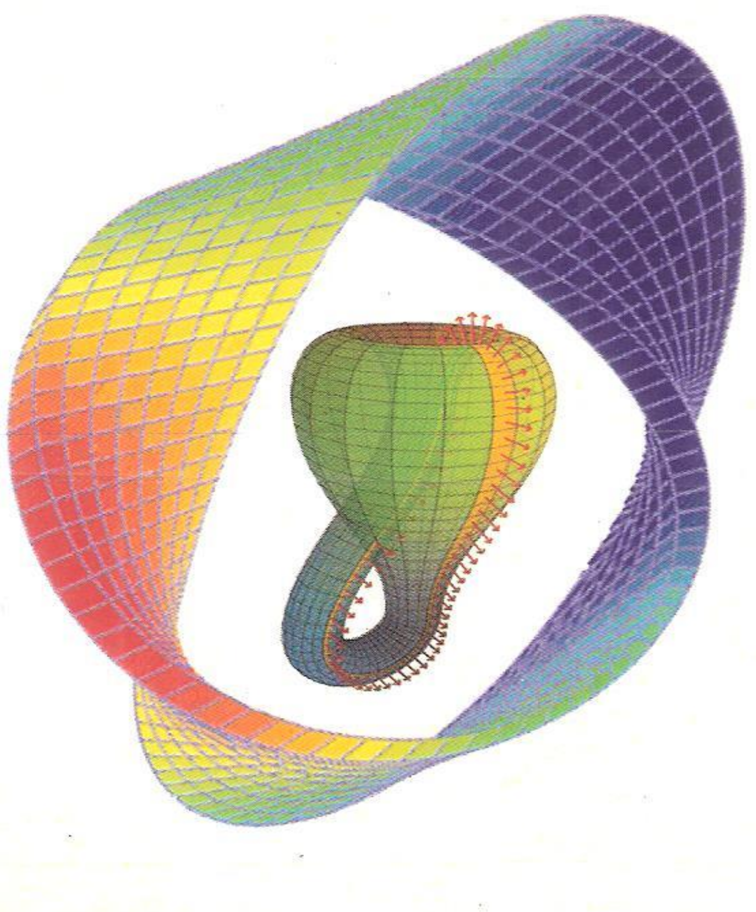
دانشگاه سمنان

توپولوژی



تألیف:
دکتر علی غفّاری
دانشیار دانشگاه سمنان

Topology

Topologically Speaking

Topologically speaking, circles are the same as squares.
Topologically speaking, people are the same as bears.
Your donut is the same as the coffee cup you drink it in each day.
"Upside-down's the same as downside-up," a topologist might say.
Topologically speaking, a quarter is the same as a dime.
You can bet they haven't yet to tell a 6 from a 9.
A topologist can make a t-shirt with a piece of paper and a three-hole punch.
The topological secret is the homeomorphic scrunch!
Topological spaces are the places where topologists live.
They like to drive compact manifolds, for when they bump into each other they give.
You can visit your favourite topologist in a land called RP2, and if the land that you favour is right you just might become a new left-handed you!
Topologically speaking, peaches are the same as pears.
Topologically speaking, people are the same everywhere.
Topologically faces all look just like the one on you!
Topologically races all share one gender, shape and hue.
Topological spaces will expand your point of view.
Cause topologically speaking, I'm just the same as you.
Its true -
I'm just the same as you.
We're homeomorphic!
I'm just the same as you!

Monty Harper

By: Ali Ghaffari (Ph.D.)

ISBN:978-964-7978-18-7

9 789647 978187

Semnan University Press
2009

دانشگاه سمنان

انتشارات دانشگاه سمنان

توپولوژی

تالیف:

علی غفاری

سرشناسه : غفاری، علی، ۱۳۵۱ -
عنوان و نام پدیدآور : توپولوژی / تالیف علی غفاری .
مشخصات نشر : سمنان : دانشگاه سمنان ، ۱۳۸۶.
مشخصات ظاهری : ث، ۱۶۳ ص.
فروست: انتشارات دانشگاه سمنان.
شابک : ۷-۱۸-۷۹۷۸-۹۶۴-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
یادداشت : کتابنامه: ص. ۱۶۳.
موضوع : توپولوژی .
موضوع : توپولوژی جبری .
موضوع : فضاهای توپولوژی .
شناسه افزوده : دانشگاه سمنان .
رده بندی کنگره : ۹ت۷غ/QA۶۱۱
رده بندی دیویی : ۵۱۴
شماره کتابشناسی ملی : ۱۰۴۳۸۱۲

انتشارات دانشگاه سمنان

عنوان کتاب: توپولوژی

نوبت چاپ : دوم- ۱۳۸۸
مؤلف : دکتر علی غفاری
طرح روی جلد و صفحه آرایی: اسماعیل شجاعی
چاپ : نفیس سمنان
شمارگان : ۷۰۰ جلد
قیمت: ۳۹۰۰۰ ریال

شابک : ۷-۱۸-۷۹۷۸-۹۶۴-۹۷۸

تلفن انتشارات: ۳۳۲۰۲۹۵-۰۲۳۱

پیشگفتار

ثمره‌ی تدریس درس توپولوژی در چندین نیم‌سال در دانشگاه‌ها، کتابی است که هم اکنون در اختیار دارید. مباحث این کتاب به همان صورتی ترتیب یافته و تنظیم شده است که در دانشگاه‌های ایران تدریس می شود. کتاب حاضر مقدمه‌ای بر توپولوژی است که براساس برنامه مصوب شورای عالی برنامه‌ریزی برای تدریس در یک نیم‌سال تدوین شده و شامل هشت فصل است. قبل از معرفی هشت فصل لازم است اهمیت توپولوژی در شاخه‌های مختلف ریاضی را از زبان توپولوژی بشنویم.

اگر آنالیز را به‌عنوان یک فضای توپولوژیک در نظر بگیریم که مجموعه‌های باز این فضا شاخه‌های مختلف آنالیز باشند، در آن صورت توپولوژی زیرمجموعه‌ی چگالی از این فضا خواهد بود. گزاره‌ی مشابه برای رشته‌های هندسه و توپولوژی جبری نیز صادق است، به عبارت دیگر توپولوژی در همه‌ی شاخه‌های هندسه و توپولوژی جبری نقش به‌سزایی دارد. با کمی مطالعه، وجود همیومورفیسمی بین تصورات ذهنی خواننده از توپولوژی و مطالب گفته شده در بالا محرز خواهد شد.

در فصل اول خواننده با نمادها و مطالبی که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد آشنا می‌شود. در فصل دوم به یادآوری فضاهای متریک می‌پردازیم و چون هر فضای متریک یک فضای توپولوژیک است، نتایج به‌دست آمده در مورد فضاهای توپولوژیک برای فضاهای متریک نیز برقرارند و لذا به‌طور سطحی از این فصل عبور می‌کنیم. در فصل سوم به مطالعه‌ی فضای توپولوژیک پرداخته و در این فصل پایه و زیرپایه و همچنین فضای حاصل‌ضربی را معرفی می‌کنیم. در فصل چهارم اصول جداسازی که یکی از مهم‌ترین مباحث توپولوژی است، مورد مطالعه قرار می‌گیرد و در این فصل قضایایی چون قضیه‌ی گسترش تیتسه و لم اوریسون اثبات می‌شوند. فصل پنجم به معرفی فضاهای توپولوژیک فشرده پرداخته و در انتهای فصل به‌طور کامل مفهوم فشردگی و تعاریف معادل با آن را در فضاهای متریک مطالعه می‌کنیم. فصل ششم به فضاهای همبند و فضاهای همبند راهی و ارتباط بین آنها اختصاص دارد. فصل هفتم به مطالعه‌ی یکی از مطالبی

که در دوره‌های تحصیلات تکمیلی کاربرد فراوانی دارد می‌پردازیم. در این فصل مفهوم تور ارائه می‌شود که تعمیمی از تعریف دنباله است و خصوصیات فضاها به‌وسیله‌ی تورها بررسی می‌شوند. در فصل آخر خواننده را با گروه‌های توپولوژیک آشنا می‌کنیم.

در این کتاب، در اثبات قضایا سعی شده کوتاه‌ترین و قابل فهم‌ترین برهان‌ها به‌کار گرفته شود و در موارد لازم، برای فهم بهتر مطالب مثال‌هایی ارائه گردیده است. برای مثال یکی از مهمترین قضایا، قضیه‌ی تیخونوف است که از بین همه‌ی برهان‌ها، استفاده از قضیه‌ی الکساندروف ساده‌ترین راه برای اثبات آن است.

تلاش زیادی شده است تا کتاب را بدون عیب و نقص و عاری از اشکالات تقدیم علاقمندان نمایم. با این وجود تذکرات ارزشمند همکاران گرامی و دانشجویان عزیز سبب رفع اشکالات احتمالی در چاپ‌های بعدی خواهد شد. در خاتمه از همه‌ی عزیزانی که به نوعی در به انجام رسیدن این کتاب نقش داشته‌اند تشکر می‌کنم.

فهرست

۱ مجموعه و تابع ۱

۱–۱ مقدمه ۱

۱–۲ مجموعه‌ها و اعمال بین آنها ۱

۱–۳ رابطه‌ها و مفاهیم بنیادی ۳

۲ فضاهای متریک ۱۱

۲–۱ مقدمه ۱۱

۲–۲ تابع فاصله ۱۱

۲–۳ بررسی زیرمجموعه‌های یک فضای متریک ۱۴

۲–۴ فشردگی ۱۸

۳ فضاهای توپولوژیک ۲۷

۳–۱ مقدمه ۲۷

۳–۲ توپولوژی ۲۷

۳–۳ پایه و زیرپایه ۳۶

۳–۴ پیوستگی ۴۱

۳–۵ فضاهای حاصل‌ضربی ۴۹

۳–۶ اصول شمارایی ۵۵

۴ اصول جداسازی ۶۹

۴—۱ مقدمه ۶۹

۴—۲ فضاهای $T_۰$، $T_۱$ و $T_۲$ ۶۹

۴—۳ فضای اوریسون، منظم و به‌طور کامل منظم ۷۵

۴—۴ فضای نرمال و فضای به‌طور کامل نرمال ۸۱

۵ فشردگی ۹۳

۵—۱ مقدمه ۹۳

۵—۲ فشردگی ۹۴

۵—۳ فشردگی موضعی ۱۰۲

۵—۴ فضای لیندلف، شمارا فشرده، دنباله‌ای فشرده و خاصیت بولزانو وایراشتراس ۱۰۸

۵—۵ فشرده‌سازی ۱۱۴

۵—۶ کران‌دار کلی ۱۱۸

۶ همبندی ۱۲۵

۶—۱ مقدمه ۱۲۵

۶—۲ فضاهای همبند ۱۲۵

۶—۳ همبندی موضعی ۱۳۲

۶—۴ همبند راهی ۱۳۵

۶—۵ همسانی ۱۳۸

۷ تور ۱۴۵

۷—۱ مقدمه ۱۴۵

۷—۲ تور و ارتباط آن با مفاهیم توپولوژی ۱۴۶

۸ گروه‌های توپولوژیک ۱۵۳

۸—۱ مقدمه ۱۵۳

۸—۲ گروه توپولوژیک ۱۵۴

فهرست نشانه‌ها و نمادها ۱۶۱

مراجع ۱۶۳

فصل ۱

مجموعه و تابع

۱—۱ مقدمه

پیشرفتِ بیشتر علوم بدون شک مدیون گسترش دانش ریاضی است. نظریه‌ی مجموعه‌ها نقش اساسی در گسترش علم ریاضی ایفاء می‌کند. کسانی که امروزه با ریاضیات سر و کار دارند، به خوبی از نقش بسیار مهم آن در حل مسائل آگاه‌اند. در علم ریاضی اصولی به‌عنوان مبنای کار به حساب می‌آیند که به آنها اصول موضوعی گفته می‌شود. هر یک از این اصول موضوع گویای خاصیتی است که ریاضیدانان جملگی بر آن توافق دارند. براساس این اصول ریاضیات بنا شده است. در این کتاب اهمیت این اصول به روشنی مشخص است و استفاده مداوم از نظریه‌ی مجموعه‌ها و اصول موضوع در هر بخشی به چشم می‌خورد. در توپولوژی یافتن مثال‌ها نقش به‌سزایی در پیشرفت این علم دارد. ریاضیدانان برای دست‌یابی به مثال‌های مورد نیاز از نظریه‌ی مثال‌ها کمک می‌گیرند.

۱—۲ مجموعه‌ها و اعمال بین آنها

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی در مورد مجموعه‌ها و اعمال بین آنها و همچنین توابع و دنباله‌ها می‌پردازیم. این مفاهیم در ادامه بحث ما در خصوص بنیادهای توپولوژی مورد استفاده قرار می‌گیرند. فرض می‌شود خواننده با این موارد آشنا بوده و این فصل تنها برای یادآوری مطالب و معرفی نمادها آورده شده است.

مجموعه، گردایه‌ای از اشیاء مشخص است. مجموعه را می‌توان به‌صورت گردایه‌ای از اشیاء که

در شرایط خاصی صدق می‌کنند نیز تعریف کرد. اگر یک شیء در مجموعه مورد نظر قرار داشته باشد، به اختصار این شیء را عضوی از آن مجموعه می‌گوییم. باید توجه داشت که اعضای مجموعه باید مشخص باشند، در غیر این‌صورت آن گردایه مجموعه نیست. برای مثال گردایه‌ی همه موجودات زیبا یک مجموعه نیست، درحقیقت یک موجود با توجه به سلیقه‌ی افراد می‌تواند عضوی از این گردایه باشد و یا نباشد. از طرف دیگر گردایه‌ی همه اعداد حقیقی بزرگتر از ۲ یک مجموعه را مشخص می‌کند. درحقیقت شکی نیست که یک عدد حقیقی یا بزرگتر از ۲ است که در مجموعه قرار می‌گیرد و یا بزرگتر از ۲ نیست و در مجموعه قرار ندارد و لذا تکلیف مشخص است. در مثال قبلی یک موجود ممکن است براساس سلیقه‌ی فردی زیبا ولی نسبت به سلیقه‌ی فرد دیگری زیبا نباشد. بنابراین اعضاء این گردایه بنابه سلیقه‌ی افراد، متفاوت است و لذا این گردایه مجموعه نیست.

متداول است که مجموعه‌ها را با حروف بزرگ A، B و ... نمایش داده و اعضاء یک مجموعه را با حروف کوچک a، b و ... نمایش می‌دهند. در برخورد با مسائل همواره مجموعه‌ای مورد بحث است که به آن مجموعه‌ی مرجع گفته می‌شود. برای مثال وقتی صحبت از ریاضیدانان می‌شود، مجموعه‌ی مرجع می‌تواند مجموعه‌ی همه‌ی انسان‌های روی کره‌ی زمین باشد. باید توجه داشت که ممکن است با تغییر مجموعه‌ی مرجع جواب‌های متفاوتی برای یک مسئله حاصل شود. بنابراین همیشه باید مجموعه‌ای که اشیاء از آن گرفته می‌شود، به‌طور دقیق مشخص شود.

همواره مجموعه‌ی اعداد مختلط، اعداد حقیقی، اعداد گویا، اعداد صحیح و اعداد طبیعی را به‌ترتیب با نماد $\mathbb{C}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم. اگر A و B دو مجموعه باشند به‌طوری که هر عضو A عضوی از B باشد، می‌گوییم A زیرمجموعه‌ای از B یا A مشمول B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$. بعلاوه چنانچه A زیرمجموعه‌ی B و B زیرمجموعه‌ای از A باشد در این‌صورت A و B را مساوی گوییم و می‌نویسیم $A = B$. اگر A زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی مرجع M و x عضوی از مجموعه‌ی مرجع باشد، عضویت x در A را به‌صورت $x \in A$ و عدم عضویت x به A را به شکل $x \notin A$ نمایش می‌دهیم. نماد $\emptyset$ برای نمایش مجموعه‌ی تهی به‌کار می‌رود.

در تعریف بعدی از زوج مرتب دو عنصر استفاده شده است که جهت یادآوری در این‌جا بیان می‌شود. اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه و x و y نیز به‌ترتیب از A و B اختیار شوند، زوج‌مرتب x و y، $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ تعریف می‌شود. از این پس زوج‌مرتب x و y را با نماد (x, y) نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱ ـ ۱. فرض کنید M مجموعه‌ی مرجع و A و B زیرمجموعه‌های M باشند، در آن‌صورت اجتماع دو مجموعه با نماد $A \cup B$ نمایش داده و بنابه تعریف مجموعه‌ی همه‌ی عناصری از مجموعه‌ی مرجع است که حداقل در یکی از دو مجموعه‌ی A یا B قرار داشته باشد. بعلاوه اشتراک،

تفاضل و حاصل‌ضرب این دو مجموعه به‌ترتیب با نمادهای $A \cap B$، $A \backslash B$ و $A \times B$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A \cap B = \{x \in M;\ x \in A,\ x \in B\},$$

$$A \backslash B = \{x \in M;\ x \in A,\ x \notin B\},$$

$$A \times B = \{(x, y);\ x \in A,\ y \in B\}.$$

بعلاوه اجتماع یک گردایه از مجموعه‌ها بنابه تعریف عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی x هایی که حداقل در یکی از اعضای گردایه قرار داشته باشد. اشتراک اعضای این گردایه، همه‌ی عناصری هستند که در هر یک از اعضای این گردایه قرار دارند. همین‌طور مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A را با $\mathcal{P}(A)$ و تفاضل M و A را با A^c نمایش داده و متمم A می‌نامیم.

یادآوری می‌کنیم که اگر دو مجموعه با هم اشتراک داشته باشند، یعنی اشتراک آن دو ناتهی باشد، گوییم آن دو مجموعه هم‌دیگر را قطع می‌کنند.

۱ـــ۳ رابطه‌ها و مفاهیم بنیادی

تعریف ۱ ـ ۲. هر زیرمجموعه از حاصل‌ضرب دکارتی A در B را یک رابطه از A در B گوییم. در حالت خاص یک رابطه روی A یک زیرمجموعه از حاصل‌ضرب دکارتی A در A می‌باشد. اگر R رابطه‌ای از A در B و $(a, b) \in R$، در آن‌صورت گوییم a و b با هم رابطه دارند و گاهی به‌صورت aRb نیز نمایش می‌دهیم. اگر R رابطه‌ای از A در B باشد، این رابطه، رابطه دیگری چون $R^{-1} := \{(y, x);\ (x, y) \in R\}$ را مشخص می‌کند که به آن معکوس رابطه R گوییم.

رابطه‌های زیادی از A در B تعریف می‌شوند ولی تعدادی از آنها در ریاضیات از اهمیت بیشتری برخوردارند. یک رابطه‌ی R در A، رابطه‌ای هم‌ارزی است هرگاه:

الف) R انعکاسی باشد، یعنی برای هر $a \in A$، aRa؛

ب) R تقارنی باشد، یعنی برای هر $a, b \in A$، $aRb \implies bRa$؛

ج) R تعدی باشد، یعنی برای هر $a, b, c \in A$، $aRb \wedge bRc \implies aRc$.

شاید برای خواننده این سوال مطرح شود که آیا همواره روی یک مجموعه رابطه‌ای هم‌ارزی می‌توان تعریف نمود؟ جواب مثبت است، چرا که رابطه‌ی

$$R = \{(x, x);\ x \in A\}$$

ساده‌ترین رابطه‌ی هم‌ارزی روی A است که مشمول هر رابطه‌ی هم‌ارزی روی A است. فرض کنیم R رابطه‌ای هم‌ارزی روی A باشد. برای هر $x \in A$، $[x] = \{y \in A;\ xRy\}$ را رده هم‌ارزی مربوط به x تعریف می‌کنیم و مجموعه تمام این رده‌های هم‌ارزی را با نماد A/R نمایش می‌دهیم. واضح است که هر دو رده‌ی متمایز مجزا هستند، یعنی هیچ اشتراکی با هم ندارند. برای فهم بهتر، فرض کنیم دو نقطه در صفحه در صورتی با هم رابطه دارند که فاصله آنها تا مبدا یکی باشد. این رابطه، رابطه‌ای هم ارزی است که رده‌های هم ارزی متشکل از همه دایره‌هایی به مرکز مبدا مختصات است.

یکی دیگر از رابطه‌های مورد توجه در ریاضیات، مفهوم تابع است. یک تابع f از A بتوی B رابطه‌ای از A در B است، با این خصوصیت که برای هر $x \in A$ یک $y \in B$ موجود است که $(x, y) \in f$. بعلاوه اگر برای $z \in B$ ای، $(x, z) \in f$، بتوان نتیجه گرفت که $x = y$. ساده ترین توابع از A در B، توابع ثابت هستند. برای راحتی کار اگر f تابعی از A در B باشد، به‌جای $(x, y) \in f$ می‌نویسیم $y = f(x)$ و همین‌طور می‌نویسیم $f : A \to B$. اکثر نویسندگان گاهی از کلمه نگاشت به‌جای تابع استفاده می‌کنند که هر دو دارای یک مفهوم اند. تابع f را یک به یک گوییم هرگاه از $f(x) = f(y)$ بتوان نتیجه گرفت که $x = y$. f را پوشا گوییم هرگاه برای هر $y \in B$ یک $x \in A$ موجود باشد که $f(x) = y$. در این حالت f را تابعی از A به‌روی B نامیم. برای هر زیرمجموعه C از B، $f^{-1}(C)$ را تصویر معکوس C تحت تابع f نامیده و به‌صورت $f^{-1}(C) = \{x \in A;\ f(x) \in C\}$ تعریف می‌کنیم. برای زیرمجموعه D از A، $f(D) = \{f(x);\ x \in D\}$ را تصویر D گوییم. اگر $f : A \to B$ یک به یک و پوشا باشد، از تعریف به آسانی ملاحظه می‌شود که $f^{-1} : B \to A$ یک تابع است و برای هر $y \in B$، $f(f^{-1}(y)) = y$. اگر f تابعی دلخواه باشد، در آن‌صورت برد تابع f مجموعه‌ی همه‌ی $y \in B$ هایی است که برای حداقل یک $x \in A$، $f(x) = y$. سرانجام اگر $f : A \to B$ و $g : B \to C$ توابعی دلخواه باشند، در آن‌صورت تابع $h := gof : A \to C$ با ضابطه $h(x) = g(f(x))$، ترکیب دو تابع f و g نامیده می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که اگر f تابعی یک به یک از A به‌روی B باشد، در آن‌صورت A و B را هم‌عدد و f را تناظری یک به یک بین A و B گوییم. در ریاضیات مجموعه‌های زیادی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. بعضی از مجموعه‌ها متناهی و تعدادی دیگر نامتناهی هستند. مجموعه‌هایی که با اعداد طبیعی همعدد هستند، یعنی تناظری یک به یک بین آن مجموعه و مجموعه‌ی اعداد طبیعی وجود دارد، مجموعه‌ی شمارا گوییم. مثالی از تناظر یک به یک بین اعداد طبیعی و اعداد

طبیعی زوج، تابعی است که هر عدد طبیعی را به دو برابر آن عدد نسبت می‌دهد و لذا مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی زوج یک مجموعه‌ی شماراست. مجموعه‌هایی که نه متناهی و نه شمارا هستند را مجموعه‌های ناشمارا نامیم و آن مجموعه‌هایی که ناشمارا نیستند را حداکثر شمارا گوییم. می‌دانیم که مجموعه‌ی اعداد صحیح و مجموعه‌ی اعداد گویا، شمارا ولی مجموعه‌ی اعداد حقیقی ناشماراست. قضیه‌ی زیر یکی از قضایایی است که در توپولوژی و آنالیز مورد استفاده قرار می‌گیرد و به‌علت استفاده‌ی زیاد در این کتاب، اثبات ساده‌ای از آن را ارائه می‌کنیم.

قضیه۱ ـ ۳. *اجتماع تعداد شمارا از مجموعه‌های شمارا، شماراست.*

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شماراست. برای این کار تابع $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را با ضابطه $f(m,n) = ۲^m۳^n$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $f(m,n) = f(k,l)$، در این‌صورت $۲^m۳^n = ۲^k۳^l$. فرض کنیم $m > k$، لذا $۲^{m-k}۳^n = ۳^l$. طرف چپ تساوی مضربی از ۲ است ولی طرف راست تساوی این‌گونه نیست. این تناقض نشان می‌دهد که $m = k$ و لذا $n = l$. بنابراین f تابعی یک به یک است و درنتیجه $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ با زیرمجموعه‌ای نا متناهی از اعداد طبیعی هعمدد است و لذا شماراست.

اکنون فرض کنیم $\{A_m\}_{m=۱}^{\infty}$ یک خانواده شمارا از مجموعه‌های شمارا باشد. برای هر m، فرض کنیم $A_m = \{a_{m۱}, a_{m۲}, \dots\}$. تابع $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{m=۱}^{\infty} A_m$ را با ضابطه $h(m,n) = a_{mn}$ تعریف می‌کنیم. واضح است که h تابعی پوشاست و لذا $\bigcup_{m=۱}^{\infty} A_m$ شماراست. ■

تعریف۱ ـ ۴. فرض کنیم $\preceq$ یک رابطه بر A باشد، $\preceq$ یک رابطه‌ی ترتیب بر A است هرگاه:

الف) $\preceq$ انعکاسی باشد؛

ب) $\preceq$ پادتقارنی باشد، یعنی برای هر $a, b \in A$، $a \preceq b \ \wedge \ b \preceq a \implies a = b$؛

ج) $\preceq$ تعدی باشد.

اگر $\preceq$ یک رابطه‌ی ترتیب بر A باشد، در آن‌صورت A را یک مجموعه‌ی مرتب جزئی گوییم. مجموعه‌ی مرتب جزئی A که با رابطه‌ی $\preceq$ مرتب شده است را با نماد $(A, \preceq)$ نمایش می‌دهیم. در صورتی که هر دو عنصر A با هم مقایسه شوند (برای هر دو عنصر x و y، $x \preceq y$ یا $y \preceq x$)، A را مرتب کلی گوییم. مجموعه‌ی اعداد حقیقی نسبت به رابطه‌ی کوچکتر یا مساوی، یک مجموعه‌ی مرتب است. مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی A نسبت به رابطه‌ی جزئیت یک مجموعه‌ی مرتب است، اما یک مجموعه‌ی مرتب کلی نیست. اگر $(A, \preceq)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد، زیرمجموعه‌ی مرتب کلی S از A را یک زنجیر در A گوییم. در ریاضیات مجموعه‌های مرتب

کلی از اهمیت خاصی برخوردارند.

تعریف۱ ــ ۵. فرض کنید $(A, \preceq)$ یک مجموعه مرتب کلی و $S \subseteq A$،

الف) $\beta \in A$ را یک کران بالای S گوییم هرگاه برای هر $x \in S$، $x \preceq \beta$. در این حالت S را از بالا کران‌دار گوییم. اگر کران بالائی از S در S قرار داشته باشد، این کران بالا را یک عضو ماکسیمال S می‌نامیم.

ب) کران بالای $\alpha \in A$ را کوچکترین کران بالای S گوییم هرگاه هیچ کران بالائی از α کمتر نباشد، به عبارت دیگر کران بالای دیگری چون β نتوان یافت که $\beta \preceq \alpha$. به کوچکترین کران بالای یک مجموعه، سوپریموم آن مجموعه گفته می‌شود و با نماد $\sup$ معرفی می‌شود.

به‌طور مشابه کران پائین یک مجموعه و بزرگترین کران پائین تعریف می‌شود و ما بزرگترین کران پائین یک مجموعه را اینفیموم آن مجموعه نامیده و با نماد $\inf$ نمایش می‌دهیم. اگر مجموعه مرجع، مجموعه همه اعداد حقیقی باشد، از خواننده انتظار داریم که سوپریموم و اینفیموم $A = \{x \in [-۱۳۸۶, ۱۳۸۶];\ x^{۶} + x^{۳} - ۲۰۰۷ < ۰\}$ را با دلیل کافی بیابد.

در اعداد حقیقی، اصلی وجود دارد که به آن اصل کمال نامند، که بیان می‌کند هر زیرمجموعه‌ی ناتهی و از بالا کران‌دار از اعداد حقیقی دارای سوپریموم است. هر زیرمجموعه‌ی ناتهی و از پائین کران‌دار از اعداد حقیقی دارای اینفیموم است که البته معادل بودن این مطلب با اصل کمال کار بس آسانی است.

اگر مجموعه‌ی مرجع مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، زیرمجموعه‌ی $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x^{۲} \leq ۲\}$ از اعداد حقیقی دارای سوپریموم و اینفیموم است. اما اگر مجموعه‌ی مرجع اعداد گویا باشد، این مجموعه در اعداد گویا سوپریموم و اینفیموم ندارد. توجه کنید که این یک مثالی است که اهمیت مجموعه مرجع را نشان می‌دهد.

فرض کنیم I یک مجموعه‌ی اندیس‌گذار و $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های ناتهی باشد. حاصل‌ضرب این خانواده از مجموعه‌ها با نماد $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ نمایش داده و مجموعه‌ی همه‌ی توابعی چون $f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ است که برای هر $\alpha \in I$، $f(\alpha) \in A_\alpha$. دقت داریم که وجود چنین توابعی بنابه اصل انتخاب تضمین می‌شود. قبل از ادامه بحث به بعضی از صورت‌های معادل اصل انتخاب اشاره‌ای می‌کنیم و پس از آن به بحث در مورد حاصل‌ضرب مجموعه‌ها می‌پردازیم.

اصل انتخاب صورت‌های معادل دیگری نیز دارد، بدین معنی که هرگاه هر یک از آنها را بپذیریم گزاره‌های دیگر معادل با آن را می‌توان ثابت کرد. این واقعیت را به‌صورت قضیه‌ی زیر بیان

می‌کنیم. برای اثبات این قضیه خواننده می‌تواند به مراجع ذکر شده در پایان کتاب مراجعه کند.

قضیه ۱ ـ ۶. *گزاره‌های زیر معادلند:*

الف) *اصل انتخاب، بیان می‌کند حاصل‌ضرب هر تعداد از مجموعه‌های ناتهی، ناتهی است.*

ب) *لم زورن، بیان می‌کند که اگر $(A, \preceq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد که هر زنجیر از عناصر A دارای یک کران بالا در A باشد، در آن‌صورت A دارای یک عنصر ماکسیمال است.*

ج) *اصل ماکسیمال هاسدورف، بیان می‌کند که اگر $(A, \preceq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد و Ω خانواده همه زنجیرهای $(A, \preceq)$ باشد، در آن‌صورت Ω نسبت به رابطه‌ی جزئیت دارای عضو ماکسیمال است.*

صورت‌های هم ارز اصل انتخاب دارای کاربردهای وسیعی در شاخه‌های مختلف ریاضیات می‌باشند و هر یک ابزار قدرتمندی برای اثبات قضایای وجودی در ریاضیات هستند.

اکنون به ادامه‌ی بحث در مورد حاصل‌ضرب مجموعه‌ها می‌پردازیم. شاید این سوال مطرح شود که چرا نام مجموعه‌ی ذکر شده در بالا حاصل‌ضرب نام‌گذاری شده است؟ توجه داریم که حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه به‌صورت زوج‌های مرتب تعریف شده است و حاصل‌ضرب دکارتی n مجموعه به‌صورت n تایی‌های مرتب است. بعلاوه اگر حاصل‌ضرب یک تعداد شمارا از مجموعه‌ها را در نظر بگیریم، مجبوریم اعضای آن را به‌صورت $(x_۱, x_۲, x_۳, \ldots)$ نمایش دهیم. اکنون سوال این‌جاست که اگر حاصل‌ضرب تعداد ناشمارا از مجموعه‌ها مورد نظر باشد چگونه عمل کنیم؟ می‌خواهیم ادعا کنیم که حاصل‌ضرب تعریف شده در بالا برای هر تعداد مجموعه، تعمیمی از حاصل‌ضرب دکارتی برای تعداد متناهی مجموعه است. برای این کار اگر $A_۱$ و $A_۲$ و ... و A_n، n مجموعه‌ی مفروض باشند. قرار می‌دهیم $I = \{۱, ۲, \ldots, n\}$. به n تایی مرتب $(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ از حاصل‌ضرب دکارتی $A_۱ \times A_۲ \times \cdots \times A_n$، تابع $f : I \to \bigcup_{i=۱}^{n} A_i$ را با ضابطه $f(i) = x_i$ نسبت می‌دهیم. در حقیقت به یک n تایی مرتب یک تابع از حاصل‌ضرب تعریف شده نسبت می‌دهیم. اکنون اگر $f : I \to \bigcup_{i=۱}^{n} A_i$ تابعی از حاصل‌ضرب تعریف شده در بالا باشد، برای هر $i \in I$، $f(i) \in A_i$. به این تابع، n تایی $\big(f(۱), \ldots, f(n)\big)$ نسبت داده می‌شود. با این توضیحات، دلیل نام‌گذاری حاصل‌ضرب تعریف شده به‌طور کامل مشخص می‌شود. نمونه دیگری برای صحت این ادعا، به تعریف دنباله توجه می‌کنیم. یک دنباله در حقیقت تابعی از اعداد طبیعی به یک مجموعه ناتهی X است. اگر f یک دنباله باشد، مرسوم است که این دنباله را به‌صورت $\big(f(۱), f(۲), \ldots\big)$ نمایش دهیم. در حقیقت یک دنباله به‌صورت یک بی‌نهایت تایی است. گاهی برای راحتی کار با نماد $\{f(n)\}_{n=۱}^{\infty}$ نیز نمایش می‌دهند.

تمرین ۱

۱. فرض کنیم $f: X \to Y$ تابعی دلخواه و $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ و $\{B_\beta\}_{\beta \in J}$ به‌ترتیب خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X و Y باشند. نشان دهید که:

الف) $f\Big(\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha\Big) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$؛

ب) $f\Big(\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha\Big) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$؛

ج) $f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{\beta \in J} B_\beta\Big) = \bigcup\limits_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta)$؛

د) $f^{-1}\Big(\bigcap\limits_{\beta \in J} B_\beta\Big) = \bigcap\limits_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta)$.

۲. فرض کنیم $f: X \to Y$ تابعی دلخواه و A و B به‌ترتیب زیرمجموعه‌های X و Y باشند. نشان دهید که:

الف) $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$، اگر f یک به یک باشد تساوی برقرار است؛

ب) $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$، اگر f پوشا باشد تساوی برقرار است.

۳. فرض کنیم $f: X \to Y$ تابعی دلخواه باشد،

الف) اگر برای هر زیرمجموعه‌ی A از X، $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$، نشان دهید f یک به یک است.

ب) اگر برای هر زیرمجموعه‌ی B از Y، $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$، نشان دهید f پوشاست.

۴. ثابت کنید $f: X \to Y$ یک به یک است اگر و تنها اگر برای هر دو زیرمجموعه‌ی A و B از X، $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. این سؤال غلط است مثال نقض تابع ثابت ،

۵. عدد حقیقی r را عددی جبری گوییم هرگاه r ریشه یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد. ثابت کنید مجموعه‌ی همه‌ی اعداد جبری شماراست.

۶. نشان دهید مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی از مجموعه‌ی اعداد طبیعی شماراست.

۷. ثابت کنید تناظری یک به یک بین $[0,1]$ و مجموعه‌ی همه‌ی زیردنباله‌های $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد.

۸. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از $[0,\infty)$ بوده که سوپریموم آن از یک کمتر است. اگر برای هر x و y از A که $x < y$، $\frac{x}{y} \in A$. ثابت کنید سوپریموم، ماکزیمم مجموعه‌ی A است.

۹. سوپریموم $\{\cos n;\ n \in \mathbb{N}\}$ را با دلیل کافی محاسبه کنید.

۱۰. فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد. برای هر $\alpha \in I$ و $n \in \mathbb{N}$، زیرمجموعه $A_{\alpha,n}$ از X_α را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \prod_{\alpha\in I} A_{\alpha,n} = \prod_{\alpha\in I} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha,n}.$$

۱۱. فرض کنید $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد. برای هر $\alpha \in I$، نگاشت $\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to X_\alpha$ را با ضابطه $\pi_\alpha(x) = x(\alpha)$ تعریف می کنیم. برای هر $\alpha \in I$، زیرمجموعه A_α از X_α را در نظر می‌گیریم. نشان دهید:

الف) $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)$؛

ب) $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha \setminus \prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus A_\alpha)$.

فصل ۲

فضاهای متریک

۲—۱ مقدمه

از ویژگی‌های ریاضیات در قرن بیستم، توسعه و تعمیم مفاهیم و قضایای مربوط به فضاها و مجموعه‌های ملموس می‌باشد. یکی از مهمترین مفاهیمی که دستخوش چنین تعمیمی شده است، مفهوم فاصله است. در مجموعه‌ی اعداد حقیقی فاصله دو نقطه از یکدیگر به‌صورت قدرمطلق تفاضل آنها در نظر گرفته می‌شود. با اندکی دقت می‌توان مفهوم فاصله را به مجموعه‌های دیگری با ساختار پیچیده‌تر گسترش داد و قضیه‌ها و تعاریف جالبی را از آن استخراج کرد. در این فصل ابتدا به تعریف تابع فاصله (متریک) روی مجموعه‌ی مفروض X می‌پردازیم و سپس به بیان مفاهیم و خواص اساسی تابع فاصله خواهیم پرداخت. یادآوری فضاهای متریک یکی از هدف‌های اصلی این فصل است. در آینده‌ی نزدیک فضای توپولوژیک را مطالعه خواهیم کرد و چون هر فضای متریک یک فضای توپولوژیک است، لذا دلیلی برای صرف وقت زیاد در این فصل وجود ندارد. این فصل جهت یادآوری و بررسی تعدادی از خصوصیت که ممکن است در فضای توپولوژیک برقرار نباشد، تدوین شده است.

۲—۲ تابع فاصله

در آنالیز کلاسیک مفهوم پیوستگی و همگرایی دنباله‌ها مورد مطالعه قرار گرفت. دیدیم که تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $x \in \mathbb{R}$ پیوسته است هرگاه به اندازه‌ی کافی نزدیک بودن $y \in \mathbb{R}$ به x،

نزدیک بودن $f(y)$ به $f(x)$ را ایجاب کند. اکنون قصد داریم مجموعه ناتهی X را با تابعی که به آن تابع فاصله گفته می‌شود مورد مطالعه قرار دهیم. قصد داریم فاصله‌ی دو عنصر را طوری تعریف کنیم که با تعریف موجود در آنالیز کلاسیک هم‌خوانی داشته و بیان پیوستگی و تعاریف دیگر به همان زبان قابل بیان باشد. این بخش به تعریف متریک و بیان چند مثال از فضاهای متریک اختصاص دارد.

تعریف ۲ ـ ۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ یک متر روی X است هرگاه:

الف) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$؛

ب) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$؛

ج) برای هر $x, y, z \in X$، $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

در این حالت X را یک فضای متریک و $d(x,y)$ را فاصله x و y نامیم.

چون مترهای متفاوتی روی یک مجموعه‌ی X تعریف می‌شود، ما از نماد (X,d) برای معرفی فضای X با متر d استفاده می‌کنیم. خواهیم دید که مترهای متفاوت، خواص متفاوتی را روی X القاء می‌کنند. ساده‌ترین مثال از یک فضای متریک، مجموعه‌ی اعداد حقیقی با متر $d(x,y) = |x-y|$ است. بعلاوه اگر X مجموعه‌ای دلخواه باشد، تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ که در شرایط زیر صدق می‌کند، یک متر روی X تعریف می‌کند که به آن متر گسسته گوییم.

الف) برای هر $x \in X$، $d(x,x) = 0$؛

ب) برای هر دو عنصر x و y از X، $d(x,y) = 1$.

دقت داریم که می‌توان در متر گسسته به‌جای عدد ۱ هر عدد مثبت α قرار داد. تعویض عدد ۱ با هر عدد مثبت دیگر شکل تابع را عوض خواهد کرد، چرا که برد تابع اول شامل ۱ است ولی برد دیگری عدد مثبت دیگری است. ما به این تابع که به‌جای عدد ۱ عدد مثبت دیگری است، نیز متر گسسته گوییم. در حقیقت ما با قرار دادن متر روی فضا به بررسی خصوصیات آن فضا می‌پردازیم و خصوصیات فضا برای ما حائز اهمیت است. بنابراین اگر خصوصیات فضا تحت دو متر، یکی باشد از نظر ما آن دو متر یکی هستند. در آینده نزدیک خواهیم دید که این دو متر خصوصیات یکسانی را روی فضا القاء می‌کنند. پس بدون توجه به ظاهر این دو متر، هر دو را متر گسسته معرفی می‌کنیم.

برای هر دو عنصر $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ از $\mathbb{R}^n$، قرار می‌دهیم $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. به‌سادگی دیده می‌شود d یک متر روی $\mathbb{R}^n$ است که به آن متر

اقلیدسی گوییم.

مثال ۲ ـ ۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد، در آن‌صورت تابع

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

یک متر روی X تعریف می‌کند. در حقیقت چون d یک متر است، خواص (الف) و (ب) در تعریف متر به‌سادگی قابل بررسی است. اکنون تابع f را روی اعداد حقیقی نامنفی با ضابطه‌ی $f(t) = \frac{t}{1+t}$ تعریف می‌کنیم. با مشتق‌گیری، به‌سادگی دیده می‌شود این تابع صعودی است. حال فرض کنیم x، y و z سه عنصر دلخواه از X باشند. چون d متر است، لذا

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

از طرف دیگر f تابعی صعودی است، بنابراین

$$\begin{aligned}
d_1(x, z) &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} \\
&= f\big(d(x, z)\big) \\
&\leq f\big(d(x, y) + d(y, z)\big) \\
&= \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\
&= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\
&\leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} \\
&= d_1(x, y) + d_1(y, z)
\end{aligned}$$

لذا d_1 یک متر است.

مثال ۲ ـ ۲. فرض کنیم $\{(X, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ یک خانواده از فضاهای متریک باشد. فرض کنیم $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$، یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت بوده که سری $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ همگراست، در آن‌صورت تابع $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)}$ یک متر روی X تعریف می‌کند. برای بررسی این موضوع چون d_n ها متر هستند، خواص (الف) و (ب) در تعریف متر به‌سادگی قابل بررسی است. حال فرض کنیم x، y و z سه عنصر دلخواه از X باشند. چون برای هر n، d_n متر است، لذا بنابه مثال قبل

$$\frac{d_n(x, z)}{1 + d_n(x, z)} \leq \frac{d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)} + \frac{d_n(y, z)}{1 + d_n(y, z)}.$$

با ضرب c_n در رابطه‌ی بالا و جمع آن از $n = 1$ تا بی‌نهایت، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{d_n(x,z)}{1+d_n(x,z)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{d_n(y,z)}{1+d_n(y,z)} \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

لذا d یک متر روی X است.

۲—۳ بررسی زیرمجموعه‌های یک فضای متریک

در بخش قبل مفهوم یک فضای متریک به‌طور دقیق مورد مطالعه قرار گرفت. چندین فضای متریک را با مترهای متفاوت مورد بررسی قرار دادیم. اکنون قصد داریم خصوصیات زیرمجموعه‌های یک فضای متریک را بررسی کنیم. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک، x عنصری از X و r عدد حقیقی مثبت باشد. منظور از گوی باز به مرکز x و شعاع r که با نماد $S_r(x)$ نمایش می‌دهیم مجموعه‌ی همه‌ی y هایی است که فاصله‌ی آنها از x کمتر از r است. دقت کنید که اگر $\mathbb{R}$ با متر گسسته در نظر گرفته شود، گوی به مرکز صفر و شعاع ۱ مجموعه‌ای تک عضوی است. از طرف دیگر اگر $\mathbb{R}$ را با متر اقلیدسی در نظر بگیریم، گوی به مرکز صفر و شعاع یک، بازه $(-1,1)$ خواهد بود. این توضیح نشان می‌دهد که کار کردن با مترهای متفاوت نتایج متفاوتی را به همراه دارد. بنابراین در برخورد با مسائل باید به متر مورد نظر توجه کرد.

تعریف۲ ـ ۲. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $A \subseteq X$،

الف) عنصر $x \in X$ را نقطه‌ی چسبیدگی A گوییم، هرگاه هر گوی باز به مرکز x، A را قطع کند. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط چسبیدگی A را با $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم و بستار A نامیم.

ب) عنصر $x \in X$ را نقطه‌ی حدی A گوییم، هرگاه هر گوی باز به مرکز x، A را در نقطه‌ای غیر از x قطع کند. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط حدی A را با A' نمایش می‌دهیم.

ج) عنصر $x \in A$ را نقطه‌ی درونی A گوییم، هرگاه گوی بازی به مرکز x موجود باشد که مشمول A باشد. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط درونی A را با A° نمایش می‌دهیم.

د) عنصر $x \in X$ را نقطه‌ی مرزی A گوییم، هرگاه این عنصر نقطه‌ی چسبیدگی A بوده اما نقطه‌ی درونی نباشد. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط مرزی A را با نماد $\mathrm{bd}(A)$ نمایش می‌دهیم.

در فضای متریک X یک مجموعه‌ی A را بسته گوییم هرگاه شامل همه‌ی نقاط حدی خودش

باشد. A را باز گوییم هرگاه هر نقطه‌اش، نقطه‌ی درونی باشد. از تعریف فوق به‌سادگی می‌توان دریافت که یک مجموعه باز است اگر و تنها اگر متمم آن بسته باشد. در حقیقت اگر A در فضای متریک X باز و $x \in A$، در آن‌صورت گوی باز به مرکز x وجود دارد که مشمول A است و لذا این عنصر نقطه‌ی حدی A^c نیست. این نشان می‌دهد که A^c همه‌ی نقاط حدی خود را شامل بوده و لذا بسته است. اکنون فرض کنید x نقطه‌ای دلخواه از A باشد. چون بنابه فرض A^c بسته است، لذا این نقطه، نقطه‌ی حدی A^c نیست. بنابراین گوی بازی به مرکز x و شعاع r موجود است که $S_r(x) \cap A^c - \{x\} = \emptyset$. این نشان می‌دهد که $x \in A$ اما $S_r(x) \cap A^c = \emptyset$ و لذا $S_r(x) \subseteq A$. پس هر نقطه‌ی A درونی است، یعنی A باز است.

در فضای متریک (X, d)، X و مجموعه‌ی تهی باز و همچنین بسته هستند. به‌راحتی دیده می‌شود که یک فضای متریک نامتناهی شامل تعداد نامتناهی مجموعه‌ی باز است. خواهیم دید که مجموعه‌های باز نقش به‌سزایی در بررسی خصوصیات یک فضای متریک ایفاء می‌کنند. در یک فضای متریک همواره از نماد $S_r(x)$ به‌عنوان گوی باز یاد کردیم، در مثال زیر نشان می‌دهیم که این نام‌گذاری منطقی است چرا که $S_r(x)$ باز است.

مثال ۲ ـ ۳. گوی باز به مرکز x و شعاع r در فضای متریک (X, d) مجموعه‌ای باز است. در حقیقت ثابت می‌کنیم هر نقطه‌ی y از $S_r(x)$، یک نقطه‌ی درونی است. چون y عنصری دلخواه از $S_r(x)$ است، لذا $d(x, y) < r$. اختیار کنید $r_۱ = r - d(x, y)$. برای هر عنصر $z \in S_{r_۱}(y)$، خواهیم داشت $d(y, z) < r_۱ = r - d(x, y)$. بنابراین $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r$، این نشان می‌دهد که $z \in S_r(x)$. نتیجه اینکه $S_{r_۱}(y) \subseteq S_r(x)$ و لذا گوی فوق مجموعه‌ی باز است.

دقت داشته باشید که در یک فضای متریک دلخواه همیشه تساوی بین $\overline{\{y;\ d(x, y) < ۱\}}$ و $\{y;\ d(x, y) \leq ۱\}$ برقرار نیست. چرا که اگر $\mathbb{R}$ با متر گسسته d در نظر گرفته شود، در آن‌صورت $\overline{\{y;\ d(x, y) < ۱\}} = \{x\}$ ولی $\{y;\ d(x, y) \leq ۱\} = \mathbb{R}$.

قضیه ۲ ـ ۳. *در یک فضای متریک، گزاره‌های زیر برقرار هستند:*

الف) اجتماع هر تعداد از مجموعه‌های باز، باز است.

ب) اشتراک هر تعداد مجموعه‌ی بسته، بسته است.

ج) اشتراک هر تعداد متناهی از مجموعه‌های باز، باز است.

د) اجتماع هر تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته، بسته است.

برهان. فرض کنید $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های باز در فضای متریک (X, d) باشد.

ادعا می‌کنیم هر نقطه از $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$ یک نقطه‌ی درونی است. برای این‌کار نقطه‌ی دلخواه x را از G اختیار می‌کنیم. بنابه تعریف اجتماع، یک α از مجموعه‌ی اندیس‌گذار وجود دارد که $x \in G_\alpha$. چون همه‌ی G_α ها باز هستند، G_α شامل یک گوی باز به مرکز x خواهد بود. لذا این گوی بنابه تعریف اجتماع مشمول G است و این برهان قسمت (الف) را کامل می‌کند.

برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنید $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های بسته از فضای متریک (X, d) باشد. لذا برای هر $\alpha \in I$، F_α^c باز است و بنابه قسمت اول $\bigcup\limits_{\alpha \in I} F_\alpha^c$ باز است. نتیجه این‌که $\bigcup\limits_{\alpha \in I} F_\alpha^c = \left(\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha\right)^c$ باز است و لذا $\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ بسته است.

برای اثبات قسمت (ج)، فرض کنید $G_۱, \ldots, G_n$ تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز از فضای متریک (X, d) باشند. عنصر x را از $G = \bigcap\limits_{i=۱}^{n} G_i$ انتخاب می‌کنیم. با توجه به باز بودن G_i ها، برای هر i، یک r_i موجود است که $S_{r_i}(x) \subseteq G_i$. با قرار دادن $r = \min\{r_۱, \ldots, r_n\}$، به‌سادگی دیده می‌شود که $S_r(x) \subseteq G$. لذا G باز است.

با متمم‌گیری و استفاده از برهان قسمت (ب)، قسمت آخر ثابت می‌شود. ■

$\mathbb{R}$ را با متر اقلیدسی در نظر می‌گیریم. برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $A_n = \left(\frac{-۱}{n}, \frac{۱}{n}\right)$. لذا $\bigcap\limits_{n=۱}^{\infty} A_n = \{۰\}$. این نشان می‌دهد که لزومی ندارد اشتراک هر تعداد مجموعه‌ی باز، باز باشد. همین‌طور برای هر n، قرار می‌دهیم $F_n = \left[۱ + \frac{۱}{n}, ۳\right]$. هر F_n بسته است ولی $\bigcup\limits_{n=۱}^{\infty} F_n = (۱, ۳]$ بسته نیست. این نشان می‌دهد که گاهی اوقات اجتماع هر تعداد مجموعه‌ی بسته، ممکن است بسته نباشد.

قضیه ۲ ـ ۴. *اگر x نقطه‌ی حدی مجموعه‌ی A از فضای متریک (X, d) باشد، در آن‌صورت هر گوی باز به مرکز x، تعدادی نامتناهی از نقاط A را شامل است.*

برهان. فرض کنیم گوی باز به مرکز x و شعاع r، A را در تعداد متناهی نقطه چون $a_۱$ و ... و a_n قطع کند. قرار دهید $r_۱ = \min\{d(x, a_i);\ ۱ \leq i \leq n,\ a_i \neq x\}$. به‌سادگی دیده می‌شود که $S_{r_۱}(x) \subseteq S_r(x)$ و $S_{r_۱}(x)$، A را تنها در نقطه‌ی x قطع می‌کند که با نقطه‌ی حدی بودن نقطه‌ی x در تناقض است. ■

از قضیه فوق نتیجه می‌شود که هر مجموعه‌ی متناهی فاقد نقطه‌ی حدی است و لذا بسته است. خواننده به‌سادگی می‌تواند بررسی کند که اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از یک فضای متریک باشند، در آن‌صورت $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. اما این موضوع برای نقاط درونی درست نیست. برای مثال $\mathbb{R}$ را با متر اقلیدسی در نظر می‌گیریم. درون مجموعه‌ی اعداد گویا و درون مجموعه‌ی اعداد گنگ تهی

است، ولیکن درون اجتماع این دو، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. قضیه‌ی زیر موضوعی را در مورد درون اجتماع دو مجموعه بررسی می‌کند.

قضیه۲ ـ ۵. *فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه از فضای متریک (X,d) باشند. اگر $\overline{A}=A$ و $B^\circ = A^\circ = \emptyset$، درآن‌صورت $(A\cup B)^\circ = \emptyset$.*

برهان. اگر $x\in (A\cup B)^\circ$، ثابت می‌کنیم $x\in A$. فرض کنیم $x\notin A$. از آنجا که $\overline{A}=A$، لذا r ای هست که $S_r(x)\cap A=\emptyset$. از طرف دیگر x نقطه‌ی درونی $A\cup B$ است و لذا r_1 ای هست که $S_{r_1}(x)\subseteq A\cup B$. اگر r_0 مینیمم r و r_1 اختیار شود، به‌سادگی دیده می‌شود که $S_{r_0}(x)\cap A=\emptyset$ و $S_{r_0}(x)\subseteq S_{r_1}(x)\subseteq A\cup B$. بنابراین $S_{r_0}(x)\subseteq B$، یعنی $x\in B^\circ$ که تناقض است. درنتیجه $x\in A$. از توضیحات فوق داریم $(A\cup B)^\circ\subseteq A$ و لذا $(A\cup B)^\circ\subseteq A^\circ=\emptyset$. ■

مثال۲ ـ ۴. می‌خواهیم نشان دهیم که $[0,1]$، مجموعه‌ی نقاط چسبیدگی $A=\left\{\frac{k}{2^n};\ 1\le k\le 2^n,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ است. در حقیقت $A\subseteq[0,1]$ و بنابراین $\overline{A}\subseteq[0,1]$. برای اثبات عکس جزئیت، $x>0$ را از $[0,1]$ در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم هر گوی به مرکز x و شعاع r، مجموعه A را قطع می‌کند. بنابه خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، عدد طبیعی n وجود دارد که $2^n x>1$ و $r>\frac{1}{2^n}$. بنابه تعریف جزء صحیح، $[2^n x]\le 2^n x<[2^n x]+1$ و لذا

$$\frac{[2^n x]}{2^n}\le x<\frac{[2^n x]+1}{2^n}.$$

اگر $k=[2^n x]$، از رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم که $0\le x-\frac{k}{2^n}<\frac{1}{2^n}<r$، یعنی $\frac{k}{2^n}\in S_r(x)$. پس $\overline{A}=[0,1]$.

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و $Y\subseteq X$. می‌دانیم $d:X\times X\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ تابعی است که در تعدادی شرایط صدق می‌کند. می‌توانیم این تابع را روی $Y\times Y$ تحدید کنیم. لذا این تحدید، یک متر روی Y است و Y با این متر یک فضای متریک است. اگر x عنصری از Y باشد، ما گوی باز به مرکز x و شعاع r در فضای Y را با نماد $S_r(x)^Y$ نمایش می‌دهیم. لذا

$$S_r(x)^Y=\{y\in Y;\ d(x,y)<r\}=\{y\in X;\ d(x,y)<r\}\cap Y=S_r(x)\cap Y.$$

قضیه۲ ـ ۶. *فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و $G\subseteq Y\subseteq X$. درآن‌صورت G در Y باز است اگر و تنها اگر یک مجموعه‌ی باز W در X موجود باشد که $G=W\cap Y$.*

برهان. فرض کنیم G در فضای Y باز باشد. برای هر $x\in G$، r_x ای موجود است که $S_{r_x}(x)^Y=S_{r_x}(x)\cap Y\subseteq G$. قرار دهید $W=\bigcup_{x\in G}S_{r_x}(x)$. واضح است W مجموعه‌ای باز در

X است و $G = W \cap Y$.

برعکس، فرض کنید W مجموعه‌ای باز در X باشد. ادعا می‌کنیم $G = W \cap Y$ در Y باز است. اگر $x \in G$ دلخواه باشد، لذا $x \in W$. چون W در X باز است، لذا r ای هست که $S_r(x) \subseteq W$. بنابراین

$$S_r(x)^Y = S_r(x) \cap Y \subseteq W \cap Y = G$$

این نشان می‌دهد که G در Y باز است. ■

قضیه‌ی فوق رابطه‌ی بین مجموعه‌های باز Y و مجموعه‌های باز X را مشخص می‌کند. سوال این‌جاست که آیا ارتباطی بین مجموعه‌های بسته از Y و مجموعه‌های بسته از X وجود دارد؟ جواب مثبت است، در حقیقت فرض کنیم $F \subseteq Y \subseteq X$ مجموعه‌ای بسته در Y باشد، بنابراین $Y \backslash F$ مجموعه‌ای باز در Y است. بنابه قضیه‌ی قبل، W باز در X وجود دارد که $Y \backslash F = W \cap Y$. زیرمجموعه‌ی بسته $E = X \backslash W$ از X را در نظر می‌گیریم. به‌راحتی دیده می‌شود که $F = E \cap Y$.

اکنون فرض کنیم E مجموعه‌ای بسته در X بوده و $F = E \cap Y$. ادعا می‌کنیم F در Y بسته است. در حقیقت $Y \backslash F = (X \backslash E) \cap Y$. باز بودن $X \backslash E$ در X و قضیه‌ی قبل، باز بودن $Y \backslash F$ در Y را تضمین می‌کند. نتیجه اینکه F در Y بسته است. بنابراین با توجه به توضیحات فوق به‌طور دقیق زیرمجموعه‌های بسته زیرفضای Y مشخص می‌شوند.

اگر $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی در نظر گرفته شود، در آن‌صورت $[0, 1)$ در $[0, 2]$ باز است ولی مجموعه‌ی فوق در $\mathbb{R}$ باز نیست. علاوه براین مجموعه‌ی $[0, 1)$ در $(-1, 1)$ بسته است، اما در $\mathbb{R}$ بسته نیست. بنابراین باز یا بسته بودن نسبت به فضاها حائز اهمیت است.

۲—۴ فشردگی

مفهومی‌که در آنالیز و توپولوژی نقش مهمی دارد، مفهوم فشردگی است که در این بخش بیان می‌شود. در این بخش فضاهای متریک فشرده به‌طور مختصر مورد بررسی قرار می‌گیرند و مفاهیم پیشرفته در مورد فضاهای متریک فشرده در فصل پنجم مطرح می‌شود.

تعریف ۲ ـ ۷. خانواده‌ی $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از مجموعه‌ها را یک پوشش برای A گوییم هرگاه $A \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$. گوییم این پوشش دارای زیرپوشش متناهی است هر گاه بتوان G_{α_1} و ... و G_{α_n} از اعضای این خانواده را طوری یافت که $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$. زیرمجموعه A از فضای متریک (X, d) را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز برای A دارای زیرپوشش متناهی باشد.

در هر فضای متریک مجموعه‌های متناهی فشرده هستند. برای هر n، قرار می‌دهیم $A_n = (-n, n)$، به‌سادگی دیده می‌شود که $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک پوشش باز برای $\mathbb{R}$ است و زیرپوشش متناهی ندارد. از این توضیح نتیجه می‌گیریم که $\mathbb{R}$ فشرده نیست.

قضیه ۲ ـ ۸. *زیرمجموعه‌ی $[a,b]$ از اعداد حقیقی با متر اقلیدسی فشرده است.*

برهان. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک پوشش باز برای $[a,b]$ باشد. A را مجموعه‌ی همه‌ی x های از $[a,b]$ اختیار می‌کنیم که $[a,x]$ توسط تعدادی متناهی از اعضای این خانواده پوشیده شود. چون $a \in A$، بنابراین A ناتهی است و b یک کران بالای A است. بنابه اصل کمال، A دارای سوپریموم s است.

اگر $s < b$، α ای از مجموعه‌ی اندیس‌گذار وجود دارد که $s \in G_\alpha$. چون G_α باز است، r ای وجود دارد که $(s-r, s+r) = S_r(s) \subseteq G_\alpha$. اما $[a, s-r]$ توسط تعدادی متناهی از خانواده‌ی فوق چون G_{α_1} و ... و G_{α_n} پوشیده می‌شود. بنابراین $\left[a, s+\frac{r}{2}\right]$ توسط تعداد متناهی از اعضای این خانواده، یعنی G_α و G_{α_1} و ... و G_{α_n} پوشیده می‌شود. که این تناقض با سوپریموم بودن s است. بنابراین $s = b$. ادعا می‌کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ زیرپوشش متناهی دارد. برای این‌کار طبق فرض، α ای موجود است که $b = s \in G_\alpha$. بنابراین r ای موجود است که $(s-r, s+r) \subseteq G_\alpha$. چون $[a, s-r]$ توسط تعداد متناهی از اعضای خانواده‌ی فوق پوشیده می‌شود، این تعداد همراه با G_α مجموعه‌ی $[a,b]$ را می‌پوشاند. لذا $[a,b]$ فشرده است. ■

زیرمجموعه‌ی A از فضای متریک (X,d) را کران‌دار گوییم هرگاه عددی طبیعی مانند M موجود باشد که برای هر x و y از A، $d(x,y) < M$. در حالتی که A کران‌دار باشد، $d(A) = \sup\{d(x,y);\ x, y \in A\}$ را قطر مجموعه‌ی A گوییم. در تمرین‌ها خواهیم دید که مجموعه‌های باز فضای متریک (X,d) با مجموعه‌های باز فضای متریک $\left(X, \frac{d}{1+d}\right)$ یکی است اما ممکن است X با متر d کران‌دار نباشد ولی هر زیرمجموعه از X با متر $\frac{d}{1+d}$ کران‌دار است.

