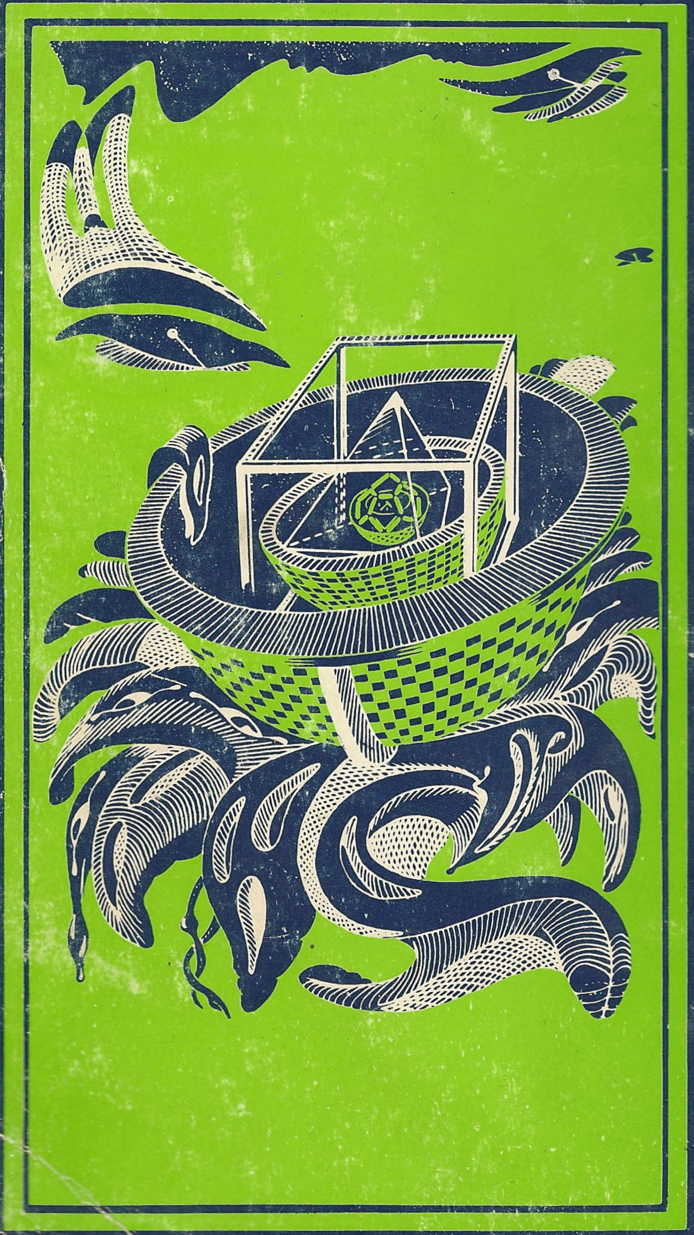
توپولوژی عمومی



نوشتهٔ

سیمور لیپ شوتس

ترجمهٔ

دکتر علی اکبر عالم‌زاده

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار مترجم

توپولوژی درسی شیرین و خواندنی است. دنیای سحرآمیزی دارد. در آن واژه‌های نامتعارف موج می‌زنند. مجموعه‌هایی دارد که (به‌خلاف پنجره) هم‌ بازند هم بسته. موجوداتش از بی‌نهایت به‌سوی صفر می‌آیند ولی فاصله‌شان همواره یک است و چون از یک می‌گذرند گویی سالهاست در صفر خفته‌اند. در این جهان به جمعیتی می‌رسیم که ازدحام کرده‌اند و درعین حال درهمسایگی هر موجود ذیروحی نیست و پرنده‌ای پر نمی‌کشد. این باغ دل‌انگیز همه‌چیزش تازه و هر گیاهش بوییدنی است، ولی شخص پس از کمی گردش می‌پرسد هدف چیست و حکمت کدام است. آیا قصد ساختن تفرجگاه بوده و یا اینکه منظوری نیز برآن مترتب است؟ جواب را می‌توان با سیاحت بیشتر به‌دست آورد. بزودی سرگرمیها پایان یافته، خواننده دنیای منسجم، جدی، و پرباری در مقابل خود می‌بیند. شاهداست که چطور پایه‌های ریاضیات نو، بویژه آنالیز، درآن ریخته می‌شود، و آنالیز بدون توپولوژی سقف موریانه‌خورده‌ای بیش نیست. لذا، قدمها را تندتر می‌کند، این‌بار نه‌برای بوییدن گل بلکه جهت اندوختن توشه و چیدن میوه، و زمانی که از این سفر باز می‌گردد دستی پر و میلی وافر در سر دارد.

علی‌اکبر عالم‌زاده
گروه آموزشی ریاضی
دانشگاه تربیت معلم

پیشگفتار مؤلف

توپولوژی عمومی ، که توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای نیز نام دارد ، اخیرا" بخشی از ریاضیات لازم برای دانشجویان لیسانس و فوق لیسانس محسوب می‌شود . این کتاب را می‌توان متنی برای یک درس رسمی یا مکملی برای کتب متعارف در این مبحث انگاشت . همچنین ، منبع با ارزشی است برای آنهایی که بخواهند به‌طور جامع و دقیق با موضوع آشنا شوند .

هر فصل با بیان روشنی از تعاریف ، اصول ، و قضایای مربوطه و همچنین شکل و ابزار توصیفی دیگر همراه است . سپس مجموعه مسائل حل شده و تکمیلی آمده‌اند . مسائل حل شده نظریه را توضیح و بسط داده ، نکات ظریفی را مطرح می‌سازند که دانشجو بدون آنها احساس ناامنی می‌کند ، و نیز اصولی اساسی که در یادگیری حیاتی‌اند را بازگو می‌نمایند . برهانهای متعددی از قضایا در مسائل حل شده گنجانده شده‌اند . مسائل تکمیلی مرور کاملی است بر مطالب هر فصل .

کتاب مشتمل است بر خواص اساسی فضاهای توپولوژیک ، متری ، و نرمدار ، اصول موضوع جداسازی ، فشردگی ، توپولوژی حاصل ضربی ، و همبندی . از جمله قضایای اثبات شده می‌توان از لم اوریزن و قضیهٔ متری سازی ، قضیهٔ حاصل ضربی تیخنف و قضیهٔ رسته‌ای بئر نام برد . در فصل آخر ، فضاهای تابعی ، توپولوژیهای نقطه‌وار ، همگرایی یکشکل ، و همگرایی فشرده بررسی می‌شوند . بعلاوه ، در سه فصل اول کتاب مفاهیم لازم از نظریهٔ مجموعه‌ها عرضه می‌شوند ، در فصل چهارم سخن از توپولوژی خط و صفحه است ، و ضمیمه اصول اساسی اعداد حقیقی را به‌ما خواهد داد .

مطالب این کتاب از اکثر برنامه‌های مقدماتی این درس بیشتر است . دلیلش این است که می‌خواستیم کتاب منعطف‌تر شده ، مرجع مفیدتری گردد ، و علاقهٔ بیشتری به موضوع در خواننده ایجاد نماید .

مایلم از دوستان و همکاران بسیار ، بویژه دکتر جوآن لندمن [1] ، بخاطر پیشنهادات

1. Dr.Joan Landman

و انتقادات با ارزش ایشان تشکر نمایم . همچنین ، مراتب سپاسگزاری خود را از کارکنان سازمان نشر شام ، بویژه جفری آلبرت [۱] و آلن هوپن واسر [۲] ، بخاطر همیاری صمیمانه‌شان ، ابراز می‌دارم .

سیمور لیپ‌شوتس

دانشگاه تمپل

مه ، ۱۹۶۵

---

1. Jeffrey Albert

2. Alan Hopenwasser

فهرست مطالب

مجموعه‌ها و رابطه‌ها[1]

مجموعه‌ها ، عنصرها

مفهوم **مجموعه** در همهٔ شاخه‌های ریاضیات ظاهر می‌شود . شهوداً ، یک مجموعه لیست و یا گردآیهٔ مشخصی است از اشیاء ، و با حروف بزرگ $A, B, X, Y, \ldots$ نموده می‌شود . اشیاء سازای مجموعه **عنصرها** و یا **عضوهای** آن نام دارند ، و با حروف کوچک $a, b, x, y, \ldots$ نموده می‌شوند . گزارهٔ " p یک عنصر A است " یا ، معادلاً ، " p متعلق به A است " ، به صورت

$$p \in A$$

نوشته می‌شود ، و نقیض $p \in A$ به صورت $p \notin A$ نوشته خواهد شد .

برای مشخص کردن یک مجموعه اساساً دو راه وجود دارد . یک راه ، در صورت امکان ، ذکر یک یک اعضای آن است . مثلاً ،

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

مجموعه‌ای است که عنصرهایش حروف a ، e ، i ، o ، و u اند . توجه کنید که عنصرها با ویرگول از هم جدا شده و داخل { } قرار گرفته‌اند . راه دیگر بیان خواصی است که عنصرهای مجموعه را توصیف می‌کنند . مثلاً ،

$$B = \{x : x \text{ یک عدد صحیح است،}\ x > 0\},$$

که خوانده می‌شود : " B مجموعهٔ x هایی است بطوری که x عددی صحیح است و x بزرگتر از صفر است " ، مجموعه‌ای است که عنصرهایش اعداد صحیح مثبت هستند . یک حرف ، و معمولاً " x " ، برای نمودن عضو دلخواه یک مجموعه به‌کار می‌رود ؛ دو نقطه " : " خوانده می‌شود "بطوری که" ، و ویرگول خوانده می‌شود "و" .

مثال ۱.۱ . مجموعهٔ B در بالا را می‌توان به شکل $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$ نیز نوشت . توجه

کنید که $-6 \notin B$ ، $3 \in B$ ، و $\pi \notin B$.

مثال ۲۰۱ . بازه‌های خط حقیقی ، که در زیر تعریف شده‌اند ، اغلب در ریاضیات ظاهر می‌شوند . در اینجا a و b اعدادی هستند حقیقی و $a < b$.

$$b \text{ تا } a \text{ بازهٔ باز از } = (a,b) = \{x : a < x < b\}$$

$$b \text{ تا } a \text{ بازهٔ بسته از } = [a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

$$b \text{ تا } a \text{ بازهٔ باز ــ بسته از } = (a,b] = \{x : a < x \leq b\}$$

$$b \text{ تا } a \text{ بازهٔ بسته ــ باز از } = [a,b) = \{x : a \leq x < b\}$$

بازه‌های باز ــ بسته و بسته ــ باز را بازه‌های **نیمباز** نیز می‌نامند .

دو مجموعهٔ A و B را در صورتی **مساوی** گوییم ، و می‌نویسیم $A = B$ ، که عنصرهایشان یکی باشند ؛ یعنی ، هر عضو A متعلق به B و هر عضو B متعلق به A باشد . نقیض $A = B$ را به صورت $A \neq B$ خواهیم نوشت .

مثال ۳۰۱ . فرض کنیم $E = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ، $F = \{2,1\}$ ، و $G = \{1,2,2,1\}$. در این صورت ، $E = F = G$. توجه کنید که یک مجموعه به طرز نمایش عنصرهایش بستگی ندارد . یک مجموعه در صورت تکرار و یا تعویض ترتیب عناصرش تغییر نخواهد کرد .

مجموعه‌ها می‌توانند **متناهی** یا **نامتناهی** باشند . مجموعه را در صورتی متناهی گوییم که از n عنصر مختلف ، که n عدد صحیح مثبتی است ، متشکل باشد . درغیر این صورت ، مجموعه را نامتناهی می‌گوییم . درحالت خاص ، مجموعه‌ای را که فقط از یک عنصر تشکیل شده **مجموعهٔ یکانی** خواهیم گفت .

زیرمجموعه‌ها ، زبرمجموعه‌ها

مجموعهٔ A **زیرمجموعهٔ** مجموعهٔ B است یا ، معادلاً ، B **زبرمجموعهٔ** A است ، و نوشته می‌شود

$$A \subset B \text{ یا } B \supset A ،$$

اگفگر هر عنصر A متعلق به B نیز باشد ؛ یعنی ، $x \in A$ عضویت $x \in B$ را نیز ایجاب کند . همچنین ، می‌گوییم A **مشمول** B است و یا B **شامل** A می‌باشد . نقیض

$A \subset B$ به صورت $A \not\subset B$ یا $B \not\supset A$ نوشته می‌شود، و بیان می‌کند که x ی در A وجود دارد که $x \notin B$.

مثال ۱۰۲ . مجموعه‌های

$$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, \qquad B = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$$

$$C = \{x : x > 2 \text{، } x \text{ اول است}\} = \{3, 5, 7, 11, \ldots\}$$

را درنظر می‌گیریم. در این وضع، $C \subset A$، زیرا هر عدد اوّل بزرگتر از 2 فرد است. از آن سو، $B \not\subset A$، زیرا $10 \in B$ ولی $10 \notin A$.

مثال ۲۰۲ . فرض کنیم $\mathbf{N}$ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، $\mathbf{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح، $\mathbf{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا، و $\mathbf{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. بدین ترتیب،

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

توجه کنید که $A \subset B$ امکان $A = B$ را رد نمی‌کند. در واقع، تساوی مجموعه‌ها را می‌توان به صورت زیر نیز تعریف کرد:

تعریف . دو مجموعهٔ A و B **مساوی**اند اگر و فقط اگر $A \subset B$ و $B \subset A$.

در حالتی که $A \subset B$ ولی $A \neq B$، می‌گوییم A یک **زیر مجموعهٔ حقیقی** B است یا B **حقیقتاً "شامل** A است.

لازم به تذکر است که بعضی مولفان علامت $\subseteq$ را برای زیر مجموعه و علامت $\subset$ را فقط برای زیر مجموعهٔ حقیقی به‌کار می‌برند.

اولین قضیهٔ ما از تعریفهای قبل نتیجه می‌شود:

قضیهٔ ۱۰۱ . فرض کنیم A، B، و C سه مجموعه باشند. در این صورت،

(یک) $A \subset A$؛

(دو) هرگاه $A \subset B$ و $B \subset A$، آنگاه $A = B$؛

(سه) هرگاه $A \subset B$ و $B \subset C$، آنگاه $A \subset C$.

مجموعه‌های عمومی و پوچ

در هر کاربرد نظریهٔ مجموعه‌ها، مجموعه‌های موردبحث زیر مجموعه‌های مجموعهٔ ثابتی هستند. ما این مجموعه را **مجموعهٔ عمومی** و یا **عالم سخن** می‌نامیم، و آن را در این فصل به U نشان می‌دهیم. همچنین، بجاست که **مجموعهٔ تهی** یا **مجموعهٔ پوچ**، یعنی مجموعه‌ای که شامل هیچ عنصری نیست، نیز معرفی شود. این مجموعه، که با $\emptyset$ نموده می‌شود، متناهی و زیرمجموعهٔ هر مجموعه گرفته می‌شود. لذا، به‌ازای هر مجموعه مانند A، $\emptyset \subset A \subset U$.

مثال ۱۰۳ . در هندسهٔ مسطحه، مجموعهٔ عمومی از تمام نقاط صفحه تشکیل شده‌است.

مثال ۲۰۳ . فرض کنیم $A = \{x : x^2 = 4,\ x$ فرد است$\}$. در این صورت، A تهی است؛ یعنی، $A = \emptyset$.

مثال ۳۰۳ . فرض کنیم $B = \{\emptyset\}$. در این صورت، $B \neq \emptyset$، زیرا B شامل یک عنصر است.

رده‌ها، گردآیه‌ها، خانواده‌ها، و فضاها

اعضای یک مجموعه اغلب خود مجموعه هستند. مثلاً، هرخط در یک مجموعه از خطوط مجموعه‌ای است از نقاط. برای مشخص بودن این حالات، واژه‌های "رده"، "گردآیه"، و "خانواده" را مترادفاً بجای مجموعه به‌کار می‌بریم. معمولاً از **رده** برای مجموعه‌ای از مجموعه‌ها، و از **گردآیه** یا **خانواده** برای مجموعه‌ای از رده‌ها استفاده می‌کنیم. واژه‌های **زیر رده**، **زیرگردآیه**، و **زیرخانواده** معنی مشابه زیر مجموعه دارند.

مثال ۱۰۴ . اعضای ردهٔ $\{\{2,3\}, \{2\}, \{5,6\}\}$ عبارتند از مجموعه‌های $\{2,3\}$، $\{2\}$ و $\{5,6\}$.

مثال ۲۰۴ . مجموعهٔ A را درنظر می‌گیریم. **مجموعهٔ توان** A، که با $\mathcal{P}(A)$ یا 2^A نموده می‌شود، عبارت است از ردهٔ تمام زیرمجموعه‌های A. در حالت خاص، اگر $A = \{a, b, c\}$،

$$\mathcal{P}(A) = \{A, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}.$$

درحالت عام، اگر A متناهی باشد، مثلاً A، n عنصر داشته باشد، $\mathcal{P}(A)$، 2^n عنصر

خواهد داشت.

یک **فضا** یعنی مجموعه‌ای ناتهی که از نوعی ساختار ریاضی برخوردار است؛ مثلاً"، فضای برداری، فضای متری، یا فضای توپولوژیک. در این وضع، عناصر فضا را **نقاط** خواهیم نامید.

اعمال روی مجموعه‌ها

اجتماع دو مجموعهٔ A و B، که با $A\cup B$ نموده می‌شود، مجموعهٔ تمام عنصرهایی است که متعلق به A یا B هستند؛ یعنی،

$$A\cup B \;=\; \{x : x\in A \text{ یا } x\in B\}.$$

در اینجا "یا" به معنی " و/ یا " به‌کار رفته است.

اشتراک دو مجموعهٔ A و B، که با $A\cap B$ نموده می‌شود، مجموعهٔ عنصرهایی است که هم متعلق به A هستند هم به B؛ یعنی،

$$A\cap B \;=\; \{x : x\in A \text{ و } x\in B\}.$$

هرگاه $A\cap B=\emptyset$، یعنی A و B عنصر مشترک نداشته باشند، می‌گوییم A و B **از هم جدا** و یا **بی‌اشتراک** هستند. ردهٔ $\mathcal{A}$ از مجموعه‌ها را درصورتی یک **ردهٔ از هم جدا از مجموعه‌ها** می‌نامیم که هر جفت مجموعهٔ متمایز در $\mathcal{A}$ از هم جدا باشند.

متمم نسبی مجموعهٔ B نسبت به مجموعهٔ A، یا مختصراً " **تفاضل** A و B"، که با $A\setminus B$ نموده می‌شود، مجموعهٔ عنصرهایی است که متعلق به A هستند ولی تعلق به B ندارند. به عبارت دیگر

$$A\setminus B \;=\; \{x :\; x\in A,\;\; x\notin B\}.$$

توجه کنید که $A\setminus B$ و B از هم جدا هستند؛ یعنی، $(A\setminus B)\cap B \;=\; \emptyset$.

متمم مطلق، و یا مختصراً " **متمم** مجموعهٔ A"، که با A^c نموده می‌شود، مجموعهٔ عنصرهایی است که تعلق به A ندارند؛ یعنی،

$$A^c \;=\; \{x :\; x\in U,\;\; x\notin A\}.$$

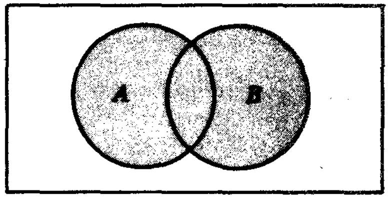
به بیان دیگر، A^c تفاضل مجموعهٔ عمومی U و A است.

مثال ۱۰۵ . نمودارهای زیر، که به **نمودارهای ون**[1] موسومند، اعمال فوق برمجموعه‌ها را نشان می‌دهند. در اینجا مجموعه‌ها با نواحی ساده در صفحه و U، یعنی مجموعهٔ

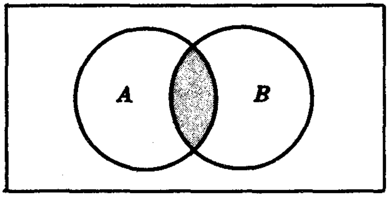
---

1. Venn

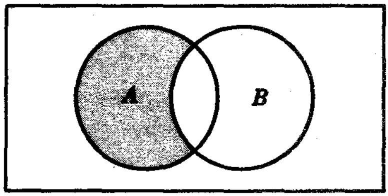
عمومی ، با سطح تمام مستطیل نموده شده است .



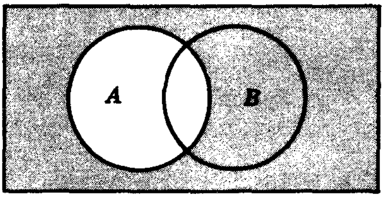
$A \cup B$ سایه‌دار است



$A \cap B$ سایه‌دار است



$A \setminus B$ سایه‌دار است



A^c سایه‌دار است

مجموعه‌ها با اعمال فوق در قوانین و اتحادهای مختلفی صدق می‌کنند که درجدول زیر (جدول ۱) ذکر شده‌اند . در واقع ، می‌گوییم :

قضیهٔ ۱ . ۲ . *مجموعه‌ها از قوانین جدول ۱ پیروی می‌کنند .*

قوانین جبر مجموعه‌ها	
قوانین خودنمایی	
۱آ. $A \cup A = A$	۱ب. $A \cap A = A$
قوانین شرکتپذیری	
۲آ. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	۲ب. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
قوانین تعویضپذیری	
۳آ. $A \cup B = B \cup A$	۳ب. $A \cap B = B \cap A$

قوانین پخشپذیری	
۴آ. $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$	۴ب. $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
قوانین همانی	
۵آ. $A\cup\emptyset = A$	۵ب. $A\cap U = A$
۶آ. $A\cup U = U$	۶ب. $A\cap\emptyset = \emptyset$
قوانین متممگیری	
۷آ. $A\cup A^c = U$	۷ب. $A\cap A^c = \emptyset$
۸آ. $(A^c)^c = A$	۸ب. $U^c = \emptyset,\ \emptyset^c = U$
قوانین دمورگان[1]	
۹آ. $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$	۹ب. $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$

جدول ۱

تبصره. هریک از قوانین فوق از قانون منطقی مشابهی ناشی می‌شود. مثلاً،

$$A\cap B = \{x : x\in B \text{ و } x\in A\} = \{x : x\in A \text{ و } x\in B\} = B\cap A.$$

در اینجا از این امر استفاده شده که گزارهٔ مرکب " p و q "، که به‌صورت $p\wedge q$ نوشته می‌شود، هم‌ارز منطقی گزارهٔ مرکب " p و q "، یعنی $q\wedge p$ ، است.

حال رابطهٔ بین شمول مجموعه‌ها و اعمال فوق را نتیجه می‌گیریم:

قضیهٔ ۱ . ۳ . *هریک از شرطهای زیر با $A\subset B$ هم‌ارز است:*

(یک) $A\cap B = A$ ؛ (دو) $A\cup B = B$ ؛

(سه) $B^c\subset A^c$ ؛ (چهار) $A\cap B^c = \emptyset$ ؛

(پنج) $B\cup A^c = U$.

---

1. De Morgan

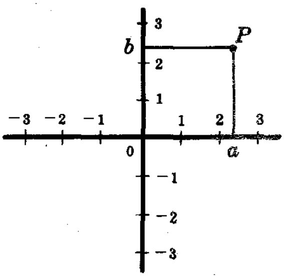
مجموعه‌های حاصل‌ضربی

فرض‌کنیم A و B دومجموعه باشند. **مجموعهٔ حاصل ضربی** A و B ، که به‌صورت $A\times B$ نوشته می‌شود ، از همهٔ جفتهای مرتب $\langle a,b\rangle$ تشکیل شده که $a\in A$ و $b\in B$ ؛ یعنی ،

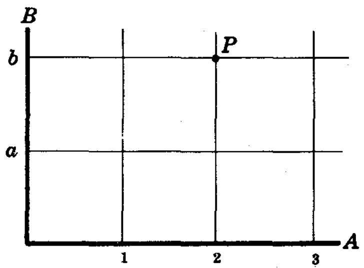
$$A\times B = \{\langle a,b\rangle : a\in A,\ b\in B\}.$$

حاصل‌ضرب یک مجموعه در خودش، یعنی $A\times A$ ، را با A^2 نشان می‌دهیم .

مثال ۱۰۶ . خواننده با صفحهٔ دکارتی $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ آشناست (شکل ۱۰۱ در زیر) . در اینجا هر نقطهٔ P جفت مرتب $\langle a,b\rangle$ از اعداد حقیقی را نشان می‌دهد و بالعکس.



شکل ۱۰۱



شکل ۲۰۱

مثال ۲۰۶ . فرض کنیم $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{a,b\}$. در این صورت ،

$$A\times B = \{\langle 1,a\rangle, \langle 1,b\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,a\rangle, \langle 3,b\rangle\}\cdot$$

چون A و B زیاد عنصر ندارند ، می‌توان $A\times B$ را دریک دستگاه مختصات به شکل ۲۰۱ در بالا نشان داد . در اینجا خطوط قائم ماربر نقاط A و خطوط افقی ماربر نقاط B در شش نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند . این نقاط $A\times B$ را به‌طور واضح نشان می‌دهند . نقطهٔ P جفت مرتب $\langle 2,b\rangle$ است . در حالت عام ، اگر مجموعهٔ A ، s عنصر و مجموعهٔ B ، t عنصر داشته باشد ، مجموعهٔ $A\times B$ ، s ضربدر t عنصر خواهد داشت .

تبصره. مفهوم "جفت مرتب" $\langle a,b\rangle$ دقیقا" به‌وسیلهٔ $\langle a,b\rangle \equiv \{\{a\},\ \{a,b\}\}$ تعریف می‌شود . با این تعریف می‌توان خاصیت "ترتیب" را اثبات کرد :

$\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle$ ایجاب می‌کند که $a=c$ و $b=d$.

مجموعهٔ حاصل‌ضربی را می‌توان به‌طور طبیعی به‌هر تعداد متناهی مجموعه تعمیم

داد. مجموعهٔ حاصل‌ضربی مجموعه‌های $A_1, \ldots, A_m$ ، که با

$$\prod_{i=1}^{m} A_i \quad \text{یا} \quad A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$$

نموده مـی‌شود، عبـارت است از تمام m تاییهای $\langle a_1, a_2, \ldots, a_m\rangle$ که به ازای هر i ، $a_i \in A_i$.

رابطه‌ها

یک ***رابطهٔ دوتایی*** (و یا ***رابطه***) مانند R از مجمـوعهٔ A به مجمـوعهٔ B به هر جفت $\langle a, b\rangle$ در $A \times B$ درست یکی از گزاره‌های زیر را مربوط می‌کند:

(یک) " a با b مربوط است"، که نوشته می‌شود $a\,R\,b$ ؛

(دو) " a با b مربوط نیست"، که نوشته می‌شود $a \not R\, b$.

هر رابطه از مجموعهٔ A به خود A یک ***رابطه در*** A نامیده می‌شود.

مثال ۱۰۷ . شمول مجموعه‌ها یک رابطه در هر رده از مجموعه‌هاست. زیرا، به ازای هر جفت مجموعه مانند A و B ، $A \subset B$ یا $A \not\subset B$.

توجه کنید که هر رابطه مانند R از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B معرف زیر مجموعهٔ منحصر بفرد R^* از $A \times B$ است:

$$R^* \;=\; \{\langle a, b\rangle : a\,R\,b\}\cdot$$

از آن سو، هر زیر مجموعهٔ R^* از $A \times B$ رابطهٔ R از A به B راتعریف می‌کند:

$a\,R\,b$ اگفگر $\langle a, b\rangle \in R^*$.

بخاطر تنـاظر بین روابط از A به B و زیر مجموعه‌های $A \times B$ ، رابطه را دوباره تعریف می‌کنیم:

تعریف. رابطهٔ R از A به B عبارت است از زیر مجموعه‌ای از $A \times B$.

قلمرو رابطهٔ R از A به B مجمـوعهٔ مختصـات اول جفتهای در R ، و **برد** آن مجموعهٔ مختصات دوم این جفتها است؛ یعنی،

$$\text{قلمرو}\; R \;=\; \{\, a : \langle a, b\rangle \in R \,\}, \quad \text{برد}\; R \;=\; \{\, b : \langle a, b\rangle \in R \,\}\cdot$$

معکوس R ، که با R^{-1} نموده می‌شود، رابطه‌ای است از B به A که با

$$R^{-1} = \{ \langle b, a \rangle : \langle a, b \rangle \in R \}$$

تعریف می‌گردد. توجه کنید که R^{-1} را می‌توان با عکس کردن جفتهای R به دست‌آورد.

مثال ۲.۷ . رابطهٔ

$$R = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,3 \rangle \}$$

در $A = \{1,2,3\}$ را درنظر می‌گیریم. دراین حال، $\{1,2\} =$ قلمرو R، $\{2,3\} =$ برد R، و

$$R^{-1} = \{ \langle 2,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle \}.$$

توجه کنید که R و R^{-1}، بترتیب، با روابط $>$ و $<$ در A یکی هستند؛ یعنی،

$\langle a, b \rangle \in R$ اگفگر $a < b$ و $\langle a, b \rangle \in R^{-1}$ اگفگر $a > b$.

رابطهٔ همانی در مجموعهٔ A، که با Δ یا Δ_A نموده می‌شود، مجموعهٔ تمام جفتهایی در $A \times A$ است که مختص اول و دومشان با هم مساوی‌اند؛ یعنی،

$$\Delta_A = \{ \langle a, a \rangle : a \in A \}.$$

رابطهٔ همانی، بخاطر وضعش در نمودار مختصات $A \times A$، ***قطری*** نیز نام دارد.

روابط هم‌ارزی

رابطهٔ R در مجموعهٔ A، یعنی زیر مجموعهٔ R از $A \times A$، را یک ***رابطهٔ هم‌ارزی*** گوییم اگفگر در اصول موضوع زیر صدق کند:

[E₁] به‌ازای هر $a \in A$، $\langle a, a \rangle \in R$؛

[E₂] هرگاه $\langle a, b \rangle \in R$، آنگاه $\langle b, a \rangle \in R$؛

[E₃] هرگاه $\langle a, b \rangle \in R$ و $\langle b, c \rangle \in R$، آنگاه $\langle a, c \rangle \in R$.

بطور کلی، یک رابطه را **منعکس** گوییم اگفگر در **[E₁]** صدق کند، **متقارن** گوییم اگفگر در **[E₂]** صدق کند، و **متعدی** نامیم اگفگر در **[E₃]** صدق نماید. بدین ترتیب، R یک رابطهٔ هم‌ارزی است اگفگر منعکس، متقارن، و متعدی باشد.

مثال ۱.۸ . رابطهٔ $\subset$، یعنی شمول مجموعه‌ها، را درنظر می‌گیریم. از قضیهٔ ۱.۱ به یاد می‌آوریم که به‌ازای هر مجموعه مانند A، $A \subset A$؛ و

هرگاه $A \subset B$ و $B \subset C$، آنگاه $A \subset C$.

پس، $\subset$ هم منعکس است و هم متعدی. از سوی دیگر،

$A \subset B$ و $A \neq B$ ایجاب می‌کنند که $B \not\subset A$.
لذا، $\subset$ متقارن نیست؛ و در نتیجه، یک رابطهٔ هم‌ارزی نمی‌باشد.

مثال ۲۰۸ . در هندسهٔ اقلیدسی، تشابه مثلثها یک رابطهٔ هم‌ارزی است. چراکه اگر α و β و γ مثلثهایی باشند، (یک) α با خودش متشابه است؛ (دو) هرگاه α با β متشابه باشد، β نیز با α متشابه‌است؛ و (سه) هرگاه α با β و β با γ متشابه باشد، α نیز با γ متشابه خواهد بود.

اگر R یک رابطهٔ هم‌ارزی در A باشد، **ردهٔ هم‌ارزی** عنصر $a \in A$، که با $[a]$ نموده می‌شود، مجموعهٔ عناصری است که a با آنها مربوط است:

$$[a] \;=\; \{x : \langle a, x\rangle \in R\}.$$

گردآیهٔ رده‌های هم‌ارزی A، که با A/R نموده می‌شود، **خارج قسمت A بر R** نام دارد:

$$A/R \;=\; \{[a] : a \in A\}.$$

مجموعهٔ خارج قسمتی A/R از خواص زیر بهره‌مند است:

قضیهٔ ۴۰۱ . *فرض‌کنیم R یک‌رابطهٔ هم‌ارزی‌در A بوده، و $[a]$ ردهٔ هم‌ارزی $a \in A$ باشد. دراین صورت،*

(یک) به‌ازای هر $a \in A$، $a \in [a]$؛

(دو) $[a] = [b]$ اگر و فقط اگر $\langle a, b\rangle \in R$؛

(سه) هرگاه $[a] \neq [b]$، آنگاه $[a]$ و $[b]$ از هم جدا هستند.

ردهٔ $\mathcal{A}$ مرکب از زیر مجموعه‌های ناتهی A را یک **افراز** A گوییم اگفگر (۱) هر $a \in A$ به عضوی از $\mathcal{A}$ متعلق باشد؛ و (۲) اعضای $\mathcal{A}$ دوبدو از هم جدا باشند. لذا، قضیهٔ فوق **قضیهٔ اساسی روابط هم‌ارزی** را ایجاب خواهد کرد:

قضیهٔ ۵۰۱ . فرض کنیم R یک رابطهٔ هم‌ارزی در A باشد. دراین صورت، مجموعهٔ خارج قسمتی A/R یک افراز A می‌باشد.

مثال ۳۰۸ . فرض کنیم R_5 رابطه‌ای در $\mathbf{Z}$ (مجموعهٔ اعداد صحیح) باشد که با

$$x \equiv y \pmod 5$$

تعریف و خوانده می‌شود: " x همنهشت y با کالبد 5 است"، و به این معنی است که " $x-y$ بر 5 بخشپذیر است". R_5 یک رابطهٔ هم‌ارزی در $\mathbf{Z}$ است، و درست پنج‌ردهٔ هم‌ارزی متمایز در $\mathbf{Z}/R_5$ وجود دارد:

$$\mathbf{E}_0 = \{\ldots,-10,-5,0,5,10,\ldots\} = \cdots = [-10] = [-5] = [0] = [5] = \cdots$$
$$E_1 = \{\ldots,-9,-4,1,6,11,\ldots\} = \cdots = [-9] = [-4] = [1] = [6] = \cdots$$
$$E_2 = \{\ldots,-8,-3,2,7,12,\ldots\} = \cdots = [-8] = [-3] = [2] = [7] = \cdots$$
$$E_3 = \{\ldots,-7,-2,3,8,13,\ldots\} = \cdots = [-7] = [-2] = [3] = [8] = \cdots$$
$$E_4 = \{\ldots,-6,-1,4,9,14,\ldots\} = \cdots = [-6] = [-1] = [4] = [9] = \cdots$$

هر عدد صحیح x، که‌به‌طور منحصر بفرد به‌شکل $x = 5q+r$ که $0 \leqq r < 5$ قابل بیان است، عضوردهٔ هم‌ارزی E_r است که در آن r باقیمانده‌می‌باشد. توجه کنید که‌رده‌های هم‌ارزی دوبدو از هم جدا هستند و $\mathbf{Z} = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$.

ترکیب رابطه‌ها

فرض کنیم U یک رابطه از A به B و V یک رابطه از B به C باشد؛ یعنی، $U \subset A \times B$ و $V \subset B \times C$. دراین‌صورت، رابطهٔ از A به C متشکل از تمام جفتهای مرتب $\langle a, c\rangle \in A \times C$ که به‌ازای $b \in B$ ای داشته باشیم

$$\langle a, b\rangle \in U \text{ و } \langle b, c\rangle \in V$$

ترکیب U و V نام دارد و با $V \circ U$ نموده می‌شود. (تذکار دهیم که برخی از مولفان این رابطه را با $U \circ V$ نشان می‌دهند.)

جا دارد که چند علامت دیگر نیز معرفی شوند:

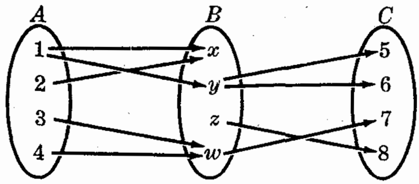
$\exists$، وجود دارد؛ s.t.، بطوری که، $\forall$؛ به‌ازای هر؛ $\Rightarrow$، ایجاب می‌کند. در این‌صورت، می‌توان نوشت

$$V \circ U = \{\langle x, y\rangle : x \in A,\ y \in C;\ \exists b \in B \text{ s.t. } \langle x, b\rangle \in U, \langle b, y\rangle \in V\}.$$

مثال ۱۰۹ . فرض کنیم $A = \{1,2,3,4\}$، $B = \{x,y,z,w\}$، و $C = \{5,6,7,8\}$. ونیز

$$U = \{\langle 1,x\rangle, \langle 1,y\rangle, \langle 2,x\rangle, \langle 3,w\rangle, \langle 4,w\rangle\} \text{ و } V = \{\langle y,5\rangle, \langle y,6\rangle, \langle z,8\rangle, \langle w,7\rangle\}؛$$

یعنی، U رابطه‌ای از A به B و V رابطه‌ای از B به C باشد. U و V را می‌توان به‌شکل زیر تجسم کرد:



بنابراین،

$\langle 1,5\rangle \in V\circ U$ ، زیرا $y\in B$ ، $\langle 1,y\rangle \in U$ ، و $\langle y,5\rangle \in V$ ؛

$\langle 1,6\rangle \in V\circ U$ ، زیرا $y\in B$ ، $\langle 1,y\rangle \in U$ ، و $\langle y,6\rangle \in V$ ؛

$\langle 3,7\rangle \in V\circ U$ ، زیرا $w\in B$ ، $\langle 3,w\rangle \in U$ ، و $\langle w,7\rangle \in V$ ؛

$\langle 4,7\rangle \in V\circ U$ ، زیرا $w\in B$ ، $\langle 4,w\rangle \in U$ ، و $\langle w,7\rangle \in V$.

هیچ جفت مرتب دیگری به $V\circ U$ تعلق ندارد؛ یعنی،

$$V\circ U \;=\; \{\langle 1,5\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 3,7\rangle, \langle 4,7\rangle\}$$

می‌بینیم که $V\circ U$ از آن جفتهای مرتب $\langle x,y\rangle$ تشکیل شده‌که برای‌آنها "مسیری" در نمودار فوق از $x\in A$ به $y\in C$ مرکب از دو سهم متوالی وجود دارد.

مثال ۲۰۹ . فرض کنیم U و V دو رابطه در $\mathbf{R}$ باشند که با

$$V \;=\; \{\langle y,z\rangle : 2y+3z=4\} \quad \text{و} \quad U \;=\; \{\langle x,y\rangle : x^2+y^2=1\}$$

تعریف شده‌اند. رابطهٔ $V\circ U$ ، یعنی ترکیب U و V ، را می‌توان با حذف y از دو معادلهٔ $x^2+y^2=1$ و $2y+3z=4$ به‌دست آورد. به عبارت دیگر،

$$V\circ U \;=\; \{\langle x,z\rangle : 4x^2+9z^2-24z+12 \;=\; 0\}.$$

مثال ۳۰۹ . فرض کنیم $\mathbf{N}$ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، و R رابطهٔ $<$ در $\mathbf{N}$ باشد؛ یعنی، $\langle a,b\rangle \in R$ اگرگر $a<b$. لذا، $\langle a,b\rangle \in R^{-1}$ اگرگر $a>b$. دراین صورت،

$$\begin{aligned}
R\circ R^{-1} &= \{\langle x,y\rangle : x,y\in \mathbf{N};\ \exists b\in\mathbf{N}\ \text{s.t.}\ \langle x,b\rangle\in R^{-1}, \langle b,y\rangle \in R\} \\
&= \{\langle x,y\rangle : x,y\in \mathbf{N};\ \exists b\in\mathbf{N}\ \text{s.t.}\ b<x,\ b<y\} \\
&= (\mathbf{N}\setminus\{1\})\times(\mathbf{N}\setminus\{1\}) \;=\; \{\langle x,y\rangle : x,y\in\mathbf{N};\ x,y\neq 1\}
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
R^{-1}\circ R &= \{\langle x,y\rangle : x,y\in \mathbf{N};\ \exists b\in\mathbf{N}\ \text{s.t.}\ \langle x,b\rangle\in R, \langle b,y\rangle \in R^{-1}\} \\
&= \{\langle x,y\rangle : x,y\in \mathbf{N};\ \exists b\in\mathbf{N}\ \text{s.t.}\ b>x,\ b>y\} \\
&= \mathbf{N}\times\mathbf{N}
\end{aligned}$$

توجه کنید که $R \circ R^{-1} \neq R^{-1} \circ R$.

مسائل حل شده

مجموعه‌ها ، عنصرها ، زیرمجموعه‌ها

۱ . فرض کنید $A = \{x : 3x = 6\}$. آیا $A = 2$ ؟

حل. A مجموعه‌ای است که فقط از 2 تشکیل شده است ؛ یعنی ، $A = \{2\}$. 2 متعلق به A است ؛ مساوی A نیست . بین عنصر p و مجموعهٔ یکانی $\{p\}$ فرق اساسی وجود دارد .

۲ . از مجموعه‌های $\{\emptyset\}$ ، $\{0\}$ ، $\emptyset$ کدامها با هم مساوی‌اند ؟

حل. هر مجموعه با دوتای دیگر متفاوت است . مجموعهٔ $\{0\}$ شامل یک عنصر ، یعنی عدد صفر ، است . مجموعهٔ $\emptyset$ شامل هیچ عنصری نیست ؛ این مجموعه مجموعهٔ پوچ است . مجموعهٔ $\{\emptyset\}$ نیز شامل یک عنصر ، یعنی مجموعهٔ پوچ ، است .

۳ . از مجموعه‌های زیر کدامها پوچ هستند :

(یک) $X = \{x : x^2 = 9,\ 2x = 4\}$ ؛

(دو) $Y = \{x : x \neq x\}$ ؛

(سه) $Z = \{x : x + 8 = 8\}$ ؟

حل

(یک) عددی که در هر دوی $x^2 = 9$ و $2x = 4$ صدق کند وجود ندارد . پس $X = \emptyset$.

(دو) فرض این است که هر شی با خودش برابر است ؛ در نتیجه ، Y تهی است . در واقع ، در بعضی کتابها ، مجموعهٔ پوچ با $\emptyset \equiv \{x : x \neq x\}$ تعریف می‌شود .

(سه) صفر در $x + 8 = 8$ صدق می‌کند . پس $Z = \{0\}$. درنتیجه ، $Z \neq \emptyset$.

۴ . ثابت کنید $B = \{x : \text{است زوج } x\}$ زیر مجموعهٔ $A = \{2, 3, 4, 5\}$ نیست .

حل. باید نشان داد که دست کم یک عضو A به B تعلق ندارد . گوییم چون

$3 \in A$ و $3 \notin B$ ، A زیر مجموعهٔ B نیست .

۵ . قسمت (سه) قضیهٔ ۱ . ۱ را ثابت کنید : هرگاه $A \subset B$ و $B \subset C$ ، آنگاه $A \subset C$

حل . باید نشان داد که هر عنصر A به C نیز تعلق دارد . فرض کنیم $x \in A$ چون $A \subset B$ ، نتیجه می‌شود که $x \in B$. اما $B \subset C$: درنتیجه، $x \in C$. یعنی $x \in A$ عضویت $x \in C$ را ایجاب می‌کند ، یا اینکه $A \subset C$.

۶ . ثابت کنید هرگاه A زیر مجموعهٔ $\emptyset$ باشد ، آنگاه $A = \emptyset$.

حل . مجموعهٔ $\emptyset$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌است . درحالت خاص، $\emptyset \subset A$. اما ، بنابه فرض، $A \subset \emptyset$. پس، بنابر تعریف ۱ . ۱ ، $A = \emptyset$.

۷ . مجموعهٔ توان $S = \{1, 2, 3\}$ را بیابید .

حل . یادآور می‌شویم که مجموعهٔ توان S ردهٔ تمام زیر مجموعه‌های S است . زیرمجموعه‌های S عبارتنداز $\{1, 2, 3\}$ ، $\{1, 2\}$ ، $\{1, 3\}$ ، $\{2, 3\}$ ، $\{1\}$ ، $\{2\}$ ، $\{3\}$ ، و مجموعهٔ $\emptyset$. بنابراین ،

$$\mathcal{P}(S) \quad = \quad \{S, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}.$$

توجه کنید که $2^3 = 8$ زیرمجموعه از S وجود دارد .

۸ . مجموعهٔ توان $S = \{3, \{1, 4\}\}$ را پیدا کنید .

حل . ابتدا می‌بینیم که S شامل دو عنصر است : 3 و مجموعهٔ $\{1, 4\}$. پس $\mathcal{P}(S)$ شامل $2^2 = 4$ عنصر می‌باشد : خود S ، مجموعهٔ $\emptyset$ ، مجموعهٔ یکانی $\{3\}$ شامل 3 ، و مجموعهٔ یکانی $\{\{1, 4\}\}$ شامل مجموعهٔ $\{1, 4\}$. به عبارت دیگر ،

$$\mathcal{P}(S) \quad = \quad \{S, \{3\}, \{\{1, 4\}\}, \emptyset\}.$$

اعمال روی مجموعه‌ها

۹ . به فرض آنکه $U = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$ ، $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ، و

$C = \{3,4,5,6\}$، مجموعه‌های زیر را پیدا کنید:

(یک) A^c ؛ (دو) $(A\cap C)^c$ ؛

(سه) $B\setminus C$ ؛ (چهار) $(A\cup B)^c$.

حل

(یک) A^c ازعنصرهایی‌در U تشکیل‌شده‌که‌در A نیستند. پس $A^c = \{5,6,7,8,9\}$.

(دو) $A\cap C$ از عنصرهایی تشکیل شده که در هردوی A و C اند. پس

$$A\cap C = \{3,4\} \text{ و } (A\cap C)^c = \{1,2,5,6,7,8,9\}.$$

(سه) $B\setminus C$ از عنصرهایی در B تشکیل شده که در C نیستند. پس $B\setminus C = \{2,8\}$.

(چهار) $A\cup B$ از عنصرهایی تشکیل شده که در A یا B (یا هردو) اند. پس

$$A\cup B = \{1,2,3,4,6,8\} \text{ و } (A\cup B)^c = \{5,7,9\}.$$

۱۰ . ثابت کنید که $(A\setminus B)\cap B = \emptyset$.

حل.
$$\begin{aligned}(A\setminus B)\cap B &= \{x : x\in B,\ x\in A\setminus B\}\\ &= \{x : x\in B,\ x\in A,\ x\notin B\} = \emptyset,\end{aligned}$$
زیرا عنصری چون x وجود ندارد که در $x\in B$ و $x\notin B$ صدق کند.

۱۱ . قانون دمورگان را ثابت کنید: $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$.

حل.
$$\begin{aligned}(A\cup B)^c &= \{x : x\notin A\cup B\}\\ &= \{x : x\notin A,\ x\notin B\}\\ &= \{x : x\in A^c,\ x\in B^c\} = A^c\cap B^c.\end{aligned}$$

۱۲ . ثابت کنید که $B\setminus A = B\cap A^c$.

حل. $B\setminus A = \{x : x\in B,\ x\notin A\} = \{x : x\in B,\ x\in A^c\} = B\cap A^c$.

۱۳ . قانون پخشپذیری را ثابت کنید: $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

حل.

$$\begin{aligned} A\cap(B\cup C) &= \{x : x\in A;\ x\in B\cup C\} \\ &= \{x : x\in A;\ x\in C \text{ یا } x\in B\} \\ &= \{x : x\in A,\ x\in C \text{ یا } x\in A,\ x\in B\} \\ &= \{x : x\in A\cap C \text{ یا } x\in A\cap B\} \\ &= (A\cap B)\cup(A\cap C)\cdot \end{aligned}$$

توجه کنید که در مرحلهٔ سوم در بالا از قانون منطقی مشابه

$$p\wedge(q\vee r) = (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$$

استفاده شد، که در آن $\wedge$ "و" و $\vee$ "یا" خوانده می‌شود.

۱۴. ثابت کنید به‌ازای هر دو مجموعهٔ A و B، $A\cap B\subset A\subset A\cup B$.

حل. فرض کنیم $x\in A\cap B$. پس $x\in A$ و $x\in B$. بالاخص، $x\in A$. لذا، $A\cap B\subset A$. اگر $x\in A$، $x\in A$ یا $x\in B$؛ یعنی، $x\in A\cup B$. درنتیجه، $A\subset A\cup B$. به عبارت دیگر، $A\cap B\subset A\subset A\cup B$.

۱۵. قسمت (یک) قضیهٔ ۳۰۱ را ثابت کنید: $A\subset B$ اگر و فقط اگر $A\cap B = A$.

حل. فرض‌کنیم $A\subset B$. اگر $x\in A$، بنابه‌فرض، $x\in B$. پس $x\in A$ و $x\in B$؛ یعنی، $x\in A\cap B$. بنابراین، $A\subset A\cap B$. اما، طبق مسئلهٔ قبل، $A\cap B\subset A$. در نتیجه، $A\cap B = A$.

از آن سو، فرض کنیم $A\cap B = A$. پس، بخصوص، $A\subset A\cap B$. اما، بنابرمسئلهٔ قبل، $A\cap B\subset B$. لذا، طبق قضیهٔ ۱۰۱، $A\subset B$.

مجموعه‌های حاصل ضربی، رابطه‌ها، و ترکیب روابط

۱۶. به فرض‌آنکه $A=\{a,b\}$، $B=\{2,3\}$، و $C=\{3,4\}$، مجموعه‌های زیر را پیدا کنید:

(یک) $A\times(B\cup C)$؛ (دو) $(A\times B)\cup(A\times C)$.

حل

(یک) ابتدا می‌بینیم که $B\cup C=\{2,3,4\}$. پس

$$A \times (B \cup C) \quad = \quad \{ \langle a,2\rangle, \langle a,3\rangle, \langle a,4\rangle, \langle b,2\rangle, \langle b,3\rangle, \langle b,4\rangle \} .$$

(دو) ابتدا $A \times B$ و $A \times C$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A \times B \;=\; \{ \langle a,2\rangle, \langle a,3\rangle, \langle b,2\rangle, \langle b,3\rangle \}, \qquad A \times C \;=\; \{ \langle a,3\rangle, \langle a,4\rangle, \langle b,3\rangle, \langle b,4\rangle \}.$$

سپس اجتماع این دو مجموعه را حساب می‌کنیم:

$$(A \times B) \cup (A \times C) \quad = \quad \{ \langle a,2\rangle, \langle a,3\rangle, \langle b,2\rangle, \langle b,3\rangle, \langle a,4\rangle, \langle b,4\rangle \}.$$

حال از (یک) و (دو) می‌بینیم که $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

۱۷ . ثابت کنید که $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

حل.

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= \{ \langle x,y\rangle : x \in A,\ y \in B \cap C \} \\ &= \{ \langle x,y\rangle : x \in A,\ y \in B,\ y \in C \} \\ &= \{ \langle x,y\rangle : \langle x,y\rangle \in A \times B,\ \langle x,y\rangle \in A \times C \} \\ &= (A \times B) \cap (A \times C). \end{aligned}$$

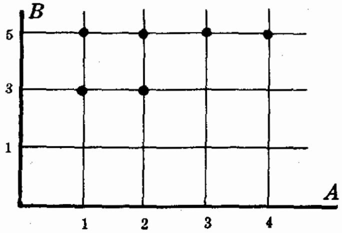
۱۸ . فرض کنید R رابطهٔ $<$ از $A = \{1,2,3,4\}$ به $B = \{1,3,5\}$ باشد؛ یعنی، $\langle a,b\rangle \in R$ اگرگر $a < b$.

(یک) R را به‌صورت مجموعه‌ای از جفتهای مرتب بنویسید.

(دو) R راروی نمودار مختصات $A \times B$ رسم کنید.

(سه) قلمرو و برد R راپیدا کرده و R^{-1} را به‌دست آورید.

(چهار) $R \circ R^{-1}$ را پیدا کنید.



حل

(یک) R از جفتهای مرتب $\langle a,b\rangle \in A \times B$ ای تشکیل شده که $a < b$. پس

$$R \quad = \quad \{ \langle 1,3\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,5\rangle \}$$

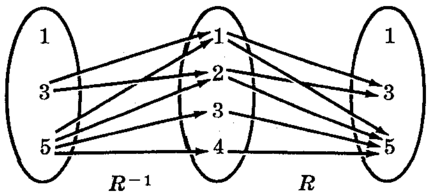
(دو) R در بالا روی نمودار مختصات $A \times B$ نشان داده شده است .

(سه) قلمرو R مجموعهٔ مختصات اول جفتهای موجود در R است . پس $\{1,2,3,4\}$ = قلمرو R . برد R مجموعهٔ مختصات دوم جفتهای R است . پس $\{3,5\}$ = برد R . R^{-1} را می‌توان از R با مقلوب جفتهای آن به‌دست آورد . بنابراین ،

$$R^{-1} = \{\langle 3,1\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 5,4\rangle\}.$$

(چهار) برای یافتن $R \circ R^{-1}$ ، نمودارهای R^{-1} و R را به‌صورت زیر می‌سازیم . توجه‌کنید که R^{-1} ، یعنی دومین سازه در حاصل ضرب $R \circ R^{-1}$ ، اول ساخته‌می‌شود . پس

$$R \circ R^{-1} = \{\langle 3,3\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 5,3\rangle, \langle 5,5\rangle\}.$$

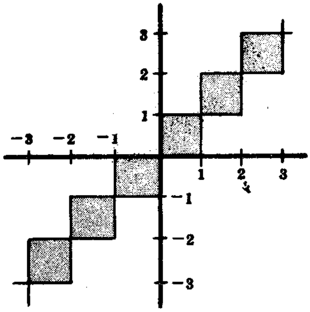


۱۹ . فرض کنید T یک رابطه‌در مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ باشد که به صورت زیر تعریف شده است :

$x\,T\,y$ هرگاه به‌ازای‌عدد صحیحی‌چون n ، $x \in [n, n+1]$ و $y \in [n, n+1]$.

نمودار T را رسم نمایید .

حل . T از مربعهای سایه دار زیر تشکیل شده است .



۲۰ . فرض کنید T یک رابطه در مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ باشد که با $x\,T\,y$ اگرو تنها اگر $0 \leq x - y \leq 1$ تعریف شده است.

(یک) T و T^{-1} را به‌صورت زیر مجموعه‌هایی از $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ بیان کنید و آنها را رسم نمایید.

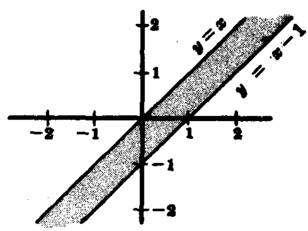
(دو) نشان دهید که $T \circ T^{-1} = \{\langle x, z\rangle : |x - z| \leq 1\}$.

حل

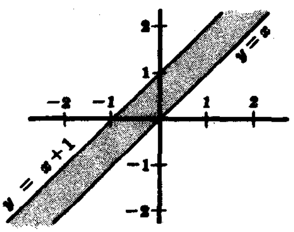
(یک) $T = \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbf{R},\ 0 \leq x - y \leq 1\}$.

$$T^{-1} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in T\} = \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbf{R},\ 0 \leq y - x \leq 1\}.$$

روابط T و T^{-1} در زیر رسم شده‌اند.



نمودار T



نمودار T^{-1}

(دو) بنابر تعریف ترکیب روابط،

$$\begin{aligned} T \circ T^{-1} &= \{\langle x, z\rangle : \exists y \in \mathbf{R} \text{ s.t. } \langle x, y\rangle \in T^{-1},\ \langle y, z\rangle \in T\} \\ &= \{\langle x, z\rangle : \exists y \in \mathbf{R} \text{ s.t. } \langle y, x\rangle,\ \langle y, z\rangle \in T\} \\ &= \{\langle x, z\rangle : \exists y \in \mathbf{R} \text{ s.t. } 0 \leq y - x \leq 1,\ 0 \leq y - z \leq 1\}. \end{aligned}$$

فرض کنیم $S = \{\langle x, z\rangle : |x - z| \leq 1\}$. می‌خواهیم نشان دهیم که $T \circ T^{-1} = S$.

فرض کنیم $\langle x, z\rangle$ متعلق به $T \circ T^{-1}$ باشد . پس $\exists y \text{ s.t. } 0 \leq y - x,\ y - z \leq 1$. اما

$$\begin{aligned} 0 \leq y - x,\ y - z \leq 1 &\Rightarrow y - z \leq 1 \\ &\Rightarrow y - z \leq 1 + y - x \\ &\Rightarrow x - z \leq 1. \end{aligned}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} 0 \leq y - x,\ y - z \leq 1 &\Rightarrow y - x \leq 1 \\ &\Rightarrow y - x \leq 1 + y - z \\ &\Rightarrow -1 \leq x - z. \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، $-1 \leqq x-z \leqq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqq y-x, \ \ y-z \leqq 1$ ، اگفگر $|x-z| \leqq 1$.
لذا ، $\langle x,z\rangle \in S$ ؛ یعنی ، $T \circ T^{-1} \subset S$.
حال فرض کنیم $\langle x,z\rangle$ متعلق به S باشد. پس $|x-z| \leqq 1$. فرض کنیم $y = \max(x,z)$.
در این صورت ، $0 \leqq y-x \leqq 1$ و $0 \leqq y-z \leqq 1$. لذا ، $\langle x,z\rangle$ نیز متعلق به $T \circ T^{-1}$ است؛ یعنی ، $S \subset T \circ T^{-1}$. بنابراین ، $T \circ T^{-1} = S$.

۲۱ . ثابت کنید به‌ازای هر دو رابطهٔ $R \subset X \times Y$ و $S \subset Y \times Z$ ، داریم $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

حل .

$$\begin{aligned}
(S \circ R)^{-1} &= \{\langle z,x\rangle : \langle x,z\rangle \in S \circ R\} \\
&= \{\langle z,x\rangle : \exists y \in Y \ \text{ s.t. } \ \langle x,y\rangle \in R, \ \langle y,z\rangle \in S\} \\
&= \{\langle z,x\rangle : \exists y \in Y \ \text{ s.t. } \ \langle z,y\rangle \in S^{-1}, \ \langle y,x\rangle \in R^{-1}\} \\
&= R^{-1} \circ S^{-1}.
\end{aligned}$$

۲۲ . ثابت کنید به‌ازای هر سه رابطهٔ $R \subset W \times X$ ، $S \subset X \times Y$ ، و $T \subset Y \times Z$ ، داریم $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

حل .

$$\begin{aligned}
(T \circ S) \circ R &= \{\langle w,z\rangle : \exists x \in X \ \text{ s.t. } \ \langle w,x\rangle \in R, \ \langle x,z\rangle \in T \circ S\} \\
&= \{\langle w,z\rangle : \exists x \in X, \ \exists y \in Y \ \text{ s.t. } \ \langle w,x\rangle \in R, \ \langle x,y\rangle \in S, \ \langle y,z\rangle \in T\} \\
&= \{\langle w,z\rangle : \exists y \in Y \ \text{ s.t. } \ \langle w,y\rangle \in S \circ R, \ \langle y,z\rangle \in T\} \\
&= T \circ (S \circ R).
\end{aligned}$$

روابط منعکس ، متقارن ، متعدی ، و هم‌ارزی

۲۳ . ثابت کنید هرگاه R رابطه‌ای در A باشد ، یعنی $R \subset A \times A$ ، آنگاه

(یک) R منعکس است اگفگر $\Delta_A \subset R$ ؛

(دو) R متقارن است اگفگر $R = R^{-1}$ ؛

(سه) R متعدی است اگفگر $R \circ R \subset R$ ؛

(چهار) اگر R منعکس باشد ، $R \circ R \supset R$ و $R \circ R$ نیز منعکس است ؛

(پنج) اگر R متقارن باشد ، $R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R$ ؛

(شش) اگر R متعدی باشد ، $R \circ R$ نیز متعدی است .

حل

(یک) یادآور می‌شویم که قطر A مساوی است با $\Delta_A = \{\langle a,a\rangle : a \in A\}$. پس R منعکس است اگفگر به‌ازای هر $a \in A$ ، $\langle a,a\rangle \in R$ ؛ اگفگر $\Delta_A \subset R$.

(دو) مستقیماً " ازتعریف R^{-1} و تقارن نتیجه می شود .

(سه) فرض‌کنیم $\langle a,c\rangle \in R \circ R$. پس $\exists b \in A$ بطوری که $\langle a,b\rangle \in R$ و $\langle b,c\rangle \in R$. اما ، بنابر تعدی ، $\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in R$ ایجاب می‌کند که $\langle a,c\rangle \in R$. در نتیجه ، $R \circ R \subset R$. ازآن‌سو، فرض‌کنیم $R \circ R \subset R$. هرگاه $\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in R$ ، آنگاه $\langle a,c\rangle \in R \circ R \subset R$. به عبارت دیگر ، R متعدی می‌باشد .

(چهار) فرض کنیم $\langle a,b\rangle \in R$. داریم

$$R \circ R = \{\langle a,c\rangle : \exists b \in A \ \text{ s.t. } \ \langle a,b\rangle \in R,\ \langle b,c\rangle \in R\}.$$

اما $\langle a,b\rangle \in R$ و ، چون R منعکس است ، $\langle b,b\rangle \in R$. پس $\langle a,b\rangle \in R \circ R$ ؛ یعنی ، $R \subset R \circ R$. بعلاوه ، $\Delta_A \subset R \subset R \circ R$ ایجاب می‌کند که $R \circ R$ نیز منعکس باشد .

(پنج)

$$\begin{aligned} R \circ R^{-1} &= \{\langle a,c\rangle : \exists b \in A \ \text{ s.t. } \ \langle a,b\rangle \in R^{-1},\ \langle b,c\rangle \in R\} \\ &= \{\langle a,c\rangle : \exists b \in A \ \text{ s.t. } \ \langle a,b\rangle \in R,\ \langle b,c\rangle \in R^{-1}\} \\ &= R^{-1} \circ R. \end{aligned}$$

(شش) فرض کنیم $\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in R \circ R$. بنابر (سه) ، $R \circ R \subset R$. پس $\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in R$. در نتیجه ، $\langle a,c\rangle \in R \circ R$ ؛ یعنی ، $R \circ R$ متعدی است .

۲۴ . رابطهٔ $R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$ در $X = \{1,2,3\}$ را درنظر بگیرید ، وبگویید R (یک) منعکس؛ (دو) متقارن؛ (سه) متعدی است یا نه .

حل

(یک) R منعکس نیست ، زیرا $2 \in X$ ولی $\langle 2,2\rangle \notin R$.

(دو) R متقارن است ، زیرا $R^{-1} = R$.

(سه) R متعدی نیست ، زیرا $\langle 3,2\rangle \in R$ و $\langle 2,3\rangle \in R$ ولی $\langle 3,3\rangle \notin R$.

۲۵ . مجموعهٔ $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ، یعنی مجموعهٔ جفتهای مرتب از اعداد صحیح مثبت ، را درنظر بگیرید ، و فرض کنید R رابطهٔ $\simeq$ در $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ باشد که به صورت زیر تعریف می شود :

$\langle a, b\rangle \simeq \langle c, d\rangle$ اگفگر $ad = bc$.

ثابت کنید که R یک رابطهٔ هم‌ارزی است .

حل. می‌بینیم که به‌ازای هر $\langle a, b\rangle \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ ، چون $ab = ba$ ، داریم $\langle a, b\rangle \simeq \langle a, b\rangle$. پس R منعکس است .

فرض کنیم $\langle a, b\rangle \simeq \langle c, d\rangle$. در این صورت ، $ad = bc$ ، که تساوی $cb = da$ را ایجاب می‌کند . در نتیجه ، $\langle c, d\rangle \simeq \langle a, b\rangle$ و ، لذا ، R متقارن است .

حال فرض کنیم $\langle a, b\rangle \simeq \langle c, d\rangle$ و $\langle c, d\rangle \simeq \langle e, f\rangle$. پس $ad = bc$ و $cf = de$. در نتیجه ،

$$(ad)(cf) = (bc)(de)$$

و ، با حذف از دو طرف ، $af = be$. لذا ، $\langle a, b\rangle \simeq \langle e, f\rangle$ و R متعدی می‌باشد .

چون R منعکس، متقارن، و متعدی است ، یک رابطهٔ هم‌ارزی می‌باشد .

توجه کنید که اگر جفت مرتب $\langle a, b\rangle$ را به‌صورت کسر $\frac{a}{b}$ بنویسیم ، رابطهٔ R بالا تعریف تساوی معمولی دو کسر ، یعنی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ اگفگر $ad = bc$ ، خواهد بود .

۲۶ . قضیهٔ ۴۰۱ را ثابت کنید : هرگاه R یک رابطهٔ هم‌ارزی در A بوده و $[a]$ ردهٔ هم‌ارزی $a \in A$ باشد ، آنگاه

(یک) به‌ازای هر $a \in A$ ، $a \in [a]$ ؛

(دو) $[a] = [b]$ اگر و فقط اگر $\langle a, b\rangle \in R$ ؛

(سه) هرگاه $[a] \neq [b]$ ، آنگاه $[a]$ و $[b]$ از هم جدا هستند .

حل

برهان (یک). چون R منعکس است ، به‌ازای هر $a \in A$ ، $\langle a, a\rangle \in R$ ؛ و در نتیجه ، $a \in [a]$.

برهان (دو) . فرض کنیم $\langle a, b\rangle \in R$. می‌خواهیم نشان دهیم که $[a] = [b]$. فرض کنیم $x \in [b]$. پس $\langle b, x\rangle \in R$. اما ، بنا به فرض، $\langle a, b\rangle \in R$. پس، بنا بر تعدی ، $\langle a, x\rangle \in R$. لذا ، $x \in [a]$ ؛ یعنی ، $[b] \subset [a]$. برای اثبات $[a] \subset [b]$ ملاحظه می‌کنیم که $\langle a, b\rangle \in R$ ، طبق تقارن ، ایجاب می‌کند که $\langle b, a\rangle \in R$. پس، با استدلالی مشابه، داریم $[a] \subset [b]$. بنابراین ، $[a] = [b]$.

از آن سو ، اگر $[a] = [b]$ ، بنا بر انعکاس، $b \in [b] = [a]$ ؛ یعنی ، $\langle a, b\rangle \in R$.

برهان (سه) . عکس نقیض حکم را ثابت می‌کنیم ؛ یعنی ، ثابت می‌کنیم هرگاه $[a]\cap[b]\neq\emptyset$ ، آنگاه $[a]=[b]$. گوییم هرگاه $[a]\cap[b]\neq\emptyset$ ، عنصری مانند $x\in A$ هست که $x\in[a]\cap[b]$. پس $\langle a,x\rangle\in R$ و $\langle b,x\rangle\in R$. بنابرتقارن ، $\langle x,b\rangle\in R$ و ، بنابر تعدی ، $\langle a,b\rangle\in R$. در نتیجه ، بنابر (دو) ، $[a]=[b]$.

مسائل تکمیلی

مجموعه‌ها ، عنصرها ، زیرمجموعه‌ها

۲۷ . از مجموعه‌های زیر کدامها تهی‌اند :

(یک) $\{x : 1<x<2,\ x\in\mathbf{R}\}$ ؛ (دو) $\{x : 1<x<2,\ x\in\mathbf{N}\}$ ؛

(سه) $\{x : x\in\emptyset\}$ ؛ (چهار) $\{x : x^2<x,\ x\in\mathbf{R}\}$ ؟

۲۸ . فرض کنید $A=\{1,2,\ldots,8,9\}$ ، $B=\{2,4,6,8\}$ ، $C=\{1,3,5,7,9\}$ ، $D=\{3,4,5\}$ ، و $E=\{3,5\}$. با اطلاعات زیر ، از اینها کدامها می‌توانند X باشند:

(یک) X و B از هم جدا هستند ؛ (دو) $X\subset D$ و $X\not\subset B$ ؛

(سه) $X\subset A$ و $X\not\subset C$ ؛ (چهار) $X\subset C$ و $X\not\subset A$ ؟

۲۹ . از گزاره‌های زیر کدامها راست کدامها دروغند :

(یک) هر زیر مجموعهٔ یک مجموعهٔ متناهی ، متناهی است ؛

(دو) هر زیر مجموعهٔ یک مجموعهٔ نامتناهی ، نامتناهی است ؟

۳۰ . جمیع روابط شمول و عضویت بین سه مجموعهٔ $\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$ را بیان نمایید .

۳۱ . ثابت کنید بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ زیر مجموعهٔ بازهٔ باز (a,b) نیست .

۳۲ . مجموعه‌های توان $U=\{0,1,2\}$ و $V=\{0,\ \{1,2\}\}$ را بیابید .

۳۳ . از گزاره‌های زیر کدامها راست کدامها دروغند؟ در اینجا S یک مجموعهٔ ناتهی دلخواه و 2^S مجموعهٔ توان آن است :

(یک) $S\in 2^S$ ؛ (دو) $S\subset 2^S$ ؛

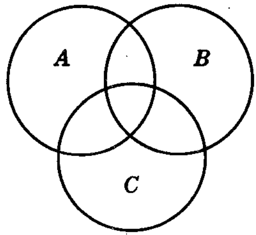
(سه) $\{S\}\in 2^S$ ؛ (چهار) $\{S\}\subset 2^S$.

اعمال روی مجموعه‌ها

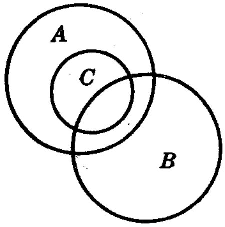
۳۴ . به فرض آنکه $B=\{1,2,\{1,2\}\}$ ، $A=\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$ ، مجموعه‌های $A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$ را پیدا کنید .

۳۵ . در هریک از نمودارهای ون زیر ، این مجموعه‌ها را سایه بزنید :

(یک) $A\cap(B\cup C)$ ؛ (دو) $C\setminus(A\cap B)$.



(آ)



(ب)

۳۶ . ثابت کنید و با نمودارهای ون نشان دهید که $A^c \setminus B^c = B \setminus A$.

۳۷ . (یک) ثابت کنید که $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

(دو) با مثال نشان دهید که $A \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

۳۸ . ثابت کنید که $2^A \cap 2^B = 2^{A \cap B}; 2^A \cup 2^B \subset 2^{A \cup B}$. با مثال نشان دهید که $2^A \cup 2^B \neq 2^{A \cup B}$.

۳۹ . قضیهٔ ۳۰۱ را ثابت کنید : هریک از شرطهای زیر با $A \subset B$ هم‌ارز است :

(یک) $A \cap B = A$ ؛ (دو) $A \cup B = B$ ؛

(سه) $B^c \subset A^c$ ؛ (چهار) $A \cap B^c = \emptyset$ ؛

(پنج) $B \cup A^c = U$.

(**تذکر .** قبلاً در مسئلهٔ ۱۵ ثابت شده بود که $A \cap B = A$ با $A \subset B$ هم‌ارز است .)

۴۰ . ثابت کنید $A \subset B$ اگرگر به‌ازای هر C ، $(B \cap C) \cup A = B \cap (C \cup A)$.

مجموعه‌های حاصل‌ضربی ، رابطه‌ها ، ترکیب رابطه‌ها

۴۱ . ثابت کنید که $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

۴۲ . با استفاده از تعریف جفت مرتب ، یعنی $\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ ، ثابت کنید $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ اگرگر $a = c$ و $b = d$.

۴۳ . تعداد روابط متمایز از یک مجموعهٔ m عنصری به یک مجموعهٔ n عنصری ، که m و n اعداد صحیح مثبتی هستند ، را معین نمایید .

۴۴ . فرض کنید R رابطه‌ای در مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت $\mathbf{N}$ باشد که با

$$R = \{ \langle x, y \rangle : x, y \in \mathbf{N},\ x + 2y = 12 \}$$

تعریف می‌شود .

(یک) R را به صورت مجموعه‌ای از جفتهای مرتب بنویسید . (دو) قلمرو R و برد R و R^{-1} را بیابید . (سه) $R \circ R$ را بیابید . (چهار) $R^{-1} \circ R$ را پیداکنید .

۴۵ . رابطهٔ $R = \{\langle 4,5\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 7,6\rangle, \langle 3,7\rangle\}$ در $\mathbf{N}$ را درنظر بگیرید .
(یک) قلمرو R وبرد R و R^{-1} رابیابید . (دو) $R \circ R$ رابیابید . (سه) $R^{-1} \circ R$ را پیدا کنید .

۴۶ . فرض کنید U و V رابطه‌هایی در $\mathbf{R}$ باشند که $U = \{\langle x,y\rangle : x^2 + 2y = 5\}$ و $V = \{\langle x,y\rangle : 2x - y = 3\}$ تعریف‌می‌شوند . (یک) $V \circ U$ رابیابید . (دو) $U \circ V$ را پیدا کنید .

۴۷ . روابط $>$ و $\leqslant$ را در $\mathbf{R}$ درنظر گرفته، نشان دهید که $\leqslant \, = \, > \cup \Delta$ ، که در آن Δ قطر است .

روابط هم ارزی

۴۸ . از گزاره‌های زیر کدامها راست ، کدامها دروغند؟ فرض کنید R و S روابطی (ناتهی) در مجموعهٔ A باشند :

(۱) هرگاه R متقارن باشد ، R^{-1} نیز متقارن است ؛

(۲) هرگاه R منعکس باشد ، $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$ ؛

(۳) هرگاه R متقارن باشد ، $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$ ؛

(۴) هرگاه R و S متعدی باشند ، $R \cup S$ نیز متعدی است ؛

(۵) هرگاه R و S متعدی باشند ، $R \cap S$ نیز متعدی است ؛

(۶) هرگاه R و S متقارن باشند ، $R \cup S$ نیز متقارن است ؛

(۷) هرگاه R و S متقارن باشند ، $R \cap S$ نیز متقارن است ؛

(۸) هرگاه R و S منعکس باشند ، $R \cap S$ نیز منعکس است .

۴۹ . $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ، یعنی مجموعهٔ جفتهای مرتّب از اعداد صحیح مثبت ، را در نظر گرفته ، فرض کنید $\simeq$ رابطه‌ای در $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ باشد که این‌طور تعریف می‌شود :

$\langle a,b\rangle \simeq \langle c,d\rangle$ اگفگر $a + d = b + c$.

(یک) ثابت کنید که $\simeq$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است . (دو) ردهٔ هم‌ارزی $\langle 2,5\rangle$ ، یعنی $[\langle 2,5\rangle]$ ، را بیابید .

۵۰ . فرض‌کنید $\sim$ رابطه‌ای در $\mathbf{R}$ باشد که با " $x \sim y$ اگفگر $x - y$ یک عدد صحیح است " تعریف می‌شود . ثابت کنید که $\sim$ یک‌رابطهٔ هم‌ارزی است .

۵۱ . فرض‌کنید $\sim$ رابطه‌ای در $\mathbf{R}^2$ باشد که با " $\langle x,y\rangle \sim \langle w,z\rangle$ اگفگر $x = w$ " تعریف می‌شود . ثابت کنید که $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است و چند ردهٔ هم‌ارزی را رسم کنید .

۵۲ . فرض کنید a و b اعداد حقیقی دلخـواهی باشند . بعلاوه، ~ رابطه‌ای در $\mathbf{R}^2$ باشد که این‌طور تعریف می‌شود :

$\langle x, y\rangle \sim \langle w, z\rangle$ اگفگر $\exists k \in \mathbf{Z}$ s.t. $x - w = ka,\ y - z = kb$.

ثابت کنید که ~ یک‌رابطهٔ هم‌ارزی است و چند ردهٔ هم‌ارزی را رسم کنید .

جواب مسائل تکمیلی

۲۷ . مجموعه‌های (دو) و (سه) تهی هستند .

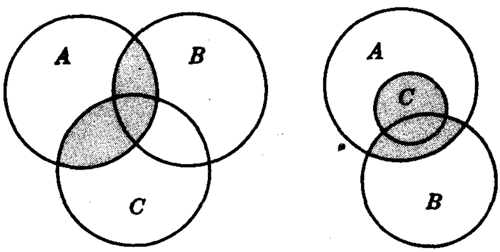
۳۱ . $a \in [a, b]$ ولی $a \notin (a, b)$.

۳۲ . $\mathcal{P}(V) = \{V, \{0\}, \{\{1,2\}\}, \varnothing\}$.

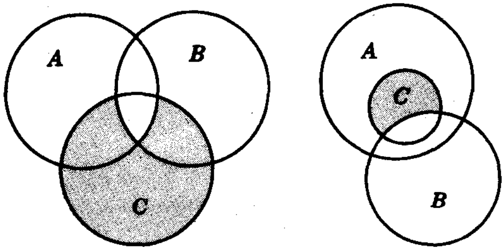
۳۳ . (یک) راست؛ (دو) دروغ؛ (سه) دروغ؛ (چهار) راست .

۳۴ . $A \cup B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\},\ A \cap B = \{1, 2\},\ A \setminus B = \{3, \{1, 2, 3\}\},$
$B \setminus A = \{\{1, 2\}\}$.

۳۵ .



(یک)



(دو)

۳۷ . (دو) $C = \varnothing,\ A = B \neq \varnothing$.

۳۸ . مثال: $A = \{1\},\ B = \{2\}$.

۴۳ . 2^{mn} .

۴۴ . (یک) $R = \{\langle 10, 1\rangle, \langle 8, 2\rangle, \langle 6, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle\}$.

(دو) $\{1,2,3,4,5\} = R$ برد، $\{10,8,6,4,2\} = R$ قلمرو

$R^{-1} = \{\langle 1,10\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,2\rangle\}$.

(سه) $R \circ R = \{\langle 8,5\rangle, \langle 4,4\rangle\}$.

(چهار) $R^{-1} \circ R = \{\langle 10,10\rangle, \langle 8,8\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$.

۴۵ . (یک) $\{5,4,6,7\} = R$ برد، $\{4,1,7,3\} = R$ قلمرو

$R^{-1} = \{\langle 5,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 6,4\rangle, \langle 6,7\rangle, \langle 7,3\rangle\}$.

(دو) $R \circ R = \{\langle 1,5\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 3,6\rangle\}$.

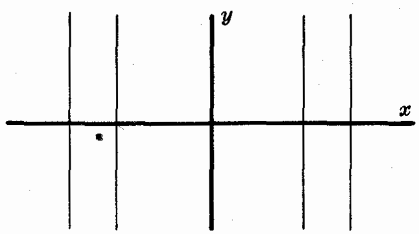
(سه) $R^{-1} \circ R = \{\langle 4,4\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 3,3\rangle\}$.

۴۶ . $U \circ V = \{\langle x,y\rangle : 4x^2 - 12x + 2y + 4 = 0\}$، $V \circ U = \{\langle x,y\rangle : x^2 + y = 2\}$.

۴۸ . (۱) راست؛ (۲) راست؛ (۳) راست؛ (۴) دروغ؛ (۵) راست؛
(۶) راست؛ (۷) راست؛ (۸) راست .

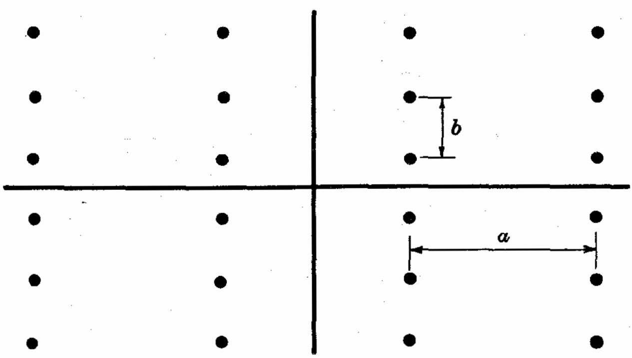
۴۹ . (دو) $[\langle 2,5\rangle] = \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 4,7\rangle, \ldots, \langle n, n+3\rangle, \ldots\}$.

۵۱ .



رده‌های هم‌ارزی خطوط قائم هستند .

۵۲ .



شکل فوق یک ردهٔ هم‌ارزی‌نوعی است . فاصلهٔ بین نقاط افقی مجاور a ، و فاصلهٔ بین نقاط قائم مجاور b است .

تابعها[2]

تابعها

فرض‌کنید به‌هر عنصر از مجموعهٔ A عنصر منحصر بفردی از مجموعهٔ B مربوط شده باشد. گردآیهٔ f مرکب از این ارتباطها را یک **تابع** (یا **نگاشت**) **از** (یا **بر**) A **بتوی** B می‌نامیم و می‌نویسیم

$$f: A \to B \quad \text{یا} \quad A \xrightarrow{f} B\ .$$

عنصر منحصر بفردی در B که به‌وسیلهٔ f به $a \in A$ مربوط می‌شود با $f(a)$ نموده وخوانده می‌شود: **مقدار f در a** یا نقش a **تحت** f . **قلمرو** f مجموعهٔ A و **هم قلمرو** آن B است. هر تابع مانند $f: A \to B$ نظیر رابطه‌ای است در $A \times B$ که عبارت است از

$$\{ \langle a, f(a) \rangle : a \in A \}.$$

این مجموعه را **نمودار** f می‌نامیم. **برد** f ، که با $f[A]$ نموده می‌شود، مجموعهٔ نقشهاست؛ یعنی، $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$.

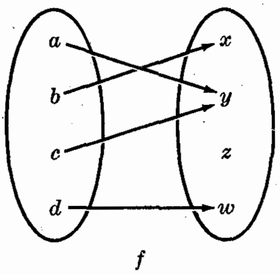
دو تابع $f: A \to B$ و $g: A \to B$ مساوی تعریف می‌شوند، و می‌نویسیم $f = g$ ، اگرگر بـه‌ازای هر $a \in A$ ، $f(a) = g(a)$ ؛ یعنی، اگرگر دارای یک نمودار باشند. بدین ترتیب، میان یک تابع و نمودارش فرقی نمی‌گذاریم. زیر مجموعهٔ f از $A \times B$ ، یعنی رابطه‌ای از A به B ، تابع است اگرگر خاصیت زیر را دارا باشد: **[F]** هر $a \in A$ فقط در مختص اول یک جفت مرتب f مانند $\langle a, b \rangle$ آمده باشد.

نقیض $f = g$ نوشته می‌شود $f \neq g$ و به معنی گزارهٔ زیر است:

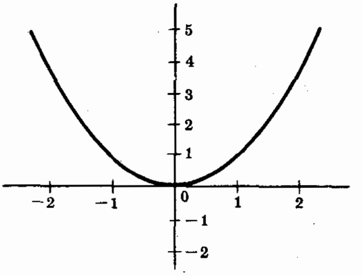
$$\exists a \in A \ \text{که به‌ازای آن}\ f(a) \neq g(a)\ .$$

مثال ۱۰۱ . فرض کنیم $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ تابعی باشد که به هر عدد حقیقی مربع آن را مربوط کند؛ یعنی، به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ ، $f(x) = x^2$. در اینجا f یک **تابع حقیقی** است. نمودارش،

یعنی $\{\langle x, x^2\rangle : x \in \mathbf{R}\}$ ، در شکل ۱۰۲ نموده شده است . برد f مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی است ؛ یعنی ، $f[\mathbf{R}] = \{x : x \in \mathbf{R},\ x \geqq 0\}$.



شکل ۲۰۲



شکل ۱۰۲

مثال ۲۰۱ . فرض کنیم $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{x, y, z, w\}$. در این‌صورت ، نمودار شکل ۲۰۲ معرف تابع f از A بتوی B است . در اینجا $f[A] = \{x, y, w\}$ ، و نمودار f رابطهٔ

$$\{\langle a, y\rangle, \langle b, x\rangle, \langle c, y\rangle, \langle d, w\rangle\}$$

می‌باشد .

مثال ۳۰۱ . تابع $f : A \to B$ را یک **تابع ثابت** گوییم درصورتی که $b_0 \in B$ ی باشد بطوری که به‌ازای هر $a \in A$ ، $f(a) = b_0$. لذا ، برد هر تابع ثابت f یک مجموعهٔ یکانی است ؛ یعنی ، $f[A] = \{b_0\}$.

حال تابعهای $f : A \to B$ و $g : B \to C$ ، که در زیر نموده شده‌اند ، را درنظر می‌گیریم :

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

تابع از A بتوی C که عنصر $a \in A$ را به‌عنصر $g(f(a))$ از C می‌نگارد **ترکیب** یا **حاصل ضرب** f و g نام دارد و با $g \circ f$ نموده می‌شود . پس، طبق تعریف ،

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \cdot$$

تذکر می‌دهیم که اگر $f \subset A \times B$ و $g \subset B \times C$ رابطه باشند ، قبلاً " حاصل ضرب $g \cdot f$ تعریف شده است (فصل ۱) . بهرحال ، این دوحاصل ضرب یکی هستند به‌این‌معنی که اگر f و g تابع باشند ، $g \cdot f$ نیز تابع است و $g \cdot f = g \circ f$.

هرگاه $f : X \to Y$ و $A \subset X$ ، **تحدید** f به A ، که با $f|A$ نموده می‌شود ، تابعی

است از A بتوی Y که این‌طور تعریف می‌شود :

به‌ازای هر $a \in A$ ، $f|A(a) \equiv f(a)$.

به‌عبارت معادل، $f|A = f \cap (A \times Y)$. از سوی دیگر، اگر $f: X \to Y$ تحدید تابع $g: X^* \to Y$ باشد که $X \subset X^*$ ، g **توسیع** f نام خواهد داشت.

تابعهای یک ــ یک، برو، معکوس، و همانی

تابع $f: A \to B$ را درصورتی **یک به یک** (یا **یک ــ یک** یا **۱ ــ ۱**) گوییم که عنصرهای متمایز A نقشهای متمایز داشته باشند، یعنی،

$$f(a) = f(a') \;\Rightarrow\; a = a'.$$

تابع $f: A \to B$ را درصورتی **برو** خوانیم (یا f یک تابع از A **بروی** B است، یا f ، A را **بروی** B می‌نگارد) که هر $b \in B$ نقش $a \in A$ ای باشد؛ یعنی،

$$b \in B \;\Rightarrow\; \exists a \in A \text{ بطوری که } f(a) = b.$$

از اینرو، اگر f برو باشد، $f[A] = B$.

درحالت‌کلی، f^{-1} ،یعنی رابطهٔ معکوس تابع $f \subset A \times B$ ، لزوماً تابع نیست. اما، اگر f یک ــ یک و برو باشد، f^{-1} تابعی است از B بروی A و **تابع معکوس** نامیده می‌شود.

قطر $\Delta_A \subset A \times A$ یک تابع است و **تابع همانی** بر A نام دارد. این‌تابع با 1_A یا 1 نیز نموده می‌شود. در اینجا، به‌ازای هر $a \in A$ ، $1_A(a) = a$. واضح است که اگر $f: A \to B$ ،

$$1_B \circ f = f = f \circ 1_A.$$

بعلاوه، اگر f یک ــ یک و برو باشد، و در نتیجه تابع معکوس f^{-1} را داشته باشد،

$$f^{-1} \circ f = 1_A \text{ و } f \circ f^{-1} = 1_B.$$

عکس این مطلب نیز درست است :

حکم ۱.۲ . فرض‌کنیم $f: A \to B$ و $g: B \to A$ در

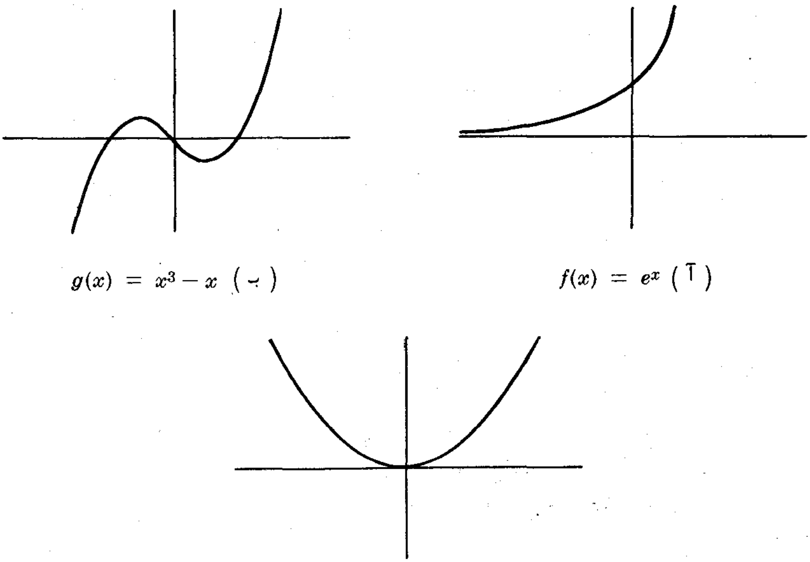
$$g \circ f = 1_A \text{ و } f \circ g = 1_B$$

صدق کنند. **دراین صورت، $f^{-1}: B \to A$ وجود دارد و $g = f^{-1}$.**

مثال ۱.۲ . فرض‌کنیم $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ، $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ، و $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشند :

$h(x) = x^2$ و ، $g(x) = x^3 - x$ ، $f(x) = e^x$.

تابع f ، که در شکل ۳۰۲ (آ) نموده شده ، یک ـ یک است ؛ این در تعبیر هندسی یعنی هر خط افقی بیش از یک نقطه از f را ندارد . تابع g ، که در شکل ۳۰۲ (ب) نموده شده ، برو است ؛ این در تعبیر هندسی یعنی هر خط افقی دست کم یک نقطه از g رادارد . تابع h ، که در شکل ۳۰۲ (پ) نموده شده ، نه یک ـ یک است نه برو ، زیرا $h(2) = h(-2) = 4$ و $h[\mathbf{R}]$ یک زیر مجموعهٔ حقیقی $\mathbf{R}$ است ؛ مثلاً ، $-16 \notin h[\mathbf{R}]$.



$f(x) = e^x$ (آ)

$g(x) = x^3 - x$ (ب)

$h(x) = x^2$ (پ)

شکل ۳۰۲

مجموعه‌های اندیسدار ، حاصل ضربهای دکارتی

یک *ردهٔ اندیسدار از مجموعه‌ها* ، که با

$$\{A_i : i \in I\} \text{ ، } \{A_i\} \text{ ، یا فقط } \{A_i\}_{i \in I}$$

نموده می‌شود ، به‌هر $i \in I$ مجموعهٔ A_i را مربوط می‌کند ؛ یعنی ، تابعی است از I بتوی رده‌ای از مجموعه‌ها . مجموعهٔ I ***مجموعهٔ اندیس*** ، مجموعه‌های A_i ***مجموعه‌های اندیسدار*** ، و هر $i \in I$ یک ***اندیس*** نامیده می‌شود . وقتی مجموعهٔ اندیس I مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت است ، ردهٔ اندیسدار $\{A_1, A_2, \ldots\}$ یک ***دنباله*** (از مجموعه‌ها) نام خواهد داشت .

مثال ۱۰۳ . فرض‌کنیم به‌ازای هر (مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت) $n \in \mathbf{N}$

$$D_n = \{x : \text{است } n \text{ مضربی از } x \text{ ، } x \in \mathbf{N}\}.$$

در این‌صورت،

$$D_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}, \quad D_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}, \quad D_3 = \{3, 6, 9, \ldots\}, \quad \ldots$$

حاصل ضرب دکارتی یک ردهٔ اندیسدار از مجموعه‌ها مانند $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ، که با

$$\prod_i A_i \text{ یا فقط } \prod_{i\in I} A_i \text{ یا } \prod \{A_i : i \in I\}$$

نموده می‌شود، مجموعهٔ تمام توابعی است مانند $p : I \to \cup_i A_i$ بطوری‌که $p(i) = a_i \in A_i$. ما این عنصر حاصل ضرب دکارتی را با $p = \langle a_i : i \in I\rangle$ نشان می‌دهیم. به‌ازای هر $i_0 \in I$ تابعی مانند π_{i_0} وجود دارد، به‌نام **تابع تصویر** i_0 م، از مجموعهٔ حاصل‌ضربی $\prod_i A_i$ بتوی **مجموعهٔ مختص** i_0 م A_{i_0} که با

$$\pi_{i_0}(\langle a_i : i \in I\rangle) = a_{i_0}$$

تعریف می‌شود.

مثال ۲۰۳ . به‌یاد می‌آوریم که $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ از تمام 3 تایی‌های $p = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ از اعداد حقیقی تشکیل شده است. حال فرض‌کنیم R_1 ، R_2 ، و R_3 سه کپی از $\mathbf{R}$ باشند. دراین صورت، p را می‌توان تابعی بر $I = \{1, 2, 3\}$ انگاشت که $p(1) = a_1 \in R_1$ ، $p(2) = a_2 \in R_2$ ، و $p(3) = a_3 \in R_3$. به عبارت دیگر،

$$\mathbf{R}^3 = \prod \{R_i : i \in I, \ R_i = \mathbf{R}\}.$$

اعمال تعمیم یافته

مفهوم اجتماع و اشتراک، که در اصل برای دو مجموعه تعریف شده‌اند، را می‌توان به هر ردهٔ $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ عمومی U تعمیم داد. اجتماع مجموعه‌های در $\mathcal{A}$ ، که با $\bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$ نموده می‌شود، مجموعهٔ عنصرهایی است که دست کم به یک مجموعه در $\mathcal{A}$ تعلق دارند:

$$\bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\} = \{x : x \in U, \ \exists A \in \mathcal{A} \text{ s.t. } x \in A\}.$$

اشتراک مجموعه‌های در $\mathcal{A}$ ، که با $\bigcap\{A : A \in \mathcal{A}\}$ نموده می‌شود، مجموعهٔ عناصری است که به هر مجموعه در $\mathcal{A}$ تعلق دارند:

$$\bigcap\{A : A \in \mathcal{A}\} = \{x : x \in A \text{ ، } A \in \mathcal{A} \text{ و به‌ازای هر } x \in U\}.$$

اگر یک ردهٔ اندیسدار از زیر مجموعه‌های U ، مثلاً $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ، را داشته

باشیم ، برای اجتماع مجموعه‌های در $\mathscr{A}$ می‌نویسیم

$$\bigcup\{A_i : i \in I\} \text{ ، } \bigcup_{i\in I} A_i \text{ ، یا } \cup_i A_i \text{ ،}$$

و برای اشتراک مجموعه‌های در $\mathscr{A}$ می‌نویسیم

$$\bigcap\{A_i : i \in I\} \text{ ، } \bigcap_{i\in I} A_i \text{ ، یا } \cap_i A_i .$$

همچنین، بـرای اجتماع و اشتراک دنباله‌ٔ $\{A_1, A_2, \dots\}$ از زیر مجموعه‌های U بترتیب خواهیم نوشت

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \text{ و } \cap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots .$$

مثال ۱۰۴ . فرض کنیم به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ (مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت)

$$D_n = \{x : x \in \mathbf{N} \text{ ، } x \text{ مضربی از } n \text{ است}\}$$

(ر.ک. مثال ۱۰۳) . دراین صورت ،

$$\bigcup\{D_i : i \geqq 10\} = \{10, 11, 12, \dots\} \text{ و } \cap_{i=1}^{\infty} D_i = \emptyset .$$

مثال ۲۰۴ . فرض کنیم $I = [0,1]$ و ، به‌ازای هر $i \in I$ ، $A_i = [0,i]$. در این صورت ،

$$\cup_i A_i = [0,1] \text{ و } \cap_i A_i = \{0\} .$$

قوانین پخشپذیری و قوانین دمورگان نیز برای این اعمال تعمیم یافته برقرارند :

قضیهٔ ۲۰۲ . ***به‌ازای هر رده از مجموعه‌های $\mathscr{A} = \{A_i\}$ و هر مجموعهٔ B***

(یک) $B \cup (\cap_i A_i) = \cap_i (B \cup A_i)$ ؛ **(دو)** $B \cap (\cup_i A_i) = \cup_i (B \cap A_i)$.

قضیهٔ ۳۰۲ . ***فرض‌کنیم $\mathscr{A} = \{A_i\}$ ردهٔ دلخواهی‌ازریر مجموعه‌های U باشد . دراین صورت ،***

(یک) $(\cup_i A_i)^c = \cap_i A_i^c$ ؛ **(دو)** $(\cap_i A_i)^c = \cup_i A_i^c$.

قضیهٔ زیر بارها به‌کارخواهد آمد .

قضیهٔ ۴۰۲ . ***فرض‌کنیم A مجموعه‌ای‌دلخواه‌و ، به‌ازای هر $p \in A$ ، G_p زیرمجموعه‌ای از A باشد بطوری که $p \in G_p \subset A$. دراین صورت ، $A = \bigcup\{G_p : p \in A\}$.***

تبصره . درحالت ردهٔ تهی $\emptyset$ از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ عمومی U، بجاست تعریف کنیم

$$\bigcup\{A : A \in \emptyset\} = \emptyset \quad \text{و} \quad \bigcap\{A : A \in \emptyset\} = U.$$

در نتیجه،

$$\bigcup\{A_i : i \in \emptyset\} = \emptyset \quad \text{و} \quad \bigcap\{A_i : i \in \emptyset\} = U.$$

توابع مجموعه‌ای مربوطه

فرض کنیم $f : X \to Y$. دراین صورت، **نقش** $f[A]$ هر زیر مجموعهٔ A از X مجموعهٔ نقشهای نقاط A است، و **نقش معکوس** $f^{-1}[B]$ هر زیرمجموعهٔ B از Y مجموعهٔ نقاطی در X است که نقشهای آنها در B قرار دارند؛ یعنی،

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\} \quad \text{و} \quad f^{-1}[B] = \{x : x \in X, f(x) \in B\}.$$

مثال ۱۰۵ . فرض کنیم $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ با $f(x) = x^2$ تعریف شده باشد . دراین صورت،

$$f[\{1, 3, 4, 7\}] = \{1, 9, 16, 49\}, \quad f[(1, 2)] = (1, 4).$$

همچنین،

$$f^{-1}[\{4, 9\}] = \{-3, -2, 2, 3\}, \quad f^{-1}[(1, 4)] = (1, 2) \cup (-2, -1).$$

لذا، تابع $f : X \to Y$ تابعی القا می‌کند، که آن نیز با f نموده می‌شود، از مجموعهٔ توان X، یعنی $\mathcal{P}(X)$، بتوی مجموعهٔ توان Y، یعنی $\mathcal{P}(Y)$، و تابع f^{-1} از $\mathcal{P}(Y)$ بتوی $\mathcal{P}(X)$. تابعهای القایی f و f^{-1} را **توابع مجموعه‌ای** می‌نامند، چرا که نگاشتهایی هستند از رده‌ها (یی از مجموعه‌ها) بتوی رده‌ها .

تذکار می‌دهیم که، درحالت کلی، تابع مجموعه‌ای مربوطه به f^{-1} معکوس تابع مجموعه‌ای مربوطه به f نیست . مثلاً"، اگر f تابع مثال ۱۰۵ باشد،

$$f^{-1} \circ f[(1, 2)] = f^{-1}[(1, 4)] = (1, 2) \cup (-2, -1).$$

توجه کنید که برای تمیز یک تابع از توابع مجموعه‌ای مربوط به آن کروشه و پرانتز به‌کار رفته است؛ یعنی، $f(a)$ مقدار تابع اصلی است و $f[A]$ و $f^{-1}[B]$ مقادیر توابع مجموعه‌ای مربوطه می‌باشند .

توابع مجموعه‌ای مربوطه خواص متعددی دارند . بخصوص،

قضیهٔ ۵۰۲ . **فرض کنیم $f : X \to Y$. دراین صورت، به‌ازای هر دو زیر مجموعهٔ A و**

B از X ،

(یک) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$ ؛

(دو) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$ ؛

(سه) $f[A \setminus B] \supset f[A] \setminus f[B]$ ؛

(چهار) $A \subset B$ ایجاب می‌کند که $f[A] \subset f[B]$ ؛

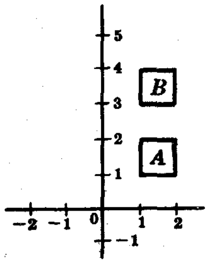
و، بطور کلی، به‌ازای هر رده‌ٔ اندیسدار $\{A_i\}$ از زیرمجموعه‌های X ،

(یک´) $f[\cup_i A_i] = \cup_i f[A_i]$ ؛ (دو´) $f[\cap_i A_i] \subset \cap_i f[A_i]$.

مثال زیر نشان می‌دهد که شمولهای (دو) و (سه) را نمی‌توان درحالت کلی با تساوی عوض کرد.

مثال ۲۰۵ . زیرمجموعه‌های $A = [1,2] \times [1,2]$ و $B = [1,2] \times [3,4]$ از صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ وتصویر $\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ ، بتوی مجموعهٔ مختص اول، یعنی محور x ، رادرنظر می‌گیریم. توجه‌کنید که $\pi[A] = [1,2]$ و $\pi[B] = [1,2]$ ، و $A \cap B = \emptyset$ ایجاب می‌کندکه $\pi[A \cap B] = \emptyset$. لذا،

$$\pi[A] \cap \pi[B] = [1,2] \quad \neq \quad \pi[A \cap B] = \emptyset.$$



بعلاوه، $A \setminus B = A$ ؛ درنتیجه،

$$\pi[A \setminus B] = [1,2] \quad \neq \quad \emptyset = \pi[A] \setminus \pi[B].$$

از آن‌سو، تابع مجموعه‌ای معکوس خیلی "خوشرفتار" تر است دراین معنی که تساوی برای آن در هر دوحالت برقرار است. یعنی،

قضیهٔ ۶۰۲ . فرض کنیم $f : X \to Y$. دراین صورت، به‌ازای هر دو زیر مجموعهٔ A و B از Y ،

(یک) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ ؛
(دو) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$ ؛
(سه) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$ ؛
(چهار) $A \subset B$ **ایجاب می‌کند که** $f^{-1}[A] \subset f^{-1}[B]$ ؛
و ، بطور کلی ، به‌ازای هر ردهٔ اندیسدار $\{A_i\}$ **از زیرمجموعه‌های** Y ،
(´یک) $f^{-1}[\cup_i A_i] = \cup_i f^{-1}[A_i]$ ؛ **(´دو)** $f^{-1}[\cap_i A_i] = \cap_i f^{-1}[A_i]$.

چون $f^{-1}[Y] = X$ ، به‌عنوان حالت خاصی از (سه) داریم

نتیجهٔ ۷.۲ . فرض‌کنیم $f : X \to Y$ **و** $A \subset Y$ **. دراین‌صورت،** $f^{-1}[A^c] = (f^{-1}[A])^c$.

حال بین دو تابع مجموعه‌ای رابطهٔ مهمی به‌دست می‌آوریم :

قضیهٔ ۸.۲ . فرض‌کنیم $f : X \to Y$ **و** $A \subset X$ **و** $B \subset Y$ **. دراین صورت ،**
(یک) $A \subset f^{-1} \circ f[A]$ ؛ **(دو)** $B \supset f \circ f^{-1}[B]$.

همانطور کـه قبـلا" نشان داده شد ، در (یک) شمول را نمی‌توان درحالت کلی با تساوی عوض کرد .

جبر توابع حقیقی

فرض کنیم $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ گردآیهٔ تمام توابع حقیقی باشد که بر مجموعهٔ X تعریف شده‌اند . بسیاری‌ازاعمال در $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ از اعمال نظیر در $\mathbf{R}$ به ارث رسیده است . به بیان دقیق ، فرض کنیم $f : X \to \mathbf{R}$ و $g : X \to \mathbf{R}$ و $k \in \mathbf{R}$. دراین صورت ،

$(f+g) : X \to \mathbf{R}$ را با $(f+g)(x) \equiv f(x) + g(x)$

$(k \cdot f) : X \to \mathbf{R}$ را با $(k \cdot f)(x) \equiv k(f(x))$

$(|f|) : X \to \mathbf{R}$ را با $(|f|)(x) \equiv |f(x)|$

$(fg) : X \to \mathbf{R}$ را با $(fg)(x) \equiv f(x)\, g(x)$

تعریف می‌کنیم . همچنین، بجاست که عدد حقیقی $k \in \mathbf{R}$ را با تابع ثابت " $f(x) = k$ به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ " یکی کنیم . دراین صورت، تابع $(f+k) : X \to \mathbf{R}$

$$(f+k)(x) \equiv f(x) + k$$

می‌باشد . توجه کنید که $(fg): X \to \mathbf{R}$ ترکیب f و g که قبلاً" بحث شد نیست .

مثال ۱.۶ . تابعهای

$$g = \{\langle a,2\rangle, \langle b,-1\rangle\} \text{ و } f = \{\langle a,1\rangle, \langle b,3\rangle\}$$

را با قلمرو $X = \{a,b\}$ درنظر می‌گیریم . دراین صورت ،

$$(3f-2g)(a) \equiv 3f(a) - 2g(a) = 3(1) - 2(2) = -1,$$

$$(3f-2g)(b) \equiv 3f(b) - 2g(b) = 3(3) - 2(-1) = 11;$$

یعنی ،

$$3f - 2g = \{\langle a,-1\rangle, \langle b,11\rangle\}.$$

و نیز ، چون $|g|(x) \equiv |g(x)|$ و $(g+3)(x) \equiv g(x) + 3$ ،

$$|g| = \{\langle a,2\rangle, \langle b,1\rangle\} \text{ و } g + 3 = \{\langle a,5\rangle, \langle b,2\rangle\}.$$

گردآیهٔ $\mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ مجهز به اعمال فوق خواص متعددی دارد ، که بعضی از آنها در قضیهٔ زیر آمده است .

قضیهٔ ۹.۲ . *گردآیهٔ $\mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ مرکب از همهٔ توابع حقیقی تعریف شده بر مجموعهٔ ناتهی X و مجهز به اعمال فوق ، دراصول موضوع یک فضای برداری خطی حقیقی صدق می‌کنند :*

[V₁] جمع توابع f و g در روابط زیر صدق می‌کنند :

(۱) $(f+g)+h = f+(g+h)$ ؛

(۲) $f+g = g+f$ ؛

(۳) $\exists 0 \in \mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ ، یعنی $0: X \to \mathbf{R}$ ، بطوری که $f+0=f$ ؛

(۴) به‌ازای‌هر $f \in \mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ ، $\exists -f \in \mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ ، یعنی $-f: X \to \mathbf{R}$ ، بطوری که $f+(-f)=0$.

[V₂] ضرب اسکالر $k \cdot f$ تابع f در عدد حقیقی k در روابط زیر صدق می‌کند :

(۱) $k\cdot(k'\cdot f) = (kk')\cdot f$ ؛

(۲) $1\cdot f = f$.

[V₃] جمع و ضرب اسکالر در روابط زیر صدق می‌کنند :

(۱) $k\cdot(f+g) = k\cdot f + k\cdot g$ ؛

(۲) $(k+k')\cdot f = k\cdot f + k'\cdot f$.

مثال ۲۰۶ . فرض کنیم $X = \{1, 2, \ldots, m\}$. دراین صورت، هر تابع $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ را می‌توان به شکل m تایی مرتب $\langle f(1), \ldots, f(m) \rangle$ نوشت. بعلاوه، اگر

$f = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ و $g = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle$،

$$f + g = \langle a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots,\ a_m + b_m \rangle$$

و، به‌ازای هر $k \in \mathbf{R}$ ،

$$k \cdot f = \langle ka_1, \ldots, ka_m \rangle.$$

دراین حالت، فضای (برداری) خطی حقیقی $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ **فضای اقلیدسی m بعدی** نامیده می‌شود.

مثال ۳۰۶ . تابع $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ را **کراندار** گوییم اگفگر

$\exists M \in \mathbf{R}$ بطوری که‌به‌ازای هر $x \in X$ ، $|f(x)| \leq M$.

فرض کنیم $\beta(X, \mathbf{R})$ گردآیهٔ تمام توابع کراندار در $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ باشد. $\beta(X, \mathbf{R})$ دارای خواص زیر است:

(یک) هرگاه $f, g \in \beta(X, \mathbf{R})$ ، آنگاه $f + g \in \beta(X, \mathbf{R})$ ؛

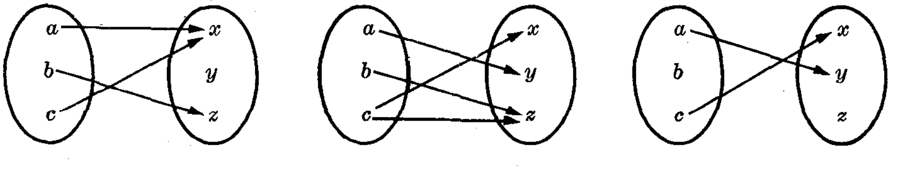
(دو) هرگاه $f \in \beta(X, \mathbf{R})$ و $k \in \mathbf{R}$ ، آنگاه $k \cdot f \in \beta(X, \mathbf{R})$.

هر زیر مجموعه از $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ که در (یک) و (دو) صدق کند یک **زیرفضای** (خطی) $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ نام دارد.

مسائل حل شده

تابعها

۱ . بگویید هریک از نمودارهای زیر معرف یک تابع از $A = \{a, b, c\}$ بتوی $B = \{x, y, z\}$ هست یا نه:



(یک) (دو) (سه)

حل

(یک) نیست. چیزی به عنصر $b \in A$ مربوط نشده است.

(دو) نیست. دوعنصر، یعنی x و z ، به $c \in A$ مربوط شده است.
(سه) هست.

۲ . فرض کنید $X = \{1,2,3,4\}$ ، و بگویید هریک از روابط زیر معرف یک تابع از X بتوی X هست یا نه:

(یک) $f = \{ \langle 2,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$ ؛
(دو) $g = \{ \langle 3,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 1,1 \rangle \}$ ؛
(سه) $h = \{ \langle 2,1 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$.

حل

به‌یاد می‌آوریم که زیرمجموعهٔ f از $X \times X$ تابع $f: X \to X$ است اگفگر هر $x \in X$ مختص اول فقط یک جفت مرتب در f باشد.
(یک) نیست. دوجفت مرتب و متفاوت $\langle 2,3 \rangle$ و $\langle 2,1 \rangle$ در f یک مختص اول دارند.
(دو) نیست. عنصر $2 \in X$ مختص اول هیچ جفت مرتبی در g نیست.
(سه) هست. $2 \in X$ مختص اول دو جفت مرتب در h است، اما این دو جفت مساوی می‌باشند.

۳ . تابعهای

$$f = \{ \langle 1,3 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 5,2 \rangle \},$$
$$g = \{ \langle 1,4 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 5,3 \rangle \}$$

از $X = \{1,2,3,4,5\}$ بتوی X را درنظر بگیرید.
(یک) برد f و g را مشخص کنید.
(دو) توابع مرکب $g \circ f$ و $f \circ g$ را بیابید.

حل

(یک) به‌یاد می‌آوریم که برد یک تابع مجموعهٔ مقادیر نقش آن است؛ یعنی، مجموعهٔ مختصات دوم در آن. لذا،

$$\{3,5,1,2\} = f \text{ برد} \quad \text{و} \quad \{4,1,2,3\} = g \text{ برد}.$$

(دو) تعریف تابع مرکب را به‌کار می‌بریم و حساب می‌کنیم:

$$(g \circ f)(1) \equiv g(f(1)) = g(3) = 1 \quad , \quad (f \circ g)(1) \equiv f(g(1)) = f(4) = 1,$$

$$(g\circ f)(2) \equiv g(f(2)) = g(5) = 3 \quad , \quad (f\circ g)(2) \equiv f(g(2)) = f(1) = 3,$$
$$(g\circ f)(3) \equiv g(f(3)) = g(3) = 1 \quad , \quad (f\circ g)(3) \equiv f(g(3)) = f(1) = 3,$$
$$(g\circ f)(4) \equiv g(f(4)) = g(1) = 4 \quad , \quad (f\circ g)(4) \equiv f(g(4)) = f(2) = 5,$$
$$(g\circ f)(5) \equiv g(f(5)) = g(2) = 1 \quad , \quad (f\circ g)(5) \equiv f(g(5)) = f(3) = 3.$$

به عبارت دیگر،

$$g\circ f = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,1\rangle\},$$
$$f\circ g = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,3\rangle\}.$$

ملاحظه می‌شود که $f\circ g \neq g\circ f$.

۴ . فرض کنید تابعهای $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ و $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ با

$$f(x) = 2x+1, \quad g(x) = x^2-2$$

تعریف شده باشند . فرمولهای معرف توابع حاصل ضرب $g\circ f$ و $f\circ g$ را بیابید .

حل . $g\circ f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ را به‌این صورت محاسبه می‌کنیم :

$$(g\circ f)(x) \equiv g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2-2 = 4x^2+4x-1.$$

توجه کنید که همین جواب را می‌توان با نوشتن

$$y = f(x) = 2x+1, \qquad z = g(y) = y^2-2$$

و سپس حذف y از دو معادله به‌دست آورد :

$$z = y^2-2 = (2x+1)^2-2 = 4x^2+4x-1.$$

حال $f\circ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ را حساب می‌کنیم :

$$(f\circ g)(x) \equiv f(g(x)) = f(x^2-2) = 2(x^2-2)+1 = 2x^2-3.$$

۵ . قانون شرکتپذیری را برای ترکیب توابع ثابت کنید ؛ یعنی، ثابت کنید هرگاه $f:A\to B$ ، $g:B\to C$ ، و $h:C\to D$ ، آنگاه $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

حل . چون قانون شرکتپذیری درحالت کلی برای ترکیب روابط ثابت شده است، این مطلب نتیجه خواهد شد . برهان مستقیم این مطلب را نیز ذکر می‌کنیم :

$$((h\circ g)\circ f)(a) = (h\circ g)(f(a)) = h(g(f(a))), \quad \forall a\in A,$$
$$(h\circ(g\circ f))(a) = h((g\circ f)(a)) = h(g(f(a))), \quad \forall a\in A.$$

بنابراین، $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

توابع یک ــ یک و برو

۶ . فرض کنید $f: A \to B,\ g: B \to C$ ، و ثابت کنید

(یک) هرگاه f و g **برو** باشند، $g \circ f: A \to C$ نیز برو است؛

(دو) هرگاه f و g یک ــ یک باشند، $g \circ f: A \to C$ نیز یک ــ یک است.

حل

(یک) فرض کنیم $c \in C$. چون g بروست، $\exists b \in B \ \text{ s.t. } \ g(b) = c$. و چون f بروست، $\exists a \in A \ \text{ s.t. } \ f(a) = b$. پس، در این صورت، $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$ ؛ یعنی، $g \circ f$ نیز برو می‌باشد.

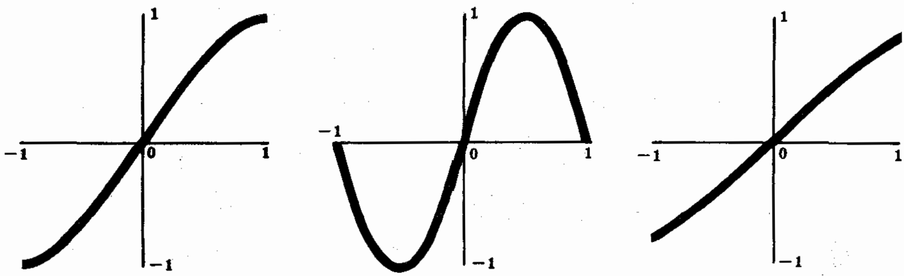
(دو) فرض کنیم $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$ ؛ یعنی، $g(f(a)) = g(f(a'))$. درنتیجه، چون g یک ــ یک است، $f(a) = f(a')$. و چون f یک ــ یک است، $a = a'$. لذا، $g \circ f$ نیز یک ــ یک است.

۷ . فرض کنید $A = [-1, 1]$ ، و $f: A \to A$ ، $g: A \to A$ ، و $h: A \to A$ با

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin \pi x, \quad h(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$$

تعریف شده باشند. بگویید هریک از این توابع (یک) یک ــ یک؛ (دو) برو؛ (سه) یکبرو (یعنی، یک ــ یک و برو) هست یا نه.

حل. نمودار این تابعها به‌صورت زیر است:



$h(x)$ $g(x)$ $f(x)$

تابع f یک ــ یک است؛ هر خط افقی شامل بیش از یک نقطه از f نیست. برو نیست زیرا، مثلاً، به‌ازای هر $x \in A$ ، $x \neq 1$. از آن‌سو، g بروست؛ هر خط افقی شامل دست‌کم یک نقطه از f است. اما g یک ــ یک نیست زیرا، مثلاً،

$g(-1) = g(0) = 0$. تابع h هم یک ـ یک است هم برو؛ هر خط افقی درست یک نقطه از h را داراست.

۸ . فرض کنید $f: A \to B$ و $g: B \to C$ یک ـ یک و برو باشند. ثابت کنید $(g \circ f)^{-1}: C \to A$ موجود و مساوی $f^{-1} \circ g^{-1}: C \to A$ است.

حل. از حکم ۱.۲ استفاده کرده نشان می‌دهیم که
$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_A$ و $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_B$.
با استفاده از قانون شرکتپذیری برای ترکیب توابع،

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ (g \circ f)) \\
&= f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) \\
&= f^{-1} \circ (1 \circ f) \\
&= f^{-1} \circ f \\
&= 1_A,
\end{aligned}$$

زیرا $g^{-1} \circ g = 1$ و $1 \circ f = f = f \circ 1$. بهمین ترتیب،

$$\begin{aligned}
(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) \\
&= g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) \\
&= g \circ (1 \circ g^{-1}) \\
&= g \circ g^{-1} \\
&= 1_B.
\end{aligned}$$

۹ . چه موقع تابع تصویر $\pi_{i_0}: \prod \{A_i : i \in I\} \to A_{i_0},\ A_{i_0} \neq \emptyset$ بروست؟

حل. یک تابع تصویر همیشه بروست به این شرط که حاصل ضرب دکارتی $\prod \{A_i : i \in I\}$ ناتهی باشد؛ یعنی، هیچ A_i تهی نباشد.

مجموعه‌های اندیسدار، اعمال تعمیم یافته

۱۰ . با فرض $A_n = \{x : \text{است } n \text{ یک مضرب } x\}$ ؛ که درآن (مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت) $n \in \mathbf{N}$، و $B_i = [i, i+1]$ ، که درآن (مجموعهٔ اعداد صحیح) $i \in \mathbf{Z}$ ، مجموعه‌های زیر را بیابید:

(یک) $A_3 \cap A_5$ ؛
(دو) $\bigcup\{A_i : i \in P\}$ ، کـه درآن P مجموعهٔ اعداد اول است ؛
(سه) $B_3 \cap B_4$ ؛
(چهار) $\bigcup\{B_i : i \in \mathbf{Z}\}$ ؛
(پنج) $(\bigcup\{B_i : i \geqq 7\}) \cap A_5$.

حل

(یک) اعدادی کـه هـم مضرب 3 هم 5 باشند مضرب 15 هستند؛ درنتیجه، $A_3 \cap A_5 = A_{15}$.

(دو) هر عدد صحیح و مثبت جز 1 مضرب لااقل یک عدد اول است؛ در نتیجه، $\bigcup\{A_i : i \in P\} = \{2, 3, 4, \ldots\} = \mathbf{N} \setminus \{1\}$.

(سه) $B_3 \cap B_4 = \{x : 3 \leqq x \leqq 4,\ 4 \leqq x \leqq 5\} = \{4\}$.

(چهار) چون هر عدد حقیقی دست کم به یک بازهٔ $[i, i+1]$ تعلق دارد، (مجموعهٔ اعداد حقیقی) $\bigcup\{B_i : i \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{R}$.

(پنج) $(\bigcup\{B_i : i \geqq 7\}) \cap A_5 = \{x : x \geqq 7$ ، x یک مضرب 5 است$\} = A_5 \setminus \{5\}$
$= \{10, 15, 20, \ldots\}$.

۱۱ . به‌فرض‌آنکه $D_n = (0, 1/n)$ ، که‌درآن $n \in \mathbf{N}$ (مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت) ، مجموعه‌های زیر را بیابید :

(یک) $D_3 \cup D_7$ ؛ (دو) $D_3 \cap D_{20}$ ؛
(سه) $D_s \cup D_t$ ؛ (چهار) $D_s \cap D_t$ ؛
(پنج) $\bigcup\{D_i : i \in A \subset \mathbf{N}\}$ ؛ (شش) $\bigcap\{D_i : i \in \mathbf{N}\}$.

حل

(یک) چون $(0, 1/7) \subset (0, 1/3)$ ، $D_3 \cup D_7 = D_3$.

(دو) چون $(0, 1/20) \subset (0, 1/3)$ ، $D_3 \cap D_{20} = D_{20}$.

(سه) فرض کنیـم $m = \min\{s, t\}$ ؛ یعنی، مینیمم s و t باشد. دراین صورت، D_m مساوی D_s یا D_t و شامل دیگری است. درنتیجه، $D_s \cup D_t = D_m$.

(چهار) فرض کنیم $M = \max\{s, t\}$ ؛ یعنی، ماکزیمم دوعدد باشد. دراین‌صورت، $D_s \cap D_t = D_M$.

(پنج) فرض کنیم $a \in A$ کوچکترین عدد در A باشد. دراین صورت، $\bigcup\{D_i : i \in A \subset \mathbf{N}\} = D_a$.

(شش) هرگاه $x \in \mathbf{R}$، آنگاه $\exists i \in \mathbf{N}$ s.t. $x \notin (0, 1/i)$. در نتیجه، $\bigcap\{D_i : i \in \mathbf{N}\} = \emptyset$.

۱۲. قسمت (دو) قضیهٔ ۲.۲ (قانون پخشپذیری) را ثابت کنید:

$$B \cap (\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} (B \cap A_i).$$

حل.

$$\begin{aligned} B \cap (\cup_{i \in I} A_i) &= \{x : x \in B,\ x \in \cup_{i \in I} A_i\} \\ &= \{x : x \in B,\ \exists i_0 \in I \text{ s.t. } x \in A_{i_0}\} \\ &= \{x : \exists i_0 \in I \text{ s.t. } x \in B \cap A_{i_0}\} \\ &= \cup_{i \in I} (B \cap A_i). \end{aligned}$$

۱۳. فرض کنید $\{A_i : i \in I\}$ یک ردهٔ اندیسدار از مجموعه‌ها بوده و $i_0 \in I$. ثابت کنید

$$\cap_{i \in I} A_i \subset A_{i_0} \subset \cup_{i \in I} A_i.$$

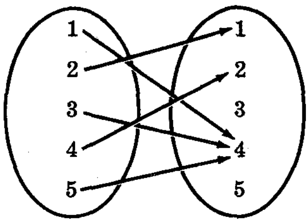
حل. فرض کنیم $x \in \cap_{i \in I} A_i$. دراین صورت، به‌ازای هر $i \in I$، $x \in A_i$. به‌خصوص، $x \in A_{i_0}$. درنتیجه، $\cap_{i \in I} A_i \subset A_{i_0}$. حال فرض کنیم $y \in A_{i_0}$. چون $i_0 \in I$، $y \in \cup_{i \in I} A_i$. درنتیجه، $A_{i_0} \subset \cup_{i \in I} A_i$.

۱۴. قضیهٔ ۴.۲ را ثابت کنید: فرض کنید A مجموعه‌ای دلخواه، و به‌ازای هر $p \in A$، G_p زیر مجموعه‌ای از A باشد بطوری که $p \in G_p \subset A$. دراین‌صورت، $A = \bigcup\{G_p : p \in A\}$.

حل. فرض کنیم $x \in \bigcup\{G_p : p \in A\}$. پس $\exists p_0 \in A$ s.t. $x \in G_{p_0} \subset A$. در نتیجه، $x \in A$. بنابر این، $\bigcup\{G_p : p \in A\} \subset A$. (به عبارت دیگر، اگر هر G_p زیر مجموعهٔ A باشد، اجتماع G_p ها نیز زیر مجموعهٔ A است.)
حال فرض‌کنیم $y \in A$. پس $y \in G_y$. درنتیجه، $y \in \bigcup\{G_p : p \in A\}$. بنابر این، $A \subset \bigcup\{G_p : p \in A\}$، و دومجموعه مساوی می‌باشند.

توابع مجموعه‌ای مربوطه

۱۵ . به‌فرض آنکه $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $f: A \to A$ با نمودار زیر تعریف شده باشد :



f

مجموعه‌های زیر را پیدا کنید :

(یک) $f[\{1,3,5\}]$ ؛ (دو) $f^{-1}[\{2,3,4\}]$ ؛

(سه) $f^{-1}[\{3,5\}]$.

حل

(یک) $f[\{1,3,5\}] = \{f(1), f(3), f(5)\} = \{4\}$.

(دو) $f^{-1}[\{2,3,4\}] = \{4,1,3,5\}$.

(سه) $f^{-1}[\{3,5\}] = \emptyset$ ، زیرا هیچ عنصر A ، 3 یا 5 را به‌عنوان نقش ندارد .

۱۶ . تابع $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ راکه با $f(x) = x^2$ تعریف شده درنظر بگیرید ، و مجموعه‌های زیر را بیابید :

(یک) $f^{-1}[\{25\}]$ ؛ (دو) $f^{-1}[\{-9\}]$ ؛

(سه) $f^{-1}[\{x: x \leq 0\}]$ ؛ (چهار) $f^{-1}[\{x: 4 \leq x \leq 25\}]$.

حل

(یک) $f^{-1}[\{25\}] = \{5,-5\}$ ، زیرا $f(5) = 25,\ f(-5) = 25$ و مربع هیچ عدد دیگر 25 نیست .

(دو) $f^{-1}[\{-9\}] = \emptyset$ ، زیرا مربع هیچ عدد حقیقی -9 نیست .

(سه) $f^{-1}[\{x: x \leq 0\}] = \{0\}$ ، زیرا $f(0) = 0 \leq 0$ و مربع هر عدد حقیقی دیگر بزرگتر از 0 است .

(چهار) $f^{-1}[\{x: 4 \leq x \leq 25\}]$ از x هایی تشکیل شده که $4 \leq x^2 \leq 25$. بنابر این ،

$$f^{-1}[\{x : 4 \leq x \leq 25\}] \;=\; [2,5] \cup [-5,-2].$$

۱۷ . ثابت کنید هرگاه $f : X \to Y$ یک ـ یک باشد ، تابع مجموعه‌ای مربوطهٔ $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ نیز یک ـ یک است .

حل. هرگاه $X = \emptyset$ ، آنگاه $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$. درنتیجه ، $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ یک ـ یک است ، زیرا هیچ دو عضو مختلف $\mathcal{P}(X)$ نمی‌توانند یک نقش داشته باشند چرا که‌دو عضو متفاوت در $\mathcal{P}(X)$ وجود ندارد .

هرگاه $X \neq \emptyset$ ، آنگاه $\mathcal{P}(X)$ دست کم دو عضو دارد . فرض کنیم $A, B \in \mathcal{P}(X)$ ولی $A \neq B$. دراین‌صورت، $\exists p \in X \text{ s.t. } p \in A,\, p \notin B$ (یا $p \in B,\, p \notin A$). لذا، $f(p) \in f[A]$ و ،چون f یک ـ یک است ، $f(p) \notin f[B]$ (یا $f(p) \in f[B]$ و $f(p) \notin f[A]$) .بنابراین، $f[A] \neq f[B]$ ؛ و درنتیجه ، تابع مجموعه‌ای القایی نیز یک ـ یک می‌باشد .

۱۸ . قسمتهای (یک) و (سه) قضیهٔ ۵.۲ را ثابت کنید :

(آ) $f[A \cup B] \;=\; f[A] \cup f[B]$ ؛ (ب) $f[A] \setminus f[B] \subset f[A \setminus B]$.

حل

(آ) ابتدا نشان می‌دهیم که $f[A \cup B] \subset f[A] \cup f[B]$. فرض کنیم $y \in f[A \cup B]$ ؛ یعنی ، $\exists x \in A \cup B \;\text{ s.t. }\; f(x) = y$. دراین صورت ، $x \in A$ یا $x \in B$ ، ولی

$x \in A$ ایجاب می‌کند که $f(x) \;=\; y \in f[A]$

یا

$x \in B$ ایجاب می‌کند که $f(x) \;=\; y \in f[B]$.

در هر حالت ، $y \in f[A] \cup f[B]$.

حال شمول را درآن‌جهت ثابت می‌کنیم؛ یعنی ، ثابت می‌کنیم $f[A] \cup f[B] \subset f[A \cup B]$. فرض کنیم $y \in f[A] \cup f[B]$. دراین صورت ، $y \in f[A]$ یا $y \in f[B]$ ، ولی

$y \in f[A]$ ایجاب می‌کند که $\exists x \in A \;\text{ s.t. }\; f(x) = y$

یا

$y \in f[B]$ ایجاب می‌کند که $\exists x \in B \;\text{ s.t. }\; f(x) = y$.

در هر حالت ، $y = f(x)$ که درآن $x \in A \cup B$ ؛ یعنی ، $y \in f[A \cup B]$.

(ب) فرض کنیم $y \in f[A] \setminus f[B]$. دراین صورت ، $\exists x \in A \;\text{ s.t. }\; f(x) = y$ ، ولی

$y \notin \{f(x) : x \in B\}$. درنتیجه، $x \notin B$ ، یا $x \in B \setminus A$. بنابراین، $y \in f[A \setminus B]$.

۱۹ . قسمتهای (دو) و (سه) قضیهٔ ۶.۲ را ثابت کنید :

(آ) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$ ؛

(ب) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.

حل

(آ) ابتدا نشان می‌دهیم که $f^{-1}[A \cap B] \subset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$. فرض کنیم $x \in f^{-1}[A \cap B]$. دراین صورت، $f(x) \in A \cap B$. درنتیجه، $f(x) \in A$ و $f(x) \in B$ ، یا $x \in f^{-1}[A]$ و $x \in f^{-1}[B]$. بنابراین، $x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.

برای شمول درجهت دیگر، فرض کنیم $x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$. دراین صورت، $f(x) \in A$ و $f(x) \in B$ ؛ یعنی، $f(x) \in A \cap B$. بنابراین، $x \in f^{-1}[A \cap B]$.

(ب) برای اثبات $f^{-1}[A \setminus B] \subset f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$ ، فرض کنیم $x \in f^{-1}[A \setminus B]$. دراین صورت، $f(x) \in A \setminus B$ ؛ یعنی، $f(x) \in A$ و $f(x) \notin B$. لذا، $x \in f^{-1}[A]$ ولی $x \notin f^{-1}[B]$ ؛ یعنی، $x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.

برای شمول درآن‌جهت، فرض کنیم $x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$. دراین صورت، $f(x) \in A$ ولی $f(x) \notin B$ ؛ یعنی، $f(x) \in A \setminus B$. بنابراین، $x \in f^{-1}[A \setminus B]$.

جبر توابع حقیقی

۲۰ . به فرض آنکه $X = \{a, b, c\}$ و $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ به شکل زیر باشند :

$$g = \{ \langle a, -2 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 1 \rangle \}, \qquad f = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, -2 \rangle, \langle c, 3 \rangle \},$$

توابع زیر را پیدا کنید :

(یک) $f + 2g$ ؛ (دو) $fg - 2f$ ؛

(سه) $f + 4$ ؛ (چهار) $|f|$ ؛

(پنج) f^2 .

حل

(یک) به‌صورت زیرمحاسبه می‌کنیم :

$$(f + 2g)(a) \equiv f(a) + 2g(a) = 1 - 4 = -3,$$

$$(f + 2g)(b) \equiv f(b) + 2g(b) = -2 + 0 = -2$$

$$|(f+2g)(c) \equiv f(c)+2g(c) = 3+2 = 5|.$$

به عبارت دیگر، $f+2g = \{\langle a,-3\rangle, \langle b,-2\rangle, \langle c,5\rangle\}$.

(دو) بهمین نحو،

$$(fg-2f)(a) \equiv f(a)\,g(a) - 2f(a) = (1)(-2) - 2(1) = -4,$$

$$(fg-2f)(b) \equiv f(b)\,g(b) - 2f(b) = (-2)(0) - 2(-2) = 4,$$

$$(fg-2f)(c) \equiv f(c)\,g(c) - 2f(c) = (3)(1) - 2(3) = -3;$$

یعنی،

$$fg - 2f = \{\langle a,-4\rangle, \langle b,4\rangle, \langle c,-3\rangle\}.$$

(سه) چون، طبق تعریف، $(f+4)(x) \equiv f(x)+4$ ، 4 را به هر مقدار نقش، یعنی به مختص دوم هرجفت در f ، می‌افزاییم . بنابراین،

$$f+4 = \{\langle a,5\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,7\rangle\}.$$

(چهار) چون $|f|(x) \equiv |f(x)|$ ، مختص دوم هرجفت در f را با قدر مطلقش عوض می‌کنیم . پس

$$|f| = \{\langle a,1\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,3\rangle\}.$$

(پنج) چون $f^2(x) = (ff)(x) \equiv f(x)\,f(x) = (f(x))^2$ ، مختص دوم هرجفت در f را با مربعش عوض می‌کنیم . بنابراین،

$$f^2 = \{\langle a,1\rangle, \langle b,4\rangle, \langle c,9\rangle\}.$$

۲۱ . فرض کنید $\hat{0} \in \mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ با $\hat{0}(x) = 0$ به‌ازای‌هر $x \in X$ تعریف شده باشد. ثابت کنید به‌ازای هر $f \in \mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ ،

(یک) $f+\hat{0} = f$ ؛ (دو) $f\hat{0} = \hat{0}$.

حل

(یک) به‌ازای‌هر $x \in X$ ، $(f+\hat{0})x \equiv f(x)+\hat{0}(x) = f(x)+0 = f(x)$. در نتیجه، $f+\hat{0} = f$. توجه کنید که $\hat{0}$ شرایط 0 در اصل موضوع $[\mathbf{V}_1]$ قضیهٔ ۹.۲ را دارد .

(دو) به‌ازای هر $x \in X$ ، $(f\hat{0})(x) \equiv f(x)\,\hat{0}(x) = f(x)\cdot(0) = 0 = \hat{0}(x)$. در نتیجه، $f\hat{0} = \hat{0}$.

۲۲ . ثابت کنید $\mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ دراصل موضوع $[\mathbf{V}_3]$ قضیهٔ ۹.۲ صدق می‌کند؛ یعنی، اگر

$f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ و $k, k' \in \mathbf{R}$ ،
یک) $k\cdot(f+g) = k\cdot f + k\cdot g$ ؛ دو) $(k+k')\cdot f = k\cdot f + k'\cdot f$.

حل

یک) به‌ازای هر $x \in X$ ،

$$[k\cdot(f+g)](x) = k[(f+g)(x)] = k[f(x)+g(x)] = k(f(x)) + k(g(x)),$$
$$(k\cdot f + k\cdot g)(x) = (k\cdot f)(x) + (k\cdot g)(x) = k(f(x)) + k(g(x));$$

درنتیجه، $k\cdot(f+g) = k\cdot f + k\cdot g$. توجه کنید که ما از این امر که k ، $f(x)$ ، و $g(x)$ اعدادی حقیقی‌اند و در قانون پخشپذیری صدق می‌کنند استفاده کرده‌ایم .

دو) به‌ازای هر $x \in X$ ،

$$((k+k')\cdot f)(x) = (k+k')\,f(x) = k(f(x)) + k'(f(x)),$$
$$(k\cdot f + k'\cdot f)(x) = (k\cdot f)(x) + (k'\cdot f)(x) = k(f(x)) + k'(f(x));$$

درنتیجه، $(k+k')\cdot f = k\cdot f + k'\cdot f$.

مسائل تکمیلی

تابعها

۲۳ . به‌فرض آنکه $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ و $g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ با $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{اگر } x>2 \\ x^2-2|x| & \text{اگر } x\leq 2 \end{cases}$ و $g(x) = 3x+1$ تعریف شده باشند، مقادیر زیر را پیدا کنید :

یک) $f(-2)$ ؛ دو) $g(-3)$ ؛
سه) $f(4)$ ؛ چهار) $(g\circ f)(1)$ ؛
پنج) $(f\circ g)(2)$ ؛ شش) $(f\circ f)(3)$.

۲۴ . به‌فرض آنکه $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ و $g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ با $f(x) = x^2+3x+1$ و $g(x) = 2x-3$ تعریف شده‌باشند، فرمولهای معرف توابع مرکب (یک) $f\circ g$ ، (دو) $g\circ f$ ، و (سه) $f\circ f$ را بیابید .

۲۵ . فرض کنید $k: X\to X$ یک تابع ثابت باشد . ثابت کنید به‌ازای هر تابع $f: X\to X$ ، $k\circ f = k$. درباب $f\circ k$ چه می‌شود گفت؟

۲۶ . تابع $f(x) = x$ را ، که درآن $x \in \mathbf{R}$ و $x \geq 0$ ، درنظر بگیرید ، و بگویید هریک از توابع زیر توسیع f هست یا نه :

یک) به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ ، $g_1(x) = |x|$ ؛

(دو) $g_2(x) = x$ که درآن $x \in [-1,1]$ ؛

(سه) به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ ، $g_3(x) = (x+|x|)/2$ ؛

(چهار) $1_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

۲۷ . فرض کنید $A \subset X$ و $f : X \to Y$. **تابع شمول** j از A بتوی X ، که با $j : A \subset X$ نموده می‌شود، با $j(a) = a$ به‌ازای هر $a \in A$ تعریف می‌شود . نشان دهید که $f|A$ ، یعنی تحدید f به A ، مساوی ترکیب $f \circ j$ است ؛ یعنی، $f|A = f \circ j$.

توابع یک ـ یک ، برو ، معکوس ، و همانی

۲۸ . ثابت کنید به‌ازای هر تابع $f : A \to B$ ، $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.

۲۹ . ثابت‌کنید هرگاه $f : A \to B$ یک ـ یک و برو باشد ، آنگاه $f^{-1} \circ f = 1_A$ و $f \circ f^{-1} = 1_B$.

۳۰ . ثابت کنید هرگاه $f : A \to B$ و $g : B \to A$ در $g \circ f = 1_A$ صدق کنند ، f یک ـ یک و g برو است .

۳۱ . حکم ۱۰۲ را ثابت کنید : فرض کنید $f : A \to B$ و $g : B \to A$ در $g \circ f = 1_A$ و $f \circ g = 1_B$ صدق کنند . دراین صورت ، $f^{-1} : B \to A$ وجود دارد و $g = f^{-1}$.

۳۲ . تحت چه شرایطی تصویر $\pi_{i_0} : \prod \{A_i : i \in I\} \to A_{i_0}$ یک به‌یک است ؟

۳۳ . فرض کنید $f : (-1,1) \to \mathbf{R}$ با $f(x) = x/(1-|x|)$ تعریف شده باشد ، و ثابت کنید f یک ـ یک و برو است .

۳۴ . فرض کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی در مجموعهٔ ناتهی A باشد . تابع طبیعی η از A بتوی مجموعهٔ خارج قسمتی A/R با $\eta(a) = [a]$ (ردهٔ هم‌ارزی a) تعریف می‌شود . ثابت کنید η یک تابع برو است .

۳۵ . فرض‌کنید $f : A \to B$. رابطهٔ R در A که با $a \, R \, a'$ اگرگر $f(a) = f(a')$ تعریف‌می‌شود یک رابطهٔ هم‌ارزی است . فرض کنید $\hat{f}$ تناظری باشد که از مجموعهٔ خارج قسمتی A/R بتوی برد f ، یعنی $f[A]$ ، با $\hat{f} : [a] \to f(a)$ تعریف می‌شود .

(یک) ثابت کنید $\hat{f} : A/R \to f[A]$ یک تابع است که هم یک ـ یک است هم برو .

(دو) ثابت کنید $f = j \circ \hat{f} \circ \eta$ ، که درآن $\eta : A \to A/R$ تابع طبیعی است و $j : f[A] \subset B$ تابع شمول است ؛

$$A \xrightarrow{\eta} A/R \xrightarrow{\hat{f}} f[A] \xrightarrow{j} B.$$

مجموعه‌های اندیسدار و اعمال تعمیم یافته

۳۶ . به فرض آنکه $A_n = \{x : x \text{ یک مضرب } n \text{ است}\} = \{n, 2n, 3n, \ldots\}$ ، که در آن

(مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت) $n \in \mathbf{N}$ ، مجموعه‌های زیر را پیدا کنید :

(یک) $A_2 \cap A_7$

(دو) $A_6 \cap A_8$ ؛

(سه) $A_3 \cup A_{12}$ ؛

(چهار) $A_3 \cap A_{12}$ ؛

(پنج) $A_s \cup A_{st}$ ، که‌در آن $s, t \in \mathbf{N}$ ؛

(شش) $A_s \cap A_{st}$ ، که‌در آن $s, t \in \mathbf{N}$.

(هفت) ثابت کنید که اگر $J \subset \mathbf{N}$ نامتناهی باشد ، $\cap \{A_i : i \in J\} = \emptyset$.

