دانشگاه فردوسی مشهد

انتشارات دانشگاه

شماره ۴۳۵

توپولوژی عمومی

از منظر پایه توپولوژی

با بیش از ۹۰ تمرین حل شده

تالیف: دکتر رجبعلی کامیابی گل

$\tau \subseteq \tau'$

$\tau' \subseteq \tau$

دانشگاه فردوسی مشهد

انتشارات، شمارهٔ ۴۳۵

توپولوژی عمومی از منظر پایه توپولوژی

تألیف:

دکتر رجبعلی کامیابی گل

فهرست مطالب

مقدمه

کتاب حاضر به عنوان یک کتاب درسی برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی و همچنین دورهٔ کارشناسی ارشد به رشتهٔ تحریر کشیده شده است که علاوه بر این‌که سر فصل درس توپولوژی عمومی مصوب، انقلاب فرهنگی را می‌پوشاند شامل مطالب جالبی جهت استفادهٔ دانشجویان تحصیلات تکمیلی نیز هست. به خصوص سعی شده است که مطالب از دیدگاه پایهٔ توپولوژی مورد بحث و بررسی قرار گیرند که این خود در بسیاری موارد در عین حال که اثبات قضایا را ساده‌تر ساخته است زیبایی خاصی را نیز به وجود آورده است.

این کتاب مشتمل بر نه فصل است. در فصل اول مفاهیم عام توپولوژی و توابع پیوسته مورد بحث قرار گرفته‌اند که اساساً مفهوم توپولوژی برای تعمیم این گونه توابع بوجود آمده است. پالایه‌ها و خانواده‌های آغازین در فصل دوم درج گردیده‌اند ، شایان ذکر است که در این کتاب بر خلاف سایر کتاب‌هایی که شبکه‌ها را مورد بحث قرار می‌دهند از مفهوم پالایه که خواصی به موازات خواص شبکه ایجاد می‌کنند استفاده شده است که علاوه بر این‌که مطالعهٔ آنها به خودی خود جالب هستند، باعث ساده و قابل فهم شدن بعضی از قضایا به خصوص قضیهٔ حاصل‌ضربی تیخونوف می‌شوند. خانواده‌های آغازین و توپولوژی تولید شده توسط آن‌ها که توپولوژی‌های ضعیف و ضعیف-ستاره و فضاهای موضعاً محدب نمونه‌هایی از آن در آنالیز می‌باشند، از اهمیت به‌سزائی برخوادار هستند. در فصل سوم انواع همبندی و خواص آنها مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. فشردگی و قضیهٔ بسیار اساسی تیخونوف در مورد فشردگی فضاهای حاصل‌ضربی در فصل چهارم آمده است به خصوص این‌که این قضیه به دو روش مختلف که یکی به کمک مفهوم پالایه است اثبات شده است. فصل پنجم اختصاص به خانواده‌های نمایی و توپولوژی تولید شده توسط چنین خانواده‌هایی دارد که حالت خاص آنها همان توپولوژی خارج قسمتی است. فضای متریک و توپولوژی متری در فصل ششم مورد بحث قرار گرفته‌اند که در این فصل دانشجو ارتباط بین درس توپولوژی و درس آنالیز ریاضی را به خوبی درک خواهد کرد. مفاهیم اساسی فشردگی موضعی و فشرده سازی تک نقطه‌ای و اصول شمارش پذیری که در آنالیز به خصوص آنالیز حقیقی و مفاهیم وابسته به آن از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است در فصل هفتم کتاب درج گردیده‌اند. فصل هشتم شامل دو بحث اساسی و جالب فشرده سازی استون- چک و قضیهٔ گسترش تیتزه هستند. و بالاخره فصل نهم به مطالبی پیرامون

توپولوژی فشرده – باز اختصاص یافته است که در مباحثی همچون سیستمهای دینامیکی و توپولوژی دیفرانسیل از اهمیت بالایی برخوردار است. در پایان نیز تعدادی از مسائل متنوع همراه با حل آنها جهت کسب تجربهٔ هر چه بیشتر علاقمندان محترم درج شده است.

در اینجا لازم است از خانم دکتر معصومه فشندی که در تهیهٔ کتاب همکاری نموده و نیز آقای دکتر صال مصلحیان که ویراستاری علمی کتاب را به عهده داشته‌اند، صمیمانه تشکر و سپاسگزاری نمایم.

رجبعلی کامیابی گل

فصل ۱
فضاهای توپولوژیک و توابع پیوسته

مقدمه

ریاضیات برخلاف فیزیک به اشیاء مجرد نظر دارد. اما این اشیاء خیلی هم دلخواه نبوده بلکه می‌توانند از اشیاء فیزیکی الهام گرفته شوند. به عنوان مثال دایره، سهمی و اشیایی از این قبیل اشکال مجردی هستند که از طبیعت برگرفته شده‌اند. این روش مجرد سازی، روح ریاضیات است. این مجرد سازی صرفاً جنبهٔ تمرین ندارد بلکه می‌تواند خیلی مفید باشد. و دروازهٔ بزرگی را بر روی کاربردها بگشاید. به عنوان مثال، با مطالعهٔ یک شیئ گرد فیزیکی فقط اطلاعاتی دربارهٔ آن شیئ خاص به دست می‌آید. اما با مطالعهٔ یک دایره می‌توان اطلاعات زیادی دربارهٔ تمام اشیا فیزیکی گرد یا اشیایی که تقریباً گرد هستند، جمع آوری کرد.

دستگاه اعداد حقیقی یکی از دستگاه‌های بسیار قابل توجه در ریاضیات است که در آن اعمال گوناگون زیادی از اعمال جبری (جمع، ضرب و غیره) گرفته تا ترتیب و خواص دیگر با هم ترکیب شده‌اند. جنبه‌های متفاوتی از این دستگاه باعث ایجاد جرقه‌های توسعه در جهت‌های مختلفی بوده است از جمله نظریهٔ گروه‌ها، نظریهٔ حلقه‌ها و از این قبیل، که مجرد شدهٔ اعمال معینی از $\mathbb{R}$ می‌باشند، همچنین مفهوم فاصله در $\mathbb{R}$ باعث ایجاد نظریهٔ فضای متریک شده است. توپولوژی نیز تعمیمی از بازه‌های باز $\mathbb{R}$ می‌باشد. به‌طور دقیق‌تر فرض کنید C خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ باشد که هر یک به‌صورت اجتماعی از بازه‌های باز است دراین صورت به‌سادگی می‌توان دید که C تحت اعمال اجتماع گیری و

اشتراک گیری متناهی بسته است. بسیاری از مفاهیم همانند پیوستگی توابع روی $\mathbb{R}$ به سادگی برحسب اعضای C قابل بیان هستند. این بحث ما را به سوی تعریف زیر رهنمون می‌سازد.

۱-۱ فضاهای توپولوژیک

۱-۱-۱ تعریف: یک توپولوژی روی مجموعه X عبارت است از خانواده‌ای مانند τ از زیرمجموعه‌های X که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(الف) $\phi, X \in \tau$؛

(ب) اجتماع اعضای هر زیرگردایه از τ به τ متعلق باشد؛

(ج) مقطع اعضای هر زیرگردایه متناهی τ به τ متعلق باشد.

یک فضای توپولوژیک عبارت است از زوج مرتب (X,τ) که در آن τ یک توپولوژی روی X است، هرجا که بیمی از ابهام نرود از ذکر نام τ صرف‌نظر می‌کنیم.

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، $A \subseteq X$ باز است هرگاه $A \in \tau$.

۱-۱-۲ مثال :

۱. اگر X یک مجموعه دلخواه و τ_1 گردایه همه زیرمجموعه‌های X باشد(به عبارت دیگر، τ_1 مجموعه توان X باشد یا $(\tau_1 = \mathrm{P}(x))$، τ_1 یک توپولوژی روی X خواهد بود که آن را توپولوژی **گسسته** یا **بدیهی** می‌نامیم.

۲. اگر X یک مجموعه دلخواه و $\tau_2 = \{\phi, X\}$، τ_2 یک توپولوژی روی X خواهد بود که آن را توپولوژی **ناگسسته** می‌نامیم.

۳. فرض کنیم τ_3 گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های R باشد که به صورت اجتماعی از بازه های باز (a,b) هستند، τ_3 یک توپولوژی روی R است زیرا :

$$\forall\, a,b,c,d \in R \qquad (a,b)\cap(c,d) = \begin{cases} \phi \vee (c,d) \vee (a,b) \\ (c,b) \vee (a,d) \end{cases}$$

پس مقطع متناهی از اعضای τ_3 عضوی از τ_3 است. همچنین اجتماع هر تعداد از اعضای τ_3 به τ_3 تعلق دارد، به علاوه

در واقع $\phi = \bigcup_{A\in\phi} A$ و $\phi, R \in \tau_3$

۴) گردایه $\tau_۴$ از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ که به صورت

$$\tau_۴ = \{A: \text{ متناهی یا ناشمارا است } A\}$$

تعریف شده یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ نیست، زیرا $\mathbb{Q} = \bigcup_{r\in \mathbb{Q}} \{r\} \notin \tau_۴$ (چون $\mathbb{Q}$ شمارا است).

۵) فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه باشد و

$$\tau_۵ = \{U: \text{ شمارا است } X-U \text{ یا } X-U=X\}$$

در این صورت $\tau_۵$ یک توپولوژی روی X است، زیرا $\phi, X \in \tau_۵$ (چرا ؟) و به علاوه برای هر گردایه $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از $\tau_۵$ داریم:

$$X - \bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcap_\alpha (X-U_\alpha) \;\&\; X - \bigcap_\alpha U_\alpha = \bigcup_\alpha (X-U_\alpha)$$

۶) فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه و

$$\tau_۶ = \{A: \text{ متناهی است } X-A \text{ یا } X-A=X\}$$

دراین صورت $\tau_۶$ یک توپولوژی روی X است که آن را **توپولوژی متمم متناهی** می‌گوییم.

۷) فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه و

$$\tau_۷ = \{A: \text{ متناهی یا شمارا است } X-A\} \cup \{\phi\}$$

در این صورت $\tau_۷$ یک توپولوژی روی X است . چرا؟

۸) اگر (X,d) یک فضای متریک باشد، مجموعه‌های باز در این فضا یک توپولوژی روی X تشکیل می‌دهند.

۹) فرض کنیم $X=\{۰,۱\}$ و $\tau = \{\phi, X, \{۱\}\}$ دراین‌صورت (X,τ) یک فضای توپولوژیک است که آن را **فضای سیرپینسکی**[۱] می‌نامیم.

۱-۱-۳ تعریف: فرض کنیم τ و τ' دو توپولوژی در مجموعه مفروض X باشند، اگر $\tau \subseteq \tau'$ می‌گوییم τ' از τ **ظریفتر** است یا τ **درشت‌تر** از τ' است.

در مثالهای بالا برای $X=\mathbb{R}$، $\tau_۱$ ظریفترین توپولوژی و $\tau_۲$ درشت‌ترین توپولوژی می‌باشد و به علاوه $\tau_۳ = \tau_۸$ ، $\tau_۶ \subseteq \tau_۳$ و $\tau_۶ \subseteq \tau_۷$ همچنین $\tau_۳$ و $\tau_۷$، قابل مقایسه نیستند.

۱-۱-۴ تعریف: فرض کنیم که X یک مجموعه و B گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد B یک **پایه** برای یک توپولوژی در X است هرگاه

الف) برای هر $x \in X$ دست کم یک عضو پایه مثل B شامل x موجود باشد؛

---

[1] Sierpinski

ب) اگر x متعلق به اشتراک دو عضو B_1 و B_2 باشد، عضوی از B مثل B_x موجود باشد که:

$$x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$$

۱-۱-۵ قضیه: اگر B پایه یک توپولوژی در X باشد، آن‌گاه τ توپولوژی تولید شده به وسیله B عبارت است از: $\tau = \left\{ A : A = \underset{\alpha \in I}{\cup} B_\alpha , B_\alpha \in \mathrm{B}, \forall \alpha \in I \right\}$

برهان: توجه کنید که با تعریف فوق داریم $B \subseteq \tau$ ، همچنین τ یک توپولوژی روی X است زیرا:

$\phi \in \tau$ (کافی است اختیار کنیم $I = \phi$)

$X \in \tau$ (چون $X = \bigcup \{ B_x : x \in X \}$)

همچنین برای گردایه $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از اعضای τ داریم:

$$A_\alpha = \bigcup_{\gamma \in J_\alpha} B_{\alpha\gamma} \Rightarrow \bigcup A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} \bigcup_{\gamma \in J_\alpha} B_{\alpha\gamma} \in \tau$$

به علاوه، برای $A_1, A_2 \in \tau$ و برای هر $x \in A_1 \cap A_2$ داریم:

چون $x \in A_1$ پس عضوی از پایه مثل B_{α_1} هست که $x \in B_{\alpha_1}$ و برای $x \in A_2$ عضوی از پایه مثل B_{α_2} هست که $x \in B_{\alpha_2}$ ، پس $\mathrm{B} \ni B_x$ شامل x موجود است که $B_x \subseteq B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2}$ پس:

$$A_1 \cap A_2 \subseteq \bigcup_{x \in A_1 \cap A_2} B_x$$

بدیهی است که $\bigcup_{x \in A_1 \cap A_2} B_x \supseteq A_1 \cap A_2$ می‌باشد. پس :

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{x \in A_1 \cap A_2} B_x \in \tau$$

۱-۱-۶ مثال:

۱. اگر τ توپولوژی معمولی $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه $\mathrm{B} = \{(a,b) : a<b\}$ یک پایه برای τ است.

۲. اگر $\mathbb{R}^2$ و متریک اقلیدسی را در نظر بگیریم گردایه تمام گوی‌های باز در $\mathbb{R}^2$ یک پایه برای توپولوژی به دست آمده از متریک اقلیدسی خواهد بود.

۳. برای هر مجموعه X،

$$\mathrm{B} = \{\{x\} : x \in X\}$$

یک پایه برای توپولوژی گسسته است.

۱-۱-۷ **قضیه** فرض کنیم $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ به ترتیب پایه‌هایی برای توپولوژی‌های τ و τ' در X باشند. در این صورت: τ' ظریفتر از τ است اگر و فقط اگر برای هر x و هر عضو پایه $B \in \mathcal{B}$ که شامل x باشد، یک عضو پایه $B' \in \mathcal{B}'$ وجود داشته باشد، به طوری که $x \in B' \subseteq B$.

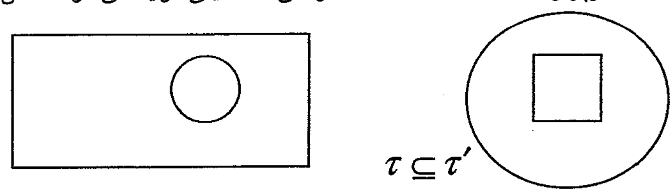
برهان : فرض کنیم که $\tau \subseteq \tau'$ و $x \in X$ دلخواه باشد همچنین فرض کنیم که $B \in \mathcal{B}$ و $x \in B$. بنا به تعریف، $B \in \tau$ پس $B \in \tau'$، چون τ' توسط $\mathcal{B}'$ تولید شده است پس

$$x \in B = \bigcup_{\alpha \in I} B'_\alpha$$

لذا، α ی هست که $x \in B'_\alpha$ و به علاوه $x \in B'_\alpha \subseteq B$.

برعکس: فرض کنیم که $U \in \tau$ دلخواه باشد، ثابت می‌کنیم که $U \in \tau'$ است. فرض کنیم که $x \in U$، چون τ به وسیله $\mathcal{B}$ تولید می‌شود، عضوی از $\mathcal{B}$ مانند B هست که $x \in B \subseteq U$ (چرا؟).
اما بنابه فرض عضوی از $\mathcal{B}'$ مثل B' هست که $x \in B' \subseteq B$ می‌باشد پس $x \in B' \subseteq U$ است از این رو $U = \bigcup_{x \in U} B'_\alpha$ لذا $U \in \tau'$ است.

به طور مثال در مثال‌های صفحه قبل اگر توپولوژی به دست آمده از متریک اقلیدسی را τ بنامیم داریم: $\tau = \tau'$ که در آن توپولوژی τ' به وسیلهٔ درون نواحی مستطیلی تولید می‌شود. شکل ۱-۱ را ببینید.



$\tau' \subseteq \tau$ $\qquad\qquad$ $\tau \subseteq \tau'$

شکل ۱-۱

۱-۱-۸ **قضیه:** فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز در X باشد چنان‌که برای هر $x \in X$ و هر زیرمجموعه باز X مثل U که شامل x است، عضوی از $\mathcal{B}$ مثل C باشد که $x \in C \subseteq U$، در اینصورت $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای این توپولوژی روی X است.

برهان : اولاً $\mathcal{B}$ یک پایه است زیرا چون X باز است برای هر $x \in X$، $C \in \mathcal{B}$ موجود است چنان که $x \in C \subseteq X$، همچنین اگر $C_1, C_2 \in \mathcal{B}$ آن‌گاه $C_1 \cap C_2$ باز است، پس برای $x \in C_1 \cap C_2$، C در $\mathcal{B}$ هست که $x \in C \subseteq C_1 \cap C_2$ یعنی $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی τ' خواهد بود، فرض کنیم که τ توپولوژی اولیه روی X باشد، مطابق قضیه قبل بدیهی است که $\tau \subseteq \tau'$ چون τ خودش را تولید می‌کند از طرف دیگر هر عضو τ' به صورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است که به طور بدیهی در τ قرار می‌گیرد پس $\tau' \subseteq \tau$ لذا $\tau = \tau'$.

۱-۱-۹ تذکـر :عکـس قضیه قبل همواره برقرار است، یعنی اگر B یک پایه برای توپولوژی رویX باشد آن‌گاه برای هر مجموعه باز که شامل x است، عضوی مثل C از B هست که $x \in C \subseteq U$ زیرا B یـک پایـه بـرای τ اسـت و $x \in U \in \tau$ لـذا $U = \bigcup_{\alpha} C_\alpha$ که در آن $C_\alpha \in$ B، پس $\alpha_\circ$ هست که $x \in C_{\alpha_\circ} \subseteq U$.

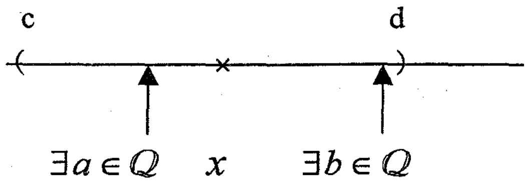
۱-۱-۱۰ مـثال: $\mathbb{R}$ بـا توپولـوژی معمولـی مفـروض است، اگر U در $\mathbb{R}$ باز باشد و شامل x آن‌گاه (c,d)هست که $x \in (c,d) \subseteq U$ پس $a,b \in \mathbb{Q}$ هستند که

$$x \in (a,b) \subseteq U$$

(چرا؟) لذا طبق قضیه قبل گردایه

$$\beta' = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}$$

یک پایه برای توپولوژی معمولی $\mathbb{R}$ است. شکل ۱-۲ را ببینید.



شکل ۱-۲

۱-۲ توپولوژی حد پایین[۱]

۱-۲-۱ تعـریف:اگـر β گردایه همه بازه‌های نیم باز اعداد حقیقی به صورت $[a,b)$ باشد که $a<b$ آن‌گاه توپولوژی تولید شده به وسیله β را توپولوژی حد پایین گفته و با $\mathbb{R}_l$ نمایش می‌دهیم.

۱-۲-۲ تذکر: گردایه β تعریف شده دربالا یک پایه است، زیرا برای: $\varepsilon > \circ$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , x \in B_x = [x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in B$$

و به علاوه $[a,b) \cap [c,d)$ برابر $[c,b)$ یا $[a,d)$ یا $[c,d)$ یا $[a,b)$ یا ϕ .

۱-۲-۳ تذکـر: $\mathbb{R}_l$ اکیداً ظریفتـر از توپولـوژی معمولـی روی $\mathbb{R}$ اسـت زیـرا بـرای هر عضو پایه توپولوژی معمولی مانند (a,b) که شامل x است داریم:

$$x \in [x,b) \subseteq (a,b)$$

---

[۱] Lower Limit Topology

لذا بنابر قضیه (۱-۱-۷)، $\mathbb{R}_l$ ظریفتر از توپولوژی معمولی روی $\mathbb{R}$ است .

حال هر $[a,b)$ در توپولوژی معمولی باز نمی‌باشد زیرا هیچ بازه بازی مثل (c,d) موجود نیست که $a\in(c,d)\subseteq[a,b)$.

۱-۲-۴ تعریف :فرض کنیم S یک دسته از زیرمجموعه‌های X باشد که X را می پوشاند یا $X=\cup S$ در اینصورت S یک **پایه جزء** یا یک **زیرپایه** برای یک توپولوژی روی X می باشد .در این حالت β را مجموعه همه اشتراکهای متناهی از اعضای S در نظر می‌گیریم، یعنی برای هر عضو دلخواه B از β داریم:

$$B=\bigcap_{i=1}^{n} S_i,\quad S_i\in S\quad \forall i=1,\dots,n$$

ملاحظه می‌شود که β یک پایه برای توپولوژی خواهد بود زیرا $S\subseteq\beta$ پس برای هر $x\in X$ ، xبه یکی از عناصر پایه تعلق دارد، بعلاوه اگر فرض کنیم که $B_1=\bigcap_{i=1}^{n} S_i$ و $B_2=\bigcap_{i=1}^{m} S'_i$ آن‌گاه

$$B_1\cap B_2=S_1\cap S_2\ldots\cap S_n\cap S'_1\cap\ldots\cap S'_m$$

لذا $B_1\cap B_2\in\beta$.

توپولوژی تولید شده توسط β را توپولوژی تولید شده توسط S می گوییم.

۱-۲-۵ مثال. $\mathbb{R}$را با توپولوژی معمولی در نظر بگیرید و فرض کنید S مجموعه همه بازه هایی به صورت $(-\infty,b)$ و (a,∞) باشد آن‌گاه S یک پایه جزء برای توپولوژی فوق است زیرا:

$$(-\infty,b)\cap(-\infty,b')=(-\infty,c)$$

$$(a,\infty)\cap(a',\infty)=(d,\infty)\quad \&\quad (-\infty,b)\cap(a,\infty)=\phi \text{ یا } (a,b)$$

۱-۲-۶ یادآوری و تعریف :فرض کنید Xیک مجموعه باشد، یک ترتیب ساده روی X، یک رابطه Rروی Xاست به طوری‌که

الف)x ی در Xموجود نیست که xRx

ب) اگر $x,y\in X$ و $x\neq y$ آن‌گاه یا xRy یا yRx

ج) برای هر $x,y,z\in X$ اگر xRy و yRz آن‌گاه xRz

۱-۳ توپولوژی ترتیبی[1]

فرض کنیم X یک مجموعه باشد که در آن رابطه ترتیبی خطی تعریف شده است. برای هر دو عضو X مثل a و b به طوری که $a<b$ چهار مجموعه به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$(a,b)=\{x|a<x<b\} \qquad (a,b]=\{x|a<x\le b\}$$
$$[a,b)=\{x|a\le x<b\} \qquad [a,b]=\{x|a\le x\le b\}$$

۱-۳-۱ تعریف: فرض کنیم X مجموعه‌ای با یک رابطه ترتیبی خطی باشد، β گردایه همه مجموعه‌هایی است که به صورت یکی از انواع زیر می باشند:

۱) همه بازه های باز (a,b) در X؛

۲) همه بازه هایی به صورت $[a,b)$ که در آن a کوچکترین عضو مجموعه X است (در صورت وجود)؛

۳) همه بازه هایی به صورت $(a,b]$ که در آن b بزرگترین عضو مجموعه X است (در صورت وجود).

گردایه β پایه‌ای برای یک توپولوژی در X موسوم به **توپولوژی ترتیبی** است.

۱-۳-۲ مثال:

۱. در $\mathbb{R}$ توپولوژی معمولی و توپولوژی ترتیبی یکی هستند.

۲. اعداد صحیح مثبت $X=\mathbb{N}$ را در نظر می گیریم، در این حالت توپولوژی ترتیبی همان توپولوژی گسسته یا دیسکریت خواهد بود، زیرا هر مجموعه تک عضوی در $\mathbb{N}$ باز است و

$$\{۱\}=[۱,۲)$$
$$\forall n>۱ \quad \{n\}=(n-۱,n+۱)$$

۳. توپولوژی ترتیبی و توپولوژی گسسته همواره مساوی نیستند: در فضای

$$X=\left\{\frac{۱}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{۰\}$$

مجموعه‌های $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ و $\{۱\}$ باز هستند و

$$\{۱\}=(\frac{۱}{۲},۱]$$

---
[1] Order Topology

زیرا برای $x \neq 0$ داریم:

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad x = \frac{1}{n}, \quad \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$$

یک عضو پایه شامل صفر به صورت $\left[0, \frac{1}{n}\right)$ خواهد بود که شامل $\frac{1}{n+1}$ است. در واقع هر مجموعه شامل صفر دارای تعداد نامتناهی عضو خواهد بود. لذا $\{0\}$ باز نیست، پس این توپولوژی گسسته نیست.

۱-۴ توپولوژی حاصل‌ضربی[1]

۱-۴-۱ تعریف: فرض کنیم که X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y\}$$

در این صورت توپولوژی حاصل‌ضربی روی $X \times Y$ عبارت است از توپولوژی که توسط پایه

$$\beta = \{U \times V : \text{باز در } Y \; V \;,\; \text{باز در } X \; U\}$$

تولید می‌شود.

۱-۴-۲ توجه. پایه بودن β از تساوی $((U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V')$ نتیجه می شود.

۱-۴-۳ قضیه. اگر β و ξ پایه هایی برای توپولوژی های روی X و Y باشند آن‌گاه

$$D = \{B \times C : B \in \beta \;\&\; C \in \xi\}$$

یک پایه برای توپولوژی حاصل‌ضربی روی $X \times Y$ است.

برهان. فرض کنیم W در $X \times Y$ باز باشد و $z \in W$ ، باید $B \in \beta$ و $C \in \xi$ را چنان بیابید که $z \in B \times C \subseteq W$ از اینکه $z \in W$ پس U و V باز در $X \times Y$ موجودند که $z \in U \times V \subseteq W$ ($U \times V$ یک عضو پایه توپولوژی حاصل‌ضربی است) اگر $z=(x,y)$ آن‌گاه $x \in U$ و $y \in V$ پس $B \in \beta$ و $C \in \xi$ موجود است چنان که

$$x \in B \subseteq U \;,\; y \in C \subseteq V \Rightarrow z = (x, y) \in B \times C \subseteq U \times V \subseteq W$$

---

[1] Product Topology

۱-۴-۴ مثال: $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}$ را با توپولوژی معمولی در نظر می گیریم گردایه β یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است:

$$\beta = \{A \times B : \text{باز هستند } \mathbb{R} \text{ در } A,B\}$$

اما یک پایه برای $\mathbb{R}$ به صورت

$$\{(a,b) : a < b \ \& \ a,b \in \mathbb{R}\}$$

می باشد، بنابراین گردایه:

$$\{(a,b)\times(c,d) : a < b, c < d \ \& \ a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است. توپولوژی تولید شده توسط این گردایه را توپولوژی استاندارد روی $\mathbb{R}^2$ گوییم. به سادگی می توان تحقیق کرد که

$$\{(a,b)\times(c,d) : a < b, c < d \ \& \ a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}$$

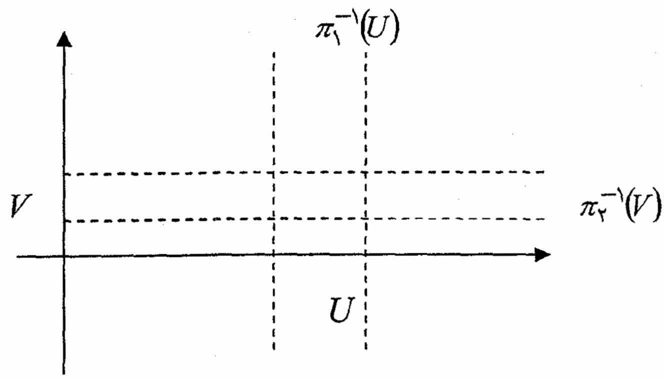
یک پایه برای توپولوژی فوق است.

۱-۵ توابع تصویری

۱-۵-۱ تعریف: فرض کنیم $\pi_1 : X \times Y \to X$ با ضابطه $\pi_1(x,y) = x$ و $\pi_2 : X \times Y \to Y$ با ضابطه $\pi_2(x,y) = y$ تعریف شده باشند، نگاشت‌های π_1 و π_2 را به ترتیب نگاشت‌های تصویری $X \times Y$ بر روی عوامل اول و دوم خوانند.

توجه کنید که نگاشت‌های تصویری برو هستند همچنین اگر U در X و V در Y باز باشد آن‌گاه:

$$\begin{matrix} \pi_1^{-1}(U) = U \times Y \\ \pi_2^{-1}(V) = X \times V \end{matrix} \Rightarrow \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) = U \times V$$



شکل ۱-۳

بنابراین

$$S = \left\{\pi_1^{-1}(U) : \text{باز } X \text{ در } U\right\} \cup \left\{\pi_2^{-1}(V) : \text{باز } Y \text{ در } V\right\}$$

یک **زیر پایه** برای توپولوژی حاصل‌ضربی روی $X \times Y$ است زیرا: اگر τ توپولوژی حاصل‌ضربی روی $X \times Y$ و τ' توپولوژی تولید شده بوسیله S باشد بدیهی است که هر عضو S به τ تعلق دارد، بنابراین هر اجتماع دلخواه از مقاطع متناهی از اعضای S نیز عضوی از τ می باشد. پس $\tau' \subseteq \tau$ ، از طرف دیگر هر عضو پایه τ به صورت $U \times V$ است و به‌علاوه $U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$ پس $U \times V \in \tau'$ و لذا $\tau \subseteq \tau'$ پس $\tau' = \tau$.

۱-۵-۲ **تعریف:** فرض کنیم Y زیرمجموعه ای از فضای توپولوژی (X, τ) باشد، آن‌گاه Y را می توان به یک توپولوژی به صورت زیر مجهز کرد:

$$\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$$

این توپولوژی را توپولوژی زیرفضایی[1] روی Y گوئیم. توجه کنید که τ_Y یک توپولوژی روی Y است زیرا:

$$Y = X \cap Y \in \tau_y \quad \& \quad \phi = \phi \cap Y \in \tau_Y$$

$$\bigcap_{i=1}^{n}(U_i \cap Y) = (\bigcap_{i=1}^{n} U_i) \cap Y$$

برای گردایه $\{U_\alpha\}$ از τ_Y داریم:

$$\bigcup_{\alpha \in I}(U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\right) \cap Y$$

۱-۵-۳ **مثال.** فرض کنیم $X = R$ و $Y = Q$ آن‌گاه (با توجه به قضیهٔ بعدی) یک عضو پایه برای توپولوژی Y به صورت $(a,b) \cap Q$ می باشد که به طور بدیهی در R باز نیست.

اگر A در Y با توپولوژی زیرفضایی باز باشد می گوییم A به طور نسبی باز است.

۱-۵ - ۴ **قضیه:** اگر β یک پایه برای توپولوژی τ روی X باشد، آن‌گاه گردایه

$$\beta_Y = \{B \cap Y : B \in \beta\}$$

یک پایه برای توپولوژی زیرفضایی τ_Y روی Y می باشد.

---

[1] Sub Space Topology

برهان: فرض کنیم که A به طور نسبی باز باشد، پس U بازی در X هست که $A=U\cap Y$ فرض کنیم $y\in A$ پس $y\in U$، چون U باز است، پس $B\in\beta$ هست که $y\in B\subseteq U$ بنابراین $y\in B\cap Y\subseteq U\cap Y=A$.

۱-۵-۵ تذکر: اگر X یک مجموعه مرتب با توپولوژی ترتیبی باشد و $Y\subseteq X$ بدیهی است که همان رابطه ترتیبی خطی روی Y نیز تعریف می شود پس توپولوژی زیرفضایی و توپولوژی ترتیبی Y، در حالت کلی یکسان نخواهد بود.

۱-۵-۶ مثال: اگر $X=\mathbb{R}$ و $Y=[a,b]$ اختیار شود، مجموعه های نسبی باز در Y به‌صورت $[a,b)$ یا $(c,d]$ یا (c,d) یا Y یا $(c,d)\cap Y=(c,d)\cap[a,b]=\phi$; $c<d$ خواهند بود. مجموعه های فوق یک پایه برای توپولوژی ترتیبی هستند پس در این حالت توپولوژی ترتیبی با توپولوژی زیرفضایی یکسان خواهد بود. اما در حالت کلی این تساوی درست نخواهد بود. به مثال زیر توجه کنید:

۱-۵-۷ مثال: فرض کنیم $X=\mathbb{R}$ و $Y=\{-۱\}\cup\left\{\frac{۱}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$. توپولوژی زیرفضایی Y گسسته است زیرا برای $n\neq ۱$ داریم:

$$\left\{\frac{۱}{n}\right\}=Y\cap\left(\frac{۱}{n+۱},\frac{۱}{n-۱}\right)$$

که در Y باز است و

$$\{-۱\}=Y\cap\left(-\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲}\right)\quad \text{و} \quad \{۱\}=Y\cap\left(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}\right)$$

نیز در در Y باز است.

پس مجموعه های تک عضوی باز هستند لذا هر زیر مجموعه Y باز است. به عبارت دیگر توپولوژی گسسته است ولی در توپولوژی ترتیبی روی Y ، ۱- کوچکترین عضو است. پس یک عضو پایه شامل ۱- به صورت $\left[-۱,\frac{۱}{n}\right)$ خواهد بود که شامل $\frac{۱}{n+۱}$ است. بنابراین $\{-۱\}$ در توپولوژی ترتیبی باز نیست لذا توپولوژی زیر فضایی با توپولوژی ترتیبی یکسان نخواهد بود.

۱-۵-۸ قرارداد: از این به بعد اگر X یک فضای توپولوژی و $Y\subseteq X$، Y را با توپولوژی زیرفضایی در نظر می‌گیریم. مگر اینکه توپولوژی دیگری روی Y تعریف کنیم.

۱-۵-۹ قضیه : اگر Y زیرفضایی از X باشد، هر زیر مجموعه باز نسبی از Y در X باز است اگر و فقط اگر Y در X باز باشد.

برهان: اگر Y در X باز باشد و A به‌صورت نسبی در Y باز باشد آن‌گاه $A=U \cap Y$ که در آن U زیر مجموعه بازی از X است. بنابراین A بعنوان اشتراک دو مجموعه باز در X باز است. به عکس $Y = X \cap Y$ به‌صورت نسبی در Y باز است. لذا Y در X باز است.

۱-۶ زیرفضاها در فضاهای ضربی

۱-۶-۱ قضیه: اگر A و B به ترتیب زیرمجموعه های فضاهای توپولوژیک X و Y باشند، آن‌گاه توپولوژی نسبی $A \times B$ بعنوان زیرفضایی از $X \times Y$ همان توپولوژی حاصل‌ضربی A و B است. به عبارت دیگر:

$$\text{توپولوژی حاصل‌ضربی } A\times B = \text{توپولوژی زیرفضایی روی } A\times B$$

برهان: فرض کنیم W یک عضو پایه برای توپولوژی حاصل‌ضربی روی $A \times B$ باشد، آن‌گاه $W=U \times V$ که در آن U و V به ترتیب به طور نسبی در A و B باز هستند. پس U_1 در X و V_1 در Y باز موجودند که $V=V_1 \cap B$ و $U=U_1 \cap A$ لذا:

$$W=U \times V=(U_1 \cap A)\times(V_1 \cap B)=(U_1 \times V_1)\cap(A \times B) \qquad (۱)$$

بنابراین W نسبت به توپولوژی زیرفضایی $A \times B$ باز است. به عکس، اگر W یک عضو پایه برای توپولوژی زیر فضایی $A \times B$ باشد، آن‌گاه W به‌صورت (۱) خواهد بود و مطابق تساوی (۱) W در توپولوژی حاصل‌ضربی $A \times B$ باز خواهد بود.

۱-۷ مجموعه‌های بسته، بستار و درون یک مجموعه

۱-۷-۱ تعریف: فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$، A را بسته گوئیم هر گاه $X - A$ باز باشد.

۱-۷-۲ قضیه: اگر X یک فضای توپولوژیک باشد آن‌گاه ϕ و X بسته اند، مقطع دلخواه از مجموعه های بسته، بسته است و بعلاوه اجتماع متناهی از مجموعه های بسته، بسته است.

برهان: به عنوان تمرین واگذار می شود.

۱-۷-۳ مثال:

۱) در $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی $[a,b]$ برای هر $a,b \in \mathbb{R}$ بسته است زیرا مجموعه
$$\mathbb{R}-[a,b]=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$$
باز است.

۲) در $\mathbb{R}_l$، $\mathbb{R}-[a,b)=(-\infty,a)\cup[b,\infty)$ و

$$(-\infty,a)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a-n,a) \qquad (i)$$

$$[b,\infty)=\bigcup_{n=0}^{\infty}[b+n,b+n+1) \qquad (ii)$$

پس $(-\infty,a)$ و $[b,\infty)$ در $\mathbb{R}_l$ باز می باشند. لذا $[a,b)$ بسته می باشد درنتیجه تمام اعضای پایه هم باز و هم بسته هستند.

اثبات تساوی (i) : بدیهی است که $(-\infty,a)\supseteq[a-n,a)$ و از طرفی برای هر $x\in(-\infty,a)$:
$$x<a\Rightarrow a-x>0\Rightarrow \exists n\in \mathbb{N} \ni a-x\leq n\Rightarrow a-n\leq x<a$$
پس n ی در $\mathbb{N}$ هست که $x\in[a-n,a)$، پس: $x\in \bigcup_{n=1}^{\infty}[a-n,a)$.

۳) در توپولوژی دیسکریت هر مجموعه باز و بسته است.

۴) در $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی $[a,b)$ نه باز است نه بسته.

۵) در $\mathbb{R}^2$ مجموعه $\{(x,y):x,y\geq 0\}$ بسته است، زیرا متمم آن به‌صورت اجتماع دو مجموعه باز است. در واقع
$$((-\infty,0)\times \mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times(-\infty,0))=\mathbb{R}-\{(x,y):x,y\geq 0\}$$

۶) زیرمجموعه $Y=[0,1]\cup(2,3)$ از $\mathbb{R}$ را با توپولوژی زیرفضایی درنظر می گیریم. در Y، $[0,1]$ باز است زیرا $[0,1]=Y\cap\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

و از طرف دیگر $Y-[0,1]=(2,3)$ بسته است، اما $(2,3)=(2,3)\cap Y$ لذا $(2,3)$ در Y باز است پس $[0,1]$ بسته نیز می باشد.

۱-۷-۴ قضیه: فرض کنیم Y زیرفضایی از X باشد. زیر مجموعه A از Y در Y بسته است اگر و فقط اگر $A=C\cap Y$ که C در X بسته می باشد.

برهان: فرض کنیم $A=C\cap Y$ که C در X بسته باشد، از اینکه $X-C$ در X باز و $(X-C)\cap Y=Y-A$ بازاست بنابراین $Y-A$ در Y باز می باشد و در نتیجه A در Y بسته است.

بالعکس: اگر A در Y بسته باشد، پس $Y-A$ باز است و لذا $Y-A=U\cap Y$ یا $A=Y\cap(X-U)$ که $X-U$ در X بسته است.

۱-۷-۵ قضیه: فرض کنیم Y زیرفضایی از X باشد اگر A در Y بسته باشد و Y در X بسته باشد آن‌گاه A در X بسته است.

برهان: بعنوان تمرین واگذار می شود.

۱-۸ بستار و درون یک مجموعه[1]

۱-۸-۱ تعریف: فرض کنیم $A\subseteq X$، درون A عبارتست از اجتماع همه مجموعه‌های بازی که در A واقع می شوند. درون A را با A° یا $\operatorname{int} A$ نمایش می‌دهیم. بستار A عبارت است از اشتراک همه مجموعه‌های بسته که شامل A می‌باشند. بستار A را با $\overline{A}$ یا $CL\ A$ نمایش می‌دهیم.

از تعاریف فوق می‌توان نتیجه گرفت که A° بزرگترین مجموعه باز A و $\overline{A}$ کوچکترین مجموعه بسته شامل A است.

۱-۸-۲ قضیه: فرض کنیم Y زیرفضایی از X باشد و $A\subseteq Y$. اگر $\overline{A}$ بستار A در X باشد، آن‌گاه بستار A در Y به‌صورت $\overline{A}\cap Y$ خواهد بود.

برهان: فرض کنیم B بستار A در Y باشد، از اینکه $\overline{A}$ در X بسته است پس $\overline{A}\cap Y$ در Y بسته می باشد، به علاوه $A\subseteq\overline{A}\cap Y$. بنابراین، چون B کوچکترین مجموعه بسته شامل A می باشد، $B\subseteq\overline{A}\cap Y$.

از طرفی B در Y بسته است پس مجموعه بسته‌ای مانند C در X هست که $B=C\cap Y$ چون $A\subseteq B$ پس $A\subseteq C$. از آنجایی‌که $\overline{A}$ کوچکترین مجموعه بسته شامل A در X است، پس $\overline{A}\subseteq C$ درنتیجه $\overline{A}\cap Y\subseteq C\cap Y=B$ پس $\overline{A}\cap Y=B$.

۱-۸-۳ تعریف: گوئیم مجموعه A، مجموعه B را قطع می کند هر گاه $A\cap B\neq\phi$.

---

[1] Closure and Interior of a Set

۱-۸-۴ قضیه: فرض کنید A زیرمجموعه ای از فضای توپولوژیک X باشد.

(الف) $x \in \overline{A}$ اگر و فقط اگر هر زیرمجموعه باز شامل x، A را قطع کند.

(ب) اگر β پایه‌ای برای توپولوژی روی X باشد، آن‌گاه $x \in \overline{A}$ اگر و فقط اگر هر عضو پایه مانند B که شامل x است، A را قطع کند.

برهان (الف): عکس نقیض حکم را در نظر می‌گیریم. بطور معادل نشان می‌دهیم:

(($x \notin \overline{A}$ اگر و فقط اگر مجموعه بازی مثل U و شامل x باشد که $U \cap A = \phi$))

برای این منظور فرض کنیم $x \notin \overline{A}$ آن‌گاه $U = X - \overline{A}$ در X باز و به علاوه شامل x است. حال داریم: $U \cap A = \phi$.

بالعکس: فرض کنیم U باز و شامل x باشد و $U \cap A = \phi$. چون U باز است، لذا $X - U$ بسته است و $A \subseteq X - U$. پس $\overline{A} \subseteq X - U$ لذا $U \cap \overline{A} = \phi$ پس $x \notin \overline{A}$.

برهان (ب): فرض کنیم هر زیرمجموعه باز و شامل x، A را قطع کند. درنتیجه هر عضو پایه و شامل x نیز چنین خواهد بود. زیرا هر عضو پایه یک مجموعه باز است.

بالعکس: اگر هر عضو پایه و شامل x، A را قطع کند برای هر مجموعه باز U و شامل x عضوی از پایه مثل B شامل x موجود است که $x \in B \subseteq U$ لذا $U \cap A \neq \phi$.

۱-۸-۵ تعریف: هرمجموعه باز شامل x را یک **همسایگی x** گوییم.

۱-۸-۶ مثال:

۱) اگر $X = \mathbb{R}$ و $A = (0,1]$ آن‌گاه $\overline{A} = [0,1]$.

۲) اگر $X = \mathbb{R}$ و $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ آن‌گاه $\overline{A} = \{0\} \cup A$

۳) اگر $X = \mathbb{R}$ و $A = \{0\} \cup (1,2)$ آن‌گاه $\overline{A} = \{0\} \cup [1,2]$

۴) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ و $\overline{\mathbb{Z}_+} = \mathbb{Z}_+$ و $\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

۵) اگر $X = \mathbb{R}$ و $Y = (0,1]$ و $Y \supseteq A = \left(0, \frac{1}{2}\right)$، آن‌گاه $\overline{A} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ لذا طبق قضیه (۱-۸-۲) بستار A در Y به‌صورت

$$\left(0, \frac{1}{2}\right] = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cap Y$$

خواهد بود.

۱-۹ نقاط حدی[1]

۱-۹-۲ تعریف: فرض کنیم A زیرمجموعه ای از فضای توپولوژیک X باشد، $x \in X$ یک **نقطه حدی** (یا تجمع) مجموعه A است اگر هر همسایگی از x، A را در نقطه ای غیر از x قطع کند. به عبارت دیگر x نقطه حدی A است اگر $x \in \overline{A-\{x\}}$.

مجموعه نقاط حدی A را با A' نشان می‌دهیم.

۱-۹-۳ مثال:

(i) فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و $A = (0,1]$، آن‌گاه صفر یک نقطه حدی A است. درواقع هر نقطه از $[0,1]$ یک نقطه حدی A است.

(ii) فرض کنیم $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ در این صورت $A' = \{0\}$. (زیرا هر نقطه دیگر از $\mathbb{R}$ دارای همسایگی است که A را قطع نمی کند.

(iii) اگر $B = \{0\} \cup (1,2)$ آن‌گاه هر نقطه $[1,2]$ نقطه حدی B است.

(iv) هر نقطه $\mathbb{R}$ یک نقطه حدی $\mathbb{Q}$ است.

(v) $\mathbb{Z}^+$ دارای نقطه حدی نمی باشد.

(vi) مجموعه نقاط حدی $\mathbb{R}^+$ برابر است با $\{0\} \cup \mathbb{R}^+$.

۱-۹-۴ قضیه : فرض کنید که $A \subseteq X$ آن‌گاه $\overline{A} = A' \cup A$.

برهان: فرض کنیم $x \in A'$، پس هر همسایگی x مجموعه A را در نقطه ای جز x قطع می‌کند. لذا $x \in \overline{A}$ پس $A' \subseteq \overline{A}$ از طرفی $A \subseteq \overline{A}$ پس $A' \cup A \subseteq \overline{A}$. حال فرض کنیم که $x \in \overline{A}$ و $x \notin A$ پس هر همسایگی از x، A را قطع می کند چون $x \notin A$ پس هر همسایگی از x، $A-\{x\}$ را قطع می کند پس $x \in A'$ لذا $x \in A \cup A'$ (چرا؟) یا $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.

۱-۹-۵ نتیجه: یک زیرمجموعه از یک فضای توپولوژیک بسته است اگر و فقط اگر شامل کلیه نقاط حدیش باشد یا به عبارت دیگر

[1] Limit Points

A بسته است $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

زیرا اگر A بسته باشد، $A' \cup A = A = \overline{A}$ پس $A' \subseteq A$.

اگر $A' \subseteq A$ پس $A' \cup A = A = \overline{A}$ پس A بسته است.

۱-۱۰ فضاهای هاسدورف

۱-۱۰-۱ تعریف: فضای توپولوژیک X را هاسدورف گوییم اگر برای هر x_1 و x_2 که $x_1 \neq x_2$ همسایگی های U_1 ار x_1 و U_2 از x_2 موجود باشد که $U_1 \cap U_2 = \phi$.

۱-۱۰-۲ قضیه: هر مجموعه متناهی در یک فضای هاسدورف بسته است.

برهان: کافی است نشان دهیم که هر مجموعه یکانی مانند $\{x_0\}$ در X بسته است، برای این منظور فرض کنیم $x \neq x_0$ پس همسایگی های U_1 ار x_0 و U_2 از x موجود است که $U_1 \cap U_2 = \phi$. اما این بدان معنا است که $\{x_0\} \cap U_2 = \phi$ پس $x \notin \overline{\{x_0\}}$ لذا $\overline{\{x_0\}} = \{x_0\}$ یعنی $\{x_0\}$ بسته است.

۱-۱۰-۳ قضیه: فرض کنیم X یک فضای هاسدورف و $A \subseteq X$ آن‌گاه $x \in A'$ اگر و فقط اگر هر همسایگی از x، A را در تعداد نامتناهی نقطه قطع کند.

برهان: اگر هر همسایگی از x، A را در تعداد نامتناهی نقطه قطع کند، مسلماً A را در نقطه ای غیر از x قطع خواهد کرد پس $x \in A'$.

بالعکس: فرض کنیم $x \in A'$ و همسایگی U از x موجود باشد که $A \cap U$ متناهی باشد لذا:

$$(A - \{x\}) \cap U = \{x_1, \dots, x_n\}$$

آن‌گاه $X - \{x_1, \dots, x_n\}$ زیرمجموعه باز از X است و درنتیجه

$$U \cap (X - \{x_1, \dots, x_n\})$$

همسایگی از x خواهد بود که $A - \{x\}$ را قطع نمی‌کند یعنی x نمی‌تواند یک نقطه حدی A باشد.

۱-۱۰-۴ تعریف: فضای X، T_1 است یا در اصل T_1 صدق می کند اگر برای هر $a, b \in X$ هر یک از آنها یک همسایگی داشته باشد که دیگری را شامل نباشد.

۱-۱۰-۵ تذکر: به سادگی می توان تحقیق کرد که دو قضیه قبل در هر فضای T_1 نیز برقرار است.

۱-۱۰-۶ **تذکر:** فضاهای هاسدورف را گاهی با T_2 نمایش می دهند.

۱-۱۰-۷ **قضیه:** هر مجموعه مرتب ساده با توپولوژی ترتیبی، یک فضای هاسدورف است. حاصل ضرب دو فضای هاسدورف، هاسدورف است. هر زیرفضا از فضایی هاسدورف، فضایی هاسدورف است.

برهان: بعنوان تمرین واگذار می شود.

۱-۱۰-۸ **مثال:**

۱) اعداد حقیقی را به توپولوژی متمم متناهی مجهز می کنیم این فضا T_2 نیست ولی T_1 است. زیرا برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ که $x \neq y$ آن‌گاه $x \in \mathbb{R}-\{y\}$ و $y \in \mathbb{R}-\{x\}$، اما $\mathbb{R}-\{y\}$ باز است پس این فضا T_1 است اما اگر U و V همسایگی های x و y باشند به طوریکه $U \cap V = \phi$ آن‌گاه $\mathbb{R}-U$ و $\mathbb{R}-V$ متناهی هستند. از آنجائیکه $U \cap V = \phi$ پس $U \subseteq \mathbb{R}-V$ و $\mathbb{R}-V$ متناهی است. پس U نیز متناهی است، لذا $\mathbb{R}-U$ نامتناهی است (که متناقض با فرض باز بودن U است).

۱-۱۰-۹ **تعریف:** فضای توپولوژی X را T_0 گوئیم هرگاه برای هر $a, b \in X$، حداقل یکی از a یا b همسایگی داشته باشد که نقطه دیگر را شامل نباشد.

۱-۱۰-۱۰ **مثال:** فرض کنیم که $X = \{a,b,c\}$ و $\tau_1 = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ در این صورت (X, τ_1)، T_0 می باشد. زیرا $c \notin \{a\}$ و $c \notin \{b\}$، حال فرض کنیم که $\tau_2 = \{\phi, X\}$ دراینصورت (X, τ_2)، T_0 نیست زیرا $a, b, c \in X$.

توجه کنید که (X, τ_1)، T_0 هست ولی T_1 نیست. زیرا هر مجموعه باز شامل c شامل a و b نیز هست. ولی هرگاه X را با توپولوژی گسسته درنظر بگیریم X یک فضای T_1 خواهد بود.

۱-۱۰-۱۱ **تذکر:** هر فضای T_2 یک فضای T_1 و هر فضای T_1 یک فضای T_0 می باشد.

۱-۱۰-۱۲ **قضیه:** اگر فضاهای X و Y، T_i $(i = 0,1,2)$ باشند آنگاه $X \times Y$ نیز T_i $(i = 0,1,2)$ است.

برهان: به خواننده واگذار می شود.

۱-۱۱ توابع پیوسته

۱-۱۱-۱ تعریف: فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک باشند تابع $f: X \to Y$ را پیوسته نامیم اگر برای هر زیرمجموعه باز V از Y، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد. که در آن $f^{-1}(V)$ به‌صورت زیر

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$$

می‌باشد.

۱-۱۱-۲ تبصره: (۱) اگر β یک پایه برای توپولوژی Y باشد، برای اثبات پیوستگی f کافی است نشان دهیم که نقش معکوس هر عضو β در X باز است. زیرا اگر V زیرمجموعه باز از Y باشد، آن‌گاه

$$V = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \qquad , B_\alpha \in \beta$$

درنتیجه

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

(۲) اگر توپولوژی Y با زیرپایه S داده شده باشد، برای اثبات پیوستگی f کافی است نشان دهیم که نقش معکوس هر عضو S در X باز است. زیرا هر عضو B از β به صورت

$$B = S_1 \cap S_2 \ldots \cap S_n \text{ ؛ } S_i \in S$$

می باشد. لذا

$$f^{-1}(B) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(S_i)$$

۱-۱۱-۳ مثال:

(۱) فرض کنیم $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$ با ضابطه $f(x) = x$ مفروض باشد، این تابع پیوسته نیست زیرا برای هر عضو پایه $\mathbb{R}_l$ به‌صورت $[a,b)$ داریم:

$$f^{-1}([a,b)) = [a,b)$$

(۲) تابع $f: \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x$ پیوسته است.

(۳) فرض کنیم که $i: X \to X'$ همانی باشد اگر τ و τ' به ترتیب نمایش دو توپولوژی مختلف X باشند، آن‌گاه : i پیوسته است اگر و فقط اگر τ ظریفتر از τ' باشد. چرا؟

۱-۱۱-۳ قضیه: فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک باشند و $f: X \to Y$ آن‌گاه شرایط زیر معادل هستند:

(الف) f پیوسته است.

(ب) برای هر $A \subseteq X$، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(ج) برای هر زیر مجموعه بسته B از Y، $f^{-1}(B)$ در X بسته است.

برهان: ((ب) $\Longleftarrow$ (الف)) فرض کنیم که f پیوسته باشد، و $A \subseteq X$، اگر $x \in \overline{A}$ ثابت می‌کنیم که $f(x) \in \overline{f(A)}$ برای این منظور فرض کنیم V یک همسایگی از $f(x)$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(V)$ همسایگی از x در X خواهد بود پس $A \cap f^{-1}(V) \neq \phi$ بنابراین

$$\phi \neq f\left(A \cap f^{-1}(V)\right) \subseteq f(A) \cap f f^{-1}(V) \subseteq f(A) \cap V$$

پس

$$\phi \neq f(A) \cap V$$

یعنی هر همسایگی از $f(x)$، $f(A)$ را قطع می‌کند، لذا

$$f(x) \in \overline{f(A)}$$

((ج) $\Longleftarrow$ (ب)) فرض کنیم $B \subseteq Y$ بسته باشد قرار می‌دهیم $A = f^{-1}(B)$، کافی است ثابت کنیم که $\overline{A} \subseteq A$ برای این منظور داریم:

$$A = f^{-1}(B) \Rightarrow f(A) = f f^{-1}(B) \subseteq B$$

اگر $x \in \overline{A}$ آن‌گاه $f(x) \in f(\overline{A})$ پس $f(x) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{B}$ و چون B بسته است:

$$f(x) \in \overline{B} = B \Rightarrow x \in f^{-1}(B) = A$$

درنتیجه

$$\overline{A} \subseteq A \quad \text{یا} \quad \overline{A} = A$$

((الف) $\Longleftarrow$ (ج)) فرض کنیم V زیرمجموعه بازی از Y باشد، قرار می دهیم $B = Y - V$ دراین‌صورت B در Y بسته است و بنابر ج ، $f^{-1}(B)$ در X بسته است. به‌علاوه

$$f^{-1}(V)=f^{-1}(Y-B)=f^{-1}(Y)-f^{-1}(B)=X-f^{-1}(B)$$

پس $f^{-1}(V)$ در X باز است.

۱-۱۱-۴ مثال:

۱) در فضای حاصل‌ضربی $X\times Y$ توابع تصویری π_1 و π_2 پیوسته هستند. زیرا برای هر U باز در X داریم $U\times Y=\pi_1^{-1}(U)$ که در $X\times Y$ باز است و برای هر V باز در Y داریم

$$\pi_2^{-1}(V)=X\times V$$

که در $X\times Y$ باز است.

۲) برای $y_0\in Y$ و $x_0\in X$ نگاشت‌های

$$i_{y_0}:X\to X\times Y \text{ و } i_{x_0}:Y\to X\times Y$$

با ضابطه‌های $i_{x_0}(y)=(x_0,y)$ و $i_{y_0}(x)=(x,y_0)$ پیوسته و ۱-۱ هستند.

حل: فرض کنیم $U\times V$ در $X\times Y$ باز باشد دراین‌صورت

$$i_{x_0}^{-1}(U\times V)=\begin{cases}V & x_0\in U\\ \phi & x_0\notin U\end{cases}$$

که در Y باز است، ۱-۱ بودن تابع بدیهی است.

۱-۱۱-۵ تعریف: یک نگاشت $f:X\to Y$ را باز گوییم اگر برای هر U باز در X، $f(U)$ در Y باز باشد. نگاشت f بسته خواهد بود اگر برای هر V بسته در X، $f(V)$ در Y بسته باشد.

و یک نگاشت $f:X\to Y$ که یک به یک، برو و f و f^{-1} پیوسته باشند، را یک **همسانریخت** گوییم.

۱-۱۱-۶ تذکر: هر همسانریخت مانند f یک تابع باز است زیرا برای هر U باز در X، چون f^{-1} پیوسته است $f(U)=\left(f^{-1}\right)^{-1}(U)$ در Y باز است، هر تابع باز و حتی پیوسته و برو ممکن است همسانریخت نباشد، مثلاً تابع تصویری π_1 باز، پیوسته و برو است در حالی که یک به یک نمی‌باشد.

۱-۱۱-۷ تذکر: همه توابع باز ممکن است که بسته نباشند، مثلاً مجموعه A که به‌صورت

$$A=\left\{\left(x,e^x\right):x\in\mathbb{R}\right\}$$

است. در $\mathbb{R}^2$ بسته است درحالیکه

$$\pi_2(A)=(0,\infty)=\{e^x : x\in \mathbb{R}\}$$

باز است، یعنی π_2 بسته نیست.

۱-۱۱-۸ مثال: توابع زیر مثال‌هایی از همسانریختهای بین فضاهای داده شده می باشند :

۱) اگر $X=\mathbb{R}$ و $Y=(0,\infty)$ آن‌گاه $f(x)=e^x$ یک همسانریخت است.

۲) اگر $X=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ و $Y=\mathbb{R}$ آن‌گاه $f(x)=\tan x$ یک همسانریخت است.

۳) اگر $X=(a,b)$ و $Y=(c,d)$ آن‌گاه

$$f(x)=c+\frac{x-a}{b-a}(d-c)$$

یک همسانریخت است.

۱-۱۱-۹ نتیجه: اگر $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ همسانریخت باشند، آن‌گاه $gof:X\to Z$ نیز همسانریخت خواهد بود.

۱-۱۱-۱۰ تعریف: زیرمجموعه A از X را با توپولوژی زیرفضایی در نظر می‌گیریم. $i:A\to X$ را با ضابطه $i(a)=a$ تابع نشاندن می نامیم. و آنرا با $Sub\ A$ نشان می دهیم. توجه کنید که i پیوسته است زیرا برای هر V باز در X داریم:

$$i^{-1}(V)=A\cap V$$

۱-۱۱-۱۱ تعریف: تابع $f:X\to Y$ را یک **نشانده توپولوژیک** از X به Y گوییم هرگاه تابع $g:X\to f(X)$ با ضابطه $g(x)=f(x)$ یک همسانریخت باشد. مثلاً تابع $i_{y_0}:X\to X\times Y$ با ضابطه $i_{y_0}(x)=(x,y_0)$ یک نشانده توپولوژیک است.

۱-۱۱-۱۲ قضیه: اگر $A\subseteq X$ و تابع $f:X\to Y$ پیوسته باشد، آن‌گاه $f|_A:A\to Y$ پیوسته است.

برهان: فرض کنیم V در Y باز باشد آن‌گاه

$$\left(f|_A\right)^{-1}(V)=f^{-1}(V)\cap A$$

در A باز خواهد بود.

۱-۱۱-۱۳ قضیه: اگر تابع $f:X\to Y$ پیوسته باشد و $Z\subseteq Y$ و $f(X)\subseteq Z$ آن‌گاه تابع $\overline{f}:X\to Z$ با ضابطه $\overline{f}(x)=f(x)$ پیوسته خواهد بود.

برهان : فرض کنیم U در Z باز باشد، آن‌گاه V بازی در Y هست که $U=Z\cap V$. لذا

$$f^{-1}(U)=f^{-1}(Z\cap V)=f^{-1}(Z)\cap f^{-1}(V)=X\cap f^{-1}(V)=f^{-1}(V)$$

در X باز است.

۱-۱۱-۱۴ **تعریف:** تابع $f:X\to Y$ را در نقطه $x_0\in X$ پیوسته گوییم اگر برای هر همسایگی V از $f(x_0)$ همسایگی U از x_0 موجود باشد به طوریکه $f(U)\subseteq V$.

۱-۱۱-۱۵ **قضیه:** تابع $f:X\to Y$ پیوسته است اگر و فقط اگر f در هر نقطه $x\in X$ پیوسته باشد.

برهان: فرض کنیم f پیوسته باشد و $x_0\in X$، اگر V همسایگی از $f(x_0)$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(V)=U$ یک همسایگی از x_0 بوده که

$$f(U)=f(f^{-1}(V))\subseteq V$$

بالعکس: فرض کنیم که f درهر نقطه $x\in X$ پیوسته باشد، اگر V در Y باز باشد برای هر $x\in f^{-1}(V)$، همسایگی از x مانند U_x موجود است که $f(U_x)\subseteq V$. یعنی $U_x\subseteq f^{-1}(V)$ آن‌گاه

$$f^{-1}(V)=\bigcup_{x\in f^{-1}(V)}\{x\}\subseteq\bigcup_{x\in f^{-1}(V)}U_x\subseteq f^{-1}(V)$$

بنابراین

$$f^{-1}(V)=\bigcup_{x\in f^{-1}(V)}U_x$$

پس $f^{-1}(V)$ باز است و لذا f پیوسته است.

۱-۱۱-۱۶ **قضیه:** فرض کنیم که $X=\bigcup_{\alpha\in I}V_\alpha$ که V_α برای هر α باز باشد. اگر $f:X\to Y$ تابعی پیوسته باشد که برای هر $\alpha\in I$، $f_\alpha=f|_{V_\alpha}:V_\alpha\to Y$ پیوسته است آن‌گاه، f نیز پیوسته می باشد.

برهان: فرض کنیم W زیرمجموعه بازی از Y باشد، به سادگی می توان تحقیق کرد که

$$f^{-1}(W)=\bigcup_{\alpha}f_\alpha^{-1}(W)$$

در نتیجه چون $f_\alpha^{-1}(W)$ در V_α باز و V_α در X باز می‌باشد، پس $f_\alpha^{-1}(W)$ در X باز است یا f پیوسته است.

۱-۱۱-۱۷ نتیجه: اگر $X = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ و C_iها در X بسته باشند و برای تابع $f : X \to Y$ هر $f_i = f\big|_{C_i}$ پیوسته باشد، آن‌گاه f نیز پیوسته خواهد بود.

۱-۱۱-۱۸ لم چسب: اگر A و B زیرمجموعه‌های بسته‌ای از X باشند به طوریکه $X = A \cup B$ و $f : A \to Y$ و $g : B \to Y$ توابعی پیوسته باشند. چنانکه برای هر $x \in A \cap B$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$ آن‌گاه تابع $h : X \to Y$ با ضابطه

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

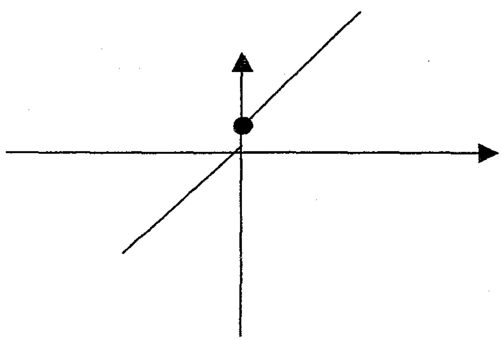
پیوسته خواهد بود.

برهان: با توجه به قضیه قبل به عهده خواننده واگذار می‌شود.

۱-۱۱-۱۹ مثال: فرض کنیم $f_1 : A \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f_1(x) = x$ و $f_2 : B \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f_2(x) = x + 1$، که در آن $A = (-\infty, 0)$ و $B = [0, \infty)$ در این صورت f_1 و f_2 پیوسته هستند ولی تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A \\ f_2(x) & x \in B \end{cases}$$

پیوسته نمی باشد.



شکل ۱-۴

۱-۱۱-۲۰ مثال: فرض کنیم تابع $f:[-1,1]\to \mathbb{R}$ و $g:[1,\infty)\to \mathbb{R}$ با ضابطه های $f(x)=x^2$ و $g(x)=x$ مفروض باشند در اینصورت تابع h با ضابطه

$$h(x)=\begin{cases} x & x\geq 1 \\ x^2 & -1\leq x\leq 1 \end{cases}$$

بر $[-1,\infty)$ پیوسته است.

۱-۱۱-۲۱ توجه: در لم چسب برای $x\in A\cap B$ اگر $f(x)\neq g(x)$ آن‌گاه h تابع نخواهد بود.

۱-۱۲ هموتوپی

۱-۱۲-۱ تعریف: دو نگاشت پیوسته $f,g:X\to Y$ را هموتوپیک گوییم هرگاه تابعی پیوسته مانند $H:X\times I\to Y$ موجود باشد که

$$H(x,0)=f(x) \quad \& \quad H(x,1)=g(x)$$

که در آن $I=[0,1]$. H را یک هموتوپی می‌نامیم. اگر توابع f و g هموتوپیک باشند می نویسیم: $f\overset{H}{\cong} g$.

۱-۱۲-۲ تبصره: رابطه $\cong$ یک رابطه هم ارزی است. زیرا:

(i) $f\overset{H}{\cong} f$ که در آن $H(x,t)=f(x)$

(ii) اگر $f\overset{H}{\cong} g$ آن‌گاه $H(x,0)=f(x)$ و $H(x,1)=g(x)$ لذا $G:X\times I\to Y$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$G(x,t)=H(x,1-t)$$

در اینصورت

$$G(x,1)=H(x,0)=f(x) \quad \& \quad G(x,0)=H(x,1)=g(x)$$

(iii) اگر $f\overset{G}{\cong} g$ و $g\overset{H}{\cong} h$ آن‌گاه تابع $F:X\times I\to Y$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x,t)=\begin{cases} H(x,2t) & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ G(x,2t-1) & t\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

در این‌صورت بنا به لم چسب F پیوسته است و

$$F(x,0)=H(x,0)=f(x) \quad \& \quad F(x,1)=G(x,1)=h(x)$$

پس $f \overset{F}{\cong} h$.

۱-۱۲-۳ مثال: اگر X یک فضای توپولوژیک و توابع $f,g:X\to \mathbb{R}^2$ پیوسته باشند، آن‌گاه $f\cong g$ زیرا H با ضابطه زیر یک هموتوپی می باشد.

$$H:X\times I\to \mathbb{R}^2$$
$$H(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x)$$

۱-۱۲-۴ تعریف: فرض کنیم $f:X\to Y\times Z$ یک تابع باشد، برای هر $x\in X$، y ی در Y و z ی در Z هست که $f(x)=(y,z)$، تابع f دو تابع f_1 و f_2 را بدست می دهد که $f_1:X\to Y$ و $f_2:X\to Z$ و بعلاوه $f(x)=(f_1(x),f_2(x))$ توابع f_1 و f_2 را **توابع مختصی** می نامیم.

