توپولوژی

از دیدگاه حساب دیفرانسیل

نوشتهٔ: جان میلنر

ترجمهٔ: سیاوش شهشهانی

اصطلاح «توپولوژی» علاوه بر «توپولوژی مجموعهٔ نقاط» یا «توپولوژی عمومی» که هدف تاریخی آن روشن ساختن و توسعهٔ مفهومهای «پیوستگی» و «همگرائی» است، به بخش دیگری از ریاضی نیز اطلاق می‌شود که از نظر ریشهٔ تاریخی وروح مطلب ازتوپولوژی مجموعهٔ نقاط جداست و معمولاً نوعی از«هندسه» به‌مفهوم عام تلقی می گردد. این بخش از ریاضی با پژوهش‌های معروف پوانکاره آغاز می‌شود. «توپولوژی جبری» «توپولوژی دیفرانسیل» و «توپولوژی هندسی» همه در واقع دنبالهٔ طبیعی این پژوهش‌ها هستند و مفاهیم ریاضی مورد مطالعهٔ آنها از نظر تاریخی یکی است، گرچه از نظر جزئیات فنی و روش تحقیق از یکدیگر متمایزند.

برخلاف توپولوژی عمومی که از نظر منطقی بی‌نیاز از بیشتر رشته‌های ریاضی است و تنها شرط یادگرفتن آن ورزیدگی در استدلال دقیق و مجرد است، راه‌یابی به توپولوژی جبری و دیفرانسیل بدون اندوختهٔ قابل ملاحظه‌ای از جبر و آنالیز میسر نیست. در سالهای اخیر گامهائی در جبران این نقیصه برداشته شده است که نمونهٔ آن تألیف کتابی است که ترجمهٔ فارسی آن از نظر خواننده می گذرد. کسانی که باصرف وقت زیاد همین مطالب را از لابلای مقالات پژوهشی فرا گرفته‌اند، براحتی قبول خواهند کرد که این کتاب از شاهکارهای ساده‌نویسی ریاضی است و تنها استادی چون میلنر می‌توانسته چنین کتابی بنویسد.

توپولوژی
ازدیدگاه حساب دیفرانسیل

تألیف :

جان و. میلنر

ترجمهٔ :

سیاوش شهشهانی

مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

فهرست

مقدمهٔ مترجم

خوشبختانه چند سالی است که موقعیت توپولوژی مجموعهٔ نقاط یا توپولوژی عمومی به‌عنوان یکی از درس‌های پایهٔ دورهٔ لیسانس ریاضی در دانشگاه‌های ایران تثبیت شده است. این جنبهٔ توپولوژی که هدف تاریخی آن روشن ساختن و توسعهٔ مفهومهای «پیوستگی» و «همگرائی» است، همزمان و توأم با آنالیز تابعی در اواخر قرن نوزدهم پایه‌گذاری شد و در نیمهٔ اول این قرن بصورتی درآمد که امروز به‌عنوان زبان پیوستگی در دسترس همهٔ ریاضی‌خوانان است. همچنان که در بعضی دانشگاه‌های جهان مرسوم است، می‌توان توپولوژی مجموعهٔ نقاط را جزئی از مبانی آنالیز نوین بشمار آورد. اما اصطلاح «توپولوژی» به بخش دیگری از ریاضی نیز اطلاق می‌شود که از نظر ریشهٔ تاریخی و روح مطلب از توپولوژی مجموعهٔ نقاط جداست و معمولاً نوعی از هندسه به‌مفهوم عام تلقی می‌گردد. پیدایش این رشته، ثمرهٔ درگیری با اشکالهای هندسی غیر متریک بعضی مسائل آنالیز مختلط (رویه های ریمان) و معادلات دیفرانسیل بود، که این نیز در اواخر قرن نوزدهم متبلور گردید. گرچه بعضی مفاهیم این نوع توپولوژی بطور ضمنی در آثار ریمان مشهود است، آغاز رسمی آن، نشر یک سلسله مقالات معروف پوانکاره[1] محسوب می‌شود. دراین مقاله‌ها بودکه پوانکاره

---

۱. مقصود مقالهٔ Analysis situs (1895) و پنج مقاله تحت عنوان Complément à l'analysis situs (1899 - 1904) است که در نشریات مختلف چاپ شدند و می‌توان آنهارا در مجموعهٔ آثار پوانکاره یافت.

آنچه امروز گروه اساسی[2] و گروههای همولوژی[3] می‌نامیم معرفی کرد و با بکار بستن جبر مجرد در مسائل هندسی طرزفکر نوینی در ریاضی پدید آورد که درچهرهٔ ریاضی امروز تأثیر عمیقی گذاشته است. توپولوژی جبری، توپولوژی دیفرانسیل و توپولوژی هندسی همه در واقع دنبالهٔ طبیعی این پژوهش‌ها هستند و مفاهیم ریاضی مورد مطالعهٔ آنها از نظر تاریخی یکی است، گرچه ازنظر جزئیات فنی و روش تحقیق ازیکدیگر متمایزند. بااین که درنیمهٔ اول قرن بیستم تحقیقات مهمی در ادامهٔ کارهای پوانکاره، بخصوص در توپولوژی جبری، صورت گرفت؛ دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ است که دوران شکوفائی این بخش از توپولوژی بشمارمی‌آید. امروزنیزکاوش در این رشته‌ها با حرارت ادامه دارد ولی بیشتر کوشش متخصصان در جهت بکار بستن نتایج دهه‌های پیشین در سایر رشته‌ها، بخصوص در آنالیز غیر خطی است.

برخلاف توپولوژی عمومی که ازنظر منطقی بی‌نیاز از بیشتررشته‌های ریاضی‌است وتنهاشرط یادگرفتن‌آن ورزیدگی دراستدلال‌دقیق‌و مجرد است، راه‌یابی به توپولوژی جبری و دیفرانسیل بدون اندوختهٔ قابل ملاحظه‌ای از جبر و آنالیز میسر نیست و به این دلیل است که تدریس این مقولات اساساً به‌دوران پس‌از لیسانس موکول می‌شود. این واقعیتی‌است تأسف‌آور زیرا که به‌رغم پیچیدگی فنی‌آن ، این رشته محتوای عینی و هندسی بسیار جذابی دارد که می‌تواند درتحریک ذوق و علاقهٔ دانشجویان ــ که بحق از مجردات ظاهراً بی‌انگیزهٔ درس‌های دورهٔ لیسانس کسل می‌شوند ــ مؤثر باشد . در سالهای اخیر گامهائی درجبران این نقیصه برداشته شده است‌که نمونهٔ آن تألیف‌کتابی است که ترجمهٔ فارسی‌آن ازنظر خواننده می‌گذرد. وقتی که درسال ۱۹۶۵ این کتاب انتشار یافت ، تنها یک کتاب دیگر در

2. Fundamental Group.

3. Homology Groups.

زمینهٔ توپولوژی دیفرانسیل وجود داشت[1] که آن‌هم از جزئیات فنی مورد استفادهٔ متخصصان صحبت می‌کرد. موفقیت‌کتاب حاضرچنان بودکه تا کنون سه‌بار تجدیدچاپ شده است و این خود برای یک کتاب ریاضی در این سطح امری است کم‌سابقه. کسانی‌که با صرف وقت زیاد همین مطالب را از لابلای مقالات پژوهشی فراگرفته‌اند، براحتی قبول خواهند کرد که این کتاب ازشاهکارهای ساده‌نویسی ریاضی است. تنها استادی مانند میلنر، که خود نقشی عمده درپیشبرد این رشته داشته است و نیز ذوق فوق‌العاده‌ای در بیان روشن ریاضیات دارد، می‌توانسته چنین کتابی بنویسد.

آنچه در وصف بیان سادهٔ این‌کتاب گفتیم نباید درخوانندهٔ دانشجو این توهم را پدیدآوردکه می‌تواند با مطالعهٔ سطحی، محتوای این جزوهٔکوچک را درک کند. در واقع تجربهٔ تدریس این‌کتاب در دانشگاه صنعتی آریامهر به مترجم نشان داده شده است که فهمیدن آن برای اکثردانشجویان نیازمند کوششی است که وقف درسی مشکل ــسه یا چهار واحدیــ می‌کنند. تأکید نامتناسبی که بر ساختمان منطقی ریاضی معمول شده است، و بی‌توجهی به محتوای آن ، تجسم هندسی اکثر دانشجویان را چنان ضعیف کرده است‌که از مطالب هندسی ترس دارند و در مطالعهٔ آن احساس بی‌آرامی می‌کنند. درتدریس‌کتاب به‌چند نکته و اصطلاح برخوردیم که‌برای اکثر دانشجویان محتاج به توضیح بیشتر بود. هدف عمدهٔ یادداشتهای مترجم در آخرکتاب شکافتن این نکات است. در متن کتاب شماره‌هائی که در ( ) ظاهر می‌شوند اشاره به‌این یادداشتها است، و شماره های بی‌پرانتز به پاورقی همان صفحه. جا دارد که از کوشش دانشجویانی که درسشان مبتنی بر این کتاب بود ــ در دانشگاه صنعتی تهران ــ و پرسشهایشان منجر به اضافه کردن این یادداشتها شد، قدردانی کنیم. پس از انتشار متن انگلیسی کتاب حاضر چند کتاب دیگر نیز در همین سطح نشر یافت که

1. Munkres, J. *Elementary Differential Topology*, Princeton University Press 1963.

باید از آنها نام برد. کتاب والاس [۴۲] که با جنبه‌هائی از توپولوژی دیفرانسیل، سوای آنچه در این کتاب می‌آید، سر و کار دارد و برای کسانی که تمایل هندسی دارند بسیار خواندنی است. کتاب:

Guillemin, V. & W. Pollack A. *Differential Toplogy*, Prentice-Hall (1974)

که به الهام از کتاب میلنر نوشته شده است مطالب شش بخش اول این کتاب و مبحثهای دیگری را بطور جامعتر ولی در همین سطح مقدماتی بررسی می‌کند. کتاب اخیر دارای تمرین‌های متعددی نیز هست. برای خوانندهٔ علاقمندی که تجربهٔ ریاضی‌اش بیشتر است باید کتاب جدید زیر را توصیه کرد:

Hirsch, M. W. *Differential Topology*, Springer-Verlag (1974)

چند کلمه‌ای توضیح در مورد واژه‌های ریاضی این کتاب واجب است: در مواردی که یک اصطلاح فارسی، مورد قبول اکثر افراد ریاضی خوان ایران واقع شده است، از آن اصطلاح استفاده کردیم. موارد بسیاری در این کتاب پیش آمد که مفهوم ریاضی مورد نظر در فارسی بکار نرفته بود یا در مورد معادل فارسی اتفاق نظر وجود نداشت. بحث و تحلیل این موارد با همکاری هیأت ویرایشگران موسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی آریامهر بود که چاپ کتاب را ماهها به تعویق انداخت. تا آنجا که توانستیم از پیشنهادهای کمیتهٔ واژه‌گزینی انجمن ریاضی ایران و پیشنهادهائی که در نشستهای گروه ریاضی فرهنگستان زبان، شنیده بودیم، استفاده کردیم. در مواردی که واژهٔ فارسی، به فارسی برگرداندن یک سلسله لغات مربوط به هم را (از نظر ریشهٔ لغت یا مفهوم ریاضی) ایجاب می‌کرد، از این‌کار فعلاً صرفنظر کردیم و لغت فرنگی را بکار بردیم. از این قبیل است لغت homotopy که نباید بطور سرسری برای آن معادل فارسی وضع کرد بی‌آنکه به سرنوشت لغتهای cohomotopy، isotopy، homology، و cohomology بیندیشیم. لغت cobordism در نظر اول

معادلهائی را چون «هم مرزی»، «هملبگی»، «همکرانی»، . . . بـه ذهـن می‌آورد. متأسفانه این پیشنهادها به دو دلیل قابل استفاده نیستند. یکی اینکه هر یک معنائی را مغایر با مفهوم ریاضی این اصطلاح می‌نمایاند، و دیگر اینکهٔ در ترجمهٔ اصطلاح bordism که در این کتاب بکار نرفته است ولی روزی نیـازمند به ترجمه خواهد شـد، دچار اشکال خـواهیم گشت. اما یک واژه است که به سبب نقش اسـاسی آن در کتـاب و اینکـه در هـر صفحه چندین بار ظاهر می‌شود مصمم بودیم بفارسی بـرگردانیم. این لغت manifold است. از میان پیشنهادهای مختلف، واژهٔ «چند گونا» کـه ساختهٔ آقای احمد بیرشک بود قابل استفاده‌تر از دیگران بنظر آمد و آن را بکار بستیم. البته چند گونا خالی از اشکال نیست؛ تصویری که این لغت به‌ذهن می‌آورد شیئی است که نـواحی مختلف آن ماهیتهای مختلف دارنـد، حال آن که manifold از نظر ریاضی شیئی کاملاً متجانس است (مراجعه کنید به لم همگنی، صفحهٔ ۴۵). امیدواریم که خواننده بـا همدلی کوششهای ما را بنگرد، چه خرده‌گیری و انتقاد در این میـدان آسان است.

در خاتمه باید اذعان کنیم که تنهـا تشویق و پافشاری بی‌وقفـهٔ آقای علیرضا حیدری مدیر عامل خستگی‌ناپذیر مؤسسهٔ انتشارات علمـی دانشگاه صنعتی تهران بـود که بر بی‌حوصلگی و اکـراه این مترجـم چیره آمـد و انتشار صورت فارسی این کتاب را ممکن ساخت.

سیاوش شهشهانی

جان ویلارد میلنر[1] نویسندهٔ این کتاب عضو ثابت مؤسسهٔ مطالعات عالی در پرینستون است. او در سال ۱۹۳۱ در ایالت نیوجرزی امریکا متولد شد و پس از گرفتن درجهٔ دکتری ریاضی از دانشگاه پرینستون در سال ۱۹۵۴، در همان دانشگاه به تدریس پرداخت. پژوهشهای میلنر در توپولوژی، آغاز دورهٔ نوین رشتهٔ توپولوژی دیفرانسیل محسوب می‌شود که بعضی مبحثهای ابتدائی آن موضوع این کتاب کوچک است. به پاس اهمیت این آثار بود که در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان سال ۱۹۶۲ در استکهلم، میلنر برندهٔ مدال فیلدز[2] مهمترین جایزهٔ ریاضی جهان شد.

میلنر نه تنها از بزرگترین محققان ریاضی جهان است، بلکه در بیان ساده و صریح مطالب غامض ریاضی نیز شهرت بسزائی دارد. او مؤلف نزدیک به ده کتاب است که هر یک مبحثی را که تا آن زمان تنها در مقالات پژوهشی یافت می‌شده، به صورت قابل درک برای عامهٔ ریاضی‌خوانان عرضه کرده است.

1. John Willard Milnor 2. Fields Medal

پیشگفتار

آنچه در این کتاب می‌آید بر اساس سخنرانیهائی است که نویسنده زیر نظر «بنیاد سخنرانیهای پیج باربر[1]» در دسامبر ۱۹۶۳ در دانشگاه ویرجینیا ایراد کرد. در این‌جا مقولاتی از دوران اولیهٔ توپولوژی مطرح شده است که به تعریفی که براوئر[2] در سال ۱۹۱۲ از درجهٔ یک نگاشت کرد، تکیه دارد؛ اما روشهائی که بکار رفته است روشهای توپولوژی دیفرانسیل است نه روشهای ترکیبی براوئر. در این کتاب مفهوم مقدار عادی و قضیهٔ سارد[3] و براون[4] که مبین آن است که هر نگاشت هموار دارای مقدارهای عادی است، نقش اصلی را بر عهده خواهد داشت.

برای آسان ساختن ارائهٔ مطلب، همهٔ چند گوناها بینهایت‌بار مشتق‌پذیر، و صریحاً محاط شده در فضای اقلیدسی، فرض شده‌اند. اندک مایه‌ای از توپولوژی مجموعهٔ نقاط و نظریهٔ متغیر حقیقی دانسته انگاشته شده است.

مایلم که در این‌جا حقشناسی خود را نسبت به دیوید ویور[5]، که مرگ نابهنگامش همهٔ ما را افسرده ساخت، ابراز دارم. یادداشتهای گرانقدر او تهیهٔ این کتاب را ممکن ساخت.

ج. و. م.

پرینستون، نیوجرزی، مارس ۱۹۶۵

---

1. Page – Barbour Foundation
2. L. E. J. Brouwer
3. Sard
4. Brown
5. David Weaver

۱

چند گونا و نگاشت هموار

نخست به توضیح چند اصطلاح می‌پردازیم. R^k نمادی است برای نمایش فضای اقلیدسی k بعدی؛ بدین ترتیب هر $x \in R^k$ یک k تائی $x = (x_1, \ldots, x_k)$ از عددهای حقیقی است.

فرض‌کنیم $U \subset R^k$ و $V \subset R^l$ مجموعه‌هائی باز باشند. نگاشت f از U به V را (که به صورت $f : U \to V$ نوشته می‌شود) هموار می‌خوانیم در صورتی که همهٔ مشتقهای پاره‌ای $\partial^n f / \partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}$ وجود داشته و پیوسته باشند.

به طور کلی، فرض کنیم $X \subset R^k$ و $Y \subset R^l$ زیرمجموعه‌هائی دلخواه از فضاهای اقلیدسی باشند. نگاشت $f : X \to Y$ را در صورتی هموار می‌نامیم که برای هر $x \in X$، مجموعهٔ باز $U \subset R^k$ حاوی x ونگاشت همواری‌چون $F : U \to R^l$ وجود داشته باشند بطوری که F در سراسر $U \cap X$ با f یکی باشد.

توجه داشته باشید که اگر $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ هموار باشند، ترکیب این دو، یعنی $g \circ f : X \to Z$، نیز هموار خواهد بود. نگاشت همانی هر مجموعه مانند X همیشه هموار است.

تعریف. نگاشت $f : X \to Y$ را یک وابرسانی نامند در صورتی که f مجموعهٔ X را به طور همانسان (۱) بر Y منتقل‌کند و، علاوه برآن،

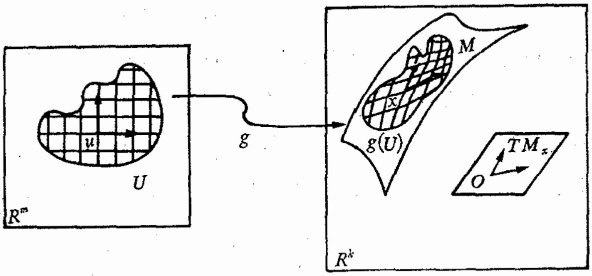
هر دو نگاشت f و f^{-1} هموار باشند.

اکنون می‌توان توپولوژی دیفرانسیل را به طـور تقریبی چنین تعریف کرد که موضوعش مطالعهٔ آن ویژگیهای مجموعه‌هـای $X \subset R^k$ است که تحت اثر هر وابرسانی پایدار می‌مانند.

اما بر سر آن نیستیم که مجموعه‌های کاملاً دلخـواه را بررسی کنیم. تعریف زیـر دسته‌ای از مجموعه‌ها را مشخص می‌کند کـه بنحوی خاص جالب توجه و بکار هستند.

تعریف. زیر مجموعهٔ $M \subset R^k$ یک چند گـونای هموار m بعدی نامیده می‌شود در صورتی که هـر $x \in M$ دارای یک همسایگـی چون $W \cap M$ باشد کـه با زیرمجموعـهٔ بـاز U از فضای اقـلیدسی R^m وابرسان باشد.

هـر وابرسانـی $g : U \to W \cap M$ را یک پـرمـایش ناحیـهٔ $W \cap M$ می‌نامند. (وابرسانـی وارون $W \cap M \to U$ یک دستگاه مختصات روی $W \cap M$ نام دارد.)



شکل ۱. پرمایش یك ناحیه در M

گاهی نیاز به بررسی چند گوناهای صفر بعدی است. بنا بر تعریف، M یک چند گونای صفر بعدی است در صورتی کـه هر $x \in M$ دارای یک همسایگی چون $W \cap M$ باشد که تنها از x تشکیل شده باشد.

چند مثال. کـرهٔ یکهٔ S^2، کـه متشکل از همهٔ آن نقاطی چون $(x, y, z) \in R^3$ است که مقید بـه شرط $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ باشند، یک چند گونای هموار دو بعدی است. در واقع، وابرسانی

$$(x, y) \rightarrow (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}),$$

با قلمرو $x^2 + y^2 < 1$، ناحیهٔ $z > 0$ در S^2 را پرمـایش می‌کند. با تعویض نقشهای x، y، و z و تغییر علامتهـای آنها، می‌تـوان پرمایشهای مشابهـی برای ناحیـه‌هـای $x > 0$، $y > 0$، $x < 0$، $y < 0$، و $z < 0$ بدست‌آورد. چون این ناحیه‌ها S^2 را می‌پوشانند، نتیجه می‌شود که S^2 یک چند گونای هموار است.

به طور کلی می‌توان گفت کـه کـرهٔ $S^{n-1} \subset R^n$ متشکل از همـهٔ نقاط $(x_1, \ldots, x_n)$ مقید به شـرط $\sum x_i^2 = 1$ یک چند گونای هموار $n - 1$ بعدی است. مثلاً، $S^0 \subset R^1$ چند گونائی است کـه فقط از دو نقطه تشکیل شده است.

مثالی که کمتر متبادر به ذهن است چند گـونای همواری است که از همهٔ نقاط $(x, y) \in R^2$ مقید به دو شرط $x \neq 0$ و $y = \sin(1/x)$ تشکیل می‌شود.

فضای مماس و مشتق

برای آن که مشتق نگاشت هموار $f : M \rightarrow N$ بین چند گوناهای هموار را، که با df_x نمایش داده می‌شود، تعریف کنیم، نخست بـه هر نقطهٔ $x \in M \subset R^k$ یک زیرفضای خطـی $TM_x \subset R^k$ از بعـد m نسبت می‌دهیم که فضای مماس M در نقطهٔ x نامیده می‌شود. سپس df_x، نگاشتی خطی از TM_x به TN_y، تعریف خواهد شد که در آن $y = f(x)$. عنصرهای فضای برداری TM_x بردارهای مماس بـه M در x خوانـده می‌شوند.

به طور شهودی می‌توان چنین گفت که، هرگاه ابر صفحهٔ (۲) m بعدی واقع در R^k را که در نزدیکی x بهترین تقریب M است تجسم کنیم، آنگاه TM_x ابرصفحه‌ای خواهد بود که از مبدأ مختصات می‌گذرد و با آن ابر صفحه موازی است. (قس. شکلهای ۱و۲.) می‌توان به همین روال نگاشت خطی ناهمگنی(۳) از ابرصفحهٔ مماس در x به ابرصفحهٔ مماس در y تصور کرد که بهترین تقریب برای f باشد. با انتقال هر دو ابرصفحه به مبدأ، df_x بدست می‌آید.

پیش از پرداختن به تعریف مشتق، باید حالت خاصی که در آن نگاشتها بین مجموعه‌های باز هستند بررسی شود. برای هر مجموعهٔ باز $U \subset R^k$، فضای مماس TU_x، بنا بر تعریف، عبارت است از تمام فضای برداری R^k. برای هر نگاشت هموار $f : U \to V$، مشتق

$$df_x : R^k \to R^l$$

به وسیلهٔ دستور زیر تعریف می‌شود:

$$df_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t},$$

که در آن $x \in U$ و $h \in R^k$. روشن است که $df_x(h)$ تابعی است خطی از h. (در واقع df_x آن تابع خطی است که به وسیلهٔ ماتریس $l \times k$ مشتقهای پاره‌ای مرتبهٔ اول، $(\partial f_i / \partial x_j)_x$، مشخص می‌شود.)

