجموعه  $f(A)$  را در نقطه  $f(y)$  قطع می‌کند. بنابراین  $f(x) \in \overline{f(A)}$ .

(۳)  $\implies$  (۲). فرض کنیم  $B$  در  $Y$  بسته باشد و  $A = f^{-1}(B)$ . می‌خواهیم ثابت کنیم که  $A$  در  $X$  بسته است. برای این منظور، ثابت می‌کنیم که  $\bar{A} \subset A$ . بنا بر قواعد نظریه مقدماتی مجموعه‌ها داریم  $f(A) \subset B$ . بنا بر این، اگر  $x$  نقطه‌ای از  $A$  باشد، آنگاه

$$f(x) \in f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset B = B,$$

و از آنجا،  $x \in f^{-1}(B) = A$ . پس  $\bar{A} \subset A$ .

(۱)  $\implies$  (۳). فرض کنیم  $V$  مجموعه باز دلخواهی در  $Y$  باشد، و  $B = Y - V$ . در این صورت  $B$  در  $Y$  بسته است. بنا بر (۳)،  $f^{-1}(B)$  در  $X$  بسته است. و از آنجا، بنا بر قواعد نظریه مقدماتی مجموعه‌ها،

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) = X - f^{-1}(B)$$

پس  $f^{-1}(V)$  باز است.  $\square$

### هومئومورفیسم

فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو فضای توپولوژیک باشند، و تابع  $f: X \rightarrow Y$  تناظری دوسویی باشد. اگر  $f$  و تابع معکوس آن

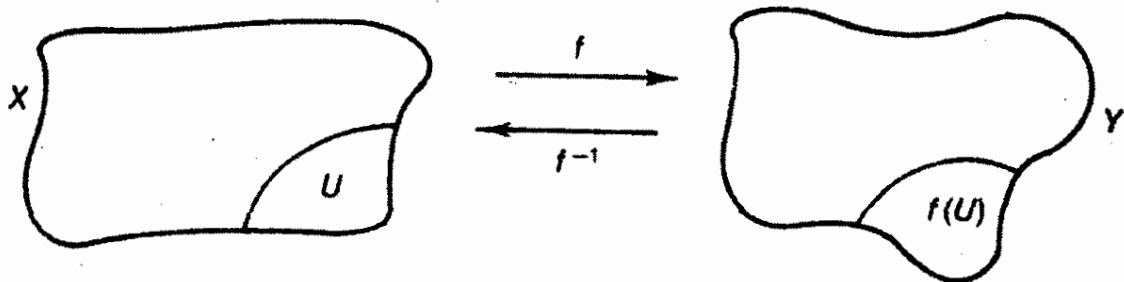
$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$

هر دو پیوسته باشند آنگاه  $f$  را هومئومورفیسم می‌خوانیم.

شرط پیوستگی  $f^{-1}$  گویای این است که به ازای زیر مجموعه باز  $X$  مانند  $U$ ، تصویر عکس  $U$  تحت تابع  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  در  $Y$  باز است. اما تصویر عکس  $U$  تحت تابع  $f^{-1}$  همان تصویر  $U$  تحت تابع  $f$  است (شکل ۱۳). بنا بر این، طریقه دیگر تعریف هومئومورفیسم این است که بگوییم: هومئومورفیسم عبارت است از تناظری دوسویی مانند  $f: X \rightarrow Y$  به طوری که به ازای هر  $U$ ، مجموعه  $f(U)$  باز است اگر و فقط اگر  $U$  باز باشد.

نکته اخیر نشان می‌دهد که يك هومئومورفیسم  $f: X \rightarrow Y$  نه تنها بین  $X$  و  $Y$ ، بلکه بین گردایه مجموعه‌های باز  $X$  و  $Y$  نیز تناظری دوسویی برقرار می‌کند. در نتیجه، هر خاصیت  $X$  که تماماً بر حسب توپولوژی  $X$  (یعنی، بر حسب مجموعه‌های باز  $X$ )

بیان شود، به توسط تناظر  $f$ ، خاصیت تناظری برای  $Y$  به دست می دهد. چنین خاصیتی از  $X$  را يك خاصیت توپولوژیک  $X$  می خوانیم.



شکل ۱۳

ممکن است که در جبر نوین مفهوم ایزومورفیسم بین ساختمانهای جبری مانند گروهها و حلقهها را مطالعه کرده باشید. ایزومورفیسم عبارت است از تناظری دوسویی که ساختمانهای جبری مربوطه را حفظ می کند. مفهوم مشابه آن در توپولوژی هومئومورفیسم است؛ یعنی تناظری دوسویی که ساختمانهای توپولوژیک مربوطه را حفظ می کند.

اکنون فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  يك نگاشت پیوسته يك به يك باشد که در آن  $X$  و  $Y$  دو فضای توپولوژیک اند. فرض کنیم  $Z$  مجموعه تصویر  $f(X)$  باشد و آن را به عنوان يك زیر فضای  $Y$  در نظر می گیریم. در این صورت، تابع  $f': X \rightarrow Z$  که از تحدید حوزه مقادیر  $f$  به دست می آید دوسویی است. اگر  $f'$  هومئومورفیسمی بین  $X$  و  $Z$  باشد، می گوئیم نگاشت  $f: X \rightarrow Z$  يك نشاننده توپولوژیک، یا مختصراً يك نشاننده  $X$  در  $Y$ ، است.

مثال ۴. تابع  $f: R \rightarrow R$  با ضابطه  $f(x) = 3x + 1$  هومئومورفیسم است (شکل ۱۴). اگر تابع  $g: R \rightarrow R$  را با ضابطه

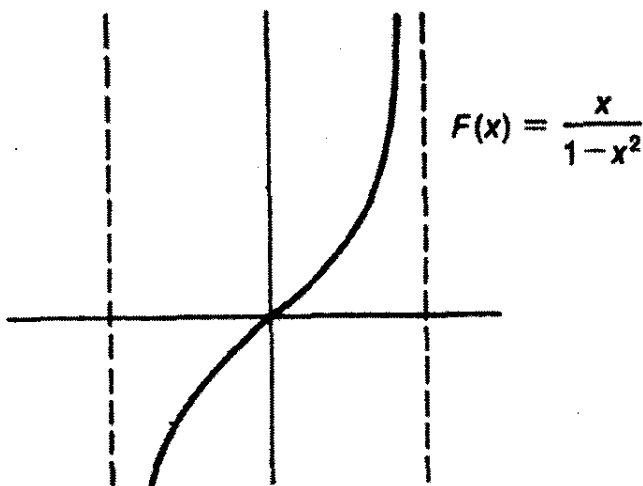
$$g(y) = \frac{1}{3}(y - 1)$$

تعریف کنیم، به آسانی می توان تحقیق کرد که به ازای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$ ،  $f(g(y)) = y$ ،  $g(f(x)) = x$ . از اینجا نتیجه می شود که  $f$  دوسویی است و  $g = f^{-1}$ ، پیوستگی  $f$  و  $g$  نتیجه شناخته شدهای از قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

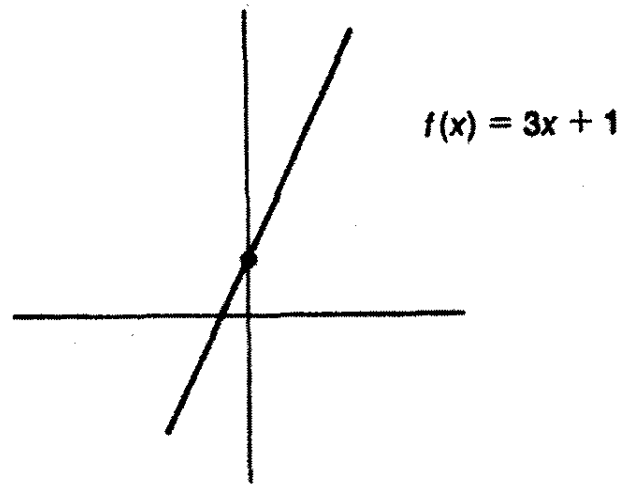
مثال ۵. تابع  $F: (-1, 1) \rightarrow R$  با ضابطه

$$F(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

هومئومورفیسم است (شکل ۱۵). قبلاً در بخش ۱-۳ مثال ۹ تذکر دادیم که  $F$  تناظری



شکل ۱۵



شکل ۱۴

دوسویی و حافظ ترتیب است؛ معکوس آن تابع  $G$  است باضابطه

$$G(y) = \frac{2y}{1 + (1 + 4y^2)^{1/2}}$$

به دو طریق می توان همئومورفیسم بودن  $F$  را ثابت کرد. يك طریق این است که چون  $F$  حافظ ترتیب و دوسویی است، هر عضو پایه توپولوژی ترتیبی در  $(-1, 1)$  را بريك عضو پایه توپولوژی ترتیبی در  $R$  می نگارد، و بعکس. در نتیجه،  $F$  خودبخود همئومورفیسمی بین  $(-1, 1)$  و  $R$  است (هر دو فضا با توپولوژی ترتیبی در نظر گرفته شده اند). چون توپولوژی ترتیبی در  $(-1, 1)$  با توپولوژی معمولی (زیر فضایی) آن مساوی است،  $F$  همئومورفیسمی بین  $(-1, 1)$  و  $R$  است.

طریقه دوم اثبات همئومورفیسم بودن  $F$  این است که با استفاده از پیوستگی توابع جبری و پیوستگی تابع ریشه دوم، ثابت کنیم که  $F$  و  $G$  هر دو پیوسته اند؛ و این هر دو از احکام شناخته شده حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند.

مثال ۶. تابع دوسویی  $f: X \rightarrow Y$  می تواند پیوسته باشد بی آنکه همئومورفیسم باشد. يك نمونه از این گونه چنین است: فرض کنیم  $S^1$  دایره واحد،

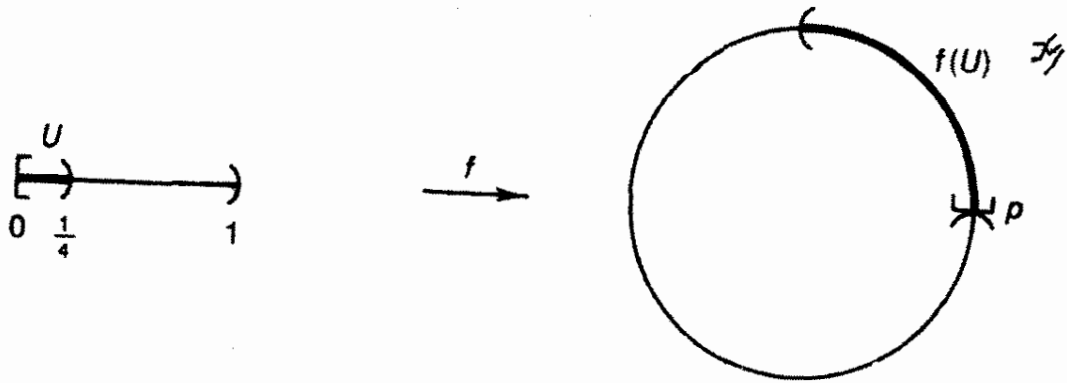
$$S^1 = \{x \times y \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

باشد که به عنوان يك زیر فضای  $R^2$  ملحوظ می شود، و فرض کنیم

$$f: [0, 1) \rightarrow S^1$$

نکاشتی با ضابطه  $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  باشد. پیوستگی و دوسویی بودن  $f$  از خواص شناخته شده توابع مثلثاتی نتیجه می شود. ولی تابع  $f^{-1}$  پیوسته نیست. مثلاً،

تصویر مجموعه باز  $U = [0, 1/4)$  از حوزه تعریف تحت  $f$  در  $S^1$  باز نیست، زیرا هیچ مجموعه باز  $V$  مانند  $R^2$  وجود ندارد که شامل  $p = f(0)$  باشد و  $V \cap S^1 \subset f(U)$  (شکل ۱۶).



شکل ۱۶

مثال ۷. تابع

$$g: [0, 1) \rightarrow R^2$$

را که از گسترش حوزه مقادیر تابع  $f$  در مثال قبل به دست آمده است در نظر بگیرید. نگاشت  $g$  مثالی است از نگاشت پیوسته یک به یکی که نشانده نیست.

### ساختن توابع پیوسته

برای ساختن توابع پیوسته از یک فضای توپولوژیک به یک فضای دیگر چگونه باید عمل کرد؟ در آنالیز، روشهایی برای این منظور معمول است که بعضی از آنها قابل تعمیم به فضاهای توپولوژیک دلخواه هستند، و بقیه چنین نیستند. نخست چند روش را که در فضاهای توپولوژیک دلخواه نیز برقرارند بررسی می کنیم، و تحقیق در سایرین را به آتیّه موکول می کنیم.

۲.۷. قضیه (قواعدی برای ساختن توابع پیوسته) فرض کنیم  $Z, Y, X$

فضاها توپولوژیک دلخواهی باشند.

(الف) (تابع ثابت) اگر تابع  $f: X \rightarrow Y$  همه  $X$  را فقط بر یک نقطه  $Y$  از  $Y$

بنگارد آنگاه  $f$  پیوسته است.

(ب) (تابع احتوا) اگر  $A$  زیر فضایی از  $X$  باشد آنگاه تابع احتوا

$X \rightarrow A$  پیوسته است.

(پ) (تابع مرکب) اگر  $f: X \rightarrow Y$  و  $g: Y \rightarrow Z$  پیوسته باشند آنگاه

نگاشت  $g \circ f: X \rightarrow Z$  نیز پیوسته است.

(ت) (تحدید حوزه تعریف) اگر تابع  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته و  $A$  زیر فضایی از  $X$  باشد

آنگاه تابع  $f|A: A \rightarrow Y$  نیز پیوسته است.

(ث) (تحدید یا گسترش حوزه مقادیر) فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته باشد. اگر  $Z$  زیر فضایی از  $Y$  و حاوی  $f(X)$  باشد آنگاه تابع  $g: X \rightarrow Z$  نیز که از تحدید حوزه مقادیر  $f$  به دست آمده پیوسته است. اگر  $Z$  یک فضا و  $Y$  زیر فضایی از آن باشد آنگاه تابع  $h: X \rightarrow Z$  که از گسترش حوزه مقادیر  $f$  به دست آمده پیوسته است.

(ج) (بیان موضعی پیوستگی) نگاشت  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته است اگر  $X$  را بتوان به صورت اجتماع مجموعه‌های باز  $U_\alpha$  نوشت به طوری که به ازای هر  $\alpha$  تابع  $f|U_\alpha$  پیوسته باشد.

(ج) (پیوستگی در هر نقطه) نگاشت  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته است اگر به ازای هر  $x \in X$  و همسایگی  $f(x)$  مانند  $V$ ، یک همسایگی  $x$  مانند  $U$  یافت شود به طوری که  $f(U) \subset V$ .

اگر شرط (ج) در مورد نقطه خاص  $x$  از  $X$  برقرار باشد، گوئیم  $f$  در نقطه  $x$  پیوسته است.

برهان. (الف) فرض کنیم به ازای هر  $x$  از  $X$  داشته باشیم  $f(x) = y$  و مجموعه  $V$  در فضای  $Y$  باز باشد. در این صورت بر حسب آنکه  $V$  شامل  $y$  باشد یا نباشد، مجموعه  $f^{-1}(V)$  برابر  $X$  یا  $\emptyset$  است. در هر حال،  $f^{-1}(V)$  باز است.

(ب) اگر  $U$  در  $X$  باز باشد آنگاه  $f^{-1}(U) = U \cap A$  که، بنابر تعریف توپولوژی زیر فضایی، در  $A$  باز است.

(پ) اگر  $U$  در  $Z$  باز باشد آنگاه  $g^{-1}(U)$  در  $Y$  و  $f^{-1}(g^{-1}(U))$  در  $X$  باز است. اما، بنابر قواعد نظریه مقدماتی مجموعه‌ها، داریم

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U).$$

(ت) تابع  $f|A$  برابر است با تابع مرکب نگاشت احتوای  $z: A \rightarrow X$  و نگاشت  $f: X \rightarrow Y$  که هر دو پیوسته‌اند.

(ث) فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته باشد، و  $f(X) \subset Z \subset Y$ . ثابت می‌کنیم که تابع  $g: X \rightarrow Z$  نیز که از  $f$  به دست می‌آید پیوسته است. فرض کنیم  $B$  در  $Z$  باز باشد. در این صورت مجموعه باز  $U$  مانند  $U$  هست به طوری که  $B = Z \cap U$ . چون  $Z$  شامل  $f(X)$  است، بنابر قواعد نظریه مقدماتی مجموعه‌ها،

$$f^{-1}(U) = g^{-1}(B)$$

پس از آنجا که  $f^{-1}(U)$  باز است،  $g^{-1}(B)$  نیز چنین است. حال فرض کنیم  $Y$  زیر فضایی از  $Z$  باشد. برای اثبات پیوستگی تابع  $h: X \rightarrow Z$  ملاحظه می‌کنیم که  $h$  تابع مرکب نگاشت  $f: X \rightarrow Y$  و نگاشت احتوای  $z: Y \rightarrow Z$  است.

(ج) بنا بر فرض،  $X$  را می‌توان به صورت اجتماعی از مجموعه‌های باز  $U_\alpha$  نوشت که به ازای هر  $\alpha$  تابع  $f|_{U_\alpha}$  پیوسته است. فرض کنیم  $V$  مجموعه باز دلخواهی در  $Y$  باشد. در این صورت،

$$f^{-1}(V) \cap U_\alpha = (f|_{U_\alpha})^{-1}(V),$$

زیرا، هر دو طرف تساوی نمایش مجموعه همه  $x$ هایی هستند که به  $U_\alpha$  تعلق دارند و  $f(x) \in V$ . چون  $f|_{U_\alpha}$  پیوسته است، این مجموعه در  $U_\alpha$ ، و در نتیجه در  $X$  باز است. اما

$$f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha (f^{-1}(V) \cap U_\alpha).$$

(ج) فرض کنیم  $V$  مجموعه بازی در  $Y$  و  $x$  نقطه دلخواهی از  $f^{-1}(V)$  باشد. در این صورت،  $f(x) \in V$ ، پس، بنا بر فرض، یک همسایگی  $x$  مانند  $U_x$  هست که  $f(U_x) \subset V$ . پس  $U_x \subset f^{-1}(V)$ . بنا بر این،  $f^{-1}(V)$  را می‌توان به صورت اجتماع مجموعه‌های باز  $U_x$  نوشت. در نتیجه،  $f^{-1}(V)$  باز است.  $\square$

۳.۷ قضیه (لم چسب) فرض کنیم  $X = A \cup B$ ،  $A$  و  $B$  در  $X$  بسته باشند. بعلاوه، فرض کنیم  $f: A \rightarrow Y$  و  $g: B \rightarrow Y$  پیوسته باشند. در این صورت، اگر به ازای هر  $x \in A \cap B$  داشته باشیم  $f(x) = g(x)$  آنگاه می‌توان  $f$  و  $g$  را با هم در آمیخت تا تابع پیوسته  $h: X \rightarrow Y$  را به دست آورد که به ازای  $x \in A$  به صورت  $h(x) = f(x)$  و به ازای  $x \in B$  به صورت  $h(x) = g(x)$  تعریف می‌شود.

برهان. فرض کنیم  $C$  زیر مجموعه بسته‌ای از  $Y$  باشد. بنا بر قواعد نظریه مقدماتی مجموعه‌ها

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C).$$

چون  $f$  پیوسته است،  $f^{-1}(C)$  در  $A$  و در نتیجه در  $X$  بسته است. به همین قیاس،  $g^{-1}(C)$  در  $B$  و در نتیجه در  $X$  بسته است. بنا بر این، اجتماع آنها، یعنی  $h^{-1}(C)$  نیز در  $X$  بسته است.  $\square$

این قضیه وقتی که  $A$  و  $B$  در  $X$  باز باشند نیز برقرار است؛ در واقع این مطلب حالت خاصی از «بیان موضعی پیوستگی» است [قضیه ۲.۷ (ج)].

مثال ۸. تابع  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$h(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ \frac{x}{2} & , x \geq 0 \end{cases}$$

هر یک از دو «تکه» این تعریف، تابعی است پیوسته و مقادیر این دو تابع در نقاط مشترک

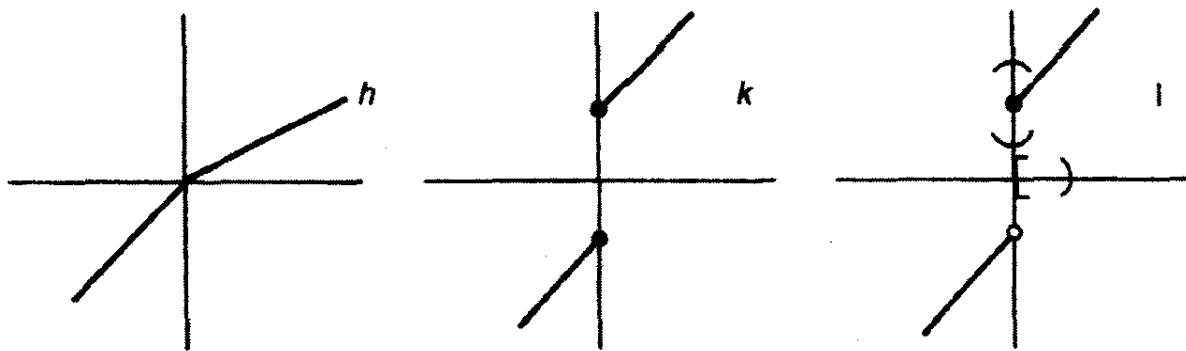
حوزه تعریفشان، که مجموعهٔ تک‌عضوی  $\{0\}$  است، مساوی هستند. چون حوزه‌های تعریف آنها در  $R$  بسته است، تابع  $h$  پیوسته است (شکل ۱۷). باید توجه داشت برای اینکه اصلاً تابعی داشته باشیم مساوی بودن مقادیر «دوتکه» تابع  $h$  در نقاط مشترک حوزه تعریف آنها ضروری است. مثلاً، معادلات

$$k(x) = \begin{cases} x-2 & , x \leq 0 \text{ به‌ازای} \\ x+2 & , x \geq 0 \text{ به‌ازای} \end{cases}$$

تابعی را تعریف نمی‌کنند. از طرف دیگر، برای تضمین پیوستگی، لازم است که محدودیت‌هایی بر مجموعه‌های  $A$  و  $B$  اعمال شود. مثلاً، معادلات

$$l(x) = \begin{cases} x-2 & , x < 0 \text{ به‌ازای} \\ x+2 & , x \geq 0 \text{ به‌ازای} \end{cases}$$

تابعی مانند  $l$  را تعریف می‌کنند که  $R$  را در  $R$  می‌نگارد، و هر «دوتکه» آن پیوسته‌اند. اما  $l$  پیوسته نیست، زیرا تصویر عکس بازه  $(1, 3)$  بازه  $[0, 1)$  است که باز نیست.



شکل ۱۷

۴.۷. قضیه (نگاشت‌هایی بتوی فضای حاصل‌ضربی) فرض کنیم تابع  $f: A \rightarrow X \times Y$  با ضابطه

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a))$$

داده شده باشد. در این صورت،  $f$  پیوسته است اگر و فقط اگر

$$f_1: A \rightarrow X \text{ و } f_2: A \rightarrow Y$$

پیوسته باشند.

نگاشت‌های  $f_1$  و  $f_2$  را توابع مختصی  $f$  می‌خوانند.

برهان. فرض کنیم  $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$  و  $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$  بترتیب نگاشت‌های



تصویری بروی عوامل اول و دوم باشند. این نگاشتها پیوسته اند، زیرا

$$\pi_1^{-1}(U) = U \times Y \quad \text{و} \quad \pi_2^{-1}(V) = X \times V$$

و اگر  $U$  و  $V$  باز باشند، این مجموعه‌ها نیز باز خواهند بود. ملاحظه کنید که به ازای  $a \in A$

$$f_1(a) = \pi_1(f(a)) \quad \text{و} \quad f_2(a) = \pi_2(f(a))$$

اگر تابع  $f$  پیوسته باشد آنگاه  $f_1$  و  $f_2$  توابع مرکبی از توابع پیوسته هستند و در نتیجه پیوسته اند. بعکس، فرض کنیم  $f_1$  و  $f_2$  پیوسته باشند. ثابت می‌کنیم که به ازای هر عضو پایه توپولوژی  $X \times Y$  مانند  $U \times V$ ، تصویر عکس این عضو، یعنی  $f^{-1}(U \times V)$ ، باز است. بازه‌ای مانند  $a$  متعلق است به  $f^{-1}(U \times V)$  اگر و فقط اگر  $f(a) \in U \times V$ ، یعنی  $f_1(a) \in U$  و  $f_2(a) \in V$ . بنابراین،

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V).$$

چون مجموعه‌های  $f_1^{-1}(U)$  و  $f_2^{-1}(V)$  بازند، مقطع آنها نیز باز است.  $\square$

برای تشخیص پیوستگی نگاشتی مانند  $f: A \times B \rightarrow X$ ، که حوزه تعریف آن فضای حاصل ضربی است، ضابطه مفیدی در دست نیست. ممکن است گمان رود که اگر  $f$  نسبت به هر یک از متغیرها به طور جداگانه پیوسته باشد خود نیز پیوسته است، ولی این گمان نادرست است (تمرین ۱۳).

**مثال ۹.** در حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال)، یک منحنی پارامتری شده صفحه به صورت نگاشتی پیوسته مانند  $f: [a, b] \rightarrow R^2$  تعریف می‌شود. این نگاشت اغلب به صورت  $f(t) = (x(t), y(t))$  بیان می‌شود، و کرارا از این امر استفاده می‌شود که اگر  $x$  و  $y$  توابعی پیوسته از  $t$  باشند،  $f$  نیز تابعی پیوسته از  $t$  است. همچنین یک میدان برداری در صفحه مانند

$$\begin{aligned} v(x, y) &= P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} \\ &= (P(x, y), Q(x, y)) \end{aligned}$$

پیوسته خوانده می‌شود اگر توابع  $P$  و  $Q$  هر دو پیوسته باشند، یا به بیان معادل، هر گاه  $v$  به عنوان نگاشتی از  $R^2$  در  $R^2$  پیوسته باشد. این دو گزاره، هر دو حالت‌های خاصی از قضیه بالا هستند.

روشی که در آنالیز برای ساختن توابع پیوسته بسیار معمول است، تشکیل دادن حاصل جمع، تفاضل، حاصل ضرب، یا خارج قسمت توابع پیوسته حقیقی است. در این مورد قضیه استانده زیر برقرار است که اگر  $g: X \rightarrow R$ ،  $f$  پیوسته باشد آنگاه  $f+g$ ،  $f-g$ ، و  $f \cdot g$  پیوسته اند، و  $f/g$  پیوسته است اگر به ازای هر  $x$ ،

$g(x) \neq 0$ . در بخش ۲-۱۵ این قضیه را در نظر خواهیم گرفت.

برای ساختن توابع پیوسته روش شناخته شده دیگری در آنالیز هست، و آن حدگیری از دنباله‌ای نامتناهی از توابع است. در این مورد قضیه‌ای هست بسدین مضمون که اگر دنباله‌ای نامتناهی از توابع حقیقی پیوسته از یک متغیر حقیقی به طور یکنواخت به تابع حدی  $f$  همگرا باشد، آنگاه این تابع حدی ضرورتاً پیوسته است. این قضیه به قضیه حد یکنواخت موسوم است. مثلاً، برای اثبات پیوستگی توابع مثلثاتی، هنگامی که سینوس و کسینوس به طور دقیق به صورت سریهای نامتناهی تعریف می‌شوند، از این قضیه استفاده می‌کنیم. این قضیه در مورد نگاشتهایی از فضای توپولوژیک دلخواه  $X$  بتوی فضای متری  $Y$  تعمیم می‌یابد. در بخش ۲-۱۵ آن را ثابت خواهیم کرد.

## تمرینها

۱. ثابت کنید که برای توابعی مانند  $f: R \rightarrow R$ ، تعریف پیوستگی به وسیله  $\varepsilon - \delta$  مستلزم تعریف آن بر حسب مجموعه‌های باز است.

۲. فرض کنید  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته باشد. اگر  $x$  یک نقطه حدی زیرمجموعه  $A$  از  $X$  باشد، آیا الزاماً  $f(x)$  هم یک نقطه حدی  $f(A)$  است؟

۳. فرض کنید  $X$  و  $X'$  نمایش مجموعه‌ای با دو توپولوژی مختلف، بترتیب  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{C}'$  باشند، و  $i: X' \rightarrow X$  تابع همانی باشد.

(الف) ثابت کنید که  $i$  پیوسته است اگر و فقط اگر  $\mathcal{C}'$  ظریفتر از  $\mathcal{C}$  باشد.

(ب) ثابت کنید که  $i$  هم‌ثومورفیس است اگر و فقط اگر  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ .

(پ) به ازای  $n \in \mathbb{Z}_+$ ، توپولوژی  $\mathcal{C}_n$  را در  $R$  با افزودن مجموعه  $\{n\}$  عضوی

به پایه معمولی مجموعه‌های باز تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که  $(R, \mathcal{C}_1)$  و

$(R, \mathcal{C}_2)$  هم‌ثومورف‌اند، ولی  $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$ .

۴. به ازای  $x_0 \in X$  و  $y_0 \in Y$ ، ثابت کنید که نگاشتهای  $f: X \rightarrow X \times Y$

$g: Y \rightarrow X \times Y$  که با ضابطه‌های

$$f(x) = x \times y_0 \quad \text{و} \quad g(y) = x_0 \times y$$

تعریف شده‌اند نشانده هستند.

۵. (الف) فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو مجموعه مرتب با توپولوژی ترتیبی باشند. ثابت کنید

که اگر نگاشت  $f: X \rightarrow Y$  دوسویی و حافظ ترتیب باشد، هم‌ثومورفیس است.

(ب) فرض کنید  $n \in \mathbb{Z}_+$ ، و بدانیم که به ازای هر عدد حقیقی  $x \geq 0$ ، عدد

حقیقی یکتای  $b \geq 0$  وجود دارد که  $b^n = x$ . عدد  $b$  را به  $\sqrt[n]{x}$  نمایش می‌دهیم.

ثابت کنید که تابع  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  با ضابطه  $g(x) = \sqrt[n]{x}$  پیوسته است.

(پ) فرض کنید  $X$  زیر فضای  $(-\infty, -1) \cup [0, \infty)$  از  $R$  باشد. تابع  $f: X \rightarrow R$  را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , x < -1 \text{ به ازای} \\ x & , x \geq 0 \text{ به ازای} \end{cases}$$

ثابت کنید که  $f$  دوسویی، حافظ ترتیب، و پیوسته است. آیا  $f$  همثومورفیسم است؟

۶. ثابت کنید که زیر فضای  $(a, b)$  از  $R$  با  $(0, 1)$  همثومورف است، و زیر فضای  $[a, b]$  از  $R$  با  $[0, 1]$ .

۷. تابعی مانند  $f: R \rightarrow R$  بیابید که فقط در یک نقطه پیوسته باشد.

۸. (الف) فرض کنید  $f: R \rightarrow R$  «از راست پیوسته باشد»، یعنی به ازای هر  $a \in R$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

ثابت کنید که  $f$  به عنوان تابعی از  $R_1$  به  $R$  پیوسته است.

(ب) کدام دسته از توابع  $f: R \rightarrow R$  به عنوان نگاشتی از  $R$  به  $R_1$  پیوسته‌اند؟ و کدام دسته به عنوان توابعی از  $R_1$  به  $R_1$ ؟

۹. فرض کنید  $Y$  مجموعه‌ای مرتب با توپولوژی ترتیبی باشد، و توابع  $f$  و  $g$  از  $X$  به  $Y$  پیوسته باشند.

(الف) ثابت کنید که مجموعه  $\{x \mid f(x) \leq g(x)\}$  در  $X$  بسته است.

(ب) فرض کنید  $h: X \rightarrow Y$  با ضابطه

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

تعریف شده باشد. ثابت کنید که  $h$  پیوسته است. [داهنمایی: از لم چسب استفاده کنید.]

۱۰. فرض کنید  $\{A_\alpha\}$  گردابه‌ای از زیرمجموعه‌های  $X$  باشد،  $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$ ،  $f: X \rightarrow Y$ ، و به ازای هر  $\alpha$ ،  $f|_{A_\alpha}$  پیوسته باشد.

(الف) ثابت کنید که اگر گردابه  $\{A_\alpha\}$  متناهی و هر مجموعه  $A_\alpha$  بسته باشد آنگاه  $f$  پیوسته است.

(ب) مثالی بیابید که در آن گردابه  $\{A_\alpha\}$  شمارا و هر  $A_\alpha$  بسته باشد، اما  $f$  پیوسته نباشد.

(پ) خانواده اندیسدار  $\{A_\alpha\}$  را موضعا متناهی گویند اگر هر نقطه  $x$  از  $X$  همسایگی‌ای داشته باشد که  $A_\alpha$ ها را تنها به ازای تعدادی متناهی از مقادیر  $\alpha$  قطع

کند. ثابت کنید که اگر خانواده  $\{A_\alpha\}$  موضعاً متناهی و هر  $A_\alpha$  بسته باشد،  $f$  پیوسته است.

۱۱. فرض کنید  $f: A \rightarrow B$  و  $g: C \rightarrow D$  توابعی پیوسته باشند. تابع  $f \times g: A \times C \rightarrow B \times D$  را باضابطه

$$(f \times g)(a \times c) = f(a) \times g(c)$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که  $f \times g$  پیوسته است.

۱۲. فرض کنید  $F: X \times Y \rightarrow Z$ . تابع  $F$  را نسبت به هر یک از متغیرها پیوسته خوانیم در صورتی که به ازای هر  $y_0 \in Y$  در  $Y$ ، نگاشت  $h: X \rightarrow Z$  باضابطه  $h(x) = F(x \times y_0)$  پیوسته باشد، و به ازای هر  $x_0 \in X$  در  $X$ ، نگاشت  $k: Y \rightarrow Z$  باضابطه  $k(y) = F(x_0 \times y)$  نیز پیوسته باشد. ثابت کنید که اگر  $F$  پیوسته باشد آنگاه نسبت به هر یک از متغیرها پیوسته است.

۱۳. فرض کنید  $F: R \times R \rightarrow R$  باضابطه

$$F(x \times y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , x \times y \neq 0 \times 0 \text{ به ازای} \\ 0 & , x \times y = 0 \times 0 \text{ به ازای} \end{cases}$$

تعریف شده باشد.

(الف) ثابت کنید که  $F$  نسبت به هر یک از متغیرها پیوسته است.

(ب) تابع  $g: R \rightarrow R$  را که باضابطه  $g(x) = F(x \times x)$  تعریف شده است محاسبه کنید.

(پ) ثابت کنید که  $F$  پیوسته نیست.

۱۴. فرض کنید  $A \subset X$  و تابع  $f: A \rightarrow Y$  پیوسته و  $Y$  هاوسدورف باشد. ثابت کنید که اگر  $f$  را بتوان به تابعی پیوسته مانند  $g: \bar{A} \rightarrow Y$  گسترش داد آنگاه  $g$  به طور یکتا به وسیله  $f$  مشخص می‌شود.

۱۵. یادآوری می‌کنیم که نگاشتی مانند  $f: X \rightarrow Y$  را در صورتی نگاشت باز خوانیم که به ازای هر مجموعه باز  $U$  که در  $X$  باز است، مجموعه  $f(U)$  در  $Y$  باز باشد. کدامیک از احکام (الف) - (ج) قضیه ۲.۷ در صورتی که در همه جا کلمه «باز» را به جای «پیوسته» قرار دهیم برقرار می‌ماند؟

## ۸-۲ توپولوژی حاصل ضربی

در بنیه این فصل به روشهای گوناگون ساختن توپولوژی در مجموعه‌ها باز می‌گردیم.

پیش از این، توپولوژی ای در حاصل ضرب دو فضای توپولوژیک  $X \times Y$  تعریف کردیم. در این بخش، می‌خواهیم این تعریف را به حاصل ضربهای دکارتی دلخواه تعمیم دهیم. برای این منظور دو طریق موجود است؛ آن را که بعداً نقش مهمتری خواهد داشت توپولوژی حاصل ضربی می‌نامیم.

یک طریقه ساختن یک توپولوژی در یک فضای حاصل ضربی روش زیر است؛ این طریقه تعمیم مستقیم همان طریقه‌ای است که برای تعریف یک پایه برای توپولوژی حاصل ضربی در  $X \times Y$  به کار بردیم.

تعریف. فرض کنیم  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$  خانواده‌اندیس‌داری از فضاهای توپولوژیک باشد. گردایه همه مجموعه‌های به صورت

$$\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$$

را که به ازای هر  $\alpha$ ، مجموعه  $U_\alpha$  در  $X_\alpha$  باز است به عنوان یک پایه برای توپولوژی ای در فضای حاصل ضربی

$$\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$$

اختیار می‌کنیم. توپولوژی تولید شده به وسیله این پایه را توپولوژی جعبه‌ای می‌نامیم.

این گردایه در شرط اول پایه صدق می‌کند، زیرا  $\prod X_\alpha$  خود یک عضو پایه است. در شرط دوم پایه هم صدق می‌کند، زیرا مقطع هر دو عضو پایه عضوی دیگر از پایه است:

$$(\prod_{\alpha \in J} U_\alpha) \cap (\prod_{\alpha \in J} V_\alpha) = \prod_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap V_\alpha).$$

چنانکه خواهیم دید، این توپولوژی برای فضای  $\prod X_\alpha$  سودمندترین توپولوژی نیست. طریقه‌ای دیگر برای تعمیم تعریف سابق، تعمیم تعریف بر حسب زیر پایه است. فرض

کنیم

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow X_\beta$$

تابعی باشد که به هر عضو فضای حاصل ضربی، مختص  $\beta$  آن را نظیر می‌کند،

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta;$$

این تابع را نگاشت تصویری نظیر اندیس  $\beta$  می‌خوانند.

تعریف. فرض کنیم  $\mathcal{S}_\beta$  نمایش گردایه

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \mid U_\beta \text{ در } X_\beta \text{ باز است}\}$$

و  $\mathcal{S}$  نمایش اجتماع این گردایه‌ها باشد،

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta$$

در این صورت، توپولوژی تولید شده به وسیله زیر پایه  $\mathcal{S}$  را توپولوژی حاصل ضربی می خوانیم. در این توپولوژی،  $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$  را فضای حاصل ضربی می نامیم.

چه تفاوتی بین توپولوژی حاصل ضربی و توپولوژی جعبه ای موجود است؟ برای جواب گفتن به این سؤال آسانتر آن است که به پایه  $\mathcal{B}$  که  $\mathcal{S}$  تولید می کند نظر افکنیم. گردایه  $\mathcal{B}$  عبارت است از همه مقاطع متناهی اعضای  $\mathcal{S}$ . ملاحظه می کنیم که با مقطع گیری از اعضای تنها يك مجموعه  $\mathcal{B}$  چیز جدیدی عاید نمی شود، زیرا

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap \pi_\beta^{-1}(V_\beta) = \pi_\beta^{-1}(U_\beta \cap V_\beta);$$

مقطع دو عضو  $\mathcal{B}$ ، یا مقطع تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{B}$ ، عضوی است از  $\mathcal{B}$ . مجموعه های تازه وقتی به دست می آیند که اعضای مجموعه های مختلف  $\mathcal{B}$  را باهم تقاطع دهیم. بدین گونه، عضو نوعی پایه  $\mathcal{B}$  را می توان چنین توصیف کرد: فرض کنیم  $\beta_1, \dots, \beta_n$  تعدادی متناهی از اندیسهای متمایز مجموعه اندیس  $J$ ، و به ازای هر  $i = 1, \dots, n$  مجموعه  $U_{\beta_i}$  بازی در  $X_{\beta_i}$  باشد. در این صورت

$$B = \pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap \pi_{\beta_2}^{-1}(U_{\beta_2}) \cap \dots \cap \pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n}),$$

يك عضو  $\mathcal{B}$  است.

برای توصیف این عضو پایه روش دیگری موجود است که بالاخص مفید است. باید توجه داشت که نقطه  $x = (x_\alpha)$  به  $B$  تعلق دارد اگر و فقط اگر مختص  $\beta_1$  آن در  $U_{\beta_1}$  باشد و مختص  $\beta_2$  آن در  $U_{\beta_2}$  و به همین ترتیب. اگر  $\alpha$  یکی از اندیسهای  $\beta_1, \dots, \beta_n$  نباشد، برای مختص  $\alpha$  هیچ محدودیتی نیست. در نتیجه، می توان  $B$  را به صورت حاصل ضرب

$$B = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha,$$

نوشت که در آن به ازای هر  $\alpha$  که متمایز از  $\beta_1, \dots, \beta_n$  باشد،  $U_\alpha$  تمام فضای  $X_\alpha$  است.

آنچه را که گذشت می توان در قضیه ذیل خلاصه کرد:

### ۱۰۸. قضیه (مقایسه توپولوژیهای جعبه ای و حاصل ضربی) يك پایه توپولوژی

جعبه ای در  $\prod X_\alpha$  همه مجموعه های به شکل  $\prod U_\alpha$  است که در آن به ازای هر  $\alpha$ ، مجموعه  $U_\alpha$  در  $X_\alpha$  باز است. توپولوژی حاصل ضربی در  $\prod X_\alpha$  همه مجموعه های به شکل  $\prod U_\alpha$  است، که در آن به ازای هر  $\alpha$ ، مجموعه  $U_\alpha$  در  $X_\alpha$  باز است و به استثنای عده ای متناهی از  $\alpha$  ها،  $U_\alpha$  مساوی  $X_\alpha$  است.

در اینجا دو مطلب بی هیچ واسطه ای روشن است. اولاً برای حاصل ضربهای متناهی مانند  $\prod_{\alpha=1}^n X_\alpha$  این دو توپولوژی دقیقاً یکی هستند. ثانیاً، در حالت کلی، توپولوژی

جعبه‌ای ظرفیت‌راز توپولوژی حاصل ضربی است.

آنچه که به این اندازه روشن نیست، این است که چرا ما توپولوژی حاصل ضربی را بر توپولوژی جعبه‌ای ترجیح می‌دهیم. جواب این سؤال در طی تحقیقمان در توپولوژی آشکار خواهد شد. خواهیم دید که اگر توپولوژی حاصل ضربی را به کار ببریم، تعدادی از قضایای مهم حاصل ضربهای متناهی در مورد حاصل ضرب دلخواه نیز برقرار می‌مانند، اما اگر توپولوژی جعبه‌ای را به کار ببریم چنین نخواهد بود. نتیجه آنکه توپولوژی حاصل ضربی در ریاضیات بسیار مهم است. حال آنکه، توپولوژی جعبه‌ای اهمیت چندانی ندارد؛ و اصولاً ما آن را برای ساختن مثالهای نقض به کار خواهیم برد. بنا بر این:

در مورد هر حاصل ضرب  $\prod X_\alpha$ ، فرض این است که از توپولوژی حاصل ضربی برخوردار است مگر اینکه خلاف آن تصریح شود.

بعضی قضایایی که در مورد  $X \times Y$  ثابت شد، برای حاصل ضرب دلخواه  $\prod X_\alpha$  نیز، بدون اینکه انتخاب توپولوژی تأثیری در آن داشته باشد، برقرار می‌مانند:

۲.۸. قضیه فرض کنیم در فضای  $X_\alpha$  توپولوژی‌ای به وسیله پایه‌ای مانند  $\mathcal{B}_\alpha$  داده شده باشد. گردایه همه مجموعه‌هایی به صورت

$$\prod_{\alpha \in J} B_\alpha$$

که در آن به ازای هر  $\alpha \in J$ ،  $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$  تشکیل پایه‌ای برای توپولوژی جعبه‌ای در  $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$  می‌دهد. گردایه همه مجموعه‌هایی که به صورت فوق باشند و در آنجا به ازای تعدادی متناهی از اندیسهای  $\alpha$ ،  $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$  و به ازای بقیه اندیسها  $B_\alpha = X_\alpha$ ، تشکیل پایه‌ای برای توپولوژی حاصل ضربی در  $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$  می‌دهد.

۳.۸. قضیه فرض کنیم به ازای هر  $\alpha \in J$ ،  $A_\alpha$  زیرفضایی از  $X_\alpha$  باشد. در این صورت اگر حاصل ضربهای  $\prod A_\alpha$  هر دو دارای توپولوژی جعبه‌ای و یا هر دو دارای توپولوژی حاصل ضربی باشند آنگاه  $\prod A_\alpha$  زیرفضایی از  $\prod X_\alpha$  است.

۴.۸. قضیه اگر فضای  $X_\alpha$  فضایی هاوسدورف باشد آنگاه  $\prod X_\alpha$ ، چه با توپولوژی جعبه‌ای و چه با توپولوژی حاصل ضربی، فضایی هاوسدورف است.

اثبات این قضایا نظیر برهانهایی است که قبلاً در مورد فضای  $X \times Y$  ارائه شد، بنا بر این بیان جزئیات آنها را برعهده خواننده می‌گذاریم.

تا اینجا هنوز هیچ دلیلی برای ترجیح توپولوژی حاصل ضربی بر توپولوژی جعبه‌ای اقامه نشده است. اولین تفاوت زمانی پدید می‌آید که می‌خواهیم قضایای قبلی در مورد پیوستگی توابع در فضاهای حاصل ضربی را تعمیم دهیم. اینک قضیه‌ای می‌آوریم که اگر  $\prod X_\alpha$  توپولوژی جعبه‌ای داشته باشد برقرار نیست.

۵.۸. قضیه فرض کنیم  $f: A \rightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$  تابعی باشد باضابطه

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J},$$

که در آن به ازای هر  $\alpha$ ،  $f_\alpha: A \rightarrow X_\alpha$ ، و  $\prod X_\alpha$  دارای توپولوژی حاصل ضربی باشد. در این صورت تابع  $f$  پیوسته است اگر و فقط اگر هر  $f_\alpha$  پیوسته باشد.

برهان. فرض کنیم  $\pi_\beta$  تصویر این حاصل ضرب بر روی عامل  $\beta$  آن باشد. تابع  $\pi_\beta$  پیوسته است، زیرا اگر  $U_\beta$  در  $X_\beta$  باز باشد، مجموعه  $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$  یک عضو زیر-پایه توپولوژی حاصل ضربی در  $\prod X_\alpha$  است. حال فرض کنیم تابع  $f: A \rightarrow \prod X_\alpha$  پیوسته باشد. تابع  $f_\beta$  برابر است با تابع مرکب  $\pi_\beta \circ f$ ، که چون ترکیب دو تابع پیوسته می باشد، پس پیوسته است.

بعکس، فرض کنیم هر تابع مختصی  $f_\alpha$  پیوسته باشد. برای اثبات اینکه  $f$  پیوسته است، کافی است ثابت کنیم که تصویر عکس هر عضو زیر پایه تحت  $f$  در  $A$  باز است؛ هنگامی که توابع پیوسته را تعریف می کردیم، این موضوع را خاطر نشان ساختیم. یک عضو نوعی زیر پایه توپولوژی حاصل ضربی در  $\prod X_\alpha$  مجموعه ای به صورت  $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$  است، که در آن  $\beta$  یکی از اندیسها و  $U_\beta$  در  $X_\beta$  باز است. حال چون  $f_\beta = \pi_\beta \circ f$ ، در نتیجه

$$f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)) = f_\beta^{-1}(U_\beta).$$

و بنابر پیوستگی  $f_\beta$ ، این مجموعه در  $A$  باز است، و این همان است که می خواستیم.  $\square$

در صورت به کار بردن توپولوژی جعبه ای چرا این قضیه برقرار نمی ماند؟ شاید قانع کننده ترین کاری که می توان انجام داد بررسی یک مثال است. مثال ۲ زیرین را ملاحظه کنید.

مثال ۱. فضای  $n$  بعدی اقلیدسی  $R^n$  را در نظر بگیرید. همه بازه های باز  $R$  تشکیل پایه ای برای  $R$  می دهند. بنابراین، یک پایه توپولوژی  $R^n$  از همه حاصل ضربهایی به صورت

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n).$$

تشکیل می شود. چون  $R^n$  حاصل ضربی متناهی است، توپولوژیهای حاصل ضربی و جعبه ای آن برهم منطبق اند. هرگاه  $R^n$  مد نظر باشد، فرض بر این است که با این توپولوژی داده شده است، مگر اینکه خلافش تصریح شود.

مثال ۲. اینک فضای  $R^\omega$  را، که عبارت است از حاصل ضرب نامتناهی شمارای  $R$  در خودش، در نظر می گیریم. به خاطر داریم که:

$$R^\omega = \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} X_n,$$



که در آن به ازای هر  $n, X_n = R$ . اکنون تابع  $f: R \rightarrow R^\omega$  را با ضابطه

$$f(t) = (t, t, t, \dots)$$

تعریف می‌کنیم که تابع مختصی  $n$ م آن تابع  $f_n(t) = t$  است. هر یک از توابع مختصی  $f_n: R \rightarrow R$  پیوسته است؛ بنابراین، در صورتی که  $R^\omega$  از توپولوژی حاصل ضربی برخوردار باشد، تابع  $f$  پیوسته است. ولی اگر  $R^\omega$  از توپولوژی جمعیه‌ای برخوردار باشد،  $f$  پیوسته نیست. مثلاً، عضو پایه

$$B = (-1, 1) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \times \dots$$

از توپولوژی جمعیه‌ای را در نظر می‌گیریم. مدعی هستیم که  $f^{-1}(B)$  در  $R$  باز نیست. زیرا اگر چنین باشد،  $f^{-1}(B)$  باید حاوی بازه‌ای به مرکز  $0$  مانند  $(-\delta, \delta)$  باشد. به عبارت دیگر، باید داشته باشیم  $f((-\delta, \delta)) \subset B$ . حال اگر  $\pi_n$  را برد و طرف رابطه اخیر اعمال کنیم نتیجه می‌شود که به ازای هر  $n$ ،

$$f_n((-\delta, \delta)) = (-\delta, \delta) \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

که این تناقض است.

### تمرینها

۱. قضیه ۲.۸ را ثابت کنید.
۲. قضیه ۳.۸ را ثابت کنید.
۳. قضیه ۴.۸ را ثابت کنید.
۴. ثابت کنید که  $(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$  با  $X_1 \times \dots \times X_n$  هم‌شومورف است.
۵. فرض کنیم  $\{X_\alpha\}$  خانواده‌ای از فضاها باشد، و به ازای هر  $\alpha, A_\alpha \subset X_\alpha$ .  
(الف) ثابت کنید که اگر  $A_\alpha$  در  $X_\alpha$  بسته باشد آنگاه  $\prod A_\alpha$  در  $\prod X_\alpha$  بسته است.  
(ب) ثابت کنید که

$$\overline{\prod A_\alpha} = \prod \overline{A_\alpha}$$

(پ) اگر توپولوژی جمعیه‌ای جایگزین توپولوژی حاصل ضربی شود، کدامیک از گزاره‌های (الف) و (ب) برقرار می‌ماند؟

۶. دنباله  $(x_n)$  از نقاط  $X$  را همگرا به نقطه  $x$  از  $X$  خوانیم در صورتی که به ازای هر همسایگی  $U$  از  $x$ ،  $N$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر  $n \geq N$ ،

$x_n \in U$ . فرض کنیم  $(x_n)$  دنباله‌ای از نقاط فضای حاصل ضربی  $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$  باشد. ثابت کنید که دنباله  $(x_n)$  همگرا به  $x$  است اگر و فقط اگر به ازای هر  $\alpha$ ، دنباله  $\pi_\alpha(x_n)$  همگرا به  $\pi_\alpha(x)$  باشد. اگر توپولوژی جعبه‌ای جایگزین توپولوژی حاصل ضربی شود آیا این حکم برقرار می‌ماند؟

۷. فرض کنیم  $R^\infty$  زیرمجموعه‌ای از  $R^\omega$  باشد که متشکل است از همه دنباله‌هایی که «سرانجام صفرند». یعنی، همه نقاط  $(x_1, x_2, \dots)$  که در آن تنها به ازای تعدادی متناهی از مقادیر  $i$ ،  $x_i \neq 0$ . بستار  $R^\infty$  در  $R^\omega$  نسبت به هر یک از توپولوژیهای جعبه‌ای و حاصل ضربی چیست؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۸. ثابت کنید که توپولوژی حاصل ضربی درشتترین (کوچکترین) توپولوژی‌ای است که نسبت به آن هر نگاشت تصویری  $\pi_\beta$  پیوسته است.

۹. فرض کنیم  $A$  مجموعه‌ای دلخواه باشد، و  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$  خانواده‌ای اندیسدار از فضاها، و  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$  خانواده‌ای اندیسدار از توابع  $f_\alpha: A \rightarrow X_\alpha$  باشد. (الف) ثابت کنید که درشتترین توپولوژی یکتایی مانند  $\mathcal{J}$  در  $A$  هست که نسبت به آن هر یک از توابع  $f_\alpha$  پیوسته است. (ب) فرض کنیم

$$\mathcal{S}_\beta = \{f_\beta^{-1}(U_\beta) \mid U_\beta \text{ باز است در } X_\beta\}$$

و  $\mathcal{S} = \cup \mathcal{S}_\beta$ . ثابت کنید که  $\mathcal{S}$  یک زیر پایه  $\mathcal{J}$  است.

(پ) ثابت کنید که نگاشتی مانند  $g: Y \rightarrow A$  پیوسته است اگر و فقط اگر هر نگاشت  $f_\alpha \circ g$  پیوسته باشد.

(ت) فرض کنید  $f: A \rightarrow \prod X_\alpha$  با ضابطه

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J}$$

تعریف شده باشد،  $Z$  نمایش زیر فضای  $f(A)$  از فضای حاصل ضربی  $\prod X_\alpha$  باشد. ثابت کنید که تصویر هر یک از اعضای  $\mathcal{J}$  تحت  $f$  مجموعه‌ای باز در  $Z$  است.

## ۹-۲ توپولوژی متری

یکی از مهمترین و معمولترین طریقه‌های ساختن یک توپولوژی در یک مجموعه این است که توپولوژی را بر حسب متریکی در آن مجموعه تعریف کنیم. مثلاً توپولوژی‌هایی که بدین طریق ارائه می‌شوند در قلب آنالیز نوین جای دارند. در این بخش، توپولوژی متری را تعریف می‌کنیم و مثالهای متعددی می‌آوریم. در بخش بعد، پاره‌ای از خواص توپولوژیهای متری را بررسی می‌کنیم.

تعریف. یک متریک در مجموعه  $X$ ، تابعی است مانند

$$d: X \times X \rightarrow R$$

که دارای خواص زیر است:

(۱) به ازای هر  $x$  و  $y$  از  $X$ ،  $d(x, y) \geq 0$ ؛ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر  $x = y$ .

(۲) به ازای هر  $x$  و  $y$  از  $X$ ،  $d(x, y) = d(y, x)$ .

(۳) (نامساوی مثلثی) به ازای هر  $x, y, z$  از  $X$ ،

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

فرض کنیم  $d$  متریکی در  $X$  باشد. عدد  $d(x, y)$  را معمولاً "فاصله بین  $x$  و  $y$  در متریک  $d$  می گویند. به ازای  $\varepsilon > 0$  مفروض، مجموعه

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

را در نظر می گیریم، یعنی همه نقاطی مانند  $y$  که فاصله آنها از  $x$  کمتر از  $\varepsilon$  است. این مجموعه را  $\varepsilon$ -گوی به مرکز  $x$  می نامیم. گاهی، اگر بیم ابهامی نرود، متریک  $d$  را از علامت بالا حذف می کنیم و گوی فوق را مختصراً به  $B(x, \varepsilon)$  نمایش می دهیم.

تعریف. اگر  $d$  متریکی در مجموعه  $X$  باشد آنگاه گردابه همه  $\varepsilon$ -گوییهای  $B_d(x, \varepsilon)$ ، به ازای  $x \in X$  و  $\varepsilon > 0$ ، پایه ای برای یک توپولوژی در  $X$  است که با توپولوژی متری القا شده به وسیله  $d$  موسوم است.

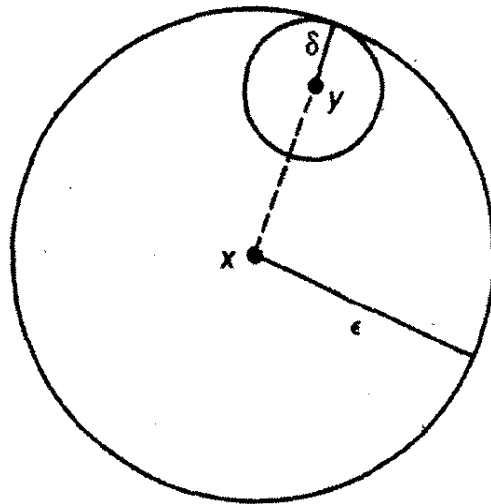
اولین شرط پایه بوضوح برقرار است، زیرا به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $x \in B(x, \varepsilon)$ . قبل از بررسی شرط دوم پایه، ثابت می کنیم که اگر  $y$  نقطه ای از عضو پایه  $B(x, \varepsilon)$  باشد آنگاه عضو پایه ای مانند  $B(y, \delta)$  به مرکز  $y$  هست که زیر مجموعه  $B(x, \varepsilon)$  است. برای این منظور  $\delta$  را مساوی عدد مثبت  $\varepsilon - d(x, y)$  تعریف می کنیم. در این صورت  $B(y, \delta) \subset B(x, \varepsilon)$ ، زیرا اگر  $z \in B(y, \delta)$  آنگاه  $d(y, z) < \varepsilon - d(x, y)$  و در نتیجه

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon.$$

(شکل ۰.۱۸)

اکنون برای آزمودن شرط دوم پایه، فرض کنیم  $B_1$  و  $B_2$  دو عضو پایه باشند و  $y \in B_1 \cap B_2$ . بنا بر آنچه گذشت، می توان اعداد مثبت  $\delta_1$  و  $\delta_2$  را چنان برگزید که  $B(y, \delta_1) \subset B_1$  و  $B(y, \delta_2) \subset B_2$ . حال اگر  $\delta$  را مقدار کوچکتر  $\delta_1$  و  $\delta_2$  قرار دهیم، نتیجه می شود  $B(y, \delta) \subset B_1 \cap B_2$ .

با استفاده از آنچه که ثابت شد، تعریف توپولوژی متری را می توان به صورت زیر بازگو کرد:



شکل ۱۸

مجموعه  $U$  در توپولوژی متری القا شده به وسیله  $d$  باز است اگر فقط اگر به ازای هر  $y \in U$ ، عدد مثبتی مانند  $\delta$  یافت شود که  $B_d(y, \delta) \subset U$ .

بدیهی است که این شرط مستلزم آن است که  $U$  باز باشد. بعکس، اگر  $U$  باز باشد، حاوی عضو پایه  $B = B_d(x, \varepsilon)$  است که شامل  $y$  است، و  $B$  نیز به نوبه خود حاوی عضو پایه دیگری مانند  $B_d(y, \delta)$  به مرکز  $y$  است.

مثال ۱. به ازای مجموعه مفروض  $X$ ، چنین تعریف می کنیم:

$$d(x, y) = 1 \quad , \quad x \neq y \text{ به ازای}$$

$$d(x, y) = 0 \quad , \quad x = y \text{ به ازای}$$

به آسانی معلوم می شود که  $d$  یک متریک است. توپولوژی ای که در  $X$  القا می کند، توپولوژی گسسته است، مثلاً، عضو پایه  $B(x, 1)$  منحصرأ شامل  $x$  است.

مثال ۲. متریک استاندارد در اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می شود:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

بررسی متریک بودن  $d$  آسان است. توپولوژی ای که این متریک در  $R$  القا می کند همان توپولوژی ترتیبی است: هر عضو پایه توپولوژی ترتیبی مانند  $(a, b)$  یک عضو پایه توپولوژی متری است؛ زیرا،

$$(a, b) = B(x, \varepsilon).$$

که در آن  $x = (a+b)/2$  و  $\varepsilon = (b-a)/2$ . بعکس،  $\varepsilon$ -گوی  $B(x, \varepsilon)$  مساوی بازه  $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$  است.

تعریف. اگر  $X$  یک فضای توپولوژیک باشد،  $X$  را در صورتی متری بدیهه گوئیم

که متریکی مانند  $d$  در  $X$  وجود داشته باشد که توپولوژی  $X$  را القا کند. يك فضای متري عبارت است از فضایی متري پذیر مانند  $X$  همراه با متریک مشخص  $d$  که توپولوژی  $X$  را تولید می کند.

بسیاری از فضاهایی که در ریاضیات اهمیت دارند، متري پذیرند، ولی بعضی از آنها چنین نیستند. خاصیت متریک پذیری خاصیت بسیار مطلوبی است، زیرا وجود متریک در يك فضا وسیله ای پرارزش برای اثبات قضایایی درباره آن فضا است.

بدین جهت، یافتن شرایطی در يك فضای توپولوژیک که متري پذیر بودن آن را تضمین کند، مسئله ای است که اهمیت بنیادی دارد. یکی از هدفهای ما در فصل ۴ یافتن چنین شرایطی است؛ در آنجا، این شرایط در قضیه مشهوری موسوم به قضیه متریسازی اوریسون<sup>۱</sup> بیان شده اند.

در فصل ۶ قضایای متریسازی دیگری خواهد آمد. در بخش حاضر تنها به اثبات متري پذیری فضاهای  $R^*$  و  $R^{\omega}$  اکتفا می کنیم.

اگرچه مسئله متري پذیری مسئله مهمی در توپولوژی است، ولی تحقیق در فضاهای متري، به نوبه خود بیشتر به آنالیز تعلق دارد تا به توپولوژی. متري پذیری يك فضا تنها به توپولوژی مورد بحث آن بستگی دارد، ولی خواصی که متریک معینی در  $X$  دارد، در حالت کلی چنین نیستند. بنابراین، این گونه خواص، خواص توپولوژیک نیستند. مثلاً، در فضاهای متري می توان تعریف زیر را ارائه کرد:

تعریف. فرض کنیم  $X$  فضایی متري با متریک  $d$  باشد. زیر مجموعه  $A$  از  $X$  را در صورتی کراندار خوانیم که عددی مانند  $M$  وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر زوج  $a_1$  و  $a_2$  از نقاط  $A$ ،

$$d(a_1, a_2) \leq M.$$

اگر  $A$  کراندار باشد آنگاه قطر  $A$  عبارت است از عدد

$$\text{diam } A = \text{lub} \{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

کراندار بودن يك مجموعه خاصیتی توپولوژیک نیست، زیرا به متریک معینی که برای  $X$  به کار رفته است بستگی دارد. مثلاً، اگر  $X$  فضایی متري با متریک  $d$  باشد آنگاه متریکی مانند  $\bar{d}$  وجود دارد که همان توپولوژی را در  $X$  القا می کند و نسبت به آن هر زیر مجموعه  $X$  کراندار است. این متریک به طریق زیر تعریف می شود:

۱.۰۹. قضیه فرض کنیم  $X$  فضایی متري با متریک  $d$  باشد. تابع  $\bar{d}: X \times X \rightarrow R$  را با رابطه زیر تعریف می کنیم:

$$\bar{d}(x, y) = \min \{d(x, y), 1\}$$

در این صورت،  $d$  متریک است که همان توپولوژی را در  $X$  القا می‌کند.

متریک  $\bar{d}$  را متریک کراندار استاندارد وابسته به  $d$  می‌خوانند.

پرهان. بررسی دو شرط اول متریک ساده است. برقراری نامساوی مثلثی را بررسی می‌کنیم:

$$\bar{d}(x, z) \leq \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z).$$

نخست ملاحظه می‌کنیم که اگر  $d(x, y) \geq 1$  یا  $d(y, z) \geq 1$  آنگاه طرف راست نامساوی بالا حداقل ۱ است، چون سمت چپ این نامساوی (بنابر تعریف) حداکثر ۱ است، پس نامساوی برقرار است. فقط بررسی حالت  $d(x, y) < 1$  و  $d(y, z) < 1$  باقی می‌ماند. در این حالت داریم

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z).$$

چون، بنابر تعریف،  $\bar{d}(x, z) \leq d(x, z)$ ، نامساوی مثلثی برای  $\bar{d}$  برقرار است. این امر که  $d$  و  $\bar{d}$  یک توپولوژی را القا می‌کنند، از روابط زیر نتیجه می‌شود

$$B_d(x, \varepsilon) \subset B_{\bar{d}}(x, \varepsilon),$$

$$B_{\bar{d}}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon),$$

که در آن  $\delta = \min\{\varepsilon, 1\}$ . فقط باقی می‌ماند که لم زیر را به کار ببریم. □

۲.۹. لم فرض کنیم  $d$  و  $d'$  دو متریک در مجموعه  $X$ ،  $\mathcal{J}$  و  $\mathcal{J}'$ ، بترتیب، توپولوژیهای القایی آنها باشند. در این صورت،  $\mathcal{J}'$  ظریفتر از  $\mathcal{J}$  است اگر و فقط اگر به ازای هر  $x$  از  $X$  و هر  $\varepsilon > 0$ ، عدد مثبتی مانند  $\delta$  وجود داشته باشد که

$$B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon).$$

پرهان. فرض کنیم  $\mathcal{J}'$  از  $\mathcal{J}$  ظریفتر باشد. بنا بر لم ۲.۲ به ازای عضو پایه دلخواهی مانند  $B_d(x, \varepsilon)$  برای توپولوژی  $\mathcal{J}$ ، عضو پایه‌ای مانند  $B'$  برای توپولوژی  $\mathcal{J}'$  هست که  $x \in B' \subset B_d(x, \varepsilon)$ . اینک می‌توان گویی مانند  $B_{d'}(x, \delta)$  به مرکز  $x$  چنان یافت که زیر مجموعه  $B'$  باشد.

بعکس، فرض کنیم شرط  $\varepsilon$ - $\delta$ ی مذکور برقرار نباشد. به ازای عضو پایه دلخواهی مانند  $B$  برای توپولوژی  $\mathcal{J}$  که شامل  $x$  باشد، می‌توان گویی به مرکز  $x$  مانند  $B_{d'}(x, \delta)$  در داخل  $B$  یافت. بنا بر شرط مذکور،  $\delta$ ی هست که  $B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon)$ . حال با استفاده از لم ۲.۲ نتیجه می‌گیریم که  $\mathcal{J}'$  از  $\mathcal{J}$  ظریفتر است. □

اکنون ثابت می‌کنیم که  $R^n$  و  $R^m$  متریک پذیرند.

تعریف. فرض کنیم  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  یک نقطه  $R^n$  باشد. نرم  $\mathbf{x}$  را با تساوی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

و متریک اقلیدسی  $d$  را در  $R^n$  باضابطه

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = [(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{1/2},$$

و متریک مربعی  $\rho$  را باضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}.$$

اثبات متریک بودن  $d$  کمی مفصل است، شاید قبلاً آن را دیده باشید. در غیر این صورت، می‌توانید با استفاده از طرح برهان آن، که در تمرینها آمده است، اثبات را تمام کنید. به هر حال متریک اقلیدسی در  $R^n$  را بندرت به کار خواهیم برد. اثبات متریک بودن  $\rho$  آسانتر است. فقط نامساوی مثلثی است که بدیهی نیست. از نامساوی مثلثی در مورد  $R$ ، نتیجه می‌شود که به ازای هر عدد صحیح مثبت  $i$ ،

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|.$$

حال، بنا بر تعریف  $\rho$ ،

$$|x_i - z_i| \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

و از آنجا

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \max \{|x_i - z_i|\} \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

و این همان است که می‌خواستیم.

در خط حقیقی  $R = R^1$ ، متریکهای  $d$  و  $\rho$  با متریک متعارف در  $R$  یکی می‌شوند. در صفحه  $R^2$  اعضای پایه تحت  $d$  را می‌توان به صورت نواحی دایره‌ای تصور کرد و اعضای پایه تحت  $\rho$  را به صورت نواحی مربعی. هر کدام از این متریکها توپولوژی معمولی  $R^n$  را القا می‌کنند:

۳.۹. قضیه توپولوژیهای  $R^n$  که توسط متریک اقلیدسی  $d$  و متریک مربعی  $\rho$  القا می‌شوند، با توپولوژی حاصل ضربی در  $R^n$  یکی هستند.

برهان. فرض کنیم  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  و  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  دو نقطه از  $R^n$  باشند، سهولت، از جبر مقدماتی، معلوم می‌شود که:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

نامساوی اول ثابت می کند که به ازای هر  $x$  از  $R^n$  و هر  $\varepsilon$  ،

$$B_d(x, \varepsilon) \subset B_p(x, \varepsilon).$$

زیرا اگر  $d(x, y) < \varepsilon$  ، آنگاه  $\rho(x, y) < \varepsilon$  . همچنین ، نامساوی دوم ثابت می کند که به ازای هر  $x$  و هر  $\varepsilon$  ،

$$B_p(x, \varepsilon/\sqrt{n}) \subset B_d(x, \varepsilon).$$

از اینجا ، بنا بر لم قبل ، نتیجه می گیریم که دو توپولوژی متری مورد نظریکی هستند. حال ثابت می کنیم که توپولوژی حاصل ضربی و توپولوژی القا شده به وسیله  $\rho$  یکی هستند. نخست فرض کنیم

$$B = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

یک عضو پایه توپولوژی حاصل ضربی و  $x = (x_1, \dots, x_n)$  عضوی از  $B$  باشد. به ازای هر  $i$  ،  $\varepsilon_i$  بی هست که

$$(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i) \subset (a_i, b_i);$$

اکنون قرار می دهیم  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  . سهولت می توان دید که  $B_p(x, \varepsilon) \subset B$  . در نتیجه  $p$ -توپولوژی از توپولوژی حاصل ضربی ظریفتر است. بعکس ، فرض کنیم  $B_p(x, \varepsilon)$  عضو پایه  $p$ -توپولوژی باشد. می خواهیم به ازای هر عضو  $B_p(x, \varepsilon)$  مانند  $y$  عضو پایه ای مانند  $B$  برای توپولوژی حاصل ضربی پیدا کنیم به طوری که

$$y \in B \subset B_p(x, \varepsilon).$$

اما این امر بدیهی است ، زیرا

$$B_p(x, \varepsilon) = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times \dots \times (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$$

خود یک عضو پایه توپولوژی حاصل ضربی است.  $\square$

قضیه پیش قضیه ای برای متری کردن  $R^n$  است. اینک می خواهیم آنرا در مورد  $R^\omega$  تعمیم دهیم.

به عنوان اولین قدم برای یافتن متریکی در  $R^\omega$  ، طبیعی است که سعی کنیم متریک اقلیدسی یا متریک مربعی را با تعاریف زیر تعمیم دهیم :

$$d(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$$

و

$$\rho(x, y) = \text{lub} \{ |x_i - y_i| \}.$$

اما این دستورها در  $R^\omega$  معنی ندارند ، زیرا ضرورتی ندارد که این سری همگرا باشد ، و مجموعه فوق ممکن است کراندار نباشد.



ولی، در مورد متریک  $p$  می‌توانیم بدین طریق از این مشکل اجتناب کنیم که ابتدا متریک  $|x - y|$  در  $R$  را با  $\bar{d}$ ، متریک کراندار وابسته به آن، تعویض کنیم. این اندیشه راه را برای برداشتن دومین قدم برای تعریف متریکی در  $R^\omega$  باز می‌کند. متریک کراندار استانده یعنی  $\bar{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$  را اختیار می‌کنیم، و به ازای دو نقطه مفروض  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$  و  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$  از  $R^\omega$  چنین تعریف می‌کنیم:

$$\bar{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{lub} \{ \bar{d}(x_i, y_i) \}.$$

بررسی متریک بودن  $\bar{p}$  در  $R^\omega$  آسان است. اما متأسفانه، چنانکه خواهیم دید، این متریک توپولوژی حاصل ضربی را القا نمی‌کند. بنابراین، برای اثبات متریک پذیری  $R^\omega$  فایده‌ای ندارد. با وجود این، این متریک به نوبه خود حائز اهمیت بسیار است و بارها در این کتاب (و بخشهای دیگر ریاضیات) به کار می‌آید. تاجایی که به این متری مربوط می‌شود،  $R^\omega$  خاصیت ویژه‌ای ندارد، می‌توان به ازای مجموعه دلخواه  $J$ ، آن را به طریق زیر در  $R^J$  تعریف کرد:

تعریف. فرض کنیم  $J$  یک مجموعه اندیس باشد و نقاط  $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$  و  $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$  متعلق به  $R^J$  باشند. متریک  $\bar{p}$  را در  $R^J$  با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{lub} \{ \bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in J \},$$

که در آن  $\bar{d}$  متریک کراندار استانده  $R$  است. متریک  $\bar{p}$  را متریک یکنواخت در  $R^J$  و توپولوژی القایی آن را توپولوژی یکنواخت می‌نامیم.

رابطه بین این توپولوژی و توپولوژی حاصل ضربی چنین است:

۴.۹. قضیه توپولوژی یکنواخت  $R^J$  ظریفتر از توپولوژی حاصل ضربی است، این دو توپولوژی وقتی متمایزند که  $J$  نامتناهی باشد.

برهان. فرض کنیم  $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$  نقطه‌ای مفروض، و  $\Pi U_\alpha$  یک عضو پایه توپولوژی حاصل ضربی باشد که شامل  $\mathbf{x}$  است. فرض کنیم  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  اندیسهایی باشند که به ازای آنها  $U_\alpha \neq R$ . در این صورت به ازای هر  $\alpha_i$ ،  $\varepsilon_i > 0$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $B_\varepsilon(x_{\alpha_i}, \varepsilon_i) \subset U_{\alpha_i}$ . این کار را از این رو می‌توانیم انجام دهیم که  $U_{\alpha_i}$  در  $R$  باز است. فرض کنید  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ ؛ آنگاه

$$B_{\bar{p}}(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset \Pi U_\alpha$$

زیرا اگر  $\mathbf{z}$  نقطه‌ای از  $R^J$  باشد به طوری که  $\bar{p}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < \varepsilon$  آنگاه به ازای هر  $\alpha$ ،  $d(x_\alpha, z_\alpha) < \varepsilon$  و بنابراین  $\mathbf{z} \in \Pi U_\alpha$ .

اثبات متمایز بودن این دو توپولوژی وقتی که  $J$  نامتناهی است آسان است. آن را برعهده خواننده می گذاریم.  $\square$

هنوز چیزی را که در جستجویش بودیم، یعنی متریکی که توپولوژی حاصل ضربی را در  $R^\omega$  القا کند نیافته ایم. اما تقریباً به آن رسیده ایم. چنانکه معلوم خواهد شد، فقط با تغییری جزئی در متریک یکنواخت می توان متریک مطلوب را به دست آورد:

۵.۹. قضیه فرض کنیم  $\bar{d}(a, b) = \min\{|a - b|, 1\}$  متریک کراندار استاندارد  $R$  باشد. به ازای هر دو نقطه  $R^\omega$  مانند  $x$  و  $y$ ، تعریف می کنیم

$$D(x, y) = \text{lub} \left\{ \frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} \right\}.$$

در این صورت،  $D$  متریکی در  $R^\omega$  است که توپولوژی حاصل ضربی را در آن القا می کند. پرهان. برقراری همه خواص متریک بدیهی است مگر نامساوی مثلثی که آن نیز با توجه به این نکته ثابت می شود که به ازای هر  $i$ ،

$$\frac{\bar{d}(x_i, z_i)}{i} \leq \frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} + \frac{\bar{d}(y_i, z_i)}{i} \leq D(x, y) + D(y, z),$$

بنابراین

$$\text{lub} \left\{ \frac{\bar{d}(x_i, z_i)}{i} \right\} \leq D(x, y) + D(y, z).$$

اثبات اینکه متریک  $D$  توپولوژی حاصل ضربی را القا می کند کمی مفصلتر است. نخست، فرض می کنیم  $U$  مجموعه بازی از توپولوژی متری باشد و  $x \in U$ ؛ مجموعه بازی مانند  $V$  از توپولوژی حاصل ضربی می یابیم به طوری که  $x \in V \subset U$ . برای این منظور،  $\varepsilon$ -گویی  $B_D(x, \varepsilon)$  را در  $U$  اختیار می کنیم. عدد طبیعی  $N$  را به اندازه کافی بزرگ اختیار می کنیم به طوری که  $\varepsilon < 1/N$ . حال، عضو پایه  $V$  برای توپولوژی حاصل ضربی را که به صورت زیر است در نظر می گیریم:

$$V = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times \dots \times (x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon) \times R \times R \times \dots$$

مدعی هستیم که  $V \subset B_D(x, \varepsilon)$  زیرا اگر  $y$  نقطه دلخواهی از  $R^\omega$  باشد آنگاه

$$\bar{d} \frac{(x_i, y_i)}{i} \leq \frac{1}{N} \quad , i \geq N \text{ به ازای}$$

بنابراین،

$$D(x, y) \leq \max \left\{ \frac{\bar{d}(x_1, y_1)}{1}, \dots, \frac{\bar{d}(x_N, y_N)}{N}, \frac{1}{N} \right\}.$$

اگر  $y$  در  $V$  باشد، عبارت سمت راست از  $\varepsilon$  کمتر است؛ و در نتیجه  $V \subset B_D(x, \varepsilon)$ ، و این همان است که می‌خواستیم. بعکس، فرض کنیم

$$U = \prod_{i \in \mathbb{Z}_+} U_i$$

یک عضو پایه توپولوژی حاصل ضربی باشد که در آن بنا بر تعریف اگر  $i = \alpha_1, \dots, \alpha_n$  آنگاه  $U_i$  در  $R$  باز است، و به ازای  $i$ های دیگر  $U_i = R$ . به ازای نقطه مفروض  $x \in U$ ، مجموعه بازی مانند  $V$  از توپولوژی متری می‌بایم که  $x \in V \subset U$ . برای این منظور، به ازای  $i = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ، بازه  $(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i)$  به مرکز  $x_i$  را چنان انتخاب می‌کنیم که در  $U_i$  واقع باشد و  $\varepsilon_i \leq 1$ . در این صورت چنین تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{\varepsilon_i}{i} \mid i = \alpha_1, \dots, \alpha_n \right\}.$$

مدعی هستیم که

$$x \in B_D(x, \varepsilon) \subset U.$$

فرض کنیم  $y$  نقطه‌ای از  $B_D(x, \varepsilon)$  باشد. در این صورت به ازای هر  $i$ ،

$$\frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} \leq D(x, y) < \varepsilon.$$

حال اگر  $i = \alpha_1, \dots, \alpha_n$  آنگاه  $\varepsilon \leq \varepsilon_i/i$ ، پس  $\varepsilon_i \leq 1$  و  $\bar{d}(x_i, y_i) < \varepsilon_i$ ؛ نتیجه می‌شود که  $|x_i - y_i| < \varepsilon_i$ . بنابراین،  $y \in \prod U_i$ ، و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

در اینجا طبعاً این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان این قضیه را بیشتر از این تعمیم داد؟ آیا می‌توان به ازای هر  $J$  دلخواه ثابت کرد که  $R^J$  متری پذیراست؟ چنانکه در بخش بعد خواهیم دید، جواب منفی است. اگر توپولوژی جعبه‌ای را به جای توپولوژی حاصل ضربی به کار ببریم وضع بهتر از این نخواهد بود؛ در حقیقت چنانکه خواهیم دید، تحت توپولوژی جعبه‌ای حتی  $R^\omega$  هم متریک پذیر نیست.

## تمرینها

۱. (الف) متریک  $d'$  را در  $R^n$  چنین تعریف می‌کنیم:

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|.$$

۱. در اینجا اشتباه کوچکی در اثبات قضیه وجود دارد، زیرا ممکن است  $\varepsilon < \bar{d}(x_1, y_1) < 2\varepsilon$  و در نتیجه عبارت سمت راست از  $\varepsilon$  کمتر نباشد. برای رفع این اشکال، کافی است که در تعریف عضو پایه  $V$ ، اولین عامل را بازه  $(x_1 - \varepsilon/2, x_1 + \varepsilon/2)$  اختیار کنیم. - م.

ثابت کنید که  $d'$  متریکی است که توپولوژی استاندارد  $R^n$  را القا می کند. در حالت  $n=2$ ، اعضای پایه وابسته به  $d'$  را رسم کنید.  
 (ب) به طور کلی، به ازای  $p \geq 1$ ،  $d'$  را در  $R^n$  چنین تعریف می کنیم:

$$d'(x, y) = [\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p]^{1/p}$$

فرض کنید که  $d'$  یک متریک است. ثابت کنید که  $d'$  توپولوژی استاندارد  $R^n$  را القا می کند.

۲. فرض کنید  $X$  مجموعه ای باشد و  $d$  متریکی در آن. ثابت کنید توپولوژی ای که  $d$  در  $X$  القا می کند، درشتترین توپولوژی ای است که نسبت به آن تابع  $d: X \times X \rightarrow R$  پیوسته است.

۳. ثابت کنید که  $R \times R$ ، با توپولوژی ترتیب قاموسی، متریک پذیر است.

۴. (الف) توپولوژیهای جعبه ای، حاصل ضربی، و یکنواخت  $R^\omega$  را با یکدیگر مقایسه کنید.

(ب) نسبت به کدامیک از این توپولوژیها توابع زیر از  $R$  به  $R^\omega$  پیوسته اند؟

$$f(t) = (t, 2t, 3t, \dots),$$

$$g(t) = (t, t, t, \dots),$$

$$h(t) = (t, \frac{1}{4}t, \frac{1}{9}t, \dots).$$

(ب) نسبت به کدامیک از این توپولوژیها دنباله های زیر همگر ایند؟

$$w_1 = (1, 1, 1, 1, \dots), \quad x_1 = (1, 1, 1, 1, \dots),$$

$$w_2 = (0, 2, 2, 2, \dots), \quad x_2 = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots),$$

$$w_3 = (0, 0, 3, 3, \dots), \quad x_3 = (0, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \dots),$$

...

...

$$y_1 = (1, 0, 0, 0, \dots), \quad z_1 = (1, 1, 0, 0, \dots),$$

$$y_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, \dots), \quad z_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, \dots),$$

$$y_3 = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, 0, \dots), \quad z_3 = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, 0, 0, \dots),$$

...

...

۵. فرض کنید  $R^\infty$  زیر مجموعه‌ای از  $R^\omega$  باشد که از همه دنباله‌هایی که سرانجام صفرند تشکیل شده است. بستار  $R^\infty$  در  $R^\omega$  با توپولوژی یکنواخت چیست؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۶. فرض کنید  $\bar{p}$  متریک یکنواخت  $R^\omega$  باشد. به ازای نقطه مفروض  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in R^\omega$  و عدد مفروض  $0 < \varepsilon < 1$ ، فرض کنید

$$U(\mathbf{x}, \varepsilon) = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times \dots \times (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon) \times \dots$$

(الف) ثابت کنید که  $U(\mathbf{x}, \varepsilon)$  مساوی  $\varepsilon$ -گوی  $B_{\bar{p}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$  نیست.

(ب) ثابت کنید که  $U(\mathbf{x}, \varepsilon)$  در توپولوژی یکنواخت حتی بازم نیست.

(پ) ثابت کنید که

$$B_{\bar{p}}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \bigcup_{\delta < \varepsilon} U(\mathbf{x}, \delta).$$

۷. فرض کنید  $X$  زیر مجموعه‌ای از  $R^\omega$  با این خاصیت باشد که به ازای هر زوج  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{y}$  از نقاط  $X$  سری

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2$$

همگراست. در  $X$  سه توپولوژی داریم که به عنوان زیر فضایی از  $R^\omega$  با در نظر گرفتن هر یک از توپولوژیهای جمعی، یکنواخت، و حاصل ضربی  $R^\omega$  در  $X$  القا می‌شود. بعلاوه، توپولوژی حاصل از متریک زیر نیز در دست است:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

(متریک بودن  $d$  از تمرین ۹ نتیجه می‌شود.)

(الف) در حالت کلی، در مورد مقایسه این چهار توپولوژی در مجموعه  $X$  چه می‌توان گفت؟

(ب) اگر  $X$  زیر مجموعه

$$\tilde{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i = 0, i > n\}$$

باشد، چه می‌توان گفت؟

(پ) اگر  $X$  زیر مجموعه

$$R^\infty = \bigcup \tilde{R}^n$$

باشد، چه می‌توان گفت؟

(ت) اگر  $X$ ، مکعب هیلبرت

$$H = \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} [0, 1/n]$$

باشد، چه می توان گفت؟

۸. به طریق زیر، ثابت کنید که متریک اقلیدسی  $d$  در  $R^n$  يك متریک است. به ازای دو عضو  $x$  و  $y$  از  $R^n$  و  $c \in R$ ، چنین تعریف می کنیم:

$$x+y = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n),$$

$$cx = (cx_1, \dots, cx_n),$$

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

(الف) ثابت کنید که  $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

(ب) ثابت کنید که  $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$ . [دانهمایی: اگر  $x, y \neq 0$ ، قرار دهید  $a = 1/\|x\|$ ،  $b = 1/\|y\|$ ، و از این مطلب که  $\|ax \pm by\| \geq 0$  استفاده کنید.]

(پ) ثابت کنید که  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . [دانهمایی: عبارت  $(x+y) \cdot (x+y)$  را محاسبه کنید و (ب) را به کار ببرید.]  
(ت) متریک بودن  $d$  را ثابت کنید.

۹. فرض کنید  $l^2$  زیرمجموعه ای از  $R^\omega$  باشد که از همه دنباله هایی مانند  $(x_1, x_2, \dots)$  که  $\sum x_i^2$  همگراست تشکیل شده است. (می توانید احکام استاندارد در مورد سریهای نامتناهی را دانسته فرض کنید. اگر با آنها آشنا نیستند، در تمرین ۱۱ بخش بعدی آنها را آورده ایم.)

(الف) ثابت کنید که اگر  $x, y \in l^2$  آنگاه  $\sum |x_i y_i|$  همگراست. [دانهمایی: قسمت (ب) تمرین ۸ را برای اثبات اینکه مجموعهای جزئی این سری کراندار است به کار ببرید.]

(پ) فرض کنید  $c \in R$ . ثابت کنید که اگر  $x, y \in l^2$  آنگاه  $x+y$  و  $cx$  به  $l^2$  تعلق دارند.  
(ت) ثابت کنید که

$$d(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$$

متریکی خوشتعریف در  $l^2$  است. آن را  $l^2$ -متریک می گویند.

۱۰. ثابت کنید که اگر  $d$  متریکی در  $X$  باشد آنگاه  $d'(x, y) = d(x, y)/(1+d(x, y))$  متریکی کراندار در  $X$  است.

## ۱۰-۲ توپولوژی متری (ادامه)

موضوع بحث این بخش بررسی بستگی توپولوژی متری با مفاهیمی است که پیش از این معرفی کردیم.

رفتار زیرفضاهای فضاهای متریک همان گونه است که انتظار می رود؛ اگر  $A$  زیرفضایی از فضای توپولوژیک  $X$  و  $d$  متریکی برای  $X$  باشد آنگاه تحدید  $d$  به  $AXA$  متریکی برای توپولوژی  $A$  است. بررسی آن را به خواننده واگذار می کنیم.

در مورد توپولوژیهای قریبی مطلب قابل ذکری وجود ندارد؛ بعضی متریک پذیرند (مانند  $Z_+$  و  $R$ ) و بعضی چنین نیستند. مثال ۳ را نگاه کنید.

اصل هائوسدورف در هر توپولوژی متریک برقرار است. اگر  $x$  و  $y$  نقاطی متمایز از فضای متریک  $(X, d)$  باشند، به ازای  $\varepsilon = d(x, y)/2$  از نامساوی مثلثی می توان نتیجه گرفت که  $B_\varepsilon(x, \varepsilon)$  و  $B_\varepsilon(y, \varepsilon)$  جدا از هم هستند.

توپولوژی حاصل ضربی را پیش از این در چند حالت خاص بررسی کردیم؛ ثابت کردیم که حاصل ضربهای  $R^\omega$  و  $R^\infty$  متریک پذیرند. در حالت کلی، حاصل ضرب شمارای فضاهای متریک پذیر، متریک پذیر است؛ اثبات این حکم مشابه اثبات آن در مورد  $R^\omega$  است و آن را به عنوان تمرین باقی می گذاریم.

در مورد توابع پیوسته مطالب زیادی برای گفتن وجود دارد. بقیه این بخش را به بحث در این باب اختصاص می دهیم.

در این کتاب هیچگاه به اندازه وقتی که توابع پیوسته بر فضاهای متریک را بررسی می کنیم به آنالیز و حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) نزدیک نمی شویم. در این مرحله می خواهیم دو کار انجام دهیم.

نخست، می خواهیم ثابت کنیم که در مورد پیوستگی، «تعریف  $\varepsilon$ - $\delta$ »ی معروف و نیز «تعریف پیوستگی به وسیله دنباله های همگرا» را می توان به فضاهای متریک کلی تعمیم داد. ثانیاً می خواهیم علاوه بر روشهایی که در بخش ۲-۷ مورد بحث واقع شدند، دو روش دیگر را برای ساختن توابع پیوسته در نظر بگیریم. یکی از آنها جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم توابع حقیقی پیوسته است، و دیگری حدگیری از دنباله های همگرای یکنواخت از توابع پیوسته.

۱۰۱۰. قضیه فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  و  $X$  و  $Y$  دو فضای متریک پذیر، به ترتیب با متریکهای  $d_x$  و  $d_y$  باشند. در این صورت، پیوستگی  $f$  معادل است با این شرط که به ازای هر  $x \in X$  و هر  $\varepsilon > 0$  مفروض،  $\delta$  مثبتی هست به قسمی که

$$d_x(x, y) < \delta \implies d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

برهان. فرض کنیم  $f$  پیوسته باشد. به ازای  $x$  و  $\varepsilon$  مفروض، مجموعه

$$f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$$

را که در  $X$  باز و شامل نقطه  $x$  است در نظر می گیریم. این مجموعه حاوی  $\delta$ -گویی مانند  $B(x, \delta)$  به مرکز  $x$  است. اگر  $y$  در این  $\delta$ -گویی باشد آنگاه  $f(y)$  در  $\varepsilon$ -گویی به مرکز  $f(x)$  خواهد بود، و این همان است که می خواستیم.

بعکس، فرض کنیم شرط  $\delta$ - $\varepsilon$  برقرار باشد. فرض کنیم  $V$  در  $Y$  باز باشد. ثابت می‌کنیم که  $f^{-1}(V)$  در  $X$  باز است. فرض کنیم  $x$  نقطه‌ای از مجموعه  $f^{-1}(V)$  باشد. چون  $f(x) \in V$ ،  $\varepsilon$ -گویی مانند  $B(f(x), \varepsilon)$  به مرکز  $f(x)$  وجود دارد که زیرمجموعه  $V$  است. اما بنا بر شرط  $\delta$ - $\varepsilon$ ،  $\delta$ -گویی مانند  $B(x, \delta)$  به مرکز  $x$  وجود دارد به طوری که  $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$ . پس  $B(x, \delta)$  یک همسایگی  $x$  است که زیرمجموعه  $f^{-1}(V)$  است. در نتیجه،  $f^{-1}(V)$  باز است، و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

اینک به تعریف پیوستگی بر حسب دنباله‌های همگرا می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که یک دنباله از نقاط مجموعه‌ای مانند  $X$ ، چیزی نیست جز تابعی از  $Z_+$  به  $X$ ؛ یعنی عضوی از فضای  $X^{\omega}$ . معمولاً، یک دنباله را با علامتهای زیر نمایش می‌دهیم

$$(x_n) \quad \text{یا} \quad (x_1, x_2, \dots)$$

تعریف. دنباله‌ای مانند  $(x_1, x_2, \dots)$  از نقاط  $X$  را همگرا به نقطه  $x$  گوئیم در صورتی که به ازای هر همسایگی  $x$  مانند  $U$ ، عدد صحیح مثبتی مانند  $N$  وجود داشته باشد که به ازای هر  $i \geq N$ ،  $x_i$  در  $U$  باشد.

اگر دنباله  $(x_n)$  همگرا به  $x$  باشد، می‌نویسیم

$$x_n \rightarrow x.$$

البته به هیچ وجه ضرورتی ندارد که دنباله‌ای دلخواه همگرا باشد، اما اگر همگرا باشد فقط به یک نقطه همگراست، به شرط اینکه  $X$  هاوسدورف باشد. زیرا اگر  $(x_n)$  همگرا به  $x$  باشد و  $y \neq x$ ، کافی است که همسایگیهای جدا از هم  $U$  و  $V$ ، بترتیب از  $x$  و  $y$ ، را انتخاب و ملاحظه کنیم که چون  $U$  به ازای همه مقادیر  $i$ ، مگر احياناً تعدادی متناهی از آنها، شامل  $x_i$  است،  $V$  نمی‌تواند چنین خاصیتی را داشته باشد.

بنابر آنچه از آنالیز می‌دانیم، شهوداً چنین به نظر می‌رسد که اگر  $x$  متعلق به بستار زیرمجموعه  $A$  از فضای  $X$  باشد، باید دنباله‌ای از نقاط  $A$  همگرا به  $x$  وجود داشته باشد. این حکم در حالت کلی برقرار نیست، ولی برای فضاهاى متریک پذیر برقرار است.

۲.۱۰. لم (لم دنباله) فرض کنیم  $X$  یک فضای توپولوژیک باشد و  $A \subset X$ . اگر دنباله‌ای از نقاط  $A$  همگرا به  $x$  وجود داشته باشد آنگاه  $x \in \bar{A}$ ، عکس این حکم فقط وقتی برقرار است که  $X$  متری پذیر باشد.

پروهان. فرض کنیم  $x \rightarrow x_n$ ، که در آن  $x_n \in A$ . بنا بر این، هر همسایگی  $x$  مانند  $U$  شامل نقطه‌ای از  $A$  است. پس، بنا بر قضیه ۵.۶،  $x \in \bar{A}$ . بعکس، فرض کنیم  $X$  متریک پذیر باشد، و  $x \in \bar{A}$ . فرض کنیم  $d$  متریکی برای توپولوژی  $X$  باشد. به ازای هر عدد صحیح مثبت  $n$ ، یک همسایگی  $B_d(x, 1/n)$  از  $x$  به شعاع  $1/n$  را در نظر



می‌گیریم، نقطه  $x_n$  را در مقطع این همسایگی با  $A$  انتخاب می‌کنیم. مدعی هستیم که دنباله  $(x_n)$  به  $x$  همگراست؛ هر مجموعه باز  $U$  که شامل  $x$  باشد، حاوی  $\varepsilon$ -گویی مانند  $B_\varepsilon(x, \varepsilon)$  به مرکز  $x$  نیز هست؛ اگر  $N$  را چنان اختیار کنیم که  $1/N < \varepsilon$  آنگاه به ازای هر  $n \geq N$  خواهیم داشت  $x_n \in U$ .  $\square$

۳.۱۰. قضیه فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  و  $X$  متریک پذیر باشد. تابع  $f$  پیوسته است اگر فقط اگر به ازای هر دنباله همگرا از نقاط  $X$  مانند  $x_n \rightarrow x$ ، دنباله  $f(x_n)$  همگرا به  $f(x)$  باشد.

برهان. فرض کنیم  $f$  پیوسته باشد. به ازای دنباله مفروض  $x_n \rightarrow x$ ، می‌خواهیم ثابت کنیم که  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . فرض کنیم  $V$  یک همسایگی  $f(x)$  باشد. در این صورت  $f^{-1}(V)$  یک همسایگی  $x$  است، و در نتیجه  $N$  هست که به ازای هر  $n \geq N$ ،  $x_n \in f^{-1}(V)$  پس به ازای هر  $n \geq N$ ،  $f(x_n) \in V$ .

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم شرط دنباله همگرا برقرار باشد و  $A$  زیر-مجموعه دلخواهی از  $X$  باشد. ثابت می‌کنیم که  $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ . اگر  $x \in \bar{A}$ ، دنباله‌ای از نقاط  $A$  مانند  $(x_n)$  وجود دارد که همگرا به  $x$  است (بنابر لم پیش). بنابر فرض، دنباله  $f(x_n)$  همگرا به  $f(x)$  است. از آنجا که  $f(x_n) \in f(A)$ ، بنابر لم سابق،  $f(x) \in \overline{f(A)}$ . (توجه کنید که لازم نیست  $\mathcal{Y}$  متریک پذیر باشد.) بنابراین،  $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$  و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

ضمناً، در اثبات لم ۲.۱۰ و قضیه ۳.۱۰ از همه توانایی فرض متریک پذیری  $X$  استفاده نکردیم. آنچه که واقعاً احتیاج داشتیم گردایه شمارایی از گویهای  $B_\varepsilon(x, 1/n)$  به مرکز  $x$  بود. این نکته ما را به تعریف جدیدی رهنمون می‌کند.

فضای  $X$  را دارای پایه شمارا در نقطه  $x$  گوئیم هرگاه خانواده شمارایی مانند  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$  از همسایگیهای  $x$  موجود باشد به طوری که هر همسایگی  $x$  مانند  $U$  حاوی حداقل یکی از  $U_n$ ها باشد. هرگاه فضای  $X$  در هر نقطه اش پایه‌ای شمارا داشته باشد، گوئیم  $X$  در اولین اصل موضوع شمارایی صدق می‌کند.

اگر  $X$  در نقطه  $x$  پایه شمارا مانند  $\{U_n\}$  داشته باشد آنگاه برهان لم ۲.۱۰ برقرار می‌ماند؛ کافی است که در سراسر برهان مجموعه

$$B_n = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$$

را جایگزین گوی  $B_\varepsilon(x, 1/n)$  کنیم. برهان قضیه ۳.۱۰ نیز بدون تغییر برقرار می‌ماند. هر فضای متریک پذیر در اولین اصل موضوع شمارایی صدق می‌کند، ولی چنانکه خواهیم دید عکس آن برقرار نیست. مانند اصل هاوسدورف، اولین اصل شمارایی شرطی است که بعضی مواقع بر فضای توپولوژیک می‌نهیم تا بتوانیم قضایایی در مورد آن ثابت کنیم. در فصل ۴ این موضوع را مفصلاً بررسی می‌کنیم.

اینک روشهای دیگری را برای ساختن توابع پیوسته مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای این منظور به لم زیر نیاز داریم:

۴.۱۰. لم عملهای جمع، تفریق، و ضرب توابعی پیوسته از  $R \times R$  به  $R$  هستند؛ عمل تقسیم تابعی است پیوسته از  $(R - \{0\}) \times R$  به  $R$ .

احتمالاً اثبات این لم را قبلاً دیده‌اید، که به روش استاندارد «استدلال  $\epsilon$ - $\delta$ » صورت می‌گیرد. در صورتی که باین اثبات آشنا نیستید، طرح کلی برهانی برای این لم در تمرین ۱۲ همین بخش آمده است؛ خواننده بدون هیچ مشکلی می‌تواند جزئیات اثبات را کامل کند.

۵.۱۰. قضیه اگر  $X$  فضایی توپولوژیک باشد، و توابع  $f, g: X \rightarrow R$  پیوسته باشند آنگاه توابع  $f+g$ ،  $f-g$ ،  $f \cdot g$ ، و نیز پیوسته‌اند. بعلاوه، اگر به ازای هر  $x$ ،  $g(x) \neq 0$ ، آنگاه  $f/g$  نیز پیوسته است.

برهان. نگاشت  $h: X \rightarrow R \times R$  که با ضابطه

$$h(x) = f(x) \times g(x)$$

تعریف می‌شود، بنا بر قضیه ۴.۷ پیوسته است. تابع  $f+g$  برابر است با ترکیب تابع  $h$  و عمل جمع

$$+: R \times R \rightarrow R;$$

بنابراین،  $f+g$  پیوسته است. برهان مشابهی برای هر یک از توابع  $f-g$ ،  $f \cdot g$ ، و  $f/g$  به کار می‌رود.  $\square$

در پایان، به مفهوم همگرایی یکنواخت برای دنباله‌ای از توابع می‌رسیم.

تعریف. فرض کنیم  $f_n: X \rightarrow Y$  دنباله‌ای از توابع از مجموعه  $X$  به فضای متری  $Y$  و  $d$  متریکی برای  $Y$  باشد. دنباله  $(f_n)$  را به طور یکنواخت همگرا به تابع  $f: X \rightarrow Y$  گوییم در صورتی که به ازای هر  $\epsilon > 0$  مفروض، عدد صحیحی مانند  $N$  وجود داشته باشد که به ازای هر  $n \geq N$  و هر  $x$  در  $X$ ،

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

یکنواخت بودن همگرایی نه تنها به توپولوژی  $Y$  بلکه به متریک آن نیز بستگی دارد. قضیه زیر را در مورد دنباله‌های به طور یکنواخت همگرا داریم:

۶.۱۰. (قضیه حد یکنواخت) فرض کنیم  $f_n: X \rightarrow Y$  دنباله‌ای از توابع

پیوسته از فضای توپولوژیک  $X$  به فضای متریک  $Y$  باشد. اگر  $(f_n)$  به طور یکنواخت همگرا به  $f$  باشد آنگاه  $f$  پیوسته است.

پرهان. فرض کنیم  $V$  در  $Y$  باز، و  $x_0$  نقطه دلخواهی از  $f^{-1}(V)$  می‌خواهیم یک همسایگی  $U$  از  $x_0$  بیابیم به طوری که  $f(U) \subset V$ .  
فرض کنیم  $y_0 = f(x_0)$ . نخست،  $\varepsilon$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $\varepsilon$ -گوی  $B(y_0, \varepsilon)$  زیر مجموعه  $V$  باشد. حال با استفاده از شرط همگرایی یکنواخت، عدد  $N$  را چنان انتخاب می‌کنیم که، به ازای هر  $n \geq N$  و هر  $x \in X$ ،

$$d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

سرانجام، بنا بر پیوستگی  $f_N$ ، همسایگی  $U$  از  $x_0$  را چنان اختیار می‌کنیم که  $f_N$  آن را در گوی به مرکز  $f_N(x_0)$  و شعاع  $\varepsilon/2$  در  $Y$  بینگارد.  
مدعی هستیم که  $f$  مجموعه  $U$  را در  $B(y_0, \varepsilon)$  و در نتیجه، همان طور که می‌خواهیم، در  $V$  می‌نگارد. زیرا اگر  $x \in U$  آنگاه

$$d(f(x), f_N(x)) < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{بنا بر انتخاب } N)$$

$$d(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{بنا بر انتخاب } U)$$

$$d(f_N(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{بنا بر انتخاب } N)$$

با جمع کردن طرفین این نامساویها و با استفاده از نامساوی مثلثی، نتیجه می‌شود که  $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ ، و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

توجه داشته باشید که مفهوم همگرایی یکنواخت با تعریف متریک یکنواخت، که در بخش گذشته ارائه شد، مربوط است. مثلاً،  $R^X$ ، فضای همه توابع  $f: X \rightarrow R$  با متریک یکنواخت  $\bar{\rho}$  را در نظر بگیرید. سهولت می‌توان دید که دنباله‌ای از توابع مانند  $f_n: X \rightarrow R$  به طور یکنواخت به  $f$  همگراست اگر و فقط اگر دنباله  $(f_n)$  به عنوان دنباله‌ای از اعضای فضای متریک  $(R^X, \bar{\rho})$  به  $f$  همگرا باشد. اثبات این حکم را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

این بخش را با چند مثال از فضاهایی که متریک پذیر نیستند به پایان می‌رسانیم.

مثال ۱.  $R^\omega$  با توپولوژی جعبه‌ای متریک پذیر نیست.

ثابت می‌کنیم که لم دنباله در مورد  $R^\omega$  برقرار نیست. فرض کنیم  $A$  زیر مجموعه‌ای از  $R^\omega$  متشکل از نقاطی باشد که همه مختصات ایشان مثبت اند:

$$A = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i > 0, i \in \mathbb{Z}_+\}$$

فرض کنیم  $\circ$  «مبدأ»  $R_\circ$  باشد، یعنی نقطه  $(0, 0, \dots)$  که همهٔ مختصه‌هایش صفر است. در توپولوژی جعبه‌ای،  $\circ$  به  $\bar{A}$  تعلق دارد؛ زیرا اگر

$$B = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots$$

یک عضو پایهٔ دلخواه شامل  $\circ$  باشد آنگاه  $B$  مجموعهٔ  $A$  را قطع می‌کند. مثلاً، نقطهٔ

$$\left(\frac{1}{2} b_1, \frac{1}{2} b_2, \dots\right)$$

به  $B \cap A$  تعلق دارد.

ولی هیچ دنباله‌ای از نقاط  $A$  وجود ندارد که همگرا به  $\circ$  باشد. زیرا فرض کنیم  $(a_n)$  دنباله‌ای از نقاط  $A$  باشد، که در آن

$$a_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{in}, \dots)$$

هر یک از  $x_{in}$ ها مثبت‌اند، پس می‌توان عضو پایه‌ای مانند  $B'$  برای توپولوژی جعبه‌ای به صورت زیر ساخت

$$B' = (-x_{11}, x_{11}) \times (-x_{22}, x_{22}) \times \dots$$

در این صورت  $B'$  شامل مبدأ  $\circ$  است، ولی شامل هیچ عضو دنبالهٔ  $(a_n)$  نیست. نقطهٔ  $a_n$  نمی‌تواند به  $B'$  تعلق داشته باشد، زیرا مختص  $n$ م آن یعنی  $x_{nn}$  به بازهٔ  $(-x_{nn}, x_{nn})$  تعلق ندارد. بنابراین، در توپولوژی جعبه‌ای دنبالهٔ  $(a_n)$  به  $\circ$  همگرا نیست.

**مثال ۲.** هیچ حاصل ضرب ناشمارای  $R$  در خود متری پذیر نیست.

فرض کنیم  $J$  یک مجموعهٔ اندیس ناشمارا باشد، ثابت می‌کنیم که  $R^J$  (با توپولوژی حاصل ضرب) در لم دنباله صدق نمی‌کند.

فرض کنیم زیر مجموعهٔ  $A$  از  $R^J$  متشکل از همهٔ نقاطی مانند  $(x_\alpha)$  باشد که به ازای تعدادی متناهی از  $\alpha$ ها،  $x_\alpha = 0$  و به ازای سایر مقادیر  $\alpha$ ،  $x_\alpha = 1$ . فرض کنیم  $\circ$  «مبدأ»  $R^J$  باشد، یعنی نقطه‌ای که هر یک از مختصه‌هایش صفر است.

مدعی هستیم که  $\circ$  به‌بستار  $A$  تعلق دارد. زیرا، فرض کنیم  $\prod U_\alpha$  یک عضو پایهٔ شامل  $\circ$  باشد. در این صورت، فقط به ازای تعدادی متناهی از  $\alpha$ ها، مثلاً به ازای  $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$  داریم  $U_\alpha \neq R$ . نقطهٔ  $(x_\alpha)$  از  $A$  را با قراردادن  $x_\alpha = 0$  به ازای  $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$  و  $x_\alpha = 1$  به ازای بقیهٔ مقادیر  $\alpha$ ، تعریف می‌کنیم. در این صورت،  $(x_\alpha) \in A \cap \prod U_\alpha$  و این همان است که می‌خواستیم.

ولی هیچ دنباله‌ای از نقاط  $A$  نیست که همگرا به  $\circ$  باشد. زیرا، فرض کنیم  $a_n$  دنباله‌ای از نقاط  $A$  باشد. هر  $a_n$  نقطه‌ای از فضای حاصل ضرب است که منحصرأ تعدادی متناهی از مختصه‌هایش  $\circ$  است. به ازای  $n$  مفروض، فرض کنیم زیر مجموعهٔ  $J_n$  از  $J$  متشکل از  $\alpha$ هایی

باشد که به ازای آنها مختص  $\alpha$   $\mathfrak{B}_\alpha$  صفر است. اجتماع همه مجموعه های  $J_\alpha$ ، اجتماع شمارایی از مجموعه های متناهی است، و بنابراین شمار است. چون  $J$  ناشمار است، اندیسی مانند  $\beta$  در  $J$  وجود دارد که به هیچیک از  $J_\alpha$  ها تعلق ندارد. یعنی به ازای هر  $\alpha$ ، مختص  $\beta$  آن ۱ است.

حال فرض کنیم  $U_\beta$  بازه  $(-1, 1)$  در  $R$  و  $U$  مجموعه باز  $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$  در  $R^J$  باشد. مجموعه  $U$  یک همسایگی  $\circ$  است که شامل هیچیک از  $\mathfrak{B}_\alpha$  ها نیست، بنابراین، دنباله  $\mathfrak{B}_\alpha$  نمی تواند همگرا به  $\circ$  باشد.

مثال ۳. مجموعه خوشترتیب  $\bar{S}_\Omega$  با توپولوژی ترتیبی متری پذیر نیست.

یادآوری می کنیم که  $S_\Omega$  مجموعه خوشترتیب ناشمارای مینیمالی است که در بخش ۱-۱۰ ساخته شد، و  $\bar{S}_\Omega$  نمایش مجموعه  $\Omega \cup \{a\}$  است. نخست ملاحظه می کنیم که در توپولوژی ترتیبی،  $\Omega$  یک نقطه حدی  $S_\Omega$  است. (به همین دلیل در بخش ۱-۱۰ علامت  $\bar{S}_\Omega$  را برای نمایش  $\Omega \cup \{a\}$  به کار بردیم.) زیرا اگر  $[a, \Omega]$  یک عضو پایه دلخواه شامل  $\Omega$  باشد آنگاه باید  $S_\Omega$  را قطع کند، در غیر این خواهیم داشت

$$S_\Omega = S_a \cup \{a\}$$

و حال آنکه  $S_\Omega$  ناشمار است و  $S_a$  شمارا.

مدعی هستیم که هیچ دنباله ای از نقاط  $S_\Omega$  وجود ندارد که همگرا به  $\Omega$  باشد. زیرا، اگر  $(x_n)$  دنباله دلخواهی از نقاط  $S_\Omega$  باشد آنگاه مجموعه  $\{x_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$  زیرمجموعه ای از  $S_\Omega$  است، و بنابراین دارای کران بالایی مانند  $b$  است که در  $S_\Omega$  واقع است (نتیجه ۱-۱۰ در فصل ۱). بنابراین،  $[b, \Omega]$  یک عضو پایه است که شامل  $\Omega$  است و هیچ نقطه ای از دنباله  $(x_n)$  را در بر ندارد.

## تمرینها

۱. فرض کنید  $A \subset X$ . اگر  $d$  متریکی برای توپولوژی  $X$  باشد، ثابت کنید که  $d|_{A \times A}$  متریکی برای توپولوژی زیرفضایی در  $A$  است.
۲. فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو فضای متری، بترتیب، با متریهای  $d_X$  و  $d_Y$  باشند، و  $f: X \rightarrow Y$  دارای این خاصیت باشد که به ازای هر زوج از نقاط  $X$  مانند  $x_1$  و  $x_2$ ،

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$$

ثابت کنید که  $f$  یک نشانندن است. آن را یک نشانندن ایزومتریک  $X$  در  $Y$  می خوانند.

۳. ثابت کنید که هر حاصل ضرب شمارا از فضاها ی متری پذیر، مانند  $\prod X_\alpha$ ، متری پذیر

است. [داهنمایی: فرض کنید  $d_n$  متریکی برای  $X_n$  و کراندار به ۱ باشد. تعریف کنید  $[D(x, y) = \text{lub}\{d_n(x_n, y_n)/n\}$

۴. ثابت کنید که فضاهای  $R_1$  و  $S_0$  در لم دنباله صدق می کنند. (البته، این امر مستلزم آن نیست که آنها متری پذیر باشند.)

۵. قضیه. فرض کنید در فضای  $R$  داشته باشیم  $x_n \rightarrow x$  و  $y_n \rightarrow y$ ، در این صورت،

$$x_n + y_n \rightarrow x + y,$$

$$x_n - y_n \rightarrow x - y,$$

$$x_n \cdot y_n \rightarrow x \cdot y,$$

و در صورتی که هر  $y_n$  غیر صفر باشد و  $y \neq 0$ ،

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x}{y}.$$

[داهنمایی: قضیه ۳.۱۵ و لم ۴.۱۵ را به کار ببرید؛ به یاد بیاورید که اگر  $x_n \rightarrow x$  و  $y_n \rightarrow y$  آنگاه  $x_n \times y_n \rightarrow x \times y$

۶. تابع  $R \rightarrow [0, 1]$ :  $f_n(x) = x^n$  را با ضابطه  $f_n(x) = x^n$  تعریف می کنیم. ثابت کنید که به ازای هر  $x \in [0, 1]$  دنباله  $(f_n(x))$  همگراست، اما دنباله  $(f_n)$  همگرای یکنواخت نیست.

۷. فرض کنید  $X$  مجموعه ای باشد، و  $f_n: X \rightarrow R$  دنباله ای از توابع و  $\bar{p}$  متریک یکنواخت در فضای  $R^X$ . ثابت کنید که دنباله  $(f_n)$  همگرای یکنواخت به تابع  $f: X \rightarrow R$  است اگر و فقط اگر دنباله  $(f_n)$  به عنوان دنباله ای از اعضای فضای متری  $(R^X, \bar{p})$  به همگرا باشد.

۸. فرض کنید  $X$  فضایی توپولوژیک و  $Y$  فضایی متری باشد، و  $f_n: X \rightarrow Y$  دنباله ای از توابع پیوسته، و  $x_n$  دنباله ای از نقاط  $X$  باشد که همگرا به  $x$  است. ثابت کنید که اگر دنباله  $(f_n)$  همگرای یکنواخت به  $f$  باشد آنگاه  $(f_n(x_n))$  به  $f(x)$  همگراست.

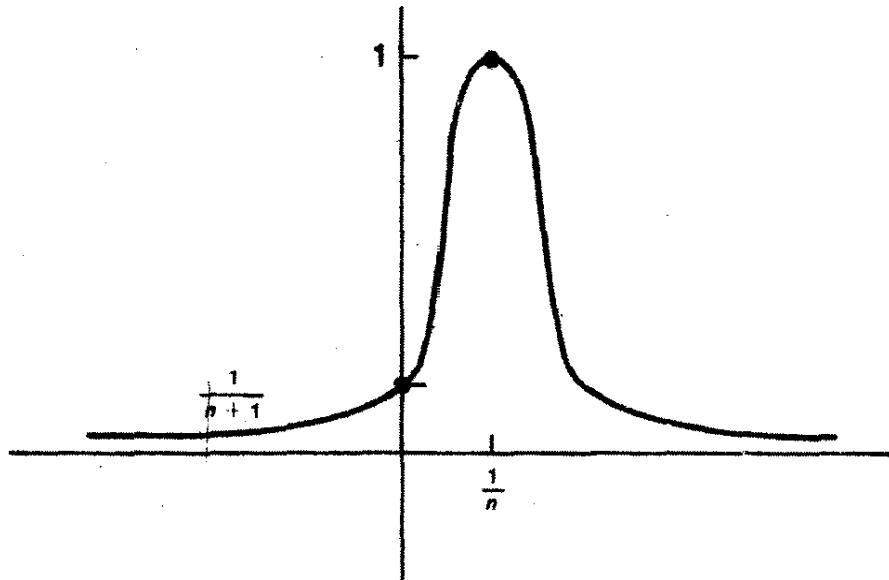
۹. فرض کنید  $f_n: R \rightarrow R$  با ضابطه

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2[x - (1/n)]^2 + 1}$$

تعریف شده باشد، (شکل ۱۹) و  $f: R \rightarrow R$  تابع صفر باشد.

(الف) ثابت کنید که به ازای هر  $x \in R$ ،  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

(ب) ثابت کنید که  $f$  همگرایی یکنواخت به  $f$  نیست. (این ثابت می کند که عکس قضیه ۶.۱۵ برقرار نیست؛ تابع حدی  $f$  ممکن است پیوسته باشد، گرچه همگرایی یکنواخت نیست.)



شکل ۱۹

۱۵. با استفاده از تعریف پیوستگی بر حسب مجموعه‌های بسته (قضیه ۱.۷)، ثابت کنید که مجموعه‌های زیرین مجموعه‌های بسته‌ای از  $R^2$  هستند:

$$A = \{x \times y \mid xy = 1\},$$

$$S^1 = \{x \times y \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

$$B^2 = \{x \times y \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

مجموعه  $B^2$  را گوی واحد (بسته) در  $R^2$  می گویند.

۱۱. احکام استانده زیر را در باب سریهای نامتناهی ثابت کنید:  
 (الف) ثابت کنید که اگر  $(s_n)$  دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد و به ازای هر  $n$ ،  $s_n \leq s_{n+1}$ ، آنگاه  $(s_n)$  همگراست.  
 (ب) فرض کنید  $(a_n)$  دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد،  $s_n$  را چنین تعریف می کنیم

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

اگر  $s \rightarrow s_n$ ، می گوئیم سری نامتناهی

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

نیز به  $s$  همگراست. ثابت کنید که اگر  $\sum a_i$  به  $s$  و  $\sum b_i$  به  $t$  همگرا باشند آنگاه  $\sum (ca_i + b_i)$  به  $cs + t$  همگراست.

(ب) آزمون مقایسه‌ای برای سریهای نامتناهی را ثابت کنید: اگر، به ازای هر  $i$ ،  $|a_i| \leq b_i$  و اگر سری  $\sum b_i$  همگرا باشد آنگاه سری  $\sum a_i$  همگراست. [دانهمایی: ثابت کنید که سریهای  $\sum |a_i|$  و  $\sum c_i$ ، که  $c_i = |a_i| + a_i$ ، همگرایند.]

(ت) دنباله  $f_n: X \rightarrow R$  مفروض است، قراردهیم

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x).$$

آزمون  $M$  و ايوشتراس را برای همگرایی بکنواخت ثابت کنید:

اگر به ازای هر  $x \in X$  و هر  $i$  داشته باشیم  $|f_i(x)| \leq b_i$  و اگر سری  $\sum b_i$  همگرا باشد آنگاه دنباله  $(s_n)$  همگرای بکنواخت به قابعی مانند  $s$  است. [دانهمایی: فرض

کنید  $r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i$ . ثابت کنید که اگر  $k > n$  آنگاه  $|s_k(x) - s_n(x)| \leq r_n$ ؛ از آن نتیجه بگیرید که  $|s(x) - s_n(x)| \leq r_n$ .

۱۲. پیوستگی عملهای جبری در  $R$  را ثابت کنید، در  $R$  متریک  $d(a, b) = |a - b|$  و در  $R^2$  متریک

$$\rho((x, y), (x_0, y_0)) = \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\}$$

را به کار ببرید.

(الف) ثابت کنید که عمل جمع پیوسته است. [دانهمایی: به ازای  $\epsilon$  مفروض، فرض کنید  $\delta = \epsilon/2$  و ملاحظه کنید که

$$d(x+y, x_0+y_0) \leq |x-x_0| + |y-y_0|.$$

(ب) ثابت کنید که عمل ضرب پیوسته است. [دانهمایی: به ازای نقطه مفروض  $(x_0, y_0)$  و  $\epsilon > 0$ ، فرض کنید

$$r\delta = \min\{\epsilon/(|x_0| + |y_0| + 1), \sqrt{\epsilon}\}$$

و ملاحظه کنید که

$$d(xy, x_0y_0) \leq |x_0| |y - y_0| + |y_0| |x - x_0| + |x - x_0| |y - y_0|.$$

(پ) ثابت کنید که عمل محاسبه عکس يك عدد نگاشتی پیوسته از  $R - \{0\}$  به  $R$  است. [دانهمایی: به ازای  $x_0 \neq 0$  و  $\epsilon > 0$ ، فرض کنید

$$\delta = \min\{|x_0|/2, x_0^2\epsilon/2\}$$

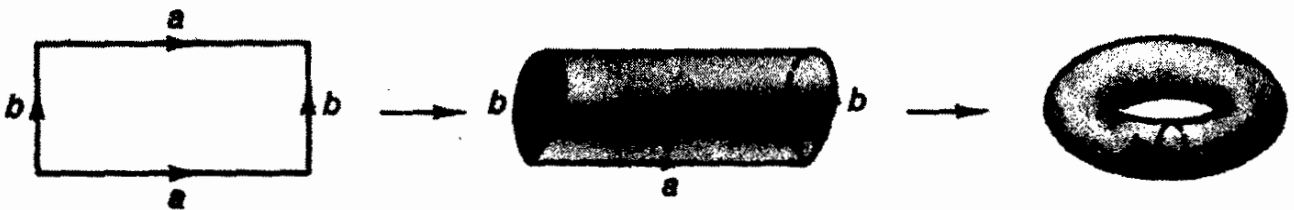
ملاحظه کنید که  $d(1/x, 1/x_0) = |x - x_0|/|xx_0|$ . اگر  $|x - x_0| < \delta$



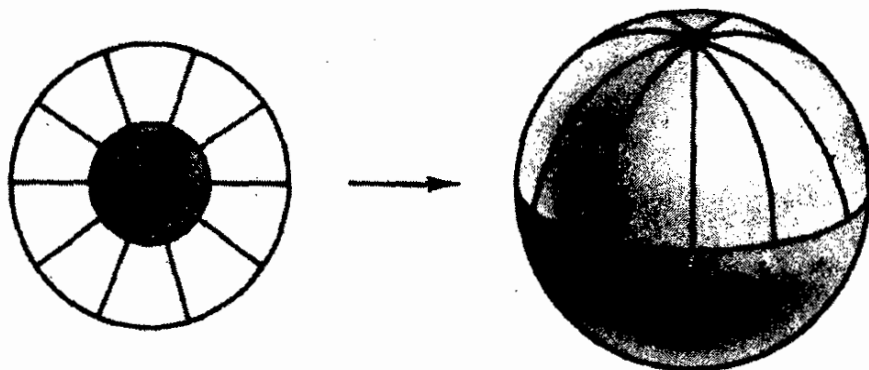
آنگاه  $|xx_0 - x_0^2| < |x_0|^2/2$  ، بنابراین  $xx_0 - x_0^2 > x_0^2/2$  و  $[.xx_0 > x_0^2/2 > 0$   
 (ت) ثابت کنید که عملهای تفریق و تقسیم نیز پیوسته اند.

### \* ۱۱-۲ توپولوژی خارج قسمتی

برخلاف توپولوژیهای که تا کنون در این فصل ملاحظه کردیم ، توپولوژی خارج قسمتی تعمیم طبیعی هیچیک از چیزهایی که قبلاً در آنالیز آموخته اید نیست. با وجود این ، تاحدی به آسانی می توان علت وجودی آن را توجیه کرد. یکی از توجیه های آن از هندسه ناشی می شود که در آن اغلب فن «پاره کردن و چسباندن» برای ساختن اشیای هندسی ، مانند سطوح ، به کار می رود. مثلاً ، چنبره (سطح لاستیک تویی اتومبیل) را می توان ، مسانند شکل ۲۰ ، با «چسباندن» لبه های یک مستطیل ، به طریقی مناسب ، ساخت. و کسره (سطح توپ) را می توان با جمع کردن همه کرانه های یک قوس به یک نقطه به دست آورد (شکل ۲۱). بیان ریاضی این ساختمانها متضمن مفهوم توپولوژی خارج قسمتی است.



شکل ۲۰



شکل ۲۱

تعریف. فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو فضای توپولوژیک باشند و  $p: X \rightarrow Y$  نگاشتی پوشا باشد. نگاشت  $p$  را یک نگاشت خارج قسمتی خوانیم در صورتی که هر زیرمجموعه  $U$  مانند  $U$  در  $Y$  باز باشد اگر و فقط اگر  $p^{-1}(U)$  در  $X$  باز باشد.

۱. این بخش در فصل ۸ برای اثبات قضیه منحنی ژوردان به کار می رود.

این شرط از پیوستگی قویتر است؛ بعضی از ریاضیدانان آن را «پیوستگی قوی» می‌خوانند. یک شرط معادل با آن چنین است که هر زیرمجموعه  $Y$  مانند  $A$  در  $Y$  بسته باشد اگر و فقط اگر  $p^{-1}(A)$  در  $X$  بسته باشد. معادل بودن این دو شرط از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B).$$

طریقه دیگر توصیف نگاشت خارج قسمتی به قرار زیر است: زیرمجموعه  $C$  از  $X$  را (نسبت به نگاشت پوشای  $p: X \rightarrow Y$ ) اشباع شده خوانیم در صورتی که  $C$  حاوی هر مجموعه  $p^{-1}(\{y\})$  که  $C$  را قطع می‌کند باشد. بنابراین،  $C$  اشباع شده است در صورتی که مساوی  $p^{-1}(p(C))$  باشد. بدین ترتیب،  $p$  نگاشت خارج قسمتی است اگر و فقط اگر پیوسته باشد و مجموعه‌های باز اشباع شده  $X$  را بر مجموعه‌های باز  $Y$  (یا مجموعه‌های بسته اشباع شده  $X$  را بر مجموعه‌های بسته  $Y$ ) بنگارد.

دو حالت خاص نگاشتهای خارج قسمتی، نگاشتهای باز و نگاشتهای بسته‌اند. یادآوری می‌کنیم که نگاشتی مانند  $f: X \rightarrow Y$  را نگاشت باز خوانیم در صورتی که به ازای هر مجموعه باز  $U$  از  $X$ ، مجموعه  $f(U)$  در  $Y$  باز باشد. و آن را نگاشت بسته خوانیم، در صورتی که به ازای هر مجموعه بسته  $X$  مانند  $A$ ، مجموعه  $f(A)$  در  $Y$  بسته باشد. از تعریف، مستقیماً نتیجه می‌شود که اگر  $p: X \rightarrow Y$  نگاشت پیوسته پوشایی باشد، که یا باز باشد و یا بسته، آنگاه  $p$  نگاشت خارج قسمتی است. نگاشتهای خارج قسمتی وجود دارند که نه باز هستند و نه بسته (تمرین ۲).

تعریف. اگر  $X$  فضایی و  $A$  مجموعه‌ای باشد و  $p: X \rightarrow A$  نگاشتی پوشا باشد آنگاه تنها یک توپولوژی  $\mathcal{J}$  در  $A$  وجود دارد که  $p$  نسبت به آن نگاشت خارج قسمتی است. این توپولوژی به توپولوژی خارج قسمتی القا شده به وسیله  $p$  موسوم است.

البته، توپولوژی  $\mathcal{J}$  چنین تعریف می‌شود که آن را متشکل از زیرمجموعه‌هایی مانند  $U$  از  $A$  می‌گیریم که  $p^{-1}(U)$  در  $X$  باز باشد. سهولت می‌توان ثابت کرد که  $\mathcal{J}$  یک توپولوژی است. مجموعه‌های  $\emptyset$  و  $A$  بازند، زیرا  $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  و  $p^{-1}(A) = X$ . دو شرط دیگر نتیجه تساویهای زیرند:

$$p^{-1}(\cup_{\alpha \in I} U_{\alpha}) = \cup_{\alpha \in I} p^{-1}(U_{\alpha}),$$

$$p^{-1}(\cap_{i=1}^n U_i) = \cap_{i=1}^n p^{-1}(U_i).$$

مثال ۱. فرض کنیم  $X \times Y \rightarrow X$ ، نگاشت تصویری باشد،  $\pi_1$  پیوسته و پوشا است. اگر  $U \times V$  یک عضو پایه  $X \times Y$  باشد، آنگاه تصویر آن  $\pi_1(U \times V) = U$  در  $X$  باز است. بنابراین،  $\pi_1$  نگاشت باز است. در حالت کلی  $\pi_1$  نگاشت بسته نیست، مثلاً

نگاشت تصویری  $R \rightarrow R \times R, \pi_1$  مجموعه بسته  $\{x \times y | xy = 1\}$  را بروی مجموعه نایسته  $R - \{0\}$  می نگارد.

مثال ۲. فرض کنیم  $X$  زیر فضای  $[0, 1] \cup [2, 3]$  از  $R$ ، و  $Y$  زیر فضای  $[0, 2]$  از  $R$  باشد. آشکارا دیده می شود که نگاشت  $p: X \rightarrow Y$ ، با ضابطه

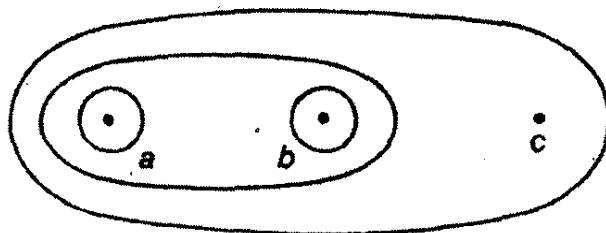
$$p(x) = \begin{cases} x & , x \in [0, 1] \text{ به ازای} \\ x-1 & , x \in [2, 3] \text{ به ازای} \end{cases}$$

پوشا، پیوسته، و بسته است. اما نگاشت باز نیست، زیرا تصویر مجموعه  $[0, 1]$  که در  $X$  باز است در  $Y$  باز نیست.

مثال ۳. فرض کنیم  $p$  نگاشت خط حقیقی  $R$  بروی مجموعه سه عضوی  $A = \{a, b, c\}$  باشد که با ضابطه زیر تعریف شده است:

$$p(x) = \begin{cases} a & , x > 0 \text{ به ازای} \\ b & , x < 0 \text{ به ازای} \\ c & , x = 0 \text{ به ازای} \end{cases}$$

می توان تحقیق کرد که توپولوژی خارج قسمتی در  $A$  که به وسیله  $p$  القا می شود، همان است که در شکل ۲۲ نشان داده شده است.



شکل ۲۲

حالت خاصی وجود دارد که در آن توپولوژی خارج قسمتی، بخصوص فراوان پیش می آید و آن عبارت است از:

تعریف. فرض کنیم  $X$  یک فضای توپولوژیک باشد و  $X^*$  افزایی از  $X$  به زیر مجموعه های جدا از همی که اجتماعشان مساوی  $X$  است. فرض کنیم  $p: X \rightarrow X^*$  نگاشت پوشایی باشد که هر نقطه  $X$  را به عضوی از  $X^*$  می نگارد که شامل آن نقطه است. فضای  $X^*$  را با توپولوژی خارج قسمتی که به وسیله  $p$  القا می شود فضای خارج قسمتی  $X$  می نامیم.

بعضی از ریاضیدانان  $X^*$  را يك فضای تجزیه یافضای همانسازی  $X$  می خوانند، چرا که  $X^*$  را به عنوان فضایی تصور می کنند که از «یکی گرفتن همه اعضای هرده هم ارزی به يك نقطه» به دست آمده است.

توپولوژی  $X^*$  را می توان به طریق دیگری نیز توصیف کرد. هر زیر مجموعه  $X^*$  مانند  $U$  گردایه ای از رده های هم ارزی است، و مجموعه  $p^{-1}(U)$  مساوی است با اجتماع همه رده های هم ارزی متعلق به  $U$ . بنابراین، يك مجموعه باز نوعی  $X^*$  عبارت است از گردایه ای از رده های هم ارزی که اجتماع آنها مجموعه ای باز در  $X$  است.

مثال ۴. فرض کنیم  $X$  مستطیل  $[0, 1] \times [0, 1]$  باشد. افراز  $X^*$  از  $X$  را چنین تعریف می کنیم، این افراز متشکل است از همه مجموعه های تک عضوی  $\{x \times y\}$  که در آن  $0 < x < 1$  و  $0 < y < 1$  و علاوه مجموعه های دو عضوی از نوع

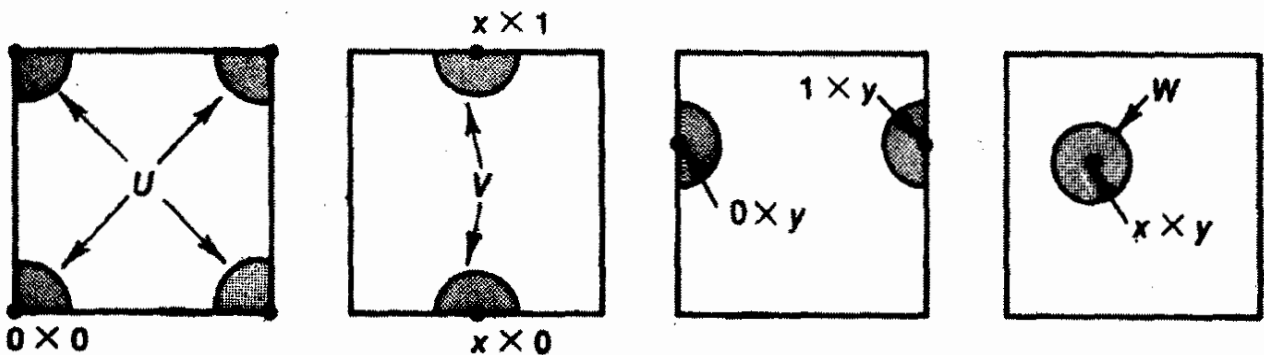
$$\{x \times 0, x \times 1\} \text{ که } 0 < x < 1$$

$$\{0 \times y, 1 \times y\} \text{ که } 0 < y < 1$$

و مجموعه چهار عضوی

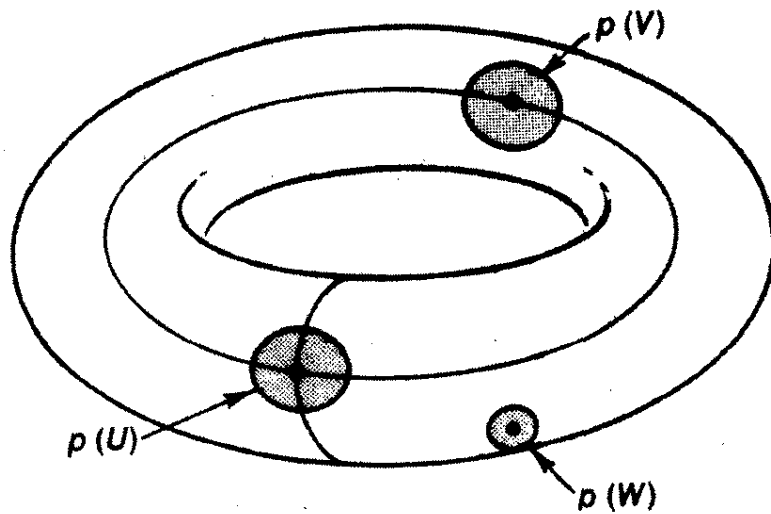
$$\{0 \times 0, 0 \times 1, 1 \times 0, 1 \times 1\}.$$

مجموعه های باز نوعی  $X$  که به صورت  $p^{-1}(U)$  هستند در شکل ۲۳ با نواحی سایه دار نشان داده شده اند، هر يك از اینها مجموعه ای باز در  $X$  است که مساوی اجتماعی از رده های هم ارزی است.



شکل ۲۳

همان طور که در شکل ۲۴ نشان داده شده است، تصویر هر يك از این مجموعه ها به وسیله  $p$  مجموعه بازی از  $X^*$  است. روش فوق برای توصیف  $X^*$ ، چیزی نیست جز روش ریاضی بیان آنچه که ما به هنگام درست کردن يك چنبره به وسیله چسباندن لبه های يك مستطیل به کمک تصاویر بیان کردیم.



شکل ۲۴

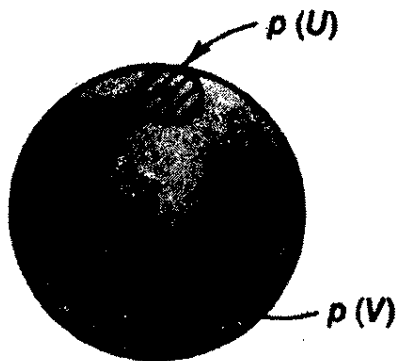
مثال ۵. فرض کنیم  $X$  گوی بسته واحد

$$\{x \times y \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

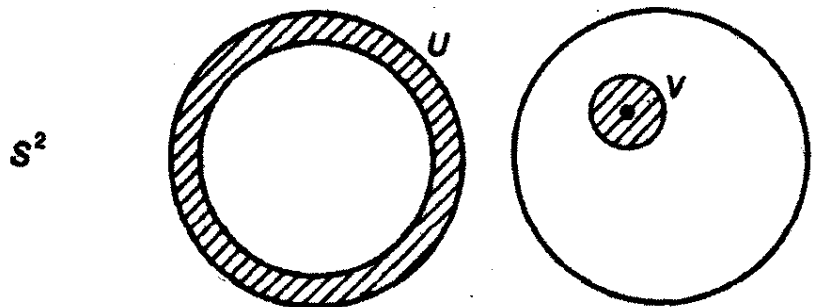
در  $R^2$  باشد، و فرض کنیم  $X^*$  افرازی از  $X$  باشد که متشکل است از مجموعه  $S^1 = \{x \times y \mid x^2 + y^2 = 1\}$  و همه مجموعه‌های تک‌عضوی  $\{x \times y\}$  بطوری که  $x^2 + y^2 < 1$ . مجموعه‌های باز نوعی  $X$  که به شکل  $p^{-1}(U)$  هستند به وسیله نواحی سایه‌زده شکل ۲۵ نشان داده شده‌اند. می‌توان ثابت کرد که  $X^*$  با زیرفضایی از  $R^3$  موسوم به کره واحد  $S^2$  بعدی، که به صورت زیر تعریف می‌شود، هم‌هومورف است:

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

تصویر آن در شکل ۲۶ دیده می‌شود.



شکل ۲۶



شکل ۲۵

اینک به کشف روابط موجود بین این مفهوم جدید، یعنی توپولوژی خارج قسمتی، و مفاهیمی که پیش از این بحث شدند می پردازیم. جالب توجه اینکه بسیاری از این مفاهیم آن طور که از آنها انتظار می رود رفتار نمی کنند.

مثلاً، به آسانی می توان دید که زیرفضاها خوش رفتار نیستند: اگر  $p: X \rightarrow Y$  نگاشتی خارج قسمتی و  $A$  زیرفضایی از  $X$  باشد آنگاه نگاشت  $p': A \rightarrow p(A)$ ، که از تحدید حوزه تعریف و حوزه مقادیر  $p$  به دست آمده است، لازم نیست نگاشتی خارج قسمتی باشد (مثال ۶ دیده شود). با این وجود، اگر  $A$  در  $X$  باز، و  $p$  نگاشتی باز باشد آنگاه  $p'$  نگاشتی خارج قسمتی است؛ همچنین است هرگاه  $A$ ، و  $p$  هر دو بسته باشند. اثبات این مطلب را به خواننده واگذار می کنیم.

مثال ۶. زیرفضای  $A = [0, 1] \cup (2, 3]$  از  $R$  را در نظر می گیریم، فضای  $A$  زیرفضایی از فضای  $X$  در مثال ۲ نیز هست. فرض کنیم نگاشت  $p$  مثال ۲ را به  $A$  تحدید کرده باشیم. در این صورت، نگاشت  $q = p|_A: A \rightarrow [0, 2]$  پیوسته و پوشاست اما نگاشت خارج قسمتی نیست. مثلاً مجموعه

$$q^{-1}((1, 2]) = (2, 3]$$

در حوزه تعریف، یعنی فضای  $A$ ، بسته است، ولی  $(1, 2]$  در حوزه مقادیر یعنی فضای  $[0, 2]$  بسته نیست.

ترکیب نگاشتها بسیار خوش رفتار است؛ تحقیق در اینکه ترکیب دو نگاشت خارج قسمتی نگاشتی است خارج قسمتی بدیهی است.

اما، حاصل ضرب دو نگاشت خارج قسمتی لازم نیست نگاشتی خارج قسمتی باشد: اگر  $p: A \rightarrow B$  و  $q: C \rightarrow D$  نگاشتهایی خارج قسمتی باشند آنگاه نتیجه نمی شود که نگاشت

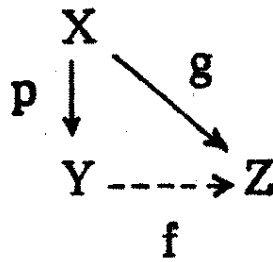
$$p \times q: A \times C \rightarrow B \times D$$

که با ضابطه  $(p \times q)(a \times c) = p(a) \times q(c)$  تعریف می شود، خارج قسمتی است (مثال ۸ را نگاه کنید). برای اینکه این حکم برقرار باشد، شرایط دیگری برای نگاشتها یا فضاها لازم است. یکی از این شرطها (در مورد فضاها) به فشردگی موضعی موسوم است، که آنرا در آتیه بررسی می کنیم. (تمرینهای بخش ۳-۸ را نگاه کنید). شرط دیگر (در مورد نگاشتها) آن است که  $p$  و  $q$  هر دو باز باشند. در این حالت می توان به آسانی تحقیق کرد که  $p \times q$  نیز نگاشتی باز و در نتیجه نگاشتی خارج قسمتی است.

مطلبی هم در مورد توابع پیوسته بر فضاها ی خارج قسمتی باید گفت وقتی که فضاها ی حاصل ضربی را بررسی می کردیم، ضابطه ای برای تعیین پیوستگی نگاشتی مانند  $f: Z \rightarrow \prod X_\alpha$  بتوی فضایی حاصل ضربی در دست داشتیم. مورد نظیر آن در نظریه فضاها ی خارج قسمتی، ضابطه ای است برای تعیین پیوستگی نگاشتی مانند  $f: X^* \rightarrow Z$

بر فضایی خارج قسمتی. در این مورد قضیه زیر برقرار است:

۱.۱۱. قضیه فرض کنیم  $p: X \rightarrow Y$  نگاشتی خارج قسمتی، و  $Z$  یک فضا، و  $g: X \rightarrow Z$  نگاشتی پیوسته باشد که به ازای هر  $y \in Y$ ، در مجموعه  $p^{-1}(\{y\})$  ثابت است. در این صورت،  $g$  نگاشتی پیوسته مانند  $f: Y \rightarrow Z$  القا می‌کند به طوری که  $f \circ p = g$ .



پروهان. به ازای هر  $y \in Y$ ، مجموعه  $g(p^{-1}(\{y\}))$  در  $Z$  مجموعه‌ای تک‌عضوی است (زیرا  $g$  روی  $p^{-1}(\{y\})$  ثابت است). اگر یگانه‌نقطه این مجموعه را به  $f(y)$  نمایش دهیم آنگاه نگاشتی مانند  $f: Y \rightarrow Z$  تعریف می‌شود، که در آن به ازای هر  $x \in X$ ،  $f(p(x)) = g(x)$  باشد. از پیوستگی  $g$  نتیجه می‌شود که مجموعه

$$g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$$

در  $X$  باز است. چون  $p$  یک نگاشت خارج قسمتی است،  $f^{-1}(V)$  نیز باید در  $Y$  باز باشد.  $\square$

اهل هاوسدورف خوش رفتار نیست؛ حتی اگر با فضای هاوسدورفی مانند  $X$  شروع کنیم، دلیلی وجود ندارد که فضای خارج قسمتی آن هاوسدورف باشد. شرط ساده‌ای برای بسته بودن مجموعه‌های تک‌عضوی در یک فضای خارج قسمتی وجود دارد: اگر  $p: X \rightarrow Y$  نگاشتی خارج قسمتی باشد آنگاه مجموعه‌های تک‌عضوی در  $Y$  بسته‌اند اگر و فقط اگر هر مجموعه  $p^{-1}(\{y\})$  در  $X$  بسته باشد. بنابراین، اگر  $X^*$  افزایی از  $X$  به مجموعه‌های بسته باشد آنگاه در فضای خارج قسمتی  $X^*$  همه مجموعه‌های تک‌عضوی بسته‌اند. یافتن شرایطی که هاوسدورف بودن  $X^*$  را تضمین کند دشوارتر است. شرط نسبتاً پیچیده‌ای موسوم به نیم‌پیوستگی از بالا وجود دارد که می‌توان برای تضمین هاوسدورف بودن افزای  $X^*$  بر آن اعمال کرد. با این شرط در اینجا کاری نداریم. اما حالتی هست که در آن بسادگی می‌توان دید که  $X^*$  فضایی هاوسدورف است.

۲.۱۱. قضیه فرض کنیم  $g: X \rightarrow Z$  نگاشتی پیوسته و پوشا باشد و  $X^*$  گردایه زیرین از زیرمجموعه‌های  $X$  باشد:

$$X^* = \{g^{-1}(\{z\}) \mid z \in Z\}$$

$X^*$  را با توپولوژی خارج قسمتی در نظر می‌گیریم.

(الف) اگر  $Z$  هاوسدورف باشد،  $X^*$  نیز چنین است.

(ب) نگاشت  $g$  نگاشت پیوسته دوسویی  $f: X^* \rightarrow Z$  را القا می‌کند، و این نگاشت هومومورفیسم است اگر و فقط اگر  $g$  نگاشتی خارج قسمتی باشد.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ p \downarrow & \searrow g & \\ X^* & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

برهان. بنا بر قضیهٔ پیش،  $g$  نگاشتی پیوسته مانند  $f: X^* \rightarrow Z$  القا می‌کند؛ واضح است که  $f$  دوسویی است. اگر  $Z$  هاوسدورف باشد آنگاه تصاویر نقاط متمایز  $X^*$  تحت  $f$  متمایزند، پس همسایگیهای جدا از همی مانند  $U$  و  $V$  دارند. در نتیجه،  $f^{-1}(U)$  و  $f^{-1}(V)$  همسایگیهای از هم جدای دو نقطهٔ مفروض  $X^*$  اند.

فرض کنیم  $f$  هومومورفیسم باشد. در این صورت، از آنجا که  $f$  و  $p$  تابع تصویری  $p: X \rightarrow X^*$  نگاشت خارج قسمتی اند، نگاشت  $g = f \circ p$  نیز نگاشت خارج قسمتی است. بعکس، فرض کنیم  $g$  نگاشتی خارج قسمتی باشد. به ازای مجموعهٔ باز مفروضی از  $X^*$  مانند  $V$ ، ملاحظه می‌کنیم که مجموعهٔ

$$g^{-1}(f(V)) = p^{-1}(V)$$

در  $X$  باز است (چون  $p$  پیوسته است). بنابراین، چون  $g$  نگاشتی خارج قسمتی است،  $f(V)$  در  $Z$  باز است. در نتیجه  $f$  مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز می‌نگارد، یعنی هومومورفیسم است.  $\square$

هنگام تحقیق در فضاهاى خارج قسمتی باید توجه داشت که نباید برای تجسم این فضاها در اتکا به شهود افراط کرد. مثال زیر را ملاحظه کنید:

مثال ۷. فرض کنیم  $X$  اجتماع همهٔ خطوط مستقیمی در صفحه باشد که به صورت  $L_n = R \times \{n\}$ ، به ازای  $n \in \mathbb{Z}_+$  هستند و فرض کنیم  $Z$  اجتماع همهٔ خطوط مستقیمی باشد که از مبدأ می‌گذرند و شیب آنها عدد صحیح مثبتی است. یعنی  $Z = \bigcup L'_n$ ، که در آن،

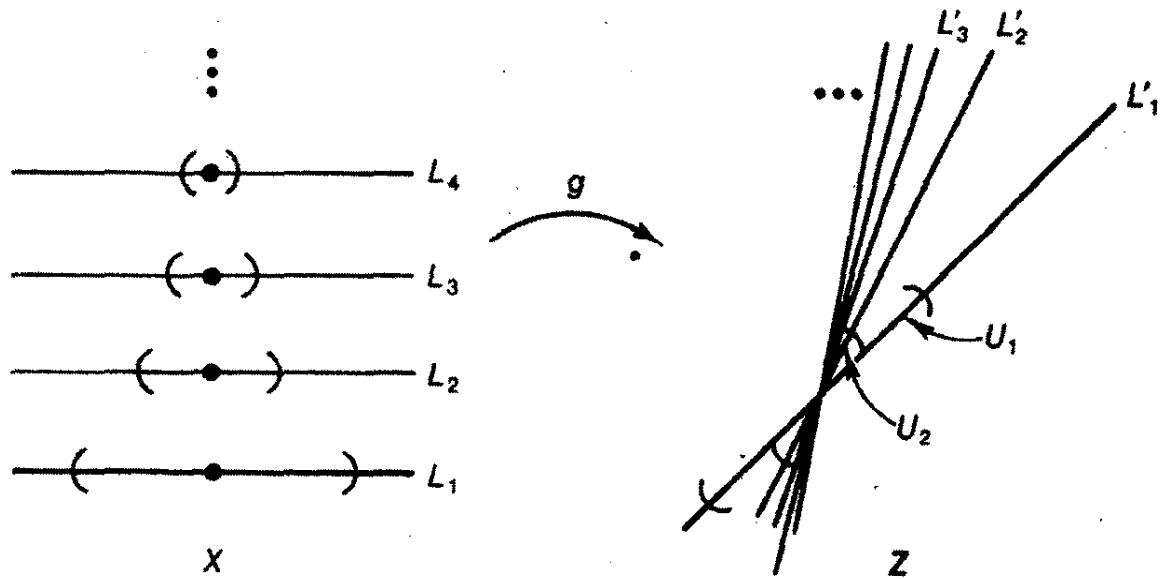
$$L'_n = \{x \times (nx) \mid x \in R\}.$$

$X$  و  $Z$  هر دو زیر فضای  $R^2$  هستند فرض کنیم  $g: X \rightarrow Z$  نگاشتی با ضابطهٔ

$$g(x \times n) = x \times (nx)$$

باشد. این نگاشت هر  $L_n$  را، به طور خطی، بر  $L'_n$  می‌نگارد (شکل ۲۷). مدعی هستیم که  $g$  نگاشت خارج قسمتی نیست.





شکل ۲۷

به بیان دیگر، می خواهیم ثابت کنیم که توپولوژی خارج قسمتی در  $Z$  که به وسیله نکاشت  $g$  القا می شود با توپولوژی زیر فضایی  $Z$  مساوی نیست.

برای اثبات این حکم، به ازای هر  $n$ ، بازه بازی مانند  $U_n$  به طول  $1/n$  و به مرکز مبدأ برخط  $L'_n$  اختیار می کنیم، و فرض می کنیم  $U = \bigcup U_n$ . در این صورت، چون مجموعه  $U$  در  $X$  باز است،  $g^{-1}(U)$  نسبت به توپولوژی خارج قسمتی که به وسیله  $g$  القا می شود باز است. اما  $U$  در توپولوژی زیر فضایی  $Z$  باز نیست؛ در این توپولوژی، مبدأ یک نقطه حدی  $Z-U$ ، یعنی متمم  $U$ ، است.

همین مطلب را به طریقی دیگر نیز می توان بیان کرد. فرض کنیم از فضای خارج قسمتی  $X^*$  را با تبدیل مجموعه  $X \times Z_+$  به یک نقطه به دست آورده باشیم. ظاهراً، این طور به نظر می آید که  $X^*$  اساساً همان زیر فضای  $Z$  از صفحه است. اما چنین نیست. نکاشت  $g$  نکاشت پیوسته دوسویی  $Z \rightarrow X^*$  را القا می کند. اما، چون  $g$  نکاشت خارج قسمتی نیست،  $h$  همثومورفیس نمی باشد.

مثال ۸. حاصل ضرب دو نکاشت خارج قسمتی لازم نیست نگاشتی خارج قسمتی باشد. فضاهای  $X$  و  $Z$  را از مثال پیش اختیار می کنیم. اما در اینجا فرض می کنیم  $Z$  از توپولوژی خارج قسمتی القا شده به وسیله  $g$  برخوردار باشد.

فضای  $R^\omega$  را (با توپولوژی حاصل ضربی) در نظر می گیریم. فرض می کنیم  $i: R^\omega \rightarrow R^\omega$  نکاشت همانی باشد، چون  $i$  همثومورفیس است، پس نکاشتی خارج قسمتی است. ثابت خواهیم کرد که نکاشت

$$f = g \times i: X \times R^\omega \rightarrow Z \times R^\omega$$

نگاشتی خارج قسمتی نیست. یادآوری می کنیم که  $X = R \times Z_+$

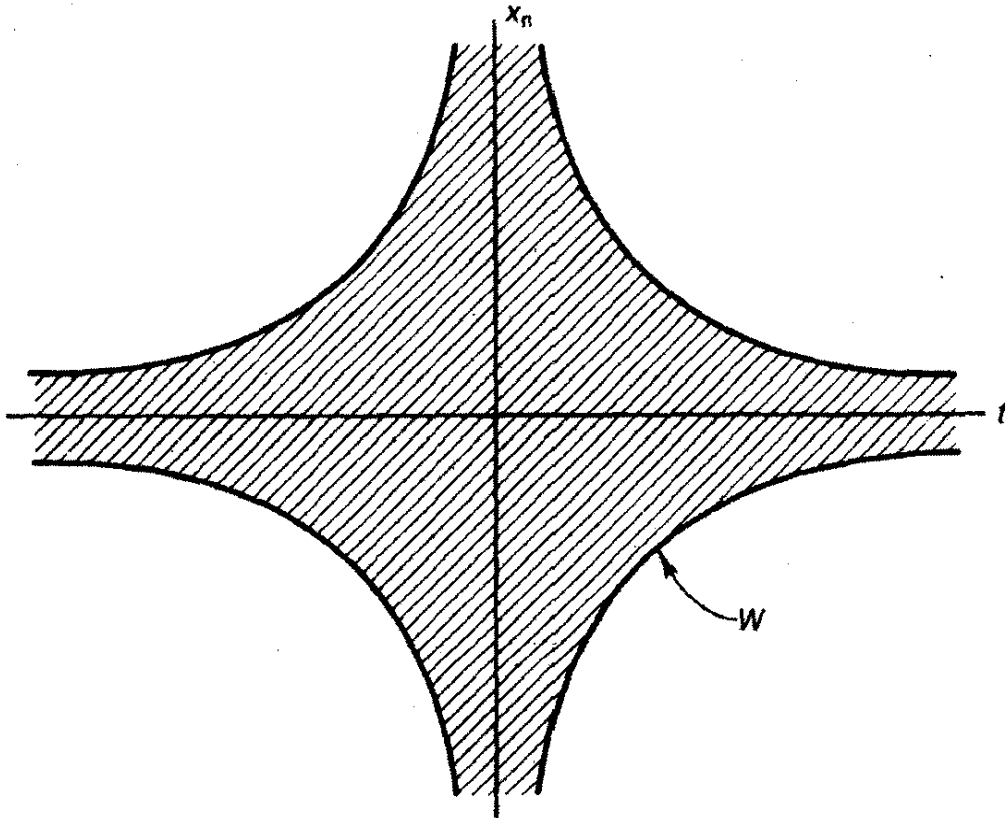
به ازای هر  $n \in Z_+$ ، زیر مجموعه  $U_n$  از  $(R \times Z_+) \times R^\omega$  را چنین تعریف می کنیم:

$$U_n = \{(t \times n) \times (x_1, x_2, \dots); |tx_n| < 1\}.$$

مجموعه  $U_n$  در  $X \times R^m$  باز است، زیرا برابر است با حاصل ضرب دکارتی مجموعه باز

$$W = \{t \times x_n \mid |tx_n| < 1\}$$

در صفحه  $tx_n$ ، مجموعه باز  $\{n\}$  در  $Z_+$ ، و مجموعه‌های باز  $R$  در بقیه مختصها (شکل ۲۸).



شکل ۲۸

فرض کنیم  $U$  مجموعه باز

$$U = \bigcup_{n \in Z_+} U_n$$

از  $X \times R^m$  باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند:

(الف)  $f^{-1}(f(U)) = U$ .

(ب)  $f(U)$  در  $Z \times R^m$  باز نیست.

بنابراین، چون  $f^{-1}(f(U))$  باز است و  $f(U)$  در  $Z \times R^m$  باز نیست، پس نگاشت  $f$  خارج قسمتی نیست. حال اثبات دوحکم فوق،

(الف) اگر  $f^{-1}(f(U))$  متمایز از  $U$  باشد آنگاه دو نقطه  $x \in U$  و  $y \notin U$  باید وجود داشته باشند به طوری که  $f(x) = f(y)$ . اما، با توجه به مطالب گفته شده، فقط وقتی

۱. در اینجا از هومئومورفی بودن  $R \times Z_+ \times R^m$  و  $R \times R \times Z_+ \times R^m$  استفاده شده است.

به ازای  $x \neq y$  داریم  $f(x) = f(y)$  که به ازای نقطه‌ای مانند  $(x_1, x_2, \dots)$  از  $R^\omega$  داشته باشیم

$$x = (0 \times m) \times (x_1, x_2, \dots),$$

$$y = (0 \times n) \times (x_1, x_2, \dots).$$

ولی در این صورت، این دو نقطه هر دو به  $U$  تعلق خواهند داشت، زیرا  $|0 \cdot x_m| < 1$  و  $|0 \cdot x_n| < 1$ .

(ب) فرض کنیم  $f(U)$  در  $Z \times R^\omega$  باز باشد. مجموعه  $f(U)$  شامل نقطه  $0 \times 0$  است، پس حاوی عضو پایه‌ای است مانند  $V \times \prod W_i$  که شامل  $0 \times 0$  است. در اینجا  $V$  در  $Z$  و  $W_i$  در  $R$  باز است؛ و به ازای همه مقادیر  $i$ ، جز تعدادی متناهی از آنها،  $W_i = R$ . حال عدد  $N$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $W_N = R$ . چون  $f(U)$  حاوی  $V \times \prod W_i$  است، مجموعه  $U = f^{-1}(f(U))$  حاوی  $U = f^{-1}(V \times \prod W_i) = g^{-1}(V) \times \prod W_i$  است. اما  $g^{-1}(V)$  شامل نقطه‌ای در  $X$  است که حاوی مجموعه  $0 \times Z_+$  است. بالاخص،  $g^{-1}(V)$  شامل نقطه‌ای مانند  $t_0 \times N$  است به طوری که  $t_0 \neq 0$ . حال  $a_N$  را با شرط  $|t_0| a_N > 1$  انتخاب می‌کنیم، و نقطه

$$(t_0 \times N) \times (0, \dots, 0, a_N, 0, \dots)$$

از  $X \times R^\omega$  را در نظر می‌گیریم. چون  $W_N = R$ ، این نقطه در  $g^{-1}(V) \times \prod W_i$  قرار دارد. و چون  $|t_0| a_N > 1$  از یک کمتر نیست، لذا در  $U$  قرار ندارد. اما  $U$  حاوی  $g^{-1}(V) \times \prod W_i$  است، و این تناقض است.

### تمرینها

۱. جزئیات مثال ۳ را بررسی کنید.
۲. فرض کنید  $\pi_1: R \times R \rightarrow R$  نگاشت تصویری بر مختص اول باشد. (الف) فرض کنید  $X$  زیر فضای  $(R \times 0) \cup (0 \times R)$  از  $R \times R$  باشد، و  $g = \pi_1|_X$ . ثابت کنید که  $g$  نگاشتی است بسته، اما باز نیست. (ب)  $Y$  را زیر فضای  $(R_+ \times R) \cup (R \times 0)$  از  $R \times R$  در نظر بگیرید و فرض کنید  $h = \pi_1|_Y$ . ثابت کنید که  $h$  نه بسته است و نه باز، اما نگاشتی خارج قسمتی است. [دانهمایی:  $h^{-1}(U) \cap (R \times 0) = U \times 0$ ]
۳. فرض کنید  $p: X \rightarrow Y$  پوشا و پیوسته و  $A$  زیر فضایی از  $X$  باشد. ثابت کنید که اگر  $A$  در  $X$  باز باشد و  $p$  نگاشتی باز باشد آنگاه  $p|_A$  نگاشتی باز است؛ از اینجا نتیجه بگیرید که  $p(A) \rightarrow p|_A$  نگاشت باز است. ثابت کنید که اگر  $A$  و  $p$  بسته باشند آنگاه  $p|_A$  و  $p'$  بسته‌اند.

۴. فرض کنید  $X$  فضایی دلخواه،  $A$  یک مجموعه، و  $p: X \rightarrow A$  نگاشتی پوشا باشد. ثابت کنید که توپولوژی خارج قسمتی القا شده در  $A$  به وسیله  $p$  ظریفترین (بزرگترین) توپولوژی ای است که نسبت به آن تابع  $p$  پیوسته است.

۵. (الف) در صفحه  $X$  رابطه ای هم ارزی به قرار زیر تعریف می کنیم:

$$x_0 \times y_0 \sim x_1 \times y_1 \text{ اگر } x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2$$

فرض کنید  $X^*$  گردایه رده های هم ارزی برخوردار از توپولوژی خارج قسمتی باشد.  $X^*$  بایک فضای شناخته شده همومورف است؛ آن فضا کدام است؟

(ب) قسمت (الف) را در مورد رابطه هم ارزی

$$x_0 \times y_0 \sim x_1 \times y_1 \text{ اگر } x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$$

تکرار کنید.

۶. (الف)  $g: R^2 \rightarrow R$  را با ضابطه  $g(x \times y) = x + y^2$  تعریف می کنیم. ثابت کنید که  $g$  نگاشتی خارج قسمتی است.

(ب)  $g: R^2 \rightarrow R_+$  را با ضابطه  $g(x \times y) = x^2 + y^2$  تعریف می کنیم. ثابت کنید که  $g$  نگاشتی خارج قسمتی است.

(پ) قسمتهای (الف) و (ب) را با تمرین ۵ مقایسه کنید.

۷. فرض کنید  $Z$  زیر فضای  $(R \times \circ) \cup (\circ \times R)$  از  $R^2$  باشد.  $g: R^2 \rightarrow Z$  را با ضابطه ای

$$g(x \times y) = x \times \circ, \quad x \neq \circ$$

$$g(\circ \times y) = \circ \times y,$$

تعریف می کنیم

(الف) آیا  $g$  نگاشتی خارج قسمتی است؟ آیا  $g$  پیوسته است؟

(ب) ثابت کنید که در توپولوژی خارج قسمتی القا شده به وسیله  $g$ ، فضای  $Z$  هاوسدورف نیست.

۸. فرض کنید  $C_n$  زیر فضایی از  $R^2$  باشد که با

$$C_n = \left\{ x \times y \mid \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right\}$$

تعریف شده است. فرض کنید  $Y$  زیر فضای

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} C_n$$

از  $R^2$  باشد، و  $X$  را زیر فضای  $C_1 \times \mathbb{Z}_+$  از  $R^2 \times R$  فرض کنید.  $g: X \rightarrow Y$  را با ضابطه

$$g((x \times y) \times n) \left( \frac{x}{n} \times \frac{y}{n} \right)$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که  $g$  پیوسته و پوشاست، اما خارج قسمتی نیست.

۹. فرض کنید  $\{X_\alpha\}$  خانواده‌ای از فضاها، و  $\{p_\alpha\}$  خانواده‌ای از نگاشتهای  $A \rightarrow X_\alpha$  باشد که در آن  $A$  مجموعه دلخواهی است.  
 (الف) ثابت کنید که ظریفترین توپولوژی یکنایی مانند  $\mathcal{J}$  در  $A$  وجود دارد که نسبت به آن هر نگاشت  $p_\alpha$  پیوسته است.  
 (ب) ثابت کنید که نگاشت  $f: A \rightarrow Y$  نسبت به  $\mathcal{J}$  پیوسته است اگر و فقط اگر هر يك از نگاشتهای  $f \circ p_\alpha$  پیوسته باشد.

### \* تمرینهای تکمیلی:

### گروههای توپولوژیک

در این تمرینها، گروههای توپولوژیک و بعضی از خواص آنها مورد بحث قرار می‌گیرند. نام توپولوژی خارج قسمتی ناشی از حالت خاصی است که خارج قسمت يك گروه توپولوژیک را بر يك زیر گروه آن تشکیل می‌دهند.  
 يك گروه توپولوژیک  $G$  گروهی است که فضای توپولوژیک نیز هست، با این شرط که نگاشت از  $G \times G$  به  $G$  که  $x \times y$  را به  $x \cdot y$  می‌نگارد، و نگاشت از  $G$  به  $G$  که  $x$  را به  $x^{-1}$  می‌نگارد پیوسته باشند.

۱. ثابت کنید که  $G$  گروه توپولوژیک است اگر و فقط اگر نگاشت از  $G \times G$  به  $G$  که  $x \times y$  را به  $x \cdot y$  می‌نگارد پیوسته باشد.

۲. ثابت کنید که گروههای زیر گروه توپولوژیک اند:

(الف)  $(\mathbb{Z}, +)$

(ب)  $(\mathbb{R}, +)$

(پ)  $(\mathbb{R}_+, \cdot)$

(ت)  $(S^1, \cdot)$ ، که در آن  $S^1$  فضای همه اعداد مختلط  $z$  است که  $|z| = 1$ .

(ث) گروه خطی عمومی  $GL(n)$  با عمل ضرب ماتریسها.  $GL(n)$  مجموعه همه ماتریسهای وارون پذیر  $n$  در  $n$  است، که به عنوان يك زیرمجموعه  $R(n^1)$  يك فضای توپولوژیک است، چگونگی این شمول بدیهی است.

(ج)  $(R^J, +)$  با توپولوژیهای حاصل ضربی، یکنواخت، و جمعی.

۳. فرض کنید  $(G, \cdot)$  يك گروه توپولوژیک، و  $\alpha$  عضوی از  $G$  باشد. ثابت کنید که نگاشتهای  $G \rightarrow G$ ،  $f_\alpha, g_\alpha$  که با ضابطه‌های

$$g_\alpha(x) = x \cdot \alpha \quad \text{و} \quad f_\alpha(x) = \alpha \cdot x$$

تعریف می شوند، هومثومورفیسمهایی از  $G$  هستند. نتیجه بگیرد که  $G$  یک فضای همگن است. (یعنی هر زوج از نقاط  $G$  همسایگهایی دارند که هومثومورف اند.)

۴. فرض کنید  $H$  زیر گروهی از  $G$  باشد. اگر  $x \in G$ ، تعریف می کنیم  $xH = \{x \cdot h \mid h \in H\}$ ؛ این مجموعه را یک هموده چپ  $H$  در  $G$  می گوئیم. فرض کنید  $G/H$  نمایش گردایه همرده های چپ  $H$  در  $G$  باشد. این گردایه یک افراز  $G$  است. اگر  $G$  یک گروه توپولوژیک باشد،  $G/H$  را با توپولوژی خارج قسمتی در نظر می گیریم.

(الف) ثابت کنید که اگر  $\alpha \in G$ ، آنگاه نگاشت  $f_\alpha$ ، که در تمرین پیش آمد، هومثومورفیسمی به  $G/H$  القا می کند که  $xH$  را به  $(\alpha \cdot x)H$  می نگارد. نتیجه بگیرد که  $G/H$  یک فضای همگن است.

(ب) ثابت کنید که نگاشت خارج قسمتی  $p: G \rightarrow G/H$  باز است.

(پ) ثابت کنید که اگر  $H$  مجموعه ای بسته در توپولوژی  $G$  باشد آنگاه مجموعه های تک عضوی در  $G/H$  بسته اند.

(ت) ثابت کنید که اگر  $H$  یک زیر گروه نرمال  $G$  باشد آنگاه  $G/H$  یک گروه توپولوژیک است.

۵.  $(Z, +)$  یک زیر گروه نرمال  $(R, +)$  است. گروه خارج قسمتی  $R/Z$  یک گروه توپولوژیک شناخته شده است. آن گروه کدام است.

۶. فرض کنید  $G$  یک گروه توپولوژیک با عضوی اثر  $e$  باشد. اگر  $A$  و  $B$  زیر مجموعه هایی از  $G$  باشند،  $A \cdot B$  را مجموعه همه اعضای  $a \cdot b$  قرار می دهیم که  $a \in A$  و  $b \in B$ . فرض کنید  $A^{-1}$  نمایش مجموعه نقاط  $a^{-1}$  باشد که  $a \in A$ .  
(الف) اگر  $U$  یک همسایگی  $e$  باشد، ثابت کنید که یک همسایگی  $V$  از  $e$  هست که  $V \cdot V^{-1} \subset U$ .

(ب) اگر  $A$  مجموعه بسته ای باشد که شامل  $e$  نباشد، ثابت کنید که یک همسایگی  $V$  از  $e$  وجود دارد به طوری که مجموعه های  $V$  باز و

$$A \cdot V = \bigcup_{\alpha \in A} f_\alpha(V)$$

از هم جدا هستند. ( $f_\alpha$  نگاشتی است که در تمرین ۳ تعریف شد.)

(پ) فرض کنید مجموعه های تک عضوی در  $G$  بسته باشند. ثابت کنید که  $G$  هاوسدورف است. در واقع، ثابت کنید که  $G$  در اصل موضوع جداسازی قویتر زیر، که به اصل موضوع منتظم بودن موسوم است، صدق می کند: مجموعه بسته

$C$  و نقطه  $x$  که در  $C$  نیست مفروض اند، مجموعه‌های باز از هم جدایی وجود دارند که یکی  $x$  و دیگری  $C$  را در بر دارد.

۷. فرض کنید  $H$  یک زیر گروه  $G$  باشد که در توپولوژی  $G$  بسته است؛ فرض کنید  $p: G \rightarrow G/H$  نگاشت خارج قسمتی باشد. ثابت کنید که  $G/H$  در اصل موضوع منتظم بودن صدق می‌کند. [داهنمایی: نخست حالتی را در نظر بگیرید که در آن  $A$  مجموعه بسته‌ای در  $G/H$  است که شامل  $p(e)$  نیست. فرض کنید  $B = p^{-1}(A)$ . یک همسایگی  $e$  مانند  $U$  بیابید که جدا از  $B$  باشد، و قرار دهید  $V^{-1} \cdot V \subset U$ . سپس مجموعه‌های  $V \cdot B$  و  $V \cdot H$  را در نظر بگیرید.]
۸. ثابت کنید که اگر  $H$  یک زیر گروه  $G$  باشد، بستار  $H$  نیز یک زیر گروه است.

