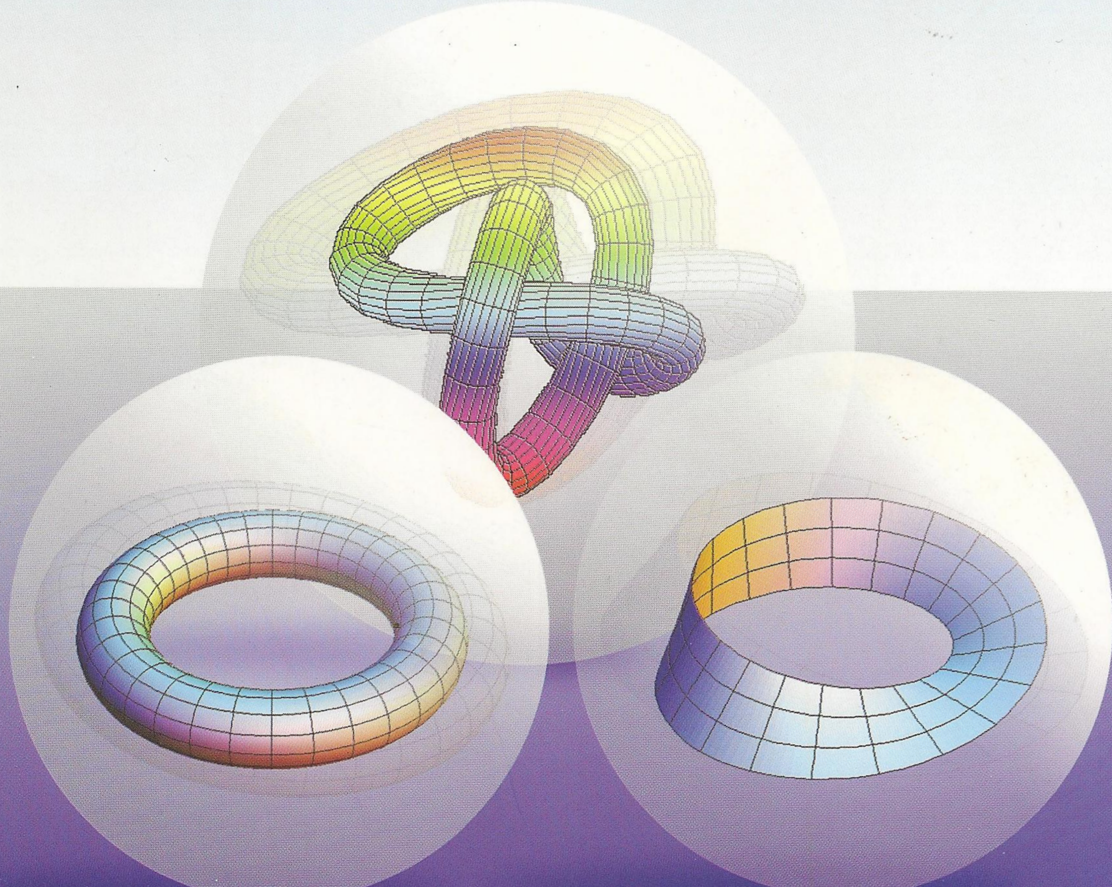
دانشگاه فردوسی مشهد
انتشارات دانشگاه
شماره ٤٤٧

توپولوژی عمومی

تالیف :
دکتر اسدالله نیکنام
استاد گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد
دکتر محمد صال مصلحیان
استاد گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد



فهرست

فصل ۴: خواص پوششی ۱۱۳

فصل ۵: خواص همبندی ۱۵۵

مقدمه

توپولوژی از نیمهٔ دوم قرن نوزدهم به‌عنوان یکی از شاخه‌های ریاضیات مطرح شد و امروزه تقریباً در همه حوزه‌های ریاضیات و دیگر علوم کاربرد دارد تا آن جا که می‌توان به کاربردهای آن در آئرودینامیک، شیمی، شبکه‌های رایانه‌ای و هندسه‌های نوین اشاره کرد.

توپولوژی در لغت به معنای «علم سطوح» است و موضوع آن به دو شاخهٔ اصلی ریاضیات یعنی هندسه و آنالیز مربوط می‌شود که ساختار انواع فضاهای مجرد را مورد بررسی قرار می‌دهد. توپولوژیست‌ها تلاش می‌کنند به درکی از اشکال و فضاها دست یابند؛ بدون این‌که صریحاً از ایدهٔ فاصله یا اندازه استفاده نمایند.

توپولوژی که گاهی هندسهٔ کیفی خوانده می‌شود، خواصی از اشیاء را مطالعه می‌کند که تحت همسانریختی پایا می‌مانند.

منظور از همسانریختی اعمالی است نظیر کشیدن، خم‌کردن یا فشردن یک سطح با قابلیت کشسانی بدون بریدن یا به هم چسباندن آن. در این صورت می‌توان یک مثلث روی یک سطح لاستیکی را به یک مستطیل یا دایره تبدیل کرد و لذا یک توپولوژیدان این سه شکل را یکی تصور می‌کند.

اولین مسائل توپولوژیکی از حدود سه قرن پیش مطرح شدند:

اویلر[1] (۱۷۸۳-۱۷۰۷) در سال ۱۷۳۶ میلادی به حل مسأله پلهای کونیگسبرگ[2] پرداخت و نشان داد عبور از هفت پل شهر کونیسبرگ در یک حرکت و بدون اینکه از یک پل دوبار گذر شود، غیرممکن‌است. وی همچنین فرمول (اویلر) $V - E + F = ۲$ را که رابطهٔ بین تعداد رئوس (V)، تعداد یالها (E) و تعداد وجوه (F) یک چندوجهی را به‌دست می‌دهد کشف کرد.

موبیوس[3] (۱۸۶۸-۱۷۹۰) در سال ۱۸۶۵ یک سطح یک رویه با یک لبه (موسوم به نوار موبیوس) را معرفی کرد.

پوانکاره[4] (۱۹۱۲-۱۸۵۴) به حرکت اجرام سماوی و شکل جهان علاقه‌مند گردید و مفهوم هموتوپی را تعریف کرد.

کانتور[5] (۱۹۱۸-۱۸۴۵) مشتق یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی را به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ نقاط حدی آن تعریف نمود و یک مجموعه را بسته نامید هرگاه شامل همهٔ نقاط حدی‌اش باشد. وی مجموعهٔ باز را

1. Leonhard Euler (1707-1783)
2. Konigsburg
3. August F. Mobius (1790-1868)
4. Jules H. Poincare (1854-1912)
5. Georg Cantor(1845-1918)

نیز تعریف کرد.

وایراشتراس[1] (۱۸۹۷-۱۸۱۵) مفهوم همسایگی را ارائه داد و بالاخره ریس[2] (۱۹۵۶-۱۸۸۰) و هاسدورف[3] (۱۹۴۲-۱۸۶۸) تعریفهای مجردی از توپولوژی به‌دست دادند.

امروزه توپولوژی به چندین شاخه تحت عناوین توپولوژی نقطه - مجموعه (عمومی) توپولوژی هندسی، توپولوژی جبری، توپولوژی دیفرانسیل و نظریهٔ گره تقسیم شده است و اخیراً از توپولوژی احتمالاتی نیز سخن به میان آمده است. توجه کتاب حاضر معطوف به توپولوژی عمومی است.

این کتاب سرفصل درس توپولوژی دورهٔ کارشناسی (و کارشناسی ارشد) را دربرمی‌گیرد و مرجع مناسبی برای تکمیل اطلاعات دانشجویان دورهٔ تحصیلات تکمیلی به‌شمار می‌رود. کتاب با مروری بر فضاهای متریک شروع می‌شود و در فصل دوم با تعاریف و خواص مقدماتی فضاهای توپولوژیک ادامه می‌یابد. در این فصل مفاهیم همسانریختی، پایه، زیر پایه، توپولوژی حاصل ضربی، توپولوژی خارج قسمتی و فضاهای شمارای اول، دوم و تفکیک‌پذیر معرفی شده‌اند. در فصل سوم اصول جداسازی که پراکندگی مجموعه‌های باز یک فضای توپولوژیک را بررسی می‌کند، مورد بحث قرار گرفته است و با سه قضیهٔ بنیادین اوریسون، گسترش تیتزه و نشاندن پایان می‌یابد. در فصل چهارم خواص پوششی فضاهای توپولوژیک، فشرده‌سازی و فضاهای بئر مطرح شده‌اند و نشان داده شده است که روی فضاهای متریک، فشردگی، فشردگی دنباله‌ای، فشردگی شما را خاصیت بولزانو - وایراشتراس و نیز کامل و کراندار کلی‌بودن معادلند. خواص همبندی فضاهای توپولوژیک و مفهوم مؤلفه در فصل پنجم ارائه شده است. در این فصل بخشی تحت عنوان هموتوپی به‌عنوان مقدمه‌ای بر توپولوژی جبری ارائه شده است.

از آن‌جا که پیشنیاز درس توپولوژی، آنالیز ریاضی است و بالتبع دانشجویان این درس با نظریهٔ مجموعه‌ها، منطق و ساختمان اعداد حقیقی آشنا هستند و برای رعایت اختصار، از ذکر پیش‌نیازهای مقدماتی اجتناب نموده و خواننده محترم را برای یادآوری به مراجع متنوعی که در این زمینه‌ها منتشر شده است، ارجاع می‌دهیم.

در خاتمه از آقای اسفندیار محرابی به‌خاطر صفحه‌آرایی دقیق، خانم صفورا ظفرجعفرزاده به‌خاطر بازنویسی دقیق نسخهٔ اصلی و ارائه پیشنهادهای مفید و خانم آمنه درویش به‌خاطر ترسیم اشکال کتاب تشکر می‌کنیم. همچنین از ویراستار ادبی خانم مرضیه صدر بزاز و نیز از ویراستار علمی خانم دکتر فاطمه قانع به‌خاطر ارائه پیشنهادهای سازنده ایشان سپاسگزاریم.

اسدالله نیکنام و محمد صال مصلحیان

گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

---

1. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)
2. Frigyes Riesz(1880-1956)
3. Felix Hausdorff(1868-1942)

۱

معرفی فضای متریک

۱-۱ تعاریف و مثال‌ها

۱-۱-۱ فضای متریک

فرض کنیم E مجموعه‌ای غیرتهی باشد. تابع $d:E\times E \to \mathbb{R}$ را یک متریک روی E می‌نامیم هرگاه دارای خواص زیر باشد:

(الف) به‌ازای هر x و y متعلق به E، $d(x,y) \geq 0$،

(ب) به‌ازای هر x,y متعلق به E، $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$،

(ج) به‌ازای هر x,y متعلق به E، $d(x,y) = d(y,x)$،

(د) به‌ازای هر x,y,z متعلق به E، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

در تعریف متریک، شرط (الف) را می‌توان از سه شرط دیگر نتیجه گرفت. می‌توان نشان داد که اگر تابع $d:E \times E \to \mathbb{R}$ در دو شرط زیر صدق کند آن‌گاه یک متریک روی مجموعهٔ ناتهی E است.

الف) به‌ازای هر x,y متعلق به E، $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x=y$،

ب) به‌ازای هر x,y,z متعلق به E، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$،

همچنین اگر d یک متریک روی E باشد آن‌گاه به‌ازای هر x,y و x',y' متعلق به E،

$$| d(x,y) - d(x',y') | \leq d(x,x') + d(y,y').$$

تذکر:

(الف) شرایط (الف)، (ج) و (د) در تعریف متریک به افتخار ریاضیدان برجستهٔ آلمانی هاسدورف[1]، شرایط هاسدورف نیز نامیده می‌شود.

(ب) شرط (د) در تعریف متریک، نامساوی مثلث نامیده می‌شود زیرا این شرط تعمیمی از نامساوی هندسی

1. F. Hausdorff, 1868-1891

بین اضلاع مثلث است که می‌گوید به‌ازای اعداد مختلط z,y,x نامساوی $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$ برقرار است.

۱-۱-۲ فضای متریک

اگر d یک متریک روی E باشد، آن‌گاه مجموعه E را همراه با متریک d یک **فضای متریک** می‌گوییم و با (E,d) نمایش می‌دهیم.

۱-۱-۳ دو متریک هم‌ارز

دو متریک d', d روی مجموعه E را هم‌ارز یا معادل می‌گویند هرگاه اعداد حقیقی مثبتی مانند α و β موجود باشند که به‌ازای هر y,x متعلق به E، $d(x,y) \leq \alpha d'(x,y)$ و $d'(x,y) \leq \beta d(x,y)$.

۱-۱-۴ مثال

فرض کنیم E مجموعه‌ای ناتهی باشد و تابع d روی E به‌صورت زیر تعریف شود.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

در این صورت (E,d) یک فضای متریک است. متریک فوق را متریک بدیهی می‌نامند.

۱-۱-۵ مثال

مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با متریک $d(x,y) = |x-y|$ یک فضای متریک است. این فضا را فضای اقلیدسی و متریک معرفی شده را متریک اقلیدسی می‌نامیم.

۱-۱-۶ مثال

اعداد مختلط، $\mathbb{C}$، با متریک زیر، تشکیل یک فضای متریک می‌دهد به‌ازای هر $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$، $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

۱-۱-۷ مثال

فرض کنیم $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت باشد و $\mathbb{N}^{\infty} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

تابع d که به‌صورت زیر تعریف می‌شود یک متریک روی $\mathbb{N}^{\infty}$ است و بنابراین $\mathbb{N}^{\infty}$ همراه با d یک فضای متریک است.

برای هر m,n متعلق به $\mathbb{N}$، $\quad d(m,n) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$

برای هر m متعق به $\mathbb{N}$، $\quad d(m,\infty) = d(\infty,m) = \frac{1}{m}$

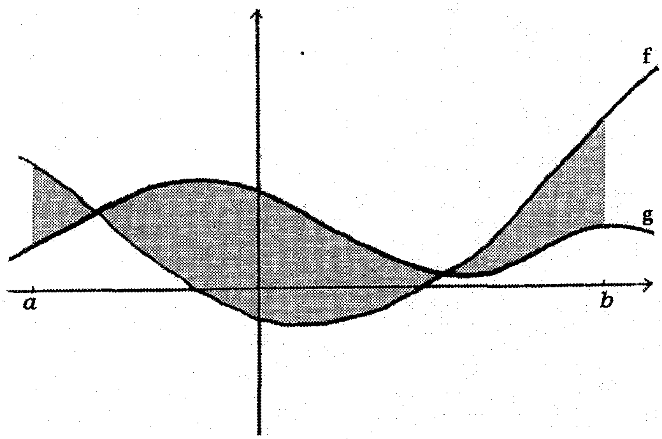
$d(\infty,\infty) = 0$

۱-۱-۸ مثال

فرض کنیم $\mathscr{C}([a,b])$ مجموعه تمام توابع پیوسته از $[a,b]$ به $\mathbb{C}$ باشد. تابع d را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \; ; f,g \in \mathscr{C}([a,b])$$

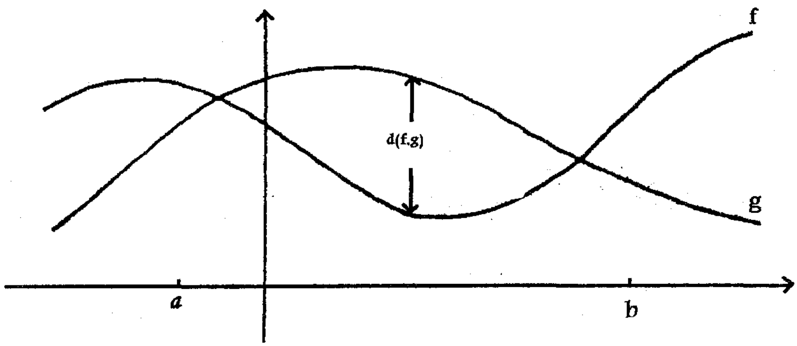
d یک متریک روی $\mathscr{C}([a,b])$ است و بنابراین $(\mathscr{C}[a,b],d)$ فضای متریک است.



۱-۱-۹ مثال

$\mathscr{C}([a,b])$ همراه متریک زیر یک فضای متریک است:

$$d(f,g) = max\ \{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\} \; ; f,g \in \mathscr{C}([a,b])$$



۱-۱-۱۰ مثال

فرض کنیم $\mathbb{R}^n$ فضای n- بعدی اقلیدسی باشد، یعنی $\mathbb{R}^n$ مجموعهٔ تمام n تاییهای مرتب $x=(x_1, x_2, .., x_n)$ از اعداد حقیقی x_iاست که با متریک زیر همراه شده است:

$$d_e\ (x,y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

دو متریک دیگر روی مجموعه $\mathbb{R}^n$ عبارتند از متریک‌های d_mو d_δکه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$d_m(x,y) = max\ \{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

$$d_\sigma(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

با کمی محاسبه و دقت ملاحظه می‌شود که نامساویهای زیر برقرارند و در نتیجه متریکهای بالا روی $\mathbb{R}^n$ معادلند.

$$d_m(x,y) \leq d_e\ (x,y) \leq \sqrt{n}\, d_m(x,y)$$

$$d_m\ (x,y) \leq d_\sigma(x,y) \leq n\ d_m(x,y)$$

$$d_e(x,y) \leq d_\sigma\ (x,y) \leq \sqrt{n}\, d_e(x,y).$$

به طریق مشابه می‌توان روی $\mathbb{C}^n$ نیز متریکهای فوق را تعریف کرد.

۱-۱-۱۱ مثال

فرض کنیم c مجموعه تمام دنباله‌های همگرا در اعداد مختلط باشد؛ تابع $d: c \times c \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

به‌ازای هر $y = \{y_m\}$ و$x = \{x_m\}$متعلق به c،

$$d(x,y) = sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

بنا به خاصیت سوپرمم و دنباله‌های همگرا شرایط هاسدورف برقرار هستند و $d(x,y) < \infty$. همچنین تابع d_s را از $c \times c$ به $\mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_s\ (x,y) = |\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n)|.$$

از خاصیت حد و قدرمطلق به‌سادگی می‌توان شرایط (ج) و (د) هاسدوف را ثابت کرد. اما شرط (ب) هاسدورف برقرار نیست، زیرا اگر $x_n = \frac{1}{n}$ و $y_n = 0$، آن‌گاه $d_s(x,y) = 0$ درصورتی که $x \neq y$. بنابراین گرچه d_sاکثر خواص متریک را داراست اما یک متریک روی c نیست.

مثال‌های مهم دیگری وجود دارند که وضعیت تابع d_sرا دارند. به‌همین جهت به معرفی فضای کلی‌تری نسبت به فضای متریک می‌پردازیم:

۱-۱-۱۲ شبه متریک

فرض کنیم E مجموعه‌ای غیرتهی باشد. تابع $d: E \times E \to \mathbb{R}$ را شبه متریک می‌نامیم هرگاه دارای خواص

زیر باشد:

(الف) به‌ازای هر x متعلق به E، $d(x,x) = 0$،

(ب) به‌ازای هر y,x متعلق به E، $d(x,y) = d(y,x)$،

(ج) به‌ازای هر z,y,x متعلق به E، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

توجه داریم که هر متریک، یک شبه متریک است؛ اما عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست.

اگر d یک شبه متریک روی E باشد، آن‌گاه E را یک **فضای شبه متریک** می‌گوییم و به‌صورت (E,d) نمایش می‌دهیم.

برای افرادی که با انتگرال لبگ آشنایی دارند مثال زیر می‌تواند مفید باشد:

۱-۱-۱۳ مثال

فرض کنیم $L([a,b])$ مجموعه تمام توابع انتگرال‌پذیر لبگ روی $[a,b]$ باشد؛ تابع d را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \,, \quad f,g \in L([a,b])$$

در این صورت یک شبه متریک است ولی یک متریک نیست.

روش استانداردی برای متریک‌کردن یک فضای شبه متریک موجود است که آن را در قضیه ذیل شرح می‌دهیم:

۱-۱-۱۴ قضیه

فرض کنیم (E,d) یک فضای شبه متریک باشد و رابطه $\sim$ در E به‌صورت «$x\sim y$ اگر و فقط اگر $d(x,y)=0$» تعریف شود. در این صورت رابطه «$\sim$» یک رابطه هم‌ارزی روی E است. اگر E_x ردهٔ هم‌ارزی عضو دلخواه x باشد و تابع ρ به‌صورت $\rho(E_x,E_y)=d(x,y)$ تعریف شود آن‌گاه ρ روی مجموعهٔ $E^e = \{E_x : x \in E\}$ یک متریک است.

برهان. نشان‌دادن این‌که "$\sim$" منعکس و متقارن است به‌سادگی امکان‌پذیر است. ثابت می‌کنیم که "$\sim$" متعددی است. فرض کنیم z,y,x متعلق به E باشند و $x\sim y$ و $y\sim z$ نشان می‌دهیم $x\sim z$ از $x\sim y$ و $y\sim z$ نتیجه می‌شود $d(x,y) = 0$, $d(y,z) = 0$. بنا به نامساوی مثلث $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. پس $d(x,z) \leq 0$. از طرفی چون d یک شبه متریک روی E است پس $d(x,z) \geq 0$. بنابراین $d(x,z) = 0$ و در نتیجه $x\sim z$.

حال نشان می‌دهیم $\rho : E^e \times E^e \to \mathbb{R}$ خوش تعریف است. فرض کنیم $E_x = E_{x'}$ و $E_y = E_{y'}$ در این صورت $x' \in E_x$ و $y' \in E_y$ و بنابراین $x \sim x'$ و $y \sim y'$ در نتیجه $d(x,x') = 0$ و $d(y,y') = 0$. از طرفی $|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y')$ بنابراین $d(x,y) = d(x',y')$ به‌عبارت دیگر

$\rho(E_{x'}, E_{y'}) = \rho(E_x, E_y)$. بنابراین ρ یک تابع است. به‌راحتی می‌توان نشان داد که نامساوی مثلث و خاصیت تقارنی برای ρ برقرار است. همچنین چون برای هر x, y متعلق به E، $d(x,y) \geq 0$ پس برای هر E_x و E_y متعلق به E^c، $\rho(E_x, E_y) \geq 0$. حال ثابت می‌کنیم که $\rho(E_x, E_y) = 0$ اگر و فقط اگر $E_x = E_y$ فرض کنیم $E_x = E_y$ بنابراین $x \sim y$ و در نتیجه $d(x,y) = 0$ پس $\rho(E_x, E_y) = 0$.

بالعکس، از $\rho(E_x, E_y) = 0$ نتیجه می‌شود که $d(x,y) = 0$، در نتیجه $x \sim y$ و بنابراین $E_x = E_y$. ∎

گرچه روش فوق منجر به پیدایش فضای متریکی از یک فضای شبه متریک می‌شود، اما اعضای فضای جدید رده‌های هم‌ارزی هستند و پیچیده‌تر از اعضای فضای شبه متریک اولیه‌اند.

۱-۱-۱۵ زیر فضای متریک

فرض کنیم (E, d) یک فضای متریک و A زیرمجموعه‌ای غیرتهی از E باشد. در این صورت تحدید d بر $A \times A$ نیز یک متریک روی A است و بنابراین $(A, d|_A)$ یک فضای متریک است. $(A, d|_A)$ را یک زیرفضای متریک فضای (E, d) می‌نامیم.

۱-۱-۱۶ قطر یک مجموعه

فرض کنیم (E, d) یک فضای متریک و $A \subseteq E$ غیرتهی باشد در این صورت **قطر زیرمجموعهٔ** A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$d(A) = sup \ \{d(x,y) : x, y \in A\}.$$

اگر $d(A) < \infty$ آن گاه A را کراندار می‌گوییم. قرارداد می‌کنیم ϕ کراندار است و $d(\phi) = 0$.

۱-۱-۱۷ فاصلهٔ یک نقطه از یک مجموعه

فرض کنیم (E, d) فضایی متریک، $x \in E$ و A زیرمجموعه‌ای غیرتهی از E باشد **فاصلهٔ** x تا A که به‌صورت $d(x, A)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از:

$$d(x, A) = inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

$d(x, A)$ را **نزدیکترین فاصله** x تا A نیز می‌گویند.

دورترین فاصله x تا A که با $F(x, A)$ نمایش داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(x, A) = sup \ \{d(x, a) : a \in A\}$$

اگر A کراندار باشد آن‌گاه $F(x, A) < \infty$ و بالعکس.

نقطهٔ a_0 در A را یک نزدیکترین نقطه به x می‌گوییم هرگاه $d(x, A) = d(x, a_0)$ و a_0 را یک **دورترین نقطه** به x می‌گوییم هرگاه $F(x, A) = d(x, a_0)$.

$d(x, y)$ را **فاصله دو نقطه** x, y در فضای متریک (E, d) می‌گوییم.

۱-۱ مسائل

۱. فرض کنید d یک متریک روی E باشد. تابع $d_1: E \times E \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید.

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

نشان دهید که d_1 نیز یک متریک روی E است. ثابت کنید که E نسبت به متریک d_1 کراندار است.

۲. با مفروضات مسألهٔ قبل و به استقراء ثابت کنید به‌ازای هر n، تابع

$$d_n(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+nd(x,y)}$$

یک متریک روی E است. ثابت کنید که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان متریکی روی E تعریف کرد که فاصلهٔ هر دو نقطه در E نسبت به متریک جدید از ε کوچکتر باشد.

۳. (فضای s) مجموعه تمام دنباله‌های $x=\{x_n\}$ از اعداد مختلط را با s نمایش می‌دهیم تابع d را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1+|x_n - y_n|)}$$

ثابت کنید d یک متریک است ضریب 2^{-n} همگرایی سری را تضمین می‌کند. نشان دهید که اگر به جای 2^{-n}، n^{-2} قرار دهیم تابع جدید نیز یک متریک است.

۴. (فضای ℓ_∞) مجموعهٔ تمام دنباله‌های کراندار $x=\{x_n\}$ از اعداد مختلط را با ℓ_∞ نمایش می‌دهیم. ثابت کنید ℓ_∞ با تابع زیر یک فضای متریک است.

$$d(x,y) = sup\ \{|x_n - y_n| : n = 1, 2, ...\}$$

مجموعه تمام دنباله‌های همگرا را با c و مجموعه تمام دنباله‌هایی که به 0 همگرایند را با c_0 نمایش می‌دهیم واضح است که $c_0 \subseteq c \subseteq \ell_\infty$. نشان دهید که در تعریف متریک برای c_0 می‌توان سوپرموم را به ماکزیمم تغییر داد.

۵. (فضای $\ell_{(p)}$) فرض کنید $p = (p_n)$ دنباله‌ای کراندار از اعداد اکیداً مثبت باشد. زیرمجموعهٔ $\ell_{(p)}$ از تمام دنباله‌های مختلط را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\ell_{(p)} = \{x = \{x_n\} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty\}$$

اگر $H = sup\{p_n: n = 1, 2, ...\}$ و $M = max\{1, H\}$، نشان دهید که تابع d که به‌صورت زیر تعریف می‌شود یک متریک روی $\ell_{(p)}$ است.

$$d(x,y) = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^{p_k})^{1/M}$$

۶. (فضای ℓ_p) فضای ℓ_p حالت خاصی از $\ell_{(p)}$ است که درآن p_nها همه ثابت و برابر p هستند. بنابراین اگر $p \geq 1$ متریک به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}$$

و اگر $0<p<1$، متریک به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p$$

درحالتی که $p=2$ فضای ℓ_2 با متریک $d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2\right)^{1/2}$ به‌دست می‌آید که از اهمیت خاصی در مباحث پیشرفته آنالیز ریاضی برخوردار است.

۷. فرض کنید E مجموعه تمام توابع مختلط تحلیلی در $|z| < 1$ و پیوسته در $|z| \leq 1$ باشد. بنا به قضیهٔ ماکزیمم قدرمطلق، به‌ازای هر عضو f در E، $|f|$ ماکزیمم خود را روی مرز مجموعهٔ $\{z: |z| \leq 1\}$ اختیار می‌کند. ثابت کنید تابع زیر یک متریک روی E است.

$$d(f,g) = \max_{|z| \leq 1} |f(z) - g(z)| = \max_{|z| = 1} |f(z) - g(z)|$$

۸. فرض کنید I مجموعه تمام توابع تام (همه جا تحلیلی) باشد. به‌ازای هر عدد طبیعی n و دو عضو f و g در I، M_n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_n = \max_{|z| \leq n} |f(z) - g(z)|$$

ثابت کنید تابع $d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{2^n(1 + M_n)}$ یک متریک روی I است.

۹. ثابت کنید که قطر مجموعه S در مسأله ۳ نسبت به متریک $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n(|x_n - y_n|)}$ برابر ۱ است.

اینک برای عدد مختلط z تابع $g(z) = \min\{1, |z|\}$ را درنظر بگیرید. نشان دهید که تابع d_g که به‌صورت زیر تعریف می‌شود یک متریک روی S است.

$$d_g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} g(x_n - y_n)$$

ثابت کنید که قطر مجموعهٔ S نسبت به متریک d_g برابر $\frac{1}{6}\pi^2$ است.

۱۰. فرض کنید γ مجموعهٔ تمام سری‌های مختلط همگرا باشد.

ثابت کنید که با تعریف d به‌صورت زیر، (γ, d) یک فضای متریک است.

$$d(x,y) = \sup \left\{ \left|\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)\right| : n \in \mathbb{N} \right\}$$

۱۱. فرض کنید BV مجموعه تمام دنباله‌های با تغییر کراندار باشد به‌عبارت دیگر $BV = \{x = \{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n+1}| < \infty\}$ با استفاده از تعریف BV، یک متریک روی آن تعریف کنید.
ثابت کنید که جزئیت اکید زیر برقرار است.

$$\ell_1 \subset BV \subset C$$

۱۲. فرض کنید n عدد طبیعی ثابت و E مجموعه تمام ماتریس‌های $n\times n$ از اعداد مختلط باشد. اگر $A = [a_{ij}]_{1 \le i, j \le n}$ و $B = [b_{ij}]_{1 \le i, j \le n}$ دو عضو E باشند، دو تابع d و φ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(A,B) = max\ \{|a_{ij} - b_{ij}| : 1 \le i \le n\ ,\ 1 \le j \le n\}$$

$$\varphi(A,B) = max\ \{\sum_{J=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}| : 1 \le i \le n\}$$

ثابت کنید (E,d) و (E,φ) فضای متریک هستند.

۱۳. فرض کنید $E_1, E_2, ..., E_n$ فضاهای متریک با متریک‌های $d_1, d_2, ... d_n$ باشند.

نشان دهید که هریک از توابع d و φ که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند یک متریک روی $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ است؛ به‌ازای هر $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ و $y = (y_1, ..., y_n)$ تعریف می‌کنیم:

$$d(x,y) = max\{d_i(x_i, y_i) : 1 \le i \le n\}$$

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i\ (x_i, y_i)$$

۱۴. فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ کراندار از فضای متریک (E,d) باشد. نشان دهید به‌ازای هر x, y متعلق به E:

$$|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$$

$$|F(x,A) - F(y,A)| \le d(x,y)$$

۱۵. فرض کنید A مجموعه‌ای کراندار در $\mathbb{C}^n$ با متریک $d(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |^2)^{1/2}$ باشد به طوری‌که به‌ازای هر x در $\mathbb{C}^n$ عضو منحصر به فردی در A مانند a_x موجود باشد که $F(x,A) = d(x, a_x)$. ثابت کنید که A فقط یک عضو دارد.

۱-۲ مجموعه‌های باز و بسته در فضای متریک

۱-۲-۱ گوی باز و گوی بسته

فرض کنیم (E,d) یک فضای متریک باشد به‌ازای هر x متعلق به E و $r>0$ گوی باز به مرکز x و به شعاع r را که با $S_r(x)$ نمایش می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_r(x) = \{y \in E : d(y,x) < r\}$$

مجموعهٔ $S_r[x]$ را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود گوی بسته به مرکز x و شعاع r می‌نامیم:

$$S_r[x] = \{y \in E : d(y,x) \le r\}$$

واضح است که $S_r(x)$ ناتهی است زیرا x را دربردارد. همچنین داریم $S_r(x) \subseteq S_r[x]$.

۱-۲-۲ مثال

اگر (E,d) فضای متریک بدیهی باشد، آن‌گاه به‌ازای هر x متعلق به E،

$$S_r(x) = \begin{cases} x \ , \ r \leq 1 \\ E \ , \ r > 1 \end{cases}$$

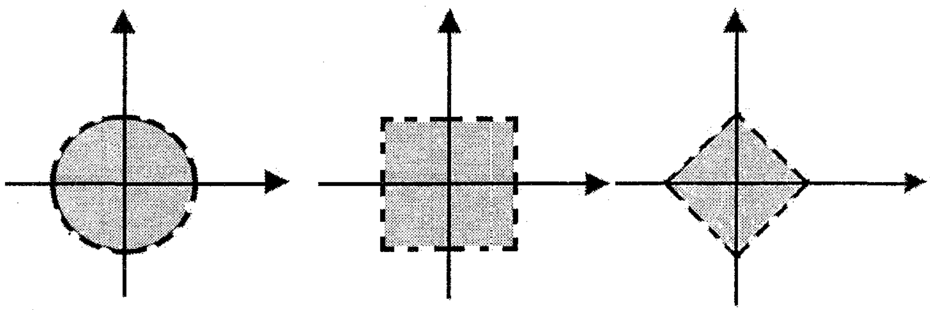
واضح است که در این مثال به‌ازای هر x متعلق به E، $S_1[x] = E$.

۱-۲-۳ مثال

در اعداد حقیقی با متریک اقلیدسی، گوی‌های باز و گوی‌های بسته به‌ترتیب، بازه‌های باز و بازه‌های بسته هستند. به‌عبارت دیگر $S_r(x) = (x-r,\ x+r)$ و $S_r[x] = [x-r\ ,\ x+r]$.

۱-۲-۴ مثال

در $\mathbb{R}^2$ گوی باز به مرکز مبدأ و شعاع ۱ با متریک اقلیدسی عبارت است از درون دایره واحد، با متریک d_m عبارت است از: $\{(x,y) : max\{|x|, |y|\}<1\}$ و با متریک d_σ عبارت است از $\{(x,y) : |x| + |y| < 1\}$.



$\sqrt{x^2+y^2}<1$ $\quad$ $max\{|x|\ ,\ |y|\} < 1$ $\quad$ $|x| + |y| < 1$

۱-۲-۵ مجموعه باز

در فضای متریک (E,d) مجموعه $G \subseteq E$ را باز می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر x در G، گوی بازی مانند $S_r(x)$ موجود باشد به طوری‌که $S_r(x) \subseteq G$.

۱-۲-۶ قضیه

هرگوی باز از فضای متریک (E,d) یک مجموعهٔ باز است.

برهان. فرض کنیم $S_{r_\circ}(x_\circ)$ گوی بازی به مرکز $x_\circ$ و شعاع $r_\circ$ باشد و $x \in S_{r_\circ}(x_\circ)$ اگر $r = r_\circ - d(x,x_\circ)$ آن‌گاه از این‌که $d(y,x_\circ) \le d(y,x) + d(x,x_\circ)$ به‌سادگی نتیجه می‌شود که $S_r(x) \subseteq S_{r_\circ}(x_\circ)$. بنابراین $S_{r_\circ}(x_\circ)$ مجموعه‌ای باز است. ■

۱-۲-۷ مجموعهٔ بسته

زیرمجموعهٔ F از فضای متریک (E,d) را بسته می‌نامیم، هرگاه $E \backslash F$ مجموعه‌ای باز باشد.

۱-۲-۸ قضیه

هرگوی بسته از فضای متریک (E,d) یک مجموعهٔ بسته است.

برهان. فرض کنیم $S_{r_\circ}[x_\circ]$ گوی بسته‌ای در (E,d) باشد. ثابت می‌کنیم $E \backslash S_{r_\circ}[x_\circ]$ باز است. فرض کنیم $x \in E \backslash S_{r_\circ}[x_\circ]$. بنابراین $d(x,x_\circ) > r_\circ$. اگر $r = d(x,x_\circ) - r_\circ$ آن‌گاه به‌سادگی نتیجه می‌شود که $S_r(x)$ زیرمجموعهٔ $E \backslash S_{r_\circ}[x_\circ]$ است. درنتیجه، بنا به تعریف بسته‌بودن $S_{r_\circ}[x_\circ]$ بسته است. ■

۱-۲-۹ قضیه

فرض کنیم (E,d) یک فضای متریک باشد. در این صورت

(الف) مجموعهٔ تهی و کل فضای E باز هستند.

(ب) هر اجتماع دلخواه از مجموعه‌های باز، یک مجموعهٔ باز است.

(ج) هر اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز، یک مجموعه باز است.

برهان

(الف) چون مجموعهٔ ϕ فاقد عضو است به انتفای مقدم باز است. از طرفی هرگوی باز $S_r(x)$ زیرمجموعهٔ E است بنابراین، E نیز باز است.

(ب) فرض کنیم $\{G_i : i \in I\}$ گردایهٔ دلخواهی از مجموعه‌های باز در E باشد. نشان می‌دهیم که $G = U_{i \in I} G_i$ در E باز است.

اگر $x \in G$، آن‌گاه $i_\circ$ متعلق به I موجود است که $x \in G_{i_\circ}$ و چون $G_{i_\circ}$ باز است بنابراین گوی بازی مانند $S_r(x)$ موجود است که $S_r(x) \subseteq G_{i_\circ}$. بنابراین $S_r(x) \subseteq G$. پس G باز است.

(ج) فرض کنیم $\{G_i : 1 \le i \le n\}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های باز E باشد؛ باید نشان دهیم $G = \bigcap_{j=1}^{n} G_i$ باز است. اگر $G = \phi$ بنا به قسمت (الف) باز است. اگر $G \neq \phi$، آن‌گاه فرض می‌کنیم $x \in G$ داده شده باشد. چون $x \in G$ پس به‌ازای هر i داریم $x \in G_i$. چون G_i باز است، پس گوی بازی

مانند $S_{r_i}(x)$ موجود است که $S_{r_i}(x) \subseteq G_i$. اگر $r = Min\ \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ آن‌گاه به‌ازای هر i داریم $S_r(x) \subseteq S_{r_i}(x)$. بنابراین برای هر i، $S_r(x) \subseteq G_i$. در نتیجه $S_r(x) \subseteq G$. پس G باز است. ■

تذکر:

خواص سه گانهٔ (الف)، (ب) و (ج) در قضیهٔ فوق، انگیزه اصلی تعریف توپولوژی در یک مجموعهٔ دلخواه می‌باشد که در فصل دوم به آن می‌پردازیم.

۱-۲-۱۰ قضیه

فرض کنیم (E, d) یک فضای متریک باشد. در این صورت

(الف) مجموعه ϕ و کل فضای E دو مجموعهٔ بسته‌اند.

(ب) هر اشتراک دلخواه از مجموعه‌های بسته، یک مجموعه بسته است.

(ج) هر اجتماع متناهی از مجموعه‌های بسته، یک مجموعهٔ بسته است.

برهان. اثبات با استفاده از قوانین دمورگان و قضیه ۱-۲-۹ به‌سادگی انجام‌پذیر است. ■

۱-۲-۱۱ نقطهٔ چسبیدگی و بستاریک مجموعه

فرض کنیم (E, d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq E$. در این‌صورت $x \in E$ را یک نقطهٔ چسبیدگی A می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر گوی باز به مرکز x مانند $S_r(x)$ داشته باشیم $S_r(x) \cap A \neq \phi$.

مجموعهٔ تمام نقاط چسبیدگی A را با $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم و آن را بستار A می‌نامیم. واضح است که $A \subseteq \overline{A}$.

۱-۲-۱۲ نقطه حدی

فرض کنیم (E, d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq E$. در این صورت $x \in E$ را یک **نقطه حدی** برای A می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر گوی باز به مرکز x مانند $S_r(x)$، $S_r(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$. مجموعهٔ نقاط حدی A را با A' نمایش می‌دهیم و آن را **مجموعهٔ مشتق** A می‌نامیم.

۱-۲-۱۳ نقطه مرزی

فرض کنیم (E, d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq E$. نقطه $x \in E$ را یک **نقطه مرزی** A می‌نامیم، هرگاه هر گوی باز به مرکز x هم A و هم $E \setminus A$ را قطع کند؛ به‌عبارت دیگر، به‌ازای هر گوی باز به مرکز x مانند $S_r(x)$، $S_r(x) \cap A \neq \phi$ و $S_r(x) \cap (E \setminus A) \neq \phi$ مجموعهٔ نقاط مرزی A را با ∂A یا $bd(A)$ نمایش می‌دهیم و آن را مرز A می‌نامیم.

۱-۲-۱۴ نقطه درونی

فرض کنیم (E,d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq E$. در این صورت نقطه $x \in A$ را یک **نقطه درونی** A می‌نامیم، هرگاه گوی بازی به مرکز x مانند $S_r(x)$ موجود باشد به‌طوری که $S_r(x) \subseteq A$ مجموعهٔ نقاط درونی A را با A° نمایش می‌دهیم و آن را درون A می‌نامیم.

۱-۲-۱۵ نقطهٔ تنها

فرض کنیم (E,d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq E$. در این صورت نقطه $x \in A$ را یک نقطه تنهای A می‌نامیم، هرگاه گوی بازی به مرکز x مانند $S_r(x)$ موجود باشد که $S_r(x) \cap A = \{x\}$.

۱-۲-۱۶ نقطهٔ بیرونی

فرض کنیم (E,d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq E$. در این‌صورت $x \in E\backslash A$ را یک **نقطه بیرونی** A می‌نامیم، هرگاه گوی بازی به مرکز x مانند $S_r(x)$ موجود باشد که $S_r(x) \subseteq E\backslash A$. مجموعهٔ نقاط بیرونی A را با $Ext(A)$ نمایش می‌دهیم و آن را برون A می‌نامیم.

قضیهٔ زیر انگیزه‌ای برای تعمیم مفاهیم فوق در فضای توپولوژیک به‌دست می‌دهد.

۱-۲-۱۷ قضیه

فرض کنیم (E,d) فضایی متریک و $A \subseteq E$. در این صورت:

(الف) شرط لازم و کافی برای آنکه $x \in E$ یک نقطه چسبیدگی A باشد آن است که به‌ازای هر مجموعهٔ باز G که $x \in G$، $G \cap A \neq \phi$.

(ب) شرط لازم و کافی برای آنکه $x \in E$ یک نقطه حدی A باشد آن است که به‌ازای هر مجموعهٔ باز G که $x \in G$، $G \cap (A\backslash\{x\}) \neq \phi$.

(ج) شرط لازم و کافی برای آنکه $x \in E$ یک نقطه مرزی A باشد آن است که به‌ازای هر مجموعه باز G که $x \in G$، $G \cap A \neq \phi$ و $G \cap (E\backslash A) \neq \phi$.

(د) شرط لازم و کافی برای آن‌که $x \in A$ یک نقطه درونی A باشد آن است که مجموعهٔ بازی مانند G موجود باشد که x متعلق به G باشد و $G \subseteq A$.

(هـ) شرط لازم و کافی برای آنکه $x \in A$ یک نقطه تنهای A باشد آن است که مجموعهٔ بازی مانند G و شامل x موجود باشد که $G \cap A = \{x\}$.

(و) شرط لازم و کافی برای آنکه $x \in E\backslash A$ یک نقطه بیرونی A باشد آن است که مجموعهٔ بازی چون G شامل x موجود باشد که $G \subseteq E\backslash A$.

(ز) A° باز و $\overline{A}$ و A' بسته می‌باشند.

برهان. برهان ساده است و به خواننده واگذار می‌شود. ■

۱-۲-۱۸ تمرین

فرض کنید $A \subseteq B$. ثابت کنید که $\overline{A} \subseteq \overline{B}$، $A' \subseteq B'$ و $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$.

۱-۲-۱۹ تمرین

ثابت کنید قطر A با قطر $\overline{A}$ برابر است یعنی $d(A) = d(\overline{A})$.

۱-۳ دنباله، تابع پیوسته، فضای متریک کامل

۱-۳-۱ دنباله همگرا

دنبالهٔ $\{x_n\}$ را در فضای متریک (E, d) به x همگرا[۱] می‌گوییم هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی k_ε موجود باشد به طوری که اگر $n \geq k_\varepsilon$ آن‌گاه $d(x_n, x) < \varepsilon$.

اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ به x همگرا باشد آن‌گاه x را یک حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌گوییم و می‌نویسیم $x_n \to x$، $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ یا $\lim\limits_{n} x_n = x$.

باید توجه داشت که نقطهٔ حدی مجموعهٔ $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ درحالت کلی، حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ نیست. مثلاً اگر

$$x_n = \begin{cases} n & \text{زوج } n \\ \dfrac{1}{n} & \text{فرد } n \end{cases}$$

آن‌گاه صفر، یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ است درصورتی‌که صفر، حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ نیست.

۱-۳-۲ قضیه

حد یک دنباله، در صورت وجود، در هر فضای متریک منحصر به فرد است.

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله همگرا در فضایی متریک باشد و $x_n \to x$ و $x_n \to y$. به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی k موجود است که $d(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ و $d(x_k, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. بنابراین $d(x, y) < \varepsilon$. در نتیجه $d(x, y) = 0$، یعنی $x = y$. ■

۱-۳-۳ قضیه

فرض کنیم (E, d) فضایی متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در E باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای آن‌که $x_n \to x$ آن است که به‌ازای هر مجموعهٔ باز G که x متعلق به G است عدد طبیعی k_ε موجود باشد، به طوری که برای هر $n \geq k_\varepsilon$، $x_n \in G$.

برهان. فرض کنیم $x_n \to x$ و G مجموعهٔ بازی شامل x باشد. بنابراین، گوی بازی به مرکز x مانند $S_\varepsilon(x)$ موجود است که $S_\varepsilon(x) \subseteq G$. در نتیجه k_εی موجود است که اگر $n \geq k_\varepsilon$ آن‌گاه $d(x_n, x) < \varepsilon$ یعنی $x_n \in S_\varepsilon(x)$ و بنابراین $x_n \in G$.

بالعکس، فرض کنیم به‌ازای هر مجموعه باز G شامل x، عددی طبیعی مانند k موجود است که اگر $n \geq k$ آن‌گاه $x_n \in G$. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. با فرض $G = S_\varepsilon(x)$ نتیجه می‌شود که $x_n \to x$. ■

قضیه فوق انگیزه‌ای برای تعریف همگرایی دنباله در فضای توپولوژیک است.

۱-۳-۴ تمرین

فرض کنید در فضای متریک (E, d)، $x_n \to x$ و $y_n \to y$. ثابت کنید $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

(راهنمایی: $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$)

۱-۳-۵ تمرین

ثابت کنید در فضای بدیهی (E, d) اگر $x_n \to x$ آن‌گاه $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ متناهی است.

۱-۳-۶ تابع پیوسته

تابع $f:(E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ را در نقطه $x_0 \in E_1$ پیوسته می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد که اگر $d_1(x, x_0) < \delta$ آن‌گاه $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

۱-۳-۷ قضیه

شرط لازم و کافی برای آن‌که تابع $f:(E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ در x_0 پیوسته باشد آن است که به‌ازای هر مجموعهٔ باز مانند G_2 در E_2 که $f(x_0)$ را دربرداشته باشد، مجموعهٔ بازی در E_1 مانند G_1 موجود باشد که x_0 را دربرداشته باشد و $f(G_1) \subseteq G_2$.

برهان. فرض کنیم f در x_0 پیوسته و G_2 مجموعهٔ بازی در E_2 باشد که $f(x_0) \in G_2$. بنابراین، گوی بازی به مرکز $f(x_0)$ مانند $S_\varepsilon(f(x_0))$ موجود است که $S_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq G_2$. در نتیجه $\delta > 0$ی موجود است که اگر $d_1(x, x_0) < \delta$ آن‌گاه $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$، یعنی اگر $x \in S_\delta(x_0)$ آن‌گاه $f(x) \in S_\varepsilon(f(x_0))$ یعنی $f(S_\delta(x_0)) \subseteq G_2$. کافی است قرار دهیم $G_1 = S_\delta(x_0)$.

بالعکس، فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد چون $S_\varepsilon(f(x_0))$ در E_2 باز است و $f(x_0)$ را دربردارد بنابراین مجموعهٔ باز G_1 در E_1 موجود است که $x_0 \in G_1$ و $f(G_1) \subseteq S_\varepsilon(f(x_0))$. چون $x_0 \in G_1$ پس گوی بازی به مرکز x_0 مانند $S_\delta(x_0)$ موجود است که $S_\delta(x_0) \subseteq G_1$. در نتیجه $f(S_\delta(x_0)) \subseteq S_\varepsilon(f(x_0))$ یعنی برای $\varepsilon > 0$ داده

شده، $\delta>0$یی چنان موجود است که برای هر x اگر $d_1(x,x_0) < \delta$ آن‌گاه $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. پس f در x_0 پیوسته است. ■

قضیهٔ فوق انگیزه‌ای برای تعریف پیوستگی در فضای توپولوژیک است.

۱-۳-۸ تابع پیوسته

تابع $f:(E_1,d_1) \to (E_2,d_2)$ را پیوسته می‌گوییم، هرگاه f در هر نقطه x متعلق به E_1 پیوسته باشد.

۱-۳-۹ تمرین

ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه تابع $f:(E_1,d_1) \to (E_1,d_2)$ پیوسته باشد آن است که به‌ازای هر مجموعهٔ باز G_2 در E_2، مجموعهٔ $f^{-1}(G_2)$ در E_1 باز باشد.

۱-۳-۱۰ تمرین

ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه تابع $f:(E_1,d_1) \to (E_2,d_2)$در نقطهٔ x_0 پیوسته باشد آن است که اگر $x_n \to x_0$ آن‌گاه $f(x_n) \to f(x_0)$.

۱-۳-۱۱ تمرین

فرض کنید (E,d) فضایی متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای (E,d) باشد و $x_n \to x$. نشان دهید که x نقطهٔ چسبیدگی مجموعهٔ $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ است. همچنین اگر f در x پیوسته باشد $f(x)$ نقطه چسبیدگی $\{f(x_n) ; n \in \mathbb{N}\}$ است.

۱-۳-۱۲ دنبالهٔ کوشی

دنبالهٔ $\{x_n\}$ را در فضای متریک (E,d) کوشی می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی k_ε موجود باشد به طوری که اگر $m,n \geq k_\varepsilon$ آن‌گاه $d(x_n,x_m) < \varepsilon$.

۱-۳-۱۳ مثال

اگر $E = (0,1]$ و $d(x,y) = |x-y|$ آن‌گاه دنبالهٔ $\{\frac{1}{n}\}$ در (E,d) کوشی است ولی همگرا نیست.

۱-۳-۱۴ تمرین

اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای متریک (E,d) همگرا باشد آن‌گاه کوشی است.

۱-۳-۱۵ قضیه

فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی در فضای متریک (E,d) باشد. اگر $\{x_n\}$ دارای یک زیر دنبالهٔ همگرا $\{x_{r_n}\}$ باشد، آنگاه خودش همگراست و $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{r_n}$.

برهان. فرض کنیم $x_{r_n} \to x$. ثابت می‌کنیم $x_n \to x$. به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ دو عدد طبیعی k_1 و k_2 موجودند به طوری که برای هر $n, m \geq k_1$، $d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ و برای هر $n \geq k_2$، $d(x_{r_n},x) < \frac{\varepsilon}{2}$. حال فرض کنید $k_\varepsilon = max\{k_1,k_2\}$ و $n \geq k_\varepsilon$. چون $r_n \geq n$ پس $n, r_n \geq k_1$ و $n \geq k_2$. بنابراین $d(x_n,x_{r_n}) < \frac{\varepsilon}{2}$ و $d(x_{r_n},x) < \frac{\varepsilon}{2}$. در نتیجه برای هر $n \geq k_\varepsilon$،

$$d(x_n,x) \leq d(x_n,x_{r_n}) + d(x_{r_n},x) < \varepsilon$$

بنابراین $\{x_n\}$ همگراست و $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{r_n}$. ■

۱-۳-۱۶ فضای متریک کامل

فضای متریک (E,d) را کامل می‌نامیم، هرگاه هر دنبالهٔ کوشی در آن همگرا باشد.

۱-۳-۱۷ مثال

فضای n- بعدی اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک فضای متریک کامل است.

۱-۳-۱۸ مثال

اگر $E=(0,1]$ و $d(x,y) = |x-y|$ آنگاه (E,d) کامل نیست (مثال ۱-۳-۱۳ را ببینید).

۱-۳-۱۹ مثال

$\mathscr{C}([a,b])$ با متریک $d(f,g) = sup\{\,|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$ یک فضای متریک کامل است.

۱-۳-۲۰ قضیه

شرط لازم و کافی برای آنکه فضای متریک (E,d) کامل باشد آن است که به‌ازای هر دنباله از مجموعه‌های ناتهی بسته مانند $\{F_n\}$ که $F_1 \supseteq F_2 \dots \supseteq F_n \supseteq \dots$ و $d(F_n) \to 0$، مجموعهٔ $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ تک عضوی باشد.

برهان. فرض کنیم (E,d) فضای متریک کامل و $\{F_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بستهٔ تو در تو و نزولی باشد به طوری‌که دنبالهٔ قطرها یعنی $\{d(F_n)\}$ به صفر همگرا باشد. به‌ازای هر عدد طبیعی n، x_n را در F_n انتخاب می‌کنیم. این انتخاب با توجه به اصل انتخاب میسر است. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون $d(F_n) \to 0$ بنابراین k_εی موجود است که برای هر $n \geq k_\varepsilon$، $d(F_n) < \varepsilon$. بنابراین اگر $n, m \geq k_\varepsilon$ آنگاه $d(x_n,x_m) < \varepsilon$.

بنابراین $\{x_n\}$ کوشی و درنتیجه، $\{x_n\}$ به عضوی مانند x در E همگراست. حال ثابت می‌کنیم $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. فرض کنیم n_0 عدد طبیعی دلخواهی باشد. در این صورت $\{x_{n_0+n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ زیر دنباله‌ای از $\{x_n\}$ است ؛ بنابراین $x_{n_0+n} \to x$. از طرفی $\{x_{n_0+n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای در F_{n_0} است و x حد این دنباله است بنابراین x نقطه چسبیدگی F_{n_0} است و چون F_{n_0} بسته است، پس $x \in F_{n_0}$. حال ثابت می‌کنیم که x تنها عضو $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ است. اگر $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ آن‌گاه به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $d(x,y) \le d(F_n)$. چون $d(F_n) \to 0$ پس $d(x,y)=0$ و درنتیجه $x=y$.

بالعکس، فرض کنیم به ازای هر دنبالهٔ نزولی تو در تو از مجموعه‌های بستهٔ ناتهی F_n که $d(F_n) \to 0$، $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ تک عضوی باشد. ثابت می‌کنیم که (E,d) کامل است. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی در E باشد. تعریف می‌کنیم $B_n = \{x_k : k \ge n\}$ و $F_n = \overline{B}_n$ بنابراین F_nها بسته هستند و $F_{n+1} \subseteq F_n$. واضح است که $d(F_n) = d(B_n)$. چون $\{x_n\}$ کوشی است، پس $d(B_n) \to 0$. بنابراین $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$. فرض کنیم $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ ثابت می‌کنیم $x_n \to x$. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. بنابراین k_εی موجود است که اگر $n \ge k_\varepsilon$ آن‌گاه $d(F_n)<\varepsilon$. بنابراین برای هر $n \ge k_\varepsilon$، $d(x_n,x) \le d(F_n) < \varepsilon$. پس $x_n \to x$. بنابراین (E,d) کامل است. ■

۱-۳-۲۱ قضیه

فرض کنیم (E,d) یک فضای متریک کامل باشد و $M \subseteq E$ در این صورت شرط لازم و کافی برای آن‌که (M,d) کامل باشد آن است که M بسته باشد.

برهان. فرض کنیم (M,d) فضای متریک کامل است و $x_0 \in E$ یک نقطهٔ چسبیدگی M باشد. پس دنبالهٔ $\{x_n\}$ در M وجود دارد که در فضای E، $x_n \to x_0$. این دنباله در E همگرا و در نتیجه، کوشی است و لذا در M نیز کوشی است. چون (M,d) کامل است در نتیجه $\{x_n\}$ در M و در نتیجه در E همگراست. چون حد دنباله در فضای متریک منحصر به فرد است پس $\{x_n\}$ در M نیز به x_0 همگراست یعنی $x_0 \in M$. بنابراین M بسته است.

بالعکس، فرض کنیم M بسته باشد. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی در M باشد آن‌گاه در E نیز کوشی است. چون (E,d) کامل است پس در E حد دارد که حدش نقطهٔ چسبیدگی M است. پس این حد در M است زیرا M بسته است. در نتیجه (M,d) کامل است. ■

۱-۳-۲۲ تمرین

ثابت کنید که اگر دو متریک d_1 و d_2 روی E معادل باشند آن‌گاه شرط لازم و کافی برای آنکه (E,d_1) کامل باشد آن است که (E,d_2) کامل باشد.

۱-۳-۲۳ تتمیم فضای متریک

دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ در $[0,1)$ همراه با متریک اقلیدسی کوشی است اما همگرا نیست. زیرا حد آن در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ صفر است که به زیر فضای $[0,1)$ تعلق ندارد. در این قسمت می‌خواهیم روشی برای تتمیم یک فضای متریک غیرکامل ارائه دهیم به گونه‌ای که دنباله‌های همگرا در فضای غیرکامل و تتمیم آن، نقطهٔ حدی یکسانی داشته باشند. نیازی نیست حدود زیادی تعریف کنیم؛ در حقیقت چون جملات برخی از دنباله‌ها به اندازهٔ دلخواه به هم نزدیک می‌شوند می‌توانند به حد یکسانی همگرا شوند. این ایده به زبان ریاضی به کمک یک رابطهٔ هم‌ارزی بر روی گردایهٔ تمام دنباله‌های کوشی فضای مورد بحث بیان می‌شود. فرض کنیم (E,d) یک فضای متریک غیرکامل باشد. فضای متریک $(\tilde{E},\tilde{d})$ را به‌عنوان تتمیم فضای (E,d) معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم این فضا کامل است و تا حد یک متری منحصر به فرد است. قرار دهید:

$$\{x_n\}\sim\{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0$$

رابطهٔ $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است. فرض کنیم $[x_n]$ نمایش ردهٔ هم‌ارزی دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد، قرار می‌دهیم $\tilde{E} = \{[x_n] : \{x_n\}$ کوشی است$\}$ در این صورت $\tilde{d}([x_n],[y_n]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$ یک متریک روی $\tilde{E}$ است. به‌علاوه، تابع $\varphi: E \to \tilde{E}$ که x را به ردهٔ هم‌ارزی دنباله ثابت $\{x_n\}$ که در آن $x_n = x$ می‌نگارد یک تابع طولپا است و $\varphi(E)$ در $\tilde{E}$ چگال است.

اگر E_1 یک فضای متریک کامل باشد و E در آن چگال باشد آن‌گاه یک تناظر یک به یک طولپا بین $\tilde{E}$ و E_1 وجود دارد. $\tilde{E}$ را که تا حد یک متری منحصر به فرد است تتمیم E می‌گویند.

۱-۳-۲۴ مثال

$\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی تتمیم فضای $\mathbb{Q}$ همراه با متر اقلیدسی است.

۱-۳-۲۵ تابع انقباضی

تابع $f: (E_1,d_1) \to (E_2,d_2)$ را انقباضی می‌گوییم هرگاه $0 < C < 1$ موجود باشد که به‌ازای هر x,y متعلق به E_1، $d_2(f(x),f(y)) \le Cd_1(x,y)$. در این صورت C را یک ثابت انقباض f می‌گوییم.

۱-۳-۲۶ نقطه ثابت

فرض کنیم $f:(E,d) \to (E,d)$ یک تابع دلخواه باشد. نقطهٔ x متعلق به E را یک نقطه ثابت f می‌نامیم هرگاه $f(x) = x$.

۱-۳-۲۷ پیوستهٔ یکنواخت

تابع $f:(E_1,d_1) \to (E_2,d_2)$ را پیوستهٔ یکنواخت می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta>0$ موجود باشد که

به‌ازای هر y, x متعلق به E_1 اگر $d_1(x,y) < \delta$ آن‌گاه $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

واضح است که اگر f پیوستهٔ یکنواخت باشد، آن‌گاه f پیوسته است. در حالت کلی عکس این مطلب درست نیست. مثلاً تابع $f(x) = x^2$ از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ پیوسته است ولی پیوستهٔ یکنواخت نیست.

۱-۳-۲۸ مثال

فرض کنیم β یک عدد حقیقی و n یک عدد صحیح بزرگتر از یک باشد. در این صورت تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \frac{1}{n} Sinx + \beta$ که در آن $\mathbb{R}$ با متریک اقلیدسی درنظر گرفته شده است، انقباضی است.

واضح است که هر تابع انقباضی پیوستهٔ یکنواخت است.

۱-۳-۲۹ قضیه

فرض کنیم (E,d) یک فضای متریک کامل باشد در این صورت هر تابع انقباضی از (E,d) به (E,d) یک نقطهٔ ثابت منحصر به فرد دارد.

برهان. فرض کنیم (E,d) کامل و $f:(E,d)\to(E,d)$ انقباضی باشد و C یک ثابت‌انقباض برای f باشد. جواب معادله $x = f(x)$ در صورت وجود یکتاست، زیرا اگر $f(x_1) = x_1$ و $f(x_2) = x_2$ آن‌گاه چون f تابعی انقباضی است پس $d(f(x_1), f(x_2)) \leq Cd\ (x_1, x_2)$ از طرفی $d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$ در نتیجه $d(x_1, x_2) = 0$ پس $x_1 = x_2$.
حال ثابت می‌کنیم که معادله $f(x) = x$ دارای جواب است. عضو دلخواه $y_0 \in E$ را انتخاب می‌کنیم و دنباله $\{y_n\}$ را در (E,d) به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $y_1 = f(y_0)$ و به‌ازای هر عدد طبیعی n، $y_n = f(y_{n-1})$. نشان می‌دهیم که $\{y_n\}$ کوشی است، می‌دانیم $d(y_{n+1}\ ,\ y_n) = d(f(y_n)\ ,\ f(y_{n-1}))$ چون f انقباضی است پس $d(f(y_n)\ ,\ f(y_{n-1})) \leq Cd(y_n\ ,\ y_{n-1})$ پس $d(y_{n+1}\ ,\ y_n) \leq Cd(y_n, y_{n-1})$. به استقرا می‌توان نشان داد که $d(y_{n+1}, y_n) \leq C^n d(y_1, y_0)$. حال با فرض کنید n و m دو عدد طبیعی هستند که $m>n$ چون

$$d(y_n, y_m) \leq d(y_n,\ y_{n-1}) + d(y_{n-1}\ ,\ y_{n-2}) + \dots + d(y_{m+1},\ y_m)$$

بنابراین:

$$d(y_n, y_m) \leq C^{n-1}\ (1 + C + C^2 + \dots + C^{m-n+1})\ d(y_1, y_0) \leq\ C^{n-1}\ d(y_1, y_0) \sum_{k=0}^{\infty} C^k$$

از طرفی چون $1 > C > 0$ پس $C^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} C^k = \frac{C^{n-1}}{1-C}$. بنابراین $d(y_n, y_m) \leq \frac{d(y_1, y_0)}{1-C}\ C^{n-1}$ و چون $C^n \to 0$ بنابراین دنبالهٔ $\{y_n\}$ کوشی است. از این‌که (E,d) کامل است نتیجه می‌شود که $\{y_n\}$ همگراست.
فرض کنیم $y_n \to y$ بنابراین $y_{n+1} \to y$ زیرا $\{y_{n+1}\}$ زیر دنباله‌ای از $\{y_n\}$ است. بنابراین $f(y_n) \to y$. از طرفی چون f پیوسته است. پس $f(y_n) \to f(y)$. چون حد دنباله در فضای متریک منحصر به فرد است بنابراین $f(y) = y$. ■

۱-۳-۳۰ تمرین

فرض کنیم $f: (E,d) \to (E,d)$ یک تابع و $n_\circ$ عدد طبیعی باشد که $x_\circ$ نقطهٔ ثابت منحصر به فرد تابع $f^{n_\circ}$ است. در این صورت $x_\circ$ نقطهٔ ثابت منحصر به فرد f نیز هست.

حل. چون $f \circ f^{n_\circ} = f^{n_\circ} \circ f$ پس $f(x_\circ) = f^{n_\circ}(f(x_\circ))$. در نتیجه $f(x_\circ) = x_\circ$. پس $x_\circ$ نقطهٔ ثابت f است. حال اگر $f(y_\circ) = y_\circ$ آن‌گاه $f^{n_\circ}(y_\circ) = y_\circ$ در نتیجه بنا به یکتایی نقطهٔ ثابت $f^{n_\circ}$ نتیجه می‌گیریم که $y_\circ = x_\circ$. ■

نتیجه زیر بلافاصله از قضیه بالا حاصل می‌شود.

۱-۳-۳۱ نتیجه

اگر (E,d) یک فضای متریک کامل و $f: (E,d) \to (E,d)$ تابعی باشد که به‌ازای یک عدد طبیعی $n_\circ$، تابع $f^{n_\circ}$ انقباضی باشد، آن‌گاه معادلهٔ $f(x) = x$ یک جواب منحصر به فرد دارد.

۱-۳-۳۲ قضیه

فرض کنیم $L: [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ و $g_\circ: [a,b] \to \mathbb{C}$ پیوسته باشند. در این صورت تابع پیوستهٔ منحصر به فردی مانند $f_\circ : [a,b] \to \mathbb{C}$ موجود است که در معادله انتگرالی زیر صدق می‌کند.

$$f_\circ(x) = \int_a^x L(x,t)\, f_\circ(t)\, dt + g_\circ(x) \quad x \in [a,b]$$

برهان. تابع $T: \mathscr{C}([a,b]) \to \mathscr{C}([a,b])$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(f)(x) = \int_a^x L(x,t)\, f(t)\, dt + g_\circ(x) \ ; \ f \in \mathscr{C}([a,b]) \ , \ x \in [a,b]$$

چون $\mathscr{C}([a,b])$ کامل است کافی است ثابت کنیم که $n_\circ$ ای موجود است که $T^{n_\circ}$ انقباضی است. اگر $M = sup\{|L(x,y)| : x,y \in [a,b]\}$ آن‌گاه به استقرا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر f و g در $\mathscr{C}([a,b])$، به‌ازای هر $x \in [a,b]$ و هر عدد طبیعی n،

$$|T^n(f)(x) - T^n(g)(x)| \le \frac{M^n}{n!}(x-a)^n d(f,g)$$

که در آن $d(f,g) = sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$. چون

$$\frac{M^n}{n!}(x-a)^n\, d(f,g) \le \frac{M^n(b-a)^n}{n!}\, d(f,g)$$

درنتیجه به‌ازای هر عدد طبیعی n،

$$d(T^n(f)\ ,\ T^n(g)) \le \frac{M^n(b-a)^n}{n!}\, d(f,g) \ \ (f,g \in \mathscr{C}([a,b]))$$

چون $\frac{M^n(b-a)^n}{n!} \to \circ$ بنابراین $n_\circ$ ای موجود است که $\frac{M^{n_\circ}(b-a)^{n_\circ}}{n_\circ!} < ۱$ در نتیجه، تابع $T^{n_\circ}$ انقباضی است و بنابراین معادلهٔ $T(f) = f$ یک جواب منحصر به فرد در $\mathscr{C}([a,b])$ دارد. ■

۱-۳-۳۳ فضای نرمدار

فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان ($\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ =) $\mathbb{F}$ باشد؛ در این صورت تابع

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}$$

$$x \to \|x\|$$

یک نیم نرم روی X نامیده می‌شود، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

الف) برای هر λ متعلق به F و هر x متعلق به X، $\|\lambda x\| = |\lambda| \; \|x\|$

ب) برای هر x و y متعلق به X، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ج) برای هر x متعلق به X، $x = \circ \Rightarrow \|x\| = \circ$

چنانچه $\|x\| = \circ$ ایجاب کند $x = \circ$، آن‌گاه $\|.\|$ را یک نرم روی X می‌نامند.

دراین‌حالت دوتایی $(X , \|.\|)$ را یک فضای نرمدار می‌گویند.

برای هر x متعلق به X، $\|x\| \geq \circ$ زیرا $\|x-x\| = \circ$ و لذا بنا به نامساوی مثلث $\|x-x\| \leq \|x\| + \|-x\|$. ازطرفی $\|x\| \; ۲ = \|-x\| + \|x\|$ و در نتیجه $۲\|x\| \geq \circ$. پس $\|x\| \geq \circ$.

شرایط فوق ایجاب می‌کند که $d(x,y) = \|x-y\|$ یک متریک روی X است. اگر X همراه این متریک کامل باشد یعنی هر دنبالهٔ کوشی در آن همگرا باشد، آن‌گاه $(X, \|.\|)$ را یک فضای باناخ روی $\mathbb{F}$ می‌گویند.

۱-۳-۳۴ مثال

۱. $\mathbb{C}$ همراه با نرم $\|z\| = |z| = |a+bi| = \sqrt{a^۲+b^۲}$ ساده‌ترین فضای باناخ روی اعداد مختلط است.

۲. فضای $C_b(X)$ متشکل از توابع مختلط - مقدار پیوسته و کراندار روی فضای دلخواه X همراه با نرم سوپرمم $\|f\|_\infty = sup \{|f(x)| \; ; x \in X\}$ یک فضای باناخ است.

۳. فضای $C(X)$ متشکل از توابع مختلط - مقدار پیوسته روی فضای فشردهٔ X همراه با نرم $\|f\|_\infty = max\{|f(x)| \; ; x \in X\}$ یک فضای باناخ است.

۴. فضای ماتریسهای با درایه‌های مختلط (یا حقیقی) با هر یک از نرمهای زیر یک فضای باناخ است.

$$\|[a_{ij}]\|_m = max \; \{|a_{ij}| \, ; ۱ \leq i , j \leq n\}$$

$$\|[a_{ij}]\|_۱ = \sum_{۱\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$$

$$\|[a_{ij}]\|_۲ = \max_{۱\leq i\leq m} \Big(\sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|^۲\Big)^{۱/۲}$$

$$\|[a_{ij}]\|_c = \max_{۱\leq j\leq n} \Big(\sum_{i=۱}^{n} |a_{ij}|^۲\Big)^{۱/۲}$$

$$\|[a_{ij}]\|_p = \Big(\sum_{۱\leq i,j\leq n} |a_{ij}|^p\Big)^{۱/p}$$

۵. هریک از فضاهای ℓ^∞ متشکل از دنباله‌های مختلط کراندار، c متشکل از دنباله‌های مختلط همگرا و $c_\circ$

متشکل از دنباله‌های مختلط همگرا به صفر همراه با نرم $\|\{x_n\}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ یک فضای باناخ است.