محک‌های زیادی برای فشرده نبودن یک مجموعه وجود دارد. اگر مجموعه‌ای کران‌دار نباشد، فشرده نیست. در حقیقت فرض کنید A مجموعه‌ای فشرده باشد. اگر x عنصری دلخواه از A باشد، واضح است $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(x)$. از آنجا که برای هر n، $S_n(x) \subseteq S_{n+1}(x)$ و A فشرده است، n ای یافت می‌شود که $A \subseteq S_n(x)$. برای هر y و z از A،

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < 2n$$

که نشان می‌دهد A کران‌دار است. از این توضیح می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه‌ی اعداد گویا،

اعداد صحیح و اعداد طبیعی فشرده نیستند. دقت کنید که لزومی ندارد یک مجموعه‌ی کران‌دار، فشرده باشد. برای مثال مجموعه‌ی اعداد حقیقی با متر گسسته کران‌دار است ولی فشرده نیست. در حقیقت تنها مجموعه‌های متناهی، با متر گسسته فشرده هستند.

محک دیگر، بسته بودن مجموعه‌های فشرده است. اگر A فشرده باشد، ادعا می‌کنیم A^c باز است. برای این منظور $x \in A^c$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $y \in A$، عدد حقیقی r_y وجود دارد که $S_{r_y}(x) \cap S_{r_y}(y) = \emptyset$. اکنون A توسط $\{S_{r_y}(y)\}_{y\in A}$ پوشیده می‌شود. از فشردگی A استفاده کرده و A را با تعدادی متناهی از اعضای این خانواده چون $S_{r_{y_1}}(y_1)$ و ... و $S_{r_{y_n}}(y_n)$ می‌پوشانیم. اختیار کنید $r = \min\{r_{y_1}, \ldots, r_{y_n}\}$. بدیهی است که $S_r(x) \cap A = \emptyset$ و لذا $S_r(x) \subseteq A^c$. یعنی x نقطه‌ی درونی A^c خواهد بود. پس A بسته است. از این موضوع نتیجه می‌شود که زیرمجموعه‌ی $(0, 1]$ از اعداد حقیقی فشرده نیست.

در صورتی‌که صحبت از فضای $\mathbb{R}^n$ می‌شود و متر آن به‌طور صریح بیان نمی‌شود، منظور ما همان متر اقلیدسی است. دیدیم هر مجموعه‌ی فشرده بسته و کران‌دار است، شاید برای خواننده سوال مطرح شود که آیا هر مجموعه‌ی بسته و کران‌دار فشرده است. پاسخ منفی است، چرا که زیرمجموعه $[0, 1]$ از اعداد حقیقی با متر گسسته بسته و کران‌دار است، اما فشرده نیست. همین‌طور $\mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ زیرمجموعه‌ای بسته و کران‌دار از $\mathbb{Q}$ است که فشرده نیست.

مثال ۲ ــ ۵. زیرمجموعه‌ی بسته‌ی F از یک فضای فشرده‌ی X، فشرده است. در حقیقت اگر $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک پوشش باز برای F باشد، در این‌صورت $X \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha \cup F^c$. چون X فشرده است، تعدادی متناهی از G_α ها همراه با F^c یک پوشش باز برای X است. لذا این خانواده‌ی متناهی همراه با F^c پوشش برای F است. لذا F توسط تعدادی متناهی از G_α ها پوشیده می‌شود.

مثال ۲ ــ ۶. فرض کنیم $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های فشرده از فضای متریک (X, d) بوده که اشتراک هر تعداد متناهی از این خانواده ناتهی است. در آن‌صورت اشتراک همه‌ی K_n ها ناتهی است. در حقیقت اگر $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$، در آن‌صورت $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c = X$. لذا $K_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c$. فشردگی K_1 نتیجه می‌دهد که این مجموعه توسط تعدادی متناهی از K_n^c ها پوشیده می‌شود، یعنی $K_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} K_{n_i}^c$. واضح است که $\bigcap_{i=1}^{m} K_{n_i} \cap K_1 = \emptyset$، که این تناقض با فرض است.

به خاصیتی که از آن صحبت کردیم خاصیت اشتراک متناهی گفته می‌شود. در آنالیز و توپولوژی مسائلی مطرح می‌شود که استفاده از خاصیت اشتراک متناهی کلید حل مشکل خواهد بود. عنصری که در اشتراک همه‌ی اعضای خانواده قرار دارد در بیشتر مسائل اهمیت خاصی دارد.

قضیه ۲ ـ ۹. *هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی از مجموعه‌ی فشرده‌ی A، نقطه‌ی حدی دارد.*

برهان. فرض کنیم B یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی از مجموعه‌ی فشرده‌ی A باشد. فرض کنیم هیچ نقطه‌ای از A نقطه‌ی حدی B نباشد. پس برای هر $x \in A$، r_x ای هست که $S_{r_x}(x) \cap B$ حداکثر شامل x است. گردایه‌ی $\{S_{r_x}(x)\}_{x\in A}$ یک پوشش باز برای A است. از فشردگی A استفاده کرده و A را با تعدادی متناهی از اعضای این گردایه چون $S_{r_{x_1}}(x_1)$ و ... و $S_{r_{x_n}}(x_n)$ می‌پوشانیم. لذا

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_{r_{x_i}}(x_i) \cap B.$$

اما طرف راست تساوی قبل شامل حداکثر n عنصر است که نتیجه می‌دهد B متناهی است. که تناقض با فرض قضیه است. ■

قضیه ۲ ـ ۱۰. *فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای متریک (X, d) باشد که هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی از آن دارای یک نقطه‌ی حدی در A باشد. در آن‌صورت A بسته و کران‌دار است.*

برهان. فرض کنیم x یک نقطه‌ی حدی A باشد. $a_1 \in A$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $d(x, a_1) < 1$. برای هر عدد طبیعی n، عنصر a_n را از A طوری انتخاب می‌کنیم که $d(x, a_n) < \frac{1}{n}$ و $a_n \notin \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. وجود چنین عنصری به علت نامتناهی بودن $S_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$ است. با ادامه این روند زیرمجموعه‌ی نامتناهی $B = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ از A به‌دست خواهد آمد. ادعا می‌کنیم x نقطه‌ی حدی B بوده و B نقطه‌ی حدی دیگری غیر از x ندارد. اگر r عددی مثبت باشد، بنابه خاصیت ارشمیدسی، عدد طبیعی m وجود دارد که $\frac{1}{m} < r$. برای هر $n > m$، $a_n \in S_r(x) \cap B$. لذا x نقطه‌ی حدی B است. اگر $y \in A$ نقطه‌ی حدی دیگری برای B غیر از x باشد. عدد طبیعی m وجود دارد که $\frac{2}{m} < d(x, y)$. برای هر $n > m$،

$$d(y, a_n) \geq d(x, y) - d(x, a_n) > d(x, y) - \frac{d(x, y)}{2} = \frac{d(x, y)}{2}.$$

این نشان می‌دهد که گوی $S_{\frac{d(x,y)}{2}}(y)$، حداکثر m نقطه از B را شامل است که با نقطه‌ی حدی بودن y در تناقض است. پس B نقطه‌ی حدی دیگری به غیر از x ندارد و بنابه فرض $x \in A$. این نتیجه می‌دهد که A بسته است.

فرض کنیم A کران‌دار نباشد و عنصر x از A را در نظر می‌گیریم. a_1 ای از A موجود است که $d(x, a_1) > 1$. به استقرا عنصر a_n را از A طوری انتخاب می‌کنیم که

$$d(a_n, a_{n-1}) > 1 + d(a_{n-1}, a_{n-2}) + \cdots + d(a_1, x).$$

قرار دهید $B = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. با توجه به روند یافتن a_n ها، B مجموعه‌ای نامتناهی است و هیچ نقطه‌ی حدی در A ندارد. ■

دیدیم که در حالت کلی هر مجموعه‌ی بسته و کران‌دار در یک فضای متریک فشرده نیست. این موضوع برای زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^n$ درست است. قضیه‌ی زیر که به قضیه‌ی هاینه بورل معروف است دلیل بر این ادعاست. خواننده برای اثبات این قضیه می‌تواند به مراجعی که در انتهای کتاب آورده شده است مراجعه کند. البته در آینده ثابت می‌کنیم که حاصل‌ضرب هر تعداد از فضاهای توپولوژیک فشرده، فشرده است و چون هر فضای متریک یک فضای توپولوژیک است، بنابراین حاصل‌ضرب هر تعداد از فضاهای متریک فشرده، فشرده است. با پذیرفتن این ادعا زیرمجموعه‌ی $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ از $\mathbb{R}^n$ فشرده است. اگر $A \subseteq \mathbb{R}^n$ بسته و کران‌دار باشد، لذا برای عددی طبیعی مانند k، $A \subseteq [-k, k] \times \cdots \times [-k, k]$. بنابراین A زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از یک مجموعه‌ی فشرده است و لذا فشرده است. درنتیجه معادل بودن سه گزاره زیر با این توضیح و قضایای قبل به اثبات می‌رسد.

قضیه ۲ ـ ۱۱. *فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد. گزاره‌های زیر معادلند:*

الف) *A بسته و کران‌دار است.*

ب) *A فشرده است.*

ج) *هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی از A، در A نقطه‌ی حدی دارد.*

قضیه ۲ ـ ۱۲. *فرض کنید d معرف متر اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ باشد. فرض کنید $F \subset \mathbb{R}^n$ بسته و $x \notin F$، آنگاه $y \in F$ موجود است که*

$$d(x, F) := \inf\{d(x, z);\ z \in F\} = d(x, y).$$

برهان. برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $F_n = \left\{z \in F;\ d(x, z) \leq d(x, F) + \frac{1}{n}\right\}$. ابتدا ثابت می‌کنیم که F_n ها بسته هستند. اگر $z \in F_n^c$ عنصری دلخواه باشد، اختیار کنید $r = d(x, z) - d(x, F) - \frac{1}{n}$. ادعا می‌کنیم $S_r(z) \subset F_n^c$. عنصر دلخواه $a \in S_r(z)$ را در نظر می‌گیریم. لذا

$$d(a, x) \geq d(z, x) - d(a, z) > d(z, x) + d(x, F) + \frac{1}{n} - d(z, x) = d(x, F) + \frac{1}{n}.$$

که نتیجه می‌دهد $a \in F_n^c$. پس F_n ها بسته هستند. از آنجا که F_n ها کران‌دار نیز هستند، لذا F_n ها فشرده می‌باشند. از طرف دیگر F_n ها نزولی هستند و لذا $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. اگر y در اشتراک همه‌ی F_n ها باشد، لذا برای هر n داریم

$$d(x, F) \leq d(x, y) \leq d(x, F) + \frac{1}{n}.$$

درنتیجه $d(x, F) = d(x, y)$. ■

در آخر این فصل به یادآوری همگرائی دنباله‌ها در فضاهای متریک می‌پردازیم. دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای متریک (X, d) به نقطه‌ی $x \in X$ همگراست هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، عدد طبیعی N موجود باشد که برای هر $n > N$، $d(x_n, x) < \epsilon$. دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کوشی است هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، عدد طبیعی N موجود باشد که برای هر $m, n > N$، $d(x_n, x_m) < \epsilon$. به‌سادگی دیده می‌شود دنباله‌ی $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ کوشی است ولی در فضای $(0, 1]$ همگرا نیست. اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای دلخواه و $\dots > n_3 > n_2 > n_1$، در این‌صورت $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ را یک زیردنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ گوییم. از خواننده انتظار داریم که ثابت کند همه‌ی زیردنباله‌های یک دنباله‌ی همگرا، همگراست.

قضیه ۲ ـ ۱۳. *دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای متریک (X, d) به $x \in X$ همگراست اگر و تنها اگر هر زیردنباله‌ی از $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا به x باشد.*

برهان. اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد، لذا هر زیردنباله‌ی آن نیز همگراست. برای اثبات عکس این قضیه، فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به x نباشد. پس $\epsilon > 0$ موجود است که برای $N = 1$ یک $n_1 > 1$ می‌توان یافت که $d(x_{n_1}, x) \geq \epsilon$. یک $n_2 > n_1$ یافت می‌شود که $d(x_{n_2}, x) \geq \epsilon$. با ادامه این روند زیردنباله $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ از $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌دست خواهد آمد. اکنون فرض کنید $\{x_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ زیردنباله دلخواه از $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ باشد. چون برای هر k، $d(x_{n_k}, x) \geq \epsilon$، لذا $\{x_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ به x همگرا نیست که این با فرض در تناقض است. بنابراین $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به x همگراست. ■

دقت کنید که اگر هر زیردنباله‌ی یک دنباله دارای زیردنباله‌ی همگرا باشد، لزومی ندارد دنباله همگرا باشد. برای مثال هر زیردنباله‌ی، دنباله‌ی $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای زیردنباله‌ای همگراست اما $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا نیست. ما بیش از این در مورد دنباله‌ها صحبت نمی‌کنیم چرا که در آینده‌ی نزدیک دنباله‌ها را در فضاهای توپولوژیک مورد بررسی قرار خواهیم داد. همین‌طور ارتباط همگرائی دنباله‌ها و فشردگی فضاها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تمرین ۲

۱. نگاشت $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ را یک شبه متریک روی X گوییم هرگاه ρ همه‌ی خصوصیات متر را به‌جز احتمالاً $\rho(x, y) = 0 \implies x = y$ را دارا باشد. رابطه‌ی R را روی X به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$xRy \iff \rho(x, y) = 0$$

ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی X است. نشان دهید که $d([x],[y]) = \rho(x,y)$ یک متر روی X/R است.

۲. آیا مجموعه‌های بازی که توسط مترهای $d_1(x,y) = \max\{|x_i - y_i|;\ 1 \le i \le n\}$ و $d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ روی $\mathbb{R}^n$ به‌دست می‌آید با مجموعه‌های بازی که توسط متر اقلیدسی تولید می‌شوند یکسانند؟

۳. در یک فضای متریک، یک مجموعه‌ی A را F_σ گوییم هرگاه این مجموعه به‌صورت اجتماع تعدادی شمارا از مجموعه‌های بسته باشد. اگر $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و A مجموعه‌ی F_σ باشد، نشان دهید $f(A)$ نیز F_σ است.

۴. فضای متریک (X,d) را کامل گوییم هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد. ثابت کنید $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ یک متر روی $\mathbb{R}$ است. آیا $\mathbb{R}$ با این متریک، فضای متریک کامل است.

۵. ثابت کنید هر زیرمجموعه‌ی بسته از $\mathbb{R}$ که هر نقطه‌ی آن حدی است، ناشماراست.

۶. زیرمجموعه‌ی A از فضای متریک (X,d) در X چگال است هرگاه $\overline{A} = X$. فرض کنید $\mathbb{R}^2$ به‌صورت اجتماع تعدادی شمارا از مجموعه‌های بسته باشد. نشان دهید اجتماع درون‌های این مجموعه‌های بسته در $\mathbb{R}^2$ چگال است.

۷. بازه $[0,1]$ را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و سپس بازه باز $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ را حذف می‌کنیم. قرار می‌دهیم $C_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$. حال هر یک از دو بازه‌ی موجود را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کرده و قسمت‌های میانی را حذف می‌کنیم و قرار می‌دهیم

$$C_2 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right].$$

اگر این کار را ادامه دهیم دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های C_n به‌دست خواهیم آورد. اشتراک همه‌ی این C_n ها را مجموعه کانتور گویند. نشان دهید:

الف) C ناشماراست.

ب) C هیچ نقطه‌ی درونی ندارد.

ج) C بسته است.

د) C مجموعه‌ی همه‌ی اعدادی در بازه $[0,1]$ است که بسط اعشاری آنها در مبنای ۳ تنها اعداد صفر و ۲ هستند.

۸. تابع $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ مفروض است. اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f^{-1}([x,\infty))$ بسته باشد، ثابت کنید M ای هست که برای هر x، $f(x) \le M$ و برای یک $x_0 \in [0,1]$،

$\sup\{f(x);\ x \in [0, 1]\} = f(x_0)$.

۹. نشان دهید زیرمجموعه‌ای ناشمارا مانند E از $[0, 1]$ وجود دارد که درون $E - E = \{x - y;\ x, y \in E\}$ تهی است.

۱۰. فرض کنید A زیرمجموعه‌ی ناشمارائی از $\mathbb{R}^2$ باشد. ثابت کنید عنصری در A مانند x وجود دارد که برای هر $r > 0$، $S_r(x) \cap A$ ناشماراست.

۱۱. فرض کنید A زیرمجموعه‌ی کران‌داری از فضای متریک (X, d) باشد. برای هر $x \in X$، قرار دهید

$$F(x, A) = \sup\{d(x, y);\ y \in A\}$$

نشان دهید که تابع $f(x) = F(x, A)$ روی X پیوسته است.

۱۲. اگر $f : [a, b] \to [c, d]$ تابعی دلخواه باشد، نشان دهید f پیوسته است اگر و تنها اگر $G(f) = \{(x, f(x));\ x \in [a, b]\}$ در $[a, b] \times [c, d]$ فشرده باشد.

۱۳. (X, d) را فضای متریک فشرده و $f : X \to X$ را تابعی پیوسته در نظر می‌گیریم. اگر برای هر $x, y \in X$، $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. ثابت کنید برای هر $x, y \in X$، $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

۱۴. مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته از $[0, 1]$ به‌توی $[0, 1]$ را با $C([0, 1], [0, 1])$ نمایش می‌دهیم. ثابت کنید $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|;\ x \in [0, 1]\}$ یک متر روی $C([0, 1], [0, 1])$ است. آیا مجموعه‌ی همه‌ی توابع یک به یک از $C([0, 1], [0, 1])$ بسته است؟ آیا مجموعه‌ی همه‌ی توابع پوشا از $C([0, 1], [0, 1])$ بسته است؟ مجموعه‌ی همه‌ی توابع یک به یک و پوشا چطور؟ آیا $C([0, 1], [0, 1])$ فشرده است؟

۱۵. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه‌ی از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر A یا B باز باشد، ثابت کنید $A + B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}$ در $\mathbb{R}^n$ باز است. اگر A و B بسته باشند، آیا $A + B$ بسته است؟ نشان دهید که اگر یکی از آنها فشرده و دیگری بسته باشد، $A + B$ بسته است. ثابت کنید که اگر A و B هر دو فشرده باشند، $A + B$ نیز فشرده است.

۱۶. نقطه‌ی x از زیرمجموعه‌ی A از فضای متریک (X, d) را یک نقطه‌ی تنهای A گوییم هرگاه $r > 0$ ای موجود باشد که $S_r(x) \cap A = \{x\}$. اگر A زیرمجموعه‌ی فشرده و حداکثر شمارا از $\mathbb{R}^2$ باشد، ثابت کنید A نقطه‌ای تنها دارد.

۱۷. فرض کنیم (X, d) فشرده و f تابعی تعریف شده روی X باشد. فرض کنید برای هر x و y از X، $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. ثابت کنید f پوشاست.

فصل ۳

فضاهای توپولوژیک

۳—۱ مقدمه

تعمیم در ریاضیات یکی از مسائلی است که چه در گذشته و چه در حال توجه ریاضی‌دانان را به خود جلب کرده است. چه بسا نتایج مهم در ریاضیات، از تعمیم مسائل ساده به‌دست آمده است. برای مثال ریاضیدانان به مطالعه‌ی خواص گروه جمعی $\mathbb{C}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ اکتفا نکرده و به بررسی گروه‌های متناهی و نامتناهی پرداختند که هم اکنون در شاخه‌های مختلف علوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. تعریف فضای متریک و مجموعه‌های باز و سایر مجموعه‌ها مقدمه‌ای بر تعریف جدیدی است که توپولوژی نام دارد. توپولوژی یکی از مباحث پر استفاده در شاخه‌های مختلف ریاضی از جمله توپولوژی جبری، توپولوژی دیفرانسیل و هندسه می‌باشد. در این فصل تعریف توپولوژی را بیان کرده و تعاریف مورد نیاز برای استفاده در فصول بعدی را مهیا می‌کنیم.

۳—۲ توپولوژی

در فصل قبل فضاهای متریک به‌طور خلاصه مورد بررسی قرار گرفت. اکنون قصد داریم مفهوم فضای متریک را به گونه‌ای به یک فضای جدیدی تعمیم دهیم و فضای حاضر را یک فضای توپولوژیک نام‌گذاری کنیم.

تعریف۳ ـ ۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. خانواده‌ی τ از زیرمجموعه‌های X یک توپولوژی روی X است هرگاه:

الف) $\emptyset, X \in \tau$؛

ب) اجتماع هر تعداد از اعضاء τ در τ قرار داشته باشد؛

ج) اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای τ در τ قرار داشته باشد.

در این صورت (X, τ) را یک فضای توپولوژیک نامیم.

اگر (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد، اعضای τ را مجموعه‌های باز فضا گوییم، یعنی اگر G در τ قرار داشته باشد در آن‌صورت G را یک مجموعه‌ی باز گوییم. به عبارت دیگر در یک فضای توپولوژیک (X, τ)، $G \subseteq X$ باز است اگر و تنها اگر $G \in \tau$.

ابتدا توضیحی درباره‌ی ارتباط فضای متریک و فضای توپولوژیک ارائه می‌کنیم. یک فضای متریک مشتمل بر یک مجموعه‌ی X همراه با تابع فاصله است. می‌دانیم در فضای متریک تحت این تابع، مجموعه‌ی تهی و X باز هستند. بعلاوه ثابت کردیم اجتماع هر تعداد و اشتراک تعداد متناهی از مجموعه‌های باز، باز هستند. بنابراین خانواده‌ی τ_d متشکل از مجموعه‌های باز فضای متریک (X, d) یک فضای توپولوژیک است. پس دلیل نام‌گذاری اعضای τ را به‌عنوان مجموعه‌ی باز تا حدودی مشخص شده است.

اکنون مجموعه‌ای ناتهی مفروض است ولی ممکن است تابع فاصله روی این مجموعه تعریف نشده باشد. اما یک خانواده از زیرمجموعه‌های X نیز در دست باشد که مجموعه‌ی تهی و X را شامل بوده و اجتماع هر تعداد و اشتراک تعداد متناهی از اعضای خود را شامل باشد. قصد داریم این X را با این خانواده، مورد مطالعه قرار دهیم.

اگر X مجموعه‌ای ناتهی باشد، خانواده‌ی $\tau = \{\emptyset, X\}$ یک توپولوژی روی X است که به آن توپولوژی ناگسسته نامیم. همین‌طور $\tau = P(X)$ یک توپولوژی روی X است و به آن توپولوژی گسسته گوییم. می‌دانیم با متر گسسته همه‌ی زیرمجموعه‌های یک فضا باز هستند و لذا $\tau_d = P(X)$ (d متر گسسته است). بنابراین نام‌گذاری توپولوژی گسسته، نام‌گذاری منطقی است. در توپولوژی ناگسسته تنها مجموعه‌های باز فضا، مجموعه‌ی تهی و X است. از طرف دیگر در فضای گسسته همه‌ی زیرمجموعه‌های X باز هستند.

مثال۳ ـ ۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و τ گردایه‌ی متشکل از همه‌ی زیرمجموعه‌های X که متمم آنها حداکثر شمارا و مجموعه‌ی تهی است، باشد. چون $X^c = \emptyset$ حداکثر شماراست، لذا با توجه به تعریف τ، شرط اول در تعریف توپولوژی برقرار است. اکنون فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک خانواده از اعضای τ باشد. اگر همه‌ی G_α ها تهی باشند، لذا $\bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha = \emptyset \in \tau$. در غیر این‌صورت

برای یک $\alpha_\circ$، $G^c_{\alpha_\circ}$ حداکثر شماراست و لذا $\left(\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} G^c_\alpha$ حداکثر شماراست. این نتیجه می‌دهد که $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha \in \tau$. اکنون فرض کنیم که G_1 و ... و G_n یک تعداد متناهی از اعضای τ باشند. اگر برای یک i، $G_i = \emptyset$، لذا $\bigcap_{i=1}^{n} G_i = \emptyset \in \tau$. در غیر این‌صورت برای هر i، G^c_i حداکثر شماراست و لذا $\bigcup_{i=1}^{n} G^c_i$ حداکثر شماراست. از آنجا که $\left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} G^c_i$ حداکثر شماراست، نتیجه خواهیم گرفت که $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$ و این برهان را تمام می‌کند.

به توپولوژی که در مثال قبل معرفی شد، توپولوژی هم‌شمارا گوییم. از خواننده انتظار می‌رود بتواند ثابت کند که خانواده‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه که متمم آنها متناهی است همراه با مجموعه‌ی تهی، یک توپولوژی را مشخص می‌کند که به آن توپولوژی هم متناهی گوییم.

مثال ۳ ـ ۲. اگر $X = \{x, y, z\}$ و $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}, \{x, y\}\}$، در این‌صورت (X, τ) یک فضای توپولوژیک است و در این فضا $\{y\}$ باز نیست ولی $\{x\}$ باز است.

در توپولوژی برحسب شرایط موجود به مثال‌های زیادی نیازمندیم. اگر بخواهیم مثالی ارائه نماییم تا در شرایط مسئله صدق کند، ابتدا فضاهای متریک و سپس فضاهای توپولوژیک متناهی و در آخر فضای توپولوژیک هم‌شمارا و هم متناهی را مورد بررسی قرار خواهیم داد. اکثر مثال‌های نقضی که ما نیاز داریم توسط این مثال‌ها پوشیده می‌شود. دیدیم که هر فضای متریک یک فضای توپولوژیک را مشخص می‌کند. سوال این است که آیا عکس این موضوع نیز صحیح است. به عبارت دیگر اگر (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد، آیا همواره متری مانند d روی X وجود خواهد داشت که $\tau = \tau_d$؟ جواب منفی است. مثال زیر پاسخی برای این سوال خواهد بود.

مثال ۳ ـ ۳. فرض کنیم $X = \{x, y, z\}$ و $\tau = \{\emptyset, X, \{x, z\}\}$. قصد داریم ثابت کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک است که متریک‌پذیر نیست، یعنی برای هر متر d روی X، $\tau \neq \tau_d$. در حقیقت، به‌سادگی دیده می‌شود که τ یک توپولوژی روی X است. اکنون فرض کنیم که d یک متر روی X باشد. قرار دهید $r = \min\{d(x, y), d(x, z)\}$. خواهیم داشت $\{x\} = S_{\frac{r}{2}}(x) \in \tau_d$. از طرف دیگر $\{x\}$ در τ قرار ندارد و لذا $\tau \neq \tau_d$.

دیدیم که یک مجموعه در فضای متریک فشرده است هرگاه هر پوشش باز دارای زیر پوشش متناهی باشد. همین‌طور یک مجموعه‌ی ناهمبند است هرگاه آن مجموعه به‌صورت اجتماع دو مجموعه‌ی باز مجزای ناتهی باشد. تابع f پیوسته است هرگاه تصویر معکوس هر مجموعه‌ی باز، باز باشد و ... در همه‌ی این موارد دیده می‌شود که همیشه صحبت از مجموعه‌های باز است. نتیجه می‌گیریم مجموعه‌های باز فضا نقش اساسی در مشخص سازی فضا ایفاء می‌کنند. به

این دلایل است که در متر گسسته ثابت مثبت اهمیت خاصی ندارد. چون با هر عدد مثبت همه‌ی زیرمجموعه‌های فضا باز خواهد بود.

در فضای متریک به خاطر وجود متر، گوی باز قابل تعریف بود. اما در فضای توپولوژی گوی باز وجود ندارد و بنابراین مجبوریم با مجموعه‌های باز فضای توپولوژیک کار کنیم. بنابراین در تعریف زیر از مجموعه‌های باز استفاده می‌کنیم. خواننده می‌تواند معادل بودن این تعاریف با تعاریف قبلی که برای فضاهای متریک آمده است را بررسی کند. در حقیقت تعریف زیر برای تأکید بیشتر آورده شده است و با تعریف قبلی تفاوت چندانی ندارد.

تعریف۳ ـ ۲. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$،

الف) عنصر $x \in X$ را نقطه‌ی چسبیدگی A گوییم، هرگاه هر مجموعه‌ی باز شامل x، A را قطع کند. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط چسبیدگی A را با $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم و بستار A می‌نامیم.

ب) عنصر $x \in X$ را نقطه‌ی حدی A گوییم، هرگاه هر مجموعه‌ی باز شامل x، A را در نقطه‌ای غیر از x قطع کند. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط حدی A را با A' نمایش می‌دهیم.

ج) عنصر $x \in A$ را نقطه‌ی درونی A گوییم، هرگاه مجموعه‌ی بازی شامل x موجود باشد که مشمول A باشد. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط درونی A را با A° نمایش می‌دهیم.

د) عنصر $x \in X$ را نقطه‌ی مرزی A گوییم، هرگاه این عنصر نقطه‌ی چسبیدگی A بوده اما نقطه‌ی درونی نباشد. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط مرزی A را با نماد $\mathrm{bd}(A)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه‌ی A را بسته گوییم هرگاه متمم آن باز باشد. البته می‌توان مجموعه‌ی بسته را مجموعه‌ای تعریف کرد که همه‌ی نقاط حدی خودش را شامل باشد. در هر حال به‌سادگی دیده می‌شود که این دو تعریف با هم معادلند.

اگر $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های بسته در فضای توپولوژیک (X,τ) باشد، از آنجا که اجتماع هر تعداد مجموعه‌ی باز، باز است با یک متمم‌گیری ساده نتیجه می‌شود که $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ مجموعه‌ای بسته است. دقت کنید که هر فضای متریک یک فضای توپولوژیک است و چون اشتراک هر تعداد مجموعه‌ی باز در فضای متریک همیشه باز نیست، لذا این موضوع برای فضای توپولوژیک نیز صحیح است. بعلاوه این‌که اجتماع هر تعداد مجموعه‌ی بسته در فضای توپولوژیک همیشه بسته نیست.

مثال۳ ـ ۴. فرض کنید $X = \{x,y,z\}$ با توپولوژی زیر در نظر گرفته شود

$$\tau = \{\emptyset, X, \{x\}, \{x,y\}, \{x,z\}\}$$

اگر $A = \{y, z\}$ آنگاه $A^\circ = \emptyset$ ، $\overline{A} = A$ و $A' = \emptyset$. در حقیقت اگر A بخواهد نقطه‌ی درونی داشته باشد، باید مجموعه‌ی بازی شامل آن نقطه در A قرار گیرد. واضح است که هیچ یک از مجموعه‌های باز موجود زیرمجموعه‌ی A نیست و لذا $A^\circ = \emptyset$. نشان می‌دهیم $\overline{A} = A$. واضح است که در حالت کلی اعضای یک مجموعه نقاط چسبیدگی آن مجموعه هستند، چرا که هر مجموعه‌ی باز شامل حداقل یک نقطه از آن مجموعه، آن مجموعه را قطع می‌کند. بنابراین $A \subseteq \overline{A}$. برای اتمام برهان کافیست نشان دهیم که $x \notin \overline{A}$. چون $\{x\}$ مجموعه‌ی باز شامل x است و با A هیچ اشتراکی ندارد، لذا ادعا ثابت می‌شود.

ثابت می‌کنیم $A' = \emptyset$. واضح است x نقطه‌ی حدی A نیست چرا که $\{x\}$، A را قطع نمی‌کند. $y \notin A'$، زیرا مجموعه‌ی باز $\{x, y\}$، A را در نقطه‌ای غیر از y قطع نمی‌کند. به همین روش $z \notin A'$.

مثال ۳ ـ ۵. مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با توپولوژی هم‌شمارا در نظر می‌گیریم. قصد داریم مجموعه‌ی نقاط چسبیدگی، نقاط حدی و نقاط درونی مجموعه‌ی اعداد گویا و اعداد گنگ را مشخص کنیم. نشان می‌دهیم $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$. می‌دانیم $\mathbb{Q} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$. اگر x عددی گنگ باشد، چون متمم مجموعه‌ی اعداد گنگ شماراست، لذا مجموعه‌ی اعداد گنگ با این توپولوژی باز و شامل x است. چون اعداد گویا و اعداد گنگ اشتراکی ندارند، لذا x نقطه‌ی چسبیدگی مجموعه‌ی اعداد گویا نیست. درنتیجه ادعای فوق اثبات می‌شود.

ادعا می‌کنیم $\mathbb{Q}' = \emptyset$. در حقیقت اگر x عنصری دلخواه از $\mathbb{R}$ باشد، چون $\mathbb{Q}^c \cup \{x\}$ دارای متمم شماراست. پس مجموعه‌ی فوق باز و شامل x است و $\mathbb{Q}$ را حداکثر در نقطه‌ی x قطع می‌کند. نتیجه این‌که اعداد گویا هیچ نقطه‌ی حدی ندارد.

اعداد گویا هیچ نقطه‌ی درونی ندارد. زیرا اگر G مجموعه‌ی باز دلخواه ناتهی باشد، آنگاه G^c حداکثر شماراست و لذا G ناشماراست. از این موضوع نتیجه می‌شود که G مشمول $\mathbb{Q}$ نیست و لذا $\mathbb{Q}$ هیچ نقطه‌ی درونی ندارد.

اگر x عدد حقیقی دلخواه و G مجموعه‌ی بازی شامل x باشد، در آن‌صورت G^c حداکثر شماراست. بنابراین G حداکثر تعداد شمارایی از اعداد حقیقی را شامل نیست و لذا G تعداد ناشمارا از اعداد گنگ را شامل است. نتیجه این‌که

$$\mathbb{Q}^{c\prime} = \overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$$

اگر x یک عدد گنگ باشد، چون $\mathbb{Q}^c$ باز و شامل x است. لذا این نقطه، نقطه‌ی درونی اعداد گنگ

است و بنابراین نقاط درونی اعداد گنگ، $\mathbb{Q}^c$ است.

قضیه۳ ـ ۳. *اگر A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک (X,τ) باشد، آنگاه $\overline{A}$ کوچکترین مجموعه‌ی بسته‌ی شامل A است.*

برهان. ادعا می‌کنیم $\overline{A}$، اشتراک همه‌ی مجموعه‌های بسته‌ی شامل A است و لذا بنابه توضیحات قبل $\overline{A}$ بسته است. از طرف دیگر اگر E مجموعه‌ی بسته‌ی دلخواهی باشد که $A \subseteq E \subseteq \overline{A}$، در آن‌صورت E یکی از مجموعه‌های بسته‌ای است که در اشتراک ذکر شده قرار دارد و لذا $E = \overline{A}$. پس کافیست ادعا را ثابت کنیم. فرض کنیم $x \in \overline{A}$ عنصری دلخواه باشد. ادعا می‌کنیم x در هر مجموعه‌ی بسته‌ی شامل A قرار دارد. فرض کنیم F مجموعه‌ی بسته‌ی دلخواهی شامل A باشد. اگر $x \notin F$، لذا x در مجموعه‌ی باز F^c قرار دارد. از طرف دیگر $x \in \overline{A}$ و لذا $F^c \cap A \neq \emptyset$. این متناقض با $A \subseteq F$ خواهد بود.

برعکس، فرض کنیم x در اشتراک همه‌ی مجموعه‌های بسته‌ی شامل A قرار داشته باشد. اگر G مجموعه‌ی باز دلخواهی شامل x باشد، آنگاه $G \cap A \neq \emptyset$. در غیر این‌صورت $A \subseteq G^c$ و چون G^c مجموعه‌ی بسته است، بنابه فرض $x \in G^c$. این متناقض با تعلق x در G خواهد بود و لذا حکم ثابت می‌شود. ∎

قضیه۳ ـ ۴. *اگر A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک (X,τ) باشد، آنگاه A° بزرگترین مجموعه‌ی باز مشمول A است.*

برهان. ادعا می‌کنیم A° اجتماع همه‌ی مجموعه‌های باز مشمول A است و لذا A° بنابه تعریف توپولوژی، باز است. اگر $x \in A^\circ$ عنصری دلخواه باشد، آنگاه مجموعه‌ی بازی شامل x چون G وجود خواهد داشت که $G \subseteq A$. بنابراین A° زیر مجموعه اجتماع همه‌ی زیرمجموعه‌های باز مشمول A است.

برعکس، x را در مجموعه‌ی بازی که در A قرار دارد اختیار می‌کنیم. بنابراین مجموعه‌ی باز مذکور شامل x بوده و زیر مجموعه A قرار است و لذا x نقطه‌ی درونی A است. این نشان می‌دهد که A° شامل اجتماع همه‌ی مجموعه‌های بازی است که در A قرار دارند. برای اتمام برهان، فرض کنید W مجموعه‌ی بازی باشد که $A^\circ \subseteq W \subseteq A$. در این‌صورت W یکی از اعضای اجتماع ذکر شده است و بنابراین $A^\circ = W$ و لذا حکم ثابت می‌شود. ∎

زیرفضای یک فضای متریک را تعریف کردیم و نتیجه گرفتیم که اگر A زیرفضایی از فضای متریک (X,d) باشد، آنگاه مجموعه‌های باز در A به‌صورت اشتراک یک مجموعه‌ی باز فضای X

با مجموعه‌ی A است. از این ایده استفاده می‌کنیم و زیرفضای یک فضای توپولوژیک را تعریف می‌کنیم.

تعریف۳ ـ ۵. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$. قرار دهید

$$\tau_A = \{G \cap A;\ G \in \tau\}.$$

در این‌صورت τ_A یک توپولوژی روی A است که به آن توپولوژی نسبی روی A گوییم.

فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$. خواننده می‌تواند تحقیق کند که زیرمجموعه‌ی F از A در A بسته است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی بسته‌ی E از X موجود باشد که $F = E \cap A$. بنابراین زیرمجموعه‌های بسته‌ی زیرفضای A به‌طور دقیق مشخص می‌شود.

قضیه‌ی زیر خصوصیاتی از نقاط چسبیدگی، نقاط حدی و نقاط مرزی را مورد بررسی قرار می‌دهد. توجه کنید که در یک فضای متریک اشتراک دو مجموعه‌ی چگال لزومی ندارد که چگال باشد. برای مثال اعداد گویا و اعداد گنگ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ چگال هستند اما اشتراک آنها در $\mathbb{R}$ چگال نیست. توجه کنید که در فضای توپولوژیک (X,τ)، زیرمجموعه‌ی A را در B چگال گوییم هرگاه $B \subseteq \overline{A}$. در حالت خاص A در X چگال است هرگاه $\overline{A} = X$. قضیه‌ی زیر نتیجه می‌دهد که اگر مجموعه‌های A و B در فضای توپولوژیک (X,τ) چگال باشند و حداقل یکی از آنها باز باشد، آنگاه $A \cap B$ در X چگال است.

قضیه۳ ـ ۶. *فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد، گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) *اگر* $A \subseteq X$*، آنگاه* $X\backslash\overline{A} = (X\backslash A)^\circ$*؛*

ب) $A \subseteq X$ *باز است اگر و تنها اگر برای هر* $B \subseteq X$*،* $\overline{A \cap B} = \overline{A \cap \overline{B}}$*؛*

ج) *برای هر* $A \subseteq X$*،* $\mathrm{bd}(A)$ *بسته است؛*

د) *برای هر* $A \subseteq X$*،* $\mathrm{bd}\left(\mathrm{bd}\left(\mathrm{bd}(A)\right)\right) = \mathrm{bd}\left(\mathrm{bd}(A)\right)$.

برهان. می‌دانیم $A \subseteq \overline{A}$ و لذا $X\backslash\overline{A} \subseteq X\backslash A$. چون $\overline{A}$ بسته است، لذا $X\backslash\overline{A}$ باز است. از طرف دیگر $(X\backslash A)^\circ$ بزرگترین مجموعه‌ی باز مشمول $X\backslash A$ است، بنابراین $X\backslash\overline{A} \subseteq (X\backslash A)^\circ$. برای اثبات عکس جزئیت، از آنجا که $(X\backslash A)^\circ \subseteq X\backslash A$، خواهیم داشت

$$A \subseteq X\backslash(X\backslash A)^\circ.$$

اما $X\backslash(X\backslash A)^\circ$ بسته است و چون $\overline{A}$ کوچکترین مجموعه‌ی بسته‌ی شامل A است، لذا

$$\overline{A} \subseteq X\backslash(X\backslash A)^\circ.$$

درنتیجه $X\backslash\overline{A} = (X\backslash A)^\circ$ و لذا حکم قسمت (الف) ثابت می‌شود.

برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنیم $A \subseteq X$ باز و $B \subseteq X$. واضح است که $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A \cap \overline{B}}$. برای اثبات عکس جزئیت، عنصر x را از $\overline{A \cap \overline{B}}$ اختیار می‌کنیم. اگر G مجموعه‌ی بازی شامل x باشد، لذا $(A \cap \overline{B}) \cap G \neq \emptyset$. درنتیجه $A \cap G \cap \overline{B} \neq \emptyset$. چون A باز است، لذا $A \cap G$ باز است. اگر $y \in A \cap G \cap \overline{B}$ عنصری دلخواه باشد. بنابراین y در مجموعه‌ی باز $A \cap G$ و همچنین در $\overline{B}$ قرار دارد. از این توضیحات و تعریف بستار یک مجموعه، نتیجه می‌گیریم که $G \cap A \cap B \neq \emptyset$. بنابراین هر مجموعه‌ی باز شامل x، $A \cap B$ را قطع می‌کند و لذا $x \in \overline{A \cap B}$. درنتیجه تساوی برقرار است.

برای اثبات عکس گزاره، چون برای هر $B \subseteq X$، $\overline{A \cap B} = \overline{A \cap \overline{B}}$. با قرار دادن $B = A^c$، خواهیم داشت

$$\emptyset = \overline{A \cap \overline{A^c}}.$$

این نتیجه می‌دهد که $A \cap \overline{A^c} = \emptyset$ و لذا $\overline{A^c} \subseteq A^c$. بنابراین A^c بسته و لذا A باز است.

برای اثبات قسمت (ج)، می‌دانیم A° باز است و بنابراین $(A^\circ)^c$ بسته است. بنابه تعریف مرز یک مجموعه،

$$\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \backslash A^\circ = \overline{A} \cap (A^\circ)^c$$

لذا $\mathrm{bd}(A)$ بسته است.

برای اثبات قسمت (د)، ابتدا ثابت می‌کنیم $\Big(\mathrm{bd}\big(\mathrm{bd}(A)\big)\Big)^\circ = \emptyset$. فرض کنید چنین نباشد و عنصر $x \in \Big(\mathrm{bd}\big(\mathrm{bd}(A)\big)\Big)^\circ$ را انتخاب می‌کنیم. بنابه تعریف، مجموعه‌ی باز G شامل x موجود است که

$$G \subseteq \mathrm{bd}\big(\mathrm{bd}(A)\big) = \overline{\mathrm{bd}(A)} \backslash \mathrm{bd}(A)^\circ = \mathrm{bd}(A) \backslash \mathrm{bd}(A)^\circ$$

از رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم $G \subseteq \mathrm{bd}(A)$ و $G \cap \mathrm{bd}(A)^\circ = \emptyset$. که یک تناقض است زیرا $x \in G \cap \mathrm{bd}(A)^\circ$. این تناقض سبب اثبات ادعا می‌شود.

اکنون با توضیحات داده شده داریم

$$\begin{aligned}\Big(\mathrm{bd}\big(\mathrm{bd}(A)\big)\Big) &= \overline{\mathrm{bd}\big(\mathrm{bd}(A)\big)} \Big\backslash \Big(\mathrm{bd}\big(\mathrm{bd}(A)\big)\Big)^\circ \\ &= \mathrm{bd}\big(\mathrm{bd}(A)\big)\end{aligned}$$

این برهان را کامل می‌کند. ■

مثال۳ ـ ٦. زیرمجموعه‌ی $A = \left\{(x, y);\ y = \sin\frac{1}{x},\ 0 < x \leq 1\right\}$ از $\mathbb{R}^2$ را در نظر می‌گیریم، در آن‌صورت

$$\overline{A}=\left\{(x,y);\ y=\sin\frac{1}{x},\ 0<x\leq 1\right\}\cup\{(0,y);\ -1\leq y\leq 1\}.$$

برهان. می‌دانیم $\left\{(x,y);\ y=\sin\frac{1}{x},\ 0<x\leq 1\right\}\subseteq\overline{A}$. فرض کنید $-1\leq y\leq 1$ و $\epsilon>0$ داده شده باشد. بنابه خاصیت ارشمیدسی، عدد طبیعی k موجود است که $\frac{1}{k}<\epsilon$. اکنون عدد $0\leq\theta\leq 2\pi$ را طوری اختیار می‌کنیم که $\sin\theta=y$. در آن‌صورت با انتخاب $x=\frac{1}{2k\pi+\theta}$، داریم

$$\left|\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)-(0,y)\right|=x=\frac{1}{2k\pi+\theta}<\epsilon$$

بنابراین $\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\in S_\epsilon(0,y)$. درنتیجه

$$\left\{(x,y);\ y=\sin\frac{1}{x},\ 0<x\leq 1\right\}\cup\{(0,y);\ -1\leq y\leq 1\}\subseteq\overline{A}.$$

اکنون فرض کنیم $(x,y)\in\overline{A}\backslash\{(0,y),\ -1\leq y\leq 1\}$، لذا دنباله‌ای چون $\left(x_n,\sin\frac{1}{x_n}\right)$ در A وجود دارد که این دنباله به (x,y) همگراست. از این رابطه داریم $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ و چون تابع sin پیوسته است، لذا $\left\{\sin\frac{1}{x_n}\right\}$ به $\sin\frac{1}{x}$ همگراست. بنابراین $y=\sin\frac{1}{x}$. ∎

در ادامه بحث ابتدا مواردی در مورد چگال بودن مجموعه‌ها در فضای توپولوژیک را بررسی می‌کنیم. از خواننده انتظار می‌رود که نشان دهد یک مجموعه‌ی A در X چگال است اگر و تنها اگر هر مجموعه‌ی باز ناتهی، A را قطع کند. همین‌طور زیرمجموعه‌ی A را هیچ‌جا چگال گوییم هرگاه $(\overline{A})^\circ=\emptyset$.

قضیه ۳ ـ ۷. *هر زیرمجموعه‌ی ناتهی A در فضای توپولوژیک (X,τ) چگال است اگر و تنها اگر τ ناگسسته باشد.*

برهان. فرض کنیم هر زیرمجموعه‌ی ناتهی A از فضای توپولوژیک (X,τ) در X چگال باشد. اگر G مجموعه‌ی بازی متمایز با X و $\emptyset$ باشد، لذا G^c مجموعه‌ای ناتهی است. از آنجا که $G\cap G^c=\emptyset$، این نشان می‌دهد که مجموعه‌ی ناتهی G^c در X چگال نیست که متناقض با فرض است.

اگر (X,τ) فضای توپولوژیک ناگسسته باشد، واضح است هر زیرمجموعه‌ی ناتهی در آن چگال است، چرا که تنها مجموعه‌ی باز ناتهی در آن X است. ∎

قضیه ۳ ـ ۸. *تنها زیرمجموعه‌ی چگال در فضای توپولوژیک (X,τ)، X است اگر و تنها اگر τ گسسته باشد.*

برهان. فرض کنیم تنها زیرمجموعه‌ی چگال در (X,τ)، X بوده و $A=\{x\}\subseteq X$ در X باز نباشد.

ادعا می‌کنیم که A^c در X چگال است. اگر G مجموعه‌ی باز دلخواهی باشد، از آنجا که A مجموعه‌ای باز نیست لذا $A \neq G$. بنابراین $G \cap A^c \neq \emptyset$ و این ادعا را ثابت می‌کند. ادعای فوق با فرض قضیه در تناقض است، پس هر زیرمجموعه از X باز است، یعنی فضا گسسته است.

برای اثبات عکس قضیه، اگر A زیرمجموعه‌ای سره از X باشد. چون بنابه فرض توپولوژی τ گسسته است، لذا A بسته است و بنابراین در X چگال نیست. ■

۳—۳ پایه و زیرپایه

در هر علمی عناصر تشکیل دهنده همواره نقش به‌سزایی دارند، برای مثال اتم‌ها بنیادی‌ترین عناصر در علوم شیمی و فیزیک هستند. وجود چنین عناصری در یک توپولوژی خصوصیات آن فضا را به‌طور کامل مشخص می‌کند. در یک توپولوژی خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های باز از فضا وجود دارد که بررسی خصوصیتی از فضا موکول به بررسی آن خصوصیت روی همین مجموعه‌هاست. این خانواده از مجموعه‌های باز را پایه برای فضای توپولوژیک می‌نامیم. تعریف دقیق پایه در زیر آمده است.

تعریف۳ ـ ۹. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد. $B \subseteq \tau$ را یک پایه برای τ گوییم هرگاه هر مجموعه‌ی ناتهی از τ به‌صورت اجتماعی از اعضای B نوشته شود.

واضح است که در هر فضای توپولوژیک (X, τ)، τ یک پایه برای τ است. مفهوم پایه در فضاهای برداری تا حدی با تعریف پایه برای یک فضای توپولوژیک شباهت دارد. در فضای برداری، یک پایه زیرمجموعه‌ی مستقل خطی از آن فضاست که هر عنصر فضا به‌صورت ترکیب خطی از عناصر این مجموعه نوشته شود. در فضای توپولوژیک، پایه گردایه‌ای از مجموعه‌های باز فضاست که هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از فضا به‌صورت اجتماعی از اعضای این گردایه باشد.

در فضای توپولوژیک گسسته گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌های تک عضوی از این فضا یک پایه برای این فضاست و هر پایه برای این فضا شامل این گردایه است. در فضای متریک (X, d)، $B = \{S_r(x);\ x \in X,\ r > ۰\}$ یک پایه است. همان‌طور که در فضاهای برداری پایه منحصر به‌فرد نیست، مثال‌های بالا گویای پایه‌های متفاوت برای یک فضای توپولوژیک است. خواهیم دید که پایه‌ها نقش اساسی در فضاهای توپولوژیک دارند.

قضیه۳ ـ ۱۰. *مجموعه‌ی ناتهی X را در نظر می‌گیریم. شرط لازم و کافی برای آن‌که*

$B\subseteq P(X)$ یک پایه برای یک توپولوژی روی X باشد آن است که:

الف) $\bigcup\limits_{A\in B} A = X$؛

ب) *برای هر دو عنصر $B_۱$ و $B_۲$ از B و هر عنصر $x\in B_۱\cap B_۲$، عنصر $B_۳$ شامل x از B موجود باشد که $B_۳\subseteq B_۱\cap B_۲$.*

برهان. فرض کنیم B یک پایه برای یک توپولوژی τ روی X باشد. چون X باز است، بنابه تعریف پایه، X به‌صورت اجتماعی از اعضای پایه است. اکنون فرض کنیم $x\in B_۱\cap B_۲$، عنصری دلخواه باشد. از آنجا که $B_۱\cap B_۲\in\tau$، دوباره بنابه تعریف پایه، $B_۱\cap B_۲$ به‌صورت اجتماعی از اعضای پایه است و لذا $B_۳\in B$ شامل x موجود است که $B_۳\subseteq B_۱\cap B_۲$.

برای اثبات عکس، قرار می‌دهیم

$$\tau=\Big\{G\subseteq X;\ G=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha,\ \{B_\alpha;\ \alpha\in I\}\subseteq B\Big\}\cup\{\emptyset\}$$

بنابه فرض و تعریف τ، $\emptyset, X\in\tau$. از آنجا که هر عضو τ به‌صورت اجتماعی از اعضای B است، لذا اجتماع هر تعداد از اعضای τ دوباره به‌صورت اجتماعی از اعضای B است. برای اثبات شرط سوم در تعریف توپولوژی، کافیست ثابت کنیم که اشتراک هر دو عنصر در τ عنصری در τ است. فرض کنیم $\{B_\alpha;\ \alpha\in I\}$ و $\{B_\beta;\ \beta\in J\}$ دو خانواده از اعضای B باشند و $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\cap\bigcup\limits_{\beta\in J}B_\beta$. عناصر α و β به‌ترتیب از I و J وجود دارند که $x\in B_\alpha\cap B_\beta$. بنابه فرض $B_۳\in B$ وجود دارد که $x\in B_۳\subseteq B_\alpha\cap B_\beta$. به‌سادگی دیده می‌شود که $\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\cap\bigcup\limits_{\beta\in J}B_\beta$ به‌صورت اجتماعی از اعضای B است. ■

بنابه قضیه‌ی قبل گردایه‌ی همه‌ی بازه‌ها به صورت $[a,b)$ تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ می‌دهد که به آن توپولوژی حد پایین گوییم. همین‌طور گردایه‌ی همه‌ی بازه‌ها به صورت $(a,b]$ تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ می‌دهد که به آن توپولوژی حد بالا گوییم. واضح است که توپولوژی‌هایی که توسط این دو خانواده روی اعداد حقیقی تشکیل می‌شود با توپولوژی اقلیدسی متفاوت است.

فرض کنیم $B_۱$ و $B_۲$ پایه‌هایی به‌ترتیب برای $\tau_۱$ و $\tau_۲$ باشند، این دو پایه را معادل گوییم هرگاه $\tau_۱=\tau_۲$. خواننده می‌تواند به عنوان تمرین بررسی کند که دو پایه مذکور برای توپولوژی حد پایین و توپولوژی حد بالا با هم معادل نیستند. واضح است که $\big\{\{x,y\},\{y,z\},\{y\},\{z\}\big\}$ و $\big\{\emptyset,\{x,y\},\{y\},\{z\}\big\}$ پایه‌های معادل برای یک توپولوژی روی $X=\{x,y,z\}$ هستند.

قضیه ۳ ـ ۱۱. *فرض کنید $B_۱$ و $B_۲$ دو پایه برای دو توپولوژی روی یک مجموعه‌ی ناتهی X*

باشند، در آن‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) *دو پایه‌ی $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ معادلند؛*

ب) *برای هر $B_1 \in \mathcal{B}_1$ و هر $x \in B_1$، یک مجموعه‌ی $B_2 \in \mathcal{B}_2$ شامل x موجود باشد که $B_2 \subseteq B_1$ و برعکس، یعنی برای هر $B_2 \in \mathcal{B}_2$ و هر $x \in B_2$، یک مجموعه‌ی $B_1 \in \mathcal{B}_1$ شامل x موجود باشد که $B_1 \subseteq B_2$.*

برهان. اگر دو پایه معادل باشند، لذا توپولوژی‌های حاصل که به‌ترتیب با τ_1 و τ_2 نمایش می‌دهیم یکسان هستند. اکنون فرض کنیم $x \in B_1 \in \mathcal{B}_1 \subseteq \tau_1 = \tau_2$. چون $\mathcal{B}_2$ پایه‌ای برای τ_2 است، لذا بنابه تعریف پایه عنصر B_2 در $\mathcal{B}_2$ شامل x وجود دارد که $x \in B_2 \subseteq B_1$. به همین روش می‌توان نشان داد که برای هر $B_2 \in \mathcal{B}_2$ و هر $x \in B_2$، یک مجموعه‌ی $B_1 \in \mathcal{B}_1$ شامل x موجود است که $B_1 \subseteq B_2$.

برای اثبات عکس قضیه، ثابت می‌کنیم دو توپولوژی τ_1 و τ_2 حاصل از $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ با هم برابرند. اختیار کنید $G_1 \in \tau_1$ و $x \in G_1$. چون $\mathcal{B}_1$ پایه برای τ_1 است، لذا یک عنصر پایه‌ای $B_1 \in \mathcal{B}_1$ وجود دارد که $x \in B_1 \subseteq G_1$. بنابه فرض $B_2 \in \mathcal{B}_2$ وجود دارد که $x \in B_2 \subseteq B_1$. نتیجه می‌گیریم که $x \in B_2 \subseteq G_1$ و لذا G_1 به‌صورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}_2$ است و بنابر این $\tau_1 \subseteq \tau_2$. به همین شیوه می‌توان ثابت کرد که $\tau_2 \subseteq \tau_1$ و این برهان را کامل می‌کند. ∎

مثال ۳ ـ ۷. فرض کنید $X := C([0,1])$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته حقیقی مقدار روی $[0,1]$ باشد. برای هر $\epsilon > 0$ و هر $f \in X$، قرار می‌دهیم

$$U(f,\epsilon) = \{h \in X;\ \|f-h\| < \epsilon\},$$

$$I(f,\epsilon) = \left\{h \in X;\ \int_0^1 |f(x)-h(x)|\,dx < \epsilon\right\}.$$

در این‌صورت $\mathcal{B}_1 = \{U(f,\epsilon);\ f \in X,\ \epsilon > 0\}$ و $\mathcal{B}_2 = \{I(f,\epsilon);\ f \in X,\ \epsilon > 0\}$ دو پایه برای دو توپولوژی روی X هستند و این دو توپولوژی معادل نیستند. برای بررسی این موضوع، اگر $f \in X$ دلخواه باشد، لذا $f \in U(f,1)$ و بنابراین $X = \bigcup_{f \in X} U(f,1)$. اکنون فرض کنید $U(f_1,\epsilon_1)$ و $U(f_2,\epsilon_2)$ دو عنصر از $\mathcal{B}_1$ باشند. برای $h \in U(f_1,\epsilon_1) \cap U(f_2,\epsilon_2)$، قرار دهید

$$\epsilon = \min\{\epsilon_1 - \|f_1-h\|, \epsilon_2 - \|f_2-h\|\}.$$

فرض کنید $g \in U(h,\epsilon)$، لذا $\|g-h\| < \epsilon \le \epsilon_1 - \|f_1-h\|$. بنابراین

$$\|g-f_1\| \le \|g-h\| + \|h-f_1\| < \epsilon_1.$$

این نشان می‌دهد که $U(h,\epsilon) \subseteq U(f_۱,\epsilon_۱)$. به همین روش $U(h,\epsilon) \subseteq U(f_۲,\epsilon_۲)$ و لذا

$$U(h,\epsilon) \subseteq U(f_۱,\epsilon_۱) \cap U(f_۲,\epsilon_۲).$$

نتیجه این‌که $B_۱$ یک پایه برای یک توپولوژی روی X است. به همین روش می‌توان ثابت کرد که $B_۲$ یک پایه برای یک توپولوژی روی X است.

ادعا می‌کنیم که این دو پایه با هم معادل نیستند. برای این‌کار می‌دانیم $\circ \in U(\circ,۱)$. ثابت می‌کنیم $f \in X$ و $\epsilon > \circ$ موجود نیستند که $\circ \in I(f,\epsilon) \subseteq U(\circ,۱)$. فرض کنیم چنین نباشد و f و ϵ ای که در رابطه‌ی اخیر صدق کنند را در نظر می‌گیریم. بدون این‌که به کلیت خللی وارد آید، فرض می‌کنیم $\epsilon < ۱$. برای هر $\circ \leq x \leq \frac{\epsilon}{۸}$، قرار می‌دهیم $g(x) = f(x) - \frac{۳۲x}{\epsilon}$ و برای $\frac{\epsilon}{۸} \leq x \leq \frac{\epsilon}{۴}$، قرار می‌دهیم $g(x) = f(x) - \frac{۳۲}{\epsilon}\left(\frac{\epsilon}{۴} - x\right)$. در نهایت برای $\frac{\epsilon}{۴} \leq x \leq ۱$، قرار می‌دهیم $g(x) = f(x)$. واضح است که $g \in I(f,\epsilon)\backslash U(\circ,۱)$. این نشان می‌دهد که دو پایه معادل نیستند.

تعریف ۳ ــ ۱۲. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد. یک خانواده از زیرمجموعه‌های باز از این فضا یک زیرپایه است هرگاه اشتراک‌های متناهی از این خانواده یک پایه برای این فضای توپولوژیک باشد.

بنابه تعریف، هر پایه یک زیرپایه است. اگر $X = \{x,y,z\}$ را با توپولوژی $\tau = \big\{\emptyset, X, \{y\}, \{x,y\}, \{y,z\}\big\}$ در نظر بگیریم، واضح است که $\mathcal{S} = \big\{\{x,y\},\{y,z\}\big\}$ یک زیرپایه برای توپولوژی τ است ولی پایه نیست. همین‌طور

$$\mathcal{S} = \{(-\infty,b);\ b \in \mathbb{R}\} \cup \{[a,\infty);\ a \in \mathbb{R}\}$$

یک زیرپایه برای توپولوژی حد پایین روی $\mathbb{R}$ است که یک پایه نیست.

قضیه ۳ ــ ۱۳. *شرط لازم و کافی برای آن‌که خانواده‌ی $\mathcal{S}$ از زیرمجموعه‌های X یک زیرپایه برای یک توپولوژی روی X باشد آنست که $X = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{S}} A$.*

برهان. اگر $\mathcal{S}$ یک زیرپایه برای یک توپولوژی τ روی X باشد، در آن‌صورت اشتراک‌های متناهی از اعضای $\mathcal{S}$ یک پایه برای τ است. بنابراین بنابه تعریف پایه اجتماع اعضای این پایه برابر X است و لذا اجتماع اعضای زیرپایه برابر X است.

برای اثبات عکس قضیه، قرار دهید

$$\mathcal{B} = \Big\{ \bigcap_{i=۱}^{n} A_i;\ A_i \in \mathcal{S} \Big\}.$$

ادعا می‌کنیم که B یک پایه برای یک توپولوژی روی X است. از آنجا که $S \subseteq B$، بنابه فرض اجتماع اعضای B برابر X است. اکنون اگر $G_۱ = \bigcap_{i=۱}^{n} A_i$ و $G_۲ = \bigcap_{i=۱}^{m} B_i$ دو عنصر از B باشند، واضح است که $G_۱ \cap G_۲ \in B$ و لذا قضیه ثابت می‌شود. ■

توجه کنید که اگر B پایه‌ای برای یک توپولوژی روی X باشد، در آن‌صورت زیرمجموعه‌ی A از X در X چگال است اگر و تنها اگر هر عنصر ناتهی در B، A را قطع کند. ممکن است این موضوع برای زیرپایه برقرار نباشد، به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳ ـ ۸. اگر $X = \{x, y, z\}$ را با توپولوژی $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}\}$ در نظر بگیریم، در آن‌صورت $S = \{\{x, y\}, \{x, z\}\}$ یک زیرپایه برای این توپولوژی است و هر عنصر این زیرپایه $A = \{y, z\}$ را قطع می‌کند، اما A در X چگال نیست.