اکنون به بیان دو ویژگی اساسی عمل مشتقگیری می‌پردازیم:

۱. (قاعدهٔ زنجیری). هرگاه $f : U \to V$ و $g : V \to W$ نگاشتهائی هموار باشند و $y = f(x)$، آنگاه

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x.$$

به عبارت دیگر، متناظر با هر مثلث جابجائی (۴)

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "g"] & \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & W \end{tikzcd}$$

از نگاشتهای همــوار میان زیرمجمــوعه‌هــای باز R^k، R^l، و R^m، مثلثی جابجائی از نگاشتهای خطی به صورت

$$\begin{tikzcd} & R^l \arrow[dr, "dg_y"] & \\ R^k \arrow[ur, "df_x"] \arrow[rr, "d(g \circ f)_x"'] & & R^m. \end{tikzcd}$$

خواهیم داشت.

۲. هرگاه I نگاشت همانی مجموعهٔ U باشد، آنگاه dI_x نگاشت همانی R^k است. به طور کلی می‌توان گفت که، اگر $U \subset U'$ مجموعه‌هائی باز باشند و

$$i : U \to U'$$

نگاشت جزئیت (۵) باشد، باز هم di_x نگاشت همانی R^k است.

و نیز توجه کنید که:

هرگاه $L : R^k \to R^l$ یک نگاشت خطی باشد، آنگاه $dL_x = L$.

به عنوان کاربرد ساده‌ای از این دو ویژگی، می‌توان ثابت کرد که:

حکم. هرگاه f یک وابرسانی میان مجموعه‌های باز $U \subset R^k$ و $V \subset R^l$ باشد، آنگاه k باید برابر l باشد و نگاشت خطی

$$df_x : R^k \to R^l$$

باید وارونپذیر باشد.

برهان. ترکیب $f^{-1} \circ f$ نگاشت همانی U است، در نتیجه $d(f^{-1})_y \circ df_x$ نگاشت همانی R^k می‌باشد. همچنین، $df_x \circ d(f^{-1})_y$ نگاشت همانی R^l است. پس df_x وارون دو طرفه دارد، و نتیجه می‌شود که $k = l$.

عکس جزئی این حکم نیز برقرار است. فرض کنیم $f : U \longrightarrow R^k$ نگاشتی هموار، و U در R^k باز باشد.

قضیهٔ تابع وارون. هرگاه $df_x : R^k \longrightarrow R^k$ وارونپذیر باشد، آنگاه f هر مجموعهٔ باز به قدر کافی کوچک U' حول x را به طور وابرسان روی مجموعهٔ باز $f(U')$ می‌نگارد.

(ر. ک. کتاب اپستل[1] [۲، ص. ۱۴۴] یا کتاب دیودونه[2] [۷، ص. ۲۶۸].)

توجه کنید که ممکن است f در سراسر قلمرو خود یک به یک نباشد، حتی اگر هر df_x هم وارونپذیر باشد. (مثالی آموزنده در این مورد نگاشت نمائی از صفحهٔ مختلط به خود آن است.)

اکنون فضای مماس TM_x را برای چند گونای هموار و دلخواه $M \subset R^k$ تعریف می‌کنیم. پرمایش

$$g : U \rightarrow M \subset R^k$$

از همسایگی $g(U)$ حول نقطهٔ x را در نظر می‌گیریم، که در آن $g(u) = x$. در اینجا U یک زیرمجموعهٔ باز R^m است. g را به‌عنوان نگاشتی از U به R^k تصور می‌کنیم تا مشتق آن، یعنی

$$dg_u : R^m \longrightarrow R^k,$$

معنی داشته باشد. TM_x را برابر $dg_u(R^m)$، یعنی نگارهٔ dg_u، قرار می‌دهیم. (قس. شکل ۱.)

1. T. M. Apostol　　2. J. Dieudonné

باید ثابت کنیم که عمل بالا به پرمایش خاص g بستگی ندارد. فرض می‌کنیم $h : V \to M \subset R^k$ پرمایش دیگری باشد از همسایگی $h(V)$ حول نقطهٔ x در M، و v را برابر $h^{-1}(x)$ قرار می‌دهیم. در این صورت $h^{-1} \circ g$ یک همسایگی u چون U_1 را به طور وابرسان بر یک همسایگی v چون V_1 می‌نگارد. نمودار جابجائی نگاشتهای هموار میان مجموعه‌های باز، یعنی

$$\begin{tikzcd} & R^k & \\ U_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h^{-1} \circ g"'] & & V_1 \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

نموداری جابجائی از نگاشتهای خطی به شکل

$$\begin{tikzcd} & R^k & \\ R^m \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr, "\cong", "d(h^{-1} \circ g)_u"'] & & R^m \arrow[ul, "dh_v"'] \end{tikzcd},$$

را پدید می‌آورد، و بی درنگ نتیجه می‌شود که

$$\text{نگارهٔ}(dh_v) = \text{نگارهٔ}(dg_u) .$$

بنابراین در تعریف TM_x ابهامی نیست.

برهان این که TM_x یك فضای برداری m بعدی است. چون

$$g^{-1} : g(U) \to U$$

نگاشتی است هموار، می‌توان یک مجموعهٔ باز مانند W حول x و یک نگاشت هموار چون $F : W \to R^m$ اختیار کرد که روی $W \cap g(U)$ با g^{-1} یکی باشد. با قرار دادن $U_0 = g^{-1}(W \cap g(U))$، نمودار

جا بجائی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, "F"] & \\ U \arrow[ur, "g"] \arrow[rr] \arrow[rr, phantom, shift left=3ex, "\text{نگاشت شمول}"] & & R^m \end{tikzcd}$$

و در نتیجه

$$\begin{tikzcd} & R^k \arrow[dr, "dF_x"] & \\ R^m \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr] \arrow[rr, phantom, shift left=3ex, "\text{نگاشت همانی}"] & & R^m. \end{tikzcd}$$

این نمودار بوضوح ایجاب می‌کند که dg_u دارای رتبهٔ m بـاشد، و در نتیجه نگارهٔ آن، یعنی TM_x، یک فضای برداری m بعدی خواهد بود.

اکنون دو چند گونای همـوار $M \subset R^k$ و $N \subset R^l$، و نگاشت هموار

$$f : M \to N$$

را درنظر می‌گیریم، بقسمی که $f(x) = y$. مشتق

$$df_x : TM_x \to TN_y$$

بدین طریق تعریف می‌شود: چون f هموار است، مجموعهٔ بازی چون W حول x، و تابع هموارى چون

$$F : W \to R^l$$

وجود دارد کـه روی $W \cap M$ با f یکی است. برای هـر $v \in TM_x$، $df_x(v)$ را برابر $dF_x(v)$ تعریف می‌کنیم.

برای توجیه این تعریف باید ثابت کنیم کـه $dF_x(v)$ متعلق است به TN_y و مقدار آن به انتخاب F خاصی بستگی ندارد.

برای این کار پرمایشهای

$$g : U \to M \subset R^k \quad \text{و} \quad h : V \to N \subset R^l$$

را برای همسایگیهای $g(U)$ حول نقطهٔ x و $h(V)$ حـول نقطهٔ y اختیار می‌کنیم. در صورت لزوم مجموعهٔ کـوچکتری جـایگزین U کرده، فرض می‌کنـیم $g(U) \subset W$ و f مجموعهٔ $g(U)$ را در $h(V)$ می‌نگارد. نتیجه این که نگاشت

$$h^{-1} \circ f \circ g: U \to V$$

بی‌ابهام تعریف شده است و هموار است.

نمودار جابجائی

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] & R^l \\ U \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1} \circ f \circ g"] & V \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

از نگاشتهای هموار میان مجموعه‌های باز را در نظر مـی‌گیریم. باگرفتن مشتق، نمودار جابجائی زیر متشکل از نگاشتهای خطی بدست می‌آید:

$$\begin{tikzcd} R^k \arrow[r, "dF_x"] & R^l \\ R^m \arrow[u, "dg_u"] \arrow[r, "d(h^{-1} \circ f \circ g)_u"] & R^n \arrow[u, "dh_v"'] \end{tikzcd}$$

که در آن $u = g^{-1}(x)$ و $v = h^{-1}(y)$.

بی درنگ نتیجه می‌شود کـه dF_x نگارهٔ dg_u، یعنی TM_x، را در نگارهٔ dh_v، یعنی TN_y، می‌نگارد. بعـلاوه نگاشت حـاصل، یعنی df_x، به F خاصی بستگی ندارد، زیرا همین تبدیل خطی را می‌توان از ترکیب سه تابع پائین نمودار بدست آورد، یعنی

$$df_x = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ (dg_u)^{-1} .$$

بدین ترتیب برهان بی‌ابهام بودن نگاشت خطی

$$df_x : TM_x \to TN_y$$

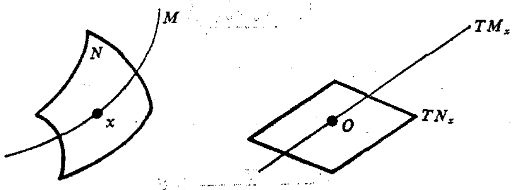
تمام می‌شود.

عمل مشتقگیری مانند پیش دارای دو ویژگی اساسی زیر است:

۱. (قاعدهٔ زنجیری). هرگاه $f : M \to N$ و $g : N \to P$ هموار باشند و $f(x) = y$، آنگاه

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x \,.$$

۲. هرگاه I نگاشت همانی M باشد، آنگاه dI_x نگاشت همانی TM_x است. به‌طور کلی می‌توان گفت که، هرگاه $M \subset N$ و نگاشت جزئیت به i نشان داده شود، آنگاه $TM_x \subset TN_x$ و نگاشت جزئیت آن di_x است. (قس. شکل ۲.)



شکل ۲. فضای مماس یك زیرچندگونا

اثبات دو مطلب بالا سرراست است.

این دو ویژگی، مانند پیش، منجر به حکم زیر می‌شوند:

حکم. هرگاه $f : M \to N$ یك وابرسانی باشد، آنگاه $df_x : TM_x \to TN_y$ یك یکسانی فضاهای برداری خواهد بود. در این حالت، نتیجتاً، بعد M باید برابر بعد N باشد.

مقدار عادی

فرض کنیم $f : M \to N$ نگاشتی هموار بین دو چندگونای همبعد[1] باشد. $x \in M$ را نقطهٔ عادی f می‌نامیم در صورتی که df_x

---

۱. این قید در § ۲ حذف خواهد شد.

وارونپذیر باشد. در این حالت از قضیهٔ تابع وارون نتیجه می‌شود که f یک همسایگی از نقطهٔ x در M را به طور وابرسان بر مجموعه‌ای باز در N می‌نگارد. نقطهٔ $y \in N$ در صورتی یک مقدار عادی خوانده می‌شود که $f^{-1}(y)$ فقط حاوی نقاط عادی باشد.

هرگاه df_x تکین باشد، آنگاه x یک نقطهٔ بحرانی f، و نگارهٔ آن، یعنی $f(x)$، یک مقدار بحرانی خوانده می‌شود. بنابراین، بسته به این که $f^{-1}(y)$ حاوی نقطه‌ای بحرانی باشد یا نباشد، $y \in N$ یک مقدار بحرانی است یا یک مقدار عادی.

ملاحظه کنید که هرگاه M فشرده، و $y \in N$ یك مقدار عادی باشد، آنگاه $f^{-1}(y)$ مجموعه‌ای است متناهی (احیاناً تهی). زیرا چون $f^{-1}(y)$ زیرمجموعه‌ای بسته از فضای فشردهٔ M است، لاجرم خود نیز فشرده است؛ و $f^{-1}(y)$ مجموعه‌ای‌گسسته (۶) نیز هست زیرا f در یک همسایگی هر نقطهٔ $x \in f^{-1}(y)$ یک به یک است.

برای هر تابع هموار $f : M \to N$، که درآن M فشرده، و $y \in N$ مقداری عادی باشد، تعداد نقاط $f^{-1}(y)$ را با $\# f^{-1}(y)$ نمایش می‌دهیم. اولین نکته‌ای که در بارهٔ $\# f^{-1}(y)$ شایان توجه است این است که به عنوان تابعی از y (مادامی که y فقط مقدارهای عادی را به خود بگیرد!) موضعاً ثابت است. یعنی یك همسایگی چون $V \subset N$ از y وجود دارد بقسمی که برای هر $y' \in V$،

$$\# f^{-1}(y') = \# f^{-1}(y).$$

[فرض می‌کنیم x_1، . . . ، x_k نقاط $f^{-1}(y)$ باشند، و همسایگیهای دو به دو از هم جدای U_1، . . . ، U_k متناظر با این نقاط را، که به طور وابرسان روی همسایگیهای V_1، . . . ، V_k در N نگاشته شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اکنون می‌توان V را چنین اختیار کرد:

$$V = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k - f(M - U_1 - \cdots - U_k).]$$

قضیهٔ اساسی جبر

به عنوان کاربردی از مفاهیم بالا، قضیهٔ اساسی جبر را ثابت‌می‌کنیم: هر چند جمله‌ای مختلط و غیر ثابت $P(z)$ دارای ریشه است.

برای اثبات، نخست لازم است که بحث خود را از صفحهٔ عددهای مختلط به یک چند گونای فشرده ببریم. کرهٔ یکهٔ $S^2 \subset R^3$ و وافکنش گنجنگاری

$$h_+ : S^2 - \{(0, 0, 1)\} \to R^2 \times \{0\} \subset R^3$$

از «قطب شمال» S^2، یعنی نقطهٔ $(1, 0, 0)$، را در نظرمی‌گیریم. (ر.ک. شکل ۳.) $R^2 \times \{0\}$ را با صفحهٔ عددهای مختلط یکی فرض می‌کنیم. نگاشت چند جمله‌ای P از $R^2 \times \{0\}$ به خودش متناظر است با نگاشتی چون f از S^2 به خود آن، که در آن

$$f(x) = h_+^{-1} P h_+(x) \text{ ،} x \neq (0, 0, 1) \text{ به ازای }$$
$$f(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

هموار بودن نگاشت f، حتی در همسایگی قطب شمال، مطلبی واضح است. برای اثبات این مطلب، افکنش گنجنگاری h_- از قطب جنوب $(0, 0, -1)$ را دخیل می‌کنیم و قرار می‌دهیم

$$Q(z) = h_- f h_-^{-1}(z).$$

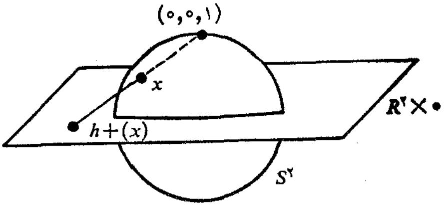
توجه کنید که، بنا بر هندسهٔ مقدماتی ،

$$h_+ h_-^{-1}(z) = z/|z|^2 = 1/\bar{z}.$$

حال‌اگر $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ که در آن $a_0 \neq 0$، با محاسبهٔ کوتاهی می‌توان نشان داد که

$$Q(z) = z^n / (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \dots + \bar{a}_n z^n).$$

پس Q در همسایگی ۰ هموار است، و از این، هموار بودن $f = h_{-}^{-1} Q h_{-}$ در همسایگی (۱ ,۰ ,۰) نتیجه می‌شود.



شکل ۳. افکنش گنجنگاری

سپس به‌این نکته توجه می‌کنیم که f فقط تعدادی متناهی نقطهٔ بحرانی دارد، زیرا P در هر نقطه به‌استثنای ریشه‌های مشتق چند جمله‌ای، یعنی $P'(z) = \sum a_{n-j}\, j z^{j-1}$، وابرسانی موضعی است، و چون P' متحداً صفر نیست، این مشتق می‌تواند تنها تعدادی متناهی ریشه داشته باشد. از آن جا که مجموعهٔ مقدارهای عادی f کره‌ای است که تعدادی متناهی از نقاط آن حذف شده‌اند، این مجموعه هموسته است. در نتیجه تابع ثابت موضعی $\# f^{-1}(y)$ باید در واقع روی این مجموعه ثابت باشد. چون $\# f^{-1}(y)$ نمی‌تواند همه‌جا صفر باشد، نتیجه می‌گیریم که هیچ‌جا صفر نیست. بدین‌ترتیب f نگاشتی پوشا است، و چند جمله‌ای P باید دارای ریشه باشد.

۲

قضیهٔ سارد و براون

در حالت کلی انتظار این که مقدارهای بحرانی یک تابع هموار مجموعه‌ای متناهی تشکیل دهند از واقعیت به دور است. با این حال این مجموعه، به مفهومی که در قضیهٔ بعد توصیف خواهد شد، مجموعه‌ای است «کوچک». این قضیه را سارد در ۱۹۴۲ به دنبال تحقیقات پیشین مرس[۱] به اثبات رسانید. (مرجعها [۳۰] و [۲۴].)

قضیه. فرض کنیم $f : U \to R^n$ نگاشت همواری باشد که روی مجموعهٔ باز $U \subset R^m$ تعریف شده باشد، و

$$C = \{x \in U \mid \text{رتبهٔ}\ (df_x) < n\} .$$

در این صورت اندازهٔ لبگ[۲] $f(C) \subset R^n$ صفر است[۳].

چون مجموعه‌ای که دارای اندازهٔ صفر باشد نمی‌تواند حاوی مجموعه‌ای باز و ناتهی باشد، از این قضیه نتیجه می‌شود که $R^n - f(C)$

1. A. P. Morse 2. Lebesgue

۳. به بیان دیگر، به ازای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، می‌توان $f(C)$ را با دنباله‌ای از مکعبها در R^n پوشاند بطوری که مجموع حجمهای n بعدی آنها از ε کوچکتر باشد.

باید همه‌جا در R^n چگال باشد[1] (۷).

برهان این قضیه در فصل۳ ارائه خواهد شد. برای این اثبات وجود مشتقهای متعدد f ضروری است(۸). (قس. مقالهٔ ویتنی[2] [۳۸].)

اساساً حالت $n \geqslant m$ مورد نظر ماست. هرگاه $n < m$، آنگاه واضح است که $C = U$، در نتیجه حکم قضیه این است که $f(U)$ دارای اندازهٔ صفر می‌باشد.

در حالت کلی نگاشت هموار $f : M \to N$ از چند گونائی از بعد m به چند گونائی از بعد n را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم C مجموعهٔ همهٔ نقاطی چون $x \in M$ باشد که به ازای آنها

$$df_x : TM_x \to TN_{f(x)}$$

رتبهٔ کوچکتر از n داشته باشد (یعنی پوشا نباشد). در این صورت C مجموعهٔ نقطه‌های بحرانی، $f(C)$ مجموعهٔ مقدارهای بحرانی، و متمم آن، یعنی $N - f(C)$، مجموعهٔ مقدارهای عادی تابع f خوانده می‌شود. (اینها با تعریفهائی که جلوتر، در حالت $m = n$، کردیم سازگارند.) چون می‌توان M را با دسته‌ای شمارشپذیر از همسایگی که هر یک با زیرمجموعهٔ بازی از R^m وابرسان باشد پوشاند، نتیجه می‌شود که:

نتیجه. (براون) . مجموعهٔ نقطه‌های عادی هر نگاشت هموار $f : M \to N$ همه‌جا چگال در N است.

برای بهره‌گیری از این نتیجه به لم زیر نیاز است:

---

۱. این مطلب در ۱۹۳۵ به وسیلهٔ Arthur B. Brown ثابت شد. همین مطلب مجدداً به وسیلهٔ Dubovickii در ۱۹۵۳ و به وسیلهٔ René Thom در ۱۹۵۴ کشف شد. (مرجعها [۵]، [۸]، و [۳۶].)

2. H. Whitney

لم ۱. هرگاه $f : M \to N$ نگاشتی‌هموار بین‌چند گوناهائی ازبعد‌های $m \geqslant n$ باشد و $y \in N$ یک مقدار عادی f باشد، آنگاه مجموعهٔ $f^{-1}(y) \subset M$ یک چند گونای هموار از بعد $m - n$ خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $x \in f^{-1}(y)$. چون y مقداری‌است عادی، df_x باید TM_x را به طور پوشا بر TN_y بنگارد. بنا براین هستهٔ df_x، یعنی $\mathcal{N} \subset TM_x$ یک فضای برداری $m - n$ بعدی خواهد بود.

اگر $M \subset R^k$، تابع خطی $L : R^k \to R^{m-n}$ را چنان اختیار می‌کنیم که روی $\mathcal{N} \subset TM_x \subset R^k$ وارونپذیر باشد. حال تابع

$$F : M \to N \times R^{m-n}$$

را با رابطهٔ $F(\xi) = (f(\xi), L(\xi))$ تعریف می‌کنیم. واضح است که مشتق این تابع، یعنی dF_x از دستور زیر بدست می‌آید:

$$dF_x(v) = (df_x(v), L(v)) \cdot$$

بنا براین dF_x وارونپذیر است. در نتیجه F یک همسایگی x، مثلاً U، را به طور وابرسان بر همسایگی V نقطهٔ $(y, L(x))$ می‌نگارد. توجه کنید که تحت اثر نگاشت F، $f^{-1}(y)$ متناظر است با ابرصفحهٔ $\{y\} \times R^{m-n}$. در واقع F مجموعهٔ $f^{-1}(y) \cap U$ را به طور وابرسان روی $(\{y\} \times R^{m-n}) \cap V$ می‌نگارد. از این ثابت می‌شود که $f^{-1}(y)$ چند گونای همواری است از بعد $m - n$.

به عنوان مثال، می‌توان با برهان ساده‌ای نشان داد که کرهٔ یکهٔ S^{m-1} یک چند گونای هموار است. تابع $f : R^m \to R$ را که به صورت

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2$$

تعریف شده است درنظر می‌گیریم. هر $y \neq 0$ یک مقدار عادی است، و چند گونای هموار $f^{-1}(1)$ همان کرهٔ یکه می‌باشد.

جلوتر گفته شد که اگر M' یک چندگونای محتوا در M باشد، برای هر $x \in M'$، TM'_x یک زیرفضای TM_x است. متمم عمود TM'_x در TM_x یک فضای برداری از بعد $m - m'$ است که فضای بردارهای قائم به M' در M در نقطهٔ x خوانده می‌شود.

در حالت خاص فرض کنیم $M' = f^{-1}(y)$، که در آن y یک مقدار عادی $f : M \to N$ باشد.

لم ۲. هستهٔ $df_x : TM_x \to T N_y$ درست برابر است با فضای مماس زیر چندگونای $M' = f^{-1}(y)$، یعنی $TM'_x \subset TM_x$. در نتیجه df_x متمم‌عمود TM'_x را به طور یکسان بر TN_y می‌نگارد.

برهان. از نمودار

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[d, "f"] \\ y \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

در می‌یابیم که df_x زیرفضای $TM'_x \subset TM_x$ را به صفر می‌نگارد. اگر بعدها را بشمریم، می‌بینیم که df_x فضای بردارهای قائم به M' را به طور یکسان بر TN_y می‌نگارد.

چندگونای لبه‌دار

لمهای بالا را می‌توان آن چنان قوت بخشید که در مورد نگاشتهای تعریف شده بر «چندگوناهای لبه‌دار» هموار نیز صادق باشند. نخست نیم‌فضای بستهٔ

$$H^m = \{(x_1, \cdots, x_m) \in R^m \mid x_m \geqslant 0\}$$

را درنظر می‌گیریم. بنا بر تعریف، لبهٔ این مجموعه، که به ∂H^m نمایش

داده می‌شود، عبارت است از ابر صفحهٔ $R^{m-1} \times \{0\} \subset R^m$.

تعریف. زیرمجموعهٔ $X \subset R^k$ یک چند گونای m بعدی هموار لبه‌دار نامیده می‌شود در صورتی‌که هر نقطهٔ $x \in X$ دارای یک همسایگی چون $X \cap U$ باشد که با مجموعهٔ باز $H^m \cap V$ از H^m وابرسان باشد. لبهٔ X، که به ∂X نمایش داده می‌شود، عبارت است از مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هائی در X که تحت اثر این چنین وابرسانیها با نقاط ∂H^m متناظر باشند.