## همبندی و فشردگی

در آموزش حسابان سه قضیه اساسی در مورد توابع پیوسته وجود دارد، و آنچه که از حسابان می ماند متکی بر همین سه قضیه است. این قضایا عبارت اند از:

قضیه مقدارمیان. اگر  $f: [a, b] \rightarrow R$  پیوسته و  $r$  عددی حقیقی بین  $f(a)$  و  $f(b)$  باشد آنگاه عضوی مانند  $c$  از  $[a, b]$  وجود دارد که  $f(c) = r$ .

قضیه مقدارماکزیموم. اگر  $f: [a, b] \rightarrow R$  پیوسته باشد آنگاه عضو  $c \in [a, b]$  وجود دارد که به ازای هر  $x \in [a, b]$ ،  $f(x) \leq f(c)$ .

قضیه پیوستگی یکنواخت. اگر  $f: [a, b] \rightarrow R$  پیوسته باشد آنگاه به ازای هر  $\epsilon > 0$ ، عددی مانند  $\delta > 0$  هست به طوری که به ازای هر  $x_1$  و  $x_2$  از  $[a, b]$ ، اگر  $|x_1 - x_2| < \delta$  آنگاه  $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ .

این قضایا در موارد مختلفی به کار برده می شوند. مثلاً، قضیه مقدار میان برای ساختن توابع معکوس، مانند  $\sqrt{x}$  و  $\arcsin x$ ، به کار می رود؛ قضیه مقدارماکزیموم برای اثبات قضیه مقدار میانگین برای مشتقات، که خود مبنایی است برای اثبات دو قضیه اساسی حسابان، به کار می رود. قضیه پیوستگی یکنواخت را می توان برای اثبات این حکم که هر تابع پیوسته انتگرال پذیر است به کار برد.

از سه قضیه مذکور به عنوان قضایایی در مورد توابع پیوسته یاد کردیم: ولی می توان آنها را به عنوان قضایایی در مورد بازه بسته  $[a, b]$  از اعداد حقیقی نیز در نظر گرفت. این قضایا نه تنها به خاصیت پیوستگی  $f$  بستگی دارند بلکه به خواص توپولوژیکی فضای  $[a, b]$  نیز وابسته اند.

خاصیتی از فضای  $[a, b]$  که قضیه مقدار میان به آن بستگی دارد، خاصیتی است



موسوم به همبندی، و خاصیتی که دو قضیه دیگر به آن وابسته اند فشردگی نام دارد. در این فصل این خواص را برای فضاهای توپولوژیک دلخواه تعریف می کنیم، و صورتهای کلی مناسبی را برای هر يك از این قضایا ثابت می کنیم.

به همان اندازه که سه قضیه نامبرده برای نظریه حسابان بنیادی هستند، مفاهیم همبندی و فشردگی نیز برای آنالیز عالی، هندسه، و توپولوژی بنیادی هستند - در واقع، این مفاهیم تقریباً در هر موضوعی که به مفهوم فضای توپولوژیک مربوط باشد، بنیادی اند.

### ۱-۳ فضاهای همبند

تعریف همبندی برای يك فضای توپولوژیک تعریفی کاملاً طبیعی است. فضایی را «جدا شده» گوئیم در صورتی که بتوان آن را به دو تکه - یعنی دو مجموعه باز از هم جدا - تقسیم کرد. در غیر این صورت، آن فضا را همبند خوانند. از همین مفهوم ساده نتایج فراوانی به دست می آید.

تعریف. فرض کنیم  $X$  فضایی توپولوژیک باشد. جداسازی  $X$  عبارت است از زوج  $U$  و  $V$  از زیرمجموعه های باز ناتهی جدا از هم  $X$  که اجتماعشان مساوی  $X$  است. فضای  $X$  را در صورتی همبند (مربوط) خوانند که برای آن هیچ جداسازی ای وجود نداشته باشد.

آشکار است که همبندی خاصیتی توپولوژیکی است، چه تماماً بر حسب گردایی مجموعه های باز  $X$  بیان شده است. به عبارت دیگر، اگر  $X$  همبند باشد آنگاه هر فضای هومومورف با آن نیز همبند است.

طریقه دیگر بیان همبندی به قرار ذیل است:

فضای  $X$  همبند است اگر و فقط اگر تنها زیرمجموعه های  $X$  که در  $X$  هم باز و هم بسته اند مجموعه تهی و خود  $X$  باشند.

زیرا اگر  $A$  يك زیرمجموعه سره ناتهی  $X$  باشد که در  $X$  هم باز و هم بسته است، آنگاه مجموعه های  $U = A$  و  $V = X - A$  برای  $X$  تشکیل يك جداسازی را می دهند. زیرا آنها باز، ناتهی، و از هم جدا هستند و اجتماع آنها  $X$  است. بعکس، اگر  $U$  و  $V$  برای  $X$  تشکیل يك جداسازی بدهند آنگاه  $U$  ناتهی و متمایز از  $X$  است، و علاوه بر  $X$  هم باز و هم بسته است.

برای زیرفضایی مانند  $Y$  از فضای توپولوژیک  $X$ ، طریقه سودمند دیگری برای بیان تعریف همبندی وجود دارد:

۱۰۱. اگر  $Y$  يك زیرفضای  $X$  باشد آنگاه هر جداسازی  $Y$  زوجی است از مجموعه های ناتهی جدا از هم، مانند  $A$  و  $B$ ، که اجتماع آنها  $Y$  است، و هیچ يك از آنها شامل يك نقطه حدی دیگری نیست. فضای  $Y$  در صورتی همبند است که هیچ جداسازی برای آن موجود نباشد.

برهان. نخست، فرض کنیم  $A$  و  $B$  تشکیل جداسازی ای برای  $Y$  بدهند. در این صورت،  $A$  در  $Y$  هم بساز است و هم بسته. بستار  $A$  در  $Y$  مجموعه  $\bar{A} \cap Y$  است (که در آن  $\bar{A}$  مطابق معمول نمایش بستار  $A$  در  $X$  است). چون  $A$  در  $Y$  بسته است،  $A = \bar{A} \cap Y$ ؛ و یا به عبارت معادل،  $\bar{A} \cap B = \emptyset$ . اما چون  $\bar{A}$  مساوی است با اجتماع  $A$  با نقاط حدی آن،  $B$  شامل هیچ نقطه حدی  $A$  نیست. به همین قیاس ثابت می شود که  $A$  شامل هیچ نقطه حدی  $B$  نیست.

بعکس، فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو مجموعه ناتهی و جدا از هم باشند که اجتماع آنها  $Y$  است و هیچیک شامل نقطه حدی دیگری نیست. در این صورت،  $\bar{A} \cap B = \emptyset$  و  $A \cap \bar{B} = \emptyset$ ؛ و از آنجا  $\bar{A} \cap Y = A$  و  $\bar{B} \cap Y = B$  بنا بر این،  $A$  و  $B$  هر دو در  $Y$  بسته اند، و چون  $A = Y - B$  و  $B = Y - A$ ، پس هر دو در  $Y$  باز نیز هستند.  $\square$

مثال ۱. فرض کنیم  $X$  یک فضای دو نقطه ای با توپولوژی ناگسته باشد. واضح است که هیچ جداسازی ای برای  $X$  ممکن نیست، پس  $X$  همبند است.

مثال ۲. فرض کنیم  $Y$  زیر فضای  $[-1, 1] \cup (0, 1]$  از خط حقیقی  $R$  باشد. هر یک از مجموعه های  $(-1, 0]$  و  $(0, 1]$  در  $Y$  ناتهی و باز است (اگرچه در  $R$  چنین نیست)، بنا بر این، این دو مجموعه تشکیل جداسازی ای برای  $Y$  می دهند. همچنین، می توان گفت که هیچیک از این دو مجموعه شامل نقطه حدی دیگری نیست. (البته  $0$  یک نقطه حدی مشترک آنهاست، ولی این موضوع تأثیری در نتیجه ما ندارد.)

مثال ۳. زیر فضای  $X = [-1, 1]$  از خط حقیقی را در نظر می گیریم. مجموعه های  $(-1, 0]$  و  $(0, 1]$  ناتهی و از هم جدا هستند، ولی تشکیل جداسازی ای برای  $X$  نمی دهند. زیرا مجموعه اول در  $X$  باز نیست. به طریق دیگر، می توان ملاحظه کرد که  $0$  یک نقطه حدی دومی است و به مجموعه اول تعلق دارد. در واقع، هیچ جداسازی ای برای فضای  $[-1, 1]$  وجود ندارد. این مطلب را بزودی ثابت می کنیم.

مثال ۴. مجموعه  $Q$ ، مجموعه اعداد گویا، همبند نیست. در واقع، تنها زیر فضاهای همبند  $Q$  مجموعه های تک عضوی هستند؛ اگر  $Y$  زیر فضایی از  $Q$  باشد که شامل دو نقطه  $p$  و  $q$  است، می توان عددی گنگ مانند  $a$  بین  $p$  و  $q$  اختیار کرد و  $Y$  را به صورت اجتماع دو مجموعه باز

$$Y \cap (-\infty, a) \text{ و } Y \cap (a, +\infty)$$

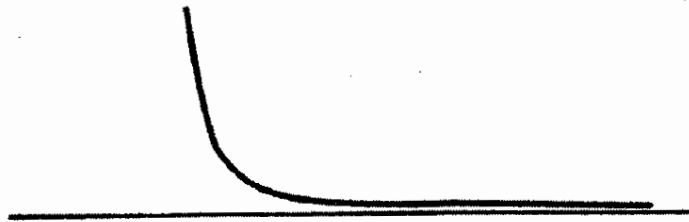
نوشت.

مثال ۵. زیر مجموعه ذیل از صفحه  $R^2$  را در نظر می گیریم:

$$X = \{x \times y \mid y = 0\} \cup \{x \times y \mid y = \frac{1}{x} \text{ و } x > 0\}.$$

در این صورت،  $X$  همبند نیست؛ در واقع، همین دو مجموعه تشکیل جداسازی ای برای  $X$

می‌دهند، زیرا هیچیک از آنها شامل نقطهٔ حدی دیگری نیست. شکل ۱ دیده شود.



شکل ۱

چند مثال از فضاهایی که همبند نیستند ارائه دادیم. چگونه می‌توان فضاهایی ساخت که همبند باشند؟ اینک، قضایایی ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهند چگونه می‌توان از فضاهای همبند مفروض فضاهای همبند جدیدی تشکیل داد. سپس، در بخش بعدی این قضایا را در ساختن فضاهای همبند خاصی، مانند بازه‌ها در  $R$  و گویها و مکعبها در  $R^n$ ، به کار خواهیم برد. نخست، لم ذیل را می‌آوریم:

۲.۱. لم اگر مجموعه‌های  $C$  و  $D$  تشکیل جداسازی‌ای برای  $X$  بدهند و  $Y$  زیرمجموعهٔ همبندی از  $X$  باشد آنگاه  $Y$  تماماً یا در  $D$  و یا در  $C$  واقع است.

پروهان. چون  $C$  و  $D$  هر دو در  $X$  بازند، مجموعه‌های  $C \cap Y$  و  $D \cap Y$  در  $Y$  بازند. این دو مجموعه جدا از هم‌اند و اجتماع آنها  $Y$  است. حال اگر هر دو ناتهی باشند، تشکیل جداسازی‌ای برای  $Y$  می‌دهند. پس، یکی از آنها تهی است. بنابراین،  $Y$  باید تماماً در  $C$  یا در  $D$  قرار گیرد.  $\square$

۳.۱. قضیه اجتماع گردایه‌ای از مجموعه‌های همبند که يك نقطهٔ مشترك دارند، همبند است.

پروهان. فرض کنیم  $\{A_\alpha\}$  گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های همبند فضای  $X$  باشد و  $p$  نقطه‌ای از  $\bigcap A_\alpha$ . ثابت می‌کنیم که مجموعهٔ  $Y = \bigcup A_\alpha$  همبند است. فرض کنیم  $Y = C \cup D$  جداسازی‌ای برای  $Y$  باشد. نقطهٔ  $p$  در یکی از دو مجموعهٔ  $C$  یا  $D$  قرار دارد؛ فرض کنیم  $p \in C$ . چون مجموعهٔ  $A_\alpha$  همبند است، باید تماماً در  $C$  یا در  $D$  قرار گیرد. اما  $A_\alpha$  نمی‌تواند در  $D$  واقع شود، چون شامل نقطهٔ  $p$  از  $C$  است. پس به‌ازای هر  $\alpha$ ،  $A_\alpha \subset C$ ؛ و در نتیجه  $\bigcup A_\alpha \subset C$ ، و این با ناتهی بودن  $D$  متناقض است.  $\square$

۴.۱. قضیه فرض کنیم  $A$  زیر مجموعه‌ای همبند از  $X$  باشد. اگر  $A \subset B \subset \bar{A}$  آنگاه  $B$  نیز همبند است.

به بیان دیگر: اگر  $B$  با افزودن بعضی یا همه نقاط حدی مجموعه همبند  $A$  به آن به دست آید آنگاه  $B$  نیز همبند است.

پروهان. فرض کنیم  $A$  همبند باشد و  $A \subset B \subset \bar{A}$ . فرض کنیم  $B = C \cup D$  جداسازی ای برای  $B$  باشد. بنا برلم ۲.۰۱،  $A$  باید تماماً در  $C$  یا در  $D$  قرار گیرد؛ فرض کنیم  $A \subset C$ . در این صورت،  $\bar{A} \subset \bar{C}$ ، از آنجا که  $C$  و  $D$  از هم جدا هستند،  $B$  نمی تواند با  $D$  نقطه مشترکی داشته باشد، و این امر با این فرض که  $D$  یک زیرمجموعه ناتهی  $B$  است متناقض است.  $\square$

۵.۰۱. قضیه تصویر هرفضای همبند، تحت یک نگاشت پیوسته، همبند است.

پروهان. فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  نگاشتی پیوسته و  $X$  همبند باشد. می خواهیم ثابت کنیم که مجموعه  $Z = f(X)$  همبند است. چون نگاشتی که از  $f$  با تعدید حوزه مقادیر آن به فضای  $Z$  به دست می آید پیوسته است، برای اثبات حکم کافی است که حکم را در مورد نگاشتی پیوسته و پوشا مانند

$$g: X \rightarrow Z$$

ثابت کنیم.

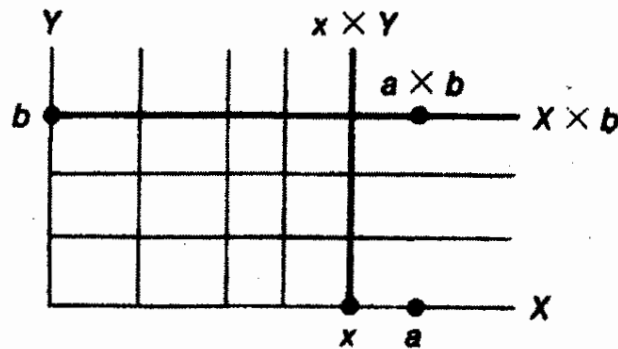
فرض کنیم  $Z = A \cup B$  جداسازی ای برای  $Z$  باشد، که در آن  $A$  و  $B$  دو مجموعه ناتهی جدا از هم و در  $Z$  بازند. در این صورت،  $g^{-1}(A)$  و  $g^{-1}(B)$  مجموعه های جدا از هم هستند که اجتماع آنها  $X$  است. این مجموعه ها در  $X$  بازند، زیرا  $g$  پیوسته است؛ و ناتهی اند، زیرا  $g$  پوشاست. بنابراین، این دو مجموعه تشکیل جداسازی ای برای  $X$  می دهند، و این با فرض همبند بودن  $X$  متناقض است.  $\square$

۶.۰۱. قضیه حاصل ضرب دکارتی فضاهای همبند، فضایی همبند است.

پروهان. نخست، قضیه را برای دو فضای  $X$  و  $Y$  ثابت می کنیم. تجسم این اثبات آسان است. یک «نقطه پایه» مانند  $a \times b$  در حاصل ضرب  $X \times Y$  اختیار می کنیم. توجه کنید که چون «قاج افقی»  $X \times b$  با  $X$  همثومورف است، پس همبند می باشد؛ همچنین، هر قاج قائم مانند  $x \times Y$  همبند است، زیرا با  $Y$  همثومورف است. در نتیجه، هر فضای «شکل» به صورت

$$T_x = (X \times b) \cup (x \times Y)$$

همبند است، زیرا برابر است با اجتماع دو مجموعه همبند که نقطه  $x \times b$  بین آنها مشترك است. شکل ۲ دیده شود. اینک، اجتماع  $\bigcup_{x \in X} T_x$  متشکل از همه این فضاهای «شکل» را تشکیل می دهیم. این اجتماع همبند است، زیرا اجتماع گردایه ای از مجموعه های همبند است که دارای نقطه مشترك  $a \times b$  هستند. چون این اجتماع مساوی است با  $X \times Y$ ، پس فضای  $X \times Y$  همبند است.



شکل ۲

اثبات قضیه برای هر تعداد نامتناهی از فضای همبند به استقراست، که در آن از هومئومورف بودن  $X_1 \times \dots \times X_n$  با  $(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$ ، که اثباتش آسان است، استفاده می‌شود.

اینک، به اثبات قضیه درحالتی که تعداد فضاها دلخواه است می‌پردازیم. فرض کنیم  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$  خانواده‌ای از فضاها همبند باشد، و فرض کنیم

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$$

«نقطه پایه» دلخواهی مانند  $\mathbf{b} = (b_\alpha)_{\alpha \in J}$  برای  $X$  انتخاب می‌کنیم.

به ازای هر زیرمجموعه متناهی از  $J$  مانند  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ، زیرفضای  $X(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  از  $X$  را چنین تعریف می‌کنیم؛ عبارت است از فضای همه نقاط  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$  به طوری که به ازای  $\alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_n$  مدعی  $x_\alpha = b_\alpha$  هستیم که  $X(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  با حاصل ضرب متناهی

$$X_{\alpha_1} \times \dots \times X_{\alpha_n}$$

هومئومورف است، و بنا بر این همبند است؛ زیرا نگاشت دوسویی بدیهی

$$(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) \rightarrow (y_\alpha)_{\alpha \in J}$$

بین این دو فضا برقرار است که به ازای هر  $\alpha$ ، اگر  $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$  آنگاه  $y_\alpha = x_\alpha$  و به ازای سایر مقادیر  $\alpha$ ،  $y_\alpha = b_\alpha$ . نگاشت فوق هر عضو پایه فضای  $X_{\alpha_1} \times \dots \times X_{\alpha_n}$  را به عضو پایه‌ای از  $X(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  می‌نگارد.

از اینجا نتیجه می‌شود که زیرفضای  $Y$  از  $X$ ، که اجتماع این زیرفضاهاست، همبند است؛ این زیرفضا عبارت است از

$$Y = \bigcup X(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

که در آن اجتماع روی همه زیر مجموعه‌های متناهی  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  از  $J$  مورد نظر است. همبندی  $Y$  ناشی از این است که زیر فضاهای  $X(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  همبندند و همگی نقطه پایه  $b = (b_\alpha)_{\alpha \in J}$  را در بردارند.

ممکن است چنین به نظر رسد که برهان تمام شده است. اما چنین نیست، زیرا  $Y$  همه  $X$  نیست. فضای  $Y$  عبارت است از همه نقاط  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$  از  $X$  با این خاصیت که به ازای همه مقادیر  $\alpha$ ، جز عده‌ای متناهی از مقادیر آن، رابطه  $x_\alpha = b_\alpha$  برقرار است. بنا بر این، به تعبیری  $Y$  فقط جزء بسیار کوچکی از  $X$  است. اما، اینک این امر که توپولوژی مورد نظر در  $X$  همان توپولوژی حاصل ضربی است به کار گرفته می‌شود. مدعی هستیم که تحت توپولوژی حاصل ضربی  $X$ ، بستار  $Y$  مساوی  $X$  است. اگر این حکم را ثابت کنیم، همبندی  $X$  از قضیه ۴.۱ نتیجه می‌شود.

فرض کنیم  $(x_\alpha)$  نقطه دلخواهی از  $X$  باشد. و  $U = \prod U_\alpha$  را عضو پایه دلخواهی شامل  $(x_\alpha)$  می‌گیریم، و ثابت می‌کنیم که  $U$  فضای  $Y$  را قطع می‌کند. برای این منظور ملاحظه می‌کنیم که هر  $U_\alpha$  در  $X_\alpha$  باز است و رابطه  $U_\alpha = X_\alpha$  به ازای همه مقادیر  $\alpha$ ، جز تعدادی متناهی از آنها، مثلاً،  $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ، برقرار است. حال نقطه  $(y_\alpha)$  را در  $X$  چنین تعریف می‌کنیم:

$$y_\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \text{به ازای } \alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ b_\alpha & \text{به ازای سایر مقادیر } \alpha \end{cases}$$

در این صورت،  $(y_\alpha)$  نقطه‌ای است از  $Y$ ، زیرا به فضای  $X(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  تعلق دارد. همچنین،  $(y_\alpha)$  نقطه‌ای از  $U$  است، زیرا به ازای  $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ،  $y_\alpha = x_\alpha \in U_\alpha$  و به ازای سایر مقادیر  $\alpha$ ،  $y_\alpha = b_\alpha \in X_\alpha$ . بنابراین،  $U$  زیر فضای  $Y$  را قطع می‌کند، و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

این قضیه در صورتی که توپولوژی جعبه‌ای را در  $X$  به کار ببریم برقرار نیست. تمرین ۱۱ را ملاحظه کنید.

### تمرینها

۱. فرض کنید  $J$  و  $J'$  دو توپولوژی در  $X$  باشند. اگر  $J \subset J'$  آنگاه همبندی  $X$  در یکی از این دو توپولوژی مستلزم چه حکمی در مورد همبندی  $X$  در دیگری است؟
۲. ثابت کنید که اگر  $\prod X_\alpha$  همبند و ناتهی باشد آنگاه هر يك از  $X_\alpha$  ها همبند است.
۳. فرض کنید  $\{A_\alpha\}$  دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های همبند  $X$  باشد، به طوری که به ازای

همه مقادیر  $n$ ، ثابت کنید که  $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$  همبند است.

۴. فرض کنید  $\{A_\alpha\}$  گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های همبند  $X$  باشد، و  $A$  یک زیرمجموعه همبند باشد. ثابت کنید که اگر به ازای همه  $\alpha$  ها،  $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$  آنگاه  $A \cup (\cup A_\alpha)$  همبند است.

۵. ثابت کنید که اگر  $X$  مجموعه‌ای نامتناهی باشد آنگاه  $X$  با توپولوژی متمم متناهی، یعنی

$$\mathcal{T}_r = \{A \mid X - A \text{ یا مساوی } X \text{ است}\}$$

همبند است.

۶. فضای  $X$  را در صورتی "کلا" ناهمبند خوانیم که تنها زیرمجموعه‌های همبند آن مجموعه‌های تک‌عضوی باشند. ثابت کنید که هر فضای متناهی هاوسدورف "کلا" ناهمبند است.

۷. اگر  $X$  دارای توپولوژی گسسته باشد، آیا می‌توان گفت که  $X$  "کلا" ناهمبند است؟ آیا عکس این حکم برقرار است؟

۸. اگر  $X$  همبند باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که به ازای زیرمجموعه سره ناتهی‌ای از  $X$  مانند  $A$ ،  $Bd A \neq \emptyset$ ؟ آیا عکس این حکم برقرار است؟ (به خاطر بیاورید که  $Bd A = \overline{A} \cap (X - A)$ .)

۹. فرض کنید  $A \subset X$ . ثابت کنید که اگر  $C$  یک زیرمجموعه همبند  $X$  باشد که هم  $A$  و هم  $X - A$  را قطع کند آنگاه  $C$  مجموعه  $Bd A$  را هم قطع می‌کند.

۱۰. آیا فضای  $R_1$  همبند است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱۱. ثابت کنید که  $R^\omega$  با توپولوژی جعبه‌ای همبند نیست. برای این منظور، ثابت کنید که اگر  $A$  مجموعه همه دنباله‌های کراندار باشد آنگاه  $A$  هم باز و هم بسته است. اگر  $R^\omega$  دارای توپولوژی یکنواخت باشد آنگاه در مورد همبندی آن چه می‌توان گفت؟

۱۲. فرض کنید  $Y \subset X$ ؛ فرض کنید  $X$  و  $Y$  همبند باشند. ثابت کنید که اگر  $A$  و  $B$  تشکیل جداسازی‌ای برای  $X - Y$  بدهند آنگاه  $Y \cup A$  و  $Y \cup B$  همبند هستند.

### ۲-۳ مجموعه‌های همبند در خط حقیقی

قضایای بخش پیش نشان می‌دهند که چگونه می‌توان از فضا‌های همبند مفروض فضا‌های

همبند جدیدی ساخت. اما برای شروع، از چه منابعی می‌توان فضاهای همبندی در اختیار داشت؟ بهترین نقطه شروع خط حقیقی است. در این بخش، ثابت می‌کنیم که هر شعاع و هر بازه در  $R$  همبند است.

يك کاربرد این مطالب در قضیه مقدار میانی حسابان است که به طرز مناسبی تعمیم یافته است. به عنوان کاربردی دیگر، ثابت می‌کنیم که فضاهای مأنوسی مانند گویها و کره‌های فضای اقلیدسی همبند هستند. اثبات این مطلب منجر به مفهوم تازه‌ای موسوم به همبندی داهی می‌شود که این مفهوم را نیز بحث می‌کنیم.

با این مطلب که بازه‌ها و شعاعهای  $R$  همبند هستند ممکن است در آنالیز آشنا شده باشید. ما این مطلب را دوباره در اینجا به صورتی تعمیم یافته ثابت می‌کنیم. ملاحظه خواهید کرد که این حکم به خواص جبری  $R$  بستگی ندارد، بلکه تنها به خواص ترتیبی آن بستگی دارد. برای روشن کردن این مطلب، قضیه را برای مجموعه مرتب دلخواهی که از خواص ترتیبی  $R$  برخوردار است ثابت می‌کنیم. چنین مجموعه‌ای را پیوستار خطی می‌خوانیم.

تعریف. مجموعه مرتب ساده  $L$  را که بیش از يك عضو دارد وقتی پیوستار خطی خوانیم که در شرایط ذیل صدق کند:

(۱)  $L$  دارای خاصیت کوچکترین کران بالا باشد.

(۲) اگر  $x < y$  آنگاه  $z$  موجود باشد که  $x < z < y$ .

۱.۲. قضیه. اگر  $L$  پیوستاری خطی با توپولوژی ترتیبی باشد آنگاه  $L$  و هر بازه و هر شعاع آن همبند است.

پروهان. فرض کنیم  $Y$  يك زیرمجموعه  $L$  باشد که یا مساوی  $L$  است و یا شعاع یا بازه‌ای از  $L$ . مجموعه  $Y$  «محدب» است، بدین معنی که اگر  $a$  و  $b$  دو عضو دلخواه  $Y$  باشند و  $a < b$  آنگاه بازه  $[a, b]$  از نقاط  $L$  تماماً در مجموعه  $Y$  قرار دارد.

فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو مجموعه ناتهی جدا از هم باشند که در  $Y$  بازنند. می‌خواهیم ثابت کنیم که  $Y \neq A \cup B$ ، و به این وسیله ثابت می‌شود که هیچ جداسازی‌ای برای  $Y$  یافت نمی‌شود.

نقطه‌ای مانند  $a$  از  $A$  و  $b$  از  $B$  اختیار می‌کنیم؛ فرض می‌کنیم علامتها چنان گزیده شوند که  $a < b$ . (مرتکب این فرض خطا نشوید که هر نقطه  $A$  کمتر از هر نقطه  $B$  است؛ چنین چیزی ضرورت ندارد که برقرار باشد.) چون  $Y$  «محدب» است، داریم  $[a, b] \subset Y$ . می‌خواهیم نقطه‌ای از  $[a, b]$  بیابیم که نه در  $A$  باشد و نه در  $B$ .

مجموعه‌های

$$B_0 = B \cap [a, b] \quad \text{و} \quad A_0 = A \cap [a, b]$$



را در نظر می‌گیریم. این مجموعه‌ها در  $[a, b]$  با توپولوژی زیرفضایی (که همان توپولوژی ترتیبی است) باز هستند. قرار می‌دهیم

$$c = \text{lub } A_0.$$

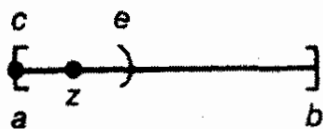
ثابت می‌کنیم که  $c$  نه به  $A_0$  تعلق دارد و نه به  $B_0$ .

حالت اول. فرض کنیم  $c \in B_0$ . در این صورت،  $c \neq a$ . پس یا  $c = b$  یا  $a < c < b$ . در هر حالت، از باز بودن  $B_0$  در  $[a, b]$  نتیجه می‌شود که بازه‌ای به صورت  $(d, c]$  در  $B_0$  وجود دارد (شکل ۳). اگر  $c = b$  آنگاه  $d$  يك کران بالای  $A_0$  و کوچکتر از  $c$  است، که این تناقض است. اگر  $c < b$ ، ملاحظه می‌شود که  $(c, b]$  مجموعه  $A_0$  را قطع نمی‌کند (زیرا  $c$  يك کران بالای  $A_0$  است). در این صورت، مجموعه

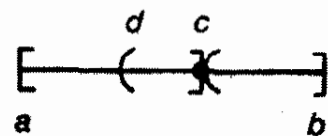
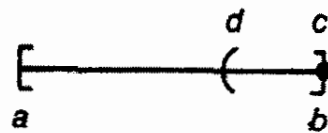
$$(d, b] = (d, c] \cup (c, b]$$

$A_0$  را قطع نمی‌کند. باز به این نتیجه می‌رسیم که  $d$  يك کران بالای  $A_0$  و کوچکتر از  $c$  است، که با تعریف  $c$  متناقض است.

حالت دوم. فرض کنیم  $c \in A_0$ . در این صورت،  $c \neq b$ . بنابراین،  $c = a$  یا  $a < c < b$ . چون  $A_0$  در  $[a, b]$  باز است، باید بازه‌ای به صورت  $(c, e)$  در  $A_0$  وجود داشته باشد (شکل ۴). بنا بر خاصیت ترتیبی (۲) برای پیوستار خطی  $L$ ، نقطه‌ای مانند  $z$  از  $L$  می‌توان چنان اختیار کرد که  $c < z < e$ . در این صورت،  $z \in A_0$  و این با این فرض که  $c$  يك کران بالای  $A_0$  است تناقض دارد.  $\square$



شکل ۴



شکل ۳

به‌عنوان کاربردی از نتیجه فوق، قضیه مقدار میانی حسابان را، که به‌نحو مناسبی تعمیم یافته است، ثابت می‌کنیم.

۳.۲. قضیه (قضیه مقدار میانی) فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  نگاشتی پیوسته از فضای همبند  $X$  به مجموعه مرتب  $Y$  با توپولوژی ترتیبی باشد. اگر  $a$  و  $b$  دو نقطه از  $X$  و  $r$  نقطه‌ای از  $Y$  باشد که بین  $f(a)$  و  $f(b)$  واقع است آنگاه نقطه‌ای از  $X$  مانند  $c$  وجود دارد به طوری که  $f(c) = r$ .

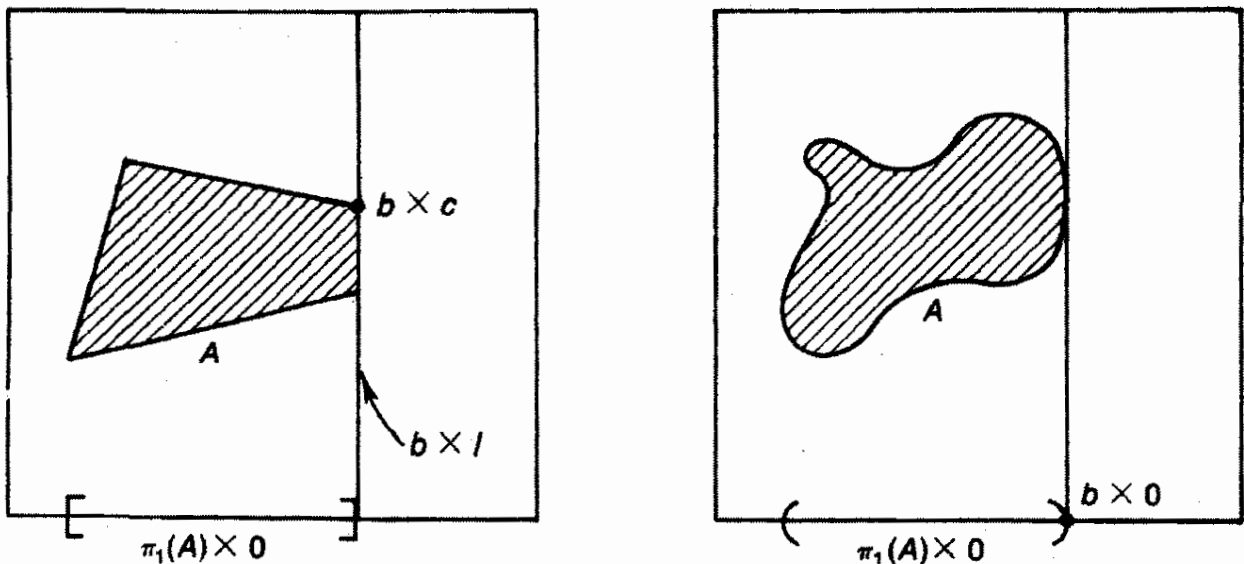
قضیه مقدار میانی حسابان حالت خاص این قضیه است، که در آن به جای  $X$  یک بازه بسته  $R$  و به جای  $Y$  خط حقیقی  $R$  منظور می‌شود.

برهان. با توجه به مفروضات قضیه، مجموعه‌های

$$B = f(X) \cap (r, +\infty) \text{ و } A = f(X) \cap (-\infty, r)$$

جدا از هم و ناتهی هستند. زیرا یکی شامل  $f(a)$  و دیگری شامل  $f(b)$  است. چون هر یک از این مجموعه‌ها مقطع یک شعاع باز  $Y$  با  $f(X)$  است؛ پس هر دو در  $f(X)$  بازنند. اگر نقطه‌ای مانند  $c$  از  $X$  وجود نداشته باشد که  $f(c) = r$  آنگاه  $f(X)$  مساوی اجتماع مجموعه‌های  $A$  و  $B$  می‌شود. در نتیجه،  $A$  و  $B$  تشکیل جداسازی‌ای برای  $f(X)$  می‌دهند، که خود با این حقیقت که تصویر هر فضای همبند تحت نگاشتی پیوسته همبند است، متناقض می‌باشد.  $\square$

مثال ۱. مثالی از پیوستاری خطی، غیر از  $R$ ، فضای  $I \times I$  است با توپولوژی ترتیب قلموسی، که در آن  $I = [0, 1]$ . برای تحقیق در درستی این حکم کافی است برقراری خاصیت



شکل ۵

کوچکترین کران بالا را بررسی کنیم. (چه برقراری خاصیت دوم بدیهی است.) فرض کنیم  $A$  يك زیرمجموعه  $I \times I$ ، و  $\pi_1: I \times I \rightarrow I$  تابع تصویر بر مختص اول باشد، و  $b = \text{lub } \pi_1(A)$ . اگر  $b \in \pi_1(A)$  آنگاه  $A$  زیرمجموعه  $b \times I$  از  $I \times I$  را قطع می‌کند. چون  $b \times I$  نوع ترتیب  $I$  را دارد، مجموعه  $A \cap (b \times I)$  دارای کوچکترین کران بالای  $b \times c$  است، که کوچکترین کران بالای  $A$  نیز هست. شکل ۵ را نگاه کنید. اگر  $b \notin \pi_1(A)$  آنگاه  $b \times 0$  کوچکترین کران بالای  $A$  است؛ هیچ عضوی به صورت  $b' \times c$  که در آن  $b' < b$ ، نمی‌تواند يك کران بالای  $A$  باشد؛ چه در آن صورت،  $b'$  يك کران بالای  $\pi_1(A)$  خواهد بود.

**مثال ۲.** اگر  $X$  مجموعه‌ای خوشترتیب باشد آنگاه  $X \times [0, 1]$ ، با ترتیب قاموسی، يك پیوستار خطی است؛ بررسی این مطلب بسا خواننده است. می‌توان چنین فکر کرد که این مجموعه با «جادادن» مجموعه‌ای از نوع ترتیب  $(0, 1)$  بین هر عضو  $X$  و تالی بلافاصله آن ساخته شده است. البته، این به شرطی برقرار است که  $X$  دارای بزرگترین عضو نباشد.

همبندی بازه‌ها در  $R$ ، منشأ ضابطه‌ای بالاخص مفید برای اثبات همبندی فضای  $X$  است؛ و آن این شرط است که هر زوج از نقاط  $X$  را بتوان به وسیله راهی در  $X$  بهم پیوست:

**تعریف.** فرض کنیم  $x$  و  $y$  دو نقطه از فضای  $X$  باشند. منظور از يك راه در  $X$  از  $x$  به  $y$  نگاشتی است پیوسته مانند  $f: [a, b] \rightarrow X$ ، از بازه‌ای بسته در خط حقیقی بتوی  $X$ ، به طوری که  $f(a) = x$  و  $f(b) = y$ . فضای  $X$  را وقتی همبند راهی خوانیم که هر زوج از نقاط  $X$  را بتوان به وسیله راهی در آن بهم پیوند داد.

به آسانی می‌توان دید که هر فضای همبند راهی  $X$  الزاماً همبند است. فرض کنیم  $X = A \cup B$  جداسازی‌ای برای  $X$  و  $f: [a, b] \rightarrow X$  راه دلخواهی در  $X$  باشد. چون  $f([a, b])$  تصویر پیوسته يك مجموعه همبند است، خود همبند می‌باشد، بنابراین تماماً در  $A$  یا در  $B$  قرار دارد. در نتیجه، راهی در  $X$  وجود نخواهد داشت که نقطه‌ای از  $A$  را به نقطه‌ای از  $B$  پیوندد، و این خلاف فرض همبند راهی بودن  $X$  است. عکس این حکم برقرار نیست؛ لازم نیست که هر فضای همبند در عین حال همبند راهی باشد. مثال ۶ و ۷ ذیل را نگاه کنید.

**مثال ۳.** گوی واحد  $B^*$  را در  $R^*$  چنین تعریف می‌کنیم:

$$B^* = \{x; \|x\| \leq 1\},$$

که در آن،

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

گوی واحد همبند راهی است؛ برای اثبات ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  از  $B^n$ ، راه  $f: [0, 1] \rightarrow R^n$  که با ضابطه

$$f(t) = (1-t)x + ty$$

تعریف می‌شود خط مستقیمی است که در  $B^n$  قرار دارد. زیرا، اگر  $x$  و  $y$  در  $B^n$  باشند و  $t$  در  $[0, 1]$  آنگاه

$$\|f(t)\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| \leq 1.$$

با برهان مشابهی، ثابت می‌شود که هر گوی باز  $B_\varepsilon(x, \varepsilon)$  و هر گوی بسته  $\bar{B}_\varepsilon(x, \varepsilon)$  در  $R^n$  همبند است.

مثال ۴. فضای  $\{0\} - R^n$  را فضای اقلیدسی سفینه تعریف می‌کنیم، که در آن  $0$  همان مبدأ  $R^n$  است. اگر  $n > 1$ ، این فضا همبند راهی است، زیرا اگر  $x$  و  $y$  دو نقطه غیر از صفر باشند، می‌توان آنها را به وسیله خط مستقیم بین آن دو بهم پیوست، مگر آنکه این خط از مبدأ بگذرد، که در این صورت می‌توانیم نقطه‌ای مانند  $z$  که روی خط واصل بین دو نقطه  $x$  و  $y$  نباشد اختیار کنیم و بعد خط شکسته‌ای را از  $x$  به  $z$  و از  $z$  به  $y$  در نظر بگیریم.

مثال ۵. کره واحد  $S^{n-1}$  در  $R^n$  را با ضابطه

$$S^{n-1} = \{x \mid \|x\| = 1\}$$

تعریف می‌کنیم. اگر  $n > 1$ ، کره واحد همبند راهی است. زیرا نگاهت  $S^{n-1} \rightarrow R^n - \{0\}$  با ضابطه  $g(x) = x/\|x\|$  پیوسته و پوشاست؛ بعلاوه، سهولت ثابت می‌شود که تصویر پیوسته یک فضای همبند راهی، همبند راهی است.

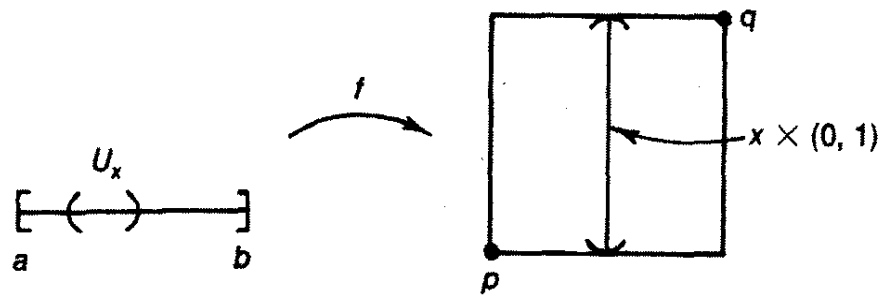
مثال ۶. فضای  $I \times I$ ، با توپولوژی ترتیب قاموسی، همبند است ولی همبند

راهی نیست.

از آنجا که  $I \times I$  یک پیوستار خطی است، پس همبند است. حال فرض کنیم  $p = 0 \times 0$  و  $q = 1 \times 1$ ، ثابت می‌کنیم که فرض وجود راهی مانند  $f: [a, b] \rightarrow I \times I$ ، که دو نقطه  $p$  و  $q$  را بهم می‌پیوندد، به تناقض می‌رسد. مجموعه تصویر  $f([a, b])$  بنا بر قضیه مقدار میانی، شامل هر نقطه  $x \times y$  از  $I \times I$  است. بنابراین، به ازای هر  $x \in I$ ، مجموعه

$$U_x = f^{-1}(x \times (0, 1))$$

یک زیرمجموعه ناتهی  $[a, b]$  است، بنا بر پیوستگی  $f$ ، این مجموعه در  $[a, b]$  باز است. شکل ۶ را نگاه کنید. به ازای هر  $x \in I$ ، عدد گویایی مانند  $q_x$  از  $U_x$  انتخاب می‌کنیم. چون مجموعه‌های  $U_x$  از هم جدا هستند، نگاشت  $x \rightarrow q_x$  از  $I$  به  $Q$  یک به یک است، که با این حقیقت که  $I$  ناشماراست متناقض است (اثبات ناشمارایی  $I$  بعداً خواهد آمد).



شکل ۶

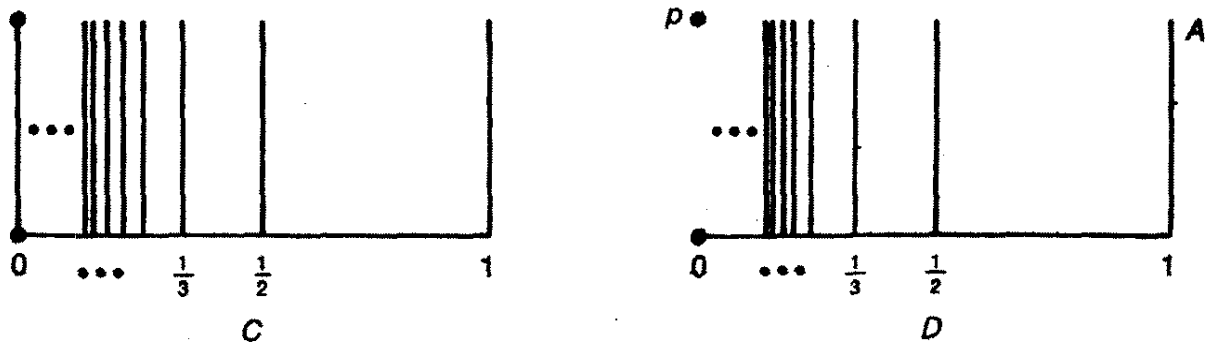
مثال ۷. اینک مثال دیگری از يك فضای همبند، که همبند راهی نیست، می آوریم. این مثال زیر فضایی از صفحه است. فرض کنیم  $K$  نمایش مجموعه  $\{1/n | n \in \mathbb{Z}_+\}$  باشد. مجموعه  $C$  را چنین تعریف می کنیم:

$$C = ([0, 1] \times 0) \cup (K \times [0, 1]) \cup (0 \times [0, 1]).$$

فضای  $C$  به فضای شانه‌ای موسوم است. به شکل ۷ نگاه کنید. فضای  $D$  را که با حذف نقاط بازه قائم  $0 \times (0, 1)$  از  $C$  به دست می آید، فضای شانه‌ای سفته می خوانند. روشن است که فضای شانه‌ای  $C$  همبند راهی است، و همچنین، ملاحظه می کنیم که فضای شانه‌ای سفته  $D$  همبند است. زیرا برابر است با اجتماع مجموعه همبند راهی

$$A = ([0, 1] \times 0) \cup (K \times [0, 1])$$

و نقطه حدی  $p = 0 \times 1$  از  $A$ . ثابت می کنیم که  $D$  همبند راهی نیست.

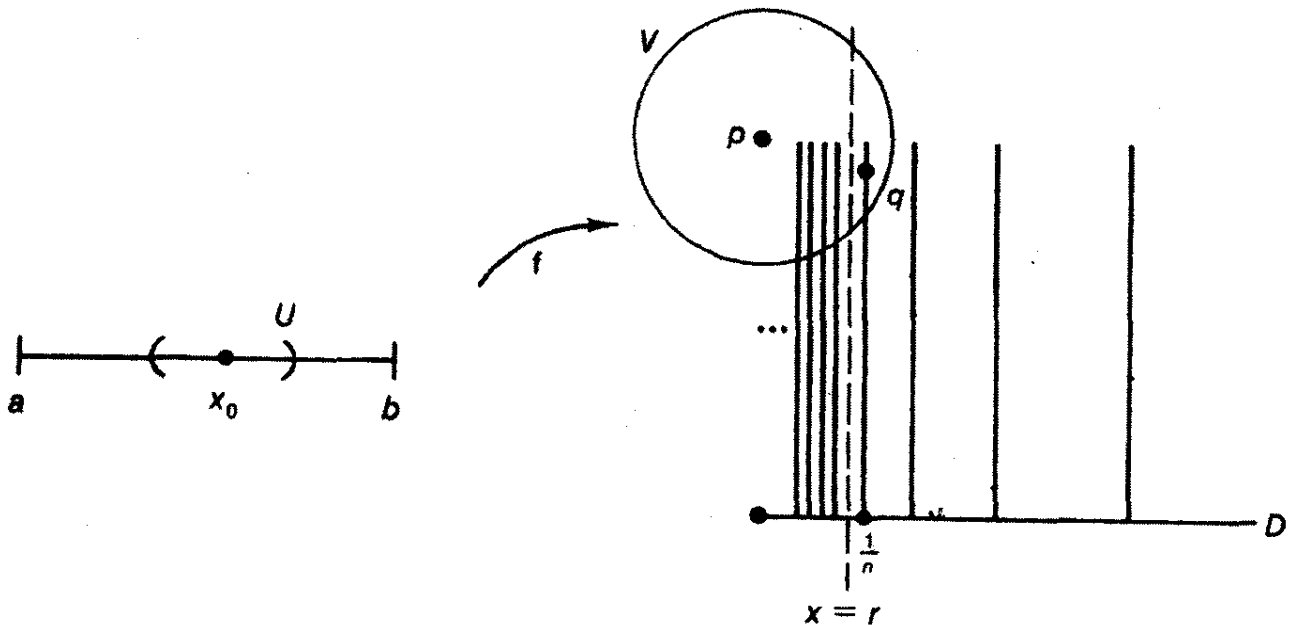


شکل ۷

فرض کنیم  $D \rightarrow [a, b]$ ،  $f$  راهی در  $D$  با نقطه آغاز  $p$  باشد. مدعی هستیم که مجموعه  $f^{-1}(\{p\})$  در  $[a, b]$  هم باز و هم بسته است، و از اینجا، بنا بر خاصیت همبندی،

داریم  $f^{-1}(\{p\}) = [a, b]$ . نتیجه می‌گیریم که در  $D$  راهی که نقطه  $p$  را به نقطه‌ای از  $A$  پیوندد وجود ندارد.

اثبات بسته بودن  $f^{-1}(\{p\})$  واضح است. زیرا مجموعه  $\{p\}$  بسته و  $f$  پیوسته است. برای اثبات اینکه  $f^{-1}(\{p\})$  باز است، يك همسایگی  $V$  از  $p$  را در  $R^2$  چنان اختیار می‌کنیم که محور  $x$ ها را قطع نکند، چنانکه در شکل ۸ نشان داده شده است. حال به ازای نقطه دلخواهی مانند  $x_0$  از  $f^{-1}(\{p\})$ ، يك عضو پایه مانند  $U$  شامل  $x_0$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $f(U) \subset V$ . مدعی هستیم که  $U$  زیرمجموعه  $f^{-1}(\{p\})$  است، و در نتیجه،  $f^{-1}(\{p\})$  باز است.



شکل ۸

یادآوری می‌کنیم که  $U$ ، به این دلیل که يك عضو پایه توپولوژی ترتیبی  $[a, b]$  است، همبند است. بنابراین،  $f(U)$  نیز همبند است. در نتیجه،  $f(U)$  نمی‌تواند شامل هیچ نقطه‌ای غیر از  $p$  باشد، چه به ازای نقطه مفروض  $q = (1/n) \times t$ ، متمایز از  $p$  و متعلق به  $V$ ، عدد  $r$  را چنان اختیار می‌کنیم که  $1/(n+1) < r < 1/n$ ، حال دو مجموعه باز جدا از هم ذیل از  $R^2$  را در نظر می‌گیریم:

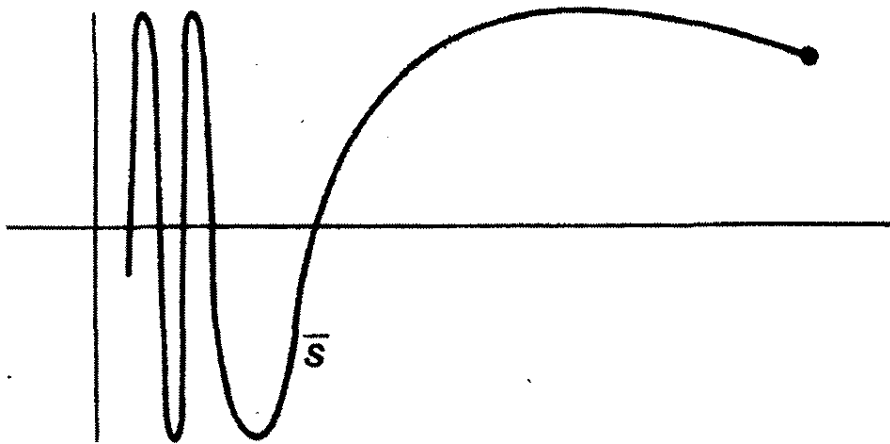
$$(-\infty, r) \times R \quad \text{و} \quad (r, +\infty) \times R$$

چون  $f(U)$  در  $D$  واقع است و محور  $x$ ها را قطع نمی‌کند، خط  $x=r$  را نیز قطع نمی‌کند؛ در نتیجه، در اجتماع این دو مجموعه قرارداد. از طرف دیگر، چون  $f(U)$  همبند است و شامل نقطه  $p$  از مجموعه اول است، نمی‌تواند شامل نقطه  $q$  از مجموعه دوم باشد. بنابراین،  $f(U) = \{p\}$ ، و این همان است که می‌خواستیم.

مثال ۸. فرض کنیم  $S$  زیرمجموعه ذیل از صفحه باشد،

$$S = \{x \times \sin(1/x) \mid 0 < x \leq 1\}.$$

چون  $S$  تصویر مجموعه همبند  $(0, 1]$  تحت تابعی پیوسته است، خود همبند می‌باشد. بنابراین، بستار آن،  $\bar{S}$ ، در  $\mathbb{R}^2$  همبند است. مجموعه  $\bar{S}$  مثالی قدیمی در توپولوژی است که به منحنی سینوسی توپولوژی دانان موسوم است. در شکل ۹ آن را نشان داده‌ایم. منحنی سینوسی توپولوژی دانان همبند است، اما همبند راهی نیست، اثبات به همان روشی است که در مورد فضای شانه‌ای سفته آورده شد.



شکل ۹

## تمرینها

۱. الف) ثابت کنید که از فضاهای  $(0, 1)$ ،  $(0, 1]$  و  $[0, 1]$  هیچ دو تایی هم‌شومورف نیستند.
- ب) فرض کنید  $f: X \rightarrow Y$  و  $g: Y \rightarrow X$  دو نشان‌دهنده باشند. با یک مثال ثابت کنید که  $X$  و  $Y$  الزاماً هم‌شومورف نیستند.
۲. فرض کنید  $n$  عدد صحیح مثبتی باشد. با فرض آنکه  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f(x) = x^n$  پیوسته باشد، ثابت کنید که به ازای هر  $a \geq 0$ ، فقط یک  $b \geq 0$  وجود دارد به طوری که  $b^n = a$ .
۳. فرض کنید  $f: X \rightarrow X$  پیوسته باشد. ثابت کنید که اگر  $X = [0, 1]$  آنگاه نقطه‌ای مانند  $x$  یافت می‌شود به طوری که  $f(x) = x$ . نقطه  $x$  را یک نقطه ثابت  $f$  می‌گویند. اگر  $X$  مساوی  $[0, 1]$  یا  $(0, 1)$  باشد، باز حکم فوق برقرار است؟

۴. فرض کنید  $X$  یک مجموعه مرتب با توپولوژی ترتیبی باشد. ثابت کنید که اگر  $X$  همبند باشد آنگاه  $X$  یک پیوستار خطی است.
۵. مجموعه‌های ذیل را با ترتیب قاموسی در نظر بگیرید. کدامیک از آنها پیوستار خطی است؟
- (الف)  $(0, 1) \times Z_+$ ؛  
 (ب)  $Z_+ \times (0, 1)$ ؛  
 (پ)  $(0, 1) \times (0, 1)$ ؛  
 (ت)  $(0, 1) \times [0, 1)$ .
۶. ثابت کنید که اگر  $X$  مجموعه‌ای خوشترتیب باشد آنگاه  $(0, 1) \times X$ ، با ترتیب قاموسی، یک پیوستار خطی است.
۷. (الف) حاصل ضربی از فضاهاى همبند راهی الزاماً همبند راهی است.  
 (ب) اگر  $A \subset X$  و  $A$  همبند راهی باشد، آیا ضرورت دارد که  $\bar{A}$  همبند راهی باشد؟  
 (پ) اگر  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته باشد و  $X$  همبند راهی باشد، آیا  $f(X)$  نیز الزاماً همبند راهی است؟  
 (ت) اگر  $\{A_\alpha\}$  گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های همبند راهی  $X$  باشد و  $\bigcap A_\alpha \neq \emptyset$ ، آیا ضرورت دارد که  $\bigcup A_\alpha$  همبند راهی باشد؟
۸. ثابت کنید که اگر  $n > 1$  آنگاه  $R$  و  $R^*$  هومئومورف نیستند.
۹. فرض کنید  $R$  ناشمارا باشد. ثابت کنید که اگر  $A$  زیرمجموعه شمارایی از  $R^2$  باشد آنگاه  $R^2 - A$  همبند راهی است [داهنمایی: چند خط وجود دارد که از یک نقطه مفروض  $R^2$  می‌گذرد؟]
۱۰. ثابت کنید که اگر  $U$  یک زیرمجموعه همبند بساز  $R^2$  باشد آنگاه  $U$  همبند راهی است. [داهنمایی: ثابت کنید که اگر  $x_0 \in U$ ، مجموعه نقاطی که می‌توان آنها را با یک راه در  $U$  به  $x_0$  وصل کرد، در  $U$  هم باز است و هم بسته.]
۱۱. اگر  $A$  یک زیرمجموعه همبند  $X$  باشد، آیا  $\text{Int } A$  و  $\text{Bd } A$  الزاماً همبندند؟ آیا عکس این حکم برقرار است؟ برای پاسخهای خود دلیل بیاورید.
۱۲. ثابت کنید که منحنی سینوسی توپولوژی دانان همبند است، اما همبند راهی نیست.
۱۳. فرض کنید  $L$  مجموعه مرتب  $(0, 1) \times S_0$  با ترتیب قاموسی باشد که کوچکترین عضو آن حذف شده است. مجموعه  $L$  مثال کلاسیکی در توپولوژی است که به خط طویل موسوم است.



قضیه. خط طویل همبند راهی است و با  $R$  موضعاً هومئومورف است. اما نمی توان آن را در  $R$  نشانند.

پرهان.

(الف) فرض کنید  $X$  مجموعه ای مرتب با کوچکترین عضو  $a_0$  باشد، و فرض کنید که

$$A = \{a_0\} \cup \{x \mid \text{است } [0, 1] \text{ دارای نوع ترتیب } (0, 1) \text{ است}\}.$$

ثابت کنید که اگر به ازای هر  $x \in X$ ،  $y$  بزرگتر از  $x$  یافت شود به طوری که  $(x, y)$  دارای نوع ترتیب  $(0, 1)$  باشد آنگاه  $A$  در  $X$  باز است. ثابت کنید که اگر  $X$  در «لم دنباله» صدق کند آنگاه  $A$  در  $X$  بسته است. [داهنمایی: اگر  $a$  يك نقطه حدى  $A$  باشد که در  $A$  نباشد، دنباله ای صعودی از نقاط  $A$  یافت می شود که همگرا به  $a$  است.]

(ب) ثابت کنید که  $L$  با  $R$  موضعاً هومئومورف است؛ یعنی هر نقطه  $L$  يك همسایگی هومئومورف با يك زیرمجموعه باز  $R$  دارد.

(پ) ثابت کنید که  $L$  همبند راهی است.

(ت) ثابت کنید که  $L$  را نمی توان در  $R$ ، یا در واقع به ازای هر  $n$  در  $R^*$ ، نشانند. [داهنمایی: هر زیرفضای  $Y$  از  $R^*$  يك پایه ای شمارا برای توپولوژی خود دارد؛ بنا بر این، هر گردایه از مجموعه های باز جدا از هم در  $Y$  شماراست.]

### \*۳-۳ مؤلفه ها و مؤلفه های راهی

برای هر فضای مفروض  $X$ ، طریقه ای طبیعی وجود دارد که با استفاده از آن می توان این فضا را به تکه های همبند (یا همبند راهی) تقسیم کرد. موضوع این بخش بررسی این طریقه است.

تعریف. در فضای مفروض  $X$ ، رابطه هم ارزی  $\sim$  را چنین تعریف می کنیم:  $y \sim x$  هر گاه زیرمجموعه همبندی وجود داشته باشد که شامل هر دو  $x$  و  $y$  باشد. رده های هم ارزی حاصل از آن را مؤلفه ها (یا «مؤلفه های همبند»)  $X$  می خوانند.

تقارن و انعکاس این رابطه بدیهی است. در مورد تعدی کافی است ملاحظه کنیم که اگر  $A$  مجموعه ای همبند شامل  $x$  و  $y$  باشد و اگر  $B$  مجموعه ای همبند شامل  $y$  و  $z$  باشد، آنگاه  $A \cup B$  مجموعه ای است شامل  $x$  و  $z$  که همبند است. زیرا  $A$  و  $B$  دارای نقطه مشترک  $y$  هستند.

مؤلفه های  $X$  را می توان به طریق ذیل نیز توصیف کرد:

۱.۳. قضیه مؤلفه‌های  $X$  زیرمجموعه‌های جدا از هم و همبند  $X$  هستند که اجتماع آنها مساوی  $X$  است، و هر زیرمجموعه همبند  $X$  فقط یکی از آنها را قطع می‌کند.

برهان. چون مؤلفه‌های  $X$  رده‌های هم‌ارزی هستند، از هم جدا هستند و اجتماع آنها  $X$  است. هر مجموعه همبند  $A$  در  $X$  فقط یکی از آنها را قطع می‌کند. زیرا اگر  $A$  مؤلفه‌های  $C_1$  و  $C_2$  را، مثلاً، بترتیب در  $x_1$  و  $x_2$  قطع کند آنگاه، بنا بر تعریف، خواهیم داشت  $x_1 \sim x_2$ ؛ اما این ممکن نیست مگر آنکه  $C_1 = C_2$ .

برای اثبات اینکه مؤلفه‌ای مانند  $C$  همبند است، نقطه‌ای مانند  $x_0$  از  $C$  اختیار می‌کنیم. به ازای هر  $x$  از  $C$  داریم  $x \sim x_0$ ، بنابراین، مجموعه‌ای همبندی مانند  $A_x$  وجود دارد که شامل  $x$  و  $x_0$  است. از آنچه که در فوق آمد نتیجه می‌گیریم که  $A_x \subset C$  پس

$$C = \bigcup_{x \in C} A_x.$$

چون  $A_x$  ها جملگی همبند و در نقطه  $x_0$  مشترك هستند، اجتماع آنها نیز همبند است.  $\square$

تعریف. رابطه هم‌ارزی دیگری بر فضای  $X$  چنین تعریف می‌کنیم:  $x \sim y$  هرگاه راهی در  $X$  از  $x$  به  $y$  وجود داشته باشد. رده‌های هم‌ارزی این رابطه را مؤلفه‌های راهی  $X$  می‌خوانیم.

اینک، در هم‌ارزی این رابطه تحقیق می‌کنیم. نخست، ملاحظه می‌کنیم که اگر راهی مانند  $f: [a, b] \rightarrow X$  از  $x$  به  $y$  وجود داشته باشد که حوزه تعریف آن بازه  $[a, b]$  باشد آنگاه (چون هر دو بازه بسته  $[a, b]$  و  $[c, d]$  در  $R$  هم‌ثمومورف هستند) راهی مانند  $g$  از  $x$  به  $y$  وجود دارد که حوزه تعریف آن بازه  $[c, d]$  است. حال ملاحظه می‌کنیم که برقراری رابطه  $x \sim y$  ناشی از این است که به ازای هر  $x$  از  $X$  می‌توان راه ثابت  $f: [a, b] \rightarrow X$  را، به ازای هر  $t$ ، با ضابطه  $f(t) = x$  تعریف کرد. تقارن این رابطه نتیجه این حکم است که اگر  $f: [0, 1] \rightarrow X$  راهی از  $x$  به  $y$  باشد آنگاه «راه بازگشت» آن  $g: [0, 1] \rightarrow X$ ، که با ضابطه  $g(t) = f(1-t)$  تعریف می‌شود، راهی است از  $y$  به  $x$ . سرانجام، اثبات تعدی به قرار ذیل است: فرض کنیم  $f: [0, 1] \rightarrow X$  راهی از  $x$  به  $y$  و  $g: [1, 2] \rightarrow X$  راهی از  $y$  به  $z$  باشد. می‌توان با «چسباندن  $f$  و  $g$  به یکدیگر» راه دیگری مانند  $h: [0, 2] \rightarrow X$  از  $x$  به  $z$  به دست آورد؛ راه  $h$ ، بنا بر «لم چسب»، قضیه ۳.۷ در فصل ۲، پیوسته است.

در مورد مؤلفه راهی قضیه ذیل را داریم که اثبات آن بدیهی است:

۲.۳. قضیه مؤلفه‌های راهی  $X$  زیرمجموعه‌های جدا از هم و همبند راهی  $X$  هستند که اجتماع آنها مساوی  $X$  است و هر زیرمجموعه همبند راهی  $X$  فقط یکی از آنها را قطع می‌کند.

مثال ۱. مؤلفه‌های زیر فضای

$$Y = [-1, 0) \cup (0, 1]$$

از خط حقیقی  $R$  عبارت‌اند از دو مجموعه  $[-1, 0)$  و  $(0, 1]$ ، اینها مؤلفه‌های راهی  $Y$  نیز هستند.

مثال ۲. فضای شانه‌ای سفته  $D$ ، که در بخش پیش مطالعه شد، فضایی است با یک مؤلفه (چون همبند است) و دو مؤلفه راهی. اگر فضای  $Y$  را چنین تشکیل دهیم که نقاط گنک بازه  $[0, 1] \times 0$  را به فضای شانه‌ای سفته  $D$  بیفزاییم آنگاه فضایی به دست خواهیم آورد که فقط یک مؤلفه دارد، ولی تعداد مؤلفه‌های راهی آن ناشماراست.

### \* ۳-۴ همبندی موضعی<sup>۱</sup>

خاصیت همبندی، برای فضاهایی که واجد آن باشند، خاصیتی است بسیار مفید، لیکن برای بعضی مقاصد مهمتر آن است که فضای مورد نظر شرط همبندی را به طور موضعی دارا باشد. به بیان غیر دقیق، همبندی موضعی به این معنی است که هر نقطه دارای همسایگیهای «به دلخواه کوچکی» باشد که همبند باشند. تعریف دقیقتر این مفهوم از این قرار است:

تعریف. فضای  $X$  را در نقطه  $x$  موضعاً همبند خوانیم در صورتی که به ازای هر همسایگی  $U$  از  $x$ ، یک همسایگی همبند  $V$  مانند  $V$  وجود داشته باشد به طوری که  $V \subset U$ . اگر  $X$  در هر نقطه اش موضعاً همبند باشد آنگاه آن را فقط موضعاً همبند می‌خوانیم.

به بیان دیگر،  $X$  را موضعاً همبند خوانیم در صورتی که  $X$  دارای پایه‌ای متشکل از مجموعه‌های همبند باشد. همبندی و همبندی موضعی یک فضا به یکدیگر وابسته نیستند؛ یعنی، ممکن است که یک فضا واجد یکی و یا هر دو خاصیت و یا فاقد هر دوی آنها باشد.

تعریف. فضای  $X$  را در  $X$  موضعاً همبند راهی خوانیم هر گاه به ازای هر همسایگی  $x$  مانند  $U$ ، یک همسایگی همبند راهی از  $x$  مانند  $V$  وجود داشته باشد به طوری که  $V \subset U$ . اگر  $X$  در هر نقطه آن موضعاً همبند راهی باشد آنگاه  $X$  را موضعاً همبند راهی می‌گوییم.

مثال ۱. هر بازه و هر شماع در خط حقیقی هم همبند است و هم موضعاً همبند. زیر فضای  $[-1, 0) \cup (0, 1]$  از  $R$  همبند نیست، ولی موضعاً همبند است. فضای شانه‌ای سفته (مثال ۷ از بخش ۲.۳) همبند است، ولی موضعاً همبند نیست.  $Q$ ، مجموعه اعداد گویا، نه همبند است و نه موضعاً همبند.

۱. این بخش در فصل ۸ دانسته فرض می‌شود.

مثال ۲.  $R^n$  موضعاً همبند راهی است. زیرا هر عضو پایه آن مانند  $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$  همبند راهی است. همچنین،  $R^m$  موضعاً همبند راهی است؛ زیرا هر عضو پایه استانده آن همبند راهی است.

مثال ۳. اگر فضای  $Y$  را چنین تشکیل دهیم که به فضای شانه‌ای سفته  $D$  همه تقاطعی به صورت  $(1/n) \times 0$ ، به ازای  $n \in \mathbb{Z}_+$ ، را اضافه کنیم، در این صورت، فضایی بدست می‌آید که در مبدأ موضعاً همبند است ولی در آن نقطه موضعاً همبند راهی نیست.

مهمترین اطلاعات در باره فضاهای موضعاً همبند در قضایای ذیل ارائه شده‌اند:

۱۰۴. قضیه فضای  $X$  موضعاً همبند است اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعه باز  $U$  از  $X$ ، هر يك از مؤلفه‌های  $U$  در  $X$  باز باشد.

پروهان. فرض کنیم  $X$  موضعاً همبند باشد،  $U$  مجموعه بازی در  $X$ ، و  $C$  مؤلفه‌ای از  $U$ . اگر  $x$  نقطه‌ای از  $C$  باشد آنگاه می‌توان يك همسایگی همبند از  $x$  مانند  $V$  چنان اختیار کرد که  $V \subset U$ ، از آنجا که  $V$  همبند است، باید تماماً در مؤلفه  $C$  از  $U$  قرار گیرد. بنابراین،  $C$  در  $X$  باز است.

بعکس، فرض کنیم مؤلفه‌های مجموعه‌های باز در  $X$  باز باشند. فرض کنیم  $x$  نقطه‌ای از  $X$  و  $U$  يك همسایگی  $x$  باشد، و  $C$  مؤلفه‌ای از  $U$  که شامل  $x$  است. بنابراین،  $C$  همبند است. از آنجا که، بنا بر فرض،  $C$  در  $X$  باز است، در نتیجه،  $X$  در  $x$  موضعاً همبند است.  $\square$

قضیه ذیل را می‌توان با برهانی مشابه ثابت کرد:

۲۰۴. قضیه فضای  $X$  موضعاً همبند راهی است اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعه باز  $U$  از  $X$ ، هر يك از مؤلفه‌های راهی  $U$  در  $X$  باز باشد.

رابطه مؤلفه‌ها و مؤلفه‌های راهی در قضیه ذیل ارائه شده است:

۳۰۴. قضیه اگر  $X$  فضایی توپولوژیک باشد، هر مؤلفه راهی  $X$  در يك مؤلفه  $X$  قرار دارد. اگر  $X$  موضعاً همبند راهی باشد آنگاه مؤلفه‌ها و مؤلفه‌های راهی  $X$  یکی هستند.

پروهان. فرض کنیم  $C$  مؤلفه‌ای از  $X$  باشد؛  $x$  را نقطه‌ای از  $C$  می‌گیریم؛ و فرض می‌کنیم  $P$  يك مؤلفه راهی  $X$  و شامل  $x$  باشد. چون  $P$  همبند است، پس  $P \subset C$ . می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر  $X$  موضعاً همبند راهی باشد آنگاه  $P = C$ . فرض کنیم  $P \neq C$  و  $Q$  مساوی اجتماع همه مؤلفه‌های راهی  $X$  باشد که متمایز از  $P$  هستند و  $C$

را قطع می‌کنند؛ ضرورتاً هر يك از این مؤلفه‌ها در  $C$  قرار خواهند داشت. بنابراین،

$$C = P \cup Q.$$

اما، چون  $X$  موضعاً همبند راهی است، هر مؤلفه‌ای  $X$  در  $X$  باز است. بنابراین،  $P$  (که يك مؤلفه‌ای راهی است) و  $Q$  (که اجتماعی از مؤلفه‌های راهی است) در  $X$  باز هستند، در نتیجه  $P$  و  $Q$  تشکیل جداسازی‌ای برای  $C$  می‌دهند، و این امر با همبندی  $C$  تناقض دارد.  $\square$

### تمرینها

۱. مؤلفه‌ها و مؤلفه‌های راهی  $R_1$  کدام‌اند؟

۲. (الف) مؤلفه‌ها و مؤلفه‌های راهی  $R^*$  (باتوپولوژی حاصل ضربی) کدام‌اند؟

(ب)  $R^*$  را باتوپولوژی یکتواخت در نظر بگیرید. ثابت کنید که  $x$  و  $y$  در يك مؤلفه  $R^*$  قرار دارند اگر و فقط اگر دنباله

$$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots)$$

کراندار باشد.

(پ)  $R^*$  را باتوپولوژی جعبه‌ای در نظر بگیرید. ثابت کنید که  $x$  و  $y$  در يك مؤلفه قرار دارند اگر و فقط اگر دنباله  $x - y$  «سرانجام صفر» شود.

(ت) عکس (پ) را ثابت کنید.

۳. در فضای  $X$ ، رابطه  $\sim$  را چنین تعریف می‌کنیم:  $x \sim y$  در صورتی که هیچ جداسازی‌ای برای  $X$  مانند  $X = A \cup B$  وجود نداشته باشد، که در آن  $A$  و  $B$  مجموعه‌های باز جدا از همی هستند و  $x \in A$  و  $y \in B$ . ثابت کنید که این رابطه يك رابطه هم‌ارزی است. رده‌های هم‌ارزی این رابطه را شبه مؤلفه‌های  $X$  می‌نامیم. ثابت کنید هر مؤلفه  $X$  در يك شبه مؤلفه  $X$  قرار دارد.

۴. مطلوب است تعیین شبه مؤلفه‌ها، مؤلفه‌ها، و مؤلفه‌های راهی زیر فضاهاى ذیل از  $R^2$ .  
[در اینجا  $K$  نمایش مجموعه  $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$  و  $-K$  نمایش مجموعه  $\{-1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$  است.]

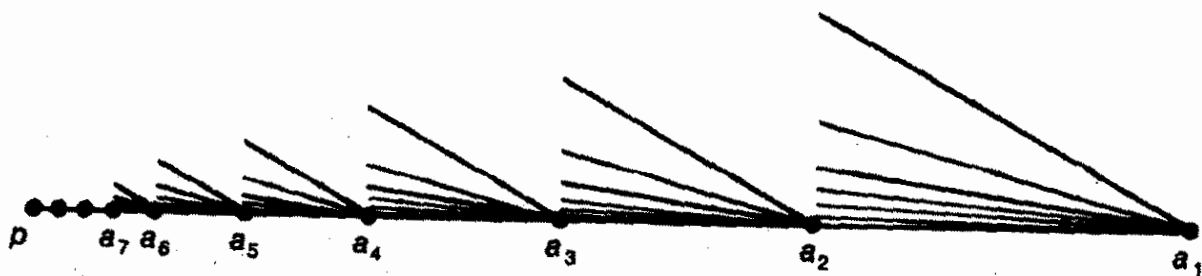
$$A = (K \times [0, 1]) \cup (0 \times [0, 1]),$$

$$B = A - \left\{0 \times \frac{1}{p}\right\},$$

$$C = B \cup ([0, 1] \times 0),$$

$$D = (K \times [0, 1]) \cup (-K \times [-1, 0]) \cup ([0, 1] \times -K) \cup ([-1, 0] \times K).$$

۵. ثابت کنید که اگر  $X$  موضعا همبند باشد آنگاه شبه مؤلفه‌های  $X$  همان مؤلفه‌های  $X$  هستند.
۶. اگر  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته باشد و  $X$  موضعا همبند، آیا لازم است  $f(X)$  موضعا همبند باشد؟ اگر  $f$  هم پیوسته و هم باز باشد، چه روی می‌دهد؟
۷. ثابت کنید که  $I \times I$ ، با توپولوژی ترتیب قاموسی، موضعا همبند است، ولی موضعا همبند راهی نیست. مؤلفه‌های راهی این فضا کدام‌اند؟
۸. فرض کنید  $X$  موضعا همبند راهی باشد. ثابت کنید که هر مجموعه باز همبند در  $X$  همبند راهی است.
۹. فرض کنید  $X$  مجموعه نقاط گویای بازه  $[0, 1] \times 0$  از  $R^2$  باشد، و  $T$  اجتماع همه پاره‌خطهایی باشد که نقطه  $p = 0 \times 1$  را به نقاط  $X$  می‌پیوندند.  
(الف) ثابت کنید که  $T$  همبند راهی است، اما فقط در نقطه  $p$  موضعا همبند است.  
(ب) زیرمجموعه‌ای از  $R^2$  بیابید که همبند راهی باشد، ولی در هیچیک از نقاط آن موضعا همبند نباشد.
۱۰. مجموعه  $X$  را در نقطه  $x$  همبند خردجا گویند هرگاه به ازای هر همسایگی  $U$  از  $x$ ، زیرمجموعه همبندی مانند  $A$  از  $U$  یافت شود که شامل یک همسایگی  $x$  باشد. ثابت کنید که اگر  $x$  در هر یک از نقاط آن همبند خردجا باشد آنگاه  $X$  موضعا همبند است. [دانه‌مایی: ثابت کنید که مؤلفه‌های مجموعه‌های باز مجموعه‌ای بازند.]
۱۱. «جاروب نامتاهی»  $X$  را، که در شکل ۱۰ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. ثابت کنید که  $X$  در  $p$  موضعا همبند نیست، ولی  $X$  در  $p$  همبند خردجاست. [دانه‌مایی: هر همسایگی همبند  $p$  باید شامل همه نقاط  $a_i$  باشد.]



شکل ۱۰

## ۳-۵ فضاهای فشرده

مفهوم فشردگی به هیچ وجه به اندازه مفهوم همبندی طبیعی نیست. از همان آغاز پیدایش توپولوژی، این حقیقت آشکار بود که بازه بسته  $[a, b]$  از خط حقیقی از خاصیت معینی برخوردار است که برای اثبات قضایای مهمی چون قضیه مقدار میانی و قضیه پیوستگی یکتوانخت بسیار حیاتی است. اما برای زمانی پس دراز روشن نبود که چگونه می توان این خاصیت را برای فضاهای توپولوژیک دلخواه فرمولبندی کرد. زمانی می پنداشتند که خاصیت تعیین کننده مذکور برای  $[a, b]$  عبارت از این است که هر زیرمجموعه نامتناهی  $[a, b]$  دارای یک نقطه حدی است، و این خاصیت را مفتخر به نام فشردگی کردند. اما، چندی بعد، برای ریاضیدانان معلوم شد که این فرمولبندی آنچه را که در بطن موضوع جای دارد آشکار نمی کند. بلکه فرمولبندی ای قویتر بر حسب پوششهای باز فضا لازم است تا هسته اصلی این خاصیت را بیان کند. فرمولبندی بعدی این مفهوم همسان است که امروزه آنرا فشردگی می نامیم. البته، این تعریف به اندازه تعریف قبلی طبیعی و سازگار با شهود نیست و وقوف بر فایده آن مستلزم آشنایی با آن است.

تعریف. گوئیم گردایه  $A$  از زیرمجموعه های فضای  $X$  یک پوشش  $X$  است، یا  $X$  را می پوشاند، در صورتی که اجتماع اعضای  $A$  مساوی  $X$  باشد. اگر اعضای  $A$  زیرمجموعه های باز  $X$  باشند، آنرا یک پوشش باز  $X$  می خوانند.

تعریف. فضای  $X$  را وقتی فشرده گوئیم که هر پوشش باز آن، مانند  $A$ ، حاوی یک زیر گردایه متناهی باشد که آن نیز  $X$  را پوشاند.

مثال ۱. خط حقیقی  $R$  فشرده نیست. زیرا پوشش باز  $R$  از بازه های باز

$$A = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

حاوی هیچ زیر گردایه متناهی نیست که  $R$  را پوشاند.

مثال ۲. زیر فضای

$$X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

از  $R$  فشرده است. برای اثبات فرض کنید  $A$  پوشش باز دلخواهی برای  $X$  باشد. در این صورت، عضوی در  $A$ ، مانند  $U$ ، وجود دارد که شامل  $0$  است. مجموعه  $U$  شامل همه نقاط  $1/n$  بجز تعدادی متناهی از آنهاست، به ازای هر نقطه  $X$  که در  $U$  نیست، عضوی از  $A$  چنان برمی گزینیم که شامل این نقطه باشد. گردایه ای که از این اعضای  $A$  و مجموعه  $U$  تشکیل می شود، یک زیر گردایه متناهی  $A$  است که  $X$  را می پوشاند.

مثال ۳. هر فضای  $X$  که فقط شامل تعدادی متناهی عضو باشد، ضرورتاً فشرده است.

زیرا در این حالت هر پوشش  $X$  متناهی است.

مثال ۴. بازه  $[0, 1]$  فشرده نیست. زیرا پوشش باز

$$\mathcal{A} = \left\{ \left( \frac{1}{n}, 1 \right) \mid n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

برای  $[0, 1]$  حاوی هیچ زیرگردایی متناهی نیست که آن را بپوشاند. بازه  $(0, 1)$  نیز فشرده نیست، برهان شبیه همین برهان است. اما بازه  $[0, 1]$  فشرده است؛ شاید با این حکم قبلاً در آنالیز آشنا شده باشید. به هر حال، ما بزودی آنرا ثابت می‌کنیم.

در حالت کلی، اثبات فشرده بودن یا فشرده نبودن فضای مفروض  $X$  مستلزم مقداری کوشش است. نخست، به اثبات قضایای کلی‌ای می‌پردازیم که ثابت می‌کنند چگونه از فضاهای فشرده مفروض می‌توان فضاهای فشرده جدیدی ساخت. سپس، در بخش آتی ثابت می‌کنیم که فضاهای خاص معینی فشرده‌اند. از جمله این فضاها همه بازه‌های بسته خط حقیقی و همه زیرمجموعه‌های بسته و کراندار  $\mathbb{R}^n$  هستند.

ابتدا، چند حکم را دربارهٔ زیرفضاها ثابت می‌کنیم. اگر  $Y$  زیرفضای  $X$  باشد آنگاه گردایی  $\mathcal{A}$  از زیرمجموعه‌های  $X$  را در صورتی پوشش  $Y$  خوانیم که اجتماع اعضایش حاوی  $Y$  باشد.

۱۰۵. لم فرض کنیم  $Y$  زیرفضایی از  $X$  باشد. در این صورت،  $Y$  فشرده است اگر و فقط اگر هر پوشش  $Y$ ، از مجموعه‌های باز  $X$ ، حاوی یک زیرگردایی متناهی باشد که  $Y$  را می‌پوشاند.

برهان. فرض کنیم  $Y$  فشرده و  $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  پوششی برای  $Y$  باشد که از مجموعه‌های باز  $X$  تشکیل شده است. در این صورت، گردایی

$$\{A_\alpha \cap Y \mid \alpha \in J\}$$

پوششی برای  $Y$  است که از مجموعه‌های باز  $Y$  تشکیل شده است؛ بنابراین، زیرگردایی متناهی از این پوشش مانند

$$\{A_{\alpha_1} \cap Y, \dots, A_{\alpha_n} \cap Y\}$$

وجود دارد که  $Y$  را می‌پوشاند. در این صورت،  $\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}\}$  زیرگردایی متناهی از  $\mathcal{A}$  است که  $Y$  را می‌پوشاند.

بعکس، فرض کنیم شرط مذکور برقرار باشد؛ می‌خواهیم ثابت کنیم که  $Y$  فشرده است. فرض کنیم  $\mathcal{A}' = \{A'_\alpha\}$  پوششی برای  $Y$  از مجموعه‌های باز  $Y$  باشد. به ازای هر  $\alpha$ ، مجموعه  $A'_\alpha$  باز  $X$  را چنان انتخاب می‌کنیم که

۱. منظور این است که  $Y$  با توپولوژی زیرفضایی فشرده است. -م.



$$A'_\alpha = A_\alpha \cap Y.$$

گردایه  $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$  پوششی برای  $Y$  از مجموعه‌های باز  $X$  است. بنابراین فرض، يك زیر گردایه متناهی از  $\mathcal{A}$ ، مانند  $\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}\}$ ، مجموعه  $Y$  را می‌پوشاند. در این صورت،  $\{A'_{\alpha_1}, \dots, A'_{\alpha_n}\}$  يك زیر گردایه متناهی  $\mathcal{A}'$  است که  $Y$  را می‌پوشاند.  $\square$

۲.۵. قضیه هر زیرمجموعه بسته از يك فضای فشرده فضایی است فشرده.

برهان. فرض کنیم  $Y$  زیرمجموعه بسته‌ای از فضای فشرده  $X$  باشد. به ازای پوشش  $\mathcal{A}$  برای  $Y$  از مجموعه‌های باز  $X$ ، با افزودن مجموعه باز  $X - Y$  به  $\mathcal{A}$  پوششی باز مانند  $\mathcal{B}$  برای  $X$  تشکیل می‌دهیم،

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X - Y\}.$$

زیر گردایه‌ای متناهی از  $\mathcal{B}$  هست که  $X$  را می‌پوشاند. اگر این زیر گردایه شامل  $X - Y$  باشد آنگاه  $X - Y$  را حذف می‌کنیم؛ در غیر این صورت، زیر گردایه را به همان حال باقی می‌گذاریم. گردایه‌ای که از این عمل نتیجه می‌شود يك زیر گردایه متناهی  $\mathcal{A}$  است که  $Y$  را می‌پوشاند.  $\square$

۳.۵. قضیه هر زیرمجموعه فشرده از فضایی هاوسدورف، مجموعه‌ای است بسته.

برهان. فرض کنیم  $Y$  زیرمجموعه فشرده‌ای از فضای هاوسدورف  $X$  باشد. ثابت می‌کنیم که  $X - Y$  باز است، در نتیجه  $Y$  بسته است.

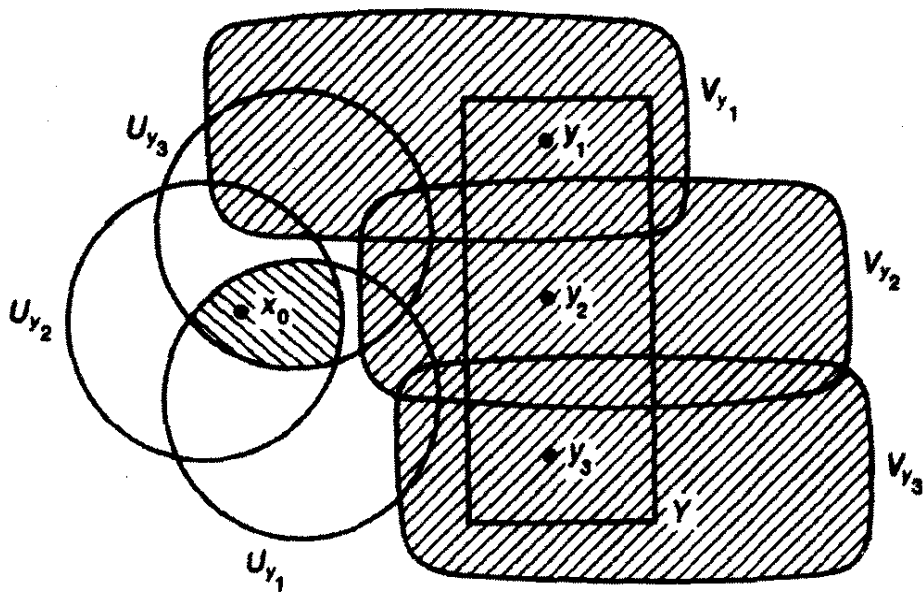
فرض کنیم  $x_0$  نقطه‌ای از  $X - Y$  باشد. به ازای هر نقطه  $y$  از  $Y$ ، همسایگی‌های از هم جدای  $U_y$  و  $V_y$ ، بترتیب، از  $x_0$  و  $y$  موجودند (شرط هاوسدورف را به کار می‌بریم). گردایه  $\{V_y \mid y \in Y\}$  پوششی است برای  $Y$  که اعضای آن در  $X$  بازند؛ بنابراین، تعدادی متناهی از این مجموعه‌ها مانند  $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$  وجود دارند که  $Y$  را می‌پوشانند. مجموعه باز

$$V = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$$

حاوی  $Y$  است؛ و این مجموعه جدا از مجموعه باز

$$U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$$

است که از مقطع همسایگی‌هایی از  $x_0$ ، هر يك متناظر است با یکی از  $V_{y_i}$ ها، تشکیل شده است. شکل ۱۱ را نگاه کنید. برای اثبات رابطه  $U \cap V = \emptyset$ ، کافی است ملاحظه کنیم که اگر  $z \in V$  آنگاه نمی‌تواند  $z \in V_{y_i}$  است که  $z \in U_{y_i}$ ، بنابراین،  $z \notin U$  و از آنجا  $z \notin U$ . پس  $U$  يك همسایگی  $x_0$  است که از  $Y$  جداست. در نتیجه،  $X - Y$  باز است، و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$



شکل ۱۱

در برهان قضیهٔ اخیر حکمی ثابت شد که در آتیه برای ما مفید است. به همین دلیل، آن را در اینجا به منظور مراجعه تکرار می‌کنیم.

۴.۵. لم اگر  $Y$  زیرمجموعه‌ای فشرده از فضای هاوسدورف  $X$  باشد و  $x_0$  در  $Y$  نباشد آنگاه مجموعه‌های باز هم‌جدايي مانند  $U$  و  $V$  از  $X$  وجود دارند که، بترتیب، شامل  $x_0$  و حاوی  $Y$  اند.

مثال ۵. به محض اینکه ثابت کنیم که بازه  $[a, b]$  از  $R$  فشرده است، با استفاده از قضیهٔ ۲.۵، نتیجه خواهیم گرفت که هر زیرمجموعهٔ بستهٔ  $[a, b]$  نیز فشرده است. از طرف دیگر، از قضیهٔ ۳.۵، نتیجه می‌شود که بازه‌های  $(a, b)$  و  $(a, b]$  در  $R$  فشرده نیستند (که پیش از این نیز بر ما معلوم بود). زیرا این بازه‌ها زیرمجموعه‌های بستهٔ فضای هاوسدورف  $R$  نیستند.

مثال ۶. در مفروضات قضیهٔ ۳.۵، شرط هاوسدورف بودن ضروری است. مثلاً، توپولوژی  $\mathcal{T}$  بر خط حقیقی را که تشکیل شده است از  $R$  و همهٔ متممهای مجموعه‌های متناهی در نظر می‌گیریم. تنها زیرمجموعه‌های سرهٔ  $R$  که در این توپولوژی بسته‌اند، زیرمجموعه‌های متناهی هستند. اما می‌توان به‌سبب تحقیق کرد که هر زیرمجموعهٔ  $R$  در این توپولوژی فشرده است.

۵.۵. قضیه تصویر هر فضای فشرده تحت نگاشتی پیوسته فشرده است.

برهان. فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته و  $X$  فشرده باشد.  $f$  را پوششی برای

$f(X)$  با مجموعه‌های باز  $Y$  در نظر می‌گیریم. گردایه

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

$X$  را می‌پوشاند و هر عضو آن به دلیل پیوستگی  $f$  باز است. بنابراین، تعدادی متناهی از این مجموعه‌ها، مانند

$$f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_n)$$

$X$  را می‌پوشاند. پس مجموعه‌های  $A_1, \dots, A_n$  پوششی برای  $f(X)$  هستند.  $\square$

يك فایده مهم قضیه اخیر این است که می‌توان آن‌را به عنوان وسیله‌ای برای ساختن هومئومورفیسمها به کار برد:

۵.۶. قضیه فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  تابعی پیوسته و دو سوپی باشد. اگر  $X$  فشرده و  $Y$  هاوسدورف باشد آنگاه  $f$  هومئومورفیسم است.

پرهان. ثابت می‌کنیم که تصاویر مجموعه‌های بسته  $X$  تحت  $f$  در  $Y$  بسته‌اند؛ این امر برای اثبات پیوستگی  $f^{-1}$  کافی است. اگر  $A$  در  $X$  بسته باشد، بنا بر قضیه ۲.۵، در  $X$  فشرده است؛ بنابراین، به وسیله قضیه‌ای که هم‌اکنون ثابت شد،  $f(A)$  در  $Y$  فشرده است. اما چون  $Y$  هاوسدورف است، بنا بر قضیه ۳.۵،  $f(A)$  در  $Y$  بسته است.  $\square$

۵.۷. قضیه حاصل ضرب هر تعداد متناهی از فضاهای فشرده فضایی است فشرده.

پرهان. ثابت می‌کنیم که حاصل ضرب دو فضای فشرده فضایی است فشرده. حکم اصلی قضیه، به استقرا، برای هر حاصل ضرب متناهی نتیجه می‌شود. اثبات در دو مرحله انجام می‌شود.

مرحله ۱ فرض کنیم  $X$  و  $Y$  فضاهای مفروضی باشند و  $Y$  فشرده باشد.  $x_0$  رانقطه‌ای از  $X$  می‌گیریم، و فرض می‌کنیم  $N$  مجموعه‌ای باز در  $X \times Y$  باشد که حاوی «قاچ»  $x_0 \times Y$  از  $X \times Y$  است. می‌خواهیم این حکم را ثابت کنیم:

يك همسایگی  $x_0$  مانند  $W$  در فضای  $X$  وجود دارد به طوری که  $N$  حاوی همه مجموعه  $W \times Y$  است.

مجموعه  $W \times Y$  را غالباً يك لوله دور  $x_0 \times Y$  می‌گویند.

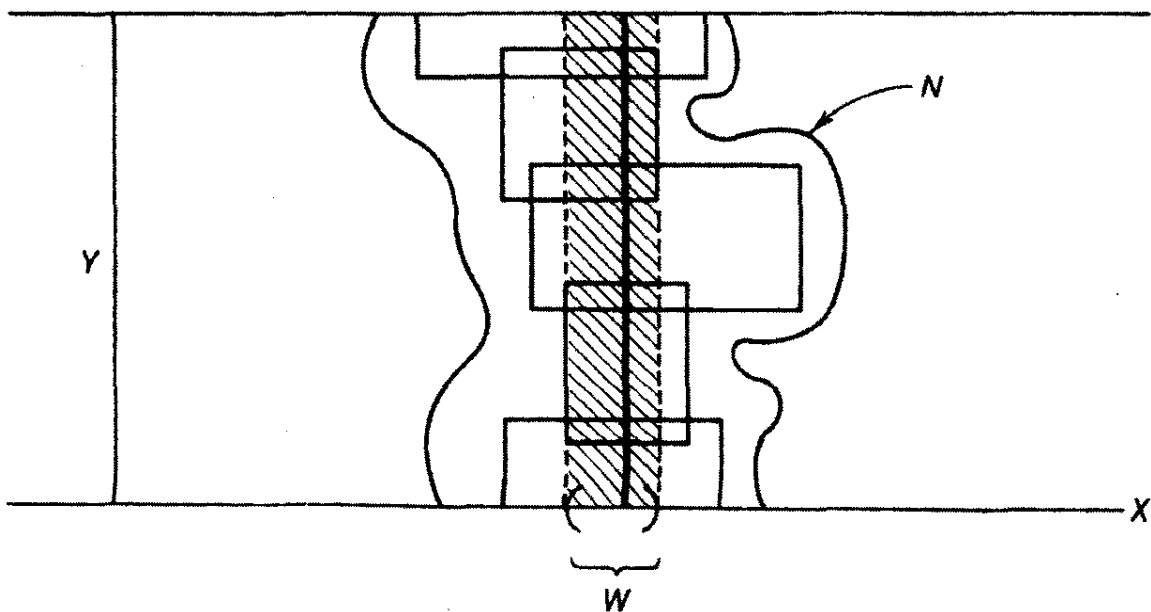
نخست،  $x_0 \times Y$  را با پوششی از اعضای پایه  $U \times V$  (برای توپولوژی  $X \times Y$ )، که تماماً در  $N$  واقع اند، می پوشانیم. چون  $x_0 \times Y$  با  $Y$  همثومورف است، پس فشرده است. بنا براین، می توان  $x_0 \times Y$  را با تعدادی متناهی از اعضای پایه مانند

$$U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$$

پوشاند. (در اینجا فرض بر این است که هر عضو پایه مانند  $U_i \times V_i$  واقعاً  $x_0 \times Y$  را قطع می کند. چه، در غیر این صورت، وجود آن زاید است؛ یعنی، می توان آن را از این گردایه متناهی حذف کرد، و باز پوششی برای  $x_0 \times Y$  داشت.) حال مجموعه  $W$  را چنین تعریف می کنیم:

$$W = U_1 \cap \dots \cap U_n$$

مجموعه  $W$  باز و شامل  $x_0$  است، زیرا هر  $U_i \times V_i$  مجموعه  $x_0 \times Y$  را قطع می کند. مدعی هستیم که مجموعه های  $U_i \times V_i$  که در اصل چنان اختیار شده بودند تا قاچ  $x_0 \times Y$  را ببوشانند، در واقع  $W \times Y$  را می پوشانند. شکل ۱۲ را نگاه کنید. فرض کنیم  $x \times y$  نقطه ای از  $W \times Y$  باشد. نقطه  $x_0 \times y$  از قاچ  $x_0 \times Y$  را، که مختص  $y$  است، آن با این نقطه یکی است، در نظر می گیریم. حال ملاحظه می کنیم که به ازای اندیسی مانند  $i$  نقطه  $x_0 \times y$  به  $U_i \times V_i$  تعلق دارد. در نتیجه  $y \in V_i$ . اما به ازای هر  $j$ ،  $x \in U_j$  (چون  $x \in W$ ). بنا براین،  $x \times y \in U_j \times V_j$ ، و این همان است که می خواستیم. چون همه مجموعه های  $U_i \times V_i$  در  $N$  قرار دارند و  $W \times Y$  را می پوشانند، پس لوله  $W \times Y$  در  $N$  قرار دارد.



شکل ۱۲

مرحله ۲. حال به اثبات قضیه می پردازیم. فرض کنیم  $X$  و  $Y$  فضاهایی فشرده باشند، و  $\mathcal{A}$  پوشش بازی برای  $X \times Y$  باشد. به ازای هر نقطه  $x_0$  از  $X$ ، قاج  $x_0 \times Y$  فشرده است. بنا بر این، می توان آن را با تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{A}$  مانند  $A_1, \dots, A_m$  پوشاند. اجتماع آنها، یعنی  $N = A_1 \cup \dots \cup A_m$  مجموعه ای باز و حاوی  $x_0 \times Y$  است. بنا بر مرحله ۱، مجموعه باز  $N$  حاوی لوله ای مانند  $W \times Y$  دور  $x_0 \times Y$  است، که در آن  $W$  یک زیرمجموعه باز  $X$  است. پس تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{A}$  مانند  $A_1, \dots, A_m$  مجموعه  $W \times Y$  را می پوشانند.

بدین ترتیب، به ازای هر عضو  $x$  مانند  $x_0$ ، می توان یک همسایگی  $x$  مانند  $W_x$  چنان اختیار کرد که تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{A}$  لوله  $W_x \times Y$  را بپوشانند. گردایه همه همسایگیهای  $W_x$  پوششی باز برای  $X$  است؛ در نتیجه، بنا بر فشردگی  $X$ ، زیر گردایه ای متناهی از آن مانند

$$\{W_1, \dots, W_k\}$$

وجود دارد که  $X$  را می پوشانند. اجتماع لوله های

$$W_1 \times Y, \dots, W_k \times Y$$

برابر با  $X \times Y$  است؛ اما، چون هر یک از این لوله ها را می توان با تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{A}$  پوشاند، پس  $X \times Y$  را نیز می توان با تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{A}$  پوشاند.  $\square$

حکمی که در مرحله ۱ اثبات شد، در آتیه برای ما مفید خواهد بود، و آن را به منظور مراجعه به عنوان یک لم در اینجا تکرار می کنیم.

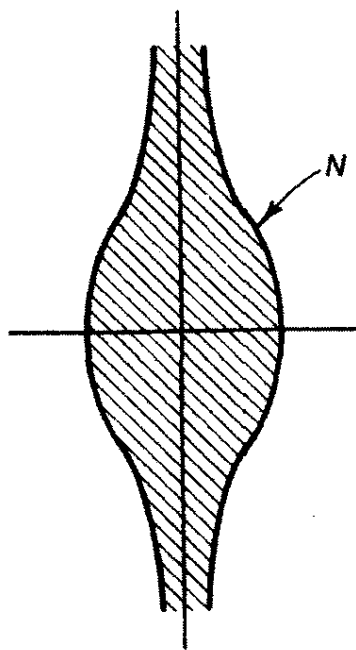
۸.۵. لم (لم لوله) فضای حاصل ضربی  $X \times Y$  را که در آن  $Y$  فشرده است، در نظر می گیریم. اگر  $N$  مجموعه ای باز از  $X \times Y$  باشد که حاوی قاج  $x_0 \times Y$  از  $X \times Y$  است آنگاه  $N$  حاوی لوله ای مانند  $W \times Y$  دور  $x_0 \times Y$  است، که در آن  $W$  یک همسایگی  $x_0$  در  $X$  است.

مثال ۷. واضح است که اگر  $Y$  فشرده نباشد، لم لوله برقرار نیست. مثلاً، فرض کنیم  $Y$  محور  $z$ ها در  $R^3$  باشد، و

$$N = \{x \times y \mid |x| < 1/(y^2 + 1)\}.$$

در این صورت،  $N$  مجموعه ای باز است که حاوی مجموعه  $R \times 0$  است. ولی حاوی هیچ لوله ای دور  $R \times 0$  نیست. در شکل ۱۳ این مطلب را نمایش داده ایم.

در اینجا طبیعی است این سؤال را مطرح کنیم که آیا حاصل ضرب تعدادی نامتناهی از فضاهای فشرده نیز فشرده است؟ توقع آن است که جواب «مثبت» باشد و واقعاً نیز چنین است. باید افزود که اهمیت (ودشواری) این قضیه چندان است که سزاوار است آن را



شکل ۱۳

منسوب به شخصی کنیم که آن را ثابت کرده است؛ این قضیه به قضیه تیخونوف<sup>۱</sup> موسوم است.

در اثبات اینکه حاصل ضرب دکارتی فضاهای همبند فضایی است همبند، نخست آن را برای حاصل ضربهای متناهی ثابت کردیم و حالت کلی را از آن نتیجه گرفتیم. اما برای اثبات فشردگی حاصل ضرب دکارتی فضاهای فشرده روشی برای رسیدن از حاصل ضربهای متناهی به حاصل ضربهای نامتناهی وجود ندارد. حالت نسامتناهی بسیار دشوار است و به روشی کاملاً متفاوت نیاز دارد. به دلیل دشواری آن و همچنین به خاطر آنکه نمی‌خواهیم از مسیر اصلی بحث خود، در این فصل، خارج شویم تصمیم گرفته‌ایم آن را به بعد موکول کنیم. با وجود این، شما اگر بخواهید می‌توانید هم‌اکنون بخشی از بخش ۵ - ۱ را که این قضیه در آن ثابت شده است، بدون اینکه شکافی در پیوستگی مطالب ایجاد شود، بلافاصله بعد از این بخش مطالعه کنید.

برای فشرده بودن یک فضا ضابطه دیگری وجود دارد که به جای مجموعه‌های باز بر حسب مجموعه‌های بسته فرمولبندی می‌شود. این ضابطه در بادی امر نه خیلی طبیعی و نه خیلی مفید به نظر می‌رسد، اما حقیقت غیر از این است. بزودی خواهیم دید که، در مواردی چند، این تعریف کاملاً مفید است. نخست، به بیان یک تعریف می‌پردازیم:

**تعریف.** گردایه‌ای مانند  $\mathcal{C}$  از زیرمجموعه‌های  $X$  را گوئیم در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند در صورتی که به ازای هر زیر گردایه متناهی از آن، مانند

$$\{C_1, \dots, C_n\},$$

مقطع  $C_1 \cap \dots \cap C_n$  ناتهی باشد.

۴.۵. قضیه فرض کنیم  $X$  فضایی توپولوژیک باشد. در این صورت،  $X$  فشرده است اگر فقط اگر به ازای هر زیرگردایه از مجموعه‌های بسته  $X$ ، مانند  $\mathcal{C}$ ، که در شرط مقطع متناهی صدق کند، مقطع همه اعضای  $\mathcal{C}$ ، یعنی  $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ ، ناتهی باشد.

برهان. فرض کنیم  $\mathcal{A}$  گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های  $X$  باشد، و

$$\mathcal{C} = \{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

گردایه متمهای اعضای  $\mathcal{A}$  باشد. در این صورت، احکام ذیل برقرارند:

(۱)  $\mathcal{A}$  گردایه‌ای از مجموعه‌های باز است اگر و فقط اگر  $\mathcal{C}$  گردایه‌ای از مجموعه‌های بسته باشد.

(۲) گردایه  $\mathcal{A}$  مجموعه  $X$  را می‌پوشاند اگر و فقط اگر مقطع همه اعضای  $\mathcal{C}$ ، یعنی  $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ ، تهی باشد.

(۳) زیرگردایه متناهی  $\{A_1, \dots, A_n\}$  از  $\mathcal{A}$  مجموعه  $X$  را می‌پوشاند اگر و فقط اگر مقطع اعضای متناظر آنها از  $\mathcal{C}$ ، یعنی مقطع  $C_i = X - A_i$ ها، تهی باشد. حکم اول بدیهی است و احکام دوم و سوم نتیجه قانون دمورگن هستند:

$$X - (\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in J} (X - A_\alpha)$$

اکنون برهان قضیه در دو مرحله ساده انجام می‌شود: گرفتن عکس نقیض (از قضیه)، و بعد در نظر گرفتن متمها (از مجموعه‌ها)!

فشرده‌گی فضای  $X$  معادل است با اینکه بگوییم: «به ازای هر گردایه از زیرمجموعه‌های باز  $X$ ، مانند  $\mathcal{A}$ ، اگر  $\mathcal{A}$  مجموعه  $X$  را پوشاندن نگاه زیرگردایه‌ای متناهی از  $\mathcal{A}$  وجود دارد که  $X$  را می‌پوشاند.» اما این حکم معادل عکس نقیض خود است که عبارت است از: «به ازای هر گردایه از زیرمجموعه‌های باز  $X$ ، مانند  $\mathcal{A}$ ، اگر هیچ زیرگردایه متناهی آن  $X$  را پوشاندن نگاه  $\mathcal{A}$  نیز  $X$  را نمی‌پوشاند.» حال اگر فرض کنیم  $\mathcal{C}$ ، همان‌طور که ذکر شد، گردایه  $\{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$  باشد و (۱) - (۳) را به کار ببریم، خواهیم دید که این حکم نیز به نوبه خود معادل است با اینکه: «به ازای هر گردایه  $\mathcal{C}$  از مجموعه‌های بسته، اگر هر مقطع متناهی از اعضای  $\mathcal{C}$  ناتهی باشد آنگاه مقطع همه اعضای  $\mathcal{C}$  نیز ناتهی است.» و این درست همان شرط قضیه است.  $\square$

یک حالت خاص این قضیه هنگامی پیش می‌آید که دنباله توپولوژی از مجموعه‌های

بسته مانند

$$C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset C_{n+1} \supset \dots$$

در فضای فشرده  $X$  داشته باشیم. اگر هر يك از مجموعه‌های  $C_n$  ناتهی باشد آنگاه گردایه  $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$  خود به خود در شرط مقطع متناهی صدق می کند، که می توان درستی آن را به آسانی تحقیق کرد. پس مقطع

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} C_n$$

ناتهی است.

مواردی که در آنها ضابطه مجموعه‌های بسته را برای فشردگی به کار می بریم، بترتیب، عبارتند از: اثبات ناشمارایی مجموعه اعداد حقیقی در بخش بعدی، اثبات قضیه تیخونوف در فصل ۵، و اثبات قضیه مقوله بتر در فصل ۷. برای اثبات قضیه تیخونوف، در واقع از صورتی از این ضابطه استفاده می کنیم که کمی با صورتی که در قضیه ۹.۵ ذکر شده متفاوت است. این صورت را در زیر بیان و اثبات آن را به خواننده واگذار می کنیم:

۱۰.۵. نتیجه فضای  $X$  فشرده است اگر و فقط اگر به ازای هر گردایه  $\mathcal{A}$  از زیر مجموعه‌های  $X$  که در شرط مقطع متناهی صدق می کند، مقطع بسته آنها، یعنی  $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$  ناتهی باشد.

### تمرینها

۱. (الف) فرض کنید  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{C}'$  دو توپولوژی در مجموعه  $X$  باشند؛ و  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ . فشردگی  $X$  تحت یکی از این توپولوژیها مستلزم چه حکمی در مورد فشردگی تحت توپولوژی دیگر است؟  
(ب) ثابت کنید که اگر  $X$  تحت هر دو توپولوژی  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{C}'$  هاوسدورف و فشرده باشد آنگاه  $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$  و یا آنها مقایسه پذیر نیستند.
۲. (الف) ثابت کنید که هر زیرمجموعه  $R$ ، با توپولوژی  $\mathcal{C}_R$ ، فشرده است. (مثال ۶ را نگاه کنید.)  
(ب) آیا  $[0, 1]$  به عنوان يك زیر فضای  $R$  با توپولوژی  $\mathcal{C}_R = \{A \mid \text{شمار است یا مساوی } R \text{ است}\}$  فشرده است؟ با توپولوژی حد پایین  $R_1$  چگونه؟
۳. ثابت کنید که اجتماعی متناهی از مجموعه‌های فشرده مجموعه‌ای فشرده است.
۴. ثابت کنید که هر زیرمجموعه فشرده فضایی متریک، مجموعه‌ای بسته و با آن متریک



کراندار است. فضایی متری پیدا کنید که در آن همه زیرمجموعه‌های بسته کراندار فشرده نباشند.

۵. فرض کنید  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌های فشرده از هم‌جدایی از فضای هاوسدورف  $X$  باشند. ثابت کنید که مجموعه‌های باز از هم‌جدایی مانند  $U$  و  $V$  یافت می‌شوند که، بترتیب، شامل  $A$  و  $B$  هستند.

۶. ثابت کنید که اگر  $f: X \rightarrow Y$ ، که در آن  $X$  فشرده و  $Y$  هاوسدورف و  $f$  پیوسته است، آنگاه  $f$  نگاشتی بسته است (یعنی  $f$  مجموعه‌های بسته را به مجموعه‌هایی بسته می‌نگارد).

۷. نتیجه ۵.۱۰ را ثابت کنید.

۸. ثابت کنید که اگر  $Y$  فشرده باشد آنگاه نگاشت تصویری  $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$  نگاشتی بسته است.

۹. قضیه. فرض کنید  $Y$  یک فضای هاوسدورف فشرده باشد. در این صورت، تابع  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته است اگر فقط اگر نمودار  $f$ ، یعنی مجموعه

$$G_f = \{x \times f(x) \mid x \in X\},$$

در  $X \times Y$  بسته باشد.

[دانهمایی: اگر  $G_f$  بسته باشد و  $V$  یک همسایگی  $f(x_0)$ ، لوله‌ای دور  $x_0 \times (Y - V)$  بیاید که  $G_f$  را قطع نکند.]

۱۰. لم لوله را به‌قرار ذیل تعمیم دهید:

قضیه. فرض کنید  $A$  و  $B$ ، بترتیب، زیرمجموعه‌های  $X$  و  $Y$  باشند؛ فرض کنید  $N$  مجموعه‌ای باز در  $X \times Y$  باشد که حاوی  $B \times A$  است. اگر  $B$  فشرده باشد آنگاه مجموعه‌ای باز مانند  $U$  در  $X$  یافت می‌شود به طوری که

$$A \times B \subset U \times B \subset N.$$

اگر  $A$  و  $B$  هر دو فشرده باشند آنگاه مجموعه‌های بازی مانند  $U$  و  $V$ ، بترتیب، در  $X$  و  $Y$  یافت می‌شوند به طوری که

$$A \times B \subset U \times V \subset N.$$

۱۱. (الف) مطلوب است اثبات قضیه زیر که بخشی از عکس قضیه حد یکنواخت است:

قضیه. فرض کنید  $R: X \rightarrow R$  دنباله‌ای از توابع پیوسته باشد. به طوری که به ازای هر  $x \in X$ ،  $f(x) \rightarrow R$ . اگر  $f$  پیوسته، دنباله  $f$  صعودی یکنوا، و  $X$  فشرده باشد آنگاه همگرایی این دنباله یکنواخت است. [دنباله  $f$  را در صورتی

صعودی یکنوا خوانیم که به ازای هر  $n$  و هر  $x$ ،  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ .  
 (ب) با ارائه مثال ثابت کنید که در این قضیه اگر شرط فشردگی  $X$  را برداریم،  
 و یا اگر شرط یکنوایی دنباله را برداریم، این حکم برقرار نمی‌ماند [داهنمایی:  
 تمرین ۹ از بخش ۲-۱۵ را نگاه کنید].

۱۲. قضیه. فرض کنید  $X$  یک فضای هارسدورف و فشرده باشد،  $A$  گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های  
 همبند بسته  $X$  که با جزئیت سره مرتب ساده باشد. در این صورت،

$$Y = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

همبند است.

[داهنمایی: اگر  $C \cup D$  یک جداسازی برای  $Y$  باشد، مجموعه‌های باز هم-  
 جدایی مانند  $U$  و  $V$  از  $X$  که، بترتیب، حاوی  $C$  و  $D$  هستند اختیار کنید. ثابت کنید که

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} (A - (U \cup V))$$

تهی نیست.]

۱۳. در اینجا تمرینی داریم برای آنهایی که گروه‌های توپولوژیک را مطالعه کرده‌اند:  
 قضیه. فرض کنید  $G$  یک گروه توپولوژیک باشد و  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی از  
 $G$  باشند. اگر  $A$  در  $G$  بسته و  $B$  فشرده باشد آنگاه  $A \cdot B$  در  $G$  بسته است.

[داهنمایی: فرض کنید  $f: G \times B \rightarrow G$  نگاشتی با ضابطه  $f(x \times y) = xy^{-1}$   
 باشد. اگر  $C \in A \cdot B$  آنگاه لوله‌ای مانند  $W \times B$  دور  $C \times B$  واقع در  
 $f^{-1}(G - A)$  بیاید.]

### ۳-۶ مجموعه‌های فشرده خط حقیقی

به وسیله قضایای بخش پیش می‌توان از مجموعه‌های فشرده قبلی مجموعه‌های فشرده جدیدی  
 ساخت؛ اما برای اینکه نتایج عمیقتری به دست آوریم باید تعدادی مجموعه فشرده مشخص  
 داشته باشیم. طبیعی‌ترین محل برای شروع، خط حقیقی است. ثابت می‌کنیم که هر بازه  
 بسته از خط حقیقی فشرده است. به عنوان کاربرد، قضیه مقدار ماکزیمم حسابان را که  
 به نحو مناسبی تعمیم یافته است ثابت می‌کنیم. از جمله سایر موارد استعمال آن مشخص کردن  
 همه زیرمجموعه‌های فشرده  $R^*$  است، و برهانی برای نا شمارا بودن مجموعه اعداد حقیقی.  
 معلوم خواهد شد که برای اثبات فشردگی هر بازه بسته  $R$  فقط به یکی از خواص  
 ترتیبی اعداد حقیقی نیاز داریم، و آن خاصیت کوچکترین کران بالاست. قضیه مذکور را  
 فقط با استفاده از این فرض ثابت می‌کنیم؛ در این صورت، آن قضیه نه تنها در مورد خط

حقیقی بلکه در مورد مجموعه‌های خوشترتیب و سایر مجموعه‌های مرتب نیز قابل استعمال است.

۶.۱ قضیه فرض کنیم  $X$  یک مجموعه مرتب ساده و دارای خاصیت کوچکترین کران بالا باشد. در این صورت در توپولوژی قریبی، هر بازه بسته  $X$  فشرده است.

پروهان. فرض کنیم  $a < b$ ، و  $A$  پوششی باز برای  $[a, b]$  باشد که اعضای آن از مجموعه‌های باز در  $[a, b]$  با توپولوژی زیرفضایی (که همان توپولوژی ترتیبی است) تشکیل شده باشند. می‌خواهیم وجود زیرگردایه‌ای متناهی از  $A$  را ثابت کنیم که  $[a, b]$  را پوشاند.

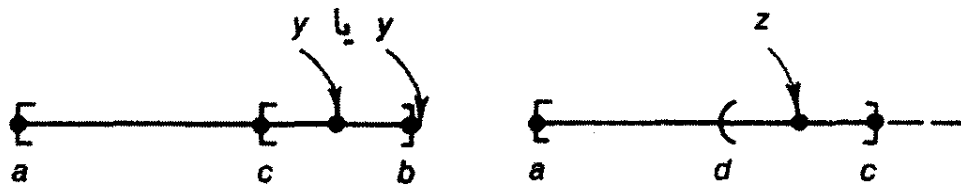
مرحله ۱. نخست، این حکم را ثابت می‌کنیم: اگر  $x$  نقطه‌ای از  $[a, b]$  غیر از  $b$  باشد آنگاه نقطه‌ای از  $[a, b]$  مانند  $y$  وجود دارد که  $y > x$ ، و بازه  $[x, y]$  را می‌توان حداکثر با دو عضو  $A$  پوشاند.

اگر  $x$  دارای تالی بلا فصل در  $X$  باشد، فرض کنیم  $y$  این تالی بلا فصل باشد، آنگاه  $[x, y]$  فقط شامل دو نقطه  $x$  و  $y$  است. بنابراین، می‌توانیم  $[x, y]$  را حداکثر با دو عضو  $A$  پوشانیم. اگر  $x$  دارای هیچ تالی بلا فصلی در  $X$  نباشد، عضو  $A$  از  $A$  را چنان اختیار می‌کنیم که شامل  $x$  باشد. چون  $x \neq b$  و  $A$  باز است،  $A$  شامل بازه‌ای به صورت  $[x, c]$  خواهد بود، که در آن  $c$  نقطه‌ای از  $[a, b]$  است. حال نقطه‌ای مانند  $y$  در  $(x, c)$  انتخاب می‌کنیم؛ در این صورت، بازه  $[x, y]$  تنها با عضو  $A$  از  $A$  پوشانده می‌شود.

مرحله ۲. فرض کنیم  $C$  مجموعه همه نقاطی از  $[a, b]$  مانند  $y$  باشد که  $y > a$ ، و بازه  $[a, y]$  را بتوان به وسیله تعدادی متناهی از اعضای  $A$  پوشاند. اگر مرحله ۱ را برای حالتی که در آن  $x = a$  به کار ببریم، نتیجه می‌گیریم که در  $C$  دست کم یک نقطه، مانند  $y$ ، وجود دارد. فرض کنیم  $c$  کوچکترین کران بالای  $C$  باشد؛ در این صورت،  $a < c \leq b$ .

مرحله ۳. ثابت می‌کنیم که  $c$  به  $C$  تعلق دارد؛ یعنی ثابت می‌کنیم که بازه  $[a, c]$  را می‌توانیم با تعدادی متناهی از اعضای  $A$  پوشانیم. عضوی مانند  $A$  از  $A$  انتخاب می‌کنیم که شامل  $c$  باشد؛ چون  $A$  باز است، حاوی بازه‌ای به صورت  $(d, c]$  است، که در آن  $d$  نقطه‌ای از  $[a, b]$  است. اگر  $c$  در  $C$  نباشد، باید نقطه‌ای از  $C$  مانند  $z$  در بازه  $(d, c)$  وجود داشته باشد. زیرا، در غیر این صورت،  $d$  کوچکترین کران بالای  $C$  خواهد بود که از  $c$  کوچکتر است. شکل ۱۴ را نگاه کنید. پس،  $z$  در  $C$  است، و بازه  $[a, z]$  را می‌توان با تعدادی متناهی، مثلاً  $n$  تا، از اعضای  $A$  پوشاند.

حال ملاحظه می‌کنیم که  $[z, c]$  در تنها عضو  $A$  از  $\mathcal{A}$  قرار دارد. در نتیجه، مجموعه  $[a, c] = [a, z] \cup [z, c]$  را می‌توان با  $n+1$  عضو از  $\mathcal{A}$  پوشاند. بدین ترتیب،  $c$  در  $C$  قرار می‌گیرد، که با فرض متناقض است.



شکل ۱۴

شکل ۱۵

مرحله ۴. سرانجام ثابت می‌کنیم که  $c = b$  و قضیه ثابت می‌شود. فرض کنیم  $c < b$ . اگر مرحله ۱ را برای حالتی که  $x = c$  به کار ببریم، به این نتیجه می‌رسیم که نقطه‌ای از  $[a, b]$  مانند  $y$  وجود دارد که  $y > c$  و بازه  $[c, y]$  را می‌توانیم با تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{A}$  پوشانیم. شکل ۱۵ را نگاه کنید. در مرحله ۳ ثابت کردیم که  $c$  در  $C$  است. پس، بازه  $[a, c]$  را می‌توان با تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{A}$  پوشاند. بنابراین، بازه

$$[a, y] = [a, c] \cup [c, y]$$

را نیز می‌توان با تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{A}$  پوشاند. یعنی  $y$  در  $C$  است، و این با این فرض که  $c$  کوچکترین کران بالای  $C$  است متناقض است.  $\square$

۲.۶. نتیجه هر بازه بسته  $R$  فشرده است.

اینک، زیرمجموعه‌های فشرده  $R^n$  را مشخص می‌کنیم:

۳.۶. قضیه زیرمجموعه  $A$  از  $R^n$  فشرده است اگر فقط اگر بسته باشد و با متریک اقلیدسی  $d$  یا متریک مربعی  $\rho$  کراندار باشد.

برهان. کافی است که فقط متریک  $\rho$  را در نظر بگیریم؛ زیرا بنا بر نامساویهای

$$\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq \sqrt{n} \rho(x, y)$$

نتیجه می‌شود که  $A$  تحت  $d$  کراندار است اگر فقط اگر تحت  $\rho$  کراندار باشد. فرض کنیم  $A$  فشرده باشد. در این صورت، بنا بر قضیه ۳.۵،  $A$  بسته است. حال گردایه مجموعه‌های باز

$$\{B_\rho(0, m) \mid m \in \mathbb{Z}_+\}$$

را در نظر می‌گیریم، که اجتماع آنها همه  $R^*$  است. زیرگردابه‌ای متناهی هست که  $A$  را می‌پوشاند. از اینجا نتیجه می‌شود که به ازای  $M$  ی،  $A \subset B_\rho(0, M)$ . بنابراین، به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  از  $A$ ، داریم  $\rho(x, y) \leq 2M$  پس،  $A$  تحت  $\rho$  کراندار است.

بعکس، فرض کنیم  $A$  تحت  $\rho$  بسته و کراندار باشد؛ و به ازای هر زوج  $x$  و  $y$  از نقاط  $A$ ، داشته باشیم  $\rho(x, y) \leq N$ . نقطه‌ای مانند  $x$  از  $A$  انتخاب می‌کنیم، و فرض می‌کنیم  $\rho(x, 0) = b$ . از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که، به ازای هر  $x$  از  $A$ ،  $\rho(x, 0) \leq N + b$ . اگر  $P = N + b$  آنگاه  $A$  زیرمجموعه مکعب  $[-P, P]^*$  است و این مکعب خود فشرده است. چون  $A$  بسته است، فشرده نیز می‌باشد.  $\square$

این قضیه را اغلب محصلین به این صورت به خاطر می‌سپارند که گردایه مجموعه‌های فشرده یک فضای متریک با گردایه مجموعه‌های بسته و کراندار آن برابر است. این حکم به این صورت مسلماً مضحک است، چون پاسخ این پرسش که کدام مجموعه‌ها کراندار هستند فقط به متریک مربوط است، در حالی که فشرده بودن یک مجموعه به توپولوژی فضا وابسته است.

مثال ۱. کره واحد  $S^{n-1}$  و گوی واحد بسته  $B^n$  در  $R^n$  فشرده هستند، چون بسته و کراندارند. مجموعه

$$A = \{x \times (1/x) \mid 0 < x \leq 1\}$$

در  $R^2$  بسته است، اما فشرده نیست، چون کراندار نیست. مجموعه

$$S = \{x \times (\sin(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}$$

در  $R^2$  کراندار است، ولی فشرده نیست، چون بسته نیست.

اینک، قضیه مقدار ماکزیموم حسابان را، که به صورت مناسبی تعمیم یافته است، ثابت می‌کنیم.

۴.۶. قضیه (قضیه مقدار ماکزیموم و مینیوم) فرض کنیم  $Y$  مجموعه‌ای مرتب با توپولوژی ترتیبی و تابع  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته باشد. اگر  $X$  فشرده باشد آنگاه نقاطی مانند  $c$  و  $d$  در  $X$  وجود دارند به طوری که به ازای هر  $x \in X$ ،  $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ .

قضیه مقدار ماکزیموم حسابان حالت خاص این قضیه است و آن هنگامی روی می‌دهد که  $X$  بازه‌ای بسته در  $R$  باشد و  $Y = R$ .

پروهان. چون  $f$  پیوسته و  $X$  فشرده است، مجموعه  $A = f(X)$  فشرده است. ثابت می‌کنیم که  $A$  دارای بزرگترین عضو  $M$  و کوچکترین عضو  $m$  است. در این

صورت، چون  $m$  و  $M$  به  $A$  تعلق دارند، به ازای نقاطی مانند  $c$  و  $d$  از  $X$ ، خواهیم داشت  $m = f(c)$  و  $M = f(d)$ .

اگر  $A$  دارای بزرگترین عضو نباشد آنگاه گردایه

$$\{(-\infty, a) \mid a \in A\}$$

پوششی باز برای  $A$  است. چون  $A$  فشرده است، زیر گردایه‌ای متناهی از آن مانند

$$\{(-\infty, a_1), \dots, (-\infty, a_n)\}$$

$A$  را می‌پوشاند. اگر  $a_1$  بزرگترین اعضای  $a_1, \dots, a_n$  باشد آنگاه  $a_1$  به هیچیک از این مجموعه‌ها تعلق ندارد. این امر با این فرض که مجموعه‌های فوق  $A$  را می‌پوشانند متناقض است.

با برهانی مشابه ثابت می‌شود که  $A$  دارای کوچکترین عضو است.  $\square$

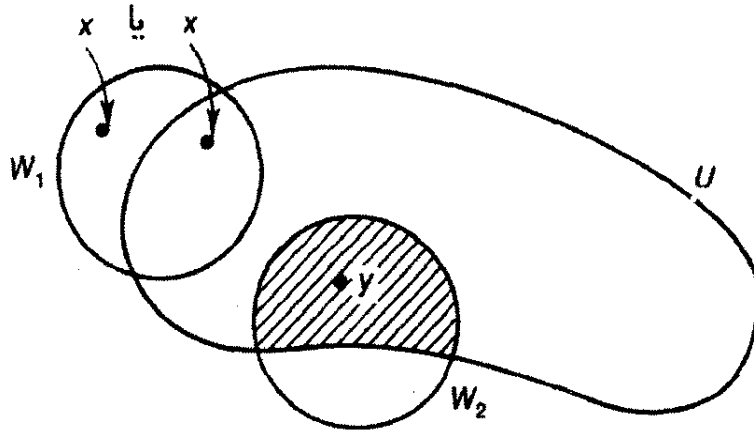
سرانجام ثابت می‌کنیم که مجموعه اعداد حقیقی ناشماراست. نکته جالب برهان این است که در آن هیچ موضوع جبری مداخله ندارد - هیچ اثری از بسط دهدهی یا دودویی اعداد حقیقی یا نظیر آنها نیست - فقط خواص ترتیبی  $R$  در کار است و بس. در واقع، ما نتیجه کلینر ذیل را ثابت می‌کنیم:

۵.۶. قضیه فرض کنیم  $X$  یک فضای (ناهمی) هاوسدورف فشرده باشد. اگر هر نقطه  $X$  یک نقطه حدی آن باشد آنگاه  $X$  ناشماراست.

برهان. مرحله ۱. نخست، ثابت می‌کنیم که به ازای هر مجموعه باز (ناهمی)  $X$ ، مانند  $U$ ، و هر  $x \in X$ ، مجموعه‌ای باز (ناهمی) مانند  $V$  جزء  $U$  وجود دارد به طوری که  $\bar{V}$  شامل  $x$  نیست.

نقطه  $x$  ممکن است در  $U$  باشد یا نباشد. اما در هر حالت نقطه‌ای مانند  $y$  در  $U$  می‌توان یافت که متمایز از  $x$  باشد. درحالی که  $x$  در  $U$  واقع است، امکان این عمل به این خاطر است که  $x$  نقطه حدی  $X$  است (بنابراین،  $U$  باید شامل نقطه‌ای مانند  $y$  غیر از  $x$  باشد). و درحالی که  $x$  در  $U$  واقع نیست، امکان این عمل ناشی از ناتمی بودن  $U$  است. فرض کنیم  $W_1$  و  $W_2$  همسایگیهایی از هم جدا، بترتیب، از  $x$  و  $y$  باشند؛ در این صورت،  $V = U \cap W_2$  مجموعه باز مطلوب است، که بستار آن شامل  $x$  نیست. به شکل ۱۶ نگاه کنید.

مرحله ۲. ثابت می‌کنیم که اگر  $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$  آنگاه  $f$  پوشا نیست. و از اینجا نتیجه می‌شود که  $X$  ناشماراست. فرض کنیم  $x_n = f(n)$ . بنا بر مرحله ۱ در مورد مجموعه باز ناتمی  $U = X$ ، می‌توانیم مجموعه‌ای باز ناتمی مانند  $V_1$  در  $X$  چنان اختیار کنیم که  $\bar{V}_1$  شامل  $x_1$  نباشد. به طور کلی، اگر  $V_{n-1}$  مجموعه باز ناتمی مفروضی



شکل ۱۶

باشد، مجموعه بازناهی  $V_n$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $V_n \subset V_{n-1}$  و  $\bar{V}_n$  شامل  $x_n$  نباشد. حال دنباله تودرتوی

$$\bar{V}_1 \supset \bar{V}_2 \supset \dots$$

از مجموعه‌های بسته‌ناهی  $X$  را در نظر می‌گیریم. چون  $X$  فشرده است، بنا بر قضیه ۹.۵ نقطه‌ای مانند  $x$  هست که  $x \in \bigcap \bar{V}_n$ . به‌ازای هر  $n$ ، نقطه  $x$  نمی‌تواند برابر با  $x_n$  باشد. زیرا،  $x$  به  $\bar{V}_n$  تعلق دارد ولی  $x_n$  چنین نیست.  $\square$

۹.۶. نتیجه هر بازه بسته  $R$  ناشماراست.

### تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر  $X$  مجموعه‌ای مرتب باشد، که در آن هر بازه بسته فشرده است آنگاه  $X$  دارای خاصیت کوچکترین کران بالاست.
۲. ثابت کنید که هر فضای متری همبند که بیش از یک نقطه داشته باشد ناشماراست.
۳. فرض کنید  $X$  فضای متری با متریک  $d$  باشد، و فرض کنید  $A$  یک زیرمجموعه  $X$  باشد. یادآوری می‌کنیم که قطر  $A$ ، در صورت وجود، با معادله ذیل تعریف می‌شود:

$$\text{diam } A = \text{lub} \{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

ثابت کنید که اگر  $A$  فشرده باشد آنگاه  $\text{diam } A$  موجود است و به‌ازای  $a_1$  و  $a_2$  ای از  $A$ ،  $d(a_1, a_2) = \text{diam } A$ .

۴. فرض کنید  $X$  فضای متری با متریک  $d$  باشد؛ و فرض کنید  $A \subset X$ .

(الف) اگر  $x \in X$ ،  $d(x, A)$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$d(x, A) = \text{glb}\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

ثابت کنید که نگاشتی که هر  $x$  از  $X$  را به  $d(x, A)$  می‌نگارد نگاشتی پیوسته از  $X$  به  $R$  است.

(ب) آیا این حکم راست است که یک نقطه مانند  $a$  در  $A$  وجود دارد به طوری که  $d(x, A) = d(x, a)$ ؟ اگر  $A$  بسته باشد آنگاه حکم فوق راست است؟ در صورت فشرده بودن  $A$  چگونه؟

(پ) آیا این حکم راست است که  $x \in \bar{A}$  اگر و فقط اگر  $d(x, A) = 0$ ؟

(ت)  $\varepsilon$ -همسایگی  $A$  در  $X$  را به صورت اجتماع ذیل تعریف می‌کنیم:

$$U(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B_d(a, \varepsilon).$$

ثابت کنید که  $U(A, \varepsilon)$  مساوی است با مجموعه

$$\{x \mid d(x, A) < \varepsilon\}.$$

(ث) ثابت کنید که اگر  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌های بسته جدا از هم  $X$  باشند و  $B$  فشرده باشد آنگاه  $\varepsilon$  ای هست که  $\varepsilon$ -همسایگیهای  $A$  و  $B$  از هم جدا هستند.

(ج) آیا اگر  $B$  فشرده نباشد، (ث) برقرار می‌ماند؟

۵. فرض کنید  $X$  یک فضای هاوسدورف فشرده باشد. ثابت کنید که اگر  $\{A_n\}$  گردایه‌ای شمارا از مجموعه‌های بسته  $X$  باشد، که هر کدام از آنها دارای درون تهی در  $X$  است آنگاه نقطه‌ای در  $X$  موجود است که متعلق به هیچیک از  $A_n$ ها نیست. [دانهمایی: برهان قضیه ۵.۶ را الگو قرار دهید.]

مسئله فوق حالت خاصی از قضیه مقولهٔ بئراست که در فصل ۷ آن را مطالعه می‌کنیم.

۶\*. فرض کنید  $A_0$  بازه بسته  $[0, 1]$  در  $R$  باشد.  $A_1$  را مجموعه‌ای فرض کنید که از  $A_0$  با برداشتن «ثلث میانی» آن، یعنی بازه  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ، به دست آمده است. فرض کنید  $A_2$  مجموعه‌ای باشد که از  $A_1$  با برداشتن «ثلثهای میانی» آن، یعنی  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  و  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ ، به دست آمده است. به طور کلی،  $A_n$  را با معادلهٔ ذیل تعریف می‌کنیم:

$$A_n = A_{n-1} - \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left( \frac{1+3^k}{3^n}, \frac{2+3^k}{3^n} \right).$$

مقطع  $A_n$ ها، یعنی

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} A_n$$

مجموعه کانتور نام دارد که زیرفضایی از  $[0, 1]$  است.

(الف) ثابت کنید که  $C$  کلاً ناهمبند است.



- (ب) ثابت کنید که  $C$  فشرده است.
- (پ) ثابت کنید که هر مجموعه  $A$  اجتماعی از تعدادی متناهی از بازه‌های بسته از هم جدا است که طول هر يك  $\frac{1}{3^n}$  است؛ ثابت کنید که نقاط انتهایی این بازه‌ها در  $C$  واقع‌اند.
- (ت) ثابت کنید که هر نقطه  $C$  يك نقطه حدى  $C$  است.
- (ث) نتیجه بگیرید که  $C$  ناشماراست.

### ۳-۷ فشردگی برحسب نقطه حدى

چنانچه در آغاز مبحث مجموعه‌های فشرده اشاره شد، فرمولبندیهای دیگری از مفهوم فشردگی وجود دارند که اغلب مفید هستند. در این بخش یکی از آنها را معرفی می‌کنیم. این مفهوم درحالی که از فشردگی به معنی اعم ضعیفتر است، در فضاهای مترى بر مفهوم فشردگی منطبق است. يك کاربرد آن در اثبات سومین قضیه حسابان است که در آغاز این فصل ذکر آن گذشت و آن قضیه پیوستگی یکنواخت است. در اینجا صورتی از آن را که به طرز مناسبی تعمیم یافته است اثبات می‌کنیم.

**تعریف.** فضای  $X$  را فشرده برحسب نقطه حدى خوانیم هر گاه هر زیرمجموعه نامتناهی آن دارای يك نقطه حدى باشد.

از جهاتی این خاصیت طبیعیتر و با شهود سازگارتر از فشردگی است. در روزهای نخستین پیدایش توپولوژی، آن را «فشردگی» نام نهاده بودند، و به مفهومی که تعریف آن برحسب پوشش باز فرمولبندی شده بود «دوفشردگی» می‌گفتند. بعدها، عنوان «فشردگی» را برای تعریف برحسب پوشش باز برگزیدند، و آن دیگری رها شد تا برای خود نامی تازه بیابد. اما، تا کنون برای آن نامی که مورد توافق همگان باشد یافته نشده است. به علل تاریخی، بعضی آن را «فشردگی فرشه‌ای»<sup>۱</sup> می‌خوانند؛ بعضی دیگر به آن خاصیت «بولتانو-وایرشراس»<sup>۲</sup> می‌گویند. ما نام «فشردگی برحسب نقطه حدى» را برای آن ساخته‌ایم. به نظر می‌رسد که این اصطلاح چیزی از بقیه کم نداشته باشد؛ دست کم می‌تواند اطلاعی از محتوای این خاصیت به دست دهد.

۱۰۷. قضیه فشردگی مستلزم فشردگی برحسب نقطه حدى است، دلی نه بعکس.

پرهان. فرض کنیم  $X$  فضایی فشرده و  $A$  زیرمجموعه‌ای مفروض از آن باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر  $A$  نامتناهی باشد آنگاه  $A$  دارای يك نقطه حدى است. برای

این منظور، عکس نقیض این حکم را ثابت می‌کنیم. یعنی اگر  $A$  هیچ نقطه حدی نداشته باشد آنگاه باید  $A$  متناهی باشد.

فرض کنیم  $A$  هیچ نقطه حدی نداشته باشد. در این صورت،  $A$  شامل همه نقاط حدی خود است، و در نتیجه، بسته است. چون هر زیرمجموعه بسته یک فضای فشرده فضایی است فشرده، پس  $A$  فشرده است. از طرف دیگر، به ازای هر  $a$  از  $A$ ، می‌توان یک همسایگی  $a$  مانند  $U_\epsilon$  را چنان اختیار کرد که  $U_\epsilon$  مجموعه  $A - \{a\}$  را قطع نکند، زیرا  $a$  نقطه حدی  $A$  نیست. مجموعه‌های باز  $U_\epsilon$  مجموعه  $A$  را می‌پوشانند؛ و چون  $A$  فشرده است، تعدادی متناهی، مثلاً  $n$  تا، از آنها  $A$  را می‌پوشانند. چون هر  $U_\epsilon$  فقط شامل یک نقطه از  $A$  است، پس مجموعه  $A$  فقط  $n$  عضو دارد.

مثال دیگر فضایی را توصیف می‌کند که فشرده بر حسب نقطه حدی است ولی فشرده نیست.  $\square$

مثال ۱. مجموعه خوشترتیب ناشمارای مینیمال  $S_{\mathbb{Q}}$  را با توپولوژی ترتیبی در نظر می‌گیریم. فضای  $S_{\mathbb{Q}}$  فشرده نیست، زیرا در  $\bar{S}_{\mathbb{Q}}$  بسته نیست. اما، فشرده بر حسب نقطه حدی است: فرض کنیم  $A$  یک زیرمجموعه نامتناهی  $S_{\mathbb{Q}}$  باشد. یک زیرمجموعه مانند  $B$  از  $A$  انتخاب می‌کنیم که نامتناهی و شمارا باشد. مجموعه  $B$ ، از آنجا که شماراست، دارای کران بالایی مانند  $b$  در  $S_{\mathbb{Q}}$  است؛ در نتیجه،  $B$  زیرمجموعه‌ای از بازه  $[a_0, b]$  از  $S_{\mathbb{Q}}$  خواهد بود، که در آن  $a_0$  کوچکترین عضو  $S_{\mathbb{Q}}$  است. از آنجا که  $S_{\mathbb{Q}}$  واجد خاصیت کوچکترین کران بالاست، بازه  $[a_0, b]$  فشرده است. بنابراین پیش،  $B$  در  $[a_0, b]$  دارای نقطه‌ای حدی مانند  $x$  است. نقطه  $x$  یک نقطه حدی  $A$  نیز هست. بنابراین،  $S_{\mathbb{Q}}$  فشرده بر حسب نقطه حدی است.

قبلاً دیدیم که  $\bar{S}_{\mathbb{Q}}$  متریک پذیر نیست، زیرا در «لم دنباله» صدق نمی‌کند (مثال ۳ از بخش ۱۰.۲). اما، همین که ثابت کنیم فشرده‌گی و فشرده‌گی بر حسب نقطه حدی در فضاهای متریک پذیر معادل‌اند، از آنجا نتیجه می‌گیریم که  $S_{\mathbb{Q}}$  نیز متریک پذیر نیست، اگرچه در لم دنباله صدق می‌کند. زیرا که  $S_{\mathbb{Q}}$  فشرده بر حسب نقطه حدی است ولی فشرده نیست.

برای اثبات قضیه پیوستگی یکنواخت، نخست، باید لمی کلاسیک در باب پوششهای باز فضاهای متری را ثابت کنیم. یادآوری می‌کنیم که قطر زیرمجموعه کراندار  $A$  از فضای متری  $(X, d)$  عدد

$$\text{lub} \{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$$

است.

۲۰۷. لم (لم عدد لبگ<sup>۱</sup>) فرض کنیم  $A$  پوششی باز برای فضای متری  $(X, d)$  باشد.

اگر  $X$  فشرده باشد آنگاه عددی مثبت مانند  $\delta$  هست که به ازای هر زیرمجموعه  $X$  که قطر آن از  $\delta$  کمتر باشد، عضوی از  $A$  وجود دارد که حاوی آن است.

عدد  $\delta$  را يك عدد لبك برای پوشش  $A$  گوئیم.

برهان. مرحله ۱. چون  $X$  فشرده است، پس لزوماً فشرده بر حسب نقطه حدی نیز هست. ثابت می کنیم که فشردگی  $X$  بر حسب نقطه حدی نیز به نوبه خود مستلزم این حکم است که هر دنباله نامتناهی مانند  $(x_n)$  از نقاط  $X$ ، دارای زیردنباله ای همگراست. یعنی، دنباله ای صعودی از اعداد صحیح مثبت مانند

$$n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$$

وجود دارد به طوری که دنباله

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_i}, \dots$$

همگراست.

(اگر در فضایی مانند  $Y$  هر دنباله دارای زیردنباله ای همگرا باشد آنگاه فضای  $Y$  را فشرده دنباله ای می خوانیم.)

به ازای دنباله مفروض  $(x_n)$ ، مجموعه

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

را در نظر می گیریم.

نخست، فرض کنیم  $A$  متناهی باشد. در این حالت، ادعا می کنیم که نقطه ای مانند  $x$  وجود دارد که به ازای بینهایت مقدار از مقادیر  $n$ ،  $x_n = x$ . [برای اثبات این حکم، فرض کنیم  $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow A$  تابعی اندیسگذار باشد که با ضابطه  $f(n) = x_n$  تعریف شده است. در این صورت، چون  $\mathbb{Z}_+$  اجتماع گردایه ای متناهی از مجموعه های  $f^{-1}(x)$  است، که در آن  $x$  مجموعه  $A$  را طی می کند، پس دست کم یکی از مجموعه های  $f^{-1}(x)$  باید نامتناهی باشد.] پس، دنباله  $(x_n)$  يك زیردنباله دارد که ثابت است. بنا بر این، این زیردنباله خود بخود همگراست.

ثانیاً، فرض کنیم  $A$  نامتناهی باشد. در این صورت،  $A$  دارای نقطه ای حدی مانند  $x$  است. به طریق ذیل، زیردنباله ای از  $(x_n)$  تعریف می کنیم که به  $x$  همگرا باشد؛ نخست،  $n_1$  را چنان انتخاب می کنیم که

$$x_{n_1} \in B(x, 1).$$

سپس، فرض کنیم عدد صحیح مثبت  $n_{i-1}$  در دست باشد. چون گوی  $B(x, 1/i)$  مجموعه  $A$  را در بینهایت نقطه قطع می کند، می توان اندیسی مانند  $n_i$ ، که  $n_i > n_{i-1}$ ، چنان اختیار کرد که

$$x_{n_i} \in B\left(x, \frac{1}{i}\right)$$

در این صورت، زیر دنباله  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$  به  $x$  همگراست.

مرحله ۲. حال ثابت می‌کنیم که اگر  $X$  فشرده دنباله‌ای باشد آنگاه هر پوشش باز  $A$  از  $X$  دارای عددی لپگ مانند  $\delta$  است.

این حکم را با اثبات عکس نقیض آن ثابت می‌کنیم: فرض کنیم هیچ  $\delta$ ی مثبتی وجود نداشته باشد به طوری که هر مجموعه با قطر کمتر از  $\delta$  دست کم در یک عضو  $A$  قرار گیرد؛ در این صورت،  $X$  فشرده دنباله‌ای نیست.

پس، فرض کنیم که چنین  $\delta$ ی وجود نداشته باشد. یعنی، به ازای هر عدد مثبت  $\delta$ ، یک زیرمجموعه  $X$  با قطر کمتر از  $\delta$  وجود داشته باشد به طوری که در هیچ عضو  $A$  قرار نمی‌گیرد. بویژه، به ازای هر  $n \in \mathbb{Z}_+$ ، می‌توان مجموعه‌ای مساند  $C_n$  با قطر کمتر از  $1/n$  انتخاب کرد که در هیچ عضو  $A$  قرار نگیرد. به ازای هر  $n$ ، نقطه‌ای مانند  $x_n$  از  $C_n$  انتخاب می‌کنیم. مدعی هستیم که دنباله  $(x_n)$  دارای هیچ زیردنباله همگرا نیست.

فرض کنیم  $(x_n)$  زیردنباله‌ای مانند  $(x_{n_i})$  همگرا به  $x$  داشته باشد. حال  $x$  به عضوی از  $A$  مساند  $A$  تعلق دارد، و چون  $A$  باز است، عدد مثبتی مانند  $\varepsilon$  وجود دارد که  $B(x, \varepsilon) \subset A$ . اندیس  $i$  را به قدر کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم به طوری که

$$1/n_i < \varepsilon/2 \quad \text{و} \quad d(x_{n_i}, x) < \varepsilon/2$$

حال  $C_{n_i}$  در گوی به مرکز  $x_{n_i}$  و به شعاع  $1/n_i$  قرار دارد. از اینجا نتیجه می‌شود که

$$C_{n_i} \subset B(x, \varepsilon)$$

و در این صورت،  $C_{n_i} \subset A$ ، و این با انتخاب مجموعه‌های  $C_n$  متناقض است.  $\square$

برهانی که گذشت نمونه‌ای است از برهانهایی که ماهیت غیرسازنده دارند. بدین معنی که وجود  $\delta$  را ثابت می‌کند بدون اینکه اشاره‌ای به طریق یافتن آن بکند. حال به اثبات سومین قضیه حسابان، که در آغاز این فصل بیان شد، می‌پردازیم. این قضیه در اینجا به طرز مناسبی تعمیم یافته است.

۳.۷. قضیه (قضیه پیوستگی یکنواخت) فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  نگاشتی پیوسته از فضای متریک فشرده  $(X, d_x)$  به فضای متریک  $(Y, d_y)$  باشد. در این صورت،  $f$  همگرای یکنواخت است. یعنی به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، عدد مثبتی مانند  $\delta$  هست که به ازای هر دو نقطه  $x_1$  و  $x_2$  از  $X$ ،

$$d_x(x_1, x_2) < \delta \implies d_y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

برهان. به ازای عدد مثبت مفروض  $\varepsilon$ ، پوشش بازی از  $Y$  متشکل از گویهای  $B(y, \varepsilon/2)$  به شعاع  $\varepsilon/2$  در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $\mathcal{A}$  پوشش بازی برای  $X$  باشد که از تصاویر عکس این گویها تحت  $f$  به دست آمده است.  $\delta$  را عدد لپگک پوشش  $\mathcal{A}$  می‌گیریم. در این صورت، اگر  $x_1$  و  $x_2$  دو نقطه از  $X$  باشند به طوری که  $d_X(x_1, x_2) < \delta$  آنگاه قطر مجموعه دو نقطه‌ای  $\{x_1, x_2\}$  از  $\delta$  کمتر است. پس، تصویر آن  $\{f(x_1), f(x_2)\}$  در گویی مانند  $B(y, \varepsilon/2)$  قرار می‌گیرد. در نتیجه  $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ ؛ و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

اینک، ثابت می‌کنیم که فشردگی و فشردگی برحسب نقطه حدی در فضاهای متریک پذیر معادل‌اند:

۴.۷. قضیه فرض کنیم  $X$  فضایی متری پذیر باشد. در این صورت، احکام ذیل معادل‌اند:

(۱)  $X$  فشرده است.

(۲)  $X$  فشرده برحسب نقطه حدی است.

(۳)  $X$  فشرده دنباله‌ای است.

برهان. پیش از این ثابت کردیم که  $(۱) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۳)$ ؛ به برهانهای قضیه ۱.۷ و لم ۲.۷ مراجعه کنید. همچنین ثابت کردیم که فشردگی دنباله‌ای مستلزم این است که هر پوشش باز  $X$  دارای یک عدد لپگک است. حال برهان قضیه حاضر را با اثبات این مطلب که فشردگی دنباله‌ای فضای  $X$  مستلزم فشردگی آن است به پایان می‌رسانیم. بنابراین، فرض کنیم  $X$  فشرده دنباله‌ای باشد.

مرحله ۱. نخست، ثابت می‌کنیم که به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، یک پوشش متناهی از  $\varepsilon$ -گویها برای  $X$  وجود دارد. برای این کار، باز هم عکس نقیض این حکم را ثابت می‌کنیم: اگر به ازای  $\varepsilon$  مثبتی  $X$  را نتوان با تعدادی متناهی از  $\varepsilon$ -گویها پوشاند آنگاه  $X$  فشرده دنباله‌ای نیست.

بنابراین، فرض کنیم  $X$  را نمی‌توان با تعدادی متناهی از گویها به شعاع  $\varepsilon$  پوشاند. به روش زیر، دنباله‌ای از نقاط  $X$  می‌سازیم: نخست،  $x_1$  را نقطه دلخواهی از  $X$  می‌گیریم. با توجه به اینکه گوی  $B(x_1, \varepsilon)$  مساوی  $X$  نیست (در غیر این صورت،  $X$  را می‌توان با تنها  $\varepsilon$ -گویی پوشاند)، نقطه  $x_2$  را چنان انتخاب می‌کنیم که در  $B(x_1, \varepsilon)$  نباشد. به طور کلی، با در دست داشتن  $x_1, \dots, x_n$ ، نقطه  $x_{n+1}$  را چنان انتخاب می‌کنیم که در اجتماع

$$B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon)$$

نباشد. این انتخاب، با توجه به اینکه این گویها  $X$  را نمی پوشانند، ممکن است. توجه داشته باشید که، بنا بر روش ساختن جملات این دنباله، به ازای هر  $i$  که  $i = 1, 2, \dots, n$  داریم  $d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$ . بنابراین، دنباله  $(x_n)$  نمی تواند دارای يك زیر دنباله همگرا باشد؛ در واقع هر گوی به شعاع  $\varepsilon/2$  می تواند حداکثر به ازای يك مقدار  $n$  شامل  $x_n$  باشد.

مرحله ۲. اینک ثابت می کنیم که  $X$  فشرده است. فرض کنیم  $\mathcal{A}$  پوششی باز برای  $X$  باشد. چون  $X$  فشرده دنباله ای است، پوشش  $\mathcal{A}$  عدد لیبگی مانند  $\delta$  دارد. با استفاده از مرحله ۱، پوششی متناهی از  $X$  با گویهای به شعاع  $\delta/2$  انتخاب می کنیم. قطر هر يك از این گویها حداکثر  $2\delta/3$  است. پس، به ازای هر يك از این گویها می توان عضوی از  $\mathcal{A}$  انتخاب کرد که حاوی آن باشد. بدین ترتیب، زیر گردایه ای متناهی از  $\mathcal{A}$  به دست می آوریم که  $X$  را می پوشاند.  $\square$

### تمرینها

۱. فرض کنید  $X$  فضایی دو نقطه ای با توپولوژی ناگسسته باشد. ثابت کنید که  $X \times Z_+$  فشرده بر حسب نقطه حدی است، ولی فشرده نیست.
۲. ثابت کنید که  $[0, 1]^{\omega}$  نه با توپولوژی یکنواخت فشرده بر حسب نقطه حدی است و نه با توپولوژی جعبه ای.
۳. ثابت کنید که مجموعه  $[0, 1]$  به عنوان زیر فضایی از  $R_1$  فشرده بر حسب نقطه حدی نیست.
۴. فضای  $X$  را فشرده شمارشی خوانیم هر گاه هر پوشش باز شمارای  $X$  حاوی يك زیر گردایه متناهی باشد که  $X$  را بپوشاند.  
(الف) ثابت کنید که فشرده گی شمارشی مستلزم فشرده گی بر حسب نقطه حدی است.  
(ب) اگر  $X$  هاوسدورف باشد، عکس این حکم را ثابت کنید. [دانهایی: اگر هیچ زیر گردایه متناهی از  $\{U_n\}$  مجموعه  $X$  را نپوشاند آنگاه  $x_n$  را چنین انتخاب می کنیم:  $0 \notin U_1 \cup \dots \cup U_n$ ]
۵. فرض کنید  $X$  فشرده بر حسب نقطه حدی باشد.  
(الف) اگر  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته باشد، آیا  $f(X)$  الزاماً فشرده بر حسب نقطه حدی است؟  
(ب) اگر  $A$  زیر مجموعه بسته ای از  $X$  باشد، آیا  $A$  الزاماً فشرده بر حسب نقطه حدی است؟

(پ) اگر  $X$  زیرفضایی از  $Z$  باشد، آیا  $X$  در  $Z$  الزاماً بسته است؟  
 (ت) سؤالی (الف) - (پ) را با این شرط اضافی که فضاها همه هاوسدورف هستند تکرار کنید.

\* (ث) این حکم که حاصل ضرب دو فضای فشرده بر حسب نقطه حدی، فضای فشرده بر حسب نقطه حدی است عموماً برقرار نیست، حتی اگر شرط هاوسدورف را نیز به فضاها اضافه کنیم. اما، مثالهایی که در این مورد وجود دارد نسبتاً پیچیده‌اند. رجوع کنید به مثال ۱۱۲ در  $[S-S]$ .

۶. فرض کنید  $X, Y, Z$  و فضاهایی متری باشند.

(الف) اگر  $f: X \rightarrow Y$  و  $g: Y \rightarrow Z$  پیوسته یکنواخت باشند، آیا  $g \circ f: X \rightarrow Z$  الزاماً پیوسته یکنواخت است؟

(ب) اگر  $f: X \rightarrow Y$  هم‌ثومورفیزم و پیوسته یکنواخت باشد، آیا  $f^{-1}$  الزاماً پیوسته یکنواخت است؟

۷. فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متری فشرده باشد و  $f: X \rightarrow X$  نگاشتی پیوسته. (الف)  $f$  را انقباض خوانیم در صورتی که یک عدد  $\alpha < 1$  موجود باشد به طوری که به ازای هر  $x$  و  $y$  از  $X$ ،

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

ثابت کنید که اگر  $f$  یک انقباض باشد، نقطه یکتایی مانند  $x$  از  $X$  هست به طوری که  $f(x) = x$ . [دانهمایی:  $\bigcap f^n(X)$  را در نظر بگیرید.]

(ب)  $f$  را ایزومتري خوانیم در صورتی که به ازای هر  $x$  و  $y$  از  $X$ ،  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ . ثابت کنید که اگر  $f$  ایزومتري باشد آنگاه  $f$  پوشاست. [دانهمایی: فرض کنید  $x \notin f(X)$ ، یک همسایگی  $x$  به شعاع  $\varepsilon$  اختیار کنید که از  $f(X)$  جدا باشد.  $x_1$  را مساوی  $x$  و، به طور کلی،  $x_{n+1}$  را مساوی  $f(x_n)$  تعریف کنید. ثابت کنید که به ازای  $m \neq n$ ،  $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ .]

(پ) با ذکر مثالهایی ثابت کنید که اگر  $X$  فشرده نباشد آنگاه این قضایا برقرار نیستند.

\* ۸. ثابت کنید که  $[0, 1]^{\omega}$  باتوپولوژی حاصل ضربی فشرده است.

### \* ۳-۸ فشردگی موضعی

در این قسمت مفهوم فشردگی موضعی را مطالعه می‌کنیم، و این قضیه اساسی را ثابت می‌کنیم که هر فضای هاوسدورف موضعاً فشرده را می‌توان در فضای هاوسدورف فشرده معینی، که این فضا به فشرده شده تک نقطه‌ای موسوم است، نشانند.

۱. این بخش را در بخش ۵ - ۳ و در فصل ۷ دانسته فرض خواهیم کرد.

تعریف. فضای  $X$  را در نقطه  $x$  موضعاً فشرده خوانیم در صورتی که زیرمجموعه فشرده‌ای از  $X$  مانند  $C$  موجود باشد که حاوی يك همسایگی  $x$  است. اگر  $X$  در هر نقطه خود موضعاً فشرده باشد آنگاه به‌طور ساده  $X$  را موضعاً فشرده می‌خوانیم.

ملاحظه می‌شود که هر فضای فشرده خود به‌خود موضعاً فشرده است.

مثال ۱. خط حقیقی  $R$  موضعاً فشرده است. نقطه  $x$  متعلق به بازه‌ای مانند  $(a, b)$  است، که آن نیز به نوبه خود جزء مجموعه فشرده  $[a, b]$  است. می‌توانید بررسی کنید که زیر فضای  $Q$  متشکل از اعداد گویا موضعاً فشرده نیست.

مثال ۲. فضای  $R^n$  موضعاً فشرده است؛ نقطه  $x$  متعلق به عضوی از پایه مانند  $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$  است، که آن نیز به نوبه خود در مجموعه فشرده  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  واقع است. فضای  $R^\omega$  موضعاً فشرده نیست؛ هیچیک از اعضای پایه آن جزء مجموعه‌های فشرده نیست. زیرا، اگر

$$B = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \times R \times \dots \times R \times \dots$$

جزء مجموعه‌ای فشرده باشد آنگاه باید بستار آن

$$B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \times R \times \dots$$

نیز فشرده باشد، که چنین نیست.

مثال ۳. هر مجموعه مرتب ساده مانند  $X$  که دارای خاصیت کوچکترین کران بالا باشد، موضعاً فشرده است؛ زیرا هر عضو پایه  $X$  جزء بازه‌ای بسته در  $X$  است که فشرده است.

دو رده از خوشرفتارترین فضاهایی که در ریاضی با آنها سروکار داریم فضاهای متریک پذیر و فضاهای هاوسدورف فشرده هستند. چنین فضاهایی دارای خواص بسیار مفیدی هستند، که می‌توان از آنها در اثبات قضایا، ساختن ساختمانهای دیگر، و غیره بهره گرفت. اگر فضای مفروضی یکی از این دو نوع نباشد، بهترین وضعیتی که می‌توان انتظار داشت آن است که فضای مفروض زیر فضای یکی از این گونه فضاها باشد. البته، هر زیر فضای يك فضای متریک پذیر خود متریک پذیر است. بنابراین، از این راه هیچ فضای جدیدی حاصل نمی‌شود. اما، زیر فضای يك فضای هاوسدورف فشرده لازم نیست فشرده باشد. بدین ترتیب، این سؤال پیش می‌آید که: تحت چه شرایطی فضایی بازیر فضای يك فضای هاوسدورف فشرده همثومورف است؟ در اینجا پاسخی برای این پرسش می‌آوریم. در فصل ۵ که فشرده‌سازی را به‌طور کلی مطالعه می‌کنیم بدین مسئله بازخواهیم گشت.



تعریف. فرض کنیم  $X$  يك فضای هانسدورف موضعاً فشرده باشد. شیئی بیرون از  $X$  در نظر می گیریم. می توانیم این شیء را برای سهولت بانماد  $\infty$  نمایش دهیم، و بالحاظ این شیء به  $X$ ، مجموعه  $Y = X \cup \{\infty\}$  را تشکیل می دهیم. حال، با تعریف گردایه ای از انواع مجموعه های ذیل، به عنوان مجموعه های باز در  $Y$ ، در آن توپولوژی ای می سازیم:

(۱)  $U$ ، که در آن  $U$  یکی از زیرمجموعه های باز  $X$  است،

(۲)  $Y - C$ ، که در آن  $C$  یکی از زیرمجموعه های فشرده  $X$  است.

فضای  $Y$  را فشرده شده تک نقطه ای  $X$  می خوانیم.

بررسی توپولوژی بودن این گردایه برای  $Y$  ضروری است. مجموعه تهی مجموعه ای از نوع (۱) است، و فضای  $Y$  مجموعه ای از نوع (۲) است. بررسی اینکه مقطع دو مجموعه باز مجموعه ای باز است متضمن سه حالت ذیل است:

از نوع (۱) است.  $U_1 \cap U_2$

از نوع (۲) است.  $(Y - C_1) \cap (Y - C_2) = Y - (C_1 \cup C_2)$

از نوع (۱) است.  $U_1 \cap (Y - C_1) = U_1 \cap (X - C_1)$

چون  $C_1$  در  $X$  بسته است. به همین قیاس، ملاحظه می شود که اجتماع هر گردایه از مجموعه های باز، باز است:

از نوع (۱) است.  $\bigcup U_\alpha = U$

از نوع (۲) است.  $\bigcup (Y - C_\beta) = Y - (\bigcap C_\beta) = Y - C$

چون  $C - U$  يك زیرمجموعه بسته  $C$  است، در نتیجه فشرده است؛ پس، مجموعه

$$(\bigcup U_\alpha) \cup (\bigcup (Y - C_\beta)) = U \cup (Y - C) = Y - (C - U)$$

از نوع (۲) است.

خواص اساسی فشرده شده تک نقطه ای در قضیه ذیل آمده اند.

۱۰۸. قضیه فرض کنیم  $X$  يك فضای هانسدورف موضعاً فشرده باشد که فشرده نیست و  $Y$  فشرده شده تک نقطه ای  $X$  باشد. در این صورت،  $Y$  فضایی هانسدورف و فشرده است،  $X$  زیرفضایی از  $Y$  است؛ مجموعه  $Y - X$  متشکل از يك نقطه است؛ و  $\bar{X} = Y$ .

برهان. نخست ثابت می کنیم که  $X$  يك زیرفضای  $Y$  است و  $\bar{X} = Y$ . برای این منظور ملاحظه می کنیم که اولاً مقطع هر مجموعه باز  $Y$  با مجموعه  $X$  مجموعه ای باز

در  $X$  است. زیرا،  $U \cap X = U$ ، و  $(Y - C) \cap X = X - C$  که هر دو در  $X$  بازند. بعکس، هر مجموعه باز  $X$ ، مجموعه‌ای از نوع (۱) است و بنا بر این در  $Y$  باز است. چون  $X$  فشرده نیست، هر مجموعه باز به صورت  $Y - C$  که شامل نقطه  $\infty$  باشد  $X$  را قطع می‌کند. بنا بر این،  $\infty$  يك نقطه حدى  $X$  است. و از آنجا نتیجه می‌شود  $X = Y$ .

برای اینکه ثابت کنیم  $Y$  فشرده است، فرض کنیم  $\mathcal{A}$  پوشش باز دلخواهی از  $Y$  باشد. چون هیچیک از مجموعه‌های نوع (۱) شامل نقطه  $\infty$  نیست. گردایه  $\mathcal{A}$  باید شامل مجموعه‌ای باز از نوع (۲) مانند  $Y - C$  باشد. مقاطع همه اعضایی از  $\mathcal{A}$  را که غیر از  $Y - C$  هستند با مجموعه  $X$  در نظر می‌گیریم؛ این اعضا تشکیل گردایه‌ای از مجموعه‌های باز  $X$  می‌دهند که  $C$  را می‌پوشانند. چون  $C$  فشرده است، تعدادی متناهی از آنها نیز  $C$  را می‌پوشانند؛ اعضایی از  $\mathcal{A}$  که متناظر به این گردایه متناهی‌اند همراه با آنها عضو  $Y - C$  همه  $Y$  را می‌پوشانند.

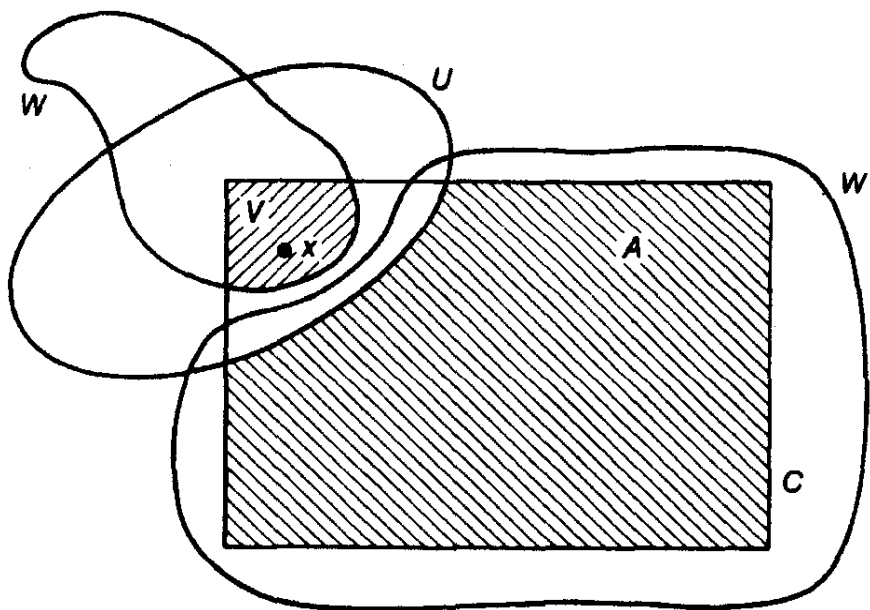
برای اثبات هاوسدورف بودن  $Y$ ، فرض می‌کنیم  $x$  و  $y$  دو نقطه متمایز  $Y$  باشند. اگر هر دوی آنها در  $X$  واقع باشند، مجموعه‌های باز جدا از همی از  $X$  مانند  $U$  و  $V$  وجود دارند که، بترتیب، شامل  $x$  و  $y$  اند. از طرف دیگر، اگر  $x \in X$  و  $y = \infty$ ، می‌توان مجموعه فشرده‌ای مانند  $C$  در  $X$  انتخاب کرد که حاوی يك همسایگی  $x$  مانند  $U$  باشد. در این صورت،  $U$  و  $Y - C$ ، بترتیب، همسایگیهای جدا از همی از  $x$  و  $y$  در  $Y$  اند.  $\square$

مثال ۴. بسادگی می‌توانید بررسی کنید که فشرده شده تک نقطه‌ای خط حقیقی  $R$  با دایره همومورف است. به همین قیاس، فشرده شده تک نقطه‌ای  $R^2$  با کره  $S^2$  همومورف است. اگر  $R^2$  به عنوان فضای  $C$  از اعداد مختلط ملحوظ شود آنگاه  $C \cup \{\infty\}$  را کره دیمانی یا صفحه مختلط گسترده می‌خوانند.

تعریف ما از فشردگی موضعی از جهاتی رضایت بخش نیست. معمولاً وقتی گفته می‌شود که فضایی مانند  $X$  خاصیت مفروضی را «به طور موضعی» دارد، منظور این است که هر  $x \in X$ ، دارای همسایگیهای «به دلخواه کوچک» است که واجد این خاصیت هستند. در تعریف ما از فشردگی موضعی سخنی از همسایگیهای «به دلخواه کوچک» به میان نیامده است. بنا بر این، جای بحث است که آیا حق داریم اصولاً آن را فشردگی موضعی بنامیم یا نه. ذیلاً، صورت دیگری از تعریف فشردگی موضعی را می‌آوریم که بر آسانی از ماهیت «موضعی» بیشتری برخوردار است؛ هنگامی که  $X$  هاوسدورف باشد، این دو تعریف معادل‌اند.

۲۰۸. لم فرض کنیم  $X$  فضایی هاوسدورف باشد. در این صورت،  $X$  در نقطه  $x$  موضعاً فشرده است اگر و فقط اگر به ازای هر همسایگی  $U$  مانند  $U$ ، يك همسایگی  $x$  مانند  $V$  یافت شود به طوری که  $\bar{V}$  فشرده باشد و  $\bar{V} \subset U$ .

برهان. واضح است که این فرمولبندی جدید مستلزم فشردگی موضعی است؛ مجموعه  $C = \mathcal{P}$  مجموعه فشردۀ مطلوب است که حاوی يك همسایگی  $x$  است. بعکس، فرض کنیم  $C$  مجموعه‌ای فشرده باشد که حاوی يك همسایگی  $x$  است و  $U$  را همسایگی دلخواهی از  $x$  می‌گیریم. فرض کنیم  $A = C - U$ ؛ چون  $C$  بسته است، مجموعه  $A$  فشرده است. حال با استفاده لم ۴.۵، مجموعه‌های باز جدا از هم  $W$  و  $W'$  را چنان انتخاب می‌کنیم که، بترتیب، شامل  $x$  و حاوی  $A$  باشند. شکل ۱۷ را نگاه کنید. فرض کنیم  $V = W \cap (\text{Int } C)$ . یادآوری می‌کنیم که  $\text{Int } C$  اجتماع همه مجموعه‌های باز جزء  $C$  است. پس،  $V$  يك همسایگی  $x$  است. چون  $X$  هاوسدورف است،  $C$  در  $X$  بسته است؛ بنابراین،  $\mathcal{P} \subset C$ ، و در نتیجه  $\mathcal{P}$  فشرده است. چون  $V$  جزء  $W$  است، و  $W'$  از  $W$  جداست، مجموعه  $\mathcal{P}$  نمی‌تواند  $A$  را قطع کند. بنابراین،  $\mathcal{P} \subset C - A$ ، و در نتیجه،  $\square. \mathcal{P} \subset U$



شکل ۱۷

در صورتی که  $x$  در هر نقطه موضعاً فشرده باشد برای این لم برهان ساده‌تری وجود دارد. در این برهان از این حکم استفاده می‌شود که متمم  $U$  در  $Y$ ، یعنی فشردۀ تک‌نقطه‌ای  $X$ ، مجموعه‌ای فشرده است؛ سپس، همسایگی‌های جدا از همی مانند  $W$  و  $V$ ، بترتیب، از  $x$  و  $Y - U$  انتخاب می‌کنیم. در این صورت،  $\mathcal{P}$ ، بستار  $V$  در  $Y$ ، فشرده و جزء  $U$  است.