دقت کنید که در تعریف نقطه‌ی انباشتگی، نقطه‌ی حدی و نقطه‌ی درونی به‌جای مجموعه‌های باز، می‌توان از مجموعه‌های پایه‌ای استفاده کرد.

قبل از اتمام این بخش به تعریف دنباله و چند مثال می پردازیم. تعریف دنباله در فضای متریک مورد بحث و بررسی قرار گرفت. دنباله در فضای توپولوژیک تابعی از $\mathbb{N}$ به فضای توپولوژیک است. اگر $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای توپولوژیک (X, τ) باشد، گوییم این دنباله به نقطه‌ای چون $x \in X$ همگراست هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز G شامل x، یک $N \in \mathbb{N}$ موجود باشد که برای هر $n \geq N$، $x_n \in G$. می‌دانیم که در فضاهای متریک حد یک دنباله در صورت وجود منحصر به‌فرد است، این موضوع گاهی در فضاهای توپولوژیک صحیح نیست. برای مثال توپولوژی

$$\tau = \{\emptyset, X, \{x, y, z\}, \{x, z\}, \{y\}\}$$

را روی $X = \{x, y, z, t\}$ در نظر می‌گیریم. در این‌صورت دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ که برای n های زوج x و برای n های فرد z تعریف می‌شود، به سه نقطه‌ی x، z و t همگراست. X با این توپولوژی متریک‌پذیر نیست. چرا که اگر متریک‌پذیر بود گوی بازی که شامل x بوده و z را شامل نیست می‌بایستی در این توپولوژی قرار گیرد. ولی ملاحظه می‌کنید که در این توپولوژی هر مجموعه‌ی باز شامل x، z را نیز شامل است.

مثال ۳ ـ ۹. $\mathbb{R}$ را با توپولوژی اقلیدسی در نظر می‌گیریم. می‌دانیم توپولوژی اقلیدسی با توپولوژی حاصل از متر $d(x, y) = \left|\frac{x}{۱ + |x|} - \frac{y}{۱ + |y|}\right|$ روی $\mathbb{R}$ با هم معادلند. در حقیقت از آنجا که تابع $f(x) = \frac{x}{۱ + |x|}$ روی $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی پیوسته است، بنابراین برای $\epsilon > ۰$، عدد مثبت δ وجود دارد که اگر $|x - y| < \delta$، آنگاه

باید گفته مسأله ؟ یک بیک است.

$$d(x,y)=\left|\frac{x}{1+|x|}-\frac{y}{1+|y|}\right|=|f(x)-f(y)|<\epsilon$$

این نشان می‌دهد که $S_\delta(x)\subseteq\{y;\ d(x,y)<\epsilon\}$ و لذا توپولوژی حاصل از متر d زیرمجموعه‌ی توپولوژی اقلیدسی است. این‌که توپولوژی اقلیدسی زیرمجموعه‌ای از توپولوژی حاصل از متر d است به خواننده واگذار می‌شود. بنابراین این دو توپولوژی معادلند. بعلاوه $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی یک فضای کامل است ولی $\mathbb{R}$ با متر d یک فضای متریک کامل نیست. در حقیقت چون دنباله $\left\{\frac{n}{1+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ به یک همگراست، لذا کوشی بوده و برای m و n به اندازه‌ی کافی بزرگ می‌توان $\left|\frac{n}{1+n}-\frac{m}{1+m}\right|$ را به اندازه‌ی کافی کوچک کرد. این نتیجه می‌دهد که دنباله‌ی $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ با متر d کوشی است. اکنون فرض کنیم این دنباله به عدد حقیقی x با متر d همگرا باشد. لذا دنباله‌ی $\left\{\frac{n}{1+n}-\frac{x}{1+|x|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ در اعداد حقیقی با متر اقلیدسی به صفر همگراست. نتیجه این‌که $x=|x|+1$، که یک تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که $\mathbb{R}$ با متر d کامل نیست.

راه‌های متفاوتی برای این‌که ادعا کنیم که یک فضای توپولوژیک متریک‌پذیر نیست، وجود دارد. همان‌طور که دیدیم اگر حد دنباله‌ای منحصر به‌فرد نباشد، فضا متریک‌پذیر نیست. محک دیگر می‌دانیم در فضاهای متریک مجموعه‌ی نقاط حدی یک مجموعه‌ی بسته است، اگر در فضایی مجموعه‌ی نقاط حدی یک مجموعه‌ی بسته نباشد، می‌توان نتیجه گرفت که آن فضا متریک‌پذیر نیست. خلاصه اگر خصوصیتی شبیه بالا در یک فضای متریک برقرار باشد و در فضای توپولوژیکی برقرار نباشد آن فضای توپولوژیک متریک‌پذیر نیست.

مثال۳ ــ ۱۰. زیرمجموعه‌ی $[0,1]$ از اعداد حقیقی را با توپولوژی هم‌شمارا در نظر می‌گیریم. تنها دنباله‌هایی که در این فضا همگرا هستند، دنباله‌هایی هستند که از مرتبه‌ای به بعد ثابت هستند. برای دیدن این موضوع، فرض کنیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای همگرا به x در $[0,1]$ باشد. قرار دهید $A=\{x_n;\ n\in\mathbb{N}\}\backslash\{x\}$. واضح است که A^c مجموعه‌ای باز و شامل x است. بنابه تعریف همگرایی دنباله‌ها، عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $n\geq N$، $x_n\in A^c$. این تنها زمانی درست است که برای هر $n\geq N$، $x_n=x$.

۳ــ۴ پیوستگی

اگر $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ تابعی دلخواه باشد، f را در نقطه‌ی $x\in X$ پیوسته گوییم هرگاه برای هر $\epsilon>0$ عدد مثبت δ موجود باشد که برای هر $y\in X$، با شرط $d_1(x,y)<\delta$ داشته باشیم

$d_2\big(f(x), f(y)\big) < \epsilon$. به‌طور معادل برای هر گوی $S_\epsilon\big(f(x)\big)$، گوی $S_\delta(x)$ موجود باشد که

$$f\big(S_\delta(x)\big) \subseteq S_\epsilon\big(f(x)\big)$$

از این تعریف الگو گرفته و تعریف پیوستگی در فضاهای توپولوژیک را ارائه می‌کنیم. چون در فضاهای توپولوژیک گوی باز وجود ندارد بایستی از مجموعه‌های باز استفاده کرد.

تعریف۳ ـ ۱۴. اگر $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ تابعی دلخواه باشد، f را در نقطه‌ی $x \in X$ پیوسته گوییم هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز W شامل $f(x)$، مجموعه‌ی باز U شامل x موجود باشد که $f(U) \subseteq W$. تابعی که در هر نقطه پیوسته باشد، تابع پیوسته گوییم.

یکی از ساده‌ترین توابع پیوسته، تابع ثابت است. همین‌طور اگر (X, τ) فضای توپولوژیک گسسته باشد، هر تابع از این فضا به هر فضای دیگر پیوسته است.

مثال۳ ـ ۱۱. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد. مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته کران‌دار روی X را با نماد $C_b(X)$ نمایش می‌دهیم. در تمرین‌ها خواهیم دید که خانواده‌ی همه‌ی $P(f, x_1, \ldots, x_n, \epsilon)$ ها تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی روی $C_b(X)$ می‌دهد. برای x_1 و ... و x_n از X و اسکالرهای c_1 و ... و c_n از $\mathbb{C}$، قرار می‌دهیم $\psi(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$. ادعا می‌کنیم تابع $\psi : C_b(X) \to \mathbb{C}$ پیوسته است. فرض کنیم $f \in C_b(X)$ و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. $h \in P\left(f, x_1, \ldots, x_n, \frac{\epsilon}{|c_1| + \cdots + |c_n|}\right)$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $1 \leq i \leq n$، $|h(x_i) - f(x_i)| < \frac{\epsilon}{|c_1| + \cdots + |c_n|}$. بنابراین

$$|\psi(f) - \psi(h)| = \Big|\sum_{i=1}^{n} c_i\big(f(x_i) - h(x_i)\big)\Big| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i|\,|f(x_i) - h(x_i)| < \epsilon.$$

این نتیجه می‌دهد که ψ پیوسته است.

قضیه‌ی زیر آزمونی است که توابع پیوسته را از توابع غیرپیوسته مشخص می‌کند.

قضیه۳ ـ ۱۵. *فرض کنید f تابعی از فضای توپولوژیک (X, τ_1) به‌توی فضای توپولوژیک (Y, τ_2) باشد، گزاره‌های زیر معادلند:*

الف) f تابعی پیوسته است؛

ب) تصویر معکوس هر مجموعه‌ی باز، باز است؛

ج) تصویر معکوس هر مجموعه‌ی بسته، بسته است؛

د) برای هر $A \subseteq X$، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

برهان. (الف $\Leftarrow$ ب): فرض کنیم f پیوسته و W مجموعه‌ی بازی از فضای Y باشد. $x \in f^{-1}(W)$

را در نظر می‌گیریم. لذا $f(x) \in W$. چون f در نقطه‌ی x پیوسته است، لذا مجموعه‌ی باز U شامل x وجود دارد که $f(U) \subseteq W$. از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $U \subseteq f^{-1}(W)$ و بنابراین x نقطه‌ی درونی $f^{-1}(W)$ بوده و لذا $f^{-1}(W)$ باز است.

(ب $\Leftarrow$ ج): فرض کنیم که تصویر معکوس هر مجموعه‌ی باز، باز باشد و F زیرمجموعه‌ای بسته از Y باشد. لذا $Y \backslash F$ باز است و بنابه فرض $f^{-1}(Y \backslash F)$ باز است. اما $f^{-1}(Y \backslash F) = X \backslash f^{-1}(F)$ باز است و لذا $f^{-1}(F)$ بسته است.

(ج $\Leftarrow$ د): فرض کنیم که تصویر معکوس هر مجموعه‌ی بسته، بسته باشد و $A \subseteq X$. چون $f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)$ بسته و $A \subseteq f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)$، لذا

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)$$

درنتیجه

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

(د $\Leftarrow$ الف): اکنون فرض کنیم برای هر $A \subseteq X$، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. ثابت می‌کنیم f در نقطه‌ی $x \in X$ پیوسته است. فرض کنیم W مجموعه‌ی باز شامل $f(x)$ باشد، بنابه فرض

$$f\big(\overline{f^{-1}(Y \backslash W)}\big) \subseteq \overline{f\big(f^{-1}(Y \backslash W)\big)} \subseteq \overline{Y \backslash W} = Y \backslash W$$

لذا $\overline{\big(f^{-1}(W)\big)^c} = \overline{f^{-1}(W^c)} \subseteq f^{-1}(W^c) = \big(f^{-1}(W)\big)^c$ و بنابراین $f^{-1}(W)$ باز است. چون $x \in f^{-1}(W)$ و $f\big(f^{-1}(W)\big) \subseteq W$، لذا f در نقطه‌ی x پیوسته است. ■

$X = \mathbb{R}$ را با توپولوژی اقلیدسی و $Y = \mathbb{R}$ را با توپولوژی گسسته در نظر می‌گیریم. نگاشت همانی از X به‌روی Y پیوسته نیست. چرا که تصویر معکوس $\{0\}$ در X باز نیست. لذا تصور این‌که همیشه تابع همانی پیوسته است، تصوری نادرست است.

مثال ۳ ـ ۱۲. فرض کنیم (X, τ_1) و (Y, τ_2) دو فضای توپولوژیک دلخواه و $f : X \to Y$ تابعی پیوسته باشد. اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای X همگرا به $x \in X$ باشد، در این‌صورت $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به $f(x)$ است. در حقیقت اگر W مجموعه‌ای باز شامل $f(x)$ باشد، بنابه قضیه‌ی بالا $f^{-1}(W)$ مجموعه‌ای باز شامل x است. بنابراین عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $n > N$، $x_n \in f^{-1}(W)$. لذا برای هر $n > N$، $f(x_n) \in W$. درنتیجه $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به $f(x)$ است.

عکس مثال قبلی در بعضی فضاهای توپولوژیک از جمله حالتی که (X, τ) متریک‌پذیر است صحیح است ولی در حالت کلی درست نیست. برای مثال $X = [0, 1]$ را با توپولوژی هم‌شمارا

و $Y = [0, 1]$ را با توپولوژی اقلیدسی در نظر می‌گیریم. نگاشت همانی از X به‌روی Y پیوسته نیست زیرا $I^{-1}\left((\frac{1}{3}, \frac{1}{2})\right) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ در X باز نیست. از طرف دیگر تنها دنباله‌های همگرا در X از مرتبه‌ای به بعد ثابت اند، لذا تصویر این دنباله‌ها تحت تابع همانی نیز همگرا است. بنابراین عکس موضوع فوق در حالت کلی برای فضاهای توپولوژیک درست نیست.

قضیه ۳ ـ ۱۶. *فرض کنید f تابعی از فضای توپولوژیک (X, τ_1) به‌توی فضای توپولوژیک (Y, τ_2) باشد، گزاره‌های زیر معادلند:*

الف) *f تابعی پیوسته است؛*

ب) *برای هر زیرمجموعه‌ی B از Y، $f^{-1}(B^\circ) \subseteq \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$؛*

ج) *برای هر زیرمجموعه‌ی B از Y، $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$؛*

د) *برای هر زیرمجموعه‌ی B از Y، $\mathrm{bd}\left(f^{-1}(B)\right) \subseteq f^{-1}\left(\mathrm{bd}(B)\right)$.*

برهان. (الف $\Leftarrow$ ب): تابع پیوسته f و $B \subseteq Y$ را در نظر می‌گیریم. از آنجا که $f^{-1}(B^\circ) \subseteq f^{-1}(B)$ و $f^{-1}(B^\circ)$ باز است، لذا

$$f^{-1}(B^\circ) \subseteq \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$$

لذا گزاره (ب) برقراراست.

(ب $\Leftarrow$ ج): فرض کنیم شرط (ب) برقرار باشد. اگر G در Y باز باشد، خواهیم داشت

$$f^{-1}(G) \subseteq \left(f^{-1}(G)\right)^\circ \subseteq f^{-1}(G)$$

لذا f پیوسته است. زیرمجموعه‌ی B از Y را در نظر می‌گیریم، لذا

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq f\left(f^{-1}(\overline{B})\right) \subseteq \overline{B}.$$

درنتیجه $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$، که شرط (ج) را ثابت می‌کند.

(ج $\Leftarrow$ د): اگر شرط (ج) برقرار باشد و B زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از Y باشد، خواهیم داشت

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B)$$

این نشان می‌دهد که تصویر معکوس هر مجموعه‌ی بسته، بسته است. لذا f پیوسته است. اکنون اگر B زیرمجموعه‌ای از Y باشد، $f^{-1}(B^\circ) \subseteq \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$ و بنابه فرض $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$. از دو رابطه‌ی اخیر،

$$\begin{aligned}\mathrm{bd}\left(f^{-1}(B)\right) &= \overline{f^{-1}(B)} \setminus \left(f^{-1}(B)\right)^\circ \\ &\subseteq f^{-1}(\overline{B}) \setminus f^{-1}(B^\circ)\end{aligned}$$

$$= f^{-1}\big(\mathrm{bd}(B)\big)$$

بنابراین $\mathrm{bd}\left(f^{-1}(B)\right) \subseteq f^{-1}\big(\mathrm{bd}(B)\big)$.

(د $\Leftarrow$ الف): برای اتمام برهان، ثابت می‌کنیم f پیوسته است. اگر B زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از Y باشد، بنابه فرض

$$\begin{aligned}\overline{f^{-1}(B)} &= \mathrm{bd}\left(f^{-1}(B)\right) \cup f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}\big(\mathrm{bd}(B)\big) \cup f^{-1}(B)\\ &= f^{-1}\big(\mathrm{bd}(B) \cup B\big) = f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B).\end{aligned}$$

بنابراین تصویر معکوس هر مجموعه‌ی بسته، بسته است. ■

نکته۱. اگر (X, τ_1) و (Y, τ_2) دو فضای توپولوژیک و S زیرپایه‌ای برای Y باشد. می‌توان ثابت کرد که $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر تصویر معکوس هر عنصر S در X باز باشد. در حقیقت اگر f تابع پیوسته باشد، چون $S \subseteq \tau_2$ لذا برای هر $A \in S$، $f^{-1}(A) \in \tau_1$. اکنون اگر برای هر $A \in S$ داشته باشیم $f^{-1}(A) \in \tau_1$، ثابت خواهیم کرد که f پیوسته است. اگر G اشتراک تعدادی متناهی از اعضای S باشد، یعنی $G = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$، در آن‌صورت $f^{-1}(G) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i)$. اما هر $f^{-1}(A_i)$ باز است و لذا $f^{-1}(G)$ باز است. از طرف دیگر هر مجموعه‌ی باز در Y به‌صورت اجتماعی از عناصری به‌صورت G هاست، چون $f^{-1}(G)$ ها بازند، لذا تصویر معکوس هر مجموعه‌ی باز تحت f باز است.

تعریف ۳ـ۱۷. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک و $f : X \to \mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد. تابع f را نیم‌پیوسته‌ی بالا گوییم هرگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\{t \in X;\ f(t) < \alpha\}$ زیرمجموعه‌ای باز باشد. f را نیم‌پیوسته پایین گوییم هرگاه $-f$ نیم‌پیوسته‌ی بالا باشد. به بیان دیگر f نیم‌پیوسته‌ی پایین است هرگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\{t \in X;\ f(t) > \alpha\}$ زیرمجموعه‌ای باز باشد.

به‌راحتی دیده می‌شود که هر تابع پیوسته، نیم‌پیوسته‌ی پایین و نیم‌پیوسته‌ی بالا است. اگر $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ تابعی نیم‌پیوسته‌ی بالا و نیم‌پیوسته‌ی پایین باشد، آنگاه برای هر α و β از $\mathbb{R}$، $\{t;\ f(t) > \alpha\}$ و $\{t;\ f(t) < \beta\}$ باز هستند. درنتیجه

$$f^{-1}\big((\alpha, \beta)\big) = \{t;\ f(t) > \alpha\} \cap \{t;\ f(t) < \beta\}$$

باز است که نشان می‌دهد f پیوسته است.

اگر f تابعی نیم‌پیوسته‌ی پایین باشد، آنگاه برای هر α، $\{t;\ f(t) \leq \alpha\}$ بسته است. بعلاوه $\{t;\ f(t) \geq \alpha\}$ مجموعه‌ای G_δ است، یعنی به صورت اشتراک تعداد حداکثر شمارا از مجموعه‌های باز است. زیرا

$$\{t;\ f(t)\geq\alpha\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{t;\ f(t)>\alpha+\frac{1}{n}\right\}.$$

مثال۳ ـ ۱۳. فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیک و $A\subseteq X$. منظور از تابع مشخصه‌ی A که به‌صورت χ_A نمایش داده می‌شود، تابعی است که روی A یک و خارج A صفر است. فرض کنیم A بسته و $\alpha\in\mathbb{R}$. اگر $\alpha\leq 0$، آنگاه $\{t;\ \chi_A(t)<\alpha\}=\emptyset$ باز است. اگر $0<\alpha\leq 1$، آنگاه $\{t;\ \chi_A(t)<\alpha\}=A^c$ باز است. سرانجام اگر $\alpha>1$، $\{t;\ \chi_A(t)<\alpha\}=X$ باز است. خلاصه این‌که تابع مشخصه‌ی یک مجموعه‌ی بسته نیم‌پیوسته‌ی بالا است ولی ممکن است نیم‌پیوسته‌ی پایین نباشد.

خواننده می‌تواند بررسی کند که تابع مشخصه‌ی یک مجموعه در صورتی نیم‌پیوسته‌ی پایین است که آن مجموعه‌ی باز باشد.

مثال۳ ـ ۱۴. فرض کنیم $\{f_\lambda\}_{\lambda\in I}$ یک خانواده از توابع حقیقی مقدار پیوسته روی فضای توپولوژیک (X,τ) باشد. فرض کنیم این خانواده از توابع، کران‌دار یکنواخت باشد، یعنی K ای موجود باشد که برای هر $\lambda\in I$ و $x\in X$، $|f_\lambda(x)|\leq K$. قرار می‌دهیم $M(x)=\sup\{f_\lambda(x);\ \lambda\in I\}$ و $m(x)=\inf\{f_\lambda(x);\ \lambda\in I\}$. برای $\alpha\in\mathbb{R}$، به‌راحتی دیده می‌شود که

$$\{x;\ M(x)>\alpha\}=\bigcup_{\lambda\in I}\{x;\ f_\lambda(x)>\alpha\}$$

لذا $M(x)$ نیم‌پیوسته پایینی است. اثبات این‌که $m(x)$ نیم‌پیوسته‌ی بالایی است به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه۳ ـ ۱۸. *فرض کنیم (X,d) فضای متریک فشرده و $f:X\to\mathbb{R}$ نیم‌پیوسته پایینی باشد. در آن‌صورت f اینفیموم خود را اختیار می‌کند. به عبارت دیگر $x\in X$ موجود است که $f(x)=\inf\{f(t);\ t\in X\}$.*

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که $\{f(t);\ t\in X\}$ از پایین کران‌دار است. برای هر $n\in\mathbb{N}$، قرار دهید $G_n=\{t;\ f(t)>-n\}$. واضح است که $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ پوششی باز برای X است و لذا این پوشش دارای زیرپوشش متناهی چون $\{G_{n_i}\}_{i=1}^{k}$ است. به‌راحتی دیده می‌شود که $-n_1-\cdots-n_k$ کران پایینی برای $\{f(t);\ t\in X\}$ است. لذا اینفیموم $\{f(t);\ t\in X\}$ موجود است. فرض کنیم $m=\inf\{f(t);\ t\in X\}$. چون f نیم‌پیوسته پایینی است، لذا برای هر $q>m$، $F_q=\{t;\ f(t)\leq q\}$ بسته است. بنابه تعریف اینفیموم، همه‌ی F_q ها ناتهی هستند و به‌راحتی دیده می‌شود که خانواده‌ی $\{F_q\}_{q>m}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است. اما X فشرده است و لذا

$\bigcap_{q>m} F_q \neq \emptyset$. اختیار کنید $x \in \bigcap_{q>m} F_q$، واضح است که $f(x) = m$. ■

تعریف ۳ ـ ۱۹. تابع $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ را باز گوییم هرگاه برای هر $G \in \tau_1$، $f(G)$ باز باشد. همین‌طور f را بسته گوییم هرگاه برای هر F بسته، $f(F)$ بسته باشد.

تابع ثابت روی اعداد حقیقی، تابعی بسته است ولی باز نیست. $X = \{x, y, z\}$ را با توپولوژی $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{x, z\}, \{x, y\}, \{x\}\}$ و $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{x, z\}, \{x\}\}$ درنظر می‌گیریم. تابع $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ را با ضابطه‌ی $f(x) = x$، $f(y) = f(z) = z$ در نظر می‌گیریم. واضح است f باز است و بسته نیست، چرا که $f(\{y\}) = \{z\}$ بسته نیست.

نکته ۲. فرض کنیم $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای فضای توپولوژیک (X, τ_1) باشد. تابع f از (X, τ_1) به‌توی (Y, τ_2) باز است اگر و تنها اگر برای هر $B \in \mathcal{B}$، $f(B)$ باز باشد. در حقیقت $\mathcal{B} \subseteq \tau_1$، لذا برای هر $B \in \mathcal{B}$، $f(B)$ باز است. اکنون فرض کنیم G مجموعه‌ای باز باشد. پس خانواده‌ی $\{B_\alpha;\ \alpha \in I\}$ از اعضای $\mathcal{B}$ وجود دارد که $G = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$. از آنجا که برای هر α، $f(B_\alpha)$ باز است، لذا $f(G) = \bigcup_{\alpha \in I} f(B_\alpha)$ باز است و بنابراین f باز است.

نکته‌ی فوق در مورد زیرپایه درست نیست. برای مثال خانواده‌ی $\{\{x, y\}, \{y, z\}\}$ یک زیرپایه برای یک توپولوژی روی $X = \{x, y, z\}$ است. همین‌طور $Y = \{x, y, z\}$ را با توپولوژی $\tau = \{\emptyset, Y, \{x, y\}\}$ و تابع $f : X \to Y$ را با ضابطه‌ی $f(x) = f(z) = x$، $f(y) = y$ در نظر می‌گیریم. واضح است تصویر هر کدام از اعضای زیرپایه فوق، باز است اما f باز نیست. در حقیقت $f(\{y\}) = \{y\}$ باز نیست.

تعریف ۳ ـ ۲۰. تابع یک به یک و پوشای f از فضای توپولوژیک (X, τ_1) به‌روی فضای توپولوژیک (Y, τ_2) را یک همیومورفیسم نامیم هرگاه f و f^{-1} پیوسته باشند.

تابع $f : [a, b] \to [c, d]$ با ضابطه‌ی

$$f(x) = \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c$$

یک همیومورفیسم از $[a, b]$ به‌روی $[c, d]$ است. تابع همانی I از $\mathbb{R}$ باتوپولوژی گسسته به‌روی $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی یک همیومورفیسم نیست.

ما خاصیتی از فضا را خاصیت توپولوژیکی نامیم هرگاه آن خاصیت تحت هر همیومورفیسمی پایا باشد، به عبارت دیگر اگر فضای توپولوژیکی دارای آن خاصیت باشد هر فضای همیومورف با آن نیز دارای همان خاصیت باشد. در آینده خواهیم دید که فشردگی خاصیت توپولوژیکی است. اما طول خاصیت توپولوژیکی نیست، چرا که $[a, b]$ و $[c, d]$ با هم همیومورف هستند ولی ممکن

است طول‌های متفاوتی داشته باشند. اثبات این‌که دو فضا با هم همیومورف نیستند گاهی اوقات مشکل است، بایستی خواصی که تحت همیومورفیسم پایا هستند را در دو فضا مورد بررسی قرار داد. برای مثال $[0,1]$ با فضای $[0,\infty)$ همیومورف نیست، زیرا $[0,1]$ فشرده است و چنانچه همیومورفیسمی‌بین این دو مجموعه وجود داشته باشد بایستی $[0,\infty)$ نیز فشرده باشد که چنین نیست.

قضیه۳ ـ ۲۱. *فرض کنیم f تابعی یک به یک و پیوسته از فضای توپولوژیک (X,τ_1) به‌روی فضای توپولوژیک (Y,τ_2) باشد. گزاره‌های زیر معادلند:*

الف) *f یک همیومورفیسم است؛*

ب) *f باز است؛*

ج) *f بسته است؛*

د) *برای هر $A \subseteq X$،* $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

برهان. (الف $\Leftarrow$ ب): فرض کنیم f یک همیومورفیسم باشد و $G \subseteq X$ باز باشد. چون f^{-1} پیوسته است لذا $(f^{-1})^{-1}(G) = f(G)$ در Y باز است و بنابراین f نگاشت باز است.

(ب $\Leftarrow$ ج): فرض کنیم f تابعی باز باشد و F مجموعه‌ای بسته در X باشد. لذا $f(X\backslash F) = Y\backslash f(F)$ باز است و بنابراین $f(F)$ بسته است، یعنی f بسته است.

(ج $\Leftarrow$ د): اگر f بسته باشد و $A \subseteq X$. از آنجا که $f(A) \subseteq f(\overline{A})$، بنابه فرض $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$. چون f پیوسته است عکس جزئیت نیز برقرار است.

(د $\Leftarrow$ الف): فرض کنید برای هر $A \subseteq X$، $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. ثابت می‌کنیم f^{-1} پیوسته است. فرض کنیم $F \subseteq X$ زیرمجموعه‌ای بسته باشد. بنابه فرض

$$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F) = f(\overline{F}) = \overline{f(F)}.$$

درنتیجه $(f^{-1})^{-1}(F)$ بسته است، یعنی f^{-1} پیوسته است. ■

مثال۳ ـ ۱۵. فرض کنیم f همیومورفیسمی از فضای متریک (X,d) به‌روی فضای توپولوژیک (Y,τ) باشد. نگاشت $d_1 : Y \times Y \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $d_1(x,y) = d\big(f^{-1}(x), f^{-1}(y)\big)$ تعریف می‌کنیم. به‌راحتی دیده می‌شود که d_1 یک متر روی Y است. فرض کنیم $x \in G \in \tau$، لذا بنابه پیوستگی f، $f^{-1}(x) \in f^{-1}(G) \in \tau_d$. $r > 0$ موجود است که $S_r\big(f^{-1}(x)\big) \subseteq f^{-1}(G)$. ادعا می‌کنیم که $S_r(x) \subseteq G$. برای این‌کار $y \in S_r(x)$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین $d_1(x,y) = d\big(f^{-1}(x), f^{-1}(y)\big) < r$ و لذا $f^{-1}(y) \in S_r\big(f^{-1}(x)\big) \subseteq f^{-1}(G)$. این نتیجه

می‌دهد که $S_r(x) \subseteq G$ و لذا $G \in \tau_{d_2}$.

اکنون مجموعه‌ی باز G را از فضای متریک (Y, d_1) در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که $f^{-1}(G)$ در X باز است. اگر $x \in f^{-1}(G)$، برای $r > 0$ ای $S_r\big(f(x)\big) \subseteq G$. فرض کنیم $y \in S_r(x)$. لذا $d_1\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y) < r$ و بنابراین $f(y) \in S_r\big(f(x)\big) \subseteq G$. این نتیجه می‌دهد که $y \in f^{-1}(G)$ و لذا $S_r(x) \subseteq f^{-1}(G)$. با این توضیحات $f^{-1}(G)$ باز است و لذا $G \in \tau$. بنابراین متریک‌پذیری خاصیت توپولوژیکی است.

فرض کنیم یک خانواده از فضاهای توپولوژیک مفروض است، سوال این‌جاست که آیا روی حاصل‌ضرب این خانواده از مجموعه‌ها می‌توان یک توپولوژی تعریف کرد که هر یک از اعضای این خانواده با زیرفضایی از آن همیومورف باشد؟ جواب مثبت است. بزودی خواهید دید که در توپولوژی حاصل‌ضرب فضاها جای‌گاه مخصوص به خود دارند.

۳—۵ فضاهای حاصل‌ضربی

فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های ناتهی باشد. همان‌طور که قبلاً یادآوری شد حاصل‌ضرب این خانواده از مجموعه‌ها به‌صورت

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha;\ f(\alpha) \in X_\alpha\}$$

تعریف می‌شود. برای راحتی کار اعضای $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ را با x نمایش می‌دهیم. لذا x تابعی از مجموعه‌ی اندیس‌گذار I به‌توی $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ است که برای هر α، $x(\alpha) \in X_\alpha$. باز هم برای راحتی کار $x(\alpha)$ را با نماد x_α نمایش می‌دهیم. برای هر α، تابع $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\alpha$ که با ضابطه‌ی $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ تعریف می‌شود تابع تصویر می‌نامیم. دیدیم که اگر مجموعه‌ی اندیس‌گذار متناهی باشد، حاصل‌ضرب بالا همان حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌هاست. اگر X_1 و ... و X_n مجموعه‌های ناتهی باشند، n تایی مرتب $(x_1, \ldots, x_n)$ با تابع $x : \{1, \ldots, n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ که با ضابطه‌ی $x(i) = x_i$ تعریف می‌شود، یکی است. چون $\pi_i(x) = x(i) = x_i$، لذا در حالتی که مجموعه‌ی اندیس‌گذار متناهی است، تابع تصویر تعریف شده در بالا همان تابع تصویرآشنایی است که در حاصل‌ضرب دکارتی به‌کار برده شده است. با این توضیح تابع تصویر فوق چیزی دور از ذهن نیست. اکنون مقدمات برای تعریف توپولوژی حاصل‌ضربی فراهم شده است.

تعریف۳ ـ ۲۲. فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد، قرار می‌دهیم

$$S = \{\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha);\ G_\alpha \in \tau_\alpha,\ \alpha \in I\}.$$

اگر $\alpha \in I$ عنصری دلخواه باشد، خواهیم داشت $\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha) = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. بنابراین S یک زیرپایه برای یک توپولوژی روی حاصل‌ضرب X_α هاست که به آن توپولوژی حاصل‌ضربی گوییم.

مثال۳ ـ ۱۶. اگر (X_1, τ_1) و ... و (X_n, τ_n)، n فضای توپولوژیک باشند در آن‌صورت برای $G_i \in \tau_i$،

$$\pi_i^{-1}(G_i) = \{(x_1, \ldots, x_n);\ x_i \in G_i\} = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times G_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$$

یک مجموعه‌ی زیرپایه‌ای برای فضای حاصل‌ضربی $X_1 \times \cdots \times X_n$ است. اشتراک‌های تعدادی متناهی از این مجموعه‌ها یک پایه برای فضای حاصل‌ضربی است.

فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد. اگر $G_{\alpha_1} \in \tau_{\alpha_1}$ عنصری دلخواه باشد، یک مجموعه‌ی زیرپایه‌ای از فضای حاصل‌ضرب $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ به‌صورت

$$\pi_{\alpha_1}^{-1}(G_{\alpha_1}) = \{x;\ x_{\alpha_1} \in G_{\alpha_1}\}$$

است. به‌صورت شهودی مجموعه‌ی فوق به‌صورت حاصل‌ضربی است که تنها در مؤلفه‌ی α_1 ام، G_{α_1} است و در مؤلفه‌ی $\alpha \in I$ متمایز با α_1، X_α است. بعلاوه فرض کنیم α_1 و ... و α_n عناصری از مجموعه‌ی اندیس‌گذار I باشد و برای هر $1 \leq i \leq n$، $G_{\alpha_i} \in \tau_{\alpha_i}$ را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$ یک مجموعه‌ی پایه‌ای است. در حقیقت یک مجموعه‌ی پایه‌ای از نظر شهودی به‌صورت حاصل‌ضربی است که در مؤلفه‌ی α_i، G_{α_i} و در مؤلفه‌ی غیر از α_i ها مانند α، X_α است.

مثال۳ ـ ۱۷. خانواده‌ی $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ از فضاهای متریک را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم برای هر n و هر $x, y \in X_n$، $d_n(x, y) \leq 1$. فضای حاصل‌ضرب $X := \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ را در نظر می‌گیریم. تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$ تعریف می‌کنیم. d یک متر روی X است. اگر U مجموعه‌ی بازی شامل x در این فضای متریک باشد، آنگاه عدد طبیعی k موجود است که $S_{\frac{1}{2^k}}(x) \subseteq U$. قرار می‌دهیم

$$W = \left\{y \in X;\ d_n(y_n, x_n) < \frac{1}{2^{k+2}},\ n = 1, \ldots, k+1\right\}.$$

لذا $\bigcap_{n=1}^{k+1} \pi_n^{-1}(W_n) = W$ که در آن $W_n = \left\{y_n;\ d_n(y_n, x_n) < \frac{1}{2^{k+2}}\right\}$. پس W مجموعه‌ی باز پایه‌ای در فضای حاصل‌ضربی شامل x است. فرض کنیم $y \in W$، چون برای هر $n = 1, \ldots, k+1$، $d_n(x_n, y_n) < \frac{1}{2^{k+2}}$ و برای $n \geq k+2$، $d_n(x_n, y_n) \leq 1$، لذا

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}=\sum_{n=1}^{k+1}\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}+\sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}$$
$$\leq \frac{1}{2^{k+2}}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که $d(x,y)<\frac{1}{2^k}$ و لذا $y\in W\subseteq U$، این نشان می‌دهد که هر مجموعه‌ی باز در فضای متریک فوق در فضای حاصل‌ضربی باز است.

فرض کنیم G مجموعه‌ی بازی شامل x از فضای حاصل‌ضربی فوق باز باشد. اعداد نامنفی r_1 و r_2 و ... و r_k موجود است طوری که $x\in\bigcap_{i=1}^{k}\pi_{n_i}^{-1}\left(S_{r_i}(x_{n_i})\right)\subseteq G$. قرار می‌دهیم $m=\max\{n_1,\ldots,n_k\}$ و $r=\min\{r_1,\ldots,r_k\}$. اگر $d(x,y)<\frac{r}{2^m}$، برای هر $i\in\{1,\ldots,k\}$، $d_{n_i}(x_{n_i},y_{n_i})<r2^{n_i-m}\leq r_i$. بنابراین $y\in G$ و لذا $S_{\frac{r}{2^m}}(x)\subseteq G$. این توضیحات نتیجه می‌دهد که فضای حاصل‌ضربی فوق متریک‌پذیر است.

قضیه ۳ ـ ۲۳. *فرض کنیم $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک و (X,τ) فضای حاصل‌ضرب این خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد. در آن‌صورت تابع تصویر روی X، پوشا، پیوسته و باز است.*

برهان. فرض کنیم $\alpha\in I$ عنصری دلخواه باشد، ثابت می‌کنیم π_α پوشاست. عنصر $x_\alpha\in X_\alpha$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $\beta\in I$ متمایز با α، عنصر $x_\beta\in X_\beta$ را انتخاب می‌کنیم. تابع $x:I\to\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$ را با ضابطه‌ی $x(\alpha)=x_\alpha$ و $x(\beta)=x_\beta$ که در آن $\beta\neq\alpha$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\pi_\alpha(x)=x_\alpha$، یعنی π_α پوشاست.

اگر $G_\alpha\in\tau_\alpha$، از آنجا که $\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha)$ عنصر زیرپایه‌ای از فضای حاصل‌ضرب X است، بنابراین باز و لذا π_α پیوسته است.

برای اتمام برهان کافیست ثابت کنیم تصویر هر مجموعه‌ی پایه‌ای تحت π_α باز است. اگر $B=\bigcap_{i=1}^{n}\pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$ مجموعه‌ی پایه‌ای باشد، دو حالت اتفاق می‌افتد. حالت اول وقتی است که $\alpha\in\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$، یعنی برای یک $1\leq k\leq n$، $\alpha=\alpha_k$. در این حالت ثابت می‌کنیم $\pi_\alpha(B)=G_\alpha$. فرض کنیم $x\in B$، در این‌صورت برای هر i، $x_{\alpha_i}\in G_{\alpha_i}$ و بنابراین

$$\pi_\alpha(x)=x(\alpha)=x_\alpha\in G_\alpha$$

این نتیجه می‌دهد که $\pi_\alpha(B)\subseteq G_\alpha$. برای اثبات عکس جزئیت، اختیار می‌کنیم $g_\alpha\in G_\alpha$. برای هر α_i متمایز با α، عنصر $g_{\alpha_i}\in G_{\alpha_i}$ را اختیار می‌کنیم. برای هر $\beta\notin\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ عنصری از X_β مانند x_β اختیار می‌کنیم. تابع x که در نقطه‌ی α، g_α و در نقطه‌ی α_i متمایز با α، g_{α_i} و در

نقاط دیگر β، x_β تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم. با توجه به تعریف x، واضح است که $x \in B$ و $\pi_\alpha(x) = g_\alpha$. این تساوی را به اثبات می‌رساند.

حالت دوم وقتی است که $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$، در این حالت ثابت می‌کنیم $\pi_\alpha(B) = X_\alpha$. واضح است که $\pi_\alpha(B) \subseteq X_\alpha$، برای اثبات عکس جزئیت، فرض کنیم $x_\alpha \in X_\alpha$. برای هر α_i، عنصر $g_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$ را انتخاب می‌کنیم. همین‌طور برای هر β متمایز با α و α_iها عنصر x_β را از X_β انتخاب می‌کنیم. اکنون تابع x را طوری تعریف می‌کنیم که در نقطه‌ی α_i، g_{α_i} و در نقطه‌ی α، x_α و در نقاط β متمایز با α و α_iها عنصر x_β باشد. با توجه به تعریف x این عنصر عنصری از B است و $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$. این برهان را کامل می‌کند. ■

دیدیم تابع f از فضای متریک (X, d) به‌توی $\mathbb{R}^n$ که به‌صورت $f = (f_1, \ldots, f_n)$ تعریف می‌شود، پیوسته است اگر و تنها اگر هر f_i پیوسته باشد. قصد داریم این موضوع را برای حاصل‌ضرب فضاهای توپولوژیک تعمیم دهیم.

قضیه ۳ ـ ۲۴. *فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک و (X, τ) فضای حاصل‌ضرب این خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد. در آن‌صورت تابع f از فضای توپولوژیک (Y, τ_1) به‌توی (X, τ) پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر α، $\pi_\alpha \circ f$ پیوسته باشد.*

برهان. فرض کنیم f پیوسته و $\alpha \in I$ دلخواه باشد. چون π_α پیوسته است، لذا $\pi_\alpha \circ f$ ترکیب دو تابع پیوسته است و لذا پیوسته است.

برای اثبات عکس قضیه، کافیست ثابت کنیم که تصویر معکوس هر مجموعه‌ی باز زیرپایه‌ای تحت f باز است. اگر $\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha)$ مجموعه‌ی باز زیرپایه‌ای باشد، از آنجا که $\pi_\alpha \circ f$ پیوسته است، لذا

$$(\pi_\alpha \circ f)^{-1}(G_\alpha) = f^{-1}\left(\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha)\right)$$

باز است که ثابت می‌کند f پیوسته است. ■

قضیه ۳ ـ ۲۵. *فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ و $\{(Y_\alpha, \tau'_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ دو خانواده از فضاهای توپولوژیک و برای هر α، f_α تابعی از (X_α, τ_α) به‌توی (Y, τ_α') باشد.*

الف) اگر برای هر α، f_α پیوسته باشد، آنگاه تابع $\prod_{\alpha \in I} f_\alpha : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ که هر x را به عنصری که در مؤلفه‌ی αام آن $f_\alpha(x_\alpha)$ است نسبت می‌دهد، پیوسته است.

ب) اگر برای هر α، f_α باز و همه‌ی به‌جز حداکثر تعداد متناهی از آنها پوشا نباشد، آنگاه $\prod_{\alpha \in I} f_\alpha$ باز است.

برهان. فرض کنیم $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i})$ مجموعه‌ی باز پایه‌ای از فضای حاصل‌ضربی $\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ باشد. در آن‌صورت

$$\left(\prod_{\alpha\in I} f_\alpha\right)^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i})\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}\left(f_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i})\right).$$

چون هر f_α پیوسته است، لذا طرف راست رابطه‌ی اخیر باز است و بنابراین $\prod_{\alpha\in I} f_\alpha$ پیوسته است.

برای اثبات گزاره (ب)، فرض کنیم $f_{\beta_1}, \ldots, f_{\beta_m}$ تعدادی متناهی از f_α ها باشند که پوشانیستند. فرض کنیم $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$ مجموعه‌ی باز پایه‌ای از فضای حاصل‌ضربی $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ باشد. در این‌صورت

$$\prod_{\alpha\in I} f_\alpha\left(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}\left(f_{\alpha_i}(G_{\alpha_i})\right) \cap \bigcap_{i=1}^{m} \pi_{\beta_i}^{-1}\left(f_{\beta_i}(X_{\beta_i})\right).$$

چون همه‌ی f_α ها باز هستند، لذا طرف راست رابطه‌ی اخیر باز و بنابراین $\prod_{\alpha\in I} f_\alpha$ باز است. ■

خاصیتی را حاصل‌ضربی گوییم هرگاه چنانچه خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیکی دارای آن خاصیت باشند حاصل‌ضرب این خانواده از فضاها نیز دارای آن خاصیت باشد. برای مثال خواهیم دید که حاصل‌ضرب هر تعداد از فضاهای توپولوژیک فشرده فضای توپولوژیک فشرده است و لذا فشرده بودن خاصیت توپولوژیکی است. همین‌طور خاصیتی را موروثی گوییم هرگاه فضای توپولوژیکی دارای آن خاصیت باشد هر زیرفضای آن نیز دارای آن خاصیت باشد. فشرده بودن خاصیت موروثی نیست، چرا که $[0,1]$ با توپولوژی اقلیدسی فشرده است اما زیرفضای $(0,1)$ از آن فشرده نیست.

یادآوری می‌کنیم که در یک فضای متریک یک عنصر در بستار یک مجموعه قرار دارد اگر و تنها اگر دنباله‌ای از عناصر آن مجموعه به این عنصر همگرا باشد. از این موضوع استفاده کرده و در مثال زیر ثابت می‌کنیم حاصل‌ضرب هر تعداد از فضاهای متریک لزوماً متریک‌پذیر نیست.

مثال ۳ ـ ۱۸. متریک‌پذیری خاصیتی حاصل‌ضربی نیست، در حقیقت مجموعه‌ی اندیس‌گذار $I = [0,1]$ را در نظر گرفته و برای هر $\alpha \in I$، قرار می‌دهیم $X_\alpha = \mathbb{R}$. فرض کنیم A مجموعه‌ی همه‌ی x هایی از فضای حاصل‌ضرب باشد که همه‌ی مؤلفه‌های x یک بوده و تنها تعداد متناهی از مؤلفه‌های x صفر باشد. ادعا می‌کنیم تابع صفر که با نماد x_0 نمایش می‌دهیم در بستار A بوده و هیچ دنباله‌ای در A موجود نیست که به x_0 همگرا باشد. چون هر مجموعه‌ی پایه‌ای تنها در تعداد متناهی مؤلفه $\mathbb{R}$ نیست، به‌راحتی دیده می‌شود که x_0 در بستار A است. فرض کنیم a_n دنباله‌ای در A باشد که به صفر همگراست. مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های صفر a_1 را با نماد A_1 و مجموعه‌ی

همه‌ی مؤلفه‌های صفر a_2 را با A_2 و ... نمایش می‌دهیم. چون هر A_n متناهی است، لذا $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ حداکثر شماراست. اختیار کنید $\alpha \in [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$، در این‌صورت $\pi_\alpha^{-1}((-1,1))$ باز شامل x_0 است که هیچ یک از a_n ها را شامل نیست. این نتیجه می‌دهد که حاصل‌ضرب X_α ها متریک‌پذیر نیست.

مثال زیر ارتباط بستار حاصل‌ضرب تعدادی از مجموعه‌ها با حاصل‌ضرب بستار آن مجموعه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهد.

مثال ۳ ــ ۱۹. فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد. برای هر α، $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ را در نظر می‌گیریم. در آن‌صورت

$$\overline{\prod_{\alpha\in I} A_\alpha} = \prod_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha}.$$

در حقیقت فرض کنیم $x \in \overline{\prod_{\alpha\in I} A_\alpha}$ عنصری دلخواه باشد، کافیست ثابت کنیم برای هر α، $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$. اگر G_α مجموعه‌ی بازی در X_α شامل x_α باشد، آنگاه $\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha)$ مجموعه‌ای باز شامل x در فضای حاصل‌ضربی است و لذا

$$\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha) \cap \prod_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset.$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $G_\alpha \cap A_\alpha \neq \emptyset$.

برای اثبات عکس جزئیت، $x \in \prod_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha}$ و مجموعه‌ی باز پایه‌ای $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$ شامل x را در نظر می‌گیریم. از آنجا که برای هر α، $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$، عنصر $z_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_i}$ را اختیار می‌کنیم. اکنون برای هر α متمایز با α_i ها، عنصری از A_α چون a_α را در نظر می‌گیریم. تابع z که در α_i ها به‌صورت z_{α_i} و در هر α متمایز با α_i ها به‌صورت a_α تعریف می‌شود عنصری در $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i}) \cap \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ است. این موضوع اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۳ ــ ۲۶. *فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک و (X, τ) فضای حاصل‌ضرب این خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد. عنصر x_1 را از این حاصل‌ضرب در نظر می‌گیریم و D را مجموعه‌ی همه‌ی عناصری از X در نظر می‌گیریم که این عنصر با x_1 حداکثر در تعدادی متناهی مؤلفه متمایز باشد. در آن‌صورت D در X چگال است.*

برهان. فرض کنیم $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$ مجموعه‌ی باز پایه‌ای باشد. برای هر α_i، عنصر $g_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$ را اختیار می‌کنیم. تابع z را در α_i به‌صورت g_{α_i} و در نقطه‌ی α متمایز با α_i ها به‌صورت x_{1_α} تعریف می‌کنیم. این عنصر حداکثر در n مؤلفه با x_1 متمایز است و لذا مجموعه‌ی پایه‌ای فوق در نقطه‌ی

x، D را قطع می‌کند. لذا D در X چگال است. ■

شاید این‌گونه تصور شود که در فضای حاصل‌ضربی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ همه‌ی مجموعه‌های باز به‌صورت $G_۱ \times G_۲$ است. ما ادعا می‌کنیم که چنین نخواهد بود. مجموعه‌ی باز $G = (۰, ۳) \times (۴, ٦)$ و $W = (۵, ۷) \times (۸, ۱۰)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم برای $G_۱$ و $G_۲$ باز در $\mathbb{R}$ داشته باشیم $G \cup W = G_۱ \times G_۲$. از آنجا که زوج‌های $(۲, ۵)$ و $(٦, ۹)$ به‌ترتیب در G و W قرار دارد، لذا بایستی اعداد ۲ و ٦ در $G_۱$ و همین‌طور اعداد ۵ و ۹ در $G_۲$ قرار داشته باشند. بنابراین زوج $(۲, ۹)$ در $G_۱ \times G_۲$ قرار دارد که تناقض با $G \cup W = G_۱ \times G_۲$ می‌باشد، چرا که این عنصر در $G \cup W$ قرار ندارد.

دقت کنید که مجموعه‌های باز در فضاهای حاصل‌ضربی دارای شکل خاصی نیستند، در حقیقت یک مجموعه‌ی باز در این فضا به‌صورت اجتماع‌های از اشتراک‌های متناهی از اعضای زیرپایه‌ای است اما خوشبختانه عناصر پایه‌ای دارای شکل خاصی است. برای مثال یک مجموعه‌ی پایه‌ای به‌صورت حاصل‌ضربی است که تنها در تعداد متناهی از مؤلفه، X_α نیست و در این مؤلفه‌ها یک مجموعه‌ی باز از فضای متناظر قرار دارد. به این دلیل است که ما همواره در فضای حاصل‌ضربی با مجموعه‌های باز پایه‌ای کار می‌کنیم.

۳—٦ اصول شمارایی

در یک فضای توپولوژیک، داشتن زیرمجموعه‌های چگال و حداکثر شمارا، همچنین داشتن پایه‌ای حداکثر شمارا از محاسن آن فضای توپولوژیک به حساب می‌آید. تعدادی از قضایا در هر فضای توپولوژیک برقرار نیست اما برای فضاهای توپولوژیکی که دارای یکی از خصوصیات بالاست برقرار خواهد بود. به علت اهمیت موضوع این مفاهیم را به‌طور دقیق مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۳ ـ ۲۷. فضای توپولوژیک (X, τ) را در نظر می‌گیریم، در آن‌صورت

الف) (X, τ) را تفکیک‌پذیر گوییم هرگاه X شامل زیرمجموعه‌ای حداکثر شمارا و چگال باشد.

ب) (X, τ) را شمارای دوم گوییم هرگاه این فضا دارای پایه‌ای حداکثر شمارا باشد.

ج) فرض کنید $x \in X$. خانواده‌ی B از زیرمجموعه‌های باز شامل x را یک پایه‌ی موضعی برای x گوییم هرگاه هر مجموعه‌ی باز شامل x، شامل عنصری از B باشد. اگر هر نقطه از X دارای پایه‌ی موضعی حداکثر شمارا باشد، فضای (X, τ) را شمارای اول نامیم.

توجیهی که برای فضاهای شمارای اول و دوم وجود دارد شبیه ماکزیمم موضعی و ماکزیمم

مطلق است. در حقیقت ماکزیمم موضعی، ماکزیمم در یک همسایگی است و ماکزیمم مطلق، ماکزیمم در همه‌ی دامنه‌ی تعریف می‌باشد. توجه دارید که شمارای اول وجود پایه‌س حداکثر شمارا را در هر نقطه تضمین می‌کند ولی شمارای دوم وجود پایه‌ی حداکثر شمارا برای فضا را تضمین می‌کند.

چون $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است، لذا $\mathbb{R}$ تفکیک‌پذیر است. از آنجا که

$$\{S_{\frac{1}{n}}(x);\ x \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$$

پایه‌ای حداکثر شمارا برای $\mathbb{R}$ است، لذا $\mathbb{R}$ شمارای دوم است. اگر $x \in \mathbb{R}$، واضح است $\{S_r(x);\ r \in \mathbb{Q}\}$ یک پایه‌ی موضعی شمارا برای x است و لذا $\mathbb{R}$ شمارای اول است.

همان‌طور که توضیح داده شد هر ماکزیمم مطلق، ماکزیمم موضعی است. این گونه برداشت می‌شود که هر شمارای دوم، شمارای اول نیز باشد. در حقیقت اگر $B = \{B_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ای برای فضای توپولوژیک (X, τ) و $x \in X$ دلخواه باشد. به‌سادگی دیده می‌شود که خانواده‌ی همه‌ی اعضای B که شامل x هستند پایه‌ای موضعی برای x خواهند بود و لذا X شمارای اول است.

$\mathbb{R}$ با متر گسسته تفکیک‌پذیر نیست، چرا که همه‌ی زیرمجموعه‌های این فضا بسته هستند و چون $\mathbb{R}$ ناشماراست این فضا تفکیک‌پذیر نیست. بعلاوه این فضا شمارای دوم نیست، چون اگر B پایه‌ای برای این فضا باشد برای هر $x \in \mathbb{R}$ عنصری از B مانند B شامل x وجود خواهد داشت که $\{x\} \subseteq B$. این نتیجه می‌دهد که برای هر x، $\{x\} \in B$ و لذا B ناشماراست. نتیجه می‌گیریم $\mathbb{R}$ پایه‌ی حداکثر شمارا ندارد و لذا شمارای دوم نیست. با وجود این‌که فضای فوق نه تفکیک‌پذیر و نه شمارای دوم است ولی شمارای اول است. در حقیقت $B = \{\{x\}\}$ پایه‌ی موضعی برای x است.

نکته۳. اگر (X, d) یک فضای متریک تفکیک‌پذیر باشد، آنگاه $|X| \leq |\mathbb{R}|$. در حقیقت فرض کنیم $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ زیرمجموعه‌ای چگال از X باشد. قرار می‌دهیم

$$B = \{S_{\frac{1}{m}}(x_n);\ m, n \in \mathbb{N}\}.$$

چون B شماراست، فرض می‌کنیم $\{B_1, B_2, \ldots\}$ نمایشی از اعضای B باشد. برای هر $x \in X$، تعریف می‌کنیم $S_x = \{n \in \mathbb{N};\ x \in B_n\}$. اکنون به‌سادگی دیده می‌شود که تابع $f(x) = S_x$ از X به‌توی مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ یک به یک بوده و لذا $|X| \leq |\mathbb{R}|$.

مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های کران‌دار از اعداد حقیقی را با نماد l^∞ نمایش می‌دهیم. تابع $d : l^\infty \times l^\infty \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup\{|x_n - y_n|;\ n \in \mathbb{N}\}$ یک متر روی l^∞ است و لذا l^∞ یک فضای متریک است. همین‌طور برای $1 \leq p < \infty$، l^p مجموعه‌ی

همه‌ی دنباله‌هایی مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ است که $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$. به‌راحتی دیده می‌شود که تابع $d_1 : l^p \times l^p \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $d_1(\{x_n\},\{y_n\}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ یک متر روی l^p است. در آنالیز فضاهای l^∞ و l^p از اهمیت خاصی برخوردارند. در مثال زیر نشان می‌دهیم که این فضاها کامل هستند و l^∞ تفکیک‌پذیر نیست ولی l^p تفکیک‌پذیر است.

مثال۳ ـ ۲۰. فرض کنیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در فضای متریک l^∞ باشد. فرض کنیم برای هر n، $x_n = (a_1^n, a_2^n, \ldots)$. اگر $\epsilon > 0$ داده شده باشد، در آن‌صورت عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $m, n \geq N$ و هر $i \in \mathbb{N}$،

$$|a_i^n - a_i^m| \leq \sup\{|a_i^n - a_i^m|;\ i \in \mathbb{N}\} = d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

این نشان می‌دهد که برای هر i، دنباله‌ی $\{a_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ کوشی و لذا در اعداد حقیقی به عنصری چون a_i همگراست. قرار می‌دهیم $x = (a_1, a_2, \ldots)$ و ابتدا ثابت می‌کنیم که $x \in l^\infty$. چون هر دنباله کوشی در هر فضای متریک کران‌دار است، لذا M ای وجود دارد که برای هر n، $\sup\{|a_i^n|;\ i \in \mathbb{N}\} < M$. به‌راحتی دیده می‌شود که $\sup\{|a_i|;\ i \in \mathbb{N}\} \leq M$. این ادعا را ثابت می‌کند. اکنون ثابت می‌کنیم که $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به x همگراست. دوباره فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد، N ای هست که برای هر $m, n > N$ و هر i،

$$|a_i^n - a_i^m| \leq \sup\{|a_i^n - a_i^m|;\ i \in \mathbb{N}\} = d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}.$$

چون برای هر $m, n > N$، $|a_i^n - a_i^m| < \frac{\epsilon}{2}$، لذا برای هر $n > N$، $|a_i^n - a_i| < \epsilon$. رابطه‌ی اخیر برای هر $n > N$ و هر i برقرار است و لذا $x_n \to x$، یعنی l^∞ کامل است. نشان می‌دهیم که l^∞ تفکیک‌پذیر نیست. فرض کنیم $D = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ زیرمجموعه‌ی شمارایی از l^∞ باشد و فرض کنیم $x_n = (a_1^n, a_2^n, \ldots)$. اگر $|a_i^i| \leq 1$، قرار می‌دهیم $a_i = a_i^i + 1$ و اگر $a_i^i > 1$، قرار می‌دهیم $a_i = 0$. فرض کنیم $x = (a_1, a_2, \ldots)$، در این‌صورت مؤلفه‌ی n ام $x - x_n$ مساوی $a_n - a_n^n$ است و لذا $|a_n - a_n^n| \geq 1$. این نشان می‌دهد که $d(x, x_n) \geq 1$، یعنی D در l^∞ چگال نیست. بنابراین l^∞ تفکیک‌پذیر نیست.

اثبات این‌که l^p یک فضای متریک کامل است به خواننده واگذار می‌شود. D را مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های گویا که حداکثر تعدادی متناهی مختص از این دنباله‌ها ناصفر است، در نظر می‌گیریم. واضح است که D زیرمجموعه‌ی شمارایی از l^p است. $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p$ و $\epsilon > 0$ را در نظر می‌گیریم. عدد طبیعی n وجود دارد که $\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_i|^p < \frac{\epsilon^p}{2}$. اعداد گویای r_1 و

... و r_n را طوری اختیار می‌کنیم که برای هر $1 \le i \le n$، $|r_i - x_i| < \frac{\epsilon}{(2n)^{\frac{1}{p}}}$. قرار می‌دهیم $r = (r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots)$، لذا $r \in D$ و

$$d_1(r,x)^p = \sum_{i=1}^{n} |r_i - x_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < n\frac{\epsilon^p}{2n} + \frac{\epsilon^p}{2} = \epsilon^p.$$

این نشان می‌دهد که $d_1(r,x) < \epsilon$ و لذا l^p تفکیک‌پذیر است.

قضیه ۳ ـ ۲۸. *هر فضای شمارای دوم تفکیک‌پذیر است.*

برهان. فرض کنیم $B = \{B_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ی حداکثر شمارا برای فضای توپولوژیک (X,τ) باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in B_n$ را انتخاب می‌کنیم. ادعا می‌کنیم $D = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ در X چگال است و لذا X تفکیک‌پذیر است. برای این‌کار فرض کنیم G مجموعه‌ی بازی از X باشد. چون B پایه است، لذا n ای هست که $B_n \subseteq G$. این نتیجه می‌دهد که $D \cap G \neq \emptyset$ و لذا D در X چگال است. ■

می‌توان ثابت کرد که هر فضای متریک تفکیک‌پذیر (X,d)، شمارای دوم است. در حقیقت اگر $D = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ زیرمجموعه‌ی چگالی از X باشد، قرار می‌دهیم

$$B = \{S_r(x_n):\ r \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

ثابت می‌کنیم B یک پایه است. فرض کنیم G مجموعه‌ی بازی در X شامل عنصری چون $x \in X$ باشد. عدد گویای مثبت r وجود دارد که $S_r(x) \subseteq G$. چون D در X چگال است، لذا $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $x_n \in S_{\frac{r}{4}}(x)$. اکنون ثابت می‌کنیم که $x \in S_{\frac{r}{2}}(x_n) \subseteq G$. اگر $z \in S_{\frac{r}{2}}(x_n)$، لذا $d(z,x_n) < \frac{r}{2}$. از طرفی $d(x_n,x) < \frac{r}{2}$ و لذا

$$d(x,x_n) \le d(x,z) + d(z,x_n) < r.$$

این ادعا را ثابت می‌کند و لذا X شمارای دوم است.

