دانشگاه الزهرا

۱۱۹

توپولوژی عمومی

تألیف و تدوین:
زهرا خوانین شیرازی - مریم ربیعی

توپولوژی عمومی

تألیف

زهرا خوانین شیرازی ـ دکتر مریم ربیعی

پیشگفتار

نیل به اهداف اقتصادی، اجتماعی و فرهنگی در جمهوری اسلامی ایران بدون توسعهٔ نیروی انسانی و توسعهٔ نیروی انسانی بدون تقویت زیرساخت‌های علمی و فراهم نمودن بستر لازم برای توسعه و گسترش علوم و فنون در جامعهٔ علمی نخواهد بود. از آنجایی که علوم ریاضی به عنوان مادر علوم باعث تقویت تفکر و خلاقیت‌ها و نیز موجب نگرش منطقی به تمامی پدیده‌های علمی و تجربی می‌گردد، لذا می‌بایست کلیه اندیشمندان و اساتید به تقویت تمامی شاخه‌های علوم ریاضی همت گماشته تا زمینه و بستر لازم جهت رشد و تعالی دانش‌پژوهان و فرهیختگان در جامعه فراهم گردد. بدون شک در بین شاخه‌های علوم ریاضی، توپولوژی عمومی به لحاظ نگرش منطقی نه‌تنها در روش اصول سهمی قابل توجه دارد بلکه در سایر شاخه‌های ریاضیات مانند هندسه دیفرانسیل، هندسه جبری، نظریه اعداد، آنالیز ریاضی و غیره کاربرد داشته و در درک مفاهیم پیچیدهٔ آنها بسیار مؤثر می‌باشد.

مؤلفان به لحاظ تخصص و تجربهٔ چندین‌ساله آموزش، بر آن شدند تا مفاهیم پیچیدهٔ توپولوژی عمومی را به زبانی ساده و نگارشی روان برای درک سریع خوانندگان به رشتهٔ تحریر درآورند. در انجام این مهم و نیز ایجاد انگیزه از مثال‌ها و تمرینات متعدد همراه با حل آنها استفاده گردیده است.

جا دارد از کلیه همکاران و اساتید محترم که به لحاظ نیاز شدید علمی و دانشگاهی کشور ما را در تألیف این کتاب تشویق نموده‌اند قدردانی به عمل آید. بدون شک علی‌رغم تلاش و سعی زیادی که مؤلفین در تدوین و تألیف این کتاب به‌کار بسته‌اند، این مجموعه خالی از نقص نیست. لذا از کلیه اساتید و خوانندگان و صاحبنظران محترم انتظار می‌رود که با راهنمایی‌های خود ما را در افزایش غنای این کتاب یاری نمایند.

دکتر مریم ربیعی

زهرا خوانین شیرازی

مقدمه

در درس آنالیز، مفاهیم بیشمار و قضیه‌های زیادی را با استفاده از فاصله‌های اعداد حقیقی بیان کردیم. اما گاهی ممکن است نتوانیم تعریف مناسبی از فاصله ارائه دهیم. به همین دلیل لازم است روشی برای بیان این مفاهیم مستقل از مفهوم فاصله بیابیم. در آنالیز دیدیم که پیوستگی را می‌توان با استفاده از مجموعه‌های باز نیز بیان نمود. این ایده به ما کمک می‌کند تا بتوانیم فضاهای عمومی‌تری به نام فضاهای توپولوژیکی را تعریف کنیم. در حقیقت در درس توپولوژی خواهیم دید که این مفاهیم و قضیه‌ها را با استفاده از مجموعه‌های باز می‌توان بازگو کرد. لذا در این درس تنها مجموعه‌های باز را می‌شناسیم. بدین معنا که اگر بدانیم کدام مجموعه باز است می‌دانیم کدام تابع پیوسته، کدام مجموعه فشرده، کدام مجموعه دارای نقطه تجمع و غیره است. در این رابطه سعی بر آن است که حداقل شرایطی را بررسی کنیم که تحت آن شرایط یک مجموعهٔ دلخواه بتواند در دسته مجموعه‌های باز قرار گیرد. جالب این‌که با در نظر گرفتن این شرایط مهم‌ترین مفاهیم ریاضی، تعریف و اغلب قضیه‌های آنالیز در حالت کلی اثبات می‌شود.

فهرست مطالب

فصل ۱

یادآوری

۱.۱ مجموعه‌ها

مجموعه‌ها و اعمال مربوط به آن در تمام شاخه‌های ریاضی به‌کار گرفته می‌شود. در این درس نیز با بسیاری از این مفاهیم و اعمال سر و کار داریم. لذا ابتدا یادآوری مختصری از مفاهیم و اعمال مربوط به مجموعه‌ها را می‌آوریم.

یکی از مفاهیم ریاضی که قابل تعریف نیست و اغلب مفاهیم دیگر ریاضی به وسیلهٔ آن تعریف می‌شود، مجموعه است. مجموعه‌ها را با حروف A و B و C و... نشان می‌دهیم. اگر a یک عضو مجموعهٔ A باشد آن را به صورت $a \in A$ می‌نویسیم و اگر a عضو مجموعه A نباشد می‌نویسیم $a \notin A$.

مجموعه A را **زیرمجموعهٔ** B می‌گوییم و آن را به صورت $A \subseteq B$ نشان می‌دهیم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall a \in A \Rightarrow a \in B$$

و اگر A زیرمجموعه B نباشد آن را به صورت $A \not\subseteq B$ می‌نویسیم، در این صورت:

$$\exists a \in A ; \ \ a \notin B$$

مجموعه اعداد طبیعی را با $\mathcal{N}$، مجموعه اعداد صحیح را با $\mathcal{Z}$، مجموعه اعداد گویا را با $\mathcal{Q}$ و مجموعه اعداد حقیقی را با $\mathcal{R}$ نشان می‌دهیم. روشن است که: $\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$.

مجموعه‌ای را که هیچ عضو ندارد **مجموعه تهی** می‌نامیم و به ϕ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ای را که اعضایش خود مجموعه هستند، **دسته** می‌نامیم و مجموعه تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه مانند A را **مجموعه توان** نامیده و آن را به $P(A)$ نشان می‌دهیم.

دو مجموعه دلخواه A و B را در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ $B\backslash A$ را **تفاضل نسبی** گوییم و با رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$B\backslash A = \{b:\ b \in B\ ,\ \ b \notin A\}$$

مجموعهٔ $B\backslash A$ را **مکمل** A **نسبت** به B نیز می‌نامند. اگر X مجموعه مرجع و $A \subseteq X$، مجموعهٔ $X\backslash A$ را به اختصار **مکمل** A می‌نامیم.

اجتماع و **اشتراک** دو مجموعهٔ دلخواه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \cup B = \{x:\ x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x:\ x \in A \text{ و } x \in B\}$$

برای دسته غیرتهی $\mathcal{A}$، مشتمل بر زیرمجموعه‌های مجموعه مرجع X، $\cup\mathcal{A}$ و $\cap\mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\cup\mathcal{A} = \}a:\ a \in A,\ \exists A \in \mathcal{A}\}$$

$$\cap\mathcal{A} = \}a:\ a \in A,\ \forall A \in \mathcal{A}\}$$

تذکر: اگر $\mathcal{A} = \phi$، در بعضی از کتابها از قرارداد زیر استفاده می‌شود.

$$\cap\mathcal{A} = X \quad , \quad \cup\mathcal{A} = \phi$$

در مورد اولین تساوی گفته می‌شود که هر عضو $x \in X$ به $\cap\mathcal{A}$ متعلق است. زیرا هیچ عضوی از $\mathcal{A}$ نیست که شامل x نباشد و در مورد دومی هیچ عضوی در $\cup\mathcal{A}$ موجود نیست که در ϕ نباشد، اگرچه رابطهٔ $\cap\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{A}$ در اینجا برقرار نیست. ما در این کتاب برای جلوگیری از ایجاد هرگونه ابهام از این قرارداد استفاده نخواهیم کرد و اجتماع و اشتراک را برای دسته‌های غیرتهی تعریف می‌نماییم.

به سهولت می‌توان دید برای هر $A, B, C \subseteq X$ روابط زیر برقرار است:

الف ـ

$$A \cup A = A \quad , \quad A \cap A = A$$

ب ـ قوانین جابجایی

$$A \cup B = B \cup A \quad , \quad A \cap B = B \cap A$$

ج ـ قوانین شرکت‌پذیری

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

د- قوانین توزیع‌پذیری

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

هـ - قوانین دمرگان [1]

$$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$$

$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

برای دو مجموعهٔ $A \neq \phi$ و $B \neq \phi$، **حاصل‌ضرب دو مجموعه** A و B را به $A \times B$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \{(a,b): \; a \in A \;,\; b \in B\}$$

حاصل‌ضرب دو مجموعهٔ A و B را **حاصل‌ضرب دکارتی** A و B نیز می‌نامند.

حاصل‌ضرب دستهٔ $\mathcal{A} = \{A_i : \; i = ۱, ۲, \cdots, n\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_۱ \times A_۲ \times \cdots \times A_n = \{(a_۱, \; a_۲, \cdots, \; a_n) : a_i \in A_i \;, \;\; i = ۱, ۲, \cdots, \; n\}$$

قرارداد: اگر $A = \phi$ و یا $B = \phi$، تعریف می‌کنیم: $A \times B = \phi$

تمرین

۱. فرض کنید $A, B, C \subseteq X$. درستی روابط زیر را ثابت کنید.

الف- $B \backslash A = B \cap (X \backslash A)$.

ب- $A \subseteq B$ اگر و تنها اگر $A \cup B = B$.

پ- $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$.

ت- $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$.

ث- $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

ج- $(A \backslash C) \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash C$.

چ- $A \cap (B \backslash C) = B \cap (A \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$.

---

[1] De Morgan

ح- با یک مثال نشان دهید $A \cup (B \backslash C) \neq (A \cup B) \backslash (A \cup C)$.

۲. مجموعه توان مجموعه $S = \{۳, \{۱, ۴\}\}$ را به دست آورید.

۳. تفاضل متقارن دو مجموعهٔ A و B به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

نشان دهید:

$$A \Delta \phi = A$$
$$A \Delta A = \phi$$
$$A \Delta B = B \Delta A$$
$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$
$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

۴. یک جبر بولی از مجموعه‌ها، یک دستهٔ غیرتهی مانند $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X است به طوری که اگر A و B در $\mathcal{A}$ باشند آنگاه $A \cap B$ و $A \cup B$ و $X \backslash A$ نیز در $\mathcal{A}$ هستند. نشان دهید ϕ و X نیز در $\mathcal{A}$ هستند.

۵. یک حلقه از مجموعه‌ها یک دستهٔ غیرتهی مانند $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X است به طوری که اگر A و B در $\mathcal{A}$ باشند، آنگاه $A \cap B$ و $A \Delta B$ نیز در $\mathcal{A}$ هستند. نشان دهید:

الف- $A \backslash B$ و $A \cup B$ نیز در $\mathcal{A}$ هستند.

ب- اگر دستهٔ $\mathcal{A}$ چنان باشد که اجتماع و تفاضل هر دو جفت از مجموعه‌های خود را شامل شود آنگاه $\mathcal{A}$ یک حلقه است.

پ- هر جبر بولی یک حلقه است.

۶. ثابت کنید:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$(A \times B) \backslash (C \times D) = (A \backslash C) \times (B \backslash D) \cup (A \cap C) \times (B \backslash D) \cup (A \backslash C) \times (B \cap D)$$
$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

آیا رابطهٔ آخر برای اجتماع نیز برقرار است؟

۷. برای مجموعهٔ B و دستهٔ $\{A_i\}$ از زیرمجموعه‌های X، درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

$$B \cup (\cap_i A_i) = \cap_i (B \cup A_i)$$
$$B \cap (\cup_i A_i) = \cup_i (B \cap A_i)$$
$$X \backslash (\cup_i A_i) = \cap_i (X \backslash A_i)$$
$$X \backslash (\cap_i A_i) = \cup_i (X \backslash A_i)$$

۸. آیا تساوی زیر لزوماً برقرار است.

$$\cup_{i=۱}(\cap_{j=۱} A_{ij}) = \cap_{j=۱}(\cup_{i=۱} A_{ij}) \quad , \quad i, j = ۱, ۲, \cdots$$

۱.۲ توابع

در درس ریاضیات با مفهوم رابطه و تابع آشنا شدیم. در درس آنالیز با این مفاهیم آشنایی گسترده‌ای کسب نمودیم. در اینجا یادآوری مختصری از مفهوم تابع و اعمال جبری توابع می‌آوریم.

دو مجموعهٔ غیرتهی X و Y را در نظر می‌گیریم. **تابع** f رابطه‌ای از X به Y است بطوری که برای هر عضو $x \in X$ عنصر منحصر بفردی مانند $y \in Y$ وجود دارد که $(x, y) \in f$ و یا $f(x) = y$. تابع f را به شکل $f : X \to Y$ نمایش می‌دهیم. برای هر $A \subseteq X$ مجموعهٔ $f(A)$ را **تصویر مجموعه** A می‌گوییم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

همچنین برای هر $C \subseteq Y$ مجموعهٔ $f^{-۱}(C)$ را **تصویر معکوس مجموعه** C می‌گوییم و به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f^{-۱}(C) = \{x : x \in X, f(x) \in C\}$$

در این صورت برای $A \subseteq X$ و $B \subseteq X$ داریم:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

$$f(A \backslash B) \supseteq f(A) \backslash f(B)$$

و برای هر دستهٔ $\{A_i : i = ۱, ۲, \cdots\}$ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X داریم:

$$f(\cup_i A_i) = \cup_i f(A_i)$$

$$f(\cap_i A_i) \subseteq \cap_i f(A_i)$$

برای هر $C \subseteq Y$ و $D \subseteq Y$ داریم:

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(C \backslash D) = f^{-1}(C) \backslash f^{-1}(D)$$

و نهایتاً برای هر دستهٔ $\{C_i : i = 1, 2, \cdots\}$ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ Y داریم:

$$f^{-1}(\cup_i C_i) = \cup_i f^{-1}(C_i)$$

$$f^{-1}(\cap_i C_i) = \cap_i f^{-1}(C_i)$$

دستهٔ $F = F(X, \mathcal{R})$ را مجموعهٔ تمام توابع حقیقی روی X فرض می‌کنیم و برای $f \in F$ و $g \in F$ و $k \in \mathcal{R}$ تعریف می‌کنیم:

۱– $f \pm g : X \to \mathcal{R}$

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

۲– $k \cdot f : X \to \mathcal{R}$

$(k \cdot f)(x) = k \cdot (f(x))$

۳– $f \cdot g : X \to \mathcal{R}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

تابع f را **تابع یک به یک** می‌گوییم اگر $f(a) = f(b)$ آنگاه $a = b$ و آن را **تابع پوشا** می‌گوییم اگر برای هر $y \in Y$ حداقل یک $x \in X$ موجود باشد بطوری که $f(x) = y$. معادلاً f را یک به یک می‌گوییم اگر برای هر $y \in Y$، $f^{-1}\{y\}$ یا تهی باشد و یا یک مجموعهٔ تک‌عضوی شود و آن را پوشا می‌گوییم اگر برای هر $y \in Y$، $f^{-1}\{y\}$ غیرتهی شود.

تابع $i : X \to X$ با ضابطهٔ $i(x) = x$ را **تابع همانی** می‌گوییم، اگر برای هر $A, B \subseteq X$، $f(A) = f(B)$، می‌گوییم $f : X \to Y$ یک **تابع ثابت** است.

اگر $g : Y \to Z$ و $f : X \to Y$ چنان باشد که $f(X) \subseteq Y$، آنگاه **ترکیب توابع** f و g را با $gof : X \to Z$ نمایش می‌دهیم و به صورت $(gof)(x) = g(f(x))$ تعریف می‌کنیم.

تمرین

۱. مجموعهٔ $X = \{a, b, c\}$ و توابع $f \in F(X, \mathcal{R})$ و g به صورت زیر تعریف شده است:

$$f = \{(a, ۱) , (b, -۲) , (c, ۳)\} \quad , \quad g = \{(a, -۲) , (b, ۰) , (c, ۱)\}$$

الف- $f \cdot g - ۲f$ و $f + ۲g$ و $f \cdot f$ را به دست آورید.

ب- اگر $0 \in F(X, \mathcal{R})$ به صورت $0(x) = ۰$ برای هر $x \in X$ تعریف شود، نشان دهید:

$$f + 0 = f \quad , \quad f \cdot 0 = 0$$

۲. فرض کنید $f : X \to Y$ یک به یک است، نشان دهید $P(f)$ با ضابطهٔ زیر یک تابع یک به یک است.

$$\begin{aligned} &P(f) : P(X) \to P(Y) \\ &\quad (P(f))(A) = f(A) \quad A \subseteq X \end{aligned}$$

۳. برای $A \subseteq X$، تابع $\mathcal{X}_A : X \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ $\mathcal{X}_A(A) = ۱$ و $\mathcal{X}_A(X \backslash A) = ۰$، **تابع مشخصه** A نامیده می‌شود. ثابت کنید برای $A, B \subseteq X$

$$\mathcal{X}_{A \cap B} = \mathcal{X}_A \cdot \mathcal{X}_B \quad , \quad \mathcal{X}_{A \cup B} = \mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B - \mathcal{X}_{A \cap B} \quad , \quad \mathcal{X}_{A \backslash B} = \mathcal{X}_A - \mathcal{X}_{A \cap B}$$

۴. فرض کنید $f : X \to Y$، $A, B \subseteq X$ و $C, D \subseteq Y$. روابط زیر را ثابت کنید.

الف- اگر $A \subseteq B$، آنگاه $f(A) \subseteq f(B)$.

ب- اگر $C \subseteq D$، آنگاه $f^{-۱}(C) \subseteq f^{-۱}(D)$.

پ- برای هر $A, B \subseteq X$ تساوی $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ برقرار است اگر و فقط اگر f یک به یک باشد.

ت- رابطهٔ $Y \backslash f(A) \subseteq f(X \backslash A)$ برای هر $A \subseteq X$ درست است اگر و فقط اگر f پوشا باشد و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر f یک به یک نیز باشد.

ث- $f(f^{-۱}(C)) \subseteq C$ و تساوی برای هر $C \subseteq Y$ برقرار است اگر و فقط اگر f پوشا باشد.

ج- $A \subseteq f^{-۱}(f(A))$ و تساوی برای هر $A \subseteq X$ برقرار است اگر و فقط اگر f یک به یک باشد.

چ- ثابت کنید: $(gof)^{-۱}(U) = f^{-۱}(g^{-۱}(U))$.

۱.۳ مجموعه‌های شمارش‌پذیر

موضوع این بخش در ریاضیات مدرن همواره از مباحث مهم بوده است، اگرچه انسان از دیرباز با مفهوم شمارش‌پذیری و تناظر یک به یک آشنا بوده است.

در این قسمت یادآوری صریحی خواهیم داشت با بعضی از این مفاهیم که در این کتاب مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

تعریف: مجموعهٔ A را **مجموعهٔ باپایان** می‌گوییم اگر $n \in \mathcal{N}$ موجود باشد به طوری که A در تناظر یک به یک با مجموعهٔ $I_n = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ باشد. به عبارت دیگر تابع یک به یک و پوشا $f\ :\ I_n \to A$ موجود باشد. در غیر این صورت آن را **مجموعهٔ بی‌پایان** می‌گوییم.

تعریف: مجموعهٔ A را **مجموعهٔ شمارش‌پذیر** می‌گوییم اگر مجموعهٔ A باپایان و یا در تناظر یک به یک با مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد. در غیر این صورت آن را **مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر** و یا **مجموعهٔ غیرشمارش‌پذیر** می‌نامیم.

مثال ۱: مجموعه اعداد صحیح، شمارش‌پذیر است. زیرا کافی است قرار دهیم $f\ :\ \mathcal{Z} \to \mathcal{N}$:

$$f(n) = \begin{cases} ۲n & n > ۰ \\ -۲n + ۱ & n \leq ۰ \end{cases}$$

مثال ۲: مجموعه همه زیرمجموعه‌های $\mathcal{N}$، $P(\mathcal{N})$، شمارش‌ناپذیر است. کافی است که نشان دهیم هیچ تابع پوشایی از $\mathcal{N}$ به $P(\mathcal{N})$ موجود نیست. فرض کنید این‌طور نباشد و $f : \mathcal{N} \to P(\mathcal{N})$ یک تابع پوشا باشد. برای هر $n \in \mathcal{N}$، تصویر $f(n)$ یک زیرمجموعه از $\mathcal{N}$ است که ممکن است شامل n باشد و ممکن است شامل n نباشد. فرض کنید $B \subseteq \mathcal{N}$ مشتمل بر همه nهایی باشد که $f(n)$ شامل n نیست:

$$B = \{n :\ n \in \mathcal{N} \backslash f(n)\}$$

نشان می‌دهیم B زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{N}$ است که در تصویر f واقع نمی‌شود. زیرا اگر $B = f(m)$ به ازای یک $m \in \mathcal{N}$، آنگاه طبق تعریف

$$m \in B \iff m \in \mathcal{N} \backslash f(m) \Leftrightarrow m \in \mathcal{N} \backslash B$$

که یک تناقض است.

در زیر چند قضیه که در این کتاب مورد استفاده قرار می‌گیرد را بدون اثبات ارائه می‌دهیم. اثبات این قضایا در کلیه کتاب‌های آنالیز مقدماتی وجود دارد.

قضیه ۱: هر زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است.

قضیه ۲: اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است.

قضیه ۳: حاصل‌ضرب دو مجموعهٔ شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است.

تمرین

۱. نشان دهید مجموعه اعداد گویا شمارش‌پذیر است.

۲. نشان دهید مجموعه اعداد گویا در صفحه شمارش‌پذیر است.

۳. نشان دهید اگر A بی‌پایان باشد، $A\backslash\{a\}$ نیز بی‌پایان است.

۴. ثابت کنید هر مجموعهٔ بی‌پایان در تناظر یک به یک با یک زیرمجموعه سره خودش است.

۵. نشان دهید هر دسته از زیرمجموعه‌های $\mathcal{R}$، با نقاط ابتدایی و انتهایی گویا شمارش‌پذیرند.

۶. نشان دهید هر دسته از مجموعه‌های باز و مجزا در $\mathcal{R}$ شمارش‌پذیر است.

۷. الف) عدد x را **عدد جبری** می‌گوییم اگر $n \in \mathcal{N}$ و $a_i \in \mathcal{Q}$، $0 \leq i \leq n-1$، موجود باشد به طوری که

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

نشان دهید مجموعهٔ اعداد جبری شمارش‌پذیر است.

ب) یک عدد را **عدد متعالی** می‌گوییم اگر جبری نباشد. نشان دهید مجموعه اعداد متعالی شمارش‌ناپذیر است.

۸. تعیین کنید هریک از مجموعه‌های داده‌شده از چه نوعی است.

شمارش‌پذیر ـ شمارش‌ناپذیر

الف ـ مجموعه همه توابع $f : \{0, 1\} \to \mathcal{N}$.

ب ـ مجموعه همه توابع $f : \mathcal{N} \to \{0, 1\}$.

پ ـ مجموعه همه توابع $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$.

ت ـ مجموعه همه توابع $f : \mathcal{N} \to \{0, 1\}$ به طوری که $m \in \mathcal{N}$ موجود است که $f(n) = 0$ برای هر $n \geq m$.

ث ـ مجموعه همه توابع $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ به طوری که $m \in \mathcal{N}$ موجود است که $f(n) = 1$ برای هر $n \geq m$.

ج ـ مجموعه همه توابع $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ به طوری که $m \in \mathcal{N}$ موجود است که $f(n) = f(m)$ برای هر $n \geq m$.

فصل ۲

فضاهای توپولوژیکی

همچنان که در مقدمه متذکر شدیم هدف ما معرفی فضاهای عمومی‌تری به نام فضاهای توپولوژیک است. لذا به دنبال حداقل شرایطی هستیم که تحت آن شرایط بتوانیم این فضاها را چنان تعریف نماییم که مفاهیم مهم ریاضی و قضایای اساسی آنالیز در حالت کلی اثبات شوند.

۲.۱ فضاهای توپولوژیکی

تعریف: مجموعهٔ غیرخالی X را در نظر می‌گیریم. دستهٔ T از زیرمجموعه‌های X یک **توپولوژی** برای مجموعهٔ X است اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف. $\phi, X \in T$

ب. اگر $O_۱, O_۲ \in T$، آنگاه $O_۱ \cap O_۲ \in T$

پ. اگر $O_i \in T$ برای هر i، آنگاه $\cup O_i \in T$

در این صورت اعضای T را **مجموعهٔ باز** و مجموعهٔ X همراه با دستهٔ T را **فضای توپولوژیکی** می‌نامیم و به صورت (X, T) می‌نویسیم.[۱]

بدیهی است که روی یک مجموعهٔ دلخواه داده‌شده اغلب می‌توان چندین توپولوژی تعریف کرد. توپولوژی‌های مجزا، فضاهای توپولوژیک متفاوت ایجاد می‌کنند. اگر ابهامی نباشد وقتی می‌گوییم X یک فضای توپولوژیکی است منظورمان این است که یک توپولوژی روی X موجود است.

---

[۱] قابل ذکر است که اگر قرارداد $\cup_{A\in\phi} A = \phi$ و $\cap_{A\in\phi} A = X$ را بپذیریم دو شرط ب و پ برای تعریف توپولوژی کافی است.

مثال ۱: $X = \{a, b, c, d, e\}$ و دسته‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$T = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$
$$T' = \{X, \phi, \{b\}, \{d, e\}, \{b, d, e\}$$
$$T'' = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

ملاحظه می‌کنیم T و T' هرکدام یک توپولوژی برای X است. زیرا در سه شرط فوق صدق می‌کند. اما دستهٔ T'' یک توپولوژی برای X نیست زیرا $\{a, c, d\} \in T''$ و $\{b, c, d\} \in T''$ در حالیکه $\{b, c, d\} \cup \{a, c, d\} \notin T''$ یعنی در این حالت، شرط (پ) برقرار نیست.

مثال ۲: مجموعهٔ دلخواه $X \neq \phi$ و دستهٔ $T = \{X, \phi\}$ را در نظر می‌گیریم. T یک توپولوژی برای X است. این توپولوژی به نام **توپولوژی ناگسسته** یا **توپولوژی بدیهی** معروف است. در این حالت فضای (X, T) **فضای ناگسسته** نامیده می‌شود.

مثال ۳: مجموعهٔ دلخواه $X \neq \phi$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم دستهٔ T شامل تمام زیرمجموعه‌های X است. در این صورت T یک توپولوژی برای X است که به **توپولوژی گسسته** معروف است. فضای (X, T) **فضای گسسته** نامیده می‌شود.

بدیهی است اگر توپولوژی T روی مجموعهٔ X شامل همهٔ مجموعه‌های تک‌عضوی باشد، آنگاه با توجه به تعریف، T شامل تمام زیرمجموعه‌های X خواهد بود در نتیجه توپولوژی T روی X بالاجبار توپولوژی گسسته خواهد شد. همچنین بدیهی است یک مجموعهٔ غیرتهی تک‌عضوی است اگر و فقط اگر فضای توپولوژیک (X, T) هم فضای گسسته باشد و هم فضای ناگسسته.

مثال ۴: فرض کنید $X = \mathcal{R}$ و $A \subseteq X$. مجموعهٔ A را باز می‌گوییم اگر برای هر $p \in A$ فاصلهٔ باز $]a, b[$ موجود باشد به طوری که $p \in]a, b[\subseteq A$. فرض کنید Γ تمام مجموعه‌های باز در $\mathcal{R}$ باشد در این صورت $(\mathcal{R}, \Gamma)$ یک فضای توپولوژیک است. این توپولوژی به **توپولوژی معمولی** یا **اقلیدسی** روی $\mathcal{R}$ معروف است.

مثال ۵: فرض کنید $X = \mathcal{R}^n$. $A \subseteq X$ را یک مجموعهٔ باز در X می‌گوییم اگر برای هر $p \in A$، گوی باز D_n به مرکز p و شعاع r، $r \in \mathcal{R}$ موجود باشد به طوری که $D_n \subseteq A$. دستهٔ A متشکل از تمام این گونه مجموعه‌های باز یک توپولوژی روی X است که به **توپولوژی معمولی** یا **توپولوژی اقلیدسی** روی $\mathcal{R}^n$ معروف است. منظور از گوی باز به مرکز $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ و شعاع r مجموعهٔ $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + \cdots + (x_n - p_n)^2} < r\}$ می‌باشد.

تذکر: در این کتاب توپولوژی روی $\mathcal{R}^n$ توپولوژی معمولی است مگر خلاف آن ذکر شود.

مثال ۶: دستهٔ $T = \{G \subseteq X : X\backslash G\} \cup \{\phi\}$ یک مجموعهٔ باپایان است روی **مجموعهٔ** دلخواه X یک توپولوژی به وجود می‌آورد زیرا اولاً بدیهی است که X و ϕ به T تعلق دارند. ثانیاً اگر G_1 و G_2 به T متعلق باشند، آنگاه $X\backslash G_1$ و $X\backslash G_2$ باپایان و در نتیجه $(X\backslash G_1)\cup(X\backslash G_2) = X\backslash(G_1\cap G_2)$ نیز باپایان است بنابراین $G_1 \cap G_2$ به T تعلق دارد. نهایتاً اگر $\{G_\alpha\}$ یک دسته از اعضای T باشند، آنگاه $\{X\backslash G_\alpha\}$ یک دسته از مجموعه‌های باپایان و در نتیجه $X\backslash(\cup G_\alpha) = \cap(X\backslash G_\alpha)$ نیز باپایان خواهد بود بنابراین $\cup G_\alpha$ نیز عضو T است. این فضای توپولوژیک به **فضای مکمل باپایان** معروف است.

مثال ۷: فرض کنید X یک مجموعهٔ دلخواه و $\phi \neq A \neq X$ یک زیرمجموعهٔ آن باشد. تعریف کنید:

$$T = \{G \subseteq X : \ A \subseteq G\} \cup \{\phi\}$$

در این صورت (X, T) به یک فضای توپولوژیک تبدیل می‌شود که آن را **فضای جذب** A می‌نامند. زیرا اولاً X و ϕ به T تعلق دارند، ثانیاً اگر G_1 و G_2 به T متعلق باشند، آنگاه $A \subseteq G_1$ و $A \subseteq G_2$ و در نتیجه $A \subseteq G_1 \cap G_2$. ثالثاً اگر هر دستهٔ دلخواه از اعضای T، شامل A است، اجتماع آنها نیز شامل A خواهد بود. در حالت خاص $A = \{p\}$

$$T = \{G \subseteq X : \ p \in G\} \cup \{\phi\}$$

فضای (X, T) **فضای جذب** p نامیده می‌شود. توجه کنید که اگر $A = X$، آنگاه فضای توپولوژیک حاصل همان فضای ناگسسته و اگر $A = \phi$ فضای حاصل فضای گسسته است.

مثال ۸: فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعهٔ کاملاً مرتب[۲] با خاصیت کوچکترین کران بالا و دستهٔ T مشتمل بر X و ϕ و کلیه زیرمجموعه‌هایی به صورت $S(p) = \{x \in X : \ x < p\}$، $p \in X$، باشد. این فضای توپولوژیک را **فضای توپولوژیک شعاع چپ** می‌نامند. بطور مشابه **فضای توپولوژیک شعاع راست** نیز تعریف می‌شود. در حالت خاص اگر $X = \mathcal{R}$، آنگاه $S(p) =]-\infty, p[$.

بررسی دو شرط اول و دوم سرراست است. برای برقراری شرط سوم فرض کنید $\{S(p_\alpha)\}$ یک دسته از عناصر T باشند. اگر مجموعهٔ $\{p_\alpha : p_\alpha \in X\}$ از بالا کراندار باشد و t کوچکترین کران بالای آن، آنگاه $\cup S(p_\alpha) = S(t)$ و اگر از بالا کراندار نباشد آنگاه $\cup S(p_\alpha) = X$.

تمرین

۱. نشان دهید هریک از دسته‌های زیر یک توپولوژی روی X است.

[۲] کاملاً مرتب، بطور خطی مرتب و یا رابطه ترتیبی ساده نیز نامیده می‌شود.

الف- X یک مجموعه دلخواه و

$$T = \{G \subseteq X : \text{یک مجموعه شمارش‌پذیر است } X \backslash G\} \cup \phi\}$$

فضای (X, T) فضای مکمل شمارش‌پذیر نامیده می‌شود.

ب- X یک مجموعهٔ دلخواه و $\phi \neq A \neq X$

$$T = \{G \subseteq X : A \cap G = \phi\} \cup \{X\}$$

فضای (X, T) را فضای طرد A می‌نامند. در حالت خاص $A = \{p\}$

$$T = \{G \subseteq X : p \notin G\} \cup \{X\}$$

و فضای (X, T) فضای طرد p نامیده می‌شود.

پ- $X = \{a, b\}$ و $T = \{\phi, \{a\}, X\}$. این فضا به فضای سیرپینسکی[۳] معروف است.

ت- X یک مجموعهٔ دلخواه، $p \in X$ و T برابر اجتماع دو توپولوژی طرد p و مکمل باپایان در X. در این حالت (X, T) را فضای فورت [۴] می‌نامند.

۲. نشان دهید اشتراک یک خانواده از توپولوژی‌ها روی X، یک توپولوژی روی X است. با ذکر یک مثال نشان دهید اجتماع دو توپولوژی همیشه یک توپولوژی برای X نیست.

۳. اشتراک و اجتماع دو توپولوژی طرد a و جذب a چه نوع توپولوژیی است؟

۴. آیا دستهٔ $T = \{G \subseteq X : \text{یک مجموعهٔ بی‌پایان است } X \backslash G\} \cup \{\phi, X\}$ می‌تواند یک توپولوژی روی مجموعهٔ بی‌پایان و دلخواه X باشد؟

۵. دستهٔ $T = \{X, \phi, A, B\}$ را در نظر می‌گیریم. مجموعه‌های A و B باید دارای چه شرایطی باشند تا دستهٔ T یک توپولوژی برای X باشد.

۶. فرض کنید $X = \{a, b, c\}$. تمام توپولوژی‌های روی X را که دارای ۴ عضو هستند بنویسید.

۷. فرض می‌کنیم دستهٔ T شامل ϕ و تمام زیرمجموعه‌های $\mathcal{N}$ که به صورت

$$E_n = \{n,\ n+۱,\ n+۲, \cdots\} \quad , \quad n = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

تعریف شده است باشد. نشان دهید T یک توپولوژی برای $\mathcal{N}$ است.

---

[۳] Sierpinski

[۴] Fort

۸. نشان دهید برای $a \in \mathcal{Q}$، بازه‌های از نوع $S(a) =]-\infty, a[$ نمی‌توانند یک توپولوژی روی $\mathcal{R}$ تعریف نمایند.

۹. نشان دهید اگر بازه‌هایی از نوع $]a, b[$ و $[a, b]$ در مجموعه اعداد حقیقی باز باشند، آنگاه $\mathcal{R}$ دارای توپولوژی گسسته خواهد بود.

۱۰. فضای توپولوژیک (X^*, T^*)، مجموعه غیرتهی X و تابع $f : X \to X^*$ مفروض است. تعریف کنید $T = \{f^{-1}(U) : U \in T^*\}$. نشان دهید T یک توپولوژی روی X است.

۱۱. نشان دهید اگر $A \subseteq X$ و (X, T) یک فضای توپولوژیکی باشد، آنگاه $\{U \cup (V \cap A) : U, V \in T\}$ یک توپولوژی روی X است. این توپولوژی را **توسیع ساده** T روی A می‌گویند.

۱۲. فرض کنید $T = \{\mathcal{R}^2, \phi\} \cup \{G_k : k \in \mathcal{R}\}$ که در آن

$$G_k = \{(x, y) : x, y \in \mathcal{R},\ x > y + k\}$$

الف- ثابت کنید T یک توپولوژی روی $\mathcal{R}^2$ است.

ب- آیا اگر $k \in \mathcal{N}$ یا $k \in \mathcal{Q}$ جایگزین $k \in \mathcal{R}$ شوند باز T یک توپولوژی روی $\mathcal{R}^2$ خواهد بود؟

۱۳. فرض کنید $\{(X_\alpha, T_\alpha)\}$، $\alpha \in A$، یک دسته از فضاهای توپولوژیک باشند. به ازای هر $\alpha \in A$ قرار دهید

$$X_\alpha^* = \{(x, \alpha) : x \in X_\alpha\} \quad , \quad X = \cup X_\alpha^*$$
$$p_\alpha : X_\alpha \to X_\alpha^* \quad , \quad p_\alpha(x) = (x, \alpha)$$
$$T = \{U \subseteq X : p_\alpha^{-1}(U \cap X_\alpha^*) \in T_\alpha, \forall \alpha\}$$

نشان دهید با این تعریف فضای (X, T) یک فضای توپولوژیک است. این فضا را **اجتماع مجزای** X_αها می‌نامند و به $\sum X_\alpha$ نمایش می‌دهند.

در تعریف توپولوژی دیدیم که اعضای توپولوژی T روی X را «مجموعهٔ باز» می‌گوییم. اکنون به تعریف مجموعهٔ بسته، بستار یک مجموعه، مجموعهٔ نقاط تجمع، مجموعهٔ نقاط داخلی، خارجی و مرزی در فضای توپولوژیکی (X, T) می‌پردازیم.

تعریف: فرض کنید (X,T) یک فضای توپولوژیکی و $A \subseteq X$ است. مجموعهٔ A را یک **مجموعهٔ بسته** می‌گوییم اگر مکمل آن یک مجموعهٔ باز باشد.

مثال ۹: مجموعهٔ $X=\{a,b,c,d,e\}$ و توپولوژی $T=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ را روی X در نظر بگیرید. مجموعه‌های $\{b,c,d,e\}$ و $\{e,b\}$ و $\{a\}$ و ϕ و X زیرمجموعه‌های بسته از X هستند زیرا مکمل آنها زیرمجموعه‌های باز X می‌باشند.

مثال ۱۰: در فضای گسسته X هر زیرمجموعهٔ X، هم باز و هم بسته است.

مثال ۱۱: فرض کنید (X,T) فضای جذب p باشد. در این صورت هر مجموعه‌ای که شامل p نباشد یک مجموعهٔ بسته است.

مثال ۱۲: فرض کنید (X,T) فضای طرد p باشد. در این صورت هر مجموعه شامل p، یک مجموعهٔ بسته است.

مثال ۱۳: در مجموعهٔ اعداد حقیقی، مجموعهٔ $[۰, ۱[$ نه باز و نه بسته است.

قضیهٔ ۱: در فضای توپولوژیک (X,T):

الف) مجموعه‌های X و ϕ بسته هستند.

ب) اشتراک هر دسته از زیرمجموعه‌های بسته، مجموعه‌ای بسته است.

پ) اجتماع هر دو زیرمجموعهٔ بسته، یک مجموعهٔ بسته است.

اثبات:

الف) چون X و ϕ در هر فضای توپولوژیک باز هستند لذا مکمل آنها بسته است.

ب) فرض کنید $\{F_\alpha\}$ یک دسته از مجموعه‌های بسته باشد. نشان می‌دهیم $\cap F_\alpha$ بسته است. برای این کار نشان می‌دهیم مکمل آن باز است اما با توجه به قوانین دمرگان $X\setminus(\cap F_\alpha) = \cup(X\setminus F_\alpha)$. چون F_α بسته و در نتیجه $X\setminus F_\alpha$ باز است بنابراین از تعریف توپولوژی، اجتماع آنها باز می باشد. اثبات پ نیز مشابه است.

□

در تعریف توپولوژی می‌توان خواص ب و پ تعریف را با خواص ب و پ قضیهٔ ۱ تعویض نمود. در این صورت اعضای دسته را مجموعه‌های بسته می‌نامیم. بدیهی است که توپولوژی حاصل از هر دو

تعریف یکسان هستند و هیچ مزیتی بین آن دو موجود نیست ولی تقریباً تمامی ریاضیدانان از مجموعهٔ باز برای تعریف توپولوژی استفاده می‌کنند.

تعریف: اشتراک تمام مجموعه‌های بسته شامل A را در فضای توپولوژیکی (X,T) بستار A می‌نامیم و به $(\bar{A})_X$ و یا اگر ابهامی نباشد به‌اختصار به $\bar{A}$ نشان می‌دهیم.
به عبارت دیگر اگر دستهٔ $\{F_\alpha\}$ همهٔ زیرمجموعه‌های بسته شامل A در X باشد در این صورت $\bar{A} = \cap_\alpha F_\alpha$ است. بدیهی است که $A \subseteq \bar{A}$.

مثال ۱۴: فضای توپولوژیک مثال ۹ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\overline{\{b\}} = \{b,e\} \quad , \quad \overline{\{a,c\}} = X \quad , \quad \overline{\{b,d\}} = \{b,c,d,e\}$$

قضیهٔ ۲: فضای توپولوژیک (X,T) و $A \subseteq X$ را در نظر بگیرید.

الف) $\bar{A}$ مجموعه‌ای بسته است.

ب) اگر F مجموعه‌ای بسته و شامل A باشد، آنگاه $A \subseteq \bar{A} \subseteq F$.

پ) مجموعهٔ A بسته است اگر و فقط اگر $A = \bar{A}$.

ت) $\bar{\phi} = \phi$ و $\bar{X} = X$.

اثبات:

الف) اثبات (الف) با توجه به قضیهٔ ۱ قسمت (ب) و تعریف بستار بدیهی است.

ب) چون F بسته و شامل A فرض شده است، لذا F در دستهٔ تمام مجموعه‌های بسته شامل A قرار می‌گیرد. اما اشتراک همهٔ اینگونه مجموعه‌ها را $\bar{A}$ معرفی کرده‌ایم. لذا $\bar{A} \subseteq F$.

پ) اگر A بسته باشد، با توجه به قسمت (ب)، $\bar{A} \subseteq A$. از طرفی $A \subseteq \bar{A}$، لذا $A = \bar{A}$. عکس مطلب با توجه به قسمت (الف) بدیهی است.

ت) چون X و ϕ در هر فضای توپولوژیک باز هستند، لذا مکمل آنها یعنی ϕ و X بسته هستند. حال حکم از قسمت (ج) حاصل می‌شود.

□

نتیجه ۳: مجموعهٔ $\bar{A}$ کوچکترین مجموعهٔ بسته شامل A است.

□

مثال ۱۵: در فضای طرد p، هر مجموعه‌ای که شامل p باشد و در فضای جذب p، هر مجموعه‌ای که شامل p نباشد بسته و در نتیجه با بستارش برابر است.

تعریف: نقطهٔ $a \in X$، **نقطهٔ تجمع (نقطهٔ انباشتگی)** [5] مجموعهٔ A است، هرگاه هر مجموعهٔ باز شامل نقطهٔ a دارای نقطهٔ دیگری از مجموعهٔ A باشد. به عبارت دیگر برای هر مجموعهٔ باز $G \in T$ شامل a داشته باشیم: $(G\backslash\{a\}) \cap A \neq \phi$. مجموعهٔ نقاط تجمع مجموعهٔ A را به $(A')_X$ یا اگر ابهامی نباشد به‌اختصار به A' نمایش می‌دهند.

همانطور که در تعریف مشاهده می‌شود نقطهٔ تجمع یک مجموعه ممکن است به خود مجموعه متعلق نباشد.

مثال ۱۶: فضای توپولوژیک مثال ۹ را در نظر بگیرید. اگر $A = \{a, b, c\}$، آنگاه $A' = \{b, d, e\}$. توجه کنید a یک نقطهٔ تجمع نیست، زیرا اشتراک مجموعهٔ باز $\{a\}$ و مجموعهٔ A فقط شامل نقطهٔ a است. به دلیل مشابه نقطهٔ c نیز نقطهٔ تجمع نیست. در این مثال نقطهٔ تجمع b به A متعلق است در حالی که نقطهٔ تجمع d به A متعلق نیست.

مثال ۱۷: در فضای توپولوژیک شعاع چپ برای $A = \{p\}$، $A' = \{x \in X : x > p\}$.

قضیهٔ ۴: فضای توپولوژیک (X, T) و $A \subseteq X$ را در نظر بگیرید.

الف) $\bar{A} = A \cup A'$.

ب) مجموعهٔ A بسته است اگر و فقط اگر $A' \subseteq A$.

اثبات:

الف) ابتدا نشان می‌دهیم $\bar{A} \subseteq A \cup A'$. برای این منظور کافی است نشان دهیم اگر $x \notin A \cup A'$، آنگاه $x \notin \bar{A}$. لذا فرض می‌کنیم $x \notin A \cup A'$، پس $x \notin A$ و $x \notin A'$. چون $x \notin A'$ مجموعهٔ باز G شامل x وجود دارد به طوری که $(G\backslash\{x\}) \cap A = \phi$ و چون $x \notin A$ پس $G \cap A = \phi$ و در نتیجه $A \subseteq X\backslash G$. اما G باز و در نتیجه $X\backslash G$ بسته است بنابراین از قضیهٔ ۲ قسمت (ب) $\bar{A} \subseteq X\backslash G$ و چون $x \in G$ لذا $x \notin \bar{A}$.

بالعکس، فرض کنید $x \notin \bar{A}$. از تعریف $\bar{A}$، مجموعهٔ بستهٔ F موجود است که $A \subseteq F$ و $x \notin F$. بنابراین $(X\backslash F) \cap A = \phi$، $x \notin A$ و $x \in X\backslash F$ که معادل است با

---

[5] در بعضی از کتابها از نقطهٔ تجمع به عنوان نقطهٔ حدی نیز یاد شده است ولی ما ترجیح می‌دهیم برای اجتناب از هرگونه ابهام این کلمه را به دنباله‌ها اختصاص دهیم. یعنی نقطهٔ تجمع را برای مجموعه‌ها و نقطهٔ حدی را برای دنباله‌ها تعریف می‌کنیم. البته تحت شرایطی می‌توان این دو مفهوم را به هم نزدیک کرد.

$((X\backslash F)\backslash\{x\})\cap A=\phi$). اما $X\backslash F$ باز است لذا x نقطهٔ تجمع A نیست. از طرفی $x\notin A$، بنابراین $x\notin A\cup A'$ در نتیجه $\overline{A}=A\cup A'$.

ب) بنا به قضیهٔ ۲، مجموعهٔ A بسته است اگر و فقط اگر $\bar{A}=A$ و یا با توجه به قسمت (الف) اگر و فقط اگر $A\cup A'=A$ و این رابطه درست است اگر و فقط اگر $A'\subseteq A$.

□

مثال ۱۸: با توجه به قضیهٔ اخیر و مثال ۱۷، در فضای توپولوژیک شعاع چپ برای $A=\{p\}$

$$\bar{A}=\{x\in X:\ x\geq p\}$$

تعریف: نقطهٔ $a\in A$ را، **نقطهٔ تنها** می‌گویند، اگر مجموعهٔ باز $G\in T$ موجود باشد به طوری که $a\in G$ و $G\cap A=\{a\}$.

به این ترتیب هر نقطه یک مجموعه یا یک نقطهٔ تجمع مجموعه است یا یک نقطهٔ تنهای آن، نه هر دو. به عبارت دیگر، اولاً مجموعهٔ نقاط تجمع و مجموعهٔ نقاط تنهای هر مجموعه مجزا بوده و ثانیاً اجتماع آنها شامل خود مجموعه است. به علاوه، با توجه به قضیهٔ ۴ هر زیرمجموعهٔ بسته در X *را می‌توان به صورت اجتماع دو مجموعهٔ مجزا که یکی شامل نقاط تجمع و دیگری شامل نقاط تنها است* نوشت. بنابراین یک مجموعهٔ بسته فاقد نقاط تنها است اگر و فقط اگر $A'=A$.

مثال ۱۹: در فضای توپولوژیک مثال ۹، با فرض $A=\{a,b,c\}$، نقاط a و c نقاط تنها هستند زیرا کافی است از مجموعه‌های باز $\{a\}$ و $\{c,d\}$ استفاده شود در حالی که نقطهٔ b یک نقطهٔ تنها نیست. یادآوری می‌گردد که در مثال ۱۶ دیدیم که این نقطه یک نقطهٔ تجمع است. لذا این مثال نشان می‌دهد که یک مجموعه لزوماً مساوی اجتماع مجموعهٔ نقاط تجمع و تنها نیست.

تعریف: نقطهٔ $a\in A$ یک **نقطهٔ داخلی** (درونی) مجموعهٔ A است، اگر مجموعهٔ باز G موجود باشد به طوری که $a\in G\subseteq A$، مجموعهٔ نقاط داخلی (درونی) A را با $(A^{\circ})_X$ و یا اگر ابهامی نباشد به‌اختصار به A° نمایش می‌دهیم.

مثال ۲۰: در فضای توپولوژیک $\mathcal{R}$، $(\mathcal{R}\backslash\mathcal{Q})^{\circ}=\mathcal{Q}^{\circ}=\phi$.

مثال ۲۱: مجموعهٔ $X=\{a,b,c,d,e\}$ و $A=\{a,b,c\}$ همراه با توپولوژی زیر روی X را در نظر بگیرید

$$T=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$$

در این صورت $A^{\circ}=\{a,b\}$.

مثال ۲۲: در توپولوژی شعاع چپ با فرض $A = \{p\}$، $A^\circ = \phi$.

مثال ۲۳: در توپولوژی طرد p، به ازای هر مجموعه مانند $A \neq X$ که شامل p باشد، $A^\circ = A\backslash\{p\}$.

قضیه ۵: فضای توپولوژیک (X, T) و $A \subseteq X$ را در نظر بگیرید.
الف) $A^\circ \subseteq A$.
ب) مجموعهٔ A باز است اگر و فقط اگر $A^\circ = A$.
پ) اگر G زیرمجموعه‌ای باز واقع در A باشد، آنگاه $G \subseteq A^\circ \subseteq A$.
ت) $\phi^\circ = \phi$ و $X^\circ = X$.

اثبات:

الف) از تعریف A° برای هر $x \in A^\circ$، مجموعهٔ باز $G_x \in T$ موجود است که $x \in G_x \subseteq A$. لذا $A^\circ \subseteq A$.

ب) فرض کنید A باز باشد یعنی $A \in T$. با توجه به (الف) کافی است نشان دهیم $A \subseteq A^\circ$. اما برای هر $x \in A$، از $A \in T$ و تعریف نقاط درونی $x \in A^\circ$.
بالعکس فرض کنید $A^\circ = A$. باید نشان دهیم $A \in T$. برای هر $x \in A$، چون $A = A^\circ$، داریم $x \in A^\circ$. لذا از تعریف نقاط درونی، مجموعهٔ باز $G_x \in T$ موجود است که $x \in G_x \subseteq A$. بنابراین $\cup_{x\in A} G_x \subseteq A$. از طرفی بدیهی است که $A \subseteq \cup_{x\in A} G_x$. لذا $A = \cup_{x\in A} G_x$ و در نتیجه از تعریف توپولوژی، $A \in T$.

پ) فرض کنید $G \in T$ و $G \subseteq A$. نشان می‌دهیم $G \subseteq A^\circ$. برای هر $y \in G$ از تعریف نقاط درونی، باز بودن G و نهایتاً از رابطهٔ $G \subseteq A$ نتیجه می‌گیریم $y \in A^\circ$. بنابراین $G \subseteq A^\circ$.

ت) چون در هر فضای توپولوژیک ϕ و X باز هستند، حکم از قسمت (ب) بدیهی است.

□

نتیجهٔ ۶: $A^\circ = \cup G$ که در آن اجتماع روی همهٔ مجموعه‌های باز مانند G است که $G \subseteq A$.

اثبات: در قضیهٔ ۵ (پ) دیدیم که اگر G زیرمجموعهٔ باز واقع در A باشد، آنگاه $G \subseteq A^\circ$. حال چون $\bigcup_{G\subseteq A} G$ یک مجموعهٔ باز واقع در A است پس $\bigcup_{G\subseteq A} G \subseteq A^\circ$. از طرف دیگر برای هر $x \in A^\circ$، مجموعهٔ باز G موجود است که $x \in G \subseteq A$، پس $x \in \bigcup_{G\subseteq A} G$. بنابراین $A^\circ = \bigcup_{G\subseteq A} G$.

□

نتیجهٔ ۷: مجموعهٔ A° باز است و در حقیقت A° بزرگترین مجموعهٔ بازی است که در A واقع است.

اثبات: باتوجه به نتیجهٔ ۶ و قضیهٔ ۵ (پ) اثبات بدیهی است.

□

تعریف: نقطهٔ p یک **نقطهٔ خارجی** مجموعهٔ A است اگر p یک نقطهٔ داخلی $X\backslash A$ باشد. مجموعهٔ نقاط خارجی را به $e_X(A)$ و اگر ابهامی نباشد به $e(A)$ نمایش می‌دهیم. در واقع $e(A) = (X\backslash A)^\circ$. نقطهٔ p را یک **نقطهٔ مرزی** مجموعهٔ A می‌گوییم اگر p نه نقطهٔ داخلی و نه نقطهٔ خارجی A باشد. مجموعهٔ نقاط مرزی را با $b_X(A)$ و اگر ابهامی نباشد به $b(A)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲۴: با شرایط مثال ۲۱، $e(A) = \phi$ و $b(A) = \{c, d, e\}$. اما برای مجموعهٔ $B = \{b, c, d\}$، $e(B) = \{a\}$.

مثال ۲۵: در فضای طرد p اگر مجموعهٔ A شامل p باشد، آنگاه $e(A) = X\backslash A$. زیرا $X\backslash A$ باز است و در نتیجه با توجه به مثال ۲۳، $b(A) = \{p\}$.

مثال ۲۶: در فضای جذب p، با فرض $A = \{p\}$، $e(A) = \phi$. زیرا برای $y \in X\backslash A$، چون $y \neq p$، هر بازه شامل y باید شامل p نیز باشد، پس نمی‌تواند زیرمجموعهٔ $X\backslash A$ شود یعنی $X\backslash A$ نقطهٔ داخلی ندارد. به علاوه چون $A^\circ = A$ و نقاط مرزی نه نقطهٔ داخلی و نه نقطهٔ خارجی هستند باید $b(A) = X\backslash A$.

مثال ۲۷: در فضای توپولوژیک $\mathcal{R}$، $e(\mathcal{Q}) = \phi$ و $b(\mathcal{Q}) = \mathcal{R}$.

قضیهٔ ۸: فضای توپولوژیک (X, T) و $A \subseteq X$ را در نظر بگیرید.

الف) $e(\phi) = X$ و $e(X) = \phi$.

ب) $e(A) \subseteq X\backslash A$.

پ) $e(A) = X\backslash \bar{A}$.

اثبات:

الف) با توجه به تعریف و قضیهٔ ۵ قسمت (ت)، $e(x) = (X\backslash X)^\circ = \phi^\circ = \phi$ و به طور مشابه می‌توان دید $e(\phi) = X$.

ب) بنا به قضیهٔ ۵ قسمت (الف) و تعریف نقاط خارجی، $e(A) = (X\backslash A)^\circ \subseteq X\backslash A$.

پ) از تعریف نقاط خارجی، $x \in e(A)$ اگر و فقط اگر مجموعهٔ باز $G \in T$ موجود باشد به طوری که $x \in G \subseteq X\backslash A$ و یا معادلاً اگر و فقط اگر $x \notin A$ و $(G\backslash\{x\}) \cap A = \phi$

و این معادل این است که x نه در A است و نه نقطهٔ تجمع است. لذا بنا به قضیهٔ ۴ قسمت (الف) $x \notin \bar{A}$ لذا $x \in X \backslash \bar{A}$.

□

مثال ۲۸: در فضای جذب p، با فرض $X \neq A$ و $p \notin A$، مجموعهٔ A بسته است لذا $\bar{A} = A$ و لذا با توجه به قضیهٔ اخیر $e(A) = X \backslash A$. به علاوه، از آنجایی که $A^\circ = \phi$، باید $b(A) = A$.

قضیهٔ ۹: در فضای توپولوژیک (X, T)

الف) $b(X) = \phi$ و $b(\phi) = \phi$.

ب) برای $A \subseteq X$، $b(A) = \bar{A} \cap (\overline{X \backslash A})$.

پ) برای $A \subseteq X$، $b(A) = b(X \backslash A)$.

اثبات:

اثبات الف با توجه به تعریف نقاط مرزی و قضیهٔ ۸ بدیهی است.

برای اثبات ب ابتدا توجه کنید $\overline{X \backslash A} = X \backslash A^\circ$. زیرا $x \notin A^\circ$ اگر و فقط اگر برای هر مجموعهٔ باز G حول x، $G \not\subset A$ و این معادل با این است که برای هر مجموعهٔ باز G حول x، $G \cap (X \backslash A) \neq \phi$ و این نیز معادل با این است که $x \in \overline{X \backslash A}$. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x \in b(A) &\Leftrightarrow x \notin A^\circ \quad \text{و} \quad x \notin e(A) \\ &\Leftrightarrow x \notin A^\circ \quad \text{و} \quad x \notin X \backslash \bar{A} \\ &\Leftrightarrow x \in X \backslash A^\circ \quad \text{و} \quad x \in \bar{A} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{X \backslash A} \quad \text{و} \quad x \in \bar{A} \end{aligned}$$

نهایتاً برای اثبات پ به تساوی زیر توجه کنید:

$$b(X \backslash A) = (\overline{X \backslash A}) \cap (\overline{X \backslash (X \backslash A)}) = (\overline{X \backslash A}) \cap \bar{A} = b(A)$$

□

مثال ۲۹: در فضای توپولوژیک اعداد حقیقی،

$$b(]0, 1[) = b(]0, 1]) = b([0, 1[) = b([0, 1]) = \{0, 1\}$$

تمرین

۱۴. فضای توپولوژیکی (X,T) را در نظر بگیرید. نشان دهید قضیهٔ ۱ قسمت (ب) برای هر خانوادهٔ دلخواه لزوماً درست نیست.

۱۵. مجموعهٔ $X=\{a,b,c,d,e\}$ همراه با توپولوژی زیر مفروض است:

$$T=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$$

اگر $A=\{c,d,e\}$ و $B=\{b\}$ باشد، A' و B' را به دست آروید.

۱۶. فرض کنید $I=[۰,۱]$ و $<$ ترتیب معمولی روی آن باشد روی $X=I\times I$ تعریف کنید:

$$(x,y)<(s,t) \Leftrightarrow x<s \text{ یا } x=s,\ y<t$$

(این ترتیب، **ترتیب قاموسی** نامیده می‌شود). نشان دهید X با ترتیب بالا به توپولوژی شعاع چپ (راست) تبدیل می‌شود.

الف) برای هر p در این فضا، مجموعهٔ $S(p)$ را شناسایی کنید.

ب) بستار هریک از مجموعه‌های زیر در این فضا چیست؟

$$A=\{(\frac{۱}{n},۰):\ n\in\mathcal{N}\}$$

$$B=\{(۱-\frac{۱}{n},\frac{۱}{۲}):\ n\in\mathcal{N}\}$$

$$C=\{(x,۰):\ ۰<x<۱\}$$

$$D=\{(x,\frac{۱}{۲}):\ ۰<x\leq ۱\}$$

$$E=\{(\frac{۱}{۲},y):\ ۰<y<۱\}$$

۱۷. فرض می‌کنیم دستهٔ T شامل ϕ و تمام زیرمجموعه‌های $\mathcal{N}$ که به صورت $E_n=\{n,\ n+۱,\ n+۲,\ \cdots\}$، $n=۱,۲,۳,\cdots$، تعریف شده است باشد.

الف) زیرمجموعه‌های بسته در این فضای توپولوژیکی کدام هستند.

ب) اگر مجموعهٔ $A=\{۴,۱۳,۲۸,۳۷\}$ باشد، A' را به دست آورید.

پ) مطلوب است زیرمجموعه‌های E از $\mathcal{N}$ به طوری که $E'=\mathcal{N}$.

۱۸. نشان دهید در فضای گسستهٔ (X,T) برای هر زیرمجموعهٔ $A\neq\phi$ از X، $A'=\phi$. مجموعهٔ A° و $\bar{A}$ را در این فضای توپولوژیکی بیابید. اگر این فضا ناگسسته باشد، A'، $\bar{A}$، A°، $e(A)$ و $b(A)$ را به دست آورید.

۱۹. فرض کنید $\mathcal{R}$ به توپولوژی شعاع راست مجهز باشد.

الف) مجموعه‌های بسته در این فضا کدامند؟

ب) بستار مجموعه‌های $]۳,۷]$، $\{۷, ۲۴, ۴۷, ۸۵\}$ و $\{۳, ۶, ۹, ۱۲, \cdots\}$ را به دست آورید.

پ) برای $A = [۷, \infty[$ در این فضای توپولوژیک $b(A)$، $e(A)$ و A° چیست؟

۲۰. مجموعهٔ اعداد حقیقی را به توپولوژی مکمل شمارش‌پذیر مجهز نمایید. برای $I =]۰, ۱[$، I' را به دست آورید.

۲۱. درون، بستار و مرز مجموعه‌های زیر را (به عنوان زیرمجموعه‌های داده‌شده) به دست آورید.

$$A = \{\frac{۱}{m} + \frac{۱}{n} :\ m, n \in \mathcal{N}\} \subseteq \mathcal{R}$$

$$B = \{m + n\pi :\ m, n \in \mathcal{N}\} \subseteq \mathcal{R}$$

$$C = \{(m, n) :\ m, n \in \mathcal{N}\} \subseteq \mathcal{R}^۲$$

$$D = \{(\frac{۱}{m}, \frac{۱}{n}) :\ m, n \in \mathcal{N}\} \subseteq \mathcal{R}^۲$$

۲۲. فرض کنید $A \subseteq X$ و X مجهز به توپولوژی جذب A باشد. برای $E \subseteq X$، بستار E و درون E را در این فضای توپولوژیکی بیابید. اگر $A = X$ و یا $A = \phi$، این توپولوژی را تشریح کنید.

۲۳. فضای توپولوژیک (X, T)، $B \subseteq X$ و $A \subseteq X$ را در نظر بگیرید. نشان دهید:

الف- اگر $p \in A'$ و $C = A \backslash \{p\}$، آنگاه $p \in C'$.

ب- $x \in \bar{A}$ اگر و فقط اگر اشتراک A با هر مجموعهٔ باز شامل x مخالف تهی شود.

پ- اگر $A \subseteq B$، آنگاه $A' \subseteq B'$ و $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ و $A^\circ \subseteq B^\circ$.

ت- $(A \cup B)' = A' \cup B'$ و $(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$ و $\bar{A} = (\bar{\bar{A}})$.

ث- $(\overline{A \cap B}) \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$. با یک مثال نشان دهید لزوماً تساوی برقرار نیست.

ج- $\bar{A} \backslash \bar{B} \subseteq (\overline{A \backslash B})$. با یک مثال نشان دهید لزوماً تساوی برقرار نیست.

چ- $X \backslash \bar{A} \subseteq (\overline{X \backslash A})$.

ح- اگر A باز باشد، آنگاه $A \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

خ- $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

د- $\bar{A}' \subseteq (A')^\circ$. با یک مثال نشان دهید لزوماً تساوی برقرار نیست.

ذ_ برای مجموعهٔ باز U، تساوی $U = (\overline{U})^\circ$ لزوماً برقرار نیست.

ر_ $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$. با یک مثال نشان دهید در حالت کلی $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$ برقرار نیست.

ز_ برای دستهٔ $\{A_\alpha\}$، $(\cap A_\alpha^\circ)^\circ = (\cap A_\alpha)^\circ \supseteq \cap A_\alpha^\circ$ و $\cup \bar{A}_\alpha \subseteq (\overline{\cup A_\alpha}) = (\overline{\cup \bar{A}_\alpha})$ و در هر حالت با ارائه مثال‌هایی نشان دهید که تساوی لزوماً برقرار نیست.

ژ_ $X \backslash A^\circ \subseteq (X \backslash A)^\circ$. با یک مثال نشان دهید لزوماً تساوی برقرار نیست.

س_ $e(A \cup B) = e(A) \cap e(B)$.

ش_ $b(A \cup B) \subseteq b(A) \cup b(B)$.

ص_ $b(A^\circ) \subseteq b(A)$، $b(\bar{A}) \subseteq b(A)$. با ارائه مثال‌هایی نشان دهید لزوماً تساوی برقرار نیست.

ض_ $X = A^\circ \cup e(A) \cup b(A)$، $A^\circ = A \backslash b(A)$. به علاوه نشان دهید سه مجموعهٔ A°، $e(A)$ و $b(A)$ مجزا هستند.

ط_ با فرض $A \neq \phi$ و $A \neq X$، مجموعهٔ A باز است اگر و فقط اگر $b(A) \cap A = \phi$ اگر و فقط اگر $b(A) = \bar{A} \backslash A$.

۲۴. فضای توپولوژیک (X, T)، $A, B \subseteq X$ را در نظر بگیرید. نشان دهید:

الف_ $b(A)$ یک مجموعهٔ بسته است.

ب_ $\bar{A} = A^\circ \cup b(A)$ و از آن نتیجه بگیرید هر مجموعهٔ بسته را می‌توان به صورت اجتماع دو مجموعهٔ مجزا از هم که یکی باز و دیگری بسته است نوشت.

پ_ اگر A بسته و $A^\circ = \phi$، آنگاه $b(A) = A$.

ت_ $(b(b(A)))^\circ = \phi$ و بنابراین $b(b(b(A))) = b(b(A))$.

ث_ با یک مثال نشان دهید تساوی $b(b(A)) = b(A)$ لزوماً برقرار نیست.

ج_ مجموعهٔ A بسته است اگر و فقط اگر $b(A) \subseteq A$.

چ_ اگر مجموعهٔ A بسته باشد، آنگاه $B \cap b(A) \subseteq b(A \cap B)$.

ح_ $b(A) = \phi$ اگر وفقط اگر مجموعهٔ A هم باز و هم بسته باشد.

خ_ اگر $\bar{A} \cap \bar{B} = \phi$، آنگاه $b(A \cup B) = b(A) \cup b(B)$.

۲۵. فرض کنید X یک مجموعه و $\mathcal{A}$ یک دستهٔ دلخواه از زیرمجموعه‌های X باشد به طوری که:

الف‌ـ X و ϕ متعلق به $\mathcal{A}$ باشند.

ب‌ـ اجتماع هر دستهٔ باپایان از عناصر $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}$ است.

پ‌ـ اشتراک هر دستهٔ دلخواه از عناصر $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}$ است.

تعریف کنید $T = \{X\backslash A \ : \ A \in \mathcal{A}\}$. ثابت کنید T یک توپولوژی روی X است و مجموعه‌های بسته در این توپولوژی دقیقاً همان عناصر $\mathcal{A}$ هستند.

۲۶. فرض کنید X یک مجموعهٔ غیرتهی و عملگر $\eta : \ P(X) \to P(X)$ در خواص زیر صدق کند:

$$\begin{aligned}
&\text{i}, \quad \eta(\phi) = \phi \\
&\text{ii}, \quad A \subseteq \eta(A) \\
&\text{iii}, \quad \eta(\eta(A)) = \eta(A) \\
&\text{iv}, \quad \eta(A \cup B) = \eta(A) \cup \eta(B)
\end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم A بسته است اگر $A = \eta(A)$. نشان دهید دستهٔ همهٔ مکمل‌های چنین مجموعه‌هایی، یک توپولوژی روی X تعریف می‌کند به طوری که بستار این مجموعه‌ها دقیقاً همان $\eta(A)$ ها هستند. (به عبارت دیگر عملگر η با شرایط بالا همان بستار است. توپولوژیی که به این ترتیب به وجود می‌آید به **بستار کوراتسکی**[۶] معروف است.)

۲۷. فرض کنید X یک مجموعهٔ غیرتهی و عملگر $\gamma : \ P(X) \to P(X)$ در خواص زیر صدق کند:

$$\begin{aligned}
&\text{i}, \quad \gamma(\phi) = \phi \\
&\text{ii}, \quad x \in \gamma(A) \Longrightarrow x \in \gamma(A\backslash\{x\}) \\
&\text{iii}, \quad \gamma(\gamma(A)) \subseteq \gamma(A) \\
&\text{iv}, \quad \gamma(A \cup B) = \gamma(A) \cup \gamma(B)
\end{aligned}$$

توپولوژی روی X را چنان ارائه دهید که $\gamma(A) = A'$. (راهنمایی: برای ارائه توپولوژی، تعریف کنید $\eta(A) = A \cup \gamma(A)$ و نشان دهید در شرایط تمرین ۲۶ صادق است)

۲۸. فرض کنید X یک مجموعهٔ غیرتهی و عملگر $\lambda : \ P(X) \to P(X)$ در خواص زیر صدق کند:

---

[۶] Kuratowski

i, $\lambda(X) = X$
ii, $\lambda(A) \subseteq A$
iii, $\lambda(\lambda(A)) = \lambda(A)$
iv, $\lambda(A \cap B) = \lambda(A) \cap \lambda(B)$

توپولوژی روی X را چنان ارائه دهید که $\lambda(A) = A^\circ$.
(راهنمایی: تعریف کنید $T = \{\lambda(A) :\ A \in P(X)\}$)

۲۹. فرض کنید X یک مجموعهٔ بی‌پایان باشد. برای هر $A \subseteq X$ تعریف کنید $\rho(A) = A$ اگر A باپایان و $\rho(A) = X$ اگر A بی‌پایان باشد. ثابت کنید ρ در خواص (i) و (iv) تمرین ۲۶ صدق می‌کند. مجموعه‌های بسته در این فضا کدامند. (توپولوژی ایجادشده توسط ρ همان **توپولوژی مکمل باپایان** است.)

۳۰. مجموعهٔ $B \subseteq X$ را ثابت در نظر بگیرید و برای هر $\phi \neq A \subseteq X$ قرار دهید $\rho(A) = A \cup B$ و همچنین فرض کنید $\rho(\phi) = \phi$. نشان دهید عملگر ρ در خواص (i) و (iv) تمرین ۲۶ صدق می‌کند. مجموعه‌های باز در این فضا کدامند؟ (توپولوژی ایجادشده توسط ρ در واقع همان **توپولوژی طرد** B است). اگر $B = \phi$ و یا $B = X$ توپولوژی منتج را تشریح کنید.

۳۱. مجموعهٔ غیرتهی A را در فضای توپولوژیک (X, T) **مجموعهٔ چگال** می‌گوییم اگر $X \subseteq \bar{A}$. ثابت کنید A چگال است اگر و فقط اگر اشتراک آن با هر مجموعهٔ غیرتهی و باز، مخالف تهی باشد.

۳۲. ثابت کنید هر مجموعهٔ غیرتهی در فضای توپولوژیک ناگسسته چگال است.

۳۳. در تمرین ۱۷ چه مجموعه‌هایی چگال هستند؟

۳۴. در فضاهای گسسته مجموعه‌های چگال چگونه هستند؟

۳۵. نشان دهید هر مجموعهٔ بی‌پایان، در مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی مکمل باپایان، چگال است.

۳۶. نشان دهید برای هر p متعلق به فضای توپولوژیک شعاع راست (X, T)، مجموعهٔ $S(p)$ در X چگال است.

۳۷. نشان دهید اشتراک دو مجموعهٔ باز و چگال، مجموعه‌ای باز و چگال است. مثالی از یک فضای توپولوژیک و دو زیرمجموعهٔ چگال از آن، چنان ارائه دهید که اشتراک آنها چگال نباشد.

۳۸. نشان دهید در فضای توپولوژیک $\mathcal{R}$، تنها زیرمجموعه‌هایی که هم باز و هم بسته هستند $\mathcal{R}$ و ϕ می‌باشند.

۳۹. فرض کنید مجموعهٔ باز U در $\mathcal{R}$ چگال باشد. نشان دهید $U\backslash\{a\}$ نیز به ازای هر $a \in \mathcal{R}$ در $\mathcal{R}$ چگال است.

۴۰. مجموعهٔ A را در فضای توپولوژیک (X,T) **مجموعهٔ کامل** می‌گوییم اگر $A' = A$. نشان دهید یک مجموعه کامل است اگر و فقط اگر بسته بوده و نقاط تنها نداشته باشد.

۴۱. مجموعهٔ A در فضای توپولوژیک (X,T) **مجموعهٔ هیچ‌جا چگال** می‌گوییم اگر $\phi = {}^{\circ}(\bar{A})$.
ثابت کنید:

الف- اگر $A = \{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \cdots\}$، آنگاه A به عنوان زیرمجموعهٔ $\mathcal{R}$، هیچ‌جا چگال است.

ب- مجموعهٔ اعداد طبیعی در $\mathcal{R}$ هیچ‌جا چگال است.

پ- مجموعهٔ اعداد گویا در $\mathcal{R}$ هیچ‌جا چگال است.

ت- مکمل یک مجموعهٔ باز و چگال، یک مجموعهٔ بسته و هیچ‌جا چگال است.

ث- مجموعهٔ A هیچ‌جا چگال است اگر و فقط اگر هر مجموعهٔ باز و غیرتهی دارای یک زیرمجموعهٔ باز و غیرتهی مجزا از A باشد.

ج- مرز یک مجموعهٔ باز، هیچ‌جا چگال است. آیا این مطلب برای هر مجموعهٔ دلخواه درست است؟

چ- مرز یک مجموعهٔ بسته، هیچ‌جا چگال است. آیا این مطلب برای هر مجموعهٔ دلخواه درست است؟

ح- اجتماع تعداد باپایان از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال، هیچ‌جا چگال است. آیا حکم برای اجتماع شمارش‌پذیر نیز برقرار است؟

۲.۲ زیرفضاهای توپولوژیک

اکنون نشان می دهیم اگر (X,T) یک فضای توپولوژیکی باشد می‌توان برای هر مجموعهٔ $A \subseteq X$ توپولوژی وابسته به توپولوژی T تعریف کرد. قبل از تعریف به قضیهٔ زیر توجه کنید:

قضیه ۱۰: اگر (X,T) یک فضای توپولوژیکی و $A \subseteq X$ باشد، آنگاه دستهٔ T_A

$$T_A = \{U^* :\ U^* = U \cap A,\ U \in T\}$$

یک توپولوژی برای مجموعهٔ A است.

اثبات: T_A یک توپولوژی برای A است زیرا:

اولاً روشن است که $A = X \cap A$ و $\phi = \phi \cap A$. لذا ϕ و A به T_A تعلق دارند.

ثانیاً فرض می‌کنیم $U_1^* \in T_A$ و $U_2^* \in T_A$. مطابق فرض مجموعه‌های $U_1 \in T$ و $U_2 \in T$ وجود دارند به طوری که $U_1^* = U_1 \cap A$ و $U_2^* = U_2 \cap A$ بنابراین

$$U_1^* \cap U_2^* = (A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = A \cap (U_1 \cap U_2)$$

اما $U_1 \cap U_2 \in T$. پس بنا بر تعریف: $U_2^* \cap U_1^* \in T_A$.

ثالثاً اگر $U_i^* \in T_A$ برای هر i، مطابق فرض $U_i \in T$ وجود دارد به طوری که برای هر i داریم: $A \cap U_i = U_i^*$، بنابراین $\cup_i U_i^* = \cup_i (A \cap U_i) = A \cap (\cup_i U_i)$ و چون $\cup U_i \in T$، لذا $\cup U_i^* \in T_A$.

□

مثال ۳۰: اگر $X = \{a, b, c, d, e\}$، $T = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ و $A = \{a, d, e\}$، آنگاه $T_A = \{A, \phi, \{a\}, \{a, d\}, \{d\}, \{d, e\}\}$.

مثال ۳۱: فرض کنید $A =]0, 1[\cup \{2\}$ و $\mathcal{R}$ به توپولوژی شعاع راست مجهز باشد. در این صورت $T_A = \{A, \phi, \{2\}\} \cup \{]a, 1[\cup \{2\};\ 0 < a < 1\}$.

تعریف: فضای توپولوژیک (X, T) و مجموعهٔ $A \subseteq X$ را در نظر می‌گیریم. دستهٔ $T_A = \{U \cap A :\ U \in T\}$ یک توپولوژی برای A است که آن را **توپولوژی نسبی** و (A, T_A) را **زیرفضای توپولوژیک** (X, T) می‌نامیم.

مثال ۳۲: فرض کنید $A =]0, 1[\cup \{2\}$ زیرفضای $\mathcal{R}$ باشد. در این صورت مجموعهٔ $\{2\}$ در زیرفضای A باز است. زیرا $A \cap]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[= \{2\}$.

قضیهٔ ۱۱: فرض کنید (A, T_A) زیرفضای توپولوژیکی (X, T) باشد. مجموعهٔ F^* در زیرفضای (A, T_A) بسته است اگر و فقط اگر مجموعهٔ بستهٔ F در فضای توپولوژیک (X, T) موجود باشد به طوری که $F^* = F \cap A$.

اثبات: فرض کنید F^* در زیرفضای (A, T_A) بسته باشد. پس بنا به قضیهٔ ۱۰ مجموعهٔ باز $G \in T$ موجود است که $A \backslash F^* = A \cap G$. تعریف کنید $F = X \backslash G$ پس F در X بسته است و به علاوه

$$F^* = A \backslash (A \cap G) = (A \backslash A) \cup (A \backslash G) = (A \backslash G) = A \cap (X \backslash G) = A \cap F$$

بالعکس، فرض کنید مجموعهٔ بستهٔ F در فضای (X,T) چنان باشد که $F^* = A \cap F$. در این صورت $A \backslash F^* = A \cap (X \backslash F)$. چون $X \backslash F \in T$، پس $A \backslash F^* \in T_A$. یعنی F^* در (A, T_A) بسته است.

□

نتیجهٔ ۱۲: فرض کنید (A, T_A) زیرفضای توپولوژیکی (X,T) و $E \subseteq A$ باشد. اگر A باز (بسته) در X و E باز (بسته) در A باشد آنگاه E باز (بسته) در X است.

اثبات: برای اثبات قسمت اول، چون E باز در A است لذا مجموعه باز $U \in T$ موجود است که $E = A \cap U$. از طرفی $A \in T$، لذا $E = A \cap U \in T$.

برای قسمت دوم، چون E بسته در A است از قضیهٔ ۱۱ مجموعهٔ بستهٔ F در (X,T) موجود است که $E = A \cap F$ و چون A نیز در X بسته است پس $E = A \cap F$ نیز در X بسته خواهد بود.

□

مثال ۳۳: فرض کنید $\mathcal{R}$ به توپولوژی جذب بازه $[۰,۲]$ مجهز باشد و $A =]-۱,۱[\cup \{۲\}$. پس $E = \{۰\}$ در (A, T_A) بسته نیست. زیرا مجموعه‌های بسته در $\mathcal{R}$ شامل صفر نیستند.

قضیهٔ ۱۳: فرض کنید (A, T_A) زیرفضای توپولوژیک (X,T) باشد. در این صورت

الف) برای $E \subseteq A$، $(\bar{E})_A = A \cap (\bar{E})_X$ و اگر A در X بسته باشد $(\bar{E})_A = (\bar{E})_X$.

ب) برای $E \subseteq A$، $(E^\circ)_X = (A^\circ)_X \cap (E^\circ)_A$ و اگر A در X بسته باشد $(E^\circ)_X = (E^\circ)_A$.

اثبات:

الف)
$$\begin{aligned}
(\bar{E})_A &= \cap\{F^* : E \subseteq F^* \text{ و } (A,T_A) \text{ بسته در } F^*\} \\
&= \cap\{A \cap F : E \subseteq A \cap F \text{ و } (X,T) \text{ بسته در } F\} \\
&= A \cap (\cap\{F : E \subseteq F \text{ و } (X,T) \text{ بسته در } F\}) \\
&= A \cap (\bar{E})_X
\end{aligned}$$

و اگر A در (X,T) بسته باشد، آنگاه $(\bar{E})_X \subseteq (\bar{A})_X = A$ و در نتیجه $(\bar{E})_A = (\bar{E})_X$.

ب)

$$\begin{aligned}(E^\circ)_A \cap (A^\circ)_X &= (\cup\{G^* : G^* \subseteq E \text{ و } G^* \in T_A\}) \cap (\cup\{G : G \subseteq A \text{ و } G \in T\}) \\ &= (\cup\{A\cap G : A \cap G \subseteq E \text{ و } G \in T\}) \cap (\cup\{G : G \subseteq A \text{ و } G \in T\}) \\ &= A \cap (\cup\{G : A\cap G \subseteq E \text{ و } G \in T\}) \cap (\cup\{G : G \subseteq A \text{ و } G \in T\}) \\ &= A \cap (\cup\{G : A \cap G \subseteq E \text{ و } G \subseteq A \text{ و } G \in T\}) \\ &= A \cap (\cup\{G : G \subseteq E \text{ و } G \in T\}) \\ &= A \cap (E^\circ)_X \qquad\qquad (E^\circ)_X \subseteq (A^\circ)_X \subseteq A \text{ زیرا } \\ &= (E^\circ)_X\end{aligned}$$

و اگر A در X باز باشد، آنگاه $(A^\circ)_X = A \supseteq (E^\circ)_A$ و در نتیجه $(E^\circ)_A = (E^\circ)_X$.

□

مثال ۳۴: دیدیم در فضای جذب p، هر مجموعه‌ای که شامل p نباشد بسته است. لذا اگر E چنین مجموعه‌ای باشد، آنگاه برای هر مجموعهٔ A که شامل E باشد، باید $(\bar{E})_A = A \cap E = (\bar{E})$.

تذکر: در این کتاب توپولوژی نسبی روی زیرفضاهای $\mathcal{R}^n$، توپولوژی معمولی است مگر خلاف آن ذکر گردد.

تمرین

۱. نشان دهید اگر فضای توپولوژیک (X, T) گسسته باشد، زیرفضای (A, T_A) از (X, T) نیز گسسته است.

۲. نشان دهید اگر فضای توپولوژیک (X, T) ناگسسته باشد، زیرفضای (A, T_A) از (X, T) نیز ناگسسته است.

۳. فرض کنید (A, T_A) زیرفضای توپولوژیکی (X, T) است. نشان دهید:

الف) برای $E \subseteq A$، $(E^\circ)_A \supseteq A \cap (E^\circ)_X$.

ب) برای $E \subseteq A$، $b_A(E) \subseteq A \cap b_X(E)$.

پ) برای $X = \mathcal{R}^2$ و $A = E = \mathcal{R}$:

$$b_X(E) = A \text{ ، } (E^\circ)_X = \phi \text{ ، } b_A(E) = \phi \text{ ، } (E^\circ)_A = A$$

این مثال‌ها نشان می‌دهد که در حالت‌های الف و ب ممکن است تساوی اتفاق نیفتد.

۴. فرض کنید X فضای توپولوژیک و $Y \subseteq Z$ دو زیرمجموعه از X باشند. نشان دهید توپولوژی که Y به عنوان زیرفضای X دارد همان توپولوژیی است که به عنوان زیرفضای Z دارد.

۵. فرض کنید $Y \subseteq Z \subseteq X$. نشان دهید Y در (Z, T_Z) یا به‌اختصار در Z چگال است اگر و فقط اگر $Y \subseteq Z \subseteq \bar{Y}$ و از آن نتیجه بگیرید A در زیرفضای $\bar{A}$، چگال است.

۶. فرض کنید $Y \subseteq Z \subseteq X$. نشان دهید اگر Y در Z و Z در X چگال باشد، آنگاه Y در X چگال است.

۷. نشان دهید اگر U در X چگال و Y در X باز باشد، آنگاه $Y \cap U$ در Y چگال است. با ارائه یک مثال نشان دهید اگر Y در X باز نباشد حکم لزوماً برقرار نیست.

۸. مجموعه‌های باز در مجموعهٔ اعداد طبیعی، $\mathcal{N}$، چگونه است؟

۹. فضای توپولوژیک $(\mathcal{R}, \Gamma)$ و $I = [\circ, ۱]$ را در نظر بگیرید. کدامیک از مجموعه‌های زیر در فضای توپولوژیک (I, Γ_I) باز است.

$$]\tfrac{۱}{۲}, \tfrac{۲}{۳}[\quad , \quad]\circ, \tfrac{۱}{۲}] \quad , \quad]\tfrac{۱}{۲}, ۱]$$

۱۰. زیرفضای توپولوژیک $X = \{\frac{1}{n} : n \in N\} \cup \{\circ\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $Y \subseteq X$. نشان دهید اگر $\circ \notin Y$، آنگاه Y در X باز است و اگر $\circ \in Y$، آنگاه Y در X بسته است.

۱۱. فرض کنید (A, T_A) زیرفضای توپولوژیک (X, T) باشد. ثابت کنید مجموعهٔ A در فضای توپولوژیک (X, T) باز است اگر و فقط اگر $T_A = \{G : G \subseteq A, \ G \in T\}$.

۱۲. فرض کنید A، B و C زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیک X و $C \subseteq A \cup B$. همچنین فرض کنید A، B و $A \cup B$ به توپولوژی نسبی مجهز باشند. ثابت کنید اگر C نسبت به توپولوژی $A \cup B$ باز باشد، آنگاه $C \cap A$ نسبت به توپولوژی A و $C \cap B$ نسبت به توپولوژی B باز است.

۱۳. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیک X باشند و همچنین فرض کنید A، B و $A \cup B$ به توپولوژی نسبی مجهز باشند. با یک مثال نشان دهید اگر G در A و H در B باز باشد، آنگاه لزوماً $G \cup H$ در $A \cup B$ باز نخواهد بود.

۲.۳ پایه و زیرپایه

در بخش‌های گذشته راجع به نقاط مختلف و مجموعه‌های باز صحبت کردیم و دیدیم وقتی توپولوژی T مشخص است که هریک از مجموعه‌های باز آن مشخص باشد. اما در بیشتر مواقع مثلاً برای مجموعهٔ $X = \{a, b, c\}$ با توپولوژی $T = \{X, \phi, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ اگر بدانیم $\{a\}$ و $\{c\}$ باز هستند از خاصیت اجتماع در فضاهای توپولوژیک وجود $\{a, c\}$ ثابت می‌شود و یا مثلاً در هر فضای گسسته هر مجموعهٔ تک‌نقطه‌ای باز است و لذا اجتماع مختلف آنها نیز باز می‌باشد. بنابراین می توان در توپولوژی گسسته از مجموعه‌های تک‌نقطه‌ای برای معرفی فضای گسسته کمک گرفت. به عنوان مثال فضای گسستهٔ $X = \{a, b, c\}$ با استفاده از دستهٔ $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ مشخص می‌شود. در این بخش به معرفی چنین زیردسته‌هایی که بتوانند توپولوژی فضا را مشخص کنند می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا پایه را تعریف می‌کنیم.

تعریف: فرض کنید (X, T) یک فضای توپولوژیکی است، دستهٔ $\mathcal{B} \subseteq T$، از زیرمجموعه‌های باز X، یک **پایه** برای توپولوژی T است اگر هر مجموعهٔ باز و غیرتهی $G \in T$ برابر اجتماع تعدادی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد.

به سهولت می توان دید دستهٔ $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی T است اگر و فقط اگر برای هر $G \in T$ و هر نقطهٔ $p \in G$، مجموعهٔ $B \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد به طوری که $p \in B \subseteq G$. بدیهی است که اگر $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^* \subseteq T$ و $\mathcal{B}$ پایه توپولوژی T باشد، آنگاه $\mathcal{B}^*$ نیز پایه توپولوژی T است. بنابراین T خود یک پایه برای توپولوژی T است. فضاهایی که دارای پایهٔ شمارش‌پذیر هستند خواص جالبی دارند که در فصل ۸ به آن می‌پردازیم.

مثال ۳۵: در فضای توپولوژیک $\mathcal{R}$ دسته فاصله‌های باز یک پایه برای این توپولوژی است. همچنین با توجه به اینکه بین هر دو عدد حقیقی یک عدد گویا موجود است، دسته فاصله‌های باز $]p, q[$، $p, q \in \mathcal{Q}$، نیز یک پایه برای این توپولوژی روی $\mathcal{R}$ است.

مثال ۳۶: در فضای توپولوژیک $\mathcal{R}^2$، می‌توان دید آن دسته از مستطیل‌های باز که اضلاعشان موازی محورها است یک پایه برای این توپولوژی است.

مثال ۳۷: مجموعه‌های تک‌نقطه‌ای یک پایه برای توپولوژی گسسته است.

در بالا متذکر شدیم که هر توپولوژی روی مجموعهٔ X حداقل یک پایه دارد زیرا می‌توان خود توپولوژی را به عنوان پایه در نظر گرفت. حال ببینیم آیا هر دسته از زیرمجموعه‌های باز نیز می‌تواند پایهٔ یک توپولوژی روی X باشد. به عبارت دیگر برای دستهٔ دلخواه داده‌شده آیا توپولوژیی روی X می‌توان ارائه داد به طوری که دستهٔ مذکور پایهٔ آن باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳۸: فرض کنید $X = \{a, b, c\}$ و $\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$. اگر $\mathcal{B}$ بخواهد پایهٔ یک توپولوژی مانند T باشد باید $\mathcal{B} \subseteq T$. لذا $\{a, b\}$ و $\{b, c\}$ باید دو مجموعهٔ باز باشند پس باید اشتراک آنها یعنی $\{b\}$ نیز مجموعه‌ای باز باشد و بنا به تعریف پایه، مجموعهٔ باز $\{b\}$ باید برابر اجتماع تعدادی از اعضای دستهٔ $\mathcal{B}$ باشد که امکان ندارد. لذا $\mathcal{B}$ پایهٔ هیچ توپولوژیی نیست.

اکنون ببینیم اعضای دستهٔ $\mathcal{B}$ باید دارای چه شرایطی باشند تا بتوانند پایهٔ یک توپولوژی روی X باشند. روشن است که ابتدا باید $X = \cup\{B : B \in \mathcal{B}\}$. زیرا در هر توپولوژی، X یک مجموعهٔ باز است. در مثال بالا دیدیم که این شرط کافی نیست. در قضیهٔ زیر شرط لازم و کافی برای اینکه یک دسته از زیرمجموعه‌های X بتوانند پایهٔ یک توپولوژی روی X باشند را بررسی می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۴: مجموعهٔ X را در نظر می‌گیریم. اگر دستهٔ $\mathcal{B}$ پایهٔ یک توپولوژی روی X باشد آنگاه:

الف) اجتماع تمام عناصر $\mathcal{B}$ برابر X است.

ب) اشتراک غیرتهی هر دو عضو از $\mathcal{B}$ برابر اجتماع تعدادی از اعضای $\mathcal{B}$ است و یا معادلاً برای B_1 و B_2 متعلق به $\mathcal{B}$ و هر $p \in B_1 \cap B_2$، $B \in \mathcal{B}$ موجود است به طوری که $p \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

بالعکس، اگر دستهٔ $\mathcal{B}$ در خواص بالا صدق کند آنگاه پایه یک توپولوژی روی X است. این توپولوژی را **توپولوژی ایجادشده بوسیلهٔ پایهٔ** $\mathcal{B}$ می‌نامند.

اثبات: ابتدا فرض کنیم دستهٔ $\mathcal{B}$ پایهٔ توپولوژی T روی X باشد، بنابراین $\mathcal{B} \subseteq T$. چون مجموعهٔ X متعلق به T است لذا بنا به تعریف پایه، X برابر اجتماع تعدادی از اعضای دستهٔ $\mathcal{B}$ و در نتیجه برابر اجتماع تمام عناصر $\mathcal{B}$ است.

اکنون دو مجموعهٔ باز B_2 و B_1 متعلق به $\mathcal{B}$ را اختیار می‌کنیم. از تعریف توپولوژی، روشن است که $B_1 \cap B_2 \in T$. مجدداً از تعریف پایه، $B_1 \cap B_2$ برابر اجتماع تعدادی از اعضای $\mathcal{B}$ است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض می‌کنیم دستهٔ $\mathcal{B}$ در دو شرط بالا صدق می‌کند. دستهٔ T را به صورت زیر تعریف کنید:

$$T = \{A : \text{برابر اجتماع یک دسته از عناصر } \mathcal{B} \text{ است } A\} \cup \{\phi\}$$

نشان می‌دهیم دستهٔ T یک توپولوژی روی X است. از شرط (الف)، $X \in T$ و همچنین از تعریف $\phi \in T$.

اکنون فرض می‌کنیم $\{G_i\}$ یک دسته از اعضای غیرتهی T باشد. بنا به تعریف T، هر G_i اجتماع بعضی از اعضای $\mathcal{B}$ است. بنابراین $\cup_i G_i$ نیز اجتماع تعدادی از اعضای $\mathcal{B}$ است و لذا $\cup_i G_i \in T$.

نهایتاً فرض می‌کنیم $G^{۱} \in T$ و $G^{۲} \in T$ دو مجموعهٔ غیرتهی باشند که اشتراک غیرتهی دارند (در حالتی که اشتراک آنها تهی باشد از تعریف T، اشتراک آنها به T متعلق خواهد بود) نشان می دهیم $G^{۲} \cap G^{۱} \in T$. بنا به تعریف T، دسته‌های $\{B_i \,:\, i \in I\}$ و $\{B_j \,:\, j \in J\}$ از اعضای $\mathcal{B}$ وجود دارند به طوری که:

$$G^{۱} = \cup_i B_i \quad \text{و} \quad G^{۲} = \cup_j B_j$$

بنابراین داریم:

$$G^{۱} \cap G^{۲} = (\cup_i B_i) \cap (\cup_j B_j) = \cup(B_i \cap B_j \,:\, i \in I,\, j \in J\}$$

اما با استفاده از شرط (ب) اگر $B_i \cap B_j$ غیرتهی باشد، اجتماع بعضی از اعضای $\mathcal{B}$ است و اگر تهی باشد می‌توان از آن صرفنظر کرد. بنابراین اجتماع بالا برابر اجتماع بعضی از اعضای $\mathcal{B}$ است، لذا $G^{۲} \cap G^{۱} \in T$.

□

نتیجهٔ ۱۵: اگر $\mathcal{B}$ دسته‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد که در شرایط (الف) و (ب) قضیه ۱۴ صدق کند، آنگاه $\mathcal{B}$ پایهٔ یک و فقط یک توپولوژی روی X است. به عبارت دیگر اگر دستهٔ $\mathcal{B}$ پایه برای توپولوژی‌های T و T^* روی X باشد، آنگاه $T = T^*$.

□

یک مثال ساده که بتواند شرایط قضیهٔ ۱۴ را تأمین کند مثال زیر است.

مثال ۳۹: اگر $\mathcal{B}$ یک افراز روی X باشد، آنگاه در شرایط الف و ب قضیه صدق می‌کند پس پایهٔ یک توپولوژی روی X است که به آن **توپولوژی حاصل از افراز** می‌گویند. در حالت خاص که $X = \mathcal{N}$ و $\mathcal{B} = \{\{۱,۲\},\{۳,۴\},\{۵,۶\},\cdots\}$ فضای توپولوژیک حاصل را **فضای زوج و فرد روی** $\mathcal{N}$ می‌نامند.

همانطور که شرایط قضیهٔ ۱۴ و مثال سادهٔ بالا نشان می‌دهد و البته قابل انتظار نیز هست، این است که چندین پایه بتوان ارائه داد که بنا به نتیجهٔ ۱۵ هریک توپولوژی منحصر به فردی را معین می‌کنند لذا یافتن راهی برای دسته‌بندی پایه‌ها اجتناب‌ناپذیر است. در این رابطه تعریف زیر منطقی به نظر می‌آید.

تعریف: دو پایه را **پایه‌های معادل** می‌گوییم اگر هر دو یک توپولوژی ایجاد کنند. به عبارت دیگر توپولوژی ایجادشده توسط دو پایه با هم مساوی باشند.

در مثال ۳۵ دیدیم که دسته فاصله‌های باز $]a,b[$، $a,b \in \mathcal{R}$، و دسته فاصله‌های باز $]p,q[$، $p,q \in \mathcal{Q}$، دو پایه برای توپولوژی معمولی روی $\mathcal{R}$ هستند لذا معادلند. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد تحت چه شرایطی پایه‌ها می‌توانند معادل شوند.

قضیهٔ ۱۶: مجموعهٔ X و دسته مجموعه‌های $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ را در نظر می‌گیریم. دسته‌های $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ پایه‌های معادل برای توپولوژی روی X هستند اگر و فقط اگر برای هر $B \in \mathcal{B}$ و هر $p \in B$، $C \in \mathcal{C}$ وجود داشته باشد به طوری که $p \in C \subseteq B$ و بالعکس برای هر $C \in \mathcal{C}$ و هر $q \in C$، $B \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد به طوری که $q \in B \subseteq C$.

اثبات: اگر $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ دو پایهٔ معادل باشند یعنی هر دو یک توپولوژی ایجاد کنند، در این صورت از تعریف پایه اثبات قسمت اول حکم روشن است.

بالعکس فرض می‌کنیم دسته‌های $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ با شرایط قضیه موجود باشند و همچنین فرض می‌کنیم T و T' به ترتیب توپولوژی‌های ایجادشده به وسیلهٔ پایه‌های $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ باشند. مطابق فرض هر عضو غیرتهی از T مانند G برابر اجتماع بعضی از اعضای $\mathcal{B}$ است، مثلاً $G = \cup_i B_i$، که در آن $B_i \in \mathcal{B}$. بنابراین هر p متعلق به G در حداقل یک B_i قرار می‌گیرد، اما مطابق فرض C_i متعلق به $\mathcal{C}$ موجود است به طوری که $p \in C_i \subseteq B_i \subseteq G$. بنابراین G به صورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{C}$ نیز هست، لذا G یک باز در T' است. می‌توان به روش مشابه ثابت کرد که هر باز T' نیز یک باز T است یعنی $T = T'$.

□

مثال ۴۰: فرض کنید $\mathcal{D} = \{\ ]a,b]\ :\ a < b,\ a,b \in \mathcal{R}\}$. در این صورت $\mathcal{D}$ یک پایه برای $\mathcal{R}$ است. توپولوژی ایجادشده توسط پایهٔ $\mathcal{D}$ را **توپولوژی حد بالایی** می‌نامند. **توپولوژی حد پایینی** نیز به روش مشابه تعریف می‌شود. این پایه‌ها با پایهٔ ارائه‌شده برای توپولوژی معمولی روی مجموعهٔ اعداد حقیقی معادل نیستند. زیرا به عنوان مثال برای $b \in]a,b] \in \mathcal{D}$، هیچ پایه‌ای در توپولوژی معمولی موجود نیست که شامل b بوده و زیرمجموعهٔ $]a,b]$ شود.