۳.۸. قضیه فرض کنیم  $X$  يك فضای هاوسدورف موضعاً فشرده باشد، و  $Y$  را

زیرفضایی از  $X$  در نظر می‌گیریم. اگر  $Y$  در  $X$  بسته یا باز باشد آنگاه  $Y$  موضعاً فشرده است.

برهان. فرض کنیم  $Y$  در  $X$  بسته باشد. فرض کنیم  $y \in Y$  و  $C$  مجموعه فشرده‌ای در  $X$  باشد که حاوی یک همسایگی  $x$  مانند  $U$  در  $X$  است؛ در این صورت،  $C \cap Y$  در  $C$  بسته است، و بنابراین، فشرده است و حاوی همسایگی  $U \cap Y$  از  $y$  در  $Y$  است. (شرط هاوسدورف را در اینجا به کار نبرده‌ایم.)

فرض کنیم  $Y$  در  $X$  باز باشد. اگر  $y \in Y$ ، با استفاده از لم پیش، یک همسایگی  $y$  مانند  $V$  در  $X$  چنان انتخاب می‌کنیم که  $V$  فشرده باشد و  $V \subset Y$ . در این صورت،  $C = V$  مجموعه‌ای فشرده در  $Y$  است که حاوی همسایگی  $V$  از  $y$  در  $Y$  است.  $\square$

۴.۸. نتیجه فضای  $X$  بایک زیرمجموعه باز یک فضای هاوسدورف فشرده هومئومورف است اگر فقط اگر  $X$  هاوسدورف و موضعاً فشرده باشد.

برهان. این حکم از قضیه ۱.۸ و نتیجه ۳.۸ به دست می‌آید.  $\square$

### تمرینها

۱. ثابت کنید که  $\mathbb{Q}$ ، مجموعه اعداد گویا، موضعاً فشرده نیست.
۲. (الف) ثابت کنید که اگر  $\prod X_\alpha$  موضعاً فشرده باشد آنگاه هر  $X_\alpha$  موضعاً فشرده است و به ازای همه مقادیر  $\alpha$ ، بجز تعدادی متناهی از آنها،  $X_\alpha$  فشرده است. ( $X_\alpha$ ها را ناتهی فرض کنید.)  
(ب) با دانسته گرفتن قضیه تیخونوف، عکس حکم بالا را ثابت کنید.
۳. فرض کنید  $X$  یک فضای موضعاً فشرده باشد. اگر  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته باشد، آیا لازم است که فضای  $f(X)$  موضعاً فشرده باشد؟ اگر  $f$  هم پیوسته و هم بساز باشد، چه روی می‌دهد؟ پاسخ خود را توجیه کنید.
۴. ثابت کنید که  $[0, 1]^\omega$ ، باتوپولوژی یکنواخت، موضعاً فشرده نیست.
۵. ثابت کنید که شرایط قضیه ۱.۸، فشرده شده تک نقطه‌ای را با تقریب یک هومئومورفیسم مشخص می‌کنند.
۶. ثابت کنید که فشرده شده تک نقطه‌ای  $R$  با دایره  $S^1$  هومئومورف است.
۷. ثابت کنید که فشرده شده تک نقطه‌ای  $S_n$  با  $\bar{S}_n$  هومئومورف است.
۸. ثابت کنید که فشرده شده تک نقطه‌ای  $Z_+$  هومئومورف است با زیرفضای

$$\cdot R \text{ از } \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

۹. ثابت کنید که فشرد شده تک نقطه‌ای  $R^2$  هم‌ثمورف است با کره دو بعدی  $S^2$ .

۱۰. ثابت کنید که اگر  $G$  یک گروه توپولوژیک موضعاً فشرده و  $H$  زیرگروهی از آن باشد آنگاه  $G/H$  موضعاً فشرده است.

۱۱\* (الف) لم ذیل را ثابت کنید:

لم. اگر  $p: X \rightarrow Y$  نگاشتی خارج قسمتی و  $Z$  یک فضای هاوسدورف موضعاً فشرده باشد آنگاه نگاشت

$$\pi = p \times i_z: X \times Z \rightarrow Y \times Z$$

یک نگاشت خارج قسمتی است.

[داهنمایی: اگر  $\pi^{-1}(A)$  باز و شامل  $x \times y$  باشد، مجموعه‌های  $U_1$  و  $V$  را، که در آن  $V$  فشرده است، چنان انتخاب کنید که  $x \times y \in U_1 \times V$  و  $U_1 \times V \subset \pi^{-1}(A)$ . با فرض اینکه  $U_1 \times V \subset \pi^{-1}(A)$ ، مجموعه‌ی بازی مانند  $U_{i+1}$  که حاوی  $p^{-1}(p(U_i))$  باشد چنان انتخاب کنید که  $U_{i+1} \times V \subset \pi^{-1}(A)$ . فرض کنید  $U = \bigcup U_i$ ؛ ثابت کنید که  $\pi(U \times V)$  یک همسایگی  $\pi(x, y)$  است که جزء  $A$  است.]

(ب) ثابت کنید:

قضیه. فرض کنید  $p: A \rightarrow B$  و  $q: C \rightarrow D$  نگاشتهایی خارج قسمتی باشند. اگر  $B$  و  $C$  فضاهای هاوسدورف موضعاً فشرده باشند آنگاه  $p \times q: A \times C \rightarrow B \times D$  یک نگاشت خارج قسمتی است.

## \*تمرینهای تکمیلی:

### نورها

در آنچه گذشت دیدیم که دنباله‌ها برای بررسی نقاط حدی، توابع پیوسته، و مجموعه‌های فشرده در فضاهای متری «کافی» بودند. تعمیمی از مفهوم دنباله موجود است، موسوم به توپ، که همین کار را برای فضاهای توپولوژیک دلخواه انجام می‌دهد. در اینجا، تعریفهای مربوطه را می‌آوریم و اثباتها را به‌عنوان تمرین باقی می‌گذاریم. یادآوری می‌کنیم که رابطه‌ای مانند  $\ll$  را در مجموعه  $A$  یک رابطه‌ی ترتیبی جزئی می‌خوانیم در صورتی که در شرایط ذیل صدق کند:

- (۱) به ازای هر  $\alpha$  ،  $\alpha \leq \alpha$  .  
 (۲) اگر  $\alpha \leq \beta$  و  $\beta \leq \alpha$  آنگاه  $\alpha = \beta$  .  
 (۳) اگر  $\alpha \leq \beta$  و  $\beta \leq \gamma$  آنگاه  $\alpha \leq \gamma$  .

اینک، تعریف ذیل را می آوریم:

یک مجموعه جهت دار مانند  $J$  مجموعه ای است با یک ترتیب جزئی، مانند  $\leq$  ، به طوری که به ازای هر زوج  $\alpha$  و  $\beta$  از اعضای  $J$  ، عضوی از  $J$  مانند  $\gamma$  موجود باشد با این خاصیت که  $\alpha \leq \gamma$  و  $\beta \leq \gamma$  .

۱. ثابت کنید که مجموعه های ذیل جهت دار هستند:

(الف) هر مجموعه مرتب با ترتیب ساده و با رابطه  $\leq$  .

(ب) گردایه همه زیرمجموعه های مجموعه ای مانند  $S$  ، که با رابطه جزئیت به ترتیب جزئی مرتب شده است (یعنی،  $A \leq B$  در صورتی که  $A \subset B$ ) .

(پ) گردایه ای مانند  $J$  از زیرمجموعه های  $S$  که تحت مقطع گیری متناهی بسته است و با عکس رابطه جزئیت به ترتیب جزئی مرتب شده است (یعنی،  $A \leq B$  در صورتی که  $B \subset A$ ) .

(ت) گردایه همه مجموعه های بسته فضایی مانند  $X$  که با رابطه جزئیت به ترتیب جزئی مرتب شده است.

۲. زیرمجموعه ای مانند  $K$  از  $J$  را در  $J$  همپایان خوانیم در صورتی که به ازای هر  $\alpha \in J$  ،  $\beta \in K$  در  $K$  موجود باشد که  $\alpha \leq \beta$  . ثابت کنید که اگر  $J$  مجموعه ای جهت دار باشد و  $K$  در  $J$  همپایان باشد آنگاه  $K$  نیز جهت دار است.

۳. فرض کنید  $X$  یک فضای توپولوژیک باشد. یک تور در  $X$  تابعی است مانند  $f$  از مجموعه جهت داری مانند  $J$  بتوی  $X$  . اگر  $\alpha \in J$  ، معمولاً  $f(\alpha)$  را با  $x_\alpha$  نمایش می دهیم. خود تور  $f$  را با نماد  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$  ، و یا اگر مجموعه اندیس از سیاق مطلب فهمیده شود، مختصراً با  $(x_\alpha)$  نمایش می دهند.

تور  $(x_\alpha)$  را همگرا به نقطه  $x$  از  $X$  گوئیم (و چنین می نویسیم:  $x_\alpha \rightarrow x$ ) هر گاه به ازای هر همسایگی  $U$  از  $x$  ،  $\alpha$  بی از  $J$  موجود باشد که

$$\alpha \leq \beta \implies x_\beta \in U.$$

ثابت کنید که این تعریفها وقتی  $J = Z_+$  به تعریفهای مانوس تحویل می یابند.

۴. فرض کنید

$$x \leftarrow (x_\alpha)_{\alpha \in J} \text{ در } X \text{ و } y \leftarrow (y_\alpha)_{\alpha \in J} \text{ در } Y.$$

ثابت کنید که

$$x \times y \rightarrow (x_\alpha \times y_\alpha) \text{ در } X \times Y$$

۵. ثابت کنید که اگر  $X$  هاوسدورف باشد، هر تورد در  $X$  حداکثر به یک نقطه همگراست.

۶. قضیه. فرض کنید  $A \subset X$ . در این صورت،  $x \in \bar{A}$  اگر و فقط اگر توری از نقاط  $A$  همگرا به  $x$  وجود داشته باشد.

[داهنمایی: برای اثبات استلزام  $\Leftarrow$ ، گردایه همه همسایگیهای  $x$  را که با عکس جزئیت به ترتیب جزئی مرتب است به عنوان مجموعه اندیس اختیار کنید.]

۷. قضیه. فرض کنید  $f: X \rightarrow Y$ . در این صورت،  $f$  پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر تورد همگرا مانند  $(x_\alpha)$  در  $X$  که همگرا به  $x$  است، تود  $(f(x_\alpha))$  به  $f(x)$  همگرا باشد.

۸. فرض کنید  $f: J \rightarrow X$  توری در  $X$  باشد، و  $f(\alpha) = x_\alpha$ . اگر  $K$  مجموعه‌ای جهت‌دار باشد و  $g: K \rightarrow J$  تابعی باشد که  
(الف) اگر  $i \leq j$  آنگاه  $g(i) \leq g(j)$ ،  
(ب)  $g(K)$  در  $J$  همپایان است.

آنگاه تابع مرکب  $f \circ g: K \rightarrow X$  را یک زیرتود  $(x_\alpha)$  می‌گوییم. ثابت کنید که اگر تود  $(x_\alpha)$  به  $x$  همگرا باشد آنگاه هر زیرتود آن نیز چنین است.

۹. فرض کنید  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$  توری در  $X$  باشد.  $x$  را یک نقطه انباشتگی تود  $(x_\alpha)$  خوانیم هرگاه به ازای هر همسایگی  $U$  از  $x$ ، مجموعه  $\alpha$  هایی که به ازای آنها  $x_\alpha \in U$  در  $J$  همپایان باشد.

لم. نقطه  $x$  یکی از نقاط انباشتگی تود  $(x_\alpha)$  است اگر و فقط اگر زیرتودی از  $(x_\alpha)$  به  $x$  همگرا باشد.

[داهنمایی: برای اثبات استلزام  $\Leftarrow$ ، فرض کنید  $K$  مجموعه همه زوجهای  $(\alpha, U)$  باشد که در آن  $\alpha \in J$  و  $U$  یک همسایگی  $x$  شامل  $x_\alpha$  است. اگر  $\alpha \leq \beta$  و  $V \subset U$  آنگاه تعریف می‌کنیم  $(\beta, V) \leq (\alpha, U)$ . ثابت کنید که  $K$  مجموعه‌ای جهت‌دار است، و از آن برای تعریف زیرتود مطلوب استفاده کنید.]

۱۰. قضیه. فضای  $X$  فشرده است اگر و فقط اگر هر تود در  $X$  زیرتودی همگرا داشته باشد.

[داهنمایی: برای اثبات استلزام  $\Leftarrow$ ، فرض کنید  $B_\alpha = \{x_\beta \mid \alpha \leq \beta\}$ . ثابت کنید که  $\{B_\alpha\}$  واجد شرایط مقطع متناهی است. برای اثبات  $\Rightarrow$ ، فرض کنید  $\mathcal{A}$  گردایه‌ای از مجموعه‌های بسته باشد که در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند،

و  $\mathcal{B}$  را گردایه همه مقاطع متناهی اعضای  $\mathcal{A}$ ، که با عکس رابطه جزئیت به ترتیب جزئی مرتب شده است، بگیرید.]

۱۱. نتیجه. فرض کنید  $G$  یک گروه توپولوژیک باشد و  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی از  $G$  باشند. اگر  $A$  در  $G$  بسته و  $B$  فشرده باشد آنگاه  $A \cdot B$  در  $G$  بسته است.  
 [دانهمایی: نخست، با فرض اینکه  $G$  متری پذیر است برهانی بسا استفاده از دنباله‌ها بیاورید.]



## اصول جداسازی و شمارایی

مفاهیمی را که اینک معرفی می‌کنیم، برخلاف فشردگی و همبندی، به‌طور طبیعی از مطالعه حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) و آنالیز ناشی نمی‌شوند، بلکه از مطالعه عمیقتری در خود توپولوژی پدید می‌آیند. مسائلی مسانند نشانیدن فضای مفروضی در يك فضای متری یا در يك فضای هاوسدورف فشرده، در اساس، بیشتر مسائلی توپولوژیک هستند تا آنالیزی. این مسائل خاص، راه‌حلهایی دارند که متضمن اصول شمارایی و جداسازی است. اولین اصل شمارایی را قبلاً در بخش ۲ - ۱۵، هنگام مطالعه دنباله‌های همگرا معرفی کردیم. همچنین، اصل هاوسدورف را، که یکی از اصول جداسازی است، مطالعه کردیم. در این فصل، اصول قویتر دیگری را معرفی و بعضی از نتایج آنها را کشف می‌کنیم. هدف اساسی ما اثبات قضیه متریسازی اوریسون است. بنا بر این قضیه، اگر فضای توپولوژیک  $X$  در اصول شمارایی (دومین) و جداسازی معینی (اصل منتظم بودن) صدق کند، آنگاه  $X$  را می‌توان در فضایی متری نشانید. و در نتیجه متریک پذیر است. این قضیه کلاسیک را می‌توان نقطه اوج قسمت اول این کتاب به‌شمار آورد.

در آخرین بخش این فصل، قضیه نشانیدن دیگری می‌آید که برای دست‌اندرکاران هندسه حائز اهمیت است. بنا بر این قضیه، هر بسلائی فشرده مفروض (چیزی نظیر يك زویه در سطوح بالاتر) را می‌توان در يك فضای اقلیدسی با بعد متناهی نشانید.

### ۱-۲ اصول موضوع شمارایی

تعریفی را که در بخش ۲ - ۱۵ بیان کردیم به‌خاطر بیاورید:

تعریف . گوئیم فضای  $X$  در نقطه  $x$  پایه شمارا دارد هر گاه گردایه شمارایی از همسایگیهای  $x$  مانند  $\mathcal{B}$  موجود باشد به طوری که هر همسایگی  $x$  دست کم حاوی يك عضو این گردایه باشد. اگر فضایی در هر نقطه اش يك پایه شمارا داشته باشد، گوئیم در اولین اصل شمارایی صدق می کند.

قبلاً متذکر شدیم که هر فضای متریک پذیر در این اصل صدق می کند؛ بخش ۲-۱۵ ملاحظه شود.

مفیدترین مطلب مربوط به فضاهای واجد این خاصیت آن است که در فضایی از این نوع، دنباله های همگرا برای یافتن نقاط حدی مجموعه ها و بررسی پیوستگی توابع کفایت می کنند. این احکام را قبلاً متذکر شده ایم اکنون رسماً به عنوان قضیه بیان می کنیم:

۱۰۱. قضیه فرض کنیم فضای  $X$  در اولین اصل شمارایی صدق کند.

(الف) نقطه  $x$  به بستار  $\bar{A}$  زیر مجموعه  $A$  از  $X$  تعلق دارد اگر و فقط اگر دنباله ای از نقاط  $A$  همگرا به  $x$  موجود باشد.

(ب) تابع  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر دنباله همگرا در  $X$  مانند  $(x_n)$ ، که مثلاً به  $x$  همگراست، دنباله  $(f(x_n))$  به  $f(x)$  همگرا باشد.

با فرض متریک پذیری، برهان قضیه فوق تعمیم مستقیم برهانی است که در بخش ۲-۱۵ آمده است. بنا بر این، از تکرار آن خودداری می کنیم. پراهمیتتر از اولین اصل شمارایی، اصل زیر است:

تعریف . هر گاه توپولوژی فضای  $X$  دارای پایه ای شمارا باشد، گوئیم  $X$  در دومین اصل شمارایی صدق می کند.

بدیهی است که دومین اصل مستلزم اولی است: اگر  $\mathcal{B}$  يك پایه شمارا برای توپولوژی  $X$  باشد، آنگاه زیر مجموعه ای از  $\mathcal{B}$  که متشکل از اعضای پایه شامل نقطه  $x$  است، پایه ای شمارا در نقطه  $x$  می باشد. دومین اصل، در واقع بسیار قویتر از اولی است، تا آن حد که حتی نمی توان گفت هر فضای متری واجد آن است.

پس، در این صورت اهمیت آن به خاطر چیست؟ یکی آنکه بسیاری از فضاهای شناخته شده واجد این خاصیت اند. و دیگر، همان طور که خواهید دید، این خاصیت وسیله بسیار مهم و حساسی است که در اثبات قضیه متریسازی اوریسون به کار می رود.

مثال ۱. خط حقیقی  $R$  پایه ای شمارا دارد که گردایه همه بازه های باز مانند  $(a, b)$  با نقاط انتهایی گویا است. به طریقی مشابه،  $R^*$  نیز يك پایه شمارا دارد. یعنی، گردایه همه حاصل ضربهای بازه های بازی با نقاط انتهایی گویا. حتی  $R^{\omega}$  هم پایه ای شمارا دارد.

گردایه همه حاصل ضربهای  $U_n \in \mathbb{Z}_+$ ، که به ازای تعدادی متناهی از  $n$ ها،  $U_n$  بازه‌های بازی است با نقاط انتهایی گویا، و به ازای سایر مقادیر  $n$ ،  $U_n = R$ .

**مثال ۲.**  $R^\omega$ ، مجهز به توپولوژی یکنواخت، در اولین اصل شمارایی صدق می‌کند (چون متریک پذیر است). ولی در دومین اصل صدق نمی‌کند. زیرمجموعه ناشمارای  $C$  از  $R^\omega$  را که از همه دنباله‌های با جملات ۰ و ۱ تشکیل شده است در نظر می‌گیریم. اگر  $\mathcal{B}$  پایه‌ای برای توپولوژی یکنواخت در  $R$  باشد، به ازای هر  $x \in C$  می‌توان عضوی مانند  $B_x$  از  $\mathcal{B}$  چنان برگزید که شامل  $x$  باشد و درگویی به مرکز  $x$  و شعاع ۱ قرار گیرد. حال اگر  $x$  و  $y$  دو نقطه متمایز  $C$  باشند، آنگاه  $B_x \neq B_y$ ، زیرا  $\rho(x, y) = 1$ ، بنابراین  $y \notin B_x$ . نتیجه می‌گیریم که  $\mathcal{B}$  ناشماراست.

هر دو اصل شمارایی نسبت به عمل تعیین زیرفضاها یا عمل حاصل ضربهای شمارش پذیر خوش رفتارند:

**۲.۱. قضیه هر زیرفضای یک فضای شمارای نوع اول خود شمارای نوع اول است، و حاصل ضرب شمارای فضاها شمارای نوع اول نیز شمارای نوع اول است.** هر زیرفضای شمارای نوع دوم خود شمارای نوع دوم است، همچنین، حاصل ضرب شمارای فضاها شمارای نوع دوم نیز شمارای نوع دوم است.

برهان. دومین اصل شمارایی را در نظر می‌گیریم. اگر  $\mathcal{B}$  یک پایه شمارای  $X$  باشد، آنگاه  $\{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$  پایه‌ای شمارا برای زیرفضای  $A$  از  $X$  است. اگر  $\mathcal{B}_i$  پایه‌ای شمارا برای فضای  $X_i$  باشد، آنگاه گردایه همه حاصل ضربهای  $\prod U_i$  که به ازای تعدادی متناهی از  $i$ ها،  $U_i \in \mathcal{B}_i$  و به ازای سایر مقادیر  $i$ ،  $U_i = X_i$  یک پایه شمارا برای  $\prod X_i$  است.

برهان در مورد اولین اصل شمارایی کاملاً مشابه است.  $\square$

دو نتیجه از دومین اصل شمارایی که بعداً برای ما مفید واقع خواهند شد در قضیه زیر آمده است. نخست، به تعریف زیر توجه کنید:

**تعریف.** زیرمجموعه  $A$  از فضای  $X$  را در  $X$  چگال خوانیم اگر  $\bar{A} = X$ .

- ۳.۱. قضیه** فرض کنیم  $X$  پایه‌ای شمارا داشته باشد. در این صورت:
- (الف) هر پوشش باز  $X$  شامل زیرگردایه شمارایی است که  $X$  را می‌پوشاند.
  - (ب) زیرمجموعه شمارایی از  $X$  وجود دارد که در  $X$  چگال است.

برهان. فرض کنیم  $\{B_n\}$  یک پایه شمارش پذیر  $X$  باشد.

(الف) فرض کنیم  $A$  يك پوشش باز  $X$  باشد. به ازای هر عدد صحیح مثبت  $n$ ، در صورت امکان، عضوی از  $A$  مانند  $A_n$  انتخاب می کنیم که حاوی عضو  $B_n$  باشد. گردایه  $A'$  متشکل از مجموعه های  $A_n$  شماراست، چون بازیرمجموعه ای از اعداد صحیح مثبت اندیسگذاری شده است. بعلاوه، این گردایه  $X$  را می پوشاند؛ به ازای نقطه مفروض  $x \in X$  می توان عضوی از  $A$  مانند  $A$  انتخاب کرد که شامل  $x$  باشد. چون  $A$  بازاست، يك عضو پایه مانند  $B_n$  موجود است به طوری که  $x \in B_n \subset A$ . چون  $B_n$  در عضوی از  $A$  قرار دارد، لذا، به ازای اندیس  $n$ ، مجموعه  $A_n$  تعریف شده است؛ از طرفی چون  $A_n$  شامل  $B_n$  است، خواهیم داشت  $x \in A_n$ . در نتیجه،  $A'$  زیر گردایه شمارایی است از  $A$  که  $X$  را می پوشاند.

(ب) از هر عضو پایه غیر تهی  $B_n$ ، عضوی مانند  $x_n$  انتخاب می کنیم. مجموعه  $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$  در  $X$  چگال است؛ زیرا، به ازای نقطه مفروض  $x \in X$ ، هر عضو پایه که شامل  $x$  باشد مجموعه  $D$  را قطع می کند.  $\square$

گاه دو خاصیتی را که در قضیه ۳.۱ آمدند به عنوان صورت دیگری برای اصول شمارایی، در نظر می گیرند. معمولاً فضایی را که هر پوشش باز آن شامل يك زیر پوشش شمارا باشد فضای لیندولوف می نامند. فضایی را که دارای زیرمجموعه شمارا و چگال باشد اغلب تفکیک پذیر می گویند. زمانی که فضا متری پذیر باشد، هر يك از این دو خاصیت هم ارز دومین اصل شمارایی است، ولی در حالت کلی از آن ضعیف ترند (تمرین ۷ را ببینید). اگر چه این دو اصل از دومین اصل شمارایی کم اهمیت ترند، اما، باید از وجود آنها آگاهی داشته باشیم. چون گاهی مفید واقع می شوند. مثلاً، اغلب ارائه يك زیرمجموعه شمارای چگال برای فضای  $X$  آسانتر از ارائه يك پایه شماراست. اگر فضا متری پذیر باشد (چنانکه در آنالیز معمولاً چنین است) با حل مسئله آسانتر، مسئله دشوارتر نیز حل می شود.

این خواص را در اثبات هیچ قضیه ای به کار نخواهیم برد، ولی یکی از آنها - یعنی شرط لیندولوف - در حل بعضی از مثالها مفید است. چنانکه در مثالهای زیر ملاحظه خواهیم کرد (همچنین تمرین ۱۰ را ببینید)، برخلاف انتظار، هیچیک از این دو خاصیت نسبت به عمل تعیین زیرفضاها و عمل حاصل ضرب دکارتی خوش رفتار نیستند.

مثال ۳. فضای  $R_1$  در همه اصول شمارایی، به جز دومین اصل، صدق می کند. به ازای  $x \in R_1$ ، مجموعه همه اعضای پایه به صورت  $[x, x + 1/n)$  تشکیل پایه ای شمارا در نقطه  $x$  می دهد. سهولت می توان دید که مجموعه اعداد گویا در  $R_1$  چگال است.

برای اثبات اینکه  $R_1$  پایه شمارایی ندارد، فرض کنیم  $\mathcal{B}$  پایه ای برای  $R_1$  باشد. به ازای هر  $x$ ، عضو  $B_x$  از  $\mathcal{B}$  را چنان انتخاب می کنیم که  $x \in B_x \subset [x, x + 1)$ . اگر  $x \neq y$ ، آنگاه  $B_x \neq B_y$ . زیرا  $x = \text{glb } B_x$  و  $y = \text{glb } B_y$ . بنابراین،  $\mathcal{B}$  باید نامشمارا باشد.

اثبات لیند洛夫 بودن  $R_I$  کار بیشتری لازم دارد. کافی است ثابت کنیم که هر پوشش باز  $R_I$  از اعضای پایه حاوی یک زیرگردایه شماراست که  $R_I$  را می پوشاند. (می توانید این امر را بررسی کنید). بنابراین، فرض کنیم

$$A = \{(a_\alpha, b_\alpha) \mid \alpha \in J\}$$

یک پوشش  $R$  از اعضای پایه برای توپولوژی حد پایینی باشد. می خواهیم زیرگردایه ای شمارا بیابیم که  $R$  را بپوشاند. مجموعه

$$C = \bigcup_{\alpha \in J} (a_\alpha, b_\alpha)$$

را به عنوان زیرفضای  $R$  در نظر می گیریم. در این صورت،  $C$  در دومین اصل شمارایی صدق می کند. چون گردایه  $\{(a_\alpha, b_\alpha) \mid \alpha \in J\}$  از مجموعه های باز  $C$  تشکیل شده است، باید حاوی زیرگردایه شمارایی باشد که  $C$  را می پوشاند. مثلاً زیرگردایه ای از اعضای به صورت  $(a_\alpha, b_\alpha)$  به ازای  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots$  در این صورت گردایه

$$A' = \{(a_\alpha, b_\alpha) \mid \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$$

نیز  $C$  را می پوشاند.

مدعی هستیم که مجموعه  $R-C$  شماراست. از این مطلب نتیجه مورد نظر به دست می آید، به ازای هر نقطه  $R-C$  عضوی از  $A'$  را که شامل آن باشد انتخاب می کنیم؛ با افزودن این اعضا به  $A'$ ، زیرگردایه شمارایی از  $A'$  به دست می آید که همه  $R_I$  را می پوشاند. اکنون فرض کنیم  $x \in R-C$ . الزاماً  $\alpha$  بی در  $J$  هست به طوری که  $x = a_\alpha$ . عدد  $q_x$  را عددگویایی متعلق به بازه  $(a_\alpha, b_\alpha)$  انتخاب می کنیم؛ چون این بازه زیرمجموعه  $C$  است، بازه  $(x, q_x)$  نیز چنین است. نتیجه اینکه تابع  $x \rightarrow q_x$  تابعی یک به یک از  $R-C$  به مجموعه اعدادگویا،  $Q$ ، است. بنابراین،  $R-C$  شماراست. [زیرا، اگر  $x$  و  $y$  دو نقطه  $R-C$  باشند و  $x < y$  آنگاه الزاماً  $q_x < q_y$ ، چه در غیر این صورت،  $y$  به  $(x, q_x)$  تعلق خواهد داشت، در حالی که  $y$  در  $R-C$  است و  $(x, q_x)$  زیرمجموعه  $C$  است.]

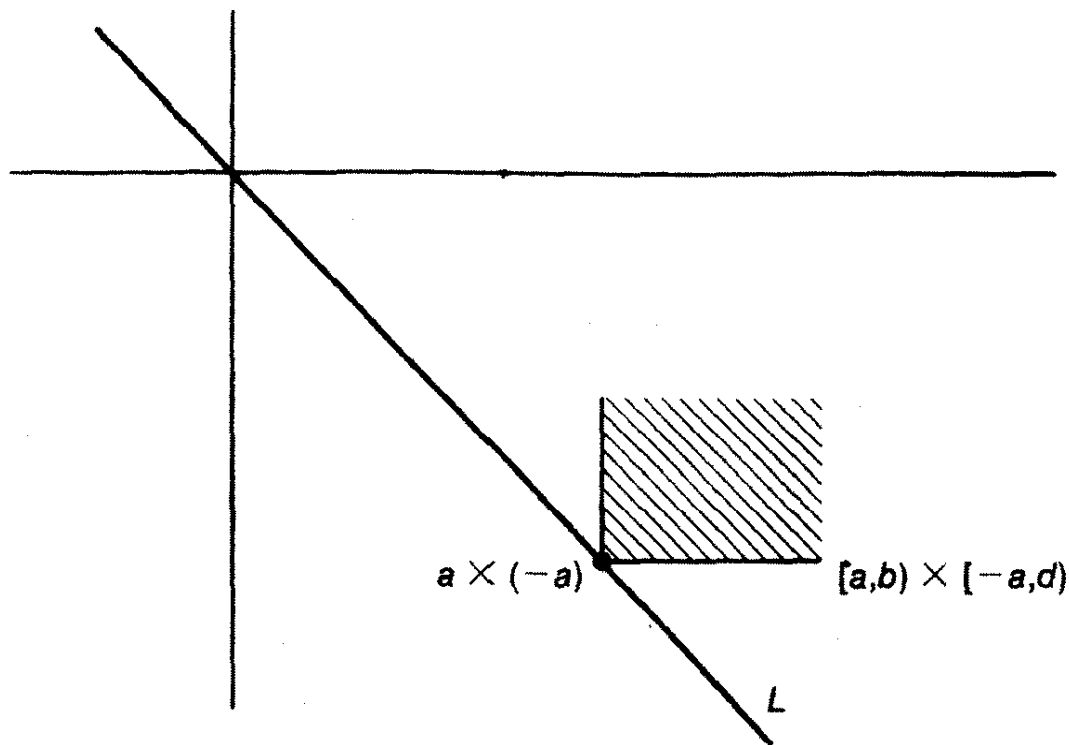
مثال ۴. حاصل ضرب دو فضای لیند洛夫 لزومی ندارد لیند洛夫 باشد. زیرا، فضای  $R_I$  لیند洛夫 است، و ثابت می کنیم که  $R_I^2$  لیند洛夫 نیست. فضای  $R_I^2$  که نام صفحه سورجنفری بر آن نهاده اند، مثال بی اندازه مفیدی در توپولوژی است. یک پایه این فضا متشکل از همه مجموعه های به صورت  $[a, b) \times [c, d)$  در صفحه است. زیرفضای

$$L = \{x \times (-x) \mid x \in R_I\}$$

از  $R_1^2$  را در نظر می‌گیریم. سهولت می‌توان بسته بودن  $L$  در  $R_1^2$  را بررسی کرد. مجموعه باز  $R_1^2 - L$  علاوه همه اعضای پایه به صورت

$$[a, b) \times [-a, d)$$

پوشش بازی برای  $R_1^2$  را تشکیل می‌دهند. هر یک از این اعضای پایه،  $L$  را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. چون  $L$  ناشماراست، هیچ‌زیرگردایه‌ای شمارا  $R_1^2$  را نمی‌پوشاند (شکل ۱).



شکل ۱

مثال ۵. اگر فضایی یک زیرمجموعه شمارای چگال داشته باشد، لزومی ندارد هر زیرفضای آن نیز یک زیرمجموعه شمارای چگال داشته باشد. سهولت می‌توان دید که مجموعه همه نقاط با مختصات گویا در  $R_1^2$  چگال است. اما زیرفضای  $L$  (که در مثال ۴ تعریف شد) دارای توپولوژی گسسته است؛ و چون ناشماراست، نمی‌تواند زیرمجموعه‌ای شمارا و چگال داشته باشد.

مثال ۶. فضای  $S_{\mathbb{Q}}$  در اولین اصل شمارایی صدق می‌کند، دلی واجد هیچیک از خواص شمارایی دیگر نیست.

به ازای عضو مفروض  $a$  از  $S_{\mathbb{Q}}$ ، فرض کنیم  $b$  تالی بلافضل  $a$  باشد. گردایه همه بازه‌هایی که نقاط انتهایی آنها کوچکتر از یا مساوی  $b$  است، شماراست. بنابراین،  $S_{\mathbb{Q}}$  پایه‌ای شمارا در  $a$  دارد.

بوضوح،  $S_{\mathbb{Q}}$  هیچ زیرمجموعه شمارای چگال ندارد. زیرا، هر زیرمجموعه شمارای  $S_{\mathbb{Q}}$  دارای يك کران بالا در  $S_{\mathbb{Q}}$  است. به طریق مشابه،  $S_{\mathbb{Q}}$  لیندلوف نیست، گردایه

$$A = \{[a_n, b) \mid b \in S_{\mathbb{Q}}\}$$

از مجموعه‌های باز را که پوشی برای  $S_{\mathbb{Q}}$  است در نظر می‌گیریم، در اینجا  $a_n$  کوچکترین عضو  $S_{\mathbb{Q}}$  است. اگر  $A'$  زیرگردایه شمارایی از  $A$  باشد، مجموعه نقاط انتهایی راست بازه‌های واقع در  $A'$  يك کران بالا مانند  $b$  در  $S_{\mathbb{Q}}$  دارد، در این صورت،  $b$  در هیچیک از اعضای  $A'$  نیست. بنابراین، گردایه  $A'$  فضای  $S_{\mathbb{Q}}$  را نمی‌پوشاند. پس  $S_{\mathbb{Q}}$  لیندلوف نیست. در نتیجه، فضای  $S_{\mathbb{Q}}$  نمی‌تواند پایه شمارایی داشته باشد. توجه کنید که فضای  $\overline{S_{\mathbb{Q}}}$  (به خاطر فشرده بودن) لیندلوف است، و زیرفضای  $S_{\mathbb{Q}}$  چنین نیست.

## تمرینها

۱. (الف) مجموعه  $A$  را يك مجموعه  $G_{\delta}$  در فضای  $X$  می‌نامیم اگر مساوی مقطع شمارایی از مجموعه‌های باز باشد. ثابت کنید که در هر فضای هاوسدورف شمارای نوع اول، هر مجموعه تك عضوی يك مجموعه  $G_{\delta}$  است.
- (ب) فضای شناخته شده‌ای وجود دارد که هر زیرمجموعه تك عضوی آن يك مجموعه  $G_{\delta}$  است، ولی در اولین اصل شمارایی صدق نمی‌کند. آن فضا چیست؟
۲. ثابت کنید که هر فضای متری پذیر فشرده  $X$  پایه‌ای شمارا دارد. [داهنمایی: فرض کنید  $A_n$  يك پوشش متناهی  $X$  به وسیله گویه‌هایی باشعاع  $1/n$  باشد].
۳. ثابت کنید که اگر  $X$  پایه‌ای شمارا داشته باشد آنگاه هر گردایه از مجموعه‌های باز جدا از هم آن نیز شماراست.
۴. فرض کنید  $X$  دارای پایه‌ای شمارا، و  $A$  زیرمجموعه ناشمارایی از آن باشد.
  - (الف) ثابت کنید که توپولوژی زیرفضایی  $A$  توپولوژی گسسته نیست.
  - (ب) ثابت کنید که  $A$  دست کم یکی از نقاط حدی خود است.
  - (پ) ثابت کنید که  $A$  شامل تعداد ناشمارایی از نقاط حدی خود است.

۵. ثابت کنید که اگر  $X$  دارای پایه شمارایی مانند  $\{B_n\}$  باشد، آنگاه هر پایه  $X$  مانند  $\mathcal{C}$  حاوی پایه شمارایی برای  $X$  است. [داهنمایی: به ازای هر زوج از اندیسها مانند  $m$  و  $n$ ، در صورت امکان، عضو  $C_{n,m}$  از  $\mathcal{C}$  را چنان انتخاب کنید که  $B_n \subset C_{n,m} \subset B_m$ . سپس،  $\mathcal{C}$  را گردایه مجموعه‌های  $C_{n,m}$  بگیرید.]
۶. ثابت کنید که در فضاهای هاوزدورف با پایه شمارا، هر چهار نوع فشردگی (فشرده‌گی، فشرده‌گی بر حسب نقطه حدی، فشرده‌گی دنباله‌ای، فشرده‌گی شمارایی) با هم معادل‌اند.
۷. فرض کنید  $X$  فضایی متریک پذیر باشد.
- (الف) ثابت کنید که اگر  $X$  زیرمجموعه چگال شمارایی داشته باشد آنگاه  $X$  پایه‌ای شمارا دارد.
- (ب) ثابت کنید که اگر  $X$  لیند洛夫 باشد آنگاه پایه‌ای شمارا دارد. [داهنمایی: با تمرین ۲ مقایسه کنید.]
۸. ثابت کنید  $R_1$  و  $I \times I$  با توپولوژی ترتیب قاموسی متریک پذیر نیستند.
۹. در  $R^\omega$ ، با توپولوژی یکنواخت، کدامیک از اصول شمارایی برقرار است؟
۱۰. ثابت کنید که اگر  $X$  حاصل ضربی شمارا از فضاهایی که زیرمجموعه‌های چگال شمارا دارند آنگاه  $X$  نیز زیرمجموعه چگال شمارا دارد.
۱۱. ثابت کنید که اگر  $X$  لیند洛夫 و  $Y$  فشرده باشد، آنگاه  $X \times Y$  لیند洛夫 است.
۱۲.  $\mathcal{C}(I, R)$  مجموعه همه توابع پیوسته مانند  $f: I \rightarrow R$  را، که در آن  $I = [0, 1]$ ، با متریک
- $$\rho(f, g) = \text{lub}\{|f(x) - g(x)|\}$$
- در نظر بگیرید. ثابت کنید که این فضا یک زیرمجموعه چگال شمارا دارد، و در نتیجه، پایه‌ای شمارا دارد. [داهنمایی:  $A$  را مجموعه همه توابع پیوسته‌ای بگیرید که نمودار آنها از تعدادی متناهی قطعه خط بانقاط انتهایی گویا تشکیل شده است.]
۱۳. ثابت کنید فضای حاصل ضربی  $I^I$ ، که در آن  $I = [0, 1]$ ، زیرمجموعه چگال شمارایی دارد.
۱۴. ثابت کنید که فضای  $I^I$ ، با متریک  $I^I$ ، زیرمجموعه چگال شمارایی دارد. و بنابراین دارای پایه‌ای شماراست. (تمرین ۹ از بخش ۲ - ۹ را ببینید.)

## ۲-۲ اصول جداسازی

در این بحث، به معرفی سه اصل جداسازی و استخراج بعضی از خواص آنها مبادرت

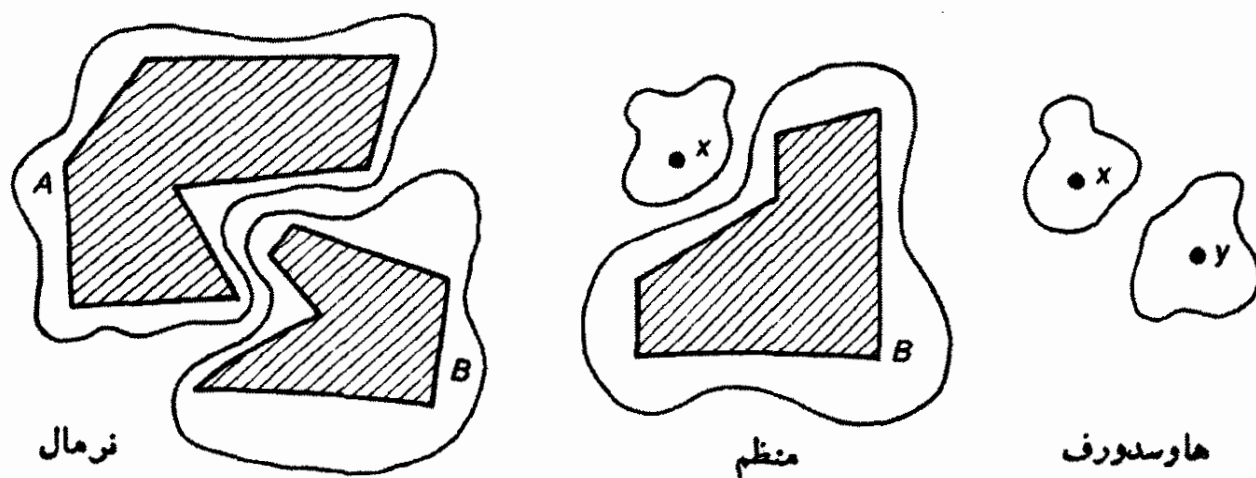


می‌ورزیم. اصل هاوسدورف را قبلاً دیده‌ایم. بقیه مشابه ولی قویتر از آن هستند. مطابق معمول، به‌هنگام معرفی مفاهیم جدید، به‌بررسی روابط بین این اصول و مفاهیم معرفی‌شده قبلی این کتاب می‌پردازیم.

یادآوری می‌کنیم که اگر به‌ازای هر دو نقطه متمایز  $x$  و  $y$  از  $X$  مجموعه‌های باز جدا از همی بترتیب شامل  $x$  و  $y$  موجود باشند آنگاه فضای  $X$  را هاوسدورف گوئیم.

**تعریف.** فرض کنیم مجموعه‌های تک‌عضوی در  $X$  بسته باشند. در این صورت،  $X$  را منتظم خوانیم اگر به‌ازای هر نقطه آن مانند  $x$  و هر مجموعه بسته جدا از  $x$  مانند  $B$ ، مجموعه‌های باز جدا از همی، بترتیب، شامل  $x$  و حاوی  $B$  موجود باشند. فضای  $X$  را نرمال گوئیم اگر به‌ازای هر دو مجموعه بسته جدا از هم آن، مانند  $A$  و  $B$ ، مجموعه‌های باز جدا از همی، بترتیب، حاوی  $A$  و  $B$  موجود باشند.

بدیهی است که هر فضای منتظم فضایی است هاوسدورف، و هر فضای نرمال فضایی است منتظم. (برای برقراری این دو حکم، افزودن شرط بسته بودن مجموعه‌های تک‌عضوی، به‌عنوان قسمتی از تعریف منتظم بودن و نرمال بودن يك فضا، ضرورت دارد. فضای دو نقطه‌ای با توپولوژی ناگسسته، اگرچه هاوسدورف نیست، ولی در سایر شرایط تعاریف منتظم بودن و نرمال بودن صدق می‌کند.) به‌منظور ملاحظه این امر که اصل منتظم بودن قویتر از اصل هاوسدورف، و نرمال بودن قویتر از منتظم بودن است، به‌مثالهای ۱ تا ۳ مراجعه کنید. این اصول را از آن جهت اصول جداسازی می‌نامیم که انواع معینی از مجموعه‌ها



شکل ۲

را به وسیلهٔ مجموعه‌های باز از هم جدا از یکدیگر «جدامی‌کند». البته اصطلاح «جداسازی» را قبلاً هنگام مطالعهٔ فضاهای همبند نیز به کار بردیم. ولی، در آن مورد، هدف بسافتن مجموعه‌های باز جدا از همی بود که اجتماع آنها برابر تمام فضا باشد. وضع کنونی کاملاً متفاوت است، زیرا لزومی ندارد که مجموعه‌های باز مورد نظر در این شرط صدق کنند. این سه اصل جداسازی در شکل ۲ نشان داده شده‌اند.

شیوه‌های دیگری برای بیان اصول جداسازی موجودند. یکی از آنها که گاه مفید خواهد بود در لم زیر آمده است:

۱۰۲. لم فرض کنیم  $X$  فضایی توپولوژیک و مجموعه‌های  $T_k$  عضو آن بسته باشند.

(الف)  $X$  منتظم است اگر و فقط اگر به ازای هر نقطه مانند  $x$  از  $X$  و هر همسایگی آن مانند  $U$ ، یک همسایگی  $x$  مانند  $V$  موجود باشد به طوری که  $\bar{V} \subset U$ .

(ب)  $X$  نرمال است اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعهٔ بسته مانند  $A$  و هر مجموعهٔ باز حاوی  $A$  مانند  $U$ ، مجموعهٔ بازی مانند  $V$  حاوی  $A$  موجود باشد به طوری که  $\bar{V} \subset U$ .

برهان. (الف) فرض کنیم  $X$  فضایی منتظم،  $x \in X$ ، و  $U$  همسایگی مفروضی از  $x$  باشد. فرض کنیم  $B = X - U$ ، در این صورت  $B$  مجموعه‌ای است بسته. بنا بر فرض، مجموعه‌های باز جدا از همی مانند  $V$  و  $W$  وجود دارند به طوری که  $x \in V$  و  $B \subset W$ . مجموعهٔ  $V$  از  $B$  جداست. زیرا اگر  $y \in B$ ، مجموعهٔ  $W$  یک همسایگی  $y$  است و  $V$  را قطع نمی‌کند. بنا بر این،  $V \subset U$ ، و این همان است که می‌خواستیم.

برای اثبات عکس آن، فرض کنیم نقطهٔ  $x$  و مجموعهٔ بستهٔ  $B$  که شامل نقطهٔ  $x$  نیست مفروض‌اند. فرض کنیم  $U = X - B$ . بنا بر فرض، یک همسایگی  $x$  مانند  $V$  موجود است به طوری که  $V \subset U$ . مجموعه‌های باز  $V$  و  $X - V$  مجموعه‌های باز جدا از هم‌اند، و برتریب، شامل  $x$  و حاوی  $B$  می‌باشند. بنا بر این،  $X$  منتظم است.

برای اثبات (ب)، دقیقاً همین برهان به کار می‌رود؛ با این اختلاف که مجموعهٔ  $A$  را جانشین نقطهٔ  $x$  می‌کنیم. □

اکنون به کند و کاو در بستگی اصول جداسازی با مفاهیم تعریف شدهٔ قبلی می‌پردازیم. ابتدا، انواع توپولوژیهای مختلفی را که در فصل ۲ معرفی شدند مورد مطالعه قرار می‌دهیم تا ببینیم در کدامیک از اصول جداسازی صدق می‌کنند. در ضمن، دو قضیه ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهند وجود فشردگی، یا پایهٔ شمارا، خواص جداسازی ضعیف را قوی می‌کند. این موضوع، فهرست نسبتاً طولیلی از قضایایی را به دست می‌دهد که باید به خاطر سپرد، و خوشبختانه برهان بیشتر آنها چندان دشوار نیست.

۲۰۲. قضیه (الف) هر زیرفضای یک فضای هاوسدورف فضایی است هاوسدورف؛

حاصل ضرب فضاهای هاوسدورف نیز هاوسدورف است.

(ب) زیرفضای يك فضای منتظم فضایی است منتظم، حاصل ضرب فضاهای منتظم نیز منتظم است.

(پ) زیرفضای يك فضای نرمال لزومی ندارد نرمال باشد، حاصل ضرب فضاهای نرمال لزومی ندارد نرمال باشد (۱)

برهان. (الف) فرض کنیم  $X$  هاوسدورف و  $x$  و  $y$  دو نقطه متمایز زیرفضای  $Y$  از  $X$  باشند. اگر  $U$  و  $V$ ، بترتیب، همسایگیهای جدا از همی برای  $x$  و  $y$  در  $X$  باشند، آنگاه  $U \cap Y$  و  $V \cap Y$  همسایگیهای جدا از هم  $x$  و  $y$  در  $Y$  خواهند بود.

فرض کنیم  $\{X_\alpha\}$  خانواده‌ای از فضاهای هاوسدورف باشد، و  $x = (x_\alpha)$  و  $y = (y_\alpha)$  دو نقطه متمایز فضای حاصل ضربی  $\prod X_\alpha$  باشند. چون  $x \neq y$ ، اندیسی مانند  $\beta$  یافت می شود که  $x_\beta \neq y_\beta$ . مجموعه‌های باز از هم جدای  $U$  و  $V$  را که، بترتیب، شامل  $x_\beta$  و  $y_\beta$  هستند در  $X_\beta$  برمی‌گزینیم. در این صورت،  $\pi_\beta^{-1}(U)$  و  $\pi_\beta^{-1}(V)$  مجموعه‌های باز جدا از هم در  $\prod X_\alpha$  هستند که، بترتیب، شامل نقاط  $x$  و  $y$  اند.

(ب) فرض کنیم  $Y$  زیرفضایی از فضای منتظم  $X$  باشد. چون  $Y$  هاوسدورف است، مجموعه‌های تک‌عضوی آن در  $Y$  بسته‌اند. فرض کنیم  $x$  نقطه‌ای از  $Y$  و  $B$  زیرمجموعه بسته‌ای از آن باشد به طوری که  $x \notin B$ . اگر  $\bar{B}$  بستار  $B$  در  $X$  باشد آنگاه  $\bar{B} \cap Y = B$ . بنابراین،  $x \notin \bar{B}$ . چون منتظم بودن  $X$  را به کار ببریم، مجموعه‌های باز جدا از همی مانند  $U$  و  $V$  از  $X$  می‌توانیم انتخاب کنیم به طوری که  $x \in U$  و  $\bar{B} \subset V$ . در نتیجه،  $U \cap Y$  و  $V \cap Y$  مجموعه‌های باز جدا از همی در  $Y$  هستند که، بترتیب، شامل  $x$  و حاوی  $B$  هستند.

فرض کنیم  $\{X_\alpha\}$  خانواده‌ای از فضاهای منتظم باشد و  $X = \prod X_\alpha$ . بنا بر (الف)، فضای  $X$  هاوسدورف است، و در نتیجه، مجموعه‌های تک‌عضوی آن در  $X$  بسته‌اند. برای اثبات منتظم بودن  $X$  از لم قبل کمک می‌گیریم. فرض کنیم  $x = (x_\alpha)$  نقطه‌ای از  $X$ ، و  $U$  یک همسایگی  $x$  در  $X$  باشد. یک عضو پایه  $\prod U_\alpha$  را حول  $x$  چنان برمی‌گزینیم که در  $U$  قرار داشته باشد. چون به ازای هر  $\alpha$ ، فضای  $X_\alpha$  منتظم است، می‌توان یک همسایگی  $x_\alpha$  مانند  $V_\alpha$  در  $X_\alpha$  یافت به طوری که  $V_\alpha \subset U_\alpha$ ؛ اگر  $U_\alpha = X_\alpha$ ، در این صورت  $V_\alpha$  را مساوی  $X_\alpha$  می‌گیریم. حال،  $V = \prod V_\alpha$  یک همسایگی  $x$  در  $X$  است. مدعی هستیم که  $V = \prod V_\alpha$ ، و چون  $X$  منتظم است، از آن نتیجه می‌شود که  $V \subset \prod U_\alpha \subset U$ .

برای اثبات ادعای فوق، ثابت می‌کنیم که اگر به ازای هر  $\alpha$ ، داشته باشیم  $A_\alpha \subset X_\alpha$ ، و اگر  $A = \prod A_\alpha$ ، آنگاه  $\bar{A} = \prod \bar{A}_\alpha$ . (این مطلب به صورت تمرینی در بخش ۲-۸ آورده شد.) فرض کنیم  $y = (y_\alpha)$  نقطه‌ای از  $\prod \bar{A}_\alpha$  باشد، و  $U = \prod U_\alpha$  عضو پایه‌ای شامل  $y$ . چون  $y_\alpha \in \bar{A}_\alpha$ ، مجموعه  $U_\alpha$  باید  $A_\alpha$  را قطع کند. در نتیجه،

به ازای هر  $\alpha$ ، می توان نقطه ای مانند  $z_\alpha \in U_\alpha \cap A_\alpha$  انتخاب کرد. در این صورت،  $U$  مجموعه  $A$  را در نقطه  $z = (z_\alpha)$  قطع می کند. پس،  $y \in \bar{A}$ .

بعکس، فرض کنیم  $y \in \bar{A}$ . ثابت می کنیم که به ازای هر اندیس مفروض  $\beta$ ،  $y \in \bar{A}_\beta$ . فرض کنیم  $U_\beta$  یک همسایگی  $y$  باشد. در این صورت،  $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$  یک همسایگی  $y$  است، به طوری که مجموعه  $A$  را در نقطه ای مانند  $z$  قطع می کند. پس،  $U_\beta$  مجموعه  $\pi_\beta(A) = A_\beta$  را در نقطه  $\pi_\beta(z)$  قطع می کند. یعنی،  $y \in \bar{A}_\beta$ .

(پ) یافتن فضایی نرمال که زیر فضایی غیر نرمال داشته باشد، نسبتاً مشکل است. همچنین، یافتن حاصل ضربی از فضاهای نرمال که خود نرمال نباشد، آسان نیست. اتفاقاً فضایی هست که هر دو مقصود ما را بر آورده می کند؛ این فضا در مثال ۲ آمده است. □

سه قضیه زیر، سه دسته بسیار مهم از شرایطی را به دست می دهند که با هر یک از آنها نرمال بودن یک فضا محرز می شود.

### ۳.۲. قضیه هرفضای متری پذیر فضایی است نرمال.

پروهان. فرض کنیم  $X$  یک فضای متری بپذیر با متریک  $d$  باشد؛  $A$  و  $B$  را دو زیر-مجموعه بسته جدا از هم  $X$  می گیریم. به ازای هر  $a \in A$ ، عدد مثبت  $\varepsilon_a$  را چنان انتخاب می کنیم که گوی  $B(a, \varepsilon_a)$  مجموعه  $B$  را قطع نکند. همچنین، به ازای هر عضو  $B$  مانند  $b$ ، عدد  $\varepsilon_b$  را چنان انتخاب می کنیم که گوی  $B(b, \varepsilon_b)$  مجموعه  $A$  را قطع نکند. حال قرار می دهیم

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon_a/2) \quad \text{و} \quad V = \bigcup_{b \in B} B(b, \varepsilon_b/2)$$

در این صورت،  $U$  و  $V$  مجموعه های بازی هستند که، بترتیب، حاوی  $A$  و  $B$  هستند. مدعی هستیم که  $U$  و  $V$  جدا از هم اند. زیرا، اگر  $z \in U \cap V$ ، آنگاه به ازای عضوی از  $A$  مانند  $a$ ، و عضوی از  $B$  مانند  $b$ ، خواهیم داشت

$$z \in B(a, \varepsilon_a/2) \cap B(b, \varepsilon_b/2).$$

با به کار بردن نامساوی مثلثی، ملاحظه می کنیم که  $d(a, b) < (\varepsilon_a + \varepsilon_b)/2$ . اگر  $\varepsilon_b \leq \varepsilon_a$  آنگاه  $d(a, b) < \varepsilon_b$ ، که در نتیجه، گوی  $B(b, \varepsilon_b)$  شامل نقطه  $a$  می شود. و اگر  $\varepsilon_a \leq \varepsilon_b$ ، آنگاه  $d(a, b) < \varepsilon_a$ ، در نتیجه، گوی  $B(a, \varepsilon_a)$  شامل نقطه  $b$  می شود؛ هیچیک از این دو شق ممکن نیست. □

### ۴.۲. قضیه هرفضای هاوسدورف فشرده فضایی است نرمال.

پروهان. فرض کنیم  $X$  یک فضای هاوسدورف فشرده باشد. قبلاً ثابت کردیم که چنین فضایی ضرورتاً منتظم است. زیرا، اگر  $x$  نقطه ای از این فضا و  $B$  زیرمجموعه

بسته‌ای از آن باشد به طوری که  $B \notin \mathcal{B}$  و آنگاه  $B$  فشرده است، و بنا بر لم ۴.۵ در فصل ۳، مجموعه‌های باز جدا از همی موجودند که، بترتیب، شامل  $x$  و حاوی  $B$  می‌باشند.

اصولاً همان استدلالی را که برای آن لم آمده است، می‌توان برای اثبات نرمال بودن  $X$  نیز به کار گرفت: اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه بسته جدا از هم مفروض در  $X$  باشند، به ازای هر عضو  $a$  مانند  $a \in U_\alpha$ ، مجموعه‌های باز جدا از هم  $U_\alpha$  و  $V_\alpha$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $a \in U_\alpha$  و  $B \subset V_\alpha$ . (در اینجا از منتظم بودن  $X$  استفاده کردیم.) گردایه  $\{U_\alpha\}$  پوششی است برای  $A$ ؛ چون  $A$  فشرده است، می‌توان آنرا به وسیله تعدادی متناهی از مجموعه‌ها، مثلاً  $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m}$ ، پوشاند. در این صورت،

$$V = V_{\alpha_1} \cap \dots \cap V_{\alpha_m} \quad \text{و} \quad U = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_m}$$

مجموعه‌های باز جدا از همی هستند که، بترتیب، حاوی  $A$  و  $B$  می‌باشند.  $\square$

### ۵.۲. قضیه هرفضای منتظم که پایه‌ای شمارا داشته باشد نرمال است.

پروهان. فرض می‌کنیم  $X$  فضایی منتظم و  $\mathcal{B}$  یک پایه شمارای آن باشد.  $A$  و  $B$  را دو زیرمجموعه بسته جدا از هم  $X$  می‌گیریم. هر نقطه  $x$  از  $A$  یک همسایگی مانند  $U$  دارد که مجموعه  $B$  را قطع نمی‌کند. بنا بر منتظم بودن  $X$ ، یک همسایگی مانند  $V$  از  $x$  یافت می‌شود به طوری که  $\bar{V} \subset U$ ؛ و بالاخره، عضوی از  $\mathcal{B}$  انتخاب می‌کنیم که شامل  $x$  و زیرمجموعه  $V$  باشد. با انتخاب چنین عضو پایه‌ای برای هر یک از اعضای  $A$ ، یک پوشش شمارا از مجموعه‌های باز برای  $A$  می‌سازیم به طوری که بتار هیچیک از آنها  $B$  را قطع نکند. چون این پوشش  $A$  شماراست، می‌توان آنرا به وسیله مجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت اندیسگذاری کرد؛ فرض کنیم  $\{U_n\}$  این پوشش باشد.

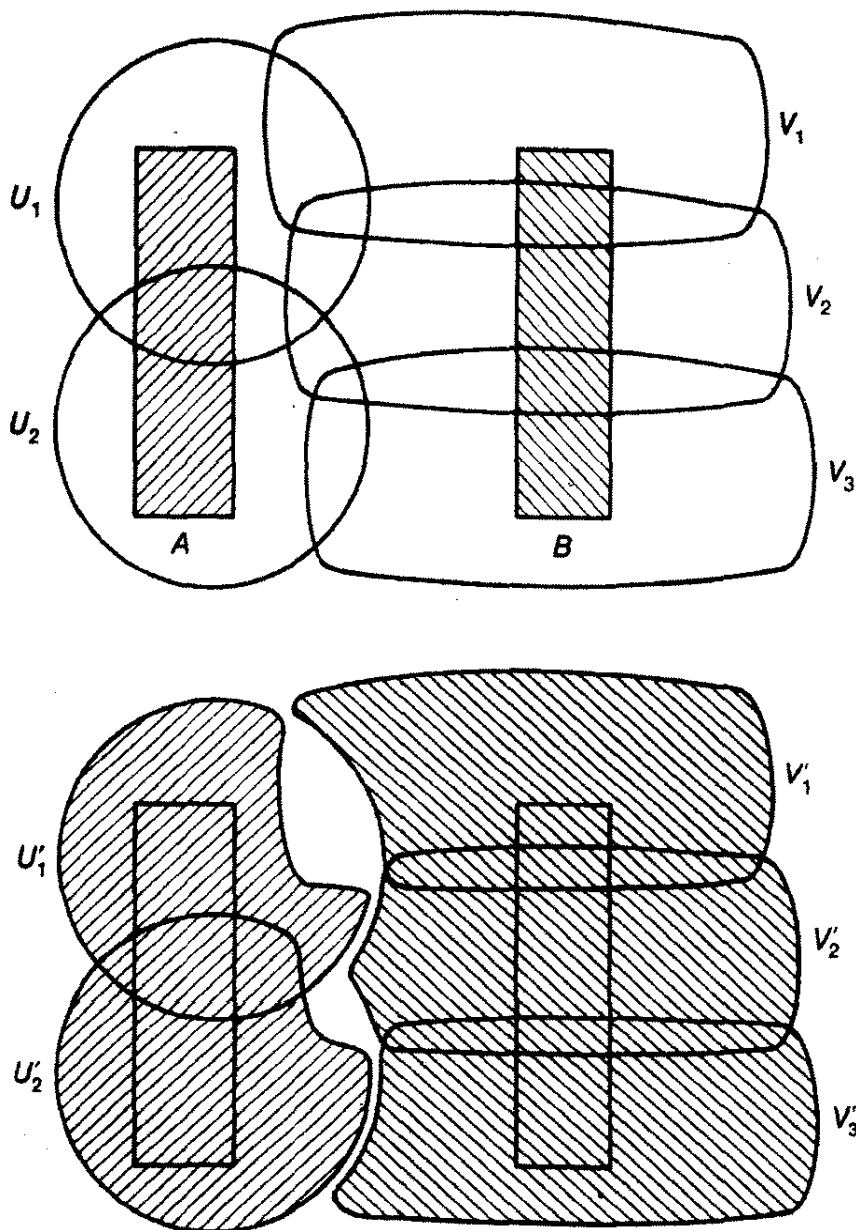
به همین قیاس، گردایه شمارای  $\{V_n\}$  از مجموعه‌های باز را چنان انتخاب می‌کنیم که پوششی برای  $B$  باشد و به ازای هر  $n$  مجموعه  $\bar{V}_n$  از  $A$  جدا باشد.

اکنون،  $U = \bigcup U_n$  و  $V = \bigcup V_n$  مجموعه‌های بازی هستند که، بترتیب، حاوی  $A$  و  $B$  می‌باشند، ولی لزومی ندارد جدا از هم باشند. با ابتکار ساده زیر، دو مجموعه باز جدا از هم مورد نظر را می‌سازیم. به ازای عدد مفروض  $n$ ، چنین تعریف می‌کنیم:

$$V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i \quad \text{و} \quad U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$$

(شکل ۳). توجه کنید که هر یک از  $U'_n$  ها باز است، زیرا، تفاضل مجموعه باز  $U_n$  و مجموعه بسته  $\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$  است. همین طور،  $V'_n$  ها نیز بازند. گردایه  $\{U'_n\}$  پوششی است برای  $A$ . زیرا، هر نقطه  $a$  مانند  $x$ ، به ازای  $n$ ی به  $U_n$  تعلق دارد، و  $x$  به هیچیک از  $V_i$  ها تعلق ندارد. همچنین، گردایه  $\{V'_n\}$  پوششی است برای  $B$ .

سرانجام، مجموعه‌های باز



شکل ۳

$$V' = \bigcup_{x \in Z_+} V'_x \quad \text{و} \quad U' = \bigcup_{x \in Z_+} U'_x$$

جدا از هم اند. چون، اگر  $x \in U' \cap V'$ ، آنگاه اندیسهای  $j$  و  $k$  وجود دارند به طوری که  $x \in U'_j \cap V'_k$ . فرض کنیم  $j \leq k$ . از تعریف  $U'_j$  نتیجه می شود که  $x \in U_j$ ؛ و چون  $j \leq k$ ، از تعریف  $V'_k$  نتیجه می شود که  $x \in U_j$ . در مورد  $j \geq k$  نیز تناقض مشابهی رخ می دهد.  $\square$

از قضیه زیر برای بررسی بعضی مثالها استفاده خواهیم کرد.

۶.۲. قضیه هر مجموعه خوشترتیب  $X$  با توپولوژی ترتیبی فضایی است نرمال.

در حقیقت، هر توپولوژی ترتیبی، نرمال است (مثال ۳۹ از [S-S] را ملاحظه

کنید)؛ ولی ما از این نتیجه قویتر درجایی استفاده نخواهیم کرد.

برهان. فرض کنیم  $X$  مجموعه‌ای خوشترتیب باشد. مدعی هستیم که هر بازه به صورت  $(x, y]$  در  $X$  باز است: اگر  $X$  دارای بزرگترین عضو باشد و این عضو  $y$  بنامیم، در این صورت،  $(x, y]$  یک عضو پایه حول  $y$  است. اگر  $y$  بزرگترین عضو  $X$  نباشد، آنگاه  $(x, y]$  مساوی مجموعه باز  $(x, y')$  است، که در آن  $y'$  تالی بلافاصله  $y$  است.

اکنون،  $A$  و  $B$  را دو مجموعه بسته جدا از هم  $X$  اختیار می‌کنیم؛ فعلاً فرض می‌کنیم که هیچیک از  $A$  و  $B$  شامل  $a_0$ ، کوچکترین عضو  $X$ ، نیست. به ازای هر  $a \in A$ ، یک عضو پایه حول  $a$  جدا از  $B$  یافت می‌شود؛ این عضو پایه حاوی بازه‌ای به صورت  $(x, a]$  است. (از فرض « $a$  کوچکترین عضو  $X$  نیست» در همین جا استفاده می‌شود.) بنابراین، به ازای هر عضو  $A$  مانند  $a$ ، بازه‌ای مانند  $(x_a, a]$  طوری انتخاب می‌کنیم که از  $B$  جدا باشد. به طریقی مشابه، به ازای هر  $b \in B$ ، بازه‌ای به صورت  $(y_b, b]$  جدا از  $A$  انتخاب می‌کنیم. مجموعه‌های

$$V = \bigcup_{b \in B} (y_b, b] \quad \text{و} \quad U = \bigcup_{a \in A} (x_a, a]$$

مجموعه‌های بازی هستند که، بترتیب، حاوی  $A$  و  $B$  می‌باشند؛ مدعی هستیم این دو مجموعه جدا از هم نیز هستند. زیرا، اگر  $z \in U \cap V$  آنگاه به ازای عضوی از  $A$  مانند  $a$  و عضوی از  $B$  مانند  $b$ ، خواهیم داشت  $z \in (x_a, a] \cap (y_b, b]$ . فرض کنیم  $a < b$ . در این صورت، اگر  $y_b \leq a$ ، این دو بازه جدا از هم می‌باشند، و اگر  $a > y_b$  آنگاه  $a \in (y_b, b]$ ، که این با از هم جدا بودن  $A$  و  $(y_b, b]$  متناقض است. تناقض مشابهی در حالت  $b < a$  رخ می‌دهد.

سرانجام، فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو مجموعه بسته جدا از هم  $X$  باشند و  $A$  شامل  $a_0$ ، کوچکترین عضو  $X$ ، باشد. مجموعه  $\{a_0\}$  در  $X$  هم باز و هم بسته است. بنابراین نتیجه پاراگراف قبل، مجموعه‌های باز جدا از همی مانند  $U$  و  $V$  موجودند به طوری که، بترتیب، حاوی مجموعه‌های بسته  $A - \{a_0\}$  و  $B$  باشند. در نتیجه  $U \cup \{a_0\}$  و  $V$  مجموعه‌های باز جدا از همی هستند که، بترتیب، حاوی  $A$  و  $B$  می‌باشند.  $\square$

مثال ۱. در اینجا مثالی می‌آوریم که ثابت می‌کند اصل منتظم بودن از اصل هاوسدورف قویتر است. زیرمجموعه  $K$  از خط حقیقی  $R$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$K = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

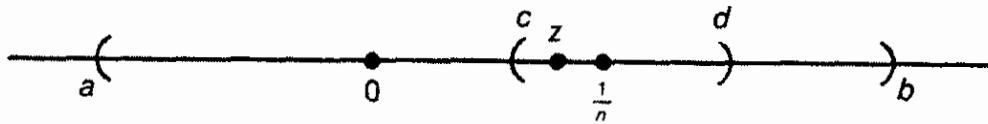
با در نظر گرفتن همه مجموعه‌هایی به صورت زیر، پایه‌ای برای یک توپولوژی روی  $R$  تعریف می‌کنیم:

(۱) هر بازه باز  $(a, b)$ .

(۲) هر مجموعه به صورت  $(a, b) - K$ .

به آسانی می توان بررسی کرد که این مجموعه ها پایه ای برای یک توپولوژی در  $R$  هستند؛ زیرا مقطع هر دو عضو پایه یا تهی است و یا عضو دیگری از پایه است. این فضا هاوسدورف است. زیرا هر دو عضو متمایز  $R$  بازه های جدا از همی حول خود دارند.

ولی این فضا منتظم نیست. مجموعه  $K$  در این توپولوژی بسته است و شامل نقطه  $0$  نیست. حال فرض کنیم  $U$  و  $V$  مجموعه های باز جدا از همی باشند به طوری که  $0 \in U$  و  $K \subset V$ . یک عضو پایه انتخاب می کنیم به طوری که شامل  $0$  و زیرمجموعه  $U$  باشد، طبقاً این عضو پایه باید از نوع (۲) باشد، یعنی به صورت  $(a, b) - K$ ، زیرا هر عضو پایه از نوع اول که شامل  $0$  باشد مجموعه  $K$  را قطع می کند. سپس،  $n$  را به قدر کافی بزرگ اختیار می کنیم به طوری که  $1/n \in (a, b)$ . یک عضو پایه شامل  $1/n$  و زیرمجموعه  $V$  برمی گزینیم؛ این مجموعه باید عضو پایه به صورت  $(c, d)$  از نوع (۱) باشد. سرانجام، عدد  $z$  را طوری انتخاب می کنیم که  $z < 1/n$  و  $z > \max\{c, 1/(n+1)\}$ . در این صورت  $z$  به هر دو مجموعه  $U$  و  $V$  تعلق خواهد داشت، پس این دو مجموعه نمی توانند جدا از هم باشند (شکل ۴).



شکل ۴

مثال ۲. فضای حاصل ضربی  $S_{\mathbb{R}} \times \bar{S}_{\mathbb{R}}$  نرمال نیست.

مجموعه خوشترتیب  $\bar{S}_{\mathbb{R}}$  را با توپولوژی ترتیبی، و زیرمجموعه  $S_{\mathbb{R}}$  را با توپولوژی زیرفضایی (که همان توپولوژی ترتیبی است) در نظر می گیریم. بنا بر قضیه ۶.۲، این دو فضا نرمال اند. ثابت می کنیم که فضای حاصل ضربی  $S_{\mathbb{R}} \times \bar{S}_{\mathbb{R}}$  نرمال نیست.

این مثال سه مقصود را بر آورده می کند. اولاً، ثابت می کند که لزومی ندارد هر فضای منتظم، نرمال باشد، زیرا  $S_{\mathbb{R}} \times \bar{S}_{\mathbb{R}}$  حاصل ضرب دو فضای منتظم است و بنا بر این منتظم است. ثانیاً، ثابت می کند که زیرفضای یک فضای نرمال لزومی ندارد نرمال باشد، زیرا  $S_{\mathbb{R}} \times \bar{S}_{\mathbb{R}}$  زیرفضایی است از  $\bar{S}_{\mathbb{R}} \times \bar{S}_{\mathbb{R}}$ ، که یک فضای هاوسدورف فشرده است و بنا بر این نرمال است. ثالثاً، ثابت می کند که حاصل ضرب دو فضای نرمال الزاماً نرمال نیست.

۱. کلی [K] (Kelley) این مثال را مستقلاً به ژ. دیودونه (J. Dieudonné) و ا. پ.

مورس (A.P. Morse) نسبت می دهد.



ابتدا فضای  $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$  و قطر، آن  $\Delta = \{x \times x \mid x \in \bar{S}_\Omega\}$  را در نظر می‌گیریم. به دلیل هاوسدورف بودن  $\bar{S}_\Omega$ ، قطر  $\Delta$  در  $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$  بسته است. اگر  $U$  و  $V$  همسایگیهای جدا ازهمی، بترتیب، برای  $x$  و  $y$  باشند آنگاه  $U \times V$  یک همسایگی  $x \times y$  است که  $\Delta$  را قطع نمی‌کند. بنابراین مجموعه

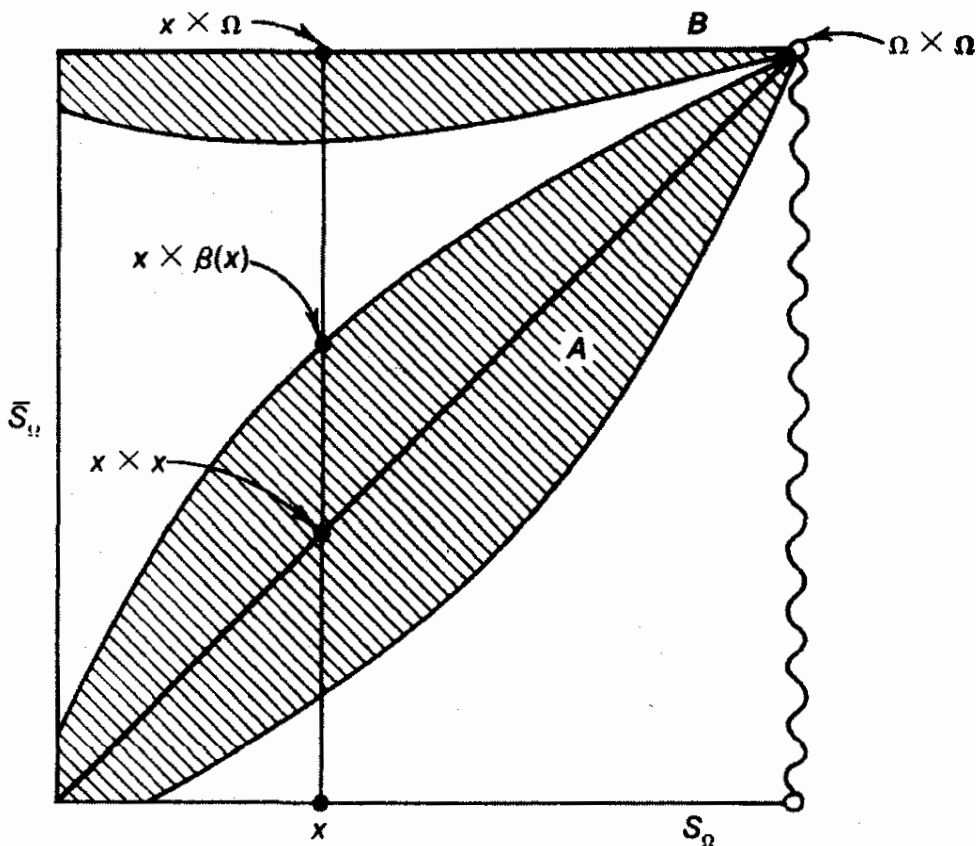
$$A = \Delta \cap (S_\Omega \times \bar{S}_\Omega) = \Delta - \{\Omega \times \Omega\}$$

در زیر فضای  $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$  بسته است. به طریقی مشابه، مجموعه

$$B = S_\Omega \times \{\Omega\}$$

نیز در  $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$  بسته است، زیرا یک «قاع» از این فضای حاصل ضرب است (شکل ۵). مجموعه‌های  $A$  و  $B$  جدا از هم می‌باشند. فرض می‌کنیم که مجموعه‌های باز جدا ازهمی در  $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$  مانند  $U$  و  $V$  وجود دارند به طوری که، بترتیب، حاوی  $A$  و  $B$  هستند و به تناقض می‌رسیم.

به ازای نقطه مفروض  $x \in S_\Omega$ ، قاع قائم  $x \times \bar{S}_\Omega$  را در نظر می‌گیریم. مدعی هستیم



شکل ۵

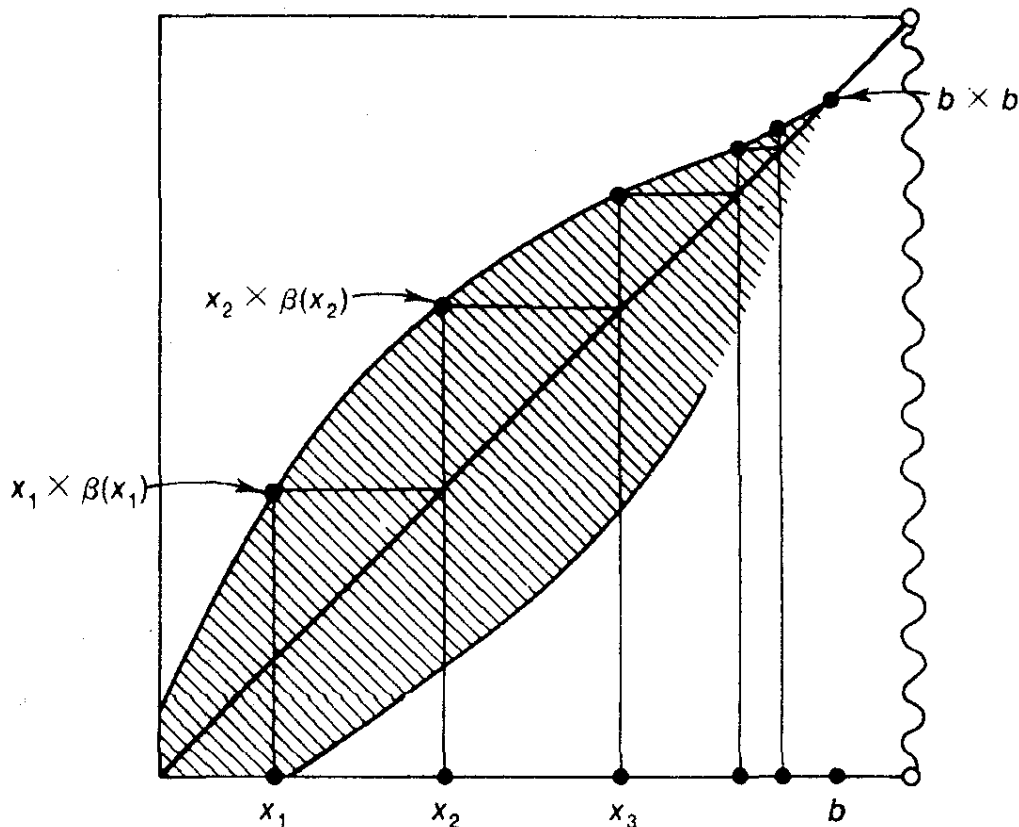
که نقطه‌ای مانند  $\beta$  هست به طوری که  $x < \beta < \Omega$  و  $x \times \beta$  خارج از  $U$  است. چه، به ازای هر  $\beta$ ، به طوری که  $x < \beta < \Omega$ ، مجموعه  $U$  باید شامل نقطه  $x \times \beta$  باشد، زیرا  $x \times \Omega$  که رأس قاع  $S_\Omega$  است باید يك نقطه حدى  $U$  باشد، ولی چنین نیست. زیرا  $V$  مجموعه بازى است جدا از  $U$  و شامل این نقطه رأسى.

این نقطه را با  $\beta(x)$  نمایش می‌دهیم؛ و برای آنکه ابهامی نباشد،  $\beta(x)$  را کوچکترین عضوی از  $S_\Omega$  می‌گیریم که  $x < \beta(x) < \Omega$  و  $x \times \beta(x)$  خارج از  $U$  قرار گیرد. اکنون، دنباله‌ای از نقاط  $S_\Omega$  را بدین طریق تعریف می‌کنیم،  $x_1$  را نقطه دلخواهی از  $S_\Omega$  اختیار می‌کنیم. فرض کنیم  $x_2 = \beta(x_1)$  و در حالت کلی،  $x_{n+1} = \beta(x_n)$ . چون به ازای هر  $x$ ،  $x < \beta(x)$ ، خواهیم داشت

$$x_1 < x_2 < \dots$$

مجموعه  $\{x_1, x_2, \dots\}$  شمارا و در نتیجه در  $S_\Omega$  دارای يك کران بالاست؛ فرض کنیم  $b \in S_\Omega$  کوچکترین کران بالای این مجموعه باشد. چون این دنباله صعودی است، باید به کوچکترین کران بالای خود همگرا باشد، پس  $x_n \rightarrow b$ . از طرفی  $\beta(x_n) = x_{n+1}$ ، در نتیجه،  $\beta(x_n) \rightarrow b$ . بنابراین، در فضای حاصل ضرب،

$$x_n \times \beta(x_n) \rightarrow b \times b$$



شکل ۶

(شکل ۶). و این تناقض است، زیرا نقطه  $b \times b$  در مجموعه  $A$  قرار دارد که خود زیر مجموعه  $U$  است؛ و  $U$  شامل هیچیک از نقاط  $x_n \times \beta(x_n)$  نیست.

مثال ۳. فضای  $R_1$  نرمال است، ولی فضای  $R_1^2$  نرمال نیست.

این مثال دو مقصود را بر آورده می کند. اولاً، ثابت می کند که یک فضای منتظم لزومی ندارد نرمال باشد، ثانیاً، حاصل ضرب دو فضای نرمال ممکن است نرمال نباشد. به آسانی ملاحظه می شود که  $R_1$  نرمال است. فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو مجموعه بسته جدا از هم  $R_1$  باشند. به ازای هر عضو  $A$  مانند  $a$ ، عضو پایه  $(a, x_a)$  را چنان انتخاب می کنیم که  $B$  را قطع نکند؛ و به ازای هر عضو  $b$  از  $B$ ، یک عضو پایه مانند  $(b, x_b)$  را چنان انتخاب می کنیم به طوری که  $A$  را قطع نکند. مجموعه های باز

$$V = \bigcup_{b \in B} [b, x_b) \quad \text{و} \quad U = \bigcup_{a \in A} [a, x_a)$$

باز و جدا از هم اند که، بترتیب، حاوی  $A$  و  $B$  هستند. اثبات نرمال نبودن  $R_1^2$  بسیار دشوارتر است. خط

$$L = \{x \times (-x) \mid x \in R_1\}$$

را در نظر می گیریم.  $L$  در  $R_1^2$  بسته است؛ و به عنوان زیر فضایی از  $R_1^2$ ، دارای توپولوژی گسسته است. بنابر بسته بودن  $L$  در  $R_1^2$ ، هر زیر مجموعه بسته  $L$  در  $R_1^2$  نیز بسته است. اگر  $R_1^2$  نرمال باشد، بدین معنی است که به ازای هر زیر مجموعه سره ناتهی  $L$  مانند  $A$ ، می توان مجموعه های باز جدا از همی در  $R_1^2$  یافت که، بترتیب، حاوی مجموعه های بسته  $A$  و  $L - A$  باشند.

با به کار بردن برهانی ساده بر اساس «عدد اصلی» می توان ثابت کرد که این امر ممکن نیست. طرح برهان در تمرین ۱۴ این بخش آمده است.

یک زیر مجموعه مشخص  $L$  که برای آن اختیار کردن چنین مجموعه های بازی غیر ممکن است، زیر مجموعه ای است مانند  $A$  متشکل از نقاطی که مختصات گنگ دارند. اثبات اینکه این انتخاب خاص به نتیجه مطلوب می رسد، موقوف است به استفاده از وسیله ای توانا، حالت خاصی از قضیه رسته بشر که آن را به عنوان تمرین در بخش ۳ - ۶ آوردیم. با مفروض گرفتن آن تمرین، ثابت می کنیم که این مجموعه خاص نتیجه مطلوب را به دست می دهد.

بنابراین، فرض کنیم  $A$  زیر مجموعه ای از  $L$  باشد که از نقاطی با مختصات گنگ تشکیل شده است.  $U$  و  $V$  را مجموعه های باز جدا از همی در  $R_1^2$  می گیریم که، بترتیب، حاوی  $A$  و  $L - A$  باشند. به ازای هر نقطه  $x \times (-x)$  از  $A$ ، عدد صحیح مثبتی مانند  $n$  موجود است به طوری که عضو پایه

$$[x, x + 1/n) \times [-x, -x + 1/n)$$

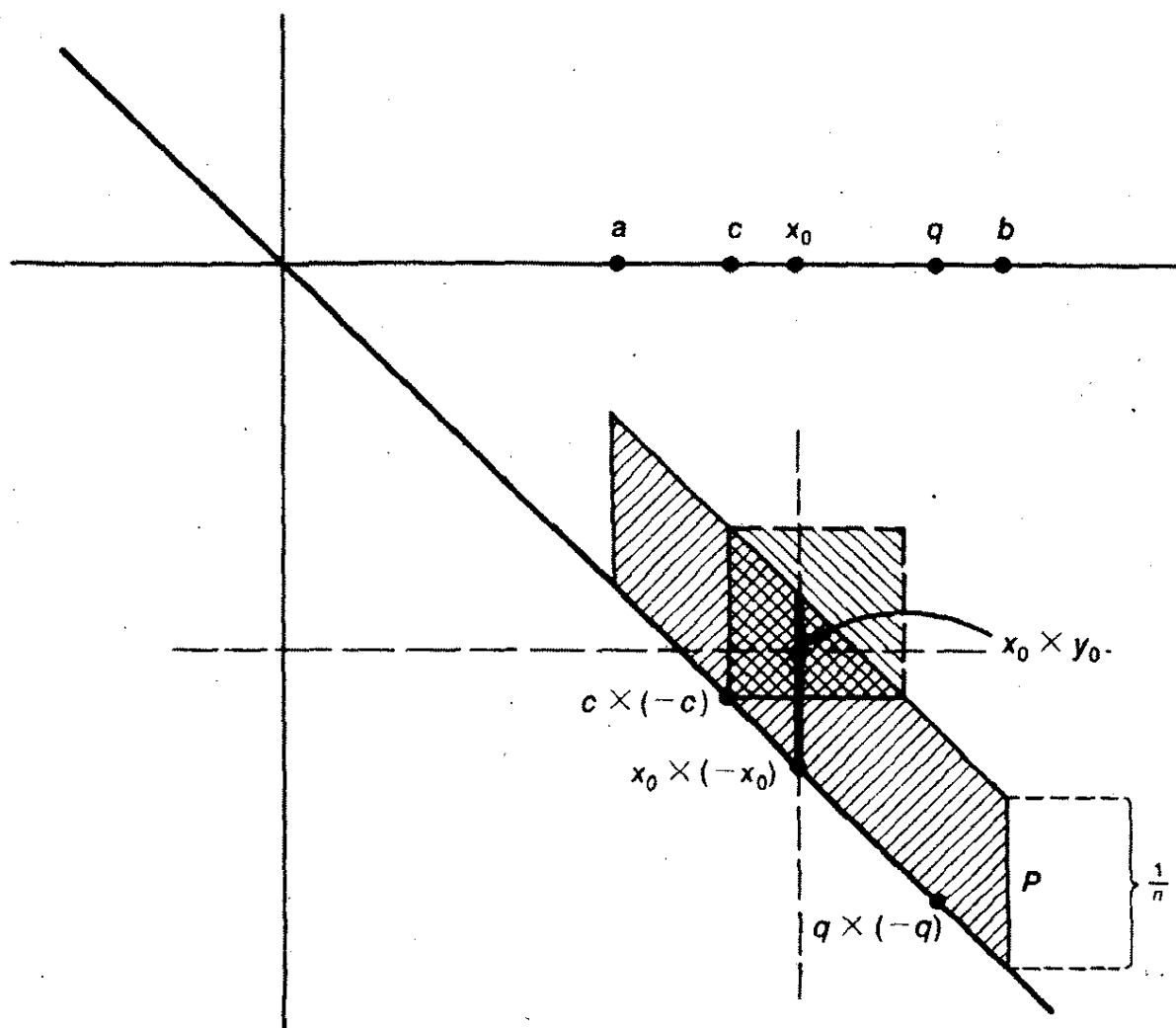
که حول  $x \times (-x)$  است در زیر مجموعه  $U$  باشد. فرض کنیم  $K_n$  مجموعه همه اعداد گنگی

مانند  $x$  از بازه  $[0, 1]$  باشد که به ازای آنها این عضو پایه در  $U$  قرار می گیرد. در این صورت،  $\bigcup K_n$  دقیقاً مجموعه همه اعداد گنگ بازه  $[0, 1]$  است.

اگر  $\bar{K}_n$  را بستار مجموعه  $K_n$  در  $[0, 1]$  بگیریم، آنگاه چون  $\bigcup \bar{K}_n$  حاوی  $\bigcup K_n$  است، حاوی همه اعداد گنگ  $[0, 1]$  نیز هست. بنابراین،  $[0, 1]$  را می توان به صورت اجتماع شمارای مجموعه های بسته  $\bar{K}_n$  (به ازای  $n \in \mathbb{Z}_+$ ) و مجموعه های تک عضوی  $\{q\}$  نوشت ( $q$  عددگویایی در  $[0, 1]$  است). بنا بر تمرین ۵ در بخش ۳-۴، دست کم یکی از این مجموعه ها باید درون فتهی در  $[0, 1]$  داشته باشد، البته، این درون نمی تواند مجموعه تک عضوی  $\{q\}$  باشد. بنابراین، عددی مانند  $n$  موجود است به طوری که مجموعه  $\bar{K}_n$  حاوی بازه بازی از  $R$  مانند  $(a, b)$  است.

بنا بر تعریف، به ازای هر عضو  $K_n$  مانند  $c$ ، عضو پایه

$$[c, c + 1/n) \times [-c, -c + 1/n)$$



شکل ۷

زیرا  $R^2$  در  $U$  قرار دارد. مدعی هستیم که اجتماع این اعضای پایه‌ای وقتی که  $c$  در  $K_{\mathbb{R}}$  تغییر کند، حاوی همه «ناحیه متوازی الاضلاع شکل»

$$P = \{x \times y \mid a < x < b, -x < y < -x + 1/n\}$$

است، به طوری که  $U$  در  $P$  قرار می‌گیرد (شکل ۷).

برای اثبات این امر، فرض کنیم  $x_0 \times y_0$  نقطه‌ای از  $P$  باشد. بابه‌کارگیری این امر که  $K_{\mathbb{R}} \cap (a, b)$  در  $(a, b)$  چگال است، می‌توان نقطه‌ای مانند  $c$  در  $K_{\mathbb{R}} \cap (a, b)$  با این شرط انتخاب کرد که  $c \times (-c)$  در زیر خط  $y = y_0$  و درست چپ خط  $x = x_0$  قرار گیرد. در این صورت، به آسانی می‌توان نشان داد که  $x_0 \times y_0$  در عضو پایه

$$[c, c + 1/n) \times [-c, -c + 1/n)$$

قرار دارد. [به بیان دقیقتر،  $c$  را نقطه‌ای از  $K_{\mathbb{R}}$  می‌گیریم که در بازه  $(\max\{a, -y_0\}, x_0)$  باشد. در نتیجه، نامساویها، زیر را خواهیم داشت:

$$c < x_0 \quad \text{و} \quad -c < y_0 < -x_0 + 1/n$$

این نامساویها مستلزم این هستند که  $c < x_0 < c + 1/n$  و  $-c < y_0 < -c + 1/n$ . بقیه کار آسان است. عدد  $q$  را عدد گویای دلخواهی از بازه  $(a, b)$  می‌گیریم. بدیهی است که  $q \times (-q)$  در توپولوژی  $R^2$ ، یکی از نقاط حدی ناحیه متوازی الاضلاع شکل  $P$  است. چون  $P \subset U$ ، این نقطه یک نقطه حدی  $U$  نیز هست. و این تناقضی است با این امر که  $V$  مجموعه بازی است در  $R^2$  شامل  $q \times (-q)$  و جدا از  $U$ .

**مثال ۴.** اگر  $J$  ناشمارا باشد، فضای حاصل ضربی  $R^J$  نرمال نیست. برهان

این قضیه نسبتاً دشوار است، و ما آن را به عنوان تمرینی هم‌آورد جو به‌عهده خواننده می‌گذاریم (تمرین ۱۵ ملاحظه شود).

این مثال، سه مقصود را بر آورده می‌کند. اولاً، ثابت می‌کند که فضای منتظم  $R^J$  لزومی ندارد نرمال باشد، ثانیاً، ثابت می‌کند که یک زیرفضای فضایی نرمال ممکن است نرمال نباشد، زیرا  $R^J$  با  $(0, 1)^J$ ، که زیرفضایی است از  $[0, 1]^J$ ، هم‌معمورف است، و (با فرض قضیه تیخونوف) چون  $[0, 1]^J$  هاوسدورف فشرده است، در نتیجه، نرمال است. بالاخره، ثابت می‌کند که حاصل ضرب ناشمارایی از فضاهای نرمال لزومی ندارد نرمال باشد. اما به این پرسش که «آیا حاصل ضربی متناهی یا شمارا از فضاهای نرمال می‌تواند نرمال باشد؟» پاسخی نمی‌دهد. برای پاسخ به این پرسش به یکی از دو مثال گذشته نیاز داریم.

### تمرینها

۱. ثابت کنید اگر  $X$  منتظم باشد، هر زوج از نقاط متمایز  $X$  همسایگیهایی دارند که بستر آنها جدا از هم‌اند.

۲. ثابت کنید اگر  $X$  نرمال باشد، هر دو مجموعه بسته جدا از هم آن همسایگیهای دارند که بستار آنها جدا از هم اند.
۳. ثابت کنید که یک زیر فضای بسته فضایی نرمال خود نرمال است.
۴. ثابت کنید که هر توپولوژی ترتیبی، منتظم است.
۵. ثابت کنید که اگر  $\prod X_\alpha$  هاوسدورف، یا منتظم، یا نرمال باشد آنگاه  $X_\alpha$  نیز چنین است. (فرض کنید هر یک از  $X_\alpha$  ها ناتهی است.)
۶. فرض کنید  $X$  و  $X'$  نمایش یک مجموعه تحت، بترتیب، توپولوژیهای  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{C}'$  باشند؛ فرض کنید  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ . اگر یکی از این دو فضا هاوسدورف (یا منتظم، یا نرمال) باشد. آنگاه چه حکمی در مورد دیگری می توان کرد؟
۷. ثابت کنید که هر فضای هاوسدورف موضعاً فشرده فضایی است منتظم.
۸. ثابت کنید هر فضای لیندولوف منتظم، فضایی است نرمال.
۹. فرض کنید توابع  $f, g: X \rightarrow Y$  پیوسته باشند و  $Y$  هاوسدورف باشد. ثابت کنید که مجموعه  $\{x | f(x) = g(x)\}$  در  $X$  بسته است.
۱۰. آیا  $R^\omega$ ، با توپولوژی حاصل ضربی، نرمال است؟ با توپولوژی یکنواخت چگونه؟ هنوز معلوم نیست که  $R^\omega$  با توپولوژی جعبه ای نرمال است یا نه. مری الن رودین اثبات کرده است که، با قبول فرض پیوستار، جواب مثبت است  $[R]$ . در واقع، وی ثابت می کند که این فضا در شرط قویتری موسوم به پیرافشردگی نیز صدق می کند.
۱۱. فضای  $X$  را تماماً نرمال گوئیم اگر هر زیر فضای آن نرمال باشد. ثابت کنید  $X$  تماماً نرمال است اگر و فقط اگر به ازای هر دو مجموعه جدا شده  $X$  مانند  $A$  و  $B$  (یعنی، مجموعه هایی با شرایط  $A \cap B = \emptyset$  و  $\bar{A} \cap B = \emptyset$ )، مجموعه های باز جدا از همی که حاوی آنها هستند موجود باشند. [داهنمایی: اگر  $X$  تماماً نرمال باشد، مجموعه  $X - (\bar{A} \cap \bar{B})$  را در نظر بگیرید.]
۱۲. کدامیک از فضاهای زیر تماماً نرمال است؟ برای جواب خود دلیلی بیاورید.
  - (الف) زیر فضای یک فضای تماماً نرمال.
  - (ب) حاصل ضرب دو فضای تماماً نرمال.
  - (پ) مجموعه ای خوشترتیب با توپولوژی ترتیبی.
  - (ت) فضایی متریکپذیر.
  - (ث) یک فضای هاوسدورف فشرده.

(ج) يك فضای منتظم با پایه‌ای شمارا.

(ج) فضای  $R_1$ .

۱۳. فرض کنید  $A$  مجموعه‌ای بسته در  $X$  باشد، و  $Y$  را فضای خارج قسمتی حاصل از تبدیل  $A$  به يك نقطه بگیرید (رجوع شود به بخش ۲ - ۱۱). ثابت کنید که اگر  $X$  منتظم باشد،  $Y$  هاوسدورف است؛ و اگر  $X$  نرمال باشد،  $Y$  نرمال است.

۱۴\*. به شیوه زیر ثابت کنید که  $R_1^2$  نرمال نیست: فرض کنید به ازای هر زیرمجموعه سره ناتهی  $L$  مانند  $A$ ، مجموعه‌های باز از هم جدایی در  $R_1^2$  مانند  $U_A$  و  $V_A$  موجودند به طوری که، بترتیب، حاوی  $A$  و  $L - A$  هستند. همچنین فرض کنید  $D$  مجموعه نقاطی از  $R_1^2$  باشد که مختصات گویا دارند، فرض کنید  $\mathcal{P}(L)$  و  $\mathcal{P}(D)$ ، بترتیب، نمایش گردایه‌های همه زیرمجموعه‌های  $L$  و  $D$  باشند. اکنون نگاشت  $\theta: \mathcal{P}(L) \rightarrow \mathcal{P}(D)$  را با ضابطه زیر تعریف کنید:

$$\theta(A) = U_A \cap D, \quad A \neq L \text{ و } A \neq \emptyset \text{ اگر}$$

$$\theta(\emptyset) = \emptyset,$$

$$\theta(L) = D.$$

(الف) ثابت کنید که  $\theta$  يك به يك است.

(ب) تابع يك به یکی از  $\mathcal{P}(D)$  به  $L$  بسازید.

(پ) تناقضی استخراج کنید.

قضیه. اگر  $J$  ناشمارا باشد آنگاه  $R^J$  نرمال نیست.

۱۵\*. برهان. (این برهان از ا. ه. استون است و ما آن را به نحوی که در  $[S - S]$  عرضه شده می آوریم.) چون  $(Z_+)^J$  در  $R^J$  بسته است، کافی است که نرمال بودن  $(Z_+)^J$  را ثابت کنیم.  $X$  را فضای  $(Z_+)^J$  بگیرید؛ اعضای  $X$  را با علامت گذاری تابعی مشخص کنید.

(الف)  $P_1$  را زیرمجموعه‌ای از  $X$  بگیرید که متشکل است از همه توابعی مانند  $x: J \rightarrow Z_+$  به طوری که به ازای هر  $i \neq 1$ ، مجموعه  $x^{-1}(i)$  حداکثر يك عضو داشته باشد.  $P_1$  را زیرمجموعه‌ای از  $X$  بگیرید که متشکل است از همه توابعی مانند  $x$  به طوری که به ازای هر  $i \neq 2$ ، زیرمجموعه  $x^{-1}(i)$  حداکثر يك عضو داشته باشد. ثابت کنید مجموعه‌های  $P_1$  و  $P_2$  جدا از هم اند و در  $X$  بسته هستند.

(ب) فرض کنید  $U$  و  $V$  مجموعه‌های باز جدا از همی باشند که، بترتیب، حاوی  $P_1$  و  $P_2$  هستند. ثابت کنید که دنباله‌ای از اعضای متمایز  $J$  مانند

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots,$$

و دنباله‌ای از اعداد صحیح مانند

$$n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \dots,$$

می‌توان یافت به طوری که به ازای هر عدد صحیح مثبت  $i$ ، مجموعه  $U_i$  که در زیر تعریف شده است زیرمجموعه  $U$  باشد. در اینجا،  $U_i$  مجموعه همه  $x$  هایی است که

$$x(\alpha_j) = \begin{cases} j & , \quad 1 \leq j \leq n_{i-1} \text{ به ازای} \\ 1 & , \quad n_{i-1} < j < n_i \text{ به ازای} \end{cases}$$

(پ) اکنون، فرض کنید  $A = \{\alpha_j \mid j \in \mathbb{Z}_+\}$ . ثابت کنید که می‌توان زیرمجموعه‌ای متناهی از  $J$  مانند  $B$  یافت به طوری که مجموعه  $V_B$ ، که در زیر تعریف شده است، زیرمجموعه  $V$  باشد. در اینجا،  $V_B$  مجموعه همه  $x$  هایی است که

$$x(\alpha_j) = j \quad , \quad \alpha_j \in B \cap A \text{ به ازای}$$

$$x(\alpha) = 2 \quad , \quad \alpha \in B - A \text{ به ازای}$$

(ت) ثابت کنید که به ازای عددی مانند  $i$ ،  $U_i \cap V_B \neq \emptyset$ .

۱۶. آیا هر گروه توپولوژیک منتظم فضایی است نرمال؟

## ۲-۳ لم اوریسون

اکنون به نخستین قضیه عمیق این کتاب می‌رسیم، قضیه‌ای که عموماً به «لم اوریسون» معروف است. این قضیه وجود توابع حقیقی پیوسته خاصی بر فضای نرمال  $X$  را ثابت می‌کند. این لم وسیله قاطعی است برای اثبات تعدادی از قضایای مهم. یکی از آنها، قضیه گسترش تیتسه<sup>۱</sup> است که ما آنرا در این بخش ثابت می‌کنیم. دیگری قضیه متریسازی اوریسون است که در بخش بعدی ثابت می‌کنیم. و بالاخره، یک قضیه نشانیدن برای بسلاهاست که در آخرین بخش این فصل با آن روبرو خواهیم شد.

به چه دلیل لم اوریسون را قضیه‌ای «عمیق» می‌گوییم؟ چون برهان آن متضمن ایده‌ای



واقعا ابتکاری است که برهانهای قبلی فاقد آن بودند. شاید بتوانیم مقصود خود را بدین شرح توضیح دهیم: چنانچه برهانهای قضایایی را که تا اینجا در این کتاب آورده ایم حذف کنیم و سپس کتاب را به دانشجوی با استعدادی بدهیم که قبلاً توپولوژی مطالعه نکرده است، روی هم رفته انتظار می رود که آن دانشجو حتماً قادر به درک مطالب کتاب باشد و بتواند خود قضایا را به ثبوت برساند. (البته، این کار مقدار قابل ملاحظه ای وقت می گیرد و تلاش قابل توجهی لازم دارد، و انتظار نداریم که مثالهای ابتکاری را هم بتواند ارائه دهد.) اما لم اوریسون در سطح متفاوتی است، خلاقیت قابل ملاحظه ای، بیش از آنچه اغلب ما داریم، لازم است تا بتوان این لم را ثابت کرد، مگر آنکه شخص بیش از حد راهنمایی شود!

۱۰۳. قضیه (لم اوریسون) فرض کنیم  $X$  فضایی نرمال باشد، و  $A$  و  $B$  دو زیر-مجموعه بسته جدا از هم  $X$ . همچنین،  $[a, b]$  را بازه بسته ای از اعداد حقیقی می گیریم. در این صورت، نگاشت پیوسته ای مانند

$$f: X \rightarrow [a, b]$$

موجود است به طوری که به ازای هر  $x \in A$ ،  $f(x) = a$  و به ازای هر  $x \in B$ ،  $f(x) = b$ . برهان. کافی است فقط حالتی را در نظر بگیریم که بازه مورد نظر  $[0, 1]$  باشد، زیرا حالت کلی از آن نتیجه می شود.

نخستین مرحله برهان، با استفاده از نرمال بودن فضا، ساختن خانواده معینی از مجموعه های باز  $X$  است، مانند  $U_p$  که با اعداد گویا اندیسه گذاری شده اند. سپس، با به کار بردن این مجموعه ها تابع پیوسته  $f$  را تعریف می کنیم.

مرحله ۱. فرض کنیم  $P$  مجموعه همه اعداد گویای بازه  $[0, 1]$  باشد، به ازای هر عضو  $p$  مانند  $p$  مجموعه بازی از  $X$  مانند  $U_p$  چنان تعریف می کنیم که هرگاه  $p < q$ ، داشته باشیم

$$U_p \subset U_q.$$

بنابراین، مجموعه های  $U_p$  به همان نحو که اندیسه های آنها به وسیله ترتیب معمولی خط حقیقی مرتب شده اند، با رابطه (جزئیت) ترتیب ساده پیدا خواهند کرد.

چون  $P$  شماراست، برای تعریف مجموعه های  $U_p$ ، می توان روش استقرا (یا حتی، اصل تعریف بازگشتی) را به کار برد. اعضای  $P$  را، به طریقی، به صورت يك دنباله

۱. عملاً  $P$  می تواند هر زیرمجموعه چگال شمارای  $[0, 1]$  باشد، به شرط آنکه نقاط  $0$  و  $1$  در  $P$  باشند.

نسامتهای مرتب می کنیم؛ برای سهولت، فرض می کنیم اعداد ۱ و ۰ دو عضو اول این دنباله باشند.

اکنون، مجموعه  $U_p$  را به شرح زیر تعریف می کنیم: ابتدا،  $U_1$  را برابر  $X - B$  می گیریم. سپس، چون  $A$  بسته است و جزء مجموعه  $U_1$  است، بنا برنرمال بودن  $X$ ، می توان مجموعه  $U_0$  را چنان انتخاب کرد که

$$U_0 \subset U_1 \quad \text{و} \quad A \subset U_0.$$

به طور کلی، فرض کنیم  $P_n$  مجموعه نخستین  $n$  عددگویا در این دنباله باشد، و  $U_p$  به ازای همه اعدادگویا مانند  $p$  که به مجموعه  $P_n$  تعلق دارند تعریف شده است و در شرط

$$(*) \quad p < q \implies \bar{U}_p \subset U_q$$

صدق می کند. فرض کنیم  $m$  عددگویای بعدی در آن دنباله باشد؛ می خواهیم  $U_m$  را تعریف کنیم.

مجموعه  $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$  زیرمجموعه ای است متناهی از بازه  $[0, 1]$ ، و بدین عنوان، دارای ترتیب ساده ای است که از رابطه ترتیبی عسادی  $<$  در خط حقیقی به آن القا شده است. در یک مجموعه مرتب ساده متناهی، هر عضو (بجز کوچکترین و بزرگترین عضو) دارای یک سابق بلافصل و یک تالی بلافصل است. (مراجعه شود به قضیه ۱.۱۰ در فصل ۱.) عدد ۰ کوچکترین عضو و عدد ۱ بزرگترین عضو مجموعه مرتب ساده  $P_{n+1}$  است، و  $r$  مخالف ۰، ۱. بنا براین،  $r$  در  $P_{n+1}$  دارای سابق بلافصلی مانند  $p$  و تالی بلافصلی مانند  $q$  است. مجموعه های  $U_p$  و  $U_q$  قبلاً تعریف شده اند و، بنا بر فرض استقرا،  $\bar{U}_p \subset U_q$ . با بهره گیری از نرمال بودن  $X$ ، می توان مجموعه سازی از  $X$  مانند  $U_r$  یافت به طوری که

$$\bar{U}_r \subset U_q \quad \text{و} \quad \bar{U}_p \subset U_r$$

حال ادعا می کنیم که شرط  $(*)$ ، به ازای هر دو عضو دلخواه  $P_{n+1}$  برقرار است. اگر هر دو عضو در  $P_n$  قرار گیرند، بنا بر فرض استقرا،  $(*)$  برقرار است. اگر یکی از آنها  $r$  و دیگری عضوی از  $P_n$  مانند  $s$  باشد، آنگاه یا  $s \leq p$ ، که در این حالت

$$U_s \subset \bar{U}_p \subset U_r$$

یا  $s \geq q$ ، که در این حالت

$$\bar{U}_r \subset U_q \subset U_s.$$

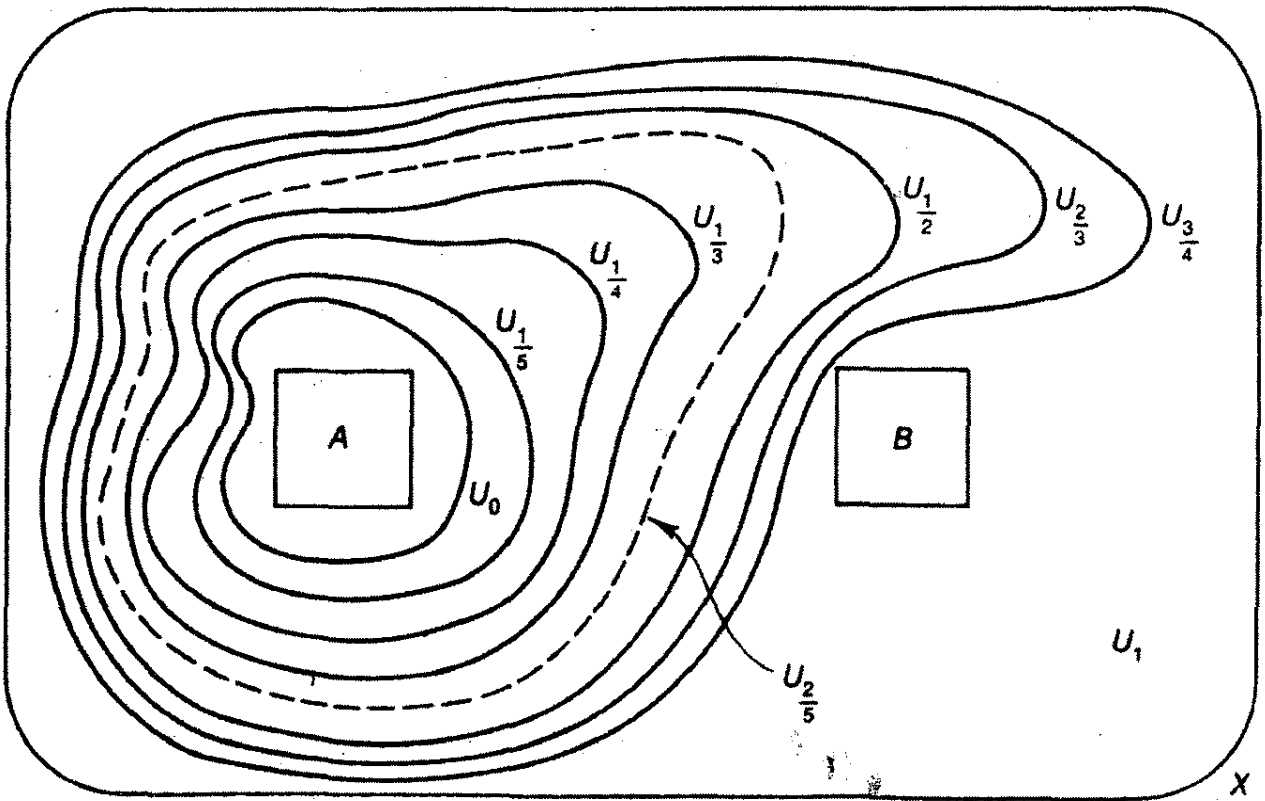
بنابراین به ازای هر زوج از عناصر  $P_n$ ، رابطه  $(*)$  برقرار است.

به استقرا، به ازای هر عضو  $P$  مانند  $p$  مجموعه باز  $U_p$  تعریف شده است.

برای توضیح بیشتر، فرض کنیم اعضای  $P$  را، با همان شیوه متعارف، در يك دنباله نامتناهی مرتب کرده باشیم:

$$P = \left\{ 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \dots \right\}$$

بعد از تعریف  $U_0$  و  $U_1$ ، مجموعه  $U_{1/2}$  را چنان تعریف می‌کنیم که  $\bar{U}_0 \subset U_{1/2}$  و  $U_{1/2} \subset U_1$  سپس،  $U_{1/3}$  را بین  $U_0$  و  $U_{1/2}$ ، و  $U_{2/3}$  را بین  $U_{1/2}$  و  $U_1$  گنجانده به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. در هشتمین مرحله برهان، وضعیتی را که در شکل ۸ نشان داده شده است خواهیم داشت.



شکل ۸

وهمین مرحله، در حقیقت عبارت است از گنجاندن مجموعه باز  $U_{2/5}$  بین  $U_{1/2}$  و  $U_{1/3}$  والی آخر.

مرحله ۲. تا کنون، به ازای هر عدد گویای  $p$  از بازه  $[0, 1]$ ، مجموعه  $U_p$  را تعریف کرده ایم. این تعریف را، به طریق زیر، به هر عدد گویای  $p$  در  $R$  گسترش می‌دهیم:

$$U_p = \phi \quad \text{اگر } p < 0$$

$$U_p = X \quad \text{اگر } p > 1$$

می‌توانید تحقیق کنید که در این حالت نیز به‌ازای هر زوج از اعداد گویا، مانند  $p$  و  $q$ ،

$$p < q \Rightarrow \bar{U}_p \subset U_q.$$

مرحله ۳. به‌ازای نقطه مفروضی از  $X$  مانند  $x$ ،  $Q(x)$  را مجموعه اعداد گویایی مانند  $p$  تعریف می‌کنیم به‌طوری که مجموعه‌های  $U_p$  نظیر آنها شامل  $x$  باشند:

$$Q(x) = \{p \mid x \in U_p\}.$$

این مجموعه شامل هیچ عدد کوچکتر از ۰ نیست، چون به‌ازای  $p < 0$ ، هیچ  $x$ ی در  $U_p$  وجود ندارد، ولی هر عدد بزرگتر از ۱ در آن قرار دارد، زیرا به‌ازای هر  $p > 1$ ، هر  $x$  در  $U_p$  است. بنابراین،  $Q(x)$  از پایین کراندار است و بزرگترین کران پایین آن نقطه‌ای از بازه  $[0, 1]$  است. حال تابع  $f$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \text{glb } Q(x) = \text{glb } \{p \mid x \in U_p\}.$$

مرحله ۴. ثابت می‌کنیم که  $f$  همان تابع مطلوب است. اگر  $x \in A$  آنگاه به‌ازای هر  $0 \leq p \in U_p$ ، بنابراین،  $Q(x)$  مساوی مجموعه همه اعداد گویای نامنفی است و  $f(x) = \text{glb } Q(x) = 0$ ، همچنین، اگر  $x \in B$ ، آنگاه هیچ  $p \leq 1$  وجود ندارد به‌طوری که  $x \in U_p$ ، بنابراین،  $Q(x)$  عبارت است از همه اعداد گویای بزرگتر از ۱، پس  $f(x) = 1$ .

تا به اینجا، مطالب ساده بودند. تنها قسمت مشکل، اثبات پیوستگی  $f$  است. برای این منظور، ابتدا احکام مقدماتی زیر را ثابت می‌کنیم.

$$x \in \bar{U}_r \Rightarrow f(x) \leq r \quad (1)$$

$$x \notin U_r \Rightarrow f(x) \geq r \quad (2)$$

برای اثبات (۱)، توجه کنید که اگر  $x \in \bar{U}_r$ ، آنگاه به‌ازای هر عدد گویای  $s$  به‌طوری که  $s > r$ ، داریم  $x \in U_s$ ، بنابراین،  $Q(x)$  شامل همه اعداد گویای بزرگتر از  $r$  است، و در نتیجه بنا بر تعریف،

$$f(x) = \text{glb } Q(x) \leq r.$$

برای اثبات (۲)، توجه کنید که اگر  $x \notin U_r$ ، آنگاه به‌ازای هر عدد گویای  $s$  به‌طوری که  $s < r$ ، داریم  $x \notin U_s$ ، بنابراین،  $Q(x)$  شامل هیچ عدد گویای کوچکتر از  $r$  نیست. در نتیجه،

$$f(x) = \text{glb } Q(x) \geq r.$$

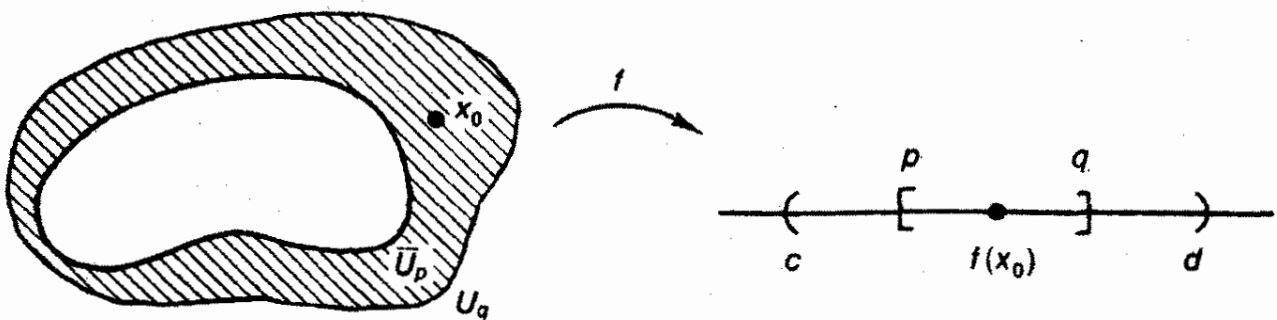
اکنون، پیوستگی  $f$  را ثابت می‌کنیم. به‌ازای نقطه مفروضی از  $X$  مانند  $x_0$  و بازه باز  $(c, d)$  از  $R$  که شامل نقطه  $f(x_0)$  است، می‌خواهیم یک همسایگی  $x_0$  مانند  $U$  بیابیم به‌طوری که  $f(U) \subset (c, d)$ . اعداد گویای  $p$  و  $q$  را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$c < p < f(x_0) < q < d.$$

مدعی هستیم که مجموعه باز

$$U = U_q - \bar{U}_p$$

همان همسایگی مطلوب  $x_0$  است (شکل ۹).



شکل ۹

اولاً، ثابت می‌کنیم که  $x_0 \in U$ . الزاماً  $x \in U_q$ ، زیرا، بنا بر (۲)،  $x_0 \notin U_p$  مستلزم آن است که  $f(x_0) \geq q$ . همچنین،  $x_0 \notin \bar{U}_p$ ، چون بنا بر (۱)،  $x \in \bar{U}_p$  مستلزم آن است که  $f(x) \leq p$ . بنابراین،  $x_0 \in U$ .  
ثانیاً، ثابت می‌کنیم که  $f(U) \subset (c, d)$ . فرض کنیم  $x \in U$ . در این صورت،  $x \in U_q \subset \bar{U}_q$ ، و بنا بر (۱)،  $f(x) \leq q$ . چون  $x \notin \bar{U}_p$ ، و لهذا،  $x \notin U_p$ ، و بنا بر (۲)،  $f(x) \geq p$ . بنابراین،  $f(x) \in [p, q] \subset (c, d)$ ، و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

تعریف. اگر  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه فضای توپولوژیک  $X$  باشند و تابع پیوسته‌ای مانند  $f: X \rightarrow [0, 1]$  موجود باشد به‌طوری که  $f(A) = \{0\}$  و  $f(B) = \{1\}$  آنگاه گوییم  $A$  و  $B$  را می‌توان به‌وسیله تابعی پیوسته از هم جدا کرد.

لم اورسون بیسانگر این است که اگر بتوان دو مجموعه بسته در  $X$  را به‌وسیله مجموعه‌های باز جدا از هم جدا کرد آنگاه هرچنین دو مجموعه را می‌توان به‌وسیله تابعی

پیوسته نیز از هم جدا کرد. عکس این نکته بدیهی است؛ زیرا، اگر  $f: X \rightarrow [0, 1]$  چنین تابعی باشد آنگاه  $f^{-1}([0, 1/2])$  و  $f^{-1}((1/2, 1])$  مجموعه‌های باز جدا از همی هستند که، بترتیب، حاوی  $A$  و  $B$  می‌باشند.

این نکته موجب طرح سؤالی می‌شود که ممکن است قبلاً برای شما هم پیش آمده باشد: چرا برهان لم اوریسون را نمی‌توان به فضاهای منتظم تعمیم داد؟ یعنی در جایی که می‌توان نقاط و مجموعه‌های بسته را بد وسیله مجموعه‌های باز جدا از هم، جدا کرد، آیا نمی‌توان این نقاط و مجموعه‌های بسته را با توابع پیوسته از هم جدا کرد؟

در وهله اول به نظر می‌رسد که برهان لم اوریسون باید مؤثر باشد. نقطه‌ای مانند  $a$  و مجموعه بسته  $B$  را که شامل  $a$  نیست انتخاب می‌کنیم. و مانند گذشته برهان را با استفاده از منتظم بودن  $X$  با  $U_1 = X - B$  و برگزیدن مجموعه باز  $a$  حول  $a$  مانند  $U_0$  به طوری که  $U_0 \subset U_1$ ، آغاز می‌کنیم. ولی در همان اولین مرحله بعدی برهان به مشکل بر می‌خوریم. فرض کنیم عدد گویای  $p$  جمله بعد از  $0$  و  $1$  در دنباله مورد نظر باشد. هدف، یافتن مجموعه‌ای باز مانند  $U_p$  است به طوری که  $U_0 \subset U_p$  و  $U_p \subset U_1$ . برای این منظور منتظم بودن  $X$  کافی نیست.

در واقع، برای جدا کردن يك نقطه از يك مجموعه بسته، به وسیله تابعی پیوسته، شرطی قویتر از منتظم بودن (یعنی امکان جدا کردن نقاط از مجموعه‌های بسته به وسیله مجموعه‌های باز جدا از هم) مورد نیاز است. این نیاز را به صورت اصل جداسازی تازه‌ای بیان می‌کنیم، و در فصل ۵ به مطالعه بیشتر آن می‌پردازیم: فضای  $X$  را تماماً منتظم نامیم اگر مجموعه‌های تک‌عضوی در  $X$  بسته باشند، و به ازای هر نقطه  $x$  مانند  $a$  و هر مجموعه بسته آن مانند  $B$  که شامل  $a$  نیست، تابعی پیوسته مانند  $f: X \rightarrow [0, 1]$  موجود باشد به طوری که  $f(a) = 0$  و  $f(B) = \{1\}$ .

در اینجا، توضیح دیگری در مورد لم اوریسون می‌دهیم: توجه کنید که لم اوریسون به وجود تابعی پیوسته مانند  $f$  که تنها به ازای هر نقطه  $x \in A$ ،  $f(x) = 0$ ، و تنها به ازای هر  $x \in B$ ،  $f(x) = 1$  حکم نمی‌کند. در حالت کلی، نمی‌توان تابعی با این شرایط برگزید؛ به تمرین ۵ مراجعه کنید.

يك نتیجه مستقیم لم اوریسون قضیه مفیدی است موسوم به قضیه گسترش تیتسه. این قضیه بیانگر این است که هر تابع پیوسته  $f$  را که زیر مجموعه بسته‌ای از يك فضای نرمال را در  $R$  می‌نگارد می‌توان به نگاشتی پیوسته از همه آن فضا به خط حقیقی  $R$  گسترش داد. در این کتاب (جز در چند تمرین) از قضیه تیتسه استفاده نخواهیم کرد، ولی این قضیه در کاربردهای توپولوژی بسیار اهمیت دارد.

۲.۳. قضیه (قضیه گسترش تیتسه) فرض کنیم  $X$  يك فضای نرمال، و  $A$  زیرمجموعه بسته‌ای از آن باشد.

(الف) هر نگاشت پیوسته از  $A$  در بازه بسته  $[a, b]$  از  $R$  را می‌توان به يك

نگاشت پیوسته از همه  $X$  به  $[a, b]$  گسترش داد.  
 (ب) هرنگاشت پیوسته از  $A$  در خط حقیقی  $R$  را می توان به نگاشت پیوسته ای از همه  $X$  در  $R$  گسترش داد.

برهان. ایده این برهان ساختن دنباله ای از توابع پیوسته مانند  $f_n$  است که بر کل فضای  $X$  تعریف شده اند، به طوری که این دنباله همگرای یکنواخت باشد، و تحدید  $f_n$  به  $A$ ، هر قدر  $n$  بزرگتر می شود، تقریب بهتری از  $f$  باشد. در این صورت، تابع حدی پیوسته است و تحدید آن به  $A$  مساوی  $f$  است.

مرحله ۱. اولین مرحله، ساختن تابع ویژه ای است بر همه  $X$ ، مانند  $g$ ، به طوری که مقادیر  $g$  زیاد بزرگ نباشند، و با دقتی مناسب،  $g$  تقریبی برای  $f$  روی  $A$  باشد. برای بیان دقیقتر، حالت  $f: A \rightarrow [-r, r]$  را در نظر می گیریم. مدعی هستیم که تابعی پیوسته مانند  $g: X \rightarrow R$  موجود است به طوری که

$$|g(x)| \leq \frac{1}{3}r, \quad x \in X \text{ هر } x$$

$$|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}r, \quad a \in A \text{ هر } a$$

تابع  $g$  به شرح زیر ساخته می شود:  
 بازه  $[-r, r]$  را به سه قسمت مساوی به طول  $2r/3$  تقسیم می کنیم:

$$I_1 = \left[-r, -\frac{1}{3}r\right], \quad I_2 = \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right], \quad I_3 = \left[\frac{1}{3}r, r\right].$$

زیرمجموعه های  $B$  و  $C$  از  $A$  را چنین تعریف می کنیم:

$$C = f^{-1}(I_3) \quad \text{و} \quad B = f^{-1}(I_1)$$

چون  $f$  پیوسته است،  $B$  و  $C$  زیرمجموعه های بسته جدا از همی در  $A$  هستند. در نتیجه، در  $X$  نیز بسته اند. بنابراین اوریسون، تابعی پیوسته مانند

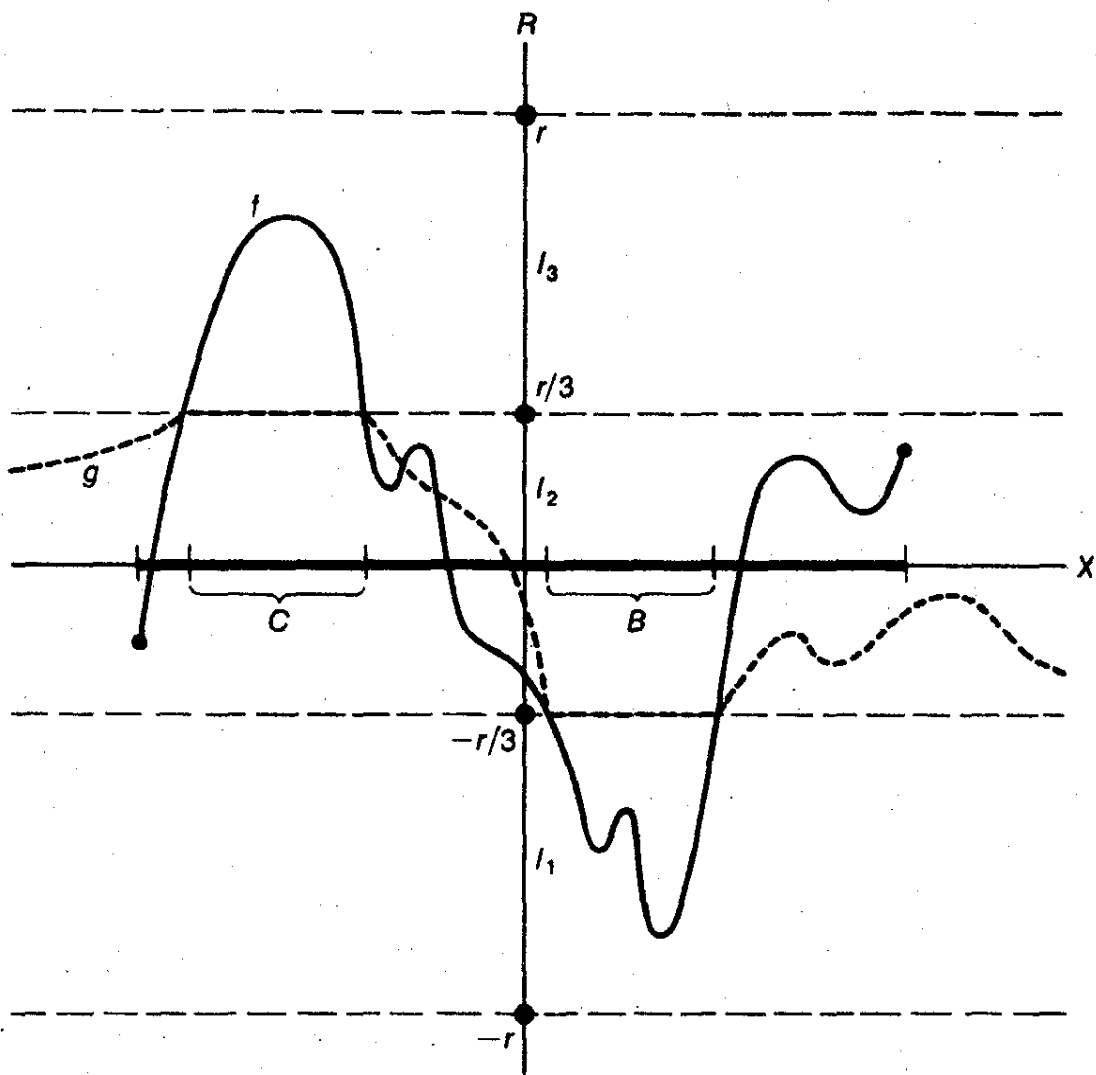
$$g: X \rightarrow \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$$

موجود است که به ازای هر  $x$  از  $B$ ،  $g(x) = -r/3$ ، و به ازای هر  $x$  از  $C$ ،  $g(x) = r/3$  (شکل ۱۵).

در این صورت، به ازای هر  $x$ ،  $|g(x)| \leq r/3$ . مدعی هستیم که به ازای هر عضو  $A$  مانند  $a$ ،

$$|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}r.$$

سه حالت رخ می‌دهد. اگر  $a \in B$  آنگاه  $f(a)$  و  $g(a)$  هر دو به  $I_1$  تعلق خواهند داشت. اگر  $a \in C$  آنگاه  $f(a)$  و  $g(a)$  در  $I_3$  خواهند بود. و اگر  $a \notin B \cup C$  آنگاه  $f(a)$  و  $g(a)$  متعلق به  $I_2$  می‌باشند. در هر حالت،  $|g(a) - f(a)| \leq 2r/3$ .



شکل ۱۰

مرحله ۲. حال قضیه نیشه رادرحالت  $f: A \rightarrow [-1, 1]$  ثابت می‌کنیم. قسمت (الف) قضیه، که در آن  $f$  نگاشتی از  $A$  در بازه بسته دلخواهی مانند  $[a, b]$  است، مستقیماً نتیجه می‌شود.



ابتداء، مرحله ۱ را در مورد تابع  $f: A \rightarrow [-1, 1]$  اعمال می کنیم، در این حالت  $r=1$ . تابعی حقیقی مانند  $g_1$  به دست می آید که برهه  $X$  تعریف شده است و

$$|g_1(x)| \leq \frac{1}{3}, \quad x \in X$$

$$|f(a) - g_1(a)| \leq \frac{2}{3}, \quad a \in A$$

حال تابع  $f - g_1$  را در نظر می گیریم. با فرض  $r = 2/3$ ، ملاحظه می کنیم که  $f - g_1$  مجموعه  $A$  را در بازه  $[-r, r]$  می نگارد؛ با اعمال مرحله ۱، تابعی حقیقی مانند  $g_2$  به دست می آید که برهه  $X$  تعریف شده است و

$$|g_2(x)| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right), \quad x \in X$$

$$|f(a) - g_1(a) - g_2(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2, \quad a \in A$$

سپس، مرحله ۱ را در مورد  $f - g_1 - g_2$  اعمال می کنیم. و به همین ترتیب ادامه می دهیم.

در حالت کلی، فرض کنیم توابع حقیقی  $g_1, \dots, g_n$  برهه  $X$  تعریف شده باشند به طوری که به ازای هر  $a$  از  $A$  داشته باشیم

$$|f(a) - g_1(a) - \dots - g_n(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

با به کار بردن مرحله ۱ در مورد تابع  $f - g_1 - \dots - g_n$  به ازای  $r = (2/3)^n$ ، تابعی حقیقی مانند  $g_{n+1}$  برهه  $X$  به دست می آوریم به طوری که

$$|g_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad x \in X$$

$$|f(a) - g_1(a) - \dots - g_{n+1}(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \quad a \in A$$

در نتیجه، به استقرا، به ازای هر عدد  $n$ ، تابع  $g_n$  تعریف می شود. حال تابع  $g$  را، به ازای هر  $x$  از  $X$ ، چنین تعریف می کنیم:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

البته، باید از همگرایی این سری نامتناهی اطمینان حاصل کنیم و این هم از قضیه مقایسه ای حساب دیفرانسیل و انتگرال نتیجه می شود. با مقایسه تابع  $g(x)$  با سری هندسی

$$\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

همگرایی سری فوق نتیجه می‌شود. چون این سری هندسی به ۱ همگراست (می‌توانید این مطلب را تحقیق کنید)، نتیجه می‌شود که  $|g(x)| \leq 1$ . بنابراین،  $g$  نگاشتی است از  $X$  در  $[-1, 1]$ ، و این همان است که می‌خواستیم.

مدعی هستیم که به ازای هر  $a$  از  $A$ ،  $g(a) = f(a)$ . فرض کنیم  $s_n(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x)$ . مین مجموع جزئی این سری باشد. در این صورت، بنا بر تعریف،  $g(x)$  عبارت است از حد دنباله نامتناهی  $s_n(x)$ . چون به ازای هر عضو  $A$  مانند  $a$ ،

$$\left| f(a) - \sum_{i=1}^n g_i(a) \right| = \left| f(a) - s_n(a) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

از آنجا نتیجه می‌شود که به ازای هر  $a$  از  $A$ ،  $s_n(a) \rightarrow f(a)$ . بنابراین، به ازای هر  $a$  از  $A$ ،  $f(a) = g(a)$ .

برای اثبات پیوستگی  $g$ ، باید ثابت کنیم که همگرایی دنباله  $s_n$  به  $g$  یکنواخت است. که این نیز مستقیماً از «آزمون  $M$  - وایرستراس» از آنالیز نتیجه می‌شود. بدون در نظر گرفتن این قاعده، می‌توان به آسانی ملاحظه کرد که اگر  $k > n$  آنگاه

$$\begin{aligned} |s_k(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{i=n+1}^k g_i(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_{i=n+1}^k \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\ &< \frac{1}{3} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

با ثابت نگهداشتن  $n$  و میل دادن  $k$  به  $\infty$ ، ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر  $x$  از  $X$ ،

$$|g(x) - s_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

بنابراین، همگرایی  $s_n$  به  $g$  یکنواخت است.

مرحله ۳. اکنون، قسمت (ب) قضیه را ثابت می‌کنیم، که در این قسمت  $f$  مجموعه  $A$  را در  $R$  می‌نگارد. می‌توان به جای  $R$  بازه  $(-1, 1)$  را در نظر گرفت، چون این بازه با  $R$  هم‌شومورف است.

بنابراین، فرض کنیم  $f$  نگاشتی پیوسته از  $A$  در  $(-1, 1)$  باشد. نیمی از قضیه تیمسه که اثبات آن گذشت، ثابت می‌کند که  $f$  را می‌توان به نگاشتی پیوسته مسانند  $g: X \rightarrow [-1, 1]$  گسترش داد، که  $X$  را در بازه بسته  $[-1, 1]$  می‌نگارد. حال، چگونه می‌توان نگاشتی مانند  $h$  یافت که  $X$  را در بازه باز  $(-1, 1)$  بنگارد؟

به ازای تابع مفروض  $g$ ، زیرمجموعه  $D$  از  $X$  را با معادله زیر تعریف می‌کنیم:

$$D = g^{-1}(\{-1\}) \cup g^{-1}(\{1\}).$$

چون  $g$  پیوسته است، زیرمجموعه  $D$  بسته است. چون  $f(A) = g(A)$  و این مجموعه در بازه  $(-1, 1)$  قرار دارد، در نتیجه مجموعه‌های  $D$  و  $A$  از هم جدا هستند. بنا بر لم اوریسون، تابعی پیوسته مانند  $\phi: X \rightarrow [0, 1]$  موجود است به طوری که

$$\phi(A) = \{1\} \quad \text{و} \quad \phi(D) = \{0\}$$

اکنون، تابع  $h$  را بر  $X$  چنین تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = \phi(x)g(x).$$

$h$  پیوسته است. زیرا، حاصل ضرب دو تابع پیوسته است. همچنین،  $h$  يك گسترش  $f$  است. چون به ازای هر  $a$  از  $A$

$$h(a) = \phi(a)g(a) = 1 \cdot g(a) = f(a).$$

بالاخره،  $h$  همه  $X$  را در بازه  $(-1, 1)$  می‌نگارد. زیرا، اگر  $x \in D$  آنگاه  $g(x) = 0$  و  $h(x) = 0$ . و اگر  $x \notin D$  آنگاه  $|g(x)| < 1$ ؛ و از این مطلب مستقیماً نتیجه می‌شود که  $|h(x)| \leq |g(x)| < 1$ .  $\square$

مثال ۱. در لم اوریسون و قضیه تیتسه، فرض بسته بودن دو مجموعه مورد نظر الزامی است. مثلاً، مجموعه‌های

$$A = (0, 1) \quad \text{و} \quad B = (1, 2)$$

دو زیرمجموعه جدا از هم فضای نرمال  $R$  اند، ولی هیچ تابع پیوسته‌ای مانند  $f: R \rightarrow [0, 1]$  یافت نمی‌شود که  $A$  را به ۰ و  $B$  را به ۱ بنگارد. چه، در این صورت، تابع  $f$  نقطه ۱ از  $\bar{A} \cap \bar{B}$  را به چه نقطه‌ای می‌تواند بنگارد؟

### تمرینها

۱. با بررسی برهان لم اوریسون، ثابت کنید که به ازای عدد مفروض  $r$ ،

$$f^{-1}(r) = \bigcap_{p > r} U_p - \bigcup_{q < r} U_q,$$

$p$  و  $q$  گویا هستند.

۲. ثابت کنید که قضیه گسترش تیتسه مستلزم لم اوریسون است.

۳. (الف) ثابت کنید که هر فضای نرمال همبند که بیش از يك نقطه داشته باشد

ناشمار است.

(ب) ثابت کنید که هر فضای منتظم همبند که بیش از یک نقطه داشته باشد ناشمار است! [داهنمایی: هر فضای شمارا فضایی است لیندولوف.]

۴. فرض کنید  $X$  فضای منتظمی باشد بایک پایه شمارا، و  $U$  را در  $X$  باز بگیرید.  
(الف) ثابت کنید که  $X$  را می توان به صورت اجتماع شمارایی از مجموعه های بسته  $X$  نوشت.

(ب) ثابت کنید تابعی پیوسته مانند  $f: X \rightarrow [0, 1]$  موجود است به طوری که اگر  $x \in U$  آنگاه  $f(x) > 0$  و اگر  $x \notin U$  آنگاه  $f(x) = 0$ .

۵. یادآوری می کنیم که  $A$  را یک «مجموعه  $G_\delta$ » در  $X$  گوئیم اگر  $A$  به صورت مقطع گردابه ای شمارا از مجموعه های باز  $X$  باشد.

قضیه (صورت قوی لم اودیسون). فرض کنید  $A$  و  $B$  زیرمجموعه های بسته جدا از هم فضای نرمال  $X$  باشند. تابع پیوسته ای مانند  $f: X \rightarrow [0, 1]$  به طوری که  $f^{-1}(\{0\}) = A$  و  $f(B) = \{1\}$  وجود دارد اگر و فقط اگر  $A$  یک مجموعه  $G_\delta$  در  $X$  باشد.

۶. فرض کنید  $X$  متریک پذیر باشد. ثابت کنید که احکام زیر معادل اند:  
(یک)  $X$  تحت هر متریک که توپولوژی  $X$  را تولید کند کراندار است.  
(دو) هر تابع پیوسته  $\phi: X \rightarrow R$  کراندار است.  
(سه)  $X$  فشرده است.

[داهنمایی: اگر  $\phi$  کراندار نباشد، با نگاشت  $x \rightarrow x \times \phi(x)$  فضای  $X$  را در  $X \times R$  بنگارید. اگر دنباله  $(x_n)$  از نقاط متمایز  $X$  دارای هیچ زیردنباله همگرا نباشد، تابعی پیوسته مانند  $\phi$  با ضابطه  $\phi(x_n) = n$  بیاید.]

۷. فرض کنید  $Z$  یک فضای توپولوژیک و  $Y$  یک زیر فضای آن باشد.  $Y$  را یک توکشیده  $Z$  گوئیم اگر نگاشتی پیوسته مانند  $r: Z \rightarrow Y$  موجود باشد به طوری که به ازای هر  $y$  از  $Y$ ،  $r(y) = y$ .  
(الف) ثابت کنید اگر  $Z$  هاوسدورف و  $Y$  یک توکشیده  $Z$  باشد آنگاه  $Y$  در  $Z$  بسته است.

(ب) فرض کنید  $A$  یک زیرمجموعه دو عضوی  $R^2$  باشد. ثابت کنید  $A$  نمی تواند یک توکشیده  $R^2$  باشد.

(پ) فرض کنید  $S^1$  دایره واحد در  $R^2$  باشد؛ ثابت کنید که  $S^1$  یک توکشیده  $\{0\} - R^2$  است، که در آن  $0$  مبدأ است. می توانید حدس بزنید که  $S^1$  یک توکشیده  $R^2$  هست یا نه؟

۱. تمجب آور است که فضای هاوسدورف همبندی وجود دارد که شمارای نامتناهی است. مثال ۷۵ در  $[S - S]$  را ملاحظه کنید.

۸. گویم فضای  $Y$  دارای خاصیت گسترش عمومی است هر گاه به ازای هر فضای نرمال  $X$  و هر زیرمجموعه بسته  $X$  مانند  $A$  و هر تابع پیوسته  $f: A \rightarrow Y$ ، تابع  $f$  گسترشی پیوسته از  $X$  در  $Y$  داشته باشد.

(الف) ثابت کنید که  $R^I$  دارای خاصیت گسترش عمومی است.

(ب) ثابت کنید که اگر  $Y$  با یک توکشیده  $R^I$  هومئومورف باشد آنگاه  $Y$  دارای خاصیت گسترش عمومی است.

۹. فرض کنید  $X_1 \subset X_2 \subset \dots$  دنباله‌ای از فضاها باشد، که به ازای هر  $i$ ،  $X_i$  یک زیرفضای بسته  $X_{i+1}$  است. قرار دهید  $X = \bigcup X_i$ . فرض کنید باز بودن زیرمجموعه  $U$  را در  $X$  چنین تعریف کنیم که به ازای هر  $i$  مجموعه  $U \cap X_i$  در  $X_i$  باز باشد. توپولوژی حاصل، توپولوژی هموسته با فضاهای  $X_i$  نامیده می‌شود.

(الف) ثابت کنید که در این توپولوژی  $X_i$  یک زیرفضای  $X$  است.

(ب) ثابت کنید اگر هر یک از فضاهای  $X_i$  نرمال باشد،  $X$  نیز نرمال است.

[دانهمایی: از قضیه تیتسه استفاده کنید.]

۱۰\* زیرفضای  $\bar{R}^n$  از  $R^\omega$  متشکل از همه دنباله‌هایی مانند  $(x_1, x_2, \dots)$  که به ازای هر  $i > n$ ،  $x_i = 0$ ، توپولوژی استاندارد ای دارد. فرض کنید مجموعه  $R^\infty = \bigcup \bar{R}^n$  به توپولوژی هموسته با زیرفضاهای  $\bar{R}^n$  مجهز باشد. این توپولوژی  $R^\infty$  را با توپولوژی القایی از توپولوژی جعبه‌ای  $R^\omega$  مقایسه کنید.

## ۲-۲ قضیه متریسازی اوریسون

اکنون به هدف اصلی این فصل می‌رسیم، یعنی قضیه‌ای که به ما شرایطی را عرضه می‌کند که تحت آن شرایط فضایی توپولوژیک متریک پذیر می‌شود. برهان این قضیه بافتی است از تاروپودهایی که قبلاً در این کتاب آماده شده‌اند؛ در این برهان از قضایای مربوط به توپولوژیهای متری در فصل ۲ و مطالب مربوط به شمارایی و اصول جداسازی، که در فصل حاضر ثابت شدند، بهره می‌گیریم. ساختمان اساسی مورد استفاده این برهان، ساده و در عین حال بسیار مفید است. در این کتاب چندبار دیگر با صورتهای گوناگون آن روبرو خواهیم شد.

دو بیان برای این برهان موجود است. و چون هر یک از آنها دارای تعمیمهای مفیدی هستند، که بعداً با آنها مواجه خواهیم شد، هر دو را در اینجا عرضه می‌کنیم. اولین بیان

۱. منظور این است که توپولوژی زیرفضایی  $X_i$  (به عنوان یک زیرمجموعه  $X$ ) همان توپولوژی اولیه فضای  $X_i$  است. -م.

را در فصل ۵ برای اثبات يك قضیه نشان دادن در مورد فضاهای كاملاً منتظم به كار خواهیم برد، و دومی را در فصل ۶ هنگام اثبات قضیه متریسازی ناگاتا - اسمیرنوف<sup>۱</sup> تعمیم می دهیم.

۱.۴. قضیه (قضیه متریسازی اوریسون). هر فضای منتظم  $X$  با يك پایه شمارا فضایی است متری پذیر.

برهان. با نشان دادن  $X$  در يك فضای متری  $Y$ ، متريك پذیری  $X$  را ثابت می کنیم؛ یعنی، ثابت می کنیم که  $X$  با زیر فضایی از  $Y$  هومئومورف است. تفاوت در بیان این برهان در انتخاب فضای متريك پذیر  $Y$  است. در اولین بیان برهان،  $Y$  فضای  $R^\omega$  است بسا توپولوژی حاصل ضربی که قبلاً متريك پذیری آن را ثابت کرده ایم (قضیه ۵.۹ در فصل ۲). در دومین بیان،  $Y$  مجدداً فضای  $R^\omega$  است، منتها این بار با توپولوژی حاصل از متريك یکنواخت  $\bar{\rho}$  (به بخش ۲ - ۹ مراجعه کنید) در هر دو صورت، برهان عملاً منجر به نشان دادن  $X$  در  $[0, 1]^\omega$  می شود. فرض کنید  $\{B_n\}$  يك پایه شمارای  $X$  باشد.

مرحله ۱. حکم زیر را ثابت می کنیم: گردایه ای شمارا از توابع پیوسته مانند  $f_n: X \rightarrow [0, 1]$  وجود دارد به طوری که به ازای هر نقطه مفروض  $x_0$  از  $X$  و همسایگی  $x_0$  مانند  $U$ ، اندیسی مانند  $n$  موجود است به طوری که  $f_n$  در نقطه  $x_0$  مثبت است و در خارج  $U$  صفر می شود.

ساختن توابع  $f_n$  ساده است. به ازای هر عضو پایه  $B_n$ ، بنا بر تمرین ۴ در بخش پیش، تابعی پیوسته مانند  $f_n: X \rightarrow [0, 1]$  موجود است به طوری که به ازای هر  $x$  از  $B_n$ ،  $f_n(x) > 0$  و اگر  $x \notin B_n$  آنگاه  $f_n(x) = 0$ . گردایه  $\{f_n\}$  خواسته ما را بر آورده می کند. زیرا به ازای نقطه مفروض  $x_0$  و يك همسایگی آن مانند  $U$ ، يك عضو پایه مانند  $B_n$  را می توانیم چنان انتخاب کنیم که  $x_0 \in B_n \subset U$ ؛ در این صورت، تابع  $f_n$  در  $x_0$  مثبت و در خارج از  $U$  صفر است.

طریقه دیگر ساختن گردایه  $\{f_n\}$ ، که به تمرین مذکور متکی نباشد، چنین است: با به کارگیری لم اوریسون در مورد هر زوج از اندیسه های  $n$  و  $m$  به طوری که  $\bar{B}_n \subset B_m$ ، می توان تابع پیوسته  $g_{n,m}: X \rightarrow [0, 1]$  را چنان برگزید که

$$g_{n,m}(X - B_m) = \{0\} \text{ و } g_{n,m}(\bar{B}_n) = \{1\}$$

در این صورت، گردایه  $\{g_{n,m}\}$  در شرایط لازم صدق می کند؛ به ازای نقطه مفروض  $x \in U$ ، يك عضو پایه مانند  $B_m$  را طوری انتخاب می کنیم که  $x \in B_m \subset U$ . با استفاده از منتظم بودن  $X$ ، عضو پایه  $B_n$  را می توان چنان برگزید که  $x_0 \in B_n$  و  $\bar{B}_n \subset B_m$ . در این صورت، تابع  $g_{n,m}$  تعریف شده است و در  $x_0$  مثبت و در خارج از  $U$  صفر است. از طرفی

چون گردایه  $\{g_{n,m}\}$  با زیر مجموعه‌ای از  $Z_+ \times Z_+$  اندیسگذاری شده شماراست؛ بنابراین، می‌توان با اندیسگذاری مجدد آن توسط اعداد صحیح مثبت، خانواده مطلوب  $\{f_n\}$  را به دست آورد.

مرحله ۰۲. (نخستین بیان برهان) توابع  $f_n$  از مرحله ۱ مفروض‌اند،  $R^\omega$  را با توپولوژی حاصل ضربی در نظر می‌گیریم و نگاشت  $F: X \rightarrow R^\omega$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots).$$

مدعی هستیم که  $F$  یک نشاننده است.

اولاً، چون  $R^\omega$  دارای توپولوژی حاصل ضربی است و هر یک از  $f_n$  ها پیوسته است، پس  $F$  پیوسته است. ثانیاً،  $F$  یک به یک است؛ زیرا، اگر  $x \neq y$  آنگاه می‌دانیم که اندیسی مانند  $n$  هست به طوری که  $f_n(x) > 0$  و  $f_n(y) = 0$ ؛ بنابراین،  $F(x) \neq F(y)$ .

سرانجام، باید ثابت کنیم که  $F$  یک هم‌هومورفیسم از  $X$  بروی تصویر خود، یعنی زیرفضای  $Z = F(X)$  از  $R^\omega$ ، است. می‌دانیم که  $F$  نگاشت دوسویی پیوسته‌ای از  $X$  بروی  $Z$  است، بنابراین، تنها باید ثابت کنیم که به ازای هر مجموعه باز  $X$  مانند  $U$ ، مجموعه  $F(U)$  در  $Z$  باز است. فرض کنیم  $z_0 \in F(U)$ . هدف یافتن مجموعه بازی است از  $Z$  مانند  $W$  به طوری که

$$z_0 \in W \subset F(U).$$

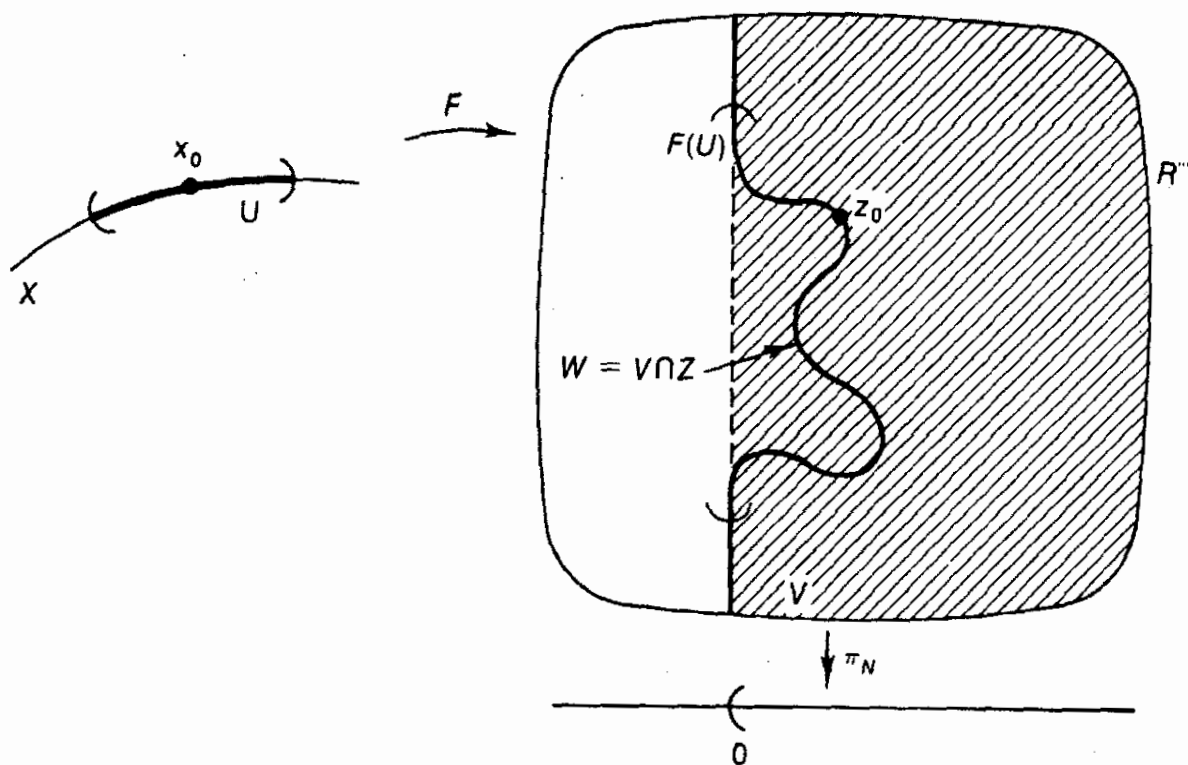
فرض کنیم  $x_0$  نقطه‌ای از  $U$  باشد به طوری که  $F(x_0) = z_0$ . حال اندیس  $N$  را چنان برمی‌گزینیم که به ازای آن  $f_N(x_0) > 0$  و  $f_N(X - U) = \{0\}$ . شعاع باز  $(0, +\infty)$  را در  $R$ ، و مجموعه باز

$$V = \pi_N^{-1}((0, +\infty))$$

را در  $R^\omega$  اختیار می‌کنیم. قرار می‌دهیم  $W = V \cap Z$ ؛ در این صورت، بنا بر تعریف توپولوژی زیرفضایی،  $W$  در  $Z$  باز است (شکل ۱۱). مدعی هستیم که  $z_0 \in W \subset F(U)$ . اولاً  $z_0 \in W$ ، زیرا

$$\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0.$$

ثانیاً،  $W \subset F(U)$ ، زیرا، اگر  $z \in W$  آنگاه به ازای عضوی از  $X$  مانند  $x$  داریم  $z = F(x)$  و  $\pi_N(z) \in (0, +\infty)$  از آنجا که  $\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x)$  و  $f_N$  در خارج از  $U$  صفر است، باید  $x$  در  $U$  باشد. در نتیجه،  $z = F(x)$  در  $F(U)$  قرار دارد، و این همان است که می‌خواستیم.



شکل ۱۱

بنابراین،  $F$  نشاننده‌ای از  $X$  در  $R^\omega$  است.

مرحله ۳. (دومین بیان برهان). این بار،  $X$  را در فضای متری  $(R^\omega, \bar{\rho})$  می‌نشانیم. در واقع،  $X$  در زیر فضای  $[0, 1]^\omega$  نشانده می‌شود، که بر آن متریک  $\bar{\rho}$  برابر است با

$$\rho(x, y) = \text{lub} \{ |x_i - y_i| \}.$$

گردایه شمارای توابع  $[0, 1] \rightarrow X$  را که در مرحله ۱ ساختیم به کار می‌بریم. ولی این بار توابع  $f_n$  را به شرطی اضافی مقید می‌کنیم، به این صورت که به ازای هر  $x$ ،  $f_n(x) \leq 1/n$  (برقرار کردن این شرط آسان است؛ کافی است که هر تابع  $f_n$  را بر  $n$  تقسیم کنیم).

تابع  $F: X \rightarrow [0, 1]^\omega$  را، مانند سابق، با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots).$$

مدعی هستیم که  $F$  نسبت به متریک  $\rho$  بر  $[0, 1]^\omega$  یک نشاننده است. در مرحله ۲ دیدیم که  $F$  یک به یک است. بعلاوه، می‌دانیم که اگر  $[0, 1]^\omega$  را با توپولوژی حاصل ضربی



در نظر گیریم آنگاه نگاشت  $F$  هر مجموعه باز  $X$  را بروی مجموعه بازی از  $Z = F(X)$  می نگارد. اگر توپولوژی ظریفتری (بزرگتری) را که توسط متریک  $\rho$  بر  $[0, 1]^m$  القا می شود در نظر بگیریم، همین حکم برقرار می ماند.

تنها موضوعی که مانده اثبات پیوستگی  $F$  است. چون در این مرحله، توپولوژی حاصل ضربی را بر  $R^m$  به کار نگرفته ایم، پیوستگی  $F$  از این امر که هر تابع مؤلفه ای پیوسته است نتیجه نمی شود. در اینجا است که فرض  $f_n(x) \leq 1/n$  به کار می آید. فرض کنیم  $x_0$  نقطه ای از  $X$  باشد و  $\varepsilon > 0$ . برای اثبات پیوستگی، باید يك همسایگی  $x_0$  مانند  $U$  بیابیم به طوری که

$$x \in U \implies \rho(F(x), F(x_0)) < \varepsilon.$$

ابتدا  $N$  را به قدر کافی بزرگ اختیار می کنیم به طوری که  $1/N \leq \varepsilon/2$ . سپس به ازای هر  $n$ ، که  $n = 1, 2, \dots, N$ ، بنا بر پیوستگی  $f_n$ ، يك همسایگی  $x_0$  مانند  $U_n$  موجود است به طوری که به ازای هر  $x$  در  $U_n$  داریم

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

اکنون، ثابت می کنیم که  $U = U_1 \cap \dots \cap U_N$  همان همسایگی مطلوب  $x_0$  است. فرض کنیم  $x \in U$ . اگر  $n \leq N$  آنگاه بنا بر تعریف  $U$ ،

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

اگر  $n > N$  آنگاه چون  $f_n$  مجموعه  $X$  را در  $[0, 1/n]$  می نگارد، پس

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

بنابراین، به ازای هر  $x$  از  $U$ ،

$$\rho(F(x), F(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

و این همان است که می خواستیم.  $\square$

در مرحله دوم برهان فوق، عملاً چیزی قویتر از آن نتیجه ای که در آنجا بیان شد ثابت کردیم. برای استفاده های بعدی، این نتیجه را در اینجا بیان می کنیم:

۲.۴. قضیه (قضیه نشانیدن) فرض کنیم  $X$  فضایی هائوسدورف و  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$  گردایه ای از توابع پیوسته  $f_\alpha: X \rightarrow R$  با این خاصیت باشند که به ازای هر  $x_0$  از  $X$  و هر همسایگی  $x_0$  مانند  $U$  اندیسی مانند  $\alpha$  موجود باشد به طوری که  $f_\alpha(x_0) > 0$

$f_\alpha$  در خارج از  $U$  صفر شود. در این صورت، تابع  $F: X \rightarrow R^J$  با ضابطه

$$F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$$

نشاندهای از  $X$  در  $R^J$  است.

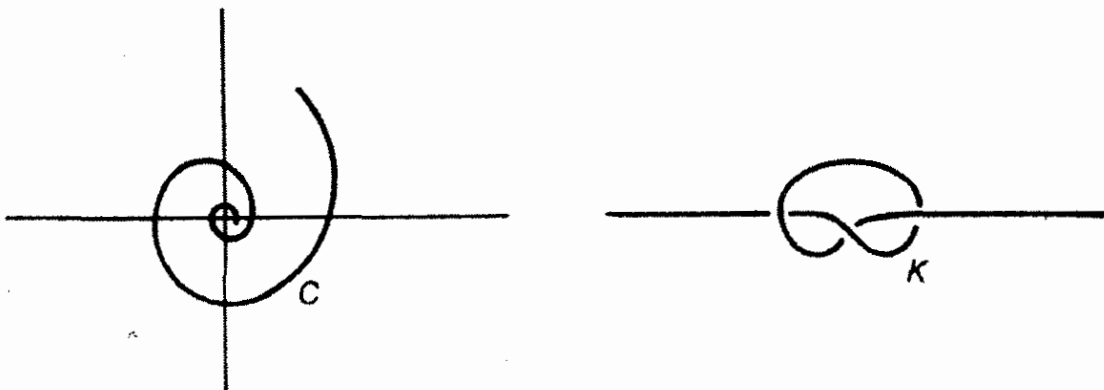
برهان تقریباً مشابه همان چیزی است که در مرحله دوم برهان قبل گذشت؛ با این تفاوت که فقط باید  $\alpha$  را به جای  $n$  قرارداد و  $R^J$  را به جای  $R^\omega$ . اگر گردایه توابع پیوسته  $\{f_\alpha\}$  در شرایط این قضیه صدق کند، گویند این گردایه در  $X$  نقاط را از مجموعه‌های بسته جدا می‌سازد.

### تمرینها

۱. با مثالی ثابت کنید که لزومی ندارد هر فضای هاوسدورف با پایه شمارا فضایی متریک پذیر باشد.
۲. با مثالی ثابت کنید که ممکن است يك فضا تماماً نرمال باشد و در اولین اصل شمارایی و شرط لیند洛夫 صدق کند و زیرمجموعه چگال شمارا هم داشته باشد ولی متریک پذیر نباشد.
۳. فرض کنید  $X$  يك فضای هاوسدورف فشرده باشد. آیا درست است که اگر  $X$  پایه‌ای شمارا داشته باشد، آنگاه  $X$  متری پذیر است؟ در مورد عکس این حکم چه می‌توان گفت؟
۴. فرض کنید  $X$  يك فضای هاوسدورف موضعاً فشرده باشد. (الف) آیا درست است که اگر  $X$  پایه‌ای شمارا داشته باشد آنگاه  $X$  متریک پذیر است؟ در مورد عکس این حکم چه می‌توان گفت؟ (ب) فرض کنید  $Y$  فشرده شده شده  $T_k$  نقطه‌ای  $X$  باشد. آیا درست است که اگر  $X$  پایه‌ای شمارا داشته باشد آنگاه  $Y$  متریک پذیر است؟ در مورد عکس این حکم چه می‌توان گفت؟
۵. فضای  $X$  را موضعاً متری پذیر خوانیم اگر هر نقطه آن مانند  $x$  يك همسایگی متریک پذیر با توپولوژی زیر فضایی داشته باشد. ثابت کنید که فضای هاوسدورف فشرده  $X$  به شرطی متری پذیر است که موضعاً متری پذیر باشد. [داهنمایی: ثابت کنید که  $X$  اجتماعی متناهی از زیرفضاهای بازی است که هر يك پایه‌ای شمارا دارند].
۶. ثابت کنید هر فضای لیند洛夫 منتظم اگر موضعاً متری پذیر باشد آنگاه متریک پذیر است. [داهنمایی: هر زیرفضای بسته يك فضای لیند洛夫 خود لیند洛夫 است.] در این تمرین فرض منتظم بودن لازم است؛ در کدام قسمت برهان از آن استفاده می‌کنید؟

۷. ثابت کنید که اگر  $Y$  فضای نرمال با پایه  $\mathcal{B}$  باشد آنگاه  $Y$  را می توان در  $[0, 1]^J$  نشان داد، که در اینجا  $J$  زیر مجموعه ای است  $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ .
۸. برهان قضیه ۲.۲ را بتفصیل بررسی کنید.
۹. ثابت کنید که اگر  $\{f_\alpha\}$  خانواده ای از توابع پیوسته با مقادیر حقیقی بر  $X$  باشد به طوری که نقاط را از مجموعه های بسته جدا کند آنگاه توپولوژی  $X$  درشتترین (کوچکترین) توپولوژی است که در آن همه  $f_\alpha$  ها پیوسته اند.
۱۰. ثابت کنید اگر  $X$  تماماً منتظم باشد آنگاه به ازای مجموعه اندیسی مانند  $J$ ، می توان  $X$  را در  $[0, 1]^J$  نشان داد.
۱۱. فضای نرمال  $Y$  را يك توکشیده مطلق خوانیم اگر به ازای هر نشاننده  $Y$  در يك فضای نرمال  $Z$ ، مانند  $h: Y \rightarrow Z$ ، به طوری که  $h(Y)$  در  $Z$  بسته باشد آنگاه  $h(Y)$  يك توکشیده  $Z$  باشد. ثابت کنید که اگر  $Y$  فشرده باشد آنگاه احکام زیر معادل اند:
- (يك) به ازای  $J$  بی،  $Y$  با يك توکشیده  $[0, 1]^J$  همثومورف است.
- (دو) به ازای  $J$  بی،  $Y$  با يك توکشیده  $R^J$  همثومورف است.
- (سه)  $Y$  دارای خاصیت گسترش عمومی است.
- (چهار)  $Y$  يك توکشیده مطلق است.
- در واقع، بدون در نظر گرفتن فشردگی  $Y$ ، باید ثابت کنید که  
 (چهار)  $\implies$  (سه)  $\implies$  (دو)  $\implies$  (يك)
- و اگر  $Y$  فشرده باشد (يك)  $\implies$  (چهار). [داهنمایی: با دانسته گرفتن قضیه تیخونوف، می دانید که  $[0, 1]^J$  نرمال است.]
۱۲. (الف) ثابت کنید که مارپیچ لگاریتمی

$$C = \{0 \times 0\} \cup \{e^t \cos t \times e^t \sin t \mid t \in \mathbb{R}\}$$



يك توکشیده  $R^2$  است. آیا می‌توانید تابع توکش مشخصی مانند  $f: R^2 \rightarrow C$  تعریف کنید؟

(ب) ثابت کنید که  $K$ ، «محور گره‌خورده  $x$  ها» در شکل ۱۲، يك توکشیده  $R^3$  است.

۱۳\*. قضیه زیر را ثابت کنید:

قضیه. فرض کنید  $Y$  فضایی نرمال باشد. در این صورت،  $Y$  يك توکشیده مطلق است اگر و فقط اگر دارای خاصیت گسترش عمومی باشد.

[دانهمایی: اگر  $X$  و  $Y$  دو فضای نرمال جدا از هم باشند،  $A$  در  $X$  بسته، و نگاشت  $f: A \rightarrow Y$  پیوسته باشد آنگاه فضای الحاقی  $Z_f$  را چنین تعریف می‌کنیم: عبارت است از فضای خارج‌قسمتی حاصل از  $X \cup Y$  به وسیله یکی گرفتن هر نقطه  $a$  از  $A$  با نقطه  $f(a)$  و نیز با همه نقاط  $\{f(a)\}^{-1}$ . به کمک قضیه تیتسه، ثابت کنید که  $Z_f$  نرمال است.]

۱۴\*. زیر فضای  $Y$  از فضای  $Z$  را يك توکشیده همسایه‌ای  $Z$  خوانیم اگر  $Y$  يك توکشیده مجموعه‌ای باز از  $Z$  باشد. فضای نرمال  $Y$  را يك توکشیده همسایه‌ای مطلق خوانیم اگر  $Y$  يك توکشیده همسایه‌ای هر فضای نرمال  $Z$  باشد که در آن به عنوان يك زیر فضای بسته نشانده شده است. گوئیم  $Y$  دارای خاصیت گسترش همسایه‌ای عمومی است اگر هر نگاشت پیوسته مانند  $f: A \rightarrow Y$ ، که در آن  $A$  زیر مجموعه بسته‌ای از فضای نرمال  $X$  است، دارای گسترشی پیوسته به يك زیر مجموعه باز  $X$  در حول  $A$  باشد. تمرینهای ۱۱ و ۱۳ را به توکشیده همسایه‌ای تعمیم دهید.

### \*۴-۵ افرازه‌های واحد

ثابت کردیم که هر فضای منتظم با پایه شمارا را می‌توان در فضای اقلیدسی «با بعد نامتناهی»  $R^\omega$  نشانند. طبیعی است اگر سؤال شود تحت چه شرایطی فضای  $X$  را می‌توان در فضای اقلیدسی با بعد متناهی  $R^N$  نشانند. يك جواب این سؤال را در این بخش می‌آوریم؛ ثابت می‌کنیم هر بسلائی فشرده، به ازای عددی مانند  $N$ ، را می‌توان در  $R^N$  نشانند. در فصل ۷، هنگام مطالعه نظریه ابعاد، جواب کلیتری به دست می‌آید.

در برهان این بخش از خانواده بخصوصی از توابع بر  $X$ ،  $\{\phi_\alpha\}$ ، استفاده می‌شود که به «افراز واحد» موسوم است. ثابت شده است که چنین خانواده‌هایی ابزار بسیار

سودمندی در آنالیز، هندسه، و توپولوژی هستند. ما فقط حالت افرازهای متناهی واحد را در نظر خواهیم گرفت (که پیش از این هم لازم نداریم) و حالت کلی را به عنوان تمرین به عهده خواننده می گذاریم.