بآسانی می‌توان نشان دادکه درتعریف ∂X ابهامی نیست (۹) و ∂X یک چند گونای هموار از بعد $m-1$ می‌باشد. درون X، یعنی $X - \partial X$، یک چند گونای هموار از بعد m است.

تعریف فضای مماس، یعنی TX_x، درست مانند فصل ۱ است، در نتیجه TX_x تمام یک فضای برداری m بعدی است، حتی‌اگر x یک نقطهٔ لبه‌ای باشد.

در این‌جا روشی برای ساختن مثالهائی چند عرضه می‌کنیم. فرض کنیم M یک چند گونای بی لبه باشد، و صفر مقداری عادی برای تابع $g : M \to R$ باشد.

لم ۳. مجموعهٔ نقاط x در M مقید به شرط $g(x) \geqslant 0$ یک چند-گونای هموار تشکیل می‌دهند که لبهٔ آن $y^{-1}(0)$ است.

برهان این لم عیناً شبیه برهان لم ۱ است.

مثال. گردهٔ یکهٔ D^m، که از همهٔ نقاط $x \in R^m$ مقید به شرط

$$1 - \sum x_i^2 \geqslant 0$$

تشکیل شده است، چند گونای هموراری است که لبه‌اش S^{m-1} می‌باشد.

اکنون نگاشتی هموار چون $f : X \to N$ از یک چند گونای m بعدی لبه‌دار به یک چند گونای n بعدی را در نظر می‌گیریم، و فرض

می‌کنیم که $m > n$.

لم ۴. هرگاه $y \in N$ هم برای f و هم برای تحدید آن به لبهٔ X، یعنی $f \mid \partial X$، مقداری عادی باشد، آنگاه $f^{-1}(y) \subset X$ یک چند‌گونای هموار $m - n$ بعدی لبه‌دار است. بعلاوه، $\partial(f^{-1}(y))$ دقیقاً برابر است با اشتراک $f^{-1}(y)$ با ∂X.

برهان. چون حکم مورد نظر یک ویژگی موضعی را بیان می‌کند، کافی است که حالت خاص نگاشت $f : H^m \to R^n$ و مقدار عادی $y \in R^n$ را درنظر بگیریم. فرض کنیم $\bar{x} \in f^{-1}(y)$. هرگاه $\bar{x}$ نقطه‌ای درونی باشد، آنگاه، مانند پیش، $f^{-1}(y)$ درهمسایگی $\bar{x}$ یک چند گونای هموار است.

فرض کنیم $\bar{x}$ یک نقطهٔ لبه‌ای باشد. نگاشت هموار $g : U \to R^n$ را چنان اختیار می‌کنیم که در سراسر یک همسایگی حول $\bar{x}$ در R^m تعریف شده باشد و روی $U \cap H^m$ با f یکی باشد. با جایگزین کردن همسایگی کوچکتری به جای U، در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که g فاقد نقاط بحرانی است. در نتیجه، $g^{-1}(y)$ یک چند گونای هموار از بعد $m - n$ است.

فرض کنیم $\pi : g^{-1}(y) \to R$ افکنش مختصاتی زیر باشد:

$$\pi(x_1, \ldots, x_m) = x_m .$$

ادعا می‌کنیم که صفر مقداری **عادی** برای π است. دلیل این واقعیت آن است که فضای مماس $g^{-1}(y)$ **در** نقطهٔ $x \in \pi^{-1}(0)$ برابر است باهستهٔ

$$dg_x = df_x : R^m \to R^n ;$$

اما فرض عادی بودن $f \mid \partial H^m$ در نقطهٔ x تضمین می‌کند که این هسته نمی‌تواند به طور کامل در $R^{m-1} \times \{0\}$ واقع باشد.

بنا براین، مجموعهٔ $U \cap (y)^{1-}f = H^m \cap (y)^{1-}g$، که از همهٔ نقاط $x \in g^{-1}(y)$ مقید به شرط $\pi(x) \geqslant 0$ متشکل است، بنا بر لم ۳، چند گونائی است هموار که لبه‌اش $\pi^{-1}(0)$ می‌باشد. برهان لم ۴ بدین نحو تمام می‌شود.

قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر

اکنون این نتیجه را برای اثبات یک لم اساسی بکار می‌بریم که به قضیهٔ معروف نقطهٔ ثابت براوئر منجر می‌شود. فرض کنیم X یک چند-گونای فشردهٔ لبه‌دار باشد.

لم ۵. هیچ نگاشت چون $f : X \to \partial X$ وجود ندارد که هر نقطهٔ ∂X را ثابت نگاهدارد.

برهان. (به تقلید از هیرش[1]). (۱۰) فرض‌کنیم یک چنین نگاشت f وجود داشته‌باشد. $y \in \partial X$ را یک مقدارعادی برای f می‌گیریم. چون y محققاً برای‌نگاشت همانی $f \mid \partial X$ نیزمقداری عادی است، نتیجه می‌شود که $f^{-1}(y)$ یک چند گونای هموار یک بعدی است، که لبه‌اش تنها از یک نقطهٔ

$$f^{-1}(y) \cap \partial X = \{y\}$$

تشکیل شده است. امـا $f^{-1}(y)$ فشرده نیز هست، و چون تنها چندگونا-های یک بعدی فشرده عبارتند از اجتماعهای از هم جدای تعدادی متناهی دایره و پاره خط[2]، پس $\partial f^{-1}(y)$ باید از تعدادی زوج نقطه تشکیل شده باشد. این تناقض، لم را به اثبات می‌رساند.

بویژه چون گردهٔ یکهٔ

$$D^n = \{x \in R^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\}$$

1. M. W. Hirsch

۲. برهانی از این مطلب در ضمیمهٔ کتاب آمده است.

یک چند گونای فشرده است که لبه‌اش کرهٔ یکهٔ S^{n-1} می‌باشد، پس، در حالت خاص، ثابت کرده‌ایم کـه نگاشت همانی S^{n-1} را نمی‌تـوان به نگاشت هموادی از D^n به S^{n-1} وسعت داد.

لم ۶. هر نگاشت هموار چون $g : D^n \to D^n$ دارای نقطه‌ای ثابت است (یعنی نقطه‌ای مانند $x \in D^n$ وجود دارد بقسمی که $g(x) = x$).

برهان. فرض می‌کنیم g نقطهٔ ثابتی نداشته باشد. برای $x \in D^n$، $f(x) \in S^{n-1}$ راآن نقطه از خطی که از x و $g(x)$ می‌گذرد می‌انگاریم که به x نزدیکتر است تا به $g(x)$. (ر. ک. شکل ۰.۴) در این صورت $f : D^n \to S^{n-1}$ نگاشتی است هموار بقسمی که برای هر $x \in S^{n-1}$، $f(x) = x$، و این بنا بر لم ۵ ممکن نیست. (برای تحقیق هموار بودن f، محاسبهٔ صریح زیر را انجام می‌دهیم: داریم $f(x) = x + tu$، که در آن

$$u = \frac{x - g(x)}{\| x - g(x) \|},$$

و

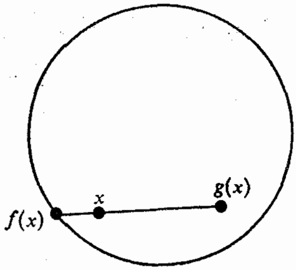
$$t = -x \cdot u + \sqrt{1 - x \cdot x + (x \cdot u)^2},$$

و عبارت زیر رادیکال همواره مثبت اکید است. در این‌جا و از این پس $\| x \|$ نمایندهٔ درازای اقلیدسی، یعنی $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$، خواهد بود.)

قضیهٔ نقطهٔ ثابت بر اوئر. هر نگاشت پیوستهٔ $G : D^n \to D^n$ دارای نقطه‌ای ثابت است.

برهان. با تقریب G به وسیلهٔ نگاشتی هموار، این قضیه را به لم بالا

تحویل می‌کنیم. به‌ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، بنا برقضیهٔ تقریب وایراشتراس[1]، یک چند جمله‌ای مانند $P_1 : R^n \to R^n$ وجود دارد بقسمی که برای هر $x \in D^n$، $\varepsilon > \| P_1(x) - G(x) \|$. اما ممکن است بعضی از نقاط D^n به وسیلهٔ P_1 به نقاط خارج D^n نگاشته شوند. برای تصحیح این اشکال، چند جمله‌ای



شکل ۴

$$P(x) = \frac{P_1(x)}{1 + \varepsilon}$$

را در نظرمی‌گیریم. واضح است که P گردهٔ D^n را در D^n مـی‌نگارد، و برای هر $x \in D^n$،

$$\| P(x) - G(x) \| < 2\varepsilon .$$

فرض می‌کنیم برای هر $x \in D^n$، $G(x) \neq x$. در این صورت تابع پیوستهٔ $\| G(x) - x \|$ روی D^n کهینـه‌ای چـون $\mu > 0$ را اختیـار می‌کند. اگـر $P : D^n \to D^n$ بـه صورت بـالا بقسمی اختیار شود کـه بـرای هـر x، $\mu > \| P(x) - G(x) \|$، بـوضوح خـواهیم داشت

1. Weierstrass Approximation Theorem، ر. ک. مثلاً به کتاب دیودونه [۷، ص. ۱۳۳].

$x \neq P(x)$. بدین ترتیب P نگاشتی هموار از D^n به خود آن است که نقطهٔ ثابتی ندارد. این نتیجه خلاف حکم لم۶ است، و برهان را به اتمام می‌رساند.

روشی که در بالا بکار برده شد اغلب در موقعیتهائی کلی نیز قابل استفاده است: برای آن که حکمی را در مورد نگاشتهای پیوسته ثابت کنیم، نخست آن را برای نگاشتهای هموار به اثبات می‌رسانیم و سپس کوشش می‌کنیم که با استفاده از یک قضیهٔ تقریب به حالت نگاشت پیوسته برسیم. (قس. فصل ۸، مسألهٔ ۴.)

۳

برهان قضیهٔ سارد[۱]

نخست صورت قضیه را یادآور می‌شویم:

قضیهٔ سارد. فرض کنیم U مجموعه‌ای باز در R^n باشد، و $f : U \to R^p$ تابعی هموار. همچنین مجموعهٔ نقطه‌های بحرانی f، یعنی همهٔ نقطه‌های $x \in U$ را که در آن

$$\text{رتبهٔ } (df_x) < P$$

به C نمایش می دهیم. در این صورت $f(C) \subset R^p$ دارای اندازهٔ صفر است.

یادداشت. حالتهای $n \leqslant p$ نسبتاً آسانند. (قس. کتاب درام[۲] [۲۹، ص. ۱۰].) اما ما برهان واحدی عرضه خواهیم کرد که این حالتها را به دشواری سایر حالات جلوه خواهد داد.

برهان به وسیلهٔ استقرا بر n صورت می‌گیرد. توجه کنید که صورت قضیه به‌ازای $n \geqslant 0$ و $p \geqslant 1$ معنی دارد. (بنابر تعریف، R^0 یک

---

۱. برهان ما مبتنی است بر برهان Pontryagin در [۲۸]. جزئیات برهان ما تا حدی آسانتر است زیرا که f را بی‌نهایت بار مشتقپذیر فرض کرده‌ایم.

2. de Rham

تک نقطه است.) برای آغاز استقرا، ملاحظه می‌کنیم که حکم قضیه محققاً به ازای $n = ۰$ صحیح است.

حال فرض می‌کنیم $C_۱ \subset C$ تشکیل شده باشد از همهٔ نقاطی چون $x \in U$ که مشتق اول f در x، یعنی df_x، صفر باشد. به‌طور کلی، فرض می‌کنیم C_i مجموعهٔ xهائی باشد که همهٔ مشتقهای پاره‌ای f از مرتبهٔ نابیشتر از i در x صفر شوند. بدین ترتیب دنباله‌ای *نزولی* از مجموعه‌های بسته، یعنی

$$C \supset C_۱ \supset C_۲ \supset C_۳ \supset \cdots$$

حاصل می‌شود. اثبات قضیه در سه مرحله انجام خواهد پذیرفت:

مرحله ۱. $f(C - C_۱)$ دارای اندازهٔ صفر است.

مرحله ۲. به ازای $i \geqslant ۱$، $f(C_i - C_{i+۱})$ دارای اندازهٔ صفر است.

مرحله ۳. $f(C_k)$ به ازای k به قدر کافی بزرگ دارای اندازهٔ صفر است.

یادداشت. هرگاه f تحلیلی حقیقی (۱۱) باشد، آنگاه اشتراک C_i-ها تهی خواهد بود مگرآن که f در سراسر یکی از مؤلفه‌های U ثابت باشد (۱۲). از این روی در این حالت برای اثبات قضیه کافی است مرحله‌های ۱ و ۲ ثابت شوند.

برهان مرحلهٔ ۱. این شاید دشوارترین مرحله‌ها باشد. می‌توان فرض کرد که $p \geqslant ۲$، زیرا اگر $p = ۱$، لازم می‌آید که $C = C_۱$. به قضیهٔ معروف فوبینی[۱] نیاز خواهیم داشت که به‌موجب آن، اگر مجموعهٔ

---

۱. Fubini برای ملاحظهٔ برهان ساده‌ای از قضیهٔ فوبینی (و نیز برهان دیگری از قضیهٔ سارد) ر. ك. کتاب Sternberg [۳۵، صفحات ۵۱ تا ۵۲]. استرنبرگ A را فشرده فرض می‌کند، ولی حالت کلی بسادگی از این حالت خاص نتیجه می‌شود.

اندازه‌پذیری چون

$$A \subset R^p = R^1 \times R^{p-1}$$

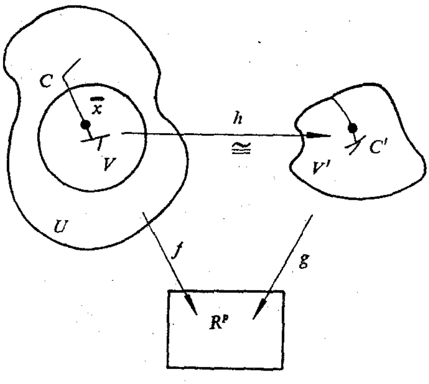
هرابر صفحهٔ $R^{p-1} \times$ {مقدار ثابت} را در مجموعه‌ای که اندازهٔ $1 - p$ بعدی صفر دارد قطع کند، خود A باید دارای اندازهٔ صفر باشد.

برای هر $\bar{x} \in C - C_1$، همسایگی بازی چون $V \subset R^n$ خواهیم یافت بقسمی کـه $f(V \cap C)$ دارای اندازهٔ صفر باشد. چون $C - C_1$ به وسیلهٔ تعدادی شمارشپذیر از این نوع همسایگی پوشیده می‌شود، صفر بودن اندازهٔ $f(C - C_1)$ نتیجه خواهد شد.

چون $\bar{x} \notin C_1$، یکی از مشتقهـای پاره‌ای، مثلاً $\partial f_1/\partial x_1$، در نقطهٔ $\bar{x}$ صفر نیست. نگاشت $h : U \to R^n$ را که به صورت

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \dots, x_n)$$

تعریف می‌شود درنظر می‌گیریـم. چـون $dh_{\bar{x}}$ وارونپذیـر است، h یک همسایگی از $\bar{x}$ چون V را به طور وابرسان بر مجمـوعه‌ای باز چون V' می‌نگارد. پس ترکیب $g = f \circ h^{-1}$ مجمـوعهٔ V' را در R^p خـواهد



شکل ۵. ساختن نگاشت g

نگاشت. توجه کنید که C'، یعنی مجموعهٔ نقاط بحرانی g، همان $h(V \cap C)$ است، درنتیجه $g(C')$، یعنی مجموعهٔ مقدارهای بحرانی g، با $f(V \cap C)$ مساوی خواهد بود.

توجه کنیدکه برای هر $(t, x_2, \cdots, x_n) \in V'$، $g(t, x_2, \cdots, x_n)$ به ابرصفحهٔ $\{t\} \times R^{p-1} \subset R^p$ تعلق دارد، پس g هر ابرصفحه را در یک ابرصفحه می‌نگارد. فرض می‌کنیم

$$g^t : (\{t\} \times R^{n-1}) \cap V' \to \{t\} \times R^{p-1}$$

تحدید g را نمایش دهد. توجه داشته باشید که یک نقطهٔ $\{t\} \times R^{n-1}$ برای g^t بحرانی است اگر، و تنها اگر، برای g بحرانی باشد، زیرا ماتریس مشتقهای اول g شکل زیر را دارد:

$$(\partial g_i / \partial x_j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & (\partial g_i^t / \partial x_j) \end{bmatrix}.$$

بنا بر فرض استقرا، مجموعهٔ مقدارهای بحرانی g^t در $\{t\} \times R^{p-1}$ دارای اندازهٔ صفر است. بنابراین مجموعهٔ مقدارهای بحرانی g هر ابر-صفحهٔ $\{t\} \times R^{p-1}$ را در مجموعه‌ای که دارای اندازهٔ صفر است قطع می‌کند. اما $g(C')$ اندازه پذیر است، زیرا می‌توان آن را به صورت اجتماعی شمارشپذیر از زیرمجموعه‌های فشرده نمایش داد. در نتیجه، بنا برقضیهٔ فوبینی، مجموعهٔ

$$g(C') = f(V \cap C)$$

دارای اندازهٔ صفر است، و برهان مرحلهٔ ۱ تمام می‌شود.

برهان مرحلهٔ ۲. برای هر $\bar{x} \in C_k - C_{k+1}$، مشتق $k+1$ می‌چون $\partial^{k+1} f_r / \partial x_{s_1} \cdots \partial x_{s_{k+1}}$ وجود داردکه صفر نیست. در نتیجه تابع

$$w(x) = \frac{\partial^k f_r}{\partial x_{s_2} \cdots \partial x_{s_{k+1}}}$$

در $\bar{x}$ صفر می‌شود ولی $\partial w / \partial x_{s_1}$ در این نقطه صفر نخواهد شد. برای صراحت فرض می‌کنیم‌که $s_1 = 1$. در این صورت نگاشت $h: U \to R^n$ که با:

$$h(x) = (w(x), x_2, \cdots, x_n)$$

تعریف شده است یک همسایگی $\bar{x}$ چون V را به‌طور وابرسان برمجموعهٔ بازی چون V' می‌نگارد. توجه کنید کـه h مجموعهٔ $C_k \cap V$ را در ابر-صفحهٔ $\{0\} \times R^{n-1}$ می‌نگارد. بار دیگر تابع

$$g = f \circ h^{-1}: V' \to R^p$$

را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که

$$\bar{g} : (\{0\} \times R^{n-1}) \cap V' \to R^p$$

تحدیــد g باشد. بنا بر استقرا، مجموعهٔ مقدارهــای بحــرانی $\bar{g}$ در R^p اندازهٔ صفر دارد. اما هر نقطه در $h(C_k \cap V)$ مسلماً بــرای $\bar{g}$ نقطه‌ای بحرانی است (زیــرا همهٔ مشتقهای از مرتبهٔ نابیشتر از k صفر می‌شوند). بنابراین $\bar{g}h(C_k \cap V) = f(C_k \cap V)$ دارای انــدازهٔ صفر است. چون $C_k - C_{k+1}$ به وسیلهٔ تعــدادی شمــارشپذیر از این Vهــا پوشیده می‌شود، نتیجه می‌گیریم که اندازهٔ $f(C_k - C_{k+1})$ صفر است.

برهان مرحلهٔ ۳. فرض کنیم $I^n \subset U$ مـکعبی به درازای ضلــع δ باشد. اگــر k به قدر کــافی بزرگ بـاشد (بـه بیـان دقیق $k > n/p - 1$)، ثابت خواهیم کرد که $f(C_k \cap I^n)$ انــدازهٔ صفر دارد. چــون می‌توان C_k را با تعدادی شمارشپذیر از چنین مکعبها پوشاند، صفر بودن انـدازهٔ $f(C_k)$ محرز می‌شود.

از قضیهٔ تیلور، و فشرده بودن I^n، و تعریف C_k نتیجه می‌گیریم که

$$f(x + h) = f(x) + R(x, h),$$

که در آن برای $x \in C_k \cap I^n$ و $x + h \in I^n$،

$$\| R(x, h) \| \leqslant c \, \| h \|^{k+1} . \qquad (1$$

در اینجا c مقداری است ثابت که فقط به f و I^n وابسته است. حال I^n را به r^n مکعب به درازای ضلع δ/r قسمت می‌کنیم، و I_1 را آن مکعبی فرض می‌کنیم که خاوی نقطه‌ای از C_k چون x باشد. در این صورت هر نقطهٔ I_1 را می‌توان به شکل $x + h$ نوشت، که در آن

$$\| h \| \leqslant \sqrt{n}\left(\frac{\delta}{r}\right). \qquad (2$$

از (۱ نتیجه می‌شود که $f(I_1)$ در مکعبی به درازای ضلع a/r^{k+1} و به مرکز $f(x)$ جای دارد، که در آن $a = 2c(\sqrt{n}\,\delta)^{k+1}$ مقداری است ثابت. بنابراین $f(C_k \cap I^n)$ در اجتماع مکعبهائی که تعدادشان از r^n تجاوز نمی‌کند و حجم کل آنها

$$V \leqslant r^n \left(\frac{a}{r^{k+1}}\right)^p = a^p r^{n-(k+1)p}$$

جای می‌گیرد. هرگاه $k + 1 > n/p$، آنگاه واضح است که وقتی که $r \longrightarrow \infty$، V به ۰ می‌گراید، بنابراین باید اندازهٔ $f(C_k \cap I^n)$ صفر باشد. بدین ترتیب برهان قضیهٔ سارد تمام می‌شود.

۴

درجهٔ به‌پیمانهٔ ۲ یك نگاشت

نگاشت همـوار $f: S^n \to S^n$ را در نظـرمـی‌گیریم. یـادآوری می‌کنیم که اگر y مقداری عادی باشد، $\# f^{-1}(y)$ تعداد جـوابهای x در معادلهٔ $f(x) = y$ را نمایش مـی‌دهد. ثابت خـواهیم کـرد کـه ردهٔ باقیمانده‌ای $\# f^{-1}(y)$ به‌پیمانـهٔ ۲ به‌مقدار عادی خاص y بستگی ندارد. این ردهٔ باقیمانده‌ای درجهٔ بـه‌پیمانهٔ ۲ نگاشت f نامیده مـی‌شود. به‌طور کلی، این تعریف در مورد هر نگاشت هموار

$$f: M \to N$$

معتبر است به‌فرض این کـه M یک چند گونای فشردهٔ بی‌لبه، N همو سته، و M و N هـردو دارای یک بعد باشند. (مـی‌توان N را نیـز فشرده و بی‌لبه فـرض کرد، زیرا در غیر ایـن صورت درجهٔ به‌پیمانهٔ ۲ لزوماً صفر خواهد بود(۱۳).) برای اثبات این مطلب دو مفهوم تازه معرفی می‌کنیم.

هموتوپی هموار و ایزوتوپی هموار

$X \subset R^k$ مفروض است. فرض می‌کنیم $X \times [0, 1]$ زیرمجموعهٔ[1]

---

۱. هرگاه M چندگونائی هموار و بی‌لبه باشد، آنگاه $M \times [0,1]$ چندگونای هموار‌ی است که لبه‌اش از دو «نسخه» از M تشکیل شده است. نقطه‌های لبه‌ای M نقطه‌هـای «گوشه‌ای» بـرای $M \times [0, 1]$ ایجـاد می‌کنند.

R^{k+1} متشکل ازهمهٔ (x, t)هائی باشدکه درآنها $x \in X$ و $0 \leqslant t \leqslant 1$.
دو نگاشت

$$f, g: X \to Y$$

را هموتوپیك هموار خوانند (و باختصار می‌نویسند $f \sim g$) در صورتی که نگاشت هموار‌ی چون $F: X \times [0, 1] \to Y$ وجود داشته باشد بقسمی که برای هر $x \in X$،

$$F(x, 0) = f(x) \text{ و } F(x, 1) = g(x).$$

این F یک هموتوپی هموار بین f و g خوانده می‌شود.