۱-۱۲-۵ قضیه: تابع $f=(f_1,f_2):X\to Y\times Z$ پیوسته است اگر و فقط اگر توابع f_1 و f_2 پیوسته باشند.

برهان: فرض کنیم تابع f پیوسته باشد در این صورت $f_i=\pi_i o f$، $i=1,2$ بعنوان ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است.

بالعکس: فرض کنیم توابع f_1 و f_2 پیوسته باشند و $U\times V$ یک عضو دلخواه از پایه $X\times Y$ باشد در اینصورت داریم:

$$f^{-1}(U\times V)=\{x:f(x)\in U\times V\}=\{x:f_1(x)\in U \;\&\; f_2(x)\in V\}$$
$$=f_1^{-1}(U)\cap f_2^{-1}(V)$$

لذا $f_1^{-1}(U\times V)$ به‌عنوان مقطع دو مجموعه باز، باز است.

۱-۱۳ حاصل‌ضرب‌های دلخواه

۱-۱۳-۱ تعریف: فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد، دراین‌صورت حاصل‌ضرب X_α ها را با $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \ni x$ عبارتست از تابع $x: A \to \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ به طوریکه $x(\alpha)\in X_\alpha$. معمولاً $x(\alpha)$ را با x_α نمایش می دهیم.

۱-۱۴ توپولوژی جعبه‌ای[1]

۱-۱۴-۱ تعریف: توپولوژی جعبه ای روی $\prod X_\alpha$ عبارتست از توپولوژی که توسط پایه

$$\beta=\left\{\prod_\alpha V_\alpha : \text{برای هر } \alpha\text{، } V_\alpha \text{ در } X_\alpha \text{ باز است}\right\}$$

تولید می شود.

۱-۱۴-۲ تذکر: β یک پایه است زیرا اولاً $\prod X_\alpha \in \beta$ و ثانیاً

$$\prod (V_\alpha \cap U_\alpha)=(\prod V_\alpha)\cap(\prod U_\alpha)$$

۱-۱۴-۳ تعریف: فرض کنیم

$$S=\left\{\prod_\alpha V_\alpha : \begin{array}{l}\text{برای هر } \alpha\text{، } X_\alpha=V_\alpha \text{ بجز تعداد متناهی } \alpha_1,\dots,\alpha_n \text{ به طوریکه} \\ V_{\alpha_i} \text{ در } X_{\alpha_i} \text{ باز است}\end{array}\right\}$$

در این‌صورت توپولوژی تولید شده توسط زیرپایه S را توپولوژی حاصل‌ضربی می‌نامیم (به عنوان تمرین خواننده می تواند بررسی کند که S خواص یک زیر پایه را دارد).

۱-۱۴-۴ تذکر: فرض کنیم $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod X_\alpha$ دراین‌صورت $\pi_\beta\left((x_\alpha)_\alpha\right)=x_\beta$، حال فرض کنیم که:

[1] Box Topology

$$S = \bigcup_{\beta\in I} S_\beta \quad \text{و} \quad S_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : X_\beta \text{ باز در } U_\beta\}$$

توپولوژی تولید شده توسط زیر پایه S با توپولوژی حاصل‌ضربی یکسان است.

۱-۱۴-۵ قضیه: مجموعه S که در تذکر فوق معرفی شد یک زیر پایه بوده و به علاوه توپولوژی تولید شده توسط S با توپولوژی حاصل‌ضربی یکسان است.

برهان: به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

۱-۱۴-۶ (مقایسه توپولوژی‌های جعبه‌ای و حاصل‌ضربی)

(i) برای حاصل‌ضرب‌های متناهی مثل $\prod_{i=1}^{n} X_i$ دو توپولوژی یکسان هستند.

(ii) اگر V در توپولوژی حاصل‌ضربی باز باشد در توپولوژی جعبه‌ای نیز باز خواهد بود.

(iii) توپولوژی جعبه‌ای در حالت کلی اکیداً ظریفتر از توپولوژی حاصل‌ضربی است . زیرا، فرض کنیم $W = \{1,2,\ldots\}$ و $X_n = \mathbb{R}$ در این‌صورت تعریف می کنیم:

$$\mathbb{R}^W = \prod_{n\in W} X_n$$

فرض کنیم $C = (-1,1)$ و $B = \prod V_n = (-1,1)^W$ در این‌صورت B در توپولوژی جعبه‌ای باز است زیرا V_n در $\mathbb{R}$ باز است، اگر برای هر n، $x_n = 0$ آن‌گاه $(x_n) \in \beta$. حال یک همسایگی از (x_n) که عضوی از پایه باشد در توپولوژی حاصل‌ضربی به‌صورت $\prod U_n$ خواهد بود که U_n یک همسایگی از صفر است و برای nهای به اندازه کافی بزرگ $U_n = \mathbb{R}$، لذا $U_n \not\subset V_n$ پس برای هر n داریم: $\prod V_n \not\subset \prod U_n$

لذا $\prod V_n$ در توپولوژی حاصل‌ضربی باز نیست.

۱-۱۴-۷ قرارداد: در هر حاصل‌ضرب $\prod X_\alpha$، فرض بر این است که از توپولوژی حاصل‌ضربی برخوردار است مگر آنکه خلاف آن دقیقاً تصریح شود.

۱-۱۴-۸ قضیه: فرض کنیم برای هر $\alpha \in I$، β_α یک پایه برای X_α باشد آن‌گاه:

(الف) گردایه

$$\beta = \left\{\prod_\alpha V_\alpha : \forall \alpha \in I, V_\alpha \in \beta_\alpha \right\}$$

یک پایه برای توپولوژی جعبه‌ای است.

(ب) گردایه

$$\beta = \left\{ \prod_{\alpha} V_\alpha : V_{\alpha_i} \in \beta_{\alpha_i} \text{ که } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ بجز تعداد متناهی } X_\alpha = V_\alpha \right\}$$

یک پایه برای توپولوژی حاصل‌ضربی است.

برهان: بعنوان تمرین واگذار می شود.

۱-۱۴-۹ قضیه: فرض کنیم برای هر $\alpha \in I$، Y_α زیرفضایی از X_α باشد آن‌گاه $\prod_{\alpha} Y_\alpha$ زیرفضایی از $\prod_{\alpha} X_\alpha$، خواهد بود. که توپولوژی زیرفضایی آن مشابه توپولوژی $\prod_{\alpha} X_\alpha$ است. به عبارت دیگر اگر $\prod_{\alpha} X_\alpha$ را با توپولوژی جعبه‌ای (حاصل‌ضربی) در نظر بگیریم توپولوژی زیرفضایی $\prod_{\alpha} Y_\alpha$ نیز توپولوژی جعبه‌ای (حاصل‌ضربی) خواهد بود.

برهان: بعنوان تمرین واگذار می شود.

۱-۱۴-۱۰ قضیه: اگر برای هر α، X_α هاسدورف باشد، $\prod_{\alpha} X_\alpha$ نیز با هر یک از توپولوژی‌های حاصل‌ضربی و جعبه‌ای هاسدورف خواهد بود.

برهان: فرض کنیم (x_α) و (y_α) دونقطه متمایز از $\prod_{\alpha} X_\alpha$ باشد. آن‌گاه β موجود است که $x_\beta \neq y_\beta$، چون x_β هاسدورف است، همسایگی هایی U_β و V_β از x_β و y_β موجود است که $U_\beta \cap V_\beta = \phi$، برای هر $\alpha \neq \beta$ قرار می‌دهیم $U_\alpha = V_\alpha = X_\alpha$ و $U = \prod_{\alpha} U_\alpha$ و $V = \prod_{\alpha} V_\alpha$ درنتیجه U و V در توپولوژی حاصل‌ضربی باز هستند و بعلاوه $(x_\alpha) \in U$ و $(y_\alpha) \in V$ و داریم $\prod (U_\alpha \cap V_\alpha) = U \cap V = \phi$ یعنی $\prod_{\alpha} X_\alpha$ با توپولوژی حاصل‌ضربی هاسدورف است. چون مجموعه های باز در توپولوژی حاصل‌ضربی در توپولوژی جعبه ای نیز باز خواهد بود پس هاسدورف بودن $\prod_{\alpha} X_\alpha$ با توپولوژی جعبه ای نیز حاصل می شود.

۱-۱۴-۱۱ قضیه: فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ و Y فضاهای توپولوژی باشند و f نگاشتی به‌صورت

$$f : Y \to \prod X_\alpha$$
$$a \to (f_\alpha(a))_{\alpha \in I}$$

باشد، که در آن $f_\alpha : Y \to X_\alpha$ با ضابطه $f_\alpha = \pi_\alpha o f$ مشخص می شود. در اینصورت تابع f پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر α، f_α پیوسته باشد.

برهان: اگر f پیوسته باشد بدیهی است که f_α نیز بعنوان ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است.

بالعکس: فرض کنیم برای هر α، f_α پیوسته باشد، همچنین فرض کنیم $V = \prod_\alpha V_\alpha$ یک عضو دلخواه از پایه باشد در اینصورت $V_\alpha = X_\alpha$ بجز برای $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ که V_{α_i} در X_{α_i} باز خواهد بود. با توجه به اینکه

$$f^{-1}(V) = \cap\left(f_\alpha^{-1}(V_\alpha)\right)$$

و برای $\alpha \neq \alpha_i$، $i = 1, 2, \ldots, n$ داریم $f_\alpha^{-1}(V_\alpha) = Y$، پس

$$\cap f_\alpha^{-1}(V_\alpha) = \bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}\left(V_{\alpha_i}\right)$$

لذا

$$f^{-1}(V) = \bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}\left(V_{\alpha_i}\right)$$

عنوان اشتراک متناهی از مجموعه های باز، باز خواهد بود.

۱-۱۴-۱۲ تذکر: نتیجه فوق لزوماً در توپولوژی جعبه ای صحیح نخواهد بود. برای این منظور به مثالهای زیر توجه کنید:

تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^W$ را با ضابطه $f(x) = (nx)$ در نظر می گیریم. توابع f_n با ضابطه $f_n(x) = (nx)$ پیوسته هستند. اگر $X = \mathbb{R}^W$ را به توپولوژی حاصل‌ضربی مجهز کنیم مطابق قضیه قبل f پیوسته خواهد بود.

حال فرض کنیم $v = (-1,1)^W$ در اینصورت

$$f^{-1}(V) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

این تساوی نشان می دهد که $f^{-1}(V)$ در $\mathbb{R}$ باز می باشد. پس اگر X به توپولوژی جعبه‌ای مجهز شود f پیوسته نخواهد بود. درحالی که هر f_n پیوسته است.

فرض کنیم $Y=\prod_{\alpha} X_\alpha$ و $\prod X_\alpha$ ، $f:Y\to \prod X_\alpha$ ، Y را به توپولوژی حاصل‌ضربی و $\prod X_\alpha$ را به توپولوژی جعبه ای مجهز می کنیم و تابع f را با ضابطه

$$f(x_\alpha)=(x_\alpha)$$

در نظر می‌گیریم. توابع $f_\alpha = id_{X_\alpha}$ پیوسته هستند درحالی‌که f پیوسته نیست. چرا؟

تمرین

(۱) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$. فرض کنید برای هر $x \in A$ مجموعه ای باز شامل x مانند U موجود باشد که $U \subseteq A$. ثابت کنید که A در X باز است.

(۲) (الف) اگر $\{\tau_\alpha\}$ گردایه ای از توپولوژیهای X باشد، ثابت کنید که $\cap \tau_\alpha$ نیز یک توپولوژی در X است. آیا $\cup \tau_\alpha$ نیز یک توپولوژی در X است؟

(ب) فرض کنید $\{\tau_\alpha\}$ گردایه‌ای از توپولوژیهای X باشد ثابت کنید توپولوژی منحصر بفردی در X هست به طوریکه کوچکترین توپولوژی شامل همه τ_αها است. ضمناً توپولوژی منحصر بفردی موجود است به طوریکه بزرگترین توپولوژی جزء همه τ_αها است.

(۳) نشان دهید $\xi = \{[a,b) \mid a,b \in Q \ , a < b\}$ پایه ای است که توپولوژی تولید شده بوسیله آن با توپولوژی حد پایینی R_l روی R متفاوت است.

(۴) فرض کنید β یک پایه برای توپولوژی τ روی X باشد. اگر $B \in \beta$ و $\xi = \beta - \{B\}$ و B اجتماع تعدادی از اعضای ξ باشد، آن‌گاه ξ نیز یک پایه برای τ خواهد بود.

(۵) اگر A و B زیرمجموعه هایی از فضای X باشند ثابت کنید:

(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(ii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. اگر A و B باز باشند، آیا تساوی برقرار خواهد بود؟

(iii) اگر $\{A_\alpha\}_\alpha$ زیرمجموعه هایی از X باشند، آن‌گاه $\overline{\underset{\alpha}{\cup} A_\alpha} \supseteq \cup \overline{A_\alpha}$ آیا تساوی همیشه برقرار است؟ چرا؟

(۶) شرط لازم و کافی برای آنکه G در X باز باشد آنست که برای هر زیرمجموعه A از X داشته باشیم:

$$\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$$

(۷) ثابت کنید اگر D در X چگال باشد آن‌گاه برای هر مجموعه باز G در X خواهیم داشت:

$$\overline{D \cap G} = \overline{G}$$

آیا عکس این مسئله نیز برقرار است؟

(۸) فرض کنید $X \neq \phi$ و تابع $i : ۲^X \to ۲^X$ با خواص زیر مفروض باشد:

(الف) $X = i(X)$

(ب) برای هر $A \in ۲^X$ $\quad i(A) \subseteq A$

(ج) برای هر $A \in ۲^X$ $\quad i(i(A)) = A$

(د) برای هر $B \in ۲^X$ $\quad i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$

نشان دهید که $\tau = \{A \subseteq X : i(A) = A\}$ یک توپولوژی روی X است. و بعلاوه $A^\circ = i(A)$. آیا $\tau = \{i(A) : A \subseteq X\}$ ؟ چرا؟

(۹) اگر X یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$، مرز A را با ∂A نمایش داده و به صورت $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$ تعریف می کنیم:

(i) نشان دهید $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$

(ii) نشان دهید $\partial A = \phi$ اگر و فقط اگر A باز و بسته باشد

(iii) نشان دهید A باز است اگر و فقط اگر $\partial A = \overline{A} - A$

(iv) نشان دهید $\partial(\partial(\partial A)) = \partial(\partial A)$

(v) اگر $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$ آن‌گاه $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$

(vi) نشان دهید $\partial A^\circ \subseteq \partial A$ و $\partial \overline{A} \subseteq \partial A$

(۱۰) فضای توپولوژی X هاسدورف است اگر و فقط اگر مجموعه $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ در $X \times X$ بسته باشد (Δ را قطر $X \times X$ گویند).

(۱۱) اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از فضاهای X و Y باشند، ثابت کنید:

$$\overline{(A \times B)} = \overline{A} \times \overline{B} \quad \text{و} \quad (A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ \quad \text{و} \quad \partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$$

(۱۲) در فضای توپولوژی X اگر $A^\circ = B^\circ = \phi$ و B بسته باشد، نشان دهید:

$$(A \cup B)^\circ = \phi$$

(۱۳) در درستی و نادرستی گزاره زیر تحقیق کنید:

((اگر $f : X \to Y$ نگاشتی باز باشد آن‌گاه برای هر $A \subseteq Y$ داریم:

$$f^{-1}(\overline{A}) \subseteq \overline{f^{-1}(A)}$$))

(۱۴) فرض کنید $A \subseteq X$ و Y و $f : A \to Y$ پیوسته باشد. همچنین فرض کنید Y هاسدورف باشد. نشان دهید که اگر f را به‌توان به تابع پیوسته $g : \overline{A} \to Y$ گسترش داد آن‌گاه g به طور منحصر به فرد از روی f بدست می‌آید.

(۱۵) فرض کنیم Y یک مجموعه مرتب با توپولوژی ترتیبی و توابع $f, g : X \to Y$ پیوسته باشند:

(الف) نشان دهید که $\{x : f(x) \leq g(x)\}$ در X بسته است.

(ب) فرض کنید $h : X \to R$ به‌صورت $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ تعریف شود. ثابت کنید h پیوسته است.

(۱۶) فرض کنید $f : X \to Y$ تابعی برو باشد. برای هر یک از خواص T_1 و T_2 ثابت کنید یا مثال نقض بزنید که اگر یکی از X و Y خاصیت مزبور را داشته باشد، دیگری نیز خواهد داشت موقعی که:

(الف) f پیوسته باشد.

(ب) f باز باشد.

(۱۷) فرض کنید $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد و $X = \prod_\alpha X_\alpha$.

(الف) نشان دهید که توپولوژی حاصل‌ضربی روی X کوچکترین توپولوژی است که برای هر $\alpha \in I$، $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ پیوسته می گردد.

(ب) نشان دهید که برای هر α، π_α نگاشتی باز است و لزوماً بسته نیست.

(ج) نشان دهید

$$\left(\prod_\alpha A_\alpha\right)^\circ \subseteq \prod_\alpha A_\alpha^\circ \quad \text{و} \quad \overline{\prod_\alpha A_\alpha} = \prod_\alpha \overline{A_\alpha}$$

۱۸): ثابت کنید که ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است.

فصل ۲

پالایه‌ها و خانواده‌های آغازین

مقدمه

در آنالیز حقیقی یا مختلط، مفهوم همگرایی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بسیاری از مفاهیم مهم (پیوستگی، مشتق، انتگرال ریمان) به کمک حد تعریف می‌شوند. لزوم معرفی همگرایی در حالت‌های فضاهای توپولوژی برای مدت زمان مدیدی احساس شده بود و شبکه‌ها و پالایه‌ها دو جواب برای این نیاز بودند. در سال ۱۹۲۲ مور[۱] و اسمت[۲] مفهوم دنباله را به نحوی توسعه دادند و نماد شبکه را معرفی نمودند درحالی‌که در سال ۱۹۳۶ کارتان[۳] [۳] مفهوم پالایه‌ها را معرفی نمود.

در این فصل مفهوم پالایه که یک مفهوم صرفاً نظریهٔ مجموعه‌ای و نه توپولوژیکی است معرفی خواهد شد. این مفهوم برای تعریف تقارب در یک فضای توپولوژی به‌کار می‌رود. به همان صورتی‌که دنباله برای تعریف حدود در آنالیز حقیقی و مختلط به‌کار می‌رود.

---

[۱] *Moor*

[۲] *Smith*

[۳] *Cartan*

۲-۱ پالایه‌ها و تقارب پالایه‌ها

۲-۱-۱ تعریف: برای هر $X \neq \phi$، $F \neq \phi$ و $F \subseteq P(X)$ ، F را یک پالایه روی X گوییم هرگاه:

الف) اعضای F غیر تهی باشند،

ب) اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای F عضو F باشد،

ج) اگر $A \in F$ و $A \subseteq B$ آن‌گاه $B \in F$.

۲-۱-۲ مثال:

۱) مجموعه $N_x = \{A:$ است x شامل یک همسایگی از $A\}$ یک پالایه روی x است کـه آن‌را پالایه همسایگی x گوییم.

۲) فرض کنیم $\phi \neq A \in P(X)$ و $P_A = \{B : A \subseteq B\}$ در این‌صورت P_A یک پالایه روی X است. که آنرا **پالایه اساسی** می‌نامیم.

۳) اگر $F = P(X)$ آن‌گاه F یک پالایه روی X نیست. زیرا برای $A \in F$ داریم:

$$\phi = A \cap A^c \in F$$

۲-۱-۳ تعریف: فرض کنیم که F یک پالایه روی X باشد، $B \subseteq P(X)$ را یک پایه برای F نـامیم اگر $B \subseteq F$ و برای هر $F \in F$، $B \in B$ موجود باشد که $B \subseteq F$.

۲-۱-٤ مثال: همه همسایگی های x یک پایه برای N_x است.

۲-۱-٥ تعریف: فرض کنیم $\phi \neq M \subseteq P(X)$ به‌طوری‌که:

۱) اگر $A, B \in M$ آن‌گاه $C \in M$ موجود باشد چنان که $C \subseteq A \cap B$،

۲) هر عضو M غیر تهی باشد.

با شرایط فوق مجموعه

$$\{F : M \subseteq F \text{ باشد که } M \text{ ی در } M\}$$

یک پالایه روی X است که آنرا با $[M]$ نمایش داده و پالایه تولید شده توسط M می‌نامیم. (تحقیق کنید که $[M]$ یک پالایه است و به‌علاوه M یک پایه برای $[M]$ می‌باشد).

۲-۱-٦ مثال: اگر

$$M = \{x \text{ همه همسایگی‌های } \}$$

آن‌گاه

$$[M\ ] = N_x$$

۲-۱-۷ تعریف: فرض کنیم $f : X \to Y$ یک تابع و F یک پالایه روی X باشد. در حالت کلی

$$f(\mathrm{F}) = \{\ f(F) : F \in F\ \}$$

ممکن است یک پالایه روی Y نباشد ولی این مجموعه خواص یک پایه را دارد. پالایه تولید شده توسط $f(\mathrm{F})$ را به‌طور خلاصه با $f\ F$، نمایش می‌دهیم و آن‌را **پالایه تصویر** F می‌نامیم.

۲-۱-۸ قضیه: تحقیق کنید که $f(\mathrm{F})$ خواص یک پایه را دارد.

برهان: به عهده خواننده واگذار می‌شود.

۲-۱-۹ تعریف: فرض کنیم x عضوی از فضای توپولوژیک X باشد، پالایه F را به x همگرا گوییم اگر $N_x \subseteq F$ چنانچه F به x همگرا باشد، می‌نویسیم: $F \longrightarrow x$

۲-۱-۱۰ مثال:

۱) همواره داریم $N_x \longrightarrow x$

۲) فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد و

$$T_k = \{x_n : n \geq k\}$$

در اینصورت $\{T_k : k \in \mathbb{N}\}$ یک پالایه روی X تولید می‌کند (چرا؟) پالایه مزبور را با T_{x_n} نمایش می‌دهیم. می‌توان نشان داد $x_n \to x$ اگر و فقط اگر $T_{x_n} \to x$ (چرا؟) .

۲-۱-۱۱ قضیه: فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک و $A \subseteq X$ و $g : X \to Y$ یک تابع باشد. آن‌گاه:

۱) g پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$ و هر $F \longrightarrow x$ داشته باشیم:

$$g\ F \longrightarrow g(x)$$

۲) $x \in \overline{A}$ اگر و فقط اگر پالایه F روی X موجود باشد که $A \in F$ و $F \longrightarrow x$

۳) X هاسدورف است اگر و فقط اگر هر پالایه روی X حداکثر به یک نقطه همگرا باشد.

برهان:

۱) فرض کنیم که g پیوسته و $F \to x$ ، N را یک همسایگی از $g(x)$ در نظر می‌گیریم، چون g پیوسته است $g^{-1}(N)$ یک همسایگی از x است لذا

$$g^{-1}(N) \in F$$

از اینکه $g\left(g^{-1}(N)\right) \subseteq N$ و $g\left(g^{-1}(N)\right) \in gF$ پس $N \in gF$ لذا

$$gF \to g(x)$$

برعکس: فرض کنیم $x \in X$ دلخواه و برای هر F که $F \to x$ داشته باشیم $g \to g(x)$ F. فرض کنیم که N یک همسایگی دلخواه از $g(x)$ باشد با توجه به اینکه $N_x \to x$ پس $gN_x \to g(x)$ لذا $N \in gN_x$. بنابراین یک همسایگی از x مانند U_x هست که $g(U_x) \subseteq N$. یعنی g در هر نقطه X پیوسته است.

۲) فرض کنیم $x \in \overline{A}$ پس برای هر همسایگی U_x از x داریم $U_x \cap A \neq \phi$. قرار می‌دهیم

$$M = \{A \cap U_x : x \text{ همسایگی } U_x\}$$

M خواص یک پایه را دارد.

چنانچه $[M]$ را در نظر بگیریم داریم $N_x \subseteq [M]$ پس $[M] \to x$ و به‌علاوه

$$A \in [M]$$

برعکس: اگر $F \to x$ و $A \in F$، چون $N_x \subseteq F$ پس برای هر همسایگی از x مانند U_x داریم:

$$\phi \neq A \cap U_x \in F$$

پس

$$x \in \overline{A}$$

۲-۱-۱۲ قضیه:

۱) $x \in A'$ اگر و فقط اگر پالایه F موجود باشد به‌طوری‌که $F \to x$ و $A - \{x\} \in F$؛

۲) A باز است اگر و فقط اگر برای هر $x \in A$ اگر $F \to x$ آن‌گاه $A \in F$؛

۳) U بسته است اگر و فقط اگر U شامل همه x هایی باشد که برای آن، پالایه F_x موجود باشد که $F_x \to x$ و $U \in F_x$.

برهان: به خواننده واگذار می‌گردد.

۲-۱-۱۳ تعریف: پالایه Y را **تظریف** F گوییم هر گاه $F \subseteq Y$.

۲-۱-۱۴ تعریف: پالایه U را یک **فرا پالایه** گوییم اگر هیچ تظریفی غیر بدیهی نداشته باشد. به عبارت دیگر اگر $F \supseteq U$ آن‌گاه $U = F$.

۲-۱-۱۵ مثال:

۱) هر تظریف N_x به x همگرا است.

۲) اگر $P_x = \{A : x \in A\}$ آن‌گاه P_x یک فرا پالایه است که آنرا فراپالایه اصلی در x گوییم. زیرا اگر $P_x \subseteq F$ و $A \in F$ آن‌گاه از این‌که $\{x\} \in P_x$ پس

۳)

$$\{x\} \in F \Rightarrow \phi \neq A \cap \{x\}$$

پس $x \in A$ و به عبارت دیگر، $A \in P_x$ پس $P_x = F$.

۲-۱-۱۶ قضیه: هر پالایه مشمول در یک فرا پالایه است یا به عبارت دیگر هر پالایه حداقل یک فرا پالایه دارد.

برهان: فرض کنیم F یک پالایه روی X و $\Phi = \{Y : Y \supseteq F\}$، Φ با رابطه جزئیت مرتب می‌شود. اگر $\Gamma \subseteq \Phi$ یک زنجیر باشد و H اجتماع اعضای Γ درنظر گرفته شود، آن‌گاه H یک پالایه روی X است (چرا؟) و به‌علاوه هر عضو Γ را نیز شامل است. پس H یک کران بالا برای Γ است و به‌علاوه $H \in \Phi$. لذا بنابر لم زورن Φ حداقل یک عضو ماکزیمال دارد. بدیهی است که مطابق تعریف، عضو ماکزیمال Φ فرا پالایه‌ای از F می‌باشد.

۲-۱-۱۷ قضیه: اگر F یک پالایه روی X باشد، شرایط زیر معادل هستند:

۱) F یک فرا پالایه است؛

۲) برای هر $\phi \neq M \subseteq X$، یا $M \in F$ یا $X - M \in F$؛

۳) اگر $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n \in F$ آن‌گاه j ی هست که $F_j \in F$.

برهان: ((۲) $\Longrightarrow$ (۱)) فرض کنیم $\phi \neq M \subseteq X$، از این‌که برای هر $\phi \neq F \in \mathcal{F}$ داریم:

$$F=(M\cap F)\cup((X-M)\cap F)$$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$M\in\mathcal{F} \text{ یا } X-M\in\mathcal{F}$$

ادعا می‌کنیم همه اعضای $\mathcal{F}$ همان مجموعه‌ای را قطع می‌کنند که F قطع می‌کند. زیرا در غیر این‌صورت $F,G\in\mathcal{F}$ موجودند که

$$F\cap M\neq\phi \text{ و } F\cap(X-M)=\phi \text{ و } G\cap M=\phi \text{ و } G\cap(X-M)\neq\phi$$

پس $F\subseteq M$ و $G\subseteq X-M$ لذا

$$F\cap G\subseteq(X-M)\cap M=\phi$$

که یک تناقض است.

حال فرض کنیم همه اعضاء $\mathcal{F}$، M را قطع کنند. اگر

$$\mathcal{M}=\{F\cap M : F\in\mathcal{F}\}$$

آن‌گاه $[\mathcal{M}]\in\mathcal{F}$. چون $\mathcal{F}$ یک فراپالایه است پس $\mathcal{F}=[\mathcal{M}]$ ولی چون $M\in[\mathcal{M}]$ پس $M\in\mathcal{F}$. بیان مشابهی برای حالت دیگر موجود است.

((۱) $\Longrightarrow$(۲)) فرض کنیم $\mathcal{F}\subset\mathcal{Y}$ بنابراین $M\in\mathcal{Y}$ موجود است که $M\notin\mathcal{F}$ لذا طبق فرض $X-M\in\mathcal{F}$ پس $X-M\in\mathcal{Y}$ لذا

$$\phi=M\cap(X-M)\in\mathcal{Y}$$

که یک تناقض است.

(۳) $\Longrightarrow$(۲) اگر $F_1\cup F_2\cdots\cup F_n\in\mathcal{F}$ و برای هر $1\leq i\leq n$، $F_i\in X-\mathcal{F}$ آن‌گاه بنابر (۲) برای هر i، $X-F_i\in\mathcal{F}$ و لذا

$$\bigcap_{i=1}^{n}(X-F_i)=X-\bigcup_{i=1}^{n}F_i\in\mathcal{F}$$

درنتیجه

$$\phi=\left(\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)\cap\left(X-\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)\in F$$

که تناقض است.

(۲) $\Longrightarrow$(۳) فرض کنیم $\phi \neq M \subseteq X$ چون $X = M\cup(X-M)\in F$ پس طبق فرض (۳) داریم:

$$X-M\in F \quad \text{یا} \quad M\in F$$

۲-۱-۱۸ توجه: برای تابع $g: X\to Y$ و پالایه Y روی Y درحالت کلی

$$g^{-1}(Y)=\{g^{-1}(G): G\in Y\}$$

نمی‌تواند یک پایه باشد. چنانچه $g^{-1}(Y)$ یک پایه باشد، پالایه تولید شده توسط آنرا پالایه نقش معکوس Y نامیده و با $g^{-1}Y$ نمایش می‌دهیم.

۲-۱-۱۹ قضیه:

۱) فرض کنیم که $g: X\to Y$ یک تابع و F و Y پالایه‌هایی به ترتیب روی X و Y باشند. آن‌گاه

الف) $g^{-1}Y$ موجود است اگر و فقط اگر برای هر $G\in Y$، $g^{-1}(G)\neq\phi$.

ب) $g^{-1}gF\subseteq F$

اگر $g^{-1}Y$ موجود باشد، آن‌گاه $Y\subseteq g^{-1}gY$.

۲) اگر F و Y پالایه‌هایی روی X باشند، چنانکه هر عضو F، هر عضو Y را قطع کند، آن‌گاه F و Y دارای یک تظریف مشترک هستند.

برهان: به خواننده واگذار می‌گردد.

۲-۱-۲۰ قضیه: اگر $f: X\to Y$ یک تابع و U یک فرا پالایه روی X باشد، آن‌گاه fU فرا پالایه‌ای روی Y است.

برهان: برای هر $\phi\neq B\subseteq Y$ کافی است نشان دهیم که $B\in fU$ یا $Y-B\in fU$. $f^{-1}(B)$ را درنظر می‌گیریم. اگر $f^{-1}(B)\in U$ آن‌گاه $ff^{-1}(B)\subseteq B$. چون

$$f\,f^{-1}(B)\in f\ U\Rightarrow B\in f\ U$$

حال اگر $X-f^{-1}(B)\in U$ آن‌گاه

$$f\left(X-f^{-1}(B)\right)\subseteq Y-B$$

بنابراین

$$Y-B\in f\ U$$

باید توجه داشت که اگر $\phi=f^{-1}(B)$ آن‌گاه $f^{-1}(Y-B)=X\in U$ و لذا

$$f\,f^{-1}(Y-B)=f(X)\subseteq Y-B\Rightarrow Y-B\subseteq f\ U$$

۲-۱-۲۱ قضیه: هر پالایه برابر است با اشتراک همه فرا پالایه‌هایش.

برهان : فرض کنید F پالایه‌ی روی X باشد، ثابت می‌کنیم :

$$F\ =\cap\ U$$
$$U\ \supseteq F$$

برای این منظور از عکس نقیض حکم استفاده می‌کنیم یعنی اگر $A\notin F$ آن‌گاه فرا پالایه U موجود است که تظریف F می‌باشد و شامل U نیست.

چون برای هر $F\in F$ ، F باید X-A را قطع کند(درغیر اینصورت $F\subseteq A$ یعنی $A\in F$ که تناقض است) قرار می‌دهیم: $\phi=F\cap(X-A)$ و لذا

$$M=\{F\cap(X-A):F\in F\ \}$$

M پالایه $[M\ ]$ را تولید می‌کند، فرض کنیم U یک فرا پالایه $[M\ ]$ باشد چون $X-A\in[M\ ]$ پس $X-A\in U$ یعنی $A\notin U$ (توجه کنید که $U\supseteq[M\ ]\supseteq F$)

۲-۲ خانواده‌های آغازین یا اولیه

این بخش را با مثال‌هایی آغاز می‌کنیم که فلسفه وجودی تعریف خانواده‌های آغازین را بیان می‌کنند:

۲-۲-۱ مثال : فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیک و $\left(S,\tau|_S\right)$ زیرفضایی از X باشد، تابع $sub_S : S \to X$ را درنظر بگیرید:

(۱) $\tau|_S$ کوچکترین توپولوژی است که برای آن sub_S پیوسته است.

(۲) اگر $g:(Z,\eta)\to S$ تابعی دلخواه باشد، آن‌گاه g پیوسته است اگر و فقط اگر $sub_S og$ پیوسته باشد.

حل (۱): فرض کنیم τ_1 توپولوژی دیگری روی S باشد که $sub_S:(S,\tau_1)\to(X,\tau)$ پیوسته باشد، اگر $G\in\tau$ آن‌گاه

$$sub_S^{-1}(G)=S\cap G\in\tau_1$$

ولی $S\cap G\in\tau|_S$ پس $\tau|_S\subseteq\tau_1$.

(۲): اگر g پیوسته باشد، بدیهی است که $sub_S og$ پیوسته است. اگر $sub_S og$ پیوسته باشد، آن‌گاه برای $A\in\tau|_S$ باید نشان دهیم که $g^{-1}(A)$ در Z باز است ولی $A=S\cap G$ و $G\in\tau$. لذا

$$g^{-1}(A)=g^{-1}\left(sub_S^{-1}(G)\right)=(sub_S og)^{-1}(G) \qquad (۱)$$

حال با توجه به (۱) و پیوستگی $sub_S og$ داریم

$$g^{-1}(A)\in\eta$$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "Sub_S"] & X \\ Z \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "Sub_s og"'] & \end{tikzcd}$$

۲-۲-۲ مثال:فرض کنیم $f : X \to Y$ یک نشاننده توپولوژیک باشد، اگر $g : Z \to X$ یک تابع باشد که fog پیوسته است، آن‌گاه g نیز پیوسته خواهد بود.

حل: بسادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$sub_{f(x)} o f^{1} og = fog$$

چون fog پیوسته است، لذا $sub_{f(X)} o f^{1} og$ نیز پیوسته است و بنابر مثال قبل و خاصیت $sub_{f(X)}$، $f^{1} og$ پیوسته است و لذا تابع

$$g = f^{1^{-1}}\left(f^{1} og\right)$$

پیوسته است.

$$\begin{tikzcd}
 & f(X) \arrow[d, "Sub_{f(X)}"] \arrow[dl, bend right, dashed, "f^{1^{-1}}"'] \\
X \arrow[ur, "f^{1}"] \arrow[r, "f"] & Y \\
Z \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f og"']
\end{tikzcd}$$

۲-۲-۳ مثال : فرض کنیم $X = X_1 \times X_2$ و π_i، $i = 1,2$ توابع تصویری باشند. اگر $g : Z \to X$ تابعی دلخواه باشد به‌طوری‌که اگر $\pi_i og$، $i = 1,2$ پیوسته باشند، آن‌گاه g پیوسته است.

$$\begin{tikzcd}
X_2 & X \arrow[l, "\pi_2"'] \arrow[r, "\pi_1"] & X_1 \\
 & Z \arrow[ul, dashed, "\pi_2 og"] \arrow[u, "g"] \arrow[ur, dashed, "\pi_1 og"'] &
\end{tikzcd}$$

حل: به عنوان تمرین واگذار می‌شود. راهنمایی:

$$g^{-1}(U \times V) = (\pi_1 og)^{-1}(U) \cap (\pi_2 og)^{-1}(V)$$

۲-۲-٤ تعریف: فرض کنیم $f_\alpha:(X,\eta)\to(Y_\alpha,\eta_\alpha)$ خانواده ای از توابع پیوسته باشد، $\{f_\alpha\}$ را یک خانواده آغازین (اولیه) گوییم اگر برای تابع $g:(Z,\tau)\to(X,\eta)$ پیوستگی $f_\alpha o g$، پیوستگی g را نتیجه دهد یا به‌عبارت دیگر اگر برای هر α، $f_\alpha o g$ پیوسته باشد آن‌گاه g نیز پیوسته باشد.

$$\begin{tikzcd}
(X,\eta) \arrow[r, "f_\alpha"] & (Y_\alpha,\eta_\alpha) \arrow[dl, "f_\alpha o g"] \\
(Z,\tau) \arrow[u, "g"] &
\end{tikzcd}$$

۲-۲-٥ مثال:

۱) در مثال(۱) $\{Sub_S\}$ یک خانواده آغازین تک عضوی است.

۲) در مثال(۲) $\{f\}$ یک خانواده آغازین تک عضوی است.

۳) در مثال(۳) $\{\pi_i\}_{i=1,2}$ یک خانواده آغازین دو عضوی است.

۲-۲-٦ قضیه: فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده ای از فضاهای توپولوژیک و $X=\prod_\alpha X_\alpha$، چنانچه X را به توپولوژی حاصلضربی مجهز کنیم $\{\pi_\alpha\}$ یک خانواده اولیه است.

برهان: به خواننده واگذار می‌شود.

۲-۳ وجود خانواده های آغازین یا اولیه

۲-۳-۱ قضیه: فرض کنیم X یک مجموعه و (Y_α,η_α) فضاهای توپولوژیک باشند، توابع $f_\alpha:X\to(Y_\alpha,\eta_\alpha)$ را در نظر می‌گیریم. یک توپولوژیی روی X چنان وجود دارد که همه f_α ها نسبت به آن پیوسته بوده و $\{f_\alpha\}$ خانواده ای آغازین گردد.

برهان : فرض کنیم τ_X بوسیله مجموعه

$$S=\{f_\alpha^{-1}(W_\alpha):W_\alpha\in\eta_\alpha \quad \& \quad \alpha\in F\}$$

تولید شود.(توجه شود که S شرایط یک زیر پایه را دارد) طبق تعریف فوق پیوستگی f_α ها تایید می‌شود. فرض کنیم g مشابه تعریف صفحه قبل و برای هر α، $f_\alpha o g$ پیوسته باشد. اگر $W \in \eta$ (که η همان τ_α است) آن‌گاه

$$W = \underset{\alpha\in I}{\cup} f_\alpha^{-1}(W_\alpha) \quad \& \quad W_\alpha \in \eta_\alpha$$

$$\begin{aligned} g^{-1}(W) &= g^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} f_n^{-1}(W_\alpha)\right) \\ &= \bigcup_{\alpha\in I}\left(g^{-1}\left(f_\alpha^{-1}(W_\alpha)\right)\right) = \bigcup_{\alpha\in I}(f_\alpha o g)^{-1}(W_\alpha) \end{aligned}$$

که بطور بدیهی عضوی از τ است.

۲-۳-۲ **تعریف:** توپولوژی تعریف شده در بالا را توپولوژی اولیه یا آغازین القاء شده توسط f_α گوییم.

۲-۳-۳ **قضیه:** τ_X در بحث بالا کوچکترین توپولوژی است که در آن f_α ها پیوسته می‌شوند. به‌علاوه هر توپولوژی دیگری که به ازاء آن $\{f_\alpha\}$ آغازین شود، با τ_X برابر است.

برهان:به خواننده واگذار می‌شود.

۲-۳-٤ **قضیه:** اگر $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ آغازین و

$$\{f_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \{g_\beta\}_{\beta\in J}$$

آن‌گاه $\{g_\beta\}_{\beta\in J}$ نیز آغازین است.

برهان:به خواننده واگذار می‌شود.

۲-۳-۵ **قضیه:** فرض کنید $u: W \to Y$ و $v: X \to Y$ توابعی پیوسته باشند.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f_2} & W \\ f_1 \downarrow & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow[v]{} & Y \end{array}$$

فضای توپولوژیک Z و توابع پیوسته $f_1 : Z \to X$ و $f_2 : Z \to W$ را می‌توان به گونه ای یافت که نمودار بالا تعویض پذیر باشد، یعنی :

$$u o f_2 = v o f_1$$

اگر Z' فضای توپولوژیک دیگری باشد که همراه با g_1 و g_2 در تساوی $u o g_2 = v o g_1$ صدق کند آن‌گاه تابع منحصر بفرد $\alpha : Z' \to Z$ موجود است که $f_1 o \alpha = g_1$ و $f_2 o \alpha = g_2$ (خاصیت فوق را خاصیت **جهانی** نامند).

برهان: با توجه به اینکه انتظار داریم $u o f_2 = v o f_1$ فرض می‌کنیم

$$Z = \{(x, w) : v(x) = u(w)\}$$

آن‌گاه $Z \subseteq X \times W$ ضمناً اگر $f_2 = \pi_2|_Z$ و $f_1 = \pi_1|_Z$ آن‌گاه:

$$(u o f_2)(x, w) = u(\pi_2(x, w)) = u(w)$$

$$(v o f_1)(x, w) = v(\pi_1(x, w)) = v(x)$$

و چون $(x, w) \in Z$ لذا $u o f_2 = v o f_1$.

حال فرض کنیم g_1 و g_2 و Z' هم در شرط بالا صدق کنند یعنی $u o g_2 = v o g_1$. $\alpha : Z' \to Z$ را به صورت

$$\alpha(s) = (g_1(s), g_2(s))$$

تعریف می‌کنیم. چون g_1 و g_2 پیوسته هستند، α نیز پیوسته است و به‌علاوه

$$(f_2 o \alpha)(s) = f_2(g_1(s), g_2(s)) = g_2(s) \Rightarrow f_2 o \alpha = g_2$$
$$(f_1 o \alpha)(s) = f_1(g_1(s), g_2(s)) = g_1(s) \Rightarrow f_1 o \alpha = g_1$$

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[dr, dashed, "\alpha"] \arrow[drr, "g_2"] \arrow[ddr, "g_1"'] & & \\
& Z \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"] & W \arrow[d, "u"] \\
& X \arrow[r, "v"'] & Y
\end{tikzcd}$$

تابع α منحصر بفرد است زیرا اگر $\beta : Z' \to Z$ دارای این خاصیت باشد که $f_2 o\beta = g_2$ و $f_1 o\beta = g_1$ آن‌گاه

$$\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s)) \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{(f_2 o\beta)}_{g_2}(s) = \beta_2(s) \Rightarrow g_2 = \beta_2 \\ \\ \underbrace{(f_1 o\beta)}_{g_1}(s) = \beta_1(s) \Rightarrow g_1 = \beta_1 \end{cases}$$

درنتیجه

$$\beta = (g_1, g_2) = \alpha$$

۲-۳-۶ قضیه: (وجود برابر سازی در توپولوژی) فرض کنیم $X \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} Y$ توابع پیوسته باشند، آن‌گاه نگاشت $k : W \to X$ موجود است که $uok = vok$ ضمناً

$$W \overset{k}{\rightarrow} X \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} Y$$

دارای خاصیت جهانی است یعنی اگر تابع $k' : W' \to X$ پیوسته باشد به‌طوری‌که $uok' = vok'$ آن‌گاه تابع پیوسته منحصربفردی مانند $\alpha : W' \to W$ موجود است که $ko\alpha = k'$.

برهان : فرض کنیم

$$W = \{x : u(x) = v(x)\} \text{ و } k = sub_W$$

آن‌گاه بدیهی است که: $uok = vok$. (چرا؟)

فرض کنیم $k' : W' \to X$ نیز دارای خاصیت $uok' = vok'$ باشد. برای هر $w' \in W'$ چون $k'(w) \in W$، تعریف می‌کنیم $\alpha = k'^{1} : W' \to W$ (یعنی برد k' را به W محدود می‌کنیم) از این‌که $ko\alpha = k'$ (چرا؟) پیوسته و $k = sub_W$ می‌توان نتیجه گرفت که α پیوسته است و به‌علاوه α منحصربفرد است زیرا:

اگر β پیوسته موجود باشد که $ko\beta = k'$ آن‌گاه :

$$\forall w' \in W' \quad \beta(w') \in W \Rightarrow k(\beta(w')) = \beta(w')$$

از اینکه $(ko\beta)(w') = k'(w') = k'^{1}(w')$ پس $\beta = k'^{1}$.

تمرین

(۱) نشان دهید که شرط لازم و کافی برای آنکه U در X بسته باشد آن است که:
U شامل همه x هایی باشد که برای آن x پالایه F_x روی X موجود است به‌طوری‌که $F_x \to x$ و به‌علاوه $U \in F_x$.

(۲) فرض کنید $S = \{۰,۱\}$ و τ_S توپولوژی سیرپینسکی روی S باشد. نشان دهید که مجموعه همه توابع پیوسته از X به S ($X \to S$) یک خانواده اولیه است(X یک فضای توپولوژی دلخواه است).

راهنمایی: برای هر G باز در X، تابع χ_G را بصورت

$$\chi_G = \begin{cases} ۱ & x \in G \\ ۰ & x \notin G \end{cases}$$

تعریف کنید و مجموعه $\{\chi_G : G \text{ باز در } X\}$ را مورد مطالعه قرار دهید.

(۳) فرض کنید $\{f_\alpha : X \to \mathbb{R} \mid \alpha \in I\}$ خانواده ای از توابع حقیقی باشد. X را به توپولوژی اولیه τ_X، القاء شده توسط خانواده فوق مجهز می‌کنیم و قرار می‌دهیم:

$$B = \{N(y,\varepsilon,J) : y \in X, \varepsilon > ۰ \text{ متناهی } J \subseteq I\}$$

که در آن

$$N(y,\varepsilon,J) = \{x : |f_\beta(x) - f_\beta(y)| < \varepsilon, \forall \beta \in J\}$$

(i) ثابت کنید B شرایط یک پایه توپولوژی روی X را دارا است.

(ii) اگر توپولوژی تولید شده توسط B را τ_W بنامیم آیا $\tau_X = \tau_W$؟ چرا؟

(٤) فرض کنیم $Y = \{۰,۱\}$ و τ توپولوژی غیر گسسته روی Y باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه خانواده همه توابع پیوسته $X \to Y$ آغازین باشد آن است که X به توپولوژی غیر گسسته مجهز شود.

فصل ۳

همبندی

۳-۱ فضاهای همبند[۱]

۳-۱-۱ تعریف: فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد یک جداساز از X عبارت است از دو مجموعه باز ناتهی و مجزا از هم که اجتماع آن‌ها برابر X باشد. فضای X را همبند گوییم اگر برای آن هیچ جداسازی موجود نباشد.

۳-۱-۲ مثال: فرض کنیم $X = [۱,۲] \cup [۳,۴] \subseteq \mathbb{R}$ دراین‌صورت X ناهمبند است. زیرا:

$$[۱,۲] = X \cap \left(\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲}\right) = A \quad \text{و} \quad [۳,۴] = X \cap \left(\frac{۵}{۲}, \frac{۹}{۴}\right) = B$$

در X باز است. و به‌علاوه A, B غیر خالی، $A \cup B = X$، $A \cap B = \phi$. یعنی A و B یک جداسازی از X است.

۳-۱-۳ مثال: اگر X توپولوژی غیر گسسته داشته باشد، X همبند است.

---

[۱] Connected Space

۳-۱-٤ تذکر: فضای X همبند است اگر و فقط اگر تنها زیر مجموعه های X که در X هم باز و هم بسته اند مجموعه تهی و خود X باشند. زیرا اگر A یک زیر مجموعه سره X باشد، که هم باز و هم بسته است آنگاه A و $X\text{-}A$ برای X تشکیل یک جدا سازی می‌دهند(A و $X\text{-}A$ باز و به‌علاوه

$$A\cup(X-A)=X \quad \text{و} \quad A\cap(X-A)=\phi).$$

برعکس: اگر U و V برای X تشکیل یک جداسازی برای X بدهند آنگاه داریم:

$$X=U\cup V \quad \& \quad U\cap V=\phi \Rightarrow U=X-V \quad \& \quad V=X-U$$

یعنی U و V هر دو باز و بسته و غیر تهی بوده و $X\neq U,V$ که متناقض با فرض است.

۳-۱-۵ تعریف: فرض کنیم $Y\subseteq X$ ، Y را همبند گوییم اگر Y با توپولوژی زیر فضایی همبند باشد.

۳-۱-۶ قضیه: اگر Y زیرفضایی از X باشد، آنگاه یک جداسازی Y عبارت است از مجموعه‌های ناتهی و جدا از هم مانند A و B که $A\cup B=Y$ و به‌علاوه

$$\overline{A}\cap B=\phi \quad \text{و} \quad A\cap\overline{B}=\phi$$

برهان: فرض کنیم A و B تشکیل یک جداسازی برای Y بدهند پس A و B در توپولوژی نسبی Y باز هستند. و داریم:

$$A\cap B=Y \quad \text{و} \quad A\cup B=\phi$$

درنتیجه

$$A=Y-B \quad \text{و} \quad B=Y-A$$

پس A و B در توپولوژی نسبی Y بسته هستند. بنابراین

$$B=B^{-\tau_y}=\overline{B}\cap Y \quad \text{و} \quad A=A^{-\tau_y}=\overline{A}\cap Y$$

(که در آن $A^{-\tau_y}$ و $B^{-\tau_y}$ (به ترتیب) نمایانگر بستارهای A و B در توپولوژی نسبی Y هستند.

حال داریم:

$$\begin{aligned}\phi=A\cap B&=(\overline{A}\cap Y)\cap(\overline{B}\cap Y)\\&=\overline{A}\cap\overline{B}\cap Y=\overline{A}\cap(\overline{B}\cap Y)=\overline{A}\cap B\end{aligned}$$

به‌طور مشابه داریم: $A\cap\overline{B}=\phi$.

۳-۱-۷ مثال:

(الف) هرفضا با توپولوژی غیر گسسته همبند است.

(ب) فرض کنیم $X=\mathbb{R}^2$ و

$$Y=\left\{(x,y): y=\frac{1}{x^2}\right\}$$

و به‌علاوه

$$A=Y\cap\{(x,y): x>0\} \quad \& \quad B=Y\cap\{(x,y): x<0\}$$

در اینصورت A و B یک جداسازی برای Y می‌باشند.

(ج) مجموعه اعداد گویا Q همبند نیست. در واقع هر زیر مجموعه همبند Q تک عضوی است زیرا اگر

$$a<b \quad \& \quad a,b\in Y\subseteq Q$$

آنگاه

$$r\in Q^c$$

موجود است که $a<r<b$، قرار می‌دهیم

$$B=Y\cap(r,+\infty) \text{ و } A=Y\cap(-\infty,r)$$

لذا $A\cup B=Y$ پس A و B تشکیل یک جدا سازی برای Y می‌دهند. یعنی Y همبند نیست.

۳-۱-۸ لم: اگر Y زیرفضای همبندی از X باشد و A و B تشکیل یک جداسازی برای X بدهند، آنگاه $Y\subseteq A$ و یا $Y\subseteq B$.

برهان: می‌دانیم که $Y\cap A$ و $Y\cap B$ در Y باز هستند و به‌علاوه

$$Y=(Y\cap A)\cup(Y\cap B)=(A\cup B)\cap Y$$

چون Y همبند است لذا $Y\cap A=\phi$ یا $Y\cap B=\phi$ یعنی $Y\subseteq A$ و یا $Y\subseteq B$.

۳-۱-۹ قضیه: اگر $\{C_\alpha\}_\alpha$ گردایه ای از زیرمجموعه‌های همبند فضای X باشد به‌طوری‌که $\bigcap_\alpha C_\alpha\neq\phi$ آنگاه $\bigcup_\alpha C_\alpha$ همبند است.

برهان: فرض کنیم $x\in\bigcap_\alpha C_\alpha$ و $Y=\bigcup_\alpha C_\alpha$ اگر A و B یک جداسازی برای Y باشد داریم $x\in Y=A\cup B$ لذا $x\in A$ یا $x\in B$.

فرض کنیم $x \in A$ به‌علاوه $C_\alpha \subseteq A \cup B$ همبند است پس $C_\alpha \subseteq A$ یا $C_\alpha \subseteq B$. اما C_α مشمول در B نیست زیرا در غیر اینصورت $x \in C_\alpha \subseteq B$ که تناقض است. پس برای هر α، $C_\alpha \subseteq A$. لذا $Y = \cup C_\alpha \subseteq A$ در نتیجه $B = \phi$ که تناقض است.

۳-۱-۱۰ قضیه: اگر $A \subseteq X$ همبند باشد و $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ آنگاه B نیز همبند است.

برهان: فرض کنیم C و D تشکیل یک جداسازی برای B بدهند بنابر لم قبل $A \subseteq C$ یا $A \subseteq D$، فرض کنیم $A \subseteq C$ پس $\overline{A} \subseteq \overline{C}$ چون

$$\overline{C} \cap D = \phi \Rightarrow \overline{A} \cap D \subseteq \overline{C} \cap D \quad \& \quad \overline{A} \supseteq B$$

درنتیجه

$$B \cap D \subseteq \overline{A} \cap D \subseteq \overline{C} \cap D = \phi$$

درنتیجه

$$B \cap D = \phi \Rightarrow D = \phi$$

که متناقض با غیر تهی بودن D است.

۳-۱-۱۱ نتیجه: اگر B با افزودن بعضی یا همه نقاط حدی مجموعه همبند A به آن بدست آید آنگاه B نیز همبند است.

۳-۱-۱۲ قضیه: اگر $f : X \to Y$ یک تابع پیوسته و X همبند باشد، آنگاه $f(X)$ نیز همبند است.

برهان: فرض کنیم $f(X)$ همبند نباشد و U و V یک جداسازی از $f(X)$ باشد، آنگاه

$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(f(X))$$

و

$$f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \supseteq X \quad \text{یا} \quad f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$$

و به‌علاوه

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\phi) = \phi$$

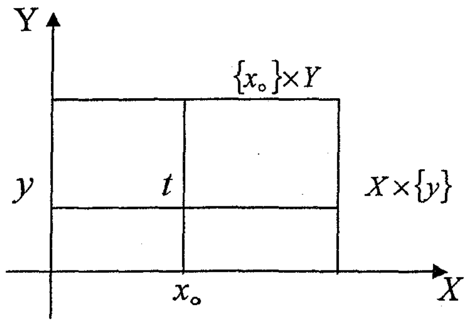
یعنی X ناهمبند است که متناقض با فرض قضیه می‌باشد.

۳-۱-۱۳ نتیجه: اگر X و Y همسانریخت باشند و X همبند باشد آنگاه Y نیز همبند است.

۳-۱-۱۴ لم: اگر X و Y دو فضای همبند باشند آنگاه $X \times Y$ نیز همبند است.

برهان: $x_0 \in X$ را ثابت درنظر می‌گیریم. از این‌که

$$Y \simeq \{x_0\} \times Y$$



شکل ۳-۱

پس $\{x_\circ\}\times Y$ همبند است. حال برای هر $y\in Y$ داریم $X\simeq X\times\{y\}$ پس مجموعه $X\times\{y\}$ همبند می‌باشد، پس

$$C_y=(X\times\{y\})\cup(\{x_\circ\}\times Y)$$

همبند است زیرا

$$t=(x_\circ,y)\in(X\times\{y\})\cap(\{x_\circ\}\times Y)$$

از طرف دیگر $X\times Y=\bigcup_{y\in Y}C_y$ و $\bigcap_y C_y=\{x_\circ\}\times Y$ پس $X\times Y$ به‌عنوان اجتماع مجموعه‌های همبند با اشتراک غیر تهی، همبند است.

۳-۱-۱۵ قضیه: اگر $\{X_\alpha\}$ خانواده‌ای از فضاهای همبند باشد $X=\prod_\alpha X_\alpha$ نیز همبند است.

برهان: اگر $X=\phi$ نتیجه بدیهی است. فرض کنیم $b=(b_\alpha)\in X$ ثابت باشد، مجموعه $X(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\{(x_\alpha):x_{\alpha_i}\in X_{\alpha_i},1\le i\le n\ \&\ \alpha=\alpha_\circ\Rightarrow x_\alpha=b_\alpha\}$$

الف) ادعا می‌کنیم $X(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ همبند است، زیرا

نگاشت دوسویی $f(x_\alpha)=(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_n})$ بین دو فضای $X(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ و $\prod_{i=1}^{n}X_{\alpha_i}$ برقرار است پس

$$\prod_{i=1}^{n} X_{\alpha_i} \cong X(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

لذا چون $\prod_{i=1}^{n} X_{\alpha_i}$ به‌عنوان حاصل‌ضرب متناهی از فضاهای همبند، همبند است، می‌توان نتیجه گرفت $X(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ نیز همبند است.

(ب) اگر I مجموعه اندیس‌گذار و $Y = \bigcup_{A \subseteq I} X(A)$ (A متناهی است) آنگاه Y همبند است زیرا بنابر (الف) هر یک از $X(A)$ ها همبند است و به‌علاوه

$$(b_\alpha) = b \in \bigcap_{A \subseteq I} X(A)$$

(A متناهی است) لذا، Y همبند است.

(ج) $\overline{Y} = X$ یعنی X همبند است. زیرا فرض کنیم $x = (x_\alpha) \in X$ و V یک همسایگی از x باشد، کافی است نشان دهیم که $V \cap Y \neq \phi$، فرض کنیم $V = \prod_\alpha V_\alpha$ که برای هر $1 \leq i \leq n$، V_{α_i} در X_{α_i} باز می‌باشد و $V_\alpha = X_\alpha$ برای $\alpha_i \neq \alpha$ و $1 \leq i \leq n$، تعریف می‌کنیم:

$$y_\alpha = \begin{cases} x_{\alpha_i} & x_{\alpha_i} \in V_{\alpha_i} \\ b_\alpha & \alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \end{cases}$$

آنگاه $(y_\alpha) = y \in V$ و به‌علاوه $y \in X(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ پس

$$y \in V \cap X(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

درنتیجه

$$y \in Y \cap V \Rightarrow Y \cap V \neq \phi$$

یعنی $x \in \overline{Y}$ پس $X \subseteq \overline{Y}$ یا $X = \overline{Y}$.

۳-۱-۱۶ تذکر: قضیه قبل ممکن است که در توپولوژی جعبه‌ای صحیح نباشد، برای این منظور به مثال زیر توجه کنید.

۳-۱-۱۷مثال: از درس آنالیز می‌دانیم که $\mathbb{R}$ همبند است لذا $X=\mathbb{R}^{w}$ به‌عنوان حاصل‌ضرب فضاهای همبند، همبند است. ثابت کنید $\mathbb{R}^{w}$ با توپولوژی جعبه‌ای همبند نمی‌باشد.

حل: فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله کراندار در $\mathbb{R}$: $S=\{(x_n)\}$، بدیهی است که $S\neq\phi$. اولاً S در توپولوژی جعبه‌ای باز است:

اگر $(x_n)\in S$ قرار می‌دهیم

$$V=\prod_n(x_n-1,x_n+1)$$

V در توپولوژی جعبه‌ای باز است و $(x_n)\in S$ ضمناً $V\subseteq S$ زیرا، برای هر $(y_n)=y\in V$ داریم:

$$|y_n|\leq|y_n-x_n|+|x_n|<1+M$$

که در آن M کران بالای $\{x_n\}$ است. پس

$$\{y_n\}\in S$$

و یا $V\subseteq S$ یعنی S باز است. ثانیاً S در توپولوژی جعبه ای بسته است:

اگر $\{y_n\}\in S^{c}$ آنگاه $(y_n)\notin S$، ادعا می‌کنیم که اگر

$$V=\prod(y_n-1,y_n+1)$$

آنگاه $V\cap S=\phi$، اگر $\{x_n\}\in V\cap S\neq\phi$ و M یک کران بالا برای $\{x_n\}$ باشد، آنگاه

$$|y_n|\leq|y_n-x_n|+|x_n|<1+M\Rightarrow\{y_n\}\in S$$

پس $V\subseteq S^{c}$ یعنی S^{c} باز یا S بسته است.

لذا زیرمجموعه ای غیر بدیهی از $\mathbb{R}^{w}$ یافت شد که باز و بسته می‌باشد یعنی $\mathbb{R}^{w}$ با توپولوژی جعبه‌ای همبند نمی‌باشد.

۳-۲ پیوستار خطی

۳-۲-۱ تعریف: یک مجموعه مرتب خطی با بیش از یک عضو **پیوستار خطی** نامیده می‌شود اگر:

(الف) این مجموعه دارای خاصیت کوچکترین کران بالا یا سوپریمم باشد.

(ب) اگر $x<y$ آنگاه zی باشد که $x<z<y$.

۳-۲-۲ قضیه: اگر L یک پیوستار خطی در توپولوژی ترتیبی باشد، آنگاه L همبند است. ضمناً هر بازه و هر بازه بی کران نیز همبند است.

برهان: فرض کنیم $Y \subseteq L$ برابر L یک بازه یا یک بازه بی کران باشد. باید توجه داشت که اگر $a,b \in Y$ دلخواه باشند، آنگاه با فرض $a<b$، $[a,b]$ داخل Y جای می‌گیرد.

ثابت می‌کنیم که برای هر A و B مجزا و غیر تهی و باز $Y \neq A \cup B$، یعنی هیچ جدا سازی از Y وجود ندارد و لذا Y همبند خواهد بود.

فرض کنیم $a \in A$، $b \in B$ و $a<b$ بدیهی است که $[a,b] \subseteq Y$. درنتیجه $A_\circ$ و $B_\circ$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_\circ = A \cap [a,b] \quad \text{و} \quad B_\circ = B \cap [a,b]$$

می‌دانیم که $A_\circ$ و $B_\circ$ در $[a,b]$ نسبت به توپولوژی زیر فضایی که همان توپولوژی ترتیبی است (چرا؟) باز هستند. چون b یک کران بالا برای $A_\circ$ است پس $\sup A_\circ$ موجود می‌باشد. فرض کنیم که $\sup A_\circ = c$ ثابت می‌کنیم که $c \notin A_\circ$ و $c \notin B_\circ$ در نتیجه $Y \neq A \cup B$. بدیهی است که $a \le c \le b$.

حالت (الف):

اگر $c \in B_\circ$ چون $a \notin B_\circ$ پس $a \neq c$. بنابراین $c=b$ یا $a<c<b$ چون $B_\circ$ باز است پس بازه $(d,c]$ که شامل c می‌باشد موجود است چنانکه $(d,c] \subseteq B_\circ$.

در حالت $c=b$، $(d,c] \cap A = \phi$ لذا همه اعضاء $A_\circ$ از d کوچکتر هستند که تناقض است. در حالت $a<c<b$،

$$(d,b] = (d,c] \cup (c,d]$$

$A_\circ$ را قطع نمی‌کند در نتیجه باز هم d کران بالایی از $A_\circ$ و کوچکتر از c است که تناقض است.

حالت (ب) :

فرض کنیم $c \in A_\circ$ بنابراین $c \neq b$ چون $b \notin A_\circ$، پس $c=a$ یا $a<c$ که در دو حالت مجموعه ای باز به‌صورت $[c,e)$ موجود است که تماماً در $A_\circ$ واقع است. از طرفی طبق فرضیات $c<z<e$ موجود است که $z \in A_\circ$ و با سوپریمم بودن c متناقض است.

۳-۲-۳ نتیجه: اعداد حقیقی همبند هستند و به‌علاوه هر بازه و هر بازه بیکران هم همبند می‌باشد.

۳-۲-٤ قضیه: (قضیه مقدار میانی) فرض کنیم $f: X \to Y$ تابعی پیوسته از فضای همبند X به مجموعه مرتب Y باشد(Y را با توپولوژی ترتیبی در نظر می‌گیریم). اگر $a,b \in X$ و r بین $f(a)$ و $f(b)$ واقع باشد آنگاه c یی در X هست که $f(c)=r$.

برهان: فرض کنیم

$$B=f(X)\cap(r,\infty) \quad \& \quad A=f(X)\cap(-\infty,r)$$

در اینصورت A و B غیر تهی و جدا از هم می‌باشند که یکی از آن‌ها شامل $f(a)$ و دیگری شامل $f(b)$ است. ضمناً A و B در $f(X)$ باز هستند.(چرا؟)

اگر برای هر $c \in X$ داشته باشیم $f(c) \neq r$ آنگاه

$$f(X)=A \cup B$$

بنابراین A و B یک جداسازی از $f(X)$ است پس $f(X)$ نمی‌تواند همبند باشد که متناقض با همبندی X است (زیرا تصویر مجموعه های همبند تحت توابع پیوسته، همبند می‌باشد). پس c یی در X هست که $f(c)=r$.

قضیه مقدار میانی در ریاضیات عمومی‌حالت خاصی از قضیه فوق می‌باشد.

۳-۳ همبند مسیری

۳-۳-۱ تعریف: فرض کنیم x و y دو نقطه از فضای توپولوژیک X باشند یک **مسیر** در X از x به y عبارت است از نگاشت پیوسته $f:[a,b] \to X$ ($[a,b] \subseteq \mathbb{R}$) به‌طوری‌که $f(a)=x$ و $f(b)=y$.

فضای X را **همبند مسیری** گوییم اگر هر دو نقطه X را بتوان با یک مسیر بهم متصل کرد. چون $[a,b]$ و $[۰,۱]$ همسانریخت هستند همیشه می‌توانیم مسیرها را از $I=[۰,۱]$ در نظر بگیریم.

۳-۳-۲قضیه : اگر X همبند مسیری باشد آنگاه X همبند است.

برهان: اگر $X = A \cup B$ یک جداسازی از X باشد و $f : [a,b] \to X$ مسیر دلخواهی باشد آنگاه $f([a,b])$ همبند است پس تماماً در A یا B واقع می‌شود. بنابراین هیچ مسیری در X وجود ندارد که یک نقطه A را به یک نقطه B متصل کند. در نتیجه X نمی‌تواند همبند مسیری باشد.