قضیه ۳ ـ ۲۹. *فرض کنیم $\{(X_n,\tau_n)\}_{n=1}^{\infty}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک تفکیک‌پذیر باشد. در آن‌صورت حاصل‌ضرب این خانواده از فضاهای توپولوژیک تفکیک‌پذیر است.*

برهان. چون هر X_n تفکیک‌پذیر است، زیرمجموعه‌ی شمارا و چگال D_n از X_n را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x = (x_1, x_2, \dots)$ عنصری از فضای حاصل‌ضرب باشد. قرار می‌دهیم $A_1 = \{(d_1, x_2, x_3, \dots);\ d_1 \in D_1\}$ و برای هر n،

$$A_n = \left\{(d_1, d_2, \dots, d_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots):\ d_i \in D_i,\ i \in \{1,2,\dots,n\}\right\}$$

اگر $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$، آنگاه D حداکثر شماراست. فرض کنیم $y = (y_1, y_2, \dots)$ عنصری

دلخواه از فضای حاصل‌ضرب و $\bigcap_{i=1}^{n}\pi_i^{-1}(G_i)$ مجموعه‌ی باز پایه‌ای شامل y باشد. برای هر $1 \leq i \leq n$، عنصر $d_i \in D_i \cap G_i$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $(d_1, d_2, \ldots, d_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) \in \bigcap_{i=1}^{n}\pi_i^{-1}(G_i) \cap D$. این نتیجه می‌دهد که D در فضای حاصل‌ضرب چگال است. ∎

قضیه فوق نتیجه‌ای از قضیه‌ی زیر است، چون برهان آن تکنیکی متمایز با برهان قضیه‌ی زیر است لذا ما این برهان را ارائه کرده‌ایم. قضیه‌ی زیر حالت کلی از قضیه‌ی بالاست.

قضیه۳ ـ ۳۰. *فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از فضاهای هاسدورف باشد. فرض کنید برای هر $\alpha \in I$، $|X_\alpha| > 1$. در آن‌صورت حاصل‌ضرب این خانواده از فضاهای توپولوژیک تفکیک‌پذیر است اگر و تنها اگر همه‌ی X_α ها تفکیک‌پذیر بوده و $|I| \leq |\mathbb{R}|$.*

برهان. چون نگاشت تصویر پیوسته و پوشاست، لذا اگر فضای حاصل‌ضربی تفکیک‌پذیر باشد در آن‌صورت هر فضای مختصی نیز تفکیک‌پذیر است. اکنون نشان می‌دهیم که $|I| \leq |\mathbb{R}|$. اگر I متناهی باشد حکم برقرار است. اکنون فرض کنیم I نامتناهی و $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ زیرمجموعه‌ی چگالی از فضای حاصل‌ضربی باشد. چون هر X_α حداقل دو عنصر دارد، لذا برای هر $\alpha \in I$، مجموعه‌های باز و مجزایی چون G_α و W_α در X_α وجود دارند. پس $\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha)$ و $\pi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ در فضای حاصل‌ضربی باز و مجزا هستند. تابع $f_\alpha : D \to \{0, 1\}$ را روی $D \cap \pi_\alpha^{-1}(G_\alpha)$ عدد یک و خارج آن صفر تعریف می‌کنیم. لذا f_α روی $D \cap \pi_\alpha^{-1}(W_\alpha)$ صفر است. اگر $\alpha \neq \beta$، عنصر $y \in D \cap \pi_\alpha^{-1}(G_\alpha) \cap \pi_\beta^{-1}(W_\beta)$ را در نظر می‌گیریم. بنابه تعریف $f_\alpha(y) = 1$ و $f_\beta(y) = 0$ و بنابراین نگاشت $\alpha \mapsto f_\alpha$ از I به‌توی $\{f;\ f : D \to \{0, 1\}\}$ یک به یک است. این نتیجه می‌دهد که

$$|I| \leq \left|\{f;\ f : D \to \{0, 1\}\}\right| = |\mathbb{R}|$$

برعکس، اگر I متناهی باشد که حکم برقرار است. در غیر این‌صورت I را به‌عنوان زیرمجموعه‌ی چگالی از $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. برای هر $\alpha \in I$، فرض کنیم $D_\alpha = \{x^\alpha{}_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ زیرمجموعه‌ی چگالی از X_α باشد. برای $n > 1$، مجموعه‌ی همه‌ی $2n - 1$ تایی‌ها چون $(r_1, \ldots, r_{n-1}, k_1, \ldots, k_n)$ که در آن k_i ها اعداد طبیعی و r_i ها اعداد گویای اکیداً صعودی هستند را با نماد T_n نمایش می‌دهیم. واضح است که $T = \bigcup_{n=2}^{\infty} T_n$ شماراست. برای $t = (r_1, \ldots, r_{n-1}, k_1, \ldots, k_n) \in T$ عنصر x^t از فضای حاصل‌ضربی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $\alpha \leq r_1$ قرار می‌دهیم $x_\alpha = x^\alpha{}_{k_1}$ و برای $r_{i-1} < \alpha \leq r_i$، $x_\alpha = x^\alpha{}_{k_i}$

و سرانجام برای $r_n < \alpha$ قرار می‌دهیم $x_n = x^{\alpha}{}_{k_n}$. ادعا می‌کنیم زیرمجموعه‌ی شمارای $D = \{x^t : t \in T\}$ در X چگال است. فرض کنیم $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$ مجموعه‌ی باز پایه‌ای از فضای حاصل‌ضربی باشد که $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$. اعداد گویای $r_1, \ldots, r_{n-1}$ را طوری می‌گیریم که $\alpha_1 < r_1 < \alpha_2 < \cdots < r_{n-1} < \alpha_n$. از آنجا که D_{α_i} ها در X_{α_i} چگال هستند، لذا عدد طبیعی k_i وجود دارد که $x^{\alpha_i}{}_{k_i} \in G_{\alpha_i}$. واضح است که برای $t = (r_1, \ldots, r_{n-1}, k_1, \ldots, k_n)$، $x^t \in G$ و لذا حکم ثابت می‌شود. ■

مثال۳ ـ ۲۱. $\mathbb{R}$ را با توپولوژی هم‌شمارا در نظر می‌گیریم. اگر $D \subseteq \mathbb{R}$ شمارا باشد، لذا D^c باز است و چون $D^c \cap D = \emptyset$ لذا D در $\mathbb{R}$ چگال نیست. پس $\mathbb{R}$ تفکیک‌پذیر نیست. ثابت می‌کنیم این فضا شمارای اول نیست. اگر

$$\mathcal{B} = \{B_n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

پایه‌ی موضعی برای نقطه‌ی ۱ باشد، برای هر n، B_n^c حداکثر شماراست و لذا $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n^c$ حداکثر شماراست. از آنجا که $\mathbb{R}$ ناشماراست، $x \neq 1$ را از $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ انتخاب می‌کنیم. مجموعه‌ی باز $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که هیچ یک از B_n ها در $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ قرار نمی‌گیرند. لذا $\mathbb{R}$ شمارای اول نیست و لذا شمارای دوم نیست.

اگر $\mathbb{R}$ را با توپولوژی هم متناهی در نظر بگیریم، $\mathbb{N}$ در $\mathbb{R}$ چگال است. زیرا اگر $G \subseteq \mathbb{R}$ باز باشد، بنابه تعریف G^c متناهی است و بنابراین $G \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$. این نشان می‌دهد که $\mathbb{R}$ با توپولوژی هم متناهی تفکیک‌پذیر است.

نکته۴. اگر $\mathcal{B} = \{B_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ای برای فضای توپولوژیک (X, τ_1) و $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ یک همیومورفیسم باشد، آنگاه همه‌ی $f(B_n)$ ها باز هستند. نشان می‌دهیم $\{f(B_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ای برای Y است. اگر G مجموعه‌ی بازی از Y باشد، $f^{-1}(G)$ در X باز است و لذا برای n ای، $B_n \subseteq f^{-1}(G)$. از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $f(B_n) \subseteq G$ و لذا Y نیز شمارای دوم است. بنابراین خاصیت شمارای دوم خاصیت توپولوژیکی است. بعلاوه این‌که اگر $A \subseteq X$، $\mathcal{B}_A = \{B_n \cap A;\ n \in \mathbb{N}\}$ یک پایه برای A است ولذا خاصیت شمارای دوم یک خاصیت موروثی است. با همین روش می‌توان دید که خاصیت شمارای اول نیز توپولوژیکی و موروثی است.

مثال۳ ـ ۲۲. $\mathbb{R}$ با توپولوژی حد پایین، فضای شمارای اول است ولی فضای شمارای دوم نیست. در حقیقت $\left\{\left[x, x + \frac{1}{n}\right);\ n \in \mathbb{N}\right\}$ پایه‌ی موضعی برای نقطه‌ی x خواهد بود. اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}$ با توپولوژی حد پایین باشد. برای هر $x \in \mathbb{R}$، عنصر B_x از $\mathcal{B}$ را طوری اختیار

می‌کنیم که $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$. برای هر دو عنصر متمایز x و y، $B_x \neq B_y$. در حقیقت $x = \min B_x \neq \min B_y = y$. بنابراین تابع $f(x) = B_x$ تابعی یک به یک از $\mathbb{R}$ به‌توی B است. پس B حداکثر شمارا نیست.

قضیه۳ ـ ۳۱. *فرض کنیم $\{(X_n, \tau_n)\}_{n=1}^{\infty}$ خانواده‌ای از فضاهای شمارای دوم باشد، در آن‌صورت حاصل‌ضرب آنها نیز شمارای دوم است.*

برهان. فرض کنیم $B^n = \{B_i^n;\ i \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ای برای فضای X_n باشد. ادعا می‌کنیم مجموعه‌ی همه‌ی اشتراک‌های متناهی از

$$\{\pi_n^{-1}(B_i^n);\ i, n \in \mathbb{N}\}$$

تشکیل یک پایه برای فضای حاصل‌ضربی می‌دهد. فرض کنیم $\bigcap_{n=1}^{m} \pi_n^{-1}(G_n)$ مجموعه‌ی پایه‌ای از فضای حاصل‌ضربی شامل عنصری چون x باشد. لذا برای $1 \leq n \leq m$، $x_n \in G_n$. بنابراین یک عنصر از B^n شامل x_n مانند $B_{i_n}^n$ وجود خواهد داشت که $B_{i_n}^n \subseteq G_n$. می‌توان نوشت

$$x \in \bigcap_{n=1}^{m} \pi_n{}^{-1}(B_{i_n}^n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{m} \pi_n^{-1}(G_n).$$

این ثابت می‌کند که اشتراک‌های متناهی یاد شده در بالا پایه‌ای برای فضای حاصل‌ضربی خواهد بود و واضح است این مجموعه‌ی شماراست. نتیجه این‌که حاصل‌ضرب فوق یک فضای شمارای دوم است. ■

اگر $\{(X_n, \tau_n)\}_{n=1}^{\infty}$ خانواده‌ای از فضاهای شمارای اول باشد، با استفاده از برهان آورده شده در قضیه‌ی بالا، خواننده می‌تواند ثابت کند که حاصل‌ضرب آنها نیز شمارای اول است. اگر D زیرمجموعه‌ای حداکثر شمارا و چگال از فضای توپولوژیک (X, τ_1) و $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ تابعی پیوسته و پوشا باشد، آنگاه (Y, τ_2) نیز تفکیک‌پذیر است. در حقیقت $f(D)$ حداکثر شمارا و $Y = f(X) = f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)}$. مثال زیر نشان می‌دهد که تفکیک‌پذیری موروثی نیست.

مثال۳ ـ ۲۳. $\mathbb{R}$ را با توپولوژی حد پایین در نظر می‌گیریم. چون هر بازه تعداد نامتناهی اعداد گویا را شامل است، لذا $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است و لذا $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ در فضای حاصل‌ضربی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ چگال است. زیرفضای

$$L = \{(-x, x);\ x \in \mathbb{R}\}$$

از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم توپولوژی نسبی روی این زیرفضا توپولوژی گسسته است. عنصر $(-x, x)$ را از L اختیار می‌کنیم. $\big([-x, -x+1) \times [x, x+1)\big) \cap L$ مجموعه‌ی باز شامل $(-x, x)$ در زیرفضای L است. اگر $(-y, y)$ عنصری از $\big([-x, -x+1) \times [x, x+1)\big) \cap L$

باشد، در آن‌صورت $-x \leq -y < -x + 1$ و $x \leq y < x + 1$. از این دو رابطه نتیجه می‌شود که $x = y$ و لذا

$$\big([-x, -x + 1) \times [x, x + 1)\big) \cap L = \big\{(-x, x)\big\}.$$

پس L فضای گسسته است و چون $\mathbb{R}$ ناشماراست، L تفکیک‌پذیر نیست. این مطلب نشان می‌دهد که تفکیک‌پذیری موروثی نیست.

قضیه ۳ ـ ۳۲. *فرض کنیم (X, τ) فضای توپولوژیک شمارای اول باشد، در آن‌صورت*

الف) *هر عنصر از X پایه‌ی موضعی نزولی دارد.*

ب) *برای هر زیرمجموعه‌ی A از X و $x \in X$، $x \in \overline{A}$ اگر و تنها اگر دنباله‌ای در A موجود باشد که به x همگرا است.*

برهان. فرض کنیم $B = \{B_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ای موضعی برای $x \in X$ باشد. برای هر n، قرار دهید $C_n = B_1 \cap \cdots \cap B_n$. هر C_n مجموعه‌ی باز شامل x است. اگر G مجموعه‌ی بازی شامل x باشد، چون B پایه‌ی موضعی برای x است، لذا n ای هست که $B_n \subseteq G$ و لذا $C_n \subseteq G$. از آنجا که $C_{n+1} \subseteq C_n$، خانواده‌ی $\{C_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ جواب مسئله است.

برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنید $B = \{B_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ی موضعی نزولی برای x باشد. برای هر n، عنصر $x_n \in B_n \cap A$ را اختیار می‌کنیم. ادعا می‌کنیم دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به x همگراست. اگر G مجموعه‌ی بازی شامل x باشد، m ای هست که $B_m \subseteq G$. اگر $n \geq m$، بنابه نزولی بودن اعضای B و بنابه انتخاب x_n ها،

$$x_n \in B_n \subseteq B_m \subseteq G$$

لذا $x_n \to x$.

اثبات عکس این قسمت ساده بوده و به خواننده واگذار می‌شود. ■

فرض کنیم (X, τ_1) و (Y, τ_2) دو فضای توپولوژیک و $f : X \to Y$ تابعی دلخواه باشد که اگر $x_n \to x$، آنگاه $f(x_n) \to f(x)$. دیدیم که لزومی‌ندارد چنین f هایی پیوسته باشند. این مشکل در صورتی که X فضای شمارای اول باشد مرتفع می‌شود. در حقیقت اگر $B = \{B_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ی موضعی نزولی برای $x \in X$ و G مجموعه‌ی بازی شامل $f(x)$ باشد، ادعا می‌کنیم برای یک n ای، $f(B_n) \subseteq G$. اگر چنین نباشد عنصر $x_n \in B_n$ را طوری اختیار می‌کنیم که $f(x_n) \notin G$. واضح است $x_n \to x$ و چون برای هر n، $f(x_n) \notin G$ لذا $\big\{f(x_n)\big\}_{n=1}^{\infty}$ به $f(x)$ همگرا نیست. این یک تناقض است و لذا f در نقطه‌ی x پیوسته است.

قضیه۳ ـ ۳۳. *فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد، در آن‌صورت حاصل‌ضرب آنها شمارای اول است اگر و تنها اگر همه‌ی X_α ها شمارای اول و همه‌ی آنها به‌جز حداکثر تعداد شمارا از این فضاها دارای توپولوژی ناگسسته باشند.*

برهان. اگر فضای حاصل‌ضرب شمارای اول باشد، چون هر فضای مختصی با زیرفضایی از فضای حاصل‌ضرب همیومورف است، بنابراین همه‌ی X_α ها شمارای اول هستند. برای اثبات قسمت دوم قضیه، فرض کنیم τ_α توپولوژی ناگسسته نباشد. مجموعه‌ی باز ناتهی G_α را طوری در نظر می‌گیریم که $G_\alpha \neq X_\alpha$. اکنون $x_\alpha \in G_\alpha$ را در نظر می‌گیریم. برای هر X_α ای که دارای توپولوژی ناگسسته است نیز یک عنصر x_α را از X_α اختیار می‌کنیم. فرض کنیم $B = \{B_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ی موضعی برای $x = \{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعه‌ی باز پایه‌ای شامل x چون $\bigcap\limits_{i=1}^{m_n} \pi_{\alpha_{n_i}}^{-1}(G_{\alpha_{n_i}})$ موجود است که $\bigcap\limits_{i=1}^{m_n} \pi_{\alpha_{n_i}}^{-1}(G_{\alpha_{n_i}}) \subseteq B_n$. قرار می‌دهیم $A = \{\alpha_{n_i};\ n \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, m_n\}$. واضح است که A حداکثر شماراست. اکنون فرض کنیم $\beta \in I\backslash A$ و X_β دارای توپولوژی ناگسسته نیست. بنابه توضیحات فوق $x \in \pi_\beta^{-1}(G_\beta)$ ولی هیچ یک از B_n ها مشمول $\pi_\beta^{-1}(G_\beta)$ نخواهد بود. در حقیقت در مختص β همه‌ی B_n ها، مجموعه‌ی X_β است ولی در مختص β ام $\pi_\beta^{-1}(G_\beta)$، G_β می‌باشد. که این تناقض با فرض است و بنابراین X_β دارای توپولوژی ناگسسته است. این نشان می‌دهد که تعداد X_α هایی که توپولوژی ناگسسته ندارند، حداکثر شماراست.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم $D = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ مجموعه‌ی همه‌ی اندیس‌های باشد که فضای مختصی متناظر با آن اندیس‌ها، دارای توپولوژی ناگسسته نیست. فرض کنیم x عنصری دلخواه از فضای حاصل‌ضرب باشد. برای هر n، پایه‌ی موضعی $B_n = \{B_1^n, B_2^n, \ldots\}$ برای عنصر x_{α_n} را در نظر می‌گیریم. به‌راحتی دیده می‌شود که اشتراک‌های متناهی از عناصر $B = \{\pi_{\alpha_n}^{-1}(B_i^n);\ i, n \in \mathbb{N}\}$ یک پایه‌ی موضعی برای x است. ■

تمرین ۳

۱. ثابت کنید در یک فضای متریک مجموعه‌ی نقاط حدی یک مجموعه‌ی بسته است. آیا این موضوع برای فضاهای توپولوژیک نیز صحیح است؟

۲. در صورت درستی، گزاره‌های زیر را اثبات کنید:

الف) فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه از فضای توپولوژیک (X, τ) باشند، در آن‌صورت $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

ب) اگر Y زیرفضایی از فضای توپولوژیک (X,τ) و $A \subseteq Y$، آنگاه

الف) $\overline{A}^{Y} = \overline{A} \cap Y$ (منظور از طرف چپ تساوی، بستار نسبت به فضای Y است)؛

ب) $A'^{Y} = A' \cap Y$؛

ج) $A^{\circ Y} = A^{\circ} \cap Y$؛

د) $\mathrm{bd}(A)^{Y} = \mathrm{bd}(A) \cap Y$.

ج) در فضای توپولوژیک (X,τ)، زیرمجموعه‌ی A هم باز و هم بسته است اگر و تنها اگر $\mathrm{bd}(A) = \emptyset$.

د) اگر (X,τ) یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$، آنگاه $\mathrm{bd}\left(\mathrm{bd}(A)\right) \subseteq \mathrm{bd}(A)$.

۳. مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با توپولوژی هم متناهی در نظر می‌گیریم. مطلوبست محاسبه نقاط چسبیدگی، حدی و مرزی مجموعه‌ی اعداد گنگ، اعداد گویا و اعداد صحیح.

۴. مجموعه‌ی ناتهی X و تابع $C : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید C در خواص زیر صدق کند.

الف) $C(\emptyset) = \emptyset$؛

ب) برای هر دو زیرمجموعه‌ی A و B از X، $C(A) = C\big(C(A)\big)$، $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$ و $A \subseteq C(A)$.

قرار دهید $\tau = \{G \subseteq X;\ C(X \backslash G) = X \backslash G\}$. ثابت کنید τ یک توپولوژی روی X است و برای هر $A \subseteq X$، $\overline{A} = C(A)$.

۵. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن‌که زیرمجموعه‌ی A هر زیرمجموعه‌ی چگال از X را قطع کند آنست که $A^{\circ} \neq \emptyset$.

۶. ثابت کنید اشتراک هر تعداد توپولوژی روی یک مجموعه‌ی X، یک توپولوژی روی X است. آیا اجتماع دو توپولوژی روی یک مجموعه‌ی باز هم توپولوژی است؟

۷. فرض کنیم A_1 و A_2 و ... یک دنباله از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیک (X,τ) باشد، نشان دهید

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\Big) \cup \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=0}^{\infty} A_{m+n}}\Big).$$

مثالی ارائه کنید که $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$.

همچنین نشان دهید شرط لازم و کافی برای آن‌که $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ آنست که $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ بسته باشد.

۸. در توپولوژی حد بالا مجموعه‌ای غیر از $\emptyset$ و $\mathbb{R}$ مثال بزنید که هم باز و هم بسته باشد. آیا چنین زیرمجموعه‌ای در $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی وجود دارد.

۹. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. ثابت کنید توپولوژی‌های که توسط متر d و $\frac{d}{1+d}$ تشکیل می‌شوند، یکسان هستند.

۱۰. فرض کنیم p عددی اول باشد، برای هر عدد طبیعی n، قرار دهید

$$U_n(m) = \{m + \lambda p^n;\ \lambda \in \mathbb{Z}\}.$$

ثابت کنید $U_n(m)$ ها تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی روی $\mathbb{Z}$ می‌دهند.

۱۱. فرض کنید X مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته حقیقی مقدار روی $[0, 1]$ باشد. برای $\epsilon > 0$، $f \in X$ و x_1 و ... و x_n از $[0, 1]$، قرار دهید

$$P(f, x_1, \ldots, x_n, \epsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \{h \in X;\ |f(x_i) - h(x_i)| < \epsilon\}.$$

نشان دهید که

$$B = \{P(f, x_1, \ldots, x_n, \epsilon);\ f \in X,\ \epsilon > 0,\ x_1, \ldots, x_n \in [0, 1],\ n \in \mathbb{N}\}$$

یک پایه برای یک توپولوژی روی X است. آیا این توپولوژی با توپولوژی‌های قبلی که روی X قرار داده‌ایم معادل است؟

۱۲. فرض کنیم X مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ از عددهای حقیقی باشد. برای هر $A = (a_{ij})$ و $r > 0$، قرار دهید

$$U_r(A) = \big\{(b_{ij});\ |a_{ij} - b_{ij}| < r,\ i, j \in \{1, \ldots, n\}\big\}.$$

نشان دهید که مجموعه‌های فوق تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی روی X می‌دهد.

۱۳. نشان دهید که ماکزیمم توابع حقیقی مقدار پیوسته روی یک فضای توپولوژیک، پیوسته است.

۱۴. ثابت کنید تابع همانی I از فضای توپولوژیک (X, τ_1) به‌توی فضای توپولوژیک (X, τ_2) پیوسته است اگر و تنها اگر $\tau_2 \subseteq \tau_1$ و این تابع یک همیومورفیسم است اگر و تنها اگر $\tau_1 = \tau_2$.

۱۵. فرض کنید f تابعی یک به یک از فضای توپولوژیک (X, τ_1) به‌توی فضای توپولوژیک (Y, τ_2) باشد. فرض کنید S زیرپایه‌ای برای توپولوژی τ_1 بوده که برای هر $G \in S$، $f(G)$ باز باشد. ثابت کنید f باز است.

۱۶. ثابت کنید ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است و از این‌جا نتیجه بگیرید تحدید توابع پیوسته روی یک مجموعه، پیوسته هستند.

۱۷. ثابت کنید $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ باز است اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعه‌ی A از X،

$f(A^\circ) \subseteq f(A)^\circ$.

۱۸. فرض کنید $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ تابعی دلخواه باشد، ثابت کنید شرایط زیر معادلند:

الف) f تابعی بسته است؛

ب) برای هر مجموعه‌ی باز $G \subseteq X$، $\{y \in Y;\ f^{-1}(\{y\}) \subseteq G\}$ در Y باز است؛

ج) برای هر مجموعه‌ی بسته $F \subseteq X$، $\{y \in Y;\ f^{-1}(\{y\}) \cap F \neq \emptyset\}$ در Y بسته است.

۱۹. تابعی پیوسته و بسته مثال بزنید که باز نباشد. تابعی پیوسته و باز مثال بزنید که بسته نباشد. آیا تابعی باز و بسته وجود دارد که پیوسته نباشد؟

۲۰. آیا تابع $f(z) = \dfrac{z}{1 + |z|}$ همیومورفیسمی‌بین $\mathbb{C}$ و گوی باز به مرکز صفر و شعاع یک است؟

۲۱. کدامیک از گزاره‌های زیر با پیوستگی تابع $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ معادل است:

الف) برای هر $A \subseteq X$، $f(A') \subseteq f(A)'$؛

ب) برای هر $A \subseteq X$، $f(A') \subseteq \overline{f(A)}$.

۲۲. فرض کنیم (X, τ_1) و (Y, τ_2) دو فضای توپولوژیک و A و B دو زیرمجموعه‌ی بسته از X باشد. فرض کنید $X = A \cup B$. اگر $f : A \to Y$ و $g : B \to Y$ توابعی پیوسته باشند طوری که برای هر $x \in A \cap B$، $f(x) = g(x)$. نشان دهید تابع پیوسته $h : X \to Y$ وجود دارد که برای هر $x \in A$، $h(x) = f(x)$ و برای هر $x \in B$، $h(x) = g(x)$.

۲۳. فرض کنیم f تابعی از فضای متریک (X_1, d_1) به‌توی فضای متریک (X_2, d_2) باشد. فرض کنیم $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های X_1 باشد که $X_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ و $A_n \subseteq A_{n+1}^\circ$. ثابت کنید که اگر f روی هر A_n پیوسته باشد، آنگاه f پیوسته است.

۲۴. نشان دهید تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ از $(0, \infty)$ به‌توی $[-1, 1]$ پیوسته است، اما نه باز است و نه بسته.

۲۵. فرض کنید (X_1, τ_1) و (X_2, τ_2) دو فضای توپولوژیک و $f : X_1 \to X_2$ تابعی بسته و پوشا باشد. ثابت کنید برای هر G باز،

$$\mathrm{bd}\left(f(\overline{G})\right) \subseteq f(\overline{G}) \cap f(G^c)$$

۲۶. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک (X, τ) باشد. ثابت کنید تابع مشخصه‌ی A پیوسته است اگر و تنها اگر A هم باز و هم بسته باشد.

۲۷. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک و $f : X \to \mathbb{R}^n$ تابعی باز باشد. اگر $A \subseteq X$ و $x \in A^\circ$، ثابت کنید $|f(x)| < \sup\{|f(t)|;\ t \in A\}$.

۲۸. ثابت کنید $[0,1]\times[0,1]$ با $[0,1)\times[0,1)$ همیومورف است.

۲۹. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک و $f: X\to\mathbb{R}^n$ تابعی دلخواه باشد. ثابت کنید f نیم‌پیوسته‌ی پایین است اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon > 0$ و هر $x\in X$، مجموعه‌ی بازی مانند G شامل x موجود باشد که $G\subseteq \{t;\ f(t) > f(x)-\epsilon\}$.

۳۰. فرض کنیم $C^1([0,1])$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع حقیقی مقدار تعریف شده روی $[0,1]$ با مشتق پیوسته باشد. برای هر $\epsilon > 0$ و هر $f\in C^1([0,1])$، قرار دهید $U_\epsilon(f)=\{g;\ \|g-f\|<\epsilon\}$. می‌دانیم خانواده‌ی چنین مجموعه‌هایی پایه‌ای برای یک توپولوژی روی $C^1([0,1])$ است. ثابت کنید:

الف) تابعی که به هر عنصر از $C^1([0,1])$ طول آن را نسبت می‌دهد، تابعی نیم‌پیوسته پایین است.

ب) اگر $\mathcal{P}$ مجموعه‌ی همه‌ی چند جمله‌ای‌های روی $[0,1]$ باشد، ثابت کنید تابع مشتق روی $\mathcal{P}$ پیوسته نیست.

۳۱. فرض کنید $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد. برای هر $\alpha\in I$، زیرمجموعه‌ی بسته F_α از X_α را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید $\prod\limits_{\alpha\in I} F_\alpha$ در فضای حاصل‌ضربی بسته است. نشان دهید موضوع فوق در حالت کلی برای زیرمجموعه‌های باز درست نیست.

۳۲. فرض کنید $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد. برای هر $\alpha\in I$، زیرمجموعه A_α از X_α را در نظر می‌گیریم. فرض کنید همه‌ی A_α ها به‌جز حداکثر تعداد متناهی از A_α ها با X_α مساوی باشند. ثابت کنید $\prod\limits_{\alpha\in I} A'_\alpha = \Big(\prod\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\Big)'$. آیا در حالت کلی $\prod\limits_{\alpha\in I} A'_\alpha = \Big(\prod\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\Big)'$؟

۳۳. نشان دهید $C([0,1])$ تفکیک‌پذیر است و نتیجه بگیرید که $C([0,1])$ شمارای دوم است.

۳۴. ثابت کنید هر فضای متریک فشرده، تفکیک‌پذیر است.

۳۵. فضای توپولوژیک (X,τ) را در نظر بگیرید. فرض کنید هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی از این فضا دارای نقطه‌ای حدی در X باشد، آیا X تفکیک‌پذیر است؟

۳۶. فرض کنیم $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد. ثابت کنید حاصل‌ضرب آنها شمارای دوم است اگر و تنها اگر همه‌ی X_α ها شمارای دوم و همه‌ی آنها به‌جز حداکثر تعداد شمارا از این فضاها دارای توپولوژی ناگسسته باشند.

۳۷. ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌های باز دو به دو جدا از هم در یک فضای شمارای دوم حداکثر

شماراست.

فصل ۴

اصول جداسازی

۴—۱ مقدمه

وجود مجموعه‌های باز در یک فضا در بیشتر اوقات مفید است. مفهوم هاسدورف و فضاهای منظم در این فصل معرفی می‌شوند. در توپولوژی و آنالیز بیشتر فضاهای مورد بحث فضاهای هاسدورف و منظم هستند. برای مثال تنها توابع پیوسته و حقیقی مقدار روی یک فضای ناگسسته توابع ثابت هستند و لذا بررسی فضای توابع پیوسته روی یک فضای ناگسسته مسئله جالبی نخواهد بود. می‌دانیم مجموعه‌ی توابع پیوسته و کران‌دار روی یک فضای توپولوژیک X با جمع و ضرب معمولی یک حلقه است. ارتباط بین خصوصیات این حلقه با خصوصیات فضای توپولوژیک X توجه ریاضی‌دانان زیادی را به خود جلب کرده است. از طرف دیگر هر تابع روی یک فضای گسسته، تابعی پیوسته است. بنابراین مطالعه فضاهایی که به اندازه کافی مجموعه‌ی باز دارند، مسئله جالبی خواهد بود. در این فصل با قرار دادن اصولی روی یک فضا به بررسی خصوصیات آن فضا می‌پردازیم.

۴—۲ فضاهای T_0، T_1 و T_2

در این بخش فضاهای T_0، T_1 و T_2 را تعریف کرده و ارتباط بین آنها را بررسی می‌کنیم. چون فضاهای هاسدورف از اهمیت خاصی برخوردارند، بیشتر توجه خود را به این فضاها معطوف می‌کنیم.

تعریف ۴ ـ ۱. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد، در آن‌صورت

الف) فضای توپولوژیک X را T_0 گوییم هرگاه برای هر دو عنصر x و y از X، مجموعه‌ی باز G موجود باشد که شامل یکی از این عناصر باشد و دیگری را شامل نباشد.

ب) فضای توپولوژیک X را T_1 گوییم هرگاه برای هر دو عنصر x و y از X، دو مجموعه‌ی باز G و W موجود باشد که $x \in G$، $y \notin G$ و $y \in W$، $x \notin W$.

ج) فضای توپولوژیک X را T_2 گوییم هرگاه برای هر دو عنصر x و y از X، دو مجموعه‌ی باز G و W به‌ترتیب شامل x و y موجود باشد که $G \cap W = \emptyset$.

با توجه به تعاریف فوق به‌سادگی نتیجه می‌شود که $T_2 \subseteq T_1 \subseteq T_0$، توجه کنید که منظور از جزئیت در رابطه‌ی اخیر به این معنی است که هر فضای T_2 که به آن فضای هاسدورف نیز می‌گویند یک فضای T_1 است و هر فضای T_1 یک فضای T_0 است. هر فضای متریک یک فضای هاسدورف و لذا T_1 و T_0 است. زیرا اگر x و y دو عنصر از فضای متریک (X, d) باشند، با انتخاب $r = \frac{d(x,y)}{2}$ خواهیم داشت

$$S_r(x) \cap S_r(y) = \emptyset$$

گفته می‌شود این دو گوی دو عنصر x و y را از هم جدا می‌کند. اگر X شامل حداقل دو عنصر باشد و X با توپولوژی ناگسسته در نظر گرفته شود، X فضای T_0 نیست و لذا T_1 و T_2 نیز نیست.

مثال۴ ــ ۱. $X = \{x, y, z\}$ را با توپولوژی $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{x\}, \{x, y\}\}$ در نظر می‌گیریم، واضح است X با این توپولوژی T_0 است ولی T_1 نیست. $\mathbb{R}$ را با توپولوژی هم‌شمارا در نظر می‌گیریم. اگر x و y دو عنصر از $\mathbb{R}$ باشند، قرار می‌دهیم $G = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ و $W = \mathbb{R} \setminus \{y\}$. واضح است که G و W به‌ترتیب مجموعه‌های باز شامل y و x است. اما $x \notin G$ و $y \notin W$. لذا $\mathbb{R}$ فضای T_1 است. فضای فوق T_2 نیست، در حقیقت اگر G و W دو مجموعه‌ی باز باشند، آنگاه G^c و W^c حداکثر شمارا هستند و لذا $G^c \cup W^c$ حداکثر شماراست. نتیجه این‌که $G \cap W \neq \emptyset$ و لذا در این فضا هر دو مجموعه‌ی باز ناتهی هم‌دیگر را قطع می‌کنند. پس $\mathbb{R}$ با این توپولوژی هاسدورف نیست.

قضیه۴ ــ ۲. *فضای توپولوژیک (X, τ)، T_1 است اگر و تنها اگر هر تک نقطه‌ای در این فضا بسته باشد.*

برهان. فرض کنیم X یک فضای T_1 و x و y دو عنصر از X باشند. مجموعه‌ی باز G شامل x وجود دارد که $y \notin G$. این نشان می‌دهد که $x \notin \overline{\{y\}}$ و لذا $\{y\}$ بسته است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم x و y دو عنصر از X باشند. چون $x \notin \{y\} = \overline{\{y\}}$ و $y \notin \{x\} = \overline{\{x\}}$، لذا مجموعه‌های باز G شامل x و W شامل y وجود دارند که $y \notin G$ و $x \notin W$.

این همان تعریف T_1 بودن فضا است. ■

نتیجه‌ای که از قضیه‌ی فوق حاصل می‌شود این است که‌یک فضای متناهی T_1 است اگر و تنها اگر فضای گسسته باشد. در حقیقت همه‌ی زیرمجموعه‌های این فضا بسته و لذا همه‌ی زیرمجموعه‌های این فضا باز و بنابراین توپولوژی آن گسسته است. اثبات این‌که زیرفضای یک فضای T_1 یک فضای T_1 است و همین‌طور T_1 بودن خاصیتی توپولوژیکی است ساده بوده و به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۴ ــ ۳. *فرض کنیم (X, τ) یک فضای شمارای اول و T_1 باشد. اگر $A \subseteq X$ و $x \in X$، آنگاه $x \in A'$ اگر و تنها اگر دنباله‌ای متمایز از عناصر A موجود باشد که به x همگرا باشد.*

برهان. فرض کنیم $x \in A'$ و فرض کنیم $\{B_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ی موضعی نزولی برای x باشد. عنصر $x_1 \in B_1 \cap A$ متمایز با x را انتخاب می‌کنیم. چون $\{x_1\}$ بسته است، عنصر x_2 را از $(B_2 \backslash \{x_1\}) \cap A$ متمایز با x انتخاب می‌کنیم. همین‌طور عنصر x_3 را از $(B_3 \backslash \{x_1, x_2\}) \cap A$ متمایز از x اختیار می‌کنیم. با ادامه این روند دنباله‌ای متمایز از اعضای A به‌دست می‌آید. واضح است که $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به x همگراست.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم دنباله‌ای متمایز از اعضای A چون $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به x همگرا باشد. برای هر G باز شامل x، N ای موجود است که برای هر $n > N$، $x_n \in G$. چون عناصر دنباله متمایز و از اعضای A هستند، لذا مجموعه‌ی باز G مجموعه‌ی A را در تعداد نامتناهی نقطه قطع می‌کند و لذا x نقطه‌ی حدی A است. ■

قضیه ۴ ــ ۴. *فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک شمارای دوم و T_1 باشد، در آن‌صورت $|X| \leq |\mathbb{R}|$.*

برهان. فرض کنیم $B = \{G_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ای برای فضای X باشد. برای هر $x \in X$، مجموعه‌ی همه‌ی اعضای از B که شامل x هستند یک پایه‌ی موضعی برای x است. فرض کنیم $B_x = \{G_{n,x};\ n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ی موضعی ذکر شده برای x باشد. چون X یک فضای T_1 است، بنابراین $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_{n,x} = \{x\}$. از این‌جا نتیجه می‌شود که تابع $x \mapsto \{G_{n,x};\ n \in \mathbb{N}\}$ از X به‌توی مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های B، تابعی یک به یک است. پس $|X| \leq |\mathbb{R}|$. ■

از آنجا که در آنالیز فضاهای هاسدورف از اهمیت خاصی برخوردارند ما بیشتر به بحث و بررسی این فضاها می‌پردازیم.

قضیه ۴ ــ ۵. *گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) زیرفضای یک فضای هاسدورف، هاسدورف است.

ب) هاسدورف بودن خاصیت توپولوژیکی است.

ج) اگر $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد، حاصل‌ضرب این خانواده از فضاها هاسدورف است اگر و تنها اگر هر X_α هاسدورف باشد.

برهان. فرض کنیم A زیرفضایی از فضای توپولوژیک هاسدورف (X,τ) باشد. اگر x و y دو عنصر از A باشند، مجموعه‌های باز G و W به‌ترتیب شامل x و y وجود دارد که $G\cap W=\emptyset$. بنابه تعریف توپولوژی نسبی، $G\cap A$ و $W\cap A$ مجموعه‌های باز مجزا در فضای توپولوژیک A بوده و $(G\cap A)\cap(W\cap A)=\emptyset$. این نشان می‌دهد که A هاسدورف است.

برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنیم f همیومورفیسمی از فضای هاسدورف (X_1,τ_1) به‌روی فضای توپولوژیک (X_2,τ_2) باشد. فرض کنیم y_1 و y_2 دو عنصر از X_2 باشند، عناصر x_1 و x_2 از X_1 وجود دارد که $f(x_1)=y_1$ و $f(x_2)=y_2$. از این‌که X_1 هاسدورف است مجموعه‌های باز G_1 و G_2 از X_1 به‌ترتیب شامل x_1 و x_2 وجود دارند که $G_1\cap G_2=\emptyset$. اما f همیومورفیسم بوده و لذا باز است. بنابراین مجموعه‌های باز $f(G_1)$ و $f(G_2)$ به‌ترتیب شامل y_1 و y_2 بوده و

$$f(G_1)\cap f(G_2)=f(G_1\cap G_2)=\emptyset$$

این هاسدورف بودن فضای X_2 را ثابت می‌کند.

برای اثبات قسمت (ج)، فرض کنید حاصل‌ضرب X_α ها هاسدورف باشد. ثابت می‌کنیم هر X_α هاسدورف است. اگر x_α و y_α دو عنصر متمایز از X_α باشد، برای هر β متمایز با α عنصر x_β را از X_β اختیار می‌کنیم. تابع x را در نقطه‌ی α، x_α و در هر نقطه‌ی β متمایز با α، x_β تعریف می‌کنیم. همین‌طور تابع y را در نقطه‌ی α، y_α و در هر نقطه‌ی β متمایز با α، x_β تعریف می‌کنیم. با توجه به تعریف x و y، واضح است که x و y تنها در مؤلفه‌ی α با هم متمایز هستند. اکنون از هاسدورف بودن فضای حاصل‌ضرب استفاده کرده و مجموعه‌های پایه‌ای مجزای $\bigcap_{i=1}^{n}{\pi_{\alpha_i}}^{-1}(G_{\alpha_i})$ و $\bigcap_{i=1}^{m}{\pi_{\beta_i}}^{-1}(W_{\beta_i})$ به‌ترتیب شامل x و y را از فضای حاصل‌ضرب در نظر می گیریم. اکنون ادعا می‌کنیم $\alpha\in\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ و $\alpha\in\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$. برای اثبات این ادعا، فرض کنیم

$$\alpha\notin\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$$

در این‌صورت $y\in\bigcap_{i=1}^{n}{\pi_{\alpha_i}}^{-1}(G_{\alpha_i})$. در حقیقت مختص α_iام y با مختص α_iام x یکی است. چون $x\in\bigcap_{i=1}^{n}{\pi_{\alpha_i}}^{-1}(G_{\alpha_i})$، لذا $y\in\bigcap_{i=1}^{n}{\pi_{\alpha_i}}^{-1}(G_{\alpha_i})$ که این متناقض با مجزا بودن دو مجموعه‌ی پایه‌ای فوق است. به همین صورت $\alpha\in\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$. اکنون ثابت می‌کنیم $G_\alpha\cap W_\alpha=\emptyset$.

اگر $z_\alpha \in G_\alpha \cap W_\alpha$، تابع z را در نقطه‌ی α، z_α و در نقطه‌ی β که متمایز با α است، x_β تعریف می‌کنیم. واضح است که

$$z \in \bigcap_{i=1}^{n} {\pi_{\alpha_i}}^{-1}(G_{\alpha_i}) \cap \bigcap_{i=1}^{m} {\pi_{\beta_i}}^{-1}(W_{\beta_i}).$$

این تناقض با مجزا بودن مجموعه‌های پایه‌ای فوق است، لذا X_α هاسدورف است.

برای اثبات عکس این قسمت، فرض کنیم همه‌ی X_α ها هاسدورف باشند و x و y دو عنصر از فضای حاصل‌ضرب باشد. α ای هست که $x_\alpha \neq y_\alpha$. چون X_α هاسدورف است، لذا مجموعه‌های باز مجزای G_α و W_α از X_α وجود دارند که به‌ترتیب شامل x_α و y_α می‌باشند. واضح است مجموعه‌های باز ${\pi_\alpha}^{-1}(G_\alpha)$ و ${\pi_\alpha}^{-1}(W_\alpha)$ به‌ترتیب شامل x و y بوده و

$${\pi_\alpha}^{-1}(G_\alpha) \cap {\pi_\alpha}^{-1}(W_\alpha) = {\pi_\alpha}^{-1}(G_\alpha \cap W_\alpha) = \emptyset$$

این هاسدورف بودن فضای حاصل‌ضرب را ثابت می‌کند. ■

نکته۱. فرض کنیم (X, τ) فضای توپولوژیک ناگسسته و (Y, τ_1) یک فضای هاسدورف باشد. تابع پیوسته‌ی $f : X \to Y$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم برای دو عنصر x_1 و x_2 از X، $f(x_1) \neq f(x_2)$. چون Y هاسدورف است، مجموعه‌های باز G و W به‌ترتیب شامل $f(x_1)$ و $f(x_2)$ وجود دارند که $G \cap W = \emptyset$. لذا $f^{-1}(G)$ و $f^{-1}(W)$ باز، مجزا و به‌ترتیب شامل x_1 و x_2 هستند. این متناقض با ناگسسته بودن توپولوژی X است. نتیجه این‌که f تابع ثابت است. از این توضیحات نتیجه می‌شود که تابع f از فضای ناگسسته به‌توی هر فضای هاسدورف پیوسته است اگر و تنها اگر f تابع ثابت باشد.

مثال۴ ـ ۲. حد یک دنباله در یک فضای توپولوژیک هاسدورف (X, τ) منحصر به‌فرد است. در حقیقت فرض کنید دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به دو عنصر x و y همگرا باشد. چون X هاسدورف است، لذا مجموعه‌های باز G و W از X به‌ترتیب شامل x و y وجود دارند که $G \cap W = \emptyset$. چون $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به دو عنصر x و y همگراست، لذا N ای هست که اگر $n \geq N$، آنگاه $x_n \in G$ و $x_n \in W$. این با مجزا بودن G و W در تناقض است. لذا حد دنباله در صورت وجود منحصر به‌فرد است.

قضیه۴ ـ ۶. *فضای توپولوژیک (X, τ) هاسدورف است اگر و تنها اگر $\Delta = \{(x, x);\ x \in X\}$ در فضای حاصل‌ضربی $X \times X$ بسته باشد.*

برهان. فرض کنیم X هاسدورف و x و y دو عنصر از X باشند. مجموعه‌های باز G و W از X به‌ترتیب شامل x و y موجودند که $G \cap W = \emptyset$. چون $G \times W$ مجموعه‌ی باز پایه‌ای شامل (x, y) است و $(G \times W) \cap \Delta = \emptyset$، لذا (x, y) نقطه‌ی حدی Δ نبوده و بنابراین Δ بسته است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم x و y دو عنصر از X باشند. چون $(x,y) \notin \Delta$، لذا مجموعه‌ی باز پایه‌ای $G \times W$ شامل (x,y) وجود دارند که $(G \times W) \cap \Delta = \emptyset$. به‌سادگی دیده می‌شود که $G \cap W = \emptyset$ و لذا X هاسدورف است. ∎

قضیه ۴ ـ ۷. *فرض کنید f و g دو تابع پیوسته از فضای توپولوژیک (X_1, τ_1) به‌توی فضای توپولوژیک هاسدورف (X_2, τ_2) باشند. گزاره‌های زیر برقرار هستند:*

الف) $A = \{x \in X_1;\ f(x) = g(x)\}$ در X_1 *بسته است.*

ب) *فرض کنیم D زیرمجموعه‌ی چگال از X_1 و برای هر $x \in D$،* $f(x) = g(x)$. *در آن‌صورت* $f = g$.

ج) $G(f) = \{(x, f(x));\ x \in X_1\}$ *در فضای حاصل‌ضربی $X_1 \times X_2$ بسته است.*

د) *اگر f یک به یک باشد، (X_1, τ_1) نیز هاسدورف است.*

برهان. فرض کنیم $x \notin A$، لذا $f(x) \neq g(x)$. چون X_2 هاسدورف است، بنابراین مجموعه‌های باز G و W به‌ترتیب شامل $f(x)$ و $g(x)$ وجود دارند که $G \cap W = \emptyset$. از آنجا که f و g پیوسته هستند، مجموعه‌های باز U و V شامل x وجود دارند که $f(U) \subseteq G$ و $f(V) \subseteq W$. به‌سادگی دیده می‌شود که

$$U \cap V \cap A = \emptyset$$

لذا A بسته است.

برای اثبات قسمت (ب)، بنابه فرض $D \subseteq A$. لذا $X_1 = \overline{D} \subseteq \overline{A} = A$، که نتیجه می‌دهد $f = g$.

برای اثبات قسمت (ج)، فرض کنیم $(x,y) \in \overline{G(f)}$ و $y \neq f(x)$. دوباره از هاسدورف بودن X_2 استفاده کرده و مجموعه‌های باز G و W به‌ترتیب شامل $f(x)$ و y را طوری می‌یابیم که $G \cap W = \emptyset$. از آنجا که f پیوسته است مجموعه‌ی باز U شامل x موجود است که $f(U) \subseteq G$. به‌راحتی دیده می‌شود که $(U \times W) \cap G(f) = \emptyset$، این مطلب همراه با تعلق (x,y) به $U \times W$، بسته بودن $G(f)$ را ثابت می‌کند.

برای اثبات قسمت (د)، فرض کنیم x و y دو عنصر از X_1 باشند. چون f یک به یک است، لذا $f(x) \neq f(y)$. مجموعه‌های باز G و W از X_2 به‌ترتیب شامل $f(x)$ و $f(y)$ وجود دارند که $G \cap W = \emptyset$. از پیوستگی f استفاده کرده و مجموعه‌های باز U و V به‌ترتیب شامل x و y را طوری می‌یابیم که $f(U) \subseteq G$ و $f(V) \subseteq W$. چون $G \cap W = \emptyset$، لذا $U \cap V = \emptyset$ و بنابراین X_1

هاسدورف است. ■

مثال۴ ـ ۳. $X = \{x, y, z\}$ را با توپولوژی گسسته و $Y = \{۱, ۲, ۳\}$ را با توپولوژی $\tau = \{\emptyset, Y, \{۱\}, \{۲, ۳\}\}$ در نظر می‌گیریم. تابع f که به‌صورت $f(x) = ۱$، $f(y) = ۲$ و $f(z) = ۳$ تعریف می‌شود تابعی پیوسته و دو سویی است. فضای X یک فضای متریک‌پذیر است ولی فضای Y حتی $T_\circ$ نیست. بنابراین خاصیت $T_\circ$، $T_۱$ و $T_۲$ تحت تابع پیوسته، یک به یک و پوشا پایا نیست.

۴ـ۳ فضای اوریسون، منظم و به‌طور کامل منظم

تعریف۴ ـ ۸. فضای توپولوژیک (X, τ) را اوریسون یا $T_{\frac{۵}{۲}}$ نامیم هرگاه برای هر دو عنصر x و y از X دو مجموعه‌ی باز G و W به‌ترتیب شامل x و y موجود باشند که $\overline{G} \cap \overline{W} = \emptyset$.

از این تعریف نتیجه می‌شود که هر فضای اوریسون یک فضای هاسدورف است. بنابراین چون $\mathbb{R}$ با توپولوژی هم‌متناهی هاسدورف نیست، لذا فضای اوریسون نیست. هر فضای متریک (X, d) یک فضای اوریسون است، در حقیقت برای هر دو عنصر x و y از X با انتخاب $r = \frac{d(x, y)}{۴}$، خواهیم داشت

$$\overline{S_r(x)} \cap \overline{S_r(y)} = \emptyset$$

لذا هر فضای متریک یک فضای اوریسون است.

قضیه۴ ـ ۹. *خاصیت $T_{\frac{۵}{۲}}$، موروثی، توپولوژیکی و حاصل‌ضربی است.*

برهان. فرض کنیم (X, τ) یک فضای اوریسون و $A \subseteq X$. دو عنصر x و y را از A در نظر می‌گیریم. مجموعه‌های باز G و W از X به‌ترتیب شامل x و y وجود دارند که $\overline{G} \cap \overline{W} = \emptyset$. اما

$$\overline{G \cap A}^A \cap \overline{W \cap A}^A \subseteq \overline{G} \cap \overline{W} = \emptyset$$

بنابراین A یک فضای اوریسون است.

فرض کنیم f همیومورفیسمی از فضای اوریسون $(X_۱, \tau_۱)$ به‌روی فضای توپولوژیک $(X_۲, \tau_۲)$ باشد. اگر $y_۱$ و $y_۲$ دو عنصر از $X_۲$ باشند، عناصر $x_۱$ و $x_۲$ از $X_۱$ وجود دارند که $f(x_۱) = y_۱$ و $f(x_۲) = y_۲$. از اوریسون بودن فضای $X_۱$ استفاده کرده و مجموعه‌های باز G و W از $X_۱$ که به‌ترتیب شامل $x_۱$ و $x_۲$ هستند را طوری اختیار می‌کنیم که $\overline{G} \cap \overline{W} = \emptyset$. اکنون با استفاده از

همیومورفیسم بودن f داریم

$$\begin{aligned}\overline{f(G)} \cap \overline{f(W)} &= f(\overline{G}) \cap f(\overline{W}) \\ &= f(\overline{G} \cap \overline{W}) = \emptyset.\end{aligned}$$

از آنجا که $f(G)$ و $f(W)$ مجموعه‌های باز از X_2 بوده که به‌ترتیب شامل y_1 و y_2 هستند، اوریسون بودن X_2 ثابت می‌شود.

فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک اوریسون باشد. ادعا می‌کنیم حاصل‌ضرب این خانواده از فضاها اوریسون است. برای این‌کار فرض کنیم x و y دو عنصر از فضای حاصل‌ضرب باشد. برای حداقل یک α، $x_\alpha \neq y_\alpha$. چون X_α فضای اوریسون است، لذا مجموعه‌های باز G_α و W_α از X_α به‌ترتیب شامل x_α و y_α وجود دارند که $\overline{G_\alpha} \cap \overline{W_\alpha} = \emptyset$. خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\overline{\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha)} \cap \overline{\pi_\alpha^{-1}(W_\alpha)} &\subseteq \pi_\alpha^{-1}\left(\overline{G_\alpha}\right) \cap \pi_\alpha^{-1}\left(\overline{W_\alpha}\right) \\ &= {\pi_\alpha}^{-1}\left(\overline{G_\alpha} \cap \overline{W_\alpha}\right) = \emptyset.\end{aligned}$$

از آنجا که ${\pi_\alpha}^{-1}(W_\alpha)$ و ${\pi_\alpha}^{-1}(G_\alpha)$ باز و به‌ترتیب شامل y و x هستند، نتیجه می‌گیریم که فضای حاصل‌ضرب، فضای اوریسون است. ■

تعریف ۴ ـ ۱۰. فضای توپولوژیک (X, τ) را منظم گوییم هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی F از X و هر $x \in F^c$، مجموعه‌های باز G و W موجود باشند طوری که $F \subseteq G$، $x \in W$ و $G \cap W = \emptyset$. هر فضای منظم و T_1 را یک فضای T_3 نامیم.

ابتدا نشان می‌دهیم که هر فضای T_3 یک فضای هاسدورف است. فرض کنیم (X, τ) یک فضای T_3 و x و y دو عنصر از X باشند. چون تک نقطه‌ای در فضای T_3 بسته است، لذا $\overline{\{y\}} = \{y\} \not\ni x$. بنابه فرض مجموعه‌های باز G و W به‌ترتیب شامل x و y وجود دارد که $G \cap W = \emptyset$. لذا X هاسدورف است.

مثال ۴ ـ ۴. اگر (X, d) یک فضای متریک باشد، نشان می‌دهیم X فضای منظم است. فرض کنیم F مجموعه‌ی بسته و $x_0 \in F^c$. ابتدا ثابت می‌کنیم که تابع f از X به‌توی $\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = d(x, F)$ پیوسته است. اگر $\epsilon > 0$ داده شده باشد، اختیار می‌کنیم $\delta = \epsilon$. اگر $d(x, y) < \delta$ آنگاه

$$\begin{aligned}d(x, F) &= \inf\{d(x, z);\ z \in F\} \\ &\leq \inf\{d(x, y) + d(y, z);\ z \in F\}\end{aligned}$$

$$= d(x,y) + \inf\{d(y,z);\ z \in F\} = d(x,y) + d(y,F)$$

و لذا $d(x,F) - d(y,F) \leq d(x,y) < \epsilon$. به همین صورت $d(y,F) - d(x,F) \leq d(x,y) < \epsilon$ و لذا f پیوسته است. ادعا می‌کنیم $d(x_\circ, F) > \circ$. اگر چنین نباشد، برای هر n عنصر x_n از F وجود دارد که $d(x_n, x_\circ) < \frac{1}{n}$. از این رابطه نتیجه می‌شود که $x_n \to x_\circ$. اما F بسته و $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از آن است، نتیجه می‌گیریم که $x_\circ \in F$ که یک تناقض است. بنابراین $d(x_\circ, F) > \circ$. اختیار می‌کنیم $r = \frac{d(x_\circ, F)}{۴}$، در این‌صورت $x_\circ \in \{x \in X;\ f(x) > r\}$ و $F \subseteq \{x \in X;\ f(x) < r\}$. بعلاوه

$$\{x \in X;\ f(x) < r\} \cap \{x \in X;\ f(x) > r\} = \emptyset$$

لذا هر فضای متریک یک فضای $T_۳$ است.

قضیه ۴ ـ ۱۱. *فضای توپولوژیک (X, τ) منظم است اگر و تنها اگر برای هر G باز و هر $x \in G$، مجموعه‌ی باز H موجود باشد که $x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq G$.*

برهان. فرض کنیم X فضای توپولوژیک منظم و $x \in G$. بنابراین $x \notin G^c$. بنابه فرض مجموعه‌های باز H و W وجود دارد که $x \in H$، $G^c \subseteq W$ و $W \cap H = \emptyset$. از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم که $W^c \subseteq G$ و $H \subseteq W^c$. بنابراین $H \subseteq W^c \subseteq G$ و چون W^c بسته است، خواهیم داشت $x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq G$.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم F مجموعه‌ای بسته و $x \in F^c$. چون F^c باز است، بنابه فرض H بازی وجود دارد که

$$x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq F^c$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که $F \subseteq \overline{H}^c$ و $x \in H$. اما $H \cap \overline{H}^c = \emptyset$، این برهان قضیه را کامل می‌کند.
■

قضیه ۴ ـ ۱۲. *منظم بودن خاصیتی موروثی، توپولوژیکی و حاصل‌ضربی است.*

برهان. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک منظم (X, τ) باشد. فرض کنید F زیرمجموعه‌ای بسته از A و $x \in A \backslash F$. مجموعه‌ی بسته‌ی E از X وجود دارد که $F = E \cap A$ و لذا $x \notin E$. از منظم بودن فضای X استفاده کرده و مجموعه‌های باز G و W از X به‌ترتیب شامل E و x را طوری می‌یابیم که $G \cap W = \emptyset$. مجموعه‌های باز $G \cap A$ و $W \cap A$ از A به‌ترتیب شامل F و x هستند. چون این دو مجموعه‌ی مجزا هستند، لذا A منظم است.

فرض کنیم f همیومورفیسمی از فضای توپولوژیک منظم $(X_۱, \tau_۱)$ به‌روی فضای توپولوژیک

(X_2, τ_2) باشد. فرض کنیم F زیرمجموعه‌ای بسته از X_2 و $y \in F^c$. بنابراین $f^{-1}(F)$ مجموعه‌ای بسته از X_1 است و این مجموعه شامل $f^{-1}(y)$ نیست. چون X_1 منظم است، لذا مجموعه‌های باز G و W از X_1 به‌ترتیب شامل $f^{-1}(F)$ و $f^{-1}(y)$ موجودند که $G \cap W = \emptyset$. چون f همیومورفیسم است، لذا $f(G)$ و $f(W)$ بازند و بعلاوه $F \subseteq f(G)$ و $y \in f(W)$. از دو سویی بودن f نتیجه می‌شود که $f(G) \cap f(W) = f(G \cap W) = \emptyset$ و لذا X_2 منظم است.

فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک منظم باشد. فرض کنیم مجموعه‌ی پایه‌ای $\bigcap\limits_{i=1}^{n} {\pi_{\alpha_i}}^{-1}(G_{\alpha_i})$ شامل عنصری چون x باشد. پس برای هر i، $x_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$. چون X_α ها منظم هستند، لذا برای هر i مجموعه‌ی بازی چون H_{α_i} وجود دارد که

$$x_{\alpha_i} \in H_{\alpha_i} \subseteq \overline{H_{\alpha_i}} \subseteq G_{\alpha_i}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} {\pi_{\alpha_i}}^{-1}(H_{\alpha_i}) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} {\pi_{\alpha_i}}^{-1}(\overline{H_{\alpha_i}}) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} {\pi_{\alpha_i}}^{-1}(G_{\alpha_i})$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} {\pi_{\alpha_i}}^{-1}(H_{\alpha_i}) \subseteq \overline{\bigcap_{i=1}^{n} {\pi_{\alpha_i}}^{-1}(H_{\alpha_i})} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} {\pi_{\alpha_i}}^{-1}(G_{\alpha_i})$$

و لذا فضای حاصل‌ضرب منظم است. ■

شاید این‌گونه تصور شود که چون خواص T_0، T_1، T_2 و T_3 موروثی هستند پس همه‌ی خواصی که ما تعریف می‌کنیم موروثی هستند. این تصور درست نیست و در آینده خواهیم دید که خاصیت T_4 موروثی نیست.

قضیه ۴ ـ ۱۳. *فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک T_3 و A زیرمجموعه‌ای نامتناهی از X باشد. در آن‌صورت یک دنباله نامتناهی از زیرمجموعه‌های باز در X چون $\{G_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$ وجود دارد که برای هر $i, j \in \mathbb{N}$، $\overline{G_i} \cap \overline{G_j} = \emptyset$ و $A \cap G_i \neq \emptyset$.*

برهان. قرار می‌دهیم $G_0 = \emptyset$ و فرض می‌کنیم مجموعه‌های باز G_0 و ... و G_m به‌دست آمده باشند طوری که برای هر $1 \leq i \leq m$، $A \cap G_i \neq \emptyset$ و $A_m = A \backslash (\overline{G_0} \cup \cdots \cup \overline{G_m})$ نامتناهی است. دو عنصر x و y را از A_m در نظر می‌گیریم. از T_3 بودن فضای X استفاده کرده و مجموعه‌های باز G و W را طوری می‌یابیم که

$$x \in G \subseteq \overline{G} \subseteq X \backslash \left(\overline{G_0} \cup \cdots \cup \overline{G_m} \cup \{y\}\right)$$

و

$$y \in W \subseteq \overline{W} \subseteq X \setminus \left(\overline{G_\circ} \cup \cdots \cup \overline{G_m} \cup \overline{G}\right)$$

مجموعه‌ی باز H را طوری اختیار می‌کنیم که $x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq G$. هرگاه $A \cap G$ متناهی باشد، قرار می‌دهیم $G_{m+1} = H$. هرگاه $A \cap G$ نامتناهی باشد، قرار می‌دهیم $G_{m+1} = W$. به‌راحتی دیده می‌شود که $\overline{G_\circ}$ و ... و $\overline{G_{m+1}}$ دو به دو مجزا هستند و $A \cap G_{m+1} \neq \emptyset$. بعلاوه این‌که $A \setminus \left(\overline{G_\circ} \cup \cdots \cup \overline{G_{m+1}}\right)$ نامتناهی است. ∎

تعریف ۴ ـ ۱۴. فضای توپولوژیک (X, τ) را به‌طور کامل منظم گوییم هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی F از X و هر $x \in F^c$، تابع پیوسته‌ی $f : X \to [\circ, 1]$ موجود باشد که $f(F) = \{1\}$ و $f(x) = \circ$. هر فضای به‌طور کامل منظم و T_1 را یک فضای $T_{\frac{7}{2}}$ گوییم.