با تعریف پایه برای توپولوژی روی X، دیدیم برای اینکه بتوان با دسته‌ای از زیرمجموعه‌های X توپولوژی وابسته به آن را تعریف کرد، کافی است این دسته در شرط‌های (الف) و (ب) قضیهٔ ۱۴ صدق کند. در این حالت با توجه به اثبات قضیهٔ ۱۴ که یک اثبات ساختاری است، توپولوژی T را چنان ساختیم که دستهٔ مورد نظر پایهٔ T شود. در ادامهٔ بحث با تعریف *زیرپایه*، روش دیگری را برای معرفی توپولوژی فضا ارائه می‌دهیم. ابتدا به تعریف و مثال‌های زیر برای آشنا شدن با مفهوم *زیرپایه* توجه کنید.

تعریف: در فضای توپولوژیکی (X, T)، دستهٔ $\mathcal{A} \subseteq T$ از زیرمجموعه‌های باز X یک زیرپایه برای توپولوژی T روی X است اگر و فقط اگر اشتراک باپایان اعضاء $\mathcal{A}$ یک پایه برای توپولوژی T باشد.

مثال ۴۱: ملاحظه می‌کنیم هر فاصلهٔ باز $]a,b[\subseteq \mathcal{R}$، $a < b$، برابر اشتراک دو فاصلهٔ باز غیرکراندار است، یعنی: $]a,b[=]a,\infty[\ \cap\ ]-\infty,b[$ و فاصله‌های باز $]a,b[$ یک پایه برای توپولوژی روی $\mathcal{R}$ است بنابراین فاصله‌های باز غیرکراندار یک زیرپایه برای فضای توپولوژیک $(\mathcal{R}, \Gamma)$ است.

مثال ۴۲: اشتراک نوارهای باز عمودی و افقی در صفحهٔ $\mathcal{R}^2$، مستطیل‌های باز است. در مثال ۳۶ دیدیم که این مستطیل‌ها یک پایه برای توپولوژی روی $\mathcal{R}^2$ است، لذا نوارهای باز عمودی و افقی یک زیرپایه برای فضای توپولوژیک $(\mathcal{R}^2, \Lambda)$ است.

قضیهٔ ۱۷: مجموعهٔ غیرتهی X را در نظر می‌گیریم، هر دستهٔ غیرتهی از زیرمجوعه‌های X که اجتماعشان برابر X شود یک زیرپایه برای یک توپولوژی روی X است و این توپولوژی منحصر بفرد است.[7]

اثبات: فرض کنید $\mathcal{A}$ یک دستهٔ غیرتهی از زیرمجموعه‌های X باشد. دستهٔ $\mathcal{B}$ را مشتمل بر اشتراک باپایان اعضاء $\mathcal{A}$ و T را اجتماع دسته‌های دلخواه $\mathcal{B}$ به انضمام مجموعهٔ تهی تعریف کنید نشان می‌دهیم $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی T است.

اولاً $X \in \mathcal{B}$، $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ و اجتماع اعضاء $\mathcal{A}$ برابر X است.

ثانیاً اگر B_1 و B_2 متعلق به $\mathcal{B}$ باشند، آنگاه B_1 و B_2 هریک به صورت اشتراک باپایان اعضاء $\mathcal{A}$ هستند. در نتیجه $B_1 \cap B_2$ نیز اشتراک باپایان اعضاء $\mathcal{A}$ است بنابراین متعلق به $\mathcal{B}$ است یعنی $\mathcal{B}$ در شرط (ب) قضیهٔ ۱۴ نیز صدق می‌کند. لذا $\mathcal{B}$ پایهٔ توپولوژی T روی X است، که بنا بر نتیجهٔ ۱۵ منحصر بفرد است.

□

نتیجهٔ ۱۸: اگر $\mathcal{S}$ زیرپایه برای توپولوژی‌های T و T^* باشد، آنگاه $T = T^*$.

تعریف: اگر $\mathcal{A}$ یک دستهٔ غیرتهی از زیرمجموعه‌های X چنان باشد که اجتماع اعضاء آن برابر X شود، آنگاه اجتماع دلخواه از اشتراک باپایان اعضای $\mathcal{A}$ را **توپولوژی ایجادشده توسط دستهٔ** $\mathcal{A}$ می‌نامیم.

مثال ۴۳: اجتماع دو فضای توپولوژی شعاع چپ و شعاع راست همان فضای توپولوژی معمولی روی $\mathcal{R}$ است. زیرا فاصله‌های باز غیرکراندار یک زیرپایه برای فضای توپولوژیک $(\mathcal{R}, \Gamma)$ است.

مثال ۴۴: مجموعهٔ $X = \{a, b, c, d\}$ و دستهٔ $\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}\}$ را در نظر می‌گیریم. ابتدا پایهٔ $\mathcal{B}$ را از اشتراک باپایان اعضاء $\mathcal{A}$ به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{B} = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{c\}\}$$

اکنون مطابق تعریف اجتماع دلخواه از اعضاء $\mathcal{B}$ به انضمام مجموعهٔ تهی، تشکیل توپولوژی T روی X می‌دهد.

---

[7] متذکر می‌گردد چنانچه از این قرارداد که اجتماع و اشتراک یک دستهٔ تهی به ترتیب برابر تهی و تمام مجموعه می‌باشد، استفاده شود لزومی ندارد که در قضیهٔ ۱۷ دستهٔ مورد نظر غیرتهی بوده و اجتماعی اعضای آن برابر X شود. لذا خواننده ممکن است در بعضی از کتاب‌ها این قضیه را با حذف دو شرط ذکرشده ببیند.

$$T = \{X, \phi, \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{c\}, \{a,b,c,d\}\}$$

قضیهٔ ۱۹: فرض کنید $\mathcal{A}$ یک دستهٔ غیرتهی از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ غیرتهی X باشد به طوری که اجتماع همهٔ اعضاء آن برابر X شود. در این صورت توپولوژی ایجادشده به وسیلهٔ $\mathcal{A}$ مساوی اشتراک تمام توپولوژی‌های روی X است که شامل $\mathcal{A}$ می‌باشند.

اثبات: فرض کنید T توپولوژی ایجادشده توسط $\mathcal{A}$ و T^* اشتراک همهٔ توپولوژی‌های روی X باشد که شامل $\mathcal{A}$ هستند. چون $\mathcal{A} \subseteq T$، لذا $T^* \subseteq T$.

بالعکس، اگر $U \in T$، بنا به تعریف دستهٔ $B_{ij} \in \mathcal{A} \subseteq T^*$ موجود است که $U = \cup_j(\cap_i B_{ij})$ (توجه کنید که اندیس i باپایان است ولی اندیس j ممکن است بی‌پایان باشد) بنابراین از تعریف توپولوژی $U \in T^*$.

□

تمرین

۱. کدامیک از دسته‌های زیر تشکیل پایه برای توپولوژی معمولی روی R^2 می‌دهد.

الف) دسته مثلث‌های باز متساوی‌الاضلاع.

ب) دسته مربع‌های باز که اضلاعشان موازی محورهاست.

۲. فرض کنید دستهٔ $\mathcal{B}$ پایهٔ توپولوژی T روی مجموعهٔ غیرتهی X است. نشان دهید اگر $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^* \subseteq T$، آنگاه $\mathcal{B}^*$ نیز پایهٔ توپولوژی است.

۳. فضاهای توپولوژیکی (X,T) و (X,T^*) و دسته‌های $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}^*$ از زیرمجموعه‌های X که به ترتیب پایه برای توپولوژی‌های T و T^* هستند را در نظر بگیرید. اگر هر $B \in \mathcal{B}$ برابر اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}^*$ باشد، نشان دهید $T \subseteq T^*$.

۴. فضای توپولوژیکی گسسته (X,T) و دسته $\mathcal{B} = \{\{p\} : p \in X\}$ از زیرمجموعه‌های تک‌عضوی X را در نظر می‌گیریم. نشان دهید دستهٔ $\mathcal{B}^*$ از زیرمجموعه‌های X یک پایه برای توپولوژی T روی X است اگر و فقط اگر $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^*$.

۵. فرض کنید X یک مجموعهٔ کاملاً مرتب با رابطهٔ ترتیبی $<$ باشد و فرض کنید $\mathcal{B}$ مشتمل بر همهٔ زیرمجموعه‌هایی از نوع زیر باشد:

- $a, b \in X;\ ]a,b[= \{x \in X : a < x < b\}$.

• اگر $a_\circ$ کوچکترین عضو X (در صورت وجود) باشد، $[a_\circ, b[= \{x \in X : a_\circ \leq x < b\}$؛ $b \in X$.

• اگر $b_\circ$ بزرگترین عضو X (در صورت وجود) باشد، $]a, b_\circ] = \{x \in X : a < x \leq b_\circ\}$؛ $a \in X$.

نشان دهید:

الف- $\mathcal{B}$ یک پایه برای X است (توپولوژی ایجادشده توسط $\mathcal{B}$ را **توپولوژی ترتیبی** می‌نامیم).

ب- مجموعه‌هایی از نوع $\{x \in X : x < a\}$ و $\{x \in X : x > a\}$، $a \in X$، یک زیرپایه برای توپولوژی ترتیبی است.

پ- توپولوژی ترتیبی روی مجموعه اعداد حقیقی (با ترتیب معمولی) با توپولوژی معمولی مساوی است.

ت- توپولوژی ترتیبی روی مجموعهٔ اعداد طبیعی (با ترتیب معمولی) با توپولوژی گسسته مساوی است.

ث- عناصر پایه در توپولوژی ترتیبی روی $\mathcal{R}^۲$ با ترتیب قاموسی چگونه است. (به این توپولوژی، **توپولوژی ترتیبی قاموسی** می‌گوییم).

۶. زیرمجموعهٔ $Y = [\circ, ۱[\cup \{۲\}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی را در نظر بگیرید:

الف- مجموعه‌های باز در Y به عنوان زیرفضای مجموعه اعداد حقیقی با توپولوژی معمولی چگونه است؟

ب- مجموعه‌های باز در Y با توپولوژی ترتیبی (با ترتیب معمولی) چگونه است؟

پ- آیا این دو توپولوژی روی Y با هم مساوی هستند؟

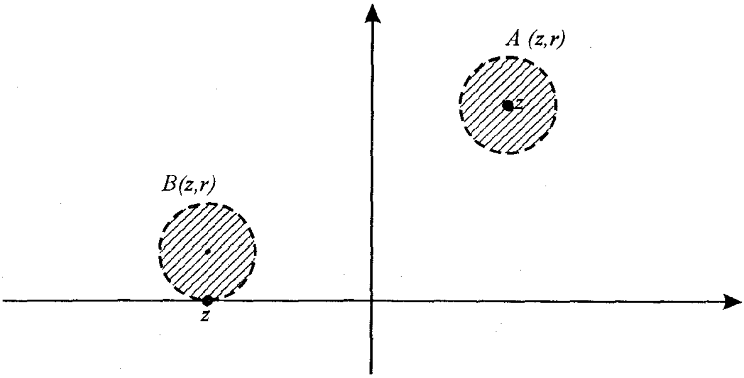
ت- نشان دهید اگر Y به صورت یک بازه (کراندار یا بیکران) باشد، آنگاه این دو توپولوژی روی Y مساوی هستند.

۷. مجموعه اعداد حقیقی $\mathcal{R}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید:

الف- بازه‌هایی از نوع $[a, b[$، $a, b \in \mathcal{Q},\ a < b$، نمی‌توانند تشکیل یک پایه بدهند.

ب- بازه‌هایی از نوع $[a, b[$، $a \in \mathcal{Q}$ و $a < b, b \in \mathcal{R} \backslash \mathcal{Q}$، تشکیل یک پایه می‌دهند.

پ- بازه‌هایی از نوع $[a, b[$، $a, b \in \mathcal{Q}$ و $a < b$، همراه با مجموعه‌های تک‌نقطه‌ای $\{p\}$، $p \in \mathcal{Q}$، یک پایه هستند.



شکل ۱

۸. فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ یک پایه (زیرپایه) برای توپولوژی T روی X است. مجموعهٔ $A \subseteq X$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید دستهٔ $\mathcal{A}_A = \{A \cap S : S \in \mathcal{A}\}$ یک پایه (زیرپایه) برای توپولوژی نسبی T_A روی A است.

۹. فرض کنید $X = \{(x, y) : y \geq ۰\}$، نشان دهید مجموعه‌های زیر تشکیل یک پایه برای X می‌دهند (شکل ۱). برای $z = (a, b) \in X$

اگر $b \neq ۰$ $\quad A(z, r) = \{(x, y) \in \mathcal{R}^۲ : \sqrt{(x-a)^۲ + (y-b)^۲} < r\}, \ ۰ < r < b$

اگر $b = ۰$ $\quad B(z, r) = \{(x, y) \in \mathcal{R}^۲ : \sqrt{(x-a)^۲ + (y-r)^۲} < r\} \cup \{(a, ۰)\}, \ r > ۰$

این فضای توپولوژیک به **صفحهٔ مور**[۸] معروف است.

۱۰. فرض کنید $\mathcal{B}$ دستهٔ همهٔ مستطیل‌هایی از نوع

$$\{(x, y) : a \leq x < b, c \leq y < d, a, b, c, d \in R\}$$

در $\mathcal{R}^۲$ باشند. نشان دهید:

الف_ دسته $\mathcal{B}$ پایهٔ یک توپولوژی روی $\mathcal{R}^۲$ است.

ب_ اگر $A = \{(x, y) : x = -y\}$، آنگاه توپولوژی نسبی حاصل از دستهٔ $\mathcal{B}$ روی A گسسته است.

[۸] Moore

پ- اگر $B = \{(x,y) : x = y\}$، آنگاه توپولوژی نسبی حاصل از دستهٔ $\mathcal{B}$ روی B گسسته نیست.

۱۱. مجموعهٔ $\mathcal{R}$ و دستهٔ $\mathcal{A}$ متشکل از فواصل بستهٔ $[a, a+1]$ را در نظر می‌گیریم، توپولوژی ایجادشده توسط دستهٔ $\mathcal{A}$ را به دست آورید.

۱۲. مجموعهٔ اعداد طبیعی، $\mathcal{N}$، را در نظر بگیرید. در هر حالت توپولوژیی را که به وسیلهٔ دسته‌های زیر ایجاد می‌شود به دست آورید.

الف- $\mathcal{N}$، ϕ

ب- $\mathcal{N}$، $\{۳, ۴, ۵, \}$, $\{۱, ۲\}$

۱۳. مجموعهٔ $X = \{a, b, c, d, e\}$ و توپولوژی گسستهٔ T روی آن را در نظر می‌گیریم. زیرپایهٔ $\mathcal{A}$ برای T روی X را طوری به دست آورید که شامل مجموعه‌ای تک‌عضوی نباشد.

۱۴. الف- نشان دهید اگر $\mathcal{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی X باشد، آنگاه $\mathcal{B}\backslash\{\phi\}$ نیز یک پایه است.

ب- با یک مثال نشان دهید $\mathcal{B}\backslash\{X, \phi\}$ نمی‌تواند پایه باشد.

۱۵. فرض کنید $[۰, ۱]$ زیرفضای توپولوژیک مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathcal{R}$ باشد. نشان دهید همهٔ بازه‌هایی از نوع $]a, ۱]$ و $[۰, b[$ که $۰ < a, b < ۱$، تشکیل یک زیرپایه برای $[۰, ۱]$ می‌دهد.

۱۶. مجموعهٔ $X = \mathcal{R}^۲$ و دستهٔ $\mathcal{A}$ مشتمل بر همهٔ نیم‌صفحه‌های باز از نوع زیر را در نظر بگیرید.

$$\{(x,y) : x < a\}\ ,\ \{(x,y) : x > a\}\ ,\ \{(x,y) : y > a\}\ ,\ \{(x,y) : y < a\}$$

توپولوژی ایجادشده توسط $\mathcal{A}$ را پیدا کنید.

۱۷. کوچکترین زیرپایه برای یک فضای گسسته کدام است؟ برای فضای ناگسسته چطور؟

۱۸. فرض کنید $\mathcal{S}$ یک زیرپایه برای فضای توپولوژیک X، G یک مجموعهٔ باز و $p \in G$. نشان دهید تعداد باپایان از عناصر $\mathcal{S}$ مانند $S_۱$، $\cdots$، S_m موجود است که $p \in S_۱ \cap \cdots \cap S_m \subseteq G$.

۱۹. نشان دهید مجموعه‌های $[۰, \infty[$ و $[a, b[$ در توپولوژی حد پایینی هم باز و هم بسته است.

۲۰. بستار هریک از مجموعه‌های زیر را در توپولوژی حد پایینی تعیین کنید:

$$\text{مجموعه اعداد گویا}\quad,\quad \{\frac{۱}{n} :\ n \in N\}\quad,\quad \{-\frac{۱}{n} :\ n \in \mathcal{N}\}$$

۲۱. فرض کنید توپولوژی روی $\mathcal{R}$ به وسیلهٔ بازه‌های $[a, b[$، $a, b \in \mathcal{Q}$، تولید شده باشد.

الف ـ بستار مجموعه‌های زیر را پیدا کنید.

$$]۲, ۴[\quad , \quad]\sqrt{۲}, ۵] \quad , \quad]-۳, \pi[\quad , \quad \{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \cdots\}$$

ب ـ نشان دهید هر مجموعهٔ باپایان در این فضای توپولوژیک بسته است.

۲.۴ توپولوژی ضعیف

همان گونه که قبلاً ذکر کردیم روی یک فضا ممکن است چندین توپولوژی بتوان تعریف کرد. در این بخش راهی برای مقایسه توپولوژی‌های تعریف‌شده روی یک فضا ارائه می‌دهیم.

تعریف: فرض کنید T و T^* دو توپولوژی روی فضای X باشند. T را **توپولوژی ضعیف‌تر (زمخت‌تر، کوچک‌تر)** از T^* و T^* را **توپولوژی قوی‌تر (ظریف‌تر، بزرگ‌تر)** از T گوییم اگر $T \subseteq T^*$ و مساوی هستند اگر $T = T^*$.

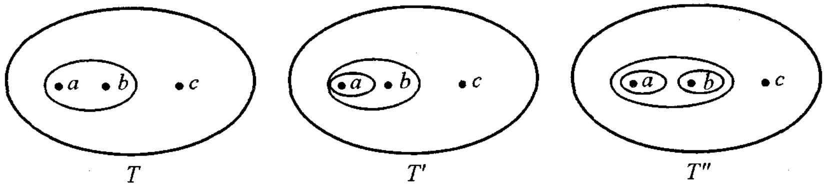
مثال ۴۵: فرض کنید $X = \{a, b, c\}$ و T، T' و T'' سه توپولوژی روی X باشند.

$$T = \{X, \phi, \{a, b\}\}$$
$$T' = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}\}$$
$$T'' = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

در این صورت $T \subseteq T' \subseteq T''$. لذا بین این سه توپولوژی، T ضعیف‌ترین و T'' قوی‌ترین توپولوژی روی X است.

مثال ۴۶: توپولوژی ناگسسته ضعیف‌ترین توپولوژی و توپولوژی گسسته قوی‌ترین توپولوژی برای مجموعهٔ دلخواه X است.

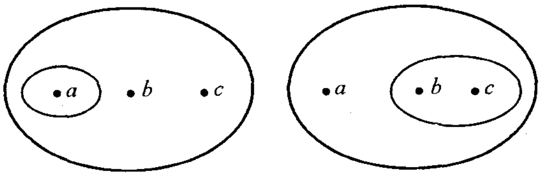
از نظر تاریخی واژه‌های ضعیف‌تر و قوی‌تر قدیمی‌تر هستند. آنچه که باید مورد توجه خواننده قرار بگیرد این است که به طور صوری توپولوژی ضعیف‌تر تعداد مجموعه‌های کمتری دارد، به همین دلیل باید مجموعه‌های آن زمخت‌تر باشند. لذا بعضی از ریاضی‌دانان ترجیح می دهند به جای واژهٔ ضعیف‌تر از واژهٔ زمخت‌تر استفاده کنند. برای بیشتر روشن شدن مطلب به توپولوژی‌های ارائه‌شده در مثال‌های ۴۵ و ۴۶ توجه کنید. مجموعه‌های باز مثال ۴۵ در شکل (۲) نمایش داده شده است. همانطور که در شکل می‌بینید توپولوژی T دارای مجموعه‌های زمخت‌تری است زیرا مجموعه‌های باز غیرتهی آن فقط X و $\{a, b\}$ است در حالی که T'' دارای مجموعه‌های ظریف‌تری است زیرا علاوه بر X و $\{a, b\}$ دارای بازهای $\{a\}$ و $\{b\}$ نیز می‌باشد.



شکل ۲

در فضای ناگسسته که دارای ضعیف‌ترین و یا به عبارتی زمخت‌ترین توپولوژی است تنها مجموعهٔ باز غیرتهی، X است در حالی که در فضای گسسته که قوی‌ترین و یا ظریف‌ترین توپولوژی را دارد هر مجموعهٔ تک‌عضوی یک مجموعهٔ باز است.

البته بدیهی است که دو توپولوژی ممکن است هیچگاه با هم مقایسه نشوند مانند توپولوژی‌های ارائه‌شده در شکل (۳).



شکل ۳

قضیهٔ ۲۰: اگر T و T^* دو توپولوژی روی X چنان باشند که $T \subseteq T^*$ و Y زیرفضای (X,T) و همچنین زیرفضای (X,T^*) باشد، آنگاه $T_Y \subseteq T_Y^*$.

اثبات: طبق تعریف

$$T_Y = \{Y \cap U : \; Y \in T\} \subseteq \{Y \cap G : \; G \in T^*\} = T_Y^*$$

□

قضیهٔ ۲۱: فرض کنید توپولوژی T ضعیف‌تر از توپولوژی T^* و $A \subseteq X$ باشد. در این صورت:

الف- بستار A نسبت به توپولوژی T^* در بستار A نسبت به توپولوژی T قرار دارد.

ب- نقاط درونی A نسبت به توپولوژی T زیرمجموعهٔ نقاط درونی A نسبت به توپولوژی T^* است.

پ- نقاط مرزی A نسبت به توپولوژی T^* زیرمجموعهٔ نقاط مرزی A نسبت به توپولوژی T است.

اثبات:

الف ـ بستار A نسبت به توپولوژی T^* را به $\bar{A}_{T^*}$ نمایش دهید، در این صورت

$$\bar{A}_{T^*} = \cap\{B : X\backslash B \in T^*,\ A \subseteq B\} \subseteq \cap\{F : X\backslash F \in T,\ A \subseteq F\} = \bar{A}_T$$

ب ـ $$A^\circ_T = \cup\{G : G \in T,\ G \subseteq A\} \subseteq \cup\{H : H \in T^*,\ H \subseteq A\} = A^\circ_{T^*}$$

پ ـ $$b(A)_{T^*} = \bar{A}_{T^*} \cap (\overline{X\backslash A})_{T^*} \subseteq \bar{A}_T \cap (\overline{X\backslash A})_T = b(A)_T$$

□

تمرین

۱. فرض کنید $\{T_a\}$ یک خانواده از توپولوژی‌ها روی X باشد. نشان دهید توپولوژی ایجادشده توسط اشتراک این خانواده، ضعیف‌تر از هر T_a و قوی‌تر از هر توپولوژیی است که از همه این‌ها ضعیف‌تر باشد. (به این توپولوژی **بزرگ‌ترین کران پایینی خانواده** $\{T_a\}$ می‌گویند.)

۲. فرض کنید $\{T_a\}$ یک خانوده از توپولوژی‌ها روی X باشد. نشان دهید اشتراک تمام توپولوژی‌هایی که قوی‌تر از هر T_a هستند یک توپولوژی است که قوی‌تر از هر T_a و ضعیف‌تر از هر توپولوژیی است که قوی‌تر از T_a است. (به این توپولوژی **کوچک‌ترین کران بالایی خانواده** $\{T_a\}$ می‌گویند.)

۳. اگر $X = \{a, b, c\}$ و $T = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}\}$ و $T^* = \{X, \phi, \{a\}, \{b, c\}\}$ بزرگ‌ترین کران پایینی و کوچک‌ترین کران بالایی دستهٔ $\{T, T^*\}$ را به دست آورید.

۴. مجموعهٔ غیرتهی X و دستهٔ $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X را در نظر می‌گیریم. نشان دهید توپولوژی T، ایجادشده به وسیلهٔ $\mathcal{A}$، ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است که شامل $\mathcal{A}$ می‌باشد.

۵. فرض کنید توپولوژی‌های T و T^* به ترتیب به وسیلهٔ $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ تولید شده باشند. نشان دهید:

الف ـ اگر $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$، آنگاه $T \subseteq T^*$.

ب ـ اگر $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \subseteq T$، آنگاه $T = T^*$.

۶. فرض کنید $\mathcal{S}$ دستهٔ همهٔ مجموعه‌های بسته و کراندار در $\mathcal{R}$ و T توپولوژی ایجادشده توسط $\mathcal{S}$ باشد. نشان دهید T قوی‌تر از توپولوژی معمولی روی $\mathcal{R}$ است.

۷. نشان دهید توپولوژی حد بالایی و توپولوژی حد پایینی، هر دو، قوی‌تر از توپولوژی معمولی روی $\mathcal{R}$ هستند.

۸. فرض کنید X یک مجموعهٔ کاملاً مرتب با خاصیت کوچک‌ترین کران بالا باشد. توپولوژی شعاع چپ (راست) را با توپولوژی ترتیبی روی آن مقایسه کنید.

۹. با ارائه مثال‌های نقض نشان دهید در قضیهٔ ۲۰ و ۲۱ ممکن است تساوی اتفاق نیفتد.

۱۰. زیرمجموعهٔ A در $\mathcal{R}^۲$ را **بطور شعاعی باز** می‌گویند اگر A شامل پاره‌خطی در هر نقطه و در هر جهت باشد. توپولوژی ایجادشده به وسیلهٔ این نوع مجموعه‌ها را با توپولوژی معمولی روی $\mathcal{R}^۲$ مقایسه کنید. (صفحهٔ مجهز به این توپولوژی را **صفحهٔ شعاعی** گویند.)

۱۱. توپولوژی روی $X = \{(x, y) : y \geq ۰\}$ به عنوان زیرفضای $\mathcal{R}^۲$ را با توپولوژی روی صفحهٔ مور مقایسه کنید. (به بخش ۲.۳ تمرین ۹ مراجعه کنید).

فصل ۳

پیوستگی

هدف این فصل معرفی توابع پیوسته روی فضاهای توپولوژیکی و بررسی خواص ابتدایی آنها است. زیرا همچنان که در این فصل و فصل‌های آتی خواهیم دید، این توابع، خواصی مانند همبندی و فشردگی وتصویر معکوس آنها خواصی، مانند باز بودن و بسته بودن را می‌توانند منتقل کنند.

۳.۱ پیوستگی

در آنالیز دیدیم که تعریف پیوستگی توابع به دو طریق صورت می‌گیرد یکی از طریق $\varepsilon-\delta$ و دیگری با استفاده از مفهوم حد و دنباله‌ها.

هدف این بخش تعمیم هر دو این مفاهیم روی فضاهای توپولوژیک است. تعمیم مفهوم $\varepsilon-\delta$ روی فضاهای توپولوژیک از طریق مجموعه‌های باز صورت می‌گیرد زیرا همانگونه که متذکر شدیم فضاهای توپولوژیک فقط با معرفی مجموعه‌های باز، شناخته می‌شوند. لذا تعمیم زیر از پیوستگی منطقی و مناسب به نظر می رسد.

تعریف: فضاهای توپولوژیکی (X,T) و (X^*,T^*) و تابع $f\ :\ X\to X^*$ را در نظر می‌گیریم. می‌گوییم f در نقطهٔ $x\in X$ **پیوسته نسبت به توپولوژی‌های T و T^***؛ یا $T-T^*$ پیوسته؛ و یا به طور خلاصه **پیوسته** است اگر برای هر مجموعهٔ باز G^*، $G^*\in T^*$، شامل $f(x)$ مجموعهٔ باز G، $x\in G\in T$، وجود داشته باشد به طوری که $f(G)\subseteq G^*$. تابع f **پیوسته روی مجموعه** $E\subseteq X$ است اگر این تابع در هر نقطه از E پیوسته باشد.

مثال ۱: مجموعه‌های $X=\{a,b,c,d\}$ و $X^*=\{x,y,z,w\}$ به ترتیب با توپولوژی‌های

$$T = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

$$T^* = \{X^*, \phi, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{z, y, w\}\}$$

و تابع $f\ :\ (X, T) \to (X^*, T^*)$ با ضابطهٔ زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(a) = y\ ,\quad f(b) = z\ ,\quad f(c) = w\ ,\quad f(d) = z$$

برای نقطهٔ $a \in X$ مجموعه‌های بازی که شامل $y = f(a)$ هستند عبارتند از

$$\{y\}\ ,\ \{x, y\}\ ,\ \{y, z, w\}$$

و مجموعهٔ باز $\{a\} \in T$، $a \in \{a\}$، وجود دارد به طوری که $f(\{a\}) = \{y\}$ و روشن است که

$$\{y\} \subseteq \{y\}\ ,\ \{y\} \subseteq \{x, y\}\ ,\ \{y\} \subseteq \{y, z, w\}$$

لذا f در نقطهٔ $a \in X$ پیوسته است.

مثال ۲: تابع g را روی همان فضاهای توپولوژیکی با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$g(a) = x\ ,\quad g(b) = y\ ,\quad g(c) = z\ ,\quad g(d) = w$$

این تابع در نقطهٔ $c \in X$ پیوسته نیست، زیرا برای مجموعهٔ باز $\{y, z, w\}$ شامل $z = g(c)$ واقع در T^*، زیرمجموعهٔ بازی در X وجود ندارد که شامل c بوده و تصویر آن تحت g در $\{y, z, w\}$ واقع شود. در حقیقت تنها مجموعهٔ باز شامل c مجموعهٔ $\{a, b, c\}$ است که تصویر آن تحت g مجموعهٔ $\{x, z\}$ می‌باشد که در مجموعهٔ $\{y, z, w\}$ واقع نیست.

مثال ۳: تابع ثابت در هر فضای توپولوژیک پیوسته است. زیرا اگر $f\ :\ (X, T) \to (X^*, T^*)$ با ضابطهٔ $f(x) = a$ را در نظر بگیریم، آنگاه برای هر $x \in X$، و هر مجموعهٔ باز $G^* \in T^*$ شامل $f(x) = a$ بدیهی است که $f(X) = \{a\} \subseteq G^*$. البته می‌دانیم که X در فضای توپولوژیک (X, T) هم بسته و هم باز است.

قضایای زیر نشان می‌دهد که برای اثبات پیوستگی یک تابع روی زیرمجموعه‌های یک فضا لزوماً نباید تمام نقاط آن را در نظر گرفت، بلکه می توان از صورت معادل آن استفاده کرد.

قضیهٔ ۱: فضاهای توپولوژیکی (X, T) و (X^*, T^*) و تابع $f : X \to X^*$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت عبارت‌های زیر معادلند:

الف) تابع f پیوسته روی X است.

ب) برای هر مجموعهٔ باز H، $f^{-1}(H)$ در فضای توپولوژیکی (X, T) باز است.

پ) برای هر مجموعهٔ بستهٔ K در فضای توپولوژیکی (X^*,T^*)، $f^{-1}(K)$ در فضای توپولوژیکی (X,T) بسته است.

اثبات:

(الف) $\Leftarrow$ (ب)

فرض می‌کنیم f پیوسته روی X است. مجموعهٔ باز H را در فضای توپولوژیک (X^*,T^*) در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم $f^{-1}(H)$ در فضای توپولوژیکی (X,T) باز است. برای این منظور نقطهٔ $x \in f^{-1}(H)$ را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم x یک نقطهٔ داخلی $f^{-1}(H)$ است. چون f پیوسته و مجموعهٔ باز $H \in T^*$ شامل $f(x)$ است، از تعریف پیوستگی، مجموعهٔ باز G در T شامل x وجود دارد به طوری که $f(G) \subseteq H$، و از آنجا $f^{-1}(f(G)) \subseteq f^{-1}(H)$. در نتیجه با توجه به $G \subseteq f^{-1}(f(G))$ داریم $G \subseteq f^{-1}(H)$. چون نقطهٔ x دلخواه است، لذا هر نقطه از مجموعهٔ $f^{-1}(H)$ یک نقطهٔ داخلی است و بنابراین مجموعهٔ $f^{-1}(H)$ در فضای توپولوژیکی (X,T) باز است.

(ب) $\Leftarrow$ (پ)

فرض می‌کنیم K مجموعه‌ای بسته در فضای توپولوژیک (X^*,T^*) است، پس $X^*\backslash K$ در این فضا باز و در نتیجه $f^{-1}(X^*\backslash K)$ در فضای توپولوژیک (X,T) باز است لذا $X\backslash f^{-1}(X^*\backslash K)$ در این فضا بسته است. اما: $f^{-1}(K) = f^{-1}(X^*)\backslash f^{-1}(X^*\backslash K) = X\backslash f^{-1}(X^*\backslash K)$ پس $f^{-1}(K)$ در فضای توپولوژیک (X,T) بسته است.

(پ) $\Leftarrow$ (الف)

برای نشان دادن پیوستگی f، نقطهٔ $x \in X$ و مجموعهٔ باز $G^* \in T^*$ حول $f(x)$ را در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ $X^*\backslash G^*$ در فضای توپولوژیکی (X^*,T^*) بسته است، لذا $f^{-1}(X^*\backslash G^*) = X\backslash f^{-1}(G^*)$ در فضای توپولوژیکی (X,T) بسته و یا معادلاً $f^{-1}(G^*)$ در فضای توپولوژیکی (X,T) باز است. قرار دهید $G = f^{-1}(G^*)$. بدیهی است که $x \in G$ و $f(G) = f(f^{-1}(G^*)) \subseteq G^*$.

□

مثال ۴: فرض کنید $(\mathcal{R},T)$ فضای مجموعه اعداد حقیقی با توپولوژی مکمل باپایان باشد. در این صورت $i : (\mathcal{R},\Gamma) \to (\mathcal{R},T)$ تابع همانی و i پیوسته است زیرا به ازای هر مجموعهٔ باز مانند G در

فضای $(\mathcal{R},T)$، نقاط x_1، ...، x_n موجودند که $G=\mathcal{R}\backslash\{x_1,\cdots,x_n\}$. چون i یک به یک و پوشا است با فرض $i^{-1}(x_1)<\cdots<i^{-1}(x_n)$ داریم،

$$i^{-1}(G)=i^{-1}(\mathcal{R})\backslash\{i^{-1}(x_1),\cdots,i^{-1}(x_n)\}=(-\infty,i^{-1}(x_1))\cup\cdots\cup(i^{-1}(x_n),\infty)$$

که به صورت اجتماعی از مجموعه‌های باز است، بنابراین $i^{-1}(\{G\})$ باز و در نتیجه i پیوسته است.

مثال ۵: در مثال ۴ فرض کنید $(\mathcal{R},T)$ مجهز به توپولوژی حد پایین باشد در این صورت i یک تابع پیوسته نیست. زیرا تصویر معکوس مجموعهٔ باز $[a,b[$ در توپولوژی حد پایین، مجموعهٔ $[a,b[$ است که در توپولوژی معمولی باز نیست.

قضیهٔ ۲: فضاهای توپولوژیکی (X,T) و (X^*,T^*) و تابع $f:X\to X^*$ را در نظر می‌گیریم. تابع f پیوسته روی X است اگر و فقط اگر برای هر $A\subseteq X$، آنگاه $f(\bar{A})\subseteq\overline{f(A)}$.

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم تابع f پیوسته است. مجموعهٔ $A\subseteq X$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $f(A)\subseteq\overline{f(A)}$ و $\overline{f(A)}$ در فضای توپولوژیکی (X^*,T^*) بسته است. لذا بنا بر قضیهٔ ۱، $f^{-1}(\overline{f(A)})$ در فضای توپولوژیک (X,T) بسته است. از طرفی از رابطهٔ $f(A)\subseteq\overline{f(A)}$ داریم $A\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. چون $f^{-1}(\overline{f(A)})$ بسته و شامل A است از تعریف بستار $\bar{A}\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ و یا $f(\bar{A})\subseteq\overline{f(A)}$.

بالعکس، برای نشان دادن اینکه f پیوسته روی X است با توجه به قضیهٔ ۱ کافی است نشان دهیم تصویر معکوس هر مجموعهٔ بسته، بسته است. لذا فرض کنید K^* در فضای توپولوژیکی (X^*,T^*) بسته باشد. از فرض قضیه $f(\overline{f^{-1}(K^*)})\subseteq\overline{f(f^{-1}(K^*))}\subseteq\overline{K^*}=K^*$. لذا $\overline{f^{-1}(K^*)}\subseteq f^{-1}(K^*)$ و در نتیجه $f^{-1}(K^*)$ در فضای توپولوژیکی (X,T) بسته است.

□

مثال ۶: فضای گسستهٔ (X,T)، فضای توپولوژیک (X^*,T^*) و تابع $f:(X,T)\to(X^*,T^*)$ را در نظر می‌گیریم. هر مجموعهٔ $A\subseteq X$ در فضای گسسته بسته و در نتیجه $A=\bar{A}$. لذا $f(\bar{A})=f(A)\subseteq\overline{f(A)}$. یعنی تابع f پیوسته است. *بنابراین هر تابع که بر فضای گسسته تعریف شود، پیوسته است.*

اکنون ببینیم کاربرد تابع پیوستهٔ $f:(X,T)\to(X^*,T^*)$ در رابطه با پایهٔ $\mathcal{B}^*$ برای توپولوژی T^* روی X^* چگونه است. به قضیهٔ زیر توجه کنید.

قضیهٔ ۳: تابع $f:(X,T)\to(X^*,T^*)$ پیوسته روی X است اگر و فقط اگر تصویر معکوس هر

عنصر پایه در توپولوژی T^*، یک مجموعهٔ باز در (X,T) باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم دستهٔ $\mathcal{B}^*$ پایه برای توپولوژی T^* و تصویر معکوس هر عنصر آن یک مجموعهٔ باز در (X,T) باشد. برای اثبات پیوستگی f با توجه به قضیهٔ ۱ کافی است نشان دهیم تصویر معکوس هر مجموعهٔ باز، یک مجموعهٔ باز است. لذا فرض کنید $H \subseteq X^*$ یک مجموعهٔ باز در (X^*,T^*) است، بنا به تعریف پایه مجموعه‌های باز $B_i \in \mathcal{B}^*$ وجود دارد به طوری که $H = \cup_i B_i$، لذا داریم:

$$f^{-1}(H) = f^{-1}(\cup_i B_i) = \cup_i f^{-1}(B_i)$$

اما $f^{-1}(B_i)$ بنا به فرض باز است. از طرفی اجتماع مجموعه‌های باز خود یک مجموعهٔ باز است. در نتیجه $f^{-1}(H)$ در فضای توپولوژیک (X,T) باز و f پیوسته است.

بالعکس فرض کنید f پیوسته باشد. مجدداً به استناد قضیهٔ ۱، چون هر عنصر پایه خود یک مجموعهٔ باز است، اثبات حکم بدیهی است.

□

نتیجهٔ ۴: فرض کنید S یک زیرپایه برای فضای توپولوژیک (X^*,T^*) باشد. تابع $f:(X,T)\to(X^*,T^*)$ پیوسته است اگر و فقط اگر تصویر معکوس هر عنصر S یک زیرمجموعهٔ باز (X,T) باشد.

□

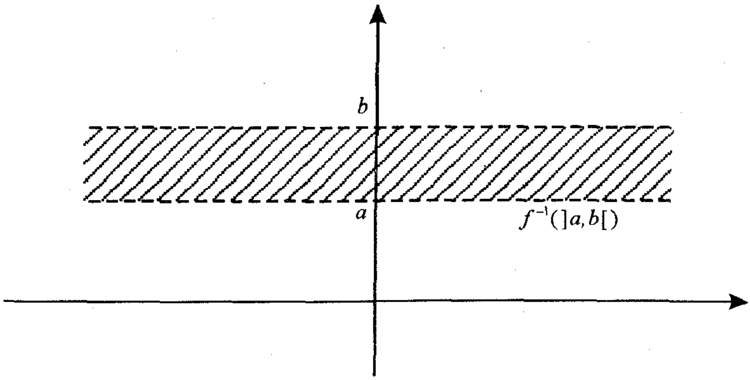
مثال ۷: فضاهای توپولوژیکی $(\mathcal{R},\Gamma)$ و $(\mathcal{R}^2,\Lambda)$ را در نظر می‌گیریم. تابع

$$f:\ (\mathcal{R}^2,\Lambda)\to(\mathcal{R},\Gamma)$$
$$f(x,y)=y$$

یک تابع پیوسته است. زیرا تصویر معکوس هر عضو پایه $]a,b[$ نوار بازی در $\mathcal{R}^2$ است. (شکل ۴)

مثال ۸: فرض کنید $i:(\mathcal{R},T)\to(\mathcal{R},\Gamma)$ تابع همانی و $(\mathcal{R},T)$ دارای توپولوژی حد پایین باشد. پس i پیوسته است زیرا تصویر معکوس هر عضو پایه مانند $]a,b[$ با خودش برابر است. از طرفی چون $]a,b[=\cup_{\varepsilon>0}[a+\varepsilon,b[$. اما در توپولوژی حد پایین مجموعهٔ $[a+\varepsilon,b[$ باز و در نتیجه $]a,b[$ باز است.

قضیهٔ ۵: تابع پیوستهٔ $f:(X,T)\to(X^*,T^*)$ را در نظر می‌گیریم. اگر (X^*,T^*) زیرفضای توپولوژیک (X^{**},T^{**}) باشد آنگاه تابع $f:(X,T)\to(X^{**},T^{**})$ نیز پیوسته است. همچنین به ازای هر زیرفضای Z از X^* که شامل $f(X)$ باشد، تابع $f:(X,T)\to(Z,T^*_z)$ پیوسته است.



شکل ۴

اثبات: فرض می‌کنیم U در فضای توپولوژیک (X^{**},T^{**}) باز باشد، در این صورت $U\cap X^*$ در فضای توپولوژیک (X^*,T^*) باز است و چون بنا به فرض تابع $f:(X,T)\to(X^*,T^*)$ پیوسته است، لذا $f^{-1}(U\cap X^*)$ در فضای (X,T) باز است. اما

$$f^{-1}(U\cap X^*)=f^{-1}(U)\cap f^{-1}(X^*)=f^{-1}(U)\cap X=f^{-1}(U)$$

بنابراین $f^{-1}(U)$ در فضای (X,T) باز و تابع $f:(X,T)\to(X^{**},T^{**})$ پیوسته است.

برای اثبات قسمت دوم توجه کنید که $f(X)\subseteq Z\subseteq X^*$. لذا اگر B باز در (Z,T_z^*) باشد پس $B=Z\cap U$ که U باز در (X^*,T^*) است. بنابراین

$$f^{-1}(B)=f^{-1}(Z\cap U)=f^{-1}(Z)\cap f^{-1}(U)=X\cap f^{-1}(U)=f^{-1}(U)$$

چون $f^{-1}(U)$ از $T-T^*$ پیوستگی f باز است، $f^{-1}(B)$ نیز باز است.

□

تعریف: برای $A\subseteq X$ تابع $j:A\to X$ با ضابطهٔ $j(x)=x$ را **تابع شمول** می‌نامیم.

قضیهٔ ۶: اگر $A\subseteq X$ زیرفضای (X,T) باشد تابع شمول پیوسته است.

اثبات: برای مجموعهٔ باز U در X، $j^{-1}(U)=U\cap A$ در A باز است.

□

تعریف: تابع $f:X\to X^*$ و $A\subseteq X$ را در نظر می‌گیریم. تابع f از A به X^* را با

$f|A : A \to X^*$ نشان داده و آن را **تحدید تابع** f به مجموعهٔ A می‌گوییم و برای هر $a \in A$ تعریف می‌کنیم $(f|A)(a) = f(a)$.

قضیهٔ ۷: اگر $A \subseteq X$ و $f : (X,T) \to (X^*,T^*)$ پیوسته باشد، آنگاه $f|A : (A,T_A) \to (X^*,T^*)$ نیز پیوسته است.

اثبات: مجموعهٔ باز $H \subseteq X^*$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که: $(f|A)^{-1}(H) = f^{-1}(H) \cap A$ چون f پیوسته است $f^{-1}(H)$ باز در X است. لذا بنا به توپولوژی نسبی روی A، $f^{-1}(H) \cap A$ در (A,T_A) باز است و از آنجا $(f|A)^{-1}(H)$ نیز باز و بنابراین تابع $f|A$ پیوسته است.

□

عکس این قضیه در حالت کلی همیشه برقرار نیست ولی می‌توان با اضافه کردن شرایطی نتیجه گرفت که اگر تابع f روی زیرمجموعه‌هایی از X پیوسته باشد، آنگاه روی X نیز پیوسته است. به قضیهٔ زیر توجه کنید.

قضیهٔ ۸: فضاهای توپولوژیکی (X,T) و (X^*,T^*) و تابع $f : X \to X^*$ را در نظر می‌گیریم. اگر $X = A \cup B$ و مجموعه‌های A و B هر دو در این فضا باز (یا هر دو بسته) باشند و $f|A$ و $f|B$ هر دو پیوسته باشند، آنگاه تابع f روی X پیوسته است.

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم A و B هر دو باز باشند اگر H در فضای توپولوژیکی (X^*,T^*) باز باشد. نشان می‌دهیم $f^{-1}(H)$ در فضای (X,T) باز است. داریم:

$$f^{-1}(H) \cap A = (f|A)^{-1}(H)$$

$$f^{-1}(H) \cap B = (f|B)^{-1}(H)$$

$$f^{-1}(H) = (f|A)^{-1}(H) \cup (f|B)^{-1}(H)$$

چون توابع $f|A$ و $f|B$ پیوسته‌اند لذا $(f|A)^{-1}(H)$ در زیرفضای (A,T_A) و $(f|B)^{-1}(H)$ در زیرفضای (B,T_B) باز است. از طرفی بنا به فرض A و B هر دو باز هستند. در نتیجه $(f|A)^{-1}(H)$ و $(f|B)^{-1}(H)$ هر دو در فضای (X,T) باز هستند. لذا اجتماع آنها، یعنی $f^{-1}(H)$، نیز باز است. بنابراین تابع f پیوسته است.

اگر دو مجموعهٔ A و B هر دو بسته باشند، اثبات مشابه است و به خواننده واگذار می‌شود.

□

نتیجهٔ ۹ (تعمیم قضیهٔ ۸): فرض کنید دستهٔ $\{B_\lambda\}$ از زیرمجموعه‌های باز X چنان باشد که اجتماع

آنها برابر X شود. در این صورت $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و فقط اگر تحدید f به هر B_λ پیوسته باشد.

□

توجه کنید که قضیهٔ ۸ قابل تعمیم به یک دستهٔ بی‌پایان از مجموعه‌های بسته نیست. مثال زیر این ادعا را ثابت می‌کند.

مثال ۹: تابع $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ

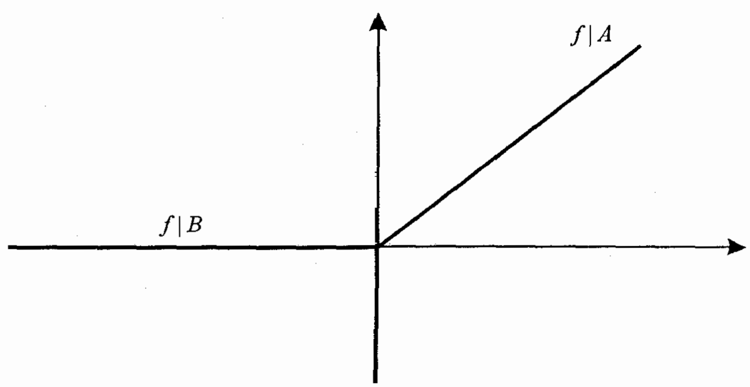
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. قرار دهید $A_1 = \{0\}$ و برای $n \geq 2$، $A_n = [-n, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, n]$. در این صورت $\mathcal{R} = \cup A_n$ و $f|A_n$ برای هر n پیوسته است ولی f در صفر پیوسته نیست.

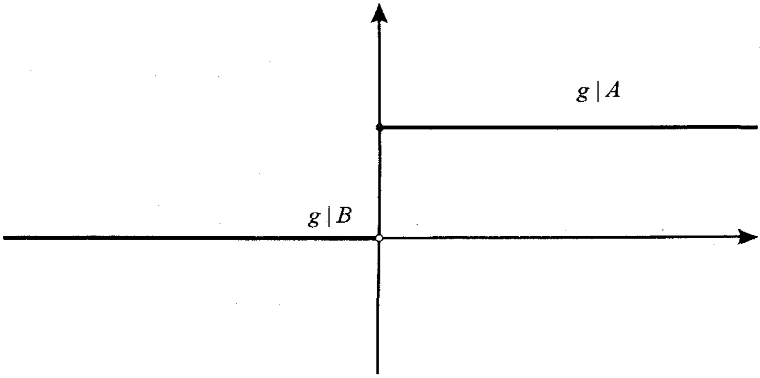
مثال ۱۰: فضای توپولوژیک $(\mathcal{R}, \Gamma)$ و تابع $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

مفروض است. قرار می‌دهیم $A = \{x : x \geq 0\}$ و $B = \{x : x \leq 0\}$. روشن است که مجموعه‌های A و B هر دو بسته، $\mathcal{R} = A \cup B$ و توابع $f|A$ و $f|B$ پیوسته هستند، لذا بنا به قضیهٔ بالا تابع f پیوسته است. (شکل ۵)



شکل ۵



شکل ۶

مثال ۱۱: تابع $f : \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} ۲ & x > \sqrt{۲} \\ ۱ & x < \sqrt{۲} \end{cases}$$

پیوسته است. زیرا $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}\cap\,]-\infty, \sqrt{۲}[)\cup(\mathcal{Q}\cap\,]\sqrt{۲}, \infty[)$. لذا با فرض $A = \mathcal{Q}\cap\,]\sqrt{۲}, \infty[$ و $B = \mathcal{Q}\cap\,]-\infty, \sqrt{۲}[$، توابع $f|A$ و $f|B$، ثابت و در نتیجه پیوسته هستند. از طرفی A و B در $\mathcal{Q}$ باز نیز هستند لذا f پیوسته است.

توجه: باز بودن یا بسته بودن هر دو مجموعهٔ A و B توأماً شرط لازم در قضیهٔ بالا است، زیرا اگر در فضای توپولوژیک $(\mathcal{R}, \Gamma)$ و تابع $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ

$$g(x) = \begin{cases} ۳ & x \geq ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$$

را در نظر بگیریم و قرار دهیم $A = \{x : x \geq ۰\}$ و $B = \{x : x < ۰\}$، ملاحظه می‌کنیم $g|A$ و $g|B$ هر دو پیوسته هستند ولی تابع g پیوسته نیست (شکل ۶). توجه کنید در این حالت مجموعهٔ A بسته و مجموعهٔ B باز است.

قضیهٔ ۱۰: فضاهای توپولوژیکی (X, T)، (X^*, T^*) و (X^{**}, T^{**}) را در نظر بگیرید. اگر توابع $f : X \to X^*$ و $g : X^* \to X^{**}$ پیوسته باشند، آنگاه تابع $gof : X \to X^{**}$ نیز پیوسته است.

اثبات: نشان می‌دهیم برای هر مجموعهٔ باز G در فضای توپولوژیک (X^{**}, T^{**})، مجموعهٔ $(gof)^{-۱}(G)$ در فضای توپولوژیک (X, T) باز است. برای این منظور مجموعهٔ $G \in T^{**}$

را در نظر می‌گیریم. چون تابع g پیوسته است $g^{-1}(G) \in T^*$، و چون f نیز پیوسته است $f^{-1}(g^{-1}(G)) \in T$. اما داریم: $f^{-1}(g^{-1}(G)) = (gof)^{-1}(G)$ لذا $(gof)^{-1}(G) \in T$ و در نتیجه gof پیوسته است.

□

تمرین

۱. فضاهای ناگسستهٔ (X,T) و (X^*,T^*) و تابع $f : X \to X^*$ را در نظر می‌گیریم.

الف- نشان دهید f پیوسته است.

ب- اگر شرط ناگسسته بودن را از فضای توپولوژیک (X^*,T^*) برداریم در پیوستگی f تحقیق کنید.

پ- اگر شرط ناگسسته بودن را از فضای توپولوژیک (X,T) برداریم در پیوستگی f تحقیق کنید.

۲. مجموعه‌های X و X^* و تابع $f : X \to X^*$ مفروض است. کدامیک از ادعاهای زیر درست است؟

الف- X توپولوژی گسسته دارد اگر به ازای هر توپولوژی روی X^* تابع f پیوسته باشد.

ب- X^* توپولوژی ناگسسته دارد اگر به ازای هر توپولوژی روی X تابع f پیوسته باشد.

۳. فرض کنید (X,T) یک فضای توپولوژیکی و $p \in X$. نشان دهید اگر $\{p\}$ در فضای توپولوژیکی (X,T) باز باشد آنگاه هر تابع از X به هر فضای توپولوژیکی در p پیوسته است.

۴. نشان دهید تابع همانی $i : (X,T) \to (X,T^*)$ پیوسته است اگر و فقط اگر $T^* \subseteq T$.

۵. نشان دهید تابع مشخصهٔ E پیوسته است اگر و فقط اگر E در فضای توولوژیکی (X,T) هم باز و هم بسته باشد.

۶. نشان دهید تابع مشخصهٔ A در $p \in X$ پیوسته است اگر و فقط اگر $p \notin b(A)$.

۷. فرض کنید f تابعی از فضای توپولوژیکی X به بازهٔ $[۰, ۱]$ باشد. نشان دهید اگر $f^{-1}(]a, ۱])$ و $f^{-1}([۰, b[)$ به ازای هر $۰ < a, b < ۱$، در فضای X باز باشند، آنگاه f پیوسته است.

۸. نشان دهید $f : (X,T) \to (\mathcal{R}, \Gamma)$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر $a \in \mathcal{R}$، $f^{-1}(]-\infty, a[)$ و $f^{-1}(]a, \infty[)$ در (X,T) باز باشند.

۹. فرض کنید فضای توپولوژیک (X, T) چنان باشد که اشتراک هر دستهٔ دلخواه از مجموعه‌های باز، باز باشد. نشان دهید تابع $f : (X, T) \to (\mathcal{R}, \Gamma)$ پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $a \in \mathcal{R}$، مجموعهٔ $\{x : f(x) = a\}$ باز باشد.

۱۰. ثابت کنید هر تابع حقیقی پیوسته روی یک فضای شمارش‌ناپذیر با توپولوژی مکمل باپایان، یک تابع ثابت است.

۱۱. فرض کنید X یک مجموعهٔ بی‌پایان با توپولوژی مکمل باپایان باشد. شرط لازم و کافی برای اینکه $f : X \to X$ پیوسته باشد چیست؟

۱۲. فرض کنید X بی‌پایان و a و b دو نقطهٔ مجزا در آن باشند. با استفاده از تعریف نشان دهید تابع همانی $i : (X, T) \to (X, T^*)$ که در آن T اجتماع توپولوژی طرد a و توپولوژی مکمل باپایان و T^* اجتماع توپولوژی طرد b و توپولوژی مکمل باپایان است، پیوسته نیست.

۱۳. روی $\mathcal{N}$ توپولوژی را به صورت زیر تعریف کنید:

$G \subseteq \mathcal{N}$ در $\mathcal{N}$ باز است اگر برای هر $n \in G$، هر مقسوم‌علیه n به G متعلق باشد. نشان دهید:

الف- تعریف بالا یک توپولوژی روی $\mathcal{N}$ است.

ب- این توپولوژی گسسته نیست.

پ- تابع $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ پیوسته است اگر و فقط اگر هرگاه m مضربی از n باشد، آنگاه $f(m)$ نیز مضربی از $f(n)$ است.

۱۴. توپولوژی ایجادشده توسط دستهٔ $\{[a, b] : a, b \in \mathcal{R}, a < b\}$ را به T نشان دهید و فضاهای توپولوژیک $(\mathcal{R}, T)$ و $(\mathcal{R}, \Gamma)$ و تابع $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq ۱ \\ x + ۲ & x > ۱ \end{cases}$$

نشان دهید:

الف- تابع $f : (\mathcal{R}, \Gamma) \to (\mathcal{R}, \Gamma)$ پیوسته نیست.

ب- تابع $f : (\mathcal{R}, T) \to (\mathcal{R}, T)$ پیوسته است.

۱۵. دستهٔ $\{T_a\}$ از توپولوژی‌های روی X را در نظر می‌گیریم. اگر تابع $f : X \to X^*$ برای هر توپولوژی T_a پیوسته باشد، آنگاه تابع f نسبت به توپولوژی $T = \cap T_a$ نیز پیوسته است. (یادآور می‌گردد که T را بزرگترین کران پایین خانوادهٔ $\{T_a\}$ می‌نامند).

۱۶. فرض می‌کنیم تابع $f : (X,T) \to (Y,T^*)$ پیوسته نباشد. نشان دهید اگر T' توپولوژی روی X و $T' \subseteq T$، و T'' توپولوژی روی Y و $T^* \subseteq T''$، آنگاه تابع $f : (X,T') \to (Y,T'')$ پیوسته نیست.

۱۷. فضاهای توپولوژیکی (X,T) و (X^*,T^*)، $A \subseteq X$ و توابع $g : X^* \to A$، $j : A \to X$ (j تابع شمول) مفروض است. نشان دهید تابع g پیوسته است اگر و فقط اگر jog پیوسته باشد.

۱۸. تابع $f : (X,T) \to (Y,T^*)$ مفروض است. نشان دهید:

الف- تابع f پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $B \subseteq Y$، $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$.

ب- تابع f پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $B \subseteq Y$، $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$.

پ- تابع f پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $A \subseteq X$، $f(A') \subseteq \overline{f(A)}$.

ت- با یک مثال نشان دهید اگر f پیوسته باشد تساوی در حال کلی در (الف) و (ب) و (پ) لزوماً برقرار نیست.

۱۹. فرض کنید $f : X \to Y$ و $A \subseteq X$. کدامیک از ادعاهای زیر درست است؟

الف- اگر f پیوسته باشد، آنگاه $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$.

ب- اگر f پیوسته باشد، آنگاه $(f(A))^\circ \subseteq f(A^\circ)$.

پ- اگر f پیوسته باشد، آنگاه $f(A') \subseteq (f(A))'$.

ت- اگر $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$، آنگاه f پیوسته است.

ث- اگر $(f(A))^\circ \subseteq f(A^\circ)$، آنگاه f پیوسته است.

۲۰. نشان دهید اگر f و $g : (X,T) \to (\mathcal{R},\Gamma)$ پیوسته باشند، آنگاه مجموعه‌های $\{x : f(x)=g(x)\}$ و $\{x : f(x)\leq g(x)\}$ در X بسته و مجموعهٔ $\{x : f(x) < g(x)\}$ در X باز است.

۲۱. نشان دهید اگر $g : (X,T) \to (\mathcal{R},\Gamma)$ و f پیوسته باشند آنگاه توابع

$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$
$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

نیز پیوسته هستند.

۲۲. مجموعهٔ غیرتهی X مفروض است. نشان دهید اگر هر تابع از X به فضای $(\mathcal{R},\Gamma)$ پیوسته باشد، آنگاه X توپولوژی گسسته دارد.

۲۳. فرض کنید f یک تابع حقیقی پیوسته روی فضای توپولوژیکی X و $Y = \{x : f(x) \neq 0\} \neq \phi$. نشان دهید تابع $\frac{1}{f}$ با ضابطهٔ $(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)}$ روی زیرفضای Y پیوسته است.

۲۴. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک، $X = E \cup F$ و توابع $f : E \to Y$ و $g : F \to Y$ نسبت به توپولوژی نسبی پیوسته باشند و به علاوه فرض کنید روی $E \cap F$، $f = g$. ثابت کنید اگر E و F هر دو باز و یا هر دو بسته باشند آنگاه تابع h با ضابطهٔ

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ g(x) & x \in F \end{cases}$$

پیوسته است. (این شکل دیگری از قضیهٔ ۸ است.)

۲۵. قضیهٔ ۸ را در حالتی که A و B هر دو بسته هستند، ثابت کنید.

۲۶. فرض کنید $X = \cup A_\alpha$، هر A_α بسته در X و به علاوه برای هر $x \in X$ همسایگی V حول x موجود باشد که فقط تعداد باپایان از A_α را قطع کند. نشان دهید اگر $f : X \to Y$ چنان باشد که $f|A_\alpha$ به ازای هر α پیوسته باشد، آنگاه f روی X پیوسته است.

۲۷. تابع $f : X \to Y$ و $A \subseteq X$ چنان ارائه دهید که $f|A$ پیوسته باشد ولی f به عنوان تابعی از X به Y در هیچ یک از نقاط A پیوسته نباشد.

۲۸. آیا معکوس یک تابع یک به یک، پوشا و پیوسته، لزوماً پیوسته است؟

در ادامه به تعمیم مفهوم حد دنباله و حد تابع روی فضاهای توپولوژیک می‌پردازیم و رابطهٔ این مفاهیم را با پیوستگی بررسی می‌کنیم. ابتدا به تعریف زیر توجه کنید.

تعریف: منظور از یک دنباله روی فضای توپولوژیک X، تابعی مانند $p : \mathcal{N} \to X$ است. به ازای هر i، $p(i)$ را به p_i نمایش می‌دهیم. یک دنباله را معمولاً به $(p_i)_i$ نمایش می‌دهیم.

تعریف: فضای توپولوژیک (X,T) و دنبالهٔ $(p_i)_i$ از عناصر X مفروض است. می‌گوییم این دنباله دارای **حد** است، اگر نقطهٔ $p \in X$ موجود باشد به طوری که برای هر مجموعهٔ باز $G \in T$ که $p \in G$، $n \in \mathcal{N}$ موجود باشد به طوری که برای هر $i > n$، $p_i \in G$.

در این حالت می‌گوییم دنبالهٔ (p_i) دارای حد p است و می‌نویسیم $\lim\limits_{i \to \infty} p_i = p$.

مثال ۱۲: دنبالهٔ دلخواه (p_i) را در فضای ناگسستهٔ (X,T) در نظر بگیرید. چون تنها مجموعه‌های باز این فضای توپولوژیکی X و ϕ هستند، این دنباله به هر نقطهٔ دلخواه در فضای X همگرا است.

همانطورکه در بالا می‌بینیم حد یگانه نیست.بعداً خواهیم‌دید در فضاهای هاسدورف [1] حد یگانه است.

مثال ۱۳: دنبالهٔ دلخواه (p_i) را در فضای گسستهٔ (X,T) در نظر بگیرید. در این صورت این دنباله به نقطهٔ $p \in X$ همگرا است اگر و فقط اگر $n \in \mathcal{N}$ موجود باشد به طوری که برای هر $i > n$، $p_i = p$. زیرا مجموعهٔ $\{p\}$ در این فضای توپولوژیکی باز است.

مثال ۱۴: در فضای مکمل شمارش‌پذیر (X,T) اگر دنبالهٔ (p_i) همگرا به p باشد باید به ازای هر باز G حول p، خصوصاً باز $G = X \backslash \{p_i : i \in \mathcal{N}, p_i \neq p\}$ حول p، $N > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $n > N$، $p_n \in G$ و این امکان‌پذیر نیست مگر اینکه تعداد p_i های مخالف p باپایان باشد. یعنی بعد از مرحله‌ای باید همهٔ p_i ها مساوی p باشد.

تعریف: فضاهای توپولوژیکی (X,T) و (X^*,T^*) و تابع $f : X \to X^*$ مفروض است. می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $p \in X$ دارای **حد** است اگر نقطهٔ $q \in X^*$ موجود باشد به طوری که برای هر باز $G^* \in T^*$ که $q \in G^*$، باز $G \in T$ موجود باشد به طوری که $p \in G$ و $f(G) \subseteq G^*$.

در این حالت می گوییم تابع f در نقطهٔ p دارای حد q است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to p} f(x) = q$.

قضیهٔ زیر رابطهٔ حد و پیوستگی را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱۱: تابع $f : (X,T) \to (X^*,T^*)$ در نقطهٔ $p \in X$ پیوسته است اگر و فقط اگر تابع f در نقطهٔ p دارای حد $f(p)$ باشد.

اثبات: با توجه به تعریف پیوستگی، حکم بدیهی است.

□

در آنالیز مقدماتی دیدیم که پیوستگی را می‌توان با استفاده از دنباله‌ها نیز تعریف کرد. این مطلب در فضاهای توپولوژیکی در حالت کلی برقرار نیست. مطالبی که در ادامه مطرح می‌شود ضمن نشان دادن رابطهٔ پیوستگی و دنباله‌ها، این ادعا را نیز تأیید می‌کند.

---

[1] Hausdorff

قضیهٔ ۱۲: اگر تابع $f:(X,T)\to(X^*,T^*)$ در نقطهٔ $p\in X$ پیوسته باشد، آنگاه برای هر دنبالهٔ $(p_i)_i$ از عناصر X که دارای حد p است، دنبالهٔ $(f(p_i))_i$ در فضای توپولوژیکی (X^*,T^*) دارای حد $f(p)$ است.

اثبات: فرض کنید f در نقطهٔ p پیوسته و دنبالهٔ دلخواه $(p_i)_i$ از عناصر X دارای حد p باشد. باز $G^*\in T^*$ را چنان اختیار کنید که شامل $f(p)$ باشد. از تعریف پیوستگی، باز $G\in T$ موجود است به طوری که $p\in G$ و $f(G)\subseteq G^*$. از اینکه دنبالهٔ $(p_i)_i$ دارای حد P است، $n\in\mathcal{N}$ موجود است که برای هر $i>n$، $p_i\in G$ و در نتیجه $f(p_i)\in G^*$ برای هر $i>n$. بنابراین دنبالهٔ $(f(p_i))_i$ در فضای توپولوژیکی (X^*,T^*) دارای حد $f(p)$ است.

□

همانگونه که اشاره گردید عکس قضیهٔ ۱۲ در حالت کلی برقرار نیست ولی بعداً خواهیم دید که اگر فضای (X,T) شمارش‌پذیر نوع اول و یا فضای متریک باشد، عکس قضیه نیز درست است. اکنون به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۵: تابع مشخصهٔ مجموعهٔ $A=\{۱\}$ را روی فضای مکمل شمارش‌پذیر $(\mathcal{R},T)$ در نظر بگیرید. فرض کنید دنبالهٔ (p_i) به نقطهٔ ۱ همگرا باشد. با توجه به مثال ۱۴ باید $N>۰$ موجود باشد به طوری که برای هر $n>N$، $p_n=۱$. لذا برای هر $n>N$، $\mathcal{X}_A(p_n)=\mathcal{X}_A(۱)$. اما این تابع در ۱ پیوسته نیست زیرا برای مجموعهٔ باز $G=]۰,۲[$ حول $\mathcal{X}_A(۱)=۱$، $\mathcal{X}_A^{-۱}(G)=A$ که در فضای مکمل شمارش‌پذیر باز نیست.

تمرین

۲۹. فرض کنید $\mathcal{R}$ به توپولوژی حد بالایی مجهز شده باشد. کدامیک از دنباله‌های زیر در این فضای توپولوژیکی همگرا است.

$$\left(۱,\ \frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{۳},\ \cdots\right),\ \left(-۱,\ -\frac{۱}{۲},\ -\frac{۱}{۳},\ \cdots\right),\ \left(-۱,\ \frac{۱}{۲},\ -\frac{۱}{۳},\ \frac{۱}{۴}\cdots\right)$$

۳۰. فرض کنید توپولوژی روی $\mathcal{R}$ به وسیلهٔ بازه‌های $[a,b[$، $a,b\in\mathcal{Q}$، تولید شده باشد. کدامیک از دنباله‌های زیر در این فضای توپولوژیکی همگرا است.

$$\left(۲+\frac{۱}{۲}\,,\ ۲+\frac{۱}{۳}\,,\ ۲+\frac{۱}{۴}\,,\ \cdots\right),\ \left(\sqrt{۲}+\frac{۱}{۲}\,,\ \sqrt{۲}+\frac{۱}{۳}\,,\ \sqrt{۲}+\frac{۱}{۴},\cdots\right)$$

۳۱. فرض کنید در فضای توپولوژیک $(\mathcal{N},T)$، T شامل ϕ، $\mathcal{N}$ و تمام مجموعه‌هایی به شکل $\{n,n+۱,n+۲,\cdots\}$ باشد. حد دنبالهٔ $x_i=i$ در این فضای توپولوژیک چیست؟

۳۲. فرض کنید (X,T) یک فضای توپولوژیکی، $E \subseteq X$ یک مجموعهٔ بی‌پایان و (x_n) یک دنباله از اعضای متمایز مجموعهٔ E باشد که به نقطهٔ $x \in X$ همگرا است. ثابت کنید x یک نقطهٔ تجمع E است.

۳۳. با یک مثال نشان دهید عکس تمرین ۳۲ درست نیست. به عبارت دیگر فضای توپولوژیک (X,T)، نقطهٔ $x \in X$ و مجموعهٔ بی‌پایان $E \subseteq X$ چنان ارائه دهید که x نقطهٔ تجمع E باشد ولی هیچ دنباله با اعضای متمایز در E موجود نباشد که به نقطهٔ $x \in X$ همگرا شود.

۳۴. فرض کنید f یک تابع حقیقی بر فضای توپولوژیک (X,T) و $A \subseteq \mathcal{R}$ در $\mathcal{R}$ چگال باشد. نشان دهید f پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر $a \in A$ مجموعه‌های $\{x \in X : f(x) < a\}$ و $\{x \in X : f(x) > a\}$ در $\mathcal{R}$ باز باشد.

۲.۳ توابع باز و توابع بسته

با آنچه تاکنون گفته شد، دیدیم که در توابع پیوسته تصویر معکوس مجموعهٔ باز، مجموعه‌ای باز است. ولی اینگونه توابع هیچ اطلاعی راجع به زیرمجموعه‌های قلمرو به ما نمی‌دهند. برای روشن شدن این مطلب تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف: تابع $f : (X,T) \to (X^*,T^*)$ **تابع باز (بسته)** است، اگر تصویر هر مجموعهٔ باز (بسته) از فضای توپولوژیک (X,T)، یک مجموعهٔ باز (بسته) در فضای توپولوژیک (X^*,T^*) باشد.

مثال ۱۶: تابع $f : (\mathcal{R},T) \to (\mathcal{R},T^*)$ با ضابطهٔ $f(x) = x + ۱$ که در آن $(\mathcal{R},T)$ فضای طرد ۱ و $(\mathcal{R},T^*)$ فضای طرد ۲ است، هم باز و هم بسته است. زیرا هر زیرمجموعهٔ $(\mathcal{R},T)$ که شامل ۱ نباشد تصویرش شامل ۲ نیست لذا در $(\mathcal{R},T^*)$ باز است. همچنین هر زیرمجموعهٔ $(\mathcal{R},T)$ که شامل ۱ باشد تصویرش شامل ۲ است بنابراین در $(\mathcal{R},T^*)$ بسته است.

مثال زیر نشان می‌دهد که توابع باز لزوماً بسته نیستند و بالعکس.

مثال ۱۷: فرض کنید (X,T) یک فضای توپولوژیکی دلخواه، (X^*,T^*) یک فضای توپولوژیک به صورت $X^* = \{a,b,c\}$ و $T^* = \{X^*,\phi,\{a\},\{a,c\}\}$ و تابع $f : X \to X^*$ چنان باشد که به هر نقطه از X مقدار ثابت $a \in X^*$ را نسبت می دهد. در این صورت f تابعی باز و پیوسته است، ولی بسته نیست. اما اگر f به هر نقطهٔ X مقدار ثابت $b \in X^*$ را نسبت دهد، آنگاه f تابعی بسته و پیوسته است که باز نیست. بنابراین یک *تابع ثابت لزوماً باز و یا لزوماً بسته نیست*.

مثال ۱۸ : برای تابع $f : (\mathcal{R}, \Gamma) \to (S^{1}, \Lambda_{S^{1}})$، با ضابطهٔ $f(x) = (\cos \pi x, \ \sin \pi x)$، مجموعهٔ $A = \{2n + \frac{1}{n} : n \in N\}$ در $(\mathcal{R}, \Gamma)$ بسته است ولی مجموعه $f(A)$ در $(S^{1}, \Lambda_{S^{1}})$ بسته نیست. زیرا شامل نقطهٔ تجمع $(1, 0)$ نیست. لذا تابع f بسته نیست.

مثال ۱۹ : تابع همانی $i : (\mathcal{R}, T) \to (\mathcal{R}, \Gamma)$ که در آن $(\mathcal{R}, T)$ دارای توپولوژی حد پایین است یک تابع باز نیست. زیرا تصویر مجموعهٔ باز $[a, b[$ با خودش برابر است و $[a, b[$ در توپولوژی معمولی یک مجموعهٔ باز نیست.

قضیهٔ ۱۳ : فرض کنید $f : (X, T) \to (X^{*}, T^{*})$ و $\mathcal{B}$ یک پایه برای (X, T) است. اگر برای هر $B \in \mathcal{B}$، $f(B)$ باز باشد، آنگاه تابع f باز است.

اثبات: اگر U باز در (X, T) باشد، زیردستهٔ $\{A_\alpha\}$ در $\mathcal{B}$ موجود است که $U = \cup A_\alpha$. اما $f(U) = f(\cup A_\alpha) = \cup f(A_\alpha)$ و هر $f(A_\alpha)$ باز است بنابراین از تعریف توپولوژی $f(U)$ باز است.

□

مثال ۲۰ : فرض کنید $i : (\mathcal{R}, \Gamma) \to (\mathcal{R}, T)$ تابع همانی و $(\mathcal{R}, T)$ دارای توپولوژی حد پایین باشد. پس i باز است زیرا تصویر هر عضو پایه مانند $]a, b[$ با خودش برابر است و از طرفی $]a, b[= \cup_{\varepsilon > 0} [a+\varepsilon, b[$. در نتیجه $]a, b[$ در توپولوژی حد پایین باز است.

قضیهٔ ۱۴ : اگر $A \subseteq X$ زیرفضای (X, T) باشد تابع شمول باز (بسته) است اگر و فقط اگر A در X باز (بسته) باشد.

اثبات: فرض کنید تابع شمول باز باشد. پس $j(A) = A$ در X باز است.

بالعکس، فرض کنید A در X باز و $U \subseteq A$ در A باز باشد پس بنا به نتیجهٔ ۱۲ فصل ۲، U در X باز است اما $j(U) = U$. لذا تابع شمول باز است.

اثبات حالت بسته مشابه است.

□

قضیهٔ ۱۵ : فرض کنید $f : X \to Y$، $X = \cup U_\alpha$ و هر U_α در X باز (بسته) باشد. اگر f باز (بسته) باشد، آنگاه $f|U_\alpha$ به ازای هر α باز (بسته) است.

اثبات: فرض کنید f باز و $A \subseteq U_\alpha$ در U_α باز باشد بنا بر نتیجهٔ ۱۲ فصل ۲، A در X باز است لذا $f(A)$ در Y باز و در نتیجه $f|U_\alpha$ باز است.

اثبات حالت بسته مشابه است.

□

مثال زیر نشان می‌دهد عکس قضیهٔ ۱۵، برخلاف حالت پیوستگی، حتی در حالت باپایان نیز برقرار نیست.

مثال ۲۱: فرض کنید $X = \{a,b,c\}$، $T = \{X,\phi,\{a\},\{b\},\{b,c\},\{a,b\}\}$، $X^* = \{x,y,z\}$، $T^* = \{X^*,\phi,\{z\},\{y,x\}\}$ و $f:(X,T)\to(X^*,T^*)$ با ضابطهٔ $f(a)=x$، $f(b)=z$ و $f(c)=z$ باشد. در این صورت X اجتماع دو مجموعهٔ باز $\{b,c\}$ و $\{a\}$ است و به علاوه $f|\{a\}$ و $f|\{b,c\}$ باز است ولی f باز نیست زیرا $f(\{a,b\})=\{x,z\}$ که در X^* باز نیست.

قضیهٔ ۱۶: اگر تابع $f:(X,T)\to(X^*,T^*)$ باز باشد، آنگاه به ازای هر زیرفضای Z از X^* که شامل $f(X)$ باشد، تابع $f:(X,T)\to(Z,T^*_z)$ باز است.

اثبات: فرض کنید A در X باز باشد. در این صورت $f(A)$ در X^* باز و در نتیجه $f(A)\subseteq f(X)\subseteq Z$ و در نتیجه $f(A)\cap Z=f(A)$. بنابراین $f(A)$ در Z باز است.

□

قضیهٔ ۱۷: تابع $f:(X,T)\to(X^*,T^*)$ باز است اگر و فقط اگر برای هر $A\subseteq X$ داشته باشیم $f(A^\circ)\subseteq(f(A))^\circ$.

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم تابع f باز و $A\subseteq X$ است. چون A° مجموعه‌ای باز در (X,T) و f تابعی باز است پس $f(A^\circ)$ در (X^*,T^*) باز است. از طرفی $A^\circ\subseteq A$، لذا $f(A^\circ)\subseteq f(A)$. بنابراین با توجه به قضیهٔ ۵ (ب) فصل ۲ داریم: $f(A^\circ)\subseteq f(A))^\circ$.

بالعکس، مجموعهٔ باز و دلخواه $G\subseteq X$ را در نظر می‌گیریم. بنا به فرض قضیه داریم $f(G^\circ)\subseteq(f(G))^\circ$. چون G باز است، $G^\circ=G$ و لذا $(f(G))^\circ\subseteq f(G)=f(G^\circ)\subseteq(f(G))^\circ$، بنابراین $f(G)=(f(G))^\circ$، یعنی $f(G)$ باز و در نتیجه f باز است.

□

تمرین

۱. نشان دهید تابع همانی $i:(X,T)\to(X,T^*)$ باز است اگر و فقط اگر $T\subseteq T^*$.

۲. نشان دهید تابع $f:(X,T)\to(X^*,T^*)$ بسته است اگر و فقط اگر برای هر $A\subseteq X$

داشته باشیم $\overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A})$. با یک مثال نشان دهید اگر f بسته باشد تساوی در حالت کلی برقرار نیست.

۳. تابع $f : (\mathcal{R}, \Gamma) \to (\mathcal{R}, \Gamma)$ با ضابطهٔ $f(x) = x^{۲}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید تابع f باز نیست.

۴. آیا می‌توان گفت: اگر تابع $f : (X, T) \to (X^*, T^*)$ باز و پوشا و $\mathcal{B}$ یک پایه برای T باشد، آنگاه $\{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ یک پایه برای T^* است؟ اگر شرط یک به یک بودن را اضافه کنیم چطور؟

۵. فرض کنید f یک تابع یک به یک و پوشا باشد. ثابت کنید f بسته است اگر و فقط اگر باز باشد.

۶. تابعی پیوسته مثال بزنید که نه باز و نه بسته باشد.

۷. توابع $f : (X, T) \to (X^*, T^*)$ و $g : (X^*, T^*) \to (X^{**}, T^{**})$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید:

الف- اگر توابع f و g هر دو باز (بسته) باشند، آنگاه gof نیز باز (بسته) است.

ب- اگر تابع gof باز (بسته) و تابع f پیوسته و پوشا باشد، آنگاه تابع g باز (بسته) است.

پ- اگر تابع gof باز (بسته) و تابع g پیوسته و یک به یک باشد، آنگاه تابع f باز (بسته) است.

ت- اگر تابع gof پیوسته و تابع f باز و پوشا باشد، آنگاه تابع g پیوسته است.

ث- اگر تابع gof پیوسته و تابع g باز و یک به یک باشد، آنگاه تابع f پیوسته است.

۸. تابع $f : (X, T) \to (X^*, T^*)$ و $A \subseteq X$ چنان ارائه دهید که f باز باشد ولی $f|A$ باز نباشد. (با قضیهٔ ۱۵ مقایسه کنید.)

۹. با ارائه یک مثال نشان دهید اگر تابع $f : (X, T) \to (X^*, T^*)$ باز و اگر (X^*, T^*) زیرفضای توپولوژیک (X^{**}, T^{**}) باشد آنگاه تابع $f : (X, T) \to (X^{**}, T^{**})$ لزوماً باز نیست.

۳.۳ هم‌ارزی توپولوژیکی

دیدیم توابع پیوسته از فضای توپولوژیک (X,T) به فضای توپولوژیک (X^*,T^*) از نظر مجموعه‌ای راجع به تعداد نقاط مجموعهٔ X^* نسبت به X و از نظر توپولوژیکی راجع به زیرمجموعه‌های باز موجود در X^* اطلاعات کافی در اختیار ما نمی‌گذارد، و همچنین دیدیم که با تعریف توابع باز نیز نتوانستیم مشکل را حل کنیم. در اینجا توابع *همسانریخت* را تعریف کرده و نشان می‌دهیم خواص مجموعه‌ای و توپولوژیکی X تحت این توابع حفظ می‌شود.

تعریف: تابع $f:(X,T)\to(X^*,T^*)$ یک **تابع همسانریخت** است اگر f یک به یک، پوشا، پیوسته و باز باشد. در این صورت دو فضای توپولوژیکی (X,T) و (X^*,T^*) را **هم‌ارز توپولوژیک یا فضاهای همسانریخت** گویند.

کلمهٔ هم‌ارز توپولوژیک از آن جهت بکار برده می‌شود که اولاً در مورد اینگونه فضاها رابطهٔ هم‌ارزی موجود است و ثانیاً هرگونه خاصیتی را که به وسیلهٔ مجموعه‌های باز بیان می‌شود به هم منتقل می‌کنند.

مثال ۲۲: فاصلهٔ باز $]a,b[$ با فاصلهٔ باز $]\circ,۱[$ همسانریخت است. زیرا تابع

$$f:\ ]a,b[\to]\circ,۱[$$

$$f(x)=\frac{x-a}{x-b}$$

یک همسانریختی است.

مثال ۲۳: فاصلهٔ باز $]-۱,۱[$ با مجموعه اعداد حقیقی همسانریخت است. زیرا تابع

$$f:\ ]-۱,۱[\ \to\mathcal{R}$$

$$f(x)=\tan\frac{\pi x}{۲}$$

یک همسانریختی است.

مثال ۲۴: مجموعه اعداد حقیقی با توپولوژی شعاع راست همسانریخت با مجموعه اعداد حقیقی با توپولوژی شعاع چپ است. زیرا کافی است تابع $f:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=x$ در نظر گرفته شود.

مثال ۲۵: مجموعهٔ $X=\mathcal{R}^+\cup\{\circ\}$ با توپولوژی شعاع راست همسانریخت با X با توپولوژی شعاع چپ نیست زیرا اگر مثلاً (X,T) فضای توپولوژیک شعاع راست و (X,T^*) فضای توپولوژیک شعاع چپ و f یک همسانریختی از (X,T) به (X,T^*) با فرض $f(\circ)=k$ باشد آنگاه به ازای مجموعهٔ باز $V=[\circ,k+\varepsilon[$، $\varepsilon>\circ$، حول k در فضای (X,T^*) باید مجموعهٔ باز U حول صفر در (X,T) موجود باشد که $f(U)\subseteq V$. اما تنها مجموعهٔ باز حول صفر در فضای (X,T)، X است لذا باید $f(X)\subseteq V$. از طرفی f پوشا است لذا باید $X\subseteq V$ که تناقض است.

مثال ۲۶: تابع $f:]-\infty, -1[\cup [0, \infty[\to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < -1 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

یک به یک، پوشا و پیوسته است ولی یک همسانریختی نیست زیرا باز نیست. در واقع تصویر مجموعهٔ باز $]0, \infty]$ همان $]0, \infty]$ است که در $\mathcal{R}$ باز نیست.

همانگونه که از مثال‌های بالا می‌توان دید خواصی در فضاهای توپولوژیکی است که تحت توابع همسانریخت حفظ نمی‌شود. مثلاً طول مجموعهٔ $]-1, 1[$ با طول مجموعهٔ $\mathcal{R}$ مساوی نیست. آن دسته از خواصی که توسط توابع همسانریخت حفظ می‌شود را خواص توپولوژیک می‌نامیم. حال به تعریف زیر توجه کنید.

تعریف: خاصیت p را یک **خاصیت توپولوژیک** یا **پایای توپولوژیکی** می‌نامیم اگر فضای توپولوژیک (X, T) دارای خاصیت p باشد، آنگاه هر فضای توپولوژیک هم‌ارز توپولوژیک با آن نیز، دارای خاصیت p باشد.

مثال ۲۷: با توجه به مثال‌های ۲۲ و ۲۳، طول و کرانداری از خواص توپولوژیکی نیستند. (توجه کنید که این مفاهیم با توپولوژی فضا یعنی مجموعه‌های باز ارتباطی ندارند).

توجه: هرگاه بخواهیم نشان دهیم دو فضای توپولوژیک همسانریخت نیستند، با توجه به تعریف بالا کافی است نشان دهیم یکی از آنها دارای خاصیت توپولوژیکی است که دیگری فاقد آن است. در فصل‌های آینده با خواص توپولوژیکی دیگری مانند همبندی، فشردگی و... آشنا می‌شویم. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که نقطهٔ داخلی و نقطهٔ تجمع از خواص توپولوژیکی هستند.

قضیهٔ ۱۸: فرض کنید تابع $f: (X, T) \to (X^*, T^*)$ یک به یک، پوشا و پیوسته باشد. در این صورت f یک همسانریختی است اگر و فقط اگر

الف- برای هر $A \subseteq X$، $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$.

ب- تابع f بسته باشد.

پ- برای هر $A \subseteq X$، $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

اثبات: اثبات (الف) با توجه به قضیهٔ ۱۷ بدیهی است.

برای اثبات (ب) ابتدا فرض کنید f همسانریختی است، لذا یک به یک، پوشا و باز است. حال مجموعهٔ بستهٔ $G \subseteq X$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $X \setminus G$ در این فضا باز و در نتیجه $f(X \setminus G)$

باز است. ولی به علت یک به یک و پوشا بودن داریم $f(X\backslash G) = f(X)\backslash f(G) = X^*\backslash f(G)$، لذا $f(G)$ بسته است.

اینک فرض کنید f بسته باشد، نشان می‌دهیم f یک همسانریختی است. با توجه به فرضیات قضیه کافی است نشان دهیم، باز است. لذا مجموعهٔ باز $U \subseteq X$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $X\backslash U$ بسته و چون f بسته است $f(X\backslash U)$ بسته است. اما مجدداً به دلیل یک به یک و پوشا بودن تابع f داریم: $f(X\backslash U) = f(X)\backslash f(U) = X^*\backslash f(U)$، لذا $f(U)$ باز است.

اثبات (پ) با توجه به تمرین ۲ بخش قبل و قضیهٔ ۲ بدیهی است.

□

قضیهٔ ۱۹ : اگر $f : (X,T) \to (X^*,T^*)$ یک همسانریختی و (A,T_A) زیرفضای (X,T) باشد، آنگاه $f|A : (A,T_A) \to (B,T_B^*)$ ، $f(A) = B$، نیز یک همسانریختی است.

اثبات: مشابه استدلال قضیهٔ ۱۶ تابع $f|A : (A,T_A) \to (B,T_B^*)$ باز و بنا به قضیهٔ ۷ پیوسته است. یک به یک بودن و پوشا بودن نیز به وضوح برقرار است لذا تابع مذکور یک همسانریختی است.

□

تمرین

۱. نشان دهید نقطهٔ مرزی و چگال بودن از خواص توپولوژیکی است.

۲. نشان دهید فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ با فاصلهٔ بستهٔ $[۰,۱]$ هم‌ارز توپولوژیک است.

۳. نشان دهید $\mathcal{R}^+$ با توپولوژی شعاع راست همسانریخت با $\mathcal{R}^+$ با توپولوژی شعاع چپ است.

۴. نشان دهید مساحت یک خاصیت توپولوژیکی نیست.

۵. نشان دهید اگر $f : (X,T) \to (X^*,T^*)$ یک همسانریختی، $A \subseteq X$ و $A \cap A' = \phi$، آنگاه $f(A) \cap (f(A))' = \phi$.

۶. فرض کنید $f : (X,T) \to (X^*,T^*)$ یک به یک و پوشا باشد. ثابت کنید f یک همسانریختی است اگر و فقط اگر f و f^{-1} (معکوس f) هر دو پیوسته باشند.

۷. فرض کنید $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ هر دو پیوسته و gof همسانریختی باشد. نشان دهید:

الف ـ اگر f پوشا باشد، آنگاه f و g همسانریختی هستند.

ب ـ اگر g یک به یک باشد، آنگاه f و g همسانریختی هستند.

۸. فرض کنید $X = \cup X_n$ و $Y = \cup Y_n$. به علاوه فرض کنید (X_n) و (Y_n) مجموعه‌های باز و مجزا به ترتیب در X و Y باشند. اگر برای هر n مجموعه‌های X_n و Y_n هم‌ارز توپولوژیک باشند، آنگاه X و Y نیز هم‌ارز توپولوژیک هستند.

۹. تابع همانی $i : (X, T) \to (X, T^*)$ یک همسانریختی است اگر و فقط اگر $T = T^*$ باشد.

فصل ۴

فضاهای جدید

در فصل‌های گذشته دیدیم چگونه با تعریف زیرفضاها، توانستیم فضاهای توپولوژیکی جدید بسازیم. هدف این فصل ساختن فضاهای توپولوژیک جدید دیگری است.

۴.۱ فضای حاصل‌ضرب

در این بخش با ضرب فضاهای توپولوژیک، در حالت کلی آشنا می‌شویم و دو نوع توپولوژی روی اینگونه فضاها را معرفی می‌کنیم.

تعریف: فرض کنید X_α، $\alpha \in A$، یک دسته از مجموعه‌ها باشد. **ضرب دکارتی** مجموعه‌های X_α و یا به‌اختصار **ضرب** مجموعه‌های X_α، مجموعهٔ همهٔ توابعی مانند $x : A \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ است که در آن $x(\alpha) \in X_\alpha$ برای هر $\alpha \in A$. این مجموعه را با نماد $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ مجموعه‌ای از توابع است که روی یک مجموعه از اندیس‌ها تعریف می‌شود. اگر ابهامی نباشد، برای سهولت، معمولاً از نماد $\prod X_\alpha$ و به جای $x(\alpha)$ از نماد x_α استفاده می‌کنیم. اعضای $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ را به $(x_\alpha)_\alpha$ نمایش می‌دهیم.

در حالت خاص $A = \mathcal{N}$ داریم:

$$\prod_{i\in\mathcal{N}} X_i = \{(x_۱, x_۲, x_۳, \cdots) : x_i \in X_i,\ i = ۱, ۲, ۳, \cdots\}$$

و اگر $A = \{۱, ۲, \cdots, n\}$

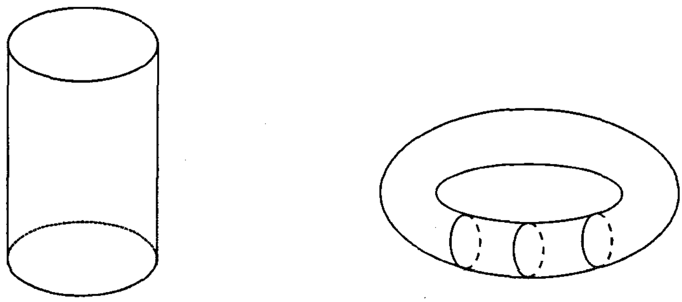
$$\prod_{i\in A} X_i = \{(x_۱, x_۲, x_۳, \cdots, x_n) : x_i \in X_i,\ i = ۱, ۲, ۳, \cdots, n\}$$

که همان مجموعهٔ $X_۱ \times X_۲ \times \cdots \times X_n$ است که در فصل ۱ با آن آشنا شدیم.

اگر $X_\alpha = X$ برای هر $\alpha \in A$، آنگاه به جای نماد $\prod X_\alpha$ از نماد X^A و در حالت خاص که مجموعهٔ A یک مجموعهٔ باپایان به صورت $A = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ است از نماد X^n استفاده می‌کنیم. بدیهی است که اگر $X_\alpha \subseteq Y_\alpha$ برای هر $\alpha \in A$، آنگاه $\prod X_\alpha \subseteq \prod Y_\alpha$.

مثال ۱ : فرض کنید $A = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ و $X_i = \mathcal{R}$، $۱ \leq i \leq n$. در این صورت $\mathcal{R}^n = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \cdots \times \mathcal{R}$.

مثال ۲ : اگر $X_۱$ برابر دایرهٔ واحد در $\mathcal{R}^۲$ و $X_۲$ برابر بازهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ باشد، آنگاه $X_۱ \times X_۲$ یک استوانه و $X_۱^۲$ یک چنبره است. (شکل ۷)

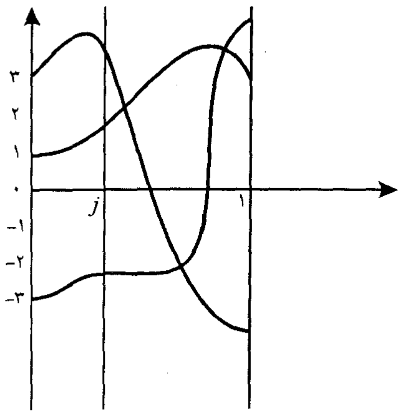


$X_۱ \times X_۲$ $\qquad$ $X_۱^۲$

شکل ۷

مثال ۳ : فرض کنید $I = [۰, ۱]$ و $X_i = \mathcal{R}$ برای هر $i \in I$ و $X = \prod X_i = \mathcal{R}^I$. برای تشریح فضای X، از محور افقی برای نمایش مجموعه اندیس استفاده می‌کنیم و هر خط عمودی گذرا از نقاط I را یک نسخه از $\mathcal{R}$ تصور می‌کنیم. در این صورت مثلاً مختص x_j از نقطهٔ $x \in X$ روی خط عمودی که از نقطهٔ j در I می‌گذرد قرار دارد. در شکل (۸)، سه عضو از اعضاء X نشان داده شده است. در واقع هرکدام از منحنی‌های رسم‌شده نشان‌دهندهٔ یکی از اعضاء X است.

حال فرض کنید هر X_α یک فضای توپولوژیکی باشد. می‌خواهیم روی فضای $\prod X_\alpha$ یک توپولوژی قرار دهیم که بتواند به طور طبیعی با توپولوژی روی فضاهای خاصی منطبق گردد. به عنوان مثال می‌خواهیم توپولوژی که به این ترتیب روی فضای $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ قرار می‌گیرد با توپولوژی معمولی روی $\mathcal{R}^۲$ منطبق شود. به دو طریق می‌توان این کار را انجام داد. به عبارت دیگر دو نوع توپولوژی روی $\prod X_\alpha$ می‌توان تعریف کرد که یکی از آنها مهمتر از دیگری است. زیرا همانطور که بعداً ذکر می‌کنیم بعضی از مهمترین قضایا فقط در یکی از این دو نوع فضای توپولوژیک برقرار است. این توپولوژی‌ها، به توپولوژی حاصل‌ضرب یا تیکونوف و توپولوژی جعبه‌ای معروف هستند و البته خواهیم دید که در حالتی که $\prod X_\alpha$، ضرب تعداد



شکل ۸

باپایان فضای توپولوژیک باشد این دو نوع توپولوژی با هم معادل هستند. برای آشنایی با روش اول، از معرفی توابع تصویر شروع کنیم.

تعریف: نگاشت $\prod_\beta : \prod X_\alpha \to X_\beta$ با ضابطهٔ $\prod_\beta(x) = x_\beta$ را **تابع تصویر** روی $\prod X_\alpha$ می‌نامیم.

مثال ۴: توابع $\prod_۱ : \mathcal{R}^۲ \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ $\prod_۱(x,y) = x$ و $\prod_۲ : \mathcal{R}^۲ \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ $\prod_۲(x,y) = y$ توابع تصویر روی $\mathcal{R}^۲$ هستند.

مثال ۵: توابع $\prod_i : \mathcal{R}^{\mathcal{N}} \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ $\prod_i(x_۱, x_۲, \cdots) = x_i$ برای $i = ۱, ۲, \cdots$، توابع تصویر روی $\mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ هستند.

تعریف: فرض کنید (X_α, T_α) یک دسته از فضاهای توپولوژیک و $X = \prod X_\alpha$ و $S = \cup\{\prod_a^{-۱}(U) : U \in T_\alpha\}$. توپولوژی ایجادشده توسط دستهٔ S را **توپولوژی حاصل‌ضرب** یا **توپولوژی تیکونوف**[۱] می‌گوییم.

همانطور که از قضایای ۱۷ و ۱۹ بخش ۲.۳ نتیجه می‌شود این توپولوژی ضعیف‌ترین توپولوژی روی فضای حاصل‌ضرب است که شامل S است و S یک زیرپایه برای این توپولوژی است. به علاوه با توجه به همان قضایا مجموعه‌هایی از نوع

$$\prod\nolimits_{\alpha_۱}^{-۱}(U_{\alpha_۱}) \cap \prod\nolimits_{\alpha_۲}^{-۱}(U_{\alpha_۲}) \cap \cdots \cap \prod\nolimits_{\alpha_n}^{-۱}(U_{a_n})$$

---

[۱] Tychonoff

(اشتراک باپایان از اعضای زیرپایه) که در آن U_{α_i} باز در T_{α_i} است، تشکیل یک پایه برای توپولوژی حاصل‌ضرب می‌دهند. معادلاً با توجه به اینکه $\prod_{\beta}^{-1}(U_\beta) = \prod V_\alpha$ که در آن $V_\alpha = X_\alpha$، اگر $\alpha \neq \beta$ و $V_\alpha = U_\beta$ اگر $\alpha = \beta$ است، عناصر پایه در $\prod X_\alpha$ به صورت $\prod U_\alpha$ است که در آن U_α باز در X_α برای هر α است و $U_\alpha = X_\alpha$ بجز برای تعداد باپایان از اندیس‌ها. این مطالب را می‌توان در دو قضیهٔ زیر خلاصه کرد.