۳۷ . به‌فرض‌آنکه $B_i = (i, i+1]$ ، یعنی یک بازهٔ باز ــ بسته باشد ، که درآن (مجموعهٔ اعداد صحیح) $i \in \mathbf{Z}$ ، مجموعه‌های زیر را پیدا کنید :

(یک) $B_4 \cup B_5$ ؛ (دو) $B_6 \cap B_7$ ؛

(سه) $\cup_{i=4}^{20} B_i$ ؛ (چهار) $B_s \cup B_{s+1} \cup B_{s+2}, \ s \in \mathbf{Z}$ ؛

(پنج) $\cup_{i=0}^{15} B_{s+i}$ ؛ (شش) $\cup_{i \in \mathbf{Z}} B_{s+i}$.

۳۸ . به‌فرض‌آنکه $D_n = [0, 1/n]$ ، $S_n = (0, 1/n]$ ، و $T_n = [0, 1/n)$ که درآن (مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت) $n \in \mathbf{N}$ ، مجموعه‌های زیر را پیدا کنید :

(یک) $\bigcap\{D_n : n \in \mathbf{N}\}$ ؛ (دو) $\bigcap\{S_n : n \in \mathbf{N}\}$ ؛

(سه) $\bigcap\{T_n : n \in \mathbf{N}\}$.

۳۹ . قوانین دمورگان را ثابت کنید :

(یک) $(\cup_i A_i)^c = \cap_i A_i^c$ ؛ (دو) $(\cap_i A_i)^c = \cup_i A_i^c$.

۴۰ . به‌فرض‌آنکه $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ یک ردهٔ اندیسدار از مجموعه‌ها بوده و $J \subset K \subset I$ ، ثابت کنید

(یک) $\bigcup\{A_i : i \in J\} \subset \bigcup\{A_i : i \in K\}$ ؛

(دو) $\bigcap\{A_i : i \in J\} \supset \bigcap\{A_i : i \in K\}$.

توابع مجموعه‌ای مربوطه

۴۱ . به‌فرض‌آنکه $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ با $f(x) = x^2 + 1$ تعریف شده باشد ، مجموعه‌های زیر راپیدا کنید :

(یک) $f[\{-1, 0, 1\}]$ ؛ (دو) $f^{-1}[\{10, 17\}]$ ؛

(سه) $f[(-2, 2)]$ ؛ (چهار) $f^{-1}[(5, 10)]$ ؛

(پنج) $f[\mathbf{R}]$ ؛ (شش) $f^{-1}[\mathbf{R}]$.

۴۲ . ثابت کنید تابع $f: X \to Y$ یک ـ یک است اگر و فقط اگر به‌ازای هر دو زیر مجموعهٔ A و B از X ، $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.

۴۳ . ثابت کنید هرگاه $f: X \to Y$ ، آنگاه ، به‌ازای هردو زیرمجموعهٔ A و B از X ،
(آ) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$ ؛ (ب) $A \subset B$ ایجاب می‌کند که $f[A] \subset f[B]$.

۴۴ . ثابت کنید هرگاه $f: X \to Y$ ، آنگاه ، به‌ازای هر دو زیرمجموعهٔ A و B از Y ،
(آ) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ ؛
(ب) $A \subset B$ ایجاب می‌کند که $f^{-1}[A] \subset f^{-1}[B]$.

۴۵ . قضیهٔ ۸.۲ را ثابت کنید : فرض کنید $f: X \to Y$ و $A \subset X$ و $B \subset Y$. دراین صورت ،
(یک) $A \subset f^{-1} \circ f[A]$ ؛ (دو) $B \supset f \circ f^{-1}[B]$.

۴۶ . ثابت کنید که اگر $f: X \to Y$ برو باشد ، تابع مجموعه‌ای مربوطهٔ $f: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ نیز بروست .

۴۷ . ثابت کنید تابع $f: X \to Y$ یک ـ یک و بروست اگر و فقط اگر به‌ازای هر زیر مجموعهٔ A از X ، $f[A^c] = (f[A])^c$.

۴۸ . ثابت کنید تابع $f: X \to Y$ یک ـ یک است اگر و فقط اگر به‌ازای هر زیرمجموعهٔ A از X ، $A = f^{-1} \circ f[A]$.

جبر توابع حقیقی

۴۹ . به‌فرض آنکه $X = \{a, b, c\}$ و f و g توابع حقیقی زیر بر X باشند :

$$f = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, -3\rangle, \langle c, -1\rangle\}, \qquad g = \{\langle a, -2\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, 1\rangle\};$$

توابع زیر را پیدا کنید :
(یک) $3f$ ؛ (دو) $2f - 5g$ ؛
(سه) fg ؛ (چهار) $|f|$ ؛
(پنج) f^3 ؛ (شش) $|3f - fg|$.

۵۰ . فرض کنید A زیرمجموعهٔ مجموعهٔ عمومی U باشد . دراین صورت ، تابع حقیقی $\chi_A: U \to \mathbf{R}$ که با

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \in A \\ 0 & \text{اگر } x \notin A \end{cases}$$

تعریف می‌شود **تابع مشخص** A نامیده می‌شود . ثابت کنید
(یک) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$ ؛ (دو) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$ ؛
(سه) $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_{A \cap B}$.

۵۱ . ثابت کنید $\mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ در اصل موضوع $[\mathbf{V}_2]$ قضیهٔ ۹.۲ صدق می‌کند؛ یعنی، هرگاه $f \in \mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ و $k, k' \in \mathbf{R}$، آنگاه

(یک) $k \cdot (k' \cdot f) = (kk') \cdot f$ ؛ (دو) $1 \cdot f = f$.

۵۲ . به‌ازای هر $k \in \mathbf{R}$، فرض کنید $\hat{k} \in \mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ تابع ثابت $\hat{k}(x) = k$ به‌ازای هر $x \in X$ باشد.

(یک) نشان دهید که گردآیهٔ C توابع ثابت، یعنی $C = \{\hat{k} : k \in \mathbf{R}\}$، یک زیر فضای خطی $\mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ است.

(دو) فرض کنید $\alpha : C \to \mathbf{R}$ با $\alpha(\hat{k}) = k$ تعریف شده باشد. نشان دهید α هم یک ـ یک است هم برو و، به‌ازای هر k، $k' \in \mathbf{R}$

$$\alpha(\hat{k} + \hat{k}') = \alpha(\hat{k}) + \alpha(\hat{k}').$$

جواب مسائل تکمیلی

۲۳ . (یک) 0 ؛ (دو) -8 ؛
(سه) 3 ؛ (چهار) -2 ؛
(پنج) 9 ؛ (شش) -1 .

۲۴ . (یک) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 6x + 1$ ؛
(دو) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 6x - 1$ ؛
(سه) $(f \circ f)(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 5$.

۲۵ . تابع $f \circ k$ یک تابع ثابت است.

۲۶ . (یک) هست؛ (دو) نیست؛
(سه) هست؛ (چهار) هست.

۳۲ . A_i یک مجموعهٔ یکانی است؛ مثلاً، به‌ازای $i \neq i_0$، $A_i = \{a_i\}$.

۳۶ . (یک) A_{14} ؛ (دو) A_{24} ؛
(سه) A_3 ؛ (چهار) A_{12} ؛
(پنج) A_s ؛ (شش) A_{st} .

۳۷ . (یک) $(4, 6]$ ؛ (دو) $\varnothing$ ؛
(سه) $(4, 21]$ ؛ (چهار) $(s, s+3]$ ؛
(پنج) $(s, s+16]$ ؛ (شش) R .

۳۸ . (یک) $\{0\}$ ؛ (دو) $\varnothing$ ؛
(سه) $\{0\}$.

۴۱. (یک) $\{1,2\}$؛ (دو) $\{3,-3,4,-4\}$؛

(سه) $(1,5)$؛ (چهار) $(-3,-2),\ (2,3)$؛

(پنج) $\{x : x \geqq 1\}$؛ (شش) $\mathbf{R}$.

۴۹. (یک) $3f = \{\langle a,6\rangle, \langle b,-9\rangle, \langle c,-3\rangle\}$؛

(دو) $2f-5g = \{\langle a,14\rangle, \langle b,-6\rangle, \langle c,-7\rangle\}$؛

(سه) $fg = \{\langle a,-4\rangle, \langle b,0\rangle, \langle c,-1\rangle\}$؛

(چهار) $|f| = \{\langle a,2\rangle, \langle b,3\rangle, \langle c,1\rangle\}$؛

(پنج) $f^3 = \{\langle a,8\rangle, \langle b,-27\rangle, \langle c,-1\rangle\}$؛

(شش) $|3f-fg| = \{\langle a,10\rangle, \langle b,9\rangle, \langle c,2\rangle\}$.

کاردینالیته، ترتیب[3]

مجموعه‌های هم‌ارز

مجموعهٔ A را درصورتی **هم‌ارز** B نامیم ، و می‌نویسیم $A \sim B$ ، که تابعی مانند $f: A \to B$ وجود داشته‌باشدکه‌یک ـ یک و برو باشد . دراین صورت ، گوییم f یک **تناظر یک به یک** بین A و B تعریف می‌کند .

یک مجموعه **متناهی** است اگفگر تهی و یا هم‌ارز $\{1, 2, \ldots, n\}$ به‌ازای $n \in \mathbf{N}$ ی باشد . درغیر این‌صورت ، **نامتناهی** گفته می‌شود . واضح است که دو مجموعهٔ متناهی هم‌ارز هستند اگفگر یک تعداد عنصر داشته باشند . پس، برای مجموعه‌های متناهی ، هم‌ارزی به معنی عادی دارا بودن یک تعداد عنصر می‌باشد .

مثال ۱۰۱ . فرض کنیم $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ و $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$. تابع $f: \mathbf{N} \to E$ که با $f(x) = 2x$ تعریف شده یک ـ یک است و برو ؛ در نتیجه ، $\mathbf{N}$ هم ارز E می‌باشد .

مثال ۲۰۱ . تابع $f: (-1, 1) \to \mathbf{R}$ که با $f(x) = x/(1 - |x|)$ تعریف شده یک ـ یک است و برو. پس بازهٔ باز $(-1,1)$ هم‌ارز مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ است .

توجه کنید که یک مجموعهٔ نامتناهی می‌تواند هم‌ارز یک زیر مجموعهٔ حقیقی خود باشد . این خاصیت کلا" برای مجموعه‌های نامتناهی درست است .

حکم ۱۰۳ . *درهرگردآیه‌ازمجموعه‌ها ،رابطهٔ تعریف شده با $A \sim B$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است .*

مجموعه‌های شمارشپذیر و حداکثر شمارشپذیر

فرض‌کنیم $\mathbf{N}$ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، یعنی $\{1, 2, 3, \dots\}$، باشد. مجموعهٔ X را ***شمارشپذیر*** گوییم و یا می‌گوییم دارای ***کاردینالیته*** $\aleph_0$ (بخوانید: ***الف صفر***) است اگفگر هم‌ارز $\mathbf{N}$ باشد. یک‌مجموعه‌را ***حداکثرشمارشپذیر*** نامیم اگفگر متناهی یا شمارشپذیر باشد.

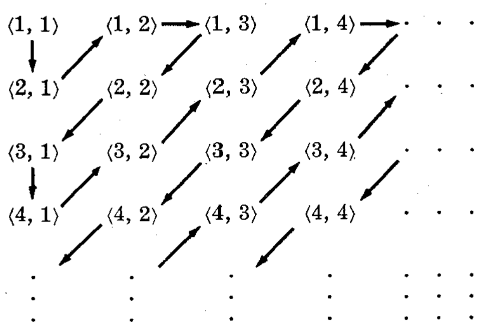
مثال ۱.۲ . مجموعهٔ جملات یک دنبالهٔ نامتناهی

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

با جملات متمایز شمارشپذیر است، زیرا یک دنباله اصولا" تابعی است مانند $f(n) = a_n$ که قلمروش $\mathbf{N}$ است. درنتیجه، اگر a_n ها متمایز باشند، این تابع یک ــ یک و برو خواهد بود. بدین ترتیب، هریک از مجموعه‌های زیر شمارشپذیر می‌باشد:

$$\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots\}, \quad \{1, -2, 3, -4, \dots\}, \quad \{\langle 1,1\rangle, \langle 4,8\rangle, \langle 9,27\rangle, \dots, \langle n^2, n^3\rangle, \dots\}.$$

مثال ۲.۲ . مجموعهٔ حاصلضربی $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:



مجموعهٔ $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ را می‌توان بــه شکل یک دنبالهٔ نامتناهی با جملات متمایز به‌این‌صورت نوشت:

$$\langle 1, 1\rangle, \ \langle 2, 1\rangle, \ \langle 1, 2\rangle, \ \langle 1, 3\rangle, \ \langle 2, 2\rangle, \ \dots$$

(توجه کنیدکه دنباله با "تعقیب سهمها" در نمودار فوق مشخص می‌شود.)لذا، می‌بینیم که $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ شمارشپذیر است.

مثال ۳.۲ . فرض‌کنیم $M = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbf{N} \cup \{0\}$. هرعدد صحیح و مثبت $a \in \mathbf{N}$ را می‌توان بــه‌طور منحصــر بفــرد به‌شکل $a = 2^r(2s+1)$ نوشت که درآن $r, s \in M$. تابع $f : \mathbf{N} \to M \times M$ که با

$$f(a) = \langle r, s \rangle,$$

که r و s مثل بالا هستند، تعریف می‌شود یک–یک و برو است. در نتیجه، $M \times M$ شمارشپذیر می‌باشد. توجه کنید که $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ یک زیرمجموعهٔ $M \times M$ است.

قضایای زیر درباب مجموعه‌های شمارشپذیر و حداکثر شمارشپذیر می‌باشند.

قضیهٔ ۲.۳ . *هر مجموعهٔ نامتناهی شامل یک زیرمجموعهٔ شمارشپذیر است.*

قضیهٔ ۳.۳ . *هر زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ حداکثر شمارشپذیر حداکثر شمارشپذیر است.*

لم ۴.۳ . *فرض کنیم $\{A_1, A_2, \ldots\}$ رده‌ای از هم جدا و شمارشپذیر از مجموعه‌های شمارشپذیر باشد. دراین صورت، $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ نیز حداکثر شمارشپذیر است.*

قضیهٔ ۵.۳ . *فرض کنیم $\{A_i : i \in I\}$ یک ردهٔ حداکثر شمارشپذیر از مجموعه‌های حداکثر شمارشپذیر باشد؛ یعنی، I حداکثر شمارشپذیر بوده و A_i نیز به‌ازای هر $i \in I$ حداکثر شمارشپذیر باشد. دراین صورت، $\bigcup\{A_i : i \in I\}$ نیز حداکثر شمارشپذیر خواهد بود.*

یک مجموعه که نه متناهی باشد نه شمارشپذیر **شمارش ناپذیر** و یا **حداکثر شمارش ناپذیر** نامیده می‌شود.

پیوستار

این‌طور نیست که هر مجموعهٔ نامتناهی شمارشپذیر باشد. درواقع، قضیهٔ زیر نمونهٔ مشخص و بسیار مهمی از این مجموعه‌ها را به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۶.۳ . *بازهٔ یکهٔ $[0, 1]$ شمارش‌ناپذیر است.*

گوییم مجموعهٔ X **توان پیوستار** و یا **کاردینالیتهٔ c** دارد اگر با بازهٔ یکهٔ $[0, 1]$ هم‌ارز باشد.

ما، دریک مسئلهٔ حل شده، نشان خواهیم داد که هر بازه، باز یا بسته، دارای کاردینالیتهٔ c است. بنابر مثال ۲.۱، بازهٔ باز $(-1, 1)$ هم‌ارز $\mathbf{R}$ است. بنابراین،

حکم ۷۰۳ . مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ دارای کاردینالیتهٔ $\mathbf{c}$ است.

قضیهٔ شرودر[1] ــ برنشتاین[2]

هرگاه A هم‌ارز زیرمجموعه‌ای از B باشد، می‌نویسیم $A \precsim B$ ؛ یعنی،

$A \precsim B$ اگفگر $B^* \subset B$ $\exists$ بطوری که $A \sim B^*$.

همچنین، هرگاه $A \precsim B$ ولی $A \not\sim B$ ، می‌نویسیم $A \prec B$ ؛ یعنی، A هم‌ارز B نیست.

مثال ۱۰۳ . چون $\mathbf{N}$ زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ است، می‌توان نوشت $\mathbf{N} \precsim \mathbf{R}$. از آن سو، طبق حکم ۷۰۳ ، $\mathbf{R}$ شمارشپذیر نیست؛ یعنی، $\mathbf{R} \not\sim \mathbf{N}$. لذا، $\mathbf{N} \prec \mathbf{R}$.

برای هر جفت مجموعهٔ A و B دست کم یکی از گزاره‌های زیر راست است:

(یک) $A \sim B$ ؛ (دو) $A \prec B$ یا $B \prec A$ ؛

(سه) $A \precsim B$ و $B \precsim A$ ؛ (چهار) $A \not\precsim B$ ، $A \not\sim B$ ، و $B \not\precsim A$.

قضیهٔ معروف شرودر ــ برنشتاین این را می‌گوید که، درحالت (سه) فوق، A هم‌ارز B است. یعنی،

قضیهٔ (شرودر ــ برنشتاین) ۸۰۳ . هرگاه $A \precsim B$ و $B \precsim A$ ، آنگاه $A \sim B$.

قضیهٔ شرودر ــ برنشتاین را می‌توان به‌صورت زیر نیز بیان کرد:

قضیهٔ ۸۰۳ . فرض کنیم $X \supset Y \supset X_1$ و $X \sim X_1$. دراین صورت، $X \sim Y$.

تذکار می‌دهیم که حالت (چهار) در بالا ناممکن است. یعنی،

قضیهٔ (قانون تثلیث) ۹۰۳ . به‌ازای هر جفت مجموعهٔ A و B ، $A \sim B$ ، $A \prec B$ ، یا $B \prec A$.

---

1. Schroeder
2. Bernstein

مفهوم کاردینالیته

اگر A هم‌ارز B باشد، یعنی $A \sim B$ ، می‌گوییم A و B یک **عدد اصلی** یا یک **کاردینالیته** دارند. برای "عدد اصلی (یا کاردینالیتهٔ) A" می‌نویسیم $\#(A)$. درنتیجه،

$\#(A) = \#(B)$ اگفگر $A \sim B$.

از سوی دیگر، اگر $A \prec B$ ، می‌گوییم A دارای **کاردینالیتهٔ کوچکتر از** B است یا B دارای **کاردینالیتهٔ بزرگتر از** A است. یعنی،

$\#(A) < \#(B)$ اگفگر $A \prec B$.

درنتیجه، $\#(A) \leq \#(B)$ اگفگر $A \precsim B$. لذا، قضیهٔ شرودر ــ برنشتاین را می‌توان به‌صورت زیر نیز بیان کرد:

قضیهٔ ۸.۳ . هرگاه $\#(A) \leq \#(B)$ و $\#(B) \leq \#(A)$ ، آنگاه $\#(A) = \#(B)$.

عدد اصلی هریک از مجموعه‌های

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \quad \ldots$$

را بترتیب با $0, 1, 2, 3, \ldots$ نموده و یک عدد اصلی **متناهی** می‌نامیم، و اعداد اصلی $\mathbf{N}$ و $[0,1]$ را با

$$\aleph_0 = \#(N), \qquad \mathbf{c} = \#([0,1])$$

نشان می‌دهیم. بدین ترتیب، می‌توانیم بنویسیم $0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < \aleph_0 < \mathbf{c}$.

قضیهٔ کانتور[1] و فرض پیوستار

طبیعی است بپرسیم آیا اعداد اصلی نامتناهی جز $\aleph_0$ و $\mathbf{c}$ وجود دارند؟ جواب مثبت است. درواقع، قضیهٔ کانتور مجموعه‌ای به‌دست می‌دهد که کاردینالیتهٔ آن ازکاردینالیتهٔ هر مجموعهٔ مفروض بزرگتر است. یعنی،

قضیهٔ (کانتور) ۱۰.۳ . *کاردینالیتهٔ مجموعهٔ توان هرمجموعه مانند A از کاردینالیتهٔ A بزرگتر است.*

و نیز، طبیعی است بپرسیم آیا مجموعه‌ای هست که کاردینالیتهٔ آن بین $\aleph_0$ و $\mathbf{c}$

---

1. Cantor

باشد؟ حدس منفی بودن جواب به **فرض پیوستار** معروف است. یعنی،

فرض پیوستار. مجموعه‌ای چون A با این خاصیت که $\aleph_0 < \#(A) < c$ وجود ندارد.

در سال ۱۹۶۳ ثابت شد که فرض پیوستار از اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها مستقل است، بنوعی مثل استقلال پستولای پنجم اقلیدس در مورد خطوط موازی از سایر اصول موضوع هندسه.

مجموعه‌های جزئی مرتب

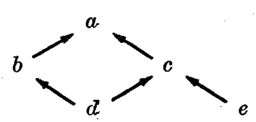
رابطهٔ $\precsim$ در مجموعهٔ A یک **ترتیب جزئی** (یا **ترتیب**) بر A نام دارد اگفگر به‌ازای هر $a,b,c \in A$، (یک) $a \precsim a$ ؛ (دو) $a \precsim b$ و $b \precsim a$ ایجاب کنند که $a = b$ ؛ و (سه) $a \precsim b$ و $b \precsim c$ ایجاب کنند که $a \precsim c$. مجموعهٔ A با یک ترتیب جزئی، یعنی جفت $(A, \precsim)$ ، یک **مجموعهٔ جزئی مرتب** نامیده می‌شود.

به‌یاد می‌آوریم که یک رابطه منعکس است اگفگر در (یک) صدق کند، و متعدی است اگفگر در (سه) صدق کند. یک رابطه را **پاد متقارن** گوییم اگفگر در (دو) صدق کند. به عبارت دیگر، یک ترتیب جزئی رابطه‌ای است منعکس، پاد متقارن، و متعدی.

مثال ۱۰۴ . در هر رده از مجموعه‌ها، شمول مجموعه‌ها یک ترتیب جزئی است، زیرا (یک) به‌ازای هر مجموعه مانند A ، $A \subset A$ ؛ (دو) $A \subset B$ و $B \subset A$ ایجاب می‌کنند که $A = B$ ؛ و (سه) $A \subset B$ و $B \subset C$ ایجاب می‌کنند که $A \subset C$.

مثال ۲۰۴ . فرض کنیم A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. دراین صورت، رابطه‌ای در A که بـا $x \leq y$ تعریف شود یک ترتیب جزئی است و **ترتیب طبیعی** در A نام دارد.

مثال ۳۰۴ . فرض کنیم $X = \{a, b, c, d, e\}$. دراین صورت، نمودار



یک ترتیب جزئی در X به‌این صورت تعریف می‌کند: $x \precsim y$ **اگفگر** $x = y$ و یا، اگر بتوان در نمودار از x به y رفت، حرکت همیشه در جهت نموده شده، یعنی به طرف **بالا**،

می‌باشد .

اگر در یک مجموعهٔ مرتب $a \precsim b$ ، می‌گوییم a **قبل از** یا **کوچکتر از** b است، و b **بعد از** یا **مسلط بر** و یا **بزرگتر از** a می‌باشد . بعلاوه، اگر $a \precsim b$ ولی $a \neq b$ ، خواهیم نوشت $a \prec b$.

مجموعهٔ جزئی مرتب A را درصورتی **کلی** (یا **خطی**) **مرتب** گوییم که به‌ازای هر $a, b \in A$ ، $a \precsim b$ یا $b \precsim a$. مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ با ترتیب طبیعی که با $x \leq y$ تعریف شده یک مجموعهٔ کلی مرتب است .

مثال ۴۰۴ . فرض کنیم A و B کلی مرتب باشند . دراین صورت، مجموعهٔ حاصل ضربی $A \times B$ را می‌توان به شکل زیر کلی مرتب کرد :

$\langle a, b\rangle \prec \langle a', b'\rangle$ **اگر** $a \prec a'$ یا $a = a'$ و $b \prec b'$.

چون این ترتیب مشابه ترتیب لغات در یک فرهنگ لغت است، **ترتیب قاموسی** نامیده می‌شود .

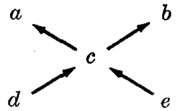
تبصره. اگر R در A یک ترتیب‌جزئی باشد، یعنی منعکس، پاد متقارن، و متعدی باشد، رابطهٔ معکوس آن، یعنی R^{-1} ، نیز یک ترتیب جزئی است . این رابطه **ترتیب معکوس** نامیده می‌شود .

زیرمجموعه‌های مجموعه‌های مرتب

فرض‌کنیم A زیر مجموعهٔ مجموعهٔ جزئی مرتب X باشد . دراین صورت، ترتیب X به‌طور طبیعی ترتیبی به A القا می‌کند : هرگاه $a, b \in A$ ، $a \precsim b$ به‌عنوان عنصرهای A اگفگر $a \precsim b$ به عنوان عنصرهای X . به‌طور دقیقتر، اگر R یک ترتیب‌جزئی در X باشد، رابطهٔ $R_A = R \cap (A \times A)$ ، به‌نام **تحدید** R به A ، یک ترتیب جزئی در A است. مجموعهٔ مرتب (A, R_A) یک **زیر مجموعهٔ** (**جزئی مرتب**) مجموعهٔ مرتب (X, R) نامیده می‌شود .

در واقع، بعضی از زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ جزئی مرتب X ممکن است کلی مرتب باشند . واضح است که اگر X خود کلی مرتب باشد، هر زیر مجموعهٔ آن نیز کلی مرتب است .

مثال ۱۰۵ . ترتیب جزئی در $W = \{a, b, c, d, e\}$ را که با نمودار

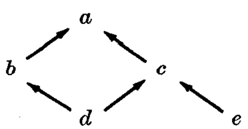


تعریف شده در نظر می‌گیریم . مجموعه‌های $\{a, c, d\}$ و $\{b, e\}$ زیر مجموعه‌هایی کلی مرتب اند ؛ و مجموعه‌های $\{a, b, c\}$ و $\{d, e\}$ زیر مجموعه‌هایی کلی مرتب نیستند .

عنصرهای اول و آخر

فرض کنیم X یک مجموعهٔ مرتب باشد . عنصر $a_0 \in X$ **عنصر اول** یا **کوچکترین عنصر** X است اگفگر به‌ازای هر $x \in X$ ، $a_0 \precsim x$. بهمین ترتیب ، عنصر $b_0 \in X$ **عنصر آخر** یا **بزرگترین عنصر** X است اگفگر به‌ازای هر $x \in X$ ، $x \precsim b_0$.

مثال ۱۰۶ . فرض کنیم $X = \{a, b, c, d, e\}$ با نمودار



مرتب شده باشد . دراین صورت ، a عنصر آخر است ، زیرا a بعد از هر عنصر می‌باشد . توجه کنید که x عنصر اول ندارد . عنصر d عنصر اول نیست ، زیرا d قبل از e نیست .

مثال ۲۰۶ . مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت $\mathbf{N}$ با ترتیب طبیعی دارای 1 به‌عنوان عنصر اول است . مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ با ترتیب طبیعی نه عنصر اول دارد نه عنصر آخر .

عنصرهای ماکزیمال و مینیمال

فرض کنیم X یک مجموعهٔ مرتب باشد . عنصر $a_0 \in X$ **ماکزیمال** است اگفگر $a_0 \precsim x$ ایجاب کند که $x = a$ ؛ یعنی ، هیچ عنصری بعد از a_0 جز خود این نباشد . بهمین ترتیب ، عنصر $b_0 \in X$ **مینیمال** است اگفگر $x \precsim b_0$ ایجاب کند که $x = b_0$ ؛ یعنی ، هیچ عنصری قبل از b_0 جز خود این نباشد .

مثال ۱۰۷ . فرض کنیم $X = \{a, b, c, d, e\}$ با نمودار مثال ۱۰۶ مرتب شده باشد . دراین صورت ، هردوی d و e عنصر مینیمال هستند . عنصر a یک عنصر ماکزیمال می‌باشد .

مثال ۲۰۷ . با اینکه $\mathbf{R}$ **با** ترتیب طبیعی کلی مرتب است ، ولی عنصر مینیمال وماکزیمال ندارد .

مثال ۳۰۷ . فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ یک مجموعهٔ کلی مرتب متناهی باشد . دراین صورت ، A فقط یک عنصر مینیمال‌و یک عنصر ماکزیمال دارد ، که بترتیب با

$$\max\{a_1, \ldots, a_m\} \text{ و } \min\{a_1, \ldots, a_m\}$$

نشان داده می‌شوند .

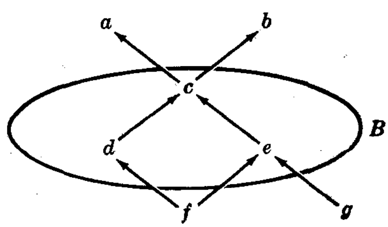
کرانهای بالایی و پایینی

فرض کنیم A زیر مجموعهٔ مجموعهٔ جزئی مرتب X باشد . عنصر $m \in X$ یک ***کران پایینی*** A است اگفگر به‌ازای هر $x \in A$ ، $m \precsim x$ ؛ یعنی ، m قبل از هر عنصر A باشد . اگر یک کران پایینی A بعد ازهر کران پایینی A باشد ، آن را ***بزرگترین کران پایینی*** (g.l.b.) یا ***اینفیمم*** A می‌نامیم و به $\inf(A)$ نشان می‌دهیم .

بهمین نحو ، عنصر $M \in X$ یک ***کران بالایی*** A است اگفگر به‌ازای هر $x \in A$ ، $x \precsim M$ ؛ یعنی ، M بعد از هر عنصر A باشد . اگر یک کران بالایی A قبل از هر کران بالایی دیگر A باشد ،آن را ***کوچکترین کران بالایی*** (l.u.b.) یا ***سوپرمم*** A می‌نامیم و با $\sup(A)$ نشانش می‌دهیم .

گوییم A ***از بالا کراندار*** است درصورتی که کران بالایی داشته باشد ، و ***از پایین کراندار*** است درصورتی که کران پایینی داشته باشد . اگر A هم کران بالایی و هم پایینی داشته باشد ، ***کراندار*** گفته خواهد شد .

مثال ۱۰۸ . فرض کنیم $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ با نمودار زیر مرتب شده باشد :



نیز $B = \{c, d, e\}$. دراین صورت ، a و b و c کرانهای بالایی B اند ، و f تنها کران پایینی B می‌باشد . توجه‌کنیدکه g یک‌کران‌پایینی B نیست ،زیرا g قبل‌از d نمی‌باشد . بعلاوه ، $c = \sup(B)$ متعلق به B است ، **حال** آنکه $f = \inf(B)$ تعلق به B ندارد .

مثال ۲۰۸ . فرض‌کنیم A یک مجموعهٔ کراندار از اعداد حقیقی باشد. دراین صورت، قضیه‌ای اساسی درباب اعداد حقیقی می‌گوید که، با ترتیب طبیعی، $\inf(A)$ و $\sup(A)$ وجود دارند.

مثال ۳۰۸ . فرض‌کنیم $\mathbf{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا باشد، و قرار می‌دهیم

$$B = \{x : x \in \mathbf{Q},\ x > 0,\ 2 < x^2 < 3\} ;$$

یعنی، B از نقاط گویایی تشکیل شده که بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ قرار دارند. B بی‌نهایت کران بالایی و پایینی دارد، اما $\inf(B)$ و $\sup(B)$ وجود ندارند. توجه کنید که اعداد حقیقی $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ متعلق به $\mathbf{Q}$ نیستند و نمی‌توانند کرانهای بالایی و پایینی B ملحوظ شوند.

لم زرن[1]

لم زرن از مهمترین ابزار در ریاضیات است. بی‌آنکه راهی برای یافتن عرضه کند، حکم به وجود عنصرهای خاص می‌نماید.

لم زرن ۱۱۰۳ . *فرض‌کنیم X یک مجموعهٔ جزئی مرتب ناتهی باشد که در آن هر زیر مجموعهٔ کلی مرتب کران بالایی دارد. دراین صورت، X دست کم یک عنصر ماکزیمال خواهد داشت.*

تبصره. لم زرن هم‌ارز اصل موضوع انتخاب و اصل خوش ترتیبی کلاسیک است. اثبات این امر، که در آن از اعداد ترتیبی استفاده می‌شود، از حوصلهٔ این‌کتاب خارج است.

مسائل حل شده

مجموعه‌های هم‌ارز، مجموعه‌های شمارشپذیر

۱ . دوایر متحدالمرکز

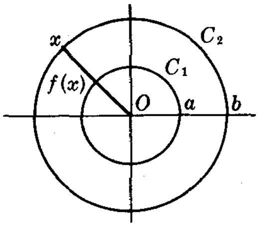
$$C_1 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = a^2\}, \quad C_2 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 = b^2\}$$

را، که مثلاً $0 < a < b$، درنظر بگیرید و، به‌طور هندسی، تناظری یک به یک بین C_1 و C_2 برقرار کنید.

---

1. Zorn

حل. فرض کنید $x \in C_2$ ، و تابع $f : C_2 \to C_1$ را ، که $f(x)$ نقطهٔ برخورد شعاع واصل از مرکز C_2 (و C_1) به x است ، بصورتی که در نمودار زیر نشان داده‌ایم ، در نظر می‌گیریم .



توجه کنید که f یک ـ یک و بروست . پس f معرف تناظری یک به یک بین C_1 و C_2 می‌باشد .

۲ . ثابت کنید مجموعهٔ اعداد گویا شمارشپذیر است .

حل. فرض کنیم $\mathbf{Q}^+$ مجموعهٔ اعداد گویای مثبت و $\mathbf{Q}^-$ مجموعهٔ اعداد گویای منفی باشد . دراین صورت ، $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^+$ مجموعهٔ اعداد گویا می‌باشد . فرض کنیم تابع $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ با

$$f(p/q) = \langle p, q \rangle,$$

که درآن p/q یک عددگویای مثبت به‌صورت نسبت دو عدد صحیح مثبت است ، تعریف شده باشد . ملاحظه می‌کنیم که f یک ـ یک است . درنتیجه ، $\mathbf{Q}^+$ هم‌ارز زیرمجموعه‌ای‌از $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ می‌باشد . اما $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ شمارشپذیراست . (ر.ک. مثال ۲.۲) . بنابراین ، $\mathbf{Q}^+$ نیزشمارشپذیر می‌باشد . بهمین ترتیب ، $\mathbf{Q}^-$ شمارشپذیر است . لذا ، طبق قضیهٔ ۵.۳ ، اجتماع $\mathbf{Q}^-$ ، $\{0\}$ ، و $\mathbf{Q}^+$ ، یعنی مجموعهٔ اعداد گویا ، نیز شمارشپذیر می‌باشد .

۳ حکم ۱.۳ را ثابت کنید : درهرگردآیه از مجموعه‌ها ، رابطهٔ تعریف شده با $A \sim B$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است ؛ یعنی ، (یک) به‌ازای هر مجموعهٔ A ، $A \sim A$ ؛ (دو) هرگاه $A \sim B$ ، آنگاه $B \sim A$ ؛ و (سه) هرگاه $A \sim B$ و $B \sim C$ ، آنگاه $A \sim C$.

حل

(یک) تابع همانی $1_A : A \to A$ یک ـ یک و بروست ؛ درنتیجه، $A \sim A$.

(دو) هرگاه $A \sim B$ ، تابعی مانند $f : A \to B$ هست که یک ـ یک و بروست . اما، دراین صورت، f دارای معکوس $f^{-1} : B \to A$ است که این نیز یک ـ یک و بروست ، لذا ،

$A \sim B$ ایجاب می‌کند که $B \sim A$.

(سه) هرگاه $A \sim B$ و $B \sim C$ ، تابعهایی چون $f : A \to B$ و $g : B \to C$ وجود دارند که یک ـ یک وبروهستند . تابع ترکیب $g \circ f : A \to C$ نیز یک ـ یک و بروست . لذا ،

$A \sim B$ و $B \sim C$ ایجاب خواهند کرد که $A \sim C$.

۴ . گردآیهٔ P مرکب از تمام چند جمله‌ایهای

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$$

با ضرایب صحیح ، یعنی $a_0, a_1, \ldots, a_m$ اعدادی صحیح هستند ، شمارشپذیر است .

حل . فرض‌کنیم به‌ازای هرجفت عدد صحیح و مثبت $\langle n, m\rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ، P_{nm} مجموعهٔ چند جمله‌ایهای $p(x)$ از درجهٔ m باشد که درآنها

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m| = n.$$

توجه کنید که P_{nm} متناهی است . لذا ،

$$P = \bigcup\{P_{nm} : \langle n, m\rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}\}$$

حداکثر شمارشپذیر است ، چراکه اجتماع حداکثر شمارشپذیری از مجموعه‌های حداکثر شمارشپذیر است . بخصوص ، چون P متناهی نیست ، P شمارشپذیر می‌باشد .

۵ . عدد حقیقی r در صورتی یک **عدد جبری** است که جواب یک معادلهٔ چند جمله‌ای

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$$

با ضرایب صحیح باشد . ثابت کنید مجموعهٔ اعداد جبری A شمارشپذیر است .

حل . از مسئلهٔ قبل درمی‌یابیم که مجموعهٔ معادلات چند جمله‌ای E :

$$E = \{p_1(x) = 0,\ p_2(x) = 0,\ p_3(x) = 0,\ \ldots\}.$$

شمارشپذیر است . فرض کنیم

$$A_i = \{x : \text{یک جواب } p_i(x) = 0 \text{ باشد } x\}.$$

چون یک چند جمله‌ای از درجهٔ n حداکثر n ریشه دارد، لذا هر A_i متناهی است. بنابر این، $A = \bigcup\{A_i : i \in \mathbf{N}\}$ شمارشپذیر خواهد بود.

۶ . قضیهٔ ۲۰۳ را ثابت کنید : هر مجموعهٔ نامتناهی X شامل یک زیر مجموعهٔ شمارشپذیر مانند D است.

حل. فرض‌کنیم $f : \mathcal{P}(X) \to X$ یک تابع انتخاب باشد؛ یعنی، به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی A از X، $f(A) \in A$.
(این تابع بنابه اصل موضوع انتخاب وجود دارد.) حال دنبالهٔ زیر را درنظر می‌گیریم :

$$
\begin{aligned}
a_1 &= f(X)\\
a_2 &= f(X \setminus \{a_1\})\\
a_3 &= f(X \setminus \{a_1, a_2\})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_n &= f(X \setminus \{a_1, \ldots, a_{n-1}\})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

چون X نامتناهی است، $X \setminus \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ به‌ازای هر $n \in N$ تهی نیست. بعلاوه، از آنجا که f یک تابع انتخاب است،

به‌ازای $i < n$، $a_n \neq a_i$.

پس a_n ها متمایزند و $D = \{a_1, a_2, \ldots\}$ یک زیر مجموعهٔ شمارشپذیر از X می‌باشد. اساسا"، تابع انتخاب f عنصر $a_1 \in X$ را "انتخاب می‌کند"، بعد عنصر a_2 را از "بقیهٔ" عناصر در X انتخاب می‌کند، الی آخر. چون X نامتناهی است، مجموعهٔ عناصر "مانده" در X در هر مرحله ناتهی می‌باشد.

۷ . فرض‌کنید X مجموعه‌ای دلخواه، و $C(X)$ گردآیهٔ تمام توابع مشخص بر X، یعنی گردآیهٔ توابع $f : X \to \{1, 0\}$، باشد. دراین صورت، ثابت کنید مجموعهٔ توان X با $C(X)$ هم‌ارز است؛ یعنی، $\mathcal{P}(X) \sim C(X)$.

حل. فرض کنیم A زیر مجموعهٔ X باشد؛ یعنی، $A \in \mathcal{P}(X)$. همچنین، $f : \mathcal{P}(X) \to C(X)$ این‌طور تعریف شده باشد :

$$f(A) = \chi_A = \begin{cases} 0 \text{ ، } x \notin A & \text{اگر} \\ 1 \text{ ، } x \in A & \text{اگر} \end{cases}$$

این f یک ـ یک و برو است؛ درنتیجه، $\mathcal{P}(X) \sim C(X)$.

۸ . ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ شمارشپذیر یا متناهی است یا شمارشپذیر؛ یعنی، حداکثر شمارشپذیر است.

حل. فرض‌کنیم $X = \{a_1, a_2, \ldots\}$ یک مجموعهٔ شمارشپذیر بوده و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. هرگاه $A = \emptyset$ ، A متناهی است. هرگاه $A \neq \emptyset$ ، n_1 را کوچکترین عدد صحیح مثبتی می‌انگاریم که $a_{n_1} \in A$ ؛ فرض کنیم n_2 کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که $n_2 > n_1$ و $a_{n_2} \in A$ ؛ وغیره. دراین صورت، $A = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\}$. اگر مجموعهٔ اعداد صحیح $\{n_1, n_2, \ldots\}$ کراندار باشد، A متناهی است. درغیر این‌صورت، A شمارشپذیر خواهد بود.

۹ . قضیهٔ ۳.۳ را ثابت کنید: هر زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ حداکثر شمارشپذیر حداکثر شمارشپذیر است.

حل. هرگاه X حداکثر شمارشپذیر باشد، X متناهی یا شمارشپذیر است. درهر حالت، زیرمجموعه‌های آن حداکثر شمارشپذیر هستند.

۱۰ . لم ۴.۳ را ثابت کنید: فرض کنید $\{A_1, A_2, \ldots\}$ رده‌ای از هم جدا و شمارشپذیر از مجموعه‌های شمارشپذیر باشد. دراین صورت، $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ نیز شمارشپذیر خواهد بود.

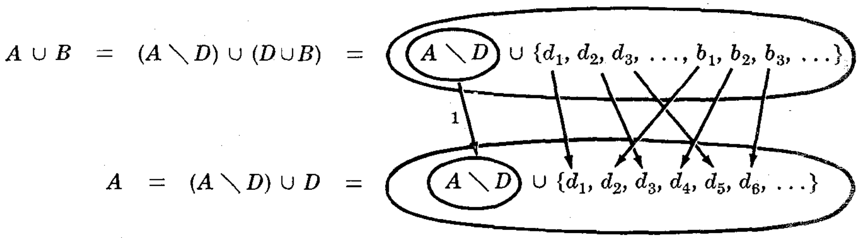
حل. چون A_i ها شمارشپذیر هستند، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\} \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n &= \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots\} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

دراین صورت، $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{ij} : \langle i, j\rangle \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}\}$. تابع $f : \cup_{i=1}^{\infty} A_i \to \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ که با $f(a_{ij}) = \langle i, j\rangle$ تعریف می‌شود بوضوح یک ــ یک و بروست. بنابراین، $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ شمارشپذیر است، زیرا $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ شمارشپذیر است.

۱۱ . فرض کنید A نامتناهی، $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ شمارشپذیر، و A و B از هم‌جدا باشند. ثابت کنید $A \cup B \sim A$.

حل. چون A نامتناهی است، A شامل زیر مجموعه‌ای شمارشپذیر مانند $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ است. فرض کنیم $f : A\cup B \to A$ با نمودار زیر تعریف شده باشد:



به عبارت دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{، اگر } x \in A\setminus D \\ d_{2n-1} & \text{، اگر } x = d_n \\ d_{2n} & \text{، اگر } x = b_n \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که f یک ــ یک و بروست؛ درنتیجه، $A\cup B \sim A$.

پیوستار، کاردینالیته

۱۲ . ثابت‌کنید بازه‌های $(0, 1)$ ، $[0, 1)$ ، و $(0, 1]$ دارای کاردینالیتهٔ $\mathbf{c}$ اند؛ یعنی، هم‌ارز $[0, 1]$ هستند.

حل

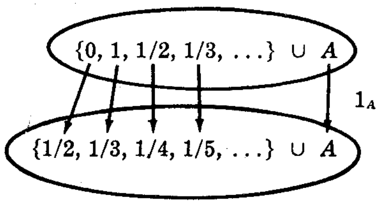
(یک) توجه کنید که

$$[0, 1] = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\} \cup A, \qquad (0, 1) = \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\} \cup A,$$

که درآنها

$$A = [0, 1]\setminus\{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\} = (0, 1)\setminus\{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}.$$

حال تابع $f:[0,1]\to(0,1)$ را که با نمودار



تعریف شده درنظر می‌گیریم. به‌عبارت دیگر،

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{اگر } x = 0 \text{ ،} \\ 1/(n+2) & \text{اگر } x = 1/n \text{ و } n \in \mathbf{N} \text{ ،} \\ x & \text{اگر } x \neq 0,\ 1/n,\ n \in \mathbf{N} \text{ ؛ یعنی، } x \in A \text{ ،} \end{cases}$$

تابع f یک ــ یک و بروست. پس $(0,1) \sim [0,1]$.

(دو) تابع $f:[0,1]\to[0,1)$ که با

$$f(x) = \begin{cases} 1/(n+1) & \text{اگر } x = 1/n,\ n \in \mathbf{N} \text{ ،} \\ x & \text{اگر } x \neq 1/n,\ n \in \mathbf{N} \text{ ،} \end{cases}$$

تعریف شده یک ــ یک و بروست. (این تابع شبیه تابع قسمت (یک) است). بنابراین، $[0,1) \sim [0,1]$.

(سه) فرض‌کنیم $f:[0,1)\to(0,1]$ با $f(x) = 1-x$ تعریف شده باشد. دراین‌صورت، f یک ــ یک و بروست. درنتیجه، $[0,1) \sim (0,1]$ و، بنابرتعدی، $(0,1] \sim [0,1]$. به عبارت دیگر، $(0,1)$ ، $[0,1)$ ، و $(0,1]$ دارای کاردینالیتهٔ $\mathbf{c}$ هستند.

۱۳ . ثابت کنید هریک از بازه‌های $[a,b]$ ، (a,b) ، $[a,b)$ ، و $(a,b]$ دارای توان پیوستار است؛ یعنی، دارای کاردینالیتهٔ $\mathbf{c}$ است. دراینجا $a<b$.

حل. فرض کنیم هریک از توابع

$$[0,1] \xrightarrow{f} [a,b] \qquad [0,1) \xrightarrow{f} [a,b) \qquad (0,1) \xrightarrow{f} (a,b) \qquad (0,1] \xrightarrow{f} (a,b]$$

با $f(x) = a + (b-a)x$ تعریف شده باشد. هر تابع یک ــ یک و بروست. درنتیجه، طبق مسئلهٔ قبل و حکم ۱۰۳ ، هر بازه با $[0,1]$ هم‌ارز است؛ یعنی، دارای کاردینالیتهٔ $\mathbf{c}$ می‌باشد.

۱۴ . قضیهٔ ۶۰۳ را ثابت کنید: بازهٔ یکهٔ $A = [0,1]$ شمارش ناپذیر است.

حل. **روش ۱.** فرض کنیم عکس این باشد؛ پس

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\};$$

یعنی، عنصرهای A را می‌توان به‌صورت یک دنباله نوشت.
هر عنصر A را می‌توان به‌شکل یک اعشاری نامتناهی نوشت:

$$x_1 = 0.\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1n} \ldots$$
$$x_2 = 0.\, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots a_{2n} \ldots$$
$$x_3 = 0.\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots a_{3n} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = 0.\, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots a_{nn} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

که درآنها $a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ و هراعشاری شامل بی‌نهایت رقم ناصفر است؛ یعنی، برای اعدادی که به دو صورت به شکل اعشاری نوشته می‌شوند، مثلاً"

$$1/2 = .5000\ldots = .4999\ldots,$$

آن اعشاری نامتناهی که درآن تمام ارقام جز تعدادی متناهی نه‌اند را خواهیم نوشت. حال عدد حقیقی

$$y = 0.\, b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_n \ldots$$

را متعلق به A و به‌صورت زیر می‌سازیم: b_1 را طوری اختیار می‌کنیم که $b_1 \neq a_{11}$ و $b_1 \neq 0$؛ b_2 را طوری اختیار می‌کنیم که $b_2 \neq a_{22}$ و $b_2 \neq 0$؛ الی‌آخر.
توجه کنید که $y \neq x_1$، زیرا $b_1 \neq a_{11}$؛ $y_2 \neq x_2$، زیرا $b_2 \neq a_{22}$؛ الی آخر؛ یعنی، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $y \neq x_n$. بنابراین، $y \notin A$، که ناممکن است. لذا، فرض‌شمارش‌پذیر بودن A به تناقض ختم می‌شود. درنتیجه، A شمارش ناپذیر می‌باشد.

روش ۲. فرض کنیم عکس این باشد. دراین صورت، مثل بالا،

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}.$$

حال دنباله‌ای از بازه‌های بسته را به‌صورت زیر می‌سازیم: سه زیربازهٔ بستهٔ

$$[0, \tfrac{1}{3}], \quad [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}], \quad [\tfrac{2}{3}, 1] \qquad (۱)$$

از $A = [0, 1]$، هریک به‌طول $\frac{1}{3}$، را درنظر می‌گیریم. x_1 نمی‌تواند به هر سه‌بازه متعلق باشد. فرض کنیم $I_1 = [a_1, b_1]$ یکی از بازه‌های (۱) باشد که $x_1 \notin I_1$. حال سه زیر بازهٔ بستهٔ

$$[a_1, a_1 + \tfrac{1}{9}], \quad [a_1 + \tfrac{1}{9}, a_1 + \tfrac{2}{9}], \quad [a_1 + \tfrac{2}{9}, b_1] \qquad (۲)$$

از $I_1 = [a_1, b_1]$، هریک به‌طول $\frac{1}{9}$ را درنظر می‌گیریم. به‌همین ترتیب، فرض کنیم I_2 یکی از بازه‌های (۲) باشد که $x_2 \notin I_2$.
با ادامهٔ این‌کار، دنباله‌ای از بازه‌های بسته مانند

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \qquad (۳)$$

که بــه‌ازای هــر $n \in N$، $x_n \notin I_n$ به‌دست خواهد آمد. منظور از **خاصیت بازه‌های تودرتوی** (ر.ک. ضمیمهٔ آ) اعداد حقیقی یعنی عددی حقیقی مانند $y \in A = [0,1]$ هست که متعلق به هر بازهٔ (۳) می‌باشد. اما

$y \in A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ایجاب می‌کند که به‌ازای $m_0 \in \mathbf{N}$ ی، $y = x_{m_0}$.
پس، بنــابر ساختن مــا، $y = x_{m_0} \notin I_{m_0}$، که با تعلق y به هر بازهٔ (۳) تعارض دارد. لذا، فرض شمــارش‌پذیر بودن A به تناقض ختم می‌شود. به بیان دیگر، A شمارش ناپذیر می‌باشد.

۱۵. قضیهٔ (شرودر ــ برنشتاین) ۸.۳ را ثابت‌کنید: فرض کنید $X \supset Y \supset X_1$ و $X \sim X_1$. دراین صورت، $X \sim Y$.

حل. چون $X \sim X_1$، تابعی مانند $f : X \to X_1$ وجود دارد که یک ــ یک و بروست. اما $X \supset Y$؛ درنتیجه، تحدید f به Y، که‌آن نیز با f نموده می‌شود، نیز یک ــ یک است. پس Y هم‌ارز زیر مجموعه‌ای از X_1 است؛ یعنی، $Y \sim Y_1$ که

$$X \supset Y \supset X_1 \supset Y_1$$

و $f : Y \to Y_1$ یک ــ یک و بروست. اما $Y \supset X_1$. پس، به دلیلی مشابه، $X \sim X_2$ که

$$X \supset Y \supset X_1 \supset Y_1 \supset X_2$$

و $f : X_1 \to X_2$ یک ــ یک و بــروست. لذا، مجمــوعــه‌های هم‌ارز $X_1, X_2, X_3, \ldots$ و مجموعه‌های هم‌ارز $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ وجود دارند بطوری که

$$X \supset Y \supset X_1 \supset Y_1 \supset X_2 \supset Y_2 \supset \cdots$$

قرار می‌دهیم

$$B = X \cap Y \cap X_1 \cap Y_1 \cap X_2 \cap Y_2 \cap \cdots$$

دراین صورت،

$$X = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X_1) \cup (X_1 \setminus Y_1) \cup \cdots \cup B$$

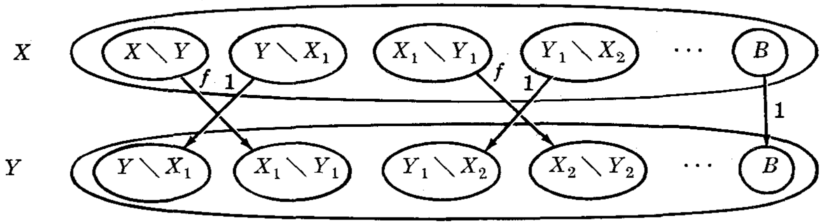
و

$$Y = (Y \setminus X_1) \cup (X_1 \setminus Y_1) \cup (Y_1 \setminus X_2) \cup \cdots \cup B \cdot$$

همچنین؛ توجه کنید که

$$(X \setminus Y) \sim (X_1 \setminus Y_1) \sim (X_2 \setminus Y_2) \sim \cdots$$

واضح است که تابع $f : (X_n \setminus Y_n) \to (X_{n+1} \setminus Y_{n+1})$ یک ــ یک و بروست.
تابع $g : X \to Y$ را که با نمودار



تعریف شده درنظر می‌گیریم. به‌عبارت دیگر،

$$g(x) \quad = \quad \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \in X_i \setminus Y_i \text{ یا } x \in X \setminus Y \text{ ،} \\ x & \text{اگر } x \in Y_i \setminus X_i \text{ یا } x \in B \text{ ،} \end{cases}$$

دراین صورت، g یک ــ یک و بروست. بنابراین، $X \sim Y$.

۱۶ . قضیهٔ (کانتور) ۱۰۰۳ را ثابت کنید: کاردینالیتهٔ مجموعهٔ توان هر مجموعه مانند A از کاردینالیتهٔ A بزرگتر است؛ یعنی، $A \prec \mathcal{P}(A)$ ؛ و در نتیجه، $\#(A) < \#(\mathcal{P}(A))$.

حل. تابع $g : A \to \mathcal{P}(A)$ که هر عنصر $a \in A$ را به مجموعهٔ یکانی $\{a\}$ می‌برد، یعنی $g(a) = \{a\}$ ، یک ــ یک است. درنتیجه، $A \precsim \mathcal{P}(A)$.
اگر نشان دهیم A هم‌ارز $\mathcal{P}(A)$ نیست، قضیه نتیجه خواهد شد. فرض کنیم عکس قضیه برقرار باشد؛ یعنی، تابعی مانند $f : A \to \mathcal{P}(A)$ باشد که یک ــ یک و برو باشد.
عنصر $a \in A$ را یک عنصر "بد" نامیم هرگاه a عضو نقش آن نباشد؛ یعنی، $a \notin f(a)$. فرض کنیم B مجموعهٔ عنصرهای "بد" باشد؛ یعنی،

$$B \quad = \quad \{x : x \in A,\ x \notin f(x)\}.$$

توجه کنید که B زیر مجموعهٔ A است؛ یعنی، $B \in \mathcal{P}(A)$. چون $f : A \to \mathcal{P}(A)$ بروست، عنصری چون $b \in A$ هست که $f(b) = B$. سوال: آیا b "بد" است یا "خوب"؟ گوییم اگر $b \in B$ ، بنابر تعریف B ، $b \notin f(b) = B$ ، که یک تناقض است. بهمین نحو، اگر $b \notin B$ ، $b \in f(b) = B$ ، که این نیز تناقض است. پس،

فرض اصلی ما، که $A \sim \mathcal{P}(A)$ ، به تناقض ختم می‌شود. لذا، $A \sim \mathcal{P}(A)$ نادرست است؛ و درنتیجه، قضیه درست می‌باشد.

مجموعه‌های مرتب و زیرمجموعه‌ها

۱۷. فرض کنید مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت $\mathbf{N}$ به این طریق مرتب شده باشد: هرجفت عنصر $a, a' \in \mathbf{N}$ را می‌توان به‌طور منحصر بفرد به شکل

$$a = 2^r(2s+1), \quad a' = a^{r'}(as'+1)$$

نوشت، که درآن $r, r', s, s' \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. فرض کنید $a \prec a'$ اگر $r < r'$ یا اگر $r = r'$ ولی $s < s'$.

بین هر جفت اعداد زیر علامت صحیح $\succ$ یا $\prec$ قرار دهید: (در اینجا $x \succ y$ اگفگر $y \prec x$.)

(یک) $5 \_\_ 14$ ؛ (دو) $6 \_\_ 9$ ؛

(سه) $3 \_\_ 20$ ؛ (چهار) $21 \_\_ 14$.

حل. عنصرهای $\mathbf{N}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

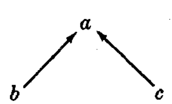
$r \backslash s$	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	1	3	5	7	9	11	13	15	...
1	2	6	10	14	18	22	26	30	...
2	4	12	20	28	36	44	52	60	...
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

دراین‌صورت، هر عدد در سطر بالاتر قبل از هر عدد در سطر پایین‌تر است و، اگر دو عدد در یک سطر باشند، عدد سمت چپ قبل از عدد سمت راست است. بنابراین،

(یک) $5 \prec 14$ ؛ (دو) $6 \succ 9$ ؛

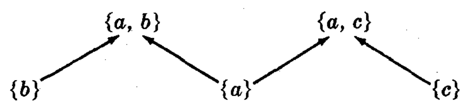
(سه) $3 \prec 20$ ؛ (چهار) $21 \succ 14$.

۱۸. فرض کنید $A = \{a, b, c\}$ با نمودار زیر مرتب شده باشد:



همچنین، $\mathscr{A}$ گردآیهٔ تمام زیر مجموعه‌های کلی مرتب و ناتهی A بوده، و $\mathscr{A}$ با شمول مجموعه‌ها جزئی مرتب شده باشد. نمودار ترتیب $\mathscr{A}$ را بسازید.

حل. زیر مجموعه‌های کلی مرتب A عبارتند از $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}$. چون $\mathscr{A}$ با شمول مجموعه‌ها مرتب شده، ترتیب $\mathscr{A}$ به صورت زیر می‌باشد:



۱۹. فرض کنید $A = \{2,3,4,\ldots\} = \mathbf{N} \setminus \{1\}$، و A با "x، y را عاد می‌کند" مرتب شده باشد.

(یک) عنصرهای مینیمال A را معین کنید.

(دو) عنصرهای ماکزیمال A را مشخص نمایید.

حل

(یک) هرگاه $p \in A$ یک عدد اول باشد، p فقط p را عاد می‌کند (چون $1 \notin A$)؛ درنتیجه، تمام اعداد اول عنصرهای مینیمال هستند. بعلاوه، اگر $a \in A$ اول نباشد، عددی مانند $b \in A$ هست بطوری که b، a را عاد می‌کند؛ یعنی، $b \prec a$. بنابر این، a مینیمال نیست. به عبارت دیگر، عنصرهای مینیمال دقیقاً "اعداد اول هستند.

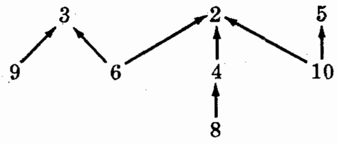
(دو) عنصر ماکزیمال وجود ندارد زیرا، به‌ازای هر $a \in A$، a مثلاً "$2a$ را عاد می‌کند.

۲۰. فرض کنید $B = \{2,3,4,5,6,8,9,10\}$ با "x یک مضرب y است" مرتب شده باشد.

(یک) تمام عنصرهای ماکزیمال B را بیابید.

(دو) تمام عنصرهای مینیمال B را پیدا کنید.

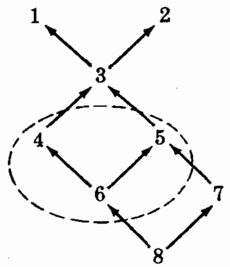
حل. نمودار ترتیب B را به‌صورت زیر می‌سازیم:



(یک) عنصرهای ماکزیمال عبارتند از 2 ، 3 ، و 5 .

(دو) عنصرهای مینیمال عبارتند از 6 ، 8 ، 9 ، و 10 .

۲۱ . فرض کنید $W = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$ به صورت زیر مرتب شده باشد :



زیرمجموعهٔ $V = \{4, 5, 6\}$ از W را درنظر بگیرید .

(یک) مجموعهٔ کرانهای بالایی V را بیابید .

(دو) مجموعهٔ کرانهای پایینی V را پیدا کنید .

(سه) آیا $\sup(V)$ وجود دارد ؟

(چهار) آیا $\inf(V)$ وجود دارد ؟

حل

(یک) هر عنصر در $\{1, 2, 3\}$ ، و فقط همین عنصرها ، بعد از هر عنصر در V است ؛ و در نتیجه ، یک کران بالایی است .

(دو) فقط 6 و 8 قبل‌از هر عنصر در V اند ؛ درنتیجه ، $\{6, 8\}$ مجموعهٔ کرانهای پایینی است .

(سه) چون 3 درمجموعهٔ کرانهای بالایی V عنصر اول است ، $\sup(V) = 3$. توجه کنید که $3 \notin V$.

(چهار) چون 6 در مجموعهٔ کرانهای پایینی V عنصر آخر است ، $\inf(V) = 6$. توجه کنید که $6 \in V$.

۲۲ . فرض کنید $\mathcal{A}$ گردآیه‌ای از مجموعه‌های جزئی مرتب باشد که با شمول مجموعه‌ها مرتب شده است ، و $\mathcal{B}$ یک زیر مجموعهٔ $\mathcal{A}$ باشد .

(یک) ثابت کنید هرگاه $A \in \mathcal{A}$ یک کران بالایی $\mathcal{B}$ باشد، $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\} \subset A$.

(دو) آیا $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$ یک کران بالایی $\mathcal{B}$ است ؟

حل

(یک) فرض کنیم $x \in \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$. پس $\exists B_0 \in \mathcal{B}$ s.t. $x \in B_0$ اما A کران بالایی $\mathcal{B}$ است . درنتیجه ، $B_0 \subset A$ ؛ و لذا ، $x \in A$. بنابراین ، $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\} \subset A$.

(دو) با اینکه $\mathcal{B}$ زیر گردآیهٔ $\mathcal{A}$ است ، لازم نیست اجتماع اعضای $\mathcal{B}$ ، یعنی $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$ ، عضو $\mathcal{A}$ باشد . به عبارت دیگر ، $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$ کران بالایی $\mathcal{B}$ است اگر و فقط اگر متعلق به $\mathcal{A}$ باشد .

کاربردهای لم زرن

۲۳ . فرض کنید X یک مجموعهٔ جزئی مرتب باشد ، و ثابت کنید زیر مجموعهٔ کلی مرتبی از X هست که زیر مجموعهٔ حقیقی هیچ زیر مجموعهٔ کلی مرتب دیگر X نیست .

حل . فرض کنیم $\mathcal{A}$ ردهٔ تمام زیر مجموعه‌های کلی مرتب X باشد . همچنین ، $\mathcal{A}$ با شمول مجموعه‌ها جزئی مرتب شده باشد . با لم زرن نشان می‌دهیم که $\mathcal{A}$ عنصر ماکزیمال دارد . فرض کنیم $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}$ یک زیر ردهٔ کلی مرتب از $\mathcal{A}$ باشد ، و قرار می‌دهیم $A = \bigcup\{B_i : i \in I\}$.

توجه کنید که

$B_i \subset X$ به‌ازای هر $B_i \in \mathcal{B}$ ایجاب می‌کند که $A \subset X$.

حال نشان می‌دهیم A کلی مرتب است . فرض کنیم $a, b \in A$. دراین صورت ،

$\exists B_j,\ B_k \in \mathcal{B}$ بطوری که $a \in B_j,\ b \in B_k$.

اما $\mathcal{B}$ با شمول مجموعه‌ها کلی مرتب است . از اینرو ، یکی از آنها ، مثلاً B_j ، زیر مجموعهٔ دیگران است . در نتیجه ، $a, b \in B_k$. یادآور می‌شویم که $B_k \in \mathcal{B}$ یک زیر مجموعهٔ کلی مرتب X است ؛ درنتیجه ، $a \precsim b$ یا $b \precsim a$. پس A یک زیر مجموعهٔ کلی مرتب X است ؛ و لذا ، $A \in \mathcal{A}$.

اما ، به‌ازای هر $B_i \in \mathcal{B}$ ، $B_i \subset A$. پس A یک کران بالایی $\mathcal{B}$ است . چون هر زیر مجموعهٔ کلی مرتب $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}$ کران بالایی دارد ، طبق لم زرن ، $\mathcal{A}$ عنصر ماکزیمال

دارد؛ یعنی ، یک‌زیرمجموعهٔ کلی مرتب X که‌زیرمجموعهٔ حقیقی هیچ زیرمجموعهٔ کلی مرتب X نیست .

۲۴ . فرض کنید R رابطه‌ای از A به B باشد؛ یعنی $R \subset A \times B$ ،و قلمرو R را A بگیرید . ثابت کنید زیر مجموعه‌ای از R مانند f^* هست که تابعی از A بتوی B باشد .

حل. فرض کنیم $\mathcal{A}$ ردهٔ زیر مجموعه‌های R باشد با این خاصیت که هر $f \in \mathcal{A}$ تابعی از زیر مجموعهٔ A بتوی B باشد . $\mathcal{A}$ را با شمول مجموعه‌ها جزئی مرتب می‌کنیم . توجه کنید که اگر $f: A_1 \to B$ زیر مجموعهٔ $g: A_2 \to B$ باشد، $A_1 \subset A_2$. حال فرض کنیم $\mathcal{B} = \{f_i : A_i \to B\}_{i \in I}$ زیر مجموعهٔ کلی مرتبی از $\mathcal{A}$ باشد . دراین صورت (ر.ک. مسئلهٔ ۴۴) ، $f = \cup_i f_i$ یک تابع از $\cup_i A_i$ بتوی B است . بعلاوه ، $f \subset R$. لذا ، f یک کران بالایی $\mathcal{B}$ می‌باشد . بنابر لم زرن ، $\mathcal{A}$ دارای عنصر ماکزیمال $f^* : A^* \to B$ است . حال اگر نشان دهیم $A^* = A$ ، قضیه ثابت خواهد شد . فرض کنیم $A^* \neq A$. دراین صورت ، $\exists a \in A \quad \text{s.t.} \quad a \notin A^*$. بنا به فرض، قلمرو R مساوی A است . درنتیجه ،جفت‌مرتبی‌مانند $\langle a, b \rangle \in R$ وجوددارد . لذا، $f^* \cup \{\langle a, b \rangle\}$ تابعی از $A^* \cup \{a\}$ بتوی B می‌باشد . اما این با عنصر ماکزیمال $\mathcal{A}$ بودن f^* تعارض دارد . بنابراین ، $A^* = A$ ، و قضیه ثابت شده است .

مسائل تکمیلی

مجموعه‌های هم ارز ، کاردینالیته

۲۵ . ثابت کنید هرمجموعهٔ نامتناهی هم‌ارز یک زیر مجموعهٔ حقیقی خود است .

۲۶ . ثابت کنید که اگر A و B شمارشپذیر باشند ، $A \times B$ نیز شمارشپذیر می‌باشد .

۲۷ . ثابت کنید مجموعهٔ نقاط صفحهٔ R^2 با مختصات گویا شمارشپذیر است .

۲۸ . عدد حقیقی x را **متعالی** گوییم درصورتی که‌جبری نباشد ؛ یعنی ، جواب یک‌معادلهٔ چندجمله‌ای مانند

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m = 0$$

با ضرایب صحیح (ر.ک. مسئلهٔ ۵) نباشد . مثلا" ، π و e اعدادی متعالی‌هستند .

(یک) ثابت کنید مجموعهٔ اعداد متعالی T شمارش‌ناپذیر است .

(دو) ثابت‌کنید T دارای‌توان‌پیوستاراست؛ یعنی ، دارای‌کاردینالیتهٔ $\mathfrak{c}$ است .

۲۹ . عمل ضرب برای اعداد اصلی این‌طور تعریف شده است :

$$\#(A)\,\#(B) = \#(A \times B).$$

(یک) نشان دهید که این عمل خوش تعریف است؛ یعنی،
$\#(A) = \#(A')$ و $\#(B) = \#(B')$ ایجاب می‌کنند که $\#(A)\,\#(B) = \#(A')\,\#(B')$.
یا، به‌بیان معادل،
$A \sim A'$ و $B \sim B'$ ایجاب می‌کنند که $(A \times B) \sim (A' \times B')$.

(دو) ثابت کنید

(آ) $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$ ؛ (ب) $\aleph_0 c = c$ ؛

(پ) $c c = c$.

۳۰ . عمل جمع برای اعداد اصلی این‌طور تعریف شده است :

$$\#(A) + \#(B) = \#(A \times \{1\} \cup B \times \{2\}).$$

(یک) نشان دهید که اگر $A \cap B = \emptyset$ ، $\#(A) + \#(B) = \#(A \cup B)$.

(دو) نشان دهید که این عمل خوش تعریف است؛ یعنی،
$\#(A) = \#(A')$ و $\#(B) = \#(B')$ ایجاب می‌کنند که $\#(A) + \#(B) = \#(A') + \#(B')$.

۳۱ . عمل به‌توان رساندن برای اعداد اصلی این‌طور تعریف شده است :

$$\#(A)^{\#(B)} = \#(\{f : f : B \to A\}).$$

(یک) نشان دهید که اگر $\#(A) = m$ و $\#(B) = n$ اعداد اصلی متناهیی باشند،

$$\#(A)^{\#(B)} = m^n;$$

یعنی، عمل به توان رساندن اعداد اصلی، درحالت متناهی بودن این اعداد، همان عمل عادی به‌توان رساندن اعداد صحیح مثبت است.

(دو) نشان دهید که این عمل خوش تعریف است؛ یعنی،
$\#(A) = \#(A')$ و $\#(B) = \#(B')$ ایجاب می‌کنند که $\#(A)^{\#(B)} = \#(A')^{\#(B')}$.

(سه) ثابت کنید به‌ازای هر مجموعهٔ A ، $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^{\#(A)}$.

۳۲ . فرض کنید $\sim$ یک‌رابطهٔ هم‌ارزی در $\mathbf{R}$ باشد که با " $x \sim y$ اگفگر $x - y$ گویا باشد" تعریف شده است. کاردینالیتهٔ مجموعهٔ خارج قسمتی $\mathbf{R}/\sim$ را مشخص کنید.

۳۳ . ثابت کنید عدد اصلی ردهٔ تمام توابع از $[0,1]$ بتوی $\mathbf{R}$ مساوی 2^c است.

۳۴ . ثابت کنید دو صورت زیر از قضیهٔ شرودر ــ برنشتاین ۸.۳ هم‌ارز هستند :

(یک) هرگاه $A \precsim B$ و $B \precsim A$ ، آنگاه $A \sim B$ ؛

(دو) هرگاه $X \supset Y \supset X_1$ و $X \sim X_1$ ، آنگاه $X \sim Y$.

۳۵ . قضیهٔ ۹.۳ را ثابت کنید : به‌ازای هرجفت مجموعهٔ A و B ، $A \prec B$ ، $A \sim B$ ،

یا $B \prec A$. (**راهنمایی.** لم زرن را به‌کار گیرید.)

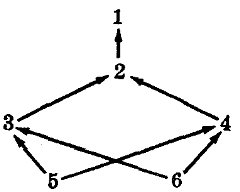
مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌های مرتب

۳۶ . فرض کنید $A = (\mathbf{N}, \leqq)$ ، یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت با ترتیب طبیعی باشد، و $B = (\mathbf{N}, \geqq)$ ، یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت با ترتیب عکس باشد. بعلاوه، $A \times B$ ترتیب قاموسی $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ طبق ترتیب A و سپس B باشد. بین هر جفت از عناصر زیر از $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ علامت صحیح $\succ$ یا $\prec$ را قرار دهید:

(یک) $\langle 3,8 \rangle$ ___ $\langle 1,1 \rangle$ ؛ (دو) $\langle 2,8 \rangle$ ___ $\langle 2,1 \rangle$ ؛

(سه) $\langle 3,1 \rangle$ ___ $\langle 3,3 \rangle$ ؛ (چهار) $\langle 7,15 \rangle$ ___ $\langle 4,9 \rangle$.

۳۷ . فرض کنید $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ با نمودار زیر مرتب شده باشد:



زیر مجموعهٔ $A = \{2, 3, 4\}$ از X را درنظر بگیرید.

(یک) عنصرهای ماکزیمال X را بیابید.

(دو) عنصرهای مینیمال X را پیدا کنید.

(سه) آیا X عنصر اول دارد؟

(چهار) آیا X عنصر آخر دارد؟

(پنج) مجموعهٔ کرانهای بالایی A را بیابید.

(شش) مجموعهٔ کرانهای پایینی A را بیابید.

(هفت) آیا $\sup(A)$ موجود است؟

(هشت) آیا $\inf(A)$ وجود دارد؟

۳۸ . مجموعهٔ اعداد گویای Q با ترتیب طبیعی و زیر مجموعهٔ آن $A = \{x : x \in Q,\, x^3 < 3\}$ را درنظر بگیرید.

(یک) آیا A از بالا کراندار است؟

(دو) آیا A از پایین کراندار است؟

(سه) آیا $\sup(A)$ وجود دارد؟

(چهار) آیا $\inf(A)$ وجود دارد؟

۳۹ . فرض‌کنید مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت $\mathbf{N}$ با " x ، y را عاد می‌کند" مرتب شده باشد، و $A \subset \mathbf{N}$.
(یک) آیا $\inf(A)$ موجود است؟ (دو) آیا $\sup(A)$ وجود دارد؟
۴۰ . ثابت کنید هر مجموعهٔ جزئی مرتب متناهی دارای عنصر ماکزیمال است.
۴۱ . مجموعهٔ مرتبی مثال بزنید که درست یک عنصر ماکزیمال داشته ولی عنصر آخر نداشته باشد.
۴۲ . ثابت کنید هرگاه R یک ترتیب جزئی بر A باشد، R^{-1} نیز یک ترتیب جزئی بر A است.

لم زرن

۴۳ . برهان حکم زیر را درنظر بگیرید: مجموعه‌ای متناهی از اعداد صحیح مثبت هست که زیر مجموعهٔ حقیقی هیچ مجموعهٔ متناهی دیگری از اعداد صحیح مثبت نیست.

برهان. فرض کنیم $\mathcal{A}$ ردهٔ تمام مجموعه‌های متناهی از اعداد صحیح مثبت باشد. $\mathcal{A}$ را با شمول مجموعه‌ها جزئی مرتب کرده، و فرض می‌کنیم $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}$ زیر ردهٔ کلی مرتبی از $\mathcal{A}$ باشد. مجموعهٔ $A = \cup_i B_i$ را درنظر می‌گیریم و می‌بینیم که به‌ازای هر $B_i \in \mathcal{B}$ ، $B_i \subset A$. لذا، A یک کران بالایی $\mathcal{B}$ است.
چون هر زیر مجموعهٔ کلی مرتب از $\mathcal{A}$ کران بالایی دارد، پس، طبق لم زرن، $\mathcal{A}$ عنصر ماکزیمال خواهد داشت، که مجموعه‌ای است متناهی که زیر مجموعهٔ حقیقی هیچ مجموعهٔ متناهی دیگر نیست.

سوال. چون حکم بوضوح باطل است، بگویید کدام مرحله از برهان درست نیست؟
۴۴ . مطلب زیر که در برهان مسئلهٔ ۲۴ مفروض گرفته شده بود را اثبات کنید: فرض‌کنید $\{f_i : A_i \to B\}$ رده‌ای از توابع باشد که با شمول مجموعه‌ها کلی مرتب شده است. در این صورت، $\cup_i f_i$ تابعی از $\cup_i A_i$ بتوی B خواهد بود.
۴۵ . ثابت کنید دو حکم زیر هم‌ارز هستند:
(یک) (اصل موضوع انتخاب). حاصل ضرب $\prod\{A_i : i \in I\}$ یک ردهٔ ناتهی از مجموعه‌های ناتهی ناتهی است؛
(دو) هرگاه $\mathcal{A}$ رده‌ای ناتهی از مجموعه‌های از هم جدا و ناتهی باشد، آنگاه زیر مجموعه‌ای چون $B \subset \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$ هست بطوری‌که اشتراک B و هر مجموعهٔ $A \in \mathcal{A}$

فقط از یک عنصر تشکیل شده است .

۴۶ . ثابت کنید هرگاه هر زیر مجموعهٔ کلی مرتب مجموعهٔ مرتب X کران پایینی در X داشته باشد ، X عنصر مینیمال خواهد داشت .

جواب مسائل تکمیلی

۳۲ . $\mathbf{c}$

۳۶ . (یک) $\succ$ ؛ (دو) $\succ$ ؛
(سه) $\prec$ ؛ (چهار) $\succ$.

۳۷ . (یک) $\{1\}$ ؛ (دو) $\{5,6\}$ ؛
(سه) خیر؛ (چهار) بلی ، 1 ؛
(پنج) $\{1,2\}$ ؛ (شش) $\{5,6\}$ ؛
(هفت) بلی ، 2 ؛ (هشت) خیر .

۳۸ . (یک) بلی؛ (دو) خیر؛
(سه) خیر؛ (چهار) خیر .

۳۹ . (یک) $\inf(A)$ وجود دارد اگفگر $A \neq \emptyset$.
(دو) $\sup(A)$ وجود دارد اگفگر A متناهی باشد .

۴۱ .

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] a & & & & \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

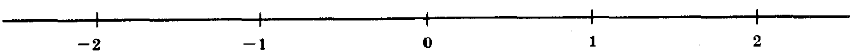
در اینجا a ماکزیمال است ولی a عنصر آخر نیست .

توپولوژی خط و صفحه[۴]

خط حقیقی

مجموعهٔ ***اعداد حقیقی***، که با $\mathbf{R}$ نموده مـی‌شود، نقش مهمی در ریاضیات و، بویژه، در آنالیز، ایفا می‌کند. در واقع، بسیاری از مفاهیم توپولوژی تجرید خواص مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی است. مجموعهٔ $\mathbf{R}$ را می‌توان به‌این صورت که $\mathbf{R}$ یک ***میدان مرتب ارشمیدسی تام*** است توصیف کرد. این مفاهیم در ضمیمه توضیح شده‌اند. دراینجا از رابطهٔ ترتیب در $\mathbf{R}$ برای تعریف "توپولوژی معمولی" برای $\mathbf{R}$ استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم خواننده با نمایش هندسی $\mathbf{R}$ به وسیلهٔ نقاط روی یک خط مستقیم آشنـا باشد. مثل شکل ۱۰۴، یک نقطه، به نام مبداء، برای نمایش 0 و نقطه‌ای دیگر، معمولا" سمت راست 0، برای نمایش 1 اختیار می‌شود. بدین ترتیب، راهی طبیعی برای جفت کردن نقاط خط و اعداد حقیقی به‌وجود می‌آید؛ یعنی، هر نقطه نشانگر عدد حقیقی منحصر بفردی است و هر عدد حقیقی نشانگر نقطهٔ منحصر بفردی می‌باشد. به‌این دلیل است‌که ما خط را ***خط حقیقی*** یا ***محور حقیقی*** می‌نامیم. بعلاوه، کلمات نقطه و عدد را به‌جای هم به‌کار خواهیم برد.



شکل ۱۰۴

مجموعه‌های باز در $\mathbf{R}$

فرض کنیم A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. نقطهٔ $p \in A$ یک ***نقطهٔ درونی*** A است اگرگر p متعلق به بازهٔ بازی چون S_p مشمول A باشد:

$$p \in S_p \subset A.$$

مجموعهٔ A باز (یا $\mathcal{U}$ ـ باز) است اگفگر هر نقطه‌اش یک نقطهٔ درونی باشد. (اهمیت $\mathcal{U}$ در $\mathcal{U}$ ـ باز در فصل بعد معلوم خواهد شد.)

مثال ۱.۱ . بازهٔ باز $A=(a,b)$ یک مجموعهٔ باز است، زیرا به‌ازای هر $p\in A$ می‌توان $S_p=A$ را اختیار کرد.

مثال ۲.۱ . خط حقیقی $\mathbf{R}$ خود باز است، زیرا هر بازهٔ باز S_p باید زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ باشد؛ یعنی، $p\in S_p\subset \mathbf{R}$.

توجه کنید که یک مجموعه باز نیست اگفگر نقطه‌ای در آن نقطهٔ درونی نباشد.

مثال ۳.۱ . بازهٔ بستهٔ $B=[a,b]$ یک مجموعهٔ باز نیست، زیرا هر بازهٔ باز شامل a یا b نقاطی خارج از B نیز دارد. لذا، نقاط انتهایی a و b نقاط درونی B نیستند.

مثال ۴.۱ . مجموعهٔ تهی $\emptyset$ باز است، زیرا نقطه‌ای در $\emptyset$ نیست که نقطهٔ درونی نباشد.

مثال ۵.۱ . بازه‌های باز نامتناهی، یعنی زیر مجموعه‌های $\mathbf{R}$ که با

$$\{x : x\in\mathbf{R},\ x>a\} = (a,\infty),\quad \{x : x\in\mathbf{R},\ x<a\} = (-\infty,a),$$
$$\{x : x\in\mathbf{R}\} = \mathbf{R} = (-\infty,\infty)$$

تعریف و نموده می‌شوند، مجموعه‌هایی بازند. از آن سو، بازه‌های بستهٔ نامتناهی، یعنی زیر مجموعه‌هایی از $\mathbf{R}$ که با

$$\{x : x\in\mathbf{R},\ x\geq a\} = [a,\infty),\quad \{x : x\in\mathbf{R},\ x\leq a\} = (-\infty,a]$$

تعریف و نموده می‌شوند، مجموعه‌هایی باز نیستند، زیرا $a\in\mathbf{R}$ یک نقطهٔ درونی $[a,\infty)$ یا $(-\infty,a]$ نیست.

برای مجموعه‌های باز دو قضیهٔ اساسی بیان می‌کنیم:

قضیهٔ ۱.۴ . *اجتماع هر تعداد مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}$ باز است.*

قضیهٔ ۲.۴ . *اشتراک هر تعداد متناهی مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}$ باز است.*

مثال زیر نشان می‌دهد که در قضیهٔ قبل شرط متناهی بودن قابل حذف نیست.

مثال ۱ ۰ ۶ . ردهٔ زیر از بازه‌های باز و، درنتیجه، مجموعه‌های باز
$\{A_n = (-1/n, 1/n) : n \in \mathbf{N}\}$ ، یعنی $\{(-1,1), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \ldots\}$ ،
را درنظر می‌گیریم. توجه کنید که اشتراک

$$\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

از بازه‌های باز فقط از 0 تشکیل شده است که یک مجموعهٔ باز نیست. به بیان دیگر، اشتراک هر تعداد مجموعهٔ باز الزاماً" باز نیست.

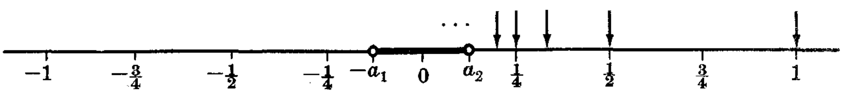
نقاط انباشتگی

فرض‌کنیم A زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ باشد؛ یعنی، مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. نقطهٔ $p \in \mathbf{R}$ **نقطهٔ *انباشتگی*** یا **نقطهٔ حدی** A است اگر هر مجموعهٔ باز G شامل p نقطه‌ای از A غیر از p را داشته باشد؛ یعنی،

G باز و $p \in G$ ایجاب کنند که $A \cap (G \setminus \{p\}) \neq \emptyset$.

مجموعهٔ نقاط انباشتگی A ، که با A' نموده می‌شود، **مجموعهٔ مشتق** A نام دارد.

مثال ۱ ۰ ۲ . فرض کنیم $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. نقطهٔ 0 یک نقطهٔ انباشتگی A است، زیرا هرمجموعهٔ باز G که $0 \in G$ شامل بازهٔ بازی چون $(-a_1, a_2) \subset G$ است که $-a_1 < 0 < a_2$ و شامل نقاطی از A می‌باشد.



توجه کنید که نقطهٔ حدی 0 مجموعهٔ A متعلق به A نیست. همچنین، A شامل نقطهٔ حدی دیگری نیست. درنتیجه، مجموعهٔ مشتق A مجموعهٔ یکانی $\{0\}$ است؛ یعنی، $A' = \{0\}$.

مثال ۲ ۰ ۲ . مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbf{Q}$ را درنظر می‌گیریم. هر عدد حقیقی $p \in \mathbf{R}$ یک نقطهٔ حدی $\mathbf{Q}$ است، چرا که هر مجموعهٔ باز شامل اعدادی گویا، یعنی نقاطی از $\mathbf{Q}$ ، است.

$Q' = \mathbb{R}$

مثال ۳ ۰ ۲ . مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ نقطهٔ انباشتگی

ندارد. به عبارت دیگر، مجموعهٔ مشتق $\mathbf{Z}$ مجموعهٔ تهی $\emptyset$ است.

تبصره. خواننده نباید مفهوم "نقطهٔ حدی یک مجموعه" را با مفهوم متفاوت، اگرچه مربوط، " حد یک دنباله" خلط کند. بعضی از مسائل جل شده و تکمیلی رابطهٔ این دو مفهوم را با هم نشان خواهند داد.

قضیهٔ بولتزانو[1] ــ وایراشتراس[2]

وجود یا عدم نقاط انباشتگی مجموعه‌ها یک مسئلهٔ مهم در توپولوژی است. این نیست که هر مجموعه، حتی اگر مثل مثال ۳.۲ نامتناهی باشد، نقطهٔ حدی دارد. اما حالت کلی مهمی هست که در آن جواب مثبت است.

نامتناهی

قضیهٔ (بولتزانو ــ وایراشتراس) ۳.۴ . *فرض کنیم A یک مجموعهٔ کراندار و* ~~*متناهی*~~ *از اعداد حقیقی باشد. دراین صورت، A دست کم یک نقطهٔ انباشتگی دارد.* ?

مجموعه‌های بسته

زیر مجموعهٔ A از $\mathbf{R}$، یعنی مجموعه‌ای از اعداد حقیقی، یک **مجموعهٔ بسته** است اگرگر متمم آن A^c باز باشد. مجموعهٔ بسته را می‌توان بر حسب نقاط انباشتگی‌اش توصیف کرد:

قضیهٔ ۴.۴ . *زیرمجموعهٔ A از $\mathbf{R}$ بسته‌است‌اگر و فقط‌اگر A شامل هر نقطهٔ انباشتگی خود باشد.*

مثال ۱.۳ . بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ یک مجموعهٔ‌بسته است، زیرا متمم آن $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$، که اجتماع دوبازهٔ نامتناهی باز است، باز می‌باشد.

مثال ۲.۳ . مجموعهٔ $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ بسته‌نیست زیرا، همانطور که در مثال ۱.۲ دیده شد، 0 نقطهٔ حدی A است ولی به A تعلق ندارد.

---

1. Bolzano

2. Weierstrass

مثال ۳.۳ . مجموعهٔ تهی $\emptyset$ و تمام خط $\mathbf{R}$ مجموعه‌هایی بسته‌اند، زیرا متممهای آنها $\mathbf{R}$ و $\emptyset$ باز می‌باشند.

همانطور که در مثال زیر می‌بینیم، مجموعه‌ها ممکن است نه باز باشند نه بسته.

مثال ۴.۳ . بازهٔ باز ــ بستهٔ $A = (a, b]$ را درنظر می‌گیریم. توجه کنید که A باز نیست، زیرا $b \in A$ یک نقطهٔ درونی A نیست؛ و بسته نیز نیست، زیرا $a \notin A$ ولی این نقطه یک نقطهٔ حدی A می‌باشد.

قضیهٔ هاینه[1] ــ بورل[2]

یکی از مهمترین خواص بازه‌های بسته و کراندار در قضیهٔ زیر آمده است. می‌گوییم رده‌ای از مجموعه‌ها، یعنی $\mathcal{A} = \{A_i\}$، درصورتی مجموعهٔ A را **می‌پوشاند** که A مشمول اجتماع اعضای $\mathcal{A}$ باشد؛ یعنی، $A \subset \cup_i A_i$.

قضیهٔ (هاینه ــ بورل) ۵.۴ . *فرض کنیم $A = [c, d]$ یک بازهٔ بسته و کراندار بوده، و $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ رده‌ای از بازه‌های باز باشد که A را می‌پوشاند؛ یعنی، $A \subset \cup_i G_i$. دراین صورت، $\mathcal{G}$ شامل زیر رده‌ای متناهی، مثلاً $\{G_{i_1}, \cdots, G_{i_m}\}$، است که این نیز A را می‌پوشاند؛ یعنی،*

$$A \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \ldots \cup G_{i_m}.$$

هر دو شرط، یعنی بسته‌و کراندار بودن، باید برای A برقرار باشد والا قضیه‌درست نخواهد بود. این امر در دو مثال زیر نشان داده می‌شود.

مثال ۱.۴ . بازهٔ یکهٔ باز و کراندار $A = (0, 1)$ را درنظر می‌گیریم. توجه کنید که ردهٔ

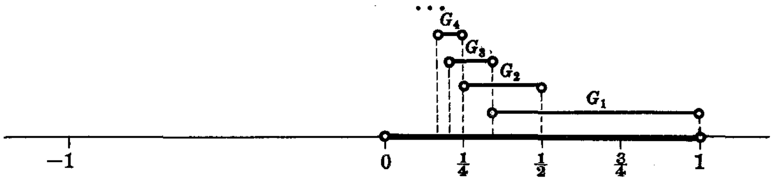
$$\mathcal{G} = \left\{G_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbf{N}\right\}$$

---

1. Heine
2. Borel

از بازه‌های باز A را می‌پوشاند؛ یعنی،

$$A \subset (\tfrac{1}{3},1) \cup (\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{3}) \cup \cdots$$

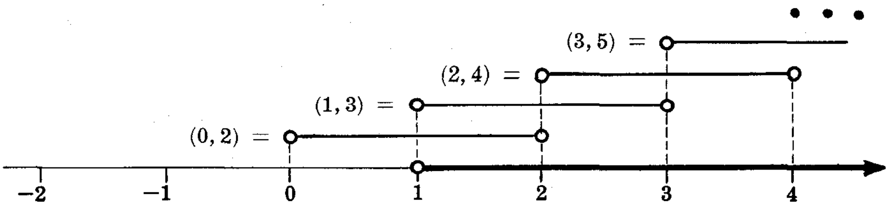


اما اجتماع هیچ زیر ردهٔ متناهی از G شامل A نیست.

مثال ۲۰۴ . بازهٔ نامتناهی و بستهٔ $A = [1, \infty)$ را درنظر می‌گیریم. ردهٔ

$$G = \{(0,2), (1,3), (2,4), \ldots\}$$

از بازه‌های باز A را می‌پوشاند، اما هیچ زیر ردهٔ متناهی چنین نخواهد کرد.



دنباله‌ها

یک ***دنباله***، که با

$$\langle s_n \rangle \text{ یا } \langle s_n : n \in \mathbf{N} \rangle \text{ ، } \langle s_1, s_2, \ldots \rangle$$

نموده می‌شود، تابعی است که قلمروش $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ است؛ یعنی، دنباله‌ای که به هر عدد صحیح و مثبت $n \in \mathbf{N}$ نقطهٔ s_n را مربوط می‌کند. نقش s_n یا $s(n)$ عدد $n \in \mathbf{N}$ **جملهٔ** n م دنباله نامیده می‌شود.

مثال ۱۰۵ . دنباله‌های

$$\langle s_n \rangle = \langle 1, 3, 5, \ldots \rangle, \quad \langle t_n \rangle = \langle -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, \ldots \rangle, \quad \langle u_n \rangle = \langle 1, 0, 1, 0, \ldots \rangle$$

را می‌توان بترتیب با فرمولهای

$$s(n) = 2n - 1, \quad t(n) = (-1)^n/2^n, \quad u(n) = \tfrac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1}) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

تعریف کرد . دنباله‌ٔ $\langle s_n : n \in \mathbf{N}\rangle$ را کراندار گوییم درصورتی که بردش $\{s_n : n \in \mathbf{N}\}$ یک مجموعه‌ٔ کراندار باشد .

مثال ۲.۵ . سه دنباله‌ٔ مثال ۱.۵ را درنظر می‌گیریم . برد $\langle s_n\rangle$ عبارت است از $\{1, 3, 5, \ldots\}$. لذا ، $\langle s_n\rangle$ یک دنباله‌ٔ کراندار نیست . برد $\langle t_n\rangle$ عبارت است از $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots\}$ که کراندار است . درنتیجه ، $\langle t_n\rangle$ یک دنباله‌ٔ کراندار است . برد $\langle u_n\rangle$ مجموعه‌ٔ متناهی $\{0, 1\}$ است . پس $\langle u_n\rangle$ نیز یک دنباله‌ٔ کراندار است .

توجه کنید که $\langle s_n : n \in \mathbf{N}\rangle$ یک دنباله است و یک تابع می‌باشد ازآن سو ، $\{s_n : n \in \mathbf{N}\}$ برد دنباله است و یک مجموعه می‌باشد .

دنباله‌های همگرا

تعریف معمولی یک دنباله‌ٔ همگرا به‌صورت زیر بیان می‌شود :

تعریف . دنباله‌ٔ $\langle a_1, a_2, \ldots\rangle$ از اعداد حقیقی درصورتی همگرا به $b \in R$ است یا ، معادلا" ، عدد حقیقی b حد دنباله‌ٔ $\langle a_n : n \in \mathbf{N}\rangle$ است ، و با

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \ \text{،} \ \lim a_n = b \ \text{،} \ \text{یا} \ a_n \to b$$

نموده می‌شود ، که به‌ازای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیح و مثبتی مانند n_0 باشد بطوری که $n > n_0$ ایجاب کند که $|a_n - b| < \epsilon$.

توجه کنید که $|a_n - b| < \epsilon$ یعنی $b - \epsilon < a_n < b + \epsilon$ ، یا ، معادلا" ، a_n متعلق به‌بازه‌ٔ باز $(b - \epsilon,\ b + \epsilon)$ شامل b است . بعلاوه ، چون هر جمله بعد از جمله‌ٔ n_0 م داخل بازه‌ٔ $(b - \epsilon,\ b + \epsilon)$ قرار دارد ، فقط جملات قبل از a_{n_0} ، یعنی فقط تعدادی متناهی از آنها ، می‌توانند خارج بازه‌ٔ $(b - \epsilon,\ b + \epsilon)$ قرار گیرند . لذا ، می‌توان تعریف فوق را به صورت زیر نیز بیان کرد :

تعریف . دنباله‌ٔ $\langle a_n : n \in \mathbf{N}\rangle$ در صورتی همگرا به b است که هر مجموعه‌ٔ باز شامل b شامل ***تقریبا*** " همه‌ٔ ، یعنی همه جز تعدادی متناهی ، جملات دنباله باشد .

مثال ۱۰۶ . دنباله‌ٔ ثابت $\langle a_0, a_0, a_0, \ldots\rangle$ ، مانند $\langle 1,1,1,\ldots\rangle$ یا $\langle -3,-3,-3,\ldots\rangle$ ، همگرا به a_0 است ، زیرا هر مجموعهٔ باز شامل a_0 هر جمله از دنباله را دارد .

مثال ۲۰۶ . هریک از دنباله‌های

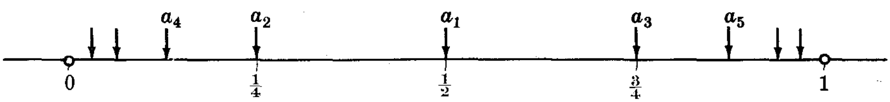
$$\langle 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots\rangle, \quad \langle 1, 0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{3}, 0, \tfrac{1}{4}, 0, \ldots\rangle, \quad \langle 1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}, \ldots\rangle$$

همگرا به 0 است ، زیرا هر بازهٔ باز شامل 0 "تقریبا" همهٔ جملات هر دنباله را دارد .

مثال ۳۰۶ . دنبالهٔ $\langle \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{7}{8}, \tfrac{1}{16}, \tfrac{15}{16}, \ldots\rangle$ ، یعنی دنبالهٔ

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{(n+2)/2}} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد ،} \\ 1 - \dfrac{1}{2^{(n+1)/2}} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد ،} \end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم . نقاط آن در زیر نموده شده‌اند :



توجه کنید که هر بازهٔ باز شامل 0 یا 1 بی‌نهایت جمله از دنباله را دارد . اما نه 0 و نه 1 حد دنباله نیستند . لکن 0 و 1 نقاط انباشتگی **برد** دنباله ، یعنی **مجموعهٔ** $\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{7}{8}, \ldots\}$ ، می‌باشند .

زیردنباله‌ها

دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots\rangle$ را درنظر می‌گیریم . هرگاه $\langle i_n\rangle$ دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت باشد بطوری که $i_1 < i_2 < \cdots$ ، آنگاه

$$\langle a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots\rangle$$

یک **زیر دنبالهٔ** $\langle a_n : n \in \mathbf{N}\rangle$ نامیده می‌شود .

مثال ۱۰۷ . دنبالهٔ $\langle a_n\rangle = \langle 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots\rangle$ را درنظر می‌گیریم . ملاحظه می‌کنیم که $\langle 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots\rangle$ یک زیر دنبالهٔ $\langle a_n\rangle$ است ، اما $\langle \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{5}, \ldots\rangle$ یک زیر دنبالهٔ $\langle a_n\rangle$ نیست ، زیرا در دنبالهٔ اصلی 1 قبل از $\tfrac{1}{2}$ آمده است .

مثال ۲۰۷ . با اینکه دنبالهٔ $\langle \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{7}{8}, \ldots\rangle$ مثال ۳۰۶ همگرا نیست ، اما زیر

دنباله‌هایی همگرا نظیر $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \rangle$ و $\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots \rangle$ دارد. از آن سو، دنبالهٔ $\langle 1, 3, 5, \ldots \rangle$ زیر دنبالهٔ همگرا ندارد.

همانطور که در مثال قبل دیدیم، دنباله‌ها ممکن است زیر دنبالهٔ همگرا داشته باشند یا نداشته باشند. حالت کلی بسیار مهمی هست که در آن جواب مثبت است.

قضیهٔ ۶.۴ . *هر دنبالهٔ کراندار از اعداد حقیقی شامل زیر دنباله‌ای همگرا است.*

دنباله‌های کشی[1]

دنبالهٔ $\langle a_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ از اعداد حقیقی یک *دنبالهٔ کشی* است اگفگر به‌ازای هر $0 < \epsilon$ عدد صحیح مثبتی چون n_0 باشد بطوری که

$n, m > n_0$ ایجاب کنند که $|a_n - a_m| < \epsilon$.

به عبارت دیگر، دنباله‌کشی است اگفگر جملات آن با بزرگ شدن n بدلخواه بهم نزدیک شوند.

مثال ۱.۸ . فرض‌کنیم $\langle a_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ یک دنبالهٔ کشی از اعداد صحیح باشد؛ یعنی، هر جملهٔ آن متعلق به $\mathbf{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ باشد. دراین صورت، دنباله باید به شکل

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, b, b, b, \ldots \rangle$$

باشد؛ یعنی، دنباله پس از جملهٔ n_0 ی ثابت باشد. چرا که اگر $\epsilon = \frac{1}{2}$ را اختیار کنیم، $a_n, a_m \in \mathbf{Z}$ و $|a_n - a_m| < \frac{1}{2}$ ایجاب می‌کنند که $a_n = a_m$.

مثال ۲.۸ . نشان می‌دهیم هر دنبالهٔ همگرا یک دنبالهٔ کشی است. فرض کنیم $a_n \to b$ و $\epsilon > 0$. پس $n_0 \in \mathbf{N}$ ی به‌قدر کافی بزرگ هست بطوری که

$n > n_0$ ایجاب می‌کند که $|a_n - b| < \frac{1}{2}\epsilon$ و $m > n_0$ ایجاب می‌کند که $|a_m - b| < \frac{1}{2}\epsilon$.

درنتیجه، $n, m > n_0$ ایجاب خواهند کرد که

$$|a_n - a_m| = |a_n - b + b - a_m| \leq |a_n - b| + |b - a_m| < \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon.$$

---

1. Cauchy

لذا ، $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی می‌باشد .

تمامیت

مجموعهٔ A ازاعدادحقیقی‌رادرصورتی ***تام*گوییم** که‌هر دنبالهٔ کشی $\langle a_n \in A : n \in \mathbf{N} \rangle$ از نقاط A به نقطه‌ای در A همگرا باشد .

مثال ۱.۹ . مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ تام است . زیرا ، همانطورکه در مثال ۱.۸ دیدیم ، هر دنبالهٔ کشی $\langle a_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ از نقاط $\mathbf{Z}$ به شکل

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, b, b, b, \ldots \rangle$$

است ، که به نقطهٔ $b \in \mathbf{Z}$ همگرا می‌باشد .

مثال ۲.۹ . مجموعهٔ‌اعدادگویای $\mathbf{Q}$ تام نیست . زیرا می‌توان دنباله‌ای از اعداد گویا ، نظیر $\langle 1, 1.4, 1.41, 1.412, \ldots \rangle$ ، اختیارکرد که همگرا به عدد حقیقی $\sqrt{2}$ ، که گویا نیست ، یعنی تعلق به $\mathbf{Q}$ ندارد ، باشد .

خاصیت اساسی مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ این است که تام است؛ یعنی ،

قضیهٔ (کشی) ۷.۴ . *هر دنبالهٔ کشی از اعداد حقیقی همگرا به عددی حقیقی است .*

توابع پیوسته

تعریف عادی $\epsilon - \delta$ ی تابع پیوسته به‌صورت زیر بیان می‌شود :

تعریف . تابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ در صورتی درنقطهٔ x_0 **پیوسته** است که به‌ازای هر $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای باشد بطوری که

$|x - x_0| < \delta$ نامساوی $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ را ایجاب نماید .

تابع f یک ***تابع پیوسته*** است اگر در هر نقطه پیوسته باشد .

توجه‌کنید که $|x - x_0| < \delta$ یعنی $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ،یا ، معادلا" ، x متعلق به بازهٔ باز$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$است . بهمین نحو ، $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ یعنی $f(x)$

متعلق به بازهٔ باز $(f(x_0)-\epsilon,\ f(x_0)+\epsilon)$ است. لذا، گزارهٔ

$|x-x_0|<\delta$ نامساوی $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ را ایجاب می‌کند

هم‌ارز گزارهٔ

$x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ تعلق $f(x)\in(f(x_0)-\epsilon,\ f(x_0)+\epsilon)$ را ایجاب می‌کند

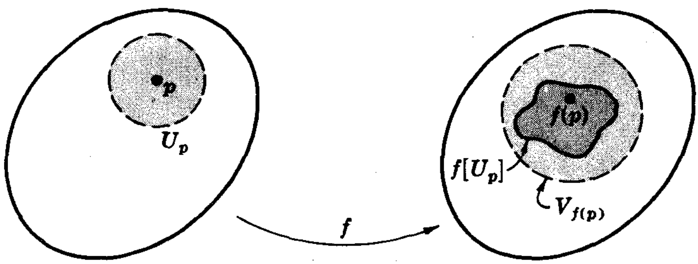
است که این هم‌ارز گزاره

$f[(x_0-\delta,\ x_0+\delta)]$ مشمول $(f(x_0)-\epsilon,\ f(x_0)+\epsilon)$

خواهد بود. پس، تعریف قبلی را می‌توان به‌این صورت نیز بیان کرد:

تعریف. تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ در صورتی در $p\in\mathbf{R}$ پیوسته است‌که به‌ازای هر مجموعهٔ باز $V_{f(p)}$ حاوی $f(p)$ مجموعهٔ‌بازی‌چون U_p شامل p باشد بطوری که $f[U_p]\subset V_{f(p)}$. تابع f یک تابع پیوسته است اگر در هر نقطه پیوسته باشد.

نمودار ون زیر می‌تواند در تجسم این تعریف سودمند باشد.



یک تابع پیوسته را می‌توان کلاً" برحسب مجموعه‌های باز توصیف کرد:

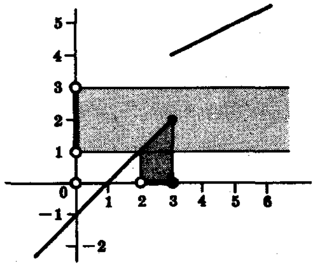
قضیهٔ ۸.۴ . *یک تابع پیوسته‌است اگر و فقط اگر نقش معکوس هر مجموعهٔ باز باز باشد.*

توجه کنید که قضیهٔ۸.۴همچنین می‌گوید که یک تابع پیوسته نیست اگرمجموعهٔ بازی باشد که نقش معکوس آن باز نباشد.

مثال ۱.۱ . تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$، که با

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{اگر}\ x\leq 3 \\ \frac{1}{2}(x+5) & \text{اگر}\ x>3 \end{cases}$$

تعریف و در نمودار



مجسم شده است ، را درنظر می‌گیریم . توجه کنید که معکوس بازهٔ باز $(1,3)$ بازهٔ باز ـ بستهٔ $(2,3]$ است ، که یک مجموعهٔ باز نیست . لذا ، تابع f پیوسته نمی‌باشد .

حال خاصیت مهمی از توابع پیوسته را ذکر می‌کنیم که بعداً " در کتاب به آن ارجاع خواهیم داشت .

قضیهٔ ۹.۴ . فرض‌کنیم $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد . دراین صورت ، تابع هر مقدار بین $f(a)$ و $f(b)$ را خواهد گرفت .

به عبارت دیگر ، هرگاه y_0 عددی حقیقی باشد بطوری که $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ یا $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$ ، آنگاه

$\exists x_0 \in \mathbf{R}$ بطوری که $a \leq x_0 \leq b$ و $f(x_0) = y_0$.

این قضیه به **قضیهٔ مقدار میانی وایراشتراس** معروف است .

تبصره. تابع $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را درصورتی بر زیرمجموعهٔ D از $\mathbf{R}$ پیوسته گوییم که در هر نقطهٔ D پیوسته باشد .

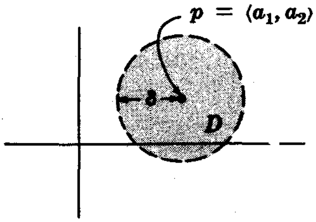
توپولوژی صفحه

قرص باز D درصفحهٔ $\mathbf{R}^2$ مجموعهٔ نقاط داخل یک دایره ، مثلاً " به مرکز $p = \langle a_1, a_2 \rangle$ و شعاع $\delta > 0$ ، است ؛ یعنی ،

$$D = \{\langle x,y \rangle : (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < \delta^2\} = \{q \in \mathbf{R}^2 : d(p,q) < \delta\}.$$

اینجا $d(p,q)$ فاصلهٔ معمولی دو نقطهٔ $p = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $q = \langle b_1, b_2 \rangle$ در $\mathbf{R}^2$ است :

$$d(p,q) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}.$$



نقش قرص باز در توپولوژی $\mathbf{R}^2$ شبیه نقشی است که بازهٔ باز در توپولوژی $\mathbf{R}$ دارد .

فرض کنیم A یک زیر مجموعهٔ $\mathbf{R}^2$ باشد . نقطهٔ $p \in A$ یک **نقطهٔ درونی** A است اگفگر p متعلق به قرص بازی چون D_p مشمول A باشد :

$$p \in D_p \subset A.$$

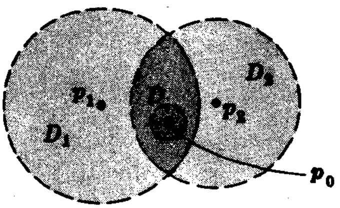
مجموعهٔ A **باز** ($\mathcal{U}$ — **باز**) است اگفگر هریک از نقاطش یک نقطهٔ درونی باشد .

مثال ۱۱ . ۱ . واضح است که هرقرص باز ، تمام $\mathbf{R}^2$ ، و مجموعهٔ تهی $\emptyset$ زیر مجموعه‌های باز $\mathbf{R}^2$ اند . حال نشان می‌دهیم که اشتراک هر دو قرص باز ، مثلاً "

$$D_1 = \{q \in \mathbf{R}^2 : d(p_1, q) < \delta_1\} \text{ و } D_2 = \{q \in \mathbf{R}^2 : d(p_2, q) < \delta_2\} ،$$

نیز یک مجموعهٔ باز است . زیرا فرض کنیم $p_0 \in D_1 \cap D_2$ ؛ درنتیجه ،

$d(p_1, p_0) < \delta_1$ و $d(p_2, p_0) < \delta_2$.



قرار می‌دهیم

$$r = \min\{\delta_1 - d(p_1, p_0), \quad \delta_2 - d(p_2, p_0)\} > 0$$

و

$$D = \{q \in \mathbf{R}^2 : d(p_0, q) < \tfrac{1}{2}r\} .$$

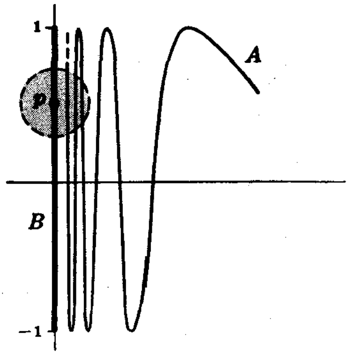
دراین صورت ، $p_0 \in D \subset D_1 \cap D_2$ ، یا p_0 یک نقطهٔ درونی $D_1 \cap D_2$ می‌باشد .

نقطهٔ $p \in \mathbf{R}^2$ یک ***نقطهٔ انباشتگی*** یا ***نقطهٔ حدی*** زیر مجموعهٔ A از $\mathbf{R}^2$ است اگفگر هر مجموعهٔ باز G شامل p نقطه‌ای از A غیر از p را داشته باشد ؛ یعنی ، $G \subset \mathbf{R}^2$ باز و $p \in G$ ایجاب کنند که $A \cap (G \setminus \{p\}) \neq \emptyset$.

مثال ۲۰۱۱ . زیر مجموعهٔ

$$A = \left\{\langle x, y\rangle : y = \sin\frac{1}{x}, \ x > 0\right\}$$

از $\mathbf{R}^2$ را درنظر می‌گیریم . مجموعهٔ A در نمودار زیر مجسم شده است :



توجه‌کنیدکه منحنی ، در رفتن از راست به چپ ، سریعتر بالا و پایین می‌رود ؛ یعنی ، نقاط عبور منحنی از محور x بهم نزدیکتر می‌شوند . نقطهٔ $p = \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ یک نقطهٔ حدی A است ، زیرا A مـآلا" از هـر قرص‌باز شامل p می‌گذرد . در واقع ، هر نقطه روی محور y و بین -1 و 1 ، یعنی هر نقطه در مجموعهٔ

$$B = \{\langle x, y\rangle : x = 0, \ -1 \leq y \leq 1\},$$

یک نقطهٔ حدی A است .

زیر مجمـوعهٔ A از $\mathbf{R}^2$ **بسته** است اگفگر متمم آن A^c زیر مجموعهٔ بازی از $\mathbf{R}^2$ باشـد .

دنبالهٔ $\langle p_1, p_2, \ldots\rangle$ از نقاط $\mathbf{R}^2$ ***همگرا*** به نقطهٔ $q \in \mathbf{R}^2$ است اگفگر هر مجموعهٔ باز شـامل q تقریبا" همـهٔ جملات دنباله را داشته باشد . همگرایی در $\mathbf{R}^2$ را می‌توان برحسب همگرایی در $\mathbf{R}$ به‌صورت زیر توصیف کرد :

حکم ۱۰۰۴ . *دنبـالـهٔ* $\langle p_1 = \langle a_1, b_1\rangle, \ p_2 = \langle a_2, b_2\rangle, \ \ldots\rangle$ ***از نقـاط*** $\mathbf{R}^2$ ***و نقطـهٔ*** $q = \langle a, b\rangle \in \mathbf{R}^2$ ***را درنظر می‌گیریم . دراین صورت ،***

$p_n \to q$ ***اگر و فقط اگر*** $a_n \to a$ و $b_n \to b$.

تابـع $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ در نقطـهٔ $p \in \mathbf{R}^2$ **پیوسته** است اگفگر به‌ازای هر مجموعهٔ باز $V_{f(p)}$ شامل $f(p)$ مجموعهٔ بازی چون U_p شامل p باشد بطوری که $f[U_p] \subset V_{f(p)}$.

حال چند قضیه برای $\mathbf{R}^2$ ، شبیه قضایایی که قبلاً" دراین فصل برای $\mathbf{R}$ بیان شدند ، ذکر می‌شود .

قضیهٔ ۱.۴* . *اجتماع هر تعداد از زیر مجموعه‌های باز $\mathbf{R}^2$ باز است .*

قضیهٔ ۲.۴* . *اشتراک هر تعداد متناهی از زیر مجموعه‌های باز $\mathbf{R}^2$ باز است .*

قضیهٔ ۴.۴* . *زیر مجموعهٔ A از $\mathbf{R}^2$ بسته است اگر و فقط اگر A شامل هر نقطهٔ انباشتگی خود باشد .*

قضیهٔ ۸.۴* . *تابع $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ پیوسته است اگر و فقط اگر نقش معکوس هر مجموعهٔ باز باز باشد .*

مسائل حل شده

مجموعه‌های باز ، نقاط انباشتگی

۱ . نقاط انباشتگی هر مجموعه از اعداد حقیقی زیر را مشخص کنید :

(یک) $\mathbf{N}$ ؛

(دو) $(a,b]$ ؛

(سه) $\mathbf{Q}^c$ ، یعنی مجموعهٔ اعداد گنگ .

حل

(یک) مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت $\mathbf{N}$ نقطهٔ حدی ندارد . چرا که اگر a یک عددحقیقی باشد ، می‌توان $\delta>0$ را آنقدر کوچک یافت که مجموعهٔ باز $(a-\delta,\ a+\delta)$ هیچ نقطه‌ای از $\mathbf{N}$ غیر از a نداشته باشد .

(دو) هر نقطهٔ p در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ یک نقطهٔ حدی بازهٔ باز ـ بستهٔ $(a,b]$ است ، زیرا هر بازهٔ باز شامل $p\in[a,b]$ نقاطی از $(a,b]$ غیر از p رادارد .

(سه) هر عدد حقیقی $p\in\mathbf{R}$ یک نقطهٔ حدی $\mathbf{Q}^c$ است ، زیرا هر بازهٔ باز شامل $p\in\mathbf{R}$ نقاطی از $\mathbf{Q}^c$ ، یعنی اعدادی گنگ غیر از p ، را دارد .

۲ . یادآور می‌شویم که A' مجموعهٔ مشتق است؛ یعنی ، مجموعهٔ نقاط حدی مجموعهٔ

A . A را طوری بیابید که (یک) A و A' از هم جدا باشند ؛ (دو) A زیرمجموعهٔ حقیقی A' باشد ؛ (سه) A' زیر مجموعهٔ حقیقی A باشد ؛ (چهار) $A = A'$.

حل

(یک) مجموعهٔ $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ فقط 0 را به عنوان نقطهٔ انباشتگی دارد . بنابر این ، $A' = \{0\}$ ، و A و A' از هم جدا هستند .

(دو) فرض کنیم $A = (a, b]$ ، یعنی یک بازهٔ باز ــ بسته ، باشد . همانطور که در مسئلهٔ پیش دیدیم ، $A' = [a, b]$ ، یعنی بازهٔ بسته ، است ؛ و درنتیجه ، $A \subset A'$.

(سه) فرض‌کنیم $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. دراین‌صورت ، 0 ،که متعلق به A است ، تنها نقطهٔ حدی A است . لذا ، $A' = \{0\}$ و $A' \subset A$.

(چهار) فرض کنیم $A = [a, b]$ ، یعنی یک بازهٔ بسته ، باشد . دراین صورت ، هر نقطهٔ A یک نقطهٔ حدی A است و اینها تنها نقاط حدی هستند . درنتیجه ، $A = A' = [a, b]$.

۳ . قضیهٔ ۱ . ۴* را ثابت کنید : اجتماع هرتعداد از زیر مجموعه‌های باز $\mathbf{R}^2$ باز است .

حل . فرض کنیم $\mathcal{A}$ رده‌ای‌از زیرمجموعه‌های باز $\mathbf{R}^2$ بوده ، $H = \bigcup\{G : G \in \mathcal{A}\}$ ، و $p \in H$. قضیه وقتی ثابت می‌شود که نشان دهیم p یک نقطهٔ درونی H است؛ یعنی ، قرص بازی چون D_p شامل p هست بطوری که D_p مشمول H می‌باشد .

گوییم چون $p \in H = \bigcup\{G : G \in \mathcal{A}\}$ ، $\exists G_0 \in \mathcal{A}$ بطوری که $p \in G_0$. اما G_0 یک مجموعهٔ باز است ؛ درنتیجه ، قرص بازی چون D_p شامل p هست بطوری که

$$p \in D_p \subset G_0.$$

چون G_0 زیرمجموعهٔ $H = \bigcup\{G : G \in \mathcal{A}\}$ است ، D_p نیز زیر مجموعهٔ H است . لذا ، H باز می‌باشد .

۴ . ثابت کنید هر زیر مجموعهٔ باز G از صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ اجتماع قرصهایی باز است .

حل . چون G باز است ، به‌ازای هر نقطه مانند $p \in G$ قرص بازی مانند D_p هست بطوری که $p \in D_p \subset G$. دراین صورت ، $G = \bigcup\{D_p : p \in G\}$.

۵ . قضیهٔ ۲.۴* را ثابت کنید : اشتراک هر تعداد متناهی از زیر مجموعه‌های باز $\mathbf{R}^2$ باز است .

حل . قضیه را درحالت دو زیر مجموعهٔ باز $\mathbf{R}^2$ ثابت می‌کنیم . قضیه سپس به استقرا نتیجه می‌شود .
فرض کنیم G و H زیر مجموعه‌های بازی از $\mathbf{R}^2$ بوده و $p \in G \cap H$. پس $p \in G$ و $p \in H$. لذا ، قرصهای بازی چون D_1 و D_2 هستند بطوری که

$$p \in D_1 \subset G \quad \text{و} \quad p \in D_2 \subset H .$$

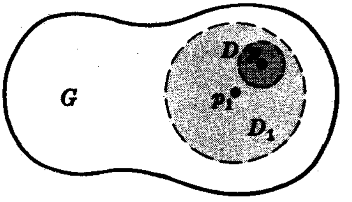
دراین صورت ، $p \in D_1 \cap D_2 \subset G \cap H$. طبق مثال ۱۱.۱ ، اشتراک هر دو قرص باز باز است . درنتیجه ، قرص بازی مانند D هست بطوری که

$$p \in D \subset D_1 \cap D_2 \subset G \cap H.$$

لذا ، p یک نقطهٔ درونی $G \cap H$ بوده و ، درنتیجه ، $G \cap H$ باز می‌باشد .

۶ . فرض کنید $p \in G$ ، و این زیر مجموعهٔ بازی از $\mathbf{R}^2$ باشد . دراین صورت ، قرص بازی مانند D به مرکز p هست بطوری که $p \in D \subset G$.

حل . طبق تعریف نقطهٔ درونی ، قرص بازی مانند $D_1 = \{q \in \mathbf{R}^2 : d(p_1, q) < \delta\}$ هست، به‌مرکز p_1 و شعاع δ ، بطوری‌که $p \in D_1 \subset G$. درنتیجه ، $d(p_1, p) < \delta$. فرض کنیم



$$r = \delta - d(p_1, p) > 0$$

و

$$D = \{q \in \mathbf{R}^2 : d(p, q) < \tfrac{1}{2}r\}.$$

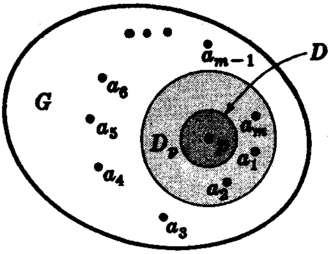
دراین صورت ، همانطورکه نمودار نشان داده ، $p \in D \subset D_1 \subset G$ که درآن D یک‌قرص باز به مرکز p است .

۷ . فرض کنیم p نقطهٔ انباشتگی زیر مجموعهٔ A از صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ باشد . ثابت کنید هر

مجموعهٔ باز شامل p بی‌نهایت نقطه از A را دارد .

حل . فرض کنیم G مجموعهٔ بـازی‌شامل p باشد که فقط تعدادی متناهی نقطه ، مثلاً " $a_1, \ldots, a_m$ ، از A غیر از p را دارد . طبق مسئلهٔ قبل ، قرص بازی مانند D_p به‌مرکز p و ، مثلاً " ، شعاع δ هست بطوری که $p \in D_p \subset G$. $r > 0$ راکوچکتر از δ و کوچکتر از فاصلهٔ p تا هر یک از نقاط $a_1, \ldots, a_m$ اختیار کرده ، فرض می‌کنیم

$$D = \{q \in \mathbf{R}^2 : d(p, q) < \tfrac{1}{2}r\}.$$



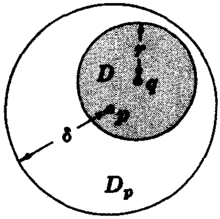
دراین‌صورت ، قرص باز D شامل p حاوی $a_1, \ldots, a_m$ نیست و ، چون $D \subset D_p \subset G$ ، شامل هیچ نقطهٔ دیگری از A غیر از p نمی‌باشد .
مطلب آخـــر معارض‌این امر است که p یک نقطهٔ حدی A است . لذا ، هر مجموعهٔ باز شامل p بی‌نهایت نقطه از A را دارد .

تبصره . حکمی مشابـــه برای خط‌حقیقی $\mathbf{R}$ برقرار است ؛ یعنی ، هرگاه $a \in \mathbf{R}$ یک نقطهٔ حدی $A \subset \mathbf{R}$ باشد ، هر زیر مجموعهٔ باز $\mathbf{R}$ شامل a بی‌نهایت نقطه از A را دارد .

۸ . قرص باز D_p به مرکز $p \in \mathbf{R}^2$ و شعاع δ را درنظر گرفته ، ثابت کنید قرص بازی چون D هست بطوری که (یک) مرکز D مختصات گویا دارد ؛ (دو) شعاع D گویاست ؛ و (سه) $p \in D \subset D_p$.

حل . فرض کنیـــم $p = \langle a, b \rangle$. دراین صـــورت ، اعداد گویا مانند c و d وجود دارند بطوری که

$$a < c < a + \tfrac{1}{6}\delta \text{ و } b < d < b + \tfrac{1}{6}\delta \text{ .}$$



فرض کنیم $q = \langle c, d\rangle$. توجه کنید که $d(p,q) < \frac{1}{3}\delta$. حال عدد گویای r را قسمی اختیار می‌کنیم کـه $\frac{1}{3}\delta < r < \frac{2}{3}\delta$ ؛ و فرض می‌کنیم D قرص باز به مرکز q ، که مختصاتش گویاست ، و شعاع r ، که گویاست ، باشد . دراین صورت ، همانطور که نمودار نشان داده ، $p \in D \subset D_p$.

۹ . ثابت کنید هر زیر مجموعهٔ باز G از صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ اجتماع تعدادی حداکثر شمارشپذیر از قرصهای باز است .

حل . چون G باز است ، به‌ازای هر نقطهٔ $p \in G$ قرص بازی مانند D_p به مرکز p هست بطوری که $p \in D_p \subset G$. اما ، طبق مسئلهٔ قبل ، به‌ازای هر قرص D_p قرص بازی مانند E_p هست بطوری که (یک) مرکز E_p مختصاتش گویاست ؛ (دو) شعاع E_p گویاست ؛ و (سه) $p \in E_p \subset D_p$. درنتیجه ،

$$p \in E_p \subset D_p \subset G.$$

بنابراین ،

$$G = \bigcup\{E_p : p \in G\}.$$

حال قضیه از این نتیجه می‌شود که فقط تعدادی حداکثر شمارشپذیر قرص باز وجود دارد که مختصات مرکز و شعاعشان گویاست .

۱۰ . قضیهٔ (بولتزانو ـ وایراشتراس) ۳.۴ را ثابت کنید : فرض کنید A مجموعه‌ای نامتناهی و کراندار از اعداد حقیقی باشد . دراین صورت ، A دست کم یک نقطهٔ انباشتگی دارد .

حل . چون A کراندار است ، A زیر مجموعهٔ بازهٔ بسته‌ای مانند $I_1 = [a_1, b_1]$ است . I_1 را در $\frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ نصف می‌کنیم . توجه‌کنید که ، چون A نامتناهی است ،

هر دو زیر بازهٔ بستهٔ I_1 ،

یعنی $[a_1, \frac{1}{2}(a_1+b_1)]$ و $[\frac{1}{2}(a_1+b_1), b_1]$ ، (۱)

نمی‌توانند تعدادی متناهی نقطه از A داشته باشند. فرض کنیم $I_2 = [a_2, b_2]$ یکی از بازه‌های (۱) باشد که بی‌نهایت نقطه از A را دارد.

حال I_2 را نصف می‌کنیم. مثل قبل، یکی از دو بازهٔ بستهٔ

$$[a_2, \tfrac{1}{2}(a_2+b_2)] \text{ و } [\tfrac{1}{2}(a_2+b_2), b_2]$$

باید بی‌نهایت نقطه از A را داشته باشد. این بازه را I_3 می‌نامیم.

با ادامهٔ این کار، دنبالهٔ

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$$

از بازه‌های بستهٔ تو در تو به‌دست می‌آید بطوری که هر I_n بی‌نهایت نقطه از A را داشته و

$$\lim |I_n| = 0,$$

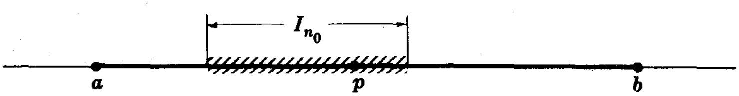
که درآن $|I_n|$ طول بازهٔ I_n می‌باشد.

طبق خاصیت بازه‌های تو در توی اعداد حقیقی (ر.ک. ضمیمهٔ آ)، نقطه‌ای مانند p در هر بازهٔ I_n وجود دارد. نشان می‌دهیم که p یک نقطهٔ حدی A است و قضیه نتیجه خواهد شد.

فرض کنیم $S_p = (a, b)$ بازهٔ بازی شامل p باشد. چون $\lim |I_n| = 0$ ،

$\exists n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $|I_{n_0}| < \min(p-a, b-p)$.

پس، همانطور که نمودار زیر نشان داده، بازهٔ I_{n_0} زیر مجموعهٔ بازهٔ باز $S_p = (a, b)$ است.



چون بازهٔ I_{n_0} بی‌نهایت نقطه‌از A را داراست، بازهٔ باز S_p نیز چنین است. لذا، هر بازهٔ باز شامل p نقاطی از A غیر از p را دارد؛ یعنی، p یک نقطهٔ حدی A می‌باشد.

مجموعه‌های بسته

۱۱. ثابت کنید مجموعهٔ F بسته است اگر و فقط اگر متمم آن F^c باز باشد.

حل. ملاحظه می‌شود که $(F^c)^c = F$ ؛ درنتیجه، F متمم F^c است. لذا، طبق

تعریف ، F بسته است اگفگر F^c باز باشد .

۱۲ . ثابت کنید اجتماع تعدادی متناهی مجموعهٔ بسته بسته است .

حل . فرض‌کنیم $F_1, \ldots, F_m$ بسته بوده‌و $F = F_1 \cup \cdots \cup F_m$. بنابر قانون‌دمورگان ،

$$F^c = (F_1 \cup \cdots \cup F_m)^c = F_1^c \cap F_2^c \cap \cdots \cap F_m^c.$$

پس F^c اشتراک تعدادی متناهی مجموعهٔ باز مانند F_i^c است ؛ و لذا ، F^c نیزباز است . بنابراین ، متمم آن $F = F^{cc}$ بسته می‌باشد .

۱۳ . ثابت کنید اشتراک هر تعداد مجموعهٔ بسته بسته است .

حل . فرض کنیم $\{F_i\}$ رده‌ای از مجموعه‌های بسته بوده و $F = \cap_i F_i$. طبق قانون دمورگان ،

$$F^c = (\cap_i F_i)^c = \cup_i F_i^c.$$

پس F^c اجتماع تعدادی مجموعهٔ باز است ، و لذا ، خود باز است . درنتیجه ، $F = F^{cc}$ بسته می‌باشد .

۱۴ . قضیهٔ ۴ . ۴* را ثابت کنید : یک‌زیر مجموعه از $\mathbf{R}^2$ بسته است اگر و فقط اگر شامل هر نقطهٔ انباشتگی خود باشد .

حل . فرض کنیم p نقطهٔ حدی مجموعهٔ بستهٔ F باشد . پس هر قرص باز شامل p نقاطی از F غیر از p را دارد . از اینرو ، قرص بازی چون D_p شامل p نیست‌که کاملا" مشمول متمم F باشد . به‌عبارت دیگر ، p نقطهٔ درونی F^c نیست . اما F^c باز است ، چرا که F بسته است ؛ درنتیجه ، p متعلق به F^c نیست ؛ یعنی ، $p \in F$.

از آن سو ، فرض کنیم مجموعهٔ A شامل هر نقطهٔ حدی خود باشد . حکم می‌کنیم که A بسته است یا ، معادلا" ، متمم آن A^c باز است . فرض کنیم $p \in A^c$. چون A شامل هر نقطهٔ حدی خود است ، p نقطهٔ حدی A نیست . از اینرو ، دست کم یک قرص‌باز مانند D_p شامل p هست بطوری که D_p هیچ نقطه از A را ندارد . لذا ، $D_p \subset A^c$ ؛ و درنتیجه ، p یک‌نقطهٔ درونی A^c است . چون هر نقطهٔ $p \in A^c$

یک نقطهٔ درونی است، A^c باز، و درنتیجه، A بسته می‌باشد.

۱۵. ثابت کنید مجموعهٔ مشتق A'، یعنی مجموعهٔ نقاط انباشتگی، زیرمجموعهٔ دلخواه A از $\mathbf{R}^2$ بسته است.

حل. فرض‌کنیم p نقطهٔ حدی A' باشد. طبق قضیهٔ ۴.۴*، قضیه وقتی ثابت می‌شود که نشان دهیم $p \in A'$؛ یعنی، p نقطهٔ حدی A نیز هست.
فرض‌کنیم G_p مجموعه‌ای باز و شامل p باشد. چون p نقطهٔ حدی A' است، G_p دست‌کم یک نقطه مانند $q \in A'$ غیر از p را دارد. اما G_p یک مجموعه باز شامل $q \in A'$ است؛ درنتیجه، G_p (بی‌نهایت) نقطه از A را دارد. لذا،

$\exists a \in A$ بطوری که $a \neq p$، $a \neq q$، و $a \in G_p$.

یعنی، هرمجموعهٔ بازشامل p نقاطی‌از A غیراز p را دارد؛ و درنتیجه، $p \in A'$.

۱۶. فرض کنید A مجموعه‌ای بسته و کراندار از اعدادحقیقی بوده و $\sup(A) = p$. ثابت کنید $p \in A$.

حل. فرض‌کنیم $p \notin A$. G را مجموعهٔ بازی شامل p می‌انگاریم. دراین صورت، G حاوی بازهٔ بازی‌چون (b, c) شامل p است؛ یعنی، $b < p < c$. چون $\sup(A) = p$ و $p \notin A$،

$\exists a \in A$ بطوری که $b < a < p < c$؛

زیرا، درغیراین‌صورت، b یک کران بالایی A خواهد بود، لذا، $a \in (b, c) \subset G$. پس، هر مجموعهٔ باز شامل p نقطه‌ای از A غیر از p دارد. درنتیجه، p نقطهٔ حدی A می‌باشد. اما A بسته است. پس، بنا بر قضیهٔ ۴.۴*، $p \in A$.

۱۷. قضیهٔ (هاینه ــ بورل) ۵.۴ را ثابت کنید: فرض‌کنید $I_1 = [c_1, d_1]$ با ردهٔ $\mathcal{G} = \{(a_i, b_i) : i \in I\}$ از بازه‌های باز پوشانده شده باشد. دراین صورت، $\mathcal{G}$ شامل زیر رده‌ای متناهی است که آن نیز I_1 را می‌پوشاند.

حل. فرض‌کنیم هیچ زیر ردهٔ متناهی از $\mathcal{G}$، I_1 را نپوشاند. $I_1 = [c_1, d_1]$ رادر $\frac{1}{2}(c_1 + d_1)$ نصف می‌کنیم و دو بازهٔ بستهٔ

$$[c_1,\ \tfrac{1}{2}(c_1 + d_1)] \text{ و } [\tfrac{1}{2}(c_1 + d_1),\ d_1] \qquad (۱)$$

را درنظر می‌گیریم . ازاین دو بازه دست کم یکی با زیر رده‌ای متناهی از G پوشیده نمی‌شود ، والا تمام I_1 با زیر رده‌ای متناهی از G پوشیده خواهد شد . فرض کنیم $I_2 = [c_2, d_2]$ یکی از دو بازهٔ (۱) باشد که با زیر رده‌ای متناهی از G پوشیده نمی‌شود . حال I_2 را دو نیم می‌کنیم . مثل قبل ، یکی از دو بازهٔ بستهٔ

$$[c_2,\ \tfrac{1}{2}(c_2 + d_2)] \text{ و } [\tfrac{1}{2}(c_2 + d_2),\ d_2]$$

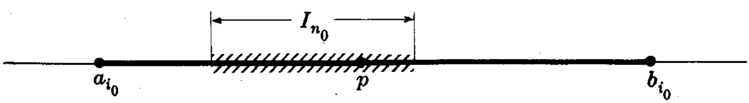
با زیر رده‌ای متناهی از G پوشیده نمی‌شود . این بازه را I_3 می‌نامیم .

با ادامهٔ این کار ، دنباله‌ای از بازه‌های بسته و تو در توی $\cdots \supset I_3 \supset I_2 \supset I_1$ به‌دست می‌آید بطوری‌که هر I_n با زیر رده‌ای متناهی از G پوشیده نمی‌شود و $\lim |I_n| = 0$ ، که $|I_n|$ طول بازهٔ I_n است .

طبق خاصیت بازه‌های تو در توی اعداد حقیقی (ر.ک. ضمیمه) ، نقطه‌ای مانند p در هر بازهٔ I_n وجود دارد . بخصوص ، $p \in I_1$. چون G ، I_1 را می‌پوشاند ، بازه‌ای باز چون (a_{i_0}, b_{i_0}) در G هست که شامل p است . بنابراین ، $a_{i_0} < p < b_{i_0}$. چون $\lim |I_n| = 0$ ،

$$\exists n_0 \in N \text{ بطوری که } |I_{n_0}| < \min(p - a_{i_0},\ b_{i_0} - p) .$$

پس ، همانطور که نمودار زیر نشان داده ، بازهٔ I_{n_0} زیر مجموعهٔ بازهٔ (a_{i_0}, b_{i_0}) در G می‌باشد .



اما این با انتخاب ما از I_{n_0} مغایر است . لذا ، فرض ما که هیچ زیر ردهٔ متناهی از G ، I_1 را نمی‌پوشاند باطل است و قضیه درست خواهد بود .

دنباله‌ها

۱۸ . شش جملهٔ اول هر یک از دنباله‌های زیر را بنویسید :

(یک) $s(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{اگر } n \text{ فرد است ،} \\ n^2 & \text{اگر } n \text{ زوج ،} \end{cases}$ ؛

(دو) $t(n) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n = 1 \text{ ،} \\ 2 & \text{اگر } n = 2 \text{ ،} \\ t(n-1) + t(n-2) & \text{اگر } n > 2 \text{ ،} \end{cases}$.

حل

(یک) برای تعریف این تابع دو فرمول به‌کار رفته است. 1 ، 3 ، و 5 را در $s(n) = n-1$ می‌گذاریم تا به‌دست آید $s_1 = 0$ ، $s_3 = 2$ ، و $s_5 = 4$. سپس 2 ، 4 ، و 6 را در $s(n) = n^2$ می‌گذاریم تا حاصل شود $s_2 = 4$ ، $s_4 = 16$ ، و $s_6 = 36$. لذا، داریم $\langle 0, 4, 2, 16, 4, 36, \ldots \rangle$.

(دو) تابع اینجا به‌طور بازگشتی تعریف شده است. هر جمله بعد از دومی با جمع دو جملهٔ قبل از آن به‌دست می‌آید. مثلاً ،

$$t_1 = 1 \qquad t_4 = t_3 + t_2 = 3+2 = 5$$
$$t_2 = 2 \qquad t_5 = t_4 + t_3 = 5+3 = 8$$
$$t_3 = t_2 + t_1 = 2+1 = 3 \qquad t_6 = t_5 + t_4 = 8+5 = 13$$

بنابراین، خواهیم داشت $\langle 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots \rangle$.

۱۹ . دنبالهٔ $\langle a_n = (-1)^{n-1}(2n-1) \rangle$ را درنظر بگیرید :

$$\langle 1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, -15, \ldots \rangle$$

و تعیین کنید هریک از دنباله‌های زیر زیردنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ هست یا نه :

(یک) $\langle b_n \rangle = \langle 1, 5, -3, -7, 9, 13, -11, -15, \ldots \rangle$ ؛

(دو) $\langle c_n \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots \rangle$ ؛

(سه) $\langle d_n \rangle = \langle -3, -7, -11, -15, -19, -23, \ldots \rangle$.

حل

(یک) توجه کنید که 5 قبل از 3- در $\langle b_n \rangle$ آمده، ولی 3- قبل از 5 در $\langle a_n \rangle$ ظاهر شده است. لذا، $\langle b_n \rangle$ زیر دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ نمی‌باشد .

(دو) جملات 3 ، 7 ، و 11 در $\langle a_n \rangle$ نیامده‌اند .لذا، $\langle c_n \rangle$ زیردنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ نیست.

(سه) دنبالهٔ $\langle d_n \rangle$ زیردنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ است، زیرا $\langle i_n = 2n \rangle = \langle 2, 4, 6, \ldots \rangle$ دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت است بطوری که $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$. درنتیجه،

$$\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots \rangle = \langle a_2, a_4, a_6, \ldots \rangle = \langle -3, -7, -11, \ldots \rangle$$

زیر دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ می‌باشد .

۲۰ . برد هریک از دنباله‌های زیر را مشخص کنید :

(یک) $\langle 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \ldots \rangle$ ؛

(دو) $\langle 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\rangle$ ؛

(سه) $\langle 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\rangle$.

حل. برد یک دنباله مجموعهٔ نقاط نقش آن است. بنابراین، برد این دنباله‌ها عبارتند از:

(یک) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ ؛ (دو) $\{1, 0, -1\}$ ؛

(سه) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.

۲۱. ثابت کنید اگر برد $\langle a_n\rangle$ متناهی باشد، دنباله زیر دنباله‌ای همگرا خواهد داشت.

حل. اگر برد $\{a_n\}$ دنبالهٔ $\langle a_n\rangle$ متناهی باشد، یکی از نقاط نقش، مثلاً b ، بی‌نهایت بار درآن می‌آید. لذا، $\langle b, b, b, b, \ldots\rangle$ زیر دنباله‌ای است از $\langle a_n\rangle$ و همگرا می‌باشد.

۲۲. ثابت کنید هرگاه $\lim a_n = b$ و $\lim a_n = c$ ، آنگاه $b = c$.

حل. فرض کنیم b و c متمایز باشند، و قرار می‌دهیم $\delta = |b-c| > 0$. دراین صورت، بازه‌های باز $B = (b-\frac{1}{2}\delta, b+\frac{1}{2}\delta)$ و $C = (c-\frac{1}{2}\delta, c+\frac{1}{2}\delta)$ ، که بترتیب شامل b و c اند، از هم جدا هستند. چون $\langle a_n\rangle$ همگرا به b است، B باید شامل تمام جملات دنباله جز تعدادی متناهی باشد. پس C فقط می‌تواند تعدادی متناهی جمله از دنباله داشته باشد. اما این با همگرا بودن $\langle a_n\rangle$ به c متضاد است. لذا، نتیجه می‌شود که b و c متمایز نیستند.

۲۳. ثابت کنید اگر برد $\{a_n\}$ دنبالهٔ $\langle a_n\rangle$ شامل نقطهٔ انباشتگی b باشد، $\langle a_n\rangle$ زیردنباله‌ای چون $\langle a_{i_n}\rangle$ دارد که همگرا به b است.

حل. چون b نقطهٔ حدی $\{a_n\}$ است، هریک از بازه‌های باز

$$S_1 = (b-1, b+1), \quad S_2 = (b-\tfrac{1}{2}, b+\tfrac{1}{2}), \quad S_3 = (b-\tfrac{1}{3}, b+\tfrac{1}{3}), \quad \ldots$$

بی‌نهایت عنصر از $\{a_n\}$ دارد و، درنتیجه، بی‌نهایت جمله از $\langle a_n\rangle$ خواهد داشت. دنبالهٔ $\langle a_{i_n}\rangle$ را به‌صورت زیر می‌سازیم:

a_{i_1} را نقطه‌ای در S_1 می‌گیریم ؛

a_{i_2} را نقطه‌ای در S_2 می‌گیریم که $i_2 > i_1$ ؛ یعنی ، طوری که a_{i_2} در دنباله‌ٔ $\langle a_n \rangle$ بعد از a_{i_1} آمده باشد ؛

a_{i_3} را نقطه‌ای در S_3 می‌گیریم که $i_3 > i_2$.