توجه کنید که رابطهٔ هموتوپی هموار یک رابطهٔ هم‌ارزی است. برای اثبات ترایا بودن‌آن از وجود تابع هموار $\varphi: [0, 1] \to [0, 1]$ استفاده می‌کنیم که چنین تعریف شده است:

$$\text{به‌ازای } 0 \leqslant t \leqslant 1/3 \text{، } \varphi(t) = 0 \text{،}$$
$$\text{به‌ازای } 2/3 \leqslant t \leqslant 1 \text{، } \varphi(t) = 1.$$

(مثلاً، فرض کنید $\varphi(t) = \lambda(t-\frac{1}{3})/(\lambda(t-\frac{1}{3}) + \lambda(\frac{2}{3}-t))$، که در آن به ازای $\tau \leqslant 0$ ، $\lambda(\tau) = 0$ ، و به ازای $\tau > 0$ ، $\lambda(\tau) = \exp(-\tau^{-1})$.) اگر F یک هموتوپی هموار مفروض بین f و g باشد، دستور $G(x, t) = F(x, \varphi(t))$ هموتوپی هموار G را تعریف می‌کند که واجد شرطهای زیرین است:

$$\text{به‌ازای } 0 \leqslant t \leqslant 1/3 \text{، } G(x, t) = f(x) \text{،}$$
$$\text{به‌ازای } 2/3 \leqslant t \leqslant 1 \text{، } G(x, t) = g(x).$$

حال اگر $f \sim g$ و $g \sim h$، به کمک آنچه در بالا ساختیم بآسانی می‌توان ثابت کرد که $f \sim h$.

اگر f و g وابرسانیهائی از X به Y باشند، می‌توان مفهوم

«ایزوتوپی هموار» بین f و g را نیز تعریف کرد. این نیز یک رابطهٔ هم‌ارزی خواهد بود.

تعریف. وابرسانی f با g درصورتی ایزوتوپیك هموار است که یک هموتوپی هموار چون $F: X \times [۰, ۱] \to Y$ از f به g وجود داشته باشد بقسمی که به‌ازای هر $t \in [۰, ۱]$، تابع

$$x \to F(x, t)$$

X را به‌طور وابرسان بر Y بنگارد.

خواهیم دید که درجهٔ به‌پیمانهٔ ۲ یک نگاشت فقط به‌ردهٔ هموتوپی هموارآن بستگی دارد:

لم هموتوپی. فرض کنیم $f, g: M \to N$ هموتوپیهائی هموار باشند بین چند گوناهای همبعد، بطوری که M فشرده و بی‌لبه باشد. هرگاه $y \in N$ مقداری عادی برای هردو نگاشت f و g باشد، آنگاه

$$\# f^{-۱} (y) \equiv \# g^{-۱} (y) (\text{پیمانهٔ ۲}).$$

برهان. فرض کنیم $F: M \times [۰, ۱] \to N$ یک هموتوپی هموار بین f و g باشد. نخست حالتی را درنظر می‌گیریم که y برای F نیز مقداری عادی باشد. در این صورت $F^{-۱} (y)$ یک چند گونای فشردهٔ یک بعدی است که لبه‌اش برابر

$$F^{-۱}(y) \cap (M \times \{۰\} \cup M \times \{۱\}) \\ = f^{-۱}(y) \times \{۰\} \cup g^{-۱}(y) \times \{۱\}$$

می‌باشد. بنابراین تعداد نقطه‌های لبه‌ای $F^{-۱}(y)$ برابر است با

$$\# f^{-۱}(y) + \# g^{-۱}(y).$$

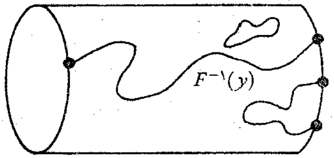
اما از فصل۲ بیاد می‌آوریم‌که تعداد نقطه‌های لبه‌ای هرچندگونای یک بعدی

فشرده زوج است. پس عـدد $\# f^{-1}(y) + \# g^{-1}(y)$ زوج است، و در نتیجه

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \ (\text{پیمانهٔ } ۲).$$

حال فرض می‌کنیم که y مقداری عادی برای F نباشد. از فصل ۱ بیاد می‌آوریم که $\# f^{-1}(y')$ و $\# g^{-1}(y')$ (تا وقتی که ازنقاط بحرانی دور بمانیم) تابعهائی ثابت موضعی از y' می‌باشند. بنا براین یک‌همسایگی از نقطهٔ y چون $V_1 \subset N$ وجود دارد که از نقاط عـادی f تشکیل شده است، و برای هر $y' \in V_1$،

$$\# f^{-1}(y') = \# f^{-1}(y);$$



شکل ۶. تعداد نقطه‌های لبه‌ای طرف چپ با تعداد نقطه‌های لبه‌ای طرف راست همنهشت به پیمانهٔ ۲ است

و نیز همسایگی‌مشابهی چون $V_2 \subset N$ وجود دارد بطـوری که برای هر $y' \in V_2$،

$$\# g^{-1}(y') = \# g^{-1}(y).$$

نقطه‌ای عادی برای F در $V_1 \cap V_2$، مثلاً z، را اختیار می‌کنیم. در این صورت

$$\# f^{-1}(y) = \# f^{-1}(z) \equiv \# g^{-1}(z) = \# g^{-1}(y),$$

که اثبات را به‌انجام می‌رساند.

درآینده به‌مطلب زیر نیاز خواهیم داشت:

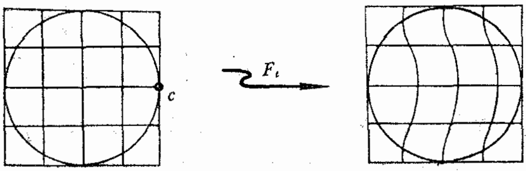
لم همگنی. فرض کنیم y و z دو نقطهٔ دلخواه درونـی چند گـونای هموار و هموستهٔ N باشند. در این صورت یك وا برسانی چون $h: N \to N$ وجود دارد که با تابع همانی ایزوتوپیک هموار است و y را به z منتقل می‌کند.

(اثبات لم در حالت خاص $N = S^n$ آسان است: کافی است h چرخشی اختیار شود که y را به z منتقل کند و بردارهای عمود به صفحهٔ گذرنده از y و z را ثابت نگاهدارد).

اثبات حالت کلی به‌طریق زیر است: نخست یک ایزوتوپی هموار از R^n به‌خودآن می‌سازیم که

۱) هرنقطهٔ خارج گوی یکه را ثابت نگهدارد، و

۲) مبدأ را به هر نقطهٔ مورد نظر از گوی یکهٔ باز منتقل کند.



شکل ۷. دگردیسی گوی یکه

فرض کنیم $\varphi: R^n \to R$ تابعی باشد هموار کـه در شرطهای زیرین صدق کند:

$$\text{به‌ازای } \|x\| < 1 \text{ ، } \varphi(x) > 0 \text{،}$$
$$\text{به‌ازای } \|x\| \geqslant 1 \text{ ، } \varphi(x) = 0 \text{.}$$

(مثلاً، فرض مـی‌کنیم $\varphi(x) = \lambda(1 - \|x\|^2)$ کـه در آن بـه‌ازای $t \leqslant 0$، $\lambda(t) = 0$، و به‌ازای $t > 0$، $\lambda(t) = \exp(-t^{-1})$). اگر

$c \in S^{n-1}$ بردار یکهٔ ثابت مفروضی باشد، دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\frac{\mathrm{d}\, x_i}{\mathrm{d}t} = c_i\, \varphi(x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, \ldots, n.$$

این دستگاه به‌ازای هر $\bar{x} \in R^n$ دارای جوابی‌است منحصر بفرد به‌صورت $x = x(t)$، که به‌ازای هر مقدار حقیقی t تعریف شده است و در شرط اولیهٔ

$$x(0) = \bar{x}$$

صدق می‌کند[1]. برای این جواب نماد $x(t) = F_t(\bar{x})$ را بکار خواهیم برد. درستی حکمهای زیر آشکار است:

۱) $F_t(\bar{x})$ برای هر t و $\bar{x}$ تعریف شده است و تابعی است هموار از t و $\bar{x}$،

۲) $F_0(\bar{x}) = \bar{x}$،

۳) $F_{s+t}(\bar{x}) = F_s \circ F_t(\bar{x})$.

بنابراین هر F_t یک وابرسانی از R^n برخودآن است. با تغییر t، مشاهده می‌کنیم که هر F_t با تابع همانی ایزوتوپیک هموار است، و برای آنها یک ایزوتوپی وجود دارد که همهٔ نقطه‌های خارج گوی یکه را ثابت نگاه‌می‌دارد. واضح است که، با انتخاب مناسب c و t، وابرسانی F_t مبدأ را به‌هر نقطهٔ مطلوب از گوی یکهٔ باز منتقل خواهد کرد (۱۴).

حال چند گونای همبستهٔ N را درنظر می‌گیریم. دو نقطهٔ N را «ایزوتوپیك» می‌نامیم درصورتی که ایزوتوپی هموارى وجود داشته باشد که یکی را به‌دیگری منتقل کند. واضح است که این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی است. هرگاه y یک نقطهٔ درونی باشد،آنگاه این نقطه دارای

۱. ر. ك. [۲۲، فصل ۴.۲].

یک همسایگی وابرسان با R^n است. در نتیجه استدلال بالا نشان می‌دهد که هر نقطهٔ به‌قدر کافی نزدیک y باآن «ایزوتوپیک» است. با بیان دیگر می‌توان گفت که، هر «ردهٔ ایزوتوپی» یک نقطهٔ درونی N مجموعه‌ای است باز، و درون N به‌رده‌های ایزوتوپی باز از هم‌جدا تجزیه می‌شود. اما درون N هموسته است، درنتیجه فقط یک چنین ردهٔ ایزوتوپی‌می‌تواند وجود داشته باشد. بدین‌ترتیب برهان تمام می‌شود.

اکنون می‌توانیم نتیجهٔ اصلی این بخش را به‌اثبات برسانیم. فرض کنیم M فشرده و بی‌لبه، N هموسته، و $f: M \to N$ تابعی هموار باشد.

قضیه. هرگاه y و z دو مقدار عادی f باشند، آنگاه

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# f^{-1}(z)(\text{پیمانهٔ } ۲).$$

این ردهٔ باقیماندهٔ مشترك، که درجه به‌پیمانه ۲ نگاشت f نام دارد، فقط به‌ردهٔ هموتوپی هموار f بستگی خواهد داشت.

برهان. اگر y و z دو مقدار عادی مفروض باشند، h را یک وابرسانی از N به N فرض می‌کنیم که با تابع همانی ایزوتوپیک باشد و y را به z منتقل کند. در این صورت z یک مقدار عادی ترکیب $h \circ f$ است. چون $h \circ f$ با f هموتوپیک است، لم‌هموتوپی ایجاب می‌کندکه

$$\#(h \circ f)^{-1}(z) \equiv \#f^{-1}(z)(\text{پیمانهٔ } ۲).$$

اما

$$(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} h^{-1}(z) = f^{-1}(y),$$

در نتیجه

$$\#(h \circ f)^{-1}(z) = \#f^{-1}(y).$$

بنابراین

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#f^{-1}(z)(\text{پیمانهٔ } ۲),$$

که همان مطلوب ماست.

این ردهٔ باقیماندهای مشترک را با $\deg_2 f$ نمایش میدهیم. اکنون فرض میکنیم f با g هموتوپیک هموار باشد. بنا برقضیهٔ سارد، عنصری مانند $y \in N$ وجود دارد که برای هردو تابع f و g مقداری است عادی. حال همنهشتی

$$\deg_2 f \equiv \# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \equiv \deg_2 g \ (\text{پیمانهٔ } 2)$$

نشان میدهد که $\deg_2 f$ یک ناوردای هموتوپی هموار است، و برهان تمام خواهد بود.

چند مثال. هرنگاشت ثابت مانند $c: M \to M$ دارای درجهٔ به پیمانهٔ ۲ زوج است (۱۵). نگاشت همانی I از M بهخودآن درجهٔ فرد دارد. بنابراین نگاشت همانی یك چند گونای فشردهٔ بیلبه با هیچ نگاشت ثابتی هموتوپیك نیست.

در مورد $M = S^n$، این نتیجه ایجاب میکند که هیچ نگاشت هموار $f: D^{n+1} \to S^n$ وجود نداشته باشد که هر نقطهٔ کرهٔ S^n را ثابت نگاهدارد. (یعنی، کره «توکش» (۱۶) هموار گرده نیست. قس. لم ۵ از فصل ۲.) زیرا یک چنین f هموتوپی هموار

$$F: S^n \times [0, 1] \to S^n, \ F(x, t) = f(tx)$$

را بین یک نگاشت ثابت و نگاشت همانی ایجاد خواهد کرد.

۵

چند گونای جهت‌دار

برای آن‌که درجه را به‌صورت عددی صحیح (به‌جای عددی صحیح به پیمانه ۲) تعریف کنیم باید مفهوم جهت را معرفی کنیم.

چند تعریف. یک جهت برای فضائی برداری حقیقی با بعد متناهی عبارت است از یک ردهٔ هم‌ارزی از پایه‌های مرتب به‌صورتی که در زیر شرح داده می‌شود: دو پایهٔ مرتب $(b_1, \ldots, b_n)$ و $(b'_1, \ldots, b'_n)$ جهت مشترکی مشخص می‌کنند اگر $b'_i = \sum a_{ij} b_j$ و $\det(a_{ij}) > 0$. این دو پایه جهتهای مخالف هم معین می‌کنند اگر $\det(a_{ij}) < 0$. بدین ترتیب یک فضای برداری با بعد مثبت فقط دو جهت قبول می‌کند. فضای برداری R^n دارای جهتی است متعارفی که متناظر پایهٔ $(1, 0, \ldots, 0)$، $(0, 1, 0, \ldots, 0)$، …، $(0, \ldots, 0, 1)$ می‌باشد.

درمورد فضای برداری صفر بعدی، مناسب است که یکی از دوعلامت $+1$ یا -1 را به‌عنوان «جهت» تعریف کنیم.

مقصود از یک چند گونای هموار جهت‌دار چند گونائی است چون M همراه با جهتی مشخص برای هرفضای مماس TM_x. اگر $m \geqslant 1$، لازم می‌داریم که این جهتها به‌طریق زیر بهم بپیوندند. برای هرنقطهٔ M باید یک همسایگی چون $U \subset M$، و یک وابرسانی h از U بر زیر مجموعه‌ای باز از R^m یا H^m وجود داشته باشد بقسمی که h

جهت نگهدار باشد، بدین معنی که برای هر $x \in U$، یکسانی dh_x جهت نسبت داده شده به TM_x را به‌جهت متعارفی R^m منتقل کند.

هرگاه M همو‌سته و جهت‌پذیر باشد، آنگاه M درست دو جهت دارد.

اگر M لبه‌دار باشد، می‌توان سه نوع بردار در فضای مماس TM_x در نقطهٔ لبه‌ای x تمیز داد.

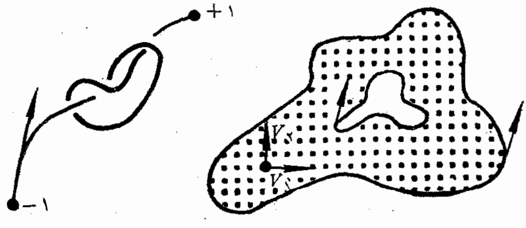
۱) بردارهائی که برلبه مماسند. اینها تشکیل یک زیرفضای برداری $m-۱$ بعدی $T(\partial M)_x \subset TM_x$ را می‌دهند؛

۲) بردارهای «برونگرا» که نیمفضای بازی محدود به $T(\partial M)_x$ بوجود می‌آورند؛

۳) بردارهای «درونگرا» که نیمفضای متمم را تشکیل می‌دهند.

هرجهتی که برای M اختیار شود، جهتی برای ∂M بدین صورت تعیین می‌کند: درهر نقطهٔ $x \in \partial M$، پایه‌ای مثبت(۱۷) $(v_۱, v_۲, \ldots, v_m)$ برای TM_x چنان اختیار می‌کنیم که $v_۲$ ، . . . ، v_m به‌لبه مماس باشند (فرض کرده‌ایم که $m \geqslant ۲$) وبردار $v_۱$ «برونگرا» باشد. دراین صورت $(v_۲, \ldots, v_m)$ جهت قراردادی برای ∂M را در نقطهٔ x مشخص خواهد کرد.

هرگاه بعد M برابر یک باشد، آنگاه برحسب این که یک بردار



شکل ۸. روش جهت دادن به‌لبه

مثبت در نقطهٔ لبه‌ای x درونگرا یا برونگرا باشد، به نقطهٔ x جهت ۱ — یا ۱ + را نسبت می‌دهیم. (ر. ک. شکل ۸.)

مثلاً کرهٔ یکهٔ $S^{m-1} \subset R^m$ را می‌توان به‌عنوان لبهٔ گردهٔ D^m جهت داد.

درجهٔ براوئر

اکنون فرض می‌کنیم M و N دو چند گونای n بعدی جهت‌دار و بی‌لبه باشند و

$$f: M \to N$$

تابعی هموار. هرگاه M فشرده و N هموسته باشد، آنگاه درجهٔ f بدین صورت تعریف می‌شود:

فرض کنیم $x \in M$ یک نقطهٔ عادی f باشد، پس

$$df_x: TM_x \to TN_{f(x)}$$

یک یکسانی خطی بین این دو فضای برداری جهت‌دار است. برحسب این که df_x جهت نگهدار یا جهت برگردان باشد، علامت‌آن را ۱ + یا ۱ — قرار می‌دهیم. برای هرمقدار عادی $y \in N$، تعریف می‌کنیم:

$$\deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{علامت}\,(df_x)\,.$$

عدد صحیح $\deg(f; y)$، مانند فصل ۱، تابعی است ثابت موضعی از y. این تابع روی زیر مجموعهٔ باز و چگالی از N تعریف شده است.

قضیهٔ A. عدد صحیح $\deg(f; y)$ به مقدار عادی خاص y بستگی ندارد.

این عدد درجهٔ f نامیده می‌شود و با نماد $\deg f$ نشان داده خواهد شد.

قضیهٔ B. هرگاه f با g هموتوپیك هموار باشد، آنگاه

$$\deg f = \deg g.$$

برهان این قضیه اساساً با برهانهای فصل ۴ یکی است. فقط لازم است در جهتها دقت شود.

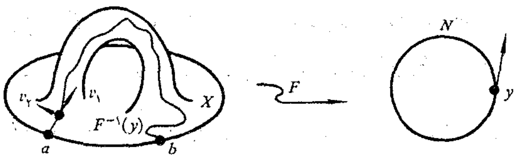
نخست این وضع را درنظر می‌گیریم: فرض می‌کنیم M لبهٔ چندگونای فشرده و جهت‌دار X باشد، و M به عنوان لبهٔ X جهت‌دار شده باشد.

لم ۱. هرگاه $f: M \to N$ را بتوان به تابع هموار $F: X \to N$ وسعت داد، آنگاه برای هر مقدار عادی y، $\deg(f; y) = 0$.

برهان. نخست فرض می‌کنیم که y علاوه براین که برای F مقداری است عادی، برای $f = F|M$ نیز مقداری عادی باشد. در این صورت چندگونای یک بعدی و فشردهٔ $F^{-1}(y)$ اجتماع تعدادی متناهی کمان و دایره است، بطوری که فقط نقطه‌های لبه‌ای کمانها بر $M = \partial X$ جای دارند. فرض می‌کنیم $A \subset F^{-1}(y)$ یکی از این کمانها باشد و $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$. نشان خواهیم داد که

$$\text{علامت}\,(df_a) + \text{علامت}\,(df_b) = 0,$$

و در نتیجه (با جمعبندی نسبت به همهٔ این کمانها) $\deg(f; y) = 0$.



شکل ۹. روش جهت دادن به $F^{-1}(y)$

جهت‌های X و N جهتی برای A بدین صورت مشخص می‌کنند:

برای $x \in A$ مفروض، پایه‌ای جهت‌دار با جهت مثبت چون $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ را برای TX_x چنان اختیار می‌کنیم که v_1 به A مماس باشد. در این صورت v_1 جهت مورد نظر برای TA_x را مشخص می‌کند اگر و تنها اگر $(v_2, \ldots, v_{n+1})$ به وسیلهٔ dF_x به پایهٔ با جهت مثبت برای TN_y منتقل شود.

فرض کنیم $v_1(x)$ بردار یکهٔ مثبت و مماس به A در x باشد. روشن است که v_1 تابعی است هموار از x، و $v_1(x)$ در یک نقطهٔ لبه‌ای (مثلاً b) برونگرا، و در نقطهٔ لبه‌ای دیگر a درونگرا است.

بی‌درنگ نتیجه می‌شود که

$$\text{علامت}\,(df_a) = -1\,,\quad \text{علامت}\,(df_b) = +1;$$

و مجموعشان صفر است. حال با جمع کردن نسبت به همهٔ کمانهای چون A، ثابت می‌شود که $\deg(f; y) = 0$.

به‌طور کلی، فرض کنیم y_0 برای f مقداری عادی باشد اما برای F عادی نباشد. تابع $\deg(f; y)$ در یک همسایگی نقطهٔ y_0 چون U ثابت است. در نتیجه، مانند فصل ۴، می‌توان مقداری عادی برای F مانند y در U یافت و مشاهده کرد که

$$\deg(f; y_0) = \deg(f; y) = 0.$$

بدین ترتیب لم ۱ به اثبات می‌رسد.

حال هموتوپی هموار $F : [0, 1] \times M \to N$ بین دو نگاشت

$$g(x) = F(1, x) \quad \text{و} \quad f(x) = F(0, x)$$

را درنظر می‌گیریم.

لم ۲. برای هر مقدار عادی مشترک برای f و g، چون y،

$$\deg(f; y) = \deg(g; y).$$

برهان. چندگونای $[0, 1] \times M$ را می‌توان به‌عنوان حاصلضرب جهت‌دار کرد. در این صورت لبهٔ این چندگونا از $M \times \{1\}$ (با جهت خود M) و $M \times \{0\}$ (با جهت عکس M) تشکیل خواهد شد. بنابراین درجهٔ $F \mid \partial([0, 1] \times M)$ در مقدار عادی y برابر است با تفاضل:

$$\deg (g; y) - \deg (f; y).$$

این تفاضل بنابر لم ۱ باید صفر باشد.

باقی برهانهای قضایای A و B کاملاً شبیه استدلالی هستند که در فصل۴ آمده است. اگر y و z هردو مقدارهائی عادی برای $f : M \to N$ باشند، وابرسانی $h : N \to N$ را چنان اختیار می‌کنیم که y را به z منتقل کند وبا نگاشت همانی ایزوتوپیک باشد. در این صورت h جهت‌نگهدار است، و می‌توان تحقیق کرد که

$$\deg (f; y) = \deg (h \circ f; h(y)) .$$

اما f با $h \circ f$ هموتوپیک هموار است، در نتیجه بنابر لم۲

$$\deg (h \circ f; z) = \deg (f; z) .$$

بنابراین $\deg (f; y) = \deg (f; z)$، و برهان تمام است.

چند مثال. تابع مختلط $z \to z^k$ ، $z \neq 0$، دایرهٔ یکه را با درجهٔ k بر خود آن می‌نگارد. (در این‌جا k ممکن است مثبت، منفی، یا صفر باشد.) نگاشت تبه شدهٔ

$$f : M \to \text{مقدار ثابت} \in N$$

دارای درجهٔ صفر است. درجهٔ وابرسانی $f : M \to N$، برحسب آن که f جهت نگهدار یا جهت برگردان باشد، برابر ۱ + یا ۱ − است.

در نتیجه هیچ وابرسانی یک چند گونای فشردهٔ بی‌لبه کــه جهت برگردان باشد با نگاشت همانی هموتوپیک هموار نخواهد بود.