۳-۳-۳ تذکر: عکس حکم فوق همواره برقرار نیست به مثال زیر توجه کنید:

مثال: فرض کنیم

$$k = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

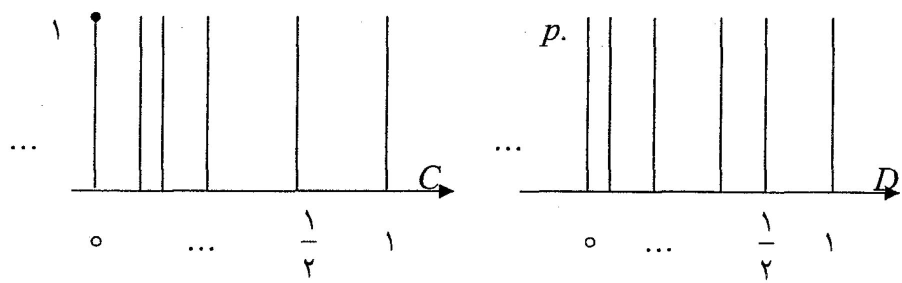
و

$$C = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup (k \times [0,1])$$

فضای C به فضای شانه ای موسوم است. $D = C \setminus (\{0\} \times (0,1))$ را فضای شانه ای محذوف گوییم. فضای C به‌طور بدیهی همبند مسیری است و فضای D همبند است زیرا به‌صورت اجتماع مجموعه همبند

$$A = ([0,1] \times \{0\}) \cup (k \times [0,1])$$

و نقطه حدی $p(0,1)$ از A می‌باشد.



شکل ۳-۲ (الف) و (ب)

فرض کنیم D $f:[a,b]\to D$ یک مسیر با نقطه شروع p باشد نشـان مـی‌دهـیم کـه $f^{-1}(\{p\})$ در $[a,b]$ باز و بسته می‌باشد. درنتیجه از غیر تهـی بـودن $f^{-1}(\{p\})$ و همبنـد بـودن $[a,b]$ نتیجـه می‌شود که $f^{-1}(\{p\})=[a,b]$ و درنتیجه هیچ مسیری در D وجود ندارد که نقطه p را به یک نقطه از A وصل کند. بـرای اثبـات اینکـه $f^{-1}(\{p\})$ بـاز اسـت فـرض مـی‌کنـیم V همسـایگی از p در $R^{2}\cap D$ باشد که محور xها را قطع نمی‌کند. بنابراین برای $x_0\in f^{-1}(\{p\})$ عضوی از پایه شامل x_0 مانند U_{x_0} موجود است که $f(U_{x_0})\subseteq V$، کافی است ثابت کنیم که

$$U_{x_0}\subseteq f^{-1}(\{p\})$$

چون U_{x_0} یک بازه می‌باشد، همبنـد اسـت پـس $f(U_{x_0})$ نیـز همبنـد اسـت. بنـابراین $f(U_{x_0})$ نمی‌تواند نقطه ای غیر از p را شامل باشد، زیرا اگر $q=\frac{1}{n}\times t_0$ نقطه ای از D غیـر از p باشـد و در V قرار بگیرد، r را طوری اختیار می‌کنیم

$$\frac{1}{n+1}<r<\frac{1}{n}$$

حال دو مجموعه باز و مجزا در R^{2} را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(r,\infty)\times R \quad و \quad (r,\infty)\times R$$

از اینکه $f(U_{x_0})$ در D قرار دارد و محور x ها را قطع نمی‌کند (در واقع $f(U)\subseteq V$ و r محور x ها را قطع نمی‌کند). پس $f(U)$ خط $x=r$ را قطع نمی‌کند (چون قسمتی از خـط $x=r$ کـه در بالای محور x ها است در D واقع نیست).

بنابراین از همبند بودن $f(U)$ نتیجه می‌گیریم که بایستی زیر مجموعه یکی از دو مجموعه بالا باشد و چون $p\in(-\infty,r)\times R$ پس

$$f(U)\subseteq(-\infty,r)\times R$$

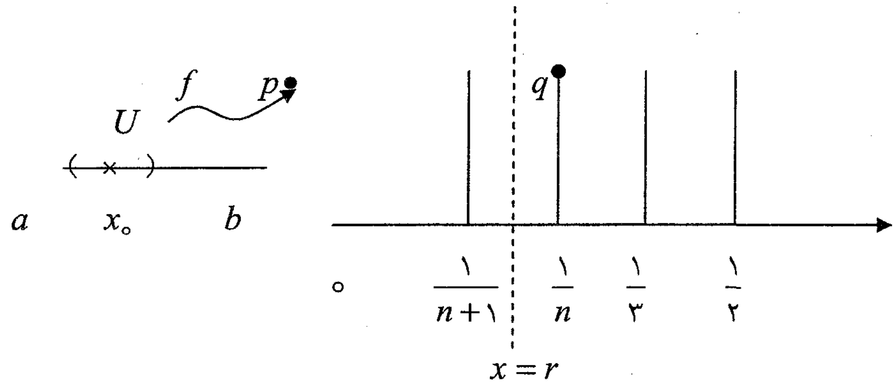
و در نتیجه $q\notin f(U)$. چون g دلخواه بود پس

$$f(U)=\{p\}$$

و یا

$$.U \subseteq f^{-۱}(\{p\})$$

پس $f^{-۱}(\{p\})$ باز است و به‌علاوه $f^{-۱}(\{p\})$ بسته است زیرا $\{p\}$ بسته و f پیوسته است.
بنابراین D همبند مسیری نیست.



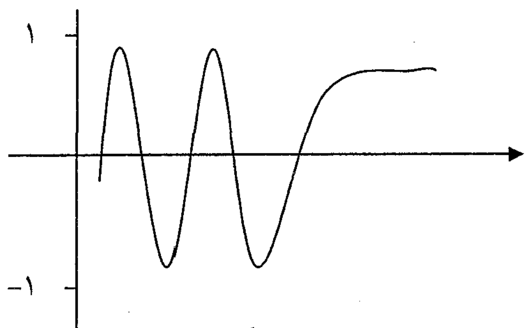
شکل ۳-۳

۳-۳-٤ مثال:

(۱) فرض کنیم

$$S = \left\{ \left(x, \sin \frac{۱}{x} \right) : ۰ < x \leq ۱ \right\}$$

در اینصورت گراف S بصورت زیر است. این منحنی همبند مسیری نیست ولی همبند است(چرا؟)



شکل ۳-٤

(۲) اگر $f:[\circ,\text{۱}]\to[\circ,\text{۱}]$ پیوسته اشد آنگاه $x\in[\circ,\text{۱}]$ ی هست که $f(x)=x$ زیرا:
اگر $f(\circ)=\circ$ یا $f(\text{۱})=\text{۱}$ برهان کامل است. فرض کنیم $f(\circ)\neq\circ$ و $f(\text{۱})\neq\text{۱}$ بنابراین $f(\circ)>\circ$ و $f(\text{۱})<\text{۱}$، قرار می‌دهیم

$$g(x)=x-f(x)$$

پس

$$-f(\circ)<\circ<g(\text{۱})=\text{۱}-f(\text{۱})$$

لذا x ی در $[\circ,\text{۱}]$ هست که $f(x)=x$ یا $g(x)=\circ$.

(۳) $\mathbb{R}^{w}$ همبند مسیری است زیرا:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\qquad p:[\circ,\text{۱}]\to\mathbb{R}^{w}$$
$$p(t)=(\text{۱}-t)x+ty$$

یک مسیر می‌باشد.

(٤) فرض کنیم $X=\mathbb{R}^{n}-\{\circ\}$ دراینصورت برای $n=\text{۱}$، X همبند نیست لذا همبند مسیری نیز نمی‌باشد.

اگر $n\geq\text{۲}$ آنگاه X همبند مسیری است: برای هر x و y در X اگر خط xy از $\circ$ عبور نکند آنگاه $p:[\circ,\text{۱}]\to\mathbb{R}^{n}$ مانند مثال (۳) یک مسیر خواهد بود. در صورتی‌که خط xy از $\circ$ عبور کند، کافی است کمان xy را بصورت یک مسیر در نظر بگیریم.

(۵) مجموعه $S^{\text{۱}}=\{e^{i\theta}:\theta\in\mathbb{R}\}$ همبند مسیری می‌باشد. زیرا برای $e^{i\theta}$ و $e^{i\phi}$، تابع $p(t)=e^{i((\text{۱}-t)\theta+t\phi)}$ یک مسیر است.

۳-۳-۵قضیه: اگر $f:X\to Y$ پیوسته و X همبند مسیری باشد، آنگاه $f(X)$ نیز همبند مسیری خواهد بود.

برهان: به خواننده واگذار می‌گردد.

۳-۳-٦ مثال: اگر

$$S^{n-\text{۱}}=\{x:x\in\mathbb{R}^{n},\|x\|=\text{۱}\}$$

برای $n>\text{۱}$ همبند مسیری است درواقع

$$g : \mathbb{R}^n - \{0\} \to S^{n-1}$$

که

$$g(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

یک تابع پیوسته و برو است و چون $\mathbb{R}^n - \{0\}$ همبند مسیری است لذا S^{n-1} نیز همبند مسیری است.

۳-۳-۷ نتیجه: $\mathbb{R}^n$ برای $n \geq 2$ با $\mathbb{R}$ همسانریخت نمی‌باشد، زیرا اگر $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}$ آنگاه تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک به یک، برو و پیوسته موجود است که معکوس آن نیز پیوسته است. پس تابع

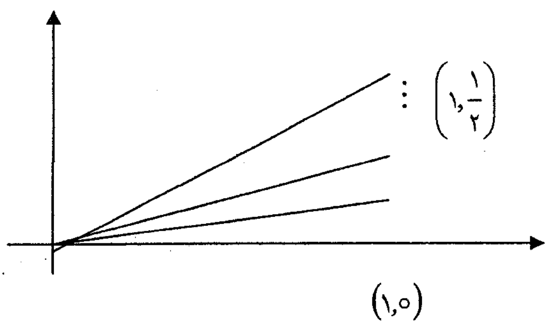
$$f|_{\mathbb{R}^n - \{0\}} : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R} - \{f(0)\}$$

نیز یک همسانریخت است بنابراین $\mathbb{R} - \{f(0)\}$ همبند است که تناقض است.

۳-۳-۸ مثال: فرض کنیم A_n خطی باشد که $(0,0)$ را به $\left(1, \frac{1}{n}\right)$ وصل می‌کند، قرار می‌دهیم

$$A = \bigcup_n A_n \quad \text{و} \quad B = \{(1,0)\}$$

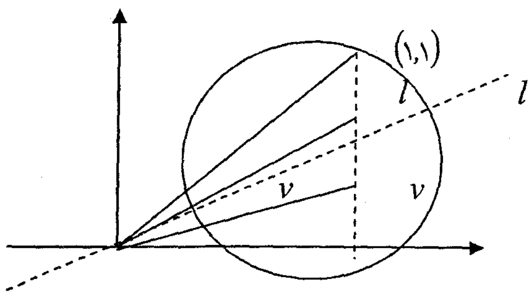
آنگاه $X = A \cup B$ همبند است ولی همبند مسیری نیست.



شکل ۳-۴

حل: چون $(۱,۰)\in \overline{A}$ و $A\subseteq X\subseteq \overline{A}$ پس X همبند است. X همبند مسیری نیست زیرا اگر $p:I\to X$ یک مسیر باشد که $p(۰)=(۱,۰)$، V را گوی باز شامل $(۱,۰)$ در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $(۰,۰)\notin V$. چون p پیوسته است، همسایگی بازی از صفر موجود است مانند U که $p(U)\subseteq V$ (فرض کنیم U یک عضو پایه باشد)، اگر $U=[۰,\varepsilon)$ آنگاه به علت همبندی U، $p(U)$ نیز همبند است.

فرض کنیم $q\in \bigcup_n A_n$ آنگاه مطابق شکل ۳-۵ می‌توان یک جداسازی برای $p(U)$ به‌دست آورد.



شکل ۳-۵

چون $p(۰)\in p(U)$ پس $p(U)$ در پایین خط l قرار دارد بنابراین $q\notin p(U)$ پس

$$p(U)=\{p(۰)\}=\{(۱,۰)\}$$

یعنی $p^{-۱}\{(۱,۰)\}$ باز است و لذا

$$p^{-۱}\{(۱,۰)\}=I$$

(زیرا $p^{-۱}\{(۱,۰)\}$ بسته و I نیز همبند است).

۳-٤ مولفه‌ها و مولفه‌های مسیری

۳-٤-۱ تعریف: در فضای توپولوژیک X رابطه ($\approx$) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
برای $x, y \in X$، $x \approx y$ اگر و فقط اگر مجموعه همبندی مانند C موجود باشد که $x, y \in C$،
رابطه فوق یک رابطه هم ارزی است زیرا:
(۱) $x \approx x$ چون $\{x\}$ همبند است.
(۲) اگر $x \approx y$ بدیهی است که $y \approx x$.
(۳) اگر $x \approx y$ و $y \approx z$ آنگاه $C_۱$ و $C_۲$ همبند موجود است به‌طوری‌که $x, y \in C_۱$ و $y, z \in C_۲$، چون $y \in C_۱ \cap C_۲$ پس $C = C_۱ \cup C_۲$ همبند است پس $x, z \in C$ و $x \approx z$.

۳-٤-۲ تعریف: رده کلاس‌های هم ارزی حاصل از رابطه (($\approx$)) در تعریف فوق را مولفه های X نامیم. بدیهی است که کلاسهای فوق X را افراز می‌کنند.

۳-٤-۳ قضیه: (۱) اگر $V \subseteq X$ همبند باشد، آنگاه V مشمول در دقیقاً یک مولفه X است، یعنی مولفه ای مانند C موجود است که $V \subseteq C$.

برهان: V فقط یکی از مولفه های X را قطع می‌کند زیرا اگر V دو مولفه $C_۱$ و $C_۲$ را قطع کند، $x_۱$ و $x_۲$ موجودند که

$$x_۱ \in C_۱ \cap V \quad \text{و} \quad x_۲ \in C_۲ \cap V$$

لذا $x_۱ \approx x_۲$ (چون $x_۱, x_۲ \in V$ و V همبند است) پس

$$x_۱, x_۲ \in C_۱ \cap C_۲$$

ولی کلاس‌های هم ارزی جدا هستند. پس $C_۱ = C_۲$ بنابراین V فقط یکی از مولفه های X را قطع می‌کند. اگر V، مولفه $C_۰$ را قطع کند داریم

$$V \subseteq C_۰$$

زیرا : اگر $X = \bigcup_C C$ (C مولفه) آنگاه

$$V = X \cap V = \bigcup_{C} (C \cap V) = (C_\circ \cap V) \cup \phi \cup \phi \cdots = C_\circ \cap V$$

۳-٤-۵ قضیه: مولفه های X همبند هستند.

برهان: فرض کنید C مولفه ای از X باشد و $x_\circ \in C$ را ثابت در نظر می‌گیریم. برای هر $x \in C$ می‌دانیم که $x \approx x_\circ$، پس مجموعه C_x موجود است که $x, x_\circ \in C_x$ از طرفی مطابق قضیه۳-٤-۳ چون مجموعه همبند C_x فقط یک مولفه را قطع می‌کند پس $C_x \subseteq C$، که C یک مولفه X است. لذا

$$C = \bigcup_{x \in C} C_x$$

و چون

$$x_\circ \in \bigcap_{x \in C} C_x$$

پس C همبند است.

۳-٤-٦ قضیه: مولفه های X بسته هستند.

برهان: فرض کنیم C مولفه ای از X باشد چون C همبند است، پس $\overline{C}$ نیز همبند است. بنـابر قضـیه ۳-٤-۳ $\overline{C}$ فقط یکی از مولفه های X را قطع می‌کند پس $\overline{C} \subseteq C$ لذا $\overline{C} = C$.

۳-٤-۷ قضیه: اگر تعداد مولفه های X متناهی باشد، مولفه های X باز می‌باشند.

برهان: فرض کنیم C_i , $1 \leq i \leq n$ مولفه های X باشند، لذا

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

پس

$$C_{n_\circ} = X - \bigcup_{i=1, i \neq n_\circ}^{n} C_i$$

چون $\bigcup_{i=1, i \neq n_\circ}^{n} C_i$ بسته است لذا $C_{n_\circ}$ بعنوان متمم یک مجموعه بسته باز است.

۳-٤-۸ نتیجه: اگر X تعداد متناهی مولفه غیر تهی (بیشتر از یکی) داشته باشد، X همبند نیست.

برهان: با توجه به مفروضات چون هر مولفه از X هم مولفه باز و بسته مـی‌باشـد لـذا یـک مجموعـه همبند غیر بدیهی از X موجود است پس X ناهمبند است.

۳-٤-۹ مثال: مولفه های هر زیر مجموعه مانند A از $\mathbb{Q}$ تک عضوی هستند زیرا مولفه ها همبند هستند و قبلاً دیدیم که زیر مجموعه های همبند $\mathbb{Q}$ تک عضوی هستند، باید توجه داشت که مولفه های $\mathbb{Q}$ باز نمی‌باشند، این نتیجه قضیه ۳-٤-۷ را نقض نمی‌کند زیرا تعداد مولفات$\mathbb{Q}$ نامتناهی می‌باشد.

۳-٤-۱۰ مثال: اگر

$$X = [۰,۱) \cup [۲,۳] \cup (۴,۵)$$

آنگاه مولفه های X

$$C_۱ = [۰,۱) \quad \text{و} \quad C_۲ = [۲,۳] \quad \text{و} \quad C_۳ = (۴,۵)$$

می‌باشند.

۳-٤-۱۱ تعریف: فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد برای $x, y \in X$ رابطه (($\overset{p}{\approx}$)) را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$x \overset{p}{\approx} y$ اگر و فقط اگر مسیری مانند f از x به y موجود باشد، رابطه فوق یک رابطه هم ارزی است زیرا:

(الف) $x \overset{p}{\approx} x$ زیرا $p : [۰,۱] \to X$ با ضابطه $p(t) = x$ یک مسیر ثابت است.

(ب) اگر $x \overset{p}{\approx} y$ آنگاه $p : I \to X$ موجود است که $p(۱) = y$ و $p(۰) = x$. تابع q را بصورت زیر تعریف می‌کنیم $q : I \to X$ که $q(t) = p(۱-t)$، q یک مسیر است لذا $y \overset{p}{\approx} x$.

(ج) اگر $x \overset{p}{\approx} y$ و $y \overset{p}{\approx} z$ مسیرهای p و q موجود است که

$$p(۰) = x \quad \text{و} \quad p(۱) = y$$

و

$$q(۰) = y \quad \text{و} \quad q(۱) = z$$

مسیر $r : I \to X$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r(t)=\begin{cases} p(۲t) & ۰\le t\le \frac{۱}{۲} \\ q(۲t-۱) & \frac{۱}{۲}\le t\le ۱ \end{cases}$$

چون $r(۰)=p(۰)=x$، پس

$$r\left(\frac{۱}{۲}\right)=p(۱)=q(۰)=y \quad \text{و} \quad r(۱)=q(۱)=z$$

طبق لم چسب r پیوسته و به‌علاوه یک مسیر است.

۳-٤-۱۲ تعریف: چون رابطه $\underset{\approx}{p}$ یک رابطه هم ارزی است، پس رده یا کلاسهای هم ارزی X را افراز می‌کنند. هر یک از کلاسهای هم ارزی را یک **مولفه مسیری** می‌نامیم.

۳-٤-۱۳ قضیه: مولفه های مسیری، همبند مسیری هستند که مجزا از یکدیگر بوده و اجتماع آن‌ها برابر X است. همچنین هر زیر مجموعه همبند مسیری از X فقط یکی از مولفه های مسیری را قطع می‌کند.

برهان: بعنوان تمرین واگذار می‌شود.

۳-٤-۱٤ نکته: بستار یک مجموعه همبند مسیری لزوماً همبند مسیری نیست. به مثال زیر توجه کنید.

۳-٤-۱۵ مثال: فرض کنیم D شانه محذوف باشد، اگر

$$A=D-A_۰ \quad \text{و} \quad A_۰=\{(۰,۱)\}=\{p\}$$

A و $A_۰$ تنها مولفه های مسیری D هستند، $A_۰$ بسته است لذا A باز می‌باشد.

(باید توجه داشت که A بسته نیست زیرا در غیر اینصورت $A_۰$ باز خواهد بود) حال اگر $\overline{A}$ همبند مسیری باشد، آنگاه $A=\overline{A}$ و لذا A بسته خواهد بود که تناقض است.

۳-٤-۱٦ مثال: فرض کنیم

$$Y=[-۱,۰)\cup(۰,۱]$$

آنگاه $[0,1)$ و $(-1,0]$ تنها مولفه های Y هستند، این مولفات مولفه های مسیری نیز می‌باشند.

۳-۵ فضاهای به‌طور کلی ناهمبند

۳-۵-۱ تعریف: فضای توپولوژیک X را **به‌طور کلی ناهمبند** گوییم اگر تنها زیر مجموعه های همبند آن، مجموعه های تک عضوی باشند. بعنوان مثال $\mathbb{Q}$ ((اعداد گویا)) به‌طور کلی ناهمبند است.

۳-۵-۲ مثال: اگر X یک فضای T_1 و متناهی باشد، آنگاه X به‌طور کلی ناهمبند است. زیرا اگر $A \subseteq X$ بیش از یک عضو داشته باشد داریم

$$A = (A - \{b\}) \cup \{b\}$$

که در آن $b \in A$.

$\{b\}$ بسته است و چون X متناهی است متمم $\{b\}$ نیز بسته است پس $\{b\}$ باز ست. به دلیل مشابه $A - \{b\}$ در X باز است و چون A بیش از یک عضو دارد،

$$A - \{b\} \neq \phi$$

لذا $\{b\}$ و $A - \{b\}$ تشکیل یک جداسازی برای A می‌دهند و لذا A همبند نیست.

۳-۵-۳مثال : اگر $\{A_n\}$ دنباله ای از مجموعه های همبند در X باشد، به‌طوری‌که

$$\forall n \quad A_n \cap A_{n+1} \neq \phi$$

آنگاه $A = \bigcup_n A_n$ همبند است.

حل: فرض کنیم $B_n = \bigcup_{m=1}^{n} A_m$ به سادگی به استقراء روی n می‌توان نشان داد که برای هر n، B_n همبند است. از طرفی داریم:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

پس کافی است ثابت کنیم $\bigcup_n B_n$ همبند است، برای این منظور داریم:

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$$

پس

$$\phi \neq B_1 = A_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

درنتیجه $\bigcup_n B_n$ همبند است.

۳-۵-٤ مثال : اگر $\{A_\alpha\}$ گردایه ای از مجموعه های همبند باشد و A یک مجموعه همبند باشد که

$$\forall \alpha, \quad \phi \neq A \cap A_\alpha$$

آنگاه $\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) \cup A$ همبند است.

حل: برای هر α، $A \cup A_\alpha$ همبند است و به‌علاوه

$$\phi \neq A \subseteq \bigcap_\alpha (A \cup A_\alpha)$$

همچنین $\phi \neq \bigcap_\alpha (A \cap A_\alpha)$ لذا $A \cup \left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)$ همبند است.

۳-۵-٥ تعریف: یک فضای X را **همبند موضعی** (همبند مسیری موضعی) گوییم اگر برای هر $x \in X$ و هر همسایگی V از x، V شامل یک همسایگی همبند (همسایگی همبند مسیری) از x باشد.

۳-۵-٦ مثال: $\mathbb{R}^n$ همبند مسیری موضعی است زیرا هر عضو پایه بصورت $\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ همبند مسیری است.

۳-۵-۷ مثال: $\mathbb{R}^w$ همبند مسیری موضعی است، زیرا هر عضو پایه آن همبند مسیری است.

۳-۵-۸ قضیه: فضای توپولوژیک X همبند موضعی است اگر و فقط اگر مولفه های هر زیر مجموعه باز از X در X باز باشد.

برهان: فرض کنیم X همبند موضعی باشد، اگر Y زیر مجموعه بازی از X و C مولفه ای از Y باشد، ثابت می‌کنیم که C در X باز است.

برای هر $y \in C$ از اینکه Y همسایگی از y می‌باشد، پس همسایگی همبندی از y مانند V_y موجود است به‌طوری‌که $V_y \subseteq Y$، از اینکه V_y همبند است و $y \in V_y \cap C$ پس $V_y \subseteq C$ لذا

$$C = \bigcup_{y \in C} V_y$$

باز است.

بالعکس: فرض کنیم مولفه های هر زیر مجموعه باز X در X باز باشد همچنین فرض کنیم $x \in X$ و V یک همسایگی از x باشد، به‌علاوه فرض کنیم U مولفه ای از V باشد که شامل x است. آنگاه $x \in U \subseteq V$ (چرا؟) طبق فرض U باز است پس X همبند موضعی می‌باشد.

۳-۵-۹ تذکر: توابع پیوسته لزوماً خاصیت همبند موضعی را حفظ نمی‌کنند برای این منظور به مثال زیر توجه کنید:

۳-۵-۱۰ مثال: فرض کنیم

$$X_1 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

با توپولوژی گسسته و

$$X_2 = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

با توپولوژی نسبی $\mathbb{R}$، X_1 همبند موضعی است زیرا هر $\{x\}$ باز و همبند است، به‌علاوه X_2 همبند موضعی نیست چون مجموعه‌های همبند تک عضوی هستند و مجموعه‌های تک عضوی همگی باز نمی‌باشند.

تابع $f : X_1 \to X_2$ با ضابطه

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

پیوسته، یک به یک و برو است. اما X_2 همبند موضعی نیست.

۳-۵-۱۱ قضیه: اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه هر مولفه مسیری X داخل یک مولفه از X جای دارد. اگر X همبند مسیری موضعی باشد، آنگاه مولفات و مولفات مسیری یکی هستند.

برهان: اگر C_p یک مولفه مسیری باشد، طبق قضایای قبل C_p همبند مسیری است پس C_p همبند است لذا داخل یک مولفه جای دارد.

فرض کنیم $x \in X$ و C مولفه ای از x و D مولفه ای مسیری از x باشد، چون

$$x \in D \cap C$$

و D همبند است پس $D \subseteq C$. ثابت می‌کنیم $D = C$.

اگر $D \neq C$ آنگاه در مجموعه

$$Q = \cup \{A : A \cap C \neq \phi, A \neq D \text{ یک مولفه مسیری } A\}$$

چون هر مولفه مسیری مانند A، C را قطع می‌کند پس $A \subseteq C$. بنابراین $C = Q \cup D$ زیرا $Q \cup D \subseteq C$ و برای هر $x \in C$، چون مولفه های مسیری افرازی برای X است پس مولفه مسیری P موجود است که $x \in P$ و $D \neq P$. توجه نمائید اگر $P = D$ آنگاه $x \in D \subseteq D \cup Q$ یعنی $C \subseteq D \cup Q$ و حکم ثابت است.

چون $x \in P$ و $x \in C$ پس $P \cap C \neq \phi$، لذا $P \subseteq Q$ ($x \in P$). درنتیجه $x \in Q \Rightarrow x \in Q \cup D$ لذا $C \subseteq Q \cup D$.

توجه نمائید اگر $C = Q$ آنگاه $D \subseteq Q$، یعنی D حداقل یک مولفه مسیری غیر از خودش را قطع می‌کند که تناقض است.

چون هر مولفه مسیری در یک فضای همبند مسیری موضعی باز است، لذا Q و D باز بوده و به‌علاوه $Q \cap D = \phi$ (طبق خاصیت رده های هم ارزی) پس D و Q تشکیل یک جداسازی برای C می‌دهند یعنی C ناهمبند است.

۳-۵-۱۲ تذکر: در یک فضای همبند مسیری موضعی، هر مولفه مسیری باز است زیرا: اگر D یک مولفه مسیری باشد برای هر $x \in D$، همسایگی همبند مسیری V_x موجود است که $x \in V_x$ پس

$$V_x \cap D \neq \phi$$

لذا

$$V_x \subseteq D$$

۳-۵-۱۳مثال : مجموعه های $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ و $[a,b]$ همسانریخت نیستند.

حل: اگر $S^1 \approx [a,b]$ پس تابع $f : [a,b] \to S^1$ که یک به یک، برو و پیوسته است موجود است. بنابراین

$$(a,b) \approx S^1 \setminus \{f(a), f(b)\}$$

ولی (a,b) همبند است در حالی که $S^1 \setminus \{f(a), f(b)\}$ همبند نیست.

تمرین

(۱) فرض کنید که A و B زیر مجموعه هایی غیر تهی و همبند از فضای X باشند، نشان دهید که $A \cup B$ همبند است اگر و فقط اگر

$$\phi \neq \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$$

(۲) اگر G زیر مجموعه بازی از فضای همبند موضعی X باشد، آنگاه برای هر مولفه A از G :

$$G \cap \partial A = \phi$$

(۳) (الف) فضای X همبند است اگر و فقط اگر هر زیر مجموعه غیر تهی و سره از X، مرز غیر تهی داشته باشد.

(ب) اگر $Y = \{۰,۱\}$ و τ_d توپولوژی گسسته روی X باشد نشان دهید : X همبند نیست اگر و فقط اگر تابع پیوسته و برو $f : X \to Y$ موجود باشد.

(٤) نشان دهید $\mathbb{R}_l$ همبند نمی‌باشد. آیا $\mathbb{R}_l$ به‌طور کلی ناهمبند است؟ چرا؟

(٥) اگر فضاهای X_α، برای هر α همبند مسیری باشند، آیا $\prod_\alpha X_\alpha$ همبند مسیری است؟ اگر هر X_α همبند مسیری موضعی نیز باشد، آیا $\prod_\alpha X_\alpha$ همبند مسیری موضعی است؟

(٦) (الف) فرض کنید تابع $f : (۰,۴] \to \mathbb{R}^۲$ با ضابطه زیر داده شده باشد

$$f(t) = \begin{cases} \left(۲t, \sin\dfrac{\pi}{۲t}\right) & t \in (۰,۱) \\ \left(۱-\cos\pi t, ۱-\sin\pi t\right) & t \in [۱,۲] \\ \left(۰, ۳-t\right) & t \in (۲,۴] \end{cases}$$

آیا f پیوسته است؟

(ii) فرض کنید $f : X \to Y$ پیوسته و برو باشد، برای هریک از خواص:

(الف) X همبند مسیری

(ب) X همبند موضعی

(ج) X همبند مسیری موضعی

تحقیق کنید که آیا Y خواص مشابه را باید داشته باشد؟

اگر f علاوه بر این یک نگاشت باز باشد، آیا پاسخ‌ها تغییر می‌کنند؟ چرا؟

(۷) اگر $\{A_\alpha\}$ خانواده ای از مجموعه های همبند مسیری در فضای X باشد، و $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha \neq \phi$ آنگاه $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ همبند مسیری است. چرا؟

(۸) فرض کنید به شانه محذوف همه نقاط گنگ $\{0\}\times[0,1]$ را اضافه کنیم مولفه ها و مولفه های مسیری این فضا را مشخص کنید.

(۹) ثابت کنید توابع پیوسته، برو و باز خاصیت همبندی موضعی را حفظ می‌کنند.

(۱۰) در درستی یا نادرستی گزاره زیر تحقیق کنید:

X همبند مسیری موضعی است اگر و فقط اگر X همبند مسیری و همبند موضعی باشد.

فصل ٤

فشردگی و قضیه تیخونوف

مقدمه

فضاهای فشرده در شاخه‌های مختلف ریاضیات کاربرد زیادی پیدا کرده‌اند. طبق معمول برای تعریف فشردگی نیز از فضای اعداد حقیقی الهام می‌گیریم. مجموعه‌های بسته و کراندار از اعداد حقیقی به عنوان مدلی که بتوان مفهوم فشردگی را در یک فضای توپولوژی تعمیم داد مورد توجه قرار می‌گیرند. اما چون مفهوم کرانداری در فضای توپولوژی دلخواه همواره قابل حصول نیست باید به دنبال خصوصیاتی از این مجموعه‌ها باشیم که در آن کرانداری استفاده نشده باشد. بعضی از نتایج کلاسیک از این دست عبارتند از:

الف) هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از بازهٔ $[a,b]$ دارای یک نقطهٔ حدی است (قضیهٔ بولزانو — وایرشتراس)

ب) هر خانواده از بازه‌های باز که اجتماع آنها برابر $[a,b]$ باشد، دارای یک زیرخانوادهٔ متناهی است که اجتماع آنها هنوز برابر $[a,b]$ است (قضیهٔ هاینه — بورل).

ج) یک مجموعهٔ A بسته و کراندار است اگر و فقط اگر هر دنباله در A دارای یک زیر دنبالهٔ همگرا به نقطه‌ای از A باشد.

د) هر تابع حقیقی مقدار پیوسته روی یک مجموعهٔ بسته و کراندار مقادیر ماکزیمم و مینیمم‌اش را اختیار می‌کند.

هر یک از این موارد می‌توانند برای تعمیم مفهوم فشردگی بکار روند. اما بسیاری از آنها به دلیل خصوصیاتی که لازم دارند رضایت بخش نیست. بعد از جستجوهای زیاد و بعد از آنکه تیخونوف قضیه

(قضیهٔ ٤-۳-٤) را اثبات کرد، تعریف فشردگی بر اساس قضیهٔ هاینه-بورل مورد پذیرش عام قرار گرفت.
•

٤-۱ مجموعه های فشرده

٤-۱-۱ تعریف: گردایه $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از زیر مجموعه‌های X را یک پوشش برای فضای X نامیم اگر $X = \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha$. اگر برای هر α، V_α در X باز باشد، گردایه $\{V_\alpha\}$ را یک پوشش باز برای X گوییم.

٤-۱-۲ تعریف: فضای X را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز از X شامل یک پوشش جزء متناهی باشد.

٤-۱-۳ مثال:

(الف) X را با توپولوژی متمم متناهی درنظر می گیریم. اگر $\{V_\alpha\}$ یک پوشش باز برای X باشد، برای $V \in \{V_\alpha\}$ داریم

$$X - V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

فرض کنیم $x_i \in V_{\alpha_i}$ آن‌گاه

$$X = V \cup V_{\alpha_i} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}$$

یعنی X فشرده است.

(ب) هر مجموعه متناهی فشرده است.

(ج) هر مجموعه X با توپولوژی ناگسسته فشرده است.

(د) $\mathbb{R}$ فشرده نیست زیرا پوشش $\{(n-1, n+1)\}$ دارای هیچ زیر پوشش متناهی نیست.

(ه) $[0,1)$ فشرده نیست چون پوشش باز $\left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right]\right\}_n$ پوشش جزء متناهی ندارد.

(و) $K = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ فشرده است زیرا اگر C یک پوشش دلخواه برای K باشد، آن‌گاه C یی هست که $0 \in C$ پس N_0 هست که

$$C \supseteq \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n > N_0\right\}$$

فرض کنیم که C_i، $1 \le i \le N$ اعضایی از C باشد که شامل تعداد متناهی عضو به صورت

$$\frac{1}{n} \quad , \quad 1 \le i \le N$$

است. پس

$$K = C \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N_0} C_i \right)$$

۴-۱-۴ تعریف: گردایه $\{U_\alpha\}_\alpha$ از زیر مجموعه های باز X یک پوشش برای زیر فضای Y از X است اگر

$$Y \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$$

۴-۱-۵ تعریف: $A \subseteq X$ فشرده است اگر A با توپولوژی نسبی فشرده باشد.

۴-۱-۶ قضیه: فرض کنیم $Y \subseteq X$ زیرفضایی از X باشد در اینصورت Y فشرده است اگر و فقط اگر هر پوشش باز برای Y، حاوی یک زیر گردایه متناهی باشد که Y را می پوشاند.

برهان: فرض کنیم Y فشرده باشد و $\{U_\alpha\}_\alpha$ یک پوشش باز از زیر مجموعه های X برای Y باشد، چون U_α ها در X باز هستند لذا $U_\alpha \cap Y$ در Y باز خواهد بود و همچنین

$$Y \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha \Rightarrow Y = \bigcup_\alpha (U_\alpha \cap Y)$$

لذا

$$\{U_\alpha \cap Y\}$$

یک پوشش باز (از مجموعه های باز در Y) برای Y است و چون Y فشرده است، n ی هست که

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap Y)$$

یا

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

بالعکس: فرض کنیم هر پوشش باز(از زیر مجموعه های باز در X) برای Y دارای یک زیر پوشش متناهی باشد اگر $\{U_\alpha \cap Y\}$ یک پوشش باز دلخواه برای Y باشد داریم $Y=\bigcup_\alpha (U_\alpha \cap Y)$ یـا $Y \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$

پس $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ بنابراین $Y=\bigcup_{i=1}^{n}\left(U_{\alpha_i} \cap Y\right)$ یعنی Y فشرده است.

٤-١-٧ مثال: در توپولوژی ناگسسته هر زیر مجموعه از X فشرده است.

٤-١-٨ قضیه: هر زیر مجموعه بسته از یک فضای فشرده، فشرده است.

برهان: فرض کنیم C یک پوشش باز برای زیرمجموعه بسته A از X باشد اگر

$$C' = C \cup \{X-A\}$$

آن‌گاه C' یک پوشش باز برای X است، از این‌که X فشرده است، پس $C_1,\ldots,C_n$ در C موجودنـد که

$$X=\left(\cup C_i\right) \cup (X-A)$$

در نتیجه

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

یعنی A فشرده است.

٤-١-٩ قضیه: اگر X یک فضای هاسدورف باشد و $A \subseteq X$ فشرده ، آن‌گاه A بسته است.

برهان: کافی است نشان دهیم $X-A$ باز است. فرض کنیم $x \in X-A$ بـرای هـر $y \in A$، $y \neq x$ لذا V_y و U_y همسایگی هایی از x و y موجود است به‌طوری‌کـه $V_y \cap U_y \neq \phi$. چـون $\{U_y\}_{y \in A}$ یک پوشش باز برای A می‌باشد و A فشرده لذا $U_1 \ldots U_n$ موجودند که

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

قرار می دهیم

$$V=\bigcap_{i=1}^{n} V_i \quad \text{و} \quad U=\bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

بدیهی است که V یک همسایگی از x است و به‌علاوه

$$U \cap V=\phi \qquad (1)$$

زیرا اگر x_0ی باشد که $x_0 \in U \cap V$ آن‌گاه:

$$\exists i_\circ \quad s.t. \quad \text{۱} \le i_\circ \le n \quad \& \quad x_\circ \in U_{i_\circ}$$

و

$$\forall \quad \text{۱} \le i \le n \quad x_\circ \in V_i \quad \overset{i=i_\circ}{\Rightarrow} \quad x_\circ \in V_{i_\circ}$$

درنتیجه

$$x_\circ \in U_{i_\circ} \cap V_{i_\circ}$$

که متناقض با (۱) است. همچنین $A \cap V = \phi$ زیرا $A \subseteq U$ پس $X\text{-}A$ باز می‌باشد.

۴-۱-۱۰ نتیجه: اگر X هاسدورف و $A \subseteq X$ فشرده باشد برای هر $x \notin A$ یک همسایگی از x مانند V و مجموعه بازی مانند U شامل A موجود است به‌طوری‌که $U \cap V = \phi$.

برهان :در اثبات قضیه قبل نهفته است.

۴-۱-۱۱ قضیه: تصویر مجموعه‌های فشرده تحت توابع پیوسته، فشرده است. یا به‌عبارت دیگر توابع پیوسته فشردگی را حفظ می‌کنند.

برهان: فرض کنیم $f: X \to Y$ پیوسته و X فشرده باشد، فرض کنیم C یک پوشش باز برای $f(X)$ باشد، آن‌گاه

$$F = \left\{ f^{-\text{۱}}(V) : V \in z \right\}$$

یک پوشش باز برای X خواهد بود. بنابر فشردگی

$$X = \bigcup_{i=\text{۱}}^{n} f^{-\text{۱}}(V_i)$$

در نتیجه

$$f(X) = f\left(\bigcup_{i=\text{۱}}^{n} f^{-\text{۱}}(V_i) \right) \subseteq \bigcup_{i=\text{۱}}^{n} V_i$$

بنابراین $f(X)$ فشرده است.

۴-۱-۱۲ مثال: شرط هاسدورف بودن در قضیه ۴-۱-۹ ضروری است. برای این منظور فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و

$$\tau_X = \{ \ \mathbb{R} \ \} \cup \{ A : X - A \ \text{متناهی} \ \}$$

آن‌گاه فقط زیر مجموعه های متناهی $\mathbb{R}$ بسته هستند، ولی هر زیرمجموعه $\mathbb{R}$ در این توپولوژی فشرده است، فرض کنیم $A \subseteq \mathbb{R}$ فشرده و $\{C_\alpha\}$ یک پوشش باز برای A باشد اگر $V \in \{C_\alpha\}$ آن‌گاه

$$\mathbb{R} - V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

فرض کنیم

$$x \in C_i \in \{C_\alpha\}$$

پس

$$A \subseteq V \cup C_1 \dots \cup C_n$$

بنابراین A فشرده است ولی اگر A نامتناهی باشد، بسته نخواهد بود. علت این است که X با توپولوژی متمم متناهی هاسدورف نیست.

۴-۱-۱۳ قضیه: اگر $f : X \to Y$ یک تابع دوسویی پیوسته بوده به‌طوری‌که X فشرده و Y هاسدورف باشد، آن‌گاه f یک همسانریخت است.

برهان: فرض کنیم A در X بسته باشد دراین‌صورت چون X فشرده است، A نیز فشرده خواهد بود پس

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(A) = f(A) \subseteq Y$$

فشرده و به علت هاسدورف بودن Y، بسته خواهد بود. یعنی f^{-1} پیوسته است.

۴-۲ لم لوله[1]

اگر Y یک فضای فشرده و $x_0 \in X$ به‌طوری‌که $\{x_0\} \times Y \subseteq N$ که در آن N در $X \times Y$ باز است، آن‌گاه همسایگی W از x_0 موجود است که $W \times Y \subseteq N$.

برهان: برای هر $y \in Y$، $(x_0, y) \in N$ پس همسایگی های U_y و V_y از x_0 و y موجود است به‌طوری‌که $U_y \times V_y \subseteq N$. چون $\{V_y\}_{y \in Y}$ یک پوشش باز برای Y است.

[1] Tube Lemma

از این‌که Y فشرده می باشد، پوشش فوق دارای یک پوشش جزء متناهی برای Y است. فرض کنیم $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$، قرار می دهیم $W = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ آن‌گاه اگر $(x,y) \in W \times Y$ در نتیجه i_0ای هست که $y \in V_{i_0}$، از طرفی $x \in W$ پس برای هر i، $x \in U_i$ به خصوص برای $i = i_0$، پس $(x,y) \in U_{i_0} \times V_{i_0}$ اما می‌دانیم

$$(x,y) \in U_{i_0} \times V_{i_0} \subseteq N$$

چون W همسایگی از α_0 است برهان کامل است.

۴-۲-۱ قضیه: اگر X و Y فشرده باشند آن‌گاه $X \times Y$ نیز فشرده است.

برهان: فرض کنیم $\mathfrak{I}$ یک پوشش باز برای $X \times Y$ باشد، برای هر $x \in X$ چون

$$i_x(Y) = \{x\} \times Y$$

لذا $\{x\} \times Y$ فشرده است. بنابراین $F_1, \dots, F_n$ موجود است که $\{x\} \times Y$ را می پوشاند. قرار می‌دهیم

$$\{x\} \times Y \subseteq N_x = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

بنابر لم لوله همسایگی W_x از x موجود است که

$$W_x \times Y \subseteq N_x$$

بنابراین $W_x \times Y$ به‌وسیله یک اجتماع متناهی N_x از اعضای $\mathfrak{I}$ پوشیده می‌شود. حال $\{W_x\}$ یک پوشش باز برای X است پس $W_{x_1}, \dots, W_{x_n}$ موجود است که

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}$$

پس

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^{m} \left(W_{x_i} \times Y\right)$$

یعنی تعداد متناهی از اعضاء $\mathfrak{I}$، $X \times Y$ را می پوشاند لذا $X \times Y$ فشرده است.

۴-۲-۲ نتیجه: حاصل‌ضرب تعداد متناهی از فضاهای فشرده، فشرده است.

برهان: به استقرا روی تعداد فضاها.

۴-۲-۳ تعریف: یک گردایه F از مجموعه‌ها دارای خاصیت مقطع متناهی $(F.I.P)$ است اگر برای هر تعداد متناهی $F_1,\dots,F_n$ از اعضاء F داشته باشیم:

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \phi$$

۴-۲-۴ مثال: $\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}$ دارای خاصیت مقطع متناهی است درحالی که $\phi = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)$.

۴-۲-۵ قضیه: فضای توپولوژیک X فشرده است اگر و فقط اگر هر خانواده از زیر مجموعه های بسته در X که دارای خاصیت مقطع متناهی باشد، اشتراک غیر تهی داشته باشد.

برهان: فرض کنیم X فشرده باشد و F خانواده ای از زیر مجموعه های بسته X باشد به‌طوری‌که $\cap F=\phi$، نشان می دهیم که F دارای خاصیت مقطع متناهی نیست. فرض کنیم

$$C = \{X-F : F\in F\}$$

آن‌گاه C خانواده ای از زیرمجموعه‌های باز X است. و به‌علاوه

$$\cup C = \bigcup_{F\in\Im}(X-F) = X - \bigcap_{F\in\Im} F = X$$

بنابراین z یک پوشش باز برای X می باشد. از این‌که X فشرده است پس n ی هست که

$$X = \bigcup_{i=1}^{n}(X-F_i)$$

لذا

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \phi$$

یعنی F دارای خاصیت مقطع متناهی نیست.

بالعکس: فرض کنیم هر خانواده از مجموعه های بسته که دارای خاصیت مقطع متناهی است، اشتراک غیر تهی داشته باشد. فرض کنیم z یک پوشش باز برای X باشد پس $X=\cup z$، اگر

$$F = \{X-C : C\in z\}$$

آن‌گاه F خانواده ای از زیر مجموعه های بسته X است به‌طوری‌که

$$\cap F = \bigcap_{C\in z}(X-C) = X - \bigcup_{C\in z} C = \phi$$

بنابر فرض F نمی تواند خاصیت مقطع متناهی داشته باشد، پس $C_1,\dots,C_n$ موجودند که

$$\bigcap_{i=1}^{n}(X-C_i)=\phi$$

پس

$$X=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$$

یعنی X فشرده است.

۴-۲-۶ تبصره: فرض کنیم η خانواده‌ای از مجموعه‌ها در فضای فشرده X باشد که دارای خاصیت اشترک متناهی است آن‌گاه

$$\{\overline{G}:G\in\eta\}$$

خانواده ای از مجموعه های بسته می باشد که دارای خاصیت اشتراک متناهی است پس $\phi\neq\cap\overline{G}$.

بنابراین:

۴-۲-۷ نتیجه: شرط لازم و کافی برای آنکه X فشرده باشد آنست که برای هر خانواده η از زیرمجموعه های X که دارای خاصیت اشتراک متناهی باشد داشته باشیم $\bigcap_{G\in\eta}\overline{G}\neq\phi$.

برهان: $\Longleftarrow$) قبلاً ثابت شد.

بالعکس: اگر η خانواده ای از زیرمجموعه های بسته X باشد که $F.I.P$ است، آن‌گاه بنابر فرض

$$\phi\neq\bigcap_{G}G=\bigcap_{G}\overline{G}$$

لذا بنابر قضیه قبل X فشرده است.

۴-۲-۸ نتیجه: اگر $C_1\supseteq C_2\supseteq\dots$ دنباله ای از مجموعه‌های تو در تو، غیر تهی و بسته در فضای فشرده X باشد، آن‌گاه

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}C_i\neq\phi$$

۴-۲-۹ قضیه: فرض کنیم که X یک فضای توپولوژیک با توپولوژی ترتیبی باشد، اگر X دارای خاصیت سوپریمم یا کوچکترین کران بالا باشد، آن‌گاه برای هر b و a در X که $a<b$، $[a,b]$ فشرده است.

برهان: فرض کنیم $\mathfrak{I}$ یک پوشش باز برای $[a,b]$ باشد، مجموعه A را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$A=\{x\in[a,b]:\text{بوسیله تعداد متناهی از اعضاء } \mathfrak{I} \text{ پوشیده می شود } [a,x]\}$$

(توجه: قبلاً دیدیم که توپولوژی نسبی و توپولوژی ترتیبی روی $[a,b]$ یکی هستند) حال، اولاً $A\neq\phi$ چون $a\in A$ ثانیاً b یک کران بالا برای A است پس A دارای سوپریمم است. فرض کنیم $c=sup\,A$ لذا $a\leq c\leq b$.

(لف) $c\in A$ زیرا:

اگر $c=a$ پس $c\in A$. فرض کنیم $c\neq a$ پس $c>a$ بنابراین $F\in\Im$ موجود است به‌طوری‌که $c\in F$، بنابراین dیی موجود است به‌طوری‌که $(d,c]\subseteq F$.

حالت اول) اگر $d<a$ بنابراین $[a,c]\subseteq(d,c]\subseteq F$ پس $c\in A$ (چون $[a,c]$ بوسیله $F\in F$ پوشیده شده است).

حالت دوم) اگر $a\leq d$ پس طبق خاصیت سوپریمم $z\in A$ موجود است به‌طوری‌که $a\leq d<z<c$ بنابراین $[a,z]$ بوسیله $F_1,\dots,F_n$ پوشیده می شود و چون :

$$[a,c]=[a,z]\cup[z,c]\subseteq[a,z]\cup(d,c]\subseteq\left(\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)\cup F$$

درنتیجه

$$c\in A$$

(ب) $c=b$ زیرا:

اگر $c\neq b$ آن‌گاه $c<b$. چون $c\in A$ پس $F_1,\dots,F_n$ موجود است به‌طوری‌که

$$[a,c]\subseteq F_n\cup F_2\dots\cup F_1$$

و چون $c\in[a,b]$ پس $F\in F$ موجود است به‌طوری‌که $c\in F$. از این‌که F باز و $c<b$ پس e وجود دارد به‌طوری‌که $[c,e)\subseteq F$. اگر $e>b$ پس

$$[c,b]\subseteq[c,e)\subseteq F$$

و

$$[a,b]=[a,c]\cup[c,b]\subseteq F_1\cup\dots F_n\cup F$$

پس $b\in A$ که متناقض با $c<b$ می باشد پس $e\leq b$.

حالت اول) $(c,e)\neq\phi$ پس xیی هست که $c<x<e\leq b$ درنتیجه $x\leq b$ پس $x\in[a,b]$ و

$$[a,x]=[a,c]\cup(c,x]\subseteq[a,c]\cup[c,e)$$

پس داریم:

$$[a,x]\subseteq F_1\cup F_2\cup\ldots\cup F_n\cup F$$

لذا $x\in A$ و $x>c$ که با سوپریمم بودن c تناقض دارد.

حالت دوم) $(c,e)=\phi$. از این‌که $e\in[a,b]$ نتیجه می‌گیریم که F_0ی در $\mathfrak{I}$ هست که $e\in F_0$ پس

$$[a,e]=[a,c]\cup(c,e)\cup\{e\}\subseteq F_1\cup\ldots\cup F_n\cup F_0$$

درنتیجه $e\in A$ و $c<e$ که با سوپریمم بودن c متناقض است.

بنابراین $c=b$ و $b\in A$ یعنی $[a,b]$ بوسیله تعداد متناهی از اعضاء $\mathfrak{I}$ پوشیده می شود و یا به عبارت دیگر $[a,b]$ فشرده است.

۴-۲-۱۰ نتیجه: هر بازه بسته در $\mathbb{R}$ فشرده است.

۴-۲-۱۱ تذکر: $A\subseteq\mathbb{R}^n$ فشرده است اگر و فقط اگر A بسته و کراندار باشد.

برهان: ($A\subseteq\mathbb{R}^n$ را محدود یا کراندار گوییم اگر $M>0$ موجود باشد به‌طوری‌که $A\subseteq[-M,M]^n$) اگر $A\subseteq\mathbb{R}^n$ فشرده باشد، چون $\mathbb{R}^n$ هاسدورف است پس A بسته می باشد ضمناً اگر

$$H_m=(-m,m)^n$$

آن‌گاه

$$\mathbb{R}^n=\bigcup_{m=1}^{\infty}(-m,m)^n$$

پس $\{H_m\}$ یک پوشش باز برای A می باشد. پس

$$A\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}H_{m_i}$$

قرار می دهیم

$$M=\max_{1\le i\le k} m_i$$

پس

$$A\subseteq H_M\subseteq[-M,M]^n$$

یعنی A کراندار است.

برعکس: اگر A بسته و کراندار باشد، آن‌گاه $A \subseteq [-M, M]^n$ و چون $[-M, M]^n$ طبق قضیه قبل فشرده است، پس A بعنوان زیرمجموعه بسته ای از یک فضای فشرده، فشرده خواهد بود.

٤-۲-۱۲ مثال: مجموعه

$$\left\{\left(x, \frac{۱}{x}\right) : ۰ < x \leq ۱\right\}$$

بسته است ولی کراندار نیست پس در $\mathbb{R}^۲$ فشرده نیست.

٤-۲-۱۳ قضیه: (مقدار ماکزیمم و مینیمم) اگر تابع $f : X \to Y$ پیوسته باشد به‌طوری‌که Y دارای توپولوژی ترتیبی و X فشرده باشد، آن‌گاه d و c یی در X موجودند که برای هر $x \in X$

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

برهان: بنابر قضیه (٤-۱-۱۱) $f(X) = A$ فشرده است پس کافی است ثابت کنیم که A از Y دارای ماکزیمم و مینیمم است. اگر A عضو ماکزیمم نداشته باشد، برای هر $y \in A$، $a \in A$ موجود است که $y < a$ در نتیجه

$$\{(-\infty, a) : a \in A\}$$

یک پوشش باز برای A است پس

$$A \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} (-\infty, a_i)$$

بنابراین اگر

$$a_k = \max_{۱ \leq i \leq n} a_i$$

آن‌گاه a_k به هیچ یک از $(-\infty, a_i)$ ها تعلق ندارد که تناقض است (در مورد مینیمم به طریق مشابه عمل می شود) .

٤-۲-۱٤ قضیه: فرض کنیم $X \neq \phi$ یک فضای هاسدورف و فشرده باشد به‌طوری‌که هر نقطه X یک نقطه حدی آن باشد آن‌گاه X ناشمارا است.

برهان: نشان می دهیم که هیچ تابع برو مثل $f : \mathbb{Z}_+ \to X$ وجود ندارد. برای این منظور ثابت می‌کنیم که اگر $U \neq \phi$ در X باز باشد، آن‌گاه برای هر $x \in X$ زیر مجموعه غیر تهی و بازی مانند $V \subseteq U$ موجود است که $x \notin \overline{V}$.

ادعا می کنیم که $y \in U$ موجود است که $x \neq y$ زیرا :

۱) اگر $x \in U$ پس U یک همسایگی از x است و چون x یک نقطه حدی X می باشد لذا U، X را در نقطه ای غیر از x قطع می کند یعنی $\exists x \neq y \in U$.

۲) اگر $x \notin U$، y را یک نقطه دلخواه از U درنظر می گیریم. در اینصورت $x \neq y$.

برای x و y همسایگی های W_1 و W_2 از x و y موجودند که $W_1 \cap W_2 = \phi$. فرض کنیم

$$V = U \cap W_2$$

در این‌صورت

$$W_1 \cap V \subseteq W_1 \cap W_2 = \phi$$

پس

$$x \notin \overline{V}$$

و به‌علاوه $y \in U \cap W_2$ پس $\phi \neq V$.فرض کنیم $f : \mathbb{Z}_+ \to X$ تابعی دلخواه باشد و $x_n = f(n)$، $x_1 \in X$ پس $\phi \neq V_1$ باز موجود است که $x_1 \notin \overline{V_1}$ به‌علاوه زیر مجموعه باز و غیر تهی V_2 از V_1 موجود است که $x_2 \notin \overline{V_2}$، فرض کنیم که V_n انتخاب شده باشد آن‌گاه

$$\phi \neq V_{n+1} \subseteq V_n$$

موجود است به‌طوری‌که $x_{n+1} \notin \overline{V_{n+1}}$ بنابراین $\overline{V_1} \supseteq \overline{V_2} \supseteq \ldots \supseteq \overline{V_n} \supseteq \ldots$ چون X فشرده است

پس $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \neq \phi$ اگر $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$ آن‌گاه برای هر n، $x \in \overline{V_n}$ و چون $x_n \notin \overline{V_n}$ پس $x \neq x_n$ به عبارت دیگر برای هر n $f(n) \neq x$ یعنی f برو نیست و لذا X ناشمارا است.

۴-۲-۱۵ نتیجه: هر بازه بسته و در نتیجه $\mathbb{R}$ ناشمارا است .

۴-۲-۱۶ قضیه: فضای توپولوژیک X فشرده است اگر و فقط اگر هر فرا پالایه در X همگرا باشد.

برهان: فرض کنیم X فشرده و U یک فراپالایه روی X باشد، به‌طوری‌که U به هیچ $x \in X$ همگرا نباشد، پس برای هر $x \in X$، همسایگی U_x موجود است که $U_x \notin U$.

$\{U_x : x \in X\}$ یک پوشش باز برای X است و چون X فشرده است

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

طبق فرض $X \in U$ پس حداقل یکی از U_{x_i} ها باید در U واقع باشد که تناقض است.

بالعکس: فرض کنیم هر فرا پالایه در X به نقطه‌ای همگرا باشد، $\{G_\alpha\}$ را به‌عنوان یک پوشش باز برای X در نظر می‌گیریم. اگر این پوشش هیچ زیر پوشش متناهی نداشته باشد، آن‌گاه گردایه

$$\{A_\alpha : A_\alpha = X - G_\alpha\}$$

دارای خاصیت مقطع متناهی است. ضمناً

$$\mu = \{A : A = \text{اشترا ک متناهی از } A_\alpha \text{ ها}\}$$

می تواند $\{\mu\}$ را تولید کند. اگر U فرا پالایهی باشد که $\{\mu\}$ را تظریف می کند، آن‌گاه xی هست که $U \to x$. باید توجه داشت که

$$\forall \alpha \quad A_\alpha \in \mu \subseteq U$$

پس

$$\forall \alpha \ x \in \overline{A_\alpha} = A_\alpha$$

پس $x \in \bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ یعنی $\cap A_\alpha \neq \phi$ ولی $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha = X - \bigcup\limits_\alpha G_\alpha = \phi$ یا $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha = \phi$ که تناقض است.

۴-۳ قضیه تیخونوف

۴-۳-۱ یادآوری: X فشرده است اگر و فقط اگر هر خانواده F از زیر مجموعه های X که دارای $F.I.P$ باشد اشتراک بستار اعضای F غیر تهی باشد.

۴-۳-۲ اصل بیشین هاسدورف: فرض کنیم $\prec$ رابطه ترتیبی جزئی اکید در مجموعه A باشد و زیر مجموعه B از A با $\prec$ مرتب ساده باشد. در اینصورت، زیر مجموعه مرتب خطی بیشینی از A مانند C حاوی B وجود دارد.

۴-۳-۳ قضیه تیخونوف: هر حاصل‌ضرب دلخواه از فضاهای فشرده، فشرده است.

برهان: فرض کنیم $x, a, b, \ldots$ نمایانگر نقاط و $X, A, B, \ldots$ نمایش مجموعه ها و $A\, A, F, Y, \ldots$ نمایش خانواده ای از مجموعه ها و $\mathbb{A}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \ldots$ دسته ای از خانواده ها باشد.

لم۱: اگر A خانواده ای از زیر مجموعه های X باشد که درای خاصیت اشتراک متناهی است، آن‌گاه F موجود است که:

$A \ \subseteq F$ (۱)

(۲) F دارای خاصیت مقطع متناهی است.

(۳) اگر $F \subset Y$ آن‌گاه Y دارای خاصیت مقطع متناهی نیست یا بعبارت دیگر F نسبت به خاصیت مقطع متناهی بیشین است.

برهان: فرض کنیم

$$\mathbb{F} = \{ F : \text{است } F.I.P \text{ دارای خاصیت } F \}$$

$\mathbb{F}$ را با رابطه اکید جزئیت (($\subset$)) مرتب می کنیم. آن‌گاه $\{A\} \subseteq \mathbb{F}$ و بعنوان یک مجموعه تک عضوی بصورت بدیهی مرتب ساده است. طبق اصل بیشین $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{F}$ موجود است که بطور ساده مرتب شده و شامل $\{A\}$ است. ($A \in \mathbb{A}$) قرار می دهیم

$$F = \bigcup_{Y \in \mathbb{A}} Y$$

اولاً $A \subseteq F$ ثانیاً F دارای خاصیت مقطع متناهی است زیرا اگر $F_1, F_2, \ldots, F_n \in F$ آن‌گاه Y_1 ، Y_2، ... Y_n موجود است چنانکه $F_i \in Y_i$. چون $\mathbb{A}$ بطور ساده مرتب شده است، لذا Y_k از Y_iها موجود است که

$$\forall 1 \le i \le n \quad Y_i \subseteq Y_k$$

پس

$$\forall 1 \le i \le n \quad F_i \in Y_k$$

و چون Y_k دارای خاصیت مقطع متناهی است، پس

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \phi$$

فرض کنیم که $F \subset Y$ و Y دارای خاصیت مقطع متناهی باشد، قرار می دهیم

$$\mathbb{A}' = \mathbb{A} \cup \{Y\}$$

در این‌صورت $\{A\} \subseteq \mathbb{A}'$ و به‌علاوه برای هر $Z \in \mathbb{A}$ چون $Z \subseteq F$ پس $Z \subseteq Y$ لذا $\mathbb{A}'$ بطور ساده مرتب شده است و همچنین $\mathbb{A} \subset \mathbb{A}'$ که با بیشین بودن $\mathbb{A}$ متناقض است.

لم ۲: اگر F نسبت به خاصیت مقطع متناهی بیشین باشد و $F_1, F_2, \ldots, F_n \in F$ آن‌گاه

$$\phi \neq \bigcap_{i=1}^{n} F_i \in F$$

برهان: فرض کنیم $F = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ و $Y = F \cup \{F\}$، آن‌گاه $Y \subseteq F$ اگر

$$G_1,\ldots,G_m \in Y \text{ و } \forall i \quad G_i \neq F$$

آن‌گاه برای هر i، $G_i \in F$ و درنتیجه $\bigcap_{i=1}^{m} G_i \neq \phi$. درحالت دیگر اگر $1 \leq j \leq m$ باشد که

$$G_j = F = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$$

در این‌صورت

$$\bigcap_{i=1}^{m} G_i = \left(\bigcap_{i \neq j}^{m} G_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \neq \phi$$

لذا Y دارای خاصیت مقطع متناهی است و چون F بیشین است، لذا $Y = F$ یا $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \in F$.

لم ۳: اگر F خانواده‌ای باشد که نسبت به خاصیت مقطع متناهی بیشین است و A مجموعه ای باشد که هر $F \in F$ را قطع می کند، (($A \cap F \neq \phi$)) آن‌گاه $A \in F$.

برهان: فرض کنید $Y = F \cup \{A\}$، آن‌گاه $Y \subseteq F$ اگر $G_1,\ldots,G_n \in Y$ و $G_i \neq A$. برای هر i،

آن‌گاه $\forall i \quad G_i \in F$ در نتیجه $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \neq \phi$ حال اگر j یی باشد که $G_j = A$ آن‌گاه:

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i = \left(\bigcap_{i \neq j}^{n} G_i\right) \cap G_j$$

اگر $\bigcap_{j \neq i=1}^{n} G_i = F$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i = F \cap A$$

مطابق لم قبل $F \in F$ و درنتیجه $\bigcap_{i=1}^{n} G_i = F \cap A \neq \phi$ یعنی Y دارای خاصیت مقطع متناهی است و بنابراین $Y = F$ یعنی $A \in F$.

٤-۳-٤ اثبات قضیه تیخونوف: فرض کنیم $\forall \alpha \in I, X_\alpha$ فشرده باشد و $X = \prod_\alpha X_\alpha$. فرض کنیم A خانواده ای از از زیر مجموعه های X باشد که درای خاصیت مقطع متناهی می‌باشد، ثابت خواهیم کرد که

$$\bigcap_{A \in A} \overline{A} \neq \phi$$

بنابر لم ۱ خانواده F موجود است که نسبت به خاصیت مقطع متناهی بیشین بوده و $A \subseteq F$. از این‌که

$$\bigcap_{F \in F} \overline{F} \subseteq \bigcap_{A \in A} \overline{A}$$

کافی است ثابت کنیم

$$\bigcap_{F \in F} \overline{F} \neq \phi$$

فرض کنیم

$$F_\alpha = \{\pi_\alpha(F) : F \in F \quad \}$$

آن‌گاه F_α یک خانواده از زیرمجموعه های X_α است که دارای خاصیت مقطع متناهی است (زیرا اگر $x \in \cap F$ آن‌گاه $\pi_\alpha(x) \in \cap \pi_\alpha(F)$) چون X_α فشرده است، بنابراین

$$\phi \neq \bigcap_{F \in F} \overline{\pi_\alpha(F)}$$

فرض کنیم $x_\alpha \in \bigcap_F \overline{\pi_\alpha(F)}$ قرار می دهیم $x = (x_\alpha) \in X$. فرض کنیم V_α یک همسایگی از $x_\circ$ باشد، آن‌گاه برای هر $F \in F$،

$$V_\alpha \cap \pi_\alpha(F) \neq \phi$$

و در نتیجه

$$\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) \cap F \neq \phi$$

پس بنابر لم ۳، $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) \in F$ بنابراین هر عضو پایه جزء که شامل x و به‌صورت $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ است در F قرار دارد. از این‌که هر عضو پایه شامل x مانند V اشتراک متناهی از $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ ها است، داریم:

$V\in F$ (بنابر لم۲) چون Fدر خاصیت مقطع متناهی صدق می‌کند، برای هر $F\in F$ داریم $V\cap F\neq\phi$ یعنی $x\in\overline{F}$ یا

$$x\in\bigcap_{F\in F}\overline{F}$$

پس

$$\bigcap_{F\in F}\overline{F}\neq\phi$$

لذا X فشرده است.

۴-۳-۵ اثبات قضیه تیخونوف با استفاده از پالایه‌ها: فرض کنیم $X=\prod X_\alpha$ و X_αها فشرده باشند، اگر M یک فرا پالایه روی X باشد، آن‌گاه برای هر α، $\pi_\alpha(\mathrm{M})$ یک فرا پالایه در X_α خواهد بود. پس x_αیی هست که

$$\pi_\alpha(\mathrm{M})\to x_\alpha،$$

برای هر همسایگی V_α از x_α داریم:

$$V_\alpha\in\pi_\alpha(\mathrm{M})$$

به‌علاوه $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ همسایگی از $x=(x_\alpha)$ می باشد و چون

$$\pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(\mathrm{M}))\subseteq\mathrm{M}$$

پس

$$\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)\in\pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(\mathrm{M}))\subseteq\mathrm{M}\Rightarrow\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)\in\mathrm{M}$$

چون اشتراک هر تعداد متناهی از اعضاء یک پالایه عضوی از آن پالایه خواهد بود، بنابراین هر عضو پایه شامل x که بصورت اشتراک تعداد متناهی از $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ ها است، عضوی از M بوده پس $\mathrm{M}\to x$ یعنی X فشرده است.

تمرین

(۱) فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های فشرده از فضای هاسدورف X باشند، نشان دهید مجموعه‌های مجزای باز U و V موجودند که به ترتیب شامل A و B می باشند.

(۲) فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای توپولوژی X باشد که $x_n \to x$. دراین‌صورت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{x\}$ فشرده است.