نخست، نیاز به چند اصطلاح داریم:

محمل تابع  $\phi: X \rightarrow R$  را بستارمجموعه  $\phi^{-1}(R - \{0\})$  تعریف می کنیم. بنابراین، اگر  $x$  خارج محمل  $\phi$  قرار گیرد آنگاه يك همسایگی  $x$  یافت می شود که  $\phi$  بر آن صفر است.

تعریف. فرض کنیم  $\{U_1, \dots, U_n\}$  يك پوشش باز اندیسدار متناهی فضای  $X$  باشد. خانواده اندیسداری از توابع پیوسته مانند

$$\phi_i: X \rightarrow [0, 1] \quad i = 1, 2, \dots, n$$

را يك افراز واحد مغلوب به وسیله  $\{U_i\}$  خوانیم اگر:

$$(1) \quad \phi_i \text{ به ازای هر } i, \text{ محمل } (\phi_i) \subset U_i$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1, \text{ به ازای هر } x$$

۱.۵. قضیه (وجود افرازهای متناهی واحد) فرض کنیم  $\{U_1, \dots, U_n\}$  يك پوشش باز متناهی فضای نرمال  $X$  باشد. در این صورت يك افراز واحد مغلوب به وسیله  $\{U_i\}$  موجود است.

پروهان. مرحله ۱. نخست، ثابت می کنیم که می توان پوشش  $\{U_i\}$  را به يك پوشش باز  $X$  مانند  $\{V_1, \dots, V_n\}$  تبدیل کرد به طوری که به ازای هر  $i, V_i \subset U_i$ . اثبات به استقراست. برای شروع، توجه کنید که مجموعه

$$A = X - (U_1 \cup \dots \cup U_n)$$

يك زیرمجموعه بسته  $X$  است. و چون  $\{U_1, \dots, U_n\}$  فضای  $X$  را می پوشاند، مجموعه  $A$  جزء مجموعه باز  $U_1$  است. بنابراین  $V_1$  بودن  $X$ ، مجموعه بازی مانند  $V_1$  موجود است به طوری که حاوی  $A$  است و  $V_1 \subset U_1$  در این صورت، گردایه  $\{V_1, U_2, \dots, U_n\}$  نیز  $X$  را می پوشاند.

در حالت کلی، فرض کنیم مجموعه های باز  $V_1, \dots, V_{k-1}$  مفروض باشند به طوری که گردایه

$$\{V_1, \dots, V_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \dots, U_n\}$$

۱. توجه کنید که «مغلوب به وسیله  $\{U_i\}$ »، صفت «افراز واحد» است نه صفت «واحد» - م.

$X$  را پوشانند، و فرض کنیم

$$A = X - (V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}) - (U_{k+1} \cup \dots \cup U_n).$$

در این صورت،  $A$  زیرمجموعه بسته‌ای از  $X$  است و جزء مجموعه باز  $U_k$  است. مجموعه باز  $V_k$  را چنان برمی‌گزینیم که حاوی  $A$  باشد و  $V_k \subset U_k$ . بنابراین،

$$\{V_1, \dots, V_{k-1}, V_k, U_{k+1}, \dots, U_n\}$$

$X$  را می‌پوشانند. در  $n$ مین مرحله استقرا، نتیجه موردنظر ثابت می‌شود.

مرحله ۲. اکنون، قضیه را ثابت می‌کنیم. به‌ازای پوشش باز مفروض  $X$  مانند  $\{U_1, \dots, U_n\}$  پوشش باز  $\{V_1, \dots, V_n\}$  از  $X$  را چنان برمی‌گزینیم که به‌ازای هر  $i$ ،  $V_i \subset U_i$ . سپس، یک پوشش  $X$  مانند  $\{W_1, \dots, W_n\}$  انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که به‌ازای هر  $i$ ،  $\bar{W}_i \subset V_i$ . بنابراین اورپسون، به‌ازای هر  $i$ ، تابع پیوسته

$$\psi_i: X \rightarrow [0, 1]$$

را طوری انتخاب می‌کنیم که  $\psi_i(\bar{W}_i) = \{1\}$  و  $\psi_i(X - V_i) = \{0\}$ . چون  $\psi_i^{-1}(R - \{0\})$  جزء  $V_i$  است، پس

$$(\psi_i \text{ محمل}) \subset V_i \subset U_i.$$

از طرفی چون گردایه  $\{W_i\}$  مجموعه  $X$  را می‌پوشانند، به‌ازای هر  $x$ ، حاصل جمع  $\Psi(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x)$  مثبت است. بنابراین، به‌ازای هر  $j$ ، تابع  $\phi_j$  را می‌توان چنین تعریف کرد:

$$\phi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\Psi(x)}.$$

سهولت می‌توان تحقیق کرد که توابع  $\phi_1, \dots, \phi_n$  افزاز واحد مطلوب را تشکیل می‌دهند.  $\square$

تعریف. یک بسلاي  $m$  بعدی عبارت است از فضای هاوسدورفی مانند  $X$  با یک پایه شمارا به‌طوری‌که هر نقطه آن یک همسایگی هومومورف با یک زیر مجموعه باز  $R^m$  داشته باشد.

اغلب بسلاي ۱ بعدی را منحنی و بسلاي ۲ بعدی را رویه می‌نامیم. بسلاها رده بسیار مهمی از فضاها را تشکیل می‌دهند؛ آنها را بیشتر در هندسه دیفرانسیل و توپولوژی جبری مورد مطالعه قرار می‌دهند.

ثابت می‌کنیم که اگر  $X$  یک بسلاي فشرده باشد آنگاه  $X$  را می‌توان در یک فضای

اقلیدسی با بعد متناهی نشاند. این قضیه بدون فرض فشردگی نیز برقرار است، ولی در آن حالت برهان آن بسیار دشوارتر است.

۲.۵. قضیه اگر  $X$  یک بسلاهی  $m$  بعدی فشرده باشد آنگاه به ازای عدد صحیح مثبتی مانند  $N$ ، می توان  $X$  را در  $R^N$  نشانند.

برهان. فضای  $X$  را با تعدادی متناهی از مجموعه های باز  $\{U_1, \dots, U_n\}$  می پوشانیم به طوری که هر یک از  $U_i$  ها را بتوان  $R^m$  نشانند. به ازای هر  $i$ ، تابع نشانندن  $g_i: U_i \rightarrow R^m$  را در نظر می گیریم. چون  $X$  هاوسدورف و فشرده است، در نتیجه نرمال است. فرض کنیم  $\phi_1, \dots, \phi_n$  یک افراز واحد مغلوب به وسیله  $\{U_i\}$  باشد؛ و  $A_i = (\phi_i)$  (محمل) تابع  $h_i: X \rightarrow R^m$  را به ازای  $i = 1, \dots, n$ ، با ضابطه زیر تعریف می کنیم:

$$h_i(x) = \begin{cases} \phi_i(x) \cdot g_i(x) & , x \in U_i \text{ به ازای} \\ \mathbf{o} = (0, \dots, 0) & , x \in X - A_i \text{ به ازای} \end{cases}$$

[که در اینجا  $\phi_i(x)$  عددی است حقیقی مانند  $c$  و  $g_i(x)$  نقطه ای است از  $R^m$  مانند  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$  و حاصل ضرب  $c\mathbf{y}$  نقطه  $(cy_1, \dots, cy_m)$  از  $R^m$  را نمایش می دهد.] از آنجا که دو ضابطه تعریف  $h_i$  بر فصل مشترک قلمروهای خود یک مقدار دارند، تابع  $h_i$  خوشتعریف است. بعلاوه،  $h_i$  پیوسته است، زیرا تحدید آن به مجموعه های باز  $U_i$  و  $X - A_i$  پیوسته است.

اکنون، تابع

$$F: X \rightarrow \underbrace{(R \times \dots \times R)}_{n \text{ بار}} \times \underbrace{(R^m \times \dots \times R^m)}_{n \text{ بار}}$$

را با ضابطه زیر تعریف می کنیم:

$$F(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x), h_1(x), \dots, h_n(x)).$$

پیوستگی  $F$  بدیهی است. برای اثبات اینکه  $F$  یک نشاننده است تنها لازم است ثابت کنیم که  $F$  یک به یک است (چون  $X$  فشرده است). فرض کنیم  $F(x) = F(y)$  در این صورت، به ازای هر  $i$ ،  $\phi_i(x) = \phi_i(y)$  و  $h_i(x) = h_i(y)$  اکنون به ازای اندیسی مانند  $i$ ،  $\phi_i(x) > 0$  [چون  $\sum \phi_i(x) = 1$ ]. پس  $\phi_i(y) > 0$ ، و در نتیجه،  $x, y \in U_i$  پس،

$$\phi_i(x) \cdot g_i(x) = h_i(x) = h_i(y) = \phi_i(y) \cdot g_i(y).$$

از طرفی چون  $\phi_i(x) = \phi_i(y) > 0$ ، خواهیم داشت  $g_i(x) = g_i(y)$ . اما، بنا بر

يك به يك بودن  $x = y, g_i: U_i \rightarrow R^m$ ؛ و این همان است که می‌خواستیم. □

در بسیاری از کاربردهای افراز واحد، نظیر همین مورد اخیر، تنها چیز ضروری آن است که به ازای هر  $x$ ، حاصل جمع  $\sum \phi_i(x)$  مثبت باشد. اگرچه، مواردی هم پیش می‌آید که شرط قویتر  $\sum \phi_i(x) = 1$  لازم است. بخش ۷-۹ را ملاحظه کنید.

### تمرینها

۱. ثابت کنید که هر بسلا فضایی است منتظم و در نتیجه متری پذیر است. در کدام قسمت برهان از شرط هاوسدورف استفاده می‌کنید؟
۲. فرض کنید  $X$  يك فضای هاوسدورف فشرده باشد. همچنین فرض کنید به ازای هر  $x$  از  $X$ ، يك همسایگی آن مانند  $U$  و عدد صحیح مثبتی مانند  $k$  موجود باشد به طوری که  $U$  را بتوان در  $R^k$  نشان داد. ثابت کنید عدد صحیح مثبتی مانند  $N$  موجود است به طوری که  $X$  را می‌توان در  $R^N$  نشان داد.
۳. گردایه اندیسدار  $\{A_\alpha\}$  از زیرمجموعه‌های  $X$  را يك خانواده اندیسدار نقطه - متناهی نامیم اگر هر  $x$  از  $X$  تنها به ازای تعدادی متناهی از مقادیر  $\alpha$  به  $A_\alpha$  تعلق داشته باشد.
- لم (لم درهم کشیدن). فرض کنید  $X$  يك فضای نرمال باشد،  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  يك پوشش باز اندیسدار نقطه - متناهی  $X$ . در این صورت، يك پوشش باز اندیسدار  $X$  مانند  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$  موجود است به طوری که به ازای هر  $\alpha, V_\alpha \subset U_\alpha$ .
- (الف) در حالتی که  $J = Z_+$ ، به استقرا، لم فوق را ثابت کنید. در کدام قسمت برهان از این امر که  $\{U_\alpha\}$  نقطه - متناهی است استفاده می‌کنید؟
- \* (ب) با به کار گیری استقرای ترانسفینی، لم فوق را به ازای مجموعه اندیسگذار خوشترتیب دلخواهی مانند  $J$  ثابت کنید.
۴. خانواده اندیسدار  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  از زیرمجموعه‌های فضای  $X$  را يك خانواده اندیسدار موضعاً متناهی نامیم اگر هر نقطه  $x$  يك همسایگی داشته باشد که تنها به ازای تعدادی متناهی از مقادیر  $\alpha$ ،  $A_\alpha$  را قطع کند.
- فرض کنید  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  يك پوشش باز اندیسدار  $X$  باشد. يك خانواده از توابع پیوسته مانند

$$\phi_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$$

را که به وسیله  $\alpha \in J$  اندیسگذاری شده است يك افراز واحد مغلوب به وسیله  $\{U_\alpha\}$  گوئیم اگر

(يك) به ازای هر  $\alpha$  از  $J$ ،  $U_\alpha \subset (\text{محمل } \phi_\alpha)$ ،

(دو) خانواده  $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J}$  موضعاً متناهی باشد،



(سه) به ازای هر  $x$ ،  $\sum_{\alpha \in J} \phi_{\alpha}(x) = 1$ .

[حاصل جمع بالا به ازای نقطه مفروض  $x$  با معنی است. زیرا، تنها برای تعداد متناهی از مقادیر  $\alpha$  داریم  $\phi_{\alpha}(x) \neq 0$ ] با فرض لم درهم کشیدن، قضیه زیر را ثابت کنید:

قضیه. اگر  $X$  فضایی نرمال باشد و  $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$  يك خانواده اندیسدار موضعاً متناهی از مجموعه‌های بازی باشد که  $X$  را می‌پوشاند آنگاه يك افراز واحد مغلوب به وسیله  $\{U_{\alpha}\}$  موجود است.

۵. اگر  $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$  گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های  $X$  باشد، گوییم گردایه‌ای مانند  $\{V_{\beta}\}_{\beta \in K}$  گردایه  $\{U_{\alpha}\}$  را ظریف می‌کند در صورتی که به ازای هر  $V_{\beta}$ ، حداقل يك  $U_{\alpha}$  باشد که حاوی آن است.

قضیه. فرض کنید  $X$  فضایی نرمال باشد و  $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$  يك پوشش باز اندیسدار  $X$ . اگر پوشش بازی مانند  $\{V_{\beta}\}_{\beta \in K}$  از  $X$  موجود باشد که  $\{U_{\alpha}\}$  را ظریف‌کند و موضعاً متناهی باشد آنگاه يك افراز واحد مغلوب به وسیله  $\{U_{\alpha}\}$  وجود دارد. [داهنمایی: تابع  $f: K \rightarrow J$  را چنان برگزینید که  $V_{\beta} \subset U_{f(\beta)}$ . فرض کنید  $W_{\alpha}$  اجتماع  $V_{\beta}$ هایی باشد که  $f(\beta) = \alpha$ ; ثابت کنید که  $\{W_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$  موضعاً متناهی است.]

فضای هاوسدورف  $X$  را پیرافشرده نامیم اگر هر پوشش باز  $X$  يك نظریف موضعاً متناهی داشته باشد که  $X$  را پوشاند. فضاهاى پیرافشرده را در فصل ۶ مطالعه خواهیم کرد.

۶. شرط هاوسدورف بودن يك قسمت ضروری تعريف بسلاست، یعنی سایر قسمتهای تعريف مستلزم این شرط نیست. زیرمجموعه زیر از  $R^2$  را اختیار کنید:

$$X = (R \times 0) \cup (R_+ \times 1).$$

روی  $X$  توپولوژی تعريف می‌کنیم که مجموعه‌هایی به صورت انواع زیر يك پایه آن را تشکیل می‌دهند:

(يك)  $(a, b) \times 0$ ، به ازای  $a < b$ ،

(دو)  $(a, b) \times 1$ ، به ازای  $0 \leq a < b$ ،

(سه)  $([0, b) \times 1) \cup ((a, 0) \times 0)$ ، به ازای  $a < 0 < b$ .

(الف) ثابت کنید که این مجموعه‌ها تشکیل يك پایه را می‌دهند.

(ب) ثابت کنید که هر يك از زیرفضاهای  $R \times 0$  و  $(R_+ \times 1) \cup (R_- \times 0)$  از  $X$  با  $R$  هم‌شومورف است.

(پ) ثابت کنید که  $X$  دارای پایه‌ای شماراست، مجموعه‌های متناهی در  $X$

بسته‌اند، و هر نقطه  $X$  يك همسایگی هومئومورف با يك مجموعه باز  $R$  دارد.  
(ت) ثابت کنید که  $X$  هاوسدورف نیست.

### \*تمرینهای تکمیلی: مروری بر قسمت اول

صفات زیر را که ممکن است فضایی متصف به آنها باشد در نظر بگیرید:

- (۱) همبند
- (۲) همبند راهی
- (۳) موضعاً همبند
- (۴) موضعاً همبند راهی
- (۵) فشرده
- (۶) فشرده بر حسب نقطه حدی
- (۷) موضعاً فشرده هاوسدورف
- (۸) هاوسدورف
- (۹) منتظم
- (۱۰) نرمال
- (۱۱) شمارای نوع اول
- (۱۲) شمارای نوع دوم
- (۱۳) لیند洛夫
- (۱۴) دارای زیرمجموعه چگال شمارا
- (۱۵) موضعاً متریک پذیر
- (۱۶) متریک پذیر

۱. در مورد هر يك از فضاهای زیر (در صورت امکان) تعیین کنید که دارای کداميك از صفات فوق است. (در صورت لزوم می‌توانید قضیه تیخونوف را دانسته بگیرید.)

- (الف)  $S_{\mathbb{R}}$
- (ب)  $\bar{S}_{\mathbb{R}}$
- (پ)  $S_{\mathbb{R}} \times \bar{S}_{\mathbb{R}}$
- (ت)  $S_{\mathbb{R}} \times [0, 1]$  با ترتیب قاموسی
- (ث)  $I \times I$  با ترتیب قاموسی، که در آن  $I = [0, 1]$
- (ج)  $R_1$
- (چ)  $R_1^2$
- (ح)  $R^{\omega}$  با توپولوژی جعبه‌ای، حاصل ضربی، و یکنواخت

(خ)  $R'$  با توپولوژی حاصل ضربی

(د)  $R$  با توپولوژی متمم متناهی

۲. کدامیک از صفات فوق را هر فضای متری الزاماً باید داشته باشد؟
  ۳. کدامیک از این صفات را هر فضای هاوسدورف فشرده دارد؟
  ۴. کدامیک از این خواص برای زیرفضاها محفوظ می ماند؟ کدامیک برای زیرفضاهای باز؟ کدامیک برای زیرفضاهای بسته؟
  ۵. کدامیک از این صفات تحت حاصل ضربهای متناهی محفوظ می ماند؟ کدامیک تحت حاصل ضربهای شمارا؟ کدامیک تحت حاصل ضربهای دلخواه؟
  ۶. کدامیک از این خواص به وسیله نگاشتهای پیوسته محفوظ می ماند؟
  ۷. پس از مطالعه فصول ۵، ۶ و ۷، تمرینهای ۱-۶ را برای صفات زیر تکرار کنید:
    - (۱۷) تماماً منتظم
    - (۱۸) پیرافشرده
    - (۱۹) از جنبه توپولوژیکی تمام
- باید بتوانید به همه ۳۳۶ سؤالی که در تمرینهای ۱-۶ مطرح شده، بجز یکی از آنها، پاسخ دهید؛ همین طور همه ۶۳ سؤال تمرین ۷، به استثنای یکی از آنها. این دو سؤال هنوز حل نشده اند، تبصره تمرین ۱۰ از بخش ۴-۲ را ملاحظه کنید.

## قسمت دوم

# ۵

### قضیه تیخونوف

اینک به مسئله‌ای باز می‌گردیم که در فصل ۳ حل نشده رهاش کردیم. می‌خواهیم قضیه تیخونوف را ثابت کنیم، که می‌گوید هر حاصل ضرب دلخواه از فضاهاى فشردۀ فضائی است فشردۀ برهان از اصل ماکزیموم نظریهٔ مجموعه‌ها بهره می‌گیرد (بخش ۱ - ۱۱ را نگاه کنید).

قضیه تیخونوف برای علمای آنالیز بسیار سودمند است (و برای هندسه‌دانان کمتر). در بخش ۵ - ۲ این قضیه را در به‌دست آوردن مشخصهٔ جالبی از فضاهاى تماماً منظم به‌کار خواهیم بست. کاربرد دیگر این قضیه در بخش ۵ - ۳ می‌آید، که در آنجا فشردۀ سازی استون - چخ<sup>۱</sup> را می‌سازیم و به جستجوی خواص آن می‌پردازیم. در این بخش مطالب بخش ۳ - ۸، فشردگی موضعی، را دانسته می‌گیریم.

### ۵ - ۱ قضیه تیخونوف

قضیه تیخونوف، همچون لم اورسون، از آن دست احکامی است که ما آنرا «عمیق» می‌خوانیم. در برهان آن، نه يك، بلکه چندین نکتهٔ اساسی وجود دارد؛ این برهان به هیچ وجه سراسر است و مستقیم نیست. پیش از آنکه وارد اصل برهان شویم، نکات حساس آنرا با قدری تفصیل بررسی می‌کنیم.

در فصل ۳، ثابت کردیم که  $X \times Y$ ، حاصل ضرب دو فضای فشردۀ فضایی است فشردۀ. برای آن برهان، صورتی از تعریف فشردگی که با پوششهای باز بیان می‌شود کاملاً رضایتبخش بود. به‌ازای پوشش باز مفروضی برای  $X \times Y$  از اعضای پایه،

هر قاج  $X \times Y$  را به وسیله تعدادی متناهی از آنها پوشاندیم، و به دنبال آن پوششی متناهی برای  $X \times Y$  ساختیم.

این شیوه، هر قدر هم با مهارت به کار رود، برای اثبات فشرده بودن حاصل ضربی نامتناهی از فضاهای فشرده کارگر نمی تواند باشد. پس نخستین نکته در برهان قضیه تیخونوف کنار گذاشتن پوششهای باز و به کارگیری صورتی از تعریف فشرده گی است که بر حسب مجموعه های بسته بیان می شود. در واقع، آنچه مورد استفاده ماست، صورتی است که در نتیجه ۱۰.۵ در فصل ۳ بیان شد، بدین مضمون که فضای  $X$  فشرده است اگر و فقط اگر به ازای هر گردایه مانند  $\mathcal{A}$  از زیرمجموعه های  $X$  که در شرط مقطع متناهی صدق کند، مقطع  $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$  از بستارهای اعضای  $\mathcal{A}$  ناتهی باشد.

برای آشنا شدن با چگونگی عمل این شیوه، نخست ساده ترین حالت را در نظر می گیریم: مثلاً حاصل ضرب دو فضای فشرده  $X_1 \times X_2$ . فرض کنیم  $\mathcal{A}$  گردایه ای از زیرمجموعه های  $X_1 \times X_2$  باشد که در شرط مقطع متناهی صدق می کند. نگاشت تصویری  $\pi_1: X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$  را در نظر می گیریم. گردایه

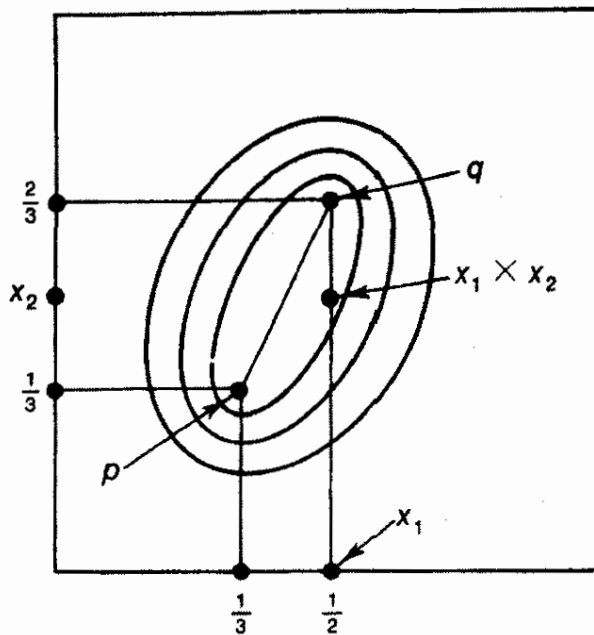
$$\{\pi_1(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

از زیرمجموعه های  $X_1$  نیز در شرط مقطع متناهی صدق می کند. زیرا، اگر  $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n$  آنگاه  $\pi_1(x) \in \pi_1(A_1) \cap \dots \cap \pi_1(A_n)$ ، پس مجموعه اخیر ناتهی است. فشرده گی  $X_1$  ناتهی بودن مقطع همه مجموعه های به شکل  $\overline{\pi_1(A)}$  را تضمین می کند. فرض کنیم  $x_1$  نقطه ای از این مقطع باشد. به همین قیاس،  $x_2$  را نقطه ای از مقطع همه مجموعه های به شکل  $\overline{\pi_2(A)}$  انتخاب می کنیم. نتیجه روشنی که میل داریم به دست بیاوریم آن است که  $x_1 \times x_2$  به  $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$  تعلق دارد، چه در آن صورت قضیه ثابت می شود.

ولی این نتیجه متأسفانه درست نیست. مثال ذیل را در نظر می گیریم، که در آن  $X_1 = X_2 = [0, 1]$  و گردایه  $\mathcal{A}$  عبارت است از همه نواحی بیضی شکل محدود به بیضیهایی به کانونهای  $p = (1/3, 1/3)$  و  $q = (1/3, 2/3)$ . به شکل ۱ نگاه کنید. مسلماً  $\mathcal{A}$  در شرط مقطع متناهی صدق می کند. حال، نقطه ای مانند  $x_1$  از مقطع مجموعه های  $\{\overline{\pi_1(A)} \mid A \in \mathcal{A}\}$  اختیار می کنیم.  $x_1$  می تواند هر نقطه ای از بازه  $[1/3, 1/2]$  باشد؛ فرض کنید نقطه  $x_1 = 1/2$  را انتخاب کرده باشیم. به همین قیاس، نقطه ای مانند  $x_2$  متعلق به مقطع مجموعه های  $\{\overline{\pi_2(A)} \mid A \in \mathcal{A}\}$  انتخاب می کنیم.  $x_2$  نیز می تواند هر نقطه ای از بازه  $[1/3, 2/3]$  باشد؛ فرض کنیم نقطه  $x_2 = 1/2$  را انتخاب کرده باشیم. اما، این انتخاب نامطلوبی است، چه نقطه

$$x_1 \times x_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

متعلق به مقطع مجموعه‌های  $\bar{A}$  نیست.



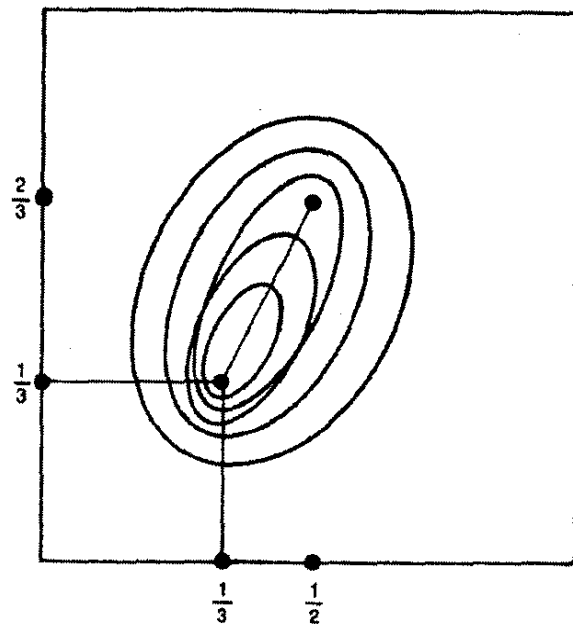
شکل ۱

حتماً می‌گویید: «انتخابمان بد بوده است. مثلاً، اگر بعد از انتخاب  $x_1 = 1/2$ ، نقطه  $x_2 = 2/3$  را اختیار کرده بودیم، آن وقت نقطه‌ای در  $\bar{A}$  می‌یافتیم». ولی، اشکال برهان متزلزل ما در این است که دست ما را بیش از اندازه در انتخاب نقاط  $x_1$  و  $x_2$  باز گذاشته است؛ چنانکه به ما امکان داد به جای انتخابی «خوب» انتخابی «بد» انجام دهیم.

برای پرهیز از این دشواری چه تغییری می‌توانیم در برهان به عمل آوریم؟ این پرسش منجر به دومین نکته برهان قضیه تیخونوف می‌شود: گردایه  $\mathcal{A}$  را طوری گسترش می‌دهیم (البته، به طوری که شرط مقطع منتهای محفوظ بماند) که این گسترش انتخابهای  $x_1$  و  $x_2$  را آن قدر مقید کند که ما مجبور به انتخاب «صحیح» باشیم. برای روشن شدن موضوع، فرض کنیم در مثال قبلی گردایه  $\mathcal{A}$  را به گردایه‌ای مانند  $\mathcal{D}$  گسترش داده باشیم که عبارت است از همه نواحی بیضی شکل محدود به بیضیهایی که يك کانون آنها نقطه  $p = (1/3, 1/3)$  و کانون دیگر آنها در هر نقطه‌ای از قطعه خط  $pq$  است. این گردایه در شکل ۲ نشان داده شده است. گردایه جدید  $\mathcal{D}$  نیز در شرط مقطع منتهای صدق می‌کند. اما، اگر بخواهید نقطه‌ای مانند  $x_1$  در

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_1(D)}$$

انتخاب کنید، تنها انتخاب ممکن برای  $x_1$  نقطه  $1/3$  است. همچنین، تنها انتخاب ممکن



شکل ۲

برای  $x_2$  نیز  $1/3$  است. ونقطه  $1/3 \times 1/3$  بی شک به هر مجموعه  $D$  تعلق دارد، و در نتیجه متعلق به هر  $\bar{A}$  است. به بیان دیگر، گسترش گردایه  $A$  به گردایه  $D$  انتخاب مناسب را بر ما تحمیل می کند.

البته ملاحظه می شود که در این مثال  $D$  را دقیقاً طوری انتخاب کردیم که برهانمان انجام گیرد. در حالت کلی، آیا امکان انتخاب صحیح  $D$  وجود دارد؟ اینجا سومین نکته برهان پدیدار می شود: چرا کار را ساده نکنیم و  $D$  را گردایه ای «به قدر امکان وسیع» انتخاب نکنیم - به طوری که هیچ گردایه بزرگتر از آن در شرط مقطع متناهی صدق نکند - و بعد ببینیم که این گردایه برای مقصود ما مفید است یا نه؟ اما وجود چنین گردایه ای به هیچ وجه بدیهی نیست؛ برای اثبات آن باید به اصل ماکزیموم نظریه مجموعه ها توسل جست. بعد از اثبات وجود  $D$ ، در واقع، باید ثابت کنیم که وسعت کافی  $D$  انتخابهای صحیح را بر ما تحمیل می کند.

اکنون برهانی را با به کار گیری نکات بالا آغاز می کنیم:

۱.۱. قضیه (قضیه تیخونوف) هر حاصل ضرب دلخواه از فضاها ی فشرده با توپولوژی

حاصل ضربی فشرده است.

برهان. مرحله ۱. فرض کنیم  $X$  مجموعه ای باشد؛ و  $A$  گردایه ای از

زیرمجموعه های  $X$  که در شرط مقطع متناهی صدق می کند. ثابت می کنیم که گردایه ای مانند  $D$  از زیرمجموعه های  $X$  وجود دارد به طوری که

$$A \subset D \quad (1)$$

(۲)  $\mathcal{D}$  در شرط مقطع متناهی صدق می کند.

(۳) اگر  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$  آنگاه  $\mathcal{C}$  در شرط مقطع متناهی صدق نمی کند.

معمولاً دو شرط (۲) و (۳) را چنین بیان می کنند که  $\mathcal{D}$  «نسبت به شرط مقطع متناهی ماکزیمال» است.

اصل ماکزیموم را به خاطر بیاورید. برطبق این اصل، اگر  $<$  رابطه ترتیبی جزئی اکیدی در مجموعه  $A$  باشد، و  $B$  زیرمجموعه ای از  $A$  باشد که به وسیله  $<$  مرتب ساده شده است آنگاه زیرمجموعه مرتب ساده ماکزیمالی از  $A$ ، مانند  $C$ ، یافت می شود که حاوی  $B$  است. در اینجا به حالت خاصی از این اصل، که در آن  $B$  یک زیرمجموعه تک عضوی  $A$  است، نیاز داریم. چنین زیرمجموعه ای خود به خود مرتب ساده است. بدین ترتیب آنچه مورد نیاز ماست از این قرار است:

اگر  $A$  مجموعه ای با یک ترتیب جزئی اکید و  $a$  عضوی از  $A$  باشد آنگاه زیرمجموعه مرتب ساده ماکزیمالی از  $A$ ، مانند  $C$ ، وجود دارد به طوری که  $a \in C$ . ما این اصل را در موردی به کار خواهیم بست که  $A$  نه یک مجموعه است، و نه حتی گردایه ای از مجموعه ها، بلکه مجموعه ای است که اعضای آن گردایه هایی از مجموعه ها هستند. به منظور تسهیل کار در این برهان، چنین مجموعه ای را یک «ابرمجموعه» می نامیم و آن را با یک حرف خطدار نمایش می دهیم. این علامت گذاری را می توان چنین خلاصه کرد:

$c$  عضوی از  $X$  است،

$C$  زیرمجموعه ای از  $X$  است،

$\mathcal{C}$  گردایه ای از زیرمجموعه های  $X$  است،

$\mathcal{C}$  ابرمجموعه ای از گردایه های زیرمجموعه های  $X$  است.

گردایه  $\mathcal{A}$  از زیرمجموعه های  $X$ ، که در شرط مقطع متناهی صدق می کند، مفروض است. فرض کنیم  $\mathcal{A}$  ابرمجموعه ای باشد متشکل از همه گردایه های زیرمجموعه های  $X$  که در شرط مقطع متناهی صدق می کنند. در این صورت،  $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ . رابطه جزئیت سره  $\subseteq$  را به عنوان یک رابطه ترتیبی جزئی اکید بر  $\mathcal{A}$  به کار می بریم. بنا برحالت خاصی از اصل ماکزیموم که در بالا بیان شد، ابرزیرمجموعه مرتب ساده ماکزیمالی مانند  $\mathcal{C}$  از  $\mathcal{A}$  وجود دارد به طوری که  $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ .

گردایه  $\mathcal{D}$  را مساوی اجتماع اعضای  $\mathcal{C}$  تعریف می کنیم؛

$$\mathcal{D} = \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}} \mathcal{C}$$

مدعی هستیم که  $\mathcal{D}$  همان گردایه مطلوب است.

نخست، ملاحظه می کنیم که  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ ، زیرا،  $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ . ثانیاً، ثابت می کنیم که  $\mathcal{D}$  در شرط مقطع متناهی صدق می کند. فرض کنیم  $D_1, \dots, D_n$  اعضای  $\mathcal{D}$  باشند. چون  $\mathcal{D}$  اجتماع اعضای  $\mathcal{C}$  است، به ازای هر  $i$ ، عضوی مسانند  $\mathcal{C}_i$  از  $\mathcal{C}$  وجود دارد



به طوری که  $D_i \in \mathcal{C}_i$ . اما  $\mathcal{C}$  تحت رابطه جزئیت سره مرتب ساده است. بنابراین، ابرمجموعه  $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$  نیز تحت جزئیت سره مرتب ساده است. چون این ابرمجموعه متناهی است، دارای بزرگترین عضو است؛ یعنی، اندیسی مانند  $k$  هست که به ازای هر  $i$  که  $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_k$ ،  $i = 1, \dots, n$ ، بالاختص، مجموعه‌های  $D_1, \dots, D_n$  همه به  $\mathcal{C}_k$  تعلق دارند. بنا بر فرض، چون  $\mathcal{C}_k$  در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند، پس  $D_1 \cap \dots \cap D_n$  ناتهی است.

ثالثاً، ثابت می‌کنیم که  $\mathcal{D}$  نسبت به شرط مقطع متناهی ماکزیمال است. فرض کنیم  $\mathcal{E} \subsetneq \mathcal{D}$  و  $\mathcal{E}$  در شرط مقطع متناهی صدق کند. در این صورت، با افزودن عضو  $\mathcal{E}$  به  $\mathcal{C}$  می‌توانیم ابرمجموعه‌ای جدید مانند  $\mathcal{C}'$  تشکیل دهیم؛

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \{\mathcal{E}\}$$

اکنون، به ازای هر  $\mathcal{C}$  از  $\mathcal{C}$ ، داریم  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ ، و  $\mathcal{E} \subsetneq \mathcal{D}$ . بنابراین، هر دو عضو  $\mathcal{C}'$  تحت رابطه جزئیت سره با هم مقایسه‌پذیرند، در نتیجه  $\mathcal{C}'$  مرتب ساده است. و این با ماکزیمال بودن  $\mathcal{C}$  متناقض است.

مرحله ۲.  $\mathcal{D}$  را گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های  $X$  می‌گیریم که نسبت به شرط مقطع متناهی ماکزیمال باشد. در این صورت:

(الف) هر مقطع متناهی از اعضای  $\mathcal{D}$  متعلق به  $\mathcal{D}$  است.

فرض کنیم  $B$  مقطع تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{D}$  باشد. با افزودن  $B$  به  $\mathcal{D}$ ، گردایه جدیدی مانند  $\mathcal{E}$  تعریف می‌شود. یعنی  $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{B\}$ . ثابت می‌کنیم که  $\mathcal{E}$  در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند؛ سپس، از ماکزیمال بودن  $\mathcal{D}$  نتیجه می‌گیریم که  $\mathcal{D} = \mathcal{E}$ ، و در نتیجه  $B \in \mathcal{D}$ ، و این همان است که می‌خواستیم.

تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{E}$  را در نظر می‌گیریم. اگر هیچکدام از آنها مجموعه  $B$  نباشد آنگاه مقطع آنها ناتهی است، زیرا  $\mathcal{D}$  در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند. اگر یکی از آنها مجموعه  $B$  باشد آنگاه مقطع آنها به صورت

$$D_1 \cap \dots \cap D_n \cap B$$

است. از آنجا که  $B$  مساوی مقطعی متناهی از اعضای  $\mathcal{D}$  است، این مجموعه ناتهی است.

(ب) اگر  $A$  زیرمجموعه دلخواهی از  $X$  باشد که هر عضو  $\mathcal{D}$  را قطع کند آنگاه  $A$  به  $\mathcal{D}$  تعلق دارد.

به ازای  $A$  مفروض، قرار می‌دهیم  $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{A\}$ . ثابت می‌کنیم که  $\mathcal{E}$  در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند، و از آن نتیجه می‌گیریم که  $A$  به  $\mathcal{D}$  تعلق دارد. تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{E}$  را در نظر می‌گیریم. اگر هیچکدام از آنها مجموعه  $A$  نباشند، مقطع آنها خود به خود ناتهی است. در غیر این صورت، این مقطع به صورت

$$D_1 \cap \dots \cap D_n \cap A$$

می‌شود. حال، بنا بر (الف)،  $D_1 \cap \dots \cap D_n$  متعلق به  $\mathcal{D}$  است؛ پس، بنا بر فرض، این مقطع ناتهی است.

مرحله ۳. اینک قضیه تیخونوف را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha,$$

که در آن  $X_\alpha$  ها فضاهایی فشرده‌اند. فرض کنیم  $\mathcal{A}$  گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های  $X$  باشد که در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند. ثابت می‌کنیم که

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$$

ناتهی است. از اینجا فشردگی  $X$  نتیجه می‌شود.

با به کار گرفتن مرحله ۱، گردایه‌ای مانند  $\mathcal{D}$  از زیرمجموعه‌های  $X$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $A \subset \mathcal{D}$  و نسبت به شرط مقطع متناهی ماکزیمال باشد. کافی است ثابت کنیم که  $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bar{D}$  ناتهی است.

به‌ازای هر عضو  $J$  مانند  $\alpha$ ، طبق معمول، فرض می‌کنیم  $\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$  همان نگاشت تصویری باشد. گردایه

$$\{\pi_\alpha(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$$

از زیرمجموعه‌های  $X_\alpha$  را در نظر می‌گیریم. این گردایه در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند، زیرا  $\mathcal{D}$  چنین است. بنا بر فشردگی  $X_\alpha$ ، به‌ازای هر  $\alpha$ ، می‌توانیم نقطه‌ای از  $X_\alpha$  مانند  $x_\alpha$  چنان انتخاب کنیم که

$$x_\alpha \in \overline{\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \pi_\alpha(D)}.$$

فرض کنیم  $x$  نقطه  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$  از  $X$  باشد. ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر  $D$  از  $\mathcal{D}$ ،  $x \in \bar{D}$ . بدین‌گونه، برهان به‌انجام می‌رسد.

نخست، ثابت می‌کنیم که اگر  $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$  عضو زیر پایه دلخواهی (برای توپولوژی حاصل ضربی در  $X$ ) باشد که شامل  $x$  است آنگاه  $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$  هر عضو  $\mathcal{D}$  را قطع می‌کند: مجموعه  $U_\beta$  یک همسایگی  $x_\beta$  در  $X_\beta$  است. بنا بر تعریف، چون  $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(D)}$ ،  $U_\beta$  مجموعه  $\pi_\beta(D)$  را در نقطه‌ای مانند  $\pi_\beta(y)$  قطع می‌کند، که در آن  $y \in D$ . از اینجا نتیجه می‌شود که  $y \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap D$ .

از گزاره (ب) در مرحله ۲ نتیجه می‌شود که هر عضو پایه‌ای که شامل  $x$  باشد به  $\mathcal{D}$  تعلق دارد. از آنجا، بنا بر گزاره (الف) در مرحله ۲، نتیجه می‌شود که هر

عضو پایه‌ای که شامل  $X$  باشد به  $\mathcal{D}$  تعلق دارد. چون  $\mathcal{D}$  در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند، این بدان معنی است که هر عضو پایه‌ای که شامل  $X$  باشد هر عضو  $\mathcal{D}$  را قطع می‌کند؛ بنابراین، به ازای هر  $D$  از  $\mathcal{D}$ ،  $X \in D$ ، و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

### تمرینها

۱. فرض کنید  $X$  فضایی باشد، و  $\mathcal{D}$  گردایه‌ای ماکزیمال از زیرمجموعه‌های  $X$  که در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند.

(الف) ثابت کنید که به ازای هر  $D$  از  $\mathcal{D}$ ،  $x \in D$  اگر و فقط اگر هر همسایگی  $x$  به  $\mathcal{D}$  تعلق داشته باشد. در کدام استلزام از ماکزیمال بودن  $\mathcal{D}$  استفاده می‌شود؟

(ب) فرض کنید  $D \in \mathcal{D}$ . ثابت کنید که اگر  $D \subset A$  آنگاه  $A \in \mathcal{D}$ .

(پ) ثابت کنید که اگر  $X$  هاوسدورف باشد، حداکثر یک نقطه در  $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} D$  موجود است.

۲. گردایه‌ای مانند  $\mathcal{A}$  از زیرمجموعه‌های  $X$  در صورتی در شرط مقطع شمارا صدق می‌کند که هر مقطع شمارا از اعضای  $\mathcal{A}$  ناتهی باشد. ثابت کنید که  $X$  یک فضای لیندولوف است اگر و فقط اگر به ازای هر گردایه از زیرمجموعه‌های  $X$  مانند  $\mathcal{A}$  که در شرط مقطع متناهی صدق کند،

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A} \neq \emptyset.$$

۳. سه حکم ذیل را در نظر بگیرید:

(یک) اگر  $\mathcal{A}$  گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه  $X$  باشد که در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند آنگاه گردایه‌ای مانند  $\mathcal{D}$  از زیرمجموعه‌های  $X$  وجود دارد به طوری که  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$  و نسبت به شرط مقطع شمارا ماکزیمال است.

(دو) فرض کنید  $\mathcal{D}$  نسبت به شرط مقطع شمارا ماکزیمال باشد. در این صورت، مقاطع شمارای اعضای  $\mathcal{D}$  در  $\mathcal{D}$  قرار دارند. و اگر  $A$  زیرمجموعه‌ای از  $X$  باشد که هر عضو  $\mathcal{D}$  را قطع می‌کند آنگاه الزاماً  $A \in \mathcal{D}$ .

(سه) هر حاصل ضربی از فضاهای لیندولوف فضایی است لیندولوف.

(الف) حکم (دو) را ثابت کنید.

(ب) ثابت کنید که (یک) و (دو) هر دو باهم مستلزم (سه) هستند.

(پ) به ازای مجموعه‌ای مفروض مانند  $X$ ، ثابت کنید که گردایه‌ای ماکزیمال از زیرمجموعه‌های  $X$  وجود دارد که در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند. چرا این مطلب برای اثبات (یک) کافی نیست؟

(ت) فضای  $R_1$  لیند洛夫 است، ولی، فضای  $R_1^2$  چنین نیست. (مثال ۴ از بخش ۴-۱ را نگاه کنید). بنابراین، (يك) برقرار نیست. برهان (يك) در کجا از کار می افتد؟

۴. اینک قضیه دیگری داریم که در برهانش از اصل ماساکزیموم استفاده می شود. یادآوری می کنیم که اگر  $x$  و  $y$  دو نقطه فضای  $A$  باشند،  $x$  و  $y$  را متعلق به يك شبه مؤلفه  $A$  خوانیم در صورتی که هیچ جداسازی از  $A$  به صورت دو مجموعه جدا از هم که در  $A$  باز باشند مانند  $A = C \cup D$  یافت نشود به طوری که  $x \in C$  و  $y \in D$ .

(الف) فرض کنید  $X$  يك فضای فشرده هاوسدورف باشد، و  $x, y \in X$ . همچنین فرض کنید که  $\mathcal{A}$  گردایه ای از مجموعه های بسته  $X$  باشد به طوری که به ازای هر  $A \in \mathcal{A}$ ، نقاط  $x$  و  $y$  متعلق به يك شبه مؤلفه  $A$  باشند. اگر  $\mathcal{A}$  تحت رابطه جزئیت سره مرتب ساده باشد، ثابت کنید که  $x$  و  $y$  متعلق به يك شبه مؤلفه

$$y = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

هستند. [داهنمایی: تمرین ۱۲ از بخش ۳-۵ را نگاه کنید].

(ب) قضیه زیر را ثابت کنید:

قضیه. اگر  $X$  فشرده و هاوسدورف باشد، شبه مؤلفه های  $X$  برابر مؤلفه های  $X$  هستند.

[داهنمایی: به ازای هر  $x$  و  $y$  که متعلق به يك شبه مؤلفه  $X$  باشند، فرض کنید  $\mathcal{A}$  گردایه همه زیرمجموعه های بسته  $X$  مانند  $A$  باشد به طوری که  $A$  در  $X$  بسته است و  $x$  و  $y$  متعلق به يك شبه مؤلفه  $A$  هستند. فرض کنید  $\mathcal{A}'$  زیر گردایه مرتب ساده ماکزیمالی باشد. ثابت کنید که

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}'} A$$

همبند است.]

(پ) قضیه ذیل را ثابت کنید:

نتیجه. فرض کنید  $X$  فشرده و هاوسدورف باشد، و  $x \in X$ . مقطع همه مجموعه هایی مانند  $A$  که شامل  $x$  هستند و در  $X$  هم بازنند و هم بسته مساوی است با مؤلفه ای از  $X$  که شامل  $x$  است.

## ۵-۲ فضاهای تماماً منتظم

چنانکه پیش از این متذکر شدیم، نارسایی برهان لم اوریسون در تعمیم به فضاهای منتظم ما را به فرمولبندی اصل موضوع جداسازی تازه ای هدایت می کند، و آن، اصل موضوع

انتظام تمام است. در این بخش، بعضی از خواص فضاهایی را که در این اصل موضوع صدق می کنند مطالعه می کنیم. به عنوان توجیهی بر علت علاقه ما به این رده از فضاها، باید بگوییم که بزودی قضیه نشاندهنی را ثابت خواهیم کرد که ثابت می کند رده فضاهای تماماً منتظم با ردهای از فضاها، که قبلاً بررسی کرده ایم، یکی است؛ یعنی رده همه زیرفضاهای فضاهاى هاوسدورف فشرده.

**تعریف.** فضای  $X$  را تماماً منتظم خوانیم در صورتی که مجموعه‌های تک‌عضوی در  $X$  بسته باشند و به ازای هر نقطه‌ای مانند  $x_0$  و هر مجموعه بسته‌ای مانند  $A$  که شامل  $x_0$  نباشد، تابعی پیوسته مانند  $f: X \rightarrow [0, 1]$  موجود باشد به طوری که  $f(x_0) = 1$  و  $f(A) = \{0\}$ .

بنا بر لم اوریسون هر فضای نرمال فضایی است تماماً منتظم، و هر فضای تماماً منتظم فضایی است منتظم. زیرا با در نظر گرفتن تابع  $f$  که در تعریف داده شده است،  $f^{-1}([0, 1/2])$  و  $f^{-1}((1/2, 1])$  مجموعه‌های باز از هم جدایی هستند که، بترتیب، حاوی  $A$  و شامل  $x_0$  اند. در نتیجه، این اصل موضوع جدید در فهرست اصول موضوع جداسازی، بین اصول موضوع منتظم بودن و نرمال بودن قرار می گیرد. ملاحظه کنید که در تعریف بالا، تابع را می توانستیم طوری برگزینیم که  $x_0$  را بر  $0$  و  $A$  را بر  $\{1\}$  بنگارد، زیرا تابع  $g(x) = 1 - f(x)$  در این شرط صدق می کند.

۱۰۲. قضیه هر زیر فضای يك فضای تماماً منتظم فضایی است تماماً منتظم. هر حاصل ضرب از فضاهاى تماماً منتظم فضایی است تماماً منتظم.

**برهان.** فرض کنیم  $Y$  زیر فضایی از فضای تماماً منتظم  $X$  باشد. همچنین، فرض کنیم  $x_0$  نقطه‌ای از  $Y$  و  $A$  مجموعه‌ای بسته از  $Y$  باشد به طوری که  $x_0 \notin A$ ، می دانیم  $A = \bar{A} \cap Y$ ، که در آن  $\bar{A}$  نمایش بستار  $A$  در  $X$  است. بنابراین،  $x_0 \notin \bar{A}$ ، چون  $X$  تماماً منتظم است، می توان تابعی پیوسته مانند  $f: X \rightarrow [0, 1]$  چنان برگزید که  $f(x_0) = 1$  و  $f(\bar{A}) = \{0\}$ . تحدید  $f$  به  $Y$  همان تابع پیوسته مطلوب بر  $Y$  است. فرض کنیم  $X = \prod X_\alpha$  حاصل ضربی از فضاهاى تماماً منتظم باشد. همچنین، فرض کنیم  $\mathbf{b} = (b_\alpha)$  نقطه‌ای از  $X$  و  $A$  مجموعه بسته‌ای در  $X$  باشد که از  $\mathbf{b}$  جداست. عضو پایه‌ای مانند  $\prod U_\alpha$  شامل  $\mathbf{b}$  را چنان انتخاب می کنیم که  $A$  را قطع نکند؛ در این صورت،  $U_\alpha = X_\alpha$  مگر به ازای تعدادی متناهی از مقادیر  $\alpha$ ، مثلاً به ازای  $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$  به ازای  $i = 1, \dots, n$ ، تابعی پیوسته مانند

$$f_i: X_{\alpha_i} \rightarrow [0, 1]$$

را چنان انتخاب می کنیم که  $f_i(b_{\alpha_i}) = 1$  و  $f_i(X_{\alpha_i} - U_{\alpha_i}) = \{0\}$ . حال اگر  $\phi_i(\mathbf{x}) = f_i(\pi_{\alpha_i}(\mathbf{x}))$  در این صورت؛  $\phi_i$  فضای  $X$  را به طور پیوسته بتوی  $R$

می‌نگارد و در خارج مجموعه  $\pi \alpha_i^{-1}(U \alpha_i)$  صفر می‌شود. تابع حاصل ضرب

$$f(x) = \phi_1(x) \times \phi_2(x) \times \dots \times \phi_n(x)$$

همان تابع پیوسته مطلوب بر  $X$  است، زیرا در  $b$  مساوی ۱ و در خارج از  $\Pi U \alpha$  صفر می‌شود.  $\square$

مثال ۱. فضای  $S \times \bar{S}_\Omega$  فضایی است که تماماً منتظم است، زیرا زیرفضایی از فضای نرمال  $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$  است. اما نرمال نیست، به مثال ۲ از بخش ۴-۲ مراجعه کنید. یافتن فضایی که منتظم باشد ولی تماماً منتظم نباشد بس دشوار است. بیشتر مثالهایی که بدین منظور ساخته شده‌اند مشکل‌اند و برای ساختن آنها نیاز به آشنایی قابل ملاحظه‌ای با اعداد اصلی است. لیکن، بتازگی، جان تامس [T] مثالی ساخته که بسیار مقدماتی است، و ما آنرا به‌طور خلاصه در تمرین ۶ شرح می‌دهیم.

جداسازی مجموعه‌های بسته جدا از هم به وسیله توابع پیوسته با مقادیر حقیقی وسیله بسیار مهم و حساسی است که در اثبات قضیه متریسازی اوریسون به کار می‌رود؛ آنرا برای نشان دادن فضای  $X$  در فضای حاصل ضربی  $R^\omega$  به کار می‌برند. در هر فضای تماماً منتظم، می‌توانیم به وسیله توابع پیوسته نقاط را از مجموعه‌های بسته از هم جدا سازیم. بنا بر این، طبیعی است که بپرسیم، آیا با فرض تماماً منتظم بودن فضای  $X$ ، می‌توان قضیه‌ای مشابه ثابت کرد؟ بله می‌توان. البته، حاصل يك قضیه متریسازی از کار در نمی‌آید، ولی قضیه نشان دادن جالبی است:

۲.۲. قضیه اگر  $X$  تماماً منتظم باشد آنگاه  $X$  را می‌توان به‌ازای  $J$  ای در  $[0, 1]^J$  نشانده.

پروهان. فرض کنیم  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ ، که به وسیله مجموعه اندیسی مانند  $J$  اندیسگذاری شده است، نمایش همه توابع پیوسته از  $X$  به بازه  $[0, 1]$  باشد. تماماً منتظم بودن  $X$ ، ضمانت می‌کند که این گردایه در  $X$  نقاط را از مجموعه‌های بسته جدا می‌سازد. پس، بنا بر قضیه نشان دادن در بخش ۴-۴، نگاشت

$$F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$$

نشانده‌ای از  $X$  در  $[0, 1]^J$  است.  $\square$

۳.۲. نتیجه در فضایی مانند  $X$  احکام ذیل معادل‌اند:

- (۱)  $X$  تماماً منتظم است.
- (۲)  $X$  با زیرفضایی از يك فضای هاوزدورف هومئومورف است.

(۳)  $X$  با زیرفضایی از یک فضای نرمال هومئومورف است.

### تمرینها

۱. ثابت کنید که هر فضای هاوسدورف و موضعاً فشرده فضایی است تماماً منتظم.
۲. ثابت کنید که اگر چه  $R_1^2$  نرمال نیست، اما تماماً منتظم است.
۳. فرض کنید  $X$  تماماً منتظم باشد، و  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌های بسته جدا از همی از  $X$  باشند. ثابت کنید که اگر  $A$  فشرده باشد، تابعی پیوسته مانند  $f: X \rightarrow [0, 1]$  وجود دارد به طوری که  $f(A) = \{0\}$  و  $f(B) = \{1\}$ .
- ۴\* ثابت کنید که  $R^\omega$  با توپولوژی جمع‌های تماماً منتظم است. (این حکم نتیجه فوری قضیه ذیل است، اما شما برای آن برهانی مستقیم بیاورید).
- ۵\* قضیه ذیل را ثابت کنید:

قضیه. هرگروه توپولوژیک هاوسدورف فضایی است تماماً منتظم.

برهان. فرض کنید  $V_0$  یک همسایگی عضو خنثای  $e$  در گروه توپولوژیک  $G$  باشد. در حالت کلی، همسایگی  $V_n$  از  $e$  را طوری انتخاب می‌کنیم که  $V_n \cdot V_n \subset V_{n-1}$ . مجموعه همه اعداد گویای دودویی مانند  $p$  را در نظر می‌گیریم. یعنی، همه اعداد گویای به شکل  $k/2^n$  را که در آن  $k$  و  $n$  اعداد صحیحی هستند. به ازای هر عدد گویای دودویی  $p$  از  $[0, 1]$ ، مجموعه‌ای باز مانند  $U(p)$  را به استقرایچنین تعریف می‌کنیم:  $U(1/2) = V_1$  و  $U(1) = V_0$ . به ازای  $n$  مفروض، و به ازای  $1 \leq k/2^n < 1$ ، اگر مجموعه  $U(k/2^n)$  تعریف شده باشد آنگاه به ازای هر  $k$  که  $0 < k < 2^n$ ، چنین تعریف می‌کنیم:

$$U(1/2^{n+1}) = V_{n+1},$$

$$U((2k+1)/2^{n+1}) = V_{n+1} \cdot U(k/2^n).$$

به ازای  $0 \leq p$ ، فرض کنید  $U(p) = \emptyset$ ؛ و به ازای  $1 > p$ ، فرض کنید  $U(p) = G$ . ثابت کنید که به ازای همه مقادیر  $k$  و  $n$ ،

$$V_n \cdot U(k/2^n) \subset U((k+1)/2^n).$$

و سپس، نظیر برهان لم اوریسون، برهان را ادامه دهید. این تمرین از  $[M - Z]$  اقتباس شده است، و برای آگاهی بیشتر در مورد گروه‌های توپولوژیک خواننده را به آن رجوع می‌دهیم.

۶\* مجموعه  $X$  را به فرار زیر تعریف می‌کنیم: به ازای هر عدد صحیح زوجی مانند  $m$ ، فرض کنید  $L_m$  نمایش قطعه خط  $m \times [-1, 0]$  در صفحه باشد. به ازای هر عدد صحیح فردی مانند  $n$  و هر عدد صحیح  $k$  که  $2 \leq k$ ، فرض کنید  $C_{n,k}$  نمایش اجتماع قطعه خطهای

$$(n-1+1/k) \times [-1, 0] \text{ و } (n+1-1/k) \times [-1, 0]$$

و نیمدایره

$$\{x \times y \mid (x-n)^2 + y^2 = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 \text{ و } y \geq 0\}$$

در صفحه باشد. همچنین، فرض کنید  $p_{n,k}$  نمایش نقطه  $n \times (1 - 1/k)$ ، که بلندترین نقطه این نیمدایره است، باشد. بالاخره فرض کنید  $X$  اجتماع همه مجموعه‌های  $L_m$  و  $C_{n,k}$  باشد همراه با دو نقطه اضافی دیگر  $a$  و  $b$ . با در نظر گرفتن چهار نوع مجموعه‌های ذیل، به عنوان اعضای پایه، در  $X$  یک توپولوژی می‌سازیم:

(یک) مقطع  $X$  با یک قطعه خط باز افقی که شامل هیچیک از نقاط  $p_{n,k}$  نیست.

(دو) مجموعه‌های حاصل از  $C_{n,k}$ ها با حذف تعدادی متناهی از نقاط آنها.  
(سه) به ازای هر عدد صحیح زوج  $m$ ، اجتماع  $\{a\}$  و مجموعه همه نقاطی مانند  $x \times y$  از  $X$  به طوری که  $x < m$ .

(چهار) به ازای هر عدد صحیح زوج  $m$ ، اجتماع  $\{b\}$  و مجموعه همه نقاطی مانند  $x \times y$  از  $X$  به طوری که  $m < x$ .

(الف)  $X$  را رسم کنید؛ ثابت کنید که این مجموعه‌ها تشکیل پایه‌ای برای یک توپولوژی در  $X$  می‌دهند.

(ب) فرض کنید  $f$  تابعی پیوسته با مقادیر حقیقی بر  $X$  باشد. ثابت کنید که به ازای هر  $c$  مجموعه  $f^{-1}(c)$  یک مجموعه  $G$  در  $X$  است. (این مطلب برای هر فضای  $X$  برقرار است.) نتیجه بگیرید که مجموعه  $S_{n,k}$ ، متشکل از همه نقاطی مانند  $p$  از  $C_{n,k}$  به طوری که  $f(p) \neq f(p_{n,k})$ ، شماراست. نقطه  $b \in [-1, 0]$  را چنان انتخاب کنید که خط  $y = b$  هیچیک از مجموعه‌های  $S_{n,k}$  را قطع نکند. ثابت کنید که به ازای هر  $n$  فرد،

$$f((n-1) \times b) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(p_{n,k}) = f((n+1) \times d).$$

نتیجه بگیرید که  $f(a) = f(b)$ .

(پ) ثابت کنید که  $X$  منتظم است اما تماماً منتظم نیست.



## ۵-۳ فشرده‌سازی استون - چخ

پیش از این، یک طریق برای فشرده‌سازی یک فضای توپولوژیک  $X$  را مطالعه کردیم، و آن فشرده‌سازی تک نقطه‌ای بود (بخش ۳-۸)؛ حاصل آن، به تعبیری، فشرده‌شده مینیمال  $X$  است. فشرده‌شده استون - چخ  $X$ ، به تعبیری، فشرده‌شده ماکزیمال  $X$  است. این فشرده‌سازی را در اینجا به عنوان کاربرد جالبی از قضیه تیخونوف معرفی می‌کنیم. فشرده‌سازی استون - چخ در آنالیز مدرن دارای کاربردهایی چند است، که از موضوع بحث این کتاب خارج است.

**تعریف.** منظور از یک فشرده‌شده فضایی مانند  $X$  فضای هاوسدورف فشرده‌ای است حاوی  $X$ ، مانند  $Y$ ، که در آن چگال است (یعنی  $X=Y$ ). دو فشرده‌شده  $X$  مانند  $Y_1$  و  $Y_2$  را هم‌ارز می‌خوانیم در صورتیکه که هم‌هومورفیسمی مانند  $h: Y_1 \rightarrow Y_2$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر  $x$  از  $X$ ،  $h(x) = x$ .

برای اینکه  $X$  یک فضای فشرده‌شده باشد، باید تماماً منتظم باشد. بالعکس، هر فضای تماماً منتظم دست کم یک فشرده شده دارد. یک طریق به دست آوردن فشرده شده‌ای از  $X$  به قرار ذیل است:

فرض کنیم  $X$  تماماً منتظم باشد. نشاننده‌ای مانند  $h: X \rightarrow Z$  از  $X$  به فضای هاوسدورف فشرده  $Z$  انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم  $X_0$  نمایش زیرفضای  $h(X)$  از  $Z$  باشد، و  $Y_0$  نمایش بستار آن در  $Z$ . در این صورت،  $Y_0$  یک فضای هاوسدورف فشرده است و  $X_0 = Y_0$ ؛ پس  $Y_0$  یک فشرده‌شده  $X_0$  است.

اکنون، فضایی حاوی  $X$ ، مانند  $Y$ ، را طوری می‌سازیم که زوج  $(X, Y)$  با زوج  $(X_0, Y_0)$  هم‌هومورف باشد. نخست، مجموعه‌ای جدا از  $X$ ، مانند  $A$ ، اختیار می‌کنیم که تحت نگاشتی مانند  $k: A \rightarrow Y_0 - X_0$  با مجموعه  $Y_0 - X_0$  در تناظر دوسویی باشد. قرار می‌دهیم  $Y = X \cup A$ ، و تناظری دوسویی مانند  $H: Y \rightarrow Y_0$  را با ضابطه ذیل تعریف می‌کنیم.

$$\text{به‌ازای } x \in X, \quad H(x) = h(x)$$

$$\text{به‌ازای } a \in A, \quad H(a) = k(a)$$

سپس،  $Y$  را فضایی توپولوژیک در نظر می‌گیریم، بدین گونه که مجموعه  $U$  را در  $Y$  باز می‌نامیم اگر و فقط اگر  $H(U)$  در  $Y_0$  باز باشد. نگاشت  $H$  خود به خود هم‌هومورفیسم می‌شود؛ فضای  $X$  زیرفضایی از  $Y$  است، زیرا اتحادید  $H$  به زیرمجموعه  $X$  از  $Y$  همان هم‌هومورفیسم  $h$  است.

فضای  $Y$  را فشرده‌شده  $X$  القاشده به وسیله نشاننده  $h$  می‌خوانیم.

آنچه را که در بالا ساختیم به قرار ذیل خلاصه می‌کنیم: اگر  $h: X \rightarrow Z$

نشانه‌ای از  $X$  به فضای هاسدورف فشرده  $Z$  باشد آنگاه  $h$  فشرده‌شده‌ای از  $X$  مانند  $Y$  را القا می‌کند. و آن دارای این خاصیت است که نشاننده  $h$  را می‌توان به نشاننده‌ای مانند  $Z \rightarrow H: Y$  گسترش داد.

به‌طور کلی، راههای بسیار گوناگونی برای فشرده‌سازی فضای  $X$  وجود دارد. مثلاً، به فشرده‌سازی‌های ذیل از بازه  $X = (0, 1)$  توجه کنید:

مثال ۱. دایره واحد  $S^1$  در  $R^2$  را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم  $h: (0, 1) \rightarrow S^1$  نگاشت

$$h(t) = (\cos 2\pi t) \times (\sin 2\pi t)$$

باشد. فشرده‌شده القا شده به وسیله نشاننده  $h$  با فشرده‌شده  $h$  با فشرده‌شده‌ای  $X$  هم‌ارز است.

مثال ۲. فرض کنیم  $Y$  فضای  $[0, 1]$  باشد. در این صورت،  $Y$  یک فشرده‌شده  $X$  است، که با افزودن یک نقطه در هر یک از دو انتهای  $(0, 1)$ ، به دست می‌آید.

مثال ۳. مربع  $[-1, 1]^2$  را در  $R^2$  در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم  $h: (0, 1) \rightarrow [-1, 1]^2$  نگاشتی باشد با ضابطه

$$h(x) = x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

فضای  $Y_0 = \overline{h(X)}$  منحنی سینوسی توپولوژی‌دانه‌ها است (به‌مثال ۸ در بخش ۳-۲ مراجعه کنید). نشاننده  $h$  به گونه‌ای کاملاً متفاوت از دو مثال قبل فشرده‌شده‌ای از بازه  $(0, 1)$  را به دست می‌دهد. برای به دست آوردن آن باید یک نقطه در انتهای راست  $(0, 1)$  و کلیه نقاط قطعه خطی را در انتهای چپ به آن افزود

مسئله اساسی‌ای که در مطالعه فشرده‌شده‌ها پیش می‌آید به‌قرار ذیل است:

اگر  $Y$  یکی از فشرده‌شده‌های  $X$  باشد، تحت چه شرایطی می‌توان تابع حقیقی پیوسته‌ای مانند  $f$  را که بر  $X$  تعریف شده است به‌طور پیوسته به  $Y$  گسترش داد؟

اگر تابع  $f$  گسترش‌پذیر باشد، باید کراندار باشد، زیرا گسترش آن باید فضای فشرده  $Y$  را به  $R$  ببرد که در نتیجه کراندار خواهد بود. اما، در حالت کلی، کراندار بودن کافی نیست. مثال ذیل را ملاحظه کنید:

مثال ۴. فرض کنیم  $X = (0, 1)$ . فشرده‌شده  $h$  نقطه‌ای  $X$  را که در مثال ۱ آوردیم در نظر می‌گیریم. تابعی پیوسته مانند  $R \rightarrow f: (0, 1)$  بر این فشرده‌شده گسترش‌پذیر است اگر فقط اگر حدهای

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

موجود و مساوی باشند.

در مورد «فشرده شده دو نقطه‌ای»، که در مثال ۲ ملاحظه شد، تابع  $f$  گسترش پذیر است اگر و فقط اگر این دو حد موجود باشند.

در مورد فشرده شده مثال ۳، هنوز هم گسترش‌هایی برای رده‌های وسیعتری از توابع موجود است. به آسانی می‌توان دید که اگر هر دو حد بالا موجود باشند آنگاه  $f$  گسترش پذیر است. اما تابع  $f(x) = \sin(1/x)$  نیز بر این فشرده شده گسترش پذیر است، فرض کنیم  $H$  نشاننده  $Y$  در  $R^2$  باشد که بر زیر فضای  $X$  با  $h$  مساوی است. در این صورت، نگاشت مرکب

$$Y \xrightarrow{H} R \times R \xrightarrow{\pi_2} R$$

گسترش مطلوب  $f$  است. زیرا، اگر  $x \in X$  آنگاه  $H(x) = h(x) = x \times \sin(1/x)$ ، در نتیجه  $\pi_2(H(x)) = \sin(1/x)$ ، و این همان است که می‌خواستیم.

نکته خاص جالبی در مورد فشرده شده اخیر هست. ما این فشرده شده را با انتخاب نشاننده‌ای مانند

$$h: (0, 1) \rightarrow R^2$$

ساختیم که توابع مؤلفه‌ای آن  $x$  و  $\sin(1/x)$  بودند. بعد دریافتیم که هر دو تابع  $x$  و  $\sin(1/x)$  را می‌توان بر این فشرده شده گسترش داد. از اینجا چنین به نظر می‌رسد که اگر گردایه‌ای از توابع پیوسته کراندار بر بازه  $(0, 1)$  داشته باشیم، مجموعه‌ای مانند  $J$  وجود دارد به طوری که می‌توانیم آنها را به عنوان توابع مؤلفه‌ای یک نشاننده بازه  $(0, 1)$  بتوی  $R^J$ ، به ازای مقداری از  $J$ ، به کاربرد، و بدین وسیله فشرده شده‌ای به دست آورد که به ازای آن هر یک از توابع متعلق به آن گردایه گسترش پذیر است.

این همان نکته اساسی موجود در فشرده سازی استون-چخ است، که ذیلاً آن را

تعریف می‌کنیم:

فرض کنیم  $X$  یک فضای تماماً منتظم، و  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$  گردایه همه توابع حقیقی کراندار بر  $X$  باشد که به وسیله مجموعه اندیس  $J$  اندیسگذاری شده است. به ازای هر  $\alpha$  از  $J$ ، بازه بسته‌ای مانند  $I_\alpha$  در  $R$  انتخاب می‌کنیم که حاوی  $f_\alpha(X)$  باشد. برای آنکه این انتخاب بدون ابهام باشد، فرض می‌کنیم

$$I_\alpha = [\text{glb } f_\alpha(X), \text{lub } f_\alpha(X)].$$

حال، نگاشت  $h: X \rightarrow \prod_{\alpha \in J} I_\alpha$  را با ضابطه

$$h(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$$

تعریف می‌کنیم. بنا بر قضیه تیخونوف،  $\prod I_\alpha$  فشرده است. از آنجا که  $X$  تماماً منتظم است، گردایه  $\{f_\alpha\}$  در  $X$ ، نقاط را از مجموعه‌های بسته جدا می‌سازد. پس، بنا بر قضیه نشان‌دهنده در بخش ۲-۴،  $h$  یک نشاننده است.

فشرده شده‌ای از  $X$  را که به وسیله  $h$  القا می‌شود فشرده شده استون - چخ  $X$  می‌نامیم، و معمولاً آن را با  $\beta(X)$  نمایش می‌دهیم.

بسیاری از ریاضیدانسان وقتی می‌خواهند فشرده‌سازی استون - چخ را تعریف کنند از به کار بستن مجموعه اندیس دلخواه  $J$  پرهیز می‌کنند. در عوض، گردایه  $\mathcal{F}$  متشکل از همه توابع پیوسته کراندار با مقادیر حقیقی بر  $X$  را برای اندیسگذاری خود آن بکار می‌برند. این کار با قراردادن  $J = \mathcal{F}$  و تابع همانی به جای تابع اندیسگذاری  $\mathcal{F} \rightarrow J, f \rightarrow f$  شدن است. البته، این گونه اندیسگذاری برای این تعریف ضروری نیست؛ با وجود این، به نظر ما این کار منجر به مشوش کردن علامتگذاری می‌شود.

خاصیت بسیار مهم فشرده‌سازی استون - چخ خاصیت گسترشی ذیل است:

۱.۳. قضیه فرض کنیم  $X$  تماماً منتظم، و  $\beta(X)$  فشرده شده استون - چخ آن باشد. در این صورت، هر تابع حقیقی پیوسته کراندار بر  $X$  را می‌توان به طور یکتا به تابع حقیقی پیوسته‌ای بر  $\beta(X)$  گسترش داد.

برهان. فشرده شده  $\beta(X)$  به وسیله نشاننده  $h: X \rightarrow \prod X_\alpha$  که در بالا تعریف شد، القا می‌شود. این بدان معنی است که نشاننده‌ای مانند  $H: \beta(X) \rightarrow \prod I_\alpha$  وجود دارد به طوری که تحدید آن بر زیر فضای  $X$  از  $\beta(X)$  مساوی  $h$  است به ازای هر تابع حقیقی پیوسته کراندار بر  $X$ ،  $\beta$  بی در  $J$  هست به طوری که  $f_\beta$  با آن مساوی است. حال اگر  $\pi_\beta: \prod I_\alpha \rightarrow I_\beta$  نگاشت تصویری بروی مختص  $\beta$  ام باشد آنگاه نگاشت مرکب  $\pi_\beta \circ H: \beta(X) \rightarrow I_\beta$  گسترش مطلوب  $f_\beta$  است. زیرا، اگر  $x \in X$ ، داریم

$$\pi_\beta(H(x)) = \pi_\beta(h(x)) = \pi_\beta((f_\alpha(x))_{\alpha \in J}) = f_\beta(x).$$

یکتایی گسترش نتیجه‌ای از لم ذیل است.  $\square$

۲.۳. لم فرض کنیم  $A \subset X$ ، و  $f: A \rightarrow Z$  نگاشتی پیوسته از  $A$  بتوی فضای هاوسدورف  $Z$  باشد. در این صورت،  $f$  حداکثر دارای یک گسترش به تابعی پیوسته مانند  $g: \bar{A} \rightarrow Z$  است.

برهان. این لم را در بخش ۲-۷ به عنوان تمرین آوردیم؛ در اینجا برهانی برای آن می‌آوریم. فرض کنیم  $g$  و  $g'$  از  $\bar{A}$  بتوی  $Z$  دو گسترش متفاوت  $f$  باشند؛ و  $x$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $g(x) \neq g'(x)$ . فرض کنیم  $U$  و  $U'$ ، بترتیب، همسایگیهای جدا از همی برای  $g(x)$  و  $g'(x)$  باشند. همسایگی  $V$  از  $x$  را چنان انتخاب می‌کنیم

که  $g(V) \subset U$  و  $g'(V) \subset U'$ . حال  $V$  مجموعه  $A$  را در نقطه‌ای مانند  $y$  قطع می‌کند؛ در نتیجه،  $g(y) \in U$  و  $g'(y) \in U'$ . اما چون  $y \in A$ ، داریم

$$g(y) = f(y) \quad \text{و} \quad g'(y) = f'(y)$$

و این با این فرض که  $U$  و  $U'$  جدا از هم اند متناقض است.  $\square$

اینک قضیه‌ای ثابت می‌کنیم بدین مضمون که فشرده‌شده استون - چنخ اساساً یکتاست، و به وسیله خاصیت گسترشی خود مشخص می‌شود.

۳.۳. قضیه فرض کنیم  $X$  تماماً منتظم باشد.  $Y_1$  و  $Y_2$  را دوفشرده‌شده  $X$  می‌گیریم که دارای خاصیت گسترشی مذکور در قضیه ۱.۳ باشند. در این صورت هومئومورفیسمی مانند  $\phi$  از  $Y_1$  بروی  $Y_2$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $x$  از  $X$ ،  $\phi(x) = x$ .

برهان. مرحله ۱. نخست، حکم ذیل را ثابت می‌کنیم: فرض کنیم  $Y$  فشرده‌شده‌ای از  $X$  و دارای خاصیت گسترشی مذکور در قضیه ۱.۳ باشد. اگر  $Z$  یک فضای هاوسدورف فشرده دلخواه باشد و  $g: X \rightarrow Z$  تابع پیوسته دلخواهی باشد آنگاه  $g$  را می‌توان به تابع پیوسته‌ای مانند  $k$  که  $Y$  را بتوی  $Z$  می‌نگارد گسترش داد.

برای اثبات این حکم، ملاحظه کنید که  $Z$  تماماً منتظم است، در نتیجه، به ازای  $J$ ‌ای، آن را می‌توان در  $[0, 1]^J$  نشان داد. بنابراین، می‌توان فرض کرد که  $Z \subset [0, 1]^J$  اکنون، نگاشت

$$g: X \rightarrow Z \subset [0, 1]^J \subset R^J$$

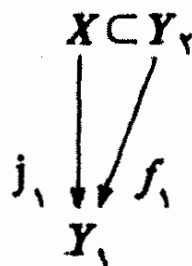
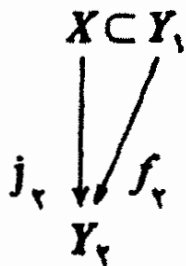
را در نظر می‌گیریم. هر تابع مؤلفه‌ای نگاشت  $g$ ، مانند  $g_\alpha$ ، تابعی است حقیقی و کراندار و پیوسته بر  $X$ ؛ بنا بر فرض،  $g_\alpha$  را می‌توان به نگاشت پیوسته‌ای مانند  $k_\alpha$  از  $Y$  بتوی  $R$  گسترش داد. نگاشت  $k: Y \rightarrow R^J$  را با ضابطه  $k(y) = (k_\alpha(y))_{\alpha \in J}$  تعریف می‌کنیم.  $k$  پیوسته است، زیرا  $R^J$  دارای توپولوژی حاصل ضربی است. مدعی هستیم که  $k$  در واقع  $Y$  را بتوی زیرفضای  $Z$  می‌نگارد. زیرا  $g(X)$  زیرمجموعه  $Z$  است، و  $k(X) = g(X)$ . چون  $Z$  در  $R^J$  بسته است، از اینجا نتیجه می‌شود که  $\overline{k(X)} \subset Z$  بنا بر پیوستگی  $k$

$$k(Y) = \overline{k(X)} \subset Z.$$

پس،  $k$  نگاشتی است که  $Y$  را بتوی  $Z$  می‌نگارد.

مرحله ۲. اینک به اثبات قضیه می‌پردازیم. نگاشت احتوای  $Y_2: X \rightarrow Y_2$  را در نظر می‌گیریم، که نگاشتی است پیوسته از  $X$  بتوی فضای هاوسدورف فشرده  $Y_2$ . چون  $Y_1$  دارای خاصیت گسترشی است، بنا بر مرحله ۱، می‌توان  $J_1$  را به نگاشتی پیوسته مانند

$f_2: Y_1 \rightarrow Y_2$  گسترش داد. همچنین، می توان نگاشت احتوای  $f_1: X \rightarrow Y_1$  را به نگاشتی پیوسته مانند  $f_1: Y_2 \rightarrow Y_1$  گسترش داد (زیرا  $Y_2$  دارای خاصیت گسترشی و  $Y_1$  هاوسدورف فشرده است).



تابع مرکب  $f_1 \circ f_2: Y_2 \rightarrow Y_1$  واجد این خاصیت است که به ازای هر  $x$  از  $X$ ، داریم  $f_1(f_2(x)) = x$ . بنابراین،  $f_1 \circ f_2$  گسترشی پیوسته است از نگاشت همانی  $i_X: X \rightarrow X$ . اما نگاشت همانی  $Y_1$  نیز گسترشی پیوسته از  $i_X$  است. بنابراین،  $f_1 \circ f_2$  گسترش (لم ۲.۳)، باید مساوی نگاشت همانی  $Y_1$  باشد. همچنین،  $f_2 \circ f_1$  باید برابر نگاشت همانی  $Y_2$  باشد. بنابراین،  $f_2$  و  $f_1$  همثومورفیسم هستند.  $\square$

### تمرینها

۱. احکامی را که در مثالهای ۱ و ۲ آوردیم ثابت کنید.
۲. ثابت کنید که تابع پیوسته کراندار  $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $g(x) = \cos(1/x)$  را نمی توان به فضای فشرده شده مثال ۳ گسترش داد. نشاندهای مانند  $h: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  تعریف کنید به طوری که توابع  $x$ ،  $\sin(1/x)$ ،  $\cos(1/x)$  همگی به فشرده شده القا شده به وسیله  $h$  گسترش پذیر باشند.
۳. تحت چه شرایطی یک فضای متریک پذیر می تواند فشرده شده ای متریک پذیر داشته باشد؟
۴. فرض کنید  $Y$  فشرده شده دلخواهی از  $X$  باشد، و  $\beta(X)$  فشرده شده استون - چخ آن باشد. ثابت کنید که نگاشت بسته پوشای پیوسته ای مانند  $g: \beta(X) \rightarrow Y$  وجود دارد که بر  $X$  مساوی تابع همانی است.  
[این تمرین بدقت معلوم می کند که منظور ما از بیان این مطلب که  $\beta(X)$  فشرده شده «ماکزیمال» است چیست. اگر بسا فضاهای خارج قسمتی مانوس باشید، متوجه می شوید که  $g$  نگاشتی خارج قسمتی است. بدین ترتیب، هر فشرده شده  $X$  با یک فضای خارج قسمتی  $\beta(X)$  هم ارز است.]
۵. (الف) ثابت کنید که هر تابع پیوسته حقیقی که بر  $S^1$  تعریف شده باشد «سرا انجام ثابت» است. [دانهمایی: نخست، ثابت کنید که به ازای هر  $\epsilon$ ، عضوی مانند  $\alpha$  از

$S_\Omega$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $\beta > \alpha$ ، داریم  $|f(\beta) - f(\alpha)| < \varepsilon$ . سپس، قرار دهید  $\varepsilon = 1/n$ ، که در آن  $n \in \mathbb{Z}_+$  و  $\alpha_n$  ها نقاط متناظر به آنها را در نظر بگیرید. ]

(ب) ثابت کنید که فشرده شده تک نقطه‌ای  $S_\Omega$  با فشرده شده استون - چن آن هم ارز است.

(پ) نتیجه بگیرید که هر فشرده شده  $S_\Omega$  با فشرده شده تک نقطه‌ای آن هم ارز است.

۶. فرض کنید فضای  $X$  تماماً منتظم باشد. ثابت کنید که  $X$  همبند است اگر و فقط اگر  $\beta(X)$  همبند باشد. [داهنمایی: اگر  $X = A \cup B$  یک جداسازی  $X$  باشد، فرض کنید به ازای هر  $x \in A$ ،  $f(x) = 0$  و به ازای هر  $x \in B$ ،  $f(x) = 1$ .]

۷. فرض کنید فضای  $X$  گسسته باشد.  $\beta(X)$  را در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید که اگر  $A \subset X$  آنگاه  $\bar{A}$  و  $\overline{X - A}$  جدا از هم اند [بستارها در  $\beta(X)$  در نظر گرفته می‌شوند].

(ب) ثابت کنید که اگر  $U$  در  $\beta(X)$  باز باشد آنگاه  $U$  در  $\beta(X)$  باز است.

(پ) ثابت کنید که  $\beta(X)$  کاملاً ناهمبند است.

۸. ثابت کنید که عدد اصلی  $\beta(\mathbb{Z}_+)$  دست کم به بزرگی عدد اصلی  $I^I$  است، که در آن  $I = [0, 1]$ . [داهنمایی: بنا بر تمرین ۱۳ از بخش ۴-۱،  $I^I$  دارای زیرمجموعه چگال شمارایی است. ]

۹. ثابت کنید که اگر  $\beta(X) \neq X$  آنگاه  $\beta(X)$  متریک پذیر نیست. [داهنمایی: ثابت کنید که اگر  $X$  نرمال و  $\gamma$  نقطه‌ای از  $\beta(X) - X$  باشد آنگاه  $g$  حد دنباله‌ای از نقاط  $X$  نیست. ]

## قضایای متریسازی و پیرافشردگی

قضیه متریسازی اوریسون که در فصل ۴ آمد نخستین مرحله - و بحق گامی عظیم - به سوی پاسخی به این پرسش بود که: چه وقت فضایی توپولوژیک متری پذیر است؟ آن قضیه شرایطی را که تحت آن  $X$  متری پذیر است عرضه می‌دارد: منتظم بودن و پایه شمارا داشتن. اما ریاضیدانان مادامی که امید به اثبات قضیه‌ای قوی‌تر باشد هرگز به اثبات قضیه‌ای ضعیفتر قناعت نمی‌کنند. در مورد حاضر می‌توان با یافتن شرایطی لازم و کافی برای متریك پذیری  $X$ ، به توانا تر کردن این قضیه امیدوار بود؛ یعنی، شرایطی معادل با متریك پذیری.

می‌دانیم که فرض منتظم بودن در قضیه متری پذیری اوریسون لازم است، اما شرط دارا بودن پایه‌ای شمارا لازم نیست. بنابراین، کار بدیهی ما این است که به جای شرط داشتن پایه‌ای شمارا، شرط ضعیفتری را قرار دهیم. یافتن چنین شرطی کار ظریفی است؛ این شرط باید آن قدر قوی باشد که مستلزم متری پذیری باشد، و در عین حال آن قدر ضعیف که همه فضاهای متری پذیر در آن صدق کنند. در چنین وضعی، کشف فرضی مناسب قسمت عمده کار است.

شرطی که سرانجام به وسیله ج. ناگاتا<sup>۱</sup> و ی. اسمیرنوف<sup>۲</sup> مستقلاً<sup>۳</sup> تقریر شد، متضمن مفهومی جدید موسوم به متناهی بودن موضعی است. گردایه‌ای مانند  $\mathcal{H}$  از زیر مجموعه‌های فضای  $X$  را موضعاً متناهی خوانیم در صورتی که هر نقطه  $x$  دارای همسایگی‌ای باشد که فقط تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{H}$  را قطع می‌کند.



در این صورت روشی برای بیان این شرط که شمارایی پایه  $\mathcal{B}$ ، این است که بگوییم،  $\mathcal{B}$  را می توان به صورت

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{B}_n$$

نمایش داد، که در آن هر يك از گردایه های  $\mathcal{B}_n$  متناهی است. البته، روش جالبی برای بیان شمارا بودن  $\mathcal{B}$  نیست، ولی این مزیت را دارد که راهگشای فرمولبندی صورتی ضعیفتر از آن باشد. شرط ناگاتا - اسمیرنوف آن است که پایه  $\mathcal{B}$  را بتوان به صورت

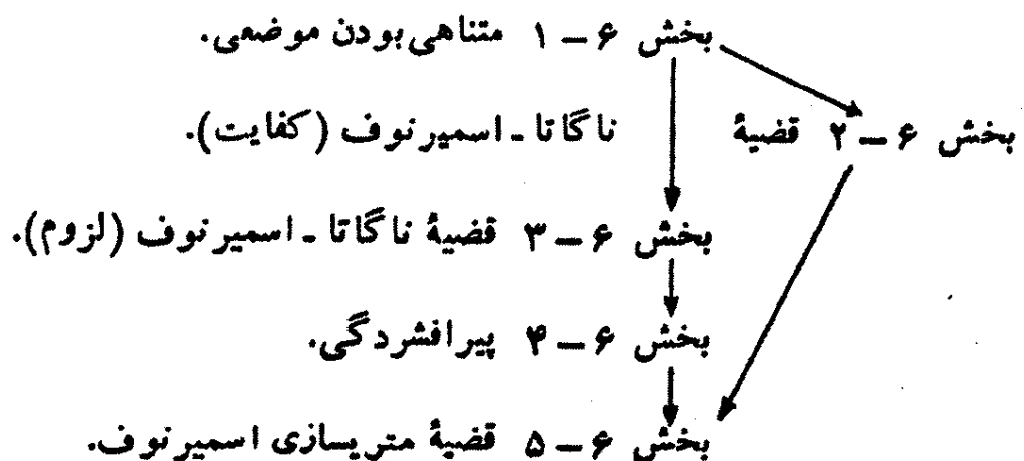
$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{B}_n$$

نوشت، که در آن هر يك از گردایه های  $\mathcal{B}_n$  موضعاً متناهی باشد. در این صورت، گوییم که گردایه  $\mathcal{B}$  موضعاً متناهی شماردگی است. با کمال شگفتی، این شرط، همراه با شرط منتظم بودن، برای متری پذیری  $X$  هم لازم است و هم کافی.

در بخش ۱-۶ مفهوم متناهی بودن موضعی را مطالعه می کنیم. در بخش ۲-۶ ثابت می کنیم که شرط ناگاتا اسمیرنوف برای  $X$ ، همراه با شرط منتظم بودن، مستلزم متریک پذیری  $X$  است؛ برهان اقتباسی است از برهان قضیه مترسازی اوریسون. در بخش ۳-۶ ثابت می کنیم متری پذیری مستلزم شرط ناگاتا - اسمیرنوف است؛ در این برهان از قضیه خوشترتیبی استفاده می شود.

در توپولوژی مفهوم دیگری وجود دارد که متضمن مفهوم متناهی بودن موضعی است، و آن تعمیمی است از فشردگی موسوم به «پیرافشردگی». اگر چه این مفهوم از مفاهیم نسبتاً متأخر توپولوژی است، ولی، معلوم شده که در بسیاری از بخشهای ریاضیات مفید است. منظور ما از معرفی این مفهوم این است که بتوانیم دسته دیگری از شرایط لازم و کافی برای متریک پذیری  $X$  را عرضه کنیم. چنانکه خواهیم دید،  $X$  متری پذیر است اگر و فقط اگر پیرافشردگی و موضعاً متری پذیر باشد. اثبات این حکم را در بخش ۵-۶ می آوریم.

بعضی از بخشهای این فصل مستقل از یکدیگرند. وابستگی بین آنها در نمودار ذیل بیان شده است:



## ۶-۱ متناهی بودن موضعی

در این بخش بعضی از خواص مقدماتی گردایه‌های موضعاً متناهی را ثابت می‌کنیم.

**تعریف.** فرض کنیم  $X$  فضایی توپولوژیک باشد. گردایه  $\mathcal{A}$  از زیرمجموعه‌های  $X$  موضعاً متناهی خوانیم در صورتی که هر نقطه  $x$  همسایگی‌ای داشته باشد که فقط تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{A}$  را قطع کند.

مثال ۱. گردایه بازه‌های

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

را در فضای توپولوژیک  $R$  موضعاً متناهی است، و اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم. همچنین است گردایه

$$\mathcal{B} = \{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

لیکن، نه گردایه

$$\mathcal{C} = \left\{ \left(0, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

در  $R$  موضعاً متناهی است و نه گردایه

$$\mathcal{D} = \left\{ \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

۱.۱. لم فرض کنیم  $\mathcal{A}$  گردایه‌ای موضعاً متناهی از زیرمجموعه‌های  $X$  باشد. در

این صورت:

(الف) هر زیرگردایه  $\mathcal{A}$  موضعاً متناهی است.

(ب) گردایه  $\mathcal{B} = \{\bar{A}\}_{A \in \mathcal{A}}$  از بستارهای اعضای  $\mathcal{A}$  موضعاً متناهی است.

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bar{A} \quad (\text{پ})$$

پروهان. حکم (الف) بدیهی است. برای اثبات (ب)، ملاحظه می‌کنیم که هر مجموعه باز، مانند  $U$ ، که مجموعه  $\bar{A}$  را قطع کند الزاماً  $A$  را نیز قطع می‌کند. بنابراین، اگر  $U$  یک همسایگی  $x$  باشد که تنها تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{A}$ ، مانند  $A$ ها، را قطع کند آنگاه  $U$  می‌تواند حداکثر همان تعداد مجموعه از اعضای گردایه  $\mathcal{B}$  را قطع کند. (البته، ممکن است که عده کمتری از مجموعه‌های  $\mathcal{B}$  را قطع کند. زیرا، ممکن است  $\bar{A}_1$  و  $\bar{A}_2$  مساوی باشند در حالی که  $A_1$  و  $A_2$  متفاوت اند.)

برای اثبات (ب)، فرض کنیم  $Y$  نمایش اجتماع اعضای  $\mathcal{A}$  باشد:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = Y.$$

در حالت کلی،  $\bigcup \bar{A} \subset \bar{Y}$ ؛ اینک، با فرض متناهی بودن موضعی، ثابت می‌کنیم که  $\bar{Y} \subset \bigcup \bar{A}$ . فرض کنیم  $x \in \bar{Y}$ ؛  $U$  را یک همسایگی  $x$  می‌گیریم که تنها تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{A}$ ، مثلاً  $A_1, \dots, A_k$  را قطع می‌کند. مدعی هستیم که  $x$  به یکی از مجموعه‌های  $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_k$  تعلق دارد، و در نتیجه، متعلق است به  $\bigcup \bar{A}$ . زیرا، اگر چنین نباشد، مجموعه  $\bar{A}_1 - \dots - \bar{A}_k - U$  یک همسایگی  $x$  است که هیچ عضو  $\mathcal{A}$  را قطع نمی‌کند، و این خلاف فرض  $x \in \bar{Y}$  است.  $\square$

در تمرینات بخش ۲-۷ و بخش ۴-۵، مفهومی از متناهی بودن موضعی را برای خانواده‌ای اندیسدار از زیرمجموعه‌های  $X$  تعریف کردیم. خانواده اندیسدار  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  را یک خانواده اندیسدار موضعاً متناهی خوانیم در صورتی که هر  $x$  از  $X$  همسایگی‌ای داشته باشد که تنها به ازای تعدادی متناهی از مقادیر  $\alpha$ ، مجموعه  $A_\alpha$  را قطع کند. چه رابطه‌ای بین دو بیان مذکور برای تعریف متناهی بودن موضعی وجود دارد؟ به آسانی می‌توان دید که  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  یک خانواده اندیسدار موضعاً متناهی است اگر و فقط اگر به عنوان گردایه‌ای از مجموعه‌ها موضعاً متناهی باشد و هر زیرمجموعه ناتهی  $A$  از  $X$  حداکثر به ازای تعدادی متناهی از مقادیر  $\alpha$  مساوی  $A_\alpha$  باشد. در این فصل ماکاری با خانواده‌های اندیسدار موضعاً متناهی نخواهیم داشت، مگر در یکی دو تمرین.

**تعریف.** گردایه  $\mathcal{B}$  از زیرمجموعه‌های  $X$  را موضعاً متناهی شمارشی خوانیم در صورتی که  $\mathcal{B}$  را بتوان به صورت اجتماعی شمارا از گردایه‌هایی مانند  $\mathcal{B}_\sigma$  نوشت، که هر کدام از آنها موضعاً متناهی است.

اغلب نویسندگان اصطلاح « $\sigma$ -موضعاً متناهی» را برای این مفهوم به کار می‌برند. حرف  $\sigma$  از نظریه اندازه گرفته شده است و به جای عبارت «اجتماع شمارای» به کار می‌رود. ملاحظه کنید که هم گردایه شمارا و هم گردایه موضعاً متناهی هر دو موضعاً متناهی شمارشی هستند.

## تمرینها

۱. احکام در مثال ۱ را تحقیق کنید.
۲. رابطه‌ای را که در فوق بین متناهی بودن موضعی برای گردایه‌ای از مجموعه‌ها و

برای خانواده‌ای اندیسدار از مجموعه‌های ذکر شده تحقیق کنید.

۳. يك پوشش باز نقطه - منتهای از  $R$  مانند  $\mathcal{A}$  بیاید که موضعاً منتهای نباشد. [گردایه  $\mathcal{A}$  را نقطه - منتهای گوئیم در صورتی که هر نقطه  $R$  تنها در تعدادی منتهای از اعضای  $\mathcal{A}$  واقع باشد.]
۴. مثالی از گردایه‌ای از مجموعه‌ها مانند  $\mathcal{A}$  بیاورید که موضعاً منتهای نباشد، ولی گردایه  $\mathcal{B} = \{\bar{A} | A \in \mathcal{A}\}$  موضعاً منتهای باشد.
۵. ثابت کنید که اگر  $X$  پایه‌ای شمارا داشته باشد، گردایه  $\mathcal{A}$  از زیرمجموعه‌های  $X$  موضعاً منتهای شمارشی است اگر و فقط اگر شمارا باشد.
۶.  $R^\omega$  را با توپولوژی جعبه‌ای در نظر بگیرید. گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های  $R^\omega$  بیاید که موضعاً منتهای شمارشی باشد اما نه شمارا باشد و نه موضعاً منتهای.
۷. بسیاری از فضاها دارای پایه شمارا هستند؛ اما هیچ فضای هاوسدورفی دارای پایه موضعاً منتهای نیست، مگر آنکه گسسته باشد. این حکم را ثابت کنید.
۸. فضایی بیاید که پایه موضعاً منتهای شمارشی داشته باشد، ولی، پایه شمارا نداشته باشد.

## ۶-۲ قضیه متریسازی ناگاتا - اسمیرنوف (کفایت)

اکنون ثابت می‌کنیم که منتظم بودن و شرط ناگاتا - اسمیرنوف برای اثبات متری پذیری يك فضا کفایت می‌کنند.

این برهان بسیار نزدیک به دوجین برهانی است که برای قضیه متریسازی اوریسون آوردیم. در این برهان نگاشتی ساختیم از فضای  $X$  بتوی فضای  $R^\omega$  که نسبت به متریک متشابه  $\bar{\rho}$  بر  $R^\omega$  نشاننده بود. حال، نکات اصلی آن برهان را مرور می‌کنیم. اولین مرحله برهان، اثبات این حکم بود که هر فضای منتظم با پایه شمارا نرمال است. مرحله دوم، ساختن گردایه‌ای شمارا از توابع با مقادیر حقیقی بر  $X$  مانند  $\{f_\alpha\}$  بود که نقاط را از مجموعه‌های بسته جدا می‌کرد. و مرحله سوم، استفاده از توابع  $f_\alpha$  بود برای نشان دادن  $X$  در فضای متری  $(R^\omega, \bar{\rho})$ .

برای اثبات قضیه ناگاتا - اسمیرنوف باید هر يك از این مراحل را تعمیم دهیم. اولاً، ثابت می‌کنیم که يك فضای منتظم با پایه موضعاً منتهای شمارشی نرمال است. ثانیاً، گردایه خاصی از توابع با مقادیر حقیقی مانند  $\{f_\alpha\}$  بر  $X$  می‌سازیم. ثالثاً، با استفاده از این توابع به ازای مجموعه‌ای مانند  $J$ ،  $X$  را در فضای متری  $(R^J, \bar{\rho})$  می‌نشانیم.

پیش از شروع، لازم است که مفهوم مجموعه  $G$  را که قبلاً در تمرینها آورده ایم یادآوری کنیم.

تعریف. زیرمجموعه  $A$  از فضای  $X$  را يك مجموعه  $G$  خوانیم در صورتی که مساوی مقطع گردایه‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های باز  $X$  باشد.

مثال ۱. واضح است که هر زیرمجموعه باز  $X$  يك مجموعه  $G$  است. در يك فضای هاوسدورف شمارای نوع اول، هر مجموعه تك‌عضوی يك مجموعه  $G$  است. می‌توان ثابت کرد که زیرمجموعه تك‌عضوی  $\{\Omega\}$  از  $\bar{G}$  يك مجموعه  $G$  نیست.

مثال ۲. در فضای متری  $X$ ، هر مجموعه بسته يك مجموعه  $G$  است. به‌ازای زیرمجموعه مفروض  $A$  از  $X$ ، مجموعه  $U(A, \varepsilon)$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$U(A, \varepsilon) = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon).$$

اگر  $A$  بسته باشد، می‌توان ثابت کرد که

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} U\left(A, \frac{1}{n}\right).$$

۱۰۲. لم فرض کنیم  $X$  فضایی منتظم باشد با پایه‌ای مانند  $\mathcal{B}$  که موضعاً متناهی شمارشی است. در این صورت،  $X$  نرمال است، و هر مجموعه بسته در  $X$  يك مجموعه  $G$  در  $X$  است.

برهان. مرحله ۱. فرض کنیم  $W$  در  $X$  باز باشد. ثابت می‌کنیم که گردایه‌ای شمارا مانند  $\{U_n\}$  از مجموعه‌های باز  $X$  وجود دارد به‌طوری که

$$W = \bigcup U_n = \bigcup \bar{U}_n.$$

چون پایه  $\mathcal{B}$  برای  $X$  موضعاً متناهی شمارشی است، می‌توان نوشت  $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$  که در آن هر گردایه  $\mathcal{B}_n$  موضعاً متناهی است. فرض کنیم  $\mathcal{C}_n$  گردایه‌ای از اعضای پایه باشد که به‌ازای هر عضو  $B$  از آن داشته باشیم  $B \in \mathcal{B}_n$  و  $B \subset W$ . در این صورت،  $\mathcal{C}_n$  موضعاً متناهی است، چون زیرگردایه‌ای از  $\mathcal{B}_n$  است. حال مجموعه  $U_n$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$U_n = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} B.$$

در این صورت،  $U_n$  يك مجموعه باز است، و بنا بر لم ۱۰۱،

$$\bar{U}_n = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} \bar{B}$$

بنابراین  $\bar{U}_n \subset W$ ، در نتیجه،

$$\bigcup U_n \subset \bigcup \bar{U}_n \subset W.$$

مدعی هستیم که تساوی برقرار است. به ازای عضو مفروضی از  $W$  مانند  $x$ ، بنا بر منتظم بودن  $X$ ، عضو پایه‌ای مانند  $B$  از  $\mathcal{B}$  موجود است به طوری که  $x \in B$  و  $\bar{B} \subset W$ . اما  $n$  وجود دارد که  $B \in \mathcal{B}_n$ . در این صورت، بنا بر تعریف،  $B \in \mathcal{C}_n$ ، و در نتیجه،  $x \in U_n$ . بنابراین،  $W \subset \bigcup U_n$ ، و این همان است که می‌خواستیم.

مرحله ۲. ثابت می‌کنیم که هر مجموعه بسته  $C$  از  $X$ ، یک مجموعه  $G_\delta$  در  $X$  است. به ازای  $C$  مفروض، فرض کنیم  $W = X - C$ . بنا بر مرحله ۱، مجموعه‌هایی مانند  $U_n$  در  $X$  وجود دارند به طوری که  $W = \bigcup \bar{U}_n$ . در این صورت،

$$C = \bigcap (X - \bar{U}_n),$$

و در نتیجه،  $C$  مساوی است با مقطعی شمارا از مجموعه‌های باز  $X$ .

مرحله ۳. اکنون، ثابت می‌کنیم که  $X$  نرمال است. فرض کنیم  $C$  و  $D$  مجموعه‌های بسته جدا از همی در  $X$  باشند. با به کار گیری مرحله ۱ در مورد مجموعه باز  $X - D$ ، گردایه شمارای  $\{U_n\}$  از مجموعه‌های باز را چنان می‌سازیم که

$$\bigcup U_n = \bigcup \bar{U}_n = X - D.$$

در این صورت،  $\{U_n\}$  مجموعه  $C$  را می‌پوشاند و هر مجموعه  $\bar{U}_n$  از  $D$  جداست. همچنین، پوششی شمارا مانند  $\{V_n\}$  برای  $D$  از مجموعه‌های باز را چنان می‌سازیم که بستارهایشان از  $C$  جدا باشند.

اینک، به وضعی بازگشته‌ایم که در اثبات نرمال بودن یک فضای منتظم با پایه شمارا پیش آمد (قضیه ۵.۲ در فصل ۴). می‌توانیم آن برهان را کلمه به کلمه تکرار کنیم. برای این منظور، مجموعه‌های  $U'_n$  و  $V'_n$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} \bar{U}_i \quad \text{و} \quad U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} \bar{V}_i$$

در این صورت، مجموعه‌های

$$V' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} V'_n \quad \text{و} \quad U' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} U'_n$$

مجموعه‌های باز از هم جدایی هستند که، بترتیب، حاوی  $C$  و  $D$  هستند.  $\square$

۲.۲. قضیه فرض کنیم  $X$  فضایی منتظم باشد با پایه‌ای مانند  $\mathcal{B}$  که موضعاً متناهی شمارشی است. در این صورت،  $X$  متری پذیراست.

برهان. مرحله ۱. نخست، ثابت می‌کنیم که اگر  $W$  در  $X$  باز باشد، تابعی پیوسته مانند  $f: X \rightarrow [0, 1]$  وجود دارد به طوری که به ازای  $x \in W$ ، داریم  $f(x) > 0$  و به ازای  $x \notin W$ ، داریم  $f(x) = 0$ .

بنابراین پیش، هر مجموعه بسته  $X$  مساوی مقطعی شمارا از مجموعه‌های باز  $X$  است. با متمم‌گیری، از اینجا نتیجه می‌شود که مجموعه باز  $W$  اجتماع شمارا از مجموعه‌های بسته  $A_n$  در  $X$  است. با استفاده از نرمال‌بردن  $X$ ، به ازای هر عدد صحیح مثبت  $n$ ، تابعی پیوسته مانند  $f_n: X \rightarrow [0, 1]$  را چنان برمی‌گزینیم که

$$f_n(X - W) = \{0\} \text{ و } f_n(A_n) = \{1\}$$

حال تابع  $f$  را چنین تعریف می‌کنیم:  $f(x) = \sum f_n(x)/2^n$ . از مقایسه این سری با  $\sum 1/2^n$ ، نتیجه می‌شود که سری  $\sum f_n(x)/2^n$  همگرای یکنواخت است، بنابراین،  $f$  پیوسته است. همچنین،  $f$  بر  $W$  مثبت است و خارج از  $W$  صفر می‌شود.

مرحله ۲. فرض کنیم  $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ ، که در آن هر گردایه  $\mathcal{B}_n$  موضعاً متناهی است. به ازای هر عدد صحیح مثبت  $n$ ، و هر عضو پایه  $\mathcal{B}_n$ ، مانند  $B$ ، تابعی پیوسته مانند

$$f_{n,B}: X \rightarrow \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

اختیار می‌کنیم که به ازای هر  $x \in B$ ،  $f_{n,B}(x) > 0$ ، و به ازای هر  $x \notin B$ ،  $f_{n,B}(x) = 0$ . گردایه  $\{f_{n,B}\}$  نقاط را از مجموعه‌های بسته در  $X$  جدا می‌سازد: اگر  $x_0$  نقطه مفروضی باشد و  $U$  یک همسایگی  $x_0$  باشد، عضو پایه‌ای مانند  $B$  وجود دارد به طوری که  $x_0 \in B \subset U$ . در این صورت،  $n$  هست که  $B \in \mathcal{B}_n$ ، و در نتیجه،  $f_{n,B}(x_0) > 0$  و  $f_{n,B}$  خارج از  $U$  صفر می‌شود.

فرض کنیم  $J$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathcal{B}_+ \times X$  باشد که از همه زوج‌هایی مانند  $(n, B)$  که  $B \in \mathcal{B}_n$  تشکیل شده است. تابع

$$F: X \rightarrow [0, 1]^J$$

را با ضابطه

$$F(x) = (f_{n,B}(x))_{(n,B) \in J}$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین قضیه نشانیدن در بخش ۴-۴، نگاشت  $F$  نسبت به توپولوژی حاصل ضربی در  $[0, 1]^J$  نشاننده است.

البته، در حالت کلی،  $[0, 1]^J$  متریک پذیر نیست. بنابراین، هنوز قضیه متریک‌سازی اثبات نشده است.

مرحله ۳. اینک،  $[0, 1]^J$  را به توپولوژی القا شده به وسیله متریک یکنواخت  $\bar{\rho}$

مجهز می کنیم و ثابت می کنیم که  $F$ ، نسبت به این توپولوژی نیز، نشانده است. توپولوژی یکنواخت ظریفتر (بزرگتر) از توپولوژی حاصل ضربی است. بنابراین، نسبت به متریک یکنواخت، نگاشت  $F$  یک به یک است و مجموعه های باز  $X$  را بروی مجموعه های باز فضای تصویر  $Z = F(X)$  می نگارد. برای اثبات پیوستگی  $F$  باید برهان جداگانه ای بیاوریم.

ملاحظه می کنیم که متریک یکنواخت، بر زیر فضای  $[0, 1]^J$  از  $R^J$  مساوی است با متریک

$$\rho((x_\alpha), (y_\alpha)) = \text{lub} \{|x_\alpha - y_\alpha|\}.$$

برای اثبات پیوستگی، نقطه ای مانند  $x_0$  از  $X$  اختیار می کنیم و عدد  $\varepsilon > 0$  را مفروض می گیریم، و همسایگی ای از  $x_0$ ، مانند  $W$  را چنان می یابیم که

$$x \in W \implies \rho(F(x), F(x_0)) < \varepsilon.$$

فرض کنیم  $n$  فعلاً ثابت باشد. همسایگی ای از  $x_0$ ، مانند  $U_n$  را چنان انتخاب می کنیم که تنها تعدادی متناهی از اعضای گردایه  $\mathcal{B}_n$  را قطع کند. در نتیجه وقتی  $B$  گردایه  $\mathcal{B}_n$  را طی می کند، همه توابع  $f_{n,B}$ ، مگر تعدادی متناهی از آنها، بر  $U_n$  صفر می شوند. چون هر تابع  $f_{n,B}$  پیوسته است، می توان همسایگی ای مانند  $V_n$  از  $x_0$  را چنان انتخاب کرد که جزء  $U_n$  باشد، و به ازای  $B \in \mathcal{B}_n$ ، تغییرات هر یک از توابع  $f_{n,B}$  بر  $V_n$  حداکثر  $\varepsilon/2$  باشد.

به ازای هر  $n$  از  $Z_+$ ،  $V_n$  را چنین همسایگی ای از  $x_0$  می گیریم. سپس  $N$  را طوری اختیار می کنیم که  $\varepsilon/2 \leq 1/N$ ، و  $W$  را چنین تعریف می کنیم:

$$W = V_1 \cap \dots \cap V_N.$$

مدعی هستیم که  $W$  همان همسایگی مطلوب برای  $x_0$  است. فرض کنیم  $x \in W$ . اگر  $n \leq N$  آنگاه

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

زیرا تابع  $f_{n,B}$  یا صفر می شود و یا حداکثر به میزان  $\varepsilon/2$  بر  $W$  تغییر می کند. اگر  $n > N$  آنگاه

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

زیرا  $f_{n,B}$  فضای  $X$  را بتوی  $[0, 1/n]$  می نگارد. پس،

$$\rho(F(x), F(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$



و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

## تمرینها

۱. (الف) ثابت کنید که در هر فضای متری هر مجموعه بسته مجموعه‌ای  $G_\delta$  است.  
 (ب) ثابت کنید که مجموعه اعداد گنگ مجموعه‌ای  $G_\delta$  در  $R$  است.

۲. زیرمجموعه  $W$  از  $X$  را يك «مجموعه  $F_\sigma$ » در  $X$  گوئیم در صورتی که  $W$  مساوی اجتماع شمارا از مجموعه‌های بسته  $X$  باشد. نشان دهید که  $W$  يك مجموعه  $F_\sigma$  در  $X$  است اگر و فقط اگر  $X - W$  يك مجموعه  $G_\delta$  در  $X$  باشد.  
 [اصل این اصطلاح فرانسوی است. حرف « $F$ » برای واژه «ferme» است که به معنی «بسته» است و حرف  $\sigma$  برای واژه «somme» است که به معنی «اجتماع» است.]

۳. فرض کنید  $(X, d)$  فضایی متری باشد. ثابت کنید که اگر  $U$  در  $X$  باز باشد آنگاه تابع

$$f(x) = d(x, X - U)$$

بر  $U$  مثبت است و برخارج از  $U$  صفر می‌شود. (تابع  $d(x, A)$  در تمرین ۴ در بخش ۳ - ۶ تعریف شده است.)

## ۶-۳ قضیه ناگاتا - اسمیرنوف (لزوم)

اینک، ثابت می‌کنیم که هر فضای متری پذیر دارای يك پایه متناهی شمارشی است. و بدین ترتیب اثبات قضیه متریسازی ناگاتا - اسمیرنوف کامل می‌شود.

تعریف. فرض کنیم  $\mathcal{A}$  گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فضای  $X$  باشد. گردایه  $\mathcal{B}$  از زیرمجموعه‌های  $X$  را يك نظریف  $\mathcal{A}$  خوانیم (یا گوئیم  $\mathcal{A}$  را ظریف می‌کند) در صورتی که به ازای هر عضو  $\mathcal{B}$  مانند  $B$ ، عضوی مانند  $A$  از  $\mathcal{A}$  یافت شود به طوری که حاوی  $B$  باشد. اگر اعضای  $\mathcal{B}$  مجموعه‌های بازی باشند،  $\mathcal{B}$  را يك نظریف باز  $\mathcal{A}$  می‌نامیم؛ و اگر اعضای  $B$  بسته باشند،  $\mathcal{B}$  را يك نظریف بسته  $\mathcal{A}$  می‌نامیم.

اولین مرحله در برهان لزوم شرط ناگاتا - اسمیرنوف لم ذیل است. این لم را در بخش بعد تعمیم می‌دهیم.

۳.۱. لم فرض کنیم  $X$  فضایی متری پذیر باشد. اگر  $\mathcal{A}$  پوششی باز برای  $X$  باشد آنگاه گردایه‌ای مانند  $\mathcal{B}$  از زیرمجموعه‌های  $X$  وجود دارد به طوری که:

- (۱)  $\mathcal{D}$  یک پوشش باز  $X$  است.  
 (۲)  $\mathcal{D}$  یک نظریف  $A$  است.  
 (۳)  $\mathcal{D}$  موضعاً متناهی شمارشی است.

پوهان. در اثبات این قضیه به قضیه خوشترتیبی نیاز داریم. برای گردایه  $A$  خوشترتیبی ای مانند  $<$  انتخاب می کنیم. اعضای نوعی  $A$  را با حروف  $U, V, W, \dots$  نمایش می دهیم.

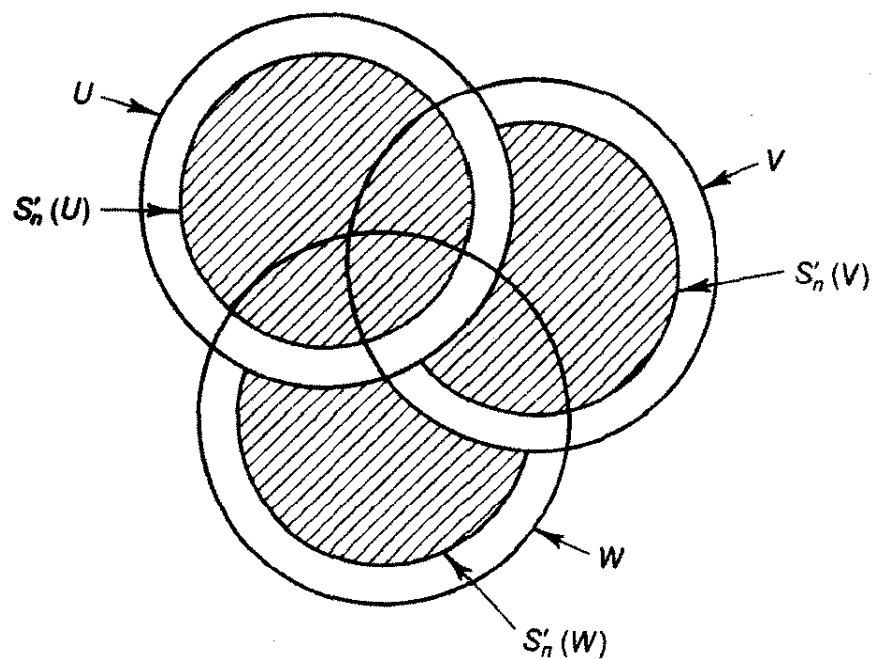
متریکی برای  $X$  در نظر می گیریم. فرض کنیم  $n$  عدد صحیح مثبتی باشد، که فعلاً ثابت است. به ازای عضوی مفروض مانند  $U$  از  $A$ ، مجموعه  $S_n(U)$  را زیرمجموعه ای از  $U$  تعریف می کنیم که به وسیله «درهم کشیدن»  $U$  به اندازه  $1/n$  به دست می آید. به عبارت دقیقتر، فرض کنیم که

$$S_n(U) = \left\{ x \mid B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset U \right\}.$$

(اگر چه بر حسب اتفاق  $S_n(U)$  مجموعه ای بسته است، اما، این مطلب برای منظور ما بی اهمیت است.) حال با استفاده از رابطه خوشترتیبی  $<$  در  $A$  مجموعه کوچتری به دست می آوریم. به ازای هر  $U$  در  $A$ ، فرض می کنیم

$$S'_n(U) = S_n(U) - \bigcup_{V < U} V.$$

در شکل ۱، وضعی را که در آن  $A$  فقط از سه مجموعه  $U < V < W$  تشکیل شده است، نشان داده ایم. درست همان طور که از شکل پیداست، مجموعه هایی که ساخته ایم



شکل ۱  $U < V < W$

از هم جدا هستند. در واقع، مدعی هستیم که آنها با فاصله‌ای حداقل برابر  $1/n$  از هم جدا شده‌اند. یعنی، اگر  $V$  و  $W$  اعضای متمایزی از  $\mathcal{A}$  باشند، مدعی هستیم که

$$(*) \quad d(x, y) \geq \frac{1}{n} \text{ آنگاه } y \in S'_n(W) \text{ و } x \in S'_n(V)$$

برای اثبات این حکم، فرض می‌کنیم علامتها چنان انتخاب شده باشند که  $V < W$ . حال  $x \in S'_n(V)$  مستلزم آن است که  $x \in S_n(V)$  و گزاره  $y \in S'_n(W)$  بنا بر تعریف، مستلزم آن است که  $y \notin V$  (زیرا  $V < W$ ). چون  $x \in S_n(V)$  و  $y \notin V$ ، باید داشته باشیم  $d(x, y) \geq 1/n$ .

مجموعه‌های  $S'_n(U)$  هنوز آنچه که ما می‌خواهیم نیستند، زیرا نمی‌دانیم که آنها مجموعه‌هایی باز هستند یا نه. (در واقع بسته‌اند.) بنا بر این، هر يك از آنها را کمی بسط می‌دهیم تا مجموعه‌ی بازی مانند  $E_n(U)$  را به دست آوریم. بالاخص، فرض می‌کنیم که  $E_n(U)$   $1/3n$  - همسایگی از مجموعه  $S'_n(U)$  باشد؛ یعنی

$$E_n(U) = \bigcup \left\{ B\left(x, \frac{1}{3n}\right) \mid x \in S'_n(U) \right\}.$$

در حالت  $U < V < W$ ، وضع اخیر را در شکل ۲ تصویر کرده‌ایم. چنانکه از شکل پیداست، مجموعه‌هایی که تشکیل داده‌ایم از هم جدا هستند، در حقیقت با فاصله‌ای حداقل برابر  $1/3n$  از یکدیگر جدا شده‌اند. یعنی، اگر  $V$  و  $W$  اعضای متمایزی از  $\mathcal{A}$  باشند، مدعی هستیم که:

$$d(x, y) \geq \frac{1}{3n} \text{ آنگاه } y \in E_n(W) \text{ و } x \in E_n(V)$$

این حکم بلافاصله از (\*) و نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود. همچنین، ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر  $V$  از  $\mathcal{A}$  مجموعه  $E_n(V)$  جزء  $V$  است.

اینک،  $\mathcal{E}_n$  را چنین تعریف می‌کنیم:

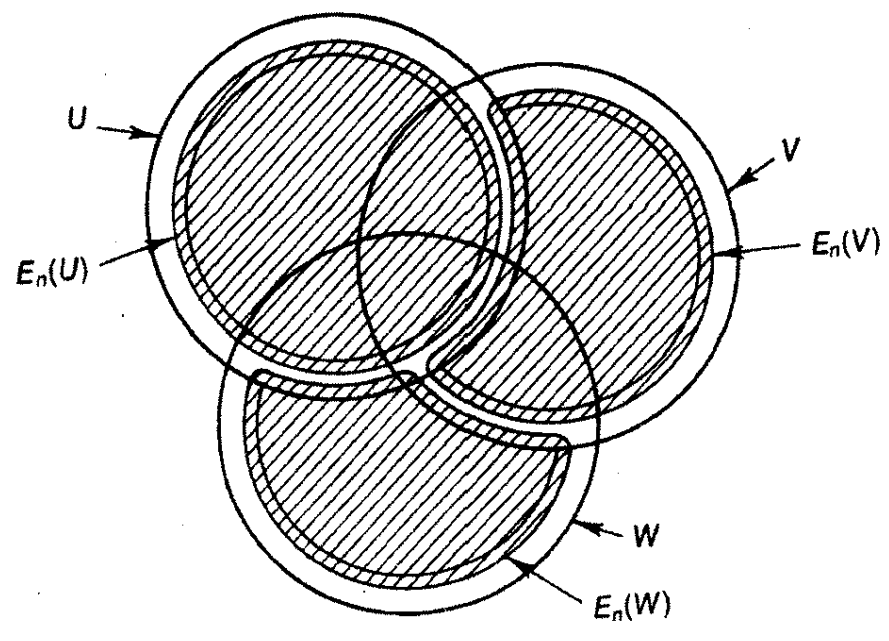
$$\mathcal{E}_n = \{E_n(U) \mid U \in \mathcal{A}\}.$$

مدعی هستیم که  $\mathcal{E}_n$  گردایه‌ای موضعاً متناهی از مجموعه‌های باز است و همچنین  $\mathcal{E}_n$  گردایه  $\mathcal{A}$  را ظریف می‌کند. این حکم که  $\mathcal{E}_n$  پوشش  $\mathcal{A}$  را ظریف می‌کند از این امر ناشی می‌شود که به ازای هر  $V$  از  $\mathcal{A}$ ،  $E_n(V) \subset V$ . موضعاً متناهی بودن  $\mathcal{E}_n$  نتیجه این امر است که به ازای هر عضو  $X$  مانند  $x$ ،  $1/6n$  - همسایگی نقطه  $x$  حداکثر می‌تواند یک عضو  $\mathcal{E}_n$  را قطع کند.

البته، گردایه  $\mathcal{E}_n$  فضای  $X$  را نمی‌پوشاند. (شکل ۲ این مطلب را نشان می‌دهد.)

با این وجود، مدعی هستیم که گردایه

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{E}_n$$



شکل ۲

$X$  را می‌پوشاند.

فرض کنیم  $x$  نقطه‌ای از  $X$  باشد. گردایه  $\mathcal{A}$ ، که با آن آغاز کردیم،  $X$  را می‌پوشاند؛ فرض کنیم  $U$  (با خوشترتیبی  $<$ ) اولین عضو  $\mathcal{A}$  باشد که شامل  $x$  است. چون  $U$  باز است، می‌توانیم  $n$  را طوری انتخاب کنیم که  $B(x, 1/n) \subset U$ . در این صورت، بنا بر تعریف،  $x \in S_n(U)$ . اما، چون  $U$  اولین عضو  $\mathcal{A}$  است که شامل  $x$  است، نقطه  $x$  به  $S_n'(U)$  تعلق دارد. پس،  $x$  نیز به عضو  $E_n(U)$  از  $\mathcal{E}$  تعلق دارد، و این همان است که می‌خواستیم.

از اینجا حکم لم نتیجه می‌شود؛  $\mathcal{E}$  گردایه مجموعه‌های باز مطلوب است.  $\square$

۲.۳. قضیه اگر  $X$  یک فضای متریک پذیر باشد آنگاه  $X$  دارای یک پایه موضعی متناهی شمارشی است.

برهان. متریکی برای  $X$  در نظر می‌گیریم. به ازای هر  $m$  مفروض،  $\mathcal{A}^m$  را پوشش بازی از  $X$  می‌گیریم که متشکل از همه گویهای باز به شعاع  $1/m$  باشد؛

$$\mathcal{A}^m = \left\{ B\left(x, \frac{1}{m}\right) \mid x \in X \right\}$$

بنابر لم پیش، پوششی باز مانند  $\mathcal{D}^m$  از  $X$  وجود دارد که  $\mathcal{A}^m$  را ظریف کند و همچنین موضعاً متناهی شمارشی است. ملاحظه کنید که قطر هر عضو  $\mathcal{D}^m$  حداکثر برابر  $2/m$  است. فرض کنیم

$$\mathcal{D} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{D}^m$$

چون هر گردایه  $\mathcal{D}^m$  اجتماعی شمارا از گردایه‌های موضعاً متناهی است،  $\mathcal{D}$  نیز چنین است. مدعی هستیم که  $\mathcal{D}$  پایه‌ای برای  $X$  است؛ در این صورت، قضیه ثابت می‌شود. ثابت می‌کنیم که به ازای هر عضو  $X$  مانند  $x$  و عدد مثبت مفروض  $\varepsilon$ ، عضوی مانند  $D$  از  $\mathcal{D}$  یافت می‌شود که شامل  $x$  و جزء  $B(x, \varepsilon)$  است. نخست،  $m$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $\varepsilon/2 < 1/m$ . سپس، چون  $\mathcal{D}^m$  فضای  $X$  را می‌پوشاند، می‌توانیم عضوی از  $\mathcal{D}^m$  مانند  $D$  چنان انتخاب کنیم که شامل  $x$  باشد. چون  $D$  شامل  $x$  و قطر آن حداکثر  $2/m$  است و  $2/m < \varepsilon$ ، پس  $D$  جزء  $B(x, \varepsilon)$  است. از لم ۳.۲ در فصل ۲، نتیجه می‌شود که  $\mathcal{D}$  پایه‌ای برای  $X$  است.  $\square$

### تمرینها

۱. فرض کنید  $\mathcal{A}$  گردایه‌ی ذیل از زیرمجموعه‌های  $R$  باشد:

$$\mathcal{A} = \{n, n+2 \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

کدامیک از گردایه‌های ذیل  $\mathcal{A}$  را ظریف می‌کند؟

$$\mathcal{B} = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \left( n, n + \frac{3}{2} \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \left( x, x + \frac{3}{2} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

۲. گردایه‌ی  $\mathcal{A}$  از زیرمجموعه‌های  $X$  را موضعاً گسسته خوانیم در صورتی که هر نقطه‌ی  $X$  یک همسایگی داشته باشد که حداکثر یک عضو  $\mathcal{A}$  را قطع کند. گردایه‌ای مانند  $\mathcal{B}$  را موضعاً گسسته شمارشی (یا « $\sigma$ -موضعاً گسسته») گوئیم در صورتی که مساوی اجتماعی شمارا از گردایه‌های موضعاً گسسته باشد. حکم ذیل را ثابت کنید. قضیه (قضیه متریزی بینگن<sup>۱</sup>). فضای  $X$  متری پذیر است اگر فقط اگر منتظم باشد و یک پایه‌ی موضعاً گسسته شمارشی داشته باشد.

### ۶-۴ پیرافشردگی

مفهوم پیرافشردگی یکی از سودمندترین تعمیم‌های فشردگی است که در سالهای اخیر

تقریر شده است. این مفهوم بخصوص در توپولوژی جبری و هندسهٔ دیفرانسیل سودمند است. ما تنها یکی از کاربردهای آن را، که در اثبات يك قضیهٔ متریکسازی است، در بخش بعد می‌آوریم.

بسیاری از فضاهایی که قبلاً با آنها مانوس شدیم پیرافشرده هستند. مثلاً، هر فضای هاوسدورف فشرده فضایی است پیرافشرده؛ این مطلب نتیجهٔ مستقیمی از تعریف است، همچنین هر فضای متریک‌پذیر فضایی است پیرافشرده؛ که این قضیه از آ. ه. استون<sup>۱</sup> است و ما آن را ثابت می‌کنیم. بنا براین، فضاهای پیرافشرده شامل دوره از مهم‌ترین فضاهایی است که تا به حال مطالعه کرده‌ایم: فضاهای هاوسدورف فشرده، و فضاهای متریک‌پذیر. البته شامل فضاهای دیگری نیز هست. (به تمرین ۲ رجوع شود.)

برای اینکه ببینیم چگونه فشردگی به پیرافشرده‌گی تعمیم می‌یابد، تعریف فشردگی را یادآوری می‌کنیم: فضای  $X$  را فشرده گوئیم در صورتی که هر پوشش باز  $\mathcal{A}$  مانند  $\mathcal{A}$  حاوی زیرگردایه‌ای متناهی مانند  $\mathcal{A}'$  باشد که  $X$  را می‌پوشاند. بیان زیر معادل همین تعریف است:

فضای  $X$  فشرده است در صورتی که هر پوشش باز آن دارای يك نظریف بازمتناهی باشد که  $X$  را پوشاند.

این تعریف با تعریف معمولی معادل است؛ اگر  $\mathcal{B}$  چنین نظریفی باشد، به ازای هر عضو  $\mathcal{B}$  می‌توان عضوی از  $\mathcal{A}$  را که حاوی آن است انتخاب کرد؛ بدین ترتیب، يك زیرگردایهٔ متناهی از  $\mathcal{A}$  به دست می‌آید که  $X$  را می‌پوشاند.

این تقریر جدید فشردگی کمی ناهنجار است، ولی راهی برای تعمیم آن پیش‌پای ما می‌گذارد:

تعریف. فضای  $X$  را پیرافشرده خوانیم در صورتی که هاوسدورف باشد و هر پوشش باز آن مانند  $\mathcal{A}$  دارای يك نظریف باز موضعاً متناهی مانند  $\mathcal{B}$  باشد که  $X$  را پوشاند.

مثال ۱. بدیهی است که هر فضای هاوسدورف فشرده فضایی است پیرافشرده. خط حقیقی  $R$  فضای پیرافشرده‌ای است که فشرده نیست. این امر که  $R$  پیرافشرده است نتیجه‌ای از این قضیه است که هر فضای متریک‌پذیر فضایی است پیرافشرده. اما، می‌توان برهان مستقیمی به قرار ذیل آورد،

فرض کنیم  $\mathcal{A}$  پوشش باز دلخواهی برای  $R$  باشد. به ازای هر عدد صحیح  $n$ ، تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{A}$  را چنان انتخاب می‌کنیم که بازه  $[n, n+1]$  را بپوشانند، و مقطع هر يك از آنها را با بازه  $(n-1, n+2)$  در نظر می‌گیریم. گردایهٔ حاصل از

مجموعه‌های باز را به  $\mathcal{B}_n$  نمایش می‌دهیم. در این صورت، همان‌طور که خود می‌توانید تحقیق کنید، گردایه

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_n$$

یک تعریف باز موضعاً متناهی است که  $R$  را می‌پوشاند.

بعضی از خواص فضای پیرافشرده شبیه به خواص فضاهای هاوسدورف فشرده است. مثلاً، هر زیر فضای یک فضای پیرافشرده الزاماً پیرافشرده نیست؛ اما، هر زیر فضای بسته آن حتماً پیرافشرده است. همچنین، هر فضای پیرافشرده الزاماً نرمال است. از جهات دیگر، فضاهای پیرافشرده شبیه فضاهای هاوسدورف فشرده نیستند؛ بخصوص، حاصل ضرب دو فضای پیرافشرده لازم نیست پیرافشرده باشد.

یکی از مفیدترین خواص فضاهای پیرافشرده آن است که به‌ازای هر پوشش باز اندیس‌دار فضای پیرافشرده  $X$  مانند  $\{U_\alpha\}$ ، یکی افزای واحد مغلوب به وسیله  $\{U_\alpha\}$  وجود دارد. خطوط اصلی برهان این مطلب در تمرینهای بخش ۴-۵ ترسیم شده است. در این بخش خواص دیگری از فضاهای پیرافشرده را که ذکر کردیم اثبات می‌کنیم.

#### ۱.۴. قضیه هر فضای پیرافشرده $X$ نرمال است.

برهان. برهان آن تا حدودی شبیه برهانی است که برای نرمال بودن یک فضای هاوسدورف فشرده آوردیم.

نخست، منتظم بودن فضا را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم  $a$  نقطه‌ای از  $X$  و  $B$  مجموعه‌ای بسته در  $X$  باشد که  $a \notin B$ . شرط هاوسدورف به ما امکان می‌دهد که به‌ازای هر عضو  $B$  مانند  $b$ ، مجموعه‌ی بازی مانند  $U_b$  را حول  $b$  چنان انتخاب کنیم که بستار آن از  $a$  جدا باشد.  $X$  را با مجموعه‌های باز  $U_b$  به‌اضافه مجموعه‌ی باز  $X - B$  می‌پوشانیم؛ یک تعریف باز موضعاً متناهی این پوشش، مسانند  $\mathcal{C}$ ، که  $X$  را می‌پوشاند اختیار می‌کنیم. زیر گردایه  $\mathcal{D}$  از  $\mathcal{C}$  را متشکل از همه اعضایی از  $\mathcal{C}$  که  $B$  را قطع می‌کند در نظر می‌گیریم. در این صورت،  $\mathcal{D}$  مجموعه‌ی  $B$  را می‌پوشاند. بعلاوه، اگر  $D \in \mathcal{D}$  آنگاه  $D$  از  $a$  جداست. چون  $D$  مجموعه‌ی  $B$  را قطع می‌کند، پس در یک مجموعه  $U_b$  قرار می‌گیرد که بستارش از  $a$  جداست. فرض کنیم

$$V = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D;$$

در این صورت،  $V$  مجموعه‌ای باز در  $X$  و حاوی  $B$  است. چون  $\mathcal{D}$  موضعاً متناهی است،

$$V = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D,$$

و در نتیجه،  $V$  از  $a$  جداست. بدین ترتیب، منتظم بودن  $X$  ثابت می‌شود. برای اثبات نرمال بودن  $X$ ، کافی است همین استدلال را تکرار کنیم، و به‌جای نقطه

$a$  مجموعه بسته  $A$  و به جای شرط هاوسدورف شرط منتظم بودن را قراردهیم.  $\square$

۲.۴ قضیه (الف) هر زیرفضای بسته فضایی پیرافشرده فضایی است پیرافشرده.

(ب) زیرفضای دلخواهی از فضایی پیرافشرده لازم نیست پیرافشرده باشد.

(پ) حاصل ضرب فضاهای پیرافشرده لازم نیست پیرافشرده باشد.

برهان. فرض کنیم  $Y$  زیرفضای بسته‌ای از فضای پیرافشرده  $X$  باشد؛ و  $A$  یک پوشش  $Y$  است که از مجموعه‌های باز  $Y$  تشکیل شده است. به ازای هر  $A$  از  $A$ ، مجموعه‌های باز  $A'$  از  $X$  را چنان برمی‌گزینیم که  $A' \cap Y = A$ . فضای  $X$  را با مجموعه‌های باز  $A'$  و مجموعه  $Y$  می‌پوشانیم. فرض می‌کنیم که  $\mathcal{B}$  یک نظریف باز موضعاً متناهی این پوشش باشد که  $X$  را می‌پوشاند؛ در این صورت، گردایه

$$\mathcal{C} = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

نظریف باز موضعاً متناهی مطلوب برای  $A$  است.

مثالهای ذیل برقراری احکام (ب) و (پ) را ثابت می‌کنند.  $\square$

مثال ۲. فضای  $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$  هاوسدورف فشرده است، در نتیجه پیرافشرده است.

زیرفضای  $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$  پیرافشرده نیست، زیرا نرمال نیست (به بخش ۴-۲ مراجعه کنید).

مثال ۳. فضای  $R_I$  پیرافشرده است، اثبات آن را به عنوان تمرین باقی می‌گذاریم.

اما،  $R_I^2$  پیرافشرده نیست، زیرا نرمال نیست (به بخش ۴-۲ مراجعه کنید).

۳.۴ قضیه (قضیه استون) هر فضای متریک پذیر فضایی است پیرافشرده.

برهان. فرض کنیم  $X$  فضایی متریک پذیر باشد. قبلاً، با توجه به لم ۱.۳ می‌دانیم که هر پوشش باز  $X$  نظریفی باز دارد که  $X$  را می‌پوشاند و در ضمن موضعاً متناهی شمارشی است. آنچه که می‌ماند اثبات این حکم است که شرط اخیر مستلزم آن است که هر پوشش باز  $X$  دارای نظریفی باز است که  $X$  را می‌پوشاند و موضعاً متناهی است و این نتیجه‌ای است از لم ذیل.  $\square$

۴.۴ لم فرض کنیم  $X$  منتظم باشد. در این صورت، شرایط ذیل در  $X$  معادل‌اند:

هر پوشش  $X$  نظریفی دارد که

(۱) پوششی باز برای  $X$  و موضعاً متناهی شمارشی است.

(۲) پوششی برای  $X$  و موضعاً متناهی است.

(۳) پوشش بسته‌ای برای  $X$  و موضعاً متناهی است.

(۴) پوششی باز برای  $X$  و موضعاً متناهی است.



پرهان. اثبات (۱)  $\implies$  (۴) بدیهی است. آنچه ما برای اثبات قضیه استون نیاز داریم عکس آن است. برای اثبات عکس این حکم، به هر حال باید مراحل (۴)  $\implies$  (۳)  $\implies$  (۲)  $\implies$  (۱) را پیمود. به همین دلیل، برای سهولت اثبات شرایط (۲) و (۳) را در صورت حکم این لم درج کرده‌ایم.

(۲)  $\implies$  (۱). فرض کنیم  $A$  یک پوشش باز  $X$  باشد، و  $\mathcal{B}$  نظریفی باز برای  $A$  که  $X$  را می‌پوشاند و موضعاً متناهی شمارشی است. فرض کنیم

$$\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$$

به طوری که هر  $\mathcal{B}_n$  موضعاً متناهی است. اعضای  $\mathcal{B}$  را نوعاً با حروف  $U, V, W, \dots$  نمایش می‌دهیم.

حال، روشی را به کار می‌بریم که در اساس همان ابتکار درهم کشیدن است که قبلاً از آن برای جداساختن مجموعه‌هایی متعلق به  $\mathcal{B}_n$  های متفاوت استفاده کردیم. به ازای هر  $i$ ، فرض کنیم

$$V_i = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_i} U$$

سپس، به ازای هر  $n$  از  $\mathbb{Z}_+$  و هر عضو  $U$  از  $\mathcal{B}_n$  مجموعه  $S_n(U)$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$S_n(U) = U - \bigcup_{i < n} V_i.$$

[توجه کنید که  $S_n(U)$  الزاماً باز یا بسته نیست.] فرض کنیم

$$\mathcal{C}_n = \{S_n(U) \mid U \in \mathcal{B}_n\}.$$

در این صورت،  $\mathcal{C}_n$  نظریفی از  $\mathcal{B}_n$  است، زیرا به ازای هر  $U$  از  $\mathcal{B}_n$ ،  $S_n(U) \subset U$ . فرض کنیم  $\mathcal{C} = \bigcup \mathcal{C}_n$ . مدعی هستیم که  $\mathcal{C}$  نظریف موضعاً متناهی مطلوب  $A$  است که  $X$  را می‌پوشاند.

فرض کنیم  $x$  نقطه‌ای از  $X$  باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که  $x$  متعلق به عضوی از  $\mathcal{C}$  است، و همسایگی‌ای دارد که تنها تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{C}$  را قطع می‌کند. پوشش  $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$  را در نظر می‌گیریم؛ فرض کنیم  $N$  کوچکترین عدد صحیحی باشد که به ازای آن  $x$  در عضوی از  $\mathcal{B}_N$  قرار دارد. همچنین، فرض کنیم  $U$  عضوی از  $\mathcal{B}_N$  باشد که شامل  $x$  است. نخست، ملاحظه کنید که چون به ازای  $i < N$ ، نقطه  $x$  متعلق به هیچ عضو  $\mathcal{B}_i$  نیست، نقطه  $x$  در  $S_N(U)$  که عضوی از  $\mathcal{C}$  است قرار دارد. ثانیاً، توجه کنید که چون هر گردایه  $\mathcal{B}_n$  موضعاً متناهی است، به ازای هر  $n$ ، که  $n = 1, \dots, N$ ، یک همسایگی  $x$ ، مانند  $W_n$ ، را می‌توان چنان انتخاب کرد که تنها تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{B}_n$  را قطع کند. حال اگر  $W_n$  عضو  $S_n(V)$  از  $\mathcal{C}_n$  را قطع کند، باید عضو  $V$  از  $\mathcal{B}_n$  را نیز قطع کند، زیرا  $S_n(V) \subset V$ . بنابراین،  $W_n$  تنها تعدادی متناهی از

اعضای  $\mathcal{C}$  را قطع نمی کند. بعلاوه، چون  $U$  در  $\mathcal{B}_N$  است، به ازای  $n > N$ ، هیچ عضو  $\mathcal{C}$  را قطع نمی کند. در نتیجه، مجموعه

$$W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_N \cap U$$

که يك همسایگی  $x$  است تنها تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{C}$  را قطع می کند.  
 (۲)  $\implies$  (۳). فرض کنیم  $A$  يك پوشش باز  $X$  باشد.  $\mathcal{B}$  را گردایه همه مجموعه های باز  $U$  از  $X$  می گیریم که  $U$  زیر مجموعه عضوی از  $A$  باشد. بنابراین منتظم بودن  $X$ ،  $\mathcal{B}$  مجموعه  $X$  را می پوشاند. با استفاده از (۲)، نظریفی مانند  $\mathcal{C}$  از  $\mathcal{B}$  می توان یافت که  $X$  را پوشاند و موضعاً متناهی باشد. فرض کنیم

$$\mathcal{D} = \{\bar{C} \mid C \in \mathcal{C}\}.$$

در این صورت،  $\mathcal{D}$  نیز  $X$  را می پوشاند، و بنا بر لم ۱.۱، موضعاً متناهی است؛ و  $A$  را را نیز ظریف می سازد.

(۳)  $\implies$  (۴). فرض کنیم  $A$  يك پوشش باز  $X$  باشد. با استفاده از (۳)،  $\mathcal{B}$  را نظریفی از  $A$  اختیار می کنیم که  $X$  را پوشاند و موضعاً متناهی باشد. (اگر بخواهیم، می توانیم  $\mathcal{B}$  را يك نظریف بسته انتخاب کنیم، اما، این کاری فایده است.) اینک در پی آنیم که هر عضو  $B$  را به قدری منبسط کنیم تا مجموعه ای باز شود، و در عین حال این انبساط آن قدر ناچیز باشد که گردایه حاصل از مجموعه های باز موضعاً متناهی و هنوز نظریفی از  $A$  باشد. این مرحله متضمن ابتکاری تازه است. ابتکار پیشین، که چندین بار به کار رفت، از این قرار است که این مجموعه ها را به طریقی مرتب می کنیم، و سپس، با تفریق همه مجموعه های ماقبل يك مجموعه از آن مجموعه، مجموعه جدیدی به دست می آوریم. این ابتکار مجموعه ها را منقبض می کند؛ اما، برای انبساط آنها باید کار دیگری کرد. پوشش کمکی موضعاً متناهی بسته ای از  $X$  مانند  $\mathcal{C}$  معرفی می کنیم و با استفاده از آن اعضای  $\mathcal{B}$  را منبسط می کنیم.

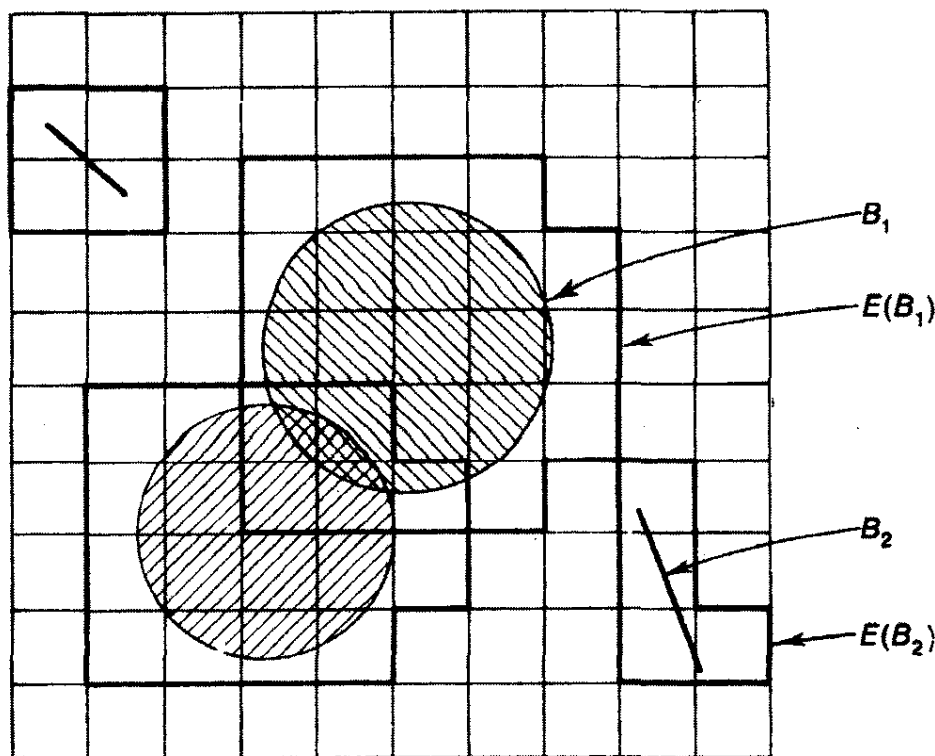
به ازای هر  $x$  از  $X$ ، يك همسایگی  $x$  موجود است که تنها تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{B}$  را قطع می کند. گردایه همه مجموعه های بسازی که تنها تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{B}$  را قطع می کنند پوشش بازی برای  $X$  است. با استفاده مجدد از (۳)، فرض می کنیم  $\mathcal{C}$  نظریف بسته ای از این پوشش باشد که  $X$  را می پوشاند و موضعاً متناهی است. هر عضو  $\mathcal{C}$  تنها عده ای متناهی از اعضای  $\mathcal{B}$  را قطع می کند. به ازای هر عضو  $B$  مانند  $B$ ، فرض کنیم

$$\mathcal{C}(B) = \{C \mid C \subset X - B \text{ و } C \in \mathcal{C}\}.$$

سپس،  $E(B)$  را چنین تعریف می کنیم:

$$E(B) = X - \bigcup_{C \in \mathcal{C}(B)} C$$

چون  $\mathcal{C}$  گردایه‌ای موضعاً متناهی از مجموعه‌های بسته است، بنا برلم ۱.۱، اجتماع اعضای هر زیر گردایه‌ای از  $\mathcal{C}$  نیز بسته است. بنا براین، مجموعه  $E(B)$  يك مجموعه باز است. بعلاوه، بنا بر تعریف،  $B \subset E(B)$ . (شکل ۳ را نگاه کنید. در این شکل اعضای  $\mathcal{B}$  به شکل نواحی مستدیر بسته و قطعه خطها نمایش داده شده‌اند و اعضای  $\mathcal{C}$  به شکل نواحی مربعی.)



شکل ۳

حال ممکن است  $B$  ها را بیش از اندازه منبسط کرده باشیم؛ یعنی، ممکن است گردایه  $\{E(B)\}$  احتمالاً نظریفی از  $A$  نباشد. چاره این کار آسان است. به ازای هر  $B$  از  $\mathcal{B}$  عضوی مانند  $F(B)$  از  $A$  انتخاب می‌کنیم که حاوی  $B$  باشد. در این صورت، گردایه  $\mathcal{D}$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{D} = \{E(B) \cap F(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

گردایه  $\mathcal{D}$  نظریفی از  $A$  است. زیرا  $B \subset (E(B) \cap F(B))$  و پوششی برای  $X$  است، و گردایه  $\mathcal{D}$  نیز  $X$  را می‌پوشاند.

سرانجام، اثبات موضعاً متناهی بودن  $\mathcal{D}$  می‌ماند. به‌ازای نقطه مفروض  $x$  از  $X$ ، يك همسایگی  $x$  مانند  $W$  را چنان انتخاب می‌کنیم که تنها تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{C}$ ، مثلاً  $C_1, \dots, C_k$  را قطع کند. در این صورت  $W \subset C_1 \cup \dots \cup C_k$ . زیرا  $\mathcal{C}$  پوششی برای  $X$  است. حال اگر عضوی مانند  $C$  از  $\mathcal{C}$  مجموعه  $E(B) \cap F(B)$  را قطع کند، نمی‌تواند در  $X - B$  واقع باشد (بنابر تعریف  $E(B)$ )؛ پس  $C$  باید  $B$  را قطع کند. زیرا از آنجا که عضو  $C$  از  $\mathcal{C}$  فقط تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{B}$  مانند  $B$  را قطع می‌کند، پس حداکثر همان تعداد از اعضای گردایه  $\mathcal{D} = \{E(B) \cap F(B)\}$  را قطع می‌کند. در این صورت، چون هر  $C_i$  تنها تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{D}$  را قطع می‌کند، مجموعه  $W$  نیز چنین می‌کند.  $\square$

### تمرینها

۱. با مثالی ثابت کنید که اگر  $X$  پیرافشرده باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای هر پوشش باز  $X$  مانند  $\mathcal{A}$ ، زیرگردایه‌ای موضعاً متناهی از  $\mathcal{A}$  موجود است که  $X$  را می‌پوشاند.

۲. (الف) ثابت کنید که هر فضای منتظم لیند洛夫 فضایی است پیرافشرده.  
(ب) نتیجه بگیرید که  $R_1$  پیرافشرده است.

۳. (الف) ثابت کنید که حاصل ضرب يك فضای پیرافشرده و يك فضای هاوسدورف فشرده فضایی است پیرافشرده. [داهنمایی: از لم لوله در بخش ۳ - ۵ استفاده کنید].  
(ب) نتیجه بگیرید که  $S_{\mathbb{R}}$  پیرافشرده نیست.  
(پ) ثابت کنید که  $S_{\mathbb{R}} \times [0, 1)$  با ترتیب قاموسی پیرافشرده نیست. [داهنمایی:  $S_{\mathbb{R}}$  بازیرفضای بسنه  $S_{\mathbb{R}} \times 0$  هومئومورف است].

۴. فرض کنید  $X$  فضایی هاوسدورف باشد. همچنین، فرض کنید که پوشش باز شمارایی برای  $X$  مانند  $\{U_n\}$  موجود باشد به طوری که به‌ازای هر  $n$ ،  $U_n$  فشرده است و  $U_n \subset U_{n+1}$ . ثابت کنید که  $X$  پیرافشرده است. [داهنمایی: به مثال ۱ مراجعه کنید].

۵. فرض کنید  $X$  فضایی منتظم باشد؛ ثابت کنید که اگر پوشش شمارایی مانند  $\{U_n\}$  برای  $X$ ، متشکل از مجموعه‌های بازی که بستارهای آنها پیرافشرده است، موجود باشد آنگاه  $X$  پیرافشرده است.

۶. آیا هر فضای هاوسدورف موضعاً فشرده فضایی است پیرافشرده؟

۷. برای پوششهای باز نقطه-متناهی فضایی نرمال يك «لم درهم کشیدن» داریم؛ به تمرینهای بخش ۴ - ۵ مراجعه کنید. ذیلاً «لم انبساط» را می‌آوریم که در باره

خانواده‌های اندیسدار موضعاً متناهی در فضایی پیرافشرده است.

لم. فرض کنید  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$  يك خانواده اندیسدار موضعاً متناهی از زیرمجموعه‌های فضای پیرافشرده  $X$  باشد. در این صورت، يك خانواده اندیسدار موضعاً متناهی مانند  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  از مجموعه‌های باز وجود دارد به طوری که به ازای هر  $\alpha \in J$ ،  $A_\alpha \subset U_\alpha$ .

۸. معین کنید کدامیک از فضاهاى ذیل در توپولوژی ترتیب قاموسی فضایی است پیرافشرده:

(الف)  $[0, 1] \times [0, 1]$ ؛

(ب)  $[0, 1) \times [0, 1]$ ؛

(پ)  $[0, 1) \times [0, 1)$ .\*

۹.\* فرض کنید  $G$  يك گروه توپولوژیک هاوسدورف، همبند، و موضعاً فشرده باشد. ثابت کنید که  $G$  پیرافشرده است. [داهنمایی: يك همسایگی  $e$  مانند  $U_1$  که دارای بستار فشرده است انتخاب کنید، و به طور کلی، تعریف کنید  $U_{n+1} = \bar{U}_n \cdot U_1$ . در این صورت،  $G = \bigcup U_n$ ].

۱۰.\* ثابت کنید که اگر  $G$  يك گروه توپولوژیک پیرافشرده باشد و  $H$  زیر گروه فشرده‌ای از آن باشد آنگاه  $G/H$  پیرافشرده است. [داهنمایی: ثابت کنید که  $p: G \rightarrow G/H$  نگاشتی بسته است. سپس، ثابت کنید که اگر  $\mathcal{B}$  يك پوشش بسته موضعاً متناهی از  $G$  باشد آنگاه گردایه  $\{p(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$  يك پوشش بسته موضعاً متناهی از  $G/H$  است.]

## ۶-۵ قضیه متریسازی اسمیرنوف

قضیه متریسازی ناگاتا - اسمیرنوف شرایط لازم و کافی برای متری پذیری يك فضا به دست می‌دهد. در این بخش قضیه متریسازی دیگری می‌آوریم که نتیجه‌ای از قضیه ناگاتا - اسمیرنوف است و اولین بار توسط اسمیرنوف به اثبات رسید.

تعریف. فضای  $X$  را وقتی موضعاً متری پذیر خوانیم که هر نقطه آن مانند  $x$  همسایگی‌ای مانند  $U$  داشته باشد که با توپولوژی زیر فضایی متری پذیر باشد.

قضیه (قضیه متریسازی اسمیرنوف). فضای  $X$  متری پذیر است اگر و فقط اگر پیرافشرده و موضعاً متری پذیر باشد.

برهان. فرض کنیم  $X$  متری پذیر باشد. در این صورت،  $X$  موضعاً متری پذیر

است؛ بنا بر قضیه استون،  $X$  پیرافشرده نیز هست.

بعکس، فرض کنیم  $X$  پیرافشرده و موضعاً متری پذیر باشد. ثابت می‌کنیم که  $X$  دارای پایه‌ای است مانند  $\mathcal{B}$ ، که موضعاً متناهی شمارشی است. چون  $X$  منتظم است (به موجب پیرافشرده‌گی)، از قضیه متریسازی ناگاتا - اسمیرنوف متریک پذیری  $X$  نتیجه می‌شود.

این برهان اقتباسی از برهان قضیه ۲.۳ است.  $X$  را با مجموعه‌های بسازی که متریک پذیر هستند پوشانید؛ سپس، یک نظریف باز موضعاً متناهی از این پوشش، مانند  $\mathcal{C}$ ، طوری انتخاب کنید که  $X$  را پوشاند. هر عضو  $C$  از  $\mathcal{C}$  متریک پذیر است؛ فرض کنیم تابع  $d_C : C \times C \rightarrow R$  متریکی باشد که توپولوژی  $C$  را تولید می‌کند. به ازای نقطه مفروض  $x$  از  $C$ ،  $B_C(x, \varepsilon)$  را مجموعه همه نقاطی مانند  $y$  از  $C$  می‌گیریم که  $d_C(x, y) < \varepsilon$ . چون  $B_C(x, \varepsilon)$  در  $C$  باز است، در  $X$  نیز باز است.

به ازای عضو مفروضی از  $Z_+$  مانند  $m$ ، گردایه  $A^m$  را پوششی برای  $X$  می‌گیریم که از همه گویهای باز با شعاع  $1/m$  در مجموعه‌های  $C$  از  $\mathcal{C}$  تشکیل شده است؛

$$A^m = \left\{ B_C\left(x, \frac{1}{m}\right) \mid x \in C \text{ و } C \in \mathcal{C} \right\}$$

فرض کنیم  $\mathcal{D}^m$  یک نظریف باز موضعاً متناهی  $A^m$  باشد که  $X$  را می‌پوشاند. (در اینجا از پیرافشرده‌گی استفاده می‌کنیم.) فرض کنیم

$$\mathcal{D} = \bigcup \mathcal{D}^m;$$

در این صورت،  $\mathcal{D}$  موضعاً متناهی شمارشی است. مدعی هستیم که  $\mathcal{D}$  یک پایه  $X$  است؛ و با اثبات این مطلب برهان آن به پایان می‌رسد.

فرض کنیم  $x$  نقطه‌ای از  $X$  باشد و  $U$  را یک همسایگی  $x$  می‌گیریم. می‌خواهیم عضوی مانند  $D$  از  $\mathcal{D}$  بیابیم که  $x \in D \subset U$ . تنها به تعدادی متناهی از اعضای  $\mathcal{C}$ ، مثلاً  $C_1, \dots, C_k$ ، تعلق دارد. پس،  $U \cap C_i$  یک همسایگی  $x$  در مجموعه  $C_i$  است، و در نتیجه  $\varepsilon_i$  مثبتی وجود دارد به طوری که

$$B_{C_i}(x, \varepsilon_i) \subset (U \cap C_i).$$

$m$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $1/m < \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}/2$ . چون گردایه  $A^m$  فضای  $X$  را می‌پوشاند، می‌باید عضوی از  $A^m$  مانند  $D$  شامل  $x$  موجود باشد. چون  $\mathcal{D}^m$  نظریف  $A^m$  است، به ازای مجموعه‌ای مانند  $C$  از  $\mathcal{C}$  و  $y$  در  $C$ ، می‌باید عضوی از  $A^m$  مانند  $B_C(y, 1/m)$  حاوی  $D$  موجود باشد. در این صورت،  $x$  متعلق به  $C$  است، و در نتیجه  $C$  باید یکی از مجموعه‌های  $C_1, \dots, C_k$  باشد. فرض کنیم  $C = C_i$ . در این صورت، با استفاده از نامساوی مثلثی، داریم

$$D \subset B_{c_i}\left(y, \frac{1}{m}\right) \subset B_{c_i}(x, \varepsilon_i) \subset U,$$

و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

**مثال ۱.** ثابت می‌کنیم که فضای  $S_{\mathbb{Q}}$  پیرافشرده نیست. یک برهان برای این مطلب در میان تمرینهای اخیر آمد؛ در اینجا برهان دیگری می‌آوریم.

نخست، ثابت می‌کنیم که  $S_{\mathbb{Q}}$  موضعاً متریک‌پذیر است؛ فرض کنیم  $x, y \in S_{\mathbb{Q}}$  را چنان اختیار می‌کنیم که  $\mathbb{Q} < y < x$ . مجموعه باز  $S_{\mathbb{Q}}$  پایه‌ای شمارا دارد؛ در واقع، گردایه همه بازه‌هایی که نقاط انتهایی آنها در  $S_{\mathbb{Q}}$  است، شماراست. از اینجا، بنا بر قضیه متریکسازی اوریسون، نتیجه می‌گیریم که  $S_{\mathbb{Q}}$  متریک‌پذیر است.

اگر  $S_{\mathbb{Q}}$  فرافشرده بود، از قضیه اسمیرنوف نتیجه می‌شد که  $S_{\mathbb{Q}}$  متریک‌پذیر است. اما می‌دانیم که  $S_{\mathbb{Q}}$  متریک‌پذیر نیست، زیرا فشرده بر حسب نقطه حدی هست اما فشرده نیست (به‌مثال ۱ از بخش ۳ - ۷ مراجعه کنید).

## تمرینها

۱. قضیه ۱.۵ را با تمرینهای ۵ و ۶ در بخش ۴ - ۴ مقایسه کنید.
  ۲. ثابت کنید که هر فضای متری موضعاً فشرده همبند دارای پایه‌ای شماراست. [دانه‌نمایی: فرض کنید  $\mathcal{C}$  یک پوشش موضعاً متناهی برای  $X$  باشد که از مجموعه‌هایی باز با بستارهای فشرده تشکیل شده است. فرض کنید  $U_1$  عضوی ناتهی از  $\mathcal{C}$  باشد، و در حالت کلی،  $U_{n+1}$  را اجتماع همه اعضایی از  $\mathcal{C}$  می‌گیریم که  $\bar{U}_n$  را قطع می‌کنند. ثابت کنید که  $\bar{U}_n$  فشرده است و  $X = \bigcup U_n$ ].
  ۳. در اینجا برای اصطلاح بسلا مفهوم کلیتری از آنچه که در بخش ۴ - ۵ آمد می‌آوریم: فضای  $X$  را فرافشرده بسلا گویند در صورتی که فضایی فرافشرده باشد و عدد صحیحی مانند  $m$  موجود باشد به‌طوری که هر نقطه  $x$  دارای همسایگی هم‌شومورف با زیرمجموعه بازی از  $R^m$  باشد.
- (الف) ثابت کنید که هر فرافشرده بسلا متری‌پذیر است.
- (ب) ثابت کنید که اگر  $X$  یک فرافشرده بسلا باشد که تنها از تعداد متناهی مؤلفه تشکیل شده باشد آنگاه  $X$  یک بسلا است؛ و بعکس.

## فضاهای متری تمام و فضاهای تابعی

احتمالاً، پیش از این، بسا مفهوم تمامیت فضای متری آشنا شده‌اید. تمامیت، مفهومی اساسی برای همه جنبه‌های آنالیز است. گرچه تمامیت خاصیتی متری است تا توپولوژیک، ولی قضایایی در فضاهای متری هست که سرشت توپولوژیک دارند. در این فصل، مهمترین مثالهای فضاهای متری تمام را مطالعه می‌کنیم و بعضی از قضایا را نیز اثبات خواهیم کرد.

مانوسترین مثال فضای متری تمام، فضای اقلیدسی با هر یک از متریکهای معمولی آن است. مثال دیگر، که به همان اندازه اهمیت دارد، مجموعه  $@(X, Y)$  از همه توابع پیوسته است که فضایی مانند  $X$  را بتوی فضایی مانند  $Y$  می‌نگارد. این مجموعه متریکی دارد موسوم به متریک یکنواخت که شبیه متریک یکنواختی است که برای  $R^J$  در بخش ۲-۹ تعریف کردیم. اگر  $Y$  یک فضای متری تمام باشد آنگاه  $@(X, Y)$ ، در متریک یکنواخت، تمام است. این حکم را در بخش ۷-۱ ثابت می‌کنیم. به عنوان کاربردی از این مطلب، در بخش ۷-۲ منحنی فضاپرکن پثانوا را می‌سازیم.

یکی از قضایای فضاهای متری، که سرشتی توپولوژیک دارد، ارتباط فشردگی یک فضا را با تمامیت آن نشان می‌دهد. این قضیه را در بخش ۷-۳ ثابت می‌کنیم. نتیجه مستقیمی از آن قضیه‌ای در مورد مجموعه‌های فشرده در فضای تابعی  $@(X, R^n)$  است؛ و این، صورت کلاسیک قضیه مشهوری است موسوم به قضیه آسکولی<sup>۲</sup>.

بر فضای تابعی  $@(X, Y)$  علاوه بر توپولوژی که از متریک یکنواخت تولید می‌شود، توپولوژیهای سودمند دیگری نیز وجود دارند. ما بعضی از آنها را در بخش ۷-۴ و

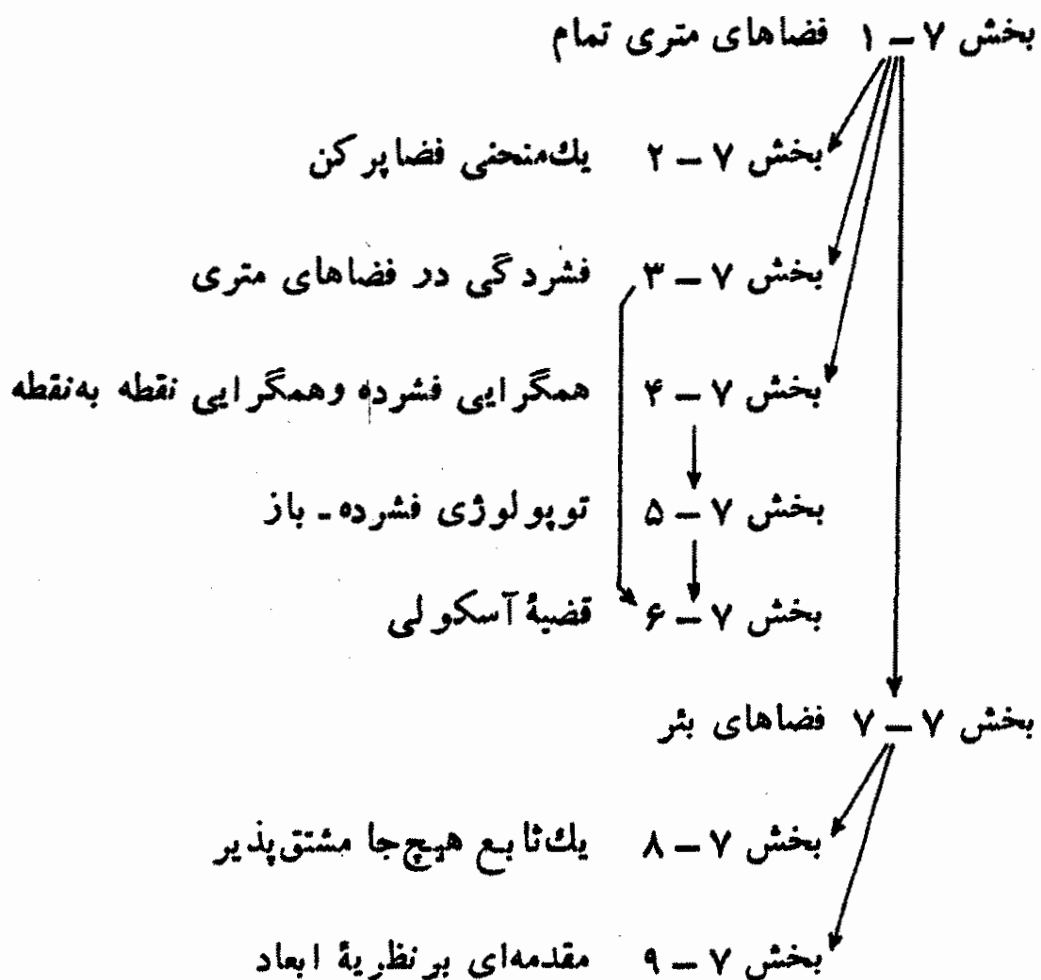


بخش ۷-۵ مطالعه خواهیم کرد. همچنین، صورتی تعمیم یافته از قضیه آسکولی را در بخش ۷-۶ ثابت می‌کنیم.

در باره فضاهای متری قضیه دیگری را، که سرشت توپولوژیک دارد، در بخش ۷-۷ ثابت می‌کنیم؛ مضمون آن قضیه این است که هر فضای متری تمام متعلق به رده‌ای از فضاهای توپولوژیک است که فضاهای بتر نام دارند. شرط تعریف کننده فضای بتر تا حدودی دارای بیان پیچیده‌ای است، ولی اغلب موارد استعمال آن سودمند است. يك مورد استعمال آن در برهانی است که ما در بخش ۷-۸ برای اثبات وجود يك تابع حقیقی پیوسته که هیچ‌جا مشتق پذیر نیست می‌آوریم.

مورد استعمال دیگر آن در شاخه‌ای از توپولوژی است موسوم به نظریه ابعاد. در بخش ۷-۹ مفهوم توپولوژیک بعد را (که از لبگ<sup>۲</sup> است) تعریف می‌کنیم و این قضیه کلاسیک را ثابت می‌کنیم که هر فضای متری پذیر فشرده با بعد توپولوژیک  $m$  را می‌توان در فضای اقلیدسی  $R^N$  با بعد  $N = 2m + 1$  نشان داد. این قضیه تعمیمی است از قضیه نشان دادن که در بخش ۴-۵ برای بسلاها ثابت شد.

بعضی از مباحث این فصل از یکدیگر مستقل اند. بستگی بین آنها در نمودار زیر نموده شده است:



در سراسر این فصل، بخش ۳-۸، یعنی فشردگی موضعی، را دانسته می‌گیریم. هنگامی که از نظریه ابعاد بحث می‌کنیم از بخش ۲-۵، افرازهای واحد، و نیز اندکی از جبر خطی استفاده می‌کنیم.

## ۷-۱ فضاهای متری تمام

در این بخش مفهوم تمامیت را تعریف می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که اگر  $Y$  یک فضای متری تمام باشد آنگاه فضای تابعی  $\mathcal{C}(X, Y)$ ، با متریک یکنواخت، تمام است. همچنین، ثابت می‌کنیم که هر فضای متری  $X$  می‌تواند به طور ایزومتریک در یک فضای متری تمام نشانده شود.

**تعریف.** فرض کنیم  $(X, d)$  یک فضای متری باشد. گوئیم دنباله  $(x_n)$  از نقاط  $X$  یک دنباله کوشی در  $(X, d)$  است هرگاه به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیحی مانند  $N$  وجود داشته باشد که

$$\text{اگر } n, m \geq N \text{ آنگاه } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

فضای متری  $(X, d)$  را تمام گوئیم در صورتی که هر دنباله کوشی در  $X$  همگرا باشد.

البته هر دنباله همگرا در  $X$  الزاماً یک دنباله کوشی است؛ تمامیت مستلزم آن است که عکس این حکم برقرار باشد.

ملاحظه کنید که هر زیرمجموعه بسته فضای متری تمام  $(X, d)$  مانند  $A$  الزاماً، با متریک تحدیدی، تمام است. چون، یک دنباله کوشی در  $A$  دنباله‌ای کوشی در  $X$  نیز هست، پس در  $X$  همگراست. از آنجا که  $A$  زیرمجموعه بسته‌ای از  $X$  است، حد مذکور باید در  $A$  باشد.

همچنین، ملاحظه کنید که اگر  $X$  تحت متریک  $d$  تمام باشد آنگاه  $X$  تحت متریک کراندار استاندارد متناظر با  $d$ ، یعنی

$$\bar{d}(x, y) = \min \{d(x, y), 1\},$$

نیز تمام است، و بعکس. زیرا، دنباله‌ای مانند  $(x_n)$  تحت  $\bar{d}$  یک دنباله کوشی است اگر و تنها اگر تحت  $d$  دنباله‌ای کوشی باشد. و یک دنباله تحت  $\bar{d}$  همگراست اگر و تنها اگر آن دنباله تحت  $d$  همگرا باشد.

در زیر معیار مفیدی برای تمامیت یک فضای متری می‌آوریم:

۱.۱. هر فضای متری  $X$  تمام است در صورتی که هر دنباله کوشی در  $X$  زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد.