۶. فضای چندجمله‌ایهای با ضرایب حقیقی روی $[0, 1]$ همراه با نرم $\|p\| = \max\{|p(t)| : t\in[0,1]\}$ یک فضای نرمدار حقیقی است که باناخ نیست زیرا بنا به قضیه استون - وایراشتراس اگر $\{p_n\}$ دنباله‌ای از چندجمله‌ایها باشد که به تابع سینوس همگرای یکنواخت باشد، نتیجه می‌شود که $\{p_n\}$ در فضای چندجمله‌ای‌ها کوشی است ولی به هیچ چندجمله‌ای همگرا نیست.

۷. فضای $\mathscr{C}([0,1])$ همراه با نرم $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, dx$ باناخ نیست.

۸. $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)}$ یک متر روی فضای S متشکل از تمام دنباله‌های مختلط است که نمی‌تواند از هیچ نرمی به‌دست آید.

۱-۳-۳۵ همگرایی سری‌ها

سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ را در فضای نرمدار $(E, \|.\|)$ همگرا می‌گوییم، اگر دنبالهٔ $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ در E همگرا باشد.

سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ را مطلقاً همگرا می‌گوییم، اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ در $\mathbb{R}$ همگرا باشد.

۱-۳-۳۶ قضیه

شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای نرمدار $(E, \|.\|)$ باناخ باشد آن است که هر سری مطلقاً همگرا، همگرا باشد.

برهان. فرض کنیم $(E, \|.\|)$ کامل باشد و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ همگرا باشد. قرار می‌دهیم $t_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$. دنباله $\{t_n\}$ کوشی است ازطرفی اگر $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ آن‌گاه برای هر m, n متعلق به $\mathbb{N}$، $\|s_n - s_m\| \le |t_n - t_m|$ در نتیجه $\{s_n\}$ کوشی و بنابراین همگراست پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگراست.

بالعکس، فرض کنیم هر سری مطلقاً همگرا در $(E, \|.\|)$ همگرا باشد و $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی در $(E, \|.\|)$ باشد. بنابراین زیر دنباله‌ای مانند $\{x_{r_n}\}$ از $\{x_n\}$ موجود است به طوری که $\|x_{r_{n+1}} - x_{r_n}\| < \frac{1}{2^n}$. در نتیجه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{r_{n+1}} - x_{r_n}\|$ همگرا و بنابراین سری $\sum_{k=1}^{\infty} x_{r_{n+1}} - x_{r_n}$ همگراست یعنی دنبالهٔ $\{x_{r_{n+1}} - x_{r_n}\}$ و در نتیجه $\{x_{r_n}\}$ همگرا بوده و بنابراین $\{x_n\}$ همگراست. پس $(E, \|.\|)$ کامل است. ■

۱-۱ مسائل

۱. نشان دهید که در حالت کلی اجتماع مجموعه‌های بسته لازم نیست مجموعه‌ای بسته باشد.

۲. نشان دهید که در حالت کلی اشتراک مجموعه‌های باز لازم نیست مجموعه‌ای باز باشد.

۳. نشان دهید که در حالت کلی $\overline{S}_r(x) \neq S_r[x]$. (راهنمایی: مجموعهٔ دلخواه E با متریک بدیهی را درنظر بگیرید).

۴. نشان دهید که اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط متمایز فضای متریک (E, d) باشد و $x_n \to x$ آن‌گاه x یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ است.

۵. فرض کنید

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ فرد} \\ n & n \text{ زوج} \end{cases}$$

ثابت کنید که مجموعهٔ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ تنها یک نقطه حدی دارد آن نقطه چیست؟ همچنین نشان دهید که دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا نیست.

۶. فرض کنید x یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ A در فضای متریک (E, d) باشد. اولاً ثابت کنید که A نامتناهی است. ثانیاً اگر B زیرمجموعه‌ای متناهی از A باشد، نشان دهید که x نقطهٔ حدی $A \backslash B$ نیز می‌باشد.

۷. فرض کنید $(X_1, \|\cdot\|)$, $(X_2, \|\cdot\|)$ دو فضای نرمدار باشند. تابع $T: X_1 \to X_2$ را خطی می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر x, y متعلق به X_1 و اسکالرهای α و β داشته باشیم: $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای آنکه T پیوسته باشد آن است که در یک نقطه پیوسته باشد.

۸ فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرمدار روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ باشد. نشان دهید که به‌ازای هر x متعلق به X، تابع $f(\lambda) = \lambda x$ از $\mathbb{C}$ به X پیوسته است.

۲

مفاهیم بنیادین توپولوژی

۲-۱ فضای توپولوژیک

کلمه توپولوژی به مفهوم اصلی آن به‌عنوان یک شاخه از ریاضیات به کار می‌رود. این واژه مشتق از دو کلمهٔ یونانی "topo" و "logy" به معنی «علم سطوح» است.

در فصل قبل مفهوم تابع پیوسته از یک فضای متریک به توی فضای متریکی دیگر را بیان کردیم. این تعریف هم برحسب متریک فضاها و هم بدون رجوع مستقیم به متریک‌ها و منحصراً برحسب مجموعه‌های باز ارائه شد. این موضوع انگیزه‌ای است برای این‌که متریک‌ها را به کلّی کنار بگذاریم و مجموعه‌های باز را، به‌عنوان منشأ نظریه‌ای جدید، جایگزین آنها کنیم.

فرض کنیم S مجموعه‌ای دلخواه باشد. مجموعهٔ توانی S یعنی گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های S را با $\mathcal{P}(S)$ نمایش می‌دهیم. حال یک توپولوژی روی مجموعهٔ غیرتهی S را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۲-۱-۱ توپولوژی

فرض کنیم $S \neq \phi$ و $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(S)$ دارای خواص زیر باشد:

(الف) $\phi \in \mathcal{T}$ و $S \in \mathcal{T}$،

(ب) اگر $\{G_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \mathcal{T}$، آن‌گاه $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \in \mathcal{T}$.

(ج) اگر به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$، $G_i \in \mathcal{T}$، آن‌گاه $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$.

در این صورت $\mathcal{T}$ را یک **توپولوژی** روی S می‌نامیم.

بنابراین یک توپولوژی روی مجموعهٔ غیرتهی S رده‌ای از زیرمجموعه‌های S است که تحت اعمال تشکیل اجتماع‌های دلخواه و اشتراک‌های متناهی بسته است (در این کتاب همواره S را ناتهی فرض می‌کنیم).

فضای توپولوژیک مرکب از دو شیء است: یک مجموعهٔ S و یک توپولوژی $\mathcal{T}$ روی S. هر یک از اعضای ردهٔ $\mathcal{T}$ را یک مجموعهٔ باز در فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ می‌نامیم.

۲-۱-۲ مثال

قضیهٔ ۱-۲-۹ فصل قبل نشان می‌دهد که ردهٔ تمام مجموعه‌های باز در فضای متریک (E, d) یک توپولوژی روی E است. این توپولوژی را با $\mathcal{T}_d$ نمایش می‌دهیم و به آن **توپولوژی القاشده توسط متریک** d می‌گوییم. بنابراین $(E, \mathcal{T}_d)$ یک فضای توپولوژیک است.

۲-۱-۳ مثال

فرض کنیم S یک مجموعه باشد و $\mathcal{T} = \{\phi, S\}$. در این صورت $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی S است که به آن توپولوژی ناگسسته یا بدیهی می‌گوییم.

۲-۱-۴ مثال

فرض کنیم S یک مجموعه باشد و $\mathcal{T} = \mathcal{P}(S)$. در این صورت $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی S است که به آن توپولوژی گسسته می‌گوییم.

۲-۱-۵ تمرین

فرض کنید S مجموعه‌ای دلخواه باشد. نشان دهید که توپولوژی القا شده توسط متریک گسسته، توپولوژی گسسته است. اگر $\mathcal{T}$ یک توپولوژی گسسته باشد، آیا این توپولوژی توسط متریک گسسته القا می‌شود؟

۲-۱-۶ مثال

S را یک مجموعه و $x_\circ$ را نقطه‌ای از S فرض کنید. دراین صورت به‌سادگی بررسی می‌شود که گردایهٔ $\mathcal{T}(x_\circ) = \{X \in \mathcal{P}(S) \; ; \; x_\circ \in X\} \cup \{\phi\}$ یک توپولوژی روی S است. یک حالت خاص آن، توپولوژی سیرپینسکی نام دارد که بر روی مجموعهٔ $\{a, b\}$ و توسط نقطه $x_\circ = a$ تعریف می‌شود و لذا به‌صورت $\{\phi, \{a\}, \{a, b\}\}$ است.

۲-۱-۷ تمرین

$(S, \mathcal{T})$ را فضایی توپولوژیک و $x_\circ$ را نقطه‌ای درنظر بگیرید که به S تعلق ندارد. حال S^* و $\mathcal{T}^*$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$S^* = S \cup \{x_\circ\} \, , \, \mathcal{T}^* = \{G \cup \{x_\circ\} \; ; \; G \in \mathcal{T}\} \cup \{\phi\}$$

نشان دهید که $\mathcal{T}^*$ یک توپولوژی روی S^* می‌باشد و مجموعه‌های بسته در $\mathcal{T}^*$ همان مجموعه‌های بستهٔ $\mathcal{T}$ هستند. $\mathcal{T}^*$ را توپولوژی گسترش بستهٔ $\mathcal{T}$ می‌نامیم. همچنین نشان دهید که توپولوژی $\mathcal{T}(x_\circ)$ تعریف شده در بالا گسترش بستهٔ توپولوژی گسسته روی $S\setminus\{x_\circ\}$ است.

۲-۱-۸ مثال

S را یک مجموعه و $x_\circ$ را نقطه‌ای از S درنظر می‌گیریم. در این صورت به‌سادگی بررسی می‌شود که گردایهٔ $\mathscr{C}(x_\circ)=\{X\in \mathcal{P}(S)\ ;\ x_\circ \notin X\}\cup\{S\}$ تشکیل یک توپولوژی روی S می‌دهد.

۲-۱-۹ مثال

فرض کنیم S یک مجموعه (ناشمارا) باشد و $\mathcal{T}=\{G\subseteq S:\ S\setminus G \text{ شمارا است}\}\cup\{\phi\}$. در این صورت ϕ و S به $\mathcal{T}$ تعلق دارند. حال فرض کنیم $\{G_\alpha : \alpha\in I\}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{T}$ باشد، در این صورت $S\setminus\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$ شمارا است و در نتیجه $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha\in\mathcal{T}$. از طرفی اگر $G_1, G_2, \ldots, G_n$ متعلق به $\mathcal{T}$ باشند، آن‌گاه $S\setminus\bigcap_{i=1}^{n} G_i=\bigcup_{i=1}^{n}(S\setminus G_i)$. چون اجتماع شمارایی از مجموعه‌های شمارا، شمارا است بنابراین $\bigcap_{i=1}^{n} G_i\in\mathcal{T}$. در نتیجه $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی S است که به آن **توپولوژی هم‌شمارا** یا **متمم شمارا** می‌گوییم.

۲-۱-۱۰ مثال

فرض کنیم S یک مجموعه (نامتناهی) باشد و $\mathcal{T}=\{G\subseteq S:\ S\setminus G \text{ متناهی است}\}\cup\{\phi\}$. در این صورت $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی S است که به آن **توپولوژی هم‌متناهی** یا **متمم متناهی** می‌گوییم.

۲-۱-۱۱ مثال

فرض کنیم $\mathbb{R}^n$ فضای n بعدی اقلیدسی باشد که در مثال ۱-۱-۱۰ فصل قبل معرفی شد. توپولوژی القا شده توسط متریک $d(x,y)=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2]^{1/2}$ را **توپولوژی اقلیدسی** می‌گوییم و با $\mathcal{T}_e$ نمایش می‌دهیم. $\mathbb{R}^n$ با $\mathcal{T}_e$ یک فضای توپولوژیک است که به آن **فضای اقلیدسی** می‌گوییم.

۲-۱-۱۲ تمرین

فرض کنید $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دو توپولوژی روی S باشند. در این صورت $\mathcal{T}_1\cap\mathcal{T}_2$ یک توپولوژی روی S است.

حل. واضح است که $S\in\mathcal{T}_1\cap\mathcal{T}_2$ و ϕ. حال اگر $\{G_\alpha: \alpha\in I\}\subseteq\mathcal{T}_1\cap\mathcal{T}_2$ آن‌گاه $\{G_\alpha: \alpha\in I\}\subseteq\mathcal{T}_1$ و $\{G_\alpha : \alpha\in I\}\subseteq\mathcal{T}_2$. در نتیجه، $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha\in\mathcal{T}_1$ و $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha\in\mathcal{T}_2$. بنابراین $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha\in\mathcal{T}_1\cap\mathcal{T}_2$. اگر

$\{G_1, G_2, \ldots, G_n\} \subseteq \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ آن‌گاه $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}_1$ و $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}_2$. بنابراین $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. شرایط (الف) و (ب) و (ج) در تعریف توپولوژی برقرار است پس $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ یک توپولوژی روی S است. ■

۲-۱-۱۳ مثال

فرض کنید $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دو توپولوژی روی مجموعهٔ S باشند. در این صورت آیا $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ الزاماً یک توپولوژی روی S است؟

حل. خیر، اگر $S = \{a, b, c\}$، آن‌گاه $\mathcal{T}_1 = \{S, \phi, \{a\}\}$ و $\mathcal{T}_2 = \{S, \phi, \{b\}\}$ دو توپولوژی روی S هستند درحالی‌که $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ یک توپولوژی روی S نیست. ■

۲-۱-۱۴ مثال

فرض کنیم $S = \{a, b, c\}$ در این صورت به‌سادگی دیده می‌شود که $\mathcal{T}_1 = \{\phi, S\}$، $\mathcal{T}_2 = \{\phi, \{a\}, S\}$، $\mathcal{T}_3 = \{\phi, S, \{a, b\}, \{a\}\}$، $\mathcal{T}_4 = \{\phi, S, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ و $\mathcal{T}_5 = \mathcal{P}(S)$ هرکدام یک توپولوژی روی S هستند. خواننده می‌تواند ثابت کند که ۲۹ توپولوژی روی S موجود است.

۲-۱-۱۵ مسأله

اگر S دارای n عضو باشد. آن‌گاه چند توپولوژی روی S وجود دارد؟

۲-۱-۱۶ زیرفضا

اگر (E, d) فضایی متریک و A زیرمجموعه‌ای غیرتهی از E باشد آن‌گاه تحدید تابع d به A، $d \mid_A$ یک متر روی A است و بنابراین یک توپولوژی روی A القا می‌کند. درواقع این توپولوژی عبارت است از گردایهٔ تمام مجموعه‌های باز در A یعنی:

$$\mathcal{T}_{d|A} = \{G \cap A : G \in \mathcal{T}_d\}$$

پس با در دست داشتن توپولوژی القا شده روی E توسط متریک d قادر به تعریف یک توپولوژی روی هر زیرمجموعهٔ ناتهی از E خواهیم بود.

در ادامه نشان می‌دهیم که این روش قابل تعمیم به هر فضای توپولوژیک دلخواه است؛ یعنی اگر $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و A زیرمجموعه‌ای غیرتهی از S باشد آن‌گاه گردایهٔ $\mathcal{T}/A = \{G \cap A : G \in \mathcal{T}\}$ تشکیل یک توپولوژی روی A می‌دهد.

چون $\phi \in \mathcal{T}$ و $\phi \cap A = \phi$ پس $\phi \in \mathcal{T}/A$ از طرفی چون $S \in \mathcal{T}$ و $S \cap A = A$ پس $A \in \mathcal{T}/A$.

اگر $\{A_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \mathcal{T}/A$ آن‌گاه چون برای هر $\alpha \in I$، $G_\alpha \in \mathcal{T}$ وجود دارد که $G_\alpha \cap A = A_\alpha$ پس $\left(\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha\right) \cap A = \bigcup_{\alpha\in I} (G_\alpha \cap A)$ که چون $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha \in \mathcal{T}$ پس $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in \mathcal{T}/A$. اینک اگر $\{A_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{T}/A$ آن‌گاه برای هر $1 \leq i \leq n$، $G_i \in \mathcal{T}$ وجود دارد که $G_i \cap A = A_i$. از این‌جا $\left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right) \cap A = \bigcap_{i=1}^{n} (G_i \cap A) = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ که چون $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$ پس $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}/A$.

بنابراین مجموعهٔ $\mathcal{T}/A$ تشکیل یک توپولوژی روی A می‌دهد که به آن **توپولوژی نسبی یا توپولوژی زیرفضایی** می‌گوییم. فضای توپولوژیک $(A, \mathcal{T}/A)$ را یک زیرفضای $(S, \mathcal{T})$ می‌گوییم.

۱۷-۱-۱ مثال

فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای غیرتهی از فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T}(x_\circ))$ باشد به طوری که $x_\circ \notin A$. در این صورت $\mathcal{T}(x_\circ)/A$ همان توپولوژی گسسته روی A است.

۱۸-۱-۲ مثال

فضای توپولوژیک $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ و زیرمجموعهٔ $A = [3, 8]$ از $\mathbb{R}$ را درنظر بگیرید در این صورت بازه $[3, 5)$ در فضای $(A, \mathcal{T}_e/A)$ باز است، زیرا: $(2, 5) \cap [3, 8] = [3, 5)$ که در آن $(2, 5) \in \mathcal{T}_e$.

۱۹-۱-۲ مثال

در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ اگر $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی فرض شود $\mathcal{T}_e/\mathbb{N}$ همان توپولوژی گسسته روی $\mathbb{N}$ است. مجموعهٔ $\{2\}$ در $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_e/\mathbb{N})$ باز است درحالی‌که همین مجموعه در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ باز نیست.

اما به‌سادگی می‌توان نشان داد که اگر A در $(S, \mathcal{T})$ باز باشد، آن‌گاه یک مجموعهٔ باز در $(A, \mathcal{T}_e/A)$ دقیقاً یک مجموعهٔ باز G در S است که مشمول در A است.

۲۰-۱-۲ مقایسهٔ توپولوژی‌ها

فرض کنیم $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دو توپولوژی روی S باشند در این صورت $\mathcal{T}_2$ را قویتر (ظریفتر) از $\mathcal{T}_1$، و $\mathcal{T}_1$ را ضعیفتر یا (ضخیمتر) از $\mathcal{T}_2$ می‌گوییم هرگاه $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

توپولوژی گسسته قوی‌ترین و توپولوژی ناگسسته ضعیفترین توپولوژی روی یک مجموعه می‌باشند. البته هر دو توپولوژی روی یک مجموعه الزاماً مقایسه‌پذیر نیستند. برای مثال اگر x, y دو نقطه متمایز از S باشند آن‌گاه $\mathcal{T}(x)$ و $\mathcal{T}(y)$ مقایسه‌پذیر نیستند، یعنی هیچ‌کدام ظریفتر از دیگری نیست. همچنین اگر $(S, \mathcal{T})$ فضایی توپولوژیک و A زیرمجموعه‌ای ناتهی از S باشد، آن‌گاه $\mathcal{T}/A$ الزاماً ضعیفتر از $\mathcal{T}$ نیست. بررسی این مطلب که «شرط لازم و کافی برای آنکه $\mathcal{T}/A$ ضعیفتر از $\mathcal{T}$ باشد آن است که A باز باشد»، دشوار نیست.

۲-۱-۲۱ مجموعه بسته

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت زیر مجموعه F از S را بسته می‌گوییم، هرگاه $S \backslash F$ باز باشد.

متذکر می‌شویم که نقیض بازبودن، بسته‌بودن نیست. مثلاً بازه $[a, b)$ در فضای اقلیدسی $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ نه باز است و نه بسته.

۲-۱-۲۲ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. دراین صورت

(الف) هر اشتراکی از مجموعه‌های بسته، بسته است.

(ب) هر اجتماع متناهی از مجموعه‌های بسته، بسته است.

(ج) ϕ و S بسته‌اند.

برهان. باتوجه به خواص مجموعه‌های باز و قواعد دمورگان، اثبات واضح است و به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیهٔ فوق روشی دیگر برای توصیف توپولوژی روی S، پیشنهاد می‌کند که آن را به‌صورت تمرین زیر بیان می‌کنیم:

۲-۱-۲۳ تمرین

فرض کنید $S \neq \phi$ و $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ به طوری‌که

(الف) اگر $\{F_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \mathcal{F}$، آن‌گاه $\bigcap\limits_{x \in I} F_\alpha \in \mathcal{F}$.

(ب) اگر $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \subseteq \mathcal{F}$ آن‌گاه $\mathcal{F}$ $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \in F_i$.

(ج) $S \in \mathcal{F}, \phi \in \mathcal{F}$،

در این صورت ثابت کنید اگر $\mathcal{T} = \{G \subseteq S: S \backslash G \in \mathcal{F}\}$ آن‌گاه $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی S است که مجموعه‌های بستهٔ آن دقیقاً همان اعضای $\mathcal{F}$ هستند.

حل. بنا به قسمت (ج) و تعریف واضح است که $S \in \mathcal{T},\ \phi \in \mathcal{T}$. از طرفی اگر $\{G_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \mathcal{T}$، آن‌گاه $S \backslash \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (S \backslash G_\alpha)$ که چون $S \backslash G_\alpha \in \mathcal{F}$، بنا به (الف) و تعریف $\mathcal{T}$ نتیجه می‌شود که $\bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha \in \mathcal{T}$. همچنین اگر $\{G_1, G_2, \dots, G_n\} \subseteq \mathcal{T}$، آن‌گاه $S \backslash \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (S \backslash G_i)$ که چون $S \backslash G_i \in \mathcal{F}$ و بنا به قسمت (ب) و تعریف $\mathcal{T}$ نتیجه می‌گیریم که $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$. پس $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی S است.

۲-۱-۲۴ مجموعهٔ بستاز

در یک فضای توپولوژیک، مجموعه‌ای که هم باز و هم بسته باشد، **مجموعهٔ بستاز** خوانده می‌شود. مثلاً هر زیرمجموعه از یک فضای گسسته، بستاز است. در هر فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ ، ϕ و S مجموعه‌هایی بستباز هستند.

۲-۱-۲۵ بستار

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq S$. نقطه x متعلق به S را یک نقطهٔ چسبیدگی A می‌گوییم هرگاه به‌ازای هر مجموعهٔ باز G که شامل x است داشته باشیم $G \cap A \neq \phi$. مجموعهٔ نقاط چسبیدگی A را با $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم و آن را بستار A می‌گوییم.

از تعریف نقطهٔ چسبیدگی نتیجه می‌شود که $A \subseteq \overline{A}$.

۲-۱-۲۶ مثال

در $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی برای زیرمجموعه‌های $A = [0, 1)$ و $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ و $C = \mathbb{N}$ داریم $\overline{A} = [0, 1]$، $\overline{B} = B \cup \{0\}$ و $\overline{C} = \mathbb{N}$.

۲-۱-۲۷ مثال

در $\mathbb{R}^2$، اگر $A = \{(x,y) : y = sin\,\frac{1}{x}\ ,\ 0 < x \leq 1\}$، آن‌گاه

$$\overline{A} = A \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}.$$

۲-۱-۲۸ مثال

در فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T}(x))$ ، برای هر $A \subseteq S$ داریم

$$\overline{A} = \begin{cases} S & x \in A \\ A & x \notin A \end{cases}$$

۲-۱-۲۹ مثال

در توپولوژی متمم متناهی روی مجموعهٔ نامتناهی S، برای هر $A \subseteq S$ داریم

$$\overline{A} = \begin{cases} A & \text{متناهی } A \\ S & \text{نامتناهی } A \end{cases}$$

۲-۱-۳۰ قضیه

فرض کنیم $(S , \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک و $A \subseteq S$ در این صورت

(الف) $\overline{A} = \cap \{F \subseteq S : A \subseteq F$ و F بسته است$\}$.

(ب) شرط لازم و کافی برای آنکه A بسته باشد آن است که $A = \bar{A}$.

برهان

(الف) فرض کنیم $x \in \bar{A}$ و F مجموعه‌ای بسته و شامل A باشد. در این صورت از این‌که $S\backslash F$ باز و $(S\backslash F) \cap A = \phi$ و x متعلق به $\bar{A}$ است نتیجه می‌شود که x متعلق به $S\backslash F$ نیست. بنابراین x متعلق به F است. بنابراین $\bar{A} \subseteq \cap \{F \subseteq S : A \subseteq F$ بسته است و $F\}$

حال فرض کنیم x نقطه‌ای از S باشد که به هر مجموعهٔ بسته F که شامل A است متعلق باشد. در این صورت برای هر مجموعهٔ باز G که شامل x است، $G \cap A \neq \phi$ (درغیراین‌صورت $A \subseteq S|G$ و چون $S\backslash G$ بسته است، x باید متعلق به $S\backslash G$ باشد اما این متناقض با این‌است‌که x متعلق به G است). پس x متعلق به $\bar{A}$ است و بنابراین $\cap\{F \subseteq S: A \subseteq F$ بسته است و $F\} \subseteq \bar{A}$.

(ب) می‌دانیم $A \subseteq \bar{A}$. اگر A بسته باشد آن‌گاه چون $A \subseteq A$، بنا به قسمت (الف) داریم: $\bar{A} \subseteq A$ و در نتیجه $A = \bar{A}$.

بالعکس، اگر $A = \bar{A}$، چون بنا به قسمت (الف) $\bar{A}$ به‌صورت اشتراک مجموعه‌های بسته است و در نتیجه بسته است، A نیز بسته است. ■

در قضیهٔ زیر که به قضیهٔ کراتوفسکی معروف است، بعضی از خواص عملگر بستار را ملاحظه می‌کنیم.

۲-۱-۳۱ قضیه کراتوفسکی

اگر $(S, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و B, A زیرمجموعه‌هایی از آن باشند، آن‌گاه خواص زیر برقرار است:

(K_1) $\quad \bar{\phi} = \phi$

(K_2) $\quad A \subseteq \bar{A}$

(K_3) $\quad \overline{(\bar{A})} = \bar{A}$

(K_4) $\quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

برهان. (K_1)، (K_2) و (K_3) از قضیهٔ قبل نتیجه می‌شوند. برای اثبات (K_4) چون $A \subseteq \bar{A}$ و $B \subseteq \bar{B}$، بنابراین $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$ و چون $\bar{A} \cup \bar{B}$ بسته است، $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$. از طرفی چون $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$ بنابراین $\bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ و $\bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ و در نتیجه $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. پس $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. ■

قضیهٔ کراتوفسکی، زمینهٔ تعریف توپولوژی روی یک مجموعهٔ غیرتهی را مهیا می‌سازد که به توپولوژی کراتوفسکی معروف است. این تعریف توپولوژی در تمرین زیر معرفی شده است:

۲-۱-۳۲ تمرین

فرض کنید $S \neq \phi$، $C: \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ عملگری با خواص زیر باشد:

(K_1) $C(\phi) = \phi$

(K_2) به‌ازای هر A متعلق به $\mathcal{P}(S)$، $A \subseteq C(A)$.

(K_3) به‌ازای هر A متعلق به $\mathcal{P}(S)$، $C(C(A)) = C(A)$.

(K_4) به‌ازای هر A و B متعلق به $\mathcal{P}(S)$، $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$.

در این صورت ثابت کنید که $\mathcal{T} = \{G \in \mathcal{P}(S) : C(S \setminus G) = S \setminus G\}$ یک توپولوژی روی S است. همچنین نشان دهید که در فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ به‌ازای هر A متعلق به $\mathcal{P}(S)$ داریم $\bar{A} = C(A)$.

در واقع توپولوژی $\mathcal{T}$ برابر است با $\mathcal{T} = \{S \setminus C(A) ; A \subseteq S\}$.

حل. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $C(A) \subseteq C(B)$. بنا به (K_4) $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$ اما $A \cup B = B$ پس $C(A) \cup C(B) = C(B)$ و در نتیجه، $C(A) \subseteq C(B)$.

بنا به تعریف مجموعهٔ $\mathcal{T}$ و این‌که $C(\phi) = \phi$ به‌سادگی نتیجه می‌شود که $\phi \in \mathcal{T}$ و $S \in \mathcal{T}$. فرض کنیم $\{G_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \mathcal{T}$. می‌دانیم $S \setminus \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus G_\alpha)$. برای هر $\alpha \in I$، $\bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus G_\alpha) \subseteq S \setminus G_\alpha$ و در نتیجه $C\left(\bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus G_\alpha)\right) \subseteq C(S \setminus G_\alpha)$. پس $C\left(\bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus G_\alpha)\right) \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} C(S \setminus G_\alpha)$ و چون برای هر $\alpha \in I$، $C(S \setminus G_\alpha) = S \setminus G_\alpha$ نتیجه می‌گیریم که $C\left(\bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus G_\alpha)\right) \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus G_\alpha)$. از طرفی بنا به (K_2)، $\bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus G_\alpha) \subseteq C\left(\bigcap_{\alpha \in I} S \setminus G_\alpha\right)$. پس $C\left(\bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus G_\alpha)\right) = \bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus G_\alpha)$. از این‌جا نتیجه می‌شود که $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \in \mathcal{T}$.
حال فرض کنیم $\{G_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{T}$. می‌دانیم $S \setminus \bigcap_{i=1}^{n} G_i = \bigcup_{i=1}^{n} (S \setminus G_i)$. از (K_4) به استقرا نتیجه می‌شود که برای هر عدد طبیعی n داریم $C\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} C(A_i)$. بنابراین، $C\left(\bigcup_{i=1}^{n} (S \setminus G_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} C(S \setminus G_i)$ و چون برای هر i که $1 \leq i \leq n$، $C(S \setminus G_i) = S \setminus G_i$، پس $\bigcup_{i=1}^{n} C(S \setminus G_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (S \setminus G_i)$. بنابراین $C\left(S \setminus \bigcap_{i=1}^{n} G_i\right) = S \setminus \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. پس $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$. بنابراین $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی S است.

حال نشان می‌دهیم $\bar{A} = C(A)$. چون $\bar{A}$ بسته است پس $S \setminus \bar{A} \in \mathcal{T}$. در نتیجه $C(S \setminus (S \setminus \bar{A})) = S \setminus (S \setminus \bar{A}) = \bar{A}$. بنابراین $C(\bar{A}) = \bar{A}$. از طرفی $A \subseteq \bar{A}$، در نتیجه $C(A) \subseteq C(\bar{A})$ و لذا $C(A) \subseteq \bar{A}$. از طرفی $C(S \setminus (S \setminus C(A))) = C(C(A))$ و بنا به (K_3)، $C(C(A)) = C(A)$. بنابراین $S \setminus C(A) \in \mathcal{T}$. پس $C(A)$ بسته است. بنا به (K_2)، $C(A)$ شامل A است پس $\bar{A} \subseteq C(A)$ بنابراین $C(A) = \bar{A}$ ■

۲-۱-۳۳ نقطهٔ درونی

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و A زیرمجموعه‌ای از S باشد. نقطه $x \in A$ را یک نقطهٔ درونی A

می‌گوییم، هرگاه مجموعهٔ بازی مانند G_x شامل x موجود باشد به طوری که $G_x \subseteq A$.

مجموعهٔ تمام نقاط درونی A را درون A می‌گوییم و با A° یا $Int(A)$ نمایش می‌دهیم. واضح است که A° اجتماع تمام زیرمجموعه‌های باز Aاست. به‌عبارت دیگر اگر $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ خانوادهٔ تمام زیرمجموعه‌های باز A باشد، آنگاه $A^\circ = \cup_{\alpha \in I} G_\alpha$. در حقیقت A° بزرگترین زیرمجموعهٔ باز مشمول در A است.

۲-۱-۳۴ مثال

اگر $A = [\circ, \text{۱}]$ در $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی، و $B = \{(x,y) : y = sin \frac{\text{۱}}{x}, \circ < x \leq \text{۱}\}$ در $\mathbb{R}^{\text{۲}}$ با توپولوژی اقلیدسی درنظر گرفته شده باشند، آنگاه $A^\circ = (\circ, \text{۱})$ و $B^\circ = \phi$. واضح است که اگر $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و G متعلق به $\mathcal{T}$ باشد آنگاه $G^\circ = G$.

۲-۱-۳۵ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و A زیرمجموعه‌ای از S باشد در این صورت

(الف) $S \backslash A^\circ = \overline{S \backslash A}$

(ب) $S \backslash (\overline{S \backslash A}) = A^\circ$

برهان.

(الف) فرض کنیم $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ خانوادهٔ تمام زیرمجموعه‌های باز Aباشد. در این صورت اگر برای هر α متعلق به I، F_αبرابر $S \backslash G_\alpha$ تعریف شود آنگاه $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ خانوادهٔ تمام مجموعه‌های بسته است که $S \backslash A$را دربردارند، یعنی به‌ازای هر $\alpha \in I$، $S \backslash A \subseteq S \backslash G_\alpha$. بنا به تعریف درون و قسمت (الف) قضیهٔ ۲-۱-۳۰، داریم

$$S \backslash A^\circ = S \backslash \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \overline{(S \backslash A)}$$

(ب) اثبات این قسمت با متمم‌گیری از تساوی قسمت (الف) به‌سادگی انجام‌پذیر است. ■

بعضی از خواص عملگر درون را در قضیهٔ زیر ملاحظه می‌کنیم. قضیهٔ زیر روش دیگری برای تعریف توپولوژی روی یک مجموعه پیشنهاد می‌کند.

۲-۱-۳۶ قضیه

اگر $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و B, Aمتعلق به $\mathcal{P}(S)$ باشد، آنگاه:

$(I_{\text{۱}})$ $S^\circ = S$

$(I_{\text{۲}})$ $A^\circ \subseteq A$

(I_3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

(I_4) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

برهان. اثبات خواص فوق به آسانی انجام‌پذیر است و به خواننده واگذار می‌شود. ■

۲-۱-۳۷ تمرین

فرض کنید $S \neq \phi$ و $i : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ عملگری با خواص زیر باشد:

(I_1) $i(S) = S$،

(I_2) به‌ازای هر A متعلق به $\mathcal{P}(S)$، $i(A) \subseteq A$،

(I_3) به‌ازای هر A متعلق به $\mathcal{P}(S)$، $i(i(A)) = i(A)$.

(I_4) به‌ازای هر B,A متعلق به $\mathcal{P}(S)$، $i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$.

در این صورت ثابت کنید $\mathcal{T} = \{A \subseteq S : i(A) = A\}$ یک توپولوژی روی S است به طوری که به‌ازای هر $A \subseteq S$ داریم: $A^\circ = i(A)$.

لازم به تذکر است که توپولوژی $\mathcal{T}$ برابر $\{i(A) : A \subseteq S\}$ است.

۲-۱-۳۸ نقطهٔ حدی (انباشتگی)

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و A زیرمجموعه‌ای از S باشد. نقطهٔ x متعلق به S را یک نقطهٔ حدی (انباشتگی) A می‌گوییم، اگر به‌ازای هر مجموعهٔ باز G که شامل x است داشته باشیم $G \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$.

مجموعهٔ نقاط حدی A را با A' نمایش داده و آن را **مجموعهٔ مشتق** A می‌نامیم.

۲-۱-۳۹ مثال

در $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی اگر $A = (0, 1)$، آنگاه $\overline{A} = A' = [0, 1]$. برای $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ داریم $B' = \{0\}$ و $\overline{B} = B \cup \{0\}$. پس $B' \neq \overline{B}$. در $\mathbb{R}^2$ با توپولوژی اقلیدسی اگر $A = \{(x,y) : y = \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\}$، آنگاه $A' = \overline{A} = A \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$.

۲-۱-۴۰ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و A زیرمجموعه‌ای از S باشد. در این صورت $\overline{A} = A \cup A'$. به‌ویژه نتیجه می‌شود که شرط لازم و کافی برای آنکه A بسته باشد آن است که $A' \subseteq A$.

برهان. چون $A' \subseteq \overline{A}$ و $A \subseteq \overline{A}$ بنابراین $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. حال فرض کنیم x متعلق به $\overline{A}$ باشد. در این صورت اگر x متعلق به A باشد، نتیجه می‌شود که x متعلق به $A \cup A'$ است.

اگر x متعلق به A نباشد، آن‌گاه از این‌که x متعلق به $\overline{A}$ است نتیجه می‌شود که هر مجموعهٔ باز G که شامل x باشد مجموعهٔ A را قطع می‌کند. چون x متعلق به A نیست پس $G \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi$. بنابراین x متعلق به A' است. پس $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. بنابراین $\overline{A} = A \cup A'$. ■

قضیهٔ زیر انگیزه‌ای برای ارائه روش دیگری در تعریف توپولوژی روی یک مجموعه می‌باشد.

۲-۱-۴۱ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و B, A متعلق به $\mathcal{P}(S)$ باشند، در این صورت

(L_1) $\phi' = \phi$

(L_2) $(A')' \subseteq A \cup A'$

(L_3) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

(L_4') به ازای هر x متعلق به S، $x \in S \setminus \{x\}'$.

برهان. اثبات (L_1) و (L_4) به‌سادگی انجام‌پذیر است و به عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود.

برای اثبات (L_2) به‌سادگی دیده می‌شود که اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $A' \subseteq B'$. بنابراین چون $\overline{A'} = A' \cup (A')'$ پس $(A')' \subseteq \overline{A'}$. چون $A' \subseteq \overline{A}$ و $\overline{A}$ بسته است $\overline{A'} \subseteq \overline{A}$. پس $(A')' \subseteq \overline{A'} \subseteq \overline{A} = A \cup A'$.

حال (L_3) را ثابت می‌کنیم. چون $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$. بنابراین $A' \subseteq (A \cup B)'$ و $B' \subseteq (A \cup B)'$. بنابراین $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$. اثبات این‌که $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$ با روش جزئیت ساده است و به خواننده واگذار می‌شود. ■

۲-۱-۴۲ تمرین

فرض کنید $S \neq \phi$ و $l : P(S) \to P(S)$، عملگری با خواص زیر باشد.

(L_1) $l(\phi) = \phi$،

(L_2) به‌ازای هر A متعلق به $P(S)$، $l(l(A)) \subseteq A \cup l(A)$،

(L_3) به‌ازای هر A و B متعلق به $P(S)$، $l(A \cup B) = l(A) \cup l(B)$،

(L_4) به‌ازای هر x متعلق به S، $x \notin l(\{x\})$.

در این صورت ثابت کنید که $\mathcal{T} = \{S \setminus (A \cup l(A)) : A \in P(S)\}$ یک توپولوژی روی S است و در فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$، $A' = l(A)$.

۲-۱-۴۳ مرز

نقطه $x \in S$ را یک نقطهٔ مرزی مجموعهٔ A در فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ می‌گوییم، هرگاه برای هر مجموعهٔ باز شامل x چون G داشته باشیم

$$(G \cap A \neq \phi) \text{ و } (G \cap (S \backslash A) \neq \phi) .$$

مجموعهٔ تمام نقاط مرزی A را مرز A می‌نامند و با $bd(A)$ یا ∂A نمایش می‌دهند. به بیان دیگر $bd(A) = \overline{A} \cap \overline{(S \backslash A)}$.

۲-۱-۴۴ مثال

در $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی اگر $A = (0, 1)$، آن‌گاه $bd(A) = \{0, 1\}$.

در $\mathbb{R}^2$ با توپولوژی اقلیدسی اگر $A = \{(x,y) : y = sin\frac{1}{x} \text{ و } 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$، آن‌گاه $bd(A) = \overline{A} = A' = A$.

۲-۱-۴۵ مثال

فضای $S = \{a, b\}$ را با توپولوژی سیرپینسکی $\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, S\}$ درنظر می‌گیریم. داریم

$$\overline{\{a\}} = S \, , \, \{a\}' = \{b\} \, , \, bd(\{b\}) = \{b\} \, , \, \{b\}^{\circ} = \phi$$

$$\overline{\{b\}} = \{b\} \, , \, \{b\}' = \phi, \, bd(\{a\}) = \{b\} \, , \, \{a\}^{\circ} = \{a\}$$

۲-۱-۴۶ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و A زیرمجموعه‌ای از S باشد. در این صورت

(الف) $\overline{A} = A \cup bd(A)$

(ب) $bd(A) = \overline{A} \backslash A^{\circ}$

(ج) $bd(A) \cap A^{\circ} = \phi$

(د) $S = A^{\circ} \cup bd(A) \cup (S \backslash A)^{\circ}$

برهان

(الف) $bd(A) \subseteq \overline{A}$ و $A \subseteq \overline{A}$ در نتیجه $A \cup bd(A) \subseteq \overline{A}$. حال فرض کنیم $x \in \overline{A}$ و $x \notin A$. چون x متعلق به $\overline{A}$ است، اگر G مجموعهٔ بازی شامل x باشد، آن‌گاه $G \cap A \neq \phi$ و چون $x \in G \cap (S \backslash A)$ پس $G \cap (S \backslash A) \neq \phi$، در نتیجه $x \in bd(A)$. لذا $\overline{A} \subseteq A \cup bd(A)$. پس $\overline{A} = A \cup bd(A)$.

(ب) داریم:

$$bd(A) = \overline{A} \cap \overline{(S \backslash A)} = \overline{A} \cap [S \backslash (S \backslash \overline{(S \backslash A)})] = \overline{A} \backslash (S \backslash \overline{(S \backslash A)}) = \overline{A} \backslash A^{\circ}$$

اثبات (ج) و (د) شبیه به اثبات (ب) است و به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیهٔ زیر انگیزه‌ای برای ارائه تعریفی دیگر از توپولوژی روی یک مجموعه می‌باشد.

۲-۱-۴۷ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضایی توپولوژیک باشد و B, A متعلق به $\mathcal{P}(S)$ باشند. در این صورت:

(B_1) $bd(\phi) = \phi$

(B_2) به‌ازای هر A متعلق به $\mathcal{P}(S)$، $bd(A) = bd(S\backslash A)$

(B_3) به‌ازای هر A متعلق به $\mathcal{P}(S)$، $bd(bd(A)) \subseteq bd(A)$

(B_4) به‌ازای هر B,A متعلق به $\mathcal{P}(S)$

$$A \cap B \cap bd(A \cap B) = A \cap B \cap (bd(A) \cup bd(B))$$

برهان. به خواننده واگذار می‌شود. ■

۲-۱-۴۸ تمرین

فرض کنید $S \neq \phi$ و $b : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ عملگری با خواص زیر باشد:

(B_1) $b(\phi) = \phi$.

(B_2) به‌ازای هر A متعلق به $\mathcal{P}(S)$، $b(A) = b(S\backslash A)$.

(B_3) به‌ازای هر A متعلق به $\mathcal{P}(S)$، $b(b(A)) \subseteq b(A)$.

(B_4) به‌ازای هر B,A متعلق به $\mathcal{P}(S)$،

$$A \cap B \cap b(A \cap B) = A \cap B \cap [b(A) \cup b(B)]$$

در این صورت ثابت کنید که $\mathcal{T} = \{S\backslash(A \cup b(A)) : A \in \mathcal{P}(S)\}$ یک توپولوژی روی S است و در فضای $(S,\mathcal{T})$، $bd(A) = b(A)$.

۲-۱-۴۹ مجموعه چگال

فرض کنیم $(S,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک و A و B متعلق به $\mathcal{P}(S)$ باشند. در این صورت A را در B چگال می‌گوییم، اگر $B \subseteq \overline{A}$. از این تعریف نتیجه می‌شود که اگر A در S چگال باشد آن‌گاه $\overline{A} = S$. به‌سادگی نتیجه می‌شود که شرط لازم و کافی برای آن‌که A در S چگال باشد آن است که به‌ازای هر G متعلق به $\mathcal{T}\backslash\{\phi\}$، $G \cap A \neq \phi$.

۲-۱-۵۰ مجموعهٔ هیچ جا چگال

فرض کنیم $(S,\mathcal{T})$ فضایی توپولوژیک و A زیرمجموعه‌ای از S باشد. دراین صورت مجموعهٔ A را در S هیچ‌جا چگال می‌گوییم، اگر هیچ مجموعهٔ باز ناتهی مانند G موجود نباشد که $G \subseteq \overline{A}$.

۲-۱-۵۱ مثال

مجموعهٔ اعداد گویا در $(\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$ چگال است. مجموعهٔ اعداد اصم نیز در $(\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$ چگال است. مجموعهٔ اعداد صحیح در $(\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$ هیچ‌جا چگال است. مجموعهٔ تمام نقاط $\mathbb{R}^n$ که مؤلفه‌هایشان گویاست در

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$ چگال است. در فضای سیرپینسکی $(S, \mathcal{T})$ که $S = \{a,b\}$ و $\mathcal{T} = \{\phi, S, \{a\}\}$ مجموعهٔ $\{a\}$ در S چگال است.

۲-۱-۵۲ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک باشد. در این صورت سه شرط زیر باهم معادلند:

(الف) D در S چگال است.

(ب) به‌ازای هر مجموعهٔ بستهٔ F که $D \subseteq F$ داریم $F = S$.

(ج) درون متمم D تهی است، یعنی $(S \backslash D)^{\circ} = \phi$.

برهان. (الف) ⇐ (ب) چون $\overline{D} = S$ بنابراین اگر $D \subseteq F$ و F بسته باشد، آن‌گاه $\overline{D} \subseteq \overline{F} = F$. بنابراین $S = F$.

(ب) ⇐ (ج) چون $D \subseteq \overline{D}$ بنابراین $\overline{D} = S$ و در نتیجه بنا به قضیهٔ ۲-۱-۳۵ داریم $(S \backslash D)^{\circ} = S \backslash \overline{[S \backslash (S \backslash D)]} = S \backslash \overline{D} = \phi$.

(الف) ⇐ (ج) چون $(S \backslash D)^{\circ} = S \backslash \overline{D} = \phi$ بنابراین $\overline{D} = S$ و در نتیجه D در S چگال است. ■

۲-۱-۵۳ مجموعهٔ بی‌کاست

در فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$، $A \subseteq S$ را بی‌کاست می‌گوییم اگر A بسته باشد و $A \subseteq A'$ یعنی $A = A'$.

۲-۱-۵۴ مثال

در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$، اگر $A = [\text{۰}, \text{۱}]$ آن‌گاه $A = A'$؛ بنابراین A بی‌کاست است. اگر $A = (\text{۰}, \text{۱}]$، آن‌گاه $A' = [\text{۰}, \text{۱}] \neq A$ و بنابراین، A بی‌کاست نیست.

۲-۱-۵۵ مجموعهٔ مانده

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq S$. در این صورت A را یک **مجموعهٔ مانده** نامیم، هرگاه متمم آن در S چگال باشد، یعنی $S = \overline{S \backslash A}$. به‌عنوان مثال $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}^c$ در $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی مجموعهٔ مانده هستند.

۲-۱-۵۶ نقطهٔ بیرونی

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و A زیرمجموعه‌ای از S باشد. نقطهٔ x متعلق به S را یک نقطهٔ بیرونی A می‌نامیم هرگاه $x \in (S \backslash A)^{\circ}$.

مجموعهٔ نقاط بیرونی A را با $Ext(A)$ نمایش می‌دهیم و آن را برون A می‌نامیم.

۲-۱-۵۷ نقطه منزوی

فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک و A زیرمجموعه‌ای از S باشد. نقطه $x \in S$ را یک **نقطهٔ منزوی** A نامیم، هرگاه $x \in A \setminus A'$.

۲-۱-۵۸ مثال

در $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی اگر $A = (0, 1) \cup \{2\}$ آن‌گاه ۲، یک نقطه منزوی A است.

واضح است که شرط لازم و کافی برای آن‌که $x \in A$ یک نقطهٔ منزوی باشد آن است که مجموعهٔ بازی مانند G موجود باشد، به طوری‌که $x \in G$ و $G \cap (A \setminus \{x\}) = \phi$.

۲-۱-۵۹ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq S$. در این صورت:

(الف) شرط لازم و کافی برای آن‌که A بی‌کاست باشد آن است که A بسته و فاقد نقطهٔ منزوی باشد.

(ب) اگر A فاقد نقطهٔ منزوی باشد، آن‌گاه $\bar{A}$ بی‌کاست است.

(ج) اگر S فاقد نقطهٔ منزوی باشد، آن‌گاه هر مجموعهٔ باز و هر مجموعهٔ چگال در S فاقد نقطهٔ منزوی می‌باشند.

برهان. اثبات به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود. ■

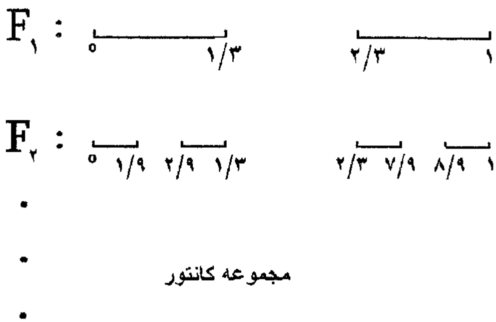
۲-۱-۶۰ مجموعه کانتور

به مجموعهٔ تمام نقاط $x \in [0, 1]$ که بسط آن در مبنای ۳ فاقد رقم ۱ باشد **مجموعهٔ کانتور** می‌گوییم و با K نمایش می‌دهیم. واضح است که

$$k = \{x \in [0, 1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n},\ d_n \in \{0, 2\}\}$$

از نظر هندسی مجموعهٔ کانتور را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد. ابتدا بازهٔ $[0, 1]$ را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و بازهٔ باز وسطی را حذف می‌کنیم تا مجموعهٔ $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ به‌دست آید. در مرحلهٔ دوم هر یک از بازه‌های بستهٔ $[0, \frac{1}{3}]$ و $[\frac{2}{3}, 1]$ را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و بازه‌های باز وسطی آنها را حذف می‌کنیم تا $F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ به‌دست می‌آید.

اگر مجموعهٔ بسته‌ای که در مرحلهٔ nام به‌دست می‌آید F_n بنامیم، آن‌گاه $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. اگر $\mathscr{T}_e$ توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ باشد و $\mathscr{T} = \{G \cap [0, 1] : G \in \mathscr{T}_e\}$ آن‌گاه به‌سادگی دیده می‌شود که K مجموعه‌ای ناشمارا است و در فضای توپولوژیک $([0, 1], \mathscr{T})$ بی‌کاست و هیچ‌جا چگال است.



مجموعه کانتور

۲-۱-۶۱ دنبالهٔ همگرا و حد دنباله

فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در S باشد و $x \in S$. می‌گوییم دنبالهٔ $\{x_n\}$ در S به نقطهٔ x همگراست و می‌نویسیم $x_n \to x$ یا $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$، هرگاه به‌ازای هر مجموعهٔ باز G که $x \in G$، عددی طبیعی مانند k موجود باشد به طوری‌که اگر $n \geq k$، آن‌گاه $x_n \in G$.

۲-۱-۶۲ مثال

در فضای ناگسستهٔ $(S, \mathscr{T})$ هر دنباله، به هر نقطهٔ دلخواه همگراست.

۲-۱-۶۳ مثال

در $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ اگر $x_n = \frac{1}{n}$ آن‌گاه $x_n \to 0$ و اگر $y_n = (-1)^n$ آن‌گاه دنبالهٔ $\{y_n\}$ همگرا نیست. دنباله‌ای که همگرا نباشد را واگرا می‌نامیم.

قبلاً ثابت کردیم که در هر فضای متریک، حد هر دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است. بعداً خواهیم دید که در فضای کلی‌تر دیگری به نام فضای هاسدورف، حد هر دنباله، در صورت وجود، منحصر به فرد است. مثال زیر نشان می‌دهد که حد دنباله در حالت کلی (در فضاهای توپولوژیک) منحصر به فرد نیست.

۲-۱-۶۴ مثال

فرض کنیم $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد و $\mathscr{T} = \{\phi\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$ در این صورت $\mathscr{T}$ یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ است (چرا؟ راهنمایی: از اصل کمال اعداد حقیقی استفاده کنید). اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در این فضای توپولوژیک باشد که در آن به‌ازای $n \in \mathbb{N}$، $x_n = n$ آن‌گاه به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $x_n \to x$ و بنابراین، حد این دنباله در این فضای توپولوژیک منحصر به فرد نیست. همچنین در مثال ۲-۱-۱۰ اگر $S = \mathbb{R}$ و $\mathscr{T}$ توپولوژی هم متناهی روی $\mathbb{R}$ باشد و $x_n = n$، آن‌گاه به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر مجموعهٔ باز G که شامل

x است، عددی طبیعی مانند k موجود است که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، اگر $n \geq k$، آن‌گاه $x_n \in G$.
بنابراین به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $x_n \to x$.

۲-۱-۶۵ مثال

در حالت کلی، حد یک دنباله، نقطهٔ حدی برد آن نیست. همچنین نقطهٔ حدی برد یک دنباله ممکن‌است حد آن دنباله نباشد. فرض کنیم $S = \{a,b,c\}$ و $\mathscr{T} = \{\phi, \{a,b\}, \{c\}, S\}$. فرض کنیم $x_1 = a$ و $x_2 = b$ و به‌ازای هر $n \geq 3$، $x_n = c$. واضح است که $x_n \to c$ ولی $c \notin \{a,b,c\}'$. زیرا c متعلق به مجموعهٔ باز $\{c\}$ است و $\phi = (\{c\}\setminus\{c\}) \cap \{a,b,c\}$. از طرفی $a,b \in \{a,b,c\}'$، اما a,b، حد دنباله $\{x_n\}$ نیستند، $x_n \nrightarrow a$ و $x_n \nrightarrow b$، زیرا b, a به مجموعهٔ باز $\{a,b\}$ تعلق دارند و به‌ازای هر $n \geq 3$، $x_n \notin \{a,b\}$.

در $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ اگر

$$x_n = \begin{cases} n & n = 2k-1 \\ \dfrac{1}{n} & n = 2k \end{cases}$$

آن‌گاه $\{x_n\}$ همگرا نیست در صورتی که $0 \in \{x_n : n \in \mathbb{N}\}'$، توجه داریم که دراین‌حالت، مجموعهٔ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ فقط یک نقطهٔ حدی دارد ولی دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا نیست.

ارتباط بین حد دنباله با نقطهٔ چسبیدگی و نقطهٔ حدی برد دنباله، توسط قضیهٔ زیر معلوم می‌شود:

۲-۱-۶۶ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد، $A \subseteq S$، $x \in S$. در این صورت:

(الف) اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در A باشد به طوری که $x_n \to x$، آن‌گاه $x \in \bar{A}$.

(ب) اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط متمایز در A باشد به طوری‌که $x_n \to x$، آن‌گاه $x \in A'$.

(ج) اگر A بسته باشد، آن‌گاه حد هر دنباله همگرا از نقاط A متعلق به A است.

برهان

(الف) فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در A باشد که $x_n \to x$ در این صورت برای هر G باز شامل x، عددی طبیعی چون k موجود است، به طوری اگر n عدد طبیعی باشد و $n \geq k$، آن‌گاه $x_n \in G$. بنابراین $G \cap A \neq \phi$. پس $x \in \bar{A}$.

(ب) اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط متمایز در A باشد و $x_n \to x$، آن‌گاه $\{x_n : n \geq k\}$ به‌ازای هر kی طبیعی نامتناهی است. در نتیجه، برای هر G باز شامل x داریم، $G \cap (A\setminus\{x\}) \neq \phi$. پس $x \in A'$.

(ج) برهان این قسمت باتوجه به قسمت (الف) ساده است. ■

در فضاهای متریک، همگرایی دنباله‌ها برای توصیف توپولوژی فضا کافی است؛ مثلاً مجموعه‌های بسته، باز، همسایگی‌ها و... برحسب دنباله‌ها قابل تعریف هستند. مثلاً مجموعهٔ بسته آن است که شامل حد هر دنبالهٔ همگرا از نقاطش باشد. اما در فضاهای توپولوژیک، دنباله‌ها نمی‌توانند چنین نقشی داشته باشند و درواقع این نقش توسط مفهومی به نام تور که تعمیم مفهوم دنباله است، ایفا می‌شود.

همچنین گرچه عکس هریک از احکام مذکور در قضیهٔ قبل در فضاهای متریک درست است ولی در فضاهای توپولوژیک چنین نیست:

۲-۱-۶۷ مثال

در $\mathbb{R}$ با توپولوژی هم شمارا، $\overline{(\circ, ۱)} = \mathbb{R}$. پس $۲ \in \overline{(\circ, ۱)}$، اما هیچ دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در $(\circ, ۱)$ به ۲ همگرا نیست (زیرا با انتخاب مجموعهٔ باز $\mathbb{R} - \{x_۱, x_۲, x_۳, \ldots\}$ که شامل ۲ است به تناقض می‌رسیم). از طرفی هر دنباله همگرا در $(\circ, ۱)$ دارای حدی در $(\circ, ۱)$ است، درحالی‌که $(\circ, ۱)$ بسته نیست.

۲-۱-۶۸ همسایگی

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq S$. دراین صورت یک همسایگی A زیرمجموعه‌ای از S مانند N است که شامل مجموعهٔ بازی مانند G که خود شامل A است، باشد. همسایگی مجموعهٔ تک عضوی $\{x\}$ را همسایگی نقطهٔ x می‌نامیم.

۲-۱-۶۹ تمرین

فرض کنید $(S, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک باشد و $x \in S$. ثابت کنید $N \subseteq S$ یک همسایگی x است اگر و فقط اگر $x \in N^{\circ}$.

به‌سادگی می‌توان نشان داد که هر همسایگی A یک همسایگی برای هر زیرمجموعهٔ آن نیز هست؛ به‌ویژه هر همسایگی A یک همسایگی برای هر نقطهٔ A است. به عکس اگر N یک همسایگی برای هر نقطه از A باشد، N یک همسایگی برای A است.

باتوجه به مطالب بالا می‌توان گفت که یک مجموعه، باز است اگر و فقط اگر آن مجموعه یک همسایگی برای هر یک از نقاطش باشد.

درواقع رابطهٔ «N یک همسایگی x است»، معکوس رابطهٔ «x یک نقطهٔ درونی N است» می‌باشد.

۲-۱-۷۰ دستگاه همسایگی

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $x \in S$. در این صورت گردایهٔ تمام همسایگی‌های x را دستگاه همسایگی x می‌نامیم و با $\mathcal{N}_x$ نمایش می‌دهیم. به‌سادگی می‌توان نشان داد که دستگاه همسایگی x

دارای خواص مشخصهٔ زیر می‌باشد:

(الف) x به هر عضو از $\mathcal{N}_x$ تعلق دارد.

(ب) $\mathcal{N}_x$ تحت عمل اشتراک متناهی بسته است.

(ج) هر زیرمجموعهٔ S که شامل عضوی از $\mathcal{N}_x$ است به $\mathcal{N}_x$ تعلق دارد.

(د) اگر $V \in \mathcal{N}_x$، آنگاه مجموعه‌ای چون W متعلق به $\mathcal{N}_x$ موجود است، به طوری که برای هر $y \in W$، $V \in \mathcal{N}_y$.

فرض کنیم $S \neq \phi$ چنانچه به هر عضو x از S مجموعه‌ای چون $\mathcal{N}_x$ از زیرمجموعه‌های S که در شرایط بالا صدق می‌کند نظیر کنیم، آنگاه می‌توان نشان داد یک و تنها یک توپولوژی روی S موجود است به طوری‌که برای هر $x \in S$، $\mathcal{N}_x$ دستگاه همسایگی x در این توپولوژی است.

همان‌طور که اشاره شد چون $G \subseteq S$ یک مجموعهٔ باز است اگر و فقط اگر G یک همسایگی برای هر یک از نقاطش باشد، توپولوژی منحصر به فرد بالا به‌صورت زیر است:

$$\mathscr{T} = \{G \subseteq S: G \in \mathcal{N}_x ,\ x \in G \text{ به ازای هر }\}$$

ما در این‌جا فرض کردیم که برای هر نقطه از مجموعهٔ S، گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های S صادق در خواص مشخصهٔ دستگاه همسایگی آن نقطه، داده شده است و به کمک آن، توپولوژی منحصر به فردی به‌دست دادیم که گردایهٔ نظیر هر نقطه، دستگاه همسایگی آن نقطه در فضای توپولوژیک حاصل باشد.

درواقع ما می‌توانیم هرکدام از خواص مشخصهٔ مجموعهٔ باز، مجموعهٔ بسته، همسایگی نقطه و نظیر آن را به‌عنوان اصل قبول کنیم و ساختمان توپولوژیک و سایر مفاهیم را با توجه به آن به‌دست آوریم.

۲-۱-۷۲ مثال

فرض کنیم $x_\circ \in S$ و $\mathscr{T}_{x_\circ} = \{\phi, \{x_\circ\}, S\}$ در این صورت $\mathscr{T}_{x_\circ}$ یک توپولوژی روی S است و $V \subseteq S$ یک همسایگی $x_\circ$ است اگر و فقط اگر $x_\circ \in V$ و اگر $y \in S$ و $y \neq x_\circ$، آنگاه همسایگی y، خود S است.

۲-۱-۷۳ مثال

فرض کنیم $x \in S$ و $\mathscr{T}(x)$ توپولوژی تعریف شده روی S در مثال ۲-۱-۶ باشد؛ در این صورت هر همسایگی هر نقطه S، باز است.

۲-۱-۷۴ مثال

فرض کنیم $x_\circ \in S$ و $\mathscr{C}(x_\circ)$ توپولوژی تعریف شده در مثال ۲-۱-۸ روی S باشد. در این صورت برای‌هر $y \neq x_\circ$ ، $\{y\}$ باز است. $\{x_\circ, y\}$ باز نیست و گرچه یک همسایگی از y است ولی یک همسایگی از $\{x_\circ\}$ نیست. توجه کنید که S تنها همسایگی نقطهٔ $x_\circ$ است.

۲-۱-۷۵ مجموعهٔ G_δ و مجموعهٔ F_σ

تساوی $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$ نشان می‌دهد که در حالت کلی اشتراک شمارایی از مجموعه‌های باز، مجموعه‌ای باز نیست همچنین می‌توان نشان داد اجتماع شمارایی از مجموعه‌های بسته، بسته نیست.

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و F , G زیر مجموعهٔ S باشند. مجموعهٔ F را یک مجموعهٔ F_σ می‌گوییم اگر اجتماع شمارایی از مجموعه‌های بسته باشد. مجموعهٔ G را یک مجموعهٔ G_δ می‌گوییم اگر G اشتراک شمارایی از مجموعه‌های باز باشد.

۲-۱-۷۶ مثال

مجموعهٔ $[a,b]$ در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ هم F_σ و هم G_δ است. در توپولوژی ناگسسته $(S, \mathcal{T})$، هر زیرمجموعهٔ سرهٔ S نه G_δ و نه F_σ است. در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ مجموعهٔ اعداد گویا، یک مجموعهٔ F_σ است ولی G_δ نیست (چرا؟).

فرض کنیم G یک مجموعهٔ G_δ باشد، بنابراین $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ که G_i به‌ازای هر i، مجموعه‌ای باز است. اگر $W_n = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$، آن‌گاه به‌ازای هر n، W_n باز است و $W_1 \supseteq W_2 \supseteq \dots \supseteq W_n \supseteq W_{n+1} \supseteq \dots$ و $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$. همچنین اگر F یک مجموعهٔ F_σ باشد آن‌گاه دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌های بسته مانند $\{F_n\}$ موجود است که $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

۲-۱-۷۷ مجموعهٔ بورل

فرض کنیم $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ خانواده‌ای ناتهی باشد. $\mathcal{A}$ را یک σ-حلقه می‌گوییم هرگاه:

(الف) برای هر $A \in \mathcal{A}$، $S \setminus A \in \mathcal{A}$

(ب) اگر $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ آن‌گاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

واضح است که اشتراک هر تعداد σ- حلقه یک σ- حلقه است. کوچکترین σ- حلقه‌ای را که $\mathcal{T}$ را دربردارد خانوادهٔ مجموعه‌های بورل می‌گوییم و با β نمایش می‌دهیم. در حقیقت، β اشتراک تمام σ- حلقه‌هایی است که $\mathcal{T}$ را دربردارند. هر عضو خانوادهٔ β را یک **مجموعهٔ بورل** می‌گوییم. واضح است که اجتماع شما را، اشتراک شما را و متمم نسبی مجموعه‌های بورل، مجموعهٔ بورل می‌باشند. بنابراین هر مجموعهٔ G_δ و هر مجموعهٔ F_σ، مجموعهٔ بورل می‌باشد.

۲-۱-۷۸ متریک‌پذیری

فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ را متریک‌پذیر گوییم، هرگاه متریکی مانند d بتوان روی S تعریف کرد به طوری‌که $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$، که $\mathcal{T}_d$ توپولوژی القا شده توسط متریک d روی S می‌باشد.

این سؤال پیش می‌آید که آیا هر فضای توپولوژیک متریک‌پذیر است؟
مثال‌های زیر نشان می‌دهند که جواب منفی است.

۲-۱-۷۹ مثال

فرض کنیم $\mathcal{T}$ توپولوژی هم‌متناهی روی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ متریک‌پذیر نیست، زیرا در فضای متریک حد هر دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است و چنان‌که می‌دانیم در فضای توپولوژیک هم‌متناهی $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ دنباله‌ای هست که تعداد نامتناهی حد متمایز دارد.

فضای سیرپینسکی نیز متریک‌پذیر نیست (چرا؟). فرض کنیم $\mathcal{T} = \{\phi\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$. در این صورت $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ متریک‌پذیر نیست. $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی گسسته متریک‌پذیر است. کافی است $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

در این صورت $\mathcal{T}_d$ همان توپولوژی گسسته روی $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

اگر S بیش از یک نقطه داشته باشد آن‌گاه با توپولوژی ناگسسته متریک‌پذیر نیست؛ زیرا مجموعه‌های تک‌عضوی در فضاهای متریک بسته‌اند و اما این توپولوژی به جز X و ϕ اعضای دیگری نیز دارد.

بعداً برخی از شرایط لازم و کافی برای متریک‌پذیری یک فضای توپولوژیک را ارائه خواهیم داد.

۲-۱-۸۰ خانوادهٔ مولد

مجموعهٔ S را همراه یک توپولوژی $\mathcal{T}$ روی آن درنظر بگیرید. در این‌جا به دنبال این هستیم تا با اضافه کردن زیرمجموعه‌ای چون H از S، این توپولوژی را ظریفتر کنیم. به جز درحالتی که توپولوژی روی S توپولوژی بدیهی باشد، این کار به آسانی انجام‌پذیر نیست.

برای این‌که $\mathcal{T} \cup \{H\}$ را به یک توپولوژی روی S توسیع دهیم باید تمام مجموعه‌های به شکل $U \cup (V \cap H)$ که در آن U و V اعضای دلخواهی از $\mathcal{T}$ هستند به $\mathcal{T}$ اضافه شوند. بنا به توزیع‌پذیری اشتراک و اجتماع روی هم، گردایهٔ تمام مجموعه‌های به شکل $U \cup (V \cap H)$، تشکیل یک توپولوژی روی S می‌دهند. در حقیقت این توپولوژی کوچکترین توپولوژی روی S است که شامل $\mathcal{T} \cup \{H\}$ می‌شود.

حال پا را فراتر می‌گذاریم و فرض می‌کنیم مجموعهٔ غیرتهی S به همراه Γ که خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های S است داده شده باشد. ما به دنبال توپولوژی تولید شده توسط Γ روی S به مفهومی که در زیر آمده است هستیم.

منظور از توپولوژی تولید شده توسط Γ کوچکترین توپولوژی روی S است که Γ را دربردارد. در

حقیقت این توپولوژی، اشتراک تمام توپولوژی‌های روی S است که Γ را دربردارند. همیشه توپولوژی گسسته، Γ را دربردارد. پس صحبت از توپولوژی تولید شده توسط Γ همیشه ممکن‌است.

برای رسیدن به توپولوژی تولید شده توسط Γ، علاوه بر ϕ و S ما نیازمند به اشتراکهای متناهی اعضای Γ و نیز اجتماع‌هایی دلخواه از این اشتراکهای متناهی هستیم. در حقیقت می‌توان نشان دادکه گردایهٔ تمام اجتماع‌های دلخواه از اشتراک‌های متناهی اعضای Γ به همراه S همان توپولوژی تولید شده توسط Γ روی S است.

اگر مرحلهٔ اول یعنی تولید مقاطع متناهی حذف شود مسأله راحت‌تر می‌شود. دراین صورت تنها لازم است که اجتماع دلخواه اعضای خانواده حساب شود یک شرط کافی مناسب برای این حالت در زیر بیان شده است:

۲-۱-۸۱ خانوادهٔ کامل

فرض کنیم Γ یک خانواده از زیرمجموعه‌های S است. این خانواده کامل خوانده می‌شود هرگاه اشتراک هر دو عضو Γ به Γ تعلق داشته باشد.

برای مثال مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های تک عضوی از یک مجموعه.به همراه ϕ، کامل است. همچنین مرحلهٔ دوم قابل حذف است، اگر اشتراک اعضای Γ خود به‌صورت اجتماع اعضای Γ باشد که در این صورت Γ یک پایه برای توپولوژی‌ای که تولید می‌کند، خوانده می‌شود. این مفهومی است که در بخش بعد به آن می‌پردازیم.

۲-۱ مسائل

۱. فرض کنید $(S\ ,\ \leq)$ یک مجموعهٔ به‌طور جزئی مرتب باشد. ثابت کنید که $\mathscr{T}$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود یک توپولوژی روی S است که به آن توپولوژی مرتب شده توسط "$\leq$" می‌گوییم.

$$\mathscr{T} = \{G \subseteq S : (x \in G \text{ و } y \leq x) \Rightarrow y \in G\}$$

۲. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آن‌که $\mathscr{T}$ توپولوژی گسسته روی S باشد آن است که هر زیر مجموعهٔ تک عضوی S، مجموعه‌ای باز باشد.

۳. ثابت کنید $(\mathbb{N}, \mathscr{T})$ که در آن $\mathscr{T} = \{G \subseteq \mathbb{N}$: است G تمام مقسوم علیه‌های اعضای G، متعلق به$\}$ یک فضای توپولوژیک است.

۴. فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ زیرمجموعهٔ G_n را به‌صورت $G_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید $\mathscr{T} = \{G_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\phi\}$ یک توپولوژی روی $\mathbb{N}$ است.

۵. فرض کنید T خانواده تمام توپولوژیهای تعریف شده روی S باشد. ثابت کنید که $(T, \subseteq)$ یک مجموعهٔ به‌طور جزئی مرتب است که $\{\phi, S\}$ کوچکترین عضو و $\mathcal{P}(S)$ بزرگترین عضو T می‌باشند. توپولوژی تعریف شده در مسأله ۱ را روی T مشخص کنید.

۶. فرض کنید $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و A و B زیرمجموعه‌هایی از S باشند. ثابت کنید

(الف) اگر $A \subseteq B$، آنگاه $\overline{A} \subseteq \overline{B}$، $A' \subseteq B'$ و $A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$. آیا اگر $A \subseteq B$، آنگاه $bd(A) \subseteq bd(B)$؟

(ب) شرط لازم و کافی برای آن‌که G باز باشد آن است که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ S مانند A داشته باشیم

$$\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}.$$

(ج) اگر $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های S باشد به طوری که $\cup \overline{A}_\alpha$ بسته باشد، آنگاه $\overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} \overline{A}_\alpha$. با درنظرگرفتن $A_n = [0, 1 - \frac{1}{n}]$ نشان دهید که در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ تساوی $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A}_n$ برقرار نیست. با درنظر گرفتن $A = [0, 1)$ و $B = [1, 2]$ نشان دهید که در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$، $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \overline{A \cap B}$.