قضیهٔ ۱: اگر (X_α, T_α) یک دسته از فضاهای توپولوژیک و $X = \prod X_\alpha$، در این صورت مجموعه‌هایی از نوع $\prod U_\alpha$ که در آن U_α باز در X_α برای هر α و $U_\alpha = X_\alpha$ بجز برای تعداد باپایان از اندیس، تشکیل پایه برای توپولوژی حاصل‌ضرب می‌دهند.

□

قضیهٔ ۲: اگر (X_i, T_i)، $i = ۱, ۲, \cdots, n$، n فضای توپولوژیکی و $X = X_۱ \times X_۲ \times \cdots \times X_n$ مجهز به توپولوژی حاصل‌ضرب باشد، آنگاه مجموعه‌هایی از نوع $G_۱ \times G_۲ \times \cdots \times G_n$ که در آن $G_i \in T_i$، یک پایه برای توپولوژی حاصل‌ضرب می‌باشد.

□

روش دومی که می‌توان $\prod X_\alpha$ را به یک فضای توپولوژیک تبدیل کرد استفاده از قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۳: اگر (X_α, T_α) یک دسته از فضاهای توپولوژیک باشد، دستهٔ $\mathcal{B} = \{\prod U_\alpha : U_\alpha \in T_\alpha\}$ پایه یک توپولوژی روی $\prod X_\alpha$ است.

اثبات: بدیهی است که $X \in \mathcal{B}$. به علاوه اگر $\prod U_\alpha$ و $\prod V_\alpha$ دو عضو $\mathcal{B}$ باشند، آنگاه

$$(\prod U_\alpha) \cap (\prod V_\alpha) = \prod(U_\alpha \cap V_\alpha) \in \mathcal{B}$$

□

تعریف: توپولوژی ایجادشده توسط پایه $\mathcal{B} = \{\prod U_\alpha : U_\alpha \in T_\alpha\}$ را **توپولوژی جعبه‌ای** روی فضای حاصل‌ضرب می‌نامند.

قضیه ۲ نشان می‌دهد که این توپولوژی در حالت ضرب باپایان با توپولوژی حاصل‌ضرب معادل است. ولی در حالت کلی *توپولوژی تیکونوف ضعیف‌تر از توپولوژی جعبه‌ای است*. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۶: فرض کنید $X_i = \{۰, ۱\}$، $T_i = \{X, \phi, \{۱\}\}$، $i \in \mathcal{N}$ و $X = X_i^{\mathcal{N}}$ باشد. در این صورت

$$U = \prod\{۱\} = \{(۱, ۱, \cdots)\}$$

یک مجموعهٔ باز در توپولوژی جعبه‌ای است ولی در توپولوژی حاصل‌ضرب این مجموعه، باز نیست.

در این کتاب هر جایی که از توپولوژی روی فضای حاصل‌ضرب صحبت می‌شود منظور توپولوژی حاصل‌ضرب (یا توپولوژی تیکونوف) است، مگر اینکه خلاف آن ذکر شود.

مثال ۷: فرض کنید $T=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$ توپولوژی روی $X=\{a,b,c\}$ و $T^*\{Y,\phi,\{u\}\}$ توپولوژی روی $Y=\{u,v\}$ باشد. در این صورت فضای حاصل‌ضرب مساوی

$$X\times Y=\{(a,u),(a,v),(b,u),(b,v),(c,u),(c,v)\}$$

عناصر زیرپایه عبارتند از:

$$\mathcal{S}=\Big\{X\times Y,\phi,\{(a,u),(a,v)\},\{(b,u),(b,v),(c,u),(c,v)\},\\ \{(a,u),(b,u),(c,u)\}\Big\}$$

و عناصر پایه عبارتند از:

$$\mathcal{B}=\Big\{X\times Y,\phi,\{(a,u)\},\{(b,u),(c,u)\},\{(a,u),(a,v)\},\\ \{(b,u),(b,v),(c,u),(c,v)\},\{(a,u),(b,u),(c,u)\}\Big\}$$

و نهایتاً توپولوژی تیکونوف روی $X\times Y$، به صورت اجتماع دلخواه از اعضاء $\mathcal{B}$ است، که البته در این حالت با توپولوژی جعبه‌ای یکسان است.

همانگونه که دیدیم توپولوژی حاصل‌ضرب به گونه‌ای تعریف شده است که *توابع تصویر* نسبت به *توپولوژی حاصل‌ضرب* پیوسته هستند. به علاوه با توجه به قضیهٔ ۱۳ بخش ۳.۲، این توابع باز نیز هستند، زیرا $\prod_\beta(\prod U_\alpha)=U_\beta\in T_\beta$. ولی این توابع در حالت کلی بسته نیستند. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۸: فرض کنید $\prod_1:\mathcal{R}\times\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ و $A=\{(x,y):xy\geq 1,\ x>0\}$. در این صورت A در $\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ یک مجموعهٔ بسته است ولی تصویر آن تحت تابع $\prod_1$ بازهٔ $]0,\infty[$ است که در $\mathcal{R}$ بسته نیست. لذا *توابع تصویر لزوماً* بسته نیستند. حال فرض کنید $X=(\{0\}\times\mathcal{R})\cup(\mathcal{R}\times\{0\})$ و $g=\prod_1|X$. در این صورت g بسته است. اما g باز نیست زیرا تصویر مجموعهٔ باز $\{0\}\times\mathcal{R}$، مجموعهٔ تک‌عضوی $\{0\}$ است که در $\mathcal{R}$ باز نیست.

این مثال مجدداً این مطلب را یادآوری می‌کند که بین توابع باز (بسته) و تحدید آنها به یک زیرفضا لزوماً ارتباطی موجود نیست زیرا همانطور که در این مثال دیدیم تابع $\prod_1$ باز است ولی بسته نیست در حالی که تحدید آن به زیرفضای X بسته است ولی باز نیست.

قضیهٔ زیر رابطهٔ توپولوژی حاصل‌ضرب را با دیگر توپولوژی‌های روی $\prod X_\alpha$ که تحت آن توابع تصویر پیوسته هستند نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۴ : توپولوژی تیکونوف ضعیف‌ترین توپولوژی روی $\prod X_\alpha$ است که تحت آن توابع تصویر پیوسته هستند.

اثبات: فرض کنید توپولوژی T روی $\prod X_\alpha$ چنان باشد که نگاشت $\prod_\beta : \prod X_\alpha \to X_\beta$ با ضابطهٔ $\prod_\beta(x) = x_\beta$ پیوسته باشد. به عبارت دیگر اگر U_β در فضای X_β باز باشد، آنگاه $\prod_\beta^{-1}(U_\beta)$ در $(\prod X_\alpha, T)$ باز است. در این صورت اعضای زیرپایهٔ توپولوژی تیکونوف همگی به T تعلق دارند. بنابراین توپولوژی تیکونوف زیرمجموعهٔ T است. به عبارت دیگر توپولوژی تیکونوف ضعیف‌تر از توپولوژی T است.

□

در فصل ۳ دیدیم که برای بررسی پیوستگی یک تابع کافی است نشان دهیم تصویر معکوس هر مجموعهٔ باز، یک مجموعهٔ باز است. قضیهٔ زیر راه دیگری را برای نشان دادن پیوستگی توابعی که برد آن در فضای حاصل‌ضرب قرار می‌گیرد، نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۵ : نگاشت $f : X \to \prod X_\alpha$ پیوسته است اگر و فقط اگر $\prod_\alpha of$ به ازای هر اندیس α، پیوسته باشد.

اثبات: بدیهی است که اگر f پیوسته باشد، آنگاه $\prod_\alpha of$ نیز پیوسته است. زیرا دیدیم که تحت توپولوژی حاصل‌ضرب $\prod_\alpha$ پیوسته است.

بالعکس، فرض کنید $\prod_\alpha of$ پیوسته باشد. برای نشان دادن پیوستگی f کافی است نشان دهیم تصویر معکوس عناصر زیرپایه تحت f مجموعهٔ باز است. اما $f^{-1}(\prod_\alpha^{-1}(U_\alpha)) = (\prod_\alpha of)^{-1}(U_\alpha)$. چون U_α باز در X_α و $\prod_\alpha of$ پیوسته است، لذا $(\prod_\alpha of)^{-1}(U_\alpha)$ باز و درنتیجه f پیوسته است.

□

تعریف: تابع $\prod_\alpha of$ را به f_α نمایش می‌دهیم در این صورت $f(x) = (f_\alpha(x))$.

نتیجهٔ ۶ : اگر $f : X \to \prod_i X_i$ با ضابطهٔ $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x), \cdots)$ باشد، آنگاه f پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $i \in \mathcal{N}$، f_i پیوسته باشد.

□

مثال زیر نشان می‌دهد عکس قضیهٔ ۵ در حالت کلی در توپولوژی جعبه‌ای برقرار نیست. به عبارت دیگر اگر $\prod_\alpha of$ به ازای هر اندیس α، پیوسته باشد، لزوماً f پیوسته نخواهد بود.

مثال ۹ : فرض کنید $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ دارای ضابطهٔ $f(t) = (t, t, t, \cdots)$ باشد. پس، برای هر $n \in \mathcal{N}$، $f_n(t) = t$ است. لذا f در توپولوژی حاصل‌ضرب پیوسته است. اما f در توپولوژی

جعبه‌ای پیوسته نیست زیرا تصویر معکوس مجموعهٔ باز $B = \prod_n U_n$ که در آن $U_n =]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[$، یک مجموعهٔ باز در $\mathcal{R}$ نیست. توجه کنید که برای $y \in f^{-1}(B)$، $y > 0$ ($y < 0$ نیز مشابه است)، عدد طبیعی m را چنان اختیار کنید که $y > \frac{1}{m} > 0$. در این صورت از $f(y) \in B = \prod_n U_n$ باید $y \in U_n$ به ازای هر n و یا معادلاً باید $\frac{-1}{n} < y < \frac{1}{n}$ به ازای هر n، خصوصاً باید $\frac{-1}{m} < y < \frac{1}{m}$ که تناقض است، بنابراین $f^{-1}(B) = \{0\}$ که در $\mathcal{R}$ باز نیست.

تمرین

۱. نشان دهید اگر مجموعهٔ اندیس j اجتماع مجزای دو مجموعه اندیس k و l باشد، آنگاه تناظر یک به یک بین $\prod_{\alpha\in j} X_\alpha$ و حاصل‌ضرب $\prod_{\alpha\in k} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in l} X_\alpha$ موجود است.

۲. ثابت کنید

$$(\prod_{\alpha\in j} U_\alpha) \cap (\prod_{\alpha\in j} V_\alpha) = \prod_{\alpha\in j}(U_\alpha \cap V_\alpha)$$

$$(\prod_{\alpha\in j} U_\alpha) \cup (\prod_{\alpha\in j} V_\alpha) \subseteq \prod_{\alpha\in j}(U_\alpha \cup V_\alpha)$$

مثالی ارائه دهید که نشان دهد در حالت اجتماع ممکن است تساوی برقرار نباشد.

۳. اگر (X_α) یک دسته از فضاهای توپولوژیک غیرتهی و $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ باشد، ثابت کنید:

الف- $\overline{\prod A_\alpha} = \prod \bar{A}_\alpha$.

ب- $\prod A_\alpha$ در $\prod X_\alpha$ چگال است اگر و فقط اگر A_α در X_α، به ازای هر اندیس، چگال باشد.

پ- $\prod A_\alpha^\circ \subseteq (\prod A_\alpha)^\circ$. با ذکر یک مثال نشان دهید که تساوی در حالت کلی برقرار نیست.

۴. فرض کنید (X,T) و (Y,T^*) دو فضای توپولوژیکی، A و B به ترتیب زیرمجموعه‌های آنان باشند. ثابت کنید:

الف- $(A\times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.

ب- $b(A\times B) = (\bar{A}\times b(B)) \cup (b(A)\times \bar{B})$.

۵. فرض کنید A_α زیرفضای (X_α, T_α) باشد. نشان دهید توپولوژی حاصل‌ضرب روی $\prod A_\alpha$ با توپولوژی نسبی روی $\prod A_\alpha$ به عنوان زیرفضای $\prod X_\alpha$ معادل است. به عبارت دیگر اگر توپولوژی حاصل‌ضرب روی $\prod X_\alpha$ را به $\prod T_\alpha$ نشان دهیم، آنگاه $(\prod T_\alpha)_{\prod A_\alpha} = \prod((T_\alpha)_{A_\alpha})$.

۶. فرض کنید $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ به توپولوژی ترتیبی قاموسی مجهز باشد. نشان دهید این توپولوژی با توپولوژی حاصل‌ضرب $(\mathcal{R}, T) \times (\mathcal{R}, \Gamma)$ که در آن T توپولوژی گسسته است معادل می‌باشد. این توپولوژی را با توپولوژی معمولی روی $\mathcal{R}^2$ مقایسه کنید.

۷. فرض کنید T توپولوژی حد پایینی باشد.توپولوژی نسبی روی یک خط راست را در دو فضای توپولوژیک $(\mathcal{R}, T) \times (\mathcal{R}, \Gamma)$ و $(\mathcal{R}, T) \times (\mathcal{R}, T)$ تشریح کنید.

۸. تابع $f : X \to Y$ و تابع $F : X \to X \times Y$ با ضابطهٔ $F(x) = (x, f(x))$ مفروض است. ثابت کنید f پیوسته است اگر و فقط اگر F از X به $F(X)$ یک همسانریختی باشد.

۹. نشان دهید حاصل‌ضرب تعداد باپایان فضای گسسته (ناگسسته)، گسسته (ناگسسته) است. آیا حکم برای تعداد بی‌پایان نیز درست است؟

۱۰. نشان دهید به ازای هر β ، X_β همسانریخت با یک زیرمجموعه $X = \prod X_\alpha$ است.

۱۱. فرض کنید $\{X_\alpha\}$ یک دسته از فضاهای توپولوژیک غیرتهی، $X = \prod X_\alpha$ و به ازای هر اندیس α، $b_\alpha \in X_\alpha$ قرار دهید:

$$A = \{x \in X : \alpha \text{ بجز برای تعداد باپایان اندیس } x_\alpha = b_\alpha\}$$

ثابت کنید A در X چگال است.

۱۲. فرض کنید $\varphi : A \to B$ یک به یک و پوشا باشد به طوری که برای هر اندیس $\alpha \in A$ ، X_α با $Y_{\varphi(a)}$ همسانریخت شود. ثابت کنید $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ با $\prod_{\beta \in B} Y_\beta$ همسانریخت است.

۱۳. یک توپولوژی روی $\prod X_\alpha$ ارائه دهید که از توپولوژی حاصل‌ضرب ضعیف‌تر باشد.

۱۴. فضاهای X، Y و Z را چنان پیدا کنید که $X \times Y$ با $X \times Z$ همسانریخت شود ولی Y با Z همسانریخت نباشد.

۱۵. دو فضای توپولوژیک X و Y چنان ارائه دهید که همسانریخت نباشند ولی $X \times X$ با $Y \times Y$ همسانریخت شود.

۱۶. نشان دهید اگر توابع $f : A \to B$ و $g : C \to D$ پیوسته باشند، آنگاه تابع $H : A \times C \to B \times D$ با ضابطهٔ $H(a, c) = (f(a), g(c))$ پیوسته است.

۱۷. ثابت کنید دنبالهٔ (p_i) از عناصر $X = \prod_\alpha X_\alpha$ به $q \in X$ همگرا است اگر و فقط اگر برای هر α دنبالهٔ $(\prod_a(p_i))$ به $\prod_\alpha(q)$ همگرا باشد.

۱۸. ثابت کنید اگر تابع $g : \prod_\alpha X_\alpha \to Y$ پیوسته باشد، آنگاه g نسبت به هر مؤلفه، با ثابت نگه داشتن بقیهٔ مؤلفه‌ها، پیوسته است. آیا عکس این مطلب درست است؟ یعنی اگر g نسبت به هر مؤلفه پیوسته باشد، آنگاه لزوماً پیوسته است؟

۱۹. ثابت کنید توپولوژی تیکونوف روی $\mathcal{R}^n$ با توپولوژی معمولی روی آن معادل است.

۲۰. دو تابع زیر از $\mathcal{R}$ به $\mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ هستند. کدامیک از آنها در توپولوژی جعبه‌ای و کدامیک در توپولوژی حاصل‌ضرب پیوسته است.

$$f(t) = (t, ۲t, ۳t, \cdots)$$
$$g(t) = (t, \tfrac{t}{۲}, \tfrac{t}{۳}, \cdots)$$

۲۱. دنباله‌های زیر روی $\mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ تعریف شده‌اند. کدامیک از آنها در توپولوژی جعبه‌ای و کدامیک در توپولوژی حاصل‌ضرب همگرا هستند.

$$(w_i)_{i\in\mathcal{N}};\ w_i = (\underbrace{۰, ۰, \cdots, ۰}_{i-۱ \text{ بار}}, i, i, \cdots) \qquad (x_i)_{i\in\mathcal{N}};\ x_i = (\underbrace{۰, ۰, \cdots, ۰}_{i-۱ \text{ بار}}, \frac{۱}{i}, \frac{۱}{i}, \cdots)$$

$$(y_i)_{i\in\mathcal{N}};\ y_i = (\frac{۱}{i}, \frac{۱}{i}, ۰, ۰, \cdots, ۰, \cdots) \qquad (z_i)_{i\in\mathcal{N}};\ y_i = (\underbrace{\frac{۱}{i}, \frac{۱}{i} \cdots, \frac{۱}{i}}_{i \text{ بار}}, ۰, ۰, \cdots)$$

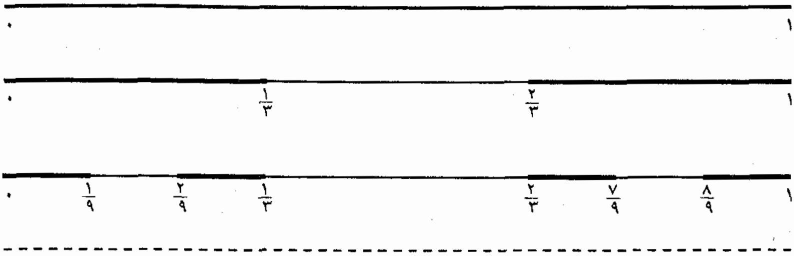
۲۲. بازهٔ $[۰, ۱]$ را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید و بازهٔ باز $]\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}[$ را از آن خارج کنید و مجموعهٔ باقیمانده را که به صورت اجتماع دو بازهٔ بستهٔ $[۰, \frac{۱}{۳}] \cup [\frac{۲}{۳}, ۱]$ است $C_۱$ بنامید. مجدداً با خارج کردن بازهٔ باز یک‌سوم میانی از هر یک از دو بازهٔ بستهٔ بالا، اجتماعی از چهار مجموعهٔ بستهٔ مجزای $[۰, \frac{۱}{۹}] \cup [\frac{۲}{۹}, \frac{۱}{۳}] \cup [\frac{۲}{۳}, \frac{۷}{۹}] \cup [\frac{۸}{۹}, ۱]$ را به دست آورید. آن را $C_۲$ بنامید. با ادامهٔ این روش (شکل ۹) دنباله‌ای از مجموعه‌های (C_i) خواهید داشت. بنا به تعریف، **مجموعهٔ کانتور** [۲] $C = \cap_{i=۱} C_i$ است. از خواص جالب مجموعهٔ کانتور این است که دارای اندازهٔ صفر است. زیرا طول بازه‌ای که در مرحلهٔ اول خارج می‌شود $\frac{۱}{۳}$، در مرحلهٔ دوم $\frac{۲}{۹}$ و نهایتاً طول بازه‌ای که در مرحلهٔ m خارج می‌شود $\frac{۱}{۳}(\frac{۲}{۳})^{m-۱}$ است. لذا مجموع طول بازه‌هایی که برای ساختن مجموعهٔ کانتور از بازهٔ $[۰, ۱]$ خارج می‌شود برابر است با:

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۹} + \frac{۴}{۲۷} + \cdots = ۱$$

چون طول بازهٔ $[۰, ۱]$ برابر یک است، لذا مجموعهٔ کانتور دارای اندازهٔ صفر است. اکنون نشان دهید:

---

[۲] Cantor



شکل ۹

الف- $C_{m+1} \subset C_m$ به ازای هر $m \geq 1$.

ب- هر C_m از 2^m مجموعهٔ بستهٔ مجزا تشکیل شده است.

پ- به ازای هر m، طول C_m، $(\frac{2}{3})^m$ است.

ت- ثابت کنید مجموعهٔ کانتور بسته است.

ث- فرض کنید $X = A^{\mathcal{N}}$ که در آن $A = \{0, 2\}$ و A مجهز به توپولوژی گسسته است. ثابت کنید تابع $f : X \to C$ با ضابطهٔ

$$f(a_1, a_2, \cdots) = a_1(\frac{1}{3}) + a_2(\frac{1}{3})^2 + a_3(\frac{1}{3})^3 + \cdots = \sum_{i=1} a_i(\frac{1}{3})^i$$

پیوسته است.

ج- ثابت کنید مجموعهٔ کانتور هیچ‌جاچگال است.

چ- ثابت کنید به ازای هر $x \in C$، x نقطهٔ تجمع $C \backslash \{x\}$ است.

۴.۲ فضای خارج قسمت

اگر X یک فضای توپولوژیک، Y یک مجموعه و $p : X \to Y$ یک تابع پوشا باشد، در این صورت به سهولت می‌توان دید که مجموعهٔ

$$T_p = \{G \subseteq Y : \ p^{-1}(G) \text{ باز در فضای } X\}$$

یک توپولوژی روی Y ایجاد می‌کند. این توپولوژی خواص جالبی دارد به عنوان مثال این توپولوژی، بزرگ‌ترین توپولوژیی است که تحت آن p پیوسته است.

تعریف: اگر $p : X \to Y$ یک تابع پوشا و X یک فضای توپولوژیک باشد در این صورت مجموعهٔ

$$T_p = \{G \subseteq Y : \ p^{-1}(G) \text{ باز در فضای } X\}$$

توپولوژی خارج قسمت القاشده به وسیلهٔ تابع p روی Y نامیده می‌شود. اگر توپولوژی روی Y توپولوژی خارج قسمت باشد، تابع p را **تابع خارج قسمت** و Y را **فضای خارج قسمت** X می‌نامند.

مثال ۱۰: فرض کنید $f : \mathcal{R} \to \{a, b, c\}$ با ضابطهٔ زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} a & x > \circ \\ b & x < \circ \\ c & x = \circ \end{cases}$$

در این صورت توپولوژی خارج قسمت القاشده به وسیلهٔ f روی $\{a, b, c\}$ عبارت است از:

$$T_f = \{\phi, \{a, b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

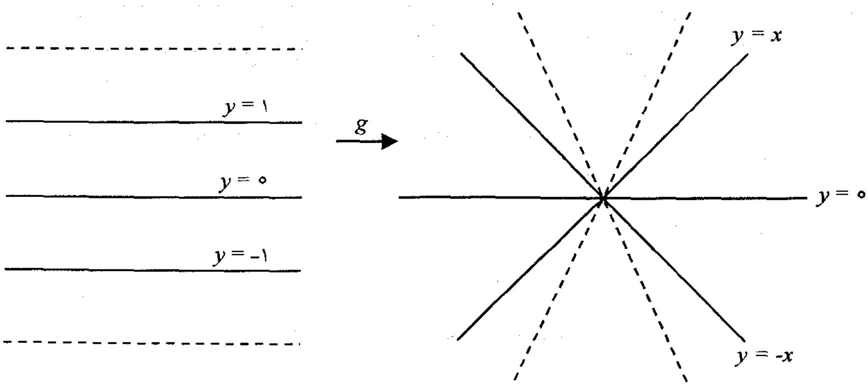
بدیهی است تابع خارج قسمت تحت توپولوژی خارج قسمت پیوسته است همچنین قابل ذکر است که توپولوژی خارج قسمت با تعریف مجموعه‌های بسته به جای مجموعه‌های باز، نیز می تواند ایجاد شود. به عبارت دیگر می‌توان توپولوژی خارج قسمت را این‌طور تعریف کرد که $F \subseteq Y$ بسته است اگر $p^{-1}(F)$ در X بسته باشد. زیرا برای توابع پوشا رابطهٔ $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$ برقرار است.

توجه کنید که هر تابع پوشا از یک فضای توپولوژیک به یک فضای توپولوژیک لزوماً یک تابع خارج قسمت نیست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۱: دو زیرفضای توپولوژیک X و Y، که در آن X اجتماع خطوط $y = n$ و Y اجتماع خطوط $y = nx$ ، $n \in \mathcal{Z}$، است را در نظر بگیرید. بدیهی است که تابع $g : X \to Y$ با ضابطهٔ $g(x, n) = (x, nx)$ پوشا است. اما g یک تابع خارج قسمت نیست. توجه کنید که هر خط $L_n = \{(x, nx) : x \in \mathcal{R}\}$ در فضای Y، یک مجموعهٔ باز در توپولوژی خارج قسمت القایی توسط g است زیرا تصویر معکوس آن خط $\{(x, n) : x \in \mathcal{R}\}$ است که در فضای X، باز است. در حالی که هیچ یک از L_n ها در توپولوژی نسبی معمولی روی Y باز نیستند. زیرا برای $(\circ, \circ) \in L_n$ هر گوی باز حول آن شامل نقاطی از مکمل L_n خواهد بود. (شکل ۱۰)

دو قضیهٔ زیر شرایطی را که تحت آن توپولوژی روی Y با توپولوژی خارج قسمت معادل است، را بیان می‌کند. به عبارت دیگر قضیهٔ زیر بیان می‌کند تحت چه شرایطی یک تابع پوشا می‌تواند یک تابع خارج قسمت باشد.

قضیهٔ ۷: اگر (X, T) و (Y, T^*) دو فضای توپولوژیک و $f : X \to Y$ پوشا، پیوسته و باز باشد، آنگاه توپولوژی روی Y با توپولوژی خارج قسمت القاشده به وسیلهٔ تابع f معادل است. (یعنی f یک تابع خارج قسمت است).



شکل ۱۰

اثبات: باید نشان دهیم $T_f = T^*$. اولاً بدیهی است که $T^* \subseteq T_f$. زیرا برای هر $G^* \in T^*$، از پیوستگی f، $f^{-۱}(G^*)$ در X باز است. لذا از تعریف توپولوژی خارج قسمت $G^* \in T_f$.

بالعکس، فرض کنید $U \in T_f$. از تعریف توپولوژی خارج قسمت، $f^{-۱}(U)$ در X باز است. حال چون f نگاشتی باز است، $f(f^{-۱}(U))$ در (Y, T^*) باز است. اما با توجه به پوشا بودن f، $f(f^{-۱}(U)) = U$، لذا U باز در (Y, T^*) است. یعنی $T_f = T^*$.

□

قضیهٔ ۸: در قضیهٔ ۷ شرط باز بودن تابع f، می‌تواند با شرط بسته بودن عوض شود.

اثبات: اثبات مشابه اثبات قضیهٔ ۷ است و به خواننده واگذار می‌شود.

□

لازم به ذکر است که در مثال ۱۱، تابع g، پیوسته است ولی نه باز و نه بسته است. این تابع باز نیست زیرا تصویر خط باز $y = ۰$ در فضای X، همان خط $y = ۰$ است که در فضای Y باز نیست. در واقع نقطهٔ $(۰, ۰)$ یک نقطهٔ درونی نیست. این تابع بسته نیز نیست زیرا تصویر مجموعهٔ بستهٔ $F = \cup F_n$ که در آن $F_n = \{(x, n) : x \geq \frac{۱}{n^۲}\}$، یک مجموعهٔ بسته در Y نیست. در واقع F شامل نقطهٔ تجمع $(۰, ۰)$ نیست.

مثال ۱۲: دو فضای توپولوژیک $X = [۰, ۲\pi]$ و $S^۱ = \{(x, y) \in \mathcal{R}^۲ : x^۲ + y^۲ = ۱\}$ و تابع $f : X \to S^۱$ با ضابطهٔ $f(x) = (\cos x \ , \ \sin x)$ را در نظر بگیرید. در این صورت f پیوسته، پوشا و بسته است، لذا توپولوژی معمولی نسبی روی $S^۱$ با توپولوژی خارج قسمت القایی از f معادل

است. (توجه کنید که f یک تابع باز نیست زیرا تصویر مجموعهٔ باز $]\circ,\pi[$، یک مجموعهٔ باز در S^{1} نیست.)

مثال ۱۳ : تابع تصویر $\prod_1 : X \times Y \rightarrow X$ پیوسته، پوشا و باز است. لذا $\prod_1$ تابع خارج قسمت، X فضای خارج قسمت $X \times Y$ و توپولوژی X با توپولوژی خارج قسمت معادل است.

مثال ۱۴ : فرض کنید $X = [\circ, 1] \cup [2, 3]$ و $Y = [\circ, 2]$ و هر دو مجهز به توپولوژی نسبی از فضای اعداد حقیقی با توپولوژی معمولی و $f : X \rightarrow Y$ با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [\circ, 1] \\ x - 1 & x \in [2, 3] \end{cases}$$

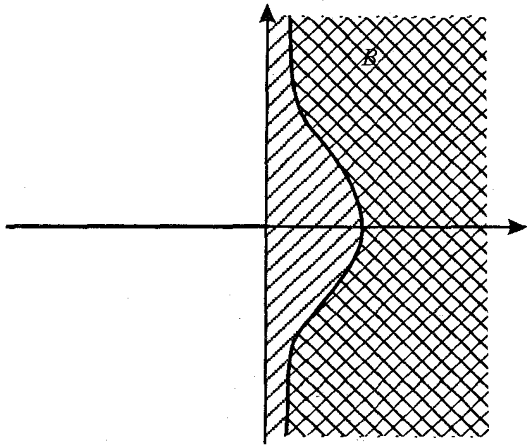
باشد در این صورت f بسته، پیوسته و پوشا است. لذا توپولوژی Y توپولوژی خارج قسمت است. به عبارت دیگر توپولوژی نسبی معمولی روی Y با توپولوژی خارج قسمت القایی توسط f معادل است. (ولی f یک تابع باز نیست. زیرا تصویر مجموعهٔ باز $[\circ, 1[$ در X همان مجموعهٔ $[\circ, 1[$ است که در Y باز نیست.)

همان طور که در قضایای ۷ و ۸ دیدیم هر تابع پیوسته، پوشا و باز (بسته) یک تابع خارج قسمت است. ولی عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. در مثال زیر تابع خارج قسمتی ارائه می‌شود که نه باز و نه بسته است.

مثال ۱۵ : فرض کنید $X = (\mathcal{R}^{+} \cup \{\circ\} \times \mathcal{R}) \cup (\mathcal{R} \times \{\circ\})$. تعریف کنید $g : X \rightarrow \mathcal{R}$ به طوری که $g(x, y) = x$. بدیهی است که g پوشا است. نشان می‌دهیم g یک تابع خارج قسمت است یعنی نشان می‌دهیم توپولوژی خارج قسمت القایی توسط g روی $\mathcal{R}$، با توپولوژی معمولی معادل است.

اولاً تصویر معکوس هر عنصر پایه در توپولوژی معمولی، یک مجموعهٔ باز در X است. توجه کنید که تصویر معکوس هر عنصر پایه مانند $]a,b[$ در $\mathcal{R}$، اگر عنصر پایه شامل صفر باشد به صورت $([\circ, b[\times \mathcal{R}) \cup (]a, \circ[\times\{\circ\})$ و اگر شامل صفر نباشد به صورت $]a,b[\times \mathcal{R}$ یا به صورت $]a,b[\times\{\circ\}$ است که در هر سه حالت در X باز است. لذا توپولوژی معمولی ضعیف‌تر از توپولوژی خارج قسمت است.

از طرف دیگر اگر G باز در توپولوژی خارج قسمت باشد، آنگاه تصویر معکوس آن یعنی $g^{-1}(G)$ در X باز است. نشان می‌دهیم G در توپولوژی معمولی نیز باز است. برای $x \in G$، نقطهٔ $(x, \circ)$ به $g^{-1}(G)$ متعلق است و چون $g^{-1}(G)$ در X باز است لذا گوی باز به مرکز $(x, \circ)$ به $g^{-1}(G)$ متعلق است و چون $g^{-1}(G)$ در X باز است لذا گوی باز به مرکز $(x, \circ)$ و شعاع r موجود است که زیرمجموعهٔ $g^{-1}(G)$ می‌باشد. نشان می‌دهیم $]x-r, x+r[\subseteq G$. برای $x^{*} \in]x-r, x+r[$، نقطهٔ



شکل ۱۱

$(x^*, \circ)$ به گوی باز به مرکز $(x, \circ)$ و شعاع r و در نتیجه به مجموعهٔ $g^{-\prime}(G)$ متعلق است یعنی $(x^*, \circ) \in g^{-\prime}(G)$ و بنابراین $g((x^*, \circ)) \in g(g^{-\prime}(G)) \subseteq G$ و یا $x^* \in G$.

لذا توپولوژی خارج قسمت القایی توسط g روی R با توپولوژی معمولی معادل است. اما g نه باز و نه بسته است. زیرا

$$g\{[\circ, \prime[\times]a, b[\} = \ [\circ, \prime[\quad \text{و} \quad g(B) =]\circ, \infty[$$

که در آن $B = \{(x, y) \in X; x \geq \frac{\prime}{\prime + y^{\prime}}\}$. اولین رابطه (از سمت چپ) نشان می‌دهد که g باز نیست و دومین رابطه نشان می‌دهد که g بسته نیست. (شکل ۱۱)

قضیهٔ زیر یکی دیگر از خواص توپولوژی خارج قسمت را بیان می‌کند.

قضیهٔ ۹: فرض کنید $f : X \to Y$ پوشا و Y مجهز به توپولوژی خارج قسمت القایی توسط f باشد. در این صورت هر تابع دلخواه $g : Y \to Z$ پیوسته است اگر و فقط اگر $gof : X \to Z$ پیوسته باشد.

اثبات: چون Y مجهز به توپولوژی خارج قسمت است، f پیوسته و در نتیجه اگر g پیوسته باشد $gof : X \to Z$ پیوسته خواهد بود.

بالعکس، فرض کنید $gof : X \to Z$ پیوسته و U در Z باز باشد. از پیوستگی gof، $(gof)^{-\prime}(U) = f^{-\prime}(g^{-\prime}(U))$ باز در X است. حال از تعریف توپولوژی خارج قسمت $g^{-\prime}(U)$ باز در Y و در نتیجه g پیوسته است.

دیدن مثال زیر نیز خالی از لطف نیست. این مثال نشان می‌دهد اگر همهٔ مؤلفه‌های یک تابع، تابع

خارج قسمت باشند خود تابع لزوماً یک تابع خارج قسمت نیست.

مثال ۱۶: فرض کنید X و Y فضاهای ارائه‌شده در مثال ۱۱ و تابع $g : X \to Y$ با ضابطهٔ $g(x,n) = (x, nx)$ باشد با این تفاوت که Y دارای توپولوژی خارج قسمت است. همچنین فرض کنید تابع $i : \mathcal{R}^{\mathcal{N}} \to \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$، تابع همانی باشد. نشان می‌دهیم تابع $f : X \times \mathcal{R}^{\mathcal{N}} \to Y \times \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ با ضابطهٔ $f(x,y) = ((g(x), i(y))$ یک تابع خارج قسمت نیست. (روی $X \times \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ و $Y \times \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ توپولوژی حاصل‌ضرب منظور شده است). کافی است نشان دهیم توپولوژی القایی از f روی $Y \times \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ با توپولوژی حاصل‌ضرب معادل نیست. قرار دهید

$$V_n = \{(t, tn, x_۱, x_۲, \cdots, x_n, \cdots) : |tx_n| < ۱\}$$

$$V = \cup V_n$$

نشان می‌دهیم V در $Y \times \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ نسبت به توپولوژی حاصل‌ضرب باز نیست. زیرا اگر V باز باشد با توجه به این‌که نقطهٔ صفر فضای $Y \times \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ به V متعلق است، عنصر پایهٔ $G \times \prod W_i$ حول صفر، واقع در V موجود است که G باز در Y و $W_i = \mathcal{R}$ بجز برای تعداد باپایان اندیس. حال M را طوری اختیار کنید که $W_M = \mathcal{R}$. اینک به روابط زیر توجه کنید:

$$G \times \prod W_i \subset V$$

$$f^{-۱}(G \times \prod W_i) = g^{-۱}(G) \times \prod W_i \subseteq f^{-۱}(V)$$

چون G باز در Y و Y دارای توپولوژی خارج قسمت است لذا $g^{-۱}(G)$ در X باز است و به علاوه شامل $(\circ, n) \in X$ به ازای هر n است. لذا شامل $(\circ, M)$ نیز هست. پس $t' \neq \circ$ موجود است که $(t', M) \in g^{-۱}(G)$. حال $a_M > \frac{۱}{|t'|}$ را اختیار کنید. در این صورت نقطهٔ

$$(t', M, \circ, \circ, \cdots, \circ, a_M, \circ, \cdots)$$

به $g^{-۱}(G) \times \prod W_i$ تعلق دارد در حالی که با توجه به $|t'a_M| > ۱$ ، به $f^{-۱}(V)$ متعلق نیست زیرا در غیر این صورت با توجه به این‌که از مؤلفهٔ دوم به بعد فقط $a_M \neq \circ$، پس حداکثر این عنصر می‌تواند در V_M باشد که در این صورت باید $|t'a_M| < ۱$ که خلاف فرض است.

اما V در توپولوژی القایی توسط f باز است زیرا

$$f^{-۱}(V) = f^{-۱}(\cup V_n) = \cup f^{-۱}(V_n) = \cup\{(t, n, x_۱, x_۲, \cdots, x_n, \cdots) : |tx_n| < ۱\}$$

و اگر فرض کنیم

$$U_n = \{(t, n, x_۱, x_۲, \cdots, x_n, \cdots) : |tx_n| < ۱\}$$

به سهولت می‌توان دید که

$$U_n \sim \{(t, x_n) : |tx_n| < ۱\} \times \{n\} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \cdots \times \mathcal{R} \times \cdots$$

لذا U_n در $X \times \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ باز است.

تمرین

۱. فرض کنید $\mathcal{D}$ دسته‌ای از زیرمجموعه‌های مجزای فضای توپولوژیک X باشد به طوری که اجتماع آنان برابر X شود ($\mathcal{D}$ را یک **تجزیه** روی X می‌نامیم). تعریف کنید $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ باز است اگر و فقط اگر $\cup\{F : F \in \mathcal{F}\}$ باز در X باشد. ثابت کنید با این تعریف $\mathcal{D}$ به یک فضای توپولوژیک تبدیل می‌شود (این فضا را **فضای تجزیه** می‌نامند).

۲. فرض کنید $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی و X یک فضای توپولوژیک باشد. ثابت کنید $X/\sim$ که عناصر آن دسته‌های هم‌ارزی هستند یک تجزیه روی X است.

۳. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $\mathcal{D}$ فضای تجزیه آن باشد. ثابت کنید:

الف- نگاشت $p : X \to \mathcal{D}$ که در آن $p(x)$ عنصری از $\mathcal{D}$ است که شامل x می‌باشد، یک تابع پوشا است. (p را **تابع تجزیه** می‌گوییم).

ب- توپولوژی روی فضای تجزیهٔ $\mathcal{D}$ با توپولوژی خارج قسمت القاشده به وسیلهٔ تابع p معادل است. (به عبارت دیگر هر تابع تجزیه یک تابع خارج قسمت است).

۴. اگر $f : X \to Y$ دارای توپولوژی خارج قسمت القاشده به وسیلهٔ f باشد، آنگاه Y همسانریخت با فضای تجزیه X، $\mathcal{D}$، است که عناصر آن عبارتند از $f^{-۱}(y)$، $y \in Y$. به علاوه اگر h این همسانریختی باشد، آنگاه $hof = p$. (p تابع تجزیه است).

۵. روی مربع $[۰, ۲\pi] \times [۰, ۲\pi]$ رابطهٔ هم‌ارزی $(۰, y) \sim (۲\pi, y)$ ، $۰ \leq y \leq ۲\pi$، داده شده است. نشان دهید فضای تجزیهٔ حاصل از رابطهٔ هم‌ارزی با استوانهٔ ($S^۱ \times [۰, ۲\pi]$) همسانریخت است.

۶. روی مربع $[۰, ۲\pi] \times [۰, ۲\pi]$ رابطهٔ هم‌ارزی $(۰, y) \sim (۲\pi, y)$ ، $۰ \leq y \leq ۲\pi$ ، $(x, ۰) \sim (x, ۲\pi)$ ، $۰ \leq x \leq ۲\pi$، داده شده است. نشان دهید فضای تجزیهٔ حاصل از رابطهٔ هم‌ارزی با چنبرهٔ ($S^۱ \times S^۱$) همسانریخت است.

۷. روی $\mathcal{R}^۲$ رابطهٔ هم‌ارزی را به صورت $(a, b) \sim (c, d)$ اگر و فقط اگر $b = d$ در نظر بگیرید. نشان دهید $\mathcal{R}^۲/\sim$ با $\mathcal{R}$ همسانریخت است.

۸. روی $\mathcal{R}^2$ رابطهٔ هم‌ارزی به صورت $(a,b)\sim(c,d)$ اگر و فقط اگر $a+b^2=c+d^2$ داده شده است. فضای $\mathcal{R}^2/\sim$ با کدام فضا همسانریخت است؟ اگر رابطهٔ هم‌ارزی $a^2+b^2=c^2+d^2$ در نظر گرفته شود، با کدام فضا همسانریخت خواهد شد؟

۹. روی دایرهٔ واحد S^1 دو نقطهٔ مقابل را در یک دستهٔ هم‌ارزی قرار دهید و نشان دهید $S^1/\sim$ با S^1 همسانریخت است.

۱۰. زیرفضای توپولوژیک $X=(\mathcal{R}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathcal{R})$ و تابع $g:\mathcal{R}^2\to X$ با ضابطهٔ

$$g(x,y)=\begin{cases}(x,0) & x\neq 0\\ (x,y) & x=0\end{cases}$$

مفروض است. آیا توپولوژی X با توپولوژی القاشده به وسیلهٔ تابع g معادل است؟

۱۱. نشان دهید اگر Y فضای خارج قسمت X و Z فضای خارج قسمت Y باشد، آنگاه Z فضای خارج قسمت X است.

۱۲. فرض کنید X اجتماع خطوط $y=0$ و $y=1$ و Y فضای تجزیهٔ X باشد که نقاط $(x,0)$ و $(x,1)$ را به ازای $x\neq 0$، در یک دستهٔ هم‌ارزی قرار می‌دهد. نشان دهید تابع تجزیهٔ $p:X\to Y$ باز است.

۱۳. فرض کنید $X=\{(x,y):y\geq 0\}$ صفحهٔ مور باشد (به بخش ۲.۳ مراجعه کنید). به علاوه فرض کنید $D=\{(x,0):x\in\mathcal{Q}\}$ و $E=\{(x,0):x\in\mathcal{R}\backslash\mathcal{Q}\}$ و Y فضای تجزیهٔ X مشتمل بر D، E و تمام تک‌نقطه‌ای‌ها در $X\backslash(D\cup E)$ باشد. نشان دهید تابع تجزیهٔ $p:X\to Y$ بسته است.

۱۴. فرض کنید $X=\mathcal{R}$ و T به وسیلهٔ مجموعه‌های زیر ایجاد شده باشد

$$\mathcal{S}=\Big\{]a,b[\subseteq\mathcal{R}:0\notin\,]a,b[\Big\}\cup\Big\{]-\varepsilon,\varepsilon[\backslash\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}:\varepsilon>0\Big\}$$

قرار دهید $A=\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ و فرض کنید Y فضای تجزیهٔ X باشد که با یکسان کردن نقاط A به دست می‌آید. نشان دهید تابع تجزیهٔ $p:X\to Y$ بسته است.

فصل ۵

فشردگی

در این فصل با مفهوم فشردگی که یکی از مفاهیم مهم در توپولوژی است، آشنا می‌شویم و قضایایی از کاربرد آن را ارائه می‌دهیم.

۵.۱ فشردگی

فشردگی را با استفاده از تعریف پوشش معرفی می‌کنیم.

تعریف: در فضای توپولوژیکی (X,T)، دستهٔ $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X یک **پوشش** برای $A \subseteq X$ است، اگر $A \subseteq \bigcup_{U\in\mathcal{A}} U$. اگر همهٔ عناصر $\mathcal{A}$ باز باشند، پوشش را یک **پوشش باز** برای A می‌گوییم. هر زیردستهٔ $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ که $A \subseteq \bigcup_{U\in\mathcal{B}} U$، یک **زیرپوشش** از $\mathcal{A}$ برای A است.

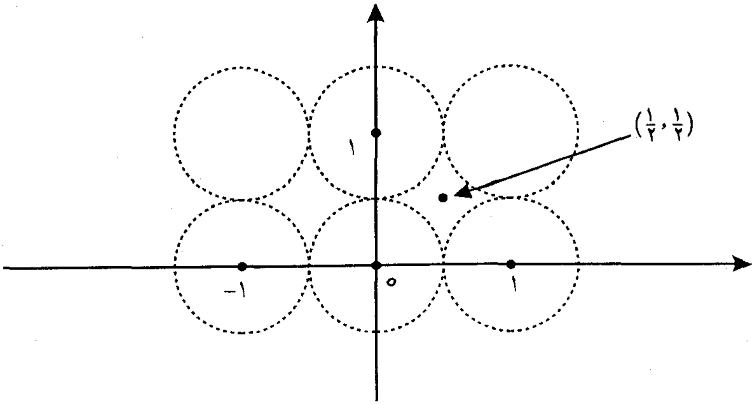
مثال ۱ : در فضای گسسته (X,T)، دستهٔ $\{\{x\} : x \in X\}$ یک پوشش باز برای X است.

مثال ۲ : تنها پوشش باز فضای ناگسستهٔ (X,T)، دسته‌های $\{X,\phi\}$ و $\{X\}$ هستند.

مثال ۳: دستهٔ $\mathcal{A} = \{]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] : n \geq 1\}$ یک پوشش $A =]0,1]$ ، $A \subseteq \mathcal{R}$، است که باز نیست.

مثال ۴ : دستهٔ $\mathcal{A}$ متشکل از همهٔ گوی‌های به مرکز $p = (m,n)$ ، $m,n \in \mathcal{Z}$، و شعاع ۱، یک پوشش باز برای $\mathcal{R}^2$ است. زیرا هر نقطه از صفحه حداقل در یکی از این گوی‌ها قرار می‌گیرد.

مثال ۵: دستهٔ A متشکل از همهٔ گوی‌های به مرکز $p = (m,n)$ ، $m,n \in \mathcal{Z}$، و شعاع $\frac{1}{2}$، یک پوشش باز برای $\mathcal{R}^2$ نیست. زیرا نقطهٔ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathcal{R}^2$ در هیچیک از این گوی‌ها قرار نمی‌گیرد.(شکل۱۲)



شکل ۱۲

تعریف: مجموعهٔ $A \subseteq X$ در فضای توپولوژیکی (X,T) **مجموعهٔ فشرده** است، اگر هر پوشش باز آن دارای زیرپوشش باپایان باشد.

تعریف: : فضای (X,T) را یک **فضای فشرده** می‌گوییم اگر X یک مجموعهٔ فشرده باشد.

مثال ۶: هر فضای توپولوژیک باپایان، فشرده است.

مثال ۷: فضای توپولوژیکی (X,T)، با توپولوژی مکمل باپایان، فشرده است. زیرا اگر دستهٔ $\mathcal{G} = \{G_i\}$ ، $i \in I$، یک پوشش باز برای X باشد، $G_1 \in \mathcal{G}$ را اختیار می‌کنیم، چون $G_1 \in T$، لذا، $X \backslash G_1$ باپایان است و داریم: $X \backslash G_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. اما چون $\mathcal{G}$ یک پوشش باز برای X است، هر عضو $X \backslash G_1$ در یکی از اعضای $\mathcal{G}$ قرار می‌گیرد. بدون تغییر در روند اثبات آنها را G_2، G_3، ... و G_{n+1} بنامید. بنابراین $X \backslash G_1 \subseteq G_2 \cup \cdots \cup G_{n+1}$ و یا $X \subseteq G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_{n+1}$. بنابراین X فشرده است.

مثال ۸: فرض کنید $A \subseteq X$ و X به توپولوژی جذب A مجهز باشد. در این صورت X فشرده است اگر و فقط اگر $X \backslash A$ باپایان باشد. زیرا در غیر این صورت برای هر $x \in X \backslash A$، دستهٔ $\{A_x = A \cup \{x\}\}$ یک پوشش باز X است که زیرپوشش باپایان ندارد.

مثال ۹: فضای $\mathcal{R}$ فشرده نیست. زیرا پوشش باز $\mathcal{A} = \{]-n, n[: n \in \mathcal{N}\}$، دارای زیرپوشش باپایان نیست.

مثال ۱۰: یک فضای گسسته فشرده است اگر و فقط اگر باپایان باشد. با توجه به مثال ۶، کافی است نشان دهیم اگر فضای گسستهٔ X فشرده باشد آنگاه باپایان است زیرا در غیر این صورت دستهٔ

$\{\{x\}: x \in X\} = \mathcal{A}$ یک پوشش باز فضای گسستهٔ (X, T) است که دارای هیچ زیرپوشش باپایان نیست.

مثال ۱۱ : دستهٔ $\{]-۱, ۰]\} \cup \{]\frac{۱}{n+۱}, \frac{۱}{n}]\}_{n\in N}$ یک پوشش باز بازهٔ $[۰, ۱]$ در توپولوژی حد بالایی است که زیرپوشش باپایان ندارد، لذا $[۰, ۱]$ در توپولوژی حد بالایی فشرده نیست. در حالی که بنا به مثال ۷، با توپولوژی مکمل باپایان، فشرده است.

قضیهٔ ۱ : در فضای توپولوژیک (X, T)، مجموعهٔ $A \subseteq X$ فشرده است اگر و فقط اگر فضای توپولوژیک (A, T_A) فشرده باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم هر پوشش باز A در فضای (X, T) دارای زیرپوشش باپایان باشد. پوشش باز $\{G_i\}$ را برای فضای توپولوژیک (A, T_A) در نظر می‌گیریم. بنا به تعریف توپولوژی نسبی، مجموعه‌های H_i در T موجود است به طوری که $G_i = A\cap H_i$. اما $A \subseteq \cup G_i = \cup(A\cap H_i) = A\cap(\cup H_i)$ لذا $A \subseteq \cup H_i$. یعنی دستهٔ $\{H_i\}$ یک پوشش باز A در فضای (X, T) است. لذا بنا به فرض دارای زیرپوشش باپایان است. پس تعداد باپایان از H_i که آنها را $H_۱, H_۲, \cdots, H_m$ می‌نامیم موجودند به طوری که

$$A \subseteq H_۱ \cup H_۲ \cup \cdots \cup H_m$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} A &= A \cap (H_۱ \cup H_۲ \cup \cdots \cup H_m) \\ &= (A \cap H_۱) \cup (A \cap H_۲) \cup \cdots \cup (A \cap H_m) = G_۱ \cup G_۲ \cup \cdots \cup G_m \end{aligned}$$

بنابراین (A, T_A) فشرده است.

بالعکس، فرض کنید (A, T_A) فشرده و دستهٔ $\{H_i\}$ یک پوشش باز A در فضای (X, T) باشد. قرار دهید $G_i = A \cap H_i$. در این صورت از $A \subseteq H_i$ داریم: $A = A \cap (\cup H_i) = \cup(A \cap H_i) \subseteq \cup G_i$. پس دستهٔ $\{G_i\}$ یک پوشش باز فضای (A, T_A) است. اما از فشردگی (A, T_A) تعداد باپایان از G_i که آنها را $G_۱, G_۲, \cdots, G_k$ می‌نامیم موجودند به طوری که:

$$\begin{aligned} A \subseteq G_۱ \cup G_۲ \cup \cdots \cup G_k &= (A \cap H_۱) \cup (A \cap H_۲) \cup \cdots \cup (A \cap H_k) \\ &= A \cap (H_۱ \cup \cdots \cup H_k) \end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$A \subseteq H_۱ \cup H_۲ \cup \cdots \cup H_k$$

یعنی پوشش $\{H_i\}$ برای A در فضای (X, T)، دارای زیرپوشش باپایان است.

□

قضیهٔ ۲ : فرض کنید (X,T) فضای توپولوژیکی و Y زیرفضای توپولوژیکی X باشد. در این صورت $A\subseteq Y$ در فضای (Y,T_Y) فشرده است اگر و فقط اگر در فضای (X,T) فشرده باشد.

اثبات: چون توپولوژیی که A به عنوان زیرفضای Y دارد همان توپولوژیی است که به عنوان زیرفضای X دارد، اثبات بدیهی است.

□

در آنالیز دیدیم که در $\mathcal{R}^n$ با توپولوژی معمولی یک مجموعه فشرده است اگر و فقط اگر بسته و کراندار باشد *(قضیهٔ هاینه و برل* [۱]*)*. اما این مطلب به طور کلی در فضاهای توپولوژیک صادق نیست زیرا کرانداری یک مجموعه در فضاهای توپولوژیک تعریف نشده است. البته خواهیم دید کرانداری در فضاهای متریک قابل تعریف است. از طرف دیگر می‌توان دید بین فشردگی و بسته بودن یک مجموعه در حالت کلی هیچ رابطه‌ای وجود ندارد. به دو مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۲ : قرار دهید $X=\{a,b,c\}$، $T=\{X,\phi,\{a\}\}$ و $A=\{a\}$. در این صورت A فشرده است ولی بسته نیست.

مثال ۱۳ : بازهٔ $]-\sqrt{۲},\sqrt{۲}[$ در فضای اعداد گویا بسته است ولی فشرده نیست.

قضیهٔ زیر بیان می‌کند که در فضاهای فشرده، بسته بودن یک مجموعه، فشردگی آن را نتیجه می‌دهد و در فصل‌های آتی خواهیم دید که عکس این مطلب در فضاهای هاسدورف درست است. به عبارت دیگر در فضاهای هاسدورف هر مجموعهٔ فشرده لزوماً بسته نیز هست.

قضیهٔ ۳: هر مجموعهٔ بسته در فضاهای فشردهٔ (X,T)، فشرده است.

اثبات: فرض می‌کنیم مجموعهٔ F در فضای (X,T) بسته و دستهٔ $\mathcal{G}=\{G_i\}$ یک پوشش باز برای F است. یعنی $F\subseteq \cup G_i$، لذا $X=(\cup_i G_i)\cup(X\setminus F)$. چون F بسته است، $X\setminus F$ باز است. پس $\mathcal{G}^*=\{G_i\}\cup\{X\setminus F\}$ یک پوشش باز برای X است. چون X فشرده است این پوشش دارای زیرپوشش باپایان است. بدون تغییر در روند اثبات، فرض کنید

$$X=G_۱\cup G_۲\cup\cdots\cup G_n\cup(X\setminus F)$$

لذا با توجه به $F\cap(X\setminus F)=\phi$، خواهیم داشت: $F\subseteq G_۱\cup G_۲\cup\cdots\cup G_n$، در نتیجه F در فضای (X,T) فشرده است.

□

---
[۱] Heine-Borel

قضیهٔ ۴ : در فضاهای فشرده، هر زیرمجموعهٔ بی‌پایان دارای نقطهٔ تجمع است.

اثبات: فرض کنید مجموعهٔ بی‌پایان A در فضای فشردهٔ X، نقطهٔ تجمع نداشته باشد. پس برای هر $p \in X$، مجموعهٔ باز G_p موجود است که $A \cap G_p \subseteq \{p\}$. از طرفی دستهٔ $\{G_p\}_{p \in X}$ پوشش باز X است که بنا به فشردگی X دارای زیرپوشش باپایان، مثلاً $G_۱$، ... ، G_m است. بنابراین $A \subseteq X = G_۱ \cap \cdots \cap G_m$. لذا A باید باپایان باشد که تناقض است.

□

در مثال زیر یک فضای توپولوژیک غیرفشرده ارائه می‌شود که هر زیرمجموعهٔ بی‌پایان آن دارای نقطهٔ تجمع است. لذا عکس قضیهٔ اخیر در حالت کلی درست نیست.

مثال ۱۴ : قرار دهید $X = \mathcal{N}$ و $B_i = \{۲i, ۲i-۱\}$ و فرض کنید T توپولوژی حاصل از پایه $\mathcal{B} = \{B_i : i \geq ۱\}$ باشد. در این صورت X فشرده نیست زیرا پوشش باز $\mathcal{B}$ دارای زیرپوشش باپایان نیست ولی هر زیرمجموعه در این فضا نقطهٔ تجمع دارد. زیرا اگر A یک زیرمجموعه، $a_i \in A$ و $a_i = ۲k$ باشد، آنگاه $a_{i-۱}$، نقطهٔ تجمع A است زیرا هر مجموعهٔ باز G حول $a_{i-۱}$، شامل پایه $B = \{a_i, a_{i-۱}\}$ است و چون $A \cap (B \backslash \{a_{i-۱}\}) \neq \phi$ و $A \cap (B \backslash \{a_{i-۱}\}) \subseteq A \cap (G \backslash \{a_{i-۱}\})$، لذا $A \cap (G \backslash \{a_{i-۱}\}) \neq \phi$. حالتی که A شامل نقطه فرد باشد مشابه است.

همانطور که اشاره کردیم، در طول این بخش با بعضی از خواص توپولوژیکی آشنا می‌شویم. در اینجا با استفاده از قضیهٔ زیر نشان می‌دهیم که فشردگی یک خاصیت توپولوژیکی است.

قضیهٔ ۵ : فرض کنید f از فضای توپولوژیکی (X, T) به فضای توپولوژیکی (X^*, T^*) پیوسته باشد. در این صورت تصویر هر مجموعهٔ فشرده از فضای توپولوژیکی (X, T)، مجموعه‌ای فشرده در فضای توپولوژیکی (X^*, T^*) است.

اثبات: فرض می‌کنیم $E \subseteq X$ در فضای (X, T) فشرده و $\{G_i^*\}$ یک پوشش باز $f(E)$ در فضای (X^*, T^*) باشد. داریم:

$$E \subseteq f^{-۱}(f(E)) \subseteq f^{-۱}(\cup_i G_i^*) = \cup_i f^{-۱}(G_۱^*)$$

چون f پیوسته است، $f^{-۱}(G_i^*)$ در (X, T) باز و در نتیجه $\mathcal{A} = \{f^{-۱}(G_i^*)\}$ یک پوشش باز برای E است، چون E فشرده است این پوشش دارای زیرپوشش باپایان است. آنها را $G_۱^*$، $G_۲^*$، ... ، G_n^* بنامید. در این صورت

$$E \subseteq f^{-۱}(G_۱^*) \cup f^{-۱}(G_۲^*) \cup \cdots \cup f^{-۱}(G_n^*)$$

و در نتیجه

$$f(E) \subseteq f(f^{-1}(G_1^*) \cup f^{-1}(G_2^*) \cup \cdots \cup f^{-1}(G_n^*)) =$$
$$f(f^{-1}(G_1^*)) \cup f(f^{-1}(G_2^*)) \cup \cdots \cup f(f^{-1}(G_n^*)) \subseteq G_1^* \cup G_2^* \cup \cdots \cup G_n^*$$

لذا $f(E)$ فشرده است.

□

در بعضی موارد اثبات این‌که یک فضای توپولوژیک، فشرده است مستقیماً با استفاده از تعریف کار مشکلی است. در اینجا قضایایی که هم‌ارز با فشردگی فضاهای توپولوژیک است را ارائه می‌دهیم. ابتدا به تعریف زیر توجه کنید.

تعریف: می‌گوییم دستهٔ $\{A_i\}$ دارای **خاصیت اشتراک باپایان** است، اگر اشتراک هر تعداد باپایان از آنها مخالف تهی باشد.

مثال ۱۵ : دستهٔ $\mathcal{A} = \{]0, \frac{1}{n}[\}$، $n \in \mathcal{N}$، از فاصله‌های باز، دارای خاصیت اشتراک باپایان است، زیرا

$$]0, a_1[\cap]0, a_2[\cap \cdots \cap]0, a_n[=]0, b[$$

که در آن $b = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

مثال ۱۶ : دستهٔ $\mathcal{B} = \{]n, \infty[\}$، $n \in \mathcal{Z}$، از فاصله‌های باز، دارای خاصیت اشتراک باپایان است، زیرا

$$]a_1, \infty[\cap]a_2, \infty[\cap \cdots \cap]a_n, \infty[=]b, \infty[$$

که در آن $b = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

قضیهٔ ۶: فضای توپولوژیکی (X, T) فشرده است اگر و فقط اگر اشتراک هر دسته از مجموعه‌های بسته با خاصیت اشتراک باپایان، غیرتهی شود.

اثبات: فرض کنید فضای (X, T) فشرده و $\{F_\alpha\}$ یک دسته از مجموعه‌های بسته باشند که دارای خاصیت اشتراک باپایان هستند و همچنین فرض کنید $\cap_\alpha F_\alpha = \phi$. قرار دهید $V_\alpha = X \backslash F_\alpha$. در این صورت $\{V_\alpha\}$ یک دسته از مجموعه‌های باز است و به علاوه

$$X = X \backslash \phi = X \backslash \cap_\alpha F_\alpha = \cup_\alpha (X \backslash F_\alpha) = \cup_\alpha V_\alpha$$

یعنی $\{V_\alpha\}$ یک پوشش باز X است و چون X فشرده است این پوشش دارای زیرپوشش باپایان است. آنها را V_1، V_2، ... ، V_m بنامید. در این صورت

$$\begin{aligned} X &= V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_m = (X\backslash F_1) \cup (X\backslash F_2) \cup \cdots \cup (X\backslash F_m) \\ &= X\backslash(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_m) \end{aligned}$$

پس باید

$$F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_m = \phi$$

که خلاف فرض است.

بالعکس، می‌خواهیم نشان دهیم X فشرده است. لذا فرض کنید $\{V_\alpha\}$ یک پوشش باز X است. یعنی $X = \cup_\alpha V_\alpha$. قرار دهید $F_\alpha = X\backslash V_\alpha$. در این صورت $\{F_\alpha\}$ یک دسته از مجموعه‌های بسته است و به علاوه

$$\phi = X\backslash X = X\backslash \cup_\alpha V_\alpha = \cap_\alpha(X\backslash V_\alpha) = \cap_\alpha F_\alpha$$

لذا دستهٔ $\{F_\alpha\}$، از مجموعه‌های بسته، خاصیت اشتراک باپایان ندارد پس مجموعه‌های F_1، F_2، ... ، F_k موجودند به طوری که

$$F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k = \phi$$

و از آنجا

$$(X\backslash V_1) \cap (X\backslash V_2) \cap \cdots \cap (X\backslash V_k) = \phi$$

و یا

$$X\backslash(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k) = \phi$$

و در نتیجه

$$X = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$$

یعنی X فشرده است.

□

قضیهٔ بالا را می‌توان به صورت نتیجهٔ زیر نیز بیان نمود.

نتیجهٔ ۷: فضای توپولوژیک (X, T) فشرده است اگر و فقط اگر هر دسته از مجموعه‌های بسته با اشتراک تهی، دارای زیردستهٔ باپایان با اشتراک تهی باشد.

□

نتیجهٔ ۸: فضای توپولوژیک (X, T) فشرده است اگر و فقط اگر اشتراک بستار هر دسته از زیرمجموعه‌های X با خاصیت اشتراک باپایان، غیرتهی شود.

□

مثال ۱۷ : مجموعه اعداد حقیقی با توپولوژی شعاع چپ، فشرده نیست. زیرا $\{[a,\infty[: a \in \mathcal{R}\}$ یک دسته از مجموعه‌های بسته با اشتراک تهی است. ولی اشتراک هر زیردستهٔ باپایان آن غیرتهی است.

مثال زیر نشان می دهد شرط بسته بودن مجموعه‌ها در قضیهٔ ۶ ضروری است.

مثال ۱۸ : مجموعهٔ $[\circ, \text{۱}]$ بنا به قضیهٔ هاینه و برل، فشرده است، در حالی که دستهٔ $\{]\circ, \frac{\text{۱}}{n}[\}$، $n \in \mathcal{N}$، یک دسته با خاصیت اشتراک باپایان در آن است که اشتراک تهی دارد.

قضیهٔ ۹ : **(قضیهٔ تیکونوف)** فرض کنید (X_i, T_i)، $\text{۱} \leq i \leq n$، یک دسته از فضاهای توپولوژیکی و $X = \prod_{i=\text{۱}}^{n} X_i$ مجهز به توپولوژی حاصل‌ضرب باشند. در این صورت X فشرده است اگر و فقط اگر به ازای هر i، X_i فشرده باشد.

اثبات: بدیهی است که اگر $X = \prod_{i=\text{۱}}^{n} X_i$ فشرده باشد، آنگاه به ازای هر j، X_j فشرده است. زیرا نگاشت $\prod_j : \prod X_i \to X_j$ به ازای هر j پیوسته و پوشا است.

کافی است عکس قضیه را برای حاصل‌ضرب دو فضا ثابت کنیم. لذا فرض کنید $X = Y \times Z$، Y و Z فشرده باشند و فرض کنید دستهٔ $S = \{U_\alpha \times V_\beta\}$ پوشش باز X باشد پس دستهٔ $\{U_\alpha\}$ پوشش باز Y و $\{V_\beta\}$ پوشش باز Z است که با توجه به فشردگی Y و Z هرکدام زیرپوشش باپایان دارند. آنها را $\{U_{\alpha_i} : \text{۱} \leq i \leq k\}$ و $\{V_{\beta_j} : \text{۱} \leq j \leq m\}$ بنامید. در این صورت $\{U_{\alpha_i} \times V_{\beta_j}\}$ زیرپوشش باپایان مورد نظر است.

□

قضیهٔ تیکونوف برای هر دستهٔ دلخواه از فضاهای توپولوژیک اعم از دستهٔ شمارش‌پذیر و یا شمارش‌ناپذیر درست است ولی اثبات آن نیاز به اصل انتخاب و لم زورن دارد. خواننده می‌تواند در این زمینه به کتاب‌های توپولوژی عمومی مراجعه کند.

تعمیم قضیهٔ تیکونوف: فضای توپولوژیکی $X = \prod X_\alpha$ فشرده است اگر و فقط اگر به ازای هر α، X_α فشرده باشد.

تمرین

۱. فرض کنید $T^* \subseteq T$ دو توپولوژی روی مجموعهٔ X باشند. ثابت کنید اگر (X, T) فشرده باشد، آنگاه (X, T^*) نیز فشرده است. نشان دهید عکس این مطلب درست نیست.

۲. مستقیماً با ارائه یک پوشش باز، نشان دهید در فضای توپولوژیکی $\mathcal{R}$، مجموعهٔ $]\circ, \text{۱}[$ فشرده نیست و از آن نتیجه بگیرید زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ فشرده لزوماً فشرده نیست.

۳. ثابت کنید در $\mathcal{R}^n$، یک مجموعه فشرده است اگر و فقط اگر بسته و کراندار باشد.

۴. ثابت کنید اجتماع باپایان از مجموعه‌های فشرده، فشرده است. آیا اجتماع بی‌پایان از مجموعه‌های فشرده، نیز فشرده است؟

۵. با ذکر یک مثال نشان دهید اشتراک مجموعه‌های فشرده لزوماً فشرده نیست. (بعداً خواهیم دید که این مطلب در فضاهای هاسدورف برقرار است)

۶. ثابت کنید اشتراک هر دستهٔ دلخواه از مجموعه‌های بسته و فشرده، فشرده است.

۷. فرض کنید (X, T) یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$ باشد. آیا فشردگی $\overline{A}$، فشردگی A را نتیجه می‌دهد. آیا فشردگی A، فشردگی $\overline{A}$ را نتیجه می‌دهد.

۸. ثابت کنید مجموعهٔ کانتور فشرده است.

۹. ثابت کنید اگر در یک فضای توپولوژیک، E فشرده و F بسته باشد، آنگاه $E \cap F$ فشرده است.

۱۰. فرض کنید $Y \subseteq X$، Y بسته و X چنان باشد که هر مجموعهٔ بی‌پایان در آن دارای نقطهٔ تجمع است. نشان دهید Y نیز به عنوان زیرفضای X دارای این خاصیت است.

۱۱. نشان دهید توابع پیوسته و حقیقی روی فضاهای فشرده، کراندارند.

۱۲. نشان دهید توابع پیوسته و حقیقی روی فضاهای فشرده، ماکزیمم و مینیمم خود را اتخاذ می‌کنند. به این مفهوم که اگر $a = \inf\{f(x) : x \in X\}$ و $b = \sup\{f(x) : x \in X\}$ و X فضای توپولوژیک فشرده‌ای باشد که f بر آن تعریف شده است، آنگاه $x_۱$ و $x_۲$ در X موجودند به طوری که $f(x_۱) = a$ و $f(x_۲) = b$.

۱۳. فرض کنید Y فشرده، $x \in X$ و W یک مجموعهٔ باز در $X \times Y$ حول $\{x\} \times Y$ باشد. نشان دهید مجموعهٔ باز U حول x در X موجود است به طوری که $U \times Y \subseteq W$ (این به **لم لوله** معروف است). با ارائه یک مثال نشان دهید اگر Y فشرده نباشد لم لوله لزوماً برقرار نیست.

۱۴. (تعمیم لم لوله) فرض کنید $A \subseteq X$، $B \subseteq Y$ و W یک مجموعهٔ باز در $X \times Y$ شامل $A \times B$ باشد. نشان دهید:

الف- اگر B فشرده باشد، آنگاه مجموعهٔ باز U در X موجود است به طوری که $A \times B \subseteq U \times B \subseteq W$.

ب- اگر A و B هر دو فشرده باشند، آنگاه مجموعه‌های باز U در X و V در Y موجود است به طوری که $A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$.

۱۵. ثابت کنید تابع $\prod_2 : X \times Y \to Y$ بسته است اگر X فشرده باشد.

۱۶. یک تابع را **تابع سره** می‌گوییم اگر تصویر معکوس هر مجموعهٔ فشرده، یک مجموعهٔ فشرده باشد. نشان دهید اگر یک تابع بسته وتصویر معکوس هر نقطه، مجموعه‌ای فشرده باشد، آنگاه آن تابع، یک تابع سره است.

۱۷. ثابت کنید تابع $\prod_2 : X \times Y \to Y$ سره است اگر X فشرده باشد.

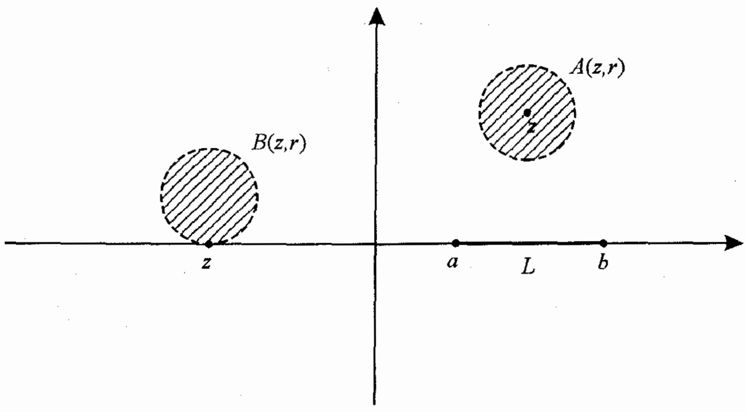
۱۸. ثابت کنید یک مجموعهٔ بی‌پایان با توپولوژی مکمل شمارش‌پذیر فشرده نیست.

۱۹. ثابت کنید اگر فضای توپولوژیکی شعاع راست دارای کوچک‌ترین عضو باشد، آنگاه فشرده است.

۲۰. کدام مجموعه‌ها در فضای توپولوژیک شعاع راست، فشرده و کدام غیرفشرده هستند؟

۲۱. نشان دهید بستار هر مجموعه در مجموعه اعداد حقیقی با توپولوژی طرد، فشرده است.

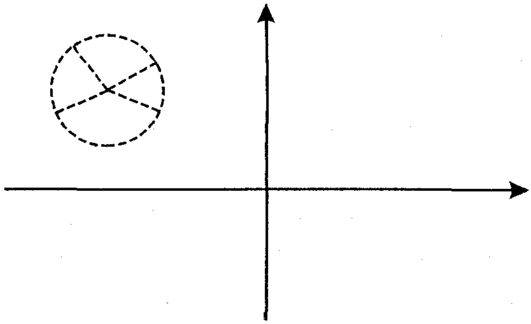
۲۲. فرض کنید $X = \{(x, y) : y \geq 0\}$ صفحهٔ مور باشد (به بخش ۲.۳ مراجعه کنید). مجموعه‌های $A(z, r)$، $B(z, r)$ و L در شکل (۱۳) نشان داده شده است.



شکل ۱۳

کدامیک از مجموعه‌های زیر در این فضای توپولوژیک، فشرده هستند؟

$\overline{B(z, r)}$, $\overline{A(z, r)}$, $L = \{(x, y) : a \leq x \leq b$ و $y = 0\}$



شکل ۱۴

۲۳. فرض کنید $X = \mathcal{R}^2$ و توپولوژی X به وسیلهٔ گوی‌های بازی که از آن تعداد باپایان شعاع باز، حذف شده است، ایجاد شده باشد (شکل ۱۴). این صفحهٔ توپولوژیکی، به **صفحهٔ شکافته‌شدهٔ باپایان** معروف است.

ثابت کنید در این فضا، مجموعه‌های فشرده، بسته هستند. آیا عکس این مطلب نیز درست است؟

۵.۲ فشرده موضعی

بعضی از فضاهای توپولوژیکی در حالت کلی دارای برخی از خواص نیستند. اما آن خواص را به طور موضعی دارا می‌باشند، مثلاً دیدیم فضای توپولوژیکی $\mathcal{R}$ با توپولوژی معمولی فشرده نیست. در اینجا نشان می‌دهیم این فضا، خاصیت فشردگی را به طور موضعی دارا است.

تعریف: یک فضای توپولوژیکی را **فشردهٔ موضعی** و یا **موضعاً فشرده** می‌گوییم اگر و فقط اگر حول هر نقطه مجموعهٔ باز با بستار فشرده وجود داشته باشد.

مثال ۱۹ : فضای توپولوژیکی $\mathcal{R}$ با توپولوژی معمولی فشردهٔ موضعی است. زیرا هر نقطه $p \in \mathcal{R}$، در مجموعهٔ بازی به صورت $]p-\delta, p+\delta[$ قرار دارد که بستار آن، یعنی $[p-\delta, p+\delta]$، فشرده است.

مثال ۲۰ : مجموعه اعداد حقیقی با توپولوژی شعاع راست، فشردهٔ موضعی نیست. زیرا برای هر $p \in \mathcal{R}$، مجموعهٔ باز حول p به صورت $]p-\varepsilon, \infty[$، $\varepsilon > 0$، است که بستار آن برابر با $\mathcal{R}$ و در نتیجه در $\mathcal{R}$ فشرده نیست. (به مثال ۱۷ توجه کنید.)

مثال ۲۱: فضای $\mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ موضعاً فشرده نیست زیرا مجموعه‌های باز در آن به صورت $V = \prod V_i$ است که $V_i = \mathcal{R}$ بجز برای تعداد باپایان اندیس. از طرفی $\overline{V} = \prod \overline{V_i}$ لذا اگر $\overline{V}$ فشرده باشد بنا به قضیهٔ تیکونوف باید همهٔ $\overline{V_i}$ فشرده باشد خصوصاً باید فضای $\mathcal{R}$ نیز فشرده باشد که تناقض است.

مثال ۲۲: مجموعهٔ $\mathcal{Q}$ در $\mathcal{R}$ با توپولوژی معمولی، فشردهٔ موضعی نیست. زیرا مجموعه‌های باز در زیرفضای $\mathcal{Q}$، با توجه به تعریف توپولوژی نسبی به صورت $]p-\delta, p+\delta[\, \cap \mathcal{Q}$ است و بستار آن یعنی $[p-\delta, p+\delta] \,\cap\, \mathcal{Q}$ در این فضای توپولوژیکی فشرده نیست (زیرا این مجموعه در $\mathcal{R}$ فشرده نیست). بنابراین فضاهای فشردهٔ موضعی لزوماً دارای زیرفضای با این خاصیت نیستند. به طور مشابه مجموعه اعداد اصم نیز با توپولوژی معمولی نسبی، فشردهٔ موضعی نیست.

قضیهٔ ۱۰: هر فضای فشرده، فشردهٔ موضعی است.

اثبات: زیرا برای هر $x \in X$ خود مجموعهٔ X، مجموعهٔ بازی است که بستار آن $X = \overline{X}$، فشرده است.

□

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که موضعاًفشردگی یک خاصیت توپولوژیکی است.

قضیهٔ ۱۱: اگر f یک همسانریختی از فضای موضعاً فشردهٔ (X, T) به فضای (X^*, T^*) باشد، آنگاه فضای (X^*, T^*) نیز فشردهٔ موضعی است.

اثبات: فرض کنید $y \in X^*$. از پوشا بودن تابع f نقطهٔ $x \in X$ موجود است به طوری که $f(x) = y$. از این‌که فضای X فشردهٔ موضعی است مجموعهٔ باز U حول x با بستار فشرده موجود است. چون f یک تابع باز است $f(U)$ یک مجموعهٔ باز در فضای X^* است و به علاوه $y = f(x) \in f(U)$. از همسانریختی f، $f(\overline{U})$ و از پیوستگی f، $\overline{f(U)} = f(\overline{U})$ فشرده است. بنابراین $\overline{f(U)}$ فشرده است. لذا $f(U)$ یک مجموعهٔ باز با بستار فشرده است. پس فضای (X^*, T^*) فشردهٔ موضعی است.

□

قضیهٔ ۱۲: فضای $\prod X_\alpha$ موضعاً فشرده است اگر و فقط اگر هر X_α موضعاً فشرده بوده و به علاوه همه بجز تعداد باپایان از X_α ها فشرده باشند.

اثبات: نقطهٔ $x \in \prod X_\alpha$ را در نظر بگیرید و فرض کنید β_1، β_2، ... ، β_n چنان باشند که به ازای آنها X_{β_i} فشرده نیست. از فشردگی موضعی X_α، $\alpha = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$، و با توجه به این‌که $\prod_\alpha(x) \in X_\alpha$، مجموعهٔ باز V_α حول $\prod_\alpha(x)$ با بستار فشرده در X_α موجود است. بگیرید

$U = \prod W_\alpha$ که در آن $W_\alpha = X_\alpha$ اگر $\alpha \neq \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$، و $W_\alpha = V_\alpha$ اگر $a = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$. در این صورت U، یک مجموعهٔ باز حول x در فضای حاصل‌ضرب است و به علاوه $\overline{U} = \overline{\prod W_\alpha} = \prod \overline{W}_\alpha$ و چون حاصل‌ضرب فشرده‌ها، فشرده است نتیجه می‌گیریم $\overline{U}$ فشرده است. یعنی فضای حاصل‌ضرب موضعاً فشرده است.

بالعکس، فرض کنید $\prod X_\alpha$ موضعاً فشرده و $x_\beta \in X_\beta$ باشد. نقاط $x_\alpha \in X_\alpha$، $\alpha \neq \beta$، را به دلخواه اختیار کنید. چون $\prod X_\alpha$ موضعاً فشرده است مجموعهٔ باز U حول $x = (x_\alpha)$ موجود است که بستار آن فشرده می‌باشد. از طرفی هر مجموعهٔ باز شامل یک عنصر پایه به صورت $V = \prod V_\alpha$ حول $x = (x_\alpha)$، که در آن $V_\alpha = X_\alpha$ بجز برای تعداد باپایان اندیس، می‌باشد. پس $V = \prod V_\alpha \subseteq U$، بنابراین $\overline{V} = \overline{\prod V_\alpha} = \prod \overline{V}_\alpha \subseteq \overline{U}$. چون $\overline{U}$ فشرده و $\prod \overline{V}_\alpha$ بسته است بنابراین $\prod \overline{V}_\alpha$ فشرده و در نتیجه بنا به تعمیم قضیهٔ تیکونوف $\overline{V}_\alpha$ به ازای هر α فشرده است خصوصاً $\overline{V}_\beta$ فشرده و در نتیجه X_β فشردهٔ موضعی است به علاوه چون $\overline{V}_\alpha = X_\alpha$ بجز تعداد باپایان اندیس، لذا همهٔ X_α ها، بجز برای تعداد باپایان از آنها، فشرده هستند.

□

نتیجهٔ ۱۳ : حاصل‌ضرب تعداد باپایان فضا، موضعاً فشرده است اگر و فقط اگر هر فضا موضعاً فشرده باشد.

□

نتیجهٔ ۱۴ : فضای $\mathcal{R}^n$ موضعاً فشرده است.

□

تمرین

تمرین‌های ۱ ، ۲، ۳ و ۴ تعریف‌های معادل برای فشردهٔ موضعی است.

۱. ثابت کنید فضای توپولوژیکی (X, T) فشردهٔ موضعی است اگر و فقط اگر حول هر نقطه از فضا یک همسایگی با بستار فشرده موجود باشد. (یک **همسایگی** حول یک نقطه زیرمجموعه‌ای از فضا است که شامل یک مجموعهٔ باز حول آن نقطه است.)

۲. ثابت کنید فضای توپولوژیکی (X, T) فشردهٔ موضعی است اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$ و هر مجموعهٔ باز $U \in T$ شامل x، مجموعهٔ باز V با بستار فشرده حول x موجود است به طوری که $x \in V \subseteq U$.

۳. ثابت کنید فضای توپولوژیکی (X, T) فشردهٔ موضعی است اگر و فقط اگر X دارای یک پایهٔ توپولوژی که بستار آن فشرده است باشد.

۴. ثابت کنید فضای توپولوژیکی (X, T) فشردهٔ موضعی است اگر و فقط اگر برای هر مجموعهٔ فشردهٔ C و هر مجموعهٔ باز U که $C \subseteq U$، مجموعهٔ باز V با بستار فشرده موجود باشد به طوری که $C \subseteq V \subseteq U$.

۵. نشان دهید فضاهای گسسته و ناگسسته، موضعاً فشرده هستند.

۶. نشان دهید مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی حد پایین، فشردهٔ موضعی نیست.

۷. در فشردگی موضعی X با توپولوژی جذب، بحث کنید.

۸. ثابت کنید صفحهٔ مور (تمرین ۹ بخش ۲.۳) فشردهٔ موضعی نیست.

۹. ثابت کنید صفحهٔ شکافته‌شده باپایان (تمرین ۲۳ بخش ۵.۱) فشردهٔ موضعی نیست.

۱۰. آیا اجتماع دو مجموعهٔ موضعاً فشرده، موضعاً فشرده است؟ اشتراک دو مجموعهٔ موضعاً فشرده چطور؟ اشتراک و اجتماع بی‌پایان آنها چطور؟

۱۱. ثابت کنید اگر مجموعهٔ A در فضای موضعاً فشردهٔ (X, T) بسته باشد، آنگاه (A, T_A) موضعاً فشرده است.

۱۲. با ذکر یک مثال نشان دهید تصویر یک مجموعهٔ موضعاً فشرده تحت یک تابع پیوسته لزوماً موضعاً فشرده نیست، حتی اگر شرط باز بودن یا بسته بودن تابع نیز به شرایط اخیر اضافه گردد.

۱۳. ثابت کنید تصویر یک فضای موضعاً فشرده تحت تابع پیوسته و بسته، موضعاً فشرده است اگر تصویر معکوس هر نقطه فشرده باشد.

فصل ۶

همبندی

در این فصل مفهوم همبندی را در فضاهای توپولوژیک بیان و قضایای مربوطه را اثبات می‌کنیم. از نظر صوری، یک *فضای توپولوژیک* همبند یک فضای توپولوژیک یکپارچه است. این خاصیت شاید از ساده‌ترین و مهم‌ترین خواصی باشد که یک فضای توپولوژیک می‌تواند دارا باشد. توابع پیوسته روی این‌گونه فضاها خواص جالبی دارند که در این فصل به آن می‌پردازیم.

۶.۱ همبندی

در این بخش با مفهوم همبندی آشنا می‌شویم. ابتدا به تعاریف زیر توجه کنید.

تعریف: دو مجموعهٔ A و B را **مجزا** می‌گوییم، هرگاه $A \cap B = \phi$.

تعریف: فضای توپولوژیک (X, T) را **فضای همبند** گوییم، هرگاه نتوان دو مجموعهٔ باز، مجزا و غیرتهی A و B چنان یافت که $X = A \cup B$. و آن را **فضای ناهمبند** گوییم هرگاه همبند نباشد.

مثال ۱ : فضای ناگسستهٔ (X, T) همبند است. زیرا تنها مجموعهٔ باز و غیرتهی این فضا X است.

مثال ۲ : فضای گسستهٔ (X, T) که دارای دو عضو یا بیشتر است، ناهمبند است. زیرا اگر $x, y \in X$ را اختیار کنیم، دو مجموعهٔ باز و غیرتهی $A = \{x\}$ و $B = X \setminus \{x\}$ وجود دارند به طوری که $X = A \cup B$ و $A \cap B = \phi$.

مثال ۳ : فضای جذب A، همبند است زیرا هر مجموعهٔ باز در این فضای توپولوژیکی شامل A است لذا دو مجموعهٔ باز مجزا در این فضا موجود نیست.

مثال ۴: فضای طرد A، همبند است. زیرا هر مجموعهٔ باز در این فضا با A اشتراک تهی دارد لذا هیچ دو مجموعهٔ باز موجود نیست که اجتماعشان برابر کل فضا باشد.

مثال ۵: مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی حد پایینی ناهمبند است. زیرا $A = \cup_n[\circ, n[$ و $B = \cup_n[-n, \circ[$ دو مجموعهٔ باز، غیرتهی و مجزا هستند که اجتماعشان، مجموعهٔ اعداد حقیقی را می‌سازد.

مثال ۶: فضای $X = \{\frac{۱}{n} : n \in N\} \cup \{\circ\}$ ناهمبند است زیرا $A = \{۱\}$ و $B = \{\frac{۱}{n} : n \geq ۲\} \cup \{\circ\}$ دو مجموعهٔ باز، غیرتهی و مجزا هستند که اجتماعشان مساوی X است.

اکنون در رابطه با کاربرد مفهوم همبندی در فضاهای توپولوژیکی، نتایج را به صورت قضیه درمی‌آوریم.

قضیهٔ ۱ : در فضای توپولوژیکی (X, T) عبارات زیر معادل هستند.

الف ـ مجموعهٔ X همبند است.

ب ـ دو مجموعهٔ مجزا، بسته و غیرتهی موجود نیست که اجتماع آنها برابر X شود.

پ ـ تنها مجموعه‌هایی که در فضای توپولوژیکی (X, T) هم باز و هم بسته هستند، مجموعه‌های X و ϕ هستند.

ت ـ به ازای هر زیرمجموعه غیرتهی A از X، $b(A) \neq \phi$.

اثبات:

(الف) $\Leftarrow$ (ب)

فرض کنید X برابر اجتماع دو مجموعهٔ بسته، مجزا و غیرتهی باشد. یعنی مجموعه‌های بسته، مجزا و غیرتهی A و B موجود باشند به طوری که $A \cup B = X$. در این صورت دو مجموعهٔ $B = X \backslash A$ و $A = X \backslash B$ دو مجموعهٔ باز، مجزا و غیرتهی هستند که اجتماعشان برابر X است و این خلاف همبند بودن X است.

(ب) $\Leftarrow$ (پ)

فرض کنید $A \subset X$، $A \neq X$ و $A \neq \phi$ هم باز و هم بسته باشد. در این صورت $B = X \backslash A$ غیرتهی و بسته است و به علاوه $X = A \cup B$ که خلاف (ب) است. بنابراین تنها مجموعه‌ای که هم باز و هم بسته است X و ϕ می‌باشد.

(پ) $\Leftarrow$ (ت)

فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ غیرتهی از X چنان باشد که $b(A) = \phi$. می‌دانیم $\overline{A} = A^\circ \cup b(A)$. پس $\overline{A} = A^\circ$. از طرفی می‌دانیم $A^\circ \subseteq A$ و $A \subseteq \overline{A}$، لذا

$\overline{A} = A^\circ = A$. نتیجتاً، A در فضای (X, T) هم باز و هم بسته است که خلاف (پ) می‌باشد. بنابراین برای هر $A \subset X$ در فضای (X, T)، $b(A) \neq \phi$.

(ت) $\Leftarrow$ (الف)

فرض کنیم X ناهمبند است. پس مجموعه‌های باز، غیرتهی و مجزا U و V موجود است به طوری که $X = U \cup V$. بنابراین مجموعه‌های $U = X \backslash V$ و $V = X \backslash U$ هم باز و هم بسته هستند. لذا $\overline{U} = U^\circ = U$. از طرفی $b(U) = \overline{U} \backslash U^\circ$. بنابراین $b(U) = \phi$، که خلاف (ت) است و در نتیجه X همبند است.

□

مثال ۷: مجموعه اعداد حقیقی همبند است. زیرا تنها زیرمجموعه‌ای که در $\mathcal{R}$ هم باز و هم بسته است، $\mathcal{R}$ و ϕ می‌باشد.

تعریف: زیرمجموعهٔ A از فضای توپولوژیک (X, T) را یک **زیرمجموعهٔ همبند** گوییم، اگر A با توپولوژی نسبی T_A همبند باشد.

مثال ۸: بازهٔ $[a, b]$ در فضای توپولوژیک حد پایینی، همبند نیست زیرا اجتماع مجموعه‌های باز، غیرتهی و مجزای $\{b\}$ و $[a, b[$ است.

مثال ۹: بازهٔ $]n, \infty[$ در توپولوژی شعاع راست همبند است. زیرا در غیر این صورت دو مجموعهٔ باز $]m, \infty[$ و $]k, \infty[$ در فضای توپولوژیک شعاع راست موجودند به طوری که:

$$]n, \infty[= (]n, \infty[\cap]m, \infty[) \cup (]n, \infty[\cap]k, \infty[)$$

$$(]n, \infty[\cap]m, \infty[) \cap (]n, \infty[\cap]k, \infty[) = \phi$$

$$]n, \infty[\cap]m, \infty[\neq \phi$$

$$]n, \infty[\cap]k, \infty[\neq \phi$$

بدیهی است که تساوی دوم نمی‌تواند اتفاق بیفتد زیرا

$$(]n, \infty[\cap]m, \infty[) \cap (]n, \infty[\cap]k, \infty[) =]b, \infty[$$

که در آن $b = \max(n, m, k)$.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد همبندی نیز مانند فشردگی یک خاصیت توپولوژیکی است.

قضیهٔ ۲: اگر تابع $f : (X, T) \to (X^*, T^*)$ پیوسته و X همبند باشد، آنگاه $f(X)$ نیز همبند است.

اثبات: فرض می‌کنیم $f(X) \subseteq X^*$ همبند نباشد. بنا به تعریف مجموعه‌های باز U^* و V^* در T^* موجود است به طوری که

$$f(X) \cap U^* \neq \phi$$

$$f(X) \cap V^* \neq \phi$$

$$(f(X) \cap U^*) \cap (f(X) \cap V^*) = \phi$$

$$f(X) = (f(X) \cap U^*) \cup (f(X) \cap V^*)$$

قرار دهید $U = f(X) \cap U^*$ و $V = f(X) \cap V^*$. چون f پیوسته است $f^{-1}(U)$ و $f^{-1}(V)$ در فضای توپولوژیک (X,T) باز هستند. به سهولت می‌توان نشان داد که $f^{-1}(U)$ و $f^{-1}(V)$ غیرتهی و مجزا نیز هستند و به علاوه $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ که با همبندی X متناقض است، لذا $f(X)$ همبند است.

□

مثال ۱۰: هر فاصلهٔ باز مانند $]a,b[$، در $\mathcal{R}$ همبند است. زیرا هر فاصلهٔ باز با $\mathcal{R}$ همسانریخت است.

توجه: تصویر معکوس یک فضای همبند تحت تابع پیوسته لزوماً همبند نیست. زیرا کافی است تابع پیوستهٔ f را از فضای گسستهٔ (X,T) که در آن X بیش از یک عضو دارد به فضای تک‌عضوی (X^*,T^*) در نظر بگیریم.

نتیجهٔ ۳: فضای توپولوژیک (X,T) ناهمبند است اگر و فقط اگر تابع پوشا و پیوستهٔ f از X به فضای گسستهٔ (X^*,T^*)، $X^* = \{a,b\}$، وجود داشته باشد.

اثبات: فرض کنید (X,T) ناهمبند است. نشان می‌دهیم تابع f از X به X^* وجود دارد. چون X ناهمبند است، مجموعه‌های غیرتهی و باز A و B وجود دارند که $A \cap B = \phi$ و $A \cup B = X$. تعریف کنید: $f : X \to X^*$ به طوری که $f(A) = \{a\}$ و $f(B) = \{b\}$. این تابع به وضوح پوشا و بنا به قضیهٔ ۸ فصل ۳ پیوسته است.

بالعکس فرض کنید تابع پوشا و پیوستهٔ $f : X \to X^*$ موجود است. چون X^*، گسسته و دارای ۲ عضو است پس ناهمبند است و بنابراین بنا به قضیهٔ ۲، X باید ناهمبند باشد.

□

نتیجهٔ ۴: فضای توپولوژیک (X,T) همبند است اگر و فقط اگر هر تابع پیوسته از X به یک فضای گسسته، با حداقل دو عضو، ثابت باشد.

اثبات: فرض کنید فضای توپولوژیک (X,T) همبند است و همچنین فرض کنید f تابعی پیوسته از X به فضای گسستهٔ X^* با حداقل دو عضو x و y باشد. قرار دهید $G = f^{-1}\{x\}$ و $H = f^{-1}\{X^*\backslash\{x\}\}$. اگر f تابعی ثابت نباشد، آنگاه G و H دو مجموعهٔ باز، غیرتهی و مجزا در X خواهند بود که اجتماعشان برابر X است و این با همبندی X متناقض است.

بالعکس، اگر X همبند نباشد بنا به نتیجهٔ ۳، تابع پوشا و پیوستهٔ $f : X \to X^*$ موجود است که در آن فضای $X^* = \{a, b\}$ دارای توپولوژی گسسته است. پس تابع f ثابت نیست.

□

تعریف: دو مجموعهٔ $A \subseteq X$ و $B \subseteq X$ را **جدا از هم** گوییم، اگر $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \phi$.

بدیهی است که هر دو مجموعهٔ جدا از هم، مجزا نیز هستند.

تعریف: دو مجموعهٔ $A \subset X$ و $B \subset X$ را **جدایش** مجموعه $E \subseteq X$ می‌گوییم، اگر A و B غیرتهی و جدا از هم بوده و به علاوه اجتماع آنها برابر E شود.

قضیهٔ ۵: فضای (X,T) همبند است اگر و فقط اگر دارای جدایش نباشد.

اثبات: فرض کنید X همبند باشد. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم مجموعه‌های A و B جدایش X باشند. قرار دهید $U = X\backslash\overline{A}$ و $V = X\backslash\overline{B}$. در این صورت U و V دو مجموعهٔ باز و غیرتهی هستند. به علاوه چون $A \subseteq X\backslash\overline{B}$ و $B \subseteq X\backslash\overline{A}$ لذا

$$U \cup V = (X\backslash\overline{A}) \cup (X\backslash\overline{B}) \supseteq B \cup A = X$$
$$U \cap V = (X\backslash\overline{A}) \cap (X\backslash\overline{B}) = X\backslash(\overline{A} \cup \overline{B}) = X\backslash\overline{(A \cup B)} = X\backslash\overline{X} = X\backslash X = \phi$$

و این با همبندی X متناقض است.

بالعکس، فرض می‌کنیم X ناهمبند باشد. در این صورت بنا به تعریف دو مجموعهٔ باز، غیرتهی و مجزای A و B موجود است به طوری که اجتماع آنها برابر X شود. از طرف دیگر باتوجه به باز بودن A و B داریم:

$$A \cap \overline{B} \subseteq \overline{(A \cap B)} = \overline{\phi} = \phi \quad \text{و} \quad \overline{A} \cap B \subseteq \overline{(A \cap B)} = \overline{\phi} = \phi$$

بنابراین مجموعه‌های A و B جدایش X هستند و این یک تناقض است.

□

تذکر: قضیهٔ ۵ برای زیرمجموعه‌های X نیز به صورت شرط لازم و کافی برقرار است.

قضیهٔ ۶: اگر $A \subseteq X$ همبند و مجموعه‌های U و V جدایش فضای توپولوژیک (X,T) باشند، آنگاه $A \subseteq U$ یا $A \subseteq V$.

اثبات: قضیه را از طریق برهان خلف ثابت می‌کنیم. اگر A کاملاً در داخل U و یا کاملاً در داخل V قرار نگیرد، پس باید $A \cap U \neq \phi$ و $A \cap V \neq \phi$. در این صورت $A \cap U$ و $A \cap V$ دو مجموعهٔ غیرتهی در فضای توپولوژیک (A, T_A) هستند که:

$$(A \cap U) \cup (A \cap V) = A \cap (U \cup V) = A \cap X = A$$

$$(\overline{A \cap U}) \cap (A \cap V) \subseteq (\overline{A} \cap \overline{U}) \cap (A \cap V) = (\overline{A} \cap A) \cap (\overline{U} \cap V) = A \cap \phi = \phi$$

به روش مشابه

$$(A \cap U) \cap (\overline{A \cap V}) = \phi$$

پس مجموعه‌های $A \cap U$ و $A \cap V$ جدایش فضای توپولوژیک (A, T_A) هستند. بنابراین (A, T_A) ناهمبند است که خلاف فرض است.

□

قضیهٔ ۷: فرض کنید A و E دو زیرمجموعه از فضای توپولوژیک (X,T) چنان باشند که $A \subseteq E \subseteq \overline{A}$. اگر A همبند باشد، آنگاه E نیز همبند است.