(۳) آیا $[0,1]$ بعنوان زیر فضایی از $\mathbb{R}$ در توپولوژی

$$\tau_c = \{A : \mathbb{R}-A \text{ شمارا یا تمام } \mathbb{R}\}$$

فشرده است؟ چرا؟

(۳) فرض کنید $A\times B$ مجموعه‌ای فشرده از $X\times Y$ باشد. اگر N یک همسایگی از $A\times B$ باشد، نشان دهید مجموعه‌های بازی مانند U و V وجود دارند که $A\times B \subseteq U\times V \subseteq N$.

(٤) فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژی باشد، در نظر می‌گیریم

$$\beta = \{K^C \mid K \text{ فشرده و بسته است}\}$$

نشان دهید β یک پایهٔ توپولوژی است. اگر توپولوژی تولید شده توسط آنرا با τ' نمایش دهیم نشان دهید $\tau' \subseteq \tau$ و τ' فشرده است.

(٥) فرض کنید که $f : X \to Y$ یک تابع و Y یک فضای هاسدورف فشرده باشد، شرط لازم و کافی برای آنکه f پیوسته باشد، آن است که نمودار f

$$G_f = \{(x, f(x)) : x\in X\}$$

در $X\times Y$ بسته باشد. (راهنمایی: اگر G_f بسته باشد و V یک همسایگی از $f(x_0)$، لوله ای دور $x_0\times(Y-V)$ بیابید که G_f را قطع نکند).

(٦) ثابت کنید اگر Y فشرده باشد آن‌گاه نگاشت تصویری $\pi_1 : X\times Y \to X$ نگاشتی بسته است.

(٧) فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادلند:

(الف) X فشرده است.

(ب) اگر B یک پایه برای پالایه F باشد به‌طوری‌که اعضاء B بسته می‌باشند آن‌گاه

$$\bigcap_{B\in \mathrm{B}} B \neq \phi$$

(ج) اگر F یک پالایه روی X باشد، آن‌گاه

$$\bigcap_{F \in \mathrm{F}} \overline{F} \neq \phi$$

(۸) فرض کنید F یک پالایه روی فضای فشردهٔ X و β یک پایه- پالایه باشد و فرض کنید $\bigcap\{\overline{B} : B \in \beta\} = \{x\}$، نشان دهید $\mathrm{F} \to x$.

(۸) فرض کنید (X , F) یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده باشد ثابت کنید هر توپولوژی که اکیداً کوچکتر از τ باشد، نمی تواند X را هاسدورف نکند.

(۹) با استفاده از پالایه‌ها ثابت کنید توابع پیوسته فشردگی را حفظ می‌کنند.

(۱۰) فرض کنید X هاسدورف و $f : X \to X$ پیوسته و $X_۰ \supseteq X_۱ \supseteq X_۲ \supseteq \dots$ دنباله ای نزولی از زیرفضاهای فشرده X باشد، نشان دهید :

$$f\left(\bigcap_{n=۰}^{\infty} X_n\right) = \bigcap_{n=۰}^{\infty} f(X_n)$$

(۱۱) نشان دهید ممکن است بستار یک مجموعهٔ فشرده، فشرده نباشد.

(۱۲) مثالی از یک مجموعهٔ فشرده که بسته نیست ارائه نمایید.

فصل ۵

هم‌ضرب توپولوژیکی، خانواده‌های نهایی و توپولوژی خارج قسمتی

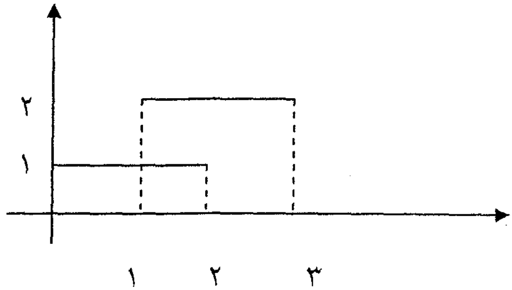
۵-۱ هم‌ضرب توپولوژیکی

۵-۱-۱ تعریف: فرض کنیم که $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ گردایه‌ای از مجموعه‌ها باشد، اجتماع مجزا یا هم‌ضرب X_α ها با $\coprod X_\alpha$ نمایش داده شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\coprod X_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}(X_\alpha\times\{\alpha\})$$

مثال: فرض کنیم $X_۱=[۱,۲]$ و $X_۲=[۱,۳]$ آن‌گاه

$$X_۱\coprod X_۲=\coprod_{i\in\{۱,۲\}}X_i=(X_۱\times\{۱\})\cup(X_۲\times\{۲\})$$



شکل ۵-۱

۵-۱-۲ تعریف: فرض کنیم I یک مجموعه و X_α ($\alpha \in I$) یک فضای توپولوژیک باشد، تابع

$$\amalg_\alpha : X_\alpha \to \coprod_\alpha X_\alpha$$

با ضابطه

$$\amalg_\alpha(x_\alpha) = (x_\alpha, \alpha)$$

را در نظر می‌گیریم. فضای هم‌ضرب توپولوژیکی یا اجتماع مجزا $\coprod\limits_\alpha X_\alpha$، فضایی است که به توپولوژی زیر مجهز شده است :

$$W \subseteq \coprod_\alpha X_\alpha$$

باز است اگر و فقط اگر برای هر $\alpha \in I$، $\amalg_\alpha^{-1}(W)$ در X_α باز باشد.

۵-۱-۳ قضیه: (الف) هر تابع $\amalg_\alpha : X_\alpha \to \coprod\limits_\alpha X_\alpha$ پیوسته است.

(ب) فرض کنیم Y یک فضای توپولوژیک باشد و $g : \coprod X_\alpha \to Y$ تابعی باشد که برای هر α، $g \circ \amalg_\alpha$ پیوسته است، آن‌گاه g پیوسته خواهد بود.

برهان: (الف) فرض کنیم W در $\coprod\limits_\alpha X_\alpha$، باز باشد طبق تعریف $\amalg_\alpha^{-1}(W)$ در X_α باز است پس $\amalg_\alpha$ برای هر $\alpha \in I$ پیوسته است.

(ب) فرض کنیم $W \subseteq Y$ باز باشد، ثابت می کنیم $g^{-1}(W)$ در $\coprod\limits_\alpha X_\alpha$ باز است. طبق فرض $g \circ \amalg_\alpha$ پیوسته است لذا برای هر $\alpha \in I$

$$\left(g \circ \coprod_\alpha\right)^{-1}(W) = \amalg_\alpha^{-1}\left(g^{-1}(W)\right)$$

در X_α باز می باشد پس طبق تعریف توپولوژی هم‌ضرب، $g^{-1}(W)$ در $\coprod_\alpha X_\alpha$ باز است.

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "\amalg_\alpha"] \arrow[dr, "g o \amalg_\alpha"'] & \coprod_\alpha X_\alpha \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

۵-۲ خانواده‌های نهایی

۵-۲-۱ **تعریف:** یک خانواده از توابع پیوسته مانند $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ ($\alpha \in I$) را یک خانواده نهایی یا پایانی نامند اگر برای هر فضای توپولوژی Z و هر تابع $g : Y \to Z$ اگر $g of_\alpha : X_\alpha \to Z$ ($\alpha \in I$) پیوسته باشد، آن‌گاه $g : Y \to Z$ پیوسته است.

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "g of_\alpha"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

۵-۲-۲ **مثال:** $\{\amalg_\alpha\}_{\alpha \in I}$ که $\amalg_\alpha : X_\alpha \to \coprod_\alpha X_\alpha$ یک خانواده نهایی است.

۵-۲-۳ **قضیه وجودی خانواده های نهایی:** فرض کنیم

$$\forall \alpha \in I \quad (X_\alpha, \eta_\alpha)$$

فضاهای توپولوژیک و Y یک مجموعه و $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ توابعی مفروض باشند، آن‌گاه یک توپولوژی منحصر بفرد η روی Y موجود است که خانواده

$$f_\alpha : (X_\alpha, \eta_\alpha) \to (Y, \eta)$$

یک خانواده نهایی خواهد بود. توپولوژی η روی Y را توپولوژی نهایی القاء شده توسط نگاشتهای f_α گوییم.

برهان: فرض کنیم $\eta = \{G \subseteq Y : f_\alpha^{-1}(G) \in \eta_\alpha, \forall \alpha \in I\}$ به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که η یک توپولوژی روی Y است. کافی است نشان دهیم $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ $(\forall \alpha \in I)$ نهایی است.

فرض کنیم $g:Y\to(Z,\eta)$ تابعی باشد که برای هر α، gof_α پیوسته است، اگر $H\in\eta$ آن‌گاه

$$\forall\alpha:\quad (gof_\alpha)^{-1}(H)=f_\alpha^{-1}\left(g^{-1}(H)\right)\in\eta_\alpha$$

پس طبق تعریف

$$g^{-1}(H)\in\eta$$

و درنتیجه g پیوسته است و لذا خانواده $\{f_\alpha\}$ نهایی است.

برای اثبات منحصر بفردی η، فرض کنیم (Y,τ) چنان باشد که $f_\alpha:X_\alpha\to Y$ نهایی باشد، ثابت می‌کنیم $\eta=\tau$، اگر $G\in\tau$ از این‌که

$$f_\alpha:(X_\alpha,\eta_\alpha)\to(Y,\tau)$$

نهایی است به خصوص پیوسته بوده و لذا $f_\alpha^{-1}(G)\in\eta_\alpha$، بنابر تعریف η، $G\in\eta$ لذا $\tau\subseteq\eta$. برای این‌که ثابت کنیم $\tau\supseteq\eta$ ثابت می کنیم تابع همانی $I:(Y,\tau)\to(Y,\eta)$ پیوسته است، برای این منظور داریم:

از این‌که f_α نهایی و $I\,of_\alpha=f_\alpha$ پیوسته است، پس I پیوسته است و لذا $\tau\supseteq\eta$

$$\begin{tikzcd}
(X_\alpha,\eta_\alpha) \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & (Y,\eta) \\
& (Y,\tau) \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}$$

۵-۳ توپولوژی خارج قسمتی

۵-۳-۱ تعریف: فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک و $p:X\to Y$ تابعی برو باشد، p را یک نگاشت خارج قسمتی نامیم اگر:

$U\subseteq Y$ باز باشد اگر و فقط اگر $p^{-1}(U)$ در X باز باشد

۵-۳-۲ مثال: (الف) هر تابع برو، پیوسته و باز یک نگاشت خارج قسمتی است.

(ب) هر تابع برو، پیوسته و بسته یک نگاشت خارج قسمتی است.

باید توجه داشت که اگر $p : X \to Y$ پیوسته، برو و باز باشد و $U \subseteq Y$ باز باشد، آن‌گاه بنابر پیوستگی $p^{-1}(U)$ باز است و اگر $p^{-1}(U)$ در X باز باشد، چون p برو و باز است لذا $p\left(p^{-1}(U)\right) = U$ باز خواهد بود. بیان مشابهی برای توابع پیوسته، برو و بسته موجود است.

۵-۳-۳ تذکر: لزومی ندارد که نگاشتهای خارج قسمتی باز یا بسته باشد برای این منظور به مثال زیر توجه کنید:

۵-۳-٤ مثال: فرض کنیم

$$Y = \{a,b\} \quad و \quad X = [۰,۲]$$

همچنین فرض کنیم τ_X توپولوژی نسبی $\mathbb{R}$ روی X، $\tau_Y = \{\phi, Y, \{b\}\}$ و $p : X \to Y$ با ضابطه

$$p(x) = \begin{cases} a & ۰ \le x \le ۱ \\ b & ۱ < x \le ۲ \end{cases}$$

مفروض باشد. در اینصورت

(الف) p برو است.

(ب) اگر $U \subseteq Y$ باز باشد، آن‌گاه $p^{-1}(U)$ در X باز خواهد بود زیرا اگر $U = \phi$ آن‌گاه

$$p^{-1}(U) = \phi \in \tau_X$$

اگر $U = \{b\}$ آن‌گاه $p^{-1}(U) = (۱,۲] \in \tau_X$ و اگر $U = Y$ آن‌گاه $p^{-1}(U) = X$.

(ج) اگر $V \subseteq Y$ و $p^{-1}(V)$ در X باز باشد، V در Y باز خواهد بود زیرا برای مجموعه بسته $\{a\}$ در Y، $p^{-1}(\{a\}) = [۰,۱]$ در X بسته است، لذا V برابر ϕ یا $\{b\}$ یا Y. پس p یک نگاشت خارج قسمتی می باشد و به‌علاوه p نه باز است و نه بسته. زیرا:

$(۰,۱)$ در X باز است در حالی که $p((۰,۱)) = \{a\}$ در Y بسته است و $[۱/۵,۲]$ در X بسته است در حالی که $p\left([۱/۵,۲]\right) = \{b\}$ در Y باز است.

۵-۳-۵ تعریف: فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و A یک مجموعه باشد، اگر تابع $p : X \to A$ برو باشد، دقیقاً یک توپولوژی τ می توان روی A تعریف کرد که p یک نگاشت خارج قسمتی باشد. این توپولوژی را توپولوژی خارج قسمتی القاء شده توسط p می گوییم. در واقع

$$\tau = \left\{ U \subseteq A : \text{باز است } p^{-1}(U) \right\}$$

بسادگی می توان تحقیق کرد که τ یک توپولوژی است زیرا:

$$p^{-1}(\phi)=\phi \quad \& \quad p^{-1}(A)=X$$

بنابراین $\phi, A \in \tau$. و

$$p^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} U_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha} p^{-1}(U_\alpha) \quad \& \quad p^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n} p^{-1}(U_i)$$

به‌علاوه اگر τ' توپولوژی دیگری باشد که تحت آن $p : X \to A$ نگاشتی خارج قسمتی باشد، ادعا می کنیم $\tau = \tau'$.

فرض کنیم $U \in \tau'$ چون p تحت τ' پیوسته است، پس $p^{-1}(U)$ در X باز است و بنابر تعریف τ، $U \in \tau$.

حال فرض کنیم که $U \in \tau$ پس $p^{-1}(U)$ در X باز است، چون p خارج قسمتی است پس $U \in \tau'$.

۵-۳-۶ قضیه: اگر $p : X \to Y$ یک نگاشت خارج قسمتی باشد، آن‌گاه $\{p\}$ یک خانواده نهایی است.

برهان: فرض کنیم تابع $g : Y \to Z$ چنان باشد که gop پیوسته است، اگر $U \subseteq Z$ باز باشد آن‌گاه

$$(gop)^{-1}(U)=p^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$$

در X باز است. چون p خارج قسمتی است، پس $g^{-1}(U)$ در Y باز است و لذا g پیوسته است یعنی $\{p\}$ یک خانواده نهایی است.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "gop"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

۵-۳-۷ تعریف: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و X' افرازی از X باشد، به‌طوری‌که اعضای X' مجزا هستند و اجتماع آنها برابر X است(یا با یک رابطه هم ارزی روی X، X' را می سازیم). تابع $p : X \to X'$ که هر $x \in X$ را به عضوی از X' که شامل x است تصویر می کند، در نظر

می‌گیریم، p برو است. اگر X' را به توپولوژی خارج قسمتی القاء شده توسط p مجهز کنیم، X' را فضای خارج قسمتی گوییم.

۵-۳-۸ قضیه: فرض کنیم $p : X \to Y$ یک نگاشت خارج قسمتی، Z یک فضای توپولوژیک و $g : X \to Z$ یک نگاشت پیوسته باشد به‌طوری‌که g روی هر $p^{-1}(\{y\})\,(y \in Y)$ ثابت است. آن‌گاه g نگاشت پیوسته $f : Y \to Z$ را القاء می‌کند به‌طوری‌که $f o p = g$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ g\downarrow & \swarrow f & \\ Z & & \end{array}$$

برهان: برای هر $y \in Y$، طبق تعریف $g\left(p^{-1}(y)\right)$ مجموعه ای تک عضوی است. $f(y)$ را برابر این مقدار تعریف می کنیم، آن‌گاه نگاشت $f : Y \to Z$ چنان تعریف شده که

$$\forall x \in X \qquad f(p(x)) = g(x)$$

زیرا برای $x \in X$ داریم $p(x) = y$ درنتیجه

$$x \in p^{-1}(\{y\}) \Rightarrow f(y) = g(x) \quad \text{یا} \quad f(p(x)) = g(x)$$

حال کافی است ثابت کنیم که f پیوسته است. فرض کنیم $V \subseteq Z$ باز باشد، چون g پیوسته است،

$$g^{-1}(V) = p^{-1}\left(f^{-1}(V)\right)$$

در X باز است. از آنجائیکه p یک نگاشت خارج قسمتی می باشد، $f^{-1}(V)$ در Y باز خواهد بود.

۵-۳-۹ قضیه: فرض کنیم $g : X \to Z$ نگاشتی پیوسته و برو باشد، اگر

$$X' = \left\{g^{-1}(\{z\}) : z \in Z\right\}$$

آن‌گاه X' افرازی از X است. اگر X' را به توپولوژی خارج قسمتی مجهز کنیم آن‌گاه:

(الف) اگر Z هاسدورف باشد، X' نیز هاسدورف است.

(ب) نگاشت g، نگاشت دوسویی و پیوسته $f : X' \to Z$ را القاء می کند و این نگاشت یک همسانریختی است اگر و فقط اگر g نگاشتی خارج قسمتی باشد.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & X' \\ g\downarrow & \swarrow f & \\ Z & & \end{array}$$

برهان: بنابر قضیه قبل چون g روی هر $g^{-1}(\{z\})$ ثابت است، پس تابع پیوسته f موجود است به‌طوری‌که $f\,o\,p = g$ ادعا می کنیم f یک به یک و برو است زیرا

$$f([x]) = f([y]) \Rightarrow f(p(x)) = f(p(y)) \Rightarrow g(x) = g(y)$$

لذا $[x] = [y]$ یعنی f یک به یک است.

$$\forall z \in Z \quad \exists x \quad s.t. \quad g(x) = z \Rightarrow f(p(x)) = f([x]) = z$$

یعنی f برو است.

برهان(الف): فرض کنیم Z هاسدورف باشد و $[x] \neq [y]$ پس $f([x]) \neq f([y])$ و چون Z هاسدورف است، پس همسایگی های U و V از $f([x])$ و $f([y])$ موجودند که $U \cap V = \phi$ لذا

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \phi$$

(چرا؟) که در آن $f^{-1}(U)$ و $f^{-1}(V)$ همسایگی هایی از $[x]$و $[y]$ هستند. بنابراین X' هاسدورف است.

برهان(ب): فرض کنیم f همسانریخت باشد، پس f یک نگاشت خارج قسمتی است. و لذا $f\,o\,p = g$ بعنوان ترکیب دو تابع خارج قسمتی، خارج قسمتی است.

بالعکس: فرض کنیم g نگاشتی خارج قسمتی باشد و $V \subseteq X'$ باز، آن‌گاه

$$g^{-1}(f(V)) = p^{-1}(V)$$

زیرا

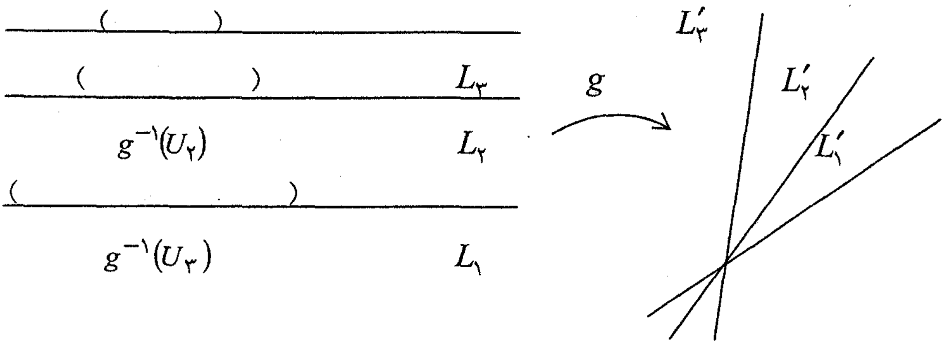
$$x \in g^{-1}(f(V)) \Leftrightarrow g(x) = fop(x) \in f(V) \overset{1-1\,f}{\Leftrightarrow} p(x) \in V \Leftrightarrow x \in p^{-1}(V)$$

چون p پیوسته است، پس $p^{-1}(V)$ در X باز است پس $g^{-1}(f(V))$ در X باز است و چون g خارج قسمتی است، پس $f(V)$ در Z باز است یعنی f^{-1} پیوسته بوده و لذا f همسانریختی است.

۵-۳-۱۰ **تذکر:** توپولوژی خارج قسمتی لزوماً با توپولوژی زیر فضایی یکسان نیست برای این منظور به مثال زیر توجه کنید:

مثال: فرض کنیم

$$L_n = \mathbb{R} \times \{n\} \quad \text{و} \quad L'_n = \{(x, nx) : n \in \mathbb{N}\}$$



شکل ۵-۲

$$X = \bigcup_{n=۱}^{\infty} L_n \quad \text{و} \quad Z = \bigcup_{n=۱}^{\infty} L'_n$$

Z و X زیرفضاهایی از $R^۲$ هستند، تابع $g : X \to Z$ با ضابطه $g(x,n) = (x,nx)$ را در نظر می‌گیریم. این نگاشت L_n را بطور خطی بر L'_n تصویر می کند، ادعا می کنیم g خارج قسمتی نیست و این بدان معنا است که توپولوژی خارج قسمتی القاء شده توسط g با توپولوژی زیرفضایی Z متفاوت است. برای این منظور فرض کنیم U_n بازه‌ای به مرکز مبداء مختصات و شعاع $\frac{۱}{n}$ روی خط L'_n بوده و $U = \bigcup_{n=۱}^{\infty} U_n$ آن‌گاه:

$$g^{-۱}(U) = \bigcup_{n=۱}^{\infty} g^{-۱}(U_n)$$

چون هریک از $g^{-۱}(U_n)$ها باز است، لذا $g^{-۱}(U)$ در X باز است پس U با توپولوژی القاء شده توسط g در Z باز می باشد در صورتی که، U با توپولوژی زیرفضایی در Z باز نمی باشد، برای اثبات این مطلب نشان می دهیم $Z-U$ بسته نیست.

برای آنکه نشان دهیم $Z-U$ بسته نیست ثابت می کنیم ((صفر)) یک نقطه حدی $Z-U$ است که به آن تعلق ندارد، فرض کنیم

$$\beta = \{x : |x| < \delta\}$$

یک همسایگی از صفر باشد، طبق خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی nی موجود است که $\frac{۱}{n} < \delta$.
فرض کنیم $x \in L'_n$ طوری انتخاب شود که $\frac{۱}{n} < x < \delta$ آن‌گاه $x \in B \cap (Z-U)$ پس صفر نقطه حدی $Z-U$ است.

۵-۳-۱۱ تذکر: حاصل‌ضرب دو نگاشت خارج قسمتی لزوماً خارج قسمتی نیست. برای این منظور به مثال زیر توجه کنید:

۵-۳-۱۲ مثال: فضاهای Z و X در مثال قبل را در نظر بگیرید و Z را به توپولوژی خارج قسمتی القاء شده توسط g مجهز می کنیم. نگاشت

$$i : \mathbb{R}^w \to \mathbb{R}^w$$
$$x \to x$$

همسانریخت و درنتیجه خارج قسمتی است. ادعا می کنیم $f = g \times i$ خارج قسمتی نیست. باید توجه داشت که

$$f = g \times i : X \times \mathbb{R}^w \to Z \times \mathbb{R}^w$$

فرض کنیم $X= \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_+$ برای $n\in \mathbb{Z}_+$

$$U_n \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^w$$

را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$U_n = \{(t,n) \times (x_۱, x_۲, \ldots) : |tx_n| < ۱\}$$

مجموعه فوق در $X \times \mathbb{R}^w$ باز است زیرا اگر

$$W = \{(t, x_n) : |tx_n| < ۱\}$$

آن‌گاه W در صفحه tx_n باز است.

بنابراین U_n عبارت است از حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه های باز W (در صفحه tx_n)، $\{n\}$ ($n\in \mathbb{Z}_+$) و کپی های $\mathbb{R}$ در مولفات دیگر.

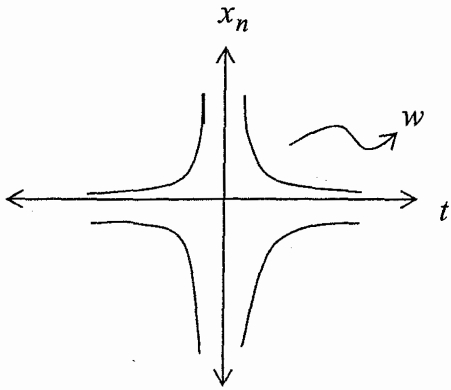
فرض کنیم

$$U = \bigcup_{n\in \mathbb{Z}_+} U_n$$

U به‌عنوان اجتماع مجموعه های باز در $X \times \mathbb{R}^w$ باز می باشد. کافی است ثابت کنیم که:

الف) $f^{-1}(f(U))=U$

ب) $f(U)$ در $X\times\mathbb{R}^{w}$ باز نیست.



شکل ۵-۳

برهان(الف) : فرض کنیم $y\in f^{-1}(f(U))$ پس $f(y)\in f(U)$ و لذا $x\in U$ موجود است که $f(y)=f(x)$. اگر $y\notin U$ آن‌گاه:

$$x=(t,m)\times(x_1,x_2,\ldots)\quad ;|tx_m|<1$$
$$y=(t',n)\times(y_1,y_2,\ldots)$$
$$f(y)=f(x)\Rightarrow(t,tm)\times(x_1,x_2,\ldots)=(t',t'n)\times(y_1,y_2,\ldots)$$

درنتیجه

$$t=t',\ tm=t'n\quad \&\quad x_i=y_i\quad \forall i\in\mathbb{N}$$

درنتیجه

$$t(m-n)=0$$

چون $y\notin U$ پس $m\neq n$ درنتیجه $t=t'=0$ پس

$$x=(0,m)\times(x_1,x_2,\ldots)\qquad 0\times x_m=0<1\Rightarrow x\in U$$

$$y=(t',n)\times(y_1,y_2,\ldots)\qquad 0\times y_n=0<1\Rightarrow y\in U$$

که تناقض است(با فرض $y \notin U$ و $y \in f^{-1}(f(U))$).

برهان(ب): اگر $f(U)$ باز باشد چون $(0,0) \in f(U)$، عضو پایه به‌صورت $V \times \prod U_i$ شامل $(0,0)$ وجود دارد که $(0,0) \subset V \times \prod W_i \subseteq f(U)$. توجه داریم که V در Z و $\prod W_i$ در $\mathbb{R}^w$ باز است، پس برای N های به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$W_N = \mathbb{R}$$

چون $V \times \prod W_i \subseteq f(U)$ پس $g^{-1}(V) \times \prod W_i = f^{-1}(V \times \prod W_i) \subseteq f^{-1}(f(U))$ درنتیجه

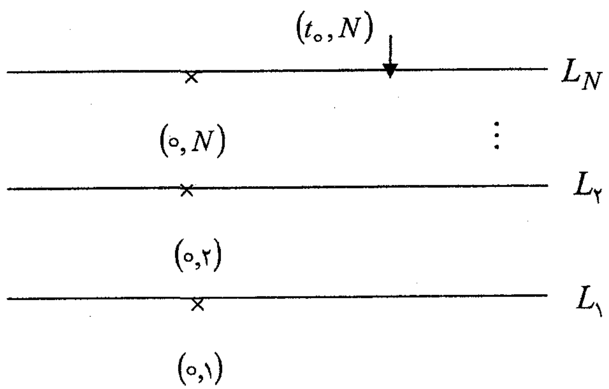
$$g^{-1}(V) \times \prod W_i \subseteq U$$

$g^{-1}(V)$ شامل $\{0\} \times \mathbb{Z}_+$ می باشد لذا $(t_0, N) \in g^{-1}(V)$ موجود است به‌طوری‌که $t_0 \neq 0$.

فرض کنیم $a_N > \frac{1}{|t_0|}$ و $x = \underbrace{(t_0, N)}_{\in g^{-1}(V)} \times \underbrace{(0, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots)}_{\in \prod W_i}$ بنابراین

$$x \in g^{-1}(V) \times \prod W_i \Rightarrow x \in U$$

ولی $|t_0 a_N| > 1$ پس $x \notin U_N$ و چون انتخاب x نشان می دهد که $x \notin U_n$، $(n \neq N)$ پس $x \notin U$ که تناقض است.



شکل ۵-۴

تمرین

(۱) ثابت کنید نگاشت‌های خارج قسمتی خاصیت همبند موضعی را حفظ می کنند.

(۲) اگر X فشرده و Y هاسدورف و تابع $f: X \to Y$ پیوسته و برو باشد، آن‌گاه $\{f\}$ خانواده ای نهایی است.

(۳) توپولوژی هم‌ضرب، ظریفترین توپولوژی است که برای آن $\amalg_\alpha$ها پیوسته می‌شوند.

(٤) فرض کنید $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ تعریف $g(x,y) = x + y^2$ باشد. نشان دهید g نگاشتی خارج قسمتی است.

(٥) زیر فضای $Z = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,x) : x \in \mathbb{R}\}$ از $\mathbb{R}^2$ و نگاشت $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{Z}$ با ضابطهٔ

$$g(x,y) = \begin{cases} (x,0) & x \neq 0 \\ (0,y) & x = 0 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم، دراین‌صورت

الف) آیا g یک نگاشت خارج قسمتی است؟

ب) آیا g پیوسته است؟

ج) نشان دهید در توپولوژی خارج قسمتی القاء شده توسط g، فضای Z هاسدورف نیست.

(٦) فرض کنید $\{g_i : Y_i \to Z\}$ برای $i \in I$ خانواده‌ای از توابع باشد که برای هر $i \in I$، $\{f_{ji} : X_{ji} \to Y_i\}$ برای $j \in J_i$ نیز خانواده‌ای از توابع روی فضاهای توپولوژی X_{ji} $(j \in J, i \in I)$ باشد. اگر به هر یک از Y_i ها توپولوژی نهایی القاء شده توسط $\{f_{ji} : j \in J_i\}$ و به Z توپولوژی نهایی القاء شده توسط $\{g_i : i \in I\}$ داده شود، آن‌گاه این توپولوژی با توپولوژی نهایی القاء شده توسط $\{g_i o f_{ji} : j \in J_i, i \in I\}$ برابر است.

فصل ٦

فضاهای متریک و توپولوژی متری

مقدمه

در این فصل، سعی بر تعمیم مفهوم فاصله در صفحهٔ اقلیدسی داریم. بعضـی از خصوصـیات تابع فاصله عبارتند از:

الف) فاصلهٔ بین هر دو نقطه نامنفی است و فاصلهٔ دو نقطه صفر است اگر و تنها اگر دو نقطه بـر هـم منطبق باشند.

ب) فاصلهٔ P تا Q برابر با فاصلهٔ نقطهٔ Q تا P است.

ج) اگر P، Q و R سه نقطه باشند

$$\text{فاصلهٔ } PR \ \geq \ \text{فاصلهٔ } QR + \text{فاصلهٔ } PQ$$

خاصیت (ج) معروف به خاصیت نامساوی مثلث است.

این خصوصیات برای تعمیم مفهوم تابع فاصله که آن‌را یک متر می‌نامیم به‌کار برده خواهند شد.

٦-١ فضاهای متریک

٦-١-١ تعریف: یک متر روی مجموعه X عبارت است از تابع $d: X \times X \to \mathbb{R}$ که دارای خواص زیر باشد:

(الف) برای هر x و y متمایز در X، $d(x,y)>0$ و به‌علاوه $d(x,x)=0$.

(ب) برای هر x و y متمایز در X، $d(x,y)=d(y,x)$

(ج) برای هر $x,y,z\in X$، $d(x,y)\le d(y,z)+d(z,x)$

۶-۱-۲ تعریف: $B(x,\delta)=\{y:d(x,y)<\delta\}$ را یک گوی باز به مرکز x و شعاع $\delta>0$ گوییم.

۶-۱-۳ تعریف: فرض کنیم d یک متر روی X باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{B}=\{B(x,\delta):x\in X,\delta>0\}$$

می تواند یک پایه برای یک توپولوژی روی X باشد. این توپولوژی را توپولوژی القاء شده توسط d گوییم.

۶-۱-۴ تذکر: مجموعه B در تعریف فوق خواص یک پایه را دارد زیرا:

(الف) برای هر $x\in X$ داریم: $x\in B(x,\delta)$ $(\delta>0)$

(ب) ادعا می کنیم اگر $y\in B(x,\varepsilon)$ آن‌گاه عضوی از B مانند $B(y,\delta)$ وجود دارد به‌طوری‌که :

$$B(y,\delta)\subseteq B(x,\varepsilon)$$

برای این منظور فرض کنیم $\delta=\varepsilon-d(x,y), x\neq y$ آن‌گاه برای هر $z\in B(y,\delta)$ داریم:

$$d(y,z)<\varepsilon-d(x,y)\Rightarrow d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)<\varepsilon$$

درنتیجه

$$d(x,z)<\varepsilon \text{ یا } z\in B(x,\varepsilon)$$

حال فرض کنیم $B_1,B_2\in \mathrm{B}$ و $x\in B_1\cap B_2$ آن‌گاه δ_1 و δ_2 موجود است به‌طوری‌که :

$$x\in B(x,\delta_2)\subseteq B_2 \text{ و } x\in B(x,\delta_1)\subseteq B_1$$

اگر قرار دهیم $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ آن‌گاه

$$x\in B(x,\delta)\subseteq B_1\cap B_2$$

۶-۱-۵ تعریف: مجموعه U در توپولوژی متری القاء شده باز نامیده می شود، اگر برای هر $x\in U$، $\delta>0$ ی موجود باشد که $B(x,\delta)\subseteq U$.

۶-۱-۶ مثال: برای مجموعه دلخواه X، d را ضابطه

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. به سادگی دیده می شود که d یک متر روی X بوده و به‌علاوه برای هر $x\in X$

$$B(x,1)=\{y:d(x,y)<1\}=\{y:d(x,y)=0\}=\{x\}$$

پس توپولوژی متری القاء شده همان توپولوژی گسسته است.

۶-۱-۷ مثال: روی مجموعه اعداد حقیقی، متر استاندارد بصورت زیر تعریف می شود:

$$\forall x,y\in \mathbb{R} \qquad d(x,y)=|x-y|$$

فرض کنیم $x=\frac{a+b}{2}$ و $\varepsilon=\frac{|a-b|}{2}$ آن‌گاه $(a,b)=B(x,\varepsilon)$ و برعکس.

لذا توپولوژی تولید شده توسط d همان توپولوژی استاندارد یا معمولی روی $\mathbb{R}$ است.

۶-۱-۸ تعریف: اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، X را متریک پذیر نامیم اگر متری مانند d روی مجموعه X موجود باشد که توپولوژی X را تولید یا القاء کند.

بعنوان مثال $\mathbb{R}$ متریک پذیر است.

۶-۱-۹ تعریف: فضای X را یک فضای متریک گوییم اگر متر d روی X موجود باشد.

۶-۱-۱۰ تعریف: فرض کنیم X یک فضای متریک با متر d باشد، $A\subseteq X$ را کراندار گوییم اگر $M>0$ی باشد که

$$\forall x,y\in A \quad d(x,y)\leq M$$

اگر A کراندار باشد، قطر A بصورت زیر تعریف می شود:

$$diam\, A=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$$

۶-۱-۱۱ مثال: فرض کنیم d یک متر روی X و $A=B(x,\varepsilon)\subseteq X$ آن‌گاه داریم:

$$d(\alpha,\beta)\leq d(x,\alpha)+d(x,\beta)\leq 2\varepsilon$$

درنتیجه $diam\, A\leq 2\varepsilon$.

۶-۱-۱۲ قضیه: فرض کنیم d یک متر روی X باشد، اگر $\overline{d}:X\times X\to\mathbb{R}$ به‌صورت

$$\overline{d}(x,y)=\min\{d(x,y),1\}$$

تعریف شود، آن‌گاه $\overline{d}$ یک متر روی X است که همان توپولوژی X را القاء می کند. $\overline{d}$ را متر استاندارد کراندار گوییم.

برهان: بدیهی است که $\overline{d}(x,y)\geq 0$ و $\overline{d}(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$ و به‌علاوه

$$\overline{d}(x,y)=\overline{d}(y,x)$$

کافی است نشان دهیم برای هر $x,y,z\in X$

$$\overline{d}(x,z)\leq \overline{d}(x,y)+\overline{d}(y,z)$$

اگر $d(x,y)\geq ۱$ یا $d(y,z)\geq ۱$، آن‌گاه مقدار طرف راست نامساوی بالا حداقل ۱ است که به طور بدیهی از طرف چپ بزرگ‌تر است. حال فرض کنیم $d(x,y)<۱$ و $d(y,z)<۱$ آن‌گاه:

$$\overline{d}(x,z)\leq d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)=\overline{d}(x,y)+\overline{d}(y,z)$$

حال برای این‌که ثابت کنیم توپولوژی‌های القاء شده توسط d و $\overline{d}$ یکسان هستند، کافی است ثابت کنیم:

برای $\delta=\min\{۱,\varepsilon\}$

(الف) $B_d(x,\varepsilon)\subseteq B_{\overline{d}}(x,\varepsilon)$

(ب) $B_{\overline{d}}(x,\delta)\subseteq B_d(x,\varepsilon)$

اثبات (الف):

$$\forall\, y\in B_d(x,\varepsilon)\Rightarrow d(x,y)<\varepsilon\Rightarrow \overline{d}(x,y)=\min\{d(x,y),۱\}$$

پس

$$\overline{d}(x,y)\leq d(x,y)<\varepsilon \quad \text{یا} \quad y\in B_{\overline{d}}(x,\varepsilon)$$

اثبات (ب): $\forall\, y\in B_{\overline{d}}(x,\delta)\Rightarrow \overline{d}(x,y)<\delta\leq ۱$ درنتیجه

$$\overline{d}(x,y)=d(x,y)<\delta\leq\varepsilon \quad \text{یا} \quad y\in B_d(x,\varepsilon)$$

حال با توجه به لم زیر حکم محقق است.

۶-۱-۱۳ لم: اگر $d_۱$ و $d_۲$ مترهایی روی مجموعه X باشند که توپولوژی‌های $\tau_۱$ و $\tau_۲$ را القاء نمایند، شرط لازم و کافی برای آن‌که $\tau_۱$ ظریف‌تر از $\tau_۲$ باشد، آن است که برای هر $x\in X$ و $\varepsilon>۰$، $\delta>۰$ی باشد که $B_{d_۱}(x,\delta)\subseteq B_{d_۲}(x,\varepsilon)$.

برهان: به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

۶-۱-۱۴ تعریف: اگر $x=(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ نرم x به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|=\left(x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

حال برای $y=(y_۱,y_۲,\ldots y_n)\in\mathbb{R}^n$،

$$d(x,y)=\|x-y\|=\left((x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

را متر اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ می‌گوییم.

متر دیگری روی $\mathbb{R}^n$ به‌صورت $p(x,y)=\max\limits_{1\le i\le n}\left\{\left|x_i-y_i\right|\right\}$ تعریف می‌شود. این متر را، **متر مربعی** می‌گوییم. (تحقیق این‌که p یک متر روی $\mathbb{R}^n$ است، بعنوان تمرین واگذار می‌شود).

هر یک از مترهای فوق یک توپولوژی روی $\mathbb{R}^n$ تولید می‌کنند.

۶-۱-۱۵ قضیه: هر یک از توپولوژی‌های القاء شده توسط p و d روی $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی حاصل‌ضربی روی $\mathbb{R}^n$ یکی است.

برهان: فرض کنیم $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ و $y=(y_1,y_2,\ldots y_n)$ آن‌گاه

$$p(x,y)\le d(x,y)\le\sqrt{n}\ p(x,y)$$

بنابر نامساوی اول

$$B_d(x,\varepsilon)\subseteq B_p(x,\varepsilon)$$

و بنابر نامساوی دوم

$$B_p\left(x,\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)\subseteq B_d(x,\varepsilon)$$

بنابراین توپولوژی‌های القاء شده روی $\mathbb{R}^n$ توسط p و d یکسان است.

حال نشان می دهیم که توپولوژی حاصل‌ضربی $\mathbb{R}^n$ و توپولوژی القاء شده توسط p یکسان هستند.

فرض کنیم $B=\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$ یک عضو پایه توپولوژی حاصل‌ضربی باشد، اگر $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in B$ پس ε_i موجود است به‌طوری‌که $x_i\in(x_i-\varepsilon_i,x_i+\varepsilon_i)$ اگر $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$ آن‌گاه $B_p(x,\varepsilon)\subseteq B$. پس توپولوژی القاء شده توسط p ظریف‌تر است. برعکس اگر $B_p(x,\varepsilon)$ یک گوی باز باشد و $y\in B_p(x,\varepsilon)$ باید عضوی از توپولوژی حاصل‌ضربی مانند B بیابیم به‌طوری‌که $y\in B\subseteq B_p(x,\varepsilon)$ اما این امر بدیهی است زیرا:

$$B_p(x,\varepsilon)=\prod_{i=1}^{n}(x_i-\varepsilon,x_i+\varepsilon)$$

یک عضو پایه توپولوژی حاصل‌ضربی است.

۶-۱-۱۷ قضیه: هر حاصل‌ضرب شمارا از فضاهای متریک پذیر، متریک پذیر است.

برهان: فرض کنیم برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$، (X_n, d_n) یک فضای متریک باشد به‌طوری‌که $\overline{d_n}$ متر استاندارد کراندار روی X_n است. فرض کنیم $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ با توپولوژی حاصل‌ضربی در نظر گرفته شود، $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$d(x,y) = \sup\left\{\frac{\overline{d_n}(x_n, y_n)}{n}\right\}$$

که در آن $y = (y_n)$ و $x = (x_n)$ اعضایی از X باشند دراین‌صورت اولاً d یک متر روی X است، تحقیق شرایط ۱و۲ بدیهی است لذا کافی است نامساوی مثلث را بررسی کنیم:

$$\forall x_i, y_i, z_i \in X_i \qquad \frac{\overline{d}(x_i, y_i)}{i} \leq \frac{\overline{d}(x_i, z_i)}{i} + \frac{\overline{d}(z_i, y_i)}{i} \leq d(x,z) + d(z,y)$$

در نتیجه

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

فرض کنیم τ توپولوژی حاصل‌ضربی و τ' توپولوژی القاء شده توسط d باشد، اگر $U \in \tau'$ و $x \in U$ آن‌گاه $\varepsilon > 0$ موجود است به‌طوری‌که $X \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$ برای ε، Nئی موجود است به‌طوری‌که

$$0 < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$$

و برای هر $n \geq N$ خواهیم داشت

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$$

پس $n\varepsilon > 1$، فرض کنیم $V_n = B_{\overline{d_n}}(x_n, n\varepsilon)$، بنابراین اگر $n \geq N$ آن‌گاه $n\varepsilon > 1$، پس $V_n = X_n$ حال:

$$\forall y\in V=\prod_n V_n \Rightarrow \overline{d_n}(x_n,y_n)<n\varepsilon$$

و

$$\forall n\geq N;\quad V_n=X_n \Rightarrow \overline{d}(x_n,y_n)<۱$$

درنتیجه

$$\frac{\overline{d_n}(x_n,y_n)}{n}<\frac{۱}{n}\leq\frac{۱}{N}<\frac{\varepsilon}{۲}$$

پس $d(x,y)<\varepsilon$ لذا $y\in B(x,\varepsilon)$ درنتیجه

$$x\in V=\prod_v V_n\subseteq B(x,\varepsilon)\quad \text{یا} \quad B(x,\varepsilon)\in\tau$$

بنابراین τ از τ' ظریف‌تر است.

اگر $x\in V=\prod_n V_n\in\tau$ آن‌گاه $(\forall n)x_n\in V_n$ و $n_1,\dots,n_k$ موجود است که V_{n_i} در X_{n_i} باز است. لذا

$$\exists\varepsilon_{n_i}\quad \ni x_{n_i}\in B\left(x_{n_i},\varepsilon_{n_i}\right)\subseteq V_{n_i}$$

قرار می دهیم $\varepsilon=\min\limits_{۱\leq i\leq k}\frac{\varepsilon_{n_i}}{n_i}$ بنابراین $B_{d_{n_i}}\left(x_{n_i},\varepsilon\right)\subseteq V_{\alpha_i}$ پس $B_d(x,\varepsilon)\subseteq V$ لذا τ' از τ ظریفتر است یعنی $\tau=\tau'$.

۶-۱-۱۷ **نتیجه:** $\mathbb{R}^W$ متریک پذیر است، در واقع متر

$$d(x,y)=\sup_n\left\{\frac{\overline{d}(x_n,y_n)}{n}\right\}$$

توپولوژی حاصل‌ضربی را القاء می‌کند.

۶-۱-۱۸ **تعریف:** فرض کنیم J یک مجموعه اندیس‌گذار و

$$x=(x_\alpha)_{\alpha\in J}\ \text{و}\ y=(y_\alpha)_{\alpha\in J}\in\mathbb{R}^J$$

متر $\overline{\rho}:\mathbb{R}^J\times\mathbb{R}^J\to\mathbb{R}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\overline{\rho}_{(x,y)}=\sup_{\alpha\in J}\left\{\overline{d}(x_\alpha,y_\alpha)\right\}$$

که در آن $\overline{d}$ متر استاندارد کراندار روی $\mathbb{R}$ می‌باشد. این متر را متر یکنواخت روی $\mathbb{R}^J$ و توپولوژی القاء شده توسط آنرا توپولوژی یکنواخت روی $\mathbb{R}^J$ می‌نامیم.

٦-۱-۱۹ قضیه: توپولوژی یکنواخت روی $\mathbb{R}^J$ ظریف‌تر از توپولوژی حاصل‌ضربی است اگر J نامتناهی باشد، آن‌گاه توپولوژی یکنواخت اکیداً ظریف‌تر خواهد بود.

برهان: فرض کنیم $V=\prod_{\alpha} V_\alpha$ در توپولوژی حاصل‌ضربی باز باشد پس برای $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$، $V_{\alpha_i}\neq \mathbb{R}$ $(1\le i\le n)$. اگر $x\in V$ آن‌گاه $x_{\alpha_i}\in V_{\alpha_i}$. بنابراین ε_i موجود است به‌طوری‌که $B_{\overline{d}}\left(x_{\alpha_i},\varepsilon_i\right)\subseteq V_{\alpha_i}$ قرار می‌دهیم

$$\varepsilon=\min_{1\le i\le n}\varepsilon_i$$

آن‌گاه

$$\forall\, y\in B_{\overline{\rho}}(x,\varepsilon)\Rightarrow \overline{d}\left(x_{\alpha_i},y_{\alpha_i}\right)\le\overline{\rho}(x,y)<\varepsilon\le\varepsilon_i$$

درنتیجه $y_{\alpha_i}\in V_{\alpha_i}$.

برای $\alpha\neq\alpha_i$ چون $V_\alpha=\mathbb{R}$ پس $y_\alpha\in V_\alpha$ لذا $y\in V$ و یا $x\in B(x,\varepsilon)\subseteq V$ حال اگر J نامتناهی باشد، $B\left(x,\frac{1}{2}\right)$ را در توپولوژی یکنواخت در نظر می‌گیریم، ادعا می‌کنیم که $B\left(x,\frac{1}{2}\right)$ در توپولوژی حاصل‌ضربی باز نیست زیرا در غیر این‌صورت $V=\prod_{\alpha}V_\alpha$ متعلق به پایه توپولوژی حاصل‌ضربی موجود است که $x\in V\subseteq B\left(x,\frac{1}{2}\right)$ فرض کنیم $\beta\in J$ و $V_\beta=\mathbb{R}$ (چنین βیی حتماً موجود است). اگر

$$z=\begin{cases}x_\alpha & \alpha\neq\beta\\ z_\beta & \alpha=\beta\end{cases}$$

که $z_\beta=x_\beta+\frac{3}{4}$ آن‌گاه

$$d\left(x_\alpha,z_\beta\right)=\left|z_\beta-x_\beta\right|=\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$$

می دانیم $z\in V$ و حال آن‌که $\overline{\rho}(x,z)\geq d\left(x_\beta, z_\beta\right)>\frac{۱}{۲}$. یعنی $z\notin B\left(x,\frac{۱}{۲}\right)$ به عبارت دیگر $B\left(x,\frac{۱}{۲}\right)$ در توپولوژی حاصل‌ضربی باز نیست.

۶-۱-۲۰ قضیه: فرض کنیم X و Y فضاهای متریک و $f:X\to Y$ یک تابع باشد، شرط لازم و کافی برای آنکه f پیوسته باشد، آن است که برای هر x و هر $\varepsilon>۰$، $\delta>۰$ی موجود باشد که

$$d_X(x,y)<\delta\Rightarrow d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$$

برهان: فرض کنیم f پیوسته و x و $\varepsilon>۰$ داده شده باشند، $f^{-۱}(B(f(x),\varepsilon))$ در X باز است پس $B(x,\delta)$ موجود است که

$$B(x,\delta)\subseteq f^{-۱}(B(f(x),\varepsilon))$$

اگر $y\in B(x,\delta)$ آن‌گاه $d_X(x,y)<\delta$ پس $f(y)\in B(f(x),\varepsilon)$ و یا

$$d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$$

برعکس: فرض کنیم V در Y باز باشد، ثابت می کنیم $f^{-۱}(V)$ در X باز است. اگر $x\in f^{-۱}(V)$ آن‌گاه $f(x)\in V$ پس $\varepsilon>۰$ی موجود است به‌طوری‌که

$$B(f(x),\varepsilon)\subset V$$

طبق فرض $\delta>۰$ی هست که $f(B(x,\delta))\subseteq B(f(x),\varepsilon)\subset V$ پس

$$B(x,\delta)\subseteq f^{-۱}(V)$$

یعنی $f^{-۱}(V)$ در X باز بوده و لذا f پیوسته است.

۶-۱-۲۱ تعریف: یک دنباله در X عبارتست از تابعی از $\mathbb{Z}^+$ به X در واقع یک دنباله در X عضوی از X^w می باشد که با $\{x_n\}$ یا $(x_۱,x_۲,\ldots,x_n,\ldots)$ نمایش داده می‌شود.

۶-۱-۲۲ تعریف: دنباله $\{x_n\}$ در X را همگرا به $x\in X$ گوییم اگر برای هر همسایگی U از x، Nی موجود باشد به‌طوری‌که

$$\forall n\geq N\quad x_n\in U$$

اگر دنباله $\{x_n\}$ به x همگرا باشد می‌نویسیم $x_n\to x$.

۶-۱-۲۳ مثال: اگر X را با توپولوژی غیر گسسته در نظر بگیریم، آن‌گاه هر دنباله در X همگرا است.

۶-۱-۲۴ لم دنباله : فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و $A \subseteq X$ ، اگر دنباله‌ای از اعضاء A موجود باشد که به x همگرا است، آن‌گاه $x \in \overline{A}$. عکس این مطلب در هر فضای متریک پذیر X برقرار است.

برهان: فرض کنیم $\{x_n\} \subseteq A$ و $x_n \to x$ اگر U یک همسایگی از x باشد، از مرحله‌ای به بعد x_nها در U واقع می‌شوند پس $U \cap A \neq \phi$ پس $x \in \overline{A}$.

برعکس: فرض کنیم X متریک پذیر باشد، اگر d متریک X و $x \in \overline{A}$ آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\phi \neq B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$$

اگر

$$x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$$

آن‌گاه $x_n \to x$. زیرا فرض کنیم U یک همسایگی از x باشد، پس $\varepsilon > 0$ موجود است به‌طوری‌که $x \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$. برای $\varepsilon > 0$، Nی هست که $\frac{1}{N} < \varepsilon$ لذا:

$$\forall n > N \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U$$

پس

$$\forall n > N \quad x_n \in U$$

یعنی $x_n \to x$.

۶-۱-۲۵ تذکر: متریک پذیر بودن X در عکس قضیه فوق شرط کافی است، برای این منظور به مثال زیر توجه کنید:

۶-۱-۲۶ مثال: فرض کنیم Ω کوچکترین مجموعه خوش ترتیب ناشمارا باشد (یک مجموعه را خوش ترتیب نامیم اگر آن مجموعه مرتب و هر زیر مجموعه غیر تهی آن دارای عضو مینیمم باشد، کوچکترین مجموعه خوش ترتیب ناشمارا همواره موجود است). همچنین فرض کنیم

$$X = \Omega \cup \{\Omega\}$$

X را به توپولوژی ترتیبی مجهز می کنیم. اگر $A = \Omega$ آن‌گاه $\overline{A} = X$ زیرا هر همسایگی از Ω بصورت $(\alpha, \Omega]$ بوده که $\alpha \in \Omega$ اگر $(\alpha, \Omega] \cap A = \phi$ آن‌گاه $\Omega = A = (-\infty, \alpha]$ یعنی Ω شمارا است که متناقض با فرض است. اگر $a_n \in A$ آن‌گاه a_n یک مجموعه مرتب شمارا است و به‌علاوه

$$a_n \leq \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i = \alpha$$

شمارا است پس $\alpha < \Omega$. بنابراین هیچ $a_n \notin (\alpha, \Omega]$ پس $a_n \not\to \Omega$.

۶-۱-۲۷ قضیه: فرض کنیم X یک فضای متریک پذیر باشد، آن‌گاه:
نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر $\{x_n\}$ که $x_n \to x$ داشته باشیم $f(x_n) \to f(x)$.

برهان: فرض کنیم f پیوسته و $x_n \to x$ و V یک همسایگی از $f(x)$ باشد، دراین‌صورت $f^{-1}(V)$ یک همسایگی از x است، پس Nی هست که برای هر $n > N$ داریم:

$$x_n \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(x_n) \in V$$

درنتیجه

$$f(x_n) \to f(x)$$

برعکس: فرض کنیم $A \subseteq X$، ثابت می کنیم $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ برای این منظور داریم: اگر $x \in \overline{A}$ آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ در A موجود است که $x_n \to x$ پس $f(x_n) \to f(x)$ و چون $\{f(x_n)\} \subseteq f(A)$ پس $f(x) \subseteq \overline{f(A)}$ لذا $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$، یعنی f پیوسته است.

۶-۱-۲۸ تعریف: فضای X در نقطه $x \in X$ شمارای اول است اگر یک دسته شمارا از همسایگی های x مانند $\{V_n\}$ موجود باشد که برای هر همسایگی V از x nی موجود باشد دراین‌صورت $V_n \subseteq V$. $\{V_n\}$ را یک پایه موضعی در x گوییم.
فضای X شمارای اول است اگر در هر نقطه $x \in X$ شمارای اول باشد.

۶-۱-۲۹ قضیه : لم دنباله در فضاهای شمارای اول برقرار است.

برهان : فرض کنیم $x \in \overline{A}$ و $\{V_n\}$ یک پایه موضعی در x باشد. فرض کنیم $x_1 \in V_1 \cap A$، اگر x_n انتخاب شده باشد، در نظر می گیریم:

$$x_{n+1} \in A \cap V_1 \cap V_2 \ldots \cap V_{n+1}$$

دراین‌صورت $x_n \to x$ زیرا اگر V همسایگی دلخواهی از x باشد، آن‌گاه Nی هست که $x \in V_N \subset V$. بدیهی است که برای $n \geq N$

$$x_n \in V_N \subset V$$

۶-۱-۳۰ مثال: هر فضای متریک پذیر، شمارای نوع اول است. $\left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right) \right\}_n$ یک دسته شمارا از همسایگی های x است، اگر $B(x, \varepsilon)$ یک همسایگی از x باشد، آن‌گاه nی هست که $\frac{1}{n} < \varepsilon$ پس $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq B(x, \varepsilon)$.

۶-۱-۳۱ قضیه: اگر X یک فضای توپولوژیک و $f, g : X \to \mathbb{R}$ پیوسته باشند، آن‌گاه $f \pm g$ و $f.g$ پیوسته اند. به‌علاوه اگر برای هر x $g(x) \neq 0$ آن‌گاه $\frac{f}{g}$ نیز پیوسته خواهد بود.

برهان: تابع $h : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ را بصورت $h(x) = (f(x), g(x))$ تعریف می کنیم. چون مؤلفات h پیوسته اند، پس h پیوسته است. با توجه به این‌که توابع

$$\pm : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{و} \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to x \pm y \qquad\qquad (x, y) \to x \cdot y$$

پیوسته اند، نتیجه می گیریم توابع

$$\pm oh = f \pm g$$

$$f \cdot g = \cdot oh$$

بعنوان ترکیب توابع پیوسته، پیوسته هستند. مشابهاً پیوستگی $\frac{f}{g}$ از پیوستگی تابع

$$/ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \frac{x}{y}$$

نتیجه می شود. زیرا $\frac{f}{g} = /oh$.

۶-۱-۳۲ تعریف: فرض کنیم Y یک فضای متریک و $f : X \to Y$ و f_n دنباله ای از توابع باشند. گوییم f_n بطور یکنواخت به f همگرا است اگر:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \quad \ni \forall n (n \geq N \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon) \forall x \in X$$

۶-۱-۳۳ قضیه: فرض کنیم Y یک فضای متریک و برای هر n، $f_n : X \to Y$ پیوسته باشد. اگر f_n بطور یکنواخت به $f : X \to Y$ همگرا باشد، آن‌گاه f پیوسته است.

برهان: فرض کنیم V یک زیر مجموعه باز Y باشد و $x_\circ \in f^{-1}(V)$. همسایگی U از $x_\circ$ را چنان بدست خواهیم آورد که $f(U) \subseteq V$. برای این منظور فرض کنیم $y_\circ = f(x_\circ)$ و $\varepsilon > \circ$ طوری باشد که $B(y_\circ, \varepsilon) \subset V$ بنابر تقارب یکنواخت

$$\exists N \in \mathbb{N} \ni \forall n \left(n \geq N \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{۴} \right) \forall x \in X$$

چون f_N پیوسته است، پس همسایگی U از $x_\circ$ موجود است به‌طوری‌که

$$f_N(U) \subseteq B\left(f_N(x_\circ), \frac{\varepsilon}{۲} \right)$$

فرض کنیم $x \in U$، آن‌گاه

$$d(f_N(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{۴} \quad \text{(با توجه به همگرایی یکنواخت)}$$

$$d(f_N(x), f(x_\circ)) < \frac{\varepsilon}{۴} \quad \text{(با توجه به پیوستگی } f_N \text{)}$$

$$d(f_N(x_\circ), f(x_\circ)) < \frac{\varepsilon}{۴} \quad \text{(با توجه به همگرایی یکنواخت)}$$

در نتیجه

$$d(f(x), y_\circ) = d(f(x), f(x_\circ)) \leq$$
$$d(f_N(x), f(x)) + d(f_N(x), f_N(x_\circ)) + d(f(x), f_N(x_\circ))$$

پس

$$d(f(x), y_\circ) < \frac{\varepsilon}{۴} + \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۴} = \varepsilon$$

یعنی

$$f(U) \subseteq B(y_\circ, \varepsilon) \subseteq V$$

قضیه فوق به قضیه حد یکنواخت مشهور است.

۶-۱-۳۴ قضیه: دنباله توابع $f_n : X \to \mathbb{R}$ بطور یکنواخت بـه $f : X \to \mathbb{R}$ همگـرا اسـت اگـر و فقط اگر $f_n \to f$ با توپولوژی یکنواخت روی $\mathbb{R}^X$.

برهان: فرض کنیم f_n بطور یکنواخت به f همگرا باشد، همچنین فرض کنیم V یک همسایگی از f در $\mathbb{R}^X$ باشد، آن‌گاه $\varepsilon > 0$ موجود است، به‌طوری‌که

$$f \in B(f, \varepsilon) \subseteq V$$

برای ε فوق (می توان $\varepsilon < 1$ را در نظر گرفت) N موجود است به‌طوری‌که:

$$\forall n \left(n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \right) \forall x \in X$$

درنتیجه

$$\sup|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

بنابراین

$$\overline{\rho}(f_n, f) < \varepsilon \quad \text{یا} \quad f_n \to f \ (\text{در } \mathbb{R}^X)$$

برعکس: اگر $f_n \to f$ (در $\mathbb{R}^X$) آن‌گاه برای $0 < \varepsilon < 1$، Nی موجود است به‌طوری‌که

$$\forall n \geq N \quad \overline{\rho}(f_n, f) < \varepsilon \Rightarrow \sup_n |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

درنتیجه

$$\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

پس $f_n \to f$ بطور یکنواخت.

۶-۱-۳۵ تذکر: $\mathbb{R}^W$ با توپولوژی جعبه ای متریک پذیر نمی‌باشد. برای این منظور نشان می دهیم که لم دنباله برای $\mathbb{R}^W$ با توپولوژی جعبه ای برقرار نیست. فرض کنیم

$$A = \{(x_1, x_2, \ldots) : x_i > 0, i \in \mathbb{Z}^+\}$$

اگر $B = \prod_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ یک همسایگی از $0 = (0, 0, \ldots)$ باشد، ادعا می کنیم $B \cap A \neq \phi$ (در واقع $x = \left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{2}, \ldots\right)$ در $A \cap B$ قرار دارد) در نتیجه $0 \in \overline{A}$، ولی هیچ دنباله ای مانند $\{a_n\}$ از نقاط A به 0 همگرا نمی باشد.

فرض کنیم $a_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots)$ آن‌گاه هر $x_{ij} > 0$ (چون $a_n \in A$) همسایگی

$$B' = (-x_{11}, x_{11}) \times (-x_{22}, x_{22}) \times \cdots$$

از ۰ را در نظر می گیریم ($0 \in B'$) برای هر n، $a_n \notin B'$ و در واقع $x_{nn} \notin (-x_{nn}, x_{nn})$.

۳۶-۱-۶ تذکر: اگر J ناشمارا باشد، $\mathbb{R}^J$ متریک پذیر نیست:

فرض کنیم

$$A = \{(x_\alpha) \in \mathbb{R}^J : \text{تعداد متناهی از } x_\alpha \text{ ها صفر و بقیه ۱ هستند} \}$$

اولاً ادعا می کنیم $0 \in \overline{A}$ زیرا: فرض کنیم $\prod\limits_\alpha U_\alpha$ عضوی از پایه شامل ۰ باشد. آن‌گاه برای تعداد متناهی از αها $U_\alpha \neq \mathbb{R}$. فرض کنیم برای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$، $U_{\alpha_i} \neq \mathbb{R}$. همچنین فرض کنیم

$$x_\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha = \alpha_i, 1 \le i \le n \\ \\ 1 & \alpha \neq \alpha_i, 1 \le i \le n \end{cases}$$

آن‌گاه

$$x_\alpha \in A \cap \left(\prod_\alpha U_\alpha \right)$$

ثانیاً: هیچ دنباله‌ای در A به صفر همگرا نیست. فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه در A باشد، هر a_n عضو فضای حاصل‌ضربی است که تعداد متناهی از مولفه‌های آن صفر می‌باشد. فرض کنیم $J_n \subseteq J$ اندیس‌هایی باشد که برای هر $\alpha \in J_n$، αامین مؤلفه a_n برابر صفر باشد، آن‌گاه $\cup J_n$ اجتماع شمارایی از مجموعه های متناهی است که شمارا می باشد. چون J ناشمارا است پس $\beta \in J$ موجود است که $\beta \notin \bigcup\limits_n J_n$. بنابراین برای هر n، βامین مولفه a_n برابر ۱ است. حال فرض کنیم $U_\beta = (-1,1)$ و $U = \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ بدیهی است که U در $\mathbb{R}^J$ باز است، به‌علاوه U یک همسایگی از ۰ می‌باشد و برای هر n، $a_n \notin U$ (زیرا مؤلفه βام a_n برابر ۱ است و در واقع $U_\beta = (-1,1)$ نمی‌شود) پس $a_n \not\to 0$.

۶-۲ فشردگی برحسب نقاط حدی

۶-۲-۱ تعریف: فضای توپولوژیک X را فشرده برحسب نقطه حدی گوییم اگر هر زیر مجموعه نامتناهی از X یک نقطه حدی داشته باشد.

۶-۲-۲ قضیه: اگر X فشرده باشد، آن‌گاه X فشرده بر حسب نقطه حدی است.

برهان: فرض کنیم $A \subseteq X$ هیچ نقطه حدی نداشته باشد، ثابت می کنیم A متناهی است. چون $A' = \phi$ لذا $\overline{A} = A' \cup A = A$ بنابراین A بسته است، درنتیجه A فشرده است. برای هر $x \in X$، x نقطه حدی A نمی باشد. بنابراین همسایگی V_x از x موجود است به‌طوری‌که $V_x \cap A \subseteq \{x\}$. بنابراین $\{V_x\}$ یک پوشش باز برای A است. چون A فشرده است، $V_{x_1}, \dots, V_{x_n}$ موجودند که:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \Rightarrow A = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \right) \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

۶-۲-۳ تذکر: فشردگی بر حسب نقطه حدی، فشردگی را نتیجه نمی دهد برای این منظور فرض کنیم $X = \Omega$ و $Y = \Omega \cup \{\Omega\}$ یا $Y = \Omega + 1$. قبلاً دیدیم که $\overline{X} = Y$، پس X در Y بسته نمی‌باشد. چون Y هاسدورف است، لذا X فشرده نمی‌باشد. نشان می‌دهیم که X دارای خاصیت فشردگی برحسب نقطه حدی است. فرض کنیم $A \subseteq X$ شمارا و نامتناهی باشد، قرار می دهیم $\alpha = \bigcup_{\beta \in A} \beta$، آن‌گاه α شمارا است و درنتیجه $\alpha < \Omega$. پس $A \subseteq [a, \alpha]$ که در اینجا a عضو مینیمم X می‌باشد. قبلاً دیدیم که در توپولوژی ترتیبی که خاصیت پیوستار خطی برقرار باشد بازه‌های بسته فشرده‌اند، پس $[a, \alpha]$ فشرده بوده و طبق قضیه قبل A دارای نقطه حدی خواهد بود (توجه کنید که اگر A ناشمارا باشد، یک زیر مجموعه شمارا و نامتناهی مانند B از A انتخاب نموده و مطابق بحث بالا عمل می کنیم).

۶-۲-۴ تعریف: فضای توپولوژی X را فشرده دنباله‌ای گوییم اگر هر دنباله در X دارای زیر دنباله‌ای همگرا باشد.

۶-۲-۵ تبصره: هر فضای متریک و فشرده بر حسب نقطه حدی، فشرده دنباله‌ای می‌باشد.

برهان: فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد، $\{x_n : n\in \mathbb{N}\}$ متناهی باشد، زیر دنباله ثـابتی یافت خواهد شد که همگرا نیز می باشد. اگـر $A=\{x_n : n\in \mathbb{N}\}$ نامتنـاهی باشـد، آن‌گـاه A دارای یک نقطه حدی مانند x است. زیر دنباله ای از $\{x_n\}$ به صورت زیر می سازیم:

n_1 را چنان انتخاب می کنیم که $x_{n_1}\in B(x,1)$ فرض کنیم n_{i-1} انتخـاب شـده باشـد از ایـن‌کـه گوی $B\left(x,\frac{1}{i}\right)$، A را قطع می‌کند پس $n_{i-1}<n_i$ موجود است به‌طوری‌که

$$x_{n_i}\in B\left(x,\frac{1}{i}\right)$$

توجه داریم که هر گوی، A را در تعداد نامتناهی نقطه قطع می کند. بدیهی است که زیر دنباله $\{x_{n_k}\}$ که به روش فوق ساخته شد، به x همگرا است.