نمونــه‌ای از وابرسانــی جهت برگــردان عبارت است از انعکاس $r_i : S^n \rightarrow S^n$، که در آن

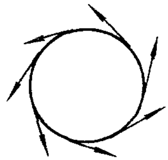
$$r_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_{n+1}).$$

نگاشت متقاطر S^n دارای درجهٔ $(-1)^{n+1}$ است. آن را می‌توان با توجه به‌این مطلب دریافت که نگاشت متقاطر ترکیبی است از $n+1$ انعکاس:

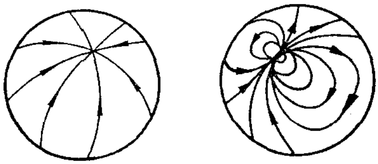
$$-x = r_1 \circ r_2 \circ \cdots \circ r_{n+1}(x).$$

بــدین ترتیب اگــر n زوج باشد، نگاشت متقاطــر S^n با تابع همــانی هموتوپیک همــوار نیست، و این واقعیتی است که نمــی‌توان با بررسی درجه به پیمانهٔ ۲ تشخیص داد.

به عنوان کــاربرد، و بـه تقلید از براوئر، نشان می‌دهیم کــه S^n یک میدان هموار از بردارهــای مماس ناصفر می‌پــذیرد اگر و تنهــا اگر n فرد باشد. (قس. شکلهای ۱۰ و ۱۱.)



شکل ۱۰ . یك میدان برداری ناصفر بر کرهٔ یك بعدی



شکل ۱۱ . کوششهای بی‌ثمر در مورد کرهٔ دوبعدی

تعریف. یک میدان برداری مماس هموار بر $M \subset R^k$ نگاشتی است هموار مانند $v : M \to R^k$ بقسمی‌که برای هر $x \in M$، $v(x) \in TM_x$. روشن است که این شرط در مورد کرهٔ $S^n \subset R^{n+1}$ با شرط زیر معادل خواهد بود:

(۱) برای هر $x \in S^n$، $v(x) \cdot x = 0$،

که در آن حاصل‌ضرب داخلی اقلیدسی بکار رفته است.

هرگاه $v(x)$ همواره ناصفر باشد، آنگاه می‌توان فرض کرد که

(۲) برای هر $x \in S^n$، $v(x) \cdot v(x) = 1$.

زیرا که درهرحال $\bar{v}(x) = v(x) / \| v(x) \|$ میدانی برداری است که این شرط را حائز است. بدین ترتیب می‌توان v را تابعی هموار از S^n به خود آن فرض کرد.

اکنون هموتوپی هموار

$$F : S^n \times [0, \pi] \to S^n$$

را به وسیلهٔ دستور $F(x, \theta) = x \cos \theta + v(x) \sin \theta$ تعریف می‌کنیم. می‌توان با محاسبه نشان داد که

$$F(x, \theta) \cdot F(x, \theta) = 1,$$

و نیز

$$F(x, 0) = x ,F(x, \pi) = - x \cdot$$

بنابراین نگاشت متقاطر S^n با نگاشت همانی هموتوپیک است. اما قبلاً دیده‌ایم که این وضعیت برای مقدارهای زوج n غیر ممکن است.

از طرفی دیگر، اگر $n = 2k - 1$، دستور صریح

$$v(x_1, \ldots, x_{2k}) = (x_2 , - x_1 , x_4 , - x_3, \ldots, x_{2k} , - x_{2k-1})$$

یک میدان برداری مماس ناصفـر را بر S^n تعریف مـی‌کند. برهان بدین ترتیب به پایان می‌رسد.

در ضمن، از مطالب بالا این نیز نتیجه مـی‌شود که برای مقـدارهای فرد n، نگاشت متقاطر S^n با نگاشت همانی هموتوپیک است. طبق قضیهٔ مشهوری از هوپف[1]، دو نگاشت از یـک چندگونای n بعدی همو‌سته به S^n هموتوپیک هموار هستند اگـر وتنهـا اگردرجهٔ آنها یـکی بـاشد. در فصل ۷ قضیه‌ای کلی ثابت خواهیم کردکه قضیهٔ هوپف ازآن نتیجه می‌شود.

---

1. Heinz Hopf

٦

میدانهای برداری و عدد اویلر[1]

به عنوان کاربرد دیگری از مفهوم درجه، به مطالعهٔ میدانهای برداری برچند گوناهای دیگر می‌پردازیم.

نخست مجموعهٔ باز $U \subset R^m$ و میدان برداری هموار

$$v : U \longrightarrow R^m$$

راکه در نقطهٔ $z \in U$ دارای یک صفرمنزوی است در نظر می‌گیریم. تابع

$$\bar{v}(x) = \frac{v(x)}{||v(x)||}$$

کرهٔ کوچکی به مرکز z را در کرهٔ یکه می‌نگارد[2]. درجهٔ این نگاشت را شاخص v در صفر z می‌نامیم و به ι نمایش می‌دهیم.

در شکل ۱۲ مثالهائی با شاخصهای ۱ −، ۰، ۱، و ۲ مصور شده‌اند. (خمهای «مماس» بر v که از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل

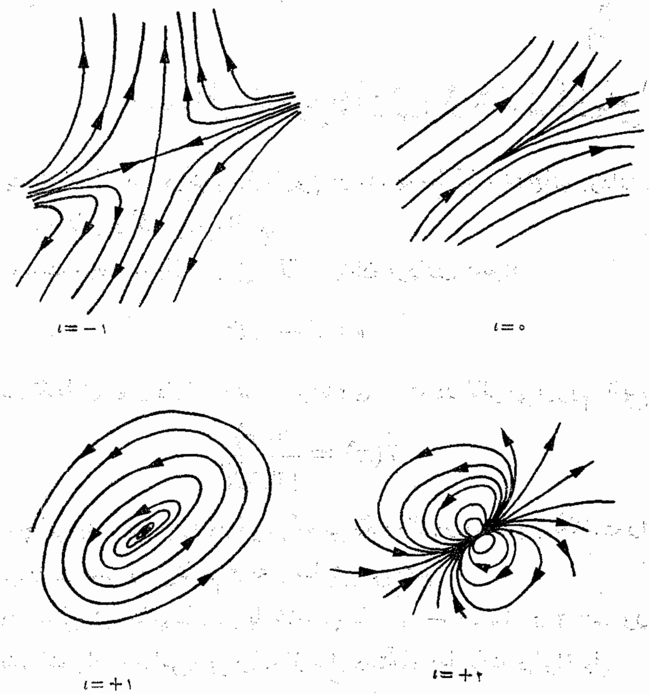
$$dx_i/dt = v_i(x_1, \cdots, x_n)$$

بدست می‌آیند رابطه‌ای نزدیک با v دارند. در واقع این خمها هستند که در شکل ۱۲ رسم شده‌اند.)

1. Euler

۲. هرکره را باید به عنوان لبهٔ گردهٔ متناظر جهت داد.

می‌توان با روش زیر صفری بدست آورد کــه شاخص آن دلخــواه باشد: در صفحهٔ عددهای مختلط، چند جملـه‌ای z^k میدان برداری همواری پدید می‌آورد که در مبدأ صفری با شاخص k دارد، وتابع $\bar{z}^k$ یک میدان برداری با صفری که دارای شاخص k — است ایجاد می‌کند.



شکل ۱۲. چند مثال از میدانهای برداری در صفحه

باید ثابت کنیم که مفهوم شاخص تحت اثــر وابرسانیهای U پایدار می‌ماند. برای توضیح این مطلب، وضع کلی را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $f : M \to N$ نگاشتی باشد بین دو چند گونا که هریک دارای

میدانی برداری باشد.

تعریف. میدانهای برداری v بر M و v' بر N تحت اثر f متناظرند در صورتی که به ازای هر $x \in M$، df_x بردار $v(x)$ را به بردار $v'(f(x))$ منتقل کند.

هرگاه f یک وابرسانی باشد، آنگاه روشن است که v' به طور منحصر به فرد به وسیلهٔ v مشخص می‌شود.

نماد

$$v' = df \circ v \circ f^{-1}$$

برای بیان این وضعیت بکار برده خواهد شد.

لم۱. فرض کنیم میدان برداری v بر U تحت اثر وابرسانی $f : U \to U'$ متناظر میدان برداری

$$v' = df \circ v \circ f^{-1}$$

بر U' باشد. در این صورت شاخص v در صفر منزوی z مساوی است با شاخص v' در $f(z)$.

با قبول صحت لم۱، می‌توان مفهوم شاخص برای میدان برداری w بر چندگونای دلخواه M را به صورت زیر تعریف کرد: هرگاه $g: U \to M$ پرمایش یک همسایگی z در M باشد، آنگاه ι، یعنی شاخص w در z، را مساوی شاخص میدان برداری متناظر بر U، یعنی $dg^{-1} \circ w \circ g$ در صفر $g^{-1}(z)$ تعریف می‌کنیم. به وضوح از لم ۱ نتیجه می‌شود که در تعریف ι ابهامی نیست.

برهان لم۱ مبتنی بر واقعیت ظاهراً نامربوطی است:

لم۲. هر وابرسانی جهت نگهدار از R^m به خود آن چون f با تابع همانی ایزوتوپیک هموار است.

(برخلاف R^m، S^m به ازای بسیاری ازمقادیر m دارای وابرسانیهای جهت نگهداری است که با تابع همانی ایزوتوپیک هموار نیستند. ر.ک. [۲۰، ص. ۴۰۴].)

برهان. می‌توان فرض کرد که $f(0) = 0$. چــون مشتق در نقطهٔ ۰ را می‌توان به صورت

$$df_0(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tx)}{t}$$

تعریف کرد، طبیعی است که ایزوتوپی

$$F : R^m \times [0, 1] \to R^m$$

را به وسیلهٔ دستور زیرین تعریف کنیم:

به‌ازای $0 < t \leqslant 1$، $F(x, t) = f(tx)/t$،
$F(x, 0) = df_0(x)$.

برای اثبات هموار بودن F، حتی در $t = 0$، f را به صورت[1]

$$f(x) = x_1 g_1(x) + \cdots + x_m g_m(x)$$

می‌نویسیم، که در آن g_1، . . .، g_m تابعهای همـوار مناسبی هستند، خاطرـ نشان می‌سازیم که به ازای هر مقدار t،

$$F(x, t) = x_1 g_1(tx) + \cdots + x_m g_m(tx).$$

نتیجه آن که f با نگاشت خطی df_0 ایزوتوپیک است، که خــود به وضوح با نگاشت همانی ایزوتـوپیک می‌باشد. بدین تــرتیب لم۲ به اثبات می‌رسد.

برهان لم۱. می‌توان فرض‌کردکه $0 = f(z) = z$ و U مجموعه‌ای

۱. ر. ک. [۲۲، ص. ۵]

کوژ باشد. هرگاه f جهت نگهدار باشد، آنگاه درست به روش بالا عمل کرده، خانواده‌ای یک پرمائی از نشانندههای

$$f_t : U \to R^m$$

را بقسمی می‌سازیم که نگاشت همانی $= f_0$، $f_1 = f$، و به ازای هر t، $f_t(0) = 0$. فرض‌کنیم v_t میدان برداری $df_t \circ v \circ f_t^{-1}$ بر $f_t(U)$ باشد که متناظر v بر U است. هر یک از این میدانهای برداری برکرهٔ به قدر کافی کوچکی به مرکز 0 تعریف شده است و بر آن هیچ جا صفر نیست. بنابراین شاخص $v = v_0$ در 0 باید برابر شاخص $v' = v_1$ در 0 باشد. این نکته، لم ۱ را برای وابرسانیهای جهت نگهدار به اثبات می‌رساند.

در مورد وابرسانیهای جهت برگردان، کافی است حالت خاص یک انعکاس را در نظر بگیریم که به ρ نمایش خواهیم داد. در این مورد

$$v' = \rho \circ v \circ \rho^{-1}،$$

در نتیجه تابع مربوط به آن بر ε — کره (کرهٔ به شعاع ε)، یعنی $\bar{v}'(x) = v'(x)/\| v'(x) \|$ در رابطهٔ:

$$\bar{v}' = \rho \circ \bar{v} \circ \rho^{-1}$$

صدق می‌کند. واضح است که درجه‌های $\bar{v}'$ و $\bar{v}$ برابرند، و درنتیجه برهان لم ۱ تمام خواهد بود.

قضیهٔ معروف زیر هدف مطالعهٔ بعدی ماست: فرض کنیم M چندـ گونای فشرده‌ای باشد، و w یک میدان برداری هموار بر M که همهٔ صفرهای آن منزوی باشند. هرگاه M لبه‌دار باشد، آنگاه w را در همهٔ نقاط لبه‌ای برونگرا فرض می‌کنیم.

قضیهٔ پوآنکاره[1] — هوپف. مجموع شاخصها درصفرهای یک چنین

1. Poincaré

میدان برداری، یعنی $\sum\iota$، برابر است با عدد اویلر[1]، یعنی

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i[\text{رتبهٔ } (H_i(M))].$$

در نتیجه این مجموع یک ناوردای توپولوژیک M است، یعنی به میدان برداری خاصی بستگی ندارد.

(صورت دوبعدی این قضیه در سال ۱۸۸۵ توسط پوآنکاره به‌اثبات رسید. به‌دنبال نتایج ناقص براوئر و آدامار[2]، قضیهٔ‌کامل را هوپف [۱۴] در ۱۹۲۶ ثابت کرد.)

ما قسمتی از این قضیه را ثابت می‌کنیم، و بقیـهٔ استدلال را به طور اجمالی بررسی خواهیم کرد. در آغـاز حالت خاص یک قلمرو فشرده در R^m را در نظر می‌گیریم.

فرض کنیم $X \subset R^m$ چند گونائی m بعدی، فشرده، و لبه‌دار باشد. نگاشت گاوس[3]

$$g : \partial X \to S^{m-1}$$

به هــر نقطه $x \in \partial X$ بــردار یکهٔ قائم برونگــرا در آن نقطه را نسبت می‌دهد.

لم ۳ (هوپف). هرگاه $v : X \to R^m$ یک میدان برداری هموار با صفرهای منزوی باشد، و v در نقـاط لبه‌ای X برونگرا بـاشد، آنگاه مجموع شاخصها، یعنی $\sum\iota$، برابر درجهٔ نگاشت گاوس از ∂X به S^{m-1} خـواهد بود. در نتیجه $\sum\iota$ به v خاص بستگی ندارد.

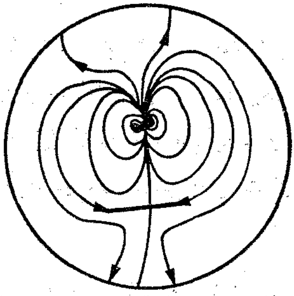
مثلاً مجموع شاخصهای یک میدان بـرداری روی گــردهٔ D^m که در

---

۱. دراین جا $H_i(M)$ گروه همولـوژی iام M است. این اولیــن و آخرین مراجعهٔ ما به نظریهٔ همولوژی است.

2. Hadamard 3. Gauss

امتداد لبه برونگرا باشد مساوی ۱ + است. (قس. شکل ۱۳.)



شکل۱۳. مثالی از $\Sigma\iota = +1$

برهان. با حذف یک ε ــ گوی دور هر صفر میدان برداری، چند گونای لبه‌دار تازه‌ای بدست می‌آوریم. تابع $\bar{v}(x) = v(x)/\|v(x)\|$ این چند گونارا در S^{m-1} می‌نگارد. بنابراین‌مجموع درجه‌های تحدید $\bar{v}$ به مؤلفه‌های لبه صفر است (۱۸). اما $\bar{v}\,|\,\partial X$ با g هموتوپیک است، و مجموع درجه‌های مربوط به سایر مؤلفه‌های لبه مساوی $\sum\iota$ ــ است. (علامت منفی به این علت ظاهر می‌شودکه هرکرهٔ داخلی به صورت جزئی از لبهٔ X جهت عکس جهت قراردادی را بخود می‌گیرد.) بنابراین

$$\deg(g) - \sum\iota = 0$$

چنان که حکم شده بود.

یادداشت. درجهٔ g به «خمیدگی کل» چند گونای ∂X نیز معروف است، زیرا می‌توان آن را به صورت حاصل‌ضرب یک مقدار ثابت در انتگرال خمیدگی گاوسی روی ∂X بیان کرد. عدد صحیح ثابت مورد بحث، همان عدد اویلر χ است. در حالتی که m فرد باشد این عدد برابر نصف عدد اویلر ∂X می‌باشد.

قبل از توسیع این قضیه به حالت چند گوناهای دیگر، مقدمات دیگری لازم است.

طبیعی است که کوشش کنیم شاخص میدان برداری v در صفر z را برحسب مشتقهای v در z حساب کنیم. نخست یک میدان برداری چون v را بر مجموعهٔ باز $U \subset R^m$ در نظر می‌گیریم و v را به صورت نگاشتی از U به R^m تجسم می‌کنیم. در این صورت $dv_z : R^m \rightarrow R^m$ معنی خواهد داشت.

تعریف. میدان برداری v در نقطهٔ z ناتبه شده است در صورتی که تبدیل خطی dv_z وارونپذیر باشد.

از این ویژگی نتیجه می‌شود که z نقطه‌ای است منزوی (۱۹).

لم ۴. بسته به این که دترمنیان dv_z مثبت یا منفی باشد، شاخص v در صفر ناتبه شدهٔ z برابر $+1$ یا -1 است.

برهان. v را به صورت یک وابرسانی از یک همسایگی کوژ z چون $U_\circ$ در R^m تجسم می‌کنیم، می‌توان فرض‌کردکه $z = \circ$. اگر v جهت‌نگهدار باشد، قبلاً دیده‌ایم که می‌توان $v | U_\circ$ را به طور هموار به نگاشت همانی دگردیس ساخت بی آن‌که صفر جدیدی پدیدآید. (ر.ک. لمهای ۱ و ۲). بنابراین شاخص محققاً برابر $+1$ است.

هرگاه v جهت برگردان باشد، آنگاه v را می‌توان به همین صورت به یک انعکاس دگردیس ساخت، در نتیجه $\iota = -1$.

به‌طور کلی صفر z متعلق به یک میدان برداری w بر چند گونای $M \subset R^k$ را در نظرمی‌گیریم. w را به‌عنوان نگاشتی از M به R^k تصور می‌کنیم، در نتیجه $dw_z : TM_z \rightarrow R^k$ تعریف شده است.

لم ۵. dw_z فضای TM_z را به زیر فضائی از $TM_z \subset R^k$ منتقل می‌کند، ودر نتیجه می‌توان dw_z را یك تبدیل خطی از TM_z به خودآن

فرض کرد. هرگاه دترمینان این تبدیل خطی مخالف صفر باشد، آنگاه z یك صفر منزوی w است، و بسته به این که دترمینان مثبت یا منفی باشد، شاخص این صفر برابر ۱ + یا ۱ — خواهد بود.

برهان. فرض می‌کنیم $h : U \to M$ پرمایشی از یک همسایگی z باشد. همچنین e^i ، i امین بردار پایهٔ R^m باشد، و

$$t^i = dh_u(e^i) = \partial h/\partial u_i ،$$

در نتیجه بردارهای t^1 ، . . . ، t^m برای فضای مماس $TM_{h(u)}$ تشکیل پایه می‌دهند. باید نگارهٔ $t^i = t^i(u)$ را تحت اثر تبدیل خطی $dw_{h(u)}$ پیدا کنیم. نخست توجه می‌کنیم که

$$\text{۱)}\qquad dw_{h(u)}(t^i) = d(w \circ h)_u(e^i) = \partial w(h(u))/\partial u_i.$$

فرض می‌کنیم $v = \sum v_j e^j$ میدان برداری بر U متناظر با میدان برداری w بر M باشد. بنابر تعریف $v = dh^{-1} \circ w \circ h$، در نتیجه

$$w(h(u)) = dh_u(v) = \sum v_j t^j.$$

بنابراین

$$\text{۲)}\qquad \partial w(h(v))/\partial u_i = \sum_j (\partial v_j/\partial u_i)t^j + \sum_j u_j(\partial t^j/\partial u_i).$$

از تلفیق (۱) و (۲) و محاسبه در نقطهٔ $h^{-1}(z)$ که صفر v است دستور زیر بدست می‌آید:

$$\text{۳)}\qquad dw_z(t^i) = \sum_j (\partial v_j/\partial u_i)t^j.$$

بنابراین dw_z فضای برداری TM_z را در خود آن می‌نگارد، و دترمینان این تبدیل خطی $TM_z \to TM_z$ برابر دترمینان ماتریس $(\partial v_j/\partial u_i)$ است. از این مطلب و لم ۴ حکم لم ۵ نتیجه می‌شود.

حال چند گونای فشردهٔ بی‌لبهٔ $M \subset R^k$ را در نظر می‌گیریم.

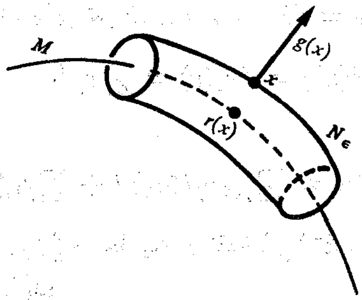
فرض می‌کنیم N_ε ‏ εـ همسایگی بستهٔ M باشد (یعنی مجموعهٔ همهٔ نقاطی چون $x \in R^k$ که برای نقطهٔ $y \in M$، $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$). اگر ε به قدر کافی کوچک باشد، می‌توان نشان داد که N_ε یک چندگونای هموار لبه‌دار است. (قس. فصل ۸، مسألهٔ ۱۱.)

قضیهٔ ۱. اگر میدان برداری v بر M فقط دارای صفرهای ناتبهگن باشد، مجموع شاخصها برابر درجهٔ نگاشت گاوس[1]

$$g : \partial N_\varepsilon \rightarrow S^{k-1}$$

خواهد بود. در نتیجه این مجموع به میدان برداری خاصی بستگی ندارد.

برهان. برای $x \in N_\varepsilon$، نزدیکترین نقطهٔ M به x را با $r(x)$ نشان می‌دهیم. (قس. فصل ۸، مسألهٔ ۱۲.) توجه کنید که بردار $x - r(x)$ بر فضای مماس M در $r(x)$ عمود است، زیرا در غیر این صورت $r(x)$



شکل ۱۴. ε ـ همسایگی M

۱. تعبیر متفاوت دیگری از این درجه توسط Allendoerfer و Fenchel داده شده است: درجهٔ g را می‌توان به صورت انتگرال یك خمیدگی اسکالر مناسب روی M بیان کرد، و بدین ترتیب تعمیم m بعدی قضیهٔ مشهور Gauss–Bonnet بدست می‌آید. (مرجعها [۱] و [۹]. همچنین ر. ك. Chern [۶].)

نزدیکترین نقطهٔ M به x نخواهد بود. هرگاه ε به قدر کافی کوچک باشد، آنگاه تابع $r(x)$ بدون ابهام تعریف شده و هموار است.

تابع مجذور فاصله، یعنی

$$\varphi(x) = \| x - r(x) \|^۲$$

را نیز درنظر می‌گیریم. با محاسبهٔ ساده‌ای معلوم می‌شود که گرادیان φ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\operatorname{grad} \varphi = ۲(x - r(x)).$$

بنابراین، برای هر نقطه از رویهٔ تراز $\partial N_\varepsilon = \varphi^{-۱}(\varepsilon^۲)$ چون x، بردار قائم یکهٔ برونگرا از دستور زیر بدست می‌آید:

$$g(x) = \frac{\operatorname{grad} \varphi}{\| \operatorname{grad} \varphi \|} = \frac{x - r(x)}{\varepsilon}.$$

v را به میدان برداری w بر همسایگی N_ε به صورت زیر وسعت می‌دهیم:

$$w(x) = (x - r(x)) + v(r(x)).$$

در این صورت w در امتدادکرانه برونگرا است، زیرا حاصلضرب داخلی $w(x) \cdot g(x)$ برابر است با $\varepsilon > ۰$. توجه کنید که w فقط در نقاط صفر v در M صفر می‌شود، زیرا دو جزء جمع $(x - r(x))$ و $v(r(x))$ بر هم عمودند. با محاسبهٔ مشتق w در صفر $z \in M$، می بینیم که

به ازای هر $h \in TM_z$، $dw_z(h) = dv_z(h)$،

به ازای هر $h \in TM_z^\perp$، $dw_z(h) = h$.