مثال ۴ ـ ۵. فضای متریک (X, d) یک فضای به‌طور کامل منظم است. در حقیقت فرض کنید F زیرمجموعه‌ای بسته از X و $x_\circ \in F^c$. می‌دانیم تابع $f(x) = 1 - \dfrac{d(x, F)}{d(x_\circ, F)}$ پیوسته است. اکنون تابع حقیقی مقدار h را روی اعداد حقیقی با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $x \leq \circ$ یا $x \geq 2$، $h(x) = \circ$ و برای $\circ \leq x \leq 1$، $h(x) = x$ و سرانجام برای $1 \leq x \leq 2$، $h(x) = 2 - x$. به‌سادگی دیده می‌شود که تابع h پیوسته بوده و تابع $hof : X \to [\circ, 1]$ خواص مورد نیاز را داراست و بنابراین فضای متریک، یک فضای به‌طور کامل منظم است.

در تمرین ها خواهیم دید که هر فضای T_3 یک فضای اوریسون است. انتظار داریم که هر فضای $T_{\frac{7}{2}}$ یک فضای T_3 باشد. در حقیقت فرض کنیم (X, τ) یک فضای $T_{\frac{7}{2}}$ باشد و F زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از X که شامل $x \in X$ نیست. بنابه فرض تابع پیوسته‌ی $f : X \to [\circ, 1]$ موجود است که $f(F) = \{1\}$ و $f(x) = \circ$. واضح است که $F \subseteq f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ و $x \in f^{-1}\left(\left[\circ, \frac{1}{2}\right)\right)$ و این دو تصویر معکوس به خاطر پیوستگی f بازند. از طرف دیگر

$$f^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2}, 1\right]\right) \cap f^{-1}\left(\left[\circ, \tfrac{1}{2}\right)\right) = f^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2}, 1\right] \cap \left[\circ, \tfrac{1}{2}\right)\right) = \emptyset$$

لذا فضای X منظم و بنابراین T_3 است.

قضیه ۴ ـ ۱۵. *گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) *به‌طور کامل منظم بودن موروثی و خاصیت توپولوژیکی است.*

ب) *اگر $\prod_{\alpha \in I}(X_\alpha, \tau_\alpha)$ به‌طور کامل منظم باشد، آنگاه هر X_α به‌طور کامل منظم است.*

برهان. فرض کنیم (X, τ) یک فضای به‌طور کامل منظم و $A \subseteq X$. فرض کنیم F زیرمجموعه‌ای بسته از A و $x \in A \setminus F$. مجموعه‌ی بسته‌ی E از X وجود دارد که $F = E \cap A$ و لذا $x \notin E$. چون X به‌طور کامل منظم است تابع پیوسته‌ی $f : X \to [\circ, 1]$ وجود دارد که $f(E) = \{1\}$ و

$f(x) = \circ$. چون تحدید تابع پیوسته تابعی پیوسته است، لذا تحدید f روی A جواب مسئله است.

برای اثبات (ب)، فرض کنیم f همیومورفیسمی از فضای به‌طور کامل منظم (X_1, τ_1) به‌روی فضای توپولوژیک (X_2, τ_2) باشد. فرض کنید F زیرمجموعه‌ای بسته از X_2 و $y \notin F$. چون f همیومورفیسم است، لذا $f^{-1}(F)$ در X_1 بسته و $f^{-1}(y) \notin f^{-1}(F)$. چون X_1 فضای به‌طور کامل منظم است، تابع پیوسته‌ی $h : X_1 \to [\circ, 1]$ موجود است که $h\big(f^{-1}(F)\big) = \{1\}$ و $h\big(f^{-1}(y)\big) = \circ$. بنابراین hof^{-1} تابع مورد نظر خواهد بود.

برای کامل شدن برهان باید ثابت کنیم اگر فضای حاصل‌ضربی به‌طور کامل منظم باشد، آنگاه هر فضای مختصی X_α نیز به‌طور کامل منظم است. برای این‌کار برای هر β متمایز از α، عنصر x_β را از فضای X_β انتخاب می‌کنیم. زیرفضایی از فضای حاصل‌ضربی که در مؤلفه‌ی β متمایز از α عنصر x_β و در مؤلفه‌ی α عناصر X_α قرار دارد را در نظر می‌گیریم. در حقیقت این زیرفضایی است که در مختص α، X_α است و در مؤلفه‌ی β غیر از α، $\{x_\beta\}$ است. چون بنابه فرض فضای حاصل‌ضربی به‌طور کامل منظم است، لذا این زیرفضا نیز به‌طور کامل منظم است. اما این زیرفضا با فضای X_α همیومورف است و بنابراین X_α به‌طور کامل منظم است. ■

قبلاً گفتیم راه‌های زیادی برای اثبات این‌که یک فضای توپولوژیک متریک‌پذیر نیست وجود دارد. در مثال زیرفضای توپولوژیکی ارائه می‌کنیم که شمارای اول نیست و لذا متریک‌پذیر نیست.

مثال ۴ ــ ٦. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک $T_{\frac{7}{2}}$ باشد. فرض کنیم X ناشمارا باشد. برای هر $f \in C_b(X)$، $\epsilon > \circ$ و x_1 و ... و x_n از X قرار می‌دهیم

$$P(f, x_1, \dots, x_n, \epsilon) = \{h \in C_b(X) : |f(x_i) - h(x_i)| < \epsilon,\ 1 \le i \le n\}$$

می‌دانیم خانواده همه‌ی $P(f, x_1, \dots, x_n, \epsilon)$ ها که $f \in C_b(X)$، $\epsilon > \circ$ و x_1 و ... و x_n از X، تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی روی $C_b(X)$ می‌دهد. ثابت می‌کنیم $C_b(X)$ شمارای اول نیست و لذا متریک‌پذیر نیست. فرض کنیم $\{B_1, B_2, \dots\}$ پایه‌ای موضعی برای تابع صفر باشد. $\epsilon_1 > \circ$ و نقاط x_{11} و ... و x_{1n_1} از X موجودند که $P(\circ, x_{11}, \dots, x_{1n_1}, \epsilon_1) \subseteq B_1$. همین‌طور $\epsilon_2 > \circ$ و نقاط x_{21} و ... و x_{2n_2} از X موجودند که $P(\circ, x_{21}, \dots, x_{2n_2}, \epsilon_2) \subseteq B_2$. این روند را ادامه داده و زیرمجموعه‌ی حداکثر شمارای $A = \{x_{11}, \dots, x_{1n_1}, x_{21}, \dots\}$ از X را بدست می‌آوریم. بعلاوه این‌که $P(\circ, x_{k1}, \dots, x_{kn_k}, \epsilon_k)$ ها تشکیل یک پایه‌ی موضعی برای تابع صفر می‌دهند. فرض کنیم $x \in X \backslash A$. چون $P(\circ, x, 1)$ مجموعه‌ی بازی شامل تابع صفر است، لذا برای یک مجموعه‌ی پایه‌ای مانند $P(\circ, x_{k1}, \dots, x_{kn_k}, \epsilon_k)$ خواهیم داشت

$P(\circ, x_{k1}, \dots, x_{kn_k}, \epsilon_k) \subseteq P(\circ, x, 1)$. از آنجا که $\{x_{k1}, \dots, x_{kn_k}\}$ مجموعه‌ای بسته و شامل x نیست، از به‌طور کامل منظم بودن X استفاده کرده و تابع پیوسته‌ی f را طوری می‌یابیم که $f(\{x_{k1}, \dots, x_{kn_k}\}) = \{\circ\}$ و $f(x) = 1$. به‌راحتی دیده می‌شود که

$$f \in P(\circ, x_{k1}, \dots, x_{kn_k}, \epsilon_k) \backslash P(\circ, x, 1)$$

این یک تناقض است و لذا $C_b(X)$ شمارای اول نیست و لذا متریک‌پذیر نیست.

۴ـ۴ فضای نرمال و فضای به‌طور کامل نرمال

در این بخش فضاهای نرمال و به‌طور کامل نرمال را مطالعه کرده و دو قضیه‌ی مهم این فصل که قضیه‌ی گسترش تیتسه و لم اوریسون است را ثابت می‌کنیم.

تعریف ۴ ـ ۱۶. فضای توپولوژیک (X, τ) را نرمال گوییم هرگاه برای هر دو مجموعه‌ی بسته و مجزای F_1 و F_2، دو مجموعه‌ی باز مجزای G_1 و G_2 موجود باشند که $F_1 \subseteq G_1$ و $F_2 \subseteq G_2$. فضای نرمال و T_1 را فضای T_4 نامیم.

$\mathbb{R}$ با توپولوژی ناگسسته یک فضای نرمال است ولی T_1 نیست. در آینده نزدیک خواهیم دید که هر فضای T_4 یک فضای $T_{\frac{7}{2}}$ است و همین‌طور ثابت می‌کنیم که هر فضای متریک یک فضای نرمال است.

قضیه ۴ ـ ۱۷. *فضای توپولوژیک (X, τ) نرمال است اگر و تنها اگر برای هر F بسته و هر مجموعه‌ی باز شامل آن مانند G، مجموعه‌ی باز H موجود باشد که $F \subseteq H \subseteq \overline{H} \subseteq G$.*

برهان. فرض کنیم X نرمال و $F \subseteq G$. بنابراین $F \cap G^c = \emptyset$. بنابه فرض مجموعه‌های باز H و W وجود دارند که $F \subseteq H$، $G^c \subseteq W$ و $W \cap H = \emptyset$. از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم که $W^c \subseteq G$ و $H \subseteq W^c$. بنابراین $H \subseteq W^c \subseteq G$ و چون W^c بسته است، خواهیم داشت $F \subseteq H \subseteq \overline{H} \subseteq G$.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم F_1 و F_2 دو مجموعه‌ی بسته و مجزا باشند. چون $F_2 \subseteq F_1^c$ و F_1^c باز است، بنابه فرض H بازی وجود دارد که

$$F_2 \subseteq H \subseteq \overline{H} \subseteq F_1^c$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که $F_1 \subseteq \overline{H}^c$ و $F_2 \subseteq H$. چون $H \cap \overline{H}^c = \emptyset$، این برهان قضیه را کامل می‌کند. ■

نتیجه ساده‌ای که به‌دست می‌آید این است که یک فضای توپولوژیک (X,τ) نرمال است اگر و تنها اگر برای هر دو مجموعه‌ی بسته و مجزای F_1 و F_2، دو مجموعه‌ی باز G_1 و G_2 موجود باشند که $F_1 \subseteq G_1$ و $F_2 \subseteq G_2$ و $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset$.

قضیه ۴ ـ ۱۸. *گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) *زیرفضاهای بسته یک فضای نرمال، نرمال است.*

ب) *تصویر یک فضای نرمال تحت تابع پیوسته و بسته، یک فضای نرمال است.*

ج) *اگر* $\prod_{\alpha \in I}(X_\alpha, \tau_\alpha)$ *نرمال باشد، آنگاه هر* X_α *نرمال است.*

برهان. فرض کنیم (X,τ) یک فضای نرمال و F زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از آن باشد. ادعا می‌کنیم F نیز نرمال است. فرض کنیم F_1 و F_2 دو زیرمجموعه‌ی بسته و مجزا از F باشند. لذا مجموعه‌های بسته‌ی E_1 و E_2 از X وجود دارند که $F_1 = E_1 \cap F$ و $F_2 = E_2 \cap F$. واضح است که F_1 و F_2 مجموعه‌های بسته و مجزا از X هستند و لذا مجموعه‌های باز مجزای G_1 و G_2 از X وجود دارند که $F_1 \subseteq G_1$ و $F_2 \subseteq G_2$. بنابراین $F_1 \subseteq G_1 \cap F$ و $F_2 \subseteq G_2 \cap F$ و این ثابت می‌کند که F نرمال است.

برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنیم f تابعی پیوسته و بسته از فضای نرمال (X_1,τ_1) به‌روی فضای توپولوژیک (X_2,τ_2) باشد. فرض کنیم F_1 و F_2 دو مجموعه‌ی بسته و مجزا از فضای X_2 باشند. از آنجا که f پیوسته است، مجموعه‌های $f^{-1}(F_1)$ و $f^{-1}(F_2)$ بسته و نیز مجزا هستند. چون X_1 نرمال است، مجموعه‌های باز و مجزای G_1 و G_2 از X موجود است که $f^{-1}(F_1) \subseteq G_1$ و $f^{-1}(F_2) \subseteq G_2$. بنابراین $G_1{}^c \subseteq f^{-1}(X_2 \setminus F_1)$ و $G_2{}^c \subseteq f^{-1}(X_2 \setminus F_2)$. از دو رابطه‌ی اخیر داریم

$$f(G_1{}^c) \subseteq f\big(f^{-1}(X_2 \setminus F_1)\big) \subseteq X_2 \setminus F_1$$

و

$$f(G_2{}^c) \subseteq f\big(f^{-1}(X_2 \setminus F_2)\big) \subseteq X_2 \setminus F_2$$

نتیجه این‌که $F_1 \subseteq X_2 \setminus f(G_1{}^c)$ و $F_2 \subseteq X_2 \setminus f(G_2{}^c)$. از طرف دیگر

$$X_2 = f(X_1) = f(G_1^c \cup G_2^c) = f(G_1^c) \cup f(G_2^c)$$

بنابراین $X_2 \setminus f(G_1{}^c)$ و $X_2 \setminus f(G_2{}^c)$ مجزا هستند. چون f بسته است $X_2 \setminus f(G_1{}^c)$ و $X_2 \setminus f(G_2{}^c)$ باز و مجزا هستند و دو مجموعه‌ی F_1 و F_2 را از هم جدا می‌کنند.

سرانجام برای قسمت (ج)، فرض کنیم $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha, \tau_\alpha)$ نرمال باشد. ثابت می‌کنیم هر X_α نرمال است. برای هر β متمایز از α عنصر x_β را از فضای X_β انتخاب می‌کنیم. زیرفضایی از فضای حاصل‌ضربی که در مؤلفه‌ی β متمایز از α عنصر x_β و در مؤلفه‌ی α عناصر X_α قرار دارند را در نظر می‌گیریم. این فضا زیرفضای بسته‌ای از فضای حاصل‌ضرب است و چون بنابه فرض فضای حاصل‌ضربی نرمال است، لذا این زیرفضا نیز نرمال است. اما این زیرفضا با فضای X_α همیومورف است و بنابراین X_α نرمال است. ■

با استفاده از قضیه‌ی زیر ثابت می‌کنیم نرمال بودن خاصیت حاصل‌ضربی نیست.

قضیه ۴ ـ ۱۹. *اگر فضای توپولوژیک (X, τ) دارای زیرفضای بسته و گسسته A و زیرمجموعه‌ی چگال D باشد طوری که $|A| \geq 2^{|D|}$، آنگاه X نرمال نیست.*

برهان. فرض کنیم X نرمال باشد، چون A در X بسته است و چون هر زیرمجموعه‌ی A در A بسته است، لذا هر زیرمجموعه‌ی A در X بسته است. بنابراین برای هر $F \subseteq A$ دو مجموعه‌ی باز و مجزای G_F و $G_{A\setminus F}$ از X وجود دارند که $F \subseteq G_F$ و $A\setminus F \subseteq G_{A\setminus F}$. اکنون فرض کنیم E و F دو زیرمجموعه از A باشند که $E\setminus F \neq \emptyset$، در آن‌صورت

$$E\setminus F \subseteq G_E \cap G_{A\setminus F}$$

نتیجه این‌که $G_E \cap G_{A\setminus F}$ مجموعه‌ی باز ناتهی است. چون D در X چگال است، بنابراین $G_E \cap G_{A\setminus F} \cap D \neq \emptyset$. چون $G_E \cap G_{A\setminus F} \cap D \subseteq G_E \cap D$ و

$$(G_E \cap G_{A\setminus F} \cap D) \cap (G_F \cap D) = \emptyset$$

لذا $D \cap G_E \neq D \cap G_F$. با توضیحات فوق نتیجه می‌گیریم که تابعی که هر زیرمجموعه‌ی F از A را به زیرمجموعه‌ای چون $G_F \cap D$ از D می‌نگارد، تابعی یک به یک است. بنابراین $2^{|D|} \geq 2^{|A|} > |A|$ که با فرض قضیه در تناقض است، لذا X نرمال نیست. ■

$\mathbb{R}$ را با توپولوژی حد بالا در نظر می‌گیریم. به‌سادگی دیده می‌شود که این فضا نرمال است. $D = \{(r, s);\ r, s \in \mathbb{Q}\}$ در فضای حاصل‌ضربی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ چگال است و $A = \{(x, -x);\ x \in \mathbb{Q}^c\}$ نیز زیرفضای بسته و گسسته از این فضا می‌باشد. چون $2^{|D|} = 2^{|\mathbb{Q}|} = |\mathbb{Q}^c| = |A|$، لذا $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ نرمال نیست. از این موضوع نتیجه می‌گیریم که نرمال بودن خاصیت حاصل‌ضربی نیست.

نکته۲. از آنجا که $\mathbb{Z}$ زیرفضای گسسته و بسته از $\mathbb{R}$ است، شاید این‌گونه تصور شود که هر زیر فضای گسسته از یک فضای توپولوژیک بسته نیز هست. این تصور نادرستی است. فرض کنیم در $\mathbb{R}$ مجموعه‌هایی بازند که شامل صفر نبوده و یا شامل $\mathbb{R}\setminus\{2, 3\}$ باشد. در این صورت

$\{\{x\}: x \neq 0\}$ = A فضایی گسسته است ولی بسته نیست.

قضیه ۴ ــ ۲۰. *هر فضای توپولوژیک منظم و شمارای دوم، نرمال است.*

برهان. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک منظم و $\{G_n: n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ای برای X باشد. فرض کنیم E و F دو زیرمجموعه‌ی بسته و مجزا از X باشند. اگر $x \in E$، لذا $x \in F^c$. از منظم بودن فضای X استفاده کرده و مجموعه‌ی باز G شامل x را طوری می‌یابیم که $\overline{G} \subseteq F^c$. چون $\{G_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ پایه است، لذا برای یک n ای، $x \in G_n \subseteq G$. خلاصه این‌که برای هر $x \in E$ عنصر پایه‌ای شامل x وجود دارد که بستارش هیچ اشتراکی با F ندارد. بنابراین زیرخانواده‌ای از $\{G_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ مانند $\{G_{n_1};\ n \in \mathbb{N}\}$ وجود دارد که پوششی برای E بوده و برای هر n، $\overline{G_{n_1}} \cap F = \emptyset$. با روشی مشابه زیرخانواده‌ای از $\{G_n: n \in \mathbb{N}\}$ مانند $\{G_{n_2};\ n \in \mathbb{N}\}$ وجود دارد که پوششی برای F بوده و برای هر n، $\overline{G_{n_2}} \cap E = \emptyset$. برای هر n، قرار می‌دهیم $U_n = G_{n_1} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{G_{i_2}}$ و $V_n = G_{n_2} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{G_{i_1}}$. واضح است که U_n ها و V_n ها بازند و لذا $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ و $V = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ باز هستند. اگر x عنصری از E باشد، چون $\{G_{n_1}: n \in \mathbb{N}\}$ پوششی برای E بوده و برای هر n، $\overline{G_{n_2}} \cap E = \emptyset$، لذا $x \in U$. این نتیجه می‌دهد که $E \subseteq U$ و همین‌طور $F \subseteq V$. برای اتمام برهان کافیست ثابت کنیم که U و V مجزا هستند. فرض کنیم $x \in U \cap V$، لذا برای m و n ای، $x \in U_n \cap V_m$. فرض کنیم $n \geq m$، بنابه تعریف U_n ها، x در U_n قرار ندارد که یک تناقض است. به همین روش اگر $m \geq n$، به یک تناقض می‌رسیم. این نتیجه می‌دهد که U و V مجزا بوده و لذا برهان کامل می‌شود. ∎

قضیه ۴ ــ ۲۱. *فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک نرمال باشد. فرض کنیم برای هر α و β از I، $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$. زیرمجموعه‌ی U از $X := \bigcup\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ را باز گوییم هرگاه برای هر α، $U \cap X_\alpha$ در X_α باز باشد. در آن‌صورت X نرمال است.*

برهان. فرض کنیم E و F دو زیرمجموعه‌ی بسته و مجزا از X باشند. برای هر α، $E \cap X_\alpha$ و $F \cap X_\alpha$ دو زیرمجموعه‌ی بسته و مجزا از X_α می‌باشند. چون X_α نرمال است، لذا مجموعه‌های باز U_α و V_α به‌ترتیب شامل $E \cap X_\alpha$ و $F \cap X_\alpha$ وجود دارند که $U_\alpha \cap V_\alpha = \emptyset$. چون X_α ها دو به دو مجزا هستند، لذا $U := \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ و $V := \bigcup\limits_{\alpha \in I} V_\alpha$ باز و مجزا هستند. از آنجا که U شامل E و V شامل F است، نرمال بودن X ثابت می شود. ∎

قضیه‌ی زیر یکی از قضایای مهم در توپولوژی است که به لم اوریسون مشهور است.

قضیه ۴ ــ ۲۲. *فضای توپولوژیک (X, τ) نرمال است اگر و تنها اگر برای هر دو مجموعه‌ی*

بسته و مجزای F_1 و F_2، تابع پیوسته‌ای از X به‌توی $[0, 1]$ موجود باشد که $f(F_1) = \{0\}$ و $f(F_2) = \{1\}$.

برهان. فرض کنیم X نرمال و F_1 و F_2 دو مجموعه‌ی بسته و مجزا از X باشند. چون $F_1 \subseteq F_2^c$، مجموعه‌ی باز $G_{\frac{1}{2}}$ از X موجود است که

$$F_1 \subseteq G_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{G_{\frac{1}{2}}} \subseteq F_2^c$$

مجموعه‌های باز $G_{\frac{1}{4}}$ و $G_{\frac{3}{4}}$ موجودند که

$$F_1 \subseteq G_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{G_{\frac{1}{4}}} \subseteq G_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{G_{\frac{1}{2}}} \subseteq G_{\frac{3}{4}} \subseteq \overline{G_{\frac{3}{4}}} \subseteq F_2^c$$

با ادامه این روند برای هر $r = \frac{k}{2^n}$ که $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$، مجموعه‌ی باز G_r ساخته می‌شود. بعلاوه این‌که اگر $r_1 \leq r_2$، آنگاه

$$F_1 \subseteq G_{r_1} \subseteq \overline{G_{r_1}} \subseteq G_{r_2} \subseteq \overline{G_{r_2}} \subseteq F_2^c$$

اکنون $x \in X$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم برای r ای، $x \in G_r$. قرار می‌دهیم $f(x) = \inf\{r;\ x \in G_r\}$. در غیر این‌صورت می‌نویسیم $f(x) = 1$. واضح است f تابعی از X به‌توی $[0, 1]$ بوده و همچنین $f(F_1) = \{0\}$ و $f(F_2) = \{1\}$. برای اتمام برهان این قسمت، کافیست ثابت کنیم f پیوسته است. فرض کنیم $x \in X$ و $\epsilon > 0$ داده شده باشد.

حالت اول: $f(x) = 1$. چون $A := \left\{\frac{k}{2^n};\ 1 \leq k \leq 2^n\right\}$ در $[0, 1]$ چگال است، $r \in A$ ای وجود دارد که $1 - \epsilon < r < 1$. بنابه طرز ساخت G_r ها، $\overline{G_r}^c$ مجموعه‌ی باز شامل x است و $f(\overline{G_r}^c) \subseteq [r, 1] \subseteq (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$.

حالت دوم: $f(x) = 0$. $r \in A$ ای وجود دارد که $0 < r < \epsilon$. دوباره بنابه طرز ساخت G_r ها، $x \in G_r$ و $f(G_r) \subseteq [0, r] \subseteq (-\epsilon, \epsilon)$.

حالت سوم: $0 < f(x) < 1$. اعداد گویای r_1 و r_2 از A را طوری اختیار می‌کنیم که $f(x) - \epsilon < r_1 < f(x) < r_2 < f(x) + \epsilon$. واضح است که x در مجموعه‌ی باز $\overline{G_{r_1}}^c \cap G_{r_2}$ قرار دارد و

$$f(\overline{G_{r_1}}^c \cap G_{r_2}) \subseteq [r_1, r_2] \subseteq (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$$

این پیوستگی f را به اتمام می‌رساند.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم F_1 و F_2 دو مجموعه‌ی بسته و مجزا از X باشند. بنابه فرض، تابع پیوسته‌ی $f : X \to [0, 1]$ موجود است که $f(F_1) = \{0\}$ و $f(F_2) = \{1\}$. به‌راحتی

دیده می‌شود که مجموعه‌های باز $f^{-1}\left(\left[\circ,\frac{1}{2}\right)\right)$ و $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2},1\right]\right)$ به‌ترتیب شامل F_1 و F_2 بوده و

$$f^{-1}\left(\left[\circ,\frac{1}{2}\right)\right)\cap f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2},1\right]\right)=f^{-1}\left(\left[\circ,\frac{1}{2}\right)\cap\left(\frac{1}{2},1\right]\right)=\emptyset$$

لذا X نرمال است. ■

در لم اوریسون به‌جای بازه $[\circ,1]$ می‌توان از بازه بسته‌ی $[a,b]$ استفاده کرد. در حقیقت می‌توان ثابت کرد که فضای توپولوژیک (X,τ) نرمال است اگر و تنها اگر برای هر دو مجموعه‌ی بسته و مجزای F_1 و F_2، تابع پیوسته‌ای از X به‌توی $[a,b]$ موجود باشد که $f(F_1)=\{a\}$ و $f(F_2)=\{b\}$. زیرا تابع $g(x)=(b-a)x+a$ همیومورفیسمی از $[\circ,1]$ به‌روی $[a,b]$ است.

شرایط برای اثبات این‌که هر فضای T_4 یک فضای $T_{\frac{7}{2}}$ است فراهم شده است. فرض کنید X یک فضای T_4 و F زیرمجموعه‌ای بسته از X و $x\in F^c$. چون هر فضای T_4 یک فضای T_1 است، لذا $\{x\}$ بسته است. بنابه لم اوریسون تابعی پیوسته چون $f:X\to[\circ,1]$ وجود دارد که $f(x)=\circ$ و $f(F)=\{1\}$. لذا X یک فضای $T_{\frac{7}{2}}$ است.

قضیه‌ی زیر نیز یکی دیگر از قضایای مهمی است که در ریاضی کاربرد زیادی دارد که به قضیه‌ی گسترش تینسه معروف است.

قضیه ۴ ــ ۲۳. *فضای توپولوژیک (X,τ) نرمال است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه‌ی بسته‌ی F و هر تابع پیوسته‌ی $f:F\to[-1,1]$، تابع پیوسته‌ی $h:X\to[-1,1]$ موجود باشد که برای هر $x\in X$، $h(x)=f(x)$.*

برهان. فرض کنیم X نرمال و f تابعی پیوسته از زیرمجموعه‌ی بسته‌ی F به‌توی $[-1,1]$ باشد. قرار می‌دهیم $A_1=\left\{x\in F;\ f(x)\geq\frac{1}{3}\right\}$ و $B_1=\left\{x\in F;\ f(x)\leq\frac{-1}{3}\right\}$. چون f پیوسته و F بسته است، لذا A_1 و B_1 زیرمجموعه‌های بسته و مجزا از X هستند. بنابراین تابعی پیوسته مانند $h_1:X\to\left[\frac{-1}{3},\frac{1}{3}\right]$ موجود است که $h_1(A_1)=\left\{\frac{1}{3}\right\}$ و $h_1(B_1)=\left\{\frac{-1}{3}\right\}$. به‌راحتی دیده می‌شود که برای هر $x\in F$، $|f(x)-h_1(x)|\leq\frac{2}{3}$. اکنون قرار می‌دهیم $A_2=\left\{x\in F;\ f(x)-h_1(x)\geq\frac{2}{9}\right\}$ و $B_2=\left\{x\in F;\ f(x)-h_1(x)\leq\frac{-2}{9}\right\}$. چون $f-h_1$ روی F پیوسته است، لذا A_2 و B_2 زیرمجموعه‌های بسته و مجزا از X هستند. بنابراین تابعی پیوسته مانند $h_2:X\to\left[\frac{-2}{9},\frac{2}{9}\right]$ موجود است که $h_2(A_2)=\left\{\frac{2}{9}\right\}$ و $h_2(B_2)=\{\frac{-2}{9}\}$.

فرض کنیم $x\in F$. اگر $x\notin A_2\cup B_2$، لذا $|f(x)-h_1(x)|<\frac{2}{9}$ و چون $|h_2(x)|\leq\frac{2}{9}$،

$$|f(x)-h_1(x)-h_2(x)|\leq\frac{4}{9}$$

اگر $x\in A_2$، لذا $\frac{2}{9}\leq f(x)-h_1(x)\leq\frac{2}{3}$ و چون $h_2(x)=\frac{2}{9}$،

$$0 \leq f(x) - h_1(x) - h_2(x) \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

اگر $x \in B_2$، لذا $\frac{-2}{3} \leq f(x) - h_1(x) \leq \frac{-2}{9}$ و چون $h_2(x) = \frac{-2}{9}$،

$$\frac{-4}{9} = \frac{2}{9} - \frac{2}{3} \leq f(x) - h_1(x) - h_2(x) \leq 0$$

در هر حال

$$|f(x) - h_1(x) - h_2(x)| \leq \frac{4}{9}$$

با ادامه این روند دنباله‌ای از توابع پیوسته‌ی $h_n : X \to \left[\frac{-2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}\right]$ به‌دست می‌آوریم که برای هر $x \in F$،

$$\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} h_i(x)\right| \leq \frac{2^n}{3^n}$$

و برای هر $x \in X$، $|h_n(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$. چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$ همگراست، لذا $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ همگرای یکنواخت به تابعی پیوسته است. از آنجا که برای هر $x \in F$ و هر $n \in \mathbb{N}$، $\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} h_i(x)\right| \leq \frac{2^n}{3^n}$، نتیجه می‌گیریم که $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$. لذا $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ گسترش پیوسته‌ی f است.

برعکس، فرض کنیم هر تابع پیوسته روی هر زیرمجموعه‌ی بسته از X قابل گسترش به تابعی پیوسته روی X باشد، ثابت می‌کنیم X نرمال است. فرض کنیم F_1 و F_2 دو زیرمجموعه‌ی بسته و مجزا از X باشند. قرار می‌دهیم $F = F_1 \cup F_2$. تابع $f : F \to [-1, 1]$ را برای هر $x \in F_1$ به‌صورت $f(x) = -1$ و برای هر $x \in F_2$ به‌صورت $f(x) = 1$ تعریف می‌کنیم. چون تصویر معکوس هر مجموعه‌ی بسته تحت f بسته است، لذا f پیوسته است. اگر h گسترش تابع f روی X باشد، خواهیم داشت $h(F_1) = \{-1\}$ و $h(F_2) = \{1\}$. لذا X نرمال است. ■

دقت کنید که در قضیه‌ی گسترش تیتسه به‌جای بازه $[-1, 1]$ می‌توان بازه $[a, b]$ را قرار داد، چرا که تابع $g(x) = \frac{b-a}{2}(x-1) + b$ همیومورفیسمی از $[-1, 1]$ به‌روی $[a, b]$ است.

قضیه ۴ ـ ۲۴. *فضای توپولوژیک نرمال (X, τ) را در نظر می‌گیریم، گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) *اگر G_1 و ... و G_n زیرمجموعه‌های بازی از X باشند که $X = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$، آنگاه زیرمجموعه‌های بسته‌ی F_1 و ... و F_n وجود دارند که برای هر i، $F_i \subseteq G_i$ و بعلاوه $X = \bigcup_{i=1}^{n} F_n$.*

ب) *فرض کنید F زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از X باشد و G_1 و ... و G_n زیرمجموعه‌های بازی از X به‌طوری‌که $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_n$. در آن‌صورت توابع پیوسته‌ی h_1 و ... و h_n روی X*

وجود دارند که برای هر i، $h_i(X) \subseteq [\circ, \text{۱}]$ و $h_i(G_i{}^c) = \{\circ\}$. بعلاوه برای هر $x \in F$، $\sum_{i=\text{۱}}^{n} h_i(x) = \text{۱}$.

برهان. به استقراء عمل می‌کنیم. حکم برای $n = \text{۱}$ بدیهی است. فرض کنید $X = G_\text{۱} \cup G_\text{۲}$، لذا $G_\text{۱}{}^c$ و $G_\text{۲}{}^c$ بسته و مجزا هستند. بنابه نرمال بودن فضای X، دو زیرمجموعه‌ی باز مجزای $W_\text{۱}$ و $W_\text{۲}$ از X وجود دارند که $G_\text{۱}{}^c \subseteq W_\text{۱}$ و $G_\text{۲}{}^c \subseteq W_\text{۲}$. قرار می‌دهیم $F_\text{۱} = W_\text{۱}^c$ و $F_\text{۲} = W_\text{۲}^c$. $F_\text{۱}$ و $F_\text{۲}$ حکم استقراء را برای حالت $n = \text{۲}$ برقرار می‌کنند. اکنون فرض کنیم که حکم برای هر فضای نرمال با $n - \text{۱}$ مجموعه‌ی باز برقرار باشد و $X = \bigcup_{i=\text{۱}}^{n} G_i$. چون $X = \left(\bigcup_{i=\text{۱}}^{n-\text{۱}} G_i\right) \cup G_n$، لذا مجموعه‌های بسته‌ی F و F_n وجود دارند که $F \subseteq \bigcup_{i=\text{۱}}^{n-\text{۱}} G_i$ و $F_n \subseteq G_n$ و همچنین $X = F \cup F_n$. برای هر $\text{۱} \leq i \leq n - \text{۱}$، قرار می‌دهیم $H_i = F \cap G_i$. H_i ها مجموعه‌های باز در F هستند و $F = \bigcup_{i=\text{۱}}^{n-\text{۱}} H_i$. از فرض استقراء استفاده کرده و زیرمجموعه‌های بسته‌ی $F_\text{۱}$ و ... و $F_{n-\text{۱}}$ در F را طوری می‌یابیم که $F = \bigcup_{i=\text{۱}}^{n-\text{۱}} F_i$ و برای هر $\text{۱} \leq i \leq n - \text{۱}$، $F_i \subseteq H_i$. واضح است F_i ها در X بسته و شرایط مورد نیاز را دارا هستند.

برای اثبات قسمت (ب)، ابتدا حکم را برای حالتی که $X = F$ اثبات می‌کنیم، یعنی $X = \bigcup_{i=\text{۱}}^{n} G_i$. فرض کنیم $F_\text{۱}$ و ... و F_n زیرمجموعه‌های بسته به‌دست آمده در قسمت قبل باشند. بنابه لم اوریسون برای هر $\text{۱} \leq i \leq n$، تابع پیوسته‌ی $f_i : X \to [\circ, \text{۱}]$ وجود دارد که $f_i(F_i) = \{\text{۱}\}$ و $f_i(G_i^c) = \{\circ\}$. برای $\text{۱} \leq j \leq n$، قرار می‌دهیم

$$h_j(x) = \frac{f_j(x)}{\sum_{i=\text{۱}}^{n} f_i(x)}$$

چون برای هر $x \in X$، $\sum_{i=\text{۱}}^{n} f_i(x) > \circ$، بنابراین هر h_j پیوسته است و شرایط قضیه را بر آورده می‌سازند.

اکنون حالت کلی را ثابت می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم $F \subseteq \bigcup_{i=\text{۱}}^{n} G_i$. قرار می‌دهیم $G_\circ = F^c$ و لذا $X = \bigcup_{i=\circ}^{n} G_i$. بنابه حالت اول توابع پیوسته‌ی $h_\circ$ و ... و h_n از X به‌توی $[\circ, \text{۱}]$ وجود دارند که برای هر $x \in X$، $\sum_{i=\circ}^{n} h_i(x) = \text{۱}$ و همچنین برای هر $\circ \leq i \leq n$، $h_i(G_i^c) = \circ$. از آنجا که $h_\circ(F) = \{\circ\}$، برای هر $x \in F$ خواهیم داشت $\sum_{i=\text{۱}}^{n} h_i(x) = \text{۱}$. توابع $h_\text{۱}$ و ... و h_n توابع مورد نیاز برای قضیه هستند. ■

تعریف ۴ ـ ۲۵. فضای توپولوژیک (X,τ) را در نظر می‌گیریم، دو زیرمجموعه‌ی A و B از این فضا را از هم جدا شده نامیم هرگاه $\overline{A}\cap B=\emptyset$ و $A\cap\overline{B}=\emptyset$. این فضای توپولوژیک را به‌طور کامل نرمال گوییم هرگاه برای هر دو زیرمجموعه از هم جدا شده A و B، دو مجموعه‌ی باز مجزای G و W از X موجود باشند که $A\subseteq G$ و $B\subseteq W$. هر فضای به‌طور کامل نرمال و T_1 را یک فضای T_5 نامیم.

مثال ۴ ـ ۷. می‌خواهیم ثابت کنیم که هر فضای متریک یک فضای به‌طور کامل نرمال است. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه از هم جدا شده از فضای متریک (X,d) باشند. می‌دانیم تابع $f(x)=d(x,A)-d(x,B)$، تابعی پیوسته روی X است. اگر $x\in A$، در آن‌صورت $d(x,B)>0$، در غیر این‌صورت دنباله‌ای از اعضای B چون $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد که به x همگراست. این نتیجه می‌دهد که $x\in\overline{B}$ و این تناقض با از هم جدا شده بودن A و B است. به همین صورت اگر $x\in B$، آنگاه $d(x,A)>0$. با این توضیحات می‌توان نوشت

$$A\subseteq f^{-1}((-\infty,0)) \quad \text{و} \quad B\subseteq f^{-1}((0,\infty))$$

بنابراین دو مجموعه‌ی باز $f^{-1}((-\infty,0))$ و $f^{-1}((0,\infty))$، A و B را جدا می‌کنند.

واضح است که هر فضای به‌طور کامل نرمال، نرمال است و لذا هر فضای متریک یک فضای نرمال است.

قضیه ۴ ـ ۲۶. *فضای توپولوژیک (X,τ) به‌طور کامل نرمال است اگر و تنها اگر هر زیرفضای آن نرمال باشد.*

برهان. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از X باشد، ثابت می‌کنیم A نرمال است. فرض کنیم F_1 و F_2 دو زیرمجموعه‌ی بسته و مجزا از A باشند. بنابراین مجموعه‌های بسته‌ی E_1 و E_2 از X وجود دارند که $F_1=E_1\cap A$ و $F_2=E_2\cap A$. اما

$$\overline{F}_1\cap F_2\subseteq\overline{E}_1\cap F_2=E_1\cap F_2=E_1\cap A\cap F_2=F_1\cap F_2=\emptyset$$

و

$$\overline{F}_2\cap F_1\subseteq\overline{E}_2\cap F_1=E_2\cap F_1=E_2\cap A\cap F_1=F_2\cap F_1=\emptyset$$

بنابراین F_1 و F_2 از هم جدا شده هستند و لذا مجموعه‌های باز مجزای G_1 و G_2 وجود دارند که $F_1\subseteq G_1$ و $F_2\subseteq G_2$. مجموعه‌های باز $G_1\cap A$ و $G_2\cap A$ از A دو مجموعه‌ی بسته‌ی F_1 و F_2 را از هم جدا می‌کند، پس A نرمال است.

بر عکس، فرض کنیم هر زیرفضای فضای (X,τ) نرمال و A و B دو زیرمجموعه از هم

جدا شده از X باشند. قرار دهید $D = \mathrm{bd}(A)^c \cap \mathrm{bd}(B)^c$، به‌سادگی دیده می‌شود که A و B دو زیرمجموعه‌ی بسته و مجزا از D هستند. چون بنابه فرض D نرمال است، مجموعه‌های باز G و W از X موجودند که $A \subseteq G \cap D$ و $B \subseteq W \cap D$ و بعلاوه $G \cap W \cap D = \emptyset$. از این‌جا نتیجه می‌شود که $G \cap W \subseteq \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{bd}(B)$. قرار دهید $G_1 = G \cap \overline{B}^c$ و $W_1 = W \cap \overline{A}^c$. به‌راحتی دیده می‌شود دو مجموعه‌ی باز اخیر مجزا و به‌ترتیب شامل A و B هستند، یعنی X به‌طور کامل نرمال است. ■

تمرین ۴

۱. فرض کنیم f تابعی از فضای توپولوژیک (X_1, τ_1) به‌روی فضای توپولوژیک (X_2, τ_2) باشد. فرض کنید گراف f یعنی $G(f)$ در فضای توپولوژیک $X_1 \times X_2$ بسته باشد، ثابت کنید X_2 یک فضای T_1 است.

۲. اگر حد هر دنباله در صورت وجود در یک فضای توپولوژیک منحصر به‌فرد باشد، آیا فضا هاسدورف است؟

۳. ثابت کنید که حاصل‌ضرب یک خانواده از فضاهای توپولوژیک T_1 است اگر و تنها اگر هر فضای مختصی T_1 باشد.

۴. در صورت درستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

الف) اگر x نقطه‌ی حدی A از فضای توپولوژیک (X, τ) باشد. اگر X یک فضای T_1 باشد، در آن‌صورت هر مجموعه‌ی باز شامل x، A را در تعداد نامتناهی نقطه قطع می‌کند.

ب) تابع پیوسته‌ی f از فضای توپولوژیک (X_1, τ_1) به‌توی فضای توپولوژیک هاسدورف (X_2, τ_2) را در نظر بگیرید. در این‌صورت

$$\{(x, y) \in X_1 \times X_2;\ f(x) = f(y)\}$$

در $X_1 \times X_2$ بسته است.

ج) فرض کنید f تابعی باز از فضای توپولوژیک (X_1, τ_1) به‌روی فضای توپولوژیک (X_2, τ_2) باشد و همچنین

$$\{(x, y) \in X_1 \times X_2;\ f(x) = f(y)\}$$

در $X_1 \times X_2$ بسته باشد. در آن‌صورت X_2 هاسدورف است.

د) فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک هاسدورف و شمارای دوم باشد، در

آن‌صورت $|\tau| \leq |\mathbb{R}|$

۵. با ارائه مثالی نشان دهید که هر فضای هاسدورف و شمارای دوم لزوماً متریک‌پذیر نیست.

۶. متر $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ را روی $C([0,1])$ در نظر می‌گیریم. ثابت کنید $C([0,1])$ شمارای دوم است.

۷. فضای توپولوژیک هاسدورف (X,τ) و زیرمجموعه‌ی A از آن را در نظر بگیرید. ثابت کنید A' بسته است.

۸. فرض کنید (X_1, τ_1) و (X_2, τ_2) دو فضای توپولوژیک و $f : X_1 \to X_2$ و $g : X_2 \to X_1$ توابعی پیوسته باشند که $gof = I$. اگر X_2 هاسدورف باشد، ثابت کنید X_1 هاسدورف و $f(X_1)$ بسته است.

۹. ثابت کنید هر فضای هاسدورف نامتناهی، شامل زیرفضای گسسته نامتناهی است.

۱۰. آیا تابعی ناپیوسته از یک فضای توپولوژیک هاسدورف (X_1, τ_1) به‌توی فضای توپولوژیک هاسدورف (X_2, τ_2) وجود دارد که گراف آن بسته باشد؟

۱۱. ثابت کنید $B = \{\{1, \ldots, n\};\ n \in \mathbb{N}\}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی $\mathbb{N}$ است. ثابت کنید تنها تابع پیوسته از $\mathbb{N}$ به‌توی فضای توپولوژیک هاسدورف (X,τ)، تابع ثابت است.

۱۲. اگر فضای حاصل‌ضرب $\prod_{\alpha \in I}(X_\alpha, \tau_\alpha)$ اوریسون باشد، آیا همه‌ی X_α ها اوریسون هستند؟

۱۳. این تمرین فضای اوریسونی ارائه می‌کند که یک فضای T_3 نیست.

فرض کنید $X = \{(s,t);\ s,t \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$ و $L = \{(s,0);\ s \in \mathbb{R}\}$. برای $r > 0$ و $x \in X \backslash L$، قرار می‌دهیم $G_r(x) = S_r(x) \cap X$. برای هر $x \in L$، قرار می‌دهیم $G_r(x) = [S_r(x) \cap (X \backslash L)] \cup \{x\}$. گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

الف) نشان دهید که $B = \{G_r(x);\ x \in X,\ r > 0\}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی τ روی X است.

ب) برای دو عنصر x و y از X، قرار می‌دهیم $r = \frac{|x-y|}{4}$. ثابت کنید که $\overline{G_r(x)} \cap \overline{G_r(y)} = \emptyset$ و از این‌جا نتیجه بگیرید که (X,τ) یک فضای اوریسون است.

ج) فرض کنید $x = (0,0)$ و $F = L \backslash \{x\}$. ثابت کنید F در X بسته است و هیچ دو مجموعه‌ی باز F و x را از هم جدا نمی‌کند و نتیجه بگیرید X فضای T_3 نیست.

۱۴. نشان دهید فضای هاسدورفی وجود دارد که اوریسون نیست.

۱۵. اگر فضای حاصل‌ضرب $\prod_{\alpha \in I}(X_\alpha, \tau_\alpha)$ فضای T_3 باشد، ثابت کنید همه‌ی X_α ها T_3 هستند.

۱۶. ثابت کنید که $T_{\frac{7}{2}}$ خاصیت حاصل‌ضربی است.

۱۷. ثابت کنید که هر فضای $T_۴$ یک فضای اوریسون است.

۱۸. فضای توپولوژیک $T_۳$ مثال بزنید که $T_{\frac{۷}{۲}}$ نباشد.

۱۹. فرض کنید در فضای توپولوژیک هاسدورف (X, τ) هر نقطه در مجموعه‌ی بازی چون G قرار دارد که $\overline{G}$ منظم است. آیا X منظم است؟

۲۰. ثابت کنید هر فضای منظم و $T_۰$ یک فضای $T_۳$ است.

۲۱. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک $T_{\frac{۷}{۲}}$ و f تابعی نیم پیوسته‌ی پایین تعریف شده روی X باشد. ثابت کنید که خانواده‌ای از توابع پیوسته مانند $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ روی X وجود دارد که $f = \sup f_\alpha$. برعکس، ثابت کنید اگر هر تابع نیم پیوسته‌ی پایین روی X، سوپریموم یک خانواده از توابع پیوسته باشد، آنگاه X یک فضای $T_{\frac{۷}{۲}}$ است.

۲۲. نشان دهید که خاصیت نرمال بودن موروثی نیست.

۲۳. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک $T_۴$ و $F_۱$ و ... و F_n زیرمجموعه‌های بسته از X باشند که $F_۱ \cap F_۲ \cap \cdots \cap F_n = \emptyset$. ثابت کنید برای هر $۱ \leq i \leq n$، مجموعه‌های بازی مانند G_i شامل F_i وجود دارند که

$$\overline{G_۱} \cap \overline{G_۲} \cap \cdots \cap \overline{G_n} = \emptyset$$

۲۴. فرض کنیم فضای توپولوژیک (X, τ) نرمال باشد. ثابت کنید X منظم است اگر و تنها اگر به‌طور کامل منظم باشد.

۲۵. مثالی از یک فضای $T_۴$ ارائه کنید که متریک‌پذیر نباشد.

۲۶. زیرمجموعه‌ی A از یک فضای توپولوژیک را یک مجموعه F_σ گوییم هرگاه A بصورت اجتماعی از مجموعه‌های بسته باشد. ثابت کنید هر زیرمجموعه‌ی F_σ از یک فضای توپولوژیک نرمال، یک فضای توپولوژیک نرمال است.

۲۷. آیا تصویر یک فضای به‌طور کامل نرمال، تحت تابع پیوسته، پوشا و بسته یک فضای به‌طور کامل نرمال است؟

۲۸. یک فضای به‌طور کامل نرمال، تفکیک پذیر، شمارای اول مثال بزنید که متریک‌پذیر نباشد.

۲۹. فضای نرمالی مثال بزنید که به‌طور کامل نرمال نباشد.

۳۰. آیا به‌طور کامل نرمال بودن خاصیتی موروثی، توپولوژیکی و حاصل‌ضربی است؟

فصل ۵

فشردگی

۵—۱ مقدمه

یکی از مباحث مهم در آنالیز مفهوم فشردگی است. فشردگی در فضاهای متریک مورد بررسی قرار گرفت. دیدیم در یک فضای فشرده اشتراک یک خانواده از زیرمجموعه‌های بسته در صورتی تهی است که اشتراک یک تعداد متناهی از اعضای این خانواده تهی باشد. این خاصیت که به خاصیت اشتراک متناهی معروف است در آنالیز کاربرد فراوانی دارد. اگر مجموعه‌ای فشرده باشد، در آن‌صورت بسته و کران‌دار است. بنابراین یک مجموعه‌ی فشرده خصوصیات خوبی را به همراه دارد که می‌توان به تعدادی از آنها اشاره کرد. یک مجموعه‌ی فشرده همه‌ی نقاط حدی خود را شامل است و هر دنباله در آن دارای زیردنباله‌ای همگراست. بعلاوه این‌که هر تابع پیوسته روی یک مجموعه‌ی فشرده ماکزیمم و مینیمم خود را اختیار می‌کند. بنابراین اگر بتوانیم ثابت کنیم فضایی فشرده است، تعدادی از خصوصیات آن مشخص می‌شود. همان طور که اگر ثابت کنیم یک فضای توپولوژیک متریک‌پذیر است اکثر خصوصیات آن فضا برای ما مشخص می‌شود، فشردگی فضا نیز خصوصیات مخصوص به خود را برای ما مشخص می‌کند. در زیر فشردگی یک فضای توپولوژیک را تعریف کرده و قضایایی که برای فضاهای متریک برقراراند را در مورد فضاهای توپولوژیک بررسی می‌کنیم.

۵ـ۲ فشردگی

تعریفی که برای فشردگی در فضاهای توپولوژیک بیان می‌شود دقیقاً با تعریف فشردگی در فضاهای متریک یکسان است. اما در آینده‌ی نزدیک ملاحظه می‌کنید که همه‌ی قضایایی که در مورد فضاهای متریک برقرار است لزوماً در فضاهای توپولوژیک برقرار نیست. چون فشردگی یکی از بحث های مهم در توپولوژی است ما در این بخش و بخش بعدی خصوصیات فضاهای فشرده را به‌طور دقیق مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تعریف۵ ـ ۱. زیرمجموعه‌ی A از فضای توپولوژیک (X,τ) را در نظر می‌گیریم. خانواده‌ی $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از زیرمجموعه‌های باز X را یک پوشش باز برای A گوییم هرگاه $A\subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$. گوییم این پوشش دارای یک زیرپوشش متناهی است هرگاه برای تعداد متناهی از عناصر I چون $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$، $A\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$. مجموعه‌ی A را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز برای A دارای زیرپوشش متناهی باشد.

ساده‌ترین مثال از فضاهای فشرده، فضایی است که تعداد مجموعه‌های باز آن متناهی است. دیدیم $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی فشرده نیست، اما با توپولوژی ناگسسته فشرده است.

مثال۵ ـ ۱. $\mathbb{R}$ با توپولوژی هم‌شمارا فشرده نیست ولی با توپولوژی هم‌متناهی فشرده است. در حقیقت برای هر $n\in\mathbb{N}$، قرار دهید $G_n=\mathbb{N}^c\cup\{n\}$. واضح است که G_n ها باز بوده و $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ پوششی باز برای $\mathbb{R}$ است که دارای زیرپوشش متناهی نیست. از طرف دیگر $\mathbb{R}$ با توپولوژی هم‌متناهی فشرده است، چرا که اگر $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوششی باز برای $\mathbb{R}$ باشد، $\alpha_\circ$ ای موجود است که $\circ\in G_{\alpha_\circ}$. چون $G_{\alpha_\circ}^c$ متناهی است، لذا حداکثر تعداد متناهی از اعداد حقیقی در $G_{\alpha_\circ}$ قرار ندارد. این تعداد متناهی اعداد در تعداد متناهی از G_α ها قرار دارند و لذا این تعداد متناهی از مجموعه‌ها همراه با $G_{\alpha_\circ}$ زیرپوششی متناهی برای $\mathbb{R}$ را تشکیل می‌دهد و لذا $\mathbb{R}$ فشرده است.

به‌راحتی دیده می‌شود که فضای توپولوژیک گسسته فقط و فقط وقتی فشرده است که متناهی باشد.

مثال۵ ـ ۲. هر زیرمجموعه از اعداد حقیقی با توپولوژی هم‌متناهی فشرده است. در این فضا $\mathbb{N}$ فشرده است ولی بسته نیست. برای هر $n\in\mathbb{N}$، تعریف می‌کنیم $K_n=\mathbb{N}\setminus\{1,2,\dots,n\}$. K_n ها دنباله‌ای فشرده و نزولی از زیرمجموعه‌های فضای فشرده $\mathbb{R}$ است. اشتراک هر تعداد متناهی از K_n ها ناتهی است ولی $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n=\emptyset$.

مثال‌های فوق نشان می‌دهند که همه‌ی قضایایی که در فضاهای متریک برقراراند همواره برای

هر فضای توپولوژیک برقرار نیستند. بعضی از قضایا تحت شرایطی برقرار می باشند.

قضیه۵ ـ ۲. *فضای توپولوژیک هاسدورف (X, τ) را در نظر می‌گیریم. اگر $A \subseteq X$ فشرده باشد، آنگاه بسته است.*

برهان. ثابت می‌کنیم A^c باز است. فرض کنیم $y \in A^c$. برای هر $x \in A$، مجموعه‌های باز G_x و W_x به‌ترتیب شامل x و y وجود دارند که $G_x \cap W_x = \emptyset$. چون A فشرده و $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} G_x$، لذا تعداد متناهی از اعضای A چون x_1 و ... و x_n وجود دارند که $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{x_i}$. قرار دهید $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_{x_i}$. بنابراین W مجموعه‌ی بازی شامل y است که A را قطع نمی‌کند و لذا y نقطه‌ی درونی A^c است.
■

قضیه۵ ـ ۳. *فضای توپولوژیک (X, τ) فشرده است اگر و تنها اگر هر خانواده از زیرمجموعه‌های بسته از X که اشتراک هر تعداد متناهی از آنها ناتهی است، اشتراک همه‌ی اعضای این خانواده ناتهی باشد.*

برهان. فرض کنید X فشرده و $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های بسته از X بوده که اشتراک هر تعداد متناهی از این خانواده ناتهی است. فرض کنید $\bigcap\limits_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$، بنابراین $\bigcup\limits_{\alpha\in I} F_\alpha^c = X$. چون X فشرده است، لذا $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}^c = X$ و بنابراین $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset$. این تناقض با فرض است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوشش بازی برای X باشد. بنابراین $\bigcap\limits_{\alpha\in I} G_\alpha^c = \emptyset$. اما برای هر α، G_α^c بسته است و لذا بنابه فرض زیرخانواده‌ای متناهی از این خانواده وجود دارد که $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}^c = \emptyset$. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که $\bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} = X$ و لذا X فشرده است. ■

قضیه۵ ـ ۴. *گزاره‌های زیر همواره برقرارند:*

الف) *زیرمجموعه‌ی بسته از یک فضای فشرده، فشرده است.*

ب) *اگر (X, τ) یک فضای توپولوژیک و Y زیرفضای X باشد، آنگاه زیرمجموعه‌ی A از Y در Y فشرده است اگر و تنها اگر A در X فشرده باشد.*

ج) *تصویر هر فضای فشرده تحت هر تابع پیوسته، فشرده است.*

د) *اگر (X_1, τ_1) فضای توپولوژیک فشرده و (X_2, τ_2) فضای توپولوژیک هاسدورف و $f : X_1 \to X_2$ تابعی پیوسته، یک به یک و پوشا باشد، در آن‌صورت f یک همیومورفیسم است.*

برهان. فرض کنیم (X, τ) فشرده و A زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از آن باشد. فرض کنید $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوششی از مجموعه‌های باز برای A باشد. در این‌صورت این خانواده همراه با A^c پوششی باز برای

X خواهد بود. چون X فشرده است، لذا G_{α_1} و ... و G_{α_n} از اعضای این خانواده وجود دارند که $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \cup A^c$. بنابراین خواهیم داشت $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$ و لذا A فشرده است.

برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنیم $A \subseteq Y$ در Y فشرده باشد و $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوششی برای A از زیرمجموعه‌های باز فضای X باشد. در این‌صورت $\{G_\alpha \cap Y\}_{\alpha\in I}$ پوششی برای A از زیرمجموعه‌های باز Y است. چون A در Y فشرده است، پس $G_{\alpha_1} \cap Y$ و ... و $G_{\alpha_n} \cap Y$ از اعضای این خانواده وجود دارند که $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \cap Y$. بنابراین $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$ و لذا A در X فشرده است.

برای اثبات عکس این قسمت، فرض کنیم $\{G_\alpha \cap Y\}_{\alpha\in I}$ پوششی برای A از زیرمجموعه‌های باز Y باشد. لذا $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوششی برای A از زیرمجموعه‌های باز X است. چون A در X فشرده است، لذا A به‌وسیله تعداد متناهی از اعضای این خانواده چون G_{α_1} و ... و G_{α_n} پوشیده می‌شود. بنابراین A توسط $G_{\alpha_1} \cap Y$ و ... و $G_{\alpha_n} \cap Y$ پوشیده می‌شود، یعنی A در Y فشرده است.

برای اثبات قسمت (ج)، فرض کنیم f تابعی پیوسته از فضای فشرده (X_1, τ_1) به‌روی فضای توپولوژیک (X_2, τ_2) باشد. فرض کنید $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوششی باز برای X_2 باشد. چون f پیوسته است، $\{f^{-1}(G_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ پوششی باز برای X_1 است. چون X_1 فشرده است، لذا $X_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i})$. اما

$$X_2 = f(X_1) \subseteq f\Big(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i})\Big) = \bigcup_{i=1}^{n} f\big(f^{-1}(G_{\alpha_i})\big) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}.$$

بنابراین X_2 فشرده است.

برای اثبات قسمت آخر، کافیست ثابت کنیم f بسته است. اگر F زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از X_1 باشد، لذا F فشرده است و بنابراین $f(F)$ در فضای هاسدورف X_2 فشرده و لذا بسته است. پس f همیومورفیسم است. ■

از قضیه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم که فشردگی خاصیت توپولوژیکی است. همین‌طور چون دایره به مرکز صفر و شعاع یک، تصویر مجموعه‌ی فشرده $[0, 2\pi]$ تحت تابع پیوسته‌ی $f(x) = (\cos x, \sin x)$ است، لذا دایره در فضای $\mathbb{R}^2$ فشرده است. همین‌طور کره به مرکز صفر و شعاع یک، تصویر مجموعه‌ی فشرده $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ تحت تابع پیوسته‌ی $h(x, y) = (\cos x \sin y, \sin x \sin y, \cos y)$ است. لذا کره فشرده است.

از قضیه‌ی قبل نتیجه می‌گیریم که $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ در $\mathbb{Q}$ فشرده نیست، در غیر این‌صورت این مجموعه بایستی در $\mathbb{R}$ فشرده و لذا بسته باشد. اما $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ بسته نیست. دیدیم که اگر

(X,τ) فضای توپولوژیکی دلخواه و $A \subseteq Y \subseteq X$، در آن‌صورت بسته بودن یا باز بودن A در Y دلیلی بر بسته بودن یا باز بودن A در X نیست. بنابه قضیه‌ی قبل موضوع فوق برای فشردگی درست است، یعنی A در Y فشرده است اگر و تنها اگر A در X فشرده باشد. می‌دانیم $[0,1]$ فشرده است اما $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ فشرده نیست، یعنی فشردگی موروثی نیست.