برهان. فرض کنیم  $(x_n)$  یک دنباله‌ای کوشی در  $(X, d)$  باشد. ثابت می‌کنیم که

اگر  $(x_n)$  زیر دنباله‌ای مانند  $(x_{n_i})$  داشته باشد که به نقطه‌ای مانند  $x$  همگرا باشد آنگاه دنباله  $(x_n)$  نیز به  $x$  همگراست.

فرض کنیم  $\varepsilon > 0$ . نخست، [با استفاده از این امر که  $(x_n)$  دنباله‌ای کوشی است]  $N$  را به قدر کافی بزرگ اختیار می‌کنیم که، به ازای هر  $n, m \geq N$

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

سپس، [با استفاده از این حقیقت که  $n_1 < n_2 < \dots$  دنباله‌ای صعودی از اعداد صحیح است و  $x_{n_i}$  به  $x$  همگراست] عدد صحیح  $i$  را به قدر کافی بزرگ اختیار می‌کنیم به طوری که  $n_i \geq N$  و

$$d(x_{n_i}, x) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

با در نظر گرفتن این احکام بایکدیگر، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود که به ازای  $n \geq N$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x) < \varepsilon. \quad \square$$

۲.۱. قضیه فضای متری  $R^k$  با هر یک از متریکهای معمولی خود، یعنی متریک اقلیدسی  $d$  یا متریک مربعی  $\rho$ ، تمام است.

پرهان. برای اثبات تمامیت فضای متری  $(R^k, \rho)$ ، فرض کنیم  $(x_n)$  دنباله‌ای کوشی در  $(R^k, \rho)$  باشد. در این صورت، مجموعه  $\{x_n\}$  زیرمجموعه‌ای کراندار از  $(R^k, \rho)$  خواهد بود. زیرا، اگر  $N$  را چنان برگزینیم که به ازای هر  $m \geq N$  و هر  $n \geq N$

$$\rho(x_n, x_m) \leq 1,$$

آنگاه عدد

$$M = \max \{ \rho(x_1, 0), \dots, \rho(x_{N-1}, 0), \rho(x_N, 0) + 1 \}$$

یک کران بالای  $\rho(x_n, 0)$  است. بدین ترتیب، نقاط دنباله  $(x_n)$  همه در مکعب  $[-M, M]^k$  قرار می‌گیرند. چون این مکعب فشرده است، بنا بر قضیه ۴.۷ در فصل ۳، دنباله  $(x_n)$  زیر دنباله‌ای همگرا دارد. پس، بنا بر لم ۱.۱،  $(R^k, \rho)$  تمام است. برای اثبات تمامیت  $(R^k, d)$ ، ملاحظه می‌کنیم که یک دنباله نسبت به  $d$  دنباله‌ای کوشی است اگر و تنها اگر نسبت به  $\rho$  دنباله‌ای کوشی باشد، و یک دنباله نسبت به  $d$  همگراست اگر و تنها اگر آن دنباله نسبت به  $\rho$  نیز همگرا باشد.  $\square$

مثال ۰۱. فضای  $Q$  از اعداد گویا بسا متریک معمولی  $d(x, y) = |x - y|$  مثالی از يك فضای متری ناتمام است. مثلاً، دنباله

$$1r4, 1r41, 1r414, 1r4142, 1r41421, \dots$$

از اعداد اعشاری متناهی همگرا به  $\sqrt{2}$  (در  $R$ ) است و در  $Q$  يك دنباله کوشی است اما، (در  $Q$ ) همگرا نیست.

مثال ۰۲. بازه  $(-1, 1)$  در  $R$  با متریک  $d(x, y) = |x - y|$  مثال دیگری از فضایی ناتمام است، در این فضا دنباله  $(x_n)$  با ضابطه

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

يك دنباله کوشی است که همگرا نیست. این مثال ثابت می کند که ناتمام بودن يك خاصیت توپولوژیک نیست، یعنی تحت هومئومورفیسم حفظ نمی شود. زیرا، بازه  $(-1, +1)$  با خط حقیقی  $R$  هومئومورف است، و  $R$  در توپولوژی معمولی خود تمام است.

مثال ۰۳. برای توپولوژی حاصل ضربی بر  $R^\omega$  متریکی وجود دارد که نسبت به آن  $R^\omega$  تمام است. متری

$$D(x, y) = \text{lub} \{ \bar{d}(x_i, y_i) / i \}$$

بر  $R^\omega$ ، که در آن  $\bar{d}(a, b) = \min \{ |a - b|, 1 \}$ ، در نظر می گیریم. در قضیه ۵.۹ فصل ۲، ثابت کردیم که  $D$  برای فضای حاصل ضربی  $R^\omega$  يك متریک است. برای اثبات تمامیت  $R^\omega$  تحت  $D$ ، فرض می کنیم  $(x_n)$  تحت  $D$  دنباله ای کوشی باشد. فرض می کنیم فعلاً  $i$  ثابت باشد. نگاشت  $\pi_i: R^\omega \rightarrow R$  را تصویر بر مختص  $i$  ام فرض می کنیم. از آنجا که

$$\bar{d}(\pi_i(x), \pi_i(y)) \leq iD(x, y)$$

دنباله  $(\pi_i(x_n))$  در  $(R, \bar{d})$  يك دنباله کوشی است. بنابراین همگراست؛ مثلاً به  $a_i$ . فرض کنیم  $a$  نقطه  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$  از  $R^\omega$  باشد. مدعی هستیم که  $x_n \rightarrow a$ . زیرا، يك عضو پایه نوعی شامل  $a$  به صورت  $\prod U_i$  هست که در آن به ازای  $i \geq m$ ،  $U_i = R$ . عدد  $N_i$  را به قدر کافی بزرگ اختیار می کنیم که به ازای هر  $n \geq N_i$  که  $\pi_i(x_n) \in U_i$ ،  $n \geq N$  داریم  $N = \max \{ N_1, \dots, N_m \}$ ؛ در این صورت به ازای هر  $n \geq N$  داریم  $x_n \in \prod U_i$ .

گرچه فضاهای حاصل ضربی  $R^\omega$  و  $R^*$  هر دو متریکهایی دارند که نسبت به آنها تمام هستند، ولی در حالت کلی نمی توان انتظار داشت که برای  $R^J$  نیز بتوان چنین حکمی را اثبات کرد. زیرا، وقتی  $J$  ناشماراست  $R^J$  حتی متریک پذیر هم نیست

(به بخش ۲ - ۱۵ مراجعه کنید). با وجود این، در مجموعه  $R^J$  توپولوژی دیگری موجود است که از متریک یکنواخت به دست می آید، و چنانکه خواهیم دید، نسبت به این متریک،  $R^J$  تمام است.

در حالت کلی، متریک یکنواخت را برای  $Y^J$  چنین تعریف می کنیم:

تعریف. فرض کنیم  $(Y, d)$  یک فضای متری باشد، و

$$\bar{d}(a, b) = \min \{d(a, b), 1\}$$

متریک کراندار استاندارد متناظر با  $d$  برای  $Y$  باشد. به ازای مجموعه اندیس مفروض  $J$ ، متریکی بر مجموعه  $Y^J$  متشکل از همه توابع  $f: J \rightarrow Y$ ، با ضابطه

$$\bar{\rho}(f, g) = \text{lub} \{ \bar{d}(f(\alpha), g(\alpha)) \mid \alpha \in J \},$$

تعریف می کنیم. تابع  $\bar{\rho}$  را متریک یکنواخت بر  $Y^J$  متناظر با متریک  $d$  بر  $Y$  می نامند؛ به آسانی می توان ثابت کرد که  $\bar{\rho}$  متریک است.

توجه کنید، در اینجا علامتگذاری تابعی را برای اعضای  $Y^J$  که به جای علامتگذاری «تابعی» است به کار بردیم، در سرتاسر این فصل از این موضوع پیروی خواهیم کرد.

۳.۱. قضیه اگر فضای  $Y$  در متریک  $d$  تمام باشد آنگاه فضای  $Y^J$  در متریک یکنواخت  $\bar{\rho}$  متناظر با  $d$  تمام است.

پرهان. یادآوری می کنیم که اگر  $(Y, d)$  تمام باشد،  $(Y, \bar{d})$  نیز چنین است، که در اینجا  $\bar{d}$  متریک کراندار متناظر با  $d$  است. حال فرض می کنیم  $f_1, f_2, \dots$  دنباله ای از نقاط  $Y^J$  باشد که نسبت به  $\bar{\rho}$  دنباله ای کوشی است. به ازای عضو مفروضی از  $J$  مانند  $\alpha$ ، این حکم که به ازای همه مقادیر  $m$  و  $n$ ،

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) \leq \bar{\rho}(f_n, f_m)$$

بدین معنی است که  $f_1(\alpha), f_2(\alpha), \dots$  در  $(Y, \bar{d})$  یک دنباله کوشی است. بنابراین، این دنباله همگراست، مثلاً به نقطه  $y_\alpha$ . فرض کنیم  $f: J \rightarrow Y$  تابعی باشد با ضابطه  $f(\alpha) = y_\alpha$ . مدعی هستیم که دنباله  $(f_n)$  با متریک  $\bar{\rho}$  به  $f$  همگراست.

به ازای  $\varepsilon > 0$ ، نخست  $N$  را به قدر کافی بزرگ اختیار می کنیم که اگر  $n \geq N$  و  $m \geq N$  آنگاه  $\bar{\rho}(f_n, f_m) < \varepsilon/2$ . در این صورت، بویژه، به ازای  $n \geq N$  و  $m \geq N$  داریم  $\alpha \in J$

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

با ثابت نگهداشتن  $n$  و  $\alpha$  و میل دادن  $m$  به بینهایت، خواهیم داشت

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f(\alpha)) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

این نامساوی به ازای هر  $\alpha$  در  $J$  برقرار است، مشروط بر آنکه  $n \geq N$ . بنابراین،  
به ازای  $n \geq N$ ،

$$\bar{p}(f_n, f) \leq \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

اینک، به حالتی تاحدی خاص می‌پردازیم و به جای اینکه فقط یک مجموعه را در نظر بگیریم، مجموعه  $Y^X$  را که در آن  $X$  یک فضای توپولوژیک است مورد نظر قرار می‌دهیم. البته، این بر آنچه که تا به حال گفته‌ایم خللی وارد نمی‌سازد؛ وقتی مجموعه همه توابع  $f: X \rightarrow Y$  مطرح است توپولوژی  $X$  نمی‌تواند نقشی داشته باشد. ولی اگر زیرمجموعه  $\mathcal{C}(X, Y)$  از  $Y^X$  را که متشکل از همه توابع پیوسته  $f: X \rightarrow Y$  است در نظر گرفته باشیم. در این صورت، چنانکه خواهیم دید، اگر  $Y$  تمام باشد، این زیرمجموعه نیز با متریک یکنواخت تمام خواهد بود.

۴.۱. قضیه فرض کنیم  $X$  یک فضای توپولوژیک و  $(Y, d)$  یک فضای متریک باشد. مجموعه  $\mathcal{C}(X, Y)$  از همه توابع پیوسته، تحت متریک یکنواخت، در  $Y^X$  بسته است. بنابراین، اگر  $Y$  تمام باشد،  $\mathcal{C}(X, Y)$  با متریک یکنواخت تمام است.

پرهان. این قضیه درست همان قضیه حد یکنواخت (قضیه ۱۰.۶ در فصل ۲) است که با نقاب تازه‌ای ظاهر شده است. نخست، ثابت می‌کنیم که اگر دنباله  $(f_n)$  از اعضای  $Y^X$  نسبت به متریک  $\bar{p}$  بر  $Y^X$  به عضو  $f$  از  $Y^X$  همگرا باشد آنگاه  $f$ ، نسبت به متریک  $\bar{d}$  بر  $Y$ ، بدان معنی که در بخش ۱۰-۲ تعریف شد، همگرای یکنواخت به  $f$  است. به ازای  $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیح  $N$  را چنان اختیار می‌کنیم که به ازای هر  $n \geq N$ ،

$$\bar{p}(f, f_n) < \varepsilon.$$

در این صورت، به ازای هر  $x$  از  $X$  و هر  $n$  که  $n \geq N$ ،

$$\bar{d}(f_n(x), f(x)) \leq \bar{p}(f_n, f) < \varepsilon.$$

و بدین ترتیب  $(f_n)$  همگرای یکنواخت به  $f$  است. اینک ثابت می‌کنیم که  $\mathcal{C}(X, Y)$  نسبت به متریک  $\bar{p}$  در  $Y^X$  بسته است. فرض کنیم  $f$  عضوی از  $Y^X$  و یک نقطه حدی  $\mathcal{C}(X, Y)$  باشد. در این صورت، دنباله‌ای از اعضای

$\mathcal{C}(X, Y)$  مانند  $(f, g)$  وجود دارد که در متریک  $\bar{\rho}$  به  $f$  همگراست. بنابراین قضیه حد یکنواخت،  $f$  پیوسته است، و در نتیجه  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ .  
چون  $Y^X$  تحت  $\bar{\rho}$  تمام است، زیرمجموعه بسته  $\mathcal{C}(X, Y)$  نیز چنین است.  $\square$

تعریف. فرض کنیم  $(Y, d)$  یک فضای متریک و  $X$  یک مجموعه یا یک فضای توپولوژیک باشد.  $\rho$  را زیرمجموعه‌ای از  $Y^X$  می‌گیریم که دارای این خاصیت باشد که به ازای هر زوج از اعضای  $\rho$  مانند  $f$  و  $g$ ، مجموعه

$$\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

کراندار باشد. متریک  $\rho$  بر  $\rho$  را با فرمول ذیل تعریف می‌کنیم.

$$\rho(f, g) = \text{lub} \{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\};$$

این متریک را متریک مربعی یا معمولاً متریک سوپرموهی می‌نامند.

ارتباط این متریک با متریک یکنواخت  $\bar{\rho}$  که در بالا تعریف شد چگونه است؟ به عنوان تمرینی ساده می‌توانید ثابت کنید که به ازای هر  $f$  و  $g$  از  $\rho$ ،

$$\bar{\rho}(f, g) = \min \{\rho(f, g), 1\}$$

این بدان معنی است که بریک مجموعه مانند  $\rho$  که هم  $\rho$  و هم  $\bar{\rho}$  تعریف شده است،  $\bar{\rho}$  چیزی جز متریک کراندار استانده حاصل از  $\rho$  نیست. (به همین دلیل ما از ابتدا علامت  $\bar{\rho}$  را برای متریک یکنواخت در نظر گرفتیم.) از اینجا نتیجه می‌شود که توپولوژیهای القایی  $\rho$  و  $\bar{\rho}$  بر  $\rho$  یکی هستند. همچنین، نتیجه می‌شود که  $\rho$  تحت  $\rho$  تمام است اگر و تنها اگر تحت  $\bar{\rho}$  تمام باشد. بنابراین، این دو متریک، برای همه مقاصد عملی، متریکهایی هم‌ارزند.

بسیاری از نویسندگان اصلاً زحمت تعریف متریک  $\bar{\rho}$  را به خود نمی‌دهند، و فقط خود را به فضاهایی مانند  $\rho$  محدود می‌کنند که  $\rho$  بر آنها تعریف شده باشد. ما ترجیح می‌دهیم در حالت کلیتری کار کنیم و وقتی حالت خاص متریک  $\rho$  را در نظر می‌گیریم که مفید (و ممکن) باشد.

مثال ۴. فرض کنیم  $(Y, d)$  یک فضای متریک و  $J$  یک مجموعه اندیس متناهی باشد. در این صورت، متریک مربعی  $\rho$  بر همه  $Y^J$  تعریف می‌شود. البته، در این حالت همه توپولوژیهای متفاوت بر  $Y^J$ ، یعنی توپولوژی جمع‌های، توپولوژی یکنواخت، و توپولوژی حاصل‌ضربی مساوی‌اند.

مثال ۵. فضای  $\mathcal{C}(X, R)$  متشکل از همه توابع پیوسته با مقادیر حقیقی بر فضای فشرده  $X$  را در نظر می‌گیریم. هر عضو این فضا تابعی کراندار است، در نتیجه متریک

$$\rho(f, g) = \text{lub} \{ |f(x) - g(x)| \}$$

براین فضا تعریف می‌شود. در واقع، قضیه مقدار ماکزیموم بیان می‌کند که

$$\rho(f, g) = \max \{ |f(x) - g(x)| \}.$$

فضای  $\mathcal{C}(X, R)$  تحت متریک  $\rho$  تمام است.

اینک، به اثبات قضیه‌ای کلاسیک می‌پردازیم، بدین مضمون که هر فضای متری را می‌توان به‌طور ایزومتریک در یک فضای متری تمام نشانند. (در تمرین ۸، خطوط اصلی برهان دیگری را، که قدری هم سرراست‌تر است، طرح کرده‌ایم.) این قضیه، گرچه مورد نیاز ما نیست، در بحث‌های دیگر ریاضیات سودمند است.  
نخست، یک لم:

۵.۱. لم فرض کنیم  $X$  یک فضای توپولوژیک باشد. مجموعه  $\mathcal{B}(X, R)$  متشکل از همه توابع کراندار  $f: X \rightarrow R$ ، تحت متریک سوپرمومی  $\rho$  تمام است.

برهان. ثابت می‌کنیم که  $\mathcal{B}(X, R)$  در  $R^X$ ، با متریک یکتواخت  $\bar{\rho}$ ، بسته است. از اینجا نتیجه می‌شود که  $\mathcal{B}(X, R)$  تحت متریک  $\bar{\rho}$  تمام است، چون متریک  $\rho$  بر این مجموعه تعریف شده است، پس این مجموعه تحت  $\rho$  نیز تمام است.

فرض کنیم  $f$  حد دنباله  $(f_n)$  از اعضای  $\mathcal{B}(X, R)$  باشد.  $N$  را چنان اختیار می‌کنیم که به ازای  $n \geq N$ ،  $\bar{\rho}(f_n, f) < 1$ ، در این صورت، چون  $f_N$  متعلق است به  $\mathcal{B}(X, R)$ ،  $M$  وجود دارد که به ازای هر  $x$  از  $X$ ،  $|f_N(x)| \leq M$ . در نتیجه، به ازای هر  $x$  از  $X$

$$|f(x)| \leq M + 1$$

پس  $f$  کراندار است.  $\square$

۶.۱. قضیه فرض کنیم  $(X, d)$  یک فضای متری باشد. نشاننده‌ای ایزومتری از  $X$  بتوی یک فضای متری تمام وجود دارد.

برهان. فرض کنیم  $\mathcal{B}(X, R)$  مجموعه همه توابع کراندار باشد که  $X$  را بتوی  $R$  می‌نگارند، و  $x_0$  را نقطه ثابتی از  $X$  می‌گیریم. به ازای عضو  $a$  از  $X$ ، تابع  $\phi_a: X \rightarrow R$  را با ضابطه

$$\phi_a(x) = d(x, a) - d(x, x_0)$$

تعریف می‌کنیم: مدعی هستیم که  $\phi_a$  کراندار است. زیرا، از نامساویهای

$$d(x, a) \leq d(x, x_0) + d(a, x_0)$$



$$d(x, x_0) \leq d(x, a) + d(a, x_0)$$

نتيجه مى شود كه  $|\phi_a(x)| \leq d(a, x_0)$  .  
نگاشت  $\Phi: X \rightarrow \mathcal{B}(X, R)$  را با ضابطه

$$\Phi(a) = \phi_a$$

تعريف مى كنيم. ثابت مى كنيم كه  $\Phi$  يك نشاننده ايزومتري از  $(X, d)$  بتوى فضاى مترى تمام  $(\mathcal{B}(X, R), \rho)$  است. يعنى، ثابت مى كنيم كه به ازاي هر زوج از نقاط  $X$  مانند  $a$  و  $b$ ، داريم

$$\rho(\phi_a, \phi_b) = d(a, b).$$

بنا بر تعريف،

$$\begin{aligned} \rho(\phi_a, \phi_b) &= \text{lub} \{ |\phi_a(x) - \phi_b(x)| ; x \in X \} \\ &= \text{lub} \{ |d(x, a) - d(x, b)| ; x \in X \}. \end{aligned}$$

بنا بر نامساوى مثلثى،

$$|d(x, a) - d(x, b)| \leq d(a, b),$$

كه از آن نتيجه مى شود

$$\rho(\phi_a, \phi_b) \leq d(a, b)$$

از طرف ديگر، اين نامساوى نمى تواند اكيد باشد، زيرا وقتى كه  $x = a$ ،

$$|d(x, a) - d(x, b)| = d(a, b). \quad \square$$

تعريف. فرض كنيم  $X$  يك فضاى مترى باشد. اگر  $h: X \rightarrow Y$  يك نشاننده ايزومتري از  $X$  بتوى فضاى مترى تمام  $Y$  باشد آنگاه زيرفضاى  $\overline{h(X)}$  از  $Y$  يك فضاى مترى تمام است. اين فضا را تمام ساز  $X$  مى خوانند.

تمام ساز  $X$  با تقريب يك ايزومتري به طور يكتا مشخص مى شود. تمرين ۹ را

بينيد.

## تمرينها

۱. فرض كنيد  $X$  يك فضاى مترى باشد.

(الف) فرض كنيد به ازاي عدد  $\varepsilon$ ، هر  $\varepsilon$ -گوى در  $X$  داراي بستار فشرده باشد.

ثابت كنيد كه  $X$  تمام است.

(ب) فرض کنید به ازای هر  $x$  از  $X$ ،  $\varepsilon$  مثبتی موجود باشد به طوری که گوی  $B(x, \varepsilon)$  بستار فشرده داشته باشد. با یک مثال ثابت کنید که لازم نیست  $X$  تمام باشد.

۲. فرض کنید  $(X, d_X)$  و  $(Y, d_Y)$  فضاهای متری باشند و  $Y$  فضایی تمام باشد، و فرض کنید  $A \subset X$ . ثابت کنید که اگر تابع  $f: A \rightarrow Y$  پیوسته یکنواخت باشد آنگاه  $f$  را می توان به طور یکتا به تابع پیوسته ای مانند  $g: \bar{A} \rightarrow Y$  گسترش داد به طوری که  $g$  پیوسته یکنواخت باشد.

۳. زیرمجموعه  $R^\infty$  از  $R^\omega$  را که از همه دنباله های که سرانجام صفر هستند تشکیل شده است در نظر می گیریم. آیا  $R^\infty$ ، با متریک یکنواخت، تمام است؟

۴. ثابت کنید که فضای متری  $(X, d)$  تمام است اگر و تنها اگر به ازای هر دنباله تودرتو از مجموعه های بسته ناتهی  $X$  مانند  $\dots \subset A_n \subset A_1$  که قطر  $A_n$  به صفر میل کند،

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} A_n \neq \emptyset.$$

۵. فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متری تمام باشد. یادآوری می کنیم که نگاهت پیوسته  $f: X \rightarrow Y$  را یک انقباض می گویند در صورتی که عددی مانند  $\alpha$ ، که  $\alpha < 1$ ، وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر  $x$  و  $y$  از  $X$ ،

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

ثابت کنید که اگر  $f$  یک انقباض باشد آنگاه نقطه ای یکتا مانند  $x$  از  $X$  وجود دارد به طوری که  $f(x) = x$ .

۶. فضای  $X$  را تمام توپولوژیکی خوانیم هر گاه متریکی برای توپولوژی  $X$  وجود داشته باشد که  $X$  نسبت به آن تمام باشد.

(الف) ثابت کنید که هر زیر فضای بسته یک فضای تمام توپولوژیکی فضایی است تمام توپولوژیکی.

(ب) ثابت کنید که هر حاصل ضرب شمارای فضاهای تمام توپولوژیکی (در توپولوژی حاصل ضربی) تمام توپولوژیکی است.

(پ) ثابت کنید که هر زیر مجموعه باز یک فضای تمام توپولوژیکی فضایی است تمام توپولوژیکی. [داهنمایی: اگر  $U \subset X$  و  $X$  تحت متریک  $d$  تمام باشد، تابع  $\phi: U \rightarrow R$  را با ضابطه

$$\phi(x) = \frac{1}{d(x, X-U)}$$

تعریف کنید، که در آن  $d(x, A) = \text{glb} \{d(x, a) \mid a \in A\}$  سپس، تابع

$f: U \rightarrow X \times R$  را باضابطه

$$f(x) = x \times \phi(x)$$

تعریف کنید.

(ت) ثابت کنید که اگر  $A$  در یک فضای تمام توپولوژیکی مجموعه‌ای  $G_\delta$  باشد آنگاه  $A$  تمام توپولوژیکی است. [داهنمایی: فرض کنید  $A$  مقطع مجموعه‌های  $U_n$  باز باشد، که  $n \in \mathbb{Z}_+$  نشاننده قطری  $f(a) = (a, a, \dots)$  از  $A$  بتوی  $\Pi U_n$  را در نظر بگیرید.]

(ث) ثابت کنید که مجموعه اعداد اصم یک فضای تمام توپولوژیکی است.

۷. ثابت کنید که فضای  $l^2$  در  $l^2$  متریک تمام است. (به تمرین ۹ در بخش ۲-۹ مراجعه کنید.)

۸. فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متری باشد. ثابت کنید که نشاننده‌ای ایزومتری مانند  $h$  از  $X$  بتوی یک فضای متری تمام  $(Y, D)$ ، به قرار ذیل، وجود دارد: فرض کنید  $\bar{X}$  مجموعه همه دنباله‌های کوشی

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$$

از نقاط  $X$  باشد. بنا بر تعریف، گوئیم  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$  هر گاه

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0.$$

فرض کنید که  $[\mathbf{x}]$  نمایش دهنده رده هم‌ارزی  $\mathbf{x}$  باشد؛ و  $\bar{Y}$  نمایش دهنده مجموعه این رده‌های هم‌ارزی. متریک  $D$  را بر  $\bar{Y}$  باضابطه

$$D([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

تعریف کنید.

(الف) ثابت کنید که  $\sim$  یک رابطه هم‌ارزی است، و ثابت کنید که  $D$  یک متریک خوش‌تعریف است.

(ب) تابع  $h: X \rightarrow Y$  را چنین تعریف کنید که  $h(x)$  همان رده هم‌ارزی دنباله ثابت  $(x, x, \dots)$  باشد؛

$$h(x) = [(x, x, \dots)]$$

ثابت کنید که  $h$  یک نشاننده ایزومتری است.

(پ) ثابت کنید که  $h(X)$  در  $Y$  چگال است؛ در واقع به ازای  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$  متعلق به  $\bar{X}$ ، ثابت کنید که دنباله  $h(x_n)$  از نقاط  $Y$  به نقطه  $[\mathbf{x}]$  از  $Y$  همگراست.

(ت) ثابت کنید که اگر  $A$  زیرمجموعه چگالی از فضای متری  $(Z, \rho)$  باشد، و

اگر هر دنباله کوشی در  $A$ ، در  $Z$  همگرا باشد آنگاه  $Z$  تمام است.  
(ث) ثابت کنید که  $(Y, D)$  تمام است.

۹. قضیه (یکتایی تمام ساز). فرض کنید  $h: X \rightarrow Y$  و  $h': X \rightarrow Y'$  نشاننده های ایزومتري از فضای متري  $(X, d)$ ، بترييب، بتوي فضاهاى متري تمام  $(Y, D)$  و  $(Y', D')$  باشند. در اين صورت، بين  $(h(X), D)$  و  $(h'(X), D')$  يك ايزومتري وجود دارد که بر زیر فضای  $h(X)$  مساوی با  $h'h^{-1}$  است.

## ۲-۷ يك منحنی فضا پركن

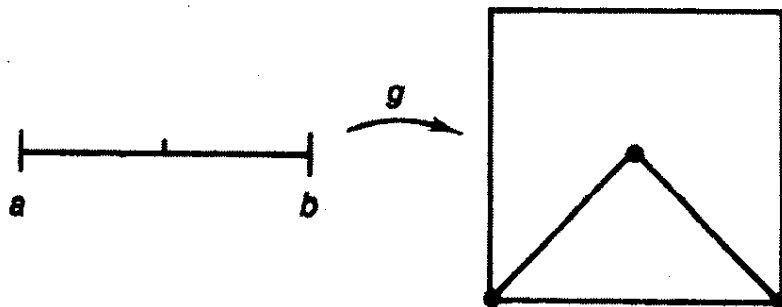
یکی از موارد استعمال تمامیت فضای متري  $(X, Y)$  در متريك يکنواخت وقتی است که  $Y$  تمام است، اينک به ساختن «منحنی فضا پركن پتانو» می پردازیم.

۲.۱. قضیه فرض کنیم  $I = [0, 1]$ . نگاشت پیوسته ای مانند  $f: I \rightarrow I^2$  موجود است که تصویر آن سراسر مربع  $I^2$  را پرمی کند.

وجود این راه، مانند وجود توابع پیوسته هیچ جا مشتق پذیر (بعداً این تابع را بررسی می کنیم)، با شهود هندسی ناسازگار است.

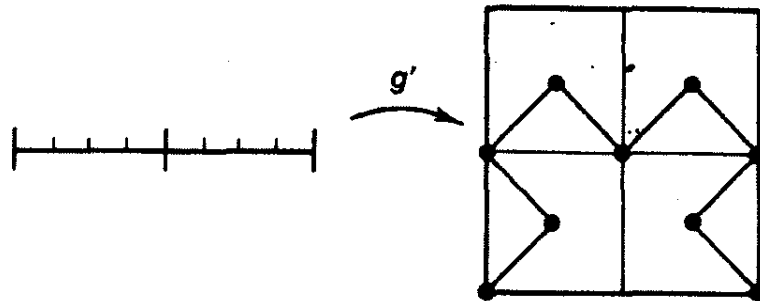
برهان. مرحله ۱. نگاشت  $f$  را به عنوان حد دنباله ای از توابع پیوسته، مانند  $f_n$ ، می سازیم. نخست، به توصیف عمل خاصی بر راهها می پردازیم که در تولید  $f_n$ ها به کار خواهد رفت.

کار را با بازه بسته دلخواهی از خط حقیقی مانند  $[a, b]$  و مربعی دلخواه در صفحه که اضلاع آن موازی محورهای مختصات اند شروع می کنیم، و راه مثلثی  $g$  را، که در شکل ۱ نموده شده است، در نظر می گیریم. این راه نگاشتی پیوسته از  $[a, b]$  بتوی مربع است. عملی را که می خواهیم توصیف کنیم راه  $g'$  را، که در شکل ۲ رسم شده است، جایگزین راه  $g$  می کند. این راه از چهار راه مثلثی تشکیل شده است، که طول هر يك



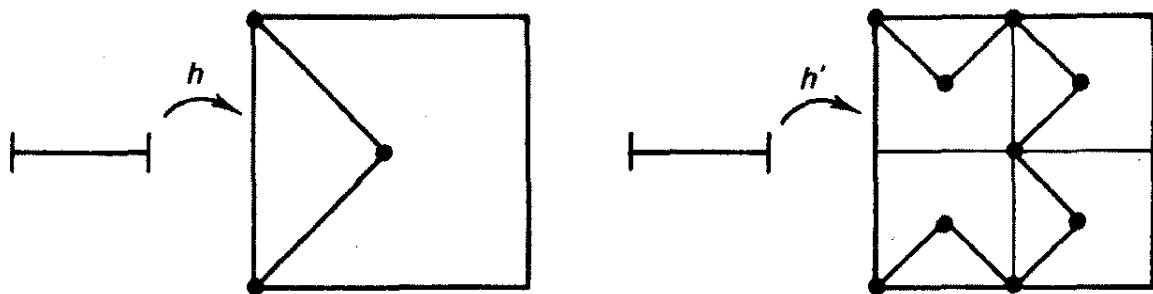
شکل ۱

نصف طول  $g$  است. ملاحظه کنید که  $g$  و  $g'$  نقطه‌های آغازی و انجامی مشترک دارند. در صورت تمایل می‌توانید معادله‌های  $g$  و  $g'$  را بنویسید.



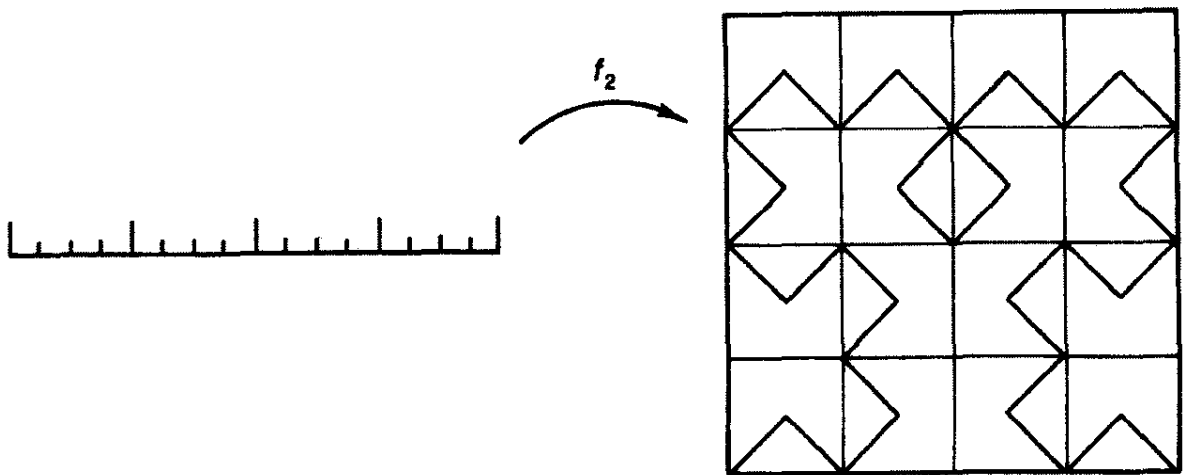
شکل ۲

همین عمل را می‌توان بر هر راه مثلثی، که دو گوشه مجاور مربعهای کوچکتر را بهم مرتبط می‌سازد، انجام داد. مثلاً، وقتی آنرا در مورد راه  $h$  که در شکل ۳ رسم شده است انجام دهیم، راه  $h'$  حاصل می‌شود.

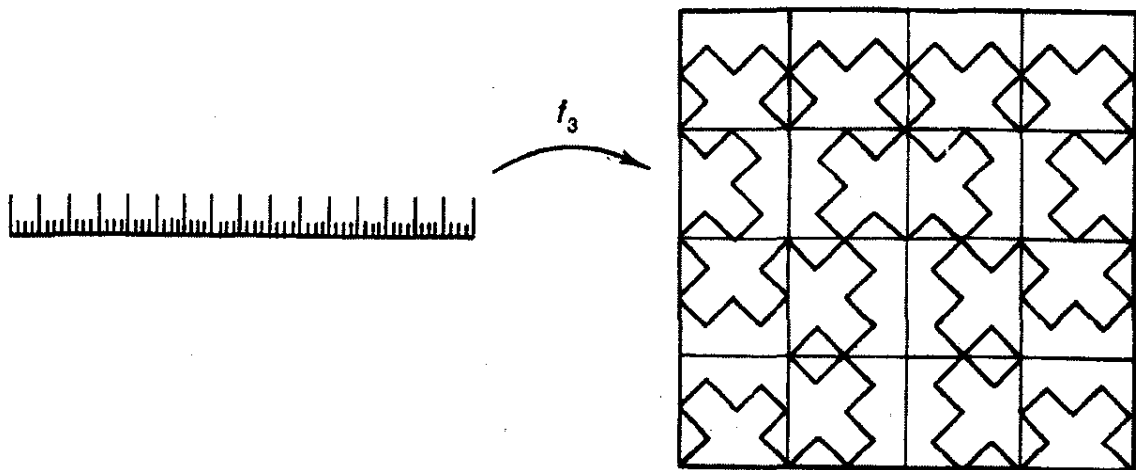


شکل ۳

مرحله ۲. حال دنباله‌ای از توابع مانند  $I \rightarrow I^2$ :  $f_n$  تعریف می‌کنیم. اولین تابع، که آنرا با  $f_0$  نشان می‌دهیم، راه مثلثی است که در شکل ۱ رسم شده است، به طوری که  $a=0$  و  $b=1$ . تابع بعدی  $f_1$  است که با انجام عمل توصیف شده در مرحله ۱ بر تابع  $f_0$  به دست می‌آید؛ تابع  $f_1$  را در شکل ۲ رسم کرده ایم. تابع بعدی،  $f_2$ ، تابعی است که با انجام همین عمل بر هر یک از چهار راه مثلثی تشکیل دهنده  $f_1$  به دست می‌آید. تابع  $f_2$  را در شکل ۳ رسم کرده ایم. تابع بعدی،  $f_3$ ، با انجام عمل مذکور بر هر یک از ۱۶ راه مثلثی تشکیل دهنده  $f_2$  به دست می‌آید؛ تابع  $f_3$  را در شکل ۵ رسم کرده ایم. وبه همین ترتیب ادامه می‌دهیم. در حالت کلی،  $f_n$  راهی است متشکل از



شکل ۴



شکل ۵

۴<sup>n</sup> راه مثلثی از آن نوع که در مرحله ۱ در نظر گرفتیم به طوری که هر یک از این راهها در مربعی با ضلع به طول  $1/2^n$  واقع است. تابع  $f_{n+1}$  با انجام عملی که در مرحله ۱ بیان شد بر این راههای مثلثی به دست می آید، که این عمل عبارت است از قراردادن چهار راه مثلثی کوچکتر به جای هر یک از آنها که ذکر شد.

مرحله ۳. برای سهولت برهان، فرض کنیم  $d(x, y)$  نمایش متریک مربعی بر  $R^2$  باشد؛ یعنی،

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

در این صورت، می توان متریک سوپرمومی متناظر با آن بر  $(I, I^2)$ ، را با  $\rho$  نمایش داد:

$$\rho(f, g) = \text{lub} \{d(f(t), g(t)) \mid t \in I\}.$$

چون  $I^2$  در  $R^2$  بسته است، با متریک مربعی، تمام است؛ در نتیجه،  $(I, I^2)$ ، با متریک  $\rho$ ، تمام است. مدعی هستیم که دنباله توابع  $(f_n)$ ، که در مرحله ۲ تعریف شد، تحت  $\rho$  یک دنباله کوشی است. برای اثبات این امر، اجازه دهید وضعی را که در گذار از  $f_n$  به  $f_{n+1}$  پدید می آید بررسی کنیم. هرزاه مثلثی کوچک در  $f_n$  در مربعی با ضلع به طول  $1/2^n$  واقع است. عملی که توسط آن  $f_{n+1}$  را به دست می آوریم این راه مثلثی را با چهار راه مثلثی دیگر که در همان مربع واقع اند عوض می کند. بنابراین، در متریک مربعی بر  $I^2$ ، فاصله بین  $f_n(t)$  و  $f_{n+1}(t)$  حداکثر  $1/2^n$  است. در نتیجه،  $\rho(f_n, f_{n+1}) < 1/2^n$ . پس،  $(f_n)$  یک دنباله کوشی است. زیرا، به ازای هر  $m$  و  $n$ ،

$$\rho(f_n, f_{n+m}) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+m-1}} < \frac{2}{2^n}.$$

مرحله ۴. چون  $(I, I^2)$  تمام است، دنباله  $(f_n)$  به تسابعی پیوسته مانند  $f: I \rightarrow I^2$  همگراست. ثابت می کنیم که  $f$  تابعی است پوشا. فرض کنیم  $x$  نقطه ای از  $I^2$  باشد؛ ثابت می کنیم که  $x$  به  $f(I)$  تعلق دارد. نخست، ملاحظه می کنیم که، به ازای هر  $n$ ، فاصله راه  $f_n$  تا نقطه  $x$  حداکثر  $1/2^n$  است. زیرا، راه  $f_n$  از هر یک از مربعهای کوچک با ضلع  $1/2^n$  که  $I^2$  را با آنها افراز کرده ایم عبور می کند.

با استفاده از این حقیقت، ثابت خواهیم کرد که به ازای هر عدد  $\varepsilon$ ، که مثبت باشد،  $\varepsilon$ -همسایگی  $x$  مجموعه  $f(I)$  را قطع می کند. عدد طبیعی  $N$  را به قدر کافی بزرگ انتخاب می کنیم که

$$\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad \rho(f_N, f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

بنابر نتیجه حاصل در بند فوق، نقطه ای مانند  $t_0$  در  $I$  وجود دارد به طوری که  $d(x, f_N(t_0)) \leq 1/2^N$ . چون به ازای جميع مقادیر  $t$ ،  $d(f_N(t), f(t)) < \varepsilon/2$ ، از اینجا نتیجه می شود که

$$d(x, f(t_0)) < \varepsilon.$$

بنابراین،  $\varepsilon$ -همسایگی  $x$  مجموعه  $f(I)$  را قطع می کند. از اینجا نتیجه می شود که  $x$  متعلق است به بستار  $f(I)$ . اما  $I$  فشرده است، پس  $f(I)$  نیز فشرده، و در نتیجه بسته است. بدین ترتیب،  $x \in f(I)$ ، و این همان است که می خواستیم.  $\square$

## تمرینها

۱. ثابت کنید که به ازای هر  $n$ ، نگاشت پوشای پیوسته ای مانند  $g: I \rightarrow I^n$  وجود

دارد. [دانهمایی: نگاشت  $f \times f: I \times I \rightarrow I^2 \times I^2$  را در نظر بگیرید.]

۲. آیا نگاشت پوشای پیوسته‌ای مانند  $f: I \rightarrow R^2$  وجود دارد؟
  ۳. ثابت کنید که نگاشت پوشای پیوسته‌ای مانند  $f: R \rightarrow R^n$  وجود دارد.
  ۴. فرض کنید  $X$  زیر فضای  $R^\infty$  از  $R^\omega$  باشد که متشکل است از همه دنباله‌هایی که سرانجام صفرند؛ آیا نگاشت پوشای پیوسته‌ای مانند  $f: R \rightarrow X$  وجود دارد؟ در حالت  $X = R^\omega$  چه می‌توان گفت؟
  - ۵\* (الف) فرض کنید  $X$  یک فضای هاوسدورف باشد. ثابت کنید که اگر نگاشت پوشای پیوسته‌ای مانند  $f: I \rightarrow X$  وجود داشته باشد آنگاه  $X$  فشرده، همبند، موضماً همبند، و متریک پذیر است.
  - (ب) عکس حکم بالا نیز برقرار است؛ این قضیه مشهوری در توپولوژی مجموعه نقاط است که به قضیه هان-هازورکیه‌ویچ موسوم است (به  $[H - Y]$  صفحه ۱۲۹ مراجعه کنید). با فرض این قضیه، ثابت کنید که نگاشت پوشای پیوسته‌ای مانند  $f: I \rightarrow I^\omega$  وجود دارد.
- فضای هاوسدورفی که تصویر پیوسته بازه بسته به طول یک باشد اغلب یک فضای پنانو نامیده می‌شود.

### ۷-۳ فشرده‌گی در فضاهای متری

چنانکه قبلاً ثابت کردیم فشرده‌گی، فشرده‌گی برحسب نقطه حدی، و فشرده‌گی دنباله‌ای برای فضاهای متری معادل‌اند. با این وجود، فرمولبندی دیگری برای مفهوم فشرده‌گی در فضاهای متری وجود دارد که متضمن مفهوم تمامیت است. در این بخش به مطالعه آن می‌پردازیم. به عنوان یک مورد استعمال، قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که زیر مجموعه‌هایی از  $(X, R^n)$  را که در متریک یکنواخت فشرده هستند مشخص می‌کند؛ این قضیه صورت کلاسیک قضیه آسکولی است.

چگونه فشرده‌گی یک فضای متری  $X$  به تمامیت آن مربوط می‌شود؟ ازلم ۱۰.۱، نتیجه می‌شود که هر فضای متری فشرده الزاماً تمام است. عکس این حکم برقرار نیست - یک فضای متری تمام لازم نیست فشرده باشد. این سؤال بجاست که چه شرطی باید بر یک فضای متری مانند  $X$  نهاد تا فشرده‌گی آن محقق گردد؟ شرط مورد نظر همان است که کرانداری کلی نامیده می‌شود.

تعریف. فضای متری  $(X, d)$  را کرانداری کلی گوئیم در صورتی که به ازای هر  $\epsilon > 0$ ، یک پوشش متناهی از  $\epsilon$ -گوییها برای  $X$  موجود باشد.



روشن است که کراندارگی کلی يك فضای متری مستلزم کراندارگی آن است. اما عکس این حکم برقرار نیست.

مثال ۱. تحت متریک  $d(x, y) = |x - y|$ ، خط حقیقی نه کراندار است و نه کراندار کلی. تحت متریک  $\bar{d}(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$ ، خط حقیقی کراندار است ولی کراندار کلی نیست.

مثال ۲. زیر فضای  $(-1, 1)$  از  $R$  تحت متریک  $|x - y|$  کراندار کلی است، زیر فضای  $Q \cap [-1, 1]$  نیز چنین است. لیکن، هیچیک از این دو فضا تمام نیستند. زیر فضای  $[-1, 1]$  هم تمام است و هم کراندار کلی.

۱.۳. قضیه فضای متری  $(X, d)$  فشرده است اگر و تنها اگر تمام و کراندار کلی باشد.

برهان. چنانکه در بالا ملاحظه شد، اگر  $X$  يك فضای متری فشرده باشد آنگاه خود به خود تمام است. کراندارگی کلی  $X$  نتیجه این حقیقت است که پوششی از  $X$  متشکل از همه  $\varepsilon$ -گوییهای باز باید يك زیرپوشش متناهی داشته باشد.

بعکس، فرض کنیم  $X$  تمام و کراندار کلی باشد. ثابت می کنیم که  $X$  فشرده دنباله ای است، و این برای اثبات کافی است.

فرض کنیم  $(x_n)$  دنباله ای از نقاط  $X$  باشد. زير دنباله ای از  $(x_n)$  می سازیم که يك دنباله کوشی باشد، و در نتیجه، الزاماً همگراست. نخست  $X$  را با تعدادی متناهی از گوییهای به شعاع ۱ می پوشانیم. دست کم یکی از این گوییها، مثلاً  $B_1$ ، به ازای تعدادی نامتناهی از مقادیر  $n$ ، شامل  $x_n$  است. فرض کنیم که  $J_1$  زیرمجموعه ای از  $Z_+$  باشد که عبارت است از اندیسهایی مانند  $n$  که به ازای آنها  $x_n \in B_1$ .

بار دیگر،  $X$  را با تعدادی متناهی از گوییهای به شعاع  $1/2$  می پوشانیم. چون  $J_1$  نامتناهی است، دست کم یکی از این گوییها، مثلاً  $B_2$ ، باید به ازای تعدادی نامتناهی از مقادیر  $n$  در  $J_1$  شامل  $x_n$ ها باشد.  $J_2$  را مجموعه اندیسهایی مانند  $n$  انتخاب می کنیم که به ازای آنها  $n \in J_1$  و  $x_n \in B_2$  در حالت کلی، به ازای مجموعه نامتناهی مفروض  $J_k$  از اعداد صحیح مثبت،  $J_{k+1}$  را زیرمجموعه ای نامتناهی از  $J_k$  می گیریم به طوری که يك گوی مانند  $B_{k+1}$  به شعاع  $1/(k+1)$  موجود باشد که به ازای هر  $n$  که  $n \in J_{k+1}$  در  $B_{k+1}$  باشد.

$n_1$  را از  $J_1$  انتخاب می کنیم. به ازای  $n_k$  مفروض،  $n_{k+1}$  را از  $J_{k+1}$  چنان انتخاب می کنیم که  $n_{k+1} > n_k$ ؛ این کار ممکن است، زیرا  $J_{k+1}$  مجموعه ای نامتناهی است. اما به ازای  $i \geq k$  و  $j \geq k$ ، اندیسهای  $n_i$  و  $n_j$  هر دو متعلق به  $J_k$  هستند (زیرا،  $J_2 \subset J_1 \subset \dots$  دنباله ای تو در تو از مجموعه هاست). بنابراین، به ازای هر  $i$  و  $j$  که  $i \geq k$  و  $j \geq k$ ، نقاط  $x_{n_i}$  و  $x_{n_j}$  در گویی مانند  $B_k$  به شعاع  $1/k$

واقع مى‌شوند. از اینجا نتیجه مى‌شود که دنباله  $(x_n)$  يك دنباله كوشى است و این همان است که مى‌خواستیم.  $\square$

اینک، این قضیه را در مورد فضای تابعی  $\mathcal{C}(X, R^n)$ ، با توپولوژی بکنواخت، به کار مى‌گیریم. مى‌خواهیم فقط حالتی را در نظر بگیریم که  $X$  فشرده است، بدین دلیل در سراسر این قسمت از متریک

$$\rho(f, g) = \max\{d(f(x), g(x))\}$$

استفاده مى‌کنیم. [در اینجا  $d$  را مى‌توان متریک اقلیدسی یا متریک مربعی بر  $R^n$  گرفت.]

سابقاً ثابت کردیم که يك زیرمجموعه  $(R^n, d)$  فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کراندار باشد. ممکن است بعضی تصور کنند که قضیه‌ای نظیر این در مورد  $(\mathcal{C}(X, R^n), \rho)$  نیز صادق است. ولی این طور نیست. برای این منظور لازم است يك شرط اضافی بر زیرمجموعه‌های  $\mathcal{C}(X, R^n)$  نهاده شود، که به همپیوستگی موسوم است. تعریف آن بدین قرار است:

تعریف. فرض کنیم  $(Y, d)$  يك فضای مترى باشد، و  $\mathcal{F}$  را زیرمجموعه‌ای از فضای تابعی  $\mathcal{C}(X, Y)$  مى‌گیریم. اگر  $x_0 \in X$ ، مجموعه  $\mathcal{F}$  از توابع را وقتی در  $x_0$  همپیوسته خوانیم که به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، همسایگی از  $x_0$  مانند  $U$  یافت شود که به ازای هر  $x \in U$  و هر  $f \in \mathcal{F}$ ،

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

اگر مجموعه  $\mathcal{F}$  به ازای هر  $x_0$  از  $X$ ، در  $x_0$  همپیوسته باشد، مختصراً آن را همپیوسته مى‌نامیم.

پیوستگی تابع  $f$  در  $x_0$  بدین معنی است که به ازای  $f$  مفروض و  $\varepsilon > 0$  مفروض، همسایگی مانند  $U$  از  $x_0$  هست به طوری که به ازای  $x \in U$  داریم

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

همپیوستگی  $\mathcal{F}$  بدین معنی است که برای همه توابع  $f$  در گردایه  $\mathcal{F}$  مى‌توان تنها يك همسایگی مانند  $U$  را چنان انتخاب کرد که در شرط پیوستگی برای هر يك از  $f$  ها صدق کند.

وقتی  $X$  و  $Y$  هر دو فشرده باشند، همپیوستگی دارای تعبیر جالب ذیل است:

۲.۳. لم فرض کنیم  $X$  يك فضای فشرده و  $(Y, d)$  يك فضای مترى فشرده باشد، و فرض کنیم  $\mathcal{F}$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathcal{C}(X, Y)$  باشد، در این صورت،  $\mathcal{F}$  همپیوسته است اگر و تنها اگر در متریک سوپرمومی  $\rho$  کراندارکلی باشد.



$J'$  از  $J$  اندیسه‌گذاری شده است، بنابراین متاهی است. مدعی هستیم که گویهای باز به صورت  $B_p(f_\alpha, \varepsilon)$ ، وقتی که  $\alpha \in J'$ ،  $\mathcal{F}$  را می‌پوشانند.  
فرض کنیم  $f$  عضوی از  $\mathcal{F}$  باشد. به ازای هر  $i$  که  $i = 1, \dots, k$ ، عدد صحیح  $\alpha(i)$  را چنان اختیار می‌کنیم که  $f(x_i) \in V_{\alpha(i)}$  در این صورت، تابع  $\alpha$  در  $J'$  قرار می‌گیرد. ادعا می‌کنیم که  $f$  به گوی  $B_p(f_\alpha, \varepsilon)$  تعلق دارد.  
فرض کنیم  $x$  نقطه‌ای از  $X$  باشد.  $i$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $x \in U_i$  در این صورت،

$$d(f(x), f(x_i)) < \varepsilon_1,$$

$$d(f(x_i), f_\alpha(x_i)) < \varepsilon_2,$$

$$d(f_\alpha(x_i), f_\alpha(x)) < \varepsilon_3.$$

چون  $x \in U_i$ ، نامساویهای اول و سوم برقرارند، و نامساوی دوم به دلیل آنکه  $f(x_i)$  و  $f_\alpha(x_i)$  در  $V_{\alpha(i)}$  هستند، برقرار است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$d(f(x), f_\alpha(x)) < \varepsilon.$$

چون این نامساوی به ازای هر  $x$  متعلق به  $X$  برقرار است،

$$\rho(f, f_\alpha) = \max\{d(f(x), f_\alpha(x))\} < \varepsilon.$$

بنابراین،  $f$  متعلق است به  $B_p(f_\alpha, \varepsilon)$  و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

اینک، صورت کلاسیک قضیه آسکولی را اثبات می‌کنیم. صورت کلیتری از این قضیه، که اثباتش به این قضیه بستگی ندارد، در بخش ۷-۶ می‌آید.

۳.۳. قضیه (قضیه آسکولی، صورت کلاسیک)  $\mathcal{F}$  فرض کنیم  $X$  یک فضای فشرده باشد؛

$\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$  را در متریک سوپرمومی  $\rho$  در نظر می‌گیریم. زیرمجموعه  $\mathcal{F}$  از  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$  فشرده است اگر و تنها اگر بسته، کراندار، و همبسته باشد.

برهان. مرحله ۱. نخست ثابت می‌کنیم که اگر  $\mathcal{F}$  تحت  $\rho$  کراندار باشد آنگاه زیرمجموعه فشرده‌ای از  $\mathbb{R}^n$  مانند  $Y$  موجود است با این خاصیت که: به ازای هر  $x \in X$  و هر  $f \in \mathcal{F}$  داریم  $f(x) \in Y$ . از اینجا نتیجه می‌شود که  $\mathcal{F}$  جزء زیرمجموعه  $\mathcal{C}(X, Y)$  از  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$  است.

عضوی مانند  $f_0$  از  $\mathcal{F}$  انتخاب می‌کنیم. چون  $\mathcal{F}$  تحت  $\rho$  کراندار است، عددی مانند  $M$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $f \in \mathcal{F}$ ،  $\rho(f_0, f) < M$ . چون  $X$  فشرده است،  $f_0(X)$  نیز فشرده است. بنابراین، می‌توان عدد  $N$  را طوری انتخاب کرد که  $f_0(X)$  در گوی  $B_\rho(0, N)$  از  $\mathbb{R}^n$  قرار گیرد. در این صورت، به ازای هر  $f \in \mathcal{F}$ ،  $f(X)$

در گوی  $B_d(0, M+N)$  واقع می‌شود.  $Y$  را بستار این گوی اختیار می‌کنیم؛ در این صورت، به ازای هر  $x$  از  $X$  و هر  $f$  از  $\mathcal{F}$ ، خواهیم داشت  $f(x) \in Y$ .

مرحله ۲. فرض کنیم  $\mathcal{F}$  فشرده باشد. در این صورت،  $\mathcal{F}$  تحت  $\rho$  بسته و کراندار است. بنا بر مرحله ۱،  $\mathcal{F}$  جزء زیرفضایی از  $\mathcal{C}(X, R^n)$  مانند  $\mathcal{C}(X, Y)$  است، که در آن  $Y$  فشرده است. چون  $\mathcal{F}$  فشرده است، بنا بر قضیه ۱.۳،  $\mathcal{F}$  تحت  $\rho$  کراندار کلی است. اما، چون  $X$  و  $Y$  هر دو فشرده‌اند، با استفاده از لم ۲.۳، می‌توان نتیجه گرفت که  $\mathcal{F}$  همپیوسته است.

مرحله ۳. فرض کنیم  $\mathcal{F}$  تحت  $\rho$  بسته، کراندار و همپیوسته باشد. چون  $\mathcal{F}$  زیرمجموعه بسته‌ای از فضای متری تمام  $(\mathcal{C}(X, R^n), \rho)$  است، الزاماً تمام است. چون  $\mathcal{F}$  کراندار است، به موجب مرحله ۱، جزء زیرفضایی از  $\mathcal{C}(X, R^n)$  مانند  $\mathcal{C}(X, Y)$  است، که در آن  $Y$  فشرده است. چون  $\mathcal{F}$  همپیوسته است و  $X$  و  $Y$  فشرده هستند، بنا بر لم ۲.۳،  $\mathcal{F}$  کراندار کلی است. پس، از قضیه ۱.۳، فشرده بودن  $\mathcal{F}$  نتیجه می‌شود.  $\square$

## تمرینها

۱. فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متری باشد.
  - (الف) ثابت کنید که اگر  $X$  کراندار کلی باشد آنگاه  $X$  کراندار است.
  - (ب) ثابت کنید که  $X$  تحت  $d$  کراندار کلی است اگر و تنها اگر تحت متریک  $\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$  کراندار کلی باشد.
۲. فرض کنید  $A$  زیرمجموعه‌ای از فضای متری تمام  $X$  باشد. ثابت کنید که  $A$  کراندار کلی است اگر و تنها اگر  $\bar{A}$  فشرده باشد.
۳. حاصل ضرب شمارای  $X = \prod X_n$  از فضاهای متریک پذیر را در نظر بگیرید. بر  $X$  متریک  $D$  را که توپولوژی حاصل ضربی را القا می‌کند به کار ببرید. (به تمرین ۳ از بخش ۲ - ۱۰ مراجعه کنید.) ثابت کنید که اگر هر فضای  $X_n$  کراندار کلی باشد،  $X$  نیز چنین است. بدون استفاده از قضیه تیخونوف، نتیجه بگیرید که هر حاصل ضرب شمارا از فضاهای متریک پذیر فشرده فضایی است فشرده.
۴. (الف) ثابت کنید که هر مجموعه متناهی از توابع پیوسته، همپیوسته است.
  - (ب) فرض کنید  $\mathcal{F}$  گردایه‌ای از توابع مشتق پذیر مانند  $R \rightarrow [0, 1]: f$  باشد که مشتقهای آنها کراندار یکنواخت‌اند. [یعنی، عددی مانند  $M$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $f \in \mathcal{F}$  و هر  $x$  داریم  $|f'(x)| \leq M$ ]. ثابت کنید که  $\mathcal{F}$  همپیوسته است.
  - (پ) فرض کنید تابع  $R \rightarrow [0, 1]: f_n$  با ضابطه  $f_n(x) = x^n$  تعریف شده

باشد؛ فرض کنید  $\mathcal{F}$  گردایه  $\{f_n\}$  باشد. ثابت کنید  $\mathcal{F}$  بسته و کراندار است اما در  $\mathcal{C}(I, R)$  هیچ نقطه حدی ندارد. در چه نقطه یا نقاطی  $\mathcal{F}$  همپیوسته نیست؟

۵. فرض کنید  $X$  فشرده باشد؛  $\mathcal{C}(X, R^n)$  را با متریک سوپرمومی  $\rho$  مجهز می‌کنیم. زیرمجموعه  $\mathcal{F}$  از  $\mathcal{C}(X, R^n)$  را کراندار یکنواخت خوانیم در صورتی که تحت  $\rho$  کراندار باشد. آنرا کراندار نقطه به نقطه خوانیم در صورتی که به ازای هر  $x$  از  $X$ ، مجموعه

$$\mathcal{F}_x = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

زیرمجموعه کرانداری از  $R^n$  باشد.

(الف) ثابت کنید که اگر  $\mathcal{F}$  همپیوسته و کراندار نقطه به نقطه باشد، آنگاه کراندار یکنواخت نیز هست.

(ب) ثابت کنید که اگر  $\mathcal{F}$  همپیوسته باشد آنگاه بستار آن نیز چنین است.

(پ) قضیه. فرض کنید  $X$  فشرده باشد؛  $\mathcal{C}(X, R^n)$  را با متریک  $\rho$  در نظر می‌گیریم. زیرمجموعه  $\mathcal{F}$  از  $\mathcal{C}(X, R^n)$  دارای بستار فشرده است اگر و تنها اگر همپیوسته و کراندار نقطه به نقطه باشد.

(ت) قضیه (قضیه آرزلا). فرض کنید  $X$  فشرده باشد، و  $f_n \in \mathcal{C}(X, R^k)$ . اگر گردایه  $\{f_n\}$  کراندار نقطه به نقطه و همپیوسته باشد آنگاه دنباله  $(f_n)$  زیردنباله‌ای دارد که همگرای یکنواخت است.

۶. فرض کنید  $X$  هاوسدورف موضعاً فشرده باشد. گوییم زیرمجموعه  $\mathcal{F}$  از  $\mathcal{C}(X, R)$  در بینهایت به طور یکنواخت صفر می‌شود هر گاه به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، زیرمجموعه فشرده‌ای مانند  $C$  از  $X$  موجود باشد به طوری که به ازای  $x \in X - C$  و  $f \in \mathcal{F}$  داشته باشیم  $|f(x)| < \varepsilon$ . اگر  $\mathcal{F}$  تنها از یک تابع  $f$  تشکیل شده باشد، فقط می‌گوییم  $f$  در بینهایت صفر می‌شود. فرض کنیم  $\mathcal{C}_0(X, R)$  نمایش مجموعه توابع پیوسته‌ای مانند  $f: X \rightarrow R$  باشد که در بینهایت صفر می‌شوند. متریک سوپرمومی  $\rho$  را بر  $\mathcal{C}_0(X, R)$  تعریف می‌کنیم.

قضیه. زیرمجموعه  $\mathcal{F}$  از  $(\mathcal{C}_0(X, R), \rho)$  فشرده است اگر و تنها اگر بسته، کراندار و همپیوسته باشد و در بینهایت به طور یکنواخت صفر شود.

[دانهمایی: فرض کنید  $Y$  فشرده شده تک نقطه‌ای  $X$  باشد. ثابت کنید که  $\mathcal{C}_0(X, R)$  با زیرفضایی از  $\mathcal{C}(Y, R)$  ایزومتریک است.]

۷\*. فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک باشد. اگر  $A \subset X$  و  $\varepsilon > 0$ ، مجموعه  $U(A, \varepsilon)$  را چنین تعریف کنید:

$$U(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B_d(a, \varepsilon).$$

فرض کنید  $\mathcal{H}$  گردایه همه زیرمجموعه‌های (ناهمی) بسته و کراندار  $X$  باشد. اگر  $A, B \in \mathcal{H}$ ، قرار دهید

$$D(A, B) = \text{glb} \{ \varepsilon \mid A \subset U(B, \varepsilon), B \subset U(A, \varepsilon) \}.$$

(الف) ثابت کنید که  $D$  یک متریک بر  $\mathcal{H}$  است. آن را متریک هاوسدورف می‌گوییم.

(ب) ثابت کنید که اگر  $(X, d)$  تمام باشد،  $(\mathcal{H}, D)$  نیز چنین است. [دانهمایی: فرض کنید  $A_n$  دنباله‌ای کوشی در  $\mathcal{H}$  باشد؛ با انتخاب زیردنباله‌ای مناسب، می‌توان فرض کرد  $D(A_n, A_{n+1}) < 1/2^n$  را مجموعه همه نقاطی مانند  $x$  تعریف کنید که هر یک حد دنباله‌ای مانند  $x_1, x_2, \dots$  است، به طوری که به ازای هر  $i$ ،  $x_i \in A_i$  و  $d(x_i, x_{i+1}) < 1/2^i$ . ثابت کنید که  $A_n \rightarrow \bar{A}$ ].

(پ) ثابت کنید که اگر  $(X, d)$  کراندار کلی باشد،  $(\mathcal{H}, D)$  نیز چنین است. [دانهمایی: به ازای  $\varepsilon$  مفروض،  $\delta$  ای کوچکتر از  $\varepsilon$  انتخاب کنید و فرض کنید که  $S$  زیرمجموعه‌ای متناهی از  $X$  باشد به طوری که گردایه  $\{B_d(x, \delta) \mid x \in S\}$  مجموعه  $X$  را پوشاند. فرض کنید که  $A$  گردایه همه زیرمجموعه‌های نا همی  $S$  باشد؛ ثابت کنید که  $\{B_D(A, \varepsilon) \mid A \in \mathcal{A}\}$  مجموعه  $\mathcal{H}$  را می‌پوشاند.]

(ت) قضیه. اگر  $X$  در متریک  $d$  فشرده باشد آنگاه فضای  $\mathcal{H}$ ، متشکل از همه زیرمجموعه‌های نا همی بسته و کراندار  $X$ ، در متریک هاوسدورف  $D$ ، فشرده است.

۸. در کدام نیمه برهان لم ۲.۳ از فشردگی  $Y$  استفاده می‌شود؟

## ۲-۷ همگرایی فشرده و همگرایی نقطه به نقطه

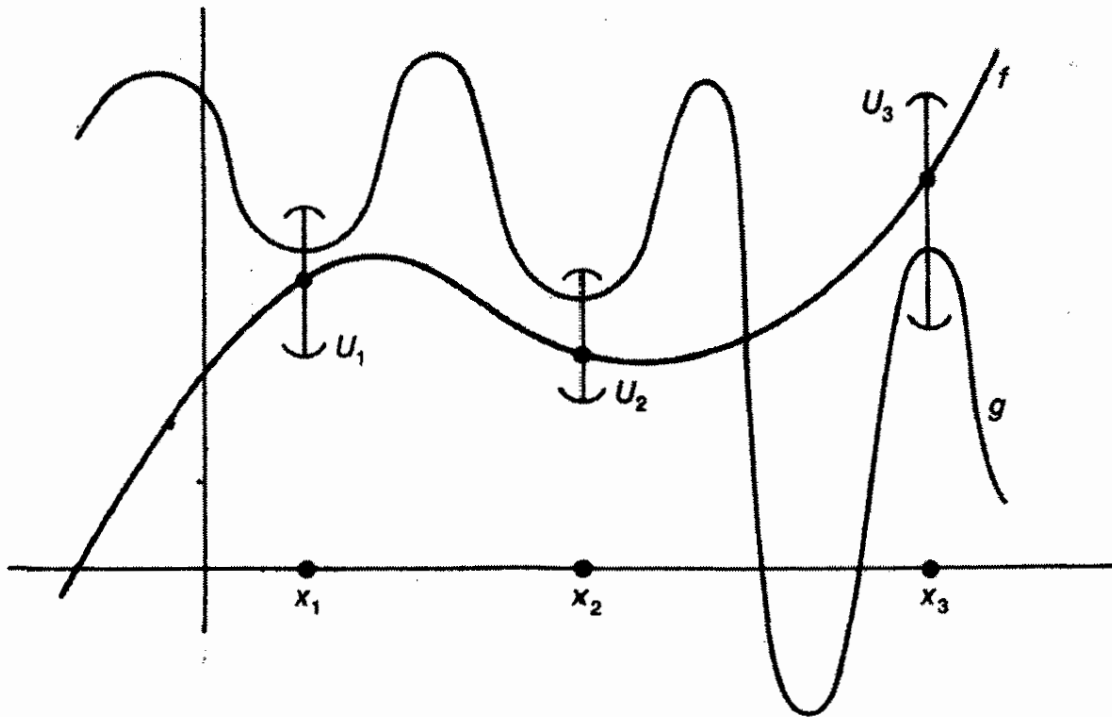
علاوه بر توپولوژی یکنوا، بر فضاهای  $Y^X$  و  $\mathcal{C}(X, Y)$  توپولوژیهای مفید دیگری نیز وجود دارند. دوتای آنها را در اینجا در نظر می‌گیریم؛ توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه و توپولوژی همگرایی فشرده.

تعریف. نقطه‌ای مانند  $x$  از مجموعه  $X$  و مجموعه‌ی بازی مانند  $U$  در فضای  $Y$  داده شده‌اند، قرار می‌دهیم

$$S(x, U) = \{f \mid f \in Y^X, f(x) \in U\}.$$

مجموعه‌های به صورت  $S(x, U)$  تشکیل زیرپایه‌ای برای توپولوژی بر  $Y^X$  می‌دهند. این توپولوژی را توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه (یا توپولوژی نقطه - باز) می‌نامند.

يك عضو پایه نوعی این توپولوژی به صورت يك مقطع منتهی از اعضای زیر پایه  $S(x, U)$  است. بدین گونه يك عضو نوعی پایه در حول تابع  $f$  عبارت است از همه توابعی مانند  $g$  که در تعدادی منتهی از نقاط به  $f$  «نزدیک» اند. يك همسایگی از این نوع را در شکل ۶ نشان داده ایم؛ این همسایگی از همه توابعی مانند  $g$  تشکیل شده است که نمودار آنها سه بازه قائم تصویر شده در شکل ۶ را قطع می کنند.



شکل ۶

توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه بر  $Y^X$  چیز تازه ای نیست. این توپولوژی همان توپولوژی حاصل ضربی است که قبلاً مطالعه کرده ایم. اگر  $J$  را جایگزین  $X$  کنیم و، برای یکنواختی علامتگذاری، عضو نوعی  $J$  را با  $\alpha$  نمایش دهیم، آنگاه مجموعه  $S(\alpha, U)$ ، متشکل از همه توابع  $Y \rightarrow X: J \rightarrow$  به طوری که  $x(\alpha) \in U$ ، درست همان زیرمجموعه  $\pi_\alpha^{-1}(U)$  از  $Y^J$  است که همان عضو زیر پایه ای استاندارد برای توپولوژی حاصل ضربی است. دلیل اینکه آن را توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه نامیدیم از قضیه ذیل ناشی می شود.

۱۰۴. قضیه دنباله  $f_n$  از توابع دتوپولوژی همگرایی نقطه به نقطه به تابع  $f$  همگراست اگر و تنها اگر به ازای هر  $x$  از  $X$ ، دنباله  $f_n(x)$  از نقاط  $Y$  به نقطه  $f(x)$  همگرا باشد.

برهان. این قضیه، مطلب استانداردهای در مورد توپولوژی حاصل ضربی است؛ ما در اینجا آن را با استفاده از علامتگذاری تابعی ثابت می کنیم. فرض کنیم  $f$  در توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه همگرا باشد. به ازای  $x$  مفروضی از  $X$  و مجموعه باز مفروضی



مانند  $U$  حول  $f(x)$ ، مجموعه  $S(x, U)$  يك همسایگی  $f$  است. بنابراین، عدد صحیحی مانند  $N$  موجود است به طوری که به ازای هر  $n \geq N$ ،  $f_n \in S(x, U)$  در این صورت، به ازای همه مقادیر  $n$  که  $n \geq N$ ،  $f_n(x) \in U$ .

بعکس، فرض کنیم به ازای هر  $x$ ،  $f_n(x)$  به  $f(x)$  همگرا باشد. برای اینکه ثابت کنیم که  $f_n$  در توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه به  $f$  همگراست، کافی است ثابت کنیم که اگر  $S(x, U)$  عضو زیر پایه دلخواهی حول  $f$  باشد آنگاه به ازای همه  $n$ هایی که به قدر کافی بزرگ باشند،  $S(x, U)$  شامل  $f_n$  است. (چرا؟) اما چون  $f_n(x)$  به  $f(x)$  همگراست و  $f(x) \in U$ ، باید عدد صحیحی مانند  $N$  باشد که به ازای  $n \geq N$ ، داشته باشیم  $f_n(x) \in U$ . در این صورت، به ازای  $n \geq N$ ، داریم  $f_n \in S(x, U)$ .  $\square$

مثال ۱. فضای  $R^I$  را، که در آن  $I = [0, 1]$ ، در نظر می گیریم. دنباله  $(f_n)$  از توابع پیوسته که با ضابطه  $f_n(x) = x^n$  تعریف می شود، در توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه، به تابع  $f$  با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{به ازای } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{به ازای } x = 1 \end{cases}$$

همگراست. این مثال ثابت می کند که زیر فضای  $\mathcal{C}(I, R)$  از توابع پیوسته، در توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه، در  $R^I$  بسته نیست.

می دانیم که دنباله ای مانند  $(f_n)$  از توابع پیوسته، که در توپولوژی یکنواخت، همگرا باشد، دارای حدی پیوسته است و مثال پیش ثابت می کند که دنباله ای که تنها در توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه همگرا باشد لازم نیست حد پیوسته داشته باشد. در اینجا می توان این سؤال را مطرح کرد که آیا توپولوژی میان این دو وجود دارد که پیوستگی حد يك دنباله همگرا از توابع پیوسته را تضمین کند؟ جواب «مثبت» است؛ کافی است قید (نسبتاً ملایم) به طور فشرده تولید شده را بر  $X$  بنهیم. در این صورت، اگر  $f_n$  به  $f$  در توپولوژی همگرایی فشرده همگرا باشد،  $f$  پیوسته خواهد بود. این توپولوژی را هم اکنون تعریف می کنیم.

تعریف. فرض کنیم  $(Y, d)$  يك فضای متری و  $X$  يك فضای توپولوژیک باشد. عضوی مانند  $f$  از  $Y^X$ ، زیرمجموعه فشرده ای مانند  $C$  در  $X$ ، و عدد مثبتی مانند  $\varepsilon$  مفروض اند. فرض کنیم  $B_C(f, \varepsilon)$  نمایش همه اعضای مانند  $g$  از  $Y^X$  باشد که به ازای آنها

$$\text{lub} \{d(f(x), g(x)) \mid x \in C\} < \varepsilon.$$

مجموعه های  $B_C(f, \varepsilon)$  تشکیل پایه ای برای يك توپولوژی بر  $Y^X$  می دهند. این

توپولوژی را توپولوژی همگرایی فشرده (یا بعضی اوقات، «توپولوژی همگرایی یکنواخت بر مجموعه‌های فشرده») می‌نامند.

تفاوت این توپولوژی با توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه در این است که عضو پایه‌ی نوعی شامل  $f$  عبارت است از همه‌ی توابعی که «نزدیکی» آنها به  $f$  تنها در تعدادی متناهی از نقاط نیست، بلکه، در همه‌ی نقاط مجموعه‌ای فشرده است.

ملاحظه کنید که اگر  $g \in B_C(f, \epsilon)$  آنگاه  $\delta$  بی مثبت وجود دارد به طوری که  $B_C(g, \delta) \subset B_C(f, \epsilon)$  کافی است فرض کنیم

$$\delta = \epsilon - \text{lub}\{d(f(x), g(x)) \mid x \in C\}.$$

در این صورت، می‌توانید به آسانی تحقیق کنید که این مجموعه‌ها تشکیل یک پایه می‌دهند. توجیه انتخاب اصطلاح «همگرایی فشرده» در قضیه‌ی ذیل می‌آید که اثباتش سراسر است.

۲۴. قضیه دنباله‌ای از توابع مانند  $f_n: X \rightarrow Y$  در توپولوژی همگرایی فشرده به تابع  $f$  همگراست اگر و تنها اگر به ازای زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی  $X$ ، مانند  $C$ ، دنباله‌ی  $f_n|_C$  همگرای یکنواخت به  $f|_C$  باشد.

تعریف. گوئیم فضای  $X$  به طور فشرده تولید شده است هر گاه واجد شرط ذیل باشد: زیرمجموعه‌ی  $A$  از  $X$  در  $X$  باز است اگر و تنها اگر به ازای هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی  $X$ ، مانند  $C$ ، مجموعه‌ی  $A \cap C$  در  $C$  باز باشد.

شرط بالا معادل آن است که زیرمجموعه‌ای، مانند  $B$  از  $X$  در  $X$  بسته است اگر و تنها اگر به ازای هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی  $X$ ، مانند  $C$ ، مجموعه‌ی  $B \cap C$  در  $C$  بسته باشد. این شرط نسبتاً ملایمی بر یک فضا است؛ بسیاری از فضاهایی که می‌شناسیم به طور فشرده تولید شده‌اند. مثلاً:

۳۰۴. لم اگر  $X$  موضعاً فشرده باشد، یا  $X$  در اولین اصل موضوع شمارایی صدق کند، آنگاه  $X$  به طور فشرده تولید شده است.

پرهان. فرض کنیم  $X$  موضعاً فشرده باشد، و  $A \cap C$ ، به ازای هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی  $X$ ، مانند  $C$ ، در  $C$  باز باشد. ثابت می‌کنیم که  $A$  باز است. به ازای نقطه‌ی مفروض  $x$  از  $A$ ، یک همسایگی  $U$  مانند  $U$  انتخاب می‌کنیم که در مجموعه‌ی فشرده‌ای مانند  $C$  واقع باشد. چون، بنا بر فرض  $A \cap C$  در  $C$  باز است،  $A \cap U$  در  $U$  باز است، و در نتیجه، در  $X$  نیز باز خواهد بود. در این صورت،  $A \cap U$  یک همسایگی  $x$  است که زیرمجموعه‌ی  $A$  است. بنابراین،  $A$  در  $X$  باز است.

فرض کنیم  $X$  در اولین اصل موضوع شمارایی صدق کند. اگر  $B \cap C$  به ازای هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی  $X$ ، مانند  $C$ ، در  $C$  بسته باشد، ثابت می‌کنیم که  $B$  در  $X$  بسته

است. فرض کنیم  $x$  نقطه‌ای از  $\bar{B}$  باشد؛ ثابت می‌کنیم که  $x \in B$ . چون  $x$  در نقطه  $x$  پایه‌ای شمارا دارد، دنباله‌ای از نقاط  $B$  مانند  $(x_n)$  همگرا به  $x$  موجود است. مجموعه

$$C = \{x\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

فشرده است. در نتیجه، بنا بر فرض،  $B \cap C$  در  $C$  بسته است. چون به‌ازای هر  $n$ ، مجموعه  $B \cap C$  شامل  $x_n$  است، شامل  $x$  نیز هست. بنابراین  $x \in B$ ، و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

۴.۴. قضیه فرض کنیم  $X$  فضایی باشد که به‌طور فشرده تولید شده است. فرض کنیم که  $(Y, d)$  یک فضای مترى باشد. در این صورت  $\mathcal{C}(X, Y)$  در توپولوژی همگرایی فشرده در  $Y^X$  بسته است.

برهان. فرض کنیم  $f$  متعلق به  $Y^X$  و یک نقطه حدی  $\mathcal{C}(X, Y)$  باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که  $f$  پیوسته است.

نخست، ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر مجموعه فشرده  $X$  مانند  $C$ ، تابع  $f|_C$  پیوسته است. به‌ازای هر  $n$ ، همسایگی  $B_C(f, 1/n)$  از  $f$  را در نظر می‌گیریم. این همسایگی،  $\mathcal{C}(X, Y)$  را قطع می‌کند. پس می‌توان تابعی مانند  $f_n$  در این همسایگی انتخاب کرد به‌طوری که  $f_n \in \mathcal{C}(X, Y)$ . دنباله نوابع  $C: C \rightarrow Y$   $f_n|_C$  همگرایی یکنواخت به تابع  $f|_C$  است. در نتیجه، بنا بر قضیه حد یکنواخت،  $f|_C$  پیوسته است. از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که  $f$  پیوسته است. فرض کنیم  $V$  زیرمجموعه‌ای از  $Y$  باشد؛ ثابت می‌کنیم که  $f^{-1}(V)$  در  $X$  باز است. اگر  $C$  زیرمجموعه دلخواهی از  $X$  باشد، داریم

$$f^{-1}(V) \cap C = (f|_C)^{-1}(V).$$

اگر  $C$  فشرده باشد، این مجموعه در  $C$  باز است. زیرا،  $f|_C$  پیوسته است. چون  $X$  به‌طور فشرده تولید شده است، نتیجه می‌شود که  $f^{-1}(V)$  در  $X$  باز است.  $\square$

۴.۵. نتیجه فرض کنیم  $X$  فضایی باشد که به‌طور فشرده تولید شده است، و  $(Y, d)$  یک فضای مترى باشد. اگر دنباله‌ای از نوابع پیوسته مانند  $f_n: X \rightarrow Y$ ، در توپولوژی همگرایی فشرده، به  $f$  همگرا باشد آنگاه  $f$  پیوسته است.

حال به‌ازای فضای مترى  $Y$ ، سه توپولوژی برای فضای تابعی  $Y^X$  در دست است. رابطه بین آنها در قضیه ذیل، که اثباتش سراسر است، بیان شده است.

۴.۶. قضیه فرض کنیم  $X$  یک فضای دلخواه و  $(Y, d)$  فضایی مترى باشد. در این صورت، جزئیتهای زیر برای توپولوژیهای  $Y^X$  موجود است:  
(یکنواخت)  $\subset$  همگرایی فشرده  $\subset$  (همگرایی نقطه به نقطه)

اگر  $X$  فشرده باشد، دو فضای اول با هم برابر می‌شوند. و اگر  $X$  گسسته باشد، دو فضای دوم با هم برابر می‌شوند.

### تمرینها

۱. ثابت کنید که مجموعه‌های  $B_C(f, \varepsilon)$  تشکیل پایه‌ای برای یک توپولوژی بر  $Y^X$  می‌دهند.
۲. قضیه ۲.۲ را ثابت کنید.
۳. قضیه ۶.۲ را ثابت کنید.
۴.  $Y^X$  را با توپولوژی همگرایی فشرده در نظر بگیرید.  
(الف) ثابت کنید که  $Y^X$  منتظم است. آیا نرمال هم هست؟  
(ب) ثابت کنید که اگر  $X$  مساوی اجتماع شمارایی از مجموعه‌های باز با بستار فشرده باشد آنگاه  $Y^X$  در اولین اصل موضوع شمارایی صدق می‌کند.
۵. ثابت کنید که به طور کلی مجموعه توابع کراندار  $f: X \rightarrow R$  در  $R^X$ ، با توپولوژی همگرایی فشرده، بسته نیست.
۶. دنباله توابع  $f_n: R_+ \rightarrow R$  را با ضابطه

$$f_n(x) = \frac{1}{nx}$$

در نظر می‌گیریم. در کدامیک از سه توپولوژی قضیه ۶.۲ این دنباله همگراست؟ در مورد دنباله‌ای که در تمرین ۹ از بخش ۲-۱۵ تعریف شد چه می‌توان گفت؟

۷. دنباله توابع  $f_n: (-1, 1) \rightarrow R$  را با ضابطه

$$f_n(x) = \sum_{k=-1}^n kx^k$$

در نظر بگیرید.

- (الف) ثابت کنید که  $(f_n)$  در توپولوژی همگرایی فشرده همگراست؛ نتیجه بگیرید که تابع حدی پیوسته است. (این مطلب استانداردهای در باب سریهای توانی است.)
- (ب) ثابت کنید که  $(f_n)$  در توپولوژی یکنواخت، همگرا نیست.

۸. تابع  $f: X \rightarrow R$  را دارای محمل فشرده خوانیم هرگاه  $f$  در خارج مجموعه‌ای فشرده صفر شود. فرض کنید  $\mathcal{C}_C(R, R)$  مجموعه همه توابع پیوسته‌ای مانند  $f: R \rightarrow R$  باشد که محمل فشرده دارند. متریکی بر این مجموعه با ضابطه

$$D(f, g) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - g(x))^2 dx \right]^{1/2}$$

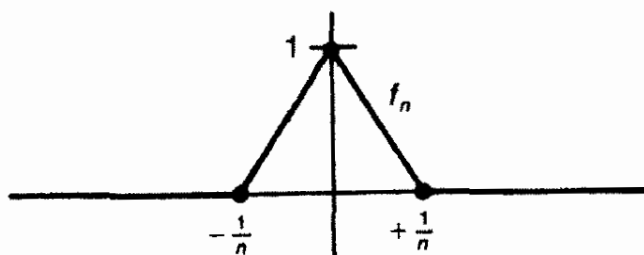
تعریف می‌کنیم.

(الف) ثابت کنید که  $D$  یک متریک است. توپولوژی حاصل از این متریک را توپولوژی همگرایی در میانگین می‌گویند. [دانهمایی: یک «ضرب اسکالری» با ضابطه]

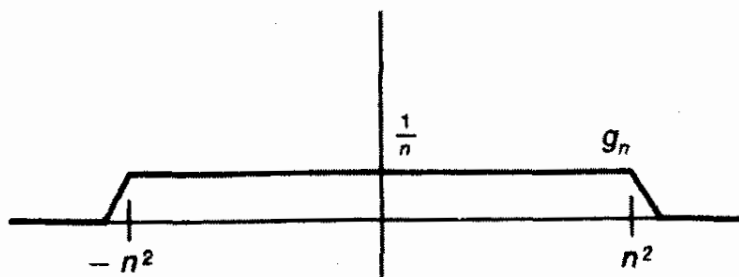
$$f \cdot g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

تعریف کنید؛ سپس، از برهان داده شده در تمرین ۸ از بخش ۲ - ۹ برای متریک اقلیدسی تقلید کنید.

(ب) در کدامیک از چهار توپولوژی که برای  $@_c(X, Y)$  داریم دنباله  $f_n$  که در شکل ۷ نموده شده همگراست؟ در مورد دنباله  $g_n$  که در شکل ۸ نموده شده است چه می‌توان گفت؟



شکل ۷



شکل ۸

(پ) ثابت کنید که توپولوژی همگرایی در میانگین با سه توپولوژی دیگر قابل مقایسه نیست.

۹. فرض کنید  $(Y, d)$  یک فضای متریک باشد، و  $X$  یک فضای دلخواه  $@(X, Y)$  بر یک توپولوژی به قرار ذیل تعریف کنید: به ازای عضو دلخواهی از  $@(X, Y)$ ، مانند  $f$ ، و تابع پیوسته مثبتی مانند  $\delta: X \rightarrow R_+$ ،  $B(f, \delta)$  را چنین تعریف کنید:

$$B(f, \delta) = \{g \mid d(f(x), g(x)) < \delta(x), x \text{ از } X\}$$

(الف) ثابت کنید که مجموعه‌های به صورت  $B(f, \delta)$  تشکیل پایه‌ای برای یک توپولوژی بر  $@(X, Y)$  می‌دهند. این توپولوژی را توپولوژی ظریف می‌نامیم.

(ب) ثابت کنید که توپولوژی ظریف حاوی توپولوژی یکنواخت است.

(پ) ثابت کنید که اگر  $X$  فشرده باشد، توپولوژیهای یکنواخت و ظریف با هم برابر می‌شوند.

(ت) ثابت کنید که اگر  $X$  گسسته باشد آنگاه  $@(X, Y) = Y^X$  و توپولوژیهای ظریف و جعبه‌ای با هم برابر می‌شوند.

۱۰. در اینجا قضیه‌ای درباره فضاها تولید شده ارائه شده است. نگاشت  $f: X \rightarrow Y$  را وقتی یک نگاشت سره خوانیم که به ازای هر مجموعه فشرده در  $Y$ ، مانند  $D$ ، مجموعه  $f^{-1}(D)$  در  $X$  فشرده باشد.

قضیه. فرض کنید  $X$  یک فضای دلخواه و  $Y$  فضای هائوسدورف باشد که به طوری فشرده تولید شده است. اگر  $f: X \rightarrow Y$  تابعی پیوسته، یک به یک، و سره باشد آنگاه  $f$  یک نشاننده است و  $f(X)$  در  $Y$  بسته است.

## ۷-۵ توپولوژی فشرده - باز

در تعریف توپولوژی یکنواخت و توپولوژی همگرایی فشرده در فضای تابعی  $Y^X$ ، در نظر گرفتن متریک برای فضای  $Y$  ضروری بود؛ این متریک در هر دو تعریف شرکت داشت. (در تعریف توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه بر فضای تابعی  $Y^X$  به چنین متریکی بر  $Y$  نیاز نداشتیم.)

به طور کلی، علمای توپولوژی بدو با موضوعاتی سروکار دارند که به توپولوژی بزرگ فضا مربوطند نه به متریک آن. بنابراین، طبیعی است که سؤال شود که آیا هیچ یک از این دو توپولوژی، به جای متریک خاص  $Y$ ، فقط به توپولوژی  $Y$  وابسته است؟

در مورد فضای  $Y^X$ ، متشکل از همه توابع از  $X$  بتوی  $Y$ ، هیچ جواب رضایتبخشی بدین پرسش وجود ندارد. اما در مورد فضای  $@(X, Y)$  متشکل از همه توابع پیوسته، می‌توان مطلبی را ثابت کرد؛ برای این فضا، توپولوژی همگرایی فشرده مستقل از متریک خاصی است که برای  $Y$  انتخاب می‌شود.

برای اثبات این حکم، توپولوژی خاصی بر  $@(X, Y)$  تعریف می‌کنیم موسوم به توپولوژی فشرده - باز، در تعریف این توپولوژی هیچ متریکی بر  $Y$  دخالت ندارد.

سپس ثابت می‌کنیم که اگر متریکی مانند  $d$  برای  $Y$  پیدا شد، آنوقت این توپولوژی با توپولوژی همگرایی فشرده یکی می‌شود. بنابراین، توپولوژی همگرایی فشرده بر  $\mathcal{C}(X, Y)$  تنها به فضای  $Y$  وابسته است، و نه به متریک آن.

توپولوژی فشرده - باز، به نوبه خود، دارای اهمیت بسیاری است. این توپولوژی خواص بسیار سودمندی دارد. در بخش آتی، از آن در اثبات تعمیمی از قضیه آسکولی بهره خواهیم گرفت. همچنین، این توپولوژی با مفهوم «هموتوپی»، که از مفاهیم بنیادی توپولوژی جبری است، رابطه نزدیکی دارد.

تعریف. فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو فضای توپولوژیک باشند. اگر  $C$  زیرمجموعه فشرده‌ای از  $X$  و  $U$  زیرمجموعه‌ای از  $Y$  باشد،  $S(C, U)$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$S(C, U) = \{f \mid f \in \mathcal{C}(X, Y), f(C) \subset U\}.$$

مجموعه‌های  $S(C, U)$  تشکیل زیرپایه‌ای برای یک توپولوژی بر  $\mathcal{C}(X, Y)$  می‌دهند، که به توپولوژی فشرده - باز موسوم است.

توجه کنید که هم توپولوژی نقطه - باز و هم توپولوژی فشرده - باز بدون فرض وجود متریکی بر  $Y$  تعریف شده‌اند. بنا بر تعریف، واضح است که در حالت کلی توپولوژی فشرده - باز از توپولوژی نقطه - باز ظریفتر است.

۵.۱. قضیه فرض کنیم  $X$  فضایی دلخواه و  $(Y, d)$  فضایی متری باشد. برای فضای  $\mathcal{C}(X, Y)$  توپولوژی فشرده - باز و توپولوژی همگرایی فشرده یکی هستند.

پرهان. مرحله ۱. اگر  $A$  زیرمجموعه‌ای از  $Y$  باشد و  $\varepsilon > 0$  آنگاه  $\mathcal{U}(A, \varepsilon)$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$U(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B_d(a, \varepsilon).$$

این مجموعه را « $\varepsilon$  - همسایگی»  $A$  می‌نامیم. اگر  $A$  فشرده و  $V$  مجموعه‌ای حاوی  $A$  باشد، ثابت می‌کنیم که عدد مثبتی مانند  $\varepsilon$  وجود دارد به طوری که  $U(A, \varepsilon) \subset V$ . این حکم را قبلاً به عنوان تمرینی آوردیم (تمرین ۴ در بخش ۳ - ۶)؛ در اینجا آن را ثابت می‌کنیم. به ازای هر  $a$  از  $A$  عدد مثبت  $\delta(a)$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $B_d(a, \delta(a)) \subset V$ . مجموعه  $A$  را با تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز به صورت

$$B_d\left(a_1, \frac{1}{4}\delta(a_1)\right), \dots, B_d\left(a_n, \frac{1}{4}\delta(a_n)\right)$$

می‌پوشانیم. فرض کنیم  $\varepsilon = \min\{\delta(a_i)/2\}$ . در این صورت، اگر  $a \in A$ ، نقطه  $a$  دست کم به یکی از مجموعه‌های  $B_d(a_i, \delta(a_i)/2)$  تعلق دارد؛ از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که

$$B_d(a, \varepsilon) \subset B_d(a_i, \delta(a_i)).$$

چون این رابطه به ازای هر  $a$  از  $A$  برقرار است، از آنجا نتیجه می شود که  $U(A, \varepsilon) \subset V$ ، و این همان است که می خواستیم.

مرحله ۲. ثابت می کنیم که توپولوژی همگرایی فشرده از توپولوژی فشرده - باز ظریفتر است. فرض کنیم  $S(C, U)$  یک عضو زیرپایه ای برای توپولوژی فشرده - باز بر  $\mathcal{C}(X, Y)$  و  $f$  عضوی از  $S(C, U)$  باشد. چون  $f$  پیوسته است،  $f(C)$  زیرمجموعه فشرده ای از مجموعه باز  $U$  است. بنا بر مرحله ۱، می توان  $\varepsilon$  را چنان برگزید که  $\varepsilon$ -همسایگی  $f(C)$  در  $U$  قرار گیرد. بنابراین،

$$B_C(f, \varepsilon) \subset S(C, U).$$

مرحله ۳. ثابت می کنیم که توپولوژی فشرده - باز از توپولوژی همگرایی فشرده ظریفتر است. به ازای مجموعه باز مفروضی حول  $f$  در توپولوژی همگرایی فشرده، این مجموعه حاوی یک عضو پایه به صورت  $B_C(f, \varepsilon)$  است. باید عضو پایه ای برای توپولوژی فشرده - باز بیابیم که شامل  $f$  و زیرمجموعه  $B_C(f, \varepsilon)$  باشد.

هر نقطه  $C$  مانند  $x$  همسایگی مانند  $V_x$  دارد به طوری که  $f(V_x)$  در مجموعه سازی از  $U$  مانند  $U_x$  قرار دارد که قطر آن از  $\varepsilon$  کمتر است. [مثلاً،  $V_x$  را می توان چنان انتخاب کرد که  $f(V_x)$  در  $\varepsilon/4$ -همسایگی  $f(x)$  قرار گیرد. در این صورت،  $f(V_x)$  در  $\varepsilon/3$ -همسایگی  $f(x)$  قرار می گیرد، که قطر آن حداکثر  $\varepsilon/3$  است.]  $C$  را با تعدادی متناهی از مجموعه های باز از نوع  $V_x$ ، مثلاً، به ازای  $x = x_1, \dots, x_n$  می پوشانیم. فرض کنیم  $C_x = V_x \cap C$ . در این صورت،  $C_x$  فشرده است، و عضو پایه ای

$$S(C_{x_1}, U_{x_1}) \cap \dots \cap S(C_{x_n}, U_{x_n})$$

شامل  $f$  است و در  $B_C(f, \varepsilon)$  قرار دارد، و این همان است که می خواستیم.  $\square$

۲.۵. نتیجه فرض کنیم  $Y$  یک فضای متریک باشد. توپولوژی همگرایی فشرده بر زیرفضای  $\mathcal{C}(X, Y)$  از  $Y^X$  به متریک  $Y$  بستگی ندارد.

این امر که در تعریف توپولوژی فشرده - باز هیچ متریکی بر  $Y$  دخالت ندارد تنها یکی از جنبه های سودمند آن است. جنبه دیگر آن این است که این توپولوژی در شرط «پیوستگی توأم» صدق کند. به یسانی نه چندان دقیق، منظور این است که عبارت  $f(x)$  نه تنها نسبت به «متغیر»  $x$  پیوسته است، بلکه همچنین توأمأ نسبت به هر دو «متغیر»  $x$  و  $f$  پیوسته است. به بیان دقیقتر، قضیه ذیل موجود است:

۳.۵. قضیه فرض کنیم  $X$  هانسدورف موضعاً فشرده باشد؛ فرض کنیم  $\mathcal{C}(X, Y)$  به توپولوژی فشرده - باز مجهز باشد. در این صورت، نگاشت



$$e: X \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow Y$$

با ضابطه

$$e(x, f) = f(x)$$

پیوسته است.

نگاشت  $e$  را نگاشت آرزو می‌نامند.

برهان. نقطه مفروض  $(x, f)$  از  $X \times \mathcal{C}(X, Y)$  و مجموعه باز مفروضی مانند  $V$  حول نقطه تصویری  $e(x, f) = f(x)$  در  $Y$  داده شده‌اند، می‌خواهیم مجموعه‌ای باز حول  $(x, f)$  بیابیم که به وسیله  $e$  در  $V$  نگاشته شود. نخست، با استفاده از پیوستگی  $f$  و این امر که  $X$  هاوسدورف موضعاً فشرده است، می‌توان مجموعه بازی مانند  $U$  حول  $x$  چنان برگزید که دارای بستار فشرده  $\bar{U}$  باشد، و  $f$  مجموعه  $\bar{U}$  را بتوی  $V$  بنگارد. سپس، مجموعه باز

$$U \times S(\bar{U}, V)$$

در  $X \times \mathcal{C}(X, Y)$  را در نظر می‌گیریم که مجموعه بازی شامل  $(x, f)$  است. اگر  $(x', f')$  به این مجموعه متعلق باشد آنگاه  $e(x', f') = f'(x')$  به  $V$  تعلق خواهد داشت، و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

قضیه ذیل نتیجه‌ای از قضیه فوق است. با وجود اینکه در آتیه احتیاجی به کاربردهای آن نخواهیم داشت، ولی، نظر به اهمیت آن در توپولوژی جبری، آن را در اینجا می‌آوریم.

۴.۵. نتیجه فرض کنیم  $X$  یک فضای هاوسدورف موضعاً فشرده باشد؛ و  $\mathcal{C}(X, Y)$  دارای توپولوژی فشرده - باز باشد.  $Z$  را یک فضای توپولوژیک دلخواه می‌گیریم. در این صورت، هر نگاشت  $F: X \times Z \rightarrow Y$  پیوسته است اگر و تنها اگر نگاشت القایی

$$\widehat{F}: Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$$

پیوسته باشد، که در آن  $\widehat{F}$  با ضابطه

$$(\widehat{F}(z))(x) = F(x, z)$$

تعریف می‌شود.

برهان. فرض کنیم  $\widehat{F}$  پیوسته باشد. چون  $F$  مساوی است با تابع مرکب

$$X \times Z \xrightarrow{i_z \times \widehat{F}} X \times \mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{e} Y$$

از اینجا نتیجه می‌شود که  $F$  پیوسته است.  
فرض کنیم  $F$  پیوسته باشد؛ ثابت می‌کنیم که

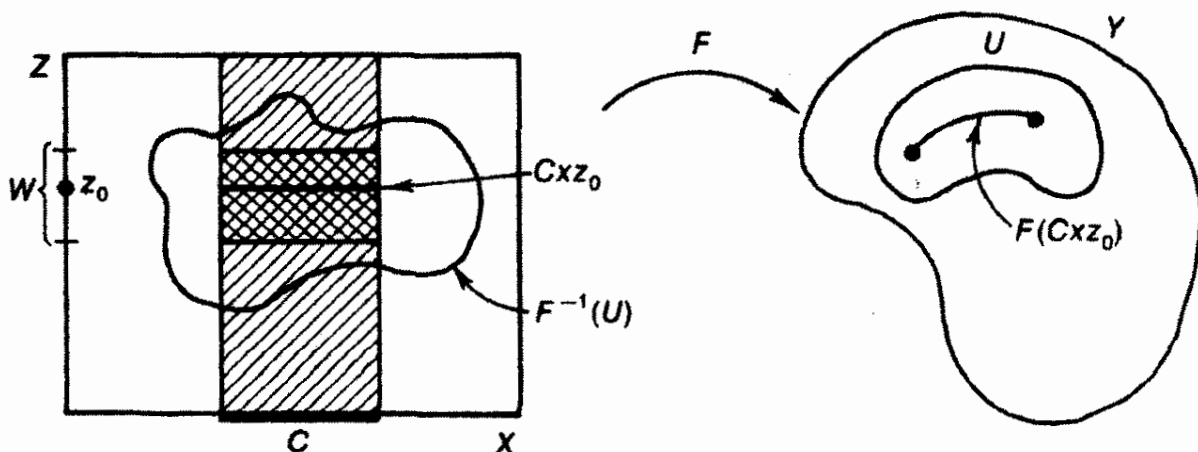
$$\widehat{F}: Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$$

پیوسته است. (در این قسمت برهان از فشردگی موضعی  $X$  استفاده می‌کنیم.) برای اثبات پیوستگی، نقطه‌ای از  $Z$  مانند  $z_0$  و عضو زیرپایه‌ای مانند  $S(C, U)$  از  $\mathcal{C}(X, Y)$  که شامل  $\widehat{F}(z_0)$  باشد می‌گیریم، و همسایگی از  $z_0$  مانند  $W$  می‌یابیم که به وسیله  $\widehat{F}$  بتوی  $S(C, U)$  نگاشته شود. این وافی به مقصود خواهد بود.

این حکم که  $\widehat{F}(z_0)$  در  $S(C, U)$  قرار دارد، بدین معنی است که به ازای هر  $x$  از  $C$ ،  $F(x, z_0) \in U$ ، یعنی  $F(C \times z_0) \subset U$ ، پیوستگی  $F$  مستلزم آن است که  $F^{-1}(U)$  مجموعه بازی در  $X \times Z$  و حاوی قاج  $C \times z_0$  باشد. در این صورت،

$$F^{-1}(U) \cap (C \times Z)$$

مجموعه بازی در  $C \times Z$  حول قاج  $C \times z_0$  خواهد بود؛ لم لوله در بخش ۳-۵ ثابت می‌کند که همسایگی از  $z_0$  در  $Z$  مانند  $W$  وجود دارد به طوری که همه لوله  $C \times W$  در  $F^{-1}(U)$  قرار می‌گیرد. به شکل ۹ نگاه کنید. پس به ازای هر  $z$  از  $W$  و هر  $x$  از  $C$ ، داریم  $F(x, z) \in U$ . در نتیجه،  $\widehat{F}(W) \subset S(C, U)$  و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$



شکل ۹

در اینجا چند کلمه به اختصار در باب بستگی میان توپولوژی فشرده - باز و مفهوم هموتوپی می آوریم.

اگر  $f$  و  $g$  نگاشتهای پیوسته‌ای از  $X$  بتوی  $Y$  باشند،  $f$  و  $g$  را هموتوپیک خوانیم در صورتی که نگاشت پیوسته‌ای مانند

$$F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر  $x$  از  $X$ ،  $F(x, 0) = f(x)$  و  $F(x, 1) = g(x)$  نگاشت  $F$  را یک هموتوپی بین  $f$  و  $g$  می نامند.

به بیانی نه چندان دقیق، یک هموتوپی عبارت است از یک «خانواده» یک پارامتری پیوسته، متشکل از نگاشتهایی از  $X$  به  $Y$ . دقیقتر آنکه، یک هموتوپی مانند  $F$  نگاشت دیگری مانند

$$\widehat{F}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$$

به دست می دهد که به هر مقدار پارامتر  $t$  در  $[0, 1]$ ، نگاشت پیوسته متناظر آن از  $X$  به  $Y$  را نظیر می کند. با فرض اینکه  $X$  موضعاً فشرده و هاوسدورف است، می بینیم که  $F$  پیوسته است اگر و تنها اگر  $\widehat{F}$  پیوسته باشد. این بدین معنی است که یک هموتوپی مانند  $F$  بین دو نگاشت پیوسته  $f, g: X \rightarrow Y$  دقیقاً متناظر است با داهی مانند  $\widehat{F}$  در فضای تابعی  $\mathcal{C}(X, Y)$  که نقطه  $f$  از  $\mathcal{C}(X, Y)$  را به نقطه  $g$  وصل می کند. در فصل آتی به مطالعه مفصلتری از هموتوپی باز می گردیم.

## تمرینها

۱. فرض کنید که  $C$  زیرفضایی از  $X$  باشد. ثابت کنید که تابع تحدیدی  $\mathcal{C}(C, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ ، در صورتی که هر دو فضا دارای توپولوژی نقطه - باز یا فشرده - باز باشند، پیوسته است.
۲. ثابت کنید که در توپولوژی فشرده - باز،  $\mathcal{C}(X, Y)$  هاوسدورف است هر گاه  $Y$  هاوسدورف باشد، و منتظم است هر گاه  $Y$  منتظم باشد. [دانهمایی: اگر  $U \subset V$  آنگاه  $\overline{S(C, U)} \subset S(C, V)$ ]
۳. فرض کنید  $Y$  یک فضای متریک باشد. ثابت کنید که اگر  $X$  فشرده باشد، توپولوژی یکنواخت بر  $\mathcal{C}(X, Y)$  به متریک انتخاب شده برای  $Y$  بستگی ندارد.
۴. ثابت کنید که اگر  $X$  و  $Y$  هاوسدورف موضعاً فشرده باشند آنگاه نگاشت مرکب

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$$

پیوسته است به شرطی که در سراسر کار از توپولوژی فشرده - باز استفاده شود.  
 [داهنمایی: ثابت کنید که نگاشت القایی  $X \times \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow Z$  پیوسته است.]

۵. فرض کنید  $\mathcal{C}'(X, Y)$  نمایش مجموعه  $\mathcal{C}(X, Y)$  با توپولوژی مانند  $\mathcal{C}$  باشد. ثابت کنید که اگر نگاشت ارزه

$$e: X \times \mathcal{C}'(X, Y) \rightarrow Y$$

پیوسته باشد آنگاه  $\mathcal{C}$  حاوی توپولوژی فشرده - باز است. [داهنمایی: نگاشت  $\widehat{e}: \mathcal{C}'(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$  را در نظر بگیرید. ملاحظه کنید که به فشردگی موضعی  $X$  نیازی نیست.]

۶. در اینجا کاربرد (غیرمنتظره) از نتیجه ۴.۵ را در باره نگاشتهای خارج قسمتی مطرح می کنیم: ثابت کنید که اگر  $p: A \rightarrow B$  یک نگاشت خارج قسمتی و  $X$  هاوسدورف موضعاً فشرده باشد آنگاه  $i_X \times p: X \times A \rightarrow X \times B$  یک نگاشت خارج قسمتی است. این مطلب را با تمرین ۱۱ در بخش ۳ - ۸ مقایسه کنید.  
 [داهنمایی: فرض کنید  $(X \times B)'$  نمایش مجموعه  $X \times B$  با توپولوژی خارج قسمتی القاشده به وسیله  $i_X \times p$  باشد، و  $\pi: X \times A \rightarrow (X \times B)'$  یک نگاشت خارج قسمتی باشد. اگر  $g: X \times B \rightarrow (X \times B)'$  نگاشت همانی باشد، ثابت کنید که  $\widehat{g} \circ p = \widehat{\pi}$ ؛ نتیجه بگیرید که  $\widehat{g}$  پیوسته است.]

## ۶-۲ قضیه آسکولی

اینک صورتی تعمیم یافته از قضیه آسکولی را ثابت می کنیم. صورت دیگری از آن را که قبلاً ثابت کردیم، حالت خاصی از قضیه این فصل است. در جریان این برهان از قضیه تیخونوف استفاده خواهیم کرد.

۶.۱. قضیه (قضیه آسکولی) فرض کنیم  $X$  هاوسدورف موضعاً فشرده و  $(Y, d)$  یک فضای متریک باشد.  $\mathcal{C}(X, Y)$  را با توپولوژی فشرده - باز در نظر می گیریم. زیرمجموعه  $\mathcal{F}$  از  $\mathcal{C}(X, Y)$  بستار فشرده دارد اگر و تنها اگر همپیوسته باشد و به ازای هر  $x$  زیرمجموعه

$$\mathcal{F}_x = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

از  $Y$  دارای بستار فشرده باشد

برهان. مرحله ۱. نخست، ثابت می کنیم که اگر زیرمجموعه ای مانند  $\mathcal{F}$  از

$\mathcal{C}(X, Y)$  همپيوسته باشد آنگاه توپولوژیهایى که  $\mathcal{C}$  از توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه و توپولوژی همگرایی فشرده بر  $Y^X$  القا می شود یکی هستند.

به طور کلی، توپولوژی همگرایی فشرده ظریفتر از توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه است؛ می خواهیم ثابت کنیم که در مورد  $\mathcal{C}$  عکس این جزئیت نیز برقرار است. به ازای عضو مفروض  $f$  از زیر فضای  $\mathcal{C}$  عضو پایه  $B_C(f, \varepsilon)$  برای توپولوژی همگرایی فشرده را در نظر می گیریم. این عضو پایه عبارت است از همه توابعی مانند  $g$  که به ازای آنها

$$\text{lub} \{d(g(x), f(x)) \mid x \in C\} < \varepsilon.$$

عضو پایه ای مانند  $B$  برای توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه می یابیم به طوری که

$$f \in B \cap \mathcal{C} \subset B_C(f, \varepsilon) \cap \mathcal{C}.$$

$\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_2$  را چنان برمی گزینیم که  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon$ . با به کار بستن همپيوستگی  $\mathcal{C}$  و فشردگی  $C$ ، مجموعه  $C$  را با تعدادی متناهی از مجموعه های باز  $X$  مانند  $U_1, \dots, U_n$  می پوشانیم به طوری که تغییرات هر يك از توابع عضو  $\mathcal{C}$  بر هر يك از  $U_i$  ها حداكثر به اندازه  $\varepsilon_1$  باشد. به ازای هر  $i$  عضوی از  $U_i$  مانند  $x_i$  انتخاب می کنیم. زیرمجموعه  $B$  از  $Y^X$  را که با تساوی زیر معرفی می شود در نظر می گیریم

$$B = \{g \mid d(g(x_i), f(x_i)) < \varepsilon_2, i = 1, \dots, n\}.$$

مدعی هستیم که  $B$  همان عضو پایه مطلوب برای توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه است. فرض کنیم  $g$  عضوی از  $\mathcal{C} \cap B$  باشد. به ازای عضو مفروضی از  $C$  مانند  $x$ ،  $i$  را چنان انتخاب می کنیم که  $x$  متعلق به  $U_i$  باشد. در این صورت،

$$d(g(x), g(x_i)) \leq \varepsilon_1,$$

$$d(g(x_i), f(x_i)) < \varepsilon_2,$$

$$d(f(x_i), f(x)) \leq \varepsilon_1.$$

در نتیجه،  $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$ . این نامساوی به ازای هر  $x$  از  $C$  برقرار است. بنابراین،

$$\max \{d(g(x), f(x)) \mid x \in C\} < \varepsilon$$

در نتیجه،  $g \in B_C(f, \varepsilon)$ ، و این همان است که می خواستیم.

مرحله ۲. اکنون ثابت می کنیم که اگر زیرمجموعه ای از  $Y^X$  مانند  $\mathcal{C}$  همپيوسته باشد آنگاه بستار آن  $\mathcal{C}$  نیز در  $Y^X$  نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه همپيوسته است.

اثبات این حکم آسان است. به ازای عضو مفروض  $x_0$  از  $X$  و  $\varepsilon > 0$ ، همسایگی  $U$  از  $x_0$  را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$(*) \quad d(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad , x \in U \text{ و هر } f \in \mathcal{F}$$

مدهی هستیم که اگر  $g \in \mathcal{G}$  آنگاه به ازای همه مقادیر  $x$  در  $U$ ،  $d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon$ ، از اینجا نتیجه می‌شود که  $\mathcal{G}$  همپیوسته است.

برای اثبات این مدعا، فرض می‌کنیم که  $x$  نقطه‌ای از  $U$  باشد.  $V_x$  را زیرمجموعه‌ای از  $Y^X$  می‌گیریم که در توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه باز است و عبارت است از همه اعضای  $Y^X$  مانند  $h$  که

$$(**) \quad d(h(x_0), g(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ و } d(h(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

چون  $g$  به‌بستار  $\mathcal{F}$ ، در این توپولوژی، تعلق دارد، همسایگی  $V_x$  از  $g$  باید شامل عضوی مانند  $f$  از  $\mathcal{F}$  باشد. بابه‌کار بستن نامساوی مثلثی در مورد  $(*)$  و  $(**)$ ، ملاحظه می‌کنیم که،

$$d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon,$$

و این همان است که می‌خواستیم.

مرحله ۳. اینک به اثبات قضیه می‌پردازیم. نخست، فرض می‌کنیم  $\mathcal{F}$  همپیوسته باشد، و به ازای هر  $x$  از  $X$ ،  $\mathcal{F}_x$  در  $Y$  دارای بستار فشرده باشد.

فرض کنیم  $\mathcal{G}$  بستار  $\mathcal{F}$  در  $Y^X$  نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه باشد.  $\mathcal{G}'$  را بستار  $\mathcal{F}$  در  $Y^X$  نسبت به توپولوژی همگرایی فشرده در نظر می‌گیریم. در این صورت،  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ .

چون  $\mathcal{F}$  همپیوسته است، از مرحله ۲ نتیجه می‌شود که  $\mathcal{G}$  نیز همپیوسته است. پس بنا بر مرحله ۱، توپولوژی‌هایی که در  $\mathcal{G}$  از توپولوژی‌های همگرایی نقطه به نقطه و همگرایی فشرده بر  $Y^X$  القا می‌شوند یکی هستند. حاصل اینکه  $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$ .

تا بدین‌جا، تنها از همپیوستگی  $\mathcal{F}$  استفاده کرده‌ایم. حال فرض کنیم  $C_x$  نشان‌دهنده بستار  $\mathcal{F}_x$  در  $Y$  باشد. حاصل ضرب  $\prod_{x \in X} C_x$  را در نظر می‌گیریم؛ در این صورت، بنا بر نظریه مقدماتی مجموعه‌ها، داریم

$$\mathcal{F} \subset \prod_{x \in X} C_x \subset Y^X.$$

توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه بر  $Y^X$  همان توپولوژی حاصل‌ضربی است. در این توپولوژی، بنا بر قضیه تیخونوف، مجموعه  $\prod C_x$  فشرده است. چون در این توپولوژی

$\mathcal{G}$  زیرمجموعه‌ای بسته از  $\Pi C$  است، پس در این توپولوژی فشرده است. در نتیجه،  
 $\mathcal{G}$  در توپولوژی همگرایی فشرده نیز فشرده است.

اما  $\mathcal{G}$  همپیوسته است، پس هر تابع در  $\mathcal{G}$  پیوسته است. در نتیجه،  $\mathcal{G}$  زیرمجموعه  
 $\mathcal{C}(X, Y)$  است؛ و می‌دانیم که بر  $\mathcal{C}(X, Y)$  توپولوژی همگرایی فشرده و توپولوژی  
 فشرده - باز برابرند. بنابراین، بستار  $\mathcal{G}$  در  $\mathcal{C}(X, Y)$ ، نسبت به توپولوژی فشرده - باز،  
 همان مجموعه فشردۀ  $\mathcal{G}$  است، و این همان است که می‌خواستیم.

مرحله ۴. مجموعه  $\mathcal{C}(X, Y)$  را با توپولوژی فشرده - باز مجهز می‌کنیم، و فرض  
 می‌کنیم  $\mathcal{G}$  در  $\mathcal{C}(X, Y)$  دارای بستار فشردۀ  $\mathcal{G}$  باشد. ثابت می‌کنیم که  $\mathcal{G}$  همپیوسته و  
 بستار  $\mathcal{G}$  فشرده است. در برهان این حکم از این امر که نگاشت ارزۀ

$$e: X \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow Y$$

پیوسته است بهره می‌گیریم؛ در اینجا برای نخستین بار فشردگی موضعی  $X$  را مورد  
 استفاده قرار می‌دهیم.

نخست به‌ازای عضو مفروضی از  $X$  مانند  $x$ ، ثابت می‌کنیم که بستار  $\mathcal{G}$  فشرده  
 است. اثبات این حکم آسان است. مجموعه  $x \times \mathcal{G}$  در  $X \times \mathcal{C}(X, Y)$  فشرده است؛  
 در نتیجه،  $e(x \times \mathcal{G})$  در  $Y$  مجموعه‌ای فشرده است، و  $e(x \times \mathcal{G}) = \mathcal{G}$  حاوی  $e(x \times \mathcal{G})$   
 است.

ثانیاً، ثابت می‌کنیم که  $\mathcal{G}$  در  $x_0$  همپیوسته است. در واقع، ثابت می‌کنیم که  $\mathcal{G}$   
 در  $x_0$  همپیوسته است. مجموعه فشردۀ  $C$  مانند  $C$  انتخاب می‌کنیم که حاوی یک همسایگی  
 $x_0$  باشد. کافی است ثابت کنیم که گردایۀ توابع

$$\mathcal{R} = \{f \mid C; f \in \mathcal{G}\}$$

همپیوسته است، چه  $C$  حاوی یک همسایگی  $x_0$  است.  
 نگاشت تحدیدی

$$r: \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(C, Y)$$

را با ضابطۀ  $r(f) = f|_C$  در نظر می‌گیریم. در این صورت،  $\mathcal{R} = r(\mathcal{G})$ . اگر به هر دو  
 فضا توپولوژی فشرده - باز بدهیم، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که  $r$  پیوسته است.  
 بنابراین،  $\mathcal{R}$  در توپولوژی فشرده - باز زیرمجموعه فشردۀ  $\mathcal{C}(C, Y)$  خواهد بود.

بر فضای  $\mathcal{C}(C, Y)$ ، توپولوژی فشرده - باز با توپولوژی یکنواخت برابر است  
 (زیرا،  $C$  فشرده است). بنابراین،  $\mathcal{R}$  در توپولوژی یکنواخت فشرده است؛ و بنابراین قضیه  
 ۱.۳،  $\mathcal{R}$  در متریک  $\rho$  کراندار کلی است. مدعی هستیم که زیرمجموعه‌ای فشردۀ  $Y_0$   
 از  $Y$  وجود دارد به طوری که  $\mathcal{R}$  در زیر فضای  $\mathcal{C}(C, Y_0)$  از  $\mathcal{C}(C, Y)$  قرار می‌گیرد.  
 در آن صورت، قضیه بلافاصله از لم ۲.۳ نتیجه می‌شود. زیرا، از آنجا که  $C$  و  $Y_0$  فشرده

هستند، کراندارای کلی  $\mathbb{R}$  مستلزم همپیوستگی  $\mathbb{R}$  است.

یافتن  $Y$  آسان است. مجموعه  $C \times \bar{Y}$  در  $X \times \mathcal{C}(X, Y)$  فشرده است؛ فرض کنیم  $Y_0$  تصویر آن تحت  $e$  باشد. چون  $e$  پیوسته است،  $Y_0$  زیرمجموعه فشرده‌ای است از  $Y$ ؛ این مجموعه، به ازای هر  $x$  از  $C$  و هر  $f$  از  $\bar{Y}$ ، شامل  $f(x)$  است. در نتیجه،  $\square \cdot \mathbb{R} \subset \mathcal{C}(C, Y_0)$

صورتی باز هم کلیتر از قضیه آسکولی را می‌توانید در  $[K]$  یا در  $[Wd]$  بیابید. در آنجا فرض متریک بودن را برای  $Y$  قائل نمی‌شوند، بلکه  $Y$  دارای ساختاری است موسوم به ساختار یکنواخت، که تعمیمی است از مفهوم متریک.

### تمرینها

۱. (الف) در کدام مرحله برهان قضیه آسکولی، فشردگی موضعی  $X$  به کار می‌رود؟ در کدام مرحله قضیه تیخونوف فشردگی موضعی به کار می‌رود؟  
(ب) ثابت کنید که صورت کلاسیک قضیه آسکولی حالت خاصی است از صورت کلی آن، و همچنین است قسمت (پ) تمرین ۵ در بخش ۷-۳.

۲. صورت تعمیم یافته زیر از قضیه آرزلا را ثابت کنید:

قضیه. فرض کنید  $X$  یک فضای هائوسدورف موضعاً فشرده با پایه‌ای شمارا باشد، و  $f_n: X \rightarrow R^k$  اگر گردایه  $\{f_n\}$  کراندار نقطه به نقطه و همپیوسته باشد آنگاه دنباله  $(f_n)$  زیردنباله‌ای دارد که در توپولوژی همگرایی فشرده، همگراست.

۳. کدامیک از زیرمجموعه‌های ذیل از  $\mathcal{C}(R, R)$  کراندار نقطه به نقطه است؟ کدامیک نسبت به توپولوژی همگرایی فشرده دارای بستار فشرده است؟

(الف) گردایه  $\{f_n\}$ ، که در آن  $f_n(x) = x + \sin nx$ .

(ب) گردایه  $\{g_n\}$ ، که در آن  $g_n(x) = x^n$ .

(پ) گردایه  $\{h_n\}$ ، که در آن  $h_n(x) = |x|^{1/n}$ .

(ت) گردایه تمام بسجمله‌های از درجه حداکثر ۱ که قدر مطلق هر یک از ضرایب آنها از ۱ کمتر است.

۴. فرض کنید  $Y$  یک فضای متری و  $f_n: X \rightarrow Y$  دنباله‌ای از توابع پیوسته باشد؛ و  $f: X \rightarrow Y$  را تابعی (که الزاماً پیوسته نیست) در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید که اگر  $\{f_n\}$  همپیوسته باشد و در توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه  $f_n \rightarrow f$ ، آنگاه در توپولوژی همگرایی فشرده نیز  $f_n \rightarrow f$ .

(ب) در حالتی که  $X$  هائوسدورف موضعاً فشرده است، عکس حکم (الف) را ثابت کنید.

(پ) ثابت کنید که، در هر حالت،  $f$  پیوسته است.



## ۷-۷ فضاهای بثر

شرطی که فضای بثر با آن تعریف می‌شود شاید همچون شرطهای دیگری که تاکنون در این کتاب معرفی شده‌اند «ظاهری غیرطبیعی» داشته باشد. با این همه، قدری شکیبایی همه چیز را درست می‌کند.

در این بخش فضاهای بثر را تعریف می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که دو رده مهم از فضاها - فضاهای متری تمام و فضاهای هاوسدورف فشرده - در رده فضاهای بثر جای دارند. بعد چند کاربرد از این فضاها را خواهیم آورد، که اگرچه ممکن است این کاربردها طبیعی بودن شرط بثر را آشکار نسازند، اما دست کم ثابت می‌کنند که فضاهای بثر می‌توانند ابزار مفیدی باشند. در واقع، چنانکه معلوم خواهد شد، فضاهای بثر ابزاری بسیار مفید و نسبتاً پیچیده و پرمغزی برای توپولوژی و آنالیز هستند.

**تعریف.** یادآوری می‌کنیم که اگر  $A$  زیر مجموعه‌ای از فضای  $X$  باشد، بنا بر تعریف،  $A$  درون  $A$  مساوی است با اجتماع همه مجموعه‌های باز  $X$  که زیر مجموعه  $A$  هستند. بنابراین، هر گاه بگوییم که  $A$  دارای درون تهی است، مراد آن است که  $A$  حاوی هیچ مجموعه بازی از  $X$ ، غیر از مجموعه تهی، نیست.

**مثال ۱.** مجموعه  $Q$  متشکل از اعداد گویا به عنوان زیر مجموعه‌ای از  $R$  دارای درون تهی است، اما بازه  $[0, 1]$  درون ناتهی دارد. بازه  $0 \times [0, 1]$  به عنوان زیر مجموعه‌ای از صفحه  $R^2$  دارای درون تهی است، و زیر مجموعه  $Q \times R$  نیز چنین است.

**تعریف.** فضای  $X$  را یک فضای بثر خوانیم در صورتی که در شرط ذیل صدق کند: به ازای هر گردایه شمارا از مجموعه‌های بسته  $X$  مسانند  $\{A_n\}$  که هر یک در  $X$  دارای درون تهی باشد، اجتماع آنها، یعنی  $\bigcup A_n$ ، نیز در  $X$  دارای درون تهی باشد.

**مثال ۲.** مجموعه  $Q$ ، متشکل از اعداد گویا، یک فضای بثر نیست. زیرا هر مجموعه تک‌عضوی در  $Q$  بسته است و در  $Q$  دارای درون تهی است، و  $Q$  اجتماع شمارای زیر مجموعه‌های تک‌عضوی خود است.

اما مجموعه  $Z_+$  تشکیل یک فضای بثر می‌دهد. هر زیر مجموعه  $Z_+$  باز است، در نتیجه، هیچ زیر مجموعه‌ای از  $Z_+$ ، بجز مجموعه تهی، درون تهی ندارد. بنابراین،  $Z_+$ ، به انتهای مقدم، در شرط بثر صدق می‌کند.

در حالت کلی، هر زیر مجموعه بسته  $R$ ، از آنجا که یک فضای متری تمام است، یک فضای بثر است. شکفت آنکه، مجموعه اعداد اصم نیز در  $R$  تشکیل یک فضای بثر می‌دهد، به تمرین ۷ نگاه کنید.

اصطلاحی که به‌دو وسیله  $R$  بثر برای این مفهوم به کار برده شد واژه «مقوله» را

در برداشت. فضای  $X$  را در صورتی از مقوله یکم می‌گفتند که مساوی اجتماع گردایه‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های بسته  $X$  باشد که هر یک از آنها در  $X$  دارای درون‌تهی است؛ در غیر این صورت،  $X$  را از مقوله دوم می‌خواندند. با استفاده از این اصطلاحات، می‌توان چنین گفت:

فضای  $X$  یک فضای بتر است اگر و تنها اگر هر مجموعه باز  $X$  از مقوله دوم باشد.

ما در این کتاب از اصطلاحات «مقوله یکم» و «مقوله دوم» استفاده نخواهیم کرد. تعریفی که ما برای فضای بتر آوردیم «تعریف بر حسب مجموعه‌های بسته» بود. فرمولبندی دیگری از این تعریف بر حسب مجموعه‌های باز موجود است که بسیار سودمند است و ما آنرا در لم ذیل می‌آوریم.

۱۰۷. لم  $X$  یک فضای بتر است. اگر و تنها اگر به ازای هر گردایه شمارا از مجموعه‌های باز  $X$  مانند  $\{U_\alpha\}$ ، که هر یک از آنها در  $X$  چگال است، مقطع آنها،  $\bigcap U_\alpha$  نیز در  $X$  چگال باشد.

برهان. یادآوری می‌کنیم که مجموعه  $C$  را وقتی در  $X$  چگال خوانیم که  $\bar{C} = X$ . اینک این قضیه از دو حکم ذیل نتیجه می‌شود:

- (۱) مجموعه  $A$  در  $X$  بسته است اگر و تنها اگر  $X - A$  در  $X$  باز باشد.
- (۲) مجموعه  $B$  دارای درون‌تهی است اگر و تنها اگر  $X - B$  در  $X$  چگال باشد.  $\square$

فضایایی وجود دارد که بیسان می‌کنند که یک فضا تحت چه شرایطی یک فضای بتر است، که مهمترین آنها به قرار ذیل اند:

۲۰۷. قضیه اگر  $X$  یک فضای هانسدورف فشرده، یا یک فضای متریک تمام، باشد آنگاه  $X$  یک فضای بتر است.

برهان. به ازای گردایه مفروض شمارایی از مجموعه‌های بسته  $X$  مانند  $\{A_\alpha\}$  که درون هر یک از آنها تهی است در نظر می‌گیریم؛ می‌خواهیم ثابت کنیم که درون اجتماع آنها، یعنی درون  $\bigcup A_\alpha$ ، نیز تهی است. بنابراین، به ازای مجموعه باز مفروضی از  $X$  مانند  $U_\alpha$  باید نقطه‌ای مانند  $x$  از  $U_\alpha$  بیابیم که متعلق به هیچ یک از مجموعه‌های  $A_\alpha$  نباشد. اولین مجموعه، یعنی، مجموعه  $A_1$  را در نظر می‌گیریم. بنا بر فرض،  $A_1$  حاوی  $U_\alpha$  نیست. بنابراین، می‌توان نقطه‌ای مانند  $y$  از  $U_\alpha$  یافت که در  $A_1$  نباشد. منتظم بودن  $X$ ، همراه با این امر که  $A_1$  بسته است، امکان انتخاب یک همسایگی از  $y$  مانند  $U_1$  را می‌دهد به طوری که

$$U_1 \cap A_1 = \emptyset,$$

$$\bar{U}_1 \subset U_0.$$

اگر  $X$  متری باشد،  $U_1$  را آن قدر کوچک انتخاب می‌کنیم که قطر آن از ۱ کمتر باشد. در حالت کلی، به ازای مجموعه باز ناتهی  $U_{n-1}$ ، نقطه‌ای از  $U_{n-1}$  را که در مجموعه بسته  $A_n$  نیست انتخاب می‌کنیم، سپس، همسایگی  $U_n$  از این نقطه را چنان برمی‌گزینیم که

$$\bar{U}_n \cap A_n = \emptyset,$$

$$U_n \subset U_{n-1};$$

در صورت متری بودن  $X$ ،  $\text{diam } U_n < 1/n$ .

مدعی هستیم که  $\bigcap \bar{U}_n$  ناتهی است، و این برای اثبات قضیه کافی خواهد بود. زیرا از آنجا که  $\bar{U}_1 \subset U_0$ ، اگر  $x$  نقطه‌ای از  $\bigcap \bar{U}_n$  باشد آنگاه  $x$  در  $U_0$  است. از طرف دیگر، به ازای هر  $n$ ، نقطه  $x$  در  $A_n$  نیست، زیرا  $\bar{U}_n$  از  $A_n$  جداست. برهان اینکه  $\bigcap \bar{U}_n$  ناتهی است، بر حسب آنکه  $X$  هاوسدورف فشرده باشد یا متری تمام، به دو بخش تقسیم می‌شود. اگر  $X$  هاوسدورف فشرده باشد، دنباله تو در توی  $\{U_n\}$  از زیرمجموعه‌های ناتهی  $X$  را در نظر می‌گیریم. گردایه  $\{U_n\}$  در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند؛ و چون  $X$  فشرده است، مقطع  $\bigcap \bar{U}_n$  نباید ناتهی باشد.

اگر  $X$  متری تمام باشد، لم ذیل را به کار می‌بریم.  $\square$

۳۰۷. لم فرض کنیم  $\dots \subset C_p \subset C_1$  دنباله‌ای تو در تو از مجموعه‌های ناتهی بسته در فضای متری تمام  $X$  باشد. اگر  $\text{diam } C_n \rightarrow 0$  آنگاه  $\bigcap C_n \neq \emptyset$ .

برهان. این حکم را به عنوان تمرینی در بخش ۷-۱ آورده بودیم. در اینجا آن را ثابت می‌کنیم. به ازای هر  $n$ ،  $x_n$  از  $C_n$  انتخاب می‌کنیم. چون

$$\text{به ازای } n \geq N \text{ و } m \geq N, x_n, x_m \in C_N,$$

و چون با انتخاب  $N$  ی به قدر کافی بزرگ می‌توان  $\text{diam } C_N$  را از هر  $\varepsilon$  مفروضی کوچکتر کرد، دنباله  $(x_n)$  یک دنباله کوشی است. فرض کنیم این دنباله همگرا به  $x$  باشد. در این صورت، به ازای هر  $k$ ، زیردنباله  $x_k, x_{k+1}, \dots$  از آن نیز به  $x$  همگراست. بدین ترتیب،  $x$  الزاماً متعلق است به  $C_k = \bar{C}_k$ . و از آنجا نتیجه می‌شود که  $x \in \bigcap C_k$ ، و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

قضیه‌ای که هم‌اکنون در باره فضاهای متر ثابت شد قضیه‌ای است که بسیار به کار می‌رود. اما، قویترین قضیه‌ای نیست که می‌توان ثابت کرد. مثلاً، می‌توان ثابت کرد که در یک فضای هاوسدورف فشرده، یا یک فضای متری تمام، هر مجموعه  $G$  یک فضای متر

است. این مطلب و تعمیمهای دیگر از آن در تمرینها آمده‌اند.

مثال ۳. مجموعه اعداد گویا،  $Q$ ، در اعداد حقیقی یک مجموعه  $G$  نیست.

فرض کنیم  $Q$  مساوی مقطع گردایه شمارای  $\{W_n\}$  از مجموعه‌های باز  $R$  باشد. به ازای هر  $q$  از  $Q$ ،  $V_q$  را مجموعه باز  $R - \{q\}$  در نظر می‌گیریم. در این صورت، گردایه

$$A = \{W_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{V_q \mid q \in Q\}$$

گردایه‌ای شمارا از مجموعه‌های باز  $R$  است. هر  $W_n$  در  $R$  چکال است، زیرا  $Q \subset W_n$ . همچنین، هر مجموعه  $V_q$  در  $R$  چکال است، زیرا، متمم یک مجموعه، تک‌عضوی است. از آنجا که  $R$  یک فضای بتر است، مقطع اعضای گردایه شمارای  $A$ ، که آنرا با  $A$  نشان می‌دهیم، باید در  $R$  چکال باشد. اما، هر نقطه‌ای که متعلق به همه مجموعه‌های  $W_n$  باشد گویاست، و هر نقطه‌ای که متعلق به همه مجموعه‌های  $V_q$  باشد اصم است. پس،  $A$  تهی است.

مثال ۴. در دومین کاربرد آن، که بیشتر سرگرم‌کننده است تا عمیق، این مثال ناشی از پرسشی است که می‌توان آنرا در یک کلاس درس حسابان مقدماتی مطرح کرد: آیا تابعی مانند  $f: R \rightarrow R$  وجود دارد که فقط در نقاط گویای  $R$  پیوسته باشد؟ پاسخ منفی است، و برهان به‌قرار ذیل است، فرض کنیم  $f: R \rightarrow R$  تابعی دلخواه باشد. به ازای هر عدد صحیح مثبتی مانند  $n$ ، فرض کنیم  $U_n$  اجتماع اعضای گردایه ذیل باشد:

$$\left\{ U \mid \text{diam } f(U) < \frac{1}{n} \text{ و } U \text{ در } R \text{ است} \right\}$$

در این صورت،  $U_n$  در  $R$  باز است. به‌علاوه، مجموعه

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n$$

دقیقاً مجموعه همه نقاطی است که در آنها تابع  $f$  پیوسته است. صحت این حکم را می‌توانید به آسانی تحقیق کنید. بنابراین، مجموعه نقاطی که  $f$  در آنها پیوسته است یک مجموعه  $G$  در  $R$  است. مجموعه اعداد گویا در  $R$  یک مجموعه  $G$  نیست؛ بنابراین، هیچ تابعی مانند  $f: R \rightarrow R$  نمی‌توان یافت که فقط در همه نقاط گویا پیوسته باشد.

با کمال شگفتی، تابعی مانند  $h$  وجود دارد که فقط در نقاط اصم پیوسته است. تابعی دوسویی مانند  $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow Q$  اختیار می‌کنیم، فرض کنیم  $q_n = f(n)$ . سپس،  $h: R \rightarrow R$  را با ضابطه ذیل تعریف می‌کنیم:

$$h(q_n) = \frac{1}{n}, \quad n \text{ متعلق به } \mathbb{Z}_+$$

$$h(x) = 0, \quad \text{به ازای } x \text{ اصم}$$

بررسی این امر که  $h$  تابع مطلوب است به عهده خواننده است.

### تمرینها

۱. فرض کنید  $X$  مساوی اجتماع شمارای  $\bigcup B_n$  باشد. ثابت کنید که اگر  $X$  يك فضای بتر باشد آنگاه دست کم یکی از مجموعه های  $B_n$  دارای درون ناتهی است.
۲. قضیه بتر مستلزم این حقیقت است که  $R$  را نمی توان به صورت اجتماع شمارایی از زیرمجموعه های بازی که درون تهی دارند نوشت. ثابت کنید که اگر شرط بسته بودن را حذف کنیم، حکم برقرار نیست.
۳. ثابت کنید که هر زیرمجموعه باز يك فضای بتر فضایی است بتر.
۴. ثابت کنید که هر فضای هاوسدورف موضعاً فشرده يك فضای بتر است.
۵. ثابت کنید که اگر هر نقطه  $x$  از  $X$  همسایگی داشته باشد که يك فضای بتر باشد آنگاه  $X$  يك فضای بتر است. [داهنمایی: از فرمول بندی شرط بتر بر حسب مجموعه های باز استفاده کنید.]
۶. ثابت کنید که اگر  $Y$  يك مجموعه  $G_\delta$  در  $X$  باشد، و اگر  $X$  هاوسدورف فشرده یا متری تمام باشد، آنگاه  $Y$  در توپولوژی زیر فضایی يك فضای بتر است. [داهنمایی: فرض کنید  $Y = \bigcap W_n$ ، که  $W_n$  در  $X$  باز است. و فرض کنید  $B_n$  در  $Y$  بسته و دارای درون تهی در  $Y$  است. به ازای مجموعه باز مفروض  $U_0$  به طوری که  $U_0 \cap Y \neq \emptyset$ ، دنباله ای از مجموعه های باز مانند  $U_n$  در  $X$  بیابید به طوری که  $U_n \cap Y$  ناتهی باشد، و

$$U_n \subset U_{n-1},$$

$$U_n \cap B_n = \emptyset,$$

$$\text{diam} U_n < \frac{1}{n}, \text{ در حالت متری بودن } X,$$

$$U_n \subset W_n.]$$

۷. ثابت کنید که مجموعه اعداد اصم تشکیل يك فضای بتر می دهد.
۸. ثابت کنید که هر مجموعه  $G_\delta$  در يك فضای هاوسدورف موضعاً فشرده يك فضای بتر است.

۹. صحت احكامی را كه در مثال ۴ درباره  $C$  و  $h$  بيان شدند بررسی كنيد.

۱۰. قضيه ( اصل کرانداري يکنواخت ) . فرض كنيد  $X$  يك فضای مترى تمام و  $\mathcal{F}$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathcal{C}(X, R)$  باشد به طوری كه به ازای هر  $x$  از  $X$ ، مجموعه

$$\mathcal{F}_x = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

کراندار باشد. در این صورت، مجموعه‌ای ناتمامی با زمانند  $U$  در  $X$  وجود دارد كه بر آن توابع در  $\mathcal{F}$  کراندار يکنواخت اند؛ يعنی، مجموعه‌ای مانند  $U$  و عددی مانند  $M$  موجود است به طوری كه اگر  $x \in U$  و  $f \in \mathcal{F}$  آنگاه  $|f(x)| \leq M$ .

[داهنمایی: مجموعه‌های  $\{ \text{به‌ازای هر } f \text{ كه } f \in \mathcal{F}, |f(x)| \leq N \}$  را در نظر بگيريد.]

۱۱. تعیین كنيد كه  $R_1$  يك فضای بتر هست يا نه.

۱۲. ثابت كنيد كه  $R^I$  در توپولوژیهای جعبه‌ای، حاصل ضربی، و يکنواخت يك فضای بتر است.

۱۳\*. ثابت كنيد كه اگر  $A$  مجموعه  $G_\delta$  دلخواهی در  $R$  باشد، تابعی مانند  $f: R \rightarrow R$  وجود دارد كه در تمام نقاط  $A$  پیوسته است و در تمام نقاط دیگر ناپیوسته.

۱۴\*. فرض كنيد  $X$  يك فضای توپولوژيك باشد؛  $Y$  را يك فضای مترى تمام بگيريد. ثابت كنيد كه، در توپولوژی ظريف،  $\mathcal{C}(X, Y)$  يك فضای بتر است. (به تمرين ۹ در بخش ۷-۴ مراجعه كنيد). [داهنمایی: به ازای اعضای پایه‌ای مفروض  $B(f_i, \delta_i)$  كه  $\delta_1 \leq 1$  و  $\delta_{i+1} \leq \delta_i/3$  و  $f_{i+1} \in B(f_i, \delta_i/3)$ ، ثابت كنيد كه

$$\bigcap B(f_i, \delta_i) \neq \emptyset.$$

## ۷-۸ يك تابع هيچ جا مشتق پذير

قضيه آنالیزی زیرين را اثبات می‌کنيم:

۸.۱. قضيه فرض كنيم  $R \rightarrow [0, 1]: h$  تابعی پیوسته باشد. به ازای عدد مثبت  $\varepsilon$ ، تابعی مانند  $R \rightarrow [0, 1]: g$  با این شرط وجود دارد كه به ازای هر  $x$ ،  $|h(x) - g(x)| < \varepsilon$ ؛ و علاوه،  $g$  پیوسته است و هيچ جا مشتق پذير.

پروهان. فرض می‌کنيم  $I = [0, 1]$ . فضای  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, R)$  از همه نگاشته‌های پیوسته از  $I$  به  $R$  را با متریک

$$\rho(f, g) = \max \{ |f(x) - g(x)| \}$$

در نظر می‌گیریم. این فضا يك فضای متری تمام است، و در نتیجه، يك فضای بتر است. به ازای هر  $n$ ، زیرمجموعه معینی مانند  $U_n$  از  $\mathcal{C}$  تعریف می‌کنیم به طوری که  $U_n$  در  $\mathcal{C}$  باز و چگال باشد، و توابع متعلق به

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n$$

هیچ‌جا مشتق پذیر باشند. چون  $\mathcal{C}$  يك فضای بتر است، بنا بر لم ۱.۷، این مقطع در  $\mathcal{C}$  چگال است. بنابراین، به ازای  $h$  و  $\varepsilon$  مفروض، این مقطع باید شامل تابعی باشد مانند  $g$  که  $\rho(h, g) < \varepsilon$  و بدین گونه، قضیه اثبات می‌شود.

بخش ابتکاری برهان تعریف درست  $U_n$  هاست. نخست، تابعی مانند  $f$  اختیار می‌کنیم و خارج قسمت‌های تفاضلی آن را در نظر می‌گیریم. به ازای نقطه مفروضی از  $I$  مانند  $x$ ، و  $0 < h \leq 1/2$ ، عبارت‌های

$$\left| \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \right| \quad \text{و} \quad \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|$$

را در نظر می‌گیریم. چون  $h \leq 1/2$ ، دست کم یکی از اعداد  $x-h$  و  $x+h$  به  $I$  تعلق دارد، در نتیجه، دست کم یکی از این عبارت‌ها تعریف شده است. اگر هر دو عبارت تعریف شده باشند، فرض می‌کنیم که  $\Delta f(x, h)$  بزرگترین این دو عبارت باشد؛ در غیر این صورت،  $\Delta f(x, h)$  را آن عبارتی اختیار می‌کنیم که تعریف شده است. اگر  $f'(x)$  مشتق  $f$  در  $x$ ، موجود باشد مساوی است با حد این خارج قسمت‌های تفاضلی، در نتیجه

$$|f'(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta f(x, h).$$

ما به دنبال تابع پیوسته‌ای هستیم که برای آن این حد موجود نباشد.

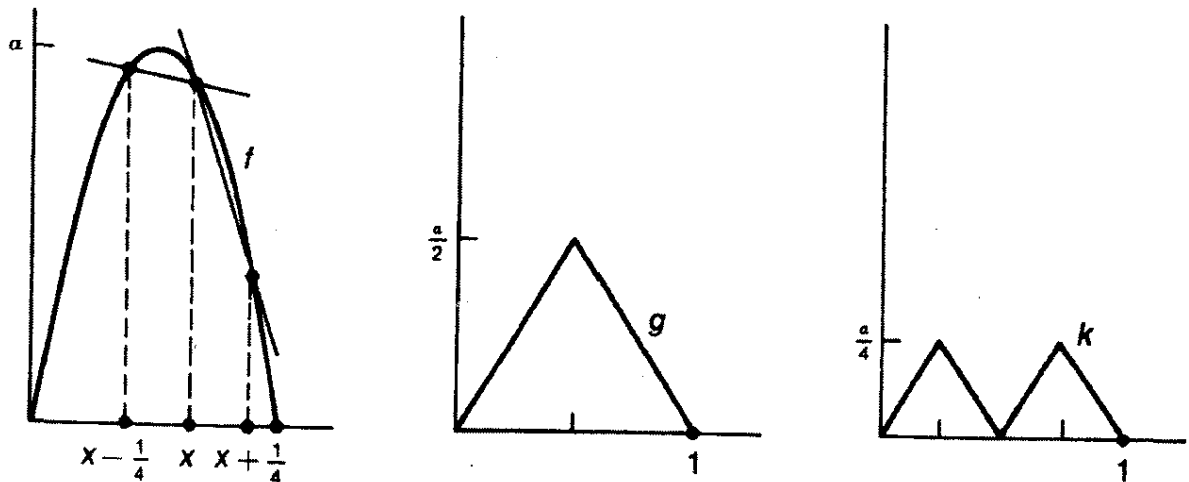
آنچه گذشت راه تعریف مجموعه  $U_n$  را به دست می‌دهد. اجمالا می‌توان گفت که  $U_n$  عبارت است از آن توابعی که به ازای مقادیر کوچک  $h$  (یعنی کوچکتر از  $1/n$ ) مقدار  $\Delta f(x, h)$  بزرگ است (یعنی، کران پایین آن بزرگتر از  $n$  است). به بیان دقیقتر، به ازای اعداد مثبت مفروض  $\alpha$  و  $h \leq 1/2$ ، مجموعه  $U(\alpha, h)$  را که زیرمجموعه  $\mathcal{C}(I, R)$  است با ضابطه

$$U(\alpha, h) = \{f \mid \Delta f(x, h) \geq \alpha, I \text{ از } x \text{ هر}\}$$

تعریف می‌کنیم. سپس،  $U_n$  را اجتماع همه مجموعه‌های  $U(\alpha, h)$  می‌گیریم که در آنها  $\alpha > n$  و  $h < 1/n$ . ملاحظه کنید که  $\dots \subset U_{n+1} \subset U_n$

**مثال ۱.** فرض کنیم  $\alpha$  عدد مفروضی باشد. تابع  $f(x) = 4\alpha x(1-x)$ ، که نمودار آن يك سهمی است، به ازای  $h = 1/4$  به  $U(\alpha, h)$  تعلق دارد. به زبان هندسی، این بدان معنی است که به ازای هر  $x$ ، دست کم یکی از خطوط قاطع سهمی، که در شکل ۱۵ نشان داده شده

است، دارای شیبی است که قدرمطلق آن از  $\alpha$  ناکمتر است. تابع  $g$  که در شکل ۱۰ تصویر شده است، به ازای هر  $h$  که  $h \leq 1/4$  به  $U(\alpha, h)$  تعلق دارد؛ و تابع  $k$  به ازای هر  $h$  که  $h \leq 1/8$ ، به  $U(\alpha, h)$  تعلق دارد.



شکل ۱۰

اینک احکام ذیل را در مورد مجموعه  $U_n$  ثابت می کنیم:

(۱)  $U_n$  در  $\mathcal{C}$  باز است. فرض کنیم  $f \in U_n$ . در این صورت، به ازای  $\alpha$  بی بزرگتر از  $n$  و  $h$  کوچکتر از  $1/n$ ،  $f \in U(\alpha, h)$ . فرض کنیم

$$\delta = \frac{h(\alpha - n)}{4}.$$

مدعی هستیم. که اگر  $g$  تابع دلخواهی باشد که  $\rho(f, g) < \delta$  آنگاه  $g$  متعلق است به  $U(\alpha', h)$ ، که در آن،  $\alpha' = (\alpha + n)/2$ . چون  $\alpha' > n$ ، این بدان معنی است که  $g$  متعلق است به  $U_n$ . پس  $\delta$  - همسایگی  $f$  در  $U_n$  است، و در نتیجه،  $U_n$  در  $\mathcal{C}$  باز است. برای اثبات این مدعا، فرض می کنیم  $\Delta f(x, h) = |f(x+h) - f(x)| / h$  محاسبه زیر را داریم:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right| = \left| \frac{[f(x+h) - g(x+h)] - [f(x) - g(x)]}{h} \right| \leq \frac{2\delta}{h} = \frac{\alpha - n}{2}$$



اگر قدر مطلق خارج قسمت تفاضلی اول نا کمتر از  $\alpha$  باشد آنگاه قدر مطلق دومی نا کمتر از  $\alpha' = (\alpha - n)/2$  خواهد بود. وقتی که  $\Delta f(x, h)$  مساوی با خارج قسمت تفاضلی دیگر باشد، محاسبه‌ای مشابه به کار می‌رود.

(۲)  $U_n$  در  $\mathcal{C}$  چگال است. باید ثابت کنیم که اگر  $f$  از  $\mathcal{C}$ ،  $\varepsilon > 0$ ، و  $n$  مفروض باشند، آنگاه می‌توان عضوی از  $U_n$  مانند  $g$  به فاصله  $\varepsilon$  از  $f$  پیدا کرد.  $\alpha$  را بزرگتر از  $n$  اختیار می‌کنیم.  $g$  را به صورت تابعی «خطی قطعه به قطعه» می‌سازیم، یعنی به صورت تابعی که نمودار آن یک قطعه خط شکسته باشد؛ وطوری که قدر مطلق شیب هر قطعه خط از نمودار  $g$  از  $\alpha$  نا کمتر باشد. به سهولت نتیجه می‌شود که چنین تابعی مانند  $g$  به  $U_n$  تعلق دارد. زیرا، فرض کنیم

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = 1$$

افزای از بازه  $[0, 1]$  باشد که تحدید  $g$  به هر زیر بازه  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$  یک تابع خطی است. حال  $h$  را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$h < \frac{1}{n},$$

$$h \leq \frac{1}{n} \min\{|x_i - x_{i-1}|; i = 1, \dots, k\}.$$

اگر  $x$  در  $[0, 1]$  باشد آنگاه  $x$  به زیر بازه‌ای مانند  $I_i$  تعلق دارد. اگر  $x$  در نیمه اول زیر بازه  $I_i$  باشد آنگاه  $x+h$  متعلق است به  $I_i$  و  $(g(x+h) - g(x))/h$  مساوی است با شیب تابع خطی  $g|_{I_i}$ . به همین قیاس، اگر  $x$  به نیمه دوم  $I_i$  تعلق داشته باشد آنگاه  $x-h$  متعلق به  $I_i$  خواهد بود و  $(g(x-h) - g(x))/(-h)$  مساوی است با شیب  $g|_{I_i}$ . در هر حالت،  $\Delta g(x, h) \geq \alpha$ ، در نتیجه،  $g \in U(\alpha, h) \subset U_n$ ، و این همان است که می‌خواستیم.

حال به ازای  $f$ ،  $\varepsilon$ ، و  $\alpha$  مفروض، باید ثابت کنیم که چگونه تابع خطی قطعه به قطعه  $g$  را که مورد نظر است می‌توان ساخت. نخست، با استفاده از پیوستگی یکپارخت  $f$  افراز

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$$

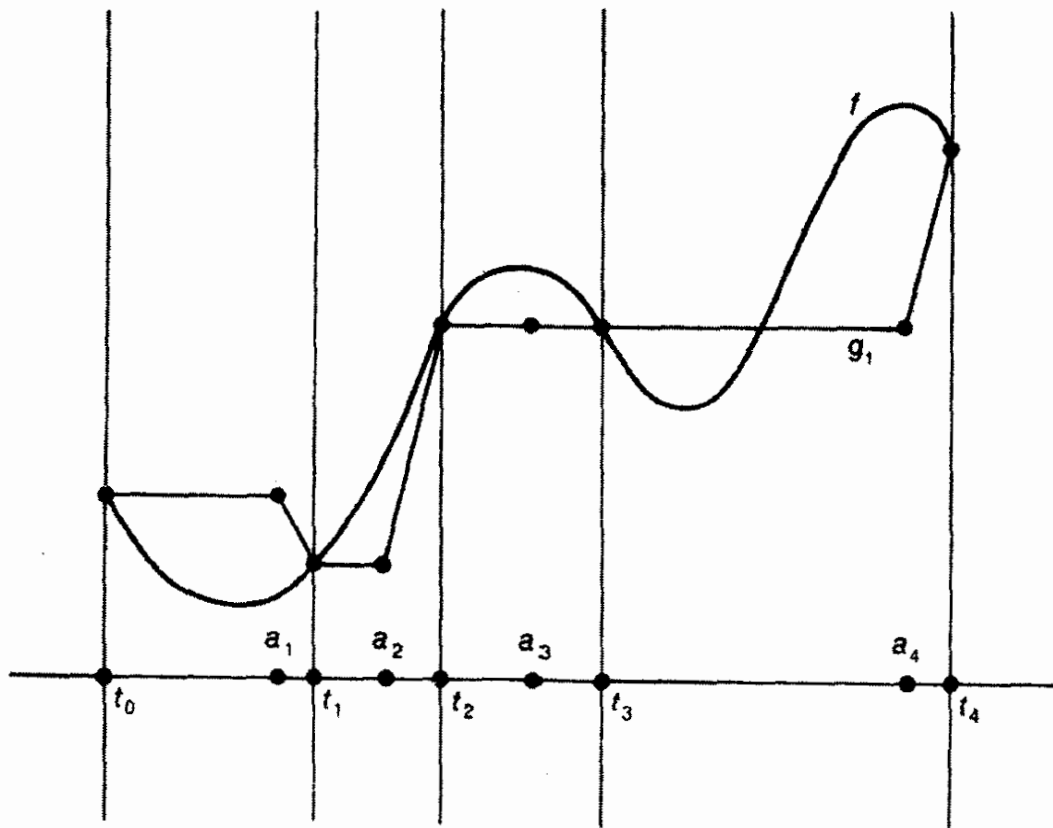
را چنان انتخاب می‌کنیم که  $f$  بر هر زیر بازه  $[t_{i-1}, t_i]$  از این افراز حداکثر به اندازه  $\varepsilon/4$  تغییر کند. به ازای هر  $i$  که  $i = 1, \dots, m$ ، نقطه‌ای مانند  $a_i$  از  $(t_{i-1}, t_i)$  انتخاب می‌کنیم. سپس، تابع خطی قطعه به قطعه  $g_1$  را با ضابطه

$$g_1(x) = \begin{cases} f(t_{i-1}) & x \in [t_{i-1}, a_i] \\ f(t_{i-1}) + \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - a_i} (x - a_i) & x \in [a_i, t_i] \end{cases}$$

تعريف مي كنيم. نمودارهاي  $f$  و  $g_1$  در شكل ۱۱ تصوير شده اند.  
 ما در انتخاب نقاط  $a_i$  قدری آزاد هستيم. اگر  $f(t_i) \neq f(t_{i-1})$  را آن قدر  
 نزديك به  $t_i$  می گيريم که

$$t_i - a_i < \frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{\alpha}.$$

در اين صورت، نمودار  $g_1$  از قطعه خطهايی باشيب صفر و قطعه خطهايی که قدر مطلق شيب  
 آنها از  $\alpha$  نا کمتر است تشكيل خواهد شد.



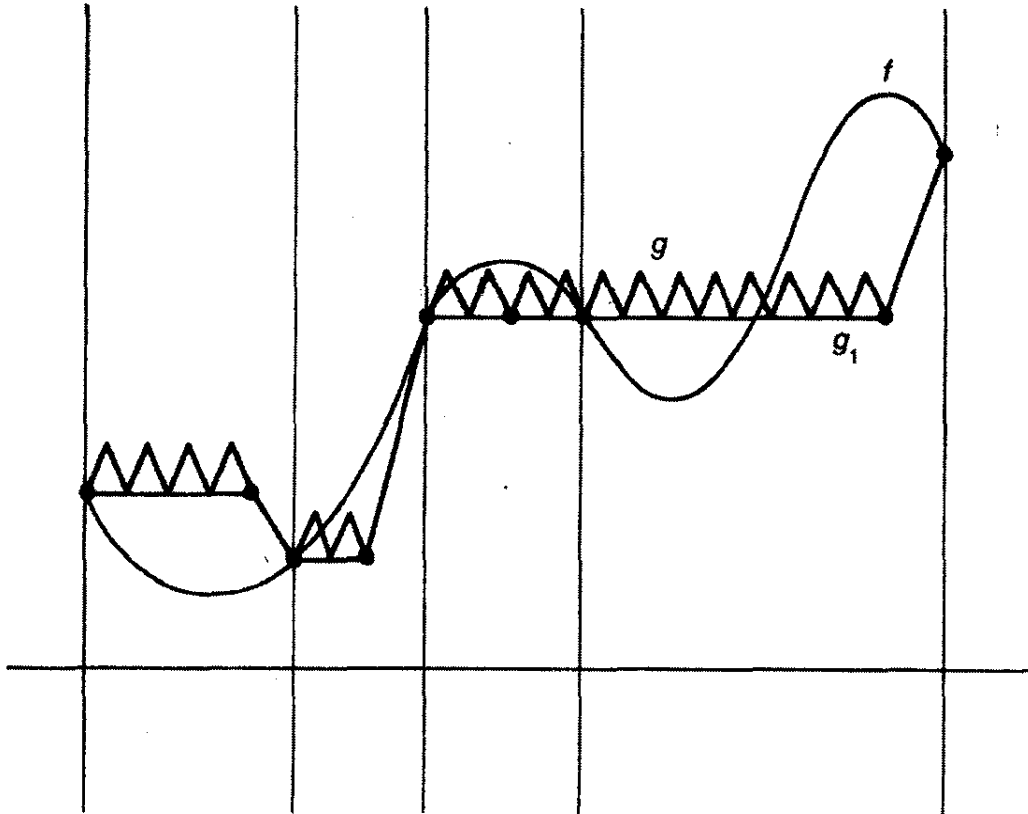
شكل ۱۱

بعلاوه، مدعی هستیم که  $\rho(g_1, f) < \epsilon/2$ : بر بازه  $I_1$ ، تغییرات هر يك از توابع  
 $f(x)$  و  $g_1(x)$  از  $f(t_{i-1})$  حداکثر  $\epsilon/4$  است؛ بنابراین، فاصله آنها از یکدیگر  $\epsilon/2$   
 است. در نتیجه،

$$\rho(g_1, f) = \max\{|g_1(x) - f(x)|\} < \frac{\epsilon}{2}.$$

تابع  $g_1$  هنوز تابع مطلوب ما نیست. اکنون به جای قطعه خط افقی در نمودار  $g_1$ ،

نموداری «دندانه‌دار»، که در فاصله  $\epsilon/2$  از نمودار  $g$  واقع است، قرار می‌دهیم به طوری که قدر مطلق شیب هر ضلع هر دندانه نا کمتر از  $\alpha$  باشد. ساختن این تابع را که کار ساده‌ای است به عهده خواننده می‌گذاریم. حاصل تابع خطی قطعه به قطعه مطلوب  $g$  خواهد بود. شکل ۱۲ را نگاه کنید



شکل ۱۲

(۳)  $\bigcap U_n$  عبارت است از توابع هیچ‌جا مشتق‌پذیر. فرض کنیم  $f \in \bigcap U_n$ . ثابت می‌کنیم که اگر  $x$  نقطه دلخواهی از  $[0, 1]$  باشد آنگاه حد

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta f(x, h)$$

موجود نیست: به ازای  $n$  مفروض، این امر که  $f$  به  $U_n$  تعلق دارد به این معنی است که می‌توان عددی مانند  $h_n$  با شرط  $0 < h_n < 1/n$  یافت به طوری که

$$\Delta f(x, h_n) > n$$

در این صورت، دنباله  $(h_n)$  به صفر همگراست، در حالی که دنباله  $(\Delta f(x, h_n))$  همگرا

نیست. در نتیجه  $f$  در  $x$  مشتق پذیر نیست.  $\square$

شاید این برهان، از این لحاظ که بسیار مجرد و غیرساختنی به نظر می آید، بی فایده جلوه کند. اما، باید توجه داشت که، در ضمن برهان روشی آمده است که به کمک آن می توان دنباله مشخصی از توابع خطی قطعه بدقطعه مانند  $f_n$  را ساخت که همگرای یکنواخت به تابع هیچ جا مشتق پذیر  $f$  باشد. و تعریف تابع  $f$  بدین طریق همان قدر ساختنی است که، مثلاً، تعریف معمولی تابع سینوسی به عنوان حد یک سری نامتناهی.

## تمرینها

۱. خواص مذکور در مثال ۱ برای توابع  $f, g$ ، و  $k$  را ثابت کنید.
۲. به ازای  $n$  و  $\varepsilon$  مفروض، تابع پیوسته‌ای مانند  $f: I \rightarrow R$  تعریف کنید به طوری که  $f \in U_n$  و به ازای هر  $x$ ،  $|f(x)| \leq \varepsilon$ .
۳. ساختن تابع  $g$ ، در برهان قضیه ۱.۸، را تکمیل کنید.

## ۹-۷ مقدمه‌ای بر نظریه ابعاد

در بخش ۴-۵ ثابت کردیم که اگر  $X$  یک بسلاي فشرده باشد آنگاه به ازای عدد صحیحی مانند  $N$  می توان  $X$  را در  $R^N$  نشانند. در این بخش، این قضیه را در مورد فضاهای متریک پذیر فشرده دلخواه تعمیم می دهیم، و همچنین تعیین می کنیم که بزرگی مقدار  $N$  چقدر باید باشد.

برای یک فضای توپولوژیک دلخواه  $X$  مفهومی از بعد توپولوژیک را تعریف می کنیم. این تعریف همسان «بعد پوششی» خواهد بود که ابتدا به وسیله لبگگ تعریف شده است. ثابت خواهیم کرد که بعد توپولوژیک هر زیرمجموعه فشرده  $R^m$  حداکثر  $m$  است. و نیز ثابت می کنیم که بعد توپولوژیک هر بسلاي  $m$  بعدی فشرده حداکثر  $m$  است. (در واقع، بعد آن دقیقاً برابر  $m$  است، اما این مطلب را ثابت نمی کنیم.)

قضیه اصلی این بخش این است که هر فضای فشرده متریک پذیر با بعد توپولوژیک  $m$  را می توان در  $R^N$ ، که در آن،  $N = 2m + 1$  نشانند. در حالت کلی، این مقدار  $N$  بهترین مقدار ممکن است. برهان آن کاربردی از قضیه بئر است. سپس، نتیجه می گیریم که هر بسلاي  $m$  بعدی فشرده را می توان در  $R^{2m+1}$  نشانند. همچنین، از آن نتیجه می شود که به ازای یک فضای متریک پذیر فشرده،  $N$  وجود دارد که آن فضا را می توان در  $R^N$  نشانند اگر و تنها اگر آن فضا دارای بعد توپولوژیک متناهی باشد.

بیشتر احکامی که ثابت خواهیم کرد بدون فرض فشرده‌گی فضای مورد بحث نیز برقرار هستند. لیکن هر جا که فشرده‌گی اثبات را راحت کند ما آن را به کار خواهیم برد. تعمیم‌هایی

برای حالت فضاهای نافرده در تمرینها آمده است.

تعریف. گوئیم گردایه  $\mathcal{A}$  از زیرمجموعه‌های فضای  $X$  دارای مرتبه  $m+1$  است هر گاه نقطه‌ای از  $X$  در  $m+1$  عضو  $\mathcal{A}$  واقع شود، و هیچ نقطه‌ای از  $X$  در بیشتر از  $m+1$  عضو  $\mathcal{A}$  واقع نباشد.

اینک مقصود از بعد توپولوژیک يك فضای  $X$  را تعریف می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که اگر  $\mathcal{A}$  گردایه مفروضی از زیرمجموعه‌های  $X$  باشد، می‌گوئیم گردایه‌ای مانند  $\mathcal{B}$  گردایه‌ی  $\mathcal{A}$  را ظریف می‌کند، یا نظریفی از  $\mathcal{A}$  است، در صورتی که هر عضو  $\mathcal{B}$  مانند  $B$  دست کم در يك عضو  $\mathcal{A}$  قرار گیرد.

تعریف. فضای  $X$  را با بعد متناهی خوانیم هر گاه عددی صحیح مانند  $m$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر پوشش باز  $X$  مانند  $\mathcal{A}$  پوششی باز برای  $X$  مانند  $\mathcal{B}$  موجود باشد که  $\mathcal{A}$  را ظریف کند و مرتبه آن حداکثر  $m+1$  باشد. بنا بر تعریف، بعد توپولوژیک  $X$  کوچکترین مقداری از  $m$  است که به ازای آن حکم بالا برقرار است.

در فضاهای ذیل، برخی از نکات اساسی پیرامون بعد توپولوژیک ارائه شده‌اند:

۱.۹. قضیه اگر  $X$  دارای بعد متناهی و  $Y$  زیرمجموعه بسته‌ای از آن باشد آنگاه  $Y$  نیز چنین است؛ و  $\dim Y \leq \dim X$ .

برهان. فرض کنیم  $\dim X = m$ ؛ و  $\mathcal{A}$  پوششی برای  $Y$  به وسیله مجموعه‌های باز  $Y$  باشد. به ازای هر عضو  $\mathcal{A}$  مانند  $A$ ، مجموعه باز  $A'$  را در  $X$  چنان برمی‌گزینیم که  $X \cdot A = A' \cap Y$  را با مجموعه‌های باز  $A'$  همراه با مجموعه باز  $X - Y$  می‌پوشانیم. فرض کنیم  $\mathcal{B}$  نظریفی از این پوشش باشد که يك پوشش باز  $X$  و مرتبه آن حداکثر  $m+1$  باشد. در این صورت، گردایه

$$\{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

پوششی برای  $Y$  به وسیله مجموعه باز  $Y$  است، مرتبه آن حداکثر  $m+1$  است، و  $\mathcal{A}$  را ظریف می‌کند.  $\square$

۲.۹. قضیه فرض کنیم  $X = Y \cup Z$  که  $Y$  و  $Z$  مجموعه‌های بسته‌ای در  $X$  هستند که دارای بعد توپولوژیک متناهی هستند. در این صورت،

$$\dim X = \max\{\dim Y, \dim Z\}.$$

برهان. فرض کنیم  $m = \max\{\dim Y, \dim Z\}$ . بنا بر قضیه قبل، می‌دانیم که اگر  $X$  با بعد متناهی باشد آنگاه  $m \leq \dim X$ ؛ پس تنها کافی است ثابت کنیم که  $\dim X$  موجود و حداکثر مساوی  $m$  است.

مرحله ۱. نخست، حکم ذیل را ثابت می‌کنیم: فرض کنیم  $Y$  يك زیرفضای بسته  $X$

باشد، و  $\dim Y \leq m$ . اگر  $\mathcal{A}$  پوشش بازی برای  $X$  باشد آنگاه پوشش بازی مانند  $\mathcal{C}$  از  $X$  وجود دارد که  $\mathcal{A}$  را ظریف می‌کند، به طوری که مرتبه گردایه

$$\{C \cap Y \mid C \in \mathcal{C}\}$$

حداکثر مساوی  $m+1$  است. [این گردایه را تحدید  $\mathcal{C}$  به  $Y$  خوانیم].  
برای اثبات این حکم، گردایه

$$\{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$$

را در نظر می‌گیریم. این گردایه یک پوشش باز  $Y$  است، پس نظریه‌ای مانند  $\mathcal{B}$  دارد که پوششی باز برای  $Y$  است و مرتبه آن حداکثر  $m+1$  است. به ازای عضو مفروضی از  $\mathcal{B}$  مانند  $B$ ، مجموعه باز  $U_B$  از  $X$  را طوری انتخاب می‌کنیم که  $U_B \cap Y = B$ . همچنین، عضو  $A_B$  از  $\mathcal{A}$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $B \subset A_B$ . فرض کنیم  $\mathcal{C}$  گردایه‌ای متشکل از همه مجموعه‌هایی به صورت  $U_B \cap A_B$  باشد، که  $B \in \mathcal{B}$ ، به علاوه همه مجموعه‌هایی به صورت  $A-Y$ ، که  $A \in \mathcal{A}$ . در این صورت،  $\mathcal{C}$  پوشش باز مطلوب برای  $X$  است.

مرحله ۲. حال فرض کنیم  $\mathcal{A}$  یک پوشش باز  $X$  باشد. همچنین، فرض کنیم  $\mathcal{B}$  پوشش بازی برای  $X$  باشد که  $\mathcal{A}$  را ظریف می‌کند و مرتبه تحدید آن به  $Y$  دارای مرتبه‌ای حداکثر مساوی  $m+1$  است. سپس،  $\mathcal{C}$  را پوشش بازی از  $X$  می‌گیریم که  $\mathcal{B}$  را ظریف می‌کند و مرتبه تحدید آن به  $Z$  حداکثر مساوی  $m+1$  است.

به قرار ذیل پوشش جدید  $\mathcal{D}$  را برای  $X$  تشکیل می‌دهیم: تابع  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  را به این صورت تعریف می‌کنیم که به ازای هر  $C$  از  $\mathcal{C}$  عضو  $f(C)$  از  $\mathcal{B}$  را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که  $C \subset f(C)$ . به ازای عضو مفروضی از  $\mathcal{B}$  مانند  $B$ ،  $D(B)$  اجتماع همه آن اعضای از  $\mathcal{C}$  مانند  $C$  تعریف می‌کنیم که به ازای آنها  $f(C) = B$ . (البته اگر  $B$  در تصویر  $f$  نباشد،  $D(B)$  تهی است.) فرض کنیم  $\mathcal{D}$  گردایه همه مجموعه‌های به صورت  $D(B)$  باشد، که  $B \in \mathcal{B}$ .

حال  $\mathcal{D}$  مجموعه  $\mathcal{B}$  را ظریف می‌کند. زیرا، به ازای هر  $B$ ،  $D(B) \subset B$ ؛ بنابراین،  $\mathcal{D}$  گردایه  $\mathcal{A}$  را ظریف می‌کند. همچنین،  $\mathcal{D}$  مجموعه  $X$  را می‌پوشاند، چون  $\mathcal{C}$  یک پوشش  $X$  است و به ازای هر  $C$  از  $\mathcal{C}$ ،  $C \subset D(f(C))$ . ثابت می‌کنیم مرتبه  $\mathcal{D}$  حداکثر مساوی  $m+1$  است؛ در نتیجه، اثبات قضیه تمام می‌شود.