د) با مثالی نشان دهید که برای هر زیرمجموعهٔ A از فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ رابطهٔ $(A')' \subseteq A'$ برقرار نیست.

هـ) با مثالی نشان دهید که در حالت کلی $A' \cap B' \neq (A \cap B)'$ و $A^{\circ} \cup B^{\circ} \neq (A \cup B)^{\circ}$ (راهنمایی: اعداد اصم و اعداد گویا را در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ درنظر بگیرید).

(و) با مثالی نشان دهید که در حالت کلی $bd(A \cap B) \neq bd(A) \cap bd(B)$ و $bd(A \cup B) \neq bd(A) \cup bd(B)$.

(ز) ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آن‌که $bd(A) = \phi$ آن است که A هم باز و هم بسته باشد و نیز نشان دهید که

(i) $bd(bd(A)) \subseteq bd(A)$

(ii) $bd\big(bd(bd(A))\big) = bd(bd(A))$

(iii) $(A \backslash B)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \backslash B^{\circ}$

(iv) اگر $bd(A) \cap bd(B) = \phi$ آنگاه $(A \cup B)^{\circ} = A^{\circ} \cup B^{\circ}$.

(v) $bd(bd(A)) = bd(A)$، اگر و فقط اگر $(bd(A))^{\circ} = \phi$.

۷. چه فضای توپولوژیکی است که تنها زیرمجموعهٔ چگال در آن تمام فضا باشد؟

۸. فرض کنید A, B دو مجموعهٔ باز و چگال در S باشند. ثابت کنید $A \cap B$ در S چگال است.

۹. فرض کنید D در S چگال باشد. ثابت کنید به‌ازای هر مجموعهٔ باز G، $\overline{D \cap G} = \overline{G}$.

* ۱۰ فرض کنید $(S, \mathcal{T})$ فضایی توپولوژیک است. ثابت کنید:

الف) هر مجموعهٔ هیچ‌جا چگال یک مجموعهٔ مانده است.

ب) $A \subseteq S$، هیچ‌جا چگال است، اگر و فقط اگر $\overline{A} \subseteq \overline{S \backslash \overline{A}}$.

ج) اجتماع یک مجموعهٔ مانده و یک مجموعهٔ هیچ‌جا چگال، یک مجموعهٔ مانده است.

د) مرز هر مجموعهٔ بسته (باز)، هیچ‌جا چگال است.

هـ) برای هر مجموعهٔ $A \subseteq S$، $A \cap \overline{A^c}$ و $\overline{A} \cap A^c$ مجموعه‌هایی مانده هستند.

و) مرز هر مجموعه را می‌توان به‌صورت اجتماع دو مجموعهٔ مانده نوشت.

۱۱. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای آن‌که دو متر d_1 و d_2 معادل باشند آن است که $\mathscr{T}_{d_1} = \mathscr{T}_{d_2}$.

۱۲. بستار، مجموعهٔ مشتق، درون و مرز مجموعه‌های زیر را مشخص کنید:

الف) اعداد گویا در $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$.

ب) مجموعهٔ کانتور در $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$

ج) مجموعه‌های $\{(r_1, r_2) : r_1, r_2$ گویا هستند$\}$ و $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$ در $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T}_e)$.

۱۳. فرض کنید $\mathscr{T} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi\} \cup \{\mathbb{R}\}$؛ نشان دهید که $\mathscr{T}$ یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ است. اگر $x_n = -n$، نشان دهید که دنبالهٔ $\{x_n\}$ در $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ واگراست. اگر $x_n = (-1)^n$ نشان دهید که دنبالهٔ $\{x_n\}$ در $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ به هر عدد حقیقی کوچکتر یا مساوی -1 همگراست و نتیجه بگیرید که $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ متریک‌پذیر نیست.

۱۴. فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ فضای توپولوژیک باشد ثابت کنید

الف) شرط لازم و کافی برای آن‌که $x \in \overline{A}$ آن است که هر همسایگی x، مجموعهٔ A را قطع کند.

ب) شرط لازم و کافی برای آن‌که $x \in A'$ آن است که به‌ازای هر همسایگی x مانند N، $N \cap (\overline{A} \backslash \{x\}) \neq \phi$.

ج) شرط لازم و کافی برای آن‌که $x \in A^\circ$ آن است که یک همسایگی از x مانند N موجود باشد که $N \subseteq A$.

د) شرط لازم و کافی برای آن‌که $x \in bd(A)$ آن است که هر همسایگی از x هم A و هم $S \backslash A$ را قطع کند.

۱۵. فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ فضای توپولوژیک باشد. ثابت کنید که اجتماع شمارا و اشتراک متناهی مجموعه‌های F_σ، مجموعه‌های F_σ می‌باشند. همچنین ثابت کنید که اشتراک شمارا و اجتماع متناهی مجموعه‌های G_δ، مجموعه‌های G_δ می‌باشند. نشان دهید که متمم هر مجموعهٔ F_σ یک مجموعهٔ G_δ و متمم هر مجموعهٔ G_δ یک مجموعهٔ F_σ است.

۱۶. ثابت کنید در فضای $n-$ بعدی اقلیدسی $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_e)$،

الف) مجموعه‌هایی موجودند که بورل نیستند.

ب) هرمجموعهٔ باز، هم G_δ و هم F_σ است. هر مجموعهٔ بسته نیز هم G_δ و هم F_σ است.

ج) شرط لازم و کافی برای آن‌که β خانوادهٔ مجموعه‌های بورل باشد آن است که β کوچکترین خانواده‌ای باشد که $\mathscr{T}$ را دربردارد به طوری که اگر $\{B_i : i \in N\} \subseteq \beta$ آن‌گاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \beta$، $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \in \beta$.

۱۷. فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ فضای توپولوژیک و $(F, \mathscr{T}|F)$ زیرفضای $(S, \mathscr{T})$ باشد و $A \subseteq F$. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن‌که A در $(F, \mathscr{T}|F)$ بسته باشد آن است که مجموعه‌ای بسته در $(S, \mathscr{T})$ مانند C

موجود باشد به طوری که $A = C \cap F$. اگر F در $(S, \mathcal{T})$ بسته باشد، آن‌گاه ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه A در F بسته باشد آن است که A در S بسته باشد.

۲-۲ پایه و زیرپایه

همان‌طور که ملاحظه شد با تعریف توپولوژی روی مجموعهٔ S، تشخّص خاصی به زیرمجموعه‌های S از قبیل باز و بسته‌بودن داده شده است. با استفاده از این ساختمان جدید روی مجموعهٔ S، مفاهیم بستار، درون، مرزو، نقاط حدی و غیره معرفی شدند. بعداً خواهیم دید که پیوستگی تابع را نیز به گونه‌ای می‌توان تعریف کرد که تعمیم پیوستگی تابع در فضای متریک باشد. همچنین فضای توپولوژیکی مثال زدیم که متریک‌پذیر نیست. در این قسمت ساختمان دیگری بنا می‌کنیم که مشخص‌کنندهٔ توپولوژی روی S است.

درواقع در اغلب موارد، مجموعه‌های باز یک فضای توپولوژیک پیچیده هستند ولی یک دسته خاص از آنها با ساختاری عموماً ساده، می‌توانند توپولوژی فضا را به‌دست دهند. پایه و زیر پایه نمونه‌هایی از این گونه دسته‌ها هستند.

۲-۲-۱ پایه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک باشد. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ را یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ می‌گوییم، هرگاه هر عضو مخالف تهی از $\mathcal{T}$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد. به‌عبارت دیگر $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(S)$ یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ است اگر و فقط اگر $\mathcal{T} = \{G: G = \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha , \{B_\alpha: \alpha \in I\} \subseteq \mathcal{B}\} \cup \{\phi\}$.

۲-۲-۲ مثال

در فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$، $\mathcal{T}$ یک پایه برای خودش است و درواقع این بزرگترین پایهٔ ممکن برای $\mathcal{T}$ است. عموماً یک پایه، زمانی مفید است که مجموعه‌هایش به شکلی ساده و از نظر تعداد، کم باشند.

در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$، اگر $A = \mathbb{N}$، آن‌گاه یک پایه برای $\mathcal{T}_e/A$ عبارت است از مجموعه‌های تک عضوی از اعداد طبیعی. به‌طورکلی‌تر در فضای گسسته $(S, \mathcal{T})$، $\mathcal{B} = \{\{a\} : a \in S\}$ یک پایه برای $\mathcal{T}$ است. درواقع هر گردایهٔ دیگر از زیرمجموعه‌های S یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ است، اگر و فقط اگر آن گردایه، $\mathcal{B}$ را دربرداشته باشد.

در فضای متریک (S, d)، گردایهٔ $\mathcal{B} = \{S_r(x); r > 0 , x\in S\}$، یک پایه برای $\mathcal{T}_d$ است.

در فضای توپولوژیک ناگسسته $(S, \mathcal{T})$، اگر $\mathcal{B} = \{S\}$، آن‌گاه $\mathcal{B}$ یک پایه برای $\mathcal{T}$ است و درواقع این، تنها پایه ممکن برای این توپولوژی است.

۲-۲-۳ قضیه

فرض کنیم $S \neq \phi$ و $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(S)$، در این صورت شرط لازم و کافی برای آنکه $\mathscr{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی $\mathscr{T}$ روی S باشد آن است که $S = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$ و به‌ازای هر B_1 و B_2 متعلق به $\mathscr{B}$ و $x \in B_1 \cap B_2$ عضوی در $\mathscr{B}$ مانند B_3 موجود باشد، به طوری‌که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

برهان. فرض کنیم $\mathscr{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathscr{T}$ باشد. چون $S \in \mathscr{T}$، بنابراین S به‌صورت اجتماعی از اعضای $\mathscr{B}$ است. از طرفی $\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B \subseteq S$. بنابراین $S = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$. اگر $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$، آنگاه $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{T}$ و بنا به تعریف $\mathscr{B}$ خانواده‌ای از اعضای $\mathscr{B}$ مانند $\{B_\alpha : \alpha \in I\}$ موجود است به طوری‌که $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$ بنابراین اگر $x \in B_1 \cap B_2$، آنگاه $B_3 \in \mathscr{B}$ موجود است که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

بالعکس، فرض کنیم $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(S)$ به طوری‌که $S = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$ و به‌ازای هر B_2 و B_1 متعلق به $\mathscr{B}$ و $x \in B_1 \cap B_2$ عضوی از $\mathscr{B}$ مانند B_3 موجود باشد که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. فرض کنیم $\mathscr{T} = \{G : G = \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$ و $\{B_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \mathscr{B}\} \cup \{\phi\}$؛ در این صورت واضح است که $S \in \mathscr{T}$ و ϕ. به‌سادگی نتیجه می‌شود که اجتماع دلخواهی از اعضای $\mathscr{T}$ متعلق به $\mathscr{T}$ است. حال ثابت می‌کنیم که اشتراک تعداد متناهی از اعضای $\mathscr{T}$ متعلق به $\mathscr{T}$ است. کافی است ثابت کنیم که اگر G_1 و G_2 متعلق به $\mathscr{T}$ باشند، آنگاه $G_1 \cap G_2 \in \mathscr{T}$. فرض کنیم $x \in G_1 \cap G_2$ بنابراین $x \in G_1$ و $x \in G_2$. باتوجه به تعریف $\mathscr{T}$ و اینکه $G_1, G_2 \in \mathscr{T}$، مجموعه‌های B_1 و B_2یی متعلق به $\mathscr{B}$ موجودند که $x \in B_1 \subseteq G_1$ و $x \in B_2 \subseteq G_2$. در نتیجه $x \in B_1 \cap B_2 \subseteq G_1 \cap G_2$. بنابه فرض $B_x \in \mathscr{B}$ موجود است که $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$. پس به‌ازای هر x متعلق به $G_1 \cap G_2$ مجموعه‌ای در $\mathscr{B}$ مانند B_x موجود است که $x \in B_x \subseteq G_1 \cap G_2$. بنابراین $G_1 \cap G_2 = \bigcup_{x\in G_1\cap G_2} B_x$ در نتیجه $G_1 \cap G_2 \in \mathscr{T}$. ■

۲-۲-۴ مثال

فرض کنیم S مجموعه‌ای غیرتهی و $\{S_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های دو به دو جدا از هم S باشد به طوری‌که $\bigcup_{i\in I} S_i = S$. در این صورت باتوجه به قضیهٔ قبل $\mathscr{B} = \{S_i : i \in I\}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی روی S است. این توپولوژی، توپولوژی افرازی نامیده می‌شود. یک مثال خاص توپولوژی زوج - فرد روی $\mathbb{N}$ است که برای آن خانواده $\{\{2k, 2k-1\}\}_{k\in\mathbb{N}}$ یک پایه است.

۲-۲-۵ مثال

فرض کنیم $\mathscr{B}_1 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. در این صورت $\mathscr{B}_1$ پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی $\mathscr{T}_e$ روی $\mathbb{R}$ است. اگر $\mathscr{B}_2 = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$، آنگاه می‌توان نشان داد که $\mathscr{B}_2$ پایه‌ای برای یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ است که به آن توپولوژی حدپایین می‌گوییم و آن را با $\mathscr{T}_l$ نمایش می‌دهیم. اگر

$\mathscr{B}_3 = \{(a,b]: a,b \in \mathbb{R}\}$، آن‌گاه $\mathscr{B}_3$ پایه‌ای برای یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ است که به آن **توپولوژی حدبالا** می‌گوییم و با $\mathscr{T}_u$ نمایش می‌دهیم. در حقیقت، $\mathscr{T}_l$ و $\mathscr{T}_u$ دارای خواص توپولوژیکی یکسانی می‌باشند ولی چنان‌که بعداً خواهیم دید، دو توپولوژی $\mathscr{T}_l$ و $\mathscr{T}_e$ دارای خواص توپولوژیکی متفاوتی هستند. فرض کنیم $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا باشد در این صورت اگر $\mathscr{B} = \{S_r(x) : x \in \mathbb{Q}^n,$ گویا $r > 0\}$، آن‌گاه $\mathscr{B}$ یک پایهٔ شمارا برای توپولوژی اقلیدسی $\mathscr{T}_e$ روی $\mathbb{R}^n$ است (چرا؟).

۲-۲-۶ توپولوژی روی مجموعه‌های مرتب خطی

فرض کنیم $(S, \leq)$ یک مجموعه مرتب کلی و $\mathscr{B}$ گردایهٔ متشکل از مجموعه‌های زیر باشد:

(i) همه بازه‌های $(a,b) = \{x \in S : a < x < b\}$،

(ii) همه بازه‌های $[a_0, b) = \{x \in S : a_0 \leq x < b\}$ مشروط به این‌که $a_0 = minS$ موجود باشد،

(iii) همهٔ بازه‌های $(a, b_0] = \{x \in S: a < x \leq b_0\}$ مشروط به این‌که $b_0 = maxS$ موجود باشد.

در این صورت $\mathscr{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی روی S است که **توپولوژی ترتیبی** خوانده می‌شود. توپولوژی ترتیبی روی $\mathbb{R}$ با ترتیب معمولی، همان توپولوژی اقلیدسی است و می‌دانیم که در این فضا هر مجموعهٔ باز به‌صورت اجتماع مجزّای تعدادی شمارا از اعضای پایه است. در این‌جا نیز می‌توان نشان داد که چنان‌چه مجموعهٔ مرتب مفروض دارای خاصیت کوچکترین کران بالا باشد، یعنی هر زیرمجموعهٔ از بالا کران‌دار آن دارای کوچکترین کران بالا باشد، هر مجموعهٔ باز در آن به‌صورت اجتماع خانواده‌ای مجزا از اعضای پایه است. یکی دیگر از انواع توپولوژی‌های قابل تعریف روی یک مجموعهٔ مرتب کلی $(S, \leq)$ توپولوژی ترتیبی راست است. پایهٔ این توپولوژی گردایهٔ تمام مجموعه‌های به شکل $\{x \in S : x > a\}$ به همراه خود S است.

۲-۲-۷ تذکر

شرط لازم و کافی برای آن‌که $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(S)$ یک پایه برای توپولوژی $\mathscr{T}$ روی S باشد آن است که به‌ازای هر مجموعهٔ G متعلق به $\mathscr{T}$ و هر $x \in G$ مجموعه‌ای مانند B_x متعلق به $\mathscr{B}$ موجود باشد، به طوری که $x \in B_x \subseteq G$.

قضیهٔ زیر معیاری به‌دست می‌دهد، برای مقایسهٔ توپولوژی‌ها وقتی برحسب پایه‌هایشان نمایش داده می‌شوند.

۲-۲-۸ قضیه

شرط لازم و کافی برای آن‌که توپولوژی تولید شده توسط پایه $\mathscr{B}_1$ قوی‌تر از توپولوژی تولید شده توسط

پایه $\mathscr{B}_2$ باشد آن است که به‌ازای هر $B_2 \in \mathscr{B}_2$ و هر $x \in B_2$ عضوی چون B_1 متعلق به $\mathscr{B}_1$ موجود باشد به طوری‌که $x \in B_1 \subseteq B_2$.

برهان. فرض کنیم $\mathscr{T}_1$ توپولوژی تولید شده توسط $\mathscr{B}_1$ و $\mathscr{T}_2$ توپولوژی تولید شده توسط $\mathscr{B}_2$ باشد. اگر $\mathscr{T}_2 \subseteq \mathscr{T}_1$، آن‌گاه به‌ازای هر $B_2 \in \mathscr{B}_2$ چون $B_2 \in \mathscr{T}_2$ پس $B_2 \in \mathscr{T}_1$. در نتیجه کافی است به‌ازای هر $B_2 \in \mathscr{B}_2$ و هر $x \in B_2$، عضو مورد نظر $B_1 \in \mathscr{B}_1$ را که به‌ازای آن $x \in B_1 \subseteq B_2$، همان B_2 معرفی کنیم.

بالعکس، فرض می‌کنیم $G \in \mathscr{T}_2$، نشان می‌دهیم $G \in \mathscr{T}_1$. چون $G \in \mathscr{T}_2$، پس $G = \underset{\alpha\in I}{\cup} B_{2,\alpha}$. اما بنا به فرض، هر $B_{2,\alpha}$ به‌صورت اجتماعی از اعضای $\mathscr{B}_1$ است. یعنی $B_{2,\alpha} = \underset{\gamma\in\Gamma}{\cup} B_{1,\alpha,\gamma}$. پس $G = \underset{\substack{\alpha\in I\\ \gamma\in\Gamma}}{\cup} B_{1,\alpha,\gamma}$. یعنی $G \in \mathscr{T}_1$ و بنابراین $\mathscr{T}_2 \subseteq \mathscr{T}_1$. ■

۲-۲-۹ مثال

توپولوژی حد پایین اکیداً قوی‌تر از توپولوژی اقلیدسی است.

۲-۲-۱۰ پایه‌های معادل

فرض کنیم $\mathscr{B}_1$ و $\mathscr{B}_2 \subseteq \mathcal{P}(S)$. اگر $\mathscr{B}_1$ و $\mathscr{B}_2$ هر دو پایه‌ای برای یک توپولوژی منحصر به فرد روی S باشند، آن‌گاه $\mathscr{B}_1$ و $\mathscr{B}_2$ را **معادل** می‌گوییم. قضیهٔ زیر شرایطی را برای معادل‌بودن دو پایه بیان می‌کند.

۲-۲-۱۱ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک، $\mathscr{B}_1$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathscr{T}$ باشد و $\mathscr{B}_2 \subseteq \mathcal{P}(S)$؛ در این صورت اگر دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد، آن‌گاه $\mathscr{B}_2$ پایه‌ای برای $\mathscr{T}$ است و بنابراین $\mathscr{B}_1$ و $\mathscr{B}_2$ معادلند.

(الف) اگر $x \in B_1 \in \mathscr{B}_1$، آن‌گاه B_2 متعلق به $\mathscr{B}_2$ موجود است به طوری که $x \in B_2 \subseteq B_1$.

(ب) اگر $x \in B_2 \in \mathscr{B}_2$، آن‌گاه B_1 متعلق به $\mathscr{B}_1$ موجود است به طوری‌که $x \in B_1 \subseteq B_2$

برهان. از (الف) نتیجه می‌شود که هر عضو $\mathscr{B}_1$ اجتماعی از اعضای $\mathscr{B}_2$ است و از (ب) نتیجه می‌شود که هر عضو $\mathscr{B}_2$ اجتماعی از $\mathscr{B}_1$ است. فرض کنیم $G \in \mathscr{T}\setminus\{\phi\}$. چون G اجتماعی از اعضای $\mathscr{B}_1$ است و هر عضو $\mathscr{B}_1$ اجتماعی از اعضای $\mathscr{B}_2$ است، بنابراین G اجتماعی از اعضای $\mathscr{B}_2$ است. از طرفی هر عضو $\mathscr{B}_2$ اجتماعی از اعضای $\mathscr{B}_1$ است، بنابراین هر اجتماعی از اعضای $\mathscr{B}_2$، اجتماعی از اعضای $\mathscr{B}_1$ است و بنابراین متعلق به $\mathscr{T}$ است. در نتیجه

$$\mathscr{T} = \{ \underset{\alpha\in I}{\cup} B_\alpha : \{B_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \mathscr{B}_2 \} \cup \{\phi\}$$

یعنی $\mathscr{B}_2$ یک پایه برای $\mathscr{T}$ است پس $\mathscr{B}_1$ و $\mathscr{B}_2$ معادلند. ■

۲-۲-۱۲ مثال

فرض کنیم $\mathscr{B}_1 = \{S_r(x) : x \in \mathbb{R}^2 , r > 0\}$ و $\mathscr{B}_2 = \{(a,b) \times (c,d): a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$، آن‌گاه $\mathscr{B}_1$ و $\mathscr{B}_2$ هر یک پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی $\mathscr{T}_e$ روی $\mathbb{R}^2$ هستند. بنابراین معادلند.

۲-۲-۱۳ زیرپایه

فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathscr{L} \subseteq \mathcal{P}(S)$. اگر خانوادهٔ تمام اشتراکهای متناهی اعضای $\mathscr{L}$ یک پایه‌برای $\mathscr{T}$ باشد، آن‌گاه $\mathscr{L}$ را یک زیرپایهٔ $\mathscr{T}$ می‌گوییم. به‌عبارت دیگر $\mathscr{L} \subseteq \mathcal{P}(S)$ یک زیرپایهٔ $\mathscr{T}$ است، اگر و فقط اگر $\mathscr{B} = \{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i : S_i \in \mathscr{L}, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ یک پایهٔ $\mathscr{T}$ باشد. درواقع می‌توان چنین گفت که زیرپایه، پایه را تولید می‌کند و پایه، توپولوژی را.

۲-۲-۱۴ مثال

فرض کنیم $\mathscr{L}= \{(-\infty,b): b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty):a \in \mathbb{R}\}$. در این صورت $\mathscr{L}$ یک زیرپایهٔ $\mathscr{T}_e$ است.

فرض کنیم $\mathscr{L} = \{(-\infty, b]: b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty): a \in \mathbb{R}\}$ در این صورت $\mathscr{L}$ یک زیرپایه برای توپولوژی حدبالا $\mathscr{T}_u$ روی $\mathbb{R}$ است.

فرض کنیم $\mathscr{L} = \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{[a, \infty): a \in \mathbb{R}\}$ در این صورت $\mathscr{L}$ یک زیرپایه برای توپولوژی حدپایین $\mathscr{T}_l$ روی $\mathbb{R}$ است.

۲-۲-۱۵ قضیه

فرض کنیم $S \neq \phi$ و $\mathscr{L} \subseteq \mathcal{P}(S)$. در این صورت اگر $S = \bigcup_{G\in\mathscr{L}} G$، آن‌گاه $\mathscr{L}$ زیر پایهٔ یک توپولوژی $\mathscr{T}$ روی S است و بالعکس.

برهان. فرض کنید $\mathscr{B}$ خانوادهٔ متشکل از تمام اشتراک‌های متناهی اعضای $\mathscr{L}$ باشد. واضح است که $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{B}$. چون $S = \bigcup_{G\in\mathscr{L}} G$. بنابراین $S = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$. حال فرض کنیم $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ بنابراین $B_1 = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ و $B_2 = \bigcap_{j=1}^{m} H_j$ که $H_j, G_i \in \mathscr{L}$ و $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. بنابراین $B_1 \cap B_2 = \bigcap_{k=1}^{m+n} U_k$ که $U_k \in \mathscr{L}$ $(1 \leq k \leq m+n)$ بنابراین $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$. بنا به قضیهٔ ۲-۲-۳ نتیجه می‌شود که $\mathscr{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی $\mathscr{T}$ روی S است و بنابراین $\mathscr{L}$ یک زیرپایه است.

بالعکس، اگر $\mathscr{L}$ زیرپایهٔ توپولوژی $\mathscr{T}$ روی S باشد و $\mathscr{B}$ پایهٔ متناظر با $\mathscr{T}$ باشد، آن‌گاه $S = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$. اما به‌ازای هر عنصر ناتهی B در $\mathscr{B}$ عنصر G در $\mathscr{L}$ هست که $B \subseteq G$ پس $S \subseteq \bigcup_{G\in\mathscr{L}} G \subseteq S$ و لذا $\bigcup_{G\in\mathscr{L}} G = S$. ■

۲-۲-۱۶ تمرین

به‌ازای هر $f \in C([a,b])$ و هر $\varepsilon > 0$، قرار دهید:

$$M(f,\varepsilon) = \{g \in C([a,b]) \; ; \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx < \varepsilon\}$$

نشان دهید که $\mathscr{B}_1^M = \{M(f,\varepsilon) ; f \in C([a,b]), \varepsilon > 0\}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی $\mathscr{T}_1^M$ روی $C([a,b])$ است. اگر $U(f,\varepsilon) = \{g : \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$، آن‌گاه $\mathscr{B}_2^U = \{U(f,\varepsilon) : f \in C([a,b]) , \varepsilon > 0\}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی $\mathscr{T}_2^U$ روی $C([a,b])$ است. نشان دهید که $\mathscr{T}_1^M \subset \mathscr{T}_2^U$ ، $\mathscr{T}_1^M \neq \mathscr{T}_2^U$. بنابراین دو پایه $\mathscr{B}_1^M$ و $\mathscr{B}_2^U$ معادل نیستند. (راهنمایی: اگر $h \in M(f,\varepsilon)$ و $r = \int_0^1 | f(x) - h(x) | \, dx$، آن‌گاه $U(h, \varepsilon - r) \subseteq M(f,\varepsilon)$. اگر $f(x) = 0$، آن‌گاه با درنظرگرفتن دنبالهٔ توابع $f_n(x) = x^n$ نشان دهید که جزئیت $M(f,\varepsilon) \subseteq U(f,1)$ به‌ازای هیچ ε برقرار نیست و سپس از قضیهٔ ۲-۲-۱۱ استفاده کنید).

۲-۲ مسائل

۱. فرض کنید $\mathscr{L}_1 \subseteq \mathcal{P}(S)$, $\mathscr{L}_2 \subseteq \mathcal{P}(S)$ و $\bigcup_{G_2 \in \mathscr{L}_2} G_2 = S = \bigcup_{G_1 \in \mathscr{L}_1} G_1$. همچنین فرض کنید اگر $x \in G_1$ و $G_1 \in \mathscr{L}_1$، آن‌گاه G_2ی متعلق به $\mathscr{L}_2$ موجود باشد که $x_2 \in G_2 \subseteq G_1$ و اگر x_2 $x \in G_2$ و $G_2 \in \mathscr{L}_2$، آن‌گاه G_1ی متعلق به $\mathscr{L}_1$ موجود باشد که $x \in G_1 \subseteq G_2$ در این صورت ثابت کنید که $\mathscr{L}_1$ و $\mathscr{L}_2$ دو زیرپایهٔ معادل هستند، یعنی $\mathscr{L}_1$ و $\mathscr{L}_2$ هر دو زیرپایهٔ یک توپولوژی منحصر به فرد روی S هستند.

۲. فرض کنید در صفحهٔ مختصات، خانوادهٔ تمام خطوط مستقیم را به‌عنوان زیرپایه درنظر بگیریم؛ توپولوژی تولید شده توسط این زیرپایه چیست؟

۳. فرض کنید در صفحهٔ مختصات، خانوادهٔ تمام خطوط مستقیم موازی محور xها را به‌عنوان زیرپایه درنظر بگیریم؛ توپولوژی تولید شده توسط این زیرپایه چیست؟

۴. فرض کنید $M_n(\mathbb{R})$ مجموعهٔ تمام ماتریس‌های $n \times n$ از اعداد حقیقی باشد. به‌ازای هر $r > 0$ و $a = [a_{ij}]$ فرض کنید $U_r(a) = \{[b_{ij}] : |a_{ij} - b_{ij}| < r ; \forall \, i,j\}$. نشان دهید که $\mathscr{B} = \{U_r(a) : r > 0 , a \in M_n(\mathbb{R})\}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی $M_n(\mathbb{R})$ است.

۵. فرض کنید $\mathscr{C}([0,1])$ مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ حقیقی مقدار روی $[0,1]$ باشد.

به‌ازای هر $f \in \mathscr{C}([0,1])$ و $\varepsilon > 0$ و $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$، مجموعهٔ $U_{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon)}(f) = \{g : |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon , \, i = 1, \ldots, n\}$ را درنظر می‌گیریم. اولاً نشان دهید که اگر $\mathscr{B}$ خانوادهٔ تمام $U_{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon)}(f)$ ها باشد، آن‌گاه $\mathscr{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی $\mathscr{T}$ روی $\mathscr{C}([0,1])$ است. ثانیاً نشان دهید که $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_2^U$. ثالثاً ثابت کنید که در مجموعهٔ تمام توپولوژیهای تعریف شده روی $\mathscr{C}([0,1])$ با رابطهٔ جزئیت، دو

عضو $\mathscr{T}$ و $\mathscr{T}_1^M$ مقایسه‌پذیر نیستند. (یعنی نه $\mathscr{T}_1^M$ قوی‌تر از $\mathscr{T}$ است و نه $\mathscr{T}$ قوی‌تر از $\mathscr{T}_1^M$).

۶. فرض کنید $(S, \leq)$ یک مجموعهٔ به‌طور جزئی مرتب باشد و $U_L(x) = \{y : y \leq x\}$ و $U_R(x) = \{y : x \leq y\}$؛

الف) ثابت کنید که خانوادهٔ تمام $U_l(x)$ها و همچنین خانوادهٔ تمام $U_R(x)$ها پایه‌هایی برای توپولوژیهای $\mathscr{T}_L$ و $\mathscr{T}_R$ روی S هستند.

ب) ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آن‌که $G \in \mathscr{T}_L$ آن است که اگر $x \in G$ آن‌گاه $U_L(x) \subseteq G$.

ج) ثابت کنید که اشتراک دلخواهی از مجموعه‌های باز در $\mathscr{T}_L$ یک مجموعهٔ باز در $\mathscr{T}_L$ است.

د) توپولوژی گسسته روی S تنها توپولوژی‌ای است که هم از $\mathscr{T}_L$ و هم از $\mathscr{T}_R$ قوی‌تر است.

هـ) $\mathscr{T}_R$ و $\mathscr{T}_L$ در حالت کلی نسبت به رابطهٔ جزئیت مقایسه‌پذیر نیستند.

۷. نشان دهید در $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ که $\mathscr{T}_u$ توپولوژی حد بالا می‌باشد، اگر $A = (a, b]$، آن‌گاه $\bar{A} = A$، $bd(A) = \phi$، $A^\circ = A$ و $A' = A$، بنابراین A هم باز و هم بسته و نیز مجموعه‌ای بی‌کاست است.

*۸ اگر $(S, \mathscr{T})$ فضایی توپولوژیک و $\mathscr{B}$ یک پایه برای $A \subseteq S, \mathscr{T}$ غیرتهی باشد، آن‌گاه $\mathscr{B}/A = \{B \cap A: B \in \mathscr{B}\}$ یک پایه برای $\mathscr{T}/A$ است.

*۹. اگر $\mathscr{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی S باشد، آن‌گاه مجموعه‌ای چون $D \subseteq S$ موجود است به طوری که D در S چگال است و $Card(D) \leq Card(\mathscr{B})$.

۳-۲ پیوستگی، تابع باز، تابع بسته و همسانریختی

تاکنون ساختمان داخلی یک فضای توپولوژیک را مورد بحث قرار داده‌ایم. در این بخش ارتباط خارجی دو فضای توپولوژیک را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا پیوستگی یک تابع از یک فضای توپولوژیک به فضای توپولوژیک دیگر و سپس همسانریختی و خواص توپولوژیکی، یعنی خواصی که تحت هر تابع همسانریخت پایا است، مورد مطالعه قرار خواهند گرفت. در فصل ۱ مفهوم تابع پیوسته از یک فضای متریک به توی فضای متریک دیگر را تعریف کردیم و این تعریف برحسب متری فضاها ارائه گردید. در همان فصل نشان دادیم که می‌توان پیوستگی یک تابع از یک فضای متریک به توی فضای متریک دیگر را بدون رجوع مستقیم به متریکها، فقط برحسب مجموعه‌های باز بیان کرد. این موضوع راهگشای تعریف پیوستگی یک تابع از یک فضای توپولوژیک به توی فضای توپولوژیک دیگر است.

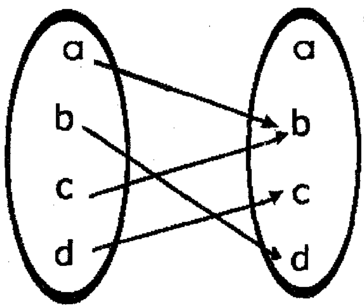
۲-۳-۱ تابع پیوسته

فرض کنیم $(S_1, \mathcal{T}_1)$ و $(S_2, \mathcal{T}_2)$ فضاهای توپولوژیک باشند. تابع $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ را در نقطهٔ $x \in S_1$ پیوسته می‌گوییم، اگر به‌ازای هر مجموعهٔ باز مانند G_2 در $\mathcal{T}_2$ که $f(x) \in G_2$، مجموعهٔ بازی در $\mathcal{T}_1$ مانند G_1 موجود باشد به طوری که $x \in G_1$ و $f(G_1) \subseteq G_2$.

۲-۳-۲ مثال

مجموعهٔ $S = \{a,b,c,d\}$ را به همراه توپولوژی $\mathcal{T} = \{S, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}\}$ درنظر می‌گیریم. تابع $f: S \to S$ که با نمودار ون زیر تعریف شده است در نقطهٔ c پیوسته نیست. زیرا مجموعهٔ باز $\{a,b\}$ در $\mathcal{T}$ و شامل $f(c) = b$ موجود است به طوری که تصویر هیچ یک از مجموعه‌های باز در $\mathcal{T}$ که شامل c باشند یعنی مجموعه‌های S و $\{b,c,d\}$، زیرمجموعهٔ آن نیست. این تابع در نقطهٔ d پیوسته است زیرا مجموعه‌های باز شامل $f(d) = c$ در $(S, \mathcal{T})$، $\{b,c,d\}$ و S هستند و تصویر مجموعهٔ باز $\{b,c,d\}$ که شامل d است مجموعهٔ $\{b,c,d\}$ است که زیرمجموعهٔ $\{b,c,d\}$ و نیز S است. یعنی برای هر مجموعهٔ باز شامل $f(d)$، مجموعهٔ بازی شامل d وجود دارد به طوری که تصویر آن تحت تابع f، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ باز مفروض است.

تابع $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ را پیوسته گوییم، اگر در تمام نقاط S_1 پیوسته باشد.



۲-۳-۳ مثال

اگر $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فضای گسسته و $(S_2, \mathcal{T}_2)$ فضای توپولوژیک دلخواهی باشد آن‌گاه هر تابع $f : S_1 \to S_2$ پیوسته است زیرا اگر $x \in S_1$ داده شده باشد. به‌ازای هر مجموعهٔ باز G_2 شامل $f(x)$ در $\mathcal{T}_2$، مجموعهٔ باز $\{x\}$ در $\mathcal{T}_1$ موجود است به طوری که تصویر $\{x\}$ تحت f یعنی $\{f(x)\}$، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ باز مفروض است.

۲-۳-۴ مثال

اگر $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فضای توپولوژیک دلخواه و $(S_2, \mathcal{T}_2)$ فضای ناگسسته باشد، آن‌گاه هر تابع $f: S_1 \to S_2$ پیوسته است. زیرا اگر $x \in S_1$ داده شده باشد. تنها مجموعهٔ باز فضای $(S_2, \mathcal{T}_2)$ که شامل $f(x)$ باشد مجموعهٔ S_2 است که به‌ازای آن مجموعهٔ باز S_1 شامل x موجود است به طوری که $f(S_1) \subseteq S_2$.

۲-۳-۵ مثال

تابع ثابت $f : (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ که در آن برای هر $x \in S_1$، $f(x) = c$ در هر نقطه‌ای پیوسته است. زیرا فرض کنیم $x \in S_1$ داده شده باشد. بنا به ضابطهٔ تابع برای هر مجموعهٔ باز شامل c، مجموعهٔ باز S_1 شامل x موجوداست به طوری که تصویر S_1 تحت f یعنی $\{c\}$ زیرمجموعه‌ای از آن مجموعهٔ باز است.

پیوستگی یک تابع علاوه بر ضابطهٔ تابع به توپولوژی‌های تعریف شده بر روی دامنه و حوزهٔ مقادیر تابع نیز بستگی دارد. به مثال زیر توجه کنید:

۲-۳-۶ مثال

ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$$

یک تابع ناپیوستهٔ $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ و یک تابع پیوستهٔ $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ را به‌دست می‌دهد که در آن $\mathcal{T}_e$ توپولوژی اقلیدسی و $\mathcal{T}_u$ توپولوژی حدبالایی روی $\mathbb{R}$ است.

قضیهٔ زیر شرایط معادلی برای پیوستگی یک تابع به‌دست می‌دهد.

۲-۳-۷ قضیه

فرض کنیم $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ یک تابع باشد در این صورت شرایط زیر معادلند:

(الف) f روی S_1 پیوسته است.

(ب) به‌ازای هر مجموعهٔ باز G در S_2، مجموعهٔ $f^{-1}(G)$ در S_1 باز است.

(ج) به‌ازای هر مجموعهٔ بستهٔ F در S_2، مجموعهٔ $f^{-1}(F)$ در S_1 بسته است.

(د) به‌ازای هر زیرمجموعهٔ S_1 مانند A، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(هـ) به‌ازای هر زیرمجموعهٔ S_2 مانند B، $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(و) به‌ازای هر زیرمجموعهٔ S_2 مانند B، $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$.

برهان. (الف) ⇐ (ب). فرض کنیم $G \in \mathscr{T}_2$ و $x \in f^{-1}(G)$ داده شده باشند. پس $f(x) \in G$. پیوستگی f روی S_1، پیوستگی f در x را نتیجه می‌دهد و لذا مجموعهٔ بازی چون $G_x \in \mathscr{T}_1$ و شامل x موجود است به طوری‌که $f(G_x) \subseteq G$. بنابراین $G_x \subseteq f^{-1}(G)$. پس $f^{-1}(G)$ باز است.

(ب) ⇐ (ج). فرض می‌کنیم مجموعهٔ بسته F در S_2 داده شده باشد. در این صورت $S_2 \backslash F$ باز است و بنا به قسمت (ب)، $f^{-1}(S_2 \backslash F)$ در S_1 باز است. چون $f^{-1}(S_2 \backslash F) = S_1 \backslash f^{-1}(F)$ پس مجموعهٔ $S_1 \backslash f^{-1}(F)$ در S_1 باز است بنابراین $f^{-1}(F)$ در S_1 بسته است.

(ج) ⇐ (د). فرض کنیم $A \subseteq S_1$. چون $\overline{f(A)}$ در S_2 بسته است. بنا به (ج) $f^{-1}(\overline{f(A)})$ در S_1 بسته است. اما $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. در نتیجه $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. اینک $f(\overline{A}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)}))$ و از طرفی $f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subseteq \overline{f(A)}$. بنابراین $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(د) ⇐ (هـ). با فرض $A = f^{-1}(B)$ در قسمت (د)، $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))}$. از طرفی $\overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}$. در نتیجه $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{B}$. و از این‌جا $f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ و چون $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)}))$. پس $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(هـ) ⇐ (و). فرض کنیم $B \subseteq S_2$ داده شده باشد. B° در S_2 باز است بنابرین $S_2 \backslash B^\circ$ در S_2 بسته است. بنا به قسمت (هـ) $\overline{f^{-1}(S_2 \backslash B^\circ)} \subseteq f^{-1}(S_2 \backslash B^\circ)$. از طرفی $\overline{f^{-1}(S_2 \backslash B^\circ)} = \overline{S_1 \backslash (f^{-1}(B^\circ))} = S_1 \backslash (f^{-1}(B^\circ))^\circ$. چون $B^\circ \subseteq B$. $(f^{-1}(B^\circ))^\circ \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$ و در نتیجه $S_1 \backslash (f^{-1}(B))^\circ \subseteq S_1 \backslash (f^{-1}(B^\circ))^\circ$. از روابط بالا نتیجه می‌شود که $S_1 \backslash (f^{-1}(B))^\circ \subseteq f^{-1}(S_2 \backslash B^\circ)$. بنابراین $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$.

(و) ⇐ (الف). فرض می‌کنیم $x \in S_1$ داده شده باشد و G مجموعهٔ بازی در S_2 شامل $f(x)$ باشد. بنا به قسمت (و)، $f^{-1}(G) \subseteq (f^{-1}(G))^\circ$ یعنی $f^{-1}(G)$ باز است. از طرفی $f(f^{-1}(G)) \subseteq G$. یعنی برای هر مجموعهٔ باز شامل $f(x)$ در S_2 مجموعهٔ بازی چون $f^{-1}(G)$ در S_1 و شامل x موجود است، به طوری که $f(f^{-1}(G)) \subseteq G$. پس، f در نقطهٔ دلخواه x پیوسته است و در نتیجه، f روی S_1 پیوسته است. ■

از این‌جا نتیجه می‌شود که نقش معکوس هر مجموعهٔ باز تحت تابع پیوسته، مجموعه‌ای باز است، اما تصویر هر مجموعهٔ باز تحت تابع پیوسته الزاماً یک مجموعهٔ باز نیست. به مثال زیر توجه کنید:

۲-۳-۸ مثال

فرض کنیم $\mathscr{T}_1$ و $\mathscr{T}_2$ دو توپولوژی روی S باشند در این صورت شرط لازم و کافی برای آنکه تابع همانی $f(x) = x$ از $(S, \mathscr{T}_1)$ به توی $(S, \mathscr{T}_2)$ پیوسته باشد آن است که $\mathscr{T}_2 \subseteq \mathscr{T}_1$. (یعنی توپولوژی $\mathscr{T}_2$ ضعیفتر از توپولوژی $\mathscr{T}_1$ باشد). بنابراین اگر $\mathscr{T}_2 \subseteq \mathscr{T}_1$ و $\mathscr{T}_2 \neq \mathscr{T}_1$، آنگاه تابع همانی پیوسته است. درحالی‌که تصویر هر مجموعهٔ باز تحت آن باز نیست و تصویر هر مجموعهٔ بسته تحت آن بسته نیست. قضیهٔ زیر بیان ضعیفتری از شرط معادل پیوستگی که در قسمت (ب) قضیهٔ ۲-۳-۷ بیان شد به‌دست می‌دهد.

۲-۳-۹ قضیه

شرط لازم و کافی برای آنکه تابع $f: (S_1, \mathscr{T}_1) \to (S_2, \mathscr{T}_2)$ پیوسته باشد آن است که به‌ازای هر عضو چون B از پایه‌ای مانند $\mathscr{B}$ برای $\mathscr{T}_2$، $f^{-1}(B)$ در S_1 باز باشد.

برهان. چنانچه f تابعی پیوسته باشد، آنگاه بنا به قسمت (ب) قضیهٔ ۲-۳-۷ روشن است که برای هر عضو B از پایه‌ای مانند $\mathscr{B}$ برای $\mathscr{T}_2$، $f^{-1}(B)$ باز است. بالعکس فرض کنیم برای هر عضو B از پایه‌ای مانند $\mathscr{B}$ برای $\mathscr{T}_2$، $f^{-1}(B)$ باز باشد. در این صورت چنانچه G مجموعهٔ بازی در S_2 باشد، چون $\mathscr{B}$ پایه‌ای برای $\mathscr{T}_2$ است. پس خانواده‌ای چون $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از اعضای $\mathscr{B}$ موجود است به طوری که $\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha = G$.

بنابراین $f^{-1}(G) = f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$. چون برای هر $\alpha \in I$، $f^{-1}(B_\alpha)$ باز است، پس $f^{-1}(G)$ در S_1 باز است. پس f پیوسته است. ■

در زیر بیان ضعیفتری از این قضیه آمده است.

۲-۳-۱۰ قضیه

فرض کنیم $\mathscr{L}$ یک زیرپایه برای فضای توپولوژیک $(S_2, \mathscr{T}_2)$ باشد در این صورت. تابع $f: (S_1, \mathscr{T}_1) \to (S_2, \mathscr{T}_2)$ پیوسته است، اگر و فقط اگر نقش معکوس هر عضو $\mathscr{L}$، مجموعه‌ای باز در S_1 باشد.

برهان. فرض کنیم $\mathscr{B}$ پایه به‌دست آمده از $\mathscr{L}$ باشد. اگر $f: (S_1, \mathscr{T}_1) \to (S_2, \mathscr{T}_2)$ پیوسته باشد، چون $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{B}$، بنا به قضیهٔ قبل، نقش معکوس هر عضو از $\mathscr{L}$ مجموعه‌ای باز در S_1 است.

بالعکس، اگر نقش معکوس هر عضو $\mathscr{L}$ مجموعهٔ بازی در S_1 باشد، آنگاه چون هر عضو $\mathscr{B}$ به‌صورت اشتراک متناهی از اعضای $\mathscr{L}$ است و از این‌که f^{-1} حافظ عمل اشتراک است و نیز اشتراک تعداد متناهی مجموعهٔ باز، باز است، نتیجه می‌شود که معکوس هر عضو از $\mathscr{B}$ ،که پایه‌ای برای $\mathscr{T}_2$ است، مجموعه‌ای باز در S_1 است. لذا بنا به قضیهٔ قبل، f پیوسته است. ■

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که تحت تابع پیوستهٔ $f: (S_1, \mathscr{T}_1) \to (S_2, \mathscr{T}_2)$ تصویر دنبالهٔ همگرای $\{x_n\}$ در $(S_1, \mathscr{T}_1)$، دنباله‌ای همگرا در $(S_2, \mathscr{T}_2)$ است.

۲-۳-۱۱ قضیه

اگر $f:(S_1,\mathscr{T}_1)\to(S_2,\mathscr{T}_2)$ پیوسته باشد و $x_n\to x$ در $(S_1,\mathscr{T}_1)$، آن‌گاه $f(x_n)\to f(x)$ در $(S_2,\mathscr{T}_2)$.

برهان. فرض کنیم $f:(S_1,\mathscr{T}_1)\to(S_2,\mathscr{T}_2)$ تابعی پیوسته باشد و $\{x_n\}$ در $(S_1,\mathscr{T}_1)$ به x همگرا باشد. در این صورت چون f تابعی پیوسته است، f در x پیوسته است. بنابراین برای هر مجموعهٔ باز $G\in\mathscr{T}_2$ و شامل $f(x)$، مجموعهٔ باز $G_x\in\mathscr{T}_1$ شامل x وجود دارد به طوری که $f(G_x)\subseteq G$. چون $x_n\to x$ پس $n_0\in\mathbb{N}$ موجود است که برای هر $k\in\mathbb{N}$ ، $k\geq n_0$ داریم $x_k\in G_x$. در نتیجه $f(x_k)\in G$. پس برای هر مجموعهٔ $G\in\mathscr{T}_2$ که شامل $f(x)$ باشد عددی طبیعی چون $n_0\in\mathbb{N}$ موجود است به طوری که برای هر $k\in\mathbb{N}$ و $k\geq n_0$ داریم $f(x_k)\in G$. بنابراین $\{f(x_n)\}$ در $(S_2,\mathscr{T}_2)$ به $f(x)$ همگرا است. ■

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس این قضیه در حالت کلی برقرار نیست.

۲-۳-۱۲ مثال

تابع $f:(\mathbb{R},\mathscr{T}_c)\to(S,\mathscr{T}^*)$ را که در آن $\mathscr{T}_c$ توپولوژی هم شمارا روی $\mathbb{R}$ و $(S,\mathscr{T}^*)$ یک فضای توپولوژیک دلخواه است درنظر می‌گیریم. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا باشد، آن‌گاه از مرتبه‌ای به بعد ثابت است؛ زیرا فرض کنیم دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا به x باشد. در این صورت اگر $A=\{x_m;\, x_m\neq x\}$، آن‌گاه $\mathbb{R}\setminus A$ مجموعهٔ بازی شامل x است و لذا از مرتبه‌ای به بعد x_nها متعلق به $\mathbb{R}\setminus A$ هستند یعنی از مرتبه‌ای به بعد x_nها مقدار ثابت x را اتخاذ می‌کنند و در نتیجه دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ از مرتبه‌ای به بعد ثابت و درواقع به $f(x)$ همگراست. درحالت خاص، تابع همانی $f:(\mathbb{R},\mathscr{T}_c)\to(\mathbb{R},\mathscr{T}_e)$ پیوسته نیست. زیرا نقش معکوس $(0,1)$، مجموعهٔ $(0,1)$ است که در $(\mathbb{R},\mathscr{T}_c)$ باز نیست، درحالی‌که تصویر هر دنبالهٔ همگرا، دنباله‌ای همگراست.

همان‌طور که در مثال ۲-۳-۸ دیدیم یک تابع پیوسته لازم نیست که مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز ببرد و همچنین لازم نیست که مجموعه‌های بسته را به مجموعه‌های بسته ببرد. توابعی که مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز نقش می‌کنند و توابعی که مجموعه‌های بسته را به مجموعه‌های بسته نقش می‌نمایند، از اهمیت خاصی برخوردارند.

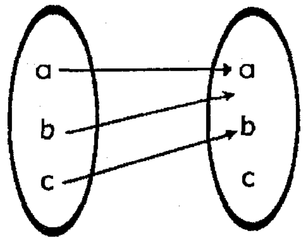
۲-۳-۱۴ تابع باز و تابع بسته

فرض کنیم $f:(S_1,\mathscr{T}_1)\to(S_2,\mathscr{T}_2)$ یک تابع باشد. f را یک تابع باز می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر G متعلق به $\mathscr{T}_1$، $f(G)\in\mathscr{T}_2$. تابع f را یک تابع بسته می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر مجموعهٔ بسته F در $(S_1,\mathscr{T}_1)$، $f(F)$ در $(S_2,\mathscr{T}_2)$ بسته باشد.

درحالت کلی تابع باز f لازم نیست یک تابع بسته باشد و بالعکس. به مثالهای زیر توجه کنید.

۲-۳-۱۵ مثال

مجموعهٔ $S = \{a, b, c\}$ به همراه توپولوژی $\mathcal{T} = \{S, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ را درنظر می‌گیریم. تابع $f: (S, \mathcal{T}) \to (S, \mathcal{T})$ را که با نمودار ون زیر داده شده است درنظر می‌گیریم:



این تابع باز است درحالی‌که تابعی بسته نیست زیرا تصویر مجموعهٔ بسته $\{b, c\}$ تحت این تابع مجموعهٔ $\{a, b\}$ است که بسته نیست.

۲-۳-۱۶ مثال

$f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ که در آن $\mathcal{T}_2$ توپولوژی گسسته روی S_2 و $\mathcal{T}_1$ یک توپولوژی روی S_1 است، یک تابع باز و نیز یک تابع بسته است. زیرا تصویر هر مجموعهٔ باز و یا هر مجموعهٔ بسته در S_1، زیرمجموعه‌ای از S_2 است و در فضای $(S_2, \mathcal{T}_2)$ هر مجموعه‌ای بستاز است.

۲-۳-۱۷ مثال

هر تابع پوشای $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ که در آن $\mathcal{T}_1$ توپولوژی ناگسسته و $\mathcal{T}_2$ یک توپولوژی روی S_2 است، هم باز و هم بسته است.

۲-۳-۱۸ مثال

تابع همانی $f: (S, \mathcal{T}) \to (S, \mathcal{T})$ یک تابع باز و نیز یک تابع بسته است.

۲-۳-۱۹ مثال

فرض کنیم $f: (S, \mathcal{T}_1) \to (S, \mathcal{T}_2)$ تابع همانی باشد و $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. در این صورت f تابع باز و نیز تابعی بسته است. اگر $\mathcal{T}_2 \neq \mathcal{T}_1$ آن‌گاه f تابعی پیوسته نیست ولی همچنان هم باز و هم بسته است. در حقیقت شرط لازم و کافی برای آن‌که تابع همانی $f: (S, \mathcal{T}_1) \to (S, \mathcal{T}_2)$ باز (بسته) باشد آن است که $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.

۲-۳-۲۰ مثال

فرض کنیم $S = \{a, b, c\}$ و $\mathcal{T}_1 = \{S, \phi, \{a\}\}$ و $\mathcal{T}_2 = \{S, \phi, \{a\}, \{a, b\}\}$ و $f: (S, \mathcal{T}_1) \to (S, \mathcal{T}_2)$ تابعی باشد که در آن به‌ازای هر $x \in S$، $f(x) = b$؛ دراین صورت f پیوسته است. از طرفی $\{a\} \in \mathcal{T}_1$ و $f(\{a\}) \notin \mathcal{T}_2$. بنابراین f باز نیست. همچنین $\{b, c\}$ در $(S, \mathcal{T}_1)$ بسته است درصورتی که $f(\{b, c\})$ در $(S, \mathcal{T}_2)$ بسته نیست. بنابراین تابع f نه باز است و نه بسته.

قضیهٔ زیر یک شرط معادل برای بازبودن یک تابع و یک شرط معادل برای بسته‌بودن یک تابع به‌دست می‌دهد.

۲-۳-۲۱ قضیه

فرض کنیم $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ یک تابع باشد در این صورت

الف) f بسته است، اگر و فقط اگر $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ برای هر $A \subseteq S_1$.

ب) f باز است، اگر و فقط اگر $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$ برای هر $A \subseteq S_1$.

برهان. فرض کنیم f تابعی بسته باشد و $A \subseteq S_1$ داده شده باشد. در این صورت $\overline{A}$ بسته است و چون f تابعی بسته است، پس $f(\overline{A})$ مجموعه‌ای بسته در S_2 است. از طرفی می‌دانیم همواره $A \subseteq \overline{A}$. در نتیجه $f(A) \subseteq f(\overline{A})$. بنابراین $\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\overline{A})}$ که چون $f(\overline{A})$ بسته است، داریم $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

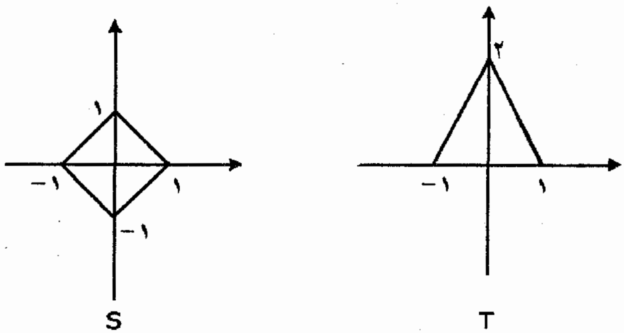
بالعکس، فرض می‌کنیم برای هر $A \subseteq S_1$، $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ و $F \subseteq S_1$ در S_1 بسته باشد. در این صورت چون $\overline{F} = F$، بنا به فرض $\overline{f(F)} \subseteq f(F)$. پس $f(F)$ بسته است. چون F دلخواه بود پس f تابعی بسته است.

ب) برهان قسمت (ب) به طریق مشابه با قسمت (الف) صورت می‌گیرد و به خواننده واگذار می‌شود. ■

همسانریختی

در هندسهٔ مسطحه دو شکل قابل انطباق، مساوی خوانده می‌شود. در منطق گزاره‌ها، گزاره‌هایی که هم‌ارز منطقی هستند (یعنی جدول ارزش درستی آنها یکی است) یکسان تلقی می‌شوند. در جبر، یکریختی نوعی تساوی به حساب می‌آید و... در توپولوژی، فضاهای توپولوژیک همسانریخت، یکی تلقی می‌شوند. دو فضای توپولوژیک $(S_1, \mathcal{T}_1)$ و $(S_2, \mathcal{T}_2)$ را همسانریخت می‌گویند هرگاه یک تابع دوسویی $f: S_1 \to S_2$ که هم خودش و هم معکوسش پیوسته باشند وجود داشته باشد. همسانریختی یک رابطهٔ هم‌ارزی روی ردهٔ فضاهای توپولوژیک به‌دست می‌دهد و درواقع این رده را به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌کند. اعضای هر دستهٔ هم‌ارزی، فضاهای همسانریخت هستند و بنابراین دارای خواص (توپولوژیکی) یکسان می‌باشند. درواقع یک توپولوژیدان آنها را یکی می‌پندارد. مثالهای متنوع زیر، ایدهٔ همسانریختی را بهتر به ذهن نزدیک می‌سازند:

الف) تابع $f(x,y) = (x, y+1-|x|)$ یک همسانریختی بین مربع S و مثلث T با توپولوژی نسبی اقلیدسی (شکل زیر) است:



ب) گوی واحد باز در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ و تمام فضای $\mathbb{R}^n$ تحت $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \left(\frac{x_1}{1+\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}}, \dots, \frac{x_n}{1+\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}}\right)$ همسانریخت هستند.

ج) $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$ یک همسانریختی بین کرهٔ بدون قطب شمال با توپولوژی نسبی اقلیدسی و صفحهٔ اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ است.

د) مخروط $\{(x,y,z) \; ; \; x^2+y^2 = z^2\}$ با توپولوژی نسبی اقلیدسی همسانریخت با صفحهٔ اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ است.

هـ) مخروط $\{(x,y,z) \; ; x^2+y^2 = z^2\}$ با کره‌ای بدون قطب شمال (همراه با توپولوژی نسبی اقلیدسی) همسانریخت است.

۲-۳-۲۲ همسانریختی

تابع دو سویی $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ را **همسانریختی** می‌گوییم، هرگاه f و f^{-1} پیوسته باشند. دو فضا را همسانریخت می‌نامیم، هرگاه یک همسانریختی از یکی به دیگری موجود باشد.

۲-۳-۲۳ مثال

فرض کنید $S_1 = [0, 1]$ و $S_2 = [a, b]$؛ $a<b$ و $\mathcal{T}_1 = \{G \cap S_1 : G \in \mathcal{T}_e\}$ و $\mathcal{T}_2 = \{G \cap S_2 : G \in \mathcal{T}_e\}$. $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ به‌ترتیب توپولوژی روی S_1 و S_2 هستند. تابع $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ که به‌صورت $f(x) = (b-a)x+a$ تعریف می‌شود یک همسانریختی است؛ زیرا اولاً f دوسویی است و ثانیاً f و $f^{-1}(x) = \frac{x-a}{b-a}$ پیوسته‌اند.

۲-۳-۲۴ مثال

به یاد آورید که دو فضای متریک (E,d) و (F,e) را طولپا گویند، هرگاه تابعی برومانند $\varphi : E \to F$ وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر y,x متعلق به E، $d(x,y) = e(\varphi(x),\varphi(y))$ در این صورت φ یک به یک است و φ و φ^{-1} پیوسته‌اند. پس φ یک همسانریختی است. اما عکس این مطلب برقرار نیست. مثلاً $\mathbb{R}$ با متر $d(x,y)= \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ و $\mathbb{R}$ با متر $e(x,y) = \begin{cases} 2 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ طولپا نیستند درحالی‌که توپولوژی هر دو فضا، گسسته است و لذا تابع همانی $i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک همسانریختی است.

۲-۳-۲۵ مثال

تابع $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \to \big((0,1), \mathcal{T}_e/(0,1)\big)$ با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{2x-1}{x(x-1)}$ همسانریختی است.

۲-۳-۲۶ قضیه

فرض کنید $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ تابعی دوسویی باشد در این صورت شرایط زیر معادلند:

الف) f یک همسانریختی است.

ب) f باز و پیوسته است.

ج) f بسته و پیوسته است.

د) به‌ازای هر $A \subseteq S_1$، $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

برهان. (الف) ⇐ (ب) چون f یک همسانریختی است بنابراین f و f^{-1} پیوسته‌اند و چون f دوسویی است پس برای هر $A \subseteq S_1$ که $A \in \mathcal{T}_1$، $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ باز است. لذا f باز و پیوسته است.

(ب) ⇐ (ج). فرض کنیم $F \subseteq S_1$ بسته باشد. بنابراین $S_1 \setminus F$ باز است و چون f تابعی باز است، $f(S_1 \setminus F)$ باز است و چون f دوسویی است، $f(S_1 \setminus F) = S_2 \setminus f(F)$. در نتیجه $f(F)$ بسته است لذا f تابعی بسته است.

(ج) ⇐ (د). فرض کنیم $A \subseteq S_1$، چون f پیوسته است پس $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. چون f بسته است پس $f(\overline{A})$ بسته است. از این‌که $A \subseteq \overline{A}$ داریم $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$. پس $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

(د) ⇐ (الف) فرض کنیم $F \subseteq S_1$ بسته باشد، در این صورت چون $f(F) = f(\overline{F}) = \overline{f(F)}$، پس $f(F)$ بسته است یعنی $(f^{-1})^{-1}(F)$ بسته است، بنابراین f^{-1} پیوسته است. همچنین بنا به قضیهٔ ۲-۳-۷، f تابعی پیوسته است. ∎

۲-۳-۲۷ خواص توپولوژیکی

خاصیت P را یک خاصیت توپولوژیکی می‌نامیم هرگاه P تحت هر همسانریختی پایا باشد. یعنی اگر فضای

$(S_1, \mathscr{T}_1)$ این خاصیت را داشته باشد و $(S_2, \mathscr{T}_2)$ همسانریخت با $(S_1, \mathscr{T}_1)$ باشد، آن‌گاه $(S_2, \mathscr{T}_2)$ نیز آن خاصیت را داشته باشد.

۲-۳-۲۸ مثال

متریک‌پذیری یک خاصیت توپولوژیکی است فرض کنیم $(S_1, \mathscr{T}_{d_1})$ فضایی متریک‌پذیر باشد و $f : (S_1 , \mathscr{T}_{d_1}) \to (S_2, \mathscr{T}_2)$ یک همسانریختی باشد. نشان می‌دهیم متریک d_2 که به‌صورت $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x,y)$ روی $S_2 = f(S_1)$ تعریف می‌شود، توپولوژی $\mathscr{T}_{d_2}$ را روی S_2 القا می‌کند به طوری که $\mathscr{T}_2 = \mathscr{T}_{d_2}$.

ابتدا فرض کنیم $G \in \mathscr{T}_2$. در این صورت نشان می‌دهیم $G \in \mathscr{T}_{d_2}$. چون $G \in \mathscr{T}_2$ و f پیوسته است پس $f^{-1}(G)$ باز است. برای هر $y \in G$ گوی بازی چون $S_r(f^{-1}(y))$ موجود است که $S_r(f^{-1}(y)) \subseteq f^{-1}(G)$. در نتیجه $f(S_r(f^{-1}(y))) \subseteq G$. از طرفی

$$f(S_r(f^{-1}(y))) = \{f(x_\circ) : d_1(x_\circ, f^{-1}(y)) < r\} = \{f(x_\circ) : d_2(f(x_\circ), y) < r\} = S_r(y)$$

لذا y نقطه‌ای درونی برای زیرمجموعهٔ G از S_2 است و چون y دلخواه بود، پس $G \in \mathscr{T}_{d_2}$.

بالعکس، اگر $G \in \mathscr{T}_{d_2}$ و $y \in G$. چون G در $\mathscr{T}_{d_2}$ باز است پس گوی بازی چون $S_r(y)$ موجود است که $S_r(y) \subseteq G$. باتوجه به پوشابودن f و تعریف متریک، $S_r(y) = f(S_r(f^{-1}(y)))$ و چون f باز و $S_r(f^{-1}(y)) \in \mathscr{T}_{d_1}$ پس $S_r(y) \in \mathscr{T}_2$. از طرفی $\bigcup_{y \in G} S_r(y) = G$ و لذا $G \in \mathscr{T}_2$. ■

۲-۳-۲۹ مثال

$(S, \mathscr{T}(x))$ و $(S, \mathscr{C}(x))$ همسانریخت نیستند، زیرا $(S, \mathscr{T}(x))$ دارای خاصیت توپولوژیکی «هر همسایگی آن باز است» می‌باشد، در حالی‌که $(S, \mathscr{C}(x))$ این خاصیت را ندارد.

۲-۳-۳۰ خاصیت توپولوژیکی موروثی

فرض کنیم P یک خاصیت توپولوژیکی در فضای $(S, \mathscr{T})$ باشد. خاصیت P را موروثی می‌گوییم هرگاه هر زیرفضای $(S, \mathscr{T})$ نیز دارای خاصیت P باشد.

۲-۳-۳۱ مثال

متریک‌پذیربودن یک خاصیت توپولوژیکی موروثی است. زیرا اگر d یک متریک روی مجموعهٔ S باشد آن‌گاه برای هر زیرمجموعهٔ غیرتهی A از S، $d|_A$ یک متریک روی A است که $\mathscr{T}_{d|_A} = \mathscr{T}/A$.

۲-۳ مسائل

۱. فرض کنید $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ و $g: (S_2, \mathcal{T}_2) \to (S_3, \mathcal{T}_3)$ توابعی پیوسته باشند در این صورت ثابت کنید $gof: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_3, \mathcal{T}_3)$ پیوسته است.

۲. فرض کنید $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ و $\mathscr{B}_1$ و $\mathscr{B}_2$ به‌ترتیب پایه‌ای برای $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ باشند. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن‌که تابع f در $x \in S_1$ پیوسته باشد آن است که اگر B_2ی متعلق به $\mathscr{B}_2$ موجود باشد، که $f(x) \in B_2$ آن‌گاه $B_1 \in \mathscr{B}_1$ی موجود باشد، به طوری که $x \in B_1$ و $f(B_1) \subseteq B_2$.

۳. به‌ازای هر θ متعلق به $\mathbb{R}$، فرض کنید $f(\theta) = L_\theta = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y=\theta x\}$ و $S = \{L_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$. اولاً نشان دهید که $f: \mathbb{R} \to S$ یک تابع دوسویی است ثانیاً اگر $(L_a, L_b) = \{L_\theta : a < \theta < b\}$ آن‌گاه (L_{-1}, L_1) و $f^{-1}((L_{-1}, L_1))$ را در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}$ مشخص کنید. ثالثاً اگر $\mathcal{T} = \{G \subseteq S : f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_e\}$، نشان دهید که $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی S است. رابعاً نشان دهید که $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ و $(S, \mathcal{T})$ همسانریخت هستند.

۴. فرض کنید $f:(S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ تابعی باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

الف) f تابعی پیوسته است.

ب) به‌ازای هر زیرمجموعهٔ A از S_1، $f(A') \subseteq \overline{f(A)}$.

ج) به‌ازای هر زیرمجموعهٔ B از S_2، $bd(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(bd(B))$.

۵. ثابت کنید که رابطهٔ همسانریخت‌بودن در خانوادهٔ تمام فضاهای توپولوژیک، یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۶. فرض کنید $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های S باشد $S = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. در این صورت اگر $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فضای توپولوژیک دیگری باشد و به‌ازای هر $\alpha \in I$، $f_\alpha : (A_\alpha, \mathcal{T}/A_\alpha) \to (S_1, \mathcal{T}_1)$ تابعی پیوسته باشد و به‌ازای هر β و α متعلق به I، $f_\alpha \mid A_\alpha \cap A_\beta = f_\beta \mid A_\alpha \cap A_\beta$ آن‌گاه تابع پیوستهٔ منحصر به فردی مانند $f: (S, \mathcal{T}) \to (S_1, \mathcal{T}_1)$ موجود است، به طوری که به‌ازای هر α، تحدید f روی A_α برابر f_α است.

۷. نشان دهید تابع $f: (0, \infty) \to (0, \infty)$ با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{x}$ یک همسانریختی است و به کمک دنبالهٔ $\{\frac{1}{n}\}$ نشان دهید که «کوشی‌بودن» یک خاصیت توپولوژیکی نیست.

۸. فرض کنید $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to S_2, \mathcal{T}_2)$ پیوسته باشد. ثابت کنید که به‌ازای هر $A \in \mathcal{P}(S_1)$ تحدید f روی زیر فضای $(A, \mathcal{T}_1/A)$ پیوسته است.

۹. فرض کنید $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ یک همسانریختی باشد. اگر $A \subseteq S_1$، آن‌گاه $f:(A, \mathcal{T}_1 \backslash A) \to (f(A), \mathcal{T}_2 \backslash f(A))$ یک همسانریختی است.

۲-۴ توپولوژی حاصل‌ضربی تیخونوف، فضای خارج قسمتی، توپولوژیهای ضعیف و قوی القا شده توسط یک خانواده از توابع

قبلاً زیرفضاهای یک فضای توپولوژیک را به‌عنوان فضاهای توپولوژیک جدید به‌دست آمده از آن فضا معرفی کردیم. در این قسمت نیز می‌خواهیم به کمک فضاهای توپولوژیکی که در دست داریم یک فضای توپولوژیک جدید ارائه دهیم. بدین‌منظور به تعریف توپولوژیی موسوم به توپولوژی تیخونوف بر روی حاصل‌ضرب دکارتی یک رده داده شده از فضاهای توپولوژیک می‌پردازیم.

فرض کنیم $\{S_\alpha : \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد. می‌دانیم که حاصل‌ضرب دکارتی، $\prod\limits_{\alpha\in I} S_\alpha$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\prod_{\alpha\in I} S_\alpha = \{x: I \to \bigcup_{\alpha\in I} S_\alpha: \forall\alpha\in I: x(\alpha) \in S_\alpha\}$$

بنا به اصل انتخاب $\prod\limits_{\alpha\in I} S_\alpha \neq \phi$.

به‌ازای هر α، افکنش (یا تصویر) $\pi_\alpha : \prod\limits_{\alpha\in I} S_\alpha \to S_\alpha$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi_\alpha(x) = x(\alpha) .$$

حال اگر به‌ازای هر α، $\mathscr{T}_\alpha$ یک توپولوژی روی S_α باشد، آن‌گاه، $\mathscr{L} = \{\pi_\alpha^{-1}(G): G \in \mathscr{T}_\alpha, \alpha \in I\}$ زیرپایه‌ای برای یک توپولوژی $\mathscr{T}$ روی مجموعهٔ $S = \prod\limits_{\alpha\in I} S_\alpha$ است که به **توپولوژی حاصل‌ضربی تیخونوف** معروف است. معمولاً $(S, \mathscr{T})$ را به‌صورت $\prod\limits_{\alpha\in I}(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ نوشته و $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ را فضای مؤلفهٔ αام می‌نامیم. $\mathscr{T}$ را به‌صورت $\prod\limits_{\alpha\in I} \mathscr{T}_\alpha$ نیز نمایش می‌دهیم. لازم به تذکر است که در این قرارداد $\prod\limits_{\alpha\in I} \mathscr{T}_\alpha$ مساوی حاصل‌ضرب دکارتی خانوادهٔ $\{\mathscr{T}_\alpha:\alpha \in I\}$ نیست. فضای $(S, \mathscr{T})$ را **فضای حاصل‌ضربی تیخونوف** می‌نامیم.