این عمل را به‌همین نحو ادامه می‌دهیم .

توجه کنید که همیشه می‌توان در $\langle a_{i_n} \rangle$ جملهٔ بعدی را اختیار کرد ، چرا که در هر بازهٔ S_n بی‌نهایت جمله از دنبالهٔ اصلی $\langle a_n \rangle$ وجود دارد .

حکم می‌کنیم که $\langle a_{i_n} \rangle$ در شرطهای قضیه صدق می‌کند . یادآور می‌شویم که جملات $\langle a_{i_n} \rangle$ قسمی اختیار شده‌اند که $\cdots < i_1 < i_2 < i_3$ ؛ درنتیجه ، $\langle a_{i_n} \rangle$ زیر دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ است . باید نشان دهیم که $\lim a_{i_n} = b$. فرض کنیم G مجموعهٔ بازی شامل b باشد . پس G شامل بازهٔ بازی چون (d_1, d_2) حاوی b است ؛ در نتیجه ، $d_1 < b < d_2$. فرض کنیم $\delta = \min(b - d_1,\ d_2 - b) > 0$. دراین صورت ،

$\exists n_0 \in N$ بطوری که $1/n_0 < \delta$.

بنابراین، $S_{n_0} \subset (d_1, d_2) \subset G$ ؛ و درنتیجه ،

$n > n_0$ ایجاب می‌کند که $a_{i_n} \in S_n \subset S_{n_0} \subset (d_1, d_2) \subset G$.

لذا ، G شامل تقریبا" همهٔ جملات دنبالهٔ $\langle a_{i_n} \rangle$ است ؛ یعنی ، $\lim a_{i_n} = b$.

۲۴ . قضیهٔ ۶.۴ را ثابت‌کنید : هردنبالهٔ کراندار $\langle a_n \rangle$ از اعداد حقیقی شامل زیردنباله‌ای همگراست .

حل . برد $\{a_n\}$ دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ را درنظر می‌گیریم . اگر این برد متناهی باشد ، طبق مسئلهٔ ۲۱ ، دنباله شامل زیر دنباله‌ای همگراست . از آن سو ، اگر برد نامتناهی باشد ، بنابر قضیهٔ بولتزانو ــ وایراشتراس ، مجموعهٔ نامتناهی و کراندار $\{a_n\}$ شامل یک نقطهٔ حدی است . اما ، دراین صورت ، طبق مسئلهٔ قبل ، دراین حالت نیز دنباله زیر دنباله‌ای همگرا دارد .

۲۵ . ثابت کنید هر دنبالهٔ کشی $\langle a_n \rangle$ از اعداد حقیقی کراندار است .

حل . فرض کنیم $\epsilon = 1$. دراین صورت ، طبق تعریف دنبالهٔ کشی ،

$\exists n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری‌که $n, m \geq n_0$ ایجاب می‌کنند که $|a_n - a_m| < 1$.

بویژه، $m \geqq n_0$ ایجاب می‌کند که $|a_{n_0} - a_m| < 1$ ، یا ، $a_{n_0} - 1 < a_m < a_{n_0} + 1$.
فرض کنیم .

$$\alpha = \max(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, a_{n_0} + 1) ,$$

$$\beta = \min(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, a_{n_0} - 1) .$$

دراین صورت ، α یک کران بالایی برد $\{a_n\}$ از دنباله‌ٔ $\langle a_n \rangle$ و β یک کران پایینی آن است . بنابراین ، $\langle a_n \rangle$ یک دنباله‌ٔ کراندار می‌باشد .

۲۶ . فرض کنید $\langle a_n \rangle$ یک دنباله‌ٔ کشی باشد . ثابت کنید هرگاه زیر دنباله‌ٔ $\langle a_{i_n} \rangle$ از $\langle a_n \rangle$ همگرا به b باشد ، خود دنباله نیز همگرا به b است .

حل . فرض کنیم $\epsilon > 0$. باید عدد صحیح و مثبت n_0 را طوری بیابیم که $n > n_0$ نامساوی $|a_n - b| < \epsilon$ را ایجاب کند .
گوییم چون $\langle a_n \rangle$ یک دنباله‌ٔ کشی است ،

$\exists n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $n, m > n_0$ ایجاب می‌کنند که $|a_n - a_m| < \frac{1}{2}\epsilon$.

و نیز ، چون زیر دنباله‌ٔ $\langle a_{i_n} \rangle$ همگرا به b است ،

$\exists i_m \in \mathbf{N}$ بطوری که $|a_{i_m} - b| < \frac{1}{2}\epsilon$.

توجه کنید که i_m را می‌توان طوری گرفت که $i_m > n_0$. لذا ،

$n > n_0$ ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned} |a_n - b| &= |a_n - a_{i_m} + a_{i_m} - b| \\ &\leqq |a_n - a_{i_m}| + |a_{i_m} - b| \\ &< \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon . \end{aligned}$$

بنابراین ، $\langle a_n \rangle$ همگرا به b می‌باشد .
توجه کنید که باید $i_m > n_0$ تا بگوییم : $n > n_0$ ایجاب می‌کند که $|a_n - a_{i_m}| < \frac{1}{2}\epsilon$.

۲۷ . قضیه‌ٔ (کشی) ۷.۴ را ثابت کنید : هر دنباله‌ٔ کشی $\langle a_n \rangle$ از اعداد حقیقی همگرا به عددی حقیقی است .

حل . بنابرمسئله‌ٔ ۲۵ ، دنباله‌ٔ کشی $\langle a_n \rangle$ کراندار است . پس ، طبق قضیه‌ٔ ۶.۴ ، دنباله‌ٔ کراندار $\langle a_n \rangle$ شامل زیردنباله‌ای همگرا مانند $\langle a_{i_n} \rangle$ است . اما ، بنابر مسئله‌ٔ قبل ، دنباله‌ٔ کشی $\langle a_n \rangle$ همگرا به حد زیر دنباله‌ٔ $\langle a_{i_n} \rangle$ است . به بیان دیگر ، دنباله‌ٔ کشی $\langle a_n \rangle$ همگرا به عددی حقیقی می‌باشد .

۲۸ . تعیین کنید که هریک از زیر مجموعه‌های زیر از $\mathbf{R}$ تام است یا نه :

(یک) مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت $\mathbf{N}$ ؛

(دو) مجموعهٔ اعداد گنگ $\mathbf{Q}^c$.

حل

(یک) فرض کنیم $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی از اعداد صحیح مثبت باشد . هرگاه $\epsilon = \frac{1}{2}$ ، آنگاه

$|a_n - a_m| < \epsilon = \frac{1}{2}$ ایجاب می‌کندکه $a_n = a_m$.

لذا ، دنبالهٔ کشی $\langle a_n \rangle$ به شکل $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, b, b, b, \ldots \rangle$ است ، که به عدد صحیح و مثبت b همگراست . بنابراین ، $\mathbf{N}$ تام می‌باشد .

(دو) توجه کنید که هریک از بازه‌های باز

$$(-1, 1),\ (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}),\ (-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}),\ \ldots$$

شامل نقاطی گنگ است . از اینرو ، دنباله‌ای چون $\langle a_n \rangle$ از اعداد گنگ هست بطوری که a_n متعلق به بازهٔ باز $(-1/n, 1/n)$ است . دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی از نقاط $\mathbf{Q}^c$ بوده و به عدد گویای 0 همگراست . لذا ، $\mathbf{Q}^c$ تام نخواهد بود .

پیوستگی

۲۹ . ثابت‌کنیدهرگاه‌تابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ثابت‌باشد ، مثلا" به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ ، $f(x) = a$ ، آنگاه f پیوسته می‌باشد .

حل

روش ۱ . f پیوسته است اگفگر معکوس $f^{-1}[G]$ هر مجموعهٔ باز G نیز باز باشد . چون به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ ، $f(x) = a$ ، به‌ازای هر مجموعهٔ باز G

$$f^{-1}[G] = \begin{cases} \emptyset \text{ ، } a \notin G & \text{اگر} \\ \mathbf{R} \text{ ، } a \in G & \text{اگر} \end{cases}$$

درهر حالت ، $f^{-1}[G]$ باز است زیرا $\mathbf{R}$ و $\emptyset$ هر دو باز می‌باشند .

روش ۲ . با استفاده از تعریف $\delta - \epsilon$ ی پیوستگی ، نشان می‌دهیم که f در هر x_0 پیوسته است . فرض کنیم $\epsilon > 0$. پس ، به‌ازای هر $\delta > 0$ ، مثلا" $\delta = 1$ ، $|x - x_0| < 1$ ایجاب می‌کند که $|f(x) - f(x_0)| = |a - a| = 0 < \epsilon$.

لذا ، f پیوسته می‌باشد .

۳۰ . ثابت کنید تابع همانی $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ، یعنی تابعی که با $f(x) = x$ تعریف می‌شود ، پیوسته است .

حل

روش ۱ . فرض کنیم G مجموعه‌ای باز باشد . دراین صورت ، $f^{-1}[G] = G$ نیز یک مجموعهٔ باز است . لذا ، f پیوسته می‌باشد .

روش ۲ . با استفاده از تعریف $\epsilon - \delta$ ی پیوستگی ، نشان می‌دهیم که f در هر x_0 پیوسته است . فرض کنیم $\epsilon > 0$. با اختیار $\delta = \epsilon$ ، $|x - x_0| < \delta$ ایجاب می‌کند که $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \epsilon$.
لذا ، f پیوسته می‌باشد .

۳۱ . فرض کنیدتوابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ و $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ پیوسته باشند . دراین‌صورت ، تابع ترکیب $g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ نیز پیوسته است .

حل . نشان می‌دهیم که معکوس $(g \circ f)^{-1}[G]$ هر مجموعهٔ باز G نیز باز است . گوییم چون g پیوسته است ، معکوس $g^{-1}[G]$ باز است . اما ، چون f پیوسته است ، معکوس $f^{-1}[g^{-1}[G]]$ مجموعهٔ $g^{-1}[G]$ نیز باز است . به‌یاد می‌آوریم که

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} ;$$

در نتیجه ،

$$(g \circ f)^{-1}[G] = (f^{-1} \circ g^{-1})[G] = f^{-1}[g^{-1}[G]]$$

یک مجموعهٔ باز است . لذا ، تابع ترکیب $g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ پیوسته می‌باشد .

۳۲ . فرض کنید $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ پیوسته بوده و به‌ازای هر عدد گویای $q \in Q$ ، $f(q) = 0$. ثابت کنید به‌ازای هر عدد حقیقی $x \in \mathbf{R}$ ، $f(x) = 0$.

حل . فرض کنیم $f(p)$ به‌ازای عدد حقیقی $p \in \mathbf{R}$ صفر نباشد ؛ یعنی ، $\exists p \in \mathbf{R}$ بطوری که $f(p) = \gamma, \ |\gamma| > 0$.

$\epsilon = \frac{1}{2}|\gamma|$ را اختیار می‌کنیم . چون f پیوسته است ،

$\exists\delta > 0$ بطوری‌که $|x-p| < \delta$ ایجاب می‌کند که $|f(x) - f(p)| < \epsilon = \frac{1}{2}|\gamma|$.

اما در هربازهٔ باز نقاط گویا وجود دارند . بخصوص ،

$\exists q \in \mathbf{Q}$ بطوری که $q \in \{x : |x-p| < \delta\}$ ،

ایجابگر آنکه

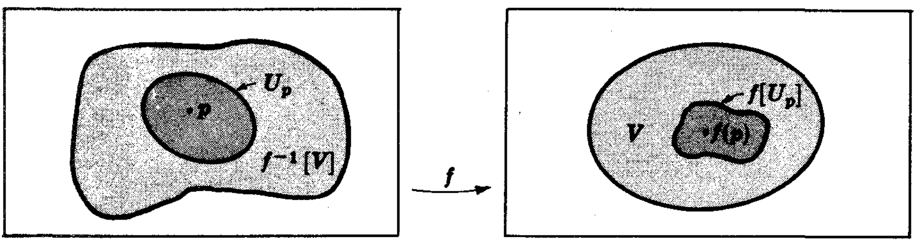
$$|f(q) - f(p)| = |f(p)| = |\gamma| < \epsilon = \tfrac{1}{2}|\gamma|,$$

که ناممکن است . لذا ، به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ ، $f(x) = 0$.

۳۳ . قضیهٔ ۸ . ۴ را ثابت کنید : تابع $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ پیوسته است اگر و فقط اگر نقش معکوس هر مجموعهٔ باز باز باشد .

حل . فرض کنیم $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ پیوسته بوده و V زیر مجموعهٔ بازی از $\mathbf{R}^2$ باشد . نشان می‌دهیم $f^{-1}[V]$ نیز باز است . فرض کنیم $p \in f^{-1}[V]$. پس $f(p) \in V$. طبق تعریف پیوستگی ، مجموعهٔ بازی چون U_p شامل p هست بطوری که $f[U_p] \subset V$. لذا (همانطور که نمودار زیر نشان داده) ،

$$U_p \subset f^{-1}[f[U_p]] \subset f^{-1}[V].$$



یعنی ، نشان داده‌ایم که به‌ازای هر نقطهٔ $p \in f^{-1}[V]$ ، مجموعهٔ بازی چون U_p هست بطوری که

$$p \in U_p \subset f^{-1}[V].$$

بنابراین ،

$$f^{-1}[V] = \bigcup\{U_p : p \in f^{-1}[V]\};$$

و درنتیجه ، $f^{-1}[V]$ اجتماع مجموعه‌هایی باز است و ، لذا ، خود باز می‌باشد .

از آن سو ، فرض کنیم معکوس هر مجموعهٔ باز باز باشد . نشان می‌دهیم f در هر نقطهٔ $p \in \mathbf{R}$ پیوسته است . فرض کنیم V مجموعهٔ بازی شامل $f(p)$ باشد ؛ یعنی ،

$f(p) \in V$. پس $f^{-1}[V]$ مجموعهٔ بازی است شامل p با این خاصیت که $f[f^{-1}[V]] \subset V$. لذا، f در p پیوسته می‌باشد .

۳۴ . دو تابع $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ و $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ راطوری‌مثال بزنید که در هر نقطه ناپیوسته باشند (پیوسته نباشند) ولی مجموع $f+g$ در هر نقطه از R پیوسته باشد .

حل . f و g را که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند درنظر می‌گیریم :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 1 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

f و g در هرنقطه‌از $\mathbf{R}$ ناپیوسته‌اند ،ولی‌مجموع $f+g$ تابع ثابت $(f+g)(x) = 1$ است که پیوسته می‌باشد .

۳۵ . فرض کنید تابع $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ در هر نقطهٔ $p \in \mathbf{R}$ پیوسته باشد . ثابت کنید

(یک) اگر $f(p)$ مثبت باشد ، یعنی $f(p) > 0$ ، بازهٔ بازی چون S شامل p هست بطوری که f در هر نقطهٔ S مثبت است ؛

(دو) اگر $f(p)$ منفی باشد ، یعنی $f(p) < 0$ ، بازهٔ بازی چون S شامل p هست بطوری که f در هر نقطهٔ S منفی می‌باشد .

حل . (یک) را ثابت می‌کنیم . برهان (دو) مشابه است و حذف می‌شود . فرض کنیم $f(p) = \epsilon > 0$. چون f در p پیوسته است ،

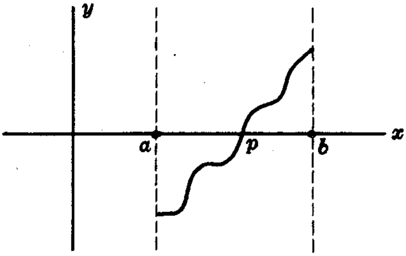
$\exists \delta > 0$ بطوری که $|x-p| < \delta$ ایجاب می‌کند که $|f(x) - f(p)| < \epsilon$

یا ، معادلاً ،

$x \in (p-\delta, p+\delta)$ ایجاب می‌کند که $f(x) \in (f(p)-\epsilon, f(p)+\epsilon) = (0, 2\epsilon)$.

لذا ، به‌ازای هر x در بازهٔ باز $(p-\delta, p+\delta)$ ، $f(x)$ مثبت می‌باشد .

۳۶ . فرض کنید $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ در هر نقطه از بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته بوده ،و $f(a) < 0 < f(b)$. ثابت‌کنیدنقطه‌ای‌مانند $p \in [a, b]$ هست‌بطوری که $f(p) = 0$. (به عبارت دیگر ،همانطورکه‌نمودارزیر نشان داده ، نمودار یک تابع پیوسته تعریف شده بر یک بازهٔ بسته که زیر و بالای محور x قرار داشته باشد باید لااقل در یک نقطه از محور x بگذرد .)



حل. فرض کنیم A مجموعهٔ نقاطی در $[a,b]$ باشد که f در آنها منفی است؛ یعنی،

$$A = \{x : x \in [a,b],\ f(x) < 0\}.$$

توجه کنید که A تهی نیست زیرا، مثلاً، $a \in A$. فرض کنیم $p = \sup(A)$ کوچکترین کران بالایی A باشد. چون $a \in A$، $a \leq p$؛ و چون b کران بالایی A است، $p \leq b$. پس p متعلق به بازهٔ $[a,b]$ است.

حکم می‌کنیم که $f(p) = 0$. گوییم اگر $f(p) < 0$، بنابر مسئلهٔ قبل، بازهٔ بازی چون $(p-\delta,\ p+\delta)$ هست که در آن f منفی است؛ یعنی،

$$(p-\delta,\ p+\delta) \subset A.$$

درنتیجه، p نمی‌تواند یک کران بالایی A باشد. از آن‌سو، اگر $f(p) > 0$، بازه‌ای چون $(p-\delta,\ p+\delta)$ هست که در آن f مثبت است؛ درنتیجه،

$$(p-\delta,\ p+\delta) \cap A = \emptyset,$$

ایجابگر آنکه p نمی‌تواند کوچکترین کران بالایی A باشد. لذا، $f(p)$ فقط می‌تواند صفر باشد؛ یعنی، $f(p) = 0$.

تبصره. قضیه درحالت $f(b) < 0 < f(a)$ نیز درست است و به همین نحو ثابت می‌شود.

۳۷. قضیهٔ (وایراشتراس) ۹.۴ را ثابت کنید: فرض کنید $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد. ثابت کنید f هر مقدار بین $f(a)$ و $f(b)$ را می‌گیرد.

حل. فرض کنیم $f(a) < f(b)$، و y_0 عددی حقیقی باشد بطوری‌که $f(a) < y_0 < f(b)$. می‌خواهیم ثابت کنیم نقطه‌ای چون p هست بطوری که $f(p) = y_0$. تابع $g(x) = f(x) - y_0$ را، که پیوسته نیز هست، درنظر می‌گیریم. توجه کنیدکه

$\cdot\ g(a) < 0 < g(b)$

طبق مسئلهٔ قبل، نقطه‌ای مانند p هست بطوری که $g(p) = f(p) - y_0 = 0$. بنابراین، $\cdot\ f(p) = y_0$

حالت $f(b) < f(a)$ به‌همین نحو ثابت می‌شود.

مسائل تکمیلی

مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، نقاط انباشتگی

۳۸ . ثابت کنید هرگاه A زیر مجموعهٔ متناهی $\mathbf{R}$ باشد، مجموعهٔ مشتق آن A' تهی است؛ یعنی، $A' = \emptyset$.

۳۹ . ثابت کنید هر زیر مجموعهٔ متناهی $\mathbf{R}$ بسته است.

۴۰ . ثابت کنید هرگاه $A \subset B$ ، آنگاه $A' \subset B'$.

۴۱ . ثابت کنید زیر مجموعهٔ B از $\mathbf{R}^2$ بسته است اگر و فقط اگر $d(p, B) = 0$ ایجاب کند که $p \in B$ ، که $d(p, B) = \inf \{d(p, q) : q \in B\}$.

۴۲ . ثابت کنید به‌ازای هر مجموعهٔ A ، $A \cup A'$ بسته است.

۴۳ . ثابت کنید $A \cup A'$ کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل A است؛ یعنی، هرگاه F بسته و $A \subset F \subset A \cup A'$ ، آنگاه $F = A \cup A'$.

۴۴ . ثابت کنید مجموعهٔ نقاط درونی مجموعهٔ A ، که به‌صورت $\operatorname{int}(A)$ نوشته می‌شود، باز است.

۴۵ . ثابت کنید مجموعهٔ نقاط درونی A بزرگترین مجموعهٔ باز مشمول A است؛ یعنی، هرگاه G باز و $\operatorname{int}(A) \subset G \subset A$ ، آنگاه $\operatorname{int}(A) = G$.

۴۶ . ثابت کنید تنها زیر مجموعه‌های $\mathbf{R}$ که هم باز و هم بسته‌اند $\emptyset$ و $\mathbf{R}$ است.

دنباله‌ها

۴۷ . ثابت کنید هرگاه دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ همگرا به $b \in \mathbf{R}$ باشد، دنبالهٔ $\langle |a_n - b| \rangle$ همگرا به 0 است.

۴۸ . ثابت کنید هرگاه دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ همگرا به 0 بوده، و دنبالهٔ $\langle b_n \rangle$ کراندار باشد، دنبالهٔ $\langle a_n b_n \rangle$ نیز همگرا به 0 است.

۴۹ . ثابت کنید هرگاه $a_n \to a$ و $b_n \to b$ ، دنبالهٔ $\langle a_n + b_n \rangle$ همگرا به $a + b$ است.

۵۰ . ثابت کنید هرگاه $a_n \to a$ و $b_n \to b$ ، دنبالهٔ $\langle a_n b_n \rangle$ همگرا به ab است.

۵۱ . ثابت کنید هرگاه $a_n \to a$ و $b_n \to b$ که $b_n \neq 0$ و $b \neq 0$ ، دنبالهٔ $\langle a_n / b_n \rangle$ همگرا به

a/b می‌باشد .

۵۲ . ثابت کنید هرگاه دنباله‌ٔ $\langle a_n\rangle$ همگرا به b باشد ، هر زیر دنباله‌ٔ $\langle a_{i_n}\rangle$ از $\langle a_n\rangle$ نیز همگرا به b است .

۵۳ . ثابت کنید هرگاه دنباله‌ٔ $\langle a_n\rangle$ همگرا به b باشد ، یا برد $\{a_n\}$ دنباله‌ٔ $\langle a_n\rangle$ متناهی است ، یا b یک نقطه‌ٔ اجتماع $\{a_n\}$ است .

۵۴ . ثابت کنید هرگاه دنباله‌ٔ $\langle a_n\rangle$ از عناصر متمایز کراندار بوده ، و برد $\{a_n\}$ دنباله فقط یک نقطه‌ٔ حدی مانند b داشته باشد ، دنباله همگرا به b خواهد بود .

(**تبصره .** دنباله‌ٔ $\langle 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \ldots\rangle$ نشان می‌دهد که شرط کراندار بودن را نمی‌توان از این قضیه حذف کرد .)

پیوستگی

۵۵ . ثابت کنید تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ در $a\in\mathbf{R}$ پیوسته است اگر و فقط اگر به‌ازای هر دنباله‌ٔ $\langle a_n\rangle$ همگرا به a ، دنباله‌ٔ $\langle f(a_n)\rangle$ همگرا به $f(a)$ است .

۵۶ . فرض کنید تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ در $p\in\mathbf{R}$ پیوسته باشد . ثابت کنید بازه‌ٔ بازی چون S شامل p هست بطوری که f بر آن کراندار است .

۵۷ . تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ را طوری مثال بزنید که در هر نقطه از بازه‌ٔ باز $S = (0,1)$ پیوسته بوده ولی بر S کراندار نباشد .

۵۸ . فرض کنید $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ در هر نقطه از بازه‌ٔ بسته‌ٔ $A = [a,b]$ پیوسته باشد . ثابت کنید f بر A کراندار است .

(تبصره . بنابر مسئله‌ٔ قبل ، این مسئله درصورت بسته نبودن A درست نیست .)

۵۹ . فرض کنید $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ و $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ پیوسته باشند ، و ثابت کنید مجموع $(f+g):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ نیز پیوسته است ، که در آن $f+g$ با $(f+g)(x) \equiv f(x)+g(x)$ تعریف می‌شود .

۶۰ . فرض کنید $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ پیوسته بوده ، و k عددی حقیقی باشد . ثابت کنید تابع $(kf):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ نیز پیوسته است ، که درآن kf با $(kf)(x) \equiv k(f(x))$ تعریف می‌شود .

۶۱ . فرض کنید $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ و $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ پیوسته باشند ، و ثابت کنید $\{x\in\mathbf{R} :\ f(x)=g(x)\}$ یک مجموعه‌ٔ بسته است .

۶۲ . ثابت کنید تصویر $\pi_x:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ پیوسته است ، که در آن π_x با $\pi_x(\langle a,b\rangle) = a$ تعریف می‌شود .

۶۳ . تابعهای $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ و $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ را که با

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{اگر } x\neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x=0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{اگر } x\neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x=0 \end{cases}$$

تعریف شده‌اند درنظر بگیرید، و ثابت کنید g در 0 پیوسته است ولی f در 0 پیوسته نمی‌باشد.

۶۴ . به‌یاد می‌آوریم که هر عدد گویای $q\in\mathbf{Q}$ را می‌توان به‌طور منحصر بفرد به‌صورت $q=a/b$ نوشت که در آن $a\in\mathbf{Z}$ ، $b\in\mathbf{N}$ ، و a و b نسبت بهم اولند. تابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ را که با

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد،} \\ 1/b ، & \text{اگر } x \text{ گویا بوده و } x=a/b \text{ مثل بالا} \end{cases}$$

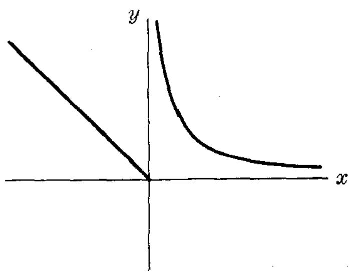
تعریف شده‌درنظرگرفته، ثابت کنید f درهر نقطهٔ گنگ پیوسته است، ولی در هر نقطهٔ گویا ناپیوسته می‌باشد.

جواب مسائل تکمیلی

۵۷ . تابع

$$f(x) = \begin{cases} -x ، & \text{اگر } x \leq 0 \\ 1/x ، & \text{اگر } x > 0 \end{cases}$$

را درنظرمی‌گیریم. همان‌طورکه‌نمودار f در زیر نشان داده، f در هر نقطه از $\mathbf{R}$ جز 0 پیوسته است.



لذا، f در هرنقطه‌ازبازهٔ باز $(0,1)$ پیوسته‌است. ولی f بر $(0,1)$ کراندارنیست.

۵۸ . **راهنمایی.** از مسئلهٔ ۵۶ و قضیهٔ هانیه ــ بورل استفاده کنید.

فضاهای توپولوژیک: تعریفها[۵]

فضاهای توپولوژیک

فرض‌کنیم X مجموعه‌ای ناتهی باشد . رده‌ٔ $\mathcal{T}$ از زیر مجموعه‌های X یک **توپولوژی** بر X است اگفگر $\mathcal{T}$ در اصول موضوع زیر صدق کند :

[$\mathbf{O_1}$] X و $\emptyset$ متعلق به $\mathcal{T}$ باشند ؛

[$\mathbf{O_2}$] اجتماع هر تعداد مجموعه در $\mathcal{T}$ متعلق به $\mathcal{T}$ باشد ؛

[$\mathbf{O_3}$] اشتراک هر دو مجموعه در $\mathcal{T}$ متعلق به $\mathcal{T}$ باشد .

دراین صورت ،اعضای $\mathcal{T}$ ، $\mathcal{T}$ **ــ مجموعه‌های باز** ، یا فقط **مجموعه‌های باز** ، نامیده شده ، و X همراه با $\mathcal{T}$ ، یعنی جفت $(X, \mathcal{T})$ ، یک **فضای توپولوژیک** خوانده خواهد شد .

مثال ۱۰۱ . فرض‌کنیم $\mathcal{U}$ رده‌ٔ تمام مجموعه‌های باز از اعداد حقیقی باشد که در فصل ۴ مطرح شد . $\mathcal{U}$ یک‌توپولوژی‌بر $\mathbf{R}$ است . این‌توپولوژی‌را **توپولوژی معمولی** بر $\mathbf{R}$ می‌نامند . بهمین نحو ، رده‌ٔ $\mathcal{U}$ مرکب از تمام مجموعه‌های باز در $\mathbf{R}^2$ یک توپولوژی است ، و این نیز **توپولوژی‌معمولی** ،بر $\mathbf{R}^2$ ، نام دارد . ما همیشه توپولوژی $\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}^2$ را توپولوژی‌معمولی می‌گیریم مگر آنکه خلافش تصریح شود .

مثال ۲۰۱ . رده‌های زیر از زیر مجموعه‌های $X = \{a, b, c, d, e\}$ را درنظر می‌گیریم :

$$\mathcal{T}_1 = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{c,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d,e\}\} \text{ ،}$$

$$\mathcal{T}_2 = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{c,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d\}\} \text{ ،}$$

$$\mathcal{T}_3 = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{c,d\},\ \{a,c,d\},\ \{a,b,d,e\}\} \text{ .}$$

توجه کنید که $\mathcal{T}_1$ یک توپولوژی بر X است ، زیرا در سه اصل موضوع [$\mathbf{O_1}$] ، [$\mathbf{O_2}$] ، و [$\mathbf{O_3}$] صدق می‌کند . اما $\mathcal{T}_2$ یک توپولوژی بر X نیست ، زیرا اجتماع

$$\{a, c, d\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$$

دو عضو $\mathcal{T}_2$ متعلق به $\mathcal{T}_2$ نیست؛ یعنی، $\mathcal{T}_2$ در اصل موضوع $[\mathbf{O}_2]$ صدق نمی‌کند.

همچنین، $\mathcal{T}_3$ یک توپولوژی بر X نیست، زیرا اشتراک

$$\{a, c, d\} \cap \{a, b, d, e\} = \{a, d\}$$

دو مجموعه در $\mathcal{T}_3$ متعلق به $\mathcal{T}_3$ نیست؛ یعنی، $\mathcal{T}_3$ در اصل موضوع $[\mathbf{O}_3]$ صدق نمی‌کند.

مثال ۳۰۱ . فرض کنیم $\mathscr{D}$ ردهٔ تمام زیر مجموعه‌های X باشد. می‌بینیم که $\mathscr{D}$ دراصول موضوع برای یک توپولوژی بر X صدق می‌کند. این توپولوژی را **توپولوژی مجزا** می‌نامند؛ و X همراه با توپولوژی مجزا، یعنی جفت $(X, \mathscr{D})$، یک ***فضای توپولوژیک مجزا***، یا فقط یک ***فضای مجزا***، نامیده می‌شود.

مثال ۴۰۱ . همانطور که از اصل موضوع $[\mathbf{O}_1]$ دیده می‌شود، یک توپولوژی بر X باید شامل مجموعه‌های X و $\emptyset$ باشد. ردهٔ $\mathscr{J} = \{X, \emptyset\}$، مرکب از فقط X و $\emptyset$، خود یک توپولوژی بر X است، آن‌را ***توپولوژی نامجزا*** می‌نامند؛ و X همراه با توپولوژی نامجزایش، یعنی $(X, \mathscr{J})$، یک ***فضای توپولوژیک نامجزا***، یا فقط یک ***فضای نامجزا***، نامیده می‌شود.

مثال ۵۰۱ . فرض کنیم $\mathcal{T}$ ردهٔ تمام زیر مجموعه‌های X باشد که متممشان متناهی‌اند به انضمام مجموعهٔ تهی $\emptyset$. این $\mathcal{T}$ نیز یک توپولوژی بر X است. آن را ***توپولوژی هم متناهی*** یا T_1 - ***توپولوژی*** بر X می‌نامند. (اهمیت T_1 در یکی از فصول آتی معلوم خواهد شد.)

مثال ۶۰۱ . اشتراک $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ هر دو توپولوژی $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ بر X نیز یک توپولوژی بر X است. زیرا، طبق $[\mathbf{O}_1]$، X و $\emptyset$ هر دو متعلق به $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ اند. درنتیجه، X و $\emptyset$ هر دو متعلق به اشتراک $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ هستند؛ یعنی، $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ در $[\mathbf{O}_1]$ صدق می‌کند. بعلاوه، هرگاه $G,H \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$، آنگاه، بخصوص، $G,H \in \mathcal{T}_1$ و $G,H \in \mathcal{T}_2$. اما، چون $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ توپولوژی هستند، $G \cap H \in \mathcal{T}_1$ و $G \cap H \in \mathcal{T}_2$. لذا،

$$G \cap H \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2.$$

به‌بیان‌دیگر، $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ در $[\mathbf{O}_3]$ صدق می‌کند. به‌همین ترتیب، $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ در $[\mathbf{O}_2]$ صدق خواهد کرد.

درواقع، مثال قبل را می‌توان به هر گردآیه از توپولوژیها تعمیم داد. یعنی،

قضیهٔ ۱۰۵ . فرض کنیم $\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$ ***گردآیه‌ای از توپولوژیها بر مجموعهٔ*** X ***باشد . در این صورت ، اشتراک*** $\cap_i \mathcal{T}_i$ ***نیز یک توپولوژی بر*** X ***است .***

در آخرین مثال نشان می‌دهیم که اجتماع توپولوژیها الزاماً " توپولوژی نیست .

مثال ۷۰۱ . هریک از رده‌های

$$\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{b\}\} \text{ و } \mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$$

یک توپولوژی بر $X = \{a, b, c\}$ است . اما اجتماع

$$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$$

یک‌توپولوژی‌بر X نیست ، چراکه $[\mathbf{O_2}]$ رانقض‌می‌کند . یعنی ، $\{a\} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2,\ \{b\} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ ولی $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ متعلق به $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ نیست .

هرگاه G یک مجموعهٔ باز شامل $p \in X$ باشد ، G یک ***همسایگی باز*** p نامیده می‌شود . همچنین ، G بدون p ، یعنی $G \setminus \{p\}$ ، یک ***همسایگی باز سفتهٔ*** p نام دارد .

تبصره . اصول $[\mathbf{O_1}]$ ، $[\mathbf{O_2}]$ ، و $[\mathbf{O_3}]$ با دو اصل موضوع زیر هم‌ارز هستند :

$[\mathbf{O_1^*}]$ اجتماع هر تعداد مجموعه در $\mathcal{T}$ متعلق به $\mathcal{T}$ است ؛

$[\mathbf{O_2^*}]$ اشتراک هر تعداد متناهی مجموعه در $\mathcal{T}$ متعلق به $\mathcal{T}$ است .

زیرا $[\mathbf{O_1^*}]$ ایجاب می‌کند که $\emptyset$ متعلق به $\mathcal{T}$ باشد ، زیرا

$$\cup\{G \in \mathcal{T} : G \in \emptyset\} = \emptyset ;$$

یعنی ، اجتماع تهی از مجموعه‌ها مجموعهٔ تهی است . بعلاوه ، $[\mathbf{O_2^*}]$ ایجاب می‌کند که X متعلق به $\mathcal{T}$ باشد ، زیرا

$$\cap\{G \in \mathcal{T} : G \in \emptyset\} = X;$$

یعنی ، اشتراک تهی از زیر مجموعه‌های X خود X است .

نقاط انباشتگی

فرض کنیم X یک‌فضای‌توپولوژیک باشد . نقطهٔ $p \in X$ یک ***نقطهٔ انباشتگی*** یا **نقطهٔ حدی** (همچنین ، **نقطهٔ خوشه‌ای** یا **نقطهٔ مشتق**) زیر مجموعهٔ A از X است اگفگر هر مجموعهٔ باز G شامل p نقطه‌ای از A غیر از p داشته باشد ؛ یعنی ،

G باز و $p \in G$ ایجاب کنند که $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$.

مجموعهٔ نقاط انباشتگی A ، که با A' نموده می‌شود ، **مجموعهٔ مشتق** A نام دارد .

مثال ۱۰۲ . ردهٔ

$$\mathcal{T} = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{c,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d\,e\}\}$$

یک توپولوژی بر $X = \{a,b,c,d,e\}$ است . زیر مجموعهٔ $A = \{a,b,c\}$ از X را در نظر می‌گیریم . توجه کنید که $b \in X$ یک نقطهٔ حدی A است ، زیرا مجموعه‌های باز شامل b عبارتنداز $\{b,c,d,e\}$ و X ، و هریک شامل نقطه‌ای از A غیر از b ، یعنی c ، می‌باشد . از آن سو ، نقطهٔ $a \in X$ یک نقطهٔ حدی A نیست ، زیرا مجموعهٔ باز $\{a\}$ ، که شامل a است ، نقطه‌ای از A غیر از a ندارد . بهمین ترتیب ، d و e نقاط حدی A هستند و c نقطهٔ حدی A نیست . درنتیجه ، $A' = \{b,d,e\}$ مجموعهٔ مشتق A می‌باشد .

مثال ۲۰۲ . فرض‌کنیم X یک فضای توپولوژیک نامجزا بوده ، یعنی X و $\emptyset$ تنها زیر مجموعه‌های باز X باشند . X تنها مجموعهٔ باز شامل هر نقطهٔ $p \in X$ است . پس p نقطهٔ انباشتگی هر زیر مجموعهٔ X جز مجموعهٔ تهی $\emptyset$ و مجموعهٔ مشتمل بر فقط p ، یعنی مجموعهٔ یکانی $\{p\}$ ، است . لذا ، مجموعهٔ مشتق A'. هر زیر مجموعهٔ A از X عبارت است از

$$A' = \begin{cases} \emptyset & \text{اگر } A = \emptyset \text{ ،} \\ \{p\}^c = X \setminus \{p\} & \text{اگر } A = \{p\} \text{ ،} \\ X & \text{اگر } A \text{ شامل دو یا چند نقطه باشد ،} \end{cases}$$

توجه کنیدکه ،در مورد توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}^2$ ، تعریف نقطهٔ انباشتگی فوق همان تعریفی است که در فصل ۴ داده شده است

مجموعه‌های بسته

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد . زیر مجموعهٔ A از X یک **مجموعهٔ بسته** است اگفگر متمم آن A^c یک مجموعهٔ باز باشد .

مثال ۱۰۳ . ردهٔ

$$\mathcal{T} = \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{c,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d,e\}\}$$

یک توپولوژی بر $X = \{a,b,c,d,e\}$ است . زیر مجموعه‌های بستهٔ X عبارتند از

$$\emptyset,\ X,\ \{b,c,d,e\},\ \{a,b,e\},\ \{b,e\},\ \{a\};$$

یعنی، متممهای زیر مجموعه‌های باز X . توجه کنید که زیر مجموعه‌هایی از X ، مانند $\{b, c, d, e\}$، وجود دارند که هم باز هستند هم بسته، و زیر مجموعه‌هایی از X ، مثل $\{a, b\}$ ، وجود دارند که نه باز هستند نه بسته.

مثال ۲۰۳ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک مجزا باشد؛ یعنی، هر زیر مجموعهٔ X باز باشد. دراین صورت، هر زیر مجموعهٔ X بسته نیز هست، زیرا متمم آن همیشه باز است. به عبارت دیگر، تمام زیر مجموعه‌های X هم باز هستند هم بسته.

به یاد می‌آوریم که به ازای هر زیر مجموعهٔ A از فضای X ، $A^{cc} = A$. لذا،

حکم ۲۰۵ . *در فضای توپولوژیک X ، زیر مجموعهٔ A از X باز است اگر و فقط اگر متمم آن بسته باشد.*

اصول $[\mathbf{O}_1]$ ، $[\mathbf{O}_2]$ ، و $[\mathbf{O}_3]$ یک فضای توپولوژیک و قوانین دمورگان نتیجه می‌دهند که

قضیهٔ ۳۰۵ . *فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. دراین صورت، ردهٔ زیر مجموعه‌های بستهٔ X دارای خواص زیر است:*

(یک) X و $\emptyset$ زیر مجموعه‌هایی بسته‌اند؛

(دو) اشتراک هر تعداد مجموعهٔ بسته بسته است؛

(سه) اجتماع هر دو مجموعهٔ بسته بسته است.

مجموعه‌های بسته را می‌توان برحسب نقاط حدی آنها نیز توصیف کرد:

قضیهٔ ۴۰۵ . *زیر مجموعهٔ A از فضای توپولوژیک X بسته است اگر و فقط اگر A همهٔ نقاط انباشتگی خود را شامل باشد.*

به عبارت دیگر، مجموعهٔ A بسته است اگر و فقط اگر مجموعهٔ مشتق A زیرمجموعه‌ای از A باشد؛ یعنی، $A' \subset A$.

بست یک مجموعه

فرض‌کنیم A زیر مجموعهٔ فضای توپولوژیک X باشد. بست A ، که با

$$\bar{A} \text{ یا } A^{-}$$

نموده می‌شود، عبارت است از اشتراک تمام زیر مجموعه‌های بستهٔ A . به بیان دیگر، اگر $\{F_i : i \in I\}$ ردهٔ تمام زیر مجموعه‌های بستهٔ X شامل A باشد،

$$\bar{A} \;=\; \cap_i F_i.$$

ابتدامی‌بینیم‌که $\bar{A}$ بسته است، چرا که اشتراک مجموعه‌های بسته می‌باشد. بعلاوه، $\bar{A}$ کوچکترین زیر مجموعهٔ بستهٔ A است؛ یعنی، هرگاه F مجموعه‌ای بسته و شامل A باشد، آنگاه

$$A \subset \bar{A} \subset F.$$

بنابراین، مجموعهٔ A بسته است اگروفقط اگر $A = \bar{A}$. این‌نتایج‌رابه‌طور‌صوری‌بیان‌می‌کنیم:

حکم ۵.۵ . ***فرض کنیم $\bar{A}$ بست مجموعهٔ A باشد. دراین صورت، (یک) $\bar{A}$ بسته است؛ (دو) هرگاه F یک زیر مجموعهٔ بستهٔ A باشد، آنگاه $A \subset \bar{A} \subset F$ ؛ و (سه) A بسته است اگفگر $A = \bar{A}$.***

مثال ۱.۴ . توپولوژی $\mathcal{T}$ بر $X = \{a, b, c, d, e\}$ مثال ۱.۳ را درنظر می‌گیریم، که در آن زیر مجموعه‌های بستهٔ X عبارتند از

$$\emptyset,\ X,\ \{b, c, d, e\},\ \{a, b, e\},\ \{b, e\},\ \{a\}\cdot$$

بنابراین،

$$\overline{\{b\}} = \{b, e\}, \quad \overline{\{a, c\}} = X, \quad \overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}.$$

مثال ۲.۴ . فرض‌کنیم X یک فضای توپولوژیک هم متناهی باشد؛ یعنی، متممهای مجموعه‌های‌متناهی‌و $\emptyset$ مجموعه‌های باز هستند. دراین صورت، مجموعه‌های بسته‌دقیقا" عبارتنداززیر مجموعه‌های متناهی X به انضمام X . درنتیجه، اگر $A \subset X$ متناهی‌باشد، بست‌آن $\bar{A}$ مساوی‌خود A است، چراکه A بسته‌است. از سوی دیگر، اگر $A \subset X$ نامتناهی باشد، X تنها زیر مجموعهٔ بستهٔ A است؛ درنتیجه، $\bar{A}$ مساوی X است. به‌طوردقیقتر، به‌ازای هر زیرمجموعهٔ A ی فضای هم متناهی X ،

$$\bar{A} \;=\; \begin{cases} A \text{ ، اگر } A \text{ متناهی باشد،} \\ X \text{ ، اگر } A \text{ نامتناهی باشد،} \end{cases}$$

بست یک مجموعه را می‌توان کاملا " برحسب نقاط حدی آن توصیف کرد :

قضیهٔ ۶.۵ . فرض کنیم A زیر مجموعهٔ فضای توپولوژیک X باشد . دراین صورت ، بست A اجتماع A و مجموعهٔ نقاط انباشتگی آن است ؛ یعنی ،

$$\bar{A} = A \cup A .$$

نقطهٔ $p \in X$ **نقطهٔ بست** یا **نقطهٔ چسبیدهٔ** $A \subset X$ است اگرگر p متعلق به بست A باشد ؛ یعنی ، $p \in \bar{A}$. بخاطر قضیهٔ قبل ، $p \in X$ نقطهٔ بست $A \subset X$ است اگرگر $p \in A$ یا p نقطهٔ حدی A باشد .

مثال ۳.۴ . مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbf{Q}$ را درنظر می‌گیریم . همانطور که قبلا " دیدیم ، در توپولوژی معمولی برای $\mathbf{R}$ ، هر عدد حقیقی $a \in \mathbf{R}$ نقطهٔ حدی $\mathbf{Q}$ است . لذا ، بست $\mathbf{Q}$ تمام مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ است ؛ یعنی ، $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

زیر مجموعهٔ A از فضای توپولوژیک X را در $B \subset X$ **چگال** گوییم درصورتی که B مشمول بست A باشد ؛ یعنی ، $B \subset \bar{A}$. بخصوص ، A در X چگال است یا زیر مجموعهٔ چگال X است اگرگر $\bar{A} = X$.

مثال ۴.۴ . در مثال ۱.۴ می‌بینیم که

$$\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\} \text{ و } \overline{\{a, c\}} = X$$

که $X = \{a, b, c, d, e\}$. لذا ، مجموعهٔ $\{a, c\}$ یک زیر مجموعهٔ چگال X است ولی مجموعهٔ $\{b, d\}$ چنین نمی‌باشد .

مثال ۵.۴ . همانطور که در مثال ۳.۴ توجه شد ، $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$. به بیان دیگر ، در توپولوژی معمولی ، مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbf{Q}$ در $\mathbf{R}$ چگال است .

عملگر "بست" ، که به هر زیر مجموعهٔ A از X بستش $\bar{A} \subset X$ را مربوط می‌کند ، از چهار خاصیت حکم زیر برخوردار است ، که آنها را ***اصول بست کوراتسکی***[1] می‌نامند . در

1. Kuratowski

واقع ، همانطور که در آینده ثابت می‌کنیم ، این اصول را می‌توان برای تعریف توپولوژی بر X به‌کار برد .

حکم ۷۰۵ . (یک) $\bar{\emptyset}=\emptyset$ ؛ (دو) $A\subset\bar{A}$ ؛ (سه) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ ؛ و (چهار) $(A^-)^-=\bar{A}$.

درون ، برون ، کرانه

فرض کنیم A زیر مجموعهٔ فضای تو پولوژیک X باشد . نقطهٔ $p\in A$ درصورتی یک **نقطهٔ درونی** A خوانده می‌شود که p متعلق به هر مجموعهٔ باز G مشمول A باشد :

$p\in G\subset A$ که G باز است .

مجموعهٔ نقاط درونی A ، که با

$\mathrm{int}(A)$ ، $\mathring{A}$ ، یا A°

نموده می‌شود ، **درون** A نام دارد . درون A را می‌توان به‌صورت زیر نیز توصیف کرد :

حکم ۸۰۵ . *درون مجموعهٔ A اجتماع تمام زیرمجموعه‌های باز A است . بعلاوه ، (یک) A° باز است ؛ (دو) A° بزرگترین زیرمجموعهٔ باز A است ؛ یعنی ، اگر G زیرمجموعهٔ باز A باشد ، $G\subset A^\circ\subset A$ ؛ و (سه) A باز است اگرفقط اگر $A=A^\circ$.*

برون A ، که به‌صورت $\mathrm{ext}(A)$ نوشته می‌شود ، درون متمم A است ؛ یعنی ، $\mathrm{int}(A^c)$. **کرانهٔ** A ، که به‌صورت $\mathrm{b}(A)$ نوشته می‌شود ، مجموعهٔ نقاطی است که تعلق به درون یا برون A ندارند . حال رابطهٔ مهم بین درون ، برون ، و بست را نتیجه می‌گیریم :

قضیهٔ ۹۰۵ . *فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک X باشد . در این صورت ، بست A اجتماع درون و کرانهٔ A می‌باشد ؛ یعنی ، $\bar{A}=A^\circ\cup\mathrm{b}(A)$.*

مثال ۱۰۵ . چهار بازهٔ $[a,b]$ ، (a,b) ، $(a,b]$ ، و $[a,b)$ ، که نقاط انتهایی‌شان a و b اند ، را درنظر می‌گیریم . درون هریک از آنها بازهٔ باز (a,b) است و کرانهٔ هریک مجموعهٔ نقاط انتهایی ، یعنی $\{a,b\}$ ، می‌باشد .

مثال ۲۰۵ . توپولوژی

$$\mathcal{T} \;=\; \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{c,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d,e\}\}$$

بر $X = \{a,b,c,d,e\}$ ، و زیر مجموعهٔ $A = \{b,c,d\}$ از X را درنظر می‌گیریم . نقاط c و d نقاط درونی A اند ، زیرا

$$c,d \in \{c,d\} \subset A$$

و $\{c,d\}$ یک مجموعهٔ باز است . نقطهٔ $b \in A$ نقطهٔ درونی A نیست ؛ در نتیجه ، $\operatorname{int}(A) = \{c,d\}$. فقط نقطهٔ $a \in X$ برون A است ، یعنی درون متمم $A^c = \{a,e\}$ از A است ؛ درنتیجه ، $\operatorname{int}(A^c) = \{a\}$. لذا ،کرانهٔ A ازدونقطهٔ b و e تشکیل شده است ؛ یعنی ، $\mathrm{b}(A) = \{b,e\}$.

مثال ۳۰۵ . مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbf{Q}$ را درنظر می‌گیریم . چون هر زیر مجموعهٔ باز $\mathbf{R}$ شامل نقاط گویا و گنگ است ، $\mathbf{Q}$ هیچ نقطهٔ درونی یا برونی ندارد ؛ درنتیجه ، $\operatorname{int}(\mathbf{Q}) = \emptyset$ و $\operatorname{int}(\mathbf{Q}^c) = \emptyset$. لذا ، کرانهٔ $\mathbf{Q}$ تمام مجموعهٔ اعداد حقیقی است ؛ یعنی ، $\mathrm{b}(\mathbf{Q}) = \mathbf{R}$.

زیر مجموعهٔ A از فضای توپولوژیک X را درصورتی ***هیچ جا چگال*** در X نامیم که درون بست A تهی باشد ؛یعنی ، $\operatorname{int}(\bar{A}) = \emptyset$.

مثال ۴۰۵ . زیر مجموعهٔ $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ از $\mathbf{R}$ را درنظر می‌گیریم . همانطور که قبلاً ذکر شد ، A فقط نقطهٔ حدی 0 را دارد . بنابراین ، $\bar{A} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. توجه کنید که $\bar{A}$ نقطهٔ درونی ندارد ؛ درنتیجه ، A هیچ جاچگال در $\mathbf{R}$ است .

مثال ۵۰۵ . فرض کنیم A از اعداد گویای بین 0 و 1 تشکیل شده باشد ؛ یعنی ، $A = \{x : x \in Q,\ 0 < x < 1\}$. توجه کنید که درون A تهی است ؛ یعنی ، $\operatorname{int}(A) = \emptyset$. اما A هیچ جاچگال در $\mathbf{R}$ نیست ، زیرا بست A مساوی $[0,1]$ است ؛ و درنتیجه ،

$$\operatorname{int}(\bar{A}) \;=\; \operatorname{int}([0,1]) \;=\; (0,1)$$

تهی نمی‌باشد .

همسایگیها و دستگاههای همسایگی

فرض کنیم p یک نقطه از فضای توپولوژیک X باشد . زیر مجموعهٔ N از X یک **همسایگی** p است **اگ**ر N زبر مجموعهٔ مجموعهٔ بازی چون G شامل p باشد :

$p \in G \subset N$ که درآن G یک مجموعهٔ باز است .
به‌بیان دیگر، رابطهٔ " N همسایگی p است" عکس رابطهٔ " p نقطهٔ درونی N است" می‌باشد . ردهٔ تمام همسایگیهای $p \in X$ ، که با $\mathcal{N}_p$ نموده می‌شود ، **دستگاه همسایگی** p نام دارد .

مثال ۱۰۶ . فرض‌کنیم a عددی‌حقیقی باشد ؛ یعنی ، $a \in \mathbf{R}$. دراین صورت ، هربازهٔ بستهٔ $[a-\delta, a+\delta]$ ، به‌مرکز a ، یک‌**همسایگی** a است ، زیراشامل بازهٔ باز $(a-\delta, a+\delta)$ که حاوی a است می‌باشد . بهمین ترتیب ، اگر p نقطه‌ای درصفحهٔ $\mathbf{R}^2$ باشد ، هر قرص بستهٔ $\{q \in \mathbf{R}^2 : d(p,q) < \delta \neq 0\}$ ، به مرکز p ، یک **همسایگی** p است ، زیرا شامل قرص باز به مرکز p می‌باشد .

نکات اصلی درباب دستگاه همسایگی $\mathcal{N}_p$ نقطهٔ $p \in X$ چهار خاصیت آمده درحکم زیر اند ، به‌نام ***اصول همسایگی***. درواقع ، همانطور که بعداً" خواهید دید ، می‌توان با استفاده از این اصول یک توپولوژی بر X تعریف کرد .

حکم ۱۰۰۵

(یک) $\mathcal{N}_p$ تهی نیست و p متعلق به هر عضو $\mathcal{N}_p$ *است* .

(دو) *اشتراک* هر دو عضو $\mathcal{N}_p$ متعلق به $\mathcal{N}_p$ *است* .

(سه) هر زبر مجموعهٔ یک عضو $\mathcal{N}_p$ متعلق به $\mathcal{N}_p$ *است* .

(چهار) هر عضو $N \in \mathcal{N}_p$ زبر مجموعهٔ عضوی چون $G \in \mathcal{N}_p$ *است* که G همسایگی هر نقطهٔ خود می‌*باشد* ؛ یعنی ، به‌*ازای* هر $g \in G$ ، $G \in \mathcal{N}_g$.

دنباله‌های همگرا

دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ از نقاط در فضای توپولوژیک X ***همگرا*** به $b \in X$ است ، یا b **حد** دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ است ، که با

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \text{ ، } \lim a_n = b \text{ ، یا } a_n \to b$$

نموده‌می‌شود ، اگفگربه‌ازای‌هر مجموعهٔ باز G شامل b ، عدد صحیح مثبتی چون $n_0 \in N$ باشد بطوری که

$n > n_0$ عضویت $a_n \in G$ را ایجاب کند؛

یعنی ، G شامل تقریبا " همه ، یعنی همه جز تعدادی متناهی ، جمله از دنباله باشد .

مثال ۱۰۷ . فرض‌کنیم $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای از نقاط در فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{J})$ باشد . توجه کنید که ، (یک) X تنها مجموعهٔ باز شامل هر $b \in X$ است ؛ و (دو) X شامل هرجملهٔ دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ است . لذا ، دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ همگرا به هر نقطهٔ $b \in X$ می‌باشد .

مثال ۲۰۷ . فرض کنیم $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای ازنقاط درفضای توپولوژیک مجزای $(X, \mathcal{D})$ باشد . دراینجا ، به‌ازای هر نقطهٔ $b \in X$ ، مجموعهٔ یکانی $\{b\}$ یک مجموعهٔ باز شامل b است . درنتیجه ، اگر $a_n \to b$ ، مجموعهٔ $\{b\}$ باید شامل تقریبا " همهٔ جملات دنباله باشد . به‌بیان دیگر ، دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ همگرا به $b \in X$ است اگفگر دنباله به شکل $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, b, b, b, \ldots \rangle$ باشد .

مثال ۳۰۷ . فرض‌کنیم $\mathcal{T}$ توپولوژیی بر مجموعهٔ نامتناهی X باشد که از $\emptyset$ و متممهای مجموعه‌های حداکثر شمارشپذیر تشکیل شده است (ر.ک. مسئلهٔ ۵۶) . حکم می‌کنیم‌که دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ در X همگرا به $b \in X$ است اگفگر به شکل $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, b, b, b, \ldots \rangle$ ، باشد ؛ یعنی ، مجموعهٔ A مرکب از جملاتی از $\langle a_n \rangle$ که با b متمایزند متناهی باشد . A حداکثرشمارشپذیراست ؛ودرنتیجه ، A^c یک‌مجموعه‌شامل b می‌باشد . پس ، اگر $a_n \to b$ ، A^c شامل‌همه‌جزتعدادی متناهی‌جمله از دنباله است ؛ و در نتیجه ، A متناهی می‌باشد . شد .

توپولوژیهای ضخیمتر و ظریفتر

فرض‌کنیم $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دوتوپولوژی‌بر مجموعهٔ ناتهی X باشند . همچنین ، هر زیر مجموعهٔ $\mathcal{T}_1$ ـ باز X یک زیرمجموعهٔ $\mathcal{T}_2$ ـ باز X نیز باشد . یعنی ، $\mathcal{T}_1$ یک زیر ردهٔ $\mathcal{T}_2$ باشد ؛ یعنی ، $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. دراین صورت ، می‌گوییم $\mathcal{T}_1$ **ضخیمتر یا کوچکتر** (گاهی **ضعیفتر**) از $\mathcal{T}_2$ است یا $\mathcal{T}_2$ **ظریفتر** یا **بزرگتر** از $\mathcal{T}_1$ است . توجه کنید که گردآیهٔ $\mathbf{T} = \{\mathcal{T}_i\}$ تمام توپولوژیهای بر X با شمول رده‌ها جزئی مرتب است ؛ درنتیجه ، به‌جای $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ نیز خواهیم نوشت $\mathcal{T}_1 \lesssim \mathcal{T}_2$ ، و خواهیم گفت که‌دو توپولوژی بر X در صورتی **قیاسپذیر** نیستند که هیچیک از دیگری ضخیمتر نباشد .

مثال ۱۰۸ . توپولوژی‌مجزای $\mathcal{D}$ ، توپولوژی نامجزای $\mathcal{J}$ ، و توپولوژی دلخواه $\mathcal{T}$ رابر مجموعهٔ X در نظرمی‌گیریم . دراین صورت ، $\mathcal{T}$ از $\mathcal{D}$ ضخیمتر است و $\mathcal{T}$ از $\mathcal{J}$ ظریفتر

یعنی، $\mathcal{J} \precsim \mathcal{T} \precsim \mathcal{D}$.

مثال ۲۰۸ . توپولوژی هم‌متناهی $\mathcal{T}$ و توپولوژی معمولی $\mathcal{U}$ را بر صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ در نظر می‌گیریم . به‌یاد می‌آوریم که هر زیر مجموعهٔ متناهی $\mathbf{R}^2$ یک مجموعهٔ $\mathcal{U}$ ــ بسته است . درنتیجه، **متمم هر زیر مجموعهٔ** متناهی $\mathbf{R}^2$ ، یعنی هر عضو $\mathcal{T}$ ، نیز یک مجموعهٔ $\mathcal{U}$ ــ باز است . به‌عبارت دیگر، $\mathcal{T}$ از $\mathcal{U}$ ضخیمتر است؛ یعنی، $\mathcal{T} \precsim \mathcal{U}$.

زیرفضاها، توپولوژیهای نسبی

فرض کنیم A یک زیر مجموعهٔ ناتهی فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ باشد . ردهٔ $\mathcal{T}_A$ مرکب از جمیع اشتراکهای A با زیر مجموعه‌های $\mathcal{T}$ ــ باز X یک توپولوژی بر A است؛ آن را **توپولوژی نسبی** بر A یا **نسبی شدهٔ** $\mathcal{T}$ به A می‌نامند، و فضای توپولوژیک $(A, \mathcal{T}_A)$ **زیر فضای** $(X, \mathcal{T})$ نامیده می‌شود . به بیان دیگر، زیر مجموعهٔ H از A یک مجموعهٔ $\mathcal{T}_A$ ــ باز است، یعنی نسبت به A باز است، اگر و فقط اگر زیر مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ــ بازی مانند G از X باشد بطوری که

$$H = G \cap A.$$

مثال ۱۰۹ . توپولوژی

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

بر $X = \{a,b,c,d,e\}$ ، و زیر مجموعهٔ $A = \{a,d,e\}$ از X رادرنظرمی‌گیریم . توجه کنید که

$$X \cap A = A, \quad \{a\} \cap A = \{a\}, \quad \{a,c,d\} \cap A = \{a,d\} ،$$

$$\emptyset \cap A = \emptyset, \quad \{c,d\} \cap A = \{d\}, \quad \{b,c,d,e\} \cap A = \{d,e\} \cdot$$

پس، نسبی شدهٔ $\mathcal{T}$ به A عبارت است از

$$\mathcal{T}_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a,d\}, \{d,e\}\}.$$

مثال ۲۰۹ . توپولوژی‌معمولی $\mathcal{U}$ بر $\mathbf{R}$ وتوپولوژی‌نسبی $\mathcal{T}_A$ بر بازهٔ بستهٔ $A = [3,8]$ را درنظر می‌گیریم . توجه کنید که بازهٔ بسته ــ باز $[3,5)$ نسبت به توپولوژی نسبی بر A باز است، یعنی یک مجموعهٔ $\mathcal{T}_A$ ــ باز است، زیرا

$$[3,5) = (2,5) \cap A$$

که‌درآن $(2,5)$ یک زیر مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ــ باز $\mathbf{R}$ می‌باشد . لذا، می‌بینیم که یک مجموعه ممکن است نسبت به یک زیر فضا باز باشد ولی نسبت به تمام فضا نه باز باشد نه بسته .

تعریفهای هم‌ارز از توپولوژی

تعریف فضای‌توپولوژیک‌ما بیانگر اصول موضوع مجموعه‌های باز در فضای توپولوژیک است ؛ یعنی ، ما از مجموعهٔ باز به‌عنوان مفهوم اولیهٔ توپولوژی استفاده می‌کنیم . حال دوقضیه بیان می‌شودکه‌روشهای دیگر تعریف توپولوژی بر یک مجموعه را نشان می‌دهند ، و درآنها مفاهیم اولیه "همسایگی یک نقطه" و "بست یک مجموعه" می‌باشند .

قضیهٔ ۱۱۰۵ . *فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی باشد ، و به‌هر $p \in X$ ردهٔ $\mathcal{A}_p$ اززیر مجموعه‌های X طوری مربوط باشد که در اصول موضوع زیر صدق نماید :*

[A₁] *$\mathcal{A}_p$ تهی نبوده و p متعلق به هر عضو $\mathcal{A}_p$ باشد ؛*

[A₂] *اشتراک هر دو عضو $\mathcal{A}_p$ متعلق به $\mathcal{A}_p$ باشد ؛*

[A₃] *هر زبر مجموعهٔ یک عضو $\mathcal{A}_p$ متعلق به $\mathcal{A}_p$ باشد ؛*

[A₄] *هر عضو $N \in \mathcal{A}_p$ زبر مجموعهٔ عضوی چون $G \in \mathcal{A}_p$ باشدبطوری که به‌ازای هر $g \in G$ ، $G \in \mathcal{A}_g$.*

دراین صورت ، یک و فقط یک توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X وجود دارد بطوری که $\mathcal{A}_p$ دستگاه $\mathcal{T}$ ـ همسایگی نقطهٔ $p \in X$ می‌باشد .

قضیهٔ ۱۲۰۵ . *فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی بوده ، و k عملی باشد که به هر زیر مجموعهٔ A از X زیر مجموعهٔ A^k از X را طوری مربوط کند که در اصول زیر ، به‌نام اصول بست کوراتسکی ، صدق نماید :*

[K₁] $\emptyset^k = \emptyset$ ؛

[K₂] $A \subset A^k$ ؛

[K₃] $(A \cup B)^k = A^k \cup B^k$ ؛

[K₄] $(A^k)^k = A^k$.

دراین صورت ، یک و فقط یک توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X هست بطوری که A^k ، $\mathcal{T}$ ـ بست زیر مجموعهٔ A از X می‌باشد .

مسائل حل شده

توپولوژیها ، مجموعه‌های باز

۱ . فرض‌کنید $X = \{a, b, c, d, e\}$ ، وتعیین‌کنیدکه‌هریک‌ازرده‌های‌زیراززیرمجموعه‌های X یک توپولوژی بر X هست یا نه :

(یک) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$ ؛

(دو) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}\}$ ؛

(سه) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$

حل

(یک) $\mathcal{T}_1$ یک توپولوژی بر X نیست، زیرا

$\{a,b\}, \{a,c\} \in \mathcal{T}_1$ ولی $\{a,b\} \cup \{a,c\} = \{a,b,c\} \notin \mathcal{T}_1$.

(دو) $\mathcal{T}_2$ یک توپولوژی بر X نیست ، زیرا

$\{a,b,c\}, \{a,b,d\} \in \mathcal{T}_2$ ولی $\{a,b,c\} \cap \{a,b,d\} = \{a,b\} \notin \mathcal{T}_2$.

(سه) $\mathcal{T}_3$ یک توپولوژی بر X است ، زیرا در اصول موضوع لازم صدق می‌کند .

۲ . فرض کنید $\mathcal{T}$ رده‌ای مرکب از $\mathbf{R}$ ، $\emptyset$ ، و تمام بازه‌های باز نامتناهی $A_q = (q, \infty)$ باشد که در آن $q \in \mathbf{Q}$ ، یعنی گویا، است . نشان دهید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر $\mathbf{R}$ نیست .

حل . می‌بینیم

$$A = \cup \{A_q : q \in \mathbf{Q},\ q > \sqrt{2}\} = (\sqrt{2}, \infty)$$

اجتماع اعضای $\mathcal{T}$ است . اما ، چون $\sqrt{2}$ گنگ است ، $A \notin \mathcal{T}$. پس $\mathcal{T}$ اصل $[\mathbf{O_2}]$ را نقض می‌کند ؛ و لذا ، یک توپولوژی بر $\mathbf{R}$ نیست .

۳ . فرض کنید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر X مرکب از چهار مجموعه باشد ؛ یعنی ،

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, A, B\},$$

که در آن A و B زیر مجموعه‌هایی ناتهی ، متمایز ، و حقیقی از X هستند . A و B باید در چه شرایطی صدق کنند ؟

حل . چون $A \cap B$ باید متعلق به $\mathcal{T}$ باشد ، دو امکان به‌وجود می‌آید :

حالت I . $A \cap B = \emptyset$. دراین‌حالت ، $A \cup B$ نمی‌تواند A یا B باشد؛ درنتیجه، $A \cup B = X$. بنابراین ، ردهٔ $\{A, B\}$ یک افراز X است .

حالت II . $A \cap B = A$ یا $A \cap B = B$. در هر حالت ، یکی از مجموعه‌ها زیر مجموعهٔ دیگری است ، و اعضای $\mathcal{T}$ با شمول کلی مرتب شده‌اند : $\emptyset \subset A \subset B \subset X$ یا $\emptyset \subset B \subset A \subset X$.

۴ جمیع توپولوژیهای بر $X = \{a, b, c\}$ را که فقط از چهار عضو تشکیل شده‌اند بنویسید .

حل . هر توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X با چهار عضو به شکل $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, A, B\}$ است که در آن A و B در وضع I یا II مسئلهٔ قبل هستند .

حالت I . $\{A, B\}$ یک افراز X است . توپولوژیها دراین حالت عبارتند از

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}, \quad \mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, c\}\}, \quad \mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, b\}\}.$$

حالت II . اعضای $\mathcal{T}$ با شمول کلی مرتب شده‌اند . توپولوژیها دراین حالت عبارت خواهند بود از

$$\mathcal{T}_4 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\} \qquad \mathcal{T}_7 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$$
$$\mathcal{T}_5 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}\} \qquad \mathcal{T}_8 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, c\}\}$$
$$\mathcal{T}_6 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\} \qquad \mathcal{T}_9 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, c\}\}$$

۵ . فرض کنید $f : X \to Y$ تابعی از مجموعهٔ ناتهی X بتوی فضای توپولوژیک $(Y, \mathcal{U})$ باشد . بعلاوه ، $\mathcal{T}$ ردهٔ معکوس زیر مجموعه‌های باز Y باشد :

$$\mathcal{T} = \{f^{-1}[G] : G \in \mathcal{U}\}.$$

نشان دهید که $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر X است .

حل . چون $\mathcal{U}$ یک‌توپولوژی است ، $Y, \emptyset \in \mathcal{U}$. اما $X = f^{-1}[Y]$ و $\emptyset = f^{-1}[\emptyset]$. درنتیجه ، $X, \emptyset \in \mathcal{T}$ و $\mathcal{T}$ در $[\mathbf{O}_1]$ صدق می‌کند .

فرض‌کنیم $\{A_i\}$ رده‌ای‌ازمجموعه‌ها در $\mathcal{T}$ باشد . بنابر تعریف ، $G_i \in \mathcal{U}$ ها یی‌هستند که $A_i = f^{-1}[G_i]$. اما

$$\cup_i A_i = \cup_i f^{-1}[G_i] = f^{-1}[\cup_i G_i].$$

چون $\mathcal{U}$ توپولوژی است ، $\cup_i G_i \in \mathcal{U}$. در نتیجه ، $\cup_i A_i \in \mathcal{T}$ ، و $\mathcal{T}$ در $[\mathbf{O}_2]$ نیز صدق می‌کند .

بالاخره ، فرض کنیم $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$. دراین صورت ،

$\exists\, G_1, G_2 \in \mathcal{U}$ هست بطوری که $A_1 = f^{-1}[G_1], \ A_2 = f^{-1}[G_2]$.

اما

$$A_1 \cap A_2 = f^{-1}[G_1] \cap f^{-1}[G_2] = f^{-1}[G_1 \cap G_2]$$

و $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{U}$. لذا ، $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$ و $[\mathbf{O}_3]$ نیز برقرار خواهد بود .

۶ . اصل دوم برای‌توپولوژی $\mathcal{T}$ بر مجموعهٔ X را درنظر بگیرید :

[O_2] اجتماع هر تعداد مجموعه‌در $\mathcal{T}$ متعلق‌به $\mathcal{T}$ است. نشان دهیدکه **[O_2]** رامی‌توان با اصل ضعیفتر زیر عوض کرد :

[O_2'] اجتماع‌هرتعدادمجموعه در $\mathcal{T}\setminus\{X,\emptyset\}$ متعلق‌به $\mathcal{T}$ است . به عبارت‌دیگر ، اصول **[O_1]** ، **[O_2']** ، و **[O_3]** هم ارزاصول **[O_1]** ، **[O_2]** ، و **[O_3]** می‌باشند .

حل. فرض کنیم $\mathcal{T}$ رده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد که در **[O_1]** ، **[O_2']** ، و **[O_3]** صدق می‌کند ، و نیز $\mathcal{A}$ یک زیر ردهٔ $\mathcal{T}$ باشد . نشان می‌دهیم که $\mathcal{T}$ در **[O_2]** نیز صدق می‌کند ؛ یعنی ، $\bigcup\{E : E\in\mathcal{A}\}\in\mathcal{T}$.

حالت I . $X\in\mathcal{A}$. در این حالت ، $\bigcup\{E : E\in\mathcal{A}\} = X$ ؛ و درنتیجه ، طبق **[O_1]** ، متعلق به $\mathcal{T}$ است .

حالت II . $X\notin\mathcal{A}$. دراین صورت ،

$$\bigcup\{E : E\in\mathcal{A}\} = \bigcup\{E : E\in\mathcal{A}\setminus\{X\}\}.$$

اما مجموعهٔ تهی $\emptyset$ عنصرهایی به اجتماع مجموعه‌ها نمی‌افزاید ؛ درنتیجه ،

$$\bigcup\{E : E\in\mathcal{A}\} = \bigcup\{E : E\in\mathcal{A}\setminus\{X\}\} = \bigcup\{E : E\in\mathcal{A}\setminus\{X,\emptyset\}\}. \quad (1)$$

چون $\mathcal{A}$ زیر ردهٔ $\mathcal{T}$ است ، $\mathcal{A}\setminus\{X,\emptyset\}$ زیر ردهٔ $\mathcal{T}\setminus\{X,\emptyset\}$ است . لذا ، طبق **[O_2']** ، اجتماع (۱) متعلق به $\mathcal{T}$ می‌باشد .

۷ . فرض کنید A زیر مجموعهٔ فضای توپولوژیک X باشد با این خاصیت که هر نقطهٔ $p\in A$ متعلق به مجموعهٔ بازی چون G_p مشمول A است . دراین صورت ، ثابت کنید A باز است .

حل. به‌ازای هر $p\in A$ ، $p\in G_p\subset A$. پس $\bigcup\{G_p : p\in A\} = A$ ؛ و درنتیجه ، A اجتماع مجموعه‌هایی باز است و لذا ، طبق **[O_2]** ، باز می‌باشد .

۸ . فرض کنید $\mathcal{T}$ رده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد که با شمول مجموعه‌ها کلی مرتب شده است . نشان دهید $\mathcal{T}$ در **[O_3]** صدق می‌کند ؛ یعنی ، اشتراک هر دو عضو $\mathcal{T}$ متعلق به $\mathcal{T}$ است .

حل. فرض کنیم $A,B\in\mathcal{T}$. چون $\mathcal{T}$ با شمول مجموعه‌ها کلی مرتب شده است ،

$A \cap B = A$ یا $A \cap B = B$.

در هرحالت ، $A \cap B \in \mathcal{T}$ ؛ و درنتیجه ، $\mathcal{T}$ در $[\mathbf{O_3}]$ صدق می‌کند .

۹ . فرض‌کنید $\mathcal{T}$ رده‌ای از زیر مجموعه‌های $\mathbf{R}$ باشد که از $\mathbf{R}$ ، $\emptyset$ ، و جمیع بازه‌های نامتناهی و باز $E_a = (a, \infty)$ که $a \in \mathbf{R}$ تشکیل شده است . نشان دهید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر $\mathbf{R}$ است .

حل . چون $\mathbf{R}$ و $\emptyset$ متعلق به $\mathcal{T}$ اند ، $\mathcal{T}$ در $[\mathbf{O_1}]$ صدق می‌کند . توجه کنید که $\mathcal{T}$ با شمول مجموعه‌ها کلی مرتب شده است ؛ درنتیجه ، $\mathcal{T}$ در $[\mathbf{O_3}]$ نیز صدق می‌کند .
حال فرض کنیم $\mathcal{A}$ زیر رده‌ای از $\mathcal{T} \setminus \{X, \emptyset\}$ باشد ؛ یعنی ، $\mathcal{A} = \{E_i : i \in I\}$ که در آن I مجموعه‌ای است از اعداد حقیقی . نشان می‌دهیم که $\cup_i E_i$ متعلق به $\mathcal{T}$ است . گوییم هرگاه I از پایین کراندار نباشد ، یعنی $\inf(I) = -\infty$ ، آنگاه $\cup_i E_i = \mathbf{R}$.
هرگاه I از پایین کراندار باشد ، مثلاً $\inf(I) = i_0$ ، آنگاه $\cup_i E_i = (i_0, \infty) = E_{i_0}$.
در هر حالت ، $\cup_i E_i \in \mathcal{T}$ ، و $\mathcal{T}$ در $[\mathbf{O_2'}]$ صدق می‌کند .

۱۰ . فرض‌کنید $\mathcal{T}$ رده‌ای از زیر مجموعه‌های $\mathbf{N}$ مرکب از $\emptyset$ و تمام زیر مجموعه‌های $\mathbf{N}$ به شکل $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ که $n \in \mathbf{N}$ باشد .

(یک) نشان دهید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر $\mathbf{N}$ است .

(دو) مجموعه‌های باز شامل عدد صحیح و مثبت 6 را بنویسید .

حل

(یک) چون $\emptyset$ و $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} = E_1$ متعلق‌به $\mathcal{T}$ اند ، پس $\mathcal{T}$ در $[\mathbf{O_1}]$ صدق می‌کند . بعلاوه ، چون $\mathcal{T}$ با شمول مجموعه‌ها کلی مرتب شده است ، $\mathcal{T}$ در $[\mathbf{O_3}]$ نیز صدق می‌نماید .
حال فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ زیر رده‌ای از $\mathcal{T} \setminus \{\mathbf{N}, \emptyset\}$ باشد ؛ یعنی ، $\mathcal{A} = \{E_n : n \in I\}$ که در آن I مجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت است . توجه کنید که I شامل کوچکترین عدد صحیح و مثبت مانند n_0 است و

$$\cup\{E_n : n \in I\} = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\} = E_{n_0},$$

که متعلق‌به $\mathcal{T}$ است . لذا ، $\mathcal{T}$ در $[\mathbf{O_2'}]$ صدق می‌کند ؛ و درنتیجه ، $\mathcal{T}$ یک‌توپولوژی بر $\mathbf{N}$ است .

(دو) چون مجموعه‌های باز و ناتهی به شکل

$$E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

هستند که $n \in \mathbf{N}$ ، پس مجموعه‌های باز شامل عدد صحیح و مثبت 6 عبارتند از

$$E_1 = \mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\} \qquad E_4 = \{4,5,6,\ldots\}$$
$$E_2 = \{2,3,4,\ldots\} \qquad E_5 = \{5,6,7,\ldots\}$$
$$E_3 = \{3,4,5,\ldots\} \qquad E_6 = \{6,7,8,\ldots\}$$

نقاط انباشتگی ، مجموعه‌های مشتق

۱۱ . فرض‌کنید $\mathcal{T}$ توپولوژیی بر $\mathbf{N}$ باشدکه ، مثل مسئلهٔ ۱۰ ، از $\emptyset$ و همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbf{N}$ به شکل $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ تشکیل شده است .

(یک) نقاط انباشتگی مجموعهٔ $A = \{4, 13, 28, 37\}$ را پیدا کنید .

(دو) زیر مجموعه‌هایی از $\mathbf{N}$ مانند E را مشخص کنید که $E' = \mathbf{N}$.

حل

(یک) می‌بینیم که مجموعه‌های باز شامل هر نقطهٔ $p \in \mathbf{N}$ مجموعه‌های E_i اند که $i \leq p$. هرگاه $n_0 \leq 36$ ، هر مجموعهٔ باز شامل n_0 شامل $37 \in A$ ، که غیر از n_0 است ، نیزهست . درنتیجه ، $n_0 \leq 36$ یک نقطهٔ حدی A می‌باشد . از سوی دیگر ،اگر $n_0 > 36$ ، مجموعهٔ باز $E_{n_0} = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$ شامل نقطه‌ای از A غیر از n_0 نیست . لذا ، $n_0 > 36$ نقطهٔ حدی A نمی‌باشد . بنابراین ، مجموعهٔ مشتق A عبارت است از $A' = \{1, 2, 3, \ldots, 34, 35, 36\}$.

(دو) هرگاه E زیر مجموعه‌ای‌نامتناهی از $\mathbf{N}$ باشد ، E از بالا کراندار نیست . در نتیجه، هرمجموعهٔ‌بازشامل $p \in \mathbf{N}$ نقاطی‌از E غیراز p رادارد . بنابراین، $E' = \mathbf{N}$.
از آن سو ، اگر E متناهی باشد ، E از بالا کراندار است ؛ مثلاً" ، به $n_0 \in \mathbf{N}$. پس مجموعهٔ بازی چون E_{n_0+1} هست که نقطه‌ای از E را ندارد . از اینرو ، $n_0 + 1 \in \mathbf{N}$ نقطهٔ حدی E نیست؛ و درنتیجه ، $E' \neq \mathbf{N}$.

۱۲ . فرض کنید A زیر مجموعهٔ فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ باشد . چه وقت $p \in X$ نقطهٔ حدی A نیست ؟

حل . $p \in X$ نقطهٔ حدی A است اگفگر هر همسایگی باز p نقاطی از A غیر از

p را دارا باشد؛ یعنی،

$p \in G$ و $G \in \mathcal{T}$ ایجاب کنند که $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$.

درنتیجه، p درصورتی نقطهٔ حدی A نیست که مجموعهٔ بازی چون G باشد بطوری کـه

$p \in G$ و $(G \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset$،

یا، معادلاً،

$p \in G$ و $G \cap A = \emptyset$ یا $G \cap A = \{p\}$،

یا، معادلاً،

$p \in G$ و $G \cap A \subset \{p\}$.

۱۳ . فرض کنید A زیر مجموعهٔ فضای توپولوژیک و مجزای X باشد، و نشان دهیدکه مجموعهٔ مشتق A' تهی است.

حل. فرض کنیم p نقطهٔ دلخواهی در X باشد. به‌یاد می‌آوریم که هر زیرمجموعهٔ یک فضای مجزا باز است. پس، بخصوص، مجموعهٔ یکانی $G = \{p\}$ زیرمجموعهٔ بازی از X است. اما

$p \in G$ و $G \cap A = (\{p\} \cap A) \subset \{p\}$.

درنتیجه، طبق مسئلهٔ فوق، به‌ازای هر $p \in X$، $p \notin A'$؛ یعنی، $A' = \emptyset$.

۱۴ . توپولوژی

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$$

بر $X = \{a,b,c,d,e\}$ را درنظر بگیرید، و مجموعه‌های مشتق (یک) $A = \{c,d,e\}$ و (دو) $B = \{b\}$ را مشخص کنید.

حل

(یک) توجه کنید که $\{a,b\}$ و $\{a,b,e\}$ زیر مجموعه‌های بازی از X هستند و

$a, b \in \{a,b\}$ و $\{a,b\} \cap A = \emptyset$،

$e \in \{a,b,e\}$ و $\{a,b,e\} \cap A = \{e\}$.

لذا، a ، b ، و e نقاط حدی A هستند. ازآن‌سو، هر نقطهٔ دیگر X یک نقطهٔ حدی A است، زیرا هر مجموعهٔ باز شامل آن نقطه‌ای از A غیر از آن را دارد.

بنابراین ، $A' = \{c, d\}$.

(دو) توجه کنید که $\{a\}$ ، $\{a, b\}$ ، و $\{a, c, d\}$ زیر مجموعه‌های بازی از X هستند و

$$a \in \{a\} \text{ و } \{a\} \cap B = \emptyset ،$$

$$b \in \{a, b\} \text{ و } \{a, b\} \cap B = \{b\} ،$$

$$c, d \in \{a, c, d\} \text{ و } \{a, c, d\} \cap B = \emptyset .$$

لذا ، a ، b ، c ، و d نقاط حدی $B = \{b\}$ نیستند . اما e نقطهٔ حدی B است ، زیرا مجموعه‌های باز شامل e عبارتند از $\{a, b, e\}$ و X و هریک شامل نقطهٔ $b \in B$ متفاوت با e می‌باشند . بنابراین ، $B' = \{e\}$.

۱۵ . ثابت کنید اگر A زیر مجموعهٔ B باشد ، هر نقطهٔ حدی A نقطهٔ حدی B نیز هست ؛ یعنی ، $A \subset B$ ایجاب می‌کند که $A' \subset B'$.

حل . به‌یاد می‌آوریم که $p \in A'$ اگرو‌فقط اگر به‌ازای هر مجموعهٔ باز G شامل p ، $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$. اما $B \supset A$. پس

$$(G \setminus \{p\}) \cap B \supset (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset .$$

درنتیجه ، $p \in A'$ ایجاب می‌کند که $p \in B'$ ؛ یعنی ، $A' \subset B'$.

۱۶ . فرض کنید $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دو توپولوژی بر X باشند بطوری که $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ ؛ یعنی ، هر زیر مجموعهٔ $\mathcal{T}_1$ ــ باز X یک زیر مجموعهٔ $\mathcal{T}_2$ ــ باز X نیز باشد . بعلاوه ، A زیر مجموعهٔ دلخواهی از X باشد .

(یک) نشان دهیدکه‌هر $\mathcal{T}_2$ ــ نقطهٔ حدی A یک $\mathcal{T}_1$ ــ نقطهٔ حدی A نیز هست ؛

(دو) فضایی بسازید که درآن $\mathcal{T}_1$ ــ نقطهٔ حدی $\mathcal{T}_2$ ــ نقطهٔ حدی نباشد .

حل

(یک) فرض کنید p یک $\mathcal{T}_2$ ــ نقطهٔ حدی A باشد ؛ یعنی ، به‌ازای هر $G \in \mathcal{T}_2$ که $p \in G$ ، $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$. اما $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ ؛ درنتیجه ، بخصوص ، به‌ازای‌هر $G \in \mathcal{T}_1$ که $p \in G$ ، $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ ؛ یعنی ، p یک $\mathcal{T}_1$ ــ نقطهٔ حدی A می‌باشد .

(دو) توپولوژی معمولی $\mathcal{U}$ و توپولوژی مجزای $\mathcal{D}$ را بر $\mathbf{R}$ درنظر می‌گیریم . توجه کنید که ، چون $\mathcal{D}$ شامل هر زیر مجموعهٔ $\mathbf{R}$ است ، $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$. طبق مسئلهٔ ۱۳ ، 0

یک ρ ــ نقطهٔ حدی $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ نیست، چراکه A' تهی است. اما 0 نقطهٔ حدی A نسبت به توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}$ هست.

۱۷ . فرض کنید A و B دو زیر مجموعهٔ فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ باشند، و ثابت کنید $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

حل. با استفاده از مسئلهٔ ۱۵،

$A \subset A \cup B$ ایجاب می‌کند که $A' \subset (A \cup B)'$.

$B \subset A \cup B$ ایجاب می‌کند که $B' \subset (A \cup B)'$.

درنتیجه، $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$ ، و فقط کافی است نشان دهیم

$$(A \cup B)' \subset A' \cup B'.$$

فرض کنیم $p \notin A' \cup B'$. پس $\exists G, H \in \mathcal{T}$ بطوری که

$p \in G$ و $G \cap A \subset \{p\}$ و $p \in H$ و $H \cap B \subset \{p\}$.

اما $G \cap H \in \mathcal{T}$ ، $p \in G \cap H$ ، و

$$(G \cap H) \cap (A \cup B) = (G \cap H \cap A) \cup (G \cap H \cap B) \subset (G \cap A) \cup (H \cap B) \subset \{p\} \cup \{p\} = \{p\}.$$

لذا، $p \notin (A \cup B)'$ ؛ و درنتیجه، $(A \cup B)' \subset (A' \cup B')$.

مجموعه‌های بسته، عمل بست، مجموعه‌های چگال

۱۸ . توپولوژی

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

بر $X = \{a, b, c, d, e\}$ را درنظر بگیرید.

(یک) زیر مجموعه‌های بستهٔ X را بنویسید.

(دو) بست مجموعه‌های $\{a\}$ ، $\{b\}$ ، و $\{c, e\}$ را مشخص کنید.

(سه) چه مجموعه‌هایی در (دو) در X چگال‌اند؟

حل

(یک) یک مجموعه‌بسته است اگرگر متمم آن باز باشد. لذا، متمم هر مجموعه در $\mathcal{T}$ را می‌نویسیم:

$$\emptyset,\ X,\ \{b, c, d, e\},\ \{c, d, e\},\ \{b, e\},\ \{e\},\ \{c, d\}.$$

(دو) بست $\bar{A}$ هر مجموعهٔ A اشتراک تمام زبر مجموعه‌های بستهٔ A است. تنها

زبر مجموعهٔ بستهٔ $\{b\}$ مجموعهٔ $\{a\}$ مجموعهٔ X است؛ زبر مجموعه‌های بستهٔ $\{b\}$ عبارتند از $\{b,e\}$ ، $\{b,c,d,e\}$ ، و X ؛ و زبر مجموعه‌های بستهٔ $\{c,e\}$ عبارتند از $\{c,d,e\}$ ، $\{b,c,d,e\}$ ، و X . بنابراین ،

$$\overline{\{a\}} = X, \quad \overline{\{b\}} = \{b,e\}, \quad \overline{\{c,e\}} = \{c,d,e\}.$$

(سه) مجموعهٔ A در X چگال است اگرگر $\bar{A} = X$. درنتیجه ، $\{a\}$ تنها مجموعهٔ چگال می‌باشد .

۱۹ . فرض‌کنید $\mathcal{T}$ توپولوژیی‌بر $\mathbf{N}$ باشد که ،مثل‌مسئلهٔ ۱۰ ، از $\emptyset$ و همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbf{N}$ به شکل $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ که $n \in \mathbf{N}$ تشکیل شده است .

(یک) زیر مجموعه‌های بستهٔ $(\mathbf{N}, \mathcal{T})$ را مشخص کنید .

(دو) بست مجموعه‌های $\{7, 24, 47, 85\}$ و $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ را معین کنید .

(سه) زیر مجموعه‌هایی از $\mathbf{N}$ را که در آن چگال هستند مشخص نمایید .

حل

(یک) یک‌مجموعه‌بسته است اگفگر متمم آن باز باشد . لذا ، زیر مجموعه‌های بستهٔ $\mathbf{N}$ عبارتند از :

$$\mathbf{N}, \ \emptyset, \ \{1\}, \ \{1,2\}, \ \{1,2,3\}, \ \ldots, \ \{1,2,\ldots,m\}, \ \ldots$$

(دو) بست یک مجموعه کوچکترین زبر مجموعهٔ بستهٔ آن است . در نتیجه ،

$$\overline{\{7,24,47,85\}} = \{1,2,\ldots,84,85\}, \qquad \overline{\{3,6,9,12,\ldots\}} = \{1,2,3,\ldots\} = \mathbf{N}.$$

(سه) هرگاه زیر مجموعهٔ A از $\mathbf{N}$ نامتناهی باشد ، یا معادلا" بی‌کران باشد ، $\bar{A} = \mathbf{N}$ ؛ یعنی ، A در $\mathbf{N}$ چگال است . هرگاه A متناهی باشد ، بست آن مساوی $\mathbf{N}$ نیست ؛ یعنی ، A در $\mathbf{N}$ چگال نمی‌باشد .

۲۰ . فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژیی بر $\mathbf{R}$ باشد که از $\mathbf{R}$ ، $\emptyset$ ، و تمام بازه‌های نامتناهی وباز $E_a = (a, \infty)$ که $a \in \mathbf{R}$ تشکیل شده است .

(یک) زیر مجموعه‌های بستهٔ $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ را معین کنید .

(دو) بست‌مجموعه‌های $[3,7)$ ، $\{7, 24, 47, 85\}$ ،و $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ را مشخص نمایید .

حل

(یک) یک مجموعه بسته‌است اگفگر متمم آن باز باشد . لذا ، زیر مجموعه‌های‌بستهٔ

$(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ عبارتند از $\emptyset$ ، $\mathbf{R}$ ، و تمام بازه‌های نامتناهی و بستهٔ $E_a^c = (-\infty, a]$.

(دو) بست یک مجموعه کوچکترین زیر مجموعهٔ بستهٔ آن است . درنتیجه ،

$$\overline{[3,7)} = (-\infty, 7], \quad \overline{\{7, 24, 47, 85\}} = (-\infty, 85], \quad \overline{\{3, 6, 9, 12, \ldots\}} = (-\infty, \infty) = \mathbf{R}.$$

۲۱ . فرض کنید X یک فضای توپولوژیک مجزا باشد .

(یک) بست هر زیر مجموعهٔ A از X را معین کنید .

(دو) زیر مجموعه‌های چگال X را مشخص نمایید .

حل

(یک) یادآورمی‌شویم‌که ، درفضای مجزای X ، هر $A \subset X$ بسته است ؛ درنتیجه ، $\bar{A} = A$.

(دو) A در X چگال‌است اگ‌فقط‌اگر $\bar{A} = X$. اما $\bar{A} = A$ ؛ درنتیجه ، X تنها زیر مجموعهٔ چگال X است .

۲۲ . فرض کنید X یک فضای نامجزا باشد . (یک) زیرمجموعه‌های بستهٔ X را تعیین کنید . (دو) بست هر زیرمجموعهٔ A از X را تعیین کنید . (سه) زیرمجموعه‌های چگال X را معین نمایید .

حل

(یک) یادآور می‌شویم که تنها زیرمجموعه‌های باز فضای نامجزای X عبارتند از X و $\emptyset$ ؛ از اینرو ، زیرمجموعه‌های بستهٔ X نیز X و $\emptyset$ می‌باشند .

(دو) هرگاه $A = \emptyset$ ، آنگاه $\bar{A} = \emptyset$. هرگاه $A \neq \emptyset$ ، آنگاه X تنها زیرمجموعهٔ X است ؛ درنتیجه ، $\bar{A} = X$. یعنی ، به‌ازای هر $A \subset X$ ،

$$\bar{A} = \begin{cases} \emptyset \text{ ، اگر } A = \emptyset \\ X \text{ ، اگر } A \neq \emptyset \end{cases}$$

(سه) $A \subset X$ در X چگال‌است اگ‌فقط‌اگر $\bar{A} = X$. لذا ، هر زیرمجموعهٔ ناتهی X در X چگال می‌باشد .

۲۳ . قضیهٔ ۴.۵ را ثابت کنید : زیر مجموعهٔ A از فضای توپولوژیک X بسته است اگر و

فقط اگر A همهٔ نقاط انباشتگی خود را شامل باشد؛ یعنی، $A' \subset A$.

حل. فرض کنیم A بسته باشد، و $p \notin A$ ؛ یعنی، $p \in A^c$. اما A^c ، یعنی متمم یک مجموعهٔ بسته، باز است. در نتیجه، $p \notin A'$ ، زیرا A^c باز است بطوری که
$$p \in A^c \text{ و } A^c \cap A = \emptyset .$$
لذا، اگر A بسته باشد، $A' \subset A$.

حال فرض کنیم $A' \subset A$. نشان می‌دهیم که A^c باز است. فرض کنیم $p \in A^c$. پس $p \notin A'$. درنتیجه، مجموعهٔ بازی چون G هست بطوری که
$$p \in G \text{ و } (G \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset .$$
اما $p \notin A$. پس
$$G \cap A = (G \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset .$$
در نتیجه، $G \subset A^c$. لذا، p یک نقطهٔ درونی A^c است؛ و درنتیجه، A^c باز می‌باشد.

۲۴. ثابت کنید اگر F یک زیر مجموعهٔ بستهٔ A باشد، $A' \subset F$.

حل. بنابرمسئلهٔ ۱۵، $A \subset F$ ایجاب می‌کندکه $A' \subset F'$. اما، طبق قضیهٔ ۴۰۵، چون F بسته است، $F' \subset F$. بنابراین، $A' \subset F' \subset F$ ، که $A' \subset F$ را ایجاب خواهد کرد.

۲۵. ثابت کنید $A \cup A'$ یک مجموعهٔ بسته است.

حل. فرض کنیم $p \in (A \cup A')^c$. چون $p \notin A'$ ، مجموعهٔ بازی چون G هست که $p \in G$ و $G \cap A$ مساوی $\emptyset$ یا $\{p\}$ است.

بهرحال، $p \notin A$. درنتیجه، بخصوص، $G \cap A = \emptyset$.

همچنین، حکم می‌کنیم که $G \cap A' = \emptyset$. چرا که اگر $g \in G$ ،
$$g \in G \text{ و } G \cap A = \emptyset$$
که G مجموعه‌ای باز است. درنتیجه، $g \notin A'$ ؛ ولذا $G \cap A' = \emptyset$.
بنابراین،
$$G \cap (A \cup A') = (G \cap A) \cup (G \cap A') = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset ;$$

و درنتیجه ، $G \subset (A \cup A')^c$. پس ، p یک نقطهٔ درونی $(A \cup A')^c$ است؛ و لذا ، این یک مجموعهٔ باز است . بنابراین ، $A \cup A'$ بسته می‌باشد .

۲۶ . قضیهٔ ۶.۵ را ثابت کنید : $\bar{A} = A \cup A'$.

حل . چون $A \subset \bar{A}$ و $\bar{A}$ بسته‌است ، $A' \subset (\bar{A})' \subset \bar{A}$ ؛ و درنتیجه ، $A \cup A' \subset \bar{A}$. اما $A \cup A'$ مجموعه‌ای بسته وشامل A است، پس $A \subset \bar{A} \subset A \cup A'$. بنابراین ، $\bar{A} = A \cup A'$.

۲۷ . ثابت کنید هرگاه $A \subset B$ ، آنگاه $\bar{A} \subset \bar{B}$.

حل . هرگاه $A \subset B$ ، آنگاه ، بنابر مسئلهٔ ۱۵ ، $A' \subset B'$. لذا ، $A \cup A' \subset B \cup B'$ یا ، طبق مسئلهٔ قبل ، $\bar{A} \subset \bar{B}$.

۲۸ . ثابت کنید $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

حل . با استفاده از مسئلهٔ قبل ، $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ و $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. درنتیجه ، $(\bar{A} \cup \bar{B}) \subset \overline{A \cup B}$. اما $(A \cup B) \subset (\bar{A} \cup \bar{B})$ ؛ یعنی ، جزء یک مجموعهٔ بسته زیرا اجتماع دو مجموعهٔ بسته است . پس (حکم ۵.۵) $(A \cup B) \subset \overline{A \cup B} \subset (\bar{A} \cup \bar{B})$ ؛ و لذا ، $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

۲۹ . حکم ۷.۵ راثابت‌کنید : (یک) $\bar{\emptyset} = \emptyset$ ؛ (دو) $A \subset \bar{A}$ ؛ (سه) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ؛ و (چهار) $(A^-)^- = A^-$.

حل

(یک) و (چهار) . $\emptyset$ و $\bar{A}$ بسته‌اند ؛ درنتیجه ، با بستهای خود برابرند .

(دو) $A \subset A \cup A' = \bar{A}$ (مسئلهٔ ۲۶) .

(سه) مسئلهٔ قبل

درون ، برون ، کرانه

۳۰ . توپولوژی

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$$

بر $X = \{a,b,c,d,e\}$ را درنظر می‌گیریم .

(یک) نقاط درونی زیر مجموعهٔ $A = \{a,b,c\}$ از X را بیابید .

(دو) نقاط برونی A را پیدا کنید .

(سه) نقاط کرانه‌ای A را بیابید .

حل

(یک) نقاط a و b نقاط درونی A اند ، زیرا

$$a,b \in \{a,b\} \subset A = \{a,b,c\},$$

که درآن $\{a,b\}$ یک‌مجموعهٔ‌باز است ؛ یعنی ، هریک از این نقاط به مجموعهٔ بازی مشمول A تعلق دارد . توجه کنید که c یک نقطهٔ درونی A نیست ، زیرا c به‌هر مجموعهٔ‌بازمشمول A متعلق نیست . بنابراین ، $\text{int}(A) = \{a,b\}$ درون A می‌باشد .

(دو) متمم A مساوی $A^c = \{d,e\}$ است . d و e نقاط درونی A^c نیستند ، زیرا هیچیک به هر زیر مجموعهٔ باز $A^c = \{d,e\}$ تعلق ندارد . لذا ، $\text{int}(A^c) = \emptyset$ ؛ یعنی ، A نقطهٔ برونی ندارد .

(سه) کرانهٔ $\text{b}(A)$ ی A از نقاطی متشکل‌است‌که نه درون A هستند نه برون آن . درنتیجه ، $\text{b}(A) = \{c,d,e\}$.

۳۱ . حکم ۸.۵ را ثابت کنید : درون مجموعهٔ A اجتماع تمام زیر مجموعه‌های باز A است ؛ بعلاوه ، (یک) A° باز است ؛ (دو) A° بزرگترین زیر مجموعهٔ باز A است ؛ یعنی ، اگر G یک زیرمجموعهٔ‌باز A باشد ، $G \subset A^\circ \subset A$ ؛ و (سه) A باز است اگفگر $A = A^\circ$.

حل . فرض‌کنیم $\{G_i\}$ ردهٔ تمام زیر مجموعه‌های باز A باشد . اگر $x \in A^\circ$ ، x متعلق به زیر مجموعهٔ بازی از A است ؛ یعنی ،

i_0 ی هست بطوری که $x \in G_{i_0}$.

بنابراین ، $x \in \cup_i G_i$ ؛ودرنتیجه ، $A^\circ \subset \cup_i G_i$. از آن سو ، اگر $y \in \cup_i G_i$ ، به‌ازای i_0 ی $y \in G_{i_0}$. لذا ، $y \in A^\circ$ ، و $\cup_i G_i \subset A^\circ$. بنابراین ، $A^\circ = \cup_i G_i$.

(یک) $A^\circ = \cup_i G_i$ باز است ، زیرا اجتماع مجموعه‌های باز است .

(دو) اگر G زیر مجموعهٔ بازی از A باشد ، $G \in \{G_i\}$. در نتیجه ،

. $G \subset \cup_i G_i = A^\circ \subset A$

(سه) اگر A بازباشد، $A \subset A^\circ \subset A$ یا $A = A^\circ$. و اگر $A = A^\circ$ ، A باز است زیرا A° باز است .

۳۲ . فرض کنید A یک زیر مجموعهٔ حقیقی ناتهی از فضای نامجزای X باشد . درون ، برون ، و کرانهٔ A را پیدا کنید .

حل . X و $\emptyset$ تنهازیرمجموعه‌های باز X اند . چون $A \neq X$ ، $\emptyset$ تنها زیرمجموعهٔ باز A است . بنابراین ، $\text{int}(A) = \emptyset$. بهمین ترتیب ، $\text{int}(A^c) = \emptyset$ ؛ یعنی ، برون A تهی است . بنابراین ، $\text{b}(A) = X$.

۳۳ . فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژیی بر $\mathbf{R}$ باشد که از $\mathbf{R}$ ، $\emptyset$ ، و همهٔ بازه‌های نامتناهی وباز $E_a = (a, \infty)$ که $a \in \mathbf{R}$ تشکیل شده است . درون ، برون ، و کرانهٔ بازهٔ نامتناهی و بستهٔ $A = [7, \infty)$ را بیابید .

حل . چون درون A بزرگترین زیر مجموعهٔ باز A است ، $\text{int}(A) = (7, \infty)$. توجه کنید که $A^c = (-\infty, 7)$ شامل مجموعهٔ بازی جز $\emptyset$ نیست ؛ درنتیجه، $\text{int}(A^c) = \text{ext}(A) = \emptyset$. کرانه از دو نقطه‌تشکیل شده که به $\text{int}(A)$ یا $\text{ext}(A)$ تعلق ندارد . لذا ، $\text{b}(A) = (-\infty, 7]$.

۳۴ . قضیهٔ ۹.۵ را ثابت کنید : $\bar{A} = \text{int}(A) \cup \text{b}(A)$.

حل . چون $X = \text{int}(A) \cup \text{b}(A) \cup \text{ext}(A)$ ، $(\text{int}(A) \cup \text{b}(A))^c = \text{ext}(A)$ و کافی است نشان دهیم $(\bar{A})^c = \text{ext}(A)$.

فرض‌کنیم $p \in \text{ext}(A)$. پس مجموعهٔ بازی چون G هست بطوری که $p \in G \subset A^c$ ، که ایجاب می‌کند که $G \cap A = \emptyset$.

در نتیجه ، p نقطهٔ حدی A نیست ؛ یعنی ، $p \notin A'$ ، و $p \notin A$. بنابر این ، $p \notin A' \cup A = \bar{A}$. به‌عبارت دیگر ، $\text{ext}(A) \subset (\bar{A})^c$.

حال فرض کنیم $p \in (\bar{A})^c = (A \cup A')^c$. پس $p \notin A'$. درنتیجه ، مجموعهٔ بازی چون G هست بطوری که

$p \in G$ و $(G \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset$.

اما ، نیز ، $p \notin A$. درنتیجه ، $G \cap A = \emptyset$ و $p \in G \subset A^c$. بنابراین ، $p \in \text{ext}\,(A)$ ، و $(\bar{A})^c = \text{ext}\,(A)$.

۳۵ . با مثال نقض نشان دهید که تابع f که به هر مجموعه درون آن را مربوط می‌کند ، یعنی $f(A) = \text{int}\,(A)$ ، با تابع g که به هر مجموعه بست آن را مربوط می‌سازد ، یعنی $g(A) = \bar{A}$ ، تعویض نمی‌شود .

حل . مجموعهٔ اعدادگویای $\mathbf{Q}$ ، به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ با توپولوژی معمولی ، را درنظر می‌گیریم . به‌یاد می‌آوریم (مثال ۳.۵) که درون $\mathbf{Q}$ تهی است . پس

$$(g \circ f)(\mathbf{Q}) = g(f(\mathbf{Q})) = g(\text{int}\,(\mathbf{Q})) = g(\emptyset) = \bar{\emptyset} = \emptyset .$$

از آن سو ، $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ و درون $\mathbf{R}$ خود $\mathbf{R}$ است . درنتیجه ،

$$(f \circ g)(\mathbf{Q}) = f(g(\mathbf{Q})) = f(\bar{\mathbf{Q}}) = f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}.$$

بنابراین ، $g \circ f \neq f \circ g$ ، یا اینکه f و g تعویض نمی‌شوند .

همسایگیها ، دستگاههای همسایگی

۳۶ . توپولوژی

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$$

بر $X = \{a,b,c,d,e\}$ را درنظربگیرید ، و همسایگیهای (یک) نقطهٔ e ؛ (دو) نقطهٔ c را بنویسید .

حل

(یک) یک همسایگی e زبر مجموعهٔ یک مجموعهٔ باز شامل e است . مجموعه‌های بازشامل e عبارتنداز $\{a,b,e\}$ و X . زبرمجموعه‌های $\{a,b,e\}$ عبارتنداز $\{a,b,e\}$ ، $\{a,b,c,e\}$ ، $\{a,b,d,e\}$ ، و X ؛ و تنها زبر مجموعهٔ X خود X است . لذا ، ردهٔ همسایگیهای e ، یعنی دستگاه‌همسایگی e ، عبارت است از

$$\mathcal{N}_e = \{\{a,b,e\}, \{a,b,c,e\}, \{a,b,d,e\}, X\}.$$

(دو) مجموعه‌های‌بازشامل c عبارتند از $\{a,c,d\}$ ، $\{a,b,c,d\}$ ، و X . بنابراین ، دستگاه همسایگی c خواهد بود از

$$\mathcal{N}_c = \{\{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,c,d,e\}, X\}.$$

۳۷ . در فضای نامجزای X ، دستگاه همسایگی نقطهٔ p را مشخص کنید .

حل. X و $\emptyset$ تنهازیر مجموعه‌های باز X اند . درنتیجه ، X تنها مجموعهٔ باز شامل p است . بعلاوه ، X تنها زبر مجموعهٔ X می‌باشد . بنابراین ، $\mathcal{N}_p = \{X\}$.

۳۸ . ثابت کنیداشتراک $M \cap N$ هردوهمسایگی N و M نقطهٔ p نیزیک همسایگی p است.

حل. N و M همسایگیهای p هستند . پس مجموعه‌های بازی چون G و H وجود دارند بطوری که

$$p \in G \subset N \quad \text{و} \quad p \in H \subset M \cdot$$

لذا ، $p \in G \cap H \subset N \cap M$ ،و $G \cap H$ باز است ،یاکه $N \cap M$ یک همسایگی p می‌باشد .

۳۹ . ثابت کنید هر زبر مجموعهٔ M همسایگی N از p نیز یک همسایگی p است .

حل. N یک همسایگی p است . پس مجموعهٔ بازی چون G هست بطوری که $p \in G \subset N$. بنا به فرض ، $N \subset M$. از اینرو ،

$p \in G \subset N \subset M$ ، که ایجاب می‌کند که $p \in G \subset M$.

و درنتیجه ، M یک همسایگی p می‌باشد .

۴۰ . تعیین کنید هریک از بازه‌های زیر تحت توپولوژی معمولی برای خط حقیقی $\mathbf{R}$ یک همسایگی ۰ هست یا نه :

(یک) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ؛ (دو) $(-1, 0]$ ؛

(سه) $[0, \frac{1}{2})$ ؛ (چهار) $(0, 1]$.

حل

(یک) توجه کنید که $0 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ و $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ باز است . درنتیجه ، $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ یک همسایگی 0 می‌باشد .

(دو) و (سه) هر مجموعهٔ $\mathcal{U}$ ــ باز G شامل 0 بازهٔ بازی چون (a, b) شامل 0 را دربر دارد ؛ یعنی ، $a < 0 < b$. از اینرو ، G شامل نقاط بزرگتر و کوچکتراز 0 است . بنابر این ، $(-1, 0]$ و $[0, \frac{1}{2})$ هیچیک همسایگی 0 نیست .

(پنج) بازهٔ $(0,1]$ حتی شامل 0 نیست؛ و درنتیجه، همسایگی 0 نمی‌باشد.

۴۱ . ثابت کنید مجموعهٔ G باز است اگر و فقط اگر همسایگی هر نقطهٔ خود باشد.

حل. فرض کنیم G باز باشد. دراین صورت، هر نقطهٔ $p \in G$ در مجموعهٔ باز G مشمول G است. لذا، G همسایگی هر نقطهٔ خود می‌باشد.
بعکس، فرض کنیم G همسایگی هر نقطهٔ خود باشد. درنتیجه، به‌ازای هر $p \in G$ مجموعهٔ بازی‌چون G_p هست بطوری که $p \in G_p \subset G$. لذا، $G = \cup \{G_p : p \in G\}$؛ و باز است زیرا اجتماعی از مجموعه‌های باز می‌باشد.

۴۲ . حکم ۱۰.۵ را ثابت کنید: فرض‌کنید $\mathcal{N}_p$ دستگاه همسایگی نقطهٔ p در فضای توپولوژیک X باشد. دراین صورت،
(یک) $\mathcal{N}_p$ تهی نیست و p متعلق به هر عضو $\mathcal{N}_p$ است؛
(دو) اشتراک هر دو عضو $\mathcal{N}_p$ متعلق به $\mathcal{N}_p$ است؛
(سه) هر زبر مجموعهٔ یک عضو $\mathcal{N}_p$ متعلق به $\mathcal{N}_p$ است؛
(چهار) هرعضو $N \in \mathcal{N}_p$ زبرمجموعهٔ عضوی چون $G \in \mathcal{N}_p$ است که G همسایگی هر نقطهٔ خود می‌باشد.

حل
(یک) اگر $N \in \mathcal{N}_p$ ، مجموعهٔ بازی چون G هست بطوری که $p \in G \subset N$. در نتیجه، $p \in N$. توجه کنید که $X \in \mathcal{N}_p$ ، زیرا X یک مجموعهٔ باز شامل p است. بنابراین، $\mathcal{N}_p \neq \emptyset$.
(دو) در مسئلهٔ ۳۸ ثابت شده است.
(سه) در مسئلهٔ ۳۹ ثابت شده است.
(چهار) هرگاه $N \in \mathcal{N}_p$ ، N یک‌همسایگی p است. درنتیجه، مجموعهٔ بازی‌چون G هست بطوری که $p \in G \subset N$. اما، طبق مسئلهٔ قبل، $G \in \mathcal{N}_p$ و G همسایگی هر نقطهٔ خود می‌باشد.

زیرفضاها، توپولوژیهای نسبی

۴۳ . توپولوژی

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$$

بر $X = \{a,b,c,d,e\}$ را درنظر بگیرید، و اعضای توپولوژی نسبی $\mathcal{T}_A$ بر $A = \{a,c,e\}$ را بنویسید.

حل. $\mathcal{T}_A = \{A \cap G : G \in \mathcal{T}\}$؛ درنتیجه، اعضای $\mathcal{T}_A$ عبارتند از

$A \cap X = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cap \{a\} = \{a\} \qquad A \cap \{a,b\} = \{a\}$

$A \cap \{a,c,d\} = \{a,c\} \qquad A \cap \{a,b,c,d\} = \{a,c\} \qquad A \cap \{a,b,e\} = \{a,e\}.$

به‌عبارت دیگر، $\mathcal{T}_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{a,c\}, \{a,e\}\}$. توجه کنید که $\{a,c\}$ در X باز نیست، ولی در A به‌طور نسبی باز است؛ یعنی، $\mathcal{T}_A$ ـ باز است.

۴۴ . توپولوژی معمولی $\mathcal{U}$ بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ را درنظر بگیرید، و توپولوژی نسبی $\mathcal{U}_N$ را بر مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت $\mathbf{N}$ توصیف نمایید.

حل. می‌بینیم که، به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت $n_0 \in \mathbf{N}$،

$$\{n_0\} = \mathbf{N} \cap (n_0 - \tfrac{1}{2}, n_0 + \tfrac{1}{2}),$$

و $(n_0 - \frac{1}{2}, n_0 + \frac{1}{2})$ یک مجموعهٔ $\mathcal{U}$ ـ باز است. درنتیجه، هر زیر مجموعهٔ یکانی $\{n_0\}$ از $\mathbf{N}$ نسبت به $\mathbf{N}$ باز است. بنابراین، هر زیر مجموعهٔ $\mathbf{N}$ نسبت به $\mathbf{N}$ باز است، زیرا اجتماعی از مجموعه‌های یکانی می‌باشد. به‌عبارت دیگر، $\mathcal{U}_N$ توپولوژی مجزا بر $\mathbf{N}$ می‌باشد.

۴۵ . فرض کنید A یک زیر مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ـ باز $(X, \mathcal{T})$ بوده و $A \subset Y \subset X$. نشان دهید A نسبت به توپولوژی نسبی بر Y نیز باز است؛ یعنی، A یک زیر مجموعهٔ $\mathcal{T}_Y$ ـ باز Y می‌باشد.

حل. $\mathcal{T}_Y = \{Y \cap G : G \in \mathcal{T}\}$. اما $A \subset Y$ و $A \in \mathcal{T}$. درنتیجه، $A = Y \cap A \in \mathcal{T}_Y$.

۴۶ . توپولوژی معمولی $\mathcal{U}$ بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ را درنظر بگیرید، و تعیین کنید هریک از زیر مجموعه‌های زیر از $I = [0,1]$ نسبت به I باز است، یعنی $\mathcal{T}_I$ ـ باز است، یا نه:

(یک) $(\frac{1}{2}, 1]$ ؛ (دو) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ ؛

(سه) $(0, \frac{1}{2}]$.

حل

(یک) می‌بینیم که $(\frac{1}{2}, 1] = I \cap (\frac{1}{2}, 3)$ و $(\frac{1}{2}, 3)$ در $\mathbf{R}$ باز است. در نتیجه، $(\frac{1}{2}, 1]$ نسبت به I باز می‌باشد.

(دو) چون $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ در $\mathbf{R}$ باز است، یعنی $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \in \mathcal{U}$ ، بنابر مسئلهٔ قبل، نسبت به I باز است. درواقع، $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) = I \cap (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$.

(سه) چون $(0, \frac{1}{2}]$ اشتراک I با هیچ زیر مجموعهٔ $\mathcal{U}$ ــ باز $\mathbf{R}$ نیست، پس $\mathcal{U}_I$ ــ باز نمی‌باشد.

۴۷ . فرض کنید A زیر مجموعهٔ فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ باشد. نشان دهید که توپولوژی‌نسبت $\mathcal{T}_A$ خوش‌تعریف‌است. به‌عبارت‌دیگر، $\mathcal{T}_A = \{A \cap G : G \in \mathcal{T}\}$ یک توپولوژی بر A می‌باشد.

حل. چون $\mathcal{T}$ توپولوژی است، X و $\emptyset$ متعلق به $\mathcal{T}$ اند. درنتیجه، $A \cap X = A$ و $A \cap \emptyset = \emptyset$ هر دو متعلق به $\mathcal{T}_A$ اند، و $[\mathbf{O}_1]$ برقرار است.

حال فرض کنیم $\{H_i : i \in I\}$ زیر رده‌ای از $\mathcal{T}_A$ باشد. طبق تعریف $\mathcal{T}_A$ ، به‌ازای هر $i \in I$ مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ــ بازی‌چون G_i هست‌که $H_i = A \cap G_i$. بنابر قانون‌پخش‌پذیری اشتراک روی اجتماع،

$$\cup_i H_i = \cup_i (A \cap G_i) = A \cap (\cup_i G_i).$$

اما $\cup_i G_i \in \mathcal{T}$ ، زیرا اجتماع مجموعه‌هایی $\mathcal{T}$ ــ باز است. درنتیجه، $\cup_i H_i \in \mathcal{T}_A$. لذا، $\mathcal{T}_A$ در $[\mathbf{O}_2]$ نیز صدق می‌کند.

حال فرض کنیم $H_1, H_2 \in \mathcal{T}_A$. پس $\exists\, G_1, G_2 \in \mathcal{T}$ بطوری که $H_1 = A \cap G_1$ و $H_2 = A \cap G_2$. اما، چون $\mathcal{T}$ توپولوژی است، $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$. لذا،

$$H_1 \cap H_2 = (A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = A \cap (G_1 \cap G_2)$$

متعلق به $\mathcal{T}_A$ است. بنابراین، $\mathcal{T}_A$ در $[\mathbf{O}_3]$ نیز صدق می‌کند، و یک توپولوژی بر A می‌باشد.

۴۸ . فرض‌کنید $(X, \mathcal{T})$ زیرفضای $(Y, \mathcal{T}^*)$ و $(Y, \mathcal{T}^*)$ زیر فضای $(Z, \mathcal{T}^{**})$ باشد. نشان دهید $(X, \mathcal{T})$ نیز زیر فضای $(Z, \mathcal{T}^{**})$ می‌باشد.

حل . چون $X \subset Y \subset Z$ ، $(X, \mathcal{T})$ زیرفضای $(Z, \mathcal{T}^{**})$ استاگرو فقط اگر $\mathcal{T}_X^{**} = \mathcal{T}$.
فرض کنیم $G \in \mathcal{T}$. چون $\mathcal{T}_X^* = \mathcal{T}$ ، $\exists G^* \in \mathcal{T}_X^*$ که به‌ازای آن $G = X \cap G^*$ ، اما $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}_Y^{**}$. درنتیجه ، $\exists G^{**} \in \mathcal{T}^{**}$ بطوری‌که $G^* = Y \cap G^{**}$. لذا ، چون $X \subset Y$ ،

$$G = X \cap G^* = X \cap Y \cap G^{**} = X \cap G^{**}$$

درنتیجه ، $G \in \mathcal{T}_X^{**}$. بنابراین ، $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_X^{**}$.
حال فرض کنیم $G \in \mathcal{T}_X^{**}$ ؛ یعنـی ، $\exists H \in \mathcal{T}^{**}$ بطوری‌که $G = X \cap H$. امـا $Y \cap H \in \mathcal{T}_Y^{**} = \mathcal{T}^*$. درنتیجه ، $X \cap (Y \cap H) \in \mathcal{T}_X^* = \mathcal{T}$. چون

$$X \cap (Y \cap H) = X \cap H = G,$$

خواهیم داشت $G \in \mathcal{T}$. بنابراین ، $\mathcal{T}_X^{**} \subset \mathcal{T}$ ، و قضیه ثابت شده است .

مسائل گوناگون

۴۹ . فرض کنید $\mathcal{P}(X)$ مجموعهٔ توان ، یعنی ردهٔ زیر مجموعه‌های ، مجموعهٔ ناتهی X باشد . بعلاوه ، $k : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ نگاشت‌همانی باشد ؛ یعنی ، به‌ازای هر $A \subset X$ ، $k(A) = A$.

(یک) تحقیق کنید k در اصول بست کوراتسکی قضیهٔ ۱۲۰۵ صدق می‌کند .

(دو) توپولوژی القا شده به‌وسیلهٔ k بر X را مشخص نمایید .

حل

(یک) $k(\emptyset) = \emptyset$ ، پس **[K$_1$]** برقراراست . $k(A) = A \supset A$ ، پس **[K$_2$]** برقراراست . $k(A \cup B) = A \cup B = k(A) \cup k(B)$ ، پس **[K$_3$]** برقرار است . $k(k(A)) = k(A)$ ، پس **[K$_4$]** برقرار می‌باشد .

(دو) زیر مجموعهٔ $F \subset X$ در توپولوژی القا شده به‌وسیلهٔ k بسته است اگر و فقط اگر $k(F) = F$. اما ، به‌ازای‌هر $A \subset X$ ، $k(A) = A$. درنتیجه ، هر مجموعه‌بسته است و k توپولوژی مجزا القا خواهد کرد .

۵۰ . فرض‌کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی هم متناهی برخط حقیقی $\mathbf{R}$ بوده ، و $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ با جملات متمایزباشد . نشان دهید که $\langle a_n \rangle$ همگرا به‌هر عدد حقیقی $p \in \mathbf{R}$ اسـت .

حل . فرض کنیم G مجموعهٔ بازی شامل $p \in \mathbf{R}$ باشد . طبق تعریف توپولوژی

هم‌متناهی ، G^c یک مجموعهٔ متناهی است ؛ و درنتیجه ، فقط می‌تواند چند جمله از $\langle a_n \rangle$ را داشته‌باشد ، چراکه جملات متمایز می‌باشند . لذا ، G شامل تقریباً "همهٔ جملات $\langle a_n \rangle$ است ؛ و درنتیجه ، $\langle a_n \rangle$ همگرا به p می‌باشد .

۵۱ . فرض‌کنید **T** گردآیهٔ تمام توپولوژیها بر مجموعهٔ ناتهی X باشد که با شمول رده‌ها جزئی مرتب شده است . نشان دهید که **T** یک شبکهٔ تام است ؛ یعنی ، هرگاه **S** یک زیر گردآیهٔ ناتهی از **T** باشد ، sup (**S**) و inf (**S**) وجود خواهند داشت .

حل . فرض‌کنیم $\mathcal{T}_1 = \cap\{\mathcal{T} : \mathcal{T} \in \mathbf{S}\}$. طبق‌قضیهٔ ۱۰۵ ، $\mathcal{T}_1$ یک توپولوژی‌است . درنتیجه ، $\mathcal{T}_1 \in \mathbf{T}$ و $\mathcal{T}_1 = \inf(\mathbf{S})$.
حال‌فرض‌کنیم **B** گردآیهٔ تمام کرانهای بالایی **S** باشد . ملاحظه کنید که **B** ناتهی است زیرا ، مثلاً" ، توپولوژی مجزای $\mathcal{D}$ بر X متعلق به **B** است . فرض کنیم $\mathcal{T}_2 = \cap\{\mathcal{T} : \mathcal{T} \in \mathbf{B}\}$. باز ، طبق قضیهٔ ۱۰۵ ، $\mathcal{T}_2$ یک توپولوژی بر X است و ، علاوه براین ، $\mathcal{T}_2 = \sup(\mathbf{S})$.

۵۲ . فرض‌کنید X مجموعه‌ای‌ناتهی بوده‌و ، به‌ازای هر $p \in X$ ، $\mathcal{A}_p$ ردهٔ زیرمجموعه‌های X شامل p باشد .

(یک) تحقیق کنید که $\mathcal{A}_p$ در اصول همسایگی قضیهٔ ۱۱۰۵ صدق می‌کند .

(دو) توپولوژی القایی بر X را مشخص نمایید .

حل

(یک) چون $p \in X$ ، $X \in \mathcal{A}_p$ و ، درنتیجه ، $\mathcal{A}_p \neq \emptyset$. طبق فرض ، p متعلق به هر عضو $\mathcal{A}_p$ است . لذا ، $[\mathbf{A}_1]$ برقرار است .
هرگاه $M, N \in \mathcal{A}_p$ ، آنگاه $p \in M$ و $p \in N$ ؛ و درنتیجه ، $p \in M \cap N$. لذا ، $M \cap N \in \mathcal{A}_p$ ؛ و درنتیجه ، $[\mathbf{A}_2]$ برقرار است .
هرگاه $N \in \mathcal{A}_p$ و $N \subset M$ ، یعنی $p \in N \subset M$ ، آنگاه $p \in M$. پس $M \in \mathcal{A}_p$ ؛ و در نتیجه ، $[\mathbf{A}_3]$ برقرار است .
طبق‌تعریف $\mathcal{A}_p$ ، هر $A \subset X$ این خاصیت‌را دارد که به‌ازای هر $p \in A$ ، $A \in \mathcal{A}_p$. لذا ، $[\mathbf{A}_4]$ نیز برقرار است .

(دو) زیر مجموعهٔ $A \subset X$ در توپولوژی القایی باز است اگر و فقط اگر به‌ازای هر

$p \in A$ ، $A \in \mathcal{A}_p$. چون هرزیرمجموعهٔ X این خاصیت را دارد ، توپولوژی القایی بر X توپولوژی مجزا بر X است .

مسائل تکمیلی

فضای توپولوژیک

۵۳ . تمام توپولوژیهای ممکن بر مجموعهٔ $X = \{a, b\}$ را بنویسید .

۵۴ . قضیهٔ ۵ . ۱ را ثابت کنید : فرض کنید $\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$ گردآیه‌ای از توپولوژیها برمجموعهٔ X باشد . دراین صورت ، اشتراک $\cap_i \mathcal{T}_i$ نیز یک توپولوژی بر X است .

۵۵ . فرض کنید X یک مجموعهٔ نامتناهی بوده ، و $\mathcal{T}$ توپولوژیی بر X باشد که در آن تمام زیر مجموعه‌های نامتناهی X بازند . نشان دهید که $\mathcal{T}$ توپولوژی مجزا بر X است .

۵۶ . فرض کنید X مجموعه‌ای نامتناهی بوده ، و $\mathcal{T}$ از $\emptyset$ و تمام زیر مجموعه‌های X که متمم آنها حداکثر شمارشپذیر است تشکیل شده است .

(یک) ثابت کنید $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک است .

(دو) هرگاه X حداکثر شمارشپذیر باشد ، توپولوژی تعیین شده به‌وسیلهٔ $\mathcal{T}$ را توصیف کنید .

۵۷ . فرض کنید $\mathcal{T} = \{\mathbf{R}^2, \emptyset\} \cup \{G_k : k \in \mathbf{R}\}$ ردهٔ زیر مجموعه‌هایی از $\mathbf{R}^2$ باشد که

$$G_k = \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbf{R},\ x > y + k\}.$$

(یک) ثابت کنید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر $\mathbf{R}^2$ است .

(دو) اگر " $k \in \mathbf{R}$ " با " $k \in \mathbf{N}$ " یا " $k \in \mathbf{Q}$ " عوض شود ، آیا $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر $\mathbf{R}^2$ خواهد ماند ؟

۵۸ . ثابت کنید $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک است که درآن عنصرهای $\mathcal{T}$ عبارتند از $\emptyset$ و متممهای مجموعه‌هایی متناهی از خطوط و نقاط .

۵۹ . فرض کنید $\{p\}$ مجموعه‌ای یکانی باشد بطوری که $p \notin \mathbf{R}$ ؛ مثلاً ، $\{\mathbf{R}\}$. بعلاوه ، $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{p\}$ ، و $\mathcal{T}$ ردهٔ زیرمجموعه‌هایی از $\mathbf{R}^*$ باشد که از تمام زیرمجموعه‌های $\mathcal{U}$ ـ باز $\mathbf{R}$ و متممهای (نسبت‌به $\mathbf{R}^*$) تمام زیر مجموعه‌های $\mathcal{U}$ ـ بستهٔ $\mathbf{R}$ تشکیل شده است . ثابت کنید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر $\mathbf{R}^*$ است .

۶۰ . فرض کنید $\{p\}$ مجموعه‌ای یکانی باشد بطوری که $p \notin \mathbf{R}$ ، و $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{p\}$. بعلاوه ، $\mathcal{T}$ ردهٔ زیر مجموعه‌هایی از $\mathbf{R}^*$ باشد که از همهٔ زیر مجموعه‌های $\mathbf{R}$ و متممهای (نسبت به $\mathbf{R}^*$) تمام زیر مجموعه‌های متناهی $\mathbf{R}$ تشکیل شده است . ثابت کنید

$\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر $\mathbf{R}^*$ است.

نقاط انباشتگی، مجموعه‌های مشتق

۶۱. ثابت کنید $A' \cup B' = (A \cup B)'$.

۶۲. ثابت کنید هرگاه p نقطهٔ حدی A باشد، p نقطهٔ حدی $A \setminus \{p\}$ نیز هست.

۶۳. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هم متناهی باشد، و ثابت کنید به‌ازای هر زیر مجموعهٔ A از X، A' بسته می‌باشد.

۶۴. فضای توپولوژیک $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ را درنظر بگیرید که $\mathcal{T}$ از $\mathbf{R}$، $\emptyset$، و جمیع بازه‌های نامتناهی‌وباز $E_a = (a, \infty)$ که $a \in \mathbf{R}$ تشکیل‌شده است. مجموعهٔ مشتق (یک) بازهٔ $[4, 10)$؛ (دو) مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ را پیدا کنید.

۶۵. فرض‌کنید $\mathcal{T}$ توپولوژیی بر $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{p\}$ باشد که در مسئلهٔ ۵۹ تعریف شده‌است.

(یک) نقاط انباشتگی مجموعه‌های زیر را تعیین کنید:

(۱) بازهٔ باز (a, b)، $a, b \in \mathbf{R}$؛ (۲) بازهٔ باز و نامتناهی (a, ∞)، $a \in \mathbf{R}$؛ (۳) $\mathbf{R}$.

(دو) زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^*$ را که p نقطهٔ حدی آنهاست مشخص نمایید.

۶۶. فرض‌کنید $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دو توپولوژی بر مجموعهٔ X باشند، و $\mathcal{T}_1$ از $\mathcal{T}_2$ ضخیمترباشد؛ یعنی، $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

(یک) نشان دهید که هر نقطهٔ $\mathcal{T}_2$ ـ انباشتگی زیر مجموعهٔ A از X یک نقطهٔ $\mathcal{T}_1$ ـ انباشتگی نیز هست.

(دو) مثالی بسازید که در آن عکس (یک) برقرار نباشد.

مجموعه‌های بسته، بست یک مجموعه، زیر مجموعه‌های چگال

۶۷. یک فضای توپولوژیک نامجزا بسازید که درآن مجموعه‌های بسته همان مجموعه‌های باز باشند.

۶۸. ثابت کنید $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. مثالی بسازید که درآن تساوی برقرار نباشد.

۶۹. ثابت کنید $\bar{A} \setminus \bar{B} \subset (\overline{A \setminus B})$. مثالی بسازید که درآن تساوی برقرار نباشد.

۷۰. ثابت کنید هرگاه A باز باشد، $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.

۷۱. فرض کنید A یک زیر مجموعهٔ چگال $(X, \mathcal{T})$ بوده، و B یک زیر مجموعهٔ باز و ناتهی X باشد. دراین‌صورت، ثابت کنید $A \cap B \neq \emptyset$.

۷۲. فرض‌کنید $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دو توپولوژی بر X باشند و $\mathcal{T}_1$ از $\mathcal{T}_2$ ضخیمتر باشد. نشان

دهید که $\mathcal{T}_2$ ــ بست هر زیر مجموعهٔ A از X مشمول $\mathcal{T}_1$ ــ بست A است .

۷۳ . نشان دهید که هر زیر مجموعهٔ نامتناهی یک فضای هم‌متناهی و نامتناهی X در X چگال است .

۷۴ . نشان دهید که هر زیر مجموعهٔ باز و نامتناهی یک فضای نامجزای X در X چگال است .

درون ، برون ، کرانه

۷۵ . فرض کنید X یک فضای مجزا بوده و $A \subset X$ ، و مجموعه‌های زیر را پیدا کنید :
(یک) $\operatorname{int}(A)$ ؛ (دو) $\operatorname{ext}(A)$ ؛ و (سه) $\mathrm{b}(A)$.

۷۶ . ثابت کنید

(یک) $\mathrm{b}(A) \subset A$ اگر و فقط اگر A بسته باشد ؛

(دو) $\mathrm{b}(A) \cap A = \emptyset$ اگر و فقط اگر A باز باشد ؛

(سه) $\mathrm{b}(A) = \emptyset$ اگر و فقط اگر A هم باز و هم بسته باشد .

۷۷ . ثابت کنید اگر $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ ، $\mathrm{b}(A \cup B) = \mathrm{b}(A) \cup \mathrm{b}(B)$.

۷۸ . ثابت کنید

(یک) $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$ ؛ (دو) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$.

مثالی بسازید که درآن (دو) به‌صورت تساوی برقرار نباشد .

۷۹ . ثابت کنید $\mathrm{b}(A^\circ) \subset \mathrm{b}(A)$. مثالی بسازید که درآن تساوی برقرار نباشد .

۸۰ . نشان دهید که $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{ext}(A)$ الزاماً" در فضای X چگال نیست . (این مطلب درصورت $X = \mathbf{R}$ درست است .)

۸۱ . فرض کنید $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دو توپولوژی بر X باشند ، و $\mathcal{T}_1$ از $\mathcal{T}_2$ ضخیمتر باشد ؛ یعنی ، $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ ، و نیز $A \subset X$. دراین صورت ،

(یک) $\mathcal{T}_1$ ــ درون A زیر مجموعه‌ای از $\mathcal{T}_2$ ــ درون A است ؛

(دو) $\mathcal{T}_2$ ــ کرانهٔ A زیر مجموعه‌ای از $\mathcal{T}_1$ ــ کرانهٔ A است .

همسایگیها ، دستگاههای همسایگی

۸۲ . فرض‌کنید X یک فضای توپولوژیک هم متناهی باشد ، و نشان دهید هر همسایگی $p \in X$ یک مجموعهٔ باز است .

۸۳ . فرض کنید X یک فضای نامجزا باشد ، و دستگاه همسایگی $\mathcal{N}_p$ هر نقطهٔ $p \in X$ را مشخص نمایید .

۸۴ . نشان دهید که اگر $\mathcal{N}_p$ متناهی باشد، $\bigcap\{N : N\in\mathcal{N}_p\}$ متعلق به $\mathcal{N}_p$ است .

زیرفضاها ، توپولوژیهای نسبی

۸۵ . نشان دهید هر زیر فضای یک فضای مجزا نیز مجزا است .

۸۶ . نشان دهید هر زیر فضای یک فضای نامجزا نیز نامجزا است .

۸۷ . فرض کنید $(Y,\mathcal{T}_Y)$ زیر فضایی از $(X,\mathcal{T})$ باشد، و نشان دهید $E\subset Y$ ، $\mathcal{T}_Y$ ــ بسته است اگروفقط اگر $E = Y\cap F$ ، که درآن F یک زیر مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ــ بستهٔ X است .

۸۸ . فرض کنید $(A,\mathcal{T}_A)$ زیر فضایی از $(X,\mathcal{T})$ باشد، و ثابت کنید $\mathcal{T}_A$ از عضوهایی از $\mathcal{T}$ که مشمول A اند تشکیل شده است، یعنی $\mathcal{T}_A = \{G : G\subset A,\ G\in\mathcal{T}\}$ ، اگر و فقط اگر A یک زیر مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ــ باز X باشد .

۸۹ . فرض کنید $(Y,\mathcal{T}_Y)$ زیر فضایی از $(X,\mathcal{T})$ باشد، و به‌ازای هر زیر مجموعهٔ A از Y ، $\bar{A}$ و A° را بست و درون A نسبت به $\mathcal{T}$ و $(\bar{A})_Y$ و $(A^\circ)_Y$ رابست و درون A نسبت به $\mathcal{T}_Y$ بینگارید . ثابت‌کنید

(یک) $(\bar{A})_Y = \bar{A}\cap Y$ ؛ (دو) $A^\circ = (A^\circ)_Y\cap Y^\circ$.

۹۰ . فرض کنید A ، B ، و C زیر مجموعه‌هایی از فضای توپولوژیک X باشند بطوری‌که $C\subset A\cup B$ ، و ثابت کنید اگر A ، B ، و $A\cup B$ توپولوژی نسبی داشته باشند ، C نسبت به $A\cup B$ باز است اگر و فقط اگر $C\cap A$ نسبت به A و $C\cap B$ نسبت به B باز باشد .

تعاریف هم‌ارز از توپولوژی

۹۱ . قضیهٔ ۵ . ۱۱ را ثابت‌کنید : فرض کنید X یک مجموعهٔ ناتهی باشد، و به هر $p\in X$ ردهٔ $\mathcal{A}_p$ از زیرمجموعه‌های X طوری مربوط باشد که در اصول موضوع زیر صدق نماید :

[A₁] $\mathcal{A}_p$ تهی نبوده و p متعلق به هر عضو $\mathcal{A}_p$ باشد ؛

[A₂] اشتراک هر دو عضو $\mathcal{A}_p$ متعلق به $\mathcal{A}_p$ باشد ؛

[A₃] هر زبر مجموعهٔ یک عضو $\mathcal{A}_p$ متعلق به $\mathcal{A}_p$ باشد ؛

[A₄] هر عضو $N\in\mathcal{A}_p$ زبر مجموعهٔ عضوی چون $G\in\mathcal{A}_p$ باشد بطوری که به‌ازای هر $g\in G$ ، $G\in\mathcal{A}_g$.

دراین صورت ، یک و فقط یک توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X وجود دارد بطوری که $\mathcal{A}_p$ دستگاه $\mathcal{T}$ ــ همسایگی نقطهٔ $p\in X$ می‌باشد .

۹۲ . قضیهٔ ۱۲۰۵ را ثابت کنید : فرض کنید X یک مجموعهٔ ناتهـــی بوده ، و $k : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ در اصول بست کوراتسکی صدق کند :

$$[\mathbf{K}_1]\ \ k(\emptyset) = \emptyset,\ [\mathbf{K}_2]\ \ A \subset k(A),\ [\mathbf{K}_3]\ \ k(A \cup B) = k(A) \cup k(B),\ [\mathbf{K}_4]\ \ k(k(A)) = k(A).$$

دراین صورت ، یک و فقط یک توپولوژی مانند $\mathcal{T}$ بر X هست بطوری که $k(A)$ ، $\mathcal{T}$ ــ بست $A \subset X$ می‌باشد .

۹۳ . فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی بوده ، و $i : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ از خواص زیر برخوردار باشد :

(یک) $i(X) = X$ ؛ (دو) $i(A) \subset A$ ؛

(سه) $i(A \cup B) = i(A) \cup i(B)$ ؛ (چهار) $i(i(A)) = i(A)$.

در این صورت ، یک و فقط یک توپولوژی مانند $\mathcal{T}$ بر X هست بطوری که $i(A)$ ، $\mathcal{T}$ ــ درون $A \subset X$ می‌باشد .

۹۴ . فرض‌کنید X زیر مجموعه‌ای ناتهی بوده ، و $\mathcal{F}$ رده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد که از خواص زیر برخوردار است :

(یک) X و $\emptyset$ متعلق به $\mathcal{F}$ اند ؛

(دو) اشتراک هر تعداد از اعضای $\mathcal{F}$ متعلق به $\mathcal{F}$ است ؛

(سه) اجتماع هر دو عضو $\mathcal{F}$ متعلق به $\mathcal{F}$ است .

دراین صورت ، یک و فقط یک توپولوژی مانند $\mathcal{T}$ بر X هست بطوری که اعضای $\mathcal{F}$ دقیقاً " زیر مجموعه‌های $\mathcal{T}$ ــ بستهٔ X هستند .

۹۵ . فرض کنید یک همسایگی عدد حقیقی $p \in \mathbf{R}$ مجموعه‌ای باشد حاوی p و شامل تمام اعداد گویای بازهٔ بازی مثل (a, b) که $a < p < b$.

(یک) نشان‌دهید این همسایگیها در اصول همسایگی صدق می‌کنند ؛ و درنتیجه ، برخط حقیقی $\mathbf{R}$ یک توپولوژی تعریف می‌کنند .

(دو) نشان دهید هر مجموعه از اعداد گنگ نقطهٔ انباشتگی ندارد .

(سه) نشان دهید هر دنباله از اعداد گنگ ، نظیر $\langle \pi/2, \pi/3, \pi/4, \ldots \rangle$ ، همگرا نمی‌باشد .

جواب مسائل تکمیلی

۵۳ . $\{X, \emptyset\}$ ، $\{X, \{a\}, \emptyset\}$ ، $\{X, \{b\}, \emptyset\}$ ، و $\{X, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$.

۵۴ . (دو) توپولوژی مجزا .

۶۴ . (یک) $(-\infty, 10]$ ؛ (دو) $\mathbf{R}$.

۶۵ . (یک) : (۱) $[a, b]$ ؛ (۲) $[a, \infty) \cup \{p\}$ ؛ (۳) $\mathbf{R}^*$.

(دو) زیر مجموعه‌های بی‌کران $\mathbf{R}$.

۶۷ . $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}$, $X = \{a, b, c\}$.

۷۵ . (یک) A ؛ (دو) A^c ؛

(سه) $\emptyset$.

۸۰ . فرض کنید $X = \{a, b\}$ یک فضای نامجزا بوده و $A = \{a\}$.

پایه‌ها و زیرپایه‌ها[۶]

پایه برای یک توپولوژی

فرض کنیم $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. ردهٔ $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های باز X، یعنی $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$، یک **پایه** برای توپولوژی $\mathcal{T}$ است اگفگر

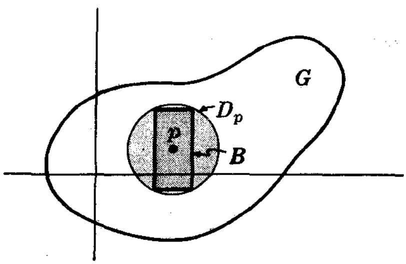
(یک) هر مجموعهٔ باز $G \in \mathcal{T}$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد.

به‌عبارت معادل، $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ یک پایه‌برای $\mathcal{T}$ است اگفگر

(دو) به‌ازای‌هر p درمجموعهٔ باز G، $B \in \mathcal{B}$ ای باشد بطوری که $p \in B \subset G$.