فرض کنیم  $x \in D(B_1) \cap \dots \cap D(B_k)$ ، که در آن، مجموعه‌های  $D(B_i)$  متمایزند. می‌خواهیم ثابت کنیم که  $k \leq m+1$ . توجه کنید که مجموعه‌های  $B_1, \dots, B_k$  باید متمایز باشند. زیرا که مجموعه‌های  $D(B_i)$  چنین‌اند. چون  $x \in D(B_i)$ ، می‌توان، به ازای هر  $i$ ، مجموعه  $C_i$  از  $\mathcal{C}$  را طوری برگزید که  $x \in C_i$  و  $f(C_i) = B_i$ . مجموعه‌های  $C_i$  متمایزند. زیرا، مجموعه‌های  $B_i$  چنین‌اند. به علاوه،

$$x \in [C_1 \cap \dots \cap C_k] \subset [D(B_1) \cap \dots \cap D(B_k)] \subset [B_1 \cap \dots \cap B_k].$$

اگر  $x$  در  $Y$  واقع باشد آنگاه  $k \leq m+1$ . زیرا تحدید  $\mathcal{B}$  به  $Y$  دارای مرتبه‌ای حداکثر مساوی  $m+1$  است؛ و اگر  $x$  در  $Z$  باشد آنگاه  $k \leq m+1$ . زیرا تحدید  $\mathcal{B}$  به  $Z$  دارای مرتبه‌ای حداکثر مساوی  $m+1$  است.  $\square$

۳.۹. نتیجه فرض کنیم  $X = Y_1 \cup \dots \cup Y_k$ ، که در آن، هر  $Y_i$  در  $X$  بسته و با بعد متناهی است. در این صورت،

$$\dim X = \max \{ \dim Y_1, \dots, \dim Y_k \}.$$

روشن است که بعد  $X$  (در صورت وجود) یک ناوردای توپولوژیک است. در حالی که  $X$  فشرده یا متری باشد، تعریف را می‌توان چنان فرمولبندی کرد که متضمن متریک نیز باشد:

۴.۹. لم فرض کنیم  $X$  یک فضای متری فشرده باشد. در این صورت،  $\dim X \leq m$  اگر و تنها اگر به‌ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، یک پوشش باز متناهی از  $X$  مانند  $\mathcal{B}$  به وسیله مجموعه‌های با قطر کمتر از  $\varepsilon$  وجود داشته باشد به طوری که مرتبه  $\mathcal{B}$  حداکثر مساوی  $m+1$  باشد.

برهان. فرض کنیم  $\dim X \leq m$ . پوششی مانند  $\mathcal{A}$  از  $X$  به وسیله  $\varepsilon/3$ -گوییهای باز انتخاب می‌کنیم، و  $\mathcal{B}'$  را نظریفی از  $\mathcal{A}$  می‌گیریم که یک پوشش باز  $X$  باشد به طوری که مرتبه آن حداکثر مساوی  $m+1$  باشد. فرض کنیم  $\mathcal{B}$  یک زیرگردایه متناهی از  $\mathcal{B}'$  باشد که  $X$  را می‌پوشاند. در این صورت، مرتبه  $\mathcal{B}$  حداکثر  $m+1$  است، و قطر اعضای  $\mathcal{B}$  کمتر از  $\varepsilon$  است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم که  $\mathcal{A}$  پوشش باز دلخواهی از  $X$  باشد، و فرض کنیم  $\varepsilon > 0$  یک عدد لبگ برای  $\mathcal{A}$  باشد، و یک پوشش باز متناهی از  $X$  مانند  $\mathcal{B}$  انتخاب می‌کنیم به طوری که قطر هر عضو آن کمتر از  $\varepsilon$  باشد، و مرتبه آن حداکثر مساوی  $m+1$  باشد. در این صورت،  $\mathcal{B}$  نظریف مطلوب برای  $\mathcal{A}$  خواهد بود.  $\square$

مثال ۱. بازا  $[a, b]$  دارای بعد توپولوژیک ۱ است. به‌ازای عدم مثبت مفروض  $\varepsilon$ ، می‌توان افزایی مانند

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

انتخاب کرد به طوری که به‌ازای هر  $i$ ،  $t_i - t_{i-1} < \varepsilon/2$ . در این صورت، گردایه

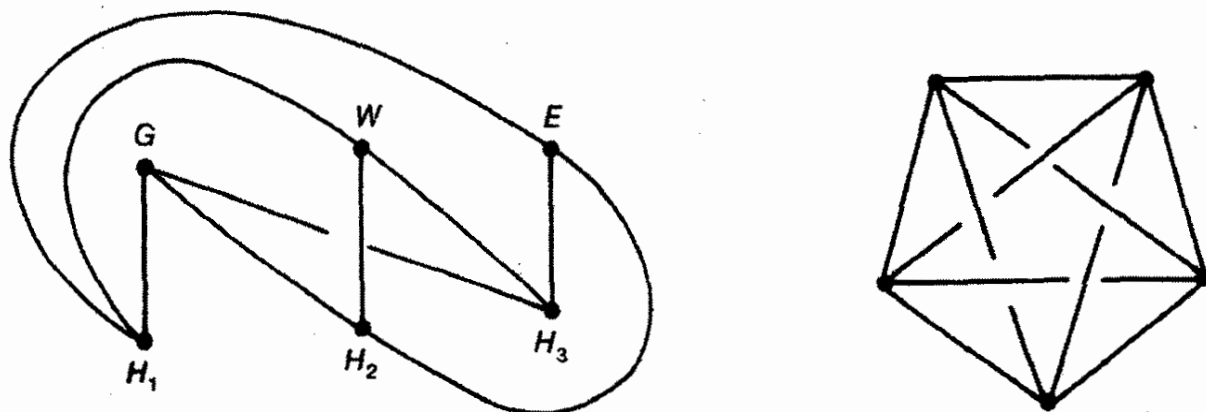
$$\mathcal{B} = \{ [a, t_1), (t_0, t_2), (t_1, t_3), (t_2, t_4), \dots, (t_{n-2}, t_n), (t_{n-1}, b] \}$$

پوشش بازی به وسیله مجموعه‌های با قطر کمتر از  $\varepsilon$  است، و مرتبه  $\mathcal{B}$  مساوی ۲ است. در نتیجه،

$$\dim [a, b] \leq 1.$$

از طرفی دیگر، به ازای  $b-a \leq \epsilon$ ، فرض کنیم که  $\mathcal{B}$  پوشش باز دلخواهی از  $[a, b]$  به وسیله مجموعه‌های با قطر کمتر از  $\epsilon$  باشد. مدعی هستیم که مرتبه  $\mathcal{B}$  حداقل مساوی ۲ است. فرض کنیم که مرتبه  $\mathcal{B}$  برابر با ۱ باشد؛ در این صورت، هیچ دو عضو  $\mathcal{B}$  مقطع مشترک نخواهند داشت. چون قطر اعضای  $\mathcal{B}$  کمتر از  $\epsilon$  است، گردایه  $\mathcal{B}$  باید بیش از یک عضو داشته باشد؛ فرض کنیم  $U$  یک عضو  $\mathcal{B}$  باشد، و  $V$  اجتماع بقیه اعضای  $\mathcal{B}$ . در این صورت،  $U$  و  $V$  تشکیل یک جدا سازی برای  $[a, b]$  می‌دهند و این با همبندی بازه  $[a, b]$  متناقض است.

**مثال ۲.** یک گراف خطی (متناهی)  $G$  فضایی است هم‌هومورف با اجتماع تعدادی متناهی از قطعه خطهایی که هر زوج از آنها یکدیگر را حداکثر در یک نقطه انتهایی مشترک قطع می‌کنند. نقاط انتهایی قطعه خطها را راسهای گراف خطی می‌گویند. دو مثال از گرافهای خطی در شکل ۱۳ ترسیم شده‌اند. اولی نموداری از مسأله معروف «توزیع گاز - آب - برق» است؛ دومی را «گراف تمام پنج رأسی» می‌خوانند. هیچ کدام از آنها را نمی‌توان در صفحه نشان داد. این مطلبی است که اثبات آن به هیچ وجه پیش‌پا افتاده نیست و مبتنی بر قضیه منحنی زوردان است. [به تمرینهای بخش ۸-۱۳ مراجعه کنید]. هر گراف خطی دارای بعد توپولوژیک ۱ است. البته فضاهاى بسیاری موجودند که گراف خطی نیستند، ولی، بعد آنها ۱ است. (به تمرین ۳ مراجعه کنید).



شکل ۱۳

**مثال ۳.** هر زیر مجموعه فشردۀ  $C$  از  $R^2$  دارای بعد توپولوژیک حداکثر مساوی ۲ است.

۱. مسأله «توزیع گاز-آب-برق» چنین است؛ می‌خواهیم از ایستگاههای گاز، آب، و برق (بترتیب  $G, W, E$ ) به هر یک از خانه‌های  $H_1, H_2, H_3$  و لوله‌هایی بکشیم که یکدیگر را قطع نکنند. م.



برای اثبات این حکم، پوشش باز معینی از  $R^2$ ، مانند  $A_2$ ، می‌سازیم که مرتبه ۳ داشته باشد. کار را با تعریف  $A_2$  شروع می‌کنیم که عبارت است از گردایه همه مربعهای واحد باز در  $R^2$  به صورت

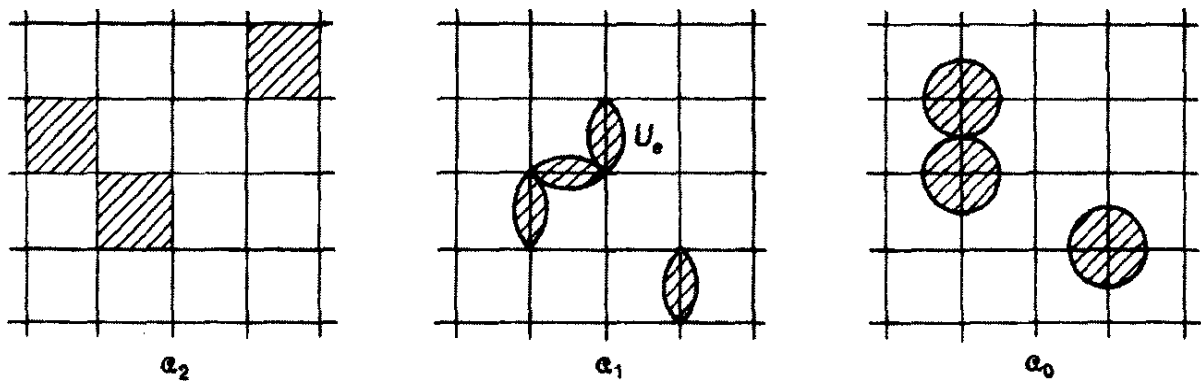
$$A_2 = \{(n, n+1) \times (m, m+1) \mid n, m \text{ اعداد صحیح هستند}\}.$$

توجه کنید که اعضای  $A_2$  از هم جدا هستند. در این صورت، گردایه‌ای مانند  $A_1$  از مجموعه‌های باز می‌سازیم. بدین منظور، هر ضلع  $e$  (باز) از یکی از مربعهای  $A_2$  را اختیار می‌کنیم

$$e = (n, n+1) \times \{m\} \quad \text{یا} \quad e = \{n\} \times (m, m+1)$$

و کمی آن را بسط می‌دهیم تا مجموعه‌ی بازی مانند  $U_e$  از  $R^2$  به دست آید، با این ملاحظه که اگر  $e \neq e'$ ، مجموعه‌های  $U_e$  و  $U_{e'}$  از هم جدا باشند.

همچنین، هر  $U_e$  را چنان انتخاب می‌کنیم که قطر آن حداکثر مساوی ۲ باشد. سرانجام،  $A_0$  را گردایه همه گویه‌های باز به شعاع  $1/2$  حول نقاط  $n \times m$  تعریف می‌کنیم. شکل ۱۴ را نگاه کنید.



شکل ۱۴

گردایه  $A = A_2 \cup A_1 \cup A_0$  از مجموعه‌های باز،  $R^2$  را می‌پوشاند. قطر هر عضو آن حداکثر مساوی ۲ است. و مرتبه آن ۳ است، زیرا هیچ نقطه‌ای از  $R^2$  نمی‌تواند در بیش از یک مجموعه از هر  $A_i$  قرار گیرد.

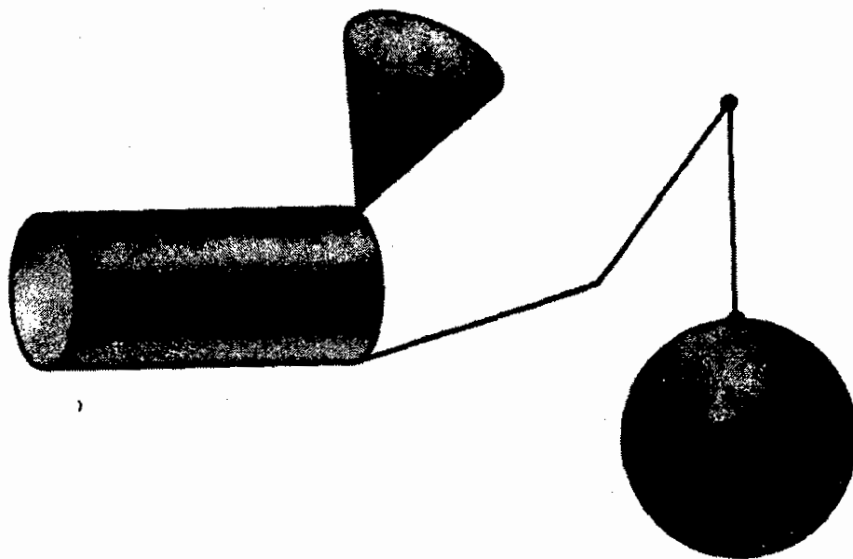
اکنون ثابت می‌کنیم که هر مجموعه فشرده  $C$  در  $R^2$  دارای بعد توپولوژیک حداکثر مساوی ۲ است. به ازای  $\epsilon > 0$  مفروض، هومومورفیسم  $f: R^2 \rightarrow R^2$  را با ضابطه  $f(x) = (\epsilon/3)x$  در نظر می‌گیریم. تصویرهای مجموعه‌های باز گردایه  $A$  را تحت  $f$  در نظر می‌گیریم. گردایه حاصل پوشش بازی برای  $R^2$  است که قطر مجموعه‌های آن کمتر از  $\epsilon$  است. تعدادی متناهی از آنها که  $C$  را می‌پوشاند در نظر می‌گیریم؛ و این پوشش باز مطلوب برای  $C$  خواهد بود.

البته، چنین نیست که هر زیرمجموعه فشرده  $R^2$ ، دقیقاً دارای بعد ۲ باشد. مثلاً، بعد

يك مجموعه تك عضوی برابر ۵ است، و بعد يك بازه بسته بر محور  $X$ ها يك است. در واقع، باید دانست که اثبات اینکه بعضی از زیر مجموعه‌های  $R^2$  دارای بعد توپولوژیک ۲ هستند به طرز شگفت‌انگیزی دشوار است؛ برای این کار تکنیکهای توپولوژی جبری لازم است. به مثال ۶ زیرین مراجعه کنید.

**مثال ۴.** بعد توپولوژیک هر بسلاي ۲ بعدی فشرده  $X$  حداکثر مساوی ۲ است. زیرا،  $X$  را می‌توان به صورت اجتماع متناهی از زیر فضاهاى هومئومورف با گوی واحد بسته در  $R^2$  نوشت. بنابراین، نتیجه ۳.۹ در مورد  $X$  صدق می‌کند. کره ۲ بعدی، چنبره، و بطری کلاین<sup>۱</sup> مثالهای نوعی بسلاي ۲ بعدی هستند. به شکل ۲۷ در بخش ۸-۱۵، مراجعه کنید.

**مثال ۵.** مقصود از همبافت ۲ بعدی سادگی متناهی (مختصراً موسوم به همبافت ۲ بعدی) فضایی است مانند  $X$  که هومئومورف با اجتماع تعدادی متناهی از مثلثهای بسته و قطعه خطهاست به طوری که هر زوج از آنها یکدیگر را حداکثر در یک رأس مشترک یا (در مورد مثلثها) در یک ضلع مشترک قطع می‌کنند. بنابراین نتیجه ۳.۹، بعد توپولوژیک هر همبافت ۲ بعدی حداکثر مساوی ۲ است. در شکل ۱۵، همبافتی ۲ بعدی تصویر شده است که بسلا نیست.



شکل ۱۵

به بیان درست يك همبافت ۲ بعدی باید دست کم حاوی يك مثلث باشد؛ وگرنه، يك گراف خطی خواهد بود.

**مثال ۶.** با دانسته گرفتن قضیه‌ای که در فصل بعد (در بخش ۸-۸) ثابت خواهیم کرد، اکنون ثابت می‌کنیم هر ناحیه مثلثی بسته  $T$  در  $R^2$  دارای بعد توپولوژیک ۲ است. از

اينجا نتيجه مى شود كه هر بسلاى ۲ بعدى فشرده، و هر همبافت ۲ بعدى، داراى بعد توپولوژيك ۲ است:

قضيه مورد نظر اين است:

فرض كنيم  $Bd T$  نمايش اجتماع اضلاع ناحيه مثلثى بسته  $T$  باشد. در اين صورت، هيچ نگاشت پيوسته اى مانند  $f: T \rightarrow Bd T$  وجود ندارد كه هر ضلع  $T$  را بتوى خودش ببرد.

مى دانيم كه بعد  $T$  حداكثر ۲ است. براى اثبات اينكه بعد  $T$  حداقل ۲ است،  $\epsilon$  مثبتى مى يابيم به طورى كه مرتبه هر پوشش باز  $T$ ، به وسيله مجموعه هاى با قطر کمتر از  $\epsilon$ ، حداقل ۳ باشد.  $\epsilon > 0$  را آن قدر كوچك اختيار مى كنيم كه هر زير مجموعه  $R^2$  كه هر سه ضلع  $T$  را قطع كند قطرش حداقل  $\epsilon$  باشد. فرض كنيم

$$A = \{U_1, \dots, U_n\}$$

يك پوشش باز  $T$  به وسيله مجموعه هاى با قطر کمتر از  $\epsilon$  باشد. همچنين فرض كنيم مرتبه  $A$  کمتر از ۳ باشد. به ازاي هر  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) راسى از  $T$  مانند  $v_i$  به قرار ذيل انتخاب مى كنيم: اگر  $U_i$  دو ضلع  $T$  را قطع كرد،  $v_i$  را راس مشترك بين اين دو ضلع مى گيريم. اگر  $U_i$  تنها يك ضلع  $T$  را قطع كرد،  $v_i$  را يكي از راسهاى اين ضلع قرار مى دهيم. اگر  $U_i$  هيچ ضلع  $T$  را قطع نكرد،  $v_i$  را راس دلخواه اى از  $T$  مى گيريم.

حال فرض كنيم  $\{\phi_i\}$  يك افزاز واحد مغلوب به وسيله  $\{U_1, \dots, U_n\}$  باشد. (به بخش ۴-۵ مراجعه كنيد.) تابع  $g: T \rightarrow R^2$  را با ضابطه

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) v_i$$

تعريف مى كنيم. در اين صورت،  $g$  پيوسته است. اما، هر نقطه  $T$  حداكثر در دو عضو  $A$  قرار دارد. بنابراین، به ازاي هر  $x$  از  $T$ ، حداكثر دو تابع از ميان توابع  $\phi_i(x)$  ناصفر هستند. پس

$$g(x) = v_i$$

در صورتى كه  $x$  تنها در يك مجموعه اى باز  $U_i$  واقع باشد؛ و اگر  $x$  در دو مجموعه باز  $U_i$  و  $U_j$  واقع باشد آنگاه عددى مانند  $t$  در  $[0, 1]$  هست كه

$$g(x) = t v_i + (1-t) v_j$$

[در اينجا از اين مطلب كه  $\sum \phi_i(x) = 1$  استفاده مى كنيم.] بدین ترتيب،  $g$  همه  $T$  را بر اجتماع اضلاع  $T$  مى نگارد.

علاوه بر اين، مدعى هستيم كه  $g$  هر ضلع  $T$  را بتوى خودش مى نگارد. فرض كنيم  $x$  متعلق به ضلع  $vw$  از  $T$  باشد. در اين صورت، هر مجموعه باز  $U_i$  كه شامل  $x$  باشد الزاماً

این ضلع را قطع می‌کند. در نتیجه، رأس  $v_i$  باید  $v$  یا  $w$  باشد. به همین‌سان، اگر  $x \in U$  آنگاه  $v_i$  مساوی است با  $v$  یا  $w$ . در این صورت، تساویهای بالا ثابت می‌کنند که  $g(x)$  به  $v$  و  $w$  تعلق دارد.

وجود نکاشت  $g$  خلاف قضیه مذکور در بالاست.

اینک قضیه نشانیدن را که قبلاً ذکر کردیم ثابت می‌کنیم، این قضیه بدین مضمون است که هر فضای فشرده متریک پذیر با بعد توپولوژیک  $m$  را می‌توان در  $R^{2m+1}$  نشانید. این قضیه یکی دیگر از قضایای «عمیق» است؛ مثلاً، به هیچ وجه واضح نیست، که چرا باید بعد  $2m+1$  حلال مسئله باشد. پیش از اینکه قضیه را ثابت کنیم چند حالت خاص آن را مورد بحث قرار می‌دهیم؛ این بحث روشن می‌کند که چرا باید بعد  $2m+1$  را در نظر گرفت. نخست، ساده‌ترین حالت ممکن، یعنی گراف خطی  $G$ ، را در نظر می‌گیریم. در این حالت، قضیه نشانیدن می‌گوید هر گراف خطی متناهی را می‌توان در  $R^2$  نشانید. اقامه برهانی برای این حالت خاص دشوار نیست. ولی ترجیح می‌دهیم برهانی بیاوریم که به بعدهای بالاتر نیز تعمیم یابد، برهانی که متضمن مفهوم وضع عمومی باشد.

مجموعه  $A$  از نقاط  $R^2$  را در وضع عمومی در  $R^2$  خوانیم هرگاه هیچ دو نقطه آن برابر نباشند، هیچ سه نقطه آن همخط نباشند، و هیچ چهار نقطه آن همصفحه نباشند. یافتن مجموعه‌های نقاطی که در  $R^2$  در وضع عمومی باشند آسان است. مثلاً، می‌توان ثابت کرد که مجموعه متشکل از همه نقاط منحنی

$$\{(t, t^2, t^3) \mid t \in R\}$$

در  $R^2$  در وضع عمومی است.

حال، به ازای گراف خطی متناهی مفروض  $G$  با رأسهای  $v_1, \dots, v_n$  مجموعه  $\{z_1, \dots, z_n\}$  از نقاط  $R^2$  را که در  $R^2$  در وضع عمومی است انتخاب می‌کنیم. سپس، نگاشت پیوسته  $f: G \rightarrow R^2$  را چنین تعریف می‌کنیم:  $f$  رأس  $v_i$  را به  $z_i$  می‌نگارد، و نقطه  $(1-t)v_i + tv_j$  از قطعه خط واصل بین  $v_i$  و  $v_j$  در  $G$  (در صورت وجود) را به نقطه  $(1-t)z_i + tz_j$  از قطعه خط واصل بین  $z_i$  و  $z_j$  در  $R^2$  می‌نگارد. واضح است که  $f$  پیوسته است. همچنین،  $f$  یک به یک است: فرض کنیم  $e = v_i v_j$  و  $e' = v_k v_l$  دو قطعه خط از  $G$  باشند. اگر  $e$  و  $e'$  هیچ رأس مشترک نداشته باشند آنگاه  $f(e)$  و  $f(e')$  از هم جدا خواهند بود، زیرا، اگر چنین نباشند، نقاط  $z_i, z_j, z_k, z_l$  همصفحه خواهند شد. و اگر  $e$  و  $e'$  دارای رأس مشترکی باشند، مثلاً اگر  $i = k$ ، آنگاه  $f(e)$  و  $f(e')$  تنها در نقطه  $z_i$  می‌توانند یکدیگر را قطع کنند؛ چه در غیر این صورت،  $z_i, z_j$  و  $z_i, z_l$  همخط خواهند شد.

حال ساده‌ترین حالت دیگر، یعنی، همبافت  $2$  بعدی را در نظر می‌گیریم. برای تعمیم برهان پیش، نخست باید کمی از هندسه تحلیلی  $R^N$  بگوییم. مسا به هر حال بعداً، به هنگام اثبات قضیه کلی نشانیدن، بدین مطالب نیاز خواهیم داشت.

هندسه تحلیلی در  $R^N$  واقعاً چیزی نیست جز جبر خطی فضاهاى بردارى که به زبانی اندک متفاوت بر گردانده شده است. نخست، تعريف ذیل را می آوریم:

تعريف. مجموعه  $\{x_0, \dots, x_k\}$  از نقاط  $R^N$  را مستقل هندسی خوانیم در صورتی که

$$\sum_{i=0}^k a_i x_i = 0 \text{ و } \sum_{i=0}^k a_i = 0 \text{ آنگاه به ازای هر } i, a_i = 0.$$

واضح است که هر مجموعه ای که تنها يك نقطه داشته باشد مستقل هندسی است. استقلال هندسی درحالی که  $k > 0$  چه معنایی دارد؟ با چند عمل ساده جبری می توان ثابت کرد که مجموعه نقاط  $\{x_0, \dots, x_k\}$  مستقل هندسی است اگر و تنها اگر مجموعه بردارهای

$$\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_k - x_0\}$$

به معنای معمولی در جبر خطی مستقل خطی باشد. این مطلب به ما کمک می کند تا تصویری از موضوع به دست آوریم: هر دو نقطه متمایز تشکیل يك مجموعه مستقل هندسی می دهند. سه نقطه در صورتی تشکیل يك مجموعه مستقل هندسی می دهند که همخط نباشند. چهار نقطه در  $R^3$  در صورتی تشکیل يك مجموعه مستقل هندسی می دهند که همصفحه نباشند، و الی آخر. از این توضیحات معلوم می شود که نقاط

$$0 = (0, 0, \dots, 0),$$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

...

$$e_N = (0, 0, \dots, 1),$$

در  $R^N$  مستقل هندسی هستند. همچنین معلوم می شود که  $R^N$  بیش از  $N+1$  نقطه مستقل هندسی ندارد.

تعريف. فرض کنیم که  $\{x_0, \dots, x_k\}$  مجموعه ای از نقاط  $R^N$  باشد که مستقل هندسی است. صفحه  $P$  معین شده به وسیله این نقاط چنین تعريف می شود: مجموعه همه نقاطی از  $R^N$  مانند  $x$  که

$$x = \sum_{i=0}^k t_i x_i \text{ که در آن } \sum_{i=0}^k t_i = 1$$

به وسیله محاسبات ساده جبری ثابت می شود که اسکالرهایی مانند  $a_1, \dots, a_k$  وجود دارند که می توان  $P$  را به صورت مجموعه نقاطی مانند  $x$  به صورت

$$(*) \quad x = x_0 + \sum_{i=1}^k a_i (x_i - x_0)$$

بیان کرد. بنابراین،  $P$  را نه تنها می توان به عنوان «صفحه معین شده به وسیله نقاط

$x_0, \dots, x_k$  بیان کرد، بلکه می‌توان آن‌را به‌عنوان «صفحه گذرنده بر نقطه  $x_0$  و موازی با بردارهای  $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$ » نیز توصیف کرد.

حال هم‌ثومورفیسیم  $T: R^N \rightarrow R^N$  را با ضابطه  $T(x) = x - x_0$  در نظر می‌گیریم. این هم‌ثومورفیسیم را یک انتقال  $R^N$  می‌نامیم. عبارت (\*) ثابت می‌کند که این نگاشت صفحه  $P$  را بروی زیرفضای برداری  $V^k$  از  $R^N$ ، که بردارهای  $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$  یک پایه آن هستند، می‌نگارد. بدین دلیل، اغلب  $P$  را یک صفحه  $k$  بعدی در  $R^N$  می‌خوانیم. از اینجا، بلافاصله دو مطلب نتیجه می‌شود: نخست، اینکه اگر  $k < N$ ، صفحه  $k$  بعدی  $P$  الزاماً در  $R^N$  درون تهی دارد (چه  $V^k$  چنین است). دوم، اینکه اگر  $y$  نقطه دلخواهی از  $R^N$  باشد که در  $P$  نباشد آنگاه مجموعه

$$\{x_0, \dots, x_k, y\}$$

مستقل هندسی است. زیرا، اگر  $y \notin P$  آنگاه  $T(y) = y - x_0$  در  $V^k$  نخواهد بود. و بنابراین قضیه‌ای استاندارد از جبر خطی، بردارهای  $\{x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0, y - x_0\}$  مستقل خطی هستند، و از اینجا حکم مطلوب ما حاصل می‌شود.

تعریف. مجموعه  $A$  از نقاط  $R^N$  را در وضع عمومی در  $R^N$  خوانیم هرگاه هر زیرمجموعه  $A$  که شامل  $N+1$  نقطه یا کمتر باشد مستقل هندسی باشد. در حالت  $R^3$ ، می‌توان تحقیق کرد که این تعریف با آنچه قبلاً گفته شد یکی است.

۵.۹. لم به ازای مجموعه متناهی مفروض  $\{x_1, \dots, x_p\}$  از نقاط  $R^N$  و عدد مثبت مفروض  $\delta$ ، مجموعه‌ای در وضع عمومی در  $R^N$  مانند  $\{y_1, \dots, y_p\}$  هست به طوری که به ازای همه مقادیر  $i$ ،  $|x_i - y_i| < \delta$ .

پرهان. اثبات به استقراس است.  $y_1$  را مساوی  $x_1$  می‌گیریم. فرض کنیم  $y_1, \dots, y_p$  نقاط مفروضی در وضع عمومی در  $R^N$  باشند. مجموعه همه صفحه‌های  $R^N$ ، که به وسیله زیرمجموعه‌های  $\{y_1, \dots, y_p\}$  مشخص می‌شوند و شامل  $N$  عضو یا کمتر دارند، در نظر می‌گیریم. هر زیرمجموعه‌ای از این نوع مستقل هندسی است، یک صفحه  $k$  بعدی را در  $R^N$  معین می‌کنیم، به طوری که  $k \leq N-1$ . هر یک از این صفحه‌ها در  $R^N$  دارای درون تهی است. از آنجا که تعداد آنها متناهی است، اجتماع آنها نیز در  $R^N$  دارای درون تهی است. (توجه داشته باشید که  $R^N$  یک فضای بثر است.)  $y_{p+1}$  را نقطه‌ای از  $R^N$  انتخاب می‌کنیم که در فاصله  $\delta$  از  $x_{p+1}$  باشد و در هیچ یک از این صفحه‌ها نیز واقع نباشد. بلافاصله نتیجه می‌شود که مجموعه

$$C = \{y_1, \dots, y_p, y_{p+1}\}$$

در وضع عمومی در  $R^N$  است. زیرا فرض کنیم  $D$  زیرمجموعه دلخواهی از  $C$  باشد که شامل  $N+1$  عضو یا کمتر است. در این صورت، اگر  $D$  شامل  $y_{p+1}$  نباشد، بنا بر فرض

استقرار  $D$  مستقل هندسی است. و اگر  $D$  شامل  $y_{p+1}$  باشد آنگاه  $D - \{y_{p+1}\}$  شامل  $N$  نقطه یا کمتر است و بنابر ساختمان برهان،  $y_{p+1}$  در صفحه معین شده به وسیله این نقاط واقع نیست. بدین ترتیب، چنانکه در بالا ملاحظه شد،  $D$  مستقل هندسی است.  $\square$

اینک می‌توانیم چگونگی نشانیدن هر همبافت  $\gamma$  بعدی مانند  $X$  را در  $R^5$  ثابت کنیم. فرض کنیم  $X$  همبافتی  $\gamma$  بعدی با رأسهای  $v_1, \dots, v_n$  باشد و مجموعه نقاط  $z_1, \dots, z_n$  را، که در  $R^5$  در وضع عمومی هستند، انتخاب می‌کنیم. تابع پیوسته  $f: X \rightarrow R^5$  را به قرار ذیل تعریف می‌کنیم: نقطه عمومی متعلق به مثلث با رأسهای  $v_i, v_j, v_k$  را می‌توان به صورت

$$sv_i + tv_j + (1-s-t)v_k$$

نوشت که  $s, t, 1-s-t$  همه نامنفی هستند. (اثبات این حکم را به عهده خواننده می‌گذاریم.) فرض کنیم  $f$  نگاشتی باشد که این نقطه را به نقطه  $sz_i + tz_j + (1-s-t)z_k$  در مثلثی از  $R^5$  با رأسهای  $z_i, z_j, z_k$  بنگارد. اگر  $v_i, v_j$  قطعه خطی باشد که ضلع مثلثی نباشد، مانند سابق فرض می‌کنیم  $f$  آن را بروی قطعه خط  $z_i z_j$  بنگارد.

چون نقاط  $z_i$  در وضع عمومی هستند، نگاشت  $f$  یک به یک است. چندین حالت باید بررسی شود. مثلاً، اگر  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$  بترتیب، رأسهای دو مثلث جدا از هم  $\sigma$  و  $\sigma'$  از  $X$  باشند آنگاه  $f(\sigma)$  و  $f(\sigma')$  نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند، چه در آن صورت نتیجه می‌شود که نقاط  $z_i$ ، به ازای  $i$  که  $i = 1, \dots, 6$ ، مستقل نیستند. [اگر  $x_0$  نقطه‌ای متعلق به مقطع می‌بود آنگاه

$$\sum_{i=1}^3 s_i z_i = x_0 = \sum_{i=4}^6 t_i z_i$$

که در آن،  $\sum s_i = \sum t_i = 1$  یا

$$\sum_{i=1}^3 s_i z_i + \sum_{i=4}^6 (-t_i) z_i = 0$$

که در آن مجموع ضرایب صفر است. [در بقیه حالات به همین ترتیب استدلال می‌کنیم. با در نظر گرفتن حالات خاص فوق به عنوان زمینه‌ای برای پرداختن به حالت کلی، قضیه نشانیدن کلی ذیل را ثابت می‌کنیم.

۶.۹. قضیه (قضیه نشانیدن) هر فضای متریک پذیر فشرده  $X$  با بعد توپولوژیک  $m$  را می‌توان در  $R^{2m+1}$  نشانید.

برهان. فرض کنیم  $N = 2m + 1$ . متریک مربعی بر  $R^N$  را با ضابطه

$$|x - y| = \max \{ |x_i - y_i| ; i = 1, \dots, N \}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، می‌توانیم  $\rho$  را برای نمایش متریک سوپرمومی نظیر

آن بر فضای  $@(X, R^N)$  به کار ببریم؛

$$\rho(f, g) = \max \{ |f(x) - g(x)| ; x \in X \}.$$

فضای  $@(X, R^N)$  در متریک  $\rho$  تمام است، زیرا  $R^N$  در متریک مربعی تمام است. متریک  $d$  را برای فضای  $X$  اختیار می‌کنیم؛ چون  $X$  فشرده است،  $d$  کراندار است. به‌ازای نگاشت پیوسته مفروض  $f: X \rightarrow R^N$  عدد  $\Delta(f)$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\Delta(f) = \text{lub} [\text{diam } f^{-1}(\{z\}) | z \in R^N].$$

عدد  $\Delta(f)$  اندازه «انحراف»  $f$  از يك به يك بودن را نشان می‌دهد؛ اگر  $\Delta(f) = 0$ ، هر مجموعه  $f^{-1}(\{z\})$  حداکثر از يك نقطه تشکیل شده است، در نتیجه،  $f$  يك به يك است. حال، به‌ازای  $\varepsilon > 0$ ، مجموعه  $U_\varepsilon$  را مجموعه همه نگاشتهای پیوسته  $f: X \rightarrow R^N$  تعریف می‌کنیم به طوری که به‌ازای  $\Delta(f) < \varepsilon$ ؛ این مجموعه از همه توابعی تشکیل شده است که میزان «انحراف» آنها از يك به يك بودن از  $\varepsilon$  کمتر است. ثابت می‌کنیم که  $U_\varepsilon$  در  $@(X, R^N)$  هم باز است و هم چگال. از آنجا نتیجه می‌شود که مجموعه

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} U_{1/n}$$

در  $@(X, R^N)$  چگال است و بویژه ناتهی است.

اگر  $f$  عضوی از این مقطع باشد آنگاه به‌ازای هر  $n$ ،  $\Delta(f) < 1/n$ . در نتیجه،  $\Delta(f) = 0$  و  $f$  يك به يك است. اما چون  $X$  فشرده است،  $f$  يك نشاننده است. بدین ترتیب، قضیه نشان دادن ثابت می‌شود.

(۱)  $U_\varepsilon$  در  $@(X, R^N)$  باز است. به‌ازای عضو مفروضی از  $U_\varepsilon$  مانند  $f$ ، می‌خواهیم يك گوی مانند  $B_\rho(f, \delta)$  حول  $f$  بیابیم که زیر مجموعه  $U_\varepsilon$  باشد. نخست، عددی مانند  $b$  انتخاب می‌کنیم که  $\varepsilon > b > \Delta(f)$ . توجه کنید که اگر  $f(x) = f(y) = z$  آنگاه  $x$  و  $y$  متعلق اند به مجموعه  $f^{-1}(\{z\})$ ، در نتیجه،  $d(x, y)$  باید کوچکتر از  $b$  باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که اگر فرض کنیم  $A$  زیر مجموعه‌ای از  $X \times X$  باشد که به صورت ذیل تعریف شده است

$$A = \{x \times y | d(x, y) \geq b\},$$

آنگاه تابع  $|f(x) - f(y)|$  بر  $A$  مثبت است. اما،  $A$  در  $X \times X$  بسته و در نتیجه فشرده است؛ بنابراین، تابع  $|f(x) - f(y)|$  بر  $A$  دارای يك مینیموم مثبت است، فرض کنیم

$$\delta = \frac{1}{2} \min \{ |f(x) - f(y)| ; x \times y \in A \}.$$



مدعی هستیم که این مقدار  $\delta$  برای اثبات حکم مورد نظر کافی است.  
فرض کنیم  $g$  نگاشتی باشد به طوری که  $\rho(f, g) < \delta$ . اگر  $x \times y \in A$  آنگاه:  
بنابر تعریف،  $|f(x) - f(y)| \geq 2\delta$ ؛ چون  $g(x)$  و  $g(y)$ ، بترتیب، از  $f(x)$  و  $f(y)$   
در فاصله  $\delta$  قرار دارند، باید  $|g(x) - g(y)| > 0$ . بنابراین، تابع  $|g(x) - g(y)|$   
بر  $A$  مثبت است. در نتیجه اگر  $x$  و  $y$  دو نقطه باشند به طوری که  $g(x) = g(y)$  آنگاه  
الزاماً  $d(x, y) < b$ . از اینجا نتیجه می‌گیریم که  $\varepsilon < b \leq \Delta g$ ، و این همان است که  
می‌خواستیم.

(۲)  $U_\varepsilon$  در  $\mathcal{C}(X, R^N)$  چگال است. بخش دشوار برهان همین است. لازم است  
هندسه تحلیلی  $R^N$  را که در بالا مورد بحث قرار دادیم به کار ببریم. فرض کنیم  
 $f \in \mathcal{C}(X, R^N)$ . به ازای  $\varepsilon > 0$  و  $\delta > 0$ ، می‌خواهیم تابعی مانند  $g$  از  $\mathcal{C}(X, R^N)$   
بیابیم به طوری که  $g \in U_\varepsilon$  و  $\rho(f, g) < \delta$ .  
 $X$  را با تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز مانند  $\{U_1, \dots, U_n\}$  می‌پوشانیم  
به طوری که

$$(1) \text{ در } X, \text{ diam } U_i < \varepsilon/2,$$

$$(2) \text{ در } R^N, \text{ diam } f(U_i) < \delta/2,$$

$$(3) \text{ مرتبه } \{U_1, \dots, U_n\} \text{ نایبتر از } m+1 \text{ باشد.}$$

(در اینجا بحث به عدد لیبگ کشیده می‌شود.) فرض کنیم  $\{\phi_i\}$  افراز واحد مغلوب به وسیله  
 $\{U_i\}$  باشد (به بخش ۴-۵ مراجعه کنید). به ازای هر  $i$ ، نقطه‌ای مانند  $x_i$  در  $U_i$  انتخاب  
می‌کنیم. سپس، به ازای هر  $i$ ، نقطه  $z_i$  از  $R^N$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $z_i$  در فاصله  
 $\delta/2$  از نقطه  $f(x_i)$  واقع شود به طوری که مجموعه

$$\{z_1, \dots, z_n\}$$

در  $R^N$  در وضع عمومی باشد. سرانجام،  $g: X \rightarrow R^N$  را با ضابطه

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) z_i$$

تعریف می‌کنیم. مدعی هستیم که  $g$  تابع مطلوب است.

نخست، ثابت می‌کنیم که  $\rho(f, g) < \delta$ . توجه کنید که

$$g(x) - f(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) z_i - \sum_{i=1}^n \phi_i(x) f(x);$$

در اینجا از این امر که  $\sum \phi_i(x) = 1$  استفاده می‌کنیم. در این صورت،

$$g(x) - f(x) = \sum \phi_i(x) (z_i - f(x_i)) + \sum \phi_i(x) (f(x_i) - f(x)).$$

حال، به ازای هر  $i$ ، بنابر انتخاب نقاط  $z_i$ ،  $|z_i - f(x_i)| < \delta/2$ . اگر  $i$  اندیس باشد

که به ازای آن  $\phi_i(x) \neq 0$  آنگاه  $x \in U_i$ ؛ چون  $\text{diam } f(U_i) < \delta/2$ ، نتیجه می‌شود که  $|f(x_i) - f(x)| < \delta/2$ . از آنجا که  $\sum \phi_i(x) = 1$ ، نتیجه می‌گیریم که  $|g(x) - f(x)| < \delta$ . بنابراین،  $\rho(g, f) < \delta$ ، و این همان است که می‌خواستیم. دوم، ثابت می‌کنیم که  $g \in U_\varepsilon$ . ثابت خواهیم کرد که اگر  $x$  و  $y$  در  $X$  باشند و  $g(x) = g(y)$  آنگاه  $x$  و  $y$  به یکی از مجموعه‌های باز  $U_i$  تعلق دارند، و در نتیجه الزاماً  $d(x, y) < \varepsilon/2$  (زیرا  $\text{diam } U_i < \varepsilon/2$ ). در نتیجه،  $\Delta(g) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$  و این همان است که می‌خواستیم.

پس فرض کنیم  $g(x) = g(y)$ . در این صورت،

$$\sum_{i=1}^n [\phi_i(x) - \phi_i(y)] z_i = 0.$$

چون مرتبه پوشش  $\{U_i\}$  حداکثر مساوی  $n+1$  است، پس حداکثر  $m+1$  تا از اعداد  $\phi_i(x)$  ناصفرند، و حداکثر  $m+1$  تا از اعداد  $\phi_i(y)$  ناصفرند. بنابراین، مجموع  $\sum [\phi_i(x) - \phi_i(y)] z_i$  حداکثر  $2m+2$  جمله ناصفر دارد. ملاحظه کنید که مجموع ضرایب صفر است. زیرا،

$$\sum [\phi_i(x) - \phi_i(y)] = 1 - 1 = 0.$$

نقاط  $z_i$  در  $R^N$  در وضع عمومی هستند، در نتیجه هر زیرمجموعه آنها که  $N+1$  یا کمتر عضو داشته باشد مستقل هندسی است. و بنا بر فرض،  $2m+2 = N+1$ . بنا بر این، نتیجه می‌گیریم که، به ازای همه مقادیر  $i$ ،

$$\phi_i(x) - \phi_i(y) = 0.$$

حال،  $i$  بی وجود دارد که  $\phi_i(x) > 0$ ، و در نتیجه  $x \in U_i$ ؛ از آنجا که  $\phi_i(y) = \phi_i(x)$ ، خواهیم داشت  $y \in U_i$ ، و این همان است که می‌خواستیم.  $\square$

برای اینکه قضیه نشان‌دهنده قانع کننده‌تر باشد، به مثالهای بیشتری از فضاها با بعد متناهی نیازمندیم. قضیه ذیل را ثابت می‌کنیم:

۷.۹. قضیه بعد توپولوژیک هر زیرمجموعه فشردۀ  $R^N$  حداکثر  $N$  است.

پرهان. این پرهان تعمیمی است به پرهانی که در مثال ۳ برای  $R^2$  آورده شد. فرض کنیم که  $\rho$  متریک مربعی بر  $R^N$  باشد.

مرحله ۱. کار را با تجزیه  $R^N$  به «مکعبهای واحد» آغاز می‌کنیم. گردایه  $\mathcal{J}$  از بازه‌های باز  $R$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{J} = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

و  $\mathcal{K}$  را گردایهٔ ذیل از زیرمجموعه‌های تک‌عضوی  $R$  تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{K} = \{\{n\} | n \in \mathbb{Z}\}.$$

اگر  $M$  عدد صحیحی باشد به طوری که  $0 \leq M \leq N$ ، گردایهٔ  $\mathcal{C}_M$  را نمایش مجموعهٔ همهٔ حاصل‌ضربهای

$$C = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N$$

می‌گیریم به طوری که تنها  $M$  تا از مجموعه‌های  $A_i$  متعلق به  $\mathcal{J}$  باشند، و بقیه متعلق به  $\mathcal{K}$  باشند. اگر  $M > 0$  آنگاه  $C$  با حاصل‌ضرب  $M(0, 1)$  هم‌شومورف است، و یک مکعب  $M$  بعدی نامیده می‌شود. اگر  $M = 0$  آنگاه  $C$  تنها از یک نقطه تشکیل خواهد شد؛ و یک مکعب  $0$  بعدی نامیده می‌شود.

فرض کنیم  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_N$ . ملاحظه کنید که هر نقطهٔ  $R^N$  مانند  $\mathbf{x}$  در یک و تنها یک عضو  $\mathcal{C}$  واقع است، زیرا هر عدد حقیقی  $x_i$  در یک و تنها یک عضو از  $\mathcal{J} \cup \mathcal{K}$  قرار دارد. هر عضو  $\mathcal{C}$  مانند  $C$  را اندکی بسط می‌دهیم تا به مجموعهٔ بازی مانند  $U(C)$  از  $R^N$  که قطر آن حداکثر مساوی  $\frac{1}{2}$  است برسیم، به طوری که اگر  $C$  و  $C'$  دو مکعب  $M$  بعدی متفاوت باشند آنگاه  $U(C)$  و  $U(C')$  از هم جدا باشند.

نخست، ملاحظه می‌کنیم که اگر  $C$  و  $C'$  دو مکعب  $M$  بعدی متفاوت باشند آنگاه  $\bar{C} \cap C' = \emptyset$ . بررسی صحت این حکم آسان است؛ فرض کنیم  $C = A_1 \times \dots \times A_N$  و  $C' = A'_1 \times \dots \times A'_N$ . اندیس  $i$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $A_i \neq A'_i$ . اگر  $\bar{A}_i$  و  $A'_i$  از هم جدا باشند آنگاه  $\bar{C}$  و  $C'$  نیز چنین‌اند. در غیر این صورت،  $A_i$  باید بازه‌ای مانند  $(n, n+1)$  و  $A'_i$  باید مساوی با  $\{n\}$  یا  $\{n+1\}$  باشد. در این حالت، چون  $C$  و  $C'$  هر دو مکعب  $M$  بعدی هستند، باید اندیس دیگری مانند  $j$  موجود باشد که به ازای آن  $A_j$  مجموعه‌ای تک‌عضوی مانند  $\{k\}$  باشد و  $A'_j$  بازه‌ای مانند  $(l, l+1)$ . پس  $\bar{A}_j$  و  $A'_j$  از هم جدا هستند، در نتیجه  $\bar{C}$  و  $C'$  از هم جدا می‌باشند.

دوم، ملاحظه می‌کنیم که گردایهٔ  $\mathcal{C}_M$  از همهٔ مکعبهای  $M$  بعدی که موضعاً متناهی هستند تشکیل شده است. در واقع، اگر  $\mathbf{a}$  نقطه‌ای با مختصات صحیح باشد، آنگاه مجموعهٔ باز  $B_p(\mathbf{a}, 1)$  تنها  $3^M$  مکعب مختلف از همهٔ ابعاد را قطع می‌کند.

فرض کنیم  $\mathbf{x} \in C$  و  $C$  یک مکعب  $M$  بعدی باشد. یک همسایگی از  $\mathbf{x}$  وجود دارد که تنها تعدادی متناهی از مکعبهای  $M$  بعدی، مانند  $C'$ ، متمایز از  $C$  را قطع می‌کند. چون به ازای هر  $C'$  از این نوع،  $C \cap C' = \emptyset$ ، می‌توانیم  $\varepsilon(\mathbf{x})$  را چنان انتخاب کنیم که  $\varepsilon(\mathbf{x})$  همسایگی  $\mathbf{x}$  هیچ مکعب  $M$  بعدی  $C'$  غیر از  $C$  را قطع نکند. همچنین، فرض کنیم  $\varepsilon(\mathbf{x}) < 1$ . در این صورت،  $U(C)$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$U(C) = \bigcup_{\mathbf{x} \in C} B_p\left(\mathbf{x}, \frac{1}{4}\varepsilon(\mathbf{x})\right).$$

با يك بررسی ساده معلوم می‌شود که اگر  $C$  و  $C'$  مکعبهای  $M$  بعدی متفاوتی باشند آنگاه  $U(C)$  و  $U(C')$  جدا از هم هستند.

مرحله ۲. به ازای عدد مفروض  $M$  که  $0 \leq M \leq N$ ، گردایه  $A_M$  را گردایه همه مجموعه‌های  $U(C)$  به قسمی که  $C \in \mathcal{C}_M$  تعریف می‌کنیم. اعضای  $A_M$  از هم جدا هستند، و قطر هر يك حداکثر مساوی ۲ است. (زیرا، قطر  $C$  برابر با ۱ است، و هر نقطه  $U(C)$  در فاصله  $\epsilon(X)/2$  (که  $\epsilon(X)/2 < 1/2$ ) از نقطه‌ای مانند  $X$  از  $C$  قرار دارد.)

بقیه این برهان مشابه برهانی است که در مثال ۳ برای  $R^2$  آورده شد.  $\square$

۸۰۹. نتیجه هر بسلاي  $m$  بعدی فشرده دارای بعد توپولوژیک حداکثر مساوی  $m$  است.

۹۰۹. نتیجه هر بسلاي  $m$  بعدی فشرده را می‌توان در  $R^{2m+1}$  نشان داد.

۱۰۰۹. نتیجه اگر  $X$  يك فضای متریک پذیر فشرده باشد آنگاه  $X$  را می‌توان در يك فضای اقلیدسی مانند  $R^N$  نشان داد اگر و تنها اگر بعد توپولوژیک  $X$  متناهی باشد.

چنانکه سابقاً اشاره شد، بسیاری از مطالبی که ما ثابت کرده‌ایم بدون فرض فشردگی نیز برقرار می‌مانند. اثبات تعمیمهای مناسب در تمرینهای بعدی آمده است که بررسی آنها را به خواننده واگذار می‌کنیم.

مطلبی که اثباتش را از خواننده نمی‌خواهیم آن است که بعد توپولوژیک هر بسلاي  $m$  بعدی دقیقاً  $m$  است. و این کار دلیلی دارد؛ برهان آن نیازمند ابزاری از توپولوژی جبری است، که در برنامه کار ما نیست.

مطلب دیگری که اثبات آن را نمی‌خواهیم این است که  $N = 2m + 1$  کوچکترین مقداری برای  $N$  است که می‌توان هر فضای متریک پذیر فشرده با بعد توپولوژیک  $m$  را در  $R^N$  نشان داد، دلیل این امر همان دلیلی است که در فوق آمد. حتی در مورد يك گراف خطی، که  $m = 1$ ، همان‌طور که در مثال ۲ فوق اشاره شد، برهان آن پیش‌پا افتاده نیست. برای اطلاعات بیشتر در مورد نظریه ابعاد، خواننده را به کتاب کلاسیک هورویچ<sup>۱</sup> و والمن<sup>۲</sup> [H-W] ارجاع می‌دهیم.

## تمرینها

۱. ثابت کنید که بعد مجموعه کانتور ۰ است.

۴. ثابت کنید که بعد هر فضای هائوسدورف همبند که بیش از یک نقطه داشته باشد حداقل ۱ است.

۳. ثابت کنید که بعد فضای شانه‌ای و بعد منحنی سینوسی توپولوژی دانان ۱ است.

۴. ثابت کنید که زیر فضای

$$\left\{ (x, y) \mid y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), 0 < x \leq 1 \right\} \cup \{0\}$$

در  $R^2$  دارای بعد ۱ است.

۵. ثابت کنید که نقاط  $(1, 1, 1)$  و  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  در  $R^3$  در وضع عمومی هستند. در مورد گراف تمام پنج‌رأسی فوق نشانیدن متناظر با آنرا در  $R^3$  رسم کنید.

۶. الف) تحقیق کنید که  $\{x_0, \dots, x_k\}$  مستقل هندسی است اگر و تنها اگر بردارهای  $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$  مستقل خطی باشند.

ب) تحقیق کنید که صفحه  $P$  که به وسیله  $\{x_0, \dots, x_k\}$  معین می‌شود عبارت است از مجموعه همه  $x$  هایی که به صورت  $x = x_0 + \sum a_i(x_i - x_0)$  هستند.

پ) ثابت کنید که اگر  $k < N$  آنگاه هر زیر فضای  $k$  بعدی مانند  $V^k$  از  $R^N$  دارای درون تهی است.

۷. اثبات این حکم را که هر همبافت ۲ بعدی را می‌توان در  $R^5$  نشانند کامل کنید.

۸. ثابت کنید که نقاط منحنی  $x=t, y=t^2, z=t^3$  در  $R^3$  در وضع عمومی هستند. این حکم را به  $R^n$  تعمیم دهید. [دانهمایی: از دترمینان واندرموند استفاده کنید.]

۹\* الف) حکم ذیل را ثابت کنید:

قضیه. فرض کنید  $X$  یک فضای هائوسدورف موضعاً فشرده باشد که دارای پایه شماراست. همچنین فرض کنید هر نقطه  $x$  یک همسایگی دارد که بستار آن دارای بعد توپولوژیک حداکثر  $m$  است. در این صورت،  $X$  دارای بعد توپولوژیک حداکثر  $m$  است.

[دانهمایی: فرض کنید  $X = \cup C_n$  که در آن  $C_n$  فشرده است و  $C_n \subset \text{Int} C_{n+1}$ .

برهان قضیه ۲.۹ را تعمیم دهید تا ثابت شود که  $\dim X \leq m$ .

ب) ثابت کنید:

نتیجه. بعد توپولوژیک هر بسلا  $m$  بعدی حداکثر  $m$  است.

(پ) ثابت کنید :

نتیجه. بعد توپولوژیک هر زیرمجموعه بسته  $R^N$  حداکثر  $N$  است.

۱۰\*. قضیه. فرض کنید  $X$  یک فضای هائوسدورف موضعاً فشرده بسا یک پایه شمارا باشد به طوری که بعد توپولوژیک آن  $m$  باشد. در این صورت،  $X$  را می‌توان در  $R^{2m+1}$  به عنوان زیرمجموعه بسته‌ای از آن نشان داد. برهان.

(الف) فرض کنید  $N = 2m + 1$  و  $d$  متریک بر  $X$  باشد. و فرض کنید که  $C$  زیرمجموعه فشرده مفروضی از  $X$  و  $\varepsilon$  عددی مثبت مفروضی باشد،  $U_\varepsilon(C)$  را چنین تعریف کنید :

$$U_\varepsilon(C) = \{f \mid f \in \mathcal{C}(X, R^N) \text{ و } \Delta(f|C) < \varepsilon\}.$$

ثابت کنید که  $U_\varepsilon(C)$  در  $(\mathcal{C}(X, R^N), \bar{\rho})$ ، که  $\bar{\rho}$  متریک یکنواخت است، باز و چگال است. [داهنمایی: از قضیه گسترش تیتزه استفاده کنید.]

(ب) ثابت کنید اگر  $f$  عضو مفروضی از  $\mathcal{C}(X, R^N)$  و  $\delta$  عدد مثبت مفروضی باشد آنگاه نگاشت پیوسته  $g: X \rightarrow R^N$  به یکی مانند  $g$  وجود دارد به طوری که  $\bar{\rho}(f, g) < \delta$ . [داهنمایی: فرض کنید که  $X = \cup C_n$  به طوری که به ازای هر  $n$ ،  $C_n$  فشرده است و  $C_n \subset C_{n+1}$ . مقطع  $\cap U_{1/n}(C_n)$  را در نظر بگیرید.]

(پ) فرض کنید  $f: X \rightarrow R^N$  نگاشت  $f$  را سره خوانیم هر گاه به ازای هر مجموعه فشرده مانند  $D$  در  $R^N$ ، مجموعه  $f^{-1}(D)$  فشرده باشد. فرض کنید  $X^*$  و  $(R^N)^*$  فشرده شده  $D$  که نقطه‌ای این دو فضا باشند؛ با قراردادن  $F(\infty) = \infty$ ،  $f$  را به نگاشتی مانند  $F: X^* \rightarrow (R^N)^*$  گسترش دهید. ثابت کنید که  $f$  سره پیوسته است اگر و تنها اگر  $F$  پیوسته باشد.

(ت) ثابت کنید که اگر  $f$  سره باشد و  $\bar{\rho}(f, g) < 1$  آنگاه  $g$  سره است.

(ث) نگاشت پیوسته سره‌ای مانند  $f: X \rightarrow R$  بسازید؛ برهان این قضیه را کامل کنید.

۱۱. دو تمرین پیش را دانسته فرض کنید.

(الف) ثابت کنید :

قضیه. هر بسلا  $m$  بعدی را می‌توان در  $R^{2m+1}$  به عنوان زیرمجموعه بسته‌ای از آن نشان داد.

(ب) ثابت کنید :

قضیه. عدد صحیحی مانند  $N$  وجود دارد که فضای  $X$  را می‌توان به عنوان زیر-مجموعه بسته‌ای از  $R^N$  در  $R^N$  نشان داد اگر و تنها اگر  $X$  موضعاً فشرده، هائوسدورف، بسا یک پایه شمارا، و دارای بعد توپولوژیک متناهی باشد.



## گروه بنیادی و فضاهای پوششی

یکی از مسائل اساسی توپولوژی تشخیص همثومورف بودن یا نبودن دو فضای توپولوژیک مفروض است. در حالت کلی، روش معینی برای حل این مسئله وجود ندارد، ولی، تکنیکهایی وجود دارند که در مواردی خاص به کار می‌روند.

اثبات همثومورف بودن دو فضا منجر به ساختن نگاشتی پیوسته از یکی به دیگری است که عکس آن نیز پیوسته باشد، و ساختن توابع پیوسته مسئله‌ای است که برای حل آن فنون پیشرفته‌ای لازم است.

اثبات همثومورف نبودن دو فضا موضوع دیگری است. برای این مورد باید ثابت کرد تابعی پیوسته که عکس آن هم پیوسته باشد وجود ندارد. یا اگر بتوان خاصیتی توپولوژیک یافت به طوری که برای يك فضا برقرار ولی برای دیگری برقرار نباشد آنگاه مشکل حل شده است. در این حالت، دو فضا نمی‌توانند همثومورف باشند. برای نمونه، بازه بسته  $[0, 1]$  نمی‌تواند با بازه باز  $(0, 1)$  همثومورف باشد، زیرا فضای اولی فشرده است ولی دومی چنین نیست. خط حقیقی  $R$  نمی‌تواند با «خط طویل»  $L$  همثومورف باشد، زیرا  $R$  دارای پایه‌ای شماراست و  $L$  چنین نیست. همین‌طور خط حقیقی  $R$  با صفحه  $R^2$  نیز همثومورف نیست؛ با حذف يك نقطه از  $R^2$  فضایی حاصل می‌شود که همبند است، در صورتی که  $R$  این خاصیت را ندارد.

اما آن عده از خواص توپولوژیک را که تاکنون شناخته‌ایم پهنه چندان فراخی برای حل این مسئله عرضه نمی‌دارند. برای نمونه، چگونه می‌توان همثومورف نبودن صفحه  $R^2$  و فضای سه بعدی  $R^3$  را ثابت کرد؟ اگر در فهرست خواص توپولوژیک مروری کنیم (فشرده‌گی، همبندی، همبندی موضعی، متریک پذیری، وغیره) آنگاه ملاحظه می‌کنیم که هیچکدام از این خواص در تمیز این دو فضا از یکدیگر به ما کمک نمی‌کنند. به عنوان مثالی

دیگر، سطوحی نظیر کره  $S^2$  بعدی ۲، چنبره  $T$  (سطح لاستیک تویی اتومبیل، بخش ۸-۳ مثال ۲) و چنبره مضاعف  $T_2$  (بخش ۸-۷ قضیه ۶.۷) را در نظر می گیریم. هیچیک از خواص توپولوژیک را که تا کنون مطالعه کرده ایم قادر به تمیز اینها از یکدیگر نیست.

بنابراین، باید خواص و تکنیکهای جدیدی معرفی کنیم. یکی از طبیعیترین این خواص، خاصیت همبندی ساده است. احتمالاً، در گذشته هنگام مطالعه انتگرالهای روی خط در صفحه با این مفهوم آشنا شده اید. به بیانی نه چندان دقیق، فضای  $X$  را همبند ساده گویند در صورتی که بتوان هر منحنی بسته در آن را در نقطه‌ای از  $X$  جمع کرد. (تعریف دقیقتر را بعداً خواهیم آورد.) ثابت می کنیم که خاصیت همبندی ساده موجب تمیز فضای  $R^2$  از  $R^3$  خواهد شد؛ با حذف یک نقطه از  $R^2$ ، فضای همبند ساده‌ای حاصل می شود، در صورتی که با برداشتن یک نقطه از  $R^2$  خاصیت همبندی ساده آن نیز از بین می رود. همچنین، این مفهوم وسیله‌ای است برای تمیز  $S^2$  (که همبند ساده است) از چنبره  $T$  (که همبند ساده نیست). ولی هنوز به ما کمکی برای تمیز  $T$  از  $T_2$  نمی کند؛ چه هیچیک از آنها همبند ساده نیستند. مفهومی کلیتر از مفهوم همبندی ساده موجود است که مفهوم همبندی ساده حالت خاصی از آن است. این مفهوم مستلزم گروهی است موسوم به گروه بنیادی فضا. دو فضا که همثومورف اند دارای گروههای بنیادی ایزومورف بایکدیگرند. و شرط همبندی ساده دقیقاً عبارت است از اینکه گروه بنیادی  $X$  گروه بدیهی (تک عضوی) باشد. بنابراین، برهان همثومورف نبودن  $S^2$  و  $T$  را می توان با بیان اینکه، گروه بنیادی  $S^2$  بدیهی است ولی گروه بنیادی  $T$  چنین نیست، بازگو کرده گروه بنیادی موجب تمیز فضاهای بیشتری خواهد شد تا شرط همبندی ساده. برای مثال می توان از آن در اثبات همثومورف نبودن  $T$  و  $T_2$  استفاده کرد؛ و از آن نتیجه می شود که  $T$  دارای یک گروه بنیادی آبدلی است و حال آنکه  $T_2$  چنین نیست.

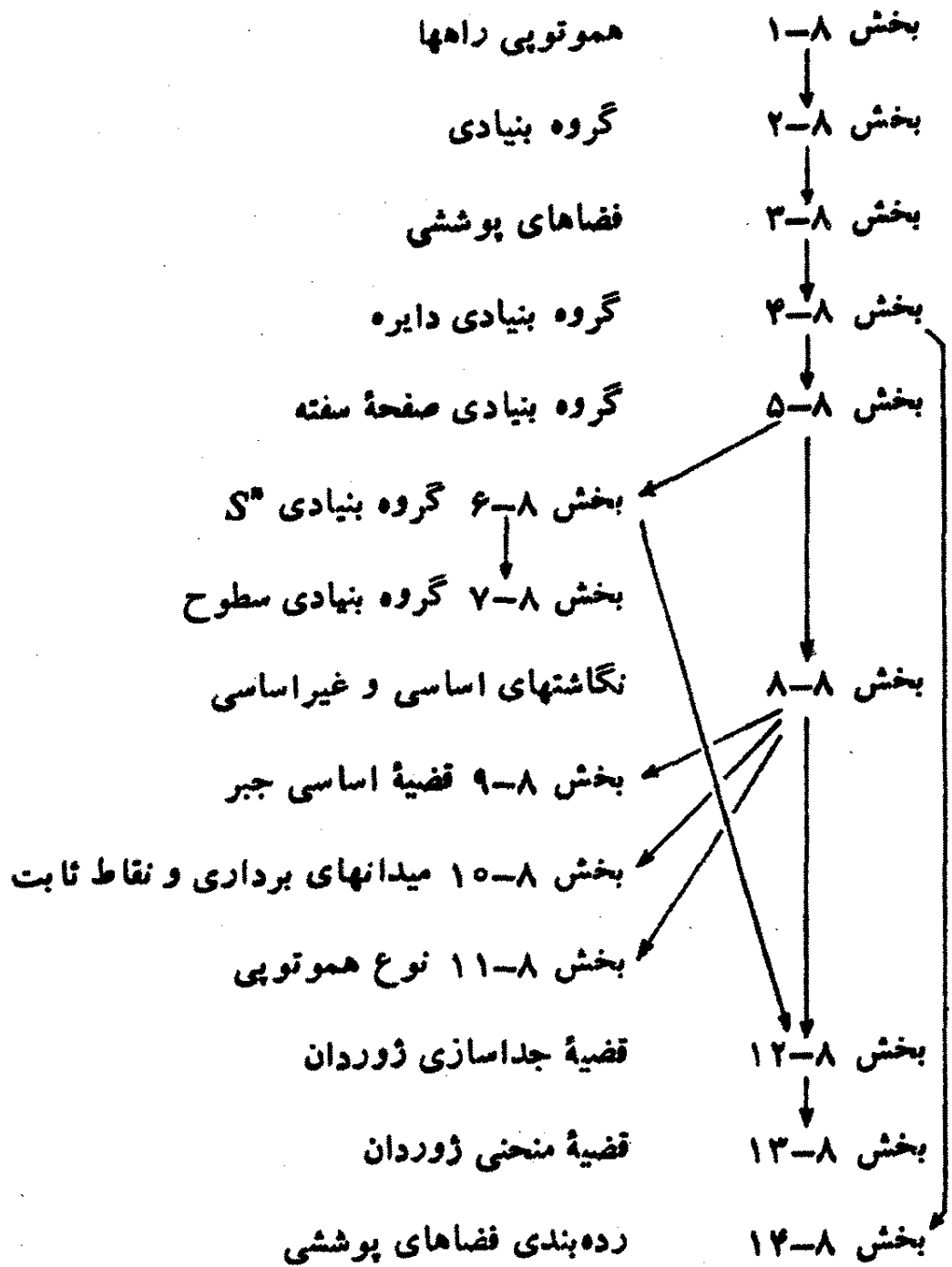
در این فصل به تعریف گروه بنیادی و مطالعه خواص آن می پردازیم. سپس، از آن برای حل تعدادی از مسائل استفاده می کنیم؛ از آن جمله است، مسئله اثبات همثومورف نبودن فضاهای مختلفی، نظیر آنچه قبلاً متذکر شدیم.

کاربردهای دیگر، شامل موارد استعمالی از این مفهوم در میدانهای برداری، نقاط ثابت، نگاشتهای حافظ نقاط متقاطع کرده است، همچنین، موارد استعمالی در قضیه معروفی به نام قضیه اساسی جبر دارد که حکم می کند هر معادله بسجمله‌ای با ضرایب حقیقی یا مختلط دارای یک ریشه است، و سرانجام قضیه مشهور منحنی ژوردان است، با این محتوا که هر منحنی بسته ساده در صفحه، مانند  $C$ ، صفحه را به دو مؤلفه جدا می سازد به طوری که  $C$  مرز مشترک آنهاست.

تعدادی از بخشهای این فصل مستقل از یکدیگرند. بستگی بین آنها در نمودار ذیل نشان داده شده است :

در طول این فصل، فرض بر این است که خواننده با مؤلفه‌ها و همبندی موضعی (بخش ۳-۳ و بخش ۴-۳) آشنایی دارد. همچنین، فرض می کنیم خواننده با مقدمات





نظریه گروهها آشناست. در بخش ۱۲-۸، فشردگی موضعی (بخش ۳-۸) و در بخش ۱۳-۸ فضاهای خارج قسمتی را (بخش ۲-۱۱) دانسته می گیریم.

### ۱-۸ هموتوبی راهها

قبل از تعریف گروه بنیادی فضای  $X$ ، راههایی بر  $X$  و یک رابطه هم ارزی بین آنها موسوم به هموتوبی راهی را مورد ملاحظه قرار می دهیم. سپس، عمل معینی در گردایه این رده های هم ارزی طوری تعریف می کنیم که این گردایه را به همان چیزی که در جبر گروهوا می نامند تبدیل کند.

تعريف. فرض كنيم  $f$  و  $f'$  نگاهشتهای پیوسته‌ای از فضای  $X$  بتوی فضای  $Y$  باشند.  $f$  را با  $f'$  هموتوپ خوانیم در صورتی که نگاهش پیوسته‌ای مانند  $F: X \times I \rightarrow Y$  موجود باشد به طوری که به ازای هر  $x$  از  $X$ ،

$$F(\tilde{x}, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = f'(x).$$

(در اینجا  $I = [0, 1]$ ) نگاهش  $F$  را يك هموتوپى بين  $f$  و  $f'$  می‌نامیم. اگر  $f$  با  $f'$  هموتوپ باشد آنگاه می‌نویسیم  $f \simeq f'$

يك هموتوپى را به عنوان خانواده‌ى پارامترى پیوسته از نگاهشتهای فضای  $X$  به فضای  $Y$  در نظر می‌گیریم. اگر پارامتر  $t$  را معرف زمان تصور کنیم، در این صورت هموتوپى  $F$ ، هنگامی که  $t$  از ۰ به ۱ تغییر می‌کند، نمایشگر يك «دگردیسی» پیوسته  $f$  به  $f'$  خواهد بود.

اکنون حالتی خاص را که  $f$  يك راه در  $X$  است در نظر می‌گیریم. برای یادآوری متذکر می‌شویم: اگر  $X \rightarrow [0, 1]: f$  نگاهش پیوسته‌ای باشد به طوری که  $f(0) = x_0$  و  $f(1) = x_1$ ، گوئیم  $f$  راهی است در  $X$  از  $x_0$  به  $x_1$ . همچنین  $x_0$  را نقطه‌آغازی و  $x_1$  را نقطه‌انجامی راه  $f$  می‌نامیم. در این فصل، برای سهولت، بازه  $I = [0, 1]$  را به عنوان حوزه‌ى تعريف تمام راهها به کار خواهیم برد. بین راههایی در  $X$  رابطه‌ای قویتر از هموتوپى صرف برقرار است که به شرح ذیل تعريف می‌شود:

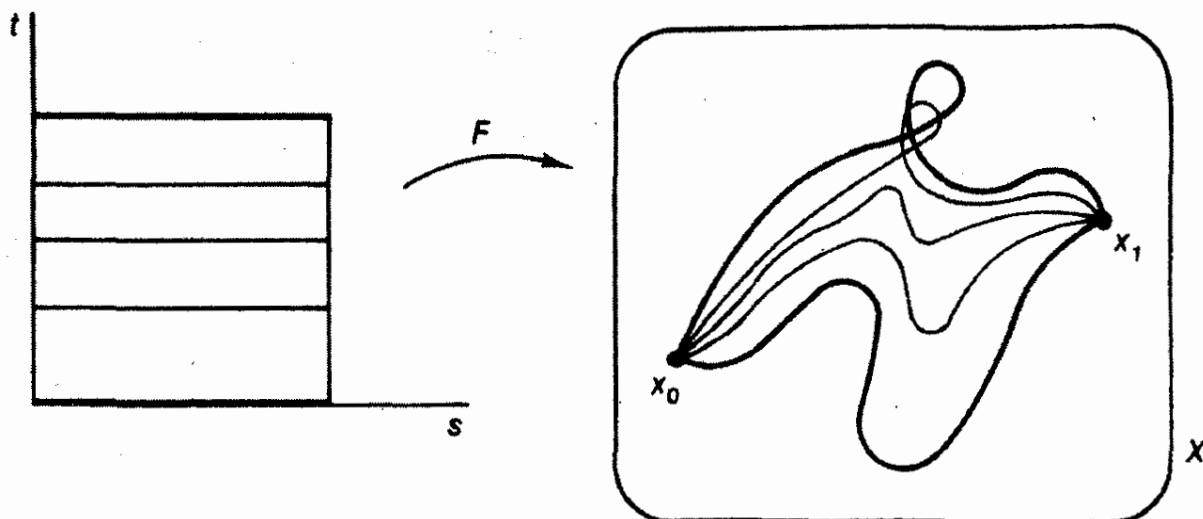
تعريف. راههای  $f$  و  $f'$  را که بازه  $I = [0, 1]$  را بتوی  $X$  می‌نگارند، هموتوپ راهی خوانیم در صورتی که هر دو دارای نقطه‌آغازی  $x_0$  و نقطه‌انجامی  $x_1$  باشند، و نگاهش پیوسته‌ای مانند  $F: I \times I \rightarrow X$  موجود باشد به طوری که به ازای هر  $s$  و  $t$  از  $I$  داشته باشیم

$$F(s, 0) = f(s), \quad F(s, 1) = f'(s),$$

$$F(0, t) = x_0, \quad F(1, t) = x_1,$$

$F$  را يك هموتوپى راهى بين  $f$  و  $f'$  می‌نامیم. شکل ۱ را ملاحظه کنید. اگر  $f$  با  $f'$  هموتوپ راهی باشد آنگاه می‌نویسیم  $f \simeq f'$ .

شرط اول، در واقع، هموتوپى بودن  $F$  بين  $f$  و  $f'$  را بیان می‌کند، و شرط دوم می‌گوید به ازای هر  $t$  نگاهش  $F(s, t) \rightarrow s$ . راهی است از  $x_0$  به  $x_1$ . به عبارت دیگر، شرط اول حاکی از این است که  $F$  نمایشگر يك دگردیسی پیوسته است که راه  $f$  به راه  $f'$  می‌نگارد، و شرط دوم بیانگر ثابت ماندن نقاط انتهایی راه در این دگردیسی است.



شکل ۱

۱.۱. لم دابطه‌های  $\simeq$  و  $\simeq$  دابطه‌های هم‌ارزی‌اند.

اگر  $f$  راه دلخواهی باشد، رده هم‌ارزی هموتوپي راهی  $f$  را به  $[f]$  نمایش می‌دهیم.

پرهان. خواص يك رابطه هم‌ارزی را بررسی می‌کنیم.

به‌ازای تابع مفروض  $f$ ، بدیهی است که  $f \simeq f$ ؛ زیرا، نگاشت  $F(x, t) = f(x)$  همان هموتوپي مطلوب است. درحالتی که  $f$  يك راه باشد،  $F$  هموتوپي راهی خواهد شد. با فرض  $f' \simeq f$  ثابت می‌کنیم که  $f' \simeq f$ .  $F$  را يك هموتوپي بين  $f'$  و  $f$  می‌گیریم. در این صورت، نگاشت  $G(x, t) = F(x, 1-t)$  يك هموتوپي بين  $f$  و  $f'$  خواهد بود. درحالتی که  $F$  هموتوپي راهی باشد،  $G$  نیز چنین است.

بالاخره با فرض  $f' \simeq f$  و  $f' \simeq f''$ ، ثابت می‌کنیم که  $f'' \simeq f$ .  $F$  را يك

هموتوپي بين  $f'$  و  $f''$ ، و  $F'$  را يك هموتوپي بين  $f''$  و  $f'$  فرض می‌کنیم.  $G: X \times I \rightarrow Y$

را چنین تعریف می‌کنیم:

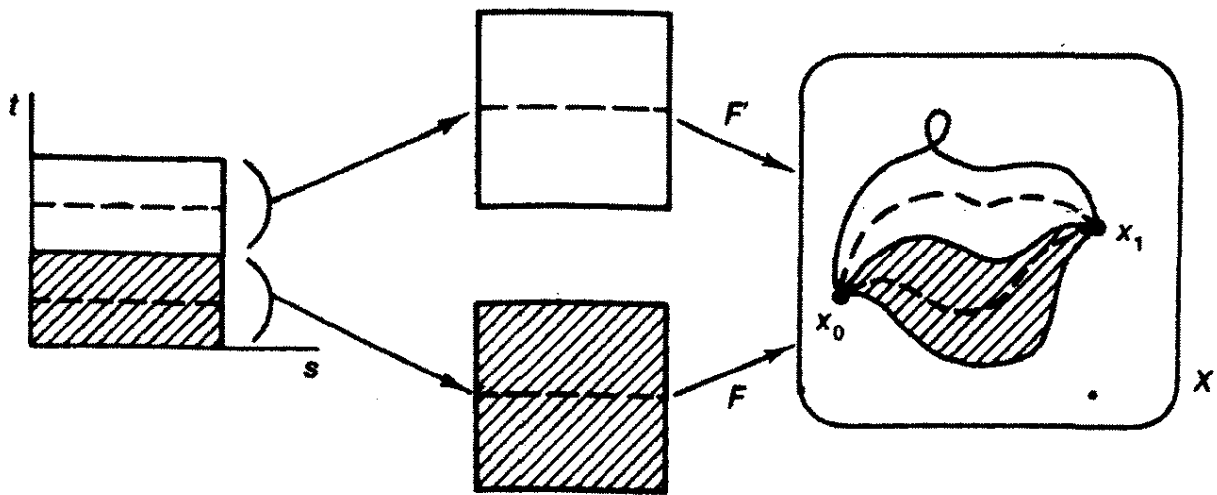
$$G(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & , t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ به‌ازای} \\ F'(x, 2t-1) & , t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ به‌ازای} \end{cases}$$

نگاشت  $G$  خوش‌تعریف است. زیرا، به‌ازای  $t = 1/2$  داریم،

$$F(x, 2t) = F(x, 1) = f'(x) = F'(x, 0) = F'(x, 2t-1).$$

بنابر لم چسب، چون  $G$  بر دو زیرمجموعه بسته  $X \times [0, 1/2]$  و  $X \times [1/2, 1]$  از  $X \times I$  پیوسته است، در نتیجه، بر همه  $X \times I$  پیوسته خواهد شد. بنابراین، همان هموتوپي مطلوب بين  $f$  و  $f''$  است.

می‌توانید به آسانی بیازمایید که اگر  $F$  و  $F'$  هموتوپی راهی باشند، آنگاه  $G$  نیز هموتوپی راهی است. این وضعیت در شکل ۲ نمایانده شده است. □



شکل ۲

مثال ۱. فرض کنیم  $f$  و  $g$  دو نگاشت دلخواه از فضای  $X$  بتوی  $R^2$  باشند. سهولت می‌توان هموتوپ بودن  $f$  و  $g$  را بررسی کرد؛ نگاشت

$$F(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

یک هموتوپی بین  $f$  و  $g$  است موسوم به هموتوپی مستقیم الخط. زیرا، به ازای هر  $x$  ثابت، در واقع،  $F$  در طول یک قطعه خط مستقیم از نقطه  $f(x)$  به  $g(x)$  می‌رود. می‌توانید بررسی کنید که اگر  $f$  و  $g$  دو راه از  $x_0$  به  $x_1$  باشند، آنگاه  $F$  یک هموتوپی راهی خواهد بود. این وضعیت در شکل ۳ نمایانده شده است.

مثال ۲. فرض کنیم  $X$  صفحه سفته  $R^2 - \{0\}$  باشد، که برای اختصار آنرا به  $R^2 - 0$  نمایش خواهیم داد. راههای

$$f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s),$$

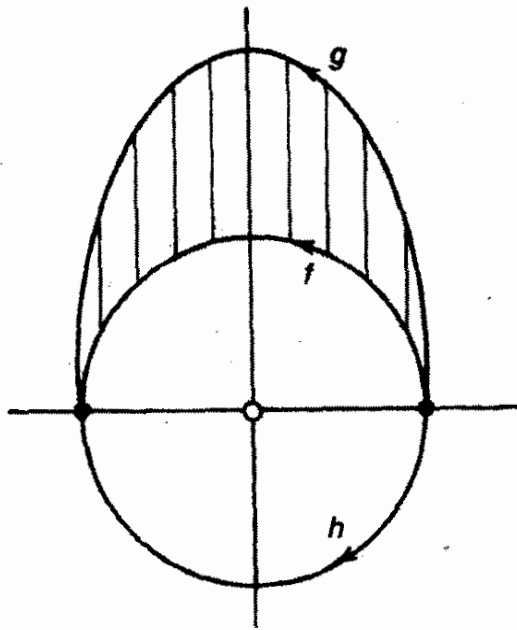
$$g(s) = (\cos \pi s, 2 \sin \pi s)$$

در  $X$  هموتوپ‌اند. هموتوپی مستقیم الخط بین آنها یک هموتوپی راهی قابل قبول است. ولی هموتوپی مستقیم الخط بین  $f$  و  $g$  راه

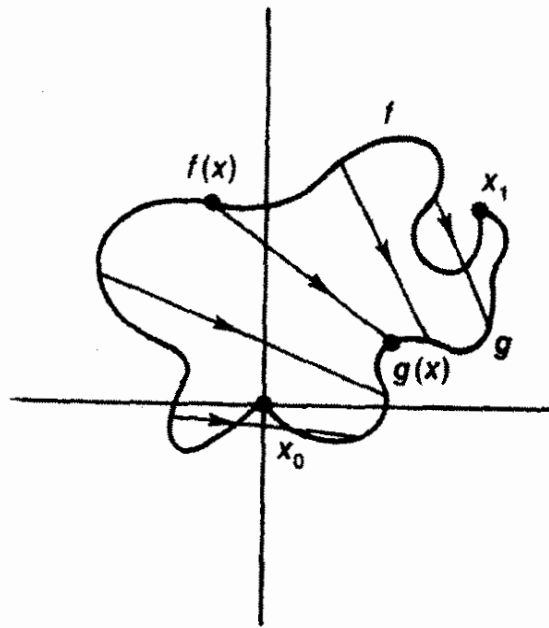
$$h(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$$

قابل قبول نیست، زیرا، حوزه مقادیر آن جزء فضای  $X = R^2 - 0$  نیست. شکل ۴ را ملاحظه کنید.

در واقع، هیچ هموتوپی راهی بین  $f$  و  $h$  در  $X$  وجود ندارد. این موضوع جای



شکل ۴



شکل ۳

شگفتی ندارد؛ از لحاظ شهودی بدیهی است که به طور پیوسته نمی توان  $f$  را از سوراخ  $\circ$  عبور داد. اما اثبات آن مستلزم کارهای زیادی است. و ما بعدها به این مثال بازخواهیم گشت. مثال فوق، نمایشگر این واقعیت است که قبل از حکم به هموتوپی راهی بودن یا نبودن دو راه باید از چگونگی فضای حوزه مقادیر آگاه بود. اگر  $f$  و  $h$  را به عنوان راههایی در  $R^2$  در نظر می گرفتیم آنگاه هموتوپی راهی می شدند.

اینک نوعی ساختار جبری در مورد این مفاهیم هندسی معرفی می کنیم. برای این منظور، ذیلاً عمل معینی بین رده های هموتوپی راهی تعریف می کنیم:

تعریف. اگر  $f$  راهی در  $X$  از  $x_0$  به  $x_1$  و  $g$  راهی دیگر در  $X$  از  $x_1$  به  $x_2$  باشد، آنگاه  $g * f$  ترکیب  $f$  و  $g$  را به عنوان راهی مانند  $h$  با تساوی ذیل تعریف می کنیم

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & , s \in \left[ 0, \frac{1}{2} \right] \text{ به ازای} \\ g(2s-1) & , s \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] \text{ به ازای} \end{cases}$$

تابع  $h$  خوشتعریف است، و بنا بر لم چسب پیوسته است؛ در ضمن  $h$  راهی است از  $x_0$  به  $x_2$ .  $h$  را به عنوان راهی در نظر می گیریم که نیمه اول آن راه  $f$  و نیمه دوم آن راه  $g$  است.

ثابت می کنیم که عمل ترکیب راهها، عمل خوشتعریفی را بین رده های هموتوپی

راهی القا می کند، که در نتیجه آن می توان ترکیب دو رده را چنین تعریف کنیم:

$$[f] * [g] = [f * g]$$

بعلاوه، معلوم می شود که عمل  $*$  در رده های هموتوبی راهی واجد خواصی است موسوم به خواص گروهوادی  $*$ ، که شباهت بسیاری به اصول موضوع يك گروه دارند. تنها اختلاف آنها با خواص يك گروه آن است که  $[f] * [g]$  برای هر زوج از رده ها تعریف نمی شود، و فقط برای زوج هایی مانند  $[f]$  و  $[g]$  تعریف می شود که در شرط  $f(1) = g(0)$  صدق می کنند.

۲۰۱. قضیه عمل  $*$  در رده های هموتوبی راهی خوشتعریف و واجد خواص ذیل است:

(۱) (شرکت پذیری) اگر  $[f] * ([g] * [h])$  تعریف شده باشد،  $([f] * [g]) * [h]$

نیز تعریف شده است و با هم برابرند.

(۲) (عضو خنثای چپ و راست) به ازای عضو مفروض  $x$  از  $X$ ، فرض کنیم  $e_x$

نمایش داه ثابت  $e_x: I \rightarrow X$  باشد که تمام  $I$  را به  $x$  می برد. حال اگر  $f$  راهی در  $X$

از  $x_0$  به  $x_1$  باشد، آنگاه

$$[f] * [e_{x_1}] = [f], \quad [e_{x_0}] * [f] = [f].$$

(۳) (دادن) به ازای داه مفروضی در  $X$  از  $x_0$  به  $x_1$  مانند  $f$ ، فرض کنیم  $\bar{f}$

داهی باشد با ضابطه  $\bar{f}(s) = f(1-s)$ .  $\bar{f}$  را وارونه  $f$  می نامند. در این صورت،

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}], \quad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$$

برهان. هر يك از احكام فوق را می توان با يك برهان هندسی مقدماتی مدلل ساخت.

برای اثبات خوشتعریفی عمل، فرض کنیم  $F$  يك هموتوبی راهی بین  $f$  و  $f'$ ، و  $G$  يك

هموتوبی راهی بین  $g$  و  $g'$  باشد.  $H(s, t)$  را چنین تعریف می کنیم

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & , s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ به ازای} \\ G(2s-1, t) & , s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ به ازای} \end{cases}$$

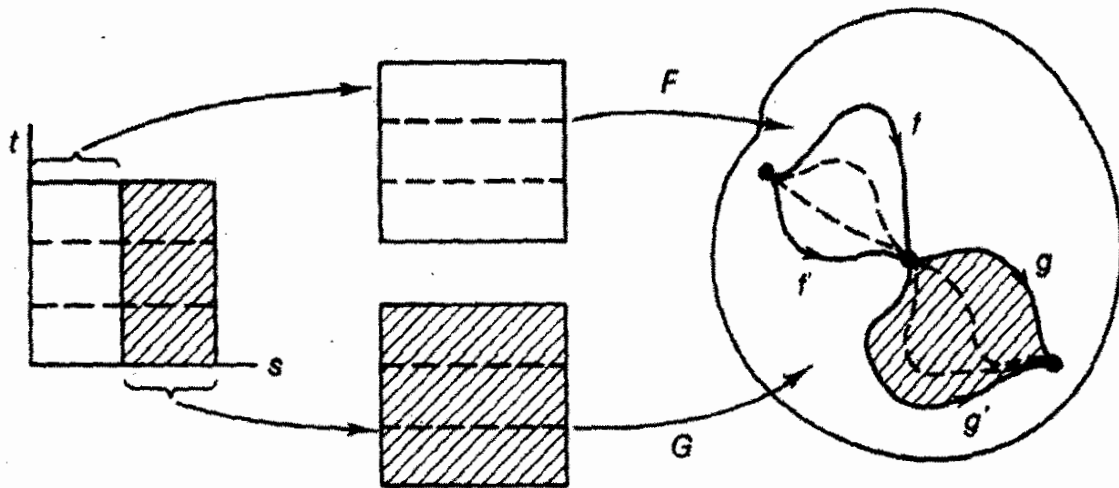
چون به ازای هر  $t$ ،  $F(1, t) = x_1 = G(0, t)$  تابع  $H$  خوشتعریف است؛ بنا بر لم

چسب  $H$  پیوسته نیز هست.  $H$ ، که در شکل ۵ تصویر شده است، هموتوبی راهی مطلوب

بین  $f * g$  و  $f' * g'$  است. اثبات به عهده خواننده است.

(۱) برای اثبات شرکت پذیری، باید ثابت کنیم که  $f * (g * h) \simeq_p (f * g) * h$

راهی  $f * (g * h)$  و  $(f * g) * h$ ، دقیقاً چه هستند؟ تصویر نقطه  $s$  تحت  $f * (g * h)$ ،



شکل ۵

چنانکه  $s$  از  $0$  تا  $1/2$  تغییر می کند، حوزه مقادیر  $f$  را رسم می کند، و هنگام تغییر  $s$  از  $1/2$  به  $3/4$  حوزه مقادیر  $g$ ، و بالاخره، وقتی  $s$  از  $3/4$  به  $1$  می رود، حوزه مقادیر  $h$  را رسم می کند. تحت  $h * (f * g)$ ، نقاط درست همان تصویر را رسم می کنند، منتها با نسبت دیگری. هنگامی که  $s$  از  $0$  تا  $1/4$  تغییر می کند، حوزه مقادیر  $f$  رسم می شود، همین عمل در مورد  $g$  وقتی  $s$  از  $1/4$  به  $1/2$ ، و  $h$  وقتی  $s$  از  $1/2$  به  $1$  می رود انجام می شود.

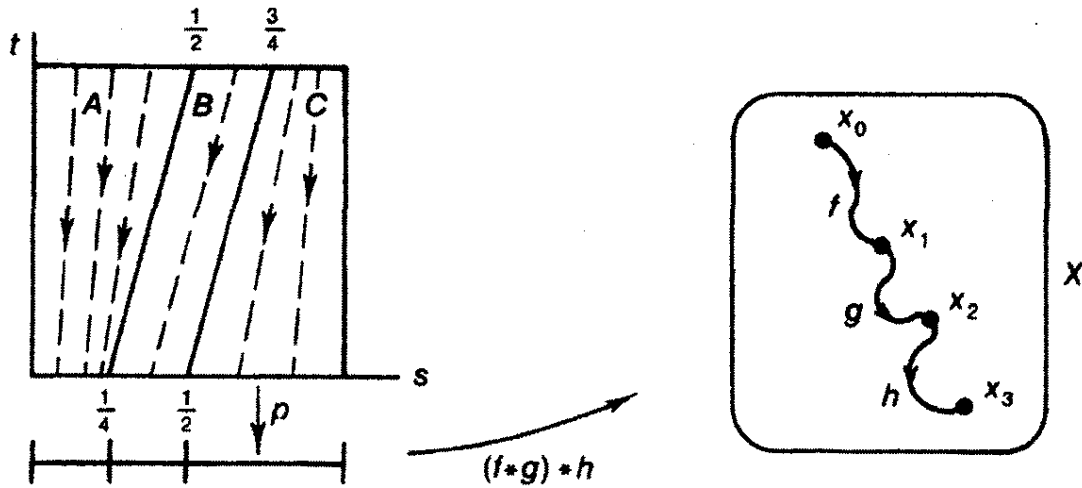
هموتوپي  $F$  را به شرح ذیل تعریف می کنیم: نخست، مربع واحد  $I^2$  را به نگاشت پیوسته  $p$ ، بر روی  $I$  می نگاریم، به این ترتیب هر یک از چهار ضلعی های  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  در شکل ۶ را روی قاعده خودش تصویر می کنیم. سپس، نگاشت  $h * (f * g)$  را به دنبال  $p$  بر  $[0, 1]$  اثر می دهیم. نتیجه، همان طور که می توان ذهنی بررسی کرد، هموتوپي راهی مطلوب  $F$  خواهد بود.

به بیان صورتیتر، چنین تعریف می کنیم

$$F(s, t) = \begin{cases} f\left(\frac{4s}{t+1}\right) & , s \in \left[0, \frac{t+1}{4}\right] \text{ به ازای } \\ g(4s - t - 1) & , s \in \left[\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}\right] \text{ به ازای } \\ h\left(\frac{4s - t - 2}{2 - t}\right) & , s \in \left[\frac{t+2}{4}, 1\right] \text{ به ازای } \end{cases}$$

می توان ثابت کرد که  $(t+1)/4$ ،  $4s - t - 1$ ، و  $(4s - t - 2)/(2 - t)$  در مواردی که

لازم است در حوزه تعریف  $f, g, h$  و  $h$  یعنی بازه  $[0, 1]$  هستند، لهذا، ضوابطی با معنی هستند، همچنین  $F$  خوشتعریف است و بنا بر لم چسب پیوسته می باشند. سرانجام سهولت می توان نشان داد که  $F$  هموتوپی راهی مطلوب است.



شکل ۶

مثلاً،

$$(f * (g * h))(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{به ازای } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ (g * h)(2s-1) & \text{به ازای } s \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ یا } 2s-1 \in [0, 1] \end{cases}$$

بنابراین،

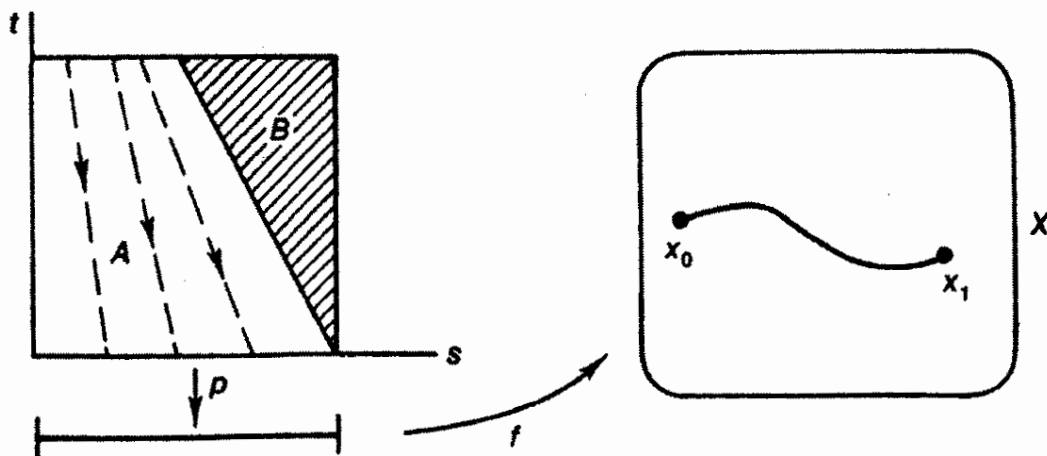
$$(f * (g * h))(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{به ازای } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2(2s-1)) & \text{یا } 2s-1 \in [0, \frac{1}{2}] \text{ یا } s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ h(2(2s-1)-1) & \text{یا } 2s-1 \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ یا } s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

و این تابع، همان طور که می توانید بررسی کنید، درست  $F(s, 1)$  است. به طریقی مشابه  $((f * g) * h)(s) = F(s, 0)$ .

(۲) ثابت می کنیم که  $f \simeq_p f * e_x$ . هموتوپی راهی مطلوب به شرح ذیل ساخته



می شود: نخست، مربع  $I^2$  را با نگاشت پیوسته  $p$ ، که چهارضلعی  $A$  در شکل ۷ را بر قاعده خودش، و مثلث  $B$  را بر رأس پایینی آن می نگارد، بر  $I$  تصویر می کنیم. سپس نگاشت  $f$  را به دنبال  $p$  بر  $[0, 1]$  اثر می دهیم. نتیجه، همان طور که می توان ذهنی بررسی کرد، هموتوپی مطلوب  $G$  خواهد بود.



شکل ۷

به بیان صوری، چنین تعریف می کنیم:

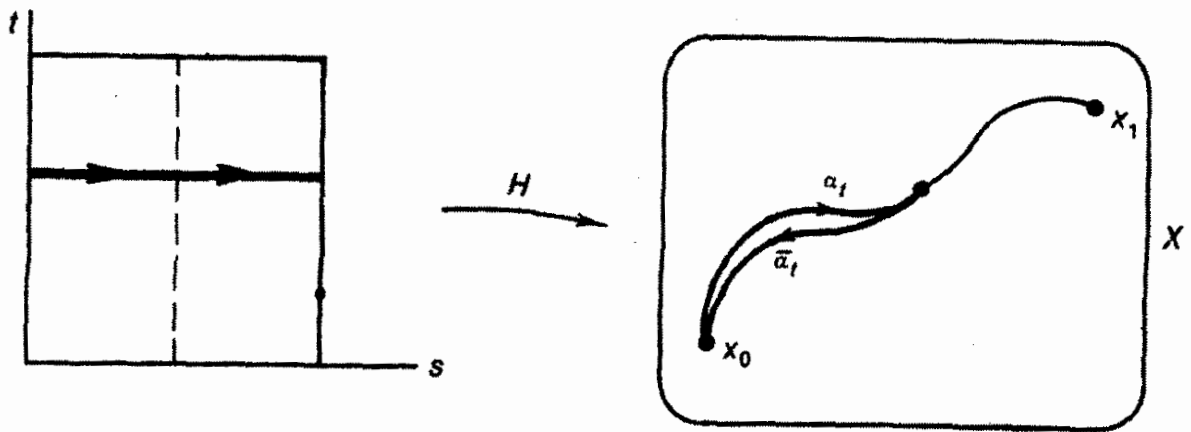
$$G(s, t) = \begin{cases} f\left(\frac{2s}{2-t}\right) & , s \in \left[0, \frac{2-t}{2}\right] \text{ به ازای} \\ x_1 & , s \in \left[\frac{2-t}{2}, 1\right] \text{ به ازای} \end{cases}$$

بررسی اینکه  $G$  خوشتعریف، پیوسته، و هموتوپی مطلوب است را به خواننده واگذار می کنیم.

برهان  $f \simeq_p f * e_{x_0}$  مشابه همان چیزی است که گذشت.

(۳) اکنون ثابت می کنیم که  $e_{x_0} \simeq_p \bar{f} * f$ . ایده شهودی برهان بسیار ساده است.  $\bar{f} * f$  راهی است که از  $x_0$  به  $x_1$  می رود و مجدداً در طول همان مسیر به  $x_0$  مراجعت می کند. اکنون به ازای مقدار پارامتر  $t$ ، فرض کنیم  $\alpha_t$  راهی باشد که از  $x_0$  قسمتی از طول مسیر  $f$  را تا  $f(t)$  طی کند. در این صورت، هموتوپی مورد نظر، همان راه  $\bar{\alpha}_t * \alpha_t$  است، که البته، یک هموتوپی راهی قابل قبولی است، زیرا هر دو نقطه انتهایی را در  $x_0$  قرار می دهد. شکل ۸ ملاحظه شود.

به بیان صوری، چنین تعریف می کنیم



شکل ۸

$$H(s, t) = \begin{cases} f(2ts) & \text{به ازای } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ f(2t(1-s)) & \text{به ازای } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد که  $2ts$  و  $2t(1-s)$  در مواردی که لازم است در حوزه تعریف  $f$  قرار می‌گیرند، و لهذا، ضوابط فوق با معنی هستند، همچنین  $H$  خوشتعریف است (و بنا بر لم چسب، پیوسته است)، و بالاخره  $H$  هموتوبی مورد نیاز بین  $e_{x_0}$  و  $\bar{f} * f$  است.

استدلال مشابهی را می‌توان برای اثبات  $\bar{f} * f \simeq_p e_{x_1}$  به کار بست. ولی بد نیست به این نکته توجه شود: ثابت کردیم که به ازای هر راه  $g$  با نقطه آغازی  $x$  داریم  $e_x \simeq_p g * \bar{g}$ . بالاخص،  $e_{x_1} \simeq_p \bar{f} * f$ ، که در اینجا  $\bar{f}$  وارونه  $f$  است. ولی وارونه  $\bar{f}$  همان  $f$  است. بنابراین،  $e_{x_1} \simeq_p \bar{f} * f$ .

### تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر  $h, h' : X \rightarrow Y$ ، و همچنین  $k, k' : Y \rightarrow Z$ ، هموتوپ باشند، آنگاه  $k \circ h$  و  $k' \circ h'$  نیز هموتوپ خواهند شد.
۲. فرض کنید  $X$  یک مجموعه محدب در  $R^n$  باشد. یعنی، به ازای هر زوج از نقاط  $X$  مانند  $x$  و  $y$ ، قطعه خط واصل بین آنها در  $X$  قرار گیرد. ثابت کنید که هر دو راه در  $X$  که نقاط انتهایی آنها یکی است هموتوپ راهی‌اند.
۳. برهان قضیه ۲.۱ را در نظر بگیرید.  
(الف) درستی روابط  $F(s, 0) = ((f * g) * h)(s)$  و  $F(0, t) = x_0$  و

$F(1, t) = x_t$  را بیازمایید.

(ب) احکام مشابه را در مورد نگاشتهای  $G$  و  $H$  قسمتهای (۲) و (۳) بررسی کنید.

۴. به ازای فضاهای  $X$  و  $Y$ ، فرض کنید  $[X, Y]$  مجموعه همه رده‌های هموتوپی باشد که  $X$  را بتوی  $Y$  می‌نگارند.

(الف) با فرض  $I = [0, 1]$ ، ثابت کنید که به ازای هر  $X$ ، مجموعه  $[X, I]$  تنها يك عضو دارد.

(ب) نشان دهید که اگر  $Y$  همبند راهی باشد، مجموعه  $[I, Y]$  تنها يك عضو دارد.

۵. فضای  $X$  را وقتی انقباض پذیر خوانیم که نگاشت همانی  $X \rightarrow X$  :  $x \mapsto x$  با يك نگاشت ثابت هموتوپ باشد.

(الف) ثابت کنید  $I$  و  $R$  انقباض پذیرند.

(ب) نشان دهید که يك فضای انقباض پذیر همبند راهی است.

(پ) نشان دهید که اگر  $Y$  انقباض پذیر باشد، آنگاه به ازای هر  $X$ ، مجموعه  $[X, Y]$  تنها يك عضو خواهد داشت.

(ت) نشان دهید که اگر  $X$  انقباض پذیر و  $Y$  همبند راهی باشد، آنگاه  $[X, Y]$  تنها يك عضو خواهد داشت.

## ۸-۲ گروه بنیادی

مجموعه رده‌های هموتوپی راهی از راههای فضای  $X$  با عمل  $*$  تشکیل يك گروه نمی‌دهد، بلکه تنها يك گروه وار است. اما، فرض کنیم نقطه‌ای مانند  $x_0$  از  $X$  را به عنوان «نقطه پایه» انتخاب کنیم و خود را فقط به راههایی مقید سازیم که از  $x_0$  شروع و به  $x_0$  منتهی می‌شوند. مجموعه رده‌های هموتوپی راهی این راهها با عمل  $*$  حتماً يك گروه می‌شود، که به گروه بنیادی  $X$  موسوم است.

در این بخش خواصی چند از گروه بنیادی را ثابت خواهیم کرد. بویژه، ثابت می‌کنیم که گروه بنیادی، با تقریب ایزومورفیسم، (به شرط اینکه  $X$  همبند راهی باشد) مستقل از انتخاب نقطه پایه است. همچنین نشان می‌دهیم که گروه يك ناوردای توپولوژیک فضای  $X$  است، و این حقیقتی است که کاربرد قاطع و مهمی در مطالعه مسائل هومومورفیسم دارد.

تعریف. فرض کنیم  $X$  يك فضا و  $x_0$  نقطه‌ای از آن باشد. راهی در  $X$  که از  $x_0$  شروع و به  $x_0$  منتهی شود يك کمند بر پایه  $x_0$  نامیده می‌شود. مجموعه رده‌های هموتوپی راهی کمندهای بر پایه  $x_0$ ، با عمل  $*$ ، گروه بنیادی  $X$  نسبت به نقطه پایه  $x_0$  نامیده می‌شود. این گروه را به  $\pi_1(X, x_0)$  نمایش می‌دهیم.

از قضیه قبل نتیجه می شود که عمل  $*$ ، وقتی به این مجموعه مقید شود، در اصول گروه صدق می کند. به ازای دو کمند مفروض بر پایه  $x_0$ ، مانند  $f$  و  $g$ ، ترکیب  $f * g$  همواره تعریف می شود، و کمندی است بر پایه  $x_0$ . خاصیت شرکت پذیری  $*$ ، وجود يك عضو خنثی  $[e_{x_0}]$ ، و وجود وارونه  $[f]$  برای  $[f]$  بلافاصله نتیجه می شوند.

گاه این گروه را اولین گروه هموتوپى  $X$  می نامند، که عبارت اخیر مستلزم وجود دومین گروه هموتوپى است. در واقع، به ازای هر عدد صحیح مثبت  $n$ ، گروهی به صورت  $\pi_n(X, x_0)$  موجود است، ولی ما در این کتاب آنها را مطالعه نخواهیم کرد. آنها قسمتی از يك مبحث کلی موسوم به نظریه هموتوپى هستند.

مثال ۱. فرض کنیم  $R^n$  فضای اقلیدسی  $n$  بعدی باشد.  $\pi_1(R^n, x_0)$  گروه بدیهی است (گروهی که فقط شامل عضو خنثاست). زیرا، اگر  $f$  در  $R^n$  کمندی بر پایه  $x_0$  باشد، هموتوپى مستقیم الخط

$$F(s, t) = tx_0 + (1-t)f(s)$$

يك هموتوپى راهی بین  $f$  و کمند ثابت  $e_{x_0}$  است.

مثال ۲. در حالت کلی، اگر  $X$  زیر مجموعه محدب دلخواهی از  $R^n$  باشد،  $\pi_1(X, x_0)$  گروه بدیهی است. هموتوپى مستقیم الخط با ردیگر کار ساز خواهد بود. زیرا، تحدب  $X$  بدین معنی است که به ازای هر دو نقطه  $X$ ، مانند  $x$  و  $y$ ، قطعه خط مستقیم واصل بین آنها

$$\{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

در  $X$  قرار می گیرد. بالاخص، گوی واحد  $B^n$  در  $R^n$ ،

$$B^n = \{x \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

دارای گروه بنیادی بدیهی است.

یافتن فضایی با يك گروه بنیادی نابديهی دشوارتر است؛ این کار را در بخش ۸-۴ انجام می دهیم.

سؤالی که بلافاصله مطرح می شود مربوط به حدود بستگی گروه بنیادی به نقطه پایه است، و جواب آن، در ذیل، در نتیجه ۲.۲ داده شده است.

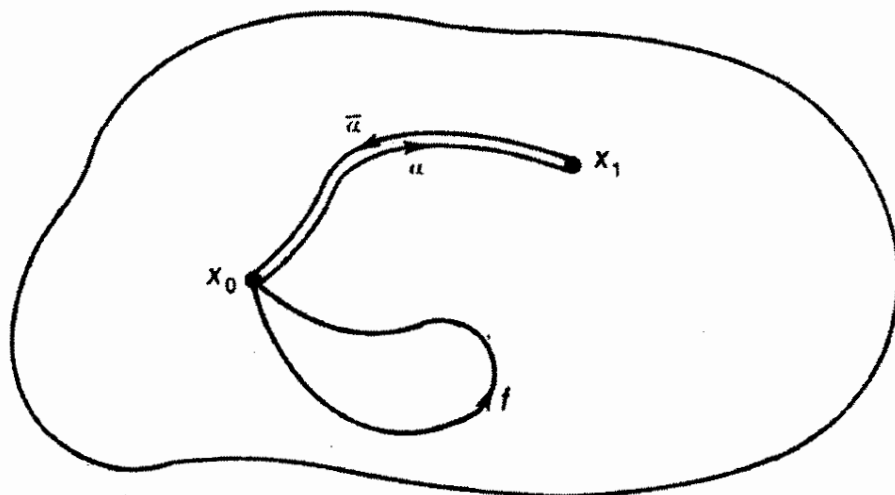
تعریف. فرض کنیم که  $\alpha$  راهی باشد در  $X$  از  $x_0$  به  $x_1$ . نگاشت

$$\hat{\alpha}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

را چنین تعریف می کنیم

$$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha].$$

نگاشت  $\widehat{\alpha}$  در شکل ۹ ترسیم شده است. خوشتعریفی  $\widehat{\alpha}$  نتیجه خوشتعریفی  $*$  است. اگر  $f$  کمندی بر پایه  $x_0$  باشد آنگاه  $\widehat{\alpha}(f) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]$  کمندی است بر پایه  $x_1$ . بنابراین،  $\widehat{\alpha}$  گروه  $\pi_1(X, x_0)$  را، همان طور که می خواستیم، بتوی  $\pi_1(X, x_1)$  می نگارد.



شکل ۹

۱.۲. قضیه نگاشت  $\widehat{\alpha}$  یک ایزومورفیسم گروهی است.

برهان. برای اثبات همومورفیسم بودن  $\widehat{\alpha}$ ، ملاحظه می کنیم که

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}([f]) * \widehat{\alpha}([g]) &= ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= [\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] \\ &= \widehat{\alpha}([f] * [g]).\end{aligned}$$

در این برهان از خواص گروهواری  $*$ ، که در قضیه ۲.۱ ثابت کردیم، استفاده می شود.

برای اثبات ایزومورفیسم بودن  $\widehat{\alpha}$ ، ثابت می کنیم که اگر  $\beta$  نمایش راه  $\bar{\alpha}$ ، که

وارونه  $\alpha$  است، باشد آنگاه  $\widehat{\beta}$  معکوس  $\widehat{\alpha}$  است. به ازای هر عضو  $\pi_1(X, x_1)$  مانند  $[h]$ ،

$\widehat{\beta}([h])$  را محاسبه می کنیم

$$\widehat{\beta}([h]) = [\bar{\beta}] * [h] * [\beta] = [\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}],$$

$$\widehat{\alpha}(\widehat{\beta}([h])) = [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] = [h].$$

محاسبه مشابهی نشان می دهد که به ازای هر  $[f]$  از  $\pi_1(X, x_0)$ ، داریم

$$\widehat{\beta}(\widehat{\alpha}([f])) = [f]. \square$$

۲۰۲. نتیجه اگر  $X$  همبند راهى و  $x_0$  و  $x_1$  دو نقطه آن باشند آنگاه  $\pi_1(X, x_0)$  با  $\pi_1(X, x_1)$  ایزومورف است.

فرض کنیم  $X$  يك فضاى توپولوژيك باشد و  $C$  يك مؤلفه راهى  $X$  كه شامل  $x_0$  است. سهولت ملاحظه مى شود كه  $\pi_1(C, x_0) = \pi_1(X, x_0)$ . زیرا، تمام كمندها و هموتوپيهاى در  $X$  كه بر پایه  $x_0$  هستند بايد در زیر فضاى  $C$  قرار گیرند. بنا بر این،  $\pi_1(X, x_0)$  تنها به مؤلفه راهى شامل  $x_0$  بستگى دارد، و اطلاع ديگرى در مورد بقیه  $X$  به ما نمى دهد. به همین دلیل، هنگام مطالعه گروه بنیادی معمولاً فقط با فضاهاى همبند راهى سرو كار داریم.

اگر  $X$  همبند راهى باشد، تمام گروههاى  $\pi_1(X, x)$  ایزومورف اند. لهذا، این وسوسه هست كه همه این گروهها را با يكديگر «يكى» بگیریم و بدون اشاره به نقطه پایه، فقط از گروه بنیادی  $X$  صحبت کنیم. مشكل اجرای این تمایل این است كه شیوه‌اى طبیعی جهت يكى شمردن  $\pi_1(X, x_0)$  و  $\pi_1(X, x_1)$  وجود ندارد؛ راههاى متفاوت  $\alpha$  و  $\beta$  از  $x_0$  به  $x_1$  ممكن است ایزومورفيسمهاى متفاوتى را بین این گروهها موجب گردند. بدین جهت، حذف نقطه پایه مى تواند منجر به خطا شود.

ثابت مى شود كه ایزومورفيسم  $\pi_1(X, x_0)$  با  $\pi_1(X, x_1)$  مستقل از راه است اگر و تنها اگر گروه بنیادی آنها آبله باشد. (تمرین ۲ ملاحظه شود.) این شرطى قوی بر فضاى  $X$  است.

تعریف. فضاى  $X$  را همبند ساده گویند هر گاه فضایی همبند راهى باشد و به ازای عضوی از  $X$ ، مانند  $x_0$  (و در نتیجه به ازای هر عضو  $x_0 \in X$ )، گروه  $\pi_1(X, x_0)$  بدیهی (تك عضوی) باشد. اغلب بدیهی بودن گروه  $\pi_1(X, x_0)$  را با تساوی  $\pi_1(X, x_0) = 0$  بیان مى کنیم.

۳۰۲. لم دريك فضاى همبند ساده  $X$ ، هر دو راهى كه نقاط آغازى و انجامى آنها يكى باشند هموتوپ راهى اند.

پرهان. اگر  $f$  و  $g$  دو راه از  $x_0$  به  $x_1$  باشند آنگاه  $f * \bar{g}$  تعريف مى شود و آن كمندى است در  $X$  بر پایه  $x_0$ . چون  $X$  همبند ساده است،  $e_{x_0} \simeq_p f * \bar{g}$ . با به كار بردن خواص گروهوارى، ملاحظه مى شود كه

$$[(f * \bar{g}) * g] = [e_{x_0} * g] = [g].$$

اما،

$$[(f * \bar{g}) * g] = [f * (\bar{g} * g)] = [f * e_{x_1}] = [f].$$

بنابراین،  $f$  و  $g$  هموتوپ راهى اند.  $\square$

از نظر شهودی واضح است که گروه بنیادی يك ناوردای توپولوژیک فضای  $X$  است. يك طریقه مناسب برای اثبات رسمی این امر معرفی مفهوم «همومورفیسم القاشده به وسیله يك نگاشت پیوسته» است.

فرض کنیم  $h: X \rightarrow Y$  نگاشتی پیوسته باشد که نقطه  $x_0$  از  $X$  را به نقطه  $y_0$  از  $Y$  می برد. مطلب اخیر را اغلب با نوشتن

$$h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$$

نشان می دهیم. اگر  $f$  کمندی در  $X$  بر پایه  $x_0$  باشد آنگاه تابع مرکب  $h \circ f: I \rightarrow Y$  کمندی است در  $Y$  بر پایه  $y_0$ . بنابراین، تناظر  $f \rightarrow h \circ f$  نگاشتی از  $\pi_1(X, x_0)$  بتوی  $\pi_1(Y, y_0)$  را به دست می دهد. تعریف رسمی آن به قرار ذیل است:

تعریف. فرض کنیم  $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  نگاشتی پیوسته باشد. نگاشت

$$h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

را با ضابطه

$$h_*([f]) = [h \circ f],$$

تعریف می کنیم. نگاشت  $h_*$  همومورفیسم القاشده به وسیله  $h$  نسبت به نقطه پایه  $x_0$  موسوم است.

بسهولت ملاحظه می شود که  $h_*$  خوشتعریف است. اگر  $f$  و  $f'$  هموتوپ راهی باشند،  $F: I \times I \rightarrow X$  را هموتوپی راهی بین آنها فرض می کنیم. در این صورت،  $h \circ F$  يك هموتوپی راهی بین کمندهای  $h \circ f$  و  $h \circ f'$  است. همچنین، بررسی همومورفیسم بودن  $h_*$  نیز آسان است. زیرا

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & , s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ به ازای} \\ g(2s-1) & , s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ به ازای} \end{cases}$$

نتیجه می گیریم که

$$h((f * g)(s)) = \begin{cases} h(f(s)) & , s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ به ازای} \\ h(g(2s-1)) & , s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ به ازای} \end{cases}$$

بنابراین،  $h \circ (f * g)$  مساوی است با ترکیب  $(h \circ f) * (h \circ g)$ . نتیجه اینکه

$$h_*([f] * [g]) = h_*([f]) * h_*([g]),$$

پس،  $h_*$  يك همومورفیسم است.

همومورفیسم القایی  $h_*$  نه تنها به نگاشت  $h: X \rightarrow Y$  بلکه به انتخاب نقطه پایه  $x_0$  نیز بستگی دارد. (پس از انتخاب  $x_0$ ، نقطه  $y_0$  با  $h$  مشخص می شود.) بنابراین، اگر بخواهیم چندین نقطه متفاوت برای  $X$  در نظر بگیریم، مشکلاتی در علامتگذاری پیش خواهد آمد. اگر  $x_0$  و  $x_1$  دو نقطه پایه متفاوت برای  $X$  باشند، دیگر نمی توان نماد  $h_*$  را برای نمایش دو همومورفیسم مختلف به کار برد به طوری که حوزه تعریف یکی  $\pi_1(X, x_0)$  و حوزه تعریف دیگری  $\pi_1(X, x_1)$  باشد. حتی در صورت همبند راهی بودن  $X$  (که در این حالت این گروهها ایزومورف اند) باز این دو گروه مساوی نیستند. در يك چنین موردی، علامت

$$(h_{x_0})_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

را برای همومورفیسم اولی، و  $(h_{x_1})_*$  را برای دومی به کار می بریم. اگر فقط يك نقطه پایه در نظر داشته باشیم، از ذکر نقطه پایه خودداری می کنیم و همومورفیسم القایی را صرفاً با  $h_*$  نمایش می دهیم.

همومورفیسم القایی دارای دو خاصیت است که در کاربردهای این نظریه نقش قاطعی دارند. آنها را، که در قضیه ذیل آمده اند، «خواص تابعگونی» همومورفیسم القایی می نامند:

۴.۲. قضیه اگر  $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  و  $k: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  آنگاه  $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$ . اگر  $i: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  نگاشت همانی باشد آنگاه  $i_*$  همومورفیسم همانی است.

پرهان. اثبات واضح است. بنا بر تعریف،

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f],$$

$$(k_* \circ h_*)([f]) = k_*(h_*([f])) = k_*([h \circ f]) = [(k \circ h) \circ f].$$

به طریقی مشابه،  $\square \cdot i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$

۵.۲. نتیجه اگر  $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  يك همومورفیسم باشد آنگاه  $h_*$  يك ایزومورفیسم بین  $\pi_1(X, x_0)$  و  $\pi_1(Y, y_0)$  است.

پرهان. فرض کنیم  $k: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  معکوس  $h$  باشد. در این صورت،  $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$ ، که در آن،  $i$  نگاشت همانی  $(X, x_0)$  است؛ و

$$h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*,$$



که در آن،  $z$  نگاشت همانی  $(Y, y_0)$  است. چون  $i_*$  و  $j_*$ ، بترتیب، همومورفیسمهای همانی گروههای  $\pi_1(X, x_0)$  و  $\pi_1(Y, y_0)$  هستند،  $k_*$  معکوس  $h_*$  است.  $\square$

### تمرینها

۱. زیرمجموعه  $A$  از  $R^n$  را محدب ستاره‌ای گوئیم هر گاه به ازای عضوی از  $A$  مانند  $a_0$ ، همه قطعه خطهایی که  $a_0$  را به نقاط دیگر  $A$  وصل می‌کنند در  $A$  قرار گیرند.  
 (الف) یک زیرمجموعه محدب ستاره‌ای بیابید که محدب نباشد.  
 (ب) ثابت کنید که اگر  $A$  محدب ستاره‌ای باشد، همبند ساده است.  
 (پ) ثابت کنید که اگر  $A$  محدب ستاره‌ای باشد، هر دو راه در  $A$  که نقاط آغازی و انجامی آنها یکی باشند هم‌توپ راهی‌اند.

۲. فرض کنید  $x_0$  و  $x_1$  دو نقطه مفروض فضای همبند راهی  $X$  باشند. ثابت کنید که  $\pi_1(X, x_0)$  آبلی است اگر و تنها اگر به ازای هر زوج  $\alpha$  و  $\beta$  از راههای از  $x_0$  به  $x_1$  داشته باشیم  $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ .

۳. فرض کنید  $A \subset X$  و  $r: X \rightarrow A$  یک توکشنده باشد (تمرین ۷ از بخش ۲-۳ دیده شود). به ازای عضو مفروض  $a_0$  از  $A$ ، ثابت کنید که

$$r_*: \pi_1(X, a_0) \rightarrow \pi_1(A, a_0)$$

پوشاست. [داهنمایی: تابع احتوای  $(X, a_0) \rightarrow (A, a_0)$  را در نظر بگیرید.]

۴. فرض کنید  $A$  زیرمجموعه‌ای از  $R^n$  باشد و  $h: (A, a_0) \rightarrow (Y, y_0)$ . ثابت کنید که اگر  $h$  به یک نگاشت پیوسته از  $R^n$  بتوی  $Y$  گسترش‌پذیر باشد آنگاه  $h_*$  همومورفیسم صفر می‌شود (همومورفیسمی که هر چیز را به عضو خنثی می‌نگارد).

۵. فرض کنید  $h: X \rightarrow Y$  پیوسته باشد. ثابت کنید که اگر  $X$  همبند راهی باشد، همومورفیسم القاشده به وسیله  $h$ ، با تقریب ایزومورفیسم، مستقل از نقطه پایه است. دقیقتر آنکه، اگر  $h(x_0) = y_0$  و  $h(x_1) = y_1$  ثابت کنید که ایزومورفیسمهایی مانند  $\phi$  و  $\psi$  موجودند به طوری که نمودار ذیل از نگاشتها «جا به جا» می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(h_{x_0})_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{(h_{x_1})_*} & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

یعنی، به طوری که  $\phi \circ (h_{x_1})_* = (h_{x_0})_* \circ \psi$ . نتیجه بگیرید که اگر  $(h_{x_0})_*$  همومورفیسم صفر (یا یک به یک یا پوشا) باشد آنگاه  $(h_{x_1})_*$  نیز چنین است.

۶. فرض کنید  $G$  یک گروه توپولوژیک باشد با عمل  $\cdot$  و عضو خنثای  $x_0$ . (تمرینهای تکمیلی فصل ۲ ملاحظه شود).  $\Omega(G, x_0)$  را مجموعه همه کمندهای در  $G$  بر پایه  $x_0$  بگیرید. اگر  $f, g \in \Omega(G, x_0)$ ، کمند  $f \otimes g$  را با ضابطه ذیل تعریف می‌کنیم

$$(f \otimes g)(s) = f(s) \cdot g(s).$$

(الف) ثابت کنید که این عمل از مجموعه  $\Omega(G, x_0)$  یک گروه می‌سازد.

(ب) ثابت کنید که این عمل یک عمل گروهی مانند  $\otimes$  بر  $\pi_1(G, x_0)$  القا می‌کند.

(پ) ثابت کنید که دو عمل گروه  $*$  و  $\otimes$  بر  $\pi_1(G, x_0)$  یکی هستند. [دانهمایی:

$$(f * e_{x_0}) \otimes (e_{x_0} * g) \text{ را محاسبه کنید.}]$$

(ت) ثابت کنید که  $\pi_1(G, x_0)$  آبدلی است.

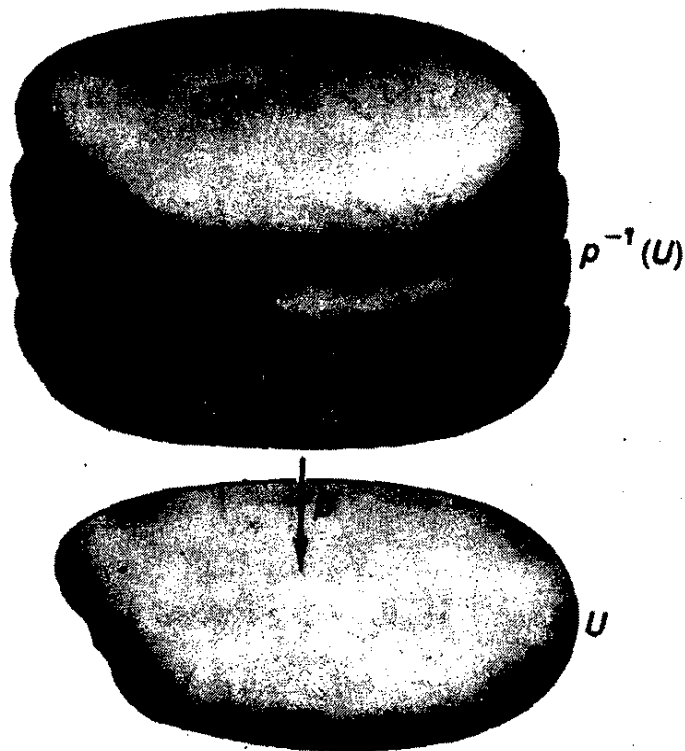
## ۸-۳ فضاهای پوششی

تاکنون حتی یک گروه بنیادی نابدیهی را محاسبه نکرده‌ایم. این نقیصه را در بخش بعدی، هنگام محاسبه گروه بنیادی دایره  $S^1$ ، جبران می‌کنیم. ابتدا به معرفی مفهوم یک فضای پوششی نیازمندیم. برای ما، فضاهای پوششی تنها ابزاری در خدمت محاسبه گروههای بنیادی خواهند بود. اما آنها به نوبه خود اهمیت زیادی دارند، بویژه در مطالعه سطوح ریمانی و بسلاهای همبافت. ([A-S] ملاحظه شود).

تعریف. فرض کنیم  $p: E \rightarrow B$  یک نگاشت پیوسته پوشا باشد. گوییم مجموعه باز  $U$  از  $B$  به وسیله  $p$  به طور هموار پوشانده می‌شود هرگاه تصویر عکس  $p^{-1}(U)$  را بتوان در  $E$  به صورت اجتماعی از مجموعه‌های باز جدا از هم  $V_\alpha$  نوشت به طوری که به ازای هر  $\alpha$ ، تحدید  $p$  به  $V_\alpha$  همئومورفیسمی از  $V_\alpha$  بروی  $U$  باشد. هر یک از مجموعه‌های  $V_\alpha$  را یک قاچ  $p^{-1}(U)$  می‌نامیم.

وقتی که مجموعه باز  $U$  به وسیله  $p$  به طور هموار پوشانده می‌شود، اغلب مجموعه  $p^{-1}(U)$  را به صورت «ردیفی از کلوچه‌ها» تجسم می‌کنیم، که هر یک از آنها همشکل وهم اندازه  $U$  است، و در بالای سر  $U$  معلق‌اند؛ نگاشت  $p$  از بالا همه آنها را بروی  $U$  فشار می‌دهد. شکل ۱۵ دیده شود.

تعریف. فرض کنیم که  $p: E \rightarrow B$  پیوسته و پوشا باشد. اگر هر نقطه  $b$  از  $B$  دارای همسایگی مانند  $U$  باشد که به وسیله  $p$  به طور هموار پوشانده شود آنگاه  $p$  را یک نگاشت پوششی، و  $E$  را یک فضای پوششی  $B$  می‌نامیم.



شکل ۱۰

توجه کنید که اگر  $p: E \rightarrow B$  یک نگاشت پوشی باشد آنگاه به ازای هر  $b$  از  $B$  توپولوژی زیرمجموعه  $p^{-1}(b)$  از  $E$  الزاماً گسسته است. زیرا هر قاچ  $V_\alpha$  در  $E$  باز است و مجموعه  $p^{-1}(b)$  را تنها در یک نقطه قطع می کند؛ بنابراین، این نقطه در توپولوژی زیرفضای  $p^{-1}(b)$  باز است.

مثال ۱. فرض کنیم  $X$  یک فضای دلخواه باشد و  $i: X \rightarrow X$  نگاشت همانسی. در این صورت،  $i$  یک نگاشت پوشی (از بیمایه ترین نوع آن) است. به طور کلی، فرض کنیم  $E$  فضای  $X \times \{1, \dots, n\}$  متشکل از  $n$  نسخه جدا از هم  $X$  باشد. نگاشت  $p: E \rightarrow X$  با ضابطه

$$p(x, i) = x \quad (i = 1, \dots, n)$$

نیز یک نگاشت پوشی (قدری بیمایه) است. در این مورد، تمام فضای  $E$  را می توان به صورت ردیفی از کلوچه ها در بالای  $X$  تجسم کرد.

برای حذف پوششهای بیمایه از نوع ردیف کلوچه ها، اغلب همبندی فضای  $E$  ضرورت پیدا می کند. در قضیه ذیل مثال مفیدی از یک فضای پوشی ارائه شده است.

۱.۳. قضیه نگاشت  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  با ضابطه

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

یک نگاشت پوشی است.

می توان  $p$  را به صورت تابعی تجسم کرد که ضمن پیچاندن خط حقیقی  $R$  دور دایره  $S^1$ ، هر بازه  $[n, n+1]$  را بروی  $S^1$  می نگارد.

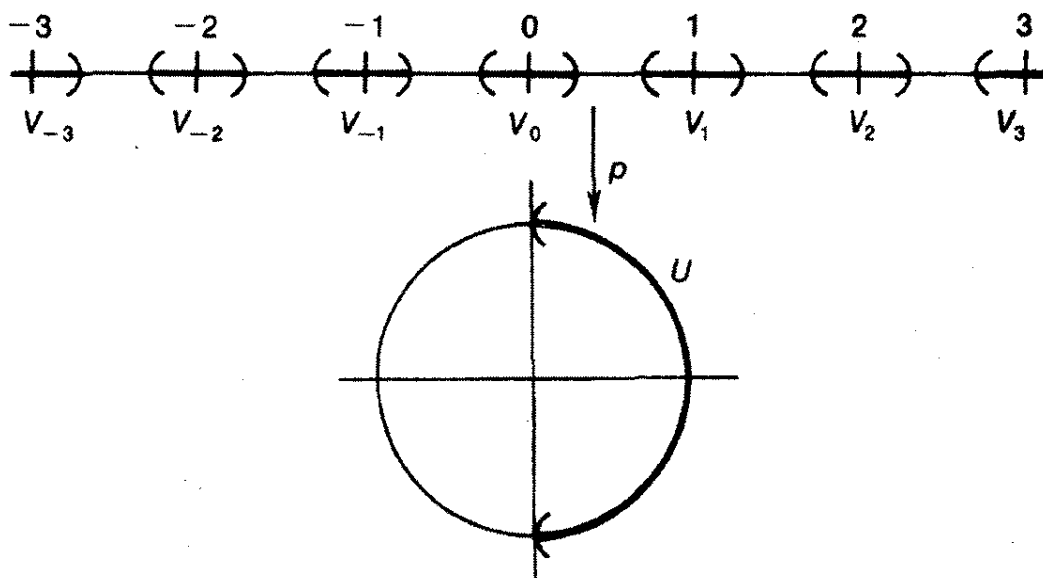
برهان. پوشی بودن نگاشت  $p$  از خواص مقدماتی توابع  $\sin$  و  $\cos$  ناشی می شود. مثلاً، زیر مجموعه  $U$  از  $S^1$  متشکل از همه نقاط با مختص اول مثبت را در نظر می گیریم. مجموعه  $p^{-1}(U)$  از نقاطی مانند  $x$  تشکیل می شود که به ازای آنها  $\cos 2\pi x$  مثبت است؛ یعنی  $p^{-1}(U)$  برابر است با اجتماع مجموعه های

$$V_n = \left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right), \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

شکل ۱۱ ملاحظه شود. اکنون، با تحدید  $p$  به هر يك از بازه های بسته  $V_n$ ، نگاشتی يك به يك به دست می آید. زیرا،  $\sin 2\pi x$  بر يك چنین بازه ای اکیداً یکنواست. بعلاوه، بنا بر قضیه مقدار میانی،  $p$  مجموعه  $V_n$  را بروی  $U$  و  $V_{n+1}$  را بروی  $U$  تصویر می کند. چون  $V_n$  فشرده است،  $p|_{V_n}$  يك همئومورفیسم بین  $V_n$  و  $U$  می باشد. بالانحص،  $p|_{V_n}$  همئومورفیسمی است از  $V_n$  به  $U$ .

استدلال مشابهی را می توان در مورد مقطع  $S^1$  با نیم صفحه های باز بالایی و پایینی، و نیم صفحه باز سمت چپ اعمال کرد. این مجموعه های باز  $S^1$  را می پوشانند، و هر يك از آنها به وسیله  $p$  به طور هموار پوشانده می شوند. بنابراین،  $p: R \rightarrow S^1$  يك نگاشت پوششی است.  $\square$

مثال ۲. فضای  $T = S^1 \times S^1$  را در نظر می گیریم؛ این فضا به چنبره موسوم است.

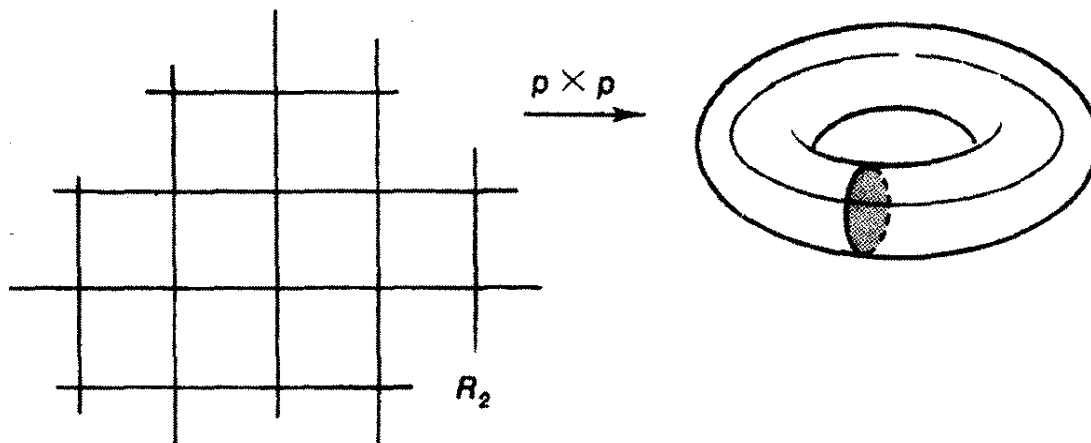


شکل ۱۱

این مطلب در حالت کلی درست است که حاصل ضرب دو نگاشت پوششی خود یک نگاشت پوششی است. (تمرین ۲ ملاحظه شود). بنابراین، همچنانکه در شکل ۱۲ تصویر شده است، حاصل ضرب

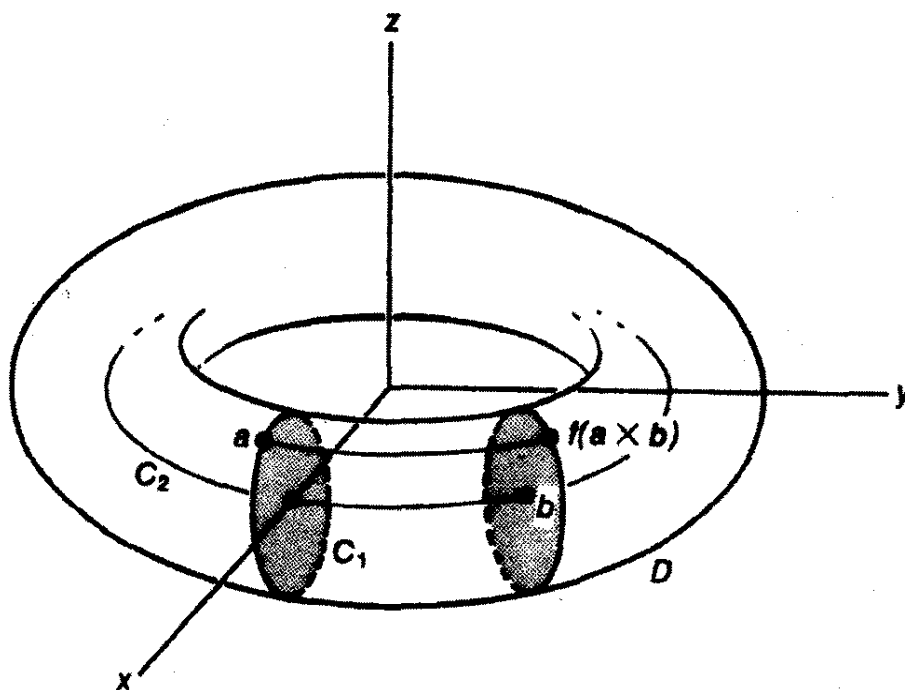
$$p \times p : R \times R \rightarrow S^1 \times S^1$$

یک پوشش چندبره است به وسیله صفحه  $R^2$ ، که در اینجا  $p$  همان نگاشت پوششی قضیه ۱.۳ است. هر یک از مربعات واحد  $[n, n+1] \times [m, m+1]$  به وسیله  $p \times p$  دور چندبره پیچیده می شود.



شکل ۱۲

در این شکل چندبره را به صورت حاصل ضرب  $S^1 \times S^1$ ، که زیرمجموعه‌ای است از فضای  $R^3$  و در نتیجه جسمی دشوار دارد، ترسیم نکرده‌ایم، بلکه به صورت سطحی مانند  $D$



شکل ۱۳

از  $R^2$  ترسیم کرده‌ایم که از دوران دایره  $C_1$ ، به مرکز  $(1, 0, 0)$  و شعاع  $1/3$  واقع در صفحه  $xz$  حول محور  $z$  ها، حاصل می‌شود. اثبات هومئومورفی بودن  $D$  با  $S^1 \times S^1$  دشوار نیست. فرض کنیم  $C_2$  دایره‌ای باشد به شعاع  $1$  به مرکز مبدأ در صفحه  $xy$ . در این صورت،  $C_1 \times C_2$  را به وسیله تابع زیربتوی  $D$  می‌نگاریم، نقطه  $a$  را روی دایره  $C_1$  در نظر می‌گیریم، این دایره را حول محور  $z$  ها دوران می‌دهیم تا مرکز آن در نقطه  $b$  واقع شود، سپس،  $f(a \times b)$  را مساوی محل جدید نقطه  $a$  قرار می‌دهیم (شکل ۱۳). نکاشت  $f$ ، همان طوری که می‌توان ذهنی بررسی کرد، هومئومورفیسمی از  $C_1 \times C_2$  به  $D$  است. در صورت تمایل، می‌توانید معادلات  $f$  را بنویسید و مستقیماً پیوستگی، یک به یک بودن، و پوشا بودن آن را بیازمایید. (پیوستگی  $f^{-1}$  از فشردگی  $C_1 \times C_2$  نتیجه می‌شود).

مثال ۳. نکاشت پوششی

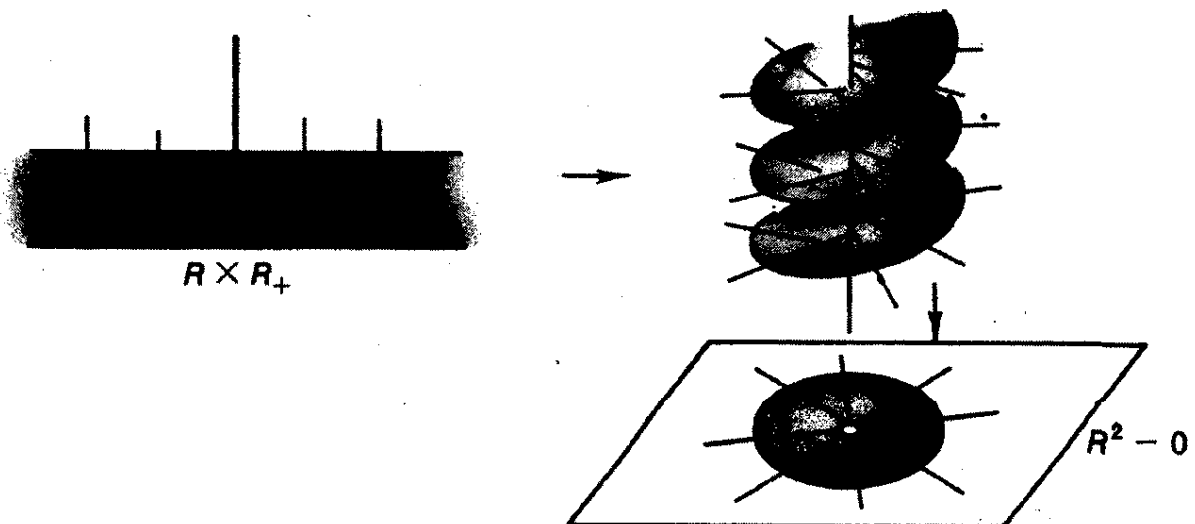
$$p \times i : R \times R_+ \rightarrow S^1 \times R_+$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن  $i$  نکاشت همانی  $R_+$  و  $p$  نکاشت قضیه ۱.۳ است. اگر هومئومورفیسم استاندارد  $S^1 \times R_+$  با  $R^2 - 0$  را طوری اختیار کنیم که  $x \times t$  را به  $tx$  بفرستد، تابع مرکب این دو یک نکاشت پوششی

$$R \times R_+ \rightarrow R^2 - 0$$

در صفحه سفته به وسیله نیم صفحه باز بالایی ارائه می‌دهد. شکل ۱۴ ملاحظه شود. این نکاشت پوششی در مطالعه متغیرهای مختلط به عنوان سطح دیمانی متناظر با تابع مختلط لگاریتمی ظاهر می‌شود.

اگر  $p : E \rightarrow B$  نگاشتی پوششی باشد آنگاه  $p$  هومئومورفیسم موضعی بین  $E$  و  $B$  است. یعنی، هر نقطه  $e$  از  $E$  همسایگی دارد که به وسیله  $p$  به طور هومئومورفیک بروی زیر مجموعه‌ی بازی از  $B$  نگاشته می‌شود. ولی، همان طوری که در مثال بعدی



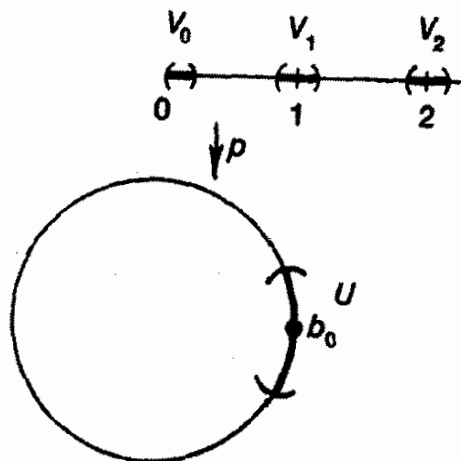
شکل ۱۴

می بینیم، این شرط که  $p$  همئومورفیسم موضعی باشد، در به دست آوردن اینکه  $p$  يك نگاشت پوششی باشد کافی نیست.

مثال ۴. نگاشت  $p: R_+ \rightarrow S^1$  با ضابطه

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

پوشا و همئومورفیسم موضعی است. شکل ۱۵ ملاحظه شود. ولی  $p$  يك نگاشت پوششی نیست، زیرا، نقطه  $b_0 = (1, 0)$  همسایگی مانند  $U$  ندارد که به وسیله  $p$  به طور هموار پوشانده شود. تصویر عكس يك همسایگی نوعی  $b_0$  مانند  $U$  شامل همسایگیهای كوچك  $V_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) است توأم با يك بازه كوچك به صورت  $V_n = (0, \varepsilon)$ . به ازای هر  $n$  از  $\mathbb{Z}_+$  بازه  $V_n$  به وسیله  $p$  به طور همئومورفیک بر روی  $U$  نگاشته می شود، حال آنکه بازه  $V_0$  تنها به وسیله  $p$  در  $U$  نشانده می شود.



شکل ۱۵

مثال ۵. مثال قبل ممکن است شما را به این فکر بیندازد که خط حقیقی  $R$  تنها فضای پوششی همبند دایره  $S^1$  است، که البته چنین نیست. مثلاً، نگاشت  $p: S^1 \rightarrow S^1$  را با ضابطه

$$p(z) = z^2$$

در نظر می گیریم. [در اینجا  $S^1$  را به عنوان زیرمجموعه ای از صفحه مختلط  $C$  متشکل از اعداد مختلطی، مانند  $z$ ، که  $|z| = 1$  در نظر گرفته ایم.] بررسی اینکه  $p$  نگاشتی پوششی است به خواننده واگذار می شود.

### تمرینها

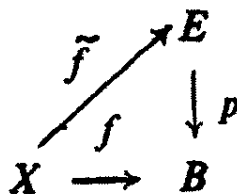
۱. ثابت کنید که اگر  $p: E \rightarrow B$  يك نگاشت پوششی باشد آنگاه  $p$  يك نگاشت باز است.

۲. ثابت کنید که اگر  $p: E \rightarrow B$  و  $p': E' \rightarrow B'$  نگاشتهایی پوششی باشند آنگاه  $p \times p': E \times E' \rightarrow B \times B'$  يك نگاشت پوششی است.
۳. فرض کنید توپولوژی  $Y$  گسسته باشد. ثابت کنید که اگر  $p: X \times Y \rightarrow X$  تصویر بروی مختص اول باشد آنگاه  $p$  يك نگاشت پوششی است.
۴. ثابت کنید که نگاشت  $p$  در مثال ۵ پوششی است. این مثال را به نگاشت  $p(z) = z^n$  تعمیم دهید.
۵. فرض کنید  $p: E \rightarrow B$  يك نگاشت پوششی، و  $B$  همبند باشد. ثابت کنید که اگر به ازای عضوی از  $B$  مانند  $b_0$ ،  $p^{-1}(b_0)$  دارای  $k$  عضو باشد آنگاه به ازای هر  $b$  از  $B$ ، مجموعه  $p^{-1}(b)$  دارای  $k$  عضو است. در چنین موردی،  $E$  را يك پوشش  $k$  لایی  $B$  می نامند.
۶. فرض کنید  $p: X \rightarrow Y$  و  $q: Y \rightarrow Z$  نگاشتهایی پوششی باشند.  
 (الف) ثابت کنید که اگر به ازای هر  $z$  از  $Z$ ، مجموعه  $q^{-1}(z)$  متناهی باشد آنگاه  $q \circ p: X \rightarrow Z$  يك نگاشت پوششی است.  
 \* (ب) ثابت کنید که اگر  $q^{-1}(z)$  متناهی نباشد حکم (الف) برقرار نیست.
۷. فرض کنید  $p: E \rightarrow B$  يك نگاشت پوششی و  $B$  همبند و همبند موضعی باشد. ثابت کنید که اگر  $C$  مؤلفه‌ای از  $E$  باشد آنگاه  $p|_C: C \rightarrow B$  يك نگاشت پوششی است.
۸. معادلاتی برای نگاشت  $f: C_1 \times C_2 \rightarrow D$  در مثال ۲ بنویسید و هومومورفیسم بودن آن را بررسی کنید.

### ۴-۸ گروه بنیادی دایره

مطالعه فضاهای پوششی فضای  $X$  بستگی نزدیکی به مطالعه گروه بنیادی آن دارد. در این بخش، پیوندهای مشترك بین این دو مفهوم را نشان می دهیم و گروه بنیادی دایره را محاسبه می کنیم.

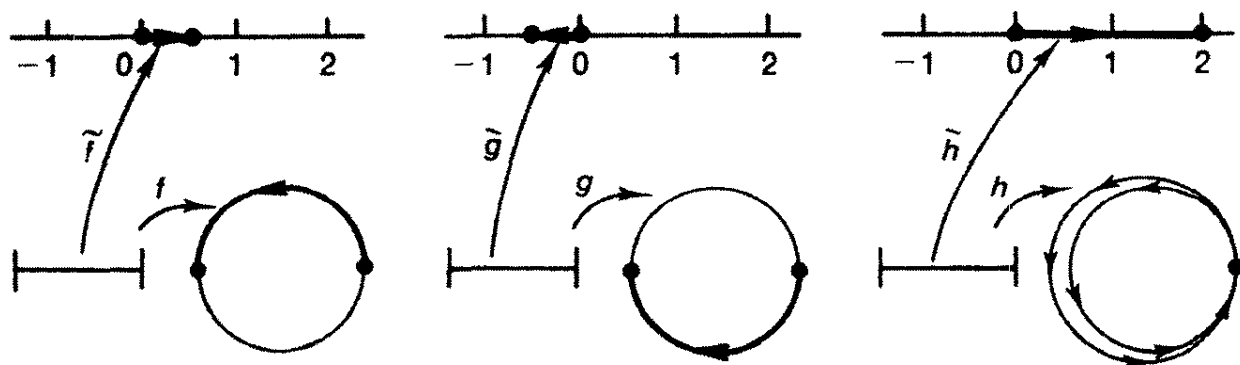
تعریف. نگاشت  $p: E \rightarrow B$  را در نظر می گیریم. اگر  $f$  يك نگاشت پیوسته از فضایی مانند  $X$  بتوی  $B$  باشد نگاشت  $\tilde{f}: X \rightarrow E$  را يك بالابو  $f$  گوئیم در صورتی که  $p \circ \tilde{f} = f$ .





وجود بالابرها، زمانی که  $p$  نگاشتی پوششی باشد، ابزار مهمی در مطالعه فضاهای پوششی و گروه بنیادی است. ابتدا، نشان می‌دهیم که برای یک فضای پوششی، می‌توان راهها را بالابرد؛ سپس، ثابت می‌کنیم که هم‌توپیهای راهی را نیز می‌توان بالابرد. ابتدا، یک مثال:

**مثال ۱.** نگاشت پوششی  $p: R \rightarrow S^1$  در قضیه ۱.۳ را در نظر می‌گیریم. راه  $f: [0, 1] \rightarrow S^1$  با ضابطه  $f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$  که از  $b_0 = (1, 0)$  شروع می‌شود، به راه  $\tilde{f}(s) = s/2$  که از ۰ شروع و به  $1/2$  ختم می‌شود، بالابرده می‌شود. راه  $g(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$  به راه  $\tilde{g}(s) = -s/2$  که از ۰ شروع و به  $-1/2$  ختم می‌شود، بالابرده می‌شود. راه  $h(s) = (\cos 4\pi s, \sin 4\pi s)$  به راه  $\tilde{h}(s) = 2s$  که از ۰ شروع و به ۲ ختم می‌شود، بالابرده می‌شود. از نظر شهودی  $h$  بازه  $[0, 1]$  را دو بار به دور دایره می‌پیچاند؛ نکتهٔ اخیر در این واقعیت که راه بالابر  $\tilde{h}$  از ۰ شروع و به ۲ ختم می‌شود، منعکس است. این راهها در شکل ۱۶ ترسیم شده‌اند.



شکل ۱۶

۱.۴. لم فرض کنیم  $p: E \rightarrow B$  یک نگاشت پوششی باشد و  $p(e_0) = b_0$ . هر راه در  $E$  با نقطهٔ آغاز  $b_0$ ، مانند  $f: [0, 1] \rightarrow B$ ، دارای بالابریکتناهی است به راه  $\tilde{f}$  با نقطهٔ آغازی  $e_0$ .

**برهان.**  $B$  را با مجموعه‌های بازی مانند  $U$  پوشانید به طوری که هر یک به وسیلهٔ  $p$  به‌طور هموار پوشانده شوند. یک زیر تقسیم بازهٔ  $[0, 1]$  را، مانند  $s_0, \dots, s_p$  چنان بیابید که به ازای هر  $i$  مجموعهٔ  $f([s_i, s_{i+1}])$  در یکی از مجموعه‌های باز  $U$  قرار گیرد. (در اینجا از لم عدد لپگ استفاده می‌کنیم.) اکنون  $\tilde{f}$  را مرحله به مرحله تعریف می‌کنیم.

ابتدا چنین تعریف می‌کنیم  $\tilde{f}(0) = e_0$ . سپس فرض می‌کنیم که به ازای هر  $s$  که  $0 \leq s \leq s_i$ ،  $\tilde{f}(s)$  تعریف شده باشد، حال  $\tilde{f}$  را بر  $[s_i, s_{i+1}]$  چنین تعریف می‌کنیم: مجموعهٔ  $f([s_i, s_{i+1}])$  در مجموعهٔ بازی مانند  $U$  قرار دارد که به وسیلهٔ  $p$  به‌طور

هموار پوشانده می شود.  $\{V_\alpha\}$  را گردایه قاجهای  $p^{-1}(U)$  می گیریم؛ هر يك از  $V_\alpha$  ها به وسیله  $p$  به طور هومئومورفیک بروی  $U$  نگاشته می شوند. اکنون  $\tilde{f}(s_i)$  در یکی از این مجموعه ها، مثلاً،  $V_0$  قرار می گیرد. به ازای هر  $s$  از  $[s_i, s_{i+1}]$ ،  $\tilde{f}(s)$  را چنین تعریف می کنیم:

$$f(\bar{s}) = (p|_{V_0})^{-1}(f(s)).$$

چون  $p|_{V_0}: V_0 \rightarrow U$  يك هومئومورفیسم است،  $\tilde{f}$  بر  $[s_i, s_{i+1}]$  پیوسته است. با ادامه این طریقه،  $\tilde{f}$  بر همه  $[0, 1]$  تعریف می شود. پیوستگی  $f$  از لم چسب بخش ۲-۷ نتیجه می شود، و تساوی  $p \circ \tilde{f} = f$  بلافاصله از تعریف  $\tilde{f}$  حاصل می گردد. یکتایی  $\tilde{f}$  نیز مرحله به مرحله ثابت می شود. فرض کنیم  $\tilde{f}$  بالا بردیگری از  $f$  با نقطه آغازی  $e_0$  باشد. در این صورت  $\tilde{f}(0) = e_0 = f(0)$ . فرض کنیم به ازای هر  $s$  که  $0 \leq s \leq s_i$  داشته باشیم  $\tilde{f}(s) = f(s)$ . اگر  $V_0$  را همان مجموعه بند سابق بگیریم آنگاه به ازای هر  $s$  از  $[s_i, s_{i+1}]$ ،  $\tilde{f}(s)$  را به صورت  $(p|_{V_0})^{-1}(f(s))$  تعریف می شود. حال ببینیم  $\tilde{f}(s)$  برابر چه چیزی می تواند باشد؟ چون  $\tilde{f}$  يك بالا بر  $f$  است، باید بازه  $[s_i, s_{i+1}]$  را بتوی  $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$  ببرد. قاجهای  $V_\alpha$  باز و جدا از هم می باشند؛ چون مجموعه  $\tilde{f}([s_i, s_{i+1}])$  همبند است، باید کاملاً در یکی از مجموعه های  $V_\alpha$  قرار گیرد. از طرفی چون  $\tilde{f}(s_i) = f(s_i)$  که خود عضو  $V_0$  است،  $\tilde{f}$  باید همه  $[s_i, s_{i+1}]$  را بتوی  $V_0$  ببرد. بنابراین، به ازای هر عضو  $[s_i, s_{i+1}]$  مانند  $s$ ،  $\tilde{f}(s)$  برابر نقطه ای است از  $V_0$ ، مانند  $y$ ، که در  $p^{-1}(f(s))$  قرار دارد. اما تنها يك نقطه  $y$  وجود دارد که واجد این خاصیت است و آن هم  $(p|_{V_0})^{-1}(f(s))$  است. بنابراین به ازای هر  $s$  از  $[s_i, s_{i+1}]$  داریم  $\tilde{f}(s) = f(s)$ .  $\square$

۲۰۴. لم فرض کنیم  $p: E \rightarrow B$  يك نگاشت پوشی باشد و  $p(e_0) = b_0$ . همچنین، فرض کنیم نگاشت  $F: I \times I \rightarrow B$  پیوسته باشد و  $F(0, 0) = b_0$ . در این صورت،  $F$  بالا بر پیوسته ای مانند نگاشت

$$\bar{F}: I \times I \rightarrow E$$

دارد که  $\bar{F}(0, 0) = e_0$ . اگر  $F$  هموتوپی داهی باشد آنگاه  $\bar{F}$  نیز هموتوپی داهی است.

$\bar{F}$  (بالا بر  $F$ )، در واقع، یکتاست؛ ولی، این را ثابت نخواهیم کرد.

پرهان. به ازای نگاشت مفروض  $F$ ، ابتدا  $\bar{F}(0, 0)$  را مساوی  $e_0$  می گیریم. بعد، لم قبل را جهت گسترش  $\bar{F}$  به ضلع سمت چپ  $0 \times I$  و به ضلع پایینی  $I \times 0$  از  $I \times I$  به کار می بریم. بالاخره،  $\bar{F}$  را به همه  $I \times I$  به شرح ذیل گسترش می دهیم:

زیر قسمتهای

$$s_0 < s_1 < \dots < s_m,$$

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n$$

از  $I$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $F$  هر مستطیل

$$I_i \times I_j = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$$

را بتوی يك مجموعه باز  $B$ ، که به وسیله  $p$  به طور هموار پوشانده می‌شود، بنگارد. (از لم عدد لبتگ استفاده می‌کنیم.) بالا بر  $\bar{F}$  را مرحله به مرحله تعریف می‌کنیم. این کار را از مستطیل  $I_1 \times J_1$  شروع می‌کنیم و با مستطیلهای  $I_i \times J_i$  واقع در «ردیف تحتانی»، کار را ادامه می‌دهیم؛ سپس، نوبت به مستطیلهای  $I_i \times J_j$  ردیف بعدی می‌رسد، و الی آخر.

به‌طور کلی، به ازای  $i_0$  و  $j_0$  مفروض، فرض کنیم که  $\bar{F}$  بر مجموعه  $A$  که برابر است با اجتماع  $I \times 0$  و  $0 \times I$  و همه مستطیلهای «ماقبل»  $I_{i_0} \times J_{j_0}$  (یعنی مستطیلهایی مانند  $I_i \times J_j$  که  $j < j_0$  یا آنها که  $j = j_0$  و  $i < i_0$ ) تعریف شده باشد. همچنین فرض کنیم که  $\bar{F}$  يك بالا بر پیوسته  $F|A$  باشد. اکنون  $\bar{F}$  را بر  $I_{i_0} \times J_{j_0}$  تعریف می‌کنیم. مجموعه باز  $U$  از  $B$  را چنان انتخاب می‌کنیم که به وسیله  $p$  به طور هموار پوشانده شود و شامل  $F(I_{i_0} \times J_{j_0})$  نیز باشد.  $\{V_\alpha\}$  را افراز قاچهای  $U$   $p^{-1}(U)$  می‌گیریم؛ هر مجموعه  $V_\alpha$  به وسیله  $p$  به‌طور هم‌تومورفیک بروی  $U$  نگاشته می‌شود. در این صورت،  $\bar{F}$  قبلاً بر مجموعه  $C = A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0})$  تعریف شده است. این مجموعه اجتماع اضلاع چپ و پایین مستطیل  $I_{i_0} \times J_{j_0}$  است، و در نتیجه، همبند است. بنا بر این،  $\bar{F}(C)$  همبند است و باید کاملاً در یکی از مجموعه‌های  $V_\alpha$ ، مثلاً  $V_0$ ، قرار گیرد. در این حال، موقعیت همان طوری است که در شکل ۱۷ تصویر شده است.

فرض کنیم  $p_0: V_0 \rightarrow U$  نمایش تحدید  $p$  به  $V_0$  باشد. چون  $\bar{F}$  يك بالا بر  $F|A$  است، می‌دانیم که به‌ازای هر  $x$  از  $C$ ،

$$p_0(\bar{F}(x)) = p(\bar{F}(x)) = F(x),$$

که در نتیجه  $\bar{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$ . بنا بر این، میتوان گسترش  $\bar{F}$  از  $F$  را چنین تعریف کرد: به‌ازای هر  $x$  از  $I_{i_0} \times J_{j_0}$ ،

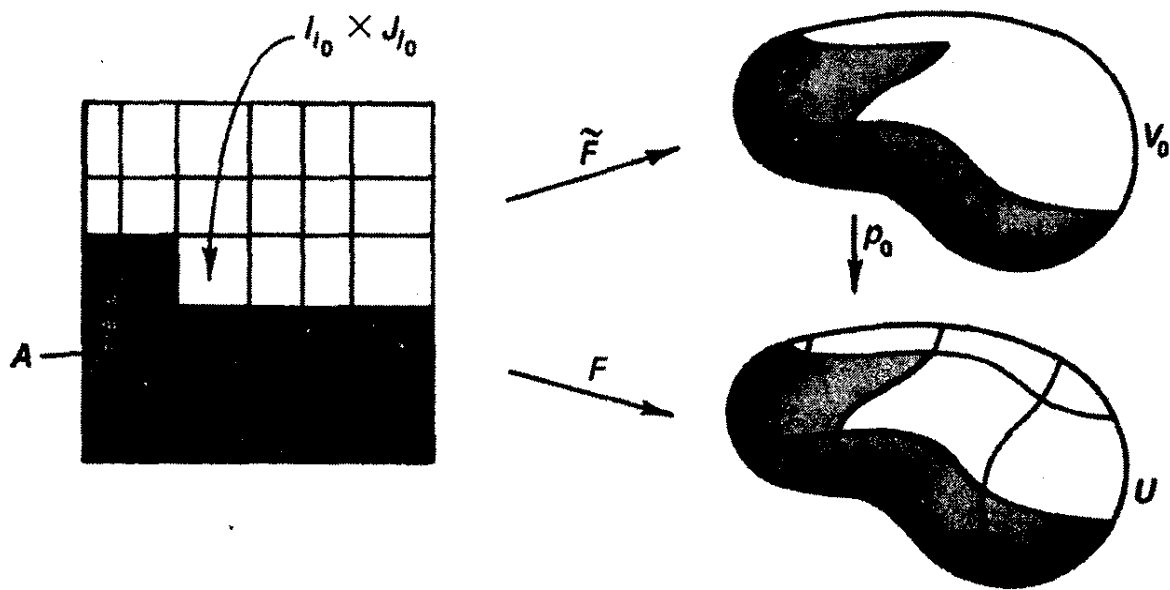
$$\bar{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$$

بنا بر لم چسب، این نگاشت گسترش یافته پیوسته است.

با ادامه این طریقه،  $\bar{F}$  بر همه  $I^2$  تعریف می‌شود.

اکنون فرض کنیم  $F$  يك هم‌توپی راهی باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که  $\bar{F}$  نیز يك هم‌توپی راهی است. نگاشت  $F$  همه  $0 \times I$  (ضلع چپ  $I^2$ ) را بتوی يك نقطه منفرد از  $B$ ، یعنی  $b_0$ ، می‌نگارد. از آنجا که  $\bar{F}$  يك بالا بر  $F$  است،  $\bar{F}$  این ضلع را بتوی مجموعه  $p^{-1}(b_0)$  می‌برد. ولی این مجموعه، به‌عنوان يك زیر فضای  $E$ ، دارای توپولوژی گسسته است. چون  $0 \times I$  همبند و  $\bar{F}$  پیوسته است،  $\bar{F}(0 \times I)$  همبند می‌شود و لهذا باید برابر يك مجموعه تك عضوی باشد. به‌طریقی مشابه،  $\bar{F}(1 \times I)$  الزاماً مجموعه‌ای تك

عضوی است، و لهذا،  $\tilde{F}$  يك هموتوپي راهی است. □



شکل ۱۷

قضیه ذیل بستگی مهمی بین فضاهای پوشی و گروه بنیادی برقرار می‌کند:

۳.۴. قضیه فرض کنیم  $p: E \rightarrow B$  يك نگاشت پوشی باشد و  $p(e_0) = b_0$ . همچنین، فرض کنیم  $f$  و  $g$  دو راه در  $B$  از  $b_0$  به  $b_1$  باشند؛  $\tilde{f}$  و  $\tilde{g}$  را، بترتیب، بالا بر آنها به راههایی در  $E$  با نقطه آغازی  $e_0$  می‌گیریم. اگر  $f$  و  $g$  هموتوپ راهی باشند آنگاه نقاط انجامی  $\tilde{f}$  و  $\tilde{g}$  در  $E$  یکی هستند و  $\tilde{f}$  و  $\tilde{g}$  هموتوپ راهی اند.

برهان. فرض کنیم  $F: I \times I \rightarrow B$  هموتوپي راهی بین  $f$  و  $g$  باشد. در این صورت،  $F(0, 0) = b_0$  فرض کنیم  $\tilde{F}: I \times I \rightarrow E$  بالا بری از  $F$  به  $E$  باشد به طوری که  $\tilde{F}(0, 0) = e_0$ . بنا بر لم قبل،  $\tilde{F}$  هموتوپي راهی است، که در نتیجه  $\tilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$  و  $\tilde{F}(1 \times I)$  مجموعه تک عضوی  $\{e_1\}$  است.

تحدید  $\tilde{F}|_{I \times 0}$  از  $\tilde{F}$  به ضلع پایینی  $I \times I$  راهی در  $E$  با نقطه آغازی  $e_0$  است که يك بالا بر  $F|_{I \times 0}$  است. بنا بر یکتایی بالا بری راهها، باید  $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s)$  می‌شود. زیرا،  $F(0 \times I) = \{e_0\}$ . بنا بر یکتایی بالا بری راهها،  $\tilde{g}(s) = \tilde{F}(s, 1)$  بنا بر این، نقطه انجامی هر دو  $\tilde{f}$  و  $\tilde{g}$  نقطه  $e_1$  است و  $\tilde{f}$  و  $\tilde{g}$  يك هموتوپي راهی بین آنهاست. □

اکنون این قضیه را در مورد  $S^1$  اعمال می‌کنیم.

۴.۴. قضیه گروه بنیادی دایره گروه دوری نامتناهی است.

برهان. فرض کنیم  $b_0$  نقطه  $(1, 0)$  از  $S^1$  باشد، هدف ساختن ایزومورفیسم

$\pi_1(S^1, b_0)$  است با گروه اعداد صحیح، یعنی  $(Z, +)$ .  
برای این منظور، نگاشت پوششی  $p: R \rightarrow S^1$  را با ضابطه

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

در نظر می‌گیریم. اگر  $f$  کمندی در  $S^1$  بر پایه  $b_0$  باشد،  $f$  را بالا بر  $\tilde{f}$  به راهی در  $R$  با آغاز  $\tilde{f}(1)$  فرض می‌کنیم.  $\tilde{f}(1)$  باید نقطه‌ای از مجموعه  $p^{-1}(b_0)$  باشد؛ یعنی  $\tilde{f}(1)$  مساوی عددی است صحیح مانند  $n$ . قضیه قبل می‌گوید که این عدد صحیح تنها به‌رده هموتوپی راهی  $f$  بستگی دارد. بنا بر این، تابع

$$\phi: \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow Z$$

را می‌توان با مساوی قرار دادن  $\phi([f])$  و این عدد صحیح تعریف کرد. ادعا می‌کنیم که  $\phi$  یک ایزومورفیسم گروه‌ها است.

نگاشت  $\phi$  پوشاست. فرض کنیم  $n$  نقطه‌ای از  $p^{-1}(b_0)$  باشد. چون  $R$  همبند راهی است، می‌توان راهی از  $0$  به  $n$  مانند  $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow R$  در  $R$  انتخاب کرد. فرض کنیم  $f = p \circ \tilde{f}$ . در این صورت،  $f$  کمندی است در  $S^1$  با پایه  $b_0$ ، و  $\tilde{f}$  بالا بر آن به راهی در  $R$  با آغاز  $0$  است. بنا بر تعریف،  $\phi([f]) = n$ .

نگاشت  $\phi$  یک به یک است. فرض کنیم که  $\phi([f]) = n = \phi([g])$ . ثابت می‌کنیم که  $[f] = [g]$ .  $\tilde{f}$  و  $\tilde{g}$  را در  $R$  بترتیب، بالا برهای  $f$  و  $g$  به راهی در  $R$  با آغاز  $0$  می‌گیریم؛  $\tilde{f}$  و  $\tilde{g}$ ، بنا بر فرض، هر دو به  $n$  ختم می‌شوند. چون  $R$  همبند ساده است،  $\tilde{f}$  و  $\tilde{g}$  هموتوپ راهی‌اند؛ اگر  $\tilde{F}$  هموتوپی راهی بین آنها باشد آنگاه نگاشت  $F = p \circ \tilde{F}$ ، همان‌طور که می‌توانید بیازمائید، هموتوپی راهی بین  $f$  و  $g$  است.

$\phi$  همومورفیسم است. فرض کنیم  $f$  و  $g$  دو کمند بر پایه  $b_0$  در  $S^1$  باشند؛  $\tilde{f}$  و  $\tilde{g}$  را در  $R$ ، بترتیب، بالا بر آنها به راهی با آغاز  $0$  می‌گیریم. همچنین، فرض کنیم که  $\tilde{f}(1) = n$  و  $\tilde{g}(1) = m$ . راه  $h$  را در  $R$  با ضابطه

$$h(s) = \begin{cases} \tilde{f}(2s) & \text{به ازای } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ n + \tilde{g}(2s - 1) & \text{به ازای } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت،  $h$  راهی است در  $R$  با آغاز  $0$ . مدعی هستیم که  $h$  یک بالا بر  $f * g$  است. ابتدا توجه کنید که چون توابع  $\sin$  و  $\cos$  دارای دوره تناوب  $2\pi$  هستند، به ازای هر  $x$ ، داریم  $p(n+x) = p(x)$ . پس

$$p(h(s)) = \begin{cases} p(\tilde{f}(2s)) = \tilde{f}(2s) & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ p(n + \tilde{g}(2s - 1)) = p(\tilde{g}(2s - 1)) = g(2s - 1)p & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

بنابراین،  $p \circ h = f * g$ ، که در نتیجه،  $h$  بالابر  $f * g$  با نقطه آغازی ۰ است. بنا بر تعریف،  $\phi([f * g])$  همان  $h(1)$  است که مساوی  $m+n$  می باشد. پس،

$$\phi([f * g]) = \phi([f]) + \phi([g]). \quad \square$$

بیشتر برهان قضیه قبل به فضاهای پوشی همبند ساده قابل تعمیم است. تنها قسمتی از برهان که به نگاشت پوشی  $p: R \rightarrow S^1$  وابسته است وجود عمل جمع در  $R$  است. عملی که ما را در اثبات همومورفیسم بودن  $\phi$  یاری کرد؛ در مورد يك فضای پوشی دلخواه عمل جمع مناسبی در اختیار نداریم؛ با وجود این، هنوز می توان اطلاعات جالبی راجع به گروه بنیادی دایره به دست آورد.