۲-۴-۱ مثال

فرض کنیم $S_1 = S_2 = \{a,b,c\}$ ، $\mathscr{T}_1 = \{\phi, \{a\}, \{b,c\} , S_1\}$ و $\mathscr{T}_2 = \{\phi, \{a,b\}, \{c\}, S_2\}$. با متناظرکردن x با زوج $(x(1) , x(2))$ داریم

$$S_1 \times S_2 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,a), (b,c), (c,c) , (c,a), (c,b)\}.$$

زیرپایه توپولوژی $\mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\mathscr{L} = \{\phi, \pi_1^{-1}(\{a\}) , \pi_1^{-1}(\{b,c\}) , \pi_2^{-1}(\{c\}) , \pi_2^{-1}(\{a,b\}) , S_1 \times S_2\}.$$

بنابراین:

$$\mathscr{L} = \{\phi, \{(a,a), (a,b), (a,c)\}, \{(b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\} , \{(a,c), (b,c), (c,c)\}, \{(a,a), (b,a), (c,a), (a,b), (b,b), (c,b)\}, S_1 \times S_2\}$$

در نتیجه یک پایه برای $\mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2$ عبارت است از:

$$\mathscr{B} = \mathscr{L} \cup \{\{(a,a) , (a,b)\} , \{(a,c)\} , \{(b,a) , (b,b) , (c,a) , (c,b)\} , \{(b,c) , (c,c)\}\}$$

به‌دست‌آوردن اعضای $\mathscr{T}_1 \times \mathscr{T}_2$ به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

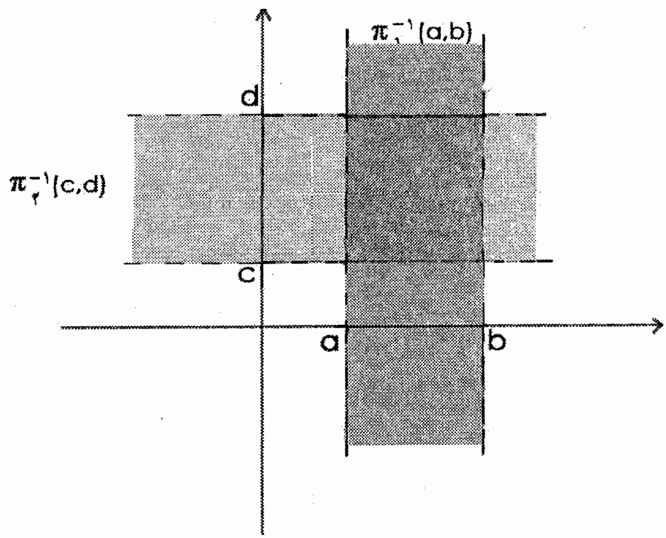
۲-۴-۲ مثال

اگر $S_1 = S_2 = \mathbb{R}$ و $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ توپولوژی اقلیدسی باشد، $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ برابر توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}^2$ است، زیرا:

$$\begin{cases} \pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \pi_1((x,y)) = x \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \pi_2((x,y)) = y \end{cases}$$

و $\pi_1^{-1}((a,b)) \cap \pi_2^{-1}((c,d)) = (a,b) \times (c,d)$ که عنصر نمونهٔ پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی است.

توجه کنید π_iها بسته نیستند، زیرا $A = \{(x,y): xy = 1\}$ در $\mathbb{R}^2$ با توپولوژی حاصل‌ضربی تیخونوف (اقلیدسی) بسته است درحالی‌که $\pi_1(A) = \pi_2(A) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ بسته نیستند. این مثال قابل تعمیم به $\mathbb{R}^n$ است.



۲-۴-۳ قضیه

در فضای حاصل‌ضربی تیخونوف، هر افکنش π_α تابعی پیوسته، برو و باز است.

برهان. فرض کنیم $G_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ چون $\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha)$ عضوی از زیرپایهٔ توپولوژی حاصل‌ضربی $\mathcal{T}$ است و بنابراین $\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha) \in \mathcal{T}$ و بنابراین π_α پیوسته است.

فرض کنیم $y \in S_\alpha$ داده شده باشد. چون $\{S_{\alpha'}: \alpha' \in I,\ \alpha' \neq \alpha\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی است بنابر اصل انتخاب $\prod_{\substack{\alpha' \in I \\ \alpha' \neq \alpha}} S_{\alpha'} \neq \phi$. فرض کنیم $x \in \prod_{\substack{\alpha' \in I \\ \alpha' \neq \alpha}} S_{\alpha'}$. تابع x' را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x' : I \to \bigcup_{\alpha\in I} S_\alpha$$

$$x'(\alpha) = \begin{cases} x(\alpha) & \alpha \neq \alpha' \\ y & \alpha = \alpha' \end{cases}$$

بنابراین $x' \in \prod_{\alpha\in I} S_\alpha$ و $\pi_\alpha(x') = y$ بنابراین π_α تابعی برو است.

حال فرض کنیم $\mathscr{B}$ پایهٔ توپولوژی $\mathscr{T}$ باشد. چون هر عضو $\mathscr{T}$ اجتماعی از اعضای $\mathscr{B}$ است، برای اثبات بازبودن π_α کافی است ثابت کنیم که به‌ازای هر $B \in \mathscr{B}$، $\pi_\alpha(B) \in \mathscr{T}_\alpha$. بنا به تعریف داریم $1 \leq i \leq n$ و $G_{\alpha_i} \in \mathscr{T}_{\alpha_i}$ و $B = \bigcap_{i=1}^{n} \pi^{-1}_{\alpha_i}(G_{\alpha_i})$. نشان می‌دهیم:

$$\pi_\alpha(B) = \begin{cases} G_\alpha & \alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \\ S_\alpha & \alpha \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \end{cases}$$

فرض کنیم $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ و $b \in S_\alpha$. بنا به اصل انتخاب به‌ازای هر $\beta \in I$، $b_\beta \in S_\beta$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای هر $1 \leq i \leq n$، $b_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$. سپس تابع $x \in \prod_{\beta\in I} S_\beta$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x(\beta) = \begin{cases} b & \beta = \alpha \\ b_\beta & \beta \neq \alpha \end{cases}$$

در نتیجه $\pi_\alpha(x) = b$ و چون $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi^{-1}_{\alpha_i}(G_{\alpha_i})$، پس $\pi_\alpha(x) \in \pi_\alpha(\bigcap_{i=1}^{n} \pi^{-1}_{\alpha_i}(G_{\alpha_i}))$ یعنی $b \in \pi_\alpha(\bigcap_{i=1}^{n} \pi^{-1}_{\alpha_i}(G_{\alpha_i}))$. بنابراین $\pi_\alpha(B) = S_\alpha$.

از طرفی اگر $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$، آنگاه $\alpha = \alpha_j$ که در آن $1 \leq j \leq n$. چون $\bigcap_{i=1}^{n} \pi^{-1}_{\alpha_i}(G_{\alpha_i}) \subseteq \pi^{-1}_{\alpha_j}(G_{\alpha_j})$. بنابراین $\pi_{\alpha_j}(B) \subseteq G_{\alpha_j}$. حال اگر $b \in G_{\alpha_j}$ و به‌ازای هر β متعلق به I و $\beta \neq \alpha_j$، $b_\beta \in S_\beta$ را طوری انتخاب کنیم که $b_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$ که در آن $i \neq j$، آنگاه چنانچه تعریف کنیم:

$$x(\beta) = \begin{cases} b & \beta = \alpha_j \\ b_\beta & \beta \neq \alpha_j \end{cases}$$

x عضو $\prod_{\beta\in I} S_\beta$ است و $x \in B$، همچنین $\pi_{\alpha_j}(x) = x(\alpha_j) = b$ پس $b \in \pi_{\alpha_j}(B)$ در نتیجه $G_{\alpha_j} \subseteq \pi_{\alpha_j}(B)$. بنابراین $\pi_{\alpha_j}(B) = G_{\alpha_j}$. ∎

۲-۴-۴ مثال

فرض کنیم برای هر $1 \leq i \leq n$، $\mathscr{T}_i = \mathscr{T}_e$ و $S_i = \mathbb{R}$ همچنین اگر $A_i = [0, 1]$، آنگاه $\prod_{i=1}^{n} (A_i, \mathscr{T}_i / A_i)$ را مکعب واحد nـ بعدی می‌گوییم که زیرفضایی از $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_e)$ است.

آنچه در این جا گفته شد تنها یک طریقهٔ ساختن توپولوژی روی حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌هاست. توپولوژی دیگری روی $\mathbb{R}^2$ وجود دارد که با توپولوژی تیخونوف روی $\mathbb{R}^2$ متفاوت است.

درواقـع اگـر $\mathscr{B} = \{[a,b) \times [c,d) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$، آن‌گـاه $\mathscr{B}$ پـایه‌ای بـرای یک تـوپولوژی $\mathscr{T}$ روی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ است که به آن **توپولوژی جعبه‌ای چپ پایینی** می‌گوییم. توپولوژی $\mathscr{T}$ با توپولوژی $\mathscr{T}_e$ بـرابـر نیست.

۲-۴-۵ خاصیت حاصل‌ضربی

خـاصیت تـوپولوژیکی P را حـاصل‌ضربی مـی‌گوییم، هـرگاه بـرای هـر $\alpha \in I$، $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ خـاصیت P را داشته باشند، فضای حاصل‌ضربی تیخونوف $\prod_{\alpha \in I} (S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ نیز خاصیت P را داشته باشد.

در این قسمت ابتدا با در دست داشتن یک فضای توپولوژیک و یک تابع پوشه‌ی f از این فضا به یک مجموعهٔ داده شده یک توپولوژی به نام توپولوژی خارج قسمتی روی آن مجموعه به‌دست می‌آوریم که قوی‌ترین توپولوژی است که تحت آن تابع f پیوسته است. دراین‌حالت این تابع را یک همانندی می‌نامیم. به‌عنوان حالت خاص از توپولوژی خارج قسمتی روی یک مجموعه، فضاهای خارج قسمتی را مـعرفی خواهیم کرد.

۲-۴-۶ توپولوژی خارج قسمتی و توپولوژی همانندی

فرض کنیم $(S_1, \mathscr{T}_1)$ فضای توپولوژیک و $S_2 \neq \phi$ یک مجموعه باشد و $f : S_1 \to S_2$ تابعی برو باشد. قوی‌ترین توپولوژی روی S_2 راکه نسبت به آن تابع f پیوسته باشد، **توپولوژی خارج قسمتی روی S_2 تولید شده توسط f** می‌نامیم و با $\mathscr{T}_q$ نمایش مـی‌دهیم. واضـح است کـه $\mathscr{T}_q = \{G \in \mathcal{P}(S_2) : f^{-1}(G) \in \mathscr{T}_1\}$. توپولوژی $\mathscr{T}_q$ را **توپولوژی همانندی** نیز می‌نامند.

۲-۴-۷ فضای خارج‌قسمتی

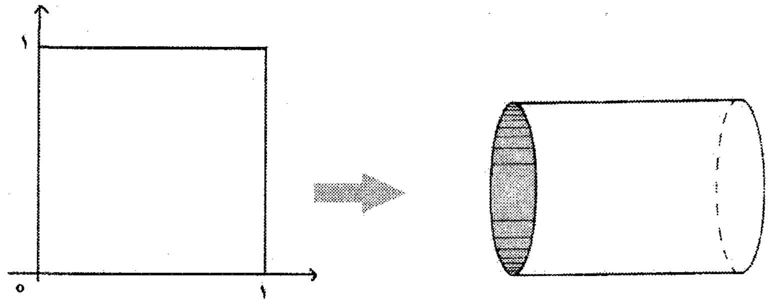
فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک و E یک رابطهٔ هـم‌ارزی روی S بـاشد و S/E خـانوادهٔ تـمام رده‌های هم‌ارزی در E باشد و $\theta : S \to S/E$ تابع $\theta(x) = [x]$ باشد (منظور از نماد $[x]$، ردهٔ هم‌ارزی x است). اگر $\mathscr{T}_q$ توپولوژی خارج قسمتی تولید شده توسط θ روی S/E باشد، آن‌گاه $(S/E, \mathscr{T}_q)$ را **فـضای خـارج قسمتی** می‌گوییم.

در حقیقت هر عضو از مجموعهٔ S/E از یکی‌گرفتن تمام نقاطی در S که در یک ردهٔ هم ارزی قرار دارند به‌دست می‌آید. با این توصیف، هر مجموعهٔ باز در S/E گردایه‌ای از رده‌های هم‌ارزی است کـه اجـتماع اعضای این رده‌های هم‌ارزی به‌عنوان زیرمجموعه‌هایی از S در S باز هستند.

مثالهای زیر به درک این مفهوم کمک می‌کنند:

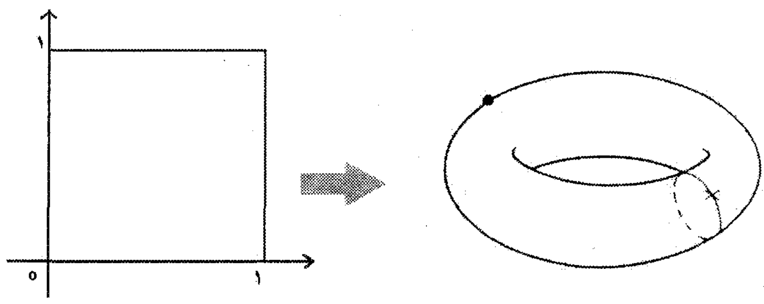
۲-۴-۸ مثال

روی زیر فضای $S = [0,1] \times [0,1]$ از $\mathbb{R}^2$ رابطهٔ هم‌ارزی زیر را تعریف می‌کنیم: برای هر $x \in [0,1]$، $(x,0)E(x,1)$ و هر نقطهٔ دیگر S تنها با خودش هم‌ارز است. در این صورت فضای خارج قسمتی S/E با «استوانه» همسانریخت است. به شکل زیر توجه کنید: (باتوجه به رابطهٔ هم‌ارزی لبهٔ بالایی را به لبهٔ پایینی می‌چسبانیم).



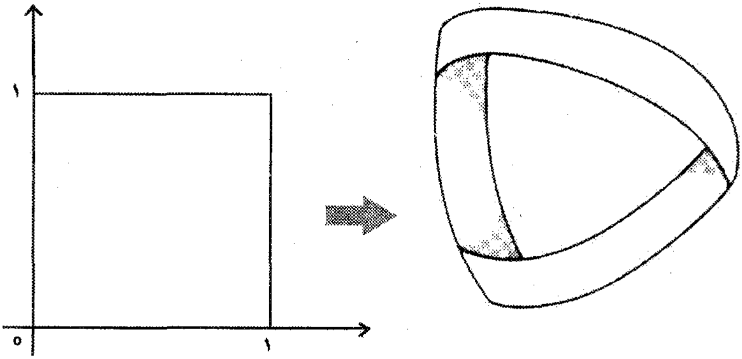
۲-۴-۹ مثال

روی زیر فضای $S = [0,1] \times [0,1]$ از $\mathbb{R}^2$ رابطهٔ هم‌ارزی E را به این صورت درنظر می‌گیریم: برای هر $x \in [0,1]$، $(x,0)E(x,1)$، برای هر $y \in [0,1]$ و $(0,y)E(1,y)$، و هر نقطهٔ دیگر با خودش هم ارز است. در این صورت S/E همسانریخت با «چنبره» است.



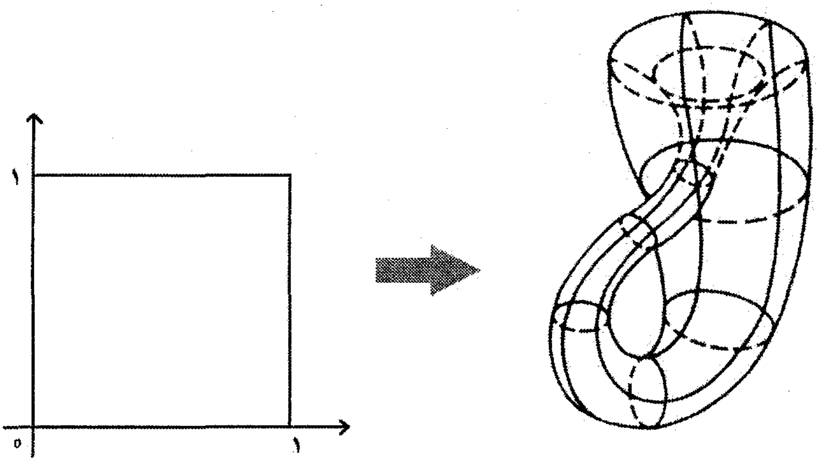
۲-۴-۱۰ مثال

روی زیر فضای $S = [0,1] \times [0,1]$ از $\mathbb{R}^2$ رابطهٔ هم‌ارزی E را به این صورت تعریف می‌کنیم: برای هر $x \in [0,1]$، $(x,0)E(1-x,1)$ و هر نقطهٔ دیگر تنها با خودش هم‌ارز است. در این صورت فضای خارج قسمتی S/E همسانریخت با «نوار موبیوس» است.



۲-۴-۱۱ مثال

روی زیرفضای $[0,1] \times S^1$ از $\mathbb{R}^3$ که در آن S^1 دایرهٔ واحد در صفحه مختلط یعنی $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ است، رابطه هم‌ارزی E را به این صورت تعریف می‌کنیم: برای هر $z \in S^1$، $(z, 0)E(\bar{z}, 1)$، و هر نقطهٔ دیگر تنها با خودش هم‌ارز است. فضای خارج قسمتی حاصل، همسانریخت با «بطری کلاین» است. درواقع هیچ زیرفضایی از فضای $\mathbb{R}^3$ با آن همسانریخت نیست. برای آن‌که به تجسمی از آن دست یابیم شکل زیر راکه به‌روش «مقطع ظاهری» ارائه شده است درنظر بگیرید:



۲-۴-۱۲ مثال

فرض کنیم $S = [0,1]$ و $E = \{(x,y)$: x,y هر دو گویا، یا هردو اصم هستند$\}$ در این صورت فضای خارج قسمتی S/E فضای دو نقطه‌ای با توپولوژی ناگسسته است.

۲-۴-۱۳ مثال

فرض کنیم $S = [0,1]$ و $E = \{(0,1),(1,0)\} \cup \{(x,x) : x \in S\}$ در این صورت E یک رابطهٔ هم‌ارزی روی S است و فضای خارج قسمتی S/E همسانریخت با S^1 است زیرا اگر $\theta : S \to S/E$ تابع $\theta(x) = [x]$ باشد، آن‌گاه $\theta : S \to S/E$ پیوسته است. (چرا؟) حال اگر $f : [0,1]$ که $f(x) = e^{2\pi ix}$، آن‌گاه f پیوسته است. بنابراین $f \circ \theta^{-1} : S/E \to S^1$، تابعی دوسویی باز و بسته و بنابراین همسانریختی است. البته باید توجه داشت که رابطهٔ هم ارزی E، دو نقطهٔ ۰ و ۱ را همانند خواهد کرد و بنابراین $\theta^{-1}([1]) = \theta^{-1}([0]) = \{0,1\}$، $f \circ \theta^{-1}([0]) = \{1\}$ تک عضوی می‌شود در نتیجه $f \circ \theta^{-1}$ را می‌توان به‌عنوان تابع درنظر گرفت.

باتوجه به قضیهٔ زیر با در دست داشتن یک تابع پیوسته از یک فضای توپولوژیک به فضایی دیگر که حافظ رابطهٔ هم‌ارزی تعریف شده روی آنهاست می‌توان یک تابع پیوسته روی فضای خارج‌قسمتی نظیر آنها به‌دست آورد.

۲-۴-۱۴ قضیه

فرض کنیم $(S_1, \mathcal{T}_1)$ و $(S_2, \mathcal{T}_2)$ دو فضای توپولوژیک و E_1 و E_2 دو رابطهٔ هم‌ارزی به ترتیب روی S_1 و S_2 باشند. در این صورت اگر $f : (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ تابعی پیوسته باشد به طوری که رابطهٔ هم‌ارزی را حفظ کند، آن‌گاه تابع $f_* : S_1/E_1 \to S_2/E_2$ که به‌صورت $f_*([x]) = [f(x)]$ تعریف می‌شود، پیوسته است.

برهان. چون f حافظ رابطهٔ هم‌ارزی است، f_* یک تابع است. چون نمودار زیر تعویض‌پذیر است، بنابراین $f_* \circ \theta_1 = \theta_2 \circ f$. به‌علاوه از پیوستگی θ_2 و f نتیجه می‌شود $\theta_2 \circ f$ پیوسته است. در نتیجه برای هر مجموعهٔ باز در S_2/E_2 مانند G، $f^{-1}(\theta_2^{-1}(G))$ در S_1 باز است و چون $f_* \circ \theta_1 = \theta_2 \circ f$ پس $\theta_1^{-1}(f_*^{-1}(G))$ در S_1 باز است و چون θ_1 همانندی است پس $f_*^{-1}(G)$ در S_1/E_1 باز است. پس f_* پیوسته است.

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_1"'] & S_2 \arrow[d, "\theta_2"] \\ S_1/E_1 \arrow[r, "f_*"'] & S_2/E_2 \end{tikzcd}$$

۲-۴-۱۵ تمرین

فرض کنید (S,ρ) یک فضای شبه متریک باشد و $E = \{(x,y) : \rho(x,y) = 0\}$، دراین صورت E یک رابطهٔ هم‌ارزی روی S است و $(S/E, \mathcal{T})$ متریک‌پذیر است.

(راهنمایی: نشان دهید اگر $d([x],[y]) = \rho(x,y)$ آن گاه $(S/E, d)$ فضای متریک است و ثابت کنید که $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\rho$. توجه کنید که روی یک فضای شبه متریک، همچون یک فضای متریک می‌توان یک توپولوژی موسوم به توپولوژی القایی توسط شبه متریک تعریف کرد.)

۲-۴-۱۶ همانندی

فرض کنیم $(S_1, \mathcal{T}_1)$ و $(S_2, \mathcal{T}_2)$ دو فضای توپولوژیک باشند تابع برو و پیوسته $f : (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ را یک همانندی گوییم، هرگاه $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_q$، یعنی $\mathcal{T}_2$ برابر توپولوژی همانندی تولید شده توسط f باشد. به‌عبارت دیگر $\mathcal{T}_2 = \{G: f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_1\}$.

۲-۴-۱۷ مثال

اگر $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دو توپولوژی روی S باشد به‌طوری که تابع همانی $i(x) = x$ از $(S, \mathcal{T}_1)$ بر روی $(S, \mathcal{T}_2)$ پیوسته باشد، آن‌گاه شرط لازم و کافی برای آن‌که i یک همانندی باشد آن است که $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. بنابراین هر تابع برو و پیوسته لازم نیست همانندی باشد.

۲-۴-۱۸ قضیه

اگر $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ تابعی برو، پیوسته و باز باشد آن‌گاه f همانندی است.

برهان. چون f پیوسته است بنابراین $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_q$. حال فرض کنیم $G \in \mathcal{T}_q$. بنابراین $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_1$ و چون f باز و برو است پس $G \in \mathcal{T}_2$. پس $\mathcal{T}_q \subseteq \mathcal{T}_2$. در نتیجه $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_q$. پس f همانندی است. ■

۲-۴-۱۹ تمرین

اگر $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ پیوسته، برو و بسته باشد، آن‌گاه f همانندی است.

۲-۴-۲۰ قضیه

فرض کنیم $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ پیوسته باشد. اگر تابعی پیوسته مانند g از $(S_2, \mathcal{T}_2)$ به $(S_1, \mathcal{T}_1)$ موجود باشد به طوری‌که $f \circ g = i_{S_2}$ که در آن i_{S_2} تابع همانی روی S_2 است، آن‌گاه f همانندی است.

برهان. واضح است که f برو است. حال فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از S_2 باشد به طوری که $f^{-1}(A)$ باز

باشد. در این صورت $(g^{-1} \circ f^{-1})(A)$ در $S_۲$ باز است و چون $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1} = i_{s_۲}$ نتیجه می‌شود که A در $S_۲$ باز است. پس f همانندی است. ■

۲-۴-۲۱ قضیه

فرض کنیم $f: (S_۱, \mathcal{T}_۱) \to (S_۲, \mathcal{T}_۲)$ تابعی پیوسته و برو باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای آن‌که f همانندی باشد آن است که به‌ازای هر فضای توپولوژیک $(S_۳, \mathcal{T}_۳)$ و هر تابع $g: (S_۲, \mathcal{T}_۲) \to (S_۳, \mathcal{T}_۳)$ پیوستگی $g \circ f$ پیوستگی g را نتیجه دهد.

برهان. فرض کنیم f همانندی باشد و $g \circ f$ پیوسته باشد. به‌ازای هر $G \in \mathcal{T}_۳$ داریم $f^{-1}(g^{-1}(G)) \in \mathcal{T}_۱$ و چون f باز و برو است پس $g^{-1}(G) \in \mathcal{T}_۲$، در نتیجه g پیوسته است.

بالعکس، فرض کنیم برای هر فضای $(S_۳, \mathcal{T}_۳)$ و هر تابع $g: (S_۲, \mathcal{T}_۲) \to (S_۳, \mathcal{T}_۳)$ که $g \circ f$ پیوسته باشد نتیجه شود که g پیوسته است. نشان می‌دهیم f یک همانندی است. قرار می‌دهیم: $S_۳ = S_۲$ و $\mathcal{T}_۳ = \mathcal{T}_q$ که $\mathcal{T}_q$ همان توپولوژی خارج قسمتی تولید شده توسط f است. بنابراین $f: (S_۱, \mathcal{T}_۱) \to (S_۲, \mathcal{T}_q)$ پیوسته است. حال اگر $i_{s_۲}: (S_۲, \mathcal{T}_۲) \to (S_۲, \mathcal{T}_q)$ تابع همانی باشد، چون f از $(S_۱, \mathcal{T}_۱)$ به $(S_۲, \mathcal{T}_۲)$ پیوسته است پس $\mathcal{T}_۲ \subseteq \mathcal{T}_q$.

چون تابع $i_{s_۲} \circ f = f$ از $(S_۱, \mathcal{T}_۱)$ به $(S_۲, \mathcal{T}_q)$ پیوسته است، بنابر فرض $i_{s_۲}: (S_۲, \mathcal{T}_۲) \to (S_۲, \mathcal{T}_q)$ پیوسته خواهد بود. بنابراین $\mathcal{T}_q \subseteq \mathcal{T}_۲$ و بنابراین $\mathcal{T}_۲ = \mathcal{T}_q$. ■

۲-۴-۲۲ توپولوژی‌های ضعیف و قوی القا شده توسط یک خانواده از توابع

در این بخش می‌خواهیم روی مجموعه‌ای ناتهی چون S به کمک یک گردایه از فضاهای توپولوژیک و یک گردایهٔ خاص از توابع، یک توپولوژی تعریف کنیم.

فرض کنیم $\{(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک، S یک مجموعهٔ غیرتهی و برای هر $\alpha \in I$، تابع $f_\alpha: S \to S_\alpha$ داده شده باشد. $\mathscr{A}$ را مجموعهٔ تمام توپولوژی‌هایی روی S درنظر می‌گیریم که تحت آن هر تابع f_α پیوسته است. این مجموعه غیرتهی است زیرا همیشه توپولوژی بدیهی روی S به آن تعلق دارد. از طرفی اشتراک تمام اعضای $\mathscr{A}$ خود یک توپولوژی روی S است که به آسانی دیده می‌شود که هر f_α تحت این توپولوژی پیوسته است و در نتیجه این توپولوژی به $\mathscr{A}$ تعلق دارد و در حقیقت ضعیف‌ترین توپولوژی روی S است که تحت آن هر تابع f_α پیوسته است. در حقیقت این توپولوژی توسط مجموعهٔ $\mathscr{L} = \{f_\alpha^{-1}(G) : G \in \mathcal{T}_\alpha , \alpha \in I\}$ تولید می‌شود زیرا از یک طرف تحت این توپولوژی هر تابع f_α پیوسته است، پس این توپولوژی شامل $\mathscr{L}$ است و از طرفی دیگر در هر توپولوژی روی S که شامل $\mathscr{L}$ است، هر تابع f_α پیوسته است.

یک مثال مهم از این نوع توپولوژی، توپولوژی تیخونوف بر مجموعهٔ $S = \prod_{\alpha \in I} S_\alpha$ است که توسط افکنشهای $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in I} S_\alpha \to S_\alpha$ القا می‌شود. مثال مهم دیگر، توپولوژی القا شده توسط رابطهٔ شمول $i: A \to S$ می‌باشد.

۲-۴-۲۳ قضیه

فرض کنیم $\{(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک، S یک مجموعهٔ ناتهی و برای هر α، $f_\alpha: S \to S_\alpha$ یک تابع و $\mathcal{T}$ توپولوژی القا شده توسط خانوادهٔ $\{f_\alpha\}$ روی S باشد. در این صورت یک تابع $\varphi: (S', \mathcal{T}') \to (S, \mathcal{T})$ پیوسته است، اگر و فقط اگر برای هر α، $f_\alpha \circ \varphi$ تابعی پیوسته از $(S', \mathcal{T}')$ به $(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ باشد.

برهان. اگر φ پیوسته باشد، چون f_αها پیوسته‌اند، برای برای هر α، $f_\alpha \circ \varphi$ پیوسته است. بالعکس فرض کنیم برای هر α، $f_\alpha \circ \varphi$ پیوسته باشد و $G \in \mathcal{T}$. اگر B عضوی از پایه $\mathcal{T}$ باشد، $B = \bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$ که در آن برای هر $1 \leq i \leq n$، $G_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_{\alpha_i}$. در این صورت $\varphi^{-1}(B) = \bigcap_{i=1}^{n} (f_{\alpha_i} \circ \varphi)^{-1}(G_{\alpha_i})$. اما برای هر α، $f_\alpha \circ \varphi$ پیوسته است پس $(f_{\alpha_i} \circ \varphi)^{-1}(G_{\alpha_i})$ها و در نتیجه $\varphi^{-1}(B)$ متعلق به $\mathcal{T}'$ هستند. اینک اگر $G \in \mathcal{T}$، آنگاه G اجتماعی از اعضای پایهٔ $\mathcal{T}$ است و در نتیجه $\varphi^{-1}(G)$ اجتماعی از اعضایی به‌صورت $\varphi^{-1}(B)$ است که در آن B عضوی از پایهٔ $\mathcal{T}$ است، پس $\varphi^{-1}(G) \in \mathcal{T}'$. لذا φ پیوسته است. ■

اینک فرض کنید خانوادهٔ $\{(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in I\}$ از فضاهای توپولوژیک، مجموعهٔ غیرتهی S و توابع (پوشای) $g_\alpha: S_\alpha \to S$ داده شده باشند. در این صورت $\mathcal{T} = \{G:$ برای هر α، $g_\alpha^{-1}(G)$ در S_α باز است$\}$، قوی‌ترین توپولوژی روی S است که تحت آن همهٔ توابع $\mathcal{T}_\alpha$ پیوسته هستند. یک مثال مهم از این نوع توپولوژی، توپولوژی خارج قسمتی روی مجموعهٔ S_2 است که درواقع قوی‌ترین توپولوژی القا شده توسط یک تابع برو $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to S_2$ است.

۲-۴-۲۴ قضیه

فرض کنیم $\{(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک، S یک مجموعه و برای هر α، $g_\alpha: S_\alpha \to S$ یک تابع و $\mathcal{T}$ قوی‌ترین توپولوژی القا شده روی S باشد. در این صورت یک تابع $\psi: (S, \mathcal{T}) \to (S', \mathcal{T}')$ پیوسته است، اگر و فقط اگر برای هر α، $\psi \circ g_\alpha$ پیوسته باشد.

برهان. اگر ψ پیوسته باشد چون g_αها پیوسته‌اند، برای هر α، $\psi \circ g_\alpha$ پیوسته است.

بالعکس، اگر برای هر α، $\psi \circ g_\alpha$ پیوسته باشد و $G \in \mathcal{T}'$، آنگاه برای هر α، $g_\alpha^{-1}(\psi^{-1}(G)) = (\psi \circ g_\alpha)^{-1}(G)$ پس $\psi^{-1}(G) \in \mathcal{T}$. بنابراین ψ پیوسته است. ■

۴-۲ مسائل

۱. فرض کنید $(S, \mathcal{T}) = \prod_{\alpha\in I} (S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ و به‌ازای هر $\alpha \in I$، $\mathcal{B}_\alpha$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}_\alpha$ باشد. ثابت کنید که $\mathcal{L} = \{\pi_\alpha^{-1}(B_\alpha) : B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha,\ \alpha \in I\}$ زیر پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است.

۲. اگر $\mathcal{B}_1$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}_1$ روی S_1 و $\mathcal{B}_2$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}_2$ روی S_2 باشند، آن‌گاه ثابت کنید که $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ پایه‌ای برای توپولوژی حاصل‌ضربی تیخونوف می‌باشد.

۳. فرض کنید $x_0 \in \prod_{\alpha\in I}(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ و $\{ x$ و $x(\alpha)$ و $x_0(\alpha)$ فقط در تعداد متناهی α برابر نیستند: $D = \{x \in \prod (S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$. در این صورت ثابت کنید که D در $\prod_{\alpha\in I} (S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ چگال است.

۴. فرض کنید به‌ازای هر $\alpha \in I$، $A_\alpha \subseteq S_\alpha$. ثابت کنید که در توپولوژی حاصل‌ضربی تیخونوف $\overline{\prod_{\alpha\in I} A_\alpha} = \prod_{\alpha\in I} \overline{A}_\alpha$.

۵. فرض کنید $(S_i, \mathcal{T}_i)$ به‌ازای هر $1 \le i \le n$ فضای توپولوژیک باشد. در این صورت ثابت کنید $\mathcal{B}^* = \{G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n : G_i \in \mathcal{T}_i,\ 1 \le i \le n\}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی روی $\prod_{i=1}^{n} S_i$ است که به آن توپولوژی جعبه‌ای می‌گوییم.

ثابت کنید که توپولوژی جعبه‌ای روی حاصل‌ضرب متناهی تیخونوف برابر توپولوژی تیخونوف است.

۶. ثابت کنید که اگر A یک فضای خارج قسمتی از S، و B یک فضای خارج‌قسمتی از A باشد آن‌گاه B با یک فضای خارج قسمتی از S همسانریخت است.

۷. فرض کنید $f : (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ همانندی باشد و S_3 یک مجموعه و $g : S_2 \to S_3$ برو باشد در این صورت ثابت کنید که توپولوژی همانندی تولید شده توسط $g \circ f$ برابر توپولوژی همانندی تولید شده توسط g است. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آن‌که $g \circ f$ همانندی باشد آن است که g همانندی باشد.

۸. ثابت کنید اگر A_α زیرمجموعهٔ $(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ باشد؛ آن‌گاه $\prod_{\alpha\in I} (\mathcal{T}_\alpha / A_\alpha) = \prod_{\alpha\in I} \mathcal{T}_\alpha / \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$. یعنی حاصل‌ضرب زیر فضاها یک زیرفضا از فضای حاصل‌ضرب است.

۹. فرض کنید $\{(E_i, d_i)\}_{1 \le i \le n}$ یک خانوادهٔ متناهی از فضاهای متریک باشد، $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$. در این صورت ثابت کنید توپولوژی تیخونوف بر $\prod_{i=1}^{n} E_i$ برابر توپولوژی القا شده توسط هریک از مترهای زیر است:

$$d_1(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_2(x, y) = \max_{1 \le i \le n} d_i(x_i, y_i)$$

$$d_3(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)$$

۱۰. فرض کنید $\{(E_n, d_n) : n \in \mathbb{N}\}$ دنباله‌ای از فضاهای متریک باشد. در این صورت ثابت کنید برای هر نقطهٔ $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$، $d(\{x_n\},\{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}$ یک متر روی $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ است و توپولوژی القا شده توسط آن برابر توپولوژی حاصل‌ضربی است.

۱۱. فرض کنید $f:(S_1,\mathcal{T}_1) \to (S_2,\mathcal{T}_2)$ یک همانندی باشد و $g:(S_1,\mathcal{T}_1) \to (S_3,\mathcal{T}_3)$ پیوسته باشد. اگر $g\circ f^{-1}$ تک عضوی باشد، (یعنی به‌ازای هر $y \in S_2$، g روی $f^{-1}(\{y\})$ ثابت باشد). آن‌گاه ثابت کنید

(الف) $g\circ f^{-1} : (S_2,\mathcal{T}_2) \to (S_3,\mathcal{T}_3)$ پیوسته است و نمودار زیر تعویض‌پذیر است.

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & S_2 \arrow[dl, "gof^{-1}"] \\ S_3 & \end{tikzcd}$$

(ب) شرط لازم و کافی برای آن‌که $g\circ f^{-1}$ باز باشد آن است که به‌ازای هر مجموعهٔ باز G که $G = f^{-1}(f(G))$، $g(G)$ باز باشد.

۲-۵-۱ فضای شمارای دوم

فضای توپولوژیک $(S,\mathcal{T})$ را شمارای دوم می‌گوییم هرگاه $\mathcal{T}$ دارای یک پایهٔ شمارا باشد.

۵-۲ فضاهای شمارای اول، شمارای دوم و تفکیک‌پذیر

۲-۵-۲ مثال

$(\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$ شمارای دوم است، کافی است $\mathcal{B} = \{(r-\frac{1}{n}, r+\frac{1}{n}) : r\in\mathbb{Q}, n\in\mathbb{N}\}$ را درنظر بگیریم. همچنین $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_e)$ شمارای دوم است. $\mathbb{R}$ با توپولوژی گسسته و همچنین $(\mathbb{R},\mathcal{T}_l)$ شمارای دوم نیستند.

۲-۵-۳ پایهٔ موضعی

فرض کنید $(S,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک باشد و $x \in S$. خانوادهٔ $\mathcal{B}_x$ از اعضای $\mathcal{T}$ را که شامل x هستند یک پایه موضعی در x می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر G متعلق به $\mathcal{T}$ که $x \in G$، $B \in \mathcal{B}_x$ی موجود باشد، به طوری که $B \subseteq G$.

۲-۵-۴ فضای شمارای اول

فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ را شمارای اول می‌گوییم هرگاه به‌ازای هر $x \in S$، پایهٔ موضعی شمارایی مانند $\mathscr{B}_x$ در x موجود باشد.

۲-۵-۵ مثال

هر فضای گسسته و همچنین $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_l)$ شمارای اول هستند. $\mathbb{R}$ با توپولوژی هم متناهی شمارای اول نیست (چرا؟) و چون هر فضای شمارای دوم، شمارای اول نیز می‌باشد، بنابراین $\mathbb{R}$ با توپولوژی هم متناهی شمارای دوم نیز نمی‌باشد.

۲-۵-۶ مثال

هر فضای متریک (E, d) شمارای اول است زیرا به‌ازای هر $x \in E$ کافی است $\mathscr{B}_x$ را به‌صورت $\mathscr{B}_x = \{S_r(x) : r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ تعریف کنیم. در این صورت مشاهده می‌شود که $\mathscr{B}_x$ یک پایهٔ موضعی شمارا در x است.

فضای متریک در حالت کلی شمارای دوم نیست. کافی است $\mathbb{R}$ و توپولوژی گسسته را درنظر بگیرید.
در ادامه نشان می‌دهیم که خواص شمارای اول و شمارای دوم، خواصی توپولوژیکی هستند که نسبت به‌عمل حاصل‌ضربهای شمارش‌پذیر خوش‌رفتارند.

۲-۵-۷ قضیه

خواص شمارای اول و شمارای دوم، خواص توپولوژیکی هستند.

برهان. فرض کنیم $f: (S_1, \mathscr{T}_1) \to (S_2, \mathscr{T}_2)$ یک همسانریختی باشد. اگر $x \in S_1$، $\mathscr{B}_x = \{B_n: n \in \mathbb{N}\}$ پایه موضعی شمارایی در x باشد، آن‌گاه از این‌که f باز و پیوسته است نتیجه می‌شود که $\mathscr{B}_{f(x)} = \{f(B_n): n \in \mathbb{N}\}$ پایهٔ موضعی شمارایی برای $f(x)$ است. همچنین اگر $\mathscr{B}_1 = \{B_n: n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ای شمارا برای توپولوژی $\mathscr{T}_1$ باشد، آن‌گاه چون f باز، برو و پیوسته است، $\mathscr{B}_2 = \{f(B_n): n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ای شمارا برای $\mathscr{T}_2$ است. در نتیجه اگر $(S_1, \mathscr{T}_1)$ شمارای اول باشد آن‌گاه $(S_2, \mathscr{T}_2)$ شمارای اول است و اگر $(S_1, \mathscr{T}_1)$ شمارای دوم باشد، آن‌گاه $(S_2, \mathscr{T}_2)$ شمارای دوم است. ■

۲-۵-۸ قضیه

اگر به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $(S_n, \mathscr{T}_n)$ شمارای اول باشد آن‌گاه $\prod_{n=1}^{\infty} (S_n, \mathscr{T}_n)$ شمارای اول است.

برهان. فرض کنیم $x \in \prod_{n=1}^{\infty} (S_n, \mathscr{T}_n)$ و $\mathscr{B}_{x(n)} = \{B_j^n : j \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ای موضعی شمارا در $x(n)$ باشد و $\mathscr{B}$ خانوادهٔ تمام اشتراکهای متناهی اعضای مجموعه $\{\pi_n^{-1}(B_j^n): n, j \in \mathbb{N}\}$ باشد. اولاً $\mathscr{B}$ شماراست و

به‌ازای هر B متعلق به $\mathscr{B}$ داریم $x \in B$. حال فرض کنیم G مجموعهٔ بازی شامل x باشد در این صورت $G = \bigcap_{n=1}^{k} \pi_n^{-1}(G_n)$ که در آن برای هر $1 \leq n \leq k$، $G_n \in \mathscr{T}_n$. بنابراین $\pi_n(x) \in G_n$. پس $j_n \in \mathbb{N}$ موجود است که $\pi_n(x) \in B_{j_n}^n$ و $B_{j_n}^n \subseteq G_n$. بنابراین $\bigcap_{n=1}^{k} \pi_n^{-1}(B_{j_n}^n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{k} \pi_n^{-1}(G_n)$ و $x \in \bigcap_{n=1}^{k} \pi_n^{-1}(B_{j_n}^n)$. پس $\mathscr{B}$ پایه‌ای موضعی شمارا در x است. ■

۲-۵-۹ تمرین

اگر به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $(S_n, \mathscr{T}_n)$ شمارای دوم باشد آن‌گاه ثابت کنید $\prod_{n=1}^{\infty} (S_n, \mathscr{T}_n)$ شمارای دوم است.

خاصیت مهمی که فضاهای شمارای اول و در نتیجه فضاهای شمارای دوم دارند، این‌است‌که در این فضاها برای یافتن بستار مجموعه‌ها و یا بررسی پیوستگی توابع، کافی است دنباله‌های همگرای فضا را مورد مطالعه قرار دهیم. این مطلب به‌صورت قضایایی در زیر آمده است که برای بیان برهان آن‌ها لازم است ابتدا به بیان یک لم بپردازیم.

۲-۵-۱۰ لم

اگر $(S, \mathscr{T})$ فضای شمارای اول باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $x \in S$ پایهٔ موضعی شمارایی چون $\mathscr{B}_x = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ موجود است به طوری که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $B_{n+1} \subseteq B_n$.

برهان. فرض کنیم $\mathrm{A}_x = \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ یک پایهٔ موضعی در x باشد در این صورت $\mathscr{B}_x = \{B_n : B_n = \bigcap_{i=1}^{n} G_i \ , \ n \in \mathbb{N}\}$، پایهٔ مطلوب است. زیرا واضح است که $\mathscr{B}_x$ شمارا و به‌ازای هر n، $B_{n+1} \subseteq B_n$. حال فرض کنیم G مجموعهٔ بازی شامل x باشد. بنابراین $G_{n_\circ} \in \mathrm{A}_x$ی موجود است که شامل x است و $G_{n_\circ} \subseteq G$ بنابراین $B_{n_\circ} \subseteq G_{n_\circ}$ و $x \in B_{n_\circ}$. پس $\mathscr{B}_x$ پایهٔ مورد نظر است. ■

۲-۵-۱۱ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ فضای شمارای اول باشد و $A \subseteq S$ و $x \in S$. در این صورت شرط لازم و کافی برای آن‌که $x \in \overline{A}$ آن است که دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در A موجود باشد به طوری که $x_n \to x$.

برهان. قبلاً ثابت کردیم که اگر $(S, \mathscr{T})$ فضایی توپولوژیک باشد، $A \subseteq S$ و دنباله‌ای در A مانند $\{x_n\}$ موجود باشد که $x_n \to x$ آن‌گاه $x \in \overline{A}$.

بالعکس، فرض کنیم $x \in \overline{A}$ و $\mathscr{B}_x = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ پایه موضعی شمارایی در x باشد به طوری که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $B_{n+1} \subseteq B_n$. دنبالهٔ $\{x_n\}$ را که در آن $x_n \in B_n \cap A$ درنظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که $x_n \to x$. برای هر مجموعهٔ باز G شامل x، بنا به خاصیت $\mathscr{B}_x$، $B_k \in \mathscr{B}_x$ موجود است که $x \in B_k$ و $B_k \subseteq G$. بنابراین اگر $n \geq k$ آن‌گاه $x_n \in B_k$ و لذا $x_n \in G$. پس $x_n \to x$. ■

۲-۵-۱۲ قضیه

فرض کنیم $(S_1, \mathcal{T}_1)$ شمارای اول باشد و $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ تابعی باشد که تحت آن اگر $x_n \to x$، آن‌گاه $f(x_n) \to f(x)$. در این صورت f پیوسته است.

برهان. فرض کنیم F مجموعه‌ای بسته در $(S_2, \mathcal{T}_2)$ باشد. ثابت می‌کنیم $f^{-1}(F)$ در $(S_1, \mathcal{T}_1)$ بسته است. برای این‌کار ثابت می‌کنیم $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$.

فرض کنیم $x \in \overline{f^{-1}(F)}$. چون $(S_1, \mathcal{T}_1)$ شمارای اول است، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در $f^{-1}(F)$ موجود است که $x_n \to x$. از فرض نتیجه می‌شود که $f(x_n) \to f(x)$ و چون برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f(x_n) \in F$ پس $f(x)$، یک نقطهٔ چسبیدگی برای F است. که چون F بسته است پس $f(x) \in F$. بنابراین $x \in f^{-1}(F)$. در نتیجه $f^{-1}(F)$ بسته است. ■

در خاتمه این فصل به معرفی خاصیت تفکیک‌پذیری می‌پردازیم.

۲-۵-۱۳ فضای تفکیک‌پذیر

فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ را **تفکیک‌پذیر** می‌گوییم، هرگاه S دارای یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا مانند D باشد (یعنی D شمارا باشد و $\overline{D} = S$).

مثلاً $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ تفکیک‌پذیر است، زیرا مجموعهٔ اعداد گویا یک زیرمجموعهٔ شمارا و چگال در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ است. هیچ مجموعهٔ ناشمارایی با توپولوژی گسسته تفکیک‌پذیر نیست.

۲-۵-۱۴ قضیه

اگر $(S_1, \mathcal{T}_1)$ تفکیک‌پذیر و $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ تابعی پیوسته و برو باشد آن‌گاه $(S_2, \mathcal{T}_2)$ تفکیک‌پذیر است. بنابراین تفکیک‌پذیری یک خاصیت توپولوژیکی است.

برهان. فرض کنیم D مجموعه‌ای شمارا و چگال در S_1 باشد، به‌سادگی نتیجه می‌شود که $f(D)$ در S_2 چگال و شمارا است. شمارابودن $f(D)$ از شمارابودن D نتیجه می‌شود زیرا $Card\ (f(D)) \leq Card\ D$. از طرفی چون f پیوسته است پس $f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}$. همچنین چون $\overline{D} = S_1$ و f برو است پس $f(\overline{D}) = S_2$. بنابراین $\overline{f(D)} = S_2$ یعنی $f(D)$ در S_2 چگال است. ■

لازم به تذکر است که این خاصیت نه موروثی است و نه حاصل‌ضربی در عین حال این خاصیت به هر زیرفضای باز یک فضای تفکیک‌پذیر و همچنین هنگامی که تعداد این فضاها شماراست به فضای حاصل‌ضربی آنها، منتقل می‌شود.

۲-۵-۱۵ قضیه

هر زیرفضای باز یک فضای تفکیک‌پذیر، تفکیک‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ تفکیک‌پذیر باشد و $A \in \mathscr{T}$. ثابت می‌کنیم $(A, \mathscr{T}/A)$ تفکیک‌پذیر است. چون $(S, \mathscr{T})$ تفکیک‌پذیر است. پس زیرمجموعهٔ شمارای D از S موجود است که $\bar{D} = S$ قرار می‌دهیم $D_\circ = D \cap A$. در این صورت چون A باز است و D در S چگال است پس $D_\circ \neq \phi$. چون D شماراست پس $D_\circ$ نیز شماراست. نشان می‌دهیم بستار $D_\circ$ در $(A, \mathscr{T}/A)$ برابر A است. فرض کنیم $G \in \mathscr{T}/A$ و $G \neq \phi$. در این صورت $G_1 \in \mathscr{T}$ موجود است که $G = G_1 \cap A$. چون A باز است پس $G \in \mathscr{T}$. چون $\bar{D} = S$ پس $G \cap D \neq \phi$. بنابراین $D_\circ \cap G \neq \phi$. پس در $(A, \mathscr{T}/A)$، $\overline{D_\circ} = A$. در نتیجه A تفکیک‌پذیر است. ■

۲-۵-۱۶ قضیه

فرض کنیم به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $(S_n, \mathscr{T}_n)$ تفکیک‌پذیر باشد. در این صورت $\prod_{i=1}^{\infty} (S_n, \mathscr{T}_n)$ تفکیک‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $D_n = \{x_j^n : j \in \mathbb{N} \cup \{\circ\}\}$ در S_n چگال باشد و نیز F مجموعهٔ تمام توابع از زیرمجموعه‌های متناهی $\mathbb{N}$ بتوی $\mathbb{N} \cup \{\circ\}$ باشد. به‌ازای هر $f \in F$ و $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم:

$$x_f(n) = \begin{cases} x^n_{f(n)} & n \in D_f \\ x^n_\circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت $D = \{x_f : f \in F\}$ یک زیرمجموعهٔ شمارای فضای حاصل‌ضربی است (چرا؟). حال نشان می‌دهیم که D در فضای حاصل‌ضربی چگال است. برای این منظور نشان می‌دهیم D هر عضو ناتهی از پایهٔ فضای حاصل‌ضربی را قطع می‌کند. فرض کنیم $x \in B$ و B عضو پایهٔ حاصل از زیرپایهٔ فضای حاصل‌ضربی تیخونوف باشد. دراین صورت $B = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$. پس برای هر $1 \leq i \leq n$، $x(\alpha_i) \in G_{\alpha_i}$ و داریم $G_{\alpha_i} \cap D_{\alpha_i} \neq \phi$. قرار می‌دهیم $y_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i} \cap D_{\alpha_i}$ و تعریف می‌کنیم

$$x_f(n) = \begin{cases} y_{\alpha_i} & n = \alpha_i \\ x_\circ & n \neq \alpha_i \end{cases}$$

در این صورت $x_f \in D$ و $x_f \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$. ■

قضیهٔ زیر ارتباط بین فضاهای شمارای دوم و تفکیک‌پذیر را نشان می‌دهد.

۲-۵-۱۷ قضیه

هر فضای شمارای دوم تفکیک‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم $\mathscr{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ای شمارا برای فضای $(S, \mathscr{T})$ باشد. به‌ازای هر عدد طبیعی n، x_n را عضوی دلخواه از B_n انتخاب می‌کنیم. واضح است که $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ مجموعه‌ای شماراست. حال فرض کنیم $G \in \mathscr{T}$، مجموعه‌ای غیرتهی باشد. چون $\mathscr{B}$ یک پایه برای S است، پس $n_\circ \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $B_{n_\circ} \subseteq G$. در نتیجه $x_{n_\circ} \in G$. پس $x_{n_\circ} \in G \cap D$ یعنی $G \cap D \neq \phi$. بنابراین D در S چگال است. ■

عکس قضیهٔ فوق در هر فضای متریک برقرار است، درصورتی که عکس این قضیه در حالت کلی برای فضاهای توپولوژیک برقرار نیست. مثلاً $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ تفکیک‌پذیر است زیرا $\mathbb{Q}$ در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ چگال است؛ درصورتی که $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ شمارای دوم نیست.

۲-۵-۱۸ قضیه

هر فضای متریک تفکیک‌پذیر، شمارای دوم است.

برهان. فرض کنیم $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ زیرمجموعه‌ای شمارا و چگال در فضای متریک (S, d) باشد. ثابت می‌کنیم $\mathcal{B} = \{S_r(x_n) : x_n \in D\,,\, r \in \mathbb{Q} \text{ و } r > \circ\}$ یک پایهٔ شمارا برای $\mathcal{T}_d$ است. شمارابودن $\mathcal{B}$ واضح است. فرض کنیم $G \in \mathcal{T}_d$ و $x \in G$. بنابراین r گویایی موجود است که $S_r(x) \subseteq G$ چون D در S چگال است، $x_{n_\circ} \in D$ موجود است که $x_{n_\circ} \in S_{\frac{r}{۳}}(x)$. بنابراین $x \in S_{\frac{۲r}{۳}}(x_{n_\circ})$ و $S_{\frac{۲r}{۳}}(x_{n_\circ}) \subseteq S_r(x) \subseteq G$ (چرا؟).
پس اگر $G \in \mathcal{T}_d$ و $x \in G$، آنگاه عضوی مانند B متعلق به $\mathcal{B}$ موجود است که $x \in B$ و $B \subseteq G$.
پس $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}_d$ است. ■

۲-۵ مسائل

۱. ثابت کنید که $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ شمارای دوم نیست ولی شمارای اول است (راهنمایی: اگر $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ یک پایهٔ شمارا برای $\mathcal{T}_l$ باشد، نشان دهید که به‌ازای هر n، $(B_n = [a_n, b_n)$.

۲. ثابت کنید که $\mathbb{R}$ با توپولوژی هم متناهی شمارای اول نیست. (راهنمایی، ثابت کنید که اگر $\mathcal{B}_x$ پایه‌ای موضعی در x باشد، آنگاه $\mathcal{B}_x$ شمارا نیست، درحقیقت زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{B}_x$ هم عدد با اعداد اصم می‌شود).

۳. ثابت کنید که خاصیت شمارای اول و خاصیت شمارای دوم خواص موروثی هستند.

۴. می‌دانیم که هر فضای شمارای دوم تفکیک‌پذیر است همچنین می‌دانیم که خاصیت تفکیک‌پذیری موروثی نیست. ثابت کنید که خاصیت تفکیک‌پذیری در هر فضای شمارای دوم موروثی است.

۵. ثابت کنید که حاصل‌ضرب تیخونوف تعداد شمارایی از فضاهای شمارای دوم، شمارای دوم است.

۶. فرض کنید $\mathcal{T}$ توپولوژی جعبه‌ای چپ پایینی روی $\mathbb{R}^۲$ باشد و $\mathbb{R}_l$ توپولوژی حد پایین روی $\mathbb{R}$ باشد. ثابت کنید $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ تفکیک‌پذیر است و نتیجه بگیرید که $(\mathbb{R}^۲, \mathcal{T}_l)$ تفکیک‌پذیر است. اگر $\Delta = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$، ثابت کنید که $\mathcal{T}/L$ توپولوژی گسسته روی Δ است و بنابراین نتیجه بگیرید که $(L, \mathcal{T}/L)$ تفکیک‌پذیر نیست. درنتیجه، خاصیت تفکیک‌پذیری یک خاصیت توپولوژیکی است که موروثی نیست.

۳

اصول جداسازی

به‌طورکلی خواص توپولوژیکی فضای $(S, \mathcal{T})$ اصولاً بستگی به $\mathcal{T}$، یعنی خانوادهٔ مجموعه‌های باز فضا دارد. مثلاً برای تفکیک‌پذیربودن یا شمارای اول و دوم‌بودن فضای $(S, \mathcal{T})$ لازم است که عدد اصلی $\mathcal{T}$ به‌طور متناسبی کوچک باشد. از طرفی دیگر اگر عدد اصلی $\mathcal{T}$ بزرگ باشد، آن‌گاه تابع $f: (S, \mathcal{T}) \to (S', \mathcal{T}')$ شانس بیشتری برای پیوسته‌شدن دارد.

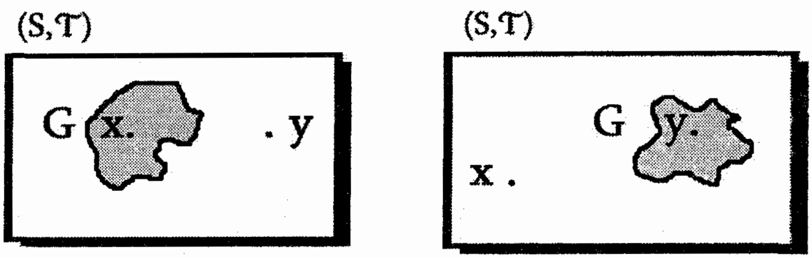
در این فصل پراکندگی مجموعه‌های باز در فضای S را مورد بررسی قرار خواهیم داد و فضاهای T_i[1] را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. لازم به تذکر است که فضای متریک، تمام خواص فضاهای T_i مورد بحث را دارد. بنابراین اگر فضای توپولوژیکی یکی از خواص T_i را نداشته باشد، متریک‌پذیر نیست.

۳-۱ فضاهای $T_0, T_1, T_2, T_{5/2}$

در این قسمت، اصولی را که در ارتباط با جداکردن دو نقطه توسط مجموعه‌های باز می‌باشند، مورد بحث قرار می‌دهیم.

۳-۱-۱ فضای T_0 (کولموگورف)

فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ را T_0 می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر دو نقطهٔ متمایز x و y از S، مجموعهٔ بازی مانند G موجود باشد به طوری که $x \in G$ و $y \in S\setminus G$ یا $y \in G$ و $x \in S\setminus G$. فضای T_0، فضای کولموگورف نیز نامیده می‌شود.



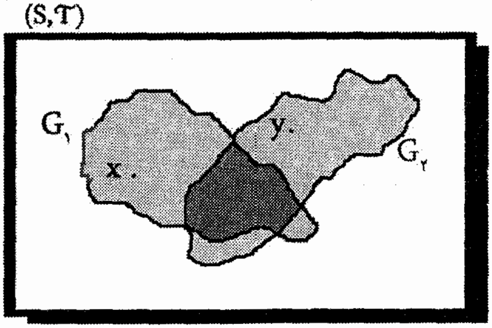
۱- از کلمه آلمانی "Trennung" به معنای جداسازی گرفته شده است.

۳-۱-۲ مثال

فرض کنیم $S = \{0,1,2\}$ و $\mathcal{T}$ توپولوژی گسسته روی S باشد، در این صورت $(S, \mathcal{T})$ فضای T_0 است. S به همراه توپولوژی ناگسسته فضای T_0 نیست.

۳-۱-۳ فضای T_1 (فرشه)

فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ را T_1 می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر دو نقطهٔ متمایز y, x از S، دو مجموعهٔ باز G_1 و G_2 وجود داشته باشند به طوری که $x \in G_1 \cap (S \setminus G_2)$ و $y \in G_2 \cap (S \setminus G_1)$.
فضای T_1، فضای فرشه نیز نامیده می‌شود.



واضح است که هر فضای T_1، فضای T_0 نیز می‌باشد. مثال زیر نشان می‌دهد که عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست.

۳-۱-۴ مثال

فرض کنیم $S = \{a,b,c\}$ و $\mathcal{T} = \{\phi , S , \{a\} , \{b\} , \{a,b\}\}$. در این صورت $(S, \mathcal{T})$ فضای T_0 است ولی فضایی T_1 نیست. همچنین فضای سیرپینسکی فضایی T_0 است که فضایی T_1 نیست.

اگر $(S, \mathcal{T})$ فضای گسسته باشد، آن‌گاه $(S, \mathcal{T})$ فضایی T_1 است زیرا اگر y, x دو نقطهٔ متمایز از S باشند، کافی است $G_1 = \{x\}$ و $G_2 = \{y\}$ انتخاب شوند.

قضیهٔ زیر یک شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ فضایی T_1 باشد را نشان می‌دهد.

۳-۱-۵ قضیه

شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ فضای T_1 باشد آن است که هر مجموعهٔ تک عضوی (و در نتیجه متناهی) در S بسته باشد.

برهان. فرض کنیم $(S,\mathscr{T})$ فضای T_1 باشد و $x \in S$. ثابت می‌کنیم $\{x\}$ بسته است. برای این کار کافی است ثابت کنیم که $S\setminus\{x\}$ باز است. فرض کنیم $y \in S\setminus\{x\}$، چون $(S,\mathscr{T})$ فضایی T_1 است مجموعه‌ای باز مانند G_y وجود دارد که $y \in G_y$ و $x \in S\setminus G_y$. بنابراین $G_y \subseteq S\setminus\{x\}$. پس $S\setminus\{x\}$ باز است و بنابراین $\{x\}$ بسته است.

بالعکس، فرض کنیم هر مجموعهٔ تک عضوی در $(S,\mathscr{T})$ بسته باشد و فرض کنیم y,x دو نقطهٔ متمایز از S باشند. در این صورت $G_1 = S\setminus\{y\}$ و $G_2 = S\setminus\{x\}$ دو مجموعهٔ باز در $(S,\mathscr{T})$ هستند که $x \in G_1 \cap (S\setminus G_2)$ و $y \in G_2 \cap (S\setminus G_1)$. بنابراین $(S,\mathscr{T})$ فضای T_1 است. ■

۳-۱-۶ نتیجه

$(S,\mathscr{T})$ فضای T_1 است، اگر و فقط اگر $\mathscr{T}$ شامل توپولوژی هم متناهی باشد بنابراین توپولوژی هم متناهی روی S ضعیف‌ترین توپولوژی با خاصیت T_1 روی S است. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که اگر $(S,\mathscr{T})$ فضایی T_1 و S مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه $(S,\mathscr{T})$ فضای گسسته است.

۳-۱-۷ قضیه

فرض کنیم $(S,\mathscr{T})$ یک فضای T_1 باشد، $A \subseteq S$ و $p \in S$ در این صورت شرایط زیر معادلند:

(الف) هر مجموعهٔ باز G شامل p، شامل تعداد نامتناهی نقطه از A است.

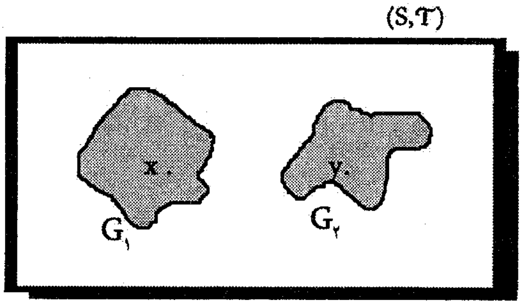
(ب) p نقطهٔ حدی A است.

برهان. (الف ⇐ ب) واضح است.

(ب ⇐ الف) فرض کنیم (الف) برقرار نباشد. در این صورت یک مجموعهٔ باز G شامل p وجود دارد که $G \cap A$ متناهی است. در نتیجه $H = (S\setminus G \cap A) \cup \{p\}$ دارای متمّم متناهی است و لذا بنا به نتیجهٔ قبل باز است. اما $G \cap H$ یک مجموعهٔ باز شامل p است که A را قطع نمی‌کند و این با فرض مسأله در تناقض است. ■

۳-۱-۸ فضای T_2 (هاسدورف)

فضای توپولوژیک $(S,\mathscr{T})$ را T_2 یا **فضای هاسدورف** می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر دو عضو متمایز از S مانند y,x دو مجموعهٔ باز G_1 و G_2 موجود باشد به طوری که $x \in G_1$ و $y \in G_2$ و $G_1 \cap G_2 = \phi$.



واضح است که هر فضای T_2، فضای T_1 نیز هست. مثال زیر نشان می‌دهد که عکس این مطب برقرار نیست.

۳-۱-۹ مثال

مجموعهٔ نامتناهی S همراه با توپولوژی هم متناهی یک فضای T_1 است که هاسدورف نیست. زیرا برای هر دو مجموعهٔ باز G_1 و G_2 در این فضا، $G_1 \cap G_2 \neq \phi$. اگر $(S, \mathscr{T}_1)$ هاسدورف باشد و $\mathscr{T}_2$ یک توپولوژی قوی‌تر از $\mathscr{T}_1$ باشد، آن‌گاه $(S, \mathscr{T}_2)$ هاسدورف است. توجه کنید که هر فضای متریک و نیز هر فضای گسسته، هاسدورف است.

۳-۱-۱۰ قضیه

در هر فضای هاسدورف، حد هر دنباله در صورت وجود، منحصر به فرد است.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ فضایی هاسدورف و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در S باشد به طوری که $x_n \to x$ و $x_n \to y$. اگر x و y متمایز باشند چون $(S, \mathscr{T})$ فضای هاسدورف است، پس دو مجموعهٔ باز G_1 و G_2 موجودند که $x \in G_1$، $y \in G_2$ و $G_1 \cap G_2 = \phi$. بنابراین دو عدد طبیعی k_1 و k_2 وجود دارند که اگر $n \geq k_1$، آن‌گاه $x_n \in G$ و اگر $n \geq k_2$ آن‌گاه $x_n \in G_2$. حال اگر قرار دهیم $k = max\ \{k_1, k_2\}$ نتیجه می‌شود که $x_k \in G_1 \cap G_2$ و این متناقض با شرط $G_1 \cap G_2 = \phi$ است. پس $x = y$. ■

به کمک قضیهٔ زیر نشان می‌دهیم که «هاسدورف‌بودن» خاصیتی توپولوژیکی است که هم موروثی و هم حاصل‌ضربی است.

۳-۱-۱۱ قضیه

الف) اگر $(S_1, \mathscr{T}_1)$ فضای هاسدورف و $f: (S_1, \mathscr{T}_1) \to (S_2, \mathscr{T}_2)$ تابعی دوسو و باز باشد، آن‌گاه $(S_2, \mathscr{T}_2)$ نیز فضای هاسدورف است.

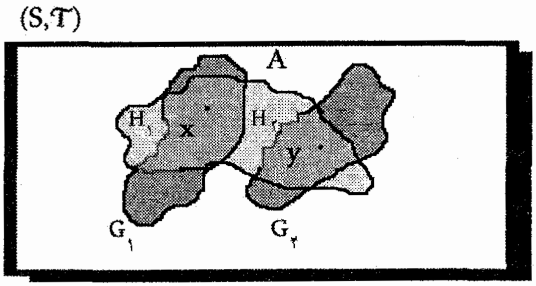
ب) هر زیرفضای فضای هاسدورف $(S, \mathcal{T})$، هاسدورف است.

ج) اگر به‌ازای هر $\alpha \in I$، $(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ فضای هاسدورف باشد، آن‌گاه $\prod_{\alpha\in I}(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ هاسدورف است.

برهان.

الف) فرض کنیم y_1 و y_2 دو عضو متمایز از S_2 باشند. در این صورت چون f دوسویی است پس دو عضو متمایز مانند x_1 و x_2 در S_1 موجودند که $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. چون S_1 هاسدورف است پس دو مجموعهٔ باز مجزای G_1 و G_2 در آن موجودند به‌طوری‌که $x_1 \in G_1$ و $x_2 \in G_2$. چون f باز است پس $f(G_1)$ و $f(G_2)$ در S_2 باز هستند و در ضمن $y_1 \in f(G_1)$, $y_2 \in f(G_2)$. کافی است نشان دهیم $f(G_1) \cap f(G_2) = \phi$. چون f تابعی یک به یک است پس $f(G_1 \cap G_2) = f(G_1) \cap f(G_2)$ و در نتیجه $f(G_1) \cap f(G_2) = \phi$. بنابراین $(S_2, \mathcal{T}_2)$ نیز هاسدورف است.

ب) فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضایی هاسدورف باشد و $A \subseteq S$. نشان می‌دهیم $(A, \mathcal{T}/A)$ نیز هاسدورف است. فرض کنیم x, y دو نقطهٔ متمایز در A باشند چون S هاسدورف است دو مجموعهٔ باز مانند G_1 و G_2 در S موجودند به طوری‌که $x \in G_1$ و $y \in G_2$ و $G_1 \cap G_2 = \phi$. بنابراین $H_1 = G_1 \cap A$ و $H_2 = G_2 \cap A$ دو مجموعهٔ باز در زیر فضای $(A, \mathcal{T}/A)$ هستند که $x \in H_1$ و $y \in H_2$ و $H_1 \cap H_2 = \phi$. بنابراین $(A, \mathcal{T}/A)$ هاسدورف است.



ج) فرض کنیم به‌ازای هر $\alpha \in I$، $(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ هاسدورف است. نشان می‌دهیم $\prod_{\alpha\in I}(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ نیز هاسدورف است. فرض کنیم x, y دو نقطهٔ متمایز از فضای حاصل‌ضربی تیخونوف $\prod_{\alpha\in I}(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ باشد. چون $x \neq y$، $\alpha_0 \in I$ موجود است که $x(\alpha_0) \neq y(\alpha_0)$. چون S_{α_0} هاسدورف است پس دو مجموعهٔ باز و مجزای G_1 و G_2 در S_{α_0} چنان موجودند که $x(\alpha_0) \in G_1$ و $y(\alpha_0) \in G_2$. بنابراین $\pi_{\alpha_0}^{-1}(G_1)$ شامل x و $\pi_{\alpha_0}^{-1}(G_2)$ شامل y مجموعه‌هایی باز در فضای حاصل‌ضربی هستند و $\pi_{\alpha_0}^{-1}(G_1) \cap \pi_{\alpha_0}^{-1}(G_2) = \pi_{\alpha_0}^{-1}(G_1 \cap G_2) = \phi$.

بنابراین $\prod_{\alpha\in I}(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ هاسدورف است. ■

به کمک تمرین زیر نشان می‌دهیم عکس قسمت (ج) قضیهٔ پیش نیز برقرار است.

۳-۱-۱۲ تمرین

فرض کنید $\prod_{\alpha\in I} S_\alpha$ حاصل‌ضرب دکارتی دلخواهی باشد و $y_\circ$ نقطه‌ای در $\prod_{\alpha\in I} S_\alpha$ باشد. به‌ازای هر $\beta \in I$ مجموعهٔ $S(y_\circ, \beta) = \{x \in \prod_{\alpha\in I} S_\alpha : x(\alpha) = y_\circ(\alpha)\ ,\ \alpha \neq \beta\} = S_\beta \times \prod_{\alpha\neq\beta} \{y_\circ(\alpha)\}$ را برش در $\prod_{\alpha\in I} S_\alpha$ مارّ بر $y_\circ$ و موازی مؤلفهٔ S_β می‌گوییم.