مثال ۱۰۱. بازه‌های باز یک پایه برای توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}$ را تشکیل می‌دهند. زیرا هرگاه $G \subset \mathbf{R}$ باز بوده و $p \in G$، طبق تعریف، بازهٔ بازی مانند (a, b) هست که $p \in (a, b) \subset G$. بهمین ترتیب، قرصهای باز یک پایه‌برای توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ تشکیل می‌دهند.

مثال ۲۰۱. مستطیلهای باز در $\mathbf{R}^2$، که اضلاعشان موازی محورهای x و y اند، نیزیک پایه مانند $\mathcal{B}$ برای توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ را تشکیل می‌دهند. زیرا فرض کنیم $G \subset \mathbf{R}^2$ باز بوده و $p \in G$. پس قرص بازی چون D_p به مرکز p هست که $p \in D_p \subset G$.



در این صورت، همانطورکه نمودار نشان داده، هر مستطیل $B \in \mathcal{B}$ که رئوسش بر کرانهٔ D_p باشد در $p \in B \subset D_p \subset G$ یا $p \in B \subset G$ صدق می‌کند. به‌عبارت دیگر، $\mathcal{B}$ در شرط (دو) فوق صدق خواهد کرد.

مثال ۳۰۱ . فضای مجزای $(X, \mathscr{D})$ را درنظر می‌گیریم. در این صورت، ردهٔ $\mathcal{B} = \{\{p\} : p \in X\}$ مرکب از تمام زیر مجموعه‌های یکانی X یک پایه برای توپولوژی مجزای $\mathscr{D}$ بر X است. زیرا هر مجموعهٔ یکانی $\{p\}$، $\mathscr{D}$ ـ باز است، چراکه هر $A \subset X$، $\mathscr{D}$ ـ باز است. بعلاوه، هر مجموعه اجتماعی از مجموعه‌های یکانی می‌باشد. در واقع، هر ردهٔ دیگر $\mathcal{B}^*$ از زیر مجموعه‌های X یک پایه‌برای $\mathscr{D}$ است اگر و فقط اگر یک زبر ردهٔ $\mathcal{B}$ باشد؛ یعنی، $\mathcal{B}^* \supset \mathcal{B}$.

حال این سوال را مطرح می‌کنیم: اگر ردهٔ $\mathcal{B}$ از زیر مجموعه‌های X در دست باشد، چه وقت $\mathcal{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی بر X است؟ واضح است که باید $X = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$، زیرا X در هر توپولوژی بر X باز است. مثال زیر نشان می‌دهد که شرطهای دیگری نیز لازم خواهند بود.

مثال ۴۰۱ . فرض کنیم $X = \{a, b, c\}$، و نشان می‌دهیم ردهٔ $\mathcal{B}$ مرکب از $\{a, b\}$ و $\{b, c\}$، یعنی $\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$، نمی‌تواند پایه‌برای یک توپولوژی بر X باشد. چرا که در این صورت $\{a, b\}$ و $\{b, c\}$ خود باز می‌شوند؛ و لذا، اشتراک آنها $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$ نیز باز می‌باشد. اما $\{b\}$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ نخواهد بود.

قضیهٔ زیر شرایط لازم و کافی برای آنکه رده‌ای از مجموعه‌ها پایه برای یک توپولوژی باشد را به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۱۰۶ . *فرض کنیم $\mathcal{B}$ رده‌ای از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ ناتهی X باشد. در این صورت، $\mathcal{B}$ پایه برای یک توپولوژی بر X است اگر و فقط اگر از دو خاصیت زیر برخوردار باشد:*

(یک) $X = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$؛

(دو) به‌ازای هر $B, B^* \in \mathcal{B}$، $B \cap B^*$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد یا، معادلاً، اگر $p \in B \cap B^*$، $\exists B_p \in \mathcal{B}$ بطوری که $p \in B_p \subset B \cap B^*$.

مثال ۱۰۵ . فرض کنیم $\mathcal{B}$ ردهٔ بازه‌های باز ــ بسته در $\mathbf{R}$ باشد :

$$\mathcal{B} = \{(a,b] : a,b \in \mathbf{R},\ a < b\}.$$

واضح است که $\mathbf{R}$ اجتماع اعضای $\mathcal{B}$ است ، زیرا هر عدد حقیقی متعلق به یک بازهٔ باز بسته است . بعلاوه ، اشتراک $(a,b] \cap (c,d]$ هر دو بازهٔ باز ــ بسته یا تهی است یا بازهٔ باز ــ بستهٔ دیگر . مثلاً ، همانطور که نمودار نشان داده ،

هرگاه $a < c < b < d$ ، آنگاه $(a,b] \cap (c,d] = (c,b]$.

لذا ، ردهٔ $\mathcal{T}$ مرکب از اجتماعهای بازه‌های باز ــ بسته یک توپولوژی بر $\mathbf{R}$ است ؛ یعنی ، $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر $\mathbf{R}$ می‌باشد . این توپولوژی **توپولوژی حد بالایی** بر $\mathbf{R}$ نامیده می‌شود . ملاحظه می‌کنیم که $\mathcal{T} \neq \mathcal{U}$.

بهمین نحو ، ردهٔ بازه‌های بسته ــ باز ، یعنی

$$\mathcal{B}^* = \{[a,b) \quad a,b \in \mathbf{R},\ a < b\}$$

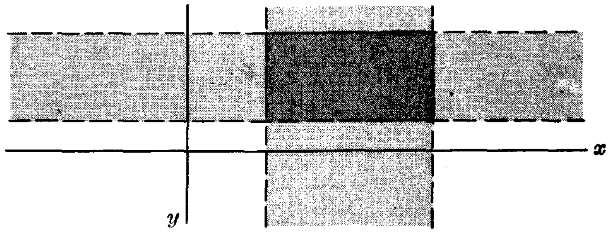
پایه برای یک توپولوژی مانند $\mathcal{T}^*$ بر $\mathbf{R}$ است ، که **توپولوژی حد پایینی** بر $\mathbf{R}$ نام دارد .

زیر پایه‌ها

فرض‌کنیم $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد . ردهٔ $\mathcal{S}$ از زیر مجموعه‌های باز X ، یعنی $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ ، یک **زیر پایه** برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X است اگفر اشتراکهای متناهی اعضای $\mathcal{S}$ یک پایه برای $\mathcal{T}$ تشکیل دهند .

مثال ۱۰۲ . می‌بینیم هر بازهٔ باز (a,b) در $\mathbf{R}$ اشتراک دو بازهٔ باز و نامتناهی (a,∞) و $(-\infty,b)$ است : $(a,b) = (a,\infty) \cap (-\infty,b)$. اما بازه‌های باز برای توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}$ پایه تشکیل می‌دهند . در نتیجه ، ردهٔ $\mathcal{S}$ مرکب از تمام بازه‌های باز و نامتناهی یک زیر پایه برای $\mathbf{R}$ خواهد بود .

مثال ۲۰۲ . اشتراک یک نوار باز نامتناهی قائم با یک نوار باز نامتناهی افقی در $\mathbf{R}^2$ یک مستطیل باز است بصورتی که در نمودار صفحه بعد نشان داده شده است .



اما ، همانطور که پیشتر دیدیم ، مستطیلهای باز یک پایه برای توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ تشکیل می‌دهند . لذا ، ردهٔ $\mathcal{S}$ مرکب از تمام نوارهای باز نامتناهی یک زیر پایه برای $\mathbf{R}^2$ خواهد بود .

توپولوژیهای تولید شده به وسیلهٔ رده‌هایی از مجموعه‌ها

فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ رده‌ای از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ ناتهی X باشد . همانطور که قبلاً دیدیم ، $\mathcal{A}$ ممکن است پایه برای یک توپولوژی بر X نباشد . لکن ، $\mathcal{A}$ همیشه یک توپولوژی بر X به معنی زیر **تولید** خواهد کرد .

قضیهٔ ۲۰۶ . *هر ردهٔ $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ ناتهی X زیر پایه‌ای است برای یک توپولوژی منحصر بفرد مانند $\mathcal{T}$ بر X . یعنی ، اشتراکهای متناهی اعضای $\mathcal{A}$ یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X را تشکیل می‌دهند .*

مثال ۱۰۳ . ردهٔ

$$\mathcal{A} \;=\; \{\{a, b\},\ \{b, c\},\ \{d\}\}$$

از زیر مجموعه‌های $X = \{a, b, c, d\}$ را درنظر می‌گیریم . اشتراکهای متناهی اعضای $\mathcal{A}$ ردهٔ

$$\mathcal{B} \;=\; \{\{a, b\},\ \{b, c\},\ \{d\},\ \{b\},\ \emptyset,\ X\}$$

را تشکیل می‌دهند (توجه کنید که $X \in \mathcal{B}$ زیرا ، طبق تعریف ، این مجموعه اشتراک متناهی اعضای $\mathcal{A}$ است .) با اجتماع گیری از اعضای $\mathcal{B}$ ، ردهٔ

$$\mathcal{T} \;=\; \{\{a, b\},\ \{b, c\},\ \{d\},\ \{b\},\ \emptyset,\ X,\ \{a, b, d\},\ \{b, c, d\},\ \{b, d\},\ \{a, b, c\}\}$$

به‌دست می‌آید ، که یک توپولوژی بر X است که به‌وسیلهٔ ردهٔ $\mathcal{A}$ تولید می‌شود .

مثال ۲۰۳ . فرض‌کنیم $(X, \precsim)$ مجموعه‌ای کلی مرتب و ناتهی باشد . توپولوژیی بر X که با زیر مجموعه‌های X به شکل

$$\{x \in X : x \prec p,\ p \in X\} \text{ یا } \{x \in X : p \prec x,\ p \in X\}$$

تولید می‌شود **توپولوژی ترتیب** بر X نام دارد. در مثال ۱۰۲ دیدیم که توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}$ با توپولوژی ترتیب (طبیعی) بر $\mathbf{R}$ یکی است.

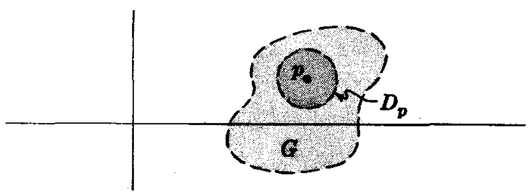
هر توپولوژی که با رده‌ای از زیرمجموعه‌ها تولید شده باشد را می‌توان به‌صورت زیر نیز توصیف کرد:

حکم ۳۰۶ . فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ رده‌ای از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ ناتهی X باشد. دراین صورت، توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X که به‌وسیلهٔ $\mathcal{A}$ تولید شده اشتراک تمام توپولوژیهایی بر X است که شامل $\mathcal{A}$ می‌باشند.

پایه‌های موضعی

فرض‌کنیم p یک نقطه در فضای توپولوژیک X باشد. ردهٔ $\mathcal{B}_p$ از مجموعه‌های باز شامل p یک **پایهٔ موضعی در** p نام دارد اگر، به‌ازای هر مجموعهٔ باز G شامل p، $\exists G_p \in \mathcal{B}_p$ با این خاصیت که $p \in G_p \subset G$.

مثال ۱۰۴ . توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ و نقطهٔ دلخواه $p \in \mathbf{R}^2$ را درنظر می‌گیریم. ردهٔ $\mathcal{B}_p$ مرکب از تمام قرصهای باز به مرکز p یک پایهٔ موضعی در p است. زیرا، همانطور که قبلاً ثابت شد، هر مجموعهٔ باز G حاوی p شامل قرص بازی چون D_p است که مرکزش p می‌باشد.



به‌همین ترتیب، ردهٔ تمام بازه‌های باز $(a-\delta, a+\delta)$ در $\mathbf{R}$ به مرکز $a \in \mathbf{R}$ یک پایهٔ موضعی در a است.

واضح است که رابطهٔ زیر بین یک پایه برای یک توپولوژی ("در سطح وسیع") و یک پایهٔ موضعی ("درسطح محدود") دریک نقطه برقرار است.

حکم ۴.۶ . فرض‌کنیم $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X بوده و $p \in X$. در این‌صورت، اعضای $\mathcal{B}$ شامل p یک پایهٔ موضعی در p را تشکیل می‌دهند.

بعضی از مفهومهایی که قبلاً برحسب مجموعه‌های باز شامل نقطهٔ p تعریف‌شده‌اند را می‌توان فقط برحسب اعضای یک پایهٔ موضعی در p نیز تعریف کرد. به‌عنوان مثال،

حکم ۵.۶ . نقطهٔ p در فضای توپولوژیک X نقطهٔ انباشتگی $A \subset X$ است اگفگر هر عضو یک پایهٔ موضعی مانند $\mathcal{B}_p$ در p شامل نقطه‌ای از A غیر از p باشد.

حکم ۶.۶ . دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ از نقاط درفضای توپولوژیک X همگرا به $p \in X$ است اگفگر هرعضو یک پایهٔ موضعی مانند $\mathcal{B}_p$ در p شامل تقریباً "همهٔ جملات دنباله باشد.

سه حکم بالا نتیجهٔ مفید زیر را به‌دست می‌دهند.

نتیجهٔ ۷.۶ . فرض کنیم $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X باشد. دراین صورت،
(یک) $p \in X$ یک نقطهٔ انباشتگی $A \subset X$ است اگفگر هر مجموعهٔ پایه‌ای باز $B \in \mathcal{B}$ حاوی p شامل نقطه‌ای از A غیر از p باشد؛
(دو) دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ ازنقاط در X همگرا به $p \in X$ است اگفگر هر مجموعهٔ پایه‌ای باز $B \in \mathcal{B}$ حاوی p شامل تقریباً "همهٔ جملات دنباله باشد.

مثال ۲.۴ . توپولوژی حد پایینی $\mathcal{T}$ را بر $\mathbf{R}$ در نظر می‌گیریم، که ردهٔ بازه‌های بسته‌ـباز $[a, b)$ یک پایهٔ آن است، و فرض می‌کنیم $A = (0, 1)$. توجه کنید که $G = [1, 2)$ یک مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ـ باز شامل $1 \in \mathbf{R}$ است که به ازای آن $G \cap A = \emptyset$. درنتیجه، 1 یک نقطهٔ حدی A نیست. از سوی دیگر، $0 \in \mathbf{R}$ یک نقطهٔ حدی A است، زیرا هر مجموعهٔ پایه‌ای باز $[a, b)$ شامل 0 ، یعنی $a \leq 0 < b$ ، نقاطی از A غیر از 0 را دارد.

مسائل حل شده

پایه‌ها

۱ . هم‌ارز بودن دو تعریف پایه برای یک توپولوژی را ثابت کنید؛ یعنی، ثابت کنید هرگاه $\mathcal{B}$ یک زیر ردهٔ $\mathcal{T}$ باشد، گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند:

(یک) هر $G \in \mathcal{T}$ اجتماع از اعضای $\mathcal{B}$ است؛
(دو) به‌ازای هر p متعلق بـه مجمـوعهٔ بـازی مانند G ، $\exists B_p \in \mathcal{B}$ بطوری که $p \in B_p \subset G$.

حل. هرگاه $G = \cup_i B_i$ که‌درآن $B_i \in \mathcal{B}$ ، آنگاه هرنقطهٔ $p \in G = \cup_i B_i$ متعلق به دست کم یک عضو مانند B_{i_0} دراین اجتماع است. درنتیجه،

$$p \in B_{i_0} \subset \cup_i B_i = G.$$

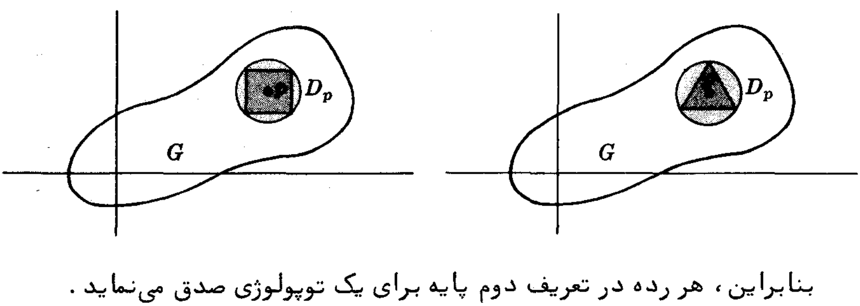
از آن‌سو، هرگاه به‌ازای هر $p \in G$ ، $\exists B_p \in \mathcal{B}$ بطوری که $p \in B_p \subset G$ ، آنگاه

$$G = \bigcup\{B_p : p \in G\}$$

و G اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ می‌باشد.

۲ . تعیین کنید هریک از رده‌های زیر از زیرمجموعه‌ها در $\mathbf{R}^2$ یک پایه برای توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ هست یا نه: (یک) ردهٔ مثلثهای متساوی‌الاضلاع باز؛ (دو) ردهٔ مربعهای باز به اضلاع افقی و قائم.

حل. هر دو رده یک پایه برای توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ اند. زیرا فرض کنیم G زیر مجمـوعهٔ بازی از $\mathbf{R}^2$ بوده و $p \in G$. دراین صورت، قرص بازی چون D_p به مرکز p هست بطوری که $p \in D_p \subset G$. توجه کنید که یک مثلث متساوی الاضلاع یا یک مـربع را مـی‌توان، بصـورتی که نمودارهای زیر نشان داده‌اند، محاط کـرد.



بنابراین، هر رده در تعریف دوم پایه برای یک توپولوژی صدق می‌نماید.

۳ . فرض کنیـد $\mathcal{B}$ پایه‌ای بـرای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X بوده، و $\mathcal{B}^*$ ردهٔ مجموعه‌های باز شامل $\mathcal{B}$ باشد؛ یعنی، $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^* \subset \mathcal{T}$.نشان دهید $\mathcal{B}^*$ نیز یک پایه برای $\mathcal{T}$ است.

حل. فرض کنیم G زیر مجموعهٔ بازی از X باشد. چون $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $(X, \mathcal{T})$ است، G اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ می‌باشد؛ یعنی، $G = \cup_i B_i$ که درآن $B_i \in \mathcal{B}$. اما $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$. درنتیجه، هر $B_i \in \mathcal{B}$ متعلق به $\mathcal{B}^*$ نیز هست. بنابراین، G اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}^*$ است؛ و لذا، $\mathcal{B}^*$ نیز یک پایه برای $(X, \mathcal{T})$ می‌باشد.

۴. فرض‌کنید X یک فضای مجزا بوده، و $\mathcal{B}$ ردهٔ تمام زیر مجموعه‌های یکانی X باشد؛ یعنی، $\mathcal{B} = \{\{p\} : p \in X\}$. نشان دهید هر ردهٔ $\mathcal{B}^*$ از زیرمجموعه‌های X یک پایه برای X است اگر و فقط اگر یک زبر ردهٔ $\mathcal{B}$ باشد.

حل. فرض‌کنیم $\mathcal{B}^*$ یک‌پایه‌برای X باشد. چون هر مجموعهٔ یکانی $\{p\}$ درفضای مجزا باز است، $\{p\}$ باید اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}^*$ باشد. اما یک مجموعهٔ یکانی فقط می‌تواند اجتماعی از خود یا خود با مجموعهٔ تهی $\emptyset$ باشد. بنابراین، $\{p\}$ باید عضوی از $\mathcal{B}^*$ باشد. درنتیجه، $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$.
از آن‌سو، چون $\mathcal{B}$ یک پایه برای فضای مجزای X است (ر.ک. مثال ۱.۳)، هر زبرمجموعهٔ $\mathcal{B}$ نیز یک پایه برای X است.

۵. قضیهٔ ۱.۶ را ثابت کنید: فرض کنید $\mathcal{B}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ ناتهی X باشد. دراین صورت، $\mathcal{B}$ پایه برای یک توپولوژی بر X است اگر و فقط اگر دو خاصیت زیر را داشته باشد:
(یک) $X = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$؛
(دو) به‌ازای هر $B, B^* \in \mathcal{B}$، $B \cap B^*$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد یا، معادلاً"، اگر $p \in B \cap B^*$، $\exists B_p \in \mathcal{B}$ بطوری که $p \in B_p \subset B \cap B^*$.

حل. فرض کنیم $\mathcal{B}$ پایه‌ای‌برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X باشد. چون X باز است، X اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ می‌باشد. لذا، X اجتماع تمام اعضای $\mathcal{B}$ است؛ یعنی، $X = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$. بعلاوه، اگر $B, B^* \in \mathcal{B}$، بخصوص، B و B^* باز می‌باشند. در نتیجه، اشتراک $B \cap B^*$ نیز باز است و، چون $\mathcal{B}$ یک پایه برای $\mathcal{T}$ است، اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ می‌باشد. لذا، (یک) و (دو) برقرار می‌باشند.
بعکس، فرض‌کنیم $\mathcal{B}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد که در (یک) و (دو) دربالا صدق می‌کند. $\mathcal{T}$ را ردهٔ تمام زیرمجموعه‌هایی از X می‌انگاریم که اجتماعی ازاعضای

$\mathcal{B}$ می‌باشند . حکم می‌کنیم $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر X است . توجه کنید که $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ یک پایه برای این توپولوژی است .

بنابر (یک) ، $X = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$. درنتیجه ، $X \in \mathcal{T}$. توجه‌کنید که $\emptyset$ اجتماع‌زیر ردهٔ تهی از $\mathcal{B}$ است ؛ یعنی ، $\emptyset = \bigcup\{B : B \in \emptyset \subset \mathcal{B}\}$. پس $\emptyset \in \mathcal{T}$ ؛ و درنتیجه ، $\mathcal{T}$ در $[\mathbf{O_1}]$ صدق می‌کند .

حال فرض کنیم $\{G_i\}$ رده‌ای از اعضای $\mathcal{T}$ باشد . طبق تعریف $\mathcal{T}$ ، هر G_i اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است . پس اجتماع $\cup_i G_i$ نیز اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است ؛ ودرنتیجه ، متعلق به $\mathcal{T}$ می‌باشد . لذا ، $\mathcal{T}$ در $[\mathbf{O_2}]$ نیز صدق می‌کند .

بالاخره ، فرض کنیم $G, H \in \mathcal{T}$. باید نشان دهیم $G \cap H$ نیز متعلق به $\mathcal{T}$ است . بنابر تعریف $\mathcal{T}$ ، دو زیر رده مانند $\{B_i : i \in I\}$ و $\{B_j : j \in J\}$ از $\mathcal{B}$ هست بقسمی که $G = \cup_i B_i$ و $H = \cup_j B_j$. پس ، بنابر قوانین پخشپذیری ،

$$G \cap H = (\cup_i B_i) \cap (\cup_j B_j) = \bigcup\{B_i \cap B_j : i \in I, j \in J\}.$$

اما ، بنابر (دو) ، $B_i \cap B_j$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است . پس $G \cap H = \bigcup\{B_i \cap B_j : i \in I, j \in J\}$ نیزاجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است ؛ و درنتیجه ، متعلق به $\mathcal{T}$ است ؛ و لذا ، در $[\mathbf{O_3}]$ نیز صدق می‌کند . بنابراین ، $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر X با پایهٔ $\mathcal{B}$ خواهد بود .

۶ . فرض کنید $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}^*$ ، بترتیب ، پایه‌هایی برای توپولوژیهای $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}^*$ بر مجموعهٔ X باشند . همچنین ، هر $B \in \mathcal{B}$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}^*$ باشد . نشان دهید $\mathcal{T}$ از $\mathcal{T}^*$ ضخیمتر است ؛ یعنی ، $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.

حل . فرض کنیم G یک مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ــ باز باشد . پس G اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است ؛ یعنی ، $G = \cup_i B_i$ که درآن $B_i \in \mathcal{B}$. اما ، بنا به فرض ، هر $B_i \in \mathcal{B}$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}^*$ است ؛ و درنتیجه ، $G = \cup_i B_i$ نیز اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}^*$ است که مجموعه‌هایی $\mathcal{T}^*$ ــ باز می‌باشند . بنابراین ، G نیز یک مجموعهٔ $\mathcal{T}^*$ ــ باز است ؛ و درنتیجه ، $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.

۷ . نشان دهید که توپولوژی معمولی $\mathcal{U}$ بر $\mathbf{R}$ از توپولوژی حد بالایی $\mathcal{T}$ بر $\mathbf{R}$ ، که ردهٔ بازه‌های باز ــ بستهٔ $(a, b]$ را به عنوان پایه دارد ، ضخیمتر است .

حل. ابتدا توجه می‌کنیم که هر بازهٔ باز اجتماعی از بازه‌های باز ــ بسته است. مثلاً،

$$(a, b) = \bigcup\{(a, b - 1/n] : n \in \mathbf{N}\}.$$

چون، طبق مسئلهٔ قبل، ردهٔ بازه‌های باز یک پایه برای $\mathcal{U}$ است، $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$؛ یعنی، هر مجموعهٔ $\mathcal{U}$ ــ باز یک مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ــ باز نیز هست.

۸. توپولوژی حد بالایی $\mathcal{T}$ را بر $\mathbf{R}$ نظر بگیرید، که ردهٔ بازه‌های باز ــ بستهٔ $(a, b]$ را به‌عنوان پایه دارد. (یک) نشان دهید که بازهٔ نامتناهی و باز $(4, \infty)$ و بازهٔ نامتناهی و بستهٔ $(-\infty, 2]$ مجموعه‌هایی $\mathcal{T}$ ــ بازند. (دو) نشان دهید که هر بازهٔ نامتناهی و باز (a, ∞) و هر بازهٔ نامتناهی و بستهٔ $(-\infty, b]$ مجموعه‌هایی $\mathcal{T}$ ــ بازند. (سه) نشان دهید که هر بازهٔ باز ــ بستهٔ $(a, b]$ هم $\mathcal{T}$ ــ باز است هم $\mathcal{T}$ ــ بسته.

حل

(یک) توجه کنید که

$$(4, \infty) = (4, 5] \cup (4, 6] \cup (4, 7] \cup (4, 8] \cup \cdots$$

$$(-\infty, 2] = (0, 2] \cup (-1, 2] \cup (-2, 2] \cup \cdots$$

از اینرو، هر یک $\mathcal{T}$ ــ باز است، زیرا هر کدام اجتماعی از اعضای یک پایه برای $\mathcal{T}$ است.

(دو) بهمین ترتیب،

$$(a, \infty) = (a, a+1] \cup (a, a+2] \cup (a, a+3] \cup \cdots$$

$$(-\infty, b] = (b-1, b] \cup (b-2, b] \cup (b-3, b] \cup (b-4, b] \cup \cdots$$

لذا، هریک $\mathcal{T}$ ــ باز می‌باشد.

(سه) $(a, b]^c = (-\infty, a] \cup (b, \infty)$، و دو بازهٔ سمت راست بازند، پس اجتماع آنها باز است؛ و لذا، $(a, b]$ بسته می‌باشد. اما $(a, b]$ متعلق به پایه برای $\mathcal{T}$ است؛ و درنتیجه، باز نیز می‌باشد.

زیرپایه‌ها، توپولوژیهای تولید شده به‌وسیلهٔ رده‌هایی از مجموعه‌ها

۹. فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e\}$ و $\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$. توپولوژیی بر X که به‌وسیلهٔ $\mathcal{A}$ تولید می‌شود را پیدا کنید.

حل. ابتدا ردهٔ $\mathcal{B}$ مرکب از تمام اشتراکهای متناهی از مجموعه‌های در $\mathcal{A}$ را حساب می‌کنیم :

$$\mathcal{B} \;=\; \{X,\ \{a,b,c\},\ \{c,d\},\ \{d,e\},\ \{c\},\ \{d\},\ \emptyset\}.$$

(توجه کنید که $X \in \mathcal{B}$ ، زیرا ، طبق تعریف ، X اشتراک متناهی اعضای $\mathcal{A}$ است.)
با اجتماع گیری از اعضای $\mathcal{B}$ ، ردهٔ

$$\mathcal{T} \;=\; \{X,\ \{a,b,c\},\ \{c,d\},\ \{d,e\},\ \{c\},\ \{d\},\ \emptyset,\ \{a,b,c,d\},\ \{c,d,e\}\}$$

به‌دست می‌آید ، که توپولوژیی است بر X که به‌وسیلهٔ $\mathcal{A}$ تولید می‌شود.

۱۰ . توپولوژی $\mathcal{T}$ بر $\mathbf{R}$ را بیابید که به‌وسیلهٔ ردهٔ $\mathcal{A}$ مرکب از تمام بازه‌های بستهٔ $[a,\ a+1]$ به طول یک تولید می‌شود.

حل. فرض‌کنیم p نقطه‌ای در $\mathbf{R}$ باشد. توجه کنید که بازه‌های بستهٔ $[p-1,p]$ و $[p,p+1]$ ، چون طولشان یک است ، متعلق به $\mathcal{A}$ هستند. از اینرو،

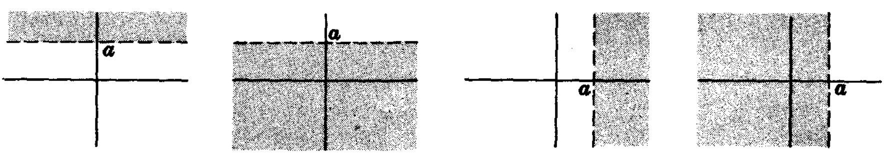
$$[p-1,p] \cap [p,p+1] \;=\; \{p\}$$

متعلق به توپولوژی $\mathcal{T}$ است؛ یعنی ، همهٔ مجموعه‌های یکانی $\{p\}$ ، $\mathcal{T}$ ـ بازند؛ و درنتیجه ، $\mathcal{T}$ توپولوژی مجزا بر X می‌باشد.

۱۱ . فرض کنید $\mathcal{A}$ ردهٔ تمام نیم صفحه‌های باز H در $\mathbf{R}^2$ به شکل

$$H \;=\; \{\langle x,y\rangle : y > a \ \text{یا}\ y < a \ \text{یا}\ x > a \ \text{یا}\ x < a\}$$

باشد. (ر.ک. نمودارهای زیر.)



$y > a$ $\qquad$ $y < a$ $\qquad$ $x > a$ $\qquad$ $x < a$

توپولوژیی بر $\mathbf{R}^2$ که به‌وسیلهٔ $\mathcal{A}$ تولید می‌شود را پیدا کنید.

حل. توجه کنید که هر مستطیل باز $B = \{\langle x,y\rangle : a < x < b,\ c < y < d\}$ اشتراک چهار نیم صفحهٔ

$$H_1 \;=\; \{\langle x,y\rangle \;:\; a < x\} \qquad H_2 \;=\; \{\langle x,y\rangle \;:\; x < b\}$$

$$H_3 = \{\langle x,y\rangle : c < y\} \qquad H_4 = \{\langle x,y\rangle : y < d\}$$

است. چون هر $H \in \mathcal{A}$ ، $\mathcal{U}$ ـ باز است، و چون ردهٔ تمام مستطیلهای باز B یک پایه برای توپولوژی معمولی $\mathcal{U}$ بر $\mathbf{R}^2$ است، ردهٔ $\mathcal{A}$ یک زیر پایه برای $\mathcal{U}$ می‌باشد. یعنی، $\mathcal{A}$ توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ را تولید خواهد کرد.

۱۲. توپولوژی مجزای $\mathcal{D}$ بر $X = \{a, b, c, d, e\}$ را درنظر گرفته، و زیرپایهٔ $\mathcal{S}$ را برای $\mathcal{D}$ طوری بیابید که شامل هیچ مجموعهٔ یکانی نباشد.

حل. یادآور می‌شویم که هر ردهٔ $\mathcal{B}$ از زیر مجموعه‌های X یک پایه برای توپولوژی مجـزای $\mathcal{D}$ بر X است اگگر شامل همهٔ زیر مجموعه‌های یکانی X باشد. لذا، $\mathcal{S}$ زیر پایه بـرای $\mathcal{D}$ است اگگر اشتراکهای متناهی اعضای $\mathcal{S}$ عبارت باشند از $\{a\}$ ، $\{b\}$ ، $\{c\}$ ، $\{d\}$ ، و $\{e\}$. بنابراین، $\mathcal{S} = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{d,e\}, \{e,a\}\}$ زیر پایه برای $\mathcal{D}$ خواهد بود.

۱۳. فرض‌کنید $\mathcal{S}$ زیر پایه‌برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X بوده، و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. نشان دهید که ردهٔ $\mathcal{S}_A = \{A \cap S : S \in \mathcal{S}\}$ زیر پایه برای توپولوژی نسبی $\mathcal{T}_A$ بر A است.

حل. فرض‌کنیم H یک‌زیرمجموعهٔ $\mathcal{T}_A$ ـ باز A باشد. پس $H = A \cap G$ که درآن G یک زیـر مجمـوعهٔ $\mathcal{T}$ ـ باز X است. بنا به‌فرض، $\mathcal{S}$ زیر پایه برای $\mathcal{T}$ است؛ درنتیجه،

$$G = \cup_i (S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_{n_i}})$$

، که درآن $S_{i_k} \in \mathcal{S}$.

از اینرو،

$$H = A \cap G = A \cap [\cup_i (S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_{n_i}})]$$
$$= \cup_i [(A \cap S_{i_1}) \cap \cdots \cap (A \cap S_{i_{n_i}})].$$

لذا، H اجتماعی از اشتراکهای متناهی اعضای $\mathcal{S}_A$ است؛ و درنتیجه، $\mathcal{S}_A$ زیرپایه برای $\mathcal{T}_A$ خواهد بود.

۱۴. نشان دهیـد تمام بازه‌های $(a, 1]$ و $[0, b)$ ، که درآنها $0 < a, b < 1$ ، یک زیر پایه برای توپولوژی معمولی نسبی بر بازهٔ یکهٔ $I = [0, 1]$ را تشکیل می‌دهند.

حل. به‌یاد می‌آوریم که بازه‌های باز و نامتناهی (a, ∞) و $(-\infty, b)$ یک زیر پایه برای توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}$ تشکیل می‌دهند. اشتراک این بازه‌های باز و نامتناهی با $I = [0,1]$ مجموعه‌های $\emptyset$ ، I ، $(a,1]$ ، و $[0,b)$ هستند که، طبق مسئلهٔ قبل، یک زیر پایه برای $I = [0,1]$ تشکیل می‌دهند. اما می‌توان مجموعهٔ تهی $\emptyset$ وتمام فضای I را از هر زیر پایه حذف کرد؛ درنتیجه، بازه‌های $(a,1]$ و $[0,b)$ یک زیر پایه برای I تشکیل خواهند داد.

۱۵ . نشان دهید هرگاه $\mathcal{S}$ یک زیر پایه برای توپولوژیهای $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}^*$ بر X باشند، آنگاه $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

حل. فرض‌کنیم $G \in \mathcal{T}$. چون $\mathcal{S}$ زیرپایه‌برای $\mathcal{T}$ است، $G = \cup_i (S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_{n_i}})$ که در آن $S_{i_k} \in \mathcal{S}$. اما $\mathcal{S}$ زیر پایه برای $\mathcal{T}^*$ نیز هست؛ و در نتیجه، $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}^*$. بنابراین، هر $S_{i_k} \in \mathcal{T}^*$. چون $\mathcal{T}^*$ توپولوژی‌است، $S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_{n_i}} \in \mathcal{T}^*$؛ودرنتیجه، $G \in \mathcal{T}^*$. لذا، $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$. بهمین ترتیب، $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$؛ و درنتیجه، $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

۱۶ . قضیهٔ ۲.۶ را ثابت کنید: هر ردهٔ $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ ناتهی X زیر پایه‌ای‌است برای یک توپولوژی منحصر بفرد بر X. یعنی، اشتراکهای متناهی‌اعضای $\mathcal{A}$ یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X تشکیل می‌دهند.

حل. نشان می‌دهیم ردهٔ $\mathcal{B}$ مرکب از اشتراکهای متناهی‌اعضای $\mathcal{A}$ در دوشرط قضیهٔ ۱.۶ جهت پایه بودن برای یک توپولوژی بر X صدق می‌کند:

(یک) $X = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$؛

(دو) به‌ازای هر $G,H \in \mathcal{B}$ ، $G \cap H$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است.

توجه کنید که $X \in \mathcal{B}$ ، زیرا X ، طبق تعریف، اشتراک تهی از اعضای $\mathcal{A}$ است. درنتیجه،

$$X = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}.$$

بعلاوه، اگر $G, H \in \mathcal{B}$ ، G و H اشتراکهای متناهی اعضای $\mathcal{A}$ هستند. پس $G \cap H$ نیز یک‌اشتراک متناهی از اعضای $\mathcal{A}$ است؛ و لذا، متعلق به $\mathcal{B}$ می‌باشد. بنابراین، $\mathcal{B}$ پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X که $\mathcal{A}$ زیر پایهٔ آن است می‌باشد. مسئلهٔ قبل نشان می‌دهد که $\mathcal{T}$ منحصر بفرد می‌باشد.

۱۷ . حکم ۳.۶ را ثابت کنید : فرض کنید $\mathcal{A}$ رده‌ای از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ ناتهی X باشد . دراین صورت ، توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X که به‌وسیلهٔ $\mathcal{A}$ تولید شده اشتراک‌تمام توپولوژیهایی بر X است که شامل $\mathcal{A}$ می‌باشند .

حل . فرض کنیم $\{\mathcal{T}_i\}$ گرد آیه‌ای از توپولوژیها بر X که شامل $\mathcal{A}$ اند باشد ، و نیز $\mathcal{T}^* = \cap_i \mathcal{T}_i$. توجه کنید که $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}^*$. می‌خواهیم ثابت کنیم $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$. گوییم چون $\mathcal{T}$ شامل $\mathcal{A}$ است ، و $\mathcal{T}^*$ اشتراک تمام این توپولوژیهاست ، داریم $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$. از سوی دیگر ، فرض‌کنیم $G \in \mathcal{T}$. دراین صورت ، طبق تعریف $\mathcal{T}$ ،

$G = \cup_i (S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{in_i})$ که درآن $S_{i_k} \in \mathcal{A}$.

اما $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}^*$ ، پس هر $S_{i_k} \in \mathcal{T}^*$. بنابراین ، $S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{in_i} \in \mathcal{T}^*$ ؛ و درنتیجه ،

$$G = \cup_i (S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{in_i}) \in \mathcal{T}^*.$$

پس‌نشان داده‌ایم $G \in \mathcal{T}$ ایجاب می‌کند که $G \in \mathcal{T}^*$. لذا ، $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$ ؛ و درنتیجه ، $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

پایه‌های موضعی

۱۸ . حکم ۵.۶ را ثابت کنید : نقطهٔ p در فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ نقطهٔ انباشتگی $A \subset X$ است‌اگرگر هر عضو یک پایهٔ موضعی مانند $\mathcal{B}_p$ در p شامل نقطه‌ای از A غیر از p باشد .

حل . به‌یاد می‌آوریم که $p \in X$ نقطهٔ انباشتگی A است اگرگر به‌ازای هر $G \in \mathcal{T}$ که $p \in G$ ، $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$. اما $\mathcal{B}_p \subset \mathcal{T}$. پس، بخصوص، به‌ازای هر $B \in \mathcal{B}_p$ ، $(B \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$.

بعکس، فرض‌کنیم به‌ازای هر $B \in \mathcal{B}_p$ ، $(B \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ ، و G زیر مجموعهٔ‌بازی از X شامل p باشد . پس $\exists B_0 \in \mathcal{B}_p$ که به‌ازای آن $p \in B_0 \subset G$. اما ، دراین‌صورت ،

$$(G \setminus \{p\}) \cap A \supset (B_0 \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset.$$

درنتیجه ، $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ ، یا p یک نقطهٔ انباشتگی A است .

۱۹ . حکم ۶.۶ را ثابت کنید : دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ از نقاط در فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ همگرا به $p \in X$ است اگرگرهر عضو یک پایهٔ موضعی مانند $\mathcal{B}_p$ در p شامل‌تقریبا " همهٔ جملات دنباله باشد .

حل. به‌یاد مـی‌آوریم که $a_n \to p$ اگفگر هر مجموعهٔ باز $G \in \mathcal{T}$ شامل p تقریبا" همهٔجملات دنباله را داشته باشد. اما $\mathcal{B}_p \subset \mathcal{T}$. پس، بخصوص، هر $B \in \mathcal{B}_p$ شامل تقریبا" همهٔ جملات دنباله می‌باشد.
از سوی دیگر، فرض‌کنیم هر $B \in \mathcal{B}_p$ شامل تقـریبا" همهٔ جملات دنباله بوده، و G مجموعهٔ بازی‌شامل p باشد. دراین صورت، $\exists B_0 \in \mathcal{B}_p$ بطوری که $p \in B_0 \subset G$. لذا، G نیز شامل تقـریبا" همهٔ جملات دنباله است؛ و درنتیجه، $\langle a_n \rangle$ همگرا به p می‌باشد.

۲۰. نشان دهید هر نقطهٔ p در فضای مجزای X پایهٔ موضعی متناهی دارد.

حل. توجه کنید کـه مجموعهٔ یـکانی $\{p\}$ باز است، چرا که هر زیر مجموعهٔ یک فضای‌مجزا باز است. پس، ردهٔ $\mathcal{B}_p = \{\{p\}\}$، یعنی ردهٔ متشکل از مجموعهٔیکانی $\{p\}$، یک پایهٔ مـوضعی در p است، زیـرا هر مجموعهٔ باز G شامل p باید یک زبرمجموعهٔ $\{p\}$ باشد.

۲۱. توپولوژی حد بالایی $\mathcal{T}$ را بر $\mathbf{R}$ را درنظر می‌گیریم، که ردهٔ بازه‌های باز ـ بستهٔ $(a, b]$ را به‌عنوان پایه دارد. تعیین کنید که هریک از دنباله‌های زیر همگرا به 0 هست یا نه:

(یک) $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \rangle$؛ (دو) $\langle -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots \rangle$.

حل

(یک) نیست. زیرا مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ـ باز $(-2, 0]$ شامل 0 جمله‌ای‌از دنباله را ندارد.
(دو) هست. زیرابه‌ازای‌هرمجموعهٔاساسی باز $(a, b]$ شامل 0، یعنی $a < 0 \leq b$، $\exists n_0 \in N$ بطوری‌که $a < -1/n_0 < 0$. بنابراین، $n > n_0$ ایجاب می‌کندکه $-1/n \in (a, b]$.

مسائل تکمیلی

پایه برای توپولوژی

۲۲. نشان دهید ردهٔ بازه‌های بستهٔ $[a, b]$، که‌درآنها a و b گویاو $a < b$، پایه برای توپولوژی بر $\mathbf{R}$ نیست.

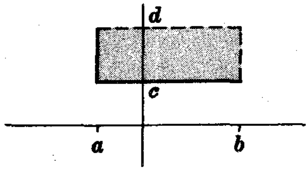
۲۳. نشان‌دهیدردهٔبازه‌های‌بستهٔ $[a, b]$، که‌درآنها a گویا و b گنگ است و $a < b$،

پایه برای توپولوژی بر $\mathbf{R}$ هست.

۲۴. فرض کنید $\mathcal{B}$ پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X بوده، و $A \subset X$. نشان دهید ردهٔ $\mathcal{B}_A = \{A \cap G : G \in \mathcal{B}\}$ نیز پایه برای توپولوژی نسبی $\mathcal{T}_A$ بر A است.

۲۵. فرض کنید $\mathcal{B}$ ردهٔ مستطیلهای نیمباز در $\mathbf{R}^2$ باشد که در نمودار زیر نشان داده شده است؛ یعنی، به‌شکل

$$\{\langle x, y\rangle \; : \; a \leqq x < b, \; c \leqq y < d\}.$$



(یک) نشان دهید $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر $\mathbf{R}^2$ است.

(دو) نشان دهید توپولوژی نسبی $\mathcal{T}_A$ بر خط

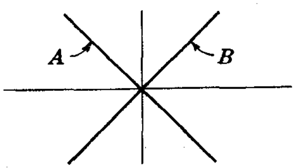
$$A \;=\; \{\langle x, y\rangle \; : \; x + y = 0\}$$

توپولوژی مجزا بر A است.

(سه) نشان دهید توپولوژی نسبی $\mathcal{T}_B$ بر خط

$$B \;=\; \{\langle x, y\rangle \; : \; x = y\}$$

توپولوژی مجزا بر B نیست.



۲۶. فرض کنید $\mathcal{B}$ رده‌ای از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ ناتهی X باشد که با شمول مجموعه‌ها کلی مرتب شده است. نشان دهید $\mathcal{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی بر X است مشروط بر اینکه $X = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$.

۲۷. نشان دهید توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X متناهی است اگر و فقط اگر $\mathcal{T}$ پایهٔ متناهی داشته باشد.

زیر پایه‌ها

۲۸. فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e\}$، و توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X را که به وسیلهٔ $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$ تولید شده پیدا کنید.

۲۹ . کوچکترین زیر پایهٔ $\mathcal{S}$ برای توپولوژی مجزای $\mathcal{T}$ بر مجموعهٔ ناتهی X را مشخص نمایید.

۳۰ . فرض کنید $\mathcal{S}$ ردهٔ تمام بازه‌های بستهٔ $[a,b]$ باشد که در آنها a و b گویا هستند؛ یعنی $a,b \in \mathbf{Q}$ ، و $a<b$. نشان دهید $\mathcal{S} \cup \{\{p\} : p \in \mathbf{Q}\}$ یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر $\mathbf{R}$ است که به‌وسیلهٔ $\mathcal{S}$ تولید می‌شود.

۳۱ . نشان دهید اگر $\mathcal{S}$ زیر پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X باشد، $\mathcal{S} \setminus \{X, \emptyset\}$ نیز زیرپایه برای $\mathcal{T}$ است.

۳۲ . فرض‌کنید $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}^*$ توپولوژیهایی بر X باشندکه بترتیب با $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}^*$ تولید می‌شوند. نشان دهید (یک) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ ایجاب می‌کند که $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$ ؛ و (دو) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^* \subset \mathcal{T}$ ایجاب می‌کنند که $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

۳۳ . فرض کنید $\mathcal{S}$ یک زیر پایه برای فضای توپولوژیک X بوده، و $G \subset X$ مجموعه‌ای باز شامل نقطهٔ $p \in X$ باشد. نشان دهید تعدادی متناهی عضو از $\mathcal{S}$ ، مثلاً $S_1, S_2, \ldots, S_m$ ، هست بطوری که $p \in S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_m \subset G$.

پایه‌های موضعی

۳۴ . فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک بوده، و $\mathcal{A}$ پایه‌ای $\mathcal{T}$ــ موضعی در $p \in X$ باشد. زیر مجموعهٔ A از X را که $p \in A \subset X$ ، و توپولوژی نسبی $\mathcal{T}_A$ بر A را در نظر بگیرید، و نشان دهید ردهٔ $\mathcal{A}_A = \{A \cap G : G \in \mathcal{A}\}$ از زیر مجموعه‌های A یک پایهٔ $\mathcal{T}_A$ ــ موضعی در $p \in A$ است.

۳۵ . فرض‌کنید X یک فضای توپولوژیک، $p \in X$ ، $\mathcal{N}_p$ دستگاه همسایگی در p ، و $\mathcal{B}_p$ یک پایهٔ موضعی در p باشد. نشان دهید هر همسایگی p شامل عضوی از پایهٔ موضعی در p است؛ یعنی، به‌ازای هر $N \in \mathcal{N}_p$ ، $\exists G \in \mathcal{B}_p$ بطوری که $G \subset N$.

۳۶ . نشان دهید اگر نقطهٔ p دارای پایهٔ $\mathcal{B}_p$ باشد، یک پایهٔ موضعی نیز دارد که‌فقط از یک مجموعه تشکیل شده است.

۳۷ . توپولوژی‌حد بالایی $\mathcal{T}$ را بر $\mathbf{R}$ درنظربگیرید، که ردهٔ بازه‌های باز ــ بستهٔ $(a,b]$ را به‌عنوان پایه دارد. تعیین کنید هریک از دنباله‌های زیر همگراست یا نه:

(یک) $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \rangle$ ؛ (دو) $\langle -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots \rangle$ ؛

(سه) $\langle -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \rangle$.

۳۸ . فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژیی برخط حقیقی $\mathbf{R}$ باشد که با ردهٔ $\mathcal{S}$ مرکب از تمام بازه‌های بستهٔ $[a,b]$ که a و b گویا هستند تولید می‌شود (ر.ک. مسئلهٔ ۳۰).

(یک) تعیین کنید هریک از دنباله‌های زیر همگراست یا نه:

(آ) $\langle 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{3},\ 2+\frac{1}{4},\ \ldots\rangle$ ؛ (ب) $\langle \sqrt{2}+\frac{1}{2},\ \sqrt{2}+\frac{1}{3},\ \sqrt{2}+\frac{1}{4},\ \ldots\rangle$.

(دو) بست هریک از زیر مجموعه‌های زیر از $\mathbf{R}$ را مشخص نمایید:

(آ) $(2,4)$ ؛ (ب) $(\sqrt{2},5]$ ؛

(پ) $(-3,\pi)$ ؛ (ت) $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$.

(سه) نشان دهید هر زیر مجموعهٔ متناهی از $\mathbf{R}$ ، $\mathcal{T}$ ـ بسته است.

۳۹ . فرض کنید $\mathcal{S}$ زیر پایه برای فضای توپولوژیک X بوده، و $p \in X$.

(یک) با مثال نقض نشان دهید ردهٔ $\mathcal{S}_p = \{S \in \mathcal{S} : p \in S\}$ لزوماً یک پایهٔ موضعی در p نیست.

(دو) نشان دهید اشتراکهای متناهی اعضای $\mathcal{S}_p$ یک پایهٔ موضعی در p تشکیل می‌دهند.

(سه) نشان دهید دنبالهٔ $\langle a_n\rangle$ در X همگرا به p است اگر و فقط اگر هر $S \in \mathcal{S}_p$ شامل همه جز تعدادی متناهی جمله از دنباله باشد.

جواب مسائل تکمیلی

۳۶ . $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$.

۳۷ . (یک) نیست؛ (دو) هست؛

(سه) نیست.

۳۸ . (یک): (آ) نیست؛ (ب) هست.

(دو): (آ) $(2,4)$ ؛ (ب) $[\sqrt{2},5]$ ؛ (پ) $(-3,\pi]$ ؛ (ت) A .

۳۹ . (دو) **راهنمایی.** از مسئلهٔ ۳۲ استفاده کنید.

پیوستگی و هم‌ارزی توپولوژیک[۷]

توابع پیوسته

فرض کنیم $(X, \mathcal{T})$ و $(Y, \mathcal{T}^*)$ فضاهایی توپولوژیک باشند. تابع f از X بتوی Y **پیوسته نسبت به** $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}^*$، یا $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}^*$ **پیوسته**، یا فقط **پیوسته** است اگفگر نقش معکوس $f^{-1}[H]$ هر زیرمجموعهٔ $\mathcal{T}^*$ــ باز H از Y یک زیر مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ــ باز X باشد؛ یعنی،

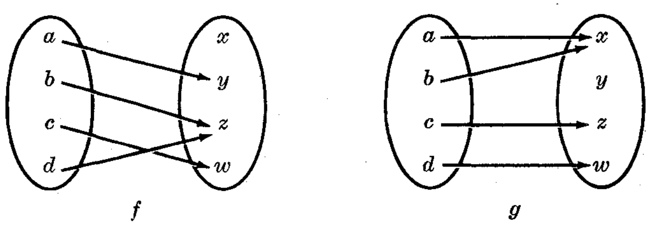
$H \in \mathcal{T}^*$ ایجاب کند که $f^{-1}[H] \in \mathcal{T}$.

وقتی ذکر توپولوژیهای مربوطه لازم باشد، برای یک تابع از X بتوی Y خواهیم نوشت $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}^*)$.

مثال ۱۰۱. توپولوژیهای

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \quad \mathcal{T}^* = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z, w\}\}$$

را بترتیب بر $X = \{a, b, c, d\}$ و $Y = \{x, y, z, w\}$ درنظر می‌گیریم. همچنین، توابع $f : X \to Y$ و $g : X \to Y$ را که با نمودارهای



تعریف می‌شوند درنظر می‌گیریم. تابع f پیوسته است، زیرا معکوس هر عضو $\mathcal{T}^*$ بر Y عضوی از $\mathcal{T}$ بر X است. تابع g پیوسته نیست، زیرا $\{y, z, w\} \in \mathcal{T}^*$، یعنی زیرمجموعهٔ بازی از Y است، ولی نقش معکوسش $g^{-1}[\{y, z, w\}] = \{c, d\}$ زیرمجموعهٔ باز X نیست؛ یعنی، متعلق به $\mathcal{T}$ نمی‌باشد.

مثال ۲۰۱ . فضای مجزای $(X, \mathcal{D})$ وفضای توپولوژیک $(Y, \mathcal{T})$ را درنظر می‌گیریم . دراین صورت ، هـر تابع $f : X \to Y$ ، $\mathcal{D}$-$\mathcal{T}$ پیوسته است . زیرا هرگاه H زیرمجموعهٔ بازی از Y باشد ، معکوسش $f^{-1}[H]$ زیر مجموعهٔ بازی از X است ، چرا که هر زیر مجموعهٔ یک فضای مجزا باز می‌باشد .

مثال ۳۰۱ . فرض کنیم $f : X \to Y$ ، که درآن X و Y فضاهایی توپولوژیک‌اند ، و $\mathcal{B}$ یک پایه‌برای توپولوژی بر Y باشد . همچنین ، به‌ازای هر $B \in \mathcal{B}$ ، $f^{-1}[B]$ زیر مجموعهٔبازی از X باشد . دراین صورت ، f یک‌تابع پیوسته‌است .چراکه‌فرض‌کنیم H زیرمجموعهٔبازی‌از Y باشد . پس $H = \cup_i B_i$ ؛ یعنی ، اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$. اما

$$f^{-1}[H] = f^{-1}[\cup_i B_i] = \cup_i f^{-1}[B_i]$$

و هر $f^{-1}[B_i]$ طبق فرض بــاز است . لذا ، $f^{-1}[H]$ اجتماعی از مجموعه‌های باز است ؛ و در نتیجه ، باز می‌باشد . بنابراین ، f پیوسته خواهد بود .

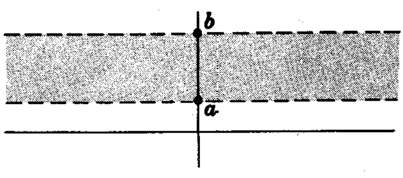
حال نتیجهٔ مثال فوق را به‌طور صوری بیان می‌کنیم :

حکم ۱۰۷ . ***تابع $f : X \to Y$ پیوسته است اگفگر معکوس هر عضو پایهٔ $\mathcal{B}$ برای Y زیر مجموعهٔ بازی از X باشد .***

درواقع ، به‌این حکم می‌توان به‌صورت زیر قوت بخشید :

قضیهٔ ۲۰۷ . ***فرض کنیم $\mathcal{S}$ زیر پایه برای فضای توپولوژیک Y باشد . در این صورت ، تابع $f : X \to Y$ پیوسته است اگفگر معکوس هر عضو $\mathcal{S}$ زیر مجموعهٔ بازی از X باشد .***

مثال ۴۰۱ . نگاشتهای تصویراز $\mathbf{R}^2$ بتوی $\mathbf{R}$ نسبت به توپولوژیهای معمولی پیوسته‌است . مثلاً ، تصویر $\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ را که با $\pi(\langle x, y \rangle) = y$ تعریف می‌شـــود در نظـــر می‌گیریم . دراین‌صورت ، معکوس هر بازهٔ باز (a, b) نوار باز و نامتناهی زیر است :



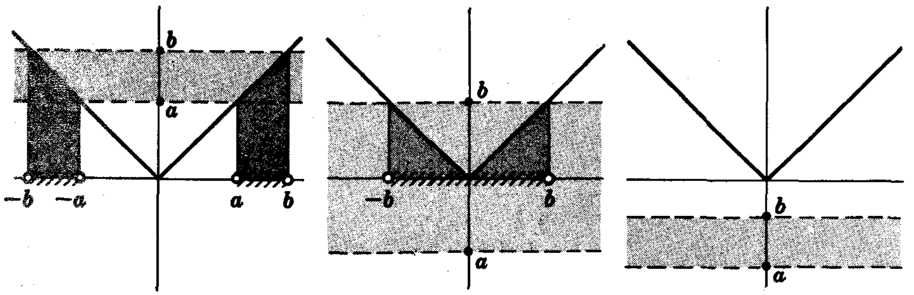
$\pi^{-1}[(a, b)]$ سایه‌دار است

لذا ، برطبق حکم ۱۰۷ ، معکوس‌هرزیر مجموعهٔ باز $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}^2$ باز است ؛ یعنی ، π پیوسته می‌باشد .

مثال ۱۰۵ . تابع قدر مطلق f بر $\mathbf{R}$ ، یعنی $f(x) = |x|$ به‌ازای $x \in \mathbf{R}$ ، پیوسته است . چرا که هرگاه $A = (a, b)$ بازهٔ بازی در $\mathbf{R}$ باشد ، آنگاه

$$f^{-1}[A] = \begin{cases} \emptyset & \text{اگر } a < b \leq 0 \text{ ،} \\ (-b, b) & \text{اگر } a < 0 < b \text{ ،} \\ (-b, -a) \cup (a, b) & \text{اگر } 0 \leq a < b \text{ ،} \end{cases}$$

که درزیرنموده شده‌است . درهرحالت ، $f^{-1}[A]$ باز است ؛ و درنتیجه ، f پیوسته‌می‌باشد .



$f^{-1}[A] = (-b, -a) \cup (a, b)$ $\qquad$ $f^{-1}[A] = (-b, b)$ $\qquad$ $f^{-1}[A] = \emptyset$

توابع پیوسته را می‌توان با رفتارشان نسبت به مجموعه‌های بسته توصیف کرد ، به این صورت :

قضیهٔ ۳۰۷ . *تابع* $f: X \to Y$ **پیوسته است اگر و فقط اگر نقش معکوس هر زیر مجموعهٔ بسته از** Y **یک زیر مجموعهٔ بسته از** X **باشد .**

توابع پیوسته و نزدیکی دلخواه

فرض‌کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد . نقطهٔ $p \in X$ را **بدلخواه نزدیک** مجموعهٔ $A \subset X$ گوییم درصورتی که یا

(یک) $p \in A$ یا (دو) p یک نقطهٔ انباشتگی A باشد .

به‌یاد می‌آوریم که $\bar{A} = A \cup A'$. درنتیجه ، بست A درست‌از نقاطی در X تشکیل‌شده که بدلخواه‌نزدیک A هستند . همچنین ، به‌یاد می‌آوریم که $\bar{A} = A^\circ \cup \mathrm{b}(A)$. درنتیجه ، p در صورتی بدلخواه نزدیک A است که یا یک نقطهٔ درونی A باشد یا یک نقطهٔ

کرانه‌ای A .

توابع پیوسته را می‌توان با توابعی که **نزدیکی دلخواه را حفظ می‌کنند** نیز توصیف کرد؛ یعنی،

قضیهٔ ۴۰۷ . ***تابع $f: X \to Y$ پیوسته است اگر و فقط اگر، به ازای هر $p \in X$ و هر $A \subset X$،***

$$f(p) \text{ بدلخواه نزدیک } f[A] \quad \Leftarrow \quad p \text{ بدلخواه نزدیک } A$$

یا

$$p \in \bar{A} \quad \Rightarrow \quad f(p) \in \overline{f[A]}$$

یا

$$f[\bar{A}] \subset \overline{f[A]}.$$

پیوستگی در یک نقطه

پیوستگی بصورتی که تعریف شد یک خاصیت *کلــــی* است؛ یعنی، رفتار تابع را به‌تمام مجموعهٔ X محدود می‌کند. مفهوم موضعی‌نظیر آن نیز وجود دارد به‌نام **پیوستگی دریک نقطه**.

تابع $f: X \to Y$ در $p \in X$ پیوسته است اگفگر نقش‌معکوس $f^{-1}[H]$ هرمجموعهٔ باز $H \subset Y$ شامل $f(p)$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ بازی چون $G \subset X$ شامل p باشد یا، معادلاً، اگفگر نقش معکوس هر همسایگی $f(p)$ یک همسایگی p باشد؛ یعنی،

$$N \in \mathcal{N}_{f(p)} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}[N] \in \mathcal{N}_p.$$

توجه کنیـــد که این تعریف، نسبت به توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}$ ، با تعریف $\epsilon - \delta$ ی پیوستگی دریک نقطــه بــرای تــوابع $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ یکی است. درواقع، ارتباط بین پیوستگی موضعــی و کلـــــی برای توابع $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ کلاً" برقرار است؛ یعنی،

قضیهٔ ۵۰۷ . ***فرض کنیــم X و Y دو فضای توپــولوژیک بــاشند. درایـــن صورت، تابع $f: X \to Y$ پیوسته است اگر و فقط اگر درهر نقطه از X پیوسته باشد.***

پیوستگی دنباله‌ای در یک نقطه

تابع $f: X \to Y$ در نقطهٔ $p \in X$ **دنباله‌ای پیوسته** است اگفگر به‌ازای هر دنباله مانند $\langle a_n \rangle$ در X همگرا به p ، دنبالهٔ $\langle f(a_n) \rangle$ در Y همگرا به $f(p)$ باشد؛ یعنی،

$a_n \to p$ ایجاب کند که $f(a_n) \to f(p)$.

پیوستگی دنباله‌ای و پیوستگی دریک نقطه به‌صورت زیر بهم مربوطند .

حکم ۶.۷ . هرگاه تابع $f : X \to Y$ در $p \in X$ پیوسته باشد ، در p دنباله‌ای پیوسته است .

تبصره . عکس حکم بالا درست نیست . مثلاً ، توپولوژی $\mathcal{T}$ برخط حقیقی را درنظر می‌گیریم که از $\emptyset$ و متممهای مجموعه‌های حداکثر شمارشپذیر تشکیل شده است . به‌یاد می‌آوریم (ر.ک. مثال ۳.۷ از فصل ۵) که دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ همگرا به p است اگر و فقط اگر به‌شکل

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, p, p, p, \ldots \rangle$$

باشد . دراین صورت ، به‌ازای هر تابع مانند $f : (\mathbf{R}, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}^*)$ ،

$$\langle f(a_n) \rangle = \langle f(a_1), \ldots, f(a_{n_0}), f(p), f(p), f(p), \ldots \rangle$$

همگرابه $f(p)$ است . به عبارت دیگر ، هر تابع بر $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ دنباله‌ای پیوسته است . از آن سو ، تابع $f(\mathbf{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{U})$ که با $f(x) = x$ تعریف می‌شود ، یعنی تابع همانی ، $\mathcal{T}$-$\mathcal{U}$ پیوسته نیست ، چرا که $f^{-1}[(0, 1)] = (0, 1)$ یک زیر مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ـ باز $\mathbf{R}$ نمی‌باشد .

توابع باز و بسته

یک‌تابع پیوسته‌این خاصیت را داراست که نقش **معکوس** هر مجموعهٔ باز باز ، و نقش **معکوس** هر مجموعهٔ‌بسته بسته است . پس طبیعی است که به بررسی انواع زیر از توابع بپردازیم :

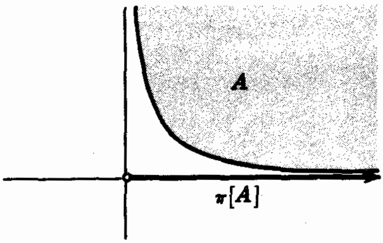
(۱) تابع $f : X \to Y$ را درصورتی یک **تابع باز** (یا **درونی**) نامیم که نقش هر مجموعهٔ باز باز باشد ؛

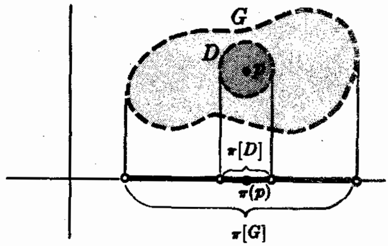
(۲) تابع $g : X \to Y$ را درصورتی یک **تابع بسته** خوانیم که نقش هر مجموعهٔ بسته بسته باشد .

درحالت کلی ، توابع باز لزوماً بسته نیستند و بعکس. درواقع ، تابع اولین مثال‌ما باز و پیوسته است ولی بسته نمی‌باشد .

مثال ۱.۲ . نگاشت تصویر $\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ از $\mathbf{R}^2$ بتوی محور x ، یعنی $\pi(\langle x, y \rangle) = x$ ، را درنظرمی‌گیریم . توجه کنید که تصویر $\pi[D]$ هر قرص باز $G \subset \mathbf{R}^2$ یک بازهٔ باز است . لذا ، هرنقطهٔ $\pi(p)$ در نقش $\pi[G]$ مجموعهٔ باز $D \subset \mathbf{R}^2$ به بازهٔ بازی مشمول $\pi[G]$ تعلق دارد ،

یا که $\pi[G]$ باز است. بنابراین، π یک تابع بازاست. از آن سو، π یک تابع بسته‌نیست، زیرامجموعهٔ $A = \{\langle x, y\rangle : xy \geq 1,\ x > 0\}$ بسته‌است ولی تصویرش $\pi[A] = (0, \infty)$ بسته نمی‌باشد. (ر.ک. نمودارهای زیر.)





فضاهای همانریخت

همانطورکه دیده شد، فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ عبارت است از مجموعهٔ X همراه با ردهٔ مشخص $\mathcal{T}$ از زیر مجموعه‌های X که درچند اصل موضوع صدق می‌کند. بین هر دو فضای $(X, \mathcal{T})$ و $(Y, \mathcal{T}^*)$ توابع بی‌شمار $f: X \to Y$ وجود دارند. ما برای بحث، به‌جای توابع دلخواه، تابعهای پیوسته، یا باز، یا بسته را انتخاب می‌کنیم، زیرا این توابع بخشی از ساختار فضاهای $(X, \mathcal{T})$ و $(Y, \mathcal{T}^*)$ را حفظ خواهند کرد.

حال فرض کنیم یک نگاشت یکبرو (یعنی، یک ــ یک و برو) مانند $f: X \to Y$ وجود داشته باشد. دراین صورت، f تابع یکبروی $f: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ را از مجموعهٔ توان X، یعنی ردهٔ زیر مجموعه‌های X، بتوی مجموعهٔ توان Y القا می‌کند. اگر این تابع القایی $\mathcal{T}$ رانیزبروی $\mathcal{T}^*$ ببرد، یعنی‌یک تناظریک به یک بین مجموعه‌های باز در X ومجموعه‌های باز در Y تعریف کند، فضاهای $(X, \mathcal{T})$ و $(Y, \mathcal{T}^*)$ از دید توپولوژی یکی خواهند بود. به بیان دقیقتر،

تعریف. دوفضای‌توپولوژیک X و Y را درصورتی **همانریخت** یا **هم‌ارز توپولوژیک** خوانیم که یک تابع یکبرو (یعنی، یک ــ یک و برو) مانند $f: X \to Y$ باشد بطوری که f و f^{-1} پیوسته باشند. تابع f یک **همانریختی** نام خواهد داشت.

تابع f رادرصورتی **دو پیوسته** یا **توپولوژیک** نامیم که باز و پیوسته باشد. بنابراین، $f: X \to Y$ یک همانریختی است اگفگر f دو پیوسته و یکبرو باشد.

مثال ۱.۳. فرض کنید $X = (-1, 1)$. تابع $f: X \to \mathbf{R}$ که با $f(x) = \tan \frac{1}{2}\pi x$ تعریف

شده یک ــ یک، برو، و پیوسته است. بعلاوه، تابع معکوس f^{-1} نیز پیوسته است. لذا، $\mathbf{R}$ و بازهٔ باز $(-1,1)$ همانریخت هستند.

مثال ۲۰۳ . فرض کنیم X و Y فضاهایی مجزا باشند. دراین صورت، همانطور که در مثال ۲۰۱ دیدیم، همهٔ توابع از یک فضا به دیگری پیوسته‌اند. بنابراین، X و Y همانریخت‌انداگفگر تابعی یک ــ یک و برو از یکی به دیگری وجود داشته باشد؛ یعنی، از حیث عدد اصلی هم‌ارز باشند.

حکم ۷۰۷ . ***در هر گردآیه از فضاهای توپولوژیک، رابطه‌ای که با " X با Y همانریخت است" تعریف می‌شود یک رابطهٔ هم‌ارزی است.***

لذا، برطبق قضیهٔ اساسی روابط هم‌ارزی، هر گردآیه از فضاهای توپولوژیک را می‌توان به رده‌هایی از فضاهای هم‌ارز توپولوژیک افراز کرد.

خواص توپولوژیک

خاصیت P از مجموعه‌ها را درصورتی **توپولوژیک** و یا ***پایای توپولوژیک*** گوییم که هروقت فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ دارای P باشد، هر فضای همانریخت با $(X,\mathcal{T})$ نیز دارای P باشد.

مثال ۱۰۴ . همانطورکه‌در مثال ۱۰۳ دیده شد، $\mathbf{R}$ با بازهٔ باز $X = (-1,1)$ همانریخت است. بنابراین، *طول* یک خاصیت توپولوژیک نیست، زیرا X و $\mathbf{R}$ طولهای متفاوت‌دارند؛ و *کرانداری* نیز یک خاصیت توپولوژیک نیست، زیرا X کراندار است ولی $\mathbf{R}$ نیست.

مثال ۲۰۴ . فرض کنیم X مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت باشد؛ یعنی، $X = (0,\infty)$. تابع $f: X \to X$ که با $f(x) = 1/x$ تعریف شده یک همانریخت از X بروی X است. توجه کنید که نظیر دنبالهٔ

$$\langle a_n \rangle = \langle 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots \rangle$$

تحت همانریختی، دنبالهٔ

$$\langle f(a_n) \rangle = \langle 1, 2, 3, \ldots \rangle$$

می‌باشد. دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی است، ولی دنبالهٔ $\langle f(a_n) \rangle$ چنین نمی‌باشد. از

اینرو، خاصیت دنبالهٔ کشی بودن توپولوژیک نیست.

بخش اعظم توپولوژی به‌بررسی خواص توپولوژیک، نظیر **فشردگی** و **همبندی**، اختصاص دارد. درواقع، توپولوژی به‌طور صوری عبارت است از بررسی پایاهای توپولوژیک. در مثال زیر، همبندی را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که یک خاصیت توپولوژیک است.

مثال ۳۰۴. فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ **ناهمبند** است اگفگر مساوی اجتماع دو زیر مجموعهٔ باز، ناتهی، و از هم جدا باشد؛ یعنی،

$X = G \cup H$، که درآن $G,H \in \mathcal{T},\ G \cap H = \emptyset$ ولی $G,H \neq \emptyset$.

هرگاه $f : X \to Y$ یک همانریختی باشد، $X = G \cup H$ اگر و فقط اگر $Y = f[G] \cup f[H]$؛ و در نتیجه، Y ناهمبند است اگر و فقط اگر X ناهمبند باشد.

فضای $(X, \mathcal{T})$ **همبند** است اگفگر ناهمبند نباشد.

توپولوژیهای القا شده به‌وسیلهٔ توابع

فرض کنیم $\{(Y_i, \mathcal{T}_i)\}$ گردآیه‌ای از فضاهای توپولوژیک بوده، و به‌ازای هر Y_i تابعی چون $f_i : X \to Y_i$ باشد که بر مجموعهٔ ناتهی و دلخواه X تعریف شده است. قصد ما مطالعهٔ توپولوژیهایی بر X است که تمام توابع f_i نسبت به‌آنها پیوسته هستند. به‌یاد می‌آوریم که f_i نسبت به یک توپولوژی بر X درصورتی پیوسته است که نقش معکوس هر زیر مجموعهٔ باز Y_i زیر مجموعهٔ بازی از X باشد. لذا، ردهٔ زیر از زیر مجموعه‌های X را درنظر می‌گیریم:

$$\mathcal{S} = \bigcup_i \{f_i^{-1}[H] : H \in \mathcal{T}_i\};$$

یعنی، $\mathcal{S}$ از نقش معکوس زیر مجموعه‌های باز هر فضای Y_i تشکیل شده است. توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X که به‌وسیلهٔ $\mathcal{S}$ تولید شده توپولوژی ***القا شده*** (یا **تولید شده**) به‌وسیلهٔ f_i ها نامیده می‌شود. خواص اساسی $\mathcal{T}$ در قضیهٔ بعدی ذکر شده‌اند.

قضیهٔ ۸۰۷

(یک) *همهٔ f_i ها نسبت به $\mathcal{T}$ پیوسته‌اند.*

(دو) *$\mathcal{T}$ اشتراک همهٔ توپولوژیهایی بر X است که f_i ها نسبت به آنها پیوسته‌اند.*

(سه) *$\mathcal{T}$ کوچکترین، یعنی ضخیمترین، توپولوژیی بر X است که f_i ها نسبت به‌آن پیوسته‌اند.*

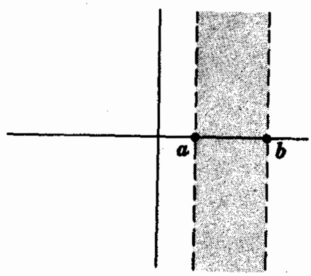
(چهار) *$\mathcal{S}$ یک زیرپایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ می‌باشد.*

ما $\mathcal{S}$ را **زیرپایهٔ معرف** بـرای توپولوژی القا شده به‌وسیلهٔ f_i ها، یعنی ضخیمترین توپولوژیی بر X که f_i ها نسبت به آن پیوسته‌اند، می‌نامیم.

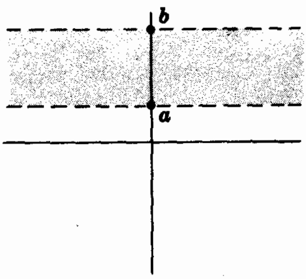
مثال ۱۰۵ . فرض کنیم π_1 و π_2 تصاویر $\mathbf{R}^2$ در $\mathbf{R}$ باشند؛ یعنی،

$\pi_1(\langle x, y\rangle) = x$ و $\pi_2(\langle x, y\rangle) = y$.

همانطور که در زیر مجسم شده، نقش معکوس بازهٔ باز (a, b) در $\mathbf{R}$ یک نوار باز نامتناهی در $\mathbf{R}^2$ است.



$\pi_1^{-1}[(a, b)]$



$\pi_2^{-1}[(a, b)]$

یادآور می‌شویم که این نوارهای باز نامتناهی یک زیر پایه برای توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ را تشکیل مـی‌دهند. لذا، توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ کوچکترین توپولوژی بر $\mathbf{R}^2$ است که تصاویر π_1 و π_2 نسبت به آن پیوسته‌اند.

مسائل حل شده

توابع پیوسته

۱ . فرض‌کنید $f: X \to Y$ یک تابع ثابت‌باشد؛ یعنی، به‌ازای‌هر $x \in X$، $f(x) = p \in Y$. ثابت کنیـد f نسبت بـه هر توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X و هر توپولوژی $\mathcal{T}^*$ بر Y پیوسته اسـت.

حل. بایدنشان‌دادکه نقش معکوس هرزیر مجموعهٔ $\mathcal{T}^*$ ـ باز Y یک زیر مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ـ باز X است. فرض‌کنیم $H \in \mathcal{T}^*$. چون به‌ازای هر $x \in X$، $f(x) = p$، پس

$$f^{-1}[H] = \begin{cases} X \text{ ، اگر } p \in H \\ \emptyset \text{ ، اگر } p \notin H \end{cases}$$

درهر حـالت، $f^{-1}[H]$ زیر مجمـوعهٔ بازی از X است، زیرا X و $\emptyset$ متعلق به هر

توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X اند.

۲ . فرض کنید $f: X \to Y$ یک تابع باشد. هرگاه $(Y, \mathcal{J})$ یک فضای نامجزا باشد، $f: (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{J})$ به‌ازای هر $\mathcal{T}$ پیوسته خواهد بود.

حل. نشان می‌دهیم نقش معکوس هر زیر مجموعهٔ باز Y زیر مجموعهٔ بازی از X است. چون $(Y, \mathcal{J})$ یک فضای نامجزاست، Y و $\emptyset$ تنها زیرمجموعه‌های باز Y است. اما

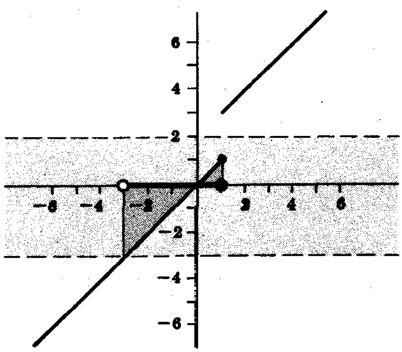
$$f^{-1}[Y] = X, \quad f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$$

و X و $\emptyset$ متعلق به هر توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X اند. لذا، f به‌ازای هر $\mathcal{T}$ پیوسته می‌باشد.

۳ . فرض کنید $\mathcal{U}$ توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}$ بوده، و $\mathcal{T}$ توپولوژی حد بالایی بر $\mathbf{R}$ باشد که به‌وسیلهٔ بازه‌های باز ــ بستهٔ $(a, b]$ تولید می‌شود. بعلاوه، $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ تابعی باشد که با

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x \leq 1 \\ x + 2 & \text{اگر } x > 1 \end{cases}$$

تعریف شده است. (ر.ک. نمودار زیر.)



(یک) نشان دهید f، $\mathcal{U}$-$\mathcal{U}$ پیوسته‌نیست.

(دو) نشان دهید f، $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}$ پیوسته است.

حل

(یک) فرض کنیم $A = (-3, 2)$. دراین صورت، $f^{-1}[A] = (-3, 1]$. چون $A \in \mathcal{U}$

ولی $f^{-1}[A] \notin \mathcal{U}$ ؛ پس f ، $\mathcal{U}$-$\mathcal{U}$ پیوسته نمی‌باشد.

(دو) فرض کنیم $A = (a, b]$. دراین صورت،

$$f^{-1}[A] = \begin{cases} (a, b] & a < b \leqq 1 \text{ اگر} \\ (a, 1] & a < 1 < b \leqq 3 \text{ اگر} \\ (a, b-2] & a < 1 < 3 < b \text{ اگر} \\ \emptyset & 1 \leqq a < b \leqq 3 \text{ اگر} \\ (1, b-2] & 1 \leqq a < 3 < b \text{ اگر} \\ (a-2, b-2] & 3 \leqq a < b \text{ اگر} \end{cases}$$

درهر حالت، $f^{-1}[A]$ یک مجموعهٔ $\mathcal{T}$ باز است. لذا، f ، $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}$ پیوسته می‌باشد.

۴ . فرض‌کنید تابع $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ ، $\mathcal{T}_1$-$\mathcal{T}_2$ پیوسته نباشد. نشان دهید هرگاه $\mathcal{T}_1^*$ یک توپولوژی بر X و ضخیمتر از $\mathcal{T}_1$ بوده و $\mathcal{T}_2^*$ یک توپولوژی بر Y وظریفتر از $\mathcal{T}_2$ باشد، یعنی $\mathcal{T}_1^* \subset \mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_2^*$ ، آنگاه f ، $\mathcal{T}_1^*$-$\mathcal{T}_2^*$ پیوسته نخواهد بود.

حل. چون $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ پیوسته نیست،

$\exists G \in \mathcal{T}_2$ که به‌ازای آن $f^{-1}[G] \notin \mathcal{T}_1$.

اما $\mathcal{T}_1^* \subset \mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_2^*$. لذا، $G \in \mathcal{T}_2$ ایجاب می‌کند که $G \in \mathcal{T}_2^*$ ، و $f^{-1}[G] \notin \mathcal{T}_1$ ایجاب می‌کند که $f^{-1}[G] \notin \mathcal{T}_1^*$. بنابراین، f نسبت به $\mathcal{T}_1^*$ و $\mathcal{T}_2^*$ پیوسته نیست.

۵ . نشان دهید تابع همانی $i : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}^*)$ پیوسته است اگر و فقط اگر $\mathcal{T}$ از $\mathcal{T}^*$ ظریفتر باشد؛ یعنی، $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$.

حل. بنابر تعریف، i ، $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}^*$ پیوسته است اگر و فقط اگر

$$G \in \mathcal{T}^* \quad \Rightarrow \quad i^{-1}[G] \in \mathcal{T} .$$

اما $i^{-1}[G] = G$ ، پس i ، $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}^*$ پیوسته است اگر و فقط اگر

$$G \in \mathcal{T}^* \quad \Rightarrow \quad G \in \mathcal{T} \;;$$

یعنی، $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$.

۶ . قضیهٔ ۲.۷ را ثابت کنید: فرض کنید $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}^*)$ ، و $\mathcal{S}$ زیر پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}^*$ بر Y باشد. دراین صورت، f پیوسته است اگر و فقط اگر معکوس هر

عضو از زیـر پـایهٔ $\mathcal{S}$ زیر مجموعهٔ بازی از X باشد؛ یعنی، به‌ازای هر $S \in \mathcal{S}$، $f^{-1}[S] \in \mathcal{T}$.

حل. فرض کنیم بـه‌ازای هر $S \in \mathcal{S}$، $f^{-1}[S] \in \mathcal{T}$. نشان می‌دهیم f پیوسته است؛ یعنی، $G \in \mathcal{T}^*$ ایجاب مـی‌کند کـه $f^{-1}[G] \in \mathcal{T}$. فرض کنیم $G \in \mathcal{T}^*$. طبق تعریف زیر پایه،

$$G = \cup_i (S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_{n_i}})$$ که درآن $S_{i_k} \in \mathcal{S}$.

بنابراین،

$$\begin{aligned} f^{-1}[G] &= f^{-1}[\cup_i (S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_{n_i}})] = \cup_i f^{-1}[S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_{n_i}}] \\ &= \cup_i (f^{-1}[S_{i_1}] \cap \cdots \cap f^{-1}[S_{i_{n_i}}]). \end{aligned}$$

اما $S_{i_k} \in \mathcal{S}$ ایجاب می‌کند که $f^{-1}[S_{i_k}] \in \mathcal{T}$. لذا، $f^{-1}[G] \in \mathcal{T}$ چرا که اجتماعی از اشتراکهای متناهی مجموعه‌های باز است. بنابراین، f پیوسته می‌باشد.
از آن سو، اگر f پیوسته باشد، معکوس تمام مجموعه‌های باز، از جمله اعضای $\mathcal{S}$، باز خواهند بود.

۷. فرض کنید f تابعی از فضای توپولوژیک X بتوی بازهٔ یکهٔ $[0,1]$ باشد. نشان دهید هرگاه $f^{-1}[(a,1]]$ و $f^{-1}[[0,b)]$، به‌ازای هر $0 < a, b < 1$، زیر مجموعه‌های بازی از X باشند، f پیوسته خواهد بود.

حل. به‌یاد می‌آوریم که بازه‌های $(a,1]$ و $[0,b)$ یک زیرپایه برای بازهٔ یکهٔ $I = [0,1]$ تشکیل می‌دهند. لـذا، f، بنابر مسئلهٔ قبل، یعنی طبق قضیهٔ ۲۰۷، پیوسته می‌باشد.

۸. فرض کنید تابعهای $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ پیوسته باشند. ثابت کنید تابع ترکیب $g \circ f: X \to Z$ نیز پیوسته است.

حل. فرض کنیم G زیرمجموعهٔ بازی از Z باشد. دراین صورت، $g^{-1}[G]$، به‌دلیل پیوسته‌بودن g، در Y باز است. اما f نیز پیوسته است. درنتیجه، $f^{-1}[g^{-1}[G]]$ نیز در X باز می‌باشد. چون

$$(g \circ f)^{-1}[G] = f^{-1}[g^{-1}[G]],$$

$(g\circ f)^{-1}[G]$ ، به‌ازای هر زیر مجموعهٔ باز G از Z ، در X باز است ، یا ، $g\circ f$ پیوسته می‌باشد .

۹ . فرض کنید $\{\mathcal{T}_i\}$ گرد آیه‌ای از توپولوژیها بر X باشد . ثابت کنید هرگاه $f : X \to Y$ نسبت به هر $\mathcal{T}_i$ پیوسته باشد ، نسبت به اشتراک $\mathcal{T} = \cap_i \mathcal{T}_i$ نیز چنین است .

حل . فرض کنیم G زیر مجموعهٔ بازی از Y باشد . دراین صورت ، بنا به فرض ، $f^{-1}[G]$ متعلق به هر $\mathcal{T}_i$ است . لذا ، $f^{-1}[G]$ تعلق به اشتراک دارد ؛ یعنی ، $f^{-1}[G] \in \cap_i \mathcal{T}_i = \mathcal{T}$ ؛ و درنتیجه ، f نسبت به $\mathcal{T}$ پیوسته می‌باشد .

۱۰ . قضیهٔ ۳.۷ را ثابت کنید . تابع $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و فقط اگر نقش معکوس هر زیر مجموعهٔ بسته از Y زیر مجموعهٔ بسته‌ای از X باشد .

حل . فرض کنیم $f : X \to Y$ پیوسته باشد ، و F رازیرمجموعهٔ بسته‌ای از Y می‌گیریم . دراین صورت ، F^c باز است ؛ و درنتیجه ، $f^{-1}[F^c]$ در X باز می‌باشد . لیکن $f^{-1}[F^c] = (f^{-1}[F])^c$. بنابراین ، $f^{-1}[F]$ بسته می‌باشد .
بعکس ، فرض کنیم بسته بودن F در Y بسته بودن $f^{-1}[F]$ در X را ایجاب کند . همچنین ، G زیرمجموعهٔ بازی از Y باشد . دراین صورت ، G^c در Y بسته است ؛ و درنتیجه ، $f^{-1}[G^c] = (f^{-1}[G])^c$ در X بسته می‌باشد . بنابراین ، $f^{-1}[G]$ باز است ؛ و لذا ، f پیوسته می‌باشد .

۱۱ . قضیهٔ ۴.۷ را ثابت کنید : تابع $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و فقط اگر ، به‌ازای هر زیرمجموعهٔ $A \subset X$ ، $f[\bar{A}] \subset \overline{f[A]}$.

حل . فرض کنیم $f : X \to Y$ پیوسته باشد . چون $f[A] \subset \overline{f[A]}$ ، پس

$$A \subset f^{-1}[f[A]] \subset f^{-1}[\overline{f[A]}] .$$

اما $\overline{f[A]}$ بسته است ؛ و درنتیجه ، $f^{-1}[\overline{f[A]}]$ نیز بسته می‌باشد . لذا ،

$$A \subset \bar{A} \subset f^{-1}[\overline{f[A]}] ;$$

و درنتیجه ،

$$f[\bar{A}] \subset \overline{f[A]} = f[f^{-1}[\overline{f[A]}]] .$$

بعکس، فرض کنیم به‌ازای هر $A \subset X$ ، $f[\bar{A}] \subset \overline{f[A]}$ ، و F را زیر مجموعهٔ بسته‌ای از Y می‌گیریم. قرار می‌دهیم $A = f^{-1}[F]$ ، و نشان می‌دهیم A نیز بسته است یا، معادلاً"، $\bar{A} = A$. گوییم

$$f[\bar{A}] = f[\overline{f^{-1}[F]}] \subset \overline{f[f^{-1}[F]]} = \bar{F} = F .$$

پس

$$\bar{A} \subset f^{-1}[f[\bar{A}]] \subset f^{-1}[F] = A .$$

اما $A \subset \bar{A}$ ؛ درنتیجه، $\bar{A} = A$ و f پیوسته می‌باشد.

۱۲ . فرض‌کنید $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}^*)$ پیوسته‌باشد. دراین‌صورت، $f_A : (A, \mathcal{T}_A) \to (Y, \mathcal{T}^*)$ نیز پیوسته است، که درآن $A \subset X$ و f_A تحدید f به A می‌باشد.

حل. توجه‌کنیدکه‌به‌ازای‌هر $G \subset Y$ ، $f_A^{-1}[G] = A \cap f^{-1}[G]$. فرض‌کنیم $G \in \mathcal{T}^*$. دراین صورت، $f^{-1}[G] \in \mathcal{T}$ ؛ و درنتیجه، طبق تعریف توپولوژی القایی، $A \cap f^{-1}[G] \in \mathcal{T}_A$. بنابراین، $A \cap f^{-1}[G] = f_A^{-1}[G] \in \mathcal{T}_A$. درنتیجه، f_A پیوسته می‌باشد.

پیوستگی در یک نقطه

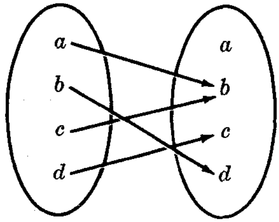
۱۳ . تحت چه شرایطی تابع $f : X \to Y$ در نقطهٔ $p \in X$ پیوسته نیست؟

حل. تابع $f : X \to Y$ در $p \in X$ پیوسته‌است‌اگفگر، به‌ازای‌هر مجموعهٔ باز $H \subset Y$ شامل $f(p)$ ، $f^{-1}[H]$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ بازی شامل p باشد. پس، f درصورتی در $p \in X$ پیوسته نیست که لااقل یک مجموعهٔ باز مانند $H \subset Y$ شامل $f(p)$ باشد بطوری که $f^{-1}[H]$ شامل مجموعهٔ بازی حاوی p نباشد.
به عبارت معادل، $f : X \to Y$ در $p \in X$ پیوسته نیست اگفگر همسایگیی چون N از $f(p)$ باشد بطوری که $f^{-1}[N]$ یک همسایگی p نباشد.

۱۴ . توپولوژی زیر بر $X = \{a, b, c, d\}$ را درنظر بگیرید:

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$$

و فرض کنید تابع $f : X \to X$ با نمودار زیر تعریف شده باشد:



(یک) نشان دهید f در c پیوسته نیست .

(دو) نشان دهید f در d پیوسته است .

حل

(یک) توجه‌کنیدکه $\{a, b\}$ مجموعهٔ‌بازی‌شامل $f(c) = b$ است‌و $f^{-1}[\{a, b\}] = \{a, c\}$ لـذا ، f در c پیوسته‌نیست ، چراکه‌مجموعهٔ بازی شامل c و مشمول $\{a, c\}$ وجود نـدارد .

(دو) تنها مجموعه‌های باز شامل $f(d) = c$ عبارتند از $\{b, c, d\}$ و X . توجه کنید که $f^{-1}[\{b, c, d\}] = X$ و $f^{-1}[X] = X$. لذا ، f در d پیوسته‌است ، چرا که معکوس هر مجموعهٔ باز شامل $f(d)$ مجموعهٔ بازی شامل d است .

۱۵ . فرض کنیدمجموعهٔ یکانی $\{p\}$ زیرمجموعهٔ بازی از فضای توپولوژیک X باشد . نشان دهید ، به‌ازای هرفضای‌توپولوژیک Y و هر تابع $f : X \to Y$ ، f در $p \in X$ پیوسته اسـت .

حل . فرض کنیـم $H \subset Y$ مجموعهٔ بازی شامل $f(p)$ باشد داریم . بنابراین ، f در p پیوسته .

$$f(p) \in H \quad \Rightarrow \quad p \in f^{-1}[H] \quad \Rightarrow \quad \{p\} \subset f^{-1}[H]$$

است .

۱۶ . فرض کنید $f : X \to Y$ در $p \in X$ پیوسته باشد . ثابت کنید تحدید f بـه زیـر–مجموعه‌ای شامل p نیز در p پیوسته است . به‌طور دقیقتر ، فرض کنید A زیـر–مجموعهٔ فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ باشد به‌طوری که $p \in A \subset X$ ، و $f_A : A \to Y$ تحدید $f : X \to Y$ به A باشد . دراین صورت ، اگر f در p ، $\mathcal{T}$ – پیوسته‌باشد ، f_A در p ، $\mathcal{T}_A$ – پیوسته است که $\mathcal{T}_A$ توپولوژی نسبی بر A می‌باشد .

حل. فرض کنیم $H \subset Y$ مجموعهٔ بازی شامل $f(p)$ باشد. چون f در p پیوسته است،

$$\exists G \in \mathcal{T} \text{ بطوری که } p \in G \subset f^{-1}[H] \text{ ؛}$$

و درنتیجه،

$$p \in A \cap G \subset A \cap f^{-1}[H] = f_A^{-1}[H] \cdot$$

اما، طبق تعریف توپولوژی القایی، $A \cap G \in \mathcal{T}_A$. درنتیجه، f_A، $\mathcal{T}_A$ ــ پیوسته در p می‌باشد.

۱۷ . قضیهٔ ۷.۵ را ثابت کنید: فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. دراین صورت، تابع $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و فقط اگر در هر نقطهٔ $p \in X$ پیوسته باشد.

حل. فرض‌کنیم f پیوسته بوده، و $H \subset Y$ مجموعهٔ بازی شامل $f(p)$ باشد. پس، دراین صورت، $p \in f^{-1}[H]$، و $f^{-1}[H]$ باز است. درنتیجه، f در p پیوسته می‌باشد.

حال فرض کنیم f در هر نقطهٔ $p \in X$ پیوسته بوده، و $H \subset Y$ باز باشد. به‌ازای هر $p \in f^{-1}[H]$، مجموعهٔ بازی شامل $G_p \subset X$ هست بطوری که $p \in G_p \subset f^{-1}[H]$. بنابراین، $f^{-1}[H] = \bigcup\{G_p : p \in f^{-1}[H]\}$ اجتماعی از مجموعه‌های باز است. لذا، $f^{-1}[H]$ باز است؛ و درنتیجه، f پیوسته می‌باشد.

۱۸ . حکم ۷.۶ را ثابت کنید: هرگاه تابع $f : X \to Y$ در $p \in X$ پیوسته باشد، در p دنباله‌ای پیوسته است؛ یعنی، $a_n \to p \Rightarrow f(a_n) \to f(p)$.

حل. باید نشان داد هر همسایگی N از $f(p)$ شامل تقریبا همهٔ جملات دنبالهٔ $\langle f(a_1), f(a_2), \ldots \rangle$ است. فرض‌کنیم N یک همسایگی $f(p)$ باشد. طبق فرض، f در p پیوسته است درنتیجه، $M = f^{-1}[N]$ همسایگی p می‌باشد. هرگاه $\langle a_n \rangle$ همگرا به p باشد، M شامل تقریبا "همهٔ جملات $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ است؛ یعنی، به‌ازای تقریبا" هر $n \in N$، $a_n \in M$. اما

$$a_n \in M \Rightarrow f(a_n) \in f[M] = f[f^{-1}[N]] = N \cdot$$

ازاینرو، به‌ازای تقریبا" هر $n \in N$، $f(a_n) \in N$؛ ودرنتیجه، دنبالهٔ $\langle f(a_n) \rangle$ همگرا

به $f(p)$ می‌باشد. لذا، f در p دنباله‌ای پیوسته می‌باشد.

توابع باز و بسته، همانریختی‌ها

۱۹ . تابع حقیقی $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را طوری مثال بزنید که پیوسته و بسته باشد ولی باز نباشد.

حل. فرض‌کنیم f یک تابع ثابت باشد، مثلا" به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$، $f(x) = 1$. در این صورت، به‌ازای هر $A \subset \mathbf{R}$، $f[A] = \{1\}$. پس، f یک تابع بسته است و یک تابع باز نیست. بعلاوه، f پیوسته می‌باشد.

۲۰ . فرض‌کنید تابع حقیقی $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ با $f(x) = x^2$ تعریف شده باشد. نشان دهید f باز نیست.

حل. فرض‌کنیم $A = (-1, 1)$ یک مجموعهٔ باز باشد. توجه کنید که $f[A] = [0, 1)$، که باز نیست. درنتیجه، f یک تابع باز نمی‌باشد.

۲۱ . فرض‌کنید $\mathcal{B}$ یک پایه‌برای فضای توپولوژیک X باشد. نشان دهید هرگاه $f: X \to Y$ این خاصیت را دارا باشد که به‌ازای هر $B \in \mathcal{B}$، $f[B]$ باز باشد، آنگاه f یک تابع باز خواهد بود.

حل. نشان می‌دهیم نقش‌هرزیرمجموعهٔ باز X در Y بازاست. فرض‌کنیم $G \subset X$ باز باشد. طبق تعریف پایه، $G = \cup_i B_i$ که درآن $B_i \in \mathcal{B}$. اما $f[G] = f[\cup_i B_i] = \cup_i f[B_i]$. و، طبق‌فرض، هر $f[B_i]$ در Y بازاست؛ و درنتیجه، $f[G]$، یعنی اجتماعی از مجموعه‌های باز، نیز در Y باز است. لذا، f یک تابع باز می‌باشد.

۲۲ . نشان دهید بازهٔ بستهٔ $A = [a, b]$ با بازهٔ یکهٔ بستهٔ $I = [0, 1]$ همانریخت است.

حل. تابع خطی $f: I \to A$ که با $f(x) = (b - a)x + a$ تعریف شده یک ـ یک، برو، و دو پیوسته است. درنتیجه، f یک همانریختی می‌باشد.

۲۳ . نشان دهید مساحت یک خاصیت توپولوژیک نیست .

حل . قرص‌باز $D = \{\langle r,\theta\rangle : r < 1\}$ به‌شعاع 1 با قرص‌باز $D^* = \{\langle r,\theta\rangle : r < 2\}$ به شعـاع 2 همانریخت است . درواقع ، تابع $f : D \to D^*$ که با $f(\langle r,\theta\rangle) = \langle 2r,\theta\rangle$ تعریف می‌شود یک همانریختی است . دراینجا $\langle r,\theta\rangle$ مختصات قطبی یک نقطه در $\mathbf{R}^2$ را نشان می‌دهد .

۲۴ . فرض کنید $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}^*)$ یک ــ یک و باز بوده ، $A \subset X$ ، و $f[A] = B$. نشان دهید تابع $f_A : (A,\mathcal{T}_A) \to (B,\mathcal{T}^*_B)$ نیز یک ــ یک و باز است . دراینجا f_A تحدید f به A است ، و $\mathcal{T}_A$ و $\mathcal{T}^*_B$ توپولوژیهای نسبی می‌باشند .

حل . هرگاه f یک ــ یک باشد ، هر تحدید f نیز یک ــ یک است . پس فقط باید نشان داد که f_A باز می‌باشد .
فرض‌کنیم $H \subset A$ ، $\mathcal{T}_A$ ـ بازباشد . پس، طبق تعریف توپولوژی نسبی ، $H = A \cap G$ که‌درآن $G \in \mathcal{T}$. چون f یک‌ـیک‌است ، $f[A \cap G] = f[A] \cap f[G]$ ؛و درنتیجه ،

$$f_A[H] = f[H] = f[A \cap G] = f[A] \cap f[G] = B \cap f[G] .$$

چون f باز اسـت و $G \in \mathcal{T}$ ، $f[G] \in \mathcal{T}^*$. لذا ، $B \cap f[G] \in \mathcal{T}^*_B$ ؛ و درنتیجه، $f_A : (A,\mathcal{T}_A) \to (B,\mathcal{T}^*_B)$ باز می‌باشد .

۲۵ . فرض کنید $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}^*)$ یک همـانریختی بـوده ، و $(A,\mathcal{T}_A)$ زیر فضایی از $(X,\mathcal{T})$ باشد . نشان دهید $f_A : (A,\mathcal{T}_A) \to (B,\mathcal{T}^*_B)$ نیز یک همانریختی است ، که درآن f_A تحدید f به A است ($f[A] = B$)و $\mathcal{T}^*_B$ توپولوژی‌نسبی‌بر B می‌باشد.

حل . چون f یک ــ یک و بروست ، $f_A : A \to B$ ،که درآن $B = f[A]$ ، نیز یکـ یک‌وبروست . لذا ، فقطباید نشان‌داد که f_A دو پیوسته است ؛ یعنی ، باز و پیوسته است . طبق مسئلهٔ قبل ، f_A باز است . بعلاوه ، تحدید هر تابع پیوسته نیز پیوسته است . درنتیجه ، $f_A : (A,\mathcal{T}_A) \to (B,\mathcal{T}^*_B)$ یک همانریختی می‌باشد .

۲۶ . نشان دهیـد هر بازهٔ $A = (a,b)$ به‌عنوان زیر فضایی از $\mathbf{R}$ همبند است . (برای تعریف همبندی ، ر.ک. مثال ۳.۴ .)

حل . فرض‌کنیم A همبند نباشد . در این صورت ، مجموعه‌های بازی چون $G, H \subset \mathbf{R}$ هستند بطوری‌که $A \cap G$ و $A \cap H$ ناتهی‌وازهم جدایند و در $A = (A \cap G) \cup (A \cap H)$ صدق می‌کنند . حال تابع $f : A \to \mathbf{R}$ را به‌این صورت تعریف می‌کنیم :

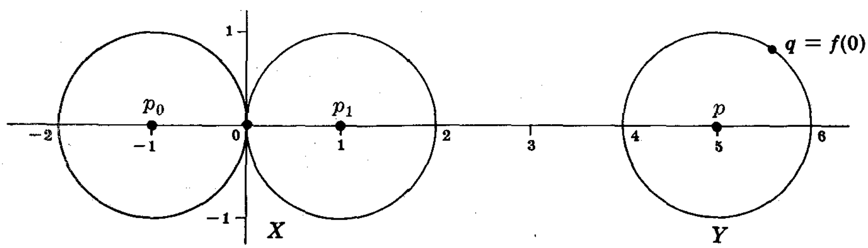
$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ ، } x \in A \cap G \text{ اگر} \\ 0 \text{ ، } x \in A \cap H \text{ اگر} \end{cases}$$

دراین‌صورت ، f پیوسته‌است ، چرا که معکوس هر مجموعهٔ باز ، $A \cap G$ ، $A \cap H$ ، $\emptyset$ ، یا A است ؛ و درنتیجه ، باز می‌باشد . اما ، با اعمال قضیهٔ مقدار میانی ، $\exists x_0 \in A$ که‌به‌ازای‌آن $f(x_0) = \frac{1}{2}$. امااین‌ناممکن‌است ؛ در نتیجه ، A همبندمی‌باشد .

۲۷ . نشان دهید زیرمجموعه‌های زیر از $\mathbf{R}^2$ ، که درآنها توپولوژیها نسبی شده‌های توپولوژیهای معمولی‌اند ، همانریخت نیستند :

$$X = \{x : d(x, p_0) = 1 \text{ or } d(x, p_1) = 1; \; p_0 = \langle 0, -1 \rangle, \; p_1 = \langle 0, 1 \rangle\}$$

$$Y = \{x : d(x, p) = 1, \; p = \langle 0, 5 \rangle\}$$



حل . فرض کنیم یک همانریختی‌مانند $f : X \to Y$ وجود داشته باشد . قرار می‌دهیم $q = f(0)$ ، $X^* = X \setminus \{0\}$ ، و $Y^* = Y \setminus \{q\}$. دراین صورت ، $f : X^* \to Y^*$ نیز ، نسبت به توپولوژیهای نسبی ، یک همانریختی است (ر.ک. مسئلهٔ ۲۵) .

نشان می‌دهیم Y^* همبند است . چرا که اگر $q = \langle 5 + \cos\theta_0, \sin\theta_0 \rangle$ ، تابع $g : (0, 2\pi) \to Y^*$ که با $g(\theta) = \langle 5 + \cos(\theta_0 + \theta), \sin(\theta_0 + \theta) \rangle$ تعریف می‌شود یک همانریختی است . اما بازهٔ $(0, 2\pi)$ همبند است ؛ درنتیجه ، Y^* نیز همبندخواهد بود .

از سوی دیگر ، X^* همبند نیست ؛ زیرا مجموعه‌های

$$H = \{\langle x, y \rangle : x < 0\} \text{ و } G = \{\langle x, y \rangle : x > 0\}$$

هردودر $\mathbf{R}^2$ بازند . درنتیجه ، $G^* = X^* \cap G$ و $H^* = X^* \cap H$ زیرمجموعه‌های باز

X^* هستند. بعلاوه، G^* و H^* ناتهی و از هم جدایند و در $X^* = G^* \cup H^*$ صدق می‌کنند. چون همبندی یک خاصیت توپولوژیک است، X^* با Y^* همانریخت نیست؛ و درنتیجه، چنین تابعی وجود نخواهد داشت.

توپولوژیهای القا شده به‌وسیلهٔ توابع

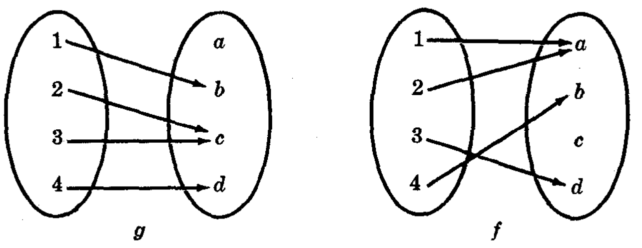
۲۸. فرض‌کنید $\{f_i : X \to (Y_i, \mathcal{T}_i)\}$ گردآیه‌ای از توابع ثابت از مجموعهٔ دلخواه X بتوی فضاهای توپولوژیک $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ باشد. ضخیمترین توپولوژی بر X را که f_i ها نسبت به آن پیوسته‌اند مشخص نمایید.

حل. به‌یاد می‌آوریم (ر.ک. مسئلهٔ ۱) که تابع پیوستهٔ $f : X \to Y$ نسبت به هر توپولوژی بر X پیوسته است. از اینرو، تمام توابع ثابت f_i نسبت به توپولوژی نامجزای $\{X, \emptyset\}$ بر X پیوسته می‌باشند. چون توپولوژی نامجزای $\{X, \emptyset\}$ بر X ضخیمترین توپولوژی بر X است، ضخیمترین توپولوژی بر X که توابع ثابت نسبت به آن پیوسته‌اند نیز می‌باشد.

۲۹. توپولوژی

$$\mathcal{T} = \{Y, \emptyset, \{c\}, \{a,b,c\}, \{c,d\}\}$$

بر $Y = \{a,b,c,d\}$ را درنظر بگیرید. فرض‌کنید $X = \{1,2,3,4\}$، و توابع $f : X \to (Y, \mathcal{T})$ و $g : X \to (Y, \mathcal{T})$ با نمودارهای زیر تعریف شده باشند:



زیر پایهٔ معرف $\mathcal{S}$ برای توپولوژی $\mathcal{T}^*$ بر X را که به‌وسیلهٔ f و g القا شده، یعنی ضخیمترین توپولوژیی که f و g نسبت به آن پیوسته‌اند، را پیدا کنید.

حل. به‌یاد می‌آوریم که

$$\mathcal{S} = \{f^{-1}[H] : H \in \mathcal{T}\} \cup \{g^{-1}[H] : H \in \mathcal{T}\}.$$

یعنی، $\mathcal{S}$ از معکوس‌زیر مجموعه‌های باز Y تحت f و g تشکیل شده است. بنابر–این،

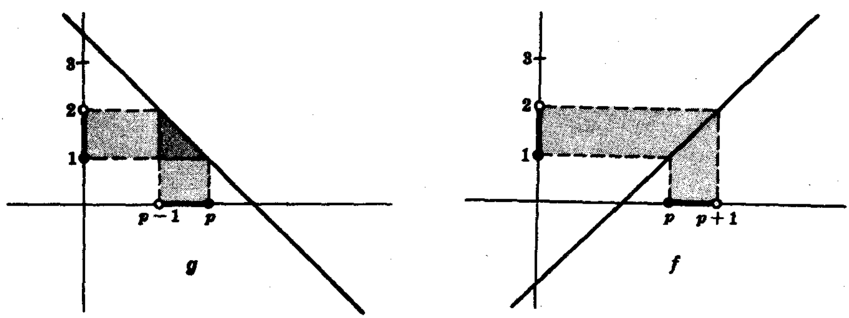
$$\mathcal{S} \;=\; \{X, \emptyset, \{1,2,4\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}\} .$$

۳۰. فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژیی بر $\mathbf{R}$ باشد که به‌وسیلهٔ بازه‌های بسته ــ باز $[a,b)$ تولید می‌شود، و $\mathcal{T}^*$ را توپولوژیی بــر $\mathbf{R}$ بگیرید که به‌وسیلهٔ گردآیهٔ تمام توابع خطی $f:\mathbf{R}\to(\mathbf{R},\mathcal{T})$ که بــا $f(x) = ax+b,\ \ a,b\in\mathbf{R}$ تعریف می‌شوند القا می‌شود. نشان دهید $\mathcal{T}^*$ یک توپولوژی مجزا بر $\mathbf{R}$ است.

حل. نشان می‌دهیم، به‌ازای هر $p\in\mathbf{R}$، مجموعهٔ یکانی $\{p\}$ یک مجموعهٔ $\mathcal{T}^*$ باز است. مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ــ باز $A = [1,2)$ و توابع $f:\mathbf{R}\to(\mathbf{R},\mathcal{T})$ و $g:\mathbf{R}\to(\mathbf{R},\mathcal{T})$ که‌با

$$g(x) \;=\; -x-p+1 \;\;\text{و}\;\; f(x) \;=\; x-p+1$$

تعریف و درزیر نموده شده‌اند را درنظر می‌گیریم.



گوییم $A\in\mathcal{T}$ ایجاب می‌کند که

$$g^{-1}[A] \;=\; (p-1,p] \;\;\text{و}\;\; f^{-1}[A] \;=\; [p,p+1)$$

متعلق به زیر پایهٔ معرف $\mathcal{S}$ برای توپولوژی $\mathcal{T}^*$ باشند. بنابراین، اشتراک

$$(p-1,p]\cap[p,p+1) \;=\; \{p\}.$$

متعلق به $\mathcal{T}^*$ است؛ و درنتیجه، $\mathcal{T}^*$ توپولوژی مجزا بر $\mathbf{R}$ می‌باشد.

۳۱. قضیهٔ ۸.۷ را ثابت کنید: فرض کنید $\{f_i : X\to(Y_i,\mathcal{T}_i)\}$ گردآیه‌ای از توابع باشد که برمجموعهٔ دلخواه و ناتهی X تعریف شده‌اند،

$$\mathcal{S} \;=\; \textstyle\bigcup_i \{f_i^{-1}[H] \,:\, H\in\mathcal{T}_i\},$$

و $\mathcal{T}$ توپولوژیی بر X باشد که به‌وسیلهٔ $\mathcal{S}$ تولید می‌شود.

دراین صورت ،

(یک) همهٔ f_i ها نسبت به $\mathcal{T}$ پیوسته‌اند ؛

(دو) هرگاه $\mathcal{T}^*$ اشتراک جمیع توپولوژیهایی بر X باشد که f_i ها نسبت به آن پیوسته‌اند ، آنگاه $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ ؛

(سه) $\mathcal{T}$ ضخیمترین توپولوژیی بر X است که f_i ها نسبت به آن پیوسته‌اند ؛

(چهار) $\mathcal{S}$ یک زیر پایه برای $\mathcal{T}$ است .

حل

(یک) به‌ازای‌هر $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ ، اگر $H \in \mathcal{T}_i$ ، $f_i^{-1}[H] \in \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. بنابر- این ، همهٔ f_i ها نسبت به $\mathcal{T}$ پیوسته‌اند .

(دو) بنابر مسئلهٔ ۹ ، همهٔ f_i ها نسبت به $\mathcal{T}^*$ نیز پیوسته‌اند . درنتیجه ، $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}^*$ و ، چون $\mathcal{T}$ توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathcal{S}$ است ، $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$. از آن سو ، $\mathcal{T}$ یکی‌از توپولوژیهایی است که f_i ها نسبت به‌آن پیوسته‌اند . بنابراین ، $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$ ؛ و درنتیجه ، $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

(سه) از (دو) نتیجه می‌شود .

(چهار) از این امر که هر رده‌از مجموعه‌ها زیر پایهٔ توپولوژیی است که تولید می‌کند نتیجه می‌شود .

مسائل تکمیلی

توابع پیوسته

۳۲ . ثابت کنید $f : X \to Y$ پیوسته‌است‌اگروفقط‌اگر به‌ازای‌هر $A \subset X$ ، $f^{-1}[A^\circ] \subset (f^{-1}[A])^\circ$.

۳۳ . فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $X = E \cup F$. همچنین ، $f : E \to Y$ و $g : F \to Y$ ، که بر $E \cap F$ ، $f = g$ ، و نسبت به توپولوژیهای نسبی پیوسته‌اند . توجه کنید که $h = f \cup g$ تابعی است از X بتوی Y .

(یک) با مثال نشان دهید که h لزوما" پیوسته نیست .

(دو) ثابت‌کنید اگر E و F باز باشند ، h پیوسته است . (سه) ثابت کنید اگر E و F بسته باشند ، h پیوسته می‌باشد .

۳۴ . فرض کنید $f : X \to Y$ پیوسته‌باشد ، و نشان دهید $f : X \to f[X]$ نیز پیوسته است ، که درآن $f[X]$ دارای توپولوژی نسبی است .

۳۵ . فرض کنید X یک فضای توپولوژیک بوده ، و $\chi_A : X \to \mathbf{R}$ تابع مشخص زیر مجموعه‌ای

از X مانند A باشد. نشان دهید χ_A در $p \in X$ پیوسته است اگر و فقط اگر p عنصری از کرانهٔ A نباشد. (به‌یاد بیاورید که اگر $x \in A$ ، $\chi_A(x) = 1$ ؛ و اگر $x \in A^c$ ، $\chi_A(x) = 0$.)

۳۶ . $\mathbf{R}$ را با توپولوژی معمولی درنظربگیرید، ونشان‌دهید اگر هر تابع $f : X \to \mathbf{R}$ پیوسته باشد، X یک فضای مجزاست.

توابع باز و بسته

۳۷ . فرض کنید $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}^*)$ ، و احکام زیر را ثابت نمایید:

(یک) f بسته است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $A \subset X$ ، $\overline{f[A]} \subset f[\bar{A}]$ ؛

(دو) f باز است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $A \subset X$ ، $f[A^\circ] \subset (f[A])^\circ$.

۳۸ . نشان دهید تابع $f : (0, \infty) \to [-1,1]$ که با $f(x) = \sin(1/x)$ تعریف می‌شود پیوسته است، اما نه‌باز است نه بسته؛ دراینجا $(0, \infty)$ و $[-1,1]$ توپولوژی معمولی نسبی‌شده دارند.

۳۹ . فرض کنید $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}^*)$ باز و برو بوده، و $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ باشد. ثابت کنید $\{f[B] : B \in \mathcal{B}\}$ یک‌پایه برای $\mathcal{T}^*$ است.

۴۰ . تابع $f : X \to Y$ وزیرمجموعهٔ $A \subset X$ را قسمی مثال بزنیدکه f باز ولی f_A ، یعنی تحدید f به A ، باز نباشد.

همانریختی‌ها، خواص توپولوژیک

۴۱ . فرض کنید $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ پیوسته باشند. نشان دهید اگر $g \circ f : X \to Z$ همانریختی باشد، یک ــ یک بودن g (یا برو بودن f) ایجاب می‌کند که f و g نیز همانریختی باشند.

۴۲ . ثابت کنید هریک از خواص زیر یک خاصیت توپولوژیک است:

(یک) نقطهٔ انباشتگی؛ (دو) درون؛ (سه) کرانه؛ (چهار) چگال بودن؛ و (پنج) همسایگی.

۴۳ . فرض کنید $f : X \to Y$ یک همانریختی بوده، و $A \subset X$ این خاصیت را دارا باشد که $A \cap A' = \emptyset$. دراین صورت، $f[A] \cap (f[A])' = \emptyset$. (زیر مجموعهٔ $A \subset X$ با خاصیت $A \cap A' = \emptyset$ ***تنها*** نامیده می‌شود. لذا، خاصیت تنها بودن یک خاصیت توپولوژیک است.)

توپولوژیهای القا شده به‌وسیلهٔ توابع

۴۴ . توپولوژی $\mathcal{T} = \{Y, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ بر $Y = \{a, b, c, d\}$ را درنظر بگیرید ، و فرض کنید $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، و $f : X \to Y$ و $g : X \to Y$ به صورت زیر باشند :

$$f = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 4, b\rangle, \langle 5, d\rangle\}, \qquad g = \{\langle 1, c\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, d\rangle, \langle 4, a\rangle, \langle 5, c\rangle\}.$$

زیر پایهٔ معرف برای توپولوژی بر X را که به‌وسیلهٔ f و g القا شده پیدا نمایید .

۴۵ . فرض کنید $f : X \to (Y, \mathcal{T}^*)$ ، و نشان دهید اگر $\mathcal{S}$ زیر پایهٔ معرف برای توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد که به‌وسیلهٔ f القا می‌شود ، آنگاه $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

۴۶ . فرض کنید $\{f_i : X \to (Y_i, \mathcal{T}_i)\}$ گرد آیه‌ای از توابع باشد که بر مجموعهٔ دلخواه X تعریف شده‌اند ، و $\mathcal{S}_i$ را یک زیر پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}_i$ بر Y_i بگیرید . ثابت کنید ردهٔ $\mathcal{S}^* = \bigcup_i \{f_i^{-1}[S] : S \in \mathcal{S}_i\}$ دارای خواص زیر است :

(یک) $\mathcal{S}^*$ زیر ردهٔ زیر پایهٔ معرف $\mathcal{S}$ برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X است که به‌وسیلهٔ f_i ها القا می‌شود ؛ (دو) $\mathcal{S}^*$ نیز یک زیر پایه برای $\mathcal{T}$ است .

۴۷ . نشان دهید ضخیمترین توپولوژیی بر $\mathbf{R}$ که توابع خطی

$f : \mathbf{R} \to (\mathbf{R}, \mathcal{U})$ تعریف شده $f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbf{R}$

نسبت به آن پیوسته‌اند همان توپولوژی معمولی $\mathcal{U}$ است .

جواب مسائل تکمیلی

۳۳ . (یک) فرض کنید $X = (0, 2)$ ، $E = (0, 1)$ ، و $F = [1, 2)$. دراین صورت ، $f(x) = 1$ و $g(x) = 2$ هریک پیوسته است ، ولی $h = f \cup g$ پیوسته نمی‌باشد .

۴۴ . $\{X, \emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 5\}\}$.

۴۵ . **راهنمایی .** نشان دهید $\mathcal{S}$ یک توپولوژی است .

فضاهای متری و نرمدار[8]

مترها

فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی باشد. تابع حقیقی d که بر $X \times X$ ، یعنی مجموعهٔ جفتهای مرتب از عناصر X ، تعریف شده یک **متر** یا **تابع فاصله** بر X نامیده می‌شود اگفگر، به‌ازای هر $a, b, c \in X$ ، در اصول موضوع زیر صدق نماید :

[M₁] $d(a, b) \geqq 0$ و $d(a, a) = 0$ ؛

[M₂] $d(a, b) = d(b, a)$ (تقارن) ؛

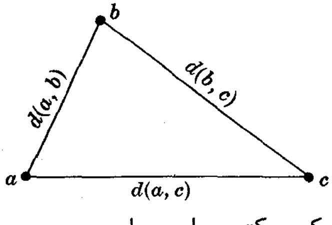
[M₃] $d(a, c) \leqq d(a, b) + d(b, c)$ (نامساوی مثلثی) ؛

[M₄] هرگاه $a \neq b$ ، آنگاه $d(a, b) > 0$.

عدد حقیقی $d(a, b)$ **فاصلهٔ** a تا b نام دارد.

توجه کنید که **[M₁]** می‌گوید فاصلهٔ هر نقطه تا نقطهٔ دیگر هرگز منفی نیست، و فاصلهٔ یک نقطه تا خودش صفر است. اصل موضوع **[M₂]** می‌گوید فاصلهٔ a تا b همان فاصلهٔ b تا a است؛ از اینروست که می‌گوییم فاصلهٔ **بین** a و b .

[M₃] نامساوی مثلثی نام دارد، چرا که اگر a ، b ، و c نقاطی در $\mathbf{R}^2$ همانند شکل زیر باشند، **[M₃]** خواهد گفت که طول



$d(a, c)$ یک ضلع مثلث کوچکتر یا مساوی مجموع $d(a, b) + d(b, c)$ طولهای

دو ضلع دیگر مثلث است . آخرین اصل ، یعنی $[\mathbf{M}_4]$ ، می‌گوید فاصلهٔ بین دو نقطهٔ متمایز مثبت است .

حال چند مثال از مترها می‌آوریم . اینکه اینها در اصول موضوع مربوطه صدق می‌کنند بعداً تحقیق می‌شود .

مثال ۱۰۱ . تابع d که با $d(a, b) = |a - b|$ تعریف شده که در آن a و b اعدادی حقیقی‌اند ، یک متر است و **متر معمولی** بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ نام دارد . بعلاوه ، تابع d که با

$$d(p, q) \quad = \quad \sqrt{(a_1 - b_1)^2 \; + \; (a_2 - b_2)^2}$$

تعریف شده ، که در آن $p = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $q = \langle b_1, b_2 \rangle$ نقاط در صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ هستند ، یک متر است و **متر معمولی** بر $\mathbf{R}^2$ نامیده می‌شود . ما بر $\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}^2$ این مترها را در نظر می‌گیریم ، مگر آنکه خلاف آن تصریح شود .

مثال ۲۰۱ . فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی بوده ، و d تابعی باشد که با

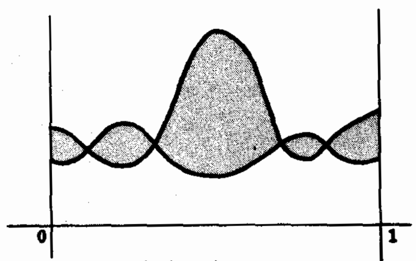
$$d(a, b) \quad = \quad \begin{cases} 0 \text{ ، اگر } a = b \\ 1 \text{ ، اگر } a \neq b \end{cases}$$

تعریف شده است . این d را معمولاً **متر مبتذل** بر X می‌نامند .

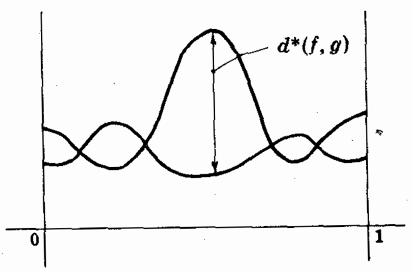
مثال ۳۰۱ . فرض کنیم $C[0,1]$ ردهٔ توابع پیوسته بر بازهٔ یکه و بستهٔ $[0,1]$ باشد . یک متر بر ردهٔ $C[0,1]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$d(f, g) \quad = \quad \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx \; .$$

در اینجا $d(f, g)$ درست مساحت ناحیهٔ واقع بین دو تابع است ، بصورتی که در زیر مجسم شده است :



$d(f, g)$ سایه‌دار است



مثال ۴۰۱ . مجدداً ، فرض کنیم $C[0,1]$ گردآیهٔ توابع پیوسته بر $[0,1]$ باشد . متر دیگری بر $C[0,1]$ به‌این صورت تعریف می‌شود :

$$d^*(f,g) \quad = \quad \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in [0,1]\} \cdot$$

دراینجا $d^*(f,g)$ دقیقاً "بزرگترین‌فاصلهٔ قائم بین توابع است ، بصورتی که در بالا نشان داده شده است .

مثال ۵۰۱ . فرض‌کنید $p = \langle a_1, a_2\rangle$ و $q = \langle b_1, b_2\rangle$ نقاط دلخواهی‌در $\mathbf{R}^2$ ، یعنی‌مجموعهٔ جفتهای مرتب اعداد حقیقی ، باشند . توابع d_1 و d_2 ، که با

$$d_1(p,q) \;=\; \max(|a_1-b_1|, |a_2-b_2|), \qquad d_2(p,q) \;=\; |a_1-b_1| + |a_2-b_2|$$

تعریف می‌شوند ، مترهای متمایزی بر $\mathbf{R}^2$ هستند .

تابع ρ صادق در $[\mathbf{M}_1]$ ، $[\mathbf{M}_2]$ ، و $[\mathbf{M}_3]$ ، یعنی‌نه‌لزوماً " در $[\mathbf{M}_4]$ ، یک ***مترنما*** نامیده می‌شود . بسیاری از نکات درباب مترها درمورد مترنماها نیز برقرارند .

فاصلهٔ بین مجموعه‌ها ، قطرها

فرض کنیم d یک متر بر مجموعهٔ X باشد . ***فاصلهٔ*** بین نقطهٔ $p \in X$ وزیرمجموعهٔ‌ناتهی A از X با

$$d(p,A) \quad = \quad \inf\{d(p,a) : a \in A\}$$

یعنی ، بزرگترین‌کران پایینی‌فواصل p تانقاط A ، نموده‌وبا آن تعریف می‌شود . ***فاصلهٔ*** بین دو زیر مجموعهٔ ناتهی A و B از X با

$$d(A,B) \quad = \quad \inf\{d(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$$

یعنی ، بزرگترین‌کران پایینی‌فواصل‌نقاط A تا‌نقاط B ، نموده و با آن تعریف می‌گردد.

قطر زیر مجموعهٔ‌ناتهی A از X با

$$d(A) \quad = \quad \sup\{d(a,a') : a, a' \in A\}$$

یعنی ،کوچکترین‌کران بالایی فواصل بین نقاط A ، نموده و با آن تعریف می‌شود .هرگاه قطر A متناهی‌باشد ، یعنی $d(A) < \infty$ ، می‌گوییم A ***کراندار*** است . درغیر این‌صورت ، یعنی $d(A) = \infty$ ، A را ***بی‌کران*** خواهیم گفت .

مثال ۱۰۲ . فرض‌کنیم d مترمبتذل برمجموعهٔ ناتهی X باشد . دراین صورت ، به‌ازای $p \in X$ و $A,B \subset X$ ،

$$d(p,A) = \begin{cases} 1 \text{ ، } p \notin A & \text{اگر} \\ 0 \text{ ، } p \in A & \text{اگر} \end{cases}, \qquad d(A,B) = \begin{cases} 1 \text{ ، } A \cap B = \emptyset & \text{اگر} \\ 0 \text{ ، } A \cap B \neq \emptyset & \text{اگر} \end{cases}$$

مثال ۲۰۲ . بازه‌های زیر را بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ درنظر می‌گیریم : $A = [0,1), \ B = (1,2]$. اگر d متر معمولی بر $\mathbf{R}$ باشد ، $d(A,B) = 0$. از آن سو ، اگر d^* متر مبتذل بر $\mathbf{R}$ باشد ، $d^*(A,B) = 1$ زیرا A و B از هم جدا هستند .

حکم بعدی بوضوح از تعاریف فوق نتیجه می‌شود .

حکم ۱۰۸ . فرض‌کنیم A و B دو زیرمجموعهٔ ناتهی X بوده ، و $p \in X$. دراین‌صورت ،
(یک) $d(p,A)$ ، $d(A,B)$ ، و $d(A)$ اعداد حقیقی نامنفیی هستند ؛
(دو) هرگاه $p \in A$ ، آنگاه $d(p,A) = 0$ ؛
(سه) هرگاه $A \cap B$ ناتهی باشد ، آنگاه $d(A,B) = 0$ ؛
(چهار) هرگاه A متناهی باشد ، آنگاه $d(A) < \infty$ ؛ یعنی ، A کراندار است .

توجه داشته باشید که عکس (دو) ، (سه) ، و (چهار) برقرار نیست .

در باب مجموعهٔ تهی $\emptyset$ ، قراردادهای زیر را می‌پذیریم :

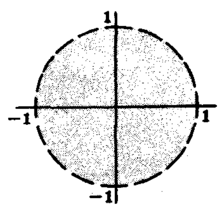
$$d(p,\emptyset) = \infty, \quad d(A,\emptyset) = d(\emptyset,A) = \infty, \quad d(\emptyset) = -\infty \ \cdot$$

کره‌های باز

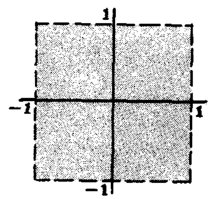
فرض‌کنیم d یک متر بر مجموعهٔ X باشد . به‌ازای هر نقطهٔ $p \in X$ و هر عدد حقیقی $\delta > 0$ ، $S_d(p,\delta)$ ، یا فقط $S(p,\delta)$ ، مجموعهٔ نقاطی است با فاصلهٔ کمتر از δ از p :

$$S(p,\delta) = \{x : d(p,x) < \delta\} \cdot$$

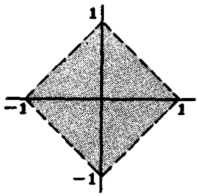
ما $S(p,\delta)$ را **کرهٔ باز** ، یا فقط **کره** ، به مرکز p و شعاع δ می‌نامیم . آن را یک **همسایگی کروی** یا **گوی** نیز نام داده‌اند .



مثال ۱.۳ . نقطهٔ $p = \langle 0, 0\rangle$ در $\mathbf{R}^2$ و عـدد حقیقی $\delta = 1$ را درنظر می‌گیریم . هرگاه d متـر معمـولی بـر $\mathbf{R}^2$ باشـد ، $S_d(p, \delta)$ قـرص یکه و بـاز نموده شده درفوق‌است. از آن‌سو، اگـر d_1 و d_2 دو متر بر $\mathbf{R}^2$ باشند که در مثال ۵.۱ تعریف شدند ، $S_{d_1}(p, \delta)$ و $S_{d_2}(p, \delta)$ زیر مجموعه‌هایی از $\mathbf{R}^2$ اند که درزیر نشان داده شده‌اند .



$S_{d_1}(p, \delta)$ سایه‌دار است



$S_{d_2}(p, \delta)$ سایه‌دار است

مثال ۲.۳ . فرض کنیم d متر مبتذل بر مجموعهٔ X بوده، و $p \in X$. به‌یاد بیاورید که فاصلهٔ بین p و هر نقطهٔ دیگر X درست یک است . بنابراین ،

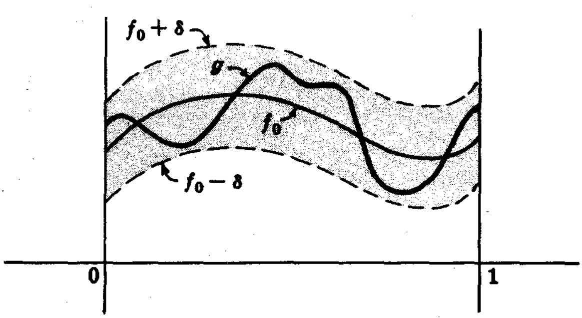
$$S(p, \delta) = \begin{cases} X \text{ ، } \delta > 1 & \text{اگر} \\ \{p\} \text{ ، } \delta \leqq 1 & \text{اگر} \end{cases}$$

مثال ۳.۳ . فرض کنیـم d متر معمولی بر $\mathbf{R}$ باشد ؛ یعنی ، $d(a, b) = |a - b|$. دراین صورت ، کرهٔ باز $S(p, \delta)$ بازهٔ باز $(p - \delta, p + \delta)$ است .

مثال ۴.۳ . فرض کنیم d متری‌برگردآیهٔ $C[0, 1]$ مرکب ازتمام توابع پیوسته بر $[0, 1]$ باشد که با

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$$

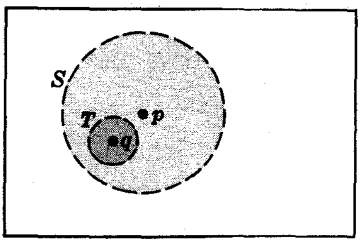
تعریف می‌شود (ر.ک. مثال ۴.۱) . با معلوم بودن $\delta > 0$ و $f_0 \in C[0, 1]$ ، کرهٔ باز $S(f_0, \delta)$



از تمام توابع پیوستهٔ g تشکیل شده که در ناحیهٔ محصور به $f_0 - \delta$ و $f_0 + \delta$ ، بصورتی که نمودارفوق نشان داده، قرار دارند.

یکی از خواص مهم کره‌های باز در فضاهای متری در لم زیر آمده است.

لم ۲.۸ . *فرض کنیم S کره‌ای باز به مرکز p و شعاع δ باشد. دراین صورت، به‌ازای هر $q \in S$ کرهٔ بازی چون T به مرکز q هست بطوری که T مشمول S می‌باشد. (ر.ک. نمودار ون زیر.)*



توپولوژیهای متری، فضاهای متری

اشتراک دو کرهٔ باز عموماً" یک کره باز نیست. با اینحال، نشان می‌دهیم هر نقطه در اشتراک دو کرهٔ باز متعلق به یک کرهٔ باز مشمول اشتراک است. یعنی،

لم ۳.۸ . فرض کنیم S_1 و S_2 دو کرهٔ باز بوده، و $p \in S_1 \cap S_2$. دراین صورت، کرهٔ بازی چون S_p به مرکز p هست بطوری که $p \in S_p \subset S_1 \cap S_2$.

لذا، بخاطر قضیهٔ ۱.۶ ، داریم

قضیهٔ ۴.۸ . *ردهٔ کره‌های باز در مجموعهٔ X با متر d پایه برای یک توپولوژی بر X است.*

تعریف. فرض کنیم d یک متربرمجموعهٔ ناتهی X باشد. توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X که به‌وسیلهٔ ردهٔ کره‌های باز در X تولید می‌شود **توپولوژی متری** (یا، **توپولوژی القا شده به‌وسیلهٔ متر** d) نامیده می‌شود. بعلاوه، مجموعهٔ X همراه با توپولوژی $\mathcal{T}$ القا شده به‌وسیلهٔ متر d

یک **فضای متری** نام دارد و با (X, d) نموده می‌شود .

بنابراین ، یک فضای متری فضایی است توپولوژیک که درآن توپولوژی به‌وسیلهٔ یک متر القا شده است . از اینرو ، تمام مفاهیم تعریف شده برای فضاهای توپولوژیک برای فضاهای متری نیز تعریف شده‌اند . مثلاً ، در فضاهای متری می‌توان در باب مجموعه‌های باز ، مجموعه‌های بسته ، همسایگیها ، نقاط انباشتگی ، بست ، و غیره سخن گفت .

مثال ۱۰۴ . هرگاه d مترمعمولی بر $\mathbf{R}$ باشد ، یعنی ، $d(a, b) = |a - b|$ ، آنگاه کره‌های باز در $\mathbf{R}$ همان بازه‌های باز متناهی می‌باشند . لذا ، متر معمولی بر $\mathbf{R}$ توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}$ را القا می‌کند . بهمین ترتیب ، متر معمولی بر $\mathbf{R}^2$ توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ را القا خواهد کرد .

مثال ۲۰۴ . فرض‌کنیم d متر مبتذل بر مجموعهٔ X باشد . توجه کنید که به‌ازای هر $p \in X$ ، $S(p, \frac{1}{2}) = \{p\}$. ازاینرو ، هرمجموعهٔ یکانی بازاست ، و درنتیجه ، هر مجموعه باز می‌باشد . به‌عبارت دیگر ، متر مبتذل بر X توپولوژی مجزا بر X را القا می‌کند .

مثال ۳۰۴ . فرض‌کنیم (X, d) یک فضای متری بوده ، و Y یک زیر مجموعهٔ ناتهی از X باشد . تحدید d به‌نقاط Y ، که آن نیز به d نموده می‌شود ، یک متر بر Y است . ما (Y, d) را یک **زیر فضای متری** (X, d) می‌نامیم . درواقع ، (Y, d) یک زیر فضای (X, d) است ؛ یعنی ، دارای توپولوژی نسبی می‌باشد .

اغلب یک علامت ، مثلاً X ، هم برای فضای متری و هم مجموعهٔ زمینه‌ای که متر برآن تعریف شده به‌کار خواهد رفت .

خواص توپولوژیهای متری

چون توپولوژی فضای متری X از مترآن ناشی شده‌است ، بحق انتظار است که خواص توپولوژیک X با خواص فاصله‌ای X مربوط باشند . مثلاً ،

***قضیهٔ ۵۰۸ .* فرض‌کنیم p نقطه‌ای در فضای متری X باشد . دراین صورت ، ردهٔ حداکثر شمارشپذیر $\{S(p, 1),\ S(p, \frac{1}{2}),\ S(p, \frac{1}{3}),\ \ldots\}$ ازکره‌های بازیک پایهٔ موضعی در p**

است .

قضیهٔ ۶.۸ . بست $\bar{A}$ زیر مجموعهٔ A *ازفضای‌متری* X *مجموعهٔ نقاطی است که فاصله‌شان تا* A *صفر است؛ یعنی،* $\bar{A} = \{x : d(x, A) = 0\}$.

توجه کنید که اصل موضوع $[\mathbf{M}_4]$ ایجاب می‌کند که تنها نقطه‌ای که فاصله‌اش تا مجموعهٔ یکانی $\{p\}$ صفر است خود p است؛ یعنی،

$d(x, \{p\}) = 0$ ایجاب می‌کند که $x = p$.

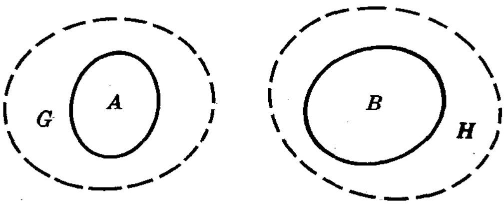
پس، طبق قضیهٔ قبل، مجموعه‌های یکانی $\{p\}$ در یک فضای متری بسته‌اند. بنابراین، اجتماعهای متناهی از مجموعه‌های یکانی، یعنی مجموعه‌های متناهی، نیز بسته می‌باشند حال این نتیجه را به‌طور صوری بیان می‌کنیم :

نتیجهٔ ۷.۸ . *در فضای متری* X *تمام مجموعه‌های متناهی بسته هستند .*

لذا، می‌بینیم فضای متری X خواص توپولوژیکی دارد که برای فضاهای توپولوژیک در حالت کلی برقرار نیستند .

در قضیهٔ زیر خاصیت مهم "جداسازی" فضاهای متری ذکر شده است .

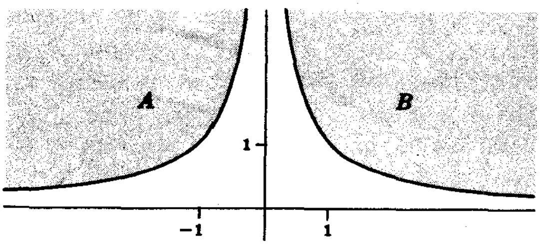
قضیهٔ ۸.۸ (اصل موضوع جداسازی) . فرض‌کنیم A و B دوزیر مجموعهٔ از هم جدا و بستهٔ فضای متری X باشند. دراین صورت، مجموعه‌هایی باز و از هم جدا مانند G و H وجود دارند بطوری که $A \subset G$ و $B \subset H$. (ر.ک. نمودار ون درزیر.)



قضیهٔ فوق این فکر را پیش می‌آورد که فاصلهٔ بین مجموعه‌های بسته و از هم جدا بزرگتر از صفر است. مثال زیر عدم صحت این امر را نشان می‌دهد .

مثال ۱۰۵ . مجموعه‌های زیر را در $\mathbf{R}^2$ که ذیلاً مجسم شده‌اند درنظر می‌گیریم :

$$A = \{(x,y) : xy \geq -1,\ x < 0\}, \quad B = \{(x,y) : xy \geq 1,\ x > 0\}$$

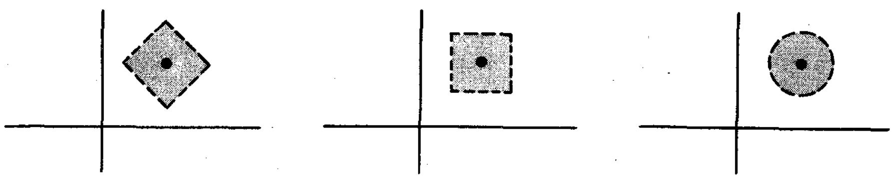


ملاحظه می‌شود که A و B هر دو بسته و از هم جدایند ، اما $d(A,B) = 0$.

مترهای هم‌ارز

دو متر d و d^* بر مجموعهٔ X را هم‌ارزگوییم اگفگر یک توپولوژی بر X القا کنند ؛ یعنی ، کره‌های d ــ باز و کره‌های d^* ــ باز در X پایه‌هایی برای یک توپولوژی بر X باشند .

مثال ۱۰۶ . متر معمــولی d و متــرهای d_1 و d_2 که در مثال ۵۰۱ تعریف شدند همه توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ القا می‌کنند ، زیرا ردهٔ کره‌های باز هر متر (نموده شده در زیر) یک پایه برای توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ است .



$S_{d_2}(p,\delta)$ $S_{d_1}(p,\delta)$ $S_d(p,\delta)$

بنابراین ، مترها هم‌ارز می‌باشند .

مثال ۲۰۶ . متر d را که بر مجموعهٔ ناتهی X با

$$d(a,b) = \begin{cases} 2 \text{ ، اگر } a \neq b \\ 0 \text{ ، اگر } a = b \end{cases}$$

تعریف شده درنظر می‌گیریم . ملاحظه می‌شود که $s_d(p,1) = \{p\}$ ؛ درنتیجه ، مجموعه‌های یکانی بــازند و d توپولوژی مجزا بر X را القا می‌کند . لذا ، d هم‌ارز متر مبتذل بر X است که آن نیز توپولوژی مجزا را القا می‌نماید .