۵.۴. قضیه فرض کنیم  $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  يك نگاشت پوشی باشد. اگر  $E$  همبند راهی باشد آنگاه تابعی پوشا مانند

$$\phi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

موجود است. اگر  $E$  همبند ساده باشد  $\phi$  دوسویی است.

برهان. استدلال تقریباً رونوشتی از برهان قضیه ۴.۴ است؛ که شرح آن را به خواننده محلول می کنیم.  $\square$

تعریف. اگر  $E$  يك فضای همبند ساده و  $p: E \rightarrow B$  يك نگاشت پوشی باشد آنگاه  $E$  را يك فضای پوشی عمومی  $B$  می نامیم.

اگر  $E$  يك فضای پوشی عمومی  $B$  باشد آنگاه  $E$  با تقریب همومورفیسم یکتا است. (به شرط آنکه  $B$  همبند راهی موضعی باشد.) تمرین ۱۲ ملاحظه شود. همچنین، در همین تمرین، دلیل نامگذاری  $E$  به فضای پوشی عمومی نیز ارائه شده است. در بخش ۸-۱۴ شرایطی را مطالعه می کنیم، که تحت آنها فضای  $B$  حتماً يك فضای پوشی عمومی دارد.

## تمرینها

۱. برای همومورفیسم موضعی مثال ۴ در بخش ۸-۳، چرا «لم بالابری راه» (لم ۱.۴) برقرار نیست؟

۲. در تعریف نگاشت  $\bar{F}$ ، در برهان لم ۲.۴، چرا در مورد تریبی که در مستطیلهای کوچک، در نظر گرفتیم آن اندازه دقت به خرج می دادیم؟
۳. فرض کنید که  $p: E \rightarrow B$  یک نگاشت پوششی و  $\alpha$  و  $\beta$  راههایی در  $B$  باشند که  $\alpha(1) = \beta(0)$ ؛  $\bar{\alpha}$  و  $\bar{\beta}$  را بالا برهایی از  $\alpha$  و  $\beta$  بگیرید که  $\bar{\alpha}(1) = \bar{\beta}(0)$ . ثابت کنید که  $\bar{\alpha} * \bar{\beta}$  نیز بالا بر  $\alpha * \beta$  است.
۴. نگاشت پوششی  $p: R \times R_+ \rightarrow R^2 - \{0\}$  را (مثال ۳ از بخش ۸-۳) در نظر بگیرید. بالا برهای راههای ذیل را بیابید:

$$f(t) = (2-t, 0),$$

$$g(t) = ((1+t) \cos 2\pi t, (1+t) \sin 2\pi t),$$

$$h(t) = f * g.$$

این راهها و بالا برهایشان را رسم کنید.

۵. فرض کنید  $n \in \mathbb{Z}_+$ . نگاشتهای  $g, h: S^1 \rightarrow S^1$  را با ضوابط  $g(z) = z^n$  و  $h(z) = 1/z^n$  در نظر بگیرید. [در اینجا  $S^1$  نشانگر مجموعه اعداد مختلطی است مانند  $z$  که  $|z| = 1$ ]. همومورفیسمهای القایی  $g_*$  و  $h_*$ ، از گروه دوری نامتناهی  $\pi_1(S^1, b_0)$  بتوی خودش، را محاسبه کنید.

۶. ثابت کنید که توکشندهای مانند  $r: B^2 \rightarrow S^1$  وجود ندارد، که در آن،  $B^2$  گوی واحد در  $R^2$  است.

۷. قضیه ۵.۴ را ثابت کنید.

۸. ثابت کنید که اگر  $B$  همبند ساده باشد آنگاه هر نگاشت پوششی  $p: E \rightarrow B$  که  $E$  همبند راهی باشد، یک همومورفیسم است.

۹. در مثال ۲ از بخش ۸-۳، و راه

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \times (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t)$$

- در  $S^1 \times S^1$  را در نظر بگیرید. وقتی  $S^1 \times S^1$  را با چنبره  $D$  یکی می گیریم، شکل  $f$  چگونه به نظر می رسد؟ بالا بری  $\bar{f}$  از  $f$  به  $R \times R$  را بیابید، و آن را رسم کنید. حدسی راجع به چگونگی گروه بنیادی چنبره بزنید و آن را ثابت کنید.

۱۰. تعمیم ذیل از قضیه ۵.۴ را ثابت کنید:

- قضیه. فرض کنید  $E$  همبند راهی و  $p: E \rightarrow B$  یک نگاشت پوششی باشد، و  $p(e_0) = b_0$ . در این صورت،

(الف)  $p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$  يك به يك است.

(ب) نگاشتنى دوسويى مانند

$$\phi : \pi_1(B, b_0)/H \rightarrow p^{-1}(b_0),$$

موجود است که در آن،  $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$  و  $\pi_1(B, b_0)/H$  عبارت است

از گردایه همرده‌هاى  $H$  در  $\pi_1(B, b_0)$ .

۱۱. مفروضات قضیه قبل را فرض کنید. اگر  $\pi_1(B, b_0)$  گروه دورى نامتناهى باشد،

راجع به  $\pi_1(E, e_0)$  چه مى‌توان گفت؟ اگر  $\pi_1(B, b_0)$  متناهى و  $p$  يك پوشش

$k$  لایى باشد چطور؟

۱۲\*. (الف) لم (لم بالا برى). فرض کنید  $p : E \rightarrow B$  يك نگاشت پوشى باشد، و

$p(e_0) = b_0$ . همچنين،  $f : (Y, y_0) \rightarrow (B, b_0)$  را نگاشتنى پيوسته اختيار

کنید. اگر  $Y$  همبند راهى موضعى و همبند ساده باشد آنگاه  $f$  را مى‌توان به صورتى

يکتا به نگاشتنى مانند  $\bar{f} : Y \rightarrow E$  بالا برد که  $\bar{f}(y_0) = e_0$ .

[داهنمايى: به ازای عضوی مفروض از  $Y$  مانند  $y$ ، راه  $\alpha$  را از  $y_0$  به  $y$

برگزینید؛  $f \circ \alpha$  را به راهی در  $E$  با نقطه آغازی  $e_0$  بالا ببرید، و  $\bar{f}(y)$  را

نقطه انجامی این راه تعريف کنید.]

(ب) قضیه. فرض کنید  $B$  همبند راهى موضعی باشد، و فرض کنید  $p : E \rightarrow B$  يك

فضای پوشى همبند ساده  $B$  باشد. اگر  $p' : E' \rightarrow B$  فضای پوشى همبند راهى

دلخواهی برای  $B$  باشد آنگاه نگاشتنى پوشى مانند  $q : E \rightarrow E'$  موجود است که

$$p = p' \circ q$$

[داهنمايى:  $p$  را به  $E'$  بالا ببرید.] این قضیه دليل نامگذاري  $E$  را به فضای پوشى

عمومی نشان مى‌دهد؛ در واقع، این فضا هر فضای پوشى همبند راهى ديگر  $B$  را نیز

مى‌پوشاند.

(پ) قضیه (يکتايى فضای پوشى عمومى). اگر  $B$  همبند راهى موضعی باشد و

$p : E \rightarrow B$  و  $p' : E' \rightarrow B$  دو فضای پوشى همبند ساده  $B$  باشند آنگاه

هومومورفيسمى مانند  $h : E \rightarrow E'$  موجود است که  $p' \circ h = p$ .

۱۳\*. قضیه. فرض کنید  $G$  يك گروه توپولوژيك با عمل « $\circ$ » باشد، و  $p : \bar{G} \rightarrow G$  را يك

فضای پوشى همبند ساده  $G$  در نظر بگیرید. اگر  $G$  همبند راهى موضعی باشد آنگاه

عمل ضربى مانند  $\odot$  بر  $\bar{G}$  موجود است که  $\bar{G}$  نسبت به آن يك گروه توپولوژيك است

و  $p$  يكتا هومومورفيسم.

[داهنمايى: فرض کنید  $e$  عضو خنثای  $G$  باشد؛  $\bar{e}$  را در  $p^{-1}(e)$  انتخاب کنید.

به ازای دو عضو مفروض  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  راههای  $\bar{\alpha}$  و  $\bar{\beta}$  را از  $\bar{e}$ ، بترتیب،

به  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  برگزینید. فرض کنید  $\alpha(s) = p(\bar{\alpha}(s))$  و  $\beta(s) = p(\bar{\beta}(s))$ . راه



$\gamma(s) = \alpha(s) \cdot \beta(s)$  را در  $G$  اختیار کنید، و آن را به راه  $\tilde{\gamma}$  در  $\tilde{G}$  با نقطه آغازی  $\tilde{e}$  بالا ببرید،  $\tilde{\gamma} \odot \tilde{x}$  را نقطه انجامی راه  $\tilde{\gamma}$  تعریف کنید. گروه  $\tilde{G}$  را گروه پوششی عمومی  $G$  می نامند.

## ۵-۸ گروه بنیادی صفحه سفته

در این بخش ثابت می کنیم که گروه بنیادی صفحه سفته  $R^2 - 0$  گروه دوری نامتناهی است. این مطلب را در موارد متعددی لازم داریم. برهان این موضوع ما را به بحث کوتاهی درباره تو کشیده های دگر دسی و روابطشان با گروه بنیادی می کشاند.

۱.۵. قضیه فرض کنیم  $x_0 \in S^1$ . نگاشت اختوای

$$j : (S^1, x_0) \rightarrow (R^2 - 0, x_0)$$

یک ایزومورفیسم گروه های بنیادی را القا می کند.

برهان. فرض کنیم  $r : R^2 - 0 \rightarrow S^1$  نگاشتی پیوسته باشد با ضابطه  $r(x) = x / \|x\|$  که در آن  $\|x\|$  نمایش فاصله  $x$  از مبدأ  $0$  است با متریک اقلیدسی. نگاشت  $r$  را می توان به صورت فروریزی هر پرتوی شعاعی در  $R^2 - 0$  بروی نقطه تقاطع آن شعاع و  $S^1$  تجسم کرد؛ نگاشت  $r$  هر نقطه  $S^1$  را به خودش می نگارد. مدعی هستیم که  $r_*$  یک معکوس  $j_*$  است. ابتدا نگاشت مرکب

$$(S^1, x_0) \xrightarrow{j} (R^2 - 0, x_0) \xrightarrow{r} (S^1, x_0),$$

را در نظر می گیریم، که مساوی نگاشت همانی  $S^1$  است. در نتیجه، بنا بر خواص تابعگونی همومورفیسم القایی،  $j_* \circ r_*$  ایزومورفیسم همانی  $\pi_1(S^1, x_0)$  است.

برای اثبات اینکه  $r_* \circ j_*$  ایزومورفیسم همانی  $\pi_1(R^2 - 0, x_0)$  با خودش است،  $f$  را کمندی در  $R^2 - 0$  بر پایه  $x_0$  می گیریم. در این صورت،  $j_*(r_*[f])$  رده هموتوپی کمند  $g = j \circ r \circ f : I \rightarrow R^2 - 0$  است که ضابطه تعریف آن عبارت است از

$$g(s) = \frac{f(s)}{\|f(s)\|}.$$

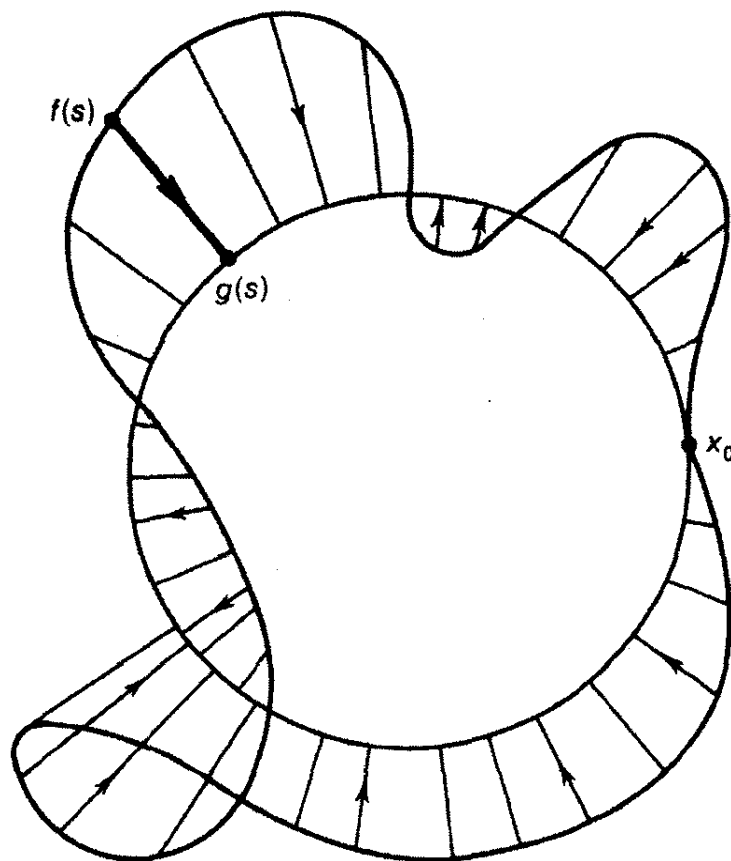
باید ثابت کنیم  $f \simeq g$ ، که البته کار ساده ای است. همان طور که در شکل ۱۸ نشان داده شده است، نقطه  $f(s)$  را بتدریج در طول پرتوی شعاعی آن تا جایی حرکت می دهیم که  $g(s)$  را قطع کند.

به عبارت دقیقتر، تابع  $F : I \times I \rightarrow R^2 - 0$  را با ضابطه

$$F(s, t) = t \frac{f(s)}{\|f(s)\|} + (1-t)f(s)$$

تعریف می‌کنیم. بدیهی است که  $F(s, t)$  هرگز صفر نمی‌شود. زیرا،

$$\frac{t}{\|f(s)\|} + (1-t) \neq 0, \quad f(s) \neq 0.$$



شکل ۱۸

همچنین به ازای هر  $t$ ،  $F(0, t) = F(1, t) = x_0$ . بنا بر این،  $F$  هموتوپی راهی مطلوب بین  $f$  و  $g$  است.  $\square$

در برهان قبل نکته خاصی که به دایره و صفحه ارتباط داشته باشد وجود ندارد. همین برهان عیناً برای اثبات قضیه ذیل به کار می‌رود.

۲.۵. قضیه اگر  $x_0 \in S^{n-1}$  آنگاه تابع اختزالی

$$j : (S^{n-1}, x_0) \rightarrow (R^n - 0, x_0)$$

یک ایزومورفیسم گروه‌های بنیادی را القا می‌کند.

البته، هنوز گروه بنیادی  $S^{n-1}$  را محاسبه نکرده ایم، در نتیجه قضیه اخیر چیز زیادی به ما نمی گوید.

چه چیزی سبب شد تا برهان قبلی کارساز باشد؟ به بیانی نه چندان دقیق، کارسازی آن به دلیل طریقه طبیعی دگردیسی راه  $f$  واقع در  $R^2 - 0$  بتوی راه  $sof$  بود، که در  $S^1$  قرار دارد. طریقه دیگری که می توان به این اثبات نگریست این است که در صورت تمایل، می توان کل فضای  $R^2 - 0$  را، با فروریختن تدریجی هر بتوی شعاعی به محل تقاطع آن با  $S^1$ ، دگردیس کرد. این یکی از دگرگونیهایی راه  $f$  بتوی راه  $sof$  است که به توکشنده دگردیسی قوی  $R^2 - 0$  بروی  $S^1$  موسوم است.

تحلیل این گونه برهان منجر به تعمیم قضیه ۱.۵ می شود. اگرچه، در این کتاب فرصتی برای به کار بستن آن نخواهیم داشت، با این حال، قضیه بسیار مفیدی در محاسبه گروههای هموتوپی است.

یادآوری می کنیم که زیر فضای  $A$  از  $X$  را یک توکشنده  $X$  گوئیم در صورتی که نگاشتی پیوسته مانند  $r: X \rightarrow A$  موجود باشد به طوری که به ازای هر عضو  $A$  مانند  $a$ ، داشته باشیم  $r(a) = a$ . نگاشت  $r$  را توکشنده  $X$  بروی  $A$  می نامیم.

تعریف. فرض کنیم  $A$  زیر مجموعه ای از  $X$  باشد، در این صورت،  $A$  را یک توکشنده دگردیسی قوی  $X$  گوئیم در صورتی که نگاشتی پیوسته مانند  $H: X \times I \rightarrow X$  موجود باشد به طوری که

$$H(x, 0) = x \quad , x \in X, \text{ به ازای}$$

$$H(x, 1) \in A \quad , x \in X, \text{ به ازای}$$

$$H(a, t) = a, \quad t \in I \text{ و } a \in A \text{ به ازای}$$

نگاشت  $H$  به توکشنده دگردیسی قوی موسوم است.

به بیانی دیگر، فضای  $A$  وقتی توکشنده دگردیسی قوی  $X$  است که  $X$  را بتوان تدریجاً طوری به  $A$  دگردیس کرد که هر نقطه  $A$  ضمن این دگردیسی ثابت بماند. در انتهای این دگردیسی، یک توکشنده از  $X$  بروی  $A$  داریم که  $x$  را بتوی  $H(x, 1)$  می نگارد.

مثال ۱. نگاشت  $H: (R^n - 0) \times I \rightarrow R^n - 0$  با ضابطه

$$H(x, t) = t \frac{x}{\|x\|} + (1-t)x$$

یک توکشنده دگردیسی قوی  $R^2 - 0$  بروی  $S^{n-1}$  است؛ این نگاشت به تدریج پرتوهای شعاعی از هر نقطه را بتوی نقطه تقاطع آن خط با  $S^{n-1}$  فرو می ریزد.

۳.۵. قضیه فرض کنیم  $A$  یک توکشیده دگردیسی قوی  $X$  باشد و  $a_0 \in A$ . در این صورت نگاشت احتوای

$$j: (A, a_0) \rightarrow (X, a_0)$$

یک ایزومورفیسم گروههای بنیادی را القا می کند.

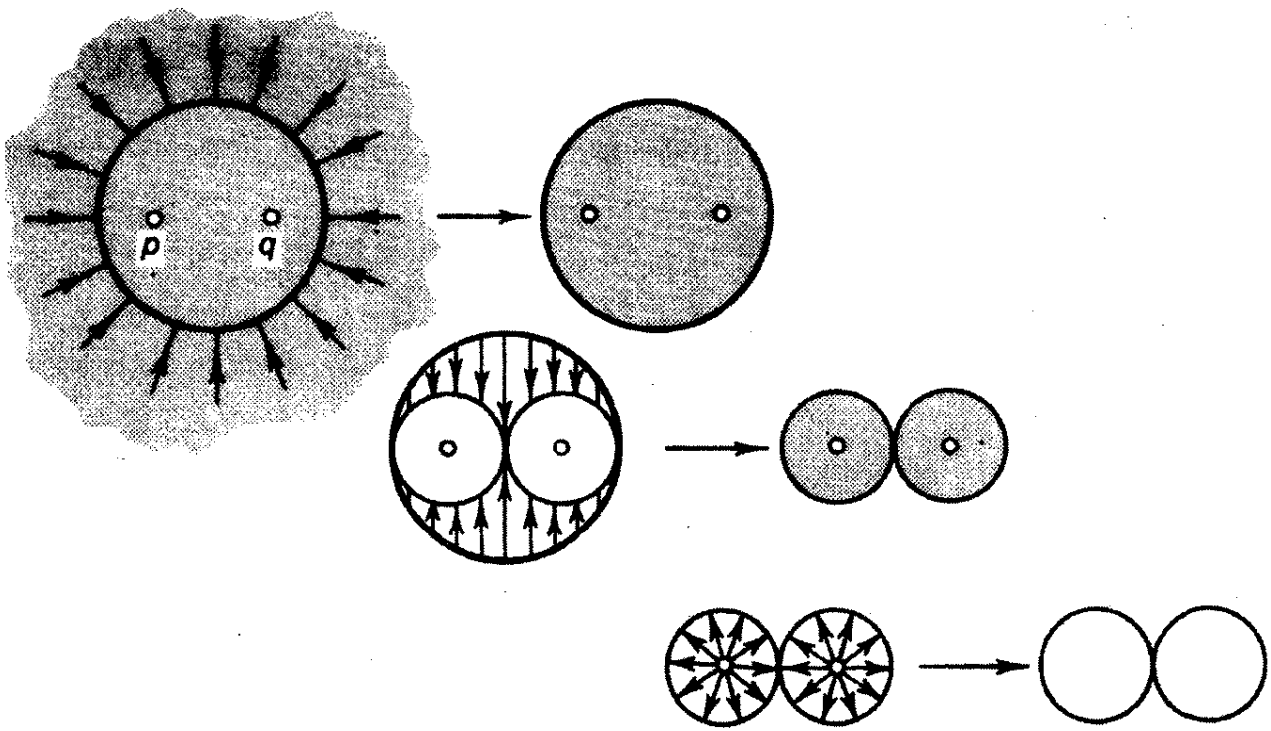
برهان؛ مشابه برهان قضیه ۱.۵ است، و ما بررسی برهان آن را به خواننده محول می کنیم. قضیه اخیر، با تبدیل فضاهای مورد بحث به فضاهای آشنا تر، می تواند در محاسبه گروههای بنیادی تعدادی از فضاها به کار رود. یک مثال نوعی عبارت است از:

مثال ۲. فرض کنیم  $B$  نمایش محور  $Z$  ها در  $R^3$  باشد. فضای  $R^3 - B$  را در نظر می گیریم.  $(R^3 - \{0\}) \times \{0\}$  صفحه سفته  $xy$ ، یعنی  $(R - \{0\}) \times \{0\}$  یک توکشیده دگردیسی قوی این فضا است. نگاشت  $H$  با ضابطه

$$H(x, y, z, t) = (x, y, tz)$$

یک توکشیده دگردیسی قوی است؛ این نگاشت بتدریج هر خط موازی محور  $Z$  ها را بتوی نقطه تقاطع آن با صفحه  $xy$  فرو می ریزد. نتیجه می گیریم که فضای  $R^3 - B$  دارای یک گروه بنیادی دوری نامتناهی است.

مثال ۳. صفحه دوبار سفته  $R^3 - p - q$  را در نظر می گیریم، ادعا می کنیم که فضای «بدشکل ۸» یک توکشیده دگردیسی قوی این فضا است. به جای نوشتن ضوابط آن، به ترسیم توکشیده دگردیسی اکتفا می کنیم؛ همان طور که در شکل ۱۹ نشان داده شده است، حاصل



شکل ۱۹

يك دگرديسی سه مرحله‌ای است.

مثال ۴. فضای تنا، يك توکشیده دگرديسی قوی دیگر از  $R^2 - p - q$  است،

$$\theta = S^1 \cup (0 \times [-1, 1]).$$

طراحی نگاشتهای مورد بحث را به خواننده واگذار می‌کنیم. به عنوان يك نتیجه، فضای به شکل  $B$  و فضای تنا ( $\theta$ ) دارای گروههای بنیادی ایزومورف‌اند، اگرچه هیچیک توکشیده دگرديسی قوی از دیگری نیستند.

البته، هنوز چیزی راجع به گروه بنیادی فضای به شکل  $B$  نمی‌دانیم. ولی بعداً خواهیم دانست.

تذکر این نکته بجاست که اگر شرط

$$H(a, t) = a, \quad t \in I \text{ و } a \in A$$

را جایگزین هر يك از شرایط ضعیفتر

$$H(a, t) \in A, \quad t \in I \text{ و } a \in A$$

یا

$$H(a, 1) = a, \quad a \in A$$

کنیم، مجدداً قضیه ۳.۵ برقرار است. اما برهان در هر يك از این حالات دشوارتر است. (تمرین ۵ در بخش ۸-۱۱ ملاحظه شود.) به هر حال، در عمل معمولاً قضیه مورد استفاده همان قضیه ۳.۵ است.

## تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر  $A$  يك توکشیده دگرديسی قوی  $X$  و  $B$  يك توکشیده دگرديسی قوی  $A$  باشد آنگاه  $B$  يك توکشیده دگرديسی قوی  $X$  است.
۲. ثابت کنید که راههای  $f$  و  $h$  در مثال ۲ از بخش ۸-۱ هموتوپ راهی نیستند.
۳. قضیه ۲.۵ را ثابت کنید.
۴. قضیه ۳.۵ را ثابت کنید.
۵. گروه بنیادی در هر يك از فضاهای ذیل بدیهی، دوری نامتناهی، یا ایزومورف با گروه بنیادی فضای به شکل  $B$  است. در هر مورد تعیین کنید که کداميك از این سه شق برقرار است.  
(الف) «چنبره جامد»  $B^2 \times S^1$ .

- (ب) فضای حاصل از برداشتن يك نقطه از چنبره  $T$ .  
 (پ) استوانه  $S^1 \times I$ .  
 (ت) استوانه نامتناهى  $S^1 \times R$ .  
 (ث) فضای حاصل از حذف قسمت نامنفى محورهای  $x, y$ ، و  $z$  از  $R^3$ .

زیرفضاهای ذیل از  $R^2$  :

- (ج)  $\{x \mid \|x\| > 1\}$   
 (چ)  $\{x \mid \|x\| \geq 1\}$   
 (ح)  $\{x \mid \|x\| < 1\}$   
 (خ)  $S^1 \cup (R_+ \times 0)$   
 (د)  $S^1 \cup (R_+ \times R)$   
 (ذ)  $S^1 \cup (R \times 0)$   
 (ر)  $R^2 - (R_+ \times 0)$

۶. فرض کنید  $C$  نمایش صفحه مختلط باشد و  $f$  کمندی در  $C - 0$  بر پایه  $x_0$ .  
 (الف) نگاشت پوشى استانده  $p: R \rightarrow S^1$  را اختیار کنید. در  $S^1$  کمند  $h(s) = f(s)/\|f(s)\|$  را در نظر بگیرید و آن را به يك راه در  $R$  مانند  $\bar{h}$  بالا ببرید. در این صورت، عدد صحیحى مانند  $n$  هست که  $\bar{h}(1) = \bar{h}(0) + n$  نشان دهید که رده هموتوپى راهى  $f$  عدد  $n$  را به صورتى یکتا مشخص می کند، و بالعکس. عدد صحیح  $n$  را عدد پیچش  $f$  نسبت به  $0$  می نامند.  
 (ب) قضیه. فرض کنید  $f$  يك کمند در  $C - 0$  و قطعه به قطعه مشتق پذیر باشد. در این صورت، عدد پیچش  $f$  نسبت به  $0$  برابر است

$$\frac{1}{2\pi i} \int_f \frac{dz}{z}$$

[داهنمایی: اگر  $z = g(s)$  راه قطعه به قطعه مشتق پذیر دلخواهى در  $C - 0$  باشد، راه  $s \rightarrow g(s)/\|g(s)\|$  را در  $S^1$  در نظر بگیرید و فرض کنید که  $\theta$  يك بالابر آن به فضای پوشى  $R$  باشد. در این صورت،  $g(s) = \|g(s)\|e^{i\pi\theta(s)}$ . انتگرال  $\int_g dz/z$  را محاسبه کنید.]

(پ) فرض کنید  $b_0 = 1 + iz$ . ایزومورفیسمهای استانده ذیل موجودند،

$$\pi_1(C - 0, x_0) \rightarrow \pi_1(C - 0, b_0) \rightarrow \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow Z.$$

ثابت کنید که عدد پیچش  $f$  با تصویر  $[f]$  تحت این ایزومورفیسمها برابر است.

۷. (الف) ثابت کنید که  $R^2 - 0$  همبند ساده است. [داهنمایی: به ازای کمندی مفروض در  $R^2 - 0$  بر پایه  $x_0$  مانند  $f$ ، ابتدا ثابت کنید که  $f$  هموتوپ راهى با کمندی

است که از تعدادی متناهی از قطعه خطهای مستقیمی که هیچیک از آنها با قطعه خط  
 واصل بین  $x_0$  و مبدأ هم‌صفحه نیستند، تشکیل شده است. ]  
 (ب) ثابت کنید  $S^2$  همبند ساده است.

### ۸-۶ گروه بنیادی $S^n$

اکنون با اثبات اینکه  $S^n$  به‌ازای  $n \geq 2$  همبند ساده است، گروه بنیادی  $S^n$  را محاسبه  
 می‌کنیم. طرح برهانی برای حالت  $n = 2$  را در تمرین ۷ بخش قبل خلاصه کرده‌ایم. در  
 اینجا برهان متفاوتی، به کمک قضیه‌ای که به‌رحال بعداً لازم خواهد شد، می‌آوریم.

۱.۶. قضیه (قضیه ون کمپن<sup>۱</sup> در حالت خاص). فرض کنیم  $X = U \cup V$ ، که در  
 اینجا  $U$  و  $V$  در  $X$  بازند و  $U \cap V$  همبند راهی است.  $x_0$  را نقطه‌ای از  $U \cap V$   
 اختیار کنید. اگر هر دو تابع احتوای

$$i : (U, x_0) \rightarrow (X, x_0), \quad j : (V, x_0) \rightarrow (X, x_0)$$

همومورفیسمهای صفرگردهای بنیادی را القا کنند آنگاه  $\pi_1(X, x_0) = 0$ .

توجه کنید که اگر  $U$  و  $V$  همبند ساده باشند آنگاه  $i_*$  و  $j_*$  هر دو الزاماً همو-  
 مورفیسمهای صفرند. این همان مطلبی است که در قضیه ذیل به آن نیاز داریم. در اثبات  
 قضیه جداسازی ژوردان (بخش ۸-۱۲) نتیجه کلیتری احتیاج خواهیم داشت.

برهان. فرض کنیم  $f : I \rightarrow X$  کمندی بر پایه  $x_0$  باشد. ثابت می‌کنیم که  $f$   
 با یک کمند ثابت هموتوپ راهی است.

مرحله ۱. بنا بر لم عدد لبگگ، زیر تقسیمی بر بازه  $[0, 1]$ ، مانند

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1,$$

موجود است که به‌ازای هر  $i$ ، مجموعه  $f([a_{i-1}, a_i])$  کاملاً در یکی از مجموعه‌های  
 $U$  یا  $V$  قرار می‌گیرد. در میان همه این زیر تقسیمها، آن زیر تقسیمی را بر می‌گزینیم که  
 $n$ ، یعنی تعداد زیر بازه‌های آن، مینیمال باشد. در این صورت، نتیجه می‌شود که به‌ازای  
 هر  $i$  نقطه  $f(a_i)$  در  $U \cap V$  قرار دارد.

مثلاً، فرض کنیم  $f(a_i) \notin U$ . در این صورت، هیچکدام از مجموعه‌های  
 $f([a_{i-1}, a_i])$  و  $f([a_i, a_{i+1}])$  نمی‌توانند کاملاً در  $U$  قرار گیرند. بنابراین، هر دو  
 باید کاملاً در  $V$  باشند. با حذف نقطه  $a_i$  از این تقسیمات، زیر تقسیم دیگری برای بازه  
 $[0, 1]$  با این خاصیت به‌دست می‌آید که تصویر هر یک از زیر بازه‌ها، در  $U$  یا در  $V$   
 قرار دارد، و این با مینیمال بودن  $n$  تناقض دارد. پس،  $f(a_i) \in U$ .

مرحله ۲. تحديد  $f$  را به بازه  $[a_{i-1}, a_i]$  در نظر مى گیریم. این تحديد را با تعريف

$$f_i(s) = f((1-s)a_{i-1} + sa_i) \quad , s \in [0, 1]$$

بر پایه بازه  $[0, 1]$  پارامتری می کنیم. ثابت می کنیم که  $f_i$ ، باهر راهی که كاملاً در  $U$  قرار دارد، هموتوپ راهی است.

البته اگر خود  $f_i$  در  $U$  قرار بگیرد انجام هیچ کاری ضرورت ندارد. در این حالت،  $F_i$  را هموتوپى بدیهی  $F_i(s, t) = f_i(s)$  از  $f_i$  به خودش تعريف می کنیم.

اگر  $f_i$  در  $U$  قرار نداشته باشد آنگاه باید كاملاً در  $V$  قرار گیرد. بنا بر خاصیت

همبندی راهی  $U \cap V$ ، راههای  $g$  و  $h$  را در  $U \cap V$  از نقطه پایه ای  $x_0$ ، بترتیب، به

$f_i(0)$  و  $f_i(1)$  انتخاب می کنیم. (شکل ۲۰ ملاحظه شود). ترکیب  $\bar{h} * (g * f_i)$  را،

که کمندی است در  $V$  بر پایه  $x_0$  در نظر می گیریم. این کمند، تحت نگاهت احتوائی  $Z$ ،

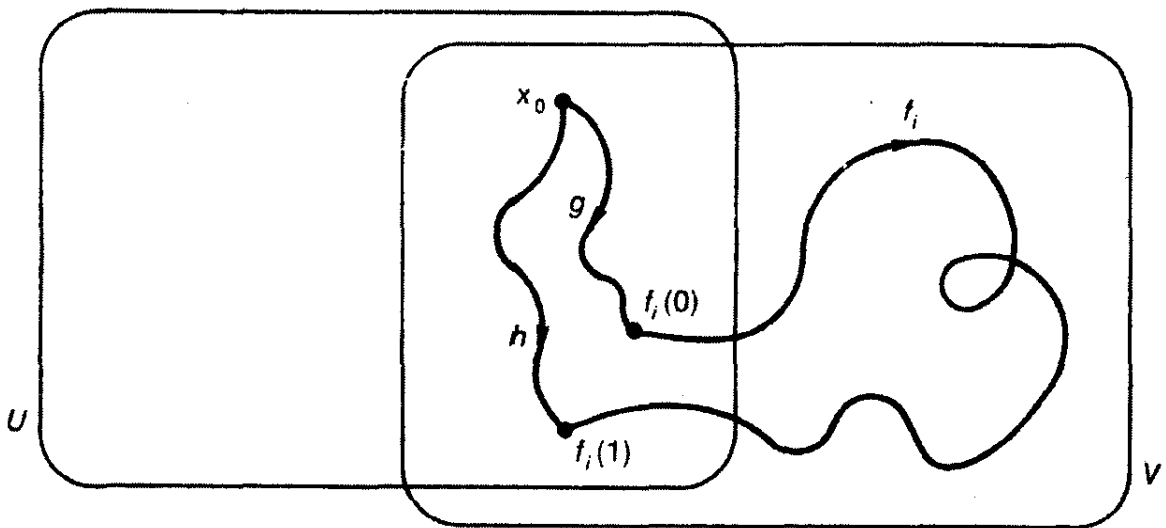
بتوی کمندی در  $X$  بر پایه  $x_0$  بدل می شود. چون  $Z$  همومورفیسم صفر است، این کمند،

در  $X$ ، با کمند ثابت  $e_{x_0}$  هموتوپ راهی است. در این صورت  $f_i$  (در  $X$ ) با راه  $\bar{g} * h$

هموتوپ راهی است (بنا بر خواص گروهواری  $*$  که در قضیه ۲.۱ ثابت شد). فرض کنیم

$F_i$  این هموتوپى راهی باشد، در این صورت  $F_i$  يك هموتوپى راهی (در  $X$ ) بین  $f_i$  و

راهی واقع در  $U \cap V$  است.



شکل ۲۰

اینک هر هموتوپى راهی  $F_i$  را طوری پارامتری می کنیم که نگاهتشی از  $[a_{i-1}, a_i] \times I$

بتوی  $X$  به دست آید، سپس، با چسباندن این قطعات به یکدیگر يك هموتوپى راهی بین

$f$  و راهی که كاملاً در  $U$  قرار دارد، به دست می آوریم. بویژه، نگاهت  $F : I \times I \rightarrow X$

را با ضابطه



$$F(s, t) = F_i \left( \frac{s - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}}, t \right) \quad , s \in [a_{i-1}, a_i]$$

تعریف می‌کنیم. چون هر هموتوبی راهی  $F_i$  نقاط انجامی را ثابت نگه می‌دارد،  $F$  خوشتعریف است، و لم حسب، پیوستگی آن را محقق می‌گرداند. فرض کنیم  $f'(s) = F(s, 1)$ .

مرحله ۳. ثابت کردیم که  $f$  (در  $X$ ) با کمندی مانند  $f'$  که کاملاً در  $U$  قرار دارد هموتوبی راهی است. چون

$$i_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

همومورفیسم صفر است، کمند  $f'$  باید (در  $X$ ) با کمند ثابت  $e_{x_0}$  هموتوبی راهی باشد. بنابراین به عنوان کمندهایی در  $X$ ،  $f \simeq_p f' \simeq_p e_{x_0}$ ، این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.  $\square$

این قضیه حالت خاصی از قضیه مشهوری در توپولوژی است موسوم به قضیه ون کمپن؛ که در حالت کلی گروه بنیادی فضای  $X$  را بر حسب گروههای بنیادی  $U$  و  $V$  و همومورفیسمهای القایی نگاشتهای احتوای  $U \cap V$  بتوی  $U$  و  $V$  بیان می‌دارد، مشروط بر آنکه  $U \cap V$  همبند راهی باشد. ( $[M]$  ملاحظه شود.)

۲.۶. قضیه به‌ازای  $n \geq 2$ ، کره  $n$  بعدی  $S^n$  همبند ساده است.

پرهان. فرض کنیم  $p = (0, \dots, 0, 1) \in R^{n+1}$  «قطب شمال»  $S^n$  باشد، و  $q = (0, \dots, 0, -1)$  «قطب جنوب» آن.

مرحله ۱. ابتدا ثابت می‌کنیم که  $S^n - p$  با  $R^n$  همومورف است. فرض کنیم  $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$  نقطه‌ای از  $S^n$  متمایز از  $p$  باشد. خط مستقیمی را که در  $R^{n+1}$  به وسیله  $x$  و  $p$  مشخص می‌شود در نظر می‌گیریم، و آن را با صفحه  $x_{n+1} = 0$  قطع می‌دهیم.  $f(x)$  را نمایش این نقطه تقاطع اختیار می‌کنیم. نگاشت حاصل  $f : S^n - p \rightarrow R^n$  را تصویر گنجانگاری می‌نامند. دقیقتر آنکه، نگاشت  $f$  را با ضابطه

$$f(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n)$$

تعریف می‌کنیم. پیوستگی  $f$  بدیهی است. برای اثبات همومورفیسم بودن  $f$ ، ثابت می‌کنیم که نگاشت  $g : R^n \rightarrow S^n - p$  با ضابطه

$$g(y_1, \dots, y_n) = (ty_1, ty_2, \dots, ty_n, 1-t),$$

معکوس  $f$  است، که در آن،  $t = 2 / (1 + (y_1)^2 + \dots + (y_n)^2)$

چون  $S^n - p$  با  $S^n - q$  تحت نگاشت انعكاسى

$$\rho(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1}),$$

هومئومورف اند،  $S^n - q$  نیز با  $R^n$  هومئومورف می شود.

مرحله ۲. اکنون فرض کنیم  $U = S^n - p$  و  $V = S^n - q$ . فضای  $S^n$  برابر اجتماع مجموعه‌های باز  $U$  و  $V$  است. علاوه،  $U$  و  $V$  همبند ساده اند، زیرا با  $R^n$  هومئومورف اند. اگر ثابت کنیم که  $U \cap V$  همبند راهی است آنگاه می توانیم همبند ساده بودن  $S^n$  را از قضیه ۱.۶ نتیجه بگیریم.

مقطع  $U$  و  $V$  عبارت است از مجموعه  $S^n - p - q$ . برای اثبات اینکه این مجموعه همبند است، توجه کنید که مجموعه اخیر تحت تصویر گنجانگاری با  $R^n - 0$  هومئومورف است، و به آسانی می توان ثابت کرد که  $R^n - 0$  همبند راهی است: هر نقطه  $x$  از  $R^n - 0$  را می توان با خطی مستقیم به نقطه  $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$  وصل کرد، مگر نقاطی را که به صورت  $(a, 0, \dots, 0)$  هستند و در آن  $a < 0$ . در چنین حالتی می توانیم خط مستقیم از  $x$  به  $x_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$  را توأم با خط مستقیم از  $x_1$  به  $x_0$  اختیار کنیم. (البته، در اینجا، از این امر که  $n > 1$  استفاده می کنیم). □

۳.۶. نتیجه اگر  $n > 2$ ،  $R^n - 0$  همبند ساده است.

برهان. بنا بر قضیه ۲.۵ گروههای بنیادی  $S^{n-1}$  و  $R^n - 0$  ایزومورف هستند. □

۴.۶. نتیجه به ازای  $n > 2$ ،  $R^n$  و  $R^2$  هومئومورف نیستند.

برهان. فضای حاصل از حذف يك نقطه از  $R^n$  فضایی است همبند ساده، و حال آنکه در مورد  $R^2$  چنین نیست. □

این نتیجه تعمیمی به ابعاد بالاتر دارد؛ اگر  $n \neq m$  آنگاه  $R^n$  و  $R^m$  هومئومورف نیستند. اما برهان به وسایلی بیشتر از آنچه که ما در توپولوژی جبری به دست آورده ایم نیاز دارد.

## تمرینها

۱. فرض کنید فضای  $X$  اجتماع دو نسخه از  $S^2$  باشد که يك نقطه مشترك دارند. گروه بنیادی  $X$  چیست؟ درستی پاسخ خود را ثابت کنید. [احتیاط کنید! اجتماع دو فضای همبند ساده که يك نقطه مشترك دارند الزاماً همبند ساده نیست. صفحه ۷۷ از [S] ملاحظه شود.]

۳. فرض کنید فضای  $X$  اجتماع دو مجموعه باز  $U$  و  $V$  باشد؛ و فرض کنید  $U \cap V$  همبند راهی باشد و  $x_0 \in U \cap V$ . مانند قضیه ۱.۶،  $i$  و  $j$  را نگاشتهای احتوا

بگیرید. اگر بدانید که  $p_*$  همومورفیسم صفر است راجع به  $i_*$  چه می‌توانید بگوئید؟

۳. چه ابرادی به «برهان» ذیل برای اینکه  $S^2$  همبند ساده باشد وارد است. فرض کنید  $f$  کمندی در  $S^2$  بر پایه  $x_0$  باشد. نقطه  $p$  از  $S^2$  را که در تصویر  $f$  قرار ندارد انتخاب کنید. چون  $p \in S^2 - p$  با  $R^2$  همثومورف و  $R^2$  همبند ساده است، کمند  $f$  با کمند ثابت هموتوپ راهی است.

## ۸-۷ گروههای بنیادی سطوح

یادآوری می‌کنیم که یک سطح فضایی است هاوسدورف با پایه‌ای شمارا، که هر نقطه آن همسایگی دارد که با زیرمجموعه‌ی بازی از  $R^2$  همثومورف است. سطوح درقسمتهای مختلف ریاضیات مورد توجه هستند، از جمله در هندسه، توپولوژی، و آنالیز مختلط. آنچه که ما در اینجا انجام می‌دهیم، در نظر گرفتن چهار سطح است - سطح  $S^2$ ، سطح تصویری  $p^2$ ، چنبره  $T$ ، و چنبره مضاعف  $T_p$  - و با مقایسه‌ی گروههای بنیادی آنها ثابت می‌کنیم که این سطوح همثومورف نیستند.

در واقع، گروه بنیادی را می‌توان برای رده‌بندی کردن همه‌ی سطوح فشرده به کار برد؛ ولی ما در این جهت تلاشی نخواهیم کرد. خوانندگان علاقه‌مند را به فصل چهارم [M] مراجعه می‌دهیم.

ابتدا چنبره را در نظر می‌گیریم. برای محاسبه‌ی گروه بنیادی آن، به قضیه‌ای در مورد گروه بنیادی فضای حاصل ضربی نیاز داریم.

۱۰۷. قضیه  $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$  با  $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$  ایزومورف است.

برهان. یادآوری می‌کنیم که اگر  $A$  و  $B$  گروههایی با عمل « $\cdot$ » در آن باشند آنگاه حاصل ضرب دکارتی آنها، یعنی  $A \times B$ ، با عمل

$$(a \times b) \cdot (a' \times b') = (a \cdot a') \times (b \cdot b')$$

یک گروه است. همچنین، اگر  $h: C \rightarrow A$  و  $k: C \rightarrow B$  همومورفیسمهای گروه باشند آنگاه نگاشت  $\Phi: C \rightarrow A \times B$  با ضابطه  $\Phi(c) = h(c) \times k(c)$  یک همومورفیسم گروه است.

حال فرض کنیم که  $p: X \times Y \rightarrow X$  و  $q: X \times Y \rightarrow Y$  نگاشتهای تصویری باشند. اگر نقاط پایه را که در صورت قضیه معین شده است به کار ببندیم، همومورفیسمهای القایی

$$p_*: \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0),$$

$$q_*: \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0),$$

حاصل مى شوند. همومورفیسم

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

را با ضابطه

$$\Phi([f]) = p_*([f]) \times q_*([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f]$$

تعریف مى کنیم. ثابت مى کنیم که  $\Phi$  يك ایزومورفیسم است.

نگاشت  $\Phi$  پوشاست. فرض کنیم  $g : I \rightarrow X$  کمندى بر پایه  $x_0$  و  $h : I \rightarrow Y$  کمندى بر پایه  $y_0$  باشند. ثابت مى کنیم که عضو  $[g] \times [h]$  در حوزة مقادير  $\Phi$  قرار دارد. نگاشت  $f : I \rightarrow X \times Y$  را با ضابطه

$$f(s) = g(s) \times h(s)$$

تعریف مى کنیم. در این صورت  $f$  کمندى است در  $X \times Y$  بر پایه  $x_0 \times y_0$  و همان طور که مى خواستيم

$$\Phi([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f] = [g] \times [h].$$

هسته  $\Phi$  صفر است. فرض کنیم  $f : I \rightarrow X \times Y$  کمندى باشد در  $X \times Y$  بر پایه  $x_0 \times y_0$  و  $\Phi([f]) = [p \circ f] \times [q \circ f]$  عضو ختای آن باشد. بدین معنی که  $p \circ f \simeq_p e_{x_0}$  و  $q \circ f \simeq_q e_{y_0}$  و  $G$  و  $H$  را هموتوپيهای راهی مربوطه اختیار مى کنیم. در این صورت، نگاشت  $F : I \times I \rightarrow X \times Y$  با ضابطه

$$F(s, t) = G(s, t) \times H(s, t)$$

هموتوپى مطلوب بين  $f$  و کمند ثابت بر پایه  $x_0 \times y_0$  است.  $\square$

۲۰۷. نتیجه گروه بنیادی چنبره  $T = S^1 \times S^1$  با گروه  $Z \times Z$  ایزومورف است.

اکنون صفحه تصویری را تعريف و گروه بنیادی آن را محاسبه مى کنیم.

تعریف. صفحه تصویری  $p^2$  فضایی است که از  $S^2$  به وسیله یکی گرفتن هر نقطه  $x$  با نقطه متقاطع آن، یعنی  $-x$ ، به دست مى آید.

به بیان رسمیترا، با قرار دادن  $x \sim x$  و  $x \sim (-x)$  يك رابطه هم ارزی در  $S^2$  تعريف مى کنیم؛ در این صورت،  $p^2$  مجموعه رده های هم ارزی است. فرض کنیم که نگاشت  $p : S^2 \rightarrow p^2$  هر نقطه  $x$  را به رده هم ارزی آن بنگارد. توپولوژی  $p^2$  را چنین تعريف مى کنیم؛ مجموعه  $V$  در  $p^2$  باز است اگر و تنها اگر  $p^{-1}(V)$  در  $S^2$  باز باشد. صفحه تصویری موضوع اصلی هندسه تصویری است، درست به گونه ای که صفحه

اقلیدسی  $R^2$  در هندسه اقلیدسی معمولی است. توپولوژی‌دانها عمدتاً به‌عنوان مثالی از يك سطح به آن علاقه‌مند هستند.

۳.۷. قضیه صفحه نظری  $P^2$  يك سطح است و  $p : S^2 \rightarrow P^2$  نگاشتی پوششی.

پرهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که  $p$  نگاشتی باز است. فرض کنیم  $U$  در  $S^2$  باز باشد. نگاشت متقاطع  $a : S^2 \rightarrow S^2$  با ضابطه  $a(x) = -x$  يك هومئومورفیسم  $S^2$  است؛ بنابراین،  $a(U)$  در  $S^2$  باز است. از آنجا که

$$p^{-1}(p(U)) = U \cup a(U),$$

این مجموعه نیز در  $S^2$  باز است. در نتیجه، بنا بر تعریف،  $p(U)$  در  $P^2$  باز است. اکنون ثابت می‌کنیم که  $p$  يك نگاشت پوششی است. به ازای نقطه مفروض  $y$  از  $P^2$ ، نقطه  $x$  را از  $p^{-1}(y)$  انتخاب می‌کنیم. سپس، با به‌کار بردن  $d$  (متری اقلیدسی  $R^2$ ) - همسایگی از  $x$  مانند  $U$  در  $S^2$  انتخاب می‌کنیم به طوری که  $1 < \varepsilon$ . در این صورت،  $U$  شامل هیچ زوج از نقاط متقاطع  $S^2$  مانند  $\{z, a(z)\}$  نیست، زیرا  $d(z, a(z)) = 2$ . در نتیجه، نگاشت

$$p : U \rightarrow p(U)$$

دوسویی است. از آنجا که  $p$  پیوسته و باز است نتیجه می‌شود که هومئومورفیسم است. به طریقی مشابه

$$p : a(U) \rightarrow p(a(U)) = p(U)$$

نیز هومئومورفیسم است. بنابراین مجموعه  $p^{-1}(p(U))$  برابر اجتماع دو مجموعه باز جدا از هم  $U$  و  $a(U)$  است، که هر يك به وسیله  $p$  به‌طور هومئومورفیک بروی  $p(U)$  نگاشته می‌شود.

در این صورت،  $p(U)$  يك همسایگی نقطه  $p(x) = y$  است که به وسیله  $p$  به‌طور هموار پوشانده می‌شود. بنابراین  $p$  يك نگاشت پوششی است.

چون  $S^2$  پایه‌ای شمارا مانند  $\{U_n\}$  دارد،  $\{p(U_n)\}$  پایه شمارای فضای  $P^2$  است. ثابت می‌کنیم که  $P^2$  هاوسدورف است. فرض کنید  $y_1$  و  $y_2$  دو نقطه  $P^2$  باشند. مجموعه  $p^{-1}(y_1) \cup p^{-1}(y_2)$  از چهار نقطه تشکیل می‌شود؛ فرض کنیم  $2\varepsilon$  مینیموم فواصل بین آنها باشد.  $U_1$  را  $\varepsilon$ -همسایگی یکی از نقاط  $p^{-1}(y_1)$  و  $U_2$  را  $\varepsilon$ -همسایگی یکی از نقاط  $p^{-1}(y_2)$  اختیار می‌کنیم. در این صورت،

$$U_2 \cup a(U_2), \quad U_1 \cup a(U_1)$$

جدا از هم هستند. نتیجه اینکه  $p(U_2)$  و  $p(U_1)$  در  $P^2$  همسایگیهای جدا از همی بترتیب، برای  $y_1$  و  $y_2$  هستند.

چون  $S^2$  يك سطح است و هر نقطه  $P^2$  همسایگی هومئومورف با زیرمجموعه بازی از  $S^2$  دارد، فضای  $P^2$  يك سطح است.  $\square$

۴.۷. نتیجه  $\pi_1(P^2, y)$  يك گروه مرتبه ۲ است.

برهان. تصویر  $p: S^2 \rightarrow P^2$  يك نگاشت پوششی است. چون  $S^2$  همبند ساده است، می توان قضیه ۵.۴ را به کار بست که می گوید تناظری دوسویی بین  $\pi_1(P^2, y)$  و مجموعه  $p^{-1}(y)$  موجود است. از آنجا که  $p^{-1}(y)$  مجموعه ای دو عضوی است،  $\pi_1(P^2, y)$  يك گروه مرتبه ۲ است.

البته، هر گروه مرتبه ۲ با  $Z_2$ ، یعنی اعداد صحیح به هنگ ۲، ایزومورف است.  $\square$

به طریقی مشابه، به ازای هر  $n$  از  $Z_+$ ، می توان  $P^n$  را به صورت فضای حاصل از  $S^n$  به وسیله یکی گرفتن هر نقطه  $x$  با نقطه متقارث، یعنی  $-x$ ، تعریف کرد؛ این فضا را فضای تصویری  $n$  بعدی می نامند. برهان قضیه ۳.۷ بدون تغییری برای اثبات این مطلب که نگاشت تصویر  $p: S^n \rightarrow P^n$  نگاشتی پوششی است می آوریم. سپس، چون  $S^n$  به ازای  $n \geq 2$  همبند ساده است، نتیجه می شود که  $\pi_1(P^n, y)$  به ازای  $n \geq 2$  يك گروه دو عضوی است. تشخیص چگونگی وضعیت را در حالت  $n=1$  به خواننده واگذار می کنیم.

تاکنون فضایی نیافته ایم که گروه بنیادی آن آبلی نباشد. اینک این گاستی را جبران

می کنیم.

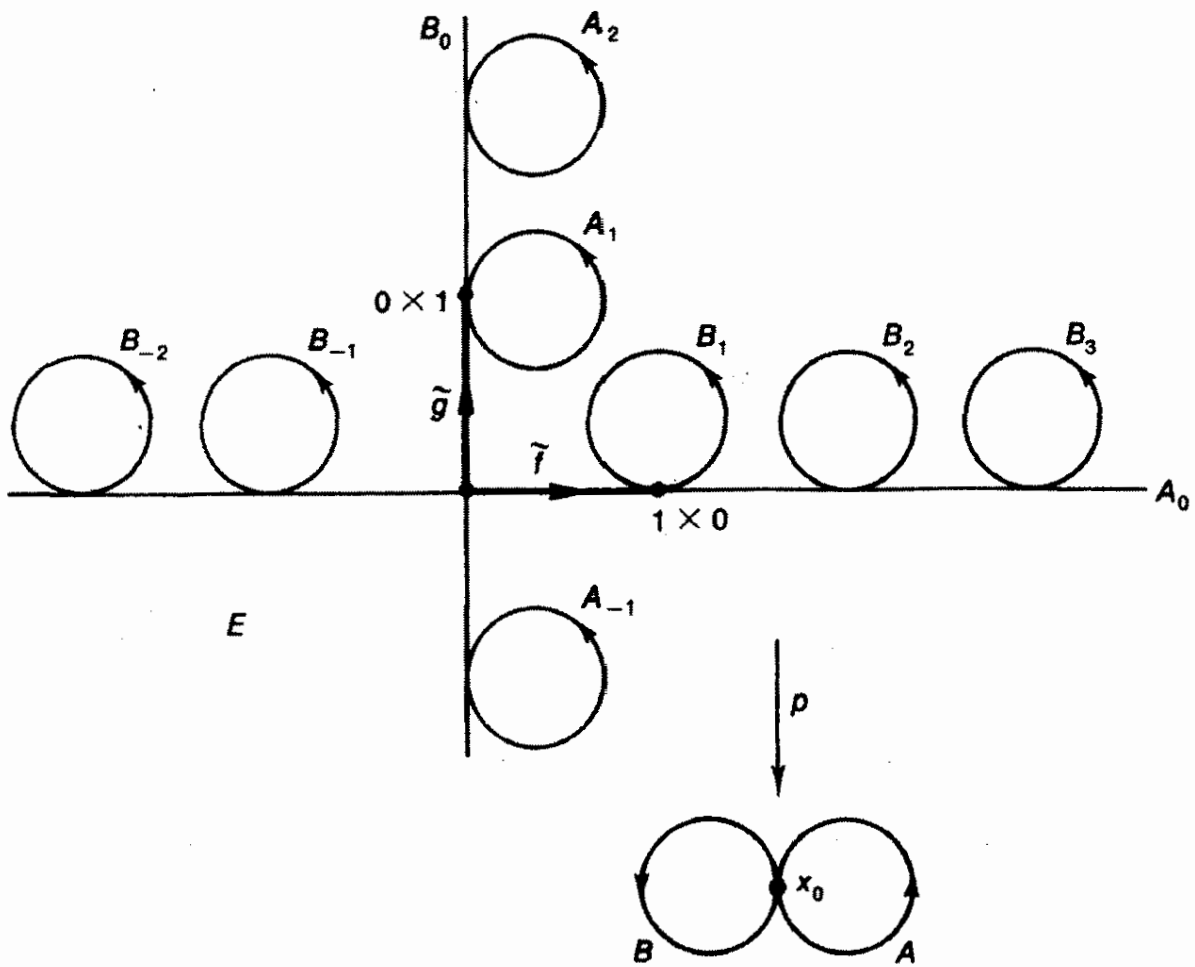
۵.۷. لم گروه بنیادی فضای به شکل 8 آبلی نیست.

برهان. شکل 8 اجتماع دو دایره  $A$  و  $B$  است که يك نقطه مشترك مانند  $x$  دارند. اکنون به توصیف فضای پوششی خاصی، مانند  $E$ ، برای فضای به شکل 8 می پردازیم. فضای  $E$  زیرفضایی است از صفحه متشکل از محور  $yx$  ها و محور  $yz$  ها توأم با دایره کوچکی که در نقاط صحیح ناصفر به این محورها مماس اند. شکل ۲۱ ملاحظه شود. نگاشت تصویری  $p$  محور  $yx$  را به دور دایره  $A$  و محور  $yz$  را به دور دایره  $B$  می پیچد؛ در هر مورد نقاط صحیح به وسیله  $p$  به نقطه پایه ای  $x$  نگاشته می شوند. هر دایره مماس به محور  $yx$  ها در يك نقطه صحیح به وسیله  $p$  به طور هومئومورفیک بروی  $B$  و هر دایره مماس به محور  $yz$  ها در يك نقطه صحیح به طور هومئومورفیک بروی  $A$  نگاشته می شود؛ در هر مورد، نقاط مماس به وسیله  $p$  به نقطه پایه  $x$  برده می شوند و می توان با محاسبه ذهنی بررسی کرد که  $p$  نگاشتی پوششی است، بررسی این امر را به خواننده واگذار می کنیم.

در صورت تمایل، می توانستیم ضوابط این نگاشت را بنویسیم، ولی به نظر ما پیگیری

توصیف غیر رسمی آن آسانتر است.

اینک راه  $f: I \rightarrow E$  را با ضابطه  $f(s) = s \times 0$  اختیار می کنیم، که در طول



شکل ۲۱

محور  $x$ ها از مبدأ به نقطه  $1 \times 0$  می‌رود. همچنین، راه  $\tilde{g}: I \rightarrow E$  را با ضابطه  $\tilde{g}(s) = 0 \times s$  برمی‌گزینیم که در طول محور  $y$ ها از مبدأ به نقطه  $0 \times 1$  می‌رود. فرض کنیم  $f = p \circ \tilde{f}$  و  $g = p \circ \tilde{g}$ ؛ در این صورت  $f$  و  $g$  کمندهایی هستند در فضای به شکل 8 بر پایه  $x_0$  که، بترتیب، دور دایره‌های  $A$  و  $B$  می‌گردند. ادعا می‌کنیم که  $f * g$  برای اثبات این مدعا، هر یک از اینها را به راهی در  $E$ ، که نقطه آغازی آن مبدأ است، بالا می‌بریم. راه  $f * g$  به راهی بالایی می‌رود که در طول محور  $x$ ها از مبدأ به نقطه  $1 \times 0$  می‌رود و سپس یکبار هم دور دایره مماس بر محور  $x$ ها در نقطه  $1 \times 0$  می‌گردد. از طرف دیگر، راه  $g * f$  به راهی در  $E$  بالا می‌رود که در طول محور  $y$ ها از مبدأ به  $0 \times 1$  می‌رود و سپس یکبار هم دور دایره مماس به محور  $y$ ها در  $0 \times 1$  می‌گردد. چون نقاط انجامی راههای بالایی یکی نیستند،  $f * g$  و  $g * f$  نمی‌توانند هموتوپ راهی باشند.  $\square$

گروه بنیادی فضای به شکل 8، در واقع، گروهی است که جبردانان آن را «گروه آزاد با دو مولد» می‌نامند. ولی، ما این نکته را ثابت نمی‌کنیم.

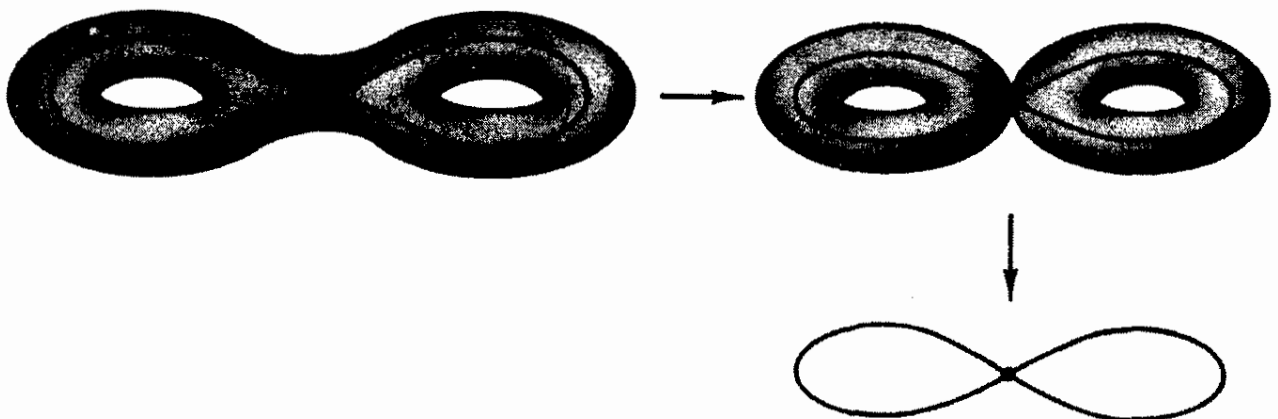
۶.۷. قضيه گروه بنیادی چنبره مضاعف  $T_2$  آبلی نیست.

پرهان. چنبره مضاعف  $T_2$  سطحی است که چنین به دست می آید: گرده باز کوچکی را از دو چنبره حذف می کنیم و سپس قسمتهای بپایمانده را درمحل لبه هایشان بهم می چسبانیم. ادعا می کنیم که فضای به شکل 8 يك تو کشیده  $T_2$  است. این حقیقت مستلزم این است که نگاشت احتوای  $Z$  همومورفیسم يك به يکی مانند

$$j_* : \pi_1(8, x_0) \rightarrow \pi_1(T_2, x_0)$$

القا می کند به طوری که  $\pi_1(T_2, x_0)$  آبلی نیست.

می توان معادلات تو کشنده  $r : T_2 \rightarrow 8$  را نوشت، ولی آسانتر آن است که آن را به نحوی که ما در شکل ۲۲ رسم کرده ایم تجسم کرد؛ ابتدا دایره نقطه چین شده را به يك نقطه فرو می ریزیم که حاصل آن دو چنبره است با يك نقطه مشترك. سپس هريك از دو چنبره را بروی «دوایر نصف النهاری» آنها فرو می ریزیم.



شکل ۲۲

۷.۷. نتیجه سطوح  $S^2$ ،  $P^2$ ،  $T$ ، و  $T_2$  از لحاظ توپولوژیک متمایزند.

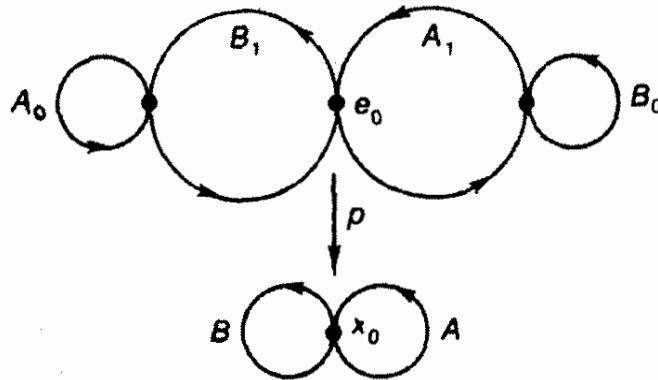
### تمرینها

۱. گروه بنیادی «چنبره جامد»  $S^1 \times B^2$  و فضای حاصل ضربی  $S^1 \times S^2$  را محاسبه کنید.
۲. فرض کنید  $X$  فضای خارج قسمتی حاصل از  $B^2$  باشد که با یکی گرفتن هر نقطه  $S^1$  مانند  $x$  با نقطه متقاطع آن، یعنی  $-x$ ، به دست می آید. ثابت کنید که  $X$  با صفحه تصویری  $P^2$  همثومورف است.
۳. فرض کنید  $p : E \rightarrow 8$  نگاشتی باشد که در پرهان لم ۵.۷ ساخته شد. همچنین فرض کنید  $E'$  زیر فضای  $E$  متشکل از اجتماع محور  $yx$  و محور  $yz$  باشد. ثابت کنید



که  $p|E'$  يك نگاهت پوششی نیست.

۴. نگاهت پوششی شکل ۲۳ را در نظر بگیرید. در آن  $p$  دایره  $A_1$  را دو بار دور  $A$ ، و دایره  $B_1$  را دو بار دور  $B$  می پیچاند؛  $p$  دایره های  $A_0$  و  $B_0$  را، بترتیب، به طور همثومورفیک روی  $A$  و  $B$  می نگارد. با به کار گرفتن این فضای پوششی ثابت کنید که گروه بنیادی فضای به شکل ۸ آبله نیست.



شکل ۲۳

۵. به ازای گروه مفروض  $G$  و فضای  $X$ ، يك عمل  $G$  بر  $X$  تابعی است که به هر عضو  $\alpha$  از  $G$ ، نگاهتی پیوسته مانند

$$h_\alpha : X \rightarrow X$$

به طریقی نظیر می کند که

(۱) اگر  $e$  عضو خنثای  $G$  باشد آنگاه  $h_e$  نگاهت همانی  $X$  است.

(۲) اگر  $\alpha = \beta \cdot \gamma$  آنگاه  $h_\alpha = h_\beta \circ h_\gamma$

(الف) ثابت کنید که توابع  $h_n : R \rightarrow R$  با ضابطه  $h_n(x) = x + n$  يك عمل از اعداد صحیح  $Z$  بر  $R$  تعریف می کنند.

(ب) ثابت کنید که دوران  $S^2$  حول محور  $Z$  ها يك عمل از گروه  $S^1$  (اعداد مختلط با قدر مطلق ۱) بر کره  $S^2$  تعریف می کند.

(پ) به ازای  $n$  مفروض، ثابت کنید که دوران  $S^2$  حول محور  $Z$  ها به اندازه زوایای متفاوتی که مضارب  $2\pi/n$  هستند يك عمل  $Z_n$  (گروه جمعی اعداد صحیح به پیمانۀ  $n$ ) بر  $S^2$  تعریف می کند.

(ت) ثابت کنید که نگاهت متقاطع  $S^2$  يك عمل گروه  $Z_p$  بر  $S^2$  تعریف می کند.

۶. به ازای يك عمل مفروض  $G$  بر  $X$ ، فضای مداری  $(X/G)$  را این طور تعریف می کنیم:  $X/G$  فضای خارج قسمتی  $X$  است که با رابطه هم ارزی ذیل مشخص

می‌شود:  $x \sim x'$  در صورتی که  $\alpha$  بی در  $G$  وجود داشته باشد که  $x' = h_\alpha(x)$ . فضاهای مداری حاصل از اعمالی که در قسمتهای (الف) - (ت) تمرین ۵ تعریف شدند، با فضاهای مانوسی هومومورف‌اند. آنها چه فضاهایی هستند؟

۷. يك عمل  $G$  بر  $X$  را بدون نقطه ثابت گویند در صورتی که تنها نگاشت  $h_\alpha$  که دارای نقطه ثابت است نگاشت  $h_e$  باشد. کدامیک از اعمالی که در تمرین ۵ تعریف شدند بدون نقطه ثابت هستند؟

۸. قضیه. يك عمل گروه متناهی  $G$  بر فضای همبندداهی  $X$  مفروض است؛ فرض کنید عمل مورد نظر بدون نقطه ثابت باشد. اگر  $X$  همبند ساده باشد آنگاه  $(\pi_1(X/G), x_0)$  با  $G$  ایزومورف است.

۹.  $S^2$  را فضای همه زوجهای مرتب اعداد مختلط مانند  $(z_1, z_2)$  در نظر بگیرید که  $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ . به ازای دو عدد صحیح مفروض  $n$  و  $k$  که نسبت بهم اول‌اند نگاشت  $h: S^2 \rightarrow S^2$  را چنین تعریف می‌کنیم

$$h(z_1, z_2) = \left( z_1 e^{\frac{2\pi i}{n}}, z_2 e^{\frac{2\pi i k}{n}} \right).$$

(الف) ثابت کنید که نگاشتهای  $h$  و  $h^2 = h \circ h$  و  $h^3$  و ... می‌توانند برای تعریف يك عمل  $Z_n$  بر  $S^2$  که بدون نقطه ثابت است بدکار روند. فضای مداری  $L(n, k)$  را فضای عدسی گویند.

(ب) ثابت کنید که  $L(n, k)$  يك بسلاهی ۳ بعدی فشرده است.

(پ) با فرض تمرین ۸، ثابت کنید که اگر  $L(n, k)$  و  $L(n', k')$  هومومورف باشند آنگاه  $n = n'$ . (در واقع،  $L(n, k)$  و  $L(n', k')$  هومومورف‌اند اگر و تنها اگر  $n = n'$  و حداقل یکی از دو رابطه  $k \equiv k' \pmod{n}$  یا  $kk' \equiv 1 \pmod{n}$  برقرار باشند). برهان آن چندان آسان نیست.

## ۸-۸ نگاشتهای اساسی و غیر اساسی

قبلاً گروه بنیادی را برای مطالعه در مسئله تشخیص هومومورف بودن یا نبودن دو فضا به کار گرفته‌ایم. اینک آن را برای مطالعه مسئله دیگری در توپولوژی اعمال می‌کنیم؛ یعنی، برای تشخیص اینکه دو نگاشت مفروض از يك فضا به فضای دیگر هومتوپ هستند یا خیر.

ساده‌ترین نوع چنین مسئله‌ای تشخیص هومتوپ بودن یا نبودن نگاشتهای مفروض مانند  $h: X \rightarrow Y$  با نگاشت ثابت است. ثابت خواهیم کرد که اگر  $h$  با يك نگاشت ثابت هومتوپ باشد آنگاه  $h_p$ ، همومورفیسم القایی گروههای بنیادی، همومورفیسم بدیهی است. (اگر  $X$  دایرة  $S^1$  باشد، عکس این حکم نیز برقرار است؛ تمرین ۲ ملاحظه شود.)

مسئله کلیتر تشخیص هومتوپ بودن دو نگاشت دلخواهی مانند  $h, k: X \rightarrow Y$

است که به بخش بعدی موکول می‌کنیم.

تعریف. نگاشتی مانند  $h: X \rightarrow Y$  را غیر اساسی گوئیم هر گاه  $h$  با يك نگاشت ثابت هموتوپ باشد. در غیر این صورت، آن را اساسی گوئیم.

۱.۸. لم فرض کنیم  $h: S^1 \rightarrow Y$ . در این صورت احکام ذیل با یکدیگر معادل اند:  
 (۱)  $h$  غیر اساسی است.

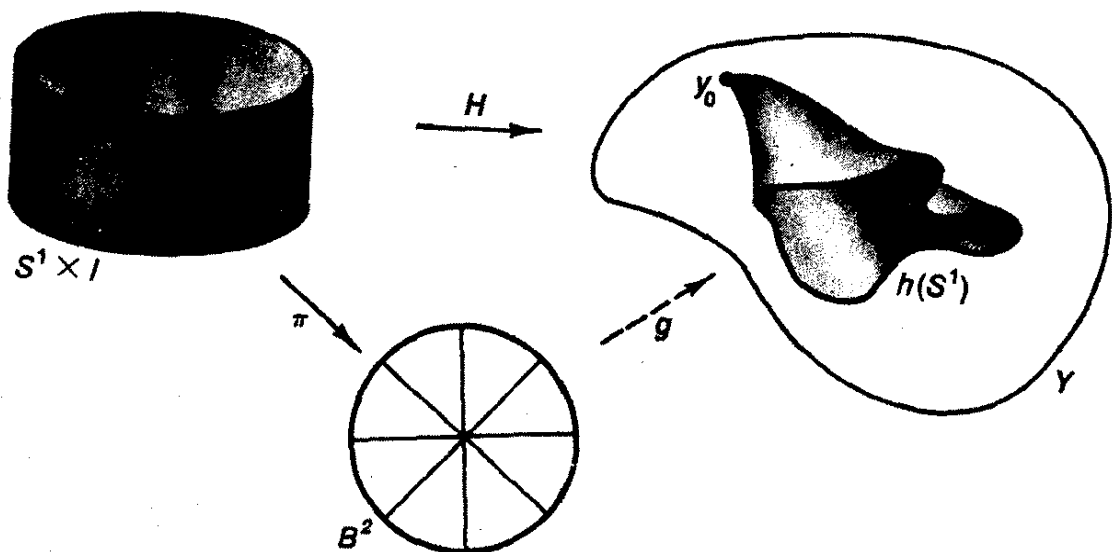
(۲)  $h$  می تواند به نگاشتی پیوسته مانند  $g: B^2 \rightarrow Y$  گسترش یابد.

برهان. (۲)  $\implies$  (۱) فرض کنیم  $H: S^1 \times I \rightarrow Y$  هموتوپی بین  $h$  و نگاشت ثابت  $k$  باشد که  $S^1$  را به  $y_0$  می برد. همچنین نگاشت  $\pi: S^1 \times I \rightarrow B^2$  را با ضابطه

$$\pi(x, t) = (1-t)x$$

اختیار می کنید. در این صورت، نگاشتی دوسویی بین  $S^1 \times [0, 1]$  و  $B^2 - 0$  است؛ همچنین،  $\pi$  مجموعه  $S^1 \times I$  را به نقطه  $0$  می نگارد. (ثابت کنید.) چون  $S^1 \times I$  فشرده است و  $B^2$  هاوسدورف،  $\pi$  نگاشتی است بسته؛ یعنی، مجموعه های بسته  $S^1 \times I$  را به مجموعه های بسته  $B^2$  می برد.

نگاشت  $H: S^1 \times I \rightarrow Y$  بر مجموعه  $S^1 \times I$  ثابت است. بنابراین،  $H$  نگاشتی مانند  $g: B^2 \rightarrow Y$  را القا می کند به طوری که  $g \circ \pi = H$ .  $g$  بدین گونه تعریف می شود که  $g(x) = H(\pi^{-1}(x))$  در صورتی که  $x \notin S^1$  و اگر  $x \in S^1$ ،  $g(x) = y_0$ . نگاشت  $g$  پیوسته است؛ و این از این امر که  $\pi$  نگاشت خارج قسمتی است نتیجه می شود. [یا می توان مستقیماً بدین گونه ثابت کرد که اگر  $C$  در  $Y$  بسته باشد آنگاه  $H^{-1}(C)$  در  $S^1 \times I$  بسته است، در نتیجه،  $\pi(H^{-1}(C)) = g^{-1}(C)$  در  $B^2$  بسته است.] نگاشت  $g$  همان گسترش مطلوب  $h$  است؛ زیرا اگر  $x \in S^1$  آنگاه



$$g(x) = g(\pi(x, \circ)) = H(x, \circ) = h(x).$$

شکل ۲۴ ملاحظه شود.

(۱)  $\Rightarrow$  (۲). فرض کنیم  $g: B^2 \rightarrow Y$  يك گسترش پیوسته  $h$  باشد. نگاشت  $F: S^1 \times I \rightarrow Y$  را با ضابطه  $F(x, t) = g((1-t)x)$  تعريف می کنیم. در این صورت،  $F$  يك هموتوپي است بين  $h$  و نگاشتي ثابت.  $\square$

۲۰۸. قضیه فرض کنیم  $h: X \rightarrow Y$ . اگر  $h$  غیر اساسی باشد آنگاه  $h_*$  همومورفیسم صفر است.

پرهان. ابتدا حالت  $X = S^1$  را در نظر می گیریم. لم سابق را بکار می بریم. فرض کنیم  $g: B^2 \rightarrow Y$  گسترشی از  $h$  و  $j: S^1 \rightarrow B^2$  نگاشت احتسوا باشد. در این صورت،  $g \circ j = h$ .  $b_1$  را نقطه‌ای از  $S^1$  اختیار می کنیم و  $y_1 = h(b_1)$ . همومورفیسم القایی

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, b_1) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(Y, y_1) \\ & \searrow j_* & \nearrow g_* \\ & \pi_1(B^2, b_1) & \end{array}$$

را در نظر می گیریم. بنا بر خواص تابعگونی همومورفیسم القایی، داریم  $h_* = g_* \circ j_*$ . ولی  $j_*$  همومورفیسم صفر است، زیرا حوزه مقادیر آن گروه بدیهی است. بنابراین،  $h_*$  همومورفیسم صفر است.

اکنون حالت کلی را در نظر می گیریم. فرض کنیم  $f: I \rightarrow X$  کمندی در  $X$  بر پایه  $x_0$  باشد و  $\phi: I \rightarrow S^1$  کمند استاندارد

$$\phi(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s).$$

حال  $f$  نگاشتي مانند  $k: S^1 \rightarrow X$  را القا می کند که با ضابطه  $k(a) = f(\phi^{-1}(a))$  تعريف می شود.

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{j} & X & \xrightarrow{h} & Y \\ & \searrow \phi & \nearrow k & & \\ & & S^1 & & \end{array}$$

بررسی پیوستگی  $k$  آسان است. بنا بر مفروضات،  $h$  با يك نگاشت ثابت هموتوپ است. فرض کنیم  $H: X \times I \rightarrow Y$  هموتوپي بين آنها باشد. در این صورت،  $h \circ k$  نیز با يك

نگاشت ثابت هموتوپ است؛ نگاشت  $H'(a, t) = H(k(a), t)$  هموتوپی مطلوب است. از بند سابق نتیجه می شود که  $(h \circ k)_*([\phi]) = 0$  بویژه،  $(h \circ k)_*([\phi]) = 0$  ولی

$$(h \circ k)_*([\phi]) = [h \circ k \circ \phi] = [h \circ f] = h_*([f]) \neq 0 \quad \square$$

به عنوان کاربرد از قضیه فوق، قضیه ای را ثابت می کنیم که آن را در بخش ۷-۹ هنگام محاسبه بعد توپولوژی ناحیه ای مثلثی به کار بردیم.

۳.۸. نتیجه فرض کنیم  $T$  یک ناحیه مثلثی بسته در  $\mathbb{R}^2$  باشد؛ اجتماع اضلاع  $T$  را به  $Bd T$  نمایش می دهیم. نگاشتی پیوسته مانند  $f: T \rightarrow Bd T$  وجود ندارد که هر ضلع  $T$  را بتوی خودش بنگارد.

برهان. فرض می کنیم  $f: T \rightarrow Bd T$  یک چنین نگاشتی باشد و تناقضی استخراج می کنیم.

فرض کنیم  $g: Bd T \rightarrow Bd T$  تحدید  $f$  باشد. چون  $g$  هر ضلع  $T$  را بتوی خودش می نگارد، با نگاشت همانی هموتوپ است. در واقع، نگاشت

$$G(x, t) = tx + (1-t)g(x)$$

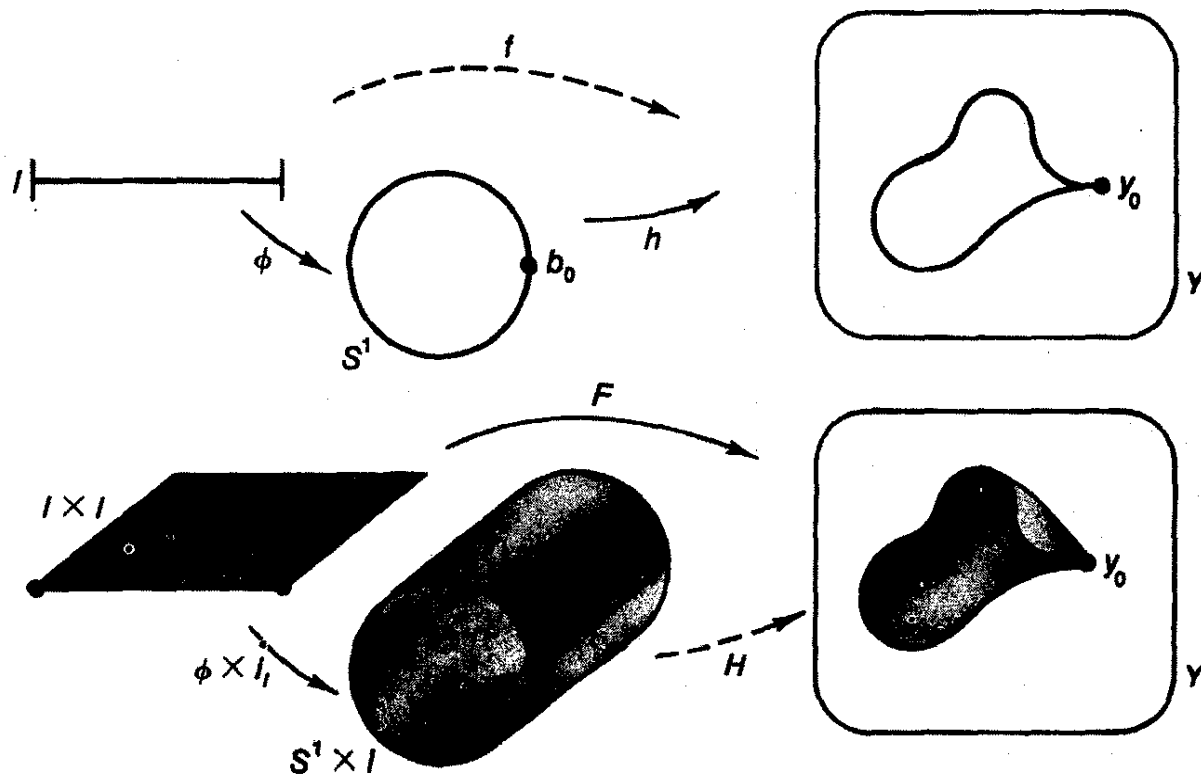
$Bd T \times I$  را بتوی  $Bd T$  می نگارد. زیرا اگر  $x$  به  $Bd T$  تعلق داشته باشد آنگاه  $x$  و  $g(x)$  در یک ضلع  $T$  قرار می گیرند، در نتیجه قطعه خط مستقیم واصل بین آنها نیز در همان ضلع قرار می گیرد. بنابراین،  $G$  یک هموتوپی بین  $g$  و نگاشت همانی است. اکنون این مطلب را به کار می گیریم که  $Bd T$  با  $S^1$  همومورف است. نگاشت همانی  $Bd T$  همومورفیسم صفر گروه بنیادی را القا می کند، پس بنا بر لم سابق می تواند با یک نگاشت ثابت هموتوپ باشد. بنابراین،  $g$  با یک نگاشت ثابت هموتوپ نیست. از طرف دیگر،  $g$  به نگاشتی پیوسته از  $T$  بتوی  $Bd T$  مانند  $f$  گسترش پذیر است که در نتیجه  $g$  با یک نگاشت ثابت هموتوپ است.  $\square$

## تمرینها

۱. در قسمت ذیل برهان ساده ای آورده ایم برای آنکه اگر  $h: X \rightarrow Y$  غیر اساسی باشد آنگاه  $h_*$  همومورفیسم صفر است. در کجا سفسطه می شود؟ فرض کنید  $H: X \times I \rightarrow Y$  یک هموتوپی بین  $h$  و نگاشتی ثابت باشد. به ازای یک کمند مفروض در  $X$  بر پایه  $x$  مانند  $f$  نگاشتی مانند  $F: I \times I \rightarrow Y$  با ضابطه  $F(s, t) = H(f(s), t)$  تعریف می کنیم. نگاشت  $F$ ، چنانکه می خواستیم، یک هموتوپی بین  $h \circ f$  و یک راه ثابت است.

۲. فرض کنید  $h: S^1 \rightarrow Y$ . ثابت کنید که اگر  $h_*$  همومورفیسم صفر باشد آنگاه  $h$

غیر اساسی است. [دانهمایی: فرض کنید که  $\phi: I \rightarrow S^1$  کمند ثابت باشد، و ثابت کنید که يك هموتوپي راهی مانند  $F$  بین  $f$  و  $e_{y_0}$  وجود دارد، و  $F$  نگاشتی مانند  $H: S^1 \times I \rightarrow Y$  را چنان القامی کند که  $H \circ (\phi \times i_I) = F$ . شکل ۲۵ را ملاحظه کنید.]



شکل ۲۵

۳. فرض کنید  $Y$  همبند راهی باشد. ثابت کنید که  $\pi_1(Y, y_0) = 0$  اگر و تنها اگر هر نگاشت  $h: S^1 \rightarrow Y$  غیر اساسی باشد.

۴. یاد آوری می کنیم که فضای  $Y$  را انقباض پذیر گوئیم هر گاه نگاشت همانی  $i_Y: Y \rightarrow Y$  غیر اساسی باشد. ثابت کنید که اگر  $Y$  انقباض پذیر باشد آنگاه  $Y$  همبند ساده است.

۵. نگاشت  $h: S^n \rightarrow S^n$  را حافظ نقاط متقاطع گوئیم در صورتی که به ازای هر  $x$  از  $S^n$ ،  $h(-x) = -h(x)$ .

قضیه. اگر  $h: S^1 \rightarrow S^1$  حافظ نقاط متقاطع باشد آنگاه  $h$  اساسی است.

پرهان.

(الف) فرض کنید  $p: S^1 \rightarrow S^1$  نگاشتی باشد با ضابطه  $p(z) = z^2$ ، که در آن  $z$  يك عدد مختلط است. ثابت کنید که  $h$  نگاشتی پیوسته مانند  $g: S^1 \rightarrow S^1$  را چنان القامی کند که  $p \circ h = g \circ p$ .

(ب) ثابت کنید که اگر  $f$  راهی دلخواه در  $S^1$  از نقطه‌ای مانند  $x$  به نقطه متقاطع آن  $x$  — باشد آنگاه  $p \circ f$  کمندی است در  $S^1$  که بانگاشتی ثابت هموتوپ نیست.  
 (پ) ثابت کنید که  $p \circ g$  همومورفیسمهایی (همومورفیسمهای یک به یک) به گروههای بنیادی القا می کنند.

(ت) نتیجه بگیرید که  $h$  اساسی است.

۶. تمرین ۵ را مفروض بگیرید.

(الف) ثابت کنید که :

قضیه (قضیه بورسوک - اولام<sup>۱</sup> برای  $S^2$ ). تابعی پیوسته و حافظ نقاط متقاطع مانند  $S^2 \rightarrow S^1$  :  $f$  وجود ندارد.

[دانهمایی : خط استوای  $S^2$  را در نظر بگیرید.]

در حالت کلی این درست است که اگر  $m < n$  آنگاه تابعی پیوسته و حافظ نقاط متقاطع آن مانند  $S^m \rightarrow S^n$  :  $f$  وجود ندارد. ولی برهان به ابزارهایی بیشتر از آنچه ما کسب کرده ایم نیاز دارد.

(ب) ثابت کنید که :

قضیه. به ازای نگاشت پیوسته مفروض  $R^2 \rightarrow S^2$  :  $f$ ، نقطه‌ای از  $S^2$  مانند  $x$  هست که  $f(x) = f(-x)$ .

[دانهمایی : خارج قسمت  $\|f(x) - f(-x)\|$  را  $(f(x) - f(-x)) / \|f(x) - f(-x)\|$  در نظر بگیرید.]

(پ) ثابت کنید که :

قضیه (یک «قضیه هواشناسی»). در هر لحظه مفروض از زمان ، یک زوج از نقاط متقاطع در سطح کره زمین وجود دارد که در آنها هم درجه حرارت و هم فشار هوا یکی است.  
 (ت) ثابت کنید که :

قضیه. اگر  $S^2 \rightarrow S^2$  :  $g$  پیوسته باشد و به ازای هر  $x$  ،  $g(x) \neq g(-x)$  آنگاه  $g$  پوشاست.

۷\*. تمرین ۵ را به طریق ذیل تعمیم دهید : فرض کنید  $S^1 \rightarrow S^1$  :  $h$  حافظ نقاط متقاطع باشد و  $h(x_0) = x_1$  در این صورت  $h$  مولدی از  $\pi_1(S^1, x_0)$  را به یک ضرب فرد مولدی از  $\pi_1(S^1, x_1)$  می نگارد.

## ۸-۹ قضیه اساسی جبر

از میان خواص اساسی اعداد مختلط یکی این است که هر معادله بسجمله‌ای از درجه  $n$  با ضرایب حقیقی یا مختلط مانند

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

$n$  ریشه دارد (در صورتی که ریشه‌ها را بر حسب بستایی آنها به حساب آوریم). احتمالاً اولین بار این مطلب را در جبر دیرستانی به شما گفته‌اند؛ اگر چه بعید به نظر می‌رسد که در آن زمان برایتان ثابت کرده باشند.

در واقع، برهان نسبتاً دشوار است؛ مشکلترین قسمت آن اثبات این حکم است که هر معادلهٔ بسجمله‌ای با درجهٔ مثبت، دست‌کم یک ریشه دارد. راه‌های مختلفی برای آن وجود دارد. می‌توان فقط از تکنیکهای جبری استفاده کرد؛ این برهان طولانی و ملال‌آور است. یا می‌توان نظریهٔ توابع تحلیلی یک متغیر مختلط را تا جایی توسعه داد که برهان یک نتیجه بدیهی قضیهٔ لیویل بشود. یا می‌توان آن را به‌عنوان یک نتیجهٔ نسبتاً ساده‌گروه بنیادی دایره ثابت کرد؛ در اینجا همین کار را می‌کنیم.

۱.۹. قضیه (قضیهٔ اساسی جبر) معادلهٔ بسجمله‌ای از درجه  $n > 0$  با ضرایب حقیقی

یا مختلط

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

دست‌کم یک ریشه (حقیقی یا مختلط) دارد.

<sup>۱</sup>برهان. مرحله ۱ نگاهت  $h: S^1 \rightarrow S^1$  را با ضابطه  $h(z) = z^n$  در نظر می‌گیریم، که در اینجا  $z$  عددی است مختلط. ثابت می‌کنیم که همومورفیسم القایی

$$h_*: \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \pi_1(S^1, b_0)$$

مولدی از این گروه دوری نامتناهی را به  $n$  برابر آن می‌برد. فرض کنیم  $\phi: I \rightarrow S^1$  کمند استانده

$$\phi(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) = e^{2\pi i s}$$

در  $S^1$  باشد. تصویر آن تحت  $h_*$  عبارت است از کمند

$$h(\phi(s)) = (e^{2\pi i s})^n = e^{2\pi i n s} = (\cos 2\pi n s, \sin 2\pi n s).$$

این کمند در فضای پوششی  $R$  به راه  $s \rightarrow ns$  بالا می‌رود. بنابراین، کمند  $h \circ \phi$  تحت ایزومورفیسم استانده  $\pi_1(S^1, b_0)$  با اعداد صحیح که در آن  $\phi$  نظیر عدد ۱ است، و کمند  $h \circ \phi$  به عدد صحیح  $n$  نظیر می‌شود.

مرحله ۲. اینک حالتی خاص از این قضیه را ثابت می‌کنیم. به‌ازای معادلهٔ بسجمله‌ای

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0,$$

فرض می‌کنیم

$$|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0| < 1,$$



و ثابت می‌کنیم که این معادله ریشه‌ای در گوی واحد  $B^2$  دارد.

فرض کنیم این معادله ریشه‌ای در  $B^2$  نداشته باشد. در این صورت می‌توانیم نگاهی مانند  $g: B^2 \rightarrow R^2 - 0$  با ضابطه

$$g(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

تعریف کنیم.

نگاشت  $f: S^1 \rightarrow R^2 - 0$  را تحدید  $g$  به  $S^1$  اختیار می‌کنیم. چون  $f$  به نگاشت  $g$  از  $B^2$  بتوی  $R^2 - 0$  گسترش پذیر است، بنا برلم ۱.۸، نگاشت  $f$  غیر اساسی است.

از طرف دیگر،  $f$  با نگاشت  $k: S^1 \rightarrow R^2 - 0$  با ضابطه  $k(z) = z^n$  هموتوپ است. زیرا،  $F: S^1 \times I \rightarrow R^2 - 0$  که به صورت

$$F(z, t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0)$$

تعریف می‌شود، هموتوپی مطلوب است؛  $F(z, t)$  هیچگاه صفر نمی‌شود چون

$$\begin{aligned} |F(z, t)| &\geq |z^n| - |t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)| \\ &\geq 1 - t(|a_{n-1}z^{n-1}| + \dots + |a_0|) \\ &= 1 - t(|a_{n-1}| + \dots + |a_0|) > 0. \end{aligned}$$

بعلاوه، نگاشت  $k$  اساسی است. زیرا  $k$  مساوی است با ترکیب نگاشت  $h: S^1 \rightarrow S^1$  که در مرحله ۱ به صورت  $h(z) = z^n$  تعریف شد، با نگاشت احتوای  $z: S^1 \rightarrow R - 0$ . چون  $h$  « $n$  بار عمل ضرب» است و  $z$  ایزومورفیسم است،  $k$  همومورفیسم صفر نیست. بنابراین،  $k$  باید اساسی باشد.

از آنجا که  $f$  با  $k$  هموتوپ است، نگاشت  $f$  نیز باید اساسی باشد. به این ترتیب به تناقض می‌رسیم.

مرحله ۳. اینک قضیه را در حالت کلی ثابت می‌کنیم. به‌ازای معادله بسجمله‌ای مفروض

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0,$$

عددی مثبت مانند  $c$  اختیار می‌کنیم و قرار می‌دهیم  $x = cy$ . حاصل معادله

$$(cy)^n + a_{n-1}(cy)^{n-1} + \dots + a_1(cy) + a_0 = 0$$

است یا

$$y^n + \frac{a_{n-1}}{c}y^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{c^{n-1}}y + \frac{a_0}{c^n} = 0.$$

اگر  $y = y_0$  ریشه معادله اخیر باشد آنگاه  $x_0 = cy_0$  ریشه معادله اصلی است. بنابراین، برای تبدیل قضیه به حالت خاصی که در مرحله ۲ بررسی شد فقط باید  $c$  را آن قدر بزرگ انتخاب کنیم که

$$\left| \frac{a_{n-1}}{c} \right| + \left| \frac{a_{n-2}}{c^2} \right| + \dots + \left| \frac{a_1}{c^{n-1}} \right| + \left| \frac{a_0}{c^n} \right| < 1.$$

### تمرینها

۱. به ازای معادله بسجمله‌ای باضرایب حقیقی یا مختلط مفروض

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0,$$

ثابت کنید که اگر  $|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0| < 1$  آنگاه همه ریشه‌های معادله در داخل گوی واحد  $B^2$  قرار می‌گیرند. [دانهمایی: فرض کنید

$$g(x) = 1 + a_{n-1}x + \dots + a_1x^{n-1} + a_0x^n$$

و ثابت کنید که به ازای هر  $x$  از  $B^2$ ،  $g(x) \neq 0$ ]

۲. دایره‌ای به مرکز مبدأ بیابید که شامل همه ریشه‌های معادله بسجمله‌ای  $x^2 + x^2 + 1 = 0$  باشد.

### ۸-۱۰ میدانهای برداری و نقاط ثابت

در این بخش گروه بنیادی را در دو مسئله هندسی به کار می‌گیریم. یکی مسئله مربوط به وجود میدانهای برداری مماس به سطوحی مفروض است، و دیگری به «مسئله نقطه ثابت» مربوط است: به ازای فضای مفروض  $X$ ، آیا هر نگاشت پیوسته مانند  $f: X \rightarrow X$  الزاماً نقطه ثابتی دارد؟

ما فقط بعضی از قضایای ساده‌تر را به دست خواهیم آورد. قضایای عمیقتر، از جمله آنهایی را که در تحقیقات جاری مورد توجه‌اند، خیلی بیشتر از آنچه که تا به حال مطالعه کرده‌ایم نیازمند ابزارهای توپولوژی جبری‌اند.

۱۰.۱۰. قضیه به ازای یک میدان برداری ناصفر بر  $B^2$ ، نقطه‌ای از  $S^1$  هست که میدان برداری در آن مستقیماً به طرف داخل متوجه است، و نقطه‌ای از  $S^1$  که در آن مستقیماً به طرف خارج متوجه است.

پروهان. یک میدان برداری بر  $B^2$  زوج مرتبی است مانند  $(x, v(x))$  که  $x \in B^2$  و  $v$  نگاشتی است پیوسته از  $B^2$  بتوی  $R^2$ . در حسابان اغلب علامت

$$v(x) = v_1(x)\mathbf{i} + v_2(x)\mathbf{j}$$

برای تابع  $v$  به کار می‌رود که  $\mathbf{i}$  و  $\mathbf{j}$  بردارهای استاندارد واحد پایه‌ای در  $R^2$  هستند. ولی

ما به علامت تابعی ساده‌ای متوسل خواهیم شد. مقصود ما از یک میدان برداری ناخضر این است که به ازای هر  $x$ ،  $v(x) \neq 0$ ؛ در چنین موردی  $v$  عملاً  $B^2$  را بتوی  $R^2 - 0$  می‌نگارد.

ابتدا ثابت می‌کنیم که به ازای  $v$  بی مفروض، باید  $v$  در نقطه‌ای از  $S^1$  مستقیماً به طرف داخل متوجه باشد.

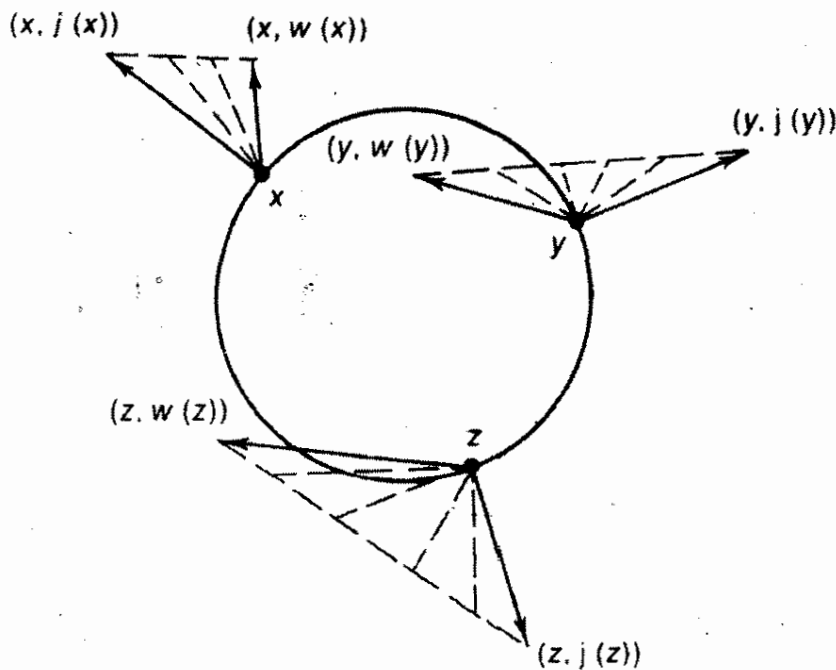
نگاشت  $w: S^1 \rightarrow R^2 - 0$  را که از تحدید  $v$  به  $S^1$  به دست می‌آید در نظر می‌گیریم. اگر  $x$  در  $S^1$  موجود نباشد که در آن میدان برداری مستقیماً به طرف داخل متوجه باشد آنگاه به ازای هر  $x$ ،  $w(x)$  مساوی یک مضرب منفی  $x$  نیست. نتیجه می‌شود که  $w$  با نگاشت احتوای  $z: S^1 \rightarrow R^2 - 0$  هم‌توپ است، زیرا، نگاشت  $F: S^1 \times I \rightarrow R^2 - 0$  با ضابطه

$$F(x, t) = tx + (1-t)w(x)$$

هم‌تویی مطلوب است؛ آن را در شکل ۲۶ ترسیم کرده‌ایم. بدیهی است که  $F$  پیوسته است. برای اثبات اینکه  $F$  هرگز صفر نمی‌شود، توجه کنید که اگر  $F(x, t) = 0$  آنگاه

$$(1-t)w(x) = -tx.$$

این معادله بوضوح به ازای  $t=0$  یا  $t=1$  دروغ است، چون  $x \in S^1$  و  $w(x) \neq 0$ . به ازای  $t$  هایی که  $0 < t < 1$  معادله اخیر به صورت  $w(x) = -tx / (1-t)$  در می‌آید، و در نتیجه  $w(x)$  مساوی یک مضرب منفی  $x$  می‌شود که این نیز غیرممکن است. چون  $w$  با نگاشت احتوای  $z: S^1 \rightarrow R^2 - 0$  هم‌توپ است، باید اساسی باشد. از طرف دیگر،  $w$  به نگاشت پیوسته  $v: B^2 \rightarrow R^2 - 0$  گسترش پذیر است،



شکل ۲۶

در نتیجه غیر اساسی است. پس به يك تناقض می‌رسیم. بنابراین،  $v$  در نقطه‌ای از  $S^1$  مستقیماً به طرف داخل متوجه است.

اکنون میدان برداری ناصفر  $(x, -v(x))$  را در نظر می‌گیریم. بنا بر نتیجه‌ای که ثابت شد، باید در نقطه‌ای از  $S^1$  مستقیماً به طرف داخل متوجه باشد. در این صورت،  $v$  در آن نقطه مستقیماً به طرف خارج متوجه است.  $\square$

قبلاً دیده‌ایم که هر نگاشت پیوسته مانند  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  الزاماً يك نقطه ثابت دارد (تمرین ۳ در بخش ۳-۲ ملاحظه شود). این حکم در مورد گوی  $B^2$  نیز برقرار است، اگر چه برهان عمیقتر است:

۲۰۱۰. قضیه (قضیه نقطه ثابت براونر<sup>۱</sup> برای قرص صفحه) اگر  $f: B^2 \rightarrow B^2$  پیوسته باشد آنگاه نقطه‌ای از  $B^2$  مانند  $x$  هست که  $f(x) = x$ .

برهان. به برهان خلف عمل می‌کنیم. فرض کنیم به ازای هر  $x$  از  $B^2$ ،  $f(x) \neq x$ . در این صورت  $v(x) = f(x) - x$  يك میدان برداری ناصفر  $(x, v(x))$  را بر  $B^2$  تعریف می‌کند. ولی در هیچیک از نقاط  $S^1$  مانند  $x$ ،  $v$  نمی‌تواند مستقیماً به طرف خارج متوجه باشد، چون در غیر این صورت، به ازای عددی حقیقی مثبت مانند  $a$

$$f(x) - x = ax.$$

در نتیجه،  $f(x) = (1+a)x$  خارج گوی واحد  $B^2$  قرار می‌گیرد. پس به تناقض برخوردیم.  $\square$

ممکن است تعجب آور باشد که چرا در ریاضیات قضایای نقطه ثابت مورد توجه اند. ثابت می‌شود که بسیاری از مسائل، مانند مسائل مربوط به وجود جوابهای دستگاههای معادلات، می‌توانند به صورت مسائل نقطه ثابت تقریر شوند. این هم يك مثال، از يك قضیه کلاسیک فروبنیوس<sup>۲</sup>. در این قسمت بعضی از مطالب جبر خطی را دانسته فرض می‌کنیم.

۳۰۱۰. نتیجه فرض کنیم که  $A$  يك ماتریس  $3 \times 3$  در  $3 \times 3$  اعداد حقیقی مثبت باشد. در این صورت،  $A$  يك مقدار ویژه (مقدار مشخصه) حقیقی مثبت دارد.

برهان. فرض کنیم  $T: R^3 \rightarrow R^3$  تبدیلی خطی باشد که ماتریس آن (نسبت به پایه استاندارد  $R^3$ ) برابر  $A$  باشد. همچنین فرض کنیم  $B$  مقطع کره  $S^2$  بعدی  $S^2$  باشد با هشتک

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geq 0 \text{ و } x_2 \geq 0 \text{ و } x_3 \geq 0\}$$

از  $R^3$ . به آسانی می‌توان ثابت کرد که  $B$  با گوی  $B^2$  هم‌ثومورف است، بنابراین، قضیه نقطه ثابت برای نگاشتهای پیوسته از  $B$  بتوی  $B$  نیز برقرار است.

حال اگر  $x = (x_1, x_2, x_3)$  در  $B$  باشد آنگاه همه مؤلفه‌های  $x$  نامنفی و دست کم یکی مثبت است. چون همه درایه‌های  $A$  مثبت‌اند،  $T(x)$  برداری است که همه مؤلفه‌های آن مثبت است. در نتیجه، نگاشت  $x \rightarrow T(x)/\|T(x)\|$  نگاشتی است پیوسته از  $B$  به خودش، در نتیجه، نقطه ثابتی مانند  $x_0$  دارد. پس

$$T(x_0) = \|T(x_0)\|x_0.$$

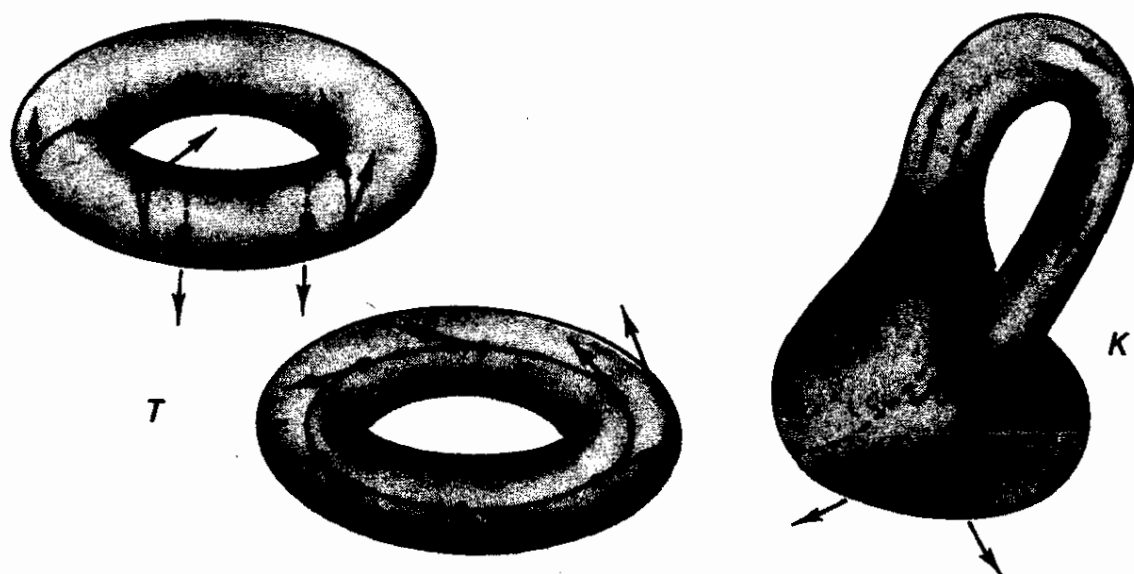
در نتیجه  $T$  (و بنا بر این ماتریس  $A$ ) دارای مقدار ویژه حقیقی مثبت است، که این مقدار ویژه همان  $\|T(x_0)\|$  است.  $\square$

قبل از اینکه موضوع میدانهای برداری را رها کنیم بد نیست به یکی از مهمترین مسائلی که از آنها به دست می‌آید اشاره کنیم.

به‌آزای سطح مفروض  $S$ ، آیا  $S$  یک میدان برداری مماس ناصفر دارد؟

ظاهراً سؤال فوق مسئله‌ای از هندسه دیفرانسیل است، درحالی که این مسئله‌ای از توپولوژی است، زیرا جواب آن فقط به نوع توپولوژی  $S$  بستگی دارد. ثابت می‌شود که در میان سطوح فشرده، فقط چنبره  $T$  و بطری کلاین  $K$  (البته در صورتی که بدانید آن چیست) میدانهای برداری مماس ناصفر دارند. در شکل ۲۷ این دو سطح نمایانده شده‌اند. [چنبره، در واقع، دو میدان برداری مستقل خطی دارد.]

برهان این مطلب از چارچوب این کتاب خارج است. (برای دیدن برهان آن به [G-P] مراجعه کنید.) ولی، حداقل می‌توانیم با اثبات اینکه کره  $S^2$  هیچ میدان برداری ناصفر ندارد یک گام در جهت راه حل آن برداریم. به‌جای آنکه با به کار بردن معادلات برهان رسمی را ارائه کنیم، فقط به‌طرحی هندسی از آن اکتفا می‌کنیم.



شکل ۲۷

۴.۱۰. قضیه کره  $S^2$  هیچ میدان برداری مماس ناصفر ندارد.

برهان. فرض کنیم  $(x, v(x))$  يك میدان برداری ناصفر  $S^2$  باشد.  $p = (0, 0, 1)$ ، قطب شمال  $S^2$  را در نظر می‌گیریم؛ برای سهولت فرض خواهیم کرد که میدان برداری در  $p$  موازی محور  $y$  ها باشد. يك گوی باز كوچك به مرکز  $p$  از  $S^2$  مانند  $U$  آنقدر كوچك اختیار می‌کنیم که برگوی  $U$  میدان برداری بیش از چند درجه‌ای از حالت موازی بودن با محور  $y$  ها خارج نشود.

اکنون نگاشت  $f: S^2 - p \rightarrow R^2$  را با ضابطه «تصویرکنجنگاری» در نظر می‌گیریم. (مرحله ۱ برهان قضیه ۲.۶ را ملاحظه کنید.)

نگاشت  $f$ ، در واقع، يك همومورفیسم بین  $R^2$  و  $S^2 - p$  است. علاوه بر آن، بردارهای مماس به  $S^2$  را به‌طور پیوسته بتوی بردارهای مماس به  $R^2$  می‌برد. چگونه؟ ساده‌ترین راه برای مشاهده این وضعیت، آن است که برداری مماس در نقطه  $x$  مانند  $v$  اختیار کنیم، و يك منحنی مانند  $C$  در  $S^2$  بیابیم که آن بردار همان بردار سرعت  $C$  در نقطه  $x$  باشد. نگاشت  $f$  منحنی  $C$  را بتوی يك منحنی در  $R^2$  می‌برد، و فرض می‌کنیم بردار  $v$  را بتوی بردار سرعت منحنی تصویر، یعنی  $f(C)$ ، در نقطه  $f(x)$  ببرد. همچنین، تصویر  $(x, v)$  را به  $(y, w)$  نمایش می‌دهیم. با محاسبه مستقیم می‌توانید بیازمایید که  $f$  هموار ( $w$  خوشتعریف، و تابعی پیوسته از  $(x, v)$ ) است و ناویژه (اگر  $v$  ناصفر باشد  $w$  هم ناصفر است).

اکنون سؤالی مطرح می‌کنیم: تحت این نگاشت برای میدان برداری ناصفر  $(x, v)$  چه وضعی پیش می‌آید؟ این میدان بتوی يك میدان برداری ناصفر بر  $R^2$  مانند  $(y, w)$  برده می‌شود. بالاخص، زیرفضای  $S^2 - U$  از  $S^2$  را در نظر می‌گیریم، که نگاشت  $f$  آن را بروی يك گوی حول مبدأ مانند  $B$  در  $R^2$  با شعاعی بزرگ می‌برد. حوزه مقادیر میدان برداری شبیه چه چیزی است؟ طرحی از این میدان را بر دایره بزرگ  $S$ ، که مرز  $B$  است، در شکل ۲۸ رسم کرده‌ایم.

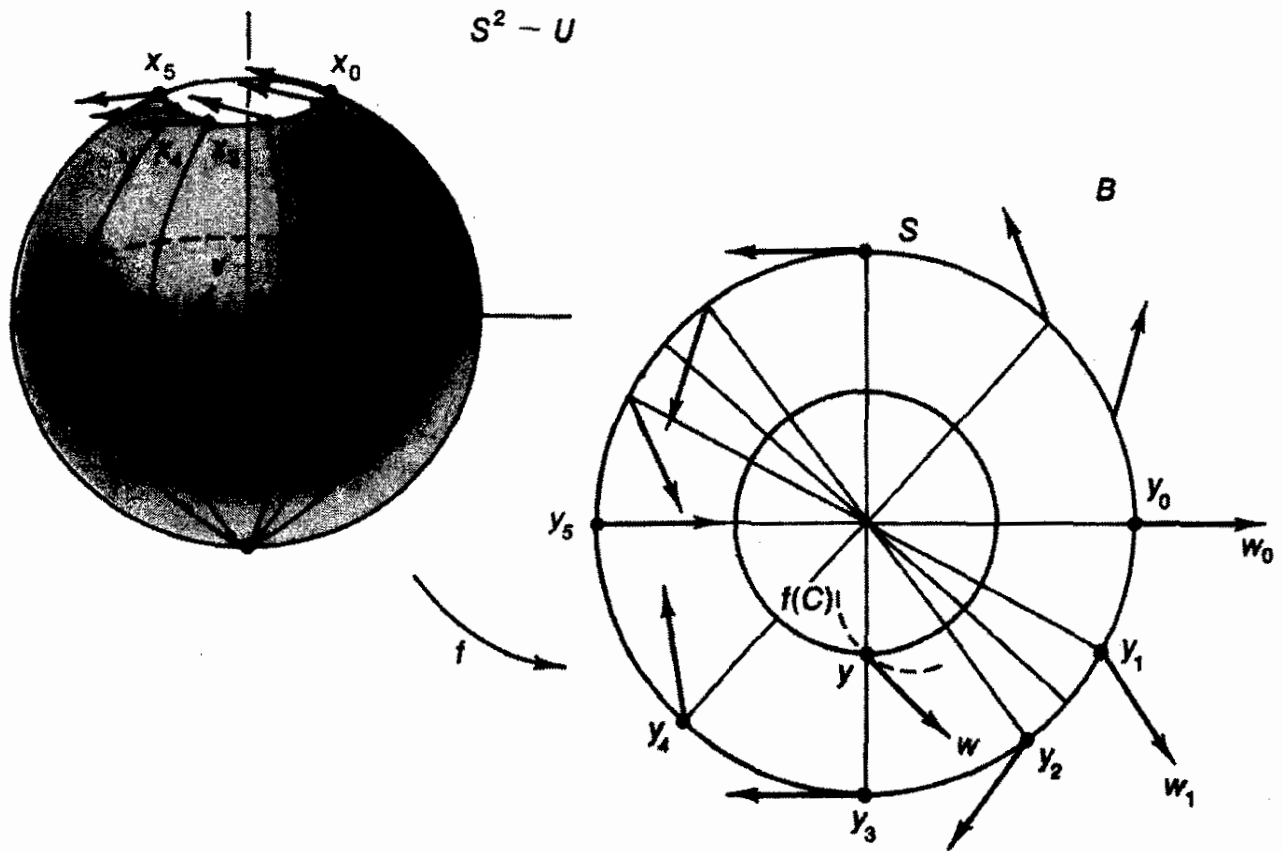
تا اینجا خیلی خوب بر گزار شد. حال رفتار میدان برداری  $(y, w(y))$  را بر  $B$  دقیقتر بررسی کنیم، بالاخص تحدید آن را به دایره  $S$ . از روی شکل می‌توانید ملاحظه کنید که نگاشت  $h: S \rightarrow R^2 - 0$  با ضابطه

$$h(y) = w(y)$$

يك مولد  $\pi_1(S, x_0)$  را به دو برابر مولدی از  $\pi_1(R^2 - 0, x_0)$  می‌برد. توضیح شهودی این مطلب این است که وقتی  $y$  يك بار دور دایره  $S$  می‌گردد، نقطه  $h(y)$  دوبار دور مبدأ می‌گردد.

اینجاست که تناقض پیش می‌آید. می‌دانیم که نگاشت  $h$  به نگاشتی از  $B$  بتوی  $R^2 - 0$  گسترش پذیر است، زیرا،  $(y, w(y))$  يك میدان برداری ناصفر بر  $B$  است. پس  $h$  باید همومورفیسم صفر گروه‌های بنیادی باشد. از طرف دیگر، می‌دانیم که هر دو گروه بنیادی مورد نظر دوری نامتناهی‌اند، و  $h$  يك مولد اولی را به دو برابر مولدی از

دومی می‌برد. در نتیجه، همومورفیسم صفر نیست. □



شکل ۲۸

این قضایا تعمیمهایی به ابعاد بالاتر دارند، که در تمرینهای ۷ و ۸ به بحث گذاشته شده‌اند.

### تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر  $A$  یک توکشیده  $B^2$  باشد آنگاه هر نگاشت پیوسته مانند  $f: A \rightarrow A$  یک نقطه ثابت دارد.
۲. ثابت کنید که اگر  $A$  یک ماتریس ناویژه  $3 \times 3$  با درایه‌های نامنفی باشد آنگاه  $A$  یک مقدار ویژه حقیقی مثبت دارد.
۳. ثابت کنید که مجموعه  $B$  بی که در نتیجه ۳.۱۰ تعریف شد با  $B^2$  هم‌شومورف است.
- ۴\* سعی کنید که یک برهان جبری برای نتیجه ۳.۱۰ بیاورید. (این تمرین برای دانشجویانی است که دچار این وسوسه می‌شوند که مطلب مورد نظر بدیهی است. بد نیست اول حالت  $2 \times 2$  را بررسی کنید.)

۵. ثابت کنید که اگر  $f: S^1 \rightarrow S^1$  غیر اساسی باشد آنگاه  $f$  يك نقطه ثابت دارد و نقطه‌ای مانند  $x$  را به متقاطع آن  $x$  می‌برد.
۶. ثابت کنید که به ازای نگاشتی پیوسته و مفروض مانند  $f: S^2 \rightarrow S^2$ ، یا  $f$  نقطه ثابتی دارد یا  $f$  نقطه‌ای مانند  $x$  را به متقاطع آن  $x$  می‌برد. [اذهمایی: قضیه ۴.۱۰ را به کار ببرید.]
۷. فرض کنید این مطلب را می‌دانیم که به ازای هر  $n$ ، توکشنده‌ای مانند  $f: B^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$  وجود ندارد. (این قضیه را می‌توان با تکنیکهای توپولوژی جبری ثابت کرد.) نتایج ذیل را استخراج کنید:
- (الف) نگاشت همانی  $f: S^n \rightarrow S^n$  اساسی است.
- (ب) نگاشت متقاطع  $f: S^n \rightarrow S^n$  اساسی است.
- (پ) نگاشت احتوای  $f: S^n \rightarrow R^{n+1} - \{0\}$  اساسی است.
- (ت) هر میدان برداری ناصفر بر  $B^{n+1}$  در نقطه‌ای از  $S^n$  مستقیماً به طرف داخل، و در نقطه‌ای از  $S^n$  مستقیماً به طرف خارج متوجه است.
- (ث) هر نگاشت پیوسته مانند  $f: B^n \rightarrow B^n$  يك نقطه ثابت دارد.
- (ج) هر ماتریس  $n$  در  $n$  با درایه‌های حقیقی مثبت يك مقدار ویژه حقیقی مثبت دارد.
- (چ) اگر  $f: S^n \rightarrow S^n$  غیر اساسی باشد آنگاه نقطه‌ای ثابت دارد و نقطه‌ای را به متقاطعش می‌برد.

۸. ثابت شده است که  $S^n$  يك میدان برداری مماس ناصفر دارد اگر و تنها اگر  $n$  فرد باشد. قسمت «اگر» آسان است. ثابت کنید که اگر  $n = 2m - 1$  آنگاه

$$v(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2m}, x_{2m-1})$$

- يك میدان برداری مماس ناصفر بر  $S^n$  است. قسمت «تنها اگر» دشوارتر است؛ تمرین ۷، در بخش ۸-۱۱، ملاحظه شود.

## ۸-۱۱ نوع هموتوبی

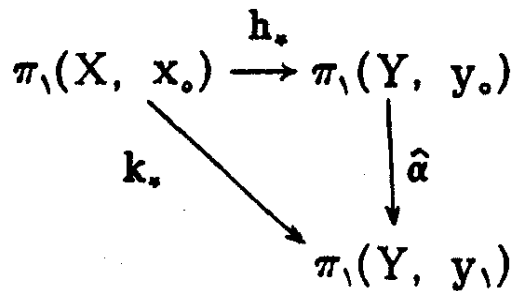
در بخش ۸-۸ مسئله تعیین هموتوپ بودن یا نبودن نگاشتی مفروض مانند  $h: X \rightarrow Y$  با يك نگاشت ثابت را در نظر گرفتیم. اکنون مسئله کلیتر هموتوپ بودن یا نبودن دو نگاشت مفروض مانند  $h, k: X \rightarrow Y$  را مد نظر قرار می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که شرط لازم برای هموتوپ بودن  $h$  و  $k$  آن است که با تقریبی متضمن يك ایزومورفیسم گروه،  $h_*$  و  $k_*$  مساوی باشند.

ثابت می‌شود که این قضیه کاربردی در مسئله محاسبه گروههای بنیادی دارد. قبلاً در بخش ۵-۸ متذکر شده‌ایم که، دوفضا دارای گروههای بنیادی ایزومورف اند هر گاه یکی توکشیده دگرذیسی قوی دیگری باشد، و این مطلب را در محاسبه گروههای بنیادی به کار



برده ایم. اما رابطه‌ای کلیتر از این موسوم به هم‌ادزی هموتوپوی موجود است که آن نیز مستلزم ایزومورف بودن گروه‌های بنیادی فضا‌های مورد بحث است. در این بخش به مطالعه این رابطه می‌پردازیم. نخست ببینیم وقتی دو نگاشت هموتوپ‌اند چه اتفاقی رخ می‌دهد.

۱.۱۱. قضیه فرض کنیم  $h, k : X \rightarrow Y$  ،  $h(x_0) = y_0$  ،  $k(x_0) = y_1$  ، اگر  $h$  و  $k$  هموتوپ باشند آنگاه راهی در  $Y$  از  $y_0$  به  $y_1$  مانند  $\alpha$  هست که  $k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$  ؛ و اگر  $y_0 = y_1$  و نقطه پایه‌ای  $x_0$  در ضمن هموتوپ ثابت بماند آنگاه  $k_* = h_*$ .



پرهان. فرض کنیم  $H : X \times I \rightarrow Y$  هموتوپیی بین  $h$  و  $k$  باشد؛ در این صورت به ازای هر  $x$  از  $X$  ،  $H(x, 0) = h(x)$  و  $H(x, 1) = k(x)$ . حال نگاشت  $\alpha : I \rightarrow Y$  را با ضابطه  $\alpha(t) = H(x_0, t)$  اختیار می‌کنیم؛ در این صورت  $\alpha$  راهی است در  $Y$  از  $y_0$  به  $y_1$ . ادعا می‌کنیم که  $k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$ . یعنی، مدعی هستیم که به ازای هر کمند بر پایه  $x_0$  در  $X$  مانند  $f : I \rightarrow X$  داریم

$$k_*([f]) = \hat{\alpha}(h_*([f])).$$

باید ثابت کنیم که  $[k \circ f] = [\hat{\alpha}] * [h \circ f] * [\alpha]$  ، یا ، معادل آن، که

$$(*) \quad [\alpha] * [k \circ f] * [\hat{\alpha}] = [h \circ f].$$

بررسی این معادله مستلزم ساختن يك هموتوپیی راهی مانند  $G$  است.  $G$  را به صورت هندسی ذیل تعبیر می‌کنیم: به ازای مقدار مفروض پارامتر  $t$  ،  $\alpha_t$  را راهی می‌گیریم که در طول  $\alpha$  از  $y_0$  به  $y_1$  می‌رود، و بر اساس بازه  $[0, 1]$  مجدداً پارامتری شده است. و فرض کنیم  $\beta_t$  کمند  $\beta_t(s) = H(f(s), t)$  در  $Y$  بر پایه  $\alpha(t)$  باشد. شکل ۲۹ ملاحظه شود. سپس کمند

$$(\alpha_t * \beta_t) * \bar{\alpha}_t$$

را بر پایه  $y_0$  در نظر می‌گیریم. وقتی  $t = 0$  ، این کمند برابر است با

$$(e_{y_0} * (h \circ f)) * e_{y_0}$$

که با  $h \circ f$  هموتوپیی راهی است؛ و هنگامی که  $t = 1$  ، مساوی است با کمند

$$(\alpha * (k \circ f)) * \bar{\alpha}$$



شکل ۲۹

پس، تعریف  $G$  به صورت  $G(s, t) = ((\alpha_t * \beta_t) * \bar{\alpha}_t)(s)$ ، هموتوپی مورد نیاز اثبات (\*) را می‌دهد.

به بیان صوری، نگاشت  $G : I \times I \rightarrow Y$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$G(s, t) = \begin{cases} \alpha(\psi st) & , s \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ به ازای} \\ H(f(\psi s - 1), t) & , s \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \text{ به ازای} \\ \alpha(\psi t(1-s)) & , s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ به ازای} \end{cases}$$

می‌توانید بررسی کنید که ضوابط فوق با معنی هستند؛ یعنی، این ضوابط در نقاط مشترک حوزه‌های تعریف خود توافق دارند، و  $G$  هموتوپی راهی مطلوب است.

بالاخره، توجه می‌کنیم که اگر هموتوپی  $H$  نقطه پایه  $x_0$  را در نقطه  $y_0$  نگه‌دارد

آنگاه راه  $\alpha(t) = H(x_0, t)$  راه ثابت است، که در نتیجه  $k_* = \bar{\alpha}_* \circ h_* = h_*$  □

۲.۱۱. نتیجه فرض کنیم  $h, k : X \rightarrow Y$ ،  $h(x_0) = y_0$ ،  $k(x_0) = y_1$ .

همچنین فرض کنیم  $h$  و  $k$  هموتوپ باشند. اگر  $k_*$  یک به یک (یا پوشا یا همومورفیسم صفر) باشد آنگاه  $h_*$  نیز چنین است. بالاجس، اگر  $h$  با یک نگاشت ثابت هموتوپ باشد آنگاه  $h_*$  همومورفیسم صفر است.

اینک نوبت دومین مسئله‌ای است که در ابتدای این بخش متذکر شدیم، یعنی مسئله محاسبه گروه‌های بنیادی. یک شرط کلی به دست می‌آوریم که تحت آن دو فضا دارای گروه‌های بنیادی ایزومورف‌اند.

تعریف. نگاشت پیوسته  $f: X \rightarrow Y$  را هم‌ارزی هموتویی گوئیم در صورتی که نگاشتی پیوسته مانند  $g: Y \rightarrow X$  موجود باشد به طوری که  $g \circ f$  با  $i_X$ ، نگاشت همانی  $X$  و  $f \circ g$  با  $i_Y$  نگاشت همانی  $Y$  هم‌توپ باشد. نگاشت  $g$  را عکس هموتویی نگاشت  $f$  می‌نامیم.

به آسانی ملاحظه می‌شود که به ازای هر گردایه مفروض فضاهای توپولوژی مانند  $\mathcal{C}$ ، رابطه هم‌ارزی هموتویی یک رابطه هم‌ارزی در  $\mathcal{C}$  است. تمرین ۲ دیده شود. دو فضا را دارای یک نوع هموتویی گوئیم هرگاه هم‌ارز هموتویی باشند.

مفهوم هم‌ارزی هموتویی مفهوم توکشنده دگرذیسی قوی را که در بخش ۸-۵ تعریف شد تعمیم می‌دهد؛ اگر  $A$  یک توکشنده دگرذیسی قوی  $X$  باشد آنگاه  $A$  دارای همان نوع هموتویی  $X$  است. زیرا، فرض کنیم که  $z: A \rightarrow X$  نگاشت احتوا و  $r: X \rightarrow A$  نگاشت توکشنده باشد. در این صورت، ترکیب  $z \circ r$  مساوی نگاشت همانی  $A$  است، و ترکیب  $r \circ z$  بنا بر فرض با نگاشت همانی  $X$  هم‌توپ است (در واقع، هر نقطه  $A$  در ضمن این هموتویی ثابت می‌ماند). با فرض اینکه دو فضا هم‌ارز هموتویی‌اند، می‌توان ایزومورف بودن گروه‌های بنیادی آنها را ثابت کرد:

۳.۱۱. قضیه فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته باشد و  $f(x_0) = y_0$ . اگر  $f$  هم‌ارزی هموتویی باشد آنگاه

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

یک ایزومورفیسم است.

برهان. فرض کنیم  $g: Y \rightarrow X$  عکس هموتویی  $f$  باشد. نگاشتهای

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (X, x_1) \xrightarrow{f} (Y, y_1),$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن،  $x_1 = g(y_0)$  و  $y_1 = f(x_1)$ . همومورفیسمهای القایی متناظر عبارت‌اند از:

۱. فضای  $X$  را با  $Y$  هم‌ارز هموتویی گوئیم هرگاه یک نگاشت هم‌ارزی هموتویی مانند  $f: X \rightarrow Y$  موجود باشد. - م.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(f_{x_0})_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow g_* & \\ & & \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{(f_{x_1})_*} \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

[در اینجا ناچاریم بین همومورفیسمهای القایی  $f$  نسبت به دو نقطه پایه‌ای مختلف تفاوت قائل شویم.] اکنون

$$g \circ f : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_1).$$

از آنجا که، بنا بر فرض،  $g \circ f$  با نگاشت همانی هموتوپ است، راهی در  $X$  مانند  $\alpha$  هست که

$$(g \circ f)_* = \hat{\alpha} \circ (i_x)_* = \hat{\alpha}.$$

بالاخص،  $(g \circ f)_* = g_* \circ (f_{x_0})_*$  یک ایزومورفیسم است. به طریقی مشابه، چون  $f \circ g$  با  $i_y$  هموتوپ است، همومورفیسم

$$(f \circ g)_* = (f_{x_1})_* \circ g_*$$

یک ایزومورفیسم است.

حکم اول مستلزم پوشا بودن  $g_*$  است و دومی مستلزم یک به یک بودن آن است. بنابراین،  $g_*$  یک ایزومورفیسم است. با به کار بردن مجدد معادله اول نتیجه می‌گیریم که

$$(f_{x_0})_* = (g_*)^{-1} \circ \hat{\alpha},$$

بدین معنی که  $(f_{x_0})_*$  نیز ایزومورفیسم است.

توجه کنید که گرچه  $g$  یک عکس هموتوپی  $f$  است، همومورفیسم  $g_*$  عکس همومورفیسم  $(f_{x_0})_*$  نیست.  $\square$

رابطه هم ارزی هموتوپی بوضوح کلیتر از مفهوم توکشیده دگردیسی قوی است. فضای تتا و فضای به شکل 8 هر دو توکشیده دگردیسی قوی صفحه دوبار سفته‌اند؛ ما این مطلب را در مثالهای ۳ و ۴، بخش ۸-۵، متذکر شده‌ایم. بنابراین، آنها با صفحه دوبار سفته و در نتیجه با یکدیگر هم‌ارز هموتوپی‌اند. ولی هیچیک از آنها با یک توکشیده دگردیسی قوی دیگری هموتوپ نیستند؛ در حقیقت هیچیک از آنها را حتی نمی‌توان در دیگری نشان داد. (به تمرین ۴ مراجعه کنید.)

حقیقت قابل توجه اینکه در مورد هم‌ارزیهای هموتوپی، وضعیت این دو فضا نسبت به یکدیگر، وضعیت استانده‌ای است. مارتین فوش<sup>۱</sup> ثابت کرده است که دو فضای  $X$  و

و  $Y$  دارای يك نوع هموتوپی اند اگر و فقط اگر  $X$  و  $Y$  با توکشیده دگردیسی قوی فضایی مانند  $Z$  همومورف باشند. برهان، باینکه فقط از ابزارهای مقدماتی کمک می گیرد، دشوار است  $[F]$ .

### تمرینها

۱. بتفصیل مطالب مربوط به هموتوپی  $G$  را که در برهان قضیه ۱.۱۱ ساخته شد، بررسی کنید.
۲. ثابت کنید که به ازای يك گردایه مفروض فضاها، مانند  $\mathcal{C}$ ، رابطه هم ارزی هموتوپی يك رابطه هم ارزی بر  $\mathcal{C}$  است.
۳. ثابت کنید که  $X$  و فضای  $T_k$  نقطه ای يك نوع هموتوپی دارند اگر و فقط اگر  $X$  انقباض پذیر باشد. (تمرین ۴ در بخش ۸-۸ دیده شود.)
۴. ثابت کنید که هیچیک از فضاها  $\theta$  و  $\mathcal{B}$  را نمی توان در دیگری نشانید.
۵. فرض کنید  $A$  زیرفضایی از  $X$  باشد و  $f: X \rightarrow A$  نگاشت احتوا و  $i_X: X \rightarrow X$  نگاشتی پیوسته باشد. همچنین، فرض کنید  $f: X \rightarrow X$  و  $z$  بانگاشت همانی  $i_X: X \rightarrow X$  تحت يك هموتوپی مانند  $H: X \times I \rightarrow X$  هموتوپ باشند.  
(الف) ثابت کنید که اگر به ازای هر  $a$  از  $A$ ،  $H(a, t) \in A$  نگاه  $z$  و  $f$  ایزومورفیسم اند.  
(ب) ثابت کنید که اگر  $f$  يك توکشنده باشد نگاه  $z$  و  $f$  ایزومورفیسم اند.  
[در این مورد،  $H$  را به جای توکشنده دگردیسی قوی فقط توکشنده دگردیسی می نامند].  
(پ) برای اثبات اینکه لزومی ندارد در حالت کلی  $f$  و  $g$  ایزومورفیسم باشند، مثالی ارائه دهید.
۶. به طریق ذیل دجه يك نگاشت پیوسته مانند  $h: S^1 \rightarrow S^1$  را تعریف می کنیم:  
فرض کنید  $b_0$  نقطه  $(1, 0)$  از  $S^1$  باشد، يك مولد مانند  $\gamma$  برای گروه دوری نامتناهی  $\pi_1(S^1, b_0)$  انتخاب می کنیم. (تنها دو مولد هست و تفاوت آنها در علامت آنهاست.) اگر  $x_0$  هر نقطه ای از  $S^1$  باشد، راهی در  $S^1$  از  $b_0$  به  $x_0$  مانند  $\alpha$  انتخاب و  $\gamma(x_0)$  را مساوی  $\alpha(\gamma)$  تعریف می کنیم. در این صورت،  $\gamma(x_0)$ ،  $\pi_1(S^1, x_0)$  را تولید می کند. چون گروه بنیادی  $S^1$  آبلی است، عضو  $\gamma(x_0)$  مستقل از انتخاب راه  $\alpha$  است.  
اکنون به ازای نگاشت مفروض  $h: S^1 \rightarrow S^1$ ،  $x_0$  را از  $S^1$  انتخاب کنید و فرض کنید  $h(x_0) = x_1$  همومورفیسم

$$h_*: \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \pi_1(S^1, x_1)$$

را در نظر بگیرید. چون هر دو گروه دوری نامتناهی اند، به ازای عددی صحیح مانند  $d$  داریم

$$(*) \quad h_*(\gamma(x_0)) = d \cdot \gamma(x_1)$$

عدد صحیح  $d$  را درجه  $h$  می‌نامیم و آن را به  $\deg h$  نشان می‌دهیم.  
درجه  $h$  مستقل از انتخاب مولد  $\gamma$  است؛ انتخاب مولد دیگر تنها علامت هر

دو طرف  $(*)$  را تغییر می‌دهد.

(الف) ثابت کنید که  $d$  مستقل از انتخاب  $x_0$  است.

(ب) ثابت کنید که اگر  $h, k : S^1 \rightarrow S^1$  هموتوپ باشند آنگاه درجه آنها مساوی است.

(پ) ثابت کنید که  $\deg(h \circ k) = (\deg h) \cdot (\deg k)$ .

(ت) درجه نگاشت همانی، نگاشت انعکاسی  $\rho(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ ، نگاشت ثابت، و نگاشت  $h(z) = z^n$ ، را که  $z$  عددی است مختلط، محاسبه کنید.

\* (ث) ثابت کنید که اگر  $h, k : S^1 \rightarrow S^1$  دارای درجه یکسانی باشند، هموتوپ‌اند.

۷. فرض کنید به هر نگاشت  $h : S^n \rightarrow S^n$  یک عدد صحیح، که آن را درجه  $h$  می‌نامیم و به  $\deg h$  نمایش می‌دهیم چنان نظیر کرده باشیم که:

(۱) نگاشتهای هموتوپ دارای درجه مساوی‌اند.

$$(۲) \quad \deg(h \circ k) = (\deg h) \cdot (\deg k)$$

(۳) درجه نگاشت همانی مساوی ۱ و درجه نگاشت ثابت مساوی ۰ است و نگاشت

انعکاسی  $\rho(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_{n+1})$  دارای درجه  $-۱$  است.

[با به کار بردن ابزارهای توپولوژی جبری چنین تسامعی را می‌توان ساخت. از نظر شهودی،  $\deg h$  می‌گوید که  $h$  چند بار  $S^n$  را به دور خودش می‌پیچد؛ علامت بیانگر این است که  $h$  جهت را حفظ می‌کند یا خیر.] ثابت کنید که:

(الف) هیچ توکشنده‌ای مانند  $S^n \rightarrow S^{n+1}$  وجود ندارد.

(ب) اگر درجه  $h : S^n \rightarrow S^n$  مخالف  $(-۱)^{n+1}$  باشد آنگاه  $h$  یک نقطه ثابت دارد. [داهنمایی: ثابت کنید که اگر  $h$  نقطه ثابتی نداشته باشد آنگاه  $h$  با نگاشت متقاطع هموتوپ است.]

(پ) اگر درجه  $h : S^n \rightarrow S^n$  مخالف یک باشد آنگاه  $h$  نقطه‌ای مانند  $x$  را به متقاطع آن  $-x$  می‌نگارد.

(ت) اگر  $S^n$  یک میدان برداری مماس ناصفر، مانند  $\mathbb{R}$ ، داشته باشد آنگاه  $n$  فرد است. [داهنمایی: اگر  $\mathbb{R}$  موجود باشد ثابت کنید که نگاشت همانی با نگاشت متقاطع هموتوپ است.]

(ث) هر نگاشت مانند  $S^{2m} \rightarrow S^{2m}$  یا یک نقطه ثابت دارد یا نقطه‌ای مانند  $x$  وجود دارد که  $h(x) = -x$ .

(ج) این نتایج را با تمرینهای ۶، ۷ و ۸ در بخش ۸ - ۱۰ مقایسه کنید.

برای کاربرد مفهوم درجه در هندسه دیفرانسیلی کتاب [G-P] را ملاحظه کنید.

## ۸-۱۲ قضیه جداسازی ژوردان

اکنون یکی از مسائل کلاسیک ریاضیات را در نظر می‌گیریم: قضیه منحنی ژوردان. این قضیه بیانگر واقعیتی است که از نظر هندسی کاملاً «بدیهی» است؛ یعنی این که هر منحنی بسته ساده، همیشه صفحه را به دو قطعه جدا می‌سازد، ولی، اثبات آن با استدلالهای صرفاً هندسی بسیار دشوار است. در اینجا آن را به عنوان نتیجه‌ای از مطالبی که در مورد فضاهای پوششی و گروه بنیادی مطالعه کرده‌ایم ثابت می‌کنیم.

برهان عملاً متضمن سه قضیه جداسازی است. اولی، که آن را قضیه جداسازی ژوردان می‌نامیم، می‌گوید که یک منحنی بسته ساده در  $S^2$  (یا در صفحه) حداقل آن را به دو مؤلفه جدا می‌سازد. قضیه دوم حکم به این می‌کند که یک کمان،  $S^2$  (یا صفحه) را جدا نمی‌سازد. و سومی، یا قضیه منحنی ژوردان، می‌گوید که یک منحنی بسته ساده مانند  $C$  در  $S^2$  (یا در صفحه) دقیقاً آن را به دو مؤلفه جدا می‌سازد به طوری که  $C$  مرز مشترک آنهاست.

اینک اولین قضیه از این سه قضیه را ثابت می‌کنیم. برای اثبات آن به حکم ذیل احتیاج داریم:

۱۰۱۲. لم فرض کنیم  $a$  و  $b$  دو نقطه  $S^2$  باشند؛ همچنین فرض کنیم  $A$  فضای فشرده  $a-b \rightarrow S^2 - f(A)$  نگاشتنی پیوسته باشد. اگر  $a$  و  $b$  در یک مؤلفه  $S^2 - f(A)$  قرار داشته باشند آنگاه  $f$  غیر اساسی است.

از جنبه شهودی، لم بیانگر این است که اگر در  $S^2$  مجموعه  $f(A)$  نقطه  $a$  و  $b$  را از هم جدا نکند آنگاه  $f$  می‌تواند بدون لمس کردن  $a$  یا  $b$  به یک نقطه درهم کشیده شود.

برهان. مرحله ۱. ثابت می‌کنیم که هم‌هومورفیسمی مانند  $h$  از  $S^2$  به  $R^2 \cup \{\infty\}$  (فشرده شده تک نقطه‌ای  $R^2$ ) موجود است که  $h(a) = \infty$  و  $h(b) = 0$ .

برای ساختن  $h$  ابتدا دورانی از  $S^2$  مانند  $h_1$  را طوری اختیار می‌کنیم که  $a$  را به  $p$  (قطب شمال) ببرد. سپس،  $h_2$  تصویر کنجنگاری را اختیار می‌کنیم که  $S^2 - p$  را به طور هم‌هومورفیک بر روی  $R^2$  می‌نگارد؛  $h_2$  را با تعریف  $h_2(p) = \infty$  به  $S^2$  گسترش می‌دهیم. سرانجام انتقالی از  $R^2$ ، مانند  $h_3$ ، را در نظر می‌گیریم که نقطه  $h_2(h_1(b))$  را به مبدأ  $0$  ببرد، و با تعریف  $h_3(\infty) = \infty$  آن را به  $R^2 \cup \{\infty\}$  گسترش می‌دهیم. به آسانی ملاحظه می‌شود که  $h_3$  و  $h_2$  هم‌هومورفیسم‌اند همچنانکه  $h_1$  نیز چنین است. در این صورت،  $h_3 \circ h_2 \circ h_1$  هم‌هومورفیسم مطلوب است.

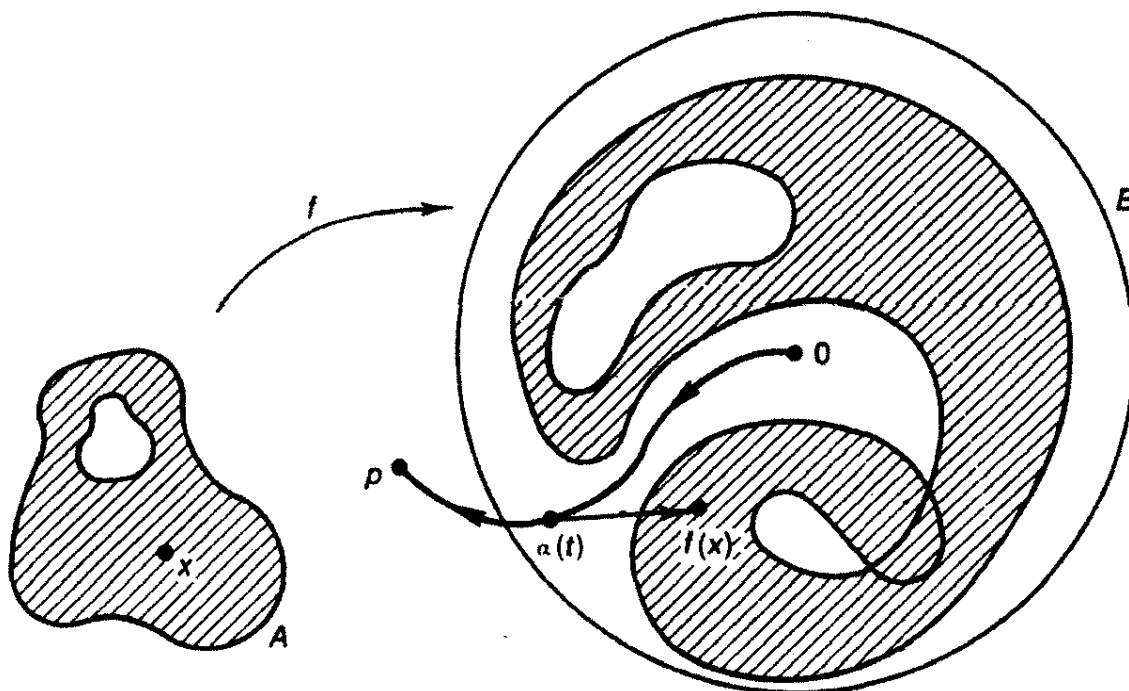
مرحله ۲. در پرتو مرحله ۱، لم ما به حکم ذیل تبدیل می‌شود. فرض کنیم  $A$  فشرده  $0 \rightarrow R^2 - f(A)$  نگاشتنی پیوسته باشد. اگر  $0$  در مؤلفه بیکران  $R^2 - f(A)$  قرار داشته باشد آنگاه  $f$  غیر اساسی است.

اثبات این حکم آسان است. فرض کنیم که  $0$  در مؤلفه بیکران  $R^2 - f(A)$  قرار

بگیرد. گویی مانند  $B$  به مرکز مبدأ با شعاعی به اندازه کافی بزرگ به طوری اختیار می کنیم که حاوی مجموعه  $f(A)$  باشد. نقطه ای از  $R^2$  مانند  $p$  خارج از  $B$  اختیار می کنیم. در این صورت،  $0$  و  $p$  در يك مؤلفه  $R^2 - f(A)$  قرار می گیرند. چون  $R^2$  همبند راهی موضعی است، مجموعه باز  $R^2 - f(A)$  نیز چنین است. بنابراین، مؤلفه ها و مؤلفه های راهی  $R^2 - f(A)$  یکی هستند. پس می توانیم راهی در  $R^2 - f(A)$  مانند  $\alpha$  از  $0$  به  $p$  انتخاب کنیم. هموتوبی  $F: A \times I \rightarrow R^2 - 0$  را با ضابطه ذیل تعریف می کنیم:

$$F(x, t) = f(x) - \alpha(t);$$

این هموتوبی در شکل ۳۰ ترسیم شده است.  $F$  يك هموتوبی بین نگاشت  $f$  و نگاشت  $g$  با ضابطه  $g(x) = f(x) - p$  است. توجه کنید که  $F(x, t) \neq 0$ ، زیرا، راه  $\alpha$  مجموعه  $f(A)$  را قطع نمی کند.



شکل ۳۰

هموتوبی  $G: A \times I \rightarrow R^2 - 0$  را با ضابطه

$$G(x, t) = tf(x) - p$$

تعریف می کنیم.  $G$  يك هموتوبی بین نگاشت  $g$  و نگاشتی ثابت است. توجه کنید که چون  $tf(x)$  داخل گوی  $B$  است و  $p$  در داخل آن نیست، پس  $G(x, t) \neq 0$ . بنا بر این ثابت کرده ایم که  $f$  غیر اساسی است.  $\square$

تعریف. يك کمان عبارت است از فضای همومورف با بازه واحد  $[0, 1]$ . يك منحنی بسته ساده عبارت است از فضای همومورف با دایره  $S^1$ .

۲۰۱۲. قضیه جداسازی ژوردان) فرض کنیم  $C$  يك منحنی بسته ساده در



$S^2$  باشد. در این صورت،  $S^2 - C$  همبند نیست.

پرهان. چون  $S^2 - C$  همبند راهی موضعی است، مؤلفه‌ها و مؤلفه‌های راهی آن یکی هستند. فرض می‌کنیم  $S^2 - C$  همبند راهی باشد و تناقضی استخراج می‌کنیم. قضیه ۱.۶ را به کار می‌بریم، یعنی قضیه ون کمپن در حالت خاص. این قضیه گروه بنیادی  $X = U \cup V$  را بر حسب گروه‌های بنیادی  $U$  و  $V$  بیان می‌کند، به شرط آنکه  $U \cap V$  همبند راهی باشد.

ابتدا  $C$  را به صورت اجتماع دو کمان، مانند  $A_1$  و  $A_2$ ، می‌نویسیم که فقط در نقاط انتهایی خود، یعنی  $a$  و  $b$ ، یکدیگر را قطع می‌کنند. سپس، فرض می‌کنیم  $X$  نمایش فضای  $S^2 - a - b$  باشد. فضای  $X$  با صفحه سفته  $R^2 - 0$  هم‌شومورف است، پس گروه بنیادی آن دوری نامتناهی است.

فرض کنیم  $U$  مجموعه باز  $S^2 - A_1$  و  $V$  مجموعه باز  $S^2 - A_2$  باشد؛ در این صورت  $X = U \cup V$  و

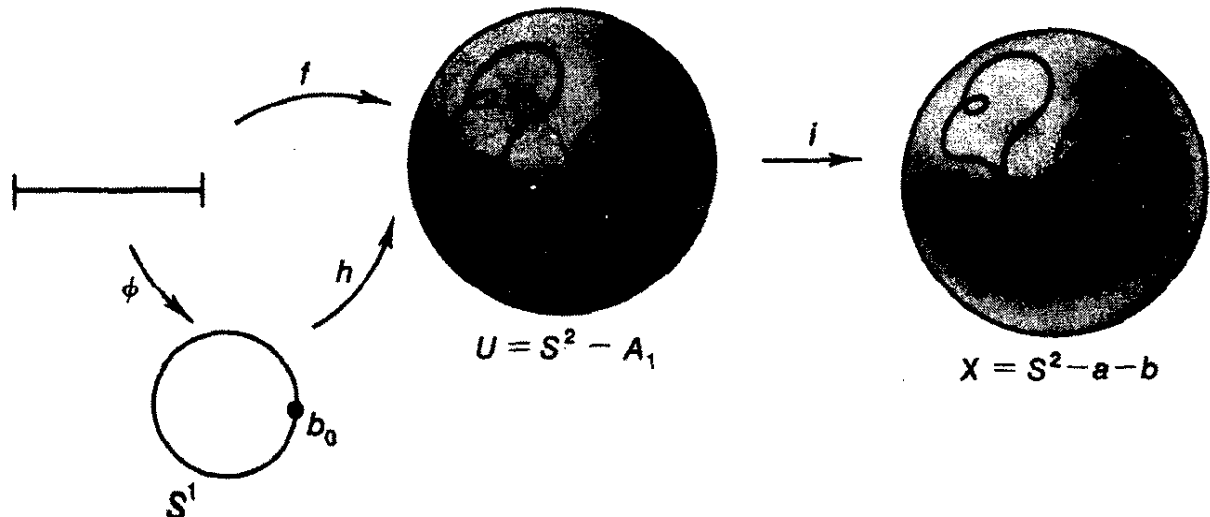
$$U \cap V = S^2 - (A_1 \cup A_2) = S^2 - C,$$

در نتیجه، بنا بر فرض  $U \cap V$  همبند راهی است. فرض کنیم  $x_0$  نقطه‌ای از  $U \cap V$  باشد. اگر ثابت کنیم که توابع احتوای

$$i: (U, x_0) \rightarrow (X, x_0), \quad j: (V, x_0) \rightarrow (X, x_0)$$

همومورفیسم‌های صفر گروه بنیادی را القا می‌کنند، قضیه ۱.۶ حکم می‌کند که  $\pi_1(X, x_0) = 0$  که این امر با دوری نامتناهی بودن گروه  $\pi_1(X, x_0)$  تناقض دارد، پس فرض همبند راهی بودن  $S^2 - C$  غلط است.

حال ثابت می‌کنیم که  $i$  همومورفیسم صفر است. به ازای کمندی مفروض بر پایه  $x_0$  مانند  $f: I \rightarrow U$  ثابت می‌کنیم که  $([f]) \in i_*([I])$  عضو خنثاست. برای این منظور فرض کنیم  $\phi: I \rightarrow S^1$  کمند استاندارد مولد گروه  $\pi_1(S^1, b_0)$  باشد. نگاشت  $f: I \rightarrow U$  نگاشتی پیوسته مانند  $h: S^1 \rightarrow U$  را القا می‌کند به طوری که  $h \circ \phi = f$ . شکل ۳۱ ملاحظه شود.



شکل ۳۱

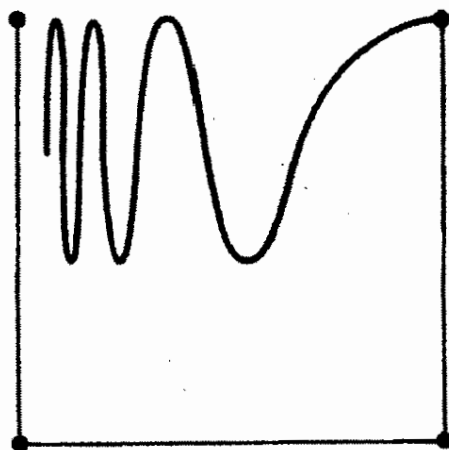
نگاشت  $i \circ h : S^1 \rightarrow S^2 - a - b$  را در نظر می‌گیریم، بنا بر فرض، مجموعه  $i(h(S^1)) = h(S^1)$  کمان  $A_1$  را، که  $a$  را به  $b$  وصل می‌کند، قطع نمی‌کند. بنا بر این،  $a$  و  $b$  در یک مؤلفه  $(S^2 - i(h(S^1)))$  قرار دارند. بنا بر لم سابق، نگاشت  $i \circ h$  غیر اساسی است. از قضیه ۲.۸ نتیجه می‌شود که  $(i \circ h)_*$  همومورفیسم صفر گروه‌های بنیادی است. ولی

$$(i \circ h)_*([\phi]) = [i \circ h \circ \phi] = [i \circ f] = i_*([f]).$$

بنابراین،  $i_*([f])$ ، همانطور که می‌خواستیم، عضو خنثاست.  $\square$

### تمرینها

۱. با یکی گرفتن  $S^2$  و  $R^2 \cup \{\infty\}$ ، ثابت کنید که هر منحنی بسته ساده در  $R^2$  آن را جدا می‌سازد.
۲. در برهان قضیه ۲.۱۲ فرض کردیم که منحنی بسته ساده  $C$  مساوی همه  $S^2$  نیست. چرا این فرض مجاز است؟
۳. با ارائه مثالهایی ثابت کنید که یک منحنی بسته ساده در چنبره ممکن است (و یا ممکن نیست) آن را جدا سازد.
۴. (الف) لم. فرض کنید  $A$  و  $B$  زیر مجموعه‌های بسته همبندی از  $S^2$  باشند که مقطع آنها دقیقاً از دو نقطه تشکیل می‌شود. در این صورت،  $A \cup B$  فضای  $S^2$  را جدا می‌سازد.  
(ب) فرض کنید  $C$  زیر مجموعه‌ای از  $S^2$  باشد که هم‌هومورف است با فضایی که اجتماع منحنی سینوسی توپولوژیدانها و خط شکسته‌ای که از نقطه  $(0, 1)$  به  $(0, -2)$  سپس به  $(1, -2)$  و بالاخره به  $(1, 1)$  کشیده شده است (شکل ۳۲)



ملاحظه شود.) ثابت کنید که  $C$  فضای  $S^2$  را جدا می‌سازد.

۵\* این تمرین منجر به برهانی برای قضیه ناوردایی حوزه برای  $R^2$  می‌شود.  
(الف) ثابت کنید:

لم (لم‌گسترش هموتوپی). فرض کنید  $X$  و  $X \times I$  نرمال باشند؛  $A$  را یک زیر مجموعه بسته  $X$  اختیار کنید. اگر  $f: A \rightarrow R^2 - 0$  نگاشتی پیوسته و  $f$  غیر اساسی باشد آنگاه  $f$  را می‌توان به نگاشتی پیوسته مانند  $g: X \rightarrow R^2 - 0$  گسترش داد.

[دانهمایی: با استفاده از هموتوپی بین  $f$  و نگاشتی ثابت، نگاشتی از زیر-فضای  $Y = (A \times I) \cup (X \times I)$  از فضای  $X \times I$  بتوی  $R^2 - 0$  تعریف کنید. این نگاشت را به یک همسایگی از  $Y$  مانند  $U$  در  $X \times I$  گسترش دهید. سپس نگاشتی از  $X \times 0$  بتوی  $U$  طوری بسازید که بر  $A \times 0$  مساوی نگاشت همانی باشد.]  
(ب) ثابت کنید:

قضیه (بورسوک). فرض کنید  $X$  یک زیرمجموعه فشرده  $R^2$  باشد. اگر  $0$  در یک مؤلفه کراندار  $R^2 - X$  مانند  $C$  قرار گیرد آنگاه نگاشت احتوای  $z: X \rightarrow R^2 - 0$  غیر اساسی است؛ و بعکس.

[دانهمایی: فرض کنید  $B$  گوی بازی حاوی  $C$  و  $X$  باشد. اگر  $z$  غیر اساسی باشد، ثابت کنید که نگاشت احتوای  $B - C$  از  $B$  بتوی  $R^2 - 0$  را می‌توان به نگاشتی پیوسته از  $B$  بتوی  $R^2 - 0$  گسترش داد.]  
(پ) ثابت کنید:

قضیه (یک قضیه جداناسازی). هیچ کمانی  $R^2$  را جدا نمی‌سازد. هیچیک از فضاهای هومئومورف با  $B^2$  فضای  $R^2$  را جدا نمی‌سازد.

(ت) حکم ذیل را ثابت کنید. خلاصه برهان دیگری در تمرین ۹، بخش ۸-۱۳، آمده است.

قضیه (قضیه برادرها درباره پایایی حوزه برای  $R^2$ ): اگر  $U$  یک زیرمجموعه باز  $R^2$  باشد و  $f: U \rightarrow R^2$  پیوسته و یک به یک آنگاه  $f(U)$  در  $R^2$  باز و  $f$  یک نشاننده است.

[دانهمایی: اگر  $f: B^2 \rightarrow R^2$  یک نشاننده باشد، توجه کنید که  $f(S^1)$  فضای  $R^2$  را جدا می‌سازد ولی  $f(B^2)$  چنین نمی‌کند؛ نتیجه بگیرید که  $f(\text{Int } B^2)$  باید مساوی یکی از مؤلفه‌های  $R^2 - f(S^1)$  باشد.]

## ۸-۱۳ قضیه منحنی ژوردان

قضیه ون کمپن در حالت خاص، که آن را در اثبات قضیه جداسازی ژوردان به کار بردیم،

به شرط آنکه مقطع  $U \cap V$  همبند راهی باشد اطلاعاتی راجع به گروه بنیادی  $X = UUV$  بیان می‌دارد. در دو لم بعدی این مسئله را بررسی می‌کنیم که اگر  $U \cap V$  همبند نباشد چه وضعی پیش می‌آید. در لم اول فرض می‌کنیم  $U \cap V$  دست کم دو مؤلفه داشته باشد، و در دومی فرض بر این است که دست کم سه مؤلفه داشته باشد.

این لمها به ما امکان می‌دهند تا برهان قضیهٔ منحنی ژوردان را به پایسان برسانیم. برهانی که می‌آوریم، تا جایی که می‌دانیم، یک برهان جدید است. این برهان متضمن یک ساختمان مشابه ساختمانی است که در آنالیز مختلط برای ساختن سطوح ریمانی به کار می‌رود. ولی از نرمال بودن یا قضیهٔ تیتسه استفاده‌ای نمی‌کند.

۱۰۱۳. لم فرض کنیم  $X$  اجتماع دو مجموعهٔ باز  $U$  و  $V$  باشد، و  $U \cap V$  را بتوان به صورت اجتماع دو مجموعهٔ باز جدا از هم  $X$  مانند  $A$  و  $B$  نوشت، و  $a \in A$  و  $b \in B$ ؛ همچنین فرض کنیم  $a$  و  $b$  را بتوان به وسیلهٔ راههایی در  $U$  و در  $V$  به یکدیگر وصل کرد. در این صورت،  $\pi_1(X, a) \neq 0$ .

برهان. برهان از بسیاری جهات تقلیدی است از برهان این حکم که گروه بنیادی دایره دوری نامتناهی است (بخش ۸-۴). مانند آن برهان، مرحلهٔ قاطع آن یافتن یک فضای پوششی مناسب مانند  $E$  برای فضای  $X$  است.

مرحلهٔ ۱. (ساختمان  $E$ ). بنا به هم چسباندن نسخه‌هایی از زیرفضاهای  $U$  و  $V$ ، فضای  $E$  را می‌سازیم. نسخه‌های شمارای بسیاری از  $U$  و نسخه‌های شمارای بسیاری از  $V$  طوری اختیار می‌کنیم که همگی جدا از هم باشند؛ به عبارت دیگر،

$$U \times (2n), V \times (2n+1) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

که در آن،  $\mathbb{Z}$  نمایش مجموعهٔ اعداد صحیح است. فرض کنیم  $Y$  نمایش اجتماع این فضاها باشد؛  $Y$  زیرفضایی است از  $X \times \mathbb{Z}$ . اکنون با یکی گرفتن نقاط

$$x \times (2n), x \times (2n-1) \quad (x \in A)$$

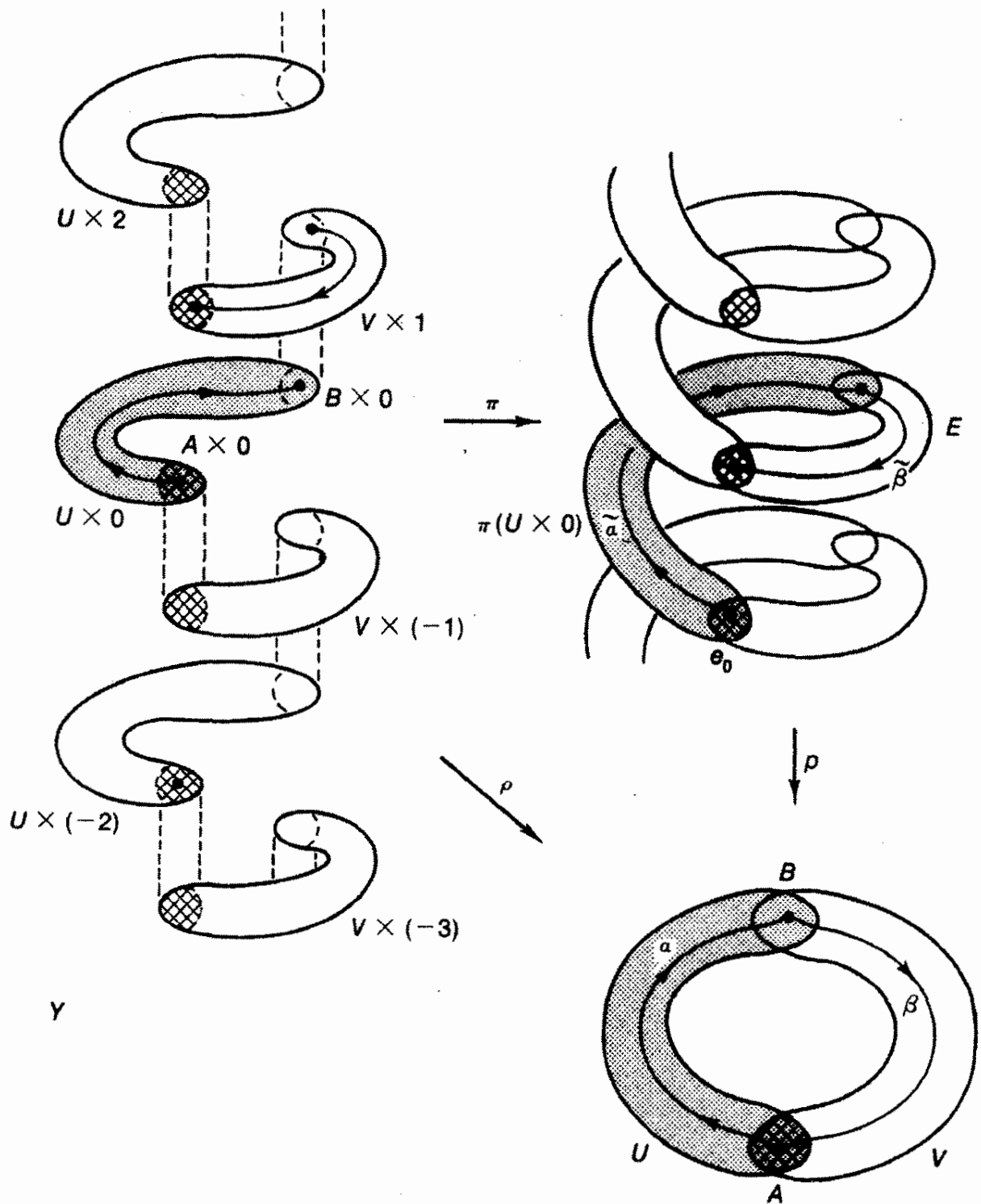
و یکی گرفتن نقاط

$$x \times (2n), x \times (2n+1) \quad (x \in B)$$

فضای جدید  $E$  را به عنوان یک فضای خارج قسمتی  $Y$  تشکیل می‌دهیم. فرض کنیم  $\pi: Y \rightarrow E$  این نگاشت خارج قسمتی باشد.

اکنون نگاشت  $\rho: Y \rightarrow X$  با ضابطهٔ  $\rho(x \times m) = x$  نگاشتی مانند  $\rho: E \rightarrow X$  را القا می‌کند؛ چون  $E$  دارای توپولوژی خارج قسمتی است،  $\rho$  پیوسته است. نگاشت  $\rho$  پوشا نیز هست. ثابت خواهیم کرد که  $\rho$  یک نگاشت پوششی است.

فضای  $E$  در شکل ۳۳ نمایانده شده است.



شکل ۳۳

ابتدا ثابت کنیم که نگاشت  $\pi$  باز است. چون  $Y$  اجتماع مجموعه‌های باز جدا از هم  $\{U \times (2n)\}$  و  $\{V \times (2n+1)\}$  است، کافی است ثابت کنیم که  $\pi|_{(U \times 2n)}$  و  $\pi|_{(V \times (2n+1))}$  نگاشتهایی بازند، و این مطلب ساده‌ای است. مثلاً، یک مجموعه باز در  $U \times 2n$  اختیار می‌کنیم؛ این مجموعه به صورت  $W \times 2n$  است به طوری که  $U$  باز است. در این صورت

$$\pi^{-1}(\pi(W \times 2n)) = [W \times 2n] \cup [(W \cap B) \times (2n+1)] \\ \cup [(W \cap A) \times (2n-1)] ,$$

که مساوی اجتماع سه مجموعه باز  $Y$  است، و در نتیجه، در  $Y$  باز می باشد. بنا بر تعریف توپولوژی خارج قسمتی، همچنانکه می خواستیم،  $\pi(W \times 2n)$  در  $E$  باز است. اکنون ثابت می کنیم که  $p$  يك نگاهشت پوششى است؛ ثابت می کنیم که مجموعه های باز  $U$  و  $V$  به وسیله  $p$  بدطور هموار پوشانده می شوند. مثلاً،  $U$  را در نظر می گیریم. مجموعه  $p^{-1}(U)$  مساوی اجتماع مجموعه های جدا از هم  $\pi(U \times 2n)$  است که در آن،  $n \in \mathbb{Z}$ . چون  $\pi$  نگاهشتی باز است، هر يك از این مجموعه ها در  $E$  باز است. فرض کنیم که  $\pi_{2n}$  نمایش تحدید  $\pi$  به مجموعه باز  $U \times 2n$  باشد، که  $U \times 2n$  را بروی  $\pi(U \times 2n)$  می نگارد. در ضمن چون  $\pi_{2n}$  يك به يك، پیوسته، و باز است، پس يك هومئومورفیسم است. در این صورت، وقتی که  $p$  به  $\pi(U \times 2n)$  تحدید می شود، به صورت ترکیب دو هومئومورفیسم ذیل در می آید:

$$\pi(U \times 2n) \xrightarrow{\pi_{2n}^{-1}} U \times 2n \xrightarrow{p} U$$

و لهذا، يك هومئومورفیسم است. بنابراین  $p|_{\pi(U \times 2n)}$  همان طور که می خواستیم، این مجموعه را به طور هومئومورفیک بروی  $U$  می نگارد.