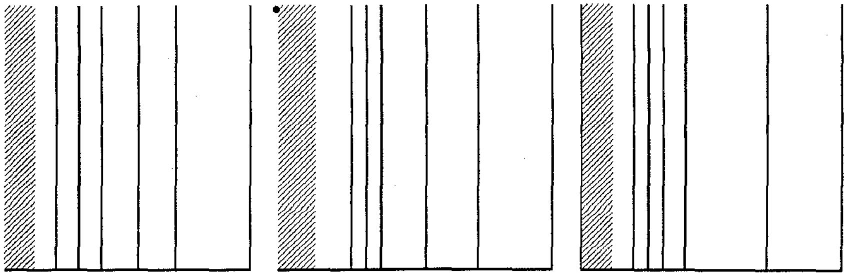
اثبات: فرض کنید E ناهمبند باشد. بنا به قضیهٔ ۵، مجموعه‌های غیرتهی و جدا از هم H و G در T_E وجود دارند که اجتماعشان برابر E است. لذا $A \subseteq E = G \cup H$. از طرفی بنا به فرض A همبند است، پس بنا به قضیهٔ ۶ باید $A \subseteq H$ و یا $A \subseteq G$. فرض کنید $A \subseteq G$، در این صورت $\overline{A} \subseteq \overline{G}$ و از آنجا داریم: $\overline{A} \cap H \subseteq \overline{G} \cap H = \phi$. از طرف دیگر می‌دانیم $H \subseteq E \subseteq \overline{A}$. بنابراین $H = \overline{A} \cap H = \phi$ که با غیرتهی بودن H متناقض است.

□

نتیجهٔ ۸: اگر در فضای توپولوژیک (X,T) مجموعهٔ $A \subseteq X$ همبند باشد، آنگاه مجموعهٔ $\overline{A}$ نیز همبند است.

□

مثال ۱۱: با توجه به قضیهٔ ۷ و نتیجهٔ ۸، بازه‌های $[a,b[$، $]a,b]$ و $[a,b]$ همگی همبند هستند



فضای Y فضای شانه محذوف X فضای شانه $\overline{Y}$

شکل ۱۵

زیرا بنا به مثال ۱۰، $]a,b[$ همبند است لذا بستار آن یعنی $[a,b]$ نیز همبند است و به علاوه چون $]a,b[\subseteq [a,b[\subseteq \overline{]a,b[} = [a,b]$، لذا $[a,b[$ نیز همبند است. در مورد $]a,b]$ نیز بحث مشابه است. در تمرینات خواهیم دید عکس این مطلب نیز درست است. یعنی هر مجموعهٔ همبند در $\mathcal{R}$ به صورت یک بازه است.

مثال ۱۲: فضای $X = \cup_{n\geq 1}(\{\frac{1}{n}\} \times I) \cup (I \times \{0\}) \cup \{(0,1)\}$ که در آن $I = [0,1]$، همبند است (شکل ۱۵). این فضا به **فضای شانه محذوف** موسوم است. اگر فرض کنیم $Y = \cup_{n\geq 1}(\{\frac{1}{n}\} \times I) \cup (I \times \{0\})$، آنگاه $Y \subseteq X \subseteq \overline{Y}$، که در آن $\overline{Y} = \cup_{n\geq 1}(\{\frac{1}{n}\} \times I) \cup (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I)$. بسهولت می‌توان دید Y همبند است. به علاوه بنا به نتیجهٔ ۸، فضای $\overline{Y}$ که به **فضای شانه معروف** است نیز همبند می‌باشد.

قضیهٔ ۹: فرض کنید (X, T) فضای توپولوژیک و $\{Y_\alpha\}$، $\alpha \in A$، یک دسته از زیرمجموعه‌های غیرتهی و همبند X باشد. اگر $X = \cup_\alpha Y_\alpha$ و Y_α ها دو به دو دارای اشتراک غیرتهی باشند، آنگاه X همبند است.

اثبات: با توجه به نتیجهٔ ۴ کافی است نشان دهیم هر تابع پیوسته از X به یک فضای گسسته با حداقل دو عضو، ثابت است. لذا فرض کنید $f : X \to X^*$ تابعی پیوسته، X^* یک فضای گسسته با حداقل دو عضو باشد. دو نقطهٔ مجزای $p \in X = \cup_\alpha Y_\alpha$ و $q \in X = \cup_a Y_\alpha$ را چنان اختیار کنید که $p \in Y_\gamma$ و $q \in Y_\beta$. چون $Y_\gamma \cap Y_\beta \neq \phi$، لذا $r \in Y_\gamma \cap Y_\beta$. از طرفی Y_α ها همبند هستند پس $f|Y_\gamma$ و $f|Y_\beta$ ثابت است، یعنی $f(p) = f(r) = f(q)$. پس f ثابت است. لازم به ذکر است که اگر f پیوسته باشد، آنگاه تحدید آن به هر Y_α نسبت به توپولوژی‌های نسبی پیوسته است.

$\square$

نتیجهٔ ۱۰ : اگر $X = \cup_\alpha Y_\alpha$ و Y_α ها یک دسته از زیرمجموعه‌های همبند X و $\cap_\alpha Y_\alpha \neq \phi$، آنگاه X همبند است.

اثبات: چون $\cap_\alpha Y_\alpha \neq \phi$، لذا اشتراک دو به دو آنها نیز غیرتهی است و حکم از قضیهٔ ۹ حاصل می‌شود.

□

نتیجهٔ ۱۱ : اگر $X = \cup_{n\in\mathcal{N}} A_n$، A_n همبند و برای $n \geq ۲$، $A_n \cap A_{n-۱} \neq \phi$، آنگاه X همبند است.

اثبات: فرض کنید $X_n = A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n$. بدیهی است $X = \cup X_n$. حال نشان می‌دهیم $\cap X_n \neq \phi$ و هر X_n همبند است. برای اثبات همبندی X_n از استقراء استفاده می‌کنیم. برای $k = ۱$، $X_۱ = A_۱$ و $A_۱$ همبند است. فرض کنید $X_{n-۱}$ همبند باشد. برای $k = n$ داریم $X_n = X_{n-۱} \cup A_n$ و به علاوه

$$X_{n-۱} \cap A_n = (A_۱ \cup \cdots \cup A_{n-۱}) \cap A_n = (A_۱ \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_{n-۱} \cap A_n) \neq \phi$$

زیرا $A_{n-۱} \cap A_n \neq \phi$. لذا بنا به قضیهٔ ۹، X_n همبند است.

از طرف دیگر برای هر n، $A_۱ \subseteq X_n$. لذا $\cap X_n \neq \phi$. و حکم از نتیجهٔ ۱۰ ثابت می‌شود.

□

مثال ۱۳ : مجموعهٔ $\mathcal{R}$ با توپولوژی شعاع راست همبند است. زیرا اگر، برای $n \in \mathcal{N}$، قرار دهیم $A_n =]-n, \infty[$، آنگاه شرایط نتیجهٔ ۱۱ فراهم است.

قضیهٔ ۱۲ : حاصل‌ضرب دو فضای توپولوژیک (X, T) و (Y, T^*) همبند است اگر و فقط اگر فضاهای توپولوژیک (X, T) و (Y, T^*) همبند باشند.

اثبات: ابتدا فرض کنید فضای $X \times Y$ همبند باشد چون توابع تصویر $\prod_۱ : X \times Y \to X$ و $\prod_۲ : X \times Y \to Y$ پیوسته و پوشا هستند، لذا X و Y هر دو همبندند.

برای اثبات عکس قضیه ابتدا توجه کنید برای هر $a \in X$ و هر $b \in Y$ مجموعه‌های $\{a\} \times Y$ و $X \times \{b\}$ به ترتیب با فضاهای Y و X همسانریخت هستند، بنابراین همبندند. حال اگر $y \in Y$ را ثابت در نظر بگیرید و برای هر $a \in X$ قرار دهید $A_a = (\{a\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$. پس A_a همبند است زیرا اجتماع دو مجموعهٔ همبند است که با هم اشتراک غیرتهی دارند. از طرفی $X = \cup_{a\in X} A_a$ و $X \times \{y\} \subseteq \cap A_a$، لذا بنا به قضیهٔ ۱۰، $X \times Y$ همبند است.

□

نتیجهٔ ۱۳ : حاصل‌ضرب یک دستهٔ باپایان از فضاهای توپولوژیک، همبند است اگر و فقط اگر هر فضا همبند باشد.

□

نتیجهٔ اخیر برای یک دستهٔ دلخواه از فضاهای توپولوژیک نیز درست است. قضیهٔ زیر به بیان و اثبات این مطلب می‌پردازد.

قضیهٔ ۱۴ : فرض کنید $\{X_\alpha\}$ یک دسته از فضاهای توپولوژیک باشند، در این صورت $\prod X_\alpha$ همبند است اگر و فقط اگر به ازای هر α، X_α همبند باشد.

اثبات: اگر $\prod X_\alpha$ همبند باشد، آنگاه X_α همبند است. زیرا تابع تصویر $\prod_\alpha : \prod_\alpha X_\alpha \to X_\alpha$ پیوسته و پوشا است.

بالعکس، فرض کنید به ازای هر α، X_α همبند باشد. نقطهٔ $a = (a_\alpha) \in \prod X_\alpha$ را در نظر بگیرید و فرض کنید مجموعهٔ E مجموعهٔ همهٔ نقاطی از $\prod X_\alpha$ باشد که با a در یک مجموعهٔ همبند قرار می‌گیرد. در این صورت E همبند و در نتیجه بنا به نتیجهٔ ۸، $\overline{E}$ نیز همبند است. ثابت می‌کنیم $\overline{E} = \prod X_\alpha$.

فرض کنید $b = (b_\alpha) \in \prod X_\alpha$ و $U = \prod_{\alpha_۱}^{-۱}(U_{\alpha_۱}) \cap \cdots \cap \prod_{\alpha_n}^{-۱}(U_{\alpha_n})$ یک عنصر پایه در فضای حاصل‌ضرب حول نقطهٔ $b \in \prod X_\alpha$ است. تعریف کنید:

$$E_۱ = \{c \in \prod X_\alpha : \text{دلخواه بوده ولی بقیه } c_\alpha \text{ ها با } a_\alpha \text{ ها برابر باشد } c_{\alpha_۱}\}$$

$$E_۲ = \{c \in \prod X_\alpha : c_{\alpha_۱} = b_{\alpha_۱} \text{ و } c_{\alpha_۲} \text{ دلخواه بوده ولی بقیه } c_\alpha \text{ ها با } a_\alpha \text{ ها برابر باشد}\}$$

$$\vdots$$

$$E_n = \{c \in \prod X_\alpha : c_{\alpha_k} = b_{\alpha_k} \text{ و } c_{\alpha_n} \text{ دلخواه بوده ولی بقیه } c_\alpha \text{ ها با } a_\alpha \text{ ها برابر باشد}, \; k = ۱, ۲, \cdots, n-۱\}$$

در این صورت E_k با X_{α_k} همسانریخت بوده و در نتیجه همبند است. به علاوه $E_k \cap E_{k+۱} \neq \phi$، برای $k = ۱, ۲, \cdots, n-۱$، بنابراین $\cup_{k=۱}^n E_k$ همبند است. از طرفی $a \in E_۱$، پس $a \in \cup_{k=۱}^n E_k$ و چون $\cup_{k=۱}^n E_k$ همبند نیز است، پس $\cup_{k=۱}^n E_k \subseteq E$. زیرا E بزرگترین مجموعهٔ همبند شامل a است. حال تعریف کنید:

$$y_a = \begin{cases} b_{\alpha_i} & \alpha = \alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_n \text{ اگر} \\ a_\alpha & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت $y = (y_\alpha) \in E_n \cap U$. پس $E_n \cap U \neq \phi$ و در نتیجه $E \cap U \neq \phi$ یعنی $b \in \overline{E}$.

□

تذکر: اگر $\{X_\alpha\}$ یک دسته از فضاهای توپولوژیک همبند باشد در این صورت $\prod X_\alpha$ با توپولوژی جعبه‌ای لزوماً همبند نیست. برای بررسی درستی این ادعا به تمرین ۵ مراجعه کنید.

تمرین

۱. فضای توپولوژیک (X, T) را که در آن $X = \{a, b, c, d, e\}$ و $T = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ در نظر می‌گیریم. نشان دهید این فضا ناهمبند است.

۲. فضاهای توپولوژیک (X, T) و (X, T^*) را در نظر می‌گیریم. نشان دهید اگر فضای (X, T) همبند و $T^* \subseteq T$ باشد، آنگاه فضای (X, T^*) نیز همبند است.

۳. فرض کنید Y و Z زیرفضای (X, T) و $Z \subseteq Y \subseteq X$. نشان دهید Z در Y همبند است اگر و فقط اگر Z در X همبند باشد.

۴. نشان دهید اگر یک زیرمجموعه در $\mathcal{R}$ با توپولوژی معمولی همبند باشد، آنگاه به صورت یک بازه است و از آن نتیجه بگیرید $\mathcal{R}\backslash\{a\}$، $a \in \mathcal{R}$، همبند نیست. آیا $\mathcal{R}^۲\backslash\{(a, b)\}$ همبند است؟ آیا فضاهای $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}^۲$ می‌توانند همسانریخت باشند؟

۵. نشان دهید $\mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ با توپولوژی جعبه‌ای همبند نیست.

۶. نشان دهید تصویر یک فضای توپولوژیک همبند تحت یک تابع حقیقی و پیوسته، یک بازه است.

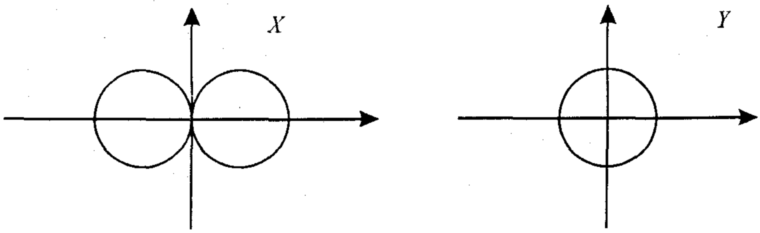
۷. فرض کنید $f : [a, b] \to \mathcal{R}$ پیوسته باشد. ثابت کنید برای هر y، $f(a) < y < f(b)$، نقطهٔ $x \in (a, b)$ موجود است به طوری که $f(x) = y$. (این به **قضیهٔ مقدار میانی** معروف است.)

۸. با استفاده از مفهوم همبندی ثابت کنید:

الف_ اگر $I = [۰, ۱]$ و $f : I \to I$ پیوسته باشد، آنگاه نقطهٔ $p \in I$ موجود است به طوری که $f(p) = p$. آیا اگر به جای I از بازه‌های $]۰, ۱]$، $]۰, ۱[$ یا $[۰, ۱[$ استفاده کنیم حکم لزوماً برقرار است؟

ب_ اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ فرد باشد، آنگاه معادلهٔ $p(x) = ۰$ حداقل دارای یک ریشه است.

پ_ بازه‌های $[a, b]$، $[a, b[$ و $]a, b[$ هیچکدام با هم همسانریخت نیستند.



شکل ۱۶

۹. ثابت کنید دو زیرفضای زیر همسانریخت نیستند (شکل ۱۶).

$$X = \{(x,y) : \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 1 \text{ یا } \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 1\}$$

$$Y = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

۱۰. ثابت کنید نمودار یک تابع پیوسته بر یک بازه، زیرفضایی همبند است.

۱۱. به دو طریق نشان دهید هر مجموعهٔ بی‌پایان با توپولوژی مکمل باپایان، همبند است.

الف- از تعریف

ب- از قضیهٔ ۱ قسمت ت

۱۲. نشان دهید صفحهٔ شعاعی همبند است (به تمرین ۱۰ بخش ۲.۴ مراجعه کنید).

۱۳. نشان دهید صفحهٔ شکافته‌شده باپایان، همبند است (به تمرین ۲۳ بخش ۵.۱ مراجعه کنید).

۱۴. نشان دهید فضای $Y = \{(x,y) : y = \sin \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,0)\}$ همبند است.

۱۵. نشان دهید هیچ زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیری، با حداقل دو عضو، در $\mathcal{R}$، همبند نیست.

۱۶. آیا درون یک مجموعهٔ همبند، همبند است؟ عکس آن چطور؟ یعنی اگر A° همبند باشد آیا A نیز همبند است؟

۱۷. کدامیک از عبارات زیر صحیح و کدام ناصحیح است. دلایل خود را ذکر نمایید:

الف- اگر $\overline{A}$ همبند باشد، آنگاه A همبند است.

ب- اگر A همبند باشد، آنگاه مرز A، $b(A)$، همبند است.

پ- اگر $b(A)$ همبند باشد، آنگاه A همبند است.

۱۸. فرض می‌کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک (X, T) باشد. ثابت کنید اگر مجموعهٔ همبند $X \supseteq B$ موجود باشد که $B \cap A \neq \phi$ و $B \cap (X \backslash A) \neq \phi$، آنگاه $B \cap b(A) \neq \phi$.

۱۹. اگر مجموعهٔ E بسته و مجموعه‌های A و B جدایش آن باشند، نشان دهید مجموعه‌های A و B نیز بسته‌اند.

۲۰. تابع $f : (X, T) \rightarrow (\mathcal{R}, \Gamma)$ یک تابع **موضعی ثابت** است، اگر برای هر $x \in X$ مجموعهٔ باز U موجود باشد به طوری که $x \in U$ و $f|U$ تابعی ثابت است. نشان دهید اگر f موضعی ثابت و X همبند باشد، آنگاه تابع f روی X تابعی ثابت است.

۲۱. ثابت کنید اگر هر جفت از نقاط فضای توپولوژیکی (X, T) در یک زیرمجموعهٔ همبند از X قرار گیرد، آنگاه X همبند است.

۲۲. ثابت کنید اگر فضای توپولوژیک (X, T) همبند و شامل بیش از یک نقطه باشد و به علاوه مجموعه‌های تک‌عضوی آن، بسته باشند، آنگاه X مجموعه‌ای بی‌پایان است.

۲۳. فرض کنید M و N دو مجموعهٔ همبند در فضای توپولوژیک X باشند. نشان دهید اگر $M \cap N \neq \phi$، آنگاه $M \cup N$ همبند است.

۲۴. فرض کنید $N \subseteq M$ دو مجموعهٔ همبند در فضای توپولوژیک X، باشند. نشان دهید اگر A و B جدایش $M \backslash N$ باشند، آنگاه $A \cup N$ و $B \cup N$ همبند هستند.

۲۵. نشان دهید اگر A و B دو مجموعهٔ غیرخالی و بسته از فضای توپولوژیکی (X, T) باشند و $A \cap B$ و $A \cup B$ مجموعه‌های همبند باشند، آنگاه A و B نیز همبند هستند. با یک مثال نشان دهید بسته بودن همزمان A و B ضروری است.

۲۶. نشان دهید اگر فضای (X, T) فشرده و $\{A_i\}$ یک دسته از مجموعه‌های بسته و همبند چنان باشند که $A_i \subseteq A_{i+1}$، آنگاه $\cap A_i$ همبند است.

۲۷. فرض کنید فضای توپولوژیک X با توپولوژی ترتیبی، دارای خاصیت کوچک‌ترین کران بالا نیز باشد. نشان دهید X همبند است اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in X$، $x < y$، $z \in X$ موجود باشد که $x < z < y$.

۲۸. فرض کنید $I \times I$، $I = [0, 1]$، به توپولوژی ترتیبی قاموسی مجهز باشد. نشان دهید این فضا همبند است. (راهنمایی: از مسئلهٔ ۲۷ استفاده کنید.)

۶.۲ همبندی مسیری

در این بخش به مطالعهٔ همبندی مسیری که در قضایای هموتوپی کاربرد دارد می‌پردازیم.

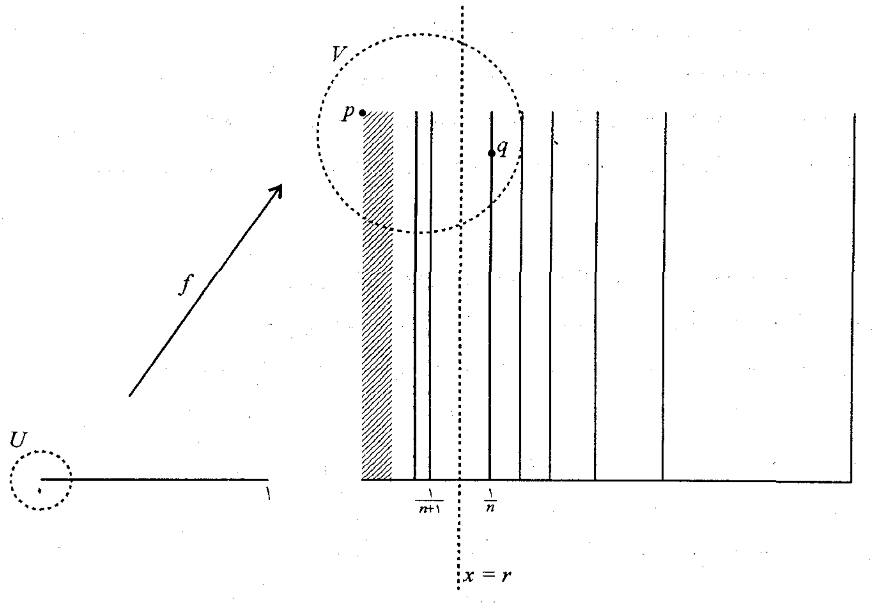
تعریف: فضای X را **همبند مسیری** می‌گوییم اگر برای هر دو نقطهٔ x و y، تابع پیوستهٔ $f : [\circ, \text{۱}] \to X$ موجود باشد که $f(\circ) = x$ و $f(\text{۱}) = y$. تابع f (یا به عبارت دقیق‌تر تصویر تابع f) **مسیری** از x به y نامیده می‌شود.

مثال ۱۴ : فضای $\mathcal{R}^n$ همبند مسیری است. زیرا هر دو نقطهٔ آن را می‌توان با یک خط به هم وصل کرد.

مثال ۱۵ : فضای شانه همبند مسیری است.

مثال ۱۶ : فضای شانه محذوف همبند مسیری نیست. زیرا در غیر این صورت مسیری از نقطهٔ $p = (\circ, \text{۱})$، مانند $f : [\circ, \text{۱}] \to X$ موجود است که $f(\circ) = p$. نشان می‌دهیم $f^{-\text{۱}}(p)$ در $[\circ, \text{۱}]$ هم باز و هم بسته است و این با همبندی $[\circ, \text{۱}]$ متناقض است.

برای اثبات باز بودن، مجموعهٔ باز V حول p را چنان اختیار کنید که محور x را قطع نکند (شکل ۱۷). چون f پیوسته است مجموعهٔ باز U حول صفر در $[\circ, \text{۱}]$ موجود است که $f(U) \subseteq V$. می‌توان U را یک عنصر پایه در $[\circ, \text{۱}]$ فرض کرد. پس U و در نتیجه $f(U)$ همبند است. ثابت می‌کنیم $f(U) = \{p\}$ در این صورت $f^{-\text{۱}}(p) = U$ و در نتیجه $f^{-\text{۱}}(p)$ باز است. حال اگر



شکل ۱۷

$f(U) \neq \{p\}$، آنگاه $q \in V$ موجود است که $q \in f(U)$. فرض کنید $q = (\frac{1}{n}, t_\circ)$. حال r را چنان اختیار کنید که $\frac{1}{n+1} < r < \frac{1}{n}$. دو مجموعهٔ باز

$$H =]-\infty, r[\times \mathcal{R} \quad , \quad G =]r, \infty[\times \mathcal{R}$$

در $\mathcal{R}^2$ را در نظر بگیرید. بدیهی است که $p \in H \cap f(U)$ و $q \in G \cap f(U)$ و به علاوه

$(H \cap f(U)) \cap (G \cap f(U)) = \phi$

$(H \cap f(U)) \cup (G \cap f(U)) = f(U)$

که با همبندی $f(U)$ متناقض است.

بسته بودن $f^{-1}(p)$ بدیهی است زیرا مجموعهٔ $\{p\}$ بسته و f پیوسته است.

قضیهٔ ۱۵ : هر فضای همبند مسیری، همبند است.

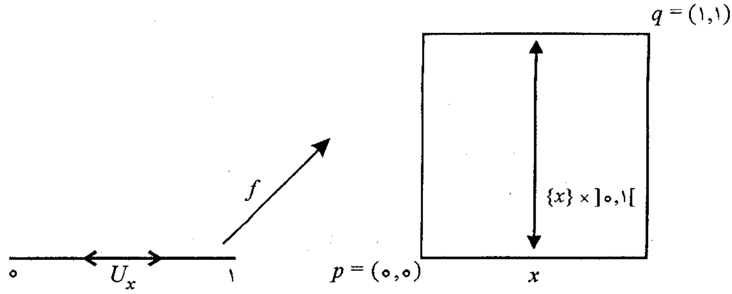
اثبات: اگر X همبند نباشد مجموعه‌های باز، غیرتهی و مجزای K و H موجودند که $H \cup K = X$. برای هر $h \in H$ و $k \in K$، مسیری از h به k موجود است که $f(\circ) = h$ و $f(1) = k$. پس $f^{-1}(H)$ و $f^{-1}(K)$ دو مجموعهٔ باز، مجزا و غیرتهی هستند که اجتماع آنها مساوی $[\circ, 1]$ است و این با همبندی $[\circ, 1]$ متناقض است.

□

مثال ۱۷ : مجموعه اعداد حقیقی با توپولوژی حد پایینی همبند مسیری نیست. زیرا همبند نیست.

بدیهی است که عکس قضیهٔ ۱۵ لزوماً برقرار نیست. به عبارت دیگر یک فضای همبند ممکن است همبند مسیری نباشد. در مثال‌های ۱۲ و ۱۶، به ترتیب، دیدیم که فضای شانه محذوف همبند است ولی همبند مسیری نیست. در مثال زیر با نمونه دیگری از فضا که همبند است ولی همبند مسیری نیست آشنا می‌شویم.

مثال ۱۸ : فضای $I \times I$ با توپولوژی ترتیبی قاموسی همبند است ولی همبند مسیری نیست. نحوهٔ اثبات همبندی این فضا در بخش قبل به عنوان تمرین آمده است. برای اثبات این‌که فضا همبندی مسیری نیست از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $p = (\circ, \circ)$ و $q = (1, 1)$ و f مسیری از p به q باشد. بنا به قضیهٔ مقدار میانی، برای هر $z = (x, y) \in I \times I$، نقطهٔ $\circ \leq a \leq 1$ موجود است که $f(a) = z$ (توجه کنید که $f(\circ) = p \leq z \leq q = f(1)$). لذا $f(I) = I \times I$. پس برای هر $x \in I$ مجموعهٔ $f^{-1}(\{x\} \times]\circ, 1[)$ غیرتهی و باز است (شکل ۱۸). آن را U_x بنامید. بدیهی است که اگر $x \neq x'$، آنگاه $(\{x\} \times]\circ, 1[) \cap (\{x'\} \times]\circ, 1[) = \phi$ و در نتیجه $U_x \cap U_{x'} = \phi$. بنابراین به ازای x های متفاوت U_x مجزا هستند. حال نقطهٔ گویای q_x در U_x را اختیار کنید. بدیهی است که برای x های متفاوت، q_x ها متفاوت هستند. پس یک تناظر یک به یک بین نقاط I با یک



شکل ۱۸

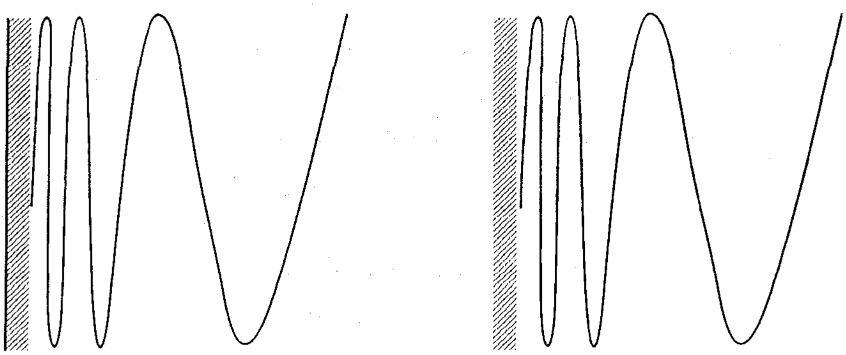
زیرمجموعه از اعداد گویا برقرار است و این یک تناقض است زیرا I شمارش‌ناپذیر است. پس هیچ مسیری از p به q موجود نیست. لذا $I \times I$ همبند مسیری نیست.

تعریف: زیرمجموعهٔ A از X را یک **زیرمجموعهٔ همبند مسیری** می‌گوییم اگر هر دو نقطهٔ A را بتوان به وسیلهٔ مسیری که در A واقع است بهم وصل کرد.

در بخش قبل دیدیم که اگر $A \subseteq X$ یک زیرمجموعهٔ همبند باشد، آنگاه $\overline{A}$ نیز همبند است (نتیجهٔ ۸). ولی این مطلب در مورد زیرمجموعه‌های همبند مسیری صادق نیست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۹: مجموعهٔ $X = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x > 0\}$ یک زیرمجموعهٔ همبند مسیری در $\mathcal{R}^2$ است (شکل ۱۹). ولی با استدلال مشابه مثال ۱۶ می‌توان دید که بستار آن همبند مسیری نیست.

مشابه قضایای ۹ و ۱۴ که در مورد فضاهای همبند ارائه شد در مورد فضاهای همبند مسیری نیز برقرار است که بررسی آن به بخش تمرین محول می‌گردد.



فضای $\overline{X}$ فضای X

شکل ۱۹

تمرین

۱. نشان دهید برای $n > 1$، $\mathcal{R}^n\backslash\{0\}$ همبند مسیری است.

۲. اگر E یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر باشد، نشان دهید $\mathcal{R}^2\backslash E$ همبند مسیری است.

۳. نشان دهید گوی باز واحد و همچنین گوی بسته واحد در $\mathcal{R}_n$ همبند مسیری هستند.

۴. ثابت کنید تصویر پیوسته یک فضای همبند مسیری، همبند مسیری است.

۵. نشان دهید مجموعهٔ $A = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$، $n > 1$، همبند مسیری است.

۶. ثابت کنید اگر U در $\mathcal{R}^2$ باز و همبند باشد، آنگاه همبند مسیری است.

۷. نشان دهید بستار مجموعهٔ $\{(x, \sin\frac{1}{x}) : x > 0\}$ همبند مسیری نیست.

۸. مؤلفه‌های همبند مسیری فضای $I \times I$ با توپولوژی ترتیبی قاموسی کدام است.

۹. اگر $\{Y_\alpha\}$، $\alpha \in A$، یک دسته از زیرمجموعه‌های غیرتهی و همبند مسیری در X باشد به طوری که Y_α ها دو به دو دارای اشتراک غیرتهی باشند، آنگاه $\cup Y_\alpha$ همبند مسیری است.

۱۰. ثابت کنید فضای $\prod X_\alpha$ همبند مسیری است اگر و فقط اگر به ازای هر α، X_α همبند مسیری باشد.

۶.۳ مؤلفهٔ همبندی و همبندی مسیری

مجموعهٔ نقاطی که در یک زیرمجموعهٔ همبند قرار می‌گیرند و همچنین مجموعهٔ نقاطی که بین آنها مسیری موجود است از اهمیت خاصی برخوردارند. لذا در مواردی که فضای توپولوژیکی همبند و یا همبند مسیری نباشد مفهومی به نام *مؤلفه‌های همبندی* و *مؤلفه‌های همبندی مسیری* حائز اهمیت است. در این بخش به تعریف و بررسی خواص آنها می‌پردازیم.

تعریف: بزرگترین زیرمجموعهٔ همبند فضای توپولوژیکی X را که شامل نقطهٔ $x \in X$ است **مؤلفهٔ همبندی** x می‌نامیم و به C_x نمایش می‌دهیم.

مثال ۲۰ : مؤلفه‌های همبندی مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی حد پایینی، تک‌نقطه‌ای‌ها هستند. زیرا اگر مثلاً مؤلفهٔ همبندی C شامل دو نقطهٔ مجزای a و b، $a < b$، باشد، آنگاه مجموعه‌های

$]-\infty, b[\, \cap C$ و $]b, \infty[\, \cap C$ دو مجموعهٔ باز، مجزا و غیرتهی هستند که اجتماع آنها برابر با C است و این با همبندی C متناقض است.

مثال ۲۱ : مؤلفه‌های همبندی فضای توپولوژیک $X = [0, 1[\, \cup\,]2, 3]$ عبارتند از $[0, 1[$ و $]2, 3]$.

بدیهی است اگر $x \neq y$، آنگاه $C_x \cap C_y \neq \phi$ و یا $C_x = C_y$. زیرا در غیر این صورت $C_x \cup C_y$ شامل x بوده و بزرگ‌تر از C_x است که با تعریف مؤلفهٔ همبندی تناقض دارد. لذا هر نقطه از X فقط در یک مؤلفهٔ همبندی قرار می‌گیرد بدین ترتیب مؤلفه‌های همبندی یک افراز روی X به وجود می‌آورند. به علاوه بنا به قضیهٔ ۶، هر زیرمجموعهٔ همبند یک فضای توپولوژیک نیز دقیقاً در یک مؤلفهٔ همبندی قرار می‌گیرد. قضیهٔ زیر وضعیت مؤلفه‌های همبندی را روشن‌تر می‌کند.

قضیهٔ ۱۶ : هر مؤلفهٔ همبندی یک مجموعهٔ بسته است.

اثبات: فرض کنید C یک مؤلفهٔ همبندی باشد در این صورت بنا به نتیجهٔ ۸، $\overline{C}$ نیز همبند و شامل x است. لذا بنا به تعریف باید $\overline{C} \subseteq C$. یعنی C بسته است.

□

مثال ۲۲ : در فضای توپولوژیکی مجموعهٔ اعداد گویا، هر مؤلفهٔ همبندی فقط شامل یک نقطهٔ گویا است. زیرا اگر مثلاً مؤلفهٔ همبندی C شامل دو نقطهٔ مجزای p و q، $p < q$، باشد، عدد اصم r را چنان اختیار کنید که $p < r < q$. در این صورت مجموعه‌های $]-\infty, r[$ و $]r, \infty[$ جدایش فضای توپولوژیک اعداد گویا خواهد بود. لذا بنا به قضیهٔ ۶، باید $E \subseteq\,]r, \infty[$ و یا $E \subseteq\,]-\infty, r[$ که در هر دو صورت تناقض است. این مثال نشان می‌دهد که مؤلفه‌های همبندی ممکن است باز نباشند.

مثال ۲۳ : هر مؤلفهٔ همبندی مجموعهٔ کانتور، تک‌نقطه‌ای است.

قضیهٔ ۱۷ : هر زیرمجموعهٔ همبند در یک فضای توپولوژیک که هم باز و هم بسته باشد یک مؤلفهٔ همبندی است.

اثبات: فرض کنید مجموعهٔ همبند A در فضای توپولوژیک X هم باز و هم بسته باشد. چون A همبند است A در یک مؤلفهٔ همبندی مانند C واقع است. اگر A خود یک مؤلفهٔ همبندی نباشد، آنگاه $A \neq C$. لذا $C \cap A$ و $C \cap (X \setminus A)$ دو مجموعهٔ غیرتهی هستند و به علاوه $C = (C \cap A) \cup (C \cap (X \setminus A))$. چون A باز است، $C \cap A$ در C باز است و چون بسته است $C \cap (X \setminus A)$ نیز در C باز است و این بدین معنا است که مجموعهٔ همبند C را به صورت اجتماع دو مجموعهٔ باز، غیرتهی و مجزا نوشته‌ایم که یک تناقض است.

□

در ادامه، مؤلفهٔ همبندی مسیری را تعریف می‌کنیم. برای این‌کار ابتدا توجه کنید که همبندی مسیری یک رابطهٔ هم‌ارزی است. زیرا تابع ثابت، مسیری از x به خودش است. به علاوه اگر f مسیری از x به y باشد تابع g با ضابطهٔ $g(t) = f(۱-t)$ مسیری از y به x است و همچنین اگر f مسیری از x به y و g مسیری از y به z باشد، آنگاه تابع h با ضابطهٔ زیر مسیری از x به z است. در واقع h مسیری است که از اتصال انتهای مسیر f به ابتدای مسیر g حاصل می‌شود.

$$h(t) = \begin{cases} f(۲t) & ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۲} \\ g(۲t-۱) & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱ \end{cases}$$

بنابراین تحت این رابطه هم‌ارزی دسته‌های هم‌ارزی ایجاد می‌شود که به آنها مؤلفه‌های همبندی مسیری می‌گوییم.

تعریف: یک **مؤلفهٔ همبندی مسیری**، یک دستهٔ هم‌ارزی تحت رابطهٔ «وجود مسیر» بین نقاط آن است.

مثال ۲۴ : مؤلفه‌های همبندی مسیری فضای توپولوژیک $X = [۰, ۱[\cup]۲, ۳[$ عبارتند از $]۲, ۳[$ و $[۰, ۱[$ که همان مؤلفه‌های همبندی هستند.

مثال ۲۵ : شانهٔ محذوف دو مؤلفهٔ همبندی مسیری دارد که عبارتند از $\{(۱, ۰)\}$ و $\cup_{n\geq ۱}(\{\frac{۱}{n}\} \times I) \cup (I \times \{۰\})$، ولی یک مؤلفهٔ همبندی دارد.

مثال ۲۶ : فضای $X = \cup_{n\geq ۱}(\{\frac{۱}{n} \times I) \cup (I \times \{۰\}) \cup \{(۰, r) : r \in \mathcal{R}\backslash\mathcal{Q}\}$ ، که در آن $I = [۰, ۱]$، یک مؤلفهٔ همبندی و تعداد غیرشمارش‌پذیر مؤلفهٔ همبندی مسیری دارد. در واقع هر مجموعهٔ تک‌نقطه‌ای $\{(۰, r)\}$، $r \in \mathcal{R}\backslash\mathcal{Q}$، یک مؤلفهٔ همبندی مسیری است.

مثال‌های ۲۵ و ۲۶ نشان می‌دهد که مؤلفه‌های همبندی مسیری لزوماً با مؤلفه‌های همبندی برابر نیستند. دو قضیهٔ زیر وضعیت مؤلفه‌های همبندی مسیری را روشن‌تر ساخته و رابطهٔ آن را با مؤلفه‌های همبندی معین می‌کند.

قضیهٔ ۱۸ : مؤلفه‌های همبندی مسیری مجزا هستند. اجتماع آنها برابر با فضا است و به علاوه هر زیرمجموعهٔ همبند مسیری فقط یکی از مؤلفه‌های همبندی مسیری را قطع می‌کند.

اثبات: برقراری دو قسمت اول از رابطهٔ هم‌ارزی ناشی می‌شود. برای قسمت آخر اگر A یک زیرمجموعهٔ همبند مسیری باشد که دو مؤلفهٔ همبند مسیری مثلاً C و D را قطع کند و مثلاً $c \in A \cap C$ و $d \in A \cap D$، پس از هر نقطهٔ C مسیری به c و از هر نقطهٔ D مسیری به d موجود است و چون c و d در A هستند پس مسیری از c به d نیز موجود است. بنابراین از هر نقطهٔ C مسیری به هر نقطهٔ D موجود است. یعنی C و D در یک مؤلفهٔ همبندی مسیری قرار دارند که این یک تناقض است.

$\square$

قضیهٔ ۱۹ : هر مؤلفهٔ همبندی مسیری در یک مؤلفهٔ همبندی قرار دارد.

اثبات: هر مؤلفهٔ همبند مسیری بنا به قضیهٔ ۱۵ ، همبند است. لذا در یک مؤلفهٔ همبندی واقع است.

□

مثال ۲۷ : با توجه به قضیهٔ اخیر و مثال ۲۰، مؤلفه‌های همبندی مسیری مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی حد پایینی، تک‌نقطه‌ای‌ها هستند.

در قضیهٔ ۱۶ دیدیم که مؤلفه‌های همبندی، بسته هستند ولی مؤلفه‌های همبندی مسیری لزوماً بسته نیستند. به مثال زیر توجه کنید. این مثال نشان می‌دهد یک مؤلفهٔ همبندی نه‌تنها لزوماً بسته نیست بلکه لزوماً باز هم نسیت.

مثال ۲۸ : مؤلفه‌های همبندی مسیری در فضای شانه محذوف عبارتند از: $X\backslash\{(۰,۱)\}$ و $\{(۰,۱)\}$. بدیهی است که مؤلفهٔ همبندی مسیری $\{(۰,۱)\}$ باز و مؤلفهٔ همبندی مسیری $X\backslash\{(۰,۱)\}$ بسته نیست.

تمرین

۱. مؤلفه‌های همبندی فضای مکمل باپایان چیست؟

۲. مؤلفه‌های همبندی $\mathcal{R}^N$ در توپولوژی حاصل‌ضرب چیست؟

۳. ثابت کنید اگر یک فضای توپولوژیک دارای تعداد باپایان مؤلفهٔ همبندی باشد، آنگاه هر مؤلفهٔ همبندی هم باز و هم بسته است. آیا این حکم در مورد مؤلفه‌های همبندی مسیری نیز برقرار است؟

۴. فرض کنید Y زیرمجموعهٔ فضای توپولوژیک (X,T) باشد. کدامیک از ادعاهای زیر درست است. چرا؟

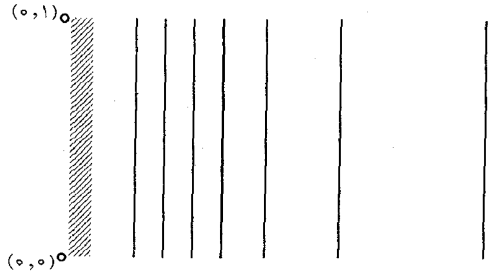
الف- اگر C مؤلفهٔ همبندی زیرفضای توپولوژیک Y باشد، آنگاه C مؤلفهٔ همبندی فضای توپولوژیک X نیز هست.

ب- اگر D مؤلفهٔ همبندی فضای توپولوژیک X باشد، آنگاه $D\cap Y$ مؤلفهٔ همبندی زیرفضای توپولوژیک Y است.

۵. نشان دهید تصویر معکوس هر مؤلفهٔ همبندی تحت تابع پیوسته، اجتماعی از مؤلفه‌های همبندی است.

۶. نشان دهید اگر M در فضای توپولوژیک X بسته باشد، آنگاه هر مؤلفهٔ همبندی آن نیز در X بسته است. (منظور از مؤلفهٔ همبندی M، بزرگ‌ترین مجموعهٔ همبند واقع در (M, T_M) است).

۷. فرض کنید $X = \{(x,y) : x = \frac{۱}{n},\ n \in \mathcal{N},\ ۰ \leq y \leq ۱\} \cup \{(۰,۰),(۰,۱)\}$ (شکل ۲۰). نشان دهید مجموعه‌های تک‌عضوی $\{(۰,۰)\}$ و $\{(۰,۱)\}$ مؤلفه‌های همبندی X هستند. به علاوه نشان دهید اگر $D \subseteq X$، در X هم باز و هم بسته باشد، آنگاه یا شامل $\{(۰,۰),(۰,۱)\}$ است و یا اشتراک آن با $\{(۰,۰),(۰,۱)\}$ مساوی تهی است. مؤلفه‌های همبندی مسیری این فضا کدامند؟



شکل ۲۰

۸. مؤلفه‌های همبندی و همبندی مسیری فضاهای زیر را معین کنید. فرض کنید $K = \{\frac{۱}{n} : n \in \mathcal{N}\}$ و $K^* = \{-\frac{۱}{n} : n \in \mathcal{N}\}$.

i, $A = (K \times [۰,۱]) \cup (\{۰\} \times [۰,۱])$

ii, $B = A \setminus \{(۰, \frac{۱}{۲})\}$

iii, $C = B \cup ([۰,۱] \times \{۰\})$

iv, $D = (K \times [۰,۱]) \cup (K^* \times [-۱,۰]) \cup ([۰,۱] \times K^*) \cup ([-۱,۰] \times K)$

۶.۴ فضاهای تماماً ناهمبند

همانطور که می‌دانیم یک فضای همبند فقط از یک مؤلفهٔ همبندی تشکیل شده است. در مقابل این دسته از فضاها، با فضاهایی روبرو هستیم که نوعاً شبیه فضاهای کانتور هستند. به تعریف زیر توجه کنید.

تعریف: فضای توپولوژیک X را **تماماً ناهمبند** می‌گوییم اگر مؤلفه‌های همبندی آن تک‌نقطه‌ای‌ها باشند.

بدیهی است که هر فضای تماماً ناهمبند، با بیش از دو نقطه، ناهمبند است زیرا حداقل دو مؤلفهٔ همبندی دارد.

مثال ۲۹ : مجموعهٔ اعداد گویا، مجموعهٔ اعداد اصم، مجموعهٔ کانتور و هر فضای گسسته، مثال‌هایی از فضاهای تماماً ناهمبند هستند.

قضیهٔ ۱۹ : اگر به ازای هر دو نقطهٔ مجزا در فضا مجموعهٔ باز و بسته‌ای حول یکی موجود باشد که شامل دیگری نباشد، آنگاه فضای توپولوژیک تماماً ناهمبند است.

اثبات: فرض کنید مؤلفهٔ همبندی E در X موجود است که حداقل دارای دو نقطهٔ مجزا است. آنها را x و y بنامید. از فرض، مجموعهٔ باز و بستهٔ A موجود است به طوری که $x \in A$ و $y \notin A$. قرار دهید $B = X\backslash A$. بنابراین $E \cap A$ و $E \cap B$ دو مجموعهٔ باز، مجزا و غیرتهی در فضای (E, T_E) است که اجتماع آنها برابر E می‌باشد، پس E باید ناهمبند باشد که با همبندی E متناقض است.

□

مثال ۳۰ : یک مثال معروف از فضاهای تماماً ناهمبند مربوط به ناستر [۱] و کوراتسکی [۲] است. آنها فضای همبند Y و نقطهٔ $p \in Y$ را چنان ارائه می‌دهند که فضای $X = Y\backslash\{p\}$ تماماً ناهمبند است. برای این کار فرض کنید $p = (\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}) \in \mathcal{R}^۲$. برای هر x متعلق به مجموعهٔ کانتور $\mathbf{C}$، L_x را پاره‌خطی فرض کنید که x را به p وصل می‌کند و تعریف کنید

$$L_x^* = \{(x_۱, x_۲) \in L_x : \text{گویا است } x_۲\} \qquad \text{اگر } x \in \mathcal{Q}$$

$$L_x^* = \{(x_۱, x_۲) \in L_x : \text{اصم است } x_۲\} \qquad \text{اگر } x \in \mathbf{C}\backslash\mathcal{Q}$$

در این صورت $Y = \bigcup_{x \in C} L_x^*$ همبند است در حالی که $Y\backslash\{p\}$ تماماً ناهمبند است.

تمرین

۱. نشان دهید فضای Y ارائه‌شده در مثال ۳۰ همبند و فضای $Y\backslash\{p\}$ تماماً ناهمبند است.

۲. ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دسته از فضاهای تماماً ناهمبند، تماماً ناهمبند است.

۳. نشان دهید مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی حد بالایی، تماماً ناهمبند است.

۴. ثابت کنید تصویر پیوستهٔ یک فضای تماماً ناهمبند لزوماً تماماً ناهمبند نیست.

۵. ثابت کنید زیرفضای یک فضای تماماً ناهمبند، تماماً ناهمبند است.

۶. یک فضای توپولوژیک تماماً ناهمبند مثال بزنید که توپولوژی گسسته نداشته باشد.

۷. در تمرین ۸ بخش قبل کدامیک از فضاها تماماً ناهمبند است.

---

[۱] Knaster

[۲] Kuratowski

۶.۵ همبندی موضعی و همبندی مسیری موضعی

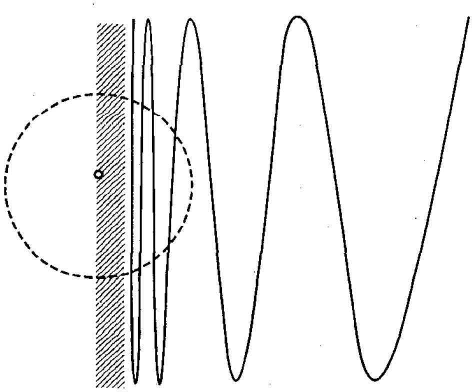
همانطور که فشردگی را به طور موضعی تعریف کردیم در اینجا نیز مفهوم همبندی و همبندی مسیری را به صورت موضعی تعریف و قضایایی در رابطه با کاربرد این مفهوم ارائه می‌دهیم.

تعریف: فضای توپولوژیکی (X,T) و یا بطور خلاصه X، در نقطهٔ $x \in X$ **همبند موضعی** (به ترتیب **همبند مسیری موضعی**) است، اگر برای هر مجموعهٔ باز U حول x، مجموعهٔ باز و همبند (به ترتیب باز و. همبند مسیری) V موجود باشد به طوری که $x \in V \subseteq U$. فضای (X,T) و یا X همبند موضعی (به ترتیب همبند مسیری موضعی) است، اگر در هر نقطه همبند موضعی (به ترتیب همبند مسیری موضعی) باشد.

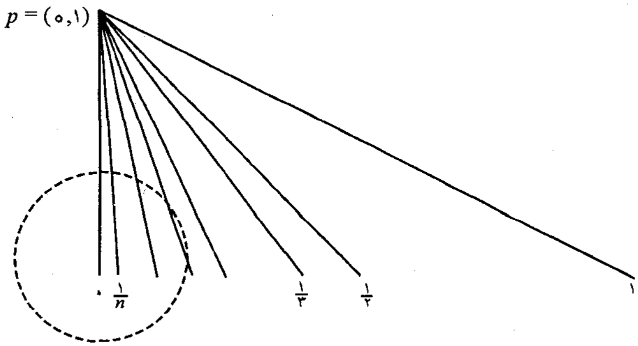
مثال ۳۱: هر فضای گسسته همبند موضعی است. زیرا برای هر نقطهٔ x در این فضا و هر مجموعهٔ باز شامل x، کافی است مجموعهٔ باز و همبند $\{x\}$ در نظر بگیریم. به علاوه این فضا همبند مسیری موضعی نیز است. زیرا $\{x\}$ همبند مسیری نیز است.

مثال ۳۲: فضای $X =]۰,۱[\cup]۱,۲[$ همبند موضعی و همبند موضعی مسیری است، ولی همبند و همبند مسیری نیست.

مثال ۳۳: فضای $Y = \{(x,y) : y = \sin \frac{۱}{x}, ۰ < x \leq ۱\} \cup \{(۰,۰)\}$ همبند است. نشان می‌دهیم Y همبند موضعی نیست. مجموعهٔ C را گوی به شعاع $\frac{۱}{۲}$ حول $(۰,۰)$ فرض کنید (شکل ۲۱). این مجموعه شامل مجموعهٔ باز و همبندی که شامل $(۰,۰)$ باشد، نیست. به همین دلیل این فضا همبند مسیری موضعی هم نیست. لازم به ذکر است که این فضا همبند مسیری نیز نیست.



شکل ۲۱

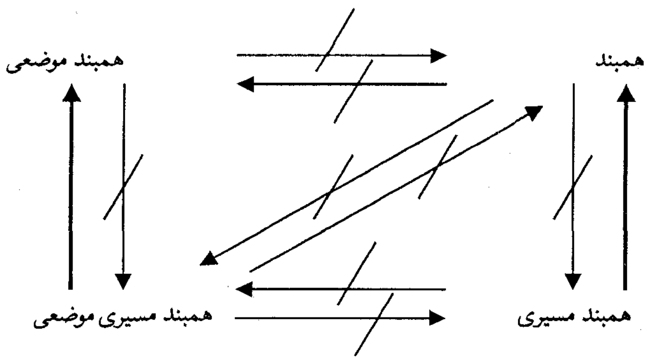


شکل ۲۲

مثال ۳۴: فرض کنید $p = (\circ, \text{۱})$ و $K = \{(\frac{\text{۱}}{n}, \circ) : n \in \mathcal{N}\} \cup \{(\circ, \circ)\}$ و Y فضایی باشد که از اتصال p به نقاط K حاصل می‌شود (شکل ۲۲). پس Y همبند مسیری است ولی همبند مسیری موضعی حول $(\circ, \circ)$ نیست. زیرا کافی است گوی باز به شعاع $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ حول $(\circ, \circ)$ در نظر گرفته شود. این گوی شامل نقاطی از نوع $(\frac{\text{۱}}{n}, \circ)$ است که هیچ مسیری از آن به $(\circ, \circ)$ موجود نیست.

مثال ۳۵: فضای $X = \cup_{n\geq \text{۱}}(\{\frac{\text{۱}}{n}\} \times I) \cup (I \times \{\circ\}) \cup \{(\circ, \frac{\text{۱}}{n}) : n \in \mathcal{N}\}$ که در آن $I = [\circ, \text{۱}]$، همبند موضعی است ولی در $(\circ, \circ)$ همبند مسیری موضعی نیست.

مثال‌های ۳۱ تا ۳۵ هرکدام نشانگر واقعیتی است. نمودار ۱ و مطالب زیر مروری بر آنها است.



نمودار ۱

الف) یک فضای همبند موضعی لزوماً همبند نیست (مثال‌های ۳۱ و ۳۲).

ب) یک فضای همبند مسیری موضعی لزوماً همبند مسیری نیست (مثال‌های ۳۱ و ۳۲).

پ) یک فضای همبند لزوماً همبند موضعی نیست (مثال ۳۳).

ت) یک فضای همبند مسیری لزوماً همبند مسیری موضعی نیست (مثال ۳۴).

ث) یک فضای همبند ممکن است همبند مسیری موضعی نباشد (مثال ۳۳).

ج) یک فضای همبند مسیری موضعی ممکن است همبند نباشد (مثال ۳۲).

چ) یک فضای همبند ممکن است همبند مسیری نباشد (مثال ۳۳).

ح) یک فضای همبند مسیری ممکن است همبند موضعی نباشد (مثال ۳۴).

خ) یک فضای همبند موضعی ممکن است همبند مسیری نباشد (مثال ۳۵).

د) یک فضای همبند موضعی ممکن است همبند مسیری موضعی نباشد (مثال ۳۵).

همانطور که در بخش قبل دیدیم و نمودار ۱ نیز نشان می‌دهد همبندی مسیری، همبندی را نتیجه می‌دهد. قضیهٔ مشابه، در حالت موضعی نیز با استفاده از تعریف به سهولت حاصل می‌شود که در نمودار ۱ نیز به آن اشاره شده است. یعنی *هر فضای همبند مسیری موضعی، همبند موضعی است.*

دیدیم که یک فضای همبند لزوماً همبند مسیری نیست. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که با اضافه کردن شرط همبندی مسیری موضعی به فضا، همبندی مسیری نتیجه می‌شود. به قضیهٔ زیر توجه کنید.

قضیهٔ ۲۱ : اگر یک فضا همبند و همبند مسیری موضعی باشد، آنگاه همبند مسیری نیز است.

اثبات: فرض کنید $a \in X$ و H شامل همهٔ نقاطی از X باشد که می‌توان آنها را با یک مسیر به a متصل کرد. ثابت می‌کنیم H هم باز و هم بسته است. بنابراین با توجه به همبندی X، $H = X$ و حکم ثابت می‌شود.

H باز است. زیرا اگر $b \in H$ و U مجموعهٔ باز و همبند مسیری حول b باشد، پس هر $z \in U$ را می‌توان با یک مسیر واقع در U به b وصل کرد. چون از a به b و از b به z مسیر موجود است پس از a به هر نقطهٔ U مسیر وجود دارد. لذا $U \subseteq H$.

H بسته است. زیرا اگر $b \in \overline{H}$ و U مجموعهٔ باز و همبند مسیری حول b باشد، پس $U \cap H \neq \phi$. فرض کنید $z \in U \cap H$. چون b و z هر دو در U هستند به وسیلهٔ یک مسیر به هم متصل می‌شوند و چون $z \in H$، پس از z به a هم یک مسیر موجود است لذا از a به b یک مسیر وجود دارد. بنابراین $b \in H$. یعنی H بسته است.

□

قضیهٔ ۲۲ : فضای توپولوژیک X همبند موضعی است اگر و فقط اگر مؤلفه‌های همبندی مجموعه‌های باز، خود یک مجموعهٔ باز باشند.

اثبات: فرض کنید فضای توپولوژیک X همبند موضعی، $U \subseteq X$ یک مجموعهٔ باز و C یک مؤلفهٔ همبندی U باشد. برای $x \in C$، از تعریف همبندی موضعی، مجموعهٔ باز و همبند V موجود است به طوری که $x \in V \subseteq U$. چون $x \in C \cap V$، C و V هر دو همبند هستند، پس $C \cup V$ همبند است. از طرفی $C \subseteq C \cup V$ و C یک مؤلفهٔ همبندی است لذا $C = C \cup V$ و در نتیجه $V \subseteq C$، یعنی C باز است.

بالعکس، فرض کنید $x \in X$ و U یک مجموعهٔ باز حول x باشد. به علاوه فرض کنید V یک مؤلفهٔ همبندی U باشد که شامل x است، $x \in V \subseteq U$. از طرفی بنا به فرض V یک مجموعهٔ باز نیز است، لذا X همبند موضعی است.

□

نتیجهٔ ۲۳ : مؤلفه‌های همبندی هر فضای همبند موضعی هم باز و هم بسته هستند.

اثبات: بنا بر قضایای ۱۶ و ۲۲ حکم بدیهی است.

□

نتیجهٔ ۲۴ : هر فضای همبند موضعی و فشرده، دارای تعداد باپایان مؤلفهٔ همبندی است.

اثبات: با توجه به قضیهٔ ۲۲، مؤلفه‌های همبندی در فضاهای همبند موضعی تشکیل یک پوشش باز می‌دهند. لذا بنا به فشردگی، تعداد باپایان از آنها نیز فضا را می‌پوشانند.

□

یکی دیگر از خواص فضاهای همبند مسیری موضعی قضیهٔ زیر است. لازم به ذکر است که قبلاً دیدیم که در حالت کلی مؤلفه‌های همبندی و همبند مسیری لزوماً با هم برابر نیستند.

قضیهٔ ۲۵ : در یک فضای همبند مسیری موضعی، مؤلفه‌های همبندی و همبند مسیری با هم برابر هستند.

اثبات: فرض کنید C یک مؤلفهٔ همبندی، $x \in C$ و P یک مؤلفهٔ همبند مسیری حول x باشد. بدیهی است که $P \subseteq C$. اگر $P \neq C$، آنگاه اجتماع همهٔ مؤلفه‌های همبند مسیری که با C اشتراک غیرتهی دارند و مجزا از P هستند غیرتهی است. آن را Q بنامید. در این صورت $C = P \cup Q$. چون فضا همبند مسیری موضعی است مؤلفه‌های همبند مسیری باز هستند لذا P و Q در فضا باز هستند و این با همبندی C متناقض خواهد بود.

□

مشابه قضیهٔ ۲۲ و نتایج ۲۳ و ۲۴ برای حالت همبند مسیری موضعی نیز وجود دارد که اثبات آنها تا حدودی مشابه است. لذا فقط به بیان آن می‌پردازیم و اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیهٔ ۲۶ : فضای توپولوژیک X همبند مسیری موضعی است اگر و فقط اگر مؤلفه‌های همبند مسیری مجموعه‌های باز، باز باشند.

□

نتیجهٔ ۲۷ : در هر فضای همبند مسیری موضعی، مؤلفه‌های همبند مسیری هم باز و هم بسته هستند.
هر فضای همبند مسیری موضعی و فشرده، دارای تعداد باپایان مؤلفهٔ همبند مسیری است.

□

قضیهٔ ۲۸ : فضای خارج‌قسمت هر فضای همبند موضعی، همبند موضعی است.

اثبات: فرض کنید $f : X \to Y$ تابع خارج‌قسمت و X همبند موضعی باشد. با توجه به قضیهٔ ۲۲ کافی است نشان دهیم هر مؤلفهٔ همبندی یک مجموعهٔ باز در Y، خود یک مجموعهٔ باز است. لذا فرض کنید U در Y باز و C یک مؤلفهٔ همبندی در U باشد. چون Y به توپولوژی خارج‌قسمت مجهز است باید نشان دهیم $f^{-1}(C)$ در X باز است. برای $x \in f^{-1}(C)$، فرض کنید C_x مؤلفهٔ همبندی x در مجموعهٔ باز $f^{-1}(U)$ باشد. چون X همبند موضعی است، C_x یک مجموعهٔ باز است، از طرفی $f(C_x)$ همبند و شامل $f(x)$ است لذا $f(C_x) \cup C$ همبند است ولی $C \subseteq f(C_x) \cup C$ و C مؤلفهٔ همبندی است بنابراین $f(C_x) \subseteq C$ و یا $x \in C_x \subseteq f^{-1}(C)$ یعنی $f^{-1}(C)$ باز است.

□

نتیجهٔ ۲۹ : تصویر یک فضای همبند موضعی تحت یک تابع پیوسته و باز (یا یک تابع پیوسته و بسته) همبند موضعی است.

اثبات: با توجه به این‌که تحت شرایط مذکور توپولوژی فضای تصویر، همان توپولوژی خارج‌قسمت است، حکم از قضیهٔ ۲۸ ثابت می‌شود.

□

در تمرین ۶ خواهیم دید که شرط باز بودن و بسته بودن تابع در نتیجهٔ ۲۹ ضروری است و بدون آن حکم لزوماً برقرار نیست.

حال با توجه به این‌که تابع تصویر پیوسته، پوشا و باز است، نتیجهٔ زیر نیز از نتیجهٔ ۲۹ حاصل می‌شود.

نتیجهٔ ۳۰ : اگر حاصل‌ضرب یک دسته از فضاهای توپولوژیک همبند موضعی باشد، آنگاه هر فضا همبند موضعی است.

□

قضیهٔ ۳۱ : حاصل‌ضرب غیرتهی فضاها، همبند موضعی است اگر هر فضا همبند موضعی بوده و به علاوه همه، بجز تعداد باپایان از فضاها، همبند باشند.

اثبات: فرض کنید $X = \prod_\alpha X_\alpha$ و همهٔ X_α همبند موضعی بوده و بجز X_{α_1}، ... ، X_{α_n} بقیه همبند نیز باشند و همچنین فرض کنید $b = (b_\alpha) \in \prod_\alpha X_\alpha$ و $U = \prod U_\alpha$ یک عنصر پایه حول b باشد و فرض کنید $U_\alpha = X_\alpha$ بجز برای X_{β_1}، ... ، X_{β_k}. حال چون X_α برای $\alpha = \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_k$ همبند موضعی است، مجموعهٔ باز و همبند $V_\alpha \subseteq U_\alpha$، موجود است. تعریف کنید:

$$G_\alpha = \begin{cases} V_\alpha & \alpha = \alpha_1, \cdots, \alpha_n,\ \beta_1, \cdots, \beta_k \\ X_\alpha & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و قرار دهید $G = \prod G_\alpha$، پس $G = \prod G_\alpha \subseteq \prod U_\alpha = U$ باز و بنا به قضیهٔ ۱۵، همبند است. □

تمرین

۱. نشان دهید هر زیرفضای باز از فضای همبند موضعی، همبند موضعی است.

۲. فضای توپولوژیکی (X, T) مفروض است. نشان دهید مجموعه‌های باز و همبند در T یک پایه برای فضای (X, T) است اگر و فقط اگر (X, T) همبند موضعی باشد.

۳. نشان دهید در هر فضای همبند موضعی و تماماً ناهمبند برای هر دو نقطهٔ مجزا، مجموعهٔ باز و بسته‌ای موجود است که فقط شامل یکی از این دو نقطه است (به عبارت دیگر عکس قضیهٔ ۲۰ در فضاهای همبند موضعی برقرار است).

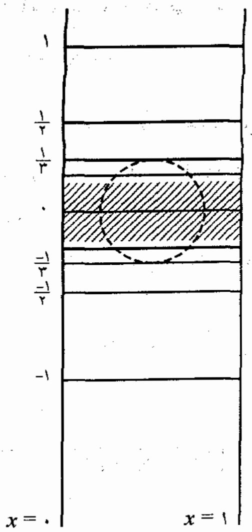
۴. ثابت کنید مجموعهٔ اعداد گویا همبند موضعی نیست.

۵. نشان دهید $[0, 1] \times [0, 1]$ با توپولوژی ترتیبی قاموسی همبند موضعی است اما همبند مسیری موضعی نیست.

۶. نشان دهید تصویر پیوستهٔ یک فضای همبند موضعی، لزوماً همبند موضعی نیست.

۷. ثابت کنید ضرب تعداد باپایان فضای همبند موضعی، همبند موضعی است.

۸. نشان دهید اگر $X = \prod_\alpha X_\alpha$ همبند موضعی باشد، آنگاه همهٔ X_α بجز تعداد باپایان همبند هستند.

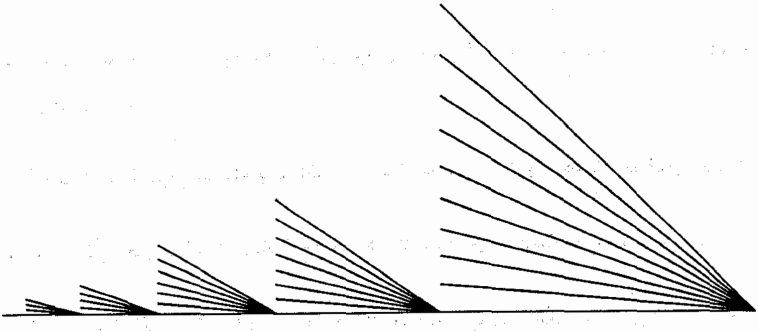


شکل ۲۳

۹. تعداد بی‌پایان فضای همبند موضعی ارائه دهید که حاصل‌ضرب آنها همبند موضعی نباشد.

۱۰. نشان دهید فضای Y شامل خطوط $x=0$، $x=1$، $\{(x, \frac{1}{n}) : 0 \leq x \leq 1, n=\pm 1, \pm 2, \cdots\}$ و بازهٔ $[0, 1]$ (شکل ۲۳) همبند است ولی همبند موضعی نیست.

۱۱. برای هر $n \geq 1$ و هر $m \geq n+1$، پاره‌خط $y_{nm} = \frac{-n(n+1)}{m}x + \frac{n+1}{m}$ را که در آن $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$، در نظر بگیرید و فرض کنید $X = \cup y_{nm} \cup \{[0, 1] \times \{0\}\}$. ثابت کنید فضای X همبند موضعی نیست (شکل ۲۴).



شکل ۲۴

۱۲. نشان دهید هر مجموعهٔ همبند در مجموعهٔ اعداد حقیقی همبند موضعی نیز است. آیا این ادعا برای هر فضای دلخواه درست است؟

۱۳. نشان دهید در یک فضای همبند مسیری موضعی هر مجموعهٔ باز و همبند، همبند مسیری است.

۱۴. فرض کنید فضای X اجتماع همهٔ خطوطی باشد که از اتصال مجموعهٔ اعداد گویای واقع بر بازهٔ $[\circ, 1] \times \{\circ\}$ به نقطهٔ $p = (\circ, 1)$ حاصل می‌شود. نشان دهید این فضا همبند مسیری است ولی فقط در نقطهٔ p همبند موضعی است. آیا می‌توانید در $\mathcal{R}^2$ زیرفضایی ارائه دهید که همبند مسیری باشد ولی در هیچ نقطه همبند موضعی نباشد.

۱۵. فرض کنید X یک فضای همبند و همبند موضعی باشد. نشان دهید:

الف ـ اگر C مؤلفهٔ همبندی مجموعهٔ باز A، $A \neq X$، آنگاه $b(C) \subseteq X \backslash A$.

ب ـ اگر M و N دو مجموعهٔ بسته، غیرتهی و مجزا در X باشند، آنگاه مؤلفهٔ همبندی C در $X \backslash (M \cup N)$ موجود است که $\overline{C} \cap N \neq \phi$ و $\overline{C} \cap M \neq \phi$.

پ ـ اگر مجموعهٔ B در X بسته، $B \neq X$ و C مؤلفهٔ همبندی B باشد، آنگاه $C \cap \overline{(X \backslash B)} \neq \phi$.

فصل ۷

اصول جداسازی

دیدیم بعضی از فضاهای توپولوژیکی کاربرد کمتری دارند. مثلاً در فضای ناگسستهٔ (X, T) مجموعهٔ X از نظر توپولوژیکی با یک نقطه اختلاف چندانی ندارد. در این فصل می‌خواهیم راجع به فضاهایی صحبت کنیم که ساختمان گسترده‌تری دارند. ظاهراً در این‌گونه فضاهای توپولوژیکی بایستی تعداد کافی مجموعهٔ باز داشته باشیم تا بتوانیم بین نقاط، تمایزی قائل شویم. به عبارت دیگر، هرچقدر مجموعه‌های باز بیشتر باشد، کاربرد و استفادهٔ آن فضا بیشتر است.

در این فصل خواهیم دید که اگر فضای توپولوژیکی (X, T) به تعداد کافی مجموعهٔ باز داشته باشد، در یکی از اصول جداسازی $T_۰$، $T_۱$، $T_۲$، $T_۳$، $T_۴$ صدق می‌کند.

۷.۱ فضاهای $T_۰$

تعریف: فضای توپولوژیکی (X, T) را یک **فضای** $T_۰$ گوییم، هرگاه برای هر دو نقطهٔ دلخواه $x, y \in X$ و $x \neq y$، مجموعهٔ باز U وجود داشته باشد به طوری که: $x \in U$ و $y \notin U$.

مثال ۱ : هر فضای گسسته، $T_۰$ است در حالی که فضاهای ناگسسته، با بیش از یک نقطه، $T_۰$ نیستند.

مثال ۲ : فضای توپولوژیکی سیرپنسکی (X, T) که در آن $X = \{a, b\}$ و $T = \{X, \phi, \{a\}\}$، یک فضای $T_۰$ است. زیرا برای دو نقطهٔ متمایز a و b کافی است مجموعهٔ باز $\{a\}$ را در نظر بگیریم.

مثال ۳ : فضای توپولوژیکی $(\mathcal{N}. T)$ که در آن T شامل ϕ، $\mathcal{N}$ و همهٔ زیرمجموعه‌های به شکل $\{۱, ۲, \cdots, n\}$ می‌باشد، یک فضای $T_۰$ است. زیرا مثلاً اگر دو نقطهٔ متمایز $n \neq m$، $n < m$ را در نظر بگیریم، مجموعهٔ باز $\{۱, ۲, \cdots. n\}$ شامل n است ولی نقطهٔ m را دربر ندارد.

مثال ۴ : مجموعهٔ $X = \{a, b, c\}$ با توپولوژی $T = \{X, \phi, \{a\}, \{c, d\}\}$ یک فضای $T_\circ$ نیست. زیرا هر مجموعهٔ باز شامل b، شامل c و هر مجموعهٔ باز شامل c، شامل b است.

قضیهٔ ۱ : فضای توپولوژیکی (X, T)، $T_\circ$ است اگر و فقط اگر بستار مجموعه‌های تک‌عضوی متمایز، متمایز باشند.

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم مجموعه‌های تک‌عضوی متمایز، بستار متمایز داشته باشند. برای اثبات این‌که فضای توپولوژیکی (X, T)، $T_\circ$ است دو نقطهٔ متمایز $x, y \in X$ و $x \neq y$ را در نظر می‌گیریم. بنا به فرض $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. لذا می‌توان فرض کرد مثلاً عنصری مانند z موجود است به طوری که $z \in \overline{\{x\}}$ و $z \notin \overline{\{y\}}$. ادعا می‌کنیم $x \notin \overline{\{y\}}$. زیرا اگر $x \in \overline{\{y\}}$، آنگاه $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\overline{\{y\}}} = \overline{\{y\}}$. بنابراین باید $x \in \overline{\{y\}}$ که تناقض است. پس $x \notin \overline{\{y\}}$. حال مجموعهٔ باز $X \backslash \overline{\{y\}}$ شامل x است ولی شامل y نیست. لذا فضای توپولوژیکی (X, T)، $T_\circ$ است.

بالعکس، فرض کنید فضای توپولوژیکی (X, T)، $T_\circ$ باشد و $x, y \in X$ و $x \neq y$. از این‌که فضا $T_\circ$ است مجموعهٔ باز U موجود است به طوری که $x \in U$ و $y \notin U$. لذا $x \notin X \backslash U$ و $y \in X \backslash U$، اینک $X \backslash U$ بسته و شامل y است و چون $\overline{\{y\}}$ برابر با اشتراک همهٔ مجموعه‌های بسته‌ای است که شامل $\{y\}$ می‌باشند، بنابراین $\overline{\{y\}} \subseteq X \backslash U$. پس $x \notin \overline{\{y\}}$ در حالی که $x \in \overline{\{x\}}$. لذا $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

□

نتیجهٔ ۲ : حاصل‌ضرب دو فضا $T_\circ$ است اگر و فقط اگر هریک از آنها $T_\circ$ باشد.

اثبات: برای اثبات از قضیهٔ ۱ استفاده می‌کنیم. فرض کنید دو فضای X و Y، $T_\circ$ و (a, b) و (c, d) دو نقطهٔ متمایز در فضای $X \times Y$ باشند. پس یا $a \neq c$ یا $b \neq d$. بنابراین

$$\overline{\{(a, b)\}} = \overline{\{a\} \times \{b\}} = \overline{\{a\}} \times \overline{\{b\}} \neq \overline{\{c\}} \times \overline{\{d\}} = \overline{\{c\} \times \{d\}} = \overline{\{(c, d)\}}$$

بالعکس، فرض کنید $X \times Y$، $T_\circ$ باشد. دو نقطهٔ متمایز a و b را در X انتخاب کنید، در این صورت برای هر نقطهٔ دلخواه c در Y داریم:

$$\overline{\{a\}} \times \overline{\{c\}} = \overline{\{(a, c)\}} \neq \overline{\{(b, c)\}} = \overline{\{b\}} \times \overline{\{c\}}$$

لذا $\overline{\{a\}} \neq \overline{\{b\}}$ و در نتیجه فضای X، $T_\circ$ است. بطور مشابه می‌توان ثابت کرد که فضای Y نیز $T_\circ$ است.

تمرین

۱. نشان دهید خاصیت T_0 بودن یک خاصیت توپولوژیکی است.

۲. ثابت کنید هر زیرفضای یک فضای T_0، خود یک فضای T_0 است.

۳. فرض کنید توپولوژی‌های T و T^* روی مجموعهٔ X چنان باشند که $T \subseteq T^*$. ثابت کنید اگر فضای توپولوژیکی (X, T) یک فضای T_0 باشد، آنگاه فضای (X, T^*) نیز یک فضای T_0 است.

۴. مجموعهٔ $X = \{۱, ۲, ۳\}$ مفروض است. با این مجموعه سه فضای توپولوژیک T_0 ارائه دهید.

۵. با یک مثال نشان دهید فضای خارج‌قسمت یک فضای T_0، لزوماً T_0 نیست.

۶. فرض کنید $\{X_\alpha\}$ یک دسته از فضاهای توپولوژیک و $X = \prod X_\alpha$. مستقیماً با استفاده از تعریف ثابت کنید X یک فضای T_0 است اگر و فقط اگر به ازای هر α، X_α یک فضای T_0 باشد.

۷. فرض کنید $B \subseteq X$ و فضای توپولوژیک (X, T) مجهز به توپولوژی طرد B باشد. تحت چه شرایطی روی B، فضای توپولوژیک (X, T) یک فضای T_0 است.

۷.۲ فضاهای T_1

در اینجا فضاهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که دارای خاصیتی قوی‌تر از T_0 می‌باشند. این‌گونه فضاها که آن را T_1 می‌نامیم دارای این ویژگی خاص می‌باشند که هر نقطه از این فضا یک مجموعهٔ بسته است. نظر به اهمیت خاص این‌گونه فضاها بعضی از ریاضیدانان T_1 بودن یک فضا را جزو شرایط توپولوژی بودن آن قرار داده‌اند. به عبارت دیگر فضای (X, T) را یک فضای توپولوژیکی می‌نامند، فقط وقتی که شرایط توپولوژیکی و T_1 بودن توأماً برقرار باشد. اکنون فضاهای T_1 را تعریف می‌کنیم.

تعریف: فضای توپولوژیکی (X, T) یک **فضای** T_1 است، هرگاه برای هر دو نقطهٔ $x, y \in X$ و $x \neq y$، دو مجموعهٔ باز U و V وجود داشته باشد به طوری که $x \in U$، $y \notin U$، $y \in V$ و $x \notin V$.

تذکر: در تعریف فضای T_1 مجموعه‌های باز U و V لزوماً مجزا نیستند.

مثال ۵: هر فضای گسسته یک فضای T_1 است. زیرا برای هر دو نقطهٔ متمایز x و y، کافی است مجموعه‌های باز $\{x\}$ و $\{y\}$ را در نظر بگیریم.

مثال ۶: فضای توپولوژیکی (X, T)، با توپولوژی مکمل باپایان، یک فضای T_1 است. زیرا برای هر دو نقطهٔ متمایز x و y، کافی است مجموعه‌های $V = X\backslash\{x\}$ و $U = X\backslash\{y\}$ را در نظر بگیریم.

مثال ۷: مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی عمومی یک فضای T_1 است.

مثال ۸: *فضاهای ناگسسته با بیش از یک نقطه،* T_1 *نیستند.* زیرا تنها مجموعهٔ باز غیرتهی آن، خود فضا است.

مثال ۹: فضاهای توپولوژیک در مثال‌های ۲ و ۳، فضای T_1 نیستند. در مثال ۲ هر مجموعهٔ باز شامل b شامل a و در مثال ۳ هر مجموعهٔ باز شامل m شامل n است.

در مثال ۹ دو فضای توپولوژیک ارائه شد که T_1 نیست ولی در مثال‌های ۲ و ۳ دیدیم که این فضاها T_0 هستند. بنابراین یک فضای T_0 لزوماً یک فضای T_1 نیست در حالی که با توجه به تعریف، *هر فضای T_1، یک فضای T_0 است.*

اگر به مثال‌های بالا توجه کنیم، شاید به خاصیت مهم فضاهای T_1 پی ببریم. در این مثال‌ها فضاهای توپولوژیک T_1 ارائه‌شده به گونه‌ای هستند که مجموعه‌های تک‌عضوی بسته می‌باشند. حال ببینیم آیا این خاصیت برای تمام فضاهای T_1 برقرار است. به قضیهٔ زیر توجه کنید:

قضیهٔ ۳: فضای توپولوژیک (X, T) یک فضای T_1 است اگر و فقط اگر هر مجموعهٔ تک‌عضوی در این فضا بسته باشد.

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم هر مجموعهٔ تک‌عضوی در فضای X بسته باشد. برای اثبات T_1 بودن فضا دو نقطهٔ متمایز x و y را در نظر می‌گیریم. بنا به فرض مجموعه‌های $\{x\}$ و $\{y\}$ بسته هستند. لذا مجموعه‌های $X\backslash\{x\}$ و $X\backslash\{y\}$ باز و به ترتیب شامل y و x هستند و به علاوه نقطهٔ x متعلق به $X\backslash\{x\}$ و نقطهٔ y متعلق به $X\backslash\{y\}$ نیست. لذا فضا T_1 است.

بالعکس، فرض کنید فضای (X, T) یک فضای T_1 و نقطهٔ x یک عضو دلخواه آن باشد. برای نقطهٔ $y \in X$ و $y \neq x$، مجموعهٔ باز G_y وجود دارد که شامل y است و x را دربر ندارد. یعنی داریم:

$$y \in G_y \subseteq X\backslash\{x\}$$

اما

$$X\backslash\{x\} = \cup\{y : y \neq x\} \subseteq \cup\{G_y : y \neq x\} \subseteq X\backslash\{x\}$$

لذا

$$X\backslash\{x\} = \cup\{G_y : y \neq x\}$$

به عبارت دیگر $X\backslash\{x\}$ برابر اجتماع مجموعه‌های بازی مانند G_y است. بنابراین خود یک مجموعهٔ باز و در نتیجه $\{x\}$ یک مجموعهٔ بسته است.

□

نتیجهٔ ۴ : هر مجموعهٔ باپایان در فضای T_1 بسته است.

□

نتیجهٔ ۵ : حاصل‌ضرب دو فضا T_1 است اگر و فقط اگر هریک از آنها T_1 باشند.

اثبات: برای اثبات از قضیهٔ ۳ استفاده می‌کنیم. ابتدا فرض کنید X و Y دو فضای T_1 باشند. برای $(a,b) \in X \times Y$ داریم:

$$\overline{\{(a,b)\}} = \overline{\{a\}} \times \overline{\{b\}} = \{a\} \times \{b\} = \{(a,b)\}$$

لذا $X \times Y$ یک فضای T_1 است.

بالعکس فرض کنید $X \times Y$، T_1 باشد. برای $a \in X$ و $b \in Y$، $\overline{\{(a,b)\}} = \{(a,b)\}$ و یا $\overline{\{a\}} \times \overline{\{b\}} = \{a\} \times \{b\}$. بنابراین باید $\overline{\{a\}} = \{a\}$ و $\overline{\{b\}} = \{b\}$ یعنی دو فضای X و Y، T_1 هستند.

□

خواص دیگر فضاهای T_1 را در چند قضیهٔ زیر می‌بینیم.

قضیهٔ ۶ : فضای توپولوژیکی (X,T) یک فضای T_1 است اگر و فقط اگر هر زیرمجموعه مانند A در فضای X، برابر اشتراک مجموعه‌های باز شامل A باشد.

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم فضای توپولوژیکی (X,T) یک فضای T_1 است. مجموعهٔ $A \subseteq X$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که $X\backslash A$ برابر اجتماع تمام مجموعه‌های به شکل $\{x\}$ است که در آن $x \notin A$. اما بنا به قضیهٔ ۳ مجموعه‌هایی از نوع $\{x\}$ یک مجموعهٔ بسته و در نتیجه مجموعه‌هایی از نوع $X\backslash\{x\}$ یک مجموعهٔ باز هستند. لذا با توجه به قوانین دمرگان می‌توان گفت که مجموعهٔ A برابر اشتراک تمام مجموعه‌های باز به شکل $X\backslash\{x\}$ است که در آن $x \notin A$. به علاوه بدیهی است که برای هر $x \notin A$، $A \subseteq X\backslash\{x\}$.

برای اثبات عکس قضیه، دو نقطهٔ متمایز x و y را در فضای توپولوژیکی X در نظر می‌گیریم. بنا به فرض، مجموعهٔ $\{x\}$ برابر اشتراک تمام مجموعه‌های باز شامل $\{x\}$ است. لذا حداقل یک مجموعهٔ باز مانند U وجود دارد که شامل x است ولی شامل y نیست چون در غیر این صورت $\{x\} \subseteq \{y\}$ و

در نتیجه $x = y$ که خلاف فرض است. به همین ترتیب حداقل یک مجموعهٔ باز مانند V وجود دارد که شامل y است ولی شامل x نیست. در نتیجه فضای توپولوژیکی (X, T) یک فضای T_1 است.

□

قضیهٔ ۷: فرض کنید فضای توپولوژیکی (X, T) یک فضای T_1 و $A \subseteq X$ باشد. در این صورت نقطهٔ $p \in X$ یک نقطهٔ تجمع مجموعهٔ A است اگر و فقط اگر هر مجموعهٔ باز شامل p، شامل تعداد بی‌پایان از نقاط A باشد.

اثبات: بدیهی است که اگر هر مجموعهٔ باز شامل p، شامل تعداد بی‌پایان از نقاط A باشد، آنگاه بنا به تعریف، p یک نقطهٔ تجمع مجموعهٔ A است. (البته این مطلب در هر فضای توپولوژیکی درست است.)

عکس قضیه را با استفاده از برهان خلف ثابت می‌کنیم. لذا فرض می‌کنیم مجموعهٔ بازی مانند G حول p موجود است که فقط شامل تعداد باپایان از نقاط A است. یعنی داریم:

$$B = (G \backslash \{p\}) \cap A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

چون فضای توپولوژیکی (X, T) یک فضای T_1 و B یک زیرمجموعهٔ باپایان در این فضا است لذا بنا به نتیجهٔ ۴، B یک مجموعهٔ بسته و در نتیجه مکمل آن یعنی $X \backslash B$ یک مجموعهٔ باز است. قرار می‌دهیم $H = G \cap (X \backslash B)$. در این صورت H یک مجموعهٔ باز شامل نقطهٔ p است که در عین حال هیچ نقطهٔ دیگری از مجموعهٔ A را شامل نیست و این با فرض نقطهٔ تجمع بودن p متناقض است.

□

نتیجهٔ ۸: در فضاهای T_1، مجموعه‌های باپایان، نقطهٔ تجمع ندارند.

□

قضیهٔ ۹: اگر فضای توپولوژیکی (X, T) یک فضای T_1 و $A \subseteq X$ باشد، آنگاه مجموعهٔ نقاط تجمع A، خود یک مجموعهٔ بسته است.

اثبات: برای این‌که ثابت کنیم مجموعهٔ نقاط تجمع A یعنی A' خود یک مجموعهٔ بسته است، کافی است نشان دهیم $(A')' \subseteq A'$. برای این منظور نقطهٔ $a \in (A')'$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم U یک مجموعهٔ باز دلخواه و شامل a باشد. بنا به تعریف نقطهٔ تجمع، $(U \backslash \{a\}) \cap A' \neq \phi$. لذا نقطهٔ $b \neq a$ وجود دارد که $b \in U$ و $b \in A'$. چون فضای توپولوژیکی (X, T) یک فضای T_1 است، لذا مجموعهٔ بازی مانند V وجود دارد که شامل b است ولی شامل a نیست. قرار می‌دهیم $S = U \cap V$. روشن است که S یک مجموعهٔ باز است و به علاوه $b \in S$ و $a \notin S$. از $b \in A'$ نتیجه می‌گیریم که مجموعهٔ باز S می‌بایستی شامل نقطهٔ دیگری از مجموعهٔ A، مانند $c \in A$ باشد. چون $a \notin S$، پس

$a \neq c$. از $c \in S$ داریم $c \in U$. بنابراین مجموعهٔ باز U حول نقطهٔ a شامل نقطهٔ دیگری از A مانند c است. لذا a یک نقطهٔ تجمع مجموعهٔ A است یعنی $a \in A'$.

تمرین

۱. نشان دهید خاصیت T_1 بودن، یک خاصیت توپولوژیکی است.

۲. ثابت کنید هر زیرفضای یک فضای T_1، خود یک فضای T_1 است.

۳. فرض کنید $X = \{a, b, c\}$ و $T = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$. نشان دهید فضای (X, T)، T_1 نیست.

۴. ثابت کنید فضای توپولوژیک شعاع راست (چپ)، T_0 است ولی T_1 نیست.

۵. فرض کنید توپولوژی‌های T و T^* روی مجموعهٔ X چنان باشند که $T \subseteq T^*$. ثابت کنید اگر فضای توپولوژیکی (X, T) یک فضای T_1 باشد، آنگاه فضای (X, T^*) نیز یک فضای T_1 است.

۶. ثابت کنید هر فضای T_1 و باپایان، یک فضای گسسته است.

۷. فرض کنید $\{X_\alpha\}$ یک دسته از فضاهای توپولوژیک و $X = \prod X_\alpha$. مستقیماً با استفاده از تعریف ثابت کنید X یک فضای T_1 است اگر و فقط اگر به ازای هر α، X_α یک فضای T_1 باشد.

۸. ثابت کنید اگر به ازای هر α، X_α یک فضای T_1 باشد، آنگاه X_α با یک زیرمجموعهٔ بسته از $\prod X_\alpha$ همسانریخت است. با یک مثال نشان دهید اگر شرط T_1 بودن فضا حذف شود حکم لزوماً برقرار نیست.

۹. ثابت کنید تصویر یک فضای T_1، تحت یک تابع بسته، T_1 است.

۱۰. نشان دهید هر فضای تماماً ناهمبند، T_1 و هر فضای T_1 و باپایان، تماماً ناهمبند است.

۱۱. فرض کنید $f : X \to Y$ تابع خارج‌قسمت باشد. ثابت کنید Y، T_1 است اگر و فقط اگر به ازای هر $y \in Y$، مجموعهٔ $\{f^{-1}(y)\}$ در X بسته باشد.

۱۲. فضای توپولوژیک (X, T)، T_1 است اگر و فقط اگر به ازای هر $p \in X$، $\cap\{G : p \in G \in T\} = \{p\}$.

۱۳. فرض کنید (X,T) یک فضای T_1، با حداقل دو نقطه باشد. نشان دهید اگر $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی T باشد، آنگاه $\mathcal{B}\backslash\{\phi,X\}$ نیز یک پایه برای توپولوژی T است. (با تمرین ۱۴ بخش ۲.۳ مقایسه کنید.)

۱۴. فرض کنید (X,T) یک فضای T_1، x نقطهٔ تجمع A و F یک زیرمجموعهٔ باپایان باشد. نشان دهید x نقطهٔ تجمع $A\backslash F$ نیز است.

۱۵. فرض کنید (X,T) یک فضای T_1 با این خاصیت که هر زیرمجموعهٔ بی‌پایان آن نقطهٔ تجمع دارد، باشد. نشان دهید هر پوشش باز شمارش‌پذیر فضا، زیرپوشش باپایان دارد.

۱۶. فرض کنید (X,T) یک فضای T_1، همبند و شامل بیش از یک نقطه باشد. نشان دهید $x\in X$ نقطهٔ تجمع $X\backslash\{x\}$ است. با یک مثال نشان دهید T_1 بودن فضا ضروری است.

۱۷. ثابت کنید در یک فضای توپولوژیک T_1 و همبند، هر زیرفضای همبند که شامل بیش از یک نقطه باشد، بی‌پایان است.

۱۸. یک فضای توپولوژیک همراه با یک زیرمجموعه از آن چنان ارائه دهید که مجموعهٔ نقاط تجمع آن بسته نباشد.

۷.۳ فضاهای T_2

مهمترین اصل جداپذیری که به وسیلهٔ ریاضیدانان مشهور هاسدورف ارائه گردیده است، به همان نام یا T_2 معروف است. فضاهای T_2 کاربرد بسیاری دارند و ما در این قسمت بعضی از آنها را به کار می‌گیریم.

تعریف: فضای توپولوژیکی (X,T) را یک **فضای T_2** یا **هاسدورف** می‌گوییم هرگاه برای دو نقطهٔ متمایز x و y مجموعه‌های باز U و V وجود داشته باشند به طوری که $x\in U$، $y\in V$ و $U\cap V=\phi$.

بدیهی است که *هر فضای T_2، یک فضای T_1 است*. ولی عکس آن لزوماً درست نیست. زیرا در تعریف فضای T_2 مجموعه‌های باز U و V مجزا هستند در حالی که در تعریف فضای T_1 لزوماً اینطور نیست. مثال ۱۳ که متعاقباً ارائه می‌شود این ادعا را ثابت می‌کند.

مثال ۱۰ : فضای توپولوژیکی $\mathcal{R}$ یک فضای T_2 است. زیرا اگر فاصلهٔ دو نقطهٔ x و y را r فرض کنیم، کافی است مجموعه‌های باز $U=\left]x-\frac{r}{2},x+\frac{r}{2}\right[$ و $V=\left]y-\frac{r}{2},y+\frac{r}{2}\right[$ را به ترتیب حول x و y در نظر بگیریم.

مثال ۱۱ : اجتماع دو توپولوژی طرد p و مکمل باپایان، T_2 است. زیرا برای دو نقطهٔ مجزای x و y که هر دو مخالف p باشند می‌توان از مجموعه‌های باز $\{x\}$ و $\{y\}$ استفاده کرد و اگر یکی از این نقاط مثلاً $x = p$ باشد، مجموعه‌های باز $\{y\}$ و $X\backslash\{y\}$ را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱۲ : فضای توپولوژیک جذب p، T_2 نیست. زیرا هر مجموعهٔ باز، شامل p است لذا دو مجموعهٔ باز مجزا در این فضا موجود نیست.

مثال ۱۳ : فرض کنید X یک مجموعهٔ بی‌پایان و مجهز به توپولوژی مکمل باپایان باشد. در این صورت فضای توپولوژیکی (X, T) یک فضای T_2 نیست. زیرا اگر مجموعه‌های باز و مجزای U و V حول دو نقطهٔ دلخواه متمایز موجود باشد آنگاه باید $X\backslash U$ و $X\backslash V$ باپایان باشند و در نتیجه اجتماع آنها نیز باید باپایان باشد در حالی که

$$(X\backslash U) \cup (X\backslash V) = X\backslash(U \cap V) = X\backslash\phi = X$$

و X طبق فرض بی‌پایان است. لازم به ذکر است که در مثال ۶ دیدیم که این فضا T_1 است. بنابراین یک *فضای T_1، لزوماً T_2 نیست.* ـ

مثال ۱۴ : هر فضای گسسته T_2 است. زیرا برای هر دو نقطهٔ متمایز دلخواه داده شده مانند x و y، کافی است مجموعه‌های باز $\{x\}$ و $\{y\}$ در نظر گرفته شود. ولی فضای ناگسسته با بیش از یک نقطه T_2 نیست. زیرا T_1 نیست.

مثال ۱۵ : فضای ارائه‌شده در مثال ۳، T_2 نیست زیرا این فضا T_1 نیست.

مجموعه‌های فشرده در فضای T_2 کاربرد بسیار دارند. مثلاً می‌توان قسمتی از قضیهٔ هاینه- برل را در فضاهای هاسدورف ثابت نمود. از آنجایی که در فضاهای توپولوژیکی تصوری از فاصله نداریم، لذا کراندار بودن به طور کلی در فضاهای توپولوژیکی برقرار نیست. اما مفهوم بسته بودن برای مجموعه‌های فشرده اگرچه، همانطور که قبلاً اشاره کردیم، در تمام فضاهای توپولوژیکی برقرار نیست ولی می‌توان آن را در فضاهای T_2 یا هاسدورف ثابت نمود. به قضیهٔ زیر توجه کنید. ـ

قضیهٔ ۱۰ : اگر فضای توپولوژیکی (X, T)، یک فضای T_2 باشد، آنگاه هر زیرمجموعهٔ فشرده در این فضا، بسته است.

اثبات: فرض کنید $E \subseteq X$ و E در X فشرده باشد. برای این‌که ثابت کنیم E بسته است، کافی است ثابت کنیم مکمل آن یعنی $X\backslash E$ باز است. لذا نشان می‌دهیم هر نقطهٔ مجموعهٔ $X\backslash E$ یک نقطهٔ داخلی است. نقطهٔ $x \in X\backslash E$ را ثابت در نظر بگیرید. چون فضا T_2 است، برای هر نقطهٔ $y \in E$

مجموعه‌های باز H_y و G_y وجود دارد، به طوری که $x \in H_y$، $y \in G_y$ و $H_y \cap G_y = \phi$. دستهٔ $\mathcal{G} = \{G_{y_i} : y_i \in E\}$ یک پوشش باز برای مجموعهٔ E است و چون E فشرده است تعداد باپایان از اعضای $\mathcal{G}$ مثلاً G_{y_1}، G_{y_2}، ... ، G_{y_n} مجموعهٔ E را می‌پوشانند. دستهٔ H_{y_i} از مجموعه‌های باز حول x، متناظر به G_{y_i} را انتخاب می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$H = H_{y_1} \cap H_{y_2} \cap \cdots \cap H_{y_n}$$

روشن است که H مجموعهٔ باز حول x است و به علاوه با توجه به $H_y \cap G_y = \phi$، داریم $H_y \subseteq X \backslash G_y$. لذا

$$\begin{aligned} H &= H_{y_1} \cap H_{y_2} \cap \cdots \cap H_{y_n} \subseteq (X \backslash G_{y_1}) \cap (X \backslash G_{y_2}) \cap \cdots \cap (X \backslash G_{y_n}) \\ &= X \backslash (G_{y_1} \cup G_{y_2} \cup \cdots \cup G_{y_n}) \subseteq X \backslash E \end{aligned}$$

و این به آن معنا است که مجموعهٔ $X \backslash E$ باز و در نتیجه مجموعهٔ E بسته است.

□

قضیهٔ ۱۱ : اگر فضای توپولوژیکی (X, T)، یک فضای T_2 باشد، آنگاه برای هر نقطهٔ دلخواه $x \in X$ و هر مجموعهٔ فشردهٔ E، $x \notin E$، مجموعه‌های باز و مجزای U و V وجود دارد به طوری که $x \in U$، و $E \subseteq V$.

اثبات: در اثبات قضیهٔ ۱۰ دیدیم که اگر فضای توپولوژیکی (X, T)، یک فضای T_2 و $E \subseteq X$ فشرده و $x \notin E$، آنگاه دسته‌های $\{H_{y_i}\}$ و $\{G_{y_i}\}$، $1 \leq i \leq n$، موجود است به طوری که $\{G_{y_i}\}$ یک پوشش باز برای مجموعهٔ فشردهٔ E و برای $1 \leq i \leq n$، $x \in H_{y_i}$ و $H_{y_i} \cap G_{y_i} = \phi$. بنابراین کافی است قرار دهیم

$$H = H_{y_1} \cap H_{y_2} \cap \cdots \cap H_{y_n}$$

$$U = H \quad \text{و} \quad V = G_{y_1} \cup G_{y_2} \cup \cdots \cup G_{y_n}$$

در این صورت U و V دو مجموعهٔ باز و مجزا هستند که $x \in U$ و $E \subseteq V$.

□

اکنون این قضیه را به دو «زیرمجموعهٔ فشرده» تعمیم می‌دهیم. در واقع قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که در فضاهای هاسدورف، مجموعه‌های فشرده مانند نقاط رفتار می‌کنند.

قضیهٔ ۱۲ : اگر فضای توپولوژیکی (X, T)، یک فضای T_2، $H \subseteq X$ و $K \subseteq X$ دو مجموعهٔ غیرتهی، فشرده و مجزا باشند، آنگاه دو مجموعهٔ باز وجود دارد به طوری که $H \subseteq V$، $K \subseteq U$ و $U \cap V = \phi$.

اثبات: بنا به قضیهٔ ۱۱ برای هر نقطهٔ $x \in H$، با توجه به فشردگی K و $x \notin K$ دو مجموعهٔ باز U_x و V_x وجود دارد به طوری که

$$V_x \cap U_x \neq \phi\,, \quad K \subseteq V_x\,, \quad x \in U_x$$

روشن است که دسته مجموعه‌های باز U_x مجموعهٔ H را می‌پوشاند و چون H فشرده است تعداد باپایان از این مجموعه‌ها، مثلاً U_{x_1}، U_{x_2}، ... ، U_{x_n}، مجموعهٔ H را می‌پوشاند. از طرفی چون $K \subseteq V_x$، پس

$$K \subseteq V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \cdots \cap V_{x_n}$$

و اگر قرار دهیم

$$V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \cdots \cap V_{x_n} \quad \text{و} \quad U = U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \cdots \cap U_{x_n}$$

داریم

$$K \subseteq V \quad \text{و} \quad H \subseteq U \quad \text{و} \quad U \cap V = \phi$$

□

قضیهٔ ۱۳ : اگر فضای توپولوژیکی (X,T) فشرده و فضای (X^*,T^*) یک فضای T_2 و تابع $f : X \to X^*$ یک به یک، پیوسته و پوشا باشد، آنگاه تابع f باز و در نتیجه f یک همسانریختی از X به X^* است.