۲-۶-۷ **تبصره:** اگر فضای توپولوژیک X فشرده دنباله‌ای باشد، آن‌گاه فشرده برحسب نقطه حدی نیـز خواهد بود.

برهان: فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای نامتناهی از X باشد، بـدیهی اسـت کـه A شـامل زیـر مجموعـه شمارایی مانند $\{a_n : n\in \mathbb{N}\}$ است پس $\{a_n\}$ دارای زیر دنباله‌ای مانند $\{a_{n_k}\}$ است کـه بـه $a\in X$ همگرا می‌باشد لذا $a\in A'$.

۲-۶-۸ **نتیجه:** اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و

الف) اگر فشرده دنباله‌ای نیز باشد، آن‌گاه فشرده برحسب نقطه حدی نیز خواهد بود.

ب) اگر متریک پذیر و فشرده بر حسب نقطه حدی باشد، فشرده دنباله‌ای نیز خواهد بود.

۲-۶-۹ **قضیه:** فرض کنیم X یک فضای متریک باشد که فشرده دنباله‌ای است. اگر F یک پوشش باز برای X باشد، $\delta>0$ موجود است که بـرای هـر $A\subseteq X$ اگـر $diam\, A<\delta$، آن‌گـاه $F\in F$ موجود است به‌طوری‌که $A\subseteq F$. عدد δ را عدد لبگ پوشش F می نامیم.

برهان: فرض کنیم چنین δیی موجود نباشد، در نتیجه برای هر $\delta>0$ مجموعه A موجـود اسـت که

$$\sup\{d(x,y):x,y\in A\}=diam\, A<\delta$$

ولـی A مشـمول هـیچ $F\in F$ نمـی باشـد. اگـر $\delta=\frac{1}{n}$ اختیـار شـود، A_nی هسـت کـه $diam\, A_n<\frac{1}{n}$ و A_n مشمول در هیچ $F\in F$ نیست. از آنجایی کـه $\phi\neq A_n$ (زیـرا در غیـر

این صورت $A_n = \phi$ و $F \supseteq A_n = \phi$ و $F \in \mathcal{F}$) پس $a_n \in A_n$ موجود است، با این انتخاب به دنباله $\{a_n\}$ می رسیم که طبق فرض دارای زیر دنباله همگرایی مانند $\{a_{n_k}\}$ می باشد. فرض کنیم $a_{n_k} \to a$ پس $F \in \mathcal{F}$ موجود است که $a \in F$ (زیرا $a \in X$ و $\mathcal{F}$ یک پوشش برای X است) چون F باز است، $\varepsilon > 0$ موجود است به‌طوری‌که $B(a,\varepsilon) \subseteq F$، حال i را چنان در نظر می گیریم که $\frac{1}{n_i} < \frac{\varepsilon}{2}$ و به‌علاوه $a_{n_i} \in B\left(a,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ درنتیجه

$$\forall x \in A_{n_i} \quad d(a,x) \le d\left(a,a_{n_i}\right) + d\left(a_{n_i},x\right)$$

$$\le d\left(a,a_{n_i}\right) + diam\, A_{n_i}$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_i} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

در نتیجه $A_{n_i} \subseteq F$ یا $x \in B(a,\varepsilon)$. که متناقض با فرض است. پس وجود عدد لبگ δ (وابسته به پوشش $\mathcal{F}$) تضمین می شود.

۶-۲-۱۰ قضیه پیوستگی یکنواخت: فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده و Y یک فضای متریک باشد. دراین‌صورت تابع پیوسته $f : X \to Y$ بطور یکنواخت پیوسته خواهد بود.

برهان: فرض کنیم $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد، آن‌گاه

$$\mathcal{F} = \left\{ f^{-1}\left(B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) : y \in Y \right\}$$

یک پوشش باز برای X است. فرض کنیم δ عدد لبگ تضمین شده در قضیه قبل برای پوشش $\mathcal{F}$ باشد. اگر $d(x,x') < \delta$ آن‌گاه $diam\{x,x'\} < \delta$ پس $f^{-1}\left(B\left(y_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ وجود دارد چنانکه $\{x,x'\} \subseteq f^{-1}\left(B\left(y_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$. لذا

$$f(\{x,x'\}) \subseteq B\left(y_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

پس

$$d(f(x), f(x')) \le d(f(x), y_\circ) + d(f(x'), y_\circ) < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

یعنی f بطور یکنواخت پیوسته است.

۶-۲-۱۱ تعریف: فضای توپولوژی X را بطور کلی کراندار گوییم اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ ، X به وسیله تعداد متناهی از گوی‌ها به شعاع ε پوشیده شود.

۶-۲-۱۲ قضیه: در فضای متریک X فشردگی، فشردگی دنباله‌ای و فشردگی برحسب نقطه حدی معادلند.

برهان: دیدیم که فشردگی، فشردگی برحسب نقطه حدی را نتیجه می دهد و فشردگی برحسب نقطه حدی در فضای متریک با فشردگی دنباله‌ای معادل است، بنابراین کافی است ثابت کنیم که فشردگی دنباله‌ای، فشردگی را نتیجه می دهد.

مرحله ۱) X بطور کلی کراندار است (هر فضای فشرده دنباله‌ای به‌طور کلی کراندار است).

برهان: فرض کنیم چنین نباشد پس برای $x_۱ \in X$ داریم $X \neq B(x, \varepsilon)$ (در غیر این‌صورت X با یک گوی به شعاع ε پوشیده خواهد شد). بنابراین $x_۲ \in X$ موجود است به‌طوری‌که $x_۲ \notin B(x_۱, \varepsilon)$. با ادامه این روش $x_{n+۱} \notin \bigcup_{k=۱}^{n} B(x_k, \varepsilon)$ را اختیار می کنیم. پس دنباله $\{x_n\}$ که فوقاً ساخته شد، دارای زیر دنباله $\{x_{n_k}\}$ است که به x همگرا است. پس K موجود است که برای هر $k \ge K$ داریم

$$x_{n_k} \in B\left(x, \frac{\varepsilon}{۳}\right)$$

حال داریم:

$$d(x_{n_{k+۱}}, x_{n_k}) \le d(x, x_{n_k}) + d(x, x_{n_{k+۱}}) < \frac{\varepsilon}{۳} + \frac{\varepsilon}{۳} = \frac{۲\varepsilon}{۳} < \varepsilon$$

لذا

$$x_{n_{k+۱}} \in B(x_{n_k}, \varepsilon)$$

که متناقض با ساختن $\{x_n\}$ می باشد.

مرحله ۲) فضای کلی کراندار X، فشرده است.

برهان: فرض کنیم F یک پوشش باز برای X و $\delta > ۰$ عدد لبگ تضمین شده برای F باشد. قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{\delta}{۳}$. فرض کنیم

$$B(x_n,\varepsilon),\ldots,B(x_1,\varepsilon)$$

یک پوشش باز برای X باشد (وجود این پوشش در مرحله اول تضمین شد) آن‌گاه

$$diam\, B(x_k,\varepsilon)\leq 2\varepsilon=\frac{2\delta}{3}<\delta$$

پس $F_k \in F$ موجود است به‌طوری‌که $B(x_k,\varepsilon)\subseteq F_k$ درنتیجه

$$X=\bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,\varepsilon)=\bigcup_{k=1}^{n} F_k$$

یعنی X فشرده است.

۶-۲-۱۳قضیه : اگر (X,d) یک فضای متریک فشرده و تابع $f: X\to X$ طولپا (یعنی برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم $d(f(x),f(y))=d(x,y)$) باشد، آن‌گاه f همسانریخت است.

برهان: بدیهی است که f پیوسته و یک به یک است، کافی است نشان دهیم که f برو است. فرض کنیم f برو نباشد، پس x ی هست که $x\in X-f(X)$. $\varepsilon>0$ ی هست که $B(x,\varepsilon)\cap f(X)=\phi$ فرض کنیم

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad x_n=f(x_{n-1})\quad \text{و}\quad x_1=f(x)$$

دراین‌صورت برای $m,n\in\mathbb{N}$ $(n>m)$ داریم:

$$d(x_n,x_m)=d(f(x_{n-1}),f(x_{m-1}))=d\left(f^n(x),f^m(x)\right)=d\left(f^{n-m}(x),x\right)$$

چون $f^{n-m}(x)\notin B(x,\varepsilon)$ پس $d(x_n,x_m)\geq\varepsilon$، یعنی دنباله $\{x_n\}$ کشی نیست و درنتیجه دارای هیچ زیر دنباله همگرا نخواهد بود. که متناقض با فرض فشردگی دنباله‌ای X است.

تمرین

۱) فرض کنید τ_p، τ_u و τ_B به ترتیب توپولوژی حاصل‌ضربی، توپولوژی یکنواخت و توپولوژی جعبه ای روی $\mathbb{R}^w$ باشد.

(الف) نشان دهید که τ_B اکیداً ظریفتر از τ_u است.

(ب) با کدام یک از توپولوژی‌های فوق توابع $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^w$ با ضابطه‌های زیر پیوسته هستند:

$$g(t) = \left(t, \frac{۱}{۲}t, \frac{۱}{۳}t, \ldots\right) \quad \text{و} \quad f(t) = (t, ۲t, ۳t, \ldots)$$

(ج) در کدام یک از توپولوژی‌های فوق دنباله‌های زیر همگرا هستند:

$$\begin{array}{lll}
x_۱ = (۱,۱,۱,\ldots) & y_۱ = (۱,۰,۰,\ldots) & z_۱ = (۱,۱,۰,۰,\ldots) \\
x_۲ = (۰,۲,۲,\ldots) & y_۲ = \left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},۰,\ldots\right) & z_۲ = \left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},۰,۰,\ldots\right) \\
x_۳ = (۰,۰,۳,\ldots) & y_۳ = \left(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳},۰,\ldots\right) & z_۳ = \left(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳},۰,۰\ldots\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

۲) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و Y یک فضای متریک باشد، و $f_n : X \to Y$ دنباله ای از توابع پیوسته و $\{x_n\}$ دنباله ای در X باشد که $x_n \to x$، ثابت کنید که اگر دنباله $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به f باشد آن‌گاه $f(x_n) \to f(x)$.

۳) فرض کنید $\tau = \{\phi\} \cup \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$ نشان دهید τ یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ است. ثابت کنید $(\mathbb{R}, \tau)$ متریک پذیر نیست. اگر $x_n = -n$ نشان دهید که $\{x_n\}$ در $(\mathbb{R}, \tau)$ واگرا است. اگر $x_n = (-۱)^n$ نشان دهید که $\{x_n\}$ در $(\mathbb{R}, \tau)$ به هر عدد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۱- همگرا است.

۴) فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله ای از نقاط فضای حاصل‌ضربی $\prod_{\alpha} X_\alpha$ باشد، ثابت کنید $x_n \to x$ اگر و فقط اگر برای هر α، دنباله $\{\pi_\alpha(x_n)\}$ به $\pi_\alpha(x)$ همگرا باشد. اگر توپولوژی جعبه ای جایگزین شود، آیا حکم هنوز هم برقرار است؟

۵) اگر (X,d) یک فضای متریک فشرده و تابع $f : X \to X$ چنان باشد که

$$\forall\, x, y \in X \qquad d(x,y) \le d(f(x), f(y))$$

ثابت کنید f یک همسانریختی است.

فصل ۷

فشردگی موضعی، فشرده سازی تک نقطه ای و اصول شمارش پذیری

مقدمه

در این فصل به معرفی و بررسی خصوصیات فضاهای فشردهٔ موضعی، فشرده سازی تـک نقطـه‌ای و اصول شمارش پذیری می‌پردازیم. ابتدا لازم است به یک نکته توجه نمـاییم کـه حـداقل سـه تعریـف متفاوت برای تعریف فشردگی موضعی در متون توپولوژی وجـود دارنـد کـه در حالـت کلـی معـادل نیستند:

الف) یک فضای توپولوژی فشردهٔ موضعی است هرگاه هر نقطهٔ آن دارای یک همسایگی فشرده باشد.

ب) یک فضای توپولوژی فشردهٔ موضعی است هـر گـاه هـر نقطـهٔ آن دارای یـک مبنـای موضـعی از مجموعه‌های فشرده باشد.

ج) یک فضای توپولوژی فشردهٔ موضعی است هـر گـاه هـر نقطـهٔ آن دارای یـک مبنـای موضـعی از مجموعه‌های فشرده و بسته باشد.

هر نویسنده یکی از این‌ها را به عنوان تعریف فضای توپولوژی فشـرده موضـعی بـه‌کـار مـی‌بـرد. امـا همچنان‌که قبلاً ذکر گردید، آن‌ها در حالت کلی با هم معادل نیستند ارتباط آنها به‌صورت زیر است.

(ب) فشردگی

$\Downarrow$ $\Downarrow$

(الف) $\Longrightarrow$ (ج)

درحالتی‌که فضای توپولوژی هاسدورف نیز باشد سه تعریف فوق با هم معادل خواهند بود.

۷-۱ فشردگی موضعی

۷-۱-۱ تعریف: فضای توپولوژیک X را فشرده موضعی گوییم اگر برای هر $x\in X$، مجموعه فشرده C موجود باشد به‌طوری‌که C شامل یک همسایگی از x است.

۷-۱-۲ تذکر: اگر X یک فضای هاسدورف و فشرده موضعی باشد، آن‌گاه برای هر $x\in X$ همسایگی از x موجود است به‌طوری‌که بستار آن فشرده است.

برهان: فرض کنیم $x\in X$، یک همسایگی V_x از x در مجموعه فشرده C جای دارد

$$V_x \subseteq C \Rightarrow \overline{V_x} \subseteq \overline{C} = C$$

بنابراین $\overline{V_x}$ به‌عنوان زیر مجموعه‌ای بسته از یک مجموعه فشرده، فشرده است.

۷-۱-۳ مثال: مجموعه اعداد حقیقی فشرده موضعی است. زیرا برای هر $x\in R$

$$x\in (x-۱, x+۱) \subseteq [x-۱, x+۱]$$

۷-۱-۴ مثال: مجموعه اعداد گویا فشرده موضعی نیست، زیرا برای هر $q\in Q$، $V\cap Q$ یک همسایگی از q باشد که $\overline{V}\cap Q$ فشرده است، آن‌گاه $\overline{V}\cap Q$ فشرده دنباله‌ای است.

فرض کنیم: $V=(q-\varepsilon, q+\varepsilon)$ و $\circ < \frac{۱}{m} < \varepsilon$، دراین‌صورت:

$$\left(q-\frac{۱}{m}, q+\frac{۱}{m}\right) \subseteq V$$

حال اگر $a_n = q+\frac{\varepsilon}{۳}\sum_{k=\circ}^{n}\frac{۱}{k!}$ آن‌گاه

$$a_n \in \overline{V}\cap Q \quad \text{و} \quad a_n \to q+\frac{\varepsilon}{۳}e$$

$q+\frac{\varepsilon}{۳}e < q+\varepsilon$ و اما $q+\frac{\varepsilon}{۳}e \notin \overline{V}\cap Q$.

۷-۱-۵ مثال: $\mathbb{R}^W$ فشرده موضعی نیست. یک همسایگی از $x \in \mathbb{R}^W$ به‌صورت

$$(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)\times\mathbb{R}\times\cdots$$

می‌باشد. که بستار آن عبارت است از :

$$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]\times\mathbb{R}\times\cdots \qquad (1)$$

که فشرده نیست (زیرا $\mathbb{R}^W$ متریک پذیر است و لذا مجموعه‌های فشرده آن بسته و کراندار است در حالی‌که (۱) کراندار نیست).

۷-۱-۵ نتیجه: حاصل‌ضرب فضاهای فشرده موضعی لزوماً فشرده موضعی نیست.

۷-۲ فشرده سازی تک نقطه‌ای

۷-۲-۱ تعریف: فرض کنیم X یک فضای هاسدورف و فشرده موضعی باشد، آن‌گاه فشرده سازی نقطه‌ای X عبارت است از $Y = X \cup \{\infty\}$ که در آن $\infty \notin X$ و توپولوژی Y به‌وسیله مجموعه‌های زیر تعیین می‌شود:

(۱) همه U هایی که U در X باز است.

(۲) $Y - C$ هایی که C در X فشرده است (همسایگی ∞)

۷-۲-۲ تذکر: دسته مجموعه‌های (۱) و (۲) یک توپولوژی روی Y تعریف می‌کنند. زیرا

(الف) ϕ از مجموعه‌های نوع (۱) و Y از مجموعه‌های نوع (۲) است.

(ب) اشتراک هر دو مجموعه باز، باز است:

اگر U_1 و U_2 از نوع (۱) باشند، $U_1 \cap U_2$ نیز از نوع (۱) خواهد بود.

اگر $Y - C_1$ و $Y - C_2$ از نوع (۲) باشند، آن‌گاه

$$U \cap (Y - C) = U \cap (X - C)$$

نیز از نوع (۲) خواهد بود.

(ج) اگر $\{U_\alpha\}_\alpha$ از نوع (۱) باشد، آن‌گاه $\cup U_\alpha = U$ نیز از نوع (۱) خواهد بود.

اگر $\{Y - C_\alpha\}_\alpha$ نیز از نوع (۲) باشد، آن‌گاه $\underset{\alpha}{\cup}(Y - C_\alpha) = Y - \underset{\alpha}{\cap} C_\alpha$ از نوع (۲) خواهد بود.

اگر U_α ها از نوع (۱) و $Y - C_\beta$ ها از نوع (۲) باشد، آن‌گاه

$$\left(\underset{\alpha}{\cup} U_\alpha\right) \cup \left(\underset{\beta}{\cup}(Y - C_\beta)\right) = U \cup \left(Y - \underset{\beta}{\cap} C_\beta\right)$$
$$= U \cup (Y - C) = Y - (C - U)$$

که $C = \underset{\beta}{\cap} C_\beta$ و $U = \underset{\alpha}{\cup} U_\alpha$ و $C \cap U^C = C - U$ زیرمجموعه بسته ای از C است. لذا فشرده است.

۷-۲-۳ قضیه: فرض کنیم X یک فضای فشرده موضعی هاسدورف و Y فشرده سازی نقطه‌ای آن باشد، در این صورت:

(الف) X زیر فضایی از Y است.

(ب) Y فشرده و هاسدورف است.

(ج) اگر X فشرده نباشد، آن‌گاه $\overline{X} = Y$.

برهان (الف): یک مجموعه باز در Y به‌صورت U یا $Y - C$ است، حال مجموعه های $U = U \cap X$ و $(Y - C) \cap X = X - C$ در X باز است. برعکس اگر U در X باز باشد، $U = U \cap X$ از مجموعه‌های نوع (۱) است و لذا در Y باز می‌باشد.

برهان (ب): Y فشرده است زیرا: فرض کنیم F یک پوشش باز برای Y باشد در نتیجه $F_\circ$ی در F هست که $\infty \in F_\circ$، چون $C = Y - F_\circ$ فشرده و

$$F_\backslash = \{F \cap X : F \in F\}$$

یک پوشش باز C است، لذا $F_\backslash, \dots, F_n$ در F موجود است که $C \subseteq \bigcup_{i=\backslash}^{n} F_i$، پس

$$Y = C \cup F_\circ \quad \text{و} \quad C \subseteq \bigcup_{i=\backslash}^{n} F_i$$

در نتیجه

$$Y \subseteq C \cup F_\circ \subseteq F_\circ \cup F_\backslash \cup \dots \cup F_n$$

یعنی Y فشرده است.

Y هاسدورف است زیرا: فرض کنیم $x, y \in Y$ و $x \neq y$ اگر $\infty \notin \{x, y\}$ آن‌گاه $x, y \in X$ پس وجود همسایگی های U و V از x و y مطابق هاسدورف بودن X تضمین شده است.

اگر $y=\infty$ آن‌گاه $x \in X$، بنابراین مجموعه فشرده C موجود است که C شامل همسایگی U_X از x است، قرار می‌دهیم $V_\infty = Y - C$ دراین‌صورت V_∞ یک همسایگی از ∞ است و به‌علاوه $V_\infty \cap U_X = \phi$.

برهان (ج): اگر X فشرده نباشد آن‌گاه $\overline{X} = Y$ زیرا هر همسایگی از ∞ بفرم $Y - C$ است که C در X فشرده است، چون X فشرده نیست پس $X \neq C$. بنابراین $(Y-C)\cap X \neq \phi$ یعنی هر همسایگی از ∞، X را قطع می‌کند پس $\infty \in \overline{X}$ یا $\overline{X} = Y$.

۷-۲-٤ مثال: فرض کنیم $X = \mathbb{R}^2$، آن‌گاه $Y \simeq S^2$ که

$$S^2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$$

ملاحظه می شود که S^2 با $S^2 - \{N\}$ که در آن $N = (0,0,1)$ همسان‌ریخت است. کافی است $N \to \infty$ لذا فشرده سازی نقطه ای $\mathbb{R}^2$، S^2 است.

۷-۲-٥ تعریف: فضای توپولوژیک X را در نقطه $x \in X$ فشرده موضعی گوییم اگر مجموعه C موجود باشد که شامل یک همسایگی از x است، پس X فشرده موضعی است اگر و فقط اگر X در هر نقطه فشرده موضعی باشد.

۷-۲-٦ لم: فرض کنیم X یک فضای هاسدورف باشد، دراین‌صورت X، در x فشرده موضعی است اگر و فقط اگر برای هر همسایگی U از x همسایگی V از x موجود باشد به‌طوری‌که $\overline{V}$ فشرده و $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

برهان: فرض کنیم برای U دلخواه، V با شرایط ذکر شده موجود باشد. قرار می‌دهیم $\overline{V} = C$ پس $V \subseteq C$ یعنی X در x فشرده موضعی است.

برعکس: فرض کنیم C مجموعه‌ای فشرده باشد که شامل یک همسایگی x می‌باشد. فرض کنیم U همسایگی دلخواهی از x باشد، قرار می دهیم $A = C - U$. A در C بسته است بنابراین فشرده است. چون $x \notin A$، پس مطابق آنچه در بحث فشردگی دیدیم، همسایگی W از x و مجموعه باز W' شامل A موجود است که $W \cap W' = \phi$. قرار می‌دهیم $V = W \cap C^\circ$ ادعا می کنیم که V جواب مسئله است. چون C شامل همسایگی از x است، لذا $x \in C^\circ$ پس $x \in W \cap C^\circ = V$ یعنی V یک همسایگی از x است و به‌علاوه

$$V \subseteq C^\circ \Rightarrow \overline{V} \subseteq \overline{C^\circ} \subseteq \overline{C} = C$$

بنابراین $\overline{V}$ به‌عنوان زیر مجموعه‌ای بسته از یک مجموعه فشرده، فشرده است. چون $V \subset W$ و $W \cap W' = \phi$ پس $V \cap W' = \phi$ و لذا $\overline{V} \cap W' = \phi$ (اگر x_0ی باشد که $x_0 \in \overline{V} \cap W'$ آن‌گاه مطابق تعریف بستار و باز بودن W' داریم $x_0 \in W'$ و $x_0 \in V$ یا $x_0 \in W' \cap V$ که تناقض است).

از طرف دیگر $A \subseteq W'$ پس $\overline{V} \cap A = \phi$. چون $\overline{V} \subseteq C$ پس

$$\overline{V} \subset C - A \subset U$$

۷-۲-۷ نتیجه: در یک فضای هاسدورف و فشرده موضعی هر زیر فضای بسته یا باز فشرده موضعی است.

برهان: فرض کنیم X هاسدورف و فشرده موضعی و $Y \subseteq X$.

(الف) اگر Y بسته باشد و $y \in Y$. مجموعه فشرده C در X موجود است به‌طوری‌که شامل همسایگی U از y می باشد. $C \cap Y$ در C بسته است پس فشرده است. به‌علاوه $U \cap Y \subseteq C \cap Y$ و $U \cap Y$ یک همسایگی y در Y است. پس Y فشرده موضعی است (باید توجه داشت که در این قسمت از اثبات هاسدورف بودن X استفاده نشد).

(ب) فرض کنیم Y باز و $y \in Y$. بنابر لم قبل همسایگی V از y در X موجود است چنان که $\overline{V} \subseteq Y$ و $\overline{V}$ فشرده است. قرار می دهیم $\overline{V} = C$، C در Y فشرده و

$$V = V \cap Y \subseteq \overline{V} = C$$

یعنی Y فشرده موضعی می‌باشد.

۷-۲-۸ نتیجه: فضای X با یک زیر مجموعه باز از یک فضای فشرده و هاسدورف همسانریخت است اگر و فقط اگر X فشرده موضعی و هاسدورف باشد.

برهان: فرض کنیم X فشرده موضعی و هاسدورف باشد آن‌گاه فشرده سازی نقطه‌ای Y از X وجود دارد به‌طوری‌که $\overline{X} = Y$. در نتیجه X با زیر مجموعه بازی از فضای هاسدورف و فشرده Y، همسانریخت است (این مجموعه باز همان X است).

برعکس: اگر X با زیر مجموعه باز $X_\circ$ از فضای فشرده و هاسدورف Y همسانریخت باشد، بنابر نتیجه ۷-۱-۱۲، $X_\circ$ فشرده موضعی و هاسدورف است. لذا X نیز فشرده موضعی و هاسدورف است.

۷-۳ اصول شمارش پذیری

۷-۳-۱ تعریف: فضای توپولوژیک X را شمارای دوم گوییم اگر یک پایه شمارا داشته باشد.

۷-۳-۲ مثال: گردایه

$$\left\{B\left(a,\frac{1}{m}\right): m\in \mathbb{N} \text{ و گویا } a\in \mathbb{R}^n \text{ مولفه های } \right\}$$

یک پایه شمارا برای $\mathbb{R}^n$ است.

۷-۳-۳ تعریف: فضای توپولوژیک X را شمارای نوع اول گوییم اگر در هر $x\in X$ یک پایه موضعی شمارا از همسایگی های x موجود باشد.

۷-۳-٤ مثال: قبلاً دیدیم که در هر فضای متریک (X,d) گردایه

$$\left\{B\left(a,\frac{1}{m}\right): m\in \mathbb{N}\right\}$$

یک پایه موضعی در نقطه x است، پس هر فضای متریک، شمارای اول است.

۷-۳-٥ تذکر: بدیهی است که هر فضای شمارای دوم، شمارای اول نیز می‌باشد و عکس این موضوع صحیح نیست، برای این منظور به مثال‌های زیر توجه کنید.

۷-۳-٦ مثال: فرض کنیم X ناشمارا باشد، X را به توپولوژی گسسته مجهز می‌کنیم. چون X با متریک گسسته، متریک پذیر است، شمارای اول است ولی شمارای دوم نیست. زیرا هر پایه حداقل شامل $\{\{x\}: x\in X\}$ می‌باشد که ناشمارا است.

۷-۳-۷ مثال: $\mathbb{R}^w$ با توپولوژی یکنواخت یک فضای متریک است. پس شمارای اول است. فرض کنیم $S\subseteq \mathbb{R}^w$ همه دنباله‌هایی باشد که اعضاء آن ۰ یا ۱ هستند. S ناشمارا است. اگر B یک پایه برای توپولوژی یکنواخت باشد، برای $x\in S$، $B_x\in B$ موجود است به‌طوری‌که $B_x\subseteq B_{\overline{\rho}}(x,1)$.

اگر $x\neq y$ آن‌گاه $B_x\neq B_y$ (زیرا $\overline{\rho}(x,y)=1$ و درنتیجه $y\notin B_x$) پس B ناشمارا است.

۷-۳-۸ قضیه: هر زیر فضا از یک فضای شمارای اول، شمارای اول است. حاصل‌ضرب شمارا از فضاهای شمارای اول، شمارای اول است. خواصی مشابه برای فضاهای شمارای دوم موجود است.

برهان: فرض کنیم X شمارای دوم باشد و $A\subseteq X$. اگر B یک پایه شمارا برای X باشد، آن‌گاه

$$\{B\cap A: B\in B\}$$

یک پایه شمارا برای A خواهد بود.

اگر B_i یک پایه شمارا برای X_i باشد، آن‌گاه مجموعه همه $\prod_i U_i$ که $U_i \in B_i$ برای تعداد متناهی i و برای بقیه i ها $U_i = X_i$ یک پایه شمارا برای $\prod X_i$ است.

برهان قضیه در مورد فضاهای شمارای اول بعنوان تمرین واگذار می شود.

۴-۷ فضای لیند لف و تفکیک پذیر

۴-۷-۱ **تعریف:** فضای X را لیندلف گوییم اگر هر پوشش باز X، یک پوشش جزء شمارا داشته باشد. فضای X را تفکیک پذیر گوییم اگر X یک زیر مجموعه چگال شمارا داشته باشد.

۴-۷-۲ **قضیه:** اگر X شمارای دوم باشد، آن‌گاه X لیندلف و تفکیک پذیر است.

برهان: فرض کنیم $B=\{B_n : n\in \mathbb{N}\}$ یک پایه شمارا برای X باشد.

الف) اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک پوشش باز برای X باشد، برای هر $n\in \mathbb{N}$ در صورت امکان $U_{\alpha(n)}$ را چنان اختیار می کنیم که $B_n \subseteq U_{\alpha(n)}$. دراین‌صورت به گردایه جزء شمارای $\{U_{\alpha(n)}\}$ از $\{U_\alpha\}$ می‌رسیم که X را می‌پوشاند زیرا برای هر $x\in X$، αیی در A موجود است به‌طوری‌که $x\in U_\alpha$، حال B_n موجود است که $x\in B_n \subseteq U_\alpha$.

برای این U_α انتخاب شده $U_\alpha = U_{\alpha(n)}$ و درنتیجه $\{U_{\alpha(n)}\}$، X را می پوشاند.

ب) برای $n\in \mathbb{N}$، $d_n \in B_n$ را انتخاب می کنیم و قرار می دهیم

$$D=\{d_n | n\in \mathbb{N}\}$$

دراین‌صورت D شمارا است و به‌علاوه $\overline{D} = X$ زیرا: اگر $x\in X$ و U یک همسایگی از x باشد، آن‌گاه nای هست که $x_n\in B_n \subseteq U$ و لذا $d_n\in B_n \cap U = D_n$ یعنی $\phi \neq D\cap U$ پس $\overline{D} \supseteq X$.

۴-۷-۳ **تذکر:** عکس قضیه قبل در حالت کلی برقرار نیست برای این منظور به مثال زیر توجه کنید.

۴-۷-۴ **مثال:** فرض کنیم $X = \mathbb{R}_l$ دراین‌صورت برای هر $x\in X$ گردایه

$$\left\{\left[x, x+\frac{1}{n}\right) : n\in \mathbb{N}\right\}$$

یک پایه موضعی شمارا برای X در x است. لذا X شمارای اول است. ضمناً $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}_l$ چگال است زیرا هر $[a,b)$ شامل عضوی از $\mathbb{Q}$ است پس $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}_l$. یعنی $\mathbb{R}_l$ تفکیک پذیر است. حال نشان می دهیم که $\mathbb{R}_l$ شمارای دوم نیست. اگر B یک پایه دلخواه برای $\mathbb{R}_l$ باشد، برای هر $x \in \mathbb{R}_l$، $B_x \in B$ موجود است به‌طوری‌که $B_x \subseteq [x, x+1)$. اگر $x \neq y$ آن‌گاه داریم: $B_x \neq B_y$ (زیرا $x = \min B_x$ و $y = \min B_y$) پس B ناشمارا است.

$X = \mathbb{R}_l$ لیندلف است. برای اثبات کافی است نشان دهیم که پایه

$$A = \{ [a_\alpha, b_\alpha) : \alpha \in J \}$$

دارای یک زیر مجموعه شمارا است که پوششی برای $\mathbb{R}_l$ می باشد.

فرض کنیم $C = \underset{\alpha}{\cup}(a_\alpha, b_\alpha)$، C بعنوان زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$(با توپولوژی استاندارد) شمارای دوم است زیرا $\mathbb{R}$ شمارای دوم می باشد. پس C لیندلف است. از اینکه $\{(a_\alpha, b_\alpha)\}_\alpha$ در C باز می باشند، پس پوشش فوق یک پوشش جزء شمارا مانند $\{(a_\alpha, b_\alpha)\}_{n\in \mathbb{N}}$ دارد. به‌علاوه $A' = \{(a_\alpha, b_\alpha)\}_{n\in \mathbb{N}}$ نیز Cرا خواهد پوشاند.

برای هر $x \in \mathbb{R} - C$ اجباراً $x = a_\alpha$ (برای αیی در J) فرض کنیم q_x عدد گویایی باشد که $q_x \in (a_\alpha, b_\alpha)$، دراینصورت $(x, q_x) \subseteq C$. تابع

$$h : \mathbb{R} - C \to \mathbb{Q}$$
$$x \to q_x$$

یک به یک است زیرا اگر $x, y \in \mathbb{R} - C$ و $x \neq y$ (مثلاً $x < y$) آن‌گاه $q_x < q_y$ (در غیر اینصورت $x < y < q_y \leq q_x$ و درنتیجه $y \in (x, q_x) \subseteq C$ ولی $y \in \mathbb{R} - C$ که تناقض است) بنابراین $\mathbb{R} - C$ شمارا است. برای هر $d_n \in \mathbb{R} - C$، عضوی از A موجود است که شامل d_n می باشد. بدیهی است که اجتماع این اعضاء و اعضاء A' یک پوشش شمارا برای $\mathbb{R}_l$ است. که پوشش جزء شمارای A می باشد، لذا $\mathbb{R}_l$ لیندلف است.

۷-۴-۵ **تذکر:** حاصلضرب دو فضای لیندلف، لزوماً لیندلف نیست.

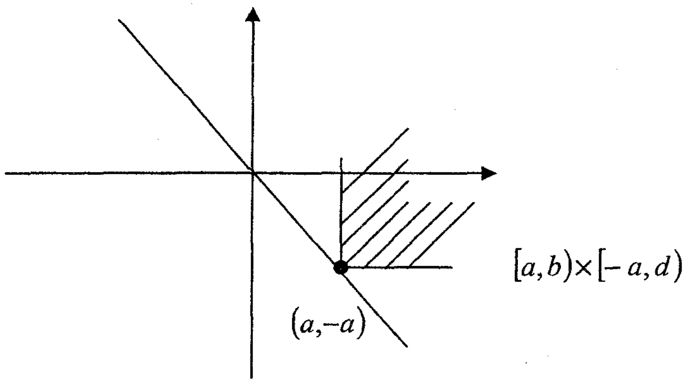
برهان: فرض کنیم $X = \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ نشان می دهیم که X لیندلف نیست. فرض کنیم

$$L = \{(-x, x) : x \in \mathbb{R}_l \}$$

برای هر $(x, y) \in X - L$، αیی موجود است که $[x, \alpha) \times [y, \alpha) \subseteq X - L$ یعنی $X - L$ باز است. پوشش

$$X - L \cup \{[a,b)\times[-a,d) : a,b,d \in \mathbb{R}_l\}$$

را در نظر می گیریم، هر عضو $[a,b)\times[-a,d)$، L را حداکثر در نقطه $(a,-a)$ قطع می کند و چون L ناشمارا است، پس پوشش فوق هیچ پوشش جزء شمارا ندارد، بنابراین X لیندلف نخواهد بود.



شکل (۷-۱)

۷-۴-۶تذکر: یک زیر فضای یک فضای تفکیک پذیر ممکن است تفکیک پذیر نباشد.

فرض کنیم $X = \mathbb{R}_l^2$ آن‌گاه

$$\{(x,y) : x,y \in \mathbb{Q}\}$$

یک زیر مجموعه شمارا از X است. که بطور بدیهی در X چگال است. فرض کنیم L خط $y=-x$ باشد، دراین‌صورت L زیرفضایی از X است که دارای توپولوژی گسسته است:

$$(-x,x) = L \cap [x,\infty)\times[-x,\infty) \qquad \text{باز در } L$$

چون L ناشمارا است، لذا یک زیر مجموعه چگال و شمارا از L موجود نیست. در واقع اگر

$$\{l_1, l_2, \ldots\} \subset L$$

آن‌گاه l را در $L - \{l_1, l_2, \ldots\}$ در نظر می گیریم. دراین‌صورت

$$\{l\} \cap \{l_i\}_{i=1}^{\infty} = \phi \Rightarrow l \notin \overline{\{l_i\}_{i=1}^{\infty}}$$

۷-۵ فضای منظم و فضای نرمال

۷-۵-۱ تعریف: اگر مجموعه های یکانی در X بسته باشند، (به‌عبارت دیگر X، T_1 باشد) آن‌گاه X را منظم یا T_3 گوییم، اگر برای هر $a \in X$ و هر زیر مجموعه بسته $A \subseteq X$ که $a \notin A$ دو مجموعه باز مانند U و V شامل a و A موجود باشد که $U \cap V = \phi$. فضای T_1، X را نرمال یا T_4 گوییم اگر برای هر A و B بسته در X، مجموعه‌های بازی مانند U و V موجود باشند که $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$ و به‌علاوه $U \cap V = \phi$.

۷-۵-۲ تذکر: هر فضای T_4، T_3 است. هر فضای T_3، T_2 است و هر فضای T_2، T_1 است.

۷-۵-۳ مثال: اگر $\mathbb{R}$ را با توپولوژی متمم متناهی در نظر بگیریم، آن‌گاه $\mathbb{R}$، T_1 هست ولی T_2 نیست.

۷-۵-٤ مثال: فرض کنیم

$$K = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

توپولوژی زیر را روی $X = \mathbb{R}$ تعریف می کنیم: توپولوژی که با استفاده از پایه زیر تولید می شود

الف) هر بازه باز به فرم (a,b)

ب) هر مجموعه به فرم $(a,b) - K$

با توجه به اینکه اشتراک هر دو عضو از مجموعه های (الف) و (ب) یک عضو به فرم (الف) یا (ب) یا تهی است، پس مجموعه های فوق می تواند یک پایه برای یک توپولوژی باشد. ادعا می کنیم این فضا هاسدورف (T_2) هست ولی T_3 نیست.

برای اثبات این ادعا داریم: برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ که $x \neq y$ بازه هایی به فرم (a,b) و (c,d) موجود است که $(a,b) \cap (c,d) = \phi$ یعنی فضای فوق هاسدورف است.

مجموعه K در توپولوژی فوق بسته است و $0 \notin K$. اگر U_K و V_0 باز و شامل K و 0 موجود باشند، به‌طوری‌که $U \cap V = \phi$.

عضوی از پایه شامل C موجود است که در V_0 قرار می‌گیرد، این عضو مسلماً به فرم $(a,b) - K$ خواهد بود(زیرا اگر به فرم (c,d) باشد، تعدادی از $\frac{1}{n}$ ها را شامل خواهد بود که با

$V_\circ \cap U_k = \phi$ در تناقض است).فرض کنیم n چنان انتخاب شود که $\frac{1}{n} \in (a,b)$. عضوی از پایه که شامل $\frac{1}{n}$ باشد را چنان در نظر می گیریم که در U_k قرار گیرد (چنین انتخابی امکان پذیر است زیرا $\frac{1}{n} \in K \subseteq U_k$) این عضو باید به‌فرم (c,d) و از نوع (الف) باشد.

فرض کنیم $\max\left\{c, \frac{1}{n+1}\right\} < z < \frac{1}{n}$ آن‌گاه $c < z < \frac{1}{n} < d$ پس $z \in (c,d)$ لذا $z \in U_k$.
از طرفی $z \in V_\circ$ زیرا

$$a < \circ < \frac{1}{n+1} < z < \frac{1}{n} < b$$

یعنی $z \in (a,b) - K \subseteq V_\circ$ در نتیجه $z \in V_\circ \cap U_k$ لذا $V_\circ \cap U_k \neq \phi$ یعنی این فضا منظم (T_3) نیست.

۷-۵-۵ مثال: $X = \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ منظم هست ولی T_4 نیست.

۷-۵-۶ قضیه: اگر X یک فضای توپولوژی T_1 باشد، دراین‌صورت: X، T_3 است اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$ و برای هر همسایگی V از x همسایگی U از x موجود باشد به‌طوری‌که $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

برهان: فرض کنیم X، T_3 باشد، همسایگی V از x را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $A = X - V$ آن‌گاه A بسته و $x \notin A$. بنابراین مجموعه‌های باز و جدا از هم U و W موجودند چنان‌که $x \in U$ و $A \subseteq W$.

برای هر $a \in A$ چون W یک همسایگی از a است و $W \cap U = \phi$ پس $a \notin \overline{U}$. بنابراین $\overline{U} \cap A = \phi$ در نتیجه $\overline{U} \subseteq X - A = V$.

برعکس: فرض کنیم برای هر همسایگی V، همسایگی U موجود باشد به‌طوری‌که $\overline{U} \subseteq V$. فرض کنیم $x \notin A$ و A بسته باشد، قرار می‌دهیم $V = X - A$، V یک همسایگی از x است. پس همسایگی U از x موجود است به‌طوری‌که $\overline{U} \subseteq V$، قرار می‌دهیم $W = X - \overline{U}$. دراین‌صورت

$$A = X - V \subseteq X - \overline{U} = W$$

و به‌علاوه

$$W \cap U \subseteq W \cap \overline{U} = \left(X - \overline{U}\right) \cap \overline{U} = \phi$$

یعنی X، T_3 است.

۷-۵-۷ نتیجه: هر فضای هاسدورف و فشرده موضعی، منظم است.

۷-۵-۸ قضیه : فضای X که T_1 است، نرمال می باشد اگر و فقط اگر برای هر مجموعه بسته B و هر V باز که $B \subseteq V$، مجموعه باز U موجود باشد به‌طوری‌که

$$B \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$$

برهان: به خواننده واگذار می گردد.

۷-۵-۹ قضیه: (الف) هر زیر فضای یک فضای T_2، T_2 است. هر حاصل‌ضرب از فضاهای T_2، T_2 است.

(ب) هر زیر فضای یک فضای T_3، T_3 است و هر حاصل‌ضرب از فضاهای T_3، T_3 است.

برهان (الف): فرض کنیم X یک فضای هاسدورف و $Y \subseteq X$، اگر $x, y \in Y$ آن‌گاه همسایگی های مجزا مانند U و V از x و y موجودند. $U \cap Y$ و $V \cap Y$ همسایگی‌های مجزایی از x و y هستند، یعنی Y هاسدورف است.

قسمت دیگر برهان در قضیه ۱-۸-۹ ثابت شد.

برهان (ب): فرض کنیم Y زیر فضایی از فضای منظم X باشد، چون X هاسدورف است لذا Y نیز هاسدورف است، لذا مجموعه‌های تک عضوی در Y بسته هستند. فرض کنیم $x \in Y$ و B در Y بسته باشد به‌طوری‌که $x \notin B$.

چون B در Y بسته است، لذا $B = \overline{B} \cap Y$. ضمناً $\overline{B}$ بستار B در X است. بنابراین $x \notin \overline{B}$.
چون X منظم است لذا مجموعه های باز U و V در X موجودند که

$$\overline{B} \subseteq V \quad \text{و} \quad x \in U \quad \text{و} \quad U \cap V = \phi$$

حال $U \cap Y$ و $V \cap Y$ مجموعه‌های باز و مجزا در Y می‌باشند به‌طوری‌که $x \in U \cap Y$ و $B = \overline{B} \cap Y \subseteq V \cap Y$. یعنی Y منظم است.

فرض کنیم $\{X_\alpha\}$ خانواده‌ای از فضاهای منظم باشد و $X = \prod X_\alpha$. بنابر (الف) X هاسدورف است، لذا مجموعه‌های تک عضوی در X بسته می‌باشند. فرض کنیم $x = (x_\alpha) \in X$ و U یک همسایگی از x در X باشد. فرض کنیم $\prod U_\alpha$ عضوی از پایه باشد که $x \in \prod U_\alpha \subseteq U$. بنابر قضیه ۲-۷-۵، برای هر α، همسایگی V_α از x_α در X_α وجود دارد به‌طوری‌که $\overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$. اگر $U_\alpha = X_\alpha$ قرار می‌دهیم $V_\alpha = X_\alpha$.

دراین‌صورت $V=\prod V_\alpha$ یک همسایگی از x می‌باشد کافی است ثابت کنیم که $\overline{V}=\prod\overline{V_\alpha}$ لذا $\overline{V}\subseteq\prod U_\alpha\subset U$ و در نتیجه X منظم است.

۷-۵-۱۰ **تبصره:** اگر $A_\alpha\subseteq X_\alpha$ ($\alpha\in I$) و $A=\prod_\alpha A_\alpha$ آن‌گاه $\overline{A}=\prod\overline{A_\alpha}$.

فرض کنیم $y\in\prod_\alpha\overline{A_\alpha}$ و $U=\prod U_\alpha$ یک عضو پایه شامل $y=(y_\alpha)$ باشد، از اینکه $y_\alpha=\overline{A_\alpha}$ پس $U_\alpha\cap A_\alpha\neq\phi$. اگر برای هر α، $z_\alpha\in U_\alpha\cap A_\alpha$ آن‌گاه

$$z=(z_\alpha)\in U\cap\left(\prod A_\alpha\right)\Rightarrow y\in\overline{A}$$

برعکس: اگر $y\in\overline{A}$ نشان می دهیم که

$$\forall\beta\quad y_\beta\in\overline{A_\beta}$$

فرض کنیم U_β یک همسایگی از y_β باشد، آن‌گاه $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ همسایگی y است و لذا A را قطع می کند.

اگر $z\in A\cap\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ آن‌گاه $\pi_\beta(z)\in\pi_\beta(A)\cap U_\beta$ درنتیجه

$$\pi_\beta(z)=z_\beta\in A_\beta\cap U_\beta$$

درنتیجه

$$y_\beta\in\overline{A_\beta}$$

۷-۵-۱۱ **قضیه:** هر فضای متریک پذیر نرمال است.

برهان: فرض کنیم X یک فضای متریک و B و A دو زیر مجموعه بسته و مجزا از X باشند. اگر $a\in A$ آن‌گاه $a\notin B$، پس $a\in B^c$. چون B^c باز است $r_a>0$ موجود است چنانکه $B(a,2r_a)\cap B=\phi$. قرار می‌دهیم $U=\bigcup_a B(a,r_a)$ دراین‌صورت U باز بوده و به‌علاوه $A\subseteq U$.

مشابهاً برای هر $b\in B$، $r_b>0$ موجود است که $\phi=A\cap B(b,2r_b)$، اگر $V=\bigcup_b B(b,r_b)$، V باز و شامل B است. ادعا می کنیم $U\cap V=\phi$ زیرا در غیر این‌صورت x_0ی موجود است که $x_0\in U\cap V$ پس a و b موجودند که $x_0\in B(a,r_a)\cap B(b,r_b)$. لذا:

(الف) $r_a\le r_b\Rightarrow d(a,b)\le d(a,x_0)+d(x_0,b)<r_a+r_b\le 2r_b$

(ب) $r_b\le r_a\Rightarrow d(a,b)\le d(a,x_0)+d(x_0,b)<r_a+r_b\le 2r_a$

از (الف) داریم: $a \in B(b, ۲r_b) \cap A = \phi$ که تناقض است.
از (ب) داریم: $b \in B(a, ۲r_a) \cap B = \phi$ که تناقض است.

۷-۵-۱۲ قضیه: هر فضای فشرده و هاسدورف نرمال است.

برهان: قبلاً دیدیم که برای هر مجموعه بسته مانند B و $x \notin B$، مجموعه های باز و مجزا شامل B و x موجود است، یعنی X منظم است.

حال فرض کنیم A و B در X بسته و مجزا باشند، برای هر $a \in A$ مجموعه‌های باز و مجزای U_a و V_a شامل a و B وجود دارند. گردایه $\{U_a\}_{a \in A}$، A را می‌پوشاند. چون A بسته و X فشرده است، لذا A نیز فشرده بوده و در نتیجه n موجود است به‌طوری‌که $A \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} U_{a_i}$. قرار می‌دهیم $U = \bigcup_{i=۱}^{n} U_{a_i}$ و $V = \bigcup_{i=۱}^{n} V_{a_i}$ آن‌گاه $A \subseteq U$، $B \subseteq V$ و به‌علاوه $U \cap V = \phi$.

۷-۵-۱۳ قضیه: اگر X یک فضای متری تفکیک پذیر باشد، آن‌گاه X شمارای دوم است.

برهان: فرض کنیم $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ و $\overline{A} = X$. اگر G مجموعه بازی شامل x باشد، آن‌گاه $r > ۰$ موجود است به‌طوری‌که $B(x, r) \subseteq G$. ضمناً

$$A \cap B\left(x, \frac{r}{۳}\right) \neq \phi$$

فرض کنیم $x_i \in A \cap B\left(x, \frac{r}{۳}\right)$، برای $r > ۰$ عدد گویای α موجود است به‌طوری‌که

$$\frac{r}{۳} < \alpha < \frac{۲r}{۳} < r$$

ادعا می کنیم که: $x \in B(x_i, \alpha) \subseteq B(x, r) \subseteq G$

(الف) $d(x, x_i) < \frac{r}{۳} < \alpha \Rightarrow x \in B(x_i, \alpha)$

(ب) $\forall\, y \in B(x_i, \alpha) \Rightarrow d(y, x_i) < \alpha < \frac{۲r}{۳}$

در نتیجه $d(y, x) \le d(y, x_i) + d(x_i, x) < \frac{۲r}{۳} + \frac{r}{۳} = r$ در نتیجه

$$y \in B(x, r) \subseteq G$$

بنابراین $B = \left\{ B(x_i, \alpha) : i \in \mathbb{N} \text{ و } \alpha \in \mathbb{Q}^+ \right\}$ یک پایه شمارا برای X است.

۷-۵-۱۴ قضیه: هر فضای منظم که شمارای دوم باشد، نرمال است.

برهان: فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه بسته و مجزا از X باشند. برای هر $a \in A$، $X - B$ یک همسایگی از a می‌باشد، بنابراین همسایگی V از x موجود است به‌طوری‌که $\overline{V} = X - B$. اگر B یک پایه شمارا برای X باشد، آن‌گاه همسایگی U_a از a موجود است به‌طوری‌که $U_a \in B$ و $U_a \subseteq V$. بنابراین $\overline{U_a} \subseteq \overline{V} \subseteq X - B$ در نتیجه $\overline{U_a} \cap B = \phi$ و به‌علاوه $\{V_n\}$ یک پوشش باز برای B می‌باشد. فرض کنیم

$$Y_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} U_i \quad \text{و} \quad X_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$$

دراین‌صورت X_n و Y_n در X باز هستند.

اگر $a \in A$، آن‌گاه n ی هست که $a \in U_n$ و برای هر i، $a \notin \overline{V_i}$ پس $a \in X_n$ لذا $A \subseteq X_\circ = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ و به‌طریق مشابه $B \subseteq Y_\circ = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$.

ادعا می کنیم $X_\circ \cap Y_\circ = \phi$ زیرا درغیراین‌صورت $x \in X_\circ \cap Y_\circ$ موجود است، پس m و n ی وجود دارد به‌طوری‌که $x \in Y_m$ و $x \in X_n$. اگر $m \leq n$ آن‌گاه $x \in X_n$ پس برای $1 \leq i \leq n$، $x \notin \overline{V_i}$. بنابراین $x \notin \overline{V_m}$ و لذا $x \notin Y_m$ که تناقض است پس $X_\circ \cap Y_\circ = \phi$.
$X_\circ$ و $Y_\circ$ مجموعه های باز شامل A و B می‌باشند. بنابراین X، T_4 است.

۷-۵-۱۵ یادآوری: مجموعه X خوش ترتیب است اگر هر زیر مجموعه غیر تهی از X عضو اقل یا مینیمم داشته باشد.

۷-۵-۱٦ قضیه: اگر X خوش ترتیب باشد، آن‌گاه X در توپولوژی ترتیبی، نرمال است.

برهان: فرض کنیم $x, y \in X$ و $x < y$، مجموعه $(x, y]$ را در نظر می گیریم، اگر y بزرگترین عضو X باشد آن‌گاه $(x, y]$ یک عضو پایه توپولوژی ترتیبی است و در نتیجه باز است.
اگر y بزرگترین عضو X نباشد، آن‌گاه $\phi \neq \{z \in X : z > y\}$ در نتیجه این مجموعه دارای عضو اقل $z_\circ$ می باشد پس $(x, y] = (x, z_\circ)$ باز است بنابراین برای هر $x, y \in X$ که $x < y$ مجموعه $(x, y]$ باز خواهد بود.

فرض کنیم B و A دو زیر مجموعه مجزا و بسته از X باشند، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

(الف) عضو اقل X که آنرا a_0 می‌نامیم نه در A باشد و نه در B، برای هر $a\in A$ همسایگی $(x_a,a]$ موجود است به‌طوری‌که $(x_a,a]\subseteq X-B$. فرض کنیم $U=\bigcup_{a\in A}(x_a,a]$ در این صورت U باز است و $A\subseteq U$.

به‌طریق مشابه برای هر $b\in B$ همسایگی $(x_b,b]$ از b وجود دارد که $(x_b,b]\subseteq X-A$. قرار می دهیم $V=\bigcup_{b\in B}(x_b,b]$ دراین‌صورت V مجموعه‌ای باز است و $B\subseteq V$.

اگر $x\in U\cap V$، آن‌گاه $a\in A$ و $b\in B$ وجود دارد به‌طوری‌که $x\in(x_a,a]$ و $x\in(x_b,b]$، فرض کنیم $a<b$، دراین‌صورت $a\le x_b$ زیرا:

$$(x_b,b]\cap A=\phi$$

بنابراین $x\le a\le x_b$ یعنی $x\notin(x_b,b]$ پس $U\cap V=\phi$ و چون هر فضای توپولوژی ترتیبی T_1 است، درنتیجه X نرمال است.

(ب) اگر $a_0\in A$ چون $\{a_0\}$ باز و بسته می باشد (اگر $B=\{x:x>a_0\}$، آن‌گاه B دارای عضو می نیمم است، پس اگر b عضو مینیمم B باشد $[a_0,b)=\{a_0\}$. یعنی $\{a_0\}$ باز است و چون X، T_1 است لذا $\{a_0\}$ بسته نیز هست). فرض کنیم $A_1=A-\{a_0\}$ آن‌گاه A_1 بسته است و $A_1\cap B=\phi$ پس U_1 و V_1 بازی موجودند (طبق حالت الف) به‌طوری‌که $U_1\cap V_1=\phi$ و $A_1\subseteq U_1$ و $B\subseteq V_1$. فرض کنیم که $U=U_1\cup\{a_0\}$ و $V=V_1\cup\{a_0\}$ آن‌گاه U و V باز می باشند و $A\subseteq U$ و $B\subseteq V$ و $U\cap V=\phi$ (توجه کنید که $a_0\notin B$).

۷-٦ لم اوریزون

۷-٦-۱ لم اوریزون: فرض کنیم X یک فضای نرمال باشد و C_0 و C_1 دو زیر مجموعه مجزا و بسته باشند. آن‌گاه تابع پیوسته $g:X\to[0,1]$ موجود است به‌طوری‌که $g(C_0)=\{0\}$ و $g(C_1)=\{1\}$.

برهان: از اینکه $\phi=C_0\cap C_1$ پس $C_0\subseteq G_1=X-C_1$ بنابراین مجموعه باز $G_{\frac{1}{2}}$ موجود است به‌طوری‌که:

$$C_0\subseteq G_{\frac{1}{2}}\subseteq\overline{G_{\frac{1}{2}}}\subseteq G_1$$

دوباره با استفاده از نرمال بودن X، $G_{\frac{3}{4}}$ و $G_{\frac{1}{4}}$ باز موجود است به‌طوری‌که

$$C_0 \subseteq G_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{G_{\frac{1}{4}}} \subseteq G_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{G_{\frac{1}{2}}} \subseteq G_{\frac{3}{4}} \subseteq \overline{G_{\frac{3}{4}}} \subseteq G_1$$

بنابراین به روش استقرایی اگر مجموعه $G_{\frac{k}{2^n}}$ ($k = 1,2,\ldots,2^{n-1}$) وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\overline{G_{\frac{k}{2^n}}} \subseteq G_{\frac{k+1}{2^n}}$$

آن‌گاه مجموعه باز $G_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ موجود است به‌طوری‌که

$$\overline{G_{\frac{k}{2^n}}} \subseteq G_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \subseteq \overline{G_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}} \subseteq G_{\frac{k+1}{2^n}}$$

بنابراین طبق اصل استقراء

$$\forall r,s \in \left\{\frac{k}{2^n} : 0 < k < 2^n\right\}$$

G_r و G_s موجودند که اگر $r < s$ آن‌گاه

$$G_0 \subseteq G_r \subseteq \overline{G_r} \subseteq G_s \subseteq \overline{G_s} \subseteq G_1$$

تابع g را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in X - G_1 = C_1 \\ \inf\{r : x \in G_r\} & x \in G_1 \end{cases}$$

اولاً طبق تعریف $g(C_1) = \{1\}$ و اگر $x \in C_0$ آن‌گاه

$$g(x) = \inf\{r : x \in G_r\} \Rightarrow g(C_0) = \{0\}$$

کافی است ثابت کنیم g تابعی پیوسته است.

می توان تحقیق کرد که مجموعه هایی به فرم $(t,1]$ و $[0,t)$ تشکیل یک زیر پایه برای فضای $[0,1]$ می‌دهند($t \in (0,1)$). برای هر $0 < t < 1$، k,m,n,l موجود است به‌طوری‌که

$$\circ < S = \frac{k}{۲^m} < t < \frac{l}{۲^n} = u < ۱$$

حال ثابت می کنیم $g^{-۱}([\circ,t))$ و $g^{-۱}((t,۱])$ در X باز است. برای این منظور کافی است نشان دهیم:

(الف)

$$g^{-۱}([\circ,t)) = \{x : \circ \leq g(x) < t\} = \bigcup_{s<t} G_s$$

(ب)

$$g^{-۱}((t,۱]) = \{x : t < g(x) \leq ۱\} = \bigcup_{t<u<v} \left(G_v - \overline{G_u}\right)$$

اثبات (الف): اگر $x \in g^{-۱}([\circ,t))$ آن‌گاه $\circ \leq g(x) < t$. پس s هست که:

$$x \in G_s \,;\, \circ \leq g(x) \leq s < t \qquad \text{(طبق خاصیت مشخصه اینفیمم)}$$

و

$$x \in G_s \Rightarrow x \in \bigcup_{s<t} G_s$$

در نتیجه

$$g^{-۱}([\circ,t)) \subseteq \bigcup_{s<t} G_s$$

حال اگر $x \in \bigcup_{s<t} G_s$، آن‌گاه $s < t$یی موجود است که $x \in G_s$ پس

$$\circ \leq g(x) = \inf\{r : x \in G_r\} \leq s < t$$

در نتیجه

$$x \in g^{-۱}([\circ,t))$$

اثبات (ب): اگر $x \in g^{-۱}((t,۱])$ آن‌گاه $t < g(x) \leq ۱$ پس

$$t < u = \frac{k}{۲^m} < g(x) < v = \frac{k}{۲^n} \leq ۱$$

درنتیجه

$$\overline{G_u} \subseteq G_v$$

ادعا می کنیم که $x \in G_v - G_u$. اولاً چون $g(x) < v$، بنابراین $x \in G_v$. اگر $x \in \overline{G_u}$، آن‌گاه برای هر $s > u$ خواهیم داشت $x \in G_s$ (چون $\overline{G_u} \subseteq G_s$) پس $g(x) \leq s$.

چون

$$\forall s > u \quad g(x) \leq s$$

پس برای هر m بزرگ (چون $u < u + \frac{1}{2^m}$) داریم:

$$g(x) \leq u + \frac{1}{2^m}$$

بنابراین $g(x) \leq u$ که با فرض $g(x) > u$ متناقض است.

حال فرض کنیم $\underset{t<u<v}{\cup}\left(G_v - \overline{G_u}\right)$ $x \in$ پس $x \in G_v$. لذا $g(x) \leq v < 1$. چون $x \notin \overline{G_u}$ پس لذا $t < u < g(x)$

$$t < g(x) \leq 1 \Rightarrow x \in g^{-1}((t,1])$$

۷-۶-۲ تعریف: فضای T_1، X را کاملاً منظم (یا $T_{3,5}$) گوییم اگر برای هر مجموعه بسته B و هر نقطه a که $a \notin B$ تابع پیوسته $f : X \to [0,1]$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$f(a) = 0 \quad \text{و} \quad f(B) = \{1\}$$

۷-۶-۳ تذکر: (۱) مطابق لم قبل هر فضای نرمال، کاملاً منظم است.

(۲) هر فضای کاملا منظم T_3 است.

برهان: فرض کنیم B بسته و $a \notin B$ و $f : X \to [0,1]$ پیوسته باشد به‌طوری‌که $f(B) = \{1\}$ و $f(a) = 0$. قرار می‌دهیم

$$V = f^{-1}\left(\left(\frac{2}{3},1\right]\right) \quad \text{و} \quad U = f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{3}\right)\right)$$

آن‌گاه $B \subseteq V$، $a \in U$ و به‌علاوه U و V در X باز هستند (چون $\left[0,\frac{1}{3}\right)$ و $\left(\frac{2}{3},1\right]$ در $[0,1]$ باز است) و $U \cap V = \phi$.

۷-۶-٤ لم: فرض کنیم X یک فضای منظم و شمارای دوم باشد اگر V زیر مجموعه بازی از X باشد آن‌گاه :

(الف) V به‌صورت اجتماعی شمارا از مجموعه های بسته است.

(ب) تابع پیوسته $f : X \to [0,1]$ وجو دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in V$، $f(x) > 0$ و برای هر $x \notin V$، $f(x) = 0$.

برهان: قبلاً دیدیم که هر فضای منظم و شمارای دوم، نرمال است پس شرایط لم اوریزون برقرار است.
فرض کنیم

$$B=\{B_i : i\in \mathbb{N}\}$$

پایه‌ای شمارا برای X باشد، برای هر $x\in V$، B_iیی هست که (خاصیت T_3) $x\in B_i\subseteq \overline{B_i}\subseteq V$ یعنی V به‌صورت اجتماع شمارایی از مجموعه های بسته است زیرا

$$V\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{B_i}\subseteq V \quad \text{یا} \quad V=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{B_i}$$

برای هر $\overline{B_i}$ و $X-V$ تابع $f_1 : X\to[0,1]$ موجود است به‌طوری‌که

$$f_i(\overline{B_i})=1 \quad \text{و} \quad f_i(X-V)=0$$

فرض کنیم $f : X\to[0,1]$ به‌صورت زیر تعریف شود:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_i(x)}{2^i}$$

اگر $F_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i(x)}{2^i}$ آن‌گاه $F_n\to f$ بطور یکنواخت، زیرا برای هر $\varepsilon>0$، Nی هست که $\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\varepsilon$ لذا

$$|F_n(x)-f(x)|\le\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{|f_i(x)|}{2^i}\le\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\varepsilon$$

پس f پیوسته است و به‌علاوه برای $x\in X-V$، داریم:

$$\forall k_i \quad f_k(x)=0$$

در نتیجه $f(x)=0$.

$$\forall x\in V\Rightarrow x\in\overline{B_i}\ (\text{برای یک } i \text{ در } \mathbb{N})\Rightarrow f_i(x)=1$$

پس $f(x)>0$ یا $f(x)\ge\frac{1}{2^i}>0$

۷-۷ قضیه متری سازی اوریزون

۱-۷-۷ قضیه (متری سازی اوریزون): هر فضای منظم و شمارای دوم متریک پذیر است.

برهان: فرض کنیم B یک پایه شمارا برای X باشد، بنا بر لم قبل برای هر $B_n \in B$ تابع پیوسته $f_n : X \to [0,1]$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $x \in B_n$، $f_n(x) > 0$.
و برای هر $x \in X - B$، $f_n(x) = 0$. تابع $F : X \to \mathbb{R}^w$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = f_n(x)$$

چون هر f_n پیوسته است، F نیز پیوسته خواهد بود. ثابت می‌کنیم $F : X \to F(X)$ یک به یک و باز است (به عبارت دیگر F یک نشانندە توپولوژیک است) در نتیجه X با زیر فضایی از فضای متریک $\mathbb{R}^w$ همسانریخت است و لذا X متریک پذیر خواهد بود.
اگر $x \neq y$ و $x, y \in X$ طبق منظم بودن فضا، چون $\{y\}$ بسته و $x \notin \{y\}$، پس B_nی وجود دارد به‌طوری‌که $x \in B_n \subseteq X - \{y\}$. در نتیجه $y \notin B_n$ (توجه: $X - \{y\}$ باز است) بنابراین $f_n(x) > 0$ و $f_n(y) = 0$. در نتیجه $F(x) \neq F(y)$ یعنی F یک به یک است.
فرض کنیم $V \subseteq X$ باز باشد، نشان می دهیم که $F(V)$ نیز در $F(X)$ باز است، برای این منظور کافی است ثابت کنیم که برای هر B_n، $F(B_n)$ باز است، مطابق آنچه دیدیم:

$$\forall x \in B_n \quad f_n(x) > 0$$
$$\forall x \in X - B_n \quad f_n(x) = 0$$

فرض کنیم $U_n = \pi_n^{-1}((0, \infty))$. بدیهی است که U_n باز است. ثابت می کنیم:

$$F(B_n) = F(X) \cap U_n$$

در نتیجه $F(B_n)$ در $F(X)$ باز خواهد بود و برهان کامل می‌گردد.
اگر $y \in F(B_n)$ آن‌گاه $x \in B_n$ و $y = F(X)$ لذا $y \in F(X)$ و
$\pi_n(y) = f_n(x) > 0$.

لذا

$$y \in \pi_n^{-1}((0, \infty)) = U_n$$

و در نتیجه

$$F(B_n) \subseteq U_n \cap F(X)$$

حال اگر $y\in U_n\cap F(X)$ آن‌گاه $y=F(X)$ که $x\in X$ و $\pi_n(y)=f_n(x)$. چون $y\in U_n$ بنابراین $\pi_n(y)=f_n(x)>0$. پس $U_n\cap F(X)\subseteq F(B_n)$.

۷-۷-۲ تذکر: اگر $X\simeq Y$ و X متریک پذیر باشد، آن‌گاه Y نیز متریک پذیر است.

برهان: تمرین.

۷-۸ قضیه نشاندن

۷-۸-۱ **قضیه نشاندن:** فرض کنیم $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$، خانواده ای از توابع پیوسته حقیقی باشد که روی فضای هاسدورف X تعریف شده است. اگر برای هر $x\in X$ و هر همسایگی U از x یک α موجود باشد به‌طوری‌که $f_\alpha(x)>0$ و $f_\alpha(X-U)=\{0\}$. آن‌گاه تابع $F:X\to \mathbb{R}^A$، با ضابطه $F(x)=f_\alpha(x)$ یک نشاننده توپولوژیک از X به $\mathbb{R}^A$ است.

برهان: به خواننده واگذار می گردد.

۷-۸-۲ **نتیجه:** اگر X یک فضای کاملاً منظم باشد، آن‌گاه X با زیر فضایی از $\mathbb{R}^A$ (واقع در $[0,1]^A$) همسانریخت است.

برهان: فرض کنیم

$$A=\{(x,V):x \text{ یک همسایگی از } V, x\in X\}$$

آن‌گاه $x\notin X-V$. پس برای $\alpha=(x,V)$ یک تابع پیوسته $f_\alpha:X\to[0,1]$ موجود است به‌طوری‌که $f_\alpha(x)=1$ و $f_\alpha(X-V)=\{0\}$، حال بنابر قضیه نشاندن حکم محقق است.