مرحله ۲. اینك ثابت می کنیم که  $\pi_1(X, a) \neq 0$ . راه  $\alpha$  را در  $U$  از  $a$  به  $b$ ، و راه  $\beta$  را در  $V$  از  $b$  به  $a$  اختیار می کنیم. مدعی هستیم که کمند  $\alpha * \beta$  بر پایه  $a$  با يك کمند ثابت هموتوپ راهی نیست.  $\alpha * \beta$  را به راهی در  $E$  با نقطه آغازی  $e_0 = \pi(a \times 0)$  (نقطه پایه ای) بالا می بریم.  $\bar{\alpha}$  و  $\bar{\beta}$  را چنین تعریف می کنیم

$$\bar{\alpha}(t) = \pi(\alpha(t) \times 0) ,$$

$$\bar{\beta}(t) = \pi(\beta(t) \times 1) .$$

چون  $\bar{\alpha}(1) = \pi(b \times 0) = \pi(b \times 1) = \bar{\beta}(0)$ ، راه  $\bar{\alpha} * \bar{\beta}$  تعریف می شود. به آسانی ملاحظه شود که  $\bar{\alpha} * \bar{\beta}$  يك بالا بر  $\alpha * \beta$  است، زیرا  $p \circ \bar{\beta} = \beta$  و  $p \circ \bar{\alpha} = \alpha$ . چون راه بالا برده  $\bar{\alpha} * \bar{\beta}$  از نقطه پایه ای  $e_0$  شروع و به نقطه ای متفاوت از نقطه پایه ای ختم می شود، کمند  $\alpha * \beta$  نمی تواند با يك کمند ثابت هموتوپ راهی باشد.  $\square$

۲.۱۳. لم فضای  $X$  را اجتماع دو مجموعه باز  $U$  و  $V$  می گیریم. فرض کنیم  $U \cap V$  را بتوان به صورت اجتماع سه مجموعه باز جدا از هم  $A, A', B$  نوشت. فرض کنیم  $a \in A, a' \in A', b \in B$ ؛ و هر سه نقطه را بتوان به وسیله راههایی در  $U$  و در  $V$  به یکدیگر وصل کرد. در این صورت  $\pi_1(X, a)$  دوری نامتناهی نیست.

برهان. فرض کنیم  $\alpha$  راهی در  $U$  از  $a$  به  $b$ ، و  $\beta$  راهی در  $V$  از  $b$  به  $a$  باشد؛ همچنین، فرض کنیم  $\delta$  راهی در  $U$  از  $a'$  به  $a$ ، و  $\gamma$  راهی در  $V$  از  $a'$  به  $a$  باشد. با نوشتن  $U \cap V$  به صورت اجتماع مجموعه‌های باز جدا از هم

$$A, A' \cup B,$$

ملاحظه می‌کنیم که، بنا بر برهان لم سابق، کمندهای  $\alpha * \beta$  و  $\delta * \gamma$  نماینده اعضای غیر بدیهی  $\pi_1(X, a)$  هستند.

اکنون اگر  $\pi_1(X, a)$  دوری نامتناهی باشد هر یک از این کمندها نماینده یک مضرب مولد گروه است. پس باید اعداد صحیح ناصفری مانند  $m$  و  $n$  وجود داشته باشند که

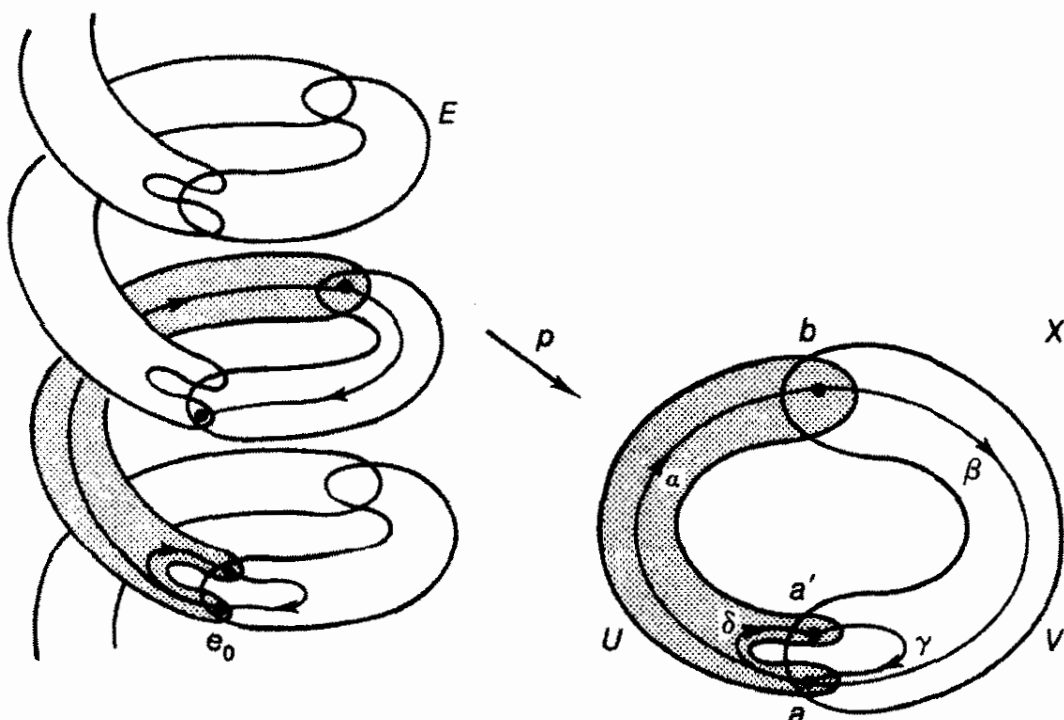
$$n[\alpha * \beta] = m[\delta * \gamma].$$

ثابت خواهیم کرد که چنین اعداد صحیحی وجود ندارند. حال با نوشتن  $U \cap V$  به صورت دو مجموعه باز جدا از هم

$$A \cup A', B$$

ساختمان لم سابق را برای این وضعیت به کار می‌گیریم. مانند گذشته فضای پوششی  $E$  از  $X$  به دست می‌آید. شکل ۳۴ ملاحظه شود. (به خاطر داشته باشید که وقتی  $E$  را می‌ساختیم ابتدا فرض نکردیم که  $A$  و  $B$  همبند باشند.)

اکنون کمندهای  $\alpha * \beta$  و  $\delta * \gamma$  را در نظر می‌گیریم و آنها را به راههایی در  $E$



شکل ۳۴

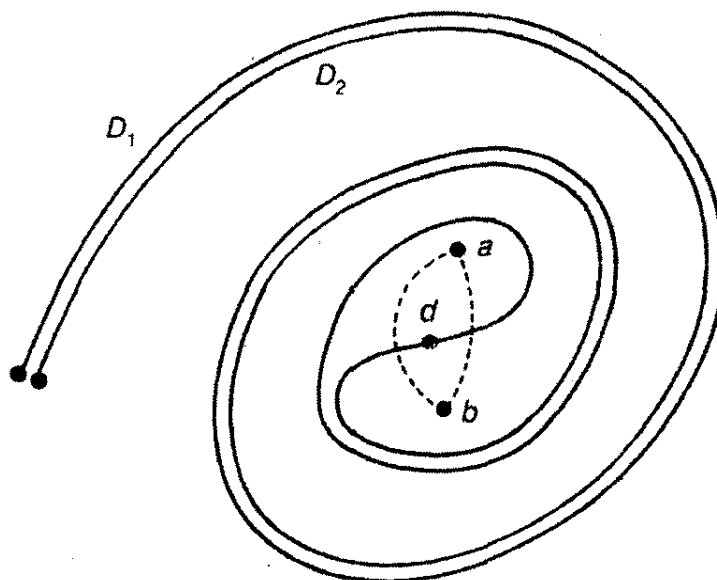
با نقطه آغازی  $e_0$  بالا می‌بریم. به آسانی ملاحظه می‌شود که  $\delta * \gamma$  به کمندی در  $E$  بالا می‌رود، و حال آنکه  $\alpha * \beta$  چنین نیست. به‌طور کلی، هر مضرب  $\delta * \gamma$  به کمندی در  $E$  بالا خواهد رفت، در صورتی که هر مضرب ناصفر  $\alpha * \beta$  به راهی که از  $e_0$  شروع و به نقطه دیگری در  $E$  ختم می‌شود بالا می‌رود.

بنابراین، هیچ مضربی از  $\delta * \gamma$  نمی‌تواند با مضربی از  $\alpha * \beta$  هم‌توپ راهی باشد.  $\square$

و حالا ثابت می‌کنیم که هیچ کمان در  $S^2$ ، آن را جدا نمی‌سازد. خلاصه‌ای از برهان این حکم در تمرین ۵ (پ) در بخش قبل آمده است. در اینجا برهان دیگری است که اگر تمرین مذکور را عمل کرده‌اید می‌توانید از این برهان صرف‌نظر کنید.

۳۰۱۳. قضیه (قضیه جداناسازی) فرض کنیم که  $A$  کمانی در  $S^2$  باشد. در این صورت،  $S^2 - A$  همبند است.

برهان. مرحله ۱. فرض کنیم که  $D$  کمانی باشد در  $S^2$  به صورت اجتماع دو کمان  $D_1$  و  $D_2$  که دقیقاً یک نقطه مشترک مانند  $d$  دارند. فرض کنیم  $a, b \notin D$ . ادعا می‌کنیم که اگر  $a$  و  $b$  بتوانند به وسیله راههایی در  $S^2 - D_1$  و  $S^2 - D_2$  به یکدیگر وصل شوند آنگاه آنها می‌توانند به وسیله راهی در  $S^2 - D$  نیز به یکدیگر وصل شوند. شکل ۳۵ نشاندهنده این امر است که ادعای اخیر چندان هم بدیهی نیست.



شکل ۳۵

فرض می‌کنیم که  $a$  و  $b$  نتوانند به وسیله راهی در  $S^2 - D$  به یکدیگر وصل شوند و تناقضی استخراج می‌کنیم. لم ۱۰۱۳ را به کار می‌بریم.  $X$  را فضای  $S^2 - d$  اختیار می‌کنیم، و  $U$  و  $V$  را مجموعه‌های باز



$$U = S^2 - D_1, \quad V = S^2 - D_2.$$

در این صورت،  $X = U \cup V$ ، و  $U \cap V = S^2 - D$ . بنا بر فرض،  $a$  و  $b$  نقاطی از  $S^2 - D$  هستند که نمی‌توانند به وسیله راهی در آن به هم وصل شوند. بنابراین،  $U \cap V$  همبند راهی نیست. فرض کنیم  $A$  مؤلفه راهی  $U \cap V$  شامل  $a$  باشد، و  $B$  اجتماع مؤلفه‌های دیگر  $U \cap V$ . چون  $U \cap V$  همبند راهی موضعی است (زیرا در  $S^2$  باز است)، مؤلفه‌های راهی  $U \cap V$  باز هستند؛ در نتیجه  $A$  و  $B$  در  $X$  بازنند. مطابق فرض  $a$  و  $b$  می‌توانند به وسیله راهی‌هایی در  $U = S^2 - D_1$  و  $V = S^2 - D_2$  به هم وصل شوند. از لم ۱.۱۳ نتیجه می‌گیریم که  $\pi_1(X, a) \neq 0$ .

اما  $X$  فضای  $S^2 - d$  است، که با  $R^2$  هم‌شومورف است و در نتیجه همبند ساده است. در نتیجه، باید بتوان  $a$  و  $b$  را به وسیله راهی در  $S^2 - D$  به یکدیگر وصل کرد.

مرحله ۲. اکنون به ازای کمان مفروض  $A$  و نقاط  $a$  و  $b$  از  $S^2 - A$ ، فرض کنیم  $a$  و  $b$  نتوانند به وسیله راهی در  $S^2 - A$  به هم وصل شوند و تناقضی استخراج می‌کنیم. این کار قضیه را ثابت می‌کند.

هم‌شومورفیسمی مانند  $A \rightarrow [0, 1]$  انتخاب می‌کنیم؛ فرض می‌کنیم

$$A_1 = h\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right), \quad A_2 = h\left(\left[\frac{1}{4}, 1\right]\right).$$

نتیجه مرحله ۱ ثابت می‌کند که چون  $a$  و  $b$  نمی‌توانند به وسیله راهی در  $S^2 - A$  به هم وصل شوند، در  $S^2 - A_1$  و  $S^2 - A_2$  هم نمی‌توانند به وسیله راهی‌هایی به هم وصل شوند. برای آنکه ابهامی نباشد، فرض کنیم  $a$  و  $b$  نتوانند به وسیله راهی در  $S^2 - A_2$  به هم وصل شوند.

اکنون با شکستن  $A_2$  به دو کمان  $B_1 = h\left(\left[1/4, 3/4\right]\right)$  و  $B_2 = h\left(\left[3/4, 1\right]\right)$  استدلال را تکرار می‌کنیم. از مرحله ۱ نتیجه می‌گیریم که  $a$  و  $b$  نمی‌توانند به وسیله راهی در  $S^2 - B_1$  و در  $S^2 - B_2$  به هم وصل شوند. به همین قیاس ادامه می‌دهیم. به این طریق دنباله‌ای از بازه‌های بسته مانند

$$\dots \subset I_2 \subset I_1 \subset I_0$$

طوری تعریف می‌کنیم که طول  $I_n$  برابر  $(1/2)^n$  باشد و به ازای هر  $n$ ، نقاط  $a$  و  $b$  نتوانند به وسیله راهی در  $S^2 - h(I_n)$  به هم وصل شوند. فشردگی بازه واحد وجود نقطه‌ای مانند  $x$  را در  $\bigcap I_n$  تضمین می‌کند؛ چون دنباله حاصل از طول بازه‌ها به صفر همگراست، این نقطه منحصر به فرد است.

سپس، فضای  $S^2 - h(x)$  را در نظر می‌گیریم. چون این فضا با  $R^2$  هم‌شومورف است نقاط  $a$  و  $b$  می‌توانند به وسیله راهی مانند  $\alpha$  در  $S^2 - h(x)$  به هم وصل شوند. چون  $h(x) = \bigcap h(I_n)$ ، فضای  $S^2 - h(x)$  مساوی است با اجتماع مجموعه‌های باز

$$(S^2 - h(I_1)) \subset (S^2 - h(I_2)) \subset \dots$$

از طرفی  $\alpha(I)$  فشرده است، و باید در اجتماع تعدادی متناهی از این مجموعه‌ها، و در نتیجه، در یکی از آنها، مثلاً در  $S^2 - h(I_m)$ ، قرار گیرد. ولی در این صورت برخلاف فرض،  $\alpha$  راهی است در  $S^2 - h(I_m)$  که  $a$  و  $b$  را به هم وصل می‌کند.  $\square$

۴.۱۳. قضیه (قضیه منحنی ژوردان) فرض کنیم  $C$  منحنی بسته ساده‌ای در  $S^2$  باشد. در این صورت،  $S^2 - C$  دقیقاً دو مؤلفه مانند  $W_1$  و  $W_2$  دارد که  $C$  مرز مشترک آنهاست. [یعنی:  $C = \bar{W}_1 - W_1 = \bar{W}_2 - W_2$ ]

پرهان. مرحله ۱. نخست، ثابت می‌کنیم که  $S^2 - C$  دقیقاً دو مؤلفه دارد. لم ۲.۱۳ را به کار می‌بریم.  $C$  را به صورت اجتماع دو کمان  $C_1$  و  $C_2$  می‌نویسیم که درست در دو نقطه  $p$  و  $q$  مشترک باشند.  $X$  را فضای  $S^2 - p - q$  می‌گیریم، و فرض کنیم  $U$  و  $V$  مجموعه‌های باز

$$V = S^2 - C_2 \quad \text{و} \quad U = S^2 - C_1$$

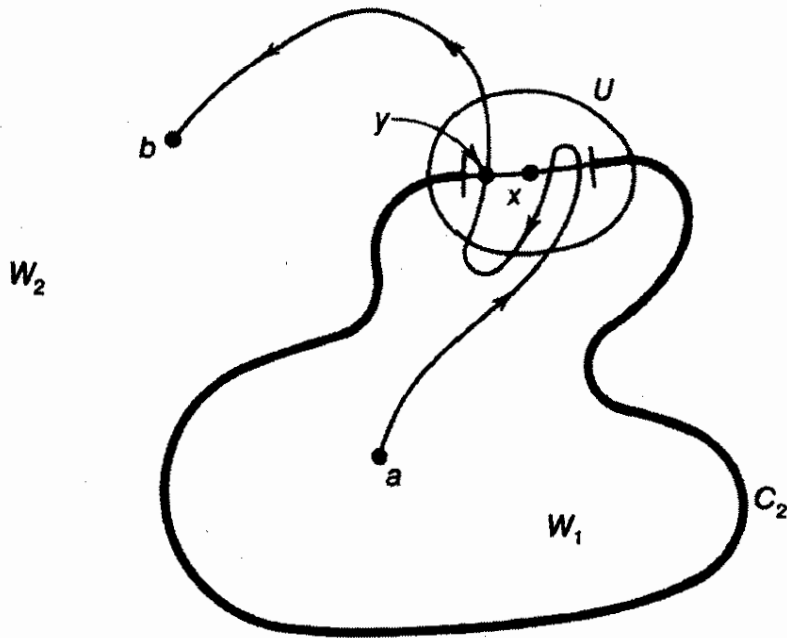
باشند. در این صورت،  $X = U \cup V$ ، و  $U \cap V$  مساوی  $S^2 - C$  است که بنا بر قضیه ۲.۱۲ دست کم دو مؤلفه دارد.

فرض کنیم  $S^2 - C$  بیش از دو مؤلفه داشته باشد.  $A$  و  $A'$  را دو مؤلفه آن و  $B$  را اجتماع بقیه مؤلفه‌ها می‌گیریم. چون  $S^2 - C$  همبند موضعی است، هر یک از مجموعه‌های  $A$ ،  $A'$ ، و  $B$  بازند. فرض کنیم  $a$ ،  $a'$ ، و  $b$  بترتیب، نقاطی از  $A$ ،  $A'$ ، و  $B$  باشند. بنا بر لم سابق، مجموعه‌های  $U = S^2 - C_1$  و  $V = S^2 - C_2$  همبند راهی‌اند (زیرا، هیچ کمانی  $S^2$  را جدا نمی‌سازد). بنابراین  $a$ ،  $a'$ ، و  $b$  را می‌توان به وسیله راههایی در  $U$  و در  $V$  به هم وصل کرد. اکنون لم ۲.۱۳ مستلزم این است که گروه  $\pi_1(X, a)$  دوری نامتناهی نباشد.

از طرفی  $X$  مساوی  $S^2 - p - q$  است، که با صفحه سفته  $R^2 - o$  هم‌شومورف است، پس گروه بنیادی آن دوری نامتناهی است. بنابراین، فرض بیش از دو مؤلفه داشتن  $S^2 - C$  غلط است.

مرحله ۲. اکنون ثابت می‌کنیم که  $C$  مرز مشترک  $W_1$  و  $W_2$  است. چون  $S^2$  همبند موضعی است، هر یک از مؤلفه‌های  $S^2 - C$ ، یعنی  $W_1$  و  $W_2$ ، در  $S^2$  بازند. بالاخص، هیچکدام شامل نقطه‌ای حسی از دیگری نیست، در نتیجه  $\bar{W}_1 \cap W_2 = W_1 \cap \bar{W}_2 = \emptyset$ . چون  $S^2$  مساوی اجتماع مجموعه‌های جدا از هم  $W_1$ ،  $W_2$ ، و  $C$  است، هر دو مجموعه  $\bar{W}_1 - W_1$  و  $\bar{W}_2 - W_2$  باید زیر مجموعه  $C$  باشند. برای اثبات عکس آن، نشان می‌دهیم که اگر  $x$  نقطه‌ای از  $C$  باشد آنگاه هر همسایگی  $x$  مانند  $U$  مجموعه بسته  $\bar{W}_1 - W_1$  را قطع می‌کند. در نتیجه،  $x \in \bar{W}_1 - W_1$ .

فرض کنیم  $U$  یک همسایگی  $x$  باشد. چون  $C$  با دایره  $S^1$  هم‌هومورف است می‌توانیم  $C$  را به صورت دو کمان مانند  $C_1$  و  $C_2$  تقسیم کنیم به طوری که این دو کمان فقط در نقاط انتهایی یکدیگر را قطع کنند و  $C_1$  آن قدر کوچک باشد که داخل  $U$  قرار گیرد. شکل ۳۶ ملاحظه شود.

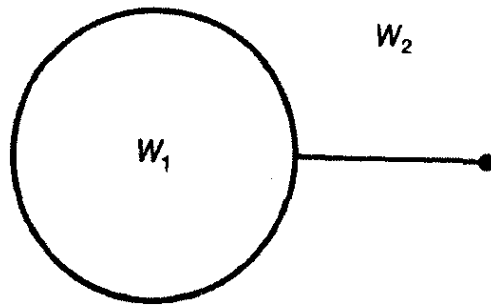


شکل ۳۶

فرض کنیم که  $a$  و  $b$ ، بترتیب، نقاطی از  $W_1$  و  $W_2$  باشند. از آنجا که  $C_2$  (بنابر قضیه ۳.۱۳) را جدا نمی‌سازد، می‌توانیم راهی مانند  $\alpha$  در  $S^2 - C_2$  بیابیم که  $a$  و  $b$  را بهم وصل کند. مجموعه  $\alpha(I)$  باید شامل نقطه‌ای از  $\overline{W_1} - W_1$  مانند  $y$  باشد، چون در غیر این صورت  $\alpha(I)$  همبند می‌شود که در اجتماع مجموعه‌های باز جدا از هم  $W_1$  و  $S^2 - \overline{W_1}$  قرارداد و هر یک از آنها را هم قطع می‌کند. چون  $(\overline{W_1} - W_1) \subset C$ ، نقطه  $y$  ضرورتاً به منحنی بسته  $C$  تعلق دارد. از طرفی چون راه  $\alpha$  کمان  $C_2$  را قطع نمی‌کند، پس نقطه  $y$  باید در کمان  $C_1$  قرار گیرد، که این خود زیر مجموعه باز  $U$  است. در نتیجه، همان‌طور که می‌خواستیم، مجموعه‌های  $U$  و  $\overline{W_1} - W_1$  یکدیگر را در نقطه  $y$  قطع می‌کنند.  $\square$

مثال ۰۱. نتیجه دوم از قضیه منحنی ژوردان، با این محتوا که  $C$  مرز مشترک  $W_1$  و  $W_2$  است، ممکن است آن قدر واضح به نظر برسد که نیازی به توضیح نداشته باشد. ولی، در واقع، این نتیجه بستگی قاطعی به هم‌هومورف بودن  $C$  با  $S^1$  دارد.

مثلاً، زیر مجموعه  $C$  از صفحه متشکل از اجتماع دایره واحد  $S^1$  و قطعه خط  $\circ \times [1, 2]$ ، درست مانند دایره،  $S^2$  را به دو مؤلفه مانند  $W_1$  و  $W_2$  جدا می‌سازد. ولی در این مورد،  $C$  مساوی مرز مشترک  $W_1$  و  $W_2$  نیست. شکل ۳۷ ملاحظه شود.



شکل ۳۷

قضیه چهارمی هم هست که اغلب توأم با این سه قضیه جداسازی در نظر گرفته می‌شود و آن را قضیه شوئن-فلایز می‌نامند. قضیه اخیر می‌گوید که اگر  $C$  منحنی بسته ساده‌ای در  $S^2$  باشد، و  $U$  و  $V$  مؤلفه‌های  $S^2 - C$  — آنگاه  $\bar{U}$  و  $\bar{V}$  هر کدام با گوی واحد بسته  $B^2$  هم‌شومورف‌اند. ما تصمیم نداریم که این قضیه را ثابت کنیم. قضیه اخیر نتیجه‌ای است از قضیه نگاشت ریمان در نظریه متغیرهای مختلط.

قضایای جداسازی را می‌توان به طریق ذیل به ابعاد بالاتر تعمیم داد:

- (۱) هر زیرمجموعه  $C$  از  $S^n$  که با  $S^{n-1}$  هم‌شومورف باشد،  $S^n$  را جدا می‌سازد.
- (۲) هیچ زیرمجموعه  $A$  از  $S^n$  که با  $[0, 1]$  یا گویی مانند  $B^m$  هم‌شومورف باشد،  $S^n$  را جدا نمی‌سازد.
- (۳) هر زیرمجموعه  $C$  از  $S^n$  که با  $S^{n-1}$  هم‌شومورف باشد  $S^n$  را به دو مؤلفه جدا می‌سازد به طوری که  $C$  مرز مشترک آنهاست.

پس از مطالعه گروه‌های همولوژی ویژه در توپولوژی جبری، این قضایا به آسانی ثابت می‌شوند. (به صفحه ۱۹۸ از کتاب  $[S]$  مراجعه کنید.) قضیه براوئردر مورد ناوردایی حوزه برای  $R^n$  به عنوان نتیجه‌ای از این قضایا حاصل می‌گردد.

اگرچه، قضیه شوئن-فلایز بدون قیودی که منجر به نشان دادن فضای  $C$  در  $S^n$  شود، به ابعاد بالاتر تعمیم نمی‌یابد. این مطلب با مثال مشهور «کره شاخدار اسکندر» ثابت شده است، این کره عبارت است از تصویر هم‌شومورفیک  $S^2$  در  $S^3$  که یکی از حوزه‌های مکمل آن همبند ساده نیست! (به صفحه ۱۷۶ از  $[H-Y]$  مراجعه شود.)

قضایای جداسازی حتی بیش از این می‌توانند تعمیم یابند. در این زمینه قضیه بسیار مهمی معروف به قضیه دوگانی الکساندر-پونتریاگین<sup>۲</sup> که قضیه نسبتاً عمیقی در توپولوژی جبری است وجود دارد، در اینجا قصد نداریم آن را بیان کنیم. ( $[S]$  ملاحظه شود.) این قضیه مستلزم این است که اگر  $C$  فضای  $S^n$  را به  $k$  مؤلفه جدا سازد آنگاه هر زیرمجموعه  $S^n$  نیز که با  $C$  هم‌شومورف (یا حتی با  $C$  هم‌ارز هم‌توپی) باشد نیز چنین می‌کند. قضایای جداسازی (۱) — (۳) نتایج مستقیم این قضیه‌اند.

## تمرینها

۱. (الف) ثابت کنید که هیچ کمانی در  $R^2$  آن را جدا نمی سازد.  
 (ب) ثابت کنید که یک منحنی بسته ساده در  $R^2$  مانند  $C$ ، را به دو مؤلفه جدا می سازد که  $C$  مرز مشترک آنهاست.
۲. با مفروضات لم ۱.۱۳، ثابت کنید که  $\pi_1(X, a)$  حاوی یک زیر گروه دوری نامتناهی است.
۳. لم. فرض کنید  $A$  و  $B$  زیر مجموعه های همبند بسته ای از  $S^2$  باشند که مقطع آنها دقیقاً از دو نقطه تشکیل شده است. اگر هیچیک از  $A$  و  $B$  فضای  $S^2$  را جدا نسازد آنگاه  $(A \cup B) - S^2$  دقیقاً دو مؤلفه دارد.
۴. یادآوری می کنیم که یک فضای تنا فضایی است به صورت اجتماع سه کمان  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  که دو به دو یکدیگر را در نقاط انتهایی قطع می کنند.  
 (الف) ثابت کنید که یک فضای تنا در  $S^2$  فضای  $S^2$  را دقیقاً به سه مؤلفه جدا می سازد. [داهنمایی: اگر  $C$  مؤلفه ای از  $(a \cup b) - S^2$  باشد که  $c$  را قطع نکند آنگاه، بنا بر تمرین سابق،  $C \cup c$  فضای  $S^2$  را دقیقاً به دو مؤلفه جدا می سازد.]  
 (ب) ثابت کنید که  $a \cup b$ ،  $a \cup c$ ، و  $b \cup c$ ، بترتیب، مرزهای این سه مؤلفه اند. [داهنمایی: ثابت کنید که  $C$  یکی از این مؤلفه هاست؛ سپس از خاصیت تقارن استفاده کنید.]  
 (پ) قضیه گراف گاز-آب - برق را نمی توان در  $S^2$  نشان داد (شکل ۱۳ در بخش ۹.۷). [داهنمایی: فضایی را که از الحاق  $H_1$  و  $H_2$  به  $G$ ،  $W$ ، و  $E$  به دست می آید در نظر بگیرید.]
۵. فرض کنید  $a_1$ ،  $a_2$ ،  $a_3$ ، و  $a_4$  چهار نقطه متمایز  $S^2$  باشند، و به ازای هر زوج از این نقاط مانند  $a_i$  و  $a_j$  ( $i \neq j$ )، کمانی مانند  $a_i a_j$  در  $S^2$  داشته باشیم که این دو نقطه را به هم وصل می کند. بعلاوه، فرض کنید هر زوج از این کمانها حداکثر یکدیگر را در یک نقطه انتهایی قطع کنند. اجتماع این کمانها را گراف کامل چهار رأسی می نامند و آن را به  $G_4$  نمایش می دهند.  
 (الف) فرض کنید  $C$  منحنی  $(a_1 a_2) \cup (a_2 a_3) \cup (a_3 a_4) \cup (a_4 a_1)$  باشد، که برای اختصار آن را به  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_1$  نشان می دهیم. فرض کنید  $A$  و  $B$  مؤلفه های  $C - S^2$  باشند. ثابت کنید که اگر  $A$  از  $a_1 a_2$  جدا باشد آنگاه  $B$  از  $a_3 a_4$  جداست. [داهنمایی: تمرین ۴ را فرض کنید. توجه کنید که  $A$  یکی از سه مؤلفه  $(C \cup a_1 a_2) - S^2$  است که این سه مؤلفه، بترتیب، دارای مرزهای  $C$ ،  $a_1 a_2 a_3 a_4$ ، و  $a_1 a_2 a_4 a_1$  هستند.]  
 (ب) ثابت کنید که  $G_4 - S^2$  چهار مؤلفه دارد که مرزهای آنها، بترتیب، عبارت اند

از  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_1$ ،  $a_1 a_2 a_4 a_3 a_1$ ،  $a_1 a_3 a_4 a_2 a_1$  و  $a_2 a_3 a_4 a_1 a_2$ .

(پ) قضیه. گراف کامل پنج رأسی را نمی توان در  $S^2$  نشانید. (شکل ۱۳ از بخش ۷-۹ ملاحظه شود.)

۶. (الف) مفروضات و علائم لم ۱۰۱۳ را فرض بگیرید. همچنین، فرض کنید  $U$  و  $V$  همبند راهی باشند و  $\pi_1(X, a)$  دوری نامتناهی باشد. ثابت کنید که  $E$  همبند ساده است و  $[\alpha * \beta]$ ،  $\pi_1(X, a)$  را تولید می کند. [داهنمایی: تمرین ۱۵ از بخش ۸-۲ را به کار ببرید.]

(ب)  $G_4$  گراف کامل چهار رأسی  $a, b, c, d$  را در نظر بگیرید؛ فرض کنید  $G_4$  زیرمجموعه ای است از  $S^2$ . ثابت کنید که اگر  $p$  یک نقطه درونی کمان  $ac$  باشد و  $q$  یک نقطه درونی کمان  $bd$  آنگاه کمند  $abcd$  گروه بنیادی  $S^2 - p - q$  را تولید می کند. [داهنمایی: فرض کنید  $U = S^2 - pabq$  و  $V = S^2 - pcdq$  را  $x$  یک نقطه درونی  $ad$  و  $y$  را یک نقطه درونی  $bc$  اختیار کنید؛ بنا بر تمرین ۵ (الف)، آنها در مؤلفه های متفاوت  $U \cap V$  قرار دارند. فرض کنید  $\alpha = xab$  و  $\beta = ycd$ . ثابت کنید که:

۷. قضیه. فرض کنید  $A$  یک منحنی بسته ساده در  $R^2$  باشد، و  $o$  در مؤلفه کراندار  $R^2 - A$  قرار گیرد. در این صورت  $A$  گروه بنیادی  $R^2 - o$  را تولید می کند.

برهان. فرض کنید که  $S = R^2 \cup \{\infty\}$  فشرده شده تک نقطه ای  $R^2$  باشد.  $B$  را مؤلفه کراندار  $R^2 - A$  بگیرید.

(الف) کمانی مانند  $D$  در  $S$  شامل  $\infty$  بسازید که  $A$  را دقیقاً در نقاط انتهاییش  $a$  و  $c$  قطع کند.

(ب) کمانی مانند  $E$  در  $S$  شامل  $o$  بسازید که  $A$  را درست در نقاط انتهاییش  $b$  و  $d$  قطع کند، که  $b$  و  $d$  در مؤلفه های متفاوت  $A - a - c$  قرار گیرند. [داهنمایی: ثابت کنید که اگر  $x$  و  $y$  دو نقطه زیرمجموعه باز و همبند  $U$  از  $S^2$  باشد آنگاه (۱) کمانی در  $U$  موجود است که  $x$  و  $y$  را به هم وصل می کند، و (۲) همثومورفیسمی مانند  $h: S^2 \rightarrow S^2$  موجود است که خارج از  $U$  همانی است و  $x$  را به  $y$  می نگارد. فرض کنید  $A_1$  و  $A_2$  مؤلفه های  $A - a - c$  باشند. نقطه ای مانند  $x$  از  $B$  برگزینید؛  $x$  را به وسیله کمانهایی در  $S - A_1$  و  $S - A_2$  به  $\infty$  وصل کنید؛ کمانهایی به دست آورید که  $x$  را به  $b$  و  $d$  وصل کنند؛ سپس کمانی از  $b$  به  $d$  به دست آورید، بالاخره برای به دست آوردن کمان شامل  $o$ ، (۲) را به کار ببرید. (پ) تمرین ۶ را به کار ببرید.

۸. قضیه ذیل را که از قضایای اساسی آنالیز است ثابت کنید:

قضیه. فرض کنید که  $A$  یک منحنی بسته ساده قطعه به قطعه مشتق پذیر در صفحه مختلط

$C$  باشد؛  $z_0$  را نقطه‌ای از  $C$  اختیار کنید به طوری که  $z_0 \notin A$ . در این صورت، اگر  $z_0$  در مؤلفه کراندار  $C - A$  قرار گیرد انتگرال

$$\frac{1}{2\pi i} \int_A \frac{dz}{z - z_0}$$

مقداری مساوی  $\pm 1$  دارد، و اگر  $z_0$  در مؤلفه بیکران باشد، مقدار انتگرال ۰ است. [دانهمایی: تمرین سابق و تمرین ۶ از بخش ۸-۵ را به کار ببرید.]

۹. در تمرینات بخش ۸-۱۲ برهانی از قضیه ناوردایی حوزه برای  $R^2$  خلاصه شد. اکنون برهانی مستقل بر مبنای تمرین ۷ این بخش بیاورید.

### ۸-۱۲ رده‌بندی فضاهای پوششی

تاکنون فضاهای پوششی را به طور عمده به عنوان ابزار برای محاسبه گروه‌های بنیادی به کار برده‌ایم. از این به بعد ورق برمی‌گردد، و گروه‌های بنیادی را به عنوان ابزاری برای مطالعه فضاهای پوششی به خدمت می‌گیریم. ثابت می‌شود که همه فضاهای پوششی ممکن یک فضای مفروض  $B$  را می‌توان صرفاً با بررسی گروه بنیادی  $B$  معین کرد. اکنون به توضیح این فرایند می‌پردازیم.

اگر  $H_1$  و  $H_2$  زیر گروه‌های گروه  $G$  باشند، ممکن است از درس جبر به خاطر داشته باشید که آنها را مزدوج گویند در صورتی که به ازای عضوی از  $G$  مانند  $\alpha$  داشته باشیم  $H_2 = \alpha \cdot H_1 \cdot \alpha^{-1}$ . به عبارت دیگر، آنها مزدوج اند هرگاه ایزومورفیسم از  $G$  به خودش که  $x$  را به  $\alpha \cdot x \cdot \alpha^{-1}$  می‌نگارد، گروه  $H_1$  را بروی گروه  $H_2$  تصویر کند بررسی این مطلب آسان است که مزدوج بودن یک رابطه هم ارزی برگردایه زیر گروه‌های  $G$  است. رده هم ارزی زیر گروه  $H$  را رده ازدواج  $H$  می‌نامند.

فرض کنیم یک فضای همبند راهی ثابت مانند  $B$  و یک نقطه پایه‌ای ثابت از آن مانند  $b_0$  در دست باشد. فرض کنیم  $p: E \rightarrow B$  نگاشتی پوششی از فضای همبند راهی  $E$  به  $B$  باشد. اگر نقطه‌ای مانند  $e_0$  در  $p^{-1}(b_0)$  به عنوان نقطه پایه‌ای برای  $E$  انتخاب کنیم آنگاه یک همومورفیسم القایی مانند

$$p_*: \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$$

داریم (که در واقع یک به یک است). تصویر گروه  $\pi_1(E, e_0)$ ، یعنی گروه

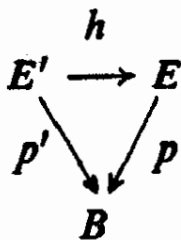
$$H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0)),$$

البته به انتخاب نقطه پایه‌ای  $e_0$  از  $E$  بستگی دارد، ولی نحوه این بستگی بسیار ساده است. ثابت خواهیم کرد که وقتی  $e_0$  همه نقاط مختلف  $p^{-1}(b_0)$  را طی می‌کند، تصاویر

این زیر گروهها زیر گروههایی از  $G$  می شود که مزدوج  $H_0$  هستند. پس به هر فضای پوششی همبند راهی  $B$  مانند  $p: E \rightarrow B$  می توانیم رده ازدواج مشخصی را از زیر گروههای  $\pi_1(B, b_0)$  اختصاص دهیم، که همان گردایه تصاویر گروههای  $\pi_1(E, e)$  است تحت همومورفیسم القایی  $p$  به ازای  $e \in p^{-1}(b_0)$ .

ثابت می شود که تحت این تناظر هر رده ازدواج، نظیر يك فضای پوششی  $B$  است. همین طور، این رده ازدواج، فضای پوششی را با تقریب هومومورفیسم به طور پکتا مشخص می کند. این همان قضیه اساسی رده بندی فضاهای پوششی است.

دقیقتر آنکه، دو فضای پوششی  $p: E \rightarrow B$  و  $p': E' \rightarrow B$  را هم ارز گوئیم در صورتی که هومومورفیسمی مانند  $h: E' \rightarrow E$  موجود باشد که  $p \circ h = p'$ .



در این صورت، دو قضیه اصلی مربوط به رده بندی فضاهای پوششی را می توان به صورت ذیل بیان کرد:

(۱) به ازای هر رده ازدواج از زیر گروههای  $\pi_1(B, b_0)$ ، يك فضای پوششی همبند راهی برای  $B$  مانند  $p: E \rightarrow B$  موجود است که به ازای  $e \in p^{-1}(b_0)$  گروههای  $p_*(\pi_1(E, e))$  این رده ازدواج را می سازند.

(۲) دو فضای پوششی همبند راهی  $B$  هم ارزند اگر و تنها اگر تحت این تناظر رده ازدواج زیر گروههای  $\pi_1(B, b_0)$  باشند.

به کمک این قضایا، مسئله توپولوژیک تعیین همه فضاهای پوششی همبند راهی ممکن يك فضای مفروض، تماماً به مسئله جبری تعیین همه رده های ازدواج زیر گروههای  $\pi_1(B, b_0)$  تقلیل می یابد.

اما باید توجه کنیم که این قضایا به ازای فضای همبند راهی کاملاً دلخواهی مانند  $B$  برقرار نیستند. برای اقامه برهان محتاج به این هستیم که فرض کنیم  $B$  دارای خصوصیات «موضعی مناسبی» است. (قضایای ۳.۱۴ و ۴.۱۴ ملاحظه شود.)

۱۰۱۴. لم فرض کنیم  $p: E \rightarrow B$  نگاشتی پوششی باشد، و  $E$  و  $B$  همبند راهی باشند. همچنین، فرض کنیم  $b_0 \in B$ . وقتی  $e$  نقاط  $p^{-1}(b_0)$  را طی می کنند، گروه  $p_*(\pi_1(E, e))$  دقیقاً بريك رده ازدواج زیر گروههای  $\pi_1(B, b_0)$  تغییر می کند.

برهان. به ازای دو نقطه مفروض  $p^{-1}(b_0)$  مانند  $e_0$  و  $e_1$  فرض کنیم  $H_1 = p_*(\pi_1(E, e_1))$  و  $H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$

مرحله ۱. فرض کنیم  $\gamma$  راهی در  $E$  از  $e_0$  به  $e_1$  باشد، و  $\alpha$  کمنده  $p \circ \gamma$  در  $B$  بر پایه  $b_0$  باشد. ثابت می کنیم که

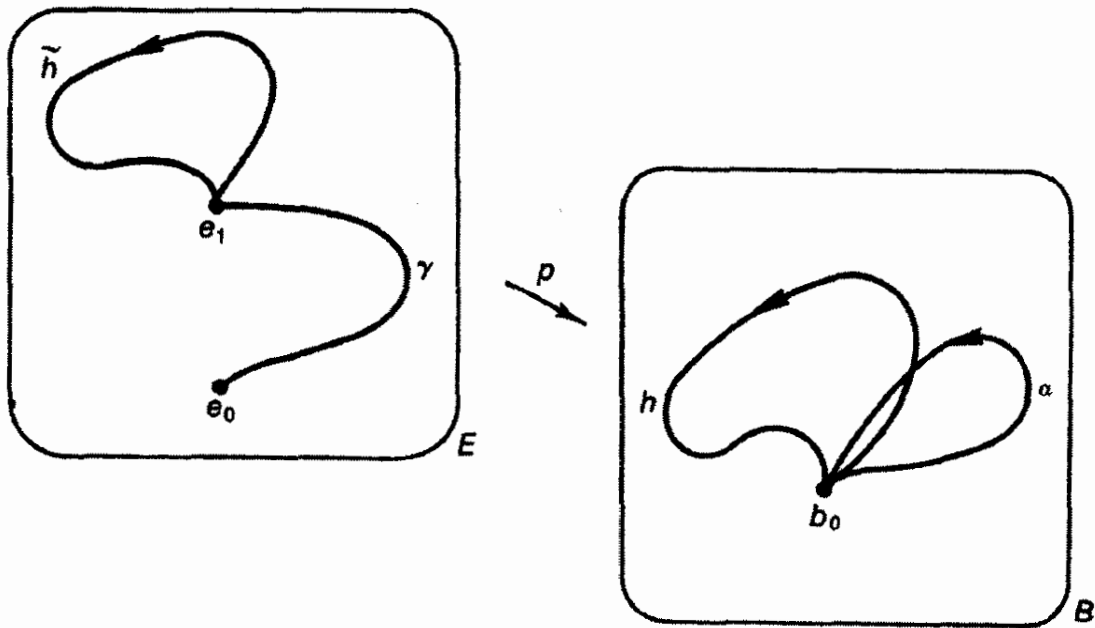


$$[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \subset H_0 .$$

$[h]$  را عضوی از  $H_1$  می گیریم؛ در این صورت به ازای کمندی در  $E$  بر پایه  $e_1$  مانند  $\tilde{h}$ ،  $[h] = p_*([\tilde{h}])$ ، فرض کنیم  $\tilde{\gamma} = (\gamma * \tilde{h}) * \tilde{\gamma}$ ؛ کمندی است بر پایه  $e_0$  و

$$p_*([\tilde{k}]) = [(\alpha * h) * \tilde{\alpha}] .$$

پس، همان طور که می خواستیم،  $[\alpha] * [h] * [\alpha]^{-1} \in H_0$ ، شکل ۳۸ ملاحظه شود.



شکل ۳۸

مرحله ۲. نتیجه می شود که زیر گروه های  $H_0$  و  $H_1$  مزدوج اند. زیرا فرض کنیم  $\gamma$  راهی در  $E$  از  $e_0$  به  $e_1$  باشد، و  $\alpha = p \circ \gamma$  در این صورت،  $\tilde{\gamma}$  راهی است از  $e_1$  به  $e_0$  و  $\tilde{\alpha} = p \circ \tilde{\gamma}$ . اگر دوبار مرحله ۱ را به کار ببریم، خواهیم داشت

$$[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \subset H_0 .$$

$$[\tilde{\alpha}] * H_0 * [\tilde{\alpha}]^{-1} \subset H_1 .$$

پس، همان طور که می خواستیم،  $H_0 = [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1}$ ،

مرحله ۳. اکنون به ازای  $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ ، و زیر گروه مفروضی از  $\pi_1(B, b_0)$  مانند  $H$  که مزدوج  $H_0$  باشد، می خواهیم نقطه ای از  $p^{-1}(b_0)$  مانند  $e_1$  بیابیم که  $H_1$  (زیر گروه نظیر آن) مساوی  $H$  باشد. بنا بر فرض، به ازای کمندی در  $B$  بر پایه  $b_0$  مانند  $\alpha$ ، داریم  $H_0 = [\alpha] * H * [\alpha]^{-1}$ . فرض کنیم  $\gamma$  بالا بر  $\alpha$  به راهی در  $E$  با نقطه آغازی  $e_0$  باشد، و  $e_1 = \gamma(1)$ . فرض کنیم  $H_1 = p_*(\pi_1(E, e_1))$ . از مرحله ۲

نتیجه می شود که  $H_0 = [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1}$ . پس، همان طور که می خواستیم،  
 $\square \cdot H = H_1$

### هم ارزی پوششها

اکنون ثابت می کنیم که دو پوشش هم اززند اگر و تنها اگر نظیر به يك رده ازدواج باشند. برای این منظور، به صورت تعمیم یافته ذیل از «لم بالا بری» که در بخش ۸-۴ بیان شد احتیاج داریم:

۲.۱۴. لم (لم عمومی بالا بری) فرض کنیم  $p: E \rightarrow B$  يك نگاشت پوششی باشد، و  $p(e_0) = b_0$ ، و  $f: Y \rightarrow B$  نگاشتی پیوسته باشد که  $f(y_0) = b_0$ . فرض کنیم  $Y$  همبند راهی موضعی باشد. نگاشت  $f$  را می توان به يك نگاشت مانند  $\tilde{f}: Y \rightarrow E$  بالا برد به طوری که  $\tilde{f}(y_0) = e_0$  اگر و تنها اگر

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

بعلاوه، چنین بالا بری، در صورت وجود، منحصر به فرد است.

برهان. اگر بالا بر  $\tilde{f}$  موجود باشد آنگاه

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)),$$

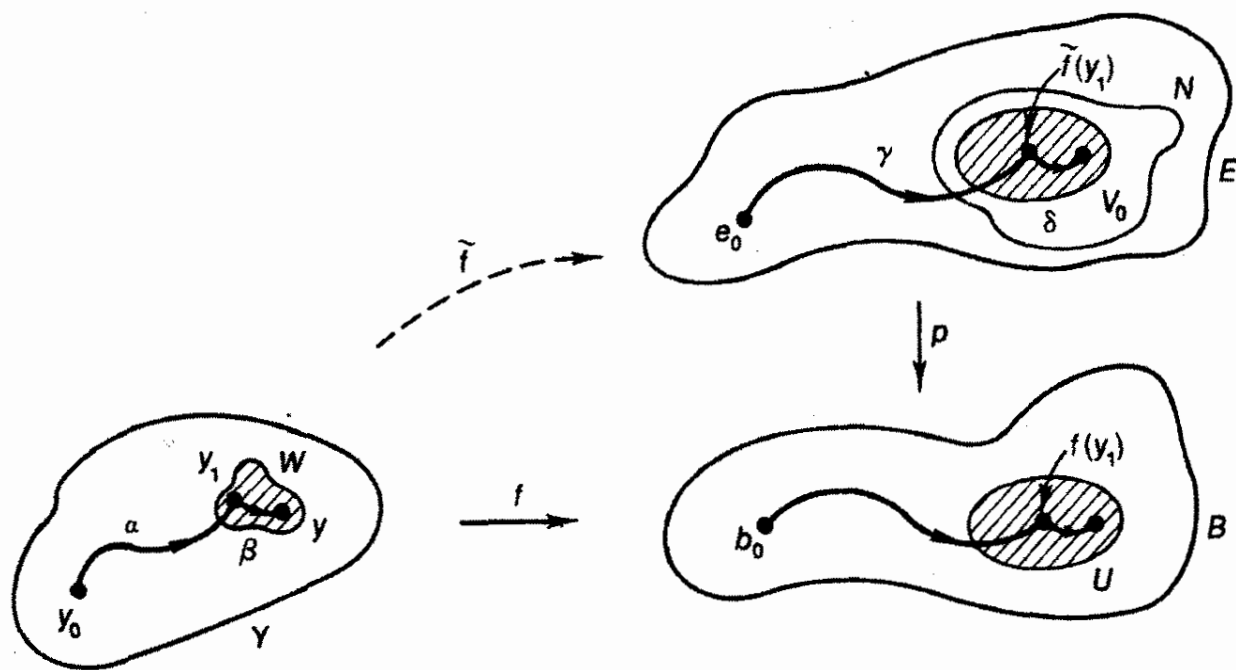
که این قسمت «تنها اگر» قضیه را ثابت می کند.

اکنون ثابت می کنیم که اگر  $\tilde{f}$  موجود باشد، منحصر به فرد است. به ازای عضو مفروضی از  $Y$  مانند  $y_1$ ، راهی مانند  $\alpha$  در  $Y$  از  $y_0$  به  $y_1$  انتخاب می کنیم. راه  $\alpha$  را در  $B$  اختیار می کنیم و آن را به راهی مانند  $\gamma$  در  $E$  با نقطه آغازی  $e_0$  بالا می بریم. اگر  $f$  بالا بری مانند  $\tilde{f}$  داشته باشد آنگاه  $\tilde{f}(y_1)$  باید مساوی نقطه انتهایی  $\gamma$ ، یعنی  $\gamma(1)$ ، باشد؛ زیرا،  $\tilde{f} \circ \alpha$  بالا بر  $f \circ \alpha$  است که از  $e_0$  شروع می شود، و بالا برهای راهها یکتا هستند.

سرانجام، قسمت «اگر» قضیه را ثابت می کنیم. قسمت یکتایی برهان، ما را در چگونگی انجام آن راهنمایی می کند. به ازای  $y_1 \in Y$ ، راهی در  $Y$  مانند  $\alpha$  از  $y_0$  به  $y_1$  انتخاب می کنیم. راه  $\alpha$  را به راهی مانند  $\gamma$  در  $E$  با نقطه آغازی  $e_0$  بالا می بریم،  $\tilde{f}(y_1)$  را مساوی  $\gamma(1)$  تعریف می کنیم. شکل ۳۹ ملاحظه شود. اثبات اینکه  $\tilde{f}$  خوشترریف و مستقل از انتخاب  $\alpha$  است، خود مستلزم مقداری کار است. پس از اثبات آنها، پیوستگی  $\tilde{f}$  به آسانی به صورت ذیل ثابت می شود:

به ازای همسایگی مفروضی از  $\tilde{f}(y_1)$  مانند  $N$ ، يك همسایگی از  $y_1$  مانند  $W$  می یابیم که  $\tilde{f}(W) \subset N$ . نخست همسایگی  $U$  از  $f(y_1)$  را که به طور هموار به وسیله

$p$  پوشاننده شده است انتخاب می کنیم. فرض کنیم  $V_0$  قاج شامل  $\bar{f}(y_1)$  از  $p^{-1}(U)$  باشد، و  $p_0$  تحدید  $p$  به  $V_0$ . در صورت لزوم با انتخاب همسایگیهای کوچکتر می توانیم فرض کنیم  $V_0 \subset N$ . اکنون همسایگی از  $y_1$  مانند  $W$  انتخاب می کنیم که همبند راهی و زیر مجموعه  $f^{-1}(U)$  باشد. مدعی هستیم که  $\bar{f}(W) \subset V_0$ . زیرا، به ازای  $y \in W$ ، می توانیم راهی مانند  $\beta$  در  $W$  از  $y_1$  به  $y$  انتخاب کنیم. راه  $f \circ \beta$  را در نظر می گیریم؛ آنرا در  $E$  به راه  $\delta = p_0^{-1} \circ f \circ \beta$  با نقطه آغازی  $\bar{f}(y_1)$  بالا می بریم. در این صورت،  $\gamma * \delta$ ، که بالا بر  $f \circ (\alpha * \beta)$  با نقطه آغازی  $e_0$  است، قابل تعریف است. بنا بر تعریف،  $\bar{f}(y)$  مساوی نقطه انتهایی  $\gamma * \delta$  است، که در  $V_0$  قرار دارد.



شکل ۳۹

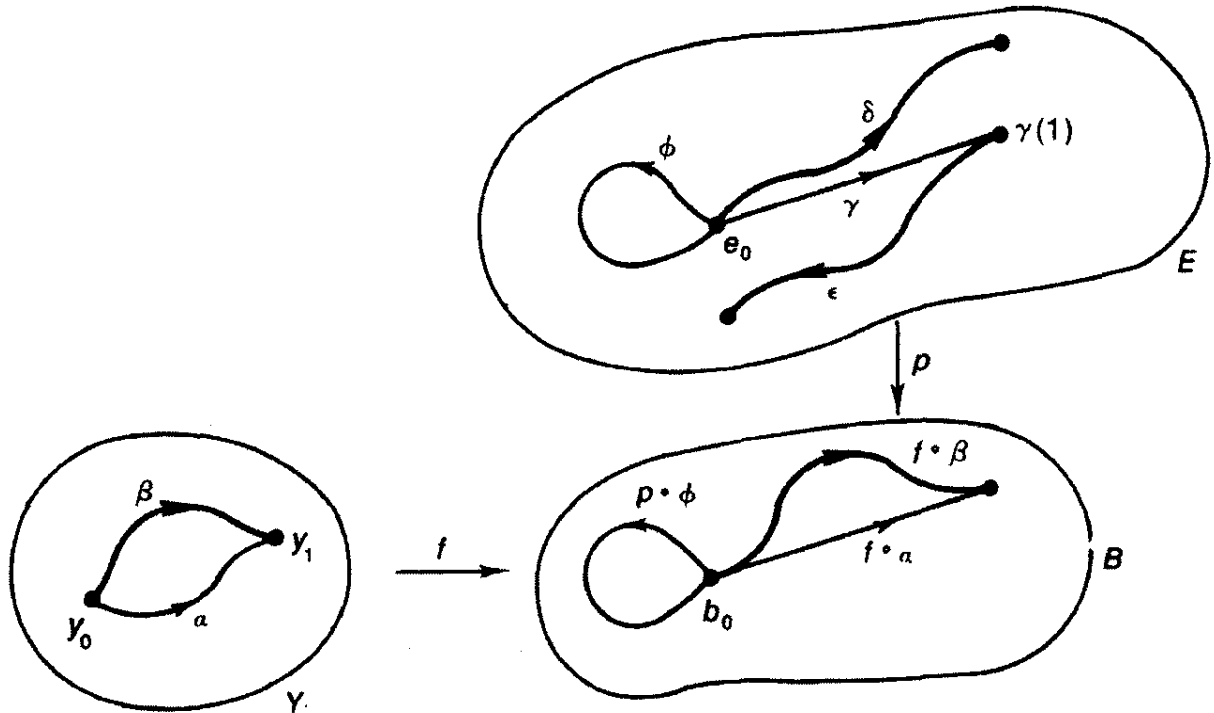
اکنون خوشتعریفی  $\bar{f}$  را ثابت می کنیم. به ازای دو راه مفروض  $\alpha$  و  $\beta$  در  $Y$  از  $y_0$  به  $y_1$ ، تصاویر آنها، یعنی  $f \circ \alpha$  و  $f \circ \beta$ ، راههایی در  $B$  هستند. فرض کنیم  $\gamma$  و  $\delta$ ، بترتیب، نمایش بالا برهای آنها به راههایی در  $E$  با نقطه آغازی  $e_0$  باشند. می خواهیم ثابت کنیم که  $\gamma(1) = \delta(1)$ .

فرض کنیم  $\varepsilon$  بالا بری از  $f \circ \beta$  به راهی در  $E$  با نقطه آغازی  $\gamma(1)$  باشد. شکل ۴۰ ملاحظه شود. در این صورت،  $\gamma * \varepsilon$  يك بالا بر کمند  $(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$  در  $B$  به  $E$  است. رده هموتسویی این کمند عبارت است از  $f_*([\alpha * \beta])$ ، که بنا بر فرض، به  $p_*([\pi_1(E, e_0)])$  تعلق دارد. پس کمندی در  $E$  بر پایه  $e_0$  مانند  $\phi$  هست که

$$[(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [p \circ \phi].$$

نتیجه می شود که  $\varepsilon$  باید به  $e_0$  منتهی شود. زیرا، بنا بر قضیه ۳.۴، اگر دو راه در

$B$  که هموتوپ راهی اند به راههایی در  $E$  با يك نقطه آغازی بالا برده شوند آنگاه آنها باید به يك نقطه منتهی شوند. چون  $p \circ \phi$  و  $(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$  هموتوپ راهی اند، بالابرای آنها، یعنی  $\phi$  و  $\gamma * \varepsilon$ ، باید به يك نقطه منتهی شوند. در این صورت،  $\gamma * \varepsilon$  به  $e_0$  منتهی می شود، همان طور که  $\varepsilon$  نیز به  $e_0$  منتهی می شود.



شکل ۴۰

اکنون  $\varepsilon$  يك بسالابر  $\bar{\beta}$  است که از  $\gamma(1)$  شروع و به  $e_0$  منتهی می شود. در این صورت،  $\bar{\varepsilon}$  يك بسالابر  $\beta$  است که از  $e_0$  شروع و به  $\gamma(1)$  منتهی می شود. راه  $\delta$  بالابر دیگری از این نوع است. بنا بر یکتایی بالابری راهها،  $\delta = \bar{\varepsilon}$ . بالانحص، همان طور که می خواستیم،  $\delta(1) = \gamma(1)$ .  $\square$

۳.۱۴. قضیه فرض کنیم  $B$  همبند راهی و همبند راهی موضعی باشد. فرض کنیم  $p: E \rightarrow B$  و  $p': E' \rightarrow B$  فضاهای پوشی همبند راهی  $B$  باشند و  $p(e_0) = p'(e'_0) = b_0$ . در این صورت،  $p$  و  $p'$  نگاشتهای پوششی هم ارزند اگر و فقط اگر  $p_*(\pi_1(E, e_0))$  و  $p'_*(\pi_1(E', e'_0))$  زیر گروههای مزدوج  $\pi_1(B, b_0)$  باشند.

برهان. فرض کنیم نگاشتهای پوششی هم ارز باشند، و  $h: E' \rightarrow E$  همثومور-فیسمی باشد به طوری که  $p \circ h = p'$  و فرض کنیم  $h(e'_0) = e_0$ . در این صورت، چون  $h$  يك همثومورفیسیم است،  $h_*(\pi_1(E', e'_0)) = \pi_1(E, e_0)$ . با اثر دادن  $p_*$  به هر دو طرف، خواهیم داشت

$$p'_*(\pi_1(E', e'_0)) = p_*(\pi_1(E, e_0))$$

بنابر لم ۱۰۱۴ زیر گروه دومی با  $p_*(\pi_1(E, e_0))$  مزدوج است. اکنون عکس آن را ثابت می کنیم. فرض کنیم این دو زیر گروه مزدوج باشند. با توجه به لم ۱۰۱۴ می توانیم با انتخاب يك نقطه پایه ای دیگری در  $E'$  وضعیتی به دست آوریم که در آن دو زیر گروه مساوی شوند. این عمل را انجام شده تلقی می کنیم، و فرض می کنیم  $e'_0$  نمایشگر نقطه پایه ای جدید باشد.

لم سابق را به کار می بریم. نمودار ذیل را در نظر می گیریم:

$$\begin{array}{ccc} & E' & \\ & \downarrow p' & \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

که  $p'$  يك نگاشت پوششی است. فضای  $E$  همبند راهی است؛ و چون به طور موضعی با  $B$  همثومورف است، همبند راهی موضعی نیز هست. بعلاوه،

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset p'_*(\pi_1(E', e'_0));$$

در واقع، این دو گروه مساوی اند. بنابر لم سابق، نگاشت  $p: E \rightarrow B$  را می توانیم به يك نگاشت پیوسته مانند  $h: E \rightarrow E'$  طوری بالا ببریم که  $h(e_0) = e'_0$ . در این صورت،  $p' \circ h = p$ .

با تعویض نقش  $E$  و  $E'$  در این استدلال، ملاحظه می کنیم که نگاشت  $p': E' \rightarrow B$  می تواند به نگاشتی پیوسته مانند  $k: E' \rightarrow E$  بالا رود به طوری که  $k(e'_0) = e_0$ . برای اثبات اینکه  $h$  و  $k$  عکس یکدیگرند، نمودار ذیل را در نظر می گیریم:

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \downarrow p & \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

توجه کنید که  $k \circ h: E \rightarrow E$  يك بالابر نگاشت  $p: E \rightarrow B$  است که در شرط  $(k \circ h)(e_0) = e_0$  صدق می کند. نگاشت همانی  $i_E: E \rightarrow E$  بالابر دیگری از  $p$  است که از این نوع می باشد. بنابر یکتایی بالابرها،  $k \circ h = i_E$ . به طریقی مشابه  $h \circ k = i_{E'}$ .  $\square$

مثال ۱. فضاهای پوششی دایره  $B = S^1$  را در نظر می گیریم. چون  $\pi_1(B, b_0)$  آبلی است، دو زیر گروه  $\pi_1(B, b_0)$  مزدوج اند اگر فقط اگر مساوی باشند. بنابراین دو پوشش  $B$  هم ارزند اگر و فقط اگر متناظر به يك زیر گروه  $\pi_1(B, b_0)$  باشند.

می‌دانیم که  $\pi_1(B, b_0)$  با  $Z$  (اعداد صحیح) ایزومورف است. زیر گروه‌های  $Z$  کدام‌اند؟ این یکی از قضایای استاندارد جبر است که، به ازای هر زیر گروه نابديهی مفروض  $Z$ ، عدد صحیح مثبتی مانند  $n$  هست که این زیر گروه مساوی  $G_n$ ، یعنی مجموعه همه مضارب  $n$ ، باشد.

یکی از فضاهای پوششی دایره را مطالعه کرده‌ایم، پوشش  $p: R \rightarrow S^1$  چون  $R$  همبند ساده است، این پوشش به زیر گروه بدیهی  $\pi_1(S^1, b_0)$  نظیر شود. همچنین، نکاشت پوششی  $p: S^1 \rightarrow S^1$  را با ضابطه  $p(z) = z^n$  در نظر گرفتیم، که در آن  $z$  عددی مختلط است. در این مورد، نکاشت  $p_*$  مولدی از  $\pi_1(S^1, b_0)$  را به  $n$  برابر خودش می‌نگارد. بنابراین، گروه  $p_*(\pi_1(S^1, b_0))$ ، تحت ایزومورفیسم استاندارد  $\pi_1(S^1, b_0)$  با  $Z$ ، به زیر گروه  $G_n$  از  $Z$  نظیر می‌شود.

از قضیه سابق نتیجه می‌گیریم که هر پوشش همبند راهی فضای  $S^1$  با یکی از این پوششها هم ارز است.

### وجود پوششها

اکنون ثابت می‌کنیم که به ازای هر زیر گروه مفروض  $\pi_1(B, b_0)$  مانند  $H$ ، يك فضای پوششی مانند  $p: E \rightarrow B$  و نقطه‌ای از  $p^{-1}(b_0)$  مانند  $e_0$  موجود است که  $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$ . برای این منظور، احتیاج به فرض يك شرط اضافی بر فضای  $B$  داریم موسوم به «همبندی ساده نیم موضعی».

تعریف. فضای  $B$  را همبند ساده نیم موضعی گویند در صورتی که هر نقطه  $b$  از  $B$  يك همسایگی مانند  $V$  داشته باشد به طوری که همومورفیسم القا شده به وسیله تابع احتوا از  $\pi_1(V, b)$  بتوی  $\pi_1(B, b)$  بدیهی باشد.

اگر  $V$  چنین همسایگی از  $b$  و  $U$  همسایگی دلخواهی از  $b$  باشد آنگاه  $U \cap V$ ، نیز همسایگی از  $b$  است که در  $U$  قرار دارد، و در این شرط صدق می‌کند. همبندی ساده نیم موضعی از همبندی ساده موضعی ضعیفتر است؛ همبندی ساده موضعی مستلزم آن است که به ازای هر همسایگی  $b$  مانند  $U$  باید يك همسایگی از  $b$  مانند  $V$  موجود باشد که  $V \subset U$  و  $V$  همبند ساده باشد.

۴.۱۴. قضیه فرض کنیم  $B$  همبند راهی، همبند راهی موضعی، و همبند ساده نیم موضعی باشد و  $b_0 \in B$ . به ازای زیر گروه مفروضی از  $\pi_1(B, b_0)$  مانند  $H$ ، يك فضای پوششی همبند راهی مانند  $p: E \rightarrow B$  و نقطه‌ای از  $p^{-1}(b_0)$  مانند  $e_0$  موجود است به طوری که

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = H.$$

برهان. مرحله ۱. (ساختمان  $E$ ). طریقه ساختن  $E$  یادآور طریقه‌ای است که در

آنسایز مختلط برای ساختن سطوح ریمانی مسورد استفاده قرار می گیرد. فرض کنیم  $\mathcal{P}$  نمایش همه راههایی در  $B$  باشد که از  $b_0$  شروع می شوند. به طریق ذیل يك رابطه هم-ارزی بر  $\mathcal{P}$  تعریف می کنیم:  $\alpha \sim \beta$  هر گاه  $\alpha$  و  $\beta$  به يك نقطه  $B$  منتهی شوند و رده  $[\alpha * \bar{\beta}]$  به زیر گروه  $H$  تعلق داشته باشد. به آسانی معلوم می شود که « $\sim$ » يك رابطه هم ارزی است.

فرض کنیم  $E$  نمایش گردایه رده های هم ارزی باشد؛ رده هم ارزی راه  $\alpha$  را به  $\alpha^\#$  نمایش می دهیم. نگاشت  $p: E \rightarrow B$  را با ضابطه  $p(\alpha^\#) = \alpha(1)$  تعریف می کنیم. چون  $B$  همبند راهی است،  $p$  پوشاست. بر  $E$  توپولوژی تعریف می کنیم که نسبت به آن  $p$  نگاشتی پوششی شود.

نخست به دو مطلب توجه می کنیم:

$$(1) \text{ اگر } \alpha \simeq_p \beta \text{ آنگاه } \alpha^\# = \beta^\# .$$

$$(2) \text{ اگر } \alpha^\# = \beta^\# \text{ آنگاه به ازای هر راه } \delta \text{ در } B \text{ با نقطه آغازی } \alpha(1) \text{ داریم} \\ (\alpha * \delta)^\# = (\beta * \delta)^\# .$$

اولی با توجه به این نکته نتیجه می شود که اگر  $\alpha \simeq_p \beta$  آنگاه  $[\alpha * \bar{\beta}]$  عضو خنثایی است که به  $H$  تعلق دارد. دومی نتیجه ای است از این مطلب که  $\alpha * \delta$  و  $\beta * \delta$  به يك نقطه منتهی می شوند و

$$[(\alpha * \delta) * (\bar{\beta} * \delta)] = [(\alpha * \delta) * (\bar{\delta} * \bar{\beta})] = [\alpha * \bar{\beta}] ,$$

که بنا بر فرض، به  $H$  تعلق دارد.

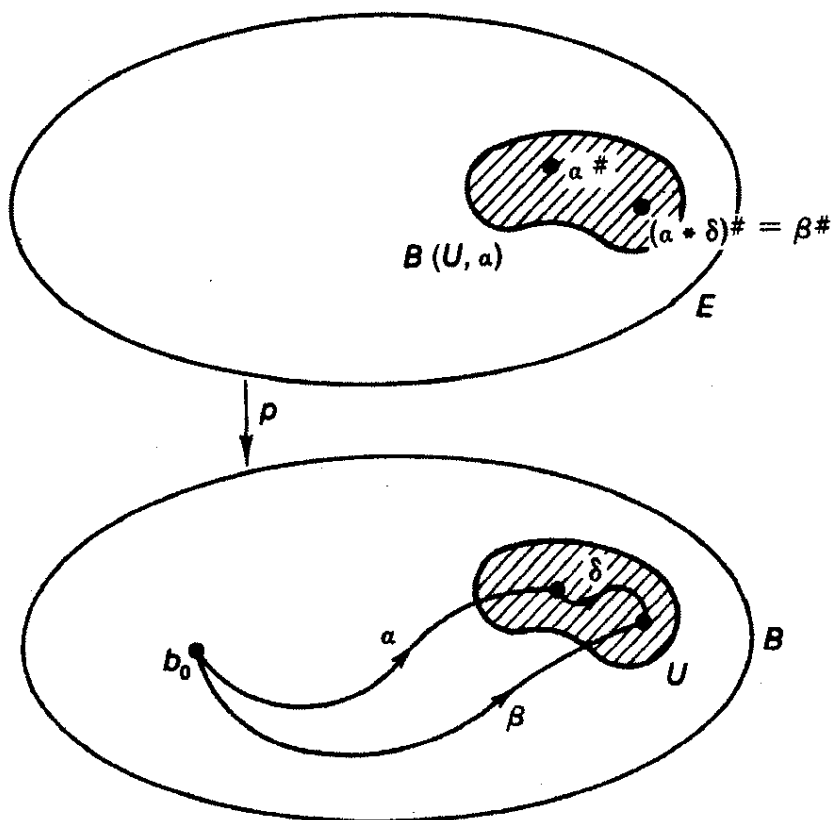
مرحله ۲. (توپولوژی دهی به  $E$ ). يك طریقه توپولوژی دهی به  $E$  چنین است که  $\mathcal{P}$  را با توپولوژی فشرده - باز (به فصل ۷ مراجعه شود) مجهز کنیم و  $E$  را از توپولوژی خارج قسمتی متناظر به آن برخوردار کنیم. ولی به صورت ذیل هم می توان مستقیماً به  $E$  توپولوژی بدهیم:

فرض کنیم  $\alpha$  عضوی از  $\mathcal{P}$ ، و  $U$  همسایگی همبند راهی دلخواهی از  $\alpha(1)$  باشد. تعریف می کنیم

$$B(U, \alpha) = \{(\alpha * \delta)^\# \mid \alpha(1) \text{ با نقطه آغازی } \delta \text{ در } U \text{ است}\}$$

مدعی هستیم که مجموعه های  $B(U, \alpha)$  تشکیل پایه ای برای يك توپولوژی در  $E$  می دهند. شکل ۴۱ ملاحظه شود. توجه کنید که  $\alpha^\# \in B(U, \alpha)$ .

نخست ثابت می کنیم که اگر  $\beta^\# \in B(U, \alpha)$  آنگاه  $B(U, \beta) = B(U, \alpha)$ . می دانیم که به ازای راهی در  $U$  مانند  $\delta$ ،  $\beta^\# = (\alpha * \delta)^\#$ . عضو نوعی  $B(U, \beta)$  به صورت  $(\beta * \gamma)^\#$  است که  $\gamma$  راهی است در  $U$ . بنا بر احکام (۱) و (۲) مرحله ۱ داریم



شکل ۴۱

$$(\beta * \gamma)^{\#} = ((\alpha * \delta) * \gamma)^{\#} = (\alpha * (\delta * \gamma))^{\#} ,$$

که بنا بر تعریف در  $B(\alpha, U)$  قرار دارد. در نتیجه  $B(U, \beta) \subset B(U, \alpha)$ . بعکس، عضو نوعی  $B(U, \alpha)$  به صورت  $(\alpha * \varepsilon)^{\#}$  است، که  $\varepsilon$  راهی است در  $U$ . مجدداً بنا بر (۱) و (۲)،

$$(\alpha * \varepsilon)^{\#} = ((\alpha * \delta) * (\bar{\delta} * \varepsilon))^{\#} = (\beta * (\bar{\delta} * \varepsilon))^{\#} ,$$

که در  $B(U, \beta)$  قرار دارد. پس  $B(U, \alpha) \subset B(U, \beta)$ . اکنون ثابت می کنیم که مجموعه های  $B(U, \alpha)$  تشکیل یک پایه می دهند. اگر  $\beta^{\#}$  به مقطع  $B(U_1, \alpha_1) \cap B(U_2, \alpha_2)$  تعلق داشته باشد، تنها نیاز ما انتخاب یک همسایگی همبند راهی از  $\beta(1)$  مانند  $V$  است که زیر مجموعه  $U_1 \cap U_2$  باشد. جزئیت

$$B(V, \beta) \subset B(U_1, \beta) \cap B(U_2, \beta)$$

نتیجه ای است از تعریف این مجموعه ها، و بنا بر نتیجه ای که ثابت شد، طرف راست مساوی است با  $B(U_1, \alpha_1) \cap B(U_2, \alpha_2)$ .

مرحله ۳. نگاشت  $p$  پیوسته و باز است. به آسانی ملاحظه می شود که  $p$  باز است، زیرا تصویر عضو پایه ای  $B(U, \alpha)$  مجموعه باز  $U$  از  $B$  است؛ به ازای عضو مفروضی



از  $U$  مانند  $x$ ، راه  $\delta$  را در  $U$  از  $\alpha(1)$  به  $x$  انتخاب می‌کنیم؛ در این صورت  $(\alpha * \delta)^\#$  عضوی است از  $B(U, \alpha)$  و  $p((\alpha * \delta)^\#) = x$ .

برای اثبات پیوستگی  $p$ ، فرض می‌کنیم که  $\alpha^\#$  عضوی از  $E$  باشد، و  $W$  یک همسایگی از  $p(\alpha^\#)$ . یک همسایگی همبند راهی از نقطه  $\alpha(1)$  مانند  $U$  انتخاب می‌کنیم که زیر مجموعه  $W$  باشد. در این صورت،  $B(U, \alpha)$  یک همسایگی  $\alpha^\#$  است که  $p$  آن را بنوی  $W$  می‌نگارد. پس در  $\alpha^\#$  پیوسته است.

مرحله ۴. نگاشت  $p$  یک نگاشت پوششی است. به ازای عضو مفروض  $b_1$  از  $B$ ، یک همسایگی همبند راهی از  $b_1$  مانند  $U$  چنان برمی‌گزینیم که در این شرط اضافی هم صدق کند که همومورفیسم القایی  $\pi_1(B, b_1) \rightarrow \pi_1(U, b_1)$  به وسیله تابع احتوا برابر همومورفیسم بدیهی باشد. ادعا می‌کنیم که  $U$  به وسیله  $p$  به طور هموار پوشانده می‌شود. اولاً، ملاحظه می‌کنیم که  $p^{-1}(U)$  مساوی اجتماع مجموعه‌های  $B(U, \alpha)$  است وقتی  $\alpha$  همه راه‌های در  $B$  از  $b_0$  به  $b_1$  را اختیار می‌کند؛ چون  $p$  هر مجموعه  $B(U, \alpha)$  را بروی  $U$  می‌نگارد، واضح است که  $p^{-1}(U)$  حاوی این اجتماع است. از طرف دیگر، اگر  $\beta^\# \in p^{-1}(U)$  آنگاه  $\beta(1)$  عضوی است از  $U$  و می‌توانیم راهی مانند  $\delta$  در  $U$  از  $\beta(1)$  به  $b_1$  انتخاب کنیم. فرض کنیم  $\alpha$  راه  $\beta * \delta$  از  $b_0$  به  $b_1$  باشد؛ در این صورت  $\beta \simeq_p \alpha * \delta$ ، در نتیجه،  $\beta^\# = (\alpha * \delta)^\#$ ، که به  $B(U, \alpha)$  تعلق دارد پس  $p^{-1}(U)$  زیر مجموعه اجتماع مجموعه‌های  $B(U, \alpha)$  است.

ثانیاً، توجه می‌کنیم که مجموعه‌های متمایز  $B(U, \alpha)$  جدا از هم‌اند. زیرا اگر  $\beta^\#$  به مقطع  $B(U, \alpha_1) \cap B(U, \alpha_2)$  تعلق داشته باشد آنگاه بنا بر مرحله ۲،

$$B(U, \alpha_1) = B(U, \beta) = B(U, \alpha_2).$$

ثالثاً، ثابت می‌کنیم که  $p$  یک نگاشت دوسویی از  $B(U, \alpha)$  به  $U$  تعریف می‌کند. نتیجه می‌شود که  $p|_{B(U, \alpha)}$  دوسویی، پیوسته، و باز است و در نتیجه یک همومورفیزم است. قبلاً ملاحظه کردیم که  $p$  مجموعه  $B(U, \alpha)$  را بروی  $U$  می‌نگارد. برای اثبات یک به یک بودن  $p$ ، فرض کنیم

$$p((\alpha * \delta_1)^\#) = p((\alpha * \delta_2)^\#),$$

که  $\delta_1$  و  $\delta_2$  راه‌هایی در  $U$  هستند. در این صورت،  $\delta_1(1) = \delta_2(1)$ . از آنجا که همومورفیسم القایی  $\pi_1(B, b_1) \rightarrow \pi_1(U, b_1)$  به وسیله تابع احتوا مساوی همومورفیزم بدیهی است،  $\delta_1 * \delta_2$  در  $B$  با یک نگاشت ثابت هموتوپ راهی است. پس،  $\alpha * \delta_1 \simeq_p \alpha * \delta_2$ ، که در نتیجه، همان‌طور که می‌خواستیم،  $(\alpha * \delta_1)^\# = (\alpha * \delta_2)^\#$ .

مرحله ۵. فضای  $E$  همبند راهی است و به ازای عضوی از  $p^{-1}(b_0)$  مانند  $e_0$  زیر-گروه  $H$  مساوی  $p_*(\pi_1(E, e_0))$  است. اثبات این حکم برهان قضیه را به پایان می‌رساند.

نخست، دقیقاً تعیین می کنیم که بالابر راهی مانند  $\alpha$  در  $B$  چگونه است. فرض کنیم  $\alpha$  راهی در  $B$  با نقطه آغازی  $b_0$  باشد. به ازای  $t \in [0, 1]$ ، فرض کنیم  $\alpha_t : I \rightarrow B$  با ضابطه

$$\alpha_t(s) = \alpha(ts) \quad (s \in [0, 1] \text{ به ازای})$$

نمایش «قسمتی» از راه  $\alpha$  باشد که بین  $b_0$  و  $\alpha(t)$  قرار گرفته است. سپس  $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$  را با معادله

$$\tilde{\alpha}(t) = (\alpha_t)^\#$$

تعریف می کنیم. ادعا می کنیم که  $\tilde{\alpha}$  بالابر  $\alpha$  است؛ توجه می کنیم که  $\tilde{\alpha}$  از نقطه  $e_0 = (e_{b_0})^\#$ ، یعنی رده هم‌ارزی راه ثابت، شروع می شود و به نقطه  $\alpha^\#$  منتهی می شود. به آسانی ملاحظه می شود که  $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ ، زیرا  $p \circ \tilde{\alpha}(t) = p((\alpha_t)^\#) = \alpha_t(1) = \alpha(t \times 1) = \alpha(t)$ . مشکلترین قسمت، اثبات پیوستگی  $\tilde{\alpha}$  است.

زمانی که آن را ثابت کنیم قضیه به سهولت نتیجه می شود. برای اثبات همبند راهی بودن  $E$  توجه می کنیم که اگر  $\alpha^\#$  نقطه دلخواهی از  $E$  باشد آنگاه  $\alpha$  راهی است در  $B$  با نقطه آغازی  $b_0$ ، و بالابر آن  $\tilde{\alpha}$  راهی است در  $E$  که از نقطه  $e_0$  شروع و به  $\alpha^\#$  منتهی می شود.

برای اثبات اینکه  $H \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$ ، عضوی از  $H$  مانند  $[\alpha]$  بر می داریم. فرض می کنیم  $\tilde{\alpha}$  بالابر  $\alpha$  به راهی در  $E$  با نقطه آغازی  $e_0$  باشد؛ در این صورت،  $\tilde{\alpha}$  به  $\alpha^\#$  منتهی می شود.  $\alpha$  با راه ثابت  $e_{b_0}$  هم‌ارز است. زیرا،  $[\alpha] = [e_{b_0} * \tilde{\alpha}]$ . بنابراین،  $\alpha^\# = (e_{b_0})^\#$ ، که در نتیجه  $\tilde{\alpha}$  کمندی است در  $E$  بر پایه  $e_0$ . از آنجا که  $p_*([\tilde{\alpha}]) = [\alpha]$ ، نتیجه می شود که  $[\alpha] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$ . پس

$$H \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$$

برای اثبات عکس این جزئیت، عضوی از  $\pi_1(E, e_0)$  مانند  $[\tilde{\alpha}]$  بر می داریم. فرض می کنیم  $\tilde{\alpha} = p \circ \alpha$  و توجه داریم که  $\alpha$  بالابر یکنای  $\alpha$  به  $E$  با نقطه آغازی  $e_0$  است. بنابراین،  $\tilde{\alpha}$  به  $\alpha^\#$  منتهی می شود؛ از آنجا که  $\tilde{\alpha}$  کمندی است در  $E$ ، داریم  $\tilde{\alpha}(1) = e_0$ . بنابراین،  $\alpha^\# = (e_{b_0})^\#$ ، در نتیجه  $\alpha$  با  $e_{b_0}$  هم‌ارز است، و لهذا  $[\alpha] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$ . پس  $H$  تعلق دارد.

برهان را با اثبات پیوستگی  $\tilde{\alpha}$  به پایان می رسانیم. مقداری از پارامتر  $t$  مانند  $t_0$  و یک همسایگی نقطه  $\tilde{\alpha}(t_0) = (\alpha_{t_0})^\#$  در  $E$  مانند  $B(U, \alpha_{t_0})$  انتخاب می کنیم. عددی مثبت مانند  $\varepsilon$  طوری می یابیم که هرگاه  $|t_1 - t_0| < \varepsilon$ ، داشته باشیم  $(\alpha_{t_1})^\# \in B(U, \alpha_{t_0})$ . این مطلب پیوستگی را ثابت می کند.  $\varepsilon$  را به اندازه کافی کوچک انتخاب می کنیم به طوری

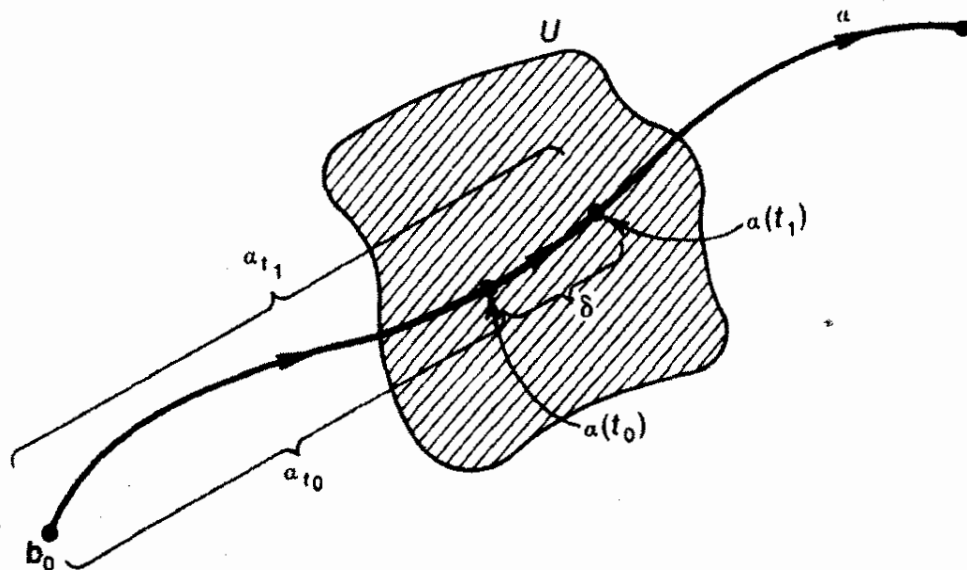
$$|t_1 - t_0| < \varepsilon \implies \alpha(t_1) \in U.$$

مدعی هستیم که اگر  $|t_1 - t_0| < \varepsilon$  آنگاه به ازای راهی در  $U$  مانند  $\delta$ ،  $\alpha_{t_0} * \delta$

هموتوپ راهی است، در نتیجه، همان طور که می‌خواستیم،  $\tilde{\alpha}(t_1) = (\alpha_{t_1})^\#$  در  $B(U, \alpha_{t_0})$  قرار می‌گیرد.

برای سهولت در علامتگذاری فرض کنیم  $t_0 < t_1$ .  $\delta$  را آن قسمت از راه  $\alpha$  می‌گیریم که بین  $\alpha(t_0)$  و  $\alpha(t_1)$  قرار دارد، و به طور مناسب پارامتری شده است. شکل ۴۲ هموتوپی راهی بودن  $\alpha_{t_0}$  و  $\alpha_{t_1}$  را آشکار می‌کند. به بیان صوری فرض کنیم

$$\delta(s) = \alpha((1-s)t_0 + st_1);$$



شکل ۴۲

در این صورت  $\delta$  در  $U$  قرار می‌گیرد. تابع  $F: I \times I \rightarrow B$  را با ضابطه

$$F(s, t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{[t_0(1-t) + t_1 t] \gamma s}{[1+t]}\right), & \text{به ازای } s \in \left[0, \frac{1+t}{2}\right] \\ \alpha(t_0(1 - (\gamma s - 1)) + t_1(\gamma s - 1)), & \text{به ازای } s \in \left[\frac{1+t}{2}, 1\right] \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم.  $F$  هموتوپی راهی مطلوب است.  $\square$

۵.۱۴. نتیجه فرض کنیم  $B$  همبند راهی و همبند راهی موضعی باشد.

(الف) اگر  $B$  یک فضای پوششی عمومی داشته باشد آن فضای پوششی با تقریب هم‌ارزی به طور یکتا مشخص می‌شود.

(ب) اگر  $B$  همبند ساده نیم موضعی باشد آنگاه  $B$  یک فضای پوششی عمومی دارد.

برهان. قسمت (الف) نتیجه فوری قضیه ۳.۱۴ است؛ اگر  $p: E \rightarrow B$  فضای پوششی عمومی  $B$  باشد آنگاه گروه  $p_*(\pi_1(E, e_0))$  زیر گروه بدیهی  $\pi_1(B, b_0)$  است

برای اثبات (ب)، قضیهٔ سابق را جهت ساختن يك فضای پوششی همبند راهی مانند  $p: E \rightarrow B$  به طوری که  $p_*(\pi_1(E, e_0))$  زیر گروه بدیهی  $\pi_1(B, b_0)$  باشد به کار می گیریم. از آنجا که  $p_*$  يك به يك است (اثبات این مطلب را به خواننده محول می کنیم)،  $E$  همبند ساده است و در نتیجه فضای پوششی عمومی  $B$  است.  $\square$

### تمرینها

۱. می دانیم که  $\pi_1(S^1 \times S^1, b_0 \times b_0)$  با  $Z \times Z$  ایزومورف است، ایزومورفیسم مورد نظر به وسیلهٔ تصاویر  $S^1 \times S^1$  بروی دو عامل آن القا می شود. (الف) زیر گروه دوری نامتناهی  $Z \times Z$  را که به وسیلهٔ عضو  $1 \times 0$  تولید می شود در نظر بگیرید؛ فضای پوششی متناظر با این زیر گروه را برای  $S^1 \times S^1$  بیابید. (ب) فضای پوششی  $S^1 \times S^1$  را که متناظر با زیر گروه دوری نامتناهی تولید شده به وسیلهٔ  $1 \times 1$  است بیابید. (پ) فضای پوششی متناظر با زیر گروه ذیل را بیابید:

$$H = \{(\gamma n, \gamma m) \mid n, m \in Z\}.$$

۲. فرض کنید  $B$  يك فضای توپولوژی باشد. ثابت کنید که اگر  $B$  يك فضای پوششی عمومی داشته باشد آنگاه  $B$  همبند ساده نیم موضعی است.
۳. فرض کنیم  $A_n$  دایره ای به شعاع  $1/n$  در صفحهٔ  $xy$  باشد که در مبدأ به محور  $y$  ها مماس است، و  $X = \bigcup A_n$ . (الف) ثابت کنید که  $X$  همبند ساده نیم موضعی نیست. (ب) فرض کنید  $C(X)$  زیر فضایی از  $R^3$  باشد که متشکل است از اجتماع همهٔ قطعه خطهایی که نقاط  $X$  را به نقطهٔ  $(0, 0, 1)$  وصل می کنند. (این فضا موسوم است به مخروط روی  $X$ ) ثابت کنید که در مبدأ،  $C(X)$  همبند ساده نیم موضعی است ولی در آنجا همبند ساده موضعی نیست.

۴. فرض کنید  $B$  همبند راهی و همبند راهی موضعی باشد، و فرض کنید  $p: E \rightarrow B$  يك نگاشت پوششی باشد. هومومورفیسم  $E \rightarrow E$  را  $h$  با يك تبدیل عرشه ای (یا تبدیل پوششی) گوئیم هر گاه  $p \circ h = p$ . (الف) فرض کنید  $e_0$  و  $e_1$  دو نقطه از  $p^{-1}(b_0)$  باشد. ثابت کنید که يك تبدیل عرشه ای مانند  $h: E \rightarrow E$  موجود است که  $h(e_0) = e_1$  اگر و تنها اگر  $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, e_1))$ . ثابت کنید که  $h$ ، در صورت وجود، منحصر به فرد است.

(ب) اگر  $H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$  در  $\pi_1(B, b_0)$  نرمال باشد آنگاه  $p: E \rightarrow B$  نگاشت پوششی منتظم نسامیده می شود. ثابت کنید که در این مورد، گروه تبدیلهای

عرشه‌ای  $E$  با گروه خارج قسمتی  $\pi_1(B, b_0)/H_0$  ایزومورف است. (با تمرین ۱۰ در بخش ۸-۴ مقایسه کنید.)

(پ) اگر  $p: E \rightarrow B$  يك فضای پوششی عمومی  $B$  باشد در مورد گروه تبدیلهای عرشه‌ای  $E$  چه حکمی می‌توانید بکنید؟

۵. نگاشت پوششی عادی  $p: R \times R \rightarrow S^1 \times S^1$  را در نظر بگیرید. گروه تبدیلهای عرشه‌ای  $R \times R$  را تعریف کنید.

۶. همه تبدیلهای عرشه‌ای فضای پوششی به شکل ۸ را که در ل-م ۵.۷ ساخته شده تعیین کنید.

۷\*. تمرین ۱۳ در بخش ۸-۴ را که مربوط است به فضاهای پوششی گروههای توپولوژیک، به حالتی که فضای پوششی همبند راهی است ولی همبند ساده نیست تعمیم دهید.

- [A-S] Ahlfors, L. V., and Sario, L., *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.
- [D] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [F] Fuchs, M., "A note on mapping cylinders," *Michigan Mathematical Journal*, 18 (1971) pp. 289–290.
- [G-P] Guillemin, V., and Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.
- [H] Halmos, P. R., *Naive Set Theory*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1960.
- [H-W] Hurewicz, W., and Wallman, H., *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1948.
- [H-Y] Hocking, J. G., and Young, G. S., *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1961.
- [K] Kelley, J. L., *General Topology*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1955.
- [M] Massey, W. S., *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1967.
- [M-Z] Montgomery, D., and Zippin, L., *Topological Transformation Groups*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1955.
- [R] Rudin, M. E., "The box product of countably many compact metric spaces," *General Topology and its Applications*, 2 (1972) pp. 293–298.
- [Sm] Smullyan, R. M., "The continuum hypothesis," *The Mathematical Sciences, A Collection of Essays*, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1969.
- [S] Spanier, E. H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
- [S-S] Steen, L. A., and Seebach, J. A., Jr., *Counterexamples in Topology*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York, 1970.
- [T] Thomas, J., "A regular space, not completely regular," *American Mathematical Monthly*, 76 (1969) pp. 181–182.
- [W] Wilder, R. L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1952.
- [Wd] Willard, S., *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1970.

## واژه نامه انگلیسی - فارسی

accumulation	انباشتگی
– point	نقطه -
action	عمل
adjunction	الحاق
– space	فضای - ی
antipodal	مقطر
– map	نگاشت -
– point	نقطه -
antipode-preserving map	نگاشت حافظه نقاط مقطر
arc	کمان
ball	گوی
– unit	- واحد
base	پایه
– point	نقطه -
basis	پایه
countable -	- شمارا
– element	عضو -
bijection	دو سویی

binary	دوتایی
— operation	عمل —
bound	کران
boundary	کرانه
bounded	کراندار
— above	از بالا —
— below	از پایین —
boundedness	کرانداری
cardinality	عدد اصلی
cardinal number	عدد اصلی
cartesian	دکارتی
category	مقوله
choice	انتخاب
axiom of —	اصل موضوع —
— function	تابع —
classification	رده‌بندی
closure	بستار
cluster	انباشتگی
— point	نقطه —
coarse	درشت
cofinal	همپایان
coherent	هموسته
collection	گردایه
compact	فشرده
— support	محمل —
compactification	فشرده شده، فشرده سازی



one point —	تک نقطه‌ای
compactness	فشرده‌گی
limit point —	نقطه حدی
local —	موضعی
comparability	مقایسه‌پذیر
complement	متمم
complete graph	گراف کامل
completely	تماماً
— normal space	فضای نرمال
— regular space	فضای منتظم
completeness	تمامیت
completion	تمام‌سازی
component	مؤلفه
connected —	همبند
path —	راهی
conjugacy class	رده ازدواج
conjugate	مزدوج
connected	همبند
— im kleinen	— خردجا
path —	— راهی
continuity	پیوستگی
uniform —	— یکنواخت
continuous	پیوسته
continuum	پرستار
— hypothesis	فرضیه —
linear —	— خطی
contractible	انقباض‌پذیر

contraction	انقباض
contrapositive	عکس نقیض
convergent	همگرا
– sequence	دنباله –
converse	عکس
convex	محدب
coordinate	مختص
correspondence	تناظر
one to one –	– يك به يك
coset	همرده
countable	شمارا
– intersection condition	شرط مقطع –
counterimage	تصویر عکس
cover	پوشش
curve	منحنی
simple closed –	– بسته ساده
decimal	اعشاری
deck	عرشه
– transformation	تبدیل – ای
decomposition	تجزیه
deformation	دگردیسی
strong –	– قوی
deleted	سفته
– comb space	فضای شانه‌ای –
dense	چگال
diagonal	قطر، قطری

diameter	قطر
dictionary order relation	رابطه ترتیب قاموسی
difference	تفاضل
dimension	بعد
directed	جهت‌دار
disconnected	ناهمبند
discrete	گسسته
- topology	توپولوژی -
disjoint	جدا از هم
distance	فاصله
distributive	توزیع پذیری
divergent	واگرا
domain	حوزه تعریف
equicontinuous	همپیوسته
equivalence	هم‌ارزی
essential	اساسی
evaluation	ارزه
- map	نگاشت -
evenly	به‌طور هموار
eventually zero	سرانجام صفر
expansion	بسط
extended	گسترده
- complex plane	صفحه مختلط -
extension	گسترش
family	خانواده

field	میدان
ordered _	— مرتب
figure eight	شکل 8
final	انجامی
— point	نقطه —
fine	ظریف
finite	متناهی
functional	تابعی
functor	تابعگون
functorial	تابعگونی
general position	وضع عمومی
generate	تولید کردن
graph	گراف
linear _	— خطی
greatest lower bound	بزرگترین کران پایین
group	گروه
fundamental _	— بنیادی
groupoid	گروهوار
homeomorphism	هومئومورفیسم
homogeneous	همگن
homomorphism	هومومورفیسم
homotopic	هموتوپیک، هموتوپ
homotopy	هموتوپیی
identification	همانسازی

identity	اتحاد، همانی
identity function	تابع همانی
image	تصویر
imbed	نشان‌دن
immediate	بلافاصل
- predecessor	سابق -
- successor	تالی -
inclusion	احتوا، جزئیت
independent	مستقل
index	اندیس
indexed	اندیس‌دار
indexing	اندیس‌گذار
indiscrete	ناگسسته
induced	القایی، القا شده
induction	استقرا
inductive	استقرایی
inessential	غیر اساسی
infimum	اینفیموم
infinite	نامتناهی
initial	آغازی
injective function	تابع یک به یک
interior	درون
intermediate	میان‌ی
intersection	مقطع
interval	بازه
inverse	وارون، معکوس
irrational number	عدد گنگ

irrationality	گنگ بودن
isometry	ایزومتري
isomorphism	ایزومورفیسم
J - tuple	J تایی
K - fold	K لایی
least upper bound	کوچکترین کران بالا
lens space	فضای عدسی
lifting	بالا بر
limit	حد
- point compact	فشرده بر حسب نقطه -
- point compactness	فشرده گی بر حسب نقطه -
linear	خطی
local	موضعی
locally	موضعیاً
loop	کمند
manifold	بسطا
mapping	نگاشت
maximal	ماکزیمال
maximum	ماکزیموم
metric	متریک ، متري
metrizable	متری پذیر
metrization	متریسازی
multiple	بسطا

<b>multiplicity</b>	بستایی
<b>neighborhood</b>	همسایگی
<b>nested</b>	تودرتو
<b>net</b>	تور
<b>nonreflexivity</b>	نامنعکس
<b>norm</b>	نرم
<b>normal</b>	نرمال
<b>nowhere differentiable</b>	هیچ جا مشتق پذیر
<b>one - point</b>	تک نقطه
<b>one - to - one</b>	یک به یک
<b>onto</b>	بروی
<b>open</b>	باز
<b>operation</b>	عمل
<b>orbit</b>	مدار
<b>order-preserving</b>	حافظ ترتیب
<b>pasting lemma</b>	لم چسب
<b>paracompact</b>	پیرافشرده
<b>paradox</b>	پارادوکس
<b>partition of unity</b>	افراز واحد
<b>path component</b>	مؤلفه راهی
<b>piecewise</b>	قطعه به قطعه
<b>plane</b>	صفحه
<b>doubly punctured -</b>	- دوبار سفته
<b>sorgenfrey</b>	- سورجنفری

<b>point</b>	نقطه
<b>accumulation</b> –	– انباشتگی
<b>final</b> –	– انجामी
<b>initial</b> –	– آغازی
<b>– open topology</b>	توپولوژی – باز
<b>pointwise</b>	نقطه به نقطه
<b>– convergence topology</b>	توپولوژی همگرایی –
<b>power set</b>	مجموعه توانی
<b>preimage</b>	تصویر عکس
<b>principle</b>	اصل
<b>– of induction</b>	– استقرا
<b>– of recursive definition</b>	– تعریف بازگشتی
<b>– of transfinite induction</b>	– استقرای ترانسفینیتی
<b>projection</b>	تصویر
<b>projective</b>	تصویری
<b>– n - space</b>	فضای $n$ بعدی –
<b>– plane</b>	صفحه –
<b>proper</b>	سره
<b>– subset</b>	زیر مجموعه –
<b>punctured</b>	سفته
<b>quantifier</b>	سور
<b>quasicomponent</b>	شبه مؤلفه
<b>quotient</b>	خارج قسمت
<b>– map</b>	نگاشت – ی
<b>– operation</b>	عمل – ی
<b>– space</b>	فضای – ی



- topology	توپولوژی - ی
range	حوزه مقادیر
rational	گویا
ray	شعاع
reciprocal	عکس [عدد]
recurrence	بازگشت
recursion formula	دستور بازگشتی
recursive	بازگشتی
refinement	تعریف
reflexivity	انعکاسی
regular	منتظم
completely -	تماماً -
regularity	منتظم بودن
relation	رابطه
restriction	تحدید
retract	تو کشیده
absolute -	- مطلق
strong deformation -	- دگرذیسی قوی
retraction	تو کشنده
reverse	وارونه
saturated	اشباع شده
section	قطعه
semicontinuity	نیم پیوستگی
semilocally	نیم موضعی
separable	تفکیک پذیر

separation	جدا سازی
sequence	دنباله
nested _	_ تو در تو
shirinking	درهم کشیدن
simple	ساده
simplicial 2 - complex	همبافت دوبعدی
slice	قاج
space filling curve	منحنی فضا پرکن
sphere	کره
unit_	_ واحد
standard	استانده
star convex	محلّب ستاره‌ای
stereographic	گنجننگاری
strict	اکید
strong	قوی
subbasis	زیر پایه
subnet	زیر تور
subsequence	زیر دنباله
subset	زیر مجموعه
subspace	زیر فضا
superset	ابر مجموعه
sup metric	متریک سوپرموم
support	محمل
surface	رویه
surjective	پوشا
symbol	نماد
symmetry	تقارن

test	آزمون
topological	توپولوژیک
topology	توپولوژی
box —	— جعبه‌ای
compact open —	— فشرده باز
fine —	— ظریف
— of compact convergence	— همگرایی فشرده
— of pointwise convergence	— همگرایی نقطه به نقطه
point open —	— نقطه باز
— space	فضای —
torus	چنبره
double —	— مضاعف
total boundedness	کمرانداری کلی
totally bounded	کلاً کمراندار
tower	برج
transcendental	متعالی
transitivity	تعدی
transfinite	ترانسفینی
translation	انتقال
trivial	بیمایه
uncountable	ناشمارا
uniform	یکنواخت
union	اجتماع
unit	واحد
universal	عمومی

**vacuously true**

به انتهای مقدم راست

**vertice**

رأس

**well - ordered**

خوشترتیب

**well - ordering**

خوشترتیبی

**winding**

پیچش

## واژه‌نامه فارسی - انگلیسی

test	آزمون
initial	آغازی
superset	ابرمجموعه
identity	اتحاد
union	اجتماع
inclusion	احتوا
evaluation	ارزه
essential	اساسی
standard	استانده
induction	استقرا
inductive	استقرایی
saturated	اشباع شده
principle	اصل
- of induction	- استقرا
- of transfinite induction	- استقرای ترانسفینی
- of recursive definition	- تعریف بازگشتی
axiom	اصل موضوع
- of choice	- انتخاب
countability -	- شمارایی

decimal	اعشاری
partition	افراز
— of unity	— واحد
strict	اکید
adjunction	الحاق
induced	القایی، القا شده
accumulation, cluster	انباشتگی
choice	انتخاب
translation	انتقال
final	انجامی
index	اندیس
indexed	اندیسدار
indexing	اندیسگذار
reflexivity	انعکاسی
contraction	انقباض
contractible	انقباض پذیر
isometry	ایزومتري
isomorphism	ایزومورفیسم
infimum	اینفیموم
open	باز
recurrence	بازگشت
interval	بازه
lifting	بالا بر
into	بتوی
fixed point free	بدون نقطه ثابت
equality	برابری

tower	برج
vector	بردار
onto	بروی
greatest lower bound	بزرگترین کران پایین
multiple	بستا
closure	بستار
multiplicity	بستایی
closed	بسته
polynomial	بسجمله
expansion	بسط
expand	بسط دادن
manifold	بسلا
dimension	بعد
immediate	بلافصل
— successor	تالی —
— predecessor	سابق —
vacuously true	به انتهای مقدم راست
best approximation	بهترین تقریب
evenly	به‌طور هموار
trivial	بیما به
infinity	بینهایت
infinite - dimensional	بینهایت بعدی
base	پایه
basis	پایه
countable —	— شمارا
— element	عضو —

surjective	پوشا
cover	پوشش
covering	پوشش
k - fold -	k - لایی
winding	پیچش
paracompact	پیرافشرده
continuum	پیوستار
continuity	پیوستگی
continuous	پیوسته
functor	تابعگون
functorial	تابعگونی
- group	گروه -
functional	تابعی
transformation	تبدیل
transform	تبدیل کردن
degenerate	تبهگن
decomposition	تجزیه
restriction	تحدید
transfinite	ترانسفینی
logical identity	تساوی منطقی
image, projection	تصویر
counterimage, inverse image, preimage	تصویر عکس
stereographic projection	تصویر گنجنگاری
projective	تصویری
refinement	تظریف
transitivity	تعدی



difference of two sets	تفاضل دو مجموعه
subtraction	تفریق
separable	تفکیک پذیر
symmetry	تقارن
intersection	تقاطع
approximation	تقریب
approximate	تقریبی
one - point	نک نقطه
completion	تمام سازی
completely regular	تماماً منتظم
completeness	تمامیت
correspondence	تناظر
one - to - one —	— یک به یک ، — دوسویی
contradiction	تناقض
topology	توپولوژی
standard —	— استاندارد
box —	— جعبه ای
quotient —	— خارج قسمت
subspace —	— زیر فضا
compact - open —	— فشرده - باز
— space	— فضای —
point - open —	— نقطه - باز
— of compact convergence	— همگرایی فشرده
— of mean convergence	— همگرایی میانگین
pointwise convergence —	— همگرایی نقطه به نقطه
topological	توپولوژیک
nested	تودر تو
net	تور

distribution	توزیع
distributive	توزیع‌پذیر
distributivity	توزیع‌پذیری
extension	توسیع
refraction	تو کشنده
retract	تو کشیده
generate	تولید کردن
disjoint	جدا از هم
separation	جدا سازی
partial	جزئی
inclusion	جزئیت
proper —	— سره
addition	جمع
sum	جمع، مجموع
genral term	جمله عمومی
directed	جهت‌دار
J - tuple	[ نایی ]
left	چپ
dense	چگال
density	چگالی
torus	چنبره
preserving	حافظ
order —	— ترتیب

limit	حد
real	حقیقی
ring	حلقه
domain	حوزه تعریف
range	حوزه مقادیر
quotient	خارج قسمت
property	خاصیت
topological -	- توپولوژیک
family	خانواده
error	خطا
linear	خطی
well - ordered	خوشترتیب
- set	- مجموعه
well - ordering	خوشترتیبی
- property	- خاصیت
entry	درآیه
degree	درجه
coarse	درشت
shirinking	در هم کشیدن
recurrSION formula	دستور بازگشتی
cartesian	دکارتی
deformation	دگردیسی
strong -	- قوی
arbitrary	دلخواه
sequence	دنباله

<b>convergent —</b>	همگرا
<b>sequentially</b>	دنباله‌ای
<b>pairwise disjoint</b>	دو به دو از هم جدا
<b>binary</b>	دوتایی
<b>binomial</b>	دوجمله‌ای
<b>bilinear</b>	دوخطی
<b>bijjective</b>	دوسویی
<b>second</b>	دوم، دومین
<b>relation</b>	رابطه
<b>vertex</b>	رأس
<b>path</b>	راه
<b>conjugacy class</b>	رده ازدواج
<b>classification</b>	رده بندی
<b>surface</b>	رویه
<b>root</b>	ریشه
<b>chain</b>	زنجیر
<b>even</b>	زوج [تابع، عدد]
<b>pair</b>	زوج [دسته دو چیزی]
<b>order —</b>	— مرتب
<b>subnet</b>	زیرتور
<b>subbasis</b>	زیر پایه
<b>subsequence</b>	زیر دنباله
<b>subspace</b>	زیر فضا
<b>subset proper</b>	زیر مجموعه سره

simple	ساده
eventually zero	سرانجام صفر
proper	سره
punctured	سفته
- plane	صفحه -
deleted	سفته
- comb space	فضای شانه‌ای -
supremum	سوپرموم
quantifier	سور
universal -	- عمومی
logical -	- منطقی
existential -	- وجودی
quasicomponent	شبه مؤلفه
ray	شعاع
figure eight	شکل 8
countable	شمارا
- intersection condition	شرط مقطع -
plane	صفحه
doubly punctured -	- دوبار سفته
sorgenfrey -	- سورجنفری
complex -	- مختلط
formal	صوری
coefficient	ضریب
multinomial -	- بسجمله‌ای ، - چند جمله‌ای

binomial –	– دو جمله‌ای
side	ضلع
fine	ظریف
formal expression	عبارت صوری
cardinality, cardinal number	عدد اصلی
lens	عدسی
– space	– فضای
deck	عرشه
element	عضو
– basis –	– پایه
converse	عکس
reciprocal	عکس [عدد]
contrapositive	عکس تقيض
sign, notation	علامت
action, operation	عمل
universal	عمومی
– covering space	– فضای پوششی
general	عمومی
– linear group $GL(n)$	– گروه خطی $GL(n)$
inessential	غیر اساسی
distance	فاصله
odd	فرد
hypothesis, assumption	فرض
compactness	فشردگی

local -	- موضعی
limit point -	- نقطه حدی
compact	فشرده
countably -	- شمارشی
Compactification	فشرده شده، فشرده سازی
one point -	- تک نقطه‌ای
space	فضا
slice	قاج
dictionary	قاموس
- order relation	رابطه ترتیب - ی
diameter	قطر
section	قطعه
piecewise	قطعه به قطعه
linear function -	- تابع خطی -
bound	کران
bounded	کراندار
- above	از بالا -
- below	از پایین -
- totally	کلا
boundedness	کرانداری
total -	- کلی
pointwise -	- نقطه به نقطه
uniformly -	- یکنواخت
boundary	کرانه

sphere	کره
– unit	– واحد
arc	کمان
loop	کمند
stereographic	گنجنگاری
least upper bound	کوچکترین کران بالا
graph	گراف
linear –	– خطی
complete – on four vertices	– کامل چهار رأسی
collection	گردایه
proposition, statement	گزاره
proposition function	گزاره نما
extended	گسترده، گسترش یافته
extension	گسترش
universal –	– عمومی
discrete	گسسته
– topology	– توپولوژی
group	گروه
fundamental –	– بنیادی
general linear –	– خطی عمومی
groupoid	گروهوار
irrational	گنگ
rational	گویا
pasting lemma	لم چسب



maximal	ماکزیمال
maximum	ماکزیموم
metric	متری
— space	فضای —
metrizable	متری پذیر
metrization	متریسازی
metric	متریک
— square —	— مربعی
— uniform —	— یکنواخت
transcendental	متعالی
transitive	متعدی
variable	متغیر
complement	متمم
finite	متناهی
positive	مثبت
power set	مجموعه توانی
star convex	محدب ستاره‌ای
support	محمل
coordinate	مختص
complex	مختلط
ordered	مرتب
order	مرتب کردن، مرتبه
conjugate	مزدوج
independent	مستقل
double	مضاعف
multiple	مضرب

absolute	مطلق
logical equivalence	معادل منطقی
inverse	معکوس، وارون
comparability	مقایسه پذیر
intersection	مقطع
category	مقوله
regular	منتظم
simple closed curve	منحنی بسته ساده
component	مؤلفه
path —	— راهی
connected —	— همبند
locally	موضعیاً
local	موضعی
imaginary	موهومی
intermediate	میانی
ordered field	میدان مرتب
uncountable	ناشمارا
indiscrete	ناگسته
infinite	نامتناهی
inequality	نامساوی
nonreflexive	نامنعکس
invariance	ناوردایی
disconnected	ناهمبند
norm	نرم
normal	نرمال
normality	نرمال بودن

<b>imbed</b>	نشان‌دن
<b>point</b>	نقطه
<b>initial -</b>	- آغازی
<b>accumulation -, cluster -</b>	- انباشتگی
<b>final -</b>	- انجامی
<b>base -</b>	- پایه
<b>limit -</b>	- حدی
<b>antipodal -</b>	- متقاطع
<b>finite -</b>	- منتهی
<b>pointwise</b>	نقطه به نقطه
<b>mapping</b>	نگاشت
<b>half - open</b>	نیم باز
<b>half - closed</b>	نیم بسته
<b>semicontinuity</b>	نیم پیوستگی
<b>semilocally</b>	نیم موضعی
<b>unit</b>	واحد
<b>inverse</b>	وارون
<b>reverse</b>	وارونه
<b>divergent</b>	واگرا
<b>general position</b>	وضع عمومی
<b>equivalence</b>	هم‌ارزی
<b>identification</b>	همانسازی
<b>identity</b>	همانی
<b>simplicial 2 - complex</b>	همبافت ۲ بعدی
<b>connected</b>	همبند

<b>- im kleinen</b>	خردجا -
<b>path -</b>	راهی -
<b>simply -</b>	ساده -
<b>local -</b>	موضعی -
<b>connectedness</b>	همبندی
<b>confinal</b>	همپایان
<b>equicontinuous</b>	همپیوسته
<b>coset</b>	همرده
<b>neighborhood</b>	همسایگی
<b>convergent</b>	همگرا
<b>convergence</b>	همگرایی
<b>homogeneous</b>	همگن
<b>geometrically</b>	هندسی
<b>homotopic</b>	هموتوپ
<b>path -</b>	راهی -
<b>homotopy</b>	هموتوپی
<b>coherent</b>	هموسته
<b>homomorphism</b>	همومورفیسم
<b>homeomorphism</b>	هومئومورفیسم
<b>nowhere - differentiable</b>	هیچ‌جا مشتق‌پذیر
<b>one - to - one, injective</b>	یک به یک
<b>uniform</b>	یکنواخت

## فهرست راهنما

<p>– و تمام بودن توپولوژیک ۳۵۴</p> <p>– و قضیه مقوله بئر ۳۸۸</p> <p>– و مجموعه <math>G_3</math> ۳۲۸</p> <p>اعداد گویا ۴۲</p> <p>اعضای يك مجموعه ۸</p> <p>افراز</p> <p>– واحد ۲۹۴، ۲۹۱</p> <p>– يك مجموعه ۳۱</p> <p>اگر ... آنگاه ۱۱</p> <p>انتقال <math>R^N</math> ۴۰۵</p> <p>انقباض ۳۵۳، ۲۳۶</p> <p>انقباض پذیری ۴۸۵، ۴۲۷</p> <p>– و همبندی ساده ۴۷۰</p> <p>اولین اصل شمارایی ۲۴۸، ۱۶۶</p> <p>– و حاصل ضرب ۲۴۹</p> <p>– و زیرفضا ۲۴۹</p> <p>– و فضای متری ۱۶۶</p> <p>– و نتیجه دادن کافی بودن همگرایی</p> <p>دنباله‌ها ۲۴۸</p> <p>– و <math>R_1</math> ۲۵۰</p>	<p>آزمون <math>M</math> و ایرشترانس ۲۸۰، ۱۷۳</p> <p>ابر مجموعه ۳۰۳</p> <p>اجتماع ۵۰، ۱۷، ۹</p> <p>استقرای ترانسفینی ۸۸</p> <p>اصل استقرا ۴۲</p> <p>اصل استقرای ترانسفینی ۸۸</p> <p>اصل تعریف بازگشتی ۷۲، ۶۴</p> <p>– ترانسفینی ۸۹</p> <p>اصل <math>T_1</math> ۱۲۸</p> <p>اصل ماکزیموم ۹۰</p> <p>اثبات – ۹۶</p> <p>اثبات شهودی – ۹۱</p> <p>کاربرد – ۳۰۷، ۳۰۳</p> <p>اصل موضوع انتخاب ۷۷</p> <p>عبارات معادل – ۹۶، ۸۱</p> <p>– متناهی ۷۹</p> <p>اعداد صحیح ۴۲</p> <p>اعداد صحیح مثبت ۴۲</p> <p>اعداد گنگ</p>
---	--

- ۲۵۳  $S_0$  -  
 اولین گروه هموتوبی ۲۲۸  
 ایزومتری ۲۳۶  
 ایزومورفیسم ۱۳۶
- بازه  
 باز ۱۱۰، ۳۳ -  
 بسته ۱۱۰ -  
 نیم باز ۱۱۰ -  
 بالا بزرگ نگاشت ۲۲۵  
 بازه‌های  $R$
- بعد توپولوژیک ۳۹۸ -  
 فردگی ۲۲۵ -  
 همبندی ۱۹۸ -  
 برج ۹۶  
 بزرگترین عضو یک مجموعه مرتب ۳۵  
 بزرگترین کران پایین ۳۶  
 بدون نقطه ثابت ۴۶۶  
 بستار ۹۴
- ۲۱۳، ۲۱۱، ۲۰۱ - بعد توپولوژیک  
 لزوم شرط هاوسدورف برای - ۲۹۵  
 متری پذیری - ۲۹۲  
 - ی قابل نشانیدن در  $R^N$  ۲۹۳  
 - ی قابل نشانیدن در  $R^{2m+1}$  ۲۱۳، ۲۱۱  
 بعد توپولوژیک ۳۹۶
- اجتماع ۲۱۲، ۳۹۸ -  
 بسلا ۲۱۳، ۲۱۱ -  
 بسلا ۲ بعدی ۲۰۲ -  
 در یک فضای متری ۳۹۸ -  
 زیرفضا ۳۹۶ -  
 گراف خطی ۳۹۹ -  
 ناحیه مثلثی ۲۶۹، ۲۰۱ -  
 همبافت ۲ بعدی ۲۰۱ -  
 یک مجموعه در  $R^2$  ۳۹۹ -  
 یک مجموعه در  $R^N$  ۲۱۳، ۲۰۹  
 -  $[a, b]$  ۳۹۸  
 بعد لیگ ۳۹۵  
 بعد متناهی ۳۹۶
- پارادوکس  
 - آرایشگر شهر سویل ۶۴  
 - راسل ۸۱  
 پایایی حوزه ۵۰۳، ۲۹۱  
 پایه  
 - توپولوژیکی ۱۰۶، ۱۰۲  
 - شمارا ۲۴۸
- اجتماع ۳۲۱، ۱۳۰ -  
 اعضای پایه ۱۲۴ -  
 تورها ۲۴۴ -  
 حاصل ضرب دکارتی ۱۵۰، ۱۳۰ -  
 دنباله‌ها ۲۴۸، ۱۶۵ -  
 مجموعه همبند ۱۹۲ -  
 و نقاط حدی ۱۲۶ -  
 بسلا ۲۹۲

- شمارا دريك نقطه ۱۶۶، ۲۲۸
- پوشاندن هموار ۲۳۴
- پوشش ۲۱۲، ۲۱۳
- باز ۲۱۲
- $k$  لایه ۴۴۰
- پیرافشردگی ۳۳۳
- $R$  ۳۳۳
- $R_L$  ۳۳۵، ۳۳۹
- $S_D$  ۳۳۹، ۳۴۲
- حاصل ضرب ۳۳۵، ۳۳۹
- خط طویل ۳۳۹
- زیر فضا ۳۳۵
- فضای فشردۀ هاوسدورف ۳۳۳
- فضای منتظم لیند洛夫 ۳۳۹
- فضای نرمال ۳۳۴
- و افراز واحد ۲۹۵
- و متری پذیری ۳۳۵، ۳۴۰
- پیرا فشردۀ بسلا ۳۴۲
- پیوستار خطی ۴۱، ۱۹۷
- و مجموعه‌های فشردۀ ۲۲۴
- و مجموعه‌های همبند ۱۹۷
- پیوستگی ۱۳۲
- و اعضای پایه ۱۳۳
- و اعضای زیر پایه ۱۳۳
- بر حسب مجموعه‌های بسته ۱۳۴
- بر حسب بستار ۱۳۴
- تابع احتوا ۱۳۸
- تابع ثابت ۱۳۸
- تابع ریشه  $m$  ۱۴۳
- تابع مرکب ۱۳۸
- جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم ۱۶۷
- عملیات جبری در  $R$  ۱۶۷، ۱۷۲
- نسبت به هر يك از متغیرها ۱۴۵
- نقطه‌ای ۱۳۹
- نگاشتهای بتوی فضای حاصل ضرب ۱۴۱، ۱۴۹
- نگاشتهای روی فضاهاى خارج قسمتی ۱۸۰
- و بیان موضعی ۱۳۹
- و  $\delta$ - $\epsilon$  ۱۶۴
- و  $f \times g$  ۱۲۵
- و تحدید حوزه تعریف ۱۳۸
- و تحدید حوزه مقادیر ۱۳۹
- و تورها ۲۴۴
- و دنباله‌ها ۱۶۶، ۲۲۸
- و قضیه حد یکنواخت ۱۶۷
- و متریک ۱۶۱
- تابع ۲۲
- انتخاب ۷۷
- اندیسگذار ۵۰
- پوشا ۲۶
- پیوسته ۱۳۲
- خطی قطعه به قطعه ۳۹۲

- دو سویی ۲۶  
 - مرکب ۲۵  
 - معکوس ۲۶  
 - همانی ۲۸  
 - هیچ جا مشتق پذیر ۳۸۹  
 - يك به يك ۲۶  
 تابع ریشه ۲۲  
 پیوستگی - ۱۲۳  
 وجود - ۲۰۴  
 تالی بلا فصل ۳۳  
 تبدیل  
 پوشی ۵۱۶  
 عرشه ای ۵۱۶  
 تحدید  
 تابع ۲۳  
 رابطه ۳۶  
 ترتیب  
 ارشمیدسی ۲۳  
 خطی ۳۲  
 ساده ۳۲  
 ترتیب جزئی ۹۳  
 اصول موضوع - ۲۴۲، ۹۳  
 اکید ۸۹  
 ترکیب  
 توابع پیوسته ۱۳۸  
 راهها ۴۲۱  
 نگاشتهای پوشی ۴۴۰  
 - نگاشتهای خارج قسمتی ۱۷۹  
 تسرملو ۸۵  
 تصویر ۲۳، ۲۲  
 تصویر پیوسته  
 فضای فشرده ۲۱۵  
 فضای همبند ۱۹۳  
 تصویر عکس ۲۴  
 تصویر گنجنگاری ۲۷۸، ۲۵۷  
 نظریف  
 باز ۳۲۸  
 بسته ۳۲۸  
 يك گردابه ۳۲۸، ۲۹۵  
 تعداد اعضای يك مجموعه ۵۳  
 یکتایی - ۵۶  
 تعریف باز گشتی ۶۴  
 اصل - ۷۲، ۶۴  
 ترانسفینی ۸۹  
 تفاضل دو مجموعه ۱۴  
 تفکیک پذیر ۲۵۰  
 تقاطع دو مجموعه ۱۲۴  
 تمام ساز ۳۵۲  
 یکتایی - ۳۵۵  
 تمامیت  
 زیر فضای باز ۳۵۳  
 -  $(Y, X)$  درمتری یکنواخت ۳۴۹  
 فضای  $R^n$  ۳۲۶  
 فضای  $R^m$  ۳۴۷



- فضای حاصل ضرب ۳۵۲
- فضای متری سوپر موم ۳۵۰
- فضای متری یکنواخت ۳۲۸
- متری ۱۲ ۳۵۲
- مجموعه اعداد گنگ ۳۵۲
- مجموعه G ۳۵۲
- و فشردگی ۳۵۹
- و فضای بثر ۳۸۵
- توابع مختصی ۱۴۱
- توپولوژی ۱۰۰
- اکیداً درشتتر ۱۰۲
- اکیداً ظریفتر ۱۰۲
- بزرگتر ۱۰۲
- پیمایه ۱۰۱
- تولید شده به وسیله پایه ۱۰۵، ۱۰۳
- تولید شده به وسیله زیر پایه ۱۰۸
- حد پایینی ۱۰۷
- درشتتر ۱۰۲
- ضعیفتر ۱۰۲
- قویتر ۱۰۲
- کوچکتر ۱۰۲
- گسته ۱۰۱
- متمم منتهای ۱۰۱
- همگرایی در میانگین ۳۷۲
- هموسته ۲۸۳
- توپولوژی ترتیبی ۱۱۱
- و زیر پایه ۱۱۹
- و زیر فضا ۱۱۸
- و شرط هاوسدورف ۱۲۸
- و فشردگی ۲۲۴، ۲۲۸
- و منتظم بودن ۲۶۸
- و نرمال بودن ۲۶۰
- همگرایی نقطه به نقطه ۳۶۶
- توپولوژی جبهه‌ای ۱۴۶
- پایه - ۱۴۷
- خاصیت فشردگی - ۲۳۵
- زیر فضای - ۱۴۸
- و توپولوژی حاصل ضرب ۱۴۷
- و شرط هاوسدورف ۱۴۸
- توپولوژی خارج قسمتی ۱۷۵
- زیر فضای - ۱۷۹
- و توپولوژی حاصل ضرب ۱۷۹، ۱۸۲
- ۳۷۹، ۲۴۲
- و شرط هاوسدورف ۱۸۱، ۱۸۰
- و فضای نرمال ۲۶۹
- توپولوژی زیر فضایی ۱۱۶
- پایه برای - ۱۱۶
- و اصل اول شمارایی ۲۴۹
- و اصل دوم شمارایی ۲۴۹
- و پیرافشردگی ۳۳۵
- و تماماً منتظم بودن ۳۰۸
- و توپولوژی جبهه‌ای ۱۴۷
- و توپولوژی حاصل ضرب ۱۱۸، ۱۲۷
- و توپولوژی مرتب ۱۱۸

- و زیر مجموعه چگال و شمارا ۲۵۲
- و شرط لیند洛夫 ۲۸۸، ۲۵۳
- و شرط هاوسدورف ۲۵۶، ۱۲۸
- و فشردگی ۲۱۳
- و فضای خارج قسمتی ۱۷۹
- و فضای متری ۱۶۴
- و منتظم بودن ۲۵۷
- و نرمال بودن ۲۵۷
- و همبندی ۱۹۰
- توپولوژی ظریفتر ۱۰۲
- معیار برای - ۱۰۵
- توپولوژی ظریف روی  $(X, Y)$  ۳۷۳
- و بشر بودن ۳۸۹
- توپولوژی فشرده - باز ۳۷۹، ۳۷۴
- و پیوستگی نگاشت ارزش ۳۷۶
- و توپولوژی همگرایی فشرده ۳۷۴
- و شرط هاوسدورف ۳۷۸
- و منتظم بودن ۳۷۸
- توپولوژی نقطه - باز ۳۶۶
- دنباله‌های همگرا در - ۳۶۷
- و توپولوژی فشرده - باز ۳۷۴
- و توپولوژی همگرایی فشرده ۳۷۰، ۳۸۰
- توپولوژی همگرایی فشرده ۳۶۹
- دنباله‌های همگرا در - ۳۷۰
- و اولین اصل موضوع شمارایی ۳۶۹
- و توپولوژی فشرده - باز ۳۷۴
- و عدم وابستگی بد متری ۳۷۵
- و منتظم بودن ۳۷۱
- و همگرایی نقطه به نقطه ۳۸۰، ۳۶۹
- توپولوژی یکنواخت ۳۲۸، ۱۵۸
- و توپولوژی حاصل ضربی ۱۵۸
- و خاصیت فشردگی ۳۶۵، ۳۶۳، ۲۳۵
- و عدم وابستگی به متری ۳۷۸
- و همگرایی فشرده ۳۷۰
- و همگرایی نقطه به نقطه ۳۷۰
- تور ۲۴۲
- توزیع پذیری اجتماع و مقطع ۱۵
- توکننده ۴۳۳
- $R^3$  به محور گره خورده  $x$  ها ۲۹۰
- دگردیسی ۴۸۵
- دگردیسی قوی ۴۵۱
- گروه بنیادی ۲۵۲
- توکشیده ۴۵۱، ۲۸۲
- مطلق با خاصیت گسترش همسایه‌ای
- عمومی ۲۹۰
- همسایه‌ای ۲۹۰
- همسایه‌ای مطلق ۲۹۰
- توکشیده دگردیسی قوی ۴۵۱
- $R^{n-1}$  بتوی  $S^{n-1}$  ۴۵۱
- $R^2 - p - q$  بتوی  $\theta$  و  $\delta$  ۲۵۳، ۲۵۲
- و هم ارزی هموتوبی ۲۸۵
- تولید شده به طور فشرده ۳۶۹

- جاروب نامتناهی ۲۱۱  
 جداسازی ۱۹۵  
 جداسازی به وسیلهٔ تابع پیوسته  
 - مجموعه‌های بسته ۲۷۵  
 - نقاط از مجموعه‌های بسته ۲۸۸  
 چنبره ۴۳۶  
 گروه بنیادی - ۴۶۰  
 میدان برداری روی - ۲۷۷  
 - و پوشش به وسیلهٔ  $R \times R$  ۲۳۷  
 چنبرهٔ مضاعف ۴۶۴  
 حاصل ضرب دکارتی  
 - دلخواه ۴۸  
 - دو مجموعه ۱۸  
 حاصل ضرب نگاشتهای  
 - باز ۱۷۹  
 - پوششی ۲۴۰  
 - پیوسته ۱۴۵  
 - خارج قسمت ۳۷۹، ۲۴۲، ۱۸۲، ۱۷۹  
 حافظ ترتیب ۳۳  
 حوزهٔ مقادیر يك تابع ۲۲  
 خاصیت  
 - بزرگترین کران پایین ۳۶  
 - بولتزانو - وایر شتراس ۲۳۰  
 - توپولوژیک ۱۳۶  
 خاصیت کوچکترین کران بالا ۳۶  
 - برای  $R$  ۴۰  
 - برای مجموعه‌های خوشترتیب ۸۷  
 - و خاصیت بزرگترین کران پایین ۳۸  
 خاصیت گسترش عمومی ۲۸۳  
 - و تو کشیدهٔ مطلق ۲۸۹  
 خاصیت گسترش همسایه‌ای عمومی ۲۹۰  
 خانوادهٔ اندیسدار مجموعه‌ها ۵۰  
 خانوادهٔ اندیسدار موضعاً متناهی ۱۲۴، ۲۹۲  
 - با گردایهٔ موضعاً متناهی ۳۲۱  
 خانوادهٔ اندیسدار نقطه متناهی ۲۹۴  
 خط طویل ۲۰۵  
 - و پیرافشردگی ۳۳۹  
 خواص گروه‌هوارى ۴۲۲  
 دارای  $n$  عضو ۵۳  
 در بینهایت صفر می‌شود ۳۶۵  
 درجهٔ نگاشت ۴۸۶  
 درون تهی ۳۸۴  
 درون مجموعه ۱۲۳  
 دستور بازگشتی ۶۲، ۷۲  
 دنبالهٔ تودرتویی از مجموعه‌ها ۲۲۰  
 دنبالهٔ کوشی ۳۴۵  
 دنبالهٔ نامتناهی ۴۹  
 دنباله‌ها ۴۹  
 جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم - ۱۷۱  
 - در قضای حاصل ضرب ۱۵۱

- هم ارزی ۳۰
- هموتوبی راهی ۴۱۹
- رده بندی فضاهای پوششی ۵۰۳، ۵۰۸، ۵۰۹
- رویه ۲۹۲
- زوج مرتب ۱۸
- زیر پایه برای يك توپولوژی ۱۰۸
- زیر تور ۲۴۴
- زیر دنباله ۲۳۲
- زیر گروه مزدوج ۵۰۳
- زیر مجموعه ۸
- چگال ۲۴۶
- سره ۸
- زیر مجموعه شمارا و چگال ۲۴۹
- در  $I^1$  ۲۵۴
- در  $I^2$  ۲۵۴
- در  $(I, R)$  ۲۵۴
- در زیر فضا ۲۵۲
- در فضای حاصل ضرب ۲۵۴
- و دومین اصل شمارایی ۲۵۰
- سابق بلا فصل ۳۳
- ساختار یکنواخت ۳۸۳
- سرانجام صفر ۶۸
- سری نامتناهی ۱۷۲
- سورهای منطقی ۱۴
- و بستار ۱۶۵، ۲۴۸
- و پیوستگی ۱۶۶، ۲۴۸
- و فشردگی ۲۳۲، ۲۳۴
- دنباله همگرا ۱۵۰، ۱۶۵
- دومین اصل شمارایی ۲۴۸
- و  $R^n$  ۲۴۸
- و  $R^\omega$  ۲۴۸
- و حاصل ضرب ۲۴۹
- و زیر فضا ۲۴۹
- و زیر مجموعه چگال شمارا ۲۴۹، ۲۵۴
- و شرط لیند洛夫 ۲۵۰، ۲۵۴
- و فضای متریک فشرده ۱۹۴
- و فضای متریک همبند موضعاً فشرده ۳۴۲
- رأسهای يك گراف خطی ۳۹۹
- رابطه ۲۸
- ترتیب ۳۲
- ترتیب جزئی اکید ۸۹
- ترتیب قاموسی ۳۴
- هم ارزی ۲۹
- راست به انتقای مقدم ۱۲
- راه ۲۰۰
- ثابت ۴۲۲
- رده
- ازدواج ۵۰۳

جبری ۶۷ -	شرط منتظم بودن ۲۵۵
صحیح زوج ۴۸ -	برای $188G/H$ -
صحیح فرد ۴۸ -	برای حاصل ضرب ۲۵۷ -
لیگک ۲۳۲ -	برای زیرفضا ۲۵۷ -
متعالی ۶۷ -	و شرط هاوسدورف ۲۵۵، ۲۶۱ -
مثبت ۴۱ -	و فضای تماماً منتظم ۳۱۱ -
منفی ۴۱ -	و گروههای توپولوژیک ۱۸۷ -
عدد اصلی	و متری پذیری ۲۸۲، ۳۲۵ -
بزرگتر ۸۱ -	و نرمال بودن ۲۵۵، ۲۶۲، ۲۶۷ -
قیاسی برای دو مجموعه ۸۹ -	شرط ناگاتا - اسمیرنوف ۳۲۵
یکسان ۶۸ -	شرط هاوسدورف ۱۲۷
عدد پیچش ۴۵۴	شعاعها در مجموعه مرتب ۱۱۲
به صورت يك انتگرال ۴۵۴ -	شعاعهای باز ۱۱۲
منحنی بسته ساده ۵۰۲ -	شعاعهای بسته ۱۱۲
عکس ۱۳	
تقیض ۱۲ -	صفحه
هموتوپی ۴۸۳ -	در $R^N$ ۴۰۵ -
عمل	دوبار سفته ۲۵۲ -
تفریق ۴۱ -	سفته ۲۲۰ -
جمع ۴۰ -	سورجنفری ۲۵۱ -
خارج قسمت ۴۱ -	$k$ بعدی ۴۰۵ -
دوتایی ۳۹ -	صفحة تصویری $p^2$ ۲۶۰
ضرب ۴۰ -	سطح در - ۴۶۱
يك گروه روی يك فضا ۲۶۵ -	گروه بنیادی - ۲۶۱

صفر ۲۰

فاصله ۱۵۲

فرض ۱۲

عدد

- فرض پیوستار ۸۱  
 فرض تعمیم یافته پیوستار ۸۱  
 فشردگی ۲۱۲  
 بازه بسته ۲۲۵  
 تصویر پیوسته ۲۱۵  
 حاصل ضرب ۳۰۲  
 حاصل ضرب شمارا ۳۶۴  
 حاصل ضرب هر تعداد متناهی ۲۱۶  
 در  $R$  ۲۲۵  
 در  $R^n$  ۲۲۵  
 در  $\mathcal{C}_f$  ۲۱۵  
 در توپولوژی ترتیبی ۲۲۴  
 در توپولوژی یکنواخت ۲۳۵  
 در زیرفضا ۲۱۳  
 در  $\mathcal{C}(X, Y)$  ۳۷۹  
 در  $\mathcal{C}(X, R^n)$  ۳۶۵، ۳۶۳  
 ضابطه مجموعه‌های بسته برای - ۲۲۰  
 و تورها ۲۴۴  
 و دنباله‌ها ۲۳۴  
 و فشردگی بر حسب نقطه حدی ۲۳۰، ۲۳۴  
 و فضای تمام ۳۶۰  
 و فضای هاوسدورف ۳۶۶  
 فشردگی دنباله‌ای ۲۳۲  
 و فشردگی ۲۵۴، ۲۳۴  
 فشردگی فرشه‌ای ۲۳۰  
 فشردگی موضعی ۲۳۷
- $R^n$  و  $R^m$  ۲۳۷  
 حاصل ضرب ۲۴۱  
 فشرده بر حسب نقطه حدی  
 و حاصل ضرب ۲۳۶  
 و فشردگی ۲۳۰، ۲۳۴، ۲۵۴  
 و فشردگی شمارشی ۲۳۵  
 فشردگی شمارشی ۲۳۵، ۲۵۴  
 فشردگی سازی ۳۱۲  
 القا شده به وسیله نشاننده ۳۱۲  
 تک نقطه ۲۳۸  
 (۱، ۰) ۳۱۳  
 فشردگی سازی استون - چخ ۳۱۵  
 $S_n$  ۳۱۸  
 $Z_+$  ۳۱۸  
 و متری پذیری ۳۱۷  
 و همبندی ۳۱۸  
 و یکتایی ۳۱۶  
 فشردگی سازی تک نقطه‌ای ۲۳۸  
 فضای اقلیدسی ۵۰  
 سفته ۲۰۱  
 فضای الحاقی ۲۹۰  
 فضای بئر ۳۸۴  
 $R^J$  ۳۸۹  
 و اعداد گنگ ۳۸۷  
 و توپولوژی ظریف ۳۸۹  
 و فضای متری تمام ۳۸۵  
 و فضای هاوسدورف فشردگی ۳۸۵

- فضای هاوسدورف موضعاً فشرده ۳۸۸
- فضای به شکل  $485, 2528$
- گروه بنیادی - ۴۶۲
- و مجموعه  $G$  ۳۸۸
- فضای پتانو ۳۵۹
- فضای پوششی ۴۳۲
- رده بندی - ۵۰۹
- $k$  لایی ۲۴۰
- گروه های توپولوژیک ۴۴۸
- وجود - ۵۱۰
- و منتظم بودن ۵۱۶
- و هم ارزی ۵۰۴
- فضای پوششی عمومی ۴۴۶
- وجود - ۵۱۵
- یکتایی - ۵۱۵، ۴۴۶
- فضای پیرافشرده ۳۳۳، ۲۹۵
- فضای تا  $485, 252$
- و جداسازی  $S^2$  ۵۰۱
- فضای تجزیه ۱۷۷
- فضای تصویری  $n$  بعدی ۴۶۲
- فضای تماماً منتظم ۳۰۸، ۲۷۶
- و  $R^\omega$  ۳۱۰
- و حاصل ضرب ۳۰۸
- و زیرفضا ۳۰۸
- و شرط هاوسدورف و فشردگی
- موضعی ۳۱۰
- و گروه های توپولوژیک ۳۱۰
- و منتظم بودن ۳۱۱
- و نرمال بودن ۳۰۹
- فضای تماماً نرمال ۲۶۸
- فضای تمام توپولوژیکی ۳۵۳
- فضای توپولوژیک ۱۰۰
- فضای حاصل ضرب ۱۱۳، ۱۲۶
- برابری با توپولوژی نقطه - باز ۳۶۶
- بستار در - ۱۳۰، ۱۵۰
- گروه بنیادی - ۲۵۹
- فضاهای پیرافشرده ۳۳۹، ۳۳۵
- فضاهای تماماً منتظم ۳۰۸
- فضاهای شمارای نوع اول ۲۴۹
- فضاهای شمارای نوع دوم ۲۴۹
- فضاهای فشرده بر حسب نقطه حدی ۲۳۶
- فضاهای لیند洛夫 ۲۵۱، ۲۵۲، ۳۰۷
- فضاهای موضعاً فشرده ۲۴۱
- فضاهای نرمال ۲۶۲، ۲۶۵، ۲۵۷
- فضای منتظم ۲۵۷
- و پایه ۱۱۴، ۱۴۷
- و توپولوژی جمعیه ای ۱۴۷
- و توپولوژی خارج قسمت ۱۷۹، ۱۸۲
- ۳۷۹، ۲۴۲
- و توپولوژی یکنواخت  $R^1$  ۱۵۸
- و دنباله های همگرا ۱۵۰، ۳۶۸
- و زیرپایه ۱۱۵، ۱۴۷
- و زیرفضا ۱۱۸، ۱۴۸
- و زیر مجموعه چگال شمارا ۲۵۲

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| ۲۶۳، ۱۳۰ - و بسته بودن قطر       | ۲۵۷، ۱۲۸، ۱۲۹ - و شرط ها و سدورف |
| ۱۲۸ - و توپولوژی ترتیبی          | ۳۶۴، ۳۰۲، ۲۱۶ - و فشردگی         |
| ۱۴۸ - و توپولوژی جمعی            | ۱۷۰، ۱۶۹ - و متری پذیری          |
| ۱۴۹، ۱۲۹ - و توپولوژی حاصل ضربی  | ۱۹۳ - و همبندی                   |
| ۲۵۷                              | فضای خارج قسمتی ۱۷۵              |
| ۲۵۶، ۱۲۹ - و زیر فضا             | فضای دومین اصل شمارایی ۲۲۸       |
| ۱۸۱، ۱۸۰ - و فضای خارج قسمتی     | فضای شانه‌ای ۲۰۲                 |
| ۱۶۴ - و فضای متری                | فضای شانه‌ای سفته ۲۰۲            |
| ۱۸۶ - و گروه‌های توپولوژیک       | مؤلفه‌های - ۲۰۸                  |
| ۲۶۱، ۲۵۵ - و منتظم بودن          | همبندی - ۲۰۲                     |
| فضای هاوسدورف فشرد               | همبندی موضعی - ۲۰۸               |
| شبه مؤلفه‌های - ۳۰۷              | فضای عدسی ۴۶۶                    |
| مؤلفه‌های - ۳۰۷                  | فضای فشرد ۲۱۲                    |
| ۳۸۵ - و بشر بودن                 | فضای فشرد بر حسب نقطه حدی ۲۳۰    |
| ۳۸۷ $G_8$ - و بشر بودن در مجموعه | فضای لیند洛夫 ۲۵۰                  |
| ۳۳۳ - و پیرافشردگی               | فضای متری تمام ۳۲۵               |
| ۲۸۸ - و متری پذیری               | فضای مداری ۴۶۵                   |
| ۲۵۸ - و نرمال بودن               | گروه اساسی - ۴۶۵                 |
| فضای هاوسدورف موضعاً فشرد        | فضای منتظم ۲۵۵                   |
| ۳۸۸ - و بشر بودن                 | فضای منتظم لیند洛夫                |
| ۳۳۸ - و فشرد شدگی تک نقطه        | - و پیرافشردگی ۳۳۹               |
| ۳۰۹ - و فضای تماماً منتظم        | - و متری پذیری ۲۸۸               |
| ۲۶۸ - و منتظم بودن               | - و نرمال بودن ۲۶۸               |
| ۴۱۳ $R^N$ - و نشانیدن در         | فضای نرمال ۲۵۵                   |
| فضای همانسازی ۱۷۷                | فضای هاوسدورف ۱۲۷                |
| فضای همبند ۱۹۰                   | - با اصل $T_1$ ۱۲۹، ۱۲۸          |
| فضای همبند ساده ۴۳۰              | - برای بسلا ۲۹۵                  |



- |                                     |                                 |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| ۲۲۸ $R^n$ -                         | - و دومین اصل شمارایی ۲۲۸       |
| ۴۵۸ $R^n - 0$ -                     | - و فشردگی موضعی ۲۳۷            |
| ۴۵۹، ۲۵۵ $S^2$ -                    | - و همبندی ساده ۲۲۸             |
| ۲۵۸ $S^n$ -                         | - و همبندی موضعی راهی ۲۰۹       |
| ۲۲۸ $B^n$ -                         | فضای $R^n - 0$                  |
| - و انقباض پذیری ۲۷۰                | - گروه بنیادی ۴۵۰               |
| فضای همگن ۱۸۷                       | - همبندی راهی ۲۵۸، ۲۰۱          |
| فضای متری ۱۵۴                       | فضای $R^l$ در توپولوژی جعبه‌ای  |
| - $153 R$                           | - بشر بودن ۳۸۹                  |
| - $156 R^n$                         | - و گروه‌های توپولوژیکی ۱۸۶     |
| - $R^l$ با متریک یکنواخت ۱۵۸        | فضای $R^m$ در توپولوژی جعبه‌ای  |
| - $163 I^2$                         | مؤلفه‌های - ۲۱۰                 |
| - $Y^l$ با متریک یکنواخت ۳۲۸        | - و پیرافشردگی ۲۶۸              |
| - تمام ۳۲۵                          | - و تماماً منتظم بودن ۳۰۹       |
| - و پیرافشردگی ۳۳۴                  | - و متری پذیری ۱۶۸              |
| - و زیر فضا ۱۶۴                     | - و نرمال بودن ۲۶۸              |
| - و شرط هاوسدورف ۱۶۴                | - و همبندی ۱۹۶                  |
| - و نرمال بودن ۲۵۸                  | فضای $R^l$ در توپولوژی حاصل ضرب |
| فضای $R^2$ و توپولوژی استاندارد ۱۱۴ | - بشر بودن ۳۸۹                  |
| فضای $R^2 - 0$ ۲۲۰                  | - و گروه‌های توپولوژیکی ۱۸۶     |
| گروه بنیادی - ۲۲۹                   | - و متری پذیری ۱۶۹              |
| - و پوشش با $R \times R_+$ ۲۳۸      | - و نرمال بودن ۲۶۷              |
| فضای $R^n$ ۵۰                       | فضای $R^m$ در توپولوژی حاصل ضرب |
| پایه برای - ۱۲۹                     | - و تمام بودن ۳۲۷               |
| زیر مجموعه‌های فشرد - ۲۲۵           | - و دومین اصل شمارایی ۲۲۸       |
| متریک برای - ۱۵۶                    | - و فشردگی موضعی ۲۳۷            |
| - و تمام بودن ۳۲۶                   | - و متری پذیری ۱۵۹              |

- قاج
- و همبندی موضعی راهی ۲۰۹
  - فضای  $R^l$  در توپولوژی یکنواخت ۱۵۸
  - بشر بودن ۳۸۹
  - تمام بودن ۳۲۸
  - و گروه‌های توپولوژیکی ۱۸۶
  - فضای  $R^\omega$  در توپولوژی یکنواخت
  - مؤلفه‌های - ۲۱۰
  - و دومین اصل شمارایی ۲۲۹
  - فضای  $R^\infty$  ۳۵۹، ۱۶۲، ۱۵۰
  - فضای  $R_1$  ۱۰۷
  - و اصول شمارایی ۲۵۰
  - و پیرافشردگی ۳۳۹، ۳۳۵
  - و توپولوژی استاندارد روی  $R$  ۱۰۷
  - و متری پذیری ۲۵۴
  - و نرمال بودن ۲۶۵
  - فضای  $R_1^2$
  - و پیرافشردگی ۳۳۵
  - و تماماً منتظم بودن ۳۱۰
  - و شرط لیند洛夫 ۲۵۱
  - و نرمال بودن ۲۶۵
  - فضای  $R^2$  ۱۶۳
  - زیر مجموعه چگال شمارای - ۲۵۲
  - و تمام بودن ۳۵۲
  - فضای  $\mathbb{R}$  ۱۰۱
  - و اصل  $T_1$  ۱۳۱
  - و فشردگی ۲۱۵
  - و همبندی ۱۹۶
  - در فضای پوششی ۲۳۲
  - در فضای حاصل ضرب ۲۱۷
  - قاعده تناظر ۲۱
  - قضایای جداسازی
  - $R^2$  به وسیله منحنی ساده بسته ۵۰۱، ۲۹۰
  - $S^2$  به وسیله منحنی ساده بسته ۵۰۱، ۲۸۸
  - $S^2$  به وسیله  $A \cup B$  ۲۹۸، ۲۹۰
  - $S^n$  ۵۰۰
  - قضیه
  - آرزلا ۳۸۳، ۳۶۵
  - اساسی جبر ۲۷۲
  - استون ۳۳۵
  - براوتر درباره پایایی حوزه ۲۹۱
  - بورسوک ۲۹۱
  - بورسوک - اولام برای  $S^2$  ۲۷۱
  - جداسازی ژوردان ۲۸۸
  - جدا ناسازی ۲۹۱، ۲۹۶
  - شرودر - برنشتاین ۶۸
  - شوئن فلایز ۵۰۰
  - فروبنیوس ۲۷۶، ۲۸۰
  - گسترش تینسه ۲۷۶
  - متریسازی اسمیرنوف ۳۲۰
  - متریسازی اوریسون ۲۸۲
  - متریسازی بینگ ۳۳۲
  - منحنی ژوردان ۲۹۸
  - هان مازور کیه ویچ ۳۵۹

- یکتایی تمام‌ساز ۳۵۵
- قضیه آسکولی
- صورت تعمیم یافته - ۳۷۹
- صورت کلاسیک - ۳۶۳
- قضیه پیوستگی یکنواخت
- تعمیم - ۲۳۳
- حسابان ۱۸۹
- $S^2$  به وسیله  $A \cup B$  ۴۹۸، ۴۹۰
- $S^*$  ۵۰۰
- قضیه تیخونوف ۳۰۲
- شمارا ۳۰۲
- متاهی ۲۱۶
- قضیه حد یکنواخت ۱۶۷
- و عکس جزیی ۲۲۲
- و نادرستی عکس ۱۷۲
- قضیه خوشترتیبی ۸۵
- کاربرد - ۳۲۹، ۲۹۴
- و اصل ماکزیموم ۹۶
- و اصل موضوع انتخاب ۹۶
- قضیه متریسازی ناگانا - اسمیرنوف
- (کفایت) ۳۲۳
- (لزوم) ۳۲۸
- قضیه مقادیر میانی
- تعمیم یافته ۱۹۹
- حسابان ۱۸۹
- قضیه مقدار ماکزیموم
- تعمیم یافته ۲۲۶
- حسابان ۱۸۹
- قضیه مقوله بئر ۳۸۵
- (حالت خاص) ۲۶۵، ۲۲۹
- قضیه نشاندن
- بتوی  $R^l$  ۲۸۷
- برای بسلا ۴۱۳
- برای بسلا  $m$  بعدی ۴۱۳
- برای بسلا فشرده ۴۱۱، ۲۹۳
- برای فضای تماماً منتظم ۳۰۹
- برای گراف خطی ۴۰۳
- برای همبافت ۲ بعدی ۴۱۲
- قضیه نقطه ثابت
- برای  $S^*$  ۴۸۶
- برای انقباض ۳۵۳، ۲۳۶
- برای  $B^2$  ۴۷۶
- برای  $B^*$  ۴۸۰
- برای توکشیده  $B^2$  ۴۷۹
- برای  $[0, 1]$  ۲۰۴
- قضیه نقطه ثابت براوئر
- برای  $B^2$  ۴۷۶
- برای  $B^*$  ۴۸۰
- قضیه ون کمپن ۴۵۷
- (حالت خاص) ۴۵۵
- قطر يك مجموعه ۲۲۹، ۱۵۴
- قطعه
- $Z_+$  ۵۳
- مجموعه مرتب ۸۶

- |                             |                                 |
|-----------------------------|---------------------------------|
| فوانین                      | - غیر قابل نشانیدن در $S^2$ ۵۰۱ |
| - جبری ۲۲                   | گراف خطی ۳۹۹                    |
| - دمورگن ۱۶                 | - بعد توپولوژیک ۳۹۹             |
| - نامساویها ۲۵              | گردایه ۱۶                       |
| - نماها ۲۶                  | - موضعاً گسته ۳۳۲               |
| کران بالا ۳۵                | - موضعاً متناهی ۳۲۱             |
| کران پایین ۳۶               | - کراندار نقطه به نقطه ۳۶۵      |
| کراندار                     | - نقطه - متناهی ۳۲۶             |
| - از پایین ۳۶               | گروه بنیادی ۲۲۷                 |
| - کلی ۳۵۹                   | - آبلی ۲۳۳، ۲۶۲، ۲۶۴            |
| - یکنواخت ۳۶۵               | - $R^2 - 0$ ۲۴۹                 |
| کرانه ۱۳۱                   | - $R^n - 0$ ۲۵۰                 |
| کرانه $A$ ۱۳۱               | - $S^1$ ۲۲۲                     |
| کره شاخدار اسکندر ۵۰۰       | - $S^2$ ۲۵۷                     |
| کره واحد ۱۷۸، ۲۰۱           | - $S^n$ ۲۵۷                     |
| کره واحد ۲ بعدی ۱۷۸         | - $P^2$ ۲۶۰                     |
| کمان ۲۸۸                    | - توکشنده دگردیسی قوی ۲۵۲       |
| کمند ۲۲۷                    | - چنبره ۲۶۰                     |
| کوچکترین عضو مجموعه مرتب ۳۵ | - چنبره مضاعف ۲۶۲               |
| کوچکترین کران بالا ۳۵       | - حاصل ضرب ۲۵۹                  |
| گراف                        | - شکل ۸ ۲۶۲                     |
| - بسته ۲۲۲                  | - غیر آبلی ۲۶۲، ۲۶۴             |
| - تمام پنج رأسی ۳۹۹         | - فضای مداری ۲۶۵                |
| - تمام چهار رأسی ۵۰۱        | - و هم ارزی هموتوپی ۲۸۳         |
| گراف گاز - آب - برق ۳۹۹     | گروه پوششی عمومی ۲۴۹            |
|                             | گروه توپولوژیک ۱۸۶              |
|                             | فضای پوششی - ۲۲۸، ۵۱۷           |

- ۲۲۵، ۲۲۳  $A \cdot B$  و بسته بودن -  
 و پیرا فشردگی ۳۲۵ -  
 و تماماً منتظم بودن ۳۱۰ -  
 و شرط هاوسدورف ۱۸۷ -  
 و منتظم بودن ۱۸۷ -  
 و نرمال بودن ۲۷۰ -  
 $\pi_1$  آبلی است ۴۳۴ -  
 گروه خطی عمومی ۱۸۶ -  
 گنگ بودن  $\sqrt{2}$  ۴۸۱ -  
 گوی واحد  $B^n$  ۲۰۰ -  
 فشردگی - ۲۲۶  
 همبندی راهی - ۲۰۱
- لم
- چسب ۱۴۰ -  
 درهم کشیدن ۳۳۹، ۲۹۴ -  
 دنباله ۱۶۵ -  
 عدد لیگ ۲۳۱ -  
 گسترش هموتوبی ۴۹۱ -  
 لم اوریسون ۲۷۱  
 برای فضای تماماً منتظم ۳۰۹  
 صورت قوی - ۲۸۲  
 لم بالابر  
 برای راهها ۴۴۱  
 برای هموتوبی راهی ۴۴۲  
 درحالت عمومی ۵۰۶
- لم لوله ۲۱۸
- تعمیم یافته ۲۲۲  
 لوله ۲۱۶  
 متریک ۱۵۲  
 - اقلیدسی ۱۶۳، ۱۵۶  
 - کراندار استانده ۱۵۵  
 - مربعی ۳۵۰، ۱۵۶  
 - هاوسدورف ۳۶۶  
 متریک سوپرمومی ۳۵۰  
 - و تمام بودن ۳۵۱، ۳۵۰  
 - و متریک یکنواخت ۳۵۰  
 متریک یکنواخت ۳۴۸، ۱۵۸  
 - و تمام بودن ۳۴۸  
 - و متریک سوپرمومی ۳۵۰  
 متری پذیری ۱۵۳  
 $R$  ۱۵۳ -  
 $R^n$  ۱۵۶ -  
 $R^\omega$  ۱۵۷ -  
 $R^\omega$  در توپولوژی جعبه‌ای ۱۶۸ -  
 $R^J$  ۱۶۹ -  
 $R_i$  ۲۵۲ -  
 $S_0$  ۲۳۱ -  
 $\bar{S}_0$  ۱۷۰ -  
 $I \times I$  با توپولوژی ترتیب قاموسی  
 ۲۵۲  
 - بسلاها ۲۹۴  
 - حاصل ضرب ۱۶۴، ۱۳۲

۱۲ تمم	- کراندار ۱۵۲
تناهی بودن ۵۲	- متناهی ۵۳
- اجتماع متناهی ۵۸	- محدب ۱۹۷، ۲۲۶
- حاصل ضرب متناهی ۵۸	- محدب ستاره‌ای ۲۳۳
- زیر مجموعه ۵۷	- ناشمارا ۶۱
- مجموعه ۵۳	- نامتناهی ۷۲، ۵۹
مجموعه ۸، ۷	- و پارادوکس «مجموعه همه»
- $R^\omega$ ۵۰	مجموعه‌ها « ۸۱
- $R_+, R_+$ ۴۱	مجموعه استقرایی
- اشباع شده ۱۷۵	- در $R$ ۴۲
- اعداد صحیح $Z$ ۴۲	- در مجموعه خوشترتیب ۸۷
- اعداد صحیح $Z_+$ ۴۲	مجموعه اعداد حقیقی ۴۰
- $F_8$ ۳۲۸	متریک برای - ۱۵۳
- اندیس ۵۰	مجموعه‌های فشرده در - ۲۲۵
- $X^J$ ۵۱	مجموعه‌های ناشمارا در - ۲۲۸
- $X^m$ ۵۰	مجموعه‌های همبند در - ۱۹۸
- $X^\omega$ ۵۰	- و پیرافشردگی ۳۳۲
- تصویر ۲۲	- و توپولوژی استاندارد ۱۰۷
- توانی ۱۶	مجموعه باز ۱۰۰
- تهی ۱۰	- نسبت به زیرفضا ۱۱۶
- جدا از هم ۱۰	مجموعه‌های بسته ۱۲۰
- جهت‌دار ۲۴۳	- نسبت به زیرفضا ۱۲۲
- خوشترتیب ناشمارای مینیمال ۸۶	مجموعه خوشترتیب ۸۲
- رده‌های هم‌توبی $[X, Y]$ ۴۲۷	- $Z_+$ ۴۲
- شمارا ۵۹	- $Z_+ \times Z_+$ ۸۲
- قطری ۱۳۰، ۲۶۳	- و زیرمجموعه ۸۳
- کانتور ۲۲۹	- و شمارایی ۸۴

- مجموعه  $S^*$  ۲۰۱
- و فشرده‌گی ۲۲۴
- و متاهی بودن ۸۳
- و مجموعه  $A \times B$  با ترتیب قاموسی
- ۸۳
- و ناشمارایی ۹۵، ۸۶
- و نرمال بودن ۲۶۰
- مجموعه خوشترتیب ناشمارا ۸۶
- وجود - ۹۶
- مجموعه  $G_8$  ۲۵۳، ۳۲۴
- بشر بودن - ۳۸۸
- تمام بودن توپولوژیکی - ۳۵۴
- و صورت قوی لم اوریسون ۲۸۲
- و مجموعه اعداد گنگ ۳۲۸
- و مجموعه اعداد گویا ۳۸۷
- و مجموعه بسته ۳۲۴، ۳۲۸
- مجموعه  $I \times I$  در توپولوژی ترتیبی
- بستار - ۱۳۱
- و پیوستار خطی ۱۹۹
- و متریک پذیری ۲۵۴
- و همبندی ۲۰۱
- و همبندی راهی ۲۰۱
- و همبندی موضعی ۲۱۱
- مجموعه  $S^1$  ۱۳۷
- و پوشش به وسیله  $R$  ۴۳۵
- و پوشش به وسیله  $S^1$  ۴۳۹، ۴۴۰
- رده بندی فضاهاى پوششی ۵۰۹
- گروه بنیادی ۲۴۴
- مجموعه  $S_0$  ۸۶
- خاصیتهای فشرده‌گی - ۲۳۱
- یکتایی - ۹۵
- و اصول شمارایی ۲۵۳
- و پیرافشرده‌گی ۳۳۹، ۳۴۲
- و قضیه استون-چخ ۳۱۸
- و متریک پذیری ۲۳۱
- مجموعه  $\bar{S}_0$  ۸۶
- متریک پذیری - ۱۷۰
- مجموعه  $S_0 \times \bar{S}_0$
- و پیرافشرده‌گی ۳۳۵
- و تماماً منتظم بودن ۳۰۹
- و نرمال بودن ۲۶۲
- محل ۲۹۱
- مختص
- اول زوج مرتب ۱۸
- دوم زوج مرتب ۱۸
- مرتبه گردایه ۳۹۶
- مسئله ۱۴ از مجموعه کوراتوفسکی ۱۳۲
- مستقل هندسی ۴۰۴
- معکوس

۳۰۷، ۲۱۰ - و شبه مؤلفه	- چپ ۲۸
۲۰۹ - و مؤلفه راهی	- راست ۲۵
مؤلفه راهی ۲۰۷	معنای «یا» ۹
۲۰۹ - و مؤلفه	مقایسه پذیری اعداد اصلی ۸۹
میدان ۴۱	مقایسه پذیری مجموعه‌های خوشترتیب ۹۵
میدان برداری ۴۷۴	مقدار تابع ۲۲
- روی $S^2$ ۲۷۸	مقطع ۵۰، ۱۷، ۱۰
- روی $S^n$ ۲۸۶، ۲۸۰	مقوله
- روی $B^2$ ۴۷۴	- دو ۳۸۵
- روی بطری کلاین ۲۷۷	- یکم ۳۸۵
- روی چنبره ۴۷۷	مکعب ۴۱۰
میدان مرتب ۴۱	مکعب هیلبرت ۱۶۲
ناشمارایی	منحنی ۲۹۲
- $R$ ۲۲۸	منحنی پثانو ۳۵۵
- اعداد متعالی ۶۷	منحنی ساده بسته ۴۸۸
- $\mathcal{P}(Z_+)$ ۶۶	- و جداسازی $R^2$ ۵۰۱، ۴۹۰
- $\{0, 1\}^\omega$ ۶۶	- و جداسازی $S^2$ ۴۹۸، ۴۸۸
نامساوی مثلثی ۱۵۲	- و مولدگروه بنیادی $R^2 - 0$ ۵۰۲
ناهمبندی کلی ۱۹۶	منحنی سینوسی توپولوژی دانان ۲۰۴
نتیجه ۱۲	منحنی فضا پرکن ۳۵۵
نرم ۱۵۶	منطقاً معادل ۱۳
نرمال بودن ۲۵۵	موضعیاً گسسته شمارشی ۳۳۲
- $R_i$ ۲۶۵	موضعیاً متری پذیری ۲۸۸
- توپولوژی هموسته ۲۸۳	- و متری پذیری ۳۴۰، ۲۸۸
- حاصل ضرب ۲۶۸، ۲۶۵، ۲۶۲، ۲۵۷	موضعیاً متناهی شمارشی ۳۲۲
- زیرفضا ۲۶۸، ۲۶۲، ۲۵۷	مؤلفه ۲۰۶
- زیرفضای بسته ۲۶۸	- درفضای فشرده و هاوسدورف ۳۰۷



نگاشت

- ارزه ۳۷۶
- اساسی ۴۶۶
- تصویری ۱۴۶، ۱۱۵
- حافظ نقاط متقاطع ۴۷۰
- سره ۲۱۳، ۳۷۳
- قطری ۳۵۴
- متقاطع ۴۶۱
- نگاشت پوششی ۲۳۴
- $R \times R_+ \rightarrow R^2 - 0$  ۲۳۸
- $R \rightarrow S^1$  ۵۱۰، ۲۳۵
- $S^1 \rightarrow S^1$  ۴۲۰، ۴۳۹
- $S^2 \rightarrow P^2$  ۴۶۱
- ترکیب - ۲۴۰
- چنبره  $R \times R \rightarrow$  ۲۳۷
- حاصل ضرب - ۲۴۰
- منظم ۵۱۶
- و هومومورفیسم موضعی ۲۳۸
- نگاشت خارج قسمی ۱۷۴
- ترکیب - ۱۷۹
- حاصل ضرب - ۳۷۹، ۲۴۲، ۱۸۲، ۱۷۹
- نگاشت غیر اساسی ۴۶۶
- و القای هومومورفیسم صفر ۴۸۲، ۴۶۸
- نگاشتهای هموتوپ ۴۱۸
- نماد تساوی ۸
- نمودار ۲۲۲
- نوع هموتوپی ۴۸۳

- فضای الحافی ۲۹۰

- فضای پیرافشرده ۳۳۴
- فضای لیند洛夫 منظم ۲۶۸
- فضای متری ۲۵۸
- فضای هاوسدروف فشرده ۲۵۸
- مجموعه خوشترتیب ۲۶۰
- و فضای تماماً منظم ۳۰۹
- و منظم بودن ۲۶۵، ۲۶۲، ۲۵۵، ۲۶۸

نشاندن ایزومتريک ۱۷۰

- بتوی يك فضای تمام ۳۵۱

پوشایی - ۲۳۶

نشانده ۱۳۶

- توپولوژیک ۱۳۶

نقطه

- آغازی راه ۴۱۸

- انباشتگی ۱۲۵

- انباشتگی تور ۲۴۴

- انجامی راه ۴۱۸

- پایه ۴۲۷

- ثابت ۲۰۴

- حدی ۱۲۵

- متقاطع ۴۶۰

نقیض ۱۴

نگاشت ۲۲

- باز ۱۷۵، ۱۱۹

- بسته ۲۲۲، ۱۷۵

- وجود ریشه دوم ۲۸  
 وضع عمومی  
 $R^2$  ۲۰۳ -  
 $R^N$  ۲۰۵ -
- همبندی راهی ۲۰۰  
 $R^m$  - ۲۵۸، ۲۰۱  
 $S^m$  ۲۰۱ -
- هم ارزی  
 فشرده شدگی ۳۱۲ -  
 نگاشتهای پوششی ۵۰۸، ۵۰۲ -  
 هم ارزی هموتوپی ۲۸۳  
 - ایزومورفسم القا شده توسط  $\pi_1$   
 ۲۸۳  
 - و توکشیده دگرذیسی قوی ۲۸۴  
 همبافت ۲ بعدی ۴۰۱  
 بعد توپولوژیک - ۴۰۱  
 - و نشانیدن در  $R^m$  ۲۰۶  
 همبافت ۲ بطنی سادگی متاهی ۲۰۱  
 همبند
- همبندی راهی ۲۰۵، ۲۰۲  
 همبندی راهی ۲۰۰  
 $R^m$  - ۲۵۸، ۲۰۱  
 $S^m$  ۲۰۱ -  
 $I \times I$  با ترتیب قاموسی ۲۰۱  
 $B^m$  ۲۰۰ -  
 خط طویل ۲۰۵  
 فضای شانهای سفته ۲۰۲  
 - منحنی سینوسی توپولوژی دانان ۲۰۴  
 - و همبندی ۲۰۴، ۲۰۱  
 همبندی موضعی ۲۰۸  
 $R^m$  و  $R^n$  ۲۰۹  
 - راهی ۲۰۸  
 - و همبندی خردجا ۲۱۱  
 - و همبندی موضعی راهی ۲۰۹  
 همپایان ۲۴۳  
 همپوستگی ۳۶۱  
 - بستار ۳۷۹، ۳۶۵  
 - و فشردگی ۳۷۹، ۳۶۳  
 - و کراننداری کلی ۳۶۱  
 همرده ۱۸۷  
 همسایگی ۱۲۵  
 همگرایی تور ۲۴۴  
 همگرایی بکنواخت ۱۶۷  
 - و آزمون  $M$  و ایرشتراس ۱۷۳
- وجود ریشه دوم ۲۸  
 وضع عمومی  
 $R^2$  ۲۰۳ -  
 $R^N$  ۲۰۵ -
- همبندی راهی ۲۰۰  
 $R^m$  - ۲۵۸، ۲۰۱  
 $S^m$  ۲۰۱ -
- هم ارزی  
 فشرده شدگی ۳۱۲ -  
 نگاشتهای پوششی ۵۰۸، ۵۰۲ -  
 هم ارزی هموتوپی ۲۸۳  
 - ایزومورفسم القا شده توسط  $\pi_1$   
 ۲۸۳  
 - و توکشیده دگرذیسی قوی ۲۸۴  
 همبافت ۲ بعدی ۴۰۱  
 بعد توپولوژیک - ۴۰۱  
 - و نشانیدن در  $R^m$  ۲۰۶  
 همبافت ۲ بطنی سادگی متاهی ۲۰۱  
 همبند
- همبندی موضعی ۲۰۸  
 $R^m$  و  $R^n$  ۲۰۹  
 - راهی ۲۰۸  
 - و همبندی خردجا ۲۱۱  
 - و همبندی موضعی راهی ۲۰۹  
 همپایان ۲۴۳  
 همپوستگی ۳۶۱  
 - بستار ۳۷۹، ۳۶۵  
 - و فشردگی ۳۷۹، ۳۶۳  
 - و کراننداری کلی ۳۶۱  
 همرده ۱۸۷  
 همسایگی ۱۲۵  
 همگرایی تور ۲۴۴  
 همگرایی بکنواخت ۱۶۷  
 - و آزمون  $M$  و ایرشتراس ۱۷۳

- |                             |                                    |
|-----------------------------|------------------------------------|
| ۴۲۹، ۴۲۸ $\alpha$           | هموتوبی ۲۱۸                        |
| - و ایزومورفیسم بودن ۴۲۹    | - مستقیم الخط ۴۲۰                  |
| ۷۲، ۴۶ $a^b$                | - و برابری باراه در $(X, Y)$ ۳۷۸   |
| ۱۷۲ $B^2$                   | - و تأثیر روی $h_*$ ۴۸۱            |
| ۱۵۲ $B(x, \varepsilon)$     | هموتوبی راهی ۴۱۸                   |
| ۳۴۹ $C(X, Y)$               | همومورفیسم                         |
| بسته بودن - در $Y^X$ ۳۴۹    | - القا شده توسط راه $(\alpha)$ ۴۲۸ |
| زیر مجموعه‌های فشرده - ۳۷۹  | - القا شده توسط نگاشت $(h_*)$ ۴۳۱  |
| تمام بودن - ۳۴۹             | - حاصل ضرب ۴۵۹                     |
| $\varepsilon$ - همسایگی ۲۲۹ | - صفر ۴۳۳                          |
| ۱۸۷ $G/H$                   | همومورفیسم القا شده $h_*$ ۳۱       |
| پیرافشردگی - ۳۴۰            | - خواص تابمگونی ۴۳۲                |
| منتظم بودن - ۱۸۸            | - و بستگی به رده هموتوبی $h$ ۴۸۱   |
| $J$ تایی ۵۱                 | هومومورفیسم ۱۳۵                    |
| $m$ تایی ۴۸                 | - موضعی ۴۳۸                        |
| $\omega$ تایی ۴۹            | - و نگاشت پیوسته دوسویی ۲۱۶، ۱۳۷   |
| ۱۷۸ $S^2$                   |                                    |
| میدان برداری - ۴۷۸          |                                    |
| - و همبندی ساده ۴۵۹، ۴۵۵    | ۴۰ يك                              |