حکم بعدی بوضوح از تعریف فوق نتیجه می‌شود .

حکم ۹.۸ . *رابطهٔ " d هم‌ارز d^* است " در هر گردآیه از مترها بر مجموعهٔ X یک رابطهٔ هم‌ارزی است .*

مسئلهٔ متری سازی

با معلوم بودن فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ ، طبیعی است این سوال بشود که آیا متری چون d بر X که توپولوژی $\mathcal{T}$ را القا کند وجود دارد یا نه . فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ را در صورتی **متر پذیر** گوییم که این متر وجود داشته باشد .

مثال ۱.۷ . هر فضای مجزای $(X, \mathcal{D})$ متر پذیر است ، زیرا متر مبتذل بر X توپولوژی مجزای $\mathcal{D}$ را القا می‌کند .

مثال ۲.۷ . فضای توپولوژیک $(\mathbf{R}, \mathcal{U})$ ، یعنی خط حقیقی $\mathbf{R}$ با توپولوژی معمولی $\mathcal{U}$ ، را در نظر می‌گیریم . ملاحظه می‌شود که $(\mathbf{R}, \mathcal{U})$ متر پذیر است ، زیرا متر معمولی بر $\mathbf{R}$ توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}$ را القا می‌کند . بهمین نحو ، صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ با توپولوژی معمولی متر پذیر می‌باشد .

مثال ۳.۷ . فضای نامجزای $(X, \mathcal{J})$ ، که در آن X دارای بیش از یک نقطه است ، متر پذیرنیست . زیرا X و $\emptyset$ تنها مجموعه‌های بسته در فضای نامجزای $(X, \mathcal{J})$ هستند . اما ، طبق نتیجهٔ ۷.۸ ، تمام مجموعه‌های متناهی در یک فضای متری بسته‌اند . از اینرو ، X و $\emptyset$ نمی‌توانند تنها مجموعه‌های بسته در توپولوژی بر X القا شده به‌وسیلهٔ یک متر باشند . لذا ، $(X, \mathcal{J})$ متر پذیر نمی‌باشد .

مسئلهٔ متری‌سازی در توپولوژی عبارت است از یافتن شرایط لازم و کافی برای یک فضای توپولوژیک که آن را متر پذیر سازند . حل ناقص مهمی از این مسئله در ۱۹۲۴ توسط اوریزن[1] ، به‌عنوان نتیجه‌ای از لم معروف اوریزن ، عرضه شد ، تا اینکه در ۱۹۵۰ حل کامل این مسئله به‌وسیلهٔ چند ریاضیدان مستقلاً " ارائه گردید . ما نتایج اوریزن را بعداً " ثابت

---

1. Urysohn

خواهیم کرد. حل کامل مسئلهٔ متری سازی از حوصلهٔ این کتاب خارج است و برای آن خواننده را به کتاب کلاسیک **توپولوژی عمومی** کلی[1] ارجاع می‌دهیم.

فضاهای متری یکمتر

فضای متری (X, d) با فضای متری (Y, e) **یکمتر** است اگفگر یک تابع یک ــ یک و برو مانند $f : X \to Y$ باشد که فاصله را حفظ نماید؛ یعنی، به‌ازای هر $p, q \in X$،

$$d(p, q) = e(f(p), f(q)) \cdot$$

توجه کنید که رابطهٔ " (X, d) با (Y, e) یکمتر است" در هر گردآیه از فضاهای متری یک رابطهٔ هم‌ارزی است. بعلاوه،

قضیهٔ ۱۰.۸ . هرگاه فضای متری (X, d) با (Y, e) یکمتر باشد، (X, d) با (Y, e) همانریخت نیز هست.

مثال بعدی نشان می‌دهدکه عکس قضیهٔ فوق درست نیست؛ یعنی، دو فضای متری می‌توانند همانریخت باشند اما یکمتر نباشند.

مثال ۱۰.۸ . فرض کنیم d متر مبتذل بر مجموعهٔ X بوده، و e متری بر مجموعهٔ Y باشد که با

$$e(a, b) = \begin{cases} 2 \text{ ، } a \neq b & \text{اگر} \\ 0 \text{ ، } a = b & \text{اگر} \end{cases}$$

تعریف شده است. همچنین، X و Y دارای یک کاردینالیتهٔ بزرگتر از یک باشند. دراین صورت، (X, d) و (Y, e) یکمتر نیستند، زیرا فواصل بین نقاط در هر فضا با هم متفاوتند. اما d و e هر دو توپولوژی مجزا القا می‌کنند، و دو فضای مجزا با یک کاردینالیته همانریخت هستند؛ درنتیجه، (X, d) و (Y, e) همانریخت می‌باشند.

فضای اقلیدسی m بعدی

به‌یاد می‌آوریم که $\mathbf{R}^m$ مجموعهٔ حاصل‌ضرب m کپی از $\mathbf{R}$ است؛ یعنی، از تمام m تاییهای $\langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle$ از اعداد حقیقی تشکیل شده است. تابع d که با

---

1. Kelley, *General Topology*

$$d(p,q) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + \cdots + (a_m-b_m)^2} =$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i-b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}|a_i-b_i|^2}$$

تعریف شده ،که درآن $p = \langle a_1, \ldots, a_m\rangle$ و $q = \langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ ، یک متر است، و **متر اقلیدسی** بر $\mathbf{R}^m$ نامیده مـی‌شود. ما همیشه این متر را بر $\mathbf{R}^m$ درنظر می‌گیریم مگر آنکه خلافش تصریح شود. فضای متری $\mathbf{R}^m$ با متر اقلیدسی **فضای اقلیدسی** m **بعدی** نام دارد و با E^m نیز نموده می‌شود.

قضیهٔ ۱۱۰۸ . *فضای اقلیدسی m بعدی یک فضای متری است.*

ملاحظه می‌شود که فضای اقلیدسی 1 بعدی همان خط حقیقی $\mathbf{R}$ با متر معمولی است، و فضای اقلیدسی 2 بعدی صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ با متر معمولی می‌باشد.

فضای هیلبرت[1]

ردهٔ تمام دنباله‌های حقیقی و نامتناهی

$$\langle a_1, a_2, \ldots\rangle \quad \text{که} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

یعنی، سری $a_1^2 + a_2^2 + \cdots$ همگراست، به $\mathbf{R}^\infty$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱۰۹ . دنباله‌های

$$p = \langle 1, 1, 1, \ldots\rangle \quad \text{و} \quad q = \langle 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots\rangle$$

رادرنظر می‌گیریم. چون $1^2 + 1^2 + \cdots$ همگرا نیست، p نقطه‌ای در $\mathbf{R}^\infty$ نیست. از آن سو، سری $1^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2 + \cdots$ همگراست. لذا، q یک نقطه در $\mathbf{R}^\infty$ خواهد بود.

حال فرض کنیم $p = \langle a_n\rangle$ و $q = \langle b_n\rangle$ متعلق به $\mathbf{R}^\infty$ باشند. تابع d که با

$$d(p,q) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n-b_n|^2}$$

---

1. *Hilbert*

تعریف می‌شود یک متر است و l_2 **ـ متر بر** $\mathbf{R}^\infty$ نام دارد. ما همیشه این متر را بر $\mathbf{R}^\infty$ در نظر می‌گیریم مگر آنکه خلافش تصریح شود. فضای متری مرکب از $\mathbf{R}^\infty$ با l_2 **ـ متر را فضای هیلبرت** یا l_2 **ـ فضا** نامیده و با $\mathbf{H}$ نیز نشان می‌دهند. به‌طور صوری، می‌گوییم که

قضیهٔ ۱۲۰۸ . *فضای هیلبرت (یا l_2 ـ فضا) یک فضای متری است.*

مثال ۲۰۹ . فرض کنیم $\mathbf{H}_m$ زیر فضای فضای هیلبرت $\mathbf{H}$ مرکب از تمام زیر دنباله‌ها به شکل

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m, 0, 0, 0, \ldots\rangle$$

باشد. توجه کنید که $\mathbf{H}_m$ با فضای اقلیدسی m بعدی، به‌وسیلهٔ انطباق طبیعی

$$\langle a_1, \ldots, a_m\rangle \quad \leftrightarrow \quad \langle a_1, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots\rangle$$

یکمتر، و درنتیجه همانریخت، است.

فضای هیلبرت دو پدیده (که در فضای اقلیدسی m بعدی دیده نمی‌شود) را نشان می‌دهد که در مثالهای زیر توضیح می‌شوند.

مثال ۳۰۹ . دنبالهٔ $\langle p_n\rangle$ از نقاط در فضای هیلبرت را که $p_k = \langle a_{1k}, a_{2k}, \ldots\rangle$ با $a_{ik} = \delta_{ik}$ تعریف شده، یعنی $a_{ik} = 1$ اگر $i = k$ ، و $a_{ik} = 0$ اگر $i \neq k$ ، درنظر می‌گیریم. توجه کنید که، همانطور که در زیر مجسم شده، تصویر $\langle \pi_i(p_n)\rangle$ دنبالهٔ $\langle p_n\rangle$ بتوی هر فضای مختصات همگرا به‌صفر است.

$$\begin{array}{ccl}
p_1 & = & \langle 1, 0, 0, 0, \ldots\rangle \\
p_2 & = & \langle 0, 1, 0, 0, \ldots\rangle \\
p_3 & = & \langle 0, 0, 1, 0, \ldots\rangle \\
p_4 & = & \langle 0, 0, 0, 1, \ldots\rangle \\
\cdot & & \;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\
\cdot & & \;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\
\cdot & & \;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\
 & & \;\downarrow\,\downarrow\,\downarrow\,\downarrow \\
\mathbf{0} & = & \langle 0, 0, 0, 0, \ldots\rangle
\end{array}$$

اما دنبالهٔ $\langle p_n\rangle$ همگرا به $\mathbf{0}$ نیست، زیرا به‌ازای هر $k \in \mathbf{N}$ ، $d(p_k, \mathbf{0}) = 1$. درواقع، $\langle p_n\rangle$ زیر دنبالهٔ همگرا ندارد.

مثال ۴۰۹ . فرض کنیم $\mathbf{H}^*$ زیر فضای حقیقی $\mathbf{H}$ باشد که از تمام نقاطی از $\mathbf{H}$ تشکیل

شده است که مختص اول آنها صفر است. توجه کنید که تابع $f: \mathbf{H} \to \mathbf{H}^*$ تعریف شده با $f(\langle a_1, a_2, \ldots \rangle) = \langle 0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ یک ـ یک، بـرو، و حافظ فاصله است. بنابراین، فضای هیلبرت با یک زیر فضای حقیقی خود یکمتر است.

همگرایی و پیوستگی در فضاهای متری

اغلب در فضاهای متری از تعریفهای همگرایی و پیوستگی زیر استفاده می‌شود. به تشابه آنها با تعریفهای $\delta - \epsilon$ ی معمولی توجه کنید.

تعریف. دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ از نقاط در فضای متری (X, d) درصورتی همگرا به $b \in X$ است که به‌ازای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیح و مثبت n_0 باشد بطوری که $n > n_0$ نامساوی $d(a_n, b) < \epsilon$ راایجاب کند.

تعریف. فرض کنیم (X, d) و (Y, d^*) فضاهایی متری باشند. تابع f از X بتوی Y در $p \in X$ پیوسته است درصورتی که به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ ای باشد بطوری که $d(p, x) < \delta$ نامساوی $d^*(f(p), f(x)) < \epsilon$ را ایجاب نماید.

تعاریف فوق با تعریفهای همگرایی و پیوستگی (در توپولوژی متری) که برای فضاهای متری به‌طور کلی داده شده بود هم‌ارز هستند.

فضاهای نرمدار

فرض کنیم $\mathbf{V}$ یک فضای برداری خطی حقیقی باشد؛ یعنی، $\mathbf{V}$ با عمل جمع برداری وضرب اسکالر دراعـداد حقیقی در اصول موضوع $[\mathbf{V}_1]$، $[\mathbf{V}_2]$، و $[\mathbf{V}_3]$ فصل ۲، صفحهٔ ۳۸، صدق مـی‌کند. تـابعی که به هر بردار $v \in \mathbf{V}$ عدد حقیقی $||v||$ را مربوط می‌کند یک **نرم** بر $\mathbf{V}$ است اگفگر به‌ازای هر $v, w \in \mathbf{V}$ و $k \in \mathbf{R}$ در اصول موضوع زیر صدق نماید:

$[\mathbf{N}_1]$ $||v|| \geqslant 0$، و $||v|| = 0$ اگفگر $v = 0$؛

$[\mathbf{N}_2]$ $||v + w|| \leqslant ||v|| + ||w||$؛

$[\mathbf{N}_3]$ $||kv|| = |k|\,||v||$.

فضای خطـی $\mathbf{V}$ همراه با یک نرم یک **فضای برداری خطی نرمدار** یا فقط یک **فضای نرمدار** نامیده می‌شود، و عدد حقیقی $||v||$ **نرم** بردار v نام خواهد داشت.

قضیهٔ ۱۳۰۸. *فرض کنیم $\mathbf{V}$ یک فضای نرمدار باشد. تابع d که با*

$$d(v,w) \;=\; \|v-w\|$$

که $v,w \in \mathbf{V}$ ، تعریف می‌شود یک متر است ، که متر القایی بر $\mathbf{V}$ *نامیده* می‌شود .

بنابراین ، هرفضای نرمدار با مترالقایی یک فضای متری است ؛ و درنتیجه ، یک‌فضای توپولوژیک نیز می‌باشد .

مثال ۱۰۱۰ . مجموعهٔ حاصل ضرب $\mathbf{R}^m$ با عمل جمعی که به‌وسیلهٔ

$$\langle a_1, \ldots, a_m\rangle \;+\; \langle b_1, \ldots, b_m\rangle \;=\; \langle a_1+b_1, \ldots, a_m+b_m\rangle$$

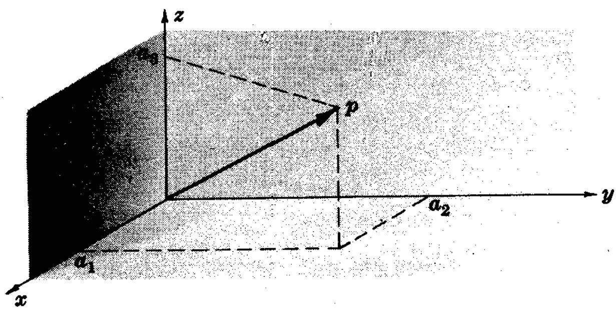
و ضرب در اسکالری که به‌وسیلهٔ

$$k\,\langle a_1, \ldots, a_m\rangle \;=\; \langle k\,a_1, \ldots, k\,a_m\rangle$$

تعریف می‌شوند یک فضای برداری خطی است . تابع تعریف شده بر $\mathbf{R}^m$ با

$$\|\langle a_1, \ldots, a_m\rangle\| \;=\; \sqrt{a_1^2+\cdots+a_m^2} \;=\; \sqrt{\sum a_i^2} \;=\; \sqrt{\sum |a_i|^2}$$

یک نرم است و **نرم *اقلیدسی*** بر $\mathbf{R}^m$ نامیده می‌شود . توجه کنید که نرم اقلیدسی بر $\mathbf{R}^m$ متراقلیدسی بر $\mathbf{R}^m$ راالقا می‌کند . هرگاه $p=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ نقطه‌ای در $\mathbf{R}^3$ باشد ، $\|p\|$ همان "طول" سهم (یابردار) از مبداء تا نقطهٔ p بصورتی که درزیر نموده شده می‌باشد .



مثال ۲۰۱۰ . دو تابع زیر نیز بر فضای خطی $\mathbf{R}^m$ نرم هستند .

$$\|\langle a_1, \ldots, a_m\rangle\| \;=\; \max\,(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_m|)$$

$$\|\langle a_1, \ldots, a_m\rangle\| \;=\; |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|$$

فرض‌کنیم $\mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ گرد آیهٔ تمام توابع حقیقی بر مجموعهٔ ناتهی X باشد . به‌یاد می‌آوریم (ر.ک. قضیهٔ ۲۰۹) که $\mathcal{F}(X,\mathbf{R})$ یک فضای خطی است با جمع برداری و ضرب اسکالر زیر :

$(f+g)(x) \equiv f(x) + g(x)$ و $(kf)(x) \equiv kf(x)$.

ما اغلب رده‌هایی از توابع را بررسی می‌کنیم که خواصی جز کرانداری، پیوستگی، و غیره دارند. از نتیجهٔ زیر از جبرخطی استفاده خواهیم کرد:

حکم ۸۰۱۴ . فرض کنیم $\mathcal{A}(X, \mathbf{R})$ زیرگردآیه‌ای ناتهی از $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ باشد که در دو خاصیت زیر صدق می‌کند:

(یک) هرگاه $f, g \in \mathcal{A}(X, \mathbf{R})$، آنگاه $f+g \in \mathcal{A}(X, \mathbf{R})$؛

(دو) هرگاه $f \in \mathcal{A}(X, \mathbf{R})$ و $k \in \mathbf{R}$، آنگاه مضرب اسکالر $kf \in \mathcal{A}(X, \mathbf{R})$.

در این صورت، $\mathcal{A}(X, \mathbf{R})$ خود یک فضای برداری خطی خواهد بود.

مثال ۳۰۱۰ . ردهٔ $C[0,1]$ مرکب از تمام توابع حقیقی پیوسته بربازهٔ $I = [0,1]$ یک فضای خطی است، زیرا مجموع و مضارب اسکالرتوابع پیوسته پیوسته هستند. تابعی بر $C[0,1]$ که با

$$||f|| = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

تعریف شود یک نرم است که متر تعریف شده در مثال ۳۰۱ را القا می‌کند.

مثال ۴۰۱۰ . تابعی که بر فضای خطی $C[0,1]$ با

$$||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$

تعریف‌شودنیزنرم است. این نرم متر تعریف شده در مثال ۴۰۱ را بر $C[0,1]$ القاخواهد کرد.

مثال ۵۰۱۰ . فرض کنیم $\mathcal{B}(X, \mathbf{R})$ زیر گردآیهٔ $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ مرکب‌از تمام توابع کراندار $f : X \to \mathbf{R}$ باشد. $\mathcal{B}(X, \mathbf{R})$ یک فضای خطی است، زیرا مجموع و مضارب اسکالر توابع کراندار نیزکراندار هستند. تابعی که بر $\mathcal{B}(X, \mathbf{R})$ با

$$||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

تعریف شود یک نرم می‌باشد.

مثال ۶۰۱۰ . بعداً نشان می‌دهیم که ردهٔ $\mathbf{R}^\infty$ مرکب از تمام دنباله‌های حقیقی $\langle a_n \rangle$ که $\sum |a_n|^2 < \infty$ یک‌فضای خطی است. تابعی که بر $\mathbf{R}^\infty$ با

$$||\langle a_n \rangle|| = \sqrt{\sum |a_n|^2}$$

تعریف شود یک نرم است و l_2 ــ نرم بر $\mathbf{R}^\infty$ نام دارد. توجه کنید که این نرم در فضای هیلبرت l_2 ــ متر را القا خواهد کرد.

مسائل حل شده

مترها

۱. نشان دهید که در تعریف متر، اصل موضوع $[\mathbf{M}_3]$ را می‌توان با اصل موضوع (ضعیفتر) زیر عوض کرد:

$[\mathbf{M}_3^*]$ هرگاه $a, b, c \in X$ متمایز باشند، آنگاه $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$.

حل. فرض کنیم $a = b$. دراین صورت،

$$d(a,c) = d(b,c) = d(b,b) + d(b,c) \leq d(a,b) + d(b,c).$$

اگر $b = c$، استدلال مشابه است. بالاخره، فرض کنیم $a = c$. دراین صورت،

$$d(a,c) = 0 \leq d(a,b) + d(b,c).$$

لذا، نامساوی مثلثی از $[\mathbf{M}_1]$ در صورت متمایز نبودن نقاط a، b، و c از هم نتیجه می‌شود.

۲. نشان دهید که متر مبتذل بر مجموعهٔ X یک متر است؛ یعنی، تابع d تعریف شده با

$$d(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a \neq b \\ 0 & \text{اگر } a = b \end{cases}$$

در $[\mathbf{M}_1]$، $[\mathbf{M}_2]$، $[\mathbf{M}_3^*]$، و $[\mathbf{M}_4]$ صدق می‌کند.

حل. فرض کنیم $a, b \in X$. پس $d(a,b) = 1$ یا $d(a,b) = 0$. در هر حالت، $d(a,b) \geq 0$. همچنین، اگر $a = b$، طبق تعریف d، $d(a,b) = 0$. لذا، d در $[\mathbf{M}_1]$ صدق می‌کند.

فرض کنیم $a, b \in X$. هرگاه $a \neq b$، آنگاه $b \neq a$. لذا، $d(a,b) = 1$ و $d(b,a) = 1$. بنابراین، $d(a,b) = d(b,a)$. از آن سو، هرگاه $a = b$، آنگاه $b = a$؛ و درنتیجه، $d(a,b) = 0 = d(b,a)$. لذا، d در $[\mathbf{M}_2]$ صدق می‌کند. حال فرض کنیم $a, b, c \in X$ نقاط متمایزی باشند. پس $d(a,c) = 1$، $d(a,b) = 1$، و $d(b,c) = 1$. لذا،

$$d(a,c) = 1 \leq 1 + 1 = d(a,b) + d(b,c)$$

و d در $[\mathbf{M}_3^*]$ صدق می‌کند.
بالاخره، فرض کنیم $a, b \in X$ و $a \neq b$. پس $d(a, b) = 1$. لذا، $d(a, b) \neq 0$، و d در $[\mathbf{M}_4]$ صدق می‌نماید.

۳. فرض کنید d یک متر بر مجموعهٔ ناتهی X باشد. نشان دهید که تابع e تعریف شده با

$$e(a, b) \;=\; \min(1, d(a, b))$$

که در آن $a, b \in X$، نیز یک متر بر X است.

حل. فرض‌کنیم $a, b \in X$. چون d متر است، $d(a, b)$ نامنفی‌است. لذا، $e(a, b)$، که یا مساوی 1 است یا $d(a, b)$، نیز نامنفی است. بعلاوه، هرگاه $a = b$، آنگاه

$$e(a, b) \;=\; \min(1, d(a, b)) \;=\; \min(1, 0) \;=\; 0$$

لذا، e در $[\mathbf{M}_1]$ صدق می‌کند.
حال فرض کنیم $a, b \in X$. طبق تعریف، $e(a, b) = d(a, b)$ یا $e(a, b) = 1$. فرض کنیم $e(a, b) = d(a, b)$. پس $d(a, b) < 1$. چون d متراست، $d(b, a) = d(a, b) < 1$. درنتیجه،

$$e(b, a) \;=\; d(b, a) \;=\; d(a, b) \;=\; e(a, b)\,.$$

از آن‌سو، فرض کنیم $e(a, b) = 1$. پس $d(a, b) \geqq 1$. لذا، $d(b, a) = d(a, b) \geqq 1$. درنتیجه،

$$e(b, a) \;=\; 1 \;=\; e(a, b)\,.$$

درهرحالت، e در $[\mathbf{M}_2]$ صدق می‌کند.
حال فرض کنیم $a, b, c \in X$. می‌خواهیم نامساوی‌مثلثی

$$e(a, c) \;\leqq\; e(a, b) + e(b, c)$$

را ثابت کنیم. می‌بینیم که $e(a, c) = \min(1, d(a, c)) \leqq 1$. ازاینرو، اگر $e(a, b) = 1$ یا $e(b, c) = 1$، نامساوی مثلثی برقرار است. اما، اگر $e(a, b) < 1$ و $e(b, c) < 1$؛ داریم $e(a, b) = d(a, b)$ و $e(b, c) = d(b, c)$. بنابراین،

$$e(a, c) \;=\; \min(1, d(a, c)) \;\leqq\; d(a, c) \;\leqq\; d(a, b) + d(b, c) \;=\; e(a, b) + e(b, c)\,.$$

لذا، درهمه حال، نامساوی مثلثی برقرار است. بنابراین، e در $[\mathbf{M}_3]$ صدق می‌کند.
بالاخره، فرض‌کنیم $a, b \in X$ و $a \neq b$. پس $d(a, b) \neq 0$. لذا، $e(a, b) = \min(1, d(a, b))$

نیز ناصفر است. بنابراین، e در $[\mathbf{M}_4]$ صدق خواهد کرد.

۴. فرض کنید d یک متر بر مجموعهٔ ناتهی X باشد. نشان دهید، که تابع e تعریف شده با

$$e(a,b) = \frac{d(a,b)}{1 + d(a,b)}$$

که درآن $a,b \in X$، نیز یک متر بر X است.

حل. چون d متر است، e در $[\mathbf{M}_1]$، $[\mathbf{M}_2]$، و $[\mathbf{M}_4]$ صدق می‌کند. لذا، فقط باید نشان داد که e در $[\mathbf{M}_3]$، یعنی نامساوی مثلثی، صدق می‌کند. فرض کنیم $a,b,c \in X$. پس

$$\frac{d(a,b)}{1 + d(a,b) + d(b,c)} \leq \frac{d(a,b)}{1 + d(a,b)} = e(a,b)$$

و

$$\frac{d(b,c)}{1 + d(a,b) + d(b,c)} \leq \frac{d(b,c)}{1 + d(b,c)} = e(b,c).$$

چون d متر است $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$. لذا،

$$e(a,c) = \frac{d(a,c)}{1 + d(a,c)} \leq \frac{d(a,b) + d(b,c)}{1 + d(a,b) + d(b,c)}$$

$$= \frac{d(a,b)}{1 + d(a,b) + d(b,c)} + \frac{d(b,c)}{1 + d(a,b) + d(b,c)} \leq$$

$$e(a,b) + e(b,c).$$

بنابراین، e یک متر می‌باشد.

کره‌های باز

۵. لم ۲.۸ را ثابت کنید: فرض‌کنید S کره‌ای باز به مرکز p و شعاع δ باشد؛ یعنی، $S = S(p,\delta)$. دراین صورت، به‌ازای هر نقطهٔ $q \in S$، کرهٔ بازی مانند T به مرکز q هست بطوری که T مشمول S می‌باشد.

حل. چون $q \in S = S(p,\delta)$، داریم $d(q,p) < \delta$. از اینرو،

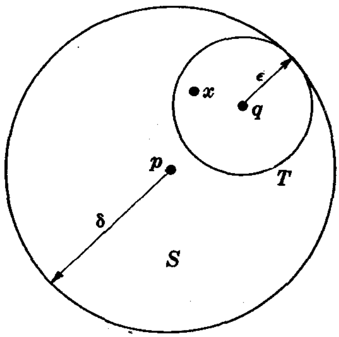
$$\epsilon = \delta - d(q,p) > 0.$$

حکم می‌کنیم که کرهٔ باز $T = S(q, \epsilon)$ ، به‌مرکز q و شعاع ϵ ، زیرمجموعه‌ای از S است .

فرض کنیم $x \in T = S(q, \epsilon)$. پس $d(x, q) < \epsilon = \delta - d(q, p)$. درنتیجه ، طبق نامساوی مثلثی ،

$$d(x, p) \leq d(x, q) + d(q, p) < [\delta - d(q, p)] + d(q, p) = \delta .$$

لذا ، $x \in S = S(p, \delta)$ ، زیرا فاصله‌اش تا p از δ کمتر است . درنتیجه ، $x \in T$ ایجاب می‌کندکه $x \in S$ ؛ یعنی ، T (همانطور که نمودار ون زیر نشان داده) زیر-مجموعهٔ S می‌باشد .



۶ . فرض کنید δ_1 و δ_2 اعدادی حقیقی باشند بطوری که $0 < \delta_1 \leq \delta_2$. نشان دهید که کرهٔ باز $S(p, \delta_1)$ زیرمجموعه‌ای از کرهٔ باز $S(p, \delta_2)$ است .

حل . فرض کنیم $x \in S(p, \delta_1)$. پس $d(x, p) < \delta_1 \leq \delta_2$. از اینرو ، $x \in S(p, \delta_2)$ ؛ و درنتیجه ، $S(p, \delta_1) \subset S(p, \delta_2)$.

۷ . نشان دهیدکه اگر S و T کره‌های بازی بایک‌مرکزباشند ، یکی از آنها زیرمجموعه‌ای از دیگری است .

حل . فرض کنیم $S = S(p, \delta_1)$ و $T = S(p, \delta_2)$ ؛ یعنی ، S و T مرکز p را داشته و بترتیب شعاعهای δ_1 و δ_2 را دارا باشند . داریم $\delta_1 \leq \delta_2$ یا $\delta_2 \leq \delta_1$. از اینرو ، طبق مسئلهٔ قبل ، $S \subset T$ یا $T \subset S$.

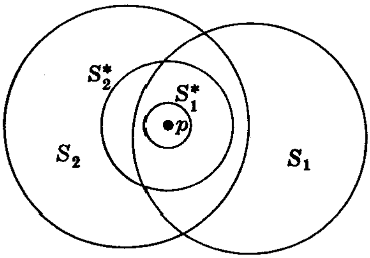
۸ . لم ۳.۸ را ثابت کنید : فرض کنید S_1 و S_2 کره‌های بازی بوده و $p \in S_1 \cap S_2$.

دراین‌صورت ،کرهٔ بازی مانند S_p به مرکز p هست بطوری که $p \in S_p \subset S_1 \cap S_2$.

حل. چون $p \in S_1$ و S_1 کرهٔ بازی است ، بنابر لم ۲.۸ ، کرهٔ بازی چون S_1^* به مرکز p هست بطوری که $p \in S_1^* \subset S_1$. بهمین نحو، کرهٔ بازی چون S_2^* به مرکز p هست بطوری که $p \in S_2^* \subset S_2$. اما S_1^* و S_2^* هر دو به مرکز p اند؛ درنتیجه، طبق مسئلهٔ ۷، یکی از آنها، مثلاً S_1^* ، مشمول دیگری است. لذا، داریم

$$p \in S_1^* \subset S_1 \quad \text{و} \quad p \in S_1^* \subset S_2^* \subset S_2 \ .$$

بنابراین، $p \in S_1^* \subset S_1 \cap S_2$. لذا، می‌توان $S_p = S_1^*$ را اختیار کرد. (ر.ک. نمودار زیر.)



توپولوژیهای متری

۹ . این حکم را ثابت کنید: فرض کنید X یک فضای متری بوده، و $\mathscr{D}_p$ ردهٔ کره‌های باز به مرکز $p \in X$ باشد. دراین صورت، $\mathscr{D}_p$ یک پایهٔ موضعی در p است.

حل. فرض کنیم G زیرمجموعهٔ بازی از X شامل p باشد. چون کره‌های باز در X پایه‌ای برای توپولوژی متری تشکیل می‌دهند، پس کرهٔ بازی مانند S هست بطوری که $p \in S \subset G$. اما، طبق لم ۲.۸ ، کرهٔ بازی مانند $S_p \in \mathscr{D}_p$ وجوددارد؛ یعنی، کره‌ای به مرکز p بقسمی که $p \in S_p \subset S \subset G$. لذا، $\mathscr{D}_p$ یک پایهٔ موضعی در p است.

۱۰ . قضیهٔ ۵.۸ را ثابت کنید: فرض کنید X یک فضای متری باشد. دراین صورت، ردهٔ حداکثر شمارشپذیر از کره‌های باز

$$\mathscr{Z} = \{S(p,1),\ S(p,\tfrac{1}{2}),\ S(p,\tfrac{1}{3}),\ \ldots\}$$

به مرکز $p \in X$ یک پایهٔ موضعی در p است.

حل. فرض‌کنیم G زیرمجموعهٔ بازی از X شامل p باشد. طبق مسئلهٔ قبل، کرهٔ بازی مانند $S(p,\delta)$ به مرکز p هست بطوری که $p \in S(p,\delta) \subset G$. چون $\delta > 0$ ،

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } 1/n_0 < \delta \cdot$$

بنابراین، $p \in S(p,1/n_0) \subset S(p,\delta) \subset G$ ، که در آن $S(p,1/n_0) \in \mathscr{Z}$. لذا، $\mathscr{Z}$ یک پایهٔ موضعی در p است.

۱۱ . قضیهٔ ۸ . ۶ را ثابت کنید: بست $\bar{A}$ زیرمجموعهٔ A از فضای متری X مجموعهٔ نقاطی است که فاصله‌شان تا A صفر است:

$$\bar{A} = \{x : d(x,A) = 0\} \cdot$$

حل. فرض کنیم $d(p,A) = 0$. پس هر کرهٔ باز به مرکز p ، و لذا، هر مجموعهٔ باز G شامل p ، نیز دست‌کم یک نقطه از A را دارد. از اینرو، $p \in A$ یا p یک نقطهٔ حدی A است؛ و درنتیجه، $p \in \bar{A}$.

ازآن سو، فرض کنید $d(p,A) = \epsilon > 0$. پس کرهٔ باز $S(p,\frac{1}{2}\epsilon)$ به مرکز p شامل هیچ نقطه‌ای از A نیست. لذا، p متعلق به برون A است؛ و درنتیجه، $p \notin \bar{A}$.

بنابراین، $\bar{A} = \{x : d(x,A) = 0\}$.

۱۲ . نشان دهید که زیرمجموعهٔ F از فضای متری X بسته است اگر و فقط اگر $\{x : d(x,F) = 0\} \subset F$.

حل. این مطلب مستقیماً از مسئلهٔ ۱۱ و اینکه مجموعه‌ای بسته است اگرگر مساوی بست خود باشد نتیجه می‌شود.

۱۳ . هرگاه F زیرمجموعهٔ بسته‌ای از فضای متری X بوده و $p \in X$ متعلق به F نباشد، یعنی $p \notin F$ ، آنگاه $d(p,F) \neq 0$.

حل. هرگاه $d(p,F) = 0$ و F بسته باشد، آنگاه طبق مسئلهٔ ۱۲، $p \in F$. اما، طبق فرض، $p \notin F$ ؛ درنتیجه، $d(p,F) \neq 0$.

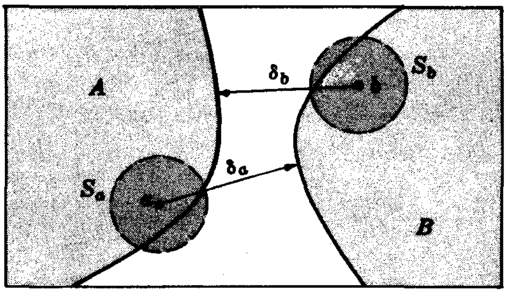
۱۴ . قضیهٔ ۸ . ۸ را ثابت کنید: فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های ازهم جدای بسته‌ای از فضای متری X باشند. دراین صورت، مجموعه‌های باز از هم جدایی مانند G و

H هستند که $A \subset G$ و $B \subset H$.

حل . هرگاه A یا B تهی باشد، مثلاً" $A = \emptyset$ ، آنگاه $\emptyset$ و X مجموعه‌های ازهم جدای بازی هستند کـه $A \subset \emptyset$ و $B \subset X$. لذا، می‌توان A و B را ناتهی گرفت. فرض کنیم $a \in A$. چون A و B ازهم جدایند، $a \notin B$. اما B بسته است؛ لذا، طبق مسئله‌ٔ قبل، $d(a, B) = \delta_a > 0$. بهمین‌نحو، اگر $b \in B$ ، $d(b, A) = \delta_b > 0$. قرار می‌دهیم

$$S_a = S(a, \tfrac{1}{3}\delta_a) \quad \text{و} \quad S_b = S(b, \tfrac{1}{3}\delta_b) \;:$$

درنتیجه، $a \in S_a$ و $b \in S_b$. (ر.ک. نمودار ون زیر).



حکم می‌کنیم که مجموعه‌های

$$G = \bigcup\{S_a : a \in A\} \quad \text{و} \quad H = \bigcup\{S_b : b \in B\}$$

در شرایط قضیه صدق می‌کنند. G و H بازند، زیرا هریک اجتماع کره‌های باز است. بعـلاوه، $a \in S_a$ ایجاب می‌کند که $A \subset G$ ، و $b \in S_b$ ایجاب می‌کند که $B \subset H$.

باید نشان دهیم که $G \cap H = \emptyset$. فرض کنیم $G \cap H \neq \emptyset$ ، مثلاً" $p \in G \cap H$. پـس

$$\exists\, a_0 \in A,\ b_0 \in B \quad \text{بطوری که} \quad p \in S_{a_0},\ p \in S_{b_0}\,.$$

فرض کنیـم $d(a_0, b_0) = \epsilon > 0$. پـس $d(a_0, B) = \delta_{a_0} \leq \epsilon$ و $d(b_0, A) = \delta_{b_0} \leq \epsilon$. امـا $p \in S_{a_0}$ و $p \in S_{b_0}$ ؛ درنتیجه،

$$d(a_0, p) < \tfrac{1}{3}\delta_{a_0} \quad \text{و} \quad d(p, b_0) < \tfrac{1}{3}\delta_{b_0}\,.$$

پس، طبق نامساوی مثلثی،

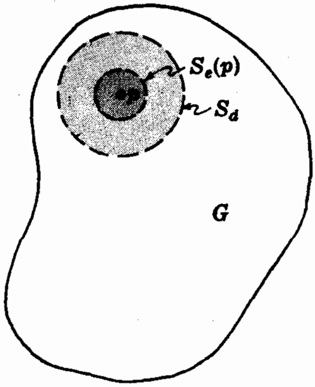
$$d(a_0, b_0) = \epsilon \leq d(a_0, p) + d(p, b_0) < \tfrac{1}{3}\delta_{a_0} + \tfrac{1}{3}\delta_{b_0} \leq \tfrac{1}{3}\epsilon + \tfrac{1}{3}\epsilon = \tfrac{2}{3}\epsilon$$

که ناممکن است. لذا، G و H ازهم جدا بوده و قضیه درست می‌باشد.

مترهای هم‌ارز

۱۵ . فرض کنید d و e مترهایی بر مجموعهٔ X باشند بطوری که به‌ازای هر کرهٔ d-باز S_d به مرکز $p \in X$ ، کرهٔ e-بازی مانند S_e به‌مرکز p باشد بقسمی که $S_e \subset S_d$. نشان دهیدکه توپولوژی $\mathcal{T}_d$ القا شده به‌وسیلهٔ p ضخیمتر (کوچکتر) از توپولوژی $\mathcal{T}_e$ القا شده به‌وسیلهٔ e است؛ یعنی، $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_e$.

حل. فرض‌کنیم $G \in \mathcal{T}_d$. می‌خواهیم نشان دهیم که G نیز یک مجموعهٔ e ــ باز است. فرض‌کنیم $p \in G$. چون G ، dــ باز است، کرهٔ dــ بازی مانند S_d به‌مرکز p هست بطوری کــه $p \in S_d \subset G$. طبق فرض، کرهٔ e ــ بازی مانند $S_e(p)$ به مرکز p هست بطوری که $p \in S_e(p) \subset S_d \subset G$. بنابـــراین، $G = \bigcup\{S_e(p) : p \in G\}$. لذا، G اجتماع کــره‌هایی e ــباز است؛ و درنتیجه، eــ باز می‌باشد. بنابراین، $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_e$.



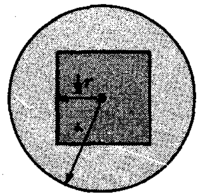
۱۶ . فرض کنید d و e مترهایی بر مجموعهٔ X باشند بطوری که به‌ازای هر کرهٔ d ــ باز S_d به مــرکز $p \in X$ ، کرهٔ e ــ بازی مانند S_e به مرکز p هست که $S_e \subset S_d$ ، و به‌ازای هــر کــرهٔ e ــ باز S_e^* به مرکز $p \in X$ ، کرهٔ d ــ بازی مانند S_d^* هست که $S_d^* \subset S_e^*$. نشان دهید که d و e مترهایی هم‌ارزند؛ یعنی، بر X یک توپولوژی القا می‌کنند.

حل. طبق مسئلهٔ ۱۵، توپولوژی $\mathcal{T}_d$ القا شــده به‌وسیلهٔ d از توپولوژی $\mathcal{T}_e$ القا شده به‌وسیلهٔ e ضخیمتر است؛ یعنی، $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_e$. همچنین، بنا بر مسئلهٔ ۱۵،

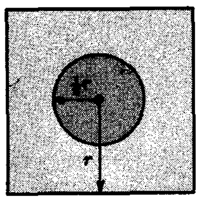
$\mathcal{T}_e \subset \mathcal{T}_d$. بنابراین ، $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_e$.

۱۷ . نشان دهید که متر معمولی d بر صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ با مترهای d_1 و d_2 که در مثال ۵.۱ بر $\mathbf{R}^2$ تعریف شدند هم‌ارز است .

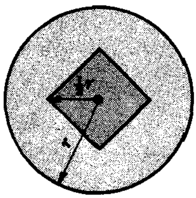
حل . یک مربع را می‌توان طبق شکل (آ) در زیر در یک دایره محاط کرد ، و یک دایره را می‌توان طبق شکل (ب) در یک مربع محاط نمود . نقاط داخل یک دایره یک کرهٔ d ـ باز ونقاط داخل یک مربع یک کرهٔ d_1 ـ باز تشکیل می‌دهند ؛ درنتیجه ، مترهای d و d_1 طبق مسئلهٔ ۱۶ هم ارز خواهند بود .

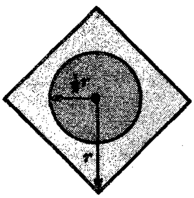


شکل (آ)



شکل (ب)


شکل (پ)



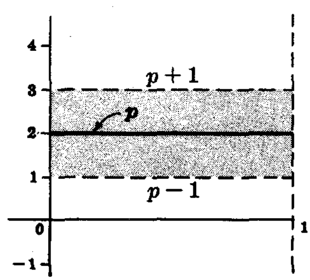
شکل (ت)

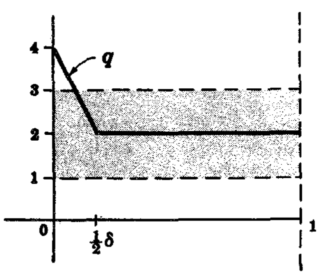
۱۸ . فرض کنید $C[0,1]$ گردآیهٔ تمام توابع پیوستهٔ حقیقی تعریف شده بر $I = [0,1]$ باشد . مترهای d و e را بر $C[0,1]$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in I\}, \quad e(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

(ر.ک. مثال ۳.۱ و مثال ۴.۱) . نشان دهید که توپولوژی $\mathcal{T}_d$ القا شده به‌وسیلهٔ d از توپولوژی $\mathcal{T}_e$ القا شده به‌وسیلهٔ e ضخیمتر نیست ؛ یعنی ، $\mathcal{T}_d \not\subset \mathcal{T}_e$.

حل . فرض کنیم p تابع ثابت $p(x) = 2$ باشد و $\epsilon = 1$. دراین صورت ، کرهٔ $S_d(p,\epsilon)$ عبارت است از جمیع توابعی چون g که بین توابع $p-1$ و $p+1$ قرار دارد ؛ یعنی ، به‌ازای هر $x \in I$ ، $1 < g(x) < 3$.





کافی است نشان دهیم که $S_d(p,\epsilon)$ شامل هیچ کرهٔ eـ باز به مرکز p نیست؛ یعنی، به‌ازای هر $\delta > 0$ ، $S_e(p,\delta) \not\subset S_d(p,\epsilon)$. فرض‌کنیم $\delta > 0$. تابع q متشکل از پاره خطهای بین نقاط $(0,4)$ و $(\frac{1}{2}\delta, 2)$ و بین $(\frac{1}{2}\delta, 2)$ و $(1,2)$ ، یعنی تابع

$$g(x) = \begin{cases} (-4x/\delta) + 4 & \text{اگر } 0 \leq x < \frac{1}{2}\delta \\ 2 & \text{اگر } \frac{1}{2}\delta \leq x \leq 1 \end{cases}$$

را درنظرمی‌گیریم (ر.ک. نمودار بالا). می‌بینیم که "مساحت" بین p و q مساوی $\frac{1}{2}\delta$ است؛ یعنی، $e(p,q) = \frac{1}{2}\delta$. پس $q \in S_e(p,\delta)$. اما $d(p,q) = 2$ ؛ درنتیجه، $q \notin S_d(p,\epsilon)$. لذا، بـه‌ازای هر $\delta > 0$ ، $S_e(p,\delta) \not\subset S_d(p,\epsilon)$. بنابراین، $\mathcal{T}_d \not\subset \mathcal{T}_e$.

۱۹ . فرض‌کنید $C[a,b]$ گردآیهٔ تمام توابع پیوسته بر بازهٔ بستهٔ $X = [a,b]$ باشد. مترهای d و e را بر $C[a,b]$ به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}, \quad e(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

نشان دهید که توپولوژی $\mathcal{T}_e$ القا شده به‌وسیلهٔ e از توپولوژی $\mathcal{T}_d$ القا شده به‌وسیلهٔ d ضخیمتر است؛ یعنی، $\mathcal{T}_e \subset \mathcal{T}_d$.

حل. فرض‌کنید $S_e(p,\epsilon)$ کرهٔ e ــ بازی در $C[a,b]$ به مرکز $p \in C[a,b]$ باشد. قرار می‌دهیم $\delta = \epsilon/(b-a)$. در پرتومسئلهٔ ۱۵، کافی است نشان دهیم که $S_d(p,\delta)$ ، یعنی کرهٔ d ــ باز بـه مرکز p و شعاع δ ، زیرمجموعه‌ای از $S_e(p,\epsilon)$ است؛ یعنی، $S_d(p,\delta) \subset S_e(p,\epsilon)$.

فرض‌کنیم $f \in S_d(p,\delta)$. پس $\sup\{|p(x) - f(x)|\} < \delta = \epsilon/(b-a)$. از اینـرو،

$$e(p,f) = \int_a^b |p(x) - f(x)|\, dx \leq \int_a^b \sup\{|p(x) - f(x)|\}\, dx < \int_a^b \epsilon/(b-a)\, dx = \epsilon$$

درنتیجه، $f \in S_e(p,\epsilon)$ ؛ و لذا، $S_d(p,\delta) \subset S_e(p,\epsilon)$.

فضاهای نرمدار

۲۰ . قضیهٔ ۱۳۰۸ را ثـابت کنید: تابع d تعریف شده با $d(v,w) = \|v - w\|$ ، که درآن v و w بردارهایی در فضای نرمدار $\mathbf{V}$ اند، یک متر بر $\mathbf{V}$ است.

حل. بنابر $[\mathbf{N_1}]$ ،

$\cdot\ d(v, v) = ||v - v|| = ||0|| = 0$ و $d(v, w) = ||v - w|| \geq 0$

از اینرو، d در $[\mathbf{M}_1]$ صدق می‌کند. همچنین، بنا بر $[\mathbf{N}_3]$،

$d(v, w) = ||v - w|| = ||(-1)(w - v)|| = |-1|\,||w - v|| = ||w - v|| = d(w, v)\cdot$

لذا، d در $[\mathbf{M}_2]$ صدق می‌کند. بنابر $[\mathbf{N}_2]$، به‌ازای هر $v, w \in \mathbf{V}$، $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$. بنابراین، اگر $a, b, c \in \mathbf{V}$، با جانشانی $v = a - b$ و $w = b - c$ خواهیم داشت

$||a - c|| = ||(a - b) + (b - c)|| = ||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| = ||a - b|| + ||b - c||;$

یعنی، $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$. لذا، d در $[\mathbf{M}_3]$ صدق می‌نماید.

بالاخره، اگر $v \neq w$، $v - w \neq 0$؛ ازاینرو، بنابر $[\mathbf{N}_1]$، $0 < ||v - w|| = d(v, w)$.
لذا، d در $[\mathbf{M}_4]$ صدق می‌کند.

۲۱. نامساوی کشی ــ شوارتز[1] را ثابت کنید: به‌ازای هر جفت نقطه مانند $p = \langle a_1, \ldots, a_m\rangle$ و $q = \langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ در $\mathbf{R}^m$،

$$\sum_{i=1}^{m} |a_i b_i| \leq ||p||\,||q|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |a_i|^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |b_i|^2}$$

که در آن $||p||$ نرم اقلیدسی است.

حل. هرگاه $p = 0$ یا $q = 0$، نامساوی به $0 \leq 0$ تحویل می‌شود و لذا درست است. درنتیجه، فقط کافی‌است حالتی را درنظر بگیریم که در آن $p \neq 0$ و $q \neq 0$؛ یعنی، درآن $||p|| \neq 0$ و $||q|| \neq 0$.

به‌ازای هر دو عدد حقیقی $x, y \in \mathbf{R}$، $0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ یا، معادلاً

$$2xy \leq x^2 + y^2 \tag{۱}$$

چون x و y اعداد حقیقی دلخواهی هستند، می‌توان در (۱) فرض کرد $x = |a_i|/||p||$ و $y = |b_i|/||q||$. درنتیجه، به‌ازای هر i،

$$2\,\frac{|a_i|}{||p||}\,\frac{|b_i|}{||q||} \leq \frac{|a_i|^2}{||p||^2} + \frac{|b_i|^2}{||q||^2} \tag{۲}$$

اما، طبق تعریف نرم اقلیدسی، $\sum |a_i|^2 = ||p||^2$ و $\sum |b_i|^2 = ||q||^2$. درنتیجه، اگر در (۲) نسبت به i جمعبندی کرده و از $|a_i b_i| = |a_i|\,|b_i|$ استفاده کنیم، خواهیم

1. Schwarz

داشت

$$2\frac{\sum_{i=1}^{m}|a_i b_i|}{||p||\ ||q||} \leq \frac{\sum_{i=1}^{m}|a_i|^2}{||p||^2} + \frac{\sum_{i=1}^{m}|b_i|^2}{||q||^2} = \frac{||p||^2}{||p||^2} + \frac{||q||^2}{||q||^2} = 2\,;$$

یعنی،

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}|a_i b_i|}{||p||\ ||q||} \leq 1\,.$$

ضرب طرفین نامساوی در $||p||\ ||q||$ نامساوی مطلوب را بدست خواهد داد.

۲۲. نامساوی مینکوفسکی[1] را ثابت کنید: به‌ازای هر دو نقطهٔ

$p = \langle a_1, \ldots, a_m\rangle$ و $q = \langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ در $\mathbf{R}^m$،

$||p+q|| \leq ||p|| + ||q||$ ؛ یعنی، $\sqrt{\sum |a_i+b_i|^2} \leq \sqrt{\sum |a_i|^2} + \sqrt{\sum |b_i|^2}$.

حل. هرگاه $||p+q|| = 0$، نامساوی بوضوح برقرار است. لذا، فقط کافی است حالتی را درنظر بگیریم که $||p+q|| \neq 0$.

توجه کنید که به‌ازای اعداد حقیقی $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ داریم $|a_i+b_i| \leq |a_i| + |b_i|$. لذا،

$$\begin{aligned} ||p+q||^2 &= \sum |a_i+b_i|^2 = \sum |a_i+b_i|\ |a_i+b_i| \\ &\leq \sum |a_i+b_i|\,(|a_i| + |b_i|) \\ &= \sum |a_i+b_i|\ |a_i| + \sum |a_i+b_i|\ |b_i|\,. \end{aligned}$$

اما، طبق نامساوی کشی ــ شوارتز،

$\sum |a_i+b_i|\ |a_i| \leq ||p+q||\ ||p||$ و $\sum |a_i+b_i|\ |b_i| \leq ||p+q||\ ||q||$.

بنابراین،

$$||p+q||^2 \leq ||p+q||\ ||p|| + ||p+q||\ ||q|| = ||p+q||\,(||p|| + ||q||)\,.$$

چون فرض کرده‌ایم $||p+q|| \neq 0$، می‌توان بر $||p+q||$ تقسیم کرد. با این کار نامساوی مطلوب نتیجه خواهد شد.

۲۳. ثابت کنید که نرم اقلیدسی

$||p|| = \sqrt{\sum |a_i|^2}$، که درآن $p = \langle a_1, \ldots, a_m\rangle \in \mathbf{R}^m$،

در اصول موضوع لازم $[\mathbf{N}_1]$، $[\mathbf{N}_2]$، و $[\mathbf{N}_3]$ صدق می‌کند.

---

1. Minkowski

حل. $[N_1]$ از اخواص اعداد حقیقی نتیجه می‌شود، و $[N_2]$ نامساوی‌مینکوفسکی است که درمسئلهٔ قبل ثابت شد. پس کافی است نشان دهیم که $[N_3]$ برقرار است. اما، به‌ازای هر بردار $p = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ و هر عدد حقیقی $k \in \mathbf{R}$،

$$\begin{aligned} \|kp\| &= \|k\langle a_1, \ldots, a_m\rangle\| = \|\langle ka_1, \ldots, ka_m\rangle\| \\ &= \sqrt{\sum |ka_i|^2} = \sqrt{\sum |k|^2 \, |a_i|^2} = \sqrt{|k|^2 \sum |a_i|^2} \\ &= \sqrt{|k|^2} \sqrt{\sum |a_i|^2} = |k| \sqrt{\sum |a_i|^2} = |k| \, \|p\| . \end{aligned}$$

از اینرو، $[N_3]$ نیز برقرار می‌باشد.

۲۴. قضیهٔ ۸.۱۱ را ثابت کنید: فضای اقلیدسی m بعدی یک فضای متری است؛ یعنی، متر اقلیدسی بر $\mathbf{R}^m$ در اصول موضوع $[M_1]$ تا $[M_4]$ صدق می‌کند.

حل. از مسئلهٔ ۲۳ و این امر که متر اقلیدسی بر $\mathbf{R}^m$ به وسیلهٔ نرم اقلیدسی بر $\mathbf{R}^m$ القا شده است استفاده کنید.

۲۵. فرض کنید $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ یک دنبالهٔ همگرا از اعداد حقیقی باشد با این خاصیت‌که به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $a_n \le b$. نشان دهید که $\lim a_n \le b$.

حل. فرض کنیم $\lim a_n = a > b$ و $\epsilon = a - b > 0$. چون $a_n \to a$،
$\exists n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $a - a_{n_0} \le |a - a_{n_0}| < \epsilon = a - b$.
پس $-a_{n_0} < -b$؛ ولذا، $b < a_{n_0}$، که‌بافرض‌متناقض‌است. بنابراین، $\lim \; a_n \le b$.

۲۶. نامساوی‌مینکوفسکی‌برای‌مجموعهای‌نامتناهی‌را ثابت کنید: هرگاه $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle \in \mathbf{R}^\infty$، آنگاه

$$\|\langle a_n + b_n \rangle\| \le \|\langle a_n \rangle\| + \|\langle b_n \rangle\|$$

یعنی،

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2} \; .$$

حل. بنابر نامساوی مینکوفسکی برای مجموعهای متناهی،

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{m} |a_n+b_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{m} |a_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{m} |a_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2}$$

چون نـامساوی فـوق برای هر $m \in \mathbf{N}$ درست است، طبق مسئلهٔ قبل، درحد نیز درست خواهد بود.

۲۷. نشان دهید که l_2 ـ نرم بر $\mathbf{R}^\infty$، یعنی $\|\langle a_n\rangle\| = \sqrt{\sum |a_n|^2}$، دراصول موضوع لازم $[\mathbf{N}_1]$، $[\mathbf{N}_2]$، و $[\mathbf{N}_3]$ صدق می‌کند.

حل. اثبات مشابه اثبـات این امر در مسئلهٔ ۲۳ است که نرم اقلیدسی در اصول موضوع $[\mathbf{N}_1]$، $[\mathbf{N}_2]$، و $[\mathbf{N}_3]$ صدق می‌کند.

۲۸. قضیهٔ ۱۲.۸ را ثابت کنید: فضای هیلبرت (یا l_2 ـ فضا) یک فضای متری است.

حل. مسئلهٔ ۲۷ و این‌امر که l_2 ـ متر بر $\mathbf{R}^\infty$ به‌وسیلهٔ l_2 ـ نرم القا شده‌است استفاده کنید.

۲۹. فرض کنید a و b اعدادی حقیقی بـاشند بـا این خاصیت که به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $a \leq b+\epsilon$. نشان دهید که $a \leq b$.

حل. فرض کنیـم $a > b$. پس $a = b+\delta$، کـه درآن $\delta > 0$. قـرار می‌دهیم $\epsilon = \frac{1}{2}\delta$. لذا، $a > b+\frac{1}{2}\delta = b+\epsilon$، که درآن $\epsilon > 0$. اما این با فرض متناقض است؛ درنتیجه، $a \leq b$.

۳۰. فرض کنیـد $I = [0,1]$. نشان دهیـد که $\|f\| = \sup\{|f(x)|\}$ یک نرم بر $C[0,1]$ اسـت.

حل. به‌یادمی‌آوریم کـه هر تابع حقیقی پیوسته بریک بازهٔ بسته کراندار است؛ درنتیجه، $\|f\|$ تعریف شـده است. چـون‌به‌ازای هر $x \in I$، $|f(x)| \geq 0$، داریم $\|f\| \geq 0$؛ همچنین $\|f\| = 0$ اگفگر بـه‌ازای هر $x \in I$، $|f(x)| = 0$؛ یعنی، اگفگر $f = 0$. لذا، $[\mathbf{N}_1]$ برقرار است.

فرض کنیم $\epsilon > 0$. پس $\exists x_0 \in I$ بطوری که

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= \sup\{|f(x)+g(x)|\} \leq |f(x_0)+g(x_0)| + \epsilon \\ &\leq |f(x_0)| + |g(x_0)| + \epsilon \\ &\leq \sup\{|f(x)|\} + \sup\{|g(x)|\} + \epsilon \\ &= \|f\| + \|g\| + \epsilon \end{aligned}$$

از اینرو، طبق مسئلهٔ ۲۹، $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ و $[\mathbf{N}_2]$ برقرار است.

حال فرض کنیم $k \in \mathbf{R}$. پس

$$\begin{aligned} \|kf\| &= \sup\{|(kf)(x)|\} = \sup\{|k\,f(x)|\} = \sup\{|k|\,|f(x)|\} \\ &= |k| \sup\{|f(x)|\} = |k|\,\|f\| \end{aligned}$$

و $[\mathbf{N}_3]$ برقرار است.

مسائل تکمیلی

مترها

۳۱ . فرض کنید $\mathcal{B}(X,Y)$ گردآیهٔ تمام توابع کراندار از مجموعهٔ دلخواه X بتوی فضای متری (Y,d) باشد. نشان دهید که تابع e یک متر بر $\mathcal{B}(X,Y)$ است:

$$e(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)) : x \in X\}.$$

۳۲ . فرض کنید $d_1, \ldots, d_m$ بترتیب مترهایی بر $X_1, \ldots, X_m$ باشند. نشان دهید که توابع زیر مترهایی بر مجموعهٔ حاصل ضربی $X = \prod_i X_i$ است:

$$d(p,q) = \max\{d_1(a_1,b_1), \ldots, d_m(a_m,b_m)\}, \quad e(p,q) = d_1(a_1,b_1) + \cdots + d_m(a_m,b_m)$$

در اینجا $p = \langle a_1, \ldots, a_m\rangle,\ q = \langle b_1, \ldots, b_m\rangle \in X = \prod_i X_i$.

۳۳ . فرض کنید $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ خط حقیقی وسعت یافته بوده و $f : \mathbf{R}^* \to [-1,1]$ با $f(x) = x/(1+|x|)$ ، اگر $x \in \mathbf{R}$ ، و $f(\infty) = 1$ و $f(-\infty) = -1$ تعریف شده باشد. نشان دهید که تابع $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ یک متر بر $\mathbf{R}^*$ است.

۳۴ . فرض کنید $\mathbf{R}^+$ اعداد حقیقی نامنفی بوده، و $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ تابع پیوسته‌ای باشد بطوری که (یک) $f(0) = 0$ ؛ (دو) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ ؛ و (سه) $x < y$ ایجاب کند که $f(x) < f(y)$. نشان دهید که اگر d یک متر بر مجموعهٔ X باشد، تابع ترکیب $f \circ d$ نیز یک متر بر X است.

۳۵ . فرض کنید ρ یک متر نما بر مجموعهٔ X باشد. همچنین، $\sim$ رابطه‌ای در X باشد به‌صورت زیر:

$a \sim b$ اگفگر $\rho(a,b) = 0$.

(یک) نشان دهید که $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی در X است.

(دو) نشان دهید که تابع $d([a],[b]) = \rho(a,b)$ یک متر بر مجموعهٔ خارج قسمتی $X/\sim \;=\; \{[a] : a \in X\}$ است. در اینجا $[a]$ ردهٔ هم‌ارزی $a \in X$ است.

۳۶. فرض کنید $\mathcal{R}[0,1]$ گردآیهٔ توابع انتگرال‌پذیر (ریمان[1]) بر $[0,1]$ باشد. نشان دهید که تابع زیر یک مترنما بر $\mathcal{R}[0,1]$ است:

$$\rho(f,g) \;=\; \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx \;.$$

همچنین، با مثال نقض، نشان دهید که ρ یک متر نیست.

۳۷. نشان دهید که تابع d یک متر بر مجموعهٔ X است اگفگر در دو شرط زیر صدق کند:

(یک) $d(a,b) = 0$ اگفگر $a = b$؛ (دو) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(c,b)$.

فواصل بین مجموعه‌ها، قطرها

۳۸. دو زیرمجموعهٔ بستهٔ A و B از خط حقیقی $\mathbf{R}$ مثال بزنید که $d(A,B) = 0$ ولی $A \cap B = \emptyset$.

۳۹. فرض کنید d یک متر بر X باشد. نشان دهید که به‌ازای هر دو زیرمجموعهٔ $A,B \subset X$،

(یک) $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B) + d(A,B)$ و

(دو) $d(\bar{A}) = d(A)$.

۴۰. فرض کنید d یک متر بر X بوده‌و A زیرمجموعهٔ دلخواهی از X باشد. نشان دهید که تابع $f : X \to \mathbf{R}$ تعریف شده با $f(x) = d(x,A)$ پیوسته است.

۴۱. تابع $d : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ تعریف شده با $d(\langle a,b\rangle) = |a-b|$ (یعنی، متر معمولی بر $\mathbf{R}$) را درنظر بگیرید. نشان دهید که d نسبت به توپولوژیهای معمولی برخط $\mathbf{R}$ وصفحهٔ $\mathbf{R}^2$ پیوسته است.

۴۲. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای متری X باشد. نشان دهید که $d(A) = d(\bar{A})$.

توپولوژیهای متری

۴۳. فرض کنید (A,d) یک زیرفضای متری (X,d) باشد. نشان دهید که (A,d) یک زیر-

1. Riemann

فضای توپولوژیک (X, d) نیز هست؛ یعنی، تحدید d به A توپولوژی نسبی بر A را القا می‌کند.

۴۴ . ثابت کنید هرگاه فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ با فضای متری (Y, d) همانریخت باشد، آنگاه $(X, \mathcal{T})$ مترپذیر است.

۴۵ . قضیهٔ ۸ . ۱۰ را ثابت کنید: هرگاه (X, d) با (Y, e) یکمتر باشد، آنگاه (X, d) با (Y, e) همانریخت نیز هست.

۴۶ . با مثال نشان دهید که بست کرهٔ باز

$$S(p, \delta) = \{x : d(p, x) < \delta\}$$

لزوماً "کرهٔ بستهٔ"

$$\overline{S}(p, \delta) = \{x : d(p, x) \leq \delta\}$$

نیست.

۴۷ . نشان دهید که کرهٔ بستهٔ $\overline{S}(p, \delta) = \{x : d(p, x) \leq \delta\}$ بسته است.

۴۸ . ثابت کنید دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ همگرا به نقطهٔ p در فضای متری X است اگر و فقط اگر دنبالهٔ $\langle d(a_1, p), d(a_2, p), \ldots \rangle$ از اعداد حقیقی همگرا به $0 \in \mathbf{R}$ باشد؛ یعنی، $\lim a_n = p$ اگفگر $\lim d(a_n, p) = 0$.

۴۹ . ثابت کنید هرگاه در فضای متری X، $\lim a_n = p$ و $\lim b_n = q$، آنگاه دنبالهٔ $\langle d(a_1, b_1), d(a_2, b_2), \ldots \rangle$ از اعداد حقیقی همگرا به $d(p, q) \in \mathbf{R}$ است؛ یعنی، $\lim d(a_n, b_n) = d(\lim a_n, \lim b_n)$.

مترهای هم‌ارز

۵۰ . فرض کنید d یک متر بر X باشد. نشان دهید که متر d با متر $e(a, b) = \min\{1, d(a, b)\}$ هم‌ارز است.

۵۱ . فرض کنید d یک متر بر X باشد. نشان دهید که متر $e(a, b) = \dfrac{d(a, b)}{1 + d(a, b)}$ با متر d هم‌ارز است.

۵۲ . فرض کنید d و e مترهایی بر X باشند. همچنین، $\exists k, k' \in \mathbf{R}$ بطوری که، به‌ازای هر $a, b \in X$،

$$d(a, b) \leq k\, e(a, b) \quad \text{و} \quad e(a, b) \leq k'\, d(a, b).$$

نشان دهید که d و e مترهایی هم‌ارزند.

فضای اقلیدسی m بعدی، فضای هیلبرت

۵۳ . فرض کنید $\ldots, p_2 = \langle a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m} \rangle, p_1 = \langle a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m} \rangle$ نقاطی در فضای

اقلیدسی m بعدی باشند. نشان دهید که $p_n \to q = \langle b_1, b_2, \ldots, b_m\rangle$ اگر و فقط اگر، به‌ازای $k = 1, \ldots, m$ ، $\langle a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, \ldots\rangle$ همگرا به b_k باشد؛ یعنی، تصویر $\langle\pi_k(p_n)\rangle$ در هر فضای مختصات به $\pi_k(q)$ همگراست.

۵۴ . نشان دهید هرگاه G زیرمجموعهٔ بازی از فضای هیلبرت $\mathbf{H}$ باشد، آنگاه $\exists p = \langle a_n\rangle \in G$ بطوری که $a_1 \neq 0$.

۵۵ . فرض کنید H^* زیرفضای حقیقی فضای هیلبرت $\mathbf{H}$ باشد متشکل از همهٔ نقاطی در $\mathbf{H}$ که اولین مختص آنها صفر است. (یک) نشان دهید که H^* بسته است. (دو) نشان دهید که H^* هیچ جا چگال در $\mathbf{H}$ است؛ یعنی، $\operatorname{int}(\overline{H^*}) = \emptyset$.

۵۶ . فرض کنید $p_1 = \langle a_{11}, a_{12}, \ldots\rangle,\ p_2 = \langle a_{21}, a_{22}, \ldots\rangle, \ldots$ نقاطی در $\mathbf{R}^\infty$ بوده و دنبالهٔ $\langle\pi_k(p_n)\rangle = \langle a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, \ldots\rangle$ از اعداد حقیقی به‌ازای هر $k \in \mathbf{N}$ همگرا به $b_k \in \mathbf{R}$ باشد.

(یک) نشان دهید که $q = \langle b_1, b_2, \ldots\rangle$ متعلق به $\mathbf{R}^\infty$ است.

(دو) نشان دهید که دنبالهٔ $\langle p_1, p_2, \ldots\rangle$ همگرا به q است.

مکعب هیلبرت

۵۷ . مجموعهٔ $\mathbf{I}$ مرکب از جمیع دنباله‌های حقیقی $\langle a_1, a_2, \ldots\rangle$ که به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ **مکعب هیلبرت** نام دارد.

(یک) نشان دهید که $\mathbf{I}$ یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^\infty$ است.

(دو) نشان دهید که $\mathbf{I}$ یک زیرمجموعهٔ بسته و کراندار $\mathbf{R}^\infty$ است.

فضاهای نرمدار

۵۸ . فرض کنید $\mathcal{B}(X, \mathbf{R})$ ردهٔ تمام توابع حقیقی کراندار $f : X \to \mathbf{R}$ باشد که بر مجموعهٔ ناتهی X تعریف شده‌اند. نشان دهید که $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ یک نرم بر $\mathcal{B}(X, \mathbf{R})$ است.

۵۹ . دو نرم $\|\cdots\|_1$ و $\|\cdots\|_2$ بر فضای خطی X هم‌ارزند اگفگر مترهای هم‌ارز بر X القا کنند؛ یعنی، اگفگر یک توپولوژی بر X معین نمایند. نشان دهید که $\|\cdots\|_1$ هم‌ارز $\|\cdots\|_2$ است اگر و فقط اگر $\exists a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$ بطوری که، به‌ازای هر $x \in X$.

$$a_1\|x\|_1 < \|x\|_2 < b_1\|x\|_1 \quad \text{و} \quad a_2\|x\|_2 < \|x\|_1 < b_2\|x\|_2 .$$

۶۰ . فرض کنید $\|\cdots\|$ نرم اقلیدسی بوده و d متر اقلیدسی القا شده بر صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ باشد. تابع e تعریف شده به صورت زیر را درنظر می‌گیریم:

$$e(p, q) = \begin{cases} ||p|| + ||q|| & \text{اگر } ||p|| \neq ||q|| \text{ ،} \\ d(p, q) & \text{اگر } ||p|| = ||q|| \text{ ،} \end{cases}$$

(یک) نشان دهید که e یک متر بر $\mathbf{R}^2$ است.

(دو) کرهٔ باز در فضای متری $(\mathbf{R}^2, e)$ را توصیف کنید.

۶۱ . نشان دهید که $||f|| = \int_0^1 |f(x)|\, dx$ یک نرم بر $C[0,1]$ است.

۶۲ . فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. نشان دهید که تابع $f: X \to R$ تعریف شده با $f(x) = ||x||$ پیوسته است.

جواب مسائل تکمیلی

۳۶ . تابع $f: [0,1] \to \mathbf{R}$ تعریف شده با

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x = 0 \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } 0 < x \leq 1 \text{ ،} \end{cases}$$

انتگرالپذیر (ریمان) است؛ یعنی، تعلق به $\mathcal{R}[0,1]$ دارد. تابع صفر $g: [0,1] \to \mathbf{R}$ ، یعنی‌به‌ازای‌هر $x \in [0,1]$ ، $g(x) = 0$ ، نیز متعلق به $\mathcal{R}[0,1]$ است. اما $\rho(f, g) = 0$ و $f \neq g$. لذا، چون ρ در $[\mathbf{M_4}]$ صدق نمی‌کند، یک متر نیست.

۳۸ . فرض کنید $A = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ و $B = \{2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, 4\frac{1}{4}, \ldots\}$.

۴۶ . فرض کنید d مترمبتذل برمجموعهٔ X شامل بیش از یک نقطه باشد. دراین‌صورت، به‌ازای هر $p \in X$ ،

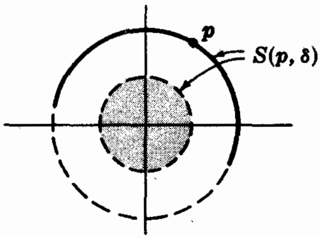
$$S(p, 1) = \{x : d(p, x) < 1\} = \{p\} ,$$
$$\bar{S}(p, 1) = \{x : d(p, x) \leq 1\} = X .$$

اما d توپولوژی مجزا بر X القا می‌کند؛ و درنتیجه، هر زیر مجموعهٔ X هم باز و هم بسته است. لذا،

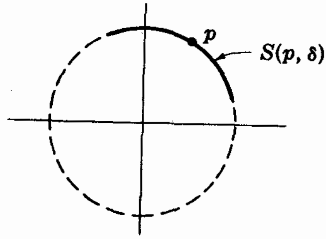
$$\overline{S(p, 1)} = \overline{\{p\}} = \{p\} \neq \bar{S}(p, 1) .$$

۵۸ . **راهنمایی.** برهان شبیه برهان مسئلهٔ ۳۰ است.

۶۰ . (دو) هرگاه $\delta \geq ||p||$ ، آنگاه $S(p, \delta)$ قوسی از دایرهٔ $\{x : ||x|| = ||p||\}$ است. هرگاه $\delta < ||p||$ ، آنگاه $S(p, \delta)$ متشکل از نقاط درونی دایرهٔ $\{x : ||x|| = \delta - ||p||\}$ و نقاط‌واقع بر قوسی از دایرهٔ $\{x : ||x|| = ||p||\}$ است.



$\|p\| < \delta$



$\|p\| \geq \delta$

۶۱.

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= \int_0^1 |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_0^1 (|f(x)|+|g(x)|)\,ax \\ &= \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |g(x)|\,dx = \|f\|+\|g\|\cdot \end{aligned}$$

شمارشپذیری[۹]

فضاهای شمارشپذیر اول

فضای توپولوژیک X را **فضای شمارشپذیر اول** نامیم اگـر در اصل موضوع زیر، به‌نام *اصل اول شمارشپذیری*، صدق کند:

[C_1] به‌ازای هر نقطهٔ $p \in X$، رده‌ای حداکثر شمارشپذیر از مجموعه‌های باز شامل p باشد بطوری که هر مجموعهٔ باز G شامل p شامل عضوی از $\mathcal{B}_p$ نیز باشد.

به عبارت دیگر، فضای توپولوژیک X یک فضای شمارشپذیر اول است اگفگر یک‌پایهٔ موضعی حـداکثر شمارشپذیر در هر نقطهٔ $p \in X$ موجود باشد. توجه کنید که **[C_1]** یک خاصیت **موضعی** فضای‌توپولوژیک X است؛ یعنی، فقط به‌خواص همسایگیهای دلخواه‌نقطهٔ $p \in X$ بستگی دارد.

مثال ۱۰۱ . فرض‌کنیـم X یک فضای متـری بوده و $p \in X$. به‌یاد می‌آوریم که ردهٔ حداکثر شمارشپذیر $\{S(p,1), S(p,\frac{1}{2}), S(p,\frac{1}{3}), \ldots\}$ از کـره‌هـای باز بـه مرکز p یک پایهٔ موضعی در p است. از اینرو، هر فضای متری در اصل اول شمارشپذیری صدق می‌کند.

مثال ۲۰۱ . فرض‌کنیم X یک فضای مجزا باشد. مجموعهٔ یکانی $\{p\}$ باز است و مشمول هرمجموعهٔ‌باز G شامل $p \in X$ می‌باشد. ازاینرو، هر فضای مجزا در **[C_1]** صدق می‌کند.

فضای‌شمارشپذیر اول دارای خاصیت زیرندکه‌برای حالت خاص خط حقیقی $\mathbf{R}$ ثابت شـد.

قضیهٔ ۱۰۹ . *تابع تعریف شده بر فضای شمارشپذیر اول X در $p \in X$ پیوسته است اگر*

و فقط اگر در p دنباله‌ای پیوسته باشد.

به عبارت دیگر، هرگاه X در $[\mathbf{C}_1]$ صدق کند، آنگاه $f: X \to Y$ **در** $p \in X$ پیوسته است اگر بـه‌ازای هـر دنباله مانند $\langle a_n \rangle$ همگرا به p در X، دنبالهٔ $\langle f(a_n) \rangle$ **همگرا به** $f(p)$ در Y باشد؛ یعنی،

$$a_n \to p \text{ ایجاب کند که } f(a_n) \to f(p)$$

تبصره. فرض کنیـم $\mathscr{B}_p$ یک پایهٔ مـوضعی حداکثر شمارشپذیر در نقطهٔ $p \in X$ باشد. دراین صـورت، می‌تـوان اعضای $\mathscr{B}_p$ را به‌وسیلهٔ $\mathbf{N}$ اندیسگذاری کرد؛ یعنی، می‌توان نوشت $\mathscr{B}_p = \{B_1, B_2, \ldots\}$. (درحالتی‌که $\mathscr{B}_p$ متناهی است، تکرار جایزاست.) هرگاه علاوه براین، $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$، آنگاه $\mathscr{B}_p$ را یـک **پایـهٔ موضعی تودرتو در p** می‌نامیم. نشان می‌دهیم (به‌عنوان یک مسئلهٔ حل شده) که همیشه می‌توان **از یک پایهٔ** موضعی حداکثر شمارشپذیر یک پایهٔ موضعی تودرتو ساخت.

فضاهای شمارشپذیر دوم

فضای تـوپـولوژیک $(X, \mathcal{T})$ را یک ***فضای شمارشپذیر دوم*** گوییم هرگاه در اصل موضوع زیر، به‌نام ***اصل دوم شمارشپذیری***، صدق کند.

$[\mathbf{C}_2]$ یک پایهٔ حداکثر شمارشپذیر مانند $\mathscr{B}$ برای توپولوژی $\mathcal{T}$ وجود داشته باشد.

توجه کنید که شمارشپذیری دوم یک خاصیت کلی یک فضای توپولوژیک است تا یک خاصیت موضعی.

مثال ۱۰۲. ردهٔ $\mathscr{B}$ ازبازه‌های باز (a, b) با نقاط انتهایی گویا، یعنی $a, b \in \mathbf{Q}$، حداکثر شمارشپذیر است و یک پایه برای توپولوژی معمولی برخط حقیقی $\mathbf{R}$ می‌باشد. لذا، $\mathbf{R}$ یک فضای شمارشپذیر دوم است؛ یعنی، $\mathbf{R}$ در $[\mathbf{C}_2]$ صدق می‌کند.

مثال ۲۰۲. توپولوژی مجزای $\mathscr{D}$ بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ را درنظر می‌گیریم. به‌یاد آورید که ردهٔ $\mathscr{B}$ یک پایـه بـرای توپولوژی مجزاست اگر و فقط اگر شامل همهٔ مجموعه‌های یکانی باشد. امـا $\mathbf{R}$، و درنتیجه ردهٔ زیـرمجموعه‌های یکانی $\{p\}$ از $\mathbf{R}$، حداکثر شمارشپذیر نیسـت. بنابراین، $(\mathbf{R}, \mathscr{D})$ دراصل دوم شمارشپذیری صدق نمی‌کند.

حال اگر $\mathcal{B}$ یک پایهٔ حداکثر شمارشپذیر برای فضای X بوده، و $\mathcal{B}_p$ از آن اعضای $\mathcal{B}$ که شامل نقطهٔ $p \in X$ است تشکیل شده باشد، آنگاه $\mathcal{B}_p$ یک پایهٔ موضعی حداکثر شمارشپذیر در p است. به‌عبارت دیگر،

حکم ۲.۹ . یک فضای شمارشپذیر دوم شمارشپذیر اول نیز هست.

ازآن سو، خط حقیقی $\mathbf{R}$ با توپولوژی مجزا، بنابر مثال ۲.۲، در $[\mathbf{C}_2]$ صدق نمی‌کند، ولی، بنابر مثال ۲.۱، در $[\mathbf{C}_1]$ صدق می‌کند. لذا، می‌بینیم که عکس حکم ۲.۹ درست نیست.

قضایای لیندلف [1]

بجاست که چند اصطلاح را معرفی کنیم. فرض کنیم $A \subset X$ و $\mathcal{A}$ ردهٔ زیرمجموعه‌های X باشد بطوری که

$$A \subset \bigcup\{E : E \in \mathcal{A}\}.$$

دراین‌صورت، $\mathcal{A}$ را یک **پوشش** A می‌نامیم، یا می‌گوییم $\mathcal{A}$، A را **می‌پوشاند**. هرگاه هر عضو $\mathcal{A}$ یک‌زیرمجموعهٔ باز X باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ یک **پوشش باز** A نام دارد. بعلاوه، هرگاه $\mathcal{A}$ شامل زیررده‌ای حداکثر شمارشپذیر (متناهی) باشد که آن نیز A را بپوشاند، گوییم $\mathcal{A}$ به یک **پوشش حداکثر شمارشپذیر (متناهی) تحویل می‌شود**، یا $\mathcal{A}$ شامل یک **زیرپوشش** حداکثر شمارشپذیر (متناهی) است.

نکات اصلی درباب فضاهای شمارشپذیر دوم که در دو قضیهٔ زیر گنجانده شده‌اند از آن لیندلف است.

قضیهٔ ۳.۹ . فرض‌کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای شمارشپذیر دوم X باشد. دراین صورت، هر پوشش باز A به یک پوشش حداکثر شمارشپذیر تحویل می‌شود.

قضیهٔ ۴.۹ . فرض‌کنیم X یک فضای شمارشپذیر دوم باشد. دراین صورت، هر پایهٔ $\mathcal{B}$ برای X به یک پایهٔ حداکثر شمارشپذیر برای X تحویل می‌شود.

---

1. Lindelöf

قضیهٔ فوق‌تعریف فضای‌لیندلف را موجب می‌شود. فضای توپولوژیک X را یک **فضای لیندلف** نامیم اگرهرپوشش باز X به یک پوشش حداکثرشمارشپذیر تحویل شود. بنابراین، هر فضای شمارشپذیر دوم یک فضای لیندلف است.

فضاهای جدایی پذیر

فضای توپولوژیک X را **جدایی‌پذیر** گوییم هرگاه در اصل موضوع زیر صدق کند:

[S] X شامل یک زیرمجموعهٔ چگال حداکثر شمارشپذیر باشد.

به‌عبارت‌دیگر، X جدایی‌پذیراست اگفگر زیرمجموعه‌ای متناهی یا شمارشپذیرمانند A از X باشد بطوری که بست A تمام فضا باشد؛ یعنی، $\bar{A} = X$.

مثال ۱.۳ . خط‌حقیقی $\mathbf{R}$ باتوپولوژی معمولی‌یک‌فضای‌جدایی‌پذیر است، زیرامجموعهٔ $\mathbf{Q}$ از اعداد گویا شمارشپذیر و در $\mathbf{R}$ چگال است؛ یعنی، $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

مثال ۲.۳ . خط‌حقیقی $\mathbf{R}$ با توپولوژی‌مجزای $\mathscr{D}$ را درنظر می‌گیریم. به‌یاد آورید که هر زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ هم $\mathscr{D}$ ــ باز هم $\mathscr{D}$ ــ بسته است؛ درنتیجه، تنها زیرمجموعه‌های $\mathscr{D}$ ــ چگال $\mathbf{R}$ خود $\mathbf{R}$ است. اما $\mathbf{R}$ یک مجموعهٔ حداکثر شمارشپذیر نیست؛ لذا، $(\mathbf{R}, \mathscr{D})$ یک فضای جدایی پذیر نمی‌باشد.

نشان می‌دهیم که هر فضای شمارشپذیر دوم جدایی‌پذیر هم هست. یعنی،

حکم ۵.۹ . *هرگاه X در اصل دوم‌شمارشپذیری صدق کند، آنگاه X جدایی‌پذیر است.*

خط‌حقیقی $\mathbf{R}$ با توپولوژی تولیدشده‌به‌وسیلهٔ‌بازه‌های بسته ــ باز $[a, b)$ یک مثال کلاسیک ازفضاهای جدایی‌پذیراست‌که‌در‌اصل دوم شمارشپذیری صدق نمی‌کند. درنتیجه، عکس‌حکم پیش درحالت کلی درست نیست. با اینحال، حالت خاص‌زیر را داریم.

قضیهٔ ۶.۹ . *هر فضای متری جدایی‌پذیر شمارشپذیر دوم است.*

مثال ۳.۳ . فرض‌کنیــم $C[0, 1]$ فضای خطی همهٔ توابع پیوسته بر بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ با نرم

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$$

باشد. بنـابر قضیهٔ تقریب وایراشتراس، بهازای هر تابع $f \in C[0,1]$ و هر $\epsilon > 0$ ، چند جملهایی مانند p با ضرایب گویا هست بطوری که

$\|f - p\| < \epsilon$ ؛ یعنی ، بهازای هر $x \in [0,1]$ ، $|f(x) - p(x)| < \epsilon$.

از اینرو،گردآیهٔ $\mathcal{P}$ مرکب از همهٔ این چندجملهایها در $C[0,1]$ چـگال است. اما $\mathcal{P}$ یک مجموعهٔ حـداکثر شمارشپذیر است؛ درنتیجه، $C[0,1]$ جدایی‌پذیر است و، طبق قضیهٔ ۶.۹، شمارشپذیر دوم می‌باشد.

در مثال آخری نشان دادیم که یک فضای متری لازم نیست جدایی‌پذیر باشد.

مثال ۴.۳ . متر e بر صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ بهصورت زیر تعریف شده است:

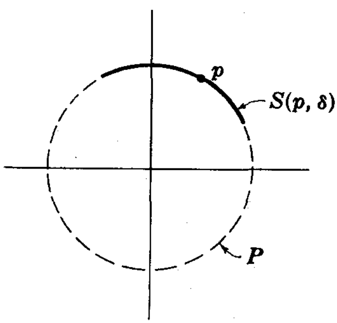
$$e(p,q) = \begin{cases} \|p\| + \|q\| & \text{اگر } \|p\| \neq \|q\| \\ d(p,q) & \text{اگر } \|p\| = \|q\| \end{cases}$$

که درآن $\|\cdots\|$ نرم‌اقلیدسی بر $\mathbf{R}^2$ بوده و d متر معمولی القایی می‌باشد (ر.ک.مسئلهٔ ۶۰ ، فصل ۸).

بهیاد آورید که اگر $p \neq \langle 0,0\rangle$ و $\|p\| > \delta$ ، کرهٔ e ــ باز $S(p,\delta)$ فقط از نقاط دایرهٔ

$$P = \{x : \|x\| = \|p\|\}$$

تشکیل شده است؛ و درنتیجه، P نمی‌تواند یـک نقطهٔ انباشتگی $A \subset \mathbf{R}^2$ باشد مگرآنکه A شامل نقاطی از دایـرهٔ p باشد. اما تعداد دوایر به مرکز $\langle 0,0\rangle$ شمارش ناپذیر است؛ درنتیجه، $A \subset \mathbf{R}^2$ نمی‌تواند در $\mathbf{R}^2$ چگال بـاشد مگرآنکه A شمارش‌ناپذیر باشد. لذا، فضای متری $(\mathbf{R}^2, e)$ جدایی پذیر نیست.



خواص موروثی

خاصیت P ازفضای توپولوژیک X راموروثی گوییم اگفگر هرزیرفضای X نیز از آن بـهره‌مند

باشد. نشـان می‌دهیم که هر زیرفضای یک فضای شمارشپذیر دوم شمارشپذیر دوم است و هر زیرفضای یک فضـای شمارشپذیر اول شمارشپذیر اول می‌باشد. به‌عبارت دیگر، خواص $[\mathbf{C}_1]$ و $[\mathbf{C}_2]$ هر دو مـوروثی می‌باشند. از آن سو، با مثال نقض نشان خواهیم داد که هرزیرفضای یک فضای‌جدایی‌پذیر لزوماً "جدایی‌پذیر نیست؛ یعنی، جدایی‌پذیری‌موروثی نمی‌باشد.

فصل را بـا نمودار زیر پایان می‌دهیم، که تنها رابطهٔ بین سه اصل موضوع دراین فصل را بدست می‌دهد:

شمارشپذیر اول $\rightarrow$ شمارشپذیر دوم $\leftarrow$ جدایی‌پذیـر

دراینجا سهم استلزامهای بیان شده در احکام ۲۰۹ و ۵۰۹ را نشان می‌دهد.

مسائل حل شده

فضاهای شمارشپذیر اول

۱. نشان دهیـد که هـر زیرفضای $(Y, \mathcal{T}_Y)$ یک فضای شمارشپذیر اول مانند $(X, \mathcal{T})$ نیز شمارشپذیراول است.

حل. فرض‌کنیـم $p \in Y$. چون $Y \subset X$، پس $p \in X$. طبق فرض، $(X, \mathcal{T})$ یک فضای شمـارشپذیراول است؛ درنتیجه، یک پایهٔ $\mathcal{T}$ ـ موضعی حداکثر شمارشپذیر مانند $\mathcal{B}_p = \{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ در p وجوددارد. طبق‌مسئلهٔ قبل، $\mathcal{B}_p^* = \{Y \cap B_n : n \in \mathbf{N}\}$ یک $\mathcal{T}_Y$ ـ پایهٔ مـوضعی در p وجود دارد. چـون $\mathcal{B}_p^*$ حداکثر شمارشپذیر است، $[\mathbf{C}_1]$ در $(Y, \mathcal{T}_y)$ صدق می‌کند.

۲. فرض‌کنیـد $\mathcal{B}_p = \{G_1, G_2, \ldots\}$ یک پایهٔ موضعی حداکثر شمارشپذیر در $p \in X$ باشد. نشان دهید که

(یک) یک پایهٔ موضعی تودرتو در p وجود دارد.

(دو) هرگاه X در $[\mathbf{C}_1]$ صدق‌کند، آنگاه یک پایهٔ موضعی تودرتو در هر $p \in X$ وجود دارد.

حل. (یک) قرار می‌دهیم

$$B_1 = G_1, \quad B_2 = G_1 \cap G_2, \quad \ldots, \quad B_n = G_1 \cap \cdots \cap G_n, \quad \ldots$$

دراین صورت، $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ و هر B_k باز و شامل p است. بعلاوه، هرگاه G یک

مجموعهٔ باز شامل p باشد، آنگاه

$\exists n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $B_{n_0} \subset G_{n_0} \subset G$.

بنابراین، $\{B_1, B_2, \ldots\}$ یک پایهٔ موضعی تودرتو در p می‌باشد.

(دو) هرگاه X در $[\mathbf{C}_1]$ صدق کند و $p \in X$ ، آنگاه، بنابر $[\mathbf{C}_1]$ ، یک پایهٔ موضعی حداکثر شمارشپذیر در p وجود دارد و، بنابر (یک)، یک پایهٔ موضعی تودرتو در p موجود است.

۳. فرض کنید $\mathcal{B}_p = \{B_1, B_2, \ldots\}$ یک پایهٔ موضعی تودرتو در $p \in X$ بوده و $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ یک دنباله باشد بطوری که $a_1 \in B_1,\ a_2 \in B_2,\ \ldots$. نشان‌دهید که $\langle a_n \rangle$ همگرا به p است.

حل. فرض کنیم G مجموعهٔ بازی شامل p باشد. چون $\mathcal{B}_p$ یک پایهٔ موضعی در p است،

$\exists n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $B_{n_0} \subset G$.

اما $\mathcal{B}_p$ تودرتو است؛ ازاینرو، $n > n_0$ ایجاب‌می‌کندکه $a_n \in B_{n_0} \subset G$ ؛ودرنتیجه، $a_n \to p$.

۴. فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی هم‌متناهی برخط حقیقی $\mathbf{R}$ باشد؛ یعنی، $\mathcal{T}$ شامل $\emptyset$ و متممهای مجموعه‌های متناهی‌است. نشان‌دهید که $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ در اصل اول شمارشپذیری صدق نمی‌کند.

حل. فرض کنیم $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ در $[\mathbf{C}_1]$ صدق کند. دراین صورت، $1 \in \mathbf{R}$ دارای یک پایهٔ موضعی باز حداکثر شمارشپذیر مانند $\mathcal{B}_1 = \{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ است. چون هر B_n یک $\mathcal{T}$ ــ باز است، متمم آن B_n^c ، $\mathcal{T}$ ــ بسته و درنتیجه متناهی است. بنابراین، $A = \bigcup\{B_n^c : n \in \mathbf{N}\}$ اجتماعی حداکثرشمارشپذیر از مجموعه‌های متناهی و درنتیجه حداکثر شمارشپذیر است. اما $\mathbf{R}$ حداکثر شمارشپذیر نیست؛ لذا، نقطه‌ای مانند $p \in \mathbf{R}$ غیر از 1 هست که تعلق به A ندارد؛ یعنی، $p \in A^c$.

اما، طبق قانون دمورگان، داریم

$$p \in A^c = (\bigcup\{B_n^c : n \in \mathbf{N}\})^c = \bigcap\{B_n^{cc} : n \in \mathbf{N}\} = \bigcap\{B_n : n \in \mathbf{N}\} .$$

ازاینرو، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $p \in B_n$. ازآن سو، $\{p\}^c$ یک مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ــ باز است،

زیرا متمم مجموعه‌ای متناهی است، و $\{p\}^c$ شامل 1 است، زیرا p غیر از 1 می‌باشد. چون $\mathcal{B}_1$ یک پایهٔ موضعی است، عضوی مانند $B_{n_0} \in \mathcal{B}_1$ هست بطوری که $B_{n_0} \subset \{p\}^c$. از اینرو، $p \notin B_{n_0}$. اما این با این امر که به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $p \in B_n$ تعارض دارد. درنتیجه، فرض اصلی اینکه $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ در اصل اول شمارشپذیری صدق می‌کند درست نیست.

۵. قضیهٔ ۱.۹ را ثابت کنید: فرض کنید X در اصل اول شمارشپذیری صدق کند. در این‌صورت، $f: X \to Y$ در $p \in X$ پیوسته‌است اگر و فقط اگر در p دنباله‌ای پیوسته باشد.

حل. کافی است نشان دهیم که اگر f در p دنباله‌ای پیوسته باشد، f در p پیوسته است، زیرا عکس آن برای فضاهای توپولوژیک دلخواه ثابت شده است. درواقع، عکس نقیض مطلب را ثابت می‌کنیم: هرگاه f در p پیوسته نباشد، آنگاه f در p دنباله‌ای پیوسته نیست.

فرض کنیم $\mathcal{B}_p = \{B_1, B_2, \dots\}$ یک پایهٔ موضعی تودرتو در p بوده و f در p پیوسته نباشد. دراین صورت، زیرمجموعهٔ بازی از Y مانند H هست بطوری که

$f(p) \in H$ ولی به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $B_n \not\subset f^{-1}[H]$.

از اینرو، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$،

$\exists a_n \in B_n$ بطوری که $a_n \notin f^{-1}[H]$ که $f(a_n) \notin H$ را ایجاب می‌کند.

اما، طبق مسئلهٔ قبل، دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ همگرا به p است؛ ولی دنبالهٔ $\langle f(a_n) \rangle$ بـه $f(p)$ همگرا نیست، زیرا مجموعهٔ باز H شامل $f(p)$ هیچ جمله‌ای از دنباله را دربر ندارد. بنابراین، f در p دنباله‌ای پیوسته است.

فضاهای شمارشپذیر دوم

۶. نشان دهید که صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ با توپولوژی معمولی در اصل دوم شمارشپذیری صدق می‌کند.

حل. فرض کنیم $\mathcal{B}$ ردهٔ قرصهای باز در $\mathbf{R}^2$ با شعاعهای گویا و مختصات مرکز گویا باشد. $\mathcal{B}$ یک مجموعهٔ حداکثر شمارشپذیر است و، بعلاوه، پایه‌ای برای توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ است. از اینرو، $\mathbf{R}^2$ یک فضای شمارشپذیر دوم می‌باشد.

۷ . نشان دهید که هر زیرفضای یک فضای شمارشپذیر دوم شمارشپذیر دوم است .

حل. فرض کنیم $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ یک پایهٔ حداکثر شمارشپذیر برای فضای شمارشپذیر دوم X بوده ، و Y یک زیرفضای X باشد . طبق مسئلهٔ قبل ، $\mathcal{B}_y = \{Y \cap B_n : n \in \mathbf{N}\}$ یک پایه‌برای Y است. چون $\mathcal{B}_Y$ حداکثر شمارشپذیراست ، Y در $[\mathbf{C}_2]$ صدق می‌نماید .

۸ . قضیهٔ (لیندلف) ۳.۹ را ثابت کنید : فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای شمارشپذیر دوم X باشد . هرگاه $\mathcal{G}$ پوشش بازی از A باشد ، آنگاه $\mathcal{G}$ به یک پوشش حداکثر شمارشپذیر تحویل می‌شود .

حل. فرض کنیم $\mathcal{B}$ یک پایهٔ حداکثر شمارشپذیر برای X باشد . چون $A \subset \bigcup\{G : G \in \mathcal{G}\}$ ، به‌ازای‌هر $p \in A$ ، $\exists G_p \in \mathcal{G}$ بقسمی‌که $p \in G_p$. و چون $\mathcal{B}$ یک پایه برای X است ، به‌ازای هر $p \in A$

$\exists B_p \in \mathcal{B}$ بقسمی که $p \in B_p \subset G_p$.

بنابراین ، $A \subset \bigcup\{B_p : p \in A\}$. اما $\{B_p : p \in A\} \subset \mathcal{B}$ ؛ درنتیجه ، حداکثر شمارشپذیر است ؛ لذا ،

$$\{B_p : p \in A\} = \{B_n : n \in N\} ,$$

که‌درآن N یک مجموعه‌ٔاندیس حداکثرشمارشپذیراست . به‌ازای هر $n \in N$ مجموعهٔ $G_n \in \mathcal{G}$ را طوری اختیار می‌کنیم که $B_n \subset G_n$. دراین صورت ،

$$A \subset \bigcup\{B_n : n \in N\} \subset \bigcup\{G_n : n \in N\} ;$$

و درنتیجه ، $\{G_n : n \in N\}$ یک زیرپوشش حداکثر شمارشپذیر $\mathcal{G}$ است .

۹ . قضیهٔ (لیندلف) ۴.۹ را ثابت‌کنید : فرض کنید $\mathcal{G}$ پایه‌ای برای فضای شمارشپذیر دوم X باشد. دراین صورت ، $\mathcal{G}$ به‌یک پایهٔ حداکثر شمارشپذیر برای X تحویل می‌شود .

حل. چون X شمارشپذیر دوم است ، X پایه‌ای حداکثر شمارشپذیر مانند $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ دارد. وچون $\mathcal{G}$ نیز یک پایه برای X است ، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ،

$$B_n = \bigcup\{G : G \in \mathcal{G}_n\} \text{ با } \mathcal{G}_n \subset \mathcal{G} \text{ ؛}$$

درنتیجه، $\mathcal{G}_n$ یک پوشش بـاز B_n است و، بنابر قضیهٔ پیش، به یک پوشش حداکثر شمارشپذیر مانند $\mathcal{G}_n^*$ تحویل می‌شود؛ یعنی، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$،

$B_n = \bigcup\{G : G \in \mathcal{G}_n^*\}$ با $\mathcal{G}_n^* \subset \mathcal{G}$ و $\mathcal{G}_n^*$ حداکثر شمارشپذیر.

اما

$$\mathcal{G}^* = \{G : G \in \mathcal{G}_n^*,\ n \in \mathbf{N}\}$$

یک‌پایه برای X است زیرا $\mathcal{B}$ چنین است. بعلاوه، $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ و $\mathcal{G}^*$ حداکثر شمارشپذیر می‌بـاشـد.

جدایی‌پذیـری

۱۰ . فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی هـم متناهی بر مجموعهٔ X باشد. نشان دهید که $(X, \mathcal{T})$ جدایی‌پذیر اسـت؛ یعنی، شامل یک زیرمجموعهٔ چگال حداکثر شمارشپذیر است.

حل. هرگاه X خود حـداکثر شمارشپذیر باشد، واضح است که X یک زیرمجموعهٔ چگال حداکثرشمارشپذیر $(X, \mathcal{T})$ است. از آن‌سو، فرض کنیم X حداکثر شمارشپذیر نباشد. دراین‌صورت، X شامل یک زیرمجموعهٔ شمارشپذیر، یعنی حداکثرشمارشپذیر و غیرمتناهی، مانند A است. به‌یادآورید که تنها مجموعه‌های $\mathcal{T}$ ــ بسته عبارتند از مجموعه‌های متنـاهی و X؛ از اینرو، بست مجموعهٔ غیرمتناهی A تمام فضای X است؛ یعنـی، $\bar{A} = X$. اما A حداکثر شمارشپذیر است. لذا، $(X, \mathcal{T})$ جدایی پذیر می‌باشد.

۱۱ . نشان‌دهیدکه‌فضای مجزای X جدایی‌پذیر است اگر و فقط‌اگر X حداکثر شمارشپذیر بـاشـد.

حل. به یادآورید کـه هـرزیر مجموعهٔ فضای مجزای X هم‌باز و هم بسته است. از اینرو، تنـهازیرمجموعهٔ‌چگال X خود X است. لذا، X شامل زیرمجموعهٔ‌چگال حداکثرشمارشپذیری است‌اگفگر X حداکثر شمارشپذیر باشد؛ یعنی، X جدایی‌پذیر است‌اگفگر X حداکثر شمارشپذیر باشد.

۱۲ . حکم ۵.۹ را ثابت کنید: هرگاه X در اصل دوم شمارشپذیری صدق کند، آنگاه X جدایی‌پذیر است.

حل . چون X در $[\mathbf{C}_2]$ صدق می‌کند ، X پایهٔ حداکثر شمارشپذیری مانند $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbf{N}\}$ دارد. بهازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، نقطهٔ $a_n \in B_n$ را اختیار می‌کنیم . دراین صورت ، مجموعهٔ $A = \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ نیز حداکثر شمارشپذیر است . نشان می‌دهیم‌که $\bar{A} = X$ یا ، معادلا" ، هر نقطهٔ (متمم A) $p \in A^c$ یک نقطهٔ انباشتگی A است . فرض کنیم G مجموعهٔ بازی شامل p باشد. دراین صورت ، G شامل دست‌کم یک مجموعه مانند $B_{n_0} \in \mathcal{B}$ است . از اینرو ، $a_{n_0} \in B_{n_0} \subset G$. a_{n_0} مخالف p است ، زیرا $p \in A^c$ ولی $a_{n_0} \in A$. بنابراین ، p یک نقطهٔ انباشتگی A است ، زیرا هر مجموعهٔ باز G شامل p حاوی نقطه‌ای از A غیر از p نیز هست .

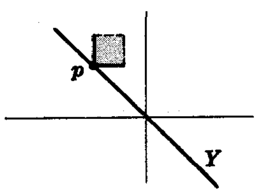
۱۳ . فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی تولید شده بهوسیلهٔ مستطیلهای نیمباز

$$[a,b) \times [c,d) \quad = \quad \{\langle x,y \rangle : a \leq x < b,\ c \leq y < d\}$$

روی صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ باشد. نشان دهید که $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ جدایی‌پذیر است .

حل . همواره اعدادی گویا مانند x_0 و y_0 وجود دارند بطوری که $a < x_0 < b$ و $c < y_0 < d$ ؛ درنتیجه ، مستطیل باز فوق شامل نقطهٔ $p = \langle x_0, y_0 \rangle$ با مختصات گویاست .ازاینرو، مجموعهٔ $A = Q \times Q$ مرکب از همهٔ نقاطی در $\mathbf{R}^2$ با مختصات گویادر $\mathbf{R}^2$ چگال است .اما A یک مجموعهٔ حداکثر شمارشپذیر است ؛ لذا ، $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ جدایی‌پذیر می‌باشد.

۱۴ . با مثال نقض نشان دهید، که هر زیرفضای یک فضای جدایی‌پذیر لزوما" جدایی‌پذیر نیست ؛ یعنی ، جدایی‌پذیری یک خاصیت موروثی نیست .

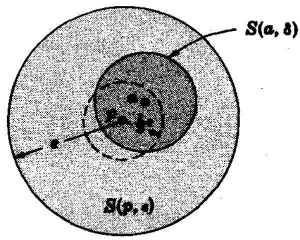


حل . فضای توپولوژیک جدایی‌پذیر $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ مسئلهٔ قبل را درنظر می‌گیریم . به یاد می‌آوریم (ر.ک. مسئلهٔ ۲۵ از فصل ۶) که توپولوژی نسبی $\mathcal{T}_Y$ بر خط $Y = \{\langle x,y \rangle : x + y = 0\}$ توپولوژی مجزا است ، زیرا هر زیرمجموعهٔ یکانی $\{p\}$ از

Y ، $\mathcal{T}_y$ ــ باز است . اما یک فضای مجزا که حداکثر شمارشپذیر نباشد جدایی‌پذیر نیست . لذا ، جدایی‌پذیری $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ به زیرفضای $(Y, \mathcal{T}_y)$ به ارث نمی‌رسد .

۱۵ . فرض کنید $S(p, \epsilon)$ کره‌ٔ‌بازی درفضای‌متری X بوده ، و $d(p,a) < \frac{1}{3}\epsilon$. نشان‌دهید که اگر $\frac{1}{3}\epsilon < \delta < \frac{2}{3}\epsilon$ ،

$$p \in S(a, \delta) \subset S(p, \epsilon) \cdot$$



حل . داریم $d(p,a) < \frac{1}{3}\epsilon < \delta$ ؛ درنتیجه ، $p \in S(a, \delta)$. بنابراین ،تنهاکافی‌است نشان دهیم که $S(a,\delta) \subset S(p,\epsilon)$. فرض کنیم $x \in S(a,\delta)$. پس $d(a,x) < \delta$ و ، طبق نامساوی مثلثی ،

$$d(p,x) \leq d(p,a) + d(a,x) < \tfrac{1}{3}\epsilon + \delta < \tfrac{1}{3}\epsilon + \tfrac{2}{3}\epsilon = \epsilon \cdot$$

از اینرو ، $x \in S(p,\epsilon)$ ، یا $S(a,\delta) \subset S(p,\epsilon)$.

۱۶ . قضیهٔ ۹ . ۶ را ثابت کنید : فرض کنید X یک فضای متری جدایی‌پذیر باشد . دراین صورت ، X در $[\mathbf{C}_2]$ صــدق می‌کند ؛ یعنی ، X شامل یک پایهٔ حداکثر شمارشپذیر اســت .

حل . چون X جدایی‌پذیراست ، X شامل‌زیرمجموعهٔ چگال حداکثر شمارشپذیری مانند A است . فرض‌کنیم $\mathcal{B}$ ردهٔ‌تمام کره‌های باز به مرکز در A و شعاع گویاباشد؛ یعنــی ،

$$\mathcal{B} = \{S(a,\delta) : a \in A,\ \delta \in Q\} \cdot$$

توجه‌کنید که $\mathcal{B}$ یک مجموعهٔ حداکثر شمارشپذیر است . حکم می‌کنیم که $\mathcal{B}$ یک‌پایه برای توپــولوژی بر X است ؛ یعنی ، به‌ازای هر مجموعهٔ باز $G \subset X$ و هر $p \in G$ ، $\exists\ S(a,\delta) \in \mathcal{B}$ بطوری که $p \in S(a,\delta) \subset G$.

چون $p \in G$ ، کرهٔ‌بازی‌مانند $S(p, \epsilon)$ به‌مرکز p هست بطوری که $p \in S(p, \epsilon) \subset G$.
چون A در X چگال است ،

$$\exists\ a_0 \in A \text{ بطوری که } d(p, a_0) < \tfrac{1}{3}\epsilon \ .$$

فرض کنیم δ_0 عددی‌گویا باشدبطوری که $\frac{1}{3}\epsilon < \delta_0 < \frac{2}{3}\epsilon$. دراین صورت ، طبق‌مسئلهٔ قبـل ،

$$p \in S(a_0, \delta_0) \subset S(p, \epsilon) \subset G \ .$$

اما $S(a_0, \delta_0) \in \mathcal{B}$ ؛ و درنتیجه ، $\mathcal{B}$ یک پایهٔ حداکثر شمارشپذیر برای توپولوژی بر X است .

مسائل تکمیلی

فضاهای شمارشپذیر اول

۱۷ . نشان دهید کـه‌خاصیت فضای شمارشپذیر اول بودن یک خاصیت توپولوژیک است .

۱۸ . فرض کنید $\mathcal{B}_p = \{B_1, B_2, \ldots\}$ یک پایهٔ موضعی تودرتو در $p \in X$ باشد . نشان‌دهید که‌هرزیردنباله‌مانند $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots\}$ از $\mathcal{B}_p$ نیزیک‌پایهٔ موضعی تودرتو در p است .

۱۹ . فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی تـولید شده بـه‌وسیلهٔ بـازه‌های بسته ـ باز $[a, b)$ بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ باشد . باارائهٔ‌یک‌پایهٔ موضعی حداکثر شمارشپذیر درهر نقطهٔ $p \in \mathbf{R}$ ، نشان دهید که $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ در $[\mathbf{C}_1]$ صدق می‌کند .

۲۰ . فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ مستطیلهای نیمباز

$$[a, b) \times [c, d) \quad = \quad \{\langle x, y\rangle : a \leq x < b,\ c \leq y < d\}$$

بر صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ باشد . بـا ارائهٔ یک پایهٔ موضعی حداکثر شمارشپذیر در هر نقطهٔ $p \in \mathbf{R}^2$ ، نشان دهید که $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ در $[\mathbf{C}_1]$ صدق می‌کند .

۲۱ . فرض‌کنیـد $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}^*$ توپولوژیهایی بر X بوده و $\mathcal{T}$ از $\mathcal{T}^*$ ضخیمتر باشد ؛ یعنی ، $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.

(یک) نشان‌دهیدکه $(X, \mathcal{T}^*)$ می‌تواند شمارشپذیر اول باشد ولی $(X, \mathcal{T})$ نمی‌تواند .

(دو) نشان دهید که $(X, \mathcal{T})$ می‌تواندشمارشپذیراول باشد ولی $(X, \mathcal{T}^*)$ نمی‌تواند .

فضاهای شمارشپذیر دوم

۲۲ . نشان دهید که خاصیت فضای شمارشپذیر دوم بودن یک خاصیت توپولوژیک است .

۲۳ . نشان دهیـد هرگاه X یک زیرپایهٔ حـداکثر شمارشپذیر داشته باشد ، آنگاه X در $[\mathbf{C}_2]$ صدق می‌کند .

۲۴ . برای فضای اقلیدسی m بعدی یک پایهٔ حداکثر شمارشپذیر ارائه دهید .

۲۵ . فرض کنید $\mathscr{A}$ گردآیه‌ای از زیرمجموعه‌های باز از هم‌جدا از فضای شمارشپذیر دوم X باشد. نشان دهید $\mathscr{A}$ یک گردآیهٔ حداکثر شمارشپذیر است.

۲۶ . فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ فضای شمارشپذیر دوم X باشد که حداکثر شمارشپذیر نیست. نشان دهید A دست کم یک نقطهٔ انباشتگی دارد.

۲۷ . فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی‌تولیدشده‌به‌وسیلهٔ بازه‌های بسته ــ باز $[a,b)$ بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ باشد. نشان دهید $(\mathbf{R},\mathcal{T})$ در $[\mathbf{C}_2]$ صدق نمی‌کند.

۲۸ . نشان دهید که l_2 ــ فضا (فضای هیلبرت) شمارشپذیر دوم نیست.

فضاهای جدایی‌پذیر

۲۹ . نشان دهید که خاصیت فضای جدایی‌پذیر بودن یک خاصیت توپولوژیک است.

۳۰ . نشان دهید که فضای اقلیدسی m بعدی جدایی‌پذیر است.

۳۱ . نشان دهید که l_2 ــ فضا (فضای هیلبرت) جدایی‌پذیر است.

۳۲ . فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی تولیدشده‌به‌وسیلهٔ بازه‌های $[a,b)$ بسته ــ باز بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ باشد. نشان دهید که $(\mathbf{R},\mathcal{T})$ جدایی‌پذیر است.

۳۳ . فرض کنید $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}^*$ توپولوژیهایی بر X بوده‌و $\mathcal{T}$ از $\mathcal{T}^*$ ضخیمتر باشد؛ یعنی، $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}^*$.

(یک) نشان دهید هرگاه $(X,\mathcal{T}^*)$ جدایی‌پذیر باشد، $(X,\mathcal{T})$ نیز چنین است.

(دو) با مثال نقض نشان دهید که عکس (یک) درست نیست.

۳۴ . فرض کنید $C[0,1]$ ردهٔ توابع پیوسته بر $[0,1]$ با نرم

$$||f|| \quad = \quad \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

باشد. نشان دهید که $C[0,1]$ جدایی‌پذیر، و درنتیجه، شمارشپذیر دوم است.

فضاهای لیندلف

۳۵ . نشان دهید که نقش پیوستهٔ یک فضای لیندلف نیز یک فضای لیندلف است.

۳۶ . فرض کنید A زیرمجموعهٔ بسته‌ای از فضای لیندلف X باشد. نشان دهید که A، با توپولوژی نسبی، نیز یک فضای لیندلف است.

۳۷ . نشان دهید که فضای مجزای X لیندلف است اگر و فقط اگر X حداکثر شمارشپذیر باشد.

۳۸ . فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی تولید شده بر مستطیلهای نیمباز

$$[a, b) \times [c, d) \quad = \quad \{\langle x, y\rangle : a \leq x < b,\ c \leq y < d\}$$

بر صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ باشد. به‌یاد آورید (ر.ک. مسئلهٔ ۱۴) که $\mathcal{T}$ بر خط $Y = \{\langle x, y\rangle : x + y = 1\}$ توپولوژی مجزا القامی‌کند. نشان دهید که $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ لیندلف نیست؛ و لذا، $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ یک فضای شمارشپذیراول جدایی‌پذیر است که در اصل دوم شمارشپذیری صدق نمی‌کند.

اصول موضوع جداسازی ۱۰

مقدمه

بسیاری از خــواص فضای توپولوژیک X به توزیع مجموعه‌های باز درآن بستگی‌دارند . به بیان نادقیق ، یک فضا درصورتی محتملاً " جدایی‌پذیر یا شمارشپذیر اول یا دوم است که مجموعه‌های بــاز "کمتــری" داشتــه باشــد . از آن‌سو ، یک تابع دلخواه بر X به فضای توپولوژیک دیگــر درصورتی محتملاً " پیوسته است ، یا یک دنباله حد منحصر بفرد دارد ، که فضا مجموعه‌های باز "بسیار" داشته باشد .

اصول موضوع جداسازی الکساندرف[1] و هوپف[2] ، که‌دراین‌فصل‌مطرح می‌شوند ، مبتنی بر وجود مجموعه‌های باز " کافی" می‌باشند .

فضاهای T_1

فضای توپولوژیک X یک **فضای** T_1 است اگفگر در اصل موضوع زیر صدق کند :

[T_1] به‌ازای هر دو نقطهٔ متمایز $a, b \in X$ ، دو مجموعهٔ باز هریک شامل یکی از آنها وجود داشته باشند که حاوی دیگری نباشند .

به‌عبارت دیگر ، دو مجموعهٔ باز مانند G و H وجود داشته باشند بطوری که

$$a \in G,\ b \notin G \quad و \quad b \in H,\ a \notin H \ .$$

مجموعه‌های باز G و H لزوماً " از هم‌جدا نیستند .

قضیهٔ بعدی ما فضاهای T_1 را بسیار ساده توصیف می‌کند .

---

1. Alexandroff

2. Hopf

قضیهٔ ۱۰۱۰ . فضای توپولوژیک X یک فضای T_1 است اگر و فقط اگر هر زیرمجموعهٔ یکانی $\{p\}$ از X بسته باشد .

چون اجتماع متناهی از مجموعه‌های بسته بسته است ، قضیهٔ بالا ایجاب می‌کند که

نتیجهٔ ۲۰۱۰ . $(X, \mathcal{T})$ یک فضای T_1 است اگر و فقط اگر $\mathcal{T}$ شامل توپولوژی هم‌متناهی بر X باشد .

مثال ۱۰۱ . هر فضای متری X یک فضای T_1 است ، زیرا ثابت کردیم که زیرمجموعه‌های متناهی X بسته‌اند .

مثال ۲۰۱ . توپولوژی $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ برمجموعهٔ $X = \{a, b\}$ رادرنظر می‌گیریم . توجه کنیدکه X تنهامجموعهٔبازشامل b است ، ولی این مجموعه شامل a نیز هست . ازاینرو ، $(X, \mathcal{T})$ در $[\mathbf{T_1}]$ صدق نمی‌کند ؛ یعنی ، $(X, \mathcal{T})$ یک فضای T_1 نیست . توجه کنید که مجموعهٔ یکانی $\{a\}$ بسته نیست ، زیرا متمم آن $\{a\}^c = \{b\}$ باز نیست .

مثال ۳۰۱ . توپولوژی هم‌متناهی بر X ضخیمترین توپولوژی بر X است که به‌ازای آن $(X, \mathcal{T})$ یک فضای T_1 است (نتیجهٔ ۲۰۱۰) . از اینرو ، توپولوژی هم‌متناهی **توپولوژی T_1** نیز نامیده می‌شود .

فضاهای هاسدورف[1]

فضای توپولوژیک X یک **فضای هاسدورف** یا **فضای T_2** است اگفگر در اصل موضوع زیرصدق کند :

$[\mathbf{T_2}]$ هر دو نقطهٔ متمایز $a, b \in X$ متعلق به دو مجموعهٔ باز مجزا باشند .

به عبارت دیگر ، مجموعه‌های بازی مانند G و H وجود داشته باشند بطوری که

$$a \in G,\ b \in H \text{ و } G \cap H = \emptyset \cdot$$

توجه کنید که یک فضای هاسدورف همواره یک فضای T_1 است .

---

1. Hausdorff

مثال ۲ . ۱۰ . نشان دهید که هر فضای متری X هاسدورف است .

فرض کنیم $a, b \in X$ نقاطی متمایز باشند . پس، طبق $[\mathbf{M}_4]$ ، $d(a,b) = \epsilon > 0$. کره‌های باز $G = S(a, \frac{1}{3}\epsilon)$ و $H = S(b, \frac{1}{3}\epsilon)$ به‌مراکز a و b را درنظر می‌گیریم . حکم می‌کنیم که G و H از هم جدا هستند . زیرا هرگاه $p \in G \cap H$ ، آنگاه $d(a,p) < \frac{1}{3}\epsilon$ و $d(p,b) < \frac{1}{3}\epsilon$. از اینرو ، بنابر نامساوی مثلثی ،

$$d(a,b) \leq d(a,p) + d(p,b) < \tfrac{1}{3}\epsilon + \tfrac{1}{3}\epsilon = \tfrac{2}{3}\epsilon \cdot$$

اما این با $d(a,b) = \epsilon$ متناقض است . لذا ، G و H از هم جدایند ؛ یعنی ، a و b بترتیب به کره‌های باز از هم جدای G و H تعلق دارند . بنابراین ، X هاسدورف است .

نتیجهٔ مثال قبل را به‌طور صوری بیان می‌کنیم ؛ یعنی ،

قضیهٔ ۳ . ۱۰ . *هر فضای متری یک فضای هاسدورف است .*

مثال ۲ . ۲۰ . فرض کنیم $\mathcal{T}$ توپولوژی هم‌متناهی ، یعنی توپولوژی $\mathcal{T}_1$ ، برخط حقیقی $\mathbf{R}$ باشد . نشان می‌دهیم که $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ هاسدورف نیست . فرض کنیم G و H مجموعه‌هایی ناتهی و $\mathcal{T}$ ـ باز باشند . G و H نامتناهی‌اند ، زیرا متممهای آنها متناهی می‌باشند . هرگاه $G \cap H = \emptyset$ ، آنگاه G ، که نامتناهی است ، مشمول متمم متناهی H است . لذا ، G و H از هم جدا نیستند . بنابراین ، هیچ دو نقطهٔ متمایز در $\mathbf{R}$ بترتیب به دومجموعهٔ $\mathcal{T}$ ـ باز از هم جدا تعلق ندارند . لذا ، فضاهای T_1 لزوماً هاسدورف نیستند .

همانطور که قبلاً گفتیم ، دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ از نقاط در فضای توپولوژیک X می‌تواند در حالت کلی به بیش از یک نقطه در X همگرا شود . این در فضای هاسدورف X نمی‌تواند رخ دهد .

قضیهٔ ۴ . ۱۰ . *هرگاه X یک فضای هاسدورف باشد ، آنگاه هر دنبالهٔ همگرا در X حد منحصر بفرد دارد .*

عکس قضیهٔ بالا درست نیست مگر آنکه شرایطی دیگر قایل شویم .

قضیهٔ ۵ . ۱۰ . *فرض کنیم X شمارشپذیر اول باشد . X هاسدورف است اگر و فقط اگر*

هر دنبالهٔ همگرا حد منحصر بفرد داشته باشد.

تبصره. مفهوم دنباله به **تور** (دنبالهٔ مور[1] ــ اسمیت[2]) و **صافی** تعمیم داده شده است با نتایج زیـر :

قضیهٔ ۴۰۱۰ آ. *X یک فضای هاسدورف است اگر و فقط اگر هر تور همگرا در X حد منحصر بفرد داشته باشد.*

قضیهٔ ۴۰۱۰ ب. *X یک فضای هاسدورف است اگر و فقط اگر هر صافی همگرا در X حد منحصر بفرد داشته باشد.*

تعریفهای تور و صافی و اثبات قضایای فوق خارج از حوصلهٔ این کتاب است.

فضاهای منتظم

فضای توپولوژیک X **منتظم** است اگرگر در اصل موضوع زیرصدق کند:

[R] هرگاه F زیرمجموعهٔ بستـه‌ای از X بـوده و $p \in X$ متعلق به F نباشد، آنگاه مجموعه‌های بازازهم‌جدایی مانند G و H وجودداشته باشند بطوری که $F \subset G$ و $p \in H$.

همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، یک فضای منتظم لزوماً T_1 نیست.

مثال ۱۰۳. توپولوژی $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ را بـر مجموعهٔ $X = \{a, b, c\}$ درنظر می‌گیریم. تـوجه کنید کـه زیرمجموعه‌های بستهٔ X نیز X ، $\emptyset$ ، $\{a\}$ ، و $\{b, c\}$ اند و $(X, \mathcal{T})$ در **[R]** صدق می‌کند. از آن‌سو، $(X, \mathcal{T})$ یک فضای T_1 نیست، زیرا مجموعه‌هایی متناهی، مثلاً $\{b\}$ ، وجود دارند که بسته نیستند.

فضای‌منتظم X که در اصل موضوع جداسازی **[$\mathbf{T_1}$]** نیز صدق کند، یعنی یک فضای T_1 منتظم، یک **فضای** T_3 نام دارد.

---

1. Moore
2. Smith

مثال ۲۰۳ . فرض‌کنیم X یک فضای T_3 باشد . X یک فضای هاسدورف نیز هست؛ یعنی، یک فضای T_2 است . زیرا فرض‌کنیم $a,b \in X$ نقاط متمایزی باشند . چون X یک فضای T_1 است ، $\{a\}$ مجموعه‌ای بسته است؛ و چون a و b متمایزند ، $b \notin \{a\}$. لذا ، طبق [R] ، مجموعه‌های باز از هم جدایی مانند G و H وجوددارند که $\{a\} \subset G$ و $b \in H$. از اینرو ، a و b بترتیب به مجموعه‌های باز از هم جدای G و H تعلق دارند .

فضاهای نرمال

فضای توپولوژیک X نرمال است اگفگر X در اصل موضوع زیر صدق کند :

[N] هرگاه F_1 و F_2 زیرمجموعه‌های بستهٔ از هم جدایی از X باشند ، آنگاه مجموعه‌های باز ازهم جدایی مانند G و H باشند بطوری که $F_1 \subset G$ و $F_2 \subset H$.

یک فضای نرمال را می‌توان به‌صورت زیر نیز توصیف کرد .

قضیهٔ ۶۰۱۰ . ***فضای توپولوژیک X نرمال است اگر و فقط اگر به‌ازای هر مجموعهٔ بستهٔ F و هر مجموعهٔ باز H شامل F ، مجموعهٔ بازی مانند G باشد بطوری‌که $F \subset G \subset \bar{G} \subset H$.***

مثال ۱۰۴ . هر فضای متری نرمال است و این بخاطر قضیهٔ جداسازی ۸۰۸ می‌باشد .

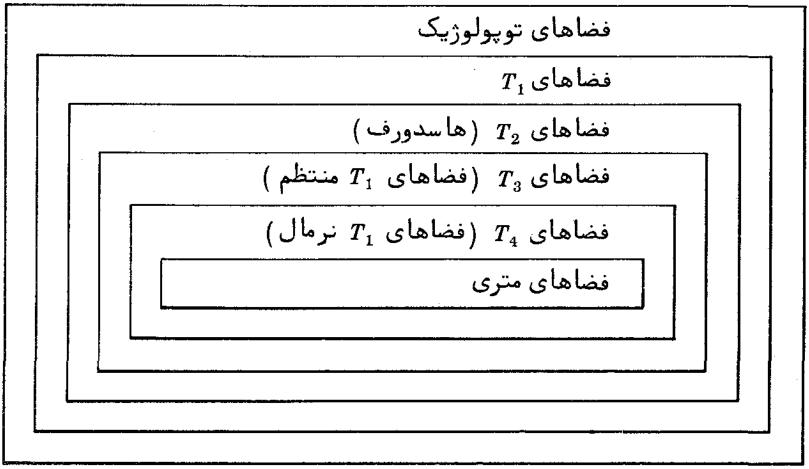
مثال ۲۰۴ . توپولوژی $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ را بر مجموعهٔ $X = \{a,b,c\}$ در نظر می‌گیریم . توجه کنید که مجموعه‌های بسته عبارتند از X ، $\emptyset$ ، $\{b,c\}$ ، $\{a,c\}$ ، و $\{c\}$. هرگاه F_1 و F_2 زیرمجموعه‌های بستهٔ از هم‌جدایی از $(X,\mathcal{T})$ باشند ، آنگاه یکی‌از آنها ، مثلاً F_1 ، باید مجموعهٔ تهی $\emptyset$ باشد. از اینرو ، $\emptyset$ و X مجموعه‌های باز ازهم جدایی هستند و $F_1 \subset \emptyset$ و $F_2 \subset X$. به عبارت دیگر ، $(X,\mathcal{T})$ یک فضای نرمال است . از آن‌سو ، $(X,\mathcal{T})$ یک فضای T_1 نیست ، زیرا مجموعهٔ یکانی $\{a\}$ بسته نیست . بعلاوه ، $(X,\mathcal{T})$ یک فضای منتظم نیست ، زیرا $a \notin \{c\}$ ، و تنها زبرمجموعه‌های باز مجموعهٔ بستهٔ $\{c\}$ مجموعهٔ X است که شامل a نیز هست .

فضای نرمال X که در اصل موضوع جداسازی $[\mathbf{T_1}]$ صدق می‌کند ، یعنی یک فضای T_1 نرمال ، یک ***فضای*** T_4 نام دارد .

مثال ۳۰۴ . فرض‌کنیم X یک‌فضای T_4 باشد . دراین صورت ، X یک فضای T_1 منتظم ،

یعنی یک فضای T_3 ، نیز هست . زیرا فرض کنیم F زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X بوده و $p \in X$ متعلق‌به F نباشد. بنابر $[\mathbf{T_1}]$ ، $\{p\}$ بسته‌است؛ وچون F و $\{p\}$ از هم‌جدایند، بنابر $[\mathbf{N}]$ ، مجموعه‌های‌بازازهم‌جدایی‌مانند G و H هستند که $F \subset G$ و $p \in \{p\} \subset H$.

حال یک فضای متری درنظر می‌گیریم که هم نرمال و هم T_1 ، یعنی T_4 ، باشد. نمودار زیر رابطهٔ بین فضاهای مطرح شده دراین فصل را نشان می‌دهد.



لم اوریزن و قضیهٔ متری‌سازی

حال نتیجهٔ کلاسیک اوریزن را بیان می‌کنیم .

قضیهٔ (لم اوریزن) ۷.۱۰ . *فرض‌کنیم F_1 و F_2 زیرمجموعه‌های بستهٔ از هم جدای فضای‌نرمال X باشند. دراین‌صورت ، تابع‌پیوسته‌ای مانند $f : X \to [0,1]$ هست بطوری‌که*

$$f[F_1] = \{0\} \quad \text{و} \quad f[F_2] = \{1\} \; .$$

یک نتیجهٔ مهم لم اوریزن جواب ناقصی به مسئلهٔ متری‌سازی که در فصل ۸ مطرح شد می‌دهد ؛ یعنی ،

قضیهٔ متری‌سازی اوریزن ۸.۱۰ . *هر فضای T_1 نرمال شمارش‌پذیر دوم متری‌پذیر است.*

درواقع ، ثابت می‌کنیم که هر فضای T_1 نرمال شمارش‌پذیر دوم با زیرمجموعه‌ای از مکعب هیلبرت در $\mathbf{R}^\infty$ همانریخت است .

توابعی که نقاط را جدا می‌کنند

فرض کنیم $\mathcal{A} = \{f_i : i \in I\}$ رده‌ای از توابع از مجموعهٔ X بتوی مجموعهٔ Y باشد. گوییم ردهٔ $\mathcal{A}$ از توابع ***نقاط را جدا می‌کنند*** اگفگر به‌ازای هر دو نقطهٔ متمایز $a, b \in X$ تابعی مانند f در $\mathcal{A}$ باشد بطوری که $f(a) \neq f(b)$.

مثال ۱۰۵. ردهٔ

$$\mathcal{A} = \{f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \sin 2x,\ f_3(x) = \sin 3x,\ \ldots\}$$

از توابع حقیقی تعریف شده بر $\mathbf{R}$ را درنظر می‌گیریم. توجه کنید که به‌ازای هر تابع $f_n \in \mathcal{A}$، $f_n(0) = f_n(\pi) = 0$. از اینرو، ردهٔ $\mathcal{A}$ نقاط را جدا نمی‌کنند.

مثال ۲۰۵. فرض کنیم $C(X, \mathbf{R})$ ردهٔ تمام توابع پیوستهٔ حقیقی بر فضای توپولوژیک X باشد. نشان می‌دهیم که اگر $C(X, \mathbf{R})$ نقاط را جدا کنند، X یک فضای هاسدورف است. فرض کنیم $a, b \in X$ نقاطی متمایز باشند. طبق فرض، تابع پیوسته‌ای مانند $f : X \to \mathbf{R}$ وجود دارد بطوری‌که $f(a) \neq f(b)$. اما $\mathbf{R}$ یک‌فضای‌هاسدورف‌است؛ ازاینرو، زیرمجموعه‌های باز ازهم‌جدایی مانند G و H از $\mathbf{R}$ هستند که بترتیب شامل $f(a)$ و $f(b)$ می‌باشند. بنابراین، معکوسهای $f^{-1}[G]$ و $f^{-1}[H]$ ازهم جدا، باز، و بترتیب شامل a و b می‌باشند. به‌عبارت دیگر، X یک فضای هاسدورف است.

نتیجهٔ مثال قبل را به‌طور صوری بیان می‌کنیم.

حکم ۹۰۱۰. *هرگاه ردهٔ $C(X, \mathbf{R})$ از تمام توابع پیوستهٔ حقیقی بر فضای توپولوژیک X نقاط را جدا کند، آنگاه X یک فضای هاسدورف است.*

فضاهای کاملاً منتظم

فضای توپولوژیک X ***کاملاً منتظم*** است اگفگر دراصل موضوع زیر صدق کند:

[CR] هرگاه F زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X بوده و $p \in X$ به F متعلق نباشد، آنگاه‌تابع پیوسته‌ای مانند $f : X \to [0, 1]$ وجود دارد بطوری که $f(p) = 0$ و $f[F] = \{1\}$.

بعداً نشان می‌دهیم که

حکم ۱۰۰۱۰. *یک فضای کاملاً منتظم منتظم نیز هست.*

فضای کاملا" منتظم X که در $[\mathbf{T_1}]$ نیز صدق کند، یعنی یک فضای T_1 کاملا" منتظم، یک **فضای تیخنف**[1] نام دارد. بنابر لم اوریزن، هر فضای T_4 یک فضای تیخنف است و، بنابرحکم ۱۰۰۱۰، هر فضای تیخنف یک فضای T_3 است. از اینرو، یک فضای تیخنف، یعنی یک فضای T_1 کاملا" منتظم، را گاهی یک فضای $T_{3½}$ می‌نامند.

یکی از خواص مهم فضای T_1 کاملا" منتظم عبارت است از

قضیهٔ ۱۱۰۱۰. *ردهٔ $C(X, \mathbf{R})$ همهٔ توابع پیوستهٔ حقیقی بر فضای T_1 کاملا" منتظم X نقاط را جدا می‌کند.*

مسائل حل شده

فضاهای T_1

۱. قضیهٔ ۱۰۱۰ را ثابت کنید: فضای توپولوژیک X یک فضای T_1 است اگر و فقط اگر هر زیرمجموعهٔ یکانی از X بسته باشد.

حل. فرض کنیم X یک فضای T_1 بوده و $p \in X$. نشان می‌دهیم که $\{p\}^c$ باز است. فرض کنیم $x \in \{p\}^c$. پس $x \neq p$؛ و در نتیجه، بنابر $[\mathbf{T_1}]$، مجموعهٔ بازی مانند G_x هست بطوری که $x \in G_x$ ولی $p \notin G_x$.
ازاینرو، $x \in G_x \subset \{p\}^c$؛ و درنتیجه، $\{p\}^c = \bigcup\{G_x : x \in \{p\}^c\}$. بنابراین، $\{p\}^c$، که اجتماعی ازمجموعه‌های باز است، باز بوده و $\{p\}$ بسته است.
بعکس، فرض کنیم $\{p\}$ به‌ازای هر $p \in X$ بسته باشد. فرض کنیم $a, b \in X$ و $a \neq b$. اما $a \neq b \Rightarrow b \in \{a\}^c$؛ ازاینرو، $\{a\}^c$ مجموعهٔ بازی شامل b وغیرشامل a است. بهمین نحو، $\{b\}^c$ مجموعهٔ بازی شامل a و غیرشامل b است. بنابراین، X یک فضای T_1 است.

۲. نشان دهید که خاصیت فضای T_1 بودن موروثی است؛ یعنی، هر زیرفضای یک فضای T_1 نیز یک فضای T_1 است.

---

1. Tychonoff

حل. فرض کنیم $(X,\mathcal{T})$ یک فضای T_1 بوده و $(Y,\mathcal{T}_Y)$ زیرفضایی از $(X,\mathcal{T})$ باشد. نشان‌می‌دهیم که هرزیرمجموعهٔ یکانی $\{p\}$ از Y یک مجموعهٔ $\mathcal{T}_Y$ ــ بسته است یا، معادلاً، $Y\setminus\{p\}$ یک $\mathcal{T}_Y$ ــ باز است. چون $(X,\mathcal{T})$ یک فضای T_1 است، $X\setminus\{p\}$ یک $\mathcal{T}$ ــ باز است. اما

$$p\in Y\subset X \quad\Rightarrow\quad Y\cap(X\setminus\{p\}) \;=\; Y\setminus\{p\}\cdot$$

از اینرو، طبق تعریف زیرفضا، $Y\setminus\{p\}$ یک مجموعهٔ $\mathcal{T}_Y$ ــ باز است. لذا، $(Y,\mathcal{T}_Y)$ نیز یک فضای T_1 است.

۳ . نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ متناهی فضای T_1 ، X نقطهٔ انباشتگی نـــدارد.

حل. فرض‌کنیم $A\subset X$ دارای n عنصر باشد؛ مثلاً، $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$. چون A متناهی اســت، بسته اســت و لذا شامل همهٔ نقاط‌انباشتگی خود می‌باشد. اما $\{a_2,\ldots,a_n\}$ نیزمتناهی‌ودرنتیجه‌بسته‌است. بنابراین، متمم $\{a_2,\ldots,a_n\}^c$ مجموعهٔ باز است، شــامل a_1 است، و نقطه‌ای از A غیر از a_1 را ندارد. از اینرو، a_1 نقطهٔ انباشتگی A نیست. بهمین نحو، هیچ نقطهٔ دیگری از A نقطهٔ انباشتگی A نیست؛ و درنتیجه، A نقطهٔ انباشتگی ندارد.

۴ . نشان دهید که هر فضای T_1 متناهی X یک فضای مجزاست.

حل. هر زیرمجموعهٔ X متناهی و لـــذا بسته است. از اینرو، هر زیرمجموعهٔ X باز نیز هست؛ یعنی، X یک فضای مجزاست.

۵ . ثابت کنید هرگاه X یک فضای T_1 باشد، آنگاه دو حکم زیر هم‌ارزند:
(یک) $p\in X$ یک نقطهٔ انباشتگی A است؛
(دو) هر مجموعهٔ باز شامل p حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از A است.

حل. طبق تعــریف نقطهٔ انباشتگی، (دو) $\Leftarrow$ (یک)؛ از اینرو، فقط باید ثابت کنیم که (یک) $\Leftarrow$ (دو).
فرض‌کنیم G مجموعهٔ بازی شامل p و فقط حاوی تعدادی متناهی نقطه از A غیر از p باشد؛ مثلاً،

$$B = (G \setminus \{p\}) \cap A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

اما B ، که زیرمجموعه‌ای متناهی از یک فضای T_1 است، بسته و درنتیجه B^c باز است. قرار می‌دهیم $H = G \cap B^c$. دراین صورت، H باز است، $p \in H$ ، و H شامل نقطه‌ای از A غیر از p نیست. از اینرو، p نقطهٔ انباشتگی A نبوده؛ و درنتیجه، (یک) $\not\Leftarrow$ (دو).

۶ . فرض کنید X یک فضای T_1 بوده و $\mathcal{B}_p$ یک پایهٔ موضعی در $p \in X$ باشد. نشان دهید که اگر $q \in X$ با p متمایز باشد، عضوی از $\mathcal{B}_p$ شامل q نخواهد بود.

حل. چون $p \neq q$ و X در $[\mathbf{T_1}]$ صدق می‌کند، مجموعهٔ بازی مانند $G \subset X$ شامل p هست که حاوی q نمی‌باشد. اما $\mathcal{B}_p$ یک پایهٔ موضعی در p است؛ درنتیجه، G یک زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای مانند $B \in \mathcal{B}_p$ است و B نیز شامل q نمی‌باشد.

۷ . فرض کنید X یک فضای T_1 باشد که در اصل اول شمارشپذیری صدق کند. نشان دهیدهرگاه $p \in X$ یک نقطهٔ انباشتگی $A \subset X$ باشد، آنگاه دنباله‌ای با جملات متمایز در A وجود دارد که به p همگراست.

حل. فرض کنیم $\mathcal{B} = \{B_n\}$ یک پایهٔ موضعی تودرتو در p باشد. قرار می‌دهیم $B_{i_1} = B_1$. چون p یک نقطهٔ حدی A است، B_{i_1} شامل نقطه‌ای مانند $a_1 \in A$ غیر از p است. طبق مسئلهٔ قبل،

$$B_{i_2} \in \mathcal{B} \ \exists \ \text{بطوری که} \ a_1 \notin B_{i_2}.$$

بهمین نحو، B_{i_2} شامل نقطه‌ای مانند $a_2 \in A$ غیر از p است و، چون $a_1 \notin B_{i_2}$ ، با a_1 مخالف است. مجدداً، طبق مسئلهٔ قبل،

$$B_{i_3} \in \mathcal{B} \ \exists \ \text{بطوری که} \ a_2 \notin B_{i_3}.$$

بعلاوه،

$$a_2 \in B_{i_2},\ a_2 \notin B_{i_3} \Rightarrow B_{i_2} \supset B_{i_3}.$$

اگر به‌همین نحو ادامه دهیم، زیردنباله‌ای مانند $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots\}$ از $\mathcal{B}$ و دنباله‌ای چون $\langle a_1, a_2, \ldots\rangle$ از جملات متمایز در A با خاصیت $a_1 \in B_{i_1},\ a_2 \in B_{i_2},\ \ldots$ بدست می‌آوریم. اما $\{B_{i_n}\}$ نیز یک پایهٔ موضعی تودرتو در p است؛ از اینرو، $\langle a_n\rangle$ همگرا به p می‌باشد.

فضاهای هاسدورف

۸ . نشان دهید کـه خاصیت فضای هاسدورف بودن موروثی است ؛ یعنی ، هر زیرفضای یک فضای هاسدورف هاسدورف است .

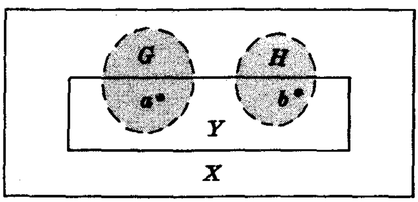
حل . فرض‌کنیم $(X, \mathcal{T})$ فضایی هاسدورف‌بوده‌و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ زیرفضایی‌از $(X, \mathcal{T})$ باشد . بعلاوه ، فرض‌کنیم $a, b \in Y \subset X$ و $a \neq b$. طبق فرض، $(X, \mathcal{T})$ هاسدورف است . از اینرو ،

$$G, H \in \mathcal{T} \ \exists \ \text{بطوری که} \ a \in G,\ b \in H \ \text{و} \ G \cap H = \emptyset \ .$$

طبق تعریف زیرفضا ، $Y \cap G$ و $Y \cap H$ مجموعه‌هایی $\mathcal{T}_y$ ــ بازند . بعلاوه ،

$$a \in G,\ a \in Y \quad \Rightarrow \quad a \in Y \cap G$$
$$b \in H,\ b \in Y \quad \Rightarrow \quad b \in Y \cap H$$
$$G \cap H = \emptyset \quad \Rightarrow \quad (Y \cap G) \cap (Y \cap H) = Y \cap (G \cap H) = Y \cap \emptyset = \emptyset$$

(مطابق نمودار زیر) . بنابراین ، $(Y, \mathcal{T}_y)$ نیز یک فضای



هاسدروف است .

۹ . فرض‌کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی تـولید شـده به‌وسیلهٔ بازه‌های باز ــ بستهٔ $(a, b]$ بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ باشد . نشان دهید که $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ هاسدورف است .