۷-۹ خواص فضاهای کاملاً منظم

۷-۹-۱ **قضیه:** زیر فضاها و حاصلضرب های فضاهای کاملاً منظم، کاملاً منظم است.

برهان: فرض کنیم Y زیر فضایی از فضای کاملاً منظم X باشد. اگر $A\subseteq Y$ بسته و $y\in Y-A$ آن‌گاه $A=\overline{A}\cap Y$ و $y\notin\overline{A}$، بنابراین تابع $f:X\to[0,1]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(y)=1$ و $f(\overline{A})=\{0\}$، بدیهی است که $f|_Y$ تابع مورد نظر است.

اگر $X=\prod_\alpha X_\alpha$ و X_α ها کاملاً منظم باشند $(\alpha\in I)$، اگر B در X بسته باشد و $a\in X-B$،
آن‌گاه چون $X-B$ باز است، عضوی از پایه مانند V شامل a موجود است که:

$$V=\prod_\alpha V_\alpha \quad \text{و} \quad a\in V\subseteq X-B$$

فرض کنیم $\beta_i\in I$ چنان باشد که $V_{\beta_i}\neq X_{\beta_i}$، $i=۱,۲,۳,\ldots,n$ تابع پیوسته $f_{\beta_i}:X_{\beta_i}\to[۰,۱]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f_{\beta_i}(x_{\beta_i})=۰$؛ $x_{\beta_i}\in X_{\beta_i}-V_{\beta_i}$ و $f_{\beta_i}(a_{\beta_i})=۱$.

تابع $f:X\to[۰,۱]$ را با ضابطه $f(x)=\min\limits_{۱\le i\le n}\{f_{\beta_i}(x_{\beta_i})\}$ تعریف می کنیم. بنابر آنچه قبلاً دیدیم، f پیوسته است و به‌علاوه $f(a)=۱$. زیرا برای هر β_i، $f_{\beta_i}(a_{\beta_i})=۱$ همچنین چون $B\subseteq X-V$؛ $f(B)=\{۰\}$. (توجه: اگر $x\notin V$ پس β_iیی هست که $x_{\beta_i}\notin V_{\beta_i}$ پس $f_{\beta_i}(x_{\beta_i})=۰$ و لذا $f(x)=۰$).

تمرین

۱) اگر $X_{\circ}$ فشرده موضعی و $X \simeq X_{\circ}$ آن‌گاه X نیز فشرده موضعی و هاسدورف است.

۲) فرض کنیم تابع $f : X \to Y$ باز، پیوسته و برو از فضای هاسدورف و فشرده موضعی X به فضای هاسدورف Y باشد:

(الف) نشان دهید Y فشرده موضعی است.

(ب) اگر $Q \subseteq Y$ فشرده باشد، آن‌گاه زیر مجموعه فشرده P از X موجود است که $f(P) = Q$.

۳) فرض کنید X فشرده موضعی و هاسدورف باشد، اگر A زیر مجموعه باز و B زیر مجموعه ای بسته از X باشد، آن‌گاه $A \cap B$ فشرده موضعی است.

۴) شرط لازم و کافی برای آنکه فضای شمارای دوم X، فشرده باشد آن است که هر پوشش شمارا و باز X، دارای پوشش جزء متناهی باشد.

۵) (الف) هر زیر مجموعه بسته از یک فضای لیندلف، لیندلف است.

(ب) اگر A و B دو زیر مجموعه بسته و مجزا از یک فضای $T_۳$ باشند، نشان دهید که پوشش های باز U و V از A و B موجودند به‌طوری‌که:

$$\forall u \in U \quad \bar{u} \cap A = \phi \qquad \text{و} \qquad \forall v \in V \quad \bar{v} \cap B = \phi$$

(ج) هر فضای منظم و لیندلف، نرمال است.

۶) فرض کنید X شمارای دوم و A زیر مجموعه ای ناشمارا از X باشد، دراینصورت

(الف) توپولوژی زیر فضایی A، دیسکریت نیست.

(ب) A شامل حداقل یکی از نقاط حدی اش است.

(ج) A شامل تعداد ناشمارا از نقاط حدی اش است.

۷) فرض کنید X یک فضای $T_۴$ باشد، آن‌گاه هر جفت از زیر مجموعه های بسته و مجزای X دارای همسایگی هایی هستند که بستارهایشان مجزا است.

۸) (الف) هر فضای همبند و نرمال که بیش از یک عضو داشته باشد، ناشمارا است.

(ب) هر فضای همبند و منظم که بیش از یک عضو داشته باشد، ناشمارا است.

(ج) هر فضای فشرده موضعی، هاسدورف منظم است.

فصل ۸

فشرده سازی استون- چک و قضیه گسترش تیتزه

مقدمه

فضاهای توپولوژیک فشرده، به خاطر خواص قشنگ‌شان فضاهای با ارزشی هستند، بنابراین اگر با یک فضای غیر فشرده برخورد کنیم طبیعی خواهدبود که سعی بر **بزرگ کردن** آن به یک فضای فشرده بنماییم. دراینجا **بزرگ کردن** یک فضا به معنی ساختن فضای بزرگتری است که فضای اصلی در آن چگال باشد.

دو مثال کلاسیک از این نوع عبارتند از:

الف) فضای اعداد مختلط C فشرده نمی‌باشد اما اگر نقطه‌ای را که معروف به نقطهٔ بی‌نهایت است به آن اضافه نماییم و مجموعه‌هایی به‌صورت $|z|>r$ ($r>0$ و $z\in C$) را به‌عنوان همسایگی‌های این نقطه معرفی نماییم آن‌گاه فضای بوجود آمده یک فضای فشرده با خصوصیت ذکر شده در بالا خواهد بود که آن‌را صفحهٔ مختلط توسعه یافته می‌نامند.

ب) فضای اعداد حقیقی نیز فشرده نمی‌باشد. به آن دو نقطه که با نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ نمایش داده می‌شوند، اضافه می‌کنند تا یک فضای فشرده معروف به فضای حقیقی توسعه یافته بدست آوردند.
اکنون با این مقدمات به تعریف فشرده سازی می‌پردازیم.

۸-۱ فشرده سازی

۸-۱-۱ **تعریف:** یک فشرده سازی از فضای X عبارت است از یک فضای فشرده و هاسدورف Y به‌طوری‌که $\overline{X} = Y$.

۸-۱-۲ **تذکر:** از این‌که هر فضای فشرده و هاسدورف نرمال و درنتیجه کاملاً منظم است، می‌توان نتیجه گرفت که اگر X فشرده سازی داشته باشد، آن‌گاه به‌عنوان زیر فضایی از یک فضای کاملاً منظم، کاملاً منظم خواهد بود.

۸-۱-۳ قضیه: اگر X کاملاً منظم باشد، آن‌گاه دارای فشرده سازی است.

برهان: چون X کاملاً منظم است، پس یک نشاننده توپولوژیک مانند $f : X \to [0,1]^A$ موجود است. در ضمن $[0,1]^A$ مطابق قضیه تیخونوف فشرده و بنا بر قضیه ۱-۱٤-۱۰ هاسدورف است.
فرض کنیم $Z = \overline{f(X)}$، Z زیر مجموعه بسته‌ای از یک فضای فشرده و هاسدورف است. فرض کنیم S مجموعه‌ای جدا از X باشد که از تناظر یک به یک با $Z - f(X)$ حاصل می شود، قرار می‌دهیم $Y = X \cup S$. تابع $h : Y \to \overline{f(X)} = Z$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ F(x) & x \in S \end{cases}$$

که در آن $F : S \to Z - f(X)$ تناظر یک به یک ذکر شده است. تابع h دو سویی است. Y را به توپولوژی زیر مجهز می‌کنیم:

$U \subseteq Y$ باز است اگر و فقط اگر $h(U)$ در Z باز باشد

با توجه به توپولوژی فوق h یک همسانریختی است. لذا Y فشرده و هاسدورف خواهد بود.

۸-۱-٤ **تذکر:** توپولوژی زیر فضایی X نسبت به Y همان توپولوژی است که در ابتدا X داشته است زیرا:

(الف) فرض‌کنیم A در X نسبت به توپولوژی زیرفضایی باز باشد، پس $A = X \cap B$ که B در Y باز است. در این صورت

$$h(A) = h(X \cap B) = h(X) \cap h(B) = f(X) \cap h(B)$$

در نتیجه

$$h(A) = f(A) = f(X) \cap h(B)$$

بنابراین چون $h(B)$ در Z باز است و $f(X) \subseteq Z$، پس $f(A)$ در $f(X)$ باز خواهد بود و چون f نشاننده توپولوژیک است، پس A در X باز است.

(ب) اگر A در X باز باشد، پس $f(A)$ در $f(X)$ باز است پس U در Z موجود است به‌طوری‌که $f(A) = f(X) \cap U$. به‌علاوه طبق تعریف و همسانریخت بودن h، Vی بازی در Y موجود است به‌طوری‌که $U = h(V)$. بنابراین

$$f(A) = h(A) = f(X) \cap U = f(X) \cap h(V) = h(X \cap V)$$

درنتیجه $A = X \cap V$. پس A در توپولوژی زیر فضایی القاء شده توسط Y، باز است.

۸-۱-۵ **تذکر:** در توپولوژی جدید $\overline{X} = Y$ زیرا: $Z = \overline{h(X)} = \overline{f(X)}$ و به‌علاوه

$$h(\overline{X}) \subseteq \overline{h(X)}$$

$$h^{-1}\left(\overline{h(X)}\right) \subseteq \overline{h^{-1}(h(X))} = \overline{X}$$

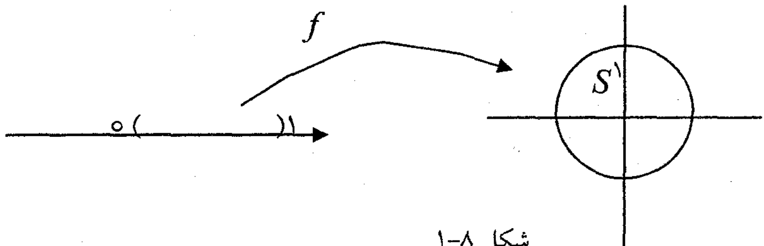
درنتیجه $h(\overline{X}) = \overline{h(X)} = Z = h(Y)$ پس $\overline{X} = Y$.

۸-۱-٦ **نتیجه:** اگر $h : X \to Z$ یک نشاننده توپولوژیک از X به توی فضای فشرده و هاسدورف Z باشد، آن‌گاه h یک فشرده سازی Y روی X القاء می کند. ضمناً نشاننده h به نشاننده $H : Y \to Z$ توسیع خواهد یافت.

۸-۱-۷ **تعریف:** فشرده سازی بدست آمده توسط h، در نتیجه قبل را فشرده سازی القاء شده توسط h نامیم.

۸-۱-۸ نتیجه: همانطور که دیدیم، هر فضای کاملاً منظم با زیر فضایی از $[0,1]^A$، همسانریخت است. چون $[0,1]^A$ فشرده و هاسدورف است، پس هر فضای کاملاً منظم می‌تواند در یک فضای فشرده و هاسدورف نشانده شود.

۸-۱-۹ مثال: فرض کنیم $X = (0,1)$ و



شکل ۸-۱

و

$$f : X \to S^1$$
$$f(x) = e^{2\pi ix}$$

و فرض کنیم $Y = S^1 = \overline{f(X)}$.

Y را فشرده سازی تک نقطه ای $f(X)$ در نظر می گیریم، در اینصورت Y فشرده و هاسدورف است. از روی f و Y می توان یک فشرده سازی روی X به‌دست آورد.

۸-۱- ۱۰ مثال: فرض کنیم $f : X = (0,1) \to [0,1]$ و $f(x) = x$ آن‌گاه $\overline{f(X)} = [0,1]$. در این حالت فشرده سازی دو نقطه‌ای داریم که توسط f روی X بدست می‌آید.

۸-۱-۱۱ مثال: فرض کنیم $f : X = (0,1) \to [0,1]\times[0,1]$، $f(x) = \left(x, \sin\frac{1}{x}\right)$ و $Y = \overline{f(X)}$. در این حالت نیز فشرده سازی متفاوتی برای X حاصل می‌شود.

۸-۲ فشرده سازی استون-چک

۸-۲-۱ تعریف: فرض کنیم X کاملاً منظم و $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ خانواده همه توابع حقیقی، پیوسته و کراندار روی X باشد. فرض کنیم

$$I_\alpha=\left[\inf_{x\in X} f_\alpha(x), \sup_{x\in X} f_\alpha(x)\right]$$

I_α فشرده است لذا $\prod_{\alpha\in I} I_\alpha$ مطابق قضیه تیخونوف فشرده خواهد بود. از اینکه X کاملاً منظم است، پس $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ در شرایط قضیه نشاندن صدق می کند. بنابراین $f:X\to\prod_\alpha I_\alpha$ با ضابطه $f(x)=(f_\alpha(x))$ یک نشاننده توپولوژیک از X به‌توی یک فضای فشرده هاسدورف می‌باشد. طبق قضیه قبل یک فشرده سازی توسط f روی X القاء می‌شود این فشرده سازی را فشرده سازی استون-چک نامیم و با $\beta(X)$ نمایش می‌دهیم.

۸-۲-۲ قضیه: هر تابع کراندار و پیوسته حقیقی روی فضای کاملاً منظم X،
($g:X\to\mathbb{R}$) بطور منحصر بفردی روی $\beta(X)$ قابل گسترش یا توسیع است.

برهان: بنا به تعریف $\beta(X)$، $\alpha\in A$ موجود است به‌طوری‌که $g=f_\alpha$. می‌دانیم که

$$h:\beta(X)\to\prod_{\beta\in A} I_\beta$$

یک نشاننده توپولوژیک است. تابع

$$g':\beta(X)\to I_\alpha$$

را بصورت $g'=\pi_\alpha o h$ تعریف می کنیم. بدیهی است که g' پیوسته است و برای هر $x\in X$ داریم:

$$g'(x)=\pi_\alpha(h(x))=f_\alpha(x)=g(x)$$

از این‌که $\overline{X}=\beta(X)$ و لم بعد منحصر بفرد بودن g' نتیجه خواهد شد.

۸-۲-۳ لم: فرض کنیم $A\subseteq X$ و $f:A\to Z$ یک تابع پیوسته از A به توی فضای هاسدورف Z باشد. در اینصورت حداکثر یک توسیع پیوسته $g:\overline{A}\to Z$ برای f وجود دارد.

برهان: فرض کنیم $g, g' : \overline{A} \to Z$ دو توسیع پیوسته و متمایز از f باشند، پس x ی در $\overline{A}$ موجود است که $x \notin A$ و $g(x) \neq g'(x)$. فرض کنیم U و U' همسایگی های مجزا از $g(x)$ و $g'(x)$ باشند (وجود این همسایگی ها از هاسدورف بودن Z نتیجه می شود) چون g و g' پیوسته هستند، همسایگی V از x موجود است به‌طوری‌که $g(V) \subseteq U$ و $g'(V) \subseteq U'$.

چون $x \in \overline{A}$ پس y ی در A هست به‌طوری‌که $y \in V \cap A$ لذا

$$g(y) \in U \quad \text{و} \quad g'(y) \in U'$$

ولی $g(y) = g'(y) = f(y)$ پس $f(y) \in U \cap V$ که تناقض است.

۸-۲-٤ لم: فرض کنیم Y یک فشرده سازی از فضای کاملاً منظم X باشد به‌طوری‌که هر تابع پیوسته و کراندار $f : X \to \mathbb{R}$ دارای یک توسیع منحصر بفرد روی Y است. در این صورت هر تابع پیوسته $g : X \to Z$ که در آن Z فشرده و هاسدورف است را می توان بصورت منحصر بفرد ی روی Y گسترش داد.

برهان: چون Z فشرده و هاسدورف است، پس کاملاً منظم است و لذا می‌توان آنرا داخل $[0,1]^A$ نشاند (یک نشاننده توپولوژیک از Z به $[0,1]^A$ وجود دارد). بدون کاسته شدن از کلیت استدلال فرض می‌کنیم $Z \subseteq [0,1]^A$. اگر $g : X \to Z$ پیوسته باشد، قرار می‌دهیم: $g_\alpha = \pi_\alpha o g : X \to [0,1]$.

طبق قضیه قبل هر g_α را می توان به h_α که $h_\alpha : X \to \mathbb{R}$، توسیع داد، فرض کنیم:

$$h : X \to \mathbb{R}^A$$
$$h(y) = (h_\alpha(y))$$

در این‌صورت h تابعی پیوسته است و به‌علاوه برای هر $x \in X$ داریم:

$$h(x) = (h_\alpha(x)) = (g_\alpha(x)) = g(x)$$

بنابراین h توسیعی از g می‌باشد و درضمن

$$h(Y) = h(\overline{X}) \subseteq \overline{h(X)} = \overline{g(X)} \subseteq \overline{Z} = Z$$

(چون Z زیر مجموعه ای فشرده از فضای هاسدورف $[0,1]^A$ است لذا بسته است)پس $h : Y \to Z$ یک توسیع پیوسته از g است. منحصر بفرد بودن این تابع از لم قبل نتیجه می‌شود.

۸-۲-۵ تعریف: دو فشرده سازی Y_1 و Y_2 را معادل گوییم اگر همسانریخت $h: Y_1 \to Y_2$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\forall x \in X \qquad h(x) = x$$

۸-۲-٦ قضیه: فرض کنیم Y_1 و Y_2 دو فشرده سازی از فضای کاملاً منظم X باشد به‌طوری‌که هر تابع پیوسته و کراندار $f: X \to \mathbb{R}$ بطور منحصر بفردی به توابع پیوسته $f_i: Y_i \to \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ قابل توسیع است، در این‌صورت Y_1 و Y_2 معادلند.

برهان: فرض کنیم $i_1: X \to Y_1$ ، $i_1(x) = x$ ، Y_1 فشرده وهاسدورف است و Y_2 یک فشرده سازی X است. بنابراین طبق لم قبل، i_1 را می توان بطور منحصر بفرد و پیوسته به $f_1: Y_2 \to Y_1$ گسترش داد. بطریق مشابه $i_2: X \to Y_2$ را می توان بطور منحصر بفرد و پیوسته به $f_2: Y_1 \to Y_2$ گسترش داد، باید توجه داشت که:

$$\forall x \in X \quad f_1 o f_2 : Y_1 \to Y_1$$
$$(f_1 o f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(x) = x$$

بنابراین $f_1 o f_2$ گسترش منحصر بفردی از $id_X: X \to X$ است، به‌علاوه $id_{Y_1}: Y_1 \to Y_1$ گسترش دیگری از id_X است. پس $f_1 o f_2 = id_{Y_1}$ (در واقع

$$i_1 o id_X : X \xrightarrow{id\,X} X \xrightarrow{i_1} Y_1$$

دارای دو توسیع $f_1 o f_2: Y_1 \to Y_1$ و $id_{Y_1}: Y_1 \to Y_1$ است. پس $f_1 o f_2 = id_{Y_1}$) به طریق مشابه $f_1 o f_2 = id_{Y_2}$، پس f_i $(i = 1,2)$ همسانریختی است. به عبارت دیگر Y_1 و Y_2 به‌صورت توپولوژیکی معادل هستند.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & Y_1 \arrow[d, shift left, "f_2"] \\
 & Y_2 \arrow[u, shift left, "f_1"]
\end{tikzcd}$$

۸-۲-۷ نتیجه: فشرده سازی استون-چک یک همسانریختی منحصر بفرد است.

برهان: اگر β_1 و β_2 فشرده سازی های استون-چک برای X باشد، طبق قضیه قبل $\beta_1 \overset{top}{\simeq} \beta_2$.

۸-۲-۸ تبصره: فشرده سازی استون -چک بزرگترین فشرده سازی برای فضای کاملاً منظم X است. به عبارت دیگر اگر Y فشرده سازی دلخواهی از X باشد، آن‌گاه نگاشت $g:\beta(X)\to Y$ موجود است به‌طوری‌که g برو و بسته است.

برهان: تابع

$$i:X\to X$$
$$x\to x$$

را طبق خاصیت فشرده سازی استون-چک می توان به $g:\beta(X)\to Y$ توسیع داد. چون $\beta(X)$ فشرده است، پس $g\left(\beta(X)\right)$ بسته است. بنابراین از اینکه $X=g(X)\subseteq g(\beta(X))$ داریم:

$$Y=\overline{X}\subseteq\overline{g(\beta(X))}=g(\beta(X))$$

پس g برو است. بسته بودن g از این موضوع نتیجه می شود که اگر $A\subseteq\beta(X)$ بسته باشد، پس فشرده است و در نتیجه $g(A)$ فشرده و لذا بسته است.

۸-۲-۹ توجه: هر فشرده سازی از X معادل خارج قسمتی از $\beta(X)$ است. در واقع g در تبصره بالا یک نگاشت خارج قسمتی است.

۸-۲-۱۰ قضیه: اگر X و Y فضاهای کاملاً منظم و همسانریخت باشند، آن‌گاه $\beta(X)$ و $\beta(Y)$ نیز همسانریخت خواهند بود.

برهان: فرض کنیم $h:X\to Y$ یک همسانریختی باشد، آن‌گاه نگاشت پیوسته

$$\alpha:X\xrightarrow{h}Y\xrightarrow{ins}\beta(Y)$$

دارای توسیع پیوسته $\hat{\alpha}:\beta(X)\to\beta(Y)$ است. ضمناً $\hat{\alpha}$ تابعی برو است.

$$Y=\alpha(X)=\hat{\alpha}(X)\subseteq\hat{\alpha}\left(\beta(X)\right)\Rightarrow\overline{Y}=\beta(Y)=\overline{\hat{\alpha}\left(\beta(X)\right)}=\hat{\alpha}\left(\beta(X)\right)$$

بطریق مشابه نگاشت پیوسته $\gamma:Y\xrightarrow{h^{-1}}X\xrightarrow{ins}\beta(X)$ دارای توسیع پیوسته $\hat{\gamma}:\beta(Y)\to\beta(X)$ است و به‌علاوه $\hat{\gamma}$ نیز برو است.

بنابراین توابع $\hat{\alpha}\,o\,\hat{\gamma}:\beta(Y)\to\beta(Y)$ و $id_{\beta(Y)}:\beta(Y)\to\beta(Y)$ توسیع های پیوسته تابع $ins:Y\to\beta(Y)$ هستند. لذا $\hat{\alpha}\,o\,\hat{\gamma}=id_{\beta(Y)}$ همچنین به دلیل مشابه $\hat{\alpha}\,o\,\hat{\gamma}=id_{\beta(X)}$ و در نتیجه $\hat{\alpha}$ همسانریخت است. پس $\beta(X)\simeq\beta(Y)$.

۸-۳ قضیه گسترش تیتزه

۸-۳-۱ قضیه گسترش تیتزه: فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای بسته از فضای نرمال X باشد، آن‌گاه:

(الف) برای $[a,b]\subseteq \mathbb{R}$، اگر $f:A\to[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه f دارای توسیع پیوسته $g:X\to[a,b]$ است.

(ب) برای هر تابع پیوسته $f:A\to\mathbb{R}$ یک توسیع پیوسته $g:X\to\mathbb{R}$ وجود دارد.

برهان: (الف) چون $[a,b]$ و $[-۱,۱]$ همسانریخت می باشند، بجای $[a,b]$ از $[-۱,۱]$ استفاده می کنیم.

برای ادامهٔ اثبات قضیه ابتدا لم زیر را بیان و اثبات می کنیم.

۸-۳-۲ لم: برای هر $r>۰$ و هر تابع پیوسته $h:A\to[-r,r]$ تابع پیوسته

$$g:X\to\left[-\frac{r}{۳},\frac{r}{۳}\right]$$

وجود دارد به‌طوری‌که: $\quad |h(x)-g(x)|<\frac{۲r}{۳} \qquad \forall x\in A$

برهان: فرض کنیم

$$B=h^{-۱}\left(\left[\frac{r}{۳},r\right]\right) \text{ و } C=h^{-۱}\left(\left[-r,-\frac{r}{۳}\right]\right).$$

B و C زیر مجموعه های بسته ای از A می باشند. چون A در X بسته است، پس B و C نیز در X بسته خواهند بود، بنابر لم اوریزون تابع پیوسته $g:X\to\left[-\frac{r}{۳},\frac{r}{۳}\right]$ وجود دارد به‌طوری‌که :

$$g(B)=\left\{\frac{r}{۳}\right\} \quad \text{و} \quad g(C)=\left\{-\frac{r}{۳}\right\}$$

(وجود g از $\left[-\frac{r}{۳},\frac{r}{۳}\right]\overset{T}{\simeq}[۰,۱]$ نتیجه می شود) برای هر $x\in A$ سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

(الف) اگر $x\in B$ آن‌گاه $r\ge h(x)\ge\frac{r}{۳}$ و $g(x)=\frac{r}{۳}$ پس

$$\left|h(x)-g(x)\right|\leq\frac{۲r}{۳}$$

ب) اگر $x\in C$ آن‌گاه $-\frac{r}{۳}\geq h(x)\geq -r$ و $g(x)=-\frac{r}{۳}$ پس

$$\left|h(x)-g(x)\right|\leq\frac{۲r}{۳}$$

ج) اگر $x\in A-(B\cup C)$ آن‌گاه $\frac{r}{۳}\geq h(x)\geq -\frac{r}{۳}$ و $\frac{r}{۳}\geq g(x)\geq -\frac{r}{۳}$ پس

$$\left|h(x)-g(x)\right|\leq\frac{۲r}{۳}$$

ادامهٔ برهان قضیه: (الف) برای $f:A\to[-۱,۱]$ قرار می دهیم $r=۱$ و $h=f$. پس تابع پیوسته $g_۱:X\to\left[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}\right]$ موجود است به‌طوری‌که:

$$\forall x\in A\qquad \left|f(x)-g_۱(x)\right|\leq\frac{۲}{۳}$$

فرض کنیم $r=\frac{۲}{۳}$ و $h=f-g_۱$ آن‌گاه $h:A\to\left[-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}\right]$ پیوسته است. پس بنابر لم قبل $g_۲:X\to\left[-\frac{۲}{۳^۲},\frac{۲}{۳^۲}\right]$ پیوسته‌ای موجود است که

$$\forall x\in A\qquad \left|f(x)-(g_۱+g_۲)(x)\right|\leq\frac{۲}{۳}r=\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲$$

با ادامه همین روش برای $r=\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲$ و $h=f-(g_۱+g_۲)$ به تابع پیوسته

$$g_۳:X\to\left[-\frac{r}{۳},\frac{r}{۳}\right]$$

می‌رسیم که

$$\forall x\in A\qquad \left|f(x)-(g_۱+g_۲+g_۳)(x)\right|\leq\frac{۲}{۳}r=\left(\frac{۲}{۳}\right)^۳$$

فرض کنیم $S_n=\sum_{i=1}^{n}g_i$ آن‌گاه

$$\forall x\in A \qquad |f(x)-S_n(x)|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

برای $r=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ و $h=f-S_n$ تابع پیوسته

$$g_{n+1}:X\to\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n,\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

حاصل می شود، که

$$\forall x\in A \qquad |f(x)-S_n(x)-g_{n+1}(x)|\le\frac{2r}{3}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

هر S_n تابعی پیوسته است و برای $n>m$

$$|S_n(x)-S_m(x)|=\left|\sum_{k=m+1}^{n}g_k(x)\right|\le\sum_{k=m+1}^{n}|g_k(x)|\le$$

$$\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\le\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^m$$

فرض کنیم $\varepsilon>0$ دلخواه باشد، آن‌گاه mی هست که $\left(\frac{2}{3}\right)^m<\varepsilon$ (زیرا $\left(\frac{2}{3}\right)^m\to 0$) بنابراین $\{S_n(x)\}$ یک دنباله کشی است. در واقع $\{S_n\}$ بطور یکنواخت کشی است. پس S_n بطور یکنواخت به تابعی مانند g همگراست، بنابراین تابع g پیوسته است.

درنتیجه

$$\forall x\in X;\ |g(x)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(x)|\le\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$$

یعنی $g:X\to[-1,1]$ پیوسته است و

$$\forall x \in A \qquad |f(x)-S_n(x)| \le \left(\frac{۲}{۳}\right)^n$$

بنابراین $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ نتیجه می‌گیریم

$$|f(x)-g(x)| \le |f(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-g(x)| \le \left(\frac{۲}{۳}\right)^n+\left(\frac{۲}{۳}\right)^n$$

که وقتی $n \to \infty$ داریم $f(x)=g(x)$.

برهان (ب) :چون $\mathbb{R} \simeq (-۱,۱)$ تابع $f : A \to \mathbb{R}$ را با $f : A \to (-۱,۱)$ تعویض می‌کنیم. از اینکه $[-۱,۱] \subseteq (-۱,۱)$ پس طبق قسمت اول، توسیع پیوسته $g : X \to [-۱,۱]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$B = g^{-۱}(\{-۱,۱\}) \tag{۱}$$

B زیرمجموعه ای بسته از X است، اگر $a \in A$ آن‌گاه $f(a)=g(a) \in (-۱,۱)$ پس $|g(a)| \neq ۱$ و در نتیجه $A \cap B = \phi$. بنابراین طبق لم اوریزون $h : X \to [۰,۱]$ وجود دارد به‌طوری‌که h پیوسته است و $h(B)=\{۰\}$ و $h(A)=\{۱\}$. تابع $f_۱$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$f_۱ : X \to \mathbb{R}$$
$$f_۱(x)=g(x)h(x)$$

قبلاً دیدیم که $f_۱$ پیوسته است و به‌علاوه $f_۱|_A = f$.

(الف) برای هر $a \in A$؛ $f_۱(a)=g(a)h(a)=f(a)h(a)=f(a)\times ۱=f(a)$ و $f(a) \in (-۱,۱)$.

(ب) برای هر $b \in B$؛ $f_۱(b)=g(b)h(b)=g(b)\times ۰=۰ \Rightarrow |f_۱(b)|<۱$

(ج) برای هر $x \in X-(A\cup B)$؛ $f_۱(x)=g(x)h(x)$

و از آنجائیکه اگر $x \notin B$ طبق (۱) داریم:

$$|g(x)|<۱ \qquad \text{و} \qquad ۰ \le h(x) < ۱$$

پس

$$|f_۱(x)|=|g(x)||h(x)| \le |g(x)|<۱$$

بنابراین $f_۱ : X \to (-۱,۱)$ یک توسیع پیوسته از $f : A \to (-۱,۱)$ است.

۸-۳-۳ نتیجه: در یک فضای توپولوژیک X شرایط زیر معادلند:

(الف) X نرمال است.

(ب) اگر A و B دو زیر مجموعه بسته و مجزا از X باشند، آن‌گاه تابع پیوسته $g : X \to [۰,۱]$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(A) = \{۰\}$ و $g(B) = \{۱\}$.

(ج) اگر $A \subseteq X$ بسته و J بازه ای بسته در اعداد حقیقی باشد، آن‌گاه هر تابع پیوسته $g : A \to J$ بطور پیوسته روی X قابل گسترش است.

برهان: ج $\Leftarrow$ الف) قضیه تیتز.

ب $\Leftarrow$ ج) فرض کنیم $B \subseteq X$ و A، بسته و مجزا باشند قرار می دهیم $C = A \cup B$ آن‌گاه C بسته است. تابع $f : C \to [۰,۱]$ با ضابطه $f(A) = \{۰\}$ و $f(B) = ۱$ تابعی پیوسته است و بنابر (ج) f بطور پیوسته روی X قابل گسترش است.

اگر گسترش f را g بنامیم آن‌گاه:

$$g : X \to [۰,۱]$$
$$g(A) = f(A) = \{۰\} \quad و \quad g(B) = f(B) = \{۱\}$$

الف $\Leftarrow$ ب) فرض کنیم A و B بسته و ومجزا باشند بنابر (ب) تابع پیوسته $g : X \to [a,۱]$ موجود است به‌طوری‌که $g|_A = ۰$ و $g|_B = ۱$ بنابراین

$$A \subseteq U = g^{-۱}\left(\left[۰,\frac{۱}{۲}\right)\right) \quad و \quad B \subseteq V = g^{-۱}\left(\left(\frac{۱}{۲},۱\right]\right)$$

همچنین $U \cap V = \phi$ و U و V باز هستند پس X نرمال است.

تمرین

۱) نشان دهید که تابع کراندار و پیوستهٔ $g:[0,1]\to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(x)=\cos\frac{1}{x}$ را نمی‌توان به یک فشرده سازی برای مثال ۸-۱-۳ تعمیم داد.

۲) تحت چه شرایطی یک فضای متریک‌پذیر دارای یک فشرده سازی متریک پذیر است؟

۳) فرض کنید X کاملاً منظم باشد. نشان دهید X همبند است اگر و فقط اگر $\beta(X)$ همبند باشد.

٤) فرض کنید X فضای گسسته باشد و $\beta(X)$ فشرده سازی استون چک آن باشد، در این‌صورت:

الف) نشان دهید . برای $A\subseteq X$، $\overline{A}$ و $\overline{(X-A)}$ که در آن بستار در $\beta(X)$ گرفته شده است، مجموعه‌هایی مجزا هستند.

ب) نشان دهید اگر U در $\beta(X)$ باز باشد، $\overline{U}$ نیز در $\beta(X)$ باز است.

ج) نشان دهید $\beta(X)$ به‌طور کلی ناهمبند است.

۵) نشان دهید که اگر $\beta(X)\neq X$ آن‌گاه $\beta(X)$ متریک پذیر نیست.

فصل ۹

توپولوژی فشرده- باز

۹-۱ در این فصل ضمن تعریف توپولوژی فشرده-باز که از اهمیت به سزایی برخوردار است و دارای خواص بسیار مهمی بخصوص در مفهوم هموتوپی نیز می‌باشد، به بررسی بعضی از خواص آن‌ها می‌پردازیم. این فصل را با دو مثال مهم آغاز می‌کنیم:

۹-۱-۱ مثال: اگر A زیرمجموعه‌ای فشرده از فضای منظم X باشد به‌طوری‌که مجموعه باز U شامل A باشد، آن‌گاه مجموعه بازی مانند W موجود است به‌طوری‌که

$$A \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$$

برهان: برای هر $a \in A$، U_a بازی موجود است به‌طوری‌که

$a \in U_a \subseteq \overline{U_a} \subseteq U$ پس $A \subseteq \bigcup_{a\in A} U_a \subseteq \bigcup_{a\in A} \overline{U_a} \subseteq U$ چون A فشرده است، پس با فرض $W = \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$ داریم:

$$A \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}\right) = W \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} \subseteq U$$

از طرفی $A \subseteq W \subseteq \overline{W} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{a_i}} \subseteq U$.

(توجه: قبلاً دیدیم که $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{a_i}}$).

۹-۱-۲ مثال: اگر X هاسدورف و فشرده موضعی باشد و به‌علاوه اگر $U \subseteq X$ باز و $K \subseteq X$ فشرده باشد به‌طوری‌که $K \subseteq U$ آن‌گاه V بازی موجود است به‌طوری‌که $\overline{V}$ فشرده است و $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

حل: برای هر x در K، همسایگی V_x از x موجود است به‌طوری‌که $\overline{V_x}$ فشرده و

$$x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U$$

(با توجه به لم ۲-۷)

بنابراین $\{V_x\}$ یک پوشش باز برای K است، لذا n ی هست که

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k} = V \subseteq \overline{V} = \overline{\bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k}} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V_{x_k}} \subseteq U$$

درنتیجه $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ اکنون به تعریف توپولوژی فشرده-باز می پردازیم.

۹-۲ توپولوژی فشرده- باز

۹-۲-۱ تعریف: فرض کنیم $C(X,Y)=\{f \mid f : X \to Y,\ f$ پیوسته $\}$ اگر

$$N(A,B)=\{f \in C(X,Y) \mid f(A) \subseteq B\}$$

آن‌گاه گردایه

$$\{N(A,B) \mid A \subseteq X \text{ فشرده و } B \subseteq Y \text{ باز است}\}$$

می‌تواند یک پایه جزء برای یک توپولوژی روی $C(X,Y)$ باشد. این توپولوژی را توپولوژی فشرده-باز می نامیم.

۹-۲-۲ لم: با نماد گذاری فوق داریم:

الف) $\bigcap_{i=1}^{n} N(A_i,B) = N\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i, B\right)$

ب) $\bigcap_{i=1}^{n} N(A,B_i) = N\left(A, \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$

ج) $\bigcap_{i=1}^{n} N(A_i,B_i)=N\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i,\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$

د) $\overline{N(A,B)}\subseteq N\left(A,\overline{B}\right)$

برهان: (الف)، (ب) و (ج) به خواننده واگذار می‌گردد و برای اثبات (د) داریم:

باید توجه داشت که $N\left(A,\overline{B}\right)$ در حالت کلی عضوی از پایه نیست زیرا ممکن است که $\overline{B}$ باز نباشد. فرض کنیم $f\notin N\left(A,\overline{B}\right)$ پس $a\in A$ موجود است به‌طوری‌که $f(a)\notin\overline{B}$، اما $f(a)\notin\overline{B}$ اگر و فقط اگر $f\in N\left(\{a\},Y-\overline{B}\right)$.

(چون $\{a\}$ فشرده است) اما $N\left(\{a\},Y-\overline{B}\right)\cap N(A,B)=\phi$ درنتیجه

$$f\notin\overline{N(A,B)}$$

۹-۲-۳ قضیه: (الف) برای هر $y\in Y$ فرض کنیم

$$\begin{aligned} C_y &: X\to Y \\ & x\to y \end{aligned}$$

تابع ثابت باشد آن‌گاه نگاشت

$$\begin{aligned} j &: Y\to C(X,Y) \\ & y\to C_y \end{aligned}$$

یک همسانریخت از Y بروی زیر فضایی از $C(X,Y)$ است. بنابراین همواره Y را می‌توان در $C(X,Y)$ نشاند.

(ب) فرض کنیم $Y_0\subseteq Y$ زیرفضایی از Y باشد آن‌گاه $C(X,Y_0)$ با زیرفضای

$$S_0=\{f\in C(X,Y)\mid f(X)\subseteq Y_0\}$$

از $C(X,Y)$ همسانریخت است.

برهان(الف): از اینکه $C_y\in N(A,B)\Leftrightarrow y\in B$ بسادگی نتیجه می گیریم که:

$$J:Y\to C(X,Y)$$

یک نشاننده توپولوژیک است و به‌علاوه:

(۱) $$J^{-1}(N(A,B))=\{y:J(y)=C_y\in N(A,B)\}=\{y:y\in B\}$$

به عبارت دیگر $J^{-1}(N(A,B))=B$ در Y باز است.

(۲) اگر $J(y)=J(y')$ آن‌گاه $C_y=C_{y'}$ پس $C_y(x)=C_{y'}(x)$ درنتیجه

$$y = y'$$

(۳) $A \subseteq X$ فشرده و $J(B) = N(A,B) \cap J(Y)$ پس $J : Y \to J(Y)$ یک همسانریختی است.

برهان(ii) : فرض کنیم که نگاشت $I : C(X,Y_\circ) \to S_\circ$ نگاشت همانی باشد، اگر $B \subseteq Y$ باز باشد آن‌گاه $N(A, B \cap Y_\circ)$ در $C(X,Y_\circ)$ باز خواهد بود به‌علاوه

$$I(N(A, B \cap Y_\circ)) = N(A,B) \cap S_\circ$$

یعنی I همسانریختی است.

۹-۲-٤ قضیه (الف): $C(X,Y)$ هاسدورف است اگر و فقط اگر Y هاسدورف باشد.

(ب) $C(X,Y)$ منظم است اگر و فقط اگر Y منظم باشد.

برهان (الف) و (ب): فرض کنیم $C(X,Y)$ هاسدورف (یا منظم) باشد. با توجه به قسمت (الف) قضیه قبل Y را می توان به‌عنوان زیرفضایی از $C(X,Y)$ درنظر گرفت، بنابراین Y خواص فوق را از $C(X,Y)$ به ارث می‌برد.

بالعکس: (الف) اگر $f, g \in C(X,Y)$ و $f \neq g$ آن‌گاه $x_\circ \in X$ موجود است به‌طوری‌که $f(x_\circ) \neq g(x_\circ)$ چون Y هاسدورف است پس $U_{f(x_\circ)}$ و $V_{g(x_\circ)}$ موجود است به‌طوری‌که: $U_{f(x_\circ)} \cap V_{g(x_\circ)} = \phi$ دراین‌صورت

$$N(\{x_\circ\}, U_{f(x_\circ)}) \cap N(\{x_\circ\}, V_{g(x_\circ)}) = \phi$$

و

$$g \in N(\{x_\circ\}, V_{g(x_\circ)}),\ f \in N(\{x_\circ\}, U_{f(x_\circ)})$$

(ب) فرض کنیم Y منظم باشد، چون Y هاسدورف است پس بنا بر قسمت اول $C(X,Y)$ نیز هاسدورف است. اگر $f \in N(A,B)$ (A فشرده و B باز) از اینکه $f(A) \subseteq B$، چون $f(A)$ فشرده و Y منظم است، طبق مثال ۹-۱-۱ مجموعه باز W شامل $f(A)$ موجود است به‌طوری‌که: $f(A) \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq B$ درنتیجه

$$f \in N(A,W) \subseteq \overline{N(A,W)} \subseteq N(A,\overline{W}) \subseteq N(A,B)$$

پس $C(X,Y)$ منظم است.

۹-۳ نگاشت‌های ترکیب و ارزیابی

فرض کنیم X و Y و Z سه فضای توپولوژیک باشند، برای هر $f \in C(X,Y)$ و $g \in C(Y,Z)$ نگاشت $gof \in C(X,Z)$، بنابراین نگاشت

$$comp : C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z)$$

با ضابطه

$$comp(f,g) = gof$$

را می‌توان تعریف کرد. پیوسته بودن $comp(f,g)$ از قضیه زیر نتیجه خواهد شد.

۹-۳-۲ قضیه (الف): برای هر تابع $f_1 \in C(X,Y)$

$$comp(f_1,\_) : C(Y,Z) \to C(X,Z)$$
$$g \to gof_1$$

پیوسته است.

(ب) برای هر تابع $g_1 \in C(Y,Z)$ نگاشت

$$comp(\_,g_1) : C(X,Y) \to C(X,Z)$$
$$f \to g_1 of$$

پیوسته است.

برهان (الف) : فرض کنیم $gof_1 \in N(A,V)$ آن‌گاه

$$g \in N(f_1(A),V) \text{ اگر و فقط اگر } gof_1 \in N(A,V)$$

و چون $f_1(A)$ فشرده است، پس $N(f_1(A),V)$ یک عضو پایه شامل g می‌باشد.

$$comp(f_1, N(f_1(A),V))$$

پس $comp(f_1,\_)$ پیوسته است.

برهان(ب): فرض کنیم $g_1 of \in N(A,V)$ آن‌گاه

$$f \in N\left(A, g_1^{-1}(V)\right) \text{ اگر و فقط اگر } g_1 of \in N(A,V)$$

بنابراین

$$comp\left(N\left(A, g_1^{-1}(V)\right), g_1\right) = N(A,V)$$

پس $comp(\_,g_1)$ پیوسته است.

۹-۳-۳ قضیه: اگر Y یک فضای فشرده موضعی و هاسدورف باشد آن‌گاه نگاشت

$$comp : C(X,Y)\times C(Y,Z)\to C(X,Z)$$

پیوسته است.

برهان: فرض کنیم $f_1 \in C(X,Y)$ و $g_1 \in C(X,Z)$ و $N(A,W)$ یک همسایگی از gof_1 باشد، با توجه به این‌که $g_1^{-1}(W)\subseteq Y$ باز، $f_1(A)\subseteq g_1^{-1}(W)$ فشرده و Y فشرده موضعی است، مجموعه باز V وجود دارد که $\overline{V}$ فشرده است و به‌علاوه $f_1(A)\subseteq V\subseteq \overline{V}\subseteq g_1^{-1}(W)$ بنابراین $f_1\in N(A,V)$ و $g_1\in N(\overline{V},W)$ درضمن

$$comp\left(N(A,V),N(\overline{V},W)\right)\subseteq N(A,W)$$

٩-٣-٤ تعریف: برای فضاهای توپولوژیک Y و Z تابع $eval$ را یک نگاشت ارزیابی نامیم و به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$eval\,\tfrac{Z}{Y}: C(Y,Z)\times Y\to Z$$
$$eval\,\tfrac{Z}{Y}(f,y)=f(y)$$

٩-٣-٥ قضیه (الف): برای هر $y_\circ$ ثابت

$$eval\,\tfrac{Z}{Y}: C(Y,Z)\times Y\to Z$$
$$eval\,\tfrac{Z}{Y}(f,y_\circ)=f(y_\circ)$$

یک تابع پیوسته است.

(ب) اگر Y فشرده موضعی و هاسدورف باشد، آن‌گاه $eval\,\tfrac{Z}{Y}$ پیوسته است.

برهان(الف): فرض کنیم $X=\{a\}$ و

$$\beta : C(X,Z)\to Z \qquad \text{و} \qquad \alpha : C(X,Y)\to Y$$
$$f\to f(a) \qquad\qquad\qquad f\to f(a)$$

در این‌صورت $C(X,Y)\overset{\alpha}{\cong}Y$ و $C(X,Y)\overset{\beta}{\cong}Z$ و برای $y_\circ\in Y$

$$y_\circ=\alpha(f_\circ)\Leftrightarrow f_\circ(a)=y_\circ$$

$$\begin{tikzcd} C(X,Z) \arrow[r, "comp(f_\circ,\_)"] \arrow[dr, "eval_{y_\circ}"'] & C(X,Y) \arrow[d, "\beta"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

حال کافی است ثابت کنیم که: $eval_{y_\circ} = \beta\, o\, comp(f_\circ, \_)$

برای این منظور برای هر $f \in C(Y,Z)$

$$(\beta\, o\, comp(f_\circ, \_))(f) = \beta(comp(f_\circ, \_)(f)) = \beta(f\, of_\circ) = (f\, of_\circ)(a)$$

پس $\beta(f\, of_\circ) = (f\, of_\circ)(a) = f(y_\circ)$ از طرفی $eval_{y_\circ}(f) = f(y_\circ)$.

برهان (ب): فرض کنیم $X = \{a\}$ در این‌صورت α و β موجودند که

$$C(X,Z) \overset{\beta}{\cong} Z \quad \text{و} \quad C(X,Y) \overset{\alpha}{\cong} Y$$

درنتیجه

$$\begin{tikzcd}
C(X,Y)\times Y \arrow[r, "comp"] \arrow[ddrr, "eval_Y^Z"'] & Y\times C(X,Z) \arrow[r, "\alpha^{-1}\times id\, C(Y,Z)"] & C(X,Y)\times C(Y,Z) \arrow[d, "comp"] \\
& & C(X,Z) \arrow[d, "\beta^{-1}"] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

$$eval_Y^Z = \beta^{-1} o\, comp\, o\left(\alpha^{-1}\times id\right) o\, comp$$

به‌عنوان ترکیب توابع پیوسته، پیوسته است.

۹-۳-۶ نتیجه: فرض کنیم Y فشرده موضعی و هاسدورف باشد،برای فضای توپولوژی دلخواه X، نگاشت $f : X\times Y \to Z$ پیوسته است اگر و فقط اگر $\hat{f} : X \to C(Y,Z)$ با ضابطه $\hat{f}(x) = f(x, y)$ پیوسته باشد.

برهان: فرض کنیم $\hat{f}$ پیوسته باشد آنگاه دیاگرام زیر تعویض پذیر است:

$$\begin{tikzcd}
X\times Y \arrow[r, "\hat{f}\times id_Y"] \arrow[dr, "f"'] & C(Y,Z)\times Y \arrow[d, "eval"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

$$(evalo(\hat{f}\times id_Y))(x, y) = eval(\hat{f}(x)(y)) = \hat{f}(x)(y) = f(x, y)$$

پس f پیوسته است.

بالعکس: فرض کنیم $x_\circ \in X$ و $N(A,B)$ یک عضو پایه جزء شامل $\hat{f}(x_\circ)$ باشد، قصد داریم که همسایگی U از $x_\circ$ را چنان بیابیم که : $\hat{f}(U) \subseteq N(A,B)$ اما

$$f(U \times A) \subseteq B \Leftrightarrow \hat{f}(U)(A) \subseteq B \Leftrightarrow \hat{f}(U) \subseteq N(A,B)$$

بنابراین U را باید چنان بیابیم که $f(U \times A) \subseteq B$ چون $\hat{f}(x_\circ) \in N(A,B)$ پس

$$f(\{x_\circ\}, A) \subseteq B$$

به عبارت دیگر $\{x_\circ\} \times A \subseteq f^{-1}(B)$.

چون $f^{-1}(B)$ باز و A فشرده است، بنابر لم لوله، همسایگی U از $x_\circ$ موجود است به‌طوری‌که: $U \times A \subseteq f^{-1}(B)$ بنابراین $f(U \times A) \subseteq B$ یعنی $\hat{f}$ پیوسته است.

قبلاً دیدیم که در حالت کلی حاصل‌ضرب دو نگاشت خارج قسمتی ممکن است خارج قسمتی نباشد.

۹-۳-۷ تذکر: نگاشت پیوسته و بروی p خارج قسمتی است اگر و فقط اگر $\{p\}$ یک خانواده نهایی باشد.

برهان: فرض کنیم $p : X \to (Y,\tau)$ پیوسته و برو و برای هر $g : Y \to W$ پیوستگی gop، پیوستگی g را نتیجه بدهد. ثابت می کنیم که p یک نگاشت خارج قسمتی است. برای این منظور فضای Y را به توپولوژی خارج قسمتی القاء شده توسط p مجهز می کنیم. اگر $i : (Y,\tau) \to (Y,\tau_p)$ نگاشت همانی باشد، آن‌گاه:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p=p'"'] & (Y,\tau) \arrow[dl, dashed, "i"', shift right] \\ (Y,\tau_p) \arrow[ur, dashed, "i^{-1}"', shift right] & \end{tikzcd}$$

چون $iop = p'$ پیوسته است، بنابراین i تابعی پیوسته خواهد بود. از طرف دیگر $i^{-1}op' = p$ پیوسته است، بنابراین i^{-1} نیز پیوسته خواهد بود، پس i همسانریختی است و لذا $\tau = \tau_p$.

۹-۳-۸ قضیه :اگر $p : X \to Z$ یک نگاشت خارج قسمتی و Y فشرده موضعی و هاسدورف باشد، آن‌گاه $p \times ide : X \times Y \to Z \times Y$ یک نگاشت خارج قسمتی است.

برهان: کافی است نشان دهیم که $\{p \times ide\}$ یک خانواده نهایی است برای این منظور فرض کنیم $g : Z \times Y \to W$ نگاشت دلخواهی باشد به‌طوری‌که

$$h = g\,o(p \times ide) : X \times Y \to W$$

پیوسته است.بنابر نتیجه ۹-۳-۶ تابع $\hat{h} : X \to C(Y,W)$ پیوسته است. نگاشت $\hat{h}$ روی $p^{-1}(\{z\})$ ها ثابت است (در واقع $\hat{h} = \hat{g}\,op$).

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "p \times id_e"] \arrow[dr, dashed, "h = g\,o(p \times id_e)"'] & Z \times Y \arrow[d] \\
 & W
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\hat{h}"'] & Z \arrow[dl, "\hat{g}"] \\
C(Y,W) &
\end{tikzcd}$$

برای هر $x \in p^{-1}\{z\}$ داریم:

$$\hat{h}(x)(y) = h(x,y) = g\,o(p \times ide)(x,y)$$

در نتیجه $\hat{h}(x)(y) = g(p(x),y) = g(z,y) = \hat{g}(z)(y)$ درنتیجه

$$\forall x \in p^{-1}\{z\}; \quad \hat{h}(x) = \hat{g}(z)$$

مطابق آنچه در بحث نگاشتهای خارج قسمتی دیدیم، $\hat{g}$ پیوسته است و در نتیجه بنابر نتیجه ۹-۳-۶ g پیوسته است.

۹-۳-۹ نتیجه: اگر $f : X \to Y$ و $g : Z \to W$ نگاشتهای خارج قسمتی و Y و Z فشرده موضعی و هاسدورف باشند، آن‌گاه

$$f \times g : X \times Z \to Y \times W$$

خارج قسمتی است.

برهان: چون Y و Z هاسدورف و فشرده موضعی هستند، با استفاده از قضیه قبل نگاشت‌های

$$f\times id_Z : X\times Z \to Y\times Z \quad \text{و} \quad id_Y\times g : Y\times Z \to Y\times W$$

خارج قسمتی هستند و در نتیجه

$$f\times g : (id_Y\times g)o(f\times id_Z)$$

خارج قسمتی است.

۹-۳-۱۰ **تعریف:** فضای توپولوژیک X را بطور فشرده تولید شده نامیم اگر در شرط زیر صدق کند: (($A\subseteq X$ باز است اگر و فقط اگر برای هر زیر مجموعه فشرده C از X، $A\cap C$ در C باز باشد)).

۹-۳-۱۱ **مثال:** هر فضای فشرده موضعی به‌طور فشرده تولید شده است.

۹-۳-۱۲ **قضیه:** فضای همضرب توپولوژیکی، از فضاهای فشرده، فشرده موضعی است.

برهان: برای هر $x\in \coprod_{\alpha} X_\alpha$، βیی موجود است که $x\in X_\beta\times\{\beta\}$، $X_\beta\times\{\beta\}$ یک همسایگی فشرده از x است .

۹-۳-۱۳ **لم:** اگر X فشرده موضعی یا شمارای اول باشد، آن‌گاه X به‌طور فشرده تولید شده است.

برای این لم دو برهان ارائه می‌کنیم.

برهان(الف): فرض کنیم X فشرده موضعی باشد و برای هر C فشرده، $A\cap C$ در C باز باشد. نشان می دهیم A در X باز است. فرض کنیم $x\in A$ و U همسایگی دلخواهی از x باشد. چون X فشرده موضعی است، مجموعه فشرده C موجود است به‌طوری‌که $x\in U\subseteq C$ بنابر فرض $A\cap C$ در C باز است پس

$$A\cap U = A\cap C\cap U$$

در U باز است. چون U در X باز است لذا $A\cap C$ در X باز است و

$$x\in A\cap U\subseteq A$$

یعنی A در X باز است.

برهان(ب): اگر X شمارای اول باشد و برای هر C فشرده $B\cap C$ در C بسته باشد، نشان می‌دهیم که B در X بسته است. فرض کنیم $x\in \overline{B}$ نشان می دهیم که $x\in B$. چون X شمارای اول است

و $x \in \overline{B}$ بنابر عکس لم دنباله، دنباله $\{x_n\}$ در B موجود است به‌طوری‌که $x_n \to x$. فرض کنیم

$$C = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

مجموعه C فشرده است.

پس $B \cap C$ در C بسته است، از این‌که برا هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in B \cap C$ و $x_n \to x$ می‌توان نتیجه گرفت $x \in B \cap C$ و یا $x \in B$.

۹-۳-۱٤ تذکر: مجموعه C که در برهان (ب) ظاهر شد، فشرده است زیرا اگر $\{U_\alpha\}_\alpha$ یک پوشش باز برای C باشد، $\alpha_\circ$ی هست که $x \in U_{\alpha_\circ}$ پس Nی هست که برای هر $n \geq N$، $x_n \in U_{\alpha_\circ}$. فرض کنیم

$$x_i \in U_{\alpha_i} \qquad ۱ \leq i \leq N$$

بنابراین $C \subseteq U_{\alpha_\circ} \cup \left(\bigcup_{i=۱}^{N-۱} U_{\alpha_i} \right)$ یعنی C فشرده است.

۹-۳-۱۵ قضیه کوهن: فرض کنیم X یک فضای هاسدورف باشد، شرط لازم و کافی برای آن‌که X بطور فشرده تولید شده باشد، آن است که X خارج قسمتی از یک فضای فشرده موضعی و هاسدورف باشد.

برهان: فرض کنیم X بطور فشرده تولید شده باشد و $\{A_\alpha\}$ خانواده همه زیرمجموعه‌های فشرده X باشد آن‌گاه $\{ins_{A_\alpha} : A_\alpha \to X\}$ یک خانواده نهایی است(چرا؟). و به‌علاوه $p(x, \alpha) = x$. به سادگی می توان تحقیق کرد که $\{p\}$ نهایی است.

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[r, "ins\, A_\alpha"] \arrow[d, "U_\alpha"'] & X \\ \coprod_\alpha A_\alpha \arrow[ur, "P"'] & \end{tikzcd}$$

و در نتیجه p یک نگاشت خارج قسمتی است. به عبارت دیگر X خارج قسمتی از فضای فشرده موضعی $\coprod_\alpha A_\alpha$ است.

بالعکس: فرض کنیم خارج قسمتی و Y فشرده موضعی و هاسدورف باشد، فرض کنیم چنان باشد که برای هر زیرمجموعه فشرده X مانند A_α ، $A_\alpha \cup U$ در A_α باز است. نشان می دهیم که U در X باز است. فرض کنیم $V \subseteq Y$ باز و $\overline{V}$ فشرده باشد، پس $U \cap p(\overline{V})$ در مجموعه فشرده $p(\overline{V})$ باز است. بنابراین G بازی در X موجود است به‌طوری‌که

$$U \cap p(\overline{V}) = G \cap p(\overline{V})$$

$$\left(U \cap p(\overline{V})\right) = p^{-1}(G) \cap p^{-1}\left(p(\overline{V})\right)$$

$$\left(U \cap p(\overline{V})\right) \cap V = p^{-1}(G) \cap p^{-1}\left(p(\overline{V})\right) \cap V$$

$$p^{-1}(U) \cap V = p^{-1}(G) \cap V$$

پس $p^{-1}(U) \cap V$ در Y باز است ولی Y هاسدورف و فشرده موضعی است پس بوسیله $\{V_\alpha\}$ که V_α ها باز و $\overline{V_\alpha}$ها فشرده است، پوشیده می‌شود. یعنی $Y = \bigcup_\alpha V_\alpha$ پس:

$$\forall \alpha \quad p^{-1}(U) \cap V_\alpha$$

باز است و در نتیجه $p^{-1}(U)$ در Y باز خواهد بود. چون p خارج قسمتی است، لذا U در X باز است.

تمرین

۱. فرض کنید Y یک فضای متریک باشد. نشان دهید که اگر X فشرده باشد آنگاه توپولوژی یکنواخت روی $C(X,Y)$ مستقل از متر انتخاب شده برای Y است.

۲. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و (Y,d) یک فضای متریک باشد، دراین‌صورت نشان دهید که روی $C(X,Y)$ توپولوژی‌های فشرده $-$ باز و فشردگی تقاربی معادلند و از آن نتیجه بگیرید که توپولوژی فشردگی تقاربی روی زیرفضای $C(X,Y)$ از X^Y به متر Y بستگی ندارد.

۳. نشان دهید: X به‌طور فشرده تولید شده معادل است با:

(($B \subseteq X$ بسته است اگر و فقط اگر برای هر C فشرده $B \cap C$ در C بسته باشد))

نمونه مسائل حل شده

۱. تمام توپولوژی‌های ممکن بر مجموعهٔ $X=\{a,b\}$ را بنویسید.

حل: $\tau_1=\{\phi,X\},\ \tau_2=\{\phi,\{a\},X\},\ \tau_3=\{\phi,\{b\},X\},\ \tau_4=\{\phi,\{a\},\{b\},X\}$

۲. **الف)** اگر $\{\tau_\alpha\}$ گردایه‌ای از توپولوژی‌های X باشد. ثابت کنید $\bigcap\tau_\alpha$ نیز یک توپولوژی در X است. آیا $\bigcup\tau_\alpha$ نیز یک توپولوژی در X است؟

ب) فرض کنید $\{\tau_\alpha\}$ گردایه‌ای از توپولوژی‌های X باشد، ثابت کنید که توپولوژی یکتایی در X هست به‌طوری‌که کوچکترین توپولوژی حاوی همهٔ τ_αهاست و همچنین توپولوژی یکتایی وجود دارد که بزرگترین توپولوژی مشمول در همهٔ τ_αهاست.

حل: الف) فرض کنیم $\tau=\bigcap\tau_\alpha$ و $\{G_i\}_{i=1}^n\in\tau$ لذا به ازای هر α، $\{G_i\}_{i=1}^n\in\tau_\alpha$. لذا برای هر α داریم $\bigcap\limits_{i=1}^{n}G_i\in\tau_\alpha$ پس $\bigcap\limits_{i=1}^{n}G_i\in\tau$. همچنین اگر $\{G_r\}$ خانوادهٔ دلخواهی از مجموعه‌های باز در τ باشد، $\{G_r\}\in\tau_\alpha$ به ازای هر α لذا $\bigcup\limits_r G_r\in\tau_\alpha$ پس $\bigcup\limits_r G_r\in\tau$. و چون $\phi\in\tau_\alpha$ برای هر α، $\phi\in\tau$ و چون $X\in\tau_\alpha$ برای هر α، $X\in\tau$. لذا $\tau=\bigcap\tau_\alpha$ یک توپولوژی روی X است. اجتماع τ_1 و τ_2 همواره یک توپولوژی نیست به طور مثال اگر $X=\{a,b,c\}$ و $\tau_1=\{X,\phi,\{a\}\}$ و $\tau_2=\{X,\phi,\{b\}\}$ آن‌گاه $\{a\}\in\tau_1$ و $\{b\}\in\tau_2$ لذا $\{a\},\{b\}\in\tau_1\cup\tau_2$ اما $\{a,b\}=\{a\}\cup\{b\}\notin\tau_1\cup\tau_2$.

ب) قرار می‌دهیم $\beta=\left\{\tau\mid\tau\supseteq\bigcup\limits_\alpha\tau_\alpha\right\}$ اولاً $\beta\neq\phi$ زیرا $\tau=2^X$ یعنی توپولوژی گسسته در β واقع است. قرار می‌دهیم $\tau_1=\bigcap\limits_{\tau\in\beta}\tau$، دراین‌صورت بنا به الف τ_1 یک توپولوژی روی X است و چون به ازای هر $\tau\in\beta$، $\bigcup\limits_\alpha\tau_\alpha\subseteq\tau$ پس $\bigcup\limits_\alpha\tau_\alpha\subseteq\tau_1$ همچنین τ_1 کوچکترین توپولوژی شامل همهٔ τ_αهاست. زیرا اگر τ_2 توپولوژی دیگری باشد که $\forall\alpha;\tau_\alpha\subseteq\tau_2$.

آن‌گاه $\bigcup_{\alpha} \tau_\alpha \subseteq \tau_۲$ لذا $\tau_۲ \in \beta$ پس چون $\tau_۱ = \bigcap_{\tau \in \beta} \tau$ آن‌گاه $\tau_۱ \subseteq \tau_۲$ لذا $\tau_۱$ کوچکترین است و منحصر بفرد نیز هست. زیرا اگر $\tau_۱$ توپولوژی دیگری باشد که کوچکترین توپولوژی حاوی همهٔ τ_αها باشد، آن‌گاه $\tau_۱ \subseteq \tau_۲$ و $\tau_۲ \subseteq \tau_۱$ لذا $\tau_۱ = \tau_۲$. حال قرار می‌دهیم $\tau = \bigcap \tau_\alpha$ بنا به الـف τ یـک توپولوژی است. ثانیاً $\forall \alpha ;\ \tau \subseteq \tau_\alpha$ ثالثاً اگر $\tau_۱$ توپولوژی دیگری باشد که به ازای هـر α، $\tau_۱ \subseteq \tau_\alpha$ آن‌گاه $\tau_۱ \subseteq \bigcap \tau_\alpha$ لذا $\tau_۱ \subseteq \tau$ پس τ بزرگترین توپولوژی جزء همهٔ τ_αها ست و منحصربفرد است.

۳. ثابت کنید اگر Y زیرفضایی از X و A زیرمجموعه‌ای از Y باشد، آن‌گاه توپولوژی زیرفضایی در A به‌عنوان زیرفضایی از Y همان توپولوژی زیرفضایی در A به عنوان زیرفضایی از X است.

حل: $A \subseteq Y \subseteq X$ می‌دانیم $\tau_Y = \{Y \cap G ; G \in \tau\}$ و

$$(\tau_Y)_A = \{A \cap B ; B \in \tau_Y\} = \{A \cap Y \cap G; G \in \tau\} = \{A \cap G; G \in \tau\} = \tau_A$$

۴. در هر یک از حالات زیر وضعیت توپولوژی زیر فضایی را توصیف نمایید:

۱) $X = \mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی و $Y = [a,b]$.

۲) $X = \mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی و $Y = \mathbb{N}$.

حل: $\tau_Y = \{[a,b] \cap G ;$ باز است $\mathbb{R}$ در $G\}$

در حالـت (۲) نشـان مـی‌دهیم که توپولوژی زیرفضایی همان توپولوژی گسسته است. برای این منظور کافیسـت نشـان دهـیم مجمـوعه‌هـای یکانی در $\mathbb{N}$ با توپولوژی زیرفضایی بازند. فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ دلخـواه باشد داریم $\{n\} = (n - \frac{۱}{۲}, n + \frac{۱}{۲}) \cap \mathbb{N}$ پس $\{n\}$ در $\mathbb{N}$ با توپولوژی زیرفضایی باز است. لذا توپولوژی گسسته = τ_Y.

۵. فـرض کـنید X یـک مجموعه و $\tau = \{A \subseteq X ;$ متناهی است $X - A\} \cup \{\phi\}$. نشان دهید τ یـک توپولوژی روی X است. τ را توپولوژی متمم متناهی روی X نامند. نشان دهید هر زیرمجموعهٔ نامتناهی یک فضای نامتناهی X (با توپولوژی متمم متناهی) در X چگال است.

حـل: اولاً $\phi \in \tau$ و $X \in \tau$ زیـرا $\phi = X - X$ متناهـی اسـت (انـتفای مقـدم) ثانـیاً اگر $\{G_\alpha\}$ خانـواده‌ای از مجمـوعه‌هـای بـاز باشـد، آن‌گـاه بـه ازای هـر α، $X - G_\alpha$ متناهـی اسـت پـس $\bigcap_{\alpha}(X - G_\alpha)$ متناهـی اسـت لـذا $X - \bigcup_{\alpha} G_\alpha$ متناهـی اسـت، پـس $\bigcup_{\alpha} G_\alpha \in \tau$. ثانـیاً اگـر $\{G_i\}_{i=۱}^{n}$ خانـواده‌ای از مجموعه‌های باز باشد به ازای هر i، $X - G_i$ متناهی است و چون اجتماع

متناهـی از مجمـوعه‌هـای متناهی، متناهی است لذا $\bigcup_{i=1}^{n}(X-G_i)$ متناهی است. پس $X-\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ متناهـی بـوده و درنتیجه $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$ پس τ یک توپولوژی روی X است. اگر $A \subseteq X$ نامتناهی و X خود یک فضای نامتناهی باشد، ادعا می‌کنیم $\overline{A}=X$.