بنابراین، دترمینان dw_z برابر دترمینان dv_z است، در نتیجه شاخص w در صفر z برابر است با شاخص v در z.

حال با استفاده از لم۳ به این نتیجه می‌رسیم که مجموع شاخصها، یعنی $\sum \iota$، برابر درجهٔ g است. از این مطالب قضیهٔ ۱ به اثبات می‌رسد.

چند مثال. روی کرهٔ S^m میدانی برداری v وجود دارد که جهتش در هر نقطه به طرف «شمال» است[1]. درنزدیکی قطب جنوب بردارها به‌طرف دورازقطب می‌رویند، بنابراین شاخص ۱ + است. چون در حوالی قطب شمال بردارها به طرف قطب می‌رویند، پس شاخص $(-1)^m$ خواهد بود. بنابراین ناوردای $\sum \iota$، برابر ۰ یا ۲ خواهد بود بسته به‌این که m فرد یا زوج باشد. بدین ترتیب برهان تازه‌ای از این که هر میدان برداری بر یک کرهٔ زوج بعدی دارای صفر است بدست می‌آید.

برای هرچند گونای فرد بعدی بی‌لبه، ناوردای $\sum \iota$ صفر است. زیرا هرگاه به‌جای میدان برداری v میدان $-v$ را بکار بریم، آنگاه هرشاخص در $(-1)^m$ ضرب می‌شود، و تساوی

$$\sum \iota = (-1)^m \sum \iota$$

به ازای مقدارهای فرد m ایجاب می‌کند که $\sum \iota = 0$.

یادداشت. هرگاه برچند گونای همبستهٔ M، $\sum \iota = 0$، آنگاه بنابر قضیه‌ای منسوب بـه هـوپف میدانی برداری بر M وجود دارد کـه فاقد صفر است.

برای نمایاندن قدرت‌کامل قضیهٔ پوآنکاره ـ هوپف سه مرحلهٔ اضافی لازم است.

مرحلهٔ ۱. تساوی ناوردای $\sum \iota$ باعدد اویلر $\chi(M)$. کافی است یک میدان برداری ناتبه شده بر M بسازیم که برای آن $\sum \iota$ بـرابـر $\chi(M)$ باشد. زیباترین روش‌ساختن یک چنین میدان برداری بدین صورت است: بنابر قضیه‌ای از مارستن مرس[2]، همواره می‌توان تابعی حقیقی بر M پیدا

---

۱. مثلاً، می‌توان v را با دستور $v(x) = p - (p \cdot x)x$ تعریف کرد، که در آن p قطب شمال است. (ر. ك. شکل ۱۱.)

2. Marston Morse

کرد بطـوری که «گرادیان» آن، میدان بـرداری ناتبه شده‌ای باشد. علاوه براین، مرس نشان داد که مجموع شاخصهای صفرهـای یک چنین میدان برداری برابر است با عدد اویلر M. خواننده می‌تـواند بـرای مشاهدهٔ جزئیات این استـدلال بـه کتاب نـویسنده [۲۲، صفحـات ۲۹ تا ۳۶] مراجعه کند.

مـرحلهٔ ۲. اثبات قضیه برای میدانهای برداری‌که صفرهای آنها تبه‌شده باشند. نخست میدان برداری v بر مجموعهٔ باز U را در نظر می‌گیریم که در نقطهٔ z صفری منزوی داشته باشد. هرگاه

$$\lambda : U \to [\circ, \text{۱}]$$

در همسایگی کوچک $N_\text{۱}$ از نقطهٔ z مقدار ۱، و در خـارج همسایگی N که کمی بزرگتر از $N_\text{۱}$ است مقدار ۰ را بخـود بگیرد، و y یک مقدار عادی به قدر کافی کوچک v باشد، آنگاه میدان برداری

$$v'(x) = v(x) - \lambda(x)y$$

در N ناتبه شده[۱] است. مجمـوع شاخصها در صفرهـای واقـع در N ر می‌توان به عنوان درجهٔ نگاشت

$$\bar{v} : \partial N \to S^{m-\text{۱}}$$

محاسبه کرد، و در نتیجه این مقدار در سیر تغییراتی کـه در بالا انجام شد عوض نمی‌شود.

در حالت کلی میدانهای برداری واقع بر چند گـونای فشردهٔ M را درنظر می‌گیریم. اگر همین استدلال را به‌طور موضعی بکار بریم، می‌بینیم که می‌توان هر میدان برداری با صفرهای منزوی را با میدانی بـرداری با

---

۱. واضح است کـه v' در $N_\text{۱}$ ناتبه شده است. اما اگر y به قدر کافی کوچک باشد، v'در $N - N_\text{۱}$ اصلاً صفری نخواهد داشت.

صفرهای ناتبه شده عوض کرد بی آن که عدد صحیح $\iota \sum$ تغییر کند.

مرحلهٔ۴. چند گوناهای لبه‌دار. هرگاه $M \subset R^k$ لبه‌دار باشد، آنگاه می‌توان هرمیدان برداری v روی M را که در امتداد کرانه برونگرا باشد دوباره روی همسایگی N_ε وسعت داد بقسمی که میدان تازه در امتداد ∂N_ε برونگرا باشد. اما اشکالی در مورد هموار بودن در اطراف لبهٔ M ایجاد می‌شود. بدین ترتیب به‌جای این‌که N_ε یک چند گوناث هموار (یعنی مشتقپذیر از ردهٔ C^∞) باشد، فقط یک چند گونای C^1 خواهد شد. در نتیجه اگر اتساع v یعنی w به صورت سابق با

$$w(x) = v(r(x)) + x - r(x)$$

تعریف شود، در نزدیکی ∂M میدانی است فقط پیوسته. با وجود این اشکال، استدلال را می‌توان به یکی از این دو صورت به انجام رساند: یا این که نشان دهیم فرضهای مشتقپذیری قوی، که در گذشته قائل شدیم، در واقع ضروری نیستند، یا روشهای متفاوتی را بکار بندیم.

۷

کبردیسم کنجی ـ ساختهٔ پنتریاگین

درجهٔ یک نگاشت از M به M' فقط وقتی تعریف پذیر است که چند گوناهای M و M' جهت‌دار بوده و بعدهای برابر داشته باشند. ما به بررسی تعمیمی از مفهوم درجه که به پنتریاگین منسوب است خواهیم پرداخت. این تعمیم برای هرنگاشت هموار

$$f : M \to S^p$$

از یک چند گونای دلخواه فشرده و بی‌لبه به یک کره تعریف پذیر خواهد بود. نخست به بیان چند تعریف می‌پردازیم.

فرض کنیم N و N' زیرچند گوناهای n بعدی فشردهٔ M باشند و

$$\partial N = \partial N' = \partial M = \varnothing.$$

تفاضل بعدها، یعنی $m - n$ را نقص بعد زیرچند گوناها می‌نامیم.

تعریف. گوئیم N با N' در M کبردانت است در صورتی که بتوان زیرمجموعهٔ

$$N \times [0, \varepsilon[\; \cup \; N' \times]1 - \varepsilon, 1]$$

از $M \times [0, 1]$ را به یک چند گونای فشرده چون

$$X \subset M \times [0, 1]$$

وسعت داد به قسمی که

$$\partial X = N \times \{۰\} \cup N' \times \{۱\},$$

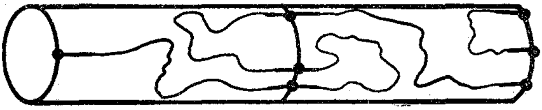
و همهٔ نقاط اشتراک X با $M \times \{۰\} \cup M \times \{۱\}$ در مجموعهٔ ∂X باشند.

روشن است که کبردیسم یک رابطهٔ هم‌ارزی است. (ر. ک. شکل ۱۵.)

تعریف. یک کنج برای زیرچندگونای $N \subset M$ تابع هموار است چون $\mathbf{v}$ که به هر نقطهٔ $x \in N$ پایه‌ای

$$\mathbf{v}(x) = (v^1(x), \ldots, v^{m-n}(x))$$

برای فضای $TN_x^{\perp} \subset TM_x$، یعنی فضای بردارهای عمود به N در M در نقطهٔ x، نسبت می‌دهد. (ر. ک. شکل ۱۶.)



شکل ۱۵. بهم چسباندن دو کبردیسم در M

جفت $(N, \mathbf{v})$ یک زیر چندگونای کنج‌دار M نامیده می‌شود. دو زیرچندگونای کنج‌دار $(N, \mathbf{v})$ و $(N', \mathbf{w})$ کبردانت کنجی هستند در صورتی که یک کبردیسم چون $X \subset M \times [۰, ۱]$ بین N و N' و نیز کنجی $\mathbf{v}$ برای X وجود داشته باشند بقسمی که

به ازای $(x, t) \in N \times [۰, \varepsilon[$، $u^i(x, t) = (v^i(x), ۰)$،
به‌ازای $(x, t) \in N' \times]۱ - \varepsilon, ۱]$، $u^i(x, t) = (w^i(x), ۰)$.

این نیز یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

حال نگاشت هموار $f : M \to S^p$ و مقدار عــادی $y \in S^p$ را در نظرمی‌گیریم. نگاشت f کنجی برای چند گونای $f^{-1}(y)$ به‌ترتیب زیر ایجادمی‌کند: پایهٔ مثبت $\mathbf{v} = (v^1, \ldots, v^p)$ را برای فضای مماس TS^p_y درنظر می‌گیریم. ازصفحهٔ ۲۸ به یاد می‌آوریم‌که در هرنقطهٔ $x \in f^{-1}(y)$ نگاشت

$$df_x : TM_x \to TS^p_y$$

زیر فضای $Tf^{-1}(y)_x$ را به صفر و متمم قائـم آن، $Tf^{-1}(y)^{\perp}_x$، را به طور یکسان بر TS^p_y می‌نگارد. بنــابراین بردار منحصر بفردی

$$w^i(x) \in Tf^{-1}(y)^{\perp}_x \subset TM_x$$

وجود دارد که تحت اثر df_x بــه v^i نگاشته می‌شود. کنج حــاصل برای $f^{-1}(y)$، یعنــی $(w^1(x), \ldots, w^p(x))$، را برای سهــولت بــا نماد $\mathbf{w} = f^*\mathbf{v}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف. چند گونای کنجــدار $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{v})$ را یک چند گونای پنتریاگین وابسته به f می‌نامند.

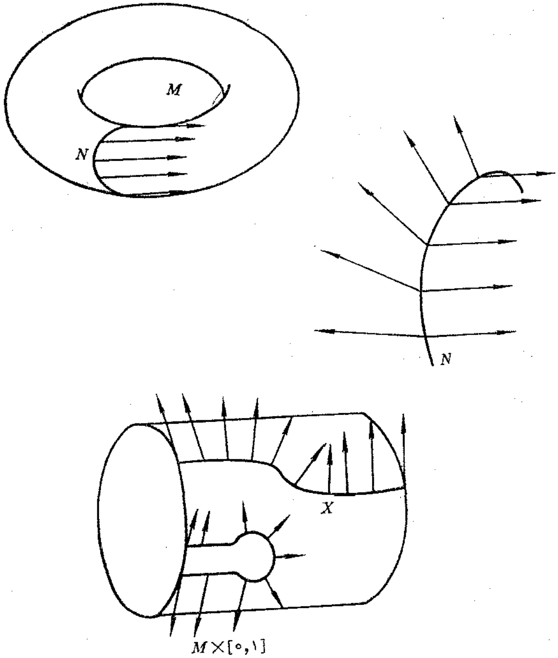
البته f چند گوناهای پنتریاگین متعدد دارد، که به مقدارهای مختلف y و $\mathbf{v}$ بستگی دارند، ولی خواهیم دید که همهٔ آنها در یک ردهٔ کبردیسم کنجی جای دارند:

قضیهٔ A. هرگاه y' مقدارعــادی دیگــری برای f، و $\mathbf{v}'$ پایــهٔ مثبت دیگری برای $TS^p_{y'}$ باشد، آنگاه چند گونای کنجدار $(f^{-1}(y'), f^*\mathbf{v}')$ با $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{v})$ کبردانت کنجی است.

قضیهٔ B. دو نگاشت از M به S^p هموتوپیک هموار هستند اگر و تنها اگر چند گوناهای پنتریاگین وابسته به آنها کبردانت کنجی باشند.

قضیهٔ C. هر زیر چند گــونای کنجــدار فشردهٔ $(N, \mathbf{w})$ با نقص بعــد

p در M چند گونای پنتریاگین نگاشت همـواری چون $f : M \to S^p$ است.



شکل ۱۶. زیر چندگوناهای کنجدار و یك کبردیسم کنجی

بدین ترتیب تناظری یک به یک میان رده‌های هموتـوپی نگاشتها و رده‌های کبردیسم کنجی از زیرچند گوناها وجود دارد.

برهان قضیهٔ A شباهت زیادی به استدلالهای بخشهای ۴ و ۵ خواهد داشت. این برهان مبتنی بر سه لم خواهد بود.

لم ۱. هرگاه $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ دو پایهٔ مثبت مختلف در نقطهٔ y باشند، آنگاه چند گونای پنتریـاگین $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{v})$ بـا چند گـونای پنتریـاگین

$(f^{-1}(y), f^*\mathbf{v}')$ کبردانت کنجی است.

برهان. در فضای همهٔ پایه‌های مثبت برای TS^p_y، خــم هموار‌ی از b به $\mathbf{v}'$ اختیار می‌کنیم. این کار امکان پذیر است زیرا می‌توان این فضا را با $GL^+(p, R)$، یعنی فضای ماتریسهــای حقیقــی $p \times p$ بادتــرمینان مثبت، یکی دانست. در نتیجه این فضا همو‌سته خواهد بود (۲۰). این خم کنج لازم برای کبردیسم $f^{-1}(y) \times [۰, ۱]$ را ایجاد می‌کند.

اغلب $f^*\mathbf{v}$ را حــذف کرده، فقط می‌گــوئیم «چند گــونای کنجدار $f^{-1}(y)$.»

لم ۲. هرگاه y مقداری عــادی برای f باشد و z به قــدر کافی به y نزدیک باشد، آنگاه $f^{-1}(z)$ با $f^{-1}(y)$ کبردانت کنجی است.

برهان. چون $f(C)$، یعنی مجموعهٔ مقدارهای بحرانی، فشرده است، می‌توان $\varepsilon > ۰$ را چنان اختیار کرد کــه ε - همســایگی y فقط حــاوی نقطه‌های عادی باشد. برای هر z مفروض که $\|z-y\| < \varepsilon$، خانوادهٔ یک پرمائی هموار‌ی ازچرخشهای $r_t: S^p \to S^p$ (یعنی یک ایزوتوپی) اختیار می‌کنیم بقسمی که $r_1(y) = z$ و شرطهای زیر برقرار باشند:

۱) r_t به ازای $۰ \leqslant t < \varepsilon'$ تابع همانی باشد،

۲) r_t به ازای $۱ - \varepsilon' < t \leqslant ۱$ برابر r_1 باشد، و

۳) هر $r_t^{-1}(z)$ روی دایرهٔ عظیمه‌ای که از y و z می‌گــذرد واقــع باشد و در نتیجه مقداری عادی برای f خواهد شد.

هموتوپی

$$F : M \times [۰, ۱] \to S^p$$

را به‌صورت $F(x, t) = r_t f(x)$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که به ازای هر t، z مقداری عادی برای ترکیب

$$r_t \circ f : M \longrightarrow S^p$$

است. بنا براین محققاً z مقداری عـادی برای نگاشت F خـواهد بود. در نتیجه

$$F^{-1}(z) \subset M \times [0, 1]$$

یک چند گونای کنجدار است و یک کبردیسم کنجی میان چنـد گوناهای کنجدار $f^{-1}(z)$ و $f^{-1}(y)$ $(r_1 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}r_1^{-1}(z) =$ ایجاد می‌کند. از این مطلب لم ۲ به اثبات می‌رسد.

لم ۳. هرگاه f و g هموتوپیک هموارباشند و y مقداری عادی برای هر دو تابع باشد، آنگاه $f^{-1}(y)$ با $g^{-1}(y)$ کبردانت کنجی است.

برهان. هموتوپی F را به صورت زیر اختیار می‌کنیم:

به ازای $0 \leqslant t < \varepsilon$، $F(x, t) = f(x)$،

به ازای $1 - \varepsilon < t \leqslant 1$، $F(x, t) = g(x)$.

مقدار عادی z برای تابع F را چنـان نزدیک بـه y اختیار می‌کنیم کـه $f^{-1}(z)$ با $f^{-1}(y)$، و در نتیجـه $g^{-1}(z)$ با $g^{-1}(y)$ کبردانت کنجی باشد. در این صورت $F^{-1}(z)$ یک چند گـونای کنجـدار است و یک کبردیسم کنجی بین $f^{-1}(z)$ و $g^{-1}(z)$ ایجاد می‌کند، و اثبات لـم ۳ به انجام می‌رسد.

برهان قضیهٔ A. هرگاه y و z دو مقدار عادی مفروض برای f بـاشند، می‌توان چرخشهای

$$r_t : S^p \longrightarrow S^p$$

را طـوری اختیار کـرد کـه r_0 تابع همانی باشد و $z = r_1(y)$. بدین ترتیب f با $r_1 \circ f$ هموتوپیک می‌شود، در نتیجه $f^{-1}(z)$ با

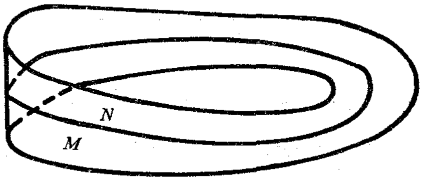
$$(r_1 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}r_1^{-1}(z) = f^{-1}(y)$$

کبردانت کنجی است، و برهان قضیهٔ A تمام خواهد بود.

برهان قضیهٔ C مبتنی بر مطلب زیر است: فرض‌کنیم $N \subset M$ زیر-چند گونای کنجداری باشد با نقص بعد p و کنج v. همچنین N را فشرده، و M و N را بی‌لبه فرض می‌کنیم.

قضیهٔ همسایگی حاصل ضربی. N دارای یک همسایگی در M وابرسان با $N \times R^p$ است. بعلاوه وابرسانی مربوط را می‌توان چنان اختیار کرد که هر $x \in N$ متناظر $(x, 0) \in N \times R^p$ باشد و بر کنج قائم $\mathbf{v}(x)$ متناظر پایهٔ متعارفی R^p.

یادداشت. زیرچند گوناهائی وجود دارند که دارای همسایگی حاصل‌ضربی نیستند. (قس. شکل ۱۷.)



شکل ۱۷. زیر چندگونائی کنج ناپذیر

برهان. نخست فرض می‌کنیم M فضای اقلیدسی R^{n+p} باشد. نگاشت $g : N \times R^p \to M$ که با

$$g(x\,; t_1, \ldots, t_p) = x + t_1 v^1(x) + \cdots + t_p v^p(x).$$

تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم. واضح است که $dg_{(x;\, 0, \ldots, 0)}$ وارونپذیر است، در نتیجه g یکی از همسایگیهای $(x, 0) \in N \times R^p$ را به طور وابرسان بر مجموعه‌ای باز می‌نگارد.

ثابت خواهیم کرد که g در سراسر همسایگی $N \times U_\varepsilon$ از $N \times \{0\}$ یک به یک است به‌شرط آن که $0 < \varepsilon$ به قدر کافی کوچک باشد؛ در

این جا U_ε εـ همسایگـی ۰ در R^p می‌باشد. اگر این نگاشت یک به‌ـ یک نباشد، جفتهائـی مـانند $(x, u) \neq (x', u')$ در $N \times R^p$ وجود دارند بقسمی که $\|u\|$ و $\|u'\|$ به قدر دلخواه کوچکند و

$$g(x, u) = g(x', u').$$

چون N فشرده است، می‌توان دنباله‌ای از این جفتها را چنان اختیار کرد که x ها به نقطه‌ای، مثلاً $x_\circ$، و x' ها بـه $x'_\circ$ بگـرایند، $u \to \circ$ و $u' \to \circ$. در این صورت واضح است که $x_\circ = x'_\circ$، و این با یک به‌ـ یک بودن g در یک همسایگی $(x_\circ, \circ)$ متناقض است.

بنابراین g مجموعهٔ $N \times U_\varepsilon$ را بـه طور وابرسان روی مجموعـهٔ بازی می‌نگارد. اما U_ε تحت اثر تناظر

$$u \to \frac{u}{۱ - \|u\|^۲/\varepsilon^۲}$$

با تمـام فضای اقلیـدسی R^p وابرسـان است. چـون $g(x, \circ) = x$ و $dg_{(x, \circ)}$ همهٔ ویژگیهای مورد نظر را دارد، پس قضیهٔ همسـایگی حاصل‌ـ ضربی در حالت خاص $M = R^{n+p}$ به اثبات می‌رسد.

در حالت کلی لازم است ژئودزیکهای M را جایگزین خطهای‌راست در R^{n+p} کنیم. با بیان دقیقتر می‌توان گفت که، فرض کنیم $g(x; t_۱, \ldots, t_p)$ نقطهٔ انتهائی پاره‌ژئودزیکی در M باشد به‌درازای $\|t_۱ v^۱(x) \cdots + t_p v^p(x)\|$ که از x با بـردار سرعت اولیـهٔ

$$\frac{t_۱ v^۱(x) + \cdots + t_p v^p(x)}{\|t_۱ v^۱(x) + \cdots t_p v^p(x)\|}$$

آغاز می‌شود. خواننده‌ای که با ژئودزیکها آشنائی داشتـه باشد مـی‌تواند بآسانی تحقیق کند که هرگاه ε به قدر کافی کوچک باشد، آنگاه

$$g : N \times U_\varepsilon \to M$$

بی ابهام تعریف شده و هموار است. باقیماندهٔ برهان درست به ترتیب پیش است.

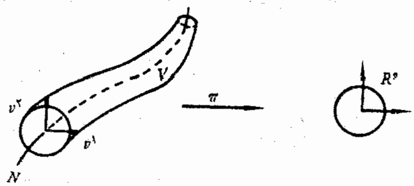
برهان قضیهٔ C. فرض کنیم $N \subset M$ زیرچند گونائی فشرده، بی‌لبه و کنجدار باشد. مانند بالا، برای یکی از همسایگیهای N مانند V نمایشی حاصل‌ضربی چون

$$g : N \times R^p \to V \subset M$$

را اختیار می‌کنیم، و افکنش

$$\pi : V \to R^p$$

را به صورت $\pi(g(x, y)) = y$ تعریف می‌کنیم. (ر. ک. شکل ۱۸.) واضح است که ۰ مقداری است عادی، و $\pi^{-1}(0)$ دقیقاً N است همراه با کنج داده شده.



شکل ۱۸. ساختن نگاشتی با چند گونای پنتریاگین داده شده

حال نگاشت هموار $\varphi : R^p \to S^p$ را چنان اختیار می‌کنیم که هر نقطه چون x مقید به شرط $\| x \| \geqslant 1$ را به نقطهٔ مشخص s_0، و گوی یکهٔ باز واقع شده در R^p را به طور وابرسان بر $S^p - \{s_0\}$ بنگارد.[1] نگاشت

---

۱. مثلاً، $\varphi(x) = h^{-1}(x/\lambda(\| x \|^2))$، که در آن h افکنش گنجنگاری از s_0 است و λ تابع نزولی هموراری است که به ازای $t < 1$، $\lambda(t) > 0$، و به ازای $t \geqslant 1$، $\lambda(t) = 0$.

$$f : M \to S^p$$

را با رابطه‌های زیر تعریف می‌کنیم:

به ازای $x \in V$، $f(x) = \varphi(\pi(x))$،
به ازای $x \notin V$، $f(x) = s_\circ$.