حل . فرض‌کنیم $a, b \in \mathbf{R}$ با $a \neq b$ ؛ مثلاً" ، $a < b$. $G = (a-1, a]$ و $H = (a, b]$ را اختیار می‌کنیم . دراین صورت ،

$$G, H \in \mathcal{T} \ ، \ a \in G \ ، \ b \in H \ ، \ \text{و} \ G \cap H = \emptyset \ .$$

از اینرو ، $(X, \mathcal{T})$ هاسدورف است .

۱۰ . قضیهٔ ۱۰‏.۴ راثابت‌کنید : فرض‌کنید X یک فضای هاسدورف باشد . دراین‌صورت ، هر دنبالهٔ همگرا در X حد منحصر بفرد دارد .

حل. فرض کنیم $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ همگرا به a و b باشد، و $a \neq b$. چون X هاسدورف است، مجموعه‌های بازی مانند G و H وجود دارند بطوری که

$$a \in G \text{ ،} \quad b \in H \text{ ،} \quad \text{و} \quad G \cap H = \emptyset \text{ .}$$

طبق فرض، $\langle a_n \rangle$ همگرا به a است؛ از اینرو،

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } n > n_0 \text{ تعلق } a_n \in G \text{ را ایجاب می‌کند .}$$

یعنی، G شامل همهٔ جملات دنباله جز تعدادی متناهی از آنهاست. اما G و H از هم جدایند؛ از اینرو، H فقط می‌تواند آن جملات دنباله را شامل باشد که تعلق به G ندارند، و از اینها فقط تعدادی متناهی وجود دارند، لذا، $\langle a_n \rangle$ نمی‌تواند به b همگرا باشد. اما این فرض را نقض می‌کند؛ بنابراین، $a = b$.

۱۱ . قضیهٔ ۵.۱۰ را ثابت کنید: فرض کنید X یک فضای شمارشپذیر اول باشد. دراین صورت، احکام زیر با هم هم‌ارزند: (یک) X هاسدورف است؛ (دو) هر دنبالهٔ همگرا حد منحصر بفرد دارد.

حل. طبق مسئلهٔ قبل، (یک) $\Leftarrow$ (دو)؛ از اینرو، فقط کافی است نشان دهیم که (دو) $\Leftarrow$ (یک). فرض کنیم X هاسدورف نباشد. دراین صورت، $\exists\, a, b \in X, a \neq b$ با این خاصیت که هر مجموعهٔ باز شامل a با هر مجموعهٔ باز شامل b اشتراک ناتهی دارد. حال فرض کنیم $\{G_n\}$ و $\{H_n\}$ پایه‌های موضعی تودرتویی بترتیب در a و b باشند. دراین صورت، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $G_n \cap H_n \neq \emptyset$ ؛ و درنتیجه،

$$\exists\, \langle a_1, a_2, \ldots \rangle \text{ بطوری که } a_1 \in G_1 \cap H_1,\ a_2 \in G_2 \cap H_2,\ \ldots \text{ .}$$

بنابراین، $\langle a_n \rangle$ همگرا به هردوی a و b است. به‌عبارت دیگر، (دو) $\Leftarrow$ (یک).

فضاهای نرمال و لم اوریزن

۱۲ . قضیهٔ ۶.۱۰ را ثابت کنید: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. دراین صورت، شرایط زیر هم‌ارزند: (یک) X نرمال است؛ (دو) هرگاه H زیرمجموعهٔ بازی از مجموعهٔ بستهٔ F باشد، آنگاه مجموعهٔ بازی مانند G هست بطوری که $F \subset G \subset \bar{G} \subset H$.

حل. (یک) $\Leftarrow$ (دو). فرض‌کنیم $F \subset H$ ، که درآن F بسته و H باز است. پس H^c بسته است، و $F \cap H^c = \emptyset$. اما X نرمال است؛ درنتیجه، مجموعه‌های باز G, G^* وجود دارند بطوری که $F \subset G$ ، $H^c \subset G^*$ ، و $G \cap G^* = \emptyset$. اما

$$H^c \subset G^* \Rightarrow G^{*c} \subset H \quad \text{و} \quad G \cap G^* = \emptyset \Rightarrow G \subset G^{*c}.$$

بعلاوه، G^{*c} بسته‌است؛ درنتیجه، $F \subset G \subset \bar{G} \subset G^{*c} \subset H$.

(دو) $\Leftarrow$ (یک). فرض‌کنیم F_1 و F_2 مجموعه‌های بستهٔ ازهم‌جدایی باشند. دراین صورت، $F_1 \subset F_2^c$ و F_2^c باز است. بنابر (دو)، مجموعهٔ بازی چون G است بطوری که $F_1 \subset G \subset \bar{G} \subset F_2^c$.

اما

$$G \subset \bar{G} \Rightarrow G \cap \bar{G}^c = \emptyset \quad \text{و} \quad \bar{G} \subset F_2^c \Rightarrow F_2 \subset \bar{G}^c.$$

بعلاوه، $\bar{G}^c$ باز است. لذا، $F_1 \subset G$ و $F_2 \subset \bar{G}^c$ ، که در آنها $G, \bar{G}^c$ مجموعه‌هایی باز و از هم جدایند. لذا، X نرمال می‌باشد.

۱۳ . فرض‌کنید $\mathcal{B}$ پایه‌ای‌برای‌فضای T_1 نرمال X باشد. نشان دهید به‌ازای هر $G_i \in \mathcal{B}$ و هر نقطهٔ $p \in G_i$ ، عضوی مانند $G_j \in \mathcal{B}$ هست که $p \in \bar{G}_j \subset G_i$.

حل. چون X یک‌فضای T_1 است، $\{p\}$ بسته است؛ از اینرو، G_i یک زیرمجموعهٔ باز مجموعهٔ بستهٔ $\{p\}$ می‌باشد. بنابر قضیهٔ ۶۰۱۰ ، مجموعهٔ بازی چون G هست بطوری که $\{p\} \subset G \subset \bar{G} \subset G_i$.

چون $p \in G$ ،عضوی مانند G_j ازپایهٔ $\mathcal{B}$ هست‌بطوری‌که $p \in G_j \subset G$ ؛ درنتیجه، $p \in \bar{G}_j \subset \bar{G}$. اما $\bar{G} \subset G_i$. بنابراین، $p \in \bar{G}_j \subset G_i$.

۱۴ . فرض‌کنید D مجموعهٔ کسرهای اثنوی (کسرهایی که مخرجهای آنها توانهایی از 2 اند) دربازهٔ یکهٔ $[0,1]$ باشد؛ یعنی،

$$D = \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{8}, \tfrac{7}{8}, \tfrac{1}{16}, \ldots, \tfrac{15}{16}, \ldots\}.$$

نشان دهید که D در $[0,1]$ چگال است.

حل. برای‌اثبات $\bar{D} = [0,1]$ کافی‌است‌نشان‌دهیم‌که هر بازهٔ باز $(a-\delta, a+\delta)$ بــه مـرکـز نقطـهٔ دلخـواه $a \in [0,1]$ شامل نقطـه‌ای از D است. توجه کنید که

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ ؛ لذا، توانی‌مانند $q = 2^{n_0}$ هست بطوری که $0 < 1/q < \delta$. بازه‌های

$$\left[0, \frac{1}{q}\right], \quad \left[\frac{1}{q}, \frac{2}{q}\right], \quad \left[\frac{2}{q}, \frac{3}{q}\right], \quad \ldots, \quad \left[\frac{q-2}{q}, \frac{q-1}{q}\right], \quad \left[\frac{q-1}{q}, 1\right]$$

را درنظر مــی‌گیریم . چون $[0,1]$ اجتماع بازه‌های فوق است ، یکی از آنها ، مثلا" $\left[\frac{m}{q}, \frac{m+1}{q}\right]$ ، شامل a است؛ یعنی ، $\frac{m}{q} \leq a \leq \frac{m+1}{q}$. اما $\frac{1}{q} < \delta$ ؛ درنتیجه،

$$a - \delta < \frac{m}{q} \leq a < a + \delta .$$

به‌عبارت‌دیگر، بازهٔ باز $(a-\delta,\ a+\delta)$ شامل نقطهٔ m/q است که به D تعلق دارد . لذا ، D در $[0,1]$ چگال است .

۱۵ . قضیهٔ ۷.۱۰ (لم اوریزن) را ثابت کنید : فرض‌کنید F_1 و F_2 زیرمجموعه‌های بستهٔ ازهم‌جدایی از فضای نرمال X باشند . دراین صورت ، تابع پیوسته‌ای مانند $f: X \to [0,1]$ هست بطوری که $f[F_1] = \{0\}$ و $f[F_2] = \{1\}$.

حل . طبق‌فرض، $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ؛درنتیجه، $F_1 \subset F_2^c$. بخصوص، چون F_2 بسته است ، F_2^c زیرمجموعهٔ **بازی** از مجموعهٔ بستهٔ F_1 می‌باشد . بنابر قضیهٔ ۴.۱۰ ، مجموعهٔ بازی مانند $G_{1/2}$ هست بطوری که

$$F_1 \subset G_{1/2} \subset \bar{G}_{1/2} \subset F_2^c .$$

توجه کنید که $G_{1/2}$ زیرمجموعهٔ بازی از مجموعهٔ بستهٔ F_1 ، و F_2^c زیرمجموعهٔ بازی از مجموعهٔ بستهٔ $\bar{G}_{1/2}$ است . از اینرو، بنابر قضیهٔ ۴.۱۰ ، مجموعه‌های بازی چون $G_{1/4}$ و $G_{3/4}$ وجود دارند که

$$F_1 \subset G_{1/4} \subset \bar{G}_{1/4} \subset G_{1/2} \subset \bar{G}_{1/2} \subset G_{3/4} \subset \bar{G}_{3/4} \subset F_2^c .$$

با ادامهٔ این‌کار به‌ازای هر $t \in D$ ، که D مجموعهٔ کسرهای اثنوی در $[0,1]$ است ، مجموعهٔ بازی چون G_t با این خاصیت بدست می‌آید که اگر $t_1, t_2 \in D$ ، $t_1 < t_2$. داریم $G_{t_1} \subset G_{t_2}$. تابع f را بر X به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{t : x \in G_t\} & \text{اگر } x \notin F_2 \\ 1 & \text{اگر } x \in F_2 \end{cases}$$

توجه کنید که به‌ازای هر $x \in X$ ، $0 \leq f(x) \leq 1$ ؛ یعنی ، f مجموعهٔ X را بتوی $[0,1]$ می‌نگارد . همچنین ،توجه کنیدکه به‌ازای هر $t \in D$ ، $F_1 \subset G_t$ ؛ درنتیجه ، $f[F_1] = \{0\}$. بعلاوه ، طبق تعریف ، $f[F_2] = \{1\}$. درنتیجه، تنها می‌ماند ثابت کنیم که f پیوسته است .

اما f درصورتی پیوسته است که معکوسهای $[0,a)$ و $(b,1]$ زیرمجموعه‌های باز X باشند (ر.ک. مسئلهٔ ۷، فصل ۷). حکم می‌کنیم که

$$f^{-1}[[0,a)] = \bigcup\{G_t : t < a\}, \quad (۱)$$

$$f^{-1}[(b,1]] = \bigcup\{\bar{G}_t^c : t > b\}. \quad (۲)$$

دراین صورت، هریک اجتماع مجموعه‌هایی باز و لذا باز است. ابتدا (۱) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $x \in f^{-1}[[0,a)]$. پس $f(x) \in [0,a)$؛ یعنی، $0 \leq f(x) < a$. چون D در $[0,1]$ چگال است، $t_x \in D$ ی هست بطوری که $f(x) < t_x < a$. به عبارت دیگر،

$$f(x) = \inf\{t : x \in G_t\} < t_x < a.$$

بنابراین، $x \in G_{t_x}$، که در آن $t_x < a$. از اینرو، $x \in \bigcup\{G_t : t < a\}$. هم اکنون نشان دادیم که هر عنصر در $f^{-1}[[0,a)]$ نیز متعلق به $\bigcup\{G_t : t < a\}$ است؛ یعنی،

$$f^{-1}[[0,a)] \subset \bigcup\{G_t : t < a\}.$$

از آن‌سو، فرض کنیم $y \in \bigcup\{G_t : t < a\}$. دراین‌صورت، $\exists\ t_y \in D$ بطوری که $t_y < a$ و $y \in G_{t_y}$. بنابراین،

$$f(y) = \inf\{t : y \in G_t\} \leq t_y < a.$$

از اینرو، y متعلق به $f^{-1}[[0,a)]$ نیز هست. به عبارت دیگر،

$$\bigcup\{G_t : t < a\} \subset f^{-1}[[0,a)].$$

دو نتیجهٔ بالا (۱) را ایجاب می‌کنند.

حال (۲) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $x \in f^{-1}[(b,1]]$. پس $f(x) \in (b,1]$؛ یعنی، $b < f(x) \leq 1$. چون D در $[0,1]$ چگال است، $t_1, t_2 \in D$ ای وجود دارند بطوری که $b < t_1 < t_2 < f(x)$. به عبارت دیگر،

$$f(x) = \inf\{t : x \in G_t\} > t_2.$$

از اینرو، $x \notin G_{t_2}$. توجه کنید که $t_1 < t_2$ ایجاب می‌کند که $\bar{G}_{t_1} \subset G_{t_2}$. از اینرو، x به $\bar{G}_{t_1}$ نیز تعلق ندارد. بنابراین، $x \in \bar{G}_{t_1}^c$، که درآن $t_1 > b$؛ از اینرو، $x \in \bigcup\{\bar{G}_t^c : t > b\}$. بنابراین،

$$f^{-1}[(b,1]] \subset \bigcup\{\bar{G}_t^c : t > b\}.$$

از آن‌سو، فرض کنیم $y \in \bigcup\{\bar{G}_t^c : t > b\}$. پس $t_y \in D$ ی هست بطوری که $t_y > b$ و $y \in \bar{G}_{t_y}^c$؛ لذا، y متعلق به $\bar{G}_{t_y}$ نیست. اما $t < t_y$ ایجاب می‌کند که $G_t \subset G_{t_y} \subset \bar{G}_{t_y}$؛ از اینرو، به‌ازای هر t کوچکتر از t_y، $y \notin G_t$. درنتیجه،

$$f(y) = \inf\{t : y \in G_t\} \geq t_y > b.$$

بنابراین، $y \in f^{-1}((b,1])$. به‌عبارت دیگر،

$$\bigcup\{\bar{G}_t^c : t > b\} \quad \subset \quad f^{-1}[(b,1]] \cdot$$

دو نتیجهٔ فوق (۲) را ایجاب می‌کنند. لذا، f پیوسته بوده و لم اوریزن ثابت شده است.

۱۶ . قضیهٔ متری‌سازی اوریزن ۸۰۱۰ را ثابت کنید. هر فضای T_1 نرمال شمارشپذیر دوم X متریپذیر است. (درواقع، X با زیرمجموعه‌ای ازمکعب هیلبرت $\mathbf{I}$ از $\mathbf{R}^\infty$ همانریخت است.)

حل. هرگاه X متناهی باشد، آنگاه X یک فضای مجزاست؛ و درنتیجه، X با هر زیرمجموعهٔ H با تعداد هم‌ارزی ازنقاط همانریخت است. هرگاه X نامتناهی باشد، آنگاه X شامل پایهٔ شمارشپذیری مانند $\mathcal{B} = \{G_1, G_2, G_3, \dots\}$ است که در آن هیچ عضو $\mathcal{B}$ خود X نیست.
طبق مسئلهٔ قبل، به‌ازای هر G_i در $\mathcal{B}$ ، G_j ای در $\mathcal{B}$ هست بطوری که $\bar{G}_j \subset G_i$. ردهٔ همهٔ این $\langle G_j, G_i \rangle$ ها، که $\bar{G}_j \subset G_i$ ، شمارشپذیر است؛ از اینرو، می‌توان آنها را با $P_1, P_2, \dots$ نشان داد، که $P_n = \langle G_{j_n}, G_{i_n} \rangle$. توجه کنید که $\bar{G}_{j_n} \subset G_{i_n}$ ایجاب می‌کند که $\bar{G}_{j_n}$ و $G_{i_n}^c$ زیرمجموعه‌های بستهٔ ازهم‌جدایی از X اند. از اینرو، طبق لم اوریزن، تابعی مانند $f_n : X \to [0,1]$ هست بطوری که $f_n[\bar{G}_{j_n}] = \{0\}$ و $f_n[G_{i_n}^c] = \{1\}$.
حال تابع $f : X \to \mathbf{I}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(x) \quad = \quad \left\langle \frac{f_1(x)}{2}, \frac{f_2(x)}{2^2}, \frac{f_3(x)}{2^3}, \dots \right\rangle .$$

توجه کنید که به‌ازای هر $n \in N$ ، $0 \leq f_n(x) \leq 1$ ایجاب می‌کند که $\left|\frac{f_n(x)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{n}$ ؛ از اینرو، $f(x)$ نقطه‌ای در مکعب هیلبرت $\mathbf{I}$ است. (به‌یاد می‌آوریم که $\mathbf{I} = \{\langle a_n \rangle : a_n \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N},\ 0 \leq a_n \leq 1/n\}$ ؛ ر.ک. صفحهٔ ۲۳۴.)
حال نشان می‌دهیم f یک‌به‌یک است. فرض‌کنیم x و y نقاط متمایزی در X باشند. چون X یک فضای T_1 است، عضوی از پایهٔ $\mathcal{B}$ مانند G_i هست بطوری که $x \in G_i$ ولی $y \notin G_i$. طبق مسئلهٔ قبل، جفتی مانند $P_m = \langle G_j, G_i \rangle$ هست بطوری که $x \in \bar{G}_j \subset G_i$. طبق تعریف، چون $x \in \bar{G}_j$ ، $f_m(x) = 0$ ، و چون $y \notin G_i$ یعنی $y \in G_i^c$ ، $f_m(y) = 1$. از اینرو، $f(x) \neq f(y)$ زیرا در مختص m م تفاوت دارند.

لذا، f یک‌به‌یک می‌باشد.

حال ثابت می‌کنیم f پیوسته‌است. فرض کنیم $\epsilon > 0$. توجه کنید که f در $p \in X$ درصورتی پیوسته است که همسایگی بازی چون G از p باشد بطوری که $x \in G$ نامساوی $||f(x) - f(p)|| < \epsilon$ یا، معادلا" ، $||f(x) - f(p)||^2 < \epsilon^2$ را ایجاب کند. به یادآورید که

$$||f(x) - f(p)||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(p)|^2}{2^{2n}}.$$

بعلاوه، چون مقادیر f_n در $[0,1]$ اند، $(|f_n(x) - f_n(p)|^2)/2^{2n} \leq 1/2^{2n}$. توجه کنید که $\sum_n 1/2^{2n}$ همگراست؛ از اینرو، $n_0 = n_0(\epsilon)$ ی هست، مستقل از x و p، بطوری که

$$||f(x) - f(p)||^2 = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|f_n(x) - f_n(p)|^2}{2^{2n}} + \frac{\epsilon^2}{2}.$$

اما هر تابع $f_n : X \to [0,1]$ پیوسته است؛ از اینرو، همسایگی بازی مانند G_n از p هست بطوری که $x \in G_n$ نامساوی $|f_n(x) - f_n(p)|^2 < \epsilon^2/2n_0$ را ایجاب می‌کند. فرض کنید $G = G_1 \cap \cdots \cap G_{n_0}$. چون G اشتراک متناهی همسایگیهای باز p است، G نیز همسایگی بازی از p می‌باشد. بعلاوه، اگر $x \in G$،

$$||f(x) - f(p)||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(p)|^2}{2^{2n}} < n_0\left(\frac{\epsilon^2}{2n_0}\right) + \frac{\epsilon^2}{2} = \epsilon^2.$$

از اینرو، f پیوسته می‌باشد.

حال فرض کنیم Y برد f باشد؛ یعنی، $Y = f[X] \subset \mathbf{I}$. می‌خواهیم ثابت کنیم $f^{-1} : Y \to X$ نیز پیوسته است. توجه کنید که پیوستگی در Y هم‌ارز پیوستگی دنباله‌ای است؛ از اینرو، f^{-1} درصورتی در $f(p) \in Y$ پیوسته است که به‌ازای هر دنبالهٔ $\langle f(y_n) \rangle$ همگرا به $f(p)$، دنبالهٔ $\langle y_n \rangle$ همگرا به p باشد.

فرض کنیم f^{-1} پیوسته‌نباشد؛ یعنی، $\langle y_n \rangle$ همگرا به p نباشد. پس همسایگی بازی چون G از p هست بطوری که G شامل بی‌نهایت جمله‌از $\langle y_n \rangle$ نیست. لذا، می‌توان زیردنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ از $\langle y_n \rangle$ را طوری‌اختیار کرد که همهٔ جملات $\langle x_n \rangle$ خارج G قرار داشته باشند. چون $p \in G$، عضوی‌از پایهٔ $\mathcal{B}$ مانند G_i هست بطوری که $p \in G_i \subset G$. بعلاوه، طبق مسئلهٔ قبل، جفتی مانند $P_m = \langle G_j, G_i \rangle$ هست بطوری که $p \in \bar{G}_j \subset G_i \subset G$. توجه‌کنیدکه به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $x_n \notin G$؛ از اینرو، $x_n \in G_i^c$. بنابراین، $f_m(p) = 0$ و $f_m(x_n) = 1$. دراین صورت، $| f_m(x_n) - f_m(p) |^2 = 1$ و

$$||f(x_n) - f(p)||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k(x_n) - f_k(p)|^2}{2^{2k}} \geq \frac{1}{2^{2m}} .$$

به عبارت دیگر، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $|| f(x_n) - f(p) || > 1/2^m$. بنابراین، دنباله‌ٔ $\langle f(x_n) \rangle$ همگرا به $f(p)$ نیست . اما این با اینکه هر زیر دنباله‌ٔ $\langle f(y_n) \rangle$ نیز باید همگرا به $f(p)$ باشد تعارض دارد . از اینرو ، f^{-1} پیوسته می‌باشد . لذا ، f یک همانریختی است و X با زیرمجموعه‌ای از مکعب هیلبرت همانریخت است . بنابراین ، X متر پذیر است .

فضاهای منتظم و کاملاً منتظم

۱۷ . حکم ۱۰۰۱۰ را ثابت کنید : هر فضای کاملاً منتظم X منتظم نیز هست .

حل . فرض کنیم F زیرمجموعه‌ٔ بسته‌ای از X بوده و $p \in X$ متعلق به F نباشد . طبق فرض، X کاملاً منتظم است ؛ از اینرو ، تابع پیوسته‌ای مانند $f : X \to [0,1]$ هست بقسمی که $f(p) = 0$ و $f[F] = \{1\}$. اما $\mathbf{R}$ و زیرفضای آن $[0,1]$ فضاهایی هاسدورف‌اند ؛ از اینرو ، مجموعه‌های باز ازهم‌جدایی مانند G و H وجود دارند که بترتیب شامل 0 و 1 می‌باشند . بنابراین ، معکوسهای آنها $f^{-1}[G]$ و $f^{-1}[H]$ ازهم جدا و بازند و بترتیب حاوی p و F می‌باشند . به‌عبارت دیگر، X منتظم نیز هست .

۱۸ . قضیه‌ٔ ۱۱۰۱۰ را ثابت کنید : رده‌ٔ $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ همه‌ٔ توابع پیوسته‌ٔ حقیقی بر فضای T_1 کاملاً منتظم X نقاط را جدا می‌کند .

حل . فرض کنیم a و b نقاط متمایزی در X باشند . چون X یک فضای T_1 است ، $\{b\}$ مجموعه‌ٔ بسته‌ای است . همچنین ، از اینکه a و b متمایزند ، $a \notin \{b\}$. طبق فرض، X کاملاً منتظم است ؛ ازاینرو ، تابعی پیوسته و حقیقی مانند f بر X هست بطوری که $f(a) = 0$ و $f[\{b\}] = \{1\}$. بنابراین ، $f(a) \neq f(b)$.

۱۹ . فرض کنید $(Y, \mathcal{T}_Y)$ زیرفضایی از $(X, \mathcal{T})$ بوده و $p \in Y$ و $A \subset Y \subset X$. نشان دهید که هرگاه p متعلق به $\mathcal{T}_Y$ ـ بست A نباشد، آنگاه p متعلق به $\bar{A}$ ، یعنی $\mathcal{T}$ ـ بست A ، نیست .

حل. طبق خاصیت زیر فضاها (ر.ک. مسئلهٔ ۸۹، فصل ۵)،

$$A \text{ بست } - \mathcal{T}_Y = Y \cap \bar{A} \cdot$$

اما $p \in Y$ و p تعلق‌به $\mathcal{T}_Y$ ــ بست A ندارد؛از اینرو، $p \notin \bar{A}$. (توجه کنید که، بخصوص، هرگاه F یک‌زیرمجموعهٔ $\mathcal{T}_Y$ ــ بستهٔ Y بوده‌و $p \notin F$، آنگاه $p \notin \bar{F}$.)

۲۰ . نشان دهید که خاصیت فضای منتظم بودن موروثی است؛ یعنی، هر زیرفضای یک فضای منتظم منتظم است.

حل. فرض‌کنیم $(X, \mathcal{T})$ یک فضای منتظم بوده و $(Y, \mathcal{T}_Y)$ زیرفضایی از $(X, \mathcal{T})$ باشد. بعلاوه، $p \in Y$ و F یک زیرمجموعهٔ $\mathcal{T}_Y$ ــ بستهٔ Y باشدبطوری‌که $p \notin F$. بنابر مسئلهٔ ۱۹، p تعلق به $\bar{F}$ ، یعنی $\mathcal{T}$ ــ بست F ، ندارد. طبق فرض، $(X, \mathcal{T})$ منتظم است؛ از اینرو،

$$\exists\ G, H \in \mathcal{T} \text{ بطوری که } \bar{F} \subset G ،\ p \in H ، \text{ و } G \cap H = \emptyset \cdot$$

اما $Y \cap G$ و $Y \cap H$ زیرمجموعه‌های $\mathcal{T}_Y$ ــ باز Y اند، و

$$\begin{aligned} F \subset Y,\ F \subset \bar{F} \subset G \quad &\Rightarrow \quad F \subset Y \cap G \\ p \in Y,\ p \in H \quad &\Rightarrow \quad p \in Y \cap H \\ G \cap H = \emptyset \quad &\Rightarrow \quad (Y \cap G) \cap (Y \cap H) = \emptyset \cdot \end{aligned}$$

بنابراین، $(Y, \mathcal{T}_Y)$ نیز منتظم است.

مسائل تکمیلی

فضاهای T_1

۲۱ . نشان دهید که خاصیت فضای T_1 بودن توپولوژیک است.

۲۲ . با مثال‌نشان دهید که نقش‌یک‌فضای T_1 تحت یک نگاشت پیوسته لزوماً " T_1 نیست.

۲۳ . فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ یک فضای T_1 بوده و $\mathcal{T} \lesssim \mathcal{T}^*$. نشان دهید که $(X, \mathcal{T}^*)$ نیز یک فضای T_1 است.

۲۴ . ثابت‌کنید X یک‌فضای T_1 است اگر و فقط‌اگر هر $p \in X$ اشتراک همهٔ مجموعه‌های باز شامل آن است؛ یعنی، $\{p\} = \bigcap\{G : p \in G$ ، G باز است$\}$.

۲۵ . فضای توپولوژیک X را یک فضای T_0 نامند اگر در اصل موضوع زیر صدق کند:

[$\mathbf{T_0}$] به‌ازای هر جفت نقطهٔ متمایز در X ، مجموعهٔ بازی شامل فقط یکی از آنها وجود داشته باشد.

(یک) یک فضای T_0 مثال بزنید که T_1 نباشد.

(دو) نشان دهید که هر فضای T_1 یک فضای T_0 نیز هست.

۲۶ . فرض کنید X یک فضای T_1 شامل دست‌کم دو نقطه باشد. نشان دهید هرگاه $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای X باشد، آنگاه $\mathcal{B} \setminus \{X\}$ نیز یک پایه برای X است.

فضاهای هاسدورف

۲۷ . نشان دهید که خاصیت فضای هاسدورف بودن توپولوژیک است.

۲۸ . فرض‌کنید $(X, \mathcal{T})$ یک فضای هاسدورف بوده و $\mathcal{T} \lesssim \mathcal{T}^*$. نشان دهید که $(X, \mathcal{T}^*)$ نیز یک فضای هاسدورف است.

۲۹ . نشان دهید که هرگاه $a_1, \ldots, a_m$ نقاط متمایزی در فضای هاسدورف X باشند، آنگاه ردهٔ ازهم‌جدایی از زیرمجموعه‌های باز X مانند $\{G_1, \ldots, G_m\}$ هست بطوری که $a_1 \in G_1, \ldots, a_m \in G_m$.

۳۰ . فرض کنید X یک فضای هاسدورف نامتناهی باشد. دراین صورت، رده‌ای ازهم‌جدا و نامتناهی از زیرمجموعه‌های باز X وجود دارد.

۳۱ . فرض کنید $f : X \to Y$ و $g : X \to Y$ توابعی‌پیوسته‌از فضای توپولوژیک X بتوی‌فضای هاسدورف Y باشند. دراین صورت، $A = \{x : f(x) = g(x)\}$ یک زیرمجموعهٔ بستهٔ X است.

فضاهای نرمال

۳۲ . نشان دهید که خاصیت فضای نرمال بودن توپولوژیک است.

۳۳ . فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی‌تولید شده به‌وسیلهٔ بازه‌های بسته ــ باز $[a, b)$ بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ باشد. نشان دهید که $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ یک فضای نرمال است.

۳۴ . فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ مستطیلهای نیمباز

$$[a, b) \times [c, d) \quad = \quad \{\langle x, y\rangle : a \leqq x < b,\ c \leqq y < d\}$$

بر صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ باشد. بعلاوه، A از نقاطی بر خط $Y = \{\langle x, y\rangle : x + y = 1\} \subset \mathbf{R}^2$ تشکیل شده باشد که مختصاتشان گویا بوده و $B = Y \setminus A$.

(یک) نشان دهید که A و B زیرمجموعه‌های بسته‌ای از $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ هستند.

(دو) نشان دهید که زیرمجموعه‌هایی $\mathcal{T}$ ــ باز و از هم‌جدا مانند G و H از $\mathbf{R}^2$ وجود ندارند که $A \subset G$ و $B \subset H$ ؛ و درنتیجه، $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ نرمال نیست.

۳۵ . فرض‌کنید A زیرمجموعهٔ بسته‌ای از یک فضای T_1 نرمال باشد. نشان دهید که

A با توپولوژی نسبی نیز یک فضای T_1 نرمال است.

۳۶ . فرض کنید X یک مجموعهٔ مرتب بوده و $\mathcal{T}$ توپولوژی ترتیب بر X باشد؛ یعنی، $\mathcal{T}$ به‌وسیلهٔ زیرمجموعه‌های X به شکل $\{x : x < a\}$ و $\{x : x > a\}$ تولید شده است. نشان دهید که $(X, \mathcal{T})$ یک فضای نرمال است.

۳۷ . فرض کنید X یک فضای نرمال باشد. ثابت کنید X منتظم است اگر و فقط اگر X کاملاً منتظم باشد.

لم اوریزن

۳۸ . هرگاه به‌ازای هر دو زیرمجموعهٔ بستهٔ از هم‌جدای F_1 و F_2 از فضای توپولوژیک X تابعی پیوسته مانند $f : X \to [0, 1]$ باشد که $f[F_1] = \{0\}$ و $f[F_2] = \{1\}$، ثابت کنید X، یک فضای نرمال است. (توجه کنید که این عکس لم اوریزن است.)

۳۹ . تعمیم لم اوریزن زیر را ثابت کنید: فرض کنید F_1 و F_2 زیرمجموعه‌های بسته و از هم‌جدایی از فضای نرمال X باشند. در این صورت، تابع پیوسته‌ای مانند $f : X \to [a, b]$ هست بطوری که $f[F_1] = \{a\}$ و $f[F_2] = \{b\}$.

۴۰ . قضیهٔ توسیع تیتس[1] را ثابت کنید: فرض کنید F زیرمجموعهٔ بسته‌ای از فضای نرمال X بوده و $f : F \to [a, b]$ یک تابع حقیقی پیوسته باشد. در این صورت، f دارای توسیع پیوسته‌ای مانند $f^* : X \to [a, b]$ است.

۴۱ . لم اوریزن را با استفاده از قضیهٔ توسیع تیتس ثابت کنید.

فضاهای منتظم و کاملاً منتظم

۴۲ . نشان دهید که خاصیت فضای منتظم بودن توپولوژیک است.

۴۳ . نشان دهید که خاصیت کاملاً منتظم بودن توپولوژیک است.

۴۴ . نشان دهید که خاصیت فضای کاملاً منتظم بودن موروثی است؛ یعنی، هر زیر فضای یک فضای کاملاً منتظم نیز کاملاً منتظم است.

۴۵ . ثابت کنید هرگاه X یک فضای لیندلف منتظم باشد، آنگاه X نرمال است.

جواب مسائل تکمیلی

۲۵ . (یک) فرض کنید $X = \{a, b\}$ و $\mathcal{T} = \{X, \{a\}, \emptyset\}$.

---

1. Tietze

فشردگی ۱۱

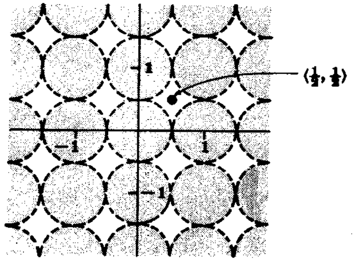
پوششها

فرض کنیم $\mathcal{A} = \{G_i\}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد بطوری که به‌ازای $A \subset X$ ای، $A \subset \cup_i G_i$. به‌یاد آورید که $\mathcal{A}$ را یک **پوشش** A می‌نامند، و یک **پوشش باز** نامند اگر هر G_i باز باشد. بعلاوه، هرگاه زیر رده‌ای متناهی از $\mathcal{A}$ نیز یک پوشش A باشد، یعنی

$$G_{i_1}, \ldots, G_{i_m} \in \mathcal{A} \quad \exists \quad \text{بطوری که} \quad A \subset G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m}\text{،}$$

آنگاه گوییم $\mathcal{A}$ به یک **پوشش متناهی تحویل می‌شود** یا شامل یک **زیرپوشش متناهی** است .

مثال ۱۰۱ . رده‌ٔ $\mathcal{A} = \{D_p : p \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}\}$ را درنظر می‌گیریم ، که در آن D_p قرص بازی درصفحهٔ $\mathbf{R}^2$ به‌شعاع 1 ومرکز $p = \langle m, n \rangle$ ، که‌درآن m و n صحیح‌اند . می‌باشد . $\mathcal{A}$ یک‌پوشش‌فضای $\mathbf{R}^2$ است؛ یعنی ، هر نقطه در $\mathbf{R}^2$ متعلق به دست کم یک عضو $\mathcal{A}$ است . از آن‌سو ، رده‌ٔ $\mathcal{B} = \{D_p^* : p \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}\}$ از قرصهای باز ، که در آن D_p به مرکز p و شعاع $\frac{1}{2}$ است ، یک پوشش $\mathbf{R}^2$ نیست . مثلاً" ، همانطور که شکل زیر نشان داده ، نقطهٔ $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \in \mathbf{R}^2$ متعلق به هیچیک از اعضای $\mathcal{B}$ نیست .



نمایش $\mathcal{B}$

مثال ۲۰۱ . قضیهٔ کلاسیک زیر را درنظر می‌گیریم .

قضیهٔ هاینه ــ بورل . ***فرض کنیم $A = [a, b]$ بازه‌ای بسته و کراندار بوده و $\{G_i\}$ رده‌ای از مجموعه‌های باز باشد بطوری که $A \subset \cup_i G_i$. در این صورت ، می‌توان تعدادی متناهی مجموعهٔ باز ، مثلاً $G_{i_1}, \ldots, G_{i_m}$ ، اختیار کرد که $A \subset G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m}$.***

با اصطلاحات فوق ، قضیهٔ هاینه ــ بورل را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

قضیهٔ هاینه ــ بورل . ***هر پوشش باز بازهٔ بسته و کراندار $A = [a, b]$ به‌یک پوشش متناهی تحویل می‌شود .***

مجموعه‌های فشرده

مفهوم **فشردگی** بی‌شک از خاصیت یک بازهٔ بسته و کراندار مذکور در قضیهٔ هاینه ــ بورل ناشی شده است ، به‌صورت زیر :

تعریف . زیرمجموعهٔ A از فضای توپولوژیک X **فشرده** است اگر هر پوشش باز A به یک پوشش متناهی تحویل شود .

به عبارت دیگر ، هرگاه A فشرده‌بوده‌و $A \subset \cup_i G_i$ ، که درآن G_i ها مجموعه‌های بازند ، آنگاه می‌توان تعدادی متناهی مجموعهٔ باز مانند $G_{i_1}, \ldots, G_{i_m}$ اختیار کرد که $A \subset G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m}$.

مثال ۱۰۲ . طبق قضیهٔ هاینه ــ بورل ، هر بازهٔ بسته و کراندار $[a, b]$ بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ فشرده است .

مثال ۲۰۲ . فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای متناهی از فضای توپولوژیک X باشد ؛ مثلاً ، $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. A لزوماً فشرده‌است . زیرا هرگاه $\mathcal{G} = \{G_i\}$ پوشش بازی از A باشد ، هر نقطه در A متعلق به یکی از اعضای $\mathcal{G}$ اند ؛ مثلاً ، $a_1 \in G_{i_1}, \ \ldots, \ a_m \in G_{i_m}$. بنابر این ، $A \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_m}$.

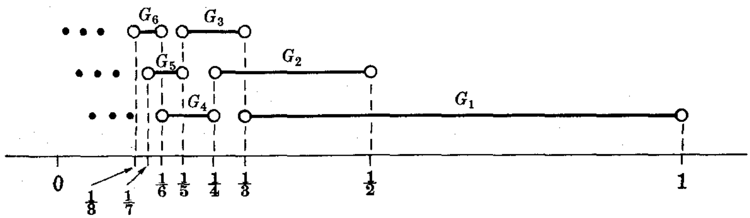
چون مجموعهٔ A فشرده‌است اگر هر پوشش باز A شامل زیرپوششی متناهی باشد ،

برای اثبات فشردن نبودن A فقط کافی است پوشش بازی از A نشان دهیم که زیرپوششی متناهی نداشته باشد.

مثال ۳۰۲ . بازهٔ باز $A = (0,1)$ بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ با توپولوژی معمولی فشرده نیست. مثلاً، ردهٔ

$$\mathcal{G} = \{(\tfrac{1}{3}, 1), (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{3}), (\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{4}), \ldots\}$$

از بازه‌های باز را درنظر می‌گیریم. ملاحظه کنید که $A = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ ، که در آن $G_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)$. از اینرو، $\mathcal{G}$ یک پوشش باز A است.



اما $\mathcal{G}$ زیرپوششی متناهی ندارد. زیرا فرض کنیم

$$\mathcal{G}^* = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_m, b_m)\}$$

زیررده‌ای متناهی از $\mathcal{G}$ باشد. هرگاه $\epsilon = \min(a_1, \ldots, a_m)$ ، آنگاه $\epsilon > 0$ و

$$(a_1, b_1) \cup \cdots \cup (a_m, b_m) \subset (\epsilon, 1) .$$

اما $(0, \epsilon]$ و $(\epsilon, 1)$ از هم جدایند. از اینرو، $\mathcal{G}^*$ یک پوشش A نیست؛ و درنتیجه، A فشرده نمی‌باشد.

مثال ۴۰۲ . نشان می‌دهیم که نقش پیوستهٔ یک مجموعهٔ فشرده نیز فشرده است؛ یعنی، هرگاه تابع $f: X \to Y$ پیوسته بوده و A زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X باشد، آنگاه نقش آن $f[A]$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Y است. زیرا فرض کنیم $\mathcal{G} = \{G_i\}$ پوشش بازی از $f[A]$ باشد؛ یعنی، $f[A] \subset \cup_i G_i$. دراین صورت،

$$A \subset f^{-1}[f[A]] \subset f^{-1}[\cup_i G_i] = \cup_i f^{-1}[G_i] .$$

از اینرو، $\mathcal{H} = \{f^{-1}[G_i]\}$ یک پوشش A است. اما f پیوسته است و هر G_i مجموعه‌ای باز است؛ درنتیجه، هر $f^{-1}[G_i]$ نیز باز است. به‌عبارت دیگر، $\mathcal{H}$ یک پوشش باز A است. اما A فشرده است؛ درنتیجه، $\mathcal{H}$ به یک پوشش متناهی تحویل می‌شود؛ مثلاً،

$$A \subset f^{-1}[G_{i_1}] \cup \cdots \cup f^{-1}[G_{i_m}] .$$

بنابراین،

$$f[A] \subset f[f^{-1}[G_{i_1}] \cup \cdots \cup f^{-1}[G_{i_m}]] \subset G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m} \cdot$$

لذا، $f[A]$ فشرده می‌باشد.

ما حصل مثال ۴.۲ را به‌طور صوری بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۱.۱ . *نقشهای پیوستهٔ مجموعه‌های فشرده فشرده‌اند.*

فشردگی *خاصیت مطلق* یک مجموعه است، یعنی،

قضیهٔ ۱۱.۲ . *فرض‌کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ باشد. A نسبت به $\mathcal{T}$ فشرده است اگر و فقط اگر A نسبت به توپولوژی نسبت $\mathcal{T}_A$ بر A فشرده باشد.*

لذا، ما دربررسی فشردگی اغلب خود را به فضاهای توپولوژیکی که خود فشرده‌اند، یعنی به ***فضاهای فشرده***، محدود می‌سازیم.

زیرمجموعه‌های فضاهای فشرده

هر زیرمجموعهٔ یک فضای فشرده لزوماً فشرده نیست. مثلاً، طبق قضیهٔ هاینه ــ بورل، بازهٔ یکهٔ بستهٔ $[0,1]$ فشرده است، اما بازهٔ باز $(0,1)$ زیرمجموعه‌ای از $[0,1]$ است که، بنابر مثال ۳.۲ فوق، فشرده نیست. با اینحال، قضیهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ ۱۱.۳ . *فرض‌کنیم F زیرمجموعهٔ بسته‌ای از فضای فشردهٔ X باشد. در این صورت، F نیز فشرده است.*

برهان. فرض‌کنیم $\mathcal{G} = \{G_i\}$ پوشش بازی از F باشد؛ یعنی، $F \subset \cup_i G_i$. پس $X = (\cup_i G_i) \cup F^c$ ؛ یعنی، $\mathcal{G}^* = \{G_i\} \cup \{F^c\}$ یک پوشش X است. اما F^c باز است، زیرا F بسته است؛ درنتیجه، $\mathcal{G}^*$ یک پوشش باز X است. طبق فرض، X فشرده است؛ از اینرو، $\mathcal{G}^*$ به پوششی متناهی از X تحویل می‌شود؛ مثلاً،

$$X = G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m} \cup F^c, \qquad G_{i_k} \in \mathcal{G} \cdot$$

اما F و F^c از هم جدایند؛ از اینرو،

$$F \subset G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m}, \qquad G_{i_k} \in \mathcal{G} .$$

هم‌اکنون نشان دادیم که هر پوشش باز $\mathcal{G} = \{G_i\}$ از F حاوی زیرپوششی متناهی است؛ یعنی، F فشرده می‌باشد.

خاصیت اشتراک متناهی

گوییم ردهٔ $\{A_i\}$ از مجموعه‌ها دارای ***خاصیت اشتراک متناهی*** است اگر هر زیرردهٔ متناهی $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}\}$ اشتراک ناتهی داشته باشد؛ یعنی، $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m} \neq \emptyset$.

مثال ۱۰۳ . ردهٔ زیر از بازه‌های باز را درنظر می‌گیریم:

$$\mathcal{A} = \{(0,1), (0, \tfrac{1}{2}), (0, \tfrac{1}{3}), (0, \tfrac{1}{4}), \ldots\} .$$

$\mathcal{A}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است، زیرا

$$(0, a_1) \cap (0, a_2) \cap \cdots \cap (0, a_m) = (0, b) ,$$

که در آن $b = \min(a_1, \ldots, a_m) > 0$. توجه کنید که خود $\mathcal{A}$ اشتراک تهی دارد.

مثال ۲۰۳ . ردهٔ زیر از بازه‌های نامتناهی بسته را درنظر می‌گیریم:

$$\mathcal{B} = \{\ldots, (-\infty, -2], (-\infty, -1], (-\infty, 0], (-\infty, 1], (-\infty, 2], \ldots\} .$$

توجه‌کنید که $\mathcal{B}$ اشتراک تهی دارد؛ یعنی، $\bigcap\{B_n : n \in \mathbf{Z}\} = \emptyset$ ، که‌درآن $B_n = (-\infty, n]$. اما هر زیر ردهٔ متناهی $\mathcal{B}$ دارای اشتراک ناتهی‌است. به عبارت دیگر، $\mathcal{B}$ در خاصیت اشتراک متناهی صدق می‌کند.

حال با اصطلاح فوق، می‌توان مفهوم فشردگی را برحسب زیرمجموعه‌های بستهٔ یک فضای توپولوژیک بیان کرد.

قضیهٔ ۴۰۱۱ . ***فضای توپولوژیک X فشرده است اگر و فقط اگر هر ردهٔ $\{F_i\}$ از زیرمجموعه‌های بستهٔ X که درخاصیت اشتراک‌متناهی‌صدق‌کند خوددارای‌اشتراک‌ناتهی‌باشد.***

فشردگی و فضاهای هاسدورف

حال مفهوم فشردگی را با خاصیت جداسازی فضاهای هاسدورف پیوند می‌دهیم.

قضیهٔ ۵۰۱۱ . ***هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ یک فضای هاسدورف بسته است.***

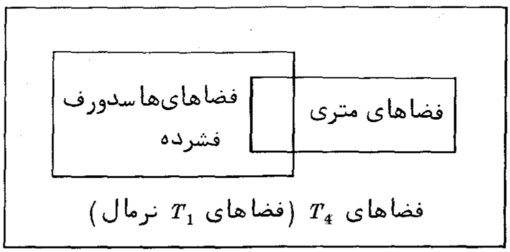
قضیهٔ فوق درحالت کلی درست نیست ؛ مثلاً ، مجموعه‌های متناهی همیشه‌فشرده‌اند ولی فضاهایی توپولوژیک وجود دارند که زیرمجموعه‌های متناهی آنها همه بسته نیستند .

قضیهٔ ۶.۱۱ . ***فرض‌کنیم A و B زیرمجموعه‌های فشرده و ازهم جدای فضای هاسدورف X باشند . دراین صورت ، مجموعه‌های باز ازهم‌جدایی مانند G و H هستند که $A \subset G$ و $B \subset H$.***

بخصوص، فرض‌کنیم X هم هاسدورف و هم فشرده بوده و F_1 و F_2 زیرمجموعه‌های بستهٔ ازهم‌جدایی از X باشند. بنابر قضیهٔ ۳.۱۱ ، F_1 و F_2 فشرده‌اند و ، بنابرقضیهٔ ۶.۱۱ ، F_1 و F_2 زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌های باز ازهم جدا می‌باشند . به‌عبارت دیگر ،

نتیجهٔ ۷.۱۱ . ***هر فضای هاسدورف فشرده نرمال است .***

لذا ، فضاهای متری و فضاهای هاسدورف فشرده هر دو مشمول ردهٔ فضاهای T_4 ، یعنی فضاهای T_1 نرمال‌اند .



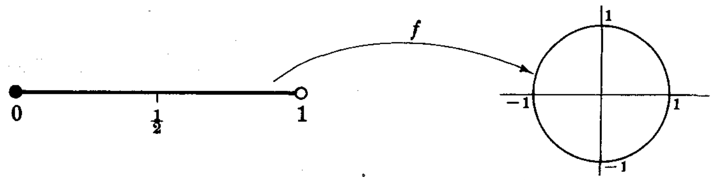
قضیهٔ زیر نقش بسیار مهمی در هندسه دارد .

قضیهٔ ۸.۱۱ . ***فرض‌کنیم f تابعی پیوسته و یک‌به‌یک از فضای فشردهٔ X بتوی فضای هاسدورف Y باشد . دراین صورت ، X و $f[X]$ همانریخت‌اند .***

مثال زیر نشان می‌دهد که قضیهٔ فوق درحالت کلی درست نیست .

مثال ۱.۴ . فرض‌کنیم f تابعی از بازهٔ نیمباز $X = [0,1)$ بتوی صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ باشد که

با $f(t) = \langle \cos 2\pi t, \sin 2\pi t \rangle$ تعریف می‌شود. توجه کنید که f مجموعهٔ X را بروی دایرهٔ یکه می‌نگارد و f یک به‌یک و پیوسته است.



اما بـازهٔ نیمباز $[0,1)$ با دایره همانریخت نیست. مثلاً، اگر نقطهٔ $t = \frac{1}{2}$ را از X حذف کنیم، X همبند نخواهد بود؛ اما اگر نقطه‌ای از دایره حذف شود، دایره هنوز همبند است. دلیل عدم کارآیی قضیهٔ ۸۰۱۱ دراین حالت فشرده نبودن X است.

مثال ۲۰۴ . فرض کنیم f تابع پیوستهٔ یک به‌یکی از بازهٔ یکهٔ بستهٔ $I = [0,1]$ بتوی فضای اقلیـدسی n بعدی $\mathbf{R}^n$ باشد. I بنا بر قضیهٔ هاینه ـ بورل فشرده است و $\mathbf{R}^n$ فضایی متری و درنتیجه هاسدورف است. بنابر قضیهٔ ۸۰۱۱، I و $f[I]$ همانریخت‌اند.

مجموعه‌های دنباله‌ای فشرده

زیرمجموعهٔ A از فضای توپولوژیک X ***دنباله‌ای فشرده*** است اگرگر هر دنباله در A شامل زیردنباله‌ای همگرا به نقطه‌ای در A باشد.

مثال ۱۰۵ . فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای متناهی از فضـای توپولوژیک X باشد. دراین صورت، A لزوماً دنباله‌ای فشرده است. زیرا هرگاه $\langle s_1, s_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای در A باشد، آنگاه دست کـم یکی از عنـاصر در A، مثلاً a_0، باید بی‌نهایت بار در دنباله ظاهر شود. از اینرو، $\langle a_0, a_0, a_0, \ldots \rangle$ زیردنباله‌ای از $\langle s_n \rangle$ است، همگـراست، و بعلاوه به نقطهٔ a_0 در A همگرا می‌باشد.

مثال ۲۰۵ . بازهٔ باز $A = (0,1)$ بر خط‌حقیقی $\mathbf{R}$ با توپولوژی‌معمولی دنباله‌ای فشرده است. مثلاً، دنبالهٔ $\langle s_n \rangle = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \rangle$ در A را درنظرمی‌گیریم. توجه کنید که $\langle s_n \rangle$ همگرا به 0 است، و درنتیجه، هر زیر دنبالهٔ آن نیز به 0 همگراست. اما 0 متعلق به A نیست. به عبارت دیگر، دنبالهٔ $\langle s_n \rangle$ در A شامل زیردنباله‌ای است که به نقطه‌ای در A همگراست؛ یعنی، A دنباله‌ای فشرده نیست.

درحالت کلی، مجموعه‌های فشرده‌ای هستند که دنباله‌ای فشرده نیستند و برعکس. بااینحال، همانطور که بعداً نشان‌می‌دهیم، این دو مفهوم درفضاهای‌متری‌هم‌ارزمی‌باشند.

تبصره. در قدیم از واژهٔ **دو فشرده** به‌جای‌فشرده‌استفاده‌می‌شد، و واژهٔ فشرده به‌معنی دنباله‌ای فشرده بکار می‌رفت.

مجموعه‌های شمارشپذیر فشرده

زیرمجموعهٔ A از فضای توپولوژیک X **شمارشپذیر فشرده** است اگفگر هر زیرمجموعهٔ نامتناهی A مانند B دارای نقطهٔ انباشتگی در A باشد. این تعریف بی‌شک از قضیهٔ کلاسیک زیرناشی شده است.

قضیهٔ بولتزانو ـ وایراشتراس. *هر مجموعهٔ نامتناهی کراندار از اعداد حقیقی نقطهٔ انباشتگی دارد.*

مثال ۱۰۶ . هر بازهٔ بستهٔ کراندار $A = [a, b]$ شمارشپذیر فشرده است. زیرا هرگاه B زیرمجموعه‌ای نامتناهی از A باشد، B نیز کرانداراست و، بنابر قضیهٔ بولتزانو وایراشتراس، B دارای نقطهٔ انباشتگی p است. بعلاوه، چون A بسته است، نقطهٔ انباشتگی p از B متعلق به A است؛ یعنی، A شمارشپذیر فشرده است.

مثال ۲۰۶ . بازهٔ باز $A = (0,1)$ شمارشپذیر فشرده نیست. زیرا زیرمجموعهٔ نامتناهی $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ از $A = (0,1)$ دقیقاً "یک‌نقطهٔ حدی دارد که 0 است و 0 به A تعلق ندارد. از اینرو، A شمارشپذیر فشرده نیست.

رابطهٔ کلی بین مجموعه‌های‌فشرده، دنباله‌ای فشرده، و شمارشپذیر فشرده درنمودار و قضیهٔ زیر داده شده است.

دنباله‌ای فشرده $\longrightarrow$ شمارشپذیر فشرده $\longleftarrow$ فشرده

قضیهٔ ۹۰۱۱ . *فرض‌کنیم A زیرمجموعه‌ای‌ازفضای‌توپولوژیک X باشد. هرگاه A فشرده یا دنباله‌ای فشرده باشد، آنگاه A شمارشپذیر فشرده نیز هست.*

مثال زیر نشان می‌دهد که در نمودار بالا هیچیک از سهمها را نمی‌توان عکس کرد.

مثال ۶.۳ . فرض کنیم $\mathcal{T}$ توپولوژی بر $\mathbf{N}$ (مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت) باشد که به وسیلهٔ مجموعه‌های زیر تولید می‌شود:

$$\{1, 2\},\ \{3, 4\},\ \{5, 6\},\ \ldots$$

همچنین، A زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathbf{N}$ باشد؛ مثلاً" $n_0 \in A$. هرگاه n_0 فرد باشد، $n_0 + 1$ نقطهٔ حدی A است؛ و اگر n_0 زوج باشد، $n_0 - 1$ نقطهٔ حدی A است. درهر حال، A نقطهٔ انباشتگی دارد. بنابراین، $(\mathbf{N}, \mathcal{T})$ شمارشپذیر فشرده است.

از آن‌سو، $(\mathbf{N}, \mathcal{T})$ فشرده نیست، زیرا

$$\mathcal{A} \;=\; \{\{1,2\},\ \{3,4\},\ \{5,6\},\ \ldots\}$$

یک پوشش باز $\mathbf{N}$ است که زیرپوشش متناهی ندارد. بعلاوه، $(\mathbf{N}, \mathcal{T})$ دنباله‌ای فشرده نیست، زیرا دنبالهٔ $\langle 1, 2, 3, \ldots \rangle$ شامل زیردنبالهٔ همگرایی نیست.

فضاهای موضعی فشرده

فضای توپولوژیک X **موضعی فشرده** است اگفگر هر نقطه در X همسایگی فشرده داشته باشد.

مثال ۷.۱ . خط حقیقی $\mathbf{R}$ با توپولوژی معمولی را درنظر می‌گیریم. توجه کنید که هر نقطهٔ $p \in \mathbf{R}$ درون یک بازهٔ بسته، مثلاً" $[p - \delta, p + \delta]$ ، است، و بازهٔ بسته طبق قضیهٔ هاینه ــ بورل فشرده است. از اینرو، $\mathbf{R}$ یک فضای موضعی فشرده است. از آن‌سو، $\mathbf{R}$ فشرده نیست؛ مثلاً"، ردهٔ

$$\mathcal{A} \;=\; \{\ldots,\ (-3, -1),\ (-2, 0),\ (-1, 1),\ (0, 2),\ (1, 3),\ \ldots\}$$

یک پوشش باز $\mathbf{R}$ است ولی زیرپوششی متناهی ندارد.

از مثال فوق معلوم می‌شود که یک فضای موضعی فشرده لزوما" فشرده نیست. از آن سو، چون یک فضای توپولوژیک همواره همسایگی هر نقطهٔ خود است، عکس آن درست است؛ یعنی،

حکم ۱۱.۱۰ . *هر فضای فشرده موضعی فشرده است.*

فشرده سازی

گوییم فضای توپولوژیک X درفضای توپولوژیک Y **نشانیده شده** است اگر X با زیرفضایی از Y همانریخت باشد. بعلاوه، هرگاه Y یک فضای فشرده باشد، آنگاه Y یک **فشرده**

سازی X نام دارد. فشرده‌سازی فضای X اغلب با افزودن یک یا چند نقطه به X و سپس تعریف توپولوژی مناسبی بر مجموعهٔ بزرگ شده انجام می‌شود بطوری که فضای بزرگ‌شده فشرده و شامل X به‌عنوان زیرفضا باشد.

مثال ۱۰۸ . خط‌حقیقی $\mathbf{R}$ با توپولوژی معمولی $\mathcal{U}$ را درنظر می‌گیریم. دو نقطهٔ جدید ∞ و $-\infty$ را به $\mathbf{R}$ افزوده و مجموعهٔ بزرگ شده را با $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ نشان داده آن را **خط حقیقی وسعت یافته** می‌نامیم. رابطهٔ ترتیبی در $\mathbf{R}$ را می‌توان با تعریف $-\infty < a < \infty$ به‌ازای هر $a \in \mathbf{R}$ وسعت داد. ردهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^*$ به‌شکل زیر:

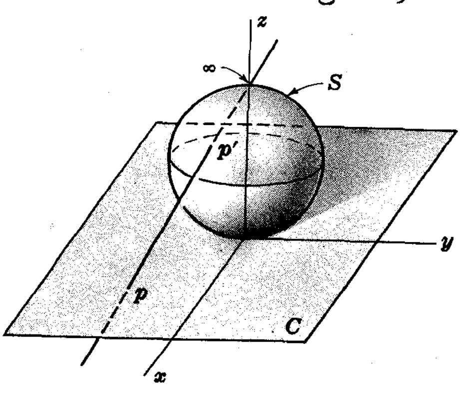
$$(a, b) = \{x : a < x < b\}, \quad (a, \infty] = \{x : a < x\}, \quad [-\infty, a) = \{x : x < a\}$$

یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{U}^*$ بر $\mathbf{R}^*$ است. بعلاوه، $(\mathbf{R}^*, \mathcal{U}^*)$ یک فضای توپولوژیک و شامل $(\mathbf{R}, \mathcal{U})$ به‌عنوان زیرفضاست؛ و درنتیجه، یک فشرده سازی $(\mathbf{R}, \mathcal{U})$ است.

به‌یاد آورید که خط حقیقی $\mathbf{R}$ با توپولوژی معمولی با هر بازهٔ باز (a, b) از اعداد حقیقی همانریخت است. درواقع، می‌توان نشان داد که فضای $(\mathbf{R}^*, \mathcal{U}^*)$ فوق با هر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ ، که طبق قضیهٔ کلاسیک هاینه ــ بورل فشرده است، همانریخت است.

مثال ۲۰۸ . فرض‌کنیم C صفحهٔ $\langle x, y\rangle$ در فضای اقلیدسی 3 بعدی $\mathbf{R}^3$ بوده، S کره به‌مرکز $\langle 0, 0, 1\rangle$ بر محور z و شعاع 1 باشد. همانطورکه شکل نشان می‌دهد، خط‌ماربر "قطب شمال" $\infty = \langle 0, 0, 2\rangle \in S$ و نقطهٔ دلخواه $p \in C$ کرهٔ S را فقط‌در یک نقطهٔ p' غیر از ∞ قطع می‌کند.

فرض‌کنیم $f : C \to S$ با $f(p) = p'$ تعریف شده باشد. f یک همانریختی از صفحهٔ C ، که فشرده نیست، بروی زیرمجموعهٔ $S \setminus \{\infty\}$ ازکرهٔ S است، و S فشرده می‌باشد. از اینرو، S یک فشرده سازی C می‌باشد.



حال فرض کنیم $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. **فشرده سازی الکساندرف** یا **یک نقطه‌ای** $(X, \mathcal{T})$ را با $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ نموده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۱) $X_\infty = X \cup \{\infty\}$، که در آن ∞، به‌نام **نقطه در بی‌نهایت**، متمایز از هر نقطهٔ دیگر در X است؛

(۲) $\mathcal{T}_\infty$ از مجموعه‌های زیر تشکیل شده است:

(یک) هر عضو توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X؛

(دو) متمم هر زیرمجموعهٔ بسته و فشردهٔ X در X_∞.

به‌طور صوری،

حکم ۱۱۰۱۱ . *ردهٔ $\mathcal{T}_\infty$ بالا یک توپولوژی بر X_∞ است، و $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ یک فشرده‌سازی $(X, \mathcal{T})$ است.*

به‌طور کلی، فضای $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ ممکن است خواصی شبیه خواص فضای اصلی نداشته باشد. بین این دو فضا رابطهٔ مهمی وجود دارد؛ یعنی،

قضیهٔ ۱۲۰۱۱ . *هرگاه $(X, \mathcal{T})$ یک فضای هاسدورف موضعی فشرده باشد، آنگاه $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ یک فضای هاسدورف فشرده است.*

با استفاده از لم اوریزن می‌توان نتیجهٔ مهمی که در نظریهٔ اندازه‌ها و انتگرالگیری بکار می‌رود بدست آورد.

نتیجهٔ ۱۳۰۱۱ . *فرض کنیم E زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از فضای هاسدورف موضعی فشردهٔ X بوده، و E زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ باز $G \neq X$ باشد. دراین صورت، تابع پیوسته‌ای مانند $f: X \to [0, 1]$ هست بطوری که $f[E] = \{0\}$ و $f[G^c] = \{1\}$.*

فشردگی در فضاهای متری

فشردگی در فضاهای متری را می‌توان در قضیهٔ زیر خلاصه کرد.

قضیهٔ ۱۴۰۱۱ . *فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای متری X باشد. دراین صورت، احکام زیر هم‌ارزند: (یک) A فشرده است؛ (دو) A شمارشپذیر فشرده است؛ و*

(سه) A **دنباله‌ای فشرده است .**

در قدیم ، فضاهای متری قبل از فضاهای توپولوژیک مطرح می‌شد ؛ از اینرو ، قضیهٔ فوق دلیل اصلی اینکه اصطلاحات فشرده و دنباله‌ای فشرده گاهی مترادفا" بکار می‌روند را بیان می‌کند .

برهان قضیهٔ فوق نیاز به معرفی دو مفهوم متری کمکی که بخودی خود جالبند را دارد ، و اینهاعبارتند از **مجموعهٔ کلی کراندار** و **عدد لبگ**[1] برای یک پوشش است .

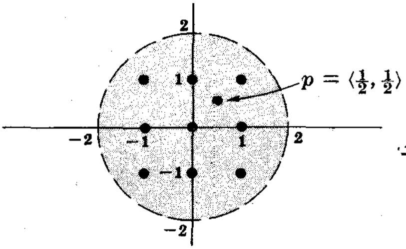
مجموعه‌های کلی کراندار

فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای متری X بوده و $\epsilon > 0$. یک مجموعهٔ متناهی از نقاط $N = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ یک ϵ **ـ تور** برای A نام دارد اگر به‌ازای هر $p \in A$ عددی مانند $e_{i_0} \in N$ باشد که $d(p, e_{i_0}) < \epsilon$.

مثال ۱.۹ . فرض کنیم $A = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 < 4\}$ ؛ یعنی ، A قرص باز به مرکز مبداء و شعاع 2 است . هرگاه $\epsilon = 3/2$ ، آنگاه مجموعهٔ

$$N = \{\langle 1,-1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 0,-1\rangle, \langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle -1,-1\rangle, \langle -1,0\rangle, \langle -1,1\rangle\}$$

یک ϵ ـ تور برای A است . از آن‌سو ، اگر $\epsilon = \frac{1}{2}$ ، N یک ϵ ـ تور برای A نیست. مثلا" ، $p = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ متعلق به A است ولی فاصلهٔ p تا هر نقطه در N از $\frac{1}{2}$ بزرگتر است .



A سایه‌دار است

N نمایش داده شده است.

به‌یاد آورید که **قطر** A ، یعنی $d(A)$ ، با

$$d(A) = \sup\{d(a, a') : a, a' \in A\}$$

تعریف می‌شود ، و A کراندار است اگر $d(A) < \infty$.

---

1. *Lebesgue*

تعریف. زیرمجموعهٔ A از فضای متری X *کلی‌کراندار* است اگر A به‌ازای هر $0 < \epsilon$ دارای ϵ ـ تور باشد.

یک مجموعهٔ کلی کراندار را می‌توان به‌صورت زیر نیز توصیف کرد.

حکم ۱۵.۱۱ . ***مجموعهٔ A کلی کراندار است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $0 < \epsilon$ تجزیه‌ای از A به تعدادی متناهی مجموعه موجود باشد که قطر هریک از ϵ کمتر باشد.***

ابتدا نشان می‌دهیم که یک مجموعهٔ کراندار لازم نیست کلی کراندار باشد.

مثال ۲.۹ . فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای هیلبرت، یعنی l_2 ـ فضا، مرکب از نقاط زیر باشد:

$$\begin{aligned} e_1 &= \langle 1, 0, 0, \ldots \rangle \\ e_2 &= \langle 0, 1, 0, \ldots \rangle \\ e_3 &= \langle 0, 0, 1, \ldots \rangle \\ &\vdots \end{aligned}$$

توجه کنید که اگر $i \neq j$ ، $d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$. از اینرو، A کراندار است؛ درواقع،

$$d(A) = \sup\{d(e_i, e_j) : e_i, e_j \in A\} = \sqrt{2} \cdot$$

ازآن‌سو، A کلی کراندار نیست. زیرا هرگاه $\epsilon = \frac{1}{2}$ ، تنها زیرمجموعه‌های ناتهی A با قطری کمتر از ϵ عبارتنداز مجموعه‌های یکانی؛ یعنی، مجموعه‌هایی با یک نقطه. بنابر‌این، مجموعهٔ نامتناهی A را نمی‌توان به تعدادی متناهی زیرمجموعهٔ ازهم جدا هریک با قطری کمتر از $\frac{1}{2}$ تجزیه کرد.

عکس حکم پیشین درست است. یعنی،

حکم ۱۶.۱۱ . ***مجموعه‌های کلی کراندار کراندار می‌باشند.***

رابطهٔ بین فشردگی و کلی کرانداری به‌صورت زیر است.

لم ۱۷.۱۱ . ***مجموعه‌های دنباله‌ای فشرده کلی کراندارند.***

اعداد لبگ برای پوششها

فرض کنیم $\mathcal{A} = \{G_i\}$ پوششی برای زیرمجموعهٔ A از فضای متری X باشد. عدد حقیقی $\delta > 0$ را یک **عدد لبگ برای** این پوشش می‌نامیم اگر به‌ازای هر زیرمجموعهٔ A با قطرکمتر از δ، عضوی از پوشش شامل A وجود داشته باشد.

رابطهٔ بین فشردگی و عدد لبگ برای یک پوشش در لم زیر آمده است.

لم (لبگ) ۱۸.۱۱ . هر پوشش *باز* یک زیرمجموعهٔ *دنباله‌ای فشرده از* یک فضای متری دارای عدد لبگ *(مثبت) است*.

مسائل حل شده

فضاهای فشرده

۱ . فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی هم‌متناهی بر یک مجموعهٔ X باشد. نشان دهید که $(X, \mathcal{T})$ یک فضای فشرده است.

حل. فرض کنیم $\mathcal{G} = \{G_i\}$ یک پوشش‌باز X است. $G_0 \in \mathcal{G}$ را اختیار می‌کنیم. چون $\mathcal{T}$ توپولوژی هم متناهی است، G_0^c یک مجموعهٔ متناهی است؛ مثلاً، $G_0^c = \{a_1, \ldots, a_m\}$. چون $\mathcal{G}$ یک پوشش X است،

به‌ازای هر $a_k \in G_0^c$، $G_{i_k} \in \mathcal{G}$ $\exists$ بطوری که $a_k \in G_{i_k}$.

از اینرو، $G_0^c \subset G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m}$ و $X = G_0 \cup G_0^c = G_0 \cup G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m}$. لذا، X فشرده است.

۲ . نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ نامتناهی A از فضای توپولوژیک مجزای X فشرده نیست.

حل. به یادآورید که اگر بتوان پوشش بازی از A بدون زیرپوشش متناهی نشان داد، A فشرده نخواهد بود. ردهٔ $\mathcal{A} = \{\{a\} : a \in A\}$ از زیرمجموعه‌های یکانی A را درنظر می‌گیریم. توجه کنید که: (یک) $\mathcal{A}$ یک پوشش A است؛ درواقع، $A = \bigcup\{\{a\} : a \in A\}$. (دو) $\mathcal{A}$ پوشش‌بازی‌از A است، زیرا همهٔ زیرمجموعه‌های یک فضای مجزا بازند. (سه) هیچ زیرردهٔ حقیقی از $\mathcal{A}$ یک پوشش A نیست. (چهار) $\mathcal{A}$ نامتناهی است چون A نامتناهی است. بنابراین، پوشش باز $\mathcal{A}$ از

A شامل زیرپوشش متناهی نیست؛ درنتیجه، A فشرده نیست.
چون مجموعه‌های متناهی همواره فشرده‌اند، نیز ثابت کرده‌ایم که هر زیرمجموعهٔ یک فضای مجزا فشرده است اگر و فقط اگر متناهی باشد.

۳ . قضیهٔ ۲.۱۱ را ثابت کنید: فرض‌کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ باشد. دراین صورت، احکام زیر هم‌ارزند:
(یک) A نسبت به $\mathcal{T}$ فشرده است؛
(دو) A نسبت به توپولوژی نسبی $\mathcal{T}_A$ بر A فشرده است.

حل. (یک) $\Leftarrow$ (دو). فرض کنیم $\{G_i\}$ یک پوشش $\mathcal{T}_A$ ـ باز A باشد. طبق تعریف توپولوژی نسبی،

$$\exists\ H_i \in \mathcal{T} \text{ بطوری که } G_i = A \cap H_i \subset H_i .$$

از اینرو،

$$A \subset \cup_i G_i \subset \cup_i H_i ;$$

و درنتیجه، $\{H_i\}$ یک پوشش $\mathcal{T}$ ـ باز A است. بنابر (یک)، A ، $\mathcal{T}$ ـ فشرده است؛ درنتیجه، $\{H_i\}$ شامل یک زیرپوشش متناهی است؛ مثلاً،

$$A \subset H_{i_1} \cup \cdots \cup H_{i_m}, \quad H_{i_k} \in \{H_i\}.$$

اما، دراین صورت،

$$A \subset A \cap (H_{i_1} \cup \cdots \cup H_{i_m}) = (A \cap H_{i_1}) \cup \cdots \cup (A \cap H_{i_m}) = G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m}.$$

لذا، $\{G_i\}$ شامل زیرپوششی متناهی مانند $\{G_{i_1}, \ldots, G_{i_m}\}$ است و $(A, \mathcal{T}_A)$ فشرده می‌باشد.

(دو) $\Leftarrow$ (یک). فرض کنیم $\{H_i\}$ یک پوشش $\mathcal{T}$ ـ باز A باشد. قرار می‌دهیم $G_i = A \cap H_i$. پس

$$A \subset \cup_i H_i \Rightarrow A \subset A \cap (\cup_i H_i) = \cup_i (A \cap H_i) = \cup_i G_i .$$

اما $G_i \in \mathcal{T}_A$ ؛ درنتیجه، $\{G_i\}$ یک پوشش $\mathcal{T}_A$ ـ باز A است. طبق فرض، A ، $\mathcal{T}_A$ ـ فشرده‌است؛ لذا، $\{G_i\}$ شامل زیرپوششی متناهی مانند $\{G_{i_1}, \ldots, G_{i_m}\}$ است. بنابراین،

$$A \subset G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m} = (A \cap H_{i_1}) \cup \cdots \cup (A \cap H_{i_m}) = A \cap (H_{i_1} \cup \cdots \cup H_{i_m}) \subset H_{i_1} \cup \cdots \cup H_{i_m}.$$

لذا، $\{H_i\}$ به یک پوشش متناهی مانند $\{H_{i_1}, \ldots, H_{i_m}\}$ تحویل می‌شود؛ و لذا، A

نسبت به $\mathcal{T}$ فشرده است.

۴ . فرض‌کنید $(Y, \mathcal{T}^*)$ زیرفضایی‌از $(X, \mathcal{T})$ بوده‌و $A \subset Y \subset X$. نشان دهید که A ، $\mathcal{T}$ ــ فشرده است اگر و فقط اگر A ، $\mathcal{T}^*$ ــ فشرده باشد.

حل. فرض‌کنیم $\mathcal{T}_A$ و $\mathcal{T}_A^*$ توپولوژیهایی نسبی بر A باشند. دراین صورت، طبق مسئلهٔ قبل، A ، $\mathcal{T}$ یا $\mathcal{T}^*$ ــفشرده است اگر و فقط اگر A ، $\mathcal{T}_A$ یا $\mathcal{T}_A^*$ فشرده باشد؛ اما $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_A^*$.

۵ . ثابت کنید احکام زیر هم‌ارزند:

(یک) X فشرده است؛

(دو) به‌ازای هر ردهٔ $\{F_i\}$ از زیرمجموعه‌های بستهٔ X ، $\cap_i F_i = \emptyset$ ایجاب می‌کند که $\{F_i\}$ شامل زیرردهٔای متناهی مانند $\{F_{i_1}, \ldots, F_{i_m}\}$ باشد که $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m} = \emptyset$.

حل. (یک) $\Leftarrow$ (دو). فرض‌کنیم $\cap_i F_i = \emptyset$. دراین صورت، طبق قانون دمورگان،

$$X = \emptyset^c = (\cap_i F_i)^c = \cup_i F_i^c \ ;$$

درنتیجه، $\{F_i^c\}$ یک پوشش باز X است، زیرا هر F_i بسته است. اما طبق فرض، X فشرده است؛ از اینرو،

$$\exists\ F_{i_1}^c, \ldots, F_{i_m}^c \in \{F_i^c\} \text{ بطوری که } X = F_{i_1}^c \cup \cdots \cup F_{i_m}^c .$$

لذا، طبق قانون دمورگان،

$$\emptyset = X^c = (F_{i_1}^c \cup \cdots \cup F_{i_m}^c)^c = F_{i_1}^{cc} \cap \cdots \cap F_{i_m}^{cc} = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m}$$

و نشان داده‌ایم که (یک) $\Leftarrow$ (دو).

(دو) $\Leftarrow$ (یک). فرض‌کنیم $\{G_i\}$ یک پوشش‌باز X باشد؛ یعنی، $X = \cup_i G_i$. بنابر قانون دمورگان،

$$\emptyset = X^c = (\cup_i G_i)^c = \cap_i G_i^c .$$

چون هر G_i باز است، $\{G_i^c\}$ رده‌ای‌از مجموعه‌های بسته‌است و، برطبق بالا، اشتراک تهی دارد. ازاینرو، طبق فرض،

$$\exists\ G_{i_1}^c, \ldots, G_{i_m}^c \in \{G_i^c\} \text{ بطوری که } G_{i_1}^c \cap \cdots \cap G_{i_m}^c = \emptyset .$$

لذا، طبق قانون دمورگان،

$$X = \emptyset^c = (G^c_{i_1} \cap \cdots \cap G^c_{i_m})^c = G^{cc}_{i_1} \cup \cdots \cup G^{cc}_{i_m} = G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m}.$$

بنابراین، X فشرده است؛ و درنتیجه، (دو) $\Leftarrow$ (یک).

۶. قضیهٔ ۴.۱۱ را ثابت کنید: فضای توپولوژیک X فشرده است اگر و فقط اگر هر ردهٔ $\{F_i\}$ از زیرمجموعه‌های بستهٔ X که درخاصیت اشتراک متناهی صدق کند خوداشتراک ناتهی دارد.

حل. با استفاده از مسئلهٔ قبل، کافی است نشان دهیم که احکام زیر هم‌ارزند، که در آنها $\{F_i\}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های بستهٔ X است:

(یک) $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m} \neq \emptyset \quad \forall i_1, \ldots, i_m \quad \Rightarrow \quad \cap_i F_i \neq \emptyset$؛

(دو) $\cap_i F_i = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists\, i_1, \ldots, i_m \text{ s.t. } F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m} = \emptyset$.

اما این احکام عکس نقیض یکدیگرند.

فشردگی و فضاهای هاسدورف

۷. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای فشرده از فضای هاسدورف X بوده و $p \in X \setminus A$. دراین صورت، مجموعه‌های بازی چون G, H هستند بطوری که $p \in G,\ A \subset H,\ G \cap H = \emptyset$.

حل. فرض‌کنیم $a \in A$. چون $p \notin A$، $p \neq a$. طبق‌فرض، X هاسدورف است؛ از اینرو، مجموعه‌های بازی چون G_a, H_a هستند بطوری که $p \in G_a,\ a \in H_a,\ G_a \cap H_a = \emptyset$. از اینرو، $A \subset \bigcup\{H_a : a \in A\}$؛ یعنی، $\{H_a : a \in A\}$ یک پوشش باز A است. اما A فشرده است؛ درنتیجه،

$\exists\ H_{a_1}, \ldots, H_{a_m} \in \{H_a\}$ بطوری که $A \subset H_{a_1} \cup \cdots \cup H_{a_m}$.

حال فرض کنیم $H = H_{a_1} \cup \cdots \cup H_{a_m}$ و $G = G_{a_1} \cap \cdots \cap G_{a_m}$، H و G بازند، زیرابترتیب اجتماع‌واشتراک متناهی مجموعه‌های بازند. بعلاوه، $A \subset H$ و $p \in G$، زیرا p به هر G_{a_i} تعلق دارد.

بالاخره، حکم می‌کنیم که $G \cap H = \emptyset$. ابتدا توجه می‌کنیم که $G_{a_i} \cap H_{a_i} = \emptyset$ ایجاب می‌کند که $G \cap H_{a_i} = \emptyset$. لذا، طبق قانون پخشپذیری،

$$G \cap H = G \cap (H_{a_1} \cup \cdots \cup H_{a_m}) = (G \cap H_{a_1}) \cup \cdots \cup (G \cap H_{a_m}) = \emptyset \cup \cdots \cup \emptyset = \emptyset$$

لذا، برهان کامل خواهد بود.

۸ . فرض کنید A زیرمجموعه‌ای فشرده از فضای هاسدورف X باشد. نشان دهید هرگاه $p \notin A$ ، آنگاه مجموعهٔ بازی چون G هست بطوری که $p \in G \subset A^c$.

حل. طبق مسئلهٔ ۷، مجموعه‌های بازی چون G و H هستند بطوری که $p \in G$ ، $A \subset H$ ، و $G \cap H = \emptyset$. ازاینرو، $G \cap A = \emptyset$ ، و $p \in G \subset A^c$.

۹ . قضیهٔ ۱۱ . ۵ را ثابت کنید: فرض کنید A زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از فضای هاسدورف X باشد. دراین صورت، A بسته است.

حل. ثابت می‌کنیم A^c باز است. فرض کنیم $p \in A^c$ ؛ یعنی، $p \notin A$. طبق مسئلهٔ ۸، مجموعهٔ بازی چون G_p هست بطوری که $p \in G_p \subset A^c$. ازاینرو، $A^c = \bigcup\{G_p : p \in A^c\}$.
لذا، A^c اجتماعی از مجموعه‌های باز بوده و باز است، یا، A بسته می‌باشد.

۱۰ . قضیهٔ ۱۱ . ۶ را ثابت کنید: فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های فشردهٔ ازهم جدایی از فضای هاسدورف X باشند. دراین صورت، مجموعه‌های باز از هم جدایی مانند G و H هستند بطوری که $A \subset G$ و $B \subset H$.

حل. فرض کنیم $a \in A$. پس $a \notin B$ ، زیرا A و B ازهم جدایند. طبق فرض، B فشرده است؛ درنتیجه، بنابر مسئلهٔ ۱، مجموعه‌های بازی چون G_a و H_a وجود دارند بطوری که

$$a \in G_a ،\ B \subset H_a ،\ و\ G_a \cap H_a = \emptyset .$$

چون $a \in G_a$ ، $\{G_a : a \in A\}$ یک پوشش باز A است. چون A فشرده است، می‌توان تعدادی متناهی مجموعهٔ باز، مثلاً $G_{a_1}, \ldots, G_{a_m}$ ، اختیار کرد بقسمی که $A \subset G_{a_1} \cup \cdots \cup G_{a_m}$. بعلاوه، $B \subset H_{a_1} \cap \cdots \cap H_{a_m}$ ، زیرا B زیرمجموعهٔ تک تک آنهاست.
حال فرض کنیم $G = G_{a_1} \cup \cdots \cup G_{a_m}$ و $H = H_{a_1} \cap \cdots \cap H_{a_m}$. طبق مطلب فوق، $A \subset G$ و $B \subset H$. بعلاوه، G و H بازند زیرا بترتیب اجتماع و اشتراک متناهی

مجموعه‌های باز می‌باشند. قضیه درصورتی ثابت می‌شود که نشان دهیم G و H از هم‌جدایند. ابتدا توجه می‌کنیم که به‌ازای هر i ، $G_{a_i} \cap H_{a_i} = \emptyset$ ایجاب می‌کند که $G_{a_i} \cap H = \emptyset$. از اینرو، بنابر قانون پخشپذیری،

$$G \cap H = (G_{a_1} \cup \cdots \cup G_{a_m}) \cap H = (G_{a_1} \cap H) \cup \cdots \cup (G_{a_m} \cap H) = \emptyset \cup \cdots \cup \emptyset = \emptyset$$

لذا، قضیه ثابت شده است.

۱۱ . قضیهٔ ۸.۱۱ را ثابت کنید: فرض کنید f تابع پیوستهٔ یک به یکی از فضای فشردهٔ X بتوی فضای هاسدورف Y باشد. دراین صورت، X و $f[X]$ همانریختاند.

حل. $f: X \to f[X]$ بروست و، بنا به فرض، یک به‌یک و پیوسته است؛ درنتیجه، $f^{-1}: f[X] \to X$ وجود دارد. باید نشان دهیم که f^{-1} پیوسته است. به‌یاد آورید که f^{-1} پیوسته‌است اگر به‌ازای هر زیرمجموعهٔ بستهٔ F از X ، $(f^{-1})^{-1}[F] = f[F]$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $f[X]$ است. طبق قضیهٔ ۳.۱۱ ، زیرمجموعهٔ بستهٔ F از فضای فشردهٔ X فشرده نیز هست. چون f پیوسته‌است، $f[F]$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $f[X]$ است. اما زیرفضای $f[X]$ از فضای هاسدورف Y نیز هاسدورف است؛ در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۵.۱۱ ، $f[F]$ بسته است. بنابراین، f^{-1} پیوسته است؛ درنتیجه، $f: X \to f[X]$ یک همانریختی است، و X و $f[X]$ همانریختاند.

۱۲ . فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ فشرده و $(X, \mathcal{T}^*)$ هاسدورف باشد. نشان دهید که اگر $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$ ، $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$.

حل. تابع $f: (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}^*)$ تعریف شده با $f(x) = x$ ، یعنی تابع همانی بر X ، را درنظر می‌گیریم. f یک ـ یک و بروست. بعلاوه، f پیوسته‌است زیرا $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$. لذا، طبق مسئلهٔ قبل، f یک همانریختی است؛ و درنتیجه، $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$.

مجموعه‌های دنباله‌ای و شمارشپذیر فشرده

۱۳ . نشان دهید که نقش پیوستهٔ یک مجموعهٔ دنباله‌ای فشرده دنباله‌ای فشرده است.

حل. فرض کنیم $f: X \to Y$ تابع پیوسته‌ای بوده و A زیرمجموعه‌ای دنباله‌ای فشرده

از X باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که $f[A]$ یک زیرمجموعهٔ دنباله‌ای فشرده از Y است. فرض کنیم $\langle b_1, b_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای در $f[A]$ باشد. دراین صورت،

$\exists\ a_1, a_2, \ldots \in A$ بطوری که $\forall\, n \in \mathbf{N}$ ، $f(a_n) = b_n$.

اما A دنباله‌ای فشرده است؛ درنتیجه، دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ شامل زیردنباله‌ای مانند $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots \rangle$ است که به نقطهٔ $a_0 \in A$ همگراست. اما f پیوسته و درنتیجه دنباله‌ای پیوسته است؛ درنتیجه، $\langle f(a_{i_1}), f(a_{i_2}), \ldots \rangle = \langle b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots \rangle$ همگرا به $f(a_0) \in f[A]$ است. لذا، $f[A]$ دنباله‌ای فشرده است.

۱۴. فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژیی بر X باشد مرکب از $\emptyset$ و متممهای زیرمجموعه‌های حداکثر شمارشپذیر از X. نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ نامتناهی X دنباله‌ای فشرده نیست.

حل. به یادآورید (مثال ۳۰۷، صفحهٔ ۱۲۹) که یک دنباله در $(X, \mathcal{T})$ همگراست اگفگر به‌شکل زیر باشد:

$$\langle a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{n_0},\, p,\, p,\, p,\, \ldots \rangle\ ;$$

یعنی، جملات ازمرتبه‌ای به بعد ثابت‌اند. از اینرو، اگر A زیرمجموعه‌ای نامتناهی از X باشد، دنباله‌ای مانند $\langle b_n \rangle$ در A با جملات متمایز وجود دارد. لذا، $\langle b_n \rangle$ شامل زیردنباله‌ای همگرا نیست، و A دنباله‌ای فشرده نیست.

۱۵. نشان‌دهید که (یک) نقش پیوستهٔ یک مجموعهٔ شمارشپذیر فشرده لزوماً "شمارشپذیر فشرده نیست؛ (دو) هرزیرمجموعهٔ بستهٔ یک فضای شمارشپذیر فشرده شمارشپذیر فشرده است.

حل. (یک) فرض کنیم $X = (\mathbf{N}, \mathcal{T})$ ، که در آن $\mathcal{T}$ توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ مجموعه‌های $\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \ldots$ بر اعداد صحیح مثبت $\mathbf{N}$ باشد. بنابرمثال ۳۰۶، X شمارشپذیر فشرده‌است. فرض‌کنیم $Y = (\mathbf{N}, \mathcal{D})$ ، که در آن $\mathcal{D}$ توپولوژی مجزا بر $\mathbf{N}$ است. Y شمارشپذیرفشرده نیست. ازآن‌سو، تابع $f: X \to Y$ که به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $2n$ و $2n-1$ را بروی n می‌نگارد پیوسته بوده و مجموعهٔ شمارشپذیرفشردهٔ X را بروی مجموعهٔ Y که شمارشپذیر فشرده نیست می‌نگارد.

(دو) فرض کنیم X شمارشپذیر فشرده بوده و F زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X باشد.

همچنین، A زیرمجموعه‌ای نامتناهی از F باشد. چون $F \subset X$ ، A یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از X نیز هست. بنا به فرض، X شمارشپذیر فشرده است؛ در این صورت، A نقطهٔ انباشتگی مانند $p \in X$ دارد. چون $A \subset F$ ، p نقطهٔ انباشتگی F نیز هست. اما F بسته بوده؛ و درنتیجه، شامل نقاط انباشتگی خود است؛ لذا، $p \in F$. پس نشان داده‌ایم که هر زیرمجموعهٔ نامتناهی A از F دارای نقطهٔ انباشتگی $p \in F$ است؛ یعنی، F شمارشپذیر فشرده می‌باشد.

۱۶. فرض کنید X فشرده باشد. ثابت کنید X شمارشپذیر فشرده است.

حل. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از X بدون نقطهٔ انباشتگی در X باشد. پس هر نقطهٔ $p \in X$ متعلق به مجموعهٔ بازی مانند G_p است که حداکثر یک نقطه از A را دارد. توجه کنید که ردهٔ $\{G_p : p \in X\}$ یک پوشش باز مجموعهٔ فشردهٔ X است و، درنتیجه، شامل زیرپوششی متناهی، مثلاً $\{G_{p_1}, \ldots, G_{p_m}\}$ ، می‌باشد. ازاینرو،

$$A \subset X \subset G_{p_1} \cup \cdots \cup G_{p_m}.$$

اما هر G_{p_i} شامل حداکثر یک نقطه از A است؛ ازاینرو، A که زیرمجموعهٔ $G_{p_1} \cup \cdots \cup G_{p_m}$ است می‌تواند حداکثر m نقطه داشته باشد؛ یعنی، A متناهی است. بنابراین، هرزیرمجموعهٔ نامتناهی از X شامل نقطهٔ انباشتگی در X است؛ یعنی، X شمارشپذیر فشرده است.

۱۷. ثابت کنید هرگاه X دنباله‌ای فشرده باشد، آنگاه X شمارشپذیر فشرده است.

حل. فرض کنیم A یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از X باشد. دراین صورت، دنباله‌ای مانند $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ در A با جملات متمایز وجود دارد. چون X دنباله‌ای فشرده است، دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ شامل زیردنباله‌ای مانند $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots \rangle$ (نیز با جملات متمایز) هست که به نقطه‌ای مانند $p \in X$ همگراست. ازاینرو، هر همسایگی باز p شامل تعدادی نامتناهی جمله از زیردنبالهٔ همگرای $\langle a_{i_n} \rangle$ است. اما جملات متمایزند؛ ازاینرو، هر همسایگی باز p شامل بی‌نهایت نقطه در A است. بنابراین، $p \in X$ یک نقطهٔ انباشتگی A می‌باشد. به‌عبارت دیگر، X شمارشپذیر فشرده است.

تبصره. توجه کنید که مسائل ۱۶ و ۱۷ قضیهٔ ۹.۱۱ را ایجاب می‌کنند.

۱۸ . فرض کنید $A \subset X$ دنباله‌ای فشرده باشد. ثابت کنید هر پوشش باز حداکثر شمارشپذیر از A به پوششی متناهی تحویل می‌شود.

حل. می‌توان A را نامتناهی گرفت، زیرا در غیر این‌صورت اثبات واضح است. عکس‌نقیض‌حکم را ثابت می‌کنیم؛ یعنی، ثابت می‌کنیم پوشش باز حداکثرشمارشپذیری مانند $\{G_i : i \in \mathbf{N}\}$ هست که زیرپوشش متناهی ندارد. دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

فرض‌کنیم n_1 کوچکترین عدد صحیح‌مثبت باشد که $A \cap G_{n_1} \neq \emptyset$. $a_1 \in A \cap G_{n_1}$ را اختیار می‌کنیم. فرض کنیم n_2 کوچکترین عدد صحیح مثبتی بزرگتر از n_1 باشد که $A \cap G_{n_2} \neq \emptyset$.

$$a_2 \in (A \cap G_{n_2}) \setminus (A \cap G_{n_1})$$

را اختیار می‌کنیم. این نقطه همیشه وجود دارد، زیرا درغیر این‌صورت G_{n_1} ، A را می‌پوشاند. اگر به‌همین نحو ادامه دهیم، دنباله‌ای مانند $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ بدست می‌آوریم با این خاصیت که به‌ازای هر $i \in \mathbf{N}$ ،

$a_i \in A \cap G_{n_i}$ ، $a_i \notin \cup_{j=1}^{n-1} (A \cap G_{n_j})$ ، و $n_i > n_{i-1}$.

حکم می‌کنیم که $\langle a_i \rangle$ زیر دنبالهٔ همگرا در A ندارد. فرض کنیم $p \in A$. دراین صورت،

$G_{i_0} \in \{G_i\}$ $\exists$ بطوری که $p \in G_{i_0}$.

اما $A \cap G_{i_0} \neq \emptyset$ ، زیرا $p \in A \cap G_{i_0}$ ؛ از اینرو،

$j_0 \in \mathbf{N}$ $\exists$ بطوری که $G_{n_{j_0}} = G_{i_0}$.

اما، بنابر انتخاب دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ ،

$$i > j_0 \quad \Rightarrow \quad a_i \notin G_{i_0} .$$

لذا، چون G_{i_0} مجموعهٔ بازی شامل p است، هیچ زیر دنباله‌ای از $\langle a_i \rangle$ همگرا به p نیست. اما p دلخواه بود؛ درنتیجه، A دنباله‌ای فشرده نیست.

فشردگی در فضاهای متری

۱۹ . لم ۱۷.۱۱ را ثابت کنید: فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ دنباله‌ای فشرده از فضای متری X باشد. دراین صورت، A کلی کراندار است.

حل. عکس نقیض حکم را ثابت می‌کنیم؛ یعنی، هرگاه A کلی کراندار نباشد،

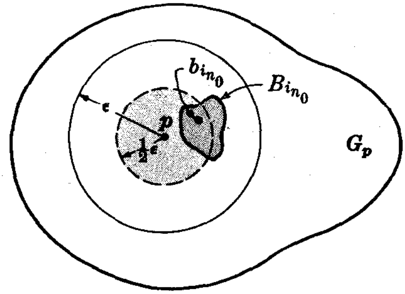
آنگاه A دنباله‌ای فشرده نیست. هرگاه A کلی کراندار نباشد، $\epsilon > 0$ ی هست بطوری‌که A دارای ϵ ـ تور (متناهی) نیست. فرض کنیم $a_1 \in A$. دراین‌صورت، نقطه‌ای مانند $a_2 \in A$ هست که $d(a_1, a_2) \geq \epsilon$، زیرا درغیر این‌صورت $\{a_1\}$ یک ϵ ـ تور برای A خواهدبود. بهمین‌نحو، نقطه‌ای مانند $a_3 \in A$ هست که $d(a_1, a_3) \geq \epsilon$ و $d(a_2, a_3) \geq \epsilon$، زیرا درغیر این‌صورت $\{a_1, a_2\}$ یک ϵ ـ تور برای A می‌باشد. با ادامهٔ این‌کار به دنباله‌ای مانند $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ با این خاصیت که به‌ازای $i \neq j$، $d(a_i, a_j) \geq \epsilon$ می‌رسیم. لذا، دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ نمی‌تواند شامل زیردنباله‌ای همگرا باشد. به‌عبارت دیگر، A دنباله‌ای فشرده است.

۲۰. لم (لبگ) ۱۸.۱۱ را ثابت کنید. فرض کنید $\mathscr{A} = \{G_i\}$ پوششی باز از مجموعهٔ دنباله‌ای فشردهٔ A باشد. دراین صورت، $\mathscr{A}$ دارای عدد لبگ (مثبت) است.

حل. فرض کنیم $\mathscr{A}$ عدد لبگ نداشته باشد. دراین صورت، به‌ازای هر عدد صحیح مثبت $n \in \mathbf{N}$، زیرمجموعه‌ای مانند B_n از A هست با این خاصیت که $0 < d(B_n) < 1/n$ و به‌ازای هر G_i در $\mathscr{A}$، $B_n \not\subset G_i$.

به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، نقطهٔ $b_n \in B_n$ را اختیار می‌کنیم. چون A دنباله‌ای فشرده‌است دنبالهٔ $\langle b_1, b_2, \ldots \rangle$ شامل زیردنباله‌ای مانند $\langle b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots \rangle$ است همگرا به نقطه‌ای مانند $p \in A$

چون $p \in A$، p متعلق‌به مجموعهٔ بازی مانند G_p در پوشش $\mathscr{A}$ است. از اینرو، کرهٔ بازی مانند $S(p, \epsilon)$ به مرکز p و شعاع ϵ هست بطوری که $p \in S(p, \epsilon) \subset G_p$. چون $\langle b_{i_n} \rangle$ همگرا به p است، عدد صحیح مثبتی مانند i_{n_0} هست بطوری که $d(p, b_{i_{n_0}}) < \frac{1}{2}\epsilon$، $b_{i_{n_0}} \in B_{i_{n_0}}$ و $d(B_{i_{n_0}}) < \frac{1}{2}\epsilon$.



$B_{i_{n_0}}$ سایه‌دار است

با استفاده از نامساوی مثلثی بدست می‌آوریم $B_{i_{n_0}} \subset S(p,\epsilon) \subset G_p$. اما این با این امر که به‌ازای هر G_i در پوشش $\mathcal{A}$ ، $B_{i_{n_0}} \not\subset G_i$ متناقض است. بنابراین ، $\mathcal{A}$ عدد لبگ دارد.

۲۱ . فرض کنید A زیرمجموعه‌ای شمارشپذیر فشرده از فضای متری X باشد. ثابت کنید A دنباله‌ای فشرده نیز هست.

حل. فرض‌کنیم $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای‌در A باشد. هرگاه‌مجموعهٔ $B = \{a_1, a_2, \ldots\}$ متناهی‌باشد، آنگاه یکی از نقاط، مثلاً a_{i_0} ، به‌ازای بی‌نهایت $j \in \mathbf{N}$ در $a_{i_0} = a_j$ صدق مـی‌کند. از اینرو، $\langle a_{i_0}, a_{i_0}, \ldots \rangle$ زیر دنباله‌ای از $\langle a_n \rangle$ است که به نقطهٔ a_{i_0} در A همگراست. از آن‌سـو، فـرض کنیم $B = \{a_1, a_2, \ldots\}$ نامتناهی باشد. طبق فرض، A شمارشپذیر فشـرده است. از اینرو، B زیرمجموعه‌ای نامتناهی از A و شـامـل نقطـهٔ انبـاشتگیی مانند p در A است. اما X یک فضای متری است؛ درنتیجه، می‌توان زیر دنباله‌ای مانند $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots \rangle$ از دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ اختیار کرد که به نقطهٔ p در A همگرا باشد. به عبارت دیگر، A دنباله‌ای فشرده است.

۲۲ . قضیهٔ ۱۴.۱۱ را ثابت کنید: فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای متری X باشد. دراین صورت، احکام زیر با هم هم‌ارزند: (یک) A فشرده است؛ (دو) A شمارشپذیر فشرده است؛ و (سه) A دنباله‌ای فشرده است.

حل. به‌یاد آوریـد (ر.ک. قضیهٔ ۸.۱۱) که (یک) حکم (دو) را در هر فضای توپولوژیک ایجاب می‌کند؛ لذا، این امر در یک فضای متری درست است. در مسئلهٔ پیش ثابت شد که (دو) حکم (سه) را ایجـاب می‌کند. بنابراین، قضیه درصورتی ثابت می‌شود کـه نشان دهیم (سه) حکم (یک) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم A دنباله‌ای‌فشرده‌بوده، و $\mathcal{A} = \{G_i\}$ پوشش‌بازی‌از A باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که A فشرده است؛ یعنی، $\mathcal{A}$ زیر پوشش متناهی دارد. طبق فرض، A دنباله‌ای فشرده است؛ از اینرو، طبق‌لم ۱۸.۱۱ ، پوشش $\mathcal{A}$ عدد لبگی مانند $\delta > 0$ دارد. علاوه براین، طبـق‌لم ۱۷.۱۱ ، A کلی کراندار است. از اینرو، تجزیه‌ای از A به تعدادی متناهی زیرمجموعه، مانند $B_1, \ldots, B_m$ هست، که $d(B_i) < \delta$. اما δ عدد لبگ‌برای $\mathcal{A}$ است؛ ازاینرو، مجموعه‌های بازی چون $G_{i_1}, \ldots, G_{i_m} \in \mathcal{A}$ هست

بقسمی که

$$B_1 \subset G_{i_1}, \ \ldots, \ B_m \subset G_{i_m} \ .$$

بنابراین،

$$A \subset B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_m} \ .$$

لذا، $\mathcal{A}$ زیرپوششی متناهی مانند $\{G_{i_1}, \ldots, G_{i_m}\}$ دارد؛ یعنی، A فشرده است.

۲۳. فرض کنید A زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از فضای متری (X,d) باشد. نشان دهید که به‌ازای هر $B \subset X$ نقطه‌ای مانند $p \in A$ هست که $d(p,B) = d(A,B)$.

حل. فرض کنیم $d(A,B) = \epsilon$. چون

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, \ b \in B\} ,$$

به‌ازای‌هرعدد صحیح مثبت $n \in \mathbf{N}$،

$$\exists \ a_n \in A, \ b_n \in B \text{ بطوری که } \epsilon \leqq d(a_n, b_n) < \epsilon + 1/n \ .$$

اما A فشرده و درنتیجه دنباله‌ای فشرده است؛ درنتیجه، دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ زیر دنباله‌ای دارد که همگرا به نقطه‌ای مانند $p \in A$ است. حکم می‌کنیم که $d(p,B) = d(A,B) = \epsilon$.

فرض کنیم $d(p,B) > \epsilon$؛ مثلاً"، $d(p,B) = \epsilon + \delta$، که درآن $\delta > 0$. چون زیر دنباله‌ای از $\langle a_n \rangle$ همگرا به p است،

$$\exists \ n_0 \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } d(p, a_{n_0}) < \tfrac{1}{2}\delta \text{ و } d(a_{n_0}, b_{n_0}) < \epsilon + 1/n_0 < \epsilon + \tfrac{1}{2}\delta \ .$$

دراین صورت،

$$d(p, a_{n_0}) + d(a_{n_0}, b_{n_0}) < \tfrac{1}{2}\delta + \epsilon + \tfrac{1}{2}\delta = \epsilon + \delta = d(p,B) \leqq d(p, b_{n_0}) \ .$$

اما این با نامساوی مثلثی متناقض است؛ از اینرو، $d(p,B) = d(A,B)$.

۲۴. فرض کنید A زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از فضای متری (X,d) بوده و B زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X باشد بطوری که $A \cap B = \emptyset$. نشان دهید که $d(A,B) > 0$.

حل. فرض کنیم $d(A,B) = 0$. طبق مسئلهٔ قبل،

$$\exists \ p \in A \text{ بطوری که } d(p,B) = d(A,B) = 0 \ .$$

اما B بسته است و لذا شامل همهٔ نقاطی است که فاصله‌شان تا B صفر است. لذا، $p \in B$؛ و درنتیجه، $p \in A \cap B$. اما این با فرض متناقض است؛ از اینرو،

. $d(A,B) > 0$

۲۵ . فرض کنید f تابع پیوسته‌ای از فضای متری فشرده‌ٔ (X,d) بتوی فضای متری (Y,d^*) باشد. ثابت کنید f **یکشکل پیوسته** است؛ یعنی، به‌ازای هر $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای هست بطوری که

$$d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*(f(x),f(y)) < \epsilon .$$

(**تبصره.** پیوستگی یکشکل شرطی قویتر از پیوستگی است، از اینجهت که δ ی فوق فقط تابع ϵ است و به نقطهٔ خاصی بستگی ندارد.)

حل. فرض کنیم $\epsilon > 0$. چون f پیوسته است، به‌ازای هر نقطهٔ $p \in X$ کرهٔ بازی مانند $S(p,\delta_p)$ هست بقسمی که

$$x \in S(p,\delta_p) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in S(f(p), \tfrac{1}{2}\epsilon) .$$

توجه کنید که ردهٔ $\mathcal{A} = \{S(p,\delta_p) : p \in X\}$ پوشش بازی از X است. طبق فرض، X فشرده و درنتیجه دنباله‌ای فشرده است. بنابراین، پوشش $\mathcal{A}$ دارای عدد لبگی مانند $\delta > 0$ است.

حال فرض کنیم $x,y \in X$ با $d(x,y) < \delta$. اما $d(x,y) = d\{x,y\} < \delta$ ایجاب‌می‌کند که $\{x,y\}$ مشمول عضوی مانند $S(p_0,\delta_{p_0})$ از پوشش A باشد. داریم

$$x,y \in S(p_0,\delta_{p_0}) \quad \Rightarrow \quad f(x),f(y) \in S(f(p_0), \tfrac{1}{2}\epsilon) .$$

اما کرهٔ $S(f(p_0),\frac{1}{2}\epsilon)$ دارای قطر ϵ است. بنابراین،

$$d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*(f(x),f(y)) < \epsilon .$$

به عبارت دیگر، f یکشکل پیوسته است.

مسائل تکمیلی

فضاهای فشرده

۲۶ . هرگاه E فشرده و F بسته باشد، ثابت کنید $E \cap F$ فشرده است.

۲۷ . فرض کنید $A_1, \ldots, A_m$ زیرمجموعه‌های فشرده‌ای ازفضای توپولوژیک X باشد. نشان دهید که $A_1 \cup \cdots \cup A_m$ نیز فشرده است.

۲۸ . ثابت کنید فشردگی یک خاصیت توپولوژیک است.

۲۹ . حکم ۱۱۰۱۱ را ثابت کنید: ردهٔ $\mathcal{T}_\infty$ یک توپولوژی بر X_∞ است و $(X_\infty,\mathcal{T}_\infty)$ یک فشرده‌سازی $(X,\mathcal{T})$ می‌باشد. (دراینجا $(X_\infty,\mathcal{T}_\infty)$ فشرده‌سازی‌یک‌نقطه‌ای الکساندرف

$(X, \mathcal{T})$ می‌باشد.)

۳۰. قضیهٔ ۱۲.۱۱ را ثابت کنید: هرگاه $(X, \mathcal{T})$ یک فضای هاسدورف موضعی فشرده باشد، آنگاه $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ یک فضای هاسدورف فشرده است.

فضاهای دنباله‌ای و شمارشپذیر فشرده

۳۱. نشان دهید که فشردگی دنباله‌ای یک خاصیت توپولوژیک است.

۳۲. ثابت کنید هرزیرمجموعهٔ بستهٔ یک فضای دنباله‌ای فشرده دنباله‌ای فشرده است.

۳۳. نشان دهید که فشردگی شمارشپذیری یک خاصیت توپولوژیک است.

۳۴. فرض کنید $(X, \mathcal{T})$ شمارشپذیر فشرده بوده و $\mathcal{T}^* \leq \mathcal{T}$. نشان دهید که $(X, \mathcal{T}^*)$ نیز شمارشپذیر فشرده است.

۳۵. فرض کنید X فضایی توپولوژیک باشد بطوری که هر پوشش باز حداکثر شمارشپذیر از X به پوششی متناهی تحویل شود. ثابت کنید X شمارشپذیر فشرده است.

۳۶. فرض کنید X یک فضای T_1 باشد. ثابت کنید X شمارشپذیر فشرده است اگر و فقط اگر هر پوشش باز حداکثر شمارشپذیر از X به پوشش متناهی تحویل شود.

۳۷. فرض کنید X یک‌فضای T_1 شمارشپذیر دوم باشد. ثابت کنید X فشرده است اگر و فقط‌اگر X شمارشپذیر فشرده باشد.

مجموعه‌های کلی کراندار

۳۸. حکم ۱۵.۱۱ را ثابت کنید: مجموعهٔ A کلی کراندار است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $0 < \epsilon$ تجزیه‌ای از A به تعدادی متناهی مجموعه موجود باشد که قطر هریک از ϵ کمتر باشد.

۳۹. حکم ۱۶.۱۱ را ثابت کنید: مجموعه‌های کلی کراندار کراندارند.

۴۰. نشان دهید که هرزیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ کلی کراندار کلی کراندار است.

۴۱. نشان دهید هرگاه A کلی کراندار باشد، آنگاه $\bar{A}$ نیز کلی کراندار است.

۴۲. ثابت کنید هر فضای متری کلی کراندار جدایی‌پذیر است.

فشردگی و فضاهای متری

۴۳. ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ فضای متری X بسته و کراندار است.

۴۴. فرض کنید $f: X \to Y$ تابع پیوسته‌ای‌ازفضای فشردهٔ X بتوی فضای متری Y باشد. ثابت کنید $f[X]$ زیرمجموعهٔ کرانداری از Y است.

۴۵ . ثابت کنید زیرمجموعهٔ A از خط حقیقی R فشرده است اگر و فقط اگر A بسته و کراندار باشد.

۴۶ . فرض کنید A زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از فضای متری X باشد. ثابت کنید مجموعهٔ مشتق A' از A فشرده است.

۴۷ . ثابت کنید مکعب هیلبرت $\mathbf{I} = \{\langle a_n \rangle : 0 \leq a_n \leq 1/n\}$ یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbf{R}^\infty$ است.

۴۸ . فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های فشرده‌ای از فضای متری X باشند. ثابت کنید $a \in A$ و $b \in B$ ای وجود دارند بطوری که $d(a, b) = d(A, B)$.

فضاهای موضعی فشرده

۴۹ . نشان دهید که فشردگی موضعی یک خاصیت توپولوژیک است.

۵۰ . نشان دهید که هر فضای مجزا موضعی فشرده است.

۵۱ . نشان دهید که هر فضای نامجزا موضعی فشرده است.

۵۲ . نشان دهید که صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ با توپولوژی معمولی موضعی فشرده است.

۵۳ . فرض کنید A زیرمجموعهٔ بسته‌ای از فضای موضعی فشردهٔ $(X, \mathcal{T})$ باشد. ثابت کنید A با توپولوژی نسبی موضعی فشرده است.

فضاهای حاصل ضربی[۱۲]

توپولوژی حاصل‌ضربی

فرض کنیم $\{X_i : i \in I\}$ رده‌ای از مجموعه‌ها بوده و X حاصل‌ضرب دکارتی این مجموعه‌ها باشد؛ یعنی، $X = \prod_i X_i$. توجه کنید که X شامل همهٔ نقاط $p = \langle a_i : i \in I\rangle$ است که $a_i \in X_i$. به‌یاد آورید که به‌ازای هر $j_0 \in I$ ، **تصویر** π_{j_0} از مجموعهٔ حاصل‌ضربی X به فضای مختصات X_{j_0} را تعریف کردیم؛ یعنی، $\pi_{j_0} : X \to X_{j_0}$ با

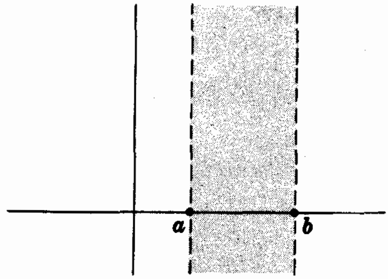
$$\pi_{j_0}(\langle a_i : i \in I\rangle) = a_{j_0}$$

تعریف شد. این تصویرها برای تعریف توپولوژی حاصل‌ضربی بکار می‌روند.

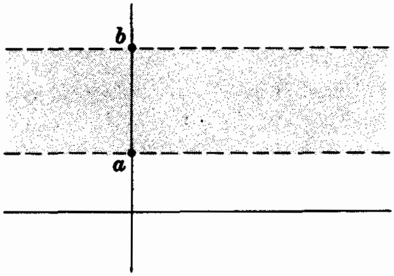
تعریف. فرض کنیم $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}$ گردآیه‌ای از فضاهای توپولوژیک بوده و X حاصل‌ضرب X_i ها باشد؛ یعنی، $X = \prod_i X_i$. ضخیمترین توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X که همهٔ تصویرهای $\pi_i : X \to X_i$ نسبت به‌آن پیوسته‌اند ***توپولوژی حاصل‌ضربی*** (تیخنف) نام دارد. مجموعهٔ حاصل‌ضربی X نسبت به توپولوژی حاصل‌ضربی $\mathcal{T}$ ، یعنی $(X, \mathcal{T})$ ، ***فضای توپولوژیک حاصل‌ضربی*** یا، فقط، ***فضای حاصل‌ضربی*** نامیده می‌شود.

به عبارت دیگر، ***توپولوژی حاصل‌ضربی*** $\mathcal{T}$ بر مجموعهٔ حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ تصویرها است (ر.ک. فصل ۷).

مثال ۱۰۱ . صفحهٔ دکارتی $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ را درنظرمی‌گیریم. به یادآورید که معکوسهای $\pi_1^{-1}(a, b)$ و $\pi_2^{-1}(a, b)$ نوارهای باز نامتناهیی هستند که یک زیرپایه برای توپولوژی **معمولی** بر $\mathbf{R}^2$ را تشکیل می‌دهند.



$\pi_1^{-1}(a, b)$



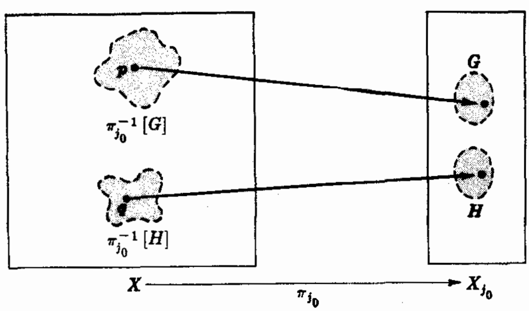
$\pi_2^{-1}(a, b)$

لذا، توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ توپولوژی تولید شده به وسیلهٔ تصاویر از $\mathbf{R}^2$ بتوی $\mathbf{R}$ است.

در پرتو تعریف فوق، می‌توان نتیجهٔ مثال ۱۰۱، را به‌صورت زیر بیان کرد.

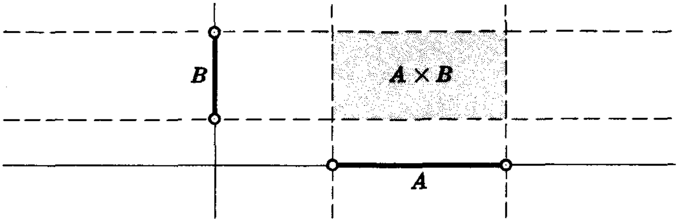
قضیهٔ ۱۰۱۲ . توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ توپولوژی *حاصل‌ضربی است*.

مثال ۲۰۱ . فرض کنیم $\{X_i : i \in I\}$ گردآیه‌ای از فضاهای هاسدورف بوده و X فضای حاصل‌ضربی باشد؛ یعنی، $X = \prod_i X_i$. نشان می‌دهیم که X یک فضای هاسدورف نیز هست. فرض کنیم $p = \langle a_i : i \in I\rangle$ و $q = \langle b_i : i \in I\rangle$ نقاط متمایزی در X باشند. دراین صورت، p و q باید دست‌کم در یک فضای مختصات، مثلاً" X_{j_0} ، با هم فرق داشته باشند؛ یعنی، $a_{j_0} \neq b_{j_0}$. طبق فرض، X_{j_0} هاسدورف است. لذا، زیرمجموعه‌های باز از هم جدایی مانند G و H از X_{j_0} هستند بطوری که $a_{j_0} \in G$ و $b_{j_0} \in H$. بنابر تعریف فضای حاصل‌ضربی، تصویر $\pi_{j_0} : X \to X_{j_0}$ پیوسته‌است. بنابراین، $\pi_{j_0}^{-1}[G]$ و $\pi_{j_0}^{-1}[H]$ زیرمجموعه‌های ازهم‌جدای بازی از X بترتیب شامل p و q می‌باشند. از اینرو، X یک فضای هاسدورف نیز هست.



پایه برای توپولوژی حاصل‌ضربی متناهی

حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ از دوبازهٔ متناهی باز A و B یک مستطیل باز در $\mathbf{R}^2$ است مانند شکل زیر.



همانطورکه پیشترگفتیم، مستطیلهای باز یک پایه برای توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}^2$ که توپولوژی حاصل‌ضربی بر $\mathbf{R}^2$ نیز هست می‌سازند. حکم مشابهی برای هر توپولوژی حاصل ضربی متناهی برقرار است؛ یعنی،

حکم ۲۰۱۲. *فرض‌کنیم $X_1, \cdots, X_m$ چند فضای توپولوژیک بوده، و X فضای حاصل ضربی آنها باشد؛ یعنی، $X = X_1 \times \cdots \times X_m$. دراین صورت، زیرمجموعه‌های*

$$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$$

از فضای حاصل‌ضربی X، که درآنها G_i ها زیرمجموعه‌های بازی از X_i اند، یک پایه برای توپولوژی حاصل‌ضربی بر X می‌سازند.

در بخش بعد خواهیم دید که حکم فوق برای فضاهای حاصل‌ضربی نامتناهی درست نیست.

زیرپایه و پایهٔ معرف برای توپولوژی حاصل‌ضربی

فرض‌کنیم $\{X_i : i \in I\}$ گردآیه‌ای ازفضاهای‌توپولوژیک بوده و X فضای حاصل‌ضربی‌آنها باشد؛ یعنی، $X = \prod_i X_i$. هرگاه G_{j_0} زیرمجموعهٔ بازی از فضای مختصات X_{j_0} باشد، آنگاه $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$ از همهٔ نقاطی چون $p = \langle a_i : i \in I \rangle$ در X تشکیل شده که $\pi_{j_0}(p) \in G_{j_0}$. به‌عبارت دیگر،

$$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}] \quad = \quad \prod \{X_i : i \neq j_0\} \times G_{j_0}\,.$$

بخصوص، هرگاه گردآیهٔ شمارشپذیری از فضاهای توپولوژیک داشته باشیم، مثلاً $\{X_1, X_2, \ldots\}$، آنگاه فضای حاصل‌ضربی

$$X \quad = \quad \prod_{n=1}^{\infty} X_n \quad = \quad X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots$$

مرکب است از همهٔ دنباله‌های

$$p = \langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$$ ، که درآن $a_n \in X_n$

و، علاوه براین،

$$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}] = X_1 \times \cdots \times X_{j_0-1} \times G_{j_0} \times X_{j_0+1} \times \cdots$$

بنابر تعریف، توپولوژی حاصل ضربی بر X "کوچکترین"، یعنی ضخیمترین، توپولوژی بر X است که همهٔ تصاویر نسبت به آن پیوسته‌اند؛ یعنی، این توپولوژی توپولوژی تولید شده به وسیلهٔ تصویرهاست. بنابراین، تصاویر معکوس مجموعه‌های باز در فضاهای مختصات زیرپایه‌ای برای توپولوژی حاصل‌ضربی تشکیل می‌دهند (قضیهٔ ۸.۷)؛ یعنی،

قضیهٔ ۳.۱۲ . ردهٔ زیرمجموعه‌های فضای حاصل ضربی $X = \prod_i X_i$ به شکل

$$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}] = \prod \{X_i : i \neq j_0\} \times G_{j_0}$$

که درآن G_{j_0} زیرمجموعهٔ بازی از فضای مختصات X_{j_0} است، یک زیرپایه است و زیرپایهٔ معرف برای توپولوژی حاصل‌ضربی نام دارد.

بعلاوه، چون اشتراکهای متناهی از عناصر زیرپایه پایه‌ای برای توپولوژی تشکیل می‌دهند، نیز خواهیم داشت

قضیهٔ ۴.۱۲ . ردهٔ زیرمجموعه‌هایی از فضای حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ به شکل

$$\pi_{j_1}^{-1}[G_{j_1}] \cap \cdots \cap \pi_{j_m}^{-1}[G_{j_m}] = \prod \{X_i : i \neq j_1, \ldots, j_m\} \times G_{j_1} \times \cdots \times G_{j_m}$$

که درآن G_{j_k} زیرمجموعهٔ بازی از فضای مختصات X_{j_k} است، یک پایه است و پایهٔ معرف برای توپولوژی حاصل‌ضربی نام دارد.

با استفاده از خواص فوق می‌توان نکات اصلی زیر درباب فضاهای حاصل‌ضربی را ثابت کرد.

قضیهٔ ۵.۱۲ . تابع f از فضای توپولوژیک Y بتوی فضای حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_i \circ f"'] & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

پیوسته است اگر و فقط اگر، به‌ازای هر تصویر π_i ، نگاشت ترکیب $\pi_i \circ f : Y \to X_i$ نیز پیوسته است.

قضیهٔ ۶۰۱۲ . ***هر تصویر $\pi_i : X \to X_i$ بر فضای حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ هم باز هم پیوسته، یعنی دو پیوسته، است.***

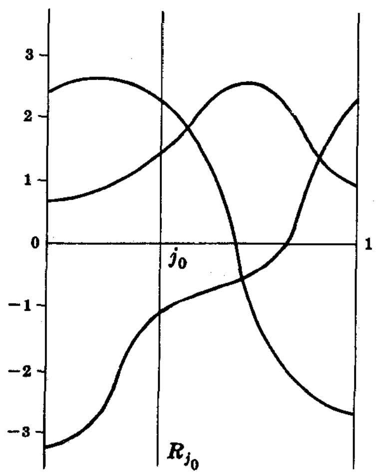
قضیهٔ ۷۰۱۲ . ***دنبالهٔ $p_1, p_2, \ldots$ از نقاط در فضای حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ همگرا به نقطهٔ q در X است اگر و فقط اگر، به‌ازای هر تصویر $\pi_i : X \to X_i$ ، دنبالهٔ $\pi_i(p_1), \pi_i(p_2), \ldots$ همگرا به $\pi_i(q)$ در فضای مختصات X_i است.***

به عبارت دیگر، هرگاه $p_1 = \langle a_{1_i} \rangle$ ، $p_2 = \langle a_{2_i} \rangle$ ، . . . ، و $q = \langle b_i \rangle$ نقاطی در فضای حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ باشند، آنگاه

$p_n \to q$ در X اگفگر $a_{n_i} \to b_i$ در هر فضای مختصات X_i .

مثالی از فضاهای حاصل‌ضربی

فرض کنیم R_i نسخه‌ای از $\mathbf{R}$ ، یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی معمولی، باشد که به‌وسیلهٔ بازهٔ یکهٔ بستهٔ $I = [0, 1]$ اندیسگذاری شده است. فضای حاصل ضربی $X = \prod \{R_i : i \in I\}$ را درنظر می‌گیریم. X را می‌توان مثل شکل زیر نمایش داد.



اعضای X

در اینجا محور افقی مجموعهٔ اندیس $I = [0,1]$ را نشان می‌دهد ، و هر خط قائم ماربر یک نقطه ، مثلاً " j_0 ، در I فضای مختصات R_{j_0} را نشان می‌دهد . عنصر $p = \langle a_i : i \in I \rangle$ در فضای حاصل‌ضربی X را درنظر می‌گیریم . توجه کنید که p به هر عدد $i \in I$ عدد حقیقی a_i رامربوط‌می‌کند ؛ یعنی ، p تابعی‌است حقیقی‌که بر مجموعهٔ اندیس $I = [0,1]$ تعریف شده است . به‌عبارت دیگر ، فضای حاصل‌ضربی X ردهٔ تمام توابع حقیقی تعریف شده بر I است ؛ یعنی ،

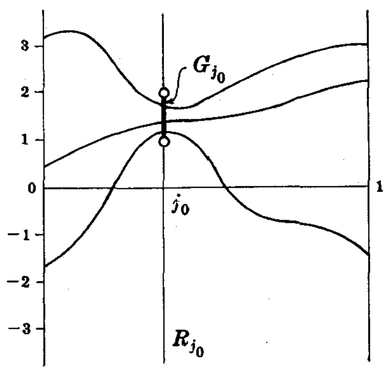
$$X = \{p : p : I \to \mathbf{R}\} .$$

دراین شکل چند عنصر X نیز نموده شده است .

حال به توصیف یکی از اعضای زیرپایهٔ معرف $\mathcal{S}$ برای توپولوژی حاصل ضربی بر X می‌پردازیم . به‌یاد آورید که $\mathcal{S}$ مرکب است از همهٔ زیرمجموعه‌های X به شکل

$$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}] = \prod\{R_i : i \neq j_0\} \times G_{j_0}$$

که درآن G_{j_0} زیرمجموعهٔ بازی از فضای مختصات R_{j_0} است . فرض‌کنیم G_{j_0} بازهٔ باز $(1,2)$ باشد . پس $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$ عبارت است از همهٔ نقاط $p = \langle a_i : i \in I \rangle$ در X بطوری که $a_{j_0} \in G_{j_0} = (1,2)$ ؛ یعنی ، همهٔ توابع $p : I \to \mathbf{R}$ بطوری که $1 < p(j_0) < 2$. در تصویر ، $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$ مرکب است از همهٔ توابع ماربر بازهٔ باز $G_{j_0} = (1,2)$ بر خط قائم نمایش فضای مختصات R_{j_0} ، مانند شکل زیر .

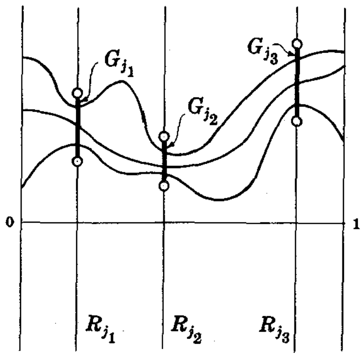


اعضای $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$

بالاخره ، یکی ازمجموعه‌های باز ، مثلاً " B ، از پایهٔ معرف $\mathcal{B}$ برای توپولوژی حاصل ضربی بر X را توصیف می‌کنیم . به‌یاد آورید که B اشتراک تعدادی متناهی عضو از زیر- پایهٔ معرف $\mathcal{S}$ برای توپولوژی حاصل‌ضربی است ؛ مثلاً " ،

$$\begin{aligned} B &= \pi_{j_1}^{-1}[G_{j_1}] \cap \pi_{j_2}^{-1}[G_{j_2}] \cap \pi_{j_3}^{-1}[G_{j_3}] \\ &= \prod\{R_i : i \neq j_1, j_2, j_3\} \times G_{j_1} \times G_{j_2} \times G_{j_3} . \end{aligned}$$

در تصویر، B عبارت است از همهٔ توابع ماربر مجموعه‌های باز G_{j_1} ، G_{j_2} ، و G_{j_3} که بر خطوط قائم نشانگر فضاهای مختصات R_{j_1} ، R_{j_2} ، و R_{j_3} واقعند. چند عضو B در نمودار زیر نموده شده‌اند.



اعضای B

حکم زیر را درنظر می‌گیریم .

حکم ۸.۱۲ . *فرض‌کنیم $\{(X_i, T_i)\}$ گردآیه‌ای از فضاهای توپولوژیک بوده و X حاصل ضرب مجموعه‌های X_i باشد؛ یعنی، $X = \prod_i X_i$. دراین صورت، زیرمجموعه‌های X به شکل*

$$\prod \{G_i : i \in I\}$$

که درآن G زیرمجموعهٔ بازی از فضای مختصات X_i است، یک پایه برای یک توپولوژی بر مجموعهٔ حاصل‌ضربی X می‌سازد .

تبصره. توپولوژی مذکور در حکم ۸.۱۲ بر مجموعهٔ حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ همیشه‌با توپولوژی حاصل‌ضربی تعریف شده دراین فصل بر X یکی نیست. از آن‌سو، حکم ۲.۱۲ نشان می‌دهد که دو توپولوژی درحالت فضای حاصل‌ضربی متناهی منطبق‌اند. از نظر تاریخی، ابتدا توپولوژی مذکوردرحکم۸.۱۲ مطرح و بررسی شده است. تیخنف به تعریف توپولوژی حاصل‌ضربی (تیخنف) مفتخر شد و یکی از مهمترین و مفیدترین قضایا در توپولوژی، یعنی قضیهٔ حاصل‌ضربی تیخنف، را ثابت کرد. بخاطر این قضیه است که توپولوژی‌حاصل‌ضربی، توپولوژی "راست" بر مجموعهٔ حاصل‌ضربی درنظر گرفته می‌شود.

قضیهٔ حاصل‌ضربی تیخنف

گوییم خاصیت P یک فضای توپولوژیک ***پایای حاصل‌ضربی*** است اگر وقتی هر فضای مختصات X_i خاصیت P داشته باشد، فضای حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ نیز این خاصیت را داشته باشد. مثلاً"، خاصیت P فضای هاسدورف بودن پایای حاصل ضربی است زیرا، در پرتو مثال ۲۰۱، حاصل‌ضرب فضاهای هاسدورف نیز هاسدورف است. قضیهٔ حاصل‌ضربی معروف تیخنف می‌گوید که فشردگی نیز یک خاصیت پایای حاصل‌ضربی است:

قضیهٔ (تیخنف) ۹۰۱۲. ***حاصل‌ضرب فضاهای فشرده فشرده است.***

برهان قضیهٔ ۹۰۱۲ که در بخش مسائل حل شده آمده، مبتنی است بر لم زیر از نظریهٔ مجموعه‌ها. اثبات این لم نیاز به لم زرن دارد. این امر تعجبی ندارد، زیرا نشان داده شده که قضیهٔ حاصل‌ضربی تیخنف، در واقع، با لم زرن هم‌ارز است.

لم ۱۰۰۱۲. ***فرض کنیم $\mathcal{A}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X با خاصیت اشتراک متناهی باشد. گردآیهٔ P مرکب از همهٔ زیررده‌های $\mathcal{A}$ که خاصیت اشتراک متناهی دارند را درنظر می‌گیریم. در این صورت، P که با شمول رده‌ها مرتب شده، شامل عنصر ماکزیمال $\mathcal{M}$ است.***

به‌یادآورید (ر.ک. فصل ۱۱) که ردهٔ $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است اگرگر هر زیر ردهٔ متناهی از $\mathcal{A}$، مثلاً" $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}\}$، اشتراک ناتهی داشته باشد؛ یعنی، $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m} \neq \emptyset$.

فضاهای حاصل‌ضربی متری

فرض کنیم $\{(X_i, d_i)\}$ گردآیه‌ای از فضاهای متری بوده و X حاصل ضرب X_i ها باشد؛ یعنی، $X = \prod_i X_i$. چون فضاهای متری (X_i, d_i) فضاهایی توپولوژیک‌اند، می‌توان از توپولوژی حاصل‌ضربی بر X سخن گفت. از آن‌سو، طبیعی است بپرسیم آیا می‌توان متر d را برمجموعهٔ حاصل‌ضربی X طوری تعریف کرد که توپولوژی القا شده به‌وسیلهٔ d بر X با این توپولوژی حاصل‌ضربی یکی باشد؟ دو حکم زیر به این سوال درحالتی که گردآیهٔ فضاهای متری متناهی یا شمارشپذیر است جواب مثبت می‌دهد. مترهای حاصل بهیچوجه منحصر بفرد نیستند.

حکم ۱۱۰۱۲ . فرض‌کنیم $(X_1, d_1), \ldots, (X_m, d_m)$ فضاهایی متری بوده و $p = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ و $q = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle$ نقاط دلخواهی در مجموعهٔ حاصل ضربی $X = \prod_{i=1}^{m} X_i$ باشند. دراین صورت، هریک از توابع زیر یک متر بر فضای حاصل‌ضربی X است:

$$
\begin{aligned}
d(p, q) &= \sqrt{d_1(a_1, b_1)^2 + \cdots + d_m(a_m, b_m)^2} \\
d(p, q) &= \max\{d_1(a_1, b_1), \ \ldots, \ d_m(a_m, b_m)\} \\
d(p, q) &= d_1(a_1, b_1) + \cdots + d_m(a_m, b_m).
\end{aligned}
$$

بعلاوه، توپولوژی القا شده به‌وسیلهٔ هریک از مترهای فوق بر X توپولوژی حاصل‌ضربی است.

حکم ۱۲۰۱۲ . فرض‌کنیم $\{(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots\}$ گردآیه‌ای شمارشپذیر از فضاهای متری بوده و $p = \langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ و $q = \langle b_1, b_2, \ldots \rangle$ نقاطی دلخواه در مجموعهٔ حاصل ضربی $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ باشند. دراین صورت، تابع d تعریف شده با

$$d(p, q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(a_n, b_n)}{1 + d_n(a_n, b_n)}$$

یک متر بر مجموعهٔ حاصل‌ضربی X است و توپولوژی القا شده‌به‌وسیلهٔ d توپولوژی حاصل‌ضربی است.

مجموعهٔ کانتور

حال مجموعهٔ T از اعداد حقیقی، به‌نام **مجموعهٔ کانتور یا سه‌گانه**، را که خواص جالبی دارد می‌سازیم. بازهٔ یکهٔ بستهٔ $I = [0, 1]$ را در نقاط $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و سپس بازهٔ باز $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$، به‌نام "یکسوم میانی"، را حذف می‌کنیم. فرض کنیم T_1 باقیماندهٔ نقاط در I باشد؛ یعنی،

$$T_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1].$$

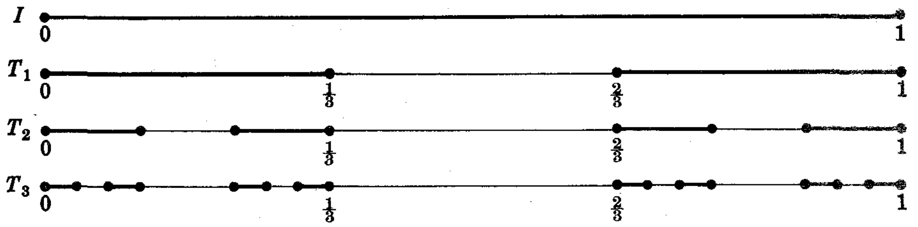
حال هریک از دو پاره‌خط در T_1 را در $\frac{1}{9}$ و $\frac{2}{9}$ و $\frac{7}{9}$ و $\frac{8}{9}$ به سه قسمت تقسیم می‌کنیم، و سپس‌از هریک "یکسوم میانی"، یعنی $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ و $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$، را حذف می‌کنیم. فرض کنیم T_2 بقیهٔ نقاط در T_1 باشد؛ یعنی،

$$T_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1].$$

اگر این‌کار را ادامه دهیم، دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌ها مانند

$$T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \cdots$$

بدست می‌آیـد ، کـه درآن T_m از همهٔ نقاط T_{m-1} جز "یکسومهای میانی" تشکیل شده است ، همانند شکل زیر



توجه کنید که T_m از 2^m بازهٔ بستهٔ ازهم جدا تشکیل شده است و ، اگر آنها را از چپ به‌راست شماره‌گذاری کنیم ، می‌توان از بازه‌های فرد یا زوج در T_m سخن گفت .

مجموعهٔ کانتور T اشتراک این مجموعه‌هاست ؛ یعنی ، $T = \cap\{T_i : i \in \mathbf{N}\}$.

خواص مجموعهٔ کانتور

تابع f را بر مجموعهٔ کانتور به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f(x) = \langle a_1, a_2, \ldots \rangle$$

که درآن

$$a_m = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x \text{ متعلق به بازهٔ فردی در } T_m \text{ باشد ،} \\ 2 & \text{اگر } x \text{ متعلق به بازهٔ زوجی در } T_m \text{ باشد ،} \end{cases}$$

دنبالهٔ فوق دقیقا " "بسط اعشاری" x در پایهٔ 3 را می‌دهد ؛ یعنی ،

$$x = a_1\left(\frac{1}{3}\right) + a_2\left(\frac{1}{9}\right) + a_3\left(\frac{1}{27}\right) + \cdots + a_m\left(\frac{1}{3^m}\right) + \cdots$$

حال یک فضای مجزا مرکب از دو عنصر ، مثلا" $A = \{0, 2\}$ ،را درنظر می‌گیریم ، و فرض می‌کنیم A_n یک کپی از A باشد کـه به‌وسیلهٔ اعداد صحیح مثبت $i \in \mathbf{N}$ اندیس گذاری شده است .

حکم ۱۳۰۱۲ . *مجموعهٔ کانتور T با فضای حاصلضربی*

$$X = \prod\{A_i : i \in \mathbf{N}\}$$

همانریخت است .

بخصوص، تابع $f : T \to X$ تعریف شده در بالا یک همانریختی است .

تبصره . مجموعهٔ کانتور T از خواص جالب زیر برخوردار است :

(۱) T شمارش‌ناپذیر است. زیرا T با مجموعهٔ دنباله‌های $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$، که درآنها a_i مساوی 0 یا 2 است، و دارای کاردینالیتهٔ $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$ می‌باشد هم‌ارز است.
(۲) T دارای "اندازهٔ" صفر است. زیرا اندازهٔ متمم T نسبت به $I = [0,1]$، یعنی اجتماع یکسومهای میانی، مساوی است با
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \cdots = 1 .$$
اما اندازهٔ $I = [0,1]$ نیز 1 است. از اینرو، اندازهٔ T صفر است.

مسائل حل شده

فضاهای حاصل‌ضربی

۱. توپولوژی $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ بر $X = \{a, b, c\}$ و توپولوژی $\mathcal{T}^* = \{Y, \emptyset, \{u\}\}$ بر $Y = \{u, v\}$ را درنظر بگیرید.
(یک) زیرپایهٔ معرف $\mathcal{S}$ برای توپولوژی حاصل‌ضربی بر $X \times Y$ را معین کنید.
(دو) پایهٔ معرف $\mathcal{B}$ برای توپولوژی حاصل‌ضربی بر $X \times Y$ را تعیین کنید.

حل. ابتدا توجه کنید که
$$X \times Y = \{\langle a, u\rangle, \langle a, v\rangle, \langle b, u\rangle, \langle b, v\rangle, \langle c, u\rangle, \langle c, v\rangle\} \cdot$$
مجموعهٔ حاصل‌ضربی است که توپولوژی حاصل‌ضربی برآن تعریف شده است.
(یک) زیرپایهٔ معرف $\mathcal{S}$ ردهٔ مجموعه‌های معکوس $\pi_x^{-1}[G]$ و $\pi_y^{-1}[H]$ است که در آنها G زیرمجموعهٔ باز X و H زیرمجموعهٔ باز Y می‌باشد. با محاسبه خواهیم داشت
$$\begin{aligned}
\pi_x^{-1}[X] &= \pi_y^{-1}[Y] = X \times Y \\
\pi_x^{-1}[\emptyset] &= \pi_y^{-1}[\emptyset] = \emptyset \\
\pi_x^{-1}[\{a\}] &= \{\langle a, u\rangle, \langle a, v\rangle\} \\
\pi_x^{-1}[\{b, c\}] &= \{\langle b, u\rangle, \langle b, v\rangle, \langle c, u\rangle, \langle c, v\rangle\} \\
\pi_y^{-1}[\{u\}] &= \{\langle a, u\rangle, \langle b, u\rangle, \langle c, u\rangle\} \cdot
\end{aligned}$$
ازاینرو، زیرپایهٔ معرف $\mathcal{S}$ متشکل است از زیرمجموعه‌های $X \times Y$ مذکور در فوق.
(دو) پایهٔ معرف $\mathcal{B}$ مرکب است از اشتراکهای متناهی اعضای زیرپایهٔ معرف $\mathcal{S}$. یعنی،
$$\begin{aligned}
\mathcal{B} = \{&X \times Y,\ \emptyset,\ \{\langle a, u\rangle\},\ \{\langle b, u\rangle, \langle c, u\rangle\},\ \{\langle a, u\rangle, \langle a, v\rangle\}, \\
&\{\langle b, u\rangle, \langle b, v\rangle, \langle c, u\rangle, \langle c, v\rangle\},\ \{\langle a, u\rangle, \langle b, u\rangle, \langle c, u\rangle\}\} \cdot
\end{aligned}$$

۲ . قضیهٔ ۵.۱۲ را ثابت کنید: تابع $f: Y \to X$ از فضای توپولوژیک Y بتوی فضای حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ پیوسته است اگر و فقط اگر، به‌ازای هر تصویر $\pi_i: X \to X_i$ ، ترکیب $\pi_i \circ f: Y \to X_i$ پیوسته است.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_i \circ f"'] & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

حل. بنابر تعریف فضای حاصل‌ضربی، همهٔ تصاویر پیوسته‌اند. درنتیجه، اگر f پیوسته باشد، $\pi_i \circ f$ ، یعنی ترکیب دو تابع پیوسته، نیز پیوسته است. از آن‌سو، فرض کنیم هر تابع ترکیب $\pi_i \circ f: Y \to X_i$ پیوسته باشد. همچنین، G زیرمجموعهٔ بازی از X_i باشد. دراین صورت، بنابر پیوستگی $\pi_i \circ f$ ،

$$(\pi_i \circ f)^{-1}[G] \quad = \quad f^{-1}[\pi_i^{-1}[G]]$$

مجموعهٔ بازی در Y است. اما ردهٔ مجموعه‌ها به شکل $\pi_i^{-1}[G]$ ، که در آن G زیر– مجموعهٔ بازی از X_i است، زیرپایهٔ معرف برای توپولوژی حاصل‌ضربی بر X است. چون معکوسهای آنها تحت f زیرمجموعه‌های بازی از Y اند، f طبق قضیهٔ ۲.۷ پیوسته است.

۳ . فرض کنید B عضوی از پایهٔ معرف برای فضای حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ باشد. نشان دهید که تصویر B بتوی هر فضای مختصات باز است.

حل. چون B متعلق به پایهٔ معرف برای X است،

$$B \quad = \quad \prod \{X_i : i \neq j_1, \ldots, j_m\} \times G_{j_1} \times \cdots \times G_{j_m},$$

که‌درآن G_{j_k} زیرمجموعهٔ بازی‌از X_{j_k} است. درنتیجه، به‌ازای هر تصویر $\pi_\alpha: X \to X_\alpha$ ،

$$\pi_\alpha(B) \quad = \quad \begin{cases} X_\alpha ، & \alpha \neq j_1, \ldots, j_m \quad \text{اگر} \\ G_\alpha ، & \alpha \in \{j_1, \ldots, j_m\} \quad \text{اگر} \end{cases}$$

در هر حالت، $\pi_\alpha(B)$ مجموعه‌ای باز است.