الف) اگر $f_\beta : S_\beta \to S(y_\circ, \beta)$ به‌صورت $f_\beta(x_\beta) = x$ تعریف شود که در آن برای هر $\alpha \in I$،

$$x(\alpha) = \begin{cases} x_\beta & \alpha = \beta \\ y_\circ(\alpha) & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

آن‌گاه ثابت کنید f_β دوسویی است و اگر $(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ فضای توپولوژیک و $(S, \mathcal{T})$ حاصل‌ضرب تیخونوف $(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ها باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $\beta \in I$، $f_\beta : (S_\beta, \mathcal{T}_\beta) \to \left(S(y_\circ, \beta)\ ,\ \mathcal{T}/S(y_\circ, \beta)\right)$ همسانریختی است.

ب) اگر $(S, \mathcal{T})$ هاسدورف باشد، بنا به قضیهٔ قبل قسمت (ب) نتیجه بگیرید که زیرفضای $S(y_\circ, \beta)$ هاسدورف است و در نتیجه S_β هاسدورف می‌باشد.

۳-۱-۱۳ تمرین

ثابت کنید هر برش در فضای حاصل‌ضربی تیخونوف فضاهای $T_۲$، بسته است.

فضای $T_{۵/۲}$ (اوریسون)

فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ را فضای اوریسون یا $T_{۵/۲}$ می‌گوییم، اگر به‌ازای هر y, x متمایز متعلق به S دو مجموعهٔ باز $G_۱$ شامل x و $G_۲$ شامل y چنان موجود باشند که $\bar{G}_۱ \cap \bar{G}_۲ = \phi$. واضح است که هر فضای $T_{۵/۲}$، $T_۲$ است. همچنین هر فضای متریک، فضایی $T_{۵/۲}$ است.

۳-۱-۱۴ قضیه

خاصیت $T_{۵/۲}$، خاصیتی توپولوژیکی است که موروثی و حاصل‌ضربی است.

برهان. فرض کنیم $(S_۱, \mathcal{T}_۱)$ فضایی $T_{۵/۲}$ و $f : (S_۱, \mathcal{T}_۱) \to (S_۲, \mathcal{T}_۲)$ همسانریختی باشد اگر $y_۱$ و $y_۲$ دو نقطهٔ متمایز در $S_۲$ باشند، آن‌گاه چون f دوسویی است، دو نقطهٔ متمایز در $S_۱$ مانند $x_۱$ و $x_۲$ چنان موجودند که $f(x_۱) = y_۱$ و $f(x_۲) = y_۲$. چون $S_۱$ اوریسون است پس دو مجموعهٔ باز $G_۱$ شامل $x_۱$ و $G_۲$ شامل $x_۲$ موجودند به طوری که $\bar{G}_۱ \cap \bar{G}_۲ = \phi$. چون f باز است پس $f(G_۱)$ و $f(G_۲)$ در $S_۲$ باز هستند و چون f همسانریختی است پس $\overline{f(G_۱)} = f(\bar{G}_۱)$ و $\overline{f(G_۲)} = f(\bar{G}_۲)$. پس $\overline{f(G_۱)} \cap \overline{f(G_۲)} = f(\bar{G}_۱) \cap f(\bar{G}_۲)$ در نتیجه باتوجه به یک‌بودن f، $\overline{f(G_۱)} \cap \overline{f(G_۲)} = \phi$ و از آن‌جاکه $y_۱ \in f(G_۱)$ و $y_۲ \in f(G_۲)$ نتیجه می‌شود که $S_۲$ نیز اوریسون است. ■

ب) فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ فضای اوریسون باشد و $A \subseteq S$، نشان می‌دهیم $(A, \mathscr{T}/A)$ نیز اوریسون است. فرض کنیم y,x دو نقطهٔ متمایز از A باشند؛ چون S اوریسون است، دو مجموعهٔ باز $G_۱$ شامل x و $G_۲$ شامل y چنان موجودند که $\bar{G}_۱ \cap \bar{G}_۲ = \phi$. قرار می‌دهیم $H_۱ = G_۱ \cap A$ و $H_۲ = G_۲ \cap A$ واضح است که $x \in H_۱$ و $y \in H_۲$ و $H_۱$ و $H_۲$ در A باز هستند. از طرفی $\bar{H}_۱^{\mathscr{T}/A} \cap \bar{H}_۲^{\mathscr{T}/A} = \phi$ زیرا $\bar{H}_۱^{\mathscr{T}/A} = \bar{H}_۱ \cap A$ و $\bar{H}_۲^{\mathscr{T}/A} = \bar{H}_۲ \cap A$ و $\bar{H}_۱^{\mathscr{T}/A} \cap \bar{H}_۲^{\mathscr{T}/A} \subseteq \bar{G}_۱ \cap \bar{G}_۲$ و در نتیجه $\bar{H}_۱ \cap \bar{H}_۲ = \phi$. $(A, \mathscr{T}\backslash A)$ اوریسون است.

ج) فرض کنیم به‌ازای هر $\alpha \in I$، $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ فضای اوریسون باشد و $(S, \mathscr{T})$ فضای حاصل‌ضرب تیخونوف $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ها باشد. فرض کنیم x,y دو نقطهٔ متمایز از S باشند بنابراین $\alpha_۰ \in I$ موجود است $x(\alpha_۰) \neq y(\alpha_۰)$. بنابراین دو مجموعهٔ باز $H_{\alpha_۰}$ و $G_{\alpha_۰}$ در $\mathscr{T}_{\alpha_۰}$ موجود است که $x(\alpha_۰) \in G_{\alpha_۰}$ و $y(\alpha_۰) \in H_{\alpha_۰}$ و $\bar{G}_{\alpha_۰} \cap \bar{H}_{\alpha_۰} = \phi$. در نتیجه مجموعه‌های $\pi_{\alpha_۰}^{-۱}(G_{\alpha_۰})$ شامل x و $\pi_{\alpha_۰}^{-۱}(H_{\alpha_۰})$ شامل y در فضای حاصل‌ضربی باز هستند. چون $\pi_{\alpha_۰}$ پیوسته است، $\pi_{\alpha_۰}^{-۱}(\bar{H}_{\alpha_۰})$ و $\pi_{\alpha_۰}^{-۱}(\bar{G}_{\alpha_۰})$ بسته می‌باشند و بنابراین $\overline{\pi_{\alpha_۰}^{-۱}(G_{\alpha_۰})} \subseteq \pi_{\alpha_۰}^{-۱}(\bar{G}_{\alpha_۰})$ و $\overline{\pi_{\alpha_۰}^{-۱}(H_{\alpha_۰})} \subseteq \pi_{\alpha_۰}^{-۱}(\bar{H}_{\alpha_۰})$. پس $\overline{\pi_{\alpha_۰}^{-۱}(G_{\alpha_۰})} \cap \overline{\pi_{\alpha_۰}^{-۱}(H_{\alpha_۰})} \subseteq \pi_{\alpha_۰}^{-۱}(\bar{G}_{\alpha_۰} \cap \bar{H}_{\alpha_۰})$ و در نتیجه $\overline{\pi_{\alpha_۰}^{-۱}(G_{\alpha_۰})} \cap \overline{\pi_{\alpha_۰}^{-۱}(H_{\alpha_۰})} = \phi$. پس $(S, \mathscr{T})$ اوریسون است. ■

تمرین زیر که توسط بینگ[1] ارائه شده است، فضای توپولوژیکی را نشان می‌دهد که هاسدورف است ولی $T_{۵/۲}$ نیست، بنابراین متریک‌پذیر نیست.

۳-۱-۱۵ تمرین

فرض کنید $S = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{Q},\ y \geq ۰\}$. به‌ازای هر $(a,b) \in S$ و $\varepsilon > ۰$ فرض کنید:

$$G_\varepsilon(a,b)= \{(r,۰): r \in \mathbb{Q},\ |r-(a+\frac{b}{\sqrt{۳}})| < \varepsilon\} \cup \{(r,۰): r \in \mathbb{Q},\ |r-(a-\frac{b}{\sqrt{۳}})| < \varepsilon\} \cup \{(a,b)\}$$

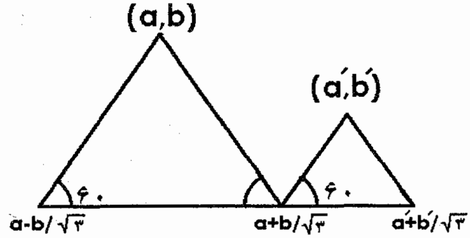
از نظر هندسی $G_\varepsilon(a,b)$ متشکل از نقطه (a,b) و تمام نقاط گویا در بازهٔ $(a - \frac{b}{\sqrt{۳}} - \varepsilon,\ a-\frac{b}{\sqrt{۳}} + \varepsilon)$ و $(a + \frac{b}{\sqrt{۳}} - \varepsilon,\ a + \frac{b}{\sqrt{۳}} + \varepsilon)$ است که مرکز آنها رؤوس مثلث متساوی‌الاضلاعی است که رأس دیگر آن (a,b) است.

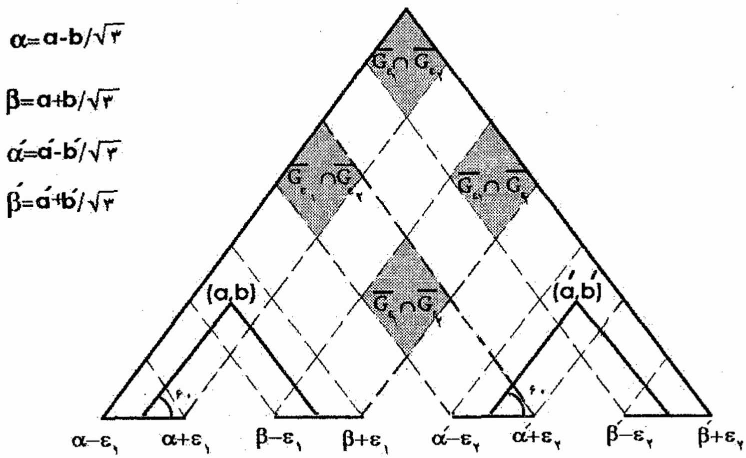
نشان دهیدکه $\mathscr{B} = \{G_\varepsilon(a,b) : (a,b) \in S,\ \varepsilon > ۰\}$ تشکیل پایه‌ای برای توپولوژی $\mathscr{T}$ روی S می‌دهد. ثابت کنید $(S, \mathscr{T})$ هاسدورف است. نشان دهید که به‌ازای هر $G_۱,G_۲ \in \mathscr{T}\backslash\{\phi\}$، $\bar{G}_۱ \cap \bar{G}_۲ \neq \phi$ و بنابراین $(S, \mathscr{T})$ فضای $T_{۵/۲}$ نیست.

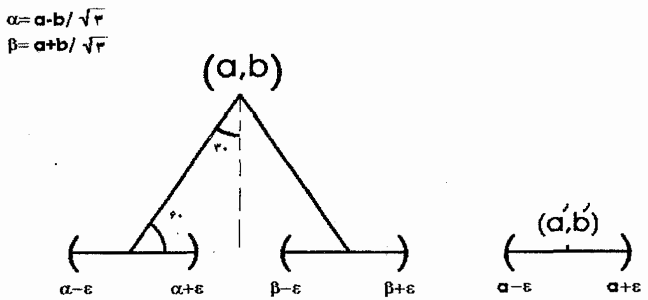
(راهنمایی: اگر $b = ۰$، آنگاه $G_\varepsilon(a,b)$ مجموعهٔ نقاط گویای داخل بازه باز به مرکز a و شعاع ε است. اگر $b \neq ۰$، مثلث متساوی‌الاضلاعی به رأس (a,b) را که قاعده آن روی محور xهاست درنظر می‌گیریم. در این

1. R.H.Bing (1914-1986)

صورت $G_\varepsilon(a,b)$ عبارت است از رأس (a,b) و مجموعهٔ نقاط گویای داخل بازه‌های باز به مراکز رؤوس دیگر مثلث و به شعاع ε نشان دهید که اگر $(a,b) \neq (a',b')$، آن‌گاه دو مثلث متناظر دارای رأس مشترک نیستند زیرا درغیراین‌صورت یکی از مؤلّفه‌های نقاط (a,b) و (a',b') باید اصم باشد. برای این کار مختصات رأس مشترک مثلث متناظر با (a',b') را به‌دست آورید (شکل ۱). نشان دهید که $\overline{G_{\varepsilon_1}(a,b)}$ و $\overline{G_{\varepsilon_2}(a',b')}$ به‌ترتیب زیرمجموعهٔ ناحیه رنگ شده شکل ۲ و ۳ می‌باشند که اشتراک آنها ناتهی است.







۳-۱ مسائل

۱. شرط لازم و کافی برای آنکه فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ فضای T_0 باشد آن است که به‌ازای هر x,y متعلق به S که $x \neq y$، $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

۲. فرض کنید $f:(S_1, \mathscr{T}_1) \to (S_2, \mathscr{T}_2)$ تابعی پیوسته و برو باشد و $(S_1, \mathscr{T}_1)$ فضای T_1 باشد. ثابت کنید که $(S_2, \mathscr{T}_2)$ نیز فضای T_1 است.

۳. فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ شمارای اول و T_1 باشد و $A \subseteq S$ و $x \in S$. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه x نقطه حدی A باشد آن است که دنباله‌ای از نقاط متمایز A مانند $\{x_n\}$ موجود باشد به طوری که $x_n \to x$. (راهنمایی: اگر $x \in A'$ و B_n پایهٔ موضعی نزولی در x باشد، نقطه $x_1 \in B_1 \cap A$ را انتخاب کنید و با استقرا $x_n \in A \cap (B_n \setminus \{x_1,...,x_{n-1}\})$ را برگزینید. در این صورت $x_n \to x$.

۴. ثابت کنید که چهار شرط زیر معادلند:

الف) $(S, \mathscr{T})$ فضای هاسدورف است.

ب) برای هر x متعلق به S و به‌ازای هر y متمایز از x، مجموعهٔ بازی مانند G_y شامل x موجود است که $y \notin \overline{G_y}$.

ج) به‌ازای هر $x \in S$، $\bigcap_{x \in G \in \mathscr{T}} \overline{G} = \{x\}$.

د) مجموعهٔ $\Delta = \{(x,x) : x \in S\}$ در $S \times S$ با توپولوژی تیخونوف بسته است.

۵. فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ یک فضای شمارای اول باشد که در آن حد هر دنبالهٔ همگرا منحصر به فرد باشد؛ ثابت کنید $(S, \mathscr{T})$ هاسدورف است.

۶. فرض کنید $f:(S_1, \mathscr{T}_1) \to (S_2, \mathscr{T}_2)$ تابعی دوسو باشد به طوری که f^{-1} پیوسته و $(S_1, \mathscr{T}_1)$ هاسدورف باشد؛ ثابت کنید $(S_2, \mathscr{T}_2)$ نیز هاسدورف است.

۷. فرض کنید $f,g:(S_1, \mathscr{T}_1) \to (S_2, \mathscr{T}_2)$ دو تابع پیوسته و $(S_2, \mathscr{T}_2)$ هاسدورف باشد؛ در این صورت ثابت کنید: (الف) $\{x \in S_1 : f(x) = g(x)\}$ در S_1 بسته است. (ب) اگر D در S_1 چگال باشد و $f|_D = g|_D$ آن‌گاه روی S_1، $f=g$ (ج) نمودار تابع f، یعنی $\{(x,f(x)) : x \in S_1\}$، در $(S_1, \mathscr{T}_1) \times (S_2, \mathscr{T}_2)$ بسته است. (د) اگر f یک به یک باشد، آن‌گاه $(S_1, \mathscr{T}_1)$ هاسدورف است.

۸. فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ فضای توپولوژیک و E یک رابطهٔ هم‌ارزی در S باشد و فرض کنید $\theta: S \to S/E$ تابع همانندی باشد به طوری که $E \subset S \times S$ در $(S, \mathscr{T}) \times (S, \mathscr{T})$ بسته باشد و θ تابعی باز باشد. ثابت کنید که S/E هاسدورف است.

۹. فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ را فضای T_D می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر x متعلق به S، $\{x\}'$ بسته باشد. ثابت کنید که خاصیت T_D خاصیتی موروثی است. نشان دهید که هر فضای T_D یک فضای T_0 است و هر فضای T_1 یک فضای T_D است.

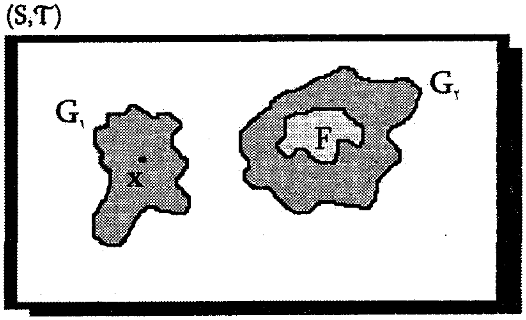
۱۰. ثابت کنید که خواص T_0 و T_1 خواصی توپولوژیکی هستند که هم موروثی و هم حاصل‌ضربی می‌باشند.

۳-۲ فضاهای منظم، T_3، و به‌طور کامل منظم، $T_{7/2}$

در این قسمت، اصولی را که در ارتباط با جداکردن یک نقطه و یک مجموعهٔ بسته توسط مجموعه‌های باز می‌باشند مورد بحث قرار می‌دهیم.

۳-۲-۱ فضای منظم

فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ را فضای منظم می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر $x \in S$ و هر مجموعهٔ بسته F که $F \subseteq S\setminus\{x\}$، دو مجموعهٔ باز G_1 و G_2 وجود داشته باشند که $x \in G_1$ و $F \subseteq G_2$ و $G_1 \cap G_2 = \phi$.
فضای منظمی را که T_1 نیز باشد، فضای T_3 می‌گوییم.



۳-۲-۲ مثال

فضای $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_e)$ و فضاهای با توپولوژی گسسته، فضاهای منظم هستند.

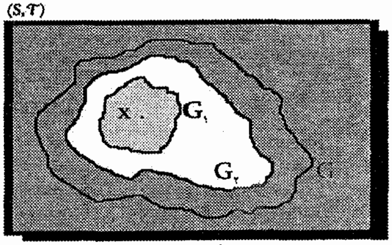
فرض کنیم $\mathbb{R}$، مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد و $\mathscr{L} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{Q}\}$ که $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا است. در این صورت $\mathscr{L}$ زیرپایه‌ای برای توپولوژیی مانند $\mathscr{T}$ روی $\mathbb{R}$ می‌باشد. واضح است که $\mathscr{T}_e \subseteq \mathscr{T}$. چون $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ هاسدورف است، پس $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ نیز هاسدورف است. حال اگر $x=1$، $F = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$، آن‌گاه F بسته است و $1 \notin F$، ولی ۱ و F را نمی‌توان توسط دو مجموعهٔ باز مجزّا از هم جدا کرد. بنابراین $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ منظم نیست. این مثال نشان می‌دهد که توپولوژیی که قوی‌تر از توپولوژی منظم باشد، الزاماً منظم نیست.

۳-۲-۳ قضیه

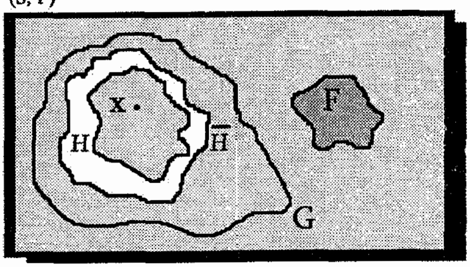
شرط لازم و کافی برای آن‌که $(S, \mathscr{T})$ فضای منظم باشد آن است که برای هر مجموعهٔ باز شامل x مانند G، مجموعهٔ بازی چون H شامل x موجود باشد که $\overline{H} \subseteq G$.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضایی منظم و G مجموعهٔ بازی شامل x باشد. بنابراین $S\backslash G$ مجموعه‌ای بسته است که شامل x نیست. چون $(S, \mathcal{T})$ منظم است، پس دو مجموعهٔ باز G_1 و G_2 در S موجودند که $x \in G_1$ و $S\backslash G \subseteq G_2$ و $G_1 \cap G_2 = \phi$. چون $G_1 \cap G_2 = \phi$ پس $G_1 \subseteq S\backslash G_2$. مجموعه $S\backslash G_2$ بسته است. پس $\bar{G}_1 \subseteq S\backslash G_2$. از طرفی $S\backslash G \subseteq G_2$ پس $S\backslash G_2 \subseteq G$.

در نتیجه $\overline{G_1} \subseteq G$. بنابراین کافی است قرار دهیم $H = G_1$.



بالعکس، فرض کنیم در فضای $(S, \mathcal{T})$ برای هر مجموعهٔ باز G و هر نقطهٔ x متعلق به G مجموعهٔ باز H شامل x چنان موجود است که $\bar{H} \subseteq G$. نشان می‌دهیم $(S, \mathcal{T})$ منظم است. فرض کنیم F مجموعه‌ای بسته در S باشد و $x \notin F$. در این صورت $x \in S\backslash F$ اما $S\backslash F$ مجموعه‌ای باز است. پس بنا به فرض مجموعهٔ باز H شامل x چنان موجود است که $\bar{H} \subseteq S\backslash F$. در این صورت $F \subseteq S\backslash\bar{H}$. پس H که شامل xاست و $S\backslash\bar{H}$ شامل F می‌باشد، دو مجموعهٔ باز مجزا در S هستند. بنابراین S منظم است. ■



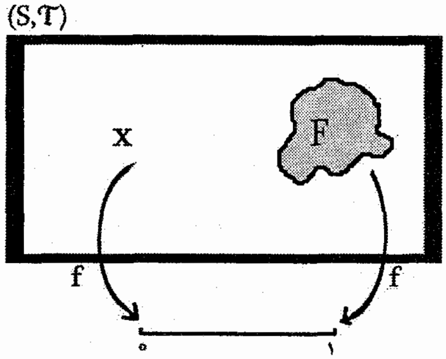
۳-۲-۴ تمرین

ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه $(S, \mathcal{T})$ منظم باشد آن است که به‌ازای هر $x \in S$ و هر مجموعهٔ بستهٔ F که $x \notin F$ مجموعهٔ بازی مانند G موجود باشد که $x \in G$ و $\bar{G} \cap F = \phi$.

۳-۲-۵ فضای به‌طور کامل منظم

فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ را به‌طور کامل منظم می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر مجموعهٔ بسته Fو هر $x \notin F$، تابعی پیوسته مانند $f: (S, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{T}_e / [0,1])$موجود باشد به طوری که $f(x) = 0$ و$f(F) = \{1\}$. هر فضای به‌طور کامل منظم را که T_1 نیز باشد، فضای تیخونوف یا $T_{7/2}$ می‌نامیم.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که هر فضای $T_{7/2}$، یک فضای T_3 است.



۳-۲-۶ قضیه

هر فضای $T_{7/2}$، یک فضای T_3 است.

برهان. فرض کنیم $(S,\mathcal{T})$ فضای تیخونوف باشد، بنابراین $(S,\mathcal{T})$ به‌طور کامل منظم و T_1 است. کافی است ثابت کنیم $(S,\mathcal{T})$ منظم است فرض کنیم F بسته باشد و $x \notin F$. بنابراین تابعی پیوسته مانند $f:(S,\mathcal{T}) \to ([0,1],\mathcal{T}_e/[0,1])$ موجود است که $f(F)=\{1\}$ و $f(x)=0$. چون $[0,\frac{1}{3})$ و $(\frac{2}{3},1]$ در $([0,1],\mathcal{T}_e/[0,1])$ باز هستند و f پیوسته است. پس $f^{-1}([0,\frac{1}{3}))$ و $f^{-1}((\frac{2}{3},1])$ در S باز و جدا از هم هستند و $x \in f^{-1}([0,\frac{1}{3}))$ و $F \subseteq f^{-1}((\frac{2}{3},1])$. بنابراین S منظم است و چون T_1 نیز هست، پس فضایی T_3 است. ■

۳-۲ مسائل

۱. نشان دهید که خواص T_3 و $T_{7/2}$ خواصی توپولوژیکی هستند که هم موروثی و هم حاصل‌ضربی‌اند.

۲. فرض کنید فضای حاصل‌ضربی تیخونوف $\prod_{\alpha\in I}(S_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ فضای T_3 باشد؛ ثابت کنید به‌ازای هر $\alpha \in I$، $(S_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ فضای T_3 است.

۳. ثابت کنید که هر فضای منظم و T_0، یک فضای T_3 است.

۴. فرض کنید $S=\{(a,b): a,b\in\mathbb{R},\ b\geq 0\}$ و $L=\{(a,0): a\in\mathbb{R}\}$. فرض کنید d متریک معمولی اقلیدسی روی $\mathbb{R}^2$ باشد و $S_r(x)=\{y\in\mathbb{R}^2: d(y,x)<r\}$ گوی باز به مرکز x و شعاع r باشد. به‌ازای هر $x\in S$ و $r>0$، $G_r(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G_r(x)=\begin{cases} S_r(x)\cap S & x\in S\setminus L \\ \big(S_r(x)\cap(S\setminus L)\big)\cup\{x\} & x\in L \end{cases}$$

ثابت کنید $\mathcal{B}=\{G_r(x): x\in S,\ r>0\}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی مانند $\mathcal{T}$ روی S است (الف) فرض کنید x,y متعلق به S و متمایز باشند و $r=\frac{1}{3}d(x,y)$. نشان دهید $\overline{G_r(x)}\cap\overline{G_r(y)}=\phi$ و در نتیجه $(S,\mathcal{T})$

فضای $T_{5/2}$ است. (ب) فرض کنید $x = (0,0)$ و $F = L \setminus \{x\}$. ثابت کنید F در $(S, \mathscr{T})$ بسته است و هیچ دو مجموعهٔ بازی مانند G_1 و G_2 موجود نیستند که $x \in G_1$ و $F \subseteq G_2$. بنابراین $(S, \mathscr{T})$ فضای T_3 نیست.

۵. ثابت کنید هر فضای متریک، فضای T_3 است.

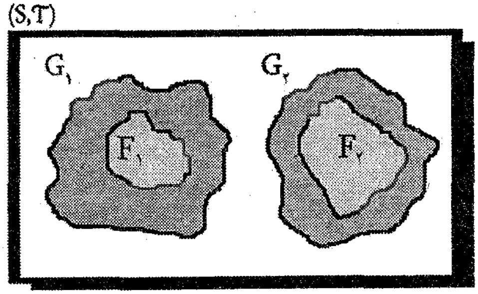
۶. ثابت کنید هر فضای T_3 یک فضای $T_{5/2}$ است.

۳-۳ فضاهای نرمال، T_4، و به‌طور کامل نرمال، T_5

در این بخش، اصولی را که در ارتباط با جداکردن دو مجموعهٔ بسته توسط مجموعه‌های باز می‌باشند، مورد بحث قرار می‌دهیم و دو قضیهٔ مهم توپولوژی یعنی لم اوریسون و قضیهٔ گسترش تیتزه را بیان می‌کنیم.

۳-۳-۱ فضای نرمال

فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ را نرمال می‌گوییم، اگر به‌ازای هر دو مجموعهٔ مجزای بستهٔ F_1 و F_2، دو مجموعهٔ باز مجزای G_1 و G_2 وجود داشته باشد، به طوری که $F_1 \subseteq G_1$ و $F_2 \subseteq G_2$.



هر فضای نرمال، الزاماً یک فضای T_1 نیست. فضای نرمالی را که T_1 نیز باشد فضای T_4 می‌نامیم.

قضیهٔ زیر شرایط معادلی برای نرمال‌بودن یک فضا به‌دست می‌دهد.

قسمت (ب) این قضیه ابزار مهمی است که به ما امکان می‌دهد تا لم اوریسون را به اثبات برسانیم.

۳-۳-۲ قضیه

چهار خاصیت زیر معادلند.

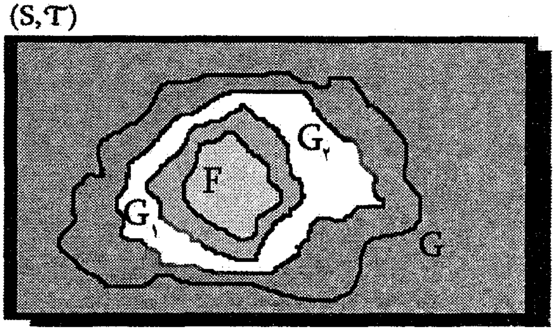
الف) $(S, \mathscr{T})$ فضای نرمال است.

ب) به‌ازای هر مجموعهٔ بسته F و هر مجموعهٔ باز G که $F \subseteq G$، مجموعهٔ بازی مانند H موجود است که $F \subseteq H \subseteq \bar{H} \subseteq G$.

ج) به‌ازای هر دو مجموعهٔ بسته مجزای F_1 و F_2، مجموعهٔ بازی مانند G موجود است که $F_1 \subseteq G$ و $\bar{G} \cap F_2 = \phi$.

د) به‌ازای هر دو مجموعهٔ بسته و مجزای F_1 و F_2، دو مجموعهٔ باز مانند G_1 و G_2 وجود دارند که $F_1 \subseteq G_1$ و $F_2 \subseteq G_2$ و $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 = \phi$.

برهان. (ب ⇐ الف) فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ فضایی نرمال، F مجموعه‌ای بسته و G مجموعهٔ بازی در S شامل F است. در این صورت $S \backslash G$ بسته است و $F \cap (S \backslash G) = \phi$. چون S نرمال است مجموعه‌های مجزای G_1 و G_2 چنان موجودند که $F \subseteq G_1$ و $S \backslash G \subseteq G_2$. کافی است قرار دهیم $H = G_1$. در این صورت چون $G_1 \subseteq S \backslash G_2$ و $S \backslash G_2 \subseteq G$ و $S \backslash G_2$ بسته است، داریم $F \subseteq H \subseteq \overline{H} \subseteq G$.



بقیهٔ برهان به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

اکنون به بیان و اثبات لم اوریسون می‌پردازیم که یکی از قضایای مهم در توپولوژی است این لم برای اثبات قضایای مهمی در توپولوژی مانند قضیهٔ گسترش تیتزه و قضیهٔ نشاندن اوریسون به کار می‌رود.

۳-۳-۳ لم اوریسون

شرط لازم و کافی برای که فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ نرمال باشد آن است که به‌ازای هر دو مجموعهٔ بستهٔ مجزای F_1 و F_2، تابعی پیوسته مانند $f: (S, \mathscr{T}) \to ([0,1], \mathscr{T}_e/[0,1])$ موجود باشد به طوری که $f(F_1) = \{0\}$ و $f(F_2) = \{1\}$.

برهان. فرض کنیم F_1 و F_2 دو مجموعهٔ بستهٔ مجزا باشند و $f: S \to [0,1]$ پیوسته و $f(F_1) = \{0\}$ و $f(F_2) = \{1\}$. چون $[0,\frac{1}{2})$ و $(\frac{1}{2},1]$ در زیرفضای $[0,1]$ از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باز هستند و f پیوسته است پس $G_1 = f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ و $G_2 = f^{-1}((\frac{1}{2},1])$ دو مجموعهٔ باز مجزا در $(S, \mathscr{T})$ می‌باشند که $F_1 \subseteq G_1$ و $F_2 \subseteq G_2$. بنابراین $(S, \mathscr{T})$ نرمال است.

بالعکس، فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ نرمال باشد و F_1 و F_2 دو مجموعهٔ بستهٔ مجزا در S باشند. ابتدا خانوادهٔ خاصی از مجموعه‌های باز را در S می‌سازیم. برای این منظور از مجموعهٔ $\mathbb{Q}_0 = \{\frac{k}{2^n} : n, k \in \mathbb{N}, 0 \le \frac{k}{2^n} \le 1\}$ که مجموعه‌ای چگال در زیرفضای $[0,1]$ است، استفاده می‌کنیم.

به‌ازای هر $r \in \mathbb{Q}_\circ$ مجموعهٔ باز H_r را چنان تعریف می‌کنیم که چنانچه $r' < r$، $\overline{H}_{r'} \subseteq H_r$. چون $\mathbb{Q}_\circ$ شمارا است پس می‌توان روند ساختن این مجموعه‌ها را با استقرا روی n شرح داد. درحالت $n = ۱$ قرار می‌دهیم $H_۱ = S\backslash F_۲$. در این صورت $F_۱ \subseteq H_۱$ و بنا به قضیهٔ قبل مجموعهٔ باز $H_\circ$ چنان موجود است که $F_۱ \subseteq H_\circ \subseteq \overline{H_\circ} \subseteq H_۱$. قرار می‌دهیم $T_۱ = \{H_\circ , H_۱\}$. فرض می‌کنیم $T_{n-۱} = \{ H_{\frac{k}{۲^{n-۱}}} : k = ۰, ۱, ..., ۲^{n-۱}\}$ ساخته شده باشد. برای ساختن T_n فقط باید $H_{\frac{k}{۲^n}}$ها را به‌ازای kهای فرد تعریف کنیم زیرا برای kهای زوج بین صفر و ۲^n، $H_{\frac{k}{۲^{n-۱}}}$ متعلق به $T_{n-۱}$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم k فرد باشد بنا به ساختمان $T_{n-۱}$ داریم $\overline{H}_{\frac{k-۱}{۲^n}} \subseteq H_{\frac{k+۱}{۲^n}}$. بنا به قضیهٔ قبل مجموعهٔ بازی چون G موجود است که $H_{\frac{k-۱}{۲^n}} \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq H_{\frac{k+۱}{۲^n}}$ کافی است تعریف کنیم $H_{\frac{k}{۲^n}} = G$.

اینک تابع f را چنین تعریف می‌کنیم: $f(x) = ۰$، اگر x در همهٔ H_rها باشد، و درغیراین‌صورت $f(x) = sup\ \{r : x \notin H_r\}$. چون $sup\ \{r : r \in \mathbb{Q}_\circ\} = ۱$، مقادیر f در $[۰,۱]$ می‌باشند و $f(F_۱) = \{۰\}$ و $f(F_۲) = \{۱\}$ به‌سادگی دیده می‌شود که:

(*) شرط لازم و کافی برای آن‌که $f(x) < a$ آن است که $r \in \mathbb{Q}_\circ$ موجود باشد که $r < a$ و $x \in H_r$.

(**) شرط لازم و کافی برای آن‌که $f(x) > a$ آن است که $r \in \mathbb{Q}_\circ$ موجود باشد که $r > a$ و $x \notin \overline{H}_r$

برای اثبات پیوستگی تابع f، کافی است نشان دهیم نقش معکوس هر بازه به شکل $[۰,a)$ و $(a,۱]$ که $۱ \leq a \leq ۰$، مجموعه‌ای باز در S است، زیرا گردایهٔ تمام این بازه‌ها تشکیل یک زیرپایه برای زیرفضای $[۰,۱]$ می‌دهد. از طرفی $f^{-۱}([۰,a)) = \{x : f(x) < a\}$ که بنا به (*)، $f^{-۱}([۰,a)) = \bigcup_{r<a} H_r$ و چون هر H_r مجموعه‌ای باز است پس $f^{-۱}([۰,a))$ در S باز است. همچنین $f^{-۱}((a,۱]) = \{x : f(x) > a\}$ که بنا به (**) $f^{-۱}((a,۱]) = \bigcup_{r>a} (S\backslash\overline{H}_r)$ و بنابراین مجموعه‌ای باز است. پس f تابع مطلوب است. ■

از این قضیه نتیجه می‌شود که هر فضای $T_۴$، فضای $T_{۷/۲}$ است.

۳-۳-۴ نتیجه

اگر $(S, \mathcal{T})$ فضای نرمال و $F_۲, F_۱$ دو مجموعهٔ بسته مجزا باشند و $[a,b]$ بازهٔ بستهٔ دلخواهی روی خط حقیقی باشد، آن‌گاه به‌دلیل همسانریختی $[a,b]$ و $[۰,۱]$ تابعی پیوسته مانند $f: (S, \mathcal{T}) \to ([a,b], \mathcal{T}_e/[a,b])$ موجود است که $f(F_۱) = \{a\}$ و $f(F_۲) = \{b\}$. برهان با کمک‌گرفتن از همسانریختی $g: [۰,۱] \to [a,b]$ که در آن $g(x) = (b-a)x + a$ ساده است و به خواننده واگذار می‌شود.

۳-۳-۵ نتیجه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیکی با این خاصیت باشد که اگر $F \subseteq S$ یک مجموعهٔ بسته و $f: F \to [a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه بتوان f را به یک تابع پیوستهٔ f^* از S به $[a,b]$ گسترش داد. در این صورت

نتیجه می‌شود که $(S, \mathcal{T})$ نرمال است. زیرا اگر $F_۱$ و $F_۲$ دو مجموعهٔ بسته و مجزا باشند، آن‌گاه $F = F_۱ \cup F_۲$ بسته است و تابع

$$f(x) = \begin{cases} a & x \in F_۱ \\ b & x \in F_۲ \end{cases}$$

از F به $[a,b]$ پیوسته است (چرا؟) و بنابراین f دارای گسترش $f^*: S \to [a,b]$ است که $f^*(F_۱) = \{a\}$ و $f^*(F_۲) = \{b\}$. اینک بنا به لم اوریسون $(S, \mathcal{T})$ نرمال است.

قضیهٔ بعدی که به قضیهٔ گسترش تیتزه معروف است نشان می‌دهد که عکس این موضوع نیز درست است.

۳-۳-۶ قضیهٔ گسترش تیتزه

شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای $(S, \mathcal{T})$ نرمال باشد آن است که به‌ازای هر مجموعهٔ بسته F و تابع پیوسته $f: F \to [a,b]$ تابعی پیوسته مانند $f^*: S \to [a,b]$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in F$، $f^*(x) = f(x)$ (یعنی $f^* |_F = f$).

برهان. فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضای نرمال، F زیرمجموعهٔ بستهٔ S و $f: F \to [a,b]$ پیوسته باشد. تابع $h: [a,b] \to [-۱,۱]$ که به‌صورت $h(x) = \frac{۲(x-b)}{b-a} + ۱$ تعریف می‌شود یک همسانریختی است. بنابراین تابع $g = h \circ f$ از F به $[-۱,۱]$ پیوسته است. نشان می‌دهیم که g دارای گسترش پیوسته‌ای مانند $g^*: S \to [-۱,۱]$ است و بنابراین $f^* = h^{-۱} \circ g^*$ گسترش f می‌باشد.

فرض کنید $A_۱ = \{x \in F: g(x) \ge \frac{۱}{۳}\}$ و $B_۱ = \{x \in F: g(x) \le \frac{-۱}{۳}\}$؛ چون g پیوسته و F بسته است، پس $A_۱$ و $B_۱$ مجموعه‌های بستهٔ مجزایی در S می‌باشند. بنا به نتیجهٔ ۳-۳-۴ تابعی پیوسته مانند $g_۱: S \to [\frac{-۱}{۳}, \frac{۱}{۳}]$ موجود است که $g_۱(A_۱) = \{\frac{۱}{۳}\}$ و $g_۱(B_۱) = \{\frac{-۱}{۳}\}$. بنابراین برای هر x در F داریم $|g(x) - g_۱(x)| \le \frac{۲}{۳}$ زیرا اگر $x \notin A_۱ \cup B_۱$ آن‌گاه $\frac{-۱}{۳} < g(x) < \frac{۱}{۳}$ و $-\frac{۱}{۳} < g_۱(x) < \frac{۱}{۳}$.

اگر $x \in A_۱$، $g_۱(x) = ۱$ و $\frac{۱}{۳} \le g(x) \le ۱$، بنابراین $|g(x) - g_۱(x)| \le \frac{۲}{۳}$. همچنین اگر $x \in B_۱$، آن‌گاه $g_۱(x) = -\frac{۱}{۳}$ و $-۱ \le g(x) \le -\frac{۱}{۳}$، پس در این حالت نیز نامساوی $|g(x) - g_۱(x)| \le \frac{۲}{۳}$ برقرار است.

حال فرض کنیم $A_۲ = \{x \in F: g(x) - g_۱(x) \ge \frac{۲}{۹}\}$ و $B_۲ = \{x \in F: g(x) - g_۱(x) \le -\frac{۲}{۹}\}$ چون $g - g_۱$ پیوسته است، پس $A_۲$ و $B_۲$ دو مجموعهٔ بستهٔ مجزا می‌باشند و بنا به لم اوریسون، تابعی پیوسته مانند $g_۲: S \to [-\frac{۲}{۹}, \frac{۲}{۹}]$ موجود است که $g_۲(A_۲) = \{\frac{۲}{۹}\}$ و $g_۲(B_۲) = \{-\frac{۲}{۹}\}$ و به‌ازای هر $x \in F$ داریم $|g(x) - g_۱(x) - g_۲(x)| \le \frac{۴}{۹}$. به استقرا دنباله‌ای از توابع پیوستهٔ $g_n: S \to [-\frac{۲^{n-۱}}{۳^n}, \frac{۲^{n-۱}}{۳^n}]$ به‌دست می‌آوریم به طوری که به‌ازای هر $x \in F$ و هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $|g(x) - \sum_{k=۱}^{n} g(x)| \le (\frac{۲}{۳})^n$ و به‌ازای هر $x \in S$، $|g(x)| \le \frac{۲^{n-۱}}{۳^n}$.

چون $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$، بنا به آزمون تقارب وایراشتراس $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ همگرای یکنواخت به تابعی مانند $g^*: S \to [-1,1]$ است. چون به‌ازای هر n، g_n پیوسته است، بنابراین g^* پیوسته است. از طرفی چون $(\frac{2}{3})^n \to 0$ و برای هر $x \in F$ داریم $|g(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$ پس برای هر $x \in F$، $g^*(x) = g(x)$. اینک نتیجه ۳-۳-۵، عکس قضیه را به‌دست می‌دهد. ■

۳-۳-۷ مجموعه‌های از هم جدا شده

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq S$ و $B \subseteq S$. اگر $A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \phi$، آن‌گاه، B, A را دو مجموعهٔ از هم جداشده (منفک) می‌نامیم. زوج (A, B) را یک جدایی در $(S, \mathcal{T})$ می‌گوییم، هرگاه B, A دو مجموعهٔ منفک باشند.

۳-۳-۸ فضای به‌طور کامل نرمال

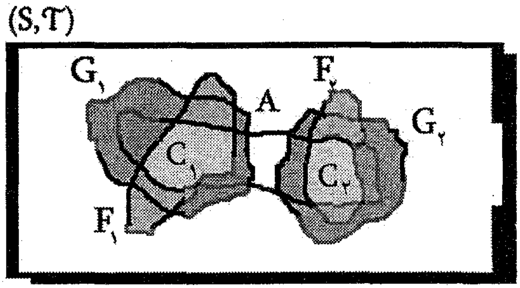
فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ را به‌طور کامل نرمال می‌گوییم هرگاه به‌ازای هر جدایی در $(S, \mathcal{T})$ مانند (A, B) دو مجموعهٔ باز مجزا مانند G_1 و G_2 وجود داشته باشد، به طوری که $A \subseteq G_1$ و $B \subseteq G_2$. هر فضای به‌طور کامل نرمال که T_1 نیز باشد فضای T_5 نام دارد.

درحالت کلی نرمال‌بودن یک خاصیت موروثی نیست. اما چنان که در قضیهٔ زیر نشان خواهیم داد در فضاهای به‌طور کامل نرمال، این خاصیت به زیر فضاهای آن فضا منتقل می‌شود.

۳-۳-۹ قضیه

شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ به‌طور کامل نرمال باشد آن است که هر زیرفضای آن نرمال باشد.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ به‌طور کامل نرمال و $(A, \mathcal{T}/A)$ زیرفضای $(S, \mathcal{T})$ باشد. همچنین فرض کنیم C_1 و C_2 دو مجموعهٔ بستهٔ مجزا در $(A, \mathcal{T}/A)$ باشند. بنابراین دو مجموعهٔ بسته F_1 و F_2 در $(S, \mathcal{T})$ موجودند که $C_1 = F_1 \cap A$ و $C_2 = F_2 \cap A$. در نتیجه $\overline{C}_1 \subseteq F_1$ و $\overline{C}_2 \subseteq F_2$. بنابراین $\overline{C}_1 \cap C_2 \subseteq F_1 \cap C_2$ که چون $F_1 \cap C_2 \subseteq C_1 \cap C_2 = \phi$، پس $\overline{C}_1 \cap C_2 = \phi$. به‌همین ترتیب $\overline{C}_2 \cap C_1 = \phi$. پس (C_1, C_2) یک جدایی در $(S, \mathcal{T})$ است و چون $(S, \mathcal{T})$ به‌طور کامل نرمال است دو مجموعهٔ باز مجزا مانند G_1 و G_2 موجودند که $C_1 \subseteq G_1$ و $C_2 \subseteq G_2$. بنابراین $C_1 \subseteq A \cap G_1$ و $C_2 \subseteq A \cap G_2$ و $A \cap G_1$ و $A \cap G_2$ مجموعه‌های باز مجزایی در $(A, \mathcal{T}/A)$ هستند. بنابراین $(A, \mathcal{T}/A)$ نرمال است.



بالعکس، فرض کنیم هر زیرفضای $(S,\mathcal{T})$ نرمال باشد. ثابت می‌کنیم که $(S,\mathcal{T})$ به‌طور کامل نرمال است. فرض کنیم (A,B) یک جدایی در $(S,\mathcal{T})$ باشد و $D = S\setminus((\bar{A}\setminus A) \cup (\bar{B}\setminus B))$. در این صورت B,A در $(D,\mathcal{T}/D)$ بسته و مجزا می‌باشند، زیرا واضح است که $D \cap (\bar{B}\setminus B) = D \cap (\bar{A}\setminus A) = \phi$. بنابراین $A = D \cap A = D \cap \bar{A}$ و $B = D \cap B = D \cap \bar{B}$ و ضمناً $\bar{A}$ و $\bar{B}$ در $(S,\mathcal{T})$ بسته‌اند. حال چون $(D,\mathcal{T}/D)$ نرمال است، پس دو مجموعهٔ باز G_1 و G_2 در $\mathcal{T}$ موجودند که $A \subseteq D \cap G_1$ و $B \subseteq D \cap G_2$ و $(D \cap G_1) \cap (D\cap G_2) = \phi$. بنابراین $G_1 \cap G_2 \subseteq (\bar{A}\setminus A) \cup (\bar{B}\setminus B)$. فرض کنیم $H_1 = (S\setminus\bar{B}) \cap G_1$ و $H_2 = (S\setminus\bar{A}) \cap G_2$. بنابراین H_1 و H_2 بازند و $H_1 \cap H_2 = \phi$ و $A \subseteq H_1$ و $B \subseteq H_2$. بنابراین $(S,\mathcal{T})$ به‌طور کامل نرمال است. ■

۳-۳-۱۰ قضیه

هر فضای متریک، به‌طور کامل نرمال و بنابراین نرمال است.

برهان. فرض کنیم (S,d) فضای متریک و A و B دو مجموعهٔ از هم جدا شده در $(S,\mathcal{T}_d)$ باشد. فرض کنیم $G_1 = \{x\in S: d(x,A) < d(x,B)\}$ و $G_2 = \{x \in S: d(x,B) < d(x,A)\}$ از این‌که $A \cap \bar{B} = \bar{B} \cap A = \phi$ نتیجه می‌شود که $A \subseteq G_1$ و $B \subseteq G_2$ و $G_1 \cap G_2 = \phi$ (چرا؟). ثابت می‌کنیم که G_1 و G_2 در توپولوژی القایی توسط متریک d بازند. فرض کنیم $x \in G_1$ و $r = \frac{1}{3}(d(x,B) - d(x,A))$، ثابت می‌کنیم: $S_r(x) \subseteq G_1$. اگر $y \in S_r(x)$، آن‌گاه چون $d(y,A) = inf\{d(y,z) : z \in A\}$ و

$$inf\ \{d(y,z): z \in A\} \leq inf\{d(y,x) + d(x,z): z \in A\} \leq r + inf\{d(x,z) : z \in A\}$$

در نتیجه $d(y,A) \leq d(x,A) + r$ و چون $d(x,A) = d(x,B) - 3r$

$$d(y,A) \leq d(x,B) - 2r \leq inf\{d(x,y) + d(y,z): z \in B\} - 2r \leq d(y,B) - r < d(y,B)$$

پس $y \in G_1$. در نتیجه $S_r(x) \subseteq G_1$ و G_1 باز است. به‌همین روش ثابت می‌شود که G_2 باز است. ■

۳-۳-۱۱ مثال

فرض کنیم $S = \{a,b,c\}$ و $\mathcal{T} = \{\phi, S, \{a\}, \{b,c\}\}$ در این صورت $(S,\mathcal{T})$ فضای T_0 نیست ولی منظم،

به‌طور کامل منظم، نرمال و به‌طور کامل نرمال است زیرا مجموعه‌های آن بستاز هستند.

تیخونوف مثالی ارائه کرده است که نشان می‌دهد که فضای نرمالی موجود است که به‌طور کامل نرمال نیست.

مثال زیر نشان می‌دهد که در حالت کلی هیچ یک از اصول T_i تحت توابع پیوسته پایا نیست (ر.ک. [۱]).

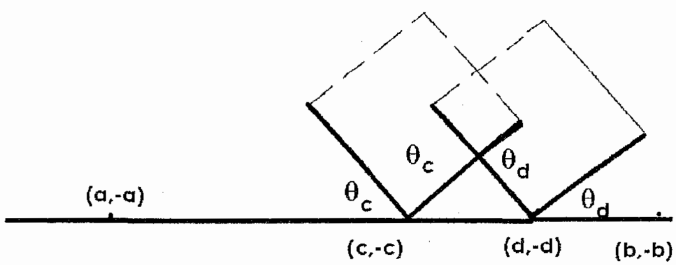
۳-۳-۱۲ مثال

فرض کنیم $S_1 = \{0, 1, 2\}$ و $S_2 = \{a, b, c\}$، $\mathcal{T}_1$ توپولوژی گسسته روی S_1 باشد و $\mathcal{T}_2 = \{\phi, S_2, \{a\}, \{b, c\}\}$. فضای $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فضای T_5 است. از طرفی $(S_2, \mathcal{T}_2)$ فضای T_0 نیست. از این که $\mathcal{T}_1$ توپولوژی گسسته است نتیجه می‌شود که هر تابع از $(S_1, \mathcal{T}_1)$ و بالاخص تابع $f(0) = a$ و $f(1) = a$ و $f(1) = b$ و $f(2) = c$ پیوسته است.

مثال زیر نشان می‌دهد که خاصیت نرمال‌بودن و همچنین خاصیت به‌طور کامل نرمال‌بودن حاصل‌ضربی نیست. در حقیقت فضایی T_5 مثال می‌زنیم که حاصل‌ضرب دو نسخه از آن T_5 نیست.

۳-۳-۱۳ مثال

فرض کنیم $\mathcal{T}_l$ توپولوژی حد پایین روی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد، فضای $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ که به خط سورجن‌فری معروف است یک فضای T_5 است. بنابراین $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_l \times \mathcal{T}_l)$ منظم و در حقیقت تیخونوف است. نشان می‌دهیم که $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_l \times \mathcal{T}_l)$ نرمال نیست. دو مجموعهٔ $A = \{(x, -x) : x$ گویا است$\}$ و $B = \{(x, -x) : x$ اصم است$\}$ بسته و مجزا در $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ هستند. فرض کنیم G_1 و G_2 در $\mathcal{T}_l \times \mathcal{T}_l$ باز باشند، به‌طوری که $A \subseteq G_1$ و $B \subseteq G_2$. به‌ازای هر $r \in \mathbb{R}$ و $\theta > 0$ فرض کنیم $B(r, \theta) = \{(x, y) : x \in [r, r+\theta], y \in [-r, -r+\theta]\}$ به‌ازای هر $(r, -r) \in G_2$، $\theta_r > 0$ موجود است که $B(r, \theta_r) \subset G_2$. $\theta > 0$ و a, b موجودند که $a < b$ و $\{x : \theta_x > \theta$ و x اصم است$\}$ با توپولوژی نسبی اقلیدسی در (a, b) چگال است. فرض کنیم c عدد گویایی باشد که $a < c < b$ و $B(c, G_c) \subseteq G_1$ و $\theta_c < c$. در این صورت عددی مانند d موجود است که $c < d < b$، $\theta_d > \theta$ و $d - c < \theta_c$. بنابراین $B(c, \theta_c) \cap B(d, \theta_d) \neq \phi$. در نتیجه $G_1 \cap G_2 \neq \phi$. بنابراین A و B نمی‌توانند دو همسایگی مجزا داشته باشند. لازم به توجه است که هر بازهٔ $[a, b)$ در خط سورجن فری بستاز است.



۳-۳-۱۴ مکعب هیلبرت

مکعب هیلبرت، I^{ω}، فضای متریک (S, d) است که در $S = \prod_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{n}]$ و $d(x,y) = [\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2]^{1/2}$. قضیهٔ زیر که به قضیهٔ نشاندن اوریسون معروف است ثابت می‌کند که هر فضای T_4 و شمارای دوم همسانریخت با یک زیرفضای مکعب هیلبرت است و بنابراین متریک‌پذیر می‌باشد.

۳-۳-۱۵ قضیهٔ نشاندن اوریسون

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ شمارای دوم و T_4 باشد، در این صورت متریک‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم $\mathcal{B} = \{B^n : n \ \mathbb{N}\}$ یک پایه شمارا برای $\mathcal{T}$ باشد. می‌توانیم فرض کنیم که تعداد نقاط S نامتناهی است زیرا درغیراین‌صورت $\mathcal{T}$ گسسته و بنابراین متریک‌پذیر است. چون S نامتناهی است پس $\mathcal{B}$ را می‌توان شمارای نامتناهی فرض کرد. چون $(S, \mathcal{T})$ منظم است، به‌ازای هر B_j متعلق $\mathcal{B}$ و هر x متعلق به B_j، مجموعهٔ بازی مانند G موجود است که شامل x است و $G \subseteq \bar{G} \subseteq B_j$ و چون $\mathcal{B}$ پایهٔ $\mathcal{T}$ است پس B_iی موجود است که شامل x است و $B_i \subseteq G \subseteq \bar{G} \subseteq B_j$. بنابراین به‌ازای هر j، iی موجود است که B_i شامل x است و $B_i \subseteq \bar{B}_i \subseteq B_j$. مجموعهٔ تمام زوج‌های مرتب (B_i, B_j) که $\bar{B}_i \subseteq B_j$ شمارای نامتناهی است و بنابراین می‌توان آن را به‌صورت $\{p_1, p_2, ..., p_n, ...\}$ نوشت. بنا به لم اوریسون به‌ازای هر زوج مرتب $p_n = (B_i, B_j)$ تابعی پیوسته مانند $f_n : S \to [0,1]$ موجود است که $f_n(\bar{B}_i) = \{0\}$, $f_n(S \backslash B_j) = \{1\}$. حال به‌ازای هر x متعلق به S، $f(x)$را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = (\frac{f_1(x)}{3}, \frac{f_2(x)}{3^2}, ..., \frac{f_n(x)}{3^n}, ...)$$

بنابراین f تابعی از S به I^{ω} است. حال ثابت می‌کنیم که fیک به یک است. فرض کنیم $x \neq y$ چون S فضای T_1 است پس B_jی متعلق به $\mathcal{B}$ موجود است که شامل x است و شامل y نیست. بنابراین B_iی موجود است که شامل x است و $B_i \subseteq \bar{B}_i \subseteq B_j$. چون x متعلق به $\bar{B}_i$ است و y متعلق به $S \backslash B_j$، پس $f_n(x) = 0$ و $f_n(y) = 1$. لذا مؤلفهٔ nام تابع $f(x)$ برابر ۰ و مؤلفهٔ nام تابع $f(y)$ برابر 3^{-n} است. بنابراین $f(x) \neq f(y)$. در نتیجه f یک به یک است. حال ثابت می‌کنیم که $f: S \to f(S)$ همسانریختی است. کافی است ثابت کنیم f پیوسته و باز است. فرض کنیم $x_0 \in S$ و $r > 0$. بنابراین k متعلق به $\mathbb{N}$ موجود است که $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} < \frac{r^2}{2}$. به‌ازای هر $1 \leq n \leq k$، تابع f_n پیوسته است و بنابراین B_nی موجود است که x_0 متعلق به B_n است و اگر x متعلق به B_n باشد، آن‌گاه $|f_n(x_0) - f_n(x)| < \frac{r}{\sqrt{2k}}$. داریم $x_0 \in B = \bigcap_{n=1}^{k} B_n \in \mathcal{T}$. حال فرض کنیم $x \in B$. پس

$$d(f(x_0), f(x)) = [\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} (f_n(x_0) - f_n(x))^2]^{1/2}$$

$$= [\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{3^{2n}} (f_n(x_0) - f_n(x))^2 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} (f_n(x_0) - f_n(x))^2]^{1/2}$$

از طرفی:

$$[\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{3^{2n}} (f_n(x_0) - f_n(x))^2 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} (f_n(x_0) - f_n(x))^2]^{1/2} \leq$$
$$[\sum_{n=1}^{k} |f_n(x_0) - f_n(x)|^2 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}}] < [k (\frac{r}{\sqrt{2k}})^2 + \frac{r^2}{2}]^{1/2} = r$$

پس f پیوسته است. حال فرض کنیم G مجموعه‌ای باز و $y = (y_1, y_2, \dots)$ متعلق به $f(G)$ باشد. بنابراین xی متعلق به G موجود است که $y = f(x)$. بنابراین nی طبیعی موجود است که $p_n = (B_i, B_j)$ و $B_i \subseteq \overline{B}_i \subseteq B_j \subseteq G$ به طوری‌که B_i شامل x است. در نتیجه $f_n(x) = 0$ و $f_n(S \setminus G) = \{1\}$. بنابراین به‌ازای هر z متعلق به $S \setminus G$ داریم $d(f(x), f(z)) \geq \frac{1}{3^n}$ و در نتیجه $f(S\setminus G) \cap S_{\frac{1}{3^n}}(f(x)) = \phi$. بنابراین $S_{\frac{1}{3^n}}(y) \cap f(S) \subseteq f(G)$ و y متعلق به $S_{\frac{1}{3^n}}(y)$ است. پس $f(G)$ در $f(S)$ باز است. بنابراین f باز است. پس $f: S \to f(S)$ همسانریختی است و چون $f(S)$ به‌عنوان زیرفضایی از I^ω متریک‌پذیر است، باتوجه به این‌که متریک‌پذیری خاصیتی توپولوژیکی است، نتیجه می‌شود که S نیز متریک‌پذیر است. ■

۳-۳ مسائل

۱. نشان دهید که هر فضای T_5، فضای T_4 است و هر فضای T_4 فضای $T_{7/2}$ است.

۲. فرض کنید $(S_1, \mathcal{T}_1)$ و $(S_2, \mathcal{T}_2)$ دو فضای توپولوژیک باشند به‌طوری که به‌ازای هر مجموعهٔ بسته F در $(S_1, \mathcal{T}_1)$ و تابع پیوسته $f: F \to S_2$ تابعی پیوسته مانند $f^*: S_1 \to S_2$ موجود باشد به طوری که $f^* |_F = f$. ثابت کنید که اگر $(S_2, \mathcal{T}_2)$ هاسدورف و لااقل دو عضو داشته باشد. آن‌گاه $(S_1, \mathcal{T}_1)$ نرمال است.

۳. نشان دهید که هر زیرفضای بستهٔ فضای نرمال، خود نیز نرمال است.

۴. نشان دهید که خط سورجن‌فری $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$، یک فضای T_5 است.

۵. فرض کنید $(S, \mathcal{T})$ یک فضای نرمال و F زیرمجموعهٔ بستهٔ S و $I^n = [0,1] \times \dots \times [0,1]$ مکعب واحد n بعدی باشد (حاصل‌ضرب n نسخه از $[0,1]$). فرض کنید $f: F \to I^n$ تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید که f یک گسترش پیوسته مانند f^* از S به I^n دارد.

۶. فرض کنید $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ پیوسته، بسته و برو باشد. اگر $(S_1, \mathcal{T}_1)$ به‌ترتیب نرمال یا به‌طور کامل نرمال باشد، آن‌گاه ثابت کنید که $(S_2, \mathcal{T}_2)$ به‌ترتیب نرمال یا به‌طور کامل نرمال است.

۷. جزئیات اثبات این را که حاصل‌ضرب دو نسخه از خط سورجن فری، منظم است و نرمال نیست تکمیل کنید.

۸. مثالی از یک فضای T_4 ارائه دهید که متریک‌پذیر نباشد.

۴

خواص پوششی

فرض کنیم S یک مجموعه باشد و $A \subseteq S$. خانوادهٔ $\{V_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \mathcal{P}(S)$ را یک پوشش برای A می‌گوییم، هرگاه $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$. در فضای $(S, \mathscr{T})$ پوشش $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ برای S را یک پوشش باز می‌گوییم، هرگاه برای هر $\alpha \in I$، $G_\alpha \in \mathscr{T}$. همچنین پوشش $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ برای S را یک پوشش بسته می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر α، F_α در $(S, \mathscr{T})$ بسته باشد.

اگر $\mathscr{C}_1 = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ و $\mathscr{C}_2 = \{H_\beta : \beta \in I\}$ دو پوشش برای S باشند، $\mathscr{C}_1$ را یک زیر پوشش $\mathscr{C}_2$ می‌گوییم، هرگاه $\mathscr{C}_1 \subseteq \mathscr{C}_2$.

۴-۱ فشردگی

۴-۱-۱ فضای فشرده

فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ را فشرده می‌گوییم، هرگاه هر پوشش باز برای $(S, \mathscr{T})$ دارای یک زیر پوشش متناهی باشد.

واضح است که هر مجموعهٔ متناهی S با هر توپولوژی $\mathscr{T}$ روی آن، فشرده است. مثالهای زیر نشان می‌دهند که به جز در حالت متناهی‌بودن S، خاصیت فشردگی اصولاً بستگی به توپولوژی تعریف شده روی S دارد.

۴-۱-۲ مثال

$(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ فشرده نیست زیرا $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ پوشش بازی برای $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ است که هیچ زیر پوشش متناهی ندارد. فرض کنیم $\mathscr{T}$ توپولوژی هم متناهی روی $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ و هر زیرفضای آن فشرده است. $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_l)$ فشرده نیست، زیرا پوشش باز $\{[-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ زیر پوشش متناهی ندارد.

بنا به قضیه هاینه - بورل $[a, b]$ در $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ فشرده است در صورتی که $[a, b)$ فشرده نیست زیرا $\{[a, b - \frac{b-a}{2n}) : n \in \mathbb{N}\}$ پوشش بازی برای $[a, b)$ است که هیچ زیر پوشش متناهی ندارد. بنابراین فشردگی خاصیت موروثی نیست.

۴-۱-۳ مثال

اگر $x \in S$، $(S, \varepsilon(x))$ فشرده است و $(S, \mathcal{T}(x))$ فشرده نیست، مگر آن‌که S متناهی باشد.

۴-۱-۴ مثال

اگر در فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$، $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$، آن‌گاه $\{x_n: n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ فشرده است.

۴-۱-۵ قضیه

اگر $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ تابعی پیوسته و برو باشد و $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فشرده باشد، آن‌گاه $(S_2, \mathcal{T}_2)$ فشرده است.

برهان. فرض کنیم $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ پوشش بازی برای S_2 باشد. بنابراین $\{f^{-1}(G_\alpha) : \alpha \in I\}$ پوشش بازی برای S_1 است. چون S_1 فشرده است؛ پس دارای یک زیرپوشش متناهی $\{f^{-1}(G_{\alpha_i}): 1 \le i \le n\}$ است. در این صورت، به‌وضوح، $\{G_{\alpha_i}: 1 \le i \le n\}$ یک زیرپوشش S_2 است. ■

قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که خاصیت فشردگی، یک خاصیت توپولوژیکی است، گرچه این خاصیت موروثی نیست، ولی قضیهٔ تیخونوف که به زودی آن را اثبات خواهیم کرد نشان می‌دهد که خاصیت فشردگی، حاصل‌ضربی است.

۴-۱-۶ قضیه

هر زیرفضای بستهٔ یک فضای فشرده، فشرده است.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فشرده و F بسته باشد و $\mathcal{A} = \{G_\alpha \cap F: \alpha \in I\}$ پوشش بازی برای $(F, \mathcal{T}/F)$ باشد. چون F بسته است پس $S\backslash F \in \mathcal{T}$ و بنابراین $\{G_\alpha: \alpha \in I\} \cup \{S\backslash F\}$ یک پوشش باز برای $(S, \mathcal{T})$ است. چون $(S, \mathcal{T})$ فشرده است، تعداد متناهی از G_αها مانند $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_n}$ موجودند به طوری که $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_n}\} \cup \{S\backslash F\}$ پوشش بازی برای S است. در نتیجه $\{G_{\alpha_i} \cap F : 1 \le i \le n\}$ زیر پوشش متناهی $\mathcal{A}$ است و بنابراین $(F, \mathcal{T}/F)$ فشرده است. ■

۴-۱-۷ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ هاسدورف و F زیرفضای فشردهٔ S باشد، در این صورت F بسته است.

برهان. ثابت می‌کنیم $S\backslash F$ اجتماعی از مجموعه‌های باز است. فرض کنیم $x \in S\backslash F$. در این صورت به‌ازای هر $y \in F$ داریم $x \neq y$ و چون $(S, \mathcal{T})$ هاسدورف است پس دو مجموعهٔ باز مجزای H_y و G_y موجود است که $x \in H_y$ و $y \in G_y$. بنابراین $F \subseteq \bigcup\limits_{y\in F} G_y$ و در نتیجه $\{G_y \cap F: y \in F\}$ پوشش بازی برای فضای فشردهٔ $(F, \mathcal{T}/F)$ و بنابراین یک زیرپوشش متناهی مانند $\{G_{y_i} \cap F: 1 \le i \le n\}$ دارد. قرار می‌دهیم $G_x = \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_{y_i}$ در این صورت G_x مجموعه‌ای باز و شامل x است. از طرفی برای هر $y \in F$، G_{y_i} شامل y موجود است که

$G_{y_i} \cap H_{y_i} = \phi$. پس $y \notin H_{y_i}$ و در نتیجه $y \notin G_x$. پس $F \cap G_x = \phi$، یعنی $G_x \subseteq S \backslash F$. چون $x \in S \backslash F$ دلخواه بود، پس $S \backslash F = \bigcup_{x \in S \backslash F} G_x$. در نتیجه $S \backslash F$ باز است. ■

۴-۱-۸ قضیه

فرض کنیم $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فشرده، $(S_2, \mathcal{T}_2)$ هاسدورف و $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ تابعی پیوسته و برو باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای آن که مجموعهٔ F در S_2 بسته باشد آن است که $f^{-1}(F)$ در S_1 بسته باشد.

برهان. فرض کنیم F در $(S_2, \mathcal{T}_2)$ بسته باشد. چون f پیوسته است واضح است که $f^{-1}(F)$ در $(S_1, \mathcal{T}_1)$ بسته است. حال فرض کنیم $f^{-1}(F)$ در $(S_1, \mathcal{T}_1)$ بسته باشد. در این صورت $f^{-1}(F)$ فشرده است و چون f برو است $f(f^{-1}(F)) = F$ و چون f پیوسته است F در $(S_2, \mathcal{T}_2)$ فشرده است. چون $(S_2, \mathcal{T}_2)$ هاسدورف است بنا به قضیهٔ ۴-۱-۷، F بسته است. ■

۴-۱-۹ نتیجه

اگر $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فشرده، $(S_2, \mathcal{T}_2)$ هاسدورف و $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ پیوسته و دوسو باشد، آنگاه f همسانریختی است.

۴-۱-۱۰ تمرین

فرض کنیم $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فشرده، $(S_2, \mathcal{T}_2)$ هاسدورف و $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ پیوسته و برو باشد. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه $G \in \mathcal{T}_2$ آن است که $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_1$.

۴-۱-۱۱ تمرین

اگر $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ فضای $\mathbb{R}$ همراه با توپولوژی هم متناهی باشد، آنگاه نشان دهید $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ فشرده است. اگر $G \subseteq \mathbb{R}$ باز باشد، آنگاه ثابت کنید G بسته نیست ولی فشرده است.

۴-۱-۱۲ خاصیت اشتراک متناهی

خانوادهٔ $\mathscr{A}$ از مجموعه‌ها دارای خاصیت اشتراک متناهی است، هرگاه هر زیر خانوادهٔ متناهی ناتهی آن دارای اشتراک ناتهی باشد.

۴-۱-۱۳ قضیه

شرط لازم و کافی برای آن که $(S, \mathcal{T})$ فشرده باشد آن است که هر خانواده $\mathscr{A} = \{F_\alpha : \alpha \in I\}$ از مجموعه‌های بسته با خاصیت اشتراک متناهی، دارای اشتراک ناتهی باشد، یعنی $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \phi$.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ فشرده باشد و $\mathscr{A} = \{F_\alpha : \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های بسته با خاصیت اشتراک متناهی باشد. اگر $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \phi$، آن‌گاه نتیجه می‌شود که $\bigcup_{\alpha \in I} (S \backslash F_\alpha) = S$ و بنابراین $\{S \backslash F_\alpha : \alpha \in I\}$ پوششی باز برای فضای فشردهٔ S است. پس یک زیرپوشش متناهی مانند $\{S \backslash F_{\alpha_i} : 1 \leq i \leq n\}$ دارد. درنتیجه $\bigcup_{i=1}^{n} (S \backslash F_{\alpha_i}) = S$ که با استفاده از قوانین دمورگان داریم $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \phi$ و این متناقض با خاصیت اشتراک متناهی است. بنابراین $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \phi$.

بالعکس، فرض کنید هر خانواده از مجموعه‌های بسته با خاصیت اشتراک متناهی، دارای اشتراک ناتهی باشد ؛ ثابت می‌کنیم $(S, \mathscr{T})$ فشرده است. اگر $\{G_\alpha, \alpha \in I\}$ پوشش بازی برای S باشد، قرار می‌دهیم $F_\alpha = S \backslash G_\alpha$. چون $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \phi$، خانوادهٔ $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی نیست ؛ بنابراین $F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_n}$ موجودند که $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \phi$ و بنابراین $\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} = S$. ■

۴-۱-۱۴ نتیجه

شرط لازم و کافی برای آن که $(S, \mathscr{T})$ فشرده باشد آن است که هر خانواده از مجموعه‌های بستهٔ مانند $\mathscr{A} = \{F_\alpha : \alpha \in I\}$ که $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \phi$ دارای یک زیرخانوادهٔ متناهی با اشتراک تهی باشد.

۴-۱-۱۵ تمرین

شرط لازم و کافی برای آن‌که $(S, \mathscr{T})$ فشرده باشد آن است که هر پوشش از مجموعه‌های پایهٔ $\mathscr{T}$ برای S، دارای یک زیرپوشش متناهی باشد.