اثبات: برای این‌که نشان دهیم تابع f باز است، مجموعهٔ باز و دلخواه G را در فضای (X,T) در نظر گرفته و ثابت می‌کنیم $f(G)$ در فضای (X^*,T^*) باز است.

چون مجموعهٔ G باز است مجموعهٔ $X\backslash G$ در این فضا بسته و در نتیجه بنا به قضیهٔ ۴ فصل ۵، $X\backslash G$ فشرده است. از طرفی تابع f پیوسته است لذا بنا به قضیهٔ ۵ فصل ۵، $f(X\backslash G)$ در فضای (X^*,T^*) فشرده است. و چون فضای (X^*,T^*) یک فضای T_2 است، بنا به قضیهٔ ۱۰ همین فصل، $f(X\backslash G)$ بسته است. و از آنجا $X^*\backslash f(X\backslash G)$ باز است ولی چون f یک تابع یک به یک و پوشا است، داریم:

$$X^*\backslash f(X\backslash G) = X^*\backslash(f(X)\backslash f(G)) = X^*\backslash(X^*\backslash f(G)) = f(G)$$

یعنی $f(G)$ باز و در نتیجه f یک همسانریختی است.

□

اکنون چند قضیهٔ دیگر را بیان و اثبات می‌کنیم که هرکدام روشنگر یکی از خواص فضاهای T_2 است.

قضیهٔ ۱۴ : فرض کنید $\{X_\alpha\}$ یک دسته از فضاهای توپولوژیک و $X = \prod X_\alpha$. در این صورت X یک فضای T_2 است اگر و فقط اگر به ازای هر α، X_α یک فضای T_2 باشد.

اثبات: ابتدا فرض کنید به ازای هر α، X_α یک فضای T_2 باشد و به علاوه فرض کنید $a = (a_\alpha)$ و $b = (b_\alpha)$ دو نقطهٔ متمایز در فضای حاصل‌ضرب باشند. در این صورت β ای موجود است که $a_\beta \neq b_\beta$. پس مجموعه‌های باز و مجزای U_β و V_β در X_β موجود است که U_β شامل a_β است ولی شامل b_β نیست و V_β شامل b_β است و شامل a_β نیست. قرار دهید $V = \prod_\beta^{-1}(V_\beta)$ و $U = \prod_\beta^{-1}(U_\beta)$. در این صورت U و V دو مجموعهٔ باز و مجزا هستند که اولی شامل a و دومی شامل b است. اثبات عکس مطلب بسیار ساده است و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

□

مثال‌های زیر نشان می‌دهد که فضای خارج‌قسمت یک فضای هاسدورف لزوماً هاسدورف نیست.

مثال ۱۶ : فرض کنید $X = \mathcal{R}$ و توپولوژی T به وسیلهٔ پایهٔ زیر به وجود آمده باشد:

$$\mathcal{S} = \{]a,b[\subseteq \mathcal{R} : 0 \notin]a,b[\} \cup \{]-\varepsilon,\varepsilon[\setminus\{\tfrac{1}{n}\}_{n\geq 1} : \varepsilon > 0\}$$

در این صورت X، هاسدورف است. فرض کنید $A = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$. فضای X/A را با یکسان کردن نقاط A به دست آورید. تابع تجزیه $p : X \to X/A$ را در نظر بگیرید (به تمرین ۳ بخش ۴.۲ مراجعه کنید). پس تابع p یک تابع خارج‌قسمت و X/A فضای خارج‌قسمت X است که هاسدورف نیست زیرا نقاط $p(A)$ و $p(0)$ دو نقطهٔ متمایز در فضای X/A هستند که به وسیلهٔ مجموعه‌های باز جدا نمی‌شوند. برای اثبات این ادعا فرض کنید دو مجموعهٔ مجزای U و V موجود باشند به طوری که $p(0) \in U$ و $p(A) \in V$. با توجه به تعریف تابع p، مجموعهٔ $p^{-1}(U) = U$ باز و شامل صفر است. پس $\varepsilon > 0$ موجود است که $0 \in]-\varepsilon,\varepsilon[\setminus\{\frac{1}{n} : n > 0\} \subseteq U$. حال m را چنان اختیار کنید که $\varepsilon > \frac{1}{m}$. چون بنا به تعریف تابع p، نقطهٔ $\frac{1}{m}$ به مجموعهٔ باز $p^{-1}(V) = V \cup A$ متعلق است لذا a و b موجود است که $\frac{1}{m} \in]a,b[\subseteq V \cup A$. بنابراین مجموعه‌های $p^{-1}(U)$ و $p^{-1}(V)$ مجزا نیستند و این با مجزا بودن U و V متناقض است.

مثال ۱۷ : فرض کنید X اجتماع دو خط $y = 0$ و $y = 1$ در صفحه و Y فضای تجزیهٔ X باشد که با یکسان کردن هر دو نقطهٔ $(x, 0)$ و $(x, 1)$ برای هر $x \neq 0$ به دست می‌آید. تابع تجزیهٔ $p : X \to Y$ یک تابع خارج‌قسمت و لذا Y فضای خارج‌قسمت است. نشان می‌دهیم Y هاسدورف نیست. نقاط متمایز $x = p(0, 0)$ و $y = p(0, 1)$ را در Y در نظر بگیرید و فرض کنید این نقاط توسط دو مجموعهٔ باز و مجزای مثلاً U و V، $x \in U$ و $y \in V$ جدا شوند. پس نقاط $(0, 0)$ و $(0, 1)$ به ترتیب به مجموعه‌های

باز $p^{-1}(U)$ و $p^{-1}(V)$ متعلق است. با توجه به توپولوژی X، $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ موجود است که

$$(0,0) \in]-\varepsilon, \varepsilon[\times \{0\} \subseteq p^{-1}(U) \quad , \quad (0,1) \in]-\delta, \delta[\times \{1\} \subseteq p^{-1}(V)$$

حال $a > 0$ را چنان اختیار کنید که از ε و δ کمتر باشد. در این صورت

$$(a,0) \in]-\varepsilon, \varepsilon[\times \{0\} \subseteq p^{-1}(U) \quad , \quad (a,1) \in]-\delta, \delta[\times \{1\} \subseteq p^{-1}(V)$$

پس

$$P\{(a,0)\} = p\{(a,1)\} \in U \cap V$$

که تناقض است.

قضیهٔ ۱۵ : اگر توابع f و g از فضای توپولوژیکی (X, T) به فضای توپولوژیکی (X^*, T^*) پیوسته و فضای (X^*, T^*) یک فضای هاسدورف باشد، آنگاه مجموعهٔ $A = \{x : f(x) = g(x)\}$ در فضای (X, T) بسته است.

اثبات: نشان می‌دهیم $X \backslash A$ باز است. برای این منظور نشان می‌دهیم هر نقطهٔ $X \backslash A$ یک نقطهٔ داخلی است، لذا نقطهٔ $x \in X \backslash A$ را در نظر می‌گیریم. چون $x \notin A$، لذا طبق تعریف $g(x) \neq f(x)$. از طرفی فضای توپولوژیکی (X^*, T^*) یک فضای T_2 است، بنابراین مجموعه‌های باز U و V وجود دارند به طوری که:

$$g(x) \in V \quad \text{و} \quad f(x) \in U \quad \text{و} \quad U \cap V = \phi$$

چون f و g پیوسته هستند، $f^{-1}(U)$ و $g^{-1}(V)$ مجموعه‌های باز در X هستند. بنابراین $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ باز در X حول x است و به علاوه $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subseteq X \backslash A$. زیرا اگر z متعلق به $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$، آنگاه $f(z) \in U$ و $g(z) \in V$. چون $U \cap V = \phi$، لذا $f(z) \neq g(z)$. پس $z \notin A$ و یا $z \in X \backslash A$.

□

در مقدمهٔ این فصل اشاره کردیم که فضایی T_2 است که به اندازهٔ کافی مجموعهٔ باز داشته باشد. به بررسی این مطلب در قضیهٔ زیر می‌پردازیم.

قضیهٔ ۱۶ : اگر فضای توپولوژیکی (X, T) یک فضای T_2 و X بی‌پایان باشد، آنگاه این فضا شامل تعداد بی‌پایان مجموعهٔ غیرتهی، باز و مجزا است.

اثبات: برحسب این‌که مجموعهٔ X دارای نقطهٔ تجمع باشد یا نباشد دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: مجموعهٔ X *دارای نقطهٔ تجمع نیست*.

در این صورت برای هر $x \in X$، مجموعهٔ باز U_x حول x موجود است که $(U_x \backslash \{x\}) \cap X = \phi$. به عبارت دیگر باید $U_x = \{x\}$. پس هر مجموعهٔ تک‌عضوی از نقاط متمایز نمایشگر یک مجموعهٔ باز در این فضا است. لذا این فضا شامل تعداد بی‌پایان مجموعهٔ باز مجزا است.

حالت دوم: مجموعهٔ X *دارای نقطهٔ تجمع است*.

فرض کنید نقطهٔ x یک نقطهٔ تجمع مجموعهٔ X است. نقطهٔ $x_1 \in X$، $x_1 \neq x$ را انتخاب می‌کنیم. چون فضا T_2 است، دو مجموعهٔ باز و مجزای G_1 و V_1 وجود دارد به طوری که $x_1 \in G_1$ و $x \in V_1$. اما چون نقطهٔ x یک نقطهٔ تجمع مجموعهٔ X و $x \in V_1$ است، پس نقطهٔ $x_2 \in X$ و $x_2 \neq x$ وجود دارد به طوری که $x_2 \in X \cap (V_1 \backslash \{x\})$.

مجدداً با استفاده از خاصیت T_2 بودن، دو مجموعهٔ باز مجزای V_2^* و G_2^* وجود دارد به طوری که $x_2 \in G_2^*$ و $x \in V_2^*$. اگر قرار دهیم $G_2 = G_2^* \cap V_1$ و $V_2 = V_2^* \cap V_1$. در آن صورت روشن است که $x \in V_2$ و $x_2 \in G_2$ و به علاوه این دو مجموعه باز، مجزا و هریک زیرمجموعهٔ V_1 می‌باشند، لذا اشتراک آنها با مجموعهٔ G_1 تهی است، یعنی داریم:

$$x \in V_2 \subseteq V_1 , \quad x_1 \in G_1 , \quad x_2 \in G_2 \subseteq V_1 ,$$

$$V_2 \cap G_2 = \phi , \quad V_2 \cap G_1 = \phi , \quad G_1 \cap G_2 = \phi$$

اکنون با استفاده از استقرا فرض می‌کنیم برای نقاط x_k مجموعه‌های باز G_k و V_k با خواص زیر موجودند:

$$x_k \in G_k \subseteq V_{k-1} , \quad x \in V_k \subseteq V_{k-1} ,$$

$$V_k \cap G_k = \phi , \;\; k \leq n , \quad G_j \cap G_i = \phi , \;\; i \neq j , \; i,j \leq n$$

اکنون نقطهٔ تجمع $x \in X$ و مجموعهٔ باز V_n، $x \in V_n$ را در نظر می‌گیریم. مطابق تعریف نقطهٔ x_{n+1} وجود دارد به طوری که $x_{n+1} \in X \cap (V_n \backslash \{x\})$. با استفاده از T_2 بودن فضا دو مجموعهٔ باز جدا از هم G_{n+1}^* و V_{n+1}^* وجود دارد به طوری که:

$$x_{n+1} \in G_{n+1}^* \quad , \quad x \in V_{n+1}^*$$

اگر قرار دهیم

$$G_{n+1} = G_{n+1}^* \cap V_n \quad , \quad V_{n+1} = V_{n+1}^* \cap V_n$$

در آن صورت $x_{n+1} \in G_{n+1}$ و $x \in V_{n+1}$. و به علاوه G_{n+1} و V_{n+1} دو زیرمجموعهٔ باز و مجزا از V_n هستند، لذا با G_n نقطهٔ مشترکی ندارند.

چون مجموعه‌های V_n کاهشی هستند، مجموعهٔ G_{n+1} نه‌تنها با G_n اشتراکی ندارد بلکه با مجموعه‌های G_k، $k \leq n$، نیز اشتراکی ندارد. لذا مجموعه‌های G_n که با استقرا تعریف شده است تعداد بی‌پایان از مجموعه‌های باز، غیرتهی و مجزا از هم می‌باشند.

□

قضیهٔ ۱۷ : اگر در فضای توپولوژیکی هاسدورف و فشردهٔ (X, T) هر نقطه یک نقطهٔ تجمع باشد، آنگاه X شمارش‌ناپذیر است.

اثبات: اولاً نشان می‌دهیم برای هر نقطه مانند x و هر مجموعهٔ باز غیرتهی مانند U، مجموعهٔ باز غیرتهی V واقع در U موجود است که بستار آن شامل x نیست.

برای این منظور نقطهٔ y متمایز از x را در U اختیار کنید. این نقطه موجود است زیرا اگر x به U متعلق باشد از تعریف نقطهٔ تجمع وجود y بدیهی است و اگر x در U نباشد با توجه به غیرتهی بودن U می‌توان y را اختیار کرد. چون X هاسدورف است مجموعه‌های باز و مجزای H و K به ترتیب حول x و y موجود است. قرار دهید $V = U \cap K$. بدیهی است که V باز و بستار آن شامل x نیست. زیرا به ازای مجموعهٔ باز H حول x داریم $H \cap V \subseteq H \cap K = \phi$، لذا $x \notin \overline{V}$.

اینک برای اثبات شمارش‌ناپذیری X نشان می‌دهیم هیچ تابع پوشایی از $\mathcal{N}$ به X موجود نیست. زیرا اگر تابع پوشای $f : \mathcal{N} \to X$ موجود باشد، قرار دهید $x_n = f(n)$، پس برای نقطهٔ x_1 و مجموعهٔ باز $U = X$، مجموعهٔ باز غیرتهی $V_1 \subseteq X$ موجود است که $x_1 \notin \overline{V_1}$. با ادامهٔ این روش برای مجموعهٔ باز غیرتهی V_{n-1}، مجموعهٔ باز غیرتهی V_n واقع در V_{n-1} موجود است که $x_n \notin \overline{V_n}$. بدین ترتیب دستهٔ غیرتهی از مجموعه‌های بستهٔ $\{\overline{V_n}\}$ ایجاد می‌شود که

$$\overline{V_1} \supseteq \overline{V_2} \supseteq \cdots$$

چون X فشرده است بنا به نتیجهٔ ۸ فصل ۵، نقطهٔ $x \in \cap \overline{V_n}$ موجود است. بدیهی است که به ازای هر n، $x_n \neq x$ زیرا $x \in \overline{V_n}$ در حالی که $x_n \notin \overline{V_n}$. لذا f پوشا نیست و در نتیجه X شمارش‌ناپذیر می‌باشد.

□

قضیهٔ ۱۸ : مجموعهٔ اعداد حقیقی شمارش‌ناپذیر است.

اثبات: با توجه به قضیهٔ ۱۷، بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ شمارش‌ناپذیر است در نتیجه بازهٔ باز $]0, 1[$ نیز شمارش‌ناپذیر می‌باشد و چون $\mathcal{R}$ با این بازهٔ باز همسانریخت است لذا $\mathcal{R}$ نیز شمارش‌ناپذیر است.

□

در بخش ۳.۱ با دنباله و حد آن آشنا شدیم و در مثال ۱۲ در همان بخش دیدیم که در فضاهای توپولوژیک، حد لزوماً یگانه نیست و در آنجا متذکر شدیم که در فضاهای هاسدورف حد یگانه است. اکنون به اثبات این مطلب می‌پردازیم.

قضیهٔ ۱۹ : اگر فضای توپولوژیکی (X, T) یک فضای $T_۲$ و دنبالهٔ (x_n) در این فضا دارای حد باشد، آنگاه این حد یگانه است.

اثبات: فرض کنید دنبالهٔ (x_n) در فضای X دارای دو حد متمایز x و y باشد. چون فضای X یک فضای $T_۲$ است، دو مجموعهٔ باز و مجزای H و G موجود است به طوری که $x \in G$ و $y \in H$.

از طرفی چون دنبالهٔ (x_n) به نقاط x و y همگرا است عدد $N \in \mathcal{N}$ موجود است به طوری که برای هر $n > N$، $x_n \in G$ و $x_n \in H$، که خلاف مجزا بودن مجموعه‌های H و G است. در نتیجه حد هر دنباله، در صورت وجود، در فضاهای هاسدورف یگانه است.

تمرین

۱. آیا گفتهٔ زیر صحیح است؟

اگر حد هر دنباله، در صورت وجود، در فضای توپولوژیکی (X, T) یگانه باشد، آنگاه آن فضا $T_۲$ است. (عکس قضیهٔ ۱۹)

۲. نشان دهید خاصیت $T_۲$ بودن یک خاصیت توپولوژیکی است.

۳. ثابت کنید هر زیرفضای یک فضای $T_۲$، خود یک فضای $T_۲$ است.

۴. فرض کنید توپولوژی‌های T و T^* روی مجموعهٔ X چنان باشند که $T \subseteq T^*$. ثابت کنید اگر فضای توپولوژیکی (X, T) یک فضای $T_۲$ باشد، آنگاه فضای (X, T^*) نیز یک فضای $T_۲$ است.

۵. نشان دهید فضای طرد $a \in X$ هاسدورف نیست.

۶. در هر حالت نشان دهید که فضای توپولوژیک داده‌شده، $T_۲$ است.

الف ـ صفحه شعاعی (به فصل ۲ مراجعه شود)

ب ـ مجموعه اعداد حقیقی با توپولوژی حد بالایی (حد پایینی)

پ ـ $X = \mathcal{R}$ و توپولوژی T به وسیلهٔ پایه زیر به وجود آمده باشد

$$\mathcal{S} = \{]a, b[\subseteq \mathcal{R} : \circ \in]a, b[\} \cup \{]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{\tfrac{۱}{n}\}_{n \geq ۱} : \varepsilon > \circ\}$$

ت- $X = \mathcal{R}$ و توپولوژی T به وسیلهٔ پایهٔ زیر ایجاد شده باشد

$$\mathcal{B} = \{]a,b[: \circ \notin]a,b[, a,\ b \in \mathcal{R}\} \cup \{]-\varepsilon, \varepsilon[\cup]-\infty, -n[\cup]n, \infty[: n \in \mathcal{N}, \varepsilon \in \mathcal{R}\}$$

ث- X صفحه شکافته‌شدهٔ باپایان (به بخش ۵.۱ تمرین ۲۳ مراجعه کنید)

ج- صفحهٔ مور (به فصل ۲ مراجعه کنید)

۷. ثابت کنید تصویر هر فضای فشرده تحت یک تابع پیوسته در یک فضای هاسدورف، بسته است. به عبارت دیگر، هر تابع پیوسته از یک فضای فشرده به یک فضای هاسدورف، بسته است.

۸. نشان دهید فضای (X, T) یک فضای هاسدورف است اگر و فقط اگر برای هر دو نقطهٔ متمایز x و y در این فضا، مجموعهٔ باز U شامل x موجود باشد به طوری که $y \notin \overline{U}$.

۹. فرض کنید فضای (X, T) هاسدورف باشد. پس X فشردهٔ موضعی در x است اگر و فقط اگر برای هر مجموعهٔ باز U حول x، مجموعهٔ باز V با بستار فشرده حول x موجود باشد به طوری که $\overline{V} \subseteq U$ (با تمرین ۲ بخش ۵.۳ مقایسه کنید).

۱۰. فرض کنید X هاسدورف و موضعاً فشرده و Y باز (یا بسته) در X باشد. نشان دهید Y نیز موضعاً فشرده است (با تمرین ۱۱ بخش ۵.۳ مقایسه کنید).

۱۱. اگر فضای توپولوژیکی (X, T) یک فضای $T_۲$ و تابع $f : X \to X$ پیوسته باشد، آنگاه مجموعهٔ $A = \{x : f(x) = x\}$ بسته است.

۱۲. فرض کنید f و g دو تابع پیوسته از فضای توپولوژیکی X به فضای هاسدورف Y باشند و همچنین فرض کنید D در X چگال باشد. ثابت کنید اگر $f = g$ روی D، آنگاه $f = g$ روی X است.

۱۳. فرض کنید فضای (X, T) فشرده، فضای (X, T^*) هاسدورف و $T^* \subseteq T$ باشد. ثابت کنید در این صورت $T = T^*$.

۱۴. نشان دهید اگر تابع f از فضای توپولوژیکی (X, T) به فضای توپولوژیکی (X^*, T^*) پیوسته و یک به یک و فضای (X^*, T^*) یک فضای هاسدورف باشد، آنگاه فضای (X, T) نیز هاسدورف است.

۱۵. فرض کنید f یک تابع پیوسته از فضای توپولوژیکی X به فضای توپولوژیکی Y باشد. ثابت کنید اگر Y هاسدورف باشد، آنگاه مجموعهٔ $\{(a, b) : f(a) = f(b)\}$ در فضای $X \times X$ بسته است.

۱۶. فرض کنید f یک تابع باز و پوشا از فضای توپولوژیکی X به فضای توپولوژیکی Y باشد. ثابت کنید اگر مجموعهٔ $\{(a,b) : f(a) = f(b)\}$ در فضای $X \times X$ بسته باشد، آنگاه Y هاسدورف است.

۱۷. ثابت کنید فضای توپولوژیکی X هاسدورف است اگر و فقط اگر مجموعهٔ $\{(x,x) : x \in X\}$ در $X \times X$ بسته باشد.

۱۸. فرض کنید فضای توپولوژیک X چنان باشد که به ازای هر $x \neq y$ در فضای X، تابع پیوستهٔ $f : X \to [۰,۱]$ موجود باشد که $f(x) = ۰$ و $f(y) = ۱$. ثابت کنید فضای توپولوژیکی (X,T) هاسدورف است.

۱۹. فرض کنید f یک تابع از فضای X به فضای هاسدورف Y باشد. ثابت کنید:

الف_ اگر f پیوسته باشد، آنگاه مجموعهٔ $A = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ در فضای $X \times Y$ بسته است (مجموعهٔ A را نمودار f می‌نامند).

ب_ نشان دهید اگرچه تابع $f : [۰,\infty) \to [۰,\infty)$ با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{x}$ برای $x \neq ۰$ و $f(۰) = ۰$ پیوسته نیست ولی نمودار آن بسته است (این مثال نشان‌می دهد عکس قسمت الف لزوماً برقرار نیست).

پ_ اگر علاوه بر شرط هاسدورف بودن، شرط فشردگی نیز به Y اضافه شود، آنگاه عکس الف درست است.

۲۰. ثابت کنید اشتراک هر دسته از مجموعه‌های فشرده در فضای هاسدورف، فشرده است.

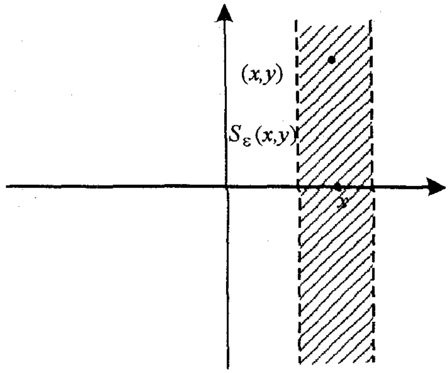
۲۱. فرض کنید فضای (X,T) یک فضای هاسدورف و فشرده و $\{A_i\}$ یک دسته از مجموعه‌های بسته چنان باشند که مجموعهٔ نقاط درون آنها تهی است. نشان دهید نقطه‌ای در فضا موجود است که در هیچ یک از A_i ها نیست (این صورت دیگری از قضیهٔ بیر[۱] است ک در آینده مطالعه خواهیم کرد).

۲۲. با استفاده از قضیهٔ ۱۷ نشان دهید مجموعهٔ کانتور شمارش‌ناپذیر است.

۲۳. فرض کنید $X = \mathcal{R}^۲$. قرار دهید $S_\varepsilon(x,y) = \{(u,v) \in \mathcal{R}^۲ : |x-u| < \varepsilon\}$ و $U \subseteq \mathcal{R}^۲$ را باز بنامید. اگر برای هر $(x,y) \in U$، $\varepsilon > ۰$ ای موجود باشد به طوری که $S_\varepsilon(x,y) \subseteq U$ (شکل ۲۵). با استفاده از قضیهٔ ۱۹ نشان دهید این فضای توپولوژیکی هاسدورف نیست.

---

[۱] Baire



شکل ۲۵

۲۴. فرض کنید f از فضای توپولوژیک X به فضای توپولوژیک Y یک تابع بسته و پوشا باشد و همچنین فرض کنید برای هر $y \in Y$، $f^{-1}(y)$ در X فشرده باشد. ثابت کنید اگر X هاسدورف باشد، آنگاه Y نیز هاسدورف است.

۲۵. فرض کنید (X, T) و (X^*, T^*) دو فضای هاسدورف باشند.

الف_ نشان دهید اگر $(X, T \cap T^*)$ هاسدورف باشد، آنگاه مجموعهٔ $\{(x, x) : x \in X\}$ در فضای $X \times X$ با توپولوژی $T \times T^*$ بسته است.

ب_ با یک مثال نشان دهید عکس عبارت بالا صحیح نیست (به عبارت دیگر دو فضای هاسدورف (X, T) و (X, T^*) را چنان ارائه دهید که مجموعهٔ $\{(x, x) : x \in X\}$ در فضای $X \times X$ با توپولوژی $T \times T^*$ بسته باشد، ولی $(X, T \cap T^*)$ هاسدورف نباشد.

پ_ نشان دهید اگر بتوان مجموعه‌های باز و مجزا در توپولوژی T را با مجموعه‌های باز و مجزا در توپولوژی T^* و همچنین مجموعه‌های باز و مجزا در توپولوژی T^* را با مجموعه‌های باز و مجزا در توپولوژی T از هم جدا نمود، آنگاه $(X, T \cap T^*)$ هاسدورف است.

ت_ با یک مثال نشان دهید عکس عبارت پ صحیح نیست.

۲۶. فضای توپولوژیک X را **فضای تحویل‌ناپذیر** می‌گوییم اگر نتوان X را به صورت اجتماع دو مجموعهٔ بسته نوشت. به عبارت دیگر، اگر مجموعه‌های بستهٔ F و K موجود باشند که $X = F \cup K$، آنگاه $X = F$ یا $X = K$. ثابت کنید:

الف_ اگر X زیرفضای توپولوژیک نداشته باشد، آنگاه تحویل‌ناپذیر است.

ب_ اگر X تحویل‌ناپذیر و $U \subseteq X$ باز باشد، آنگاه U تحویل‌ناپذیر است.

۲۷. فضای زارسکی[۲] یک فضای توپولوژیک با این خاصیت است که هر دسته از زیرمجموعه‌های بسته و نزولی آن، نهایتاً متوقف می‌شوند، به عبارت دیگر اگر

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$$

یک دسته از مجموعه‌های بسته باشند، آنگاه n_ای موجود است که برای هر $k \geq n$، $F_k = F_n$. نشان دهید:

الف_ مجموعه اعداد حقیقی با توپولوژی مکمل باپایان یک فضای زارسکی و تحویل‌ناپذیر است.

ب_ یک فضای زارسکی را می‌توان به صورت اجتماع باپایان از مجموعه‌های بسته و تحویل‌ناپذیر نوشت به طوری که هیچ یک از آنها زیرمجموعهٔ دیگری نبوده و صرف‌نظر از ترتیب، تجزیهٔ مربوطه یگانه باشد.

پ_ هر فضای زارسکی و هاسدورف، باپایان است.

۲۸. فرض کنید (X_n) یک دنباله از فضاهای توپولوژیک و $f_n : X_n \to X_{n-1}$ یک دنباله از توابع پیوسته باشد. تعریف کنید:

$$X_\infty = \{(x_0, x_1, x_2, \cdots) : f_n(x_n) = x_{n-1},\ \forall n \in \mathcal{N}\}^3$$

ثابت کنید اگر X_n هاسدورف و فشرده باشند، آنگاه X_∞ به عنوان زیرفضای $\prod X_i$، فشرده و هاسدورف است.

۷.۴ فضاهای T_3

اصول جداسازی که در بخش‌های قبل معرفی شده‌اند به اندازهٔ کافی قوی نیستند، زیرا تنها می‌توانند نقاط و یا حداکثر مجموعه‌های فشرده را از هم جدا کنند. لذا در این قسمت ابتدا نقاط و مجموعه‌های بستهٔ موجود در یک فضا را از یکدیگر جدا می‌کنیم و بعد با اضافه کردن خاصیت جداپذیری T_1، فضاهای T_3 را تعریف می‌نماییم. خواهیم دید این‌گونه فضاها خواص جداپذیری T_0، T_1 و T_2 را دارا می‌باشند.

تعریف: فضای توپولوژیکی (X,T) یک **فضای منظم** است، هرگاه برای مجموعهٔ بستهٔ A و نقطهٔ $b \notin A$، مجموعه‌های باز U و V وجود داشته باشند به طوری که:

$$A \subseteq V \quad , \quad b \in U \quad , \quad U \cap V = \phi$$

[۲] Zariski

[۳] فضای X_∞ را فضای حد معکوس می‌نامیم.

مثال ۱۸ : هر فضای گسسته، منظم است. زیرا با توجه به این‌که هر مجموعه هم باز و هم بسته است، برای مجموعهٔ بستهٔ دادهشدهٔ A و نقطهٔ دادهشدهٔ $b \notin A$، کافی است مجموعه‌های باز A و $\{b\}$ را در نظر بگیریم. فضاهای ناگسسته نیز منظم هستند، زیرا به ازای هر نقطه مانند $a \in X$ و مجموعهٔ بستهٔ ϕ، کافی است مجموعه‌های باز X و ϕ در نظر گرفته شود.

مثال ۱۹ : فرض کنید در فضای توپولوژیکی (X,T)، $X=\{a,b,c\}$ و $T=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$ باشد. مجموعه‌های بسته در این فضا $\{a\}$ و $\{b,c\}$ می‌باشند. لذا برای نقطهٔ a و مجموعهٔ بستهٔ $\{b,c\}$ کافی است قرار دهیم $U=\{a\}$ و $V=\{b,c\}$. همچنین برای مجموعهٔ بستهٔ $\{a\}$ و هریک از نقاط b و c، کافی است قرار دهیم $U=\{b,c\}$ و $V=\{a\}$. لذا فضای (X,T) منظم است.

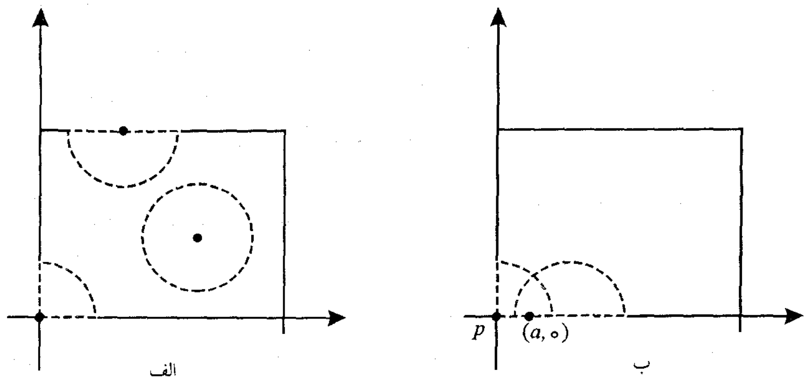
مثال ۲۰ : توپولوژی ایجادشده روی مجموعهٔ اعداد حقیقی به وسیلهٔ پایهٔ زیر

$$\mathcal{B}=\{]a,b[\subseteq \mathcal{R} : \circ \notin]a,b[\} \cup \{]-\varepsilon,\varepsilon[\setminus \{\tfrac{1}{n}\}_{n\geq 1} : \varepsilon > \circ\}$$

منظم نیست زیرا مجموعهٔ بستهٔ $A=\{\frac{1}{n} : n > \circ\}$ و نقطهٔ $b=\circ$ را نمی‌توان به وسیلهٔ مجموعه‌های باز و مجزا از هم جدا نمود. اولاً توجه کنید A بسته است زیرا هر مجموعهٔ باز حول صفر شامل هیچ یک از نقاط A نیست پس مجموعهٔ نقاط تجمع A تهی و در نتیجه A بسته است. حال اگر مجموعه‌های باز و مجزای U و V چنان باشند که $A \subseteq U$ و $b \in V$، آنگاه $\varepsilon > \circ$ موجود است که $b \in]-\varepsilon,\varepsilon[\subseteq V$، حال $m > \circ$ را چنان اختیار کنید که $\frac{1}{m} < \varepsilon$، بنابراین $\frac{1}{m} \in U \cap V$ که تناقض است.

مثال ۲۱ : فرض کنید $X=[\circ,1]\times[\circ,1[$ و $J=]\circ,1[\times]\circ,1[$. مجموعهٔ $U \subseteq X$ را باز بنامید اگر برای هر نقطهٔ $(x,y) \in X$، اگر $(x,y) \in J$، آنگاه گوی باز به مرکز (x,y) و شعاع ε موجود باشد که در $U \cap J$ قرار گیرد و اگر $(x,y) \in X \setminus J$، گوی بازی به مرکز (x,y) و شعاع ε موجود باشد که اشتراک آن با J همراه با نقطهٔ (x,y) در U قرار گیرد (در شکل ۲۶ـالف سه مجموعهٔ باز نشان داده شده است). مجموعهٔ بستهٔ $A=]\circ,1[\times\{\circ\}$ و نقطهٔ $p=(\circ,\circ)$ را نمی‌توان به وسیلهٔ مجموعه‌های باز و مجزا از هم جدا نمود. توجه کنید که اگر مجموعهٔ باز U شامل p باشد آنگاه $\varepsilon > \circ$ موجود است که اشتراک J با گوی باز به مرکز p و شعاع ε به انضمام نقطهٔ p در U واقع است. حال $a > \circ$ را چنان اختیار کنید که $a < \varepsilon$. از طرف دیگر اگر مجموعهٔ باز V شامل A باشد شامل نقطهٔ $(a,\circ)$ نیز خواهد بود لذا $\delta > \circ$ موجود است که اشتراک گوی باز به مرکز $(a,\circ)$ و شعاع δ در V واقع است. بنابراین U و V مجزا نیستند (شکل ۲۶ـب).

تذکر: مثال ۱۹ نشان می‌دهد که اگر فضایی منظم باشد، لزوماً آن فضا در خواص $T_\circ$، T_1 و T_2 صدق نمی‌کند. یادآور می‌گردد که در مثال ۴ نشان دادیم فضای ارائه‌شده در مثال ۱۹، $T_\circ$ و در نتیجه T_1 و T_2 نیست. مثال‌های ۲۰ و ۲۱ نیز نشان می‌دهند که دارا بودن یکی از خواص $T_\circ$، T_1 و T_2،



شکل ۲۶

منظم بودن را نتیجه نمی‌دهد. بنابراین هیچ رابطه‌ای بین فضاهای T_i، ۲ $\leq i \leq$ ∘، و منظم بودن موجود نیست.

قضیهٔ زیر رابطهٔ بین فضاهای $T_۲$ و فشرده را با فضاهای منظم بیان می‌کند. لازم به ذکر است که در قضایای گذشته دیدیم که در فضاهای $T_۲$ هر مجموعهٔ فشرده را می‌توان از نقاطی که در آن واقع نیستند توسط مجموعه‌های باز مجزا، از هم جدا نمود و همچنین دیدیم که زیرمجموعه‌های بستهٔ فضاهای فشرده، فشرده هستند. در اثبات قضیهٔ زیر از این روابط استفاده خواهیم کرد.

قضیهٔ ۲۰ : هر فضای $T_۲$ و فشرده، یک فضای منظم است.

اثبات: فرض کنید (X, T) یک فضای $T_۲$ و فشرده باشد و همچنین فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ بسته و $b \notin A$. چون A بسته و X فشرده است، پس A فشرده است و چون $b \notin A$ بنا به قضیهٔ ۱۱، دو مجموعهٔ باز U و V وجود دارد به طوری که $b \in V$، $A \subseteq U$ و $U \cap V = \phi$. به عبارت دیگر این فضا منظم است.

□

قضیهٔ ۲۱ : فضای (X, T) یک فضای منظم است اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$ و هر مجموعهٔ باز U شامل x، مجموعهٔ باز V وجود داشته باشد به طوری که: $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم فضای (X, T) یک فضای منظم است. نقطهٔ $x \in X$ و مجموعهٔ باز $U \in T$ را چنان در نظر می‌گیریم که $x \in U$. در این صورت $X \setminus U$ مجموعه‌ای بسته است که شامل

نقطهٔ x نیست. از طرفی چون فضا منظم است باید دو مجموعهٔ باز V و W وجود داشته باشد به طوری که:

$$x \in V \quad , \quad X\backslash U \subseteq W \quad , \quad V \cap W = \phi$$

از $X\backslash U \subseteq W$ نتیجه می‌گیریم $X\backslash W \subseteq U$ و از $V \cap W = \phi$ داریم $V \subseteq X\backslash W$ لذا: $V \subseteq X\backslash W \subseteq U$.

اما $X\backslash W$ مجموعه‌ای بسته و شامل V است، پس شامل $\overline{V}$ نیز است. یعنی:

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X\backslash W \subseteq U$$

بالعکس، فرض می‌کنیم F مجموعه‌ای بسته در فضای (X,T)، $x \notin F$. روشن است که $X\backslash F$ مجموعه‌ای باز و شامل x است، پس بنا به فرض مجموعهٔ باز V وجود دارد به طوری که

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X\backslash F$$

اما $X\backslash \overline{V}$ مجموعهٔ بازی است که شامل F است، پس مجموعه‌های باز V و $U = X\backslash\overline{V}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند

$$x \in V \quad , \quad F \subseteq U \quad , \quad V \cap U = \phi$$

بنابراین فضای (X,T) یک فضای منظم است.

□

قضیهٔ ۲۲: فرض کنید $\{X_\alpha\}$ یک دسته از فضاهای توپولوژیک و $X = \prod X_\alpha$. فضای X منظم است اگر و فقط اگر به ازای هر α، فضای X_α منظم باشد.

اثبات: یک طرف بدیهی است. برای اثبات طرف دوم از قضیهٔ ۲۱ استفاده می‌کنیم. لذا فرض کنید $U = \prod_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \times \cdots \times \prod_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ باز در $\prod X_\alpha$ و $x = (x_\alpha) \in U$. چون X_{α_i}، $1 \leq i \leq n$، منظم است پس مجموعه‌های باز V_{α_i} موجودند که $x_{\alpha_i} \in V_{\alpha_i} \subseteq \overline{V}_{\alpha_i} \subseteq U_{\alpha_i}$. قرار دهید $V = \prod_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \times \cdots \times \prod_{\alpha_n}^{-1}(V_{\alpha_n})$. در این صورت $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. لذا $\prod X_\alpha$ منظم است.

□

حال که با فضاهای منظم آشنا شدید، وقت آن است که فضاهای T_3 را معرفی کنیم.

تعریف: فضای توپولوژیکی (X,T) یک فضای T_3 است هرگاه فضای (X,T) یک فضای منظم و T_1 باشد.

قضیهٔ ۲۳ : هر فضای T_3، یک فضای T_2 است.

اثبات: فرض کنید X یک فضای T_3 باشد. دو نقطهٔ متمایز a و b را در فضای X در نظر می‌گیریم. چون (X,T) یک فضای T_1 است $\{a\}$ یک مجموعهٔ بسته است و چون نقاط a و b متمایز هستند $b \notin \{a\}$. با توجه به منظم بودن فضا، دو مجموعهٔ باز U و V وجود دارد به طوری که:

$$a \in \{a\} \subseteq U \quad , \quad b \in V \quad , \quad V \cap U = \phi$$

بنابراین (X,T) یک فضای T_2 است.

□

نتیجهٔ ۲۴ : فضای $X = \prod X_\alpha$، T_3 است اگر و فقط اگر به ازای هر α، فضای X_α، T_3 باشد.

□

تمرین

۱. نشان دهید خاصیت T_3 بودن یک خاصیت توپولوژیکی است.

۲. ثابت کنید هر زیرفضای یک فضای منظم، خود یک فضای منظم است و از آن نتیجه بگیرید هر زیرفضای یک فضای T_3، خود یک فضای T_3 است.

۳. نشان دهید هر فضای منظم و T_0، یک فضای T_3 است. (بدیهی است که هر فضای T_3، منظم و T_0 است.)

۴. مجموعهٔ $X = \{1,2,3\}$ را در نظر بگیرید و تمام فضاهای منظم و T_3 که با این مجموعه می‌توانید بسازید را ارائه دهید.

۵. نشان دهید صفحهٔ مور یک فضای منظم و در نتیجه یک فضای T_3 است.

۶. فرض کنید X یک فضای T_3 و $A \subseteq X$ بسته باشد و به علاوه فرض کنید که Y فضای تجزیه X باشد که عناصر آن عبارتند از A و کلیه مجموعه‌های تک‌نقطه‌ای از $X \backslash A$. ثابت کنید Y یک فضای هاسدورف است.

۷. با یک مثال نشان دهید تصویر یک فضای T_3، تحت یک تابع پیوسته و بسته، لزوماً T_2 نیست.

۸. با یک مثال نشان دهید تصویر یک فضای T_2، تحت یک تابع پیوسته و بسته، لزوماً منظم نیست.

۹. با یک مثال نشان دهید تصویر یک فضای T_3، تحت یک تابع پیوسته و باز، لزوماً منظم نیست.

۱۰. ثابت کنید اگر فضای توپولوژیک T_3 باشد، آنگاه به ازای هر $x \neq y$، مجموعه‌های باز U و V به ترتیب حول x و y موجودند به طوری که $\overline{U} \cap \overline{V} = \phi$.

۱۱. ثابت کنید در یک فضای منظم، به ازای هر مجموعهٔ بستهٔ A و هر نقطهٔ $a \notin A$، مجموعهٔ باز U حول a موجود است به طوری که $\overline{U} \cap A = \phi$.

۱۲. ثابت کنید اگر X یک فضای T_3 و A یک زیرمجموعهٔ بی‌پایان از X باشد، در این صورت دنبالهٔ (U_n) از مجموعه‌های باز در X موجود است به طوری که برای هر $n \neq m$، $\overline{U}_n \cap \overline{U}_m = \phi$ و برای هر n، $U_n \cap A \neq \phi$.

۱۳. فرض کنید f از فضای توپولوژیک X به فضای توپولوژیک Y، یک تابع پیوسته، بسته و پوشا باشد و همچنین فرض کنید برای هر $y \in Y$، $f^{-1}(y)$ در X فشرده باشد. ثابت کنید اگر X منظم باشد، آنگاه Y نیز منظم است.

۱۴. فرض کنید فضای X منظم، A و F دو زیرمجموعهٔ مجزا در آن باشند که یکی از آنها بسته و دیگری فشرده است. ثابت کنید در این صورت مجموعه‌های باز و مجزای U و V موجودند به طوری که $A \subseteq U$ و $F \subseteq V$.

۷.۵ فضاهای T_4

برای تعریف فضاهای T_4، ابتدا *فضاهای نرمال* را معرفی می‌کنیم و سپس با کمک آن فضاهای T_4 را معرفی و خواص آن را بررسی می‌نماییم. در این قسمت در حقیقت مجموعه‌های بسته و مجزا را توسط مجموعه‌های باز فضا، از هم جدا می‌کنیم.

تعریف: فضای توپولوژیکی (X, T) را **فضای نرمال** می‌گوییم هرگاه برای هر دو مجموعهٔ بسته و مجزا مانند F و K، مجموعه‌های باز U و V وجود داشته باشد به طوری که:

$$K \subseteq U \quad , \quad F \subseteq V \quad , \quad V \cap U = \phi$$

مثال ۲۲: هر فضای گسسته، نرمال است. زیرا هر مجموعهٔ بسته، خود یک مجموعهٔ باز است. هر فضای ناگسسته نیز نرمال است زیرا مجموعه‌های بسته و مجزا در این فضا موجود نیست.

مثال ۲۳: فضای جذب A نرمال نیست زیرا هر مجموعهٔ باز در این فضا شامل A است لذا مجموعه‌های باز مجزا موجود نیست.

مثال ۲۴ : مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی شعاع راست، یک فضای نرمال است. زیرا در این فضا نیز مجموعه‌های بسته و مجزا وجود ندارد.

مثال ۲۵ : مجموعهٔ $X = \{a, b, c\}$ با توپولوژی $T = \{X, \phi, \{a\}, \{c, b\}\}$ یک فضای نرمال است زیرا هر مجموعهٔ بسته، باز نیز است.

مثال ۲۶ : صفحهٔ مور نرمال نیست. زیرا دو مجموعهٔ بسته و مجزای $A = \{(x, \circ) : x \in \mathcal{Q}\}$ و $B = \{(x, \circ) : x \in \mathcal{R}\backslash\mathcal{Q}\}$ را نمی‌توان به وسیلهٔ مجموعه‌های باز و مجزا از هم جدا نمود (به تمرین‌ها مراجعه کنید).

از مثال‌های بالا نتایج زیر حاصل می‌شود:

الف) مثال ۲۴ نشان می‌دهد که هر فضای نرمال لزوماً یک فضای منظم نیست. زیرا نقطهٔ ۱ و مجموعهٔ بستهٔ $[\circ, -\infty[$ را نمی‌توان توسط دو مجموعهٔ باز و مجزا، از هم جدا نمود. بنابراین یک فضای نرمال نیز لزوماً $T_۳$ نیست.

ب) مثال ۲۵ نشان می‌دهد که یک فضای نرمال ممکن است $T_\circ$ و در نتیجه $T_۱$ و $T_۲$ نباشد. لازم به ذکر است که در مثال ۴ دیدیم که این فضا $T_\circ$ نیست.

ج) مثال ۲۶ نشان می‌دهد که یک فضای $T_۳$ ممکن است یک فضای نرمال نباشد. بنابراین یک فضای منظم نیز لزوماً یک فضای نرمال نیست.

دو قضیهٔ زیر بعضی از شرایطی را که باعث ایجاد فضای نرمال می‌شود، بیان می‌کند.

قضیهٔ ۲۵ : هر فضای منظم و فشرده، نرمال است.

اثبات: فرض کنید F و K دو مجموعهٔ بسته و مجزا در این فضا باشند. برای هر $f \in F$ از منظم بودن فضا، بازهای مجزای U_f و V_f به ترتیب حول نقطهٔ f و مجموعهٔ بستهٔ K موجود است. حال دستهٔ $\{U_f\}_{f\in F}$ پوشش باز F است و چون F بسته و فضا فشرده و در نتیجه F فشرده و بنابراین این پوشش، دارای زیرپوشش باپایان است. آن را $U_۱$، ... ، U_k و V_f های نظیر را $V_۱$، ... ، V_k بنامید و قرار دهید:

$$U = \cup_{i=۱}^{k} U_i \quad , \quad V = \cup_{i=۱}^{k} V_i$$

پس U و V دو مجموعهٔ باز مجزا به ترتیب حول مجموعه‌های بستهٔ F و K هستند.

□

نتیجهٔ ۲۶ : هر فضای T_2 و فشرده، یک فضای نرمال است.

اثبات: هر فضای هاسدورف و فشرده بنا به قضیهٔ ۲۰، منظم و در نتیجه بنا به قضیهٔ ۲۵، نرمال است.

□

قضیهٔ ۲۷ : فضای توپولوژیک (X,T) نرمال است اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعهٔ بستهٔ F و هر مجموعهٔ باز U، $F \subseteq U$، مجموعهٔ باز V موجود باشد به طوری که $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

اثبات: فرض می‌کنیم فضای توپولژیک (X,T) نرمال، F یک مجموعهٔ بسته، U یک مجموعهٔ باز و $F \subseteq U$. در این صورت $X\setminus U$ یک مجموعهٔ بسته است و به علاوه $(X\setminus U)\cap F = \phi$.

با استفاده از خاصیت نرمال بودن فضا، دو مجموعهٔ باز V و W وجود دارد به طوری که:

$$X\setminus U \subseteq W \quad , \quad F \subseteq V \quad , \quad W\cap V = \phi$$

از $W \cap V = \phi$ داریم: $V \subseteq X\setminus W$. بنابراین $\overline{V} \subseteq \overline{X\setminus W} = X\setminus W$.

از $X\setminus U \subseteq W$ داریم: $X\setminus W \subseteq U$ و لذا با توجه به رابطهٔ بالا به دست می‌آید:

$$\overline{V} \subseteq \overline{X\setminus W} = X\setminus W \subseteq U$$

پس: $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

بالعکس، فرض می‌کنیم به ازای هر مجموعهٔ بستهٔ F و هر مجموعهٔ باز U، $F \subseteq U$، مجموعهٔ باز V موجود است به طوری که $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. نشان می‌دهیم فضای X نرمال است. برای این منظور دو مجموعهٔ بسته و مجزای H و H^* را در این فضا در نظر می‌گیریم. روشن است که مجموعهٔ $X\setminus H^*$ باز است و به علاوه $H \subseteq X\setminus H^*$. پس مجموعهٔ باز G وجود دارد به طوری که

$$H \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq X\setminus H^*$$

اکنون ملاحظه می‌کنیم که $X\setminus\overline{G}$ مجموعه‌ای باز و شامل H^* است و به علاوه با G نقطهٔ مشترکی ندارد، یعنی داریم:

$$H \subseteq G \quad , \quad H^* \subseteq X\setminus\overline{G} \quad , \quad G\cap(X\setminus\overline{G}) = \phi$$

پس بنا به تعریف، فضای (X,T) یک فضای نرمال است.

□

دیدیم که هریک از فضاهای T_0، T_1، T_2 و T_3 خاصیت جداپذیری مربوطه را به زیرفضاهای خود انتقال می دهند و همچنین دیدیم که حاصل‌ضرب دو فضای T_i، $0 \leq i \leq 3$، مجدداً یک فضای T_i است اما این مطالب در مورد فضاهای نرمال صادق نیست. مثال‌های زیر برای اثبات این دو ادعا است.

مثال ۲۷: فرض کنید Y صفحهٔ مور و $X = Y \cup \{\infty\}$. اکنون توپولوژی T^* را روی X به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

الف) برای $O \subseteq X$، اگر $\infty \in O$، آنگاه $O \backslash \{\infty\}$ در فضای (Y, T) باز و شامل تمام نقاط به صورت $(x, \circ)$، بجز برای تعداد باپایان، باشد.

ب) اگر $\infty \notin O$، آنگاه O در فضای (Y, T) باز باشد.

در این صورت فضای (X, T^*) یک فضای نرمال است در حالی که (Y, T) به عنوان زیرفضای توپولوژیکی (X, T^*)، نرمال نیست. (به تمرین‌ها مراجعه کنید.)

مثال ۲۸: مجموعه اعداد حقیقی با توپولوژی حد پایینی، یک فضای نرمال است. ولی حاصل‌ضرب آن در خودش نرمال نیست. برای اثبات این ادعا، ابتدا توجه کنید که خط $L = \{(x, y) : x = -y\}$ در این فضا بسته و به عنوان زیرفضا، دارای توپولوژی گسسته است بنابراین اولاً هر زیرمجموعهٔ L، در L هم باز و هم بسته است و ثانیاً هر زیرمجموعهٔ بستهٔ L، در فضای حاصل‌ضرب بسته است. فرض کنید $A \subseteq L$ شامل همهٔ $(x, -x)$ هایی باشد که x اصم است. با توجه به توضیح بالا A و $L \backslash A$ در فضای حاصل‌ضرب بسته هستند. حال اگر فضای حاصل‌ضرب نرمال باشد مجموعه‌های باز U و V در فضای حاصل‌ضرب موجودند که

$$A \subseteq U \quad , \quad L \backslash A \subseteq V \quad , \quad U \cap V = \phi$$

لذا برای $(x, -x) \in A$، $n \in \mathcal{N}$، موجود است که

$$[x, x+\tfrac{1}{n}[\times [-x, -x+\tfrac{1}{n}[\subseteq U$$

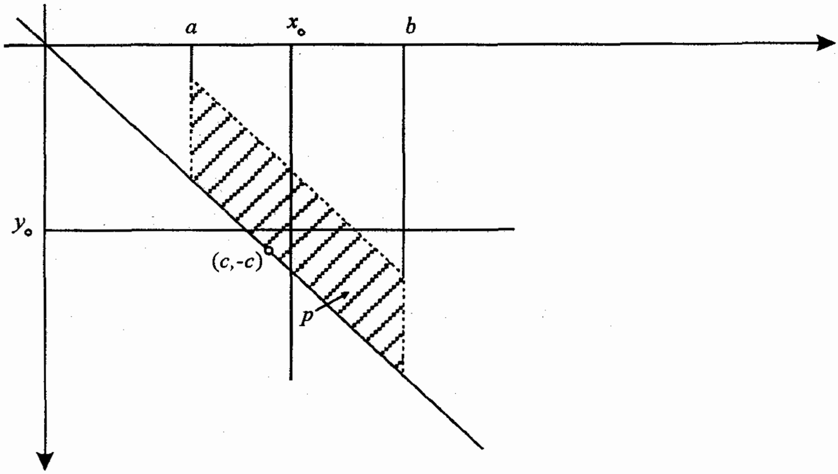
برای هر $n \in \mathcal{N}$، فرض کنید

$$K_n = \{x \in [\circ, 1] : [x, x+\tfrac{1}{n}[\times [-x, -x+\tfrac{1}{n}[\subseteq U, \ \text{اصم است } x\}$$

بدیهی است که $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \cdots$ و به علاوه

$$\cup K_n = \{x \in [\circ, 1] : [x, x + \tfrac{1}{n}[\times [-x, -x + \tfrac{1}{n}[\subseteq U; \ \forall n, \ \text{اصم است } x\}$$

پس $\cup K_n$ برابر با مجموعه اعداد اصم در بازه $[\circ, 1]$ است. فرض کنید $\overline{K_n}$، بستار K_n در بازه $[\circ, 1]$ باشد. چون $\cup K_n \subseteq \cup \overline{K_n}$، لذا $\cup \overline{K_n}$ نیز شامل همه اعداد اصم بازه $[\circ, 1]$ است. لذا می‌توان بازه $[\circ, 1]$ را برابر اجتماع $\overline{K_n}$ ها و همه مجموعه‌های تک‌عضوی گویای واقع در بازه $[\circ, 1]$ دانست. از تمرین ۲۱ بخش ۷.۳، حداقل یکی از این مجموعه‌ها باید درون غیرتهی داشته باشد و چون درون مجموعه‌های تک‌عضوی تهی است لذا m موجود است که درون $\overline{K_m}$ غیرتهی است، $(\overline{K_m})^\circ \neq \phi$.



شکل ۲۷

پس $\overline{K_m}$ باید شامل یک بازه باز به صورت $]a,b[$ باشد. ادعا می‌کنیم.

$$P = \{(x,y) : a<x<b,\ -x<y<-x+\tfrac{1}{m}\} \subseteq \cup_{c\in K_m}[c,c+\tfrac{1}{m}[\times[-c,-c+\tfrac{1}{m}[$$

اگر این ادعا ثابت شود با توجه به این‌که اجتماع ارائه‌شدهٔ بالا زیرمجموعهٔ U است، آنگاه $P\subseteq U$. حال برای عدد گویای q در بازه $]a,b[$ نقطهٔ $(q,-q)$ نقطهٔ حدی مجموعه P و در نتیجه نقطه حدی مجموعه باز U است. از طرف دیگر نقطهٔ $(q,-q)$ به مجموعهٔ بستهٔ $L\backslash A$ و در نتیجه به مجموعهٔ باز V تعلق دارد که اشتراک آن با U تهی است و این با تعریف نقطه حدی متناقض است و در نتیجه فضای حاصل‌ضرب نرمال نیست.

برای اثبات ادعا ابتدا توجه کنید $]a,b[\ \cap K_m$ در $]a,b[$ چگال است. حال برای $(x_\circ,y_\circ)\in P$ ، $c\in K_m\cap\ ]a,b[$ را طوری اختیار کنید (شکل ۲۷) که $(c,-c)$ در پایین خط $y=y_\circ$ و سمت چپ خط $x=x_\circ$ واقع شود. (کافی است از بازه باز $]\max\{a,-y_\circ\},x_\circ[$ استفاده شود). در این صورت به سهولت می‌توان دید $c<x_\circ<c+\frac{1}{m}$ و $-c<y_\circ<-c+\frac{1}{m}$. لذا

$$(x_\circ,y_\circ)\in[c,c+\tfrac{1}{m}[\times[-c,-c+\tfrac{1}{m}[$$

قضیه زیر بیان می‌کند تحت چه شرایطی زیرفضای یک فضای نرمال می‌تواند نرمال باشد.

قضیهٔ ۲۸ : اگر Y در فضای نرمال (X,T) بسته باشد، آنگاه زیرفضای (Y,T_Y) نرمال است.

اثبات: فرض می‌کنیم A و B دو مجموعهٔ بسته و مجزا در زیرفضای (Y, T_Y) باشند. چون Y در فضای (X, T) بسته هستند، لذا A و B در فضای (X, T) نیز بسته و مجزا هستند. حال چون فضای (X, T) نرمال است، مجموعه‌های باز و مجزای U و V در فضای (X, T) موجود است به‌طوری که:

$$A \subseteq U \quad , \quad B \subseteq V \quad , \quad U \cap V = \phi$$

اینک با توجه به تعریف توپولوژی نسبی، مجموعه‌های $U \cap Y$ و $V \cap Y$ در فضای (Y, T_Y) باز هستند و به علاوه از $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$ داریم:

$$A \subseteq U \cap Y \quad , \quad B \subset V \cap Y \quad , \quad (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap Y) \cap Y = \phi$$

لذا فضای (Y, T_Y) نرمال است.

□

یکی دیگر از ویژگی‌های فضاهای نرمال ارتباطی است که فضاهای نرمال با بعضی از توابع پیوسته حقیقی که بر این فضا تعریف می‌شوند دارند. این ارتباط اولین بار توسط ریاضیدانی به نام اوریسون[۴] ارائه گردید و به نام او نیز معروف است.

قضیهٔ ۲۹ (لم اوریسون): فضای (X, T) یک فضای نرمال است اگر و فقط اگر به ازای هر دو مجموعهٔ بسته و مجزای A و B تابع حقیقی و پیوستهٔ $f : X \to [0, 1]$ وجود داشته باشد به طوری که: $f(A) = 0$ و $f(B) = 1$.

اثبات: فرض کنید X نرمال و A و B دو مجموعهٔ بسته و مجزا در آن باشند. از نرمال بودن، مجموعهٔ باز $U_{\frac{1}{2}}$ موجود است به طوری که $A \subseteq U_{\frac{1}{2}}$ و $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \cap B = \phi$. حال دو مجموعهٔ A و $X \backslash U_{\frac{1}{2}}$ و همچنین دو مجموعهٔ B و $\overline{U_{\frac{1}{2}}}$ مجموعه‌های بسته و مجزا هستند. مجدداً مجموعه‌های باز $U_{\frac{1}{4}}$ و $U_{\frac{3}{4}}$ موجود به طوری که:

$$A \subseteq U_{\frac{1}{4}} \quad , \quad \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \quad , \quad \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_{\frac{3}{4}} \quad , \quad \overline{U_{\frac{3}{4}}} \cap B = \phi$$

فرض کنید برای $1 \leq k \leq 2^n - 1$، $U_{\frac{k}{2^n}}$ چنان تعریف شده باشند که برای $k = 1, \dots, 2^n - 2$

$$A \subseteq U_{\frac{1}{2^n}} \quad , \quad \overline{U_{\frac{k}{2^n}}} \subseteq U_{\frac{k+1}{2^n}} \quad , \quad \overline{U_{\frac{2^n-1}{2^n}}} \cap B = \phi$$

حال برای مجموعه‌های بسته و مجزای A و $X \backslash U_{\frac{1}{2}}$، مجموعه‌های بسته و مجزای $\overline{U_{\frac{k}{2^n}}}$ و $X \backslash U_{\frac{k+1}{2^n}}$، $k = 1, \dots, 2^n - 2$، و نهایتاً مجموعه‌های بسته و مجزای B و $\overline{U_{\frac{2^n-1}{2^n}}}$، با توجه به نرمال بودن فضا، مجموعه‌های $U_{\frac{k}{2^{n+1}}}$، $k = 1, \dots, 2^{n+1} - 1$، موجودند که برای $k = 1, \dots, 2^{n+1} - 2$

---

[۴] Urysohn

$$A \subseteq U_{\frac{1}{2^{n+1}}} \quad , \quad \overline{U}_{\frac{k}{2^{n+1}}} \subseteq U_{\frac{k+1}{2^{n+1}}} \quad , \quad \overline{U}_{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}} \cap B = \phi$$

بنابراین با استقراء مجموعه‌های U_r، $r = \frac{k}{2^n}$، $n \in \mathcal{N}$ و $k = 1, \cdots, 2^n - 1$، با خواص زیر به دست می‌آید:

الف) برای هر r، $A \subseteq U_r$ و $\overline{U}_r \cap B = \phi$.

ب) اگر $r < s$، $\overline{U}_r \subseteq U_s$.

حال تابع $f : X \to [0, 1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{برای هر } r \text{, } x \notin U_r \\ \inf\{r : x \in U_r\} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به وضوح $f(A) = 0$ و $f(B) = 1$. برای اثبات پیوستگی f کافی است به نکات زیر توجه کنیم.

الف) اگر $x \in X$ چنان باشد که $f(x) = 1$، آنگاه $f(x) \notin U_s$ به ازای هر $s = \frac{k}{2^n}$، $1 \leq k \leq 2^n - 1$. پس برای هر $\varepsilon > 0$ داده‌شده s را چنان اختیار کنید که $1 - s < \varepsilon$، در این صورت $f(X \backslash \overline{U}_s) \subseteq]1 - \varepsilon, 1]$

ب) اگر $x \in X$ چنان باشد که $f(x) = 0$، آنگاه $f(x) = U_r$ به ازای هر $r = \frac{k}{2^n}$، $1 \leq k \leq 2^n - 1$. پس برای هر $\varepsilon > 0$ داده‌شده r را چنان اختیار کنید که $r < \varepsilon$، در این حالت $f(U_r) \subseteq [0, \varepsilon[$

پ) نهایتاً اگر $f(x) = \alpha$، $\alpha \neq 1, 0$، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ داده‌شده، s و r را چنان اختیار کنید که از نوع $\frac{k}{2^n}$، $1 \leq k \leq 2^n - 1$ بوده و $\alpha - \varepsilon < s < \alpha < r < \alpha + \varepsilon$. در این صورت $s \leq f(U_r \backslash \overline{U}_s) \leq r$.

بالعکس، فرض کنید A و B دو مجموعهٔ بسته و مجزا و تابع پیوستهٔ $f : X \to [0, 1]$ چنان باشد که $f(A) = 0$ و $f(B) = 1$. در این صورت بدیهی است که $f^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$ و $f^{-1}(]\frac{1}{2}, 1])$ مجموعه‌های باز و مجزایی هستند که به ترتیب شامل A و B می‌باشند، پس X نرمال است.

□

نتیجهٔ ۳۰: فرض کنید $a, b \in \mathcal{R}$. فضای (X, T) نرمال است اگر و فقط اگر به ازای هر دو مجموعهٔ بسته و مجزای A و B، تابع حقیقی و پیوستهٔ $f : X \to [a, b]$ موجود باشد که $f(A) = a$ و $f(B) = b$.

□

قضیهٔ ۳۱ (قضیهٔ توسیع تیتز[۵]): فضای X نرمال است اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعهٔ بستهٔ A و هر تابع پیوستهٔ $f: A \to \mathcal{R}$، تابع پیوستهٔ $F: X \to \mathcal{R}$ موجود باشد به طوری که $F|A = f$.

اثبات: ابتدا فرض کنید X نرمال، A بسته در X و $f: A \to [-۱, ۱]$ پیوسته باشد. قرار دهید

$$A_۱ = \{x \in A:\ f(x) \geq \frac{۱}{۳}\} \quad , \quad B_۱ = \{x \in A:\ f(x) \leq -\frac{۱}{۳}\}$$

در این صورت $A_۱$ و $B_۱$ مجموعه‌های بسته و مجزا در A و در نتیجه مجموعه‌های بسته و مجزا در X هستند. لذا طبق لم اوریسون تابع پیوستهٔ $f_۱ : X \to [-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}]$ موجود است به طوری که

$$f_۱(A_۱) = \frac{۱}{۳} \quad , \quad f_۱(B_۱) = -\frac{۱}{۳}$$

واضح است که برای هر $x \in A$، $|f(x) - f_۱(x)| \leq \frac{۲}{۳}$، زیرا به ازای $x \in A \backslash (A_۱ \cup B_۱)$، $\frac{۱}{۳} > f(x) > -\frac{۱}{۳}$. لذا $f - f_۱$ یک تابع از A به $[-\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳}]$ است. روش بالا را برای تابع $g_۱ = f - f_۱$ تکرار کنید. یعنی قرار دهید:

$$A_۲ = \left\{x \in A:\ g_۱(x) \geq \frac{۲}{۹}\right\} \quad , \quad B_۲ = \left\{x \in A:\ g_۱(x) \leq -\frac{۲}{۹}\right\}$$

مجدداً از لم اوریسون تابع پیوستهٔ $f_۲ : X \to [-\frac{۲}{۹}, \frac{۲}{۹}]$ موجود است به طوری که:

$$f_۲(A_۲) = \frac{۲}{۹} \quad , \quad f_۲(B_۲) = -\frac{۲}{۹} \quad , \quad |f - f_۱ - f_۲| \leq \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ \quad ; \quad \forall x \in A$$

با ادامه این روش دنبالهٔ $f_i : X \to [-\frac{۲^{i-۱}}{۳^i}, \frac{۲^{i-۱}}{۳^i}]$ از توابع پیوسته موجود است به طوری که برای هر $x \in A$ و هر $n \in \mathcal{N}$،

$$\left|f - \sum_{k=۱}^{n} f_k\right| \leq (\frac{۲}{۳})^n$$

حال برای هر $x \in X$، قرار دهید $F(x) = \sum_{k=۱}^{\infty} f_k(x)$، بدیهی است برای $x \in A$،

$$\begin{aligned}
|F(x) - f(x)| &\leq \left|\sum_{k=۱}^{\infty} f_k(x) - f(x)\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=۱}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=۱}^{n} f_k(x)\right| + \left|\sum_{k=۱}^{n} f_k(x) - f(x)\right| \\
&\leq \sum_{k=n+۱}^{\infty} \left|f_k(x)\right| + \left|\sum_{k=۱}^{n} f_k(x) - f(x)\right| \\
&\leq \frac{۱}{۲}\left(\sum_{k=n+۱}^{\infty}(\frac{۲}{۳})^k\right) + (\frac{۲}{۳})^n \leq \sum_{k=n}^{\infty}(\frac{۲}{۳})^k < \varepsilon
\end{aligned}$$

---
[۵] Tietze

که در آن برای $\circ < \varepsilon$ داده‌شده، n چنان اختیار گردیده که نامساوی برقرار است. لذا $F(x) = f(x)$.
فقط می‌ماند این‌که نشان دهیم F پوسته است.

برای $x \in X$ و $\circ < \varepsilon$ داده‌شده، $N > \circ$ را طوری در نظر بگیرید که $\sum_{n=N+1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n < \frac{\varepsilon}{2}$.
چون f_i، $i = 1, \cdots, N$، پیوسته در x است لذا مجموعهٔ باز U_i شامل x موجود است، به طوری که برای هر $y \in U_i$

$$\left|f_i(x) - f_i(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2N}$$

قرار دهید $U = U_1 \cap \cdots \cap U_N$. در این صورت U در X باز است و به علاوه برای $y \in U$ داریم:

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{N} |f_i(x) - f_i(y)| + \sum_{i=N+1}^{\infty} |f_i(x)| + |f_i(y)| \\
&\leq \textstyle\sum_{i=1}^{N} |f_i(x) - f_i(y)| + \sum_{i=N+1}^{\infty} (\frac{2}{3})^i \\
&< N \cdot \tfrac{\varepsilon}{2N} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

پس F در نقطهٔ x پیوسته است. بنابراین F یک توسیع پیوسته از $f : A \to [-1, 1]$ است.

برای حالت کلی، با توجه به همسانریخت بودن بازه باز $]-1, 1[$ با مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathcal{R}$، می‌توان در حالت کلی فرض کرد f یک تابع از A به بازه باز $]-1, 1[$ است، یعنی فرض کرد

$$f : A \to]-1, 1[\subseteq [-1, 1]$$

در این صورت بنا به استدلال بالا تابع پیوستهٔ $G : X \to [-1, 1]$ موجود است که توسیع پیوسته f می‌باشد. سپس فرض می‌کنیم $A_\circ = \{x \in X : |G(x)| = 1\}$. در این صورت A و $A_\circ$ دو مجموعهٔ بسته و مجزا هستند و طبق لم اوریسون تابع پیوستهٔ $g : X \to [\circ, 1]$ موجود است به طوری که $g(A) = 1$ و $g(A_\circ) = \circ$. تعریف کنید $F : X \to]-1, 1[$، با قرار دادن $F(x) = g(x) \cdot G(x)$.
پس F پیوسته است و به علاوه برای $x \in A$، $F(x) = g(x) \cdot G(x) = f(x)$.

بالعکس، اگر A و B دو مجموعهٔ بسته و مجزا در X باشند، آنگاه $A \cup B$ نیز در X بسته است و تابع $f : A \cup B \to [\circ, 1]$ با $f(A) = \circ$ و $f(B) = 1$، بنا به قضیهٔ ۸ فصل ۳، روی $A \cup B$ پیوسته است. توسیع پیوستهٔ f به تمام X، تابع اوریسون برای A و B است. لذا طبق لم اوریسون حکم بدیهی است.

□

اکنون با کمک فضاهای T_1 و فضاهای نرمال، فضاهای T_4 را تعریف می‌کنیم.

تعریف: فضای توپولوژیک (X,T) یک فضای T_4 است هرگاه نرمال و T_1 باشد.

مثال ۲۹ : مجموعهٔ اعداد حقیقی یک فضای T_4 است. کافی است نشان دهیم نرمال است زیرا T_1 بودن آن به سهولت اثبات می‌شود. دو مجموعهٔ بسته و مجزای A و B را در این فضا در نظر بگیرید. برای هر $x \in A$، با توجه به مجزا بودن، $x \notin B$. لذا $n_x > 0$ موجود است که

$$]x - \frac{1}{n_x}\ ,\ x + \frac{1}{n_x}[\ \cap B = \phi$$

و همچنین برای هر $y \in B$، $n_y > 0$ موجود است که

$$]y - \frac{1}{n_y}\ ,\ y + \frac{1}{n_y}[\ \cap A = \phi$$

قرار دهید

$$G_A = \cup_{x\in A}]x - \tfrac{1}{2n_x},\ x + \tfrac{1}{2n_x}[$$
$$G_B = \cup_{y\in B}]y - \tfrac{1}{2n_y},\ y + \tfrac{1}{2n_y}[$$

بدیهی است که G_A و G_B، باز و به ترتیب شامل A و B هستند و به علاوه اگر $z \in G_A \cap G_B$، آنگاه $x \in A$ و $y \in B$ موجود است که $|x-z| < \frac{1}{2n_x}$ و $|y-z| < \frac{1}{2n_y}$. در این صورت

$$|x-y| < |x-z| + |y-z| < \tfrac{1}{2n_x} + \tfrac{1}{2n_y} < \begin{cases} \dfrac{1}{n_x} & n_x \le n_y \\[2mm] \dfrac{1}{n_y} & n_x \ge n_y \end{cases}$$

حالت اول نشان می‌دهد که $y \notin B$ و حالت دوم نشان می‌دهد که $x \notin A$ که در هر دو صورت تناقض است. لذا G_A و G_B مجزا هستند.

مثال ۳۰ : هر فضای گسسته یک فضای T_4 است.

نتیجهٔ ۳۲ : اگر فضای (X,T) یک فضای T_4 و Y در X بسته باشد، آنگاه زیرفضای (Y,T_Y) نیز T_4 است.

اثبات: بنا به قضیهٔ ۲۸، (Y,T_Y) نرمال است. از طرفی قبلاً دیدیم که اگر فضای (X,T) یک فضای T_1 باشد، آنگاه زیرفضای (Y,T_Y) نیز T_1 است، لذا زیرفضای (Y,T_Y) زیز T_4 است.

□

قضیهٔ ۳۳: هر فضای T_4 یک فضای T_3 است.

اثبات: فرض کنید نقطهٔ x و مجموعهٔ بستهٔ F چنان باشند که $x \notin F$. چون هر فضای T_4 یک فضای T_1 است، لذا مجموعهٔ تک‌عضوی $\{x\}$ یک مجموعهٔ بسته است و با توجه به این‌که $x \notin F$، مجموعه‌های بستهٔ F و $\{x\}$ مجزا هستند و چون هر فضای T_4، یک فضای نرمال نیز است، مجموعه‌های باز و مجزای U و V موجودند به طوری که $\{x\} \subseteq U$ و $F \subseteq V$. یعنی فضای (X,T)، T_3 است.

□

تذکر: دیدیم که هر فضای T_0 و منظم، یک فضای T_3 است و بالعکس. ولی با توجه به تمرین ۳ همین بخش یک فضای T_0 و نرمال، لزوماً منظم و در نتیجه یک فضای T_3 نیست. از طرفی ما علاقمندیم خواص T_i ها چنان باشد که اگر فضایی خاصیت T_{i+1} را داشته باشد، آنگاه خاصیت T_i را نیز دارا باشد. لذا اگر در تعریف فضای T_4 از خواص T_0 و نرمال استفاده می‌کردیم، یک فضای T_4 لزوماً نمی‌توانست یک فضای T_3 نیز باشد. پس در تعریف فضای T_4 بالاجبار از خواص T_1 و نرمال استفاده کردیم و شاید به خاطر یکدست شدن تعاریف، در تعریف فضای T_3 خواص T_1 و منظم به خواص T_0 و منظم (علی‌رغم معادل بودن) ترجیح داده شده است.

تمرین

۱. ثابت کنید در فضای هاسدورف، نرمال بودن و T_4 بودن معادل هستند.

۲. نشان دهید نرمال بودن و T_4 بودن یک فضا، یک خاصیت توپولوژیکی است.

۳. فضای توپولوژیکی (X,T) که در آن $X = \{a,b,c\}$ و $T = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ است را در نظر بگیرید. نشان دهید این فضا نرمال و T_0 است ولی منظم نیست.

۴. نشان دهید صفحهٔ شکافته‌شدهٔ باپایان نرمال نیست، بنابراین T_4 نیست.

۵. نشان دهید فضای طرد A یک فضای نرمال است.

۶. فرض کنید (X,T) نرمال، $A \subseteq X$ بسته و (X,T^*) توسیع سادهٔ T روی A باشد. نشان دهید (X,T^*) نرمال است اگر و فقط اگر $X \backslash A$ زیرفضای نرمال (X,T) باشد (به بخش ۲.۱ تمرین ۱۱ مراجعه کنید).

۷. ثابت کنید نمی‌توان مجموعه‌های بستهٔ ارائه‌شده در مثال ۲۶ را با مجموعه‌های باز و مجزا از هم جدا نمود.

۸. ثابت کنید هر فضای T_2 و فشرده، T_4 است.

۹. نشان دهید فضای توپولوژیکی (X,T) یک فضای T_4 است اگر و فقط اگر برای هر دو مجموعهٔ جدا از هم و بستهٔ F و K، مجموعه‌های باز U و V موجود باشند به طوری که:

$$F \subseteq U \quad , \quad K \subseteq V \quad , \quad \overline{U} \cap \overline{V} = \phi$$

۱۰. نشان دهید هر فضای منظم و باپایان، نرمال است.

۱۱. یک فضای T_3 ارائه دهید که T_4 نباشد.

۱۲. فضاهای توپولوژیک (X,T) و (X,T^*) چنان ارائه دهید که $T \subseteq T^*$ و

الف) فضای (X,T) نرمال باشد ولی فضای (X,T^*) نرمال نباشد.

ب) فضای (X,T^*) نرمال باشد ولی فضای (X,T) نرمال نباشد.

۱۳. ثابت کنید فضای ارائه‌شده در مثال ۲۷ نرمال است ولی صفحهٔ مور به عنوان زیرفضای آن نرمال نیست.

۱۴. ثابت کنید تصویر یک فضای نرمال (به ترتیب T_4) تحت یک تابع پیوسته و بسته، نرمال (به ترتیب T_4) است.

۱۵. فرض کنید X نرمال، $A \subseteq X$ بسته و Y فضای تجزیه X مشتمل بر A و کلیه زیرمجموعه‌های تک‌عضوی $X \setminus A$ باشد. نشان دهید Y نرمال است.

۱۶. نشان دهید فضای خارج‌قسمت یک فضای T_4، لزوماً T_4 نیست.

۱۷. فرض کنید $A \subseteq X$ و $T = \{B : B \subseteq A\} \cup \{X\}$. در نرمال بودن فضای توپولوژیک (X,T) بحث کنید.

۱۸. نشان دهید اگر A در فضای نرمال X، بسته باشد، آنگاه هر تابع $f : A \to \mathcal{R}^n$ قابل توسعه به X است.

۷.۶ فضاهای کاملاً منظم

در این قسمت و قسمت بعد با فضاهایی آشنا می‌شویم که اهمیت آنها در پژوهش‌های اخیر توپولوژی پدیدار گشته و کاربرد قابل ملاحظه‌ای دارند.

تعریف: فضای توپولوژیکی (X,T) یک **فضای کاملاً منظم** است، هرگاه برای هر مجموعهٔ بستهٔ $F \subseteq X$ و هر نقطهٔ $x \notin F$، تابع پیوستهٔ $f : X \to [0,1]$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$f(F) = 1 \quad , \quad f(x) = 0$$

بدیهی است که، در تعریف اخیر، یافتن یک تابع پیوسته مانند $f : X \to \mathcal{R}$ به طوری که $f(F) = a$ و $f(x) = b$، $a \neq b$، نیز کافی است.

مثال ۳۱: صفحهٔ مور (تمرین ۹ بخش ۲.۳) یک فضای کاملاً منظم است. زیرا برای هر مجموعهٔ بستهٔ $F \subseteq X$ و هر نقطهٔ $p \notin F$، عنصر پایهٔ V حول p را چنان اختیار کنید که $F \subseteq X \backslash V$. حال تابع $f : X \to [0,1]$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$f(p) = 0 \quad , \quad f(x) = 1 \quad ; \quad \forall x \in X \backslash V$$

و سپس f را به صورت خطی در امتداد پاره‌خطی که p را به مرز V متصل می‌کند تعمیم دهید. تابع f بوضوح پیوسته است. به علاوه $f(p) = 0$ و $f(F) = 1$.

قضیهٔ ۳۴: هر فضای کاملاً منظم یک فضای منظم است.

اثبات: فضای توپولوژی کاملاً منظم (X,T) را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم F یک مجموعهٔ بسته و نقطهٔ x چنان باشد که $x \notin F$. طبق فرض تابع پیوستهٔ $f : X \to [0,1]$ وجود دارد به طوری که:

$$f(F) = 1 \quad , \quad f(x) = 0$$

اما دیدیم که مجموعهٔ اعداد حقیقی یک فضای T_2 است در نتیجه زیرفضای آن، یعنی $[0,1]$ نیز یک فضای T_2 است. لذا برای دو نقطهٔ متمایز ۰ و ۱، دو مجموعهٔ باز U و V وجود دارد به طوری که:

$$0 \in U \quad , \quad 1 \in V \quad , \quad U \cap V = \phi$$

چون تابع f پیوسته است $f^{-1}(U)$ و $f^{-1}(V)$ در فضای (X,T) باز است و به علاوه

$$x \in f^{-1}(0) \subseteq f^{-1}(U) \quad ,$$

$$F \subseteq f^{-1}(1) \subseteq f^{-1}(V) \quad ,$$

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = \phi$$

بنابراین فضای (X,T) یک فضای منظم است.

□

مثال ۳۲: فرض کنید Y فضای تجزیه صفحه مور مشتمل بر $D = \{(x, \circ) : x \in Q\}$ و تک‌نقطه‌ای‌ها در $X\setminus D$ باشد. پس Y کاملاً منظم نیست. در واقع این فضا منظم نیست. زیرا نقطهٔ D و مجموعهٔ بستهٔ $E = \{(x, \circ) : x \in X\setminus Q\}$ را در فضای Y نمی‌توان از هم جدا کرد.

قضیهٔ ۳۵: اگر فضای (X, T) نرمال و منظم باشد، آنگاه این فضا کاملاً منظم است.

اثبات: مجموعهٔ بستهٔ F و نقطهٔ x، $x \notin F$، را در نظر می‌گیریم. روشن است که مجموعهٔ $X\setminus F$ باز و $x \in X\setminus F$. چون فضای (X, T) منظم است، طبق قضیهٔ ۲۱ مجموعهٔ باز G وجود دارد به طوری که $x \in G \subseteq \overline{G} \subseteq X\setminus F$. لذا مجموعه‌های $\overline{G}$ و F دو مجموعهٔ بسته و مجزا در فضای نرمال (X, T) است، پس بنا بر لم اوریسون، تابع پیوستهٔ $f : X \to [\circ, ۱]$ وجود دارد به طوری که:

$$f(\overline{G}) = \circ \quad , \quad f(F) = ۱$$

اما چون $x \in \overline{G}$، پس $f(x) = \circ$ و در نتیجه تابع پیوستهٔ $f : X \to [\circ, ۱]$ دارای خواص زیر نیز است:

$$f(x) = \circ \quad , \quad f(F) = ۱$$

بنابراین فضای (X, T) یک فضای کاملاً منظم است.

□

مثال ۳۳: مجموعهٔ اعداد حقیقی، یک فضای کاملاً منظم است.

مثال ۳۴: هر فضای گسسته، یک فضای کاملاً منظم است.

حال با اضافه کردن شرط $T_۱$ به فضاهای کاملاً منظم، فضاهایی با یک‌سری خصوصیات جدید به دست می‌آوریم که اولین‌بار توسط ریاضیدان معروف، تیکونوف، ارائه گردید و به همین نام نیز معروف است. در اینجا مختصری از آن خواص را ذکر می‌کنیم.

تعریف: فضای (X, T) را یک **فضای تیکونوف** گوییم، هرگاه کاملاً منظم و $T_۱$ باشد.

مثال ۳۵: با توجه به مثال‌های ۳۳ و ۵، هر فضای گسسته یک فضای تیکونوف است.

مثال ۳۶: فضای ارائه‌شده در مثال ۳۱، یک فضای تیکونوف است.

قضیهٔ ۳۶: هر فضای $T_۴$ یک فضای تیکونوف و هر فضای تیکونوف یک فضای $T_۳$ است.

اثبات: با توجه به قضیهٔ ۳۴ بدیهی است که هر فضای تیکونوف، یک فضای $T_۳$ نیز است. از طرفی هر

فضای T_4، T_3 نیز است. لذا نرمال، منظم و T_1 است. بنابراین با توجه به قضیهٔ ۳۵، کاملاً منظم و T_1 است، پس تیکونوف است.

□

ویژگی خاصی که مطالعهٔ فضاهای کاملاً منظم دارد در رابطه با توابع پیوستهٔ حقیقی است. مطالعه در این زمینه از هدفهای این درس خارج است. در اینجا فقط اشاره می‌کنیم که فضای T_3 ای وجود دارد که در آن هر تابع پیوستهٔ حقیقی یک تابع ثابت است ولی این مطلب در فضاهای تیکونوف برقرار نیست. در اینگونه فضاها می‌توان به اندازهٔ کافی توابع پیوستهٔ حقیقی داشت. حتی می‌توان توسط توابع پیوسته در یک فضای تیکونوف نقاط را از یکدیگر جدا و مشخص نمود. به قضیهٔ زیر توجه کنید.

قضیهٔ ۳۷ : اگر x و y دو نقطهٔ متمایز در فضای تیکونوف X باشند، آنگاه تابع پیوسته و حقیقی f روی X وجود دارد به طوری که $f(x) \neq f(y)$.

اثبات: چون فضای X تیکونوف است لذا T_1 است پس مجموعهٔ $\{y\}$، یک مجموعهٔ بسته است که $x \notin \{y\}$. همچنین این فضا کاملاً منظم است. بنابراین برای نقطهٔ x و مجموعهٔ بستهٔ $\{y\}$ تابع پیوسته و حقیقی $f : X \to [0, 1]$ وجود دارد به طوری که:

$$f(\{y\}) = 1 \quad , \quad f(x) = 0$$

و از آنجا روشن است که $f(x) \neq f(y)$.

□

تمرین

۱. نشان دهید زیرفضای یک فضای کاملاً منظم، خود یک فضای کاملاً منظم است.

۲. نشان دهید خاصیت کاملاً منظم بودن یک خاصیت توپولوژیکی است.

۳. نشان دهید فضای خارج‌قسمت یک فضای کاملاً منظم، لزوماً کاملاً منظم نیست.

۴. فرض کنید $A \subseteq X$ و $T = \{B : B \subseteq A\} \cup \{X\}$. تحت چه شرایطی فضای توپولوژیک (X, T) منظم است؟ تحت چه شرایطی کاملاً منظم است؟

۵. فرض کنید $\{X_\alpha\}$ یک دسته از فضاهای توپولوژیک و $X = \prod X_\alpha$. ثابت کنید X یک فضای کاملاً منظم است اگر و فقط اگر به ازای هر α، X_α یک فضای کاملاً منظم باشد.

۶. ثابت کنید یک فضای T_1 و نرمال، کاملاً منظم است.

۷. ثابت کنید هر فضای هاسدورف و فشرده، کاملاً منظم است.

۸. فرض کنید (X,T) یک فضای توپولوژیک، $A \subseteq X$ بسته و (X,T^*) توسیع سادهٔ T روی A باشد. نشان دهید اگر (X,T) منظم و یا کاملاً منظم باشد، آنگاه (X,T^*) نیز همان خواص را دارد. با ذکر یک مثال نشان دهید اگر A بسته نباشد حکم لزوماً برقرار نیست.

۹. نشان دهید زیرفضای یک فضای تیکونوف، خود یک فضای تیکونوف است.

۱۰. نشان دهید خاصیت تیکونوف بودن یک خاصیت توپولوژیکی است.

۱۱. یک فضای توپولوژیک ارائه دهید که تیکونوف باشد ولی T_4 نباشد.

۱۲. با ارائه یک مثال نشان دهید تصویر یک فضای تیکونوف تحت یک تابع پیوسته و بسته، لزوماً T_2 نیست.

۱۳. با ارائه یک مثال نشان دهید تصویر یک فضای T_2 تحت یک تابع پیوسته و بسته، لزوماً تیکونوف نیست.

۱۴. با ارائه یک مثال نشان دهید تصویر یک فضای تیکونوف تحت یک تابع پیوسته و باز، لزوماً T_2 نیست.

۷.۷ فضاهای کاملاً نرمال

دیدیم که زیرفضای یک فضای نرمال لزوماً نرمال نیست. اما می‌توان فضایی تعریف کرد با ویژگی نرمال بودن که در اینگونه فضاها ویژگیِ «*هر زیرفضا نرمال است*» وجود دارد. مانند مجموعه اعداد حقیقی با توپولوژی معمولی و یا فضاهای گسسته.

تعریف: فضای توپولوژیکی (X,T) را **فضای کاملاً نرمال** می‌گوییم هرگاه هر دو مجموعهٔ جدا از هم را بتوان به وسیلهٔ مجموعه‌های باز و مجزا از هم جدا نمود. به عبارت دیگر، هرگاه برای هر دو مجموعهٔ دلخواه $A \subseteq X$ و $B \subseteq X$ با خاصیت $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \phi$، مجموعه‌های باز U و V موجود باشند به طوری که:

$$A \subseteq U \quad , \quad B \subseteq V \quad , \quad U \cap V = \phi$$

بدیهی است که *هر فضای کاملاً نرمال، یک فضای نرمال است*. زیرا اگر A و B مجموعه‌های بسته و مجزا باشند، آنگاه $\overline{A} = A$ و $\overline{B} = B$ در نتیجه A و B مجموعه‌های بسته و جدا از هم خواهند بود که به وسیلهٔ دو مجموعهٔ باز و مجزا از هم جدا شده‌اند.

قضیهٔ ۳۸: یک فضای توپولوژیک کاملاً نرمال است اگر و فقط اگر هر زیرفضای آن نرمال باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم فضای توپولوژیکی (X,T) یک فضای کاملاً نرمال و (Y,T_Y) زیرفضای آن باشد. نشان می‌دهیم فضای (Y,T_Y) نرمال است. برای این منظور مجموعه‌های بسته و مجزای H و F را در زیرفضای (Y,T_Y) در نظر می‌گیریم. داریم:

$$F \cap (\overline{H})_X = F \cap Y \cap (\overline{H})_X = F \cap (\overline{H})_Y = F \cap H = \phi$$

لازم به ذکر است که در نوشتن روابط بالا از دو نکته استفاده کرده‌ایم. اولاً چون H در فضای (Y,T_Y) بسته است لذا با بستار خود در این فضا برابر است. ثانیاً در توپولوژی نسبی، بستار H در فضای (Y,T_Y)، برابر با اشتراک بستار H در فضای (X,T) با Y است.

به طریق مشابه، $(\overline{F})_X \cap H = \phi$. حال H و F دو مجموعهٔ جدا از هم در فضای (X,T) می‌باشند لذا با استفاده از خاصیت کاملاً نرمال بودن فضای (X,T)، مجموعه‌های باز و مجزای U و V وجود دارد به طوری که

$$F \subseteq U \quad , \quad H \subseteq V$$

روشن است که

$$F \subseteq Y \cap U \ , \ H \subseteq Y \cap V \ , \ (Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Y \cap (U \cap V) = Y \cap \phi = \phi$$

لذا مجموعه‌های $Y \cap U$ و $Y \cap V$ دو مجموعهٔ باز و مجزای مورد نیاز در زیرفضای (Y,T_Y) هستند. در نتیجه فضای (Y,T_Y) نرمال است.

بالعکس، فرض می‌کنیم هر زیرفضای (X,T) نرمال است. نشان می‌دهیم فضای (X,T) یک فضای کاملاً نرمال است. برای این منظور دو مجموعهٔ جدا از هم $A \subseteq X$ و $B \subseteq X$ را در نظر بگیرید. قرار دهید $Y = X \backslash (\overline{A} \cap \overline{B})$ و Y را به توپولوژی نسبی مجهز کنید و آن را به T_Y نمایش دهید. بنا به فرض زیرفضای توپولوژیک (Y,T_Y) نرمال است. از طرف دیگر از $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \phi$ داریم:

$$A \subseteq X \backslash \overline{B} \quad , \quad B \subseteq X \backslash \overline{A}$$

و در نتیجه

$$A = A \cap (X \backslash \overline{B}) \subseteq \overline{A} \cap (X \backslash (\overline{A} \cap \overline{B})) = \overline{A} \cap Y$$

$$B = B \cap (X \backslash \overline{A}) \subseteq \overline{B} \cap (X \backslash (\overline{A} \cap \overline{B})) = \overline{B} \cap Y$$

به علاوه

$$(Y \cap \overline{A}) \cap (Y \cap \overline{B}) = Y \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \phi$$

لذا با توجه به این مطالب و بنا به تعریف توپولوژی نسبی مجموعه‌های $Y \cap \overline{A}$ و $Y \cap \overline{B}$، دو مجموعهٔ بسته و غیرتهی و مجزا در فضای توپولوژیکی (Y, T_Y) هستند. لذا در فضای نرمال (Y, T_Y) دو مجموعهٔ باز G_A و G_B وجود دارد به طوری که

$$Y \cap \overline{A} \subseteq G_A \quad , \quad Y \cap \overline{B} \subseteq G_B$$

اما چون Y در فضای (X, T) مطابق تعریف $(Y = X \backslash (\overline{A} \cap \overline{B}))$ باز می‌باشد، پس هر مجموعهٔ باز در زیرفضای (Y, T_Y) یک مجموعهٔ باز در فضای (X, T) نیز است. لذا مجموعه‌های G_A و G_B در فضای (X, T) بازند. از طرفی دیدیم

$$A \subseteq \overline{A} \cap Y \subseteq G_A \quad , \quad B \subseteq \overline{B} \cap Y \subseteq G_B$$

پس فضای (X, T) کاملاً نرمال است.

تمرین

۱. نشان دهید خاصیت کاملاً نرمال بودن یک خاصیت توپولوژیکی است.

۲. یک فضای نرمال ارائه دهید که کاملاً نرمال نباشد.

فصل ۸

اصول شمارش‌پذیری

۸.۱ اصل اول شمارش‌پذیری

تعریف: دستهٔ شمارش‌پذیر $\{B_n(x)\}$ از مجموعه‌های باز شامل x را **پایه شمارش‌پذیر در نقطهٔ** x می‌نامیم اگر برای هر مجموعهٔ باز G، شامل x، n_ای وجود داشته باشد به طوری که $B_n(x) \subseteq G$.

تعریف: می‌گوییم اصل اول شمارش‌پذیری در فضای (X, T) صادق است هرگاه در هر نقطه یک پایهٔ شمارش‌پذیر موجود باشد. این فضاها را **فضاهای شمارش‌پذیر نوع اول** نیز می‌نامند.

مثال ۱ : در فضای اعداد حقیقی اصل اول شمارش‌پذیری برقرار است. زیرا در هر نقطهٔ x از این فضا بازه‌های باز $B_n(x) =]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ یک پایهٔ شمارش‌پذیر هستند.

مثال ۲ : هر فضای ناگسسته و همچنین هر فضای باپایان، شمارش‌پذیر نوع اول است.

مثال ۳ : در فضاهای گسسته، اصل اول شمارش‌پذیری برقرار است. زیرا مجموعهٔ تک‌عضوی مشتمل بر آن نقطه، پایهٔ شمارش‌پذیر در آن نقطه است.

مثال ۴ : برای مجموعهٔ شمارش‌پذیر X، $a \in X$، توپولوژی T را اجتماع دو توپولوژی طرد a و مکمل باپایان (فضای مستحکم) اختیار کنید. در این صورت در فضای توپولوژیکی (X, T) اصل اول شمارش‌پذیری برقرار نیست. زیرا اگر باشد، آنگاه یک پایهٔ شمارش‌پذیر در نقطهٔ a، مانند $\{B_n(a)\}$، وجود دارد. چون برای هر n، باز $B_n(a)$ شامل a است، پس $X \setminus B_n(a)$ باپایان است. لذا $\cup (X \setminus B_n(a))$ شمارش‌پذیر و با استفاده از قوانین دمرگان $X \setminus \cap B_n(a)$ شمارش‌پذیر است. از طرفی $X = (\cap B_n(a)) \cup (X \setminus \cap B_n(a))$ شمارش‌ناپذیر است پس باید $\cap B_n(a)$ شمارش‌ناپذیر باشد لذا حداقل عضو دیگری غیر از a در این اشتراک وجود دارد، آن را x بنامید، $x \neq a$. از طرف دیگر در

مثال ۱۱ بخش ۷.۳ دیدیم که فضای مستحکم یک فضای $T_۲$ است و چون در فضاهای $T_۲$ مجموعه‌های تک‌عضوی بسته هستند پس $X\backslash\{x\}$ یک مجموعهٔ باز و شامل a است. پس بنا بر تعریف پایه، m ای موجود است که $B_m(a) \subseteq X\backslash\{x\}$. بنابراین $x \notin B_m(a)$ که با نحوهٔ انتخاب x متناقض است. لذا فضای (X,T) شمارش‌پذیر نوع اول نیست.

قضیهٔ ۱ : اگر فضای (X,T) خاصیت اول شمارش‌پذیری را دارا باشد، در این صورت در هر نقطهٔ x پایهٔ شمارش‌پذیر $\{B_n^*(x)\}$ موجود است به طوری که

$$B_۱^*(x) \supseteq B_۲^*(x) \supseteq B_۳^*(x) \supseteq \cdots$$

در این حالت اصطلاحاً می‌گوییم x دارای **پایه شمارش‌پذیر کاهشی** است.

اثبات: طبق تعریف برای $x \in X$ پایه شمارش‌پذیر $\{B_n(x)\}$ وجود دارد. قرار می‌دهیم:

$$B_۱^* = B_۱\ , \quad B_۲^* = B_۱ \cap B_۲\ , \quad \cdots, \quad B_n^* = B_۱ \cap B_۲ \cap \cdots \cap B_n\ , \quad \cdots$$

در این صورت ملاحظه می‌کنیم که

$$B_۱^*(x) \supseteq B_۲^*(x) \supseteq B_۳^*(x) \supseteq \cdots$$

روشن است که هر B_i^* باز و شامل x است و به علاوه اگر G مجموعه بازی شامل نقطهٔ x باشد در این صورت $n_۰$ ـای موجود است به طوری که $B_{n_۰}^* \subseteq B_{n_۰} \subseteq G$ و لذا $\{B_n^*\}$ یک پایهٔ شمارش‌پذیر برای نقطهٔ x است.

□

در فصل‌های قبل به مطالبی اشاره کردیم که اثبات عکس آنها در آنجا امکان‌پذیر نبود. در اینجا با در نظر گرفتن خاصیت اصل اول شمارش‌پذیری، عکس آن مطالب را اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ ۲ : اگر حد هر دنبالهٔ همگرا در فضای شمارش‌پذیر نوع اول یگانه باشد، آنگاه آن فضا یک فضای $T_۲$ است.[1]

اثبات: فرض می‌کنیم فضای (X,T) با خاصیت ذکرشده در قضیه موجود باشد ولی $T_۲$ نباشد. پس نقاط x و y در فضا موجودند به طوری که هر مجموعهٔ باز U شامل x اشتراکش با هر مجموعهٔ باز V شامل y غیرتهی است. اما چون در (X,T) اصل اول شمارش‌پذیری برقرار است، پس پایهٔ شمارش‌پذیر کاهشی $\{B_n(x)\}$ و $\{B_n(y)\}$ به ترتیب حول نقاط x و y وجود دارد و به علاوه برای

[1] با تمرین ۱ بخش ۷.۳ مقایسه کنید.