۴ . قضیهٔ ۶.۱۲ را ثابت کنید: هر تصویر $\pi_i: X \to X_i$ بر فضای حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ هم باز و هم پیوسته، یعنی دو پیوسته، است.

حل. طبق تعریف فضای حاصل ضربی، تمام تصاویر پیوسته‌اند. درنتیجه، کافی است نشان دهیم که اینها بازند. فرض کنیم G زیر مجموعهٔ بازی از فضای حاصل ضربی $X = \prod_i X_i$ باشد. به‌ازای هر نقطهٔ $p \in G$ عضوی مانند B از پایهٔ معرف‌برای‌توپولوژی حاصل ضربی هست که $p \in B \subset G$. لذا، به‌ازای هر تصویر $\pi_i : X \to X_i$،

$$\pi_i(p) \in \pi_i[B] \subset \pi_i[G] \cdot$$

طبق مسئلهٔ قبل، $\pi_i[B]$ مجموعه‌ای باز است. به‌عبارت دیگر، هر نقطهٔ $\pi_i(p)$ در $\pi_i[G]$ متعلق به مجموعهٔ بازی مانند $\pi_i[B]$ است که مشمول $\pi_i[G]$ می‌باشد. لذا، $\pi_i[G]$ مجموعه‌ای باز است.

۵ . قضیهٔ ۷.۱۲ را ثابت کنید: دنبالهٔ $p_1, p_2, \ldots$ از نقاط در فضای حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ همگرا به نقطهٔ $q \in X$ است اگر و فقط اگر، به‌ازای هر تصویر $\pi_i : X \to X_i$، دنبالهٔ $\pi_i(p_1), \pi_i(p_2), \ldots$ همگرا به $\pi_i(q)$ درفضای مختصات X_i باشد.

حل. فرض کنیم $p_n \to q$. دراین صورت، چون همهٔ تصویرها پیوسته‌اند، $\pi_i(p_n) \to \pi_i(q)$.

بعکس، فرض‌کنیم به‌ازای هر تصویر π_i، $\pi_i(p_n) \to \pi_i(q)$. برای اثبات اینکه $p_n \to q$، کافی است نشان دهیم که اگر B عضوی از پایهٔ معرف برای فضای حاصل ضربی $X = \prod_i X_i$ باشد که شامل نقطهٔ $q \in X$ است،

$$\exists\; n_0 \in N \text{ بطوری که } p_n \in B \quad \Leftarrow \quad n > n_0 \cdot$$

بنابر تعریف پایهٔ معرف برای فضای حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$،

$$B = \pi_{j_1}^{-1}[G_{j_i}] \cap \cdots \cap \pi_{j_m}^{-1}[G_{j_m}],$$

که درآن G_{j_k} زیرمجموعهٔ بازی از فضای مختصات X_{j_k} است. به‌یاد آورید که $q \in B$؛ از اینرو،

$$\pi_{j_1}(q) \in \pi_{j_1}[B] = G_{j_1}, \ldots, \quad \pi_{j_m}(q) \in \pi_{j_m}[B] = G_{j_m} \cdot$$

طبق فرض، $\pi_{j_1}(p_n) \to \pi_{j_1}(q)$. از اینرو، به‌ازای هر $i = 1, \ldots, m$،

$$\exists\; n_i \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } p_n \in \pi_{j_i}^{-1}[G_{j_i}] \quad \Leftarrow \quad \pi_{j_i}(p_n) \in G_{j_i} \quad \Leftarrow \quad n > n_i \cdot$$

فرض‌کنیم $n_0 = \max(n_1, \ldots, n_m)$. دراین صورت،

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad p_n \in \pi_{j_1}^{-1}[G_{j_1}] \cap \cdots \cap \pi_{j_m}^{-1}[G_{j_m}] = B;$$

درنتیجه، $p_n \to q$.

قضیهٔ تیخنف

۶ . لم ۱۰.۱۲ را ثابت کنید: فرض کنید $\mathcal{A}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های X با خاصیت اشتراک متناهی باشد. گردآیهٔ $\mathbf{P}$ مرکب از تمام زبررده‌های $\mathcal{A}$ هریک با خاصیت اشتراک متناهی را درنظر می‌گیریم. دراین صورت، $\mathbf{P}$ ، که با شمول رده‌ها مرتب شده، شامل عنصر ماکزیمال $\mathcal{M}$ است.

حل. فرض کنیم $\mathbf{T} = \{\mathcal{B}_i\}$ یک زیرگردآیهٔ کلی مرتب از $\mathbf{P}$ بوده، و $\mathcal{B} = \cup_i \mathcal{B}_i$. نشان می‌دهیم که $\mathcal{B}$ متعلق به $\mathbf{P}$ است؛ یعنی، $\mathcal{B}$ یک زبر ردهٔ $\mathcal{A}$ با خاصیت اشتراک متناهی است. دراین صورت، نتیجه می‌شود که $\mathcal{B}$ یک کران بالایی برای $\mathbf{T}$ است؛ و درنتیجه، طبق لم زرن، $\mathbf{P}$ شامل عنصر ماکزیمالی چون $\mathcal{M}$ می‌باشد.
واضح است که $\mathcal{B} = \cup_i \mathcal{B}_i$ یک زبرردهٔ $\mathcal{A}$ است، زیرا هر $\mathcal{B}_i$ یک زبر ردهٔ $\mathcal{A}$ است. برای اثبات اینکه $\mathcal{B}$ خاصیت اشتراک متناهی دارد، فرض کنیم $\{A_1, \ldots, A_m\}$ زیر رده‌ای متناهی از $\mathcal{B}$ باشد. اما $\mathcal{B} = \cup_i \mathcal{B}_i$ ؛ از اینرو،

$$\exists\ \mathcal{B}_{i_1}, \ldots, \mathcal{B}_{i_m} \in \mathbf{T} \text{ بطوری که } A_1 \in \mathcal{B}_{i_1}, \ldots, A_m \in \mathcal{B}_{i_m} .$$

به‌یاد آورید که $\mathbf{T}$ کلی مرتب است؛ از اینرو، یکی از رده‌ها، مثلاً $\mathcal{B}_{i_{j_0}}$ ، شامل همهٔ مجموعه‌های A_i است و، مضافاً، چون خاصیت اشتراک متناهی دارد،

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \neq \emptyset .$$

هم‌اکنون نشان دادیم که هر زیرردهٔ متناهی $\{A_1, \ldots, A_m\}$ از $\mathcal{B}$ اشتراک ناتهی دارد؛ یعنی، $\mathcal{B}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است. درنتیجه، $\mathcal{B}$ متعلق به $\mathbf{P}$ می‌باشد.

۷ . ثابت کنید عنصر ماکزیمال $\mathcal{M}$ در لم ۱۰.۱۲ دارای خواص زیر است:
(یک) هر زبرمجموعهٔ یک عضو $\mathcal{M}$ نیز به $\mathcal{M}$ تعلق دارد؛
(دو) اشتراک تعدادی متناهی عنصر از $\mathcal{M}$ نیز به $\mathcal{M}$ تعلق دارد؛
(سه) هرگاه به‌ازای هر $M \in \mathcal{M}$ ، $A \cap M \neq \emptyset$ ، آنگاه A متعلق به $\mathcal{M}$ است.

حل. در اینجا فقط (دو) را ثابت می‌کنیم. اثباتهای (یک) و (سه) را به‌عنوان مسائل تکمیلی می‌گذاریم.
(دو) ثابت می‌کنیم اشتراک هر دو مجموعهٔ $A, B \in \mathcal{M}$ نیز متعلق به $\mathcal{M}$ است. سپس قضیه به استقرا نتیجه می‌شود. فرض کنیم $C = A \cap B$. هرگاه نشان دهیم

که $\mathcal{M} \cup \{C\}$ خاصیت اشتراک متناهی دارد، آنگاه $\mathcal{M} \cup \{C\}$ متعلق به **P** است و، چون $\mathcal{M}$ در **P** ماکزیمال است، $\mathcal{M} = \mathcal{M} \cup \{C\}$. لذا، همانطور که باید ثابت می‌شد، C متعلق به $\mathcal{M}$ است.

فرض کنیم $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ زیر رده‌ای متناهی از $\mathcal{M} \cup \{C\}$ باشد. دو حالت وجود دارد.

حالت ۱. C متعلق به $\{A_1, \ldots, A_m\} \subset \mathcal{M} \cup \{C\}$ نیست. دراین صورت، $\{A_1, \ldots, A_m\}$ زیر رده‌ای متناهی فقط از $\mathcal{M}$ است. اما $\mathcal{M}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است؛ از اینرو، $A_1 \cap \cdots \cap A_m \neq \emptyset$.

حالت ۲. C متعلق به $\{A_1, \ldots, A_m\}$ است؛ مثلاً، $C = A_1$. دراین صورت،

$$A_1 \cap \cdots \cap A_m = C \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m = A \cap B \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \neq \emptyset$$

زیرا $A, B, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{M}$.

در هر حالت، $\{A_1, \ldots, A_m\}$ دارای اشتراک ناتهی است. درنتیجه، $\mathcal{M} \cup \{C\} \in$ **P** و، به‌دلایل فوق، $C \in \mathcal{M}$.

۸. قضیهٔ (تیخنف) ۹.۱۲ را ثابت کنید: فرض کنید $\{A_i : i \in I\}$ گردآیه‌ای ازفضاهای توپولوژیک فشرده باشد. دراین صورت، فضای حاصل‌ضربی $X = \prod \{A_i : i \in I\}$ نیز فشرده است.

حل. فرض کنیم $\mathcal{A} = \{F_j\}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های بستهٔ X با خاصیت اشتراک متناهی باشد. قضیه درصورتی ثابت می‌شود که نشان دهیم $\mathcal{A}$ دارای اشتراک ناتهی است؛ یعنی،

$$\exists\ p \in X \text{ بطوری که به‌ازای هر } F_j \in \mathcal{A}\text{، } p \in F_j.$$

فرض کنیم $\mathcal{M} = \{M_k : k \in K\}$ یک زبرمجموعهٔ ماکزیمال $\mathcal{A}$ با خاصیت اشتراک متناهی باشد (ر.ک. لم ۱۰.۱۲). تعریف می‌کنیم $\overline{\mathcal{M}} = \{\overline{M}_k : k \in K\}$. توجه کنید که

$$F_j \in \mathcal{A} \Rightarrow F_j = \overline{F}_j \text{ و } F_j \in \mathcal{M} \Rightarrow F_j \in \overline{\mathcal{M}}\text{؛}$$

درنتیجه، اگر ثابت کنید $\overline{\mathcal{M}}$ دارای اشتراک ناتهی است، $\mathcal{A}$ نیز اشتراک ناتهی دارد. به‌عبارت دیگر، برهان درصورتی کامل است که

$$\exists\ p \in X \text{ بطوری که به‌ازای هر } k \in K\text{، } p \in \overline{M}_k.$$

یا، معادلاً،

$p \in X$ ∃ بطوری که $p \in B$ ایجاب کندکه‌به‌ازای هر $k \in K$ ، $B \cap M_k \neq \emptyset$. (۱)
که درآن B عضوی از پایهٔ معرف برای توپولوژی حاصل‌ضربی بر $X = \prod_i A_i$ است ، زیرا دراین صورت p نقطهٔ انباشتگی هریک از مجموعه‌های M_k است و درنتیجه مشمول $\overline{M}_k$ است .

به‌یاد آورید که $\mathscr{M} = \{M_k : k \in K\}$ دارای‌خاصیت‌اشتراک‌متناهی‌است ؛ درنتیجه، به‌ازای هر تصویر $\pi_i : X \to A_i$ ، ردهٔ

$$\{\pi_i[M_k] : k \in K\}$$

از زیرمجموعه‌های فضای مختصات A_i نیز دارای خاصیت اشتراک متناهی است . از اینرو، ردهٔ بستهای

$$\{\overline{\pi_i[M_k]} : k \in K\}$$

رده‌ای از زیرمجموعه‌های بستهٔ A_i با خاصیت اشتراک متناهی است . طبق فرض، A_i فشرده است ؛ درنتیجه ، $\{\overline{\pi_i[M_k]} : k \in K\}$ دارای‌اشتراک ناتهی است ؛ یعنی ،

$a_i \in A_i$ ∃ بطوری که به‌ازای هر $k \in K$ ، $a_i \in \overline{\pi_i[M_k]}$

یا ، معادلاً ،

$a_i \in A_i$ ∃ بطوری که $a_i \in G_i$ ایجاب می‌کند که

به‌ازای هر $k \in K$ ، $G_i \cap \pi_i[M_k] \neq \emptyset$ ، (۲)

که درآن G_i زیرمجموعهٔ بازی از فضای مختصات A_i است . تعریف می‌کنیم $p = \langle a_i : i \in I\rangle$. می‌خواهیم نشان دهیم که p در شرط (۱) صدق می‌کند . فرض کنیم $p \in B$ ، که درآن B عضوی از پایهٔ معرف برای توپولوژی حاصل‌ضربی بر $X = \prod_i A_i$ است ؛ یعنی ،

$$B = \pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}] \cap \cdots \cap \pi_{i_m}^{-1}[G_{i_m}] ,$$

که درآن G_{i_α} زیرمجموعهٔ بازی از A_{i_α} است . توجه کنید که $p \in B$ ایجاب می‌کند که $\pi_{i_1}(p) = a_{i_1}$ متعلق به $\pi_{i_1}[B] = G_{i_1}$ باشد . درنتیجه ، طبق (۲) در بالا ،

به‌ازای هر $k \in K$ ، $G_{i_1} \cap \pi_{i_1}[M_k] \neq \emptyset$

که ایجاب می‌کند که

به‌ازای هر $M_k \in \mathscr{M}$ ، $\pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}] \cap M_k = \left(\prod\{A_i : i \neq i_1\} \times G_{i_1}\right) \cap M_k \neq \emptyset$

بنابرخاصیت (سه) از $\mathscr{M}$ ، که در مسئلهٔ قبل بیان شد، $\pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}]$ متعلق به $\mathscr{M}$ است . بهمین نحو،

$\pi_{i_2}^{-1}[G_{i_2}], \ldots, \pi_{i_m}^{-1}[G_{i_m}]$ نیزتعلق‌به $\mathscr{M}$ دارد . اما $\mathscr{M}$ در خاصیت اشتراک‌متناهی صدق می‌کند ؛ درنتیجه ،

به‌ازای هر $k \in K$ ، $B \cap M_k = \pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}] \cap \cdots \cap \pi_{i_m}^{-1}[G_{i_m}] \cap M_k \neq \emptyset$.
لذا ، (۱) برقرار و قضیه اثبات است .

مجموعهٔ کانتور

۹ . نشان دهید که مجموعهٔ کانتور T یک زیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathbf{R}$ است .

حل . به یادآورید که T_m اجتماع 2^m بازهٔ بسته است . درنتیجه ، T_m ، یعنی اجتماع تعدادی متناهی مجموعهٔ بسته ، نیز بسته است . اما $T = \cap \{T_i : i \in \mathbf{N}\}$: از اینرو ، T بسته است ، زیرا اشتراک مجموعه‌هایی بسته می‌باشد .

۱۰ . نشان دهید T فشرده است .

حل . چون T مجموعه‌ای بسته و کراندار از اعداد حقیقی‌است ، پس فشرده است .

۱۱ . فرض کنید $X = \prod \{A_i : i \in \mathbf{N}\}$ ، که‌درآن $A_i = \{0, 2\}$ باتوپولوژی مجزاست .
نشان دهید که X فشرده است .

حل . توجه کنید که A_i فشرده است زیرا متناهی است . درنتیجه ، طبق قضیهٔ حاصل‌ضربی تیخنف ، $X = \prod_i A_i$ نیز فشرده است .

۱۲ . فرض کنید $X = \prod \{A_i : i \in N\}$ ، که در آن $A_i = \{0, 2\}$ باتوپولوژی‌مجزاست .
(یک) ثابت کنید تابع $f : X \to T$ تعریف شده با

$$f(\langle a_1, a_2, \ldots \rangle) = a_1(\tfrac{1}{3}) + a_2(\tfrac{1}{9}) + a_3(\tfrac{1}{27}) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\tfrac{1}{3})^i$$

پیوسته است .

(دو) ثابت کنید X با T همانریخت است .

حل

(یک) فرض کنیم $p = \langle a_1, a_2, \ldots \rangle \in X$ و $\epsilon > 0$. باید نشان‌دهیم که زیرمجموعهٔ بازی از X مانند B هست شامل p بطوری که
$x \in B$ ایجاب کند که $|f(x) - f(p)| < \epsilon$.

توجه کنید که $\sum_{i=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^i$ همگراست. از اینرو،

$\exists\ n_0 \in N$ بطوری که $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} (\frac{2}{3})^i < \epsilon$.

زیرمجموعهٔ

$$B = \{a_1\} \times \{a_2\} \times \cdots \times \{a_{n_0}\} \times A_{n_0+1} \times A_{n_0+2} \times \cdots$$

از X را درنظر می‌گیریم. توجه کنید که $p \in B$ و B عضوی از پایهٔ معرف توپولوژی حاصلضربی بر $X = \prod_i A_i$ است؛ و درنتیجه، باز است. بعلاوه،

$$x = \langle a_1, \ldots, a_{n_0}, b_{n_0+1}, b_{n_0+2}, \ldots \rangle \in B$$

ایجاب می‌کند که

$$|f(x) - f(p)| = \left| \sum_{i=n_0+1}^{\infty} (b_i - a_i)(\tfrac{1}{3})^i \right| \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} (\tfrac{2}{3})^i < \epsilon \cdot$$

لذا، f پیوسته است.

(دو) تابع $f: X \to T$ یک تابع پیوستهٔ یک ـ یک از فضای فشردهٔ X بروی فضای متری T است. بنابر قضیهٔ ۸۰۱۱، f یک همانریختی است.

مسائل تکمیلی

فضاهای حاصلضربی

۱۳. نشان دهید که خاصیت فضای T_1 بودن پایای حاصلضربی است؛ یعنی، حاصل ضرب فضاهای T_1 یک فضای T_1 است.

۱۴. نشان دهید که خاصیت فضای منتظم بودن پایای حاصلضربی است.

۱۵. نشان دهید که خاصیت فضای کاملاً منتظم بودن یک پایای حاصلضربی است.

۱۶. فرض کنید $p = \langle a_i : i \in I \rangle$ نقطه‌ای در فضای حاصلضربی $X = \prod \{X_i : i \in I\}$ باشد.

ثابت کنید به‌ازای هر $j_0 \in I$،

$$X_{j_0} \times \prod \{a_i : i \neq j_0\} \text{ با } X_{j_0} \text{ همانریخت است}$$

(درحالت خاص فضای اقلیدسی 3 بعدی $\mathbf{R}^3$، این قضیه می‌گوید که خط، مثلاً

$$Y = \{a_1\} \times \{a_2\} \times \mathbf{R}_3 = \{\langle a_1, a_2, x \rangle : x \in \mathbf{R}\}$$

ماربر $p = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، با $\mathbf{R}$ همانریخت است.) ر.ک. شکل (آ).

۱۷. فرض کنید $p = \langle a_i : i \in I \rangle$ نقطه‌ای در فضای حاصلضربی $X = \prod \{X_i : i \in I\}$ باشد.

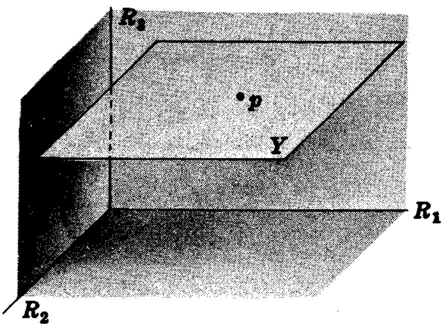
ثابت کنید به‌ازای هر $j_0 \in I$،

$$\{a_{j_0}\} \times \prod \{X_i : i \neq j_0\} \text{ با } \prod \{X_i : i \neq j_0\} \text{ همانریخت است}$$

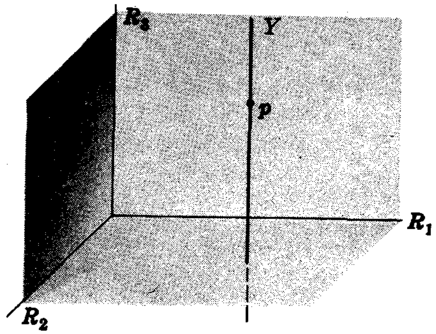
(درحالت خاص فضای اقلیدسی 3 بعدی $\mathbf{R}^3$ ، این‌قضیه می‌گوید که صفحه، مثلاً"

$$Y = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 \times \{a_3\} = \{\langle x, y, a_3\rangle : x, y \in \mathbf{R}\}$$

ماربر $p = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ، با $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ همانریخت است.) ر.ک. شکل (ب)



شکل (ب)



شکل (آ)

۱۸ . عکس قضیهٔ حاصل‌ضربی تیخنف را ثابت کنید؛ یعنی، ثابت کنید هرگاه فضای حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ فشرده باشد، هر فضای مختصات X_i نیز فشرده است.

۱۹ . فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای حاصل‌ضربی $X = \prod\{X_i : i \in I\}$ بوده و $\pi_{i_A} : A \to X_i$ تحدیدتصویر $\pi_i : X \to X_i$ به A باشد. نشان دهید که توپولوژی نسبی بر A ضخیمترین توپولوژیی است که توابع π_{i_A} نسبت به آن پیوسته‌اند.

۲۰ . (یک) ثابت کنید حاصل‌ضرب حداکثر شمارشپذیر از فضاهای شمارشپذیر اول شمارشپذیر اول است.

(دو) نشان دهیدکه‌حاصل‌ضرب تعدادی دلخواه ازفضاهای شمارشپذیر اول لزوماً" شمارشپذیر اول نیست.

۲۱ . نشان دهید که فضای حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ که حداکثر شمارشپذیر نباشد مترپذیر نیست (مگرآنکه همه جزتعدادی حداکثر شمارشپذیر ازفضاهای مختصات مجموعه‌های یکانی باشند).

۲۲ . (یک) ثابت کنید حاصل‌ضرب تعدادی حداکثر شمارشپذیر از فضاهای شمارشپذیر دوم شمارشپذیر دوم است.

(دو) نشان دهید که حاصل‌ضرب تعدادی دلخواه از فضاهای شمارشپذیر دوم لزوماً" شمارشپذیر دوم نیست.

۲۳ . فرض کنید A_i زیرمجموعهٔ دلخواهی از فضای توپولوژیک X_i باشد؛ لذا، $\prod_i A_i$ زیرمجموعه‌ای از فضای حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ است. ثابت کنید

(یک) $\prod_i \bar{A}_i = \overline{\prod_i A_i}$ ؛ (دو) $\prod_i A_i^\circ \supset (\prod_i A_i)^\circ$ و بـا مثـال نشان دهید که تساوی درحالت کلی در (دو) برقرار نیست.

۲۴. فرض‌کنید A_i زیرفضای دلخواهی از X_i باشد. نشان دهید که توپولوژی حاصل ضربی بر $\prod_i A_i$ مساوی توپـولوژی نسبی بر $\prod_i A_i$ به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از فضای حاصل‌ضربی $\prod_i X_i$ است.

توپولوژیهای دلخواه بر مجموعه‌های حاصل‌ضربی

۲۵. حکم ۸.۱۲ را ثابت‌کنید: فرض‌کنید $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ گردآیه‌ای از فضاهای توپولوژیک بوده‌و X حاصل‌ضرب X_i ها باشد؛ یعنی، $X = \prod_i X_i$. دراین‌صورت، زیرمجموعه‌های X به شکل $\prod \{G_i : i \in I\}$ ، که درآن G_i زیرمجموعهٔ بازی از فضای مختصات X_i است، یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر مجموعهٔ حاصل‌ضربی X تشکیل می‌دهد.

۲۶. نشان دهیـد کـه توپـولوژی حاصل‌ضربی بر مجموعهٔ حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ از توپولوژی $\mathcal{T}$ بر X تعریف شده در مسئلهٔ قبل ضخیمتر است (حکم ۸.۱۲).

۲۷. توپولوژی $\mathcal{T}$ را بـر مجمـوعهٔ حـاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ طـوری مثال بزنید که از توپولوژی حاصل‌ضربی بر X ضخیمتر باشد.

۲۸. فرض‌کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی بر مجموعهٔ حاصل‌ضربی $X = \prod_i X_i$ باشد که در مسئلهٔ ۲۵ تعریف شد (حکم ۸.۱۲). نشان دهید که $(X, \mathcal{T})$ مجزاست اگر هر فضای مختصات X_i مجزا باشد.

حاصل‌ضربهای متناهی

۲۹. حکم ۲.۱۲ را ثابت کنید: زیرمجموعه‌های فضای حاصل‌ضربی $X = X_1 \times \cdots \times X_m$ به شکل $G_1 \times \cdots \times G_m$ ، که درآن G_i زیرمجموعهٔ بـازی از X_i است، یک پایه برای توپولوژی حاصل‌ضربی بر X را تشکیل می‌دهند.

۳۰. ثـابـت کنیـد هـرگاه $\mathcal{B}$ پایـه‌ای بـرای X و $\mathcal{B}^*$ پایـه‌ای برای Y باشد، آنگاه $\{G \times H : G \in \mathcal{B}, H \in \mathcal{B}^*\}$ پایه‌ای‌برای فضای حاصل‌ضربی $X \times Y$ است.

۳۱. ثابت‌کنید هرگاه $\mathcal{B}_a$ یک پایهٔ موضعی در $a \in X$ و $\mathcal{B}_b$ یک پایهٔ موضعی در $b \in Y$ باشد، آنگاه $\{G \times H : G \in \mathcal{B}_a, H \in \mathcal{B}_b\}$ یک پایهٔ موضعی در $p = \langle a, b \rangle \in X \times Y$ است.

۳۲. ثابت کنید حاصل‌ضرب دو فضای شمارشپذیر اول شمارشپذیر اول است.

۳۳. ثابت کنید حاصل‌ضرب دو فضای شمارشپذیر دوم شمارشپذیر دوم است.

۳۴ . ثابت کنید حاصلضرب دو فضای جدایی‌پذیر جدایی‌پذیر است .

۳۵ . ثابت کنید حاصلضرب دو فضای فشرده فشرده است (بدون استفاده از لم زرن یا هم‌ارزهای آن) .

۳۶ . فرض کنید $\mathcal{B}^*$ توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ مستطیلهای نیمباز

$$[a,b) \times [c,d) = \{\langle x,y\rangle : a \leq x < b,\ c \leq y < d\}$$

بر صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ باشد. بعلاوه، فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی تولید شده بر بازه‌های بسته ـ باز $[a,b)$ بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ باشد. نشان دهید که $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T}^*)$ حاصلضرب $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ با خودش است .

۳۷ . با مثالی نقض نشان دهید که حاصلضرب دو فضای نرمال لزوماً نرمال نیست .

۳۸ . فرض کنید $A \subset X$ و $B \subset Y$ ؛ و درنتیجه، $A \times B \subset X \times Y$. ثابت کنید

$$\text{(یک)}\quad \bar{A} \times \bar{B} = \overline{A \times B} \quad ; \quad \text{(دو)}\quad A^\circ \times B^\circ = (A \times B)^\circ$$

(به‌یاد آورید [ر.ک. مسئلهٔ ۲۳] که تساوی درحالت کلی برقرار نیست .)

۳۹ . فرض کنید $f : X \to Y$ و $F : X \to X \times Y$ با $F(x) = \langle x, f(x)\rangle$ تعریف شده باشد . ثابت کنید f پیوسته است اگر و فقط اگر F یک همانریختی از X به $F[X]$ باشد . (به‌یاد آورید که $F[X]$ **نمودار** f نام دارد .)

۴۰ . فرض کنید X یک فضای برداری نرمدار روی $\mathbf{R}$ باشد. نشان دهید تابع $f : X \times X \to X$ تعریف‌شده با $f(\langle p,q\rangle) = p+q$ پیوسته است .

۴۱ . فرض کنید X یک‌فضای‌برداری‌نرمدار روی $\mathbf{R}$ باشد. نشان دهید تابع $f : \mathbf{R} \times X \to X$ تعریف شده با $f(\langle k,p\rangle) = kp$ پیوسته است .

فضاهای حاصلضربی متری

۴۲ . ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ بسته و کراندار از فضای اقلیدسی m بعدی R^m فشرده است .

۴۳ . حکم ۱۱.۱۲ را ثابت کنید : فرض کنید $(X_1,d_1), \ldots, (X_m,d_m)$ فضاهایی متری بوده و $p = \langle a_1,\ldots,a_m\rangle$ و $q = \langle b_1,\ldots,b_m\rangle$ نقاط دلخواهی در مجموعهٔ حاصل ضربی $X = \prod_{i=1}^{m} X_i$ باشند. دراین صورت، هریک از توابع زیر یک متر بر X است :

$$\text{(یک)}\quad d(p,q) = \sqrt{d_1(a_1,b_1)^2 + \cdots + d_m(a_m,b_m)^2}\ ;$$

$$\text{(دو)}\quad d(p,q) = \max\{d_1(a_1,b_1), \ldots, d_m(a_m,b_m)\}\ :$$

$$\text{(سه)}\quad d(p,q) = d_1(a_1,b_1) + \cdots + d_m(a_m,b_m)\ .$$

بعلاوه، توپولوژی بر X القا شده به‌وسیلهٔ هریک از مترهای فوق توپولوژی حاصل

ضربی است .

۴۴ . حکم ۱۲.۱۲ را ثابت کنید : فرض کنید $\{(X_1, d_1),\ (X_2, d_2),\ \ldots\}$ گردآیه‌ای شمارشپذیر از فضاهای متری بوده و $p = \langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ و $q = \langle b_1, b_2, \ldots \rangle$ نقاط دلخواهی در مجموعهٔ حاصلضربی $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ باشند. دراین صورت ، تابع d تعریف شده با

$$d(p, q) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(a_n, b_n)}{1 + d_n(a_n, b_n)}$$

یک متر بر X است و توپولوژی القا شده به‌وسیلهٔ d توپولوژی حاصلضربی است .

همبندی[۱۳]

مجموعه‌های ازهم جداشده

دو زیرمجموعهٔ A و B از فضای توپولوژیک X را **ازهم جدا شده** گوییم اگر (یک) A و B ازهم جدا باشند، و (دو) هیچیک شامل نقطهٔ انباشتگیی از دیگری نباشد. به‌عبارت دیگر، A و B از هم جدا شده‌اند اگفگر

$$A \cap \bar{B} = \emptyset \text{ و } \bar{A} \cap B = \emptyset \cdot$$

مثال ۱۰۱ . بازه‌های زیر بر خط حقیقی $\mathbf{R}$ را درنظر می‌گیریم :

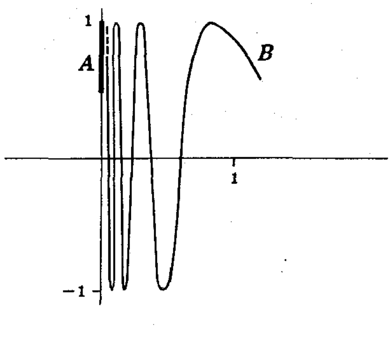
$A = (0,1)$ ، $B = (1,2)$ و $C = [2,3)$.

اما A و B از هم جدا شده‌اند، زیرا $\bar{A} = [0,1]$ و $\bar{B} = [1,2]$ ؛ و درنتیجه، $A \cap \bar{B}$ و $\bar{A} \cap B$ تهی‌اند. از آن‌سو، B و C از هم‌جدا شده نیستند، زیرا $2 \in C$ یک نقطهٔ حدی B است؛ لذا،

$$\bar{B} \cap C = [1,2] \cap [2,3) = \{2\} \neq \emptyset \cdot$$

مثال ۲۰۱ . زیرمجموعه‌های زیر از صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ را درنظر می‌گیریم :

$$A = \{\langle 0, y\rangle : \tfrac{1}{2} \leq y \leq 1\},$$
$$B = \{\langle x, y\rangle : y = \sin(1/x),\ 0 < x \leq 1\} \cdot$$



هر نقطه در A نقطهٔ انباشتگیی از B است؛ لذا، A و B مجموعه‌هایی از هم جدا شده نیستند.

مجموعه‌های همبند

تعریف. زیرمجموعهٔ A از فضای توپولوژیک X **ناهمبند** است اگر زیرمجموعه‌های بازی مانند G و H از X باشند بطوری که $A \cap G$ و $A \cap H$ مجموعه‌هایی ناتهی و از هم جدا بوده و اجتماع آنها A باشد. دراین حالت، $G \cup H$ یک **ناهمبندی** A نام دارد. یک مجموعه **همبند** است اگر ناهمبند نباشد.

توجه کنید که

$$A = (A \cap G) \cup (A \cap H) \quad \text{اگفگر} \quad A \subset G \cup H$$

و

$$\emptyset = (A \cap G) \cap (A \cap H) \quad \text{اگفگر} \quad G \cap H \subset A^c.$$

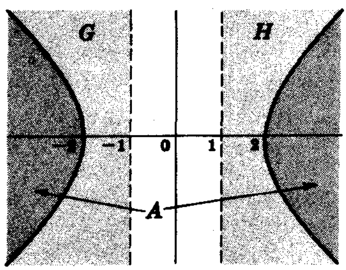
بنابراین، $G \cup H$ یک ناهمبندی A است اگر و فقط اگر

$$A \cap G \neq \emptyset,\ A \cap H \neq \emptyset,\ A \subset G \cup H,\ \text{و}\ G \cap H \subset A^c.$$

توجه کنید که مجموعهٔ تهی $\emptyset$ و مجموعه‌های یکانی $\{p\}$ همواره همبند هستند.

مثال ۱۰۲ . زیر مجموعهٔ زیر از صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ ناهمبند است:

$$A = \{\langle x, y\rangle : x^2 - y^2 \geqq 4\}$$



زیرا، همانطور که شکل فوق نشان داده، دو صفحهٔ نیمباز

$$H = \{\langle x, y\rangle : x > 1\} \quad \text{و} \quad G = \{\langle x, y\rangle : x < -1\}$$

یک ناهمبندی A را تشکیل می‌دهند.

مثال ۲۰۲ . توپولوژی زیر بر $X = \{a, b, c, d, e\}$ را درنظر می‌گیریم:

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a,b,c\}, \{c,d,e\}, \{c\}\}.$$

$A = \{a, d, e\}$ ناهمبنداست. زیرا فرض‌کنیم $G = \{a, b, c\}$ و $H = \{c, d, e\}$ ؛ دراین‌صورت ، $A \cap G = \{a\}$ و $A \cap H = \{d, e\}$ مجموعه‌های ازهم‌جدای ناتهیی هستند که اجتماعشان A است. (توجه کنید که G و H از هم‌جدا نیستند.)

رابطهٔ اساسی بین همبندی و جداسازی در قضیهٔ زیر آمده است:

قضیهٔ ۱۰۱۳ . *یک مجموعه همبند است اگر و فقط اگر اجتماع دو مجموعهٔ از هم جدا شدهٔ ناتهی نباشد.*

حکم زیر حکم بسیار سودمندی است.

حکم ۲۰۱۳ . *هرگاه A و B مجموعه‌هایی همبند باشند که از هم جدا شده نیستند، آنگاه $A \cup B$ همبند است.*

مثال ۳۰۲ . فرض‌کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ باشند که در مثال ۲۰۱ تعریف و نموده شده‌اند. بعداً نشان می‌دهیم که A و B همبند هستند. اما A و B از هم‌جدا شده نیستند؛ از اینرو، طبق حکم قبل، $A \cup B$ یک مجموعهٔ همبند است.

فضاهای همبند

همبندی، نظیر فشردگی، یک خاصیت مطلق مجموعه است؛ یعنی،

قضیهٔ ۳۰۱۳ . *فرض‌کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ باشد. دراین صورت، A نسبت به توپولوژی $\mathcal{T}$ همبند است اگر و فقط اگر A نسبت به توپولوژی $\mathcal{T}_A$ بر A همبند باشد.*

بنابراین، می‌توان بررسی همبندی را اغلب به فضاهای توپولوژیکی که خودهمبندند، یعنی ***فضاهای همبند***، محدود کرد.

مثال ۱۰۳ . فرض‌کنیم X یک فضای توپولوژیک ناهمبند بوده، و $G \cup H$ یک ناهمبندی

از X باشد؛ دراین صورت،

$$X = (X \cap G) \cup (X \cap H) \text{ و } (X \cap G) \cap (X \cap H) = \emptyset \cdot$$

اما $X \cap G = G$ و $X \cap H = H$ ؛ لذا، X ناهمبند است اگر و فقط اگر مجموعه‌های بازی ناتهی مانند G و H باشند بطوری که

$$X = G \cup H \text{ و } G \cap H = \emptyset \cdot$$

در پرتو مثال فوق می‌توان فضاهای همبند را به‌سادگی توصیف کرد.

قضیهٔ ۴.۱۳ . ***فضای توپولوژیک X همبند است اگر و فقط اگر (یک) X اجتماع دو مجموعهٔ بازازهم جدای ناتهی نباشد؛ یا، معادلاً"، (دو) X و $\emptyset$ تنها زیرمجموعه‌های X که هم باز و هم بسته‌اند باشند.***

مثال ۲.۳ . توپولوژی زیر بر $X = \{a, b, c, d, e\}$ را درنظر می‌گیریم :

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\} \cdot$$

X ناهمبنداست، زیرا $\{a\}$ و $\{b, c, d, e\}$ متمم یکدیگرند؛ و درنتیجه، هم بازند هم بسته. به‌عبارت دیگر،

$$X = \{a\} \cup \{b, c, d, e\}$$

یک ناهمبندی X است. توجه‌کنید که توپولوژی نسبی بر زیرمجموعهٔ $A = \{b, d, e\}$ عبارت است از $\{A, \emptyset, \{d\}\}$. لذا، A همبنداست زیرا A و $\emptyset$ تنها زیرمجموعه‌های A هستند که نسبت به‌این توپولوژی نسبی هم باز و هم بسته‌اند.

مثال ۳.۳ . خط حقیقی $\mathbf{R}$ با توپولوژی معمولی یک فضای همبند است، زیرا $\mathbf{R}$ و $\emptyset$ تنها زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}$ اند که هم باز و هم بسته‌اند.

مثال ۴.۳ . فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای از فضای همبند X بتوی فضای توپولوژیک Y باشد. لذا، $f : X \to f[X]$ پیوسته است ($f[X]$ توپولوژی نسبی دارد) .

نشان می‌دهیم که $f[X]$ همبند است. فرض کنیم $f[X]$ ناهمبند باشد؛ مثلا"، G و H یک ناهمبندی $f[X]$ را تشکیل دهند. دراین صورت،

$$f[X] = G \cup H \text{ و } G \cap H = \emptyset \text{ ؛}$$

و درنتیجه،

$$X = f^{-1}[G] \cup f^{-1}[H] \text{ و } f^{-1}[G] \cap f^{-1}[H] = \emptyset \cdot$$

چون f پیوسته است، $f^{-1}[G]$ و $f^{-1}[H]$ زیرمجموعه‌های بازی از X اند؛ و درنتیجه، یک ناهمبندی از X را تشکیل می‌دهند، که ممکن نیست. لذا، اگر X همبند باشد، $f[X]$ نیز همبند است.

مثال فوق را به صورت قضیه بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۵۰۱۳ . *نقشهای پیوستهٔ مجموعه‌های همبند همبندند.*

مثال ۵۰۳ . فرض کنیم X فضای ناهمبندی باشد؛ مثلاً، $G \cup H$ یک ناهمبندی X باشد. دراین صورت، تابع $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ ، } x \in G & \text{اگر} \\ 1 \text{ ، } x \in H & \text{اگر} \end{cases}$ تابـع پیوسته‌ای از X بروی فضای مجزای $Y = \{0,1\}$ است.

از آن‌سو، طبق قضیهٔ ۵۰۱۳، نقش پیوستهٔ فضای همبند X نمی‌تواند فضای مجزای ناهمبند $Y = \{0,1\}$ باشد. به‌عبارت دیگر،

لم ۶۰۱۳ . *فضای توپولوژیک X همبند است اگر و فقط اگر تنها توابع پیوسته از X بتوی $Y = \{0,1\}$ توابع ثابت $f(x) = 0$ یا $f(x) = 1$ باشند.*

همبندی برخط حقیقی

مجموعه‌های همبند از اعداد حقیقی را می‌توان به‌سادگی توصیف کرد:

قضیهٔ ۷۰۱۳ . *زیرمجموعهٔ E از خط حقیقی $\mathbf{R}$ شامل دست‌کم دو نقطه همبند است اگر و فقط اگر E بازه باشد.*

به یادآورید که بازه‌های خط حقیقی $\mathbf{R}$ به شکل زیرند:

بازه‌های متناهی $\quad (a,b),\ (a,b],\ [a,b),\ [a,b],$

بازه‌های نامتناهی $\quad (-\infty,a),\ (-\infty,a],\ (a,\infty),\ [a,\infty),\ (-\infty,\infty)$

بازهٔ E را می‌توان با خاصیت زیر توصیف کرد:

$$a,\ b \in E,\ a < x < b \quad \Rightarrow \quad x \in E \cdot$$

چون نقش پیوستهٔ یک مجموعهٔ همبند همبند است، تعمیم زیر از قضیهٔ مقدار میانی وایراشتراس را داریم (ر.ک. صفحهٔ ۹۵، قضیهٔ ۹۰۴):

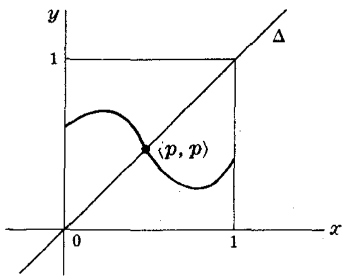
قضیهٔ ۸۰۱۳ . فرض کنیم $f: X \to \mathbf{R}$ یک تابع پیوستهٔ حقیقی باشد که بر مجموعهٔ همبند X تعریف شده است. در این صورت، f هر عدد بین دو مقدار خود را می‌گیرد.

مثال ۱۰۴ . کاربرد جالب نظریهٔ همبندی "قضیهٔ نقطهٔ ثابت" زیر است: فرض کنیم $I = [0,1]$ و $f: I \to I$ پیوسته باشد؛ در این صورت، $\exists p \in I$ بطوری که $f(p) = p$.

این قضیه را می‌توان تعبیر هندسی کرد. ابتدا توجه می‌کنیم که نمودار $f: I \to I$ در مربع یکهٔ

$$I^2 \quad = \quad \{\langle x, y\rangle : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$$

قرار دارد. قضیه می‌گوید که نمودار f ، که یک نقطهٔ ضلع چپ مربع را به نقطه‌ای از ضلع راست مربع وصل می‌کند باید خط‌قطر Δ را در نقطه‌ای مانند $\langle p, p\rangle$ قطع کند، همانند نمودار زیر.



مولفه‌ها

مولفهٔ E از فضای توپولوژیک X یک زیرمجموعهٔ همبند ماکزیمال X است؛ یعنی، E همبند است و E زیرمجموعهٔ حقیقی هیچ زیرمجموعهٔ همبند X نیست. واضح است که E ناتهی است. نکات اصلی درباب مولفه‌های یک فضا در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ۹۰۱۳ . مولفه‌های فضای توپولوژیک X یک افراز X را تشکیل می‌دهند؛ یعنی، از هم جدا بوده و اجتماع آنها X است. هر زیرمجموعهٔ همبند X مشمول مولفه‌ای می‌باشد.

لذا، هر نقطهٔ $p \in X$ به مولفهٔ منحصر بفردی از X ، به‌نام **مولفهٔ** p ، تعلق

دارد.

مثال ۱۰۵ . هرگاه X همبند باشد، آنگاه X فقط یک مولفه دارد و آن خود X است.

مثال ۲۰۵ . توپولوژی

$$\mathcal{T} \;=\; \{X,\ \emptyset,\ \{a\},\ \{c,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d,e\}\}$$

را بر $X = \{a, b, c, d, e\}$ درنظر می‌گیریم. مولفه‌های X عبارتند از $\{a\}$ و $\{b, c, d, e\}$. هر زیرمجموعهٔ همبند دیگـر X ، نظیر $\{b, d, e\}$ (ر.ک. مثال ۲۰۳) زیرمجموعه‌ای از یکی از مولفه‌هاست.

با استفاده از مثال ۱۰۵ ، می‌توان ثابت کرد که همبندی پایای حاصل‌ضربی است؛ یعنی،

قضیهٔ ۱۰۰۱۳ . *حاصل‌ضرب فضاهای همبند همبند است.*

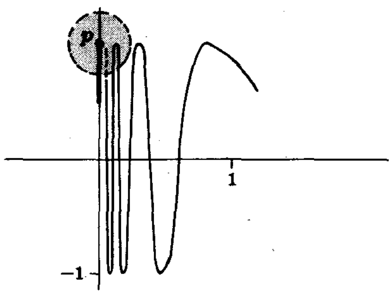
نتیجهٔ ۱۱۰۱۳ . *فضای اقلیدسی m بعدی $\mathbf{R}^m$ همبند است.*

فضاهای موضعی همبند

فضای توپولوژیک X **موضعی همبند** در $p \in X$ است اگفگر هر مجموعهٔ باز شامل p حاوی مجموعهٔ بـاز همبندی شامل p باشد؛ یعنی، هرگاه مجموعه‌های همبند باز شامل p یک پایهٔ موضعی در p بسازند. گـوییم X **موضعی همبند** است اگر در هر نقطهٔ خود موضعی همبند باشد یا، معادلا" ، اگر زیرمجموعه‌های همبند باز X یک پایه برای X تشکیل دهند.

مثال ۱۰۶ . هر فضای مجـزای X موضعی همبند است. زیرا هرگاه $p \in X$ ، آنگاه $\{p\}$ مجموعهٔ همبند بازی شامل p است که مشمول هر مجموعهٔ باز شامل p است. توجه‌کنید که اگر X شامل بیش از یک نقطه باشد، X همبند نخواهد بود.

مثال ۲۰۶ . فرض‌کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از صفحـهٔ $\mathbf{R}^2$ در مثال ۲۰۱ باشند. $A \cup B$ یک مجموعهٔ همبند است. اما $A \cup B$ در $p = \langle 0,1 \rangle$ موضعی همبند نیست. مثلا" ، قرصهای باز به مرکز p و شعاع $\frac{1}{4}$ شامل هیچ همسایگی همبند p نیست.



مسیرها

فرض‌کنیم $I = [0,1]$ بازهٔ یکهٔ بسته باشد. یک **مسیر** از نقطهٔ a تا نقطهٔ b درفضای توپولوژیک X تابع پیوسته‌ای‌است‌مانند $f: I \to X$ با $f(0) = a$ و $f(1) = b$. دراینجا a **نقطهٔ شروع** و b **نقطهٔ پایان** مسیر نامیده می‌شوند.

مثال ۱۰۷ . به‌ازای‌هر $p \in X$ ، تابع ثابت $e_p: I \to X$ تعریف‌شده با $e_p(s) = p$ پیوسته و درنتیجه یک مسیر است. آن را **مسیر ثابت** در p می‌نامند.

مثال ۲۰۷ . فرض‌کنیم $f: I \to X$ مسیری‌از a تا b باشد. دراین‌صورت، تابع $\hat{f}: I \to X$ تعریف شده با $\hat{f}(s) = f(1-s)$ یک مسیر از b تا a است.

مثال ۳۰۷ . فرض‌کنیم $f: I \to X$ مسیری از a تا b بوده و $g: I \to X$ مسیری از b تا c باشد. دراین صورت، ترکیب دو مسیر f و g ، که با $f*g$ نموده می‌شود، تابع $f*g: I \to X$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f*g)(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{،} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \quad \text{اگر} \\ g(2s-1) & \text{،} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

که مسیری است از a تا c که از تعقیب مسیر f از a تا b و سپس g از b تا c بدست می‌آید.

مجموعه‌های همبند قوسوار

زیرمجموعهٔ E از فضای توپولوژیک X را **همبند قوسوار** نامیم اگر به‌ازای هر دو نقطهٔ $a, b \in E$ مسیری مانند $f: I \to X$ از a تا b مشمول E باشد؛ یعنی، $f[I] \subset E$. زیرمجموعه‌های همبند قوسوار ماکزیمال X ، به‌نام **مولفه‌های همبند قوسوار**، یک افراز X

را می‌سازند. رابطهٔ بین همبندی و همبندی قوسوار در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ۱۲.۱۳ . مجموعه‌های همبند قوسوار همبندند.

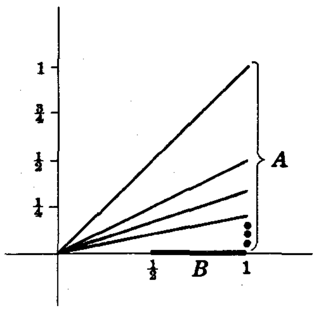
همانطور که مثال بعدی نشان می‌دهد، عکس این قضیه درست نیست.

مثال ۱.۸ . زیرمجموعه‌های زیر از صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ را درنظر می‌گیریم:

$$A = \{\langle x,y\rangle : 0 \leqq x \leqq 1,\ y = x/n,\ n \in \mathbf{N}\},$$

$$B = \{\langle x,0\rangle : \tfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1\}.$$

در اینجا A از نقاط واقع بر پاره خط واصل بین مبداء $\langle 0,0\rangle$ و نقاط $\langle 1,1/n\rangle$ ، $n \in \mathbf{N}$ تشکیل شده است؛ و B مرکب است از نقاط محور x بین $\frac{1}{2}$ و 1 . A و B هر دو همبند قوسوار و درنتیجه همبندند. بعلاوه، A و B از هم جدا شده نیستند، زیرا هر $p \in B$ یک نقطهٔ حدی A است؛ و درنتیجه، $A \cup B$ همبند است. اما $A \cup B$ همبند قوسوار نیست؛ درواقع، هیچ مسیری از یک نقطه در A به یک نقطه در B وجود ندارد.



مثال ۲.۸ . فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ باشند که در مثال ۲.۱ تعریف شده‌اند. A و B نقشهای پیوستهٔ بازه‌ها بوده و لذا همبندند. بعلاوه، A و B مجموعه‌هایی ازهم جدا شده نیستند؛ و درنتیجه، $A \cup B$ همبند است. اما $A \cup B$ همبند قوسوار نیست؛ درواقع، مسیری از یک نقطه در A به یک نقطه در B وجود ندارد.

توپولوژی صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ بخش اصلی نظریهٔ توابع یک متغیر مختلط است. دراین حالت، یک **ناحیه** زیرمجموعهٔ همبند بازی از صفحه تعریف می‌شود. قضیهٔ زیر نقش مهمی دراین نظریه دارد.

قضیهٔ ۱۳۰۱۳ . زیرمجموعهٔ همبند باز صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ همبند قوسوار است.

مسیرهای همجا

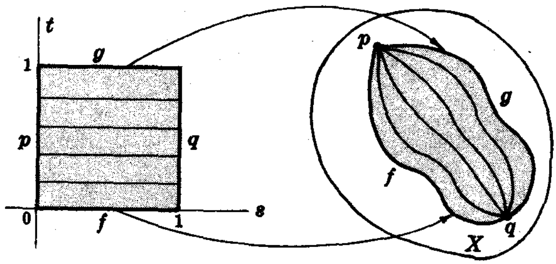
فرض‌کنیم $f: I \to X$ و $g: I \to X$ دو مسیر با یک نقطهٔ شروع $p \in X$ و یک نقطهٔ‌پایان $q \in X$ باشند. گوییم f با g **همجا** است، و می‌نویسیم $f \simeq g$ ، اگر تابع پیوسته‌ای مانند

$$H: I^2 \to X$$

باشد بطوری که

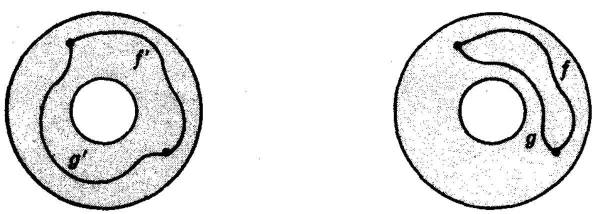
$$H(s,0) = f(s) \qquad H(0,t) = p$$
$$H(s,1) = g(s) \qquad H(1,t) = q$$

همانند نمودار زیر.



دراین صورت، گوییم f را می‌توان به‌طور پیوسته به g تغییر شکل داد. تابع H یک **همجایی** از f به g نام دارد.

مثال ۱۰۹ . فرض‌کنیم X مجموعه‌ای از نقاط‌بین دو دایرهٔ متحدالمرکز (به‌نام **طوق**) باشد. مسیرهای f و g در نمودار سمت راست زیر همجا هستند، حال آنکه مسیرهای f' و g' در نمودار سمت چپ همجا نیستند.



مثال ۲۰۹ . فرض‌کنیم $f: I \to X$ یک مسیر باشد. دراین صورت، $f \simeq f$ ؛ یعنی، f با

خودش همجاست . زیرا تابع $H : I^2 \to X$ تعریف شده با

$$H(s,t) \ = \ f(s)$$

یک همجایی از f به f است .

مثال ۳.۹ . فرض کنیم $f \simeq g$ و ، مثلاً ، $H : I^2 \to X$ یک همجایی از f به g باشد . دراین صورت ، تابع $\hat{H} : I^2 \to X$ تعریف شده با

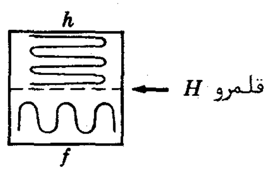
$$\hat{H}(s,t) \ = \ H(s, 1-t)$$

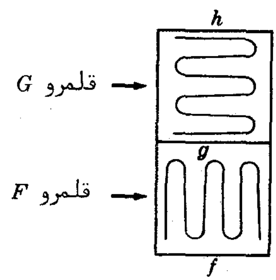
یک همجایی از g به f است ؛ و درنتیجه ، $g \simeq f$.

مثال ۴.۹ . فرض کنیم $f \simeq g$ و $g \simeq h$ ؛ مثلاً ، $F : I^2 \to X$ یک همجایی از f به g و $G : I^2 \to X$ یک همجایی از g به h باشد. تابع $H : I^2 \to X$ تعریف شده با

$$H(s,t) \quad = \quad \begin{cases} F(s, 2t) & \text{اگر } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ ،} \\ G(s, 2t-1) & \text{اگر } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \text{ ،} \end{cases}$$

یک همجایی از f به h است ؛ و درنتیجه ، $f \simeq h$. همجایی H را می‌توان با فشار قلمروهای F و G بتوی یک مربع تعبیر هندسی کرد.





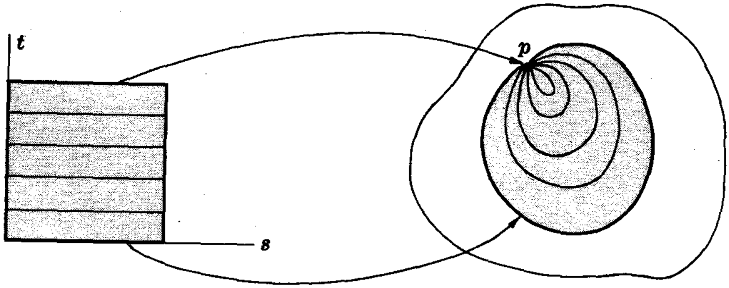
سه رابطهٔ فوق حکم زیر را بدست می‌دهند .

حکم ۱۴.۱۳ . *رابطهٔ همجایی رابطه‌ای هم‌ارزی در گردآیهٔ تمام مسیرها از a به b است .*

فضاهای همبند ساده

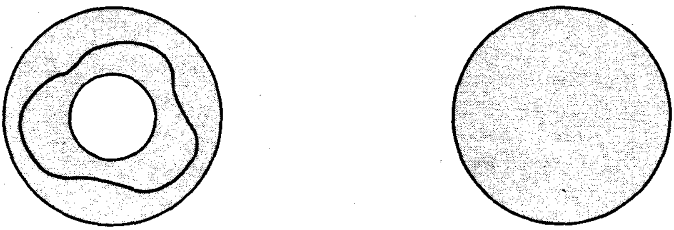
مسیر $f : I \to X$ با نقطهٔ شروع و پایان یکسان ، مثلاً $f(0) = f(1) = p$ ، را یک **مسیر بسته در** $p \in X$ می‌نامیم . بخصوص ، مسیر ثابت $e_p : I \to X$ تعریف شده با $e_p(s) \ = \ p$

یک مسیر بسته در p است . مسیر بستهٔ $f : I \to X$ را **قابل انقباض به یک نقطه** گوییم اگر با مسیر ثابت همجا باشد .



یک فضای توپولوژیک **همبند ساده** است اگفگر هر مسیر بسته در X قابل انقباض به یک نقطه باشد .

مثال ۱۰۱۰ . یک قرص باز در صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ همبند ساده است ، ولی یک طوق همبند ساده نیست ، زیرا منحنیهای بسته‌ای ، مثل نمودار زیر ، وجود دارند که قابل انقباض به یک نقطه نیستند .



همبند ساده نیست **همبند ساده است**

مسائل حل شده

مجموعه‌های ازهم جداشده

۱ . نشان دهیداگر A و B مجموعه‌های ازهم جدا شدهٔ ناتهی باشند ، $A \cup B$ ناهمبند است .

حل . چون A و B از هم جدا شده‌اند ، $A \cap \bar{B} = \emptyset$ و $\bar{A} \cap B = \emptyset$. فرض کنیم $G = \bar{B}^c$ و $H = \bar{A}^c$. در این صورت ، G و H بازند و

$$(A \cup B) \cap G = A \quad \text{و} \quad (A \cup B) \cap H = B$$

مجموعه‌های ازهــم جدای ناتـهیی هستند که اجتماع آنـها $A \cup B$ است. لذا، G و H یک ناهمبندی $A \cup B$ را تشکیل مــی‌دهند؛ و درنتیجه، $A \cup B$ ناهمبند است.

۲. فرض کنید $G \cup H$ یک‌ناهمبندی A باشد. نشان‌دهید که $A \cap G$ و $A \cap H$ مجموعه‌های ازهم جدا شده‌اند.

حل. $A \cap G$ و $A \cap H$ ازهم‌جدایند؛ ازاینرو، فقط باید نشان داد که هر مجموعه شامل نقطهٔ انباشتگی از دیگری نیست. فرض کنیم p یک نقطهٔ انباشتگی از $A \cap G$ بوده، و $p \in A \cap H$. دراین‌صورت، H مجموعهٔ بازی‌شامل p است؛ و درنتیجه، H شامل نقطه‌ای از $A \cap G$ غیر از p است؛ یعنی، $(A \cap G) \cap H \neq \emptyset$. اما

$$(A \cap G) \cap (A \cap H) = \emptyset = (A \cap G) \cap H.$$

بنابراین، $p \notin A \cap H$.

بهمین نحــو، هــرگاه p نقطهٔ انباشتگی $A \cap H$ باشد، آنگاه $p \notin A \cap G$. لذا، $A \cap G$ و $A \cap H$ مجموعه‌هایی از هم‌جدا شده می‌باشند.

۳. قضیهٔ ۱۳.۱ را ثـابت کنید: مجموعهٔ A همبند است اگر و فقط‌اگر A اجتماع دو مجموعهٔ ازهم جدا شدهٔ ناتـهی نباشد.

حل. معادلا" نشان‌می‌دهیم A ناهمبند است اگر و فقط‌اگر A اجتماع دومجموعهٔ ازهم‌جدا شدهٔ ناتـهی باشد. فرض‌کنیم A ناهمبند بوده، و $G \cup H$ یک ناهمبندی A باشد. دراین صورت، A اجتماع مجموعه‌های ناتـهی $A \cap G$ و $A \cap H$ است که، طبق مسئلهٔ قبل، از هم جدا شده‌اند. از آن‌سو، هرگاه A اجتماع دو مجموعهٔ از هم‌جدا شدهٔ ناتـهی باشد، A طبق مسئلهٔ ۱ ناهمبند می‌باشد.

مجموعه‌های همبند

۴. فرض کنید $G \cup H$ یک نــاهمبندی A بوده و B زیرمجموعهٔ همبندی از A باشد. نشان‌دهید که $B \cap H = \emptyset$ یا $B \cap G = \emptyset$؛ و درنتیجه، $B \subset G$ یا $B \subset H$.

حل. داریم $B \subset A$؛ و درنتیجه،

$$B \subset G \cup H \;\Leftarrow\; A \subset G \cup H \quad \text{و} \quad G \cap H \subset B^c \;\Leftarrow\; G \cap H \subset A^c.$$

لذا، اگر هر دوی $B \cap G$ و $B \cap H$ ناتهی باشند، $G \cup H$ یک ناهمبندی B خواهد بود. اما B همبند است؛ لذا، نتیجه بدست می‌آید.

۵. حکم ۲.۱۳ را ثابت کنید: هرگاه A و B مجموعه‌های همبندی باشند که از هم جدا شده نیستند، آنگاه $A \cup B$ همبند است.

حل. فرض کنیم $A \cup B$ ناهمبند بوده و $G \cup H$ یک ناهمبندی $A \cup B$ باشد. چون A زیرمجموعهٔ همبندی از $A \cup B$ است، طبق مسئلهٔ قبل، $A \subset G$ یا $A \subset H$. بهمین نحو، $B \subset G$ یا $B \subset H$.

اما اگر $A \subset G$ و $B \subset H$ (یا $B \subset G$ و $A \subset H$)، بنابر مسئلهٔ ۲،

$$(A \cup B) \cap G = A \quad \text{و} \quad (A \cup B) \cap H = B$$

مجموعه‌هایی از هم جدا شده‌اند. اما این با فرض متناقض است؛ لذا، $A \cup B \subset G$ یا $A \cup B \subset H$؛ و درنتیجه، $G \cup H$ یک ناهمبندی $A \cup B$ نیست. به عبارت دیگر، $A \cup B$ همبند است.

۶. فرض کنید $\mathcal{A} = \{A_i\}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های همبند X باشد بطوری که هیچ دو عضو $\mathcal{A}$ از هم جدا شده نباشند. دراین صورت، $B = \cup_i A_i$ همبند است.

حل. فرض کنیم B همبند نبوده و $G \cup H$ یک ناهمبندی B باشد. هر $A_i \in \mathcal{A}$ همبند است و درنتیجه (مسئلهٔ ۴) مشمول G یا H است و با دیگری از هم جداست. بعلاوه، هر دو عضو $A_{i_1}, A_{i_2} \in \mathcal{A}$ از هم جدا شده نیستند؛ و درنتیجه، بنا بر حکم ۲.۱۳، $A_{i_1} \cup A_{i_2}$ همبند می‌باشد؛ دراین صورت، $A_{i_1} \cup A_{i_2}$ مشمول G یا H است و با دیگری ازهم جداست. بنابراین، همهٔ اعضای $\mathcal{A}$، و درنتیجه $B = \cup_i A_i$، باید مشمول G یا H بوده و با دیگری از هم جدا باشند. اما این با این امر که $G \cup H$ یک ناهمبندی B است متناقض است؛ درنتیجه، B همبند می‌باشد.

۷. فرض کنید $\mathcal{A} = \{A_i\}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های همبند X با اشتراک ناتهی باشد. دراین صورت، $B = \cup_i A_i$ همبند است.

حل. چون $\cap_i A_i \neq \emptyset$، هر دو عضو $\mathcal{A}$ از هم جدا، و درنتیجه از هم جدا شده،

نیستند؛ از اینرو، طبق مسئلهٔ قبل، $B = \cup_i A_i$ همبند است.

۸ . فرض کنید A زیرمجموعهٔ همبنـــدی از X بوده و $A \subset B \subset \bar{A}$. نشان دهید که B همبند و درنتیجه، بخصوص، $\bar{A}$ همبند است.

حل. فرض کنیم B ناهمبند بوده و $G \cup H$ یک ناهمبندی B باشد. A زیرمجموعهٔ همبندی از B است و درنتیجـــه، طبق مسئلهٔ ۴، $A \cap H = \emptyset$ یا $A \cap G = \emptyset$؛ مثـــلاً"، $A \cap H = \emptyset$. پـــس H^c زیرمجموعهٔ بستـــه‌ای از A اســـت؛ و لـــــذا، $A \subset B \subset \bar{A} \subset H^c$. درنتیجه، $B \cap H = \emptyset$. اما ایـــن بـــا این امر که $G \cup H$ یک ناهمبندی B است تعارض دارد؛ بنابراین، B همبند است.

فضاهای همبند

۹ . فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. نشان دهید که شرایط زیر با هم هم‌ارزند:

(یک) X ناهمبند است؛

(دو) زیرمجموعه‌ای حقیقی و ناتهی از X هست که هم باز و هم بسته است.

حل

(یک) $\Leftarrow$ (دو). فرض کنیم $X = G \cup H$ ، که درآن G و H ناتهی و بازند. دراین صـــورت، G زیرمجموعه‌ای حقیقی و نـــاتهی از X است و، چون $G = H^c$ ، G هم باز هم بسته است.

(دو) $\Leftarrow$ (یک). فـــرض کنیم A زیرمجموعه‌ای حقیقی و ناتهی از X باشد که هم باز هم بسته است. دراین صورت، A^c نیز ناتهی و باز است، و $X = A \cup A^c$. بنابراین، X ناهمبند است.

۱۰ . قضیهٔ ۳.۱۳ را ثابت کنید: فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ بوده و $\mathcal{T}_A$ توپولوژی نسبی بر A باشد. دراین صورت، A ، $\mathcal{T}$ ـ همبند است اگر و فقط اگر A ، $\mathcal{T}_A$ ـ همبند باشد.

حل. فرض کنیم A ناهمبند بوده و $G \cup H$ یک $\mathcal{T}$ ـ ناهمبندی A باشد. $G, H \in \mathcal{T}$ ؛ و درنتیجه، $A \cap G, A \cap H \in \mathcal{T}_A$. لذا، $A \cap G$ و $A \cap H$ یک $\mathcal{T}_A$ـناهمبندی A

را تشکیل می‌دهند؛ از اینرو، A ، $\mathcal{T}_A$ ـ ناهمبند می‌باشد.
ازآن سو، فرض‌کنیم A ، $\mathcal{T}_A$ ـ ناهمبند باشد؛ مثلاً G^* ، و H^* یک $\mathcal{T}_A$ ـ ناهمبندی A را تشکیل می‌دهند. پس $G^*, H^* \in \mathcal{T}_A$ ؛ و درنتیجه،

$\exists\ G, H \in \mathcal{T}$ بطوری که $G^* = A \cap G$ و $H^* = A \cap H$.

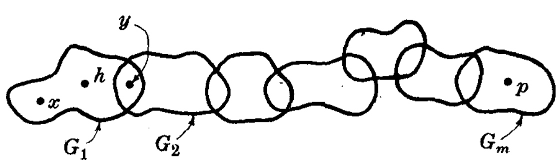
اما

$A \cap G^* = A \cap A \cap G = A \cap G$ و $A \cap H^* = A \cap A \cap H = A \cap H$.

لذا، $G \cup H$ یک $\mathcal{T}$ ـ ناهمبندی A است؛ و درنتیجه، A ، $\mathcal{T}$ ـ ناهمبند است.

۱۱ . فرض‌کنید $p, q \in X$. گوییم زیرمجموعه‌های $A_1, \ldots, A_m$ از X یک **زنجیر ساده (متناهی)** است که p را به q وصل می‌کند اگر A_1 (و فقط A_1) شامل p ، A_m (و فقط A_m) شامل q بوده، و $A_i \cap A_j = \emptyset$ اگرگر $|i-j| > 1$.
فرض‌کنید X همبند بوده و $\mathcal{A}$ پوشش‌بازی از X باشد. ثابت کنید هرجفت نقطه در X را می‌توان با زنجیر ساده‌ای مرکب از اعضای $\mathcal{A}$ بهم وصل کرد.

حل. فرض‌کنیم p نقطهٔ دلخواهی در X بوده و H از نقاطی در X تشکیل شده باشد که‌بتوان با زنجیر ساده‌ای مرکب از اعضای $\mathcal{A}$ به p وصل کرد. اما $H \neq \emptyset$ ، زیرا $p \in H$. حکم می‌کنیم که H هم‌باز و هم بسته است؛ و درنتیجه، $H = X$ زیرا X همبند است.
فرض‌کنیم $h \in H$. دراین صورت، $\exists\ G_1, \ldots, G_m \in \mathcal{A}$ که زنجیر ساده‌ای از h به p می‌سازند. اما، هرگاه $x \in G_1 \setminus G_2$ ، آنگاه $G_1, \ldots, G_m$ یک زنجیر ساده از x به p ، و اگر $y \in G_1 \cap G_2$ ، $G_2, \ldots, G_m$ یک زنجیر ساده از y به p می‌سازند، مثل نمودار زیر.



لذا، G_1 زیرمجموعهٔ H است؛ یعنی، $h \subset G_1 \subset H$. از اینرو، H همسایگی هر نقطهٔ خود است؛ و درنتیجه، H باز است.
حال فرض‌کنیم $g \in H^c$. چون $\mathcal{A}$ یک‌پوشش X است، $\exists\ G \in \mathcal{A}$ بطوری‌که $g \in G$ ، و G بازاست. اگر $G \cap H \neq \emptyset$ ، $\exists\ h \in G \cap H \subset H$ ؛ ودرنتیجه، $\exists\ G_1, \ldots, G_m \in \mathcal{A}$

یک زنجیر ساده از h به p می‌سازند. اما، دراین صورت، $G, G_k, \ldots, G_m$ ، که درآن k ماکزیممی‌است که G ، G_k را قطع می‌کند، یا $G_1, \ldots, G_m$ یک زنجیر ساده از g به p می‌سازند، و درنتیجه، $g \in H$ ، که یک تناقض است. از اینرو، $G \cap H = \emptyset$ ؛ و درنتیجه، $g \in G \subset H^c$. لذا، H^c مجموعه‌ای باز است؛ و در نتیجه، $H^{cc} = H$ بسته است.

۱۲ . قضیهٔ ۷.۱۳ را ثابت کنید: فرض کنید E زیرمجموعه‌ای از خط حقیقی $\mathbf{R}$ شامل دست‌کم دو نقطه است. دراین صورت، E همبند است اگر و فقط اگر E یک بازه باشد.

حل. فرض کنیم E بازه نباشد؛ دراین‌صورت،

$$a, b \in E,\ p \notin E\ \exists \text{ بطوری که } a < p < b .$$

قرار می‌دهیم $G = (-\infty, p)$ و $H = (p, \infty)$. پس $a \in G$ و $b \in H$ ؛ و درنتیجه، $E \cap G$ و $E \cap H$ مجموعه‌هایی از هم جدا و ناتهی‌اند که اجتماعشان E است. لذا، E ناهمبند است.

حال فرض کنیم E بازه بوده و، بعلاوه، E ناهمبند باشد؛ مثلاً، H و G یک ناهمبندی E را تشکیل دهند. قرار می‌دهیم $A = E \cap G$ و $B = E \cap H$ ؛ پس $E = A \cup B$. A و B ناتهی‌اند؛ مثلاً، $a \in A$ ، $b \in B$ ، $a < b$ ، و $p = \sup\{A \cap [a, b]\}$. چون $[a, b]$ مجموعه‌ای‌بسته‌است، $p \in [a, b]$ ؛و درنتیجه، $p \in E$. فرض کنیم $p \in A = E \cap G$. پس $p < b$ و $p \in G$. چون G مجموعه‌ای باز است،

$$\delta > 0\ \exists \text{ بطوری که } p + \delta \in G \text{ و } p + \delta < b .$$

از اینرو، $p + \delta \in E$ ؛ و درنتیجه، $p + \delta \in A$. اما این با تعریف p متناقض است؛ یعنی، $p = \sup\{A \cap [a, b]\}$. بنابراین، $p \notin A$.

ازآن‌سو، فرض کنیم $p \in B = E \cap H$. پس، بخصوص، $p \in H$. چون H مجموعه‌ای باز است،

$$\delta^* > 0\ \exists \text{ بطوری که } [p - \delta^*, p] \subset H \text{ و } a < p - \delta^* .$$

از اینرو، $[p - \delta^*, p] \subset E$ ؛ و درنتیجه، $[p - \delta^*, p] \subset B$. بنابراین، $[p - \delta^*, p] \cap A = \emptyset$. اما، دراین صورت، $p - \delta^*$ یک کران بالایی $A \cap [a, b]$ است، که ممکن نیست زیرا $p = \sup\{A \cap [a, b]\}$. لذا، $p \notin B$. اما این با این

امر که $p \in E$ در تضاد است؛ و درنتیجه، E همبند است.

۱۳ . فرض کنید $I = [0,1]$ و $f : I \to I$ پیوسته باشد. ثابت کنید $\exists p \in I$ بطوری که $f(p) = p$ (ر.ک. مثال ۱۰۴).

حل. هرگاه $f(0) = 0$ یا $f(1) = 1$ ، قضیه نتیجه می‌شود؛ از اینرو، می‌توان فرض کرد $f(0) > 0$ و $f(1) < 1$. چون f پیوسته است، نمودار تابع
$F : I \to \mathbf{R}^2$ تعریف شده با $F(x) = \langle x, f(x)\rangle$
نیز پیوسته است.

قرار می‌دهیم $H = \{\langle x,y\rangle : y < x\}$ ، $G = \{\langle x,y\rangle : x < y\}$ ؛ پس $\langle 0, f(0)\rangle \in G,\ \langle 1, f(1)\rangle \in H$. ازاینرو، هرگاه $F[I]$ نقطه‌ای از قطر
$$\Delta = \{\langle x,y\rangle : x = y\} = \mathbf{R}^2 \setminus (G \cup H)$$
را نداشته باشد، آنگاه $G \cup H$ یک ناهمبندی $F[I]$ است. اما این با اینکه $F[I]$ ، یعنی نقش پیوستهٔ یک مجموعهٔ همبند، همبند است تعارض دارد؛ لذا، $F[I]$ شامل نقطه‌ای مانند $\langle p,p\rangle \in \Delta$ است؛ و درنتیجه، $f(p) = p$.

مولفه‌ها

۱۴ . نشان دهید که هر مولفهٔ E بسته است.

حل. E همبند است؛ و درنتیجه، طبق مسئلهٔ ۶، $\bar{E}$ همبند است، $E \subset \bar{E}$. اما مولفهٔ E یک مجموعهٔ همبند ماکزیمال است؛ از اینرو، $E = \bar{E}$ ؛ و درنتیجه، E بسته است.

۱۵ . فرض کنید $p \in X$ و $\mathcal{A}_p = \{A_i\}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های همبند X شامل p باشد. بعلاوه، $C_p = \cup_i A_i$. دراین صورت، (یک) C_p همبند است؛ (دو) هرگاه B زیرمجموعهٔ همبندی از X شامل p باشد، آنگاه $B \subset C_p$ ؛ (سه) C_p یک زیرمجموعهٔ همبند ماکزیمال X ، یعنی یک مولفه، است.

حل

(یک) چون هر $A_i \in \mathcal{A}_p$ شامل p است، $p \in \cap_i A_i$ ؛ و درنتیجه، طبق مسئلهٔ

۷، $C_p = \cup_i A_i$ همبند است .

(دو) هرگاه B زیرمجموعهٔ همبنـــدی از X شامل p باشد، آنگاه $B \in \mathcal{A}_p$ ؛ و در نتیجه ، $B \subset C_p = \cup\{A_i : A_i \in \mathcal{A}_p\}$.

(سه) فرض‌کنید $C_p \subset D$ ، کـه در آن D همبند است. پس $p \in D$ ؛ و درنتیجه ، طبق (دو) ، $D \subset C_p$ ؛ یعنی ، $C_p = D$. بنابراین ، C_p یک مولفه است.

۱۶ . قضیهٔ ۹.۱۳ را ثابت کنید : مولفه‌های X یک افراز X را می‌سازند . هر زیرمجموعهٔ همبند X مشمول مولفه‌ای می‌باشد .

حل. ردهٔ $C = \{C_p : p \in X\}$ را درنظـــر می‌گیریم ، که درآن C_p همانند مسئلهٔ قبل تعریف می‌شود .

حکم می‌کنیم که C ازمولفه‌های X تشکیل شده‌است. بنابر مسئلهٔ قبل ، هر $C_p \in C$ یک مولفه‌است. از آن‌سو ، اگر D مولفه باشد ، D شامل نقطه‌ای مانند $p_0 \in X$ است؛ و درنتیجه ، $D \subset C_{p_0}$. اما D مولفه است؛ از اینرو ، $D = C_{p_0}$.

حال نشان می‌دهیم که C یک افراز X است. واضح است که $X = \cup\{C_p : p \in X\}$ ؛ لذا ، فقـط باید نشان داد کـه مولفه‌های متمایز از هم‌جدایند یا ، معادلا" ، هرگاه $C_p \cap C_q \neq \emptyset$ ، آنـگاه $C_p = C_q$. فـرض‌کنیـم $a \in C_p \cap C_q$. پـس $C_p \subset C_a$ و $C_q \subset C_a$ ، زیـرا C_p و C_q مجموعـه‌های همبنـــدی شامل a اند. اما C_p و C_q مولفه‌اند؛ ازاینرو ، $C_p = C_a = C_q$. بالاخره ، هرگاه E زیرمجموعهٔ همبندناتهیی از X باشد ، آنگاه E شامل نقطه‌ای مانند $p_0 \in X$ است؛ و درنتیجه ، بنابر مسئلهٔ قبل ، $E \subset C_{p_0}$. هرگاه $E = \emptyset$ ، آنگاه E مشمول هر مولفه است.

۱۷ . نشان دهید هرگاه X و Y فضاهایی همبند باشند ، آنگاه $X \times Y$ همبند است. لذا ، حاصل‌ضربی متناهی از فضاهای همبند همبند است .

حل. فرض‌کنیم $p = \langle x_1, y_1 \rangle$ و $q = \langle x_2, y_2 \rangle$ دو نقطه در $X \times Y$ باشند. $\{x_1\} \times Y$ با Y همانریخت ، و لذا همبند ، است. بـهمین نحو ، $X \times \{y_2\}$ همبند است .

اما $\{\langle x_1, y_2 \rangle\} = \{x_1\} \times Y \cap X \times \{y_2\}$ ؛ ازاینرو ، $\{x_1\} \times Y \cup X \times \{y_2\}$ همبنداست . بنابراین ، p و q متعلق بـه یک مولفه‌اند. اما p و q دلخواه بودند؛ از اینرو ، $X \times Y$ یک مولفه داشته؛ و لذا ، همبند می‌باشد .

۱۸ . قضیهٔ ۱۰.۱۳ را ثابت کنید: حاصل‌ضرب فضاهای همبند همبند است؛ یعنی، همبندی یک خاصیت پایای حاصل‌ضربی است.

حل. فرض‌کنیم $\{X_i : i \in I\}$ گردآیه‌ای‌از فضاهای همبند بوده و $X = \prod_i X_i$ فضای حاصل‌ضربی باشد. بعلاوه، $p = \langle a_i : i \in I\rangle \in X$ و $E \subset X$ مولفهٔ p باشد. حکم می‌کنیم که هر نقطهٔ $x = \langle x_i : i \in I\rangle \in X$ متعلق به بست E است؛ و درنتیجه، متعلق به E است، زیرا E بسته است. حال فرض کنیم

$$G = \prod\{X_i : i \neq i_1, \ldots, i_m\} \times G_{i_1} \times \cdots \times G_{i_m}$$

یک مجموعهٔ باز اساسی شامل $x \in X$ باشد.

$$H = \prod\{\{a_i\} : i \neq i_1, \ldots, i_m\} \times X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_m}$$

با $X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_m}$ همانریخت، و درنتیجه همبند، است. بعلاوه، $p \in H$؛ و درنتیجه، H زیرمجموعه‌ای‌از E، یعنی مولفهٔ p، است. اما $G \cap H$ ناتهی‌است؛ از اینرو، G شامل نقطه‌ای از E است. بنابراین، $x \in \bar{E} = E$. لذا، X دارای‌یک مولفه و درنتیجه همبند است.

مجموعه‌های همبند قوسوار

۱۹ . فرض‌کنید $f : I \to X$ مسیری در X باشد. نشان دهیدکه $f[I]$، یعنی برد f، همبند است.

حل. $I = [0,1]$ همبند و f پیوسته است؛ از اینرو، طبق قضیهٔ ۵.۱۳، $f[I]$ همبند است.

۲۰ . ثابت کنید نقشهای پیوستهٔ مجموعه‌های همبند قوسوار همبند قوسوار می‌باشند.

حل. فرض‌کنیم $E \subset X$ همبندقوسواربوده‌و $f : X \to Y$ پیوسته باشد. حکم می‌کنیم که $f[E]$ همبندقوسوار است. زیرا فرض کنیم $p, q \in f[E]$. پس $\exists\, p^*, q^* \in E$ بطوری که $f(p^*) = p$ و $f(q^*) = q$. امـا E همبندقوسوار است؛ و درنتیجه، مسیری مانند $g : I \to X$ هست بطوری که $g(0) = p^*$، $g(1) = q^*$، و $g[I] \subset E$. چون ترکیب توابع پیوسته پیوسته است، پس $f \circ g : I \to Y$ پیوسته است. بعلاوه،

$$f \circ g(0) = f(p^*) = p, \quad f \circ g(1) = f(q^*) = q \quad \text{و} \quad f \circ g[I] = f[g[I]] \subset f[E].$$

لذا، $f[E]$ همبند قوسوار است.

۲۱ . قضیهٔ ۱۲.۱۳ را ثابت کنید: هر مجموعهٔ همبند قوسوار A همبند است.

حل. هرگاه A تهی باشد، A همبند است. همچنین، A ناتهی است؛ مثلاً ، $p \in A$. A همبند قوسوار است؛ و درنتیجه، بهازای هر $a \in A$ ، مسیری مانند $f_a : I \to A$ از p تا a هست. بعلاوه، $a \in f_a[I] \subset A$ ؛ و درنتیجه، $A = \bigcup\{f_a[I] : a \in A\}$. اما، بهازای هر $a \in A$ ، $p \in f_a[I]$ ؛ از اینرو، $\bigcap\{f_a[I] : a \in A\}$ ناتهی است. بعلاوه، هر $f_a[I]$ همبند است؛ و درنتیجه، طبق مسئلهٔ ۷، A همبند است.

۲۲ . فرض کنید $\mathcal{A}$ ردهٔ زیرمجموعههای همبند قوسوار X با اشتراک ناتهی باشد. ثابت کنید $B = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$ همبند قوسوار است.

حل. فرض کنیم $a, b \in B$. پس

$$\exists\, A_a, A_b \in \mathcal{A} \text{ بطوری که } a \in A_a,\ b \in A_b .$$

اما $\mathcal{A}$ دارای اشتراک ناتهی است؛ مثلاً ، $p \in \bigcap\{A : A \in \mathcal{A}\}$. پس $p \in A_a$ و، چون A_a همبندقوسوار است، مسیری مانند $f : I \to A_a \subset B$ از a تا p وجود دارد. بهمین نحو، مسیری مانند $g : I \to A_b \subset B$ از p تا b وجود دارد. ترکیب دومسیر (ر.ک. مثال ۳.۷) مسیری از a تا b مشمول B است. از اینرو، B همبندقوسوار میباشد.

۲۳ . نشان دهید که قرص باز D در صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ همبند قوسوار است.

حل. فرض کنیم $p = \langle a_1, b_1\rangle,\ q = \langle a_2, b_2\rangle \in D$. تابع $f : I \to \mathbf{R}^2$ تعریف شده با

$$f(t) \;=\; \langle a_1 + t(a_2 - a_1),\ b_1 + t(b_2 - b_1)\rangle$$

مسیری از p تا q است که مشمول D است. (از نظر هندسی، $f[I]$ پاره خطواصل بین p و q است.) لذا، D همبند قوسوار است.

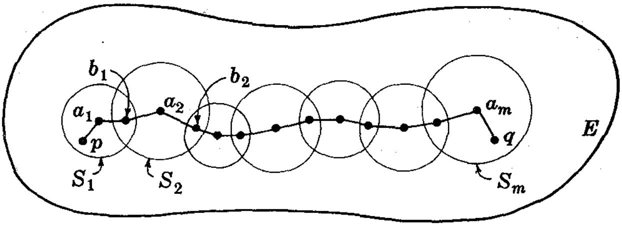
۲۴ . قضیهٔ ۱۳.۱۳ را ثابت کنید: فرضکنید E زیرمجموعهٔ همبند باز ناتهیی از صفحهٔ

$\mathbf{R}^2$ باشد. دراین صورت، E همبند قوسوار است.

حل.

روش ۱. فرض‌کنیم $p \in E$ و G از نقاطی در E تشکیل شده که می‌توان آنها را با مسیری در E به p وصل کرد. حکم می‌کنیم که G باز است. زیرا فرض‌کنیم $q \in G \subset E$. E باز است؛ ودرنتیجه، قرص بازی مانند D به مرکز q هست بطوری که $q \in D \subset E$. اما D همبند قوسوار است؛ لذا، هر نقطهٔ $x \in D$ را می‌توان به q وصل کرد که‌می‌توان‌به p وصل‌نمود. از اینرو، هر نقطهٔ $x \in D$ را می‌توان‌به p وصل کرد؛ و درنتیجه، $q \in D \subset G$. بنابراین، G باز است.
حال قرار می‌دهیم $H = E \setminus G$؛ یعنی، H، مرکب است از آن نقاطی در E که نمی‌توان آنها را با مسیری در E به p وصل کرد. حکم می‌کنیم که H باز است. زیرا فرض‌کنیم $q^* \in H \subset E$. چون E باز است، قرص بازی مانند D^* به مرکز q^* هست بقسمی که $q^* \in D^* \subset E$. چون D^* همبند قوسوار است، هر $x \in D^*$ را نمی‌توان با مسیری در E به p وصل نمود؛ و درنتیجه، $q^* \in D^* \subset H$. از اینرو، H باز است. اما E همبند است، و لذا، E نمی‌تواند اجتماعی از مجموعه‌های باز ازهم جدای ناتهی باشد. دراین صورت، $H = \emptyset$؛ و درنتیجه، $E = G$ همبند قوسوار می‌باشد.

روش ۲. چون E باز است، E اجتماعی از قرصهای باز می‌باشد. اما E همبند است، از اینرو، بنابر مسئلهٔ ۱۱، قرصهای بازی مانند $S_1, \ldots, S_m \subset E$ هستند که یک زنجیر ساده از هر $p \in E$ به‌هر $q \in E$ می‌سازند. فرض‌کنیم a_i مرکز S_i بوده و $b_i \in S_i \cap S_{i+1}$. دراین صورت، قوس چندجمله‌ای از p به a_1 به b_1 به a_2، و غیره مشمول اجتماع قرصها، و درنتیجه مشمول E، است. لذا، E همبند قوسوار می‌باشد.



فضاهای کلی ناهمبند

۲۵ . فضای توپولوژیک X را **کلی ناهمبند** گوییم اگر به‌ازای هر جفت نقطهٔ $p, q \in X$ یک ناهمبندی مانند $G \cup H$ از X باشد که $p \in G$ و $q \in H$. نشان دهید که خط حقیقی $\mathbf{R}$ با توپولوژی $\mathcal{T}$ تولید شده به‌وسیلهٔ بازه‌های باز ـ بستهٔ $(a, b]$ کلی ناهمبند است .

حل . فرض کنیم $p, q \in R$ ؛ مثلاً $p < q$. دراین صورت ، $G = (-\infty, p]$ و $H = (p, \infty)$ مجموعه‌های ازهم جدای بازی باشند که اجتماعشان $\mathbf{R}$ است ؛ یعنی ، $G \cup H$ یک ناهمبندی $\mathbf{R}$ است . اما $p \in G$ و $q \in H$ ؛ از اینرو ، $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ کلی ناهمبند می‌باشد .

۲۶ . نشان دهید که مجموعهٔ $\mathbf{Q}$ از اعداد گویا با توپولوژی معمولی نسبی کلی ناهمبند است .

حل . فرض‌کنیم $p, q \in \mathbf{Q}$ ؛ مثلاً $p < q$. عدد گنگی مانند a هست بطوری که $p < a < q$. قرار می‌دهیم $G = \{x \in Q : x < a\}$ و $H = \{x \in Q : x > a\}$. در این‌صورت ، $G \cup H$ یک ناهمبندی $\mathbf{Q}$ است ، و $p \in G$ و $q \in H$. لذا ، $\mathbf{Q}$ کلی ناهمبند است .

۲۷ . ثابت کنید مولفه‌های یک فضای کلی ناهمبند X زیر مجموعه‌های یکانی از X است .

حل . فرض‌کنیم E مولفه‌ای از X بوده‌و $p, q \in E$ با $p \neq q$. چون X کلی ناهمبند است ، یک ناهمبندی مانند $G \cup H$ از X هست بطوری‌که $p \in G$ و $q \in H$. درنتیجه ، $E \cap G$ و $E \cap H$ ناتهی‌اند ؛ و درنتیجه ، $G \cup H$ یک ناهمبندی E می‌باشد . اما این با اینکه E مولفه و درنتیجه همبند است تعارض دارد . از اینرو ، E فقط از یک نقطه تشکیل شده است .

فضاهای موضعی همبند

۲۸ . فرض کنید E مولفه‌ای در فضای موضعی همبند X باشد . ثابت کنید E باز است .

حل. فرض کنیم $p \in E$. چون X موضعی‌همبنداست ، p دست‌کم به یک‌مجموعهٔ همبند باز مانند G_p تعلق دارد. اما E مولفهٔ p است ؛ از اینرو ، $p \in G_p \subset E$ ؛ و درنتیجه ، $E = \bigcup\{G_p : p \in E\}$.
بنابراین ، E باز است ، زیرا اجتماعی از مجموعه‌های باز می‌باشند.

۲۹ . فرض کنید X و Y موضعی همبند باشند. ثابت کنید $X \times Y$ موضعی همبند است.

حل. X موضعی همبند است اگرگر پایه‌ای مانند $\mathcal{B}$ مرکب از مجموعه‌های همبند داشته‌باشد. بهمین نحو، Y پایه‌ای مانند $\mathcal{B}^*$ مرکب از مجموعه‌های همبند دارد. اما $X \times Y$ یک حاصلضرب متناهی است؛ از اینرو ،

$$\{G \times H : G \in \mathcal{B},\ H \in \mathcal{B}^*\}$$

پایه‌ای برای فضای حاصلضربی $X \times Y$ است. اما هر $G \times H$ همبند است ، زیرا G و H همبندند. به‌عبارت‌دیگر، $X \times Y$ پایه‌ای‌مرکب ازمجموعه‌های همبند دارد؛ و درنتیجه ، $X \times Y$ موضعی همبند است.

۳۰ . فرض کنید $\{X_i\}$ گردآیه‌ای‌ازفضاهای همبندو موضعی همبند باشد. ثابت کنیدفضای حاصلضربی $X = \prod_i X_i$ موضعی همبند است.

حل. فرض کنیم G زیرمجموعهٔ بازی‌از X شامل $p = \langle a_i : i \in I \rangle \in X$ باشد. دراین صورت ، عضوی از پایهٔ معرف

$$B = G_{i_1} \times \cdots \times G_{i_m} \times \prod\{X_i : i \neq i_1, \ldots, i_m\}$$

هست بقسمی که $p \in B \subset G$ ؛ و درنتیجه ، $a_{i_k} \in G_{i_k}$. امـا هر فضای مختصات موضعی همبند است ؛ و درنتیجه ، زیرمجموعه‌های باز همبندی مانند $H_{i_k} \subset X_{i_k}$ وجود دارند بطوری که

$$a_{i_1} \in H_{i_1} \subset G_{i_1},\ \ldots,\ a_{i_m} \in H_{i_m} \subset G_{i_m} .$$

قرار می‌دهیم

$$H = H_{i_1} \times \cdots \times H_{i_m} \times \prod\{X_i : i \neq i_1, \ldots, i_m\} .$$

چون هر X_i و هر H_{i_k} همبند است ، H نیز همبند است. بعلاوه ، H باز بوده و $p \in H \subset B \subset G$. بنابراین ، X موضعی همبند است.

مسائل تکمیلی

فضاهای همبند

۳۱ . نشان دهید هرگاه $(X, \mathcal{T})$ همبند بوده و $\mathcal{T}^* \precsim \mathcal{T}$ ، آنگاه $(X, \mathcal{T}^*)$ همبند است .

۳۲ . نشان دهید هرگاه $(X, \mathcal{T})$ ناهمبند بوده و $\mathcal{T} \precsim \mathcal{T}^*$ ، آنگاه $(X, \mathcal{T}^*)$ ناهمبند است .

۳۳ . نشان دهید که هر فضای نامجزا همبند است .

۳۴ . با مثال نقض نشان دهید که همبندی یک خاصیت موروثی نیست .

۳۵ . هرگاه $A_1, A_2, \ldots$ دنباله‌ای از مجموعه‌های همبند باشد بطوری که A_1 و A_2 ، A_2 و A_3 ، و غیره از هم‌جدا شده نباشند ، ثابت کنید $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ همبند است .

۳۶ . فرض کنید E زیرمجموعهٔ همبندی از فضای T_1 و شامل بیش از یک عنصر باشد . ثابت کنید E نامتناهی است .

۳۷ . ثابت کنید فضای توپولوژیک X همبند است اگر و فقط اگر هر زیرمجموعهٔ حقیقی ناتهی X کرانهٔ ناتهی داشته باشد .

مولفه‌ها

۳۸ . مولفه‌های یک فضای مجزا را تعیین کنید .

۳۹ . مولفه‌های یک فضای هم‌متناهی را تعیین کنید .

۴۰ . نشان دهید که هرجفت مولفه ازهم جدا شده‌اند .

۴۱ . ثابت کنید هرگاه X تعدادی متناهی مولفه داشته باشد ، آنگاه هر مولفه هم‌باز ست هم بسته .

۴۲ . ثابت کنید هرگاه E زیرمجموعهٔ همبند ناتهیی از X باشد که هم باز و هم بسته است ، آنگاه E یک مولفه می‌باشد .

۴۳ . فرض کنید E مولفه‌ای از Y بوده و $f: X \to Y$ پیوسته باشد . ثابت کنید $f^{-1}[E]$ اجتماعی از مولفه‌های X است .

۴۴ . فرض کنید X یک فضای فشرده باشد . ثابت کنید هرگاه مولفه‌های X باز باشند ، آنگاه تعداد آنها متناهی است .

مجموعه‌های همبند قوسوار

۴۵ . نشان دهید که یک فضای نامجزا همبند قوسوار است .

۴۶ . ثابت کنید مولفه‌های همبند قوسوار X یک افراز برای X تشکیل می‌دهند .

۴۷ . ثابت کنید هر مولفهٔ X به وسیلهٔ مولفه‌های همبند قوسوار افراز می‌شود .

مسائل گوناگون

۴۸ . نشان دهید که یک فضای نامجزا همبند ساده است.

۴۹ . نشان دهید که یک فضای کلی ناهمبند هاسدورف است.

۵۰ . فرض کنید G زیرمجموعهٔ بازی از فضای موضعی همبند X باشد. ثابت کنید G موضعی همبند است.

۵۱ . فرض کنید $A = \{a, b\}$ مجزا بوده و $I = [0,1]$. نشان دهید که فضای حاصل‌ضربی $X = \prod \{A_i : A_i = A, i \in I\}$ موضعی همبند نیست. از اینرو، همبندی موضعی پایای حاصل‌ضربی نیست.

۵۲ . نشان دهید که "همبند ساده" یک خاصیت توپولوژیک است.

۵۳ . فرض کنید X موضعی همبند باشد. ثابت کنید X همبند است اگر و فقط اگر زنجیر ساده‌ای از مجموعه‌های همبندوجود داشته باشند که هر دو نقطه در X را بهم‌وصل کنند.

فضاهای متری تام[14]

دنباله‌های کشی

فرض کنیم X یک فضای متری باشد. دنبالهٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ در X یک **دنبالهٔ کشی** است اگر بازای هر $\epsilon > 0$،

$$\exists\ n_0 \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } n, m > n_0 \ \Rightarrow\ d(a_n, a_m) < \epsilon.$$

لذا، وقتی X یک فضای نرم‌دار است، $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی است اگر بازای هر $\epsilon > 0$،

$$\exists\ n_0 \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } n, m > n_0 \ \Rightarrow\ \|a_n - a_m\| < \epsilon.$$

مثال ۱۰۱ . فرض کنیم $\langle a_n \rangle$ دنباله‌ای همگرا باشد؛ مثلاً $a_n \to p$. در این صورت، $\langle a_n \rangle$ لزوماً دنباله‌ای کشی است زیرا، بازای هر $\epsilon > 0$،

$$\exists\ n_0 \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } n > n_0 \ \Rightarrow\ d(a_n, p) < \tfrac{1}{2}\epsilon.$$

از اینرو، طبق نامساوی مثلثی

$$n, m > n_0 \ \Rightarrow\ d(a_n, a_m) \leq d(a_n, p) + d(a_m, p) \ < \ \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon.$$

به عبارت دیگر، $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی است.

مثال ۱۰۱ را به‌صورت حکم بیان می‌کنیم.

حکم ۱۰۱۴ . *هر دنبالهٔ همگرا در یک فضای متری یک دنبالهٔ کشی است.*

همانطور که مثال زیر نشان داده، عکس حکم ۱۰۱۴ درست نیست.

مثال ۲۰۱ . فرض کنیم $X = (0,1)$ با متر معمولی باشد. در این صورت، $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \rangle$

دنباله‌ای در X است که کشی است ولی در X همگرا نیست.

مثال ۳۰۱ . فرض‌کنیم d مترمبتذل برمجموعهٔ X بوده و $\langle a_n \rangle$ دنباله‌ای کشی در (X, d) باشد. به‌یاد آورید که d به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(a,b) = \begin{cases} 0 \text{ ، } a = b & \text{اگر} \\ 1 \text{ ، } a \neq b & \text{اگر} \end{cases}$$

فرض کنیم $\epsilon = \frac{1}{2}$. چون $\langle a_n \rangle$ کشی است، $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که

$$n, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad d(a_n, a_m) < \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n = a_m .$$

به عبارت دیگر، $\langle a_n \rangle$ به شکل $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, p, p, p, \ldots \rangle$ است؛ یعنی، جملات از جایی به‌بعد ثابت‌اند.

مثال ۴۰۱ . فرض‌کنیم $\langle p_1, p_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای کشی درفضای اقلیدسی m بعدی $\mathbf{R}^m$ باشد؛ مثلاً،

$$p_1 = \langle a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)} \rangle, \quad p_2 = \langle a_2^{(1)}, \ldots, a_2^{(m)} \rangle, \quad \ldots$$

تصاویر $\langle p_n \rangle$ بتوی هریک از m فضای مختصات، یعنی

$$\langle a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots \rangle, \quad \ldots, \quad \langle a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, a_3^{(m)}, \ldots \rangle \tag{۱}$$

دنباله‌هایی کشی در $\mathbf{R}$ اند، زیرا فرض‌کنیم $\epsilon > 0$. چون $\langle p_n \rangle$ کشی است، $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که

$$r, s > n_0 \quad \Rightarrow \quad d(p_r, p_s)^2 = |a_r^{(1)} - a_s^{(1)}|^2 + \cdots + |a_r^{(m)} - a_s^{(m)}|^2 < \epsilon^2 .$$

لذا، بخصوص،

$$r, s > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_r^{(1)} - a_s^{(1)}|^2 < \epsilon^2, \quad \ldots, \quad |a_r^{(m)} - a_s^{(m)}|^2 < \epsilon^2 .$$

به عبارت دیگر، هریک از m دنباله در (۱) یک دنبالهٔ کشی است.

فضاهای متری تام

تعریف . فضای متری (X, d) ***تام*** است اگر هر دنبالهٔ کشی $\langle a_n \rangle$ در X همگرا به‌نقطه‌ای مانند $p \in X$ باشد.

مثال ۱۰۲ . طبق قضیـهٔ اساسی همگرایی کشی (ر.ک. صفحهٔ ۹۳)، خط حقیقی $\mathbf{R}$ با متر معمولی تام است.

مثال ۲۰۲ . فرض کنیم d مترمبتذل بر مجموعهٔ X باشد. دراینجا (ر.ک. مثال ۳۰۱)

دنباله‌ٔ $\langle a_n\rangle$ در X کشی است اگرگر به شکل $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, p, p, p, \ldots\rangle$ باشد، که بوضوح به $p \in X$ همگراست. لذا، هر فضای متری مبتذل تام است.

مثال ۳۰۲ . بازهٔ یکهٔ باز $X = (0,1)$ با متر معمولی تام نیست، زیرا (ر.ک. مثال ۲۰۱) دنبالهٔ $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\rangle$ در X کشی است ولی به نقطه‌ای در X همگرا نیست.

تبصره. امثلهٔ ۱۰۲ و ۳۰۲ نشان می‌دهند که تمامیت یک خاصیت توپولوژیک نیست؛ زیرا $\mathbf{R}$ با $(0,1)$ همانریخت است و $\mathbf{R}$ تام است ولی $(0,1)$ تام نیست.

مثال ۴۰۲ . فضای m بعدی $\mathbf{R}^m$ تام است. زیرا فرض کنیم $\langle p_1, p_2, \ldots\rangle$ دنباله‌ای کشی در $\mathbf{R}^m$ باشد، که در آن

$$p_1 = \langle a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}\rangle, \quad p_2 = \langle a_2^{(1)}, \ldots, a_2^{(m)}\rangle, \quad \ldots$$

پس (ر.ک. مثال ۴۰۱) تصاویر $\langle p_n\rangle$ بتوی m فضای مختصات کشی‌اند؛ و چون $\mathbf{R}$ تام است، همه همگرایند:

$$\langle a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots\rangle \to b_1, \quad \ldots, \quad \langle a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \ldots\rangle \to b_m \cdot$$

لذا، $\langle p_n\rangle$ همگرا به نقطهٔ $q = \langle b_1, \ldots, b_m\rangle \in \mathbf{R}^m$ است، زیرا هریک از m تصویر به تصویر q همگراست (ر.ک. صفحهٔ ۳۰۵، قضیهٔ ۷۰۱۲).

اصل مجموعه‌های بستهٔ تودرتو

به‌یاد آورید که قطر زیرمجموعهٔ A از فضای متری X، که با $d(A)$ نموده می‌شود، با $d(A) = \sup\{d(a,a') : a, a' \in A\}$ تعریف می‌شود، و گوییم دنبالهٔ $A_1, A_2, \ldots$ از مجموعه‌ها تودرتوست اگر $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$.

قضیهٔ زیر توصیفی است از فضاهای متری تام که شبیه قضیهٔ بازه‌های تودرتو برای اعداد حقیقی است.

قضیهٔ ۲۰۱۴ . ***فضای متری X تام است اگر و فقط اگر هر دنبالهٔ تودرتو از مجموعه‌های بستهٔ ناتهی که قطرشان به صفر میل کند دارای اشتراک ناتهی باشد.***

به عبارت دیگر، هرگاه $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ زیرمجموعه‌هایی بسته و ناتهی از فضای متری تام X باشد بطوری که $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n) = 0$، آنگاه $\cap_{n=0}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ ؛ و بالعکس.

مثالهای زیرنشان می‌دهند که شرایط $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$ و بسته بودن A_i ها هر دو در قضیهٔ ۲.۱۴ لازمند.

مثال ۱.۳ . فرض کنیم X خط حقیقی $\mathbf{R}$ بوده و $A_n = [n, \infty)$. X تام است، A_n ها بسته‌اند، و $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$. اما $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ تهی است. توجه کنید که $\lim_{n\to\infty} d(A_n) \neq 0$.

مثال ۲.۳ . فرض کنید X خط حقیقی $\mathbf{R}$ بوده و $A_n = (0, 1/n]$. X تام است، $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ، و $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$. اما $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ تهی است. توجه کنید که A_n ها بسته نیستند.

تمامیت و نگاشتهای انقباض

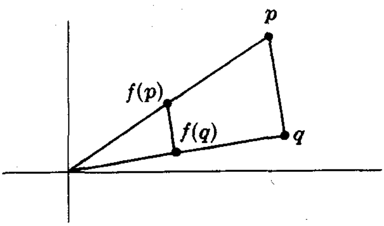
فرض کنیم X یک فضای متری باشد. تابع $f : X \to X$ را یک ***نگاشت انقباض*** نامیم هرگاه عددی حقیقی مانند α ، که $0 \leq \alpha < 1$ ، باشد بطوری که به‌ازای هر $p, q \in X$ ،

$$d(f(p), f(q)) \leq \alpha\, d(p, q) < d(p, q).$$

لذا، در یک نگاشت انقباض، فاصلهٔ بین نقشهای هردو نقطه کمتر از فاصلهٔ بین نقاط است.

مثال ۱.۴ . فرض‌کنیم f تابعی بر فضای اقلیدسی 2 بعدی $\mathbf{R}^2$ باشد؛ یعنی، $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ با $f(p) = \frac{1}{2}p$ تعریف شده باشد. f یک انقباض است، زیرا

$$\begin{aligned} d(f(p), f(q)) &= \|f(p) - f(q)\| = \|\tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}q\| \\ &= \tfrac{1}{2}\|p - q\| = \tfrac{1}{2}\, d(p, q). \end{aligned}$$



هرگاه X یک فضای متری تام باشد، آنگاه قضیهٔ "نقطهٔ ثابت" زیر را داریم که کاربردهای زیادی در آنالیز دارد.

قضیهٔ ۳.۱۴ . هرگاه f یک نگاشت انقباض بر فضای متری تام X باشد، آنگاه نقطهٔ

منحصر بفردی مانند $p \in X$ هست بطوری که $f(p) = p$.

تتمیم‌ها

فضای متری X^* را یک **تتمیم** فضای متری X گوییم هرگاه X^* تام بوده و X با زیرمجموعهٔ چگالی از X^* یکمتر باشد.

مثال ۱۰۵ . مجموعهٔ $\mathbf{R}$ از اعداد حقیقی یک تتمیم مجموعهٔ $\mathbf{Q}$ از اعداد گویاست، زیرا $\mathbf{R}$ تام بوده و $\mathbf{Q}$ زیرمجموعهٔ چگالی از $\mathbf{R}$ است.

حال ساختن تتمیم خاصی ازیک فضای متری دلخواه X را به‌اختصار شرح می‌دهیم. فرض‌کنیم $C[X]$ گردآیهٔ همهٔ دنباله‌های کشی در X بوده و $\sim$ رابطه‌ای در $C[X]$ باشد که به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle \quad \text{اگفگر} \quad \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0 \ .$$

لذا، تحت "$\sim$"، آن دنباله‌های کشی را که "باید" یک "حد" داشته باشند یکی می‌کنیم.

لم ۴۰۱۴ . ***رابطهٔ $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی در $C[X]$ است.***

حال فرض‌کنیم X^* مجموعهٔ خارج قسمتی $C[X]/\sim$ باشد؛ یعنی، X^* مرکب است از رده‌های هم‌ارزی $[\langle a_n \rangle]$ از دنباله‌های کشی $\langle a_n \rangle \in C[X]$. همچنین، e تابع تعریف شده با

$$e([\langle a_n \rangle], [\langle b_n \rangle]) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$$

باشد، که در آن $[\langle a_n \rangle], [\langle b_n \rangle] \in X^*$.

لم ۵۰۱۴ . ***تابع e تعریف شده است؛ یعنی، $\langle a_n \rangle \sim \langle a_n^* \rangle$ و $\langle b_n \rangle \sim \langle b_n^* \rangle$ ایجاب می‌کنند که***

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty} d(a_n^*, b_n^*) \ .$$

به‌عبارت دیگر، e به‌دنبالهٔ کشی خاصی که ردهٔ هم‌ارزی را نمایش می‌دهد بستگی ندارد. بعلاوه،

لم ۶.۱۴ . تابع e یک متر بر X^* است .

به‌ازای هر $p \in X$ ، دنباله‌ٔ $\langle p, p, p, \ldots \rangle \in C[X]$ ؛ یعنی ، کشی است . قرار می‌دهیم

$$\hat{p} = [\langle p, p, \ldots \rangle] \text{ و } \hat{X} = \{\hat{p} : p \in X\} .$$

پس $\hat{X}$ زیرمجموعه‌ای از X^* است .

لم ۷.۱۴ . X با $\hat{X}$ یکمتر است ، و $\hat{X}$ در X^* چگال می‌باشد .

لم ۸.۱۴ . هر دنباله‌ٔ کشی در X^* همگرا است ؛ و در نتیجه ، X^* یک تتمیم X می‌باشد .

بالاخره ، نشان می‌دهیم که

لم ۹.۱۴ . هرگاه Y^* تتمیمی از X باشد ، Y^* با X^* یکمتر است .

لمهای پیش نتیجهٔ اساسی زیر را ایجاب می‌کند .

قضیهٔ ۱۰.۱۴ . هر فضای متری X دارای تتمیم است و همهٔ تتمیمهای X یکمتر می‌باشند .

به عبارت دیگر ، با تقریب یکمتری ، هر فضای متری تتمیم منحصر بفرد دارد .

قضیهٔ رسته‌ای بئر[1]

به‌یاد آورید که زیرمجموعهٔ A از فضای توپولوژیک X **هیچجا چگال** در X است اگر درون بست A تهی باشد:

$$\operatorname{int}(\bar{A}) = \emptyset \cdot$$

مثال ۱.۶ . مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ از اعداد صحیح زیرمجموعهٔ هیچجا چگالی از خط حقیقی $\mathbf{R}$

---

1. Baire

است، زیرا $\mathbf{Z}$ بسته است، یعنی $\mathbf{Z} = \bar{\mathbf{Z}}$ ، و درونش تهی است؛ از اینرو،

$$\operatorname{int}(\bar{\mathbf{Z}}) = \operatorname{int}(\mathbf{Z}) = \emptyset \cdot$$

بهمین نحو، هر زیرمجموعهٔ تهی از $\mathbf{R}$ هیچجا چگال در $\mathbf{R}$ است.

ازآن‌سو، مجموعهٔ $\mathbf{Q}$ ازاعدادگویا هیچجا چگال در $\mathbf{R}$ نیست، زیرا بست $\mathbf{Q}$ مساوی $\mathbf{R}$ است؛ و درنتیجه،

$$\operatorname{int}(\bar{\mathbf{Q}}) = \operatorname{int}(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \neq \emptyset \,.$$

گوییم فضای توپولوژیک X از **رستهٔ اول** (یا **باریک** یا **نازک**) است اگر X اجتماعی حداکثر شمارشپذیر از زیرمجموعه‌های هیچجا چگال X باشد. درغیر این‌صورت، گوییم X از **رستهٔ دوم** (یا **کلفت** یا **ضخیم**) می‌باشد.

مثال ۲۰۶ . مجموعهٔ $\mathbf{Q}$ از اعداد گویا از رستهٔ اول است، زیرا زیرمجموعه‌های یکانی $\{p\}$ از $\mathbf{Q}$ هیچ‌جا چگال در $\mathbf{Q}$ اند، و $\mathbf{Q}$ اجتماع حداکثر شمارشپذیری از مجموعه‌های‌یکانی است.

در پرتو قضیهٔ رسته‌ای بئر، که ذیلاً آمده، خط حقیقی $\mathbf{R}$ از رستهٔ دوم است.

قضیهٔ (بئر) ۱۱۰۱۴ . *هر فضای متریِ تام X از رستهٔ دوم است.*

تمامیت و فشردگی

فرض‌کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای متری X باشد. A فشرده است اگر‌گر A دنباله‌ای فشرده باشد اگرگر هر دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ در A زیردنباله‌ای همگرا مانند $\langle a_{i_n} \rangle$ داشته باشد. اما، طبق مثال ۱۰۱ ، $\langle a_{i_n} \rangle$ یک دنبالهٔ کشی است. از اینرو، انتظار اینکه تمامیت به فشردگی و مفهوم مربوط به آن، یعنی کرانداری کل، مربوط باشد انتظار معقولی است.

از این روابط دوتا را بیان می‌کنیم:

قضیهٔ ۱۲۰۱۴ . *فضای متری X فشرده است اگر و فقط اگر تام و کلی کراندار باشد.*

قضیهٔ ۱۳۰۱۴ . *فرض‌کنیم X یک‌فضای‌متری تام باشد. $A \subset X$ فشرده است اگر و فقط اگر A بسته و کلی کراندار باشد.*

ساختن اعداد حقیقی

اعداد حقیقی را می‌توان از اعداد گویا به روش مذکور دراین فصل ساخت. به‌طور مشخص، فرض کنیم $\mathbf{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا بوده و $\mathbf{R}$ گردآیهٔ رده‌های هم‌ارزی از دنباله‌های کشی در $\mathbf{Q}$ باشد:

$$\mathbf{R} = \{[\langle a_n\rangle] : \text{است } \mathbf{Q} \text{ یک دنبالهٔ کشی در } \langle a_n\rangle\} .$$

$\mathbf{R}$ با متر مناسب یک فضای متری تام است.

تبصره. فرض کنیم X یک فضای برداری نرمدار باشد. ساختن مذکور دراین فصل یک فضای متری تام مانند X^* بدست می‌دهد. لذا، می‌توان اعمال جمع برداری، ضرب اسکالر، و نرم در X^* مذکور درزیر را طوری تعریف کرد که X^* یک فضای برداری نرمدار تام، به‌نام ***فضای باناخ***[1]، گردد:

(یک) $[\langle a_n\rangle] + [\langle b_n\rangle] \equiv [\langle a_n + b_n\rangle]$ ؛ (دو) $k[\langle a_n\rangle] \equiv [\langle ka_n\rangle]$ ؛

(سه) $\|[\langle a_n\rangle]\| = \lim_{n\to\infty} \|a_n\|$.

مسائل حل شده

دنباله‌های کشی

۱ . نشان دهید که هر دنبالهٔ کشی $\langle a_n\rangle$ درفضای متری X کلی کراندار (و لذا، کراندار) است.

حل. فرض کنیم $\epsilon > 0$. می‌خواهیم نشان دهیم که تجزیه‌ای از $\{a_n\}$ به تعدادی متناهی مجموعه، هریک با قطری کمتر از ϵ ، وجود دارد. چون $\langle a_n\rangle$ کشی است، $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$ هست بطوری که

$$n, m > n_0 \;\Rightarrow\; d(a_n, a_m) < \epsilon .$$

بنابراین، $B = \{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots\}$ دارای قطری حداکثر مساوی ϵ است. لذا، $\{a_1\}, \ldots, \{a_{n_0}\}, B$ یک تجزیهٔ متناهی از $\{a_n\}$ بتوی مجموعه‌هایی به قطر کمتر از ϵ است؛ و درنتیجه، $\langle a_n\rangle$ کلی کراندار می‌باشد.

۲ . فرض کنید $\langle a_1, a_2, \ldots\rangle$ دنباله‌ای در فضای متری X بوده، و

---

1. *Banach*

$$A_1 = \{a_1, a_2, \ldots\}, \quad A_2 = \{a_2, a_3, \ldots\}, \quad A_3 = \{a_3, a_4, \ldots\}, \quad \ldots$$

نشان دهید که $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی است اگر و فقط اگر قطرهای A_n به صفر میل کنند؛ یعنی، $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$.

حل. فرض کنیم $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی باشد. همچنین، $\epsilon > 0$. دراین صورت،
$\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon$.
بنابراین،
$n > n_0 \Rightarrow d(A_n) < \epsilon$؛ و درنتیجه، $\lim_{n\to\infty} (A_n) = 0$.
ازآن‌سو، فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$. همچنین، $\epsilon > 0$. دراین صورت،
$\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $d(A_{n_0+1}) < \epsilon$.
از اینرو،

$$n, m > n_0 \ \Rightarrow\ a_n, a_m \in A_{n_0+1} \ \Rightarrow\ d(a_n, a_m) < \epsilon\ ;$$

و درنتیجه، $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی است.

۳. فرض کنید $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ یک دنبالهٔ کشی در X بوده‌و $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots \rangle$ یک زیردنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ باشد. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{i_n}) = 0$.

حل. فرض کنیم $\epsilon > 0$. چون $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی است،
$\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $n, m > n_0 - 1 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon$.
اما $i_{n_0} \geq n_0 > n_0 - 1$؛ ولذا، $d(a_{n_0}, a_{i_{n_0}}) < \epsilon$. به‌بیان دیگر، $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{i_n}) = 0$.

۴. فرض کنید $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ یک دنبالهٔ کشی در X بوده و $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots \rangle$ زیردنباله‌ای از $\langle a_n \rangle$ همگرا به $p \in X$ باشد. نشان دهید که $\langle a_n \rangle$ نیز همگرا به p است.

حل. بنابر نامساوی مثلثی، $d(a_n, p) \leq d(a_n, a_{i_n}) + d(a_{i_n}, p)$؛ و درنتیجه،

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, p) \leq \lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{i_n}) + \lim_{n\to\infty} d(a_{i_n}, p).$$

چون $a_{i_n} \to p$، $\lim_{n\to\infty} d(a_{i_n}, p) = 0$ و، طبق مسئلهٔ قبل، $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{i_n}) = 0$.
پس $\lim_{n\to\infty} d(a_n, p) = 0$؛ و درنتیجه، $a_n \to p$.

۵. فرض کنید $\langle b_1, b_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای کشی در فضای متری X بوده، و $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$

دنباله‌ای در X باشد بطوری که به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $d(a_n, b_n) < 1/n$.
(یک) نشان دهید که $\langle a_n \rangle$ نیز یک دنبالهٔ کشی در X است .
(دو) نشان دهید که $\langle a_n \rangle$ همگرا مثلاً" به $p \in X$ است اگر و فقط اگر $\langle b_n \rangle$ همگرا به p باشد .

حل

(یک) بنابر نامساوی مثلثی ،

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, b_m) + d(b_m, b_n) + d(b_n, a_n)$$

فرض کنیم $\epsilon > 0$. پس $\exists\ n_1 \in \mathbf{N}$ بطوری که $1/n_1 < \epsilon/3$; بنابراین ،

$$n, m > n_1 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \epsilon/3 + d(b_m, b_n) + \epsilon/3 .$$

طبق فرض ، $\langle b_1, b_2, \ldots \rangle$ یک دنبالهٔ کشی است ؛ لذا ،

$\exists\ n_2 \in \mathbf{N}$ بطوری که $n, m > n_2 \Rightarrow d(b_m, b_n) < \epsilon/3$.

قرار می‌دهیم $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. دراین صورت ،

$$n, m > n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon .$$

بنابراین ، $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی است .

(دو) بنابر نامساوی مثلثی ، $d(b_n, p) \leq d(b_n, a_n) + d(a_n, p)$ ؛ از اینرو ،

$$\lim_{n\to\infty} d(b_n, p) \leq \lim_{n\to\infty} d(b_n, a_n) + \lim_{n\to\infty} (a_n, p) .$$

اما $\lim_{n\to\infty} d(b_n, a_n) \leq \lim_{n\to\infty} (1/n) = 0$. لذا ، اگر $a_n \to p$ ،
$\lim_{n\to\infty} d(b_n, p) \leq \lim_{n\to\infty} (a_n, p) = 0$ ؛ و درنتیجه ، $\langle b_n \rangle$ نیز همگرا به p است . بهمین نحو ، هرگاه $b_n \to p$ ، آنگاه $a_n \to p$.

فضاهای تام

۶ . قضیهٔ ۲.۱۴ را ثابت کنید : احکام زیر باهم هم‌ارزند : (یک) X یک فضای متری تام است ؛ (دو) هردنبالهٔ تودرتو از مجموعه‌های بستهٔ ناتهی که قطرهایشان به صفر میل می‌کنند اشتراک ناتهی دارند .

حل

(یک) $\Leftarrow$ (دو) . فرض کنیم $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ زیرمجموعه‌های بستهٔ ناتهی از X باشند بطوری که $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$. می‌خواهیم ثابت کنیم که $\cap_n A_n \neq \emptyset$.

چون هر A_i ناتهی است، می‌توان دنباله‌ٔ $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ را طوری اختیار کرد که $a_1 \in A_1, \; a_2 \in A_2, \; \ldots$.

حکم می‌کنیم که $\langle a_n \rangle$ یک دنباله‌ٔ کشی است. فرض کنیم $\epsilon > 0$. چون $\lim_{n \to \infty} d(A_n) = 0$ ، $\exists \; n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $d(A_{n_0}) < \epsilon$.

اما A_i ها تودرتواند؛ از اینرو،

$$n, m > n_0 \;\Rightarrow\; A_n, A_m \subset A_{n_0} \;\Rightarrow\; a_n, a_m \in A_{n_0} \;\Rightarrow\; d(a_n, a_m) < \epsilon \, .$$

لذا، $\langle a_n \rangle$ کشی است.

اما X تام است؛ و درنتیجه، $\langle a_n \rangle$ به مثلاً" $p \in X$ همگراست. حکم می‌کنیم که $p \in \cap_n A_n$. فرض کنیم این‌طور نباشد؛ یعنی،

$\exists \; k \in \mathbf{N}$ بطوری که $p \notin A_k$.

چون A_k مجموعه‌ای بسته است، فاصلهٔ بین p و A_k ناصفر است؛ مثلاً"، $d(p, A_k) = \delta > 0$. دراین صورت، A_k و کره‌ٔ باز $S = S(p, \frac{1}{2}\delta)$ ازهم جدایند؛ ازاینرو،

$$n > k \;\Rightarrow\; a_n \in A_k \;\Rightarrow\; a_n \notin S(p, \tfrac{1}{2}\delta) \, .$$

این ممکن نیست، زیرا $a_n \to p$. به عبارت دیگر، $p \in \cap_n A_n$ ؛ و درنتیجه، $\cap_n A_n$ ناتهی است.

(دو) $\Leftarrow$ (یک). فرض کنیم $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای کشی در X باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که $\langle a_n \rangle$ همگراست. فرض کنیم

$$A_1 = \{a_1, a_2, \ldots\}, \quad A_2 = \{a_2, a_3, \ldots\}, \quad \ldots$$

یعنی، $A_k = \{a_n : n \geqq k\}$. دراین صورت، $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ و، طبق مسئلهٔ ۲، $\lim_{n \to \infty} d(A_n) = 0$. بعلاوه، چون $d(\bar{A}) = d(A)$ ، که در آن $\bar{A}$ بست A است، $\bar{A}_1 \supset \bar{A}_2 \supset \cdots$ دنباله‌ای از مجموعه‌های بستهٔ ناتهی است که قطرهایشان به صفر میل می‌کنند. لذا، طبق فرض، $\cap_n \bar{A}_n \neq \emptyset$ ؛ مثلاً"، $p \in \cap_n \bar{A}_n$. حکم می‌کنیم که دنبالهٔ کشی $\langle a_n \rangle$ همگرا به p است.

فرض کنیم $\epsilon > 0$. چون $\lim_{n \to \infty} d(\bar{A}) = 0$.

$\exists \; n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $d(\bar{A}_{n_0}) < \epsilon$ ؛

و درنتیجه،

$$n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n, p \in \bar{A}_{n_0} \;\Rightarrow\; d(a_n, p) < \epsilon \, .$$

به عبارت دیگر، $\langle a_n \rangle$ همگرا به p است.

۷ . فرض کنید X یک فضای متری بوده و $f : X \to X$ یک نگاشت انقباض بر X باشد؛

یعنی، $\alpha \in \mathbf{R}$ ای، که $0 \leqq \alpha < 1$ ، هست بطوری که، به‌ازای هر $p, q \in X$ ، $d(f(p), f(q)) \leqq \alpha\, d(p, q)$. نشان دهید که f پیوسته است.

حل. نشان می‌دهیم f در هر نقطهٔ $x_0 \in X$ پیوسته است. فرض کنیم $\epsilon > 0$. دراین صورت،

$$d(x, x_0) < \epsilon \;\Rightarrow\; d(f(x), f(x_0)) \leqq \alpha\, d(x, x_0) \leqq \alpha\epsilon < \epsilon\,;$$

و درنتیجه، f پیوسته می‌باشد.

۸ . قضیهٔ ۳.۱۴ را ثابت کنید: فرض کنید f یک نگاشت انقباض بر فضای متری تام X باشد؛ مثلاً"،

$$d(f(a), f(b)) \leqq \alpha\, d(a, b), \quad 0 \leqq \alpha < 1\,.$$

دراین صورت، یک و فقط یک نقطه مانند $p \in X$ هست بطوری که $f(p) = p$.

حل. فرض کنیم a_0 نقطه‌ای در X باشد. قرار می‌دهیم

$$a_1 = f(a_0),\; a_2 = f(a_1) = f^2(a_0),\; \ldots,\; a_n = f(a_{n-1}) = f^n(a_0),\; \ldots$$

حکم می‌کنیم $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ یک دنبالهٔ کشی است. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} d(f^{s+t}(a_0), f^t(a_0)) &\leqq \alpha\, d(f^{s+t-1}(a_0), f^{t-1}(a_0)) \leqq \cdots \leqq \alpha^t d(f^s(a_0), a_0) \\ &\leqq \alpha^t [d(a_0, f(a_0)) + d(f(a_0), f^2(a_0)) + \cdots + d(f^{s-1}(a_0), f^s(a_0))]. \end{aligned}$$

اما $d(f^{i+1}(a_0), f^i(a_0)) \leqq \alpha^i d(f(a_0), a_0)$ ؛ و درنتیجه،

$$\begin{aligned} d(f^{s+t}(a_0), f^t(a_0)) &\leqq \alpha^t d(f(a_0), a_0)(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{s-1}) \\ &\leqq \alpha^t d(f(a_0), a_0)\,[1/(1-\alpha)], \end{aligned}$$

زیرا $(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{s-1}) \leqq 1/(1-\alpha)$.

حال فرض کنیم $\epsilon > 0$ و قرار می‌دهیم

$$\delta = \begin{cases} \epsilon(1-\alpha) & \text{اگر}\; d(f(a_0), a_0) = 0 \\ \epsilon(1-\alpha)/d(f(a_0), a_0) & \text{اگر}\; d(f(a_0), a_0) \neq 0 \end{cases}$$

چون $\alpha < 1$ ،

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} \;\text{بطوری که}\; \alpha^{n_0} < \delta\,.$$

از اینرو، اگر $r \geqq s > n_0$ ،

$$d(a_s, a_r) \leqq \alpha^s [1/(1-\alpha)]\, d(f(a_0), a_0) < \delta[1/(1-\alpha)]\, d(f(a_0), a_0) \leqq \epsilon\,;$$

و درنتیجه، $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی است.

اما X تام است؛ و درنتیجه، $\langle a_n\rangle$ همگرا مثلاً" به $p \in X$ می‌باشد. حکم می‌کنیم که $f(p) = p$ ؛ زیرا f پیوسته و لذا دنباله‌ای پیوسته است؛ و درنتیجه،

$$f(p) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = p\,.$$

بالاخره، نشان می‌دهیم p منحصر بفرد است. فرض کنیم $f(p) = p$ و $f(q) = q$ ؛ پس

$$d(p,q) = d(f(p), f(q)) \leqq \alpha\, d(p,q)\,.$$

اما $\alpha < 1$ ؛ از اینرو، $d(p,q) = 0$ ؛ یعنی، $p = q$.

تتمیم‌ها

۹ . نشان دهید $\langle a_n\rangle \sim \langle b_n\rangle$ اگر و فقط اگر هردو زیردنباله‌های یک دنبالهٔ کشی مانند $\langle c_n\rangle$ باشند.

حل. فرض کنیم $\langle a_n\rangle \sim \langle b_n\rangle$ ؛ یعنی، $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0$. $\langle c_n\rangle$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_n = \begin{cases} a_{\frac{1}{2}n} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \\ b_{\frac{1}{2}(n+1)} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

لذا، $\langle c_n\rangle = \langle b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots\rangle$. حکم می‌کنیم که $\langle c_n\rangle$ یک دنبالهٔ کشی است. زیرا فرض کنیم $\epsilon > 0$. پس

$$\exists\; n_1 \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } m,n > n_1 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

$$\exists\; n_2 \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } m,n > n_2 \Rightarrow d(b_m, b_n) < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

$$\exists\; n_3 \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } n > n_3 \Rightarrow d(a_n, b_n) < \tfrac{1}{2}\epsilon\,.$$

قرار می‌دهیم $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$. حکم می‌کنیم که

$$m,n > 2n_0 \Rightarrow d(c_m, c_n) < \epsilon\,.$$

توجه کنید که

$$m > 2n_0 \Rightarrow \tfrac{1}{2}m > n_1, n_3;\ \tfrac{1}{2}(m+1) > n_2, n_3\,.$$

لذا،

$$m,n \text{ زوج } \Rightarrow c_m = a_{\frac{1}{2}m},\ c_n = a_{\frac{1}{2}n} \Rightarrow d(c_m, c_n) < \tfrac{1}{2}\epsilon < \epsilon$$

$$m,n \text{ فرد } \Rightarrow c_m = b_{\frac{1}{2}(m+1)},\ c_n = b_{\frac{1}{2}(n+1)} \Rightarrow d(c_m, c_n) < \tfrac{1}{2}\epsilon < \epsilon$$

$$m \text{ زوج، } n \text{ فرد } \Rightarrow c_m = a_{\frac{1}{2}m},\ c_n = b_{\frac{1}{2}(n+1)} \Rightarrow$$
$$d(c_m, c_n) \leqq d(a_{\frac{1}{2}m}, b_{\frac{1}{2}m}) + d(b_{\frac{1}{2}m}, b_{\frac{1}{2}(n+1)}) < \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon\,;$$

و درنتیجه، $\langle c_n\rangle$ یک دنبالهٔ کشی است.

بعکس، هرگاه دنباله‌ای کشی مانند $\langle c_n\rangle$ باشد که $\langle a_n\rangle = \langle c_{j_n}\rangle$ و $\langle b_n\rangle = \langle c_{k_n}\rangle$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty} d(c_{j_n}, c_{k_n}) = 0 \text{ ،}$$

زیرا $\langle c_n\rangle$ کشی است و $n\to\infty$ ایجاب می‌کند که $j_n, k_n \to \infty$.

۱۰. لم ۵.۱۴ را ثابت کنید: تابع e تعریف شده است؛ یعنی، $\langle a_n\rangle \sim \langle a_n^*\rangle$ و $\langle b_n\rangle \sim \langle b_n^*\rangle$ ایجاب می‌کند که $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty} d(a_n^*, b_n^*)$.

حل. قرار می‌دهیم $r = \lim d(a_n, b_n)$ و $r^* = \lim d(a_n^*, b_n^*)$، و $\epsilon > 0$. توجه کنید که

$$d(a_n, b_n) \le d(a_n, a_n^*) + d(a_n^*, b_n^*) + d(b_n^*, b_n) \text{ .}$$

اما

$$\begin{aligned}
&\exists\, n_1 \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } && n > n_1 \Rightarrow d(a_n, a_n^*) < \epsilon/3\\
&\exists\, n_2 \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } && n > n_2 \Rightarrow d(b_n, b_n^*) < \epsilon/3\\
&\exists\, n_3 \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } && n > n_3 \Rightarrow |d(a_n^*, b_n^*) - r^*| < \epsilon/3 \text{ .}
\end{aligned}$$

بنابراین، هرگاه $n > \max(n_1, n_2, n_3)$، آنگاه

$d(a_n, b_n) < r^* + \epsilon$؛ و درنتیجه، $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = r \le r^* + \epsilon$.

اما این نامساوی به‌ازای هر $\epsilon > 0$ برقرار است؛ از اینرو، $r \le r^*$. بهمین نحو، می‌توان نشان داد که $r^* \le r$؛ لذا، $r = r^*$.

۱۱. فرض کنید $\langle a_n\rangle$ دنباله‌ای کشی در X باشد. نشان دهید که $\alpha = [\langle a_n\rangle] \in X^*$ حد دنبالهٔ $\langle \hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots\rangle$ در $\hat{X}$ است.

(دراینجا $\hat{X} = \{\hat{p} = [\langle p, p, p, \ldots\rangle] : p \in X\}$.)

حل. چون $\langle a_n\rangle$ دنباله‌ای کشی در X است،

$$\lim_{m\to\infty} e(\hat{a}_m, \alpha) = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} d(a_m, a_n)\right) = \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} d(a_m, a_n) = 0 \text{ .}$$

بنابراین، $\langle \hat{a}_n\rangle \to \alpha$.

۱۲. لم ۷.۱۴ را ثابت کنید: X با $\hat{X}$ یکمتر است، و $\hat{X}$ در X^* چگال می‌باشد.

حل . به‌ازای هر $p,q \in X$ ،

$$e(\hat{p}, \hat{q}) = \lim_{n \to \infty} d(p,q) = d(p,q) ;$$

و درنتیجه ، X با $\hat{X}$ یکمتر است . با اثبات اینکه هر نقطه در X^* حد یک دنباله در $\hat{X}$ است نشان می‌دهیم که $\hat{X}$ در X^* چگال است . فرض کنیم $\alpha = [\langle a_1, a_2, \ldots \rangle]$ نقطهٔ دلخواهی در X^* باشد . دراین صورت ، $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی در X است ؛ و درنتیجه ، طبق مسئلهٔ قبل ، α حد دنبالهٔ $\langle \hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots \rangle$ در $\hat{X}$ می‌باشد . لذا ، $\hat{X}$ در X^* چگال است .

۱۳ . لم ۸.۱۴ را ثابت کنید : هر دنبالهٔ کشی در (X^*, e) همگراست ؛ و درنتیجه ، (X^*, e) یک تتمیم X است .

حل . فرض کنیم $\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای کشی در X^* باشد . چون $\hat{X}$ در X^* چگال است ، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ،

$$\exists\ \hat{a}_n \in \hat{X} \text{ بطوری که } e(\hat{a}_n, \alpha_n) < 1/n \ .$$

پس (مسئلهٔ ۵) $\langle \hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots \rangle$ نیز یک دنبالهٔ کشی است و ، بنابر مسئلهٔ ۱۲ ، $\langle \hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots \rangle$ همگرا به $\beta = [\langle a_1, a_2, \ldots \rangle] \in X^*$ است . لذا (مسئلهٔ ۵) ، $\langle \alpha_n \rangle$ نیز همگرا به β است ؛ و لذا ، (X^*, e) تام است .

۱۴ . لم ۹.۱۴ را ثابت کنید : هرگاه Y^* یک تتمیم X باشد ، آنگاه Y^* با X^* یکمتر است .

حل . می‌توان X را زیرفضایی از Y^* گرفت . ازاینرو ، به‌ازای هر $p \in Y^*$ ، دنباله‌ای مانند $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ در X همگرا به p وجود دارد ؛ و بخصوص ، $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی است . فرض کنیم $f : Y^* \to X^*$ با

$$f(p) = [\langle a_1, a_2, \ldots \rangle]$$

تعریف شده باشد . هرگاه $\langle a_1^*, a_2^*, \ldots \rangle \in X$ نیز همگرا به p باشد ، آنگاه

$$\lim_{n \to \infty} d(a_n, a_n^*) = 0 \text{ ؛ و درنتیجه ، } [\langle a_n \rangle] = [\langle a_n^* \rangle] \ .$$

به‌عبارت دیگر ، f تعریف شده است .

بعلاوه ، f بروست . زیرا هرگاه $[\langle b_1, b_2, \ldots \rangle] \in X^*$ ، آنگاه $\langle b_1, b_2, \ldots \rangle$ یک دنبالهٔ کشی در $X \subset Y^*$ است و ، چون Y^* تام است ، $\langle b_n \rangle$ همگرا مثلاً" به $q \in Y^*$ است .

بنابراین، $f(q) = [\langle b_n\rangle]$. حال فرض کنیم $p, q \in Y^*$ و دنباله‌های $\langle a_n\rangle$ و $\langle b_n\rangle$ در X بترتیب همگرا به p و q باشند. دراین صورت،

$$e(f(p), f(q)) = e([\langle a_n\rangle], [\langle b_n\rangle]) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = d\left(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\right) = d(p, q).$$

درنتیجه، f یک یکمتری بین Y^* و X^* است.

قضیهٔ رسته‌ای بئر

۱۵ . فرض کنید N یک زیرمجموعهٔ هیچجا چگال X باشد. نشان دهید که $\bar{N}^c$ در X چگال است.

حل. فرض کنیم $\bar{N}^c$ در X چگال نباشد؛ یعنی، نقطه‌ای مانند $p \in X$ و مجموعهٔ بازی مانند G هست بطوری که

$$p \in G \text{ و } G \cap \bar{N}^c = \emptyset \cdot$$

پس $p \in G \subset \bar{N}$؛ و درنتیجه، $p \in \operatorname{int}(\bar{N})$. اما این ممکن نیست، زیرا N هیچ جا چگال در X است؛ یعنی، $\operatorname{int}(\bar{N}) = \emptyset$. بنابراین، $\bar{N}^c$ در X چگال است.

۱۶ . فرض کنید G زیرمجموعهٔ بازی از فضای متری X بوده و N هیچجا چگال در X باشد. نشان دهید که $p \in X$ و $\delta > 0$ وجود دارند بطوری که $S(p, \delta) \subset G$ و $S(p, \delta) \cap N = \emptyset$.

حل. قرار می‌دهیم $H = G \cap \bar{N}^c$. پس $H \subset G$ و $H \cap N = \emptyset$. بعلاوه، H ناتهی است زیرا G باز است و $\bar{N}^c$ در X چگال است؛ مثلاً، $p \in H$. اما H باز است زیرا G و $\bar{N}^c$ بازند؛ از اینرو، $\exists\, \delta > 0$ بطوری که $S(p, \delta) \subset H$. درنتیجه، $S(p, \delta) \subset G$ و $S(p, \delta) \cap N = \emptyset$.

۱۷ . قضیهٔ ۱۱.۱۴ را ثابت کنید: هر فضای متری تام X از رستهٔ دوم است.

حل. فرض کنیم $M \subset X$ و M از رستهٔ اول باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که $M \neq X$؛ یعنی، $\exists\, p \in X$ بطوری که $p \notin M$. چون M از رستهٔ اول است، $M = N_1 \cup N_2 \cup \cdots$ که درآن هر N_i هیچ جا چگال در X است.

چون N_1 هیچ جا چگال در X است، $\exists\ a_1 \in X$ و $\delta_1 > 0$ بطوری که $S(a_1, \delta_1) \cap N_1 = \emptyset$. قرار می‌دهیم $\epsilon_1 = \delta_1/2$. پس

$$\overline{S(a_1, \epsilon_1)} \cap N_1 = \emptyset \cdot$$

اما $S(a_1, \epsilon_1)$ باز است و N_2 هیچ جا چگال در X است؛ و درنتیجه، بنابر مسئلهٔ ۱۶،

$\exists\ a_2 \in X$ و $\delta_2 > 0$ بطوری که $S(a_2, \delta_2) \subset S(a_1, \epsilon_1) \subset \overline{S(a_1, \epsilon_1)}$ و

$$S(a_2, \delta_2) \cap N_2 = \emptyset \cdot$$

قرار می‌دهیم $\epsilon_2 = \delta_2/2 \leq \epsilon_1/2 = \delta_1/4$. پس

$\overline{S(a_2, \epsilon_2)} \subset \overline{S(a_1, \epsilon_1)}$ و $\overline{S(a_2, \epsilon_2)} \cap N_2 = \emptyset$.

با ادامهٔ این‌کار، دنباله‌ای تودرتو از مجموعه‌های بسته مانند

$$\overline{S(a_1, \epsilon_1)} \supset \overline{S(a_2, \epsilon_2)} \supset \overline{S(a_3, \epsilon_3)} \supset \cdots$$

بدست می‌آید بطوری‌که، به‌ازای هر $n \in N$ ، $\overline{S(a_n, \epsilon_n)} \cap N_n = \emptyset$ و $\epsilon_n \leq \delta_1/2^n$.

لذا، $\lim_{n \to \infty} \epsilon_n \leq \lim_{n \to \infty} \delta_1/2^n = 0$ ؛ و درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۲۰۱۴،

$\exists\ p \in X$ بطوری که $p \in \cap_{n=1}^{\infty} \overline{S(a_n, \epsilon_n)}$.

بعلاوه، به‌ازای هر $n \in N$ ، $p \notin N_n$ ؛ و درنتیجه، $p \notin M$.

تمامیت و فشردگی

۱۸ . نشان دهید که هر فضای متری فشردهٔ X تام است.

حل. فرض کنیم $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ یک دنبالهٔ کشی در X باشد. X فشرده است؛ و درنتیجه، دنباله‌ای فشرده است؛ از اینرو، $\langle a_n \rangle$ شامل زیردنباله‌ای مانند $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots \rangle$ است‌که مثلاً" به $p \in X$ همگراست. اما (مسئلهٔ ۴) $\langle a_n \rangle$ نیز همگرا به p است. از اینرو، X تام می‌باشد.