قضیه۵ ـ ۵. *فضای توپولوژیک هاسدورف و به‌طور کامل منظم (X,τ) را در نظر می‌گیریم. برای هر زیرمجموعه‌ی فشرده K از X تابع $\rho_K : C_b(X) \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $\rho_K(f) = \sup\limits_{x\in K} |f(x)|$ تعریف می‌کنیم. برای هر زیرمجموعه‌ی فشرده K از X و هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $V(\rho_K, n) = \left\{f \in C_b(X);\ \rho_K(f) < \frac{1}{n}\right\}$. در آن‌صورت خانواده‌ی همه‌ی $h - V(\rho_K, n) = \{h - f;\ f \in V(\rho_K, n)\}$ ها که $h \in C_b(X)$، $n \in \mathbb{N}$ و K زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای از X است، تشکیل یک زیرپایه برای یک توپولوژی روی $C_b(X)$ می‌دهد. بعلاوه اگر $C_b(X)$ متریک‌پذیر باشد، آنگاه خانواده‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های فشرده از X مانند $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ وجود دارد که $K_n \subseteq K_{n+1}$ و $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.*

برهان. فرض کنیم $x \in X$ و $h \in C_b(X)$. واضح است که $h \in h - V(\rho_{\{x\}}, 1)$. لذا $C_b(X)$ اجتماعی از اعضای خانواده‌ی ذکر شده است و بنابراین این خانواده یک زیرپایه برای یک توپولوژی روی $C_b(X)$ است. ابتدا ثابت می‌کنیم اشتراک‌های متناهی از عناصری چون $V(\rho_K, n)$ یک پایه‌ی موضعی برای تابع صفر است. فرض کنیم $h - V(\rho_K, n)$ یک عنصر زیرپایه‌ای شامل تابع صفر باشد. در این‌صورت $\sup\limits_{x\in K} |h(x)| < \frac{1}{n}$. عدد طبیعی m را طوری اختیار می‌کنیم که $\frac{1}{m} < \frac{1}{n} - \sup\limits_{x\in K} |h(x)|$. به‌راحتی دیده می‌شود که $V(\rho_K, m) \subseteq h - V(\rho_K, n)$. از این موضوع و این‌که هر مجموعه‌ی پایه‌ای به‌صورت اشتراک تعداد متناهی از عناصری چون $h - V(\rho_K, n)$ است، به‌راحتی دیده می‌شود که اشتراک‌های متناهی از عناصری چون $V(\rho_K, n)$ یک پایه‌ی موضعی برای تابع صفر است. اگر $V(\rho_{K_1}, n_1) \cap \cdots \cap V(\rho_{K_m}, n_m)$ مجموعه‌ی باز پایه‌ای باشد، با انتخاب $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_{n_i}$ و $n = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$ خواهیم داشت $V(\rho_K, n) \subseteq V(\rho_{K_1}, n_1) \cap \cdots \cap V(\rho_{K_m}, n_m)$. این نشان می‌دهد که خانواده‌ی همه‌ی $V(\rho_K, n)$ ها یک پایه‌ی موضعی برای تابع صفر است. اکنون فرض کنیم $C_b(X)$ متریک‌پذیر و $S_r(0)$ نمایش گوی به مرکز تابع صفر و شعاع r نسبت به متر مذکور باشد. بنابراین $\{S_{\frac{1}{n}}(0)\}_{n=1}^{\infty}$ پایه‌ی موضعی برای تابع صفر است. مجموعه‌ی فشرده K_1 و عدد طبیعی n_1 وجود دارد که $V(\rho_{K_1}, n_1) \subseteq S_1(0)$. همین‌طور مجموعه‌ی فشرده $K_1 \subseteq K_2$ و عدد طبیعی n_2 وجود دارد که

$V(\rho_{K_2}, n_2) \subseteq S_{\frac{1}{2}}(0)$. با ادامه این روند دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های فشرده و صعودی مانند $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از X به‌دست می‌آید که $\{V(\rho_{K_m}, n_m);\ m\in\mathbb{N}\}$ پایه‌ای موضعی برای تابع صفر است. فرض کنیم $x \in X\setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. لذا m ای هست که $V(\rho_{K_m}, n_m) \subseteq V(\rho_{\{x\}}, 1)$. از به‌طور کامل منظم بودن فضای X استفاده کرده و تابع پیوسته‌ی f را طوری می‌یابیم که $f(x) = 1$، $f(K_m) = \{0\}$. به‌راحتی دیده می‌شود که $f \in V(\rho_{K_m}, n_m)\setminus V(\rho_{\{x\}}, 1)$. این یک تناقض است و لذا $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. این برهان را کامل می‌کند. ■

قضیه۵ ـ ۶. *فضای توپولوژیک هاسدورف (X, τ) را در نظر می‌گیریم. اگر A و B دو زیرمجموعه‌ی فشرده و مجزا از X باشند، دو مجموعه‌ی باز مجزای G و W وجود دارند که $A\subseteq G$ و $B\subseteq W$.*

برهان. فرض کنیم $y\in B$. برای هر $x\in A$، مجموعه‌های بازی چون G_x و W_x به‌ترتیب شامل x و شامل y وجود دارد که $G_x \cap W_x = \emptyset$. داریم $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} G_x$. چون A فشرده است، پس برای x_1 و $\dots$ و x_n از A، $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{x_i}$. قرار می‌دهیم $G_y = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{x_i}$ و $W_y = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_{x_i}$. بنابراین برای هر $y\in B$، مجموعه‌های باز G_y و W_y به‌ترتیب شامل A و y وجود دارند که $G_y \cap W_y = \emptyset$. داریم $B \subseteq \bigcup\limits_{y\in B} W_y$. از فشردگی B استفاده کرده و عناصر y_1 و $\dots$ و y_m را از B طوری می‌یابیم که $B \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} W_{y_i}$. اگر $G = \bigcap\limits_{i=1}^{m} G_{y_i}$ و $W = \bigcup\limits_{i=1}^{m} W_{y_i}$، آنگاه G و W مجموعه‌های باز مجزا از X بوده که به‌ترتیب شامل A و B هستند. ■

نکته۱. بنابه قضیه‌ی قبل، هر فضای فشرده و هاسدورف یک فضای T_4 است. همین‌طور هر فضای منظم و فشرده‌ی X یک فضای نرمال است، در حقیقت فرض کنیم G مجموعه‌ی بازی شامل مجموعه‌ی بسته F باشد. در آن‌صورت F فشرده است. بنابه منظم بودن X، برای هر $x\in F$ مجموعه‌ی باز H_x شامل x وجود دارد که

$$x\in H_x \subseteq \overline{H_x} \subseteq G.$$

اما $F \subseteq \bigcup\limits_{x\in F} H_x$. بنابه فشردگی F، نقاط x_1 و $\dots$ و x_n از F وجود دارند که $F \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} H_{x_i}$. لذا خواهیم داشت

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{H_{x_i}} \subseteq G.$$

بنابراین X نرمال است.

قضیه۵ ـ ۷. *فرض کنیم (X_1, τ_1) و (X_2, τ_2) دو فضای توپولوژیک، $f: X_1 \to X_2$ و $G(f)$ در $X_1 \times X_2$ بسته باشد. اگر $B \subseteq X_2$ فشرده باشد، آنگاه $f^{-1}(B)$ زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از X_1.*

است.

برهان. فرض کنیم $x \in f^{-1}(B)^c$، لذا $f(x) \notin B$. برای هر $b \in B$، $(x,b) \notin G(f)$. از بسته بودن $G(f)$ نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌های باز G_{b_x} و W_b به‌ترتیب شامل x و b وجود دارد که

$$(G_{b_x} \times W_b) \cap G(f) = \emptyset.$$

چون B فشرده است، لذا پوشش $\{W_b;\ b \in B\}$ دارای زیرپوشش متناهی چون $\{W_{b_i};\ 1 \leq i \leq n\}$ است. قرار می‌دهیم $G_x = \bigcap_{i=1}^{n} G_{b_{i_x}}$. واضح است که G_x باز بوده و $G_x \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. یعنی $G_x \subseteq f^{-1}(B)^c$ و لذا x نقطه‌ی درونی $f^{-1}(B)^c$ خواهد بود. درنتیجه $f^{-1}(B)$ بسته است. ■

قضیه۵ ـ ۸. *فرض کنیم (X_1, τ_1) یک فضای توپولوژیک و (X_2, τ_2) یک فضای توپولوژیک فشرده باشد. اگر گراف تابع $f: X_1 \to X_2$، یعنی $G(f)$ در فضای حاصلضربی $X_1 \times X_2$ بسته باشد، در آن‌صورت f پیوسته است.*

برهان. اگر B زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از X_2 باشد، در آن‌صورت B فشرده و لذا $f^{-1}(B)$ بسته است. این نتیجه می‌دهد که f پیوسته است. ■

ثابت خواهیم کرد که حاصل‌ضرب یک خانواده از فضاهای توپولوژیک فشرده است اگر و تنها اگر هر فضای مختصی فشرده باشد. این قضیه که در ریاضیات کاربرد فراوانی دارد به قضیه تیخونوف معروف است. برهان‌های زیادی برای اثبات این قضیه آورده شده است، برهانی که ارائه می‌کنیم ساده‌ترین برهانی است که برای اثبات آن از قضیه‌ی زیر که به قضیه الکساندروف مشهور است استفاده شده است.

قضیه۵ ـ ۹. *فضای توپولوژیک (X, τ) فشرده است اگر و تنها اگر زیرپایه‌ای برای توپولوژی τ وجود داشته باشد که هر پوشش از اعضای این زیرپایه دارای زیرپوشش متناهی است.*

برهان. اگر X فشرده باشد، به‌وضوح τ زیرپایه‌ای برای τ است و هر پوشش از اعضای τ دارای زیرپوشش متناهی است.

برعکس، فرض کنیم S زیرپایه‌ای برای توپولوژی τ بوده که هر پوشش از اعضای S دارای زیرپوشش متناهی است. فرض کنیم A پوششی باز برای X بوده که دارای زیرپوشش متناهی نیست. $\mathcal{A}$ را مجموعه‌ی همه‌ی پوشش های باز از X اختیار می‌کنیم که شامل A بوده و دارای زیرپوشش متناهی نباشند. چون $A \in \mathcal{A}$، لذا $\mathcal{A}$ ناتهی است. $\mathcal{A}$ نسبت به رابطه جزئیت یک مجموعه‌ی مرتب جزیی است. اگر $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ زیرمجموعه‌ی مرتب کلی از $\mathcal{A}$ باشد، در آن‌صورت $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ شامل A بوده و همچنین هیچ زیرپوشش متناهی ندارد. در حقیقت اگر $\{G_1, \ldots, G_n\}$ زیرپوششی از عناصر

$\bigcup\limits_{\alpha\in I} \mathcal{A}_\alpha$ باشد. در آن‌صورت برای هر $1 \leq i \leq n$ یک $\alpha_i \in I$ وجود دارد که $G_i \in \mathcal{A}_{\alpha_i}$. چون $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ مرتب کلی است، برای یک $1 \leq i \leq n$، $\{G_1, \ldots, G_n\} \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_i}$. این نشان می‌دهد که $\mathcal{A}_{\alpha_i}$ دارای زیرپوشش متناهی است که تناقض است. توضیحات فوق نشان می‌دهد که $\bigcup\limits_{\alpha\in I} \mathcal{A}_\alpha$ کران بالایی برای $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ است. بنابه لم زورن $\mathcal{A}$ دارای عضوی ماکسیمال چون $\mathcal{M}$ است.

فرض کنیم $x \in X$، چون $\mathcal{M}$ پوششی باز برای X است لذا $U \in \mathcal{M}$ وجود دارد که $x \in U$. چون $\mathcal{S}$ زیرپایه‌ای برای τ است، لذا برای تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{S}$ مانند U_1 و ... و U_n، $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$. ادعا می‌کنیم که برای حداقل یک i، $U_i \in \mathcal{M}$. فرض کنیم چنین نباشد. یعنی برای هر $1 \leq i \leq n$، $\mathcal{M} \neq \mathcal{M} \cup \{U_i\}$. اما $\mathcal{M}$ عضو ماکسیمال از $\mathcal{A}$ است، بنابراین برای هر $1 \leq i \leq n$، زیرمجموعه‌ای مانند $\{M_1^i, \ldots, M_{m_i}^i\}$ از $\mathcal{M}$ وجود دارد که $\{M_1^i, \ldots, M_{m_i}^i, U_i\}$ پوششی برای X است. ادعا می‌کنیم که

$$\{M_1^1, \ldots, M_{m_1}^1, \ldots, M_1^n, \ldots, M_{m_n}^n\} \cup \{U\} \subseteq \mathcal{M}$$

پوششی باز برای X است. فرض کنیم $y \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} \bigcup\limits_{j=1}^{m_i} M_j^i$. چون برای هر $1 \leq i \leq n$، $\{M_1^i, \ldots, M_{m_i}^i, U_i\}$ پوششی برای X است، بنابراین برای هر $1 \leq i \leq n$، $y \in U_i$ و این نتیجه می‌دهد که $y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$. لذا ادعای فوق ثابت می‌شود. ادعای فوق نشان می‌دهد که $\mathcal{M}$ دارای زیرپوششی متناهی است که یک تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که حداقل برای یک $1 \leq i \leq n$، $x \in U_i \in \mathcal{M}$.

از توضیحات فوق چنین بر می‌آید که برای هر $x \in X$، مجموعه‌ی باز U_x شامل x از $\mathcal{S}$ وجود دارد که $U_x \in \mathcal{M}$. بنابراین بنابه فرض پوشش باز $\{U_x : x \in X\}$ از عناصر $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ دارای زیرپوششی متناهی است. این تناقض با عضویت $\mathcal{M}$ در $\mathcal{A}$ است. تناقض فوق عدم وجود پوشش بازی که زیرپوشش متناهی نداشته باشد را ثابت می کند. ■

قضیه۵ ـ ۱۰. *فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد. در آن‌صورت حاصل‌ضرب این خانواده از فضاهای توپولوژیک فشرده است اگر و تنها اگر هر X_α فشرده باشد.*

برهان. اگر حاصل‌ضرب خانواده‌ی فوق از فضاهای توپولوژیک فشرده باشد، چون تابع تصویر پیوسته و پوشاست لذا هر فضای مختصی نیز فشرده است.

برعکس، می‌دانیم $\mathcal{S} = \{\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha) : G_\alpha \in \tau_\alpha, \alpha \in I\}$ زیرپایه‌ای برای توپولوژی حاصلضربی است. فرض کنیم $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ پوششی باز برای X باشد. برای هر $\alpha \in I$، قرار می‌دهیم

$\mathcal{A}_\alpha = \{G_\alpha;\ \pi_\alpha^{-1}(G_\alpha) \in \mathcal{A}\}$. اگر برای یک α، $\mathcal{A}_\alpha$ پوششی برای X_α باشد، در آن‌صورت G_1 و $\ldots$ و G_n از عناصر $\mathcal{A}_\alpha$ وجود دارد که $X_\alpha = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$. از این‌جا نتیجه می‌شود که

$$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha) = \bigcup_{i=1}^{n} \pi_\alpha^{-1}(G_i).$$

بنابراین $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ با تعدادی متناهی از عناصر $\mathcal{A}$ پوشیده می‌شود. اگر α ای موجود نباشد که $\mathcal{A}_\alpha$ پوششی باز برای X_α باشد، در آن‌صورت برای هر α، عنصر $x_\alpha \in X_\alpha \setminus \bigcup_{G_\alpha\in\mathcal{A}_\alpha} G_\alpha$ را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $x = \{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ و فرض کنیم $G \in \mathcal{A}$ و $x \in G$. چون $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$، لذا برای یک α، $G = \pi_\alpha^{-1}(G_\alpha)$. درنتیجه $x_\alpha \in G_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$، که یک تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که x در هیچ یک از عناصر $\mathcal{A}$ نیست و لذا $\mathcal{A}$ پوششی برای فضای حاصل‌ضرب نیست. بنابراین برای α ای، $\mathcal{A}_\alpha$ پوششی برای X_α است و لذا فضای حاصل‌ضرب فشرده است. ■

این بخش را با دو مثال به پایان می‌باریم.

مثال۵ ـ ۳. فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیک فشرده باشد. فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک خانواده از توابع حقیقی مقدار پیوسته روی X باشد که نقاط X را جدامی‌کند، یعنی برای هر دو عنصر x و y، f_n ای موجود باشد که $f_n(x) \neq f_n(y)$. در آن‌صورت X متریک‌پذیر است. برای بررسی این مثال، تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را به‌صورت

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{2^n\big(1 + |f_n(x) - f_n(y)|\big)}$$

تعریف می‌کنیم. چون f_n ها نقاط X را جدا می‌کنند، لذا d یک متر روی X است. از آنجا که f_nها پیوسته و سری فوق همگرای یکنواخت است، بنابراین d تابعی پیوسته روی $X \times X$ است. فرض کنیم $x \in X$ و $r > 0$. نشان می‌دهیم که $S_r(x) = \{y \in X;\ d(x,y) < r\}$ در X باز است. فرض کنید $d(x,y) < r$. مجموعه‌ی باز پایه‌ای $G \times W$ شامل (x,y) وجود دارد که برای هر $(t,z) \in G \times W$،

$$|d(t,z) - d(x,y)| < r - d(x,y).$$

بنابراین برای هر $z \in W$، $d(x,z) - d(x,y) < r - d(x,y)$. این نتیجه می‌دهد که $d(x,z) < r$ و لذا $y \in W \subseteq S_r(x)$. پس $S_r(x)$ در X با توپولوژی τ باز است، یعنی $\tau_d \subseteq \tau$. با این توضیحات تابع همانی $I : (X,\tau) \to (X,\tau_d)$ پیوسته و چون X فشرده است، I یک همیومورفیسم است.

مثال۵ ـ ۴. فرض کنیم τ توپولوژی اقلیدسی روی $[0,1]$ باشد. قرار می‌دهیم $X = [0,1] \cup \mathbb{N}$ و تعریف می‌کنیم

$$\tau^* = \{[0,1] \cup A:\ A \subseteq \mathbb{N}\} \cup \tau.$$

به‌سادگی دیده می‌شود که τ^* یک توپولوژی روی $[0,1]$ است. اگر G_1 و G_2 دو مجموعه‌ی باز به‌ترتیب شامل ۲ و ۳ باشند، آنگاه $[0,1] \subseteq G_1 \cap G_2$. بنابراین X هاسدورف نیست. گردایه $\{[0,1] \cup \{n\};\ n \in \mathbb{N}\}$ پوشش بازی برای X است که دارای زیرپوشش متناهی نیست. بنابراین X فشرده نیست. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ پوشش بازی برای $[0,1]$ باشد. اگر برای زیرمجموعه‌ای چون $A \subseteq \mathbb{N}$ و برای $\alpha \in I$، $G_\alpha = [0,1] \cup A$، آنگاه این پوشش به‌طور بدیهی دارای زیرپوشش متناهی است. در غیر این‌صورت همه‌ی G_α ها از τ خواهند بود و چون τ توپولوژی اقلیدسی است و $[0,1]$ نسبت به توپولوژی اقلیدسی فشرده است، لذا پوشش فوق دارای زیرپوشش متناهی است. بنابراین $[0,1]$ نسبت به τ^* فشرده است. اگر G مجموعه‌ی باز ناتهی از X باشد، آنگاه $G \cap [0,1] \neq \emptyset$. این نشان می‌دهد که $[0,1]$ در X چگال است. نتیجه این‌که بستار یک مجموعه‌ی فشرده لزوماً فشرده نیست.

۵—۳ فشردگی موضعی

ممکن است یک فضای توپولوژیک فشرده نباشد ولی هر نقطه از آن دارای یک همسایگی باشد که بستارش فشرده است. این‌گونه فضاها نیز از اهمیت خاصی برخوردارند. همان طور که یک فضای شمارای اول هر چند که شمارای دوم نیست از اهمیت خاصی برخوردار است، فضای نافشرده و فشرده‌ی موضعی از اهمیت خاصی برخوردار است. در فصل هشتم گروه‌های توپولوژیک را بررسی می کنیم. در گروه‌های توپولوژیک اکثر اوقات صحبت از گروه‌های فشرده‌ی موضعی است و گروه‌های که فشرده‌ی موضعی نیستند در آنالیز کاربرد بسیار کمی دارند و لذا کمتر مورد توجه ریاضیدانان هستند. اکثر اوقات مجموعه‌ی توابع پیوسته روی یک فضای فشرده‌ی موضعی مورد بحث است چرا که اگر فضایی فشرده‌ی موضعی نباشد مجموعه‌ی توابع پیوسته روی آن، فضای خوبی برای مطالعه نیست. تا انتهای این بخش به اهمیت فضاهای فشرده‌ی موضعی پی خواهید برد.

تعریف۵ ـ ۱۱. زیرمجموعه‌ی A از فضای توپولوژیک (X, τ) را فشرده‌ی نسبی گوییم هرگاه $\overline{A}$ فشرده باشد. فضای هاسدورف (X, τ) را فشرده‌ی موضعی گوییم هر گاه هر عنصر از X در یک مجموعه‌ی باز فشرده‌ی نسبی از X قرار داشته باشد.

هر فضای فشرده و هاسدورف یک فضای فشرده‌ی موضعی است. می‌توان فشرده را به‌عنوان ماکزیمم یک تابع و فشرده‌ی موضعی را به‌عنوان ماکزیمم موضعی تصور کرد. مجموعه‌ی اعداد حقیقی فشرده نیست ولی فشرده‌ی موضعی است.

مثال۵ ـ ۵. مجموعه‌ی اعداد گویا فشرده‌ی موضعی نیست. در حقیقت فرض کنیم G زیرمجموعه‌ی باز فشرده‌ی نسبی از اعداد گویا شامل صفر باشد، عدد مثبت r وجود دارد که

$$(-r,r)\cap\mathbb{Q}\subseteq G.$$

بنابراین $\overline{(-r,r)\cap\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}}$ در $\mathbb{Q}$ فشرده است و لذا بایستی در $\mathbb{R}$ فشرده باشد. اما

$$\overline{(-r,r)\cap\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}}=[-r,r]\cap\mathbb{Q}$$

در $\mathbb{R}$ فشرده نیست. از این موضوع نتیجه می‌گیریم که فشردگی موضعی موروثی نیست.

اگر f تابعی پیوسته و باز از فضای فشرده‌ی موضعی $(X_۱,\tau_۱)$ به‌روی فضای هاسدورف $(X_۲,\tau_۲)$ باشد، آنگاه $X_۲$ فشرده‌ی موضعی است. در حقیقت برای $y\in X_۲$، $x\in X_۱$ای موجود است که $f(x)=y$. از فشردگی موضعی $X_۱$ استفاده کرده و مجموعه‌ی باز فشرده‌ی نسبی G را طوری می‌یابیم که $x\in G$. از آنجا که f باز است، $f(G)$ مجموعه‌ای باز شامل y است. اما $f(G)\subseteq f(\overline{G})$ و $f(\overline{G})$ فشرده است. چون فضای $X_۲$ هاسدورف است، لذا $f(\overline{G})$ بسته و بنابراین $\overline{f(G)}\subseteq f(\overline{G})$ فشرده است. این نشان می‌دهد که فشردگی موضعی تحت تابع پیوسته و باز پایاست.

از آنجا که نگاشت تصویر در فضای حاصل‌ضرب پیوسته، باز و پوشاست، نتیجه می‌گیریم که اگر حاصل‌ضرب یک خانواده از فضاهای توپولوژیک فشرده‌ی موضعی باشد، هر فضای مختصی نیز فشرده‌ی موضعی است. اگر $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha,\tau_\alpha)$ فشرده‌ی موضعی باشد، بنابه توضیح بالا همه‌ی X_αها فشرده‌ی موضعی هستند. ادعا می‌کنیم همه‌ی آنها به‌جز حداکثر تعداد متناهی از آنها فشرده است. در حقیقت $x\in\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha,\tau_\alpha)$ را انتخاب می‌کنیم. مجموعه‌ی پایه‌ای فشرده‌ی نسبی $\bigcap_{i=۱}^{n}\pi_{\alpha_i}^{-۱}(G_{\alpha_i})$ که شامل x است را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم

$$\overline{\bigcap_{i=۱}^{n}\pi_{\alpha_i}^{-۱}(G_{\alpha_i})}=\bigcap_{i=۱}^{n}\pi_{\alpha_i}^{-۱}(\overline{G_{\alpha_i}}).$$

چون تابع تصویر پیوسته و پوشاست، پس همه‌ی X_αها که α متمایز با α_iهاست فشرده است.

قضیه۵ ـ ۱۲. *فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد، گزاره‌های زیر معادلند:*

الف) *X فشرده‌ی موضعی است.*

ب) *برای هر مجموعه‌ی باز G شامل $x\in X$، مجموعه‌ی باز فشرده‌ی نسبی H وجود دارد که*

$x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq G$.

ج) برای هر مجموعه‌ی باز G و هر مجموعه‌ی فشرده $K \subseteq G$، مجموعه‌ی باز فشرده‌ی نسبی H وجود دارد که $K \subseteq H \subseteq \overline{H} \subseteq G$.

برهان. (الف ⇐ ب): فرض کنیم G باز و $x \in G$. بنابه فرض مجموعه‌ی باز فشرده‌ی نسبی G_x موجود است که $x \in G_x$. چون $\overline{G_x}$ فشرده و هاسدورف است، لذا T_4 و بنابراین منظم است. اما $x \in \overline{G_x} \cap G$، لذا مجموعه‌ی بازی از X چون H_x وجود دارد که

$$x \in \overline{G_x} \cap H_x \subseteq \overline{\overline{G_x} \cap H_x}^{\overline{G_x}} \subseteq \overline{G_x} \cap G$$

چون $\overline{\overline{G_x} \cap H_x}^{\overline{G_x}}$ در $\overline{G_x}$ بسته است، لذا F بسته در X موجود است که

$$\overline{\overline{G_x} \cap H_x}^{\overline{G_x}} = \overline{G_x} \cap F$$

درنتیجه $\overline{\overline{G_x} \cap H_x}^{\overline{G_x}}$ در X بسته است. قرار دهید $H = H_x \cap G_x$. چون $H \subseteq G_x$، لذا $\overline{H}$ فشرده بوده و داریم $x \in H \subseteq \overline{H} \subseteq G$.

(ب ⇐ ج): فرض کنیم زیرمجموعه‌ی فشرده K مشمول مجموعه‌ی باز G باشد. برای هر $x \in K$، مجموعه‌ی باز فشرده‌ی نسبی H_x شامل x موجود است که $\overline{H_x} \subseteq G$. چون $K \subseteq \bigcup_{x \in K} H_x$، لذا تعداد متناهی عناصر از K مانند x_1 و ... و x_n وجود دارند که $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}$. می‌توان نوشت

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{H_{x_i}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}} \subseteq G.$$

$H = \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}$ شرایط مورد نیاز را داراست.

اثبات این‌که گزاره (ج) گزاره (الف) را ایجاب می‌کند ساده است. ■

قضیه۵ ـ ۱۳. *فرض کنید (X_1, τ_1) یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد. گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی موضعی A از X_1 به‌صورت اشتراک یک مجموعه‌ی باز و یک مجموعه‌ی بسته از X_2 است. به عبارت دیگر مجموعه‌ی باز G و مجموعه‌ی بسته F از X_1 وجود دارند که $A = G \cap F$.

ب) فرض کنیم X_1 فشرده‌ی موضعی باشد. برای هر زیرمجموعه‌ی فشرده K از فضای توپولوژیک هاسدورف (X_2, τ_2) و هر تابع پیوسته، پوشا و باز $f : X_1 \to X_2$، مجموعه‌ی فشرده C از X_1 موجود است که $f(C) = K$.

برهان. برای هر $x \in A$، مجموعه‌ی باز G_x از X موجود است که $\overline{G_x \cap A}^A$ در A فشرده و لذا در

X_1 بسته است. قرار می‌دهیم $G = \bigcup_{x\in A} G_x$. G زیرمجموعه‌ای باز از X_1 بوده و همچنین $A \subseteq G$.
از آنجا که برای هر $x \in A$، $G_x \cap A = G_x \cap (\overline{G_x} \cap A) = G_x \cap \overline{G_x \cap A}^A$، پس $G_x \cap A$ در G_x بسته است. بنابراین $G_x \backslash (G_x \cap A) = G_x \cap A^c$ در G_x باز است. نتیجه این‌که برای یک مجموعه‌ی باز W، $G_x \cap A^c = G_x \cap W$. این نتیجه می‌دهد که $G_x \cap A^c$ در X باز است. اما

$$G \cap A^c = \bigcup_{x\in A} G_x \cap A^c$$

و لذا $G \cap A^c$ در X باز است. چون $G \cap A^c \subseteq G$، پس $G \cap A^c$ در G باز است. نتیجه این‌که A در G بسته است و لذا برای یک مجموعه‌ی بسته F از X، $A = G \cap F$.

برای اثبات قسمت (ب)، برای هر $x \in f^{-1}(K)$، مجموعه‌ی باز فشرده‌ی نسبی G_x از X_1 وجود دارد که $x \in G_x$. چون f باز است، خانواده‌ی $\{f(G_x),\ x \in f^{-1}(K)\}$ پوشش بازی برای K است. چون K فشرده است، x_1 و ... و x_n از $f^{-1}(K)$ وجود دارند که $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f(G_{x_i})$. قرار می‌دهیم $C = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{G_{x_i}} \cap f^{-1}(K)$. به‌راحتی دیده می‌شود که C فشرده و $f(C) = K$. ■

قضیه‌۵ ـ ۱۴. *فرض کنید (X_1, τ_1) یک فضای توپولوژیک باشد، گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) *اگر برای هر $x \in X_1$ و هر زیرمجموعه‌ی باز G شامل x، زیرمجموعه‌ی بازی چون H شامل x موجود باشد که $\overline{H} \subseteq G$، آنگاه بستار زیرمجموعه‌ای فشرده از X_1، فشرده است.*

ب) *فرض کنیم X_1 فضای توپولوژیک قسمت (الف) باشد. فضای توپولوژیک (X_2, τ_2) و تابع پیوسته‌ی $f : X_2 \to X_1$ را در نظر می‌گیریم. اگر زیرمجموعه‌ی A از X_2 دارای بستار فشرده باشد، آنگاه $\overline{f(A)}$ فشرده است.*

برهان. فرض کنیم A فشرده باشد، برای این‌که ثابت کنیم $\overline{A}$ فشرده است، کافیست ثابت کنیم هر پوشش باز برای A پوششی باز برای $\overline{A}$ است. اگر این موضوع ثابت شود در آن‌صورت هر پوشش باز برای $\overline{A}$ پوششی باز برای A است. چون A فشرده است این پوشش دارای زیرپوششی متناهی است و این زیرپوشش متناهی پوششی برای $\overline{A}$ خواهد بود. برای این منظور فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوششی باز برای A باشد. قرار می‌دهیم $G = \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$. برای هر $x \in A$، زیرمجموعه‌ی باز H_x از X_1 وجود دارد که $x \in H_x \subseteq \overline{H_x} \subseteq G$. چون A فشرده است، x_1 و ... و x_n از A وجود دارند که $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}$. بنابراین

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{n} H_{x_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{H_{x_i}} \subseteq G.$$

برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنیم زیرمجموعه‌ی A از X_2 دارای بستار فشرده باشد. بنابراین $f(\overline{A})$ فشرده و لذا $\overline{f(\overline{A})}$ فشرده است. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که $\overline{f(A)}$ فشرده است. ■

تعریف۵ ـ ۱۵. فضای توپولوژیک (X,τ) را یک فضای بئر گوییم هرگاه اشتراک هر تعداد حداکثر شمارا از مجموعه‌های باز و چگال، چگال باشد.

قضیه۵ ـ ۱۶. *هر فضای فشرده‌ی موضعی یک فضای بئر است.*

برهان. فرض کنیم (X,τ) یک فضای فشرده‌ی موضعی و $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های باز و چگال از X باشد. ادعا می‌کنیم که $D=\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ در X چگال است. فرض کنیم G مجموعه‌ی باز ناتهی از X باشد. چون D_1 در X چگال است، لذا $G\cap D_1$ باز و شامل عنصری چون x_1 است. بنابه فرض مجموعه‌ی باز فشرده‌ی نسبی H_1 شامل x_1 موجود است که

$$x_1 \in H_1 \subseteq \overline{H_1} \subseteq D_1 \cap G.$$

اما D_2 باز و چگال است، لذا عنصر x_2 را از مجموعه‌ی باز $H_1\cap D_2$ انتخاب می‌کنیم. بنابه فرض مجموعه‌ی باز فشرده‌ی نسبی H_2 شامل x_2 وجود دارد که

$$x_2 \in H_2 \subseteq \overline{H_2} \subseteq D_2 \cap H_1.$$

با ادامه این روند زیرمجموعه‌های باز فشرده‌ی نسبی H_n به‌دست می‌آیند که $\overline{H_n} \subseteq D_n$ و $\overline{H_{n+1}} \subseteq \overline{H_n} \subseteq G$. چون $\overline{H_n}$ ها فشرده و نزولی هستند، لذا

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{H_n} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \cap G = D \cap G.$$

این برهان را کامل می‌کند. ■

قضیه۵ ـ ۱۷. *هر فضای متریک کامل، یک فضای بئر است.*

برهان. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل و $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های باز و چگال از X باشد. ادعا می‌کنیم که $D=\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ در X چگال است. فرض کنیم G مجموعه‌ی باز ناتهی از X باشد. چون D_1 در X چگال است، لذا $G\cap D_1$ باز و شامل عنصری چون x_1 است. گوی بازی به مرکز x_1 و شعاع $r_1<1$ چون $S_{r_1}(x_1)$ وجود دارد که $x_1\in\overline{S_{r_1}(x_1)}\subseteq D_1\cap G$. اما D_2 باز و چگال است، لذا عنصر x_2 را از مجموعه‌ی باز $S_{r_1}(x_1)\cap D_2$ انتخاب می‌کنیم. گوی بازی به مرکز x_2 و شعاع $r_2<\frac{1}{2}$ چون $S_{r_2}(x_2)$ وجود دارد که $x_2\in\overline{S_{r_2}(x_2)}\subseteq D_2\cap S_{r_1}(x_1)$. با ادامه این روند گوی های باز به مر کز x_n و شعاع حداکثر $\frac{1}{n}$ چون $S_{r_n}(x_n)$ به‌دست می آید که $\overline{S_{r_n}(x_n)}\subseteq D_n$ و $S_{r_{n+1}}(x_{n+1})\subseteq\overline{S_{r_n}(x_n)}\subseteq G$. چون قطر $\overline{S_{r_n}(x_n)}$ ها به صفر همگراست و چون فضای X کامل است، لذا

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S_{r_n}(x_n)} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \cap G = D \cap G.$$

این برهان را کامل می‌کند. ■

مثال۵ ــ ۶. $\mathbb{Q}$ به‌صورت اشتراک تعداد حداکثر شمارا از زیرمجموعه‌های باز $\mathbb{R}$ نیست. اگر چنین نباشد، فرض کنیم $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های باز از $\mathbb{R}$ بوده که $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$. چون برای هر n، $\mathbb{Q} \subseteq D_n$ لذا D_n در $\mathbb{R}$ چگال است. اکنون برای هر $r \in \mathbb{Q}$، قرار دهید $E_r = \mathbb{R}\backslash\{r\}$. واضح است که E_r ها زیرمجموعه‌های باز و چگال از اعداد حقیقی هستند. خواهیم داشت

$$\emptyset = \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \cap \bigcap_{r\in\mathbb{Q}} E_r.$$

که این تناقض با بئر بودن $\mathbb{R}$ است.

مثال۵ ــ ۷. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل بدون نقطه‌ی تنها باشد. فرض کنیم $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. چون $\{x_n\}^\circ = \emptyset$، لذا X یک فضای بئر نیست که تناقض است. نتیجه این‌که هر فضای متریک کامل بدون نقطه‌ی تنها ناشماراست. بنابراین هر زیرمجموعه بسته از $\mathbb{R}$ که هر نقطه از آن یک نقطه‌ی حدی است ناشماراست. چنین مجموعه‌هایی را تام گوییم.

مثال۵ ــ ۸. فرض کنیم f تابعی حقیقی مقدار تعریف شده روی $\mathbb{R}$ باشد. برای هر n، مجموعه‌ی همه‌ی $x \in \mathbb{R}$ هایی را که مجموعه‌ی بازی چون H_x شامل x وجود دارد که برای هر $t, s \in H_x$، $|f(t) - f(s)| < \frac{1}{n}$ را با نماد G_n نمایش می‌دهیم. اگر $t \in G_n$، آنگاه $H_t \subseteq G_n$. این نشان می‌دهد که G_n ها بازند. به‌راحتی دیده می‌شود که f در نقطه‌ی x پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر n، $x \in G_n$. درنتیجه مجموعه‌ی همه‌ی نقاط پیوستگی f به‌صورت $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ است. چون $\mathbb{Q}$ به‌صورت اشتراک تعداد شمارایی از مجموعه‌های باز نیست، لذا تابعی حقیقی مقدار روی $\mathbb{R}$ وجود ندارد که تنها نقاط پیوستگی این تابع مجموعه‌ی اعداد گویا باشد.

مثال۵ ــ ۹. فرض کنیم f تابعی انتگرال‌پذیر روی بازه $[0,1]$ باشد. اگر برای هر x، $f(x) > 0$، در آن‌صورت $\int_0^1 f(x)d(x) > 0$. در حقیقت برای هر $n \in \mathbb{N}$، تعریف می‌کنیم

$$H_n = \left\{x \in [0,1];\ f(x) > \frac{1}{n}\right\}.$$

واضح است که $[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{H_n}$. ادعا می‌کنیم برای یک n ای $\overline{H_n}^\circ \neq \emptyset$. در غیر این‌صورت برای هر n، هر مجموعه‌ی باز، مجموعه‌ی $\overline{H_n}^c$ را قطع می‌کند و لذا $\overline{H_n}^c$ در $[0,1]$ چگال است. از طرف دیگر $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{H_n}^c = \emptyset$ که تناقض با کامل بودن $[0,1]$ در قضیه‌ی بئر است. پس برای یک n ای، $\overline{H_n}^\circ \neq \emptyset$. اختیار می‌کنیم $x \in \overline{H_n}^\circ \cap (0,1)$. بنابراین $r > 0$ ای هست که $(x-r, x+r) \subseteq \overline{H_n}$. اکنون فرض کنیم $P = \{x_1, \ldots, x_m\}$ افرازی از بازه $[x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}]$ باشد. بنابراین برای هر $1 \leq i \leq m$،

$$M_i = \sup\{f(x);\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \geq \frac{1}{n}$$

و لذا

$$U(P,f)=\sum_{i=1}^{m}M_i\Delta x_i\geq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i=\frac{r}{n}.$$

چون رابطه اخیر برای هر افراز از بازه $\left[x-\frac{r}{2},x+\frac{r}{2}\right]$ برقرار است، لذا

$$\int_0^1 f(x)d(x)\geq\int_{x-\frac{r}{2}}^{x+\frac{r}{2}}f(x)d(x)\geq\frac{r}{n}$$

و این نشان می‌دهد که $\int_0^1 f(x)d(x)>0$.

دو قضیه اخیر به قضایای کاتگوری بئر معروف هستند. برای هر $r\in\mathbb{Q}$، قرار می‌دهیم $D_r=\mathbb{Q}-\{r\}$. بنابراین D_r در $\mathbb{Q}$ باز و چگال است. اما $\bigcap_{r\in\mathbb{Q}}D_r=\emptyset$. این مطلب بیان می‌کند که با حذف فشرده‌ی موضعی در قضیه کاتگوری بئر، ممکن است قضیه دچار اشکال شود. همین‌طور برای هر $r\in\mathbb{R}$، قرار می‌دهیم $D_r=\mathbb{R}\backslash\{r\}$. واضح است D_r ها در $\mathbb{R}$ باز و چگال هستند و $\bigcap_{r\in\mathbb{R}}D_r=\emptyset$. این موضوع بیان می‌کند که در قضیه کاتگوری بئر تعداد مجموعه‌های باز و چگال بایستی حداکثر شمارا باشد.

۵ــ۴ فضای لیندلف، شمارا فشرده، دنباله‌ای فشرده و خاصیت بولزانو وایراشتراس

در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$، دیدیم که زیرمجموعه‌ی A از این فضا فشرده است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی از آن دارای یک نقطه‌ی حدی در A باشد. نشان می‌دهیم یک فضای متریک فشرده است اگر و تنها اگر هر دنباله در این فضا دارای زیردنباله‌ای همگرا باشد. می‌خواهیم بدانیم آیا این مطالب برای فضاهای توپولوژیک نیز برقراراند؟ تحت چه شرایطی آنها با هم معادلند. برای این‌کار ابتدا تعاریف زیر را ارائه می‌کنیم.

تعریف۵ ـ ۱۸. فضای توپولوژیک (X,τ) را در نظر می‌گیریم، در آن‌صورت:

الف) X را یک فضای لیندلف نامیم هر گاه هر پوشش باز دارای زیرپوشش حداکثر شمارا باشد.

ب) X را یک فضای شمارا فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز حداکثر شمارا، دارای زیرپوشش متناهی باشد.

ج) X را یک فضای دنباله‌ای فشرده گوییم هرگاه هر دنباله در این فضا دارای زیردنباله‌ای همگرا باشد.

د) X دارای خاصیت بولزانو ـ وایراشتراس است هرگاه هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی در آن دارای یک نقطه‌ی حدی باشد.

مثال۵ ـ ۱۰. هر فضای فشرده، لیندلف و شمارا فشرده است. $\mathbb{R}$ با متر گسسته لیندلف نیست، زیرا $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{r\in\mathbb{R}}\{r\}$ و چنانچه $\mathbb{R}$ با زیرپوششی حداکثر شمارا از این پوشش پوشیده شود، آنگاه $\mathbb{R}$ حداکثر شمارا خواهد شد که تناقض با ناشمارا بودن $\mathbb{R}$ است. این فضا نه شمارا فشرده و نه دارای خاصیت بولزانو ـ وایراشتراس است.

قضیه۵ ـ ۱۹. *هر فضای توپولوژیک شمارای دوم، یک فضای لیندلف است.*

برهان. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک و $\mathcal{B} = \{B_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ پایه‌ای حداکثر شمارا برای X باشد. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوششی باز برای X باشد. برای هر $x \in X$، یک G_{α_x} وجود دارد که $x \in G_{\alpha_x}$. چون $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای X است، لذا $B_{n_x} \in \mathcal{B}$ وجود دارد که $x \in B_{n_x} \subseteq G_{\alpha_x}$. بنابراین $X \subseteq \bigcup_{x\in X} B_{n_x}$. چون $\mathcal{B}$ حداکثر شمارش‌پذیر است و چون B_{n_x} ها نیز از $\mathcal{B}$ انتخاب می‌شوند، لذا $\{B_{n_x},\ x \in X\}$ حداکثر شمارش‌پذیر است. فرض کنیم N زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد که

$$\{B_{n_x};\ x \in X\} = \{B_m;\ m \in N\}.$$

برای هر $m \in N$، مجموعه‌ی G_{α_m} را طوری اختیار می‌کنیم که $B_m \subseteq G_{\alpha_m}$. در این‌صورت

$$X \subseteq \bigcup_{m\in N} B_m \subseteq \bigcup_{m\in N} G_{\alpha_m}.$$

لذا پوشش فوق دارای زیرپوشش حداکثر شمارای $\{G_{\alpha_m}\}_{m\in N}$ خواهد بود. ■

مثال۵ ـ ۱۱. $\mathbb{R}$ با توپولوژی حد پائین شمارای دوم نیست ولی یک فضای لیندلف است. شمارای دوم نبودن این فضا قبلاً اثبات شده است. اگر $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوششی برای $\mathbb{R}$ باشد، برای هر $x \in \mathbb{R}$ یک α_x ای وجود دارد که $x \in G_{\alpha_x}$. بنابراین مجموعه‌ی پایه‌ای مانند $[a_{\alpha_x}, b_{\alpha_x})$ وجود دارد که

$$x \in [a_{\alpha_x}, b_{\alpha_x}) \subseteq G_{\alpha_x}.$$

بنابراین

$$X \subseteq \bigcup_{x\in\mathbb{R}} [a_{\alpha_x}, b_{\alpha_x}) \subseteq \bigcup_{x\in\mathbb{R}} G_{\alpha_x}.$$

با این توضیحات کافیست ثابت کنیم خانواده‌ی $\{[a_{\alpha_x}, b_{\alpha_x})\}_{x\in\mathbb{R}}$ دارای زیرپوشش حداکثر شماراست. قرار می‌دهیم $C = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} (a_{\alpha_x}, b_{\alpha_x})$. چون $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی شمارای دوم است، لذا C نیز شمارای دوم و لذا لیندلف است. بنابراین پوشش فوق برای C دارای زیرپوششی حداکثر شماراست. فرض کنیم

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_{\alpha_{x_i}}, b_{\alpha_{x_i}}).$$

ادعا می‌کنیم که $\mathbb{R}\backslash C$ حداکثر شماراست. فرض کنیم $x \in \mathbb{R}\backslash C$، لذا $x = a_{\alpha_x}$. عدد گویای $r_x \in (a_{\alpha_x}, b_{\alpha_x})$ را انتخاب می‌کنیم. اگر x و y دو عنصر از $\mathbb{R}\backslash C$ و $x < y$، در آن‌صورت $r_x < r_y$. در حقیقت $r_x < y < r_y$. بنابراین تابع $f(x) = r_x$ از $\mathbb{R}\backslash C$ به‌توی $\mathbb{Q}$ تابعی یک به یک است و لذا $\mathbb{R}\backslash C$ حداکثر شماراست. $\mathbb{R}\backslash C$ با تعداد حداکثر شمارا از مجموعه‌هایی به شکل $[a_{\alpha_x}, b_{\alpha_x})$ پوشیده می‌شود. از طرف دیگر C نیز با تعداد حداکثر شمارا از چنین مجموعه‌هایی پوشیده شده است، لذا $\mathbb{R}$ با تعداد حداکثر شمارا از مجموعه‌های فوق پوشیده می‌شود.

مثال ۵ ــ ۱۲. فرض کنیم در $\mathbb{R}$ مجموعه‌هایی باز باشند که شامل صفر نبوده و یا شامل $\mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$ باشند. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ پوششی باز برای $\mathbb{R}$ باشد. α ای هست که $0 \in G_\alpha$ و لذا $\mathbb{R}\backslash\{1, 2\} \subseteq G_\alpha$. بنابراین $\mathbb{R}$ با حداکثر سه مجموعه‌ی باز از این خانواده پوشیده می‌شود. درنتیجه $\mathbb{R}$ با این توپولوژی فشرده و لذا لیندلف است. قرار دهید $A = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. A دارای توپولوژی گسسته است و لذا لیندلف نیست. این نشان می‌دهد که زیرفضای یک فضای لیندلف، لزوماً لیندولف نیست.

مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با توپولوژی هم‌شمارا در نظر می‌گیریم. برای هر n قرار می‌دهیم $G_n = (\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}) \cup \{1, 2, \ldots, n\}$. $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ پوششی باز برای $\mathbb{R}$ است که زیرپوشش متناهی ندارد. این فضا لیندلف است. چرا که اگر $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ پوشش بازی از $\mathbb{R}$ باشد، α_0 ای هست که $0 \in G_{\alpha_0}$. بنابراین $G_{\alpha_0}^c$ حداکثر شماراست. فرض کنیم $\{x_1, x_2, \ldots\}$ نمایشی از $G_{\alpha_0}^c$ باشد. برای هر n، یک α_n ای هست که $x_n \in G_{\alpha_n}$. بنابراین $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{\alpha_n}$، یعنی $\mathbb{R}$ یک فضای لیندلف است.

مثال ۵ ــ ۱۳. برهانی شبیه به برهانی که برای اثبات زیرفضای بسته یک فضای فشرده، فشرده است نتیجه می‌دهد که زیرفضای بسته یک فضای لیندلف، لیندلف است. $\mathbb{R}$ را با توپولوژی حد پائین در نظر می‌گیریم. $\mathbb{R}$ شمارای اول و تفکیک‌پذیر و بنابراین $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ شمارای اول و تفکیک‌پذیر است. می‌دانیم $\mathbb{R}$ لیندلف است و

$$L = \{(x, -x);\ x \in \mathbb{Q}^c\}$$

دارای توپولوژی گسسته است و لذا لیندلف نیست. لذا $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ دارای زیرفضای بسته‌ای است که لیندلف نیست و بنابراین $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ لیندلف نیست. نتیجه می‌گیریم که لیندلف بودن خاصیت حاصلضربی نیست. به‌راحتی دیده می‌شود که تصویر هر فضای لیندلف تحت تابع پیوسته، فضایی لیندلف است. از این موضوع نتیجه می‌گیریم که چنانچه حاصل‌ضرب خانواده‌ای از فضاهای

توپولوژیک لیندلف باشد، فضای مختصی نیز لیندلف است.

قضیه۵ ــ ۲۰. *گزاره‌های زیر در هر فضای متریک (X, d) معادلند:*

الف) *X تفکیک‌پذیر است.*

ب) *X شمارای دوم است.*

ج) *X لیندلف است.*

برهان. معادل بودن (الف) و (ب) قبلاً دیده شده است. همین‌طور هر فضای توپولوژیک شمارای دوم یک فضای لیندلف است. برای اتمام برهان، کافیست ثابت کنیم که فضای لیندلف X یک فضای تفکیک‌پذیر است. برای هر عدد طبیعی n، $X \subseteq \bigcup_{x\in X} S_{\frac{1}{n}}(x)$. چون X لیندلف است، تعداد حداکثر شمارایی از اعضای X چون x_1^n و x_2^n و ... وجود دارند که $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} S_{\frac{1}{n}}(x_i^n)$. قرار می‌دهیم $D_n = \{x_i^n;\ i \in \mathbb{N}\}$. ادعا می‌کنیم $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ زیرمجموعه‌ای حداکثر شمارا و چگال در X است. چون D اجتماعی شمارا از مجموعه‌های حداکثر شماراست، لذا D حداکثر شماراست. اکنون فرض کنیم $S_r(x)$ گوی بازی به مرکز x و شعاع r باشد. عدد طبیعی n وجود دارد که $\frac{1}{n} < r$. اما $x \in X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} S_{\frac{1}{n}}(x_i^n)$، بنابراین برای یک i، $x \in S_{\frac{1}{n}}(x_i^n)$ و لذا $d(x, x_i^n) < r$. این نتیجه می‌دهد که $D \cap S_r(x) \neq \emptyset$. ■

مثال۵ ــ ۱۴. فرض کنیم $I = [0, 1]$. برای هر $\alpha \in I$، $X_\alpha = [0, 1]$ را با توپولوژی اقلیدسی در نظر می‌گیریم. بنابه قضیه تیخونوف، حاصل‌ضرب X_α ها فشرده است. نشان می‌دهیم این حاصل‌ضرب فشرده دنباله‌ای نیست. چون T مجموعه‌ی همه‌ی زیردنباله‌های $\mathbb{N}$ مجموعه‌ای ناشماراست، بنابراین تابعی دو سویی چون f از I به‌روی T وجود دارد. برای هر n، عنصر x_n از فضای حاصل‌ضرب را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\alpha \in I$ و $f(\alpha) = (n_1^\alpha, n_2^\alpha, \ldots)$. اگر برای یک i فردی، $n = n_i^\alpha$، قرار می‌دهیم $x_n(\alpha) = 1$. در غیر این‌صورت قرار می‌دهیم $x_n(\alpha) = 0$. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای حاصل‌ضرب است. فرض کنیم این دنباله دارای زیردنباله‌ای همگرا چون $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ باشد. α ای وجود دارد که $f(\alpha) = (n_1, n_2, \ldots)$. چون π_α پیوسته است، بنابراین $\{\pi_\alpha(x_{n_i})\}_{i=1}^{\infty}$ همگراست. اما

$$(1, 0, 1, 0, \ldots) = \{x_{n_i}(\alpha)\}_{i=1}^{\infty} = \{\pi_\alpha(x_{n_i})\}_{i=1}^{\infty}$$

و دنباله‌ی $(1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ همگرا نیست که یک تناقض است. بنابراین دنباله فوق زیردنباله همگرا ندارد.

قضیه۵ ــ ۲۱. *گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) *هر فضای شمارا فشرده، خاصیت بولزانو ـ وایراشتراس دارد.*

ب) *هر فضای شمارا فشرده و شمارای اول، دنباله‌ای فشرده است.*

برهان. فرض کنیم (X,τ) یک فضای شمارا فشرده و A زیرمجموعه‌ای نامتناهی از X باشد. ثابت می‌کنیم هر زیرمجموعه‌ی شمارای $B \subseteq A$ دارای نقطه‌ی حدی و لذا A دارای نقطه‌ی حدی است. فرض کنیم زیرمجموعه‌ی شمارای $B = \{x_۱, x_۲, \ldots\}$ از A دارای هیچ نقطه‌ی حدی نباشد. برای هر n، مجموعه‌ی بازی چون G_n شامل x_n وجود دارد که $G_n \cap B = \{x_n\}$. برای هر $x \in B^c$، مجموعه‌ی باز W_x شامل x وجود دارد که $W_x \cap B = \emptyset$. قرار می‌دهیم $W = \bigcup_{x \in B^c} W_x$. واضح است که $W \cap B = \emptyset$ و $X \subseteq \bigcup_{n=۱}^{\infty} G_n \cup W$. این پوشش شمارا دارای زیرپوشش متناهی نیست و لذا X شمارا فشرده نیست که یک تناقض است.

برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنیم $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای دلخواه باشد. اگر $B = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ متناهی باشد، آنگاه عنصری از مجموعه‌ی B وجود دارد که بی‌نهایت بار در دنباله تکرار می‌شود. لذا دنباله‌ی فوق دارای زیردنباله ثابت است و این زیردنباله همگراست. اکنون فرض کنید B نامتناهی باشد. نشان می‌دهیم $x \in X$ موجود است که برای هر G باز شامل x و هر $k \in \mathbb{N}$، $G \cap \{x_{k+۱}, x_{k+۲}, \ldots\}$ ناتهی است. فرض کنیم چنین نباشد، بنابراین برای هر $x \in X$ مجموعه‌ی بازی چون G و عددی طبیعی مانند k موجود است که $G \cap \{x_{k+۱}, x_{k+۲}, \ldots\}$ تهی است. برای هر n، قرار دهید

$$H_n = \{G;\ G \cap \{x_n, x_{n+۱}, \ldots\} = \emptyset\}$$

و $W_n = \bigcup_{G \in H_n} G$. چون هر x در یکی از W_n ها قرار دارد، لذا $X = \bigcup_{n=۱}^{\infty} W_n$. چون X شمارا فشرده است، بنابراین برای n ای، $X = W_n$. درنتیجه $B = W_n \cap B = W_n \cap \{x_۱, \ldots, x_{n-۱}\}$ و لذا B متناهی است که یک تناقض است. با توضیحات فوق نتیجه می‌گیریم که x ای موجود است که برای هر G باز و هر n، $G \cap \{x_m;\ m \geq n\} \neq \emptyset$. فرض کنیم $\mathcal{B} = \{B_۱, B_۲, \ldots\}$ پایه‌ی موضعی نزولی برای x باشد. لذا برای هر k، $\{n \in \mathbb{N};\ x_n \in B_k\}$ نامتناهی است. اکنون $n_۱$ را از مجموعه‌ی نامتناهی $\{n \in \mathbb{N};\ x_n \in B_۱\}$ انتخاب می‌کنیم. اگر n_k انتخاب شده باشد، $n_{k+۱}$ را از مجموعه‌ی نامتناهی $\{n \in \mathbb{N};\ x_n \in B_{k+۱}\}$ طوری انتخاب می‌کنیم که $n_k < n_{k+۱}$. با ادامه این روند زیردنباله‌ی $\{x_{n_k}\}_{k=۱}^{\infty}$ به‌دست می‌آید. به‌راحتی دیده می‌شود که زیردنباله فوق به x همگراست و برهان کامل می‌شود. ■

خانواده‌ی $\mathcal{B} = \{\{۲n-۱, ۲n\};\ n \in \mathbb{N}\}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی $\mathbb{N}$ است. $\mathbb{N}$

شمارای دوم و لذا یک فضای لیندلف است. چون پوشش $\{\{2n-1, 2n\};\ n \in \mathbb{N}\}$ دارای زیرپوشش متناهی نیست، لذا $\mathbb{N}$ شمارا فشرده نیست. اگر A زیرمجموعه‌ی نامتناهی از $\mathbb{N}$ باشد و اگر عدد زوج $2n$ عضوی از A باشد، واضح است که $2n-1$ نقطه‌ی حدی A است. اگر عدد فرد $2n-1$ عضوی از A باشد، واضح است که $2n$ نقطه‌ی حدی A است. در هر حال A دارای یک نقطه‌ی حدی است و لذا $\mathbb{N}$ دارای خاصیت بولزانو ـ وایراشتراس است.

قضیه۵ ـ ۲۲. *گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) *فضایی که T_1 و دارای خاصیت بولزانو ـ وایراشتراس است، یک فضای شمارا فشرده است.*

ب) *هر فضای دنباله‌ای فشرده، شمارا فشرده است.*

برهان. فرض کنیم $\{G_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ پوششی باز برای X بوده که دارای هیچ زیرپوشش متناهی نیست. برای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم $F_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_n^c$. چون خانواده‌ی فوق دارای زیرپوشش متناهی نیست، لذا هر F_n ناتهی است. برای هر $n \in \mathbb{N}$، عنصر x_n را از F_n انتخاب کرده و قرار می‌دهیم $B = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

حالت اول: اگر B نامتناهی باشد، بنابه فرض B دارای نقطه‌ای حدی چون $x \in X$ است. چون X یک فضای T_1 است، لذا هر مجموعه‌ی باز W شامل x، B را در تعداد نامتناهی نقطه قطع می‌کند. بنابه تعریف F_n ها، $F_{n+1} \subseteq F_n$. پس برای هر $k \geq n$، $x_k \in F_n$. چون هر مجموعه‌ی باز W شامل x، B را در تعداد نامتناهی نقطه قطع می‌کند، لذا مجموعه‌ی باز W شامل x، هر F_n را در تعداد نامتناهی نقطه قطع می‌کند و لذا $x \in \overline{F_n} = F_n$. بنابراین $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ و این نشان می‌دهد که $\{G_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ پوشش X نیست که یک تناقض است.

حالت دوم: اگر B متناهی باشد، عنصری در B وجود دارد که در تعداد نامتناهی از F_n ها و بنابراین در همه‌ی F_n ها قرار دارد. شبیه حالت قبل نتیجه می‌شود که $\{G_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ پوشش X نیست که یک تناقض است.

برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنیم $\{G_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ پوششی باز برای X بوده که دارای هیچ زیرپوشش متناهی نیست. فرض کنیم که F_n ها مجموعه‌های تعریف شده در قسمت قبل باشند. برای هر n، $x_n \in F_n$ را در نظر می‌گیریم. بنا به فرض دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا مانند $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ به عنصری چون $x \in X$ می‌باشد. m ای موجود است که $x \in G_m$. برای هر $i \geq m$، $x_{n_i} \notin G_m$ که تناقض با همگرایی زیردنباله است. پس X فضایی شمارا فشرده است. ■

در آنالیز دیدیم که اگر f تابعی حقیقی مقدار و پیوسته روی یک فضای فشرده باشد، در

آن‌صورت f ماکزیمم و مینیمم خود را اختیار می‌کند. در قضیه‌ی زیر شرط فشردگی را با شرط ضعیف‌تری روی هر فضای توپولوژیک شمارا فشرده بیان و ثابت می‌کنیم.

قضیه۵ ـ ۲۳. *اگر f تابعی پیوسته از فضای به‌طور شمارا فشرده (X, τ) به‌توی $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه f ماکزیمم و مینیمم خود را اختیار می‌کند.*

برهان. چون $\mathbb{R}$ شمارای دوم است، لذا برد f نیز شمارای دوم است و بنابراین لیندلف است. از طرف دیگر تصویر یک فضای به‌طور شمارا فشرده تحت تابع پیوسته، فضایی به‌طور شمارا فشرده است. بنابراین برد f فشرده است. درنتیجه برد f بسته و کران‌دار است. پس برای x و y ای در X، $f(x) = \inf\{f(t);\ t \in X\}$ و $f(y) = \sup\{f(t);\ t \in X\}$. ■

۵ــ۵ فشرده‌سازی

$\mathbb{R}$ را با توپولوژی اقلیدسی در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $\mathbb{R}$ فشرده نیست. قصد داریم $\mathbb{R}$ را در یک فضای فشرده بنشانیم، به این معنی که فضای توپولوژیک فشرده‌ای معرفی کنیم که $\mathbb{R}$ با زیرفضایی از آن همیومورف باشد. قرار می‌دهیم $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. گردایه همه‌ی زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^*$ به شکل

$$(a, b),\ (a, \infty],\ [-\infty, b)$$

تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی روی $\mathbb{R}^*$ می‌دهد. ابتدا ثابت می‌کنیم $\mathbb{R}^*$ با این توپولوژی فشرده است. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ پوششی باز برای $\mathbb{R}^*$ باشد. چون $\infty, -\infty \in \mathbb{R}^*$، لذا برای α_{-1} و α_1 ای از I، $\infty \in G_{\alpha_1}$ و $-\infty \in G_{\alpha_{-1}}$. بنابه تعریف پایه، $a, b \in \mathbb{R}$ موجودند که $[-\infty, b) \subseteq G_{\alpha_{-1}}$ و $(a, \infty] \subseteq G_{\alpha_1}$. برای هر $x \in \mathbb{R}$، $\alpha_x \in I$ و مجموعه‌ی باز پایه‌ای G_x وجود دارد که $x \in G_x \subseteq G_{\alpha_x}$. برای هر x، $G_x \setminus \{-\infty, \infty\}$ در $\mathbb{R}$ باز است. واضح است که $[a, b] \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{R}} G_x \setminus \{-\infty, \infty\}$. چون $[a, b]$ فشرده است، لذا برای تعداد متناهی عنصر از $\mathbb{R}$ مانند x_1 و ... و x_n، خواهیم داشت $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i} \setminus \{-\infty, \infty\}$. لذا

$$\mathbb{R}^* \subseteq G_{\alpha_{-1}} \cup G_{\alpha_1} \cup \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_{x_i}}.$$

بنابراین $\mathbb{R}^*$ فشرده است. ادعا می‌کنیم نگاشت همانی از $\mathbb{R}$ به‌روی زیرفضایی از $\mathbb{R}^*$ یک همیومورفیسم است. واضح است نگاشت همانی باز است، تنها کافیست ثابت کنیم که پیوسته است. اگر G مجموعه‌ی باز پایه‌ای در $I(\mathbb{R})$ باشد، این مجموعه به‌صورت اشتراک مجموعه‌ی پایه‌ای از

فضای $\mathbb{R}^*$ با $\mathbb{R} = I(\mathbb{R})$ خواهد بود. واضح است این مجموعه‌ی پایه‌ای در $\mathbb{R}$ باز است و لذا I پیوسته است. با این توصیف فضای فشرده‌ای به‌دست آمد که $\mathbb{R}$ با زیرفضایی از آن همیومورف است.