واضح است که f هموار بوده، و نقطهٔ $\varphi(\circ)$ یک مقدار عادی f خواهد بود. چون چند گونای پنتریاگین متناظر، یعنی

$$f^{-1}(\varphi(\circ)) = \pi^{-1}(\circ),$$

دقیقاً چند گونای کنجدار N است، پس برهان قضیهٔ C تمام خواهد شد.

برای اثبات قضیهٔ B، باید اول نشان دهیم که چند گونای پنتریاگین یک نگاشت ردهٔ هموتوپی خود را مشخص می‌کند. فرض کنیم $f, g : M \to S^p$ نگاشتهای هموار ی باشند با مقدار عادی مشترک y.

لم ۴. هرگاه چند گونای کنجدار

$$(f^{-1}(y), f^*\mathbf{v}) \text{ و } (g^{-1}(y), g^*\mathbf{v})$$

یکی باشند، آنگاه f با g هموتوپیك هموار است.

برهان. برای آسانی کار، می‌نویسیم $N = f^{-1}(y)$. فرض $f^*\mathbf{v} = g^*\mathbf{v}$ بدین معنی است که برای هر $x \in N$، $df_x = dg_x$.

اول فرض می‌کنیم که f و g در سراسر یک همسایگی N چون V یکی باشند. همچنین فرض می‌کنیم که $h : S^p - \{y\} \to R^p$ افکنش گنجنگاری باشد. در این صورت هموتوپی

به ازای $x \in V$، $H(x, t) = f(x)$،
به ازای $x \in M - N$،

$$H(x, t) = h^{-1}[t \cdot h(f(x)) + (\text{۱} - t) \cdot h(g(x))]$$

ثابت می‌کند که f با g هموتوپیک هموار است.

بنابراین کافی است f را طوری دگردیس سازیم که در همسایگی کوچکی از N با g یکی شود، و ضمناً مراقب باشیم که در جریان این دگردیسی نقطهٔ جدیدی به y نگاشته نشود. نمایش حاصل‌ضربی

$$N \times R^p \to V \subset M$$

را برای همسایگی V از N اختیار می‌کنیم، که در آن V بقدری کوچک باشد که $f(V)$ و $g(V)$ هیچ‌یک حاوی $\bar{y}$، یعنی نقطهٔ مقابل y روی کره، نشود. اگر V را به صورت $N \times R^p$ و $S^p - \{\bar{y}\}$ را به صورت R^p تجسم کنیم، نگاشتهای متناظر

$$F, G : N \times R^p \to R^p$$

حاصل می‌شوند، که

$$F^{-1}(0) = G^{-1}(0) = N \times \{0\},$$

و برای هر $x \in N$،

$$dF_{(x,0)} = dG_{(x,0)} = (\text{افکنش به } R^p) .$$

نخست مقدار ثابت c را طوری تعیین می‌کنیم که برای $x \in N$ و $0 < \| u \| < c$، $F(x,u) \cdot u > 0$ و $G(x, u) \cdot u > 0$. یعنی نقطه‌های $F(x, u)$ و $G(x, u)$ هر دو در یک نیم فضا در R^p جای گیرند. در نتیجه هموتوپی

$$(1 - t)F(x, u) + tG(x, u)$$

بین F و G دست‌کم به ازای $\| u \| < c$، نقطهٔ جدیدی را به 0 نمی‌نگارد.

بنابر قضیهٔ تیلور،

به‌ازای $\| u \| \leqslant 1$، $\| F(x, u) - u \| \leqslant c_1 \| u \|^2$.

در نتیجه به ازای $0 < \| u \| < \mathrm{Min}\, \{c_1^{-1}, 1\}$،

$$| (F(x, u) - u) \cdot u | \leqslant c_1 \| u \|^3$$

و

$$F(x, u) \cdot u \geqslant \| u \|^2 - c_1 \| u \|^3 > 0.$$

نامساویهای مشابهی در مورد G وجود دارند.

برای آن که نقاط دور دست حرکت نکنند، نگاشت هموار $\lambda : R^p \to R$ را به صورت زیر اختیار می‌کنیم:

به ازای $\| u \| \leqslant c/2$، $\lambda(u) = 1$،

به ازای $\| u \| \geqslant c$، $\lambda(u) = 0$.

در این صورت هموتوپی

$$F_t(x, u) = [1 - \lambda(u)t]F(x, u) + \lambda(u)tG(x, u)$$

$F = F_0$ را به نگاشت F_1 دگردیس می‌سازد و (۱) در ناحیهٔ $\| u \| < c/2$ با G یکی است، (۲) به ازای $\| u \| \geqslant c$ با F یکی است، و (۳) صفر جدیدی ندارد. واضح است که با اجرای دگردیسی متناظر در مورد نگاشت اصلی f، برهان لم ۴ تمام خواهد شد.

برهان قضیهٔ B . هرگاه f و g هموتوپیک هموار باشند، آنگاه لم۳ حکم می‌کند که چند گوناهای پنتریاگین $f^{-1}(y)$ و $g^{-1}(y)$ کبردانت کنجی هستند. برعکس، اگر کبردیسم کنجی $(X, \mathbf{w})$ بین $f^{-1}(y)$ و $g^{-1}(y)$ داده شده باشد، استدلالی کاملاً مشابه آنچه در برهان قضیهٔ C ارائه شد وجود هموتوپی

$$F: M \times [0, 1] \to S^p$$

را ایجاب می‌کند کــه چند گوناى پنتریـاگین آن $(F^{-1}(y), F^*\mathbf{v})$ دقیقاً همان $(X, \mathbf{w})$ است. با قرار دادن $F_t(x) = F(x, t)$، ملاحظه می‌کنیم که نگاشتهای F_0 و f چند گــوناى پنتریاگین مشترک دارنــد. در نتیجــه بنابر لم۴، $f \sim F_0$؛ و بــه همین نحــو $g \sim F_1$. بنابــراین $f \sim g$، که حکم قضیهٔ B است.

چند یادداشت. قضیه‌های A، B، و C را می‌توان بآسانی چنان تعمیم داد که بشودآنها را در مورد چند گوناى لبه‌دار M بکاربرد. نکتهٔ اساسی این است که باید تنها آن نگاشتهائی را در نظر گرفت کــه لبه را به نقطهٔ ثابت s_0 منتقل می‌کنند. رده‌های هموتوپی چنین نگاشتهای

$$(M, \partial M) \rightarrow (S^p, s_0)$$

متناظر یک به یک است با رده‌هـای کبردیسم زیرچند گــوناهای کنجدار

$N \subset (M)$ درون

که نقص بعد آنها p باشد. هرگاه $p \geqslant (m/2) + 1$، آنگاه مـی‌توان به مجموعهٔ این رده‌هــای همـوتوپی ساختمان یک گــروه آبلی داد، کــه pـ امین گروه کـوهموتوپی نام دارد و با نماد $\pi^p(M, \partial M)$ نشان داده می‌شود. عمل ترکیب در $\pi^p(M, \partial M)$ متناظر است بــا عمل اجتماع در مــورد زیرچند گوناهای کنجدار از هم جدای واقــع شده در درون M. (قس. فصل۸، مسألهٔ ۰۱۷)

قضیهٔ هوپف

به عنوان مثال، فرض می‌کنیم M چند گوناى همــوسته و جهت‌داری از بعد $m = p$ باشد. هــر زیرچند گوناى کنجــدار با نقص بعــد p از تعدادی متناهی نقطه همراه با پایه‌ای مشخص در هــر یک از این نقطه‌ها تشکیل شده است. بسته به آن کــه جهت ایجاد شده بــه وسیلهٔ پایهٔ اختیار

شده با جهت چند گونا یکی باشد یا نباشد، $\operatorname{sgn}(x)$ را مساوی ۱ + یا ۱ — فرض می‌کنیم. در این صورت واضح است که $\sum \operatorname{sgn}(x)$ مساوی درجهٔ نگاشت وابسته از M به S^m خواهد بود. اما بآسانی می‌توان دید که ردهٔ کبردیسم کنجی چند گونای صفر بعدی به وسیلهٔ عدد صحیح $\sum \operatorname{sgn}(x)$ به طور منحصر بفرد مشخص می‌شود. بنابراین قضیهٔ زیر اثبات شده است:

قضیهٔ هوپف. هرگاه M همبسته، جهت دار، و بی لبه باشد، آنگاه دو نگاشت از M به S^m هموتوپییک هموار هستند اگر، و تنها اگر، دارای یک درجه باشند.

از سوی دیگر، فرض می‌کنیم M جهت پذیر نباشد. در این حالت اگر پایه‌ای برای TM_x داده شده باشد، می‌توان x را در امتداد خم بسته‌ای در M چنان حرکت داد که در بازگشت به نقطهٔ‌آغاز پایه به جهت معکوس خود باز گردد. سپس با استدلال ساده‌ای می‌توان قضیهٔ زیر را ثابت کرد:

قضیه . هرگاه M همبسته ولی جهت ناپذیر باشد، آنگاه دو نگاشت از M به S^m هموتوپییک هستند اگر، و تنها اگر، درجهٔ به پیمانهٔ ۲ آنها یکی باشد.

پنتریاگین نظریهٔ کبردیسم کنجی را به منظور کمک به مطالعهٔ رده‌های هموتوپی نگاشتهای

$$S^m \longrightarrow S^p$$

به ازای $m > p$ ابداع کرد. مثلاً اگر $m = p + 1 \geqslant 4$، دقیقاً دو ردهٔ هموتوپی نگاشتهای از S^m به S^p وجود دارد. پنتریاگین این مطلب را با رده‌بندی چند گوناهای کنجدار یک بعدی در S^m به اثبات رساند. وی، بااستفاده از چند گوناهای کنجدار دوبعدی، با دشواری خیلی بیشتری توانست نشان دهد که در مورد $m = p + 2 \geqslant 4$ نیز فقط دو ردهٔ

هموتوپی وجود دارد. ولی وقتی $p - m$ از ۲ تجاوز کند، این روش به اشکالهای متعددی برمی‌خورد.

امروز به این نتیجه رسیده‌ایم که به وسیلهٔ روشهای کاملاً متفاوت و جبری‌تر[1] می‌توان رده‌های هموتوپی نگاشتها را معین کرد. با این حال ساختهٔ پنتریاگین تیغه‌ای است دو لبه. این نظریه نه‌تنها ما را قادر می‌سازد که اطلاعات مربوط به چند گوناها را به اطلاعاتی در نظریهٔ هموتوپی تبدیل کنیم، بلکه برعکس هر نوع اطلاع در مورد هموتوپی را نیز می‌توانیم به اطلاعی در نظریهٔ چندگوناها بدل کنیم. بخشی از عمیقترین آثار توپولوژی نوین از واکنش متقابل این دو نظریه بدست آمده است. پژوهشهای توم در کبردیسم را می‌توان نمونهٔ مهمی از این نوع تلقی کرد. (مرجعها [۳۶] و [۲۱].)

۱. مثلاً ر.ك. کتاب: S. – T. Hu, Homotopy Theory

۸

تمرین

در خاتمه مسائلی چند برای خواننده مطرح می‌کنیم.

مسألهٔ ۱. نشان دهید که درجهٔ ترکیب $g \circ f$ مساوی حاصل‌ضرب (درجهٔ f) (درجهٔ g) است.

مسألهٔ ۲. نشان دهید که هر چند جمله‌ای مختلط از درجهٔ n نگاشت همواری از کرهٔ گاوس S^2 به خود آن ایجاد می‌کند که درجهٔ n دارد.

مسألهٔ ۳. اگر نامساوی $\| f(x) - g(x) \| < 2$ برای دو نگاشت f و g از X به S^p برای هر نقطهٔ x برقرار باشد، ثابت کنید که f با g هموتوپیک است، و اگر f و g هموار باشند، هموتوپی را نیز می‌توان هموار اختیار کرد.

مسألهٔ ۴. اگر X فشرده باشد، نشان دهید که هر نگاشت پیوسته از X به S^p را می‌توان با نگاشت همواری به‌طور یکنواخت تقریب زد. اگر دو نگاشت هموار از X به S^p هموتوپیک پیوسته باشند، ثابت کنید هموتوپیک هموار نیز هستند.

مسألهٔ ۵. اگر $m < p$، نشان دهید که هر نگاشت از M^m به S^p با تابع ثابتی هموتوپیک است.

مسألهٔ ۶. (براوئر). نشان دهیدکه هر نگاشت از S^n به S^n با درجه‌ای غیر از $(-1)^{n+1}$ دارای نقطهٔ ثابتی است.

مسألهٔ ۷. نشان دهید که هر نگاشت از S^n بــه S^n که درجــه‌اش فرد باشد، باید جفتی از نقاط متقاطر را به جفتی از نقاط متقاطر منتقل کند.

مسألهٔ ۸. اگر چند گوناهای هموار $M \subset R^k$ و $N \subset R^l$ مفروض باشند، نشان دهید که فضای مماس $T(M \times N)_{(x,y)}$ با $T M_x \times T N_y$ یکی است.

مسألهٔ ۹. بنا بر تعریف، نمودار نگاشت هموار $f : M \to N$، که به Γ نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعــهٔ همــهٔ نقطه‌هائــی چــون $(x, y) \in M \times N$ که $f(x) = y$. نشان دهید که Γ یک چند گونای هموار است و فضای مماس

$$T\Gamma_{(x,y)} \subset T M_x \times T N_y$$

با نمودار نگاشت خطی df_x یکی است.

مسألهٔ ۱۰. چندگونای هموار $M \subset R^k$ مفــروض است. نشان دهید که فضای کلاف مماس

$$T M = \{(x, v) \in M \times R^k | v \in T M_x\}$$

نیز یک چند گــونای هموار است. ثابت کنید کــه هر نگــاشت همــوار $f : M \to N$ نگاشتی هموار چون

$$df : TM \to TN$$

پدید می‌آورد که دارای ویژگیهای زیرین است:

$$d(g \circ f) = (dg) \circ (df), \quad d\,(\text{همانی}) = \text{همانی}$$

مسألهٔ ۱۱. همچنین نشان دهید که فضای کلاف قائم

$$E = \{(x, v) \in M \times R^k \mid v \perp TM_x\}$$

یک چند گونای هموار است. اگر M فشرده و بی‌لبه باشد، ثابت کنید که تناظر

$$(x, v) \mapsto x + v$$

از E به R^k، εـ همسایگی $M \times \{0\}$ در E را بـه طور وابـرسان بر εـ همسایگی N_ε از M در R^k می‌نگارد. (قس. قضیهٔ همسایگی حاصل ضربی در فصل ۷.)

مسألهٔ ۱۲. نگاشت $r : N_\varepsilon \to M$ را بـه صورت $r(x + v) = x$ تعریف کنید. نشان دهید که $r(x + v)$ از هر نقطهٔ دیگـر M بـه $x + v$ نزدیکتر است. با استفاده از این توکش r، حکمی مشابـه حکم مسألـهٔ ۴ ثابت کنید که در آن چند گونای M جایگزین کرهٔ S^p شده باشد.

مسألهٔ ۱۳. اگرچند گوناهای ازهم جدای $M\ ,\ N \subset R^{k+1}$ مفروض باشند، نگاشت زنجیره‌ای

$$\lambda : M \times N \to S^k$$

به صورت $\lambda(x, y) = (x - y)/\|x - y\|$ تعریف می‌شود. هرگاه M و N فشرده، جهت‌دار، و بی‌لبـه باشند، و مجمـوع ابعاد آنهـا، یعنی $m + n$، برابر k باشد، آنگاه درجهٔ λ را عدد زنجیره‌ای می‌نـامند و با $l(M, N)$ نشان می‌دهند. ثابت کنید که

$$l(N, M) = (-1)^{(m+1)(n+1)} l(M, N).$$

اگر M لبهٔ چند گونای جهت‌دار X باشد که با N از هم جداست، ثابت کنید که $l(M, N) = 0$. عـدد زنجیره‌ای را برای چند گونـاهای از هم جدا در کرهٔ S^{m+n+1} تعریف کنید.

مسألهٔ ۱۴. (ناوردای هوپف). هرگـاه $y \neq z$ مقدارهـائی عـادی

برای نگاشتی چون $f : S^{2p-1} \to S^p$ باشند، آنگاه می‌توان، چنان که در فصل ۵ دیدیم، به‌چند گوناهای $f^{-1}(y)$ و $f^{-1}(z)$ جهت داد؛ در نتیجه عدد زنجیره‌ای $l(f^{-1}(y) , f^{-1}(z))$ معنی دارد.

آ) ثابت کنید که این عدد زنجیره‌ای، به عنوان تابعی از y، ثابت موضعی است.

ب) اگر y و z برای g نیز مقدارهائی عادی باشند، و به ازای هر x،

$$\| f(x) - g(x) \| < \| y - z \|,$$

ثابت کنید که

$$l(f^{-1}(y),f^{-1}(z))=l(g^{-1}(y),f^{-1}(z))=l(g^{-1}(y),g^{-1}(z)).$$

ج) ثابت کنید که $l(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$ فقط به ردهٔ هموتوپی f بستگی دارد، و به نقطه‌های خاص y و z وابسته نیست.

عدد صحیح $H(f) = l(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$ ناوردای هوپف f نام دارد. (ر. ک. [۱۵].)

مسألهٔ ۱۵. اگر در مسألهٔ بالا بعد p فرد باشد، ثابت کنید که $H(f) = 0$. در مورد ترکیبی چون

$$S^{2p-1} \xrightarrow{f} S^p \xrightarrow{g} S^p$$

ثابت کنید که $H(g \circ f)$ برابر است با حاصلضرب $H(f)$ در مجذور درجهٔ g.

نگاشت هوپف $\pi : S^3 \to S^2$ به صورت

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = h^{-1}((x_1 + ix_2)/(x_3 + ix_4))$$

تعریف شده است، که در آن h افکنش گنجنگاری بر صفحهٔ مختلط است. ثابت کنید که $H(\pi) = 1$.

مسألهٔ ۱۶. می‌گوئیم اشتراک دو زیر چندگوناى N و N' از M

متقاطع است در صورتی که برای هر $x \in N \cap N'$، زیرفضاهای TN_x و TN'_x بـا هم TM_x را تـولید کنند. (اگر $n + n' < m$، این بدان معنی گرفته می‌شود که $N \cap N' = \varnothing$.) اگـر N یک زیـرچند گونای کنجدار باشد، ثابت کنید می‌توان آن را چنان دگردیسی کوچکی داد کـه با چند گونای داده شدهٔ N' اشتراکش متقاطع شود. ثابت کنید که‌اشتراک حاصل یک چند گونای هموار است.

مسألهٔ ۱۷. فرض کنید $\Pi^p(M)$ مجموعـهٔ همهٔ رده‌های کبردیسم کنجی با نقص بعد p در M باشد. با استفاده از مفهوم اشتراک متقاطـع، تناظری

$$\Pi^p(M) \times \Pi^q(M) \to \Pi^{p+q}(M)$$

تعریف کنید. اگـر $p \geqslant (m/۲) + ۱$، از عمل اجتمـاع از هم جـدا استفاده‌کرده $\Pi^p(M)$ را به یک‌گروه آبلی تبدیل نمائید. (قس.ص.۸۵)

ضمیمه

رده‌بندی چندگوناهای یك بعدی

قضیهٔ زیر را، که در متن کتاب فرض شده بود، در این‌جا به اثبات خواهیم رساند. بحث کوتاهی نیز داریم در مورد مسألهٔ رده‌بندی برای چندگوناهای بعدهای بالاتر.

قضیه. هرچندگونای یک بعدی هموار و هموسته یا با دایرهٔ S^1 وابرسان است یا با فاصله‌ای از عددهای حقیقی.

(یک فاصله عبارت است از یک زیرمجموعهٔ هموستهٔ R که حاوی بیش از یک نقطه باشد. فاصله می‌تواند کراندار یا بی‌کران، بسته، باز، یا نیمباز باشد.)

چون هر فاصله با یکی از سه مجموعهٔ $[0, 1]$، $[0, 1[$، یا $]0, 1[$ وابرسان است[1]، نتیجه می‌شود که فقط چهار نوع متمایز چندگونای هموستهٔ یک بعدی وجود دارد.

برهان مبتنی است بر مفهوم «درازای کمان». فرض می‌کنیم I یک فاصله باشد.

تعریف. نگاشت $f : I \to M$ را یک پرمایش به وسیلهٔ درازای کمان می‌نامیم در صورتی که f فاصلهٔ I را به طور وابرسان بر

---

۱. مثلاً، از وابرسانی f که به شکل $f(t) = a \tan h(t) + b$ تعریف شده است استفاده کنید.

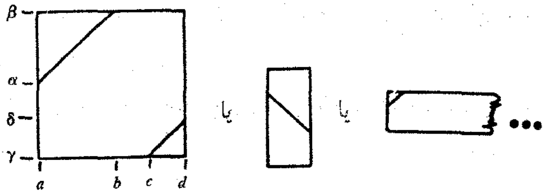
زیرمجموعهٔ بازی از M بنگارد[1]، و به ازای هر $s \in I$، «بردار سرعت»، یعنی $df_s(1) \in TM_{f(s)}$ (۲۱) دارای درازای یک باشد.

هر پرمایش موضعی داده شده از I' به M را می‌توان به وسیلهٔ تغییر متغیر سرراستی به پرمایش به وسیلهٔ درازای کمان تبدیل کرد.

لم. فرض کنید $f : I \to M$ و $g : J \to M$ پرمایشهائی به‌وسیلهٔ درازای کمان باشند. در این صورت $f(I) \cap g(J)$ دارای حداکثر دو مؤلفه است. هرگاه f فقط یک مؤلفه داشته باشد، آنگاه می‌توان f را به یک پرمایش به وسیلهٔ درازای کمان برای اجتماع $f(I) \cup g(J)$ وسعت داد. هرگاه دو مؤلفه وجود داشته باشد، آنگاه M با S^1 وابرسان است.

برهان. روشن است که $g^{-1} \circ f$ زیرمجموعهٔ به طور نسبی بازی از I را به‌طور وابرسان روی زیرمجموعهٔ به‌طور نسبی بازی از J می‌نگارد. بعلاوه مشتق $g^{-1} \circ f$ همه‌جا برابر ± 1 است.

نمودار $\Gamma \subset I \times J$ را در نظر می‌گیریم، که مرکب است از همهٔ نقطه‌هائی مانند (s, t) که $f(s) = g(t)$. در این صورت Γ یک زیرمجموعهٔ بستهٔ $I \times J$ است که از پاره خطهائی به شیب ± 1 تشکیل



شکل۱۹. سه امکان برای Γ

---

۱. بدین ترتیب I تنها در صورتی می‌تواند دارای نقطه‌های لبه‌ای باشد که M دارای لبه باشد.

شده است. چون Γ بسته است و $g^{-1} \circ f$ یک وابرسانی موضعی است، نقطه‌های انتهائی این پاره خطها درون $I \times J$ نیستند، بلکـــه در لبه جای دارند. چون $g^{-1} \circ f$ تابعـــی یک به یک است، به هـــر یک از چهار ضلع مستطیل $I \times J$ حداکثر یکی ازاین پاره خطها می‌تواند منتهی شود. در نتیجه Γ دارای حداکثر دو مؤلفه است. (ر. ک. شکل ۱۹.) بعـــلاوه، اگر دو مؤلفه وجود داشته باشند، این دو باید شیبهای برابر داشته باشند.

هرگاه Γ همـــوسته باشد، آنگاه $g^{-1} \circ f$ به تابعی خطـــی چـــون $L : R \to R$ وسعت می یابد. حـــال f و $g \circ L$ به هم می‌پیونـــدند تا توسیع لازم

$$F : I \cup L^{-1}(J) \to f(I) \cup g(J)$$

را پدید آورند.