هر n، $B_n(x) \cap B_n(y) \neq \phi$. برای هر n، $x_n \in B_n(x) \cap B_n(y)$ را انتخاب می‌کنیم. بنا به تعریف برای هر دو مجموعهٔ باز G_x و G_y به ترتیب حول x و y، $n_\circ$ ـای موجود است به طوری که $B_{n_\circ}(x) \subseteq G_x$ و $B_{n_\circ}(y) \subseteq G_y$.

اما چون پایه‌های $\{B_n(x)\}$ و $\{B_n(y)\}$ کاهشی هستند، پس Nـ ای وجود دارد که برای هر $n > N$

$$B_n(x) \subseteq G_x \quad , \quad B_n(y) \subseteq G_y$$

لذا طبق تعریف همگرایی دنباله داریم: $x_n \to y$ و $x_n \to x$. یعنی در این فضا دنباله‌ای که حد آن یگانه نیست وجود دارد و این خلاف فرض است. بنابراین فضای (X,T) یک فضای $T_۲$ است.

□

قضیهٔ ۳: فرض کنید فضای توپولوژیکی (X,T) یک فضای $T_۱$ با خاصیت اصل اول شمارش‌پذیری، $E \subseteq X$ و x یک نقطه تجمع مجموعهٔ E باشد. در این صورت دنباله‌ای از اعضای متمایز E وجود دارد که به نقطهٔ x همگرا است. [۲]

اثبات: چون فضای (X,T) شمارش‌پذیر نوع اول است، پس برای هر نقطهٔ x، پایهٔ شمارش‌پذیر کاهشی $\{B_n(x)\}$ وجود دارد. لذا طبق تعریف نقطهٔ تجمع، برای هر n، $B_n(x) \cap (E\backslash\{x\}) \neq \phi$. بنا به قضیهٔ ۷ فصل ۷، با توجه به $T_۱$ بودن فضا، این اشتراک شامل تعداد بی‌پایان نقطه است. اکنون نقطهٔ $x_۱ \in B_۱ \cap (E\backslash\{x\})$ را انتخاب می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم و هر بار نقطه‌ای متمایز از نقاط قبلی، به شکل زیر انتخاب می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_۲ \in B_۲ \cap (E\backslash\{x\}) \quad \text{و} \quad x_۲ \neq x_۱ \\ x_۳ \in B_۳ \cap (E\backslash\{x\}) \quad \text{و} \quad x_۳ \neq x_۱ \,,\, x_۳ \neq x_۲ \\ \quad \vdots \\ x_n \in B_n \cap (E\backslash\{x\}) \quad \text{و} \quad x_n \neq x_۱ \,,\, x_n \neq x_۲ \,,\, x_n \neq x_۳ \,,\, \cdots \,,\, x_n \neq x_{n-۱} \\ \quad \vdots \end{cases}$$

دنبالهٔ (x_n) از نقاط متمایز E به نقطهٔ x همگرا است، زیرا برای هر مجموعهٔ باز G که شامل x باشد، بنا به تعریف پایه، mـای وجود دارد که $B_m \subseteq G$ و همچنین چون پایهٔ شمارش‌پذیر $\{B_n(x)\}$ کاهشی نیز است، لذا برای $n > m$، $x_n \in B_m$ و در نتیجه $x_n \in G$ و مطابق تعریف: $x_n \to x$.

□

[۲] با تمرین ۳۳ بخش ۳.۱ مقایسه کنید.

قضیهٔ ۴ : فرض کنید $f : (X,T) \to (X^*,T^*)$ و فضای (X,T) خاصیت اصل اول شمارش‌پذیری را دارا باشد و به علاوه برای هر دنبالهٔ (x_n) که در فضای X به نقطهٔ $x \in X$ همگرا باشد، دنبالهٔ $(f(x_n))$ در فضای X^* به نقطهٔ $f(x) \in X^*$ همگرا است. در این صورت تابع f در نقطهٔ x پیوسته است.[۳]

اثبات: فرض می‌کنیم تابع f در نقطهٔ x پیوسته نیست. مطابق تعریف باید مجموعهٔ بازی مانند G^* شامل $f(x)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر مجموعهٔ باز G، شامل x، $f(G)$ زیرمجموعهٔ G^* نیست و بنابراین

$$f(G) \cap (X^* \backslash G^*) \neq \phi$$

حال چون فضای (X,T) فضای شمارش‌پذیر نوع اول است پس پایه شمارش‌پذیر کاهشی $\{B_n(x)\}$ در نقطهٔ x وجود دارد که با توجه به مطلب ذکرشده، برای هر n:

$$f(B_n) \cap (X^* \backslash G^*) \neq \phi$$

اکنون نقطهٔ $x_n^* \in f(B_n) \cap (X^* \backslash G^*)$ انتخاب می‌کنیم. چون $x_n^* \in f(B_n)$، پس $x_n \in B_n$ وجود دارد به طوری که $f(x_n) = x_n^*$.

ملاحظه می‌کنیم که دنبالهٔ (x_n) به نقطهٔ x همگرا است زیرا دستهٔ $\{B_n\}$ یک پایهٔ شمارش‌پذیر کاهشی در نقطهٔ x است. ولی دنبالهٔ $(x_n^*) = (f(x_n))$ به نقطهٔ $f(x) \in G^*$ همگرا نیست، زیرا برای هر n، $x_n^* \in X^* \backslash G^*$ و این خلاف فرض است. پس تابع f در نقطهٔ x پیوسته است.

□

قضیهٔ ۵ : فضای حاصل‌ضرب $X = \prod X_\alpha$ شمارش‌پذیر نوع اول است اگر به ازای هر α، X_α شمارش‌پذیر نوع اول بوده و به علاوه همهٔ X_α، بجز تعداد شمارش‌پذیری از آنها، فضای ناگسسته باشند.

اثبات: فرض کنید هر X_α، شمارش‌پذیر نوع اول باشد و بجز تعداد شمارش‌پذیر از α ها بقیه فضای ناگسسته باشند. این مجموعهٔ شمارش‌پذیر را $K = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots\}$ بنامید. حال فرض کنید $x = (x_\alpha) \in \prod X_\alpha$. به ازای هر $\alpha \neq \alpha_i$، چون X_α فضای ناگسسته است پس پایهٔ شمارش‌پذیر آن در هر نقطه خود X_α است و برای $\alpha = \alpha_i$، فرض کنید $\{B_{\alpha_i,n}(x_{\alpha_i})\}_n$ پایهٔ شمارش‌پذیر مورد نظر در x_{α_i} باشد قرار دهید $W(x) = \prod_\alpha V_\alpha(x_\alpha)$ که در آن

$$V_\alpha \begin{cases} \in \{B_{\alpha_i,n}(x_{\alpha_i})\}_n & \text{برای تعداد باپایان اندیس که به } K \text{ تعلق دارند} \\ = X_\alpha & \text{برای بقیه اندیس‌ها} \end{cases}$$

---

[۳] با قضیهٔ ۱۲ بخش ۳.۱ مقایسه کنید.

بدیهی است که تعداد این‌گونه مجموعه‌ها شمارش‌پذیر است.

برای تکمیل اثبات فرض کنید G یک مجموعهٔ باز در توپولوژی حاصل‌ضرب حول $x = (x_\alpha)$ باشد. در این صورت عنصر پایه $\prod G_\beta \subseteq G$ که در آن همه G_β ها بجز تعداد باپایان اندیس، $\beta_1, \dots, \beta_k$، برابر X_β است موجود می‌باشد. حال اگر β_i ها به $\mathcal{K}$ متعلق نباشند بالاجبار $G_{\beta_i} = X_{\beta_i}$، زیرا توپولوژی X_{β_i} ها در این حالت ناگسسته است و اگر β_i به $\mathcal{K}$ متعلق باشد، می‌توان عضوی از $\{B_{\alpha_i,n}(x_{\alpha_i})\}_n$ که زیرمجموعهٔ G_β است را انتخاب کرد. آن را U_β بنامید. در این صورت $U = \prod H_\beta \subseteq \prod G_\beta \subseteq G$ که در آن $H_\beta = U_\beta$ اگر β به $\mathcal{K}$ متعلق باشد و در غیر این صورت $H_\beta = X_\beta$. (توجه کنید که تعداد β ها باپایان است.)

□

نتیجهٔ ۶: حاصل‌ضرب تعداد شمارش‌پذیر از فضاهای شمارش‌پذیر نوع اول، شمارش‌پذیر نوع اول است.

□

تمرین

۱. نشان دهید هر زیرفضای یک فضا با اصل اول شمارش‌پذیری، خود دارای خاصیت اصل اول شمارش‌پذیری است.

۲. نشان دهید خاصیت اصل اول شمارش‌پذیری یک خاصیت توپولوژیکی است.

۳. ثابت کنید اگر در $X = \prod X_\alpha$ اصل اول شمارش‌پذیری برقرار باشد، آنگاه به ازای هر α، X_α نیز خاصیت اصل اول شمارش‌پذیری را دارا است.

۴. نشان دهید فضای مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی مکمل باپایان، شمارش‌پذیر نوع اول نیست.

۵. نشان دهید اگر فضای (X,T) یک فضای T_1 با خاصیت اصل اول شمارش‌پذیری باشد، آنگاه برای هر نقطهٔ $x \in X$، $\{x\} = \cap_{n\in\mathcal{N}} B_n(x)$، که در آن $B_n(x)$ ها پایهٔ شمارش‌پذیر هستند.

۶. فرض کنید (X,T) دارای خاصیت اصل اول شمارش‌پذیری و $F \subseteq X$ باشد. ثابت کنید F بسته است اگر و فقط اگر به ازای هر دنبالهٔ واقع در F که به نقطهٔ x همگرا است، $x \in F$.

۷. فرض کنید (X,T) شمارش‌پذیر نوع اول و $U \subseteq X$. ثابت کنید U باز است اگر و فقط اگر به ازای هر دنبالهٔ (x_n) واقع در X که به $x \in U$ همگرا باشد، mـای موجود باشد به طوری که برای $n > m$، $x_n \in U$.

۸. در کدامیک از فضاهای زیر، اصل اول شمارش‌پذیری صادق است.

الف- X یک فضای شمارش‌ناپذیر با توپولوژی مکمل شمارش‌پذیر.

ب- X مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی شعاع راست.

پ- X مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی حد پایینی.

ت- X یک فضای شمارش‌ناپذیر با توپولوژی جذب $A \subseteq X$.

ث- X یک فضای شمارش‌ناپذیر با توپولوژی طرد $A \subseteq X$.

۹. نشان دهید تصویر فضای شمارش‌پذیر نوع اول تحت تابع پیوسته لزوماً شمارش‌پذیر نوع اول نیست ولی اگر علاوه بر پیوسته بودن، باز بودن نیز به آن اضافه شود، آنگاه تصویر فضای شمارش‌پذیر نوع اول، شمارش‌پذیر نوع اول است.

۱۰. فرض کنید $H = \{\frac{1}{m} : m \in \mathcal{N}\} \cup \{0\}$ و برای هر $n \in \mathcal{N}$، $X_n = H \times \{n\}$ و X اجتماع همهٔ X_n ها به عنوان زیرفضای $\mathcal{R}^2$ باشد. نشان دهید اگر Y فضای خارج‌قسمت X که با یکسان کردن مجموعهٔ $\{(0, n) : n \in \mathcal{N}\}$ حاصل می‌شود باشد، آنگاه Y شمارش‌پذیر نوع اول نیست.

۸.۲ اصل دوم شمارش‌پذیری

همانطور که دیدیم خاصیت اصل اول شمارش‌پذیری یک خاصیت موضعی است. در اینجا تحت عنوان اصل دوم شمارش‌پذیری آن را به تمام فضا تعمیم می‌دهیم.

تعریف: گوییم در فضای توپولوژیکی (X, T) **اصل دوم شمارش‌پذیری** صادق است هرگاه برای توپولوژی T یک پایه شمارش‌پذیر وجود داشته باشد. این فضاها را **فضاهای شمارش‌پذیر نوع دوم** نیز می‌نامند.

مثال ۵: مجموعهٔ اعداد حقیقی خاصیت اصل دوم شمارش‌پذیری را دارا است. زیرا دسته فاصله‌های باز $]p, q[$ که ابتدا و انتهای آنها عدد گویا است یک پایه شمارش‌پذیر برای توپولوژی معمولی روی مجموعه اعداد حقیقی است.

مثال ۶: اگر $A \subseteq X$ و $X \backslash A$ شمارش‌ناپذیر و X به توپولوژی جذب A مجهز باشد، آنگاه فضای X شمارش‌پذیر نوع دوم نیست. زیرا دستهٔ $\{\{x\} \cup A\}$، $x \in X \backslash A$، یک دستهٔ شمارش‌ناپذیر از مجموعه‌های باز است که بنا به تعریف هریک شامل یکی از عناصر پایه است. لذا پایهٔ شمارش‌پذیر موجود نیست.

مثال ۷: اگر $A \subseteq X$ و $X\backslash A$ شمارش‌پذیر و X به توپولوژی جذب A مجهز باشد، آنگاه فضای X شمارش‌پذیر نوع دوم است. زیرا دستهٔ $\{A\} \cup \{\{x\} \cup A\}$، $x \in X\backslash A$، یک پایهٔ شمارش‌پذیر برای این فضا است.

بدیهی است که *اگر فضای (X,T) شمارش‌پذیر نوع دوم باشد، شمارش‌پذیر نوع اول نیز است.* ولی عکس آن ممکن است درست نباشد. مثال زیر درستی این ادعا را نشان می‌دهد.

مثال ۸: یک فضای شمارش‌ناپذیر با توپولوژی گسسته، شمارش‌پذیر نوع دوم نیست. زیرا دستهٔ $\mathcal{B}$ یک پایه برای این توپولوژی است اگر و فقط اگر شامل تمام مجموعه‌های تک‌عضوی باشد و چون فضا شمارش‌ناپذیر است لذا دستهٔ $\mathcal{B}$ نیز شمارش‌ناپذیر است. اما همانطور که در مثال ۳ دیدیم این فضای توپولوژیک در اصل اول شمارش‌پذیری صدق می‌کند.

مثال ۹: فضای مستحکم شمارش‌پذیر نوع دوم نیست زیرا شمارش‌پذیر نوع اول نمی‌باشد.

قضیهٔ ۷: اگر فضای توپولوژیک (X,T) شمارش‌پذیر نوع دوم باشد، آنگاه هر دسته از مجموعه‌های غیرتهی، باز و مجزا، در این فضای توپولوژیک شمارش‌پذیر است.

اثبات: فرض می‌کنیم دستهٔ $\mathcal{A}$ یک دسته از مجموعه‌های باز، غیرتهی و مجزا در فضای توپولوژیک (X,T) باشد. چون فضای X خاصیت اصل دوم شمارش‌پذیری را دارا است، بنابراین پایهٔ شمارش‌پذیری مانند $\{B_n\}$ موجود است. پس برای هر مجموعهٔ باز مانند G، خصوصاً $G \in \mathcal{A}$، nـای وجود دارد به طوری که $B_n \subseteq G$.

وابسته به هر مجموعهٔ باز $G \in \mathcal{A}$ کوچک‌ترین n را که $B_n \subseteq G$ است را انتخاب می‌کنیم. چون اعضای $\mathcal{A}$ مجموعه‌های باز و مجزا هستند اعداد مختلف n برای هر مجموعه $G \in \mathcal{A}$ به دست می‌آید اکنون اگر مجموعه‌های باز دستهٔ $\mathcal{A}$ را بنا به ترتیب اعداد طبیعی n و وابسته به آن مرتب کنیم یک دنبالهٔ شمارش‌پذیر از تمام اعضای $\mathcal{A}$ به دست می‌آید. لذا دستهٔ $\mathcal{A}$ شمارش‌پذیر است.

□

قضیهٔ ۸: اگر X و $A \subseteq X$ شمارش‌پذیر نوع دوم باشد، آنگاه هر پوشش باز A زیرپوشش شمارش‌پذیر دارد. بنابراین در فضای شمارش‌پذیر نوع دوم، هر پایه دارای زیرپایهٔ شمارش‌پذیر است.

اثبات: فرض کنید دستهٔ $\mathcal{G}$ پوشش باز A و دستهٔ $\mathcal{B}$ پایهٔ شمارش‌پذیر برای X باشد. برای هر $p \in A$، $G_p \in \mathcal{G}$ حول p را انتخاب کنید. بنا به تعریف $B_p \in \mathcal{B}$ موجود است به طوری که $p \in B_p \subseteq G_p$. بنابراین $A \subseteq \cup_{p\in A} B_p$. اما $\{B_p : p \in A\} \subseteq \mathcal{B}$ لذا شمارش‌پذیر است. آن را به $\{B_{p_i}\}$ نمایش دهید و G_{p_i} متناظر به آن را اختیار کنید. در این‌صورت دستهٔ $\{G_{p_i}\}$ زیرپوشش شمارش‌پذیر خواهد بود.

□

قضیهٔ ۹ : اگر فضای توپولوژیک (X, T) منظم با خاصیت اصل دوم شمارش‌پذیری باشد، آنگاه کاملاً نرمال است.

اثبات: کافی است نشان دهیم هر زیرمجموعهٔ آن نرمال است. از طرفی می‌دانیم که هر زیرفضای یک فضای منظم با اصل دوم شمارش‌پذیری، منظم و شمارش‌پذیر نوع دوم است. پس کافی است نشان دهیم هر فضای منظم با پایهٔ شمارش‌پذیر، نرمال است. لذا فرض کنید A و B دو مجموعهٔ بسته و جدا از هم باشند. برای هر $x \in A$، بنا به قضیهٔ ۲۱ فصل ۷، مجموعهٔ باز U_x موجود است که $x \in U_x \subseteq \overline{U}_x \subseteq X \backslash B$. پس $\overline{U}_x \cap B = \phi$. از طرفی $A \subseteq \cup_{x \in A} U_x$ که بنا به قضیهٔ ۸، دارای زیرپوشش شمارش‌پذیر است. لذا می‌توان فرض کرد $A \subseteq \cup_{i=۱}^{\infty} U_i$. به طور مشابه مجموعهٔ شمارش‌پذیر $\{V_i\}$ موجود است که:

$$\overline{V}_i \cap A = \phi \quad , \quad B \subseteq \cup_{i=۱}^{\infty} V_i$$

حال قرار دهید $O_۱ = U_۱$ و $W_۱ = V_۱$ و با استقراء تعریف کنید:

$$O_n = U_n \cap (\cap_{i=۱}^{n} (X \backslash \overline{V}_i)) \quad , \quad W_n = V_n \cap (\cap_{i=۱}^{n} (X \backslash \overline{U}_i))$$

به وضوح دو مجموعهٔ O_n و W_n به ازای هر n باز است. بنابراین مجموعه‌های

$$O = \cup_{n=۱}^{\infty} O_n \quad , \quad W = \cup_{n=۱}^{\infty} W_n$$

نیز باز هستند. به علاوه چون $A \subseteq X \backslash \overline{V}_i$ برای هر i و $A \subseteq \cup_{i=۱} U_i$، پس $A \subseteq O$. به طور مشابه $B \subseteq W$ و همچنین برای $n \geq m$

$$O_n \cap W_m = U_n \cap (\cap_{i=۱}^{n} (X \backslash \overline{V}_i)) \cap V_m \cap (\cap_{i=۱}^{m} (X \backslash \overline{U}_i)) \subseteq (X \backslash \overline{V}_m) \cap V_m = \phi$$

و اگر $n \leq m$، آنگاه

$$O_n \cap W_m \subseteq U_n \cap (X \backslash \overline{U}_n) = \phi$$

پس $O_n \cap W = \phi$ برای هر n و بنابراین $O \cap W = \phi$. پس فضا نرمال است.

□

قضیهٔ ۱۰ : تصویر فضای شمارش‌پذیر نوع دوم تحت تابع پیوسته و باز، شمارش‌پذیر نوع دوم است.

اثبات: فرض کنید در فضای توپولوژیکی X اصل دوم شمارش‌پذیری صدق کند و $f : X \to Y$ پیوسته، باز و پوشا باشد. کافی است نشان دهیم اگر $\mathcal{B}$ یک پایهٔ شمارش‌پذیر برای X باشد، آنگاه $f(\mathcal{B}) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ یک پایه برای Y است. ابتدا توجه کنید که با توجه به باز بودن f،

اعضای $f(\mathcal{B})$ باز هستند. حال فرض کنید V یک مجموعهٔ باز در Y باشد در این صورت $f^{-1}(V)$ باز در X است. بنا به تعریف، عنصر پایهٔ $B \in \mathcal{B}$ موجود است که $B \subseteq f^{-1}(V)$. لذا $f(B) \subseteq V$. پس $f(\mathcal{B})$ تشکیل پایهٔ شمارش‌پذیر برای Y می‌دهد.

□

قضیهٔ ۱۱ : فرض کنید $\{X_\alpha\}$ یک دسته از فضاهای توپولوژیک و $X = \prod X_\alpha$ باشد. در این صورت X خاصیت اصل دوم شمارش‌پذیری را دارا است اگر و فقط اگر به ازای هر α، X_α خاصیت اصل دوم شمارش‌پذیری را دارا بوده و به علاوه همهٔ X_α، بجز تعداد شمارش‌پذیر از آنها، فضاهای ناگسسته باشند.

اثبات: ابتدا فرض کنید $X = \prod X_\alpha$ شمارش‌پذیر نوع دوم باشد. چون تابع $\Pi_\alpha : X \to X_\alpha$ پیوسته، پوشا و باز است، لذا X_α، بنا به قضیهٔ ۱۰، شمارش‌پذیر نوع دوم است. به علاوه اگر $C_n = \prod_\alpha V_{\alpha,n}$ پایهٔ شمارش‌پذیر مورد نظر باشد، آنگاه به ازای هر n، طبق تعریف پایه در توپولوژی حاصل‌ضرب، $V_{\alpha,n} = X_\alpha$ به ازای همهٔ α ها بجز تعداد باپایان از اندیس‌ها. فرض کنید $\mathcal{W}$ مجموعهٔ همهٔ این‌چنین اندیس‌ها، به ازای n های مختلف باشد. چون به ازای هر n، تعداد باپایان اندیس موجود است لذا $\mathcal{W}$ شمارش‌پذیر است. نشان می دهیم X_α هایی که اندیس آنها به مجموعهٔ $\mathcal{W}$ تعلق ندارد، توپولوژی ناگسسته دارند زیرا اگر اینطور نباشد، βـای موجود است که X_β توپولوژی ناگسسته ندارد و $\beta \notin \mathcal{W}$. پس زیرمجموعهٔ غیرتهی V_β در X_β موجود است که $V_\beta \neq X_\beta$. در این صورت $H = \prod H_\alpha$ که در آن $H_\alpha = X_\alpha$ برای هر $\alpha \neq \beta$ و $H_\beta = V_\beta$، یک مجموعهٔ باز در $\prod X_\alpha$ است. بنا به تعریف پایه nـای موجود است که $C_n \subseteq H$، خصوصاً $V_{\beta,n} \subseteq H_\beta = V_\beta$. اما $\beta \notin \mathcal{W}$ پس $V_{\beta,n} = X_\beta$ که تناقض است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید A مجموعهٔ اندیس‌هایی باشد که به ازای آنها، X_α ناگسسته نیست. همچنین فرض کنید برای هر $\alpha \in A$، $\{B_{\alpha,n} : n = 1, 2, \cdots\}$ پایهٔ شمارش‌پذیر برای X_α باشد. در این صورت مجموعه‌هایی از نوع $\prod U_\alpha$ که در آن

$$U_\alpha \begin{cases} \in \{B_{\alpha,n}\} & \text{برای تعداد باپایان اندیس از مجموعهٔ } A \\ = X_\alpha & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

یک پایه برای فضای حاصل‌ضرب است. مشابه اثبات قضیهٔ ۵، چون A شمارش‌پذیر است، مجموعهٔ متشکل از این پایه‌ها، نیز شمارش‌پذیر خواهد بود.

□

نتیجهٔ ۱۲ : حاصل‌ضرب تعداد شمارش‌پذیر فضا با خاصیت اصل دوم شمارش‌پذیری، دارای خاصیت اصل دوم شمارش‌پذیری است.

□

تمرین

۱. نشان دهید هر زیرفضای یک فضای شمارش‌پذیر نوع دوم، خود دارای خاصیت اصل دوم شمارش‌پذیری است.

۲. نشان دهید خاصیت اصل دوم شمارش‌پذیری یک خاصیت توپولوژیکی است.

۳. نشان دهید مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی حد پایینی، در اصل دوم شمارش‌پذیری صادق نیست.

۴. فرض کنید X به توپولوژی طرد A مجهز باشد. تحت چه شرایطی این فضای توپولوژیک شمارش‌پذیر نوع دوم است.

۵. فرض کنید $X=[\circ,۱]\times[\circ,۱]$ و $J=]\circ,۱[\times]\circ,۱[$. مجموعهٔ $U\subseteq X$ را باز بنامید اگر برای هر نقطهٔ $(x,y)\in X$، اگر $(x,y)\in J$، آنگاه گوی باز به مرکز (x,y) و شعاع ε موجود باشد که در $U\cap J$ قرار گیرد و اگر $(x,y)\in X\setminus J$، گوی بازی به مرکز (x,y) و شعاع ε موجود باشد که اشتراک آن با J همراه با نقطهٔ (x,y) در U قرار بگیرد (مثال ۲۱ بخش ۷.۴) نشان دهید این فضا شمارش‌پذیر نوع اول است ولی شمارش‌پذیر نوع دوم نیست.

۶. نشان دهید فضای $\mathcal{R}^۲$ خاصیت اصل دوم شمارش‌پذیری را دارا است.

۷. نشان دهید در فضای شمارش‌پذیر نوع دوم منظم بودن و کاملاً منظم بودن با هم معادل هستند.

۸. نشان دهید فضای خارج‌قسمت یک فضا با اصل دوم شمارش‌پذیری لزوماً دارای خاصیت اصل دوم شمارش‌پذیری نیست. (این تمرین نشان می‌دهد که در قضیهٔ ۱۰ باز بودن تابع ضروری است.)

۹. نشان دهید مجموعهٔ همهٔ نقاط تنها، در فضای شمارش‌پذیر نوع دوم یا تهی است و یا شمارش‌پذیر است و از آن نتیجه بگیرید که هر زیرمجموعهٔ شمارش‌ناپذیر، در فضای شمارش‌پذیر نوع دوم، دارای حداقل یک نقطهٔ تجمع است.

۱۰. فرض کنید (X,T) شمارش‌پذیر نوع دوم و $T_۱$ است. ثابت کنید X فشرده باشد اگر و فقط اگر هر زیرمجموعهٔ بی‌پایان آن، دارای نقطهٔ تجمع باشد (با قضیهٔ ۴ بخش ۵.۱ مقایسه کنید).

۸.۳ فضاهای لیندلف

در این قسمت به تعریف فضاهایی می‌پردازیم که از اهمیت خاصی برخوردار هستند و عام‌تر از فضاهای فشرده هستند.

تعریف: فضای توپولوژیک X را فضای لیندلف[۴] می‌گوییم اگر هر پوشش باز آن دارای زیرپوشش شمارش‌پذیر باشد.

بدیهی است که هر فضای فشرده یک فضای لیندلف است.

مثال ۱۰ : یک فضای گسسته لیندلف است اگر و فقط اگر شمارش‌پذیر باشد.

قضیهٔ ۱۳ : تصویر پیوسته یک فضای لیندلف، لیندلف است.

اثبات: فرض کنید فضای X لیندلف و تابع f از فضای X به فضای Y پوشا و پیوسته باشد. همچنین فرض کنید دستهٔ $\{U_\alpha\}$ یک پوشش باز Y باشد. در این صورت دستهٔ $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ یک پوشش باز X است. لذا زیرپوشش شمارش‌پذیری از آن که به $\{f^{-1}(U_{\alpha_i})\}$ نمایش می‌دهیم موجود است. به سهولت می‌توان دید که دستهٔ $\{U_{\alpha_i}\}$ زیرپوشش شمارش‌پذیر Y است.

□

قضیهٔ ۱۴ : اگر $A \subseteq X$، X لیندلف و A بسته باشد، آنگاه زیرفضای A نیز لیندلف است.[۵]

اثبات: فرض کنید $\{U_\alpha\}$ پوشش باز A باشد. چون A بسته است، $X\backslash A$ باز است. لذا $\{U_\alpha\} \cup \{X\backslash A\}$ پوشش باز X است. چون X لیندلف است، زیرپوشش شمارش‌پذیر موجود است. آن را $\{U_{\alpha_i}\} \cup \{X\backslash A\}$، $i = ۱, ۲, \cdots$، بنامید. به سهولت می‌توان دید $\{U_{\alpha_i}\}$ پوشش شمارش‌پذیر A است.

□

قضیهٔ ۱۵ : اگر X شمارش‌پذیر نوع دوم باشد، آنگاه X لیندلف است.

اثبات: بنا به قضیهٔ ۸ بدیهی است.

□

---

[۴] Lindelof

[۵] برای ارائه یک مثال از این‌که با حذف شرط بسته بودن در قضیهٔ ۱۴ ، قضیه لزوماً برقرار نیست به منبع ۴۴ مراجعه کنید.

قضیهٔ ۱۶ : هر فضای منظم و لیندلف، نرمال است.

اثبات: فرض کنید A و B دو مجموعهٔ بسته و مجزا در فضای منظم و لیندلف X باشند. برای $a \in A$ با توجه به منظم بودن فضا مجموعهٔ باز U_a شامل a موجود است به طوری که $U_a \cap B = \phi$. به طور مشابه برای $b \in B$، مجموعهٔ باز V_b شامل b موجود است که b را از A جدا می‌کند. چون A و B خود لیندلف هستند، لذا زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر از پوشش باز $\{U_a\}$ و $\{V_b\}$ موجود است که به ترتیب A و B را می‌پوشاند. فرض کنید

$$A \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \cdots$$

$$B \subseteq V_1 \cup V_2 \cup \cdots$$

حال مجموعه‌های باز S_n و G_n را به روش استقراء به طریق زیر می‌سازیم

$$G_1 = V_1 \backslash \overline{S_1} \qquad S_1 = U_1$$

$$G_2 = V_2 \backslash \overline{(S_1 \cup S_2)} \qquad S_2 = U_2 \backslash \overline{G_1}$$

$$G_3 = V_3 \backslash \overline{S_1 \cup S_2 \cup S_3)} \qquad S_3 = U_3 \backslash \overline{(G_1 \cup G_2)}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

به سهولت می‌توان دید $S = \cup S_n$ و $G = \cup G_n$ دو مجموعهٔ باز و مجزا هستند که به ترتیب شامل A و B می‌باشند.

□

تمرین

۱. نشان دهید اگر $T \subseteq T^*$ و (X, T^*) لیندلف باشد، آنگاه (X, T) نیز لیندلف است.

۲. نشان دهید مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی حد پایینی، لیندلف است.

۳. نشان دهید ضرب دو فضای لیندلف لزوماً لیندلف نیست.

۴. نشان دهید اگر فضای X لیندلف باشد، آنگاه هر زیرمجموعهٔ شمارش‌ناپذیر آن دارای نقطهٔ تجمع است.

۵. ثابت کنید یک فضای منظم، لیندلف است اگر و فقط اگر هر پوشش باز آن دارای زیردستهٔ شمارش‌پذیری باشد که بستار آنها یک پوشش است.

۸.۴ فضاهای جداپذیر

در این بخش می‌خواهیم یکی دیگر از خواصی را که می‌توان برای فضاهای توپولوژیک در نظر گرفت بیان کنیم و آن وجود زیرمجموعه‌های شمارش‌پذیر و چگال است. در تمرینات بخش ۲.۱ کم و بیش با خواص مجموعه‌های چگال آشنا شدیم. ولی آنچه در اینجا مهم است شمارش‌پذیری این مجموعه‌ها است. ابتدا تعریف مجموعه‌های چگال را یادآور می‌شویم.

تعریف: مجموعهٔ غیرتهی A را در فضای توپولوژیک (X, T) **چگال** می‌گوییم اگر $X \subseteq \overline{A}$.

تعریف: فضای توپولوژیک X را **فضای جداپذیر** می‌گوییم اگر دارای زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر چگال باشد.

تعریف: زیرمجموعهٔ A از X را **زیرمجموعهٔ جداپذیر** می‌گوییم اگر A با توپولوژی نسبی جداپذیر باشد.

مثال ۱۱ : هر فضای شمارش‌پذیر و در نتیجه هر فضای باپایان، جداپذیر است. زیرا خود فضا را می‌توان به عنوان زیرمجموعهٔ چگال انتخاب کرد.

مثال ۱۲ : مجموعهٔ اعداد حقیقی جداپذیر است، زیرا مجموعهٔ اعداد گویا در آن چگال است.

مثال ۱۳ : یک فضای گسسته جداپذیر است اگر و فقط اگر شمارش‌پذیر باشد. زیرا در فضاهای گسسته، تنها مجموعهٔ چگال، خود فضا است. بنابراین فضای اعداد حقیقی با توپولوژی گسسته جداپذیر است.

مثال ۱۴ : هر فضای ناگسسته، جداپذیر است. زیرا هر زیرمجموعهٔ غیرتهی، در آن چگال است.

مثال ۱۵ : اگر $X \backslash B$ شمارش‌ناپذیر و X به توپولوژی طرد B مجهز باشد، آنگاه X جداپذیر نیست. زیرا در غیر این صورت مجموعهٔ شمارش‌پذیر A موجود است که $\overline{A} = X$. خصوصاً به ازای هر $x \in X \backslash B$، باید $x \in \overline{A}$. بنابراین به ازای مجموعهٔ باز $\{x\}$ حول x باید $\{x\} \cap A \neq \phi$ و در نتیجه باید $x \in A$. پس A نمی‌تواند شمارش‌پذیر باشد.

قضیهٔ ۱۷ : تصویر یک فضای جداپذیر تحت یک تابع پیوسته، جداپذیر است.

اثبات: فرض کنید X یک فضای جداپذیر و $f : X \to Y$ پوشا و پیوسته باشد. بنا به تعریف مجموعهٔ شمارش‌پذیر و چگال $D \subseteq X$ موجود است. قرار دهید $U = f(D) \subseteq Y$. با توجه به خواص توابع پیوسته

$$\overline{U} = \overline{f(D)} \supseteq f(\overline{D}) = f(X) = Y \supseteq \overline{U}$$

لذا $\overline{U} = Y$. البته لازم به ذکر است که اگر D شمارش‌پذیر باشد، آنگاه $f(D)$ نیز شمارش‌پذیر است.

□

قضیهٔ ۱۸ : هر زیرمجموعهٔ باز از یک فضای جداپذیر، جداپذیر است.

اثبات: فرض کنید فضای توپولوژیک X جداپذیر، $A \subseteq X$ یک مجموعهٔ باز و B مجموعهٔ شمارش‌پذیر چگال در X باشد، یعنی $\overline{B} = X$. قرار دهید $U = A \cap B$. در این صورت $U \subseteq B$، لذا شمارش‌پذیر است و به علاوه $U \subseteq A$، لذا $(\overline{U})_X \subseteq (\overline{A})_X$.

از طرفی با توجه به باز بودن A :

$$A = A \cap X = A \cap (\overline{B})_X \subseteq \overline{(A \cap B)}_X = (\overline{U})_X$$

لذا $(\overline{A})_X \subseteq (\overline{U})_X$. بنابراین $(\overline{A})_X = (\overline{U})_X$. اما $(\overline{U})_A = A \cap (\overline{U})_X = A \cap (\overline{A})_X = A$.

□

قضیهٔ ۱۹ : حاصل‌ضرب تعداد شمارش‌پذیر از فضاهای جداپذیر، جداپذیر است.

اثبات: فرض کنید $X = \prod X_i$، X_i جداپذیر و A_i زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر چگال در X_i باشد. بدیهی است که

$$\overline{\prod A_i} = \prod \overline{A}_i = \prod X_i = X$$

از طرفی حاصل‌ضرب شمارش‌پذیر از مجموعه‌های شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است. لذا مجموعهٔ $\prod A_i$ زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر و چگال در X است.

□

البته قضیهٔ اخیر حالت کلی‌تری نیز دارد که تحت عنوان قضیهٔ زیر بیان و اثبات می‌شود.

قضیهٔ ۲۰ : اگر $\{X_\alpha\}$ جداپذیر و مجموعهٔ اندیس‌ها در تناظر یک به یک با مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، آنگاه $\prod X_\alpha$ نیز جداپذیر است.

اثبات: فرض کنید برای هر α، $D_\alpha = \{d_{\alpha(1)}, d_{\alpha(2)}, \cdots\}$ زیرمجموعهٔ چگال در فضای جداپذیر X_α باشد. برای یافتن یک زیرمجموعهٔ چگال در $\prod X_\alpha$ این‌طور عمل می‌کنیم. ابتدا برای هر دنبالهٔ J_1، ... ، J_k از بازه‌های بسته و مجزا با نقاط ابتدایی و انتهایی گویا و هر دنبالهٔ n_1، ... ، n_k از اعداد صحیح مثبت، نقطهٔ $P_{(J_1,J_2,\dots,J_k,n_1,\dots,n_k)} = (p_\alpha) \in \prod X_\alpha$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$p_\alpha = \begin{cases} d_{\alpha(n_i)} & \alpha \in J_i \\ d_{\alpha(1)} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مجموعهٔ D متشکل از نقاط P که به صورت بالا تعریف می‌شود، شمارش‌پذیر است. نشان می‌دهیم D در $\prod X_\alpha$ چگال است. برای این کار نشان می‌دهیم هر پایهٔ باز در $\prod X_\alpha$ شامل یک نقطه از D است. می‌دانیم هر پایهٔ باز در $\prod X_\alpha$ به صورت $B = \prod_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \prod_{\alpha_m}^{-1}(U_{\alpha_m})$ است که در آن U_{α_i} باز در X_{α_i}، $i = 1, \cdots, m$ است. چون D_{α_i} در X_{α_i} چگال است، پس U_{α_i} شامل یک نقطه، مثلاً $d_{\alpha_i(n_i)} \in D_{\alpha_i}$، است. و به علاوه بازه‌های بسته و مجزا با نقاط ابتدایی و انتهایی گویا مانند J_1، ... ، J_m موجود است که به ترتیب شامل α_i ، ... ، α_m هستند. حال فرض کنید $p_{\alpha_i} = d_{\alpha_i(n_i)}$، برای $i = 1, \cdots, m$. پس نقطهٔ $P_{(J_1, \cdots, J_m, n_1, \cdots n_m)}$ متعلق به D است. بنابراین D در $\prod X_\alpha$ چگال است.

□

قضیهٔ ۲۱: اگر X شمارش‌پذیر نوع دوم باشد، آنگاه X جداپذیر است.

اثبات: فرض کنید $\mathcal{B}$ یک پایهٔ شمارش‌پذیر برای X باشد. برای هر i نقطهٔ $x_i \in B_i \in \mathcal{B}$ را انتخاب کنید. ثابت می‌کنیم

$$D = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$$

در X چگال است. فرض کنید $x \in X$ و U یک مجموعهٔ باز و شامل x باشد. چون $\mathcal{B}$ پایه است، لذا jـای موجود است که $x \in B_j \subseteq U$. لذا $x_j \in U$. پس $D \cap U \neq \phi$. بنابراین $x \in \bar{D}$.

□

در تمرینات ۵، ۶، ۷ و ۹ مثال‌هایی ارائه شده که نشان می‌دهد عکس این قضیه لزوماً برقرار نیست.

تمرین

۱. نشان دهید مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی حد پایین، جداپذیر است.

۲. نشان دهید مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی شعاع راست، جداپذیر است.

۳. آیا فضای جذب، جداپذیر است؟

۴. نشان دهید اگر $T \subseteq T^*$ و فضای (X, T^*) جداپذیر باشد، آنگاه فضای (X, T) نیز جداپذیر است. با یک مثال نشان دهید عکس این مطلب درست نیست.

۵. نشان دهید $\mathcal{R}^2$ با توپولوژی ایجادشده به وسیلهٔ مجموعه‌های $[a, b[\times [c, d[$، جداپذیر و شمارش‌پذیر نوع اول است ولی لیندلف و در نتیجه شمارش‌پذیر نوع دوم نیست.

۶. نشان دهید فضای توپولوژیک مکمل باپایان، جداپذیر است.

۷. نشان دهید فضای صفحهٔ مور جداپذیر و شمارش‌پذیر نوع اول است ولی لیندلف نیست.

۸. نشان دهید اگر شرط باز بودن A در قضیهٔ ۱۸ حذف شود، حکم لزوماً برقرار نیست. به عبارت دیگر در حالت کلی زیرفضای یک فضای جداپذیر، لزوماً جداپذیر نیست.

۹. نشان دهید صفحهٔ شکافته‌شدهٔ باپایان جداپذیر است ولی لیندلف و شمارش‌پذیر نوع اول نیست.

۱۰. فرض کنید فضای توپولوژیک (X,T) گسسته و X شمارش‌ناپذیر باشد. قرار دهید $X^* = X \cup \{x^*\}$، $x^* \notin X$، و فرض کنید

$$T^* = T \cup \{\{x^*\} \cup A : \quad A \subseteq X \text{ و } X\backslash A \text{ باپایان}\}$$

نشان دهید (X^*, T^*) لیندلف است ولی جداپذیر نیست.

۱۱. یک مثال از یک فضای منظم و جداپذیر ارائه دهید که نرمال نباشد.

فصل ۹

فضاهای متریک

تا اینجا در فضاهای توپولوژیک از فاصلهٔ بین نقاط صحبتی نکردیم. در این فصل فاصله را روی مجموعهٔ X تعریف کرده و با استفاده از آن فضاهای متریک را معرفی می‌کنیم. خواهیم دید که فضاهای متریک از مهم‌ترین فضاهای توپولوژیکی می‌باشند. بسیاری از مفاهیم و نتایج اساسی توپولوژی را می‌توان در اینگونه فضاها بررسی نمود. در اینجا به بررسی بعضی از آنها می‌پردازیم.

۹.۱ فاصله و متریک

تعریف: برای مجموعهٔ غیرتهی X، تابع d از $X \times X$ به مجموعهٔ اعداد حقیقی، $d : X \times X \to \mathcal{R}$، را یک **تابع متریک** یا یک **تابع فاصله** می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b, c \in X$ داشته باشیم:

i, $\quad d(a,a) = 0$

ii, $\quad d(a,b) > 0 \, , \; a \neq b$

iii, $\quad d(a,b) = d(b,a)$

iv, $\quad d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$

در این حالت عدد حقیقی $d(a,b)$ را **فاصلهٔ بین دو نقطهٔ** a و b می‌گوییم. نامساوی iv به **نامساوی مثلث** معروف است. زیرا اگر a، b و c رئوس یک مثلث باشند، طول یک ضلع در مثلث همیشه از مجموع دو ضلع دیگر کمتر یا با آن برابر است.

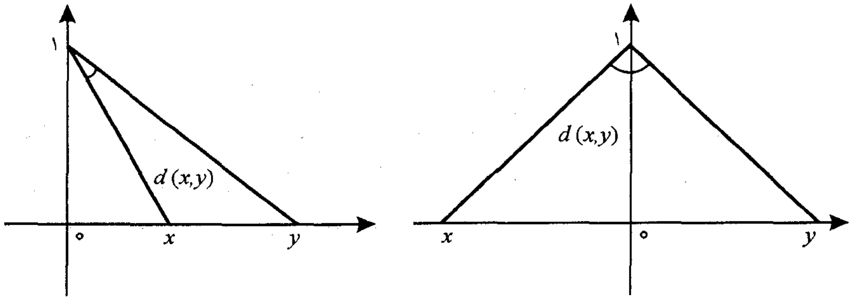
مثال ۱ : تابع $d : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ $d(a,b) = |a-b|$ یک متریک روی مجموعهٔ اعداد حقیقی است. این تابع به **متریک معمولی** روی مجموعهٔ عداد حقیقی معروف است.

مثال ۲: تابع $d : X \times X \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ

$$d(a,b) = \begin{cases} ۰ & a = b \\ ۱ & a \neq b \end{cases}$$

که در آن X یک مجموعهٔ غیرتهی است، یک متریک روی مجموعهٔ X است. به این متریک **متریک گسسته** می‌گویند.

مثال ۳: تابع $d : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ $d(x,y) = |\tan^{-۱} x - \tan^{-۱} y|$ یک متریک روی مجموعهٔ اعداد حقیقی است که در آن فاصلهٔ هر دو نقطه کمتر از π است. (شکل ۲۸)



شکل ۲۸

مثال ۴: فرض کنید $X = P(\mathcal{N})$، همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathcal{N}$، باشد. تعریف کنید

$$d(A,B) = \begin{cases} ۰ & B = \phi \text{ یا } A = \phi \\ \dfrac{۱}{m} & \text{اگر } m \text{ کوچکترین‌عددی باشد که در یکی‌از مجموعه‌ها است و در دیگری نیست} \end{cases}$$

به عنوان مثال اگر E مجموعهٔ اعداد زوج و P مجموعهٔ اعداد اول باشد، آنگاه $d(E,P) = \frac{۱}{۲}$. بدیهی است که:

$$d(A,B) < \frac{۱}{m} \quad \Leftrightarrow \quad A \cap [۱,m] = B \cap [۱,m]$$

برای اثبات متریک بودن این تابع کافی است درستی رابطهٔ نامساوی مثلث بررسی شود. یعنی ثابت می‌کنیم برای هر سه زیرمجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ اعداد طبیعی، مانند A و B و C:

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$$

اگر $d(A,C) = ۰$، آنگاه حکم بدیهی است. لذا فرض می‌کنیم $d(A,C) = \frac{۱}{m}$. پس $A \cap [۱,m] \neq C \cap [۱,m]$. بنابراین باید $B \cap [۱,m] \neq C \cap [۱,m]$ و یا

$A\cap[1,m] \neq B\cap[1,m]$. یعنی باید $d(A,B)\geq \frac{1}{m}$ و یا $d(C,B)\geq\frac{1}{m}$ که در هر دو صورت نامساوی مثلث برقرار است.

مثال ۵: تابع $d(x,y)=x_1^2+y_2^2+y_1$، که در آن $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$ یک متریک روی $\mathcal{R}^2$ نیست زیرا به ازای $x=(1,0)$ و $y=(-2,-1)$، $d(x,y)=0$ در حالی که x و y مخالف صفر هستند.

حال که با مفهوم فاصلهٔ دو نقطه آشنا شدیم می توانیم *فاصلهٔ یک نقطه تا یک مجموعه*، *فاصلهٔ دو مجموعه از هم* و *قطر یک مجموعه* را نیز تعریف کنیم.

تعریف: فرض کنید d یک متریک روی مجموعهٔ غیرتهی X، $p\in X$، A و B دو زیرمجموعهٔ غیرتهی آن باشند:

$$\begin{cases} d(p,A)=\inf\{d(p,a): a\in A\} \\ d(A,B)=\inf\{d(a,b): a\in A\ ,\ b\in B\} \\ d(A)=\sup\{d(a,a'): a\in A\ ,\ a'\in A\} \end{cases}$$

را به ترتیب **فاصلهٔ نقطهٔ** p **از مجموعهٔ** A، **فاصلهٔ دو مجموعهٔ** A و B و **قطر مجموعهٔ** A می‌نامیم. اگر قطر یک مجموعه یک عدد باپایان باشد آن را **مجموعهٔ کراندار** و در غیر این صورت آن را **مجموعهٔ بیکران** یا **مجموعهٔ غیرکراندار** می‌نامیم.

قرارداد: برای مجموعهٔ ϕ فاصله‌های بالا را، طبق قرارداد، چنین تعریف می‌کنیم:

$$d(p,\phi)=\infty \quad , \quad d(A,\phi)=d(\phi,A)=\infty \quad , \quad d(\phi)=0$$

مثال ۶: مجموعهٔ غیرتهی X همراه با متریک گسسته روی آن را در نظر می‌گیریم. برای $p\in X$ و مجموعه‌های غیرتهی $A\subseteq X$ و $B\subseteq X$ داریم:

$$d(p,A)=\begin{cases} 1 & p\notin A \\ 0 & p\in A \end{cases} \qquad d(A,B)=\begin{cases} 0 & A\cap B\neq\phi \\ 1 & A\cap B=\phi \end{cases}$$

و نهایتاً

$$d(A)=\begin{cases} 1 & \text{اگر } A \text{ حداقل دو عضو داشته باشد} \\ 0 & \text{اگر } A \text{ یک عضو داشته باشد} \end{cases}$$

تمرین

۱. اولاً ثابت کنید برای هر a_i و b_i، $۱ \leq i \leq n$، $\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲\right)\left(\sum_{i=۱}^{n} b_i^۲\right) \geq \left(\sum_{i=۱}^{n} a_i b_i\right)^۲$ (این به نامساوی **کشی**[1] معروف است). سپس با استفاده از آن نشان دهید تابع $d: \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=۱}^{n}(x_i - y_i)^۲}$ ، برای $x = (x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ و $y = (y_۱, y_۲, \cdots, y_n)$، یک متریک روی $\mathcal{R}^n$ است (این متریک، **متریک اقلیدسی** یا **متریک معمولی** نامیده می‌شود).

۲. فرض کنید d یک متریک روی مجموعهٔ غیرتهی X باشد. نشان دهید توابع

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{۱ + d(x,y)}$$

$$\mu(x,y) = \min\{d(x,y) \text{ و } ۱\}$$

نیز هرکدام یک متریک روی X هستند.

۳. نقاط $x = (x_۱, x_۲)$ و $y = (y_۱, y_۲)$ را در $\mathcal{R}^۲$ در نظر می‌گیریم. نشان دهید توابع $d_۱$ و $d_۲$ هرکدام یک متریک روی $\mathcal{R}^۲$ هستند.

$$d_۱(x,y) = \max\{|x_۱ - y_۱| \text{ و } |x_۲ - y_۲|\}$$

$$d_۲(x,y) = |x_۱ - y_۱| + |x_۲ - y_۲|$$

۴. فرض کنید d یک متریک روی مجموعهٔ غیرتهی X باشد. آیا توابع زیر نیز یک متریک هستند؟

$$\delta(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$$

$$\mu(x,y) = (d(x,y))^۲$$

۵. نشان دهید تابع زیر یک متریک روی $X = \mathcal{Z}$، مجموعه اعداد صحیح، است.

$$d(x,y) = \begin{cases} ۰ & x = y \\ \dfrac{۱}{m} & \text{اگر } m \text{ بزرگترین‌عددی باشد که } x-y \text{ بر } ۱۰^{m-۱} \text{ قابل‌تقسیم است.} \end{cases}$$

به عنوان مثال

$$d(۱۲۳\,,\ ۴۶۲۳) = \frac{۱}{۳} \quad , \quad d(۳, -۷) = \frac{۱}{۲}$$

(راهنمایی: ابتدا ثابت کنید $d(x,y) < \frac{۱}{m} \Leftrightarrow ۱۰^m$ ، $x - y$ را عاد کند).

---
[1] Cauchy

۶. فرض کنید $\mathcal{D}$ مجموعه تمام توابع حقیقی و کراندار بر بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ باشد. تعریف کنید:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

ثابت کنید d یک متریک بر $\mathcal{D}$ است.

۷. فرض کنید $\mathcal{G}$ مجموعه تمام توابع حقیقی پیوسته و کراندار بر بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ باشد. تعریف کنید:

$$d(f,g) = \sup |f(x) - g(x)|$$

ثابت کنید d یک متریک بر $\mathcal{G}$ است.

۸. مجموعهٔ X، متریک d روی مجموعهٔ X، نقطهٔ $p \in X$ و مجموعه‌های $A \subseteq X$ و $B \subseteq X$ مفروضند. نشان دهید:

الف_ اعداد $d(p, A)$، $d(A, B)$ و $d(A)$ غیرمنفی هستند.

ب_ اگر $p \in A$، آنگاه $d(p, A) = 0$.

پ_ اگر $A \subseteq B$، آنگاه $d(A) \leq d(B)$.

ت_ اگر $A \cap B \neq \phi$، آنگاه $d(A, B) = 0$.

ث_ $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B) + d(A, B)$. با ارائه مثال نشان دهید تساوی لزوماً اتفاق نمی‌افتد حتی اگر $A \cap B = \phi$.

ج_ $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C) + d(B)$. مثالی ارائه دهید که $d(B) \neq 0$.

چ_ $d(A, C) \leq d(A, B) + d(A \cup B, C) + d(B)$.

۹. مثال‌هایی ارائه دهید که نشان دهد عکس قسمت‌های (ب) و (ت) در تمرین ۸ برقرار نیست.

۹.۲ فضاهای متریک

تعریف: اگر d یک متریک روی مجموعهٔ غیرتهی X باشد، مجموعهٔ X را یک **فضای متریک** می‌نامیم و به (X, d) نمایش می‌دهیم.

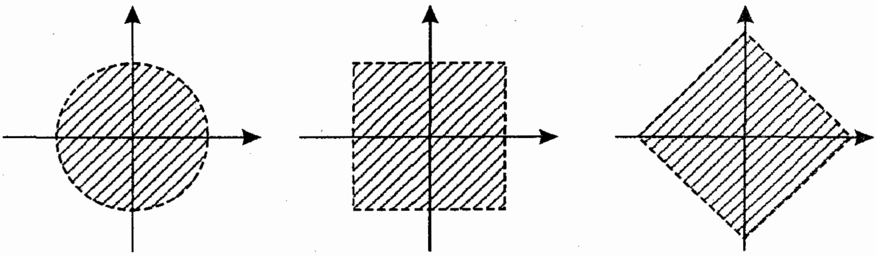
مثال ۷: (R, d) در مثال ۱ و (X, d) در مثال ۲ نمونه‌هایی از فضاهای متریک هستند.

قرارداد: روی R^n همواره متریک اقلیدسی یا متریک معمولی را در نظر می‌گیریم مگر اینکه خلاف آن ذکر شود.

اکنون نشان می‌دهیم هر فضای متریک، یک فضای توپولوژیکی است. برای این منظور ابتدا گوی باز و سپس مجموعه‌های باز را در یک فضای متریک تعریف کرده و بعد از آن به تحقیق شرایط توپولوژی می‌پردازیم.

تعریف: فضای متریک (X, d) و نقطهٔ $p \in X$ را در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ نقاط $B(p,\delta) = \{x \in X : d(p,x) < \delta\}$ را **گوی باز** به مرکز p و شعاع δ می‌نامیم.

مثال ۸: نقطهٔ $p = (\circ, \circ)$ در صفحهٔ $\mathcal{R}^{۲}$ و عدد حقیقی $\delta = ۱$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید d متریک معمولی، $d_۱(x,y) = \max\{|x_۱ - y_۱|, |x_۲ - y_۲|\}$ و $d_۲(x,y) = |x_۱ - y_۱| + |x_۲ - y_۲|$ باشد که در آن، $x = (x_۱, x_۲)$ و $y = (y_۱, y_۲)$ دو نقطه در $R^{۲}$ هستند. در این صورت گوی‌های باز $B_d(p,\delta)$، $B_{d_۱}(p,\delta)$ و $B_{d_۲}(p,\delta)$ به ترتیب به صورت زیر می‌باشند (شکل ۲۹).



شکل ۲۹

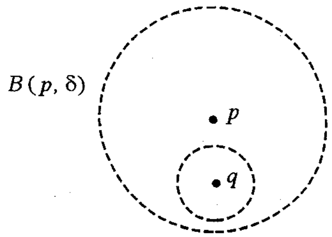
مثال ۹: متریک گسسته را روی مجموعهٔ غیرتهی X در نظر می‌گیریم. برای هر $p \in X$ داریم:

$$B(p,\delta) = \begin{cases} X & \delta \geq ۱ \\ \{p\} & \delta < ۱ \end{cases}$$

تعریف: مجموعهٔ E را در فضای متریک (X, d) **مجموعهٔ باز** می‌گوییم، اگر برای هر $x \in E$، گوی باز مانند $B(x,\delta)$ وجود داشته باشد به طوری که $B(x,\delta) \subseteq E$.

قضیهٔ ۱: هر گوی باز در یک فضای متریک یک مجموعهٔ باز است.

اثبات: فرض می‌کنیم $B(p,\delta)$ یک گوی باز در فضای متریک (X, d) و نقطهٔ $q \in B(p,\delta)$ باشد. طبق تعریف گوی باز، $d(p,q) < \delta$. اکنون قرار می‌دهیم $\eta = \delta - d(p,q)$ و نشان می‌دهیم $B(q,\eta) \subseteq B(p,\delta)$ (شکل ۳۰).



شکل ۳۰

برای $x \in B(q,\eta)$ داریم $d(x,q) < \eta = \delta - d(p,q)$ و با استفاده از نامساوی مثلث داریم:

$$d(p,x) \leq d(p,q) + d(q,x) < d(p,q) + (\delta - d(p,q)) = \delta$$

و از آنجا $x \in B(p,\delta)$. لذا گوی باز $B(p,\delta)$ یک مجموعهٔ باز است.

□

قضیهٔ ۲ : مجموعه‌های باز در هر فضای متریک، (X,d)، دارای خواص زیر هستند.

الف) مجموعه‌های ϕ و X دو مجموعهٔ باز هستند.

ب) اجتماع هر دسته از مجموعه‌های باز، یک مجموعهٔ باز است.

پ) اشتراک هر دستهٔ باپایان از مجموعه‌های باز، یک مجموعهٔ باز است.

اثبات:

الف) از آنجایی که مجموعهٔ تهی شامل هیچ عضوی نیست، بنا به انتفای مقدم، تهی یک مجموعهٔ باز است. مجموعه X نیز بوضوح مجموعه‌ای باز است.

ب) فرض کنید $\{A_\alpha\}$ یک دسته از مجموعه‌های باز باشد. نشان می‌دهیم $\cup A_\alpha$ یک مجموعهٔ باز در فضای متریک (X,d) است. برای این منظور $x \in \cup A_\alpha$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که A_αـای وجود دارد به طوری که $x \in A_\alpha$. چون مجموعهٔ A_α، یک مجموعهٔ باز است، δـای موجود است به طوری که $B(x,\delta) \subseteq A_\alpha \subseteq \cup A_\alpha$. لذا مجموعهٔ $\cup A_\alpha$، باز است.

پ) کافی است نشان دهیم اشتراک دو مجموعهٔ باز، باز است. لذا فرض کنید مجموعه‌های A و B دو مجموعهٔ باز در فضای متریک (X,d) باشند. نشان می‌دهیم $A \cap B$ یک مجموعهٔ باز است. نقطهٔ $x \in A \cap B$ را در نظر می‌گیریم. از $x \in A$، λـای موجود است که $B(x,\lambda) \subseteq A$ و از $x \in B$، ηـای موجود است که $B(x,\eta) \subseteq B$. حال قرار می‌دهیم $\varepsilon = \min\{\eta,\lambda\}$ و ملاحظه می‌کنیم که $B(x,\varepsilon) \subseteq A \cap B$. یعنی $A \cap B$، باز است.

□

نتیجهٔ ۳: هر فضای متریک، یک فضای توپولوژیک است. این توپولوژی به **متریک توپولوژی** و یا **توپولوژی به‌دست‌آمده از متریک** معروف است.

□

تذکر: چون هر فضای متریک، یک فضای توپولوژیک است لذا تمام مفاهیم اثبات‌شده برای فضاهای توپولوژیک، برای فضاهای متریک نیز برقرار است.

مثال ۱۰: توپولوژی به‌دست‌آمده از متریک معمولی روی مجموعهٔ اعداد حقیقی همان توپولوژی معمولی روی آن است که در فصل ۲ با آن آشنا شدیم.

مثال ۱۱: توپولوژی به‌دست‌آمده از متریک گسسته روی مجموعهٔ غیرتهی، همان توپولوژی گسسته روی آن است.

مثال ۱۲: اکنون متریک زیر را روی مجموعهٔ غیرتهی و دلخواه X در نظر بگیرید.

$$d(a,b) = \begin{cases} ۰ & a = b \\ ۲ & a \neq b \end{cases}$$

در این حالت نیز توپولوژی به‌دست‌آمده از این متریک، توپولوژی گسسته است.

همانگونه که مثال‌های ۱۱ و ۱۲ نشان می‌دهند ممکن است یک توپولوژی از متریک‌های مختلف به دست آید. به چنین متریک‌هایی **متریک معادل** می‌گویند.

تعریف: در یک فضای متریک نیز مانند فضاهای توپولوژیک، یک مجموعه را **مجموعهٔ بسته** می‌گوییم اگر مکمل آن باز باشد.

مثال ۱۳: بازهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ در فضای اعداد حقیقی، یک مجموعهٔ بسته است. زیرا برای $x \in \mathcal{R} \backslash [۰, ۱]$، کافی است قرار دهیم $\delta = \min\{|۱ - x| \ , \ |x|\}$. در این صورت

$$B(x, \delta) \subseteq \mathcal{R} \backslash [۰, ۱]$$

قضیهٔ ۴: در هر فضای متریک، هر مجموعهٔ تک‌عضوی و در نتیجه هر مجموعهٔ باپایان، بسته است.

اثبات: مجموعهٔ تک‌عضوی $\{x\}$ را در فضای متریک (X, d) در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم مجموعهٔ $X \backslash \{x\}$ باز است. لذا $y \in X \backslash \{x\}$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $d(x, y) = \delta$. در این صورت می‌توان دید $B(y, \delta) \subseteq X \backslash \{x\}$. پس مجموعهٔ $X \backslash \{x\}$ باز و در نتیجه مجموعهٔ $\{x\}$ بسته است.

□

نتیجهٔ ۵: هر فضای متریک، یک فضای $T_۱$ است.

□

قضیهٔ ۶: هر فضای متریک، کاملاً نرمال است.

اثبات: فرض می‌کنیم در فضای متریک (X,d) مجموعه‌های $A \subseteq X$ و $B \subseteq X$ چنان باشند که $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \phi$. روشن است که اگر $x \in A$، آنگاه $x \notin B$ و لذا $\varepsilon_x > 0$ وجود دارد که

$$(1) \quad B(x,\varepsilon_x) \cap B = \phi$$

همچنین برای هر $y \in B$، آنگاه $y \notin \overline{A}$ و لذا $\varepsilon_y > 0$ وجود دارد که

$$(2) \quad B(y,\varepsilon_y) \cap A = \phi$$

قرار می‌دهیم

$$G_A = \cup\{B(x,\tfrac{\varepsilon_x}{2}) : x \in A\}$$

$$G_B = \cup\{B(y,\tfrac{\varepsilon_y}{2}) : y \in B\}$$

مجموعه‌های G_A و G_B دو مجموعهٔ باز هستند که به ترتیب شامل مجموعه‌های A و B می‌باشند و به علاوه $G_A \cap B = \phi$ و $G_B \cap A = \phi$. حال اگر مجموعه‌های G_A و G_B مجزا از هم نباشند، فرض کنید $z \in G_A \cap G_B$. در این صورت $x \in A$ و $y \in B$ وجود دارد به طوری که

$$z \in B(x,\frac{\varepsilon_x}{2}) \quad , \quad z \in B(y,\frac{\varepsilon_y}{2})$$

و از آنجا

$$d(x,z) < \frac{\varepsilon_x}{2} \quad , \quad d(y,z) < \frac{\varepsilon_y}{2}$$

اما با در نظر گرفتن شرایط متریک داریم:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2}$$

که اگر مثلاً فرض کنیم $\varepsilon_y < \varepsilon_x$ داریم: $d(x,y) < \varepsilon_x$ و در نتیجه $y \in B(x,\varepsilon_x)$. و اگر $\varepsilon_x \leq \varepsilon_y$، آنگاه $d(x,y) < \varepsilon_y$ و در این حالت $x \in B(y,\varepsilon_y)$. که در هر صورت یا با (۱) و یا با (۲) متناقض است. لذا فضای متریک (X,d) یک فضای کاملاً نرمال است.

□

با توجه به قضیهٔ ۶ و نتیجهٔ ۵، نتیجهٔ زیر بدیهی است.

نتیجهٔ ۷: هر فضای متریک، یک فضای T_4 و در نتیجه یک فضای نرمال، تیکونوف، T_3، T_2، منظم و کاملاً منظم نیز است.

قضیهٔ ۸: هر فضای متریک، در اصل اول شمارش‌پذیری صدق می‌کند.

اثبات: فضای متریک (X,d) و نقطهٔ $x \in X$ را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $B_n(x) = B(x, \frac{1}{n})$ برای هر $n \in \mathcal{N}$. روشن است که $\{B_n(x)\}$ دستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز شامل x است. اکنون مجموعهٔ باز G، $x \in G$ را در نظر می‌گیریم. بنا به تعریف، عدد $\varepsilon > 0$ وجود دارد به طوری که $B(x,\varepsilon) \subseteq G$. اما می‌دانیم برای هر ε، n_ای که $\frac{1}{\varepsilon} < n$ و یا معادلاً $\frac{1}{n} < \varepsilon$، وجود دارد. لذا داریم $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq G$. پس بنا به تعریف، فضای (X,d) شمارش‌پذیر نوع اول است.

□

در بخش ۳.۱ تمرین ۳۳ دیدیم اگر x نقطهٔ تجمع مجموعهٔ E باشد لزوماً نمی‌توان دنبالهٔ (x_n) از اعضای متمایز E ارائه داد که به x همگرا باشد ولی در فصل ۸ قضیهٔ ۳ دیدیم که این مطلب در فضای شمارش‌پذیر نوع اول که T_1 نیز باشد، برقرار است، بنابراین نتیجهٔ زیر بدیهی است.

نتیجهٔ ۹: اگر (X,d) فضای متریک، $E \subseteq X$ و x نقطهٔ تجمع E باشد، آنگاه دنبالهٔ (x_n) از اعضای متمایز E موجود است که به x همگرا است.

□

قضیهٔ ۱۰: در هر فضای متریک عبارات زیر معادلند.

الف) X خاصیت اصل دوم شمارش‌پذیری را دارا است.

ب) X لیندلف است.

پ) X جداپذیر است.

اثبات: در قضیهٔ ۱۴ فصل ۸ دیدیم که اگر X در اصل دوم شمارش‌پذیری صدق کند، آنگاه لیندلف و جداپذیر است. بنابراین کافی است نشان دهیم (ب) و (پ) هرکدام (الف) را نتیجه می دهد.

(ب) $\Leftarrow$ (الف)

فرض کنید توپولوژی X به وسیلهٔ متریک ایجاد شده باشد. دستهٔ $\mathcal{A}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$ یک پوشش باز فضای X است که با توجه به لیندلف بودن فضا دارای زیرپوشش شمارش‌پذیر $\mathcal{A}_n^*$ است. بدیهی است که $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1^* \cup \mathcal{A}_2^* \cup \cdots$ نیز شمارش‌پذیر است.

برای اثبات این‌که فضای X شمارش‌پذیر نوع دوم است، باید نشان دهیم برای توپولوژی T یک پایه شمارش‌پذیر موجود است. در واقع نشان می‌دهیم $\mathcal{A}$ پایه مورد نظر است. لذا فرض کنید W یک مجموعهٔ باز و غیرتهی در X و $x \in W$. در این صورت m_ای موجود است که $B(x, \frac{1}{m}) \subseteq W$. از طرفی $\mathcal{A}_{2m}^*$ یک پوشش X است، لذا $y \in X$ موجود است به طوری

که $x \in B(y, \frac{1}{2m})$. در نتیجه

$$B(y, \frac{1}{2m}) \subseteq B(x, \frac{1}{m}) \subseteq W$$

لذا $B(y, \frac{1}{2m})$ یک عنصر از $\mathcal{A}$ است که شامل x بوده و در W واقع است. پس $\mathcal{A}$ یک پایهٔ شمارش‌پذیر برای X است.

(پ) $\Leftarrow$ (الف)

فرض کنید مجموعهٔ شمارش‌پذیر $\{d_1, d_2, \cdots\}$ در X چگال باشد و فرض کنید:

$$U_{nm} = B(d_n, \frac{1}{m}) \quad , \quad n = 1, 2, \cdots \quad , \quad m = 1, 2, \cdots$$

در این صورت $\{U_{nm}\}$ شمارش‌پذیر است. ادعا می‌کنیم که یک پایه نیز است. برای اثبات این ادعا، فرض کنید W یک مجموعهٔ باز و غیرتهی در X و $x \in W$. در این صورت mـای موجود است که

$$B(x, \frac{1}{m}) \subseteq W$$

از طرفی به ازای گوی باز $B(x, \frac{1}{2m})$، d_nـای موجود است که $d_n \in B(x, \frac{1}{2m})$. بنابراین

$$B(d_n, \frac{1}{2m}) \subseteq B(x, \frac{1}{m}) \subseteq W$$

و یا

$$x \in U_{n,2m} = B(d_n, \frac{1}{2m}) \subseteq W$$

و بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود.

$\square$

تذکر: در نتیجهٔ ۷ و قضیهٔ ۸ دیدیم که اصول جداسازی و اصل اول شمارش‌پذیری در فضاهای متریک برقرار است. مثال زیر نشان می‌دهد *اصل دوم شمارش‌پذیری لزوماً در فضاهای متریک برقرار نیست*. بنابراین با توجه به قضیهٔ ۱۰، فضاهای متریک، ممکن است فاقد خاصیت لیندلف و جداپذیری باشند.

مثال ۱۴ : یک فضای شمارش‌ناپذیر با متریک گسسته را در نظر بگیرید. در هر فضای گسسته، مجموعه‌های تک‌عضوی پایه هستند و چون فضا شمارش‌ناپذیر است این پایه نمی‌تواند شمارش‌پذیر باشد. لذا در اصل دوم شمارش‌پذیری صدق نمی‌کند. به عنوان مثال می‌توان مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی گسسته را در نظر گرفت.

با توجه به آنچه تاکنون گفته شد، وابسته به هر متریک یک توپولوژی روی آن مجموعه موجود است. حال این سؤال پیش می‌آید که اگر یک توپولوژی روی یک مجموعه موجود باشد آیا متریکی روی آن مجموعه می‌توان یافت که این توپولوژی از آن به دست آمده باشد.

تعریف: فضای توپولوژیک (X,T) را **متریک‌پذیر** می‌گوییم اگر متریکی روی X موجود باشد به طوری که توپولوژی T از آن به دست بیاید.

بدیهی است که اگر فضای توپولوژیک (X,T) متریک‌پذیر باشد، آنگاه هر زیرفضای آن (با توپولوژی نسبی) نیز متریک‌پذیر است.

مثال ۱۵ : هر فضای گسسته متریک‌پذیر است. زیرا توپولوژی آن از متریک گسسته به دست می‌آید.

مثال ۱۶ : هر فضای ناگسسته با بیش از دو عضو متریک‌پذیر نیست. زیرا تنها مجموعه‌های بسته X و ϕ هستند. بنابراین مجموعه‌های تک‌عضوی در این فضا بسته نیستند.

مثال ۱۷ : با توجه به قضایای گفته‌شده، هر فضای توپولوژیک که $T_۴$ یا کاملاً نرمال و یا شمارش‌پذیر نوع اول نباشد، متریک‌پذیر نیست.

قضیهٔ ۱۱ : فضای حاصل‌ضرب $\prod X_\alpha$ متریک‌پذیر است اگر و فقط اگر هر X_α متریک‌پذیر بوده و همهٔ X_α ها بجز تعداد شمارش‌پذیری از آنها تک‌نقطه‌ای باشند.

اثبات: فرض کنید $\prod X_\alpha$ متریک‌پذیر است. چون X_α همسانریخت با یک زیرفضا از $\prod X_\alpha$ است پس متریک‌پذیر است. به علاوه $\prod X_\alpha$، بنا به قضیهٔ ۸، شمارش‌پذیر نوع اول است بنابراین بنا به قضیهٔ ۵ فصل ۸، همهٔ X_α ها بجز تعداد شمارش‌پذیری از آنها، توپولوژی ناگسسته دارند. از طرفی دیدیم هر فضای ناگسسته با بیش از یک نقطه متریک‌پذیر نیست لذا همهٔ X_α ها بجز تعداد شمارش‌پذیری از آنها تک‌نقطه‌ای هستند.

بالعکس، فرض کنید $X_{\alpha_۱}$، $X_{\alpha_۲}$، ... فضاهای متریک‌پذیری باشند که تک‌نقطه‌ای نیستند. برای سهولت آنها را به X_i، اعضای آنها را به x_i و متریک روی آن را به ρ_i نمایش دهید. می‌توان فرض کرد ρ_i دارای کران ۱ است. متریک ρ را روی $\prod X_\alpha$ به صورت زیر تعریف کنید، برای $x=(x_\alpha)$ و $y=(y_\alpha)$ قرار دهید:

$$\rho(x,y)=\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{۲^i}$$

به راحتی می‌توان دید که ρ یک متریک روی $\prod X_\alpha$ است (یادآور می‌گردد که بجز X_i ها بقیهٔ X_α ها تک‌نقطه‌ای هستند). ثابت می‌کنیم توپولوژی ایجادشده توسط این متریک با توپولوژی حاصل‌ضرب

یکسان است. لذا فرض کنید $U = \prod U_\alpha$ یک مجموعهٔ باز در توپولوژی حاصل‌ضرب باشد. بنابراین $U_\alpha = X_\alpha$ بجز برای تعداد باپایان اندیس که بالاجبار باید در X_i ها باشند، زیرا بقیهٔ X_α ها تک‌نقطه‌ای هستند. بدون خلل در روند اثبات می‌توان فرض کرد برای $1 \leq i \leq n$ ، $U_i \subseteq X_i$. نشان می‌دهیم U یک مجموعهٔ باز نسبت به متریک ρ است. لذا فرض کنید $x \in U$. چون X_i دارای متریک ρ_i است، $\varepsilon_i > 0$ موجود است به طوری که $B_{\rho_i}(x_i, \varepsilon_i) \subseteq U_i$. قرار دهید $\varepsilon = \min\{\frac{\varepsilon_i}{2^i} : 1 \leq i \leq n\}$. در این صورت $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq U$. زیرا برای $y = (y_\alpha) \in B_\rho(x, \varepsilon)$ داریم $\rho(x, y) < \varepsilon$، پس به ازای هر $1 \leq i \leq n$،

$$\frac{\rho_i(x_i, y_i)}{2^i} < \varepsilon < \frac{\varepsilon_i}{2^i} \quad \Rightarrow \quad \rho_i(x_i, y_i) < \varepsilon_i$$

لذا $y_i \in B_{\rho_i}(x_i, \varepsilon_i) \subseteq U_i$. برای بقیهٔ اندیس‌ها، چون $U_\alpha = X_\alpha$، لذا $y_\alpha \in U_\alpha$ و بنابراین $y = (y_\alpha) \in U$.

پس U یک مجموعهٔ باز در توپولوژی حاصل از ρ است و یا به عبارت دیگر توپولوژی حاصل‌ضرب ضعیف‌تر از توپولوژی ایجادشده توسط ρ است.

حال فرض کنید V یک مجموعهٔ باز در توپولوژی حاصل از ρ است. برای هر $x \in V$، $\varepsilon > 0$-ای موجود است که: $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq V$. به ازای این ε، N را آنقدر بزرگ بگیرید که $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. در این صورت مجموعهٔ $U = \prod U_\alpha$ که در آن

$$U_\alpha = \begin{cases} B_{\rho_i}(x_i, \frac{\varepsilon}{2N}) & \alpha = 1, 2, \cdots, N \\ X_\alpha & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

یک مجموعهٔ باز در توپولوژی حاصل‌ضرب است که شامل $x = (x_\alpha)$ می‌باشد و به علاوه

$$\prod U_\alpha \subseteq B_\rho(x, \varepsilon)$$

زیرا برای $y = (y_\alpha) \in \prod U_\alpha$، با توجه به این‌که برای $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$، $\rho_i(y_i, x_i) < \frac{\varepsilon}{2N}$ و همچنین با توجه به این‌که ρ_i ها دارای کران ۱ هستند داریم:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho_i(y_i, x_i)}{2^i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\rho_i(y_i, x_i)}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\frac{\varepsilon}{2N}}{2^i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

یعنی هر نقطهٔ مجموعهٔ V یک نقطهٔ داخلی در توپولوژی حاصل‌ضرب است. پس توپولوژی حاصل از ρ ضعیف‌تر از توپولوژی حاصل‌ضرب است. لذا این دو توپولوژی با هم معادل هستند.

□

نتیجهٔ ۱۲ : حاصل‌ضرب تعداد شمارش‌پذیر از فضاهای متریک‌پذیر، متریک‌پذیر است.

□

دیدن مثال زیر نیز خالی از لطف نیست زیرا نشان می‌دهد *فضای خارج‌قسمت یک فضای متریک‌پذیر لزوماً متریک‌پذیر نیست.*

مثال ۱۸ : فرض کنید فضای X اجتماع دو خط $y = ۰$ و $y = ۱$ و فضای Y فضای تجزیهٔ X باشد که با یکسان کردن نقاط $(x, ۰)$ و $(x, ۱)$، به ازای $x \neq ۰$، حاصل می‌شود. در مثال ۱۷ بخش ۷.۳ دیدیم که Y فضای خارج‌قسمت X است و به علاوه Y، $T_۲$ نیست. لذا Y متریک‌پذیر نیست.

قضیهٔ ۱۳ (قضیهٔ متریک‌پذیری اوریسون): اگر فضای توپولوژیک (X, T) شمارش‌پذیر نوع دوم و $T_۴$ باشد، آنگاه متریک‌پذیر است.

اثبات: فرض کنید $\mathcal{B} = \{B_i : i \in \mathcal{N}\}$ پایهٔ شمارش‌پذیر برای X باشد. برای هر $x \in X$، $U \in \mathcal{B}$ موجود است که $x \in U$. از طرفی چون فضا $T_۴$ و در نتیجه منظم است، لذا مجموعهٔ باز V حول x موجود است که $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ و مجدداً از تعریف پایه عنصر $W \in \mathcal{B}$ موجود است که $x \in W \subseteq V$. لذا $W \subseteq \overline{W} \subseteq \overline{V} \subseteq U$. پس مجموعهٔ

$$\mathcal{P} = \{(B_i, B_j) : \overline{B}_i \subseteq B_j,\ B_i \in \mathcal{B}\ ,\ B_j \in \mathcal{B}\}$$

غیرتهی و شمارش‌پذیر است. لذا می‌توان نوشت:

$$\mathcal{P} = \{P_n : n \in \mathcal{N}\}$$

حال برای هر $n \in \mathcal{N}$ با فرض $P_n = (B_i^n, B_j^n)$، مجموعه‌های $\overline{B_i^n}$ و $X \backslash B_j^n$ دو مجموعهٔ بسته و مجزا هستند، لذا نگاشت $f_n : X \to [۰, ۱]$ موجود است که $f_n(\overline{B_i^n}) = ۰$ و $f_n(X \backslash B_j^n) = ۱$. تعریف کنید:

$$f : X \to \prod_{n=۱}^{\infty} [۰, ۱]$$

$$f(x) = (f_۱(x), f_۲(x), \cdots)$$

بدیهی است که f خوش تعریف و پیوسته است (فضای حاصل‌ضرب را به متریک ارائه‌شده در قضیهٔ ۱۱ که توپولوژی حاصل از آن با توپولوژی تیکونوف معادل است مجهز کنید). نشان می‌دهیم f یک به یک و باز نیز است در نتیجه f یک همسانریختی از X به یک زیرفضای حاصل‌ضرب است و چون فضای حاصل‌ضرب متریک‌پذیر است فضای X نیز متریک‌پذیر می‌باشد.

f یک به یک است. زیرا برای $x \neq y$، مجموعهٔ باز $B \in \mathcal{B}$ موجود است که $x \in B$، $y \notin B$. مجدداً چون فضا منظم است مجموعهٔ $B' \in \mathcal{B}$ موجود است که $x \in B' \subseteq \overline{B'} \subseteq B$. پس زوج (B', B) متعلق به $\mathcal{P}$ و به علاوه $x \in B'$ و $y \in X \backslash B$. لذا نگاشت f_n موجود است که $f_n(x) = ۰$ و $f_n(y) = ۱$. یعنی $f_n(x) \neq f_n(y)$. بنابراین $f(x) \neq f(y)$.

f باز است. زیرا برای مجموعهٔ باز U در X و $y \in f(U)$، نقطهٔ $x \in U$ موجود است که $y = f(x) = (f_۱(x), f_۲(x), \cdots)$. حال مجدداً مشابه روش بالا مجموعه‌های باز $B_i \in \mathcal{B}$ و $B_j \in \mathcal{B}$ موجود است که $x \in B_i \subseteq \overline{B}_i \subseteq B_j \subseteq U$. بنابراین nـای موجود است که $f_n(x) = ۰$ و $f_n(X \backslash U) = ۱$. ادعا می‌کنیم $V = B(y, \frac{۱}{۲^n})$ زیرمجموعهٔ $f(U)$ است. برای اثبات این ادعا فرض کنید $z \notin f(U)$، پس $x' = f^{-۱}(z) \notin U$، بنابراین $f_n(x') = ۱$ و چون $f_n(x) = ۰$، لذا $d_n(z_n, y_n) = ۱$. از طرف دیگر

$$V = B(y, \frac{۱}{۲^n}) = \left\{w \in \prod_{k=۱}^{\infty} [۰, ۱] : \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{d_k(w_k, y_k)}{۲^k} < \frac{۱}{۲^n}\right\}$$

خصوصاً اگر $z \in V$ باید $\frac{d_n(z_n, y_n)}{۲^n} < \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{d_k(z_k, y_k)}{۲^k} < \frac{۱}{۲^n}$ و در نتیجه $d_n(z_n, y_n) < ۱$ که تناقض است لذا $z \notin V$.

□

آخرین قضیهٔ این بخش، قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۱۴ (قضیهٔ پوششی لبگ[۲]): اگر $\{U_\alpha\}$ یک پوشش باز فضای متریک و فشرده X باشد در این صورت $\delta > ۰$ـای موجود است به طوری که هر زیرمجموعهٔ X، با قطر کمتر از δ حداقل در یکی از U_α ها قرار می‌گیرد.

اثبات: : فرض کنید اینطور نباشد. در این صورت برای هر $n \in \mathcal{N}$، مجموعه‌ای با قطر کمتر از $\frac{۱}{n}$، مانند A_n موجود است که در هیچ U_α واقع نیست. برای هر n، نقطهٔ $x_n \in A_n$ را در نظر بگیرید. مجموعهٔ $\{x_n\}$ بی‌پایان است (زیرا قطر A_n ها وقتی n به سمت بینهایت می‌رود به سمت صفر همگرا است). حال چون فضا فشرده است، هر مجموعهٔ بی‌پایان دارای نقطهٔ تجمع است لذا فرض کنید x نقطهٔ تجمع دنبالهٔ (x_n) باشد. چون $\{U_\alpha\}$ پوشش X است، پس αـای موجود است که $x \in U_\alpha$. از باز بودن U_α، $\delta > ۰$ـای موجود است که $B(x, \delta) \subseteq U_\alpha$. حال n را آنقدر بزرگ بگیرید که $\frac{۱}{n} < \frac{\delta}{۲}$. سپس از اینکه x نقطهٔ تجمع مجموعهٔ $\{x_n\}$ است و با توجه به قضیهٔ ۳ بخش ۸.۱، می‌توان $m > n$ را طوری انتخاب کرد که $x_m \in B(x, \frac{\delta}{۲})$. از طرفی $x_m \in A_m$، بنابراین $A_m \cap B(x, \frac{\delta}{۲}) \neq \phi$.

---
[۲] Lebesgue

در حالی که A_m دارای قطر کمتر از $\frac{\delta}{2}$ است. پس باید $A_m \subseteq B(x,\delta) \subseteq U_\alpha$ که تناقض است زیرا A_n ها به گونه‌ای بودند که در هیچ U_α واقع نبودند.

□

عدد δ را که در شرایط قضیه صادق باشد **عدد لبگ** برای پوشش $\{U_\alpha\}$ می‌نامند.

تمرین

۱. فضای متریک (X,d) و $A \subseteq X$ مفروض است. نشان دهید:

الف- $\overline{A} = \{x : d(x,A) = 0\}$.

ب- مجموعهٔ F بسته است اگر و فقط اگر $\{x : d(x,F) = 0\} \subseteq F$.

پ- اگر مجموعهٔ F بسته، $p \in X$ و $p \notin F$، آنگاه $d(p,F) \neq 0$.

ت- $d(A,B) = d(\overline{A},\overline{B})$.

ث- $d(A) = d(\overline{A})$.

۲. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک، $a \in X$، $\varepsilon > 0$، $A = \{x : d(x,a) \leq \varepsilon\}$ و $B = \{x : d(x,a) < \varepsilon\}$. نشان دهید:

الف- مجموعهٔ A بسته است.

ب- بستار مجموعهٔ B زیرمجموعهٔ A است.

پ- با یک مثال نشان دهید تساوی $\overline{B} = A$ لزوماً برقرار نیست.

۳. در فضای متریک مثال ۳ بخش قبل، گوی‌های باز $B(0,10)$ و $B(3,9)$ را به دست آورید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

۴. ثابت کنید هر فضای متریک همبند با بیش از یک نقطه شمارش‌ناپذیر است.

۵. فضای متریک (X,d) مفروض است. نشان دهید دسته گوی‌های باز تشکیل یک پایه برای توپولوژی روی X می‌دهند.

۶. فرض کنید X فضای کلیه توابع انتگرال‌پذیر روی $[0,1]$ و $d(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$ و $Y = \{f \in X : \int_0^1 f(x)\,dx \neq 0\}$. نشان دهید تابع g با ضابطهٔ $g(x) = 0$ برای $x \neq 1$ و $g(1) = 1$، نقطهٔ تجمع Y است. در واقع هر تابع که دارای مقادیر متفاوت از صفر در تعداد باپایان نقطه روی $[0,1]$ باشد نقطهٔ تجمع Y است.

۷. تابع f از فضای متریک (X,d) به فضای متریک (Y,d') را تابع لیپشیتز[۳] با ضریب k می‌گوییم اگر $d'(f(x),f(y)) < kd(x,y)$ برای هر $x,y \in X$. نشان دهید:

الف- هر تابع لیپشیتز، پیوسته است.

ب- اگر $X = P(\mathcal{N})$، $B \subseteq \mathcal{N}$ و d همان متریک مثال ۴ باشد، آنگاه توابع $f(A) = A \cup B$ و $g(A) = A \cap B$ لیپشیتز و در نتیجه پیوسته هستند.

پ- برای $a \in X$، تابع $g : X \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ $g(x) = d(x,a)$ پیوسته است.

ت- برای $A \subseteq X$ تابع $h : X \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ $h(x) = d(x,A)$ پیوسته است.

۸. فرض کنید d_1 و d_2 دو متریک روی مجموعهٔ X و $p \in X$ باشند به طوری که برای هر گوی باز $B_{d_1}(p,\eta)$، گوی باز $B_{d_2}(p,\lambda)$ وجود داشته باشد به طوری که $B_{d_2}(p,\lambda) \subseteq B_{d_1}(p,\eta)$. نشان دهید توپولوژی که به وسیلهٔ d_1 به دست می‌آید ضعیف‌تر از توپولوژیی است که به وسیلهٔ d_2 ارائه می‌شود.

۹. نشان دهید دو متریک d و d' معادلند اگر $m > 0$ و $n > 0$ موجود باشند به طوری که

$$m \cdot d(x,y) \leq d'(x,y) \leq n \cdot d(x,y)\ ; \quad \forall x,\ \forall y$$

۱۰. نشان دهید متریک معمولی روی $\mathcal{R}^2$ با متریک‌های

$$\text{i},\quad \delta(p,q) = \max\{|a-b| \text{ و } |c-d|\}$$

$$\text{ii},\quad \gamma(p,q) = |a-b| + |c-d|$$

که در آن $p = (a,c)$ و $q = (b,d)$ معادل است.

۱۱. اگر d یک متریک روی مجموعهٔ X باشد، نشان دهید متریک‌های زیر با متریک d معادل هستند.

$$\text{i},\quad \rho(x,y) = 2d(x,y)$$

$$\text{ii},\quad \delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

$$\text{iii},\quad \gamma(x,y) = \min\{1\ ,\ d(x,y)\}$$

و از متریک‌های δ و γ نتیجه بگیرید که هر متریکی روی X با یک متریک کراندار معادل است.

۱۲. فرض کنید (X_i,d)، $1 \leq i \leq n$، n فضای متریک باشند. نشان دهید اولاً هریک از توابع زیر روی $\prod_{i=1}^{n} X_i$ یک متریک است و ثانیاً این متریک‌ها با هم معادلند.

[۳] Lipschitz

$d((x_i),(y_i)) = \max_{i=1}^{n}\{d_i(x_i,y_i)\}$

$\gamma((x_i),(y_i)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)$

$\eta((x_i),(y_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)^2}$

۱۳. نشان دهید اگر (X_n, d_n) یک دستهٔ شمارش‌پذیر از فضاهای متریک باشد، آنگاه

$$d(p,q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(a_n,b_n)}{1+d_n(a_n,b_n)}$$

که در آن $p=(a_n)$ و $q=(b_n)$، یک متریک روی $\prod X_n$ است. به علاوه توپولوژی حاصل از متریک d با توپولوژی حاصل‌ضرب ناشی از متریک‌های d_n معادل است.

۱۴. ثابت کنید در یک فضای متریک هر مجموعهٔ فشرده، بسته و کراندار است. مثالی از یک فضای متریک ارائه دهید که هر مجموعهٔ بسته و کراندار در آن فشرده نباشد.

۱۵. نشان دهید تصویر یک فضای فشرده تحت تابع پیوسته، در یک فضای متریک، کراندار است.

۱۶. مستقیماً از تعریف، نشان دهید هر فضای متریک، یک فضای T_2 است.

۱۷. مستقیماً از تعریف، نشان دهید هر فضای متریک، یک فضای منظم است.

۱۸. نشان دهید هر زیرفضای یک فضای متریک جداپذیر، جداپذیر است (با تمرین ۸ بخش ۸.۴ مقایسه کنید).

۱۹. ثابت کنید هر فضای توپولوژیک همسانریخت با یک فضای متریک، متریک‌پذیر است.

۲۰. می‌گوییم دنبالهٔ (x_n) در فضای متریک (X,d) دارای حد x است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ داده‌شده، $N > 0$ موجود باشد که برای هر $n > N$، $d(x_n,x) < \varepsilon$. حال فرض کنید فضای متریک (X,d) مانند تمرین ۵ در بخش قبل باشد. ثابت کنید:

الف ـ دنبالهٔ (10^n) دارای حد صفر است.

ب ـ دنبالهٔ (2^n) دارای حد نیست.

پ ـ با فرض $x_n = 9\times 10 + 9\times 10^2 + \cdots + 9\times 10^n$، حد دنبالهٔ (x_n) چیست؟

ت ـ اگر $x_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n!$، حد دنبالهٔ (x_n) چیست؟

از این مطالب چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲۱. فرض کنید فضای متریک (X, d) مانند مثال ۴ در بخش قبل باشد. ثابت کنید:

الف- $d(A, B) = d(\mathcal{N}\backslash A, \mathcal{N}\backslash B)$ برای هر $A, B \subseteq \mathcal{N}$.

ب- اگر دنبالهٔ (X_n) از زیرمجموعه‌های $\mathcal{N}$ چنان باشد که $X_n \subseteq X_{n+1}$، آنگاه حد دنبالهٔ (X_n)، $X = \cup X_n$ است.

پ- قرار دهید $X_n = \{1, 2^n, 3^n, \cdots\}$. حد دنبالهٔ (X_n) چیست؟

۲۲. ثابت کنید در یک فضای متریک گسسته حد دنبالهٔ (x_n)، x است اگر و فقط اگر $N > 0$ موجود باشد که برای هر $n \geq N$، $x_n = x$.

۲۳. ثابت کنید اگر دو دنبالهٔ (x_n) و (y_n) در فضای متریک (X, d) به ترتیب به نقاط x و y همگرا باشند، آنگاه دنبالهٔ $d(x_n, y_n)$ به $d(x, y)$ همگرا است.

۲۴. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد

الف- نشان دهید اگر $A \subseteq X$ فشرده باشد، آنگاه به ازای هر $B \subseteq X$، $p \in A$ موجود است به طوری که $d(p, B) = d(A, B)$.

ب- نشان دهید اگر $A \subseteq X$ فشرده باشد، آنگاه $p \in A$ موجود است به طوری که $d(x, A) = d(x, p)$ برای هر $x \in X$.

پ- نشان دهید اگر $A \subseteq X$ فشرده باشد، آنگاه $x, y \in A$ موجود است به طوری که $d(A) = d(x, y)$.

ت- نشان دهید اگر $A \subseteq X$ و $B \subseteq X$ هر دو فشرده باشند، آنگاه $a \in A$ و $b \in B$ موجود است به طوری که $d(A, B) = d(a, b)$.

ث- نشان دهید اگر $A \subseteq X$ فشرده باشد، آنگاه مجموعهٔ نقاط تجمع A، نیز فشرده است.

ج- نشان دهید اگر $A \subseteq X$ فشرده، $B \subseteq X$ بسته و $A \cap B = \phi$، آنگاه $d(A, B) > 0$.

۲۵. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. برای مجموعهٔ $A \subseteq X$ $B(A, \varepsilon) = \cup_{x \in A} B(x, \varepsilon)$ را یک εـهمسایگی حول A بنامید. ثابت کنید اگر A و B دو مجموعهٔ بسته و مجزا و B فشرده باشد، آنگاه $\varepsilon > 0$ـای موجود است به طوری که εـهمسایگی‌ها حول A و B مجزا هستند. آیا بدون شرط فشردگی B نیز حکم برقرار است؟

۲۶. ثابت کنید اگر (X, d) یک فضای متریک همبند باشد، آنگاه برای هر $x \in X$، تابع $f_x(y) = d(x, y)$، خاصیت مقدار میانی دارد. فضای متریک ناهمبند ارائه دهید که برای هر $x \in X$، تابع f_x خاصیت مقدار میانی داشته باشد.

۲۷. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. نشان دهید تابع $d(A,B)=\inf\{d(a,b): a\in A, b\in B\}$ یک متریک روی $P(X)$ نیست.

۲۸. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $B(A,\varepsilon)=\cup_{x\in A}B(x,\varepsilon)$ یک εـ‌همسایگی حول $A\subseteq X$ باشد. تعریف کنید:

$$d^*(A,C)=\inf_{\varepsilon>0}\{\varepsilon : A\subseteq B(C,\varepsilon),\ C\subseteq B(A,\varepsilon)\}$$

$$X^*=\{C\subseteq X : X \text{ بسته در } C\}$$

نشان دهید d^* یک متریک روی X^* است (این متریک به **متریک هاسدورف** معروف است).

۲۹. فرض کنید برای هر $n\in\mathcal{N}$، I_n یک نسخه از $I=[0,1]$ باشد و به علاوه فرض کنید Z اجتماع مجزای I_n ها و X فضای خارج‌قسمت آن است که با یکسان کردن همهٔ نقاط $(0,n)$، $n\in\mathcal{N}$، به دست می‌آید. برای هر $x=(t,n)$ و $y=(k,m)$ در فضای X تعریف کنید:

$$\rho(x,y)=\begin{cases}|t-k| & n=m\\ t+k & n\neq m\end{cases}$$

الف ـ نشان دهید ρ یک متریک روی X است.

ب ـ به ازای $x=(\frac{1}{2},5)$، $\varepsilon=\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}$ گوی‌های $B(x,\varepsilon)$ نسبت به متریک ρ چگونه است؟

پ ـ آیا این متریک با متریک خارج‌قسمت روی X یکسان است؟

۳۰. فرض کنید $f:(X,d)\to(Y,d^*)$ پیوسته و (X,d) فشرده باشد. ثابت کنید برای هر $\varepsilon>0$ داده‌شده، $\delta>0$ـای موجود است به طوری که برای هر x و y که $d(x,y)<\delta$، آنگاه $d^*(f(x),f(y))<\varepsilon$. (این به **پیوستگی یکنواخت** معروف است).

۹.۳ فضاهای متریک کامل

در این بخش دستهٔ خاصی از فضاهای متریک را معرفی می‌کنیم که دارای خواص جالبی هستند. در ابتدا به تعریف زیر توجه کنید.

تعریف: دنبالهٔ (x_n) در فضای متریک (X,d) یک **دنباله کشی** است اگر به ازای هر $\varepsilon>0$، عدد صحیح مثبت N موجود باشد به طوری که برای هر $m,n>N$، $d(x_n,x_m)<\varepsilon$.

مثال ۱۹ : روی $X = \mathcal{Z}$ متریک زیر را در نظر بگیرید:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{m} & \text{اگر } m \text{ بزرگترین عددی باشد که } x-y \text{ بر } 10^{m-1} \text{ قابل‌تقسیم است.} \end{cases}$$

دنبالهٔ (x_n)، که در آن $x_1 = 1$، $x_2 = 11$، $x_3 = 111$، ... ، یک دنباله کشی است. ابتدا توجه کنید که $x_n = 1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}$. حال برای هر $\varepsilon > 0$، N را چنان اختیار کنید که $\frac{1}{N} < \varepsilon$ در این صورت برای هر $m, n > N$، $(m > n)$، $x_m - x_n = 10^n + 10^{n+1} + \cdots + 10^{m-1}$ لذا 10^n، $x_m - x_n$ را عاد می‌کند، پس $d(x_n, x_m) < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.

مثال ۲۰ : روی $\mathcal{N}$ با متریک $d(x,y) = \frac{|x-y|}{xy}$، دنبالهٔ (n)، کشی است. برای هر $\varepsilon > 0$، N را چنان اختیار کنید که $\frac{1}{N} < \varepsilon$، در این صورت برای هر $m, n > N$، $m > n$،

$$d(m,n) = \frac{|m-n|}{mn} < \frac{m}{mn} = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

بدیهی است که هر دنبالهٔ همگرا، کشی است. ولی عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. به عنوان مثال دنبالهٔ $(\frac{1}{n})$ در بازهٔ $]0, 1[$ کشی است ولی همگرا نیست. ولی در بعضی از فضاهای متریک، مثلاً $\mathcal{R}^n$ دنباله‌های کشی، همگرا نیز هستند. این خاصیت منجر به تعریف زیر شده است.