در آنالیز مقدماتی با قضیهٔ هاینه - بورل که بیان می‌کند شرط لازم و کافی برای آن‌که زیرمجموعهٔ A از فضای $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_e)$ فشرده باشد آن است که بسته و کراندار باشد، آشنا شده‌ایم. این قضیه در فضاهای متریک دلخواه برقرار نیست؛ اگر چه در هر فضای نرمدار با بعد متناهی بر قرار است. به دو مثال زیر توجه کنید:

۴-۱-۱۶ مثال

$(0, 1)$ در $(0, 1)$ با توپولوژی زیر فضایی اقلیدسی، بسته و کراندار است ولی فشرده نیست.

۴-۱-۱۷ مثال

فرض کنیم S یک مجموعهٔ نامتناهی با متر گسسته و $A \subseteq S$ نامتناهی باشد. دراین صورت A بسته و کراندار است ولی فشرده نیست.

اینک اثبات قضیهٔ هاینه - بورل را برای $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ ارائه می‌دهیم. تعمیم این قضیه به $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_e)$ با استفاده از قضیهٔ تیخونوف صورت می‌گیرد. ابتدا ثابت می‌کنیم که بازهٔ $[a, b]$ فشرده است. یادآوری می‌کنیم که زیرمجموعهٔ A از $\mathbb{R}$ را کراندار می‌گوییم، هرگاه بازه‌ای مانند (a, b) وجود داشته باشد که $A \subseteq (a, b)$. این

مطلب معادل است با این‌که $M > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in A$، $|x| \leq M$.

۴-۱-۱۸ قضیه هاینه - بورل

هر بازهٔ بسته $[a,b]$ در $(\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$ فشرده است.

برهان. فرض کنیم $\mathscr{A} = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ یک پوشش باز برای $[a,b]$ باشد. قرار می‌دهیم

$$A = \{x \in [a,b] : \text{دارد}\ [a,x]\ \text{یک زیرپوشش متناهی برای}\ \mathscr{A}\}$$

واضح است که $a \in A$ و b یک کران بالا برای A است بنابراین A دارای سوپرموم است. فرض کنیم $c = sup\ A$. بنابراین $a < c \leq b$، دلیل این‌که $a < c$ این‌است‌که $G_\alpha \in A$ موجود است که $a \in G_\alpha$ و چون G_α باز است پس بازهٔ بسته‌ای مانند $[a,x_0]$ موجود است که $a<x_0\leq b$، $[a,x_0] \subseteq G_\alpha$. بنابراین $x_0 \in A$ و $a<x_0$. پس $a<c\leq b$. حال $G_c \in \mathscr{A}$ موجود است که $c \in G_c$. اگر $d \in (a,c) \cap G_c$، بنا به خاصیت سوپرموم نتیجه می‌شود که یک زیرپوشش متناهی از $\mathscr{A}$ مانند $\mathscr{A}'$ بازه $[a,d]$ را می‌پوشاند. اگر d را طوری انتخاب کنیم که $d \subseteq [G_c, c]$، آن‌گاه نتیجه می‌شود که $\mathscr{A}' \cup \{G_c\}$ یک زیرپوشش متناهی است که $[a,c]$ را می‌پوشاند. حال ثابت می‌کنیم $c=b$. اگر $c\neq b$ در این صورت چون $c\in G_c$، عضوی مانند c' که $c<c'\leq b$ موجود است به طوری که $[c,c']\subseteq G_c$. بنابراین $\mathscr{A}'\cup\{G_c\}$ یک پوشش متناهی برای $[a,c']$ است. در نتیجه $c'\in A$ و $c<c'$ و این متناقض با سوپرموم‌بودن c است. بنابراین $c=b$. پس یک زیرپوشش متناهی از $\mathscr{A}$ برای $[a,b]$ موجود است و بنابراین $[a,b]$ فشرده است. ■

۴-۱-۱۹ قضیه

شرط لازم و کافی برای این که مجموعهٔ A در $(\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$ فشرده باشد آن است که بسته و کراندار باشد.

برهان. فرض کنیم A بسته و کراندار باشد. چون A کراندار است اعداد حقیقی b, a که $a\leq b$ موجود است که $A\subseteq[a,b]$. چون $[a,b]$ فشرده است و A زیرمجموعهٔ بسته $[a,b]$ است بنا به قضیهٔ ۴-۱-۶، A فشرده می‌باشد.

بالعکس، فرض کنیم A فشرده باشد. چون $(\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$ هاسدورف است نتیجه می‌شود که A بسته است. ثابت می‌کنیم A کراندار است. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $(-n,n)$ مجموعهٔ بازی در $\mathcal{T}_e$ است و بنابرین خانوادهٔ $\{(-n,n) \cap A : n\in \mathbb{N}\}$ یک پوشش باز برای A است و بنابراین باید یک زیرپوشش متناهی داشته باشد، یعنی kیی موجود است که $A = \bigcup_{n=1}^{k}(A \cap (-n,n))$. بنابراین $A \subseteq [-k,k]$. پس A کراندار است. ■

قضیه زیر که توسط الکساندر[1] اثبات شده است، کلیدی برای اثبات قضیهٔ تیخونوف توسط کیلی[2] می‌باشد.

1. J.S. Alexander 2. J.L. Kelley

۴-۱-۲۰ قضیه

شرط لازم و کافی برای آن که $(S, \mathscr{T})$ فشرده باشد آن است که $\mathscr{T}$ دارای یک زیرپایه مانند $\mathscr{L}$ باشد به طوری که اگر $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{L}$ پوششی برای S باشد، آنگاه $\mathscr{C}$ یک زیرپوشش متناهی برای S داشته باشد.

برهان. اگر $(S, \mathscr{T})$ فشرده باشد، آنگاه $\mathscr{T}$ و هر زیرپایهٔ $\mathscr{T}$ دارای خواص مورد نظر می‌باشد.

بالعکس، فرض کنیم $\mathscr{L}$ زیرپایه‌ای برای $\mathscr{T}$ و دارای خواص موردنظر باشد. ثابت می‌کنیم $(S, \mathscr{T})$ فشرده است. فرض کنیم $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{T}$ یک پوشش برای S باشد، ثابت می‌کنیم یک زیرپوشش متناهی دارد.

به برهان خلف، فرض کنیم $\mathscr{A}$ هیچ زیرپوشش متناهی برای S نداشته باشد. $T \subseteq \mathrm{P}(\mathscr{T})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = \{\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{T} : \text{هیچ زیرپوشش متناهی برای } S \text{ ندارد } \mathscr{A}' \text{ و } \mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'\}.$$

واضح است که $\mathscr{A} \in T$ و T با رابطهٔ جزئیت یک مجموعهٔ به‌طور جزئی مرتب، است. اگر $\{D_\alpha : \alpha \in I\}$ زنجیری در T باشد، آنگاه $D = \bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha$ به T تعلق دارد (چرا؟) و یک کران بالا برای $\{D_\alpha : \alpha \in I\}$ می‌باشد. بنا به لم تسورن، T دارای یک عضو بیشین مانند $\mathscr{M}$ است. واضح است که $\mathscr{M}$، S را نمی‌پوشاند و این متناقض با پوشش‌بودن $\mathscr{A}$ برای S است. فرض کنیم $M \in \mathscr{M}$ و $x \in M$. چون $\mathscr{L}$ زیرپایهٔ $\mathscr{T}$ است، بنابراین $S_1, S_2, \dots, S_n$ متعلق به $\mathscr{L}$ موجود است که $x \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i$ و $\bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq M$. ثابت می‌کنیم که iی موجود است که $S_i \in \mathscr{M}$. درغیراین‌صورت، به‌ازای هر i، $\mathscr{M} \cup \{S_i\}$ متعلق به T نیست زیرا $\mathscr{M}$ بیشین است و بنابراین خانوادهٔ متناهی از اعضای $\mathscr{M}$ مانند $\mathscr{M}_i$ موجود است به طوری که $\mathscr{M}_i \bigcup_{i=1}^{n} \{S_i\}$ پوشش S است. چون $\bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq M$ بنابراین $(\bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{M}_i) \cup \{M\}$ پوششی برای S است، زیرا فرض کنیم $y \in S$ و y به هیچ‌کدام از اعضای خانوادهٔ $\mathscr{M}_i$ متعلق نباشد. چون به‌ازای هر i، $\mathscr{M}_i \cup \{S_i\}$ پوشش S است پس به‌ازای هر i، $y \in S_i$ و بنابراین $y \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i$ که چون $\bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq M$ پس $y \in M$. پس $\{M\} \cup \mathscr{M}_1 \cup \mathscr{M}_2 \cup \dots \cup \mathscr{M}_n$ پوشش S است. از این که هیچ زیرخانوادهٔ متناهی از $\mathscr{M}$ نمی‌تواند پوشش S باشد و $\{M\} \cup (\cup \mathscr{M}_i)$ زیرخانوادهٔ متناهی $\mathscr{M}$ است، به تناقض می‌رسیم. پس S_iی موجود است که $x \in S_i$ و $S_i \in \mathscr{M}$. تاکنون ثابت کردیم که برای هر M متعلق به $\mathscr{M}$ و هر $x \in M$ عضوی مانند $S_{x,M}$ شامل x در $\mathscr{L}$ موجود است که $S_{x,M} \subseteq M$ بنابراین $\bigcup_{M \in \mathscr{M}} M \subseteq \bigcup_{\substack{x \in M \\ M \in \mathscr{M}}} S_{x,M}$ حال ثابت می‌کنیم $\{S_{x,M} \in \mathscr{L} : x \in M, M \in \mathscr{M}\}$ پوشش S نیست که نتیجه می‌دهد $\mathscr{M}$ پوشش S نیست. اگر $\{S_{x,M} : x \in M, M \in \mathscr{M}\}$ پوشش S باشد. بنا به خاصیت $\mathscr{L}$ (فرض قضیه) زیرخانوادهٔ متناهی از $\{S_{x,M}\}$ مانند $\{S_{x_i, M_i} : 1 \leq i \leq k\}$ پوشش S است. بنابراین زیرخانوادهٔ متناهی $\{M_1, \dots, M_k\}$ از $\mathscr{M}$ پوششی برای S است که متناقض با تعریف $\mathscr{M}$ است. ■

۴-۱-۲۱ قضیهٔ تیخونوف

فرض کنیم $\{(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha):\alpha\in I\}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک و $(S, \mathscr{T})$ حاصل‌ضرب تیخونوف $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای آن که $(S, \mathscr{T})$ فشرده باشد آن است که به‌ازای هر α متعلق به I، $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ فشرده باشد.

برهان. اگر $(S, \mathscr{T})$ فشرده باشد، آن‌گاه به‌ازای هر α چون $\pi_\alpha:(S, \mathscr{T}) \to (S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ پیوسته و برو است، پس بنا به قضیه ۴-۱-۵ $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ فشرده است.

بالعکس، فرض کنید به‌ازای هر α، $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ فشرده باشد. بنا به تعرف توپولوژی حاصل‌ضربی تیخونوف $\mathscr{L} = \{\pi_\alpha^{-1}(G) : G \in \mathscr{T}_\alpha, \alpha \in I\}$ زیرپایه‌ای برای توپولوژی $\mathscr{T}$ است. فرض کنیم $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{L}$ پوششی برای S باشد، ثابت می‌کنیم $\mathscr{A}$ یک زیرپوشش متناهی دارد و بنا به قضیهٔ ۴-۱-۲۰، نتیجه می‌شود که $(S, \mathscr{T})$ فشرده است. با برهان خلف، فرض کنیم $\mathscr{A}$ هیچ زیرپوشش متناهی برای S نداشته باشد ؛ به‌ازای هر α فرض کنیم: $\mathscr{A}_\alpha = \{G \in \mathscr{T}_\alpha: \pi_\alpha^{-1}(G) \in \mathscr{A}\}$ بنابراین $\mathscr{A}_\alpha$ هیچ زیرپوشش متناهی برای S_α ندارد زیرا درغیراین‌صورت اگر $\{G_{\alpha_i} : 1 \le i \le n\}$ یک زیرپوشش برای S_α باشد، آن‌گاه $\{\pi_\alpha^{-1}(G_{\alpha_i}): 1 \le i \le n\}$ که زیرخانوادهٔ $\mathscr{A}$ است پوشش متناهی برای S است (چرا؟). بنابراین چون $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ فشرده است پس $\mathscr{A}_\alpha$ نمی‌تواند پوشش S_α باشد (زیرا درغیر این صورت یک زیرپوشش متناهی برای S_α دارد). بنابراین به‌ازای هر α وجود دارد x_αی که $x_\alpha \in S_\alpha \setminus \bigcup_{G\in\mathscr{A}_\alpha} G$. تابع $x : I \to \bigcup_{\alpha\in I} S_\alpha$ را به‌صورت $x(\alpha) = x_\alpha$ تعریف می‌کنیم بنابراین $x \in S$ ولی $x \notin \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$، زیرا اگر $A\in\mathscr{A}$ موجود باشد که $x \in A$، آن‌گاه $\alpha \in I$ و $G_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha$ موجود است که $A = \pi_\alpha^{-1}(G_\alpha)$ و بنابراین $x_\alpha = x(\alpha)$ متعلق به G_α است و این متناقض با $x_\alpha \in S_\alpha \setminus \bigcup_{G\in\mathscr{A}_\alpha} G$ است. پس $\mathscr{A}$ پوشش S نیست و این با فرض متناقض است. ■

۴-۱-۲۲ مثال

تابع $\varphi: K \to \prod_{n=1}^{\infty} \{0,2\}$ (که در آن k مجموعهٔ کانتور معرفی شده در فصل دوم قسمت ۲-۱-۱۰ است) با ضابطهٔ $\varphi(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}) = \{a_n\}$ یک همسانریختی بین K با توپولوژی اقلیدسی و $\prod_{n=1}^{\infty} \{0,2\}$ با توپولوژی تیخونوف است. (در اینجا $\{0,2\}$ با توپولوژی گسسته درنظر گرفته شده است). پس باتوجه به قضیهٔ تیخونوف K فشرده است. به‌علاوه مجموع طول بازه‌های حذف شده در ضمن ساختن K برابر $1 = ... + \frac{2}{9} + \frac{1}{3}$ است. پس «اندازه» K برابر صفر است، یا به‌طور دقیق‌تر برای هر ε، یک گردایهٔ شمارای $\{(a_i, b_i)\}$ از بازه‌ها وجود دارد که K را می‌پوشاند و $\sum_{n=1}^{\infty}(b_i-a_i) < \varepsilon$.

۴-۱-۲۳ قضیه

فرض کنیم $(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ فشرده و $(S_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ فضایی دلخواه باشد. در این صورت افکنش $\pi_\beta : (S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \times (S_\beta, \mathcal{T}_\beta) \to (S_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ بسته است.

برهان. در اینجا هر عضو از $S_\alpha \times S_\beta$ مانند f را با زوج مرتب $(f(\alpha),f(\beta))$ متناظر می‌گیریم. فرض کنید $F \subseteq S_\alpha \times S_\beta$ بسته باشد. نشان می‌دهیم $S_\beta \backslash \pi_\beta(F)$ در S_β باز است. فرض کنیم $s_\beta \in S_\beta \backslash \pi_\beta(F)$. بنابراین $F \cap (S_\alpha \times \{s_\beta\}) = \phi$ زیرا اگر $(s_\alpha, s_\beta) \in S_\alpha \times \{s_\beta\}$، آن‌گاه $\pi_\beta(s_\alpha, s_\beta) = s_\beta$ و در نتیجه $\pi_\beta(s_\alpha, s_\beta) \notin \pi_\beta(F)$. بنابراین $(s_\alpha, s_\beta) \notin F$ در نتیجه $S_\alpha \times \{s_\beta\} \subseteq (S_\alpha \times S_\beta)\backslash F$ چون $(S_\alpha \times S_\beta)\backslash F$ باز است، بنابراین به‌ازای هر (y, s_β) دو مجموعه باز $G(y)$ و $G_y(s_\beta)$ به‌ترتیب در $\mathcal{T}_\alpha$ و $\mathcal{T}_\beta$ موجودند که $(y, s_\beta) \in G(y) \times G_y(s_\beta)$ و $G(y) \times G_y(s_\beta) \subseteq S_\alpha \times S_\beta \backslash F$. در نتیجه $\{G(y) \times G_y(s_\beta), y \in S_\alpha\}$ پوشش بازی برای $S_\alpha \times \{s_\beta\}$ است. چون S_α, $\{s_\beta\}$ فشرده می‌باشند، بنابراین زیرپوشش بازی مانند $\{G(y_i) \times G_{y_i}(s_\beta) : 1 \le i \le n\}$ برای $S_\alpha \times \{s_\beta\}$ موجود است. حال فرض کنیم $G(s_\beta) = \bigcap_{i=1}^{n} G_{y_i}(s_\beta)$. بنابراین $G(s_\beta)$ مجموعهٔ بازی شامل s_β است. ثابت می‌کنیم $G(s_\beta) \subseteq S_\beta \backslash \pi_\beta(F)$. فرض کنیم $s \in G(s_\beta)$. بنابراین به‌ازای هر y متعلق به $\pi_\alpha(F)$ نتیجه می‌شود که iی موجود است که y متعلق به $G(y_i)$ است. بنابراین (y, s) متعلق به $G(y_i) \times G_{y_i}(s_\beta)$ و در نتیجه متعلق به $S_\alpha \times S_\beta \backslash F$ است و بنابراین $(y, s) \notin F$. و چون $y \in \pi_\alpha(F)$ پس $s \notin \pi_\beta(F)$، زیرا در غیراین صورت yی موجود است که (y, s) متعلق به F است. در نتیجه به‌ازای هر s_β متعلق به $S_\beta \backslash \pi_\beta(F)$ مجموعه‌ای در $\mathcal{T}_\beta$ مانند $G(s_\beta)$ موجود است که شامل s_β است و $G(s_\beta) \subseteq S_\beta \backslash \pi_\beta(F)$ پس $S_\beta \backslash \pi_\beta(F) = \bigcup_{s_\beta \in S_\beta \backslash \pi_\beta(F)} G(s_\beta)$. پس $S_\beta \backslash \pi_\beta(F)$ باز است و در نتیجه $\pi_\beta(F)$ بسته است. ■

۴-۱-۲۴ قضیه

فرض کنیم $(S_2, \mathcal{T}_2)$ فشرده و $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فضایی دلخواه باشد و $A \subseteq S_1$. اگر G مجموعهٔ بازی در $(S_1, \mathcal{T}_1) \times (S_2, \mathcal{T}_2)$ باشد به طوری‌که $A \times S_2 \subseteq G$، آن‌گاه مجموعهٔ بازی مانند G_1 موجود است که $A \subseteq G_1$ و $G_1 \times S_2 \subseteq G$.

برهان. واضح است که $\pi_1^{-1}(A) = A \times S_2$. بنا به قضیهٔ قبل، π_1 تابع بسته است. بنابراین $\pi_1 (S_1 \times S_2 \backslash G)$ در S_1 بسته است. حال فرض کنیم. $G_1 = S_1 \backslash \pi_1 (S_1 \times S_2 \backslash G)$. بنابراین G_1 در S_1 باز است از این‌که $\pi_1^{-1}(A) \subseteq G$ نتیجه می‌شود که $A \subseteq \pi_1(G) \subseteq G_1$ و

$$G_1 \times S_2 = \pi_1^{-1}(G_1) = S_1 \times S_2 \backslash \pi_1^{-1}[\pi_1(S_1 \times S_2 \backslash G)] \subseteq S_1 \times S_2 \backslash (S_1 \times S_2 \backslash G) = G \quad ■$$

۴-۱-۲۵ قضیهٔ نمودار بسته

فرض کنیم $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فضایی دلخواه و $(S_2, \mathcal{T}_2)$ هاسدورف و فشرده باشد. در این صورت شرط لازم و کافی

برای آن که تابع $f:(S_1,\mathcal{T}_1) \to (S_2,\mathcal{T}_2)$ پیوسته باشد آن است که نمودار f، $G(f) = \{(x,f(x)) : x \in S_1\}$. در توپولوژی حاصل‌ضربی تیخونوف $(S_1,\mathcal{T}_1) \times (S_2,\mathcal{T}_2)$ بسته باشد.

برهان. فرض کنیم $G(f)$ در $S_1 \times S_2$ و F در S_2 بسته باشد. ثابت می‌کنیم $f^{-1}(F)$ در S_1 بسته است. چون π_2 پیوسته است بنابراین $\pi_2^{-1}(F)$ بسته و بنابراین $\pi_2^{-1}(F) \cap G(f)$ در $S_1 \times S_2$ بسته است. افکنش π_1 بسته است و بنابراین $\pi_1[\pi_2^{-1}(F) \cap G(f)]$ در S_1 بسته است، بنابراین $f^{-1}(F) = \pi_1[\pi_2^{-1}(F) \cap G(f)]$ بسته می‌باشد.

بالعکس، فرض کنیم f پیوسته باشد. آن‌گاه چون $(S_2,\mathcal{T}_2)$ هاسدورف است، بنا به قسمت (ج) مسألهٔ ۷ از مسائل ۳-۱، $G(f)$ بسته است. ■

تذکر:

در قضیهٔ فوق پیوسته‌شدن f بستگی به هاسدورف‌بودن $(S_1,\mathcal{T}_1)$ ندارد همچنین بسته‌بودن $G(f)$ بستگی به فشرده‌بودن $(S_2,\mathcal{T}_2)$ ندارد.

۴-۱-۲۶ شبه پیوستگی از بالا و پایین

تابع $f:(S,\mathcal{T}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$ را از **بالا شبه پیوسته** (**از پایین شبه پیوسته**) می‌گوییم، اگر به‌ازای هر عدد حقیقی b مجموعهٔ $\{x : f(x) < b\}$ ($\{x : f(x) > b\}$) باز باشد. واضح است که شرط لازم و کافی برای آن‌که f پیوسته باشد آن است که از بالا و پایین شبه پیوسته باشد. همچنین شرط لازم و کافی برای آن‌که f پیوسته باشد آن است که f و $-f$ از بالا (و یا از پایین) شبه پیوسته باشند.

قضیهٔ هاینه - بورل نشان می‌دهد که اگر $(S,\mathcal{T})$ فشرده و $f:(S,\mathcal{T}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$ پیوسته باشد، آن‌گاه چون $f(S)$ بسته و کراندار می‌شود، تابع f سوپرموم و اینفیمم خود را در S اختیار می‌کند. این مطلب از قضیهٔ کلی‌تر زیر نتیجه می‌شود.

۴-۱-۲۷ قضیه

فرض کنید $(S,\mathcal{T})$ فشرده و $f:(S,\mathcal{T}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$ یک تابع باشد اگر f به‌ترتیب از بالا (پایین) شبه پیوسته باشد، آن‌گاه $\sup_{x\in S} f(x)$ ($\inf_{x\in S} f(x)$) متعلق به $f(x)$ است.

برهان. فرض کنیم f از بالا شبه پیوسته باشد و $M = \sup\{f(x) : x \in S\}$. به‌ازای هر b که $b<M$ مجموعهٔ $F_b = \{y : f(y) \geq b\}$ بسته است. خانوادهٔ $\{F_b : b < M\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است و چون S فشرده است بنا به قضیهٔ ۴-۱-۱۳ نتیجه می‌شود که $\bigcap_{b<M} F_b \neq \phi$. واضح است که اگر $x_\circ \in \bigcap_{b<M} F_b$، آن‌گاه $M = f(x_\circ)$ (چرا؟). حال اگر f از پایین شبه پیوسته باشد $-f$ از بالا شبه پیوسته است و داریم $\inf\{f(x)\} = -\sup\{-f(x)\}$. در نتیجه بنا به قسمت قبل $\inf\{f(x)\}$ متعلق به $f(S)$ است. ■

۴-۱-۲۸ قضیه

فرض کنیم $(S,\mathscr{T})$ هاسدورف و B,A دو زیرفضای فشردهٔ مجزای $(S,\mathscr{T})$ باشند. در این صورت دو مجموعهٔ باز مانند G_1 و G_2 موجودند که $G_1 \cap G_2 = \phi$ و $A \subseteq G_1$ و $B \subseteq G_2$.

برهان. فرض کنیم $a \in A$. به‌ازای هر $x \in B$ داریم $x \neq a$. بنابراین باتوجه به خاصیت هاسدورف، دو مجموعهٔ باز مجزا مانند G_x و H_x موجودند که $x \in G_x$ و $a \in H_x$. در نتیجه $B = \bigcup_{x\in B} G_x \cap B$ و بنابه فشردگی B، $G_{x_1},\dots,G_{x_n}$ موجودند که $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i}$. قرار می‌دهیم $G_a(B) = \bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i}$ و $G(a) = \bigcap_{i=1}^{n} H_{x_i}$. در این صورت چون برای هر i، $G_{x_i} \cap H_{x_i} = \phi$، پس $G(a) \cap G_a(B) = \phi$، $B \subseteq G_a(B)$ و $a \in G(a)$. حال $\{G(a) \cap A : a \in A\}$ یک پوشش باز برای فضای فشردهٔ $(A,\mathscr{T}/A)$ است، بنابراین زیرپوشش متناهی مانند $\{G(a_i) \cap A : 1 \le i \le m\}$ دارد. اگر $G_1 = \bigcup_{i=1}^{m} G(a_i)$ و $G_2 = \bigcap_{i=1}^{m} G_{a_i}(B)$، آن‌گاه G_2 و G_1 باز و مجزا هستند و $A \subseteq G_1$ و $B \subseteq G_2$. ■

۴-۱-۲۹ تمرین

هر فضای فشردهٔ هاسدورف، نرمال است و بنابراین T_4 است.

۴-۱ مسائل

۱. توضیح دهید که چرا مکعب هیلبرت و حاصل ضرب تیخونوف هر تعداد دلخواه مجموعهٔ کانتور، مجموعه‌های فشرده می‌باشند.

۲. ثابت کنید که اجتماع متناهی زیر فضاهای فشردهٔ فضای توپولوژیک $(S,\mathscr{T})$، فشرده است.

۳. فرض کنید $\{(S_i,\mathscr{T}_i) : 1 \le i \le n\}$ خانواده‌ای متناهی از فضاهای توپولوژیک باشد که حاصل‌ضرب تیخونوف $(S_i,\mathscr{T}_i)$ها فشرده باشد. آیا به‌ازای هر i، افکنش π_i بسته است؟ چرا؟

۴. مثالی از یک فضای حاصل‌ضربی تیخونوف ارائه دهید که فشرده باشد ولی لااقل یکی از افکنش‌های آن بسته نباشد.

۵. فضای توپولوژیک $(S,\mathscr{T})$ را نیمه فشرده (یا شبه فشرده) می‌گوییم، اگر هر تابع پیوستهٔ $f:(S,\mathscr{T}) \to (\mathbb{R},\mathscr{T}_e)$ کراندار باشد. واضح است که هر فضای فشرده، نیمه فشرده است (چرا؟). مثالی از یک فضای نیمه فشرده ارائه کنید که فشرده نباشد.

۶. فرض کنید $f:(S_1,\mathscr{T}_1) \to (S_2,\mathscr{T}_2)$ یک همانندی و $g:(S_1,\mathscr{T}_1) \to (S_3,\mathscr{T}_3)$ پیوسته باشد، اگر $(S_1,\mathscr{T}_1)$ فشرده و $(S_2,\mathscr{T}_2)$ هاسدورف و $g\circ f^{-1}:(S_2,\mathscr{T}_2) \to (S_3,\mathscr{T}_3)$ دوسویی باشد، آن‌گاه ثابت کنید که $g\circ f^{-1}$ همسانریختی است. (راهنمایی: مسألهٔ ۱۱ قسمت ۲-۴ و نتیجه ۴-۱-۹ را ببینید).

۷. فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ فشرده و هاسدورف باشد و $f: (S, \mathscr{T}) \to (S, \mathscr{T})$ پیوسته باشد. اولاً ثابت کنید که اگر $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ دنباله‌ای نزولی از زیرفضاهای فشرده $(S, \mathscr{T})$ باشد آن‌گاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n) = f(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)$. ثانیاً نشان دهید که زیرمجموعه‌ای بسته و ناتهی مانند A موجود است که $f(A) = A$.

۸. فرض کنید $(S_2, \mathscr{T}_2)$ هاسدورف و $(S_1, \mathscr{T}_1)$ فشرده باشد و $f: (S_1, \mathscr{T}_1) \to (S_2, \mathscr{T}_2)$ پیوسته و برو باشد. ثابت کنید f یک همانندی است. (راهنمایی: نتیجهٔ ۴-۱-۹ را ببینید).

۴-۲ فضای فشردهٔ موضعی و فشرده‌سازی

زیرمجموعهٔ A از فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ را فشرده نسبی می‌گوییم، اگر $\bar{A}$ فشرده باشد. فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ را فشردهٔ موضعی می‌گوییم، اگر به‌ازای هر x متعلق به S، مجموعهٔ باز فشردهٔ نسبی مانند G موجود باشد که $x \in G$ (یعنی به‌ازای هر $x \in S$، G بازی شامل x موجود بوده که $\bar{G}$ فشرده باشد).

بعضی مؤلفان فشردگی موضعی را به‌صورت زیر تعریف کرده‌اند: $(S, \mathscr{T})$ را فشرده موضعی می‌گویند، اگر به‌ازای هر x، مجموعهٔ بازی مانند G و مجموعهٔ فشرده‌ای مانند K موجود باشد که G شامل x باشد و $G \subseteq K$. واضح است که این تعریف کلی‌تر است و به‌سادگی نتیجه می‌شود که در فضای هاسدورف، دو تعریف معادلند. چون اکثر فضاهای توپولوژیک کاربردی، هاسدورف می‌باشند، ما تعریف فشردهٔ موضعی برحسب فشردهٔ نسبی را ترجیح می‌دهیم. به‌سادگی نتیجه می‌شود که هر فضای فشرده، فشردهٔ موضعی است اما عکس آن برقرار نیست. مثلاً $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ فشرده نیست اما فشردهٔ موضعی است، زیرا به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ بازهٔ بازی مانند (a, b) موجود است که $x \in (a, b)$. واضح است که اگر قرار دهیم $G = (a, b)$، G مجموعهٔ بازی شامل x است که $\bar{G} = [a, b]$ فشرده است.

فرض کنیم $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا باشد، آن‌گاه $(\mathbb{Q}, \mathscr{T}_e / \mathbb{Q})$ فشردهٔ موضعی نیست؛ زیرا در غیر این صورت، 0 یک همسایگی فشرده مانند K در $\mathbb{Q}$ دارد. بنابراین می‌توانیم $r>0$ی بیابیم که $\mathbb{Q} \cap [-r, r] \subseteq K$. قرار می‌دهیم $J = \mathbb{Q} \cap [-r, r]$. چون J در فضای فشردهٔ K بسته است، پس (در $\mathbb{R}$) فشرده است لذا باید در $\mathbb{R}$ بسته باشد. چون بستار J در $\mathbb{R}$، $[-r, r]$ است، لذا باید $[-r, r] \subseteq \mathbb{Q}$ که ممکن نیست.

حال اگر $\mathscr{T}$ توپولوژی گسسته روی $\mathbb{Q}$ باشد، آن‌گاه $(\mathbb{Q}, \mathscr{T})$ فشردهٔ موضعی است و تابع همانی $f(x) = x$ از $(\mathbb{Q}, \mathscr{T})$ به $(\mathbb{Q}, \mathscr{T}_e)$ پیوسته و برو است. بنابراین فشردگی موضعی توسط تابع پیوسته پایدار نیست.

۴-۲-۱ قضیه

فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ یک فضای هاسدورف باشد، در این صورت شرایط زیر معادلند:

الف) $(S, \mathscr{T})$ فشردهٔ موضعی است.

ب) به‌ازای هر $x \in S$ و هر مجموعهٔ باز شامل x مانند G، مجموعهٔ باز و فشردهٔ نسبی مانند H موجود است که شامل x است و $H \subseteq \bar{H} \subseteq G$.

ج) برای هر مجموعهٔ باز G و مجموعهٔ فشرده K که $K \subseteq G$ مجموعهٔ باز و فشرده نسبی مانند H موجود است که $K \subseteq H \subseteq \bar{H} \subseteq G$.

برهان. (ب) ⇐ (الف) فرض کنیم G مجموعهٔ بازی شامل x است. بنابراین مجموعهٔ باز و فشردهٔ نسبی مانند G_x شامل x موجود است. چون $\bar{G}_x$ فشرده و هاسدورف است، بنابراین T_4 است و در نتیجه منظم است. از این‌که $x \in \bar{G}_x \cap G$ و $\bar{G}_x \cap G$ مجموعهٔ بازی در $(\bar{G}_x, \mathscr{T}/\bar{G}_x)$ است نتیجه می‌شود که مجموعهٔ بازی مانند G_1 موجود است که $x \in G_1 \cap \bar{G}_x \subseteq \bar{G}_1 \cap \bar{G}_x \subseteq G \cap \bar{G}_x$. اگر قرار دهیم $H = G_1 \cap G_x$، آن‌گاه $x \in H \subseteq \bar{H} \subseteq G$ و $\bar{H}$ فشرده است زیرا $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_x$ یک زیرمجموعهٔ بسته $\bar{G}_x$ است و بنابراین فشرده است.

(ج) ⇐ (ب) به‌ازای هر x متعلق به K، x متعلق به G است و بنابراین مجموعهٔ بازی مانند H_x موجود است که شامل x است و $H_x \subseteq \bar{H}_x \subseteq G$ و $\bar{H}_x$ فشرده است. چون K فشرده است و $K \subseteq \bigcup_{x\in K} H_x$، بنابراین زیر پوشش $\{H_{x_1}, \dots, H_{x_n}\}$ موجود است که $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}$. فرض کنیم $H = \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}$ در این صورت H باز و شامل x است و $\bar{H} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{H}_{x_i} \subseteq G$ و چون $\bigcup_{i=1}^{n} \bar{H}_{x_i}$ فشرده است بنابراین $\bar{H}$ نیز فشرده است.

(الف) ⇐ (ج). چون هر مجموعهٔ تک عضوی فشرده است حکم برقرار است. ■

تذکر:

بدون فرض هاسدورف‌بودن $(S, \mathscr{T})$ در قضیهٔ فوق داریم (الف) ⇐ (ج) ⇔ (ب).

۴-۲-۲ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ هاسدورف و فشردهٔ موضعی و C_1 و C_2 دو زیرفضای فشردهٔ مجزای S باشند. در این صورت دو مجموعهٔ باز فشردهٔ نسبی G_1 و G_2 موجودند که $G_1 \cap G_2 = \phi$ و $C_2 \subseteq G_2$ و $C_1 \subseteq G_1$.

برهان. قرار می‌دهیم $G = S \backslash C_2$ در این صورت G باز و شامل C_1 است. بنا به قسمت (ج) قضیهٔ قبل مجموعهٔ باز فشردهٔ نسبی G_1 موجود است که $C_1 \subseteq G_1 \subseteq \bar{G}_1 \subseteq G$ قرار می‌دهیم $H = S \backslash \bar{G}_1$ در این صورت H باز و شامل C_2 است. یک بار دیگر، استفاده از قضیهٔ قبل نشان می‌دهد که مجموعهٔ بازی مانند G_2 موجود است به طوری که $\bar{G}_2$ فشرده است و $C_2 \subseteq G_2 \subseteq \bar{G}_2 \subseteq H$. واضح است که $G_1 \cap G_2 = \phi$. ■

۴-۲-۳ قضیه

اشتراک تعداد شمارایی از مجموعه‌های چگال باز در یک فضای هاسدورف به‌طور موضعی فشرده، مجموعه‌ای چگال است.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضای هاسدورف و فشردهٔ موضعی باشد و $\{D_n: n \in \mathbb{N}\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های چگال و باز در $(S, \mathcal{T})$ باشد. ثابت می‌کنیم $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ در $(S, \mathcal{T})$ چگال است. برای این منظور ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر مجموعهٔ باز غیرتهی G، $G \cap D \neq \phi$. فرض کنیم G باز و غیرتهی باشد. چون D_1 چگال است پس $D_1 \cap G \neq \phi$ و از این‌که $D_1 \cap G$ باز است قضیه ۴-۲-۱ نشان می‌دهد که مجموعهٔ باز فشردهٔ نسبی مانند B_1 موجود است که $\overline{B}_1 \subseteq D_1 \cap G$، و بنا به همان قضیه، B_2 باز و فشردهٔ نسبی موجود است که $\overline{B}_2 \subseteq B_1 \cap D_2$. به استقرا نتیجه می‌شود که دنباله‌ای از مجموعه‌های باز فشردهٔ نسبی مانند $\{B_n: n \in \mathbb{N}\}$ موجود است که $\overline{B}_n \subseteq B_{n-1} \cap D_n$. واضح است که به‌ازای هر n، $\overline{B}_n \subseteq \overline{B}_1$ بنابراین $\{\overline{B}_n: n \in \mathbb{N}\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های بسته در فضای فشردهٔ $\overline{B}_1$ است که دارای خاصیت اشتراک متناهی است. بنابراین $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n \neq \phi$. از طرفی چون $\overline{B}_1 \subseteq D_1 \cap G$ و $\overline{B}_n \subseteq D_n$ بنابراین $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = D$. از طرفی دیگر $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n \subseteq \overline{B}_1 \subseteq G$ و لذا $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n \subseteq G \cap D$ و در نتیجه $G \cap D \neq \phi$. ■

بدون یکی از فرضهای شمارابودن و بازبودن D_nها، قضیهٔ فوق برقرار نیست زیرا خانوادهٔ $\{\mathbb{R} \setminus \{x\}: x \in \mathbb{R}\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های باز چگال در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ است که حکم قضیهٔ فوق برای این خانواده برقرار نیست. همچنین خانوادهٔ متشکل از مجموعهٔ اعداد گویا و مجموعهٔ اعداد اصم با این‌که هر دو در $\mathbb{R}$ چگال هستند در حکم قضیه صدق نمی‌کنند.

۴-۲-۳ فشرده‌سازی

موضوع جالب در مورد فضاهای هاسدورف و فشردهٔ موضعی این‌است‌که با اضافه کردن تنها یک نقطهٔ مناسب به این گونه فضاها می‌توان آنها را فشرده ساخت. البته خواننده از آنالیز مختلط به یاد می‌آورد که صفحهٔ مختلط تعیم یافته یعنی $C_\infty = C \cup \{\infty\}$ همسانریخت با کرهٔ (ریمان) S^2 است و لذا فشرده می‌باشد.

فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ را نیز به دو روش می‌توان در یک فضای فشرده نشاند.

(الف) با درنظرگرفتن همسانریختی $f: \mathbb{R} \to (-1, 1)$ به‌صورت $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. چون $(-1, 1) \subseteq [-1, 1]$ با اضافه کردن دو نقطه جدید می‌توان آن را فشرده ساخت.

(ب) با همانندکردن $\mathbb{R}$ با $S^1 \setminus \{N\}$ که S^1 دایرهٔ واحد در $\mathbb{R}^2$ است و $N = (0, 1)$. بنابراین با اضافه کردن یک نقطهٔ جدید به $\mathbb{R}$ می‌توان آن را فشرده ساخت. این نقطه را می‌توانیم هر شیئی که در $\mathbb{R}$ نیست درنظر بگیریم.

همان‌طور که تذکر داده شد با الحاق یک نقطهٔ فرضی که نقطهٔ بی‌نهایت نامیده و با ∞ نشان داده می‌شود، می‌توان صفحهٔ مختلط را به $C_\infty = C \cup \{\infty\}$ گسترش داد.

در این جا همسایگی‌های ∞ به جز خود C_∞ مکمل‌های زیرمجموعه‌های بسته و کراندار (فشرده) C در

C_∞ اختیار شده‌اند. البته مجموعهٔ C_∞ چیز جدیدی به درک ما از صفحهٔ مختلط نمی‌افزاید، جز این‌که برهانها را روشن و احکام بعضی از قضایا را ساده می‌کند. در این بخش دو نوع فشرده‌سازی تک نقطه‌ای و فشرده‌سازی استون - چخ مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا فشرده ساز یک فضا را در حالت کلی تعریف می‌کنیم.

۴-۲-۵ فشرده‌ساز

زوج $(\hat{S},f)$ را یک فشرده‌ساز فضای S می‌گوییم، هرگاه $\hat{S}$ یک فضای هاسدورف فشرده و f همسانریختی از S به روی یک زیرفضای چگال از $\hat{S}$ باشد. در این صورت S را با $f(S)$ همانند می‌کنیم و S را به‌عنوان یک زیرفضای چگال فشردهٔ $\hat{S}$ درنظر می‌گیریم. واضح است که فقط فضاهای به‌طور کامل منظم را می‌توان فشرده‌سازی کرد، زیرا هر زیرفضای یک فضای هاسدورف فشرده، هاسدورف و به‌طور کامل منظم است.

۴-۲-۶ فشرده‌سازی تک نقطه‌ای فضای هاسدورف فشردهٔ موضعی

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای هاسدورف و فشردهٔ موضعی باشد و فرض کنیم "∞" شیئی است که در S نیست. مجموعهٔ $S_\infty = S \cup \{\infty\}$ را درنظر می‌گیریم. با درنظرگرفتن سه نوع مجموعه‌های زیر به‌عنوان مجموعه‌های باز، S_∞ یک فضای هاسدورف فشرده می‌شود و در حقیقت S_∞ فشرده شدهٔ S به مفهوم تعریف ۴-۲-۵ می‌شود:

(الف) زیرمجموعه‌های باز S

(ب) مکمل زیرفضاهای فشردهٔ S در S_∞ یعنی $\{S_\infty \backslash C : C$ در S فشرده است$\}$.

(ج) کل فضای S_∞

باتوجه به این‌که هر زیرفضای فشردهٔ یک فضای هاسدورف، بسته است، به‌سادگی نتیجه می‌شود که خانوادهٔ تمام مجموعه‌هایی که به‌صورت(الف)، (ب) یا (ج) هستند، تشکیل یک توپولوژی روی S_∞ می‌دهند که آن را با $\mathcal{T}_\infty$ نمایش می‌دهیم.

۴-۲-۷ قضیه

$(S_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ فشرده و هاسدورف است و اگر f تابع همانی $f(x) = x$ باشد، آن‌گاه (S_∞,f) یک فشرده‌ساز S است.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم $(S_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ فشرده است. فرض کنیم $\mathscr{A} = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ یک پوشش باز برای S_∞ باشد. اگر $S_\infty \in \mathscr{A}$، آن‌گاه $\{S_\infty\}$ پوشش متناهی S_∞ است. حال فرض کنیم $S_\infty \notin \mathscr{A}$ بنابراین هر G_α مجموعه‌ای از نوع (الف) یا (ب) می‌باشد. واضح است که حداقل یکی از G_αها مثلاً G_{α_0} نقطهٔ ∞ را دربردارد و این مجموعه الزاماً باید از نوع (ب) باشد. در نتیجه، $S \backslash G_{\alpha_0}$ یک زیرفضای فشردهٔ S است

و $\{G_\alpha \cap S : \alpha \in I\}$ یک پوشش باز برای $S \backslash G_{\alpha_\circ}$ است. بنابراین یک زیرپوشش متناهی مانند $\{G_{\alpha_\circ}, G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ دارد واضح است که $\{G_{\alpha_i} \cap S : 1 \le i \le n\}$ یک پوشش باز برای S_∞ است.

حال ثابت می‌کنیم که S_∞ هاسدورف است. فرض کنیم x و y متعلق به S_∞ باشند و $x \neq y$. اگر x, y متعلق به S باشند، آن‌گاه چون S هاسدورف است x, y را می‌توان با دو مجموعهٔ باز مجزا از نوع (الف) از هم جدا کرد. پس کافی است فرض کنیم $y = \infty$ و $x \in S$. چون S فشردهٔ موضعی است پس مجموعهٔ باز G_1 موجود است که $\bar{G}_1$ در S فشرده است و G_1 شامل x است. کافی است قرار دهیم $G_2 = S_\infty \backslash \bar{G}_1$، در این صورت G_2 باز است و $G_1 \cap G_2 = \phi$ و $x \in G_1$ و $\infty \in G_2$. ■

۴-۲-۸ نتیجه

هر فضای هاسدورف فشردهٔ موضعی، فضای به‌طور کامل منظم می‌باشد و بنابراین تیخونوف یا $T_{7/2}$ است.

برهان. می‌دانیم $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\infty / S$. $(S_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ فشرده و هاسدورف است بنا به ۴-۱-۲۹، $(S_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ فضای T_4 است. در نتیجه هر زیرفضای آن و بالاخص $(S, \mathcal{T})$ به‌طور کامل منظم است. ■

۴-۲-۹ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضای هاسدورف فشردهٔ موضعی، F زیرفضای فشردهٔ S و G متعلق به $\mathcal{T} \backslash \{S\}$ باشد به‌طوری‌که $F \subseteq G$. در این صورت یک تابع پیوستهٔ $f : S \to [0, 1]$ موجود است که $f(F) = \{1\}$ و $f(S \backslash G) = \{0\}$.

برهان. فرض کنیم S_∞ فشرده‌شدهٔ تک نقطه‌ای S باشد. بنابراین S_∞ نرمال است و F و $S_\infty \backslash G$ دو زیرفضای بسته و مجزای S_∞ هستند. بنا به لم اوریسون، تابع پیوستهٔ $g : S_\infty \to [0, 1]$ موجود است که $g(F) = \{1\}$ و $g(S_\infty \backslash G) = \{0\}$. اگر $f = g \mid S$، آن‌گاه f دارای خواص مورد نظر است. ■

قضیهٔ زیر راکه به قضیهٔ **فشرده‌سازی استون ـ چخ** معروف است بدون اثبات بیان می‌کنیم. (ر.ک [۱] صفحه ۱۴۲).

۴-۲-۱۰ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای $T_{7/2}$ باشد. در این صورت یک فضای هاسدورف فشردهٔ $\beta(S)$ با خواص زیر وجود دارد.

الف) S یک زیرفضای چگال $\beta(S)$ است.

ب) هر تابع حقیقی پیوستهٔ کراندار تعریف شده روی S، گسترش یکتایی به یک تابع حقیقی پیوستهٔ کراندار تعریف شده روی $\beta(S)$ دارد.

پیر افشردگی خاصیتی مشابه فشردگی است که تعمیم فشردگی برای فضاهای بزرگ تلقی می‌شود. درحالی‌که بسیاری از فضاهای مهم فشرده نیستند، پیرافشردگی خاصیت مشترک بسیاری از فضاهاست.

۴-۲-۱۱ تظریف یک پوشش

یک تظریف (باز) از پوشش $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ برای فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ پوشش (باز) $\{V_\beta\}_{\beta\in J}$ برای S است به طوری که برای هر β متعلق به J، αیی متعلق به I موجود باشد به طوری که $V_\beta \subseteq U_\alpha$.

۴-۲-۱۲ پوشش موضعاً متناهی

یک پوشش باز $\{U_\alpha\}$ برای فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ را **موضعاً متناهی** می‌گویند هرگاه برای هر x متعلق به S، مجموعهٔ باز G شامل x وجود داشته باشد به طوری که $\{U_\alpha : U_\alpha \cap G \neq \phi\}$ متناهی باشد.

۴-۲-۱۳ فضای پیرافشرده

فضای توپولوژیک هاسدورف $(S, \mathscr{T})$ را **پیرافشرده** می‌گوییم، هرگاه هر پوشش باز برای S یک تظریف باز موضعاً متناهی داشته باشد.

۴-۲-۱۴ مثال

هر فضای فشرده، پیرافشرده است. زیرا اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک پوشش دلخواه برای فضای فشرده $(S, \mathscr{T})$ باشد و $\{U_{\alpha_i}\}_{1\leq i\leq n}$ زیر پوشش متناهی آن باشد، آنگاه پوشش اخیر درواقع تظریف باز موضعاً متناهی برای $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ است. همچنین $\mathbb{R}$ همراه توپولوژی حد پایین پیرافشرده است ولی فشرده نیست.

۴-۲-۱۵ تمرین

با استفاده از تعریف پیرافشردگی، نشان دهید فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ پیرافشرده است.

۴-۲-۱۶ افراز واحد

فرض کنیم $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک پوشش باز برای فضای $(S, \mathscr{T})$ باشد، یک **افراز واحد** پیوسته پیرو این پوشش، گردایه‌ای از توابع پیوسته روی S به توی بازهٔ بسته $[0,1]$ است به طوری که

(الف) به‌ازای هر تابع f متعلق به این گردایه، αیی وجود داشته باشد به طوری که f خارج U_α صفر باشد.

(ب) به‌ازای هر نقطهٔ x در S، مجموعهٔ باز G شامل x وجود داشته باشد که همه توابع گردایه به جز حداکثر یک تعداد متناهی از آنها روی G صفر بوده و مجموع توابع غیرصفر باقیمانده روی G برابر ۱ باشد.

۴-۲-۱۷ قضیه

می‌توان نشان داد که در هر فضای پیرافشرده، هر پوشش باز دارای افراز واحد پیرو آن پوشش است.

۴-۲ مسائل

۱. فرض کنید $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فضای فشردهٔ موضعی و $(S_2, \mathcal{T}_2)$ هاسدورف باشد و $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ تابعی پیوسته و باز باشد. ثابت کنید که $(S_2, \mathcal{T}_2)$ نیز فشرده موضعی است.

۲. نشان دهید که اگر حاصل‌ضرب خانواده‌ای ناتهی از فضاهای هاسدورف، فشردهٔ موضعی باشد، آن‌گاه هر یک از فضاها نیز فشرده موضعی است.

۳. فرض کنید $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فضای هاسدورف فشردهٔ موضعی باشد و $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ تابعی پیوستهٔ، باز و برو باشد. نشان دهید که اگر $K \subseteq S_2$ فشرده باشد، آن‌گاه زیرفضای C در S_1 موجود است که $f(C) = K$.

۴. با استفاده از قضیهٔ ۴-۲-۳ ثابت کنید که مجموعهٔ اعداد گویا، مجموعهٔ G_δ نیست (راهنمایی: به‌روش برهان خلف، فرض کنید $\mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_n$ که G_n باز است. بنابراین G_n در $\mathbb{R}$ چگال است و $\mathscr{A} = \{G_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{R} \setminus \{r\} : r \in \mathbb{Q}\}$ در قضیه مزبور صدق نمی‌کند).

۵. ثابت کنید اگر هر زیرمجموعهٔ باز از یک فضای پیرافشرده، پیرافشرده باشد آن‌گاه هر زیرمجموعهٔ دلخواه فضا پیرافشرده است.

۶. هر زیرفضای بسته از یک فضای پیرافشرده، پیرافشرده است.

۷. هر فضای T_3 و شمارای دوم، پیرافشرده است.

۸. اگر $S_1 \times S_2$ پیرافشرده باشد، آن‌گاه S_1 و S_2 هر دو پیرافشرده‌اند.

۴-۳ فضای بئر

قضیهٔ ۴-۲-۳ نشان می‌دهد که در هر فضای هاسدورف فشردهٔ موضعی، اشتراک شمارایی از زیرفضاهای باز چگال، زیرفضای چگال است. نشان می‌دهیم که هر فضای متریک کامل نیز دارای چنین خاصیتی است. در این بخش فضای بئر و رسته‌های اول و دوم را مورد بحث قرار می‌دهیم. لازم به تذکر است که اصطلاح رسته در ریاضی به مفهوم دیگری نیز به کار برده می‌شود و اصطلاحی را که در این مبحث معرفی می‌کنیم ارتباطی به نظریه کتگوری‌ها ندارد. ابتدا حکم قضیهٔ ۴-۲-۳ را به‌عنوان تعریف فضای بئر معرفی می‌نماییم.

۴-۳-۱ فضای بئر

فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ را فضای بئر می‌نامیم، هرگاه اشتراک هر تعداد شمارایی از زیرفضاهای باز و چگال در $(S, \mathcal{T})$ در $(S, \mathcal{T})$ چگال باشد.
بنابراین هر فضای هاسدورف فشردهٔ موضعی یک فضای بئر است.

۴-۳-۲ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضای بئر باشد و $\mathscr{A} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ پوششی شمارا از زیرمجموعه‌های بستهٔ S باشد.
در این صورت mی متعلق به $\mathbb{N}$ موجود است که $F_m^\circ \neq \phi$.

برهان. چون $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ بنابراین $\bigcap_{n=1}^{\infty} (S \backslash F_n) = \phi$. از این‌که $(S, \mathcal{T})$ بئر است و به‌ازای هر n، $S \backslash F_n$ باز است، نتیجه می‌شود که یکی از این مجموعه‌ها مثلاً $S \backslash F_m$ در S چگال نیست و بنابراین $\overline{S \backslash F_m} \neq S$. در نتیجه $F_m^\circ = S \backslash (\overline{S \backslash F_m})$ ناتهی است. ■

۴-۳-۳ رستهٔ اول و رسته دوم

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq S$. مجموعهٔ A را از رستهٔ اول می‌گوییم هر گاه A اجتماع شمارایی از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال باشد. درغیراین‌صورت A را از رستهٔ دوم می‌نامیم.

واضح است که هر فضای بئر از رستهٔ دوم است، زیرا اگر $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ که $(\overline{A}_n)^\circ = \phi$، آن‌گاه $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$ و این متناقض با قضیهٔ ۴-۳-۲ است.

۴-۳-۴ مثال

در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$، مجموعهٔ اعداد گویا $\mathbb{Q}$ از رستهٔ اول است، زیرا $\mathbb{Q} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$ و به‌ازای هر $r \in \mathbb{Q}$ مجموعهٔ تک عضوی $\{r\}$ هیچ‌جا چگال است. مجموعهٔ اعداد اصم یعنی $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ از رستهٔ دوم است، زیرا اگر $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ از رستهٔ اول باشد، نتیجه می‌شود که $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ از رستهٔ اول است و این متناقض با فضای بئربودن $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ است (توجه کنید که چون $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ هاسدورف و فشردهٔ موضعی است، بنابراین فضای بئر است).

۴-۳-۵ تمرین

نشان دهید که $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$ فضای بئر است و نتیجه بگیرید که $\mathbb{R}^2$ اجتماع شمارایی از خطوط مستقیم نمی‌باشد.

۴-۳-۶ قضیه

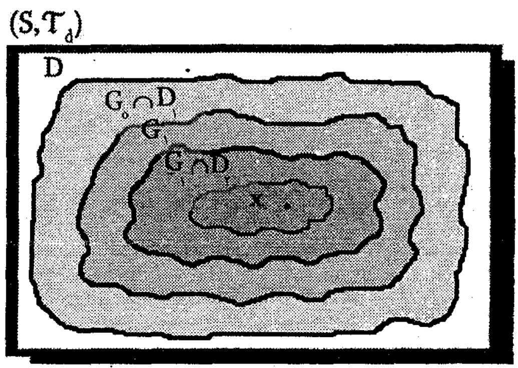
فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای بئر باشد و $A \subseteq S$ مجموعه‌ای از رستهٔ اول باشد در این صورت $A^\circ = \phi$.

برهان. فرض کنید $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال باشد و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. ثابت می‌کنیم اگر G مجموعهٔ بازی مشمول در A باشد، آن‌گاه $G = \phi$. از این‌که $G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$ نتیجه می‌شود که $\bigcap_{n=1}^{\infty} (S\setminus\overline{A}_n) \subseteq S\setminus G$. چون به‌ازای هر n، $S\setminus\overline{A}_n$ بازو در S چگال است و از این‌که S فضای بئر است نتیجه می‌شود که $\bigcap_{n=1}^{\infty} (S\setminus\overline{A}_n)$ در S چگال است و بنابراین $S\setminus G$ در S چگال می‌باشد. چون $S\setminus G$ بسته است پس $S\setminus G = \overline{S\setminus G} = S$ و لذا $G = \phi$. بنابراین $A^{\circ} = \phi$. ■

۴-۳-۵ قضیهٔ رستهٔ بئر

هر فضای متریک کامل، فضای بئر و بنابراین از رستهٔ دوم است.

برهان. اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیه ۴-۲-۳ می‌باشد. فرض کنیم (S, d) فضای متریک کامل باشد و $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های چگال و باز در $(S, \mathcal{T}_d)$ باشد. ثابت می‌کنیم که $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ در S چگال است. کافی است ثابت کنیم که به‌ازای هر مجموعهٔ باز غیرتهی مانند $G_{\circ}$، $G_{\circ} \cap D \neq \phi$. چون D_1 چگال است پس $G_{\circ} \cap D_1 \neq \phi$. چون $G_{\circ} \cap D_1$ باز است بنابراین گوی بازی مانند G_1 موجود است که $d(\overline{G}_1) \leq 1$ و $G_1 \subseteq \overline{G}_1 \subseteq G_{\circ} \cap D_1$ (فرض کنیم $x \in G_{\circ} \cap D_1$ پس گوی به مرکز x و به شعاع $r<1$ مانند $S_r(x)$ موجود است که $S_r(x) \subseteq G_{\circ} \cap D_1$. اگر $r_1 = \frac{r}{2}$ و $G_1 = S_{r_1}(x)$، آن‌گاه $G_1 \subseteq \overline{G}_1 \subseteq S_{r_1}[x] \subseteq S_r(x) \subseteq G_{\circ}\cap D_1$ و $d(\overline{G}_1) \leq 2r_1 \leq r < 1$). چون D_2 چگال است، پس $G_1 \cap D_2 \neq \phi$ و از این‌که $G_1 \cap D_2$ باز است نتیجه می‌شود که مجموعهٔ بازی مانند G_2 موجود است که $\overline{G}_2 \subseteq G_1 \cap D_2$ و $d(\overline{G}_2) \leq \frac{1}{2}$. به استقرا و با ادامه‌دادن این روش دنباله‌ای از مجموعه‌های باز مانند $\{G_n\}$ به‌دست می‌آید که $d(\overline{G}_n) \leq \frac{1}{n}$ و $\overline{G}_n \subseteq G_{n-1} \cap D_n$. واضح است که $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n \subseteq G_{\circ} \cap D$ حال چون (S, d) فضای کامل متریک است و $\{\overline{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های بستهٔ تو درتو می‌باشد، بنابراین $x_{\circ}$ی در S موجود است که $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n = \{x_{\circ}\}$. پس $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n \neq \phi$ و بنابراین $G_{\circ} \cap D \neq \phi$. ■



۴-۳ مسائل

۱. نشان دهید $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_l)$ یک فضای بئر است.

۲. ثابت کنید که هر زیرفضای باز یک فضای بئر، بئر است.

۳. ثابت کنید هر زیرفضای بستهٔ یک فضای متریک کامل، بئر است.

۴. ثابت کنید که خاصیت بئربودن توسط توابع پیوسته، باز و برو پایدار است و بنابراین خاصیت توپولوژیکی است.

۵. فرض کنید (S, d) فضای متریک کامل باشد $\{G_n: n \in \mathbb{N}\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های G_δ باشد. در این صورت اگر هر G_n در S چگال باشد، آن‌گاه ثابت کنید که $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ در S چگال است.

۴-۴ فضای لیندولف

فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ را لیندولف می‌گوییم، هرگاه هر پوشش باز S، دارای یک زیرپوشش شمارا باشد. بدیهی است که هر فضای فشرده، لیندولف است. در این بخش ثابت می‌کنیم که هر فضای شمارای دوم لیندولف است و عکس آن برقرار نیست. همچنین فضای $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ لیندولف است ولی فشرده نیست.

۴-۴-۱ مثال

فرض کنیم $\mathscr{T}$ توپولوژی هم متناهی باشد. بنابراین $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ فشرده و بنابراین لیندولف است. $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_l)$، خط‌سورجن فری، لیندولف است (در حقیقت هر زیرفضای آن لیندولف است) و نیز شمارای اول است ولی شمارای دوم نیست. $\mathbb{R}$ با توپولوژی گسسته لیندولف نیست. فرض کنیم $\mathscr{T}_* = \{G \subset \mathbb{R}: \circ \notin G$ یا $\mathbb{R}\setminus\{۲,۳\} \subseteq G\}$، در این صورت $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_*)$ فشرده و بنابراین لیندولف است. زیرفضای $(\mathbb{R}\setminus\{\circ\}, \mathscr{T}_e / \mathbb{R}\setminus\{\circ\})$ لیندولف نیست. پس لیندولف‌بودن موروثی نیست. توجه نمایید که در فضای $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_*)$ هر مجموعهٔ تک عضوی باز است.

۴-۴-۲ قضیه

هر فضای شمارای دوم، لیندولف است.

برهان. فرض کنیم $\mathscr{B} = \{B_n: n \in \mathbb{N}\}$ یک پایهٔ شمارا برای فضای شمارای دوم $(S, \mathscr{T})$ باشد. اگر $\mathscr{A} = \{G_\alpha: \alpha \in I\}$ پوششی باز برای S باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $x \in S$، G_αی متعلق به $\mathscr{A}$ موجود است که شامل x است و بنابراین B_mی متعلق به $\mathscr{B}$ موجود است که شامل x و مشمول در G_α است. در نتیجه یک زیرخانواده از $\mathscr{B}$ مانند $\{B_{m_j}: j \in \mathbb{N}\}$ موجود است که $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{m_j}$ و هر B_{m_j} زیرمجموعهٔ یک G_α. است بنا به اصل انتخاب از هر خانواده $\mathscr{A} = \{G_\alpha: B_{m_j} \subseteq G_\alpha\}$ یک عضو مانند G_{α_j} را انتخاب می‌کنیم، واضح است

که $\bigcup_{j=1}^{\infty} G_{\alpha_j} = S$. ■

اثبات قضیه زیر ساده است و به خواننده واگذار می‌شود.

۴-۴-۳ قضیه

الف) خاصیت لیندولف توسط هر تابع پیوسته و برو پایدار است و بنابراین خاصیت توپولوژیکی است.

ب) هر زیرفضای بستهٔ یک فضای لیندولف، لیندولف است.

ج) اگر $\prod_{\alpha\in I} (S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ لیندولف باشد، آن‌گاه به‌ازای هر α، $(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ لیندولف است.

با درنظر گرفتن $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ و درنظرگرفتن $F = \{(x, -x): x$ اصم است$\}$، واضح است که F در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ بسته است. نشان دهید که F لیندولف نیست و بنا به قسمت (ب) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ لیندولف نیست. پس خاصیت لیندولف، حاصل‌ضربی نیست. قابل تذکر است که $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ شمارای اول و تفکیک‌پذیر است. توجه نمایید که هر مجموعهٔ تک عضوی در F باز است.

۴-۴-۴ قضیه

هر فضای منظم و لیندولف، نرمال است.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضایی منظم و لیندولف باشد و F_1 و F_2 دو زیرمجموعهٔ بستهٔ مجزای S باشند. بنابراین $(F_1, \mathcal{T}/F_1)$, $(F_2, \mathcal{T}/F_2)$ لیندولف هستند. بنا به خاصیت منظم‌بودن $(S, \mathcal{T})$، به‌ازای هر x متعلق به F_1 و هر y متعلق به F_2، دو مجموعهٔ باز $G_1(x)$ شامل x و $G_2(y)$ شامل y موجودند که $G_1(x) \subseteq \overline{G_1(x)} \subseteq S\setminus F_2$ و $G_2(y) \subseteq \overline{G_2(y)} \subseteq S\setminus F_1$. بنابراین $\{G_1(x) \cap F_1 : x \in F_1\}$ و $\{G_2(y) \cap F_2 : y \in F_2\}$ به‌ترتیب پوشش بازی برای F_1 و F_2 می‌باشند. بنابراین به‌ترتیب دارای زیرپوشش شمارایی مانند $\{G_1(x_n) \cap F_1 : n \in \mathbb{N}\}$ و $\{G_2(y_n) \cap F_2 : n \in \mathbb{N}\}$ هستند. فرض کنیم $V_n = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{G_2(y_i)}$ و $U_n = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{G_1(x_i)}$. بنابراین به‌ازای هر n، $G_1(x_n)\setminus V_n$ و $G_2(y_n)\setminus U_n$ باز هستند، اگر $G_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_1(x_n)\setminus V_n)$ $G_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_2(y_n)\setminus U_n)$ آن‌گاه $F_1 \subseteq G_1$ و $F_2 \subseteq G_2$ و $G_1 \cap G_2 = \phi$ (چرا؟). ■

۴-۴-۵ نتیجه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضایی شمارای دوم و T_3 باشد. در این صورت $(S, \mathcal{T})$ متریک‌پذیر است.

برهان. چون $(S, \mathcal{T})$ شمارای دوم است بنا به ۴-۴-۲ لیندولف است و چون T_3 است پس منظم و T_1 است و بنا به ۴-۴-۴ نرمال است و در نتیجه T_4 است. قضیهٔ ۳-۳-۱۲ نشان می‌دهد که $(S, \mathcal{T})$ متریک‌پذیر است. ■

۴-۴ مسائل

۱. اگر $\mathscr{T}_* = \{G \subseteq \mathbb{R}\colon 0 \notin G$ یا $\mathbb{R}\setminus\{2,3\} \subseteq G\}$، آنگاه ثابت کنید که $\mathscr{T}_*$ یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ است. نشان دهید که $\mathscr{T}_*$ توپولوژی گسسته نیست. ثابت کنید که $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_*)$ شمارای اول و لیندولف است ولی تفکیک‌پذیر نیست.

۲. احکام قضیهٔ ۴-۴-۲ را به‌طور مفصل ثابت کنید.

۳. فرض کنید $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا باشد. آیا $(\mathbb{Q}, \mathscr{T}_e/\mathbb{Q})$ لیندولف است؟ آیا مجموعهٔ اعداد اصم $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ با توپولوژی نسبی $\mathscr{T}_e/(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ لیندولف است؟ آیا $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ تفکیک‌پذیر است؟

۴. فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ فضای توپولوژیک و A و B دو زیرفضای لیندولف $(S, \mathscr{T})$ باشند. آیا $(A\cup B, \mathscr{T}/A\cup B)$ لیندولف است؟

۵. فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ فضای هاسدورف و F زیرفضای لیندولف S باشد، آیا F بسته است؟ آیا F مجموعه‌ای G_δ است؟ آیا F مجموعه‌ای F_σ است؟

۴-۵ فضای به‌طور شمارا فشرده

فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ را به‌طور شمارا فشرده می‌گوییم، هرگاه هر پوشش باز شمارا برای S دارای یک زیرپوشش متناهی باشد. واضح است که هر فضای فشرده، به‌طور شمارا فشرده است و همچنین هر فضای لیندولف به‌طور شمارا فشرده، فشرده است. بعداً خواهیم دید که در فضای متریک فشردگی و به‌طور شمارا فشردگی معادلند. فضای توپولوژیکی موجود است که به‌طور شمارا فشرده است ولی لیندولف (و بنابراین فشرده) نیست. با درنظرگرفتن پوشش‌های $\{(-n,n)\colon n \in \mathbb{N}\}$ و $\{[-n,n)\colon n \in \mathbb{N}\}$ به‌ترتیب برای $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ و $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_l)$ و خط سورجن‌فری به‌طور شمارا فشرده نیستند.

گرچه بازهٔ بسته $[a,b]$ با توپولوژی نسبی $\mathscr{T}_e/[a,b]$ فشرده است و در نتیجه به‌طور شمارا فشرده است، ولی زیر فضای (a,b) از آن به‌طور شمارا فشرده نیست، زیرا پوشش $\{(a, b-\frac{b-a}{2n})\colon n \in \mathbb{N}\}$ هیچ زیرپوشش متناهی ندارد. بنابراین به‌طور شمارا فشرده‌بودن، موروثی نیست. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که زیرفضاهای بسته یک فضای به‌طور شمارا فشرده، به‌طور شمارا فشرده می‌باشند.

۴-۵-۱ قضیه

فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ به‌طور شمارا فشرده و F زیرفضای بستهٔ S باشد در این صورت F به‌طور شمارا فشرده است.

برهان. فرض کنیم $\{G_n \cap F\colon n \in \mathbb{N}\}$ پوشش باز شمارایی برای F باشد که به‌ازای هر n، G_n مجموعه‌ای باز در S است. بنابراین $\{G_n\colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{S\setminus F\}$ پوشش باز شمارایی برای S است و در نتیجه یک زیر

پوشش متناهی مانند $\{G_1, G_2, \dots, G_k\} \cup \{S\setminus F\}$ دارد. واضح است که $\{G_n \cap F: 1 \le n \le k\}$ یک زیرپوشش متناهی برای $(F, \mathcal{T}/F)$ است. ■

اثبات قضیهٔ زیر شبیه اثبات قضیهٔ ۴-۱-۱۳ است و به خواننده واگذار می‌شود.

۴-۵-۲ قضیه

شرط لازم و کافی برای آنکه $(S, \mathcal{T})$ به‌طور شمارا فشرده باشد، آن است که به‌ازای هر خانوادهٔ شمارا از مجموعه‌های بسته با خاصیت اشتراک متناهی مانند $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ داشته باشیم $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$.

۴-۵-۳ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک و $\{F_n\}$ دنباله‌ای نزولی از زیرمجموعه‌های بستهٔ ناتهی S باشد به‌طوری که $(F_1, \mathcal{T}/F_1)$ به‌طور شمارا فشرده است. در این صورت $\bigcap_{i=1}^{n} F_n \neq \phi$.

برهان. چون $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \dots$. بنابراین خانوادهٔ $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های بسته در $(F_1, \mathcal{T}\setminus F_1)$ است که دارای خاصیت اشتراک متناهی است، بنابراین $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$. ■

۴-۵-۴ نقطهٔ انباشتگی

نقطهٔ $x \in S$ را یک نقطهٔ انباشتگی دنبالهٔ $\{x_n\}$ در $(S, \mathcal{T})$ می‌گوییم، اگر به‌ازای هر k متعلق به $\mathbb{N}$ و هر G باز شامل x، $G \cap \{x_n : n \ge k\} \neq \phi$.

۴-۵-۵ قضیه

شرط لازم و کافی برای آنکه $(S, \mathcal{T})$ به‌طور شمارا فشرده باشد، آن است که هر دنباله $\{x_n\}$ در S دارای یک نقطهٔ انباشتگی در S باشد.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ به‌طور شمارا فشرده باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در S باشد. ثابت می‌کنیم که $\{x_n\}$ دارای یک نقطهٔ انباشتگی است. به برهان خلف فرض کنیم $\{x_n\}$ هیچ نقطهٔ انباشتگی‌ای نداشته باشد. بنابراین به‌ازای هر $x \in S$ مجموعه بازی مانند G_x و عددی طبیعی مانند k موجود است به طوری که $x \in G_x$ و $G_x \cap \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\} = \phi$. به ازای هر n فرض کنید $H_n = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$، $\mathscr{A}_n = \{G_x : G_x \cap H_n = \phi\}$ و $B_n = \bigcup_{G_x \in \mathscr{A}_n} G_x$. در این صورت $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_k$ و بنابراین یک عدد طبیعی مانند m موجود است که $S = \bigcup_{k=1}^{m} B_k$ و این تناقض است (چرا؟).