اگر Γ دارای دو مؤلفه باشد. مثلاً با شیب ۱+، آن دو مؤلفه باید به صورتی که در مستطیل سمت چپ شکل ۱۹ نشان داده شده است نسبت به‌هم قرارگیرند. با انتقال فاصلهٔ $J =]\gamma, \beta[$ در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که $c = \gamma$ و $d = \delta$، پس

$$a < b \leqslant c < d \leqslant \alpha < \beta.$$

حال با قرار دادن $\theta = 2\pi t/(\alpha - a)$، وابرسانی مورد نظر

$$h : S^1 \to M$$

به وسیلهٔ دستور زیرین تعریف می‌شود:

$$h(\cos\theta, \sin\theta) = f(t) \quad \text{،} a < t < d \text{ به ازای}$$
$$= g(t) \quad \text{،} c < t < \beta \text{ به ازای}$$

چون $h(S^1)$ در M هم فشرده و هم باز است، پس برابرتمام چند گونای M خواهد بود. از این، لم به اثبات می‌رسد.

برهان قضیهٔ رده بندی. هر پرمایش به وسیلهٔ درازای کمان را مـی‌توان به پرمایشی چون

$$f : I \to M$$

وسعت داد که مهین باشد، بدین معنی کـه قلمرو پرمایش اخیر را نمی‌توان فاصلهٔ بزرگتری اختیار کرد: کافی است f را ابتدا از طرف چپ و سپس از طرف راست تا حد ممکن وسعت دهیم.

اگر M با S^1 وابرسان نباشد، ثابت خواهیم کرد کـه پوشا است، و در نتیجه یک وابرسانی می‌باشد. زیرا اگر مجموعـهٔ باز $f(I)$ تمام M نباشد، یک نقطهٔ حدی مانند x برای $f(I)$ در $M - f(I)$ وجود دارد. بـا پرمایش یک همسایگی x بـه وسیلهٔ درازای کمـان و بکار بردن لم، مشاهده می‌شود که f را می‌توان روی فاصلهٔ بزرگتری وسعت داد. این با فرض مهین بودن f متناقض است، و در نتیجه برهان تمام خواهد شد.

چند یادداشت. مسألهٔ رده‌بندی در مورد چند گوناهـای بعدهای بالاتر بسیار دشوار است. برای چند گوناهـای دو بعدی، تشریح کاملـی توسط کرکیارتو[1] [۱۷] انجام شده است. بررسی چندگوناهای سه‌بعدی در واقع مبحثی‌از پژوهشهای جاری است. (ر.ک. مقالهٔ پاپاکیریاکپولس[2] [۲۶]). در مـورد چند گوناهـای فشرده از بعـد ناکمتر از ۴، مسألهٔ رده بندی در واقع حل نشدنی است[3] (۲۲). ولی درمورد چند گوناهای بعدهای بالاکه هموسته ساده باشند پیشرفتهای قابل توجهی در سالهای اخیر صورت‌گرفته است، چنان که در آثار اسمیل[4] [۳۱] و وال[5] [۳۷] مشهود است.

---

1. Kerekjarto　　2. Papakyriakopoulos

۳. ر.ك. مقالهٔ Markov [۱۹]، ونیز به مقاله‌ای از Boone ،Haken، و Poenaru در Fundamenta Mathematicae.

4. S. Smale　　5. C. T. C. Wall

توضیحات مترجم

۱) نگاشت $f : X \to Y$ را درصورتی همانسانی نامند که نگاشت وارون، $f^{-1} : Y \to X$، وجود داشته باشد و هر دو نگاشت f و f^{-1} پیوسته باشند.

۲) معمولاً اصطلاح «ابرصفحه» برای زیر فضائی از یک فضای برداری V بکار برده می‌شود که بعد آن از بعد V یکی کمتر باشد. در این کتاب، مقصود مفهوم زیر است:

هرگاه W زیر فضائی خطی از V باشد و a عنصری ثابت متعلق به V، آنگاه مجموعهٔ:

$$\{x + a \mid x \in W\}$$

یک ابرصفحهٔ V است. چنین زیرمجموعه‌ای را یک «زیرفضای مستوی» از V نیز می‌نامند.

۳) برای دو فضای برداری حقیقی مفروض $V_۱$ و $V_۲$، نگاشت $f : V_۱ \to V_۲$ خطی (همگن) خوانده می‌شود اگر برای عنصرهای دلخواه x و y از $V_۱$ و عدد حقیقی دلخواه α، تساویهای زیر همواره برقرار باشند:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,,\; f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

نگاشت $g : V_۱ \to V_۲$ را خطی ناهمگن نامند اگر بتوان نگاشت خطی همگنی چون f و عنصری ثابت $b \in V_۲$ یافت بطوری که برای هر

$x \in V_1$، تساوی

$$g(x) = f(x) + b$$

برقرار باشد. به جـای «خطـی ناهمگن» گاهی اصطلاح «مستوی» بکار می‌رود.

۴) مثلثی متشکل از سه مجموعه و سه نگاشت چون

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & Z \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

را جابجائی نامند اگر تساوی $h = g \circ f$ برای‌آن برقرار باشد. به‌همین ترتیب می‌توان مربع جابجائی و به‌طورکلی نمودار جابجائی ازمجموعه‌ها و نگاشتها را تعریف کرد.

۵) هرگاه S یک مجموعه و T زیرمجموعه‌ای از S باشد، نگاشت جزئیت

$$i : T \to S$$

به صورت $i(x) = x$، برای هر $x \in T$، تعریف می‌شود.

۶) مجموعهٔ S (در فضای اقلیدسی) را گسسته خوانیم در صورتـی که برای هر نقطهٔ S بتوان یک همسایگـی از آن نقطـه یافت کـه حاوی نقطهٔ دیگری از مجموعهٔ S نباشد.

۷) X زیر مجموعه‌ای از R^n است و $S \subset X$. S را در X همه‌جا چگال نامیم اگر برای هر $x \in X$ و هر همسایگی چون U از x در X، بتوان نقطه‌ای $y \in S$ یافت بطوری که $y \in U$.

۸) در واقع کافی است فرض کنیم که نگاشت f از ردهٔ C^r باشد، که در آن

$$r > \max \times \{0, m - n\}.$$

ولی اثبات دشوارتر است از حالت بی‌نهایت بار مشتقپذیر که در این کتاب ارائه گردیده است. برای اثبات در حالت کلی بالا مراجعه کنید به:

Hirsch, M. W. *Differential Topology,* Springer – Verlag (1975).

۹) مقصود این است که هرگاه تحت اثر یک پرمایش، نقطهٔ $x \in X$ متناظر با نقطه‌ای از ∂H^m باشد، آنگاه تحت اثر هر پرمایش دیگر نیز چنین خواهد بود. اثبات این مطلب تمرین جالبی دربکار بستن قضیهٔ تابع وارون است.

۱۰) بعضی این اثبات را به الـون لیما[1] ریاضیدان برزیلی نسبت می‌دهند.

۱۱) U فاصله‌ای باز در R است. نگاشت بی‌نهایت بار مشتقپذیر $f : U \to R$ را تحلیلی (حقیقی) نامیم اگر برای هر $x_\circ \in U$ بتوان عدد حقیقی مثبتی ρ یافت بقسمی که $]x_\circ - \rho, x_\circ + \rho[\subset U$، و رشتهٔ تیلور f در سراسر $]x_\circ - \rho, x_\circ + \rho[$ به f بگراید.

۱۲) این نکته نتیجه‌ای است از:

قضیه. U فاصله‌ای باز در R است و $f : U \to R$ تابعی است تحلیلی. هرگاه برای $x_\circ \in U$، $f^{(n)}(x_\circ) = \circ$ برای هر $n = ۱, ۲, \ldots$ برقرار باشد، آنگاه f تابعی‌است ثابت. برهان این قضیه را، که در واقع صورتی از «قضیهٔ همانی[2]» است، می‌توان در بیشتر کتابهای آنالیز مختلط یافت. برهان در حالت حقیقی درست مانند حالت مختلط است.

۱۳) در حالتی که N فشرده نباشد، چون M و در نتیجه $f(M)$ فشرده هستند، نگاشت f پوشا نیست. با گرفتن $y \in N$ بطوری که $y \notin f(M)$، نتیجه می‌شود که $f^{-۱}(y)$ تهی است و در نتیجه درجهٔ به پیمانهٔ ۲ نگاشت f صفر است. در حالتی که N لبه داشته باشد از بی‌لبه بودن M و قضیهٔ تابع وارون نتیجه می‌شود که f نمی‌تواند پوشا

1. Elon Lima 2. Identity Theorem

باشد و مانند حالت قبل نتیجه می‌گیریم که درجهٔ به پیمانهٔ ۲ نگاشت f صفر است.

۱۴) توجه داشته باشید که جوابهای این دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل در گوی یکه در امتداد موازی با بردار c خواهند بود.

۱۵) دلیل این است که c پوشا نخواهد بود. در واقع باید حالتی که M فقط از یک نقطه تشکیل شده است مستثنی کرد. در حالت اخیر تابع ثابت با تابع همانی یکی است و درجهٔ یک دارد.

۱۶) دو مجموعهٔ X و Y در فضای اقلیدسی داده شده‌اند بطوری که $X \subset Y$. نگاشت پیوستهٔ $f : X \to Y$ را یک توکش نامیم در صورتی که برای هر $y \in Y$، داشته باشیم $f(y) = y$.

۱۷) مقصود از «پایهٔ مثبت» برای TM_x پایه‌ای است که با جهت مفروض برای TM_x همجهت باشد.

۱۸) در این‌جا باید از لم ۱، فصل ۵، استفاده کرد.

۱۹) اگر dv_z وارونپذیر باشد، از قضیهٔ تابع وارون نتیجه می‌شود که v در یک همسایگی z یک به یک است. پس در این همسایگی v فقط می‌تواند در نقطهٔ z صفر شود.

۲۰) برای برهان همبسته بودن $GL^+(p, R)$، به صفحهٔ ۱۲۸ کتاب زیر مراجعه کنید:

Guillemin, V.& Pollack, A. *Differential Topology*, Prentice – Hall (1974).

۲۱) $df_s(1)$ از اینرو «بردار سرعت» خوانده شده است که هرگاه f را به صورت $f(t) = (f_1(t), \cdots, f_m(t))$ بنویسیم، آنگاه

$$df_s(1) = f'(s) = (f'_1(s), \cdots, f'_m(s)).$$

۲۲) مقصود این است که برای n ناکمتر از ۴ نمی‌توان تعدادی متناهی ناوردای توپولوژیک ارائه کرد که به وسیلهٔ آنها بتوانیم هر دو چند گونای n بعدی ناهمانسان را از یک دیگر تمیز دهیم.

واژه نامه

فارسی ـ انگلیسی

Abelian	آبلی
Hyperplane	ابر صفحه
Extension	اتساع
Union	اجتماع
Intersection	اشتراک
Transversal intersection	اشتراك متقاطع
Projection	افکنش
Translation	انتقال
Measure	اندازه
Measurable	اندازه پذیر
Isotopy	ایزوتوپی
Open	باز
Relatively open	باز نسبی
Critical	بحرانی
Onto	بر
Range	برد
Outward vector	بردار برونگرا
Inward vector	بردار درونگرا
Closed	بسته
Dimension	بعد
Boundaryless	بی لبه

Line segment	پاره خط
Basis	پایه
Parametrization	پرمایش
Onto	پوشا
Transformation	تبدیل
Degenerate	تبه شده
Composition	ترکیب
Approximation	تقریب
Singular	تکین
Retract	توکش
Constant	ثابت
Locally constant	ثابت موضعی
Commutative	جابجائی
Disjoint	جدا
Inclusion	جزئیت
Orientation	جهت
Orientation - reversing	جهت برگردان
Orientable	جهت پذیر
Oriented	جهت دار
Orientation - preserving	جهت نگه‌دار
Dense	چگال
Manifold	چندگونا
Inner product	حاصلضرب داخلی
Family	خانواده

Linear	خطی
Curve	خم
Curvature	خمیدگی
Curva Integra	خمیدگی کل
Length	درازا
Degree	درجه
Degree mod 2	درجه به پیمانهٔ ۲
Interior	درون
Coordinate system	دستگاه مختصات
Deformation	دگردیسی
Equivalence relation	رابطهٔ هم‌ارزی
Class	رده
Residue class	رده باقیمانده‌ای
Classification	رده بندی
Submanifold	زیرچندگونا
Framed submanifold	زیرچندگونای کنجدار
Index	شاخص
Regular	عادی
Linking number	عدد زنجیره‌ای
Perpendicular	عمود
Interval	فاصله
Compact	فشرده
Space	فضا

Chain rule	قاعدهٔ زنجیری
Orthogonal, normal	قائم
Cobordant	کبردانت
Framed cobordant	کبردانت کنجی
Cobordism	کبردیسم
Framed cobordism	کبردیسم کنجی
Bounded	کراندار
Sphere	کره
Bundle	کلاف
Arc	کمان
Frame	کنج
Cohomotopy	کوهموتوپی
Minimum	کهینه
Gradient	گرادیان
Disk	گرده
Group	گروه
Discrete	گسسته
Stereographic	گنجنگاری
Ball	گوی
Boundary	لبه
Antipodal	متقاطر
Complementary	متمم
Corresponding	متناظر
Sum	مجموع
Affine	مستوی
Partial derivative	مشتق پاره‌ای

Regular value	مقدارعادی
Tangent	مماس
Isolated	منزوی
Component	مؤلفه
Maximum	مهینه
Vectorfield	میدان برداری
Non degenerate	ناتبه شده
Invariant	ناوردا
Decreasing	نزولی
Embedding	نشاننده
Codimension	نقص بعد
Fixed point	نقطهٔ ثابت
Image	نگاره
Map, mapping	نگاشت
Diagram, graph	نمودار
Half - space	نیم فضا
Diffeomorphism	وابرسانی
Inverse	وارون
Extend	وسعت دادن
Null - space, kernel	هسته
Homeomorphism	همانسانی
Identity	همانی
Neighborhood	همسایگی
Smooth	هموار
Homotopy	هموتوپی
Connected	همبسته
Simply - connected	همبستهٔ ساده

Homology	همولوژی
Everywhere dense	همه جا چگال
One _ one	یك به یك
Isomorphism	یکسانی
Monotone	یکنوا
Unit	یکه

واژه نامه

انگلیسی ـ فارسی

Abelian	آبلی
Affine	مستوی
Antipodal	متقاطر
Approximation	تقریب
Arc	کمان
Ball	گوی
Basis	پایه
Boundary	لبه
Boundaryless	بی‌لبه
Bounded	کراندار
Bundle	کلاف
Chain Rule	قاعدهٔ زنجیری
Class	رده
Classification	رده‌بندی
Closed	بسته
Cobordant	کبردانت
Cobordism	کبردیسم
Codimension	نقص بعد
Cohomotopy	کوهموتوپی

Commutative	جابجائی
Compact	فشرده
Complement	متمم
Component	مؤلفه
Composition	ترکیب
Connected	همبسته
Constant	ثابت
Coordinate System	دستگاه مختصات
Corresponding	متناظر
Critical	بحرانی
Curva Integra	خمیدگی کل
Curvature	خمیدگی
Curve	خم
Deformation	دگردیسی
Degenerate	تبه‌شده
Degree	درجه
Degree mod 2	درجه به‌پیمانهٔ ۲
Dense	چگال
Derivative	مشتق
Descending	نزولی
Diagram	نمودار
Diffeomorphism	وابرسانی
Dimension	بعد
Discrete	گسسته
Disjoint	جدا
Disk	گرده
Embedding	نشانده
Equivalence Relation	رابطهٔ هم‌ارزی

Everywhere dense	همه‌جا چگال
Extend	وسعت دادن
Family	خانواده
Fixed Point	نقطهٔ ثابت
Frame	کنج
Framed Cobordant	کبردانت کنجی
Framed Cobordism	کبردیسم کنجی
Framed Submanifold	زیرچندگونای کنجدار
Gradient	گرادیان
Graph	نمودار
Group	گروه
Half—space	نیم‌فضا
Homeomorphism	همانسانی
Homotopy	هموتوپی
Hyperplane	ابرصفحه
Identity	همانی
Image	نگاره
Inclusion	جزئیت
Index	شاخص
Inner Product	حاصلضرب داخلی
Interior	درون
Intersection	اشتراك
Interval	فاصله
Invariant	ناوردا
Inverse	وارون

Inward Vector	بردار درونگرا
Isolated	منزوی
Isomorphism	یکسانی
Isotopy	ایزوتوپی
Length	درازا
Linear	خطی
Line—segment	پاره خط
Linking Number	عدد زنجیره‌ای
Locally Constant	ثابت موضعی
Manifold	چندگونا
Map, Mapping	نگاشت
Maximal	مهین
Maximum	مهینه
Measurable	اندازه‌پذیر
Measure	اندازه
Monotone	یکنوا
Neighborhood	همسایگی
Non degenerate	ناتبه شده
Non singular Matrix	ماتریس وارونپذیر
Normal	قائم
Null Space	هسته
One—one	یك به‌یك
Onto	پوشا ، بر
Open	باز
Orientable	جهت‌پذیر
Orientation	جهت

Orientation–preserving	جهت نگهدار
Orientation–reversing	جهت برگردان
Oriented	جهت‌دار
Orthogonal	قائم
Outward Vector	بردار برونگرا
Parametrization	پرمایش
Partial Derivative	مشتق پاره‌ای
Perpendicular	عمود
Projection	افکنش
Range	برد
Regular	عادی
Relatively open	باز نسبی
Residue Class	ردهٔ باقیمانده‌ای
Retract	توکش
Simply–connected	همبستهٔ ساده
Singular	تکین
Smooth	هموار
Space	فضا
Sphere	کره
Stereographic	گنجنگاری
Submanifold	زیر چندگونا
Sum	مجموع
Tangent	مماس
Transformation	تبدیل
Translation	انتقال
Transversal Intersection	اشتراک متقاطع

Union	اجتماع
Unit	یکه
Value	مقدار
Vectorfield	میدان برداری

مرجعها

کتابنامهٔ زیر سیاههٔ پراکنده‌ای است از مرجعهای اصلی و چند کتاب درسی که مطالعهٔ آنها توصیه می‌شود. به خواننده‌ای که بخواهد توپولوژی دیفرانسیل را دنبال کند، مطالعهٔ مرجعهای [۲۲]، [۲۵]، و [۲۸] توصیه می‌شود. مطالعهٔ مقاله‌های پژوهشی [۲۳] و [۳۲] نیز سودمند خواهد بود. برای به دست آوردن اطلاعات پایه‌ای در حوزه‌هایی که با توپولوژی دیفرانسیل رابطهٔ نزدیک دارند، مطالعهٔ مرجعهای [۱۱]، [۱۶]، [۱۸]، [۲۹]، [۳۴]، و[۳۵] را توصیه می‌کنیم.

[1] Allendoerfer, C. B., "The Euler number of a Riemann manifold," *Amer. Jour. Math.* 62 (1940), 243–248.

[2] Apostol, T. M., *Mathematical Analysis*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957.

[3] Auslander, L., and R. MacKenzie, *Introduction to Differentiable Manifolds*. New York: McGraw-Hill, 1963.

[4] Brouwer, L. E. J., "Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten", *Math. Annalen* 71 (1912), 97–115.

[5] Brown, A. B., "Functional dependence," *Trans. Amer. Math. Soc.* 38 (1935), 379–394. (See Theorem 3-III.)

[6] Chern, S. S., "A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds," *Annals of Math.* 45 (1944), 747–752.

[7] Dieudonné, J., *Foundations of Modern Analysis*. New York: Academic Press, 1960.

[8] Dubovickiĭ, A. Ya., "On differentiable mappings of an n-dimensional cube into a k-dimensional cube," *Mat. Sbornik* N.S. 32 (74), (1953), 443–464. (In Russian.)

[9] Fenchel, W., "On total curvatures of Riemannian manifolds," *Jour. London Math. Soc.* 15 (1940), 15–22.

[10] Goffman, C., *Calculus of Several Variables*. New York: Harper & Row, 1965.

[11] Hilton, P., and S. Wylie, *Homology Theory*. Cambridge Univ. Press, 1960.

[12] Hirsch, M., "A proof of the nonretractibility of a cell onto its boundary," *Proc. Amer. Math. Soc.* 14 (1963), 364–365.

[13] Hopf, H., "Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten," *Math. Annalen* 96 (1926), 209–224.

[14] ——, "Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten," *Math. Annalen* 96 (1926), 225–250.

[15] ——, "Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension," *Fundamenta Mathematicae* 25 (1935), 427–440.

[16] Hu, S.-T., *Homotopy Theory*. New York: Academic Press, 1959.

[17] Kerékjártó, B. v., *Vorlesungen über Topologie*. Berlin: Springer, 1923.

[18] Lang, S., *Introduction to Differentiable Manifolds*. New York: Interscience, 1962.

[19] Markov, A. A., "Insolubility of the problem of homeomorphy," *Proceedings Intern. Congress of Math. 1958*, Cambridge Univ. Press, 1960, pp. 300–306. (In Russian.)

[20] Milnor, J., "On manifolds homeomorphic to the 7-sphere," *Annals of Math.* 64 (1956), 399–405.

[21] ——, "A survey of cobordism theory," *L'Enseignement math.* 8 (1962), 16–23.

[22] ——, *Morse Theory*. (Annals Studies 51.) Princeton Univ. Press, 1963.

[23] ——, "Differential topology," *Lectures on Modern Mathematics*, II, ed. T. L. Saaty, New York: Wiley, 1964, pp. 165–183.

[24] Morse, A. P., "The behavior of a function on its critical set," *Annals of Math.* 40 (1939), 62–70.

[25] Munkres, J. R., *Elementary Differential Topology*. (Annals Studies 54). Princeton Univ. Press, 1963.

[26] Papakyriakopoulos, C. D., "The theory of three-dimensional manifolds since 1950," *Proceedings Intern. Congress of Math. 1958*, Cambridge Univ. Press, 1960, pp. 433–440.

[27] Pontryagin, L. S., "A classification of continuous transformations of a complex into a sphere," *Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R.* (*Comptes Rendues*) 19 (1938), 147–149.

[28] ——, "Smooth manifolds and their applications in homotopy theory," *Amer. Math. Soc. Translations*, Ser. 2, II (1959), 1–114. (Translated from *Trudy Inst. Steklov* 45 (1955).)

[29] Rham, G. de, *Variétés différentiables*. Paris: Hermann, 1955.

[30] Sard, A., "The measure of the critical points of differentiable maps," *Bull. Amer. Math. Soc.* 48 (1942), 883–890.

[31] Smale, S., "Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four," *Annals of Math.* 74 (1961), 391–406.

[32] ——, "A survey of some recent developments in differential topology," *Bull. Amer. Math. Soc.* 69 (1963), 131–145.

[33] Spivak, M., *Calculus on Manifolds*. New York: Benjamin, 1965.

[34] Steenrod, N., *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton Univ. Press, 1951.

[35] Sternberg, S., *Lectures on Differential Geometry*. New York: Prentice-Hall, 1964.

[36] Thom, R., "Quelques propriétés globales des variétés différentiables," *Commentarii Math. Helvet.* 28 (1954), 17–86.

[37] Wall, C. T. C., "Classification of $(n - 1)$-connected $2n$-manifolds," *Annals of Math.* 75 (1962), 163–189.

[38] Whitney, H., "A function not constant on a connected set of critical points," *Duke Math. Jour.* 1 (1935), 514–517.

افزودهٔ آوریل ۱۹۶۹ :

[39] Husemoller, D., *Fiber Bundles*. New York: McGraw-Hill, 1966.

[40] Spanier, E. H., *Algebraic Topology*. New York: McGraw-Hill, 1966.

[41] Wall, C. T. C., "Topology of smooth manifolds," *J. London Math. Soc.* 40 (1965), 1–20.

[42] Wallace, A. H., *Differential Topology, First Steps*. New York: Benjamin, 1968.