تعریف: : فضای متریک (X, d) را **فضای کامل** می‌گوییم اگر هر دنبالهٔ کشی در آن همگرا باشد. در این حالت متریک d را یک **متریک کامل** می‌نامیم.

مثال ۲۱ : فضای $]0, 1[$ کامل نیست.

مثال ۲۲ : فضای $\mathcal{N}$ با متریک اقلیدسی، کامل است. زیرا اگر (x_n) یک دنبالهٔ کشی در این فضا باشد، آنگاه برای $\varepsilon = \frac{1}{4}$، $N > 0$ موجود است که برای هر $m, n > N$، $d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < \frac{1}{4}$ و این امکان‌پذیر نیست مگر این‌که $x_n = x_m$. بنابراین در این فضای متریک، یک دنباله کشی است اگر و فقط اگر بعد از مرحله‌ای همهٔ اعضای دنباله ثابت باشند و بدیهی است که چنین دنباله‌هایی همگرا نیز هستند.

مثال ۲۳ : فضای متریک ارائه‌شده در مثال ۱۹ کامل نیست زیرا دنباله کشی ارائه‌شده در این مثال همگرا نیست. توجه کنید که اگر این دنباله بخواهد مثلاً به a همگرا باشد، آنگاه دنبالهٔ $9x_n + 1 = 10^n$ نیز باید به $9a + 1$ همگرا شود. از طرف دیگر می‌توان به راحتی مشاهده کرد که دنبالهٔ (10^n) به صفر همگرا است لذا باید معادلهٔ $9a + 1 = 0$ در $\mathcal{Z}$ دارای جواب باشد، که یک تناقض است.

قضیهٔ ۱۵ : هر فضای متریک فشرده، کامل است.

اثبات: فرض کنید (x_n) یک دنباله کشی باشد. قرار دهید $A = \{x_n : n \in \mathcal{N}\}$. اگر A باپایان باشد، دنباله اکیداً صعودی (n_j) در مجموعهٔ اعداد طبیعی موجود است به طوری که برای هر j، $x_{n_j} = x_{n_{j+1}}$. آن را x بنامید. نشان می‌دهیم دنبالهٔ (x_n) به x همگرا است. برای هر $\varepsilon > 0$ داده‌شده، از کشی بودن Nـای موجود است به طوری که برای هر $m, n > N$، $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. حال $n_j > N$ را ثابت نگه دارید. در این صورت برای هر $n > N$، $d(x_m, x) = d(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon$. و اگر A بی‌پایان باشد، از فشردگی فضا، A دارای نقطهٔ تجمع خواهد بود، آن را x بنامید. بنا به نتیجهٔ ۹ دنبالهٔ اکیداً صعودی (n_j) در مجموعهٔ اعداد طبیعی موجود است که دنبالهٔ (x_{n_j}) به x همگرا است. برای هر $\varepsilon > 0$ داده‌شده، N_1ـای موجود است به طوری که برای هر $n_{n_j} > N_1$، $d(x_{n_j}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ و از کشی بودن دنباله، N_2ـای موجود است که برای هر $m, n > N_2$، $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. حال با فرض N بزرگتر از ماکزیمم N_1 و N_2 و برای هر $m > N$، $n_j > N$ را انتخاب کنید. در این صورت

$$d(x_m, x) < d(x_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) < \varepsilon$$

لذا دنبالهٔ (x_n) به x همگرا است.

□

قضیهٔ ۱۶ : یک زیرمجموعهٔ بسته از یک فضای متریک کامل، کامل است.

اثبات: فرض کنید $A \subseteq X$، (X, d) فضای متریک کامل و (a_n) یک دنباله کشی در A باشد. در این صورت (a_n) در X کشی است، پس در آن همگرا است. فرض کنید دنبالهٔ (a_n) به نقطهٔ $a \in X$ همگرا باشد. در این صورت نقطهٔ a نقطهٔ تجمع مجموعهٔ A است و چون A بسته است لذا شامل کلیه نقاط تجمع خود است. پس $a \in A$ و در نتیجه دنبالهٔ (a_n) در A همگرا است.

□

مثال ۲۴ : فضای $[0, 1]$ یک فضای متریک کامل است.

همانطور که قبلاً اشاره کردیم هر فضای متریک، یک فضای توپولوژیکی است ولی یک فضای توپولوژیکی لزوماً یک فضای متریک نیست که این امر منجر به تعریف متریک‌پذیری برای فضاهای توپولوژیک گردید. به عبارت دیگر، متریک‌پذیری برای فضاهای توپولوژیک تعریف شد. یادآور می‌شویم که یک فضای توپولوژیک را متریک‌پذیر می‌نامیم اگر توپولوژی آن با توپولوژی حاصل از متریک، معادل باشد. به طور مشابه، در رابطه با متریک کامل تعریف زیر را داریم.

تعریف: یک فضای توپولوژیک را **بطور کامل متریک‌پذیر** [۴] می‌گوییم اگر توپولوژی آن به وسیلهٔ یک متریک کامل ایجاد شود.

مجدداً متذکر می‌شویم که کامل بودن از خواص فضاهای متریک است در حالی که به طور کامل متریک‌پذیر بودن از خواص فضاهای توپولوژیک است. همانطور که در مثال ۲۱ دیدیم فضای $]\circ,1[$ با متریک معمولی، یک فضای متریک کامل نیست ولی به طور کامل متریک‌پذیر است زیرا با فضای کامل $\mathcal{R}$ همسانریخت است. با توجه به قضیهٔ ۱۶ بدیهی است که هر زیرمجموعهٔ بسته *از یک فضای توپولوژیک به طور کامل متریک‌پذیر، به طور کامل متریک‌پذیر است*. در تمرین‌ها خواهیم دید هر زیرمجموعهٔ *باز از یک فضای توپولوژیک به طور کامل متریک‌پذیر، نیز به طور کامل متریک‌پذیر است.*

بعضی از فضاهای متریک‌پذیر، مانند مجموعه اعداد گویا، ممکن است به طور کامل متریک‌پذیر نباشند. به عبارت دیگر توپولوژی آن ناشی از یک متریک کامل نباشد (به تمرین‌ها مراجعه شود).

قضیهٔ ۱۷ : فرض کنید (X_n, T_n) یک دنباله از فضاهای توپولوژیک غیرتهی باشد. در این صورت فضای توپولوژیک $\prod X_n$ به طور کامل متریک‌پذیر است اگر و فقط اگر هر X_n به طور کامل متریک‌پذیر باشد.

اثبات: فرض کنید فضای توپولوژیک $\prod X_n$ با توپولوژی حاصل‌ضرب، به طور کامل متریک‌پذیر باشد پس متریک کامل d روی آن موجود است که توپولوژی حاصل‌ضرب به وسیلهٔ آن ایجاد می‌شود. می‌دانیم توپولوژی نسبی روی هر زیرفضای $\prod X_n$، نیز به وسیلهٔ همان متریک d حاصل می‌شود و اگر این زیرفضا به عنوان زیرمجموعه، بسته نیز باشد بنا به قضیهٔ ۱۶، متریک روی آن کامل نیز خواهد بود. از طرفی به ازای هر n، X_n با یک زیرمجموعهٔ بسته از $\prod X_n$ همسانریخت است، لذا به طور کامل متریک‌پذیر است.

بالعکس، فرض کنید توپولوژی T_n به وسیلهٔ متریک کامل d_n ایجاد شده باشد. می‌توان فرض کرد متریک d_n دارای کران ۱ است. متریک d را روی $\prod X_n$ به صورت زیر تعریف کنید:

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

به سهولت می‌توان دید d یک متریک روی $\prod X_n$ است که توپولوژی حاصل‌ضرب از آن به وجود می‌آید (مشابه اثبات قضیهٔ ۱۱). تنها کامل بودن باقی می‌ماند که باید بررسی شود. فرض کنید $x^1, x^2, \cdots$ یک دنباله کشی نسبت به متریک d روی $\prod X_n$ باشد. برای هر i، دنبالهٔ $x_i^1, x_i^2, \cdots$، یک دنباله کشی نسبت به متریک d_i در X_i است. بنابراین همگرا مثلاً به y_i است. نشان می‌دهیم دنبالهٔ $x^1, x^2, \cdots$،

[۴] در بعضی از کتاب‌های این خاصیت بطور توپولوژیکی کامل نامیده شده است.

به $y = (y_{۱}, y_{۲}, \cdots)$ همگرا است. برای $\varepsilon > ۰$ داده‌شده، N را آنقدر بزرگ اختیار کنید که

$$\sum_{n=N+۱}^{\infty} (\frac{۱}{۲})^n < \frac{\varepsilon}{۲}$$

و N_ε را آنقدر بزرگ که برای $n > N_\varepsilon$ و هر $i = ۱, ۲, \cdots, n$

$$d_i(x_i^n, y_i) < \frac{\varepsilon \cdot ۲^i}{۲N}$$

در این صورت با توجه به این‌که d_i ها دارای کران ۱ هستند، برای هر $n > N_\varepsilon$ داریم:

$$\begin{aligned} d(x^n, y) &= \sum_{i=۱}^{\infty} \frac{d_i(x_i^n, y_i)}{۲^i} \\ &= \sum_{i=۱}^{N} \frac{d_i(x_i^n, y_i)}{۲^i} + \sum_{i=N+۱}^{\infty} \frac{d_i(x_i^n, y_i)}{۲^i} \\ &\leq \sum_{i=۱}^{N} \frac{d_i(x_i^n, y_i)}{۲^i} + \sum_{i=N+۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^i} \\ &\leq \sum_{i=۱}^{N} \frac{\varepsilon \cdot ۲^i}{۲N \cdot ۲^i} + \frac{\varepsilon}{۲} = \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon \end{aligned}$$

پس دنبالهٔ (x^n) به y همگرا است.

□

تعریف: یک فضای متریک را **تماماً کراندار** می‌نامیم اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ داده‌شده، فضا با تعداد باپایان گوی شعاع ε پوشیده شود.

بدیهی است که هر فضای فشرده، تماماً کراندار است. قضیهٔ ۲۰ شرایطی را که تحت آن عکس این مطلب نیز درست باشد را بیان می‌کند. ابتدا به دو قضیهٔ زیر توجه کنید.

قضیهٔ ۱۸ : هر فضای متریک تماماً کراندار، جداپذیر و در نتیجه لیندلف و شمارش‌پذیر نوع دوم نیز است.

اثبات: چون فضا تماماً کراندار است برای هر n، X با تعداد باپایان گوی شعاع $\frac{۱}{n}$ پوشیده می‌شود. به ازای هر n مجموعه متشکل از مراکز این گوی‌ها را به F_n نمایش دهید و قرار دهید $D = \cup_{n=۱}^{\infty} F_n$. بدیهی است که D شمارش‌پذیر است. نشان می‌دهیم $\overline{D} = X$. برای هر $x \in X \backslash D$ و هر $\varepsilon > ۰$، n را چنان بگیرید که $\frac{۱}{n} < \varepsilon$. چون $X = \cup_{a \in F_n} B(a, \frac{۱}{n})$. لذا $a \in F_n \subseteq D$ موجود است که $x \in B(a, \frac{۱}{n})$. بنابراین $d(a, x) < \frac{۱}{n} < \varepsilon$ و در نتیجه $a \in B(x, \varepsilon)$. یعنی D در X چگال است.

□

قضیهٔ ۱۹ : هر زیرمجموعهٔ بی‌پایان در یک فضای متریک کامل و تماماً کراندار، دارای نقطهٔ تجمع است.

اثبات: فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ بی‌پایان در فضای متریک کامل و تماماً کراندار X باشد. چون X تماماً کراندار است تعداد باپایان گوی به شعاع $\frac{1}{2^n}$ موجود است که X را می‌پوشانند. فرض کنید به ازای هر n، F_n مجموعهٔ متشکل از مراکز این گوی‌ها باشد. پس هر F_n باپایان است.

حال چون A بی‌پایان و $X = \cup_{a \in F_1} B(a, \frac{1}{2})$، لذا $a_1 \in F_1$ موجود است به طوری که:

$$A_1 = A \cap B(a_1, \frac{1}{2})$$

بی‌پایان است. مجدداً $a_2 \in F_2$ موجود است به طوری که:

$$A_2 = A_1 \cap B(a_2, (\frac{1}{2})^2)$$

بی‌پایان است و با استقراء $a_n \in F_n$ موجود است که:

$$A_n = A_{n-1} \cap B(a_n, (\frac{1}{2})^n)$$

بی‌پایان است. بدیهی است که $A_n \subseteq A_{n-1}$. اینک $x_1 \in A_1$ و با استقراء $x_n \in A_n \backslash \{x_i : i = 1, \cdots, n-1\}$ را انتخاب کنید (این انتخاب با توجه به بی‌پایان بودن A_n ها امکان‌پذیر است). نشان می‌دهیم دنبالهٔ (x_n) یک دنباله کشی است. برای هر $\varepsilon > 0$ داده‌شده، N را چنان اختیار کنید که $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$. در این صورت برای هر $n, m > N$ با توجه به روابط

$$x_m \in A_m \subseteq A_N \subseteq B(a_N, \frac{1}{2^N}) \quad , \quad x_n \in A_n \subseteq A_N \subseteq B(a_N, \frac{1}{2^N})$$

داریم:

$$d(x_m, x_n) \leq d(a_m, a_N) + d(a_N, x_n) \leq \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$$

پس دنبالهٔ (x_n) یک دنباله کشی است و چون فضا کامل است دارای حد، مثلاً x، می‌باشد. چون $A \supseteq \{x_n\}$ پس x نقطهٔ تجمع A است.

□

قضیهٔ ۲۰ : یک فضای متریک، فشرده است اگر و فقط اگر کامل و تماماً کراندار باشد.

اثبات: بدیهی است که هر فضای متریک فشرده، تماماً کراندار است. از طرفی بنا به قضیهٔ ۱۵ هر فضای متریک فشرده کامل نیز است لذا هر فضای متریک فشرده، کامل و تماماً کراندار است.

بالعکس، فرض کنید X کامل و تماماً کراندار و $\{U_\alpha\}$ پوشش باز آن باشد. بنا به قضیهٔ ۱۸، این پوشش دارای زیرپوشش شمارش‌پذیر است. آن را $\{V_i\}$ بنامید. حال اگر X باپایان باشد و یا توسط تعداد باپایان از V_i ها پوشیده شود حکم ثابت است. در غیر این صورت

$$x_۱ \in X\backslash V_۱$$

$$x_۲ \in X\backslash(V_۱ \cup V_۲)\ ,\ x_۲ \neq x_۱$$

$$\vdots$$

$$x_n \in X\backslash(V_۱ \cup V_۲ \cup \cdots \cup V_n)\ ,\ x_n \neq x_{n-۱}, \cdots, x_n \neq x_۱$$

$$\vdots$$

را انتخاب کنید. پس $A = \{x_n : n \in \mathcal{N}\}$ یک زیرمجموعهٔ بی‌پایان است که بنا به قضیهٔ ۱۹ دارای نقطهٔ تجمع است، آن را x بنامید. ادعا می‌کنیم $x \notin X$. زیرا اگر $x \in X$، آنگاه iـای موجود است که $x \in V_i$. پس بنا به قضیهٔ ۶ بخش ۷.۱ باید $A \cap V_i$ بی‌پایان باشد و این یک تناقض است.

□

در ادامه می‌خواهیم قضیهٔ بیر و قضیه نقطه ثابت باناخ را در فضاهای کامل بیان کنیم.

قضیهٔ ۲۱ (قضیهٔ بیر): در یک فضای متریک کامل، اشتراک هر دستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز و چگال، چگال است.

اثبات: فرض کنید $\{U_i\}$ یک دسته از زیرمجموعه‌های باز و چگال باشد و فرض کنید V یک مجموعهٔ باز و غیرتهی در فضای متریک باشد. نشان می‌دهیم

$$V \cap (\cap_{n=۱}^{\infty} U_i) \neq \phi$$

چون $U_۱$ چگال است $a_۱ \in V \cap U_۱$ موجود است. از طرفی $V \cap U_۱$ باز است، پس $\varepsilon > ۰$ موجود است که $\overline{B(a_۱, \varepsilon_۱)} \subseteq V \cap U_۱$ (زیرا هر فضای متریک، منظم است). فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... ، $a_{n-۱}$ در X و $\varepsilon_۱$، $\varepsilon_۲$، ... ، $\varepsilon_{n-۱}$ در $\mathcal{R}$ انتخاب شده باشند، به طوری که:

$$\overline{B(a_{n-۱}, \varepsilon_{n-۱})} \subseteq B(a_{n-۲}, \varepsilon_{n-۲}) \cap U_{n-۱}$$

چون U_n چگال است، $a_n \in B(a_{n-۱}, \varepsilon_{n-۱}) \cap U_n$ موجود است و مجدداً از منظم بودن فضا، $\varepsilon_n > ۰$ موجود است که

$$\overline{B(a_n, \varepsilon_n)} \subseteq B(a_{n-۱}, \varepsilon_{n-۱}) \cap U_n$$

در هر مرحله در صورت لزوم فرض کنید $\varepsilon_n < \frac{1}{n}$. تحت این شرایط برای هر $m > n$، $a_m \in B(a_n, \varepsilon_n)$ و در نتیجه $d(a_m, a_n) < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$. لذا دنبالهٔ (a_n) کشی و در نتیجه به نقطه، مثلاً a، همگرا است. ادعا می‌کنیم $a \in V \cap (\cap_{i=1}^{\infty} U_i)$. اولاً a نقطه حدی دنبالهٔ $(a_{n+k})_k$ به ازای هر n نیز است. پس $a \in \overline{\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}}$ و بنابراین

$$a \in \overline{\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}} \subseteq \overline{B(a_n, \varepsilon_n)} \subseteq V \cap (U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n) \; ; \quad \forall n$$

بنابراین $a \in V \cap (\cap_{i=1}^{\infty} U_i)$.

□

قضیهٔ ۲۲ : اگر یک فضای متری کامل اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های بسته باشد، آنگاه حداقل یکی از این مجموعه‌های بسته شامل یک گوی است.

اثبات: فرض کنید $X = \cup A_n$ و هر A_n بسته باشد. پس $X \backslash A_n$ به ازای هر n باز است و به علاوه

$$\cap(X \backslash A_n) = X \backslash (\cup A_n) = \phi$$

پس حداقل یکی از اعضای دستهٔ $\{X \backslash A_n\}$، مثلاً $X \backslash A_k$، بنا به قضیهٔ بیر چگال نیست. لذا مجموعهٔ باز و غیرتهی V موجود است که $V \cap (X \backslash A_k) = \phi$ و در نتیجه $V \subseteq A_k$. چون V باز است پس شامل یک گوی است. بنابراین A_k شامل گوی است.

□

به عنوان دو کاربرد از قضیهٔ بیر، به نتایج زیر توجه کنید.

نتیجهٔ ۲۳ : مجموعه اعداد گویا را نمی‌توان به صورت اشتراک دسته شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز نوشت.

اثبات: فرض کنید دسته شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز در $\mathcal{R}$، مانند $\{U_n\}$ موجود باشد به طوری که $\mathcal{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. پس $\mathcal{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq U_n$ به ازای هر n. و در نتیجه $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{Q}} \subseteq \overline{U}_n$. یعنی هر U_n در $\mathcal{R}$ چگال است. حال فرض کنید $\mathcal{Q} = \{q_i : i \in \mathcal{N}\}$. به راحتی می‌توان دید $U_n \backslash \{q_n\}$ نیز در فضای اعداد حقیقی باز و چگال است (تمرین ۳۹ بخش ۲.۱). بنابراین بنا به قضیهٔ بیر و کامل بودن فضای اعداد حقیقی باید $\bigcap_{n=1}^{\infty}(U_n \backslash \{q_n\})$ نیز در $\mathcal{R}$ چگال باشد. اما

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}(U_n \backslash \{q_n\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \backslash \{q_n : n \in \mathcal{N}\} = \mathcal{Q} \backslash \mathcal{Q} = \phi$$

که یک تناقض است.

□

نتیجهٔ ۲۴ : دنباله‌ای از توابع پیوسته حقیقی روی فضای اعداد حقیقی، $f_n : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$، موجود نیست به طوری که $\lim_{n\to\infty} f(x) = \mathcal{X}_Q(x)$ ، که در آن $\mathcal{X}_Q$، تابع مشخصهٔ Q، یعنی تابع زیر است.

$$\mathcal{X}_Q(x) = \begin{cases} ۱ & x \in Q \\ ۰ & x \notin Q \end{cases}$$

اثبات: فرض کنید چنین توابعی موجود باشند و فرض کنید $U_m = f_m^{-۱}\,]\frac{۱}{۲}, \infty[$. پس U_m به ازای هر m باز است و بنابراین $\cup_{m\geq n} U_m$ به ازای هر n باز است.

تحت این شرایط نشان می‌دهیم $\cap_{n\geq ۱}(\cup_{m\geq n} U_m) = Q$. زیرا اگر $x \in \cap_{n\geq ۱}(\cup_{m\geq n} U_m)$ و آنگاه $x \in \cup_{m\geq n} U_m$ به ازای هر n. از طرف دیگر $\lim_{a\to\infty} f_n(x) = \mathcal{X}_Q(x)$ لذا برای $\varepsilon = \frac{۱}{۴}$، $N > ۰$ موجود است که برای هر $n > N$، $|f_n(x) - \mathcal{X}_Q(x)| < \frac{۱}{۴}$ و چون $x \in \cup_{m\geq N+۱} U_m$ پس $m > N$ موجود است که $x \in U_m = f_m^{-۱}]\frac{۱}{۲}, \infty[$ و یا $f_m(x) \in]\frac{۱}{۲}, \infty[$. حال اگر $x \notin Q$، آنگاه $\mathcal{X}_Q(x) = ۰$ و در نتیجه $-\frac{۱}{۴} < f_n(x) < \frac{۱}{۴}$، و این یک تناقض است.

بالعکس، اگر $x \in Q$، آنگاه $\mathcal{X}_Q(x) = ۱$. بنابراین $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = ۱$ ، لذا برای $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$، $N > ۰$ موجود است که برای هر $n > N$، $|f_n(x) - ۱| < \frac{۱}{۲}$ و یا $\frac{۱}{۲} < f_n(x) < \frac{۳}{۲}$. بنابراین $f_n(x) \in]\frac{۱}{۲}, \infty[$ برای هر $n > N$. در نتیجه $x \in f_n^{-۱}]\frac{۱}{۲}, \infty[= U_n$ برای هر $n > N$. بنابراین $x \in \cup_{m\geq n} U_m$ به ازای هر n و در نتیجه $x \in \cap_{n\geq ۱}(\cup_{m\geq n} U_m)$.

بنابراین Q برابر با اشتراک دسته شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز است و این با نتیجهٔ ۲۳ متناقض است.

□

حال نگاه مختصری به قضیهٔ نقطه ثابت باناخ[۵] در فضاهای کامل خواهیم داشت.

تعریف: نقطهٔ $x \in X$ را **نقطهٔ ثابت** تابع $f : X \to X$ می‌نامیم اگر $f(a) = a$.

تعریف: می‌گوییم تابع $f : X \to X$ در فضای متریک (X, d)، نسبت به متریک d **تابع انقباضی** است، اگر $\alpha < ۱$ موجود باشد به طوری که برای هر $(x, y) \in X \times X$، $d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$. در این صورت α را **ضریب انقباض** می‌نامیم.

بدیهی است که هر تابع انقباضی، یک تابع لیپشیتز با ضریب لیپشیتز کمتر از ۱ است.

قضیهٔ ۲۵ (قضیهٔ نقطه ثابت باناخ): اگر (X, d) یک فضای متریک کامل و تابع $f : X \to X$، انقباضی باشد، در این صورت f پیوسته و دقیقاً دارای یک نقطهٔ ثابت است.

---

[۵] Banach

اثبات: پیوستگی f بدیهی است. یگانگی نقطه ثابت نیز بدیهی است، زیرا اگر $f(a)=a$ و $f(b)=b$، آنگاه

$$d(a,b)=d(f(a),f(b))\leq \alpha\cdot d(a,b)$$

که در آن α ضریب انقباض است. در این حالت باید $1\geq\alpha$، که تناقض است.

برای اثبات وجود نقطهٔ ثابت، نقطهٔ دلخواه x را در نظر بگیرید. دنبالهٔ $x_1=x$، $x_n=f(x_{n-1})$، $n\geq 2$، را تشکیل دهید. این دنباله کشی است. پس همگرا به نقطهٔ مثلاً a است. ادعا می‌کنیم نقطهٔ a نقطهٔ ثابت است. چون دنبالهٔ (x_n) به a همگرا ست، از پیوستگی f، دنبالهٔ $(f(x_n))$ به $f(a)$ همگرا است و یا بنا به تعریف دنبالهٔ (x_{n+1}) به $f(a)$ همگرا است. پس با توجه به یگانگی حد در فضاهای متریک (زیرا هر فضای متریک یک فضای هاسدورف نیز است) باید $f(a)=a$.

□

تمرین

۱. نشان دهید کامل بودن یک خاصیت توپولوژیکی نیست.

۲. نشان دهید در یک فضای متریک هر دنبالهٔ همگرا، کشی است.

۳. نشان دهید در یک فضای متریک هر دنباله کشی، کراندار است.

۴. ثابت کنید دنبالهٔ (a_n) در فضای متریک اعداد حقیقی همگرا است اگر و فقط اگر با متریک $\tan^{-1}$ همگرا باشد.

۵. نشان دهید فضای اعداد حقیقی با متریک $\tan^{-1}$ کامل نیست و از آن نتیجه بگیرید یک دنباله کشی در فضای اعداد حقیقی با متریک معمولی لزوماً یک دنباله کشی در آن با متریک $\tan^{-1}$ نیست.

۶. ثابت کنید $\mathcal{N}$ با متریک $d(x,y)=\dfrac{|x-y|}{xy}$ کامل نیست.

۷. آیا $[0,1[$ با متریک $d(x,y)=\left|\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{y}{1-y}\right|$ کامل است؟

۸. فرض کنید $\mathcal{D}$ مجموعهٔ تمام توابع حقیقی و کراندار بر بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ با متریک

$$d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$$

باشد، ثابت کنید فضای متریک $(\mathcal{D},d)$ کامل است.

۹. ثابت کنید یک فضای متریک، کامل است اگر و فقط اگر هر دنباله کشی در آن دارای یک زیردنبالهٔ همگرا باشد.

۱۰. ثابت کنید اگر $X \subseteq Y$ و Y در فضای متریک X، کامل باشد، آنگاه Y بسته است.

۱۱. نشان دهید عبارات زیر در یک فضای متریک معادل است.

الف- X کامل است.

ب- اشتراک هر دنباله نزولی $C_۱ \supseteq C_۲ \supseteq \cdots$ از مجموعه‌های بسته که در آن قطر $d(C_n) \to ۰$، دارای دقیقاً یک نقطه است.

نشان دهید شرط بسته بودن C_n ها در قسمت ب، برای برقراری $\cap_{n=۱}^{\infty} C_n \neq \phi$ ضروری است.

۱۲. نشان دهید عبارات زیر در یک فضای متریک معادل است.

الف- دنباله (a_n) کشی است.

ب- $\lim\limits_{n\to\infty} d\{a_n, a_{n+۱}, \cdots = ۰\}$.

پ- دنبالهٔ (ε_n) از اعداد حقیقی مثبت موجود است که $\varepsilon_n \to ۰$ و $d(a_n, a_m) \leq \varepsilon_n$ برای هر $m \geq n$.

۱۳. نشان دهید اگر d یک متریک کامل باشد، آنگاه متریک $d^* = \min\{d, ۱\}$ نیز کامل است.

۱۴. فرض کنید (X_i, d_i)، $۱ \leq i \leq n$، n فضای متریک کامل باشند. نشان دهید فضای متریک $X_۱ \times X_۲ \times \cdots \times X_n$ با متریک‌های

$$d(x, y) = \max_{۱ \leq i \leq n}\{d_i(x_i, y_i)\}$$

$$\gamma(x, y) = \sum_{i=۱}^{n} d_i(x_i, y_i)$$

کامل است، که در آن $x = (x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ و $y = (y_۱, y_۲, \cdots, y_n)$.

۱۵. نشان دهید به طور کامل متریک‌پذیری یک خاصیت توپولوژیکی است.

۱۶. نشان دهید مجموعهٔ اعداد گویا متریک‌پذیر است ولی به طور کامل متریک‌پذیر نیست.

۱۷. فرض کنید G یک مجموعهٔ باز در فضای متریک (X, d) باشد. برای هر $x, y \in G$ تعریف کنید:

$$f(x) = \frac{۱}{d(x, X \backslash G)}$$

$$d^*(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$$

ثابت کنید:

الف- f پیوسته است.

ب- d^* روی G یک متریک است.

پ- d^* با d روی G معادل است.

ت- اگر X با متریک d کامل باشد، آنگاه G با متریک d^* کامل است.[۶]

۱۸. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و (U_n) یک دنباله از زیرمجموعه‌های X باشد. ثابت کنید:

الف- مجموعهٔ $\cap U_n$ با مجموعهٔ

$$U = \{(x_۱, x_۲, \cdots) \in \prod U_n : x_۱ = x_۲ = x_۳ = \cdots\}$$

همسانریخت است.

ب- اگر U_n باز و X به طور کامل متریک‌پذیر باشد، آنگاه $\cap U_n$ نیز به طور کامل متریک‌پذیر است.

پ- ثابت کنید مجموعه اعداد اصم به طور کامل متریک‌پذیر است.

۱۹. ثابت کنید اگر (A_n) یک دنباله از زیرمجموعه‌های هیچ‌جاچگال در فضای متریک کامل X باشد، $(\overline{A})^\circ = \phi$، آنگاه یک نقطه در X موجود است که در هیچ A_n-ای نیست.

۲۰. ثابت کنید اگر یک فضای متریک کامل برابر اجتماع یک دنباله از زیرمجموعه‌های خود باشد، آنگاه بستار حداقل یک مجموعه در دنباله باید دارای درون غیرتهی باشد. به عبارت دیگر اگر یک فضای متریک کامل برابر با اجتماع یک دستهٔ شمارش‌پذیر از زیرمجموعه‌های خود باشد، آنگاه باید حداقل یکی از آنها هیچ‌جاچگال باشد. (با تمرین ۲۱ بخش ۷.۳ مقایسه کنید.)

[۶] این تمرین نشان می‌دهد که مجموعه‌های باز در فضاهای به طور کامل متریک‌پذیر، به طور کامل متریک‌پذیر هستند.

جواب تمرینات

بخش ۱.۱

۱. (ت) بگیرید $A = \{a\}$، $B = \{b\}$ و $C = \{c\}$.

۴. چون دستهٔ $\mathcal{A}$ غیرتهی فرض شده است، لذا $A \in \mathcal{A}$ موجود است. چون $\mathcal{A}$ یک جبر بولی است $X\backslash A$ و در نتیجه $(X\backslash A) \cup A = X$ و $(X\backslash A) \cap A = \phi$ در $\mathcal{A}$ است.

۵. الف- توجه کنید $A \cup B = B\Delta(A\backslash B)$ و $A\backslash B = (A\Delta B) \cap A$.

ب- زیرا $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ و $A \cap B = A\backslash(A\backslash B)$.

ت- با توجه به قسمت (ب) کافی است نشان دهیم $A\backslash B \in \mathcal{A}$. اما داریم:
$A\backslash B = A \cap (X\backslash(A \cap B))$

۸. برای $j < i$، بگیرید $A_{ij} = \phi$ و برای $i \leq j$ بگیرید: $A_{ij} = [۱+j-i\ ,\ ۲+j-i]$.

بخش ۱.۲

۴. ت- اگر f یک به یک نباشد بگیرید $A = \{a\}$ و $B = \{b\}$ که در آن a و b چنان هستند که $f(a) = f(b) = y$. در این صورت $f(A) \cap f(B) = \{y\}$ در حالی که $f(A \cap B) = \phi$. برای اثبات عکس، اولاً بدیهی است که $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. حال فرض کنید $y \in f(A) \cap f(B)$، در این صورت $a \in A$ و $b \in B$ موجود است که $f(a) = f(b) = y$ و چون f یک به یک است پس $a = b \in A \cap B$ و یا $y \in f(A \cap B)$.

پ- اثبات قسمت اول بدیهی است. برای قسمت دوم فرض کنید f پوشا، $C \subseteq Y$ و $y \in C$. در این صورت $x \in X$ موجود است که $f(x) = y$. لذا $f(x) \in C$، در

نتیجه $x \in f^{-1}(C)$ و یا $f(x) \in f(f^{-1}(C))$. بنابراین $C \subseteq f(f^{-1}(C))$ و با توجه به قسمت اول، تساوی برقرار است. برای اثبات عکس، فرض کنید تساوی برای هر $C \subseteq Y$ برقرار است. بگیرید $C = Y$. در این‌صورت $f(X) = Y$ یعنی f پوشا است.

بخش ۱.۳

۱. برای $n \in \mathcal{N}$ قرار دهید $A_n = \{\frac{m}{n} : m \in \mathcal{Z}\}$. در این صورت A_n شمارش‌پذیر و $\mathcal{Q} = \cup A_n$.

۳. اگر $A \backslash \{a\}$ باپایان باشد، آنگاه $A = \{a\} \cup (A \backslash \{a\})$ نیز باپایان است.

۶. فرض کنید (A_n) یک دسته از مجموعه‌های باز و مجزا باشند و فرض کنید $\mathcal{Q} = \{r_i : i \in \mathcal{N}\}$. کوچکترین اندیس در این ترتیب را که در A_n واقع است به $r_{(n)}$ نمایش دهید و تناظر مورد نظر را برقرار سازید.

۸. الف- شمارش‌پذیر. چون با $\mathcal{N} \cup (\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ در تناظر است.

ب- شمارش‌ناپذیر. زیرا برای هر $A \subseteq \mathcal{N}$ تعریف کنید $f_A : \mathcal{N} \to \{0, 1\}$ به طوری که $f_A(A) = 0$ و $f_A(\mathcal{N} \backslash A) = 1$. در این صورت مجموعهٔ داده‌شده در (ب) برابر با این نوع توابع و در تناظر یک به یک با $P(\mathcal{N})$ است لذا شمارش‌ناپذیر است.

ث- برای هر m، A_m را مجموعهٔ همهٔ توابعی مانند $g : I_m \to \{0, 1\}$ فرض کنید. تعداد این نوع توابع 2^m است. پس $\cup_{m \geq 1} A_m$ شمارش‌پذیر است اما مجموعهٔ داده‌شده در (ث) برابر با همهٔ f هایی است که روی I_m برابر g و روی $\mathcal{N} \backslash I_m$ برابر 0 است. پس شمارش‌پذیر است.

ح- اگر برای هر k، C_k را مجموعهٔ توابعی مانند $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ فرض کنیم که $m \in \mathcal{N}$ موجود است که $f(n) = k$ برای هر $n \geq m$، آنگاه این مجموعه بنا به (پ) شمارش‌پذیر است و چون مجموعهٔ داده‌شده در (ح) برابر $\cup C_k$ است لذا شمارش‌پذیر است.

بخش ۲.۱

۲. روی $X = \{a, b, c\}$ توپولوژی‌های $T = \{X, \phi, \{a\}\}$ و $T^* = \{X, \phi, \{b\}\}$ را در نظر بگیرید.

۵. چون باید $A \cap B \in T$، لذ باید یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیفتد.

(الف) $A \cap B = \phi$، (ب) $A \cap B = B$ یا $A \cap B = A$، (پ) $A \cap B = X$.

در حالت (الف) چون باید $A \cup B \in T$، لذا $A \cup B = X$. یعنی A و B یک افراز روی X هستند. در حالت (ب) یکی از مجموعه‌ها باید زیرمجموعهٔ دیگری باشد و در حالت (پ) باید $A = B = X$، که در این صورت دستهٔ T دو عضو دارد.

۸. زیرا کافی است برای $r \in \mathcal{R}\backslash\mathcal{Q}$ دنبالهٔ صعودی (a_i) از اعداد گویا چنان در نظر گرفته شود که دارای حد r بوده و به علاوه برای هر i، $a_i < r$ باشد. در این صورت $\cup_{i=1}^{\infty} S(a_i) = \cup\ ]-\infty, a_i[=]-\infty, r[$ به توپولوژی مذکور متعلق نخواهد بود.

۱۱. برای اثبات X متعلق به توسیع ساده، بگیرید $U = V = X$ و برای اثبات ϕ متعلق به توسیع ساده، قرار دهید $U = V = \phi$. حال اگر C و D متعلق به توسیع ساده باشند مجموعه‌های U_C، V_C، U_D و V_D موجودند که

$$C = U_C \cup (V_C \cap A) \quad , \quad D = U_D \cup (V_D \cap A)$$

قرار دهید $U = U_C \cap U_D$ و $V = V_C \cap V_D$. در این صورت $C \cap D = U \cup (V \cap A)$.
نهایتاً اگر G_α دسته دلخواه از عناصر توسیع ساده باشند و U_α و V_α مجموعه‌های مربوط به آن باشند قرار دهید $U = \cup U_\alpha$ و $V = \cup V_\alpha$ که در این صورت $\cup G_\alpha = U \cup (V \cap A)$.

۱۳. $X \in T$ زیرا برای هر α

$$P_\alpha^{-1}(X \cap X_\alpha^*) = P_\alpha^{-1}(X_\alpha^*) = X_\alpha \in T_\alpha$$

$\phi \in T$ زیرا برای هر α

$$P_\alpha^{-1}(\phi \cap X_\alpha^*) = P_\alpha^{-1}(\phi) = \phi \in T_\alpha$$

اگر $V, U \in T$، آنگاه

$$P_\alpha^{-1}((U \cap V) \cap X_\alpha^*) = P_\alpha^{-1}(U \cap X_\alpha^*) \cap P_\alpha^{-1}(V \cap X_\alpha^*) \in T_\alpha$$

و نهایتاً اگر دستهٔ $U_\lambda \in T$، آنگاه

$$P_\alpha^{-1}((\cup U_\lambda) \cap X_\alpha^*) = \cup P_\alpha^{-1}(U_\lambda \cap X_\alpha^*) \in T_\alpha$$

۱۵. $A' = \{d, c\}$ و $B' = \{e\}$.

۱۷. الف- بنا به تعریف، یک مجموعه در یک فضای توپولوژیک، بسته است اگر مکمل آن باز باشد. لذا مجموعه‌های بسته در این فضای توپولوژیک به صورت

$$\mathcal{N},\ \phi,\ \{۱\},\ \{۱,۲\},\ \{۱,۲,۳\},\ \cdots$$

هستند.

ب- برای هر $p \in \mathcal{N}$، مجموعه‌های باز شامل نقطهٔ p به صورت E_i، $i \leq p$، است. لذا اگر $n > ۳۷$، مجموعهٔ باز $E_{۳۸}$ شامل هیچ یک از نقاط A نیست. بنابراین نقاط بزرگتر از ۳۷ نقاط تجمع نیستند. اگر $n = ۳۷$، آنگاه اشتراک مجموعهٔ باز $E_{۳۷}$ و A فقط مساوی ۳۷ خواهد بود لذا ۳۷ نیز یک نقطهٔ تجمع نیست. نهایتاً اگر $n < ۳۷$، هر مجموعهٔ باز شامل n شامل ۳۷ نیز خواهد بود لذا فقط نقاط ۱، ۲، الی ۳۶ نقاط تجمع A هستند.

پ- اگر E مجموعه‌ای از بالا کراندار باشد، مثلاً $n \in \mathcal{N}$ کران بالای E باشد، در این صورت مجموعهٔ باز E_m، $m > n$، شامل هیچ یک از نقاط E نیست. بنابراین هر $m \in \mathcal{N}$ نقطهٔ تجمع E نیست. لذا $E' \neq \mathcal{N}$. اما اگر E یک زیرمجموعهٔ بی‌پایان از $\mathcal{N}$ باشد، در این صورت $E' = \mathcal{N}$.

۱۹. الف- مجموعه‌های بسته به صورت $]-\infty, a]$ است.

ب- $\overline{[۳, ۷[} =]-\infty, ۷], \overline{\{۷, ۲۴, ۴۷, ۸۵\}} =]-\infty, ۸۵], \overline{\{۳, ۶, ۹, ۱۲, \cdots\}} = \mathcal{R}$.

پ- $A^\circ =]۷, \infty[$، $e(A) = \phi$ و نهایتاً $b(A) =]-\infty, ۷]$.

۲۲. طبق تعریف $\overline{E} = \cap F$ که در آن اشتراک روی همهٔ مجموعه‌هایی مانند F است که F بسته و $E \subseteq F$. از طرفی با توجه به تعریف توپولوژی جذب، $A \subseteq X \backslash F$. بنابراین نهایتاً اشتراک، روی همهٔ مجموعه‌هایی مانند F است که $E \subseteq F \subseteq X \backslash A$. پس با توجه به استدلال بالا به طور کلی می‌توان گفت:

$$\overline{E} = \cap F = \begin{cases} E & E \neq \phi \text{ و } E \cap A = \phi \\ X & E \neq \phi \text{ و } E \cap A \neq \phi \\ \phi & E = \phi \end{cases}$$

برای پیدا کردن درون E، با توجه به قضایا $E^\circ = \cup G$ که در آن اجتماع روی همهٔ مجموعه‌هایی مانند G است که G باز و $G \subseteq E$ و یا با توجه به توپولوژی مذکور $A \subseteq G \subseteq E$. بنابراین

$$E^\circ = \cup G = \begin{cases} E & A \subseteq E \text{ و } E \neq \phi \\ \phi & A \not\subseteq E \text{ و } E \neq \phi \\ \phi & E = \phi \end{cases}$$

در حالت خاص، اگر $A = X$، T همان توپولوژی ناگسسته و اگر $A = \phi$، T توپولوژی گسسته است.

۲۳. ب- می‌دانیم $x \in \overline{A}$ اگر و فقط اگر $x \in A' \cup A$ و اگر و فقط اگر $x \in A$ یا به ازای هر مجموعهٔ باز G شامل x، $(G\backslash\{x\}) \cap A \neq \phi$ اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعهٔ باز G شامل x، $G \cap A \neq \phi$.

ث- قسمت اول از (پ) بدیهی است. برای قسمت دوم قرار دهید: $A =]\circ, \frac{1}{2}[$ و $B =]\frac{1}{2}, 1[$ به عنوان زیرمجموعه‌های $\mathcal{R}$ با توپولوژی معمولی.

ح- فرض کنید A باز و $x \in A \cap \overline{B}$ و G باز دلخواه حول x باشد. بدیهی است که $x \in G \cap A$ و $G \cap A$ یک مجموعهٔ باز است. چون $x \in \overline{B}$ لذا بنا به قسمت (ب) $(G \cap A) \cap B \neq \phi$ و یا $G \cap (A \cap B) \neq \phi$. در این صورت مجدداً بنا به قسمت (ب) $x \in \overline{A \cap B}$.

ذ- قرار دهید $U =]\circ, 1[\cup]1, 2[$.

ژ- $X\backslash A^\circ \subseteq X\backslash A \subseteq (X\backslash A)^\circ$ زیرا $A \subseteq A^\circ$. برای مثال نقض قرار دهید $A =]1, 2[$.

ص- فرض کنید $x \in b(A^\circ)$. لذا برای هر باز G، $G \cap A^\circ \neq \phi$ و $G \cap (X\backslash A^\circ) \neq \phi$. چون $G \cap A^\circ \subseteq G \cap A$، بنابراین $G \cap A \neq \phi$. از طرف دیگر اگر $G \cap (X\backslash A) = \phi$، آنگاه $G \subseteq A$ و از قضیهٔ ۵، $G \subseteq A^\circ \subseteq A$ و در نتیجه $G \cap (X\backslash A^\circ) = \phi$ که تناقض است. لذا $x \in b(A)$. برای نشان دادن این‌که رابطه اکید است بگیرید $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$ به عنوان زیرمجموعهٔ $\mathcal{R}$ با توپولوژی معمولی.

برای قسمت دوم توجه کنید:

$$b(\overline{A}) = \overline{\overline{A}} \cap \overline{(X\backslash \overline{A})} \subseteq \overline{A} \cap \overline{(X\backslash A)} = b(A)$$

برای ارائه مثال قرار دهید $X = \{a, b, c, d, e\}$ و $A = \{a, b, c\}$ و

$$T = \{X, \phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

در این صورت $\overline{A} = X$، $b(\overline{A}) = \phi$ و $b(A) = \{c, d, e\}$.

۲۴. ب- چون $b(A) \subseteq \overline{A}$، بنابراین $b(A) \cup A^\circ \subseteq A^\circ \cup \overline{A} = \overline{A}$. از طرف دیگر اگر $x \in \overline{A}$ و $x \in A^\circ$، حکم بدیهی است. لذا فرض کنید $x \in \overline{A}$ و $x \notin A^\circ$، پس به ازای هر باز G شامل x، $G \not\subseteq A$ لذا $G \cap (X\backslash A) \neq \phi$ و چون $x \in \overline{A}$ پس $G \cap A \neq \phi$ لذا $x \in b(A)$. در نتیجه $\overline{A} \subseteq b(A) \cup A^\circ$. روشن است که استدلال بالا مجزا بودن دو مجموعهٔ A° و $b(A)$ را نیز نشان می‌دهد.

ث- فرض کنید $x \in b(b(A))^\circ$، پس مجموعهٔ باز G حول x موجود است که $G \subseteq b(b(A)) = \overline{b(A)} \cap \overline{(X\backslash b(A))} = b(A) \cap \overline{(X\backslash b(A))}$.

حال

$$G \subseteq b(A) \implies X\backslash b(A) \subseteq X\backslash G \implies \overline{X\backslash b(A)} \subseteq \overline{X\backslash G}$$

از طرف دیگر $G \subseteq \overline{X\backslash b(A)}$ لذا با توجه به رابطهٔ اخیر $G \subseteq \overline{X\backslash G}$ و چون G باز و در نتیجه $X\backslash G$ بسته است لذا باید $G \subseteq X\backslash G$ که تناقض است. قسمت دوم از (ت) نتیجه می‌شود.

ح- چون $b(A) \subseteq \overline{A}$ بنابراین اگر A بسته باشد، آنگاه $b(A) \subseteq \overline{A} = A$. بالعکس اگر $b(A) \subseteq A$، آنگاه $\overline{A} = b(A) \cup A^\circ \subseteq A \cup A^\circ = A$. بنابراین A بسته است.

د- اگر A بسته باشد $A = \overline{A}$ و اگر باز باشد $X\backslash A = \overline{X\backslash A}$ پس

$b(A) = \overline{A} \cap \overline{(X\backslash A)} = A \cap (X\backslash A) = \phi$

بالعکس اگر $b(A) = \phi$، از (ب) $\overline{A} = b(A) \cup A^\circ = A^\circ$ پس $\overline{A} = A^\circ = A$ یعنی A هم باز و هم بسته است.

ذ- با توجه به تمرین ۲۳ (ش) کافی است تساوی در جهت عکس ثابت شود. لذا بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض کنید $x \in b(A)$ و G یک باز دلخواه حول x باشد. از $x \in b(A)$، نتیجه می‌گیریم $G \cap A \neq \phi$ و در نتیجه $G \cap (A \cup B) \neq \phi$. نشان می‌دهیم $G \cap (X\backslash(A \cup B)) \neq \phi$. اگر $x \in X\backslash\overline{B}$، آنگاه x متعلق به مجموعهٔ باز $G \cap (X\backslash\overline{B})$ است. لذا باید $(G \cap (X\backslash\overline{B})) \cap (X\backslash A) \neq \phi$، زیرا $x \in b(A)$. در نتیجه $G \cap (X\backslash(\overline{B} \cup A)) \neq \phi$. از طرفی $X\backslash(\overline{B} \cup A) \subseteq X\backslash(B \cup A)$. لذا $G \cap (X\backslash(B \cup A)) \neq \phi$. بنابراین $x \in b(A \cup B)$. اگر $x \notin X\backslash\overline{B}$، آنگاه $x \in \overline{B}$ و از اینکه $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$، $x \notin \overline{A}$، اما از (ب) $b(A) \subseteq \overline{A}$ یعنی $x \in \overline{A}$ که تناقض است.

۲۷. طبق راهنمایی مسئله قرار دهید $\eta(A) = A \cup \gamma(A)$ و نشان دهید η در شرایط تمرین ۲۶ صدق می‌کند. اثبات شرایط i، ii و iv سرراست است. برای بررسی درستی شرط iii توجه کنید که

$$\eta(\eta(A)) = \eta(A) \cup \gamma(\eta(A)) = A \cup \gamma(A) \cup \gamma(A \cup \gamma(A))$$

که با توجه به شرط iv

$$\eta(\eta(A)) = A \cup \gamma(A) \cup \gamma(A) \cup \gamma(\gamma(A))$$

و با توجه به شرط iii

$$\eta(\eta(A)) = A \cup \gamma(A) = \eta(A)$$

و نهایتاً برای نشان دادن این‌که $\gamma(A) = A'$، ابتدا به سهولت از خواص ذکرشده می‌توان دریافت که اگر $A \subseteq B$، آنگاه $\gamma(A) \subseteq \gamma(B)$ و به علاوه اگر B یک مجموعهٔ بسته باشد بنا بر تمرین ۲۶، $\eta(B) = B$ و یا $B \cup \gamma(B) = B$ و در نتیجه $\gamma(B) \subseteq B$. حال نشان می‌دهیم $\gamma(A) \subseteq A'$. زیرا اگر $x \notin A'$، آنگاه مجموعهٔ باز G حول x موجود است که $A \cap G \subseteq \{x\}$. پس $A\backslash\{x\} \subseteq X\backslash G$ و بنابراین با توجه به بسته بودن $X\backslash G$، $\gamma(A\backslash\{x\}) \subseteq \gamma(X\backslash G) \subseteq X\backslash G$. چون $x \in G$ پس $x \notin X\backslash G$ و لذا $x \notin \gamma(A\backslash\{x\})$ و از فرض $x \notin \gamma(A)$. بالعکس، نشان می‌دهیم $A' \subseteq \gamma(A)$. ابتدا توجه کنید که

$$\eta((A\backslash\{x\}) \cup \gamma(A\backslash\{x\})) = (A\backslash\{x\}) \cup \gamma(A\backslash\{x\})$$

لذا مجموعهٔ $(A\backslash\{x\}) \cup \gamma(A\backslash\{x\})$ یک مجموعهٔ بسته است و به علاوه $(X\backslash((A\backslash\{x\}) \cup \gamma(A\backslash\{x\}))) \cap A \subseteq \{x\}$. حال اگر $x \in A'$ با توجه به باز بودن $X\backslash((A\backslash\{x\}) \cup \gamma(A\backslash\{x\})) = (X\backslash(A\backslash\{x\})) \cap (X\backslash\gamma(A\backslash\{x\}))$ و از رابطه اخیر باید $x \notin (X\backslash(A\backslash\{x\})) \cap (X\backslash\gamma(A\backslash\{x\}))$ و در نتیجه $x \notin X\backslash\gamma(A\backslash\{x\})$، پس $x \in \gamma(A\backslash\{x\}) \subseteq \gamma(A)$.

۲۹. فقط مجموعه‌های باپایان در این توپولوژی بسته هستند.

۳۳. اگر مجموعهٔ A بی‌پایان باشد، آنگاه $\overline{A} = \mathcal{N}$ و اگر باپایان باشد A در $\mathcal{N}$ چگال نیست.

۳۵. فرض کنید A یک مجموعهٔ بی‌پایان، $x \in X$ و G مجموعهٔ باز حول x باشد. پس $X\backslash G$ باپایان است. حال اگر $G \cap A = \phi$، آنگاه $A \subseteq X\backslash G$ و در نتیجه A باپایان است که خلاف فرض می‌باشد. پس $G \cap A \neq \phi$ و لذا $x \in \overline{A}$.

۳۷. فرض کنید U و V دو مجموعهٔ باز و چگال باشند و فرض کنید G یک مجموعهٔ باز و غیرتهی باشد. از چگال بودن U، $G \cap U \neq \phi$ و چون $G \cap U$ باز و غیرتهی است، از چگال بودن V، باید $(G \cap U) \cap V \neq \phi$ و یا $G \cap (U \cap V) \neq \phi$. پس $U \cap V$ در X چگال است.
برای قسمت دوم قرار دهید $A = \mathcal{Q}$ و $B = \mathcal{R}\backslash\mathcal{Q}$.

۴۰. فرض کنید A کامل باشد. یعنی $A = A'$. چون A' بسته است لذا A نیز بسته است. از طرفی می دانیم هر نقطه A یا یک نقطه تنها است یا یک نقطه تجمع. چون $A = A'$ پس همه نقاط تجمع هستند یعنی A نقطه تنها ندارد. بالعکس اگر A نقطهٔ تنها نداشته باشد تمام نقاط A تجمع هستند یعنی $A \subseteq A'$ و چون A بسته است $A' \subseteq A$. پس $A = A'$.

بخش ۲.۲

۳. الف ـ

$$
\begin{aligned}
(E^\circ)_A &= \cup(G^* : G^* \subseteq E \text{ و } (A,T_A) \text{ باز در } G^*\} \\
&= \cup\{(A\cap G : G^* \subseteq E \text{ و } (X,T) \text{ باز در } G\} \\
&= A\cap(\cup\{G : A\cap G \subseteq E \text{ و } (X,T) \text{ باز در } G\}) \\
&\supseteq A\cap(\cup\{G : G \subseteq E \text{ و } (X,T) \text{ باز در } G\}) \\
&= A\cap(E^\circ)_X
\end{aligned}
$$

ب ـ

$$
\begin{aligned}
b_A(E) &= (\overline{E})_A \cap (\overline{A\backslash E})_A = (A\cap(\overline{E})_X)\cap(A\cap(\overline{A\backslash E})_X) \\
&= A\cap((\overline{E})_X\cap(\overline{A\backslash E})_X) \\
&\subseteq A\cap((\overline{E})_X\cap(\overline{X\backslash E})_X) \\
&= A\cap b_X(E)
\end{aligned}
$$

۶. از چگال بودن Y در Z و چگال بودن Z در X داریم $Z \subseteq \overline{Y}$ و $X \subseteq \overline{Z}$ لذا $X \subseteq \overline{Z} \subseteq \overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$. یعنی Y در X چگال است.

۹. اولی و آخری مجموعه‌های باز هستند.

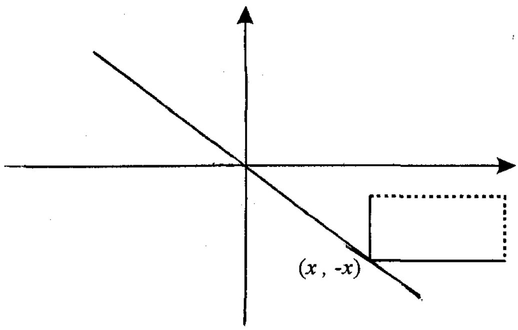
۱۲. فرض کنید C نسبت به توپولوژی نسبی روی $A\cup B$ یک مجموعهٔ باز باشد. از تعریف، مجموعهٔ باز G در (X,T) موجود است که: $C=(A\cup B)\cap G$ و یا $C=(A\cap G)\cup(B\cap G)$.
در این صورت به سهولت می‌توان دید:

$$
\begin{aligned}
C\cap A &= ((A\cap G)\cup(B\cap G))\cap A \\
&= ((A\cap G)\cap A)\cup((B\cap G)\cap A) \\
&= (A\cap G)\cup(B\cap(G\cap A)) = A\cap G
\end{aligned}
$$

و به طور مشابه

$$C\cap B = ((A\cap G)\cup(B\cap G))\cap B = \cdots = B\cap G$$

لذا $C\cap A$ نسبت به توپولوژی نسبی روی A و $C\cap B$ نسبت به توپولوژی نسبی روی B باز هستند.



شکل ۱

بخش ۲.۳

۱. هر دو.

۴. ابتدا فرض کنید $\mathcal{B}^*$ پایه برای توپولوژی T باشد. چون $\{p\} \in \mathcal{B} \subseteq T$، لذا باید به صورت اجتماعی از اعضاء B^* باشد. لذا $\{p\} \in \mathcal{B}^*$ و یا $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^*$. عکس مطلب باتوجه به این‌که $\mathcal{B}$ پایه فضای گسسته است از تمرین ۲ بدیهی است.

۷. الف- چون $[a,b] \cap [b,c] = \{b\}$ نمی‌تواند به صورت اجتماعی از فواصل بسته بیان شود.

ب- در این حالت چون نقطه ابتدایی بازه در مجموعه اعداد گویا و نقطه انتهایی بازه در مجموعه اعداد اصم قرار دارد مشکل قسمت (الف) رخ نمی دهد.

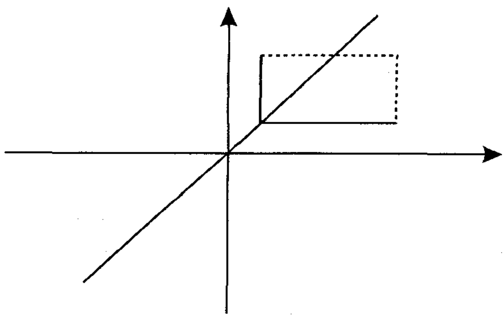
پ- چون با شرط اضافی در این قسمت، مشکل قسمت (الف) رفع می‌شود لذا دستهٔ داده‌شده تشکیل پایه می‌دهد.

۱۰. ب- طبق تمرین ۸ تمام تک‌نقطه‌ای‌های به صورت $\{(x,-x)\}$ عضو پایه روی توپولوژی T_A هستند. پس این توپولوژی گسسته است. (شکل ۱)

ت- اگر توپولوژی T_B گسسته باشد، باید تک‌نقطه‌ای $\{(x,x)\}$ یک مجموعهٔ باز در T_B باشد لذا باید مجموعهٔ باز $G \in \mathcal{B}$ موجود باشد که $\{(x,x)\} = B \cap G$. ولی با توجه به زیرفضای B چنین مجموعه‌ای موجود نیست. (شکل ۲)

۱۳. $\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,e\},\{e,a\}\}$.

۱۶. همان توپولوژی معمولی است.



شکل ۲

۱۹. بدیهی است که $]a,b[$ باز است و به علاوه چون $[a,\infty[=\cup_{\substack{b\in\mathcal{R}\\ b>a}}[a,b[$، لذا مجموعهٔ $[a,\infty[$ باز است. از طرف دیگر $]-\infty,a[=\cup_{\substack{c\in\mathcal{R}\\ c<a}}[c,a[$، لذا مجموعهٔ $]-\infty,a[$ باز و در نتیجه مکمل آن یعنی $[a,\infty[$ بسته است. همچنین $]-\infty,a[$ مکمل مجموعهٔ $[a,\infty[$ است لذا بسته است. حال مجموعهٔ $[a,b[$ اشتراک دو مجموعهٔ بستهٔ $]-\infty,b[$ و $[a,\infty[$ می‌باشد لذا بسته است.

بخش ۴.۲

۳. بزرگترین کران پایینی: $\{X,\phi,\{a\}\}$

و کوچکترین کران بالایی: $\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$.

۶. با توجه به تمرین ۵ قسمت (الف) کافی است نشان دهیم $]a,b[\in\mathcal{S}$. اینک $m>0$ را طوری بگیرید که $a+\frac{1}{m}<b-\frac{1}{m}$

$$]a,b[=\cup_{n\geq m}[a+\tfrac{1}{n},b-\tfrac{1}{n}]$$

چون $[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]\in\mathcal{S}$، لذا $]a,b[\in\mathcal{S}$.

۹. مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathcal{R}$ را با توپولوژی معمولی Γ و توپولوژی گسسته T در نظر بگیرید. بدیهی است که توپولوژی معمولی از توپولوژی گسسته ضعیف‌تر است. حال برای ارائه مثال نقض در قضیهٔ ۲۰ قرار دهید $A=]0,1[$ پس Γ_A گسسته نیست در حالی که T_A گسسته است و در قضیهٔ ۲۱ برای قسمت (الف) قرار دهید $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$. در این صورت نقطهٔ صفر نقطهٔ تجمع A در توپولوژی معمولی است در صورتی که در توپولوژی گسسته نیست. و برای قسمت (ب) قرار دهید $A=\{1\}$. پس در توپولوژی معمولی درون آن تهی است در حالی که در توپولوژی گسسته این مجموعه باز است. نهایتاً برای قسمت (پ) قرار دهید $A=]0,1[$.

پس مرز A در توپولوژی معمولی مجموعهٔ $\{0,1\}$ است در حالی که در توپولوژی گسسته مرز A تهی است.

بخش ۳.۱

۱. الف- چون $T=\{X,\phi\}$ و $T^*=\{X^*,\phi\}$ و به علاوه $f^{-1}(X^*)=X$ و $f^{-1}(\phi)=\phi$ لذا f پیوسته است.

ب- در این حالت f لزوماً پیوسته نیست. قرار دهید.

$$X=\{a,b\} \quad , \quad T=\{X,\phi\}$$
$$X^*=\{c,d\} \quad , \quad T^*=\{X^*,\phi,\{c\}\}$$
$$f(a)=c \quad , \quad f(b)=d$$

در این صورت f در a پیوسته نیست.

پ- در این حالت f پیوسته است.

۵. فرض‌کنید تابع‌مشخصه E پیوسته باشد. چون $\mathcal{X}_E^{-1}\{1\}=E$ و همچنین $\mathcal{X}_E^{-1}\{]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[\}=E$ پس E در (X,T) هم بسته و هم باز است. بالعکس اگر E در (X,T) هم بسته و هم باز باشد، و اگر G در $(\mathcal{R},\Gamma)$ باز باشد، در این صورت

$$\mathcal{X}_E^{-1}\{G\}=\begin{cases} E & 0\notin G \text{ و } 1\in G \\ \mathcal{R}\backslash E & 1\notin G \text{ و } 0\in G \\ \mathcal{R} & 1\in G \text{ و } 0\in G \\ \phi & 1\notin G \text{ و } 0\notin G \end{cases}$$

که در هر صورت $\mathcal{X}_E^{-1}\{G\}$ باز است.

۹. فرض کنید f پیوسته و $a\in\mathcal{R}$ باشد. برای هر $n\in\mathcal{N}$، مجموعهٔ $f^{-1}(]a-\frac{1}{n},\infty[)$ باز است لذا بنا به فرض

$$\begin{aligned}\cap_{n\in\mathcal{N}}f^{-1}(]a-\tfrac{1}{n},\infty[) &= f^{-1}(\cap_{n\in\mathcal{N}}]a-\tfrac{1}{n},\infty[)\\ &= f^{-1}([a,\infty[)=\{x:f(x)\geq a\}\end{aligned}$$

باز است. به طور مشابه $\{x:f(x)\leq a\}$ نیز باز و در نتیجه اشتراک آنها یعنی مجموعهٔ $\{x:f(x)=a\}$ باز است.

بالعکس، با توجه به تمرین ۸ کافی است نشان دهیم مجموعه‌های $f^{-1}\{]-\infty,a[\}$ و $f^{-1}\{]a,\infty[\}$، یا معادلاً مجموعه‌های $\{x:f(x)<a\}$ و $\{x:f(x)>a\}$ باز هستند.

اما

$$\{x : f(x) > a\} = \cup_{t>a}\{x : f(x) = t\}$$

و چون در هر فضای توپولوژیکی اجتماع دلخواه از مجموعه‌های باز، باز است، لذا حکم ثابت می‌شود.

۱۱. شرط لازم و کافی برای پیوسته بودن f این است که تصویر معکوس هر نقطه یک مجموعهٔ باپایان باشد.

۱۴. الف- زیرا $f^{-۱}(]\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}[) =]\frac{۱}{۲}, ۱]$

ب- برای هر $[a,b]$، $a < b$، داریم:

$$f^{-۱}[a,b] = \begin{cases} [a,b] & b \leq ۱ \\ [a,۱] & ۱ < b \leq ۳ \ ,\ a \leq ۱ \\ \phi & ۱ < b \leq ۳ \ ,\ ۱ < a \leq ۳ \\ [a, b-۲] & b > ۳ \ ,\ a \leq ۱ \\ [۱, b-۲] = \cup_{n\geq ۱}[۱+\frac{۱}{n}, b-۲] & b > ۳ \ ,\ ۱ < a \leq ۳ \\ [a-۲, b-۲] & b > ۳ \ ,\ a > ۳ \end{cases}$$

که در هر صورت به $(\mathcal{R}, T)$ تعلق دارد.

۱۸. الف- فرض کنید f پیوسته و $B \subseteq Y$ باشد. پس $f^{-۱}(B^\circ) \subseteq f^{-۱}(B)$. چون $B^\circ \in T^*$، لذا $f^{-۱}(B^\circ) \in T$، بنابراین $f^{-۱}(B^\circ) = (f^{-۱}(B^\circ))^\circ \subseteq f^{-۱}(B))^\circ$. بالعکس، برای اثبات پیوستگی f، فرض کنید $G \in T^*$، لذا $G^\circ = G$ و $f^{-۱}(G^\circ) = f^{-۱}(G)$. از طرفی بنا به فرض $f^{-۱}(G^\circ) \subseteq (f^{-۱}(G))^\circ$، بنابراین $f^{-۱}(G) \subseteq (f^{-۱}(G))^\circ$. قرار دهید $H = f^{-۱}(G)$، در این صورت $H \in T$ و به علاوه $f(H) = f(f^{-۱}(G)) \subseteq G$. پس f پیوسته است.

ب- اگر f پیوسته و $B \subseteq Y$ باشد، آنگاه $f^{-۱}(\overline{B})$ در X بسته است. از طرفی $f^{-۱}(B) \subseteq f^{-۱}(\overline{B})$ و چون $f^{-۱}(\overline{B})$ بسته است پس $\overline{f^{-۱}(B)} \subseteq f^{-۱}(\overline{B})$. بالعکس فرض کنید K در Y بسته است، پس $K = \overline{K}$. از طرفی $\overline{f^{-۱}(K)} \subseteq f^{-۱}(\overline{K}) = f^{-۱}(K) \subseteq \overline{f^{-۱}(K)}$. پس $f^{-۱}(K)$ بسته و در نتیجه f پیوسته است.

پ- اگر f پیوسته باشد بنا به قضیه ۲ بخش ۳.۱ $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ از طرفی $A' \subseteq \overline{A}$، لذا $f(A') \subseteq f(\overline{A})$ و در نتیجه $f(A') \subseteq \overline{f(A)}$. بالعکس فرض کنید $f(A') \subseteq \overline{f(A)}$ برای هر $A \subseteq X$ و فرض کنید B در Y بسته باشد. داریم:

$$\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B) \cup (f^{-1}(B))'$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(\overline{f^{-1}(B)}) &= f(f^{-1}(B)) \cup f((f^{-1}(B))') \\ &\subseteq B \cup \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq B \cup \overline{B} = \overline{B} = B \end{aligned}$$

بنابراین

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$$

پس $f^{-1}(B)$ بسته و در نتیجه f پیوسته است.

ت- برای مثال نقض در حالت (الف) قرار دهید

$$X = \{a, b\}\ ; \quad T = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}\}$$
$$Y = \{x, y\}\ ; \quad T^* = \{Y, \phi, \{x\}\}$$
$$f(a) = x\ ; \quad f(b) = y\ ; \quad B = \{y\}$$

و در حالت (ب) قرار دهید

$$X = \{a, b\}\ ; \quad T = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}\}$$
$$Y = \{x, y\}\ ; \quad T^* = \{Y, \phi\}$$
$$f(a) = x\ ; \quad f(b) = y\ ; \quad B = \{y\}$$

و در حالت (پ)، فضاهای (X, T) و (Y, T^*) را مانند مثال نقض حالت (الف) فرض کرده و قرار دهید $A = \{a\}$.

۲۰. توجه کنید که

$$\{x : f(x) \leq g(x)\} = \{x : (f-g)(x) \leq 0\} = (f-g)^{-1}(]-\infty, 0])$$
$$\{x : f(x) < g(x)\} = \{x : (f-g)(x) < 0\} = (f-g)^{-1}(]-\infty, 0[)$$
$$\{x : f(x) = g(x)\} = \{x : (f-g)(x) = 0\} = (f-g)^{-1}(]-\infty, 0]) \cap (f-g)^{-1}([0, \infty[)$$

۲۷. قرار دهید

$$X = \{a, b, c\}\ , \quad T = \{X, \phi, \{b\}, \{a, c\}\}$$
$$Y = \{x, y\}\ , \quad T^* = \{Y, \phi, \{x\}, \{y\}\}$$
$$f(a) = x\ , \quad f(b) = f(c) = y\ , \quad A = \{a\}$$

۲۹. دنباله‌های $(1, \frac{1}{2}, \cdots)$ و $(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \cdots)$ دارای حد نیستند زیرا بازه $]-a, 0[$ شامل صفر است ولی هیچ مرحله‌ای موجود نیست که بعد از آن تمام اعضاء دنباله در آن واقع شوند. ولی دنبالهٔ وسطی دارای حد صفر است.

۳۱. به هر نقطه در $\mathcal{N}$ همگرا است.

۳۳. کافی است فضای توپولوژیک مکمل شمارش‌پذیر $(\mathcal{R}, T)$، مجموعهٔ $E = [1, 2]$ و نقطهٔ تجمع ۱ انتخاب شود. توجه کنید هر باز شامل ۱ به صورت $\mathcal{R} \backslash \{a_i : a_i \neq 1\}$ است و بدیهی است که اشتراک آن با E شامل نقطه دیگری غیر از ۱ است لذا ۱ نقطه تجمع است. ولی هیچ دنباله‌ای با اعضای متمایز به ۱ همگرا نیست. زیرا اگر باشد باید بعد از مرحله‌ای همه اعضاء دنباله ۱ شوند که خلاف فرض است.

بخش ۳.۲

۲. برای اثبات بسته بودن f، مجموعهٔ بستهٔ K را در فضای (X, T) اختیار کنید. در این صورت $K = \overline{K}$ و بنا به فرض $f(K) \supseteq \overline{f(K)} \supseteq f(K)$، پس $f(K) = f(\overline{K})$ بسته و در نتیجه f بسته است. بالعکس، فرض کنید f تابعی بسته، A یک مجموعه دلخواه در (X, T) باشد. پس $f(\overline{A})$ بسته در X^* است. از طرفی $f(A) \subseteq f(\overline{A})$، لذا $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$. برای مثال نقض قرار دهید:

$X = \{a, b\}$; $\quad T = \{X, \phi, \{a\}\}$; $\quad A = \{a\}$

$X^* = \{x, y\}$; $\quad T^* = \{X^*, \phi, \{x\}, \{y\}\}$

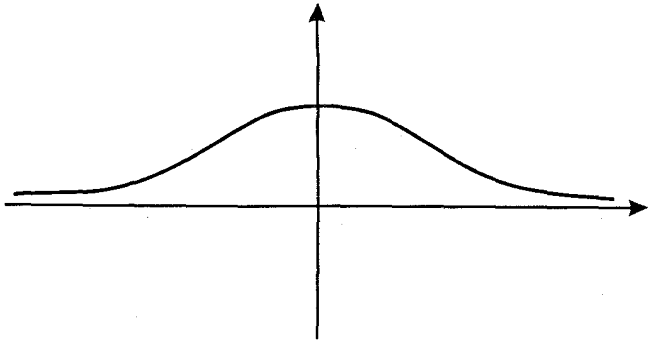
$f(a) = x$; $\quad f(b) = y$

۵. اگر f تابعی بسته و G یک مجموعهٔ باز باشد، آنگاه $X \backslash G$ بسته در X و در نتیجه $f(X \backslash G) = f(X) \backslash f(G) = Y \backslash f(G)$ بسته در Y و لذا $f(G)$ باز در Y است. عکس مطلب نیز به طور مشابه ثابت می‌شود.

بگیرید $f : \mathcal{R} \Rightarrow\to]0, 1]$ با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. (شکل ۳). ولی اگر $]0, 1]$ را به عنوان زیرفضای $\mathcal{R}$ در نظر بگیریم تابع $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ باز نیست زیرا تصویر مجموعهٔ باز $]-1, \infty[$، مجموعهٔ $]0, 1]$ است که در $\mathcal{R}$ باز نیست.

بخش ۳.۳

۱. فرض کنید $f : (X, T) \to (Y, T^*)$ همسانریختی باشد. نشان می‌دهیم $f(A') = (f(A))'$. ابتدا فرض کنید x نقطهٔ تجمع $A \subseteq X$ و G^* مجموعه باز حول $f(x)$ باشد. در این صورت



شکل ۳

$f^{-1}(G^*)$ مجموعهٔ باز حول x است. پس $A \cap (f^{-1}(G^*)\backslash\{x\}) \neq \phi$ و در نتیجه $f(A) \cap (G^*\backslash\{f(x)\}) \neq \phi$. یعنی $f(x) \in (f(A))'$، پس $f(A') \subseteq (f(A))'$.
برای اثبات نامساوی در جهت عکس فرض کنید $g = f^{-1}$. پس $B \subseteq Y$ موجود است که $f(A) = B$. حال برای تابع g بنا به قسمت اول $g(B') \subseteq (g(B))'$ و یا $g((f(A))') \subseteq (g(f(A)))'$ و چون $gof = i$، لذا $g((f(A))') \subseteq A'$ و با اثر f روی طرفین رابطهٔ اخیر داریم $(f(A))' \subseteq f(A')$. بقیه خواص نیز به‌طور مشابه ثابت می‌شود.

۳. تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید.

۶. پیوسته بودن f^{-1} معادل باز بودن f است.

۸. فرض کنید برای هر n، $f_n : X_n \to Y_n$ یک همسانریختی باشد. تعریف کنید:

$$f : X \to Y \; ; \quad f(a) = f_n(a) \, , \quad a \in X_n \text{ اگر}$$

f خوش‌تعریف است زیرا X_n ها مجزا هستند.

پوشا بودن و یک به یک بودن f بدیهی است.

پیوستگی f از قضیهٔ ۸ حاصل می‌شود.

برای باز بودن f توجه کنید که اگر G باز در $X = \cup X_n$ باشد، آنگاه برای هر n، $G \cap X_n$ باز در X_n است پس $f_n(G \cap X_n)$ باز در Y_n است و چون Y_n باز در $Y = \cup Y_n$ است لذا برای هر n، $f_n(G \cap X_n)$ باز در Y است. از طرفی:

$$\begin{aligned} f(G) &= f(G \cap X) = f(G \cap (\cup X_n)) = f(\cup (G \cap X_n)) \\ &= \cup f(G \cap X_n) = \cup f_n(G \cap X_n) \end{aligned}$$

پس $f(G)$ باز در Y است.

بخش ۴.۱

۳. الف- فرض کنید $x \in \overline{\prod A_\alpha}$ و U_β باز در X_β حول x_β باشد. تعریف کنید:

$$V_\alpha = \begin{cases} U_\beta & \alpha = \beta \\ X_\alpha & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت $\prod V_\alpha$ یک مجموعهٔ باز حول x در توپولوژی تیکونوف است لذا باید $\prod V_\alpha \cap \prod A_\alpha \neq \phi$ و از آنجا $\prod(V_\alpha \cap A_\alpha) \neq \phi$ و در نتیجه برای هر α، خصوصاً $\alpha = \beta$، $V_\beta \cap A_\beta \neq \phi$. پس $x_\beta \in \overline{A}_\beta$. چون β دلخواه است بنابراین $x \in \prod \overline{A}_\alpha$.

بالعکس، فرض کنید $x \in \prod \overline{A}_\alpha$، در این صورت برای هر α، $x_\alpha \in \overline{A}_\alpha$. حال فرض کنید $\prod U_\alpha$ یک مجموعهٔ باز در $\prod X_\alpha$ حول x باشد. پس برای هر α، U_α باز در X_α است، لذا $U_\alpha \cap A_\alpha \neq \phi$ و در نتیجه $\prod(U_\alpha \cap A_\alpha) \neq \phi$ و یا $(\prod U_\alpha) \cap (\prod A_\alpha) \neq \phi$ پس $x \in \overline{\prod A_\alpha}$.

ب- $\overline{A}_\alpha = X_\alpha$ برای هر α اگر و فقط اگر $\overline{\prod A_\alpha} = \prod \overline{A}_\alpha = \prod X_\alpha$.

پ- فرض کنید $x \in (\prod A_\alpha)^\circ$، پس مجموعهٔ باز $\prod U_\alpha$ حول x موجود است که $\prod U_\alpha \subseteq \prod A_\alpha$. پس به ازای هر α، $x_\alpha \in U_\alpha \subset A_\alpha$. لذا $x_\alpha \in (A_\alpha)^\circ$ و در نتیجه $x \in \prod(A_\alpha)^\circ$.

مثال نقض برای عدم وجود تساوی: قرار دهید $X_i = \{a, b\}$، $T_i = \{X_i, \phi, \{a\}\}$ و $A_i = \{a\}$ برای $i \in \mathcal{N}$. در این صورت $(A_i)^\circ = \{a\}$ و $\prod(A_i)^\circ = \{(a, a, a, \cdots)\}$. حال اگر $(\prod A_i)^\circ = \prod(A_i)^\circ$، آنگاه $(a, a, a, \cdots) \in (\prod A_i)^\circ$. لذا مجموعهٔ باز $\prod U_i$ واقع در $\prod A_i = \prod_i \{a\}$ حول نقطهٔ $(a, a, a, \cdots)$ موجود است، پس $\prod U_i = \prod_i \{a\}$. ولی این مجموعه در توپولوژی حاصل‌ضرب باز نیست زیرا باید فقط تعداد باپایان از U_i ها مخالف X_i باشند.

۵. می‌دانیم عناصر پایه روی $\prod X_\alpha$ به صورت $\prod U_\alpha$ است که در آن $U_\alpha = X_\alpha$ بجز برای تعداد باپایان. لذا $(\prod A_\alpha) \cap (\prod U_\alpha)$ عناصر پایه برای $\prod A_\alpha$ به عنوان زیرفضای $\prod X_\alpha$ است. اما $(\prod A_\alpha) \cap (\prod U_\alpha) = \prod(A_\alpha \cap U_\alpha)$ و $\prod(A_\alpha \cap U_\alpha)$ عناصر پایه برای توپولوژی حاصل‌ضرب روی $\prod A_\alpha$ هستند. بنابراین پایه‌ها یکسان و در نتیجه دو توپولوژی با هم معادل هستند.

۸. بدیهی است که اگر F همسانریختی باشد، آنگاه f پیوسته است. لذا فرض کنید f پیوسته است،

نشان می‌دهیم F یک همسانریختی است.

F پیوسته است. زیرا $\prod_1 oF = i$ و $\prod_2 oF = f$ توابع پیوسته هستند لذا بنا به قضیهٔ ۵، F پیوسته است.

بدیهی است که $F : X \to F(X)$ پوشا است.

F یک به یک است. زیرا اگر $F(x) = F(y)$، آنگاه $(x, f(x)) = (y, f(y))$ و در نتیجه $x = y$.

F باز است. فرض کنید G در X باز باشد، می‌توان دید که در این صورت $F(G) = F(X) \cap (G \times Y)$ و چون $G \times Y$ باز در $X \times Y$ است لذا $F(G)$ در $F(X)$ باز است.

بنابراین F یک همسانریختی است.

۱۱. نشان می‌دهیم $X \subseteq \overline{A}$. لذا فرض کنید $x = (x_\alpha) \in \prod X_\alpha$ و $\prod U_\alpha$ یک عنصر پایه حول x باشد و فرض کنید $U_\alpha = X_\alpha$ بجز برای تعداد باپایان اندیس مانند a_1، a_2، ... ، a_m. تعریف کنید:

$$y_\alpha = \begin{cases} b_\alpha & \alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \\ x_\alpha & \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \end{cases}$$

در این صورت $y = (y_\alpha) \in A \cap \prod U_\alpha$.

۱۴. قرار دهید $X = \mathcal{R}^+ \cup \{0\}$. در این صورت $X \times X$ با $\mathcal{R} \times X$ تحت تابع $(x, y) \to (x^2 - y^2\ ,\ 2xy)$ همسانریخت است. ولی X با $\mathcal{R}$ همسانریخت نیست.

۱۸. اندیس β را ثابت نگه داشته و برای هر $\alpha \neq \beta$ نقاط $m_\alpha \in X_\alpha$ را به طور دلخواه ا ختیار کرده و ثابت نگه دارید. باید نشان دهیم تابع $h : X_\beta \to Y$ با ضابطهٔ $h(x_\beta) = g(x)$، که در آن $x = (x_\alpha)$ و برای هر $a \neq \beta$، $x_\alpha = m_\alpha$، پیوسته است ولی $ho\prod_\beta = g$، $\prod_\beta$ پوشا و باز و g پیوسته است لذا بنا به تمرین ۷ (ت) بخش ۳.۲، h پیوسته است. برای مثال نقض قرار دهید:

$$g : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۲۱. دنبالهٔ (x_i) در توپولوژی حاصل‌ضرب به صفر همگرا است. زیرا اگر $\prod U_n$ که در آن $U_n = \mathcal{R}$ بجز برای تعداد باپایان اندیس، یک مجموعهٔ باز حول صفر باشد $N > 0$ را طوری بگیرید که برای هر $n > N$، $U_n = \mathcal{R}$. در این صورت برای هر $n > N$، $x_n \in \prod U_n$. به علاوه این دنباله به هیچ نقطهٔ دیگری همگرا نیست. زیرا اگر این دنباله به نقطهٔ $z \neq 0$ همگرا باشد، آنگاه $k > 0$ موجود است که مؤلفهٔ kـام z، z_k، مخالف صفر است. فرض کنید k اولین اندیس با خاصیت فوق باشد. مجموعهٔ باز U_k در $\mathcal{R}$ را حول z_k چنان اختیار کنید که شامل صفر نباشد، در این صورت $\prod U_n$ که در آن $U_n = \mathcal{R}$ برای $n \neq k$ یک باز حول z است که برای $n > k$ شامل هیچ یک از x_n ها نیست. توجه کنید که x_n در مؤلفهٔ kـام دارای مؤلفهٔ صفر است. بنابراین با توجه به این‌که توپولوژی جعبه‌ای شامل توپولوژی حاصل‌ضرب است پس در توپولوژی جعبه‌ای این دنباله حداکثر می‌تواند به صفر همگرا باشد. نشان می‌دهیم این دنباله به صفر نیز همگرا نیست. قرار دهید $U_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. در این صورت $\prod U_n$ در توپولوژی جعبه‌ای باز است ولی از آنجایی که مؤلفهٔ kـام، x_k، در U_k نیست پس هیچ یک از اعضای دنباله به این مجموعهٔ باز متعلق نیستند.

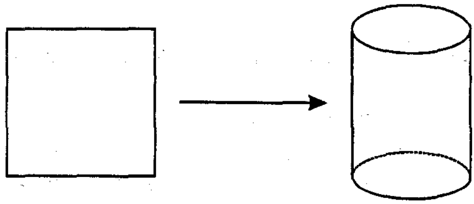
دنبالهٔ (y_i) در هر توپولوژی فقط به صفر همگرا است. نشان می‌دهیم این دنباله در توپولوژی جعبه‌ای به صفر همگرا است زیرا اگر $\prod U_n$ باز در توپولوژی جعبه‌ای حول صفر باشد آنگاه اعداد $a_1 > 0$ و $a_2 > 0$ موجود است که $]-a_1, a_1[\subseteq U_1$ و $]-a_2, a_2[\subseteq U_2$. قرار دهید $\frac{1}{N} < \min\{a_1, a_2\}$ در این صورت برای هر $n > N$، $\frac{1}{n} < \min\{a_1, a_2\}$، لذا y_n به $\prod U_n$ تعلق دارد. این دنباله در توپولوژی حاصل‌ضرب به هیچ نقطهٔ دیگری بجز صفر همگرا نیست. مانند قبل فرض کنید این دنباله به نقطهٔ $z \neq 0$ همگرا و k اولین اندیسی باشد که مؤلفهٔ kـام، z_k، مخالف صفر است. مجموعهٔ باز U_k در $\mathcal{R}$ را حول z_k چنان اختیار کنید که شامل صفر نباشد. در این صورت $\prod U_n$ که در آن $U_n = \mathcal{R}$ برای $n \neq k$ یک باز حول z است که برای $n > \max\{k, 2\}$ شامل هیچ یک از y_n ها نیست. توجه کنید که y_n در مؤلفهٔ kـام دارای مؤلفهٔ صفر است که در U_k واقع نیست.

بخش ۴.۲

۳. الف ـ زیرا هر عضو $\mathcal{D}$ شامل بخشی از اعضاء X است و به علاوه دو عضو مجزا در $\mathcal{D}$، شامل عناصر مشترک X نیستند.

ب ـ توجه کنید برای $G \subseteq \mathcal{D}$، $p^{-1}(G) = \cup_{A \in G} A$.

۵. تابع $f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to S^1 \times [0, 2\pi]$ با ضابطهٔ $f(x, y) = ((\cos x,\ sinx), y)$



شکل ۴

را در نظر بگیرید و از تمرین ۴ استفاده کنید (شکل ۴) و نشان دهید f پوشا است و به علاوه برای هر $z \in S^۱ \times [۰, ۲\pi]$، $f^{-۱}\{z\}$ یک دستهٔ هم‌ارزی است.

۸. در حالت اول، دسته‌های هم‌ارزی نقاط واقع روی یک سهمی هستند لذا فضای تجزیه با مجموعهٔ اعداد حقیقی همسانریخت است. در حالت دوم نقاط روی یک دایره در یک دستهٔ هم‌ارزی قرار می‌گیرند لذا فضای حاصل با $[۰, \infty[$ همسانریخت می‌شود.

۱۲. کافی است نشان دهیم تصویر عناصر پایه باز است. اما عناصر پایه در X به صورت $]a, b[\times\{۱\}$ و $]a, b[\times\{۰\}$ هستند. برای اثبات این‌که $p(]a, b[\times\{۱\})$ و $p(]a, b[\times\{۰\})$ باز هستند با توجه به تعریف توپولوژی خارج قسمت باید نشان دهیم تصویر معکوس آنها باز است اما اگر صفر در بازهٔ $]a, b[$ نباشد، آنگاه

$$p^{-۱}(p(]a, b] \times \{۰\})) = p^{-۱}(p(]a, b[\times\{۱\})) = (]a, b[\times\{۱\}) \cup (]a, b[\times\{۰\})$$

و اگر صفر در بازهٔ $]a, b[$ باشد، آنگاه

$$p^{-۱}(p(]a, b[\times\{۰\})) = (]a, b[\times\{۱\}) \cup (]a, b[\times\{۰\}) \backslash (۰, ۱)$$

$$p^{-۱}(p(]a, b[\times\{۱\})) = (]a, b[\times\{۱\}) \cup (]a, b[\times\{۰\}) \backslash (۰, ۰)$$

که در هر سه حالت مجموعه‌های باز هستند.

۱۴. اگر F یک مجموعهٔ بسته باشد داریم:

$$p^{-۱}(p(F)) = \begin{cases} F & A \notin p(F) \\ A \cup F & A \in p(F) \end{cases}$$

و چون A یک مجموعهٔ بسته است حکم ثابت می‌شود.

بخش ۵.۱

۳. فرض کنید A فشرده باشد. برای $m \in \mathcal{N}$، مجموعه‌های باز $\{U_m\}$

$$U_m =]-m, m[\times \cdots \times]-m, m[\quad \text{بار } n$$

پوشش باز A هستند. چون A فشرده است $k \in \mathcal{N}$، موجود است که $A \subseteq U_k$. لذا A کراندار است. حال نقطهٔ $b \in \mathcal{R}^n \backslash A$ را در نظر بگیرید و برای هر $a \in A$ قرار دهید:

$$H_a = \prod_{i=1}^{n}]a_i - \varepsilon_a \ , \ a_i + \varepsilon_a[$$
$$G_a = \prod_{i=1}^{n}]b_i - \varepsilon_a \ , \ b_i + \varepsilon_a[$$

که در آن $\varepsilon_a = \frac{1}{2}(\min \ |b_i - a_i|)$. در این صورت H_a و G_a دو مجموعهٔ باز و مجزا به ترتیب حول a و b هستند. از طرفی $\{H_a\}$ پوشش باز A است که باید دارای زیرپوشش باپایان باشد. آنها را H_1، ... ، H_k بنامید و متناظر به آن G_i را انتخاب کنید. در این صورت $G = \cap_{i=1}^{k} G_i$ مجموعهٔ باز حول b و مجزا از A است.

۶. اشتراک هر دسته از مجموعه‌های بسته، بسته است و بسته‌ها در فضاهای فشرده، فشرده‌اند.

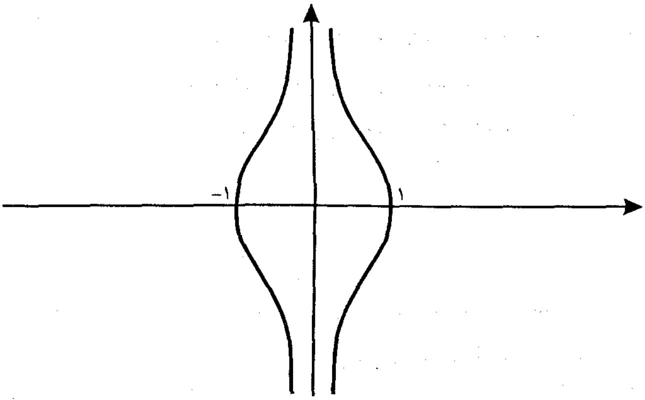
۹. چون F بسته در (X, T) است لذا $F \cap E$ بسته در (E, T_E) است و چون E فشرده است لذا $F \cap E$ فشرده در (E, T_E) است و بنا به قضیهٔ ۳، $F \cap E$ فشرده در (X, T) است.

۱۳. برای هر $y \in Y$، مجموعه‌های باز V_y و U_y به ترتیب حول y و x موجود است که $(x, y) \in U_y \times V_y \subseteq W$. حال از فشردگی Y زیرپوشش باپایان از $\{V_y\}$ موجود است. اشتراک U_y های متناظر به آنها را U بنامید. در این صورت

$$U \times Y = U \times (\cup V_i) = \cup(U \times V_i) \subseteq \cup(U_i \times V_i) \subseteq W$$

بری مثال نقض قرار دهید $X = Y = \mathcal{R}$، $x = (\circ, \circ)$ و $W = \{(x, y) : -\frac{1}{1+y^2} < x < \frac{1}{1+y^2})\}$ (شکل ۵).

۱۵. فرض کنید F در $X \times Y$ بسته و $y \in Y \backslash \prod_2(F)$. پس $y \notin \prod_2(F)$، لذا برای $x \in X$، $(x, y) \notin F$ و چون F بسته است، پس برای هر $x \in X$، $(x, y) \notin \overline{F}$. بنابراین به ازای هر $x \in X$، مجموعه‌های باز U_x حول x و V_x حول y در Y موجود است که $(U_x \times V_x) \cap F = \phi$. از طرفی دستهٔ $\{U_x\}_{x \in X}$، پوشش باز برای فضای فشردهٔ X است لذا X به وسیلهٔ تعداد باپایان از آنها پوشیده می‌شود. فرض کنید $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}$. حال V_{x_i} های متناظر را انتخاب کنید و قرار دهید $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_m}$. در این صورت $y \in V \subseteq Y \backslash \prod_2(F)$. یعنی $Y \backslash \prod_2(F)$ باز و در نتیجه $\prod_2(F)$ بسته است.



شکل ۵

۱۸. فرض کنید X یک مجموعهٔ بی‌پایان با توپولوژی مکمل شمارش‌پذیر باشد. نشان می‌دهیم X فشرده نیست. چون X بی‌پایان است دنبالهٔ (x_i) از اعضای متمایز، در X موجود است. تعریف کنید:

$$
\begin{aligned}
G_۱ &= X\backslash\{x_۱, x_۲, x_۳, \cdots\} \\
G_۲ &= X\backslash\{x_۲, x_۳, x_۴, \cdots\} \\
&\vdots \\
G_n &= X\backslash\{x_n, x_{n+۱}, x_{n+۲}, \cdots\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

در این صورت $\{G_i\}$ پوشش باز X است که زیرپوشش باپایان ندارد. زیرا $G_۱ \subseteq G_۲ \subseteq \cdots$.

۲۱. فرض کنید $\mathcal{R}$ به توپولوژی طرد A مجهز، G یک زیرمجموعه در $\mathcal{R}$ و $\{A_\alpha\}$ یک پوشش باز $\overline{G}$ باشد. اگر $G \cap A \neq \phi$، آنگاه $A \cap (\cup A_\alpha) \neq \phi$، لذا باید αـای موجود باشد که $A \cap A_\alpha \neq \phi$. از تعریف مجموعه‌های باز در این فضای توپولوژیک، باید $A_\alpha = \mathcal{R}$، لذا $\overline{G}$ به وسیلهٔ یکی از اعضاء پوشش، پوشیده می‌شود. حال فرض کنید $G \cap A = \phi$. در این صورت $A \subseteq G'$، زیرا هر مجموعهٔ باز، حول $a \in A$، با $\mathcal{R}$ مساوی است و بدیهی است که $G \cap (\mathcal{R}\backslash\{a\}) \neq \phi$. لذا $A \subseteq \overline{G}$، پس مشابه بحث بالا، $\overline{G}$ فشرده است.

۲۳. توپولوژی شکافته‌شده را به T^* و توپولوژی معمولی را به T نمایش می‌دهیم، در این صورت $T \subseteq T^*$. حال اگر A نسبت به T^* بسته نباشد، نسبت به T نیز بسته نیست، پس در T فشرده نیست، لذا در T^* نیز فشرده نخواهد بود و این یک تناقض است. عکس مطلب درست

نیست. قرار دهید $A = [a,b] \times \{\circ\}$. در این صورت A بسته است ولی فشرده نیست. از پوشش باز G_α استفاده کنید که در آن G_α گوی باز به مرکز $z_\alpha = (\alpha, \circ)$، $a \le \alpha \le b$، و شعاع $\frac{1}{2}$ است که از آن دو شعاع باز منطبق بر محور x ها حذف شده است.

بخش ۵.۲

۲. فرض کنید (X,T) فشرده موضعی، $x \in X$ و U یک مجموعهٔ باز دلخواه حول x باشد. بنا به فشردگی موضعی مجموعهٔ باز W حول x با بستار فشرده موجود است. قرار دهید $V = U \cap W$. بدیهی است که V باز و $x \in V \subseteq U$. از طرف دیگر $\overline{V} \subseteq \overline{U \cap W} \subseteq \overline{U} \cap \overline{W} \subseteq \overline{W}$. چون $\overline{W}$ فشرده و $\overline{V}$ بسته است پس $\overline{V}$ فشرده است. بالعکس، برای هر $x \in X$، قرار دهید $U = X$. پس بنا به فرض مجموعهٔ باز V با بستار فشرده حول x موجود است که $x \in V \subseteq X$.

۶. زیرا برای هر x در این فضای توپولوژیک مجموعه‌های باز شامل x به صورت $]x, b[$ و یا $]a, b[$، $a < x < b$، هستند که در هر دو صورت بستار آنها به صورت $[x, b[$ و $[a, b[$ است که فشرده نیست زیرا کافی است از پوشش باز $[a, b - \frac{1}{n}]$ استفاده کنید.

۱۰. اجتماع دو مجموعهٔ موضعاً فشرده، لزوماً موضعاً فشرده نیست، در تمرین ۸ فرض کنید B محور x ها و $A = X \backslash B$ باشد. در این صورت توپولوژی نسبی حاصل، روی B گسسته خواهد بود و در نتیجه B موضعاً فشرده است و توپولوژی نسبی حاصل روی A با توپولوژی نسبی حاصل از توپولوژی معمولی معادل است لذا A نیز موضعاً فشرده است، در حالی که X موضعاً فشرده نیست. برای ارائه یک دستهٔ بی‌پایان از مجموعه‌های موضعاً فشرده که اجتماعشان موضعاً فشرده نباشد می‌توانید از مجموعهٔ اعداد گویا استفاده کنید. ولی در مورد اشتراک، اشتراک بی‌پایان مجموعه‌های موضعاً فشرده، لزوماً موضعاً فشرده نیست. فرض کنید $Q = \{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ و به ازای هر i، قرار دهید $A_i = \mathcal{R} \backslash \{q_i\}$ با توپولوژی نسبی معمولی، در این صورت A_i ها موضعاً فشرده هستند در حالی که $\cap A_i = \mathcal{R} \backslash Q$، یعنی مجموعهٔ اعداد اصم، فشردهٔ موضعی نیست. ولی اشتراک باپایان مجموعه‌های موضعاً فشرده، موضعاً فشرده است. برای اثبات، فرض کنید A و B دو مجموعهٔ موضعاً فشرده، در فضای توپولوژیک (X,T) و $x \in A \cap B$ باشد. پس مجموعه‌های باز $V \in T_A$، $W \in T_B$، $V^* \in T$ و $W^* \in T$ موجودند که

$V = V^* \cap A\ ,\quad W = W^* \cap B\ ,\quad$ موضعاً فشرده $(\overline{V})_A\ ,\quad$ موضعاً فشرده $(\overline{W})_B$

بنابراین

$$V \cap W = (V^* \cap W^*) \cap (A \cap B)$$

و چون $V^* \cap W^* \in T$، لذا $V \cap W \in T_{A\cap B}$ و به علاوه

i) $(\overline{V \cap W})_A \subseteq (\overline{V})_A$

ii) $(\overline{V \cap W})_{A\cap B} = (\overline{V \cap W})_A \cap (A \cap B) \subseteq (\overline{V \cap W})_A$

رابطهٔ (i) نشان می‌دهد که $(\overline{V \cap W})_A$ در (A, T_A) فشرده است و در نتیجه در $(A \cap B, T_{A\cap B})$ فشرده است لذا با استفاده از رابطه (ii)، $(\overline{V \cap W})_{A\cap B}$ در $(A \cap B, T_{A\cap B})$ فشرده است بنابراین $(A \cap B, T_{A\cap B})$ موضعاً فشرده است.