قصد داریم ایده‌ای که در بالا بیان شد را برای هر فضای توپولوژیک تعمیم دهیم. در حقیقت فضای توپولوژیک غیر فشرده‌ای را در نظر می‌گیریم. با افزودن نقطه‌ای که در این فضا قرار ندارد و با قرار دادن یک توپولوژی که فضای جدید را به یک فضای توپولوژیک فشرده تبدیل می‌کند، به بررسی خصوصیات فضای اصلی می‌پردازیم. چنین کاری را فشرده‌سازی تک نقطه‌ای می‌نامیم.

قضیه۵ ـ ۲۴. *فضای توپولوژیک غیر فشرده (X, τ) را در نظر می‌گیریم. عنصری که در X قرار ندارد را با ∞ نمایش داده و قرار می‌دهیم $X^* = X \cup \{\infty\}$. τ^* را گردایه همه‌ی $G \subseteq X^*$ هایی در نظر می‌گیریم که $G \in \tau$ یا G متمم یک مجموعه‌ی فشرده و بسته از X است. در آن‌صورت τ^* یک توپولوژی روی X^* است و X با زیرفضای چگالی از X^* همیومورف است.*

برهان. چون $\emptyset$ بسته و فشرده است، لذا $X^* \in \tau^*$. همین‌طور $\emptyset \in \tau \subseteq \tau^*$. فرض کنیم $G_1, G_2 \in \tau^*$. اگر $G_1, G_2 \in \tau$، آنگاه $G_1 \cap G_2 \in \tau \subseteq \tau^*$. اگر $G_1 \in \tau$ و $G_2 \in \tau^*$، آنگاه برای یک مجموعه‌ی بسته و فشرده F_2 از X، $G_2 = X^* \backslash F_2$. اما

$$G_1 \cap G_2 = G_1 \cap (X^* \backslash F_2) = G_1 \cap (X \backslash F_2) \in \tau \subseteq \tau^*$$

حالت سوم این‌که $G_1 \in \tau^*$ و $G_2 \in \tau^*$. مجموعه‌های بسته و فشرده F_1 و F_2 از X وجود دارند که $G_1 = X^* \backslash F_1$ و $G_2 = X^* \backslash F_2$. از آنجا که F_1 و F_2 بسته و فشرده هستند، لذا $F_1 \cup F_2$ بسته و فشرده است. بنابراین

$$G_1 \cap G_2 = (X^* \backslash F_1) \cap (X^* \backslash F_2) = X^* \backslash (F_1 \cup F_2) \in \tau^*$$

این نشان می‌دهد که اشتراک هر دو عنصر از τ^* در τ^* می‌باشد.

ابتدا ثابت می‌کنیم که اجتماع دو عنصر به‌صورت $G_1 \in \tau$ و $G_2 = X^* \backslash F_2$ که در آن F_2 زیرمجموعه‌ای بسته و فشرده از X است، عنصری از τ^* می‌باشد. چون

$$G_1 \cup G_2 = G_1 \cup (X^* \backslash F_2) = X^* \backslash (F_2 \cap G_1^c)$$

و $F_2 \cap G_1^c$ فشرده و بسته است، لذا $G_1 \cup G_2 \in \tau^*$. اکنون فرض کنیم که $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از اعضای τ^* باشد. قرار می‌دهیم $I_1 = \{\alpha \in I;\ G_\alpha \in \tau\}$ و $I_2 = I \backslash I_1$. برای هر $\alpha \in I_2$، مجموعه‌ی بسته و فشرده F_α وجود دارد که $G_\alpha = X^* \backslash F_\alpha$. اما

$$\bigcup_{\alpha\in I_2} G_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I_2} X^*\backslash F_\alpha = X^*\backslash \bigcap_{\alpha\in I_2} F_\alpha \in \tau^*$$

و $\bigcup_{\alpha\in I_1} G_\alpha \in \tau$. از طرف دیگر $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha = \left(\bigcup_{\alpha\in I_1} G_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_{\alpha\in I_2} G_\alpha\right)$. لذا $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha \in \tau^*$ و این نتیجه می‌دهد که τ^* یک توپولوژی روی X^* می‌باشد.

فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوشش بازی برای X^* باشد. $\alpha_0 \in I$ وجود دارد که $\infty \in G_{\alpha_0}$. بنابراین مجموعه‌ی فشرده F از X موجود است که $G_{\alpha_0} = X^*\backslash F$. از طرف دیگر برای هر $\alpha \in I$، $G_\alpha \cap X \in \tau$. چون F در X فشرده است، لذا α_1 و ... و α_n از عناصر I موجودند که $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \cap X$. بنابراین $X^* \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} G_{\alpha_i}$ و لذا X^* فشرده است.

به‌راحتی دیده می‌شود که نگاشت همانی یک همیومورفیسم از X به‌روی زیرفضای چگالی از X^* می‌باشد. ■

نکته۲. فرض کنیم X فضای فشرده‌ی موضعی، غیر فشرده باشد. در آن‌صورت X با زیرفضای یک فضای هاسدورف و فشرده همیومورف است. در حقیقت X^* فشرده‌سازی تک نقطه‌ای فضای X شرایط مورد نیاز را داراست. کافیست نشان دهیم X^* هاسدورف است. فرض کنیم x و y دو عنصر از X^* باشند. اگر $x, y \in X$، چون X هاسدورف است، لذا x و y توسط دو مجموعه‌ی باز در X از هم جدا می‌شوند. چون هر مجموعه‌ی باز در X در X^* نیز باز است، لذا این دو عنصر توسط دو مجموعه‌ی باز در X^* از هم جدا می‌شوند. اگر $x \in X$ و $y = \infty$، چون X فشرده‌ی موضعی است، مجموعه‌ی باز فشرده‌ی نسبی G وجود دارد که $x \in G$. اختیار کنید $W = X^*\backslash\overline{G} \in \tau^*$. در آن‌صورت $y \in W$، $x \in G$ و $W \cap G = \emptyset$. بنابراین X^* هاسدورف است.

نکته۳. هر فضای فشرده‌ی موضعی یک فضای $T_{3\frac{1}{2}}$ است. در حقیقت اگر X فشرده باشد، آنگاه X نرمال و بنابراین T_4 است. اگر X غیر فشرده و X^* فشرده‌سازی تک نقطه‌ای از X باشد، آنگاه X^* فشرده و هاسدورف است. درنتیجه X^*، T_4 بوده و لذا X، $T_{3\frac{1}{2}}$ است. موضوع دیگری که حائز اهمیت است این است که اگر F زیرمجموعه‌ی فشرده از X و G مجموعه‌ی بازی از X شامل F باشد، در آن‌صورت F در X^* بسته است. بعلاوه $X^*\backslash G$ نیز بسته و $F \cap (X^*\backslash G) = \emptyset$. چون X^* نرمال است، بنابر لم اوریسون تابع پیوسته‌ی $f : X^* \to [0, 1]$ وجود دارد که $f(F) = \{1\}$ و $f(X^*\backslash G) = \{0\}$. نتیجه این‌که در هر فضای فشرده‌ی موضعی، می‌توان هر مجموعه‌ی فشرده F و متمم هر مجموعه‌ی باز شامل آنرا با تابعی پیوسته از هم جدا کرد.

البته فشرده‌سازی‌های دیگری نیز وجود دارند که خواننده می‌تواند به منابعی که در انتهای کتاب آورده شده است مراجعه کند. ما بیش از این بحث فشردگی را ادامه نمی‌دهیم و قبل از این‌که به

فضاهای کران‌دار کلی بپردازیم لازم می‌دانیم کمی در مورد فضای توابع پیوسته صحبت کنیم. فرض کنیم X یک فضای فشرده‌ی موضعی باشد. در فصول قبلی مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته و کران‌دار روی X را با نماد $C_b(X)$ نمایش دادیم. می‌دانیم این مجموعه با متر

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|;\ x \in X\}$$

یک فضای متریک کامل است. مجموعه‌ی همه‌ی عناصر از $C_b(X)$ که در بی‌نهایت صفر می‌شوند را با نماد $C_\circ(X)$ نمایش می‌دهیم. گوییم $f \in C_b(X)$ در بی‌نهایت صفر می‌شود هرگاه برای هر ϵ مجموعه‌ی فشرده ای چون K موجود باشد که برای هر $x \notin K$، $|f(x)| < \epsilon$. $C_\circ(X)$ زیرفضایی کامل از $C_b(X)$ است. در حقیقت اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی از $C_\circ(X)$ باشد، این دنباله به عنصری چون $f \in C_b(X)$ همگراست. اگر $\epsilon > 0$ دلخواه باشد، n ای موجود است که $d(f,f_n) < \frac{\epsilon}{2}$. از آنجا که $f_n \in C_\circ(X)$، زیرمجموعه‌ی فشرده K از X موجود است که برای هر $x \notin K$، $|f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. برای هر $x \notin K$،

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < \epsilon.$$

لذا $f \in C_\circ(X)$ و بنابراین $C_\circ(X)$ یک فضای کامل است. مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته که در خارج فشرده‌ای صفر هستند را با نماد $C_{\circ\circ}(X)$ نمایش می‌دهیم. $C_{\circ\circ}(X)$ زیرفضایی از $C_b(X)$ است. $C_{\circ\circ}(X)$ همیشه فضای کاملی نیست. در توپولوژی و آنالیز توابع پیوسته روی فضای فشرده‌ی موضعی مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این حالت فضای توابع فضای خوبی برای مطالعه است. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۵ ـ ۱۵. می‌خواهیم ثابت کنیم $C_\circ(\mathbb{Q})$ تک عضوی است. در حقیقت فرض کنیم تابع $f \in C_b(\mathbb{Q})$ در نقطه‌ی $r \in \mathbb{Q}$ غیر صفر باشد. بنابراین δ ای وجود دارد که برای هر $x \in (r-\delta, r+\delta)$، $|f(x) - f(r)| < \frac{|f(r)|}{2}$ و لذا $|f(x)| > \frac{|f(r)|}{2}$. از این‌جا نتیجه می‌شود که $(r-\delta, r+\delta) \subseteq \overline{\left\{x \in \mathbb{Q};\ |f(x)| > \frac{|f(r)|}{2}\right\}}$. درنتیجه $\overline{\left\{x \in \mathbb{Q};\ |f(x)| > \frac{|f(r)|}{2}\right\}}$ فشرده نیست و لذا $f \notin C_\circ(\mathbb{Q})$.

مثال ۵ ـ ۱۶. $C_{\circ\circ}(\mathbb{R})$ کامل نیست. در حقیقت برای هر n، تابع پیوسته‌ی $g_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ را برای هر $-n \leq x \leq n$ به‌صورت $g_n(x) = 1$ و برای هر $|x| \geq n+1$ به‌صورت $g_n(x) = 0$ و برای هر $-n-1 \leq x \leq -n$ به‌صورت $g_n(x) = x+n+1$ و سرانجام برای هر $n \leq x \leq n+1$ به‌صورت $g_n(x) = -x+n+1$ تعریف می‌کنیم. چون هر g_n خارج بازه $[-n-1, n+1]$ صفر است، لذا $g_n \in C_{\circ\circ}(\mathbb{R})$. قرار می‌دهیم

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{2^n}.$$

چون سری فوق همگرای یکنواخت است، پس $g \in C_b(\mathbb{R})$. اما g خارج هیچ فشرده‌ای صفر نیست. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که دنباله توابع $\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{g_k(x)}{2^k} \right\}$ کوشی است و چنانچه در $C_{00}(\mathbb{R})$ همگرا باشد، بایستی به g همگرا باشد، اما $g \notin C_{00}(\mathbb{R})$. بنابراین $C_{00}(\mathbb{R})$ کامل نیست.

۵ـ۶ کران‌دار کلی

دیدیم که در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ فشردگی با بسته و کران‌دار بودن معادل است. می‌دانیم در بعضی از فضاهای متریک بسته و کران‌دار بودن فشردگی را نتیجه نمی‌دهد. قصد داریم با ارائه بعضی تعاریف شرایطی معادل در فضاهای متریک ارائه کنیم. ثابت خواهیم کرد که زیرمجموعه‌ی A از یک فضای متریک فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کران‌دار کلی باشد.

تعریف۵ ـ ۲۵. زیرمجموعه‌ی A از فضای متریک (X, d) را کران‌دار کلی گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، تعدادی متناهی عنصر از A مانند x_1 و ... و x_n موجود باشند که $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_\epsilon(x_i)$.

قبل از این‌که ارتباط کران‌دار کلی و فشردگی را در فضاهای متریک مورد بررسی قرار دهیم لازم می‌دانیم با تعدادی از خصوصیات مجموعه‌های کران‌دار کلی آشنا شویم. هر مجموعه‌ی فشرده در یک فضای متریک کران‌دار کلی است. $\mathbb{R}$ با متر گسسته کران‌دار کلی نیست ولی کران‌دار است. در هر فضای متریک هر مجموعه‌ی کران‌دار کلی، کران‌دار است. در حقیقت فرض کنید A زیرمجموعه‌ی کران‌دار کلی از فضای متریک (X, d) باشد. تعدادی متناهی عنصر چون x_1 و ... و x_n از A وجود دارند که $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_1(x_i)$. قرار دهید $M = 2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d(x_i, x_j)$. برای دو عنصر x و y از A، دو اندیس i و j وجود دارند که $d(x, x_i) < 1$ و $d(y, x_j) < 1$. بنابراین

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \leq M$$

این نتیجه می‌دهد که A کران‌دار است.

قضیه۵ ـ ۲۶. *اگر A در فضای متریک (X, d) کران‌دار کلی باشد، $\overline{A}$ نیز کران‌دار کلی است.*

برهان. فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. چون A کران‌دار کلی است، لذا برای x_1 و ... و x_n از A خواهیم داشت $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$. برای $x \in \overline{A}$، عنصری چون a از A موجود است که $d(x, a) < \frac{\epsilon}{2}$. یک $1 \leq i \leq n$ موجود است که $d(x_i, a) < \frac{\epsilon}{2}$. بنابراین

$$d(x,x_i) \leq d(x,a) + d(a,x_i) < \frac{\epsilon}{۲} + \frac{\epsilon}{۲} = \epsilon.$$

این نتیجه می‌دهد که $\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} S_\epsilon(x_i)$. ■

قضیه۵ ـ ۲۷. *تصویر یک فضای کران‌دار کلی تحت تابع پیوسته یکنواخت، کران‌دار کلی است.*

برهان. فرض کنیم $(X_۱, d_۱)$ کران‌دار کلی و f تابعی پیوسته یکنواخت از $(X_۱, d_۱)$ به‌روی $(X_۲, d_۲)$ باشد. فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد، $\delta > ۰$ موجود است که هرگاه $d_۱(x,y) < \delta$، آنگاه $d_۲\big(f(x), f(y)\big) < \epsilon$. چون $X_۱$ کران‌دار کلی است، لذا $x_۱$ و ... و x_n از $X_۱$ وجود دارند که $X_۱ \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} S_\delta(x_i)$. می‌توان نوشت

$$X_۲ = f(X_۱) = f\Big(\bigcup_{i=۱}^{n} S_\delta(x_i)\Big) = \bigcup_{i=۱}^{n} f\big(S_\delta(x_i)\big) \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} S_\epsilon\big(f(x_i)\big).$$

بنابراین $X_۲$ کران‌دار کلی است. ■

مثال۵ ـ ۱۷. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای به‌طور دنباله‌ای فشرده از فضای متریک (X,d) باشد، A کران‌دار کلی است. اگر چنین نباشد، δ ای وجود دارد که X توسط تعدادی متناهی از گوی ها به شعاع δ پوشیده نمی‌شود. عنصر $x_۱ \in X$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم x_n انتخاب شده باشد. از مجموعه‌ی ناتهی $X \setminus \bigcup_{i=۱}^{n} S_\delta(x_i)$ عنصر $x_{n+۱}$ را انتخاب می‌کنیم. با ادامه این روند دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به‌دست می‌آید که برای هر m و n، $d(x_m, x_n) \geq \delta$. به‌راحتی دیده می‌شود که این دنباله دارای زیردنباله‌ای همگرا نیست.

تعریف۵ ـ ۲۸. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ پوشش بازی برای زیرمجموعه‌ی A از فضای متریک (X,d) باشد. عدد $\delta > ۰$ را یک عدد لبگ برای این پوشش نامیم هرگاه هر زیرمجموعه از A که دارای قطری کمتر از δ است، مشمول یکی از اعضای پوشش فوق باشد.

$\mathbb{R}$ را با متر گسسته در نظر می‌گیریم. به‌راحتی دیده می‌شود که $\delta = ۱$ یک عدد لبگ برای پوشش $\{x\}_{x\in\mathbb{R}}$ است. عدد $\delta = ۲$ عددی لبگ برای این پوشش نیست، چرا که $d(\mathbb{R}) < ۲$ ولی $\mathbb{R}$ مشمول هیچ مجموعه‌ی تک عضوی نیست.

مثال۵ ـ ۱۸. فرض کنیم $\{r_۱, r_۲, \ldots\}$ یک نمایش از اعداد گویا باشد. پوشش $\{\mathbb{Q} \cap S_{\frac{۱}{n}}(r_n)\}_{n=۱}^{\infty}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم δ عددی لبگ برای این پوشش باشد. عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $\delta > \frac{۴}{n}$. اکنون عدد $m > n$ را طوری اختیار می‌کنیم که $r_m \notin \bigcup_{i=۱}^{n} (r_i - ۱, r_i + ۱)$. واضح است که

$$d\Big(\big(r_m - \frac{\delta}{۴}, r_m + \frac{\delta}{۴}\big) \cap \mathbb{Q}\Big) = \frac{\delta}{۲}$$

ولی این مجموعه در هیچ یک از اعضای پوشش فوق قرار ندارد. بنابراین این پوشش دارای عدد لبگ نیست.

قضیه۵ ـ ۲۹. *فرض کنید $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوششی برای زیرمجموعه‌ی به‌طور دنباله‌ای فشرده‌ی A از فضای متریک (X,d) باشد. در آن‌صورت این پوشش دارای عدد لبگ است.*

برهان. فرض کنیم پوشش فوق دارای عدد لبگ نباشد. بنابراین برای هر n، زیرمجموعه‌ای از A چون A_n یافت می‌شود که $d(A_n) < \frac{۱}{n}$ ولی A_n مشمول هیچ یک از اعضای $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ نیست. برای هر n، $x_n \in A_n$ را انتخاب می‌کنیم. بنابه فرض، دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا مانند $\{x_{n_i}\}_{i=۱}^{\infty}$ است. فرض کنید $x_{n_i} \to x$. چون $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوششی برای A است، لذا برای یک $\alpha \in I$، $x \in G_\alpha$. عدد مثبت r وجود دارد که $S_r(x) \subseteq G_\alpha$. عدد طبیعی i را طوری اختیار می‌کنیم که $\frac{۱}{n_i} < \frac{r}{۲}$ و $d(x_{n_i},x) < \frac{r}{۲}$. اکنون $y \in A_{n_i}$ را در نظر می‌گیریم. چون $d(A_{n_i}) < \frac{۱}{n_i} < \frac{r}{۲}$، لذا $d(x_{n_i},y) < \frac{۱}{n_i} < \frac{r}{۲}$. بنابراین

$$d(x,y) \le d(x,x_{n_i}) + d(x_{n_i},y) < \frac{r}{۲} + \frac{r}{۲} = r$$

بنابراین $A_{n_i} \subseteq S_r(x) \subseteq G_\alpha$. این تناقض با فرض خلف است و لذا $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ دارای عددی لبگ است. ■

اکنون به اثبات یکی از مهمترین قضایای این بخش می‌پردازیم. این قضیه در آنالیز از اهمیت زیادی برخوردار است.

قضیه۵ ـ ۳۰. *گزاره‌های زیر برای زیرمجموعه‌ی A از فضای متریک (X,d) معادلند:*

الف) *A فشرده است.*

ب) *A به‌طور شمارا فشرده است.*

ج) *A به‌طور دنباله‌ای فشرده است.*

برهان. گزاره (الف) گزاره (ب) را در هر فضای توپولوژیک ایجاب می‌کند و لذا این امر در فضای متریک نیز درست است. دیدیم هر فضای توپولوژیک به‌طور شمارا فشرده و شمارای اول یک فضای به‌طور دنباله‌ای فشرده است. چون هر فضای متریک شمارای اول است، بنابراین گزاره (ب) گزاره (ج) را ایجاب می‌کند.

اکنون فرض کنیم A به‌طور دنباله‌ای فشرده و $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوشش بازی برای A باشد. بنابراین $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ دارای عدد لبگی مانند δ است. چون A کران‌دار کلی است، لذا برای تعدادی متناهی از اعضای A مانند $x_۱$ و ... و x_n، $A \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} S_{\frac{\delta}{۴}}(x_i)$. اما برای هر i، $d\big(S_{\frac{\delta}{۴}}(x_i)\big) < \delta$ و لذا

$G_{\alpha_i} \in \{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ موجود است که $S_{\frac{\delta}{4}}(x_i) \subseteq G_{\alpha_i}$. بنابراین $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$. این فشردگی A را نتیجه می‌دهد. ■

یکی از کاربردهای قضیه‌های بیان شده، مثال زیر است که در ریاضیات کاربرد فراوانی دارد.

مثال ۵ ـ ۱۹. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ی فشرده و B زیرمجموعه‌ی بسته از فضای متریک (X,d) باشند. بعلاوه فرض کنیم A و B مجزا باشند. اگر

$$d(A,B) := \inf\{d(x,y);\ x\in A,\ y\in B\} = 0$$

آنگاه برای هر n، $x_n \in A$ و $y_n \in B$ وجود دارند که $d(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$. چون A فشرده است، دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای زیردنباله همگرایی چون $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ می‌باشد. فرض کنیم $x_{n_i} \to x$، بنابراین $x \in \overline{A} = A$. از طرف دیگر

$$d(x,y_{n_i}) \le d(x,x_{n_i}) + d(x_{n_i},y_{n_i})$$

این نتیجه می‌دهد که $y_{n_i} \to x$. بنابراین $x \in \overline{B} = B$. اما A و B مجزا هستند، این تناقض سبب می‌شود که $d(A,B) > 0$.

اگر شرط فشردگی در مثال بالا حذف شود، ممکن است که گزاره نادرست باشد. برای مثال مجموعه‌های

$$A = \{(x,\frac{1}{x});\ x>0\}$$

و

$$B = \{(x,\frac{-1}{x});\ x<0\}$$

را در نظر می‌گیریم. به‌راحتی دیده می‌شود که A و B زیرمجموعه‌های بسته و مجزایی از $\mathbb{R}^2$ می‌باشند. اگر ϵ داده شده باشد، در آن‌صورت $(\frac{\epsilon}{4},\frac{4}{\epsilon}) \in A$ و $(\frac{-\epsilon}{4},\frac{4}{\epsilon}) \in B$. اما $\left|(\frac{-\epsilon}{4},\frac{4}{\epsilon}) - (\frac{\epsilon}{4},\frac{4}{\epsilon})\right| = \frac{\epsilon}{2}$ و بنابراین $d(A,B) < \epsilon$، این نشان می‌دهد که $d(A,B) = 0$.

تمرین ۵

۱. فرض کنید دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای توپولوژیک (X,τ) به x همگرا باشد. ثابت کنید $A = \{x_n;\ n\in\mathbb{N}\} \cup \{x\}$ فشرده است.

۲. اگر (X,d) یک فضای متریک باشد که هر تابع حقیقی پیوسته روی X کران‌دار باشد، ثابت کنید X فشرده است.

۳. ثابت کنید که اگر هر زیرمجموعه از فضای هاسدورف (X, τ) فشرده باشد، این فضا یک فضای توپولوژیک گسسته است.

۴. فرض کنیم (X, τ) یک فضای T_4 و A زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای از X باشد. اگر G زیرمجموعه‌ی باز شامل A از X باشد، ثابت کنید تابع پیوسته $f : X \to [0, 1]$ موجود است که $f(A) = \{1\}$ و $f(G^c) = \{0\}$.

۵. فرض کنید f تابعی پیوسته از فضای توپولوژیک (X_1, τ_1) به‌توی فضای توپولوژیک (X_2, τ_2) باشد. فرض کنید $\{F_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ دنباله‌ای نزولی از زیرمجموعه‌های X_1 باشد. آیا در حالت کلی $f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n)$؟
اگر F_n ها فشرده باشند، آیا تساوی فوق برقرار است؟

۶. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک و $f : X \to X$ تابعی پیوسته باشد. قرار دهید $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$، ثابت کنید A زیرمجموعه‌ای فشرده و ناتهی از X است و $f(A) = A$.

۷. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده باشد. نشان دهید که X با هر توپولوژی کوچکتر از τ هاسدورف نیست.

۸. فرض کنیم (X_1, τ_1) و (X_2, τ_2) دو فضای توپولوژیک و A و B به‌ترتیب زیرمجموعه‌های فشرده از X_1 و X_2 باشند. فرض کنیم $U \subseteq X_1 \times X_2$ مجموعه‌ی بازی شامل $A \times B$ باشد. ثابت کنید مجموعه‌های باز G و W به‌ترتیب از X_1 و X_2 وجود دارند که $A \times B \subseteq G \times W \subseteq U$.

۹. ثابت کنید که گوی های بسته به مرکز صفر در فضاهای l^∞ و l^p فشرده نیستند.

۱۰. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک و $f : X \to X$ تابعی باشد که روی هر زیرمجموعه‌ی فشرده از X پیوسته است، ثابت کنید f پیوسته است. اگر (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد، آیا گزاره فوق درست است؟

۱۱. $F \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ در $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ بسته است اگر و تنها اگر برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $\{m \in \mathbb{Z},\ (m, n) \in F\}$ متناهی باشد و یا $F = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. ثابت کنید $A = \{(m, 0);\ m \in \mathbb{Z}\}$ در این فضا فشرده است ولی $\overline{A} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ فشرده نیست.

۱۲. فرض کنید f تابعی پیوسته از فضای فشرده (X, τ) به‌توی (X, τ) باشد. ثابت کنید زیرمجموعه‌ی سره، بسته و ناتهی از X مانند A وجود دارد که $f(A) = A$.

۱۳. نشان دهید که تصویر یک فضای بئر تحت تابع پیوسته و باز یک فضای بئر است.

۱۴. ثابت کنید زیرمجموعه‌های باز از فضای بئر، یک فضای بئر است.

۱۵. فضای توپولوژیک (X, τ) را در نظر بگیرید. فرض کنید هر عنصر از X در یک زیرمجموعه‌ی باز و بئر از X قرار دارد. ثابت کنید X یک فضای بئر است.

۱۶. اگر هر زیرمجموعه‌ی باز از فضای توپولوژیک (X, τ) لیندلف باشد، ثابت کنید هر زیرمجموعه از آن لیندلف است.

۱۷. آیا اشتراک دو مجموعه‌ی فشرده، لزوماً فشرده است؟

۱۸. ثابت کنید زیرمجموعه‌ی باز یا بسته از یک فضای فشرده‌ی موضعی، فشرده‌ی موضعی است.

۱۹. ثابت کنید فشردگی دنباله‌ای تحت تابع پیوسته و پوشا پایاست.

۲۰. فرض کنید (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2) و (X_3, τ_3) سه فضای توپولوژیک هاسدورف و A و B به‌ترتیب زیرمجموعه‌های فشرده از X_1 و X_2 باشند. فرض کنید f تابعی پیوسته از $X_1 \times X_2$ به‌توی X_3 و G زیرمجموعه‌ی باز از X_3 شامل $f(A \times B)$ باشد. ثابت کنید مجموعه‌ی باز U و W به‌ترتیب شامل A و B وجود دارند که $f(U \times W) \subseteq G$.

۲۱. فرض کنید $C([0, 1], [0, 1])$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته از $[0, 1]$ به $[0, 1]$ باشد. این مجموعه با متر $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|;\ x \in [0, 1]\}$ یک فضای متریک است. زیرفضای A متشکل از همه‌ی f هایی که $|f(t) - f(s)| \leq |t - s|$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید A فشرده است.

۲۲. ثابت کنید که هر فضای منظم و لیندلف یک فضای نرمال است.

۲۳. نشان دهید که هر فضای منظم و فشرده‌ی موضعی یک فضای به‌طور کامل منظم است.

۲۴. اگر X فضای فشرده‌ی موضعی باشد، ثابت کنید $C_{00}(X)$ در $C_0(X)$ چگال است.

۲۵. اگر X فضای فشرده‌ی موضعی و $f \in C_b(X)$، ثابت کنید:

الف) $f \in C_0(X)$ اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon > 0$، $\overline{\{x \in X;\ |f(x)| > \epsilon\}}$ فشرده باشد.

ب) $f \in C_{00}(X)$ اگر و تنها اگر $\overline{\{x \in X;\ |f(x)| > 0\}}$ فشرده باشد.

۲۶. ثابت کنید هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی کران‌دار کلی، کران‌دار کلی است.

۲۷. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک فشرده و $f : X \to X$ تابعی باشد که برای هر $x, y \in X$، $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$. ثابت کنید f دارای یک نقطه‌ی ثابت است، بدین معنی که $x \in X$ وجود دارد که $f(x) = x$. مثالی ارائه کنید که لزوم فشردگی X را نشان دهد.

۲۸. فضای متریک فشرده X و تابع پیوسته‌ی $f : X \to X$ را در نظر بگیرید. اگر f نقطه‌ی ثابت نداشته باشد، ثابت کنید $\epsilon > 0$ وجود دارد که برای هر x، $d\big(f(x), x\big) \geq \epsilon$.

۲۹. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک کامل و $f : X \to X$ تابعی باشد که برای هر $x, y \in X$، $d\big(f(x), f(y)\big) < \frac{d(x,y)}{۲}$. ثابت کنید که f نقطه‌ی ثابت دارد. مثالی ارائه کنید که لزوم کامل بودن X را نشان دهد.

۳۰. اگر فضای متریک (X, d) کران‌دار کلی نباشد، ثابت کنید تابعی حقیقی مقدار پیوسته روی X وجود دارد که کران‌دار نیست.

۳۱. زیرمجموعه‌های فشرده A و B از فضای متریک (X, d) را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید برای حداقل یک $a \in A$ و یک $b \in B$، $d(A, B) = d(a, b)$.

فصل ٦

همبندی

٦—١ مقدمه

یکی از مطالب مهم در توپولوژی مفهوم همبندی است. همان‌طوری که در فضاهای فشرده دیده شد، فشردگی با یک تعریف ساده شروع شده و با نتایج جالب به اتمام رسید. به زبان ساده یک مجموعه‌ی همبند است اگر نتوان آن مجموعه را با دو مجموعه‌ی باز مجزا به دو قسمت تقسیم کرد. در زبان محاوره دو زندانی در یک سلول را همبند گویند. در حقیقت حائلی بین آنها وجود ندارد و نمی‌توان آنها را در آن سلول از هم جدا کرد. همبند بودن یک مجموعه به توپولوژی روی آن مجموعه نیز بستگی دارد. ساده‌ترین نتیجه از بحث همبندی قضیه‌ی مقدار میانی است.

در این فصل مفهوم همبندی و شرایط معادل با آن‌را مورد بررسی قرار خواهیم داد. ارتباط این مفهوم و مفاهیمی که قبلاً بیان شده است، خصوصاً پیوستگی و فشردگی از اهداف مهم این فصل است.

٦—٢ فضاهای همبند

همان‌طور که در مقدمه بیان شد، برای اثبات ناهمبندی به‌دنبال حفره‌هایی هستیم که مجموعه را به دو قسمت تقسیم کنیم. برای مثال اعداد گویا و اعداد گنگ به اندازه‌ی کافی دارای حفره‌هایی هستند که به آسانی می‌توان ناهمبندی آنها را ثابت کرد. این‌گونه مجموعه‌ها را ناهمبند کلی گوییم که به تفصیل به توضیح آنها می‌پردازیم.

تعریف۶ ــ ۱. فضای توپولوژیک (X, τ) را همبند گوییم هرگاه X اجتماع دو زیرمجموعه‌ی از هم جدا شده ناتهی نباشد. در غیر این صورت X ناهمبند است.

قضیه۶ ــ ۲. *فضای توپولوژیک (X, τ) ناهمبند است اگر و تنها اگر دو مجموعه‌ی باز ناتهی G و W از X موجودند که $G \cap W = \emptyset$ و $X = G \cup W$.*

برهان. اگر X ناهمبند باشد، آنگاه دو مجموعه‌ی ناتهی و از هم جدا شده A و B موجود است که $A \cup B = X$. قرار می‌دهیم $G = \overline{A}^c$ و $W = \overline{B}^c$. واضح است که G و W باز هستند. اگر $G = \overline{A}^c = \emptyset$، آنگاه $\overline{A} = X$. بنابراین $B = B \cap X = B \cap \overline{A} = \emptyset$، که این تناقض است. پس G مجموعه‌ی باز ناتهی است. به همین صورت W ناتهی است. از طرف دیگر

$$X = A \cup B = \overline{A} \cup \overline{B} = G^c \cup W^c = (G \cap W)^c.$$

این نتیجه می‌دهد که G و W مجزا هستند. اکنون فرض کنیم $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. چون $X = A \cup B$، لذا $x \in A$ یا $x \in B$. بدون این‌که به کلیت خللی وارد آید فرض کنیم $x \in A$. بنابراین $x \in A \cap \overline{B}$ که متناقض با از هم جدا شده بودن A و B است. درنتیجه $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ و لذا خواهیم داشت

$$\cup W = (\overline{A} \cap \overline{B})^c = X$$

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم X به‌صورت اجتماع دو مجموعه‌ی باز ناتهی و مجزای G و W باشد. قرار می‌دهیم $A = G$ و $B = W$. برای اتمام برهان، کافیست ثابت کنیم این دو مجموعه از هم جدا شده هستند. فرض کنیم $x \in \overline{A} \cap B$، در این‌صورت x در مجموعه‌ی باز W و همین‌طور در بستار A قرار دارد. بنابه تعریف نقطه‌ی چسبیدگی $A \cap W \neq \emptyset$، که متناقض با مجزا بودن G و W است. به همین صورت $A \cap \overline{B} = \emptyset$. پس X ناهمبند است. ∎

از قضیه‌ی فوق نتیجه می‌شود که اگر X فضای ناهمبند باشد، X توسط دو مجموعه‌ی باز و مجزا به دو قسمت تقسیم می‌شود که در این حالت این دو مجموعه‌ی باز را یک ناهمبندی برای X گوییم.

قضیه۶ ــ ۳. *فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه از فضای توپولوژیک (X, τ) باشند. اگر A همبند و $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$، آنگاه B همبند است.*

برهان. فرض کنیم B ناهمبند باشد و G و W یک ناهمبندی برای B باشد، یعنی $B \cap G \neq \emptyset$، $B \cap W \neq \emptyset$، $(G \cap B) \cap (W \cap B) = \emptyset$ و $(W \cap B) \cup (G \cap B) = B$. ادعا می‌کنیم G و W یک ناهمبندی برای A است. واضح است که $(G \cap A) \cup (W \cap A) = A$ و $(G \cap A) \cap (G \cap A) = \emptyset$. چون $G \cap B \neq \emptyset$ و $B \subseteq \overline{A}$، لذا $G \cap A \neq \emptyset$. همین‌طور $W \cap A \neq \emptyset$ و لذا A ناهمبند است که

یک تناقض است. ■

نکته۱. اگر f تابعی پیوسته از فضای توپولوژیک همبند (X_1, τ_1) به‌روی فضای توپولوژیک (X_2, τ_2) باشد، آنگاه (X_2, τ_2) همبند است. در حقیقت اگر G و W یک ناهمبندی برای X_2 باشد، در آن‌صورت $f^{-1}(G)$ و $f^{-1}(W)$ در X_1 باز هستند. چون f پوشاست، $f^{-1}(G)$ و $f^{-1}(W)$ ناتهی هستند. اما

$$f^{-1}(G) \cup f^{-1}(W) = f^{-1}(G \cup W) = f^{-1}(X_2) = X_1$$

و

$$f^{-1}(G) \cap f^{-1}(W) = f^{-1}(G \cap W) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

که نشان می‌دهد $f^{-1}(G)$ و $f^{-1}(W)$ یک ناهمبندی برای X_1 است. این تناقض، همبند بودن X_2 را ثابت می‌کند.

نکته۲. اگر f تابعی پیوسته از فضای توپولوژیک همبند (X_1, τ_1) به‌توی فضای توپولوژیک (X_2, τ_2) باشد، در آن‌صورت $G(f) = \{(x, f(x));\ x \in X_1\}$ به‌عنوان زیرفضایی از $X_1 \times X_2$ همبند است. در حقیقت $G(f)$ تصویر فضای همبند X_1 تحت تابع پیوسته $F(x) = (x, f(x))$ است. از این مطلب نتیجه می‌گیریم که زیرمجموعه‌ی $\left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right);\ 0 < x \leq 1\right\}$ از $\mathbb{R}^2$ همبند است و لذا

$$\left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right);\ 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0, y);\ -1 \leq y \leq 1\}$$

همبند است.

مثال۶ ـ ۱. مجموعه‌های تک عضوی در $\mathbb{R}$ همبند هستند. فرض کنیم A بازه‌ای در $\mathbb{R}$ و G و W یک ناهمبندی برای A باشد. $a \in G \cap A$ و $b \in W \cap A$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $a < b$. قرار می‌دهیم

$$T = \{x \in A;\ [a, x] \subseteq G \cap A,\ x \leq b\}.$$

T غیر خالی و از بالا کران‌دار است. فرض کنیم $c = \sup T$. بنابراین $c \leq b$ و چون A بازه است، لذا $c \in A$. اگر $c \in G$، چون G باز است، بنابراین $r < b - c$ ای هست که $[c, c + r) \subseteq G \cap A$. درنتیجه $c + \frac{r}{2} \in T$ که با سوپریموم بودن c در تناقض است. اگر $c \in W$، دوباره $r < c - a$ ای وجود دارد که $(c - r, c] \subseteq W \cap A$. درنتیجه $c - \frac{r}{2} \in T$ که با سوپریموم بودن c در تناقض است. لذا $c \notin (G \cap A) \cup (W \cap A)$. یعنی G و W یک ناهمبندی برای A نیست.

اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه نباشد، لذا برای a و b ای در A، یک $a < c < b$ موجود است که $c \notin A$.

مجموعه‌های باز $A \cap (-\infty, c)$ و $A \cap (c, \infty)$ یک ناهمبندی برای A است. بنابراین تنها زیرمجموعه‌های همبند در $\mathbb{R}$، بازه‌ها و مجموعه‌های تک عضوی هستند.

دقت داریم که در فضای توپولوژیک گسسته تنها زیرمجموعه‌های تک عضوی همبند هستند. به فضاهایی که تنها زیرمجموعه‌های همبند آن فضا تک عضوی‌ها هستند، فضای ناهمبند کلی گوییم. شاید این سوال مطرح شود که آیا تنها فضاهای ناهمبند کلی فضاهای گسسته هستند؟ پاسخ منفی است چرا که $\mathbb{Q}$ ناهمبند کلی است ولی فضای گسسته نیست. مثالی دیگر از فضاهای ناهمبند کلی می‌توان $\mathbb{R}$ را با توپولوژی حد بالا معرفی کرد. در حقیقت اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ دارای حداقل دو عنصر p و q باشد که $p < q$، در آن‌صورت $(-\infty, p]$ و (p, ∞) یک ناهمبندی برای A است. بنابراین تنها زیرمجموعه‌های همبند $\mathbb{R}$ تک نقطه‌ای‌ها هستند.

$\{۰, ۱\}$ را با توپولوژی گسسته در نظر می‌گیریم. اگر تابع پیوسته‌ای از یک فضای توپولوژیک به‌روی $\{۰, ۱\}$ موجود باشد، آن فضا همبند نیست. چرا که در غیر این‌صورت $\{۰, ۱\}$ بایستی همبند باشد که چنین نیست. اگر (X, τ) یک فضای توپولوژیک ناهمبند و G و W یک ناهمبندی برای X باشد، در آن‌صورت تابع $f : X \to \{۰, ۱\}$ که به‌صورت $f(G) = \{۰\}$ و $f(W) = \{۱\}$ تعریف می‌شود، تابعی پیوسته است.

قضیه۶ ـ ۴. *فرض کنیم $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های همبند فضای توپولوژیک (X, τ) باشد. اگر برای هر α و β از I، $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$، در آن‌صورت $A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ همبند است.*

برهان. فرض کنیم f تابعی پیوسته از A به‌توی $\{۰, ۱\}$ باشد. کافیست ثابت کنیم f پوشا نیست. می‌دانیم تحدید f روی هر A_α تابعی پیوسته است. از آنجا که A_α همبند است، لذا f پوشا نیست. بدون این‌که به کلیت خللی وارد آید، فرض می‌کنیم $f(A_\alpha) = \{۰\}$. این موضوع برای هر β نیز درست است، یعنی تحدید f روی A_β تابعی پوشا نیست. چون $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$، لذا $f(A_\beta) = \{۰\}$. چون رابطه‌ی اخیر برای هر β برقرار است، لذا $f(A) = \{۰\}$. یعنی f پوشا نیست و بنابراین A همبند است. ■

مجموعه‌ی $\{۰, ۱\}$ را با توپولوژی گسسته در نظر می‌گیریم. زیرمجموعه‌های $\{۰\}$ و $\{۱\}$ همبند هستند، اما $\{۰, ۱\}$ همبند نیست. بنابراین در حالت کلی اجتماع دو مجموعه‌ی همبند لزوماً همبند نیست. اگر زیرمجموعه‌های $A = \{(x, y);\ x^۲ + y^۲ = ۱, x \geq ۰\}$ و $B = \{(x, y);\ x^۲ + y^۲ = ۱, x \leq ۰\}$ از $\mathbb{R}^۲$ را در نظر بگیریم، A و B همبند هستند ولی

$$A \cap B = \{(۰, -۱), (۰, ۱)\}$$

همبند نیست. نتیجه می‌گیریم که همیشه اشتراک دو مجموعه‌ی همبند، همبند نیست.

مثال۶ ـ ۲. $A \subseteq \mathbb{C}^n$ را موزون نامیم هرگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$، $|\alpha| \leq 1$ داشته باشیم $\alpha A \subseteq A$. اگر $A \subseteq \mathbb{C}^n$ موزون باشد، آنگاه همبند است. اگر همبند نباشد، مجموعه‌های باز G و W از $\mathbb{C}^n$ وجود دارند که یک ناهمبندی برای A است. چون A موزون است، لذا $0 \in A$. فرض کنیم $0 \in G \cap A$ و $x \in W \cap A$. قرار می‌دهیم

$$H_1 = \{t \in [0, 1];\ tx \in G \cap A\},\ H_2 = \{t \in [0, 1];\ tx \in W \cap A\}$$

ثابت می‌کنیم H_1 و H_2 یک ناهمبندی برای $[0, 1]$ است. چون $0 \in G \cap A$ و $x \in W \cap A$، لذا H_1 و H_2 ناتهی هستند. اگر $0 \leq t \leq 1$، چون A موزون است لذا $tx \in A$. چون G و W یک ناهمبندی برای A است، بنابراین $t \in H_1 \cup H_2$ و $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. برای این‌که ثابت کنیم که H_1 و H_2 یک ناهمبندی برای $[0, 1]$ است، تنها بایستی ثابت کنیم H_1 و H_2 در $[0, 1]$ باز هستند. فرض کنید $t \in H_1$، پس $tx \in G \cap A$. چون G باز است، لذا r ای موجود است که $S_r(tx) \subseteq G$. اگر $s \in [0, 1]$ و $|t - s| < \frac{r}{\|x\|}$، خواهیم داشت $\|tx - sx\| = |t - s|\ \|x\| < r$ و لذا $sx \in G \cap A$. این نتیجه می‌دهد که H_1 در $[0, 1]$ باز است. به همین صورت H_2 در $[0, 1]$ باز است و لذا $[0, 1]$ ناهمبند است که یک تناقض است.

مثال۶ ـ ۳. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک همبند بوده که دارای حداقل دو عنصر باشد. عنصر $x_0 \in X$ را در نظر گرفته و تابع $f(x) = d(x, x_0)$ را روی فضای X تعریف می‌کنیم. چون f پیوسته و X همبند است، بنابراین برد f زیرمجموعه‌ای همبند از $\mathbb{R}$ است که حداقل دو عنصر دارد. بنابراین برد f یک بازه است و لذا ناشماراست. از این‌جا نتیجه می‌شود که X حداکثر شمارا نیست. بنابراین هر فضای متریک همبند که حداقل دو عضو دارد، حداکثر شمارا نیست.

مثال۶ ـ ۴. فرض کنیم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و $a, b, k \in \mathbb{R}$. اگر $f(a) \leq k \leq f(b)$، آنگاه $c \in \mathbb{R}$ موجود است که $f(c) = k$. در حقیقت از آنجا که $\mathbb{R}$ همبند است، لذا برد f نیز همبند است. پس برد f یک بازه است و بنابراین k در برد f قرار دارد.

همان‌طور که ایده‌ال‌های ماکسیمال در یک حلقه نقش اساسی دارند زیرمجموعه‌های همبند ماکسیمال نیز در فضاهای توپولوژیک از اهمیت خاصی برخوردارند. ما ابتدا به تعریف مؤلفه‌ی همبند یک فضا پرداخته و از آن برای ادامه‌ی بحث استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک و $x \in X$. D را مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های همبند شامل x در نظر می‌گیریم. چون $\{x\}$ همبند شامل x است، لذا D ناتهی است. $(D, \subseteq)$ یک

مجموعه‌ی مرتب جزئی است. اگر $\{D_\alpha;\ \alpha\in I\}$ یک زنجیر در D باشد، چون اشتراک هر دو عنصر از این خانواده ناتهی است بنابراین اجتماع آنها نیز همبند است. این نتیجه می‌دهد که هر زنجیر در D دارای یک کران بالا در D است و لذا D دارای عضو ماکسیمالی چون C_x است. در حقیقت C_x بزرگترین مجموعه‌ی همبند شامل x است که به آن یک مؤلفه‌ی فضای X گوییم. دیدیم که بستار یک مجموعه‌ی همبند، همبند است و بنابراین مؤلفه‌های یک فضا بسته هستند. دقت کنید که اگر C_x و C_y دو مؤلفه از فضای X باشند و $C_x\cap C_y\neq\emptyset$، در آن‌صورت $C_x\cup C_y$ همبند است. چون $C_x\subseteq C_x\cup C_y$ و $C_y\subseteq C_x\cup C_y$، از مؤلفه بودن C_x و C_y نتیجه می‌گیریم که

$$C_y=C_x\cup C_y \quad \text{و} \quad C_x=C_x\cup C_y$$

یعنی $C_x=C_y$. از آنجا که هر عنصر در یک مؤلفه قرار دارد، با استفاده از توضیحات فوق نتیجه می‌گیریم که مؤلفه‌ها، فضای X را افراز می‌کنند.

با شیوه‌ای مشابه می‌توان دید که هر مجموعه‌ی همبند در یک مؤلفه قرار دارد. مؤلفه‌های فضای گسسته، تک نقطه‌ای هستند و فضاهای همبند فقط یک مؤلفه دارند.

مثال۶ ـ ۵. فرض کنیم هر دو عنصر از یک فضای توپولوژیک (X,τ) در یک مجموعه‌ی همبند قرار داشته باشند. فرض کنیم C_x و C_y به‌ترتیب مؤلفه‌های x و y بوده و A نیز مجموعه‌ی همبندی باشد که این دو عنصر را شامل است. چون A هر یک از مؤلفه‌های C_x و C_y را قطع می‌کند، لذا $C_x\cup A$ و $C_y\cup A$ همبند هستند. اما C_x و C_y مؤلفه بوده و لذا $C_x\cup A=C_x$ و $C_y\cup A=C_y$. از این دو رابطه نتیجه می‌گیریم که $A\subseteq C_x\cap C_y$. بنابراین $C_x\cup C_y$ همبند و شامل مؤلفه‌های C_x و C_y می‌باشند. از مؤلفه بودن C_x و C_y نتیجه می‌گیریم که $C_x=C_x\cup C_y=C_y$. بنابراین X تنها یک مؤلفه دارد و لذا همبند است.

قضیه۶ ـ ۵. *همبندی خاصیت حاصل‌ضربی است.*

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که حاصل‌ضرب هر دو فضای همبند، همبند است. فرض کنیم (X_1,τ_1) و (X_2,τ_2) دو فضای همبند باشند. ثابت می‌کنیم دو عنصر (x_1,y_1) و (x_2,y_2) در یک مجموعه‌ی همبند قرار دارند. برای این‌کار فضای $\{x_1\}\times X_2$ با فضای X_2 همیومورف و لذا همبند است. همین‌طور فضای $X_1\times\{y_2\}$ با فضای X_1 همیومورف و لذا همبند است. از طرفی

$$(x_1,y_2)\in\{x_1\}\times X_2\cap X_1\times\{y_2\}$$

و بنابراین $\{x_1\}\times X_2\cup X_1\times\{y_2\}$ همبند و شامل (x_1,y_1) و (x_2,y_2) است. بنابراین $X_1\times X_2$ همبند است.

اکنون فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از فضاهای همبند باشد. x را از فضای حاصل‌ضرب این خانواده انتخاب و مؤلفه شامل x را با نماد C_x نمایش می‌دهیم. ادعا می‌کنیم این مؤلفه در فضای حاصل‌ضربی چگال است. فرض کنیم $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$ یک مجموعه‌ی باز پایه‌ای باشد. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط از فضای حاصل‌ضربی که در مؤلفه‌ی $\alpha \neq \alpha_i$، x_α و در مؤلفه‌ی α_i ها عناصر X_{α_i} ها قرار دارند را با نماد H نمایش می‌دهیم. واضح است که H با فضای $X_{\alpha_1} \times \cdots \times X_{\alpha_n}$ همیومورف است و بنابه حالت قبل این فضا همبند و بنابراین H همبند است. چون $x \in H$ و C_x مؤلفه‌ی x است، لذا $H \subseteq C_x$. از طرف دیگر H مجموعه‌ی پایه‌ای فوق را قطع می‌کند و لذا مجموعه‌ی پایه‌ای فوق، C_x را قطع می‌کند. یعنی C_x در فضای حاصل‌ضربی چگال است. اما هر مؤلفه بسته است و بنابراین $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha = C_x$ همبند است. ■

مثال ۶ ـ ۶. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه از فضای توپولوژیک (X, τ) باشند. اگر A و B هر کدام حداقل دارای دو عضو باشند، در آن‌صورت هیچ همیومورفیسمی از $[0, 1]$ به‌روی $A \times B$ وجود ندارد. در حقیقت فرض کنیم f همیومورفیسمی‌بین $[0, 1]$ و $A \times B$ باشد. فرض کنیم a_1 و a_2 عناصری از A و b_1 و b_2 عناصری از B باشند. چون $[0, 1]$ فشرده و همبند است، لذا $A \times B$ فشرده و همبند می‌باشد. بنابراین A و B فشرده و همبند هستند. قرار می‌دهیم

$$I_{a_1} = f^{-1}(\{a_1\} \times B), \quad I_{a_2} = f^{-1}(\{a_2\} \times B)$$

و

$$I_{b_1} = f^{-1}(A \times \{b_1\}), \quad I_{b_2} = f^{-1}(A \times \{b_2\})$$

در این‌صورت I_{a_1}، I_{a_2}، I_{b_1} و I_{b_2} زیرمجموعه‌های همبند و فشرده از $[0, 1]$ هستند. بعلاوه این‌که

$$I_{a_1} \cap I_{a_2} = \emptyset, \quad I_{b_1} \cap I_{b_2} = \emptyset$$

و برای هر $i, j \in \{1, 2\}$،

$$I_{a_i} \cap I_{b_j} = f^{-1}\big((a_i, b_j)\big)$$

که وجود چنین مجموعه‌هایی غیر ممکن است. پس حداقل A یا B تک عضوی هستند.

مثال ۶ ـ ۷. فرض کنیم C_x مؤلفه‌ی x در فضای حاصل‌ضرب $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$ باشد. در این‌صورت برای هر α، $\pi_\alpha(C_x)$ مجموعه‌ای همبند و شامل x_α است. چون حاصل‌ضرب هر تعداد مجموعه‌ی همبند، مجموعه‌ای همبند است، بنابراین $\prod\limits_{\alpha\in I} \pi_\alpha(C_x)$ همبند و شامل x است. از مؤلفه بودن C_x داریم $\prod\limits_{\alpha\in I} \pi_\alpha(C_x) \subseteq C_x$. از طرف دیگر $C_x \subseteq \prod\limits_{\alpha\in I} \pi_\alpha(C_x)$ و لذا

$$C_x = \prod_{\alpha \in I} \pi_\alpha(C_x)$$

چون حاصل‌ضرب مؤلفه‌های x_α ها، یعنی $\prod_{\alpha \in I} C_{x_\alpha}$ همبند شامل x است، بنابراین

$$C_x = \prod_{\alpha \in I} C_{x_\alpha}.$$

درنتیجه ارتباط بین مؤلفه‌های فضای حاصل‌ضرب با مؤلفه‌های فضای مختصی مشخص می‌شود. بعلاوه $\pi_\alpha(C_x) = C_{x_\alpha}$.

قضیه۶ ــ ۶. *فرض کنیم G و W زیرمجموعه‌های بازی از فضای توپولوژیک (X, τ) باشند. اگر $G \subseteq W$ و W هیچ نقطه‌ی مرزی از G را شامل نباشد، آنگاه G اجتماعی از مؤلفه‌های W است.*

برهان. فرض کنیم $x \in G$ و C_x مؤلفه‌ای در W شامل x باشد. چون W هیچ نقطه‌ی مرزی از G را شامل نیست، بنابراین

$$C_x = (C_x \cap G) \cup (C_x \cap \overline{G}^c).$$

چون هر مؤلفه مجموعه‌ای همبند است، لذا $C_x \cap \overline{G}^c = \emptyset$. بنابراین $C_x \subseteq G$، یعنی $G = \bigcup_{x \in G} C_x$ که C_x مؤلفه‌ی x در W است. ■

۶ــ۳ همبندی موضعی

همان‌طور که یک فضای نافشرده ممکن است فشرده موضعی باشد، فضای ناهمبند نیز ممکن است همبند موضعی باشد. همبند موضعی نیز مورد توجه زیاد بوده که در این بخش مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تعریف۶ ــ ۷. فضای توپولوژیک (X, τ) را همبند موضعی گوییم هرگاه مجموعه‌های باز همبند در این فضا، یک پایه برای τ باشد.

$\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی همبند و همبند موضعی است. $\mathbb{R}$ با توپولوژی گسسته همبند موضعی است ولی همبند نیست. زیرفضای $A = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$ همبند موضعی است. اما $\overline{A} = A \cup \{0\}$ همبند موضعی نیست. در حقیقت اگر $G \cap \overline{A}$ مجموعه‌ی بازی شامل صفر باشد، r ای وجود دارد که $(-r, r) \cap \overline{A} \subseteq G \cap \overline{A}$. عدد طبیعی n را طوری اختیار می‌کنیم که $\frac{1}{n} < r$. عدد گنگ $\frac{1}{n+1} < t < \frac{1}{n}$ را در نظر می‌گیریم. به‌راحتی دیده می‌شود که $(-\infty, t) \cap \overline{A}$ و $(t, \infty) \cap \overline{A}$ یک ناهمبندی برای $G \cap \overline{A}$ است. لذا $\overline{A}$ همبند موضعی نیست. با ایده گرفتن از شیوه فوق دیده می‌شود

که $\mathbb{Q}$ همبند موضعی نیست و نتیجه‌ای که به‌دست می‌آید این است که همبندی موضعی موروثی نیست.

مثال۶ ـ ۸. برای هر عدد طبیعی n، پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ و $(1, \frac{1}{n})$ را در نظر می‌گیریم. زیرفضای A از $\mathbb{R}^2$ متشکل از همه‌ی پاره خط‌هایی که نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ را به نقطه‌ی $(1, \frac{1}{n})$ وصل می‌کنند، همراه با بازه $[\frac{1}{2}, 1]$ را در نظر می‌گیریم. چون همه‌ی این خطوط همبند و در نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ اشتراک دارند، لذا مجموعه‌ی همه‌ی این خطوط همبند است. از طرف دیگر بازه‌ی $[\frac{1}{2}, 1]$ در بستار مجموعه‌ی خطوط فوق قرار دارد و بنابراین A همبند است. ادعا می‌کنیم A همبند موضعی نیست. فرض کنیم G مجموعه‌ی بازی شامل نقطه‌ی $(\frac{3}{4}, \circ)$ بوده که قطر آن کمتر از $\frac{1}{4}$ است. $r > \circ$ را طوری اختیار می‌کنیم که $S_r\left((\frac{3}{4}, \circ)\right) \subseteq G$. بنابه خاصیت ارشمیدسی، nای وجود دارد که $\frac{1}{n} < r$. عدد گنگ $\frac{1}{n+1} < t < \frac{1}{n}$ را در نظر می‌گیریم. به‌راحتی دیده می‌شود که

$$H_1 = \{(x, y);\ y > tx\} \cap A, \quad H_2 = \{(x, y),\ y < tx\} \cap A$$

یک ناهمبندی برای مجموعه‌ی $G \cap A$ است و لذا $G \cap A$ همبند نیست. از توضیحات فوق نتیجه می‌گیریم که A همبند موضعی نیست.

مثال۶ ـ ۹. قرار می‌دهیم $A = \left\{\left(x, \sin\frac{\pi}{x}\right);\ \circ < x \leq 1\right\} \cup \{(\circ, \circ)\}$. چون $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ روی $(\circ, 1]$ پیوسته است، لذا $\left\{\left(x, \sin\frac{\pi}{x}\right);\ \circ < x \leq 1\right\}$ همبند و بنابراین A همبند است. ثابت می‌کنیم A همبند موضعی نیست. اگر $U = S_{\frac{1}{2}}\left((\circ, \circ)\right)$، ثابت می‌کنیم $U \cap A$ شامل هیچ مجموعه‌ی باز همبندی شامل $(\circ, \circ)$ در A نیست. فرض کنیم چنین نباشد و W مجموعه‌ی بازی شامل $(\circ, \circ)$ از $\mathbb{R}^2$ موجود باشد که $W \cap A$ همبند و مشمول $U \cap A$ باشد. عدد طبیعی n موجود است که برای هر $m > n$، $(\frac{1}{m+1}, \circ) \in W$. از طرف دیگر از پیوستگی تابع تصویر نتیجه می‌شود که $\pi_1(W \cap A)$ همبند است. به‌سادگی دیده می‌شود که برای هر $m > n$ و $q \in [-1, 1]$، $(\frac{2}{2m+3}, q) \notin W \cap A$. این نتیجه می‌دهد که $(-\infty, \frac{2}{2m+3})$ و $(\frac{2}{2m+3}, \infty)$ یک ناهمبندی برای $\pi_1(W \cap A)$ است که یک تناقض است. بنابراین $U \cap A$ شامل هیچ مجموعه‌ی باز و همبند شامل $(\circ, \circ)$ در A نیست.

قضیه۶ ـ ۸. *گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) *تصویر هر فضای همبند موضعی تحت تابع پیوسته و باز یک فضای همبند موضعی است.*

ب) *اگر حاصل‌ضرب یک خانواده از فضاهای توپولوژیک همبند موضعی باشد، هر فضای مختصی نیز همبند موضعی است.*

ج) *همبند موضعی خاصیت حاصل‌ضربی نیست.*

برهان. فرض کنیم f تابعی پیوسته و باز از فضای همبند موضعی (X_1, τ_1) به‌روی فضای توپولوژیک (X_2, τ_2) باشد. فرض کنیم W مجموعه‌ی بازی شامل y از فضای X_2 باشد. چون f پوشاست، لذا $x \in X_1$ وجود دارد که $f(x) = y$. $f^{-1}(W)$ مجموعه‌ی بازی شامل x است و لذا مجموعه‌ی باز همبندی چون G شامل x موجود است که $G \subseteq f^{-1}(W)$. از آنجا که f باز و پیوسته است، بنابراین $f(G)$ باز، همبند و شامل y است. اما

$$y \in f(G) \subseteq f\left(f^{-1}(W)\right) \subseteq W$$

لذا X_2 همبند موضعی است.

برای اثبات قسمت (ب)، چون تابع تصویر پیوسته، پوشا و باز است بنابراین در صورت همبند موضعی بودن فضای حاصل‌ضرب، فضاهای مختصی نیز همبند موضعی هستند.