۱۹ . فرض کنید E زیرمجموعه‌ای کلی کراندار در فضای متری X باشد. نشان دهید که هر دنباله مانند $\langle a_n \rangle$ در E شامل یک زیردنبالهٔ کشی است.

حل. چون E کلی کراندار است، می‌توان E را به تعدادی متناهی زیرمجموعه به قطرکمتراز $\epsilon_1 = 1$ تجزیه کرد. یکی از این مجموعه‌ها، که آن را A_1 می‌نامیم، باید شامل تعدادی نامتناهی جمله از دنبالهٔ باشد؛ از اینرو،

$\exists\ i_1 \in \mathbf{N}$ بطوری که $a_{i_1} \in A_1$.

اما A_1 کلی کراندار است و می‌توان آن را به‌تعدادی متناهی زیرمجموعه به قطرکمتر از $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$ تجزیه کرد. بهمین نحو، یکی از این مجموعه‌ها، که آن را A_2 می‌نامیم، باید شامل تعدادی نامتناهی جمله از دنباله باشد؛ از اینرو،

$\exists\ i_2 \in \mathbf{N}$ بطوری که $i_2 > i_1$ و $a_{i_2} \in A_2$.

بعلاوه، $A_2 \subset A_1$.

بهمین نحو ادامه داده و دنباله‌ٔ تودرتوی

$E \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ از مجموعه‌ها با $d(A_n) < 1/n$

و زیردنباله‌ٔ $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots \rangle$ از $\langle a_n \rangle$ با $a_{i_n} \in A_n$ بدست می‌آوریم. حکم می‌کنیم که $\langle a_{i_n} \rangle$ یک دنباله‌ٔ کشی است. زیرا فرض‌کنیم $\epsilon > 0$.

پس

$\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری‌که $1/n_0 < \epsilon$؛ و درنتیجه، $d(A_{n_0}) < \epsilon$.

بنابراین،

$$i_n, i_m > i_{n_0} \;\Rightarrow\; a_{i_n}, a_{i_m} \in A_{n_0} \;\Rightarrow\; d(a_{i_m}, d_{i_n}) < \epsilon \text{ .}$$

۲۰ . قضیهٔ ۱۲.۱۴ را ثابت کنید: فضای متری X فشرده است اگر و فقط اگر X تام و کلی کراندار باشد.

حل. فرض‌کنیم X فشرده باشد. دراین صورت، بنابر مسئلهٔ ۱۵، X تام است و، بنابر لم ۱۷.۱۱، صفحهٔ ۲۸۵، X کلی کراندار است.

ازآن سو، فرض کنیم X تام و کلی کراندار باشد. همچنین، $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای در X باشد. بنا بر مسئلهٔ قبل، $\langle a_n \rangle$ شامل زیردنباله‌ای کشی مانند $\langle a_{i_n} \rangle$ است که همگراست زیرا X تام است. لذا، X دنباله‌ای فشرده، و لذا فشرده است.

۲۱ . قضیهٔ ۱۳.۱۴ را ثابت کنید: فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای متری تام X باشد. دراین صورت، احکام زیر هم‌ارزند: (یک) A فشرده است؛ (دو) A بسته و کلی کراندار است.

حل. هرگاه A فشرده باشد، بنابر قضیهٔ ۵.۱۱ و لم ۱۷.۱۱، بسته و کلی کراندار است.

بعکس، فرض‌کنیم A بسته و کلی کراندار باشد. چون هر زیرمجموعهٔ بستهٔ یک فضای تام تام است، پس A تام و کلی کراندار است. از اینرو، طبق مسئلهٔ قبل، A فشرده می‌باشد.

مسائل تکمیلی

فضاهای متری تام

۲۲ . فرض‌کنید (X, d) یک فضای متری بوده و متر e بر X با $e(a, b) = \min\{1, d(a, b)\}$ تعریف شده باشد. نشان دهید که $\langle a_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی در (X, d) است اگر و فقط اگر $\langle a_n \rangle$ دنباله‌ای کشی در (X, e) باشد.

۲۳ . نشان دهید که هر فضای متری متناهی تام است.

۲۴ . ثابت کنید هر زیرفضای بستهٔ یک فضای متری تام تام است.

۲۵ . ثابت کنید فضای هیلبرت (l_2 ـ فضا) تام است.

۲۶ . فرض‌کنید $\mathcal{B}(X, \mathbf{R})$ گردآیهٔ توابع حقیقی کراندار بر X با نرم

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

باشد. ثابت کنید $\mathcal{B}(X, \mathbf{R})$ تام است.

۲۷ . ثابت کنید فضای متری X تام است اگر و فقط اگر هر زیرمجموعهٔ کلی کراندار نامتناهی X نقطهٔ انباشتگی داشته باشد.

۲۸ . نشان دهید که اجتماعی حداکثر شمارشپذیر از مجموعه‌های از رستهٔ اول مجموعه‌ای از رستهٔ اول است.

۲۹ . نشان‌دهیدکه فضای متری X کلی کراندار است اگر و فقط اگر هر دنباله در X شامل زیردنباله‌ای کشی باشد.

۳۰ . نشان دهید هرگاه X با Y یکمتر بوده و X تام باشد، آنگاه Y نیز تام است.

مسائل گوناگون

۳۱ . ثابت کنید هر فضای برداری نرمدار X را می‌توان به‌طور چگال دریک فضای باناخ، یعنی یک فضای برداری نرمدار تام، نشانید.

(**راهنمایی.** ر.ک. تبصرهٔ صفحهٔ ۳۵۶).

فضاهای تابعی[۱۵]

فضاهای تابعی

فرض کنیم X و Y مجموعه‌هایی دلخواه بوده ، و $\mathcal{F}(X,Y)$ گردآیه‌ای از تمام توابع از X بتوی Y باشد. هر زیرگردآیه از $\mathcal{F}(X,Y)$ با یک توپولوژی مانند $\mathcal{T}$ یک ***فضای تابعی*** نام دارد.

می‌توان $\mathcal{F}(X,Y)$ را با یک مجموعهٔ حاصلضربی به‌صورت زیر یکی کرد : فرض کنیم Y_x نسخه‌ای از Y باشد که با $x \in X$ اندیسدار شده است، و $\mathbf{F}$ حاصلضرب مجموعه‌های Y_x باشد؛ یعنی ،

$$\mathbf{F} = \prod \{Y_x : x \in X\} \,.$$

به یادآورید کـه $\mathbf{F}$ مرکب اسـت از همـهٔ نقاط $p = \langle a_x : x \in X\rangle$ که به هر $x \in X$ عنصر $a_x \in Y_x = Y$ را مربوط می‌کند؛ یعنی ، $\mathbf{F}$ متشکل است از تمام توابع از X بتوی Y ؛ و درنتیجه ، $\mathbf{F} = \mathcal{F}(X,Y)$.

به‌ازای هـر عنصـر $x \in X$ ، نگاشت e_x از مجموعهٔ تابعی $\mathcal{F}(X,Y)$ بتوی Y که با

$$e_x(f) = f(x)$$

تعریف شده است ***نگاشت ارزیابی*** در x نامیده می‌شود. (دراینجا f تابعی در $\mathcal{F}(X,Y)$ است؛یعنی ، $f : X \to Y$.) تحت‌یکی‌کردن $\mathcal{F}(X,Y)$ با $\mathbf{F}$ ، نگاشت ارزیابی e_x دقیقا" نگاشت تصویر π_x از $\mathbf{F}$ بتوی فضای مختصات $Y_x = Y$ است .

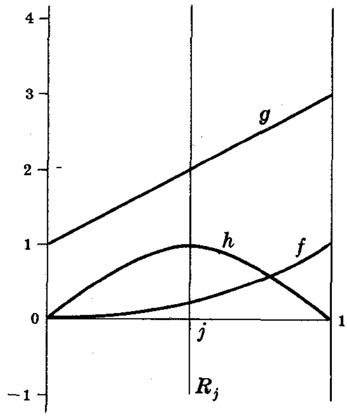
مثال ۱.۱ . فرض کنیـم $\mathcal{F}(I,\mathbf{R})$ گردآیهٔ تمام توابع حقیقی تعریف شده بر $I = [0,1]$ بوده ، و $f,g,h \in \mathcal{F}(I,\mathbf{R})$ توابع

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x+1, \quad h(x) = \sin \pi x$$

باشند. تابع ارزیابی $e_j : \mathcal{F}(I,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ را مثلا" در $j = \frac{1}{2}$ درنظر می‌گیریم . داریم

$$e_j(f) = f(j) = f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}$$
$$e_j(g) = g(j) = g(\tfrac{1}{2}) = 2$$
$$e_j(h) = h(j) = h(\tfrac{1}{2}) = 1$$

در شکل، $e_j(f)$ ، $e_j(g)$ ، و $e_j(h)$ نقاطی‌هستند که در آنها نمودارهای f ، g ، و h خط قائم R_j ماربر $x = j$ را قطع می‌کنند.



توپولوژی نقطه باز

فرض‌کنیم X مجموعه‌ای دلخواه بوده و Y فضایی توپولوژیک باشد. ابتدا توپولوژی حاصل‌ضربی $\mathcal{T}$ بر $\mathcal{F}(X, Y)$ را بررسی می‌کنیم، که $\mathcal{F}(X, Y)$ را با مجموعهٔ حاصل‌ضربی $\mathbf{F} = \prod\{Y_x : x \in X\}$ مثل فوق یکی کرده‌ایم.

به‌یاد آورید کـه زیرپایهٔ معرف $\mathcal{S}$ توپولوژی حاصل‌ضربی بر $\mathbf{F}$ مرکب است از جمیع زیرمجموعه‌های $\mathbf{F}$ به شکل

$$\pi_{x_0}^{-1}[G] = \{f : \pi_{x_0}(f) \in G\}$$

که درآن $x_0 \in X$ و G زیرمجموعهٔ بازی از فضای مختصات $Y = Y_{x_0}$ است. اما $\pi_{x_0}(f) = e_{x_0}(f) = f(x_0)$ ، کـه در آن e_{x_0} نگاشت ارزیابی در $x_0 \in X$ است. از اینرو، زیرپایهٔ معرف $\mathcal{S}$ برای توپولوژی حاصل ضربی $\mathcal{T}$ بر $\mathcal{F}(X, Y)$ مرکب است از جمیع زیرمجموعه‌های $\mathcal{F}(X, Y)$ به شکل $\{f : f(x_0) \in G\}$ ؛ یعنـی، جمیـع توابع که نقطهٔ دلخواه $x_0 \in X$ را بتوی مجمـوعهٔ باز G از Y می‌نگارد. این توپولوژی حاصل‌ضربی بر $\mathcal{F}(X, Y)$ را بحق **توپولوژی نقطه‌باز** می‌نامند.

به‌صورت دیگـر، می‌توان توپولوژی نقطه باز بر $\mathcal{F}(X, Y)$ را ضخیمترین توپولوژی بر $\mathcal{F}(X, Y)$ تعریف کـرد که توابع ارزیابی $e_x : \mathcal{F}(X, Y) \to Y$ نسبت به آن پیوسته باشند.

این تعریف مستقیما" متناظر تعریف توپولوژی حاصل‌ضربی است.

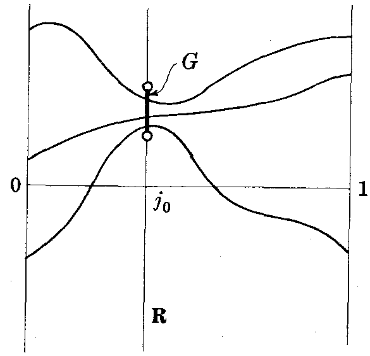
مثال ۱۰۲ . فرض کنیم $\mathcal{T}$ توپولوژی نقطه باز بر $\mathcal{F}(I, \mathbf{R})$ باشد که $I = [0,1]$. همانند فوق، اعضای زیرپایهٔ معرف $\mathcal{T}$ به شکل

$$\{f : f(j_0) \in G\}$$

هستند،که $j_0 \in I$ و G زیرمجموعهٔ بازی از $\mathbf{R}$ است. در شکل، عنصر زیرپایهٔ فوق‌مرکب است از جمیع توابع ماربر مجموعهٔ باز G بر خط‌حقیقی قائم $\mathbf{R}$ ماربر نقطهٔ j_0 بر محور افقی. به‌یاد آورید که این با عنصر زیرپایهٔ فضای حاصل‌ضربی

$$X = \prod \{R_i : i \in I\}$$

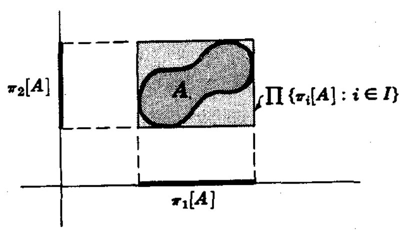
که در فصل ۱۲، صفحهٔ ۳۰۷، نموده شده یکی است.



مثال ۲۰۲ . هرگاه A زیرمجموعهٔ فضای حاصل‌ضربی $\prod \{X_i : i \in I\}$ باشد، آنگاه A زیرمجموعهٔ حاصل‌ضرب تصاویر خود است؛ یعنی،

$$A \subset \prod \{\pi_i[A] : i \in I\}$$

(که در نمودار دیده می‌شود).



لذا، $A \subset \prod \{\overline{\pi_i[A]} : i \in I\}$ ، که در آن $\overline{\pi_i[A]}$ بستـت $\pi_i[A]$ اسـت. لذا، هرگاه

$\mathcal{A} = \mathcal{A}(X, Y)$ زیر گردآیه‌ای از $\mathcal{F}(X, Y)$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{A} \subset \prod \{\overline{\pi_x[\mathcal{A}]} : x \in X\} \;=\; \prod \{\overline{e_x[\mathcal{A}]} : x \in X\}$$

و $\overline{e_x[\mathcal{A}]} = \overline{\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}}$. طبق قضیهٔ حاصل‌ضربی تیخنف، هرگاه $\overline{\{f(x) : x \in X\}}$ به‌ازای هر $x \in X$ فشرده باشد، آنگاه $\prod \{\overline{\pi_x[\mathcal{A}]} : x \in X\}$ یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ فضای حاصل ضربی $\prod \{Y_x : x \in X\}$ است.

به یادآورید که هر زیرمجموعهٔ بستهٔ یک مجموعهٔ فشرده فشرده‌است. از اینرو، مثال ۲۰۲ قضیهٔ زیر را ایجاب می‌کند.

قضیهٔ ۱۰۱۵ . فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ زیرگردآیه‌ای‌از $\mathcal{F}(X, Y)$ باشد. $\mathcal{A}$ نسبت به توپولوژی نقطه باز بر $\mathcal{F}(X, Y)$ فشرده است اگر (یک) $\mathcal{A}$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $\mathcal{F}(X, Y)$ باشد و (دو) به‌ازای هر $x \in X$ ، $\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}}$ در Y فشرده باشد.

در حالتی که Y هاسدورف است، نتیجهٔ قویتر زیر را خواهیم داشت.

قضیهٔ ۲۰۱۵ . فرض‌کنیم Y یک فضای هاسدورف بوده و $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}(X, Y)$. $\mathcal{A}$ نسبت به توپولوژی نقطه باز فشرده است اگر و فقط‌اگر $\mathcal{A}$ بسته بوده و، به‌ازای هر $x \in X$ ، $\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}}$ فشرده باشد.

همگرایی نقطه‌وار

فرض‌کنیم $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای از توابع از مجموعهٔ دلخواه X بتوی فضای توپولوژیک Y باشد. گوییم $\langle f_n \rangle$ به تابع $g : X \to Y$ **نقطه‌وار** همگراست اگر، به‌ازای هر $x_0 \in X$ ، $\langle f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots \rangle$ همگرا به $g(x_0)$ باشد؛ یعنی، $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_0) = g(x_0)$. بخصوص، اگر Y یک فضای متری باشد، $\langle f_n \rangle$ به g نقطه‌وار همگراست اگگر به‌ازای هر $\epsilon > 0$ و هر $x_0 \in X$ ،

$\exists\; n_0 = n_0(x_0, \epsilon) \in \mathbf{N}$ بطوری که $n > n_0 \;\Rightarrow\; d(f_n(x_0), g(x_0)) < \epsilon$.

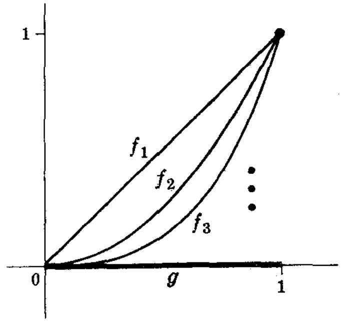
توجه کنید که n_0 به ϵ و نیز نقطهٔ x_0 وابسته است.

مثال ۱۰۳ . فرض‌کنیم $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای از توابع از $I = [0, 1]$ بتوی $\mathbf{R}$ باشد که با

$$f_1(x) = x, \;\; f_2(x) = x^2, \;\; f_3(x) = x^3, \;\; \ldots$$

تعریف شده‌اند. $\langle f_n \rangle$ نقطه‌وار همگرا به تابع $g : I \to \mathbf{R}$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ ، } 0 \le x < 1 & \text{اگر} \\ 1 \text{ ، } x = 1 & \text{اگر} \end{cases}$$



توجه کنید که تابع حدی g با وجود پیوسته بودن توابع f_i پیوسته نیست.

مفهوم همگرایی نقطه‌وار با توپولوژی نقطه باز به صورت زیر ارتباط دارد.

قضیهٔ ۳۰۱۵ . *دنبالهٔ $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ در $\mathcal{F}(X,Y)$ همگرا به $g \in \mathcal{F}(X,Y)$ نسبت به توپولوژی نقطه باز بر $\mathcal{F}(X,Y)$ است اگر و فقط اگر $\langle f_n \rangle$ نقطه‌وار همگرا به g باشد.*

در پرتو قضیهٔ فوق، توپولوژی نقطه باز بر $\mathcal{F}(X,Y)$ ***توپولوژی همگرایی نقطه‌وار*** نیز نامیده می‌شود.

تبصره. به‌یاد آورید که متریذیری تحت حاصل‌ضربهایی که حداکثر شمارش‌پذیر نیستند پایا نیست؛ بنابراین، توپولوژی‌همگرایی‌نقطه‌وار توابع حقیقی تعریف شده بر $[0,1]$ یک توپولوژی متری نیست. نظریهٔ فضاهای توپولوژیک، به‌عنوان تعمیم فضاهای متری، از مطالعهٔ همگرایی نقطه‌وار توابع ناشی شده است.

همگرایی یکشکل

فرض کنیم $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای از توابع از مجموعهٔ دلخواه X بتوی فضای متری (Y,d) باشد. گوییم $\langle f_n \rangle$ به‌طور یکشکل به تابع $g : X \to Y$ همگراست اگر به‌ازای هر $\epsilon > 0$ ،

$$\exists\ n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } \forall\ x \in X,\ d(f_n(x), g(x)) < \epsilon \ \Rightarrow\ n > n_0 \text{ ،}$$

بخصوص، $\langle f_n \rangle$ نقطه‌وار بـه g همگراست؛ یعنـی، همگرایی یکشکل همگرایی نقطه‌وار را ایجاب می‌کند. توجه کنید که n_0 فقط به ϵ وابسته است حال‌آنکه، در همگرایی نقطه‌وار، n_0 هم به ϵ هم به نقطهٔ x بستگی دارد.

درحالتی که X یک فضای توپولوژیک است، نتیجهٔ کلاسیک زیر را داریم.

حکم ۴۰۱۵ . ***فرض‌کنیم $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای از توابع پیوسته از فضای توپولوژیک X بتوی فضـای متری Y باشد. هرگاه $\langle f_n \rangle$ به‌طور یکشکل به $g : X \to Y$ همگرا باشد، آنگاه g پیوسته است.***

مثال ۱۰۴ . فرض کنیم $f_1, f_2, \ldots$ توابع پیوستهٔ زیر از $I = [0,1]$ بتوی $\mathbf{R}$ باشند.

$$f_1(x) = x, \;\; f_2(x) = x^2, \;\; f_3(x) = x^3, \;\; \ldots$$

بنابر مثال ۱۰۳ ، $\langle f_n \rangle$ نقطه‌وار همگرا به $g : I \to \mathbf{R}$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

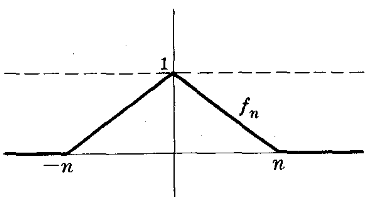
$$g(x) \;\;=\;\; \begin{cases} 0 \text{ ، اگر } 0 \leqq x < 1 \\ 1 \text{ ، اگر } x = 1 \end{cases}$$

چون g پیوسته نیست، $\langle f_n \rangle$ به‌طور یکشکل به g همگرا نیست.

مثال ۲۰۴ . فرض کنیم $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنبالهٔ زیر از توابع در $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ باشد:

$$f_n(x) \;\;=\;\; \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}|x| \text{ ، اگر } |x| < n \\ 0 \text{ ، اگر } |x| \geqq n \end{cases}$$

$\langle f_n \rangle$ نقطه‌وار همگرا به‌تابع ثابت $g(x) = 1$ است. اما $\langle f_n \rangle$ به‌طور یکشکل به g همگرا نیست. زیرا، فـرض‌کنیـم $\epsilon = \frac{1}{2}$. توجه کنید که، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، نقاطی مانند $x_0 \in \mathbf{R}$ با $f_n(x_0) = 0$ وجود دارند؛ و در نتیجه، $|f_n(x_0) - g(x_0)| = 1 > \epsilon$.



فرض کنیم $\mathcal{B}(X, Y)$ گردآیهٔ تمام توابع کراندار از مجموعهٔ دلخواه X بتوی فضای متری (Y, d) بوده، و e متری بر $\mathcal{B}(X, Y)$ باشد که با

$$e(f,g) \;=\; \sup\,\{d(f(x),g(x)) : x \in X\}$$
تعریف می‌شود. این متر دارای خاصیت زیر است:

قضیهٔ ۵.۱۵ . فرض کنیم $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای از توابع در $\mathcal{B}(X,Y)$ باشد. $\langle f_n \rangle$ نسبت به متر e به $g \in \mathcal{B}(X,Y)$ همگراست اگر و فقط اگر $\langle f_n \rangle$ به‌طور یکشکل به g همگرا باشد.

در پرتو قضیهٔ فوق، توپولوژی القا شده به‌وسیلهٔ متر فوق بر $\mathcal{B}(X,Y)$ را **توپولوژی همگرایی یکشکل** می‌نامند.

تبصره. مفهوم همگرایی یکشکل تعریف شده درحالتی که Y فضایی متری است را نمی‌توان برای یک فضای توپولوژیک کلی تعریف کرد. با اینحال، مفهوم همگرایی یکشکل را می‌توان به گردآیه‌ای از فضاها، به‌نام **فضاهای یکشکل**، که بین فضاهای توپولوژیک و فضاهای متری‌اند، تعمیم داد.

فضای تابعی $C[0,1]$

فضای برداری $C[0,1]$ همهٔ توابع پیوسته از $I = [0,1]$ بتوی $\mathbf{R}$ با نرم
$$||f|| \;=\; \sup\,\{|f(x)| : x \in I\}$$
یکی از مهمترین فضاهای تابعی در آنالیز است. توجه کنید که نرم فوق توپولوژی همگرایی یکشکل را القا می‌کند.

چون $I = [0,1]$ فشرده است، هر $f \in C[0,1]$ **یکشکل پیوسته** است؛ یعنی،

حکم ۶.۱۵ . فرض کنیم $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ پیوسته باشد. دراین صورت، به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $\exists\; \delta = \delta(\epsilon) > 0$ بطوری که $|x_0 - x_1| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_0) - f(x_1)| < \epsilon$.

پیوستگی یکشکل (مانند همگرایی یکشکل) از پیوستگی قویتر است از اینجهت که δ فقط تابع ϵ است نه تابع نقطه‌ای خاص.

قضیهٔ زیر نتیجهٔ حکم ۴.۱۵ است.

قضیهٔ ۷.۱۵ . $C[0,1]$ فضای برداری نرمدار تام است.

از قضیهٔ رسته‌ای بئر برای فضاهای متری تام استفاده کرده حکم جالب زیر را ثابت خواهیم کرد.

حکم ۸.۱۵ . *تابع پیوسته‌ای مانند* $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *هست که هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست*.

تبصره. همهٔ نتایجی که در اینجا برای $C[0,1]$ ثابت شده‌اند برای فضای $C[a,b]$ همهٔ توابع پیوسته بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ نیز برقرارند.

کرانداری یکشکل

وقتی برای یافتن شرایط لازم و کافی برای فشرده بودن زیرمجموعه‌هایی از فضاهای تابعی تلاش می‌کنیم به‌مفاهیم ***کرانداری‌یکشکل‌و‌همپیوستگی*** می‌رسیم که‌به‌خودی‌خود مفاهیمی جالبند.

گوییم گردآیه‌ای از توابع حقیقی $\mathcal{A} = \{f_i : X \to \mathbf{R}\}$ تعریف شده بر مجموعهٔ دلخواه X ***یکشکل کراندار*** است اگر

$\exists\ M \in \mathbf{R}$ بطوری که $|f(x)| \leq M,\ \forall f \in \mathcal{A},\ \forall x \in X$.

یعنی، هرتابع $f \in \mathcal{A}$ کراندار است و یک‌کران وجوددارد‌که‌برای‌همهٔ توابع برقرار است. بخصوص، هرگاه $\mathcal{A} \subset C[0,1]$ ، آنگاه کرانداری یکشکل هم‌ارز است با اینکه

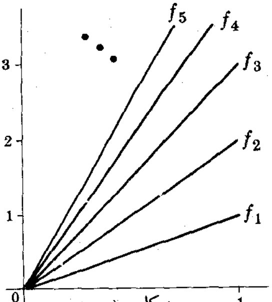
$\exists\ M \in \mathbf{R}$ بطوری که $\|f\| \leq M,\ \forall f \in \mathcal{A}$.

یا، $\mathcal{A}$ زیرمجموعهٔ کرانداری از $C[0,1]$ است.

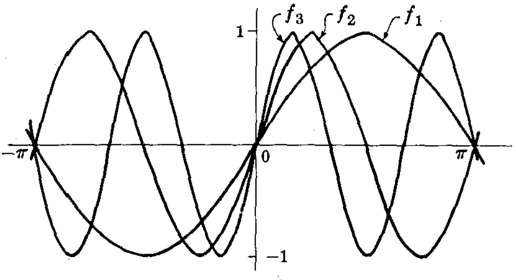
مثال ۱.۵ . فرض کنیم $\mathcal{A}$ زیرمجموعهٔ

$$\mathcal{A} = \{f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \sin 2x,\ \ldots\}$$

از $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ باشد. $\mathcal{A}$ یکشکل کراندار است. زیرا فرض کنیم $M = 1$ ؛ پس، به‌ازای هر $f \in \mathcal{A}$ و هر $x \in \mathbf{R}$ ، $|f(x)| \leq M$. ر.ک. شکل (آ) در زیر.



شکل (ب)



شکل (آ)

مثال ۲۰۵ . فرض کنیم $\mathcal{A} \subset C[0,1]$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد (ر.ک. شکل (ب) فوق):

$$\mathcal{A} = \{f_1(x) = x,\ f_2(x) = 2x,\ f_3(x) = 3x,\ \ldots\}.$$

با آنکه هر تابع در $C[0,1]$، و بخصوص در $\mathcal{A}$، کراندار است، $\mathcal{A}$ یکشکل کراندار نمی‌باشد، زیرا هرگاه M عددی حقیقی باشد، ولو بزرگ، $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$ که $n_0 > M$؛ و درنتیجه، $f_{n_0}(1) = n_0 > M$.

همپیوستگی . قضیهٔ اسکولی[1]

گردآیهٔ $\mathcal{A} = \{f_i : X \to \mathbf{R}\}$ از توابع حقیقی تعریف شده بر فضای متری دلخواه X را **همپیوسته** گوییم هرگاه به‌ازای هر $\epsilon > 0$.

$\exists\ \delta = \delta(\epsilon) > 0$ بطوری که $\forall f \in \mathcal{A},\ d(x_0, x_1) < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x_1)| < \epsilon$.

توجه کنید که δ فقط تابع ϵ است و به نقطه یا تابع خاص بستگی ندارد. واضح است که هر $f \in \mathcal{A}$ یکشکل پیوسته می‌باشد.

قضیهٔ (اسکولی) ۹۰۱۵ . *فرض کنیم $\mathcal{A}$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از فضای تابعی $C[0,1]$ باشد. $\mathcal{A}$ فشرده است اگر و فقط اگر $\mathcal{A}$ یکشکل کراندار و همپیوسته باشد.*

توپولوژی فشرده باز

فرض کنیم X و Y مجموعه‌های دلخواهی بوده و $A \subset X$ و $B \subset Y$. ردهٔ توابع از X بتوی Y که A را بتوی B می‌برد را با $F(A,B)$ نشان می‌دهیم:

$$F(A,B) = \{f \in \mathcal{F}(X,Y) : f[A] \subset B\}.$$

مثال ۱۰۶ . فرض کنیم $\mathcal{S}$ زیرپایهٔ معرف توپولوژی نقطه باز بر $\mathcal{F}(X,Y)$ باشد. به‌یاد آورید که اعضای $\mathcal{S}$ به‌شکل زیرند:

$\{f \in \mathcal{F}(X,Y) : f(x) \in G\}$، که درآن $x \in X$ و G زیرمجموعهٔ بازی از Y است. به قیاس نمادگذاری فوق، این مجموعه را با $F(x,G)$ نشان می‌دهیم، و دراین صورت می‌توانیم $\mathcal{S}$ را با

$$\mathcal{S} = \{F(x,G) : x \in X \text{ و } G \text{ باز و جزء } Y \text{ است}\}$$

---

1. Ascoli

نمایش دهیم.

حال فرض کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک بوده و $\mathcal{A}$ ردهٔ زیرمجموعه‌های فشردهٔ X، و $\mathcal{G}$ ردهٔ زیرمجموعه‌های باز Y باشد. توپولوژی $\mathcal{T}$ بر $\mathcal{F}(X, Y)$ تولید شده به‌وسیلهٔ

$$\mathcal{S} = \{F(A, G) : A \in \mathcal{A},\ G \in \mathcal{G}\}$$

توپولوژی فشرده باز بر $\mathcal{F}(X, Y)$ نام دارد، و $\mathcal{S}$ زیرپایهٔ معرف برای $\mathcal{T}$ است.

چون زیرمجموعه‌های یکانی X فشرده‌اند، $\mathcal{S}$ شامل اعضای زیرپایهٔ معرف برای توپولوژی نقطه باز بر $\mathcal{F}(X, Y)$ است. لذا،

قضیهٔ ۱۰۰۱۵ . توپولوژی نقطه باز بر $\mathcal{F}(X, Y)$ از توپولوژی فشرده باز بر $\mathcal{F}(X, Y)$ ضخیم‌تر است.

به یاد آورید که توپولوژی نقطه باز ضخیم‌ترین توپولوژی است که نگاشتهای ارزیابی نسبت به آن پیوسته‌اند. از اینرو،

نتیجهٔ ۱۱۰۱۵ . توابع ارزیابی $e_x : \mathcal{F}(X, Y) \to Y$ نسبت به توپولوژی فشرده باز بر $\mathcal{F}(X, Y)$ پیوسته‌اند.

توپولوژی همگرایی فشرده

فرض کنیم $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای از توابع از فضای توپولوژیک X بتوی فضای متری (Y, d) باشد. گوییم دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ به $g : X \to Y$ **به‌طور یکشکل و فشرده همگرا** است اگر به‌ازای هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $E \subset X$ و هر $\epsilon > 0$،

$$\exists\ n_0 = n_0(E, \epsilon) \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } \forall x \in E,\quad n > n_0 \ \Rightarrow\ d(f_n(x), g(x)) < \epsilon.$$

به عبارت دیگر، $\langle f_n \rangle$ به‌طور یکشکل و فشرده به g همگراست اگر به‌ازای هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $E \subset X$، تحدید $\langle f_n \rangle$ به E به تحدید g به E به‌طور یکشکل همگرا باشد؛ یعنی، $\langle f_1|E, f_2|E, \ldots \rangle$ به‌طور یکشکل به $g|E$ همگرا باشد.

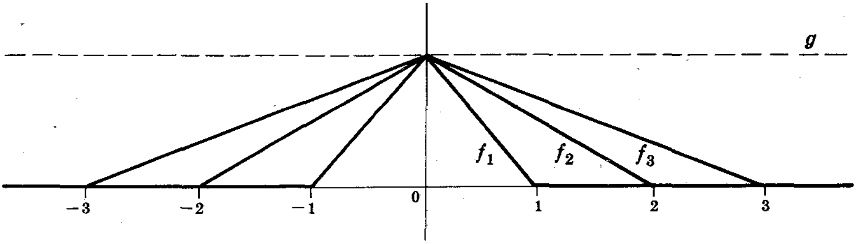
همگرایی یکشکل همگرایی یکشکل و فشرده را ایجاب می‌کند و، چون مجموعه‌های یکانی فشرده‌اند، همگرایی یکشکل و فشرده همگرایی نقطه‌وار را ایجاب خواهد کرد.

مثال ۱۰۷ . فرض کنیم $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای در $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ باشد که به‌صورت زیر تعریف

می‌شود :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}|x| & \text{اگر } |x| < n \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } |x| \geqq n \text{ ،} \end{cases}$$

$\langle f_n \rangle$ نقطه‌وار به تابع ثابت $g(x) = 1$ همگراست، ولی $\langle f_n \rangle$ به‌طور یکشکل به g همگرا نیست (ر.ک. مثال ۲۰۴). اما، چون هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ E از R کراندار است، $\langle f_n \rangle$ به طور یکشکل و فشرده به g همگرا می‌باشد.



قضیهٔ ۱۲۰۱۵ . فرض کنیم $C(X, Y)$ گردآیه‌ای از توابع پیوسته از فضای توپولوژیک X بتوی فضای متری (Y, d) باشد. دراین صورت، دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ از توابع در $C(X, Y)$ نسبت به توپولوژی فشرده باز به $g \in C(X, Y)$ همگراست اگر و فقط اگر $\langle f_n \rangle$ به‌طور یکشکل و فشرده به g همگرا باشد.

در پرتو قضیهٔ قبل، توپولوژی فشرده باز **توپولوژی همگرایی فشرده** نیز نامیده می‌شود.

تابعیها بر فضاهای نرمدار

فرض کنیم X یک فضای برداری نرمدار (روی $\mathbf{R}$) باشد. تابع حقیقی f با قلمرو X، یعنی $f : X \to \mathbf{R}$ ، یک ***تابعی*** نام دارد.

تعریف. تابعی f بر X ***خطی*** است اگر

یک) $f(x + y) = f(x) + f(y), \ \forall\, x,y \in X$ ، و

دو) $f(kx) = k[f(x)], \ \forall\, x \in X, \ k \in \mathbf{R}$.

تابعی خطی f بر X ***کراندار*** است اگر

$\exists\ M > 0$ بطوری که $\forall\, x \in X, \ \ |f(x)| \leqq M\, \|x\|$.

در اینجا M یک ***کران*** برای f نام دارد.

مثال ۱۰۸ . فرض‌کنیم X فضای تمام توابع حقیقی پیوسته بر $[a, b]$ با نرم $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ باشد؛ یعنی، $X = C[a, b]$. همچنین، $\mathbf{I} : X \to \mathbf{R}$ با

$$\mathbf{I}(f) = \int_a^b f(t)\, dt$$

تعریف شده باشد. $\mathbf{I}$ یک تابعی خطی است، زیرا

$$\mathbf{I}(f+g) = \int_a^b (f(t)+g(t))\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt = \mathbf{I}(f) + \mathbf{I}(g)$$

$$\mathbf{I}(kf) = \int_a^b (kf)(t)\, dt = \int_a^b k[f(t)]\, dt = k\int_a^b f(t)\, dt = k\,\mathbf{I}(f) \,.$$

بعلاوه، $M = b - a$ یک کران برای $\mathbf{I}$ است، زیرا

$$\mathbf{I}(f) = \int_a^b f(t)\, dt \le M \sup\{|f(t)|\} = M\,\|f\| \,.$$

حکم ۱۳۰۱۵ . *فرض‌کنیم f و g تابعیهای خطی کراندار بر X بوده و $k \in \mathbf{R}$. دراین صورت، $f+g$ و $k\cdot f$ نیز بر X تابعیهایی خطی و کراندار می‌باشند. لذا (طبق حکم ۱۴۰۸، صفحهٔ ۲۱۶)، گردآیهٔ X^* همهٔ تابعیهای خطی کراندار بر X یک فضای برداری خطی می‌باشد.*

حکم ۱۴۰۱۵ . تابع

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|/\|x\| : x \neq 0\}$$

یک نرم بر X^* است.

توجه کنید که هرگاه M یک کران برای f باشد، یعنی $\forall\, x \in X, |f(x)| \le M\,\|x\|$ ، آنگاه بخصوص، به‌ازای $x \neq 0$ ، $|f(x)|/\|x\| \le M$ ؛ و درنتیجه، $\|f\| \le M$. درواقع، $\|f\|$ را می‌شد به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\|f\| = \inf\{M : \text{است } f \text{ یک کران برای } M\} \,.$$

تبصره. فضای نرمدار همهٔ تابعیهای خطی کراندار بر X **فضای دوگان** X نام دارد.

مسائل حل شده

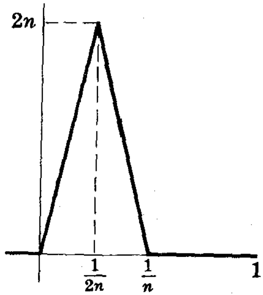
همگرایی نقطه‌وار، توپولوژی نقطه باز

۱ . فرض‌کنید $\langle f_1, f_2, \ldots\rangle$ دنباله‌ای‌ازتوابع در $\mathcal{F}(I, \mathbf{R})$ باشد، که در آن $I = [0, 1]$ ،

با تعریف زیر:

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x & \text{اگر } 0 \leq x \leq 1/2n \text{ ،} \\ -4n^2x+4n & \text{اگر } 1/2n < x < 1/n \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } 1/n \leq x \leq 1 \text{ ،} \end{cases}$$

نشان دهید که $\langle f_n\rangle$ نقطه‌وار به تابع ثابت $g(x) = 0$ همگراست.



حل. به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $f_n(0) = 0$ ؛ و درنتیجه، $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = g(0) = 0$. از آن‌سو، هرگاه $x_0 > 0$ ، آنگاه $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $1/n_0 < x_0$ ؛ از اینرو،

$$n > n_0 \Rightarrow f_n(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = g(x_0) = 0 \ .$$

لذا، $\langle f_n\rangle$ نقطه‌وار به تابع صفر همگراست.

توجه کنید که به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ ، و $\int_0^1 g(x)\,dx = 0$. لذا، دراین حالت، حد انتگرالها مساوی انتگرال حد نیست؛ یعنی،

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \ .$$

۲ . فرض کنید $C(I, \mathbf{R})$ ردهٔ توابع حقیقی پیوسته بر $I = [0,1]$ با نرم

$$||f|| = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

باشد. دنباله‌ای مانند $\langle f_1, f_2, \ldots\rangle$ در $C(I, \mathbf{R})$ مثال بزنید که با نرم بالا $f_n \to g$ ولی $\langle f_n\rangle$ نقطه‌وار به g همگرا نباشد.

حل. فرض کنیم $\langle f_n\rangle$ با $f_n(x) = x^n$ تعریف شده باشد. دراین صورت،

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n|| = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n\,dx = \lim_{n\to\infty} 1/(n+1) = 0 \ .$$

لذا، $\langle f_n \rangle$ با نرم بالا به تابع صفر $g(x) = 0$ همگراست. از آن‌سو، $\langle f_n \rangle$ نقطه‌وار (ر.ک. مثال ۱۰۳) به تابع f تعریف شده با $f(x) = 0$ اگر $0 \leqq x < 1$ و $f(x) = 1$ اگر $x = 1$ همگراست. توجه کنید که $f \neq g$.

۳. نشان دهید که اگر Y، T_1، T_2، منتظم، یا همبند باشد، $\mathcal{F}(X, Y)$ نیزنسبت به توپولوژی نقطه باز آن خاصیت را دارد.

حل. چون توپولوژی نقطه باز بر $\mathcal{F}(X, Y)$ توپولوژی حاصل‌ضربی است، $\mathcal{F}(X, Y)$ هر خاصیت پایای حاصل‌ضربی Y را به‌ارث می‌برد. بنابر نتایج پیش، خواص فوق پایای حاصل‌ضربی‌اند.

۴. قضیهٔ ۲۰۱۵ را ثابت کنید: فرض کنید Y هاسدورف بوده و $\mathcal{A}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{F}(X, Y)$ با توپولوژی نقطه باز باشد. دراین صورت، احکام زیر هم‌ارزند:
(یک) $\mathcal{A}$ فشرده است؛ (دو) $\mathcal{A}$ بسته است و $\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}}$، به‌ازای هر $x \in X$، در Y فشرده می‌باشد.

حل. بنابر قضیهٔ ۱۰۱۵، (دو) $\Leftarrow$ (یک)؛ و درنتیجه، فقط باید نشان دهیم که (یک) $\Leftarrow$ (دو). چون Y هاسدورف و T_2 پایای حاصل‌ضربی است، $\mathcal{F}(X, Y)$ نیز هاسدورف می‌باشد. اما، طبق قضیهٔ ۵۰۱۱، هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ یک فضای هاسدورف بسته است؛ از اینرو، $\mathcal{A}$ بسته است. بعلاوه، هر نگاشت ارزیابی $e_x : \mathcal{F}(X, Y) \to Y$ نسبت به توپولوژی نقطه باز پیوسته است؛ از اینرو، به ازای هر $x \in X$،

$$e_x[\mathcal{A}] \quad = \quad \{f(x) : f \in \mathcal{A}\}$$

در Y فشرده است و، چون Y هاسدورف است، بسته می‌باشد. به‌عبارت دیگر، $\{f(x) : f \in \mathcal{A}\} = \overline{\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}}$ فشرده است.

۵. قضیهٔ ۳۰۱۵ را ثابت کنید: فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی نقطه باز بر $\mathcal{F}(X, Y)$ بوده و $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای در $\mathcal{F}(X, Y)$ باشد. دراین صورت، احکام زیر با هم هم‌ارزند:
(یک) $\langle f_n \rangle$ نسبت به $\mathcal{T}$ همگرا به $g \in \mathcal{F}(X, Y)$ است؛ (دو) $\langle f_n \rangle$ نقطه‌وار به g همگراست.

حل

روش ۱. $\mathcal{F}(X,Y)$ را با مجموعهٔ حاصل‌ضربی $\mathbf{F} = \prod\{Y_x : x \in X\}$ و $\mathcal{T}$ را با توپولوژی حاصل‌ضربی یکی می‌کنیم. دراین صورت، طبق قضیهٔ ۷.۱۲، دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ در $\mathbf{F}$ به $g \in \mathbf{F}$ همگراست اگر و فقط اگر، به‌ازای هر تصویر π_x، $\langle \pi_x(f_n)\rangle = \langle e_x(f_n)\rangle = \langle f_n(x)\rangle$ همگرا به $\pi_x(g) = e_x(g) = g(x)$ باشد. به عبارت دیگر، $f_n \to g$ نسبت‌به $\mathcal{T}$ اگرگر $\lim f_n(x) = g(x), \forall x \in X$؛ یعنی، اگرگر $\langle f_n \rangle$ نقطه‌وار به g همگرا باشد.

روش ۲. (یک) $\Leftarrow$ (دو): فرض کنیم x_0 نقطهٔ دلخواهی در X بوده و G زیرمجموعهٔ بازی از Y شامل $g(x_0)$ باشد؛ یعنی، $g(x_0) \in G$. دراین صورت،

$$g \in F(x_0, G) \quad = \quad \{f \in \mathcal{F}(X,Y) : f(x_0) \in G\}\ ;$$

و درنتیجه، $F(x_0, G)$ یک زیرمجموعهٔ $\mathcal{T}$ ـ باز $\mathcal{F}(X,Y)$ شامل g است. بنابر (یک)، $\langle f_n \rangle$ نسبت به $\mathcal{T}$ به g همگراست؛ از اینرو،

$$\exists\ n_0 \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } n > n_0 \ \Rightarrow\ f_n \in F(x_0, G)\ .$$

بنابراین،

$$n > n_0 \ \Rightarrow\ f_n(x_0) \in G \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = g(x_0)\ .$$

اما x_0 دلخواه بود؛ لذا، $\langle f_n \rangle$ نقطه‌وار به g همگراست.

(دو) $\Leftarrow$ (یک).

فرض کنیم $F(x_0, G) = \{f : f(x_0) \in G\}$ عضوی از زیرپایهٔ معرف برای $\mathcal{T}$ باشد که شامل g است. پس $g(x_0) \in G$. بنابر (دو)، $\langle f_n \rangle$ نقطه‌وار به g همگراست؛ از اینرو،

$$\exists\ n_0 \in \mathbf{N} \text{ بطوری که } n > n_0 \ \Rightarrow\ f_n(x_0) \in G\ ;$$

و درنتیجه،

$$n > n_0 \ \Rightarrow\ f_n \in F(x_0, G) \ \Rightarrow \text{ است } g \text{ ـ همگرا به } \mathcal{T}\text{ ، } \langle f_n \rangle\ .$$

همگرایی یکشکل

۶. حکم ۴.۱۵ را ثابت کنید: فرض کنید $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای از توابع پیوسته از فضای‌توپولوژیک X بتوی فضای متری Y بوده، و $\langle f_n \rangle$ یکشکل همگرا به $g : X \to Y$ باشد. دراین صورت، g پیوسته است.

حل. فرض کنیم $x_0 \in X$ و $\epsilon > 0$. g در x_0 پیوسته‌است اگر مجموعهٔ بازی چون

$G \subset X$ شامل x_0 باشد بطوری که

$$x \in G \;\;\Rightarrow\;\; d(g(x), g(x_0)) < \epsilon \,.$$

اما $\langle f_n \rangle$ یکشکل همگرا به g است؛ و درنتیجه،

$\exists\; m \in \mathbf{N}$ بطوری که $\forall\, x \in X,\;\; d(f_m(x), g(x)) < \frac{1}{3}\epsilon$.

از اینرو، بنا بر نامساوی مثلثی،

$$d(g(x), g(x_0)) \;\leq\; d(g(x), f_m(x)) \;+\; d(f_m(x), f_m(x_0)) \;+\; d(f_m(x_0), g(x_0)) \;<\; d(f_m(x),\;\; f_m(x_0)) \;+\; \tfrac{2}{3}\epsilon \,.$$

چون f_m پیوسته است، مجموعهٔ بازی چون $G \subset X$ شامل x_0 هست بطوری که

$x \in G \;\Rightarrow\; d(f_m(x), f_m(x_0)) < \frac{1}{3}\epsilon$ ؛ ودرنتیجه، $x \in G \;\Rightarrow\; d(g(x), g(x_0)) < \epsilon$.

لذا، g پیوسته می‌باشد.

۷ . فرض کنید $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای از توابع حقیقی پیوستهٔ تعریف شده بر $[a, b]$ و یکشکل همگرا به $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ باشد. نشان دهید که

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \;\;=\;\; \int_a^b g(x)\, dx \,.$$

توجه کنید (مسئلهٔ ۱) که این حکم درحالت همگرایی نقطه‌وار درست نیست.

حل. فرض کنیم $\epsilon > 0$. باید نشان دهیم که

$\exists\; n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $n > n_0 \;\;\Rightarrow\;\; \left| \int_a^b f_n(x)\, dx \;-\; \int_a^b g(x)\, dx \right| \;<\; \epsilon$.

اما $\langle f_n \rangle$ یکشکل همگرا به g است؛ و درنتیجه، $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که

$$n > n_0 \;\;\Rightarrow\;\; |f_n(x) - g(x)| < \epsilon/(b-a), \;\;\; \forall\, x \in [a, b] \,.$$

از اینرو، اگر $n > n_0$ ،

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_n(x)\, dx \;-\; \int_a^b g(x)\, dx \right| \;&=\; \left| \int_a^b (f_n(x) - g(x))\, dx \right| \\
&\leq\; \int_a^b |f_n(x) - g(x)|\, dx \\
&<\; \int_a^b \epsilon/(b-a)\, dx \;\;=\;\; \epsilon \,.
\end{aligned}$$

۸ . قضیهٔ ۵.۱۵ را ثابت کنید: فرض کنید $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای در $\mathcal{B}(X, Y)$ با متر

$$e(f,g) \;=\; \sup\,\{d(f(x),g(x)) : x \in X\}$$

باشد. دراین صورت، احکام زیر با هم هم‌ارزند:

(یک) $\langle f_n\rangle$ نسبت به e به $g \in \mathcal{F}(X,Y)$ همگراست؛

(دو) $\langle f_n\rangle$ یکشکل همگرا به g است.

حل

(یک) $\Leftarrow$ (دو). فرض‌کنیم $\epsilon > 0$. چون $\langle f_n\rangle$ نسبت به e به g همگراست،

$\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $n > n_0 \;\Rightarrow\; e(f_n,g) < \epsilon$.

بنابراین،

$$n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x),g(x)) \leq \sup\,\{d(f_n(x),g(x)) : x \in X\} = e(f_n,g) < \epsilon, \quad \forall x \in X$$

یعنی، $\langle f_n\rangle$ یکشکل همگرا به g است.

(دو) $\Leftarrow$ (یک). فرض‌کنیم $\epsilon > 0$. چون $\langle f_n\rangle$ یکشکل همگرا به g است،

$\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $n > n_0 \;\Rightarrow\; d(f_n(x),g(x)) < \epsilon/2, \;\; \forall x \in X$.

بنابراین،

$$n > n_0 \;\Rightarrow\; \sup\,\{d(f_n(x),g(x)) : x \in X\} \leq \epsilon/2 < \epsilon\,;$$

یعنی، $n > n_0$ ایجاب می‌کند که $e(f_n,g) < \epsilon$؛ و درنتیجه، $\langle f_n\rangle$ نسبت به e همگرا به g است.

فضای تابعی $C[0,1]$

۹. حکم ۶.۱۵ را ثابت کنید: فرض‌کنید $f : I \to \mathbf{R}$ بر $I = [0,1]$ پیوسته باشد. در این‌صورت، به‌ازای هر $\epsilon > 0$،

$\exists\ \delta = \delta(\epsilon) > 0$ بطوری که $|x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(y)| < \epsilon$؛

یعنی، f یکشکل پیوسته است.

حل. فرض‌کنیم $\epsilon > 0$. چون f پیوسته است، به‌ازای هر $p \in I$،

$\exists\ \delta_p > 0$ بطوری که $|x-p| < \delta_p \;\Rightarrow\; |f(x)-f(p)| < \frac{1}{2}\epsilon$. (۱)

به‌ازای هر $p \in I$ قرار می‌دهیم $S_p = I \cap (p - \frac{1}{2}\delta_p, p + \frac{1}{2}\delta_p)$. پس $\{S_p : p \in I\}$ یک پوشش باز I است و، چون I فشرده است، تعدادی متناهی S_p، مثلاً $I = S_{p_1} \cup \cdots \cup S_{p_m}$، نیز I را می‌پوشانند. قرار می‌دهیم

$$\delta = \tfrac{1}{2}\min(\delta_{p_1}, \ldots, \delta_{p_m}) \cdot$$

فرض‌کنیم $|x-y| < \delta$. پس‌به‌ازای k ای $x \in S_{p_k}$ ؛ودرنتیجه ، $|x-p_k| < \frac{1}{2}\delta_{p_k} < \delta_{p_k}$
و

$$|y-p_k| \leq |y-x| + |x-p_k| < \delta + \tfrac{1}{2}\delta_{p_k} \leq \tfrac{1}{2}\delta_{p_k} + \tfrac{1}{2}\delta_{p_k} = \delta_{p_k} \cdot$$

از اینرو ، بنابر (۱) ،

$$|f(x)-f(p_k)| < \tfrac{1}{2}\epsilon \quad \text{و} \quad |f(y)-f(p_k)| < \tfrac{1}{2}\epsilon \cdot$$

لذا ، طبق نامساوی مثلثی ،

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(p_k)| + |f(p_k)-f(y)| < \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon \cdot$$

۱۰ . فرض کنید $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای کشی در $C[0,1]$ باشد . نشان دهید که به‌ازای‌هر $x_0 \in I = [0,1]$ ، $\langle f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots \rangle$ یک دنبالهٔ کشی در $\mathbf{R}$ است .

حل . فرض کنیم $x_0 \in I$ و $\epsilon > 0$. چون $\langle f_n \rangle$ کشی است ، $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که

$$\begin{aligned} m, n > n_0 \quad &\Rightarrow \quad \|f_n - f_m\| = \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in I\} < \epsilon \\ &\Rightarrow \quad |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \epsilon \cdot \end{aligned}$$

از اینرو ، $\langle f_n(x_0) \rangle$ یک دنبالهٔ کشی است .

۱۱ . قضیهٔ ۷.۱۵ را ثابت کنید : $C[0,1]$ یک فضای برداری نرمدار تام است .

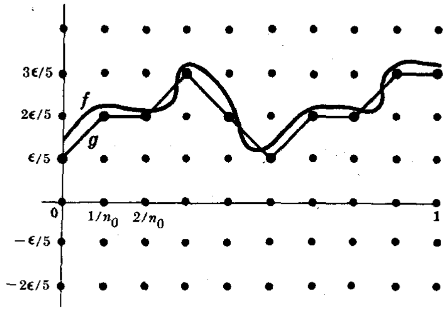
حل . فرض کنیم $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای کشی در $C[0,1]$ باشد . دراین صورت ، به‌ازای هر $x_0 \in I$ ، $\langle f_n(x_0) \rangle$ یک دنبالهٔ کشی در $\mathbf{R}$ است و ، چون $\mathbf{R}$ تام است ، همگراست . $g : I \to \mathbf{R}$ را با $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ تعریف‌می‌کنیم . دراین صورت (ر . ک . مسئلهٔ ۳۲) ، $\langle f_n \rangle$ یکشکل همگرا بـه g است . اما ، طبق حکم ۴.۱۵ ، g پیوسته است ؛ یعنی ، $g \in C[0,1]$ ؛ از اینرو ، $C[0,1]$ تام است .

۱۲ . فرض‌کنید $f \in C[0,1]$ و $\epsilon > 0$. نشان دهید که n_0 ی در $\mathbf{N}$ و نقاطی چون

$$\begin{aligned} p_0 &= (0, \epsilon k_0/5), \;\ldots, \\ p_i &= (i/n_0, \epsilon k_i/5), \;\ldots, \\ p_{n_0} &= (1, \epsilon k_{n_0}/5) \end{aligned}$$

که درآنها $k_0, \ldots, k_{n_0}$ اعدادی صحیح‌اند ، وجود دارند بطوری که اگر g قوس

چندضلعی واصل بین p_i ها باشد، $\|f-g\| < \epsilon$ (ر.ک. نمودار زیر). به‌عبارت دیگر، توابع قطعه‌وار خطی (یا چندضلعی) در $C[0,1]$ چگالند.



حل. f بر $[0,1]$ یکشکل پیوسته است؛ و درنتیجه،

$\exists\; n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $|a-b| \le 1/n_0 \;\Rightarrow\; |f(a)-f(b)| < \epsilon/5$. (۱)

زیرمجموعهٔ

$$A = \{\langle x,y\rangle : k \in \mathbf{Z}\text{، } i = 0,\ldots,n_0 \text{ که }\text{، } y = k\epsilon/5\text{، } x = i/n_0\}$$

از $I\times\mathbf{R}$ را درنظر می‌گیریم . $p_i = \langle x_i, y_i\rangle \in A$ را طوری اختیار می‌کنیم که

$$y_i \le f(x_i) < y_i + \epsilon/5 .$$

دراین صورت،

$$|f(x_i) - g(x_i)| = |f(x_i) - y_i| < \epsilon/5$$

و، طبق (۱)، همانطور که نمودار فوق نشان داده،

$$|f(x_i) - f(x_{i+1})| < \epsilon/5 .$$

توجه کنید که

$$|g(x_i)-g(x_{i+1})| \le |g(x_i)-f(x_i)| + |f(x_i)-f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1})-g(x_{i+1})| < \epsilon/5 + \epsilon/5 + \epsilon/5 = 3\epsilon/5 .$$

چون g بین x_i و x_{i+1} خطی است،

$$x_i \le z \le x_{i+1} \;\Rightarrow\; |g(x_i)-g(z)| \le |g(x_i)-g(x_{i+1})| < 3\epsilon/5 .$$

اما به‌ازای هر نقطهٔ $z \in I$ ، $\exists\, x_k$ صادق در $x_k \le z \le x_{k+1}$ وجود دارد. ازاینرو،

$$|f(z)-g(z)| \le |f(z)-f(x_k)| + |f(x_k)-g(x_k)| + |g(x_k)-g(z)| < \epsilon/5 + \epsilon/5 + 3\epsilon/5 = \epsilon .$$

اما z نقطهٔ دلخواهی در I بود؛ از اینرو، $\|f-g\| < \epsilon$.

۱۳ . فرض کنید m عدد صحیح مثبت دلخواهی بوده و $A_m \subset C[0,1]$ مرکب از توابعی

چون f با این خاصیت باشد که

$\exists\ x_0 \in \left[0, 1-\frac{1}{m}\right]$ بطوری که $\left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right| \leq m, \quad \forall h \in \left(0, \frac{1}{m}\right)$.

نشان دهید کـه A_m زیرمجموعهٔ بستهای از $C[0,1]$ است. (توجه کنید که هر تابع f در $C[0,1]$ که در نقطهای مشتقپذیر است متعلق به A_m ی بهازای m به قدرکافی بزرگ میباشد.)

حل. فرضکنیم $g \in \bar{A}_m$. میخواهیم نشان دهیم $g \in A_m$ ؛ یعنی، $\bar{A}_m = A_m$.

چون $g \in \bar{A}_m$ ، دنبالهایمانند $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ در A_m همگرابه g وجود دارد. بهازای هر f_i نقطهای مانند x_i هست بطوری که

$$x_i \in \left[0, 1-\frac{1}{m}\right] \quad \text{و} \quad \left|\frac{f_i(x_i+h) - f_i(x_i)}{h}\right| \leq m, \quad \forall h \in \left(0, \frac{1}{m}\right) . \qquad (1)$$

اما $\langle x_n \rangle$ دنبالهای درمجموعهٔ فشردهٔ $\left[0, 1-\frac{1}{m}\right]$ است؛ و درنتیجه، زیردنبالهای مانند $\langle x_{i_n} \rangle$ دارد که همگرا مثلاً" به $x_0 \in \left[0, 1-\frac{1}{m}\right]$ است.

اما $f_n \to g$ ایجابمیکند که $f_{i_n} \to g$ ؛ و درنتیجه (مسئلهٔ ۳۰)، اگر در (۱) به حد برویم، نتیجه میشود که

$$\left|\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right| \leq m, \quad \forall h \in \left(0, \frac{1}{m}\right) .$$

ازاینرو، $g \in A_m$ ، و A_m بسته است.

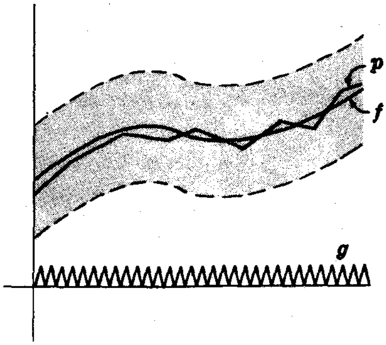
۱۴ . فرض کنیـد $A_m \subset C[0,1]$ مثل مسئلهٔ ۱۳ تعریف شده باشد. نشان دهید که A_m هیچجا چگال در $C[0,1]$ است.

حل. A_m هیچجاچگال در $C[0,1]$ اسـت اگفکـر $\operatorname{int}(\bar{A}_m) = \operatorname{int}(A_m) = \emptyset$. فرض کنیم $S = S(f, \delta)$ کرهٔ بـازی در $C[0,1]$ باشد. حکـم میکنیم که S شامل نقطهای غیر متعلق به A_m است؛ و درنتیجه، $\operatorname{int}(\bar{A}_m) = \emptyset$. طبق مسئلهٔ ۱۲، یک قوس چندضلعی مانند $p \in C[0,1]$ هستبطوریکه $\|f - p\| < \frac{1}{2}\delta$. فرض کنیم g یکتابع دندانه ارهای بـا قـدرمطلقکوچکتر از $\frac{1}{2}\delta$ و شیب بهقدر کافی بزرگ باشد (مسئلهٔ ۳۳). درایـن صـورت، تابع $h = p + g$ متعلق به $C[0,1]$ است ولی تعلق به A_m

ندارد. بعلاوه،

$$||f-h|| \leq ||f-p|| + ||g|| < \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta = \delta \ ;$$

درنتیجه، $h \in S$ و برهان تمام است.



۱۵ . فرض کنید $A_m \subset C[0,1]$ مثل مسئلهٔ ۱۳ تعریف شده باشد. نشان دهید که $C[0,1] \neq \cup_{m=1}^{\infty} A_m$.

حل. چون A_m هیچ جا چگال در $C[0,1]$ است، $B = \cup_{m=1}^{\infty} A_m$ از رستهٔ اول است. اما، طبق قضیهٔ رسته‌ای بئر، $C[0,1]$ ، که یک فضای تام است، از رستهٔ دوم است. بنابراین، $C[0,1] \neq B$.

۱۶ . حکم ۸.۱۵ را ثابت کنید: تابع پیوسته‌ای مانند $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ هست که هیچ‌جا مشتقپذیر نیست.

حل. فرض کنیم $f \in C[0,1]$ مثلاً" در x_0 مشتق‌داشته‌و $|f'(x_0)| = t$. دراین‌صورت،

$$\epsilon > 0 \ \exists \ \text{بطوری که} \ \forall h \in (-\epsilon, \epsilon), \quad \left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right| \leq t+1$$

$m_0 \in \mathbf{N}$ راطوری‌می‌گیریم که $t+1 \leq m_0$ و $1/m_0 < \epsilon$. پس $f \in A_{m_0}$. لذا، $\cup_{m=1}^{\infty} A_m$ شامل همهٔ توابعی است که در نقطه‌ای از I مشتقپذیراند. اما، طبق مسئلهٔ قبل، $C[0,1] \neq \cup_{m=1}^{\infty} A_m$ ؛ و درنتیجه، تابعی در $C[0,1]$ هست که هیچ‌جا مشتقپذیر نیست.

۱۷ . قضیهٔ (اسکولی) ۹.۱۵ را ثابت‌کنید: فرض‌کنید $\mathcal{A}$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $C[0,1]$

باشد. دراین‌صورت، احکام زیر باهم هم‌ارزند : (یک) $\mathcal{A}$ فشرده است؛ (دو) $\mathcal{A}$ یکشکل کراندار و همپیوسته است.

حل

(یک) $\Leftarrow$ (دو). چون $\mathcal{A}$ فشرده‌است، زیرمجموعهٔ کرانداری از $C[0,1]$ است؛ و لذا، به‌عنوان مجموعه‌ای از توابع یکشکل کراندار است. پس فقط باید نشان‌دهیم $\mathcal{A}$ همپیوسته است. فرض کنیم $\epsilon > 0$. چون $\mathcal{A}$ فشرده است، دارای $\epsilon/3$ ــ تور متناهی، مثلاً "$\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_t\}$، است. از اینرو، به‌ازای هر $f \in \mathcal{A}$،

$\exists\ f_{i_0} \in \mathcal{B}$ بطوری که $\|f - f_{i_0}\| = \sup\{|f(x) - f_{i_0}(x)| : x \in I\} \leq \epsilon/3$.

بنابراین، به‌ازای هر $x, y \in I = [0,1]$،

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{i_0}(x) + f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y) + f_{i_0}(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_{i_0}(x)| + |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| + |f_{i_0}(y) - f(y)| \\ &\leq \epsilon/3 + |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| + \epsilon/3 = |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| + 2\epsilon/3. \end{aligned}$$

اما هر $f_i \in \mathcal{B}$ یکشکل پیوسته است؛ و درنتیجه،

$\exists\ \delta_i > 0$ بطوری که $|x - y| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon/3$.

قرار می‌دهیم $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_t\}$. دراین صورت، به‌ازای هر $f \in \mathcal{A}$،

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f_{i_0}(x) + f_{i_0}(y)| + 2\epsilon/3 < \epsilon/3 + 2\epsilon/3 = \epsilon.$$

لذا، $\mathcal{A}$ همپیوسته می‌باشد.

(دو) $\Leftarrow$ (یک). چون $\mathcal{A}$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای ازفضای تام $C[0,1]$ است، فقط باید نشان داد که $\mathcal{A}$ کلی کراندار است. فرض کنیم $\epsilon > 0$. چون $\mathcal{A}$ همپیوسته است،

$\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $|a - b| < 1/n_0 \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \epsilon/5,\ \forall f \in \mathcal{A}$.

اما برای هر $f \in \mathcal{A}$ می‌توان، طبق مسئلهٔ ۱۲، یک قوس چندضلعی مانند p_f ساخت بطوری که $\|f - p_f\| < \epsilon$ و p_f نقاط متعلق به

$$A = \{\langle x, y\rangle : x = 0, 1/n_0, 2/n_0, \ldots, 1;\ y = n\epsilon/5,\ n \in \mathbf{Z}\}$$

را بهم وصل کند. حکم می‌کنیم که $\mathcal{B} = \{p_f : f \in \mathcal{A}\}$ متناهی؛ و درنتیجه، یک ϵ ــ تور متناهی برای $\mathcal{A}$ دارد.

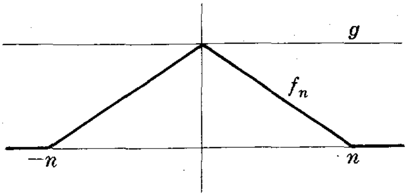
گوییم $\mathcal{A}$ یکشکل کراندار است؛ و درنتیجه، $\mathcal{B}$ یکشکل کراندار است. بنابراین، فقط تعدادی متناهی نقطه در A هست که درقوسهای چندضلعی در $\mathcal{B}$ ظاهرمی‌شوند. از اینرو، فقط تعدادی متناهی قوس در $\mathcal{B}$ می‌توانند وجود داشته باشند. لذا،

$\mathcal{B}$ یک ϵ ـ تور متناهی برای $\mathcal{A}$ است؛ و درنتیجه، $\mathcal{A}$ کلی کراندار می‌باشد.

همگرایی فشرده

۱۸ . فرض کنید $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ در $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}|x| & \text{اگر } |x| < n \\ 0 & \text{اگر } |x| \geqq n \end{cases}$$



نشان دهید که $\langle f_n \rangle$ یکشکل و فشرده همگرا به‌تابع ثابت $g(x) = 1$ است.

حل . فرض کنیم E زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $\mathbf{R}$ بوده‌و $0 < \epsilon < 1$. چون E فشرده است، کرانداراست؛ مثلاً"، به‌ازای $M > 0$ ی، $E \subset (-M, M)$. اما $\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $n_0 > M/\epsilon$ ، یا، $M/n_0 < \epsilon$. بنابراین،

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n}|x| < M/n_0 < \epsilon, \quad \forall\, x \in E$$

از اینرو، $\langle f_n \rangle$ یکشکل همگرا به g بر E است.

۱۹ . نشان دهید که اگر Y هاسدورف باشد، توپولوژی فشرده باز بر $\mathcal{F}(X, Y)$ نیز هاسدورف است.

حل

روش ۱ . فرض‌کنیم $f, g \in \mathcal{F}(X, Y)$ با $f \neq g$. دراین صورت، $\exists\, p \in X$ بطوری که $f(p) \neq g(p)$. اما Y هاسدورف است؛ لذا، مجموعه‌های بازی چون G و H از Y هستند بطوری که $f(p) \in G$ ، $g(p) \in H$ ، و $G \cap H = \emptyset$. از اینرو،

$$f \in F(p, G)\text{ ، } g \in F(p, H)\text{ ، و } F(p, G) \cap F(p, H) = \emptyset \text{ .}$$

اما مجموعهٔ یکانی $\{p\}$ فشرده است؛ و درنتیجه، $F(p, G)$ و $F(p, H)$ متعلق به توپولوژی فشرده باز بر $\mathcal{F}(X, Y)$ اند. بنابراین، $\mathcal{F}(X, Y)$ هاسدورف است.

روش ۲. توپولوژی فشرده باز از توپولوژی نقطه باز، که هاسدورف است زیرا T_2 یک خاصیت پایای حاصل‌ضربی است، ظریفتر است. ازاینرو، توپولوژی فشرده باز هاسدورف نیز هست.

۲۰. قضیهٔ ۱۲.۱۵ را ثابت کنید: فرض کنید $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای در $C(X, Y)$، یعنی گردآیهٔ تمام توابع پیوسته از فضای توپولوژیک X بتوی فضای متری (Y, d)، باشد. دراین صورت، احکام زیر با هم هم‌ارزند:

(یک) $\langle f_n \rangle$ یکشکل و فشرده همگرا به $g \in C(X, Y)$ است؛

(دو) $\langle f_n \rangle$ نسبت به توپولوژی فشرده باز $\mathcal{T}$ بر $C(X, Y)$ همگراست.

حل

(یک) $\Leftarrow$ (دو). فرض کنیم $F(E, G)$ یک عنصر زیرپایهٔ باز $\mathcal{T}$ شامل g باشد؛ لذا، $g[E] \subset G$، که درآن E فشرده و G باز است. چون g پیوسته است، $g[E]$ فشرده است. بعلاوه، $g[E] \cap G^c = \emptyset$؛ و درنتیجه (ر.ک. صفحهٔ ۲۹۷)، فاصلهٔ بین مجموعهٔ فشردهٔ $g[E]$ و مجموعهٔ بستهٔ G^c بزرگتر از صفر است؛ مثلاً، $d(g[E], G^c) = \epsilon > 0$. چون $\langle f_n \rangle$ یکشکل و فشرده همگرا به g است،

$\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $\forall\, x \in E,\quad d(f_n(x), g(x)) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad n > n_0$.

بنابراین،

$$d(f_n(x), g[E]) \leq d(f_n(x), g(x)) < \epsilon, \quad \forall\, x \in E\ ;$$

و درنتیجه، به‌ازای هر $x \in E$، $f_n(x) \notin G^c$. به عبارت دیگر،

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad f_n[E] \subset G \quad \Rightarrow \quad f_n \in F(E, G)\,.$$

بنابراین، $\langle f_n \rangle$ نسبت به توپولوژی فشرده باز $\mathcal{T}$ به g همگراست.

(دو) $\Leftarrow$ (یک). فرض کنیم E زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X بوده و $\epsilon > 0$. می‌خواهیم نشان دهیم که $\langle f_n \rangle$ یکشکل همگرا به g بر E است؛ یعنی،

$\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $\forall\, x \in E,\quad d(f_n(x), g(x)) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad n > n_0$.

چون E فشرده‌و g پیوسته‌است، $g[E]$ فشرده‌می‌باشد. فرض‌کنیم $\mathcal{B} = \{p_1, \ldots, p_t\}$ یک $\epsilon/3$ ــ تور متناهی برای $g[E]$ باشد. کره‌های باز

$$S_1 = S(p_1, \epsilon/3), \ \ldots \ S_t = S(p_t, \epsilon/3) \quad \text{و} \quad G_1 = S(p_1, 2\epsilon/3), \ \ldots \ G_t = S(p_t, 2\epsilon/3)$$

را درنظر می‌گیریم. از اینرو، $\bar{S}_1 \subset G_1, \ldots, \bar{S}_t \subset G_t$. بعلاوه، چون $\mathcal{B}$ یک $\epsilon/3$ تور برای $g[E]$ است، $g[E] \subset \bar{S}_1 \cup \cdots \cup \bar{S}_t$؛ و درنتیجه،

$E \subset g^{-1}[\bar{S}_1] \cup \cdots \cup g^{-1}[\bar{S}_t]$ حال قرارمی‌دهیم $E_i = E \cap g^{-1}[\bar{S}_i]$ ؛ و درنتیجه، $E = E_1 \cup \cdots \cup E_t$ و $g[E_i] \subset \bar{S}_i \subset G_i$. حکم مــی‌کنیم که E_i ها فشرده‌اند. زیرا g پیوسته است؛ و درنتیجه، $g^{-1}[\bar{S}_i]$ ، یعنی معکوس یک مجموعهٔ بسته، بسته است. از اینرو، $E_i = E \cap g^{-1}[\bar{S}_i]$ ، یعنی اشتــراک یک مجمــوعهٔ فشرده و یک مجموعـهٔ بسته، فشرده است.

اما $g[E_i] \subset G_i$ ؛ و درنتیجه، $F(E_i, G_i)$ زیرمجــموعه‌های $\mathcal{T}$ — باز از $\mathcal{F}(X, Y)$ شامل g اند؛ از اینــرو، $\cap_{i=1}^{t} F(E_i, G_i)$ نیز یــک مجموعهٔ $\mathcal{T}$ ــ باز شامل g است. اما $\langle f_n \rangle$ نسبت به $\mathcal{T}$ همگرا به g است؛ از اینرو

$\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $n > n_0 \Rightarrow f_n \in \cap_{i=1}^{t} F(E_i, G_i) \Rightarrow f_n[E_1] \subset G_1, \ldots, f_n[E_t] \subset G_t$.

حال فرض کنیم $x \in E$. پس $x \in E_{i_0}$ ؛ و درنتیجه، به‌ازای $n > n_0$ ،

$$f_n(x) \in f_n[E_{i_0}] \subset G_{i_0} \quad \Rightarrow \quad d(f_n(x), p_{i_0}) < 2\epsilon/3$$

و

$$g(x) \in g[E_{i_0}] \subset \bar{S}_{i_0} \quad \Rightarrow \quad d(g(x), p_{i_0}) \leq \epsilon/3 \text{ .}$$

بنابراین، طبق نامساوی مثلثی،

$$n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), g(x)) \leq d(f_n(x), p_{i_0}) + d(p_{i_0}, g(x)) < 2\epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon, \ \forall x \in E$$

تابعیها بر فضاهای نرمدار

۲۱ . نشان دهید که اگر f یک تابعی خطی بر X باشد، $f(0) = 0$.

حل. چون f خطی است و $0 = 0 + 0$ ،

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \text{ .}$$

با افزودن $-f(0)$ به طرفین خواهیم داشت $f(0) = 0$.

۲۲ . نشان دهید که تابعی خطی کراندار f بر X یکشکل پیوسته است.

حل. فرض کنیــم M یک کران برای f بوده و $\epsilon > 0$. قرار می‌دهیم $\delta = \epsilon/M$. دراین صورت،

$$\|x - y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| = |f(x - y)| \leq M\|x - y\| < \epsilon \text{ .}$$

۲۳ . حکم ۱۳.۱۵ را ثابت کنید: فرض کنید f و g دو تابعی خطی کراندار بر X بوده

و $c \in \mathbf{R}$. دراین‌صورت، $f+g$ و $c \cdot f$ نیز تابعیهایی خطی و کراندار بر X اند.

حل. فرض کنیم M و M^* بترتیب کرانهایی برای f و g باشند. دراین صورت،

$$(f+g)(x+y) = f(x+y)+g(x+y) = f(x)+f(y)+g(x)+g(y) = (f+g)(x) + (f+g)(y)$$

$$(f+g)(kx) = f(kx)+g(kx) = k\,f(x) + k\,g(x) = k[f(x)+g(x)] = k\,(f+g)(x)$$

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M\,||x|| + M^*\,||x|| = (M+M^*)\,||x||\,.$$

لذا، $f+g$ یک تابعی خطی کراندار است. بعلاوه،

$$(c \cdot f)(x+y) = c\,f(x+y) = c\,[f(x)+f(y)] = c\,f(x) + c\,f(y) = (c\cdot f)(x) + (c \cdot f)(y)$$

$$(c\cdot f)(kx) = c\,f(kx) = ck\,f(x) = kc\,f(x) = k\,(c\cdot f)(x)$$

$$|(c\cdot f)(x)| = |c\,f(x)| = |c|\,|f(x)| \leq |c|\,(M\,||x||) = (|c|\,M)\,||x||\,;$$

و درنتیجه، $c \cdot f$ یک تابعی خطی کراندار است.

۲۴ . حکم ۱۴.۱۵ را ثابت کنید: تابع

$$||f|| = \sup\{|f(x)|/||x|| : x \neq 0\}$$

یک نرم بر X^* است.

حل. هرگاه $f = 0$، آنگاه $f(x) = 0\,,\ \forall x \in X$ ؛ ودرنتیجه، $||f|| = \sup\{0\} = 0$.

هرگاه $f \neq 0$ ، آنگاه $\exists\, x_0 \neq 0$ بطوری که $f(x_0) \neq 0$ ؛ و درنتیجه،

$$||f|| = \sup\{|f(x)|/||x||\} \geq |f(x_0)|/||x_0|| > 0\,.$$

لذا، اصل موضوع $[\mathbf{N_1}]$ (ر.ک. صفحهٔ ۲۱۴) برقرار است. نیز داریم

$$\begin{aligned} ||k\cdot f|| &= \sup\{|(k\cdot f)(x)|/||x||\} = \sup\{|k[f(x)]|/||x||\} \\ &= \sup\{|k|\,|f(x)|/||x||\} = |k| \sup\{|f(x)|/||x||\} = |k|\,||f||\,. \end{aligned}$$

لذا، اصل موضوع $[\mathbf{N_2}]$ نیز برقرار است. بعلاوه،

$$\begin{aligned} ||f+g|| &= \sup\{|f(x)+g(x)|/||x||\} \leq \sup\{(|f(x)| + |g(x)|)/||x||\} \\ &\leq \sup\{|f(x)|/||x||\} + \sup\{|g(x)|/||x||\} = ||f|| + ||g||\,; \end{aligned}$$

و درنتیجه، اصل موضوع $[\mathbf{N_3}]$ نیز برقرار است.

مسائل تکمیلی

همگرایی دنباله‌های توابع

۲۵ . فرض کنید $\langle f_1, f_2, \ldots\rangle$ دنباله‌ای از توابع حقیقی با قلمرو $I = [0,1]$ باشد که با

$f_n(x) = x^n/n$ تعریف می‌شوند.

(یک) نشان دهید که $\langle f_n \rangle$ نقطه‌وار به تابع ثابت $g(x) = 0$ همگراست؛ یعنی، به‌ازای هر $x \in I$، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(دو) نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \neq \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \cdot$$

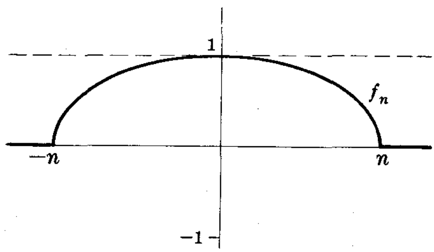
۲۶. فرض کنید $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای از توابع حقیقی مشتقپذیر با قلمرو $[a, b]$ باشد که یکشکل همگرا به g اند. ثابت کنید

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \cdot$$

(توجه کنید که، طبق مسئلهٔ قبل، این نتیجه برای همگرایی نقطه‌وار برقرار نیست.)

۲۷. فرض کنید $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

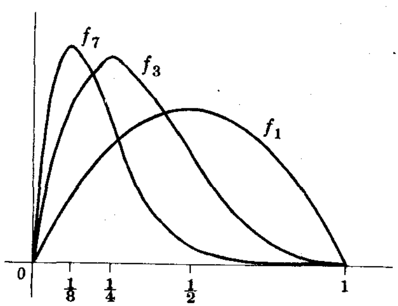
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - x^2} & \text{اگر } |x| < n \\ 0 & \text{اگر } |x| \geq n \end{cases}$$



(یک) نشان دهید که $\langle f_n \rangle$ یکشکل همگرا به تابع ثابت $g(x) = 1$ نیست.

(دو) ثابت کنید $\langle f_n \rangle$ یکشکل و فشرده همگرا به‌تابع ثابت $g(x) = 1$ است.

۲۸. فرض کنید $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای از توابع با قلمرو $I = [0, 1]$ باشد که با $f_n(x) = nx(1-x)^n$ تعریف شده‌اند.



(یک) نشان دهید که $\langle f_n \rangle$ نقطه‌وار به تابع ثابت $g(x) = 0$ همگراست.
(دو) نشان دهید که $\langle f_n \rangle$ یکشکل همگرا به $g(x) = 0$ نیست.
(سه) نشان دهید که دراین حالت

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \left[\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right] dx \,.$$

۲۹ . فرض کنید $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای در $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ باشد که با $f_n(x) = \frac{n+1}{n} x$ تعریف می‌شود.
(یک) نشان دهید که $\langle f_n \rangle$ یکشکل و فشرده همگرا به تابع $g(x) = x$ است.
(دو) نشان دهید که $\langle f_n \rangle$ یکشکل همگرا به $g(x) = x$ نیست.

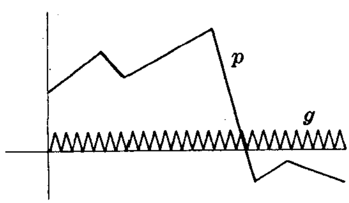
۳۰ . فرض کنید $\langle f_1, f_2, \ldots \rangle$ دنباله‌ای ازتوابع انتگرالپذیر (ریمان) بر $I = [0,1]$ باشد. گوییم دنباله‌ٔ $\langle f_n \rangle$ **میانگینی همگرا** به تابع g است اگر

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 |f_n(x) - g(x)|^2\, dx = 0 \,.$$

(یک) نشان دهید که اگر $\langle f_n \rangle$ یکشکل همگرا به g باشد، $\langle f_n \rangle$ میانگینی همگرا به g می‌باشد.
(دو) با مثال نقض نشان دهید کـه همگرایی میانگینی لزوما" همگرایی نقطه‌وار را ایجاب نمی‌کند.

فضای تابعی $C[0,1]$

۳۱ . نشان دهید که $C[0,1]$ با $C[a,b]$ یکمتر، و درنتیجه همانریخت، است.
۳۲ . فرض‌کنید $\langle f_n \rangle$ به g در $C[0,1]$ همگرابوده‌و $x_n \to x_0$. ثابت کنید $\lim_{n \to \infty} f_n(x_n) = g(x_0)$.
۳۳ . فرض کنید p یک قـوس چندضلعی در $C[0,1]$ بوده و $\delta > 0$. نشان دهید که تابع دندان اره‌ای g باقدرمطلق کوچکتر از $\frac{1}{2}\delta$ ، یعنی $\|g\| < \frac{1}{2}\delta$ ، وجود داردبطوری که $p+g$ متعلق به A_m نیست (ر.ک. مسئلهٔ ۱۴).



۳۴ . فرض کنید $\langle f_n \rangle$ دنباله‌ای کشـی در $C[0,1]$ بوده و $\langle f_n \rangle$ نقطه‌وار همگرا به g باشد.

دراین‌صورت، $\langle f_n \rangle$ یکشکل همگرا به g است.

پیوستگی یکشکل

۳۵ . نشان دهید که $f(x) = 1/x$ بر بازهٔ باز $(0,1)$ یکشکل پیوسته نیست.

۳۶ . پیوستگی یکشکل تابع $f : X \to Y$ را درحالتی تعریف کنید که X و Y فضاهای متری دلخواهی باشند.

۳۷ . فرض کنید f تابع پیوسته‌ای از فضای متری فشردهٔ X بتوی فضای متری Y باشد. دراین صورت، f یکشکل پیوسته است.

تابعیها بر فضاهای نرمدار

۳۸ . فرض کنید f یک تابعی خطی کراندار بر فضای نرمدار X باشد. نشان دهید که

$$\sup \{|f(x)|/||x|| : x \neq 0\} = \inf \{M : \text{است } f \text{ یک کران برای } M\}.$$

۳۹ . نشان دهید اگر f یک تابعی خطی پیوسته بر X باشد، f کراندار است.

۴۰ . ثابت کنید فضای دوگان X^* هر فضای نرمدار X تام است.

ضمیمه

خواص اعداد حقیقی

اصول موضوع میدان

مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $\mathbf{R}$ ، نقش مهمی در ریاضیات، بویژه در آنالیز، دارد. درواقع، بسیاری از مفاهیم توپولوژی تجرید خواص مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند. مجموعهٔ $\mathbf{R}$ را می‌توان با گفتن اینکه $\mathbf{R}$ یک *میدان مرتب ارشمیدسی تام* است توصیف‌کرد. دراین ضمیمه رابطهٔ ترتیب در $\mathbf{R}$ که در تعریف توپولوژی معمولی بر $\mathbf{R}$ بکار می‌رود بررسی می‌شود (ر.ک. فصل ۴). حال به بیان اصول موضوع میدان $\mathbf{R}$ می‌پردازیم که، همراه با نتایج آنها، در تمام کتاب مفروض بوده‌اند.

تعریف. مجموعهٔ F از دو یا چند عنصر، همراه با دو عمل به نامهای جمع $(+)$ و ضرب $(\cdot)$ ، یک میدان است اگر در اصول موضوع زیر صدق کند:

$[\mathbf{A}_1]$ بسته بودن. $a, b \in F \;\Rightarrow\; a+b \in F$

$[\mathbf{A}_2]$ قانون شرکتپذیری. $a, b, c \in F \;\Rightarrow\; (a+b)+c = a+(b+c)$

$[\mathbf{A}_3]$ همانی (جمعی). $\exists\, 0 \in F$ بطوری که $0+a = a+0 = a, \;\; \forall a \in F$

$[\mathbf{A}_4]$ معکوس (جمعی) $\exists\, -a \in F$ بطوری که $a \in F \;\Rightarrow a+(-a) = (-a)+a = 0$

$[\mathbf{A}_5]$ قانون تعویضپذیری. $a, b \in F \;\Rightarrow\; a+b = b+a$

$[\mathbf{M}_1]$ بسته بودن. $a, b \in F \;\Rightarrow\; a\cdot b \in F$

$[\mathbf{M}_2]$ قانون شرکتپذیری. $a, b, c \in F \;\Rightarrow\; (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

$[\mathbf{M}_3]$ همانی (ضربی) $\exists\, 1 \in F,\; 1 \neq 0$ بطوری که $1\cdot a = a\cdot 1 = a, \;\; \forall a \in F$

$[\mathbf{M}_4]$ معکوس (ضربی) $\exists\, a^{-1} \in F$ بطوری که $a \in F,\; a \neq 0 \Rightarrow a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1$

$[\mathbf{M}_5]$ قانون تعویضپذیری. $a, b \in F \;\Rightarrow\; a\cdot b = b\cdot a$

$[\mathbf{D}_1]$ قانون پخشپذیری از چپ. $a, b, c \in F \;\Rightarrow\; a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

[D$_2$] قانون پخشپذیری از راست. $a,b,c \in F \;\Rightarrow\; (b+c)\cdot a \;=\; b\cdot a \;+\; c\cdot a$

در اینجا $\exists$ یعنی "وجود دارد"، $\forall$ یعنی "به‌ازای هر"، و $\Rightarrow$ یعنی "ایجاب می‌کند".

خواص جبری زیر از اعداد حقیقی مستقیماً از اصول موضوع میدان نتیجه می‌شوند.

حکم آ.۱. *فرض کنیم F یک میدان باشد. در این‌صورت،*
(یک) *عناصر همانی 0 و 1 منحصر بفردند؛*
(دو) *قوانین حذف زیر برقرارند:*

$$a+b=a+c \;\Rightarrow\; b=c \quad (۱) \;;\quad a\cdot b=a\cdot c,\; a\neq 0 \;\Rightarrow\; b=c \quad (۲)$$

(سه) *عناصر معکوس $-a$ و a^{-1} منحصر بفردند؛*
(چهار) *به‌ازای هر $a,b\in F$*

(۱) $a\cdot 0=0$، (۲) $a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$،
(۳) $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$.

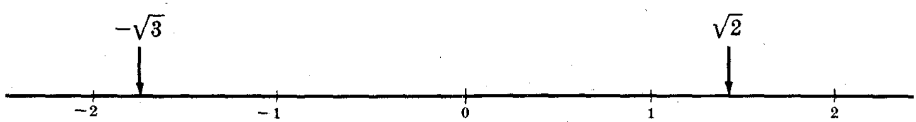
تفریق و تقسیم (بریک عنصر ناصفر) در میدان به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$b-a \;\equiv\; b+(-a) \quad \text{و} \quad \frac{b}{a} \;\equiv\; b\cdot a^{-1}$$

تبصره. یک مجموعهٔ ناتهی همراه با دو عمل که در تمام اصول موضوع میدان جز احتمالاً [M$_3$]، [M$_4$]، و [M$_5$] صدق کند یک **حلقه** نام دارد. مثلاً، مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ از اعداد صحیح تحت جمع و ضرب یک حلقه است ولی یک میدان نیست.

خط حقیقی

فرض کنیم خواننده با نمایش هندسی $\mathbf{R}$ به‌وسیلهٔ نقاط بر یک خط مستقیم به‌صورت زیر آشنا باشد.



خط حقیقی $\mathbf{R}$

توجه کنید که نقطه‌ای، به‌نام مبداء، برای نمایش 0 و نقطه‌ای دیگر، معمولا" سمت‌راست 0 ، برای نمایش 1 اختیار می‌شود. سپس‌راهی طبیعی برای جفت کردن نقاط خط و اعداد حقیقی وجود دارد؛ یعنی، هر نقطه نمایش عدد حقیقی منحصر بفردی است و هر عدد حقیقی با نقطهٔ منحصر بفردی نموده می‌شود. به این‌دلیل، $\mathbf{R}$ را **خط حقیقی** نامیم و از واژه‌های نقطه و عدد به‌جای هم استفاده می‌کنیم.

زیرمجموعه‌های R

علامات $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{N}$ زیرمجموعه‌های زیر از $\mathbf{R}$ را نشان می‌دهند:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}, \qquad \mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

عناصر $\mathbf{Z}$ ***اعداد صحیح گویا*** یا، فقط، ***اعداد صحیح*** نام دارند؛ و عناصر $\mathbf{N}$ ***اعداد صحیح مثبت*** یا ***اعداد طبیعی*** نامیده می‌شوند.

علامت $\mathbf{Q}$ برای‌نمایش مجموعهٔ ***اعداد گویا*** بکار می‌رود. اعداد گویا اعدادی‌حقیقی‌اند که بتوان آنها را با نسبت دو عدد صحیح، به شرط ناصفر بودن دومی، بیان کرد:

$$\mathbf{Q} = \{x \in \mathbf{R} : x = p/q;\ p, q \in \mathbf{Z},\ q \neq 0\}.$$

هر عدد صحیح عددی گویا نیز هست زیرا، مثلا"، $-5 = 5/-1$ ؛ از اینرو، $\mathbf{Z}$ زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{Q}$ است. درواقع، سلسله مراتب زیر را داریم:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

اعداد گنگ اعدادی حقیقی‌اند که گویا نیستند؛ لذا، $\mathbf{Q}^c$ ، یعنی متمم (نسبت‌به $\mathbf{R}$) مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbf{Q}$ ، مجموعهٔ اعداد گنگ می‌باشد.

اعداد مثبت

اعداد سمت راست 0 بر خط‌حقیقی $\mathbf{R}$ ، یعنی در همان طرف 1 ، ***اعداد مثبت‌اند***؛ و اعداد سمت چپ 0 ***اعداد منفی*** می‌باشند. اصول موضوع زیرمجموعهٔ اعداد مثبت را کاملا" مشخص می‌کنند.

[P₁] هرگاه $a \in \mathbf{R}$ ، آنگاه دقیقا" یکی از احکام زیر درست است: a مثبت‌است؛ $a = 0$ ؛ $-a$ مثبت است.

[P₂] هرگاه $a, b \in \mathbf{R}$ مثبت باشند، آنگاه مجموع $a + b$ وحاصل‌ضرب $a \cdot b$ نیزمثبت‌اند.

پس a مثبت است اگر و فقط اگر $-a$ منفی باشد.

مثال ۱۰۱ . فقط با استفاده از [P₁] و [P₂] نشان می‌دهیم که عدد حقیقی 1 مثبت

است. بنابر $[\mathbf{P}_1]$ ، 1 یا -1 مثبت است. فرض کنیم -1 مثبت باشد؛ و درنتیجه، طبق $[\mathbf{P}_2]$ ، حاصلضرب $1 = (-1)(-1)$ نیز مثبت است. اما این با $[\mathbf{P}_1]$ که می‌گوید 1 و -1 هر دو نمی‌توانند مثبت باشند متناقض است. از اینرو، فرض مثبت بودن -1 باطل بوده، و 1 مثبت می‌باشد.

مثال ۲.۱ . عددحقیقی -2 منفی است. زیرا، بنابر مثال ۱.۱ ، 1 مثبت و درنتیجه، بنابر $[\mathbf{P}_2]$ ، مجموع $2 = 1+1$ مثبت است. بنابراین، طبق $[\mathbf{P}_1]$ ، -2 مثبت نیست؛ یعنی، -2 منفی است.

مثال ۳.۱ . نشان می‌دهیم که حاصلضرب $a \cdot b$ عدد مثبت a و عدد منفی b منفی است. زیرا هرگاه b منفی باشد، آنگاه، بنابر $[\mathbf{P}_1]$ ، $-b$ مثبت است؛ و درنتیجه، بنابر $[\mathbf{P}_2]$ ، حاصلضرب $a \cdot (-b)$ نیز مثبت است. اما $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. لذا، $-(a \cdot b)$ مثبت بوده؛ و درنتیجه، بنابر $[\mathbf{P}_1]$ ، $a \cdot b$ منفی می‌باشد.

ترتیب

با استفاده از مفهوم مثبت بودن، یک رابطهٔ ترتیبی در $\mathbf{R}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف. عدد حقیقی a ***کوچکتر از*** عدد حقیقی b است، و می‌نویسیم $a < b$ ، اگر تفاضل $b - a$ مثبت باشد.

به بیان هندسی، هرگاه $a < b$ ، آنگاه نقطهٔ a بر خط حقیقی سمت چپ نقطهٔ b قرار دارد.

نمادهای زیر نیز دراین رابطه بکار می‌روند:

$b > a$ ، بخوانید b از a بزرگتر است، یعنی $a < b$ ؛

$a \leqq b$ ، بخوانید a کوچکتر یا مساوی b است، یعنی $a < b$ یا $a = b$ ؛

$b \geqq a$ ، بخوانید b بزرگتر یا مساوی a است، یعنی $a \leqq b$.

مثال ۱.۲ . $2 < 5;\ \ -6 \leqq -3;\ \ 4 \leqq 4;\ \ 5 > -8$

مثال ۲.۲ . عدد حقیقی x مثبت است اگفگر $x > 0$ ، و x منفی است اگفگر $x < 0$.

مثال ۳.۲ . نماد $2 < x < 7$ یعنی $2 < x$ و نیز $x < 7$ ؛ ازاینرو ، x بر خط حقیقی بین 2 و 7 قرار دارد.

اصول موضوع $[\mathbf{P}_1]$ و $[\mathbf{P}_2]$ که اعداد حقیقی مثبت را تعریف می‌کنند برای اثبات قضیهٔ زیر بکار می‌روند .

قضیهٔ آ.۲ . فرض کنیم a ، b ، و c اعدادی حقیقی باشند . دراین صورت ،

(یک) $a < b$ ، $a = b$ ، **یا** $b < a$ ؛

(دو) هرگاه $a < b$ **و** $b < c$ ، **آنگاه** $a < c$ ؛

(سه) هرگاه $a < b$ ، **آنگاه** $a + c < b + c$ ؛

(چهار) هرگاه $a < b$ **و** c **مثبت باشد ، آنگاه** $ac < bc$ ؛ و

(پنج) هرگاه $a < b$ **و** c **منفی باشد ، آنگاه** $ac > bc$.

نتیجهٔ آ.۳ . مجموعهٔ $\mathbf{R}$ از اعداد حقیقی با رابطهٔ $a \leqq b$ کلی مرتب است .

قدر مطلق

قدر مطلق عدد حقیقی x با $|x|$ نموده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ ،} & \text{اگر } x \geqq 0 \\ -x \text{ ،} & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

توجه کنید که قدر مطلق یک عدد همواره نامنفی است ؛ یعنی ، به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ ، $|x| \geqq 0$.

به بیان هندسی ، قدر مطلق x فاصلهٔ نقطهٔ x بر خط حقیقی تا مبداء ، یعنی نقطهٔ 0 ، است . بعلاوه ، فاصلهٔ هر دو نقطهٔ $a, b \in \mathbf{R}$ مساوی $|a - b| = |b - a|$ می‌باشد .

مثال ۱.۳ . $|-2| = 2, \ |7| = 7, \ |-\pi| = \pi, \ |-\sqrt{2}\,| = \sqrt{2}$

مثال ۲.۳ . $|8 - 3| = |5| = 5$ و $|3 - 8| = |-5| = 5$

مثال ۳.۳ . عبارت $|x| < 5$ را می‌توان این طور تعبیر کرد که فاصلهٔ بین x و مبداء کوچکتر از 5 است ؛ از اینرو ، x بر خط حقیقی باید بین 5− و 5 قرار گیرد . به‌عبارت دیگر ،

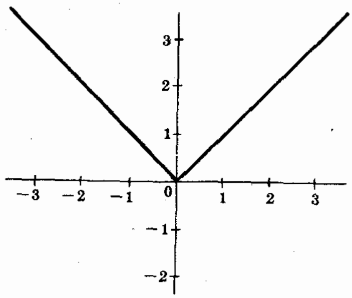
$$|x| < 5 \quad \text{و} \quad -5 < x < 5$$

یک معنی دارند و، بهمین نحو،

$$|x| \leqq 5 \quad \text{و} \quad -5 \leqq x \leqq 5$$

دارای یک معنی می‌باشند.

نمودار تابع $f(x) = |x|$ ، یعنی تابع قدر مطلق، کاملا" در نیمهٔ بالایی صفحه‌قرار دارد، زیرا به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ ، $f(x) \geqq 0$ (ر.ک. نمودار زیر).



نمودار $f(x) = |x|$

نکات مهم در باب تابع قدر مطلق درحکم زیر آمده است.

حکم آ.۴. *فرض‌کنیم a ، b ، و c اعدادی حقیقی باشند. دراین صورت،*

(یک) $|a| \geqq 0$ ، و $|a| = 0$ *اگفگر* $a = 0$ ؛

(دو) $|ab| = |a|\,|b|$ ؛

(سه) $|a+b| \leqq |a| + |b|$ ؛

(چهار) $|a-b| \geqq \big|\,|a| - |b|\,\big|$ ؛ و

(پنج) $|a-c| \leqq |a-b| + |b-c|$.

اصل موضوع کوچکترین کران بالایی

در فصل ۱۴ مفهوم تمامیت برای فضاهای متری کلی بحث شد. برای خط حقیقی $\mathbf{R}$ می‌توان از تعریف زیر استفاده کرد: $\mathbf{R}$ *تام* است یعنی $\mathbf{R}$ در اصل موضوع زیر صدق می‌کند:

[LUB] **(اصل موضوع کوچکترین کران بالایی).** هرگاه A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و از بالا کراندار باشد، آنگاه A کوچکترین کران بالایی دارد؛ یعنی، $\sup(A)$ موجود است.

مثال ۱.۴. مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbf{Q}$ در اصل موضوع کوچکترین کران بالایی صدق نمی‌کند، زیرا فرض کنیم

$$A \quad = \quad \{q \in \mathbf{Q} : q > 0,\ q^2 < 2\}\ ;$$

یعنی، A مرکب است از اعداد گویای بزرگتر از 0 و کوچکتر از $\sqrt{2}$. A از بالا کراندار است؛ مثلا"، 5 یک کران بالایی برای A است. اما A کوچکترین کران بالایی ندارد؛ یعنی، عددی‌گویا مانند m نیست که $m = \sup(A)$. توجه‌کنیدکه m نمی‌تواند $\sqrt{2}$ باشد، زیرا $\sqrt{2}$ تعلق به $\mathbf{Q}$ ندارد.

با استفاده از اصل کوچکترین کران بالایی ثابت می‌کنیم $\mathbf{R}$ مرتب ارشمیدسی است.

قضیهٔ آ . ۵ (اصل‌ترتیب‌ارشمیدسی) . *مجموعهٔ‌اعداد صحیح مثبت* $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *از بالا کراندار نیست.*

به عبارت دیگر، عددی حقیقی بزرگتر از هر عدد صحیح مثبت وجود ندارد. یک نتیجهٔ این قضیه عبارت است از

نتیجهٔ آ . ۶ . *بین هر دو عدد حقیقی متمایز عددی گویا وجود دارد.*

خاصیت بازه‌های تودرتو

خاصیت بازه‌های تودرتوی $\mathbf{R}$ ، که مضمون قضیهٔ بعدی است، نتیجهٔ مهمی است از اصل کوچکترین کران بالایی؛ یعنی، تمامیت $\mathbf{R}$.

قضیهٔ آ . ۷ (خاصیت بازه‌های‌تودرتو) . *فرض‌کنیم* $I_1 = [a_1, b_1],\ I_2 = [a_2, b_2],\ \ldots$ *دنباله‌ای از بازه‌های بستهٔ تودرتو (و کراندار) باشد؛ یعنی،* $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ *. در این‌صورت، دست‌کم یک نقطهٔ مشترک بین بازه‌ها وجود دارد؛ یعنی،*

$$\cap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \emptyset \ .$$

لازم است که بازه‌های قضیه بسته و کراندار باشند، زیرا، همانطور که دو مثال زیر نشان می‌دهند، قضیه درغیر این‌صورت درست نیست.

مثال ۱۰۵ . فرض کنیم $A_1, A_2, \ldots$ دنبالهٔ زیر از بازه‌های باز ــ بسته باشد:

$$A_1 = (0, 1],\ A_2 = (0, 1/2],\ \ldots,\ A_k = (0, 1/k],\ \ldots$$

این دنباله از بازه‌ها تودرتوست: یعنی، هر بازه شامل بازهٔ بعد از خود است: $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$. اما اشتراک این بازه‌ها تهی است؛ یعنی،

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \cdots = \emptyset \cdot$$

لذا، بازه‌ها نقطهٔ مشترکی ندارند.

مثال ۲۰۵ . فرض کنیم $A_1, A_2, \ldots$ دنبالهٔ زیر از بازه‌های نامتناهی بسته باشد:

$$A_1 = [1, \infty),\ A_2 = [2, \infty),\ \ldots,\ A_k = [k, \infty),\ \ldots$$

در اینجا $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ؛ یعنی، دنباله تودرتوست. اما بازه‌ها نقطهٔ مشترک ندارند؛ یعنی،

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \cdots = \emptyset \cdot$$

مسائل حل شده

اصول موضوع میدان

۱ . حکم آ . ۱ (چهار) را ثابت کنید: به‌ازای هر $a, b \in F$ ، (۱) $a0 = 0$ ، (۲) $a(-b) = (-a)b = -ab$ ، (۳) $(-a)(-b) = ab$.

حل

(۱) $a0 = a(0+0) = a0 + a0$. باافزودن $-a0$ به‌طرفین خواهیم داشت $0 = a0$.

(۲) $0 = a0 = a(b + (-b)) = ab + a(-b)$. از اینرو، $a(-b)$ قرینهٔ ab است؛ یعنی، $a(-b) = -ab$. بهمین نحو، $(-a)b = -ab$.

(۳) $0 = (-a)0 = (-a)(b + (-b)) = (-a)b + (-a)(-b) = -ab + (-a)(-b)$. با افزودن ab به طرفین خواهیم داشت $ab = (-a)(-b)$.

۲ . نشان دهید که در میدان F ضرب روی تفریق پخش‌پذیر است؛ یعنی، $a(b-c) = ab - ac$.

حل . $a(b-c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac$

۳ . نشان دهید که میدان F مقسوم علیه صفر ندارد؛ یعنی، $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ یا $b = 0$.

حل. فرض کنیم $ab = 0$ و $a \neq 0$. پس a^{-1} وجود دارد، و درنتیجه، $b = 1b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0$.

نامساویها و اعداد مثبت

۴ . نامساویهای زیر را طوری بنویسید که فقط x بین علامات نامساوی قرار داشته‌باشد : (یک) $3 < 2x - 5 < 7$ ؛ (دو) $-7 < -2x + 3 < 5$.

حل. از قضیهٔ آ . ۲ استفاده می‌کنیم .
(یک) بنابر (سه) ، می‌توان 5 را به هر طرف $3 < 2x - 5 < 7$ افزوده بدست‌آورد $8 < 2x < 12$. بنابر (چهار) ، می‌توان طرفین را در $\frac{1}{2}$ ضرب کرده بدست آورد $4 < x < 6$.
(دو) با افزودن -3 به طرفین‌بدست‌می‌آوریم $-10 < -2x < 2$. بنابر (پنج) ، می‌توان‌طرفین رادر $-\frac{1}{2}$ ضرب و نامساویها را عکس کرده بدست آورد $-1 < x < 5$.

۵ . ثابت کنید $\frac{1}{2}$ عددی مثبت است .

حل. بنابر $[\mathbf{P}_1]$ ، یا $-\frac{1}{2}$ مثبت است یا $\frac{1}{2}$. فرض‌کنیم $-\frac{1}{2}$ مثبت باشد؛ و در نتیجه ، بنابر $[\mathbf{P}_2]$ ، $-1 = (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})$ نیز مثبت است . اما،بنابر مثال ۱۰۱ ، 1 مثبت است نه -1 . لذا ، تناقض داریم ؛ و درنتیجه ، $\frac{1}{2}$ مثبت می‌باشد .

۶ . قضیهٔ آ ۲ . (دو) را ثابت کنید : هرگاه $a < b$ و $b < c$ ، آنگاه $a < c$.

حل. بنابر تعریف ، $a < b$ یعنی $b - a$ مثبت است ؛ و $b < c$ یعنی $c - b$ مثبت است . اما ، بنابر $[\mathbf{P}_2]$ ، مجموع $(b-a) + (c-b) = c - a$ مثبت است ؛ و در نتیجه ، بنابر تعریف ، $a < c$.

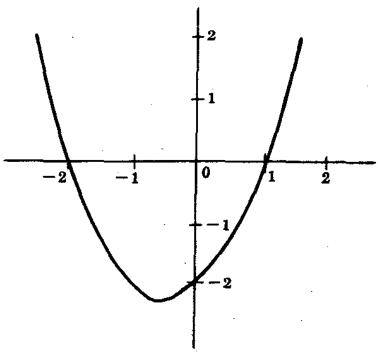
۷ . قضیهٔ آ ۲ . (پنج) را ثابت کنید : هرگاه $a < b$ و c منفی باشد ، آنگاه $ac > bc$.

حل. بنابر تعریف ، $a < b$ یعنی $b - a$ مثبت است . بنابر $[\mathbf{P}_1]$ ، اگر c منفی باشد ، آنگاه $-c$ مثبت است ؛ و درنتیجه ، بنابر $[\mathbf{P}_2]$ ، حاصل ضرب

$(b-a)(-c) = ac - bc$ نیزمثبت‌است. از اینرو، بنا بر تعریف، $bc < ac$ یا، معادلاً"، $ac > bc$.

۸ . همهٔ اعداد حقیقی x را معین کنید که $(x-1)(x+2) < 0$.

حل. باید همهٔ x هایی را بیابیم که $y = (x-1)(x+2)$ منفی است. چون حاصل ضرب دو عدد منفی است اگفگر یکی مثبت و دیگری منفی باشد، y منفی است اگر (یک) $x-1 > 0$ و $x+2 < 0$ ، یا (دو) $x-1 < 0$ و $x+2 > 0$. هرگاه $x-1 > 0$ و $x+2 < 0$ ، آنگاه $x > 1$ و $x < -2$ ، که ممکن نیست. لذا، y منفی است اگفگر $x-1 < 0$ و $x+2 > 0$ ، یا $x < 1$ و $x > -2$ ؛ یعنی، اگر $-2 < x < 1$. توجه کنید که نمودار $y = (x-1)(x+2)$ در نقاط $x = 1$ و $x = -2$ از محور x می‌گذرد (نمودار زیر آن‌را نشان می‌دهد). بعلاوه، نمودار زیر محور x است اگفگر y منفی باشد؛ یعنی، اگفگر $-2 < x < 1$.



قدر مطلقها

۹ . مقادیر زیر را حساب کنید:

(یک) $|1-3| + |-7|$ ؛ (دو) $|-1-4| - 3 - |3-5|$ ؛ (سه) $||-2| - |-6||$.

حل

(یک) $|1-3| + |-7| = |-2| + |-7| = 2 + 7 = 9$

(دو) $|-1-4| - 3 - |3-5| = |-5| - 3 - |-2| = 5 - 3 - 2 = 0$

(سه) $||-2| - |-6|| = |2-6| = |-4| = 4$

۱۰ . نامساویهای زیر را بدون علامت قدرمطلق بنویسید:

(یک) $|x-2| < 5$ ؛ (دو) $|2x+3| < 7$.

حل

(یک) $-5 < x-2 < 5$ یا $-3 < x < 7$

(دو) $-7 < 2x+3 < 7$ یا $-10 < 2x < 4$ یا $-5 < x < 2$

۱۱ . نامساویهای زیر را با علامت قدرمطلق بنویسید:

(یک) $-2 < x < 6$ ؛ (دو) $4 < x < 10$.

حل. ابتدا هر نامساوی را طوری می‌نویسیم که یک عدد و قرینه‌اش در دو انتهای نامساوی ظاهر شود.

(یک) -2 را به طرفین $-2 < x < 6$ افزوده بدست می‌آوریم $-4 < x-2 < 4$ که با $|x-2| < 4$ هم‌ارز است.

(دو) -7 را به طرفین $4 < x < 10$ افزوده بدست می‌آوریم $-3 < x-7 < 3$ که با $|x-7| < 3$ هم‌ارز است.

۱۲ . حکم آ ۴ . ۰ (سه) را ثابت کنید: $|a+b| \leq |a|+|b|$.

حل

روش ۱ . چون $|a| = \pm a$ ، $-|a| \leq a \leq |a|$ ؛ همچنین، $-|b| \leq b \leq |b|$. دراین صورت، با افزودن بهم،

$$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b| .$$

بنابراین، چون $|a|+|b| \geq 0$ ،

$$|a+b| \leq ||a|+|b|| = |a|+|b| .$$

روش ۲ . $ab \leq |ab| = |a|\,|b|$ ایجاب می‌کند که $2ab \leq 2|a|\,|b|$ ؛ و درنتیجه،

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \leq a^2+2|a|\,|b|+b^2 = |a|^2+2|a|\,|b|+|b|^2 = (|a|+|b|)^2 .$$

اما $\sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$ ؛ و درنتیجه، بنابر ریشهٔ دوم فوق، $|a+b| \leq |a|+|b|$.

۱۳ . حکم آ ۴ . ۰ (پنج) را ثابت کنید: $|a-c| \leq |a-b|+|b-c|$.

حل . $|a-c| = |(a-b)+(b-c)| \leq |a-b|+|b-c|$

اصل کوچکترین کران بالایی

۱۴ . قضیهٔ آ . ۵ (اصل ترتیب ارشمیدسی) را ثابت کنید: زیرمجموعهٔ $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ از $\mathbf{R}$ از بالا کراندار نیست.

حل. فرض کنیم $\mathbf{N}$ از بالا کراندار باشد. بنابر اصل کوچکترین کران بالایی، $\sup(\mathbf{N})$ وجود دارد؛ مثلاً، $b = \sup(\mathbf{N})$. پس $b-1$ یک کران بالایی برای $\mathbf{N}$ نیست؛ و درنتیجه،

$\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $b-1 < n_0$ یا $b < n_0+1$.

اما $n_0 \in \mathbf{N}$ ایجاب می‌کند که $n_0+1 \in \mathbf{N}$ ؛ و درنتیجه، b کران بالایی برای $\mathbf{N}$ نیست، که تناقض است. از اینرو، $\mathbf{N}$ از بالا کراندار نیست.

۱۵ . فرض کنید a و b اعداد حقیقی مثبتی باشند. ثابت کنید عدد صحیح مثبتی مانند $n_0 \in \mathbf{N}$ هست بطوری‌که $b < n_0 a$. به‌عبارت دیگر، مضربی از a بزرگتر از b است.

حل. فرض کنیم n_0 وجود نداشته باشد؛ یعنی، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $na < b$. پس، چون a مثبت است، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $n < b/a$ ؛ و درنتیجه، b/a یک کران بالایی برای $\mathbf{N}$ است. این قضیهٔ آ . ۵ (مسئلهٔ ۱۴) را نقض می‌کند؛ و درنتیجه، n_0 وجود دارد.

۱۶ . هرگاه a عدد حقیقی مثبتی باشد، یعنی $0 < a$ ، ثابت کنید عدد صحیح مثبتی مانند $n_0 \in \mathbf{N}$ هست بطوری که $0 < 1/n_0 < a$.

حل. فرض کنیم n_0 موجود نباشد؛ یعنی، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $a \leq 1/n$. دراین صورت، با ضرب طرفین در عدد مثبت n/a ، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ خواهیم داشت $n \leq 1/a$. ازاینرو، $\mathbf{N}$ به‌وسیلهٔ $1/a$ کراندار است، که غیر ممکن است. درنتیجه، n_0 وجود دارد.

۱۷ . نتیجهٔ آ . ۶ را ثابت کنید: بین هر دو عدد حقیقی متمایز a و b عددی گویا مانند

q وجود دارد.

حل. یکی از اعداد حقیقی، مثلاً a، از دیگری کوچکتر است؛ یعنی، $a < b$. هرگاه a منفی و b مثبت باشد، آنگاه عدد گویای 0 بین آنهاست؛ یعنی، $a < 0 < b$. حال نتیجه را برای وقتی که a و b هر دو مثبت‌اند ثابت می‌کنیم؛ حالتی که a و b منفی‌اند به‌همین نحو ثابت می‌شود، و حالتی که a یا b صفر است از مسئلهٔ ۱۶ بدست می‌آید.

$a < b$ یعنی $b - a$ مثبت است؛ و درنتیجه، بنابر مسئلهٔ قبل،

$n_0 \in \mathbf{N}$ $\exists$ بطوری که $0 < 1/n_0 < b - a$ یا $a + (1/n_0) < b$.

حکم می‌کنیم که‌مضرب صحیحی از n_0 بین a و b هست. توجه کنید که $1/n_0 < b$، زیرا $1/n_0 < a + (1/n_0) < b$. بنابر مسئلهٔ ۱۵، مضربی از $1/n_0$ بزرگتر از b است. فرض کنیم m_0 کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که $m_0/n_0 \geqq b$؛ از اینرو، $(m_0 - 1)/n_0 < b$. حکم می‌کنیم که

$$a < \frac{m_0 - 1}{n_0} < b$$

درغیر این‌صورت، $\frac{m_0 - 1}{n_0} \leqq a$؛ و درنتیجه،

$$\frac{m_0 - 1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{m_0}{n_0} \leqq a + \frac{1}{n_0} < b$$

که با تعریف m_0 تعارض دارد. لذا، $(m_0 - 1)/n_0$ عددی گویا بین a و b است.

خاصیت بازه‌های تودرتو

۱۸. قضیهٔ آ.۷ (خاصیت بازه‌های تودرتو) را ثابت کنید: فرض کنید $I_1 = [a_1, b_1],\ I_2 = [a_2, b_2], \cdots$ دنباله‌ای از بازه‌های (کراندار) بستهٔ تودرتو باشد؛ یعنی، $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$. دراین صورت، دست‌کم یک نقطهٔ مشترک بین بازه‌ها وجود دارد.

حل. $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ ایجاب می‌کند که $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$ و $\cdots \leqq b_2 \leqq b_1$. حکم می‌کنیم که

به‌ازای هر $m, n \in \mathbf{N}$، $a_m < b_n$.

زیرا $m > n$ ایجاب می‌کند که $a_m < b_m \leqq b_n$ و $m \leqq n$ ایجاب می‌کند که

$a_m \leq a_n < b_n$. لذا، هر b_n یک‌کران‌بالایی‌برای مجموعهٔ $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ نقاط انتهایی چپ است . بنابراصل کوچکترین کران بالایی $\mathbf{R}$ ، $\sup(A)$ وجود دارد ؛ مثلاً ، $p = \sup(A)$. به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $p \leq b_n$ ، زیرا هر b_n یک کران بالایی برای A است و p کوچکترین کران بالایی است. بعلاوه، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، $a_n \leq p$ ، زیرا p یک کران بالایی برای $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ است. اما

$$a_n \leq p \leq b_n \quad \Rightarrow \quad p \in I_n = [a_n, b_n] \,.$$

از اینرو، p در همهٔ بازه‌ها مشترک است .

۱۹ . درمسئلهٔ قبل، فرض‌کنیدطول‌بازه‌هابه‌صفر میل‌کند ؛ یعنی، $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$. نشان دهید که بازه‌ها دقیقاً " یک نقطهٔ مشترک دارند . به یاد آورید که $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$ ؛ یعنی، به‌ازای هر $\epsilon > 0$ ، $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$ بطوری که $n > n_0 \;\Rightarrow\; (b_n - a_n) < \epsilon$.

حل. فرض کنیم p_1 و p_2 متعلق‌به‌هربازه‌باشند. اگر $p_1 \neq p_2$ ، $|p_1 - p_2| = \delta > 0$ ، چون $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$ ، بازه‌ای مانند $I_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}]$ هست بطوری که طول I_{n_0} از فاصلهٔ $\delta = |p_1 - p_2|$ بین p_1 و p_2 کمتر است. بنابراین، p_1 و p_2 هر دو نمی‌توانند به I_{n_0} متعلق باشند، که تناقض است. لذا، $p_1 = p_2$ ؛ یعنی، تنها یک نقطه می‌تواند به هر بازه متعلق باشد.

مسائل تکمیلی

اصول موضوع میدان

۲۰ . نشان دهید که قانون پخشپذیری از راست $[\mathbf{D}_2]$ نتیجه‌ای است از قانون‌پخشپذیری از چپ $[\mathbf{D}_1]$ و قانون تعویضپذیری $[\mathbf{M}_5]$.

۲۱ . نشان دهید که مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbf{Q}$ تحت جمع و ضرب یک میدان است.

۲۲ . نشان دهید که مجموعهٔ

$$A = \{a + b\sqrt{2} : \text{گویا } a, b\}$$

از اعداد حقیقی تحت جمع و ضرب یک میدان است.

۲۳ . نشان دهید که مجموعهٔ اعداد صحیح زوج

$$A = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$

تحت‌جمع و ضرب، در همهٔ اصول موضوع میدان جز $[\mathbf{M}_3]$ ، $[\mathbf{M}_4]$ ، و $[\mathbf{M}_5]$ صدق

می‌کند؛ یعنی، یک حلقه است.

نامساویها و اعداد مثبت

۲۴ . نامساویهای زیر را طوری بنویسید که فقط x بین علامات نامساوی قرار گیرد:
(یک) $4 < -2x < 10$ ؛ (دو) $-1 < 2x - 3 < 5$ ؛ (سه) $-3 < 5 - 2x < 7$.

۲۵ . ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد منفی مثبت است.

۲۶ . قضیهٔ آ . ۲ (سه) را ثابت کنید: هرگاه $a < b$ ، آنگاه $a + c < b + c$.

۲۷ . قضیهٔ آ . ۲ (چهار) را ثابت‌کنید: هرگاه $a < b$ و c مثبت باشد، آنگاه $ac < bc$.

۲۸ . نتیجهٔ آ . ۳ را ثابت کنید: مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ با رابطهٔ $a \leqq b$ کلی مرتب است.

۲۹ . هرگاه $a < b$ و c مثبت باشد، ثابت کنید (یک) $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ ؛ (دو) $\frac{c}{b} < \frac{c}{a}$.

۳۰ . ثابت کنید $\sqrt{ab} \leqq (a+b)/2$. بطور کلی، ثابت کنید
$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$.

۳۱ . فرض‌کنید a و b اعدادی‌حقیقی باشند بطوری که به‌ازای هر $0 < \epsilon$ ، $a < b + \epsilon$.
ثابت کنید $a \leqq b$.

۳۲ . جمیع مقادیر x راتعیین کنید که
(یک) $x^3 + x^2 - 6x > 0$ ؛ (دو) $(x-1)(x+3)^2 \leqq 0$.

مقادیر مطلق

۳۳ . مقادیر زیر را حساب کنید: (یک) $|-2| + |1 - 4|$ ؛ (دو) $|3 - 8| - |1 - 9| - |8 - 3|$ ؛
(سه) $||-4| - |2 - 7||$.

۳۴ . نامساویهای زیر را با علامت قدر مطلق بنویسید: (یک) $-3 < x < 9$ ؛ (دو) $2 \leqq x \leqq 8$ ؛ (سه) $-7 < x < -1$.

۳۵ . ثابت کنید (یک) $|-a| = |a|$ ؛ (دو) $a^2 = |a|^2$ ؛ (سه) $|a| = \sqrt{a^2}$ ؛ (چهار) $|x| < a$ اگفگر $-a < x < a$.

۳۶ . حکم آ . ۴ (دو) را ثابت کنید: $|ab| = |a|\,|b|$.

۳۷ . حکم آ . ۴ (چهار) را ثابت کنید: $||a| - |b|| \leqq |a - b|$.

اصل کوچکترین کران بالایی

۳۸ . فرض کنید A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و از پایین کراندار باشد. ثابت کنید A

بزرگترین کران پایینی دارد؛ یعنی، $\inf(A)$ وجود دارد.

۳۹. (یک) فرض کنید $x \in \mathbf{R}$ چنان باشد که $x^2 < 2$. ثابت کنید $\exists n \in \mathbf{N}$ بطوری که $(x + 1/n)^2 < 2$.

(دو) فرض کنید $x \in \mathbf{R}$ چنان باشد که $x^2 > 2$. ثابت کنید $\exists n \in \mathbf{N}$ بطوری که $(x - 1/n)^2 > 2$.

۴۰. ثابت کنید عددی حقیقی مانند $a \in \mathbf{R}$ هست بطوری که $a^2 = 2$.

۴۱. ثابت کنید بین هر دو عدد حقیقی مثبت عددی به شکل r^2، که r گویاست، قرار دارد.

۴۲. ثابت کنید بین هر دو عدد حقیقی عددی گنگ واقع است.

جواب مسائل تکمیلی

۲۴. (یک) $-5 < x < -2$؛ (دو) $1 < x < 4$؛ (سه) $-1 < x < 4$

۳۲. (یک) $-3 < x < 0$ یا $x > 2$؛ یعنی، $x \in (-3, 0) \cup (2, \infty)$؛ (دو) $x \leq 1$

۳۳. (یک) 5؛ (دو) -3؛ (سه) 1

۳۴. (یک) $|x - 3| < 6$؛ (دو) $|x - 5| \leq 3$؛ (سه) $|x + 4| < 3$

واژه‌نامه
فارسی به انگلیسی

اجتماع	union
اشتراک	intersection
اصل موضوع	axiom
انتخاب	of choice
جداسازی	separation
میدان	field
افراز	partition
اقلیدسی	euclidean
فضای	space
متر	metric
نرم	norm
الف صفر	aleph-null
القایی	induced
توپولوژی	topology
متر	metric
اول	first
اصل . . . شمارشپذیری	axiom of countability
رسته‌ٔ	category
عنصر	element
فضای شمارشپذیر	countable space
اینفیمم	infimum
باریک	meager

باز	open
بازهٔ	interval
پوشش	cover
تابع	function
قرص	disc
کره	sphere
مجموعهٔ	set
همسایگی	neighborhood
بازه	interval
بالایی	upper
توپولوژی حد	limit topology
کران	bound
برد	range
برون	exterior
بزرگتر	larger
توپولوژی	topology
عنصر	element
بزرگترین	greatest
کران پایینی	lower bound
بست	closure
بسته	closed
بازهٔ	interval
تابع	function
مجموعهٔ	set
مسیر	path
بعد از	follows
به‌طور قاموسی	lexicographically
مرتب	ordered
پایه	base

local	موضعی
lower	پایینی
bound	کران
limit topology	توپولوژی حد
cover	پوشش
continuum	پیوستار
continuous	پیوسته
function	تابع
uniformly	یکشکل
function	تابع (ی)
onto	برو
projection	تصویر
constant	ثابت
real-valued	حقیقی
bicontinuous	دو پیوسته
inclusion	شمول
space	فضای
set	مجموعه‌ای
characteristic	مشخص
one-one	یک ـ یک
functional	تابعی
completion	تتمیم
restriction	تحدید
order	ترتیب
topology	توپولوژی
partial	جزئی
natural	طبیعی
inverse	معکوس
composition	ترکیب

تساوی	equality
تفاضل	difference
مجموعه‌ها	of sets
تقریبا " همه	almost all
تمامیت	completeness
توان	power
پیوستار	of the continuum
مجموعه ٔ	set
توپولوژی	topology
ضخیمتر	coarser
ظریفتر	finer
ضعیفتر	weaker
فشرده باز	compact open
نسبی	relative
نقطه باز	point open
همگرایی فشرده	of compact convergence
همگرایی نقطه‌وار	of pointwise convergence
همگرایی یکشکل	of uniform convergence
هم متناهی	cofinite
توپولوژیک	topological
تابع	function
خاصیت	property
زیرفضای	subspace
فضای	space
تودرتو	nested
پایه ٔ موضعی	local base
خاصیت بازه‌های	interval property
تور	net
توسیع	extension
یک تابع	of a function

جبر	algebra
جدایی‌پذیر	separable
چگال	dense
حاصل‌ضرب (ی)	product
پایا	invariant
توپولوژی	topology
دکارتی	cartesian
فضای	space
فضای متری	metric space
مجموعهٔ	set
حد (ی)	limit
نقطهٔ	point
حقیقی	real
خط	line
عدد	number
حلقه	ring
خاصیت	property
مطلق	absolute
موروثی	hereditary
خانواده	family
خط حقیقی	real line
وسعت یافته	extended
خطی مرتب	linearly ordered
درون (ی)	interior
تابع	function
نقطهٔ	point

cartesian	دکارتی
product	حاصل ضرب
plane	صفحهٔ
sequence	دنباله
convergent	همگرا
sequentially	دنباله‌ای
continuous	پیوسته
compact	فشرده
bicompact	دو فشرده
second	دوم
axiom of countability	اصل . . . شمارشپذیری
category	رستهٔ
countable space	فضای شمارشپذیر
relation	رابطه
reflexive	انعکاسی
anti-symmetric	پاد متقارن
binary	دوتایی
transitive	متعدی
symmetric	متقارن
class	رده
category	رسته
subbase	زیر پایه
subsequence	زیر دنباله
subspace	زیر فضا
subset	زیرمجموعه
proper	حقیقی
supremum	سوپرمم

شبکه	lattice
شمارشپذیر	denumerable
شمارشپذیر فشرده	countably compact
شمارشپذیری	countability
شمارش ناپذیر	non-denumerable
صافی	filter
صفحه	plane
ضخیم	thick
طبیعی	natural
ترتیب	order
عدد	number
عدد	number
اصلی	cardinal
جبری	algebraic
گنگ	irrational
گویا	rational
متعالی	transcendental
منفی	negative
عدد صحیح	integer
عضو	member
عنصر	element
ماکزیمال	maximal
مینیمال	minimal
فاصله	distance
فشردگی	compactness

فشرده	compact
دنباله‌ای	sequentially
شمارشپذیر	countably
فضای	space
مجموعهٔ	set
موضعی	locally
فشرده سازی	compactification
یک نقطه‌ای	one-point
فضا	space
برداری	vector
توپولوژیک	topological
خطی	linear
دوگان	dual
کاملاً منتظم	completely regular
متری	metric
مجزا	discrete
منتظم	regular
نامجزا	indiscrete
نرمال	normal
نرمدار	normed
قدر مطلق	absolute value
قطر	diameter
قضیه	theorem
رسته‌ای	category
مقدار میانی	intermediate value
قلمرو	domain
کاردینالیته	cardinality
کراندار	bounded

تابع	function
کلی	totally
مجموعه	set
یکشکل	uniformly
کرانه	boundary
کره	sphere
کلی	totally
کراندار	bounded
مجموعهٔ . . . مرتب	ordered set
ناهمبند	disconnected
کوچکتر	smaller
توپولوژی	topology
عنصر	element
کوچکترین	least
کران بالایی	upper bound
گردآیه	collection
گوی	ball
متر(ی)	metric
توپولوژی	topology
زیرفضای	subspace
فضای	space
فضای . . . حاصل ضربی	product space
مبتذل	trivial
مترپذیر	metrizable
مترنما	pseudometric
متری‌سازی	metrization
متمم	complement
متناهی	finite

خاصیت اشتراک	intersection property
مجموعه	set
مثبت	positive
عدد	number
عدد صحیح	integer
مجموعه(ها)	set(s)
ازهم‌جدا	disjoint
ازهم‌جدا شده	separated
اندیسدار	indexed
بی‌کران	unbounded
پوچ	null
تهی	empty
حداکثر شمارشپذیر	countable
خارج قسمتی	quotient
سه‌گانه	ternary
عمومی	universal
مختصات	coordinate
نامتناهی	infinite
مرتب	ordered
جفت	pair
خطی	linearly
زیرمجموعهٔ	subset
کلی	totally
مسلط بر	dominates
مسیر	path
مشتق	derived
مجموعهٔ	set
نقطهٔ	point
معرف	defining
پایه	base

زیرپایه	subbase
معکوس	inverse
تابع	function
رابطهٔ	relation
نقش	image
معمولی	usual
توپولوژی	topology
متر	metric
مؤلفه	component
موضعی	locally
فشردهٔ	compact
همبند	connected

ناحیه	region
نازک	thin
نامساوی	inequality
مثلثی	triangle
ناهمبند	disconnected
ناهمبندی	disconnection
نرم	norm
نشانیده شده	embedded
نقش	image
نقطه	point
انباشتگی	accumulation
انتهایی	terminal
اولیه	initial
چسبیده	adherent
خوشه‌ای	cluster
نگاشت	mapping
ارزیابی	evaluation

انقباض	contracting
نمودار	graph
همانریختی	homeomorphism
همانی	identity
تابع	function
رابطهٔ	relation
هم‌ارز	equivalent
توپولوژیک	topologically
هم‌ارزی	equivalence
رابطهٔ	relation
ردهٔ	class
همبند	connected
ساده	simply
فضای	space
مجموعهٔ	set
موضعی	locally
قوسوار	arcwise
همپیوستگی	equicontinuity
همجا	homotopic
همجایی	homotopy
همسایگی	neighborhood
هم‌قلمرو	codomain
همگرایی	convergence
فشرده	compact
نقطه‌وار	pointwise
یکشکل	uniform
هیچ‌جا چگال	nowhere dense
یک‌به‌یک	one-to-one

تابع	function
تناظر	correspondence
یکشکل	uniform
پیوستگی	continuity
کرانداری	boundedness
همگرایی	convergence
همگرایی . . . و فشرده	convergence on compacta
یکمتر	isometric

واژه‌نامه
انگلیسی به فارسی

absolute	مطلق
property	خاصیت
value	قدر
accumulation	انباشتگی
point	نقطهٔ
adherent point	نقطهٔ چسبیده
aleph-null	الف صفر
algebra	جبر
algebraic	جبری
number	عدد
almost all	تقریبا" همه
anti-symmetric	پادمتقارن
relation	رابطه
arbitrary	دلخواه
closeness	نزدیکی
archimedean	ارشمیدسی
order axiom	اصل موضوع ترتیب
arcwise	قوسوار
connected	همبندی
axiom	اصل موضوع
of choice	انتخاب
ball	گوی
base	پایه

local	موضعی
bicompact	دوفشرده
bicontinuous	دو پیوسته
function	تابع
binary	دوتایی
relation	رابطهٔ
bounded	کراندار
function	تابع
set	مجموعهٔ
totally	کلی
uniformly	یکشکل
cardinal	اصلی
number	عدد
cardinality	کاردینالیته
cartesian	دکارتی
plane	صفحهٔ
product	حاصلضرب
category	رسته
characteristic	مشخص
function	تابع
class	رده
closed	بسته
function	تابع
interval	بازهٔ
path	مسیر
set	مجموعهٔ
closure	بست
cluster	خوشه‌ای
point	نقطهٔ

coarser	ضخیمتر
topology	توپولوژی
co-domain	هم‌قلمرو
cofinite	هم متناهی
topology	توپولوژی
collection	گردآیه
compact	فشرده
countably	شمارشپذیر
locally	موضعی
sequentially	دنباله‌ای
set	مجموعهٔ
space	فضای
compactification	فشرده سازی
compactness	فشردگی
compact open	فشرده باز
topology	توپولوژی
complement	متمم
completely	کاملاً
regular space	فضای . . . منتظم
completeness	تمامیت
completion	تتمیم
component	موءلفه
composition	ترکیب
connected	همبند
arcwise	قوسوار
locally	موضعی
set	مجموعهٔ
simply	ساده
space	فضای
constant	ثابت

function	تابع
continuous	پیوسته
function	تابع
uniformly	یکشکل
continuum	پیوستار
contracting	انقباض
mapping	نگاشت
convergence	همگرایی
compact	فشرده
pointwise	نقطه‌وار
uniform	یکشکل
convergent	همگرا
sequence	دنباله‌ٔ
coordinate	مختص
set	مجموعه‌ٔ
countably	شمارشپذیر
compact	فشرده
cover	پوشش
defining	معرف
base	پایه‌ٔ
subbase	زیرپایه‌ٔ
dense	چگال
denumerable	شمارشپذیر
derived	مشتق
point	نقطه‌ٔ
set	مجموعه‌ٔ
diameter	قطر
difference	تفاضل
of sets	مجموعه‌ها

ناهمبند	disconnected
ناهمبندی	disconnection
مجزا	discrete
فضای (توپولوژیک)	(topological) space
از هم‌جدا	disjoint
مجموعه‌های	sets
فاصلهٔ	distance
قلمرو	domain
مسلط بر	dominates
دوگان	dual
فضای	space
عنصر	element
نشانیده شده	embedded
تهی	empty
مجموعهٔ	set
تساوی	equality
همپیوستگی	equicontinuity
هم‌ارز	equivalent
مترهای	metrics
مجموعه‌های	sets
توپولوژیک	topologically
اقلیدسی	euclidean
متری	metric
نرم	norm
فضای	space
ارزیابی	evaluation
نگاشت (تابع)	mapping (function)
وسعت یافته	extended
خط حقیقی	real line

توسیع	extension
یک تابع	of a function
برون	exterior
خانواده	family
میدان	field
صافی	filter
ظریفتر	finer
توپولوژی	topology
متناهی	finite
اشتراک	intersection
مجموعهٔ	set
اول	first
اصل . . . شمارشپذیری	axiom of countability
رستهٔ	category
فضای شمارشپذیر	countable space
عنصر	element
بعد از	follows
تابع	function
تصویر	projection
مجموعهٔ	set
فضای	space
تابعی	functional
نمودار	graph
بزرگترین	greatest
کران پایینی	lower bound
موروثی	hereditary
خاصیت	property

homeomorphic	همانریخت
spaces	فضاهای
homeomorphism	همانریختی
homotopic	همجا
homotopy	همجایی
identity	همانی
function	تابع
relation	رابطهٔ
image	نقش
inclusion	شمول
function	تابع
indexed	اندیسدار
set	مجموعهٔ
indiscrete	نامجزا
(topological) space	فضای (توپولوژیک)
induced	القایی
metric	متر
topology	توپولوژی
infimum	اینفیمم
infinite	نامتناهی
set	مجموعهٔ
initial	اولیه
point	نقطهٔ
integer	عدد صحیح
interior	درون
function	تابع
point	نقطهٔ
intersection	اشتراک
interval	بازه

inverse	معکوس
function	تابع
image	نقش
relation	رابطهٔ
irrational	گنگ
number	عدد
isometric	یکمتر
larger	بزرگتر
element	عنصر
topology	توپولوژی
lattice	شبکه
least	کوچکترین
upper bound	کران بالایی
lexicographically	به‌طور قاموسی
ordered	مرتب
limit	حد (ی)
point	نقطهٔ
linear	خطی
(vector) space	فضای (برداری)
linearly	خطی
ordered	مرتب
local	موضعی
base	پایهٔ
locally	موضعی
compact	فشرده
connected	همبند
lower	پایینی
bound	کران
limit topology	توپولوژی حد

mapping	نگاشت
maximal	ماکزیمال
element	عنصر
member	عضو
metric	متر(ی)
product space	فضای حاصل ضربی
space	فضای
subspace	زیرفضای
topology	توپولوژی
metrizable	مترپذیر
metrization	متری سازی
problem	مسئلهٔ
minimal	مینیمال
element	عنصر
natural	طبیعی
number	عدد
order	ترتیب
negative	منفی
number	عدد
neighborhood	همسایگی
nested	تودرتو
interval	بازهٔ
local base	پایهٔ موضعی
net	تور
non-denumerable	شمارش‌ناپذیر
norm	نرم
normal	نرمال
space	فضای
normed	نرمدار

space	فضای
nowhere	هیچ‌جا
dense	چگال
null	پوچ
set	مجموعهٔ
one-one	یک ـ یک
function	تابع
one-point	یک نقطه‌ای
compactification	فشرده سازی
one-to-one	یک به یک
correspondence	تناظر
function	تابع
onto	برو
function	تابع
open	باز
cover	پوشش
disc	قرص
function	تابع
interval	بازهٔ
neighborhood	همسایگی
set	مجموعهٔ
sphere	کرهٔ
order	ترتیب
inverse	معکوس
natural	طبیعی
partial	جزئی
topology	توپولوژی
ordered	مرتب
linearly	خطی

pair	جفت
subset	زیرمجموعهٔ
totally	کلی
partial	جزئی
order	ترتیب
partition	افراز
path	مسیر
plane	صفحه
point open	نقطه باز
topology	توپولوژی
pointwise	نقطه‌وار
convergence	همگرایی
positive	مثبت
integer	عدد صحیح
number	عدد
power	توان
of the continuum	پیوستار
set	مجموعهٔ
product	حاصل ضرب (ی)
cartesian	دکارتی
invariant	پایای
metric space	فضای متری
set	مجموعهٔ
space	فضای
topology	توپولوژی
projection	تصویر
function	تابع
proper	حقیقی
subset	زیرمجموعهٔ

pseudometric	مترنما
quotient	خارج قسمت (ی)
set	مجموعهٔ
range	برد
rational	گویا
number	عدد
real	حقیقی
line	خط
number	عدد
real-valued	حقیقی
function	تابع
reflexive	انعکاسی
relation	رابطهٔ
region	ناحیه
regular	منتظم
space	فضای
relation	رابطهٔ
relative	نسبی
topology	توپولوژی
restriction	تحدید
of a function	یک تابع
ring	حلقه
second	دوم
axiom of countability	اصل ... شمارشپذیری
category	رستهٔ
countable space	فضای شمارشپذیر

separable	جدایی‌پذیر
separated	ازهم‌جدا شده
sets	مجموعه‌های
separation	جداسازی
axiom	اصل موضوع
sequence	دنباله‌ٔ
convergent	همگرا
sequentially	دنباله‌ای
compact	فشرده
continuous	پیوسته
set	مجموعه (ای)
function	تابع
simply	ساده
connected	همبند
smaller	کوچکتر
element	عنصر
topology	توپولوژی
space	فضا
completely regular	کاملاً منتظم
linear	خطی
metric	متری
normal	نرمال
normed	نرمدار
regular	منتظم
topological	توپولوژیک
vector	برداری
sphere	کره
subbase	زیرپایه
subsequence	زیردنباله
subset	زیرمجموعه

subspace	زیرفضا
supremum	سوپرمم
symmetric	متقارن
relation	رابطهٔ
terminal	انتهایی
point	نقطهٔ
ternary	سه‌گانه
set	مجموعهٔ
thick	کلفت
thin	نازک
topological	توپولوژیک
function	تابع
property	خاصیت
space	فضای
subspace	زیرفضای
topologically	توپولوژیک
equivalent	هم‌ارز
topology	توپولوژی
totally	کلی
bounded	کراندار
disconnected	ناهمبند
ordered set	مجموعهٔ . . . مرتب
transcendental	متعالی
number	عدد
transitive	متعدی
relation	رابطهٔ
triangle	مثلث(ی)
inequality	نامساوی
trivial	مبتذل

metric	متـــر
unbounded	بی‌کران
set	مجموعه‌ٔ
uniform	یکشکل
boundedness	کرانداری
continuity	پیوستگی
convergence	همگرایی
convergence on compacta	همگرایی . . . و فشرده
union	اجتماع
universal	عمومی
set	مجموعه‌ٔ
upper	بالایی
bound	کران
limit topology	توپولوژی حد
usual	معمولی
metric	متر
topology	توپولوژی
vector	بردار(ی)
space	فضای
weaker	ضعیفتر
topology	توپولوژی