حال فرض کنیم هر دنباله در S دارای نقطهٔ انباشتگی است. ثابت می‌کنیم $(S, \mathcal{T})$ به‌طور شمارا فشرده است. به برهان خلف اگر $(S, \mathcal{T})$ به‌طور شمارا فشرده نباشد، بنابراین پوشش باز شمارایی

مانند $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ موجود است که هیچ زیر پوشش متناهی ندارد. قرار می‌دهیم $H_1 = G_1$ و $x_1 \in H_1$ را درنظر می‌گیریم. چون $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ زیرپوشش متناهی برای S ندارد بنابراین لااقل یکی از G_iها $(i \geq 2)$ زیرمجموعهٔ G_1 نیست ازبین G_iهای با این خاصیت، آن را که اندیسش از همه کمتر است H_2 می‌نامیم و $x_2 \in H_2 \setminus H_1$ را انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم H_{n-1} و $x_{n-1} \in H_{n-1}$ انتخاب شده‌اند، ازبین G_iهایی که زیرمجموعهٔ $\bigcup_{i=1}^{n-1} H_i$ نیستند آن را که اندیسش از همه کمتر است H_n می‌نامیم و x_n را در مجموعهٔ $H_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} H_i$ انتخاب می‌کنیم. چون $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ پوشش S است پس nی موجود است که $x \in G_n$. به‌سادگی نتیجه می‌شود که $G_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$. حال به‌ازای هر x متعلق به S عددی طبیعی مانند k موجود است که $x \in H_k$، واضح است که $H_k \cap \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\} = \phi$. بنابراین x نقطهٔ انباشتگی $\{x_n\}$ نیست. چون x در S دلخواه اختیار شده بود بنابراین $\{x_n\}$ هیچ نقطهٔ انباشتگی ندارد و این خلاف فرض است. پس $(S, \mathscr{T})$ به‌طور شمارا فشرده است. ■

اثبات قضیهٔ زیر واضح است و به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

۴-۵-۶ قضیه

خاصیت به‌طور شمارا فشرده‌بودن تحت هر تابع پیوسته و برو پایدار است. بنابراین یک خاصیت توپولوژیکی است.

بعداً ثابت می‌کنیم که فشردگی و به‌طور شمارا فشردگی در هر فضای متریک معادلند. با استفاده از این موضوع قضیهٔ زیر به‌وضوح برقرار است. از خواننده خواسته می‌شود که مستقیماً با استدلالی شبیه استدلال قضیه ۴-۱-۱۹ و با استفاده از قضیه ۴-۵-۶ و این‌که $\mathbb{R}$ دارای یک پایهٔ شمارا است، قضیهٔ زیر را ثابت کند.

۴-۵-۷ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ به‌طور شمارا فشرده و $f : (S, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ پیوسته باشد. دراین صورت f ماکزیمم و مینیمم خود را در S اختیار می‌کند.

۵-۴ مسائل

۱. اگر $(S_1, \mathscr{T}_1)$ فشرده و $(S_2, \mathscr{T}_2)$ به‌طور شمارا فشرده باشد، آن‌گاه ثابت کنید حاصل‌ضرب تیخونوف $(S_1, \mathscr{T}_1) \times (S_2, \mathscr{T}_2)$ به‌طور شمارا فشرده است.

۲. فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ یک فضای هاسدورف و شمارای دوم باشد. ثابت کنید که هر زیرفضای به‌طور شمارا فشردهٔ $(S, \mathscr{T})$ بسته است و نتیجه بگیرید که هر زیرفضای به‌طور شمارا فشرده $(S, \mathscr{T})$ فشرده است.

(راهنمایی: برهان قضیهٔ ۴-۱-۷ را ببینید و از خاصیت پایهٔ شمارا استفاده کنید و سپس از قضیهٔ ۴-۴-۲ استفاده کنید)

۳. آیا هر زیرفضای به‌طور شمارا فشرده یک فضای هاسدورف، بسته است؟

۴. قضایای ۴-۵-۶ و ۴-۵-۷ را ثابت کنید.

۵. فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ فضای هاسدورف شمارای اول باشد. ثابت کنید که هر زیرفضای به‌طور شمارا فشردهٔ $(S, \mathscr{T})$ بسته است. (راهنمایی: فرض کنید A زیرفضای به‌طور شمارا فشرده باشد و $x \in \overline{A}$. بنابراین دنباله‌ای در A مانند $\{x_n\}$ موجود است که $x_n \to x$ (چرا؟) سپس از قضیهٔ ۴-۵-۵ استفاده کنید و نشان دهید که $x \in A$.)

۶. فرض کنید به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $(S_n, \mathscr{T}_n)$ شمارای اول باشد. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن‌که $\prod_{n \in \mathbb{N}} (S_n, \mathscr{T}_n)$ به‌طور شمارا فشرده باشد آن است که به‌ازای هر n، $(S_n, \mathscr{T}_n)$ به‌طور شمارا فشرده باشد.

۷. نشان دهید که خاصیت به‌طور شمارا فشرده بودن، خاصیت حاصل‌ضربی نیست. در حقیقت، فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ موجود است که تفکیک‌پذیر، به‌طور شمارا فشرده و تیخونوف است ولی $(S, \mathscr{T}) \times (S, \mathscr{T})$ به‌طور شمارا فشرده نیست. این مثال توسط نواک[1] ارائه شده که خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به [5,p.245] و [۱۰] مراجعه نماید.

۸. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای شمارای دوم $(S, \mathscr{T})$ فشرده باشد آن است که $(S, \mathscr{T})$ به‌طور شمارا فشرده باشد.

۴-۶ فشردگی دنباله‌ای و خاصیت بولزانو - وایراشتراس

در این قسمت دو خاصیت را که در ارتباط با پوشش می‌باشد مورد مطالعه قرار می‌دهیم؛ یکی فشردگی دنباله‌ای که خاصیتی قوی‌تراز به‌طور شمارا فشردگی است و دیگری خاصیت بولزانو - وایراشتراس که ضعیف‌تر از به‌طور شمارا فشردگی است.

فشردگی دنباله‌ای، فشردگی شمارا را نتیجه می‌دهد. در حالت کلی فشردگی دنباله‌ای نه از فشردگی نتیجه می‌شود و نه فشردگی را نتیجه می‌دهد.

فشردگی دنباله‌ای برای فضاهای شمارای اول معادل فشردگی شمارا می‌باشد. خاصیت بولزانو - وایراشتراس در حالت کلی از فشردگی شمارا نتیجه می‌شود ولی عکس آن برقرار نیست. برای فضاهای T_1، فشردگیِ شمارا با خاصیت بولزانو - وایراشتراس معادل است. بعداً خواهیم دید که در هر فضای متریک، فشردگی، فشردگی شمارا، فشردگی دنباله‌ای و خاصیت بولزانو - وایراشتراس معادلند.

---

1. J. Novak

۴-۶-۱ فضای به‌طور دنباله‌ای فشرده

فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ را به‌طور دنباله‌ای فشرده می‌گوییم، اگر هر دنباله در S، دارای یک زیر دنبالهٔ همگرا در S باشد.

بنا بر قضیهٔ ۴-۵-۵ هر فضای به‌طور دنباله‌ای فشرده یک فضای به‌طور شمارا فشرده است، زیرا حد هر زیر دنباله از دنبالهٔ $\{x_n\}$، نقطهٔ انباشتگی این دنباله است.

۴-۶-۲ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ به‌طور شمارا فشرده و شمارای اول باشد در این صورت $(S, \mathcal{T})$ فشردهٔ دنباله‌ای است.

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در S باشد. چون $(S, \mathcal{T})$ به‌طور شمارا فشرده است، پس $\{x_n\}$ دارای یک نقطهٔ انباشتگی مانند x است و چون هر نقطهٔ انباشتگی یک نقطهٔ چسبیدگی است بنا به خاصیت شمارای اول، زیر دنباله‌ای از $\{x_n\}$ موجود است که به x همگراست. ■

فشردگی دنباله‌ای همانند فشردگی، فشردگی شمارا و لیندولف‌بودن خاصیت موروثی نیست. با این وجود، هر زیر فضای بستهٔ یک فضای به‌طور دنباله‌ای فشرده، به‌طور دنباله‌ای فشرده می‌باشد.

۴-۶-۳ قضیه

اگر $(S, \mathcal{T})$ به‌طور دنباله‌ای فشرده و A زیرفضای بستهٔ S باشد، آن‌گاه $(A, \mathcal{T}/A)$ فشردهٔ دنباله‌ای است.

برهان. با توجه به این‌که $A = \bar{A}$ اثبات ساده است و به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود. ■

۴-۶-۴ قضیه

اگر $(S_1, \mathcal{T}_1)$ به‌طور دنباله‌ای فشرده و $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ تابعی پیوسته و برو باشد، آن‌گاه $(S_2, \mathcal{T}_2)$ به‌طور دنباله‌ای فشرده است. بنابراین فشردگی دنباله‌ای خاصیتی توپولوژیکی است.

برهان. فرض کنیم $\{y_n\}$ دنباله‌ای در S_2 باشد. بنابراین دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در S_1 موجود است که $f(x_n)=y_n$ چون $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فشردهٔ دنباله‌ای است، بنابراین زیر دنباله‌ای مانند $\{x_{r_n}\}$ موجود است که همگرا به نقطه‌ای مانند x متعلق به S_1 است. چون f پیوسته است، پس $f(x_{r_n}) \to f(x)$ و بنابراین $\{y_{r_n}\}$ زیردنباله‌ای همگرا می‌باشد. ■

۴-۶-۵ خاصیت بولزانو - وایراشتراس

فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ دارای خاصیت بولزانو ـ وایراشتراس است، اگر هر زیرمجموعهٔ نامتناهی S دارای یک نقطهٔ حدی باشد.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که اگر $(S, \mathcal{T})$ به‌طور شمارا فشرده باشد، آن‌گاه دارای خاصیت بولزانو - وایراشتراس است.

۴-۶-۶ قضیه

اگر $(S, \mathcal{T})$ به‌طور شمارا فشرده باشد، آن‌گاه دارای خاصیت بولزانو - وایراشتراس است.

برهان. فرض کنیم A یک زیرمجموعهٔ نامتناهی S باشد. بنابراین زیر مجموعه‌ای شمارا مانند $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ در A موجود است که نقاطش متمایز است. چون $\{x_n\}$ دنباله‌ای در S است و $(S, \mathcal{T})$ به‌طور شمارا فشرده است، بنا به قضیهٔ ۴-۵-۵ دارای یک نقطهٔ انباشتگی مانند x است. چون نقاط $\{x_n\}$ متمایز می‌باشند، بنابراین x نقطهٔ حدی $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ است و چون $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ پس x نقطهٔ حدی A است. ■

۴-۶-۷ قضیه

اگر $(S, \mathcal{T})$ دارای خواص بولزانو - وایراشتراس و T_1 باشد، آن‌گاه $(S, \mathcal{T})$ به‌طور شمارا فشرده است.

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $(S, \mathcal{T})$ باشد. بنا بر قضیهٔ ۴-۵-۵ کافی است ثابت کنیم که $\{x_n\}$ دارای یک نقطهٔ انباشتگی است. اگر یکی از x_nها به‌طور نامتناهی تکرار شود آن نقطه، یک نقطهٔ انباشتگی $\{x_n\}$ است. پس فرض کنیم نقاط x_n متمایز هستند. چون $(S, \mathcal{T})$ دارای خاصیت بولزانو - وایراشتراس است، پس مجموعهٔ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ دارای یک نقطهٔ حدی مانند x است. ثابت می‌کنیم x یک نقطهٔ انباشتگی $\{x_n\}$ است. فرض کنیم G مجموعهٔ بازی شامل x و k یک عدد طبیعی داده شده باشد. اگر $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \setminus \{x\}$، آن‌گاه A بسته است زیرا $(S, \mathcal{T})$ فضای T_1 است و A متناهی می‌باشد. بنابراین $S \setminus A$ مجموعهٔ بازی شامل x است در نتیجه $G \cap (S \setminus A)$ باز و شامل x است. چون x نقطهٔ حدی $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ است، پس x_nی موجود است که $x_n \neq x$ و $x_n \in G \cap (S \setminus A)$. بنابراین $x_n \notin A$ در نتیجه $n \geq k+1$. پس $G \cap \{x_n : n \geq k\} \neq \phi$ بنابراین x نقطهٔ انباشتگی دنباله $\{x_n\}$ است. ■

اثبات قضیهٔ زیر ساده است و به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

۴-۶-۸ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ دارای خاصیت بولزانو - وایراشتراس باشد و F یک زیرمجموعهٔ بسته $(S, \mathcal{T})$ باشد. در این صورت $(f, \mathcal{T}/F)$ دارای خاصیت بولزانو - وایراشتراس است.

مثال زیر نشان می‌دهد که خاصیت بولزانو - وایراشتراس موروثی نیست.

۴-۶-۹ مثال

فرض کنیم $S = [0, 1]$ و $\mathcal{T} = \mathcal{T}_e / [0, 1]$. در این صورت $(S, \mathcal{T})$ فشرده و بنابراین به‌طور شمارا فشرده و در نتیجه دارای خاصیت بولزانو - وایراشتراس است. اگر $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$، آن‌گاه $A \subset S$ و $(A, \mathcal{T}/A)$ دارای خاصیت بولزانو - وایراشتراس نیست، زیرا A هیچ نقطهٔ حدی خودش را دربرندارد.

۴-۶-۱۰ مثالهای نقض

۱. فضای توپولوژیکی موجود است که فشرده است (بنابراین به‌طور شمارا فشرده و لیندولف است) ولی به‌طور دنباله‌ای فشرده نیست.

فرض کنیم به‌ازای هر α متعلق به $\mathbb{R}$، $S_\alpha = [0, 1]$ و $\mathscr{T}_\alpha = \mathscr{T}_e/[0, 1]$ و نیز $(S, \mathscr{T})$ حاصل‌ضرب تیخونوف $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ها باشد. قضیهٔ کانتور در نظریهٔ مجموعه‌ها نشان می‌دهد که اگر T مجموعهٔ تمام دنباله‌ها از اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ به $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه T هم عدد با $\mathbb{R}$ است و بنابراین تابعی دوسو مانند $f: \mathbb{R} \to T$ موجود است. حال به‌ازای هر عدد طبیعی n تابع $x_n: \mathbb{R} \to S_\alpha$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{R}$ و $f(\alpha) = \{n_1^\alpha, n_2^\alpha, \dots\}$. اگر به‌ازای یک عدد فرد i، $n = n_i^\alpha$ آن‌گاه $x_n(\alpha) = 0$ و درغیراین‌صورت $x_n(\alpha)$ را برابر ۱ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\{x_n\}$ هیچ زیردنبالهٔ همگرایی ندارد. فرض کنیم $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ زیردنباله‌ای همگرا باشد. اگر $\alpha = f^{-1}(\{n_i : i \in \mathbb{N}\})$، آن‌گاه دنبالهٔ $\{x_{n_i}(\alpha)\}_{i\in\mathbb{N}}$ باید در $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ همگرا باشد، یعنی دنبالهٔ ...,۱,۰,۱,۰ در $[0, 1]$ با توپولوژی اقلیدسی همگراست و این متناقض است با منحصربودن حد در فضای توپولوژیک هاسدورف $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$. بنابراین $(S, \mathscr{T})$ به‌طور دنباله‌ای فشرده نیست. توجه داریم که بنا به قضیهٔ تیخونوف چون هر $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ فشرده است پس $(S, \mathscr{T})$ فشرده می‌باشد.

۲. فضای توپولوژیکی موجود است که به‌طور شمارا فشرده و هاسدورف است ولی نه لیندولف و نه فشرده و نه به‌طور دنباله‌ای فشرده می‌باشد (خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به [۱] رجوع کند).

۳. فضای توپولوژیکی موجود است که فشرده و به‌طور دنباله‌ای فشرده و هاسدورف است و یک زیرفضای به‌طور دنباله‌ای فشرده دارد که بسته نیست. (رجوع کنید به کتاب [۱]).

۴. فضای توپولوژیکی موجود است که شمارای دوم (و بنابراین تفکیک‌پذیر و لیندولف) است و دارای خاصیت بولزانو ـ وایراشتراس است ولی به‌طور شمارا فشرده نیست.

$\mathbb{N}$ را به همراه توپولوژی زوج ـ فرد معرفی شده در مثال ۲-۲-۴ درنظر بگیرید. چون $\mathscr{B}$، پایهٔ معرفی شده برای این توپولوژی شماراست، بنابراین $(\mathbb{N}, \mathscr{T})$ شمارای دوم و بنابراین تفکیک‌پذیر و لیندولف است. $(\mathbb{N}, \mathscr{T})$ به‌طور شمارا فشرده نیست زیرا $\mathscr{B}$ پوششی برای $\mathbb{N}$ است که هیچ زیرپوشش متناهی ندارد. حال فرض کنیم $A \subseteq \mathbb{N}$ نامتناهی باشد و $n \in A$. اگر n فرد باشد، آن‌گاه $n+1 \in A'$ و اگر n زوج باشد $n-1 \in A'$. پس A دارای نقطهٔ حدی می‌باشد (چرا؟) (راهنمایی: اگر n زوج باشد و G مجموعهٔ بازی شامل $n-1$ باشد آن‌گاه B_iی موجود است که شامل $n-1$ است و مشمول در مجموعهٔ باز G است. استدلال مشابهی برای حالتی که n فرد است کارساز است).

۵. خاصیت بولزانو ـ وایراشتراس تحت تابع پیوسته پایدارنیست.

فرض کنید $\mathscr{T}$ توپولوژی تعریف شده در مثال قبل باشد و $f: (\mathbb{N}, \mathscr{T}) \to (\mathbb{N}, \mathscr{T}_1)$ که در آن $\mathscr{T}_1$ توپولوژی گسسته است و $f(2n-1) = f(2n) = n$. چون $f^{-1}\{n\} = \{2n-1, 2n\}$ پس f پیوسته است. واضح است که $(\mathbb{N}, \mathscr{T})$ شمارای دوم است و خاصیت بولزانو ـ وایراشتراس دارد. ولی $(\mathbb{N}, \mathscr{T}_1)$ فضایی

T_5 و لیندولف است، ولی خاصیت بولزانو - وایراشتراس ندارد.

۶. فضای توپولوژیکی موجود است که فشرده و به‌طور دنباله‌ای فشرده است و زیرفضایی دارد که نه لیندولف است و نه خاصیت بولزانو - وایراشتراس دارد.

فرض کنیم $\mathscr{T}_* = \{G \subseteq \mathbb{R}: \circ \notin G$ یا $\mathbb{R}\setminus\{۲,۳\} \subseteq G\}$ در این صورت $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_*)$ فشرده است. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_*)$ باشد. اگر برای یک تعداد متناهی n، $x_n = ۳$ یا $x_n = ۲$، آن‌گاه واضح است که $x_n \to \circ$. اگر برای تعداد نامتناهی n، $x_n = ۲$ یا $x_n = ۳$، آن‌گاه زیر دنباله‌ای از $\{x_n\}$ موجود است که به ۲ یا ۳ همگراست. بنابراین $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_*)$ به‌طور دنباله‌ای فشرده است حال زیرفضای $\mathbb{R}\setminus\{\circ\}$ را درنظر می‌گیریم. واضح است که $\mathscr{T}_*/(\mathbb{R}\setminus\{\circ\})$ توپولوژی گسسته روی $\mathbb{R}\setminus\{\circ\}$ است (چرا؟). بنابراین $\mathbb{R}\setminus\{\circ\}$ لیندولف نیست. از طرفی $\mathbb{R}\setminus\{\circ\}$ هیچ نقطهٔ حدی در خودش ندارد، زیرا توپولوژی روی آن گسسته است. بنابراین $(\mathbb{R}\setminus\{\circ\}, \mathscr{T}_*/(\mathbb{R}\setminus\{\circ\}))$ خاصیت بولزانو - وایراشتراس ندارد.

۴-۶ مسائل

۱. فرض کنید $(S_۱, \mathscr{T}_۱)$ و $(S_۲, \mathscr{T}_۲)$ به‌طور دنباله‌ای فشرده باشند. ثابت کنید $(S_۱, \mathscr{T}_۱) \times (S_۲, \mathscr{T}_۲)$ به‌طور دنباله‌ای فشرده است.

۲. فرض کنید $(S_۱, \mathscr{T}_۱)$ دارای خاصیت بولزانو - وایراشتراس باشد و $f: (S_۱, \mathscr{T}_۱) \to (S_۲, \mathscr{T}_۲)$ تابعی دوسو و پیوسته باشد. ثابت کنید $(S_۲, \mathscr{T}_۲)$ نیز دارای خاصیت بولزانو - وایراشتراس است. بنابراین خاصیت بولزانو - وایراشتراس خاصیتی توپولوژیکی است.

۳. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آن‌که زیرفضای A از $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ دارای خاصیت بولزانو - وایراشتراس باشد آن است که بسته و کراندار باشد (که معادل با فشردگی است).

۴. فرض کنید $(S_۱, \mathscr{T}_۱)$ و $(S_۲, \mathscr{T}_۲)$ هر دو دارای خاصیت بولزانو - وایراشتراس باشند. آیا $(S_۱, \mathscr{T}_۱) \times (S_۲, \mathscr{T}_۲)$ دارای خاصیت بولزانو - وایراشتراس است؟ چرا؟

۴-۷ خواص پوششی در فضای متریک

۴-۷-۱ قضیه

در هر فضای متریک (S, d) سه شرط زیر معادلند:

الف) (S, d) شمارای دوم است.

ب) (S, d) لیندولف است.

ج) (S, d) تفکیک‌پذیر است.

برهان. در هر فضای توپولوژیک ثابت کردیم که شمارای دوم بودن، لیندولف‌بودن را نتیجه می‌دهد

بنابراین (الف) ⇐ (ب).

(ب) ⇐ (ج). به‌ازای هر عدد طبیعی n $\{S_{1/n}(x): x \in S\}$ یک پوشش باز برای S است. بنابراین دارای یک زیرپوشش شمارا مانند $\{S_{1/n}(x_i^n): i \in \mathbb{N}\}$ است. فرض کنیم $D_n = \{x_i^n: i \in \mathbb{N}\}$ و $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ در این صورت D در S چگال و شماراست. (چرا؟)

برای اثبات (ج) ⇐ (الف)، قضیه ۲-۵-۱۸ را ببینید. ■

۴-۷-۲ قضیه

در هر فضای متریک (S, d) دو شرط زیر معادلند:

الف) (S, d) فشردهٔ دنباله‌ای است.

ب) (S, d) دارای خاصیت بولزانو - وایراشتراس است.

برهان. (الف) ⇐ (ب). فرض کنیم A زیرمجموعهٔ نامتناهی S باشد. بنابراین دنباله‌ای از نقاط متمایز A مانند $\{x_n\}$ موجود است که یک زیردنبالهٔ همگرا مانند $\{x_{r_n}\}$ دارد. فرض کنیم $x_{r_n} \to x$ چون x_{r_n}ها متمایزند، به‌سادگی نتیجه می‌شود که x نقطهٔ حدی $\{x_{r_n}: n \in \mathbb{N}\}$. بنابراین نقطهٔ حدی $\{x_n: n \in \mathbb{N}\}$ است و در نتیجه نقطهٔ حدی A است. (البته چون هر فضای متریک شمارای اول و T_1 است از مسأله ۳ در مسائل ۳-۱ نیز می‌توان نتیجه گرفت که x نقطهٔ حدی است).

(ب) ⇐ (الف). فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در S باشد. اگر در $\{x_n: n \in \mathbb{N}\}$ نقطه‌ای باشد که به‌طور نامتناهی تکرار شده باشد، آن‌گاه دنبالهٔ متشکل از آن نقطه، دنباله‌ای ثابت است و بنابراین زیردنباله‌ای همگرا از $\{x_n\}$ می‌باشد. حال فرض کنیم $\{x_n: n \in \mathbb{N}\}$ نامتناهی باشد؛ بنابراین دارای یک نقطهٔ حدی مانند x است و به‌سادگی نتیجه می‌شود که زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ موجود است که به x همگرا است. ■

۴-۷-۳ ε- تور و فضای متریک کراندار کلی

فرض کنیم (S, d) فضای متریک و $\varepsilon > 0$ باشد. زیرمجموعهٔ متناهی A از S را یک εـ **تور** برای (S, d) می‌گوییم هرگاه به‌ازای هر x متعلق به S، یک y متعلق به A موجود باشد که $d(x, y) < \varepsilon$.

فضای متریک (S, d) را **کراندار کلی** می‌گوییم هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، یک ε- تور برای (S, d) موجود باشد. کراندار کلی را پیش فشرده نیز می‌گویند.

۴-۷-۴ قضیه

هر فضای متریکِ به‌طور دنباله‌ای فشرده، کراندار کلی و کامل است.

برهان. فرض کنیم (S, d) به‌طور دنباله‌ای فشرده باشد. ثابت می‌کنیم (S, d) کراندار کلی است. با برهان خلف، فرض کنیم (S, d) کراندار کلی نباشد. بنابراین $\varepsilon > 0$ ی موجود است که (S, d) دارای هیچ ε- توری

نیست. فرض کنیم $x_1 \in S$. چون $\{x_1\}$ یک ε– تور نیست؛ پس $x_2 \in S$ی موجود است که $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ چون $\{x_1, x_2\}$ یک ε– تور نیست، پس $x_3 \in S$ی موجود است که $d(x_1, x_3) \geq \varepsilon$ و $d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$. به استقرا می‌توان دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ به‌دست آورد که به‌ازای هر i و j که $i \neq j$ داریم $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$. بنابراین هیچ زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ همگرا نیست، زیرا هر دنبالهٔ همگرا باید کوشی باشد و این امکان‌پذیر نیست. در نتیجه، فرض خلف باطل است و (S, d) کراندار کلی است. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی باشد، چون زیردنباله‌ای همگرا دارد، پس همگراست و لذا (S, d) کامل است. ■

۴–۷–۵ قضیه

هر فضای متریک به‌طور دنباله‌ای فشرده، تفکیک‌پذیر است و بنابراین لیندولف و شمارای دوم است.

برهان. فرض کنیم (S, d) به‌طور دنباله‌ای فشرده باشد، در نتیجه کراندار کلی است. به‌ازای هر عدد طبیعی n، فرض کنیم D_n یک $\frac{1}{n}$– تور برای (S, d) باشد. در این صورت قرار می‌دهیم $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ آن‌گاه D شمارا و در $(S, \mathcal{T}_d)$ چگال است. بنابراین (S, d) تفکیک‌پذیر است. ■

۴–۷–۶ نتیجه

هر فضای متریک به‌طور شمارا فشرده، فشرده و به‌طور دنباله‌ای فشرده است.

برهان. فرض کنیم (S, d) یک فضای متریک به‌طور شمارا فشرده باشد. چون هر فضای متریک، شمارای اول است، قضیهٔ ۴–۶–۲ نشان می‌دهد که (S, d) به‌طور دنباله‌ای فشرده است و بنا به قضیهٔ ۴–۷–۵، (S, d) لیندولف و به‌طور شمارا فشرده و لذا فشرده می‌باشد. ■

۴–۷–۷ قضیه

هر فضای متریک به‌طور دنباله‌ای فشرده، به‌طور شمارا فشرده و فشرده است.

برهان. فرض کنیم (S, d) به‌طور دنباله‌ای فشرده باشد. بنا به ۴–۷–۲، (S, d) دارای خاصیت بولزانو – وایراشتراس است و چون (S, d) فضای T_1 است، در نتیجه بنا به ۴–۶–۷ به‌طور شمارا فشرده است و بنا به ۴–۷–۶ فشرده می‌باشد. ■

۴–۷–۸ قضیه

شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای (S, d) فشرده باشد آن است که کامل و کراندار کلی باشد.

برهان. اگر (S, d) فشرده باشد، آن‌گاه فشردهٔ شمارا و بنا به ۴–۷–۶ به‌طور دنباله‌ای فشرده و بنا به ۴–۷–۴ کراندار کلی و کامل است.

بالعکس، فرض کنیم (S, d) به‌طورکلی کراندار و کامل باشد. کافی است ثابت کنیم که (S, d) به‌طور

دنباله‌ای فشرده است. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در S باشد. می‌توان فرض کرد که هیچ دوعضوی در $\{x_n: n \in \mathbb{N}\}$ به‌طور نامتناهی تکرار نشود. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد و $\{y_1, y_2, ..., y_{n_\varepsilon}\}$ یک $\varepsilon/2$- تور برای S باشد. بنابراین $\mathscr{B}_\varepsilon = \{S_{\varepsilon/2}(y_1) , ... , S_{\varepsilon/2}(y_{n_\varepsilon})\}$ پوششی متناهی برای S است و لااقل یکی از اعضای آن مانند B_ε تعداد نامتناهی از اعضای $\{x_n\}$ را دربردارد. فرض کنیم x_{n_1} اولین عضوی از $\{x_n\}$ است که $x_{n_1} \in B_1$ و برای هر $j \in \mathbb{N}$، x_{n_j} اولین عضوی از $\{x_n: n > n_{j-1}\}$ باشد که $x_{n_j} \in B_j$. در این صورت $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ زیردنباله‌ای کوشی از $\{x_n\}$ است. (چرا؟) بنابراین $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ همگراست زیرا (S,d) کامل است. ■

۴-۷-۹ قضیه

در هر فضای متریک (S, d) شرایط زیر معادلند:

الف) (S, d) فشرده است.

ب) (S, d) فشردهٔ دنباله‌ای است.

ج) (S, d) فشرده شماراست.

د) (S, d) دارای خاصیت بولزانو - وایراشتراس است.

هـ) (S, d) کامل و کراندار کلی است.

برهان. با استفاده از قضایای فوق اثبات ساده است و به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیهٔ زیر که به لم پوششی لبگ معروف است کاربرد زیادی دارد. با استفاده از این قضیه بعضی از قضایای این بخش به‌سادگی اثبات می‌شوند. در این‌جا لم پوششی لبگ را برای تکمیل بحث خواص پوششی در فضای متریک بیان و اثبات آن به‌عنوان تمرین به علاقه‌مندان واگذار می‌شود (ر.ک [۲] صفحه ۱۲۳).

۴-۷-۱۰ عدد لبگ

عدد $\ell > 0$ را عدد لبگ پوشش باز مفروض $\{G_\alpha: \alpha \in I\}$ برای فضای متریک (S,d) می‌گوییم، هرگاه هر زیرمجموعهٔ S که قطرش از ℓ کمتر باشد در یکی از G_αها قرار داشته باشد.

۴-۷-۱۱ تمرین

در هر فضای متریک که یکی از شرایط معادل قضیهٔ ۴-۷-۹ را داشته باشد، هر پوشش باز دارای عدد لبگ است.

۴-۷-۱۲ فضای متریک صفربعدی

فضای متریک (S,d) صفر بعدی یا از بعد صفر خوانده می‌شود، هرگاه برای هر x متعلق به S و هر $r>0$، یک مجموعهٔ بستاز U شامل x و مشمول در $S_r(x)$ وجود داشته باشد.

۴-۷-۱۳ بعد پوششی صفر

یک فضای متریک (S,d) بعد پوششی صفر دارد، هرگاه برای هر پوشش باز $\mathscr{U}$ از S، یک پوشش باز $\mathscr{V}$ از مجموعه‌های دو به دو جدا از هم وجود داشته باشد که تظریف $\mathscr{U}$ باشد.

به‌وضوح هر فضای با بعد پوششی صفر، از بعد صفر است ولی عکس این مطلب درست نیست (ر.ک. [۹]).

۴-۷-۱۴ مثال

مجموعهٔ اعداد گویا $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد اصم، با متریک اقلیدسی، از بعد صفر هستند. در حقیقت، قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که این دو مجموعه دارای بعد پوششی صفر هستند.

۴-۷-۱۵ لم

هر فضای متریک تفکیک‌پذیر صفر بعدی (S,d)، پایه‌ای شمارا متشکل از مجموعه‌های بستاز دارد.

برهان. برای هر x متعلق به S و $\varepsilon>0$ یک مجموعهٔ بستاز $A(x,\varepsilon)$ وجود دارد که شامل x است و $A(x,\varepsilon)\subseteq S_\varepsilon(x)$. در این صورت $\mathscr{A}=\{A(x,\varepsilon)\ |x\in S,\varepsilon>0\}$، پایه‌ای متشکل از مجموعه‌های بستاز برای S است. اما S پایه‌ای شمارا دارد، پس $\mathscr{A}$ شامل یک زیرمجموعهٔ شماراست که پایه‌ای برای S است. ■

۴-۷-۱۶ قضیه

فرض کنید (S,d) یک فضای متریک تفکیک‌پذیر باشد، در این صورت (S,d) صفر بعدی است، اگر و فقط اگر بعد پوششی صفر داشته باشد.

برهان. فرض کنیم (S,d) صفر بعدی باشد. بنا به لم قبل، S پایه‌ای شمارا مانند $\mathscr{B}$ متشکل از مجموعه‌های بستاز دارد. فرض کنیم $\mathscr{U}$ یک پوشش باز برای S باشد و $\mathscr{W}=\{B\in\mathscr{B}:\exists U\in\mathscr{U};B\subseteq U\}$. چون $\mathscr{W}$ شماراست، می‌توانیم بنویسیم $\mathscr{W}=\{B_n\ ,\ n=0,1,\ldots\}$. به‌علاوه $\mathscr{W}$ یک تظریف باز از $\mathscr{U}$ است اما ممکن‌است اعضای آن دو به دو جدا از هم نباشند. حال دنباله‌ای از مجموعه‌های باز را به طریق استقرایی تعریف می‌کنیم: قرار می‌دهیم $V_0=B_0$ و برای هر $n\geq 1$، $V_n=B_n\setminus\bigcup_{i<n}B_i$. به‌وضوح $\mathscr{V}=\{V_n:n=0,1,\ldots\}$ یک تظریف باز از مجموعه‌های دو به دو جدا از هم $\mathscr{U}$ است. ■

۴-۷ مسائل

۱. ثابت کنید که هر فضای متریک کراندار کلی، کراندار است.

۲. فرض کنید A یک زیرفضای فضای متریک (S,d) باشد. ثابت کنید A کراندار کلی است اگر و فقط اگر $\bar{A}$ کراندار کلی باشد.

۳. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای آن که یک زیرفضای $\mathbb{R}^n$ کراندار کلی باشد آن است که کراندار باشد.

۴. مثالی از یک فضای متریک ارائه دهید که کراندار باشد ولی کراندار کلی نباشد.

۵. با استفاده از لم پوششی لبگ، ثابت کنید که اگر (S_1, d_1) فشرده و (S_2, d_2) فضای متریک دلخواه و $f: (S_1, d_1) \to (S_2, d_2)$ تابعی پیوسته باشد، آن‌گاه f پیوستهٔ یکنواخت است.

۶. فرض کنید (S, d) فضای متریک کامل و A زیرفضای آن باشد. ثابت کنید $\overline{A}$ فشرده است اگر و فقط اگر A کراندار کلی باشد.

۷. (قضیه اسکولی) فرض کنید (S, d) فضای متریک فشرده باشد و $C(S)$ فضای متریک متشکل از تمام توابع پیوسته از S به اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد. زیرمجموعهٔ A از $C(S)$ را هم‌پیوسته می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که به‌ازای هر f متعلق به A و برای هر x, y متعلق به S که $d(x, y) < \delta$، داشته باشیم $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن‌که یک زیرفضای بسته از $C(S)$ فشرده باشد آن است که کراندار و هم‌پیوسته باشد.

۸. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای هاسدورف به‌طور شمارا فشردهٔ $(S, \mathcal{T})$ متریک‌پذیر باشد آن است که شمارای دوم باشد. (راهنمایی: مسائل ۲ و ۸ بخش ۴–۵ و تمرین ۴–۱–۲۹ را ببینید).

۹. فرض کنید (S, d) فضای متریک، $A \subseteq S$ بسته و $B \subseteq S$ فشرده باشند و $B \cap A = \phi$. ثابت کنید $d(A, B) = inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0$.

۴–۸ تور

تور تعمیمی از مفهوم دنباله است که عموماً در فضاهای توپولوژیکی که شمارای اول نیستند به کار می‌رود. کاربرد اصلی آن در توپولوژی، بررسی فشردگی فضاهای توپولوژیک، بسته‌بودن یک مجموعه و پیوستگی توابع است.

۴–۸–۱ ترتیب جزئی

رابطه $\leq$ روی مجموعهٔ D ترتیب جزئی خوانده می‌شود، هرگاه

الف) برای هر x متعلق به D، $x \leq x$.

ب) برای هر y, x متعلق به D اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ آن‌گاه $x = y$.

ج) برای هر z, y, x متعلق به D اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آن‌گاه $x \leq z$.

۴–۸–۲ مجموعهٔ جهت‌دار

یک مجموعهٔ مرتب جزئی $(D, \leq)$ با این خاصیت که برای هر y, x متعلق به D، zی موجود است که $x \leq z$ و $y \leq z$، جهت‌دار خوانده می‌شود.

۴-۸-۳ مجموعهٔ کاملاً نامرتب

فرض کنیم $(D, \leq)$ یک مجموعهٔ مرتب جزئی باشد. اگر y, x متعلق به D باشند و $x \nleq y$ و $y \nleq x$، آن‌گاه y, x را مقایسه‌ناپذیر می‌گویند.

اگر $A \subseteq D$، A را کاملاً نامرتب می‌گویند، هرگاه برای هر y, x متعلق به A، $x=y$ یا $x \leq y$.

۴-۸-۴ مجموعهٔ مرتب خطی

زیرمجموعهٔ B از مجموعهٔ مرتب $(D, \leq)$، مرتب خطی (مرتب کلی یا یک زنجیر) خوانده می‌شود، درصورتی که برای هر y, x متعلق به B، $x \leq y$ یا $y \leq x$.

۴-۸-۵ تعریف

فرض کنیم C یک زیرمجموعه از مجموعهٔ مرتب جزئی $(D, \leq)$ باشد و a متعلق به D باشد. در این صورت

(الف) a را یک کران بالا برای C می‌گویند، هرگاه برای هر x متعلق به C، $x \leq a$.

(ب) a را عضو ماکزیمم C می‌گویند، هرگاه a یک کران بالای C باشد و $a \in C$.

(ج) a را عضو بیشین C می‌گویند، هرگاه برای هر x متعلق به C اگر $a \leq x$ آن‌گاه $x=a$.

کران پایین، عنصر مینیم و عنصر کمین به‌طور مشابه تعریف می‌شوند.

۴-۸-۶ مشبکه و مشبکهٔ کامل

مجموعهٔ مرتب جزئی $(D, \leq)$ یک مشبکه خوانده می‌شود، درصورتی که هر زوج از اعضای D دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین باشند.

یک مشبکه را کامل می‌گویند، هرگاه هر زیرمجموعهٔ ناتهی کراندار آن دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین باشد.

۴-۸-۷ تور

یک تابع $x: D \to X$ را که در آن $(D, \leq)$ یک مجموعهٔ جهت‌دار است، یک تور خوانده می‌شود. مقدار $x(\alpha)$ معمولاً با x_α و x با $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ یا $(x_\alpha; \alpha \in D)$ نمایش داده می‌شوند.

۴-۸-۸ مثال

۱. $\mathbb{N}$ همراه با رابطهٔ $\leq$ معمولی یک مجموعهٔ جهت‌دار است و لذا هر دنباله، یک تور است.

۲. هر تابع حقیقی مانند $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ یک تور است.

۳. فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضایی توپولوژیک باشد و $x \in S$ در این صورت دستگاه همسایگی $(\mathcal{N}_x, \supseteq)$ یک

مجموعهٔ جهت‌دار است.

اگر برای هر $N \in \mathcal{N}_x$، x_N نقطهٔ دلخواهی از N باشد، آن‌گاه $(x_N)_{N\in\mathcal{N}_x}$ یک تور است.

۴-۸-۹ همگرایی یک تور

یک تور در فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ همگرا به نقطه‌ای از S مثلاً ℓ خوانده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر مجموعهٔ باز G شامل ℓ، یک α_G وجود داشته باشد که برای هر $\alpha \geq \alpha_G$، x_α متعلق به G باشد و در این صورت می‌نویسیم $x_\alpha \to \ell$ یا $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = \ell$.

۴-۸-۱۰ مثال

۱. اگر $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ همگرا به a در فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ باشد، چنانچه آن را به‌عنوان یک تور درنظر بگیریم، داریم $\lim\limits_{n} a_n = a$.

۲. تور $\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)_{x\in\mathbb{R}}$، دارای حد صفر است.

۳. تور $(x_N)_{N\in\mathcal{N}_x}$ که در مثال ۴-۸-۸ تعریف شد، مستقل از انتخاب x_Nها، به x همگراست.

قضیهٔ زیر، اثبات‌کنندهٔ این ادعاست که تورها ساختار یک فضای توپولوژیک را به‌طور کامل توصیف می‌کنند.

۴-۸-۱۱ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد، $A \subseteq S$ و $P \in S$. در این صورت $P \in \bar{A}$، اگر و فقط اگر یک تور همگرا به P وجود داشته باشد.

برهان. اگر $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ یک تور در A و همگرا به P باشد، بنا به تعریف همگرایی، $P \in \bar{A}$.

بالعکس، اگر $P \in \bar{A}$ آن‌گاه هر همسایگی N از P مجموعهٔ A را در نقطه‌ای مانند a_N قطع می‌کند. در این صورت $(a_N)_{N\in\mathcal{N}_x}$ یک تور همگرا به P متشکل از نقاط A خواهد بود. ■

۴-۸-۱۲ نتیجه

زیرمجموعهٔ A از فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ بسته است، اگر و فقط اگر حد هر تور همگرا از نقاط A متعلق به خود A باشد.

۴-۸-۱۳ تمرین

تابع $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ روی S_1 پیوسته است، اگر و فقط اگر f همگرایی تورها را حفظ کند یعنی اگر $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = x$، آن‌گاه $\lim\limits_{\alpha} f(x_\alpha) = f(x)$.

۴-۸-۱۴ زیر تور

فرض کنیم $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ یک تور باشد و $\alpha_\circ$ متعلق به D، در این صورت $\alpha_\circ$- مین دم این تور عبارت است از $x(\alpha_\circ \rightarrow) = \{x_\alpha : \alpha \geq \alpha_\circ\}$.

تور $(y_\beta)_{\beta\in E}$ را یک زیرتور از $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ می‌نامند، مشروط به این‌که هر دم از $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ شامل یک دم از $(y_\beta)_{\beta\in E}$ باشد؛ یعنی برای هر $\alpha_\circ$ متعلق به D، $\beta_\circ$ی متعلق به E موجود باشد که $x(\alpha_\circ \rightarrow) \supseteq y(\beta_\circ \rightarrow)$.

۴-۸-۱۵ مثال

زیردنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ از دنباله $\{x_n\}$ را می‌توان به‌عنوان یک زیر تور $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ از تور $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تصور کرد.

۴-۸-۱۶ قضیه

تور $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ همگرا به ℓ است، اگر و فقط اگر هر زیرتور آن همگرا به ℓ باشد.

برهان. فرض کنیم $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ همگرا به ℓ و $(y_\beta)_{\beta\in E}$ یک زیرتور از آن باشد. برای هر همسایگی G از ℓ، $\alpha_\circ$ی هست که برای هر $\alpha \geq \alpha_\circ$، x_α متعلق به G است. بنا به تعریف زیر تور، $\beta_\circ$ی وجود دارد که برای هر $\beta \geq \beta_\circ$، $x(\alpha_\circ \rightarrow) \supseteq y(\beta_\circ \rightarrow)$. پس به‌ازای هر $\beta \geq \beta_\circ$، $y_\beta \in G$. لذا $\lim\limits_{\beta} y_\beta = \ell$.

بالعکس، اگر هر زیر تور $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ همگرا باشد، چون $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ یک زیر تور از خودش است پس همگرا است. ∎

۴-۸-۱۷ قضیه

$(S, \mathcal{T})$ یک فضای هاسدورف است، اگرو فقط اگر هیچ توری در S بیشتر از یک حد نداشته باشد.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ هاسدورف باشد و $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ دارای دو حد متمایز y,x باشد. پس مجموعه‌های باز G_1 و G_2 وجود دارند که x متعلق به G_1 و y متعلق به G_2 است و $G_1 \cap G_2 = \phi$. بنا به تعریف حد، α_1ی هست که برای هر $\alpha \geq \alpha_1$، $x_\alpha \in G_1$ و α_2ی هست که برای هر $\alpha \geq \alpha_2$، x_α متعلق به G_2 است. بنا به جهت داربودن D، یک $\alpha_\circ$ هست که $\alpha_\circ \geq \alpha_1$ و $\alpha_\circ \geq \alpha_2$ در این صورت $x_{\alpha_\circ} \in G_1 \cap G_2$ که ممکن نیست.

حال فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ یک فضای هاسدورف نباشد. پس دو نقطهٔ y,x متمایز وجود دارد، به طوری که هر همسایگی x، هر همسایگی y را قطع می‌کند. $\mathcal{N}_z$ را مجموعهٔ تمام همسایگی‌های z تصور می‌کنیم که با رابطهٔ شمول $\supseteq$ جهت دار شده است.

$\mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$ تحت رابطهٔ زیر جهت دار است.

$$(U_x, U_y) \geq (V_x, V_y) \Leftrightarrow U_x \subseteq V_x \ \&\ U_y \subseteq V_y$$

برای هر (U_x, U_y) متعلق به $\mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$ چون $U_x \cap U_y \neq \phi$ می‌توانیم یک نقطهٔ $z_{(U_x,U_y)}$ متعلق به $U_x \cap U_y$ انتخاب کنیم. در این صورت تور $(z_{(U_x,U_y)})\ (U_x, U_y) \in (\mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y)$ هم به x و هم به y همگراست. زیرا

اگر W_x یک همسایگی x و W_y یک همسایگی y باشد، آنگاه برای هر $(U_x, U_y) \geq (W_x, W_y)$، چون $z_{(U_x, U_y)} \in U_x \cap U_y$ و $U_x \cap U_y \subseteq W_x \cap W_y$، پس $z_{(U_x, U_y)} \in W_x \cap W_y$. پس تور $(z_{(U_x, U_y)})$ حد منحصر به فرد ندارد. ■

۴-۸-۱۸ قضیه

فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ فشرده است، اگر و فقط اگر هر تور در S، لااقل یک زیر تور همگرا داشته باشد.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ فشرده باشد و $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ یک تور در S باشد. فرض کنیم F_α بستار $\{x_i : i \geq \alpha\}$ باشد. چون خانوادهٔ $\{F_\alpha\}_{\alpha \in D}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است و S فشرده است، پس نقطهٔ $x_\circ \in S$ موجود است که $x_\circ \in \bigcap_{\alpha \in D} F_\alpha$. $D \times \mathscr{N}_{x_\circ}$ تحت رابطهٔ ذیل یک مجموعهٔ جهت‌دار است:

$$(\alpha_1, N_1) \leq (\alpha_2, N_2) \Leftrightarrow \alpha_1 \leq \alpha_2 \;\&\; N_1 \subseteq N_2 \text{ یا } \alpha_2 \leq \alpha_1 \;\&\; N_2 \subseteq N_1$$

برای هر N متعلق به $\mathscr{N}_{x_\circ}$ و هر α متعلق به D، چون $x_\circ$ متعلق به F_α است، یک x_j وجود دارد که $j \geq \alpha$ و $x_j \in N$. این x_j را با نماد $y_{(\alpha,N)}$ نمایش می‌دهیم. به این ترتیب تور $(y_{(\alpha,N)})_{(\alpha,N) \in D \times \mathscr{N}_{x_\circ}}$ حاصل می‌شود. برای هر $\alpha_\circ$ متعلق به D با انتخاب یک $N_\circ$ دلخواه نتیجه می‌شود که $x(\alpha_\circ \rightarrow) \supseteq y((\alpha_\circ, N_\circ) \rightarrow)$. پس $(y_{(\alpha,N)})$ زیر تور (x_α) است. همچنین برای هر همسایگی $N_\circ$ از $x_\circ$ با انتخاب یک $i_\circ$ دلخواه نتیجه می‌شود که برای هر $(i, N) \geq (i_\circ, N_\circ)$، $y_{(i,N)}$ متعلق به N است بنابراین $\lim\limits_{(\alpha,N)} y_{(\alpha,N)} = x_\circ$.

بالعکس، فرض کنیم هر تور در S، یک زیر تور همگرا داشته باشد و $\{K_i\}_{i \in I}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های بستهٔ S با خاصیت اشتراک متناهی باشد. فرض کنیم $\mathscr{F}$ خانواده تمام زیرمجموعه‌های متناهی از I همراه با رابطهٔ جزئیت باشد. برای هر $F \in \mathscr{F}$، فرض کنیم $x_F \in \bigcap_{j \in F} K_j$. در این صورت $(x_F)_{F \in \mathscr{F}}$ یک تور است. اگر $(y_\alpha)_{\alpha \in D}$ یک زیرتور $(x_F)_{F \in \mathscr{F}}$ و همگرا به $x_\circ$ باشد، آنگاه برای هر همسایگی N از $x_\circ$ و برای هر $i \in I$، یک $\alpha_\circ$ هست که $\{x_F : F \supseteq \{i\}\} \supseteq \{y_\alpha : \alpha \geq \alpha_\circ\}$ و ضمناً برای هر $\alpha \geq \alpha_\circ$، $y_\alpha \in N$. پس یک F وجود دارد که $y_{\alpha_\circ}$ متعلق به $\bigcap_{j \in F} (K_j \cap N)$. از طرفی $\bigcap_{j \in F} (K_j \cap N) \subseteq K_i \cap N$. پس $x_\circ$ متعلق به K_i است و چون $K_i = \overline{K_i}$ پس $x_\circ$ متعلق به $\overline{K_i}$ است. لذا $\bigcap_{i \in I} K_i$ ناتهی است. پس S دارای خاصیت اشتراک متناهی است و لذا فشرده است. ■

۴-۸-۱۹ مثال

$(n)_{n \in \mathbb{N}}$ یک تور در $\mathbb{R}$ است که زیر تور همگرا ندارد و بنابراین $\mathbb{R}$ فشرده نیست.

۴-۸-۲۰ کاربرد

هر زیرمجموعهٔ بستهٔ F از یک فضای توپولوژیک فشردهٔ $(S, \mathscr{T})$، فشرده است.

برهان. فرض کنیم (x_α) یک تور در F باشد بنا به فشردگی S، (x_α) یک زیر تور همگرا در S مانند (y_β) با حد

xدارد. چون F بسته است، x متعلق به F است. بنابراین یک زیرتور همگرا از (x_α) در Fوجود دارد. ■

۴-۸-۲۱ کاربرد

اگر $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ پیوسته و $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فشرده باشد، آن‌گاه $f(S_1)$ نیز فشرده است.

برهان. فرض کنیم (y_α) توری در $f(S_1)$ باشد. برای هر α متعلق به D، x_αی متعلق به S_1 وجود دارد که $f(x_\alpha) = y_\alpha$. بنا به فشردگی S_1، تور (x_α) دارای زیر تور (z_β) است که مثلاً به l همگراست. بنا بر پیوستگی f، $\lim_\beta f(z_\beta) = f(l)$. پس $(f(z_\beta))$ یک زیرتور همگرا از (y_α) است. ■

۴-۸ مسائل

۱. در هر مجموعهٔ مرتب جزئی $(A, \leq)$، هر زیرمجموعه به شکل $\{x \in A : x \leq a\}$ که در آن a عنصر ثابتی از A است، جهت‌دار است.

۲. نشان دهید اگر $(S, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $x_\circ \in S$، آن‌گاه مجموعهٔ همهٔ همسایگی‌های $x_\circ$ تحت رابطهٔ $U \leq V \Leftrightarrow U \supseteq V$، یک مجموعهٔ جهت‌دار شده است.

۴-۹ فضاهای تابعی

۴-۹-۱ فضای تابعی

فرض کنیم Y, X دو مجموعهٔ دلخواه و $\mathcal{F}(X, Y)$ گردایهٔ تمام توابع از X به Y باشد. هر زیر مجموعهٔ $\mathcal{F}(X, Y)$ همراه یک توپولوژی، فضای تابعی خوانده می‌شود. درواقع $\mathcal{F}(X, Y) = \prod_{x \in X} Y_x$ که در آن برای هر x، $Y_x = Y$.

(الف) اگر X یک مجموعهٔ دلخواه و $(Y, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد، آن‌گاه $\mathcal{F}(X, Y) = \prod_{x \in X} Y_x$ همراه با توپولوژی حاصل‌ضربی تیخونوف، **توپولوژی نقطه ـ باز** خوانده می‌شود. پس توپولوژی نقطه - باز ضعیف‌ترین توپولوژی روی $\mathcal{F}(X, Y)$ است که تحت آن هر یک از افکنشهای $\pi_x : (X, Y) \to Y$, $f \to f(x)$ پیوسته‌اند (در این فصل تابع اخیر را تابع ارزیابی نامیده و با e_x نمایش می‌دهیم). بنابراین گردایهٔ زیرمجموعه‌های $\mathcal{F}(X, Y)$ به شکل $B_{x_\circ, G} = \{f: X \to Y : f(x_\circ) \in G\}$ را که در آن G باز است و $x_\circ \in X$، یک زیرپایه برای توپولوژی نقطه - باز است. یک نتیجهٔ مطلب اخیر این‌است‌که؛ دنبالهٔ توابع $\{f_n\}$ در $\mathcal{F}(X, Y)$ همراه با توپولوژی نقطه - باز به تابع f همگراست، اگر و فقط اگر نقطه‌وار همگرا باشد. یعنی برای هر x متعلق به X، $\lim_n f_n(x) = f(x)$. به این دلیل توپولوژی نقطه - باز را **توپولوژی همگرایی نقطه‌ای** نیز می‌گویند.

۴-۹-۲ مثال

فرض کنید $X = [\circ, \text{۱}]$، $(Y, Z) = (\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ و برای هر n، $f_n(x) = x^n$. در این صورت $\{f_n\}$ نقطه‌وار به تابع

$$f(x) = \begin{cases} \circ & \circ \leq x < \text{۱} \\ \text{۱} & x = \text{۱} \end{cases}$$

همگراست. پس $\{f_n\}$ در $\mathscr{F}([\circ, \text{۱}], \mathbb{R})$ با توپولوژی نقطه - باز به f همگراست.

۴-۹-۳ تمرین

ثابت کنید اگر $(Y, \mathscr{T})$ فضای هاسدورف فشرده‌ای باشد، $\mathscr{F}(X, Y)$ با توپولوژی نقطه - باز نیز چنین است (راهنمایی: $\mathscr{F}(X, Y)$ یک نوع فضای حاصل‌ضربی است.)

(ب) فرض کنیم X و Y فضای توپولوژیک باشند. دراین صورت زیرمجموعه‌های $\mathscr{F}(X, Y)$ به‌صورت $B_{K,G} = \{f: X \to Y : f(K) \subseteq G\}$ که در آن K فشرده و G باز است، زیرپایه یک توپولوژی روی $\mathscr{F}(X, Y)$ است که به آن **توپولوژی فشرده ـ باز** می‌گویند.

چون مجموعه‌های تک عضوی فشرده‌اند و $B_{x_\circ, G} = B_{\{x_\circ\}, G}$ پس توپولوژی نقطه - باز ضعیف‌تر از توپولوژی فشرده - باز است و لذا توابع ارزیابی $e_x: \mathscr{F}(X, Y) \to Y$ که در آن $e_x(f) = f(x)$، در توپولوژی فشرده - باز پیوسته‌اند. می‌توان گفت که دنبالهٔ $\{f_n\}$ در توپولوژی فشرده - باز روی $\mathscr{F}(X, Y)$ به تابع f همگراست، اگر و فقط اگر برای هر زیرمجموعهٔ فشرده K از X و برای هر $\varepsilon > \circ$، یک عدد طبیعی N موجود باشدکه برای هر x متعلق به K و برای هر $n \geq N$ داشته باشیم $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. یعنی به‌ازای هر مجموعهٔ فشرده K، $\{f_n|_K\}$ روی k به $f|_K$ به‌طور یکنواخت همگرا باشد. به این دلیل توپولوژی فشرده - باز را **توپولوژی همگرایی فشرده** نیز می‌گویند.

۴-۹-۴ مثال

فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و $(Y, \mathscr{T}) = (\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$. دنباله توابع

$$f_n(x) = \begin{cases} \text{۱} - \frac{\text{۱}}{n} |x| & |x| < n \\ \circ & |x| \geq n \end{cases}$$

به‌طور نقطه‌ای (ولی نه به‌طور یکنواخت) به تابع ثابت $f(x) = \text{۱}$ همگراست. بااین‌حال هر زیر مجموعهٔ فشرده K از $\mathbb{R}$ کراندار است. پس $\{f_n\}$ روی هر مجموعهٔ فشرده، به‌طور یکنواخت به f همگراست. بنابراین $\{f_n\}$ در توپولوژی فشرده - باز روی $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ به f همگراست.

۴-۹-۵ توپولوژی همگرایی یکنواخت

فرض کنیم $X \neq \phi$ یک مجموعه و (Y, d) یک فضای متریک باشد. فرض کنیم $\mathscr{B}(X, Y)$ خانوادهٔ تمام توابع کراندار از X به توی Y باشد. به‌ازای هر f و g متعلق به $\mathscr{B}(X, Y)$ فرض کنیم $\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \{d(f(x), g(x))\}$. در این صورت ρ یک متریک روی $\mathscr{B}(X, Y)$ است و توپولوژی تولید شده توسط ρ، یعنی $\mathscr{T}_\rho$، را **توپولوژی همگرایی یکنواخت** می‌گوییم.

۴-۹-۶ مثال

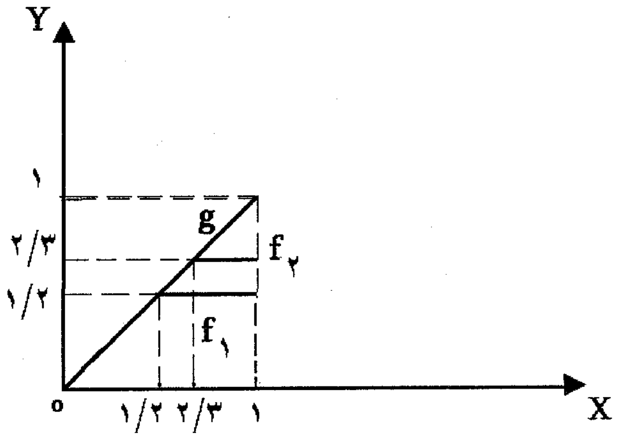
فرض کنیم $X = Y = [0, 1]$ و برای هر x, y در Y، $d(x, y) = |x-y|$. فرض کنیم $\mathscr{F}(X, Y)$ با توپولوژی همگرایی یکنواخت تولید شده توسط متریک $\rho(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} (|f(x) - g(x)|)$ مجّهز شده باشد.
دنبالهٔ توابع پیوسته (و کراندار) $f_n : X \to Y$ را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$f_n(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{n}{n+1} \\ \frac{n}{n+1} & \frac{n}{n+1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

تابع $g : X \to Y$ را برای هر $x \in X$ به‌صورت $g(x) = x$ تعریف می‌کنیم: چون

$$\rho(f_n, g) = \sup \{ |\frac{n}{n+1} - x| : \frac{n}{n+1} \leq x \leq 1 \} \leq 1 - \frac{n}{n+1}$$

بنابراین $\rho(f_n, g) \leq \frac{1}{n+1}$. پس $\{f_n\}$ به‌طور یکنواخت به تابع پیوسته (و کراندار) g همگراست.



۴-۹ مسائل

۱. فرض کنید $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{F}([0, 1], \mathbb{R})$، به طوری‌که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$f_n(x) = \begin{cases} ۴n^۲ & ۰ \leq x \leq \dfrac{۱}{۲n} \\ -۴n^۲x + ۴n & \dfrac{۱}{۲n} < x < \dfrac{۱}{n} \\ ۰ & \dfrac{۱}{n} \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

نشان دهید که دنبالهٔ $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در $\mathscr{F}([۰,۱], \mathbb{R})$ با توپولوژی همگرایی نقطه‌ای به سمت تابع $g=۰$ همگراست.

۵

خواص همبندی

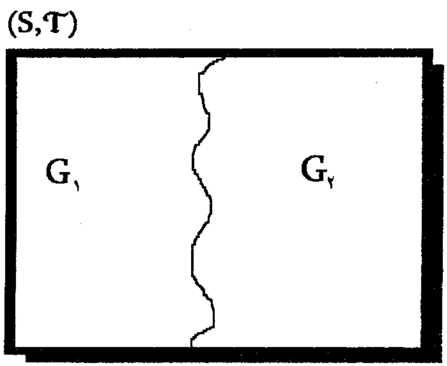
۵-۱ همبندی

برخلاف خاصیت جداسازی، در این فصل خاصیت یک تکه‌بودن را بررسی می‌کنیم. از نظر هندسی فضای همبند، فضای توپولوژیکی است که یک تکه باشد مثلاً خط حقیقی $\mathbb{R}$ همبند است و هر بازه در $\mathbb{R}$ یک زیرفضای همبند است.

فضاهای همبند در آنالیز مختلط و منحنی‌های پیوسته حائز اهمیت می‌باشند. فضاهای ناهمبند نیز جالب هستند. یکی از فضاهای ناهمبند، مجموعهٔ کانتور همراه با توپولوژی اقلیدسی می‌باشد، که ناهمبندی این فضا به قدری زیاد است که بافت دانه‌ای دارد. اعداد گویا نیز با توپولوژی نسبی اقلیدسی ناهمبند است. اکنون تعریف ریاضی همبندی را ارائه می‌دهیم.

۵-۱-۱ فضای همبند و ناهمبند

فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ را همبند می‌گوییم، هرگاه دو مجموعهٔ باز ناتهی مجزا مانند $G_۱$ و $G_۲$ موجود نباشد که $S = G_۱ \cup G_۲$. فضای $(S, \mathcal{T})$ را ناهمبند می‌گوییم هرگاه همبند نباشد.



واضح است که شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای $(S, \mathcal{T})$ همبند باشد آن است که تنها زیرمجموعه‌های

S که بستازند مجموعهٔ تهی و خود فضای S باشند. همچنین شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای $(S, \mathcal{T})$ همبند باشد آن است که اجتماع دو مجموعهٔ ناتهی مجزای بسته نباشد.

۵-۱-۲ زیرفضای همبند

زیر مجموعهٔ A از فضای $(S, \mathcal{T})$ را همبند می‌نامند، هرگاه فضای $(A, \mathcal{T}/A)$ همبند باشد. اگر $A \subseteq B \subseteq S$، آن‌گاه واضح است که A در $(B, \mathcal{T}/B)$ همبند است اگر و فقط اگر در $(S, \mathcal{T})$ همبند باشد. A را ناهمبند نامیم هرگاه همبند نباشد.

۵-۱-۳ مثال

اگر $\mathcal{T}$ توپولوژی ناگسسته باشد، آن‌گاه هر زیرفضای $(S, \mathcal{T})$ همبند است. مجموعهٔ S با بیش از یک عضو با توپولوژی گسسته $\mathcal{T}$ ناهمبند کلی است (یعنی تنها زیرفضاهای همبند آن مجموعه‌های تک عضوی می‌باشند). $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ همبند می‌باشد. اگر $\mathcal{T}_L$ توپولوژی حد پایین روی $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه خط سورجن‌فری $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ ناهمبند کلی است، زیرا اگر A یک زیرفضای $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ باشد و $a, b \in A$ و $a<r<b$، آن‌گاه $A = [A \cap (-\infty, r)] \cup [A \cap [r, +\infty)]$ یک ناهمبندی برای A است.

واضح است که همبندی موروثی نیست. زیرا (a, b) با توپولوژی اقلیدسی همبند است ولی زیر فضای $(a, \frac{a+b}{2}) \cup (\frac{a+b}{2}, b)$ از آن همبند نیست. مجموعهٔ کانتور با توپولوژی نسبی اقلیدسی ناهمبند کلی است. مجموعهٔ اعداد گویا با توپولوژی اقلیدسی، نیز ناهمبند کلی است.

فضای S با توپولوژی هم متناهی همبند است، به جز وقتی که S متناهی باشد. درواقع هر زیرمجموعهٔ نامتناهی S همبند است.

۵-۱-۴ تمرین

فرض کنید $(F, \mathcal{T}/F)$ زیرفضای همبند $(S, \mathcal{T})$ باشد و F زیرمجموعهٔ اجتماع دو مجموعهٔ باز مجزا باشد. در این صورت F زیرمجموعهٔ یکی از آن دو مجموعه است.

قضایای زیر در مورد خاصیت همبندی در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ در آنالیز مقدماتی مورد بحث قرار گرفته است و دراین‌جا برای تکمیل بحث همبندی بیان و اثبات می‌شوند.

۵-۱-۵ قضیه

شرط لازم و کافی برای آن‌که یک زیرفضای $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ همبند باشد آن است که آن زیرفضا یک بازه باشد.

برهان. فرض کنیم A یک زیرفضای همبند $\mathbb{R}$ باشد. ثابت می‌کنیم A یک بازه است. به برهان خلف فرض کنیم A بازه نباشد، این فرض، به معنی این‌است‌که aو bو cی متعلق به $\mathbb{R}$ موجودند که $a<c<b$ و b, a متعلق

به A است و c متعلق به A نیست. به‌سادگی دیده می‌شود که $A = [A \cap (-\infty,c)] \cup [A \cap (c,\infty)]$ و این متناقض با همبندی A است.

بالعکس، فرض کنیم A یک بازه باشد. ثابت می‌کنیم A همبند است. به برهان خلف فرض کنیم A ناهمبند باشد. اگر $A = G_۱ \cup G_۲$ یک ناهمبندی A باشد، چون $G_۱$ و $G_۲$ ناتهی و مجزا هستند، بنابراین عضوی در $G_۱$ مانند a و عضوی در $G_۲$ مانند b موجود است که $a \neq b$ با تعویض نمادهای $G_۱$ و $G_۲$ اگر لازم باشد، می‌توان فرض کرد که $a<b$. چون A بازه است در نتیجه $[a,b] \subseteq A$ و هر نقطه در $[a,b]$ یا در $G_۱$ است یا در $G_۲$ حال فرض کنیم $z = sup([a,b] \cap G_۱)$. واضح است که $a \leq z \leq b$ و بنابراین $a \in A$. چون $G_۱$ در A بسته است، پس z که یک نقطهٔ چسبیدگی $G_۱$ است (چرا؟) متعلق به $G_۱$ می‌باشد. بنابراین $z<b$. چون $G_۱$ در A باز است و A یک بازه است، بنابراین عدد مثبت r موجود است که $z + r \leq b$ و $(z-r,z+r) \subseteq G_۱$ که این متناقض با سوپرموم‌بودن z است. ■

۵-۱-۶ قضیه

فرض کنیم $(S_۱, \mathscr{T}_۱)$ همبند و $f: (S_۱, \mathscr{T}_۱) \to (S_۲, \mathscr{T}_۲)$ تابعی پیوسته و برو باشد. در این صورت $(S_۲, \mathscr{T}_۲)$ نیز همبند است.

برهان. به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۵-۱-۷ نتیجه

اگر $f: ([a,b], \mathscr{T}_e/[a,b]) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ پیوسته و $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$، آن‌گاه عضوی مانند c متعلق به $[a,b]$ موجود است که $f(c) = \gamma$.

۵-۱-۸ نتیجه

اگر $f: [۰,۱] \to [۰,۱]$، با درنظرگرفتن توپولوژی نسبی اقلیدسی روی $[۰,۱]$، پیوسته باشد، آن‌گاه $۰ \leq x \leq ۱$ موجود است که $f(x) = x$.

۵-۱-۹ نتیجه

اگر $f: [a,b] \to [a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه $a \leq x \leq b$ موجود است که $f(x) = x$ چنین x ی را یک نقطهٔ ثابت f می‌گوییم. اگر $I = [۰,۱]$، آن‌گاه نتیجهٔ ۵-۱-۸ برای I^n نیز برقرار است که به قضیهٔ نقطهٔ ثابت براور معروف است. اثبات قضیهٔ براور در این‌جا میسر نیست.

۵-۱-۱۰ قضیه

شرط لازم و کافی برای آنکه فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ ناهمبند باشد آن است که، تابع پیوسته و برویی مانند f از $(S, \mathcal{T})$ به فضای دو نقطه‌ای $\{0, 1\}$ با توپولوژی گسسته وجود داشته باشد.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ ناهمبند باشد و $S = G_1 \cup G_2$ یک ناهمبندی برای S باشد. تابع $f: S \to \{0, 1\}$ را به‌صورت:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in G_1 \\ 1 & x \in G_2 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم، چون $G_1 \cap G_2 = \phi$ واضح است که f تابع است. از طرفی f برو و پیوسته است (چرا؟).

بالعکس، فرض کنیم $f: S \to \{0, 1\}$ یک تابع برو و پیوسته باشد، ثابت می‌کنیم که S ناهمبند است زیرا اگر S همبند باشد، آنگاه $\{0, 1\}$ نیز همبند است. اما می‌دانیم که هر فضا با توپولوژی گسسته ناهمبند است پس S نمی‌تواند همبند باشد و لذا ناهمبند است. ■

۵-۱-۱۱ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک و $(C, \mathcal{T}/C)$ یک زیرفضای همبند S باشد. اگر $C \subseteq D \subseteq \bar{C}$، آنگاه D نیز همبند است. به‌ویژه نتیجه می‌شود که بستار یک مجموعهٔ همبند، همبند است.

برهان. فرض کنیم $f: (D, \mathcal{T}/D) \to \{0, 1\}$ تابعی پیوسته باشد. ثابت می‌کنیم f برو نیست و بنا بر قضیهٔ ۵-۱-۱۰ نتیجه می‌شود که D همبند است. چون C همبند است، پس $f|_C$ پیوسته و برو نیست. بنابراین $f(C) \neq \{0, 1\}$. از طرفی $D = \bar{C} \cap D$. اگر $\bar{C}^D$ بستار C در $(D, \mathcal{T}/D)$ باشد، آنگاه واضح است که $\bar{C}^D = \bar{C} \cap D = D$ و چون $f: (D, \mathcal{T}/D) \to \{0, 1\}$ پیوسته است پس $f(D) = f(\bar{C}^D) \subseteq \overline{f(C)}$ و چون هر زیرمجموعهٔ $\{0, 1\}$ با توپولوژی گسسته، بسته است بنابراین $\overline{f(C)} = f(C)$ و در نتیجه $f(D) \subseteq f(C)$. پس $f(D) \neq \{0, 1\}$ و بنابراین f برو نیست. ■

۵-۱-۱۲ قضیه

فرض کنیم $\{(C_\alpha, \mathcal{T}_\alpha): \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای همبند فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ باشد. اگر برای هر α و β متعلق به I داشته باشیم $C_\alpha \cap C_\beta \neq \phi$ و $C = \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$، آنگاه $(C, \mathcal{T}/C)$ همبند است.