برای پاسخ به قسمت (ج)، مثال نقضی ارائه می‌کنیم. برای هر n، فضای $X_n = \{0, 1\}$ را با توپولوژی گسسته در نظر می‌گیریم. برای هر n، X_n همبند موضعی است. فرض کنیم G مجموعه‌ی بازی از فضای حاصل‌ضرب $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ شامل دنباله $x = (0, 0, \dots)$ باشد. مجموعه‌ی باز پایه‌ای چون $\bigcap_{i=1}^{m} \pi_{n_i}^{-1}(G_{n_i})$ شامل x وجود دارد که مشمول G است. قرار می‌دهیم $k = n_1 + \cdots + n_m + 1$. از آنجا که در مؤلفه‌ی k ام $\bigcap_{i=1}^{m} \pi_{n_i}^{-1}(G_{n_i})$، X_k است، بنابراین $\pi_k(G) = \{0, 1\}$. تعریف کنید $H_1 = \pi_k^{-1}(\{0\})$ و $H_2 = \pi_k^{-1}(\{1\})$. به‌راحتی دیده می‌شود که H_1 و H_2 یک ناهمبندی برای G است و لذا فضای حاصل‌ضرب فوق همبند موضعی نیست. ■

قضیه ۶ ـ ۹. *فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک همبند موضعی باشد. فرض کنیم به‌جز حداکثر تعداد متناهی از آنها بقیه همبند باشند، در آن‌صورت فضای حاصل‌ضرب آنها همبند موضعی است.*

برهان. فرض کنیم که تنها X_{α_1} و ... و X_{α_n} همبند نباشند و بقیه‌ی X_α ها همبند باشند. فرض کنیم G مجموعه‌ی بازی از $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ شامل x باشد. عنصر پایه‌ای چون $\bigcap_{i=1}^{m} \pi_{\alpha_{i+n}}^{-1}(G_{\alpha_{i+n}})$ شامل x وجود دارد که $\bigcap_{i=1}^{m} \pi_{\alpha_{i+n}}^{-1}(G_{\alpha_{i+n}}) \subseteq G$. توجه کنید که لزوماً $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ و $\{\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{n+m}\}$ از هم جدا نیستند. فرض کنیم

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \cup \{\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+m}\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$$

برای هر $1 \leq i \leq k$ مجموعه‌های باز همبند H_{α_i} وجود دارند که $x_{\alpha_i} \in H_{\alpha_i} \subseteq G_{\alpha_i}$. چون حاصل‌ضرب هر تعداد همبند همبند است، لذا مجموعه‌ی باز پایه‌ای $\bigcap_{i=1}^{k} \pi_{\alpha_i}^{-1}(H_{\alpha_i})$ همبند است. اما

$$\bigcap_{i=1}^{k} \pi_{\alpha_i}^{-1}(H_{\alpha_i}) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i}) \subseteq G$$

بنابراین فضای حاصل‌ضرب فوق همبند موضعی است. ■

نکته۳. در هر فضای همبند موضعی هر مؤلفه باز است. در حقیقت فرض کنیم C یک مؤلفه از فضای همبند موضعی (X, τ) باشد. برای هر $x \in C$، مجموعه‌ی باز همبند G_x وجود دارد که $x \in G_x$. چون $C \cap G_x \neq \emptyset$ و C و G_x همبند هستند، لذا $C \cup G_x$ همبند است. از طرفی $C \subseteq G_x \cup C$ و C یک مؤلفه است. بنابراین $C = G_x \cup C$، یعنی $G_x \subseteq C$. پس C باز است.

۶-۴ همبند راهی

فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد. منظور از یک منحنی در فضای X، تصویر بازه‌ای بسته تحت تابعی پیوسته است. همین‌طور منظور از یک راه در X، تابعی پیوسته از بازه بسته $[0, 1]$ به‌توی X است. اگر f یک راه در X باشد، $f(0)$ را نقطه‌ی آغازی و $f(1)$ را نقطه‌ی پایانی گوییم. اگر x و y دو نقطه از X و $f : [0, 1] \to X$ راهی با نقطه‌ی آغازین x و نقطه‌ی پایانی y باشد، در آن‌صورت $h(t) = f(1 - t)$ راهی از y به x است. یعنی نقطه‌ی آغازین y و نقطه‌ی پایانی x است.

تعریف۶ ـ ۱۰. فضای توپولوژیک (X, τ) را همبند راهی گوییم هرگاه برای هر x و y از X، راهی چون f موجود باشد که $f(0) = x$ و $f(1) = y$.

گوی به مرکز صفر و شعاع r در $\mathbb{R}^n$ همبند راهی است. در حقیقت فرض کنیم x و y دو نقطه از این گوی باشند. تابع $f : [0, 1] \to S_r(0)$ با ضابطه‌ی $f(t) = ty + (1 - t)x$ راهی بین دو نقطه‌ی x و y است. هر فضای توپولوژیک گسسته با بیش از یک عنصر همبند راهی نیست. هر فضای توپولوژیک ناگسسته همبند راهی است. اولین سوالی که پیش می‌آید این است که ارتباط بین همبندی و همبندی راهی چیست؟ در قضیه‌ی زیر ثابت می‌کنیم که هر فضای همبند راهی، همبند است.

قضیه۶ ـ ۱۱. *هر فضای همبند راهی، همبند است.*

برهان. فرض کنیم (X,τ) یک فضای همبند راهی باشد و $x\in X$. برای هر $y\in X$، تابع پیوسته‌ی $f:[\circ,\mathord{\textrm{۱}}]\to X$ وجود دارد که $f(\circ)=x$ و $f(\textrm{۱})=y$. چون $[\circ,\textrm{۱}]$ همبند است، لذا $f([\circ,\textrm{۱}])$ نیز همبند است. از این موضوع نتیجه می‌گیریم که هر دو نقطه از X در یک مجموعه‌ی همبند قرار دارند و بنابراین X همبند است. ■

مثال۶ ـ ۱۰. قرار می‌دهیم $K=\{\frac{\textrm{۱}}{n};\ n\in\mathbb{N}\}$ و $X=([\circ,\textrm{۱}]\times\{\circ\})\cup(K\times[\circ,\textrm{۱}])$. ثابت می‌کنیم X همبند است. برای این‌کار نشان می‌دهیم هر دو نقطه از X در یک مجموعه‌ی همبند قرار دارند. فرض کنیم $(\frac{\textrm{۱}}{n},y_\textrm{۱})$ و $(\frac{\textrm{۱}}{m},y_\textrm{۲})$ دو نقطه از X باشند. در آن‌صورت مجموعه‌های $A=\{(\frac{\textrm{۱}}{n},y);\ \circ\le y\le\textrm{۱}\}$، $B=\{(x,\circ);\ \circ\le x\le\textrm{۱}\}$ و $C=\{(\frac{\textrm{۱}}{m},y);\ \circ\le y\le\textrm{۱}\}$ همبند می‌باشند. از طرف دیگر $B\cap A\neq\emptyset$ و $B\cap C\neq\emptyset$. بنابراین $B\cup A$ و $B\cup C$ همبند و لذا $A\cup B\cup C$ همبند و شامل $(\frac{\textrm{۱}}{n},y_\textrm{۱})$ و $(\frac{\textrm{۱}}{m},y_\textrm{۲})$ است. به‌راحتی دیده می‌شود که هر نقطه‌ی $(\frac{\textrm{۱}}{n},y)$ و $(x,\circ)$ که در آن $\circ\le y\le\textrm{۱}$ و $\circ\le x\le\textrm{۱}$، نیز در یک مجموعه‌ی همبند قرار دارند. بنابراین

$$X=\{(\frac{\textrm{۱}}{n},y);\ n\in\mathbb{N},\ \circ\le y\le\textrm{۱}\}\cup\{(x,\circ);\ \circ\le x\le\textrm{۱}\}$$

همبند است. چون $(\circ,\textrm{۱})\in\overline{X}$، لذا $X\cup\{(\circ,\textrm{۱})\}$ نیز همبند است. نشان می‌دهیم که $X\cup\{(\circ,\textrm{۱})\}$ همبند راهی نیست. فرض کنیم $f:[\circ,\textrm{۱}]\to X\cup\{(\circ,\textrm{۱})\}$ تابعی پیوسته باشد که $f(\circ)=(\circ,\textrm{۱})$. گوی باز $S_{\frac{\textrm{۱}}{\textrm{۲}}}((\circ,\textrm{۱}))$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم برای t ای، $f(t)=(\circ,\textrm{۱})$. چون f تابعی پیوسته است، گوی بازی مانند G شامل t وجود دارد که $f(G)\subseteq S_{\frac{\textrm{۱}}{\textrm{۲}}}((\circ,\textrm{۱}))$. فرض کنیم برای n و s ای، $(\frac{\textrm{۱}}{n},s)\in f(G)$. عدد گنگ $\circ<q<\frac{\textrm{۱}}{n}$ را اختیار می‌کنیم. واضح است $(\frac{\textrm{۱}}{\textrm{۳}},\textrm{۲})\times(-\infty,q)$ و $(\frac{\textrm{۱}}{\textrm{۳}},\textrm{۲})\times(q,\infty)$ یک ناهمبندی برای $f(G)$ است. این تناقض است زیرا G همبند است. این نتیجه می‌دهد که $G\subseteq f^{-\textrm{۱}}(\{(\circ,\textrm{۱})\})$ و بنابراین $f^{-\textrm{۱}}(\{(\circ,\textrm{۱})\})$ باز است. اما $f^{-\textrm{۱}}(\{(\circ,\textrm{۱})\})$ بسته نیز هست. چون $[\circ,\textrm{۱}]$ همبند است، لذا $f^{-\textrm{۱}}(\{(\circ,\textrm{۱})\})=[\circ,\textrm{۱}]$. این نشان می‌دهد که هیچ راهی بین $(\circ,\textrm{۱})$ و $(\textrm{۱},\circ)$ وجود ندارد.

قضیه۶ ـ ۱۲. *فضای توپولوژیک (X,τ) همبند راهی است اگر و تنها اگر هر عنصر $y\in X$ را بتوان توسط راهی به عنصر ثابت $x\in X$ وصل کرد.*

برهان. اگر X همبند راهی باشد، آنگاه بین هر دو عنصر یک راه وجود دارد و لذا هر عنصر از X توسط راهی به عنصر ثابت x وصل می‌شود.

برعکس، فرض کنیم x_1 و x_2 دو عنصر از X بوده و f_1 و f_2 راه‌هایی باشند که به‌ترتیب x_1 را به x و x را به x_2 وصل می‌کنند. به عبارت دیگر $f_1(0) = x_1$ ،$f_1(1) = f_2(0) = x$ و $f_2(1) = x_2$. برای هر $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$، قرار می‌دهیم $f(t) = f_1(2t)$ و برای هر $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$، قرار می‌دهیم $f(t) = f_2(2t - 1)$. واضح است f راهی بین x_1 و x_2 است. ■

نکته۴. فرض کنیم $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های همبند راهی از فضای توپولوژیک (X, τ) باشد. اگر $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$، در آن‌صورت $A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ همبند راهی است. در حقیقت $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ را انتخاب می‌کنیم. اگر $y \in A$ عنصری دلخواه باشد، α ای هست که $y \in A_\alpha$. چون A_α همبند راهی است، لذا تابع پیوسته $f : [0, 1] \to A_\alpha$ وجود دارد که $f(0) = x$ و $f(1) = y$. اگر $f' : [0, 1] \to A$ به‌صورت $f'(t) = f(t)$ تعریف شود، برای هر G باز در X، $f'^{-1}(G \cap A) = f^{-1}(G \cap A_\alpha)$. بنابراین f' پیوسته و لذا f' راهی در A است که x را به y وصل می‌کند. بنابراین A همبند راهی است.

قضیه۶ ـ ۱۳. *تصویر فضای همبند راهی تحت تابع پیوسته یک فضای همبند راهی است.*

برهان. فرض کنیم (X_1, τ_1) یک فضای همبند راهی و h تابعی پیوسته و پوشا از (X_1, τ_1) به‌روی فضای توپولوژیک (X_2, τ_2) باشد، اگر y_1 و y_2 دو عنصر از X_2 باشند، عناصر x_1 و x_2 از X_1 موجودند که $h(x_1) = y_1$ و $h(x_2) = y_2$. راه $f : [0, 1] \to X_1$ با نقطه‌ی آغازین x_1 و پایانی x_2 در X_1 را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم $h \circ f : [0, 1] \to X_2$ راهی است که نقطه‌ی y_1 را به نقطه‌ی y_2 وصل می‌کند. در حقیقت $h \circ f$ ترکیب دو تابع پیوسته بوده و بعلاوه $h \circ f(0) = h\big(f(0)\big) = h(x_1) = y_1$ و $h \circ f(1) = h\big(f(1)\big) = h(x_2) = y_2$. بنابراین (X_2, τ_2) همبند راهی است. ■

قضیه۶ ـ ۱۴. *حاصل‌ضرب یک خانواده از فضاهای همبند راهی، همبند راهی است اگر و تنها اگر هر فضای مختصی همبند راهی باشد.*

برهان. فرض کنیم حاصل‌ضرب یک خانواده از فضاهای توپولوژیک همبند راهی باشد. چون تابع تصویر پیوسته و پوشاست، بنابراین هر فضای مختصی همبند راهی است.

برعکس، فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ یک خانواده از فضاهای همبند راهی و x و y دو عنصر از فضای حاصل‌ضرب این خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد. برای هر $\alpha \in I$، تابع پیوسته $f_\alpha : [0, 1] \to X_\alpha$ موجود است که $f_\alpha(0) = x_\alpha$ و $f_\alpha(1) = y_\alpha$. تابع $f : [0, 1] \to \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ را با ضابطه‌ی $f(t) = \{f_\alpha(t)\}_{\alpha \in I}$ تعریف می‌کنیم. چون هر مؤلفه‌ی f یعنی f_αها پیوسته هستند، لذا

f پیوسته و $x = f(\circ)$ و $f(\text{۱}) = y$. بنابراین $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ همبند راهی است. ■

هر زیرمجموعه‌ی همبند راهی ماکسیمال از یک فضای توپولوژیک را یک مؤلفه راهی گوییم. در حقیقت شبیه حالت همبندی، همواره هر عنصر x از فضای توپولوژیک (X, τ) در یک مؤلفه راهی قرار دارد. دقت کنید که همیشه مؤلفه راهی در یک فضای توپولوژیک بسته نیست. برای مثال $A = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right);\ \circ < x \leq \text{۱} \right\}$ همبند راهی است ولی $\overline{A}$ همبند راهی نیست. به عبارت دیگر A یک مؤلفه راهی از $\overline{A}$ است ولی $\overline{A}$ همبند راهی نیست. به‌سادگی دیده می‌شود که مؤلفه‌های راهی، فضای توپولوژیک را افراز می‌کنند.

قضیه۶ ـ ۱۵. *در فضای توپولوژیک (X, τ) هر مؤلفه راهی باز است اگر و تنها اگر X همبند راهی موضعی باشد، یعنی برای هر $x \in X$ مجموعه‌ی باز همبند راهی مانند G_x موجود باشد که $x \in G_x$.*

برهان. اگر هر مؤلفه راهی باز باشد، برای هر x مؤلفه راهی شامل x مجموعه‌ی باز مورد نیاز است.

برعکس، فرض کنیم هر عنصر در یک مجموعه‌ی باز همبند راهی قرار گیرد. فرض کنید P مؤلفه راهی شامل x و G_x مجموعه‌ی باز همبند راهی شامل x باشد. چون $x \in G_x \cap P$، لذا $P \cup G_x$ همبند راهی است. اما P یک مؤلفه است، بنابراین $G_x \subseteq P$. نتیجه این‌که P باز است. ■

دقت کنید در حالتی که (X, τ) همبند موضعی راهی باشد هر مؤلفه بسته است. چرا که مؤلفه‌های راهی افرازی برای X هستند و بنابراین متمم یک مؤلفه راهی اجتماع مؤلفه‌های راهی دیگر است. اما در این فضا هر مؤلفه راهی باز است و لذا این متمم باز می‌باشد. یعنی مؤلفه بسته است.

نکته۵. فضای توپولوژیک (X, τ) همبند راهی است اگر و تنها اگر X همبند راهی موضعی و همبند باشد. در حقیقت اگر X همبند راهی باشد، بنابه قضایای قبلی، X همبند راهی موضعی و همبند است.

برعکس، چون هر مجموعه‌ی همبند شامل هیچ مجموعه‌ی هم باز و هم بسته نیست و چون هر مؤلفه راهی هم باز و هم بسته است. بنابراین X همبند راهی است.

از نکته بالا نتیجه می‌شود که زیرمجموعه‌های همبند و باز از $\mathbb{R}^n$، همبند راهی هستند.

۶ــ۵ همسانی

فرض کنیم f تابعی از فضای توپولوژیک (X, τ) به‌روی زیرمجموعه‌ی ناتهی Y باشد، قرار می‌دهیم $\tau_q = \{G \subseteq Y;\ f^{-1}(G) \in \tau\}$. τ_q یک توپولوژی روی Y است و تحت این توپولوژی f

تابعی پیوسته است. τ_q را توپولوژی تولید شده توسط تابع f گوییم. فرض کنید $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی فضای توپولوژیک (X, τ) و $\pi : X \to X/\sim$ با ضابطه‌ی $\pi(x) = [x]$ تعریف شود. توپولوژی تولید شده توسط تابع $\pi : X \to X/\sim$ روی مجموعه‌ی $X/\sim$، این مجموعه را به یک فضای توپولوژیک تبدیل می‌کند که به آن فضای خارج قسمتی گوییم.

مثال۶ ـ ۱۱. فرض کنیم $X = [\circ, \text{۱}] \times [\circ, \text{۱}]$ و رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ را روی X به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $t \in [\circ, \text{۱}]$،

$$(t, t) \sim (t, t) \quad \text{و} \quad (\text{۱}, \text{۱} - t) \sim (\circ, t)$$

فضای خارج قسمتی حاصل را نوار موبیوس گوییم.

قضیه۶ ـ ۱۶. *فضای توپولوژیک $(X_\text{۱}, \tau_\text{۱})$ و $(X_\text{۳}, \tau_\text{۳})$ و مجموعه‌ی ناتهی $X_\text{۲}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $f : (X_\text{۱}, \tau_\text{۱}) \to (X_\text{۲}, \tau_q)$ تابعی پوشا و $g : (X_\text{۱}, \tau_\text{۱}) \to (X_\text{۳}, \tau_\text{۳})$ تابعی پیوسته باشد. اگر برای هر $x_\text{۲} \in X_\text{۲}$، تابع g روی $f^{-\text{۱}}(\{x_\text{۲}\})$ تابع ثابت باشد، آنگاه*

الف) *$g \circ f^{-\text{۱}}$ تابعی پیوسته است.*

ب) *$g \circ f^{-\text{۱}}$ تابعی باز است اگر و تنها اگر برای هر $G \in \tau_\text{۱}$ که $G = f^{-\text{۱}}\big(f(G)\big)$، داشته باشیم $g(G) \in \tau_\text{۳}$.*

برهان. چون تابع g روی هر مجموعه به‌صورت $f^{-\text{۱}}(\{x_\text{۲}\})$ تابعی ثابت است، لذا $g \circ f^{-\text{۱}}$ تابع است. اکنون فرض کنیم $G \in \tau_\text{۳}$ و $x \in f^{-\text{۱}}\Big(f\big(g^{-\text{۱}}(G)\big)\Big)$، بنابراین $f(x) \in f\big(g^{-\text{۱}}(G)\big)$. برای $t \in g^{-\text{۱}}(G)$ ای، $f(x) = f(t)$. چون $x \in f^{-\text{۱}}(\{f(t)\})$ و g روی مجموعه‌ی اخیر تابعی ثابت است، لذا $g(x) = g(t) \in G$ و لذا $f^{-\text{۱}}\Big(f\big(g^{-\text{۱}}(G)\big)\Big) = g^{-\text{۱}}(G)$. اما

$$f^{-\text{۱}}\big((g \circ f^{-\text{۱}})^{-\text{۱}}(G)\big) = f^{-\text{۱}}\Big(f\big(g^{-\text{۱}}(G)\big)\Big) = g^{-\text{۱}}(G)$$

در $X_\text{۱}$ باز است. درنتیجه $(g \circ f^{-\text{۱}})^{-\text{۱}}(G)$ در $X_\text{۲}$ باز است، یعنی $g \circ f^{-\text{۱}}$ پیوسته است.

برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنیم $g \circ f^{-\text{۱}}$ باز و G زیرمجموعه‌ی باز از $X_\text{۱}$ بوده که $G = f^{-\text{۱}}\big(f(G)\big)$. از این‌که $G = f^{-\text{۱}}\big(f(G)\big)$ باز است، لذا $f(G) \in \tau_q$. چون $g \circ f^{-\text{۱}}$ باز است، لذا $g \circ f^{-\text{۱}}\big(f(G)\big)$ باز است. اما $G = f^{-\text{۱}}\big(f(G)\big)$ و بنابراین $g(G)$ باز است.

برعکس، فرض کنیم G مجموعه‌ی بازی در $X_\text{۲}$ باشد. لذا $f^{-\text{۱}}(G)$ در $X_\text{۱}$ باز است و $f^{-\text{۱}}\Big(f\big(f^{-\text{۱}}(G)\big)\Big) = f^{-\text{۱}}(G)$. بنابه فرض $g\big(f^{-\text{۱}}(G)\big)$ باز است و لذا $g \circ f^{-\text{۱}}(G)$ باز است. ■

مثال۶ ـ ۱۲. $X = [\circ, \text{۱}]$ را با توپولوژی اقلیدسی در نظر می‌گیریم. رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ را روی X به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\sim = \{(x,x);\ x \in [0,1]\} \cup \{(0,1),(1,0)\}.$$

در آن‌صورت فضای خارج قسمتی $X/\sim$ با دایره همیومورف است. در حقیقت فرض کنیم S^1 دایره‌ی واحد به مرکز صفر باشد. تابع $f : S^1 \to X/\sim$ را به‌صورت $f(e^{2\pi i t}) = [t]$ تعریف می‌کنیم. برای هر دو عنصر t و s در $[0,1]$، $e^{2\pi i t} = e^{2\pi i s}$ اگر و تنها اگر برای عدد صحیح k، $2\pi t - 2\pi s = 2k\pi$ اگر و تنها اگر برای عدد صحیح $-1 \le k \le 1$، $t - s = k$ اگر و تنها اگر $s \sim t$ اگر و تنها اگر $[s] = [t]$. این نشان می‌دهد که f تابعی یک به یک است. به‌راحتی دیده می‌شود که f پوشاست. تابع $g : [0,1] \to S^1$ را با ضابطه‌ی $g(t) = e^{2\pi i t}$ تعریف می‌کنیم. واضح است که تابع g روی هر مجموعه به‌صورت $\pi^{-1}(\{[t]\})$ تابعی ثابت است و لذا بنابه قضیه‌ی قبل $g \circ \pi^{-1} : X/\sim \to S^1$ تابعی پیوسته است. بنابراین f تابعی باز است. با استفاده از قسمت (ب) قضیه‌ی قبل به‌راحتی دیده می‌شود که f یک همیومورفیسم است.

در مثال قبلی از نظر شهودی ما ابتدا و انتهای بازه‌ی $[0,1]$ را یکی در نظر گرفتیم. انتظار داشتیم فضای حاضر با دایره یکی باشد و این‌گونه نیز هست. رابطه‌ی هم‌ارزی ذکر شده در مثال قبلی را روی $[0,1]$ در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ی $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ در $[0,1]$ باز است. چون $\pi^{-1}\left(\pi\left(\left[0,\frac{1}{2}\right)\right)\right) = \left[0,\frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$، لذا $\pi\left(\left[0,\frac{1}{2}\right)\right)$ در $[0,1]/\sim$ باز نیست و لذا تابع π همیشه باز نخواهد بود.

قضیه۶ ـ ۱۷. *تابع پیوسته $f : (X_1,\tau_1) \to (X_2,\tau_2)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\sim_1$ و $\sim_2$ دو رابطه‌ی هم‌ارزی به‌ترتیب روی X_1 و X_2 باشند طوری که اگر $x \sim_1 y$ آنگاه $f(x) \sim_2 f(y)$. در آن‌صورت تابع $f' : X_1/\sim_1 \to X_2/\sim_2$ با ضابطه‌ی $f'([x]) = [f(x)]$ پیوسته است.*

برهان. چون f و π توابعی پیوسته هستند، لذا $\pi \circ f$ پیوسته است. بنابه تعریف $f' \circ \pi = \pi \circ f$. اکنون فرض کنیم G زیرمجموعه‌ی بازی از $X_2/\sim_2$ باشد، لذا $\pi^{-1}\left(f'^{-1}(G)\right) = f^{-1}\left(\pi^{-1}(G)\right) = (\pi o f)^{-1}(G)$ در X_1 باز است و لذا $f'^{-1}(G)$ در $X_1/\sim_1$ باز است. این نشان می‌دهد که f' پیوسته است. ■

نکته۶. فضای توپولوژیک (X,τ) را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از $X \times X$ و تابع $\pi : X \to X/\sim$ نیز باز باشد. اگر $[x] \neq [y]$، در آن‌صورت $(x,y) \notin \sim$. مجموعه‌ی باز پایه‌ای $G \times W$ شامل (x,y) وجود دارد که $G \times W \cap \sim = \emptyset$. چون π باز است، لذا $\pi(G)$ و $\pi(W)$ باز و به‌ترتیب شامل $[x]$ و $[y]$ می‌باشند. ادعا می‌کنیم که $\pi(G) \cap \pi(W) = \emptyset$. اگر $[z] \in \pi(G) \cap \pi(W)$، آنگاه برای یک $t \in G$ و $s \in W$ خواهیم داشت $[s] = [z] = [t]$. نتیجه این‌که $(t,s) \in \sim \cap G \times W$ که یک تناقض است. این نشان می‌دهد که

$X/\sim$ فضایی هاسدورف است.

مثال۶ ــ ۱۳. رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim_1$ را روی $[0,1]$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\sim_1 = \{(x,x);\ x \in [0,1]\} \cup \{(0,1),(1,0)\}$$

همین‌طور رابطه‌ی $\sim_2$ را روی $\mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$x \sim_2 y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

چون تابع جزئیت از $[0,1]$ به‌توی $\mathbb{R}$ پیوسته است لذا تابع $f : [0,1]/\sim_1 \to \mathbb{R}/\sim_2$ با ضابطه‌ی $f([t]) = [f(t)]$ پیوسته است. به‌راحتی دیده می‌شود که f تابعی دو سوئی است. چون $[0,1]$ فشرده است پس $[0,1]/\sim_1$ فشرده است. اما $\pi^{-1}\big(\pi(a,b)\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\} + (a,b)$ در $\mathbb{R}$ باز است که نتیجه می‌دهد $\pi\big((a,b)\big)$ در $\mathbb{R}/\sim_2$ باز است و لذا π باز است. از طرف دیگر تابع $(x,y) \mapsto x - y$ از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ به‌توی $\mathbb{R}$ پیوسته است، لذا $\sim_2 = \{(x,y);\ x - y \in \mathbb{Z}\}$ در $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ بسته است. بنابراین $\mathbb{R}/\sim_2$ هاسدورف است. از این توضیحات نتیجه می‌شود که f یک همیومورفیسم است.

نکته۷. رده هم‌ارزی $\sim$ را روی فضای توپولوژیک (X,τ) در نظر می‌گیریم. فرض کنیم فضای توپولوژیک $X/\sim$ یک فضای T_1 باشد، در آن‌صورت $\{[x]\}$ بسته است و لذا $\pi^{-1}(\{[x]\}) = [x]$ در X بسته است. عکس این مطلب نیز درست است، یعنی اگر رده‌های هم‌ارزی بسته باشند فضای خارج قسمتی متناظر T_1 است. در حقیقت $\pi^{-1}(\{[x]\}) = [x]$ بسته بوده و لذا $\{[x]\}$ بسته است، یعنی فضا T_1 است.

اگر f تابعی پیوسته از فضای توپولوژیک (X_1,τ_1) به‌روی فضای توپولوژیک (X_2,τ_2) باشد، در آن‌صورت $\tau_2 \subseteq \tau_q$. ممکن است در این جزئیت تساوی برقرار نباشد. اگر $\tau_2 = \tau_q$، آنگاه f را یک همسانی گوییم. برای مثال $X_1 = \mathbb{R}$ را با توپولوژی گسسته و $X_2 = \mathbb{R}$ را با توپولوژی اقلیدسی در نظر می‌گیریم. واضح است که تابع همانی از X_1 به‌روی X_2 پیوسته است ولی توپولوژی حاصل از تابع همانی که توپولوژی گسسته است با توپولوژی اقلیدسی برابر نیست. نتیجه این‌که تابع همانی یک همسانی نیست. اثبات این‌که هر تابع پیوسته، پوشا و باز یک همسانی است ساده بوده و به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه۶ ــ ۱۸. *تابع پیوسته و پوشای* $f : (X_1,\tau_1) \to (X_2,\tau_2)$ *را در نظر می‌گیریم. شرط لازم و کافی برای آن‌که* f *یک همسانی باشد آنست که برای هر فضای توپولوژیک* (X_3,τ_3) *و هر تابع* $g : (X_2,\tau_2) \to (X_3,\tau_3)$ *که* $g \circ f$ *پیوسته است،* g *پیوسته باشد.*

برهان. فرض کنیم f یک همسانی و $g : (X_2,\tau_2) \to (X_3,\tau_3)$ تابعی دلخواه باشد که $g \circ f$ پیوسته

باشد. فرض کنیم G مجموعه‌ی بازی در X_3 باشد. لذا $(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}\big(g^{-1}(G)\big)$ در X_1 باز است. اما f یک همسانی است و لذا $g^{-1}(G) \in \tau_q = \tau_2$. بنابراین g پیوسته است.

برعکس، چون f پیوسته است لذا $\tau_2 \subseteq \tau_q$. تابع همانی $I : (X_2, \tau_2) \to (X_2, \tau_q)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $G \in \tau_q$، لذا $f^{-1}(G)$ در X_1 باز است. اما

$$(I \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}\big(I^{-1}(G)\big) = f^{-1}(G)$$

باز است و بنابه فرض I پیوسته است که این معادل است با این‌که $\tau_q \subseteq \tau_2$. این برهان را کامل می‌کند. ■

در قضیه‌ی زیر ثابت می‌کنیم که همبندی موضعی تحت همسانی پایاست. برای اثبات این موضوع به گزاره‌ای ساده در مورد همبند موضعی نیازمندیم، که قبل از آن جهت یادآوری اثبات می‌کنیم.

قضیه ۶ ــ ۱۹. *فرض کنیم (X_1, τ_1) و (X_2, τ_2) دو فضای توپولوژیک باشند، در آن‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) *X_1 همبند موضعی است اگر و تنها اگر مؤلفه‌های هر زیرمجموعه‌ی باز از X_1، باز باشند.*

ب) *اگر $f : X_1 \to X_2$ یک همسانی باشد، آنگاه همبندی موضعی X_1 همبندی موضعی X_2 را ایجاب می‌کند.*

برهان. فرض کنیم G زیرمجموعه‌ی بازی از X و C مؤلفه‌ای در G باشد. فرض کنیم $x \in C$، چون $C \subseteq G$ لذا بنابه همبندی موضعی X، مجموعه‌ی باز همبندی از X مانند U وجود دارد که $x \in U \subseteq G$. اما C مؤلفه‌ای در G است و لذا $U \subseteq C$ که نشان می‌دهد C باز است.

برعکس، اگر G زیرمجموعه‌ی بازی شامل عنصری چون x از X باشد، بنابه فرض مؤلفه‌ی C از x در فضای G باز است. بنابراین C مجموعه‌ی باز همبند مورد نیاز است.

برای پاسخ به قسمت (ب)، فرض کنیم X_1 همبند موضعی و $G \subseteq X_2$ زیرمجموعه‌ای باز باشد. برای کامل شدن برهان کافیست ثابت کنیم هر مؤلفه از G در G باز است. فرض کنیم C مؤلفه‌ای در G و $x \in f^{-1}(C)$. اگر C_x مؤلفه‌ای از x در مجموعه‌ی باز $f^{-1}(G)$ باشد، در آن‌صورت $f(C_x)$ همبند و شامل $f(x) \in C$ می‌باشد. چون $f(C_x) \subseteq G$، لذا $f(C_x) \subseteq C$ و بنابراین $x \in C_x \subseteq f^{-1}(C)$. اما X همبند موضعی است و لذا C_x باز است. این نشان می‌دهد که $f^{-1}(C)$ در X باز است و بنابراین C در X_2 باز است. ■

تمرین ٦

۱. فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$. اگر X و A همبند باشند و G و W یک ناهمبندی برای A^c باشد، ثابت کنید $A \cup G$ و $A \cup W$ همبند هستند.

۲. فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$. فرض کنیم C زیرمجموعه‌ی همبندی باشد که هم A و هم A^c را قطع کند، ثابت کنید C مرز A را نیز قطع می‌کند.

۳. نشان دهید که هر مجموعه‌ی نامتناهی با توپولوژی هم متناهی همبند است.

۴. فرض کنیم $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های همبند از فضای توپولوژیک (X,τ) باشد. فرض کنیم زیرمجموعه‌ی همبند A از فضای توپولوژیک X موجود باشد که برای هر α، $A_\alpha \cap A \neq \emptyset$. ثابت کنید $\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha \cup A$ همبند است.

۵. ثابت کنید کره و چنبره در فضای سه بعدی همبند هستند.

٦. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک T_1 و A زیرمجموعه‌ی همبندی از آن باشد. اگر A حداقل دارای دو عنصر باشد، ثابت کنید A نامتناهی است.

۷. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک همبند و $x \in X$. اگر برای هر $y \in X$، $d(x,y) \neq 1$، ثابت کنید X کران‌دار است.

۸. نشان دهید فضای توپولوژیک (X,τ) همبند است اگر و تنها اگر مرز هر زیرمجموعه‌ی سره و ناتهی از X، ناتهی باشد.

۹. فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیک همبند موضعی و $A \subseteq X$. اگر $\mathrm{bd}(A)$ همبند موضعی باشد، ثابت کنید $\overline{A}$ نیز همبند موضعی است.

۱۰. فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژیک همبند موضعی و $A \subseteq X$. اگر C مؤلفه‌ای شامل A باشد، در آن‌صورت ثابت کنید:

الف) $C^\circ = C \cap A^\circ$؛

ب) $\mathrm{bd}(C) \subseteq \mathrm{bd}(A)$؛

ج) اگر A بسته باشد، آنگاه $\mathrm{bd}(C) = C \cap \mathrm{bd}(A)$.

۱۱. اگر فضای توپولوژیک (X,τ) تنها تعداد متناهی مؤلفه داشته باشد، ثابت کنید هر مؤلفه باز است.

۱۲. ثابت کنید تعداد مؤلفه‌های زیرمجموعه‌های باز $\mathbb{R}^n$ حداکثر شماراست.

۱۳. برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $A_n = \left\{\left(x, \dfrac{\sin x}{n}\right);\ 0 \leq x \leq 1\right\}$ و همچنین

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \{(x,0);\ 0 \leq x \leq 1\}$$

ثابت کنید A همبند راهی است اما $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \{(1,0)\}$ همبند راهی نیست.

۱۴. فرض کنیم $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ یک همسانی باشد. تعریف کنید $x \sim y$ اگر و تنها اگر $f(x) = f(y)$. نشان دهید که $X_1/\sim$ با X_2 همیومورف است.

۱۵. فرض کنید X یک فضای T_2 و $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی X باشد، در صورت درستی گزاره‌های زیر را اثبات کنید:

الف) اگر π تابعی بسته باشد، آنگاه $\sim$ در $X \times X$ بسته است.

ب) اگر π تابعی باز باشد، آنگاه $\sim$ در $X \times X$ باز است.

ج) اگر π تابعی باز و بسته باشد، آنگاه $X/\sim$ هاسدورف است.

۱٦. فرض کنید (X_1, τ_1) و (X_2, τ_2) دو فضای توپولوژیک و $f : X_1 \to X_2$ تابعی پوشا باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی X به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x \sim y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

نشان دهید تابع $f' : X_1/\sim \longrightarrow X_2$ با ضابطه‌ی $f'([x]) = f(x)$ پیوسته است اگر و تنها اگر f پیوسته باشد.

۱۷. فرض کنید (X_1, τ_1) و (X_2, τ_2) دو فضای توپولوژیک و $f : X_1 \to X_2$ تابعی پیوسته و پوشا باشد. اگر X_1 فشرده و X_2 هاسدورف باشد، ثابت کنید f یک همسانی است.

۱۸. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک نرمال و $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی X باشد. اگر $\pi : X \to X/\sim$ تابعی بسته و باز باشد، ثابت کنید $X/\sim$ نرمال است.

فصل ۷

تور

۷—۱ مقدمه

دیدیم که یک دنباله تابعی از اعداد طبیعی به یک فضای توپولوژیک است. با استفاده از تعریف دنباله به بررسی نقاط چسبیدگی و حدی یک زیرمجموعه از یک فضای توپولوژیک پرداختیم. همین‌طور پیوستگی توابع را نیز مورد مطالعه قرار دادیم. می‌دانیم اگر دنباله‌ای در زیرمجموعه‌ای چون A از یک فضای توپولوژیک به نقطه‌ای همگرا باشد، آن نقطه، نقطه‌ی چسبیدگی A است ولی عکس آن درست نیست. همین‌طور چنانچه نقطه‌ای نقطه‌ی حدی A باشد، دلیلی ندارد که دنباله‌ای از عناصر متمایز در A به این نقطه همگرا باشد. دیدیم تابعی چون f روی یک فضای توپولوژیک X وجود دارد که برای هر دنباله‌ی همگرای $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به x، $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ نیز به $f(x)$ همگراست ولی f پیوسته نیست. بعلاوه اینکه یک فضای متریک فشرده است اگر و تنها اگر هر دنباله در این فضا دارای زیردنباله‌ای همگرا باشد، این قضیه نیز برای فضاهای توپولوژیک صادق نیست. برای رفع این مشکلات مجبوریم روی فضای توپولوژیک شرایطی اعمال کنیم که بتوانیم نتایج مطلوب را به‌دست آوریم. اکنون سوال این‌جاست که آیا با تغییر تعریف دنباله می‌توان بدون قرار دادن هیچ شرطی روی فضای توپولوژیک نتایج مطلوب را به‌دست آورد؟ جواب مثبت است. تور همه‌ی مشکلات را مرتفع می‌کند. تورها ابزار قدرتمندی هستند برای مواردی که دنباله ضعیف‌تر از آن است تا حکم مورد نظر را به‌دست دهد. مفهوم تور شاید در مقطع کارشناسی کاربرد خود را نتواند به خوبی نمایان کند ولی در دروس پیشرفته آنالیز نقش مهمی را ایفاء می‌کند.

۷ــ۲ تور و ارتباط آن با مفاهیم توپولوژی

تورها در درس‌های پیشرفته آنالیز و توپولوژی نقش مهمی را ایفاء می‌کند. چنانچه مسئله بررسی فشردگی، بسته بودن، پیوستگی و ... باشد، تور ابزار مناسبی برای پاسخ‌گوئی به این سوالات است. در این فصل همه‌ی مواردی که در تورها مورد نیاز است به تفصیل بیان شده است. آماده‌ایم تا این مبحث مهم را با تعریف تور آغاز کنیم.

تعریف۷ ــ ۱. فرض کنیم $\preceq$ رابطه‌ای روی D باشد، $(D, \preceq)$ را جهت‌دار شده گوییم هرگاه:

الف) $\preceq$ انعکاسی باشد؛

ب) $\preceq$ متعدی باشد؛

ج) برای هر α و β از D، $\gamma \in D$ ای موجود باشد که $\alpha \preceq \gamma$ و $\beta \preceq \gamma$.

هر تابع از مجموعه‌ی جهت‌دار شده D به‌توی یک فضای توپولوژیک، یک تور نامیده می‌شود.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک مجموعه‌ی جهت‌دار شده و هر دنباله یک تور است. مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی X نسبت به رابطه‌ی $\subseteq$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار شده است. اگر $x : D \to X$ توری از مجموعه‌ی جهت‌دار شده D به‌توی فضای توپولوژیک X باشد، برای راحتی کار این تور را با نماد $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ نمایش می‌دهیم. توجه دارید که از این‌گونه نماد برای دنباله‌ها نیز استفاده شده است. گوییم این تور به نقطه‌ی $x \in X$ همگراست هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز G شامل x، $\alpha \in D$ موجود باشد که برای هر $\alpha \preceq \gamma$، $x_\gamma \in G$. x را حد $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ گوییم. توجه کنید که تعریف همگرایی تورها شبیه تعریف همگرایی دنباله‌هاست.

قضیه۷ ــ ۲. *فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک و $A \subseteq X$، گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) *$x \in \overline{A}$ اگر و تنها اگر توری در A موجود باشد که به x همگرا باشد.*

ب) *X هاسدورف است اگر و تنها اگر حد هر تور در صورت وجود منحصر به‌فرد باشد.*

برهان. فرض کنیم $x \in \overline{A}$. مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های باز شامل x را با نماد $\mathcal{U}$ نمایش می‌دهیم. به‌وضوح $\supseteq$ رابطه‌ای انعکاسی و متعدی است. اگر U و V دو عنصر از $\mathcal{U}$ باشند، آنگاه $U \cap V$ مجموعه‌ی باز شامل x ای است که در تعریف مجموعه‌ی جهت‌دار شده صدق می‌کند. بنابراین $(\mathcal{U}, \supseteq)$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار شده است. برای هر $U \in \mathcal{U}$، عنصر $x_U \in U \cap A$ را انتخاب می‌کنیم. نشان می‌دهیم که تور $\{x_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ به x همگراست. فرض کنیم G مجموعه‌ای باز شامل x باشد. برای هر $U \supseteq G$، $x_U \in U \subseteq G$. این نشان می‌دهد که تور فوق به x همگراست.

اثبات عکس این قسمت شبیه به برهانی است که برای حالت دنباله‌ها آورده شده است و به

خواننده واگذار می‌شود.

برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنیم X هاسدورف و تور $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ به دو عنصر x و y همگرا باشد. از هاسدورف بودن فضا استفاده کرده و مجموعه‌های باز G_x و G_y به‌ترتیب شامل x و y را طوری می‌یابیم که $G_x \cap G_y = \emptyset$. چون تور فوق به دو عنصر x و y همگراست، لذا α_1 و α_2 از D موجودند که اگر $\alpha_1 \preceq \alpha$، $x_\alpha \in G_x$ و چنانچه $\alpha_2 \preceq \alpha$، $x_\alpha \in G_y$. از جهت‌دار شده بودن D استفاده کرده و عنصر $\gamma \in D$ را طوری می‌یابیم که $\alpha_1 \preceq \gamma$ و $\alpha_2 \preceq \gamma$. بنابراین $x_\gamma \in G_x \cap G_y$، که این یک تناقض است و لذا حد هر تور در صورت وجود منحصر به‌فرد است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم X هاسدورف نباشد. بنابراین دو عنصر x و y از X وجود دارند که برای هر دو مجموعه‌ی باز G و W به‌ترتیب شامل x و y، $G \cap W \neq \emptyset$. قرار دهید

$$\mathcal{W} = \{G \cap W;\ G, W \in \tau,\ x \in G,\ y \in W\}.$$

$\mathcal{W}$ نسبت به رابطه‌ی عکس جزئیت یک مجموعه‌ی جهت‌دار شده است. برای هر $G \cap W \in \mathcal{W}$، $x_{G\cap W} \in G \cap W$ را انتخاب می‌کنیم. به‌راحتی دیده می‌شود که تور $\{x_{G\cap W}\}_{G\cap W\in\mathcal{W}}$ به دو عنصر x و y همگراست، که تناقض با فرض قضیه است. لذا X هاسدورف است. ■

قضیه۷ ـ ۳. *تابع f از فضای توپولوژیک (X_1, τ_1) به‌توی فضای توپولوژیک (X_2, τ_2) پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر تور همگرای $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ به x، تور $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in D}$ به $f(x)$ همگرا باشد.*

برهان. اگر f پیوسته و $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ توری همگرا به x باشد، به‌راحتی دیده می‌شود که تور $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in D}$ به $f(x)$ همگراست.

برای اثبات عکس قضیه از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم f در نقطه‌ی $x \in X$ پیوسته نباشد. لذا مجموعه‌ی بازی شامل $f(x)$ چون W وجود دارد که برای هر مجموعه‌ی باز U شامل x، $f(U) \cap W^c \neq \emptyset$. دوباره مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های باز شامل x را با نماد $\mathcal{U}$ نمایش می‌دهیم. این مجموعه نسبت به رابطه‌ی $\supseteq$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار شده است. برای هر $U \in \mathcal{U}$، $x_U \in U$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $f(x_U) \in W^c$. همانند قبل تور $\{x_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ به x همگراست. اما برای هر $U \in \mathcal{U}$، $f(x_U) \in W^c$. بنابراین $\{f(x_U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ به $f(x)$ همگرا نیست که یک تناقض است. ■

قضیه۷ ـ ۴. *فرض کنیم $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد. تور $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ به x همگراست اگر و تنها اگر برای هر i، $\{\pi_i(x_\alpha)\}_{\alpha\in D}$ در X_i به x_i همگرا باشد.*

برهان. فرض کنیم تور $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ به x همگرا باشد. چون تابع π_i پیوسته است، لذا $\{\pi_i(x_\alpha)\}_{\alpha\in D}$

به x همگراست.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(G_i)$ مجموعه‌ی باز پایه‌ای شامل x باشد. چون برای هر $1 \leq i \leq n$، $\{\pi_i(x_\alpha)\}_{\alpha \in D}$ به x_i همگراست، لذا $\alpha_i \in D$ وجود دارد که برای هر $\alpha \succeq \alpha_i$، $\pi_i(x_\alpha) \in G_i$. $\gamma \in D$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای هر $1 \leq i \leq n$، $\gamma \succeq \alpha_i$. اگر $\gamma \preceq \alpha$، آنگاه برای هر $1 \leq i \leq n$، $\pi_i(x_\alpha) \in G_i$. بنابراین برای هر $\gamma \preceq \alpha$، $x_\alpha \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(G_i)$. درنتیجه تور $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ به x همگراست. ■

البته به روشی مشابه می‌توان ثابت کرد که تور $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ در یک فضای حاصل‌ضرب همگراست اگر و تنها اگر تصویر این تور تحت هر تابع تصویر در فضای مختصی متناظر همگرا باشد.

فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در فضای X باشد. اگر $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، آنگاه تابع $y : \mathbb{N} \to X$ که به‌صورت $y(n) = y_n = x_{h(n)}$ تعریف می‌شود، یک زیردنباله از $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ است. از این تعریف الگو برداری کرده و به تعریف زیرتور می‌پردازیم.

تعریف ۷ ـ ۵. فرض کنیم D و Λ دو مجموعه‌ی جهت‌دار شده باشند. فرض کنیم تابع $\phi : \Lambda \to D$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) ϕ صعودی باشد، یعنی برای هر $\lambda_1 \preceq \lambda_2$، $\phi(\lambda_1) \preceq \phi(\lambda_2)$،

ب) برای هر $\alpha \in D$، عنصری مانند λ از Λ موجود باشد که $\alpha \preceq \phi(\lambda)$،

در این‌صورت $\{x_{\phi(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ را یک زیرتور $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ نامیم.

هر زیردنباله از یک دنباله، یک زیرتور از دنباله است ولی هر زیرتور از یک دنباله زیردنباله‌ای از آن دنباله نیست.

قضیه ۷ ـ ۶. *فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد. گزاره‌های زیر برقرار هستند:*

الف) هر زیرتور از یک تور همگرا، همگراست.

ب) یک تور به $x \in X$ همگراست اگر و تنها اگر هر زیرتور از آن دارای زیرتوری همگرا به x باشد.

برهان. فرض کنیم $\{x_{\phi(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ زیرتوری از تور همگرای $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ باشد. فرض کنیم $x_\alpha \to x$ و G مجموعه‌ی بازی شامل x باشد. $\alpha_0 \in D$ وجود دارد که برای هر $\alpha_0 \preceq \alpha$، $x_\alpha \in G$. بنابه تعریف زیرتور، $\lambda_0 \in \Lambda$ وجود دارد که $\alpha_0 \preceq \phi(\lambda_0)$. اکنون برای هر $\lambda_0 \preceq \lambda$،

$$\alpha_0 \preceq \phi(\lambda_0) \preceq \phi(\lambda)$$

بنابراین $x_{\phi(\lambda)} \in G$، یعنی $x_{\phi(\lambda)} \to x$.

برای اثبات قسمت (ب). می‌دانیم اگر توری همگرا باشد در آن‌صورت بنابه قسمت (الف) هر زیرتور آن نیز همگرا و بنابراین هر زیرتور آن دارای زیرتوری همگراست.

برای اثبات عکس این قسمت، فرض کنیم تور $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ در شرایط قضیه صدق کند ولی به x همگرا نباشد. بنابراین مجموعه‌ی بازی چون G شامل x وجود دارد که برای هر $\alpha \in D$، عنصری مانند λ_α $\alpha \preceq \lambda_\alpha$ وجود دارد که $x_{\lambda_\alpha} \notin G$. قرار می‌دهیم

$$\Lambda = \{(\alpha, \lambda_\alpha);\ \alpha \in D\}$$

و تعریف می‌کنیم

$$(\alpha, \lambda_\alpha) \preceq' (\alpha', \lambda_{\alpha'}) \iff \alpha \preceq \alpha' \text{ و } \lambda_\alpha \preceq \lambda_{\alpha'}.$$

به‌راحتی دیده می‌شود که $(\Lambda, \preceq')$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار شده است. در حقیقت اگر (α, λ_α) و (β, λ_β) دو عنصر دلخواه از Λ باشند، در آن‌صورت $\gamma \in D$ را طوری اختیار می‌کنیم که $\lambda_\alpha \preceq \gamma$ و $\lambda_\beta \preceq \gamma$. واضح است که

$$(\alpha, \lambda_\alpha) \preceq' (\gamma, \lambda_\gamma) \quad \text{و} \quad (\beta, \lambda_\beta) \preceq' (\gamma, \lambda_\gamma).$$

اکنون تابع $\phi : \Lambda \to D$ را با ضابطه‌ی $\phi(\alpha, \lambda_\alpha) = \lambda_\alpha$ تعریف می‌کنیم. واضح است که ϕ صعودی است. اگر $\alpha \in D$ عنصری دلخواه باشد، با انتخاب $(\alpha, \lambda_\alpha) \in \Lambda$، داریم $\alpha \preceq \lambda_\alpha = \phi(\alpha, \lambda_\alpha)$. این نشان می‌دهد که $\{x_{\phi(\alpha,\lambda_\alpha)}\}_{(\alpha,\lambda_\alpha)\in\Lambda}$ زیرتوری از تور $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ است. از طرف دیگر برای هر $(\alpha, \lambda_\alpha) \in \Lambda$، $x_{\phi(\alpha,\lambda_\alpha)} \notin G$. درنتیجه زیرتور فوق شامل هیچ زیرتور همگرا به x نیست. ■

در فضای توپولوژیک (X, τ) تور $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ را در نظر می‌گیریم. $x \in X$ را یک نقطه‌ی تجمع این تور گوییم هرگاه برای هر G باز شامل x و هر $\alpha_1 \in D$، یک $\alpha \in D$ موجود باشد که $\alpha_1 \preceq \alpha$ و $x_\alpha \in G$.

قضیه ۷ ـ ۷. *در یک فضای توپولوژیک (X, τ)، $x \in X$ نقطه‌ی تجمع تور $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ است اگر و تنها اگر این تور دارای زیرتوری همگرا به x باشد.*

برهان. فرض کنیم $x \in X$ نقطه‌ی تجمع تور $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ باشد. بنابراین برای هر مجموعه‌ی باز G شامل x و هر $\alpha_1 \in D$، یک $\alpha \in D$ وجود دارد که $\alpha_1 \preceq \alpha$ و $x_\alpha \in G$. قرار می‌دهیم

$$\Lambda = \{(\alpha, G);\ \alpha \in D,\ x_\alpha \in G,\ x \in G,\ G \in \tau\}$$

و تعریف می‌کنیم

$$(\alpha, G) \preceq' (\alpha', G') \iff \alpha \preceq \alpha',\ G' \subseteq G.$$

به‌راحتی دیده می‌شود که $(\Lambda, \preceq')$ انعکاسی و متعدی است. فرض کنیم (α_1, G) و (α_2, G') دو عنصر از Λ باشند. چون D جهت‌دار است، لذا $\alpha_3 \in D$ وجود دارد که $\alpha_1 \preceq \alpha_3$ و $\alpha_2 \preceq \alpha_3$. از نقطه‌ی تجمع بودن x استفاده کرده و $\alpha \in D$ را طوری می‌یابیم که $\alpha_3 \preceq \alpha$ و $x_\alpha \in G \cap G'$. بنابراین

$$(\alpha_2, G') \preceq' (\alpha, G \cap G'), \ (\alpha_1, G) \preceq' (\alpha, G \cap G').$$

لذا $(\Lambda, \preceq')$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار شده است. تابع $\phi : \Lambda \to D$ را با ضابطه‌ی $\phi\big((\alpha, G)\big) = \alpha$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت $\{x_{\phi((\alpha,G))}\}_{(\alpha,G)\in\Lambda}$ زیرتوری از $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ است. ادعا می‌کنیم این زیرتور به x همگراست. فرض کنیم G مجموعه‌ی بازی شامل x باشد، در این‌صورت $\alpha_1 \in D$ وجود دارد که $x_{\alpha_1} \in G$. فرض کنیم $(\alpha, G') \in \Lambda$ و $(\alpha_1, G) \preceq' (\alpha, G')$. بنابراین $x_{\phi((\alpha,G'))} = x_\alpha \in G' \subseteq G$. این نشان می‌دهد که زیرتور فوق به x همگراست.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم تور $\{x_{\phi(\lambda)}\}_{\lambda\in\Lambda}$ زیرتوری از تور $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ بوده که به x همگراست. ادعا می‌کنیم x یک نقطه‌ی تجمع $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ است. فرض کنیم G مجموعه‌ی بازی شامل x و $\alpha \in D$. $\lambda_1 \in \Lambda$ وجود دارد که برای هر $\lambda_1 \preceq \lambda$، $x_{\phi(\lambda)} \in G$. $\lambda_2 \in \Lambda$ موجود است که $\alpha \preceq \phi(\lambda_2)$. چون Λ مجموعه‌ای جهت‌دار شده است، لذا $\lambda \in \Lambda$ وجود دارد که $\lambda_1 \preceq \lambda$ و $\lambda_2 \preceq \lambda$. درنتیجه $\alpha \preceq \phi(\lambda_2) \preceq \phi(\lambda)$ و $x_{\phi(\lambda)} \in G$. این برهان را کامل می‌کند. ■

در آنالیز و توپولوژی اثبات اینکه فضایی فشرده است از اهمیت خاصی برخوردار است. قضیه‌ی زیر که یکی از مهم‌ترین قضایای این بخش است راه حل مناسبی برای اثبات فشرده بودن فضای توپولوژیک ارائه می‌کند.

قضیه ۷ ـ ۸. *فضای توپولوژیک (X, τ) فشرده است اگر و تنها اگر هر تور در X دارای زیرتوری همگرا باشد.*

برهان. فرض کنیم X فشرده و $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ توری در X باشد. بنابه قضیه‌ی قبل، کافیست ثابت کنیم این تور دارای یک نقطه‌ی تجمع است. برای هر $\alpha \in D$، قرار می‌دهیم

$$B_\alpha = \{x_\beta ;\ \alpha \preceq \beta\}.$$

اگر α_1 و ... و α_n تعدادی متناهی از اعضای D باشند، از جهت‌دار بودن D استفاده کرده و $\alpha \in D$ را طوری می‌یابیم که برای هر i، $\alpha_i \preceq \alpha$. واضح است که $B_\alpha \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$. بنابراین خانواده‌ی $\{\overline{B_\alpha}\}_{\alpha\in D}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است و لذا $\bigcap_{\alpha\in D} \overline{B_\alpha}$ ناتهی است. x را از این مجموعه‌ی ناتهی انتخاب می‌کنیم. ادعا می‌کنیم این نقطه، نقطه‌ی تجمع $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ است. فرض کنیم G

مجموعه‌ی بازی شامل x و $\alpha \in D$. چون $x \in \overline{B_\alpha}$، لذا $\beta \succeq \alpha$ وجود دارد که $x_\beta \in G$. پس x نقطه‌ی تجمع است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم $\{F_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های بسته از X بوده که دارای خاصیت اشتراک متناهی است. D را خانواده‌ی همه‌ی اشتراک‌های متناهی از اعضای $\{F_i\}_{i\in I}$ در نظر می‌گیریم. $(D, \supseteq)$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار شده است. اگر $\alpha \in D$، لذا α به‌صورت اشتراک تعدادی متناهی از اعضای $\{F_i\}_{i\in I}$ است. بعلاوه انتخاب کنید $x_\alpha \in \alpha$. بنابه فرض تور $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ دارای زیرتوری چون $\{x_{\phi(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ همگرا به نقطه‌ای مانند x است. ادعا می‌کنیم که $x \in \bigcap_{i \in I} F_i$. فرض کنیم $i_\circ \in I$ عنصری دلخواه باشد. ثابت می‌کنیم که $x \in F_{i_\circ}$. فرض کنید G مجموعه‌ی بازی شامل x باشد، $\lambda_\backslash \in \Lambda$ وجود دارد که برای هر $\lambda \succeq \lambda_\backslash$، $x_{\phi(\lambda)} \in G$. اگر $\phi(\lambda_\backslash) = \bigcap_{k=\backslash}^{n} F_{i_k}$، اختیار می‌کنیم $\alpha = \bigcap_{k=\circ}^{n} F_{i_k}$. $\lambda_۲ \in \Lambda$ وجود دارد که $\alpha \supseteq \phi(\lambda_۲)$. اکنون $\lambda \in \Lambda$ را طوری در نظر می‌گیریم که $\lambda \succeq \lambda_\backslash$ و $\lambda \succeq \lambda_۲$. در آن‌صورت

$$\phi(\lambda_\backslash) = \bigcap_{k=\backslash}^{n} F_{i_k} \supseteq \bigcap_{k=\circ}^{n} F_{i_k} = \alpha \supseteq \phi(\lambda)$$

و بعلاوه $x_{\phi(\lambda)} \in G$. اما $x_{\phi(\lambda)} \in \bigcap_{k=\circ}^{n} F_{i_k} \subseteq F_{i_\circ}$ و بنابراین $x \in \overline{F_{i_\circ}} \subseteq F_{i_\circ}$. این برهان را کامل می‌کند. ■

تمرین ۷

۱. فرض کنیم $(X_\backslash, d_\backslash)$ یک فضای متریک و $x \in X_\backslash$. برای هر $t, s \in X_\backslash$، می‌نویسیم

$$d_\backslash(t,x) \leq d_\backslash(s,x) \iff t \preceq s.$$

نشان دهید که $(X_\backslash, \preceq)$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار است. اگر f تابعی از $X_\backslash$ به‌توی فضای متریک $(X_۲, d_۲)$ باشد، ثابت کنید این تور به نقطه‌ای چون $y \in X_۲$ همگراست اگر و تنها اگر $\lim_{t \to x} f(t) = y$.

۲. فرض کنیم $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ و $\{y_\alpha\}_{\alpha \in D}$ تورهایی از اعداد حقیقی نامنفی باشند. قرار می‌دهیم

$$\limsup x_\alpha = \inf\{\sup\{x_\alpha;\ \beta \preceq \alpha\},\ \beta \in D\},$$

$$\liminf x_\alpha = \sup\{\inf\{x_\alpha;\ \beta \preceq \alpha\},\ \beta \in D\}.$$

ثابت کنید

$$\limsup(x_\alpha + y_\alpha) \leq \limsup x_\alpha + \limsup y_\alpha$$

و

$$\limsup(x_\alpha y_\alpha) \leq \limsup x_\alpha \limsup y_\alpha.$$

آیا می‌توان گفت که تور $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ همگراست اگر و تنها اگر $\limsup x_\alpha = \liminf x_\alpha$؟

۳. فرض کنیم $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک و $\{x_\lambda\}_{\lambda\in D}$ توری در فضای حاصل‌ضرب X_α ها باشد. اگر x نقطه‌ی چسبیدگی $\{x_\lambda\}_{\lambda\in D}$ باشد، ثابت کنید برای هر α، $\pi_\alpha(x)$ نقطه‌ی چسبیدگی $\{\pi_\alpha(x_\lambda)\}_{\lambda\in D}$ است. آیا عکس این موضوع صحیح است؟

فصل ۸

گروه‌های توپولوژیک

۸—۱ مقدمه

در این فصل گروه توپولوژیک را تعریف کرده و تعدادی از خواص آن‌را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم هر گروه توپولوژیک T_0 یک فضای توپولوژیک T_3 است. گروه‌های فشرده‌ی موضعی از اهمیت خاصی برخوردارند و گروه‌هایی که فشرده‌ی موضعی نیستند مورد توجه قرار نمی‌گیرند. دلیل آن این است فضاهایی که روی این گروه‌ها بنا می‌شوند فضای خوبی برای مطالعه نیست. از جمله فضاهای مورد توجه روی گروه‌های توپولوژیک فشرده‌ی موضعی فضای توابع پیوسته و کران‌دار می‌باشد.

همان‌طور که قبلاً گفته شده اگر فضای توپولوژیکی متریک‌پذیر باشد. اکثر خصوصیات آن فضا مشخص می‌شود. ثابت شده است که یک گروه توپولوژیک فشرده‌ی موضعی متریک‌پذیر است اگر و تنها اگر شمارای اول باشد. البته برهان این قضیه خارج از مبحث توپولوژی است و ما از آوردن برهان آن خودداری می‌کنیم. در این فصل به‌صورت گذرا بعضی از خصوصیات یک گروه توپولوژیک را مورد بررسی قرار می‌دهیم و خواننده می‌تواند برای مطالعه‌ی بیشتر به منابعی که در انتهای کتاب آورده شده است مراجعه کند. این فصل تنها برای آشنایی با مفاهیم مقدماتی گروه‌های توپولوژیک و مثال کاربردی از فصول قبلی است.

۸ــ۲ گروه توپولوژیک

$\mathbb{R}$ یک گروه جمعی است و اعمال جمع و قرینه نسبت به توپولوژی اقلیدسی پیوسته هستند. اگر G یک گروه باشد و τ یک توپولوژی روی G که تحت آن عمل گروه و همین‌طور عمل وارون پیوسته باشند، قصد داریم این گروه با این توپولوژی را مورد مطالعه قرار