فـرض کنـیم $x \in X$ دلخواه باشد و G مجموعهٔ بازی شامل x باشد، لذا $X-G$ متناهی است پس لزوماً G نامتناهی است زیرا اگر G نیز متناهی باشد، داریم:

$X=G \bigcup X-G \Rightarrow$ اجتماع دو مجموعهٔ متناهی متناهی است

کـه تـناقض است. پس چون G و A هر دو نامتناهی‌اند، حتماً $G \bigcap A \neq \phi$ چون اگر $G \bigcap A=\phi$ آن‌گاه $A \subseteq X-G$. یعنی A متناهی است که تناقض است. پس هر مجموعهٔ باز شامل x A را قطع می‌کند لذا $x \in \overline{A}$ پس $X=\overline{A}$.

۶. فرض کنید X یک فضای گسسته باشد و $A \subseteq X$ مجموعه‌های زیر را پیدا کنید.

(i) $\operatorname{int}(A)$ $\qquad$ (ii) $ext(A)$

حل: چون X یک فضای گسسته است پس هر زیرمجموعهٔ X در X باز است لذا مجموعهٔ A در X باز است. پس $\operatorname{int}(A)=A$ و $ext(A)=X-A$ از طرفی $X-A$ نیز باز است.

۷. فرض کنید τ_1 و τ_2 دو توپولوژی بر X باشند و $\tau_1 \subseteq \tau_2$ دراین‌صورت:

(۱) $(\operatorname{int} A)_{\tau_1} \subseteq (\operatorname{int} A)_{\tau_2}$ $\qquad$ (۲) $\partial(A)_{\tau_2} \subseteq \partial(A)_{\tau_1}$

(۳) $(\overline{A})_{\tau_2} \subseteq (\overline{A})_{\tau_1}$

حـل: (۱) فرض کنیم $x \in (\operatorname{int} A)_{\tau_1}$ دراین‌صورت مجموعهٔ بازی در τ_1 شامل x وجود دارد مانند G که $G \subseteq A$. چون $G \in \tau_1$ و $\tau_1 \subseteq \tau_2$ پس G در τ_2 نیز باز است، لذا $x \in (\operatorname{int} A)_{\tau_2}$.

(۲) فـرض کنیم $x \in \partial(A)_{\tau_2}$ پس هر مجموعهٔ باز شامل x در τ_2، X و X-A را قطع می‌کند. چون $\tau_1 \subseteq \tau_2$ پس هر مجموعهٔ باز شامل x در τ_1 نیز A و X-A را قطع می‌کند درنتیجه $x \in \partial(A)_{\tau_1}$

(۳) اگـر $x \in (\overline{A})_{\tau_2}$ آن‌گـاه هـر مجمـوعهٔ باز شامل x در τ_2، A را قطع می‌کند، لذا هرمجموعهٔ باز شامل x در τ_1 چون به τ_2 نیز تعلق دارد، پس A را قطع می‌کند لذا $x \in (\overline{A})_{\tau_1}$.

۸ . ثابت کنید هر گاه A باز باشد، به ازای هر $B \subseteq X$، $A \bigcap \overline{B} \subseteq \overline{A \bigcap B}$.

حل: فرض کنیم A باز باشد و $x \in A \cap \overline{B}$ که B مجموعهٔ دلخواهی در X است چون $x \in \overline{B}$ پس هر مجموعهٔ باز شامل x B را قطع می‌کند فرض کنیم G مجموعهٔ بازی شامل x باشد، لذا

$G \cap B \neq \phi$ و $x \in G \Rightarrow G \cap A \neq \phi$

پس $G \cap (A \cap B) \neq \phi$ لذا $x \in \overline{A \cap B}$.

۹. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از X باشند. ثابت کنید $\partial(A \cup B) \subseteq \partial(A) \cup \partial(B)$ و نشان دهید که اگر $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$ آن‌گاه:

$$\partial(A \cup B) = \partial(A) \cup \partial(B)$$

حل: فرض کنیم $x \in \partial(A \cup B)$ پس هر همسایگی از x $A \cup B$ و $X-(A \cup B)$ را قطع می‌کند. فرض کنیم V همسایگی دلخواهی از x باشد پس

$V \cap (X-(A \cup B)) \neq \phi$ و $V \cap (A \cup B) \neq \phi$

درنتیجه

$(V \cap A) \cup (V \cap B)) \neq \phi$ و $V \cap (X-A) \cap (X-B) \neq \phi$

پس $V \cap (X-A) \neq \phi$ و $V \cap (X-B) \neq \phi$ همچنین $V \cap A \neq \phi$ یا $V \cap B \neq \phi$. اگر $V \cap A \neq \phi$ آن‌گاه $x \in \partial(A)$ پس $x \in \partial(A) \cup \partial(B)$ بنابراین حکم ثابت است. فرض کنیم $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$ پس $\overline{A} \subseteq X-B \subseteq \overline{X-B}$ همچنین $\overline{B} \subseteq \overline{X-A}$ پس

$$\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \cap \overline{(X - A \cup B)} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{((X-A) \cap (X-B))}$$
$$\subseteq (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{X-A} \cap \overline{X-B} = (\overline{A} \cap \overline{X-A} \cap \overline{X-B}) \cup (\overline{B} \cap \overline{X-A} \cap \overline{X-B})$$
$$= (\overline{A} \cap \overline{X-A}) \cup (\overline{B} \cap \overline{X-B}) = \partial(A) \cup \partial(B)$$

پس $\partial(A \cup B) = \partial(A) \cup \partial(B)$.

۱۰. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای باز بودن زیرمجموعهٔ G از فضای توپولوژیک X آن است که برای هر زیرمجموعهٔ A از X داشته باشیم: $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$.

حل: فرض کنیم مجموعهٔ G از فضای توپولوژیک X باز باشد بنابه تمرین ۸، به ازای مجموعهٔ دلخواه A از X $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$ پس $\overline{G \cap \overline{A}} \subseteq \overline{G \cap A}$. از طرفی چون $A \subseteq \overline{A}$ پس $A \cap G \subseteq \overline{A} \cap G$ لذا $\overline{A \cap G} \subseteq \overline{\overline{A} \cap G}$ پس $\overline{A \cap G} = \overline{\overline{A} \cap G}$.

بعکس اگر برای هر $A \subseteq X$، $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$ به ازای $A = X - G$ داریم: $G \cap \overline{X-G} = \phi$. لذا $\overline{X-G} \subseteq X-G$ پس $X-G$ بسته درنتیجه G باز است.

۱۱. اگر $A\subseteq X$، با فرض $\partial(A)=\overline{A}\cap\overline{(X-A)}$ نشان دهید :

(آ) $A^{\circ}\bigcap\partial(A)=\phi$ و $\overline{A}=A^{\circ}\bigcup\partial(A)$

(ب) U باز است اگر و فقط اگر $\partial(U)=\overline{U}-U$

(ج) $\partial(A)=\phi$ اگر و فقط اگر A باز و بسته باشد

(د) برای هر زیرمجموعهٔ باز U از X آیا $U=\overline{(U)}^{\circ}$ ؟ چرا؟

حل: (آ) $\partial(A)=\overline{A}\cap\overline{(X-A)}=\overline{A}\bigcap(X-A)^{\circ}\subseteq X-A^{\circ}\Rightarrow\partial(A)\bigcap A^{\circ}=\phi$

$$A^{\circ}\bigcup\partial(A)=A^{\circ}\bigcup(\overline{A}\bigcap\overline{X-A})=(A^{\circ}\bigcup\overline{A})\bigcap(A^{\circ}\bigcup\overline{X-A})$$
$$=\overline{A}\bigcap[(X-\overline{X-A})\bigcup\overline{X-A}]=\overline{A}\bigcap X=\overline{A}$$

(ب)

$$\partial(U)=\overline{U}\bigcap\overline{X-U}=\overline{U}\bigcap(X-U)=\overline{U}-U$$

اگر U باز باشد، $X-U$ بسته است پس $\overline{X-U}=X-U$:

$$\partial(U)=\overline{U}\bigcap\overline{X-U}\subseteq\overline{U}\bigcap(X-U)=\overline{U}-U$$

بالعکس اگر $\partial(U)=\overline{U}-U$ آن‌گاه چون:

$\partial(U)=\overline{U}\bigcap X-U\subseteq X-U\Rightarrow\partial(X-U)\subseteq X-U\Rightarrow$ بسته $X-U$

$\Rightarrow$ باز است U

(ج) فرض کنیم $\partial(A)=\phi$ پس $\overline{A}\cap\overline{(X-A)}=\phi$ لذا $A\subseteq\overline{A}\subseteq X-\overline{X-A}=A^{\circ}$ پس $A=A^{\circ}$ یعنی A باز است و از طرفی $A\subseteq A^{\circ}\subseteq\overline{A}$ یعنی $\overline{A}=A$ پس A بسته است لذا A هم باز و هم بسته است. همچنین اگر A هم باز و هم بسته باشد، به‌سادگی می‌توان دید که $\partial A=\phi$.

(د) خیر. اگر $U=(۰,۱)\bigcup(۱,۲)$ آن‌گاه U زیر مجموعهٔ بازی از $\mathbb{R}$ است، $\overline{U}=[۰,۲]$ و $\overline{(U)}^{\circ}=(۰,۲)$ درحالی‌که $U\neq(۰,۲)$.

۱۲. فرض کنید (Y,τ_Y) زیر فضایی از (X,τ) باشد و به ازای هر زیرمجموعهٔ A از Y، $\overline{A}$ و A° را به‌ترتیب بستار و درون A نسبت به τ و $(\overline{A})_Y$ و $(A^{\circ})_Y$ را به‌ترتیب بستار و درون A نسبت به τ_Y در نظر بگیرید، ثابت کنید:

(۱) $(\overline{A})_Y=\overline{A}\bigcap Y$ (۲) $A^{\circ}=(A^{\circ})_Y\bigcap Y^{\circ}$

حل: (۱) چون $A\subseteq Y$ و $A\subseteq \overline{A}$ پس $A\subseteq \overline{A}\cap Y$ اما $\overline{A}\cap Y$ در Y بسته است پس $(\overline{A})_Y\subseteq \overline{A}\cap Y$ حال چون $(\overline{A})_Y$ در Y بسته است پس $(\overline{A})_Y=Y\cap B\subseteq B$ که B در X بسته است پس $\overline{A}\subseteq B$ لذا

$$\overline{A}\cap Y\subseteq B\cap Y=\overline{A}_Y\Rightarrow \overline{A}\cap Y=\overline{A}_Y$$

(۲) فرض کنیم $x\in A^\circ$ پس همسایگی U از x در X هست که $x\in U\subseteq A\subseteq Y$ لذا $x\in Y^\circ$ و $x\in Y\cap U$ اما چون U یک همسایگی از x در X است، پس مجموعهٔ باز G در X وجود دارد که: $x\in G\subseteq U\subseteq A\subseteq Y\Rightarrow x\in Y\cap G\subseteq Y\cap U\subseteq A$

از طرفی $Y\cap G$ در Y باز است پس $Y\cap U$ یک همسایگی از x در Y می‌باشد که در A واقع شده است، پس $x\in A^\circ_Y$ پس $x\in A^\circ_Y\cap Y^\circ$ لذا $A^\circ\subseteq A^\circ_Y\cap Y^\circ$.

بعکس فرض کنیم $x\in A^\circ_Y\cap Y^\circ$ پس در Y همسایگی V از x هست که: $x\in V\subseteq A$. چون V یک همسایگی از x در Y است، پس مجموعهٔ باز $G\cap Y$ در Y وجود دارد که: $x\in G\cap Y\subseteq V\subseteq A$ و G در X باز است اما $x\in Y^\circ$ پس $x\in G\cap Y^\circ\subseteq G\cap Y\subseteq V\subseteq A$ اما $G\cap Y^\circ$ در X باز است پس $x\in A^\circ$ لذا $A^\circ_Y\cap Y^\circ\subseteq A^\circ$.

۱۳. فرض کنید A و B و A_α زیرمجموعه‌هایی از فضای X باشند، ثابت کنید:

(الف) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ **(ب)** $\overline{\cup A_\alpha}\supseteq\cup\overline{A}_\alpha$ آیا تساوی برقرار است؟ چرا؟

حل: (الف)

$$\left.\begin{array}{l}A\subseteq\overline{A}\\ B\subseteq\overline{B}\end{array}\right\}\Rightarrow A\cup B\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}\Rightarrow\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$$

$$\left.\begin{array}{l}A\subseteq A\cup B\\ B\subseteq A\cup B\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\overline{A}\subseteq\overline{A\cup B}\\ \overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}\end{array}\Rightarrow\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$$

(ب)

$$\forall\alpha;\quad A_\alpha\subseteq\cup A_\alpha\Rightarrow\overline{A}_\alpha\subseteq\overline{\cup A_\alpha}\,;\forall\alpha\Rightarrow\cup\overline{A}_\alpha\subseteq\overline{\cup A_\alpha}$$

تساوی در حالت کلی برقرار نیست به‌طور مثال اگر $A_n=[0,1-\frac{1}{n})$ آن‌گاه $\bigcup_{n\in N} A_n=[0,1)$

پس $\overline{\bigcup_{n\in N} A_n}=[0,1]$ اما $\overline{A_n}=[0,1-\frac{1}{n}]$ و $\overline{A_n}=[0,1)$.

۱۴. فشردگی دنباله‌ای تحت توابع پیوسته حفظ می‌شود.

حل: اگر X فشردهٔ دنباله‌ای و $f:X\to Y$ پیوسته و برو باشد و $\{y_n\}$ دنباله‌ای در Y باشد لذا $\{f^{-1}(y_n)\}$ دنباله‌ای در X است پس زیر دنباله‌ای همگرا دارد پس $f^{-1}(y_{r_n})\to x$. پس چون f پیوسته است $f(f^{-1}(y_{r_n}))\to f(x)$ و به‌دلیل برو بودن f داریم $y_{r_n}\to f(x)$ لذا Y نیز فشردهٔ دنباله‌ای است.

۱۵. الف) ثابت کنید گردایهٔ شمارای $\beta=\{(a,b);a<b$ و b,a گویا $\}$ پایه‌ای برای توپولوژی معمولی R است.

ب) نشان دهید $\beta'=\{[a,b);a<b,a,b\in Q\}$ پایه‌ای است که توپولوژی تولید شده بوسیلهٔ آن، با توپولوژی حد پایینی (R_l) روی R متفاوت است.

حل: الف) با توجه به اینکه بازه‌های باز (a,b) که در آن $a<b$ و a و b اعداد حقیقی هستند، یک پایه برای توپولوژی معمولی R است، کافی است نشان دهیم که برای هر $x\in(a,b)$ اعداد گویای $p<q$ موجودند که $p<x<q$ برای این منظور از $a<x<b$ داریم اعداد گویای p و q موجودند به قسمی که $a<p<x<q<b$ لذا $x\in(p,q)\subseteq(a,b)$.

ب) ابتدا توپولوژی حد پایینی را یادآوری می‌کنیم: اگر β' گردایه‌ای از همهٔ بازه‌های نیم باز به شکل :

$$[a,b)=\{x;a\le x<b\}\quad ;a<b$$

باشد، توپولوژی تولید شده توسط β' را توپولوژی حد پایینی می‌نامیم. ابتدا نشان می‌دهیم β' در شرایط پایه صدق می‌کند. اولاً $R=\bigcup_{B\in\beta'} B$. زیرا برای هر $x\in R$ داریم:

$$x\in[x-\frac{1}{2},x+\frac{1}{2})\subseteq\bigcup_{B\in\beta'}\beta$$

حال اگر $[a,b)$ و $[c,d)$ دو عضو β' باشند و $x\in[a,b)\cap[c,d)$ آن‌گاه چند حالت اتفاق می‌افتد:

الف) $x\in[c,b)\in\beta'$

ب) $x \in [c,d) \in \beta'$

ج) $x \in [a,d) \in \beta'$

د) $x \in [a,b) \in \beta'$

لذا β' پایه‌ای برای یک توپولوژی روی R است. اینک فرض می‌کنیم:

$$\beta = \{[a,b); a<b, a,b \in Q\}$$

ابتدا نشان می‌دهیم β پایه‌ای برای یک توپولوژی روی R است. اولاً $R = \bigcup_{B\in\beta} B$ زیرا

$$\forall x \in R \qquad \exists\, p,q \in Q; \qquad x \in [p,q) \subseteq R$$

همچنین اگر $x \in [p,q) \cap (r,s)$ آن‌گاه مانند حالات صفحهٔ قبل عضوی از β وجود دارد که $x \in [p_1,q_1) \subseteq [p,q) \cap (r,s)$ لذا β یک پایه است.

اینک نشان می‌دهیم توپولوژی تولید شده توسط β یعنی τ با توپولوژی حد پایینی یعنی R_l تفاوت دارد. اگر $[p,q) \in \tau$ واضح است که $[p,q) \in \tau$ لذا $\tau \subseteq R_l$. ادعا می‌کنیم $\tau \neq R_l$. زیرا اگر $[a,b) \in R_l$ و $a \in R - Q$ آن‌گاه $(a,b) \notin \tau$ چون درغیر اینصورت باید $[c,d) \in \beta$ موجود باشد که:

$$a \in [c,d) \subseteq [a,b) \Rightarrow a \leq c$$

از طرفی $[c,d) \subseteq [a,b)$ پس $c \leq a$ پس $a=c$ یعنی a گویا است.

۱۶. نشان دهید R_l از توپولوژی معمولی روی $\mathbb{R}$ اکیداً ظریفتر است.

حل: اگر (a,b) عضوی از پایهٔ توپولوژی معمولی روی $\mathbb{R}$ باشد.

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [a+\frac{1}{n}, b) \subseteq R_l$$

پس توپولوژی معمولی ظریفتر از R_l است. اگر $[c,d) \in R_l$ آن‌گاه $[c,d)$ در $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی باز نیست پس توپولوژی R_l اکیداً از توپولوژی معمولی روی $\mathbb{R}$ ظریفتر است.

۱۷. توپولوژی ترتیبی بر روی هر یک از مجموعه‌های $X=R$ و $X=Z^+$ (با رابطهٔ "$<$") توصیف نمایید.

حل: فرض کنید "$<$" یک رابطهٔ ترتیب ساده روی X باشد و β خانوادهٔ تمام مجموعه‌هایی به‌صورت زیر باشند:

$$(a,b) = \{x \in X; a<x<b\}$$
$$[a_0, b) = \{x \in X; a_0 \leq x < b\}$$
$$(a, b_0] = \{x \in X; a < x \leq b_0\}$$

$a_\circ$ کوچکترین عضو X در صورت وجود.

$b_\circ$ بزرگترین عضو X در صورت وجود.

درایـن‌صـورت β پایـه‌ای بـرای یـک توپولوژی روی X است که به توپولوژی ترتیبی معروف است. (واضـح است که اگر X دارای بزرگترین و کوچکترین عضو نباشد مجموعه‌هایی به صورت $(a,b_\circ]$ و $[a_\circ,b)$ وجـود نخواهـند داشـت). نشـان می‌دهیم β یک پایه برای یک توپولوژی روی X است. اگـر X دارای کوچکترین عضو باشد، به‌طور مثال $a_\circ$ آن‌گاه $a_\circ\in[a_\circ,b)$ که $b\in X$. و اگر $b_\circ$ بزرگتـرین عضـو X باشـد $b_\circ\in(a,b_\circ]$. اگـر $x\in X$ دلخـواه باشـد $x\in(a,b)$ نتیجه می‌شود $X=\bigcup_{B\in\beta}B$.

اگـر $x\in B_1\cap B_2$ با توجه به اینکه B_1 و B_2 به چه صورتی باشند، حالت‌های مختلف را می‌توان درنظر گرفت:

$$(i)\ x\in[a_\circ,b)\cap(a,b_\circ]\Rightarrow x\in(a,b)\subseteq[a_\circ,b)\cap(a,b_\circ]$$

پـس β یک پایه است. حال اگر $X=\mathbb{R}$ چون $\mathbb{R}$ دارای کوچکترین و بزرگترین عضو نیست آن‌گاه $\beta=\{(a,b);a,b\in\mathbb{R}\}$ لـذا توپولـوژی ترتیبـی با توپولوژی معمولی روی $\mathbb{R}$ برابر است. و اگر $X=Z^+$ آن‌گـاه Z^+ دارای بزرگتـرین عضو نیست و کوچکترین عضو Z^+، ۱ است. نشان دهیم توپولوژی ترتیبی روی Z^+ با توپولوژی گسسته روی Z^+ برابر است:

$$[1,2)=\{x\in Z^+;1\le x<2\}=\{1\}\in Z$$
$$\forall n\in Z^+;\quad \{n\}=(n-1,n+1)\in Z$$

پس مجموعه‌های یکانی در Z^+ بازند لذا توپولوژی ترتیبی و گسسته در Z^+ با هم برابرند.

۱۸. اگـر $\pi_1:X\times Y\to X$ و $\pi_2:X\times Y\to Y$ توابـع تصـویری باشـند کـه در آن X و Y فضاهای توپولوژی هستند، نشان دهید که:

$$S=\{\pi_1^{-1}(U);\ \text{در } X \text{ باز است } U\}\cup\{\pi_2^{-1}(V);\ \text{در } Y \text{ باز است } V\}$$

یک زیر پایه برای توپولوژی حاصل‌ضربی است.

تعـریف: فـرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند، توپولوژی حاصل‌ضربی روی $X\times Y$ یک توپولوژی روی $X\times Y$ است که پایه‌ای به صورت:

$$\beta=\{U\times V;U\in\tau_X,V\in\tau_Y\}$$

دارد. نشان می‌دهیم β یک پایه است. چون X در τ_X و Y در τ_Y باز است، پس $X\times Y$ خود یک عضو β می‌باشد ، فرض کنیم $(x,y)\in(U_1\times V_1)\bigcap(U_2\times V_2)$ دراین‌صورت $x\in U_1$، $x\in U_2$، $y\in V_1$، $y\in V_2$ پس:

$$(x,y)\in(U_1\times V_1)\bigcap(U_2\times V_2)\in\beta$$

پس β یک پایه است و اینک به اثبات تمرین می‌پردازیم:

فرض کنیم τ توپولوژی حاصل‌ضربی روی $X\times Y$ و τ' توپولوژی تولید شده بوسیلهٔ s باشد.

فرض کنیم $U\times Y\in\beta$ می‌دانیم: $\pi_2^{-1}(V)=X\times V$ و $\pi_1^{-1}(U)=U\times Y$. پس

$$U\times V=(U\times Y)\bigcap(X\times Y)=\pi_1^{-1}(U)\bigcap\pi_2^{-1}(U)\in\beta'\subseteq\tau'$$

که β' پایهٔ تولید شده توسط S است پس $\tau\subseteq\tau'$.

برای اثبات $\tau'\subseteq\tau$ کافی است نشان دهیم $S\subseteq\tau$. فرض کنیم:

$$S=\pi_1^{-1}(U)\in S\Rightarrow\pi_1^{-1}(U)=U\times V\in\tau, S=\pi_2^{-1}(U)=X\times V\in\tau$$

لذا $\tau=\tau'$.

۱۹. در یک فضای توپولوژی X اگر $A^\circ=B^\circ=\phi$ و A بسته باشد، ثابت کنید $(A\bigcup B)^\circ=\phi$.

حل: فرض کنیم $(A\bigcup B)^\circ\neq\phi$ قرار می‌دهیم : $S=\left\{x\in(A\bigcup B)^\circ \ \& \ x\notin A\right\}$ چون $(A\bigcup B)^\circ\subseteq A\bigcup B$ پس $S\subseteq B$ داریم: $S=(A\bigcup B)^\circ\bigcap A^\circ$. چون A بسته است پس $X-A$ باز است و $(A\bigcup B)^\circ$ باز است لذا S باز است بنابراین از $S\subseteq B$ داریم $S\subseteq B^\circ=\phi$ پس $S=\phi$ لذا $(A\bigcup B)^\circ\bigcap(X-A)=\phi$ پس $(A\bigcup B)^\circ\subseteq A$ لذا $(A\bigcup B)^\circ\subseteq A^\circ=\phi$ درنتیجه $(A\bigcup B)^\circ=\phi$.

۲۰. اگر $Y\subseteq X$ و β یک پایه برای X باشد، آن‌گاه $\varepsilon=\left\{B\bigcap Y;B\in\beta\right\}$ یک پایهٔ برای Y است.

حل: اگر $Y\subseteq X$ زیرفضایی از X باشد $\tau_Y=\left\{Y\bigcap G;G\in\tau_X\right\}$ فرض کنیم $C\in\tau_Y$ لذا مجموعهٔ بازی مانند G در X هست که $C=G\bigcap Y$ چون β یک پایه برای X است. پس $G=\bigcup_{B\in A}B$ لذا $\bigcup_{B\in A}(B\bigcap Y)\in\varepsilon$ $\varepsilon=\bigcup_{B\in A}\beta\bigcap Y=$ که در آن $A\subset B$ و

$$Y=(\bigcup_{B\in\beta}B)\bigcap Y=\bigcup_{B\in\beta}(B\bigcap Y)$$

پس ε یک پایه برای Y است.

۲۱. فرض کنید Y زیر فضایی از X باشد:

$$A \subseteq Y \text{ در } Y \text{ بسته است } \Leftrightarrow A = C \cap Y \text{ که } C \text{ در } X \text{ بسته است}$$

حـل: اگـر $A \subseteq Y$ در Y بسته باشد آن‌گاه $Y - A$ در Y باز است پس مجموعهٔ باز G در X هست که

$$Y - A = G \cap Y \Rightarrow A = Y \cap (X - G)$$

زیرا

$$(Y - A) = Y \cap (X - A) = G \cap Y \Rightarrow X - (Y - A) = X - (G \cap Y)$$
$$\Rightarrow X - (Y \cap (X - A)) = (X - G) \cup (X - Y)$$
$$\Rightarrow (X - Y) \cup (A) = (X - G) \cup (X - Y) \Rightarrow ((X - Y) \cup A) \cap Y$$
$$= ((X - G) \cup Y^C) \cap Y$$
$$A \cap Y = A = (X - G) \cap Y$$

که $(X - G)$ در X بسته است.

۲۲. فرض کنید $f : X \to Y$ تابعی باشد، نشان دهید که:

(الف) f پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر عضو B از یک پایه β برای Y، $f^{-1}(B)$ باز باشد.

(ب) f پیوسـته اسـت اگـر و تنها اگر برای هر $C \in \xi$ که ξ زیر پایهٔ Y است، $f^{-1}(\xi)$ در X باز باشد.

حـل: **(الـف)** فرض کنیم f پیوسته باشد و $B \in \beta$ لذا B در Y باز است پس $f^{-1}(B)$ در X باز اسـت. بـه عکـس فـرض کنـیم برای هر عضو B از β، $f^{-1}(B)$ در X باز باشد نشان می‌دهیم f پیوسته است. فرض کنیم G در Y باز باشد پس $G = \bigcup_{B \in \beta} B$ پس:

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(\bigcup_{B \in \beta} B) = \bigcup_{B \in \beta} f^{-1}(B)$$

چـون بـرای هـر $B \in \beta$، $f^{-1}(B)$ در X بـاز اسـت، پس $f^{-1}(G)$ در X باز است لذا f بر X پیوسته است.

(ب) اگر f پیوسته باشد چون $\xi \subseteq \tau_Y$ پس برای هر $C \in \xi$، $f^{-1}(C)$ در X باز است. به عکس فـرض کنـیم β' پایـهٔ تولـید شـده توسط زیر پایهٔ ξ باشد لذا هر عضو $B \in \beta$ به صورت اشتراک متناهی از اعضای ξ است، لذا :

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} C_i; \quad C_i \in \xi$$

حال نشان می‌دهیم $f^{-1}(B)$ در X باز است:

$$f^{-1}(B)=f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} C_i)=\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(C_i)$$

چون $f^{-1}(C_i)$ ها در X بازند و اشتراک تعداد متناهی مجموعهٔ باز، باز است پس $f^{-1}(B)$ در X باز است پس بنا به (الف) f پیوسته است.

۲۳. اگر $f: X \to Y$ پیوسته باشد و $f(X) \subseteq Z \subseteq Y$ آن‌گاه $\overline{f}: X \to Z$ که برای هر $x \in X$، $\overline{f}(x)=f(x)$ پیوسته است.

حل: فرض کنیم $A \subseteq Z$ در Z باز باشد چون Z زیر فضایی در Y است، پس $A=Z\bigcap G$ که G در Y باز است. چون $f: X \to Y$ پیوسته است، پس $f^{-1}(G)$ در X باز از طرفی $f^{-1}(Z)=X$ پس

$$\overline{f}^{-1}(A)=\overline{f}^{-1}(Z\bigcap G)=\overline{f}^{-1}(Z)\bigcap \overline{f}^{-1}(G)=f^{-1}(Z)\bigcap f^{-1}(G)$$
$$=X\bigcap f^{-1}(G)$$

پس $\overline{f}^{-1}(A)$ در X باز است لذا $\overline{f}$ پیوسته است.

۲۴. فرض کنیم $X=\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ و برای هر α، U_α در X باز باشد اگر f تابعی باشد که $f: X \to Y$ و برای هر α ، $f_\alpha = f|_{u_\alpha}: U_\alpha \to Y$ پیوسته باشد f نیز پیوسته می‌باشد.

حل: فرض کنیم $G \subseteq Y$ در Y باز باشد پس برای هر α، $f_\alpha^{-1}(G)$ در U_α باز است چون U_α در X باز است اما

$$f^{-1}(G)=f^{-1}(G)\bigcap X=f^{-1}(G)\bigcap(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(f^{-1}(G)\bigcap U_\alpha)$$
$$=\bigcup_{\alpha\in I}(f_\alpha^{-1}(G))$$

$f^{-1}(G)$ در X باز است. پس f پیوسته است.

۲۵. فرض کنید $X=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ و C_iها در X بسته باشند تابع $f: X \to Y$ را در نظر بگیرید اگر برای هر i، $f_i = f|_{C_i}: C_i \to Y$ پیوسته باشد، f نیز پیوسته خواهد بود.

حل: فرض کنیم $F \subseteq Y$ بسته باشد چون به ازای هر i، f_i پیوسته است پس $f_i^{-1}(F)$ در C_i در X بسته است پس $f_i^{-1}(F)$ در X بسته است، لذا:

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap X = f^{-1}(F) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (f^{-1}(F) \cap C_i) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(F)$$

چون اجتماع تعداد متناهی مجموعهٔ بسته، بسته است پس $f^{-1}(F)$ در X بسته است لذا f پیوسته است.

۲۶. **لم چسب:** فرض کنید $f: A \to Y$ و $g: B \to Y$ که A و B در X بسته‌اند و $X = A \cup B$. به‌طوری‌که برای هر $x \in A \cap B$، $f(x) = g(x)$ دراین‌صورت $h: X \to Y$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، پیوسته است:

$$h(x) = \begin{cases} f(x); x \in A \\ g(x); x \in B \end{cases}$$

حل: فرض کنیم $C \subseteq Y$ بسته باشد دراین‌صورت

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C) \qquad (1)$$

چون f پیوسته است پس $f^{-1}(C)$ در A بسته است و چون g پیوسته است $g^{-1}(C)$ در B بسته است لذا $h^{-1}(C)$ در $X = A \cup B$ بسته است پس h پیوسته است.

(دلیل برقراری تساوی (۱) این است که $f^{-1}(C) \subseteq A$ و $g^{-1}(C) \subseteq B$ پس $f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C) \subseteq A \cup B$. اگر $x \in f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$ و $x \in f^{-1}(C)$ آن‌گاه $x \in A$ پس $f(x) = h(x)$ لذا $x \in h^{-1}(C)$ پس $f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C) \subseteq h^{-1}(C)$. و اگر $x \in h^{-1}(C)$ آن‌گاه اگر $x \in A$، $f(x) = h(x)$ پس $x \in f^{-1}(C)$ لذا $x \in f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$ پس $h^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$).

۲۷. گزارهٔ زیر را اثبات و یا نقض کنید:

اگر $f: X \to Y$ نگاشتی باز باشد، آن‌گاه برای هر $A \subseteq Y$، $f^{-1}(\overline{A}) \subseteq \overline{f^{-1}(A)}$.

حل: فرض کنیم $A \subseteq Y$ و $x \in f^{-1}(\overline{A})$ لذا $f(x) \in \overline{A}$ فرض کنیم G مجموعهٔ بازی شامل x باشد پس $f(G)$ در Y باز و شامل $f(x)$ است، لذا یک همسایگی از $f(x)$ است چون $f(x) \in \overline{A}$ پس $f(G) \cap A \neq \phi$. فرض کنیم $y \in f(G) \cap A$ لذا $x' \in G$ هست که

$y=f(x')$ و $y\in A$ پـــــس $x'\in f^{-1}(A)$ پس $x'\in G\cap f^{-1}(A)$ لـــــذا $G\cap f^{-1}(A)=\phi$ اما G مجموعهٔ باز دلخواهی شامل x بود پس $x\in\overline{f^{-1}(A)}$ لذا $f^{-1}(\overline{A})\subseteq\overline{f^{-1}(A)}$.

۲۸. Y را یک مجموعهٔ مرتب با توپولوژی ترتیبی درنظر بگیرید، فرض کنید توابع $f,g:X\to Y$ پیوسته باشند:

(الف) نشان دهید که $\{x; f(x)\le g(x)\}$ در X بسته می‌باشد.

(ب) فرض کنید $h:X\to Y$ بصورت $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ تعریف شود. ثابت کنید h تابعی پیوسته است.

حل:

(الف) $$A=\{x; f(x)\le g(x)\}\subseteq X$$

نشان می‌دهیم $X-A$ در X باز است. فرض کنیم $a\in X-A$ لذا $f(a)>g(a)$.

(ابتدا نشان می‌دهیم هر مجموعهٔ مرتب با توپولوژی ترتیبی هاسدورف است. فرض کنیم $x\neq y$ دو نقطهٔ مجزا در فضای مرتب X باشند لذا $x<y$ یا $y<x$. فرض کنیم $x<y$ دراین‌صورت نقطه‌هایی مانند z_i که $i=1,2,3$ در X وجود دارد که $z_1<x<z_2<y<z_3$ لذا همسایگی‌های باز (z_2,z_3) و (z_1,z_2) وجود دارند به قسمی که $x\in(z_1,z_2)$ و $y\in(z_2,z_3)$ و $(z_1,z_2)\cap(z_2,z_3)=\phi$ پس X با توپولوژی ترتیبی هاسدورف است.) چون Y یک فضای توپولوژی ترتیبی است، پس هاسدورف است و $f(a)\neq g(a)$ پس دو. همسایگی U_1 و U_2 بترتیب از $f(a)$ و $g(a)$ در Y وجود دارد که $U_1\cap U_2=\phi$. لذا مجموعه‌های باز $(c_1,d_1)\subseteq U_1$ و $(c_2,d_2)\subseteq U_2$ وجود دارند که بترتیب شامل $f(a)$ و $g(a)$ می‌باشند چون $\phi=(c_1,d_1)\cap(c_2,d_2)$ پس برای $i=1,2$ داریم $c_i\neq d_i$. ادعا می‌کنیم برای هر $y_1\in(c_1,d_1)$ و هر $y_2\in(c_2,d_2)$ داریم $y_1<y_2$. چون $c_1<f(a)<d_1$ و $c_2<g(a)<d_2$ برای y_1 و y_2 حالات مختلفی اتفاق می‌افتد:

$(i)\ c_1<y_1<f(a),\quad c_2<y_2<g(a)$

$(ii)\ c_1<y_1<f(a),\quad g(a)<y_2<d_2$

$(iii)\ f(a)<y_1<d_1,\quad g(a)<y_2<d_2$

$(iv)\ f(a)<y_1<d_1,\quad c_2<y_2<g(a)$

در اینجا حالت (ii) را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $y_1 \not< y_2$ لذا $y_1 \geq y_2$ دراین‌صورت داریم:

$$g(a) < y_2 \leq y_1 < f(a)$$

پس $g(a) < f(a)$ کـه تناقض است. لذا برای هر $y_1 \in (c_1, d_1)$ و هر $y_2 \in (c_2, d_2)$ داریم $y_1 < y_2$. قـرار مـی‌دهیم $H_1 = f^{-1}(c_1, d_1)$ و $H_2 = f^{-1}(c_2, d_2)$ چون f و g پیوسته‌اند H_1 و H_2 در X بازنـد داریـم $a \in H_1 \bigcap H_2$. فـرض کنـیم $t \in H_1 \bigcap H_2$ لـذا $g(t) \in (c_2, d_2)$ و $f(t) \in (c_1, d_1)$ پس بنا به آنچه ثابت کردیم $f(t) < g(t)$ یعنی $t \notin A$ لـذا $a \in H_1 \bigcap H_2 \subseteq X - A$ پـس $H_1 \bigcap H_2$ مجمـوعه‌ای بـاز شـامل a اسـت لـذا $a \in (X - A)^\circ$ یعنی $X - A$ در X باز درنتیجه A در X بسته است.

(ب) قرار می‌دهیم

$$A = \{x; f(x) \leq g(x)\}, B = \{x; g(x) \leq f(x)\}$$

دراین‌صورت بنا به قسمت (الف)، A و B دو مجموعهٔ بسته در X اند و $X = A \bigcup B$ و اگر

$$x \in A \bigcap B \Rightarrow f(x) \leq g(x), g(x) \leq f(x) \Rightarrow g(x) = f(x)$$

حال تابع $h: X \to Y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h(x) = \begin{cases} f(x); x \in A \\ g(x); x \in B \end{cases}$$

چون $f, g: X \to Y$ بر X پیوسته‌اند $f: Y \to A$ و $g: B \to Y$ نیز پیوسته‌اند. لذا $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ پس بنا به لم چسب $h: X \to Y$ پیوسته است.

۲۹. فـرض کنید $\{A_\alpha\}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های همبند فضای X باشد که دوبدوی آنها نامنفک باشند نشان دهید که $\bigcup A_\alpha$ نیز همبند است.

حـل: اگـر $f: \bigcup A_\alpha \to \{0,1\}$ پیوسته باشد آن‌گاه $f|_{A_{\alpha_0}}: A_{\alpha_0} \to \{0,1\}$ پیوسته است که بدلیل همبـندی A_{α_0}، $f(A_{\alpha_0}) = \{0\}$ یـا $\{1\}$ فـرض مـی‌کنیم $f(A_\alpha) = \{0\}$ به ازای هر $\alpha_0 \neq \alpha$، داریم $f(A_\alpha) = \{0\}$ زیرا

$$f(A_\alpha \bigcap \overline{A_{\alpha_0}}) \subseteq f(A_\alpha) \bigcap f(\overline{A_{\alpha_0}}) \subseteq f(A_\alpha) \bigcap \overline{f(A_{\alpha_0})}$$

لذا به ازای هر α، $f(A_\alpha) = \{0\}$ پس

$$f(\bigcup A_\alpha) = \bigcup f(A_\alpha) = \bigcup \{0\} = \{0\}$$

لذا f ثابت است درنتیجه $\bigcup A_\alpha$ همبند است.

۳۰. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه زیرمجموعهٔ A از فضای توپولوژیک X هر زیر مجموعهٔ چگال در X را قطع کند آن است که $\text{int}\,(A)$ غیر تهی باشد.

حل: ابتدا فرض می‌کنیم $A \subseteq X$ هر زیر مجموعهٔ چگال در X را قطع کند، فرض می‌کنیم $\text{int}\, A = \phi$

$$\overline{X - A} = \overline{X - A} \bigcup \phi = \overline{X - A} \bigcup \text{int}\, A = X$$

لذا $X - A$ در X چگال است پس بنا به فرض $X - A \bigcap A \neq \phi$ که تناقض است. پس $\text{int}\, A \neq \phi$. اینک فرض کنیم $\text{int}\, A \neq \phi$ و $B \subseteq X$ در X چگال باشد، باید نشان دهیم $A \bigcap B \neq \phi$. فرض کنیم $A \bigcap B = \phi$ پس $A \subseteq X - B$. چون $\overline{B} = X$ پس $\text{int}\,(X - B) = \phi$ زیرا:

$$\text{int}\,(X - B) \bigcap \overline{B} = \phi \quad \text{و} \quad \text{int}\,(X - B) \bigcup \overline{B} = X$$

پس $\text{int}\, A = \phi$ که تناقض است لذا $\text{int}\, A = \phi$.

۳۱. فرض کنید E و G دو زیر مجموعهٔ چگال از فضای توپولوژیک X باشند، ثابت کنید که اگر E و G باز باشند آن‌گاه $E \bigcap G$ نیز در X چگال است.

حل: فرض کنیم E و G باز و چگال باشند بنا به تمرین ۱۰:

$$\overline{E \bigcap G} = \overline{E \bigcap \overline{G}} = \overline{E \bigcap X} = \overline{E} = X$$

لذا $E \bigcap G$ در X چگال است.

۳۲. ثابت کنید:

(الف) اگر A هیچ جا چگال باشد آن‌گاه $X - A$ در X چگال است.

(ب) شرط لازم و کافی برای آنکه A هیچ جا چگال باشد آن است که $A \subseteq \overline{X - \overline{A}}$.

(ج) مرز هر زیرمجموعهٔ باز یا بسته هیچ جا چگال است.

حل:(الف) فرض کنیم A هیچ جا چگال باشد لذا به ازای هر زیر مجموعهٔ باز غیر تهی G از X، $G \subseteq (\overline{A})^c$. لذا $\text{int}\,(\overline{A}) == \phi$، اما

$$\overline{X - A} = X - \text{int}\, A$$

از طرفی $A \subseteq \overline{A}$ پس $\text{int}\,(A) \subseteq \text{int}\, \overline{A} = \phi$ لذا $\text{int}\, A = \phi$ پس $\overline{X - A} = X$ یعنی $X - A$ در X چگال است.

(ب) فرض کنیم A هیچ جا چگال باشد لذا $\operatorname{int}\overline{A}=\phi$. می‌دانیم $\overline{X-\overline{A}}=X-\operatorname{int}(\overline{A})$ یعنی $\overline{X-\overline{A}}=X$ پس $A\subseteq\overline{X-\overline{A}}$. به عکس با فرض $A\subseteq\overline{X-\overline{A}}$ نشان می‌دهیم A هیچ جا چگال است. اگر A هیچ جا چگال نباشد مجموعهٔ بازی مانند G وجود دارد که $G\subseteq\overline{A}$ لذا

$$X-\overline{A}\subseteq X-G\Rightarrow\overline{X-\overline{A}}\subseteq X-G\Rightarrow A\subseteq X-G\Rightarrow\overline{A}\subseteq X-G$$

لذا $G\subseteq X-G$ که تناقض است.

(ج) فرض کنیم A مجموعه‌ای باز باشد و $\partial(A)$ مرز A باشد، بنا به (ب) کافی است نشان دهیم $\partial(A)\subseteq\overline{X-\overline{\partial(A)}}$ اما $\partial(A)\subseteq X-A$ زیرا $X-A$ بسته است و $\partial(A)=\partial(X-A)$ پس $A\subseteq X-\partial(A)$ لذا

$$\partial(A)=\overline{A}\bigcap\overline{(X-A)}\subseteq\overline{X-\partial(A)}\bigcap\partial(A)\subseteq\overline{X-\partial(A)}$$

اگر A در X بسته باشد $\partial(A)\subseteq A$ لذا $X-A\subseteq X-\partial(A)$

$$\partial(A)=\overline{A}\bigcap\overline{X-A}=A\bigcap\overline{X-A}\subseteq\overline{X-A}\subseteq\overline{X-\partial(A)}$$

پس $\partial(A)$ هیچ جا چگال است.

۳۳. فرض کنید X و Y و Z سه فضای توپولوژیک باشند و $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ ثابت کنید:

(الف) اگر f و g باز (بسته) باشند آن‌گاه $g\,o\,f$ باز (بسته) است.

(ب) اگر $g\,o\,f$ باز (بسته) باشد و f پیوسته و برو باشد آن‌گاه g باز (بسته) است.

(ج) اگر $g\,o\,f$ باز (بسته) و g پیوسته و یک به یک آن‌گاه f باز (بسته) است.

حل: **(الف)** فرض کنیم $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ باز باشند و G در X باز باشد لذا $f(G)$ در Y باز است و چون $g:Y\to Z$ باز است پس $g(f(G))$ در Z باز است پس $g\,o\,f$ باز است.

(ب) فرض کنیم G در Y باز باشد چون f پیوسته و برو است پس $f^{-1}(G)$ در X باز است. چون $g\,o\,f:X\to Z$ باز است پس $(g\,o\,f)(f^{-1}(G))=g(G)$ در Z باز است لذا g باز است.

(ج) اگر G در X باز باشد آن‌گاه $(g\,o\,f)(G)$ در Z باز است چون g پیوسته و یک به یک است پس $g^{-1}(g\,o\,f)(G)$ در Y باز است لذا $f(G)$ در Y باز است پس f باز است.

۳۴. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $A\subseteq G$ تابع $\chi_A:X\to R$ را چنین تعریف می‌کنیم. که برای هر $x\in X$:

$$\chi_A(x)=\begin{cases}۱ & x\in A\\ ۰ & x\in X-A\end{cases}$$

ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن‌که χ_A در نقطهٔ $p\in X$ پیوسته باشد آن است که p نقطهٔ مرزی A نباشد.

حل: فرض کنیم $p\in X$ و χ_A در نقطهٔ p پیوسته باشد چون $X=A\bigcup(X-A)$ پس $p\in A$ یا $p\in X-A$:

(الف) ابتدا فرض می‌کنیم $p\in A$ نشان می‌دهیم $p\notin\partial(A)$. فرض کنیم $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$ همسایگی از $\chi_A(p)=۱$ باشد چون χ_A در p پیوسته است همسایگی از p وجود دارد مانند U که:

$$\chi_A(U)\subseteq(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})\Rightarrow\chi_A(U)=\{۱\}$$

پس $U\subseteq A$ لذا $U\bigcap(X-A)=\phi$ پس p نقطهٔ مرزی A نیست.

(ب) فرض کنیم $p\in X-A$ و $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ همسایگی از $C_A(p)=۰$ باشد لذا همسایگی از p وجود دارد مانند U که:

$$C_A(U)\subseteq(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})\Rightarrow C_A(U)=\{۰\}\Rightarrow U\subseteq X-A$$

پس $U\bigcap A=\phi$ یعنی $p\notin\partial(A)$.

اینک فرض کنیم p نقطهٔ مرزی A نباشد نشان می‌دهیم χ_A در p پیوسته است. فرض می‌کنیم $p\in X-A$ لذا $\chi_A(p)=۰$ فرض کنیم V همسایگی دلخواهی از ۰ باشد چون p نقطهٔ مرزی A نیست همسایگی U از p هست که $U\bigcap A=\phi$ یعنی $U\subseteq X-A$ پس $\chi_A(U)=\{U^\circ\}\subseteq V$ لذا χ_A در p پیوسته است. اگر $p\in A$ و $p\notin\partial(A)$ داریم $\chi_A(p)=۱$ فرض کنیم V همسایگی دلخواهی از ۱ باشد چون p نقطهٔ مرزی نیست لذا همسایگی U از p هست که $U\bigcap X-A=\phi$ پس $U\subseteq A$ لذا $\chi_A(U)=\{۱\}\subseteq V$ پس χ_A در p پیوسته است.

۳۶. در مسالهٔ فوق ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای پیوستگی χ_A آن است که A هم بسته و هم باز باشد.

حل: χ_A روی X پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $p \in X$ χ_A در p پیوسته باشد $\forall p \in X$ اگر و تنها اگر $\forall p \in X; p \notin \partial(A) \Leftrightarrow \partial(A)=\phi \Leftrightarrow A$ هم باز و هم بسته باشد.

۳۷. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای باز بودن $f: X \to Y$ آن است که برای هر $B \subseteq Y$، $f^{-1}(\partial(B)) \subseteq \partial(f^{-1}(B))$.

حل: ابتدا فرض کنیم $f: X \to Y$ باز باشد و $B \subseteq Y$ دلخواه باشد. فرض کنیم $x \in f^{-1}(\partial(B))$ پس $f(x) \in \partial(B)$ اگر G مجموعهٔ باز دلخواهی شامل x باشد چون f باز است پس $f(G)$ مجموعهٔ بازی شامل $f(x)$، B و $Y-B$ را قطع می‌کند.

$$\exists y; \quad y \in f(G) \cap B \Rightarrow f^{-1}(y) \in G \cap f^{-1}(B)$$

پس $x \in \overline{f^{-1}(B)}$ همچنین

$$\exists Z; \quad Z \in f(G) \cap Y-B \Rightarrow f^{-1}(Z) \in G \cap \underline{f^{-1}(Y-B)} = G \cap \underline{(X - f^{-1}(B))}$$

پس $x \in \overline{X - f^{-1}(B)}$ لذا $x \in \partial(f^{-1}(B))$. پس: $f^{-1}(\partial(B)) \subseteq \partial(f^{-1}(B))$.

بالعکس: فرض کنیم $f^{-1}(\partial(B)) \subseteq \partial(f^{-1}(B))$. نشان می‌دهیم f باز است. فرض کنیم $G \subseteq X$ باز باشد باید نشان دهیم $f(G)$ باز است برای این منظور ثابت می‌کنیم $Y - f(G)$ بسته است لذا کافی است نشان دهیم

$$\partial f(G) = \partial(Y - f(G)) \subseteq Y - f(G)$$

اگر $\partial(f(G)) \cap f(G) \neq \phi$ آن‌گاه $f^{-1}(\partial(f(G)) \cap f(G) \neq \phi$

$$\Rightarrow \phi \neq f^{-1}(\partial(f(G)) \cap f^{-1}(f(G)) \subseteq G \cap f^{-1}(\partial(f(G)) \subseteq G \cap \partial(f^{-1}(f(G))$$

چون $G \subseteq f^{-1}(f(G))$ پس اگر $y \in G \cap \partial(f^{-1}(f(G))$ آن‌گاه $y \in (f^{-1}(f(G))$ که تناقض است. زیرا $y \in \partial(f^{-1}(f(G))$ و $(f^{-1}(f(G))^\circ \cap \partial(f^{-1}(f(G)) = \phi$ پس $\partial(f(G)) \cap f(G) = \phi$ یعنی $f(G)$ باز است.

۳۸. فرض کنید X و Y در فضای توپولوژیک و f تابعی یک به یک از X بروی Y باشد، ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه f همسانریخت باشد آن است که توپولوژی Y بزرگترین توپولوژی باشد که f نسبت به آن پیوسته است.

حل: فرض کنیم f همسانریخت باشد و فرض کنیم τ' توپولوژی دیگری روی Y باشد که f نسبت به آن پیوسته است فرض کنیم $G\in\tau'$ پس چون f نسبت به τ' پیوسته است $f^{-1}(G)$ در X باز است و چون $f:X\to(Y,\tau)$ همسانریختی است پس باز است لذا $G=f(f^{-1}(G))$ در (Y,τ) باز است یعنی $G\in\tau$ پس $\tau'\subseteq\tau$ لذا τ بزرگ‌ترین توپولوژی است که f نسبت به آن پیوسته است. به عکس فرض کنیم τ بزرگ‌ترین توپولوژی روی Y باشد که f نسبت به آن پیوسته است و فرض کنیم $G\subseteq X$ در X باز باشد مجموعهٔ $\{\phi,Y,f(G)\}$ یک توپولوژی روی Y است از طرفی داریم: $f^{-1}(\phi)=\phi$ و $f^{-1}(Y)=X$ و $f^{-1}(f(G))=G$ (زیرا f یک به یک است) که اینها همگی در X بازند لذا $f:X\to(Y,\tau')$ پیوسته است پس $\tau'\subseteq\tau$ یعنی $f(G)\in\tau$ پس باز است درنتیجه f یک همسانریخت است.

۳۹. مثالی از دو فضای توپولوژیک X و Y و تابع $f:X\to Y$ بیاورید که برای زیرمجموعهٔ A از X، $f|_A$ پیوسته باشد حال آنکه f در هیچ یک از نقاط A پیوسته نباشد.

حل: فرض کنیم $f:R\to R$ و $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ دراین‌صورت $f|_Q=1$ پس $f|_Q$ پیوسته است ولی $f:R\to R$ در هیچ یک از نقاط Q پیوسته نیست.

۴۰. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک و $f:X\to Y$ تابعی باز (بسته) باشد و فرض کنید $B\subseteq Y$ و $A=f^{-1}(B)$ دراین‌صورت $f|_A$ تابعی باز (بسته) از A به B است.

حل: فرض کنیم $f:X\to Y$ تابعی باز باشد و $G\subseteq A$ در A باز باشد، باید نشان دهیم $f|_A(G)$ در B باز است. چون G در A باز است پس مجموعهٔ بازی مانند U در X وجود دارد که $G=U\cap A$ از طرفی بدلیل باز بودن f، $f(U)$ در Y باز است پس $f|_A(G)=f(G)$.

۴۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $X=X_1\cup X_2$ و $f:X\to Y$ ثابت کنید اگر $f|_{X_1}$ و $f|_{X_2}$ در نقطهٔ $x\in X_1\cap X_2$ پیوسته باشند آن‌گاه f در نقطهٔ x پیوسته است.

حل: فرض کنیم $f_1=f|_{X_1}:X_1\to Y$ و $f_2=f|_{X_2}:X_2\to Y$ در $x\in X_1\cap X_2$ پیوسته باشند. فرض کنیم V همسایگی دلخواهی از $f(x)$ در Y باشد، باید نشان دهیم همسایگی U از x هست که $f(U)=V$. چون $x\in X_1\cap X_2$ و f_1 در x پیوسته است و $f_1(x)=f(x)$ پس V یک همسایگی از $f_1(x)$ است لذا همسایگی باز U_1 از x در X_1 هست که $f_1(U_1)\subseteq V$ و چون $f_2(x)=f(x)$ پس همسایگی U_2 از x هست که $f_2(U_2)\subseteq V$.

چون $U_۱$ در $X_۱$ باز است پس مجموعهٔ باز $S_۱$ در X هست که $U_۱ = S_۱ \cap X_۱$ و چون $U_۲$ در $X_۲$ باز است مجموعهٔ باز S در X موجود است که $U_۲ = S_۲ \cap X_۲$ دراین‌صورت داریم:

$$S_۱ \cap S_۲ = (S_۱ \cap S_۲) \cap (X_۱ \cup X_۲) \subseteq (S_۱ \cap X_۱) \cup (S_۲ \cap X_۲) = U_۱ \cup U_۲$$

$$\Rightarrow f(S_۱ \cap S_۲) \subseteq f(U_۱) \cup f(U_۲) \subseteq V \text{ و } x \in S_۱ \cap S_۲$$

لذا همسایگی $S_۱ \cap S_۲$ از x هست که $f(S_۱ \cap S_۲) \subseteq f(V)$ پس f در x پیوسته است.

۴۲. اگـر Y_α زیـر فضـایی از X_α باشـد آن‌گـاه $\prod Y_\alpha$ زیر فضایی از $\prod X_\alpha$ خواهد بود که توپولوژی زیر فضایی آن مشابه توپولوژی $\prod X_\alpha$ است.

حل: اگر B_α پایه‌ای برای τ_α باشد توپولوژی فضای X_α است دراین‌صورت

$$B'_\alpha = \{Y_\alpha \cap \beta_\alpha ; \beta_\alpha \in B_\alpha\}$$

پایـه‌ای بـرای τ_{Y_α} اسـت. حـال τ' پایه‌ای برای τ' توپولوژی روی $\prod Y_\alpha$ است. دراین‌صورت داریم:

$$B' = \left\{\prod_{\alpha \in I} (\beta_\alpha) \cap \prod_{\alpha \in I} (Y_\alpha); \beta_\alpha \in B_\alpha ; \forall \alpha \in I\right\}$$

از آنجایی‌که $B = \left\{\prod_{\alpha \in I} (\beta_\alpha); \beta_\alpha \in B_\alpha\right\}$ پایه‌ای برای $\prod X_\alpha$ است، نتیجه می‌شود $\tau = \tau'$ که τ توپولوژی حاصل‌ضربی روی $\prod X_\alpha$ است.

۴۳. فـرض کنـید $\{X_\alpha\}$ و Y فضـاهای توپولـوژیک باشـند و $f : Y \to \prod X_\alpha$ و برای هر α، $f_\alpha : Y \to X_\alpha$ تابعـی باشـد که $\pi_\alpha o f = f_\alpha$ دراین‌صورت: f پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر α، f_α پیوسته باشد.

حـل: ابتدا فرض کنیم f_α پیوسته باشد فرض کنیم $\pi_\alpha^{-۱}(G_\alpha)$ عضو پایهٔ توپولوژی حاصل‌ضربی باشد لذا G_α در X_α باز است چون $f_\alpha : Y \to X_\alpha$ پیوسته است پس $f_\alpha^{-۱}(G_\alpha)$ در Y باز است اما:

$$f_\alpha^{-۱}(G_\alpha) = (\pi_\alpha o f)^{-۱}(G_\alpha) = f^{-۱}(\pi_\alpha^{-۱}(G_\alpha))$$

پـس $f^{-۱}(\pi_\alpha^{-۱}(G_\alpha))$ در Y باز است لذا f پیوسته است. حال اگر f پیوسته باشد ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است.

۴۴. اگر برای هر α، X_α هاسدورف باشد $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ با هر یک از دو توپولوژی حاصل‌ضربی و جعبه‌ای هاسدورف است.

حل: فرض کنیم $x,y\in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ دو نقطهٔ متمایز باشند چون $x=(x_\alpha)$ و $y=(y_\alpha)$ پس حداقل $\alpha_\circ\in I$ هست که $x_{\alpha_\circ}\neq y_{\alpha_\circ}$ چون $x_{\alpha_\circ}$ و $y_{\alpha_\circ}$ دو نقطهٔ متمایز در $X_{\alpha_\circ}$ می‌باشند و $X_{\alpha_\circ}$ هاسدورف است. پس همسایگی‌های $U_{\alpha_\circ}$ و $V_{\alpha_\circ}$ بترتیب از $x_{\alpha_\circ}$ و $y_{\alpha_\circ}$ وجود دارد به‌طوری‌که $U_{\alpha_\circ}\bigcap V_{\alpha_\circ}=\phi$. قرار می‌دهیم $U=\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ و $V=\prod_{\alpha\in I} V_\alpha$ که به ازای $\alpha=\alpha_\circ$، $V_\alpha=V_{\alpha_\circ}$ و $U_\alpha=U_{\alpha_\circ}$ و به ازای هر $\alpha\neq\alpha_\circ$، $U_\alpha=X_{\alpha_\circ}$ و $V_\alpha=V_{\alpha_\circ}$ لذا U و V همسایگی‌هایی از x و y می‌باشند و $U\bigcap V=\phi$ بنابراین $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ هم با توپولوژی جعبه‌ای و هم با توپولوژی حاصل‌ضربی، هاسدورف است.

۴۵. فرض کنید $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌هایی از فضاهای توپولوژیک باشد و $X=\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

الف) نشان دهید توپولوژی حاصل‌ضربی روی X کوچکترین توپولوژی است که برای هر $\beta\in I$، $\pi_\beta : X\to X_\beta$ پیوسته است.

ب) اگر برای هر $\alpha\in I$، A_α در X_α بسته باشد آن‌گاه $B=\prod A_\alpha$ در X بسته است.

ج) نشان دهید که برای هر β، π_β نگاشتی باز است که لزوماً بسته نیست.

حل: الف) فرض کنیم τ' توپولوژی دیگری روی X باشد به‌طوری‌که نسبت به آن همهٔ π_α ها پیوسته‌اند، باید نشان دهیم $\tau\subseteq\tau'$. فرض کنیم $G_{\alpha_\circ}$ در $X_{\alpha_\circ}$ باز باشد، دراین‌صورت:

$$\pi_{\alpha_\circ}^{-1}(G_{\alpha_\circ})=\prod U_\alpha\ ;\ U_\alpha=\begin{cases}G_{\alpha_\circ} & \alpha=\alpha_\circ\\ X_\alpha & \alpha\neq\alpha_\circ\end{cases}$$

واضح است که $\prod U_\alpha$ نسبت به τ' باز است زیرا $\pi_{\alpha_\circ}$ نسبت به τ' پیوسته است. فرض کنیم $G=\prod_{\alpha\in I} G_\alpha$ در τ باز باشد و

$$G_\alpha=\begin{cases}G_\alpha & \alpha=\alpha_1,\dots,\alpha_n\\ X_\alpha & \alpha\neq\alpha_1,\dots,\alpha_n\end{cases}$$

G_α در X_α باز است. دراین‌صورت $G=\prod_{\alpha_1}^{-1}(G_{\alpha_1})\bigcap\dots\bigcap\prod_{\alpha_n}^{-1}(G_{\alpha_n})$. بنا به آنچه گفته شد به ازای هر $i=1,\dots,n$، $\prod_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$ در X باز است و لذا $G\in\tau'$ پس توپولوژی حاصل‌ضربی زیر مجموعهٔ τ' است.

ب) فرض کنیم به ازای هر $\alpha\in I$، A_α در X_α بسته باشد، می‌خواهیم نشان دهیم $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ در X بسته است. قرار می‌دهیم $A=\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ فرض کنیم $(x_\alpha)=x\in\overline{A}$ و α_1 اندیس دلخواهی از I باشد. و V_{α_1} همسایگی دلخواهی از x_{α_1} باشد قرار می‌دهیم:

$$V=\prod_{\alpha\in I} V_\alpha\ ;V_\alpha=\begin{cases}V_{\alpha_1} & \alpha=\alpha_1\\ X_\alpha & \alpha\neq\alpha_1\end{cases}$$

دراین‌صورت V یک همسایگی از x می‌باشد. چون $x\in\overline{A}$ پس: $V\cap A\neq\phi$. لذا

$$\prod_{\alpha\in I} V_\alpha\cap\prod_{\alpha\in I} A_\alpha=\prod_{\alpha\in I}(V_\alpha\cap A_\alpha)\neq\phi$$

بنابراین به ازای هر $\alpha\in I$، $(V_\alpha\cap A_\alpha)\neq\phi$ از جمله به ازای هر α، $x_\alpha\in\overline{A_\alpha}$ لذا $x=(x_\alpha)\in\prod_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$ اما به ازای هر α، $\overline{A_\alpha}=A_\alpha$ زیرا A_α بسته است پس $\overline{\prod_{\alpha\in I} A_\alpha}\subseteq\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ درنتیجه $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ بسته است.

ج) برای اثبات باز بودن π_α ها کافی است نشان دهیم به ازای هر عضو از پایهٔ توپولوژی حاصل‌ضربی روی X مانند B مجموعهٔ $\pi_\alpha(B)$ در X_α باز است. بدیهی است که اگر B عضو پایهٔ توپولوژی حاصل‌ضربی باشد، $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ای موجودند که $B=\bigcap_{i=1}^{n}\prod_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$ ثابت می‌شود $\pi_\alpha(B)=\begin{cases}G_\alpha & \alpha=\alpha_1,\dots,\alpha_n\\ X_\alpha & \alpha\neq\alpha_1,\dots,\alpha_n\end{cases}$ زیرا اگر $x\in B$ آن‌گاه

$$x\in\bigcap_{i=1}^{n}\prod_{\alpha_i}^{-1}(G_\alpha)\Rightarrow\forall i=1,\dots,n\quad x\in\prod_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$$
$$\Rightarrow\forall i=1,\dots,n\quad \prod_{\alpha_i}(x)=x_{\alpha_i}\in G_{\alpha_i}$$

پس $\prod_\alpha(x)\in\begin{cases}G_{\alpha_i} & \alpha_i=\alpha_1,\dots,\alpha_n\\ X_\alpha & \alpha_i\neq\alpha_1,\dots,\alpha_n\end{cases}$. لذا $\pi_\alpha(B)$ مجموعه‌ای باز است یعنی π_α باز است. π_αها لزوماً بسته نیستند زیرا با در نظر گرفتن

$$\pi_1:R\times R\to R$$
$$(a,b)\to a$$

نتیجه می‌گیریم که: $F=\{(x,y)\in R^2;xy=1\}$ در R^2 بسته است درحالی‌که $\pi_1(F)=R-\{0\}$ در R بسته نیست.

۴۶. فرض کنیم τ_ρ و τ_u و τ_β به‌ترتیب توپولوژی حاصل‌ضربی، یکنواخت و جعبه‌ای روی R^ω باشند:

الف) نشان دهید که τ_β اکیداً ظریف‌تر از τ_u است.

ب) با کدام یک از توپولوژی‌های فوق توابع زیر ($R \to R^\omega$) پیوسته‌اند.

$$f(t)=(t\,,\,۲t\,,\,۳t\,,\,۴t\,,\ldots) \qquad g(t)=(t\,,\frac{t}{۲},\frac{t}{۳},\ldots)$$

ج) در کدام یک از توپولوژی‌های فوق دنباله‌های زیر همگرا هستند.

$$x_۱=(۱,۱,۱,\ldots) \quad y_۱=(۱,۰,۰,\ldots) \quad z_۱=(۱,۱,۰,۰,\ldots)$$
$$x_۲=(۰,۲,۲\ldots) \quad y_۲=(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},۰,۰,\ldots) \quad z_۲=(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},۰,۰,\ldots)$$
$$x_۳=(۰,۰,۳,\ldots) \quad y_۳=(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳},۰,۰,\ldots) \quad z_۳=(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳},۰,۰,\ldots)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

حل: الف) ابتدا نشان می‌دهیم $\tau_u \subseteq \tau_B$. فرض کنیم G مجموعهٔ بازی در τ_u باشد و $x \in G$ دراین‌صورت گوی بازی مانند $S_r(x)$ با شعاع $r<۱$ وجود دارد که $x \in S_r(x) \subseteq G$ برای هر $y \in S_r(x)$ داریم:

$$\overline{\rho}(x,y)=\sup_{\alpha\in I}\{\min\{|x_\alpha - y_\alpha|,۱\}\}<r<۱$$

لذا
$$\forall \alpha \in \omega;\quad \min\{|x_\alpha - y_\alpha|,۱\}<r<۱$$
$$\Rightarrow \forall\alpha\in\omega; |x_\alpha - y_\alpha|<r \Rightarrow \forall\alpha\in\omega; y_\alpha\in(x_\alpha - r, x_\alpha + r)$$

درنتیجه $y=(y_\alpha)\in \prod_{\alpha\in\omega}(x_\alpha - r, x_\alpha + r)=B$ که واضح است $S_r(x)\subseteq B\in\tau_B$. لذا $\tau_u \subseteq \tau_B$. اینک به عنوان یک تمرین ساده به خواننده واگذار می‌کنیم که نشان دهد عضوی در τ_β هست که در τ_u واقع نیست.