برهان. فرض کنیم $f: (C, \mathcal{T}/C) \to \{0, 1\}$ تابعی پیوسته باشد. ثابت می‌کنیم که f برو نیست. برای این کار ثابت می‌کنیم $f(C)$ تک عضوی است. فرض کنیم x, y متعلق به C باشد. بنابراین α و β متعلق به I موجودند که $x \in C_\alpha$ و $y \in C_\beta$. چون به‌ازای هر α، $f|_{C_\alpha}$ پیوسته است و C_α همبند است بنابراین $f|_{C_\alpha}$ برو نیست؛ بنابراین تک عضوی است. فرض کنیم $y_0 \in C_\alpha \cap C_\beta$. بنابراین $\{f(y_0)\} = f(C_\alpha) = f(C_\beta)$ و در نتیجه $f(y_0) = f(x) = f(y)$. پس $f(C)$ تک عضوی است. ■

۵-۱-۱۳ قضیه

فرض کنیم $\{(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha) : \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد و $(S, \mathscr{T})$ حاصل‌ضرب تیخونوف $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ها باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای آن‌که $(S, \mathscr{T})$ همبند باشد آن است که به‌ازای هر α، $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ همبند باشد.

برهان. اگر $(S, \mathscr{T})$ همبند باشد، آن‌گاه چون افکنش π_α به‌ازای هر α از $(S, \mathscr{T})$ به $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ پیوسته و برو است بنابراین $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ همبند است.

بالعکس، نشان می‌دهیم که اگر برای هر $\alpha \in I$، $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ همبند باشد، آن‌گاه $(S, \mathscr{T})$ همبند است. فرض کنیم $f: (S, \mathscr{T}) \to \{0, 1\}$ پیوسته باشد. ثابت می‌کنیم که f برو نیست. a را نقطه‌ای ثابت در S فرض می‌کنیم و $\alpha_1 \in I$ را درنظر می‌گیریم. تابع $f_{\alpha_1}: S_{\alpha_1} \to S$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که به‌ازای هر x_{α_1} متعلق به S_{α_1} فرض می‌کنیم $f_{\alpha_1}(x_{\alpha_1}) = x$

$$x(\alpha) = \begin{cases} a(\alpha) & \alpha \neq \alpha_1 \\ x_{\alpha_1} & \alpha = \alpha_1 \end{cases}$$

واضح است که تابع f_{α_1} پیوسته است. چون $(S_{\alpha_1}, \mathscr{T}_{\alpha_1})$ همبند است، پس $f \circ f_{\alpha_1}$ تک عضوی است. بنابراین به‌ازای هر x_{α_1} متعلق به S_{α_1}، $(f \circ f_{\alpha_1})(x_{\alpha_1}) = f(a)$. در نتیجه به‌ازای هر x در S که در تمام نقاط α به جز α_1 برابر a باشد داریم $f(x) = f(a)$. حال به‌ازای هر x_{α_1} متعلق به S_{α_1} عضو b متعلق به S را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$b(\alpha) = \begin{cases} a(\alpha) & \alpha \neq \alpha_1 \\ x_{\alpha_1} & \alpha = \alpha_1 \end{cases}$$

به همان ترتیبی که تابع f_{α_1} را تعریف کردیم، می‌توان تابع f_{α_2} را از S_{α_1} به توی S تعریف کرد و نتیجه گرفت که به‌ازای هر x در S که در تمام نقاط α به جز α_2 برابر b باشد، $f(x) = f(b)$ و چون $f(b) = f(a)$ پس $f(x) = f(a)$. با تکرار این روش مشاهده می‌کنیم که به‌ازای هر x در S که به جز در تعداد متناهی نقاط α برابر a باشد، داریم $f(x) = f(a)$. فرض کنیم D مجموعهٔ تمام xهای متعلق به S باشد که به‌ازای هر α به جز تعداد متناهی نقاط $x(\alpha) = a(\alpha)$. در این صورت D در S چگال است (چرا؟). از این‌که $f\,|_D$ ثابت، f پیوسته، $\{0, 1\}$ با توپولوژی گسسته هاسدورف می‌باشد و D چگال است، نتیجه می‌شود که $f: S \to \{0, 1\}$ تابعی ثابت می‌باشد. ■

۵-۱-۱۴ نتیجه

فرض کنیم $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی اقلیدسی و $\mathbb{C}$ مجموعهٔ اعداد مختلط با توپولوژی حاصل از متریک $d(z_1, z_2) = \| z_1 - z_2 \|$ باشد. در این صورت به‌ازای هر عدد طبیعی n، $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ همبند می‌باشند.

برهان. چون $\mathbb{R}$ همبند است بنا به قضیهٔ ۵-۱-۱۳، $\mathbb{R}^n$ همبند است. حال ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر n متعلق به $\mathbb{N}$، $\mathbb{C}^n$ همسانریخت با $\mathbb{R}^{2n}$ است و بنابراین نتیجه می‌شود که $\mathbb{C}^n$ همبند است. تابع $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر $w = (z_1, z_2, ..., z_n)$ عضو دلخواهی در $\mathbb{C}^n$ باشد و به‌ازای هر $1 \leq k \leq n$، $z_k = a_k + ib_k$، آن‌گاه تعریف می‌کنیم $f(w) = (a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n)$. واضح است که f یک به یک و بروست. $\| w \| = | f(w) |$ و f خطی است. بنابراین f پیوسته و همسانریختی است (چرا؟). ■

۵-۱-۱۵ نتیجه

فرض کنیم $n > 1$ و $A \subseteq \mathbb{R}^n$ زیرمجموعه‌ای شمارا باشد، در این صورت $\mathbb{R}^n \setminus A$ همبند است.

برهان. می‌توان فرض کرد که $0 \notin A$ درغیراین‌صورت با انتقالی مناسب 0 را از A خارج می‌کنیم. با استفاده از قضیه ۵-۱-۱۲، کافی است ثابت کنیم که به‌ازای هر x متعلق به $\mathbb{R}^n \setminus A$، مجموعهٔ همبندی در $\mathbb{R}^n \setminus A$ مانند B_x موجود است که 0 و x را دربردارد. در این صورت $\mathbb{R}^n \setminus A = \cup B_x$ و $0 \in \cap B_x$. اثبات وجود B_x به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود. توجه داریم که اگر $a \in \mathbb{R}$، آن‌گاه $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ همبند نیست. بنابراین نتیجه برای $n = 1$ برقرار نیست. ■

۵-۱-۱۶ تمرین

هر فضای نرمدار همبند است. (راهنمایی: فرض کنیم $(S, \| . \|)$ فضای نرمدار باشد. به‌ازای هر x متعلق به S فرض کنیم $L_x = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{F}\}$ که در آن $\mathbb{F}$ برابر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است. نشان دهید که L_x همبند است، $0 \in L_x$ و $S = \bigcup\limits_{x \in S} L_x$. از قضیهٔ ۵-۱-۱۲ استفاده کنید).

۵-۱ مسائل

۱. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آن‌که $(S, \mathcal{T})$ ناهمبند باشد آن است که S اجتماع دو مجموعهٔ منفک ناتهی باشد.

۲. نشان دهیدکه اگر روی فضای همبند $(S, \mathcal{T})$ تابع حقیقی غیرثابت پیوسته‌ای تعریف شده باشد، آن‌گاه S ناشمارا است.

۳. فرض کنید (S, d) یک فضای متریک همبند باشد که بیش از یک عضو داشته باشد. ثابت کنید S ناشماراست. (راهنمایی: تابع $f(x) = d(x, y)$ را که در آن $y \in S$ ثابت است درنظر بگیرید.)

۴. فرض کنید $(S_1, \mathcal{T}_1)$ همبند و $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ پیوسته باشد. در این صورت نشان دهید نمودار f در توپولوژی حاصل‌ضرب تیخونوف $(S_1, \mathcal{T}_1)$ $(S_2, \mathcal{T}_2)$ همبند است.

۵. نشان دهید که نمودار تابع حقیقی پیوسته تعریف شده روی یک بازه، یک زیرفضای همبند $\mathbb{R}^2$ است.

۶. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ همبند باشد آن است که هر دو عضو S در یک زیرفضای همبند قرار داشته باشند.

۷. به‌ازای هر $n>1$ ثابت کنید که $\mathbb{R}^n$ با $\mathbb{R}$ همسانریخت نیست. (راهنمایی: از نتیجهٔ ۵-۱-۱۵ استفاده کنید).

۸. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ همبند باشد آن است که هر زیرمجموعهٔ سره ناتهی آن، مرز ناتهی داشته باشد.

۹. فرض کنید $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ و $I = [0, 1]$ در این صورت نشان دهید:

(الف) S^n همبند است (ب) I و $[0, 2\pi)$ با S^1 همسانریخت نیستند. (ج) به‌ازای هر $n>1$، S^n و S^1 همسانریخت نیستند.

۱۰. فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ هاسدورف و $\mathscr{T}$ دارای یک پایه باشد که اعضای آن بسته نیز باشند. ثابت کنید $(S, \mathscr{T})$ ناهمبند کلی است.

۱۱. نشان دهید که عکس مسأله ۱۰ درحالتی که $(S, \mathscr{T})$ هاسدورف و فشرده باشد برقرار است (ر.ک [۱] صفحه ۱۵۲).

۱۲. فرض کنید $(S, \mathscr{T})$ ناهمبند باشد و X یک زیرمجموعهٔ ناتهی سره و بستاز از S باشد. اگر A یک زیرمجموعهٔ همبند از S باشد نشان دهیدکه $A \subseteq X$ یا $A \subseteq S \backslash X$.

۵-۲ مؤلفهٔ فضا

زیر فضای $(C, \mathscr{T}/C)$ از فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ را یک **مؤلفهٔ فضای** $(S, \mathscr{T})$ می‌گوییم، هرگاه $(C, \mathscr{T}/C)$ همبند باشد و زیرفضای سره هیچ زیرفضای همبند از $(S, \mathscr{T})$ نباشد. در حقیقت $(C, \mathscr{T}/C)$ را یک مؤلفهٔ $(S, \mathscr{T})$ می‌گوییم، هرگاه $(C, \mathscr{T}/C)$ در $(S, \mathscr{T})$ همبند بیشین باشد. دراین بخش نشان می‌دهیم که هر فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ را می‌توان به یک ردهٔ مجزا از مؤلفه‌ها تجزیه کرد. واضح است که هر فضای همبند فقط یک مؤلفه، که کل فضاست، دارد. بررسی مؤلفه‌های یک فضا از این جهت حائز اهمیت است که تعداد مؤلفه‌های یک فضا، وضعیت ناهمبندی ساختار آن را به‌طور ضمنی مشخص می‌کند.

۵-۲-۱ قضیه

فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت

الف) هر نقطهٔ در S (فقط) در یک مؤلفهٔ S قرار دارد.

ب) هر زیرفضای همبند S (فقط) در یک مؤلفهٔ S قرار دارد.

ج) هر زیرفضای همبند ناتهی S که بستاز باشد، یک مؤلفهٔ S است.

د) هر مؤلفهٔ S بسته است.

برهان.

الف) فرض کنیم x عضوی در S باشد بنابراین، $\{x\}$ یک زیرفضای همبند S است که x را دربردارد. فرض کنیم $\mathscr{A}$ خانوادهٔ تمام زیرفضاهای همبند C_α باشد. که $x \in C_\alpha$. واضح است که $\mathscr{A}$ ناتهی است. اگر $C_x = \cup C_\alpha$ آن‌گاه بنا به قضیهٔ ۵-۱-۱۲، C_x یک زیرفضای همبند است. واضح است که C_x بیشین است و x را دربردارد. حال فرض کنیم C_1 مؤلفه‌ای باشد که x را دربرداشته باشد. بنابراین C_1 متعلق به $\mathscr{A}$ است و بنابراین $C_1 \subseteq C_x$. چون C_x همبند است و C_1 مؤلفه، بنابراین $C_1 = C_x$. در نتیجه مؤلفه‌ای که x را دربردارد منحصر به فرد است.

ب) فرض کنیم A یک زیرفضای همبند S باشد و $x \in A$. بنا به قسمت (الف) $A \subseteq C_x$ که در آن C_x مؤلفهٔ حاوی x است. پس A در یک مؤلفهٔ S واقع است. واضح است که به ازای هر y,x متعلق به A، $C_x = C_y$ و بنابراین مؤلفه‌ای که A را دربردارد منحصر به فرد است.

ج) فرض کنیم A یک زیرفضای همبند S باشد که بستاز است. بنا به قسمت (ب) مؤلفه‌ای مانند C موجود است که $A \subseteq C$. ثابت می‌کنیم $C = A$ و بنابراین A مؤلفه است. اگر $A \neq C$ آن‌گاه $C \cap A$ و $C \cap (S \setminus A)$ دو مجموعهٔ باز مجزای ناتهی در $\mathscr{T}/C$ هستند و $C = (C \cap A) \cup (C \cap (S \setminus A))$ و این متناقض با همبندبودن C است.

د) فرض کنیم C یک مؤلفهٔ S باشد. چون C همبند است بنابراین $\overline{C}$ نیز همبند می‌باشد (قضیه ۵-۱-۱۱) و چون $C \subseteq \overline{C}$ و C مؤلفه است، پس $C = \overline{C}$ در نتیجه C بسته است. ■

۵-۲-۲ قضیه

مؤلفه‌های فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$، تشکیل یک افراز برای S می‌دهند.

برهان. واضح است که هر مؤلفه، غیرتهی است و چون هر عضو S در یک مؤلفه قرار می‌گیرد، پس اجتماع مؤلفه‌ها، کل فضا است. فرض کنیم A و B دو مؤلفهٔ S باشند. اگر $A \cap B \neq \phi$ آن‌گاه بنا به قضیهٔ ۵-۱-۹، $A \cup B$ همبند است و $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$. بنابراین $A = A \cup B = B$، زیرا A و B بیشین هستند. ■

۵-۲-۳ مثال‌ها

۱. فرض کنیم $S = \mathbb{N}$ و به‌ازای هر n متعلق به $\mathbb{N}$ ، $B_n = \{2n-1, 2n\}$ و $\mathscr{T}$ توپولوژی تولید شده توسط پایهٔ $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ باشد. در این صورت مؤلفه‌های $(S, \mathscr{T})$ مجموعه‌های دو عضوی B_n می‌باشند. بنابراین در این فضا مؤلفه‌ها هم بستاز می‌باشند.

۲. فرض کنیم $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا با توپولوژی نسبی اقلیدسی باشد. اگر y عددی اصم باشد، آن‌گاه $\mathbb{Q} \cap (-\infty, y) \cup \mathbb{Q} \cap (y, \infty)$ یک ناهمبندی برای $\mathbb{Q}$ است. از طرفی اگر x,y دو عضو $\mathbb{Q}$ باشند و $x<y$، آن‌گاه عدد اصمی مانند z موجود است که $x<z<y$. حال فرض کنیم A زیر فضای $\mathbb{Q}$، و y,x متعلق به A

باشند و $x<z<y$. بنابراین مجموعه‌های $A\cap(z,\infty)$ و $A\cap(-\infty,z)$ ناتهی، مجزا و در A باز هستند و $A=[A\cap(-\infty,z)]\cup[A\cap(z,\infty)]$. بنابراین هر زیرفضای $\mathbb{Q}$ که بیش از یک عضو داشته باشد ناهمبند است. درنتیجه، مؤلفه‌های $\mathbb{Q}$ مجموعه‌های تک عضوی هستند. اما در $(\mathbb{Q},\mathscr{T}_e/\phi)$ مجموعهٔ تک عضوی باز نیست، زیرا اگر G مجموعهٔ باز ناتهی در $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه $\mathbb{Q}\cap G$ نامتناهی است. بنابراین مؤلفه‌های فضای $(\mathbb{Q},\mathscr{T}_e/\mathbb{Q})$ باز نیستند. این مثال همچنین بیانگر این مطلب است که برای این‌که مؤلفه‌های یک فضا مجموعه‌های تک عضوی باشند، لازم نیست توپولوژی فضا گسسته باشد.

۳. زیرفضای $S=\{(x,y);\ x\neq 0, y=sin(\frac{1}{x})\}$ از $\mathbb{R}^2$ را درنظر بگیرید. فرض کنیم $A=\{(x,y)\in S: x>0\}$ و $B=\{(x,y)\in S: x<0\}$. در این صورت A و B در S باز، ناتهی و جدا از هم هستند و $S=A\cup B$. بنابراین S ناهمبند است. همچنین A و B بسته و نیز همبند هستند بنابراین مؤلفه می‌باشند و نیز تنها مؤلفه‌های S هستند. واضح است که $S\cup\{(x,y): x=0, -1\leq y\leq 1\}$ همبند است. زیرا $\{(x,y): x=0, -1\leq y\leq 1\}$ مرز A و مرز B است. $\bar{A}$ و $\bar{B}$ همبندند و $\bar{A}\cap\bar{B}=\{(x,y): x=0, -1\leq y\leq 1\}$ و $\bar{A}\cup\bar{B}=S\cup\{(x,y): x=0, -1\leq y\leq 1\}$.

۵-۲-۴ شبه مؤلفه

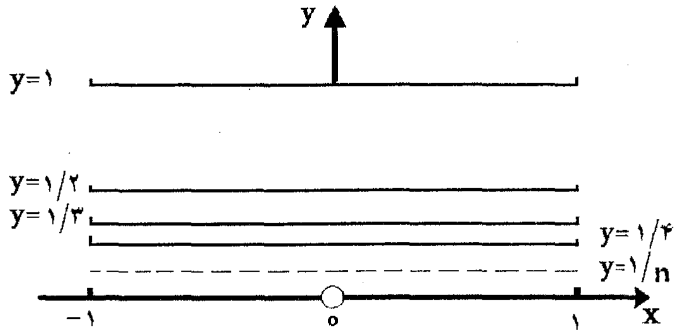
فرض کنیم $(S,\mathscr{T})$ فضای توپولوژیک باشد و $x\in S$. مجموعهٔ $[x]$ را که به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم یک شبه مؤلفهٔ S می‌گوییم.

$[x]=\{y\in S$: S را نمی‌توان به‌صورت دو مجموعهٔ باز مجزا نوشت که یکی x و دیگری y را دربرداشته باشد$\}$

فرض کنیم C یک مؤلفهٔ S باشد و $x\in C$، در این صورت $C\subseteq[x]$. بنابراین هر مؤلفه در یک شبه مؤلفه قرار دارد. به‌سادگی دیده می‌شود که هر شبه مؤلفه بسته است (چرا؟).

۵-۲-۵ مثال

زیرفضای $S=[\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(x,\frac{1}{n}): |x|\leq 1\}]\cup\{(x,0): 0<|x|\leq 1\}$ از $\mathbb{R}^2$ را درنظر می‌گیریم. مؤلفه‌های این فضا خطوط $y=\frac{1}{n}$ $(|x|\leq 1)$ و دو بازهٔ $[-1,0)$ و $(0,1]$ هستند. مجموعهٔ $\{(x,0): 0<|x|\leq 1\}$ ناهمبند است و بنابراین مؤلفه نیست درصورتی که این مجموعه یک شبه مؤلفه است (چرا؟).



مثال فوق و مثال شماره ۱ در ۵-۲-۳، فضاهای توپولوژیکی را نشان می‌دهند که نه فشرده و نه همبند می‌باشند. $\mathbb{R}$ با توپولوژی هم متناهی و $\mathbb{R}$ با توپولوژی ناگسسته هر دو هم فشرده و هم همبند می‌باشند. $\mathbb{R}$ با توپولوژی گسسته و خط سورجن فری نیز نه فشرده و نه همبند هستند. $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی همبند است ولی فشرده نیست. بازهٔ بستهٔ $[۰,۱]$ در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ فشرده و همبند است و هر فضای همسانریخت با $[۰,۱]$ (که به آن قوس می‌گوییم) فشرده و همبند است. مجموعه‌ای را که فشرده و همبند باشد پیوستار می‌گوییم.

۵-۲-۶ نقطهٔ بریدگی

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ همبند باشد. نقطهٔ $x \in S$ را یک **نقطهٔ بریدگی** S می‌گوییم، هرگاه $S \setminus \{x\}$ ناهمبند باشد. درغیراین‌صورت x را نقطهٔ نابریدگی می‌گوییم.

دو قضیهٔ زیر، در رابطه با نقطهٔ بریدگی و پیوستار در فضای متریک است که بدون اثبات بیان می‌شوند.

۵-۲-۷ قضیه

شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای متریک پیوستار (M, d) یک قوس باشد آن است که فقط دو نقطهٔ بریدگی داشته باشد.

۵-۲-۸ قضیه

شرط لازم و کافی برای آن‌که فضای متریک پیوستار (M, d) یک منحنی سادهٔ بسته (منحنی ژوردان) باشد آن است که به‌ازای هر دو نقطهٔ y, x در M، زیرفضای $(M \setminus \{x, y\}, d)$ ناهمبند باشد. (به یاد آورید که یک منحنی بسته آن است، که ابتدا و انتهای آن برهم منطبق باشند و یک منحنی بسته، ساده است هرگاه خودش را جز در نقاط ابتدا و انتها نبرد).

۲-۵ مسائل

۱. فرض کنید $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ یک همسانریختی باشد. ثابت کنید که توسط f می‌توان تناظر یک به یکی بین مؤلفه‌های S_1 و مؤلفه‌های S_2 برقرار کرد و مؤلفه‌های متناظر همسانریخت هستند.

۲. آیا خاصیت مؤلفه‌بودن تحت تابع پیوسته پایدار است؟ آیا خاصیت پیوستاربودن تحت تابع پیوسته پایدار است؟

۳. فرض کنید $f: (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ تابعی پیوسته و برو باشد و $(S_2, \mathcal{T}_2)$ همبند باشد. اگر x یک نقطهٔ بریدگی $(S_2, \mathcal{T}_2)$ باشد، آن‌گاه ثابت کنید که $S_1 \setminus f^{-1}(\{x\})$ ناهمبند است.

۴. آیا خاصیت نقطهٔ بریدگی‌بودن (خاصیت نقطهٔ نابریدگی‌بودن)، تحت تابع پیوسته پایدار است؟

۵. آیا خاصیت پیوستاربودن، خاصیتی حاصل‌ضربی است؟

۶. فرض کنید $(S, \mathcal{T})$ فضای توپولوژیک و رابطه R در S به‌صورت زیر تعریف شود: می‌گوییم $(x,y) \in R$، اگر و فقط اگر x, y هر دو در یک زیرفضای همبند قرار گیرند. نشان دهید که R یک رابطهٔ هم‌ارزی است و رده‌های هم‌ارزی آن را مشخص کنید.

۷. فرض کنید C_1 یک مؤلفه در $(S_1, \mathcal{T}_1)$ و C_2 مؤلفه‌ای در $(S_2, \mathcal{T}_2)$ باشد، آیا $C_1 \times C_2$ مؤلفه‌ای در $S_1 \times S_2$ است؟

۳-۵ همبندی موضعی

در این بخش خاصیت موضعی دیگری را مورد بررسی قرار می‌دهیم و آن همبندبودن در مجاورت هر نقطه است. نشان خواهیم دادکه در فضای همبند موضعی، هر مؤلفه بستاز است.

۵-۳-۱ فضای همبند موضعی

فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ را همبند موضعی می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر x متعلق به S و هر مجموعهٔ باز G شامل x، مجموعهٔ باز همبندی مانند V موجود باشد به طوری که V باز، شامل x و مشمول در G باشد.

به‌سادگی نتیجه می‌شود که شرط لازم و کافی برای آن‌که $(S, \mathcal{T})$ همبند موضعی باشد آن است که هر نقطهٔ S، پایهٔ بازی داشته باشد که تمام مجموعه‌هایش زیرفضاهای همبندند.

قبلاً دیدیم که فشردگی، فشردگی موضعی را نتیجه می‌دهد. همبندی نه همبندی موضعی را نتیجه می‌دهد و نه از همبندی موضعی نتیجه می‌شود.

اجتماع دوبازهٔ باز مجزا مانند $(۱ \text{ و } ۲) \cup (۳ \text{ و } ۴)$ همبند موضعی است ولی همبند نیست. در مثال ۳ از ۵-۲-۳، $A \cup \{(۰, ۰)\}$ همبند است ولی در $(۰, ۰)$ خاصیت همبندی موضعی ندارد و بنابراین همبند موضعی نیست. همچنین $\overline{A}$ همبند است ولی در نقاط $(۰,y)$ که $|y| \leq ۱$ خاصیت همبندی موضعی ندارد.

اگر $B = \{(x,y): \circ < x \leq \text{۱}, y = Sin(\frac{\text{۱}}{x})\}$، آن‌گاه $\overline{B}$ پیوستار (همبند و فشرده) است ولی همبند موضعی نیست.

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ و $\mathbb{R}$ با توپولوژی گسسته و $\mathbb{R}$ با توپولوژی هم متناهی همبند موضعی هستند ولی $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ همبند موضعی نیست زیرا هر مجموعهٔ پایه‌ای $[a, b)$ ناهمبند است. گرچه $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ همبند موضعی است، ولی زیرفضای متشکل از اعداد گویا $\mathbb{Q}$، همبند موضعی نیست، زیرا هر عضو ناتهی $\mathcal{T}_e/\mathbb{Q}$ ناهمبند است. بنابراین خاصیت همبندی موضعی موروثی نیست.

اگر A یک زیرفضای باز فضای همبند موضعی باشد، آن‌گاه A همبند موضعی است. (چرا؟)

۵-۳-۲ قضیه

شرط لازم و کافی برای آن‌که $(S, \mathcal{T})$ همبند موضعی باشد آن است که هر مؤلفهٔ هر زیرمجموعهٔ باز S، باز باشد.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ همبند موضعی و G مجموعه‌ای باز و غیرتهی باشد. اگر $(C, \mathcal{T}/C)$ مؤلفه $(G, \mathcal{T}/C)$ باشد، آن‌گاه به‌ازای هر x متعلق به C، مجموعهٔ باز همبندی مانند V_x موجود است که شامل x است و $V_x \subseteq G$. بنابراین $C \cup V_x$ یک مجموعهٔ همبند در G است و چون C مؤلفه است پس $V_x \subseteq C$. در نتیجه $C = \bigcup_{x \in C} V_x$ و بنابراین باز است.

بالعکس، فرض کنیم x متعلق به S و G مجموعهٔ بازی شامل x باشد. در این صورت $(G, \mathcal{T}/G)$ یک زیرفضای باز S است و x در یک مؤلفهٔ G مانند C_x قرار دارد. چون C_x بنا به فرض باز است، پس مجموعهٔ همبند C_x موجود است که C_x باز و شامل x است و $C_x \subseteq G$ بنابراین $(S, \mathcal{T})$ همبند موضعی است. ■

۵-۳-۳ نتیجه

فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ همبند موضعی و A مؤلفهٔ S باشد. در این صورت A بستاز است.

برهان. کافی است در قضیه ۵-۳-۱، قرار دهیم $G = S$. ■

۵-۳-۴ قضیه

فرض کنیم $f: (S_\text{۱}, \mathcal{T}_\text{۱}) \to (S_\text{۲}, \mathcal{T}_\text{۲})$ تابعی برو، پیوسته و باز باشد. اگر $(S_\text{۱}, \mathcal{T}_\text{۱})$ همبند موضعی باشد، آن‌گاه $(S_\text{۲}, \mathcal{T}_\text{۲})$ همبند موضعی است.

برهان. فرض کنیم U مجموعهٔ بازی شامل y باشد. چون f بروست پس یک x در $S_\text{۱}$ موجود است که $y=f(x)$. قرار می‌دهیم $G = f^{-1}(U)$. در این‌صورت G مجموعهٔ بازی در $S_\text{۱}$ شامل x است. چون $(S_\text{۱}, \mathcal{T}_\text{۱})$ همبند موضعی است، پس مجموعهٔ همبند بازی مانند H در $S_\text{۱}$ موجود است که شامل x است و $H \subseteq G$. چون f تابعی باز است پس $V = f(H)$ در $S_\text{۲}$ باز است و چون f پیوسته است، V همبند است. پس V مجموعهٔ

باز همبندی در S_2 است که شامل y و مشمول در U است. بنابراین S_2 همبند موضعی است. ■

مثال زیر نشان می‌دهد که گرچه همبندی موضعی یک خاصیت توپولوژیکی است اما در حالت کلی تحت تابع پیوسته پایدار نیست.

۵-۳-۵ مثال

فرض کنیم $S_1 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $\mathscr{T}_1$ توپولوژی گسسته روی S_1 باشد. چون هر مجموعهٔ تک عضوی در $(S_1, \mathscr{T}_1)$ باز و همبند است، بنابراین $(S_1, \mathscr{T}_1)$ همبند موضعی است. حال فرض کنیم $S_2 = \{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ و $\mathscr{T}_2$ توپولوژی نسبی اقلیدسی روی S_2 باشد. واضح است که $(S_2, \mathscr{T}_2)$ در صفر همبند موضعی نیست، زیرا هر عضو ناتهی $\mathscr{T}_2$ که صفر را دربردارد، ناهمبند است. (چرا؟) تابع $f: (S_1, \mathscr{T}_1) \to (S_2, \mathscr{T}_2)$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، دو سویی و پیوسته است:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{1}{n} & x \neq 0 \end{cases}$$

مثال زیر نشان می‌دهد که خاصیت همبندی موضعی حاصل‌ضربی نیست، گرچه حاصل‌ضرب تیخونوف تعداد متناهی فضای همبند موضعی، همبند موضعی است. همچنین قضیهٔ ۵-۳-۳ و بازبودن افکنش‌ها نشان می‌دهد که اگر حاصل‌ضرب تیخونوف $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ها همبند موضعی باشد، آن‌گاه به‌ازای هر α، $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ همبند موضعی است.

۵-۳-۶ مثال

فرض کنیم به‌ازای هر n متعلق به $\mathbb{N}$، $S_n = \{0, 1\}$ و $\mathscr{T}_n$ توپولوژی گسسته روی S_n باشد. واضح است که $(S_n, \mathscr{T}_n)$ همبند موضعی است. حال فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ حاصل‌ضرب تیخونوف $(S_n, \mathscr{T}_n)$ها باشد و x متعلق به S را به این صورت تعریف می‌کنیم که برای هر n متعلق به $\mathbb{N}$، $x(n) = 0$. واضح است که هر عضو از $\mathscr{T}$ که x را دربرداشته باشد ناهمبند است. (چرا؟)

۵-۳ مسائل

۱. فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ همبند موضعی و G زیرمجموعهٔ باز S باشد. ثابت کنید $(G, \mathscr{T}/G)$ همبند موضعی است.

۲. ثابت کنید حاصل‌ضرب دو فضای همبند موضعی، همبند موضعی است.

۳. نشان دهید که اگر حداکثر تعداد متناهی از فضاهای $(S_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ همبند موضعی و بقیه همبند باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب آنها همبند موضعی است.

۴. ثابت کنید که تعداد مؤلفه‌های یک فضای همبند موضعی فشرده، متناهی است.

۵. فضای متریک (M,d) را دارای خاصیت S می‌گوییم، اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، M را بتوان به‌صورت اجتماع تعداد متناهی مجموعهٔ همبند نوشت که قطر هر یک از این مجموعه‌های همبند از ε کوچکتر باشد. ثابت کنید که اگر فضای متریک (M,d) دارای خاصیت S باشد، آن‌گاه همبند موضعی است.

۶. فرض کنید $(S,\mathcal{T})$ همبند موضعی باشد، $D \subseteq S$ و C مؤلفه $(D,\mathcal{T}/D)$ باشد. ثابت کنید (الف) $C^{\circ}=C\cap D^{\circ}$. (ب) اگر D بسته باشد، آن‌گاه $bd(C) = C \cap bd(D)$. (ج) اگر $bd(D)$ همبند موضعی باشد، آن‌گاه $\bar{D}$ همبند موضعی است.

۵-۴ همبند مسیری و همبند مسیری موضعی

در فضای سه بعدی $\mathbb{R}^3$ هر منحنی پیوسته را می‌توان برحسب نمایش پارامتری آن به‌صورت $x=f(t)$، $y=g(t)$ و $z=h(t)$ بیان کرد که f و g و h نسبت به متغیر حقیقی t در حوزهٔ تعریفشان پیوسته‌اند. بنابراین $F(t)=(f(t),g(t),h(t))$ تابعی پیوسته از بازه‌ای مانند $[a,b]$ به $\mathbb{R}^3$ است. با این نمایش، منحنی مورد بحث نگارهٔ بازهٔ $[a,b]$ تحت تابع F در $\mathbb{R}^3$ یعنی $F([a,b])$ است. این منحنی را می‌توان به‌عنوان اتصال دو نقطهٔ $F(a)$ و $F(b)$ در $\mathbb{R}^3$ درنظر گرفت. حال فرض کنیم دو نقطهٔ A و B در $\mathbb{R}^3$ داده شده باشند. بررسی این که آیا منحنی‌ای در $\mathbb{R}^3$ موجود است که A را به B وصل کند، معادل با بررسی این مسأله است که آیا تابعی پیوسته مانند $F:[a,b] \to \mathbb{R}^3$ موجود است که $F(a) = A$ و $F(b) = B$. برای بررسی این موضوع حتی می‌توان فرض کرد $a = 0$ و $b = 1$، زیرا بازهٔ $[0,1]$ با هر بازهٔ $[a,b]$ همسانریخت است. مقدمهٔ فوق، انگیزه‌ای برای مطالعهٔ فضای همبند مسیری است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

۵-۴-۱ فضای همبند مسیری

فرض کنیم $(S,\mathcal{T})$ فضای توپولوژیک باشد. هر تابع پیوستهٔ f از $[0,1]$ به S را یک مسیر در S که نقطهٔ $f(0)$ را به $f(1)$ وصل می‌کند، می‌گوییم. $f(0)$ را ابتدا و $f(1)$ را انتهای مسیر می‌گوییم. اگر f یک مسیر در S باشد، آن‌گاه $f([0,1])$ را یک منحنی در S می‌گوییم. فضای توپولوژیک $(S,\mathcal{T})$ را همبند مسیری می‌گوییم، اگر به‌ازای هر y,x در S، مسیری مانند f در S موجود باشد که x را به y وصل کند، یعنی $f(0) = x$ و $f(1) = y$.

۵-۴-۲ مثال

$\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی اقلیدسی همبند مسیری هستند؛ کافی است که به‌ازای هر y,x متعلق به $\mathbb{R}$ تابع $f(t)=(y-x)t+x$ را درنظر بگیریم.

S با توپولوژی ناگسسته همبند مسیری است.

مجموعهٔ S با بیش از یک نقطه به همراه توپولوژی گسسته همبند مسیری نیست. زیرا فرض کنید a و b متعلق به S و متمایز باشند و $f:[0,1] \to S$ پیوسته باشد به طوری که $f(0) = a$ و $f(1) = b$. چون f پیوسته است و $[0,1]$ همبند است. بنابراین $f([0,1])$ نیز همبند است. اما $\{a\}$ و $\{b\}$ دو زیرمجموعه سرهٔ $f([0,1])$ هستند که بستاز می‌شوند و این یک تناقض است.

فرض کنیم $\mathscr{T}$ توپولوژی سیرپینسکی روی $S = \{0,1\}$ باشد. تابع

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (0,1] \\ 1 & t = 1 \end{cases}$$

پیوسته است و بنابراین $(S, \mathscr{T})$ همبند مسیری است.

۵-۴-۳ نقطهٔ پایه‌ای

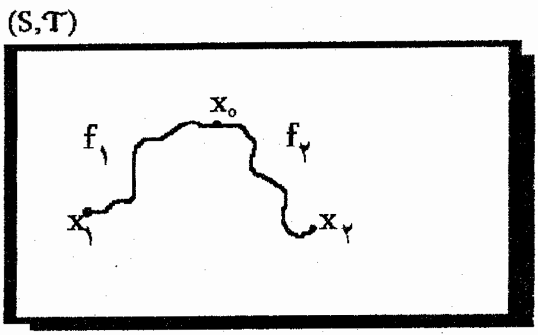
فرض کنیم $(S, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $x_0 \in S$. نقطهٔ x_0 را یک نقطهٔ پایه‌ای برای خانوادهٔ مسیرهای در S می‌گوییم، هرگاه هر نقطه $x \in S$ را بتوان توسط مسیری در S به x_0 وصل کرد.

۵-۴-۴ قضیه

شرط لازم و کافی برای آنکه فضای توپولوژیک $(S, \mathscr{T})$ همبند مسیری باشد آن است که S دارای یک نقطهٔ پایه‌ای باشد.

برهان. اگر $(S, \mathscr{T})$ همبند مسیری باشد، آنگاه واضح است که هر نقطهٔ S یک نقطهٔ پایه‌ای است. حال فرض کنیم $x_0 \in S$ یک نقطهٔ پایه‌ای باشد. اگر x_1 و x_2 دو نقطه در S باشند، آنگاه توابع پیوستهٔ $f_1:[0,1] \to S$ و $f_2:[0,1] \to S$ موجودند که $f_1(0) = x_1$، $f_1(1) = x_0$، $f_2(0) = x_0$ و $f_2(1) = x_2$. تابع $g:[0,1] \to S$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = \begin{cases} f_1(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f_2(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



تابع g پیوسته است و $g(\circ) = x_1$ و $g(1) = x_2$. بنابراین g مسیری از x_1 به x_2 است. در نتیجه $(S, \mathcal{T})$ همبند مسیری است. ■

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که هر فضای همبند مسیری، همبند است. عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست. $S = \{(x, sin\frac{1}{x}) : \circ < x \leq 1\} \cup \{(\circ, y) : -1 \leq y \leq 1\}$ با توپولوژی اقلیدسی همبند است ولی همبند مسیری نیست.

۵-۴-۵ قضیه

هر فضای توپولوژیک همبند مسیری، همبند است.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ همبند مسیری باشد و $x_\circ \in S$. در این صورت $x_\circ$ نقطه‌ای پایه‌ای است. به‌ازای هر $x \in S$، یک منحنی مانند γ_x از $x_\circ$ به x در S موجود است. واضح است که $x_\circ \in \gamma_x$ و $S = \bigcup\limits_{x \in S} \gamma_x$. چون γ_x نگارهٔ پیوسته فضای همبند $[\circ, 1]$ است، بنابراین γ_x به‌ازای هر x همبند است و $x_\circ \in \bigcap\limits_{x \in S} \gamma_x$. در نتیجه، S همبند است. ■

۵-۴-۶ قضیه

فرض کنیم $(S_1, \mathcal{T}_1)$ فضای همبند مسیری و $f : (S_1, \mathcal{T}_1) \to (S_2, \mathcal{T}_2)$ پیوسته و برو باشد در این صورت $(S_2, \mathcal{T}_2)$ همبند مسیری است. بنابراین خاصیت همبند مسیری، یک خاصیت توپولوژیکی است.

برهان. فرض کنیم y_1 و y_2 متعلق به S باشند. از این که f بروست دو عضو S_1 مانند x_1 و x_2 موجودند که $f(x_1) = y_1$ و $f(x_2) = y_2$. چون S_1 همبند مسیری است، مسیری مانند $g : [\circ, 1] \to S_1$ موجود است که x_1 را به x_2 وصل می‌کند. واضح است که $f \circ g$ مسیری در S_2 است که y_1 را به y_2 وصل می‌کند. بنابراین $(S_2, \mathcal{T}_2)$ همبند مسیری است. ■

۵-۴-۷ قضیه

فرض کنیم $\{(S_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای همبند مسیری فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ باشد. اگر $\bigcap\limits_{\alpha \in I} S_\alpha \neq \phi$ و $A = \bigcup\limits_{\alpha \in I} S_\alpha$ آن‌گاه $(A, \mathcal{T}/A)$ همبند مسیری است.

برهان. واضح است که اگر $x_\circ \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} S_\alpha$، آن‌گاه $x_\circ$ یک نقطهٔ پایه‌ای برای A است و بنا به قضیهٔ ۵-۴-۴، $(A, \mathcal{T}/A)$ همبند مسیری است. ■

۵-۴-۸ مؤلفهٔ مسیری

زیرفضای همبند مسیری فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ را یک **مؤلفهٔ مسیری** $(S, \mathcal{T})$ می‌گوییم، هرگاه یک زیرفضای همبند مسیری بیشین باشد.

به‌سادگی دیده می‌شود که مؤلفه‌های مسیری فضای $(S, \mathcal{T})$ یک افراز S می‌باشند.

اگر $S = \{(x, sin\frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$ آن‌گاه S به همراه توپولوژی نسبی اقلیدسی روی آن همبند است و همبند مسیری نیست و $\{(x, sin\frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\}$ یک مؤلفهٔ مسیری S است که بسته نمی‌باشد. بنابراین لازم نیست که مؤلفهٔ مسیری بسته باشد.

۵-۴-۹ قضیه

شرط لازم و کافی برای آن‌که هر مؤلفهٔ مسیری فضای $(S, \mathcal{T})$ باز (و بنابراین بسته) باشد آن است که به‌ازای هر $x \in S$، مجموعهٔ باز G_x شامل x موجود باشد به طوری که $(G_x, \mathcal{T}/G_x)$ همبند مسیری باشد.

برهان. فرض کنیم هر مؤلفهٔ مسیری باز باشد. اگر x عضوی در S باشد، آن‌گاه یک مولفه مسیری مانند G_x موجود است که $x \in G_x$ و بنا به فرض $G_x \in \mathcal{T}$. همچنین اگر G یک مؤلفهٔ مسیری باشد، آن‌گاه $S \backslash G$ اجتماع تمام مؤلفه‌های مسیری $(S, \mathcal{T})$ غیر از G است و بنابراین $S \backslash G$ باز است و در نتیجه G بسته است.

بالعکس، فرض کنیم به‌ازای هر $x \in S$، مجموعهٔ باز G_x موجود است که شامل x است و $(G_x, \mathcal{T}/G_x)$ همبند مسیری باشد. ثابت می‌کنیم هر مؤلفهٔ مسیری باز است و بنابراین بسته است. فرض کنید C یک مؤلفهٔ مسیری $(S, \mathcal{T})$ باشد. به‌ازای هر x متعلق به C، مجموعهٔ باز همبند مسیری مانند G_x موجود است که شامل x است. از این‌که C مؤلفهٔ مسیری است داریم $G_x \subseteq C$ و بنابراین $C = \bigcup_{x \in C} G_x$. در نتیجه C باز است. ■

۵-۴-۱۰ قضیه

شرط لازم و کافی برای آن‌که $(S, \mathcal{T})$ همبند مسیری باشد آن است که $(S, \mathcal{T})$ همبند باشد و به‌ازای هر $x \in S$، مجموعهٔ باز G_x شامل x موجود باشد که $(G_x, \mathcal{T}/G_x)$ همبند مسیری باشد.

برهان. فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ همبند مسیری باشد. بنابر قضیهٔ ۵-۴-۵، $(S, \mathcal{T})$ همبند است و به‌ازای هر $x \in S$، G_x را مجموعهٔ S اختیار می‌کنیم.

بالعکس، فرض کنیم $(S, \mathcal{T})$ همبند و به‌ازای هر $x \in S$، مجموعهٔ باز G_x شامل x موجود باشد که $(G_x, \mathcal{T}/G_x)$ همبند مسیری باشد. بنابر قضیهٔ ۵-۴-۹ هر مؤلفهٔ مسیری $(S, \mathcal{T})$ که بستاز است، خود S است. لذا هر مؤلفه مسیری برابر خود S است. پس $(S, \mathcal{T})$ همبند مسیری است. ■

۵-۴-۱۱ نتیجه

شرط لازم و کافی برای آن‌که زیرفضای باز $\mathbb{R}^n$ (یا S^n) همبند باشد آن است که همبند مسیری باشد.

برهان. قضیهٔ ۵-۴-۱۰ را ببینید. (راهنمایی: فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n$. در این صورت مجموعهٔ بازی و در حقیقت مستطیلی n بعدی مانند $I_n = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ موجود است که $x \in I_n$. واضح است که I_n همبند مسیری است.) ■

۵-۴-۱۲ فضای همبند مسیری موضعی

فضای S را همبند مسیری موضعی می‌نامیم، هرگاه برای هر x در S و هر مجموعهٔ باز G شامل x، مجموعهٔ باز V حاوی x و مشمول در G چنان موجود باشد که هر دو نقطه در V به کمک یک مسیر در G به هم وصل شوند.

درحقیقت قضیهٔ ۵-۴-۱۵ نشان می‌دهد که می‌توان V را چنان انتخاب کرد که هر دو نقطهٔ آن به کمک مسیری در V به هم متصل شوند.

۵-۴-۱۳ مثال

فرض کنید X زیرفضایی از $\mathbb{R}^2$ باشد که از منحنی $y = sin\frac{1}{x}$ و قوسی از $(1, 0)$ به $(0, \frac{1}{2\pi})$ تشکیل شده باشد. در این صورت می‌توان نشان داد که X همبند مسیری است ولی همبند مسیری موضعی نیست.

۵-۴-۱۴ قضیه.

S یک فضای همبند مسیری موضعی است، اگر و فقط اگر مؤلفه‌های مسیری مجموعه‌های باز آن باز باشند. به‌ویژه اگر S همبند مسیری باشد، آن‌گاه مؤلفه‌های مسیری آن بازند.

برهان. فرض کنیم S همبند مسیری موضعی و G یک زیرمجموعهٔ باز S باشد. اگر C یک مؤلفهٔ مسیری $(G, \mathcal{T}/G)$ باشد که حاوی x است، مجموعهٔ باز V چنان موجود است که شامل x و مشمول در G است و هر نقطهٔ آن به کمک مسیری در G به x متصل می‌شود (تمرین ۱۳ همین بخش را ببینید.) پس هر نقطهٔ V در مؤلفهٔ مسیری یکسانی همراه با x قرار می‌گیرد و در نتیجه $V \subseteq C$. بنابراین C باز است.

بالعکس، فرض کنیم G باز و x متعلق به G باشد. V را مؤلفهٔ مسیری x در G درنظر بگیرید. بنا به فرض V باز است و بنابراین S همبند مسیری موضعی است. ■

۵-۴-۱۵ قضیه

S همبند مسیری موضعی است، اگر و فقط اگر برای هر x در S و هر مجموعهٔ باز G شامل x، مجموعهٔ باز همبند مسیری V شامل x موجود باشد که $V \subseteq G$.

برهان. فرض کنید S همبند مسیری موضعی باشد، V را مؤلفهٔ همبند مسیری G حاوی x، انتخاب کنید. عکس قضیه واضح است. ■

۵-۴-۱۶ قضیه

اگر S یک فضای همبند مسیری موضعی باشد، آن‌گاه تعداد مؤلفه‌های هر مجموعهٔ باز، برابر تعداد مؤلفه‌های مسیری آن است. به‌ویژه، تعداد مؤلفه‌های S برابر تعداد مؤلفه‌های مسیری آن است.

برهان. فرض کنید C مولفهٔ مجموعهٔ باز G در S و $\{A_j : j \in J\}$ گردایه تمام مؤلفه‌های مسیری C باشد. در این صورت C اجتماع مجزای A_jهاست. بنا به قضیهٔ ۵-۴-۱۴، هر A_j در C باز است و لذا هر A_j در C بسته است. (زیرا متمم آن مجموعهٔ بازی است که به‌صورت اجتماع مجموعه‌های باز دیگر است.) اگر بیش از یک A_j موجود باشد، C ناهمبند می‌شود. ■

۵-۴-۱۷ قضیه

اگر S همبند و همبند مسیری موضعی باشد، آنگاه S همبند مسیری است.

برهان. چون S همبند است، S فقط یک مؤلفه دارد و به این دلیل که S همبند مسیری موضعی است، S مؤلفهٔ مسیری است. ■

۵-۴ مسائل

۱. فرض کنید $f: [\circ, \mathrm{۱}] \to (S, \mathscr{T})$ یک مسیر از x به y در S باشد. ثابت کنید $g(t)=f(\mathrm{۱}-t)$ یک مسیر از y به x در S است.

۲. فرض کنید $f: [\circ, \mathrm{۱}] \to (S, \mathscr{T})$ یک مسیر از $x_\mathrm{۱}$ به $x_\circ$ در S و $g: [\circ, \mathrm{۱}] \to (S, \mathscr{T})$ یک مسیر از $x_\circ$ به $x_\mathrm{۲}$ در S باشد ثابت کنید تابع $h: [\circ, \mathrm{۱}] \to (S, \mathscr{T})$ که در آن:

$$h(t) = \begin{cases} f(\mathrm{۲}t) & t \in [\circ, \frac{\mathrm{۱}}{\mathrm{۲}}] \\ g(\mathrm{۲}t-\mathrm{۱}) & t \in [\frac{\mathrm{۱}}{\mathrm{۲}}, \mathrm{۱}] \end{cases}$$

یک مسیر از $x_\mathrm{۱}$ به $x_\mathrm{۲}$ در S است.

۳. ثابت کنید که همبند مسیری یک خاصیت حاصل‌ضربی است.

۴. ثابت کنید که اگر $S = \{(x, \sin\frac{\mathrm{۱}}{x}) : \circ < x \leq \mathrm{۱}\} \cup \{(\circ, y) : -\mathrm{۱} \leq y \leq \mathrm{۱}\}$ آنگاه $(S, \mathscr{T}_e/S)$ همبند مسیری نیست.

۵. ثابت کنید که اگر $S = \{(x, \cos\frac{\pi}{x}) : \circ < x \leq \mathrm{۱}\} \cup \{(\circ, y) : -\mathrm{۱} \leq y \leq \mathrm{۱}\}$ آنگاه $(S, \mathscr{T}_e/S)$ همبند مسیری نیست ولی همبند است.

۶. آیا خاصیت همبند مسیری موروثی است؟

۷. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه هر مؤلفهٔ مسیری فضای $(S, \mathscr{T})$ باز باشد، آن است کـه هـر مؤلفهٔ مسیری $(S, \mathscr{T})$ بسته باشد.

۸. ثابت کنید که مؤلفه‌های مسیری فضای $(S, \mathscr{T})$ تشکیل یک افراز برای S می‌دهند.

۹. نتیجهٔ ۵-۴-۱۱ را ثابت کنید.

۱۰. ثابت کنید که $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ همبند مسیری می‌باشند.

۱۱. نشان دهید هر فضای همبند مسیری موضعی، همبند موضعی است.

۱۲. اگر S_1 و S_2 همبند مسیری موضعی باشند، آن‌گاه ثابت کنید $S_1 \times S_2$ نیز همبند مسیری موضعی است.

۱۳. ثابت کنید هر مجموعهٔ باز از یک فضای همبند مسیری موضعی، خود همبند مسیری موضعی است.

۵-۵ همبند قوسی

۵-۵-۱ قوس

هر زیرفضای A از فضای $(S, \mathcal{T})$ راکه با $[0,1]$ همسانریخت باشد یک **قوس** در S می‌گوییم. از همسانریختی $f: [0,1] \to (A, \mathcal{T}/A)$ نتیجه می‌شود که هر قوس یک منحنی نیز می‌باشد.

۵-۵-۲ فضای همبند قوسی

فضای توپولوژیک $(S, \mathcal{T})$ را همبند قوسی می‌گوییم، هرگاه هر دو نقطهٔ S را بتوان توسط قوسی در S به یکدیگر وصل کرد.

۵-۵-۳ مثال

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ همبند قوسی است زیرا به‌ازای هر b, a متعلق به $\mathbb{R}$، $[a, b]$ یک قوس در $\mathbb{R}$ است که a را به b وصل می‌کند. کافی است تابع $f: [0,1] \to [a, b]$ را به‌صورت $f(x) = (b-a)x+a$ درنظر بگیریم.

$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ که $\mathcal{T}$ توپولوژی گسسته است و $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ همبند قوسی نیستند، زیرا این دو فضا ناهمبند کلی می‌باشند. یعنی تنها مجموعه‌های همبند آنها، مجموعه‌های تک عضوی هستند.

۵-۵-۴ مثال

فرض کنید $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\}$. در این صورت $(A, \mathcal{T}_e/A)$ همبند قوسی است. اگر $S = A \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$ آن‌گاه $(S, \mathcal{T}_e/S)$ همبند قوسی نیست. کافی است نقطه‌ای در $\{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$ و نقطه‌ای در A درنظر بگیرید.

اثبات قضیهٔ زیر با توجه به مطالب بخش ۵-۴ ساده است و به خواننده واگذار می‌شود.

۵-۵-۵ قضیه

اگر $(S, \mathcal{T})$ همبند قوسی باشد، آن‌گاه همبند مسیری است و بنابراین همبند است.

۵-۵-۶ قضیه

همبند قوسی یک خاصیت توپولوژیکی است.

برهان. فرض کنیم $f:(S_1,\mathcal{T}_1)\to(S_2,\mathcal{T}_2)$ همسانریختی و y_2 و y_1 متعلق به S_2 باشند. x_1 و x_2یی در S_1 موجودند که $f(x_1)=y_1$ و $f(x_2)=y_2$. بنابراین قوسی در $(S_1,\mathcal{T}_1)$ مانند $(A,\mathcal{T}_1/A)$ موجود است که x_1 را به x_2 وصل می‌کند؛ در نتیجه تابعی (همسانریختی) مانند $g:[0,1]\to(A,\mathcal{T}_1/A)$ وجود دارد به طوری که $g(0)=x_1$ و $g(1)=x_2$. حال تابع $f\circ g:[0,1]\to(S_2,\mathcal{T}_2)$ یک به یک و پیوسته است و بنابراین $[0,1]$ همسانریخت با یک زیرفضای $(S_2,\mathcal{T}_2)$ است که y_1 و y_2را دربردارد. ■

۵-۵ مسائل

۱. فرض کنید $(S,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. زیرفضای $(A,\mathcal{T}/A)$ را مؤلفهٔ قوسی S می‌گوییم، هرگاه $(A,\mathcal{T}/A)$ یک زیرفضای همبند قوسی بیشین باشد. فرض کنید $x\in S$. نشان دهید که هر مؤلفهٔ قوسی که x را دربرداشته باشد زیرفضای مؤلفهٔ مسیری‌ای است که x را دربردارد و هر مؤلفهٔ مسیری که x را دربرداشته باشد زیرفضای مؤلفه‌ای است که x را دربردارد.

۲. ثابت کنید که اگر $A=\{(x,\cos\frac{\pi}{x}):0<x\leq 1\}$ آن‌گاه $(A,\mathcal{T}_e/A)$ همبند قوسی است. اگر $S=A\cup\{(0,0)\}$ آن‌گاه ثابت کنید $(S,\mathcal{T}_e/S)$ همبند قوسی نیست. نشان دهید که A یک مؤلفهٔ قوسی S است. تمام مؤلفه‌های قوسی $A\cup\{(0,y):-1\leq y\leq 1\}$ را به‌دست آورید.

۳. آیا مؤلفهٔ قوسی فضای $(S,\mathcal{T})$ بسته است؟

۴. آیا مؤلفه‌های قوسی فضای $(S,\mathcal{T})$ یک افراز برای S تشکیل می‌دهند؟

۵. آیا حاصل‌ضرب تیخونوف دو فضای همبند قوسی، همبند قوسی است؟

۶. اگر $(S,\mathcal{T})$ فضای هاسدورف باشد به سؤالات ۳، ۴ و ۵ پاسخ دهید.

۷. ثابت کنید که هر فضای متریک پیوستار همبند موضعی، همبند قوسی است (چنین فضایی را فضای پئانو می‌گویند).

۸. ثابت کنید که خاصیت پئانو یک خاصیت توپولوژیکی است. آیا این خاصیت موروثی است؟ آیا حاصل‌ضرب دو فضای پئانو، فضای پئانو است؟ آیا خاصیت پئانو تحت تابع پیوسته پایدار است؟

۹. آیا هر فضای باناخ همبند قوسی است؟

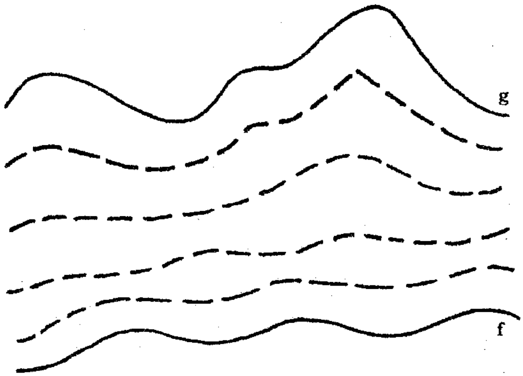
۶-۵ گروههای هموتوپی

برخی اوقات می‌توانیم به جای یک تابع پیچیده از تابع ساده‌تری استفاده کنیم که خواص مورد مطالعهٔ ما در هر دو یکسان باشند و در حقیقت تابع ساده‌تر تقریبی از تابع پیچیدهٔ مورد مطالعهٔ ما باشد. نظریهٔ هموتوپی را، با مسامحه، نظریهٔ مطالعهٔ تبدیلات پیوستهٔ خمها می‌نامند.

۵-۶-۱ هموتوپی

فرض کنیم f و g دو تابع پیوسته از فضای توپولوژیک S به فضای توپولوژیک Y باشند. یک هموتوپی از f به g تابعی پیوسته مانند $F: S \times [۰,۱] \to Y$ است که $F(x,۰) = f(x)$، $F(x,۱) = g(x)$.

اگر برای هر $t \in [۰,۱]$، $h_t(x) = F(x,t)$، می‌توان گفت که گردایهٔ $\{h_t : t \in [۰,۱]\}$ نمودار $h_۰ = f$ را به‌طور پیوسته به نمودار $h_۱ = g$ تبدیل می‌کند.



اگر یک هموتوپی از f به g وجود داشته باشد می‌نویسیم $f \sim g$

«~» یک رابطهٔ هم‌ارزی است زیرا

الف) $F(x,t) = f(x)$, $(x,t) \in S \times [۰,۱]$ یک هموتوپی از f به f است.

ب) اگر $F(x,t)$ یک هموتوپی از f به g باشد، $G(x,t) = F(x, ۱-t)$ یک هموتوپی از g به f است.

ج) اگر $F(x,t)$ یک هموتوپی از f به g و $G(x,t)$ یک هموتوپی از g به h باشد آن‌گاه

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, ۲t) & t \in [۰, \frac{۱}{۲}] \\ G(x, ۲t-۱) & t \in [\frac{۱}{۲}, ۱] \end{cases}$$

یک هموتوپی از f به h است.

درحالت کلی تعیین این‌که آیا یک رابطهٔ هموتوپی بین دو تابع داده شده f و g وجود دارد، مشکل است و یکی از مسائل اصلی درنظریهٔ هموتوپی تلقی می‌شود.

۵-۶-۲ فضای نقطه‌مند

یک فضای نقطه‌مند، یک فضای توپولوژیک S همراه یک نقطهٔ مفروض $x_۰$ (موسوم به نقطهٔ پایه) است.

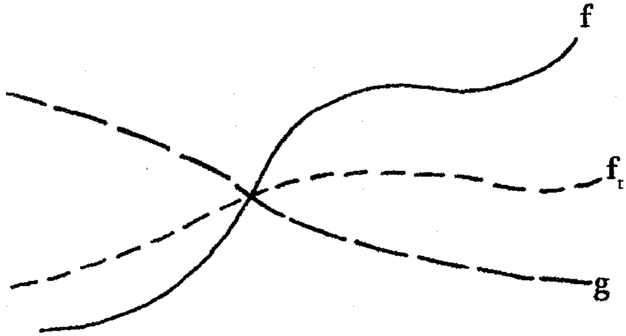
اگر S و Y دو فضای نقطه‌مند به‌ترتیب با نقطهٔ پایه $x_۰$ و $y_۰$ باشند، آن‌گاه تابع پیوستهٔ $f: S \to Y$ را نقطه‌مند می‌گوییم، هرگاه $f(x_۰) = y_۰$.

اگر g, f دو تابع نقطه‌مند از S به Y باشند، یک هموتوپی نقطه‌مند از f به g، یک هموتوپی

$F:S \times [0,1] \to Y$ است، به طوری که به‌ازای هر $t \in [0,1]$، $F(x_0,t) = f(x_0) = g(x_0) = y_0$.

فضای نقطه‌مند S را هم‌ارز هموتوپی با فضای نقطه‌مند Y می‌گویند هرگاه توابع نقطه‌مند $f:S\to Y$ و $g:Y\to S$ وجود داشته باشند، به طوری که $g \circ f:S \to S$ با تابع همانی روی S و تابع $f \circ g:Y \to Y$ با تابع همانی روی Y، هموتوپی نقطه‌مند باشند.

به‌طور شهودی می‌توان گفت که S هم‌ارز هموتوپی Y است، هرگاه بتوان به‌طور پیوسته S را به Y تبدیل کرد. برای مثال $\mathbb{R}^n$ و فضای تک نقطه‌ای، هم‌ارز هموتوپی هستند درحالی‌که کرهٔ S^2 هم‌ارز هموتوپی با یک نقطه نیست. زیرا حفره داخل کره را نمی‌توانیم (به‌طور پیوسته) حذف کنیم.



مسألهٔ تعیین این‌که آیا دو فضا هم‌ارز هموتوپی هستند، یکی از مسائل مشکل نظریهٔ هموتوپی است.

اینک به سوی تعریف گروههای هموتوپی قدم برداشته و به بررسی نقش این گروهها در توصیف فضاهای توپولوژیک می‌پردازیم:

فرض کنیم S و Y دو فضای نقطه‌مند و $Map_*(S,Y)$ مجموعهٔ تمام توابع نقطه‌مند از S به Y باشد. این مجموعه خیلی بزرگ است. اما با قراردادن رابطهٔ هموتوپی نقطه‌مند که یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $Map_*(S,Y)$ است، می‌توان مجموعهٔ مناسب‌تر $[S,Y]$ شامل همهٔ رده‌های هم‌ارزی $[f]$ را تشکیل داد. توجه نمایید که $[f]=[g]$، اگر و فقط اگر یک هموتوپی نقطه‌مند از f به g وجود داشته باشد.

حال n امین گروه هموتوپی فضای نقطه‌مند S را برابر $\{S^n,S\}$ تعریف می‌کنیم و با نماد $\pi_n(S)$ نمایش می‌دهیم. در این‌جا S^n کرهٔ واحد در فضای $\mathbb{R}^{n+1}$ است.

اما ساختار $\pi_n(S)$ چیست؟ درواقع وقتی $n = 0$، $\pi_n(S)$ صرفاً یک مجموعه است. بنا به تعریف S^0 مرز کرهٔ واحد یک-بعدی یعنی $[-1,1]$ است، پس $S^0 = \{-1,1\}$. نقطهٔ -1 را به‌عنوان نقطهٔ پایهٔ S^0 ثابت فرض می‌کنیم و x_0 را نقطهٔ پایهٔ S درنظر می‌گیریم. اگر $f:S^0 \to S$ یک تابع نقطه‌مند باشد، باید $f(-1) = x_0$ ولی $f(1)$ می‌تواند هر نقطه‌ای از S باشد. درواقع می‌توان $Map_*(S^0,S)$ را تحت نگاشت $f\to f(1)$ با مجموعهٔ S یکی فرض نمود. حال اگر f,g دو تابع نقطه‌مند از S^0 به S باشند و یک هموتوپی نقطه‌مند $F:S^0 \times [0,1] \to S$ از

f به g وجود داشته باشد، آن‌گاه برای هر $(\circ \leq t \leq ۱)$، $F(-۱, t) = x_\circ$ و به‌علاوه $F(۱, t)$ تابعی پیوسته از $[\circ, ۱]$ به S است که $F(۱, \circ) = f(۱)$ و $F(۱, ۱) = g(۱)$ و در حقیقت، برحسب متغیر t، مسیری پیوسته از نقطهٔ $f(۱)$ به $g(۱)$ است. برعکس اگر یک مسیر پیوسته از نقطهٔ $f(۱)$ به $g(۱)$ موجود باشد یک هموتوپی نقطه‌مند از f به g به‌دست می‌آید.

به این ترتیب با یکی انگاشتن $Map_*(S^\circ, S)$ و S، مجموعهٔ $\pi_\circ(S)$ در تناظر یک به یک با مجموعهٔ مؤلفه‌های همبند مسیری S قرار می‌گیرد. توجه نمایید که دو نقطه از S متعلق به یک مؤلفهٔ همبند مسیری هستند، هرگاه یک مسیر پیوسته از یکی به دیگری وجود داشته باشد. به‌ویژه، فضای S همبند مسیری است، اگر و فقط اگر $\pi_\circ(S)$ تک عضوی باشد.

$\pi_۱(S) = [S^۱, S]$ گروه بنیادین S نامیده می‌شود. $\pi_۱(S)$ درواقع دارای یک ساختار گروه است که در ذیل به توصیف آن می‌پردازیم. این گروه در دههٔ ۱۸۹۰ توسط هانری پوانکاره معرفی گردید.

فرض کنیم $e^{۲\pi i} = ۱$ نقطهٔ پایه $S^۱ = \{e^{۲i\pi t}: \circ \leq t \leq ۱\}$ باشد. چون f تابع نقطه‌مند است پس $f(۱) = x_\circ$. وقتی پارامتر t از $\circ$ تا ۱ تغییر می‌کند، $f(e^{۲\pi it})$ یک مسیر پیوسته در S خواهد بود که از نقطه پایهٔ $x_\circ$ شروع و به خود $x_\circ$ ختم می‌شود و بنابراین $f(e^{۲\pi it})$ یک مسیر بسته (موسوم به کمند) در S تشکیل می‌دهد. حال اگر f و g دو تابع نقطه‌مند از $S^۱$ به S، یعنی دو کمند در S باشند، آن‌گاه

$$(f * g)\ (e^{۲\pi it}) = \begin{cases} f(e^{۲\pi i(۲t)}) & \circ \leq t \leq \frac{۱}{۲} \\ g(e^{۲\pi i(۲t)}) & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱ \end{cases}$$

که متعلق به $Map_*(S^۱, S)$ است و با پیمودن f و سپس g حاصل شده است.

حال $[f * g] = [f].[g]$ یک عمل خوش تعریف روی $\pi_۱(S)$ است که آن را به یک گروه تبدیل می‌کند. در حالت کلی $[f].[g]$ کمندی است که ابتدا f و سپس g را می‌پیماید، درحالی‌که $[g].[f]$ کمندی است که ابتدا g و سپس f را می‌پیماید. لذا در حالت کلی $\pi_۱(S)$ یک گروه نا جابه‌جایی است. عضو خنثای این گروه $[e_{x_\circ}]$ است که در آن $e_{x_\circ}$ تابع نقطه‌مند $e_{x_\circ}(e^{۲\pi it}) = x_\circ\ (\circ \leq t \leq ۱)$ است و وارون کمند f، کمند $g(t) = f(۱-t)$ است. اگر S همبند مسیری باشد، ساختار گروهی $\pi_۱(S)$، مستقل از انتخاب نقطهٔ پایهٔ $x_\circ$ است.

برای مثال گروه بنیادین $S_۱$ برابر مجموعهٔ اعداد صحیح است [۱۰].

اگر S و Y دو فضای توپولوژیک همبند مسیری و همسانریخت باشند، آن‌گاه $\pi_۱(S)$ و $\pi_۲(Y)$ دو گروه یکریخت خواهند بود ولی عکس این مطلب درست نیست.

برای مثال، هر زیر مجموعهٔ محدّب S از $\mathbb{R}^n$ همبند ساده است. زیرا اگر f کمندی در $\mathbb{R}^n$ (با نقطهٔ پایه $x_\circ$) باشد، آن‌گاه $F(S, t) = tx_\circ + (۱-t)f(S)$ یک هموتوپی نقطه‌مند از f به کمند ثابت $e_{x_\circ}$ است.

برای $n \geq ۲$، $\pi_n(S)$ یک گروه جابه‌جایی است. فرض کنیم قطب شمال ،نقطهٔ پایهٔ S^n باشد و Y یک فضای خارج قسمتی از S^n باشد که از به هم چسباندن دوگوی S^n به یکدیگر در نقطهٔ قطب شمال حاصل

شده باشد. اگر f و g دو تابع نقطه‌مند از S^n به S باشند، تابع $f \cup g: Y \to S$ که تحدیدش به یکی ازگویهای Y تابع f و به گوی دیگر تابع g است، همراه با نگاشت خارج قسمتی از S^n به Y یک تابع نقطه‌مند از S^n به S به‌دست می‌دهد که ردهٔ هم‌ارزی آن حاصل‌ضرب $[f]$ و $[g]$ در $\pi_n(S)$ تلقی می‌گردد ساختار $\pi_n(S)$ بسیار پیچیده است و برای تعداد اندکی از فضاها شناخته شده است. همچون $\pi_1(S)$، اگر S همبند مسیری باشد، ساختار گروهی $\pi_n(S)$ مستقل از انتخاب نقطهٔ پایهٔ x_0 است.

۵-۶ مسائل

۱. فرض کنید S_1 یک زیرمجموعهٔ همبند از $\mathbb{R}^n$ و S_2 یک فضای توپولوژیک دلخواه باشد. نشان دهید هر تابع $f: S_1 \to S_2$ با هر تابع ثابتی، هموتوپی است.

۲. فرض کنید $g, f: S_1 \to S_2$ رابطهٔ هموتوپی با یکدیگر داشته باشند و A زیرمجموعهٔ S_1 باشد. نشان دهید $f|_A \sim g|_A$.

۳. ثابت کنید دو تابع $f, g: S \to \prod_{\alpha \in I} S_\alpha$ هموتوپی هستند، اگر و فقط اگر به‌ازای هر افکنش π_α، $\pi_\alpha \circ f \sim \pi_\alpha \circ g$.

۴. فرض کنید $f, f': S_1 \to S_2$ و $g, g': S_2 \to S_3$ داده شده باشند ثابت کنید اگر $f \sim f'$ و $g \sim g'$ آن‌گاه $g \circ f \approx g' \circ f'$.

منابع

۱. سیمز، مبانی توپولوژی، ترجمه جعفر زعفرانی، اصفهان، انتشارات دانشگاه اصفهان، ۱۳۷۲.

۲. سیمونز، ج. ف. آشنایی با توپولوژی و آنالیز نوین (قسمت اول)، ترجمه اسداله نیکنام. تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵.

۳. مانکرز، جیمز ریموند، توپولوژی نخستین درس، ترجمهٔ یحیی تابش و دیگران ،تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۶.

4. Bing, R.H., Elementary point set topology, Washington Amer. Math. Monthly 67(1960), no,7.

5. Bourbaki, A, General Topology, Part 1, Addision-Wesley Publishing Company, 1996.

6. Dugundji, J., Topology, Englewood Cliffs, NJ, Printice–Hall, 1965.

7. Gamelin, T. W. and Greene, R. E., Introduction to Topology, 2nd ed., Dover Publ., 1999.

8. Huggett, S, and Jordan, D., A topological Aperitif, Springer-Verlag, 2001.

9. James, I.M., Topologies and Uniformities, Springer-Verlag, 1999.

10. Kelley, J.L., General Topology, New York: Springer-Verlag, 1975.

11. Kulesza, J., An example in the dimension theory of metric spaces, Top. Appl. 35(1996), no 2-3, 108-120.

12. Massey, W.S., A Basic Course in Algebraic Topology, New York, Springer-Verlag, 1991.

13. Novak, J., On the cartesian product of two compact spaces, Fund. Math, 40(1953), 106-112.

14 .Steen, L. A. and Seebach, A. Jr, Counterexamples in Topology, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970; Springer, New York, 1978; Dover, New York, 1995.

15. Steven, A, Gaal, Point Set Topology, volume 16 of Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, London, 1964.

16. Willard S., General Topology, Reading, Mass: Addison-Wesley Publishing Co, 1970.

17. Mathworld, http://mathword.wolfram.com/

18. Topology Atlas, http://at.yorku.ca/topology/

19. Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Mathematics

واژه‌یاب