۱۳. فرض کنید $f : X \to Y$ پیوسته، پوشا، بسته و X موضعاً فشرده باشد و فرض کنید $y \in Y$. بنا به فرض $A = f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ فشرده است. برای هر $x \in A \subseteq X$، از موضعاً فشرده بودن X، مجموعهٔ باز U_x حول x با بستار فشرده موجود است بدیهی است که $\{U_x\}_{x\in A}$، پوشش باز A است لذا زیرپوشش باپایان دارد، فرض کنید $A \subseteq U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. قرار دهید $W = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. پس W باز و در نتیجه $X \backslash W$ بسته و بنابراین $f(X\backslash W)$ بسته و از آنجا $Y \backslash f(X\backslash W)$ باز است. می‌توان دید که $Y\backslash f(X \backslash W)$ شامل y نیز است. از طرف دیگر داریم $\overline{W} = \overline{U}_{x_1} \cup \cdots \cup \overline{U}_{x_n}$ و اجتماع تعداد باپایان از مجموعه‌های فشرده، فشرده است، لذا $\overline{W}$ فشرده و در نتیجه $f(\overline{W})$ فشرده است و به علاوه با توجه به پوشا بودن f

$$\overline{Y\backslash f(X\backslash W)} = \overline{f(X)\backslash f(X\backslash W)} \subseteq \overline{f(X\backslash (X\backslash W))} = \overline{f(W)} = f(\overline{W})$$

پس $\overline{Y\backslash f(X\backslash W)}$ فشرده و در نتیجه Y موضعاً فشرده است.

بخش ۶.۱

۳. فرض کنید $Z \subseteq Y \subseteq X$. دیدیم که $T_Z = (T_Y)_Z$. حال Z در Y همبند است اگر و فقط اگر $(Z, (T_Y)_Z)$ همبند باشد اگر و فقط اگر (Z, T_Z) همبند باشد اگر و فقط اگر Z در X همبند باشد.

۶. چون تصویر هر فضای همبند تحت تابع پیوسته همبند است لذا با توجه به تمرین ۴ بدیهی است.

۹. فرض کنید باشد. در این صورت $f : X\backslash\{(۰,۰)\} \to Y\backslash\{f(۰,۰)\}$ نیز همسانریختی است. از طرفی $X\backslash\{(۰,۰)\}$ همبند نیست زیرا اجتماع دو مجموعهٔ باز، غیرتهی و مجزای

$$\{(x, y) : x < ۰\} \cap \{(x, y) : \sqrt{(x+۱)^۲ + y^۲} = ۱\}$$

$$\{(x,y) : x > ۰\} \cap \{(x,y) : \sqrt{(x-۱)^۲ + y^۲} = ۱\}$$

است. در حالی که $Y\backslash\{f(۰,۰)\}$ با بازهٔ $]a,b[$ همسانریخت و در نتیجه همبند است.

۱۱. الف- فرض کنید X بی‌پایان و مجهز به توپولوژی مکمل باپایان باشد. اگر X ناهمبند باشد مجموعه‌های باز و غیرتهی G و H، در این فضای توپولوژیک موجودند که $X = G \cup H$ و $G \cap H = \phi$. چون G و H باز هستند لذا $X\backslash G$ و $X\backslash H$ هر دو باپایان هستند. از طرفی $G \cap H = \phi$. پس $G \subseteq X\backslash H$ و $H \subseteq X\backslash G$. لذا H و G هر دو باپایان می‌باشند و چون $X = G \cup H$ بنابراین X باید باپایان باشد که تناقض است.

ب- باید نشان دهیم برای هر زیرمجموعهٔ غیرتهی مانند $A \subseteq \mathcal{N}$، $b(A) \neq \phi$. اگر $b(A) = \phi$، آنگاه از رابطهٔ $\overline{A} = A^\circ \cup b(A)$، خواهیم داشت $\overline{A} = A^\circ$. یعنی A هم باز و هم بسته است. لذا نقاط $a_۱, \cdots, a_k$ و $b_۱, \cdots, b_m$ موجودند که $A = \mathcal{N}\backslash\{a_۱, \cdots, a_k\}$ و $A = \{b_۱, \cdots, b_m\}$. و این امکان‌پذیر نیست.

۱۴. قرار دهید $A = \{(x,y) : y = \sin\frac{۱}{x},\ ۰ < x \leq ۱\}$. در این صورت A همبند است زیرا تابع $f :]۰,۱] \to A$ با ضابطهٔ $f(x) = (x, \sin\frac{۱}{x})$ پیوسته و پوشا است. لذا A همبند است و چون $A \subseteq Y \subseteq \overline{A}$ لذا Y همبند است.

۱۷. الف- $A = \mathcal{R}\backslash\{۰\}$ ناهمبند است ولی $\overline{A} = \mathcal{R}$ همبند است.

ب- $A = [۱,۲]$ همبند است ولی $b(A) = \{۱,۲\}$ ناهمبند است.

پ- $A = \{\frac{۱}{n} : n \in \mathcal{N}\} \cup \{۰\}$ ناهمبند است ولی $b(A) = \{۰\}$ همبند است.

۱۹. چون A و B جدایش E هستند لذا

$$E = A \cup B\ ,\ \overline{A} \cap B = \phi\ ,\ A \cap \overline{B} = \phi\ ,\ A \neq \phi\ ,\ B \neq \phi$$

چون E بسته است، $\overline{E} = E$ لذا:

$$A \cap B = E = \overline{E} \Rightarrow \overline{B} \cap (A \cup B) = \overline{B} \cap \overline{E} = \overline{B} \Rightarrow$$

$$(\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap B) = \overline{B} \Rightarrow \phi \cup B = \overline{B} \Rightarrow B = \overline{B}$$

لذا B بسته است. به طور مشابه ثابت می‌شود A نیز بسته است.

۲۲. از برهان خلف استفاده کنید. فرض کنید X باپایان باشد، یعنی $X = \{a_۱, \cdots, a_k\}$، $k \geq ۲$. در این صورت $G = \{a_۱\}$ و $H = \{a_۲, \cdots, a_k\}$ دو مجموعهٔ باز، مجزا و غیرتهی خواهند بود که اجتماعشان برابر X است و این با همبندی X متناقض است.

۲۴. اگر $A \cup N$ همبند نباشد دارای جدایش C و D است، به عبارت دیگر

$$A \cup N = C \cup D\ ,\ \overline{C} \cap D = \phi\ ,\ C \cap \overline{D} = \phi\ ,\ C \neq \phi\ ,\ D \neq \phi$$

حال اگر $C \cap N \neq \phi$ و $D \cap N \neq \phi$، آنگاه

$$\overline{(C \cap N)} \cap (D \cap N) \subseteq (\overline{C} \cap \overline{N}) \cap (D \cap N) \subseteq (\overline{C} \cap D) \cap (\overline{N} \cap N) = \phi \cap N = \phi$$

$$(C \cap N) \cap \overline{(D \cap N)} \subseteq (C \cap N) \cap (\overline{D} \cap \overline{N}) \subseteq (C \cap \overline{D}) \cap (N \cap \overline{N}) = \phi \cap N = \phi$$

$$(C \cap N) \cup (D \cap N) = (C \cup D) \cap N = (A \cup N) \cap N = N$$

یعنی $C \cap N$ و $D \cap N$ جدایش N است که با همبندی آن تناقض دارد. لذا باید $C \cap N = \phi$ یا $D \cap N = \phi$. فرض کنید $C \cap N = \phi$. در این صورت اولاً داریم

$$(A \cup N) \cap C = (C \cup D) \cap C = C \ \Rightarrow\ (A \cap C) \cup (N \cap C) = C \ \Rightarrow$$
$$(A \cap C) \cup \phi = C \ \Rightarrow\ A \cap C = C \ \Rightarrow\ C \subseteq A$$

حال ادعا می‌کنیم C و $D \cup B$ جدایش M است زیرا با توجه به این‌که A و B جدایش $M \backslash N$ هستند داریم:

$$\overline{C} \cap (D \cup B) = (\overline{C} \cap D) \cup (\overline{C} \cap B) \subseteq \phi \cup (\overline{A} \cap B) = \phi \cup \phi = \phi$$

$$C \cap \overline{(D \cup B)} = C \cap (\overline{D} \cup \overline{B}) = (C \cap \overline{D}) \cup (C \cap \overline{B}) \subseteq \phi \cup (A \cap \overline{B}) = \phi \cup \phi = \phi$$

$$C \cup (D \cup B) = (C \cup D) \cup B = (A \cup N) \cup B = (A \cup B) \cup N = (M \backslash N) \cup N = M$$

که با همبندی M متناقض است. لذا $A \cup N$ همبند است. به طور مشابه ثابت می‌شود $B \cup N$ نیز همبند است.

۲۷. ابتدا فرض کنید X همبند و x و y، $x < y$، در آن موجود باشند که هیچ یک از عناصر X در بین آن واقع نیستند. قرار دهید $A = \{a \in X : a < x\}$ و $B = \{b \in X : y < b\}$. بدیهی است که A و B مجزا، غیرتهی و با توجه به تعریف توپولوژی ترتیبی، باز هستند و به علاوه اجتماع آنها برابر با X است و این با همبندی X متناقض خواهد بود.

برای اثبات عکس مطلب از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید X ناهمبند باشد و مجموعه‌های باز، مجزا و غیرتهی A و B چنان باشند که $A \cup B = X$. نقطهٔ $a \in A$ و $b \in B$ را انتخاب کنید و فرض کنید $a < b$. قرار دهید $A_\circ = A \cap [a, b]$ و $B_\circ = B \cap [a, b]$. بدیهی است که $A_\circ$ و $B_\circ$ در $[a, b]$ باز، مجزا، غیرتهی و کراندار هستند. لذا فرض کنید $c = \sup A_\circ$. لذا $a \leq c \leq b$. نشان می‌دهیم $c \notin A \cup B$.

حالت اول اگر $c \in B$، آنگاه $c \in B_\circ$، لذا $c \neq a$ و چون $B_\circ$ یک مجموعهٔ باز در $[a, b]$ است لذا بازهٔ $]d, c]$ موجود است که $]d, c] \subseteq B_\circ$. و این با فرض $c = \sup A_\circ$ متناقض است.

حالت دوم اگر $c \in A$، آنگاه $c \in A_\circ$، لذا $c \neq b$. مجدداً چون $A_\circ$ باز است بازهٔ $[c, e[$ موجود است که $[c, e[\subseteq A_\circ$. طبق فرض $z \in X$ موجود است که $c < z < e$. پس $z \in A_\circ$ که مجدداً با فرض $c = \sup A_\circ$ متناقض است.

بخش ۲.۶

۱. اگر دو نقطه غیرقرینه باشند با یک خط مستقیم بهم وصل می‌شوند و اگر قرینه باشند از یک نقطهٔ کمکی دلخواه استفاده می‌کنیم به این ترتیب که نقاط را به این نقطهٔ کمکی با یک خط مستقیم وصل می‌نماییم.

۴. فرض کنید $f : X \to Y$ پیوسته و پوشا، X همبند مسیری و c و d دو نقطهٔ دلخواه در Y باشند. پس نقاط مجزای a و b موجودند که $f(a) = c$ و $f(b) = d$. فرض کنید g مسیری از a به b باشد. در این صورت fog مسیری از c به d خواهد بود.

۶. اگر $U = \phi$ که بدیهی است. در غیر این صورت $x_\circ \in U$ موجود است. فرض کنید V مجموعهٔ همهٔ نقاطی در U باشد که به وسیلهٔ یک مسیر واقع در U به $x_\circ$ وصل می‌شود. نشان می‌دهیم V در U هم باز و هم بسته است و چون V مخالف تهی $(x_\circ \in V)$ و U همبند است، پس $U = V$. یعنی U همبند مسیری است.

V باز است. برای $x \in V \subseteq U$، چون U باز است پس گوی باز W حول x در U موجود است. چون هر گوی باز همبند مسیری است پس از هر نقطهٔ W به x مسیری موجود است و چون بین x و $x_\circ$ مسیر موجود است لذا از هر نقطهٔ W به $x_\circ$ مسیری موجود است پس $x \in W \subseteq V$، یعنی V باز است.

V بسته است. زیرا اگر $b \in \overline{V}$ و W گوی باز حول b باشد، آنگاه $W \cap V \neq \phi$. فرض کنید $z \in W \cap V$. پس بین z و $x_\circ$ مسیری موجود است. به علاوه گوی باز W همبند مسیری است، پس بین هر نقطهٔ W خصوصاً بین b و z مسیری وجود دارد. بنابراین بین b و $x_\circ$ مسیر موجود است، پس $b \in V$، یعنی V بسته است.

۹. برای هر دو نقطه در فضا از نقطهٔ کمکی موجود در اشتراک Y_α استفاده کنید.

بخش ۶.۳

۱. اگر X بی‌پایان باشد بنا به تمرین ۱۱ بخش ۶.۱، مؤلفهٔ همبندی آن خود X است و اگر باپایان باشد هر مجموعهٔ تک‌عضوی مؤلفهٔ همبندی آن خواهد بود. زیرا هم باز و هم بسته است.

۴. الف- لزوماً درست نیست. مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی معمولی را در نظر بگیرید و قرار دهید $Y=]0,1[\cup]2,3[$. پس $]2,3[$ مؤلفهٔ همبندی Y است در حالی که مؤلفهٔ همبندی $\mathcal{R}$ نیست.

ب- لزوماً درست نیست. قرار دهید $X=]0,5[\cup]6,7[$ و $Y=]1,2[\cup]3,4[$ پس $D=]0,5[$ مؤلفهٔ همبندی X است در حالی که $D\cap Y$ مؤلفهٔ همبندی Y نیست.

۷. فرض کنید C آن مؤلفهٔ همبندی X باشد که شامل $(0,0)$ است. اگر $C\neq\{(0,0)\}$ و اگر $n\in\mathcal{N}$ و $0\leq t\leq 1$، موجود باشند که $(\frac{1}{n},t)\in C$، قرار دهید:

$$U=\{(x,y)\in X : x<\frac{2n+1}{2n(n+1)}\}$$

$$V=\{(x,y)\in X : x>\frac{2n+1}{2n(n+1)}\}$$

پس $(\frac{1}{n},t)\in C\cap V$ و $(0,0)\in C\cap U$ و به علاوه $C\cap V$ و $C\cap U$ مجموعه‌های باز و مجزا در C هستند که اجتماعشان با C برابر است. این با همبند بودن C متناقض است. در غیر این صورت $C=\{(0,1),(0,0)\}$ که در این صورت نیز با همبندی C متناقض خواهد بود.

برای اثبات قسمت دوم، فرض کنید D شامل $(0,0)$ باشد. از باز بودن D، mـای موجود است که برای هر $n>m$، $(\frac{1}{n},0)\in D$. برای هر $n>m$، اشتراک هر خط قائم گذرا از $(\frac{1}{n},0)$ با X را به A_n نمایش دهید اگر A_n به تمامی در D باشد، آنگاه نقطهٔ $(0,1)$ در D است زیرا نقطهٔ تجمع دنباله $(\frac{1}{n},1)$ است و چون D بسته نیز است باید شامل نقاط تجمع خود نیز باشد.

در غیر این صورت، $k>m$ موجود است که A_k به تمامی در D نیست. پس A_k هم با D و هم با $X\setminus D$ اشتراک غیرتهی دارد که با توجه به باز بودن D و $X\setminus D$، با همبندی A_k متناقض خواهد شد. مؤلفه‌های همبند مسیری با مؤلفه‌های همبندی برابرند.

بخش ۶.۴

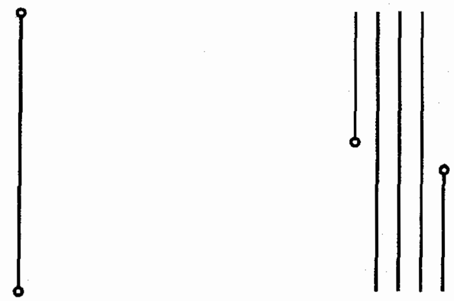
۲. فرض کنید $\{X_\alpha\}$ یک دسته از فضاهای تماماً ناهمبند و C یک مؤلفهٔ همبندی $\prod X_\alpha$ باشد. برای هر α، $\prod_\alpha(C)$ در X_α همبند است لذا تک‌نقطه‌ای است. فرض کنید $\prod_\alpha(C) = \{x_\alpha\}$. پس تمام نقاط C باید در مؤلفهٔ αـام، به ازای هر α، دارای عنصر ثابت x_α باشند. بنابراین C تک‌نقطه‌ای است.

۴. تابع همانی از مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی گسسته به مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی معمولی را در نظر بگیرید.

۷. بنا به قضیهٔ ۲۰ هیچکدام.

بخش ۶.۵

۵. توجه کنید که عناصر پایه حول هر نقطه به صورت‌های زیر است (شکل ۶) که بنا به تمرین ۲۷ بخش ۶.۱ همبند است.



شکل ۶

اما این فضا همبند مسیری موضعی نیست چون در غیر این صورت مؤلفه‌های همبندی با مؤلفه‌های همبندی مسیری یکسان خواهند شد. چون $I \times I$ همبند است لذا باید همبند مسیری نیز باشد که در مثال ۱۸ دیدیم که اینگونه نیست.

۷. فرض کنید X و Y همبند موضعی، $Z = X \times Y$، $(x,y) \in Z$ و G باز در Z حول (x,y) باشد. از تعریف، مجموعه‌های باز U و V به ترتیب در X و Y موجود است که $(x,y) \in U \times V \subseteq G$. از اینکه X و Y همبند موضعی هستند مجموعه‌های باز و همبند $F \subseteq U$ حول x و $H \subseteq V$ حول y موجود است. در این صورت $F \times H$ باز، همبند و شامل (x,y) است که در G واقع شده است. لذا $X \times Y$ همبند موضعی است.

۹. به ازای هر $\alpha \in [0,1]$ فضای گسسته $A_\alpha = \{a,b\}$ را در نظر بگیرید که همبند موضعی است. قرار دهید $X = \prod A_\alpha$. نشان می‌دهیم X همبند موضعی نیست. $\alpha = \alpha_0$ را اختیار کرده و تعریف کنید $x = (x_\alpha)$ که در آن $x_\alpha = a$ اگر $\alpha = \alpha_0$ و در غیر این صورت $x_\alpha = b$ و قرار دهید $U = \prod U_\alpha$ که در آن $U_\alpha = \{a\}$ اگر $\alpha = \alpha_0$ و در غیر این صورت $U_\alpha = A_\alpha$. در این صورت $x \in U$ ولی U شامل هیچ مجموعهٔ باز همبند نیست. زیرا اگر $x \in V \subseteq U$ و V باز باشد باید به صورت زیر باشد:

$$V_\alpha = \begin{cases} \{a\} & \alpha = \alpha_0 \\ \{a\} \text{ یا } \{b\} & \alpha = \alpha_1, \cdots, \alpha_k \text{ برای تعداد باپایان اندیس مانند } \\ \{a,b\} & \text{برای بقیه اندیس‌ها} \end{cases}$$

حال اندیس $\beta \neq \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k$ را اختیار کنید و تعریف کنید:

$$G_\alpha = \begin{cases} \{a\} & \alpha = \beta \\ V_\alpha & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \qquad H_\alpha = \begin{cases} \{b\} & \alpha = \beta \\ V_\alpha & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

در این صورت مجموعه‌های $G = \prod G_\alpha$ و $H = \prod H_\alpha$ دو مجموعهٔ باز، غیرتهی و مجزا هستند که اجتماعشان برابر V است.

۱۲. یک مجموعهٔ همبند در مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی معمولی به صورت یک بازه است لذا همبند موضعی است.

نه لزوماً. به عنوان مثال، مجموعهٔ ارائه‌شده در تمرین ۹ همبند است ولی همبند موضعی نیست.

۱۴. قسمت اول بدیهی است. برای قسمت دوم همین مثال را روی محور y ها تا بینهایت تکرار کنید.

بخش ۷.۱

۵. قرار دهید $X = \{a,b,c,d\}$، $T = \{\{c\},\{d\},\{c,d\},\{a,d\},\{a,c,d\},\{a,b,d\},X,\phi\}$، $Y = \{r,p,q\}$، $T^* = \{Y,\phi,\{r\},\{p,q\}\}$ و $f : X \to Y$ با ضابطهٔ $f(a) = p$، $f(b) = f(d) = q$ و $f(c) = r$. پس Y فضای خارج‌قسمت X و X یک فضای T_0 است ولی Y فضای T_0 نیست.

۷. اگر $B = X$، آنگاه توپولوژی ایجادشده، توپولوژی ناگسسته است و T_0 نیست. اگر $B = \phi$، توپولوژی ایجادشده، توپولوژی گسسته است که T_0 است و نهایتاً اگر $B \neq \phi$، $B \neq X$ و $B = \{b\}$ آنگاه برای هر دو نقطهٔ مجزای x و y در X داریم:

$$\overline{\{x\}}=\cap\{F: \text{بسته } F \text{ و } \{x\} \subseteq F\} = \cap\{F: \text{باز } X\backslash F \text{ و } \{x\}\subseteq F\}$$
$$= \cap\{F: (X\backslash F)\cap B = \phi \text{ و } \{x\} \subseteq F\}$$
$$= \cap\{F: B \cup \{x\} \subseteq F\}$$
$$= \cap\{F: \{b,x\} \subseteq F\}$$

لذا $\{b,x\} \subseteq \overline{\{x\}}$ و متشابهاً $\{b,y\} \subseteq \overline{\{y\}}$. لذا اگر $x \neq y$، آنگاه $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. لذا فضا $T_{\circ}$ است. ولی اگر B شامل حداقل دو نقطهٔ متمایز، مثلاً a و b باشد، آنگاه مشابه استدلال بالا $\overline{\{b\}} = \cap\{F : B \subseteq F\} = \overline{\{a\}}$، لذا فضا $T_{\circ}$ نیست.

بخش ۷.۲

۶. زیرا در هر فضای باپایان، مکمل هر مجموعهٔ تک‌عضوی، یک مجموعهٔ باپایان است که بنا به نتیجهٔ ۴ بسته است، لذا مجموعه‌های تک‌عضوی در این فضا باز نیز هستند.

۸. برای قسمت دوم قرار دهید

$$X = \{a,b\} \quad , \quad T = \{X,\phi\}$$
$$X^* = \{p,q\} \quad , \quad T^* = \{X^*,\phi,\{p\},\{q\}\}$$
$$X \times X^* = \{(a,p),(b,p),(a,q),(b,q)\} \quad ,$$
$$T \times T^* = \{X \times X^*,\phi,X \times \{p\},X \times \{q\}\}$$

نشان دهید هیچ زیرمجموعهٔ بسته‌ای در $X \times X^*$ نمی‌تواند با (X^*,T^*) همسانریخت شود. هیچکدام از این فضاها در $X \times X^*$ بسته نسیتند.

۹. فرض کنید f از X به Y بسته و پوشا، X یک فضای $T_{۱}$ باشد. نشان می‌دهیم مجموعه‌های تک‌عضوی در فضای Y بسته هستند لذا فرض کنید $y \in Y$. چون f پوشا است نقطهٔ $a \in X$ موجود است که $f(a) = y$ و چون X یک فضای $T_{۱}$ است پس $\{a\}$ بسته است. حال از بسته بودن f، $f(\{a\}) = \{y\}$ نیز بسته است. پس Y یک فضای $T_{۱}$ است.

۱۱. هر تابع خارج‌قسمت پوشا و پیوسته است لذا اگر Y یک فضای $T_{۱}$ باشد، آنگاه به ازای هر $y \in Y$، $\{y\}$ بسته و در نتیجه از پیوستگی f، $f^{-۱}(y)$ در X بسته است. برای اثبات عکس مطلب، فرض کنید $y \in Y$، پس $f^{-۱}(y)$ در X بسته است. از طرفی

$$f^{-۱}(Y\backslash\{y\}) = f^{-۱}(Y)\backslash f^{-۱}(\{y\}) = X\backslash f^{-۱}(\{y\})$$

پس $f^{-1}(Y\backslash\{y\})$ در X باز و طبق تعریف توپولوژی روی Y، $Y\backslash\{y\}$ در Y باز و در نتیجه $\{y\}$ در Y بسته است. بنابراین Y، T_1 است.

۱۴. چون x نقطهٔ تجمع A است پس بنا به قضیهٔ ۶، هر مجموعهٔ باز شامل x، مانند U، شامل تعداد بی‌پایان از نقاط A است. یعنی $U \cap A$ بی‌پایان است. از طرفی F یک مجموعهٔ باپایان است لذا $U \cap (A\backslash F)$ بی‌پایان است. مجدداً از قضیهٔ ۶، x نقطهٔ تجمع $A\backslash F$ است.

۱۶. اگر نباشد مجموعهٔ باز U حول x موجود است که $(X\backslash\{x\}) \cap (U\backslash\{x\}) = \phi$ و در نتیجه $(X\backslash\{x\}) \cap U = \phi$. از طرفی فضا T_1 است، پس مجموعهٔ $X\backslash\{x\}$ باز و به علاوه $(X\backslash\{x\}) \cup U = X$ و این خلاف همبندی X است. برای قسمت دوم، قرار دهید $X = \{a, b\}$ و $T = \{X, \phi, \{b\}\}$. در این صورت بدیهی است که b نقطهٔ تجمع $X\backslash\{b\} = \{a\}$ نیست.

۱۸. قرار دهید $X = \{a, b, c\}$، $T = \{X, \phi, \{a\}, \{b, c\}\}$ و $A = \{c\}$. در این صورت $A' = \{b\}$ که بسته نیست.

بخش ۷.۳

۱. نه لزوماً. مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر X همراه با توپولوژی مکمل شمارش‌پذیر، T_2 نیست ولی حد هر دنباله در صورت وجود، یگانه است. توجه کنید که اگر دنبالهٔ (x_n) دارای حد x باشد، آنگاه مجموعهٔ $X\backslash\{x_n : \forall n, x_n \neq x\}$ یک مجموعهٔ باز حول x در این فضای توپولوژیک خواهد بود لذا kـای موجود است به طوری که برای هر $n > k$، $x_n \in X\backslash\{x_n : \forall n, x_n \neq x\}$. بنابراین برای هر $n > k$، $x_n = x$. پس حد یگانه است.

۵. کافی است نقطهٔ $b \in X$، $b \neq a$ را انتخاب کنید. اگر X هاسدورف باشد، باید مجموعه‌های باز و مجزای U و V به ترتیب حول a و b موجود باشند و چون توپولوژی طرد a را داریم باید $U = X$ که با مجزا بودن U و V متناقض است.

۸. فرض کنید (X, T) هاسدورف و x و y دو نقطهٔ متمایز در آن باشند. پس مجموعه‌های باز و مجزای U و V به ترتیب حول x و y موجود است. ادعا می‌کنیم $y \notin \overline{U}$. زیرا در غیر این صورت به ازای مجموعهٔ باز V حول y باید $U \cap V \neq \phi$ که خلاف فرض است. بالعکس فرض کنید مجموعهٔ باز U شامل x موجود است که $y \notin \overline{U}$. قرار دهید $V = X\backslash\overline{U}$. پس V باز و شامل y است و به علاوه $\overline{U} \cap V = \phi$. پس $U \cap V = \phi$ و حکم ثابت می‌شود.

۱۱. در قضیهٔ ۱۵ قرار دهید $g = i$.

۱۳. کافی است نشان دهیم $T \subseteq T^*$ لذا فرض کنید $V \in T$. پس مجموعهٔ $X\backslash V$ در (X,T) بسته است و چون (X,T) فشرده است $X\backslash V$ در (X,T) فشرده است که با توجه به رابطهٔ $T^* \subseteq T$، $X\backslash V$ در (X,T^*) فشرده خواهد بود اما (X,T^*) هاسدورف است لذا $X\backslash V$ در $(X,T*)$ بسته و در نتیجه V در (X,T^*) باز است.

۱۶. فرض کنید $A = \{(a,b) : f(a) = f(b)\}$ و $c \neq d$ دو نقطه در Y باشند. چون f پوشا است نقاط a و b در X موجودند که $f(a) = c$ و $f(b) = d$. پس $f(a) \neq f(b)$. لذا نقطهٔ (a,b) به مجموعهٔ بستهٔ A متعلق نیست. پس مجموعه‌های باز U و V موجودند که $(a,b) \in U \times V$ و $(U \times V) \cap A = \phi$. از باز بودن f، مجموعه‌های $f(U)$ و $f(V)$ دو مجموعهٔ باز به ترتیب حول $f(a)$ و $f(b)$ است. مجزا بودن مجموعه‌های $f(U)$ و $f(V)$ از $(U \times V) \cap A = \phi$ حاصل می‌شود.

۲۰. فرض کنید $\{A_\alpha\}$ یک دسته از مجموعه‌های فشرده در فضای هاسدورف X باشد. پس به ازای هر α، A_α بسته و در نتیجه $\cap A_\alpha$ بسته است. از طرفی $\cap A_\alpha$ در مجموعهٔ فشردهٔ A_α واقع است لذا فشرده است.

۲۱. اولاً ثابت می‌کنیم برای هر مجموعهٔ بستهٔ A با درون تهی و هر مجموعهٔ باز U، مجموعهٔ باز V موجود است به طوری که $V \subseteq U$ و $\overline{V} \cap A = \phi$. برای اثبات، توجه کنید که چون A بسته و $A^\circ = \phi$، پس A هیچ‌جاچگال است و قبلاً دیدیم که در این صورت برای هر مجموعهٔ باز U، زیرمجموعهٔ باز و غیرتهی $W \subseteq U$ موجود است به طوری که $W \cap A = \phi$. چون W غیرتهی است پس $x \in W$ موجود است، بدیهی است که $x \notin A$. از طرف دیگر چون A بسته و فضا فشرده است لذا A فشرده است. حال X هاسدورف، A فشرده و $x \notin A$. پس مجموعه‌های باز و مجزای H و G به ترتیب حول x و A موجود است. قرار دهید $V = H \cap W$. بنابراین V باز است و به علاوه $V \subseteq W \subseteq U$. با توجه به باز بودن G، $\overline{V} \cap A \subseteq \overline{H} \cap G \subseteq \overline{H \cap G} = \overline{\phi} = \phi$.

با توجه به آنچه در بالا ثابت شد برای مجموعهٔ بستهٔ A_1 و مجموعهٔ باز X، مجموعهٔ باز و غیرتهی V_1 موجود است به طوری که

$$V_1 \subseteq X \quad , \quad \overline{V}_1 \cap A_1 = \phi$$

و برای مجموعهٔ بستهٔ A_2 و مجموعهٔ باز V_1، مجموعهٔ باز V_2 موجود است که

$$V_2 \subseteq V_1 \quad , \quad \overline{V}_2 \cap A_2 = \phi$$

با ادامهٔ این روش دنبالهٔ

$$\overline{V}_1 \supseteq \overline{V}_2 \supseteq \cdots \supseteq \overline{V}_n \supseteq \cdots$$

از مجموعه‌های بسته حاصل می‌شود که $\overline{V}_n \cap A_n = \phi$. چون فضا فشرده است، $\cap \overline{V}_n \neq \phi$. فرض کنید $x \in \cap \overline{V}_n$. پس $x \in \overline{V}_n$ به ازای هر n و در نتیجه $x \notin A_n$ برای هر n.

۲۴. برای هر $y, y' \in Y$، بنا به فرض $f^{-1}(y)$ و $f^{-1}(y')$ فشرده است و چون (X, T) هاسدورف است پس مجموعه‌های باز و مجزای U و V موجود است که $f^{-1}(y) \subseteq U$ و $f^{-1}(y') \subseteq V$. پس $X \backslash U$ و $X \backslash V$ در (X, T) بسته و چون f بسته است $f(X \backslash U)$ و $f(X \backslash V)$ در Y بسته و در نتیجه $Y \backslash f(X \backslash U)$ و $Y \backslash f(X \backslash V)$ در Y باز هستند و به علاوه

$$\begin{aligned}
(Y \backslash f(X \backslash U)) \cap (Y \backslash f(X \backslash V)) &= Y \backslash (f(X \backslash U) \cup f(X \backslash V)) \\
&= Y \backslash f((X \backslash U) \cup (X \backslash V)) \\
&= Y \backslash f(X \backslash (U \cap V)) = Y \backslash f(X \backslash \phi) \\
&= Y \backslash f(X) = Y \backslash Y = \phi
\end{aligned}$$

به سهولت می‌توان دید که مجموعه‌های باز ارائه‌شده به ترتیب شامل y' و y هستند. به عنوان مثال نشان می‌دهیم $y \in Y \backslash f(X \backslash V)$ و یا معادلاً نشان می‌دهیم $y \notin f(X \backslash V)$. زیرا در غیر این صورت $x \in X \backslash V$ موجود است که $f(x) = y$ و در نتیجه $x \in f^{-1}(y) \subseteq V$ که تناقض است.

۲۷. الف_ اولاً $\mathcal{R}$ با توپولوژی مکمل باپایان زارسکی است زیرا هر مجموعهٔ بسته در این فضای توپولوژیک، یک مجموعهٔ باپایان است. لذا هر دنبالهٔ نزولی از مجموعه‌های بسته بالاجبار باید متوقف شود. ثانیاً این فضا تحویل‌ناپذیر است زیرا در غیر این صورت می‌توان نوشت $\mathcal{R} = F \cup K$ که در آن F و K دو مجموعهٔ بسته هستند لذا باپایان هستند. پس باید $\mathcal{R}$ باپایان باشد که تناقض است.

ب_ اگر فضای زارسکی تحویل‌ناپذیر باشد حکم بدیهی است. در غیر این صورت X اجتماعی از مجموعه‌های بسته و غیرتهی F_1 و F_2 است. بدیهی است که هیچ یک از این دو مجموعه زیرمجموعهٔ دیگری نیست. حال اگر F_1 و F_2 هر دو تحویل‌ناپذیر باشند حکم بدیهی است در غیر این صورت حداقل یکی از این دو تحویل‌پذیر است. مثلاً F_1، پس مجموعه‌های بستهٔ F_{11} و F_{12} موجودند که $F_1 = (F_1 \cap F_{11}) \cup (F_1 \cap F_{12})$. لذا $F_{11} \cap F_1 \subseteq F_1$ و $F_{12} \cap F_1 \subseteq F_1$ و $X = F_2 \cup F_{11} \cup F_{12}$. اگر این

روند متوقف نشود دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بسته و نزولی به دست می‌آید که با زارسکی بودن فضا متناقض می‌شود.

اگر تجزیهٔ مربوطه یگانه نباشد مثلاً

$$X = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k = Z_1 \cup \cdots \cup Z_t$$

و از آن

$$Y_1 = (Y_1 \cap Z_1) \cup \cdots \cup (Y_1 \cap Z_t)$$

هریک از مجموعه‌های $Y_1 \cap Z_i$ در Y_1 بسته است و چون Y_1 تحویل‌ناپذیر است پس i موجود است که

$$Y_1 = Y_1 \cap Z_i$$

و یا $Y_1 \subseteq Z_i$. با بحث مشابه j موجود است که $Z_i \subseteq Y_j$، لذا $Y_1 \subseteq Y_j$ که تناقض است.

ت- از قضیهٔ ۱۶، X دارای بی‌پایان مجموعهٔ باز، مجزا و غیرتهی است. آنها را $\{V_i\}$ بنامید و قرار دهید $U_k = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$ و $F_k = X \backslash U_k$. پس $\{F_k\}$ یک دسته از مجموعه‌های بسته و نزولی است که باید نهایتاً متوقف شود. پس n_ای موجود است که برای هر $k \geq n$، $F_k = F_n$ و در نتیجه برای هر $k \geq n$، $U_k = U_n$. خصوصاً $V_1 \cup \cdots \cup V_n \cup V_{n+1} = V_1 \cup \cdots \cup V_n$. پس باید $V_{n+1} \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n$ که با مجزا بودن $\{V_i\}$ متناقض است.

بخش ۷.۴

۳. کافی است ثابت کنیم فضا T_1 است. دو نقطهٔ x و y را در نظر بگیرید. چون فضا T_0 است مجموعهٔ باز U حول x موجود است که شامل y نیست. اما $X \backslash U$ بسته و شامل x نیست. پس، از منظم بودن فضا، مجموعهٔ باز V حول $X \backslash U$ موجود است که شامل x نیست. بدیهی است که y متعلق به V است ولی x متعلق به V نیست.

۶. اگر نقاط مجزای x و y در A نباشند. مجموعه‌های باز و دو به دو مجزای W، U و V به ترتیب حول A، x و y موجود است. در این صورت مجموعه‌های $p(U)$ و $p(V)$ باز و مجزا در Y به ترتیب حول x و y است. برای نقاط A و $x \notin A$ در Y نیز به همین روش عمل کنید.

۹. فرض کنید X اجتماع خطوط $y = \circ$ و $y = ۱$ و توپولوژی آن توپولوژی نسبی از $\mathcal{R}^۲$ باشد و فرض کنید Y فضای تجزیه آن چنان باشد که به ازای هر $x \neq \circ$، نقاط $(x, \circ)$ و $(x, ۱)$ در یک دستهٔ هم‌ارزی قرار می‌گیرند. همچنین فرض کنید $p : X \to Y$ تابع تجزیه باشد در این صورت p پیوسته، پوشا و باز و X، $T_۳$ است ولی Y منظم نیست. زیرا مجموعهٔ بستهٔ $p\{(\circ, \circ)\}$ و نقطهٔ $p(\circ, ۱)$ در Y توسط مجموعه‌های باز و مجزا از هم جدا نمی‌شوند.

۱۲. بنا به تمرین ۱۰ برای نقاط مجزای a و b متعلق به A، مجموعه‌های باز $U_۱$ و $U_۲$ به ترتیب حول a و b موجود است به طوری که $\overline{U}_۱ \cap \overline{U}_۲ = \phi$. بدیهی است که $U_۱ \cap A \neq \phi$ و $U_۲ \cap A \neq \phi$. حال فرض کنید مجموعه‌های باز $U_۱$، $U_۲$، ... ، U_n با شرایط مسئله موجود باشد. با توجه به بی‌پایان بودن A، یا نقطهٔ $c \in A \backslash (\overline{U}_۱ \cup \cdots \cup \overline{U}_n)$ موجود است که در این صورت بنا به تمرین ۱۱ برای مجموعهٔ بستهٔ $\overline{U}_۱ \cup \cdots \cup \overline{U}_n$ و نقطهٔ c، مجموعهٔ باز $U_{n+۱}$ حول c موجود است به طوری که $\overline{U}_{n+۱} \cap (\overline{U}_۱ \cup \cdots \cup \overline{U}_n) = \phi$. بدیهی است که $\overline{U}_{n+۱} \cap \overline{U}_j = \phi$ و $A \cap U_{n+۱} \neq \phi$ و یا چنین نقطه‌ای موجود نیست که در این صورت باید $A \subseteq \overline{U}_۱ \cup \cdots \cup \overline{U}_n$. چون A بی‌پایان است پس باید $A \cap \overline{U}_j$، به ازای حداقل یک j، بی‌پایان باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله آن را U_n بنامید. نقاط e و f را در $A \cap \overline{U}_n$ انتخاب کنید. در این صورت برای مجموعهٔ بستهٔ $\overline{U}_۱ \cup \cdots \cup \overline{U}_{n-۱} \cup \{e\}$ و نقطهٔ f، مجموعه‌های باز و بحرانی U و V به ترتیب حول f و $\overline{U}_۱ \cup \cdots \overline{U}_{n-۱} \cup \{e\}$ برای مجموعهٔ بستهٔ $\overline{U}_۱ \cup \cdots \cup \overline{U}_{n-۱} \cup \{f\}$ و نقطهٔ e مجموعه‌های باز و مجزای U^* و V^* به ترتیب حول e و $\overline{U}_۱ \cup \cdots \overline{U}_{n-۱} \cup \{f\}$ موجود است. قرار دهید $H = U \cap V^*$ و $G = U^* \cap V$. بدیهی است که $e \in G$ و $f \in H$ و $H \cap G = \phi$. اینک بنا به قضیهٔ ۲۱ مجموعه‌های باز W_n و $W_{n+۱}$ به ترتیب حول f و e موجود است که $\overline{W}_n \subseteq H$ و $\overline{W}_{n+۱} \subseteq G$. حال دستهٔ $U_۱$، ... ، $U_{n-۱}$، W_n، $W_{n+۱}$ خواص مذکور در مسئله را دارا هستند.

۱۳. فرض کنید $A \subseteq y$ بسته و $y \notin A$. چون f پیوسته است $f^{-۱}(A)$ بسته در X است و چون X منظم است برای هر $z \in f^{-۱}\{y\}$ مجموعه‌های باز U_z و V_z به ترتیب حول z و $f^{-۱}(A)$ موجود است. از فشردگی $f^{-۱}\{y\}$ تعداد باپایان از U_z ها آن را می‌پوشاند. اجتماع این تعداد باپایان را U بنامید و اشتراک V_z های متناظر را که یک مجموعهٔ باز حول $f^{-۱}(A)$ است، V بنامید. بنابراین U و V دو مجموعهٔ باز مجزا به ترتیب حول $f^{-۱}\{y\}$ و $f^{-۱}(A)$ است. با توجه به بسته بودن f، می‌توان نشان داد که مجموعه‌های $H = Y \backslash (f(X \backslash U))$ و $G = Y \backslash (f(X \backslash V))$ مجموعه‌های باز مجزا حول y و A هستند.

بخش ۷.۵

۱. طبق تعریف هر فضای T_4، نرمال است حال اگر فضایی هاسدورف باشد، آنگاه T_1 است و هر فضای T_1 و نرمال، T_4 است.

۴. از قضیهٔ ۲۷ استفاده کنید. مثلاً مجموعهٔ $\{(0,0)\}$ بسته است ولی به ازای هر مجموعهٔ باز مانند U حول آن که یک شعاع از آن حذف شده باشد بستار هیچ مجموعهٔ بازی حول $\{(0,0)\}$ نمی‌تواند در مجموعهٔ باز U واقع شود.

۶. برای اثبات «فقط اگر» ابتدا نشان دهید اگر C و D دو مجموعهٔ بسته و مجزا در $X\setminus A$ به عنوان زیرفضای (X,T) باشند، آنگاه در (X,T^*) نیز بسته و مجزا هستند. لذا مجموعه‌های باز U_1، V_1، U_2 و V_2 در (X,T) موجود است به طوری که

$$C \subseteq U_1 \cup (U_2 \cap A)$$

$$D \subseteq V_1 \cup (V_2 \cap A)$$

$$(U_1 \cup (U_2 \cap A)) \cap (V_1 \cup (V_2 \cap A)) = \phi$$

در این صورت $U = U_1 \cap (X\setminus A)$ و $V = V_1 \cap (X\setminus A)$ مجموعه‌های باز و مجزا در فضای $X\setminus A$ (به عنوان زیرفضای (X,T)) هستند که مجموعه‌های بستهٔ C و D را از هم جدا می کنند پس $X\setminus A$ نرمال است. برای اثبات «اگر»، فرض کنید C و D مجموعه‌های بسته و مجزا در (X,T^*) هستند. در این صورت مجموعه‌های $C\cap(X\setminus A)$ و $D\cap(X\setminus A)$ بسته و مجزا در $X\setminus A$ و $C\cap A$ و $D\cap A$ مجموعه‌های بسته و مجزا در A هستند. حال از نرمال بودن $X\setminus A$ و A استفاده کنید، مجموعه های باز و مجزا را پیدا کنید، اجتماع مناسبی از این مجموعه‌های باز پیدا شده، مجموعه‌های باز مورد نظر هستند.

۹. هر فضای T_4، نرمال است لذا برای مجموعه‌های بسته و مجزای F و K بازهای مجزای G و H موجود است که $F \subseteq G$ و $K \subseteq H$. از طرفی هر فضای T_4، منظم است. پس برای هر $k \in K$، باز V_k موجود است که $k \in V_k \subseteq \overline{V}_k \subseteq H$. و به طور مشابه برای هر $f \in F$، مجموعهٔ باز U_f موجود است که $f \in U_f \subseteq \overline{U}_f \subseteq G$. قرار دهید $U = \cup_{f\in F} U_f$ و $V = \cup_{k\in K} V_k$. پس $F \subseteq V$، $K \subseteq U$ و $\overline{U} \cap \overline{V} = \phi$.

۱۲. الف- فضای توپولوژیکی (X,T^*) را صفحهٔ شکافته‌شدهٔ باپایان و فضای توپولوژیکی (X,T) را صفحهٔ اقلیدسی فرض کنید. دیدیم که $T \subseteq T^*$ و به علاوه بنا به تمرین ۴، (X,T^*) نرمال نیست.

ب- فرض کنید (X,T) صفحهٔ مور و (X,T^*) دارای توپولوژی گسسته باشد. در این صورت $T \subseteq T^*$ و به علاوه (X,T) نرمال نیست.

۱۵. با توجه به تمرین ۱۴ کافی است نشان دهیم تابع تجزیه $p : X \to Y$ بسته است. لذا فرض کنید F بسته در X باشد. چون

$$p^{-1}(p(F)) = \begin{cases} F & F \cap A = \phi \\ F \cup A & F \cap A \neq \phi \end{cases}$$

پس $p(F)$ بسته و در نتیجه p یک تابع بسته است.

اگر $A = \phi$، آنگاه (X,T) فضای ناگسسته است و اگر $A = X$، آنگاه (X,T) فضای گسسته است که در هر دو صورت به وضوح نرمال است.

۱۸. فرض کنید $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$. پس به ازای هر i، $f_i : A \to \mathcal{R}$ قابل تعریف و در شرایط قضیه توسیع تیتز (قضیهٔ ۳۱) صدق می‌کند. لذا به ازای هر i، تابع پیوستهٔ $F_i : X \to \mathcal{R}$ موجود است که $F_i|_A = f_i$. تعریف کنید $F : X \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ $F(x) = (F_1(x), \cdots, F_n(x))$. بدیهی است که $F|_A = f$.

بخش ۷.۶

۳. فرض کنید X صفحهٔ مور، $D = \{(x, 0) : x \in \mathcal{Q}\}$ و Y فضای تجزیه X مشتمل بر D و تمام تک‌نقطه‌ای‌ها در $X \setminus D$ باشد. در این صورت بنا به مثال ۳۰، Y کاملاً منظم نیست در حالیکه در مثال ۲۹ دیدیم که X کاملاً منظم است.

۶. هر فضای T_1 و نرمال، T_1 و منظم نیز است. بنابراین از قضیهٔ ۳۵، کاملاً منظم است.

۱۱. صفحهٔ مور نرمال و در نتیجه T_4 نیست. ولی تیکونوف است زیرا بنا به مثال ۲۹ کاملاً منظم است و به علاوه در تمرین ۵ بخش ۷.۴ دیدیم که این فضا T_3 و در نتیجه T_1 است.

۱۴. فرض کنید X اجتماع خطوط $y = 0$ و $y = 1$ و توپولوژی آن توپولوژی نسبی از $\mathcal{R}^2$ باشد و فرض کنید Y فضای تجزیه آن چنان باشد که به ازای هر $x \neq 0$، نقاط $(x, 0)$ و $(x, 1)$ در یک دستهٔ هم‌ارزی قرار می‌گیرند. همچنین فرض کنید $p : X \to Y$ تابع تجزیه باشد، در این صورت p پیوسته، پوشا و باز و X، تیکونوف است ولی Y، T_2 نیست. زیرا نقاط $p\{(0, 0)\}$ و $p\{(0, 1)\}$ در Y توسط مجموعه‌های باز و مجزا از هم جدا نمی‌شوند.

بخش ۷.۷

۲. فضای ارائه‌شده در مثال ۲۷، نرمال است ولی کاملاً نرمال نیست زیرا یک زیرفضای غیرنرمال دارد.

بخش ۸.۱

۵. بنا به قضیهٔ ۶ بخش ۷.۲، $\{x\} = \cap\{G : x \in G \in T\}$ و چون X شمارش‌پذیر نوع اول است هر مجموعهٔ باز شامل x، شامل یکی از عناصر پایه شمارش‌پذیر نیز خواهد بود، لذا $\{x\} = \cap B_n(x)$.

۷. یک طرف از تعریف نقطهٔ حدی برقرار است. برای اثبات طرف دوم، یعنی اثبات باز بودن U، فرض کنید $y \in U$ و $\{B_n(y)\}$ پایه شمارش‌پذیر کاهشی در y باشد. اگر m_ای موجود باشد که $B_m(y) \subseteq U$، آنگاه U باز است. در غیر این صورت برای هر n، نقطهٔ $y_n \in B_n(y)\backslash U$ موجود است. به راحتی می‌توان نشان داد که دنبالهٔ (y_n) به y همگرا است لذا به ازای مجموعهٔ باز U، باید بعد از مرحله‌ای تمام اعضای دنباله در U واقع شود و این یک تناقض است.

۹. تابع $f : (\mathcal{R}, T) \to (\mathcal{R}, T^*)$ با ضابطهٔ $f(x) = x$ که در آن $(\mathcal{R}, T)$ فضای گسسته و در نتیجه شمارش‌پذیر نوع اول و $(\mathcal{R}, T^*)$ به توپولوژی مکمل باپایان مجهز است را در نظر بگیرید. پس f پیوسته است در حالی که $(\mathcal{R}, T^*)$ شمارش‌پذیر نوع اول نیست. برای اثبات قسمت دوم توجه کنید که اگر $\{B_n(x)\}$ پایه شمارش‌پذیر در نقطهٔ x باشد، آنگاه $\{f(B_n(x))\}$ پایهٔ شمارش‌پذیر در نقطهٔ $f(x) = x^*$ است.

بخش ۸.۲

۴. اگر $X\backslash A$ شمارش‌ناپذیر باشد، آنگاه با توجه به اینکه برای هر $x \in X\backslash A$، مجموعهٔ $\{x\}$ یک مجموعهٔ باز است، X با توپولوژی طرد A نمی‌تواند پایهٔ شمارش‌پذیر داشته باشد. پس فضای طرد A، شمارش‌پذیر نوع دوم نیست. ولی اگر $X\backslash A$ شمارش‌پذیر باشد دستهٔ $\{\{x\} : x \notin A\} \cup X$ پایهٔ شمارش‌پذیر برای این فضا است.

۷. بنا به قضیهٔ ۳۴ بخش ۷.۶، هر فضای کاملاً منظم، منظم است لذا باید عکس مطلب را ثابت کنیم یعنی نشان دهیم هر فضای شمارش‌پذیر نوع دوم و منظم، کاملاً منظم است. اما بنا به قضیهٔ ۹ همین فصل هر فضای منظم و شمارش‌پذیر نوع دوم، کاملاً نرمال و در نتیجه نرمال است. از

طرفی در قضیهٔ ۳۵ فصل ۷ دیدیم هر فضای نرمال و منظم، کاملاً منظم است. پس در فضاهای شمارش‌پذیر نوع دوم، منظم بودن و کاملاً منظم بودن معادل هستند.

۹. فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ نقاط تنها در فضای شمارش‌پذیر نوع دوم (X, T) باشد. و فرض کنید $A \neq \phi$ و $\mathcal{B}$ پایهٔ شمارش‌پذیر باشد. بنا به تعریف نقطهٔ تنها، به ازای هر $x \in A$، $B_x \in \mathcal{B}$ موجود است که $B_x \cap A = \{x\}$. چون $\mathcal{B}$ شمارش‌پذیر است پس A نیز شمارش‌پذیر است. برای اثبات قسمت دوم فرض کنید C یک مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر باشد، آنگاه نقطهٔ $x \in C$ موجود است که تنها نیست، لذا برای هر $B \in \mathcal{B}$ حول x، $C \cap (B \backslash \{x\}) \neq \phi$. پس x نقطهٔ تجمع است.

۱۰. در قضیهٔ ۴ بخش ۵.۱ دیدیم که اگر فضا فشرده باشد هر زیرمجموعهٔ بی‌پایان آن نقطهٔ تجمع دارد. بالعکس، فرض کنید $\{G_\alpha\}$ پوشش باز X باشد. بنا به قضیهٔ ۸، زیردستهٔ شمارش‌پذیر از این پوشش باز موجود است. حال بنا به تمرین ۱۵ بخش ۷.۲، این پوشش شمارش‌پذیر دارای زیرپوشش باپایان است. لذا فضا فشرده است.

بخش ۸.۳

۳. مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی حد پایینی را به E نمایش می‌دهیم. در تمرین ۲ دیدیم که E لیندلف است ولی $E \times E$ لیندلف نیست زیرا خط $y = -x$ با توپولوژی نسبی حاصل، گسسته است لذا با توجه به مثال ۱۰، لیندلف نیست. از طرفی خط $y = -x$ در این فضا بسته است و اگر $E \times E$ لیندلف باشد این خط نیز بنا به قضیهٔ ۱۴، لیندلف است و این تناقض است.

۵. اگر X لیندلف باشد هر پوشش باز آن دارای زیرپوشش شمارش‌پذیر است و بدیهی است که بستار این زیرپوشش نیز خود یک پوشش شمارش‌پذیر است. بالعکس فرض کنید دستهٔ $\{U_\alpha\}$ یک پوشش باز X باشد. برای هر α و هر $x \in U_\alpha$ از منظم بودن فضا، باز $V_{\alpha,x}$ حول x موجود است که $\overline{V}_{\alpha,x} \subseteq U_\alpha$. حال دستهٔ $\{V_{\alpha,x}\}_{\alpha,x}$ پوشش باز X است که بنا به فرض دارای زیردستهٔ شمارش‌پذیری است که بستار آن X را می‌پوشاند. یعنی $X = \cup_{\alpha_i} \cup_{x_i} \overline{V}_{\alpha_i,x_i}$. اما $\cup_{x_k} \overline{V}_{\alpha_i,x_k} \subseteq U_{\alpha_i}$ که در آن اجتماع روی $x_k \in U_{\alpha_i}$. بنابراین می‌توان گفت $X = \cup_{\alpha_i} U_{\alpha_i}$. یعنی زیرپوشش شمارش‌پذیر موجود است. لذا فضا لیندلف است.

بخش ۸.۴

۳. قبلاً دیدیم ه برای هر $E \subseteq X$، اگر $E \neq \phi$ و $E \cap A \neq \phi$، آنگاه $\overline{E} = X$. بنابراین خصوصاً به ازای هر $a \in A$، $\overline{\{a\}} = X$. پس فضای جذب شمارش‌پذیر است.

۶. اگر X شمارش‌پذیر باشد، می‌توان خود فضا را به عنوان زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر چگال انتخاب کرد و اگر شمارش‌ناپذیر باشد دارای حداقل یک زیرمجموعهٔ بی‌پایان است، آن را A بنامید. پس A بسته نیست، زیرا تنها مجموعه‌های بسته در این فضای توپولوژیک، مجموعه‌های باپایان و X است. حال ادعا می‌کنیم $\overline{A} = X$. برای $x \in X$ و مجموعهٔ باز G حول x، نقاط y_1، ... ، y_n مخالف x موجودند که $x \in G = X\backslash\{y_1, \cdots, y_n\}$. اگر $A \cap G = \phi$، آنگاه باید $A \subseteq X\backslash G = \{y_1, \cdots, y_n\}$. یعنی A باپایان است که خلاف فرض است. لذا $x \in \overline{A}$. یعنی هر زیرمجموعهٔ بی‌پایان در آن چگال است. بنابراین کافی است که یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر بی‌پایان در آن انتخاب شود.

۸. دیدیم صفحهٔ مور جداپذیر است در حالی که محور x ها به عنوان زیرفضای این فضای توپولوژیک جداپذیر نیست، چون محور x ها شمارش‌ناپذیر و به عنوان زیرفضا، توپولوژی گسسته دارد.

۱۱. صفحهٔ مور بنا به تمرین ۷ همین بخش، جداپذیر و بنا به تمرین ۵ بخش ۷.۴، منظم است ولی این صفحه بنا به مثال ۲۶ بخش ۷.۵، نرمال نیست.

بخش ۹.۱

۲. کافی است نامساوی مثلث اثبات شود. ابتدا توجه کنید برای هر $b \geq a > 0$، داریم
$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$$
حال با توجه به رابطهٔ اخیر

$$\begin{aligned}\delta(x,z) &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}\\ &\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}\\ &\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}\\ &= \delta(x,y)+\delta(y,z)\end{aligned}$$

۵. ابتدا توجه کنید برای هر $x, y \in \mathcal{Z}$

$d(x,y) < \frac{1}{p} \iff$ عدد 10^p، $x - y$ را عاد کند

برای اثبات این ادعا، اگر $d(x,y) < \frac{1}{p}$، مثلاً $d(x,y) = \frac{1}{q}$، آنگاه طبق تعریف، q بزرگترین عددی است که 10^{q-1}، $x-y$ را عاد می‌کند. اما $q > p$، پس $q - 1 \geq p$. یعنی 10^p، 10^{q-1} را عاد می‌کند. بنابراین 10^p، $x-y$ را عاد می‌کند.

بالعکس، فرض کنید 10^p، عدد $x - y$ را عاد کند. اگر p بزرگترین عدد با این خاصیت باشد، آنگاه $d(x,y) = \frac{1}{p+1} < \frac{1}{p}$ و اگر اینطور نباشد عدد $s > p$ موجود است به طوری که s بزرگترین عددی است که 10^s، $x-y$ را عاد می‌کند. بنابراین

$$d(x,y) = \frac{1}{s+1} < \frac{1}{p+1} < \frac{1}{p}$$

حال با استفاده از این مطلب به اثبات نامساوی مثلث می‌پردازیم. اثبات بقیه خواص متریک سرراست است. برای اثبات نامساوی

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

اگر $d(x,z) = 0$، که حکم ثابت است. در غیر این صورت فرض کنید $d(x,z) = \frac{1}{k}$. پس 10^k، $x-z$ را عاد نمی‌کند. بنابراین 10^k یا $x-y$ را عاد نمی‌کند یا $y-z$ را. لذا $d(x,y) \geq \frac{1}{k}$ یا $d(y,z) \geq \frac{1}{k}$ که در هر دو صورت حکم ثابت می‌شود.

ب- طبق تعریف، $d(p,A) = \inf\{d(p,a) : a \in A\}$. لذا اگر $p \in A$، چون $d(p,p) = 0$، آنگاه $d(p,A) = 0$.

ت- چون $A \cap B \neq \phi$، پس $c \in A \cap B$ موجود است. از طرفی $d(A,B) \leq d(a,b)$، برای هر $a \in A$ و هر $b \in B$، خصوصاً $d(A,B) \leq d(c,c) = 0$.

چ- فرض کنید همهٔ فاصله‌ها مخالف بینهایت باشند. برای $\varepsilon > 0$ داده‌شده $a \in A$، $b \in B$، $c \in C$ و $k \in A \cup B$ موجود است که

$$d(A,B) + \varepsilon \geq d(a,b)$$

$$d(A \cup B, C) + \varepsilon \geq d(k,c)$$

بنابراین

$$d(A,B) + d(A \cup B, C) + 2\varepsilon \geq d(a,b) + d(k,c) \geq d(k,c)$$

اگر $k \in A$ باشد، چون $d(k,c) \geq d(A,C)$ لذا

$$d(A,B) + d(A \cup B, C) + 2\varepsilon \geq d(A,C)\,; \quad \forall\varepsilon$$

در نتیجه

$$d(A,B) + d(A \cup B, C) \geq d(A,C)$$

خصوصاً

$$d(B) + d(A, B) + d(A \cup B, C) \geq d(A, C)$$

ولی اگر $k \notin A$، پس $k \in B$ و بنابراین

$$d(A, B) + d(A \cup B, C) + ۲\varepsilon \geq d(a, b) + d(k, c) \geq d(A, B) + d(B, C)$$

اما بنا به قسمت (پ):

$$d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C) - d(B)$$

پس

$$d(B) + d(A, B) + d(A \cup B, C) \geq d(A, C)$$

بحث در حالت بینهایت به عهدهٔ خوانندہ واگذار می‌شود.

بخش ۹.۲

۲. الف ـ نشان می‌دهیم مکمل آن باز است. لذا اگر $x \notin A$، آنگاه $d(x, a) > \varepsilon$. قرار دهید $r = d(x, a) - \varepsilon$. نشان دهید گوی به مرکز x و شعاع $\frac{r}{۲}$ با مجموعه، اشتراک تهی دارد.

ب ـ بدیهی است که $B \subseteq A$. بنابراین $\overline{B} \subseteq \overline{A} = A$.

پ ـ قرار دهید $X = \{ (x, y) : x^۲ + y^۲ = ۱\} \cup \{(x, ۰) : ۰ \leq x \leq ۱\}$ با متریک اقلیدسی، $\varepsilon = ۱$ و $a = (۰, ۰)$. در این صورت $A = X$ ولی $\overline{B} = \{(x, ۰) : ۰ \leq x \leq ۱\}$.

۶. باید نشان دهیم هر گوی باز حول g شامل یکی از نقاط Y است. لذا برای $\varepsilon > ۰$ داده‌شده تعریف کنید:

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ۱ - \frac{\varepsilon}{۲} \leq x \leq ۱ \\ ۰ & ۰ \leq x < ۱ - \frac{\varepsilon}{۲} \end{cases}$$

به سهولت می‌توان دید $f \in Y$.

برای قسمت دوم، فواصل باز را حول تعداد باپایان نقاط طوری اختیار کنید که مجموع طول این فواصل باز کمتر از ε شود و سپس مانند بالا تابع f را روی این فواصل باز ۱ و بیرون آن صفر تعریف کنید. تابع f خواص مورد نظر را خواهد داشت.

۷. الف- نشان دهید اگر V مجموعهٔ باز در فضای (Y,d') و $x \in f^{-1}(V)$، آنگاه $B(x,\frac{\varepsilon}{k}) \subseteq f^{-1}(V)$، که در آن ε چنان است که $B(f(x),\varepsilon) \subseteq V$.

ب- نشان دهید f و g لیپشیتز با ضریب ۱ هستند. مثلاً برای تابع f نشان می‌دهیم

$$d(f(A),f(C)) \leq d(A,C)$$

و یا معادلاً

$$d(A \cup B, C \cup B) \leq d(A,C)$$

برای اثبات این نامساوی، اگر $d(A \cup B, C \cup B) = \text{۰}$ که حکم بدیهی است، در غیر این صورت فرض کنید $d(A \cup B, C \cup B) = \frac{\text{۱}}{m}$، پس

$$(A \cup B) \cap [\text{۱},m] \neq (C \cup B) \cap [\text{۱},m]$$

و در نتیجه

$$(A \cap [\text{۱},m]) \cup (B \cap [\text{۱},m]) \neq (C \cap [\text{۱},m]) \cup (B \cap [\text{۱},m])$$

بنابراین

$$A \cap [\text{۱},m] \neq C \cap [\text{۱},m]$$

$$d(A,C) \geq \frac{\text{۱}}{m} = d(A \cup B, C \cup B)$$

پ- بدیهی است که

$$g(x)-g(y) = d(x,a)-d(y,a) \leq d(x,y)+d(y,a)-d(y,a) = d(x,y)$$

و به طور مشابه

$$g(y)-g(x) \leq d(y,x) = d(x,y)$$

بنابراین

$$-d(x,y) \leq g(x)-g(y) \leq d(x,y)$$

و یا معادلاً

$$|g(x)-g(y)| \leq d(x,y)$$

پس g لیپشیتز با ضریب ۱ و در نتیجه پیوسته است.

۱۰. نشان دهید

$$\delta(p,q) \leq d(p,q) \leq \sqrt{۲}\ \delta(p,q)$$

$$d(p,q) \leq \gamma(p,q) \leq ۲d(p,q)$$

که در آن d متریک اقلیدسی است. حال با توجه به تمرین ۹ متریک‌های d، δ و γ معادل هستند.

۱۷. فرض کنید (X,d) فضای متریک، F بسته و $x \notin F$. لذا $\delta > ۰$ـای موجود است که $F \cap B(x,\delta) = \phi$. بنابراین برای هر $y \in F$، $d(x,y) > \delta$. قرار دهید

$$۲\eta_y = d(x,y) - \delta$$

پس

$$B(y,\eta_y) \cap B(x,\delta) = \phi$$

حال تعریف کنید

$$G = \cup_{y \in F} B(y,\eta_y)$$

در این صورت G باز است و به علاوه

$$F \subseteq G \quad , \quad x \in B(x,\delta) \quad , \quad G \cap B(x,\delta) = \phi$$

۲۰. الف- برای $\varepsilon > ۰$ داده‌شده N را چنان اختیار کنید که $\frac{۱}{N} < \varepsilon$.

ب- فرض کنید دارای حد مثلاً a باشد. اگر a فرد باشد، آنگاه $۲^n - a$ نیز فرد است. لذا هیچ m موجود نیست که ۱۰^m بتواند $۲^n - a$ را عاد کند مگر $m = ۰$، که در این صورت به ازای هر n، $d(۲^n, a) = ۱$، که نمی‌تواند از هر εـای کوچک‌تر شود. عدد a زوج نیز نمی‌تواند باشد. زیرا در این صورت رقم یکان $۲^n - a$ به ازای هر چهار n متوالی فقط یک بار صفر می‌شود (آنهم زمانی که رقم یکان آن با رقم یکان a یکی شود) و سه بار مخالف صفر است. لذا $d(۲^n, a)$ به ازای هر چهار n متوالی، سه بار مساوی ۱ است و فقط یک بار کمتر از یک می‌شود که مجدداً نمی‌تواند از هر εـای کوچک‌تر شود.

پ- با استقرا نشان دهید $x_n + ۱۰ = ۱۰^{n+۱}$ و از آن نتیجه بگیرید که حد دنباله -۱۰ است.

ت- با استقرا نشان دهید $x_n + ۱ = (n+۱)!$ و سپس با استفاده از آن نشان دهید حد دنباله -۱ است.

دو مثال اخیر نشان می‌دهد جمع یک‌سری از اعداد مثبت، می‌تواند منفی باشد. بنابراین یک متریک می‌تواند بسیار نامناسب باشد.

۲۴. الف- تعریف کنید $f : A \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ $f(a) = d(a, B)$. بنا به تمرین ۷ این تابع پیوسته است و چون A فشرده است این تابع مینیمم خود را روی A اتخاذ می‌کند. به عبارت دیگر $p \in A$ موجود است به طوری که $f(p) \leq f(a)$ به ازای هر $a \in A$ و یا معادلاً

$$d(p, B) \leq d(a, B) \; ; \quad \forall a \in A$$

لذا

$$d(p, B) \leq \inf_{a \in A} \{d(a, B)\} = d(A, B) \leq d(p, B)$$

بنابراین

$$d(A, B) = d(p, B)$$

ب- برای هر $x \in X$، تابع $g_x(a) = d(x, a)$ را به‌کار برده و مانند بالا عمل کنید.

ت- روی $A \times A$ متریک η را به صورت $\eta((m, n), (a, b)) = d(m, a) + d(n, b)$ تعریف کنید. در این صورت تابع $f : A \times A \to \mathcal{R}$ با ضابطهٔ $f(a, b) = d(a, b)$ پیوسته و چون $A \times A$ فشرده است، f ماکزیمم خود را روی $A \times A$ اتخاذ می‌کند. نشان دهید نقطهٔ پیداشده، نقطهٔ مورد نظر است.

ث- مثل حالت (ت) عمل کنید.

ج- هر فضای متریک، هاسدورف است در نتیجه هر مجموعهٔ فشرده در آن، بسته نیز است. لذا $A' \subseteq A$. از طرفی در هر فضای $T_۱$ و در نتیجه در هر فضای متریک مجموعه نقاط تجمع بسته است لذا A' بسته است. حال A فشرده A' بسته و $A' \subseteq A$، لذا A' فشرده است.

ح- دیدیم که اگر A فشرده باشد نقطهٔ $p \in A$ موجود است که $d(p, B) = d(A, B)$. بنابراین کافی است نشان دهید اگر B بسته و $p \notin B$، آنگاه $d(p, B) > ۰$ است. اما اگر B بسته و $p \notin B$، آنگاه $\varepsilon > ۰$ موجود است که

$$B(p, \frac{\varepsilon}{۲}) \cap B = \phi$$

پس برای هر $b \in B$، $d(p, b) \geq \frac{\varepsilon}{۲}$، خصوصاً

$$\inf\{d(p, b) : b \in B\} \geq \frac{\varepsilon}{۲}$$

و یا

$$d(p, B) \geq \frac{\varepsilon}{۲} > ۰$$

۲۷. کافی است دو مجموعهٔ A و B طوری اختیار شوند که $A \neq B$ ولی $A \cap B \neq \phi$. در این صورت $d(A, B) = ۰$.

۲۹. ب- نسبت به متریک ρ، گوی‌ها به مرکز $x = (\frac{۱}{۳}, ۵)$ به صورت زیر هستند:

$$B(x, \frac{۱}{۲}) = \{(k, ۵) : ۰ \leq k < \frac{۵}{۶}\} \cup \{(k, n) : ۰ \leq k < \frac{۱}{۶}\ ,\ n \neq ۵\}$$

$$B(x, \frac{۱}{۴}) = \{(k, ۵) : \frac{۱}{۱۲} < k < \frac{۷}{۱۲}\}$$

پ- خیر، کافی است نشان دهیم مجموعهٔ $U = p(\cup V_n)$ که در آن p تابع تصویر و $V_n =]۰, \frac{۱}{n}[\times \{n\}$، نسبت به توپولوژی خارج‌قسمت باز ولی نسبت به متریک ρ باز نیست.

بخش ۹.۳

۵. دنبالهٔ $a_n = \tan(\frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{n})$ با متریک $\tan^{-۱}$ یک دنباله کشی است زیرا

$$d\Big(\tan(\frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{n}), \tan(\frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{m})\Big) = \Big|(\frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{n}) - (\frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{m})\Big| = \Big|\frac{۱}{n} - \frac{۱}{m}\Big|$$

ولی این دنباله با متریک $\tan^{-۱}$ همگرا نیست. زیرا اگر باشد بنا به تمرین ۴ باید با متریک معمولی نیز همگرا باشد که با توجه به پیوستگی تابع $\tan$، باید به $\tan \frac{\pi}{۲} = \infty$ همگرا شود که امکان‌پذیر نیست.

۹. بدیهی است که اگر فضای متریک X کامل باشد هر دنباله کشی و در نتیجه هر زیردنبالهٔ آن همگرا است.

بالعکس، فرض کنید (x_n) یک دنباله کشی در فضای متریک (X, d) باشد. بنا به فرض این دنباله دارای یک زیردنبالهٔ همگرا است. فرض کنید (x_{n_i}) زیردنبالهٔ همگرای آن، مثلاً به x، باشد. برای $\varepsilon > ۰$ داده‌شده، $N > ۰$ موجود است به طوری که

$$\forall n_i > N\ ;\quad d(x_{n_i}, x) < \frac{\varepsilon}{۲}$$

و چون دنبالهٔ (x_n) کشی است، $M > ۰$ موجود است به طوری که

$$\forall n, m > M\ ;\quad d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{۲}$$

حال برای هر $n > \max\{N, M\}$،

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x) < \varepsilon$$

پس دنبالهٔ (x_n) کشی است.

۱۲. (ب) $\Leftarrow$ (پ) قرار دهید $d\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} = \varepsilon_n$. پس $\varepsilon_n \to 0$ و به علاوه چون $d(a_n, a_{n+1}, \cdots\} = \sup\{d(a_m, a_t) : m, t \geq n\}$، لذا برای هر $m, t \geq n$، $d(a_m, a_t) < \varepsilon_n$. خصوصاً $d(a_n, a_m) < \varepsilon_n$ برای هر $m \geq n$.

(پ) $\Leftarrow$ (الف) برای $\varepsilon > 0$ داده‌شده، از رابطهٔ $\varepsilon_n \to 0$، $N > 0$ـای وجود است به طوری که برای هر $n > N$، $\varepsilon_n < \varepsilon$. حال برای هر $m, n > N$ داریم $d(a_n, a_m) < \varepsilon_n < \varepsilon$. پس دنبالهٔ (a_n) کشی است.

۱۶. قسمت اول بدیهی است. برای قسمت دوم از دنبالهٔ زیر استفاده کنید.

$$0/01,\ 0/01001,\ 0/010010001, \ldots$$

۱۷. الف‌ـ در تمرین ۷ـت بخش قبل دیدیم که تابع $h(x) = d(x, A)$ پیوسته است. چون $X\backslash G$ بسته و $x \notin X\backslash G$ بنا به تمرین ۱ـپ بخش قبل، $d(x, X\backslash G) \neq 0$، بنابراین تابع $f(x) = \dfrac{1}{d(x, X\backslash G)}$ پیوسته است.

پ‌ـ بدیهی است که برای هر $x, y \in G$، $d(x, y) \leq d^*(x, y)$.

بالعکس اگر $B_{d^*}(x, \eta)$ یک گوی باز حول x به شعاع η نسبت به متریک d^* باشد، از پیوستگی f، $\delta > 0$ـای، $\delta < \frac{\eta}{2}$ موجود است

$$d(x, y) < \delta \quad \to \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\eta}{2}\ ; \quad \forall y \in G$$

در این صورت برای هر $y \in B_d(x, \delta)$، خواهیم داشت:

$$d^*(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)| < \delta + \frac{\eta}{2} < \eta$$

لذا $y \in B_{d^*}(x, \eta)$. یعنی $B_d(x, \delta) \subseteq B_{d^*}(x, \eta)$. بنابراین d و d^* معادلند.

ت‌ـ فرض کنید X با متریک d کامل و (x_n) یک دنباله کشی در G نسبت به متریک d^* باشد. می‌توان دید تحت شرایط موجود، اولاً (x_n) یک دنباله کشی در X نسبت به متریک d است لذا $x \in X$ موجود است که، با متریک d، $x_n \to x$. ثانیاً $(f(x_n))$

در مجموعه اعداد حقیقی نسبت به متریک معمولی، یعنی متریک قدر مطلق، کشی است.
پس $t \in \mathcal{R}$ $(t \geq \circ)$ موجود است که با متریک قدرمطلق، $f(x_n) \to t$.
از طرفی

$$d(x_m, X\backslash G) = \inf\{d(x_m, y) : y \in X\backslash G\} = \inf\{d(x_m, y) : y \notin G\}$$

لذا اگر $x \notin G$، آنگاه $d(x_m, X\backslash G) \leq d(x_m, x)$ و در نتیجه، برای هر m، $d(x_m, x) \cdot f(x_m) \geq ۱$.
از طرف دیگر از روابط، $f(x_n) \to t$ با متریک قدرمطلق و $x_n \to x$ با متریک d، برای ε به اندازه کافی کوچک مثلاً $\varepsilon(t+\varepsilon) < \frac{۱}{۲}$، $N > \circ$ موجود است به طوری که برای هر $n > N$،

$$\circ < f(x_n) < t + \varepsilon \quad , \quad d(x_n, x) < \varepsilon$$

لذا برای n های بزرگ باید $d(x_n, x) \cdot f(x_n) < \frac{۱}{۲}$ و این با آنچه در بالا گفته شد متناقض است.

۱۹. چون $A_۱$ هیچ‌جاچگال است، بنا به تمرین ۴۱ بخش ۲.۱، به ازای مجموعهٔ باز و غیرتهی X، زیرمجموعهٔ باز و غیرتهی $S_۱ \subseteq X$ موجود است که $S_۱ \cap A_۱ = \phi$.

می‌توان $S_۱$ را گوی باز با شعاع کمتر از ۱ فرض کرد زیرا در غیر این صورت گوی باز واقع در $S_۱$، با شعاع کمتر از ۱ را انتخاب می‌کنیم.

حال فرض کنید $F_۱$ گوی بسته با شعاع کمتر از $\frac{۱}{۲}$، در $S_۱$ باشد. چون $A_۲$ هیچ‌جاچگال و $(F_۱)^\circ$ باز و غیرتهی است، پس شامل گوی باز و غیرتهی $S_۲$ با شعاع کمتر از $\frac{۱}{۲}$ است و $S_۲ \cap A_۲ = \phi$. گوی بستهٔ $F_۲$ با شعاع کمتر از $\frac{۱}{۴}$، واقع در $S_۲$ را انتخاب کنید. با ادامه این روش دنبالهٔ (F_n) از گوی‌های بسته که در آن شعاع F_n از $\frac{۱}{۲n}$ کمتر و بعلاوه $F_n \cap A_n = \phi$ حاصل می‌شود. بنا به تمرین ۱۱، دقیقاً یک نقطه مانند x در X موجود است که $\cap F_n = \{x\}$.
لذا برای هر n، $x \notin A_n$.

۲۰. فرض کنید $X = \cup X_n$ و X کامل باشد. اگر برای هر n، $(\overline{X}_n)^\circ = \phi$، آنگاه (X_n) یک دنباله از مجموعه‌های هیچ‌جاچگال خواهد بود. پس بنا به تمرین ۱۹ باید $x \in X$ موجود باشد که در هیچ X_n واقع نیست و این با فرض $X = \cup X_n$ متناقض است.

فهرست لغات

(برحسب الفبای انگلیسی)

Accumulation point	نقطهٔ تجمع (انباشتگی)
Algebraic number	عدد جبری
Associative law	قانون شرکت‌پذیری
Baire's theorem	قضیهٔ بیر
Banach's fixed point theorem	قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ
Banach's theorem	قضیهٔ باناخ
Base	پایه
Boolean algebra	جبر بولی
Boundary point	نقطهٔ مرزی
Bounded set	مجموعهٔ کراندار
Box topology	توپولوژی جعبه‌ای
Cantor set	مجموعهٔ کانتور
Cartesian products	حاصل‌ضرب دکارتی
Cauchy's inequality	نامساوی کشی
Cauchy sequence	دنبالهٔ کشی
Characteristic function	تابع مشخصه
Closed function	تابع بسته
Close set	مجموعهٔ بسته
Closure	بستار
Coarser topology	توپولوژی زمخت‌تر
Cocountable space	فضای مکمل شمارش‌پذیر
Cofinite space	فضای مکمل باپایان
Collection	دسته
Comb space	فضای شانه
Commutative law	قانون جابجایی
Compact set	مجموعهٔ فشرده

توپولوژی گسسته	Discrete topology
مجموعه‌های مجزا	Disjoint sets
اجتماع مجزا	Disjoint union
فاصلهٔ بین دو نقطه	Distance between two points
فاصلهٔ نقطه از مجموعه	Distance from the point to the set
تابع فاصله	Distance function
فاصلهٔ دو مجموعه	Distance of two set
قانون توزیع‌پذیری	Distributive law
مجموعهٔ تهی	Empty set
توپولوژی مساوی (معادل)	Equal topology
دستهٔ هم‌ارزی	Equivalence class
رابطهٔ هم‌ارزی	Equivalence relation
پایه‌های معادل	Equivalent basis
متریک‌های معادل	Equivalent metrics
توپولوژی اقلیدسی	Euclidean topology
فضای طرد	Exclusion space
نقطهٔ خارجی	Exterior point
توپولوژی ظریف‌تر	Finer topology
خاصیت اشتراک باپایان	Finite intersection property
مجموعهٔ باپایان	Finite set
صفحهٔ شکافته‌شدهٔ باپایان	Finite slotted plane
اصل اول شمارش‌پذیری	First countability axiom
فضای شمارش‌پذیر نوع اول	First countable space
نقطهٔ ثابت	Fixed point
فضای فورت	Fort space
تابع	Function
تعمیم قضیهٔ تیکونوف	Generalization of Tychonoff theorem
توپولوژی ایجادشده به وسیلهٔ پایه	Generated topology by base
توپولوژی ایجادشده به وسیلهٔ دسته	Generated topology by collection
توپولوژی حاصل از افراز	Generated topology by partition
بزرگ‌ترین کران پایینی خانواده	Greatest lower bound of family
متریک هاسدورف	Hausdorff metric
فضای هاسدورف	Hausdorff space
قضیهٔ هاینه ـ برل	Heine-Borel theorem
فضاهای همسانریخت	Homeomorphic spaces

Homeomorphism function .... تابع همسانریخت
Identity function .... تابع همانی
Image of set .... تصویر مجموعه‌ها
Inclusion space .... فضای جذب
Indiscrete space .... فضای ناگسسته
Indiscrete topology .... توپولوژی ناگسسته
Induced topology by the metric .... توپولوژی بدست‌آمده از متریک
Infinite set .... مجموعهٔ بی‌پایان
Interior of a set .... درون یک مجموعه
Interior point .... نقطهٔ داخلی (درونی)
Intermediate value theorem .... قضیهٔ مقدار میانی
Intersection .... اشتراک
Inverse image of set .... تصویر معکوس مجموعه
Inverse limit space .... فضای حد معکوس
Irreducible space .... فضای تحویل‌ناپذیر
Isolated point .... نقطهٔ تنها
Kuratowski's closure .... بستار کوراتسکی
Larger topology .... توپولوژی بزرگ‌تر
Least upper bound of family .... کوچک‌ترین کران بالایی خانواده
Lebesgue covering theorem .... قضیهٔ پوششی لبگ
Left radial topological space .... فضای توپولوژیک شعاع چپ
Limit of function .... حد تابع
Limit of sequence .... حد دنباله
Lindelöf space .... فضای لیندلف
Linearly ordered .... بطور خطی مرتب
Lipschitz function with coefficient k .... تابع لیپشیتز با ضریب k
Locally constant function .... تابع موضعی ثابت
Locally compact .... فشردهٔ موضعی (موضعاً فشرده)
Locally connected .... همبند موضعی
Locally path connected .... همبند مسیری موضعی
Lower limit topology .... توپولوژی حد پایینی
Member .... عضو
Metric function .... تابع متریک
Metric space .... فضای متریک
Metric topology .... متریک توپولوژی

Second countability axiom	اصل دوم شمارش‌پذیری
Second countable space	فضای شمارش‌پذیر نوع دوم
Separable space	فضای جداپذیر
Separable subset	زیرمجموعهٔ جداپذیر
Separated sets	مجموعه‌های جدا از هم
Separation axioms	اصول جداسازی
Sierpinski space	فضای سیرپینسکی
Simple extension	توسیع ساده
Simple order relation	رابطه ترتیبی ساده
Smaller topology	توپولوژی کوچک‌تر
Stronger topology	توپولوژی قوی‌تر
Subset	زیرمجموعه
Sub-base	زیرپایه
Sub-cover	زیرپوشش
Symmetric difference	تفاضل متقارن
Tietze extension theorem	قضیهٔ توسیع تیتز
Topological invariant	پایای توپولوژیکی
Topologically complete	بطور توپولوژیکی کامل
Topologically equivalent	هم‌ارز توپولوژیکی
Topological property	خاصیت توپولوژیکی
Topological space	فضای توپولوژیک
Topological subspace	زیرفضای توپولوژیک
Topology	توپولوژی
Torus	چنبره
Totally bounded	تماماً کراندار
Totally disconnected spaces	فضاهای تماماً ناهمبند
Totally ordered	کاملاً مرتب
Transcendental number	عدد متعالی
Triangle inequality	نامساوی مثلث
Trivial topology	توپولوژی بدیهی
Tychonoff space	فضای تیکونوف
Tychonoff theorem	قضیهٔ تیکونوف
Tychonoff topology	توپولوژی تیکونوف
T_0-space	فضای T_0
T_1-space	فضای T_1

T_2-space	فضای $T_۲$
T_3-space	فضای $T_۳$
T_4-space	فضای $T_۴$
T-T^* continuous at x	T-T^* پیوسته در x
Unbounded set	مجموعهٔ بیکران (غیرکراندار)
Uncountable set	مجموعهٔ غیرشمارش‌پذیر (شمارش‌ناپذیر)
Uniformly continuous	پیوستگی یکنواخت
Union	اجتماع
Upper limit topology	توپولوژی حد بالایی
Urysohn's lemma	لم اوریسون
Urysohn's Metrizable theorem	قضیهٔ متریک‌پذیری اوریسون
Usual metric	متریک معمولی
Usual topology	توپولوژی معمولی
Weaker topology	توپولوژی ضعیف‌تر
Zariski space	فضای زارسکی

فهرست لغات

(برحسب الفبای فارسی)

اجتماع	Union
اجتماع مجزا	Disjoint union
استوانه	Cylinder
اشتراک	Intersection
اصل اول شمارش‌پذیری	First countability axiom
اصل دوم شمارش‌پذیری	Second countability axiom
اصول جداسازی	Separation axioms
اصول شمارش‌پذیری	Countability axioms
بزرگ‌ترین کران پایینی خانواده	Greatest lower bound of family
بستار	Closure
بستار کوراتسکی	Kuratowski's closure
بطور توپولوژیکی کامل	Topologically complete
بطور خطی مرتب	Linearly ordered
بطور شعاعی باز	Radially open
بطور کامل متریک‌پذیر	Completely metrizable
پایای توپولوژیکی	Topological invariant
پایه	Base
پایه شمارش‌پذیر	Countable base
پایهٔ شمارش‌پذیر کاهشی	Reduce countable base
پایه‌های معادل	Equivalent basis
پوشش	Cover
پوشش باز	Open cover
پیوستگی یکنواخت	Uniformly continuous
پیوسته در x	Continuous at x
T-T^* پیوسته در x	T-T^* continuous at x
پیوسته روی مجموعه	Continuous on the set

تابع	Function
تابع انقباضی	Contraction function
تابع باز	Open function
تابع بسته	Closed function
تابع پوشا	Onto function
تابع تجزیه	Decomposition function
تابع تصویر	Projection function
تابع ثابت	Constant function
تابع خارج قسمت	Quotient function
تابع سره	Proper function
تابع فاصله	Distance function
تابع لیپشیتز با ضریب k	Lipschitz function with coefficient k
تابع متریک	Metric function
تابع مشخصه	Characteristic function
تابع موضعی ثابت	Locally constant function
تابع همانی	Identity function
تابع همسانریخت	Homeomorphism function
تابع یک به یک	One to one function
تجزیه	Decomposition
تحدید تابع	Restriction of function
ترتیب قاموسی	Dictionary ordering
ترکیب توابع	Composition of functions
تصویر مجموعه‌ها	Image of set
تصویر معکوس مجموعه	Inverse image of set
تعمیم قضیهٔ تیکونوف	Generalization of Tychonoff theorem
تفاضل متقارن	Symmetric difference
تفاضل نسبی	Relative difference
تماماً کراندار	Totally bounded
توپولوژی	Topology
توپولوژی اقلیدسی	Euclidean topology
توپولوژی ایجادشده به وسیلهٔ پایه	Generated topology by base
توپولوژی ایجادشده به وسیلهٔ دسته	Generated topology by collection
توپولوژی بدست‌آمده از متریک	Induced topology by the metric
توپولوژی بدیهی	Trivial topology
توپولوژی بزرگ‌تر	Larger topology

Order topology	توپولوژی ترتیبی
Dictionary order topology	توپولوژی ترتیبی قاموسی
Tychonoff topology	توپولوژی تیکونوف
Box topology	توپولوژی جعبه‌ای
Generated topology by partition	توپولوژی حاصل از افراز
Product topology	توپولوژی حاصل‌ضرب
Upper limit topology	توپولوژی حد بالایی
Lower limit topology	توپولوژی حد پایینی
Quotient topology	توپولوژی خارج قسمت
Coarser topology	توپولوژی زمخت‌تر
Weaker topology	توپولوژی ضعیف‌تر
Finer topology	توپولوژی ظریف‌تر
Stronger topology	توپولوژی قوی‌تر
Smaller topology	توپولوژی کوچک‌تر
Discrete topology	توپولوژی گسسته
Equal topology	توپولوژی مساوی (معادل)
Usual topology	توپولوژی معمولی
Indiscrete topology	توپولوژی ناگسسته
Relative topology	توپولوژی نسبی
Simple extension	توسیع ساده
Boolean algebra	جبر بولی
Disconnection	جدایش
Torus	چنبره
Cartesian products	حاصل‌ضرب دکارتی
Products of two set	حاصل‌ضرب دو مجموعه
Limit of function	حد تابع
Limit of sequence	حد دنباله
Ring of sets	حلقهٔ مجموعه‌ها
Finite intersection property	خاصیت اشتراک باپایان
Topological property	خاصیت توپولوژیکی
Interior of a set	درون یک مجموعه
Collection	دسته
Equivalence class	دستهٔ هم‌ارزی
Caushy sequence	دنبالهٔ کشی
Partial order relation	رابطهٔ ترتیب جزیی

Simple order relation	رابطه ترتیبی ساده
Equivalence relation	رابطهٔ هم‌ارزی
Sub-base	زیرپایه
Sub-cover	زیرپوشش
Countable sub-cover	زیرپوشش شمارش‌پذیر
Topological subspace	زیرفضای توپولوژیک
Subset	زیرمجموعه
Separable subset	زیرمجموعهٔ جداپذیر
Connected subset	زیرمجموعهٔ همبند
Radial plane	صفحهٔ شعاعی
Finite slotted plane	صفحهٔ شکافته‌شدهٔ باپایان
Moore plane	صفحهٔ مور
Contraction coefficent	ضریب انقباض
Algebraic number	عدد جبری
Transcendental number	عدد متعالی
Member	عضو
Distance between two points	فاصلهٔ بین دو نقطه
Distance of two set	فاصلهٔ دو مجموعه
Distance from the point to the set	فاصلهٔ نقطه از مجموعه
Locally compact	فشردهٔ موضعی (موضعاً فشرده)
Totally disconnected spaces	فضاهای تماماً ناهمبند
Homeomorphic spaces	فضاهای همسانریخت
T_0-space	فضای $T_۰$
T_1-space	فضای $T_۱$
T_2-space	فضای $T_۲$
T_3-space	فضای $T_۳$
T_4-space	فضای $T_۴$
Decomposition space	فضای تجزیه
Irreducible space	فضای تحویل‌ناپذیر
Topological space	فضای توپولوژیک
Left radial topological space	فضای توپولوژیک شعاع چپ
Right radial topological space	فضای توپولوژیک شعاع راست
Tychonoff space	فضای تیکونوف
Separable space	فضای جداپذیر
Inclusion space	فضای جذب

Inverse limit space	فضای حد معکوس
Quotient space	فضای خارج قسمت
Zariski space	فضای زارسکی
Odd-even space	فضای زوج و فرد
Sierpinski space	فضای سیرپینسکی
Comb space	فضای شانه
Deleted comb space	فضای شانه محذوف
First countable space	فضای شمارش‌پذیر نوع اول
Second countable space	فضای شمارش‌پذیر نوع دوم
Exclusion space	فضای طرد
Compact space	فضای فشرده
Fort space	فضای فورت
Completely regular space	فضای کاملاً منظم
Completely normal space	فضای کاملاً نرمال
Discrete space	فضای گسسته
Lindelöf space	فضای لیندلف
Metric space	فضای متریک
Complete metric space	فضای متریک کامل
Cofinite space	فضای مکمل باپایان
Cocountable space	فضای مکمل شمارش‌پذیر
Regular space	فضای منظم
Indiscrete space	فضای ناگسسته
Disconnected space	فضای ناهمبند
Normal space	فضای نرمال
Hausdorff space	فضای هاسدورف
Connected space	فضای همبند
Distributive law	قانون توزیع‌پذیری
Commutative law	قانون جابجایی
De Morgan's law	قانون دمرگان
Associative law	قانون شرکت‌پذیری
Banach's theorem	قضیهٔ باناخ
Baire's theorem	قضیهٔ بیر
Lebesgue covering theorem	قضیهٔ پوششی لبگ
Tietze extension theorem	قضیهٔ توسیع تیتز
Tychonoff theorem	قضیهٔ تیکونوف

قضیهٔ متریک‌پذیری اوریسون	Urysohn's Metrizable theorem
قضیهٔ مقدار میانی	Intermediate value theorem
قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ	Banach's fixed point theorem
قضیهٔ هاینه ـ برل	Heine-Borel theorem
قطر مجموعه	Diameter of set
کاملاً مرتب	Totally ordered
کوچک‌ترین کران بالایی خانواده	Least upper bound of family
گوی باز	Open disc
لم اوریسون	Urysohn's lemma
متریک‌پذیر	Metrizable
متریک توپولوژی	Metric topology
متریک گسسته	Discrete metric
متریک معمولی	Usual metric
متریک هاسدورف	Hausdorff metric
متریک‌های معادل	Equivalent metrics
مجموعهٔ باپایان	Finite set
مجموعهٔ باز	Open set
مجموعهٔ بسته	Close set
مجموعهٔ بی‌پایان	Infinite set
مجموعهٔ بیکران (غیرکراندار)	Unbounded set
مجموعهٔ توان	Power set
مجموعهٔ تهی	Empty set
مجموعهٔ چگال	Dense set
مجموعهٔ شمارش‌پذیر	Contable set
مجموعهٔ غیرشمارش‌پذیر (شمارش‌ناپذیر)	Uncountable set
مجموعهٔ فشرده	compact set
مجموعهٔ کامل	Perfect set
مجموعهٔ کانتور	Cantor set
مجموعهٔ کراندار	Bounded set
مجموعه‌های جدا از هم	Separated sets
مجموعه‌های مجزا	Disjoint sets
مجموعهٔ هیچ‌جاچگال	Nowhere dense set
مسیر	Path
مکمل یک مجموعه	Complement of a set
مؤلفهٔ همبندی	Connected component

Path connected component	مؤلفه همبندی مسیری
Cauchy's inequality	نامساوی کشی
Triangle inequality	نامساوی مثلث
Accumulation point	نقطهٔ تجمع (انباشتگی)
Isolated point	نقطهٔ تنها
Fixed point	نقطهٔ ثابت
Exterior point	نقطهٔ خارجی
Interior point	نقطهٔ داخلی (درونی)
Boundary point	نقطهٔ مرزی
Continuous at x relative to T and T^*	پیوسته در x نسبت به توپولوژی‌های T و T^*
Topologically equivalent	هم‌ارز توپولوژیکی
Path connected	همبند مسیری
Locally path connected	همبند مسیری موضعی
Locally connected	همبند موضعی
Neighborhood	همسایگی

نمایه

منابع

1- Ahlfors, L. V., & Sario, L., *Riemann surfaces,* Princeton university press, Princeton, N. J., (1960).

2- Alexandroff, P. & Hopf, H., *Topologie I,* Springer-Verlag, Beriin, (1935).

3- Baum, J. D., *Elements of point set topology.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., (1964).

4- Bers, L., *Lecturenotes,* New York university institute of math. Sciences, (1957).

5- Bing, R. H., "Extending a metric," *Duke Math. J.* **14,** 511-519 (1947).

6- Borges, C. J. R., "On extension of topologies," *Can. J. Math.* **19,** 474-487 (1967).

7- Bredon, G. E. , *Topology and Geometry.* Springer-Verlag, (1993).

8- Buskes, G. & Van Rooij, A., *Topological Spaces, From Distance to Neighborhood,* Springer-Verlag (1997).

9- Cullen, H. F., *Introduction to general topology,* D. C. Health, Boston (1968).

10- Dugundji, J., *Topology,* Allyn and Bacon, Boston, 5th Ed., (1970).

11- Eilenberg, S., "Ordered topological spaces," *Amer. J. Math.* **63,** 39-45(1941).

12- Gaal, S. A., *Point set topology.* Academic press. (1967).

13- Hewitt, E., "The role of compactness in analysis," *Amer. Math. Monthly,* **67,** 499-516 (1960).

14- Hirzebruch, *Topological methods in algebric geometry,* 3rd Ed., Springer-Verlag, Berlin (1966).

15- Hocking, J. G., & Young, G. S., *Topology,* Addision-Wesley, Reading, Mass., (1961).

16- Hu, S. T., *Introduction to general topology,* Holden-Day, San Francisco (1966).

17- Jänich, K., *Topologie,* Springer-Verlag, (1984).

18- Jones, F. B., "On the first countability axiom for locally compact Hausdorff spaces," *Coll. Math.* **7**, 33-34 (1959).

19- Kelley, J. L., *General topology,* Van Nostrand Reinhold Co., New York, (1955).

20- Knight, C. J., "Box topologies," *Quart. J. Math. Oxford,* (2) **15**, 41-54 (1964).

21- Lipschutz, S., *Schaum's outline series theory and problems of General topology; including 650 solved problems.* McGraw-Hill (1975).

22- Montgomery, D., "Non-separable metric spaces," *Fund. Math.* **25**, 527-534 (1935).

23- Moore, T. O., *Elementary general topology,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1964).

24- Munkres, J. R., *Topology a first course,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1975).

25- Nagata, J., *Modern general topology,* Noordhoff, Groningen (1968).

26- Novak, J., "On the Cartesian product of two compact spaces," *Fund. Math.* **40**, 106-112 (1953).

27- Ross, K. A., and Stone, A. H., "Products of separable spaces," *Amer. Math. Monthly* **71**, 398-403 (1964).

28- Royden, H. L., *Real analysis,* 2nd Ed., Macmillan, New York (1968).

29- Rudin, M. E., "The box product ofcountably many compact metric spaces," *General Topology and its Application,* **2** 293-298 (1972).

30- Rudin, W., *Real and complex analysis,* McGraw-Hill, New York (1966).

31- Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern analysis.* McGraw-Hill (1963).

32- Smirnov, Y. M., "A necessary and sufficient condition for metrizability of a topologicai spaces" *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **77**, 197-200 (1951)

33- Springer, G., *Introduction to Riemann surfaces,* Addison-Wesley, Reading (1957).

34- Steen, L. A., & Seebach, J. A., Jr., *Counterexamples in topology.* 2nd, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, (1978).

35- Stone, A. H., " Metrizability of decomposition spaces," *Proc. Amer. Math. Soc.* **37**, 690-700 (1956).

36- Stone, A. H., "Metrizability of union of spaces," *Proc. Amer. Math. Soc.* **10**, 361-366 (1959).

37- Tamano, H., "Normality and product spaces," *General Topology and its Relation to Modern Analysis and Algebra II* (Proc. Sympos., Prague, 1966), Academic Press, New York 349-352 (1967).

38- Thomas, J., "A regular space, not completely regular," *American Mathematical Monthly,* **76**, 181-182 (1969).

39- Van der Slot, J., "Some properties related to compactness," *Mathematical Centre Tract* **No. 19,** Mathematisch Centrum, Amsterdam (1968).

40- Wallace, A. D., "Separation spaces," *Ann. of Math.* (2) **42**, 687-697 (1941).

41- Whittaker, J., "On isomorphic groups and homeomorphic spaces," *Ann. of Math.* (2) **78**, 74-91 (1963).

42- Whybrun, G. T., "Open and Closed mapping," *Duke Math. J.* **17**, 69-76 (1950).

43- Wilder, R. L., *Topology of manifolds,* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 32 (1949).

44- Willard, S., *General Topology,* Addison-Wesley, Reading, Mass., (1970).