ب) ادعا می‌کنیم f در توپولوژی یکنواخت پیوسته نیست. فرض کنیم f در τ_u پیوسته باشد دراین‌صورت برای هر $x_۰ \in R$ و $\varepsilon=\frac{۱}{۲}$، همسایگی باز از $x_۰$ مانند U هست که: $f(U)=B_{\overline{\rho}}(f(x_۰),\varepsilon)$ چون U در R باز است پس $\delta>۰$ای هست که:

$$x_۰\in V=(x_۰-\delta, x_۰+\delta)\subseteq U$$

لذا $f(V)\subseteq f(U)\subseteq B_{\overline{\rho}}(f(x_۰),\varepsilon)$ فرض کنیم $x\in V$ و $f(x)=z$ و $f(x_۰)=y$ پس

$$z\in B_{\bar\rho}(f(x_\circ),\varepsilon)\Rightarrow \bar\rho(z,y)<\frac{۱}{۲}$$

اما
$$\bar\rho(z,y)=\sup_{n\in N}\{\min\{|z_n-y_n|,۱\}\}<\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \forall n;|z_n-y_n|=|nx-nx_\circ|=n|x-x_\circ|<\frac{۱}{۲}\Rightarrow \forall n\quad |x-x_\circ|<\frac{۱}{۲n}$$

اما $x\in V$ و به ازای هر $x\in V$ رابطهٔ $\forall n\quad |x-x_\circ|<\frac{۱}{۲n}$

برقرار است لذا به ازای $x=x_\circ+\frac{\delta}{۲}$ داریم:

$$\left|\frac{\delta}{۲}\right|<\frac{۱}{۲n}\Rightarrow \delta<\frac{۱}{n}\quad \forall n\in N\Rightarrow \delta=\circ$$

که تناقض است. پس فرض خلف باطل است لذا f در τ_u پیوسته نیست پس از آنجاییکه $\tau_u\subseteq\tau_B$، نتیجه می‌شود f در τ_B نیز پیوسته نیست. واضح است که f در τ_P پیوسته است زیرا تک تک مولفه‌های f در R پیوسته‌اند. اما در مورد تابع g داریم:

- اولاً چون همهٔ مولفه‌های g در R پیوسته‌اند پس g در τ_P پیوسته است. ادعا می‌کنیم g در τ_B پیوسته نیست زیرا اگر فرض کنیم $V=\prod_{n\in N}(-\frac{۱}{n^۲},\frac{۱}{n^۲})=\prod_{n\in N}V_n$ ، دراین‌صورت V در R^N با توپولوژی جعبه‌ای باز است اما $g^{-۱}(V)=\{\circ\}^{(*)}$ که در R باز نیست. لذا g بر R با τ_B پیوسته نیست.

(* فرض کنیم $x\in g^{-۱}(V)$ لذا $g(x)\in V$ پس برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\frac{x}{n}\in V_n$

$$\Rightarrow\frac{x}{n}\in(-\frac{۱}{n^۲},\frac{۱}{n^۲})\Rightarrow -\frac{۱}{n^۲}<\frac{x}{n}<\frac{۱}{n^۲}\Rightarrow -\frac{۱}{n}<x<\frac{۱}{n};\forall n\in\mathbb{N}$$

لذا $x=\circ$) اینک ثابت می‌کنیم g در τ_u پیوسته است، فرض کنیم $x_\circ\in\mathbb{R}$ و $\varepsilon>\circ$ داده شده باشد.

باید نشان دهیم $\delta>\circ$ای هست که $g((x_\circ-\delta,x_\circ+\delta))\subseteq B_{\bar\rho}(g(x_\circ),\varepsilon)$. اگر $\circ<\delta\leq\frac{\varepsilon}{۲}$ و $|x-x_\circ|<\delta$ آن‌گاه:

$$g(x)=(x,\frac{x}{۲},\frac{x}{۳},\ldots)$$

$$\overline{\rho}(g(x),g(x_\circ))=\sup_n\left\{\min\left\{|\frac{x}{n}-\frac{x_\circ}{n}|,\text{۱}\right\}\right\}=\sup_n\left\{\min\left\{|\frac{x-x_\circ}{n}|,\text{۱}\right\}\right\}$$

از طرفی چون $|x-x_\circ|<\delta\leq\frac{\varepsilon}{\text{۲}}$ پس:

$$|x-x_\circ|<\frac{\varepsilon}{\text{۲}}<\frac{n\varepsilon}{\text{۲}}\Rightarrow\frac{|x-x_\circ|}{n}<\frac{\varepsilon}{\text{۲}}\Rightarrow\forall n\in N\quad\min\left\{\frac{|x-x_\circ|}{n},\text{۱}\right\}<\frac{\varepsilon}{\text{۲}}$$

$$\Rightarrow\overline{\rho}(g(x),g(x_\circ))\leq\frac{\varepsilon}{\text{۲}}<\varepsilon$$

لذا $g((x_\circ-\delta,x_\circ+\delta))\subseteq B_{\overline{\rho}}(g(x_\circ),\varepsilon)$ پس g در $\mathbb{R}$ با τ_U پیوسته است.

ج) ادعا می‌کنیم $x_n\to\circ$ در τ_P. فرض کنیم U همسایگی دلخواهی از $\circ$ در τ_P باشد. پس $U=\prod_{\alpha\in\omega}U_\alpha$ که به ازای $\alpha=\alpha_\text{۱},\dots,\alpha_n$، U_α در $\mathbb{R}$ باز است و به ازای سایر α ها $U_\alpha=\mathbb{R}$. قرار می‌دهیم $N=\max\{\alpha_\text{۱},\dots,\alpha_n\}$ دراین‌صورت اگر $n>N$:

$$x_n=(\overbrace{\circ,\dots,\circ}^{n-\text{۱}},n,\dots)\in U$$

لذا $x_n\to\circ$ در τ_P. ادعا می‌کنیم $x_n\not\to\circ$ در τ_U. زیرا در غیر این‌صورت اگر همسایگی $B_{\overline{\rho}}(\circ,\frac{\text{۱}}{\text{۲}})$ از $\circ$ را در نظر بگیریم پس Nای هست که:

$$\forall n\geq N;x_n\in B_{\overline{\rho}}(\circ,\frac{\text{۱}}{\text{۲}})$$

$$\Rightarrow\forall n\geq N;x_n\in\overline{\rho}(x_n,\circ)<\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\Rightarrow|x_{n,i}-\circ|<\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\quad\forall i\in\mathbb{N}$$

اما $x_n=(\overbrace{\circ,\dots,\circ}^{n-\text{۱}},n,n,\dots)\in U$ لذا

$$x_{n,i}=\begin{cases}\circ & i\leq n\\ \text{۱} & i>n\end{cases}$$

اما برای هر $i\in\mathbb{N}$ داریم $|x_{n,i}|<\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ پس $|n|<\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$. که تناقض است. پس $x_n\not\to\circ$ در τ_U. از طرفی x_n در τ_U به هیچ نقطهٔ دیگری نیز همگرا نیست. زیرا اگر $x_n\to a$ در τ_U آن‌گاه چون $\tau_p\subseteq\tau_U$ پس $x_n\to a$ در τ_P اما τ_P هاسدورف است (زیرا $\mathbb{R}$ هاسدورف است). لذا چون حد دنباله در فضای هاسدورف منحصر بفرد است، باید $a=\circ$. که تناقض است چون $\{x_n\}$ در τ_U همگرا نیست پس در τ_B نیز همگرا نیست.

$$y_n = (\overbrace{\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n}, \ldots, \frac{۱}{n}}^{n}, ۰, ۰, \ldots)$$

$y_n \to ۰$ در τ_U. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ مفروض باشد پس $N \in \mathbb{N}$ ای هست که:

$$\forall n \geq N; \quad \frac{۱}{n} < \frac{\varepsilon}{۲} \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}; \quad |y_{n,i}| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

زیرا $y_{n,i} = \begin{cases} \frac{۱}{n} & i \leq n \\ ۰ & i > n \end{cases}$ پس

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad |y_{n,i} - ۰| < \frac{\varepsilon}{۲} \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} \ \overline{d}(y_{n,i}, ۰) \leq |y_{n,i}| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

$$\forall n \geq N; \quad \overline{\rho}(y_n, ۰) \leq \frac{\varepsilon}{۲} < \varepsilon \Rightarrow y_n \to ۰$$

چون $\tau_P \subseteq \tau_U$ پس $y_n \to ۰$ در τ_P. $y_n \not\to ۰$ در τ_B زیرا اگر قرار دهیم $U = \prod_{n \in N} (-\frac{۱}{n+۱}, \frac{۱}{n+۱})$، U همسایگی از ۰ در τ_B است اما به ازای هر $n \in \mathbb{N}$

$$y_{n,n} = \frac{۱}{n} \notin (-\frac{۱}{n+۱}, \frac{۱}{n+۱}) \Rightarrow y_n \notin U; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$z_n = (n, n, ۰, ۰, \ldots)$$

$z_n \to ۰$ در τ_B زیرا اگر $U = \prod_{n \in N} U_n$ که U_n در $\mathbb{R}$ باز است و همسایگی دلخواهی از ۰ باشد. آن‌گاه $۰ \in U_۱, ۰ \in U_۲$ در $\mathbb{R}$. $\varepsilon_۱, \varepsilon_۲ > ۰$ای هست که:

$$(-\varepsilon_۱, \varepsilon_۱) \subseteq U_۱, (-\varepsilon_۲, \varepsilon_۲) \subseteq U_۲$$

قرار می‌دهیم $\varepsilon = \min(\varepsilon_۱, \varepsilon_۲)$ لذا $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U_۱, (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U_۲$ به ازای این $\varepsilon > ۰$

$$\exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N; \frac{۱}{n} < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq N \ \frac{۱}{n} \in U_۱, \frac{۱}{n} \in U_۲$$

حال برای هر $n \geq N$ داریم $z_n \in \prod U_n$ زیرا

$$۰ \in u_n; \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{۱}{n} \in U_۱, U_۲$$

پس $z_n \to ۰$ در τ_B لذا $z_n \to ۰$ در τ_U و τ_P.

۴۷. فرض کنید X و $A \subseteq X$ فضایی هاسدورف باشد ثابت کنید $x \in A'$ اگر و فقط اگر هر همسایگی از x، A را در تعداد نامتناهی نقطه قطع کند.

حل:

$\Leftarrow$ اگر هر همسایگی از x A را در نامتناهی نقطه قطع کند، واضح است که هر همسایگی از x A را در نامتناهی نقطه بجز x قطع می‌کند پس $x \in A'$.

$\Leftarrow$ فرض کنیم $x \in A'$ و U همسایگی دلخواهی از x باشد که A را در تعداد متناهی نقطهٔ متمایز $\{x_1, \dots, x_n\}$ قطع می‌کند که این x_i ها با x متمایزند یعنی:

$(U - \{x\}) \bigcap A = \{x_1, \dots, x_n\}$

چون در هر فضای هاسدورف مجموعه‌های متناهی بسته‌اند، پس $\{x_1, \dots, x_n\}$ بسته است لذا $(U - \{x_1, \dots, x_n\}) \bigcap A \subseteq \{x\}$ از طرفی $U - \{x_1, \dots, x_n\}$ یک همسایگی از x است که A را حداکثر در x قطع می‌کند. که تناقض است. پس هر همسایگی از x A را در نامتناهی نقطه قطع می‌کند.

۴۸. هر زیرفضا از یک فضای شمارای اول (دوم) شمارای اول (دوم) است.

حل: فرض کنیم X فضایی شمارای اول و $Y \subseteq X$ زیرفضای X باشد بنا به تعریف چون X شمارای اول است، در هر نقطه دارای یک پایهٔ موضعی شماراست.

فرض کنیم $y \in Y$، لذا $y \in X$ پس y دارای یک پایهٔ موضعی شمارا در X است یعنی

$$B_y = \{\beta_n ; n \in N\}$$

پایهٔ موضعی شمارا برای y در X است، قرار می‌دهیم $B'_y = \{\beta_n \bigcap Y ; n \in N\}$ در اینصورت B'_y یک پایهٔ موضعی شمارا برای y در Y است. زیرا اگر V همسایگی از y در Y باشد، مجموعهٔ باز $A \subseteq Y$ هست که $y \in A \subseteq Y$. چون A در Y باز است پس مجموعهٔ باز G در X هست که $A = Y \bigcap G$ و $y \in G$ چون B_y یک پایهٔ موضعی در X است پس لااقل یکی از اعضاء B_y مانند B_n هست که $y \in B_n \subseteq G$ لذا

$$y \in \beta_n \bigcap Y \subseteq G \bigcap Y = A \subseteq V$$

پس B'_y یک پایهٔ موضعی شمارا در Y است. لذا Y شمارای اول است. اینک فرض کنیم X فضایی شمارای دوم و $Y \subseteq X$ باشد، بنا به تعریف X دارای پایه‌ای شمارا مانند

$$B = \{\beta_n ; n \in N\}$$

است. دراین‌صورت $B'_y = \{\beta_n \bigcap Y ; n \in N\}$ یک پایهٔ شمارا برای Y است (پایه بودن B' در تمرین‌های قبل اثبات شده، شمارا بودن آن بنا به شمارا بودن B واضح است).

۴۹. حاصل‌ضرب شمارا از فضاهای شمارای اول (دوم) شمارای اول (دوم) است.

حـل: فـرض کنیم $\{X_n\}_{n\in N}$ خانواده‌ای شمارا از فضاهای شمارای اول باشد و $X=\prod_{n\in N} X_n$.
فـرض کـنیم $x=(x_n)\in X$ لـذا برای هر n، $x_n\in X_n$ پس x_n دارای یک پایهٔ موضعی شمارا مانـند B_n اسـت. ادعا می‌کنیم $B=\prod_{n\in N} B_n$ یک پایهٔ موضعی شمارا برای X است. شمارا بودن B بدلـیل شمارا بودن B_n ها و N واضح است. فرض کنیم U همسایگی دلخواهی از x در X باشد، لذا مجمـوعهٔ بـاز G در X هست که $x\in G\subseteq U$ پس $G=\prod_{n\in N} G_n$ که به ازای $n=n_1,\ldots,n_k$، G_n در X_n بـاز اسـت و بـه ازای سـایر n هـا G_n همان X_n است. به ازای $n=n_1,\ldots,n_k$، $x_n\in G_n$ لـذا عضوی از پایهٔ موضعی B_n مانند β_n هست که $x\in\beta_n\subseteq G_n$. به ازای سایر n ها برای هر عضو دلخواه β_n از B_n داریم $x\in\beta_n\subseteq G_n$ پس

$$x=(x_n)\in\prod_{n\in N}\beta_n\subseteq\prod G_n=G\subseteq U$$

پـس B یـک پایهٔ موضعی شمارا برای x است لذا X شمارای اول است. فرض کنیم $X=\prod_{n\in N} X_n$ حاصـل‌ضـرب شمارایی از فضاهای شمارای دوم باشد. پس به ازای هر n، X_n دارای یک پایهٔ شمارا مانـند $B_n=\{\beta_n;n\in N\}$ اسـت دراین‌صورت $B=\prod_{n\in N}\beta_n$ یک پایهٔ شمارا برای X است زیرا اگـر $x\in G$ و G در X بـاز باشـد، آن‌گـاه $G=\prod_{n\in N} G_n$ کـه به ازای $n=n_1,\ldots,n_k$، G_n در X_n بـاز اسـت و به ازای سایر n ها G_n همان X_n است. به ازای $n=n_1,\ldots,n_k$، $x_n\in G_n$ لـذا عضـوی از پایـهٔ B_n مانـند β_n هست که $x_n\in\beta_n\subseteq G_n$. و به ازای سایر n ها چون B_n پایـه‌ای بـرای X_n اسـت، داریـم $X_n=\bigcup_{\beta_n\in B_n}\beta_n$ پـس $\beta_n\in B_n$ ای هسـت کـه $x_n\in\beta_n\subseteq G_n$ لـذا $x=(x_n)\in\prod_{n\in N}\beta_n\subseteq G_n$ لـذا B پایـه‌ای بـرای X است پس خاصیت شمارای دوم بودن حاصل‌ضربی است.

۵۰. فضایی تفکیک پذیر و لیندلف موجود است که شمارای دوم نیست.

حـل: نشـان می‌دهیم $X=R_l$ تفکیک پذیر و لیندلف است ولی شمارای دوم نیست. اولاً $\overline{Q}=R_l$ پس R_l تفکیک پذیر است ثانیاً اگر $\{[a_\alpha,b_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ پوشش بازی برای R_l باشد، نشان می‌دهیم ایـن پوشـش دارای زیـر پوشـش شـمارا است لذا لیندلف است. قرار می‌دهیم $C=\bigcup_{\alpha\in I}(a_\alpha,b_\alpha)$

دراین‌صورت C با توپولوژی معمولی شمارای دوم است، زیرا C زیر فضایی از R است و بنا به تمرین‌های قبل هر زیر فضای R با توپولوژی معمولی شمارای دوم است. گردایهٔ $\{[a_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ پوشش بازی برای C است. اما می‌دانیم هر زیرفضای شمارای دوم لیندلف است پس C لیندلف است زیرا زیر گردایهٔ شمارای $\{[a_n, b_n)\}_{n\in N}$ هست که $C = \bigcup\limits_{n\in N}(a_n, b_n)$ بدیهی است که $C \subseteq \bigcup\limits_{n\in N}[a_n, b_n)$ فرض کنیم $x \in R - C$ پس α ای هست که $x = a_\alpha$. عدد گویای q_x را چنان اختیار می‌کنیم که $x < q_x < b_\alpha$ حال اگر $y \in R - C$ و $y \neq x$ به‌طور مثال $y > x$ پس α'ای هست که $y = a_{\alpha'}$ لذا عدد گویایی به‌طور مثال q_y هست که $y < q_y < b_{\alpha'}$ ادعا می‌کنیم $q_x < q_y$ چون در غیر اینصورت $q_y \le q_x$ لذا $x < y < q_x \le q_x < b_\alpha$ پس $y \in (a_\alpha, b_\alpha) \subseteq C$ پس $y \in C$ که تناقض است. لذا تابع

$$f = R : C \to Q$$
$$x \to q_x$$

یک به یک است پس $R - C$ شماراست پس تعدادی حداکثر شمارا از گردایهٔ $\{[a_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ موجود است که $R - C$ را می‌پوشاند اجتماع این اعضا، اعضای R را می‌پوشاند لذا R_l لیندلف است. اینک نشان می‌دهیم R_l شمارای دوم نیست فرض کنیم B پایه‌ای برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $\beta_x \in B$ هست که $x \in \beta_x \subseteq [x, x+۱)$ اما اگر $x \neq y$ دراین‌صورت $\beta_x \neq \beta_y$ زیرا $x = \inf \beta_x$ و $y = \inf \beta_y$ پس $\beta_x \neq \beta_y$ بنابراین B شمارا نیست.

۵۱. یک زیر فضا از یک فضای تفکیک پذیر ممکن است تفکیک پذیر نباشد.

حل: قرار می‌دهیم $X = R_l^۲$ دراین‌صورت X تفکیک پذیر است زیرا $Q^۲$ یک زیر مجموعهٔ چگال شمارا از X است اما $L = \{(x, y); y = -x\}$ زیرفضایی از X است که تفکیک پذیر نیست. زیرا L دارای توپولوژی گسسته است به دلیل اینکه

$$\{(a,-a)\} = \{[a, a+۱) \times [-a, -a-۱\} \cap L$$

لذا تنها زیر مجموعهٔ چگال در L خود L است که ناشماراست، پس L تفکیک پذیر نیست.

۵۲. فضایی $T_۱$ موجود است که $T_۲$ نیست.

حل: $\mathbb{R}$ با توپولوژی متمم متناهی $T_۱$ هست ولی $T_۲$ نیست.

۵۳. فرض کنیم $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌هایی از توابع $f_\alpha : Y \to X_\alpha$ باشند، نشان دهید

$$f:Y\to\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$$
$$f(y)=(f_\alpha(y))$$
پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $\alpha\in I$، $f_\alpha:Y\to X_\alpha$ پیوسته باشد.

حل: بنا بر تمرین ۴۳ تابع $f:Y\to\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $\alpha\in I$، $\pi_\alpha of:Y\to X_\alpha$ پیوسته باشد. اما برای هر $\alpha\in I$ می‌توان گفت $\pi_\alpha of=f_\alpha$ لذا حکم فوق برقرار است.

۵۴. نشان دهید توپولوژی حاصل‌ضربی کوچکترین توپولوژی است که تحت آن همهٔ π_α ها پیوسته‌اند.

حل: فرض کنیم τ توپولوژی دیگری روی $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ باشد که نسبت به آن همهٔ π_α ها پیوسته‌اند باید نشان دهیم $\prod_{\alpha\in I}\tau_\alpha\subseteq\tau$. اگر V_β در X_β باز باشد، دراین‌صورت

$$\pi_\beta^{-1}(V_\beta)=\prod_\alpha U_\alpha\ ;U_\alpha=V_\beta\quad \alpha=\beta\ ;U_\alpha=X_\alpha\quad \alpha\neq\beta$$

نسبت به τ در X باز است. فرض کنیم $V=\prod V_\alpha$ مجموعهٔ بازی در توپولوژی حاصل‌ضربی باشد:

$$V=\pi_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1})\cap\ldots\cap\pi_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_n})$$

برای $1\leq i\leq n$، V_{α_i} در X_{α_i} باز.

چون برای هر $1\leq i\leq n$، $\pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})$ نسبت به τ باز است پس V نسبت به τ باز است، لذا $V\in\tau$، درنتیجه

توپولوژی حاصل‌ضربی $\subseteq\tau$

۵۵. نشان دهید $\mathbb{R}$ با توپولوژی گسسته تفکیک پذیر نیست.

حل: فرض کنیم $\mathbb{R}$ با توپولوژی گسسته تفکیک پذیر باشد پس $A\subseteq\mathbb{R}$ وجود دارد که A شماراست و $\overline{A}=\mathbb{R}$ اما در توپولوژی گسسته $\overline{A}=A=\mathbb{R}$ پس $\mathbb{R}$ شماراست که یک تناقض است.

۵۶. فرض کنید $f:X\to Y$ پیوسته و برو باشد، نشان دهید اگر X تفکیک پذیر باشد، آن‌گاه Y نیز تفکیک پذیر است.

حل: چون X تفکیک پذیر است، پس زیر مجموعهٔ چگال شمارایی مانند A دارد، $\overline{A}=X$. چون f پیوسته است، پس $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ لذا $Y=f(X)\subseteq\overline{f(A)}$ پس $\overline{f(A)}=Y$ یعنی $f(A)$ در Y چگال است چون A شمارا است پس $f(A)$ نیز شمار است.

۵۷. نشان دهید که هر زیر فضای باز یک فضای تفکیک پذیر، تفکیک پذیر است.

حل: فرض کنیم X یک فضای تفکیک پذیر و Y زیرفضای X و باز باشد. چون X تفکیک پذیر است، پس دارای یک زیر مجموعهٔ چگال شمارا مانند A می‌باشد، $\overline{A}=X$. قرار می‌دهیم $B=A\cap Y$ ادعا می‌کنیم B زیرمجموعهٔ چگال شمارایی از Y است. اولاً چون Y در X باز است پس $\overline{A\cap Y}=\overline{\overline{A}\cap Y}$ (تمرین ۱۰ را ببینید) بنابراین داریم:

$$\overline{B}_Y=\overline{B}_X\cap Y=\overline{A\cap Y}\cap Y=\overline{\overline{A}\cap Y}\cap Y=\overline{X\cap Y}\cap Y=\overline{Y}\cap Y=Y$$

از طرفی B مخالف تهی است زیرا اگر $B=\phi$ داریم: $A\subseteq X-Y$ لذا $X=\overline{A}\subseteq\overline{X-Y}$ پس $X=\overline{X-Y}$ یعنی $X-Y=X$ پس $Y=\phi$ که تناقض است. و چون $B\subseteq A$ ، A شماراست پس B شمار است لذا Y تفکیک است.

۵۸. نشان دهید که حاصل‌ضرب هر خانوادهٔ شمارا از فضاهای تکفیک، تفکیک پذیر است. با یک مثال نشان دهید شرط شمارا بودن را نمی‌توان حذف کرد.

حل: فرض کنیم $\{X_n\}_{n\in N}$ خانواده‌ای شمارا از فضاهای تفکیک پذیر باشد، لذا به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، A_n زیرمجموعه‌ای شمارا و چگال از X_n می‌باشد. حال ادعا می‌کنیم $A=\prod_{n\in N}A_n$ در $\prod_{n\in N}X_n$ چگال است زیرا:

$$\overline{A}=\overline{\prod_{n\in N}A_n}=\prod_{n\in N}\overline{A_n}=\prod_{n\in N}X_n$$

از طرفی چون هر A_n شمارا است پس $\prod_{n\in N}A_n$ نیز شمارا است. ارائه مثال نقض را به خوانندگان عزیز واگذار می‌کنیم.

۵۹. فرض کنید X شمارای اول و $f:X\to Y$ یک تابع و $x\in X$ نشان دهید شرط لازم و کافی برای آنکه f در x پیوسته باشد آن است که به ازای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X که $x_n\to x$ داشته باشیم $f(x_n)\to f(x)$.

حـل: فـرض کنیم f در x پیوسته باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که $x_n \to x$. می‌خواهیم نشان دهیم $f(x_n) \to f(x)$ چون هر دنباله یک شبکه است، این حکم برقرار است.

بالعکس: فرض کنیم به ازای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X که $x_n \to x$ ، $f(x_n) \to f(x)$. فرض کنیم $x \in \overline{A}$، پس دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در A وجود دارد که $x_n \to x$ بنا به فرض $f(x_n) \to f(x)$. بنا به تمرینی چون X شمارای اول است و $\{f(x_n)\}$ دنباله‌ای از نقاط $f(A)$ می‌باشد که به $f(x)$ همگرا است پس $f(x) \in \overline{f(A)}$. اما چون $x \in \overline{A}$ پس $f(x) \in f(\overline{A})$ لذا $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. پس f بر X پیوسته است.

۶۰. نشان دهید که شمارای اول بودن یک خاصیت توپولوژیکی است.

حـل: فـرض کنیم X یک فضای شمارای اول و $f: X \to Y$ یک همسانریخت باشد و $y \in Y$. نشان می‌دهیم Y دارای یک پایهٔ موضعی شمارا است. فرض کنیم U_y همسایگی باز از y در Y باشد چون f پیوسته است. $f^{-1}(U_y)$ در X باز است و همسایگی بازی از $x = f^{-1}(y)$ می‌باشد. چون X شمارای اول است، پس x دارای یک پایهٔ موضعی شمارا مانند β_x است، لذا یکی از اعضای این پایه مانند V_x هست که $f(V_x) \subseteq U_y$ پس به ازای هر همسایگی دلخواه U_y از y همسایگی $f(V_x)$ از $f(\beta_x)$ هست که $f(V_x) \subseteq U_y$ لذا $f(\beta_x)$ یک پایهٔ موضعی برای y می‌باشد و چون β_x شمارا است و f یک به یک پس $f(\beta_x)$ نیز شمارا است.

۶۱. نشان دهید حاصل‌ضرب هر خانوادهٔ شمارا از فضاهای شمارای اول فضایی شمارای اول است.

حـل: فـرض کنـیم $\{X_\alpha\}$ خانـواده‌ای شـمارا از فضـاهای شـمارای اول باشـد و فـرض کنـیم $x \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ لـذا $x = (x_\alpha)$ که به ازای هر α، $x_\alpha \in X_\alpha$ لذا X_α دارای یک پایهٔ موضعی شمارا است مانند β_α دراین‌صورت $\prod_{\alpha\in I} \beta_\alpha$ یک پایهٔ موضعی شمارا برای x می‌باشد زیرا برای هر همسایگی باز از x مانند $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$، به ازای $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$، U_α در X_α باز است و به ازای سایر αها $U_\alpha = X_\alpha$ لـذا $i = 1, \ldots, n$. U_{α_i} شـامل یکـی از اعضـای β_{α_i} مـی‌باشـد، پس $\prod_{\alpha\in I} \beta_\alpha \subseteq \prod U_\alpha$ لـذا $\prod_{\alpha\in I} \beta_\alpha$ یـک پایـهٔ موضـعی در x است. چون β_α و αها شمارایند پس $\prod_{\alpha\in I} \beta_\alpha$ شمارا است.

۶۲. نشان دهید شمارای اول بودن یک خاصیت موروثی است.

حل: فرض کنیم X یک فضای شمارای اول و Y زیر فضایی از X باشد. فرض کنیم $y \in Y$ دلخواه باشد چون $y \in X$ پس y دارای یک پایهٔ موضعی شمارا مانند β_y در X است. قرار می‌دهیم $\beta'_y = \beta_y \bigcap Y$. دراین‌صورت β'_y یک پایهٔ موضعی شمارا در Y است. زیرا اولاً β'_y شمارا است ثانیاً اگر U همسایگی از y در Y باشد آن‌گاه U بصورت $V \bigcap Y$ است که V همسایگی از y در X است. لذا شامل یکی از اعضای پایهٔ موضعی مانند β_y است پس $\beta_y \subseteq V$ لذا $\beta_y \bigcap Y \subseteq V \bigcap Y = U$ پس U شامل یکی از اعضای β_y در Y است.

۶۳. نشان دهید هر فضای شمارای دوم تفکیک پذیر است.

حل: فرض کنیم X فضایی شمارای دوم باشد لذا X پایه‌ای شمارا دارد به‌طور مثال $\beta = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ به ازای $n \in \mathbb{N}$ عنصر x_n را از B_n انتخاب می‌کنیم. قرار می‌دهیم $A = \{x_n ; x_n \in B_n\}$ انتخاب شده بدیهی است A شمارا است همچنین A در X چگال است زیرا فرض کنیم $x \in X$ دراین‌صورت هر زیر مجموعهٔ باز X مانند G که $x \in G$. A را قطع می‌کند زیرا $G = \bigcup\limits_{n \in N} B_n$ پس $x \in \overline{A}$ لذا $X \subseteq \overline{A}$ پس $X = \overline{A}$ درنتیجه A در X چگال است پس X تفکیک پذیر است.

۶۴. نشان دهید هر زیرفضای متریک تفکیک پذیر شمارای دوم است.

حل: فرض کنیم X یک فضای متریک تفکیک پذیر باشد پس X شامل یک زیر مجموعهٔ چگال شمارا مانند A است قرار می‌دهیم $\beta = \{ S_r(x); x \in A, \circ < r \in Q \}$ دراین‌صورت β پایه‌ای شمارا برای X است زیرا اولاً β شمارا است چون Q شمارا است و A شمارا است. ثانیاً β پایه است، فرض کنیم $U \subseteq X$ باز و $x \in U$ دراین‌صورت $r > \circ$ای هست که $S_r(x) \subseteq U$ چون $x \in \overline{A}$ لذا $\phi \neq S(x, \frac{r}{۳}) \bigcap A$ لذا $x_n \in A$ای موجود است که $x_n \in S_{\frac{r}{۳}}(x)$ فرض کنیم $\frac{r}{۳} < q < \frac{۲r}{۳}$ عددی گویا باشد ادعا می‌کنیم $x \in S(x_n, q) \subseteq S(x, r)$ چون $d(x, x_n) < \frac{r}{۳} < q$ پس $x \in S(x_n, q)$ و اگر $y \in S(x_n, q)$ آن‌گاه $d(y, x_n) < q < \frac{۲r}{۳}$ پس $r = \frac{r}{۳} + \frac{۲r}{۳} > d(x, y)$ لذا $x \in S(x, q)$.

۶۵. موروثی بودن، توپولوژیکی بودن و حاصل‌ضربی بودن خاصیت شمارای دوم را بررسی کنید.

حـل: فرض کنیم X یک فضای شمارای دوم و $Y \subseteq X$ زیرفضایی از آن باشد، می‌دانیم پایهٔ این زیر فضا به صورت $\beta_Y = \{ B \cap Y; B \in \beta \}$ است که پایهٔ β پایهٔ فضای X است و چون X شمارای دوم است پس می‌توان β را پایه‌ای شمارا درنظر گرفت لذا β_Y شمارا است پس Y نیز شمارای دوم است. حال فرض $f : X \to Y$ یک همسانریختی باشد و

$$\beta = \{B_n ; n \in \mathbb{N} \}$$

پایـه‌ای شـمارا بـرای X باشـد، درایـن‌صورت $f(\beta) = \{f(B_n); n \in \mathbb{N} \}$ پایه‌ای شمارا برای Y اسـت زیـرا اولاً $f(\beta)$ شـمارا اسـت چـون f یـک بـه یـک اسـت ثانیاً اگر G در Y باز باشد آن‌گاه $f^{-1}(G)$ در X باز است پس $f^{-1}(G) = \bigcup\limits_{n \in N} B_n$ لذا

$$G = f(\bigcup_{n \in N} B_n) = \bigcup_{n \in N} (f(B_n))$$

پس Y نیز شمارای دوم است. حال اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای شمارا از فضاهای شمارای دوم باشد کـه بـه ازای هـر $\alpha \in I$، β_α پایـه‌ای شـمارا از X_α اسـت، آن‌گاه $\prod\limits_{\alpha \in I} \beta_\alpha$ پایهٔ شمارایی برای $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ خـواهد بود. در حالت کلی حاصل‌ضرب هر خانوادهٔ دلخواه از مجموعه‌های شمارای دوم، شمارای دوم نیست.

۶۶. نشان دهید شرط لازم و کافی برای آنکه X، T_1 باشد آن است که مجموعه‌های تک عضوی در آن بسته باشد.

حـل: ابتدا فرض کنیم X، T_1 باشد پس به ازای هر دو نقطهٔ متمایز مثل x و y دو همسایگی U_x و U_y از x و y وجـود دارد بـه قسمی که $x \notin U_y$ و $y \notin U_x$. می‌خواهیم نشان دهیم مجموعهٔ تک عضـوی $\{x\}$ در X بسته است. لذا باید نشان دهیم $\overline{\{x\}} = \{x\}$ فرض کنیم $y \in \overline{\{x\}}$ و $x \neq y$ لذا بنا به T_1 بودن X

$$\exists U_y ; \quad x \notin U_y \Rightarrow \{x\} \cap U_y = \phi$$

از طرفـی چـون $y \in \overline{\{x\}}$ هـر همسـایگی از y از جملـه U_y، $\{x\}$ را قطـع مـی‌کـند یعنـی $\{x\} \cap U_y \neq \phi$ کـه تـناقض اسـت. پـس $y = x$ یعنی $\overline{\{x\}} = \{x\}$ پس $\{x\}$ بسته است. بعکس فـرض کنیم در فضای X، هر مجموعهٔ تک عضوی بسته باشد، فرض کنیم x و y دو نقطهٔ متمایز از X باشـند. چـون $\{y\}$ بسـته اسـت پـس $X - \{y\}$ در X بـاز است و شامل x می‌باشد پس $X - \{y\}$

همسایگی از x است و شامل y نیست همچنین $X-\{x\}$ همسایگی از y است و شامل x نیست پس X، T_1 است.

۶۷. شرط لازم و کافی برای آنکه X، T_0 باشد آن است که

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \Rightarrow \overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$$

حل: ابتدا فرض کنیم X، T_0 باشد پس به ازای هر $x \neq y$، لااقل یکی از x و y همسایگی دارد که شامل دیگری نیست پس می‌توان فرض کرد همسایگی U_x از x وجود دارد که $y \notin U_x$. لذا $x \notin \overline{\{y\}}$ چون درغیر این‌صورت باید هر همسایگی از x از جمله U_x، $\{y\}$ را قطع کند که تناقض است، پس $x \notin \overline{\{y\}}$ اما $x \in \overline{\{x\}}$ پس $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. بالعکس فرض کنیم

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \Rightarrow \overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$$

باید نشان دهیم X، T_0 است. چون $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ پس $x \notin \overline{\{y\}}$ یا $y \notin \overline{\{x\}}$ زیرا در غیر اینصورت داریم: $x \in \overline{\{y\}}$ و $y \in \overline{\{x\}}$ لذا $\{x\} \subseteq \overline{\{y\}}$ پس $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ همچنین $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$ پس $\overline{\{y\}} = \overline{\{x\}}$ که تناقض است. لذا می‌توان فرض کرد: $x \notin \overline{\{y\}}$. پس همسایگی U_x از x وجود دارد که $\{y\}$ را قطع نمی‌کند یعنی $y \notin U_x$ لذا فضا T_0 است.

۶۸. فرض کنید X فضایی T_1 باشد و $A \subseteq X$ آیا A' بسته است؟

حل: کافیست نشان دهیم $(A')' \subseteq A'$ فرض کنیم $x \in (A')'$ لذا هر همسایگی باز از x مانند U_x، A' را در نقطه‌ای به جز x قطع می‌کند یعنی $(U_x - \{x\}) \bigcap A' \neq \phi$. لذا $y \in U_x - \{x\} \bigcap A'$ ای وجود دارد و چون $y \in U_x - \{x\}$ پس $y \neq x$ اما $y \in A'$ پس هر همسایگی از y مانند U_x، A را در نقطه‌ای بجز y قطع می‌کند لذا $(U_y - \{y\}) \bigcap A \neq \phi$ چون فضای X، T_1 است و $y \neq x$ پس دو همسایگی باز V'_x و V'_y از x و y وجود دارد وجود دارد که $x \notin V'_y, y \notin V'_x$ قرار می‌دهیم $V_y = V'_y \bigcap V_x$ و $V_x = V'_x \bigcap U_x$. چون همسایگی‌ها را باز درنظر گرفتیم پس V_x و V_y دو همسایگی باز از x و y می‌باشند و چون $y \in A'$ پس $V_y - \{y\} \cap A \neq \phi$ اما

$$\phi \neq V_y - \{y\} \bigcap A \subseteq U_x - \{y\} \bigcap A \subseteq U_x \bigcap A$$

پس $U_x - A \neq \phi$ ادعا می‌کنیم $(U_x - \{x\}) \bigcap A \neq \phi$ اگر $(U_x - \{x\}) \bigcap A = \phi$ آن‌گاه $U_x \bigcap A = \{x\}$ پس $(V_y - \{y\}) \bigcap A = \{x\}$ یعنی $x \in V_y - \{y\}$ که تناقض است، لذا $(U_x - \{x\}) \bigcap A \neq \phi$ پس $x \in A'$ لذا A' بسته است.

۶۹. نشان دهید هر مجموعهٔ نامتناهی با توپولوژی متمم متناهی T_1 است ولی هاسدورف نیست.

حل: فرض کنیم X یک مجموعهٔ نامتناهی با توپولوژی متمم متناهی باشد و فرض کنیم $x, y \in X$ متمایز باشند. هر همسایگی از x به صورت مجموعهٔ بازی است که متمم آن متناهی است چون X نامتناهی است پس هر همسایگی در x نیز نامتناهی است پس هر مجموعهٔ نامتناهی در X بسته است از جمله مجموعه‌های تک عضوی لذا X، T_1 است. حال اگر X هاسدورف باشد برای هر $y \neq x$ همسایگی‌های U_x و U_y وجود دارد که $U_x \cap U_y = \phi$ اما U_x و U_y هر دو نامتناهی هستند و $U_x \subseteq X - U_y$ زیرا مجموعهٔ متناهی است که تناقض است، لذا X هاسدورف نیست.

۷۰. هر فضای متریک (و هر فضای گسسته) هاسدورف است.

حل: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد و x و y دو نقطهٔ متمایز X باشند دراین‌صورت $d(x, y) > ۰$. همانطور که می‌دانیم در هر فضای متریک همسایگی‌ها بصورت گوی‌های باز هستند، قرار می‌دهیم $U_x = S_r(x)$ و $U_y = S_r(y)$ که $r = d(x, y)/۳$ دراین‌صورت U_x و U_y دو همسایگی بترتیب از x و y می‌باشند به قسمی که $U_x \cap U_y = \phi$ چون در غیر اینصورت اگر $a \in U_x \cap U_y$ آن‌گاه $d(x, a) \leq r$ و $d(a, y) < r$ اما

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < r + r = ۲r = \frac{۲}{۳} d(x, y)$$

لذا $\frac{۲}{۳} \leq ۱$ که تناقض است. پس $U_x \cap U_y = \phi$ لذا X هاسدورف است. چون هر فضای گسسته فضایی است متری با متر بدیهی است پس هر فضای گسسته نیز هاسدورف است.

۷۱. فرض کنید $f : X \to Y$ و $g : X \to Y$ دو تابع پیوسته باشند و $A = \{x : f(x) = g(x)\}$ نشان دهید اگر Y هاسدورف باشد، آن‌گاه A در X بسته است با مثالی نشان دهید شرط هاسدورف بودن Y را نمی‌توان حذف کرد.

حل: نشان می‌دهیم $X - A$ در X باز است فرض کنیم $x \in X - A$ لذا $x \notin A$ پس $f(x) \neq g(x)$ چون Y هاسدورف است پی همسایگی‌های باز $U_{f(x)}$ و $V_{g(x)}$ وجود دارند که $U_{f(x)} \cap V_{g(x)} = \phi$

قرار می‌دهیم $W_x = f^{-۱}(U_{f(x)}) \cap g^{-۱}(V_{g(x)})$. چون f و g پیوسته‌اند، پس $f^{-۱}(U)$ و $g^{-۱}(V)$ در X باز و لذا W_x در X باز است و همسایگی از x می‌باشد اما $W_x \subseteq X - A$ زیرا

$$z \in W_x \Rightarrow z \in f^{-۱}(U) \cap g^{-۱}(V) \Rightarrow f(z) \in U_{f(x)}, g(z) \in V_{g(x)}$$

چون $U\bigcap V=\phi$ پس $f(z)\neq g(z)$ یعنی $z\notin A$ پس $z\in X-A$ لذا x نقطهٔ درونی $X-A$ است لذا $X-A$ باز و A بسته است. اگر Y هاسدورف نباشد، حکم لزوماً برقرار نیست. فرض کنیم Y فضای توپولوژی R با توپولوژی ناگسسته باشد بدیهی است که Y هاسدورف نیست اگر

$$f:X\to Y \quad x\to x^{2} \qquad \text{و} \qquad g:Y\to Y \quad x\to 2x$$

آن‌گاه f و g هر دو پیوسته‌اند اما

$$\{x:f(x)=g(x)\}$$

در X بسته نیست.

۷۲. فرض کنید X فضایی T_2 و $\sim$ یک رابطهٔ هم ارزی روی X باشد و $\pi:X\to X/\sim$ نگاشتی باز و $\{(x,y):x\sim y\}\subseteq X\times X$ بسته باشد، نشان دهید $X/\sim$ هاسدورف است.

حل: فرض کنیم $[y]\neq[x]\in X/\sim$ لذا $x\neq y$ پس چون X هاسدورف است همسایگی‌های باز U و V از x و y وجود دارد که $U\bigcap V=\phi$ اما $\pi(U)$ و $\pi(V)$ در $X/\sim$ بازند و همسایگی‌هایی از $[x]$ و $[y]$ می‌باشند، ادعا می‌کنیم $\pi(U)\bigcap\pi(V)=\phi$ چون در غیر اینصورت $[z]\in\pi(U)\bigcap\pi(V)$ پس $[z]\in\pi(U)$ و $[z]\in\pi(V)$ پس $z\in U$ و $z\in V$ و این یک تناقض است در نتیجه $X/\sim$ هاسدورف است.

۷۳. نشان دهید شرایط زیر با یکدیگر معادلند: (۱) X منظم است. (۲) به ازای هر $x\in X$ و هر همسایگی مانند U از x یک همسایگی مانند V از x موجود باشد به‌طوری‌که $\overline{V}\subseteq U$. (۳) به ازای هر $x\in X$ و هر مجموعهٔ بسته‌ای مانند F که $x\notin F$ همسایگی V از x موجود است به‌طوری‌که $\overline{V}\bigcap F=\phi$.

حل: (۲)⇐(۱) فرض کنیم X فضایی منظم باشد و $x\in X$ و U همسایگی دلخواهی از x باشد لذا مجموعهٔ باز $G\subseteq U$ وجود دارد که شامل x است واضح است که $X-G$ بسته است و $x\notin X-G$ پس چون X منظم است همسایگی‌های V از x و $U_\circ$ از $X-G$ موجودند که $U_\circ\bigcap V=\phi$ لذا $V\subseteq X-U_\circ$ اگر $y\in X-G$ آن‌گاه $U_\circ$ یک همسایگی y است و $U_\circ\bigcap V=\phi$ یعنی $y\notin\overline{V}$ پس

$$X-G\bigcap\overline{V}=\phi\Rightarrow\overline{V}\subseteq G\subseteq U_\circ\Rightarrow\overline{V}\subseteq U$$

(۳) ⇐(۲) فرض کنیم $x \in X$ و F مجموعه‌ای بسته باشد که $x \notin F$ لذا $X - F$ مجموعه‌ای باز و شامل x است لذا $X - F$ همسایگی از x است و بنا به (۲) همسایگی V از x وجود دارد که $V \subseteq \overline{V} \subseteq X - F$ پس $\overline{V} \cap F = \phi$.

(۱) ⇐(۳) فرض کنیم $x \in X$ و $F \subseteq X$ بسته باشد و $x \notin F$ بنا به (۳) همسایگی V از x موجود است که $\overline{V} \cap F = \phi$ لذا $V \cap F = \phi$ از طرفی $F \subseteq X - \overline{V}$ و $X - \overline{V}$ باز است پس $U_F = X - \overline{V}$ همسایگی شامل F است و داریم $X - \overline{V} \cap V = \phi$ پس X فضایی منظم است.

۷۴. نشان دهید هر فضای منظم T_0، T_2 و درنتیجه T_3 است.

حل: فرض کنیم $x, y \in X$ و $x \neq y$ چون X، T_0 است پس لااقل یک همسایگی از x یا y وجود دارد که شامل نقطهٔ دیگری نمی‌باشد. اگر U_x همسایگی از x و باز باشد و $y \notin U_x$ آن‌گاه $x \notin X - U_x$ در ضمن $X - U_x$ بسته است و چون فضای X منظم است بنا به تمرین قبل همسایگی V_x موجود است که $\overline{V_x} \cap (X - U_x) = \phi$. اما $y \in X - U_x$ پس $V_x \cap (X - U_x) = \phi$ یعنی X فضایی T_2 است. هر فضای T_2 و منظم T_3 است پس X، T_3 است.

۷۵. نشان دهید هر فضای متریک کاملاً منظم و در نتیجه تیخونوف است.

حل: فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد و $x_0 \in X$ و $F \subseteq X$ بسته باشد و $x_0 \notin F$ لذا $r = d(x_0, F) > 0$ (چون اگر $d(x_0, F) = 0$ آن‌گاه $x_0 \in \overline{F} = F$ که تناقض است و از اینجا مسئله به سادگی نتیجه می‌شود).

۷۶. نشان دهید هر فضای T_4، فضائی $T_{\frac{7}{2}}$ است.

حل: فرض کنیم X فضایی T_4 باشد لذا X نرمال و T_1 است، کافی است نشان دهیم X، کاملاً منظم است. فرض کنیم $x \in X$ و F در X بسته باشد. $x \notin F$ چون X، T_1 است پس هر مجموعهٔ تک عضوی در X بسته است و $\{x\} \cap F = \phi$.

پس بنا به لم اوریسون تابعی پیوسته مانند $f : X \to [0,1]$ وجود دارد که $f(\{x\}) = \{0\}$ و $f(F) = \{1\}$ لذا $f(x) = 0$ پس X کاملاً منظم است.

۷۷. نشان دهید احکام زیر با یکدیگر معادلند:

(۱) X نرمال است (۲) به ازای هر همسایگی U_F از مجموعهٔ بستهٔ F یک همسایگی V_F از F موجود باشد به‌طوری‌که $\overline{V_F} \subseteq U_F$ (۳) به ازای هر دو مجموعهٔ بستهٔ مجزای F_1 و F_2

همسایگی‌هایی مانند V_{F_1} شامل F_1 و V_{F_2} شامل F_2 موجود باشند به‌طوری‌که: $\overline{V_{F_1}} \cap \overline{V_{F_2}} = \phi$.

حل: (۲) $\Leftarrow$(۱) فرض کنیم X نرمال باشد و U_F همسایگی دلخواهی از مجموعهٔ بستهٔ F باشد لذا مجموعهٔ باز G در U_F وجود دارد که $F \subseteq G$. چون G باز است $X - G$ بسته است و $(X-G) \cap F = \phi$ بنا به نرمال بودن X، همسایگی‌های V_F و V_{X-G} وجود دارد که $V_F \cap V_{X-G} = \phi$ ادعا می‌کنیم $\overline{V_F} \cap X - G = \phi$ اگر $y \in \overline{V_F} \cap (X-G)$ آن‌گاه $y \in V_{X-G}$ لذا V_{X-G} همسایگی از y است و چون $y \in \overline{V_F}$ پس $V_{X-G} \cap V_F \neq \phi$ که تناقض است پس $\overline{V_F} \cap (X-G) = \phi$ لذا $\overline{V_F} \subseteq G \subseteq U_F$.

(۳) $\Leftarrow$(۲) فرض کنیم F_1 و F_2 در X بسته باشند و $F_1 \cap F_2 = \phi$ چون $X - F_1$ در X باز و شامل F_2 است پس یک همسایگی شامل F_2 می‌باشد لذا بنا به (۲) همسایگی V_2 شامل F_2 وجود دارد که
$$\overline{V_2} \subseteq X - F_1 \Rightarrow F_1 \subseteq X - \overline{V_2}$$
$X - \overline{V_2}$ باز است لذا همسایگی شامل F_1 می‌باشد پس بنا به (۲) همسایگی V_1 شامل F_1 وجود دارد که

$$F_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq X - \overline{V_2} \Rightarrow \overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \phi$$

(۱) $\Leftarrow$(۳) واضح است: $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \phi \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \phi$.

۷۸. نشان دهید خاصیت نرمال بودن توپولوژیکی است.

حل: فرض کنید X یک فضای نرمال و $f : X \to Y$ یک همسانریختی باشد فرض کنید $F \subseteq Y$ بسته و $g : F \to [a,b]$ تابع پیوسته‌ای باشد، باید نشان دهیم تابع پیوستهٔ $g^* : Y \to [a,b]$ وجود دارد که $g^*\big|_F = g$. چون F در Y بسته است پس $f^{-1}(F)$ در X بسته است از طرفی $g\,o\,f : f^{-1}(F) \to [a,b]$ تابعی پیوسته است.

پس بنا به قضیهٔ گسترش تیتز تابع پیوستهٔ $f^* : X \to [a,b]$ وجود دارد که $f^*\big|_{f^{-1}(F)} = g\,o\,f$ لذا $f^*(f^{-1}(F)) = gof(f^{-1}(F))$ پس چون f برو است $f^*(f^{-1}(F)) = g(F) = [a,b]$ پس $f^* of^{-1} : Y \to [a,b]$ تابعی است پیوسته و $f^* of^{-1}\big|_F = g$ لذا Y نرمال است.

۷۹. فرض کنید X نرمال و $F \subseteq X$ بسته باشد نشان دهید برای هر تابع پیوستهٔ $f : F \to \mathbb{R}$ تابع پیوسته‌ای مانند $f^* : X \to \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری‌که :

$$\forall x \in F; \quad f^*(x) = f(x)$$

حل: از آنجا که $\mathbb{R} \cong (-۱,۱)$ پس می‌توان تابع f را از F به $(-۱,۱)$ در نظر گرفت. بنا به قضیهٔ گسترش تیتز تابع پیوستهٔ $g : X \to [-۱,۱]$ موجود است به قسمی که $g|_F = f$. حال مجموعهٔ D را این‌گونه تعریف می‌کنیم: $D = g^{-۱}(\{-۱\}) \bigcup g^{-۱}(\{۱\})$ چون g پیوسته است پس D یک مجموعهٔ بسته در X می‌باشد و چون $g(F) = f(F)$ پس $F \bigcap D = \phi$ (زیرا اگر $y \in F \bigcap D$ آن‌گاه $f(y) \in (-۱,۱)$ پس $g(y) \in (-۱,۱)$ و چون $y \in D$ لذا $g(y) = -۱$ یا $g(y) = ۱$ که تناقض است). پس مجموعه‌های F و D دو مجموعهٔ جدا از هم می‌باشند، پس بنا به لم اوریزون تابع پیوسته‌ای مانند $\varphi : X \to [۰,۱]$ موجود است که $\phi(D) = \{۰\}$ و $\phi(F) = ۱$ تابع h را بر X چنین تعریف می‌کنیم $h(x) = \phi(x) g(x)$ چون ϕ و g پیوسته‌اند پس h پیوسته است. همچنین h یک گسترش f است زیرا:

$$\forall a \in F \quad h(a) = \varphi(a) g(a) = ۱ \times f(a) = f(a)$$

و بالاخره $h : X \to (-۱,۱)$ زیرا اگر

$$x \in D \Rightarrow g(x) = ۱ \text{ یا } g(x) = -۱ \Rightarrow |g(x)| = ۱$$
$$\Rightarrow |h(x)| = |\phi(x) g(x)| = |\phi(x)| = ۰ \in (-۱,۱)$$

و اگر $x \notin D$ آن‌گاه $|g(x)| < ۱$ پس

$$|h(x)| = |\phi(x)||g(x)| < |\varphi(x)| \leq ۱ \Rightarrow |h(x)| < ۱ \Rightarrow h(x) \in (-۱,۱)$$

۸۰. فرض کنید $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از توابع پیوسته از X بتوی Y_αها باشد نشان دهید که:

(الف) f_α ها نقاط X را جدا می‌کنند $\Leftrightarrow$ $f : X \to \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ یک به یک باشد.

(ب) f_α ها نقاط و مجموعه‌های بستهٔ X را جدا می‌کنند $\Leftrightarrow$ $f : X \to \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ باز باشد.

حل: (الف) اگر $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ نقاط X را جدا کنند و $f : X \to \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ تابعی باشد که

$$\forall x \in X; \quad f(x) = (f_\alpha(x))$$

نشان می‌دهیم f، یک به یک است فرض کنیم $x_۱ \neq x_۲$ پس $\alpha \in I$ هست که $f_\alpha(x_۱) \neq f_\alpha(x_۲)$ لذا $f(x_۱) \neq f(x_۲)$ پس f یک به یک است.

بالعکس اگر f یک به یک باشد و $x_1 \neq x_2$ آن‌گاه $f(x_1) \neq f(x_2)$ پس αای هست که $f_\alpha(x_1) \neq f_\alpha(x_2)$ لذا f_αها نقاط X را جدا می‌کنند.

(ب) ابتدا فرض کنیم $\{f_\alpha\}$ نقاط و مجموعه‌های بستهٔ X را از هم جدا می‌کنند. فرض کنیم G در X باز باشد نشان می‌دهیم $f(G)$ در $\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ باز است. فرض کنیم $y \in f(G)$ پس $x \in G$ هست که $f(x) = y$ چون $x \in G$ پس $x \notin X - G$ از طرفی $X - G$ بسته است پس

$$\exists \alpha_\circ \in I; \quad f_{\alpha_\circ}(x) \notin \overline{f_{\alpha_\circ}(X-G)}$$

قرار دهید $U = \{z \in \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha ; \pi_{\alpha_\circ}(z) \notin \overline{f_{\alpha_\circ}(X-G)}\}$ چون

$$U = \{z \in \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha ; \pi_{\alpha_\circ}(z) \in Y_{\alpha_\circ} - \overline{f_{\alpha_\circ}(X-G)}\} = \pi^{-1}_{\alpha_\circ}[Y_{\alpha_\circ} - \overline{f_{\alpha_\circ}(X-G)}]$$

و $\pi_{\alpha_\circ}$ پیوسته است پس U در $\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ باز است و $y \in U$ زیرا $\pi_{\alpha_\circ}(y) = f_{\alpha_\circ}(x)$ که $f_{\alpha_\circ}(x) \notin \overline{f_{\alpha_\circ}(X-G)}$ پس U یک همسایگی از y می‌باشد قرار دهید $V_y = U \cap f(X)$ بدیهی است که V_y یک همسایگی از y در $f(X)$ است بعلاوه $V_y \subseteq f(G)$ زیرا اگر $z \in V_y$ آن‌گاه $z \in U \cap f(X)$ پس $x_\circ \in X$ای هست که

$$f_{\alpha_\circ} \notin \overline{f_{\alpha_\circ}(X-G)} \subseteq f_{\alpha_\circ}(X-G), f(x_\circ) = Z$$

لذا

$$f_{\alpha_\circ}(x_\circ) \in f_{\alpha_\circ}(G) \Rightarrow z \in f(G)$$

بنابراین $f(G)$ در $f(X)$ باز است یعنی $f : X \to \prod Y_\alpha$ باز است.

بالعکس فرض کنیم $f : X \to \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ باز باشد و F در X بسته و $x \notin F$. چون F بسته است پس $X - F$ باز است لذا $f(X-F)$ در $\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ باز است اما

$$f(X-F) = Y - f(F)$$

پس $f(F)$ در Y بسته است و $f(x) \notin f(F)$ پس $\alpha_\circ \in I$ای وجود دارد که $f_{\alpha_\circ}(x) \notin f_{\alpha_\circ}(F)$ چون $f_{\alpha_\circ}(F)$ بسته است پس $f_{\alpha_\circ}(x) \notin \overline{f_{\alpha_\circ}(F)}$.

۸۱. اگر X متریک باشد آن‌گاه احکام زیر معادلند: (الف) X فشردهٔ دنباله‌ای است. (ب) X فشردهٔ شمارا است. (ج) X دارای خاصیت بولتزانو — وایراشتراس است.

حـل: هـر فضـای متـری T_1 اسـت پس (ج) $\Leftarrow$ (ب) ((ج) $\Rightarrow$ (ب) بدیهی است. هر فضای متری شمارای اول است پس (ب) $\Leftrightarrow$ الف).

۸۲. نشان دهید که زیر مجموعه‌ای متناهی از یک فضای T_1 وجود دارد که دارای نقطهٔ حدی نیست.

حـل: فـرض کنیم همـهٔ مجمـوعه‌هـای متناهـی از یـک فضـای T_1 نقطـهٔ حـدی داشـته باشند پس مجمـوعه‌هـای تـک عضوی X نیز در X نقطهٔ حدی دارند فرض کنیم $x \in X$. $y \in \{x\}'$ پس برای هر همسایگی از y مانند U_y داریم:

$$(U_y - \{y\}) \cap \{x\} \neq \phi \Rightarrow x \in U_y - \{y\}$$

اما $x \neq y$ پس دو همسایگی U_x و U_y وجود دارد که $U_x \cap V_y = \phi$ دراین‌صورت

$$(V_y - \{y\}) \cap \{x\} \neq \phi \Rightarrow x \in V_y - \{y\}$$

که تناقض است. لذا تمام مجموعه‌های متناهی T_1 نقطهٔ حدی ندارند.

۸۳ . $A \subseteq \mathbb{R}^n$ فشرده است اگر و فقط اگر بسته و کراندار باشد.

حـل: ابـتدا فـرض کنـیم $A \subseteq \mathbb{R}^n$ فشـرده باشد چون $\mathbb{R}^n$ هاسدورف است پس A در $\mathbb{R}^n$ بسته است اگر $\{ B_d(0,m) \}_{m\in N}$ پوشش بازی از A باشد.

$$(\{ B_d(0,m) \}_{m\in N} = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \| x \| \leq m \} = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} \leq m \} \ )$$

بـه‌دلـیل فشـردگی A ایـن پوشـش یـک زیر پوشش متناهی دارد لذا $A \subseteq \bigcup_{m=1}^{k} B_d(0,m)$ پس اگر $M = \max\{m; m = 1,\ldots,k\}$ آن‌گاه $A \subseteq B_d(0,m)$ لذا

$$\forall x, y \in A; \| x - y \| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2M \Rightarrow d(x,y) \leq 2M \Rightarrow d(A) \leq 2M$$

لذا A کراندار است. بعکس فرض کنیم A بسته و کراندار است پس $M \in \mathbb{N}$ ای هست

$$d(A) \leq M \Rightarrow \forall x, y \in A \,; d(x,y) \leq M$$

نقطه‌ای از A مانند x_0 را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $d(x_0, 0) = N$ لذا

$$\forall y \in A \,; d(0,y) \leq d(0,x_0) + d(x_0,y) \leq N + M = P$$

پـس A در مکعـب $[-p,p]^n$ واقـع اسـت لـذا A در $[-p,p]^n$ بسته است و چون $[-p,p]^n$ فشرده است (قضیهٔ تیخونوف) پس A هم فشرده است.

۸۴ . اگـر زیـرمجموعه‌ای از یک فضای متریک فشوده باشد آن‌گاه بسته و کراندار است. با مثالی نشان دهید که عکس این حکم در حالت کلی درست نیست.

حل: اگر $A \subseteq (X,d)$ فشرده باشد چون هر فضای متریک هاسدورف است پس A بسته است ثانیاً به ازای $x_\circ \in A$ دلخواه از این به بعد ثابت مجموعهٔ $\{B_d(x_\circ, m)\}_{m\in N}$ یک پوشش باز برای A است پس زیر پوشش متناهی دارد لذا $M \in \mathbb{N}$ ای هست که $A \subseteq B_d(x, M)$,..., $d(A) \le ۲M$ حال اگر $A \subseteq (X,d)$ بسته و کراندار باشد لزوماً A فشرده نیست زیرا $\mathbb{R}$ با توپولوژی گسسته یک فضای متریک است و $\mathbb{R}$ یک مجموعهٔ بسته و کراندار در این توپولوژی می‌باشد ($d(\mathbb{R}) \le ۲$) اما $\mathbb{R}$ با توپولوژی گسسته فشرده نیست زیرا $\mathbb{R}$ متناهی نیست.

۸۵. اجتماع دو مجموعهٔ همبند که دارای اشتراک ناتهی هستند، همبند است.

حل: فرض کنید A و B دو مجموعهٔ همبند و $A \cap B \neq \phi$ چون $A \cap B \subseteq \overline{A} \cap B$ $\phi \neq$ پس A و B دو مجموعهٔ نامنفک‌اند بنا به تمرینی $A \cup B$ همبند است.

۸۶. نشان دهید در فضای شمارای اول X شرط لازم و کافی برای آنکه $x \in X$ نقطهٔ تجمع دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد آن است که زیر دنباله‌ای $\{x_{N_i}\}$ موجود باشد به‌طوری‌که $x_{r_n} \to x$.

حل: $\Leftarrow$) بدیهی است . $\Rightarrow$) فرض کنیم $x \in X$ نقطهٔ تجمع دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد چون X شمارای اول لذا x دارای یک پایهٔ موضعی شمارا مانند $\{V_i\ ; i = ۰,۱,\dots\}$ می‌باشد به‌طوری‌که $V_{n+۱} \subseteq V_n$ به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ ، عدد طبیعی $N_i \ge i$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $x_{N_i} \in V_i$ (چون x نقطهٔ تجمع دنبالهٔ $\{x_n\}$ است پس به ازای هر همسایگی V_i، $(\exists N_i \ge i; x_{N_i} \in V_i$)
دراین‌صورت $\{x_{N_i}\}$ یک زیر دنباله از $\{x_n\}$ است که به x همگراست. زیرا اگر V یک همسایگی از x باشد آن‌گاه

$$\exists n_\circ \in \mathbb{N} \quad x \in V_{n_\circ} \subseteq V \Rightarrow \forall N_{n_\circ} \ge n_\circ ; x_{N_{n_\circ}} \in V_{N_{n_\circ}} \subseteq V_{n_\circ} \subseteq V$$

پس $x_{N_i} \to x$.

۸۷. نشان دهید که اگر $f: X \to Y$ پیوسته، پوشا و یک به یک باشد و X فشرده و Y هاسدورف باشد آن‌گاه f یک همسانریختی است.

حل: کافی است نشان دهیم f بسته است. فرض کنیم $F \subseteq X$ بسته باشد نشان می‌دهیم $f(F)$ در Y بسته است چون X فشرده است و و زیر فضاهای بستهٔ فضاهای فشرده، فشرده‌اند پس F فشرده است و بدلیل پیوستگی f، $f(F)$ فشرده است. چون Y هاسدورف است پس $f(F)$ در Y بسته است.

۸۸ . اگر X فشرده باشد آن‌گاه هر تابع پیوسته مانند $f: X \to \mathbb{R}$ ماکزیمم و مینیمم مقدار خود را اختیار می‌کند.

حل: چون X فشرده و $f: X \to \mathbb{R}$ پیوسته است پس $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ پس بنا به قضیهٔ هاینه بورل $f(X)$ در $\mathbb{R}$ بسته و کراندار است پس

$$\exists M \in \mathbb{R}; \forall x \in X; |f(x)| \leq M$$

پس $f(X) \subseteq [-M, M]$ لذا $f(X)$ سوپریمم و اینفیمم دارد اما $\sup_{x \in X} f(x)$ و $\inf_{x \in X} f(x)$ به $f(X) = \overline{f(X)}$ تعلق دارد لذا $f(X)$ ماکزیمم و مینیمم دارد.

۸۹ . فرض کنید (X, τ) فشرده باشد اگر $\tau_1 \subseteq \tau$ آن‌گاه (X, τ_1) نیز فشرده است.

حل: فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ پوشش بازی برای (X, τ_1) باشد پس به ازای هر $\alpha \in I$، $G_\alpha \in \tau$ پس $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ پوشش بازی برای (X, τ) است لذا یک زیر پوشش متناهی برای X دارد پس (X, τ_1) نیز فشرده است.

۹۰. فرض کنید $f: X \to Y$ برو و پیوسته باشد اگر X همبند باشد آن‌گاه Y نیز همبند است.

حل: فرض کنید $\phi \neq A \subset Y$ هم باز و هم بسته باشد پس بنا به پیوستگی f، $f^{-1}(A)$ در X هم باز و هم بسته است که با ناهمبندی X تناقض دارد پس تنها زیر مجموعه‌های هم باز و هم بستهٔ Y، Y و ϕ اند لذا Y همبند است.

۹۱. نشان دهید در هر فضای توپولوژیک اجتماع متناهی از مجموعه‌های فشرده، فشرده است.

حل: فرض کنیم $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ زیرمجموعه‌های فشردهٔ فضای X باشند، می‌خواهیم نشان دهیم $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ نیز فشرده است. فرض کنیم $\{G_\alpha\}$ پوشش بازی از F باشد. پس $\{G_\alpha\}$ پوشش بازی برای هر یک از F_iها می‌باشد و بدلیل فشردگی هر یک از F_iها داریم $F_i \subseteq \bigcup_{t=1}^{n_i} G_{\alpha_t}$ پس $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\bigcup_{t=1}^{n_i} G_{\alpha_t})$ لذا F فشرده است.

۹۲. نشان دهید اشتراک هر خانوادهٔ دلخواه از مجموعه‌های فشرده در یک فضای هاسدورف فشرده است.

حل: اگر $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های فشرده در فضای هاسدورف X باشد آن‌گاه به ازای هر α، F_α فشرده است پس $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ نیز فشرده است (زیر فضاهای بستهٔ فضاهای فشرده، فشرده‌اند).

۹۳. فرض کنید $f: X \to Y$ پیوسته و برو باشد اگر X فشردهٔ شمارا باشد نشان دهید Y نیز فشردهٔ شمارا است.

حل: فرض کنیم $\{G_n\}_{n\in N}$ پوشش باز و شمارایی برای Y باشد بدلیل پیوستگی f، $\{f^{-1}(G_n)\}_{n\in N}$ پوشش بازی برای X است. چون X فشردهٔ شمارا است پس

$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i)$ لذا $Y = f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ (f برو) پس Y فشردهٔ شمارا است.

۹۴. زیرمجموعه‌های بستهٔ فضاهای فشردهٔ دنباله‌ای، فشردهٔ دنباله‌ای هستند.

حل: فرض کنیم X فضایی فشردهٔ دنباله‌ای و $Y \subseteq X$ در X بسته باشد و فرض کنیم $\{y_n\}$ دنباله‌ای در Y باشد لذا $\{y_n\}$ دنباله‌ای X است زیردنباله‌ای همگرا دارد پس نقطهٔ $x \in X$ هست که $y_{r_n} \to x$ اما می‌دانیم $x \in \overline{Y}$ پس چون $Y = \overline{Y}$، $x \in Y$ لذا $\{y_{r_n}\}$ در Y همگرا است پس Y فشردهٔ دنباله‌ای است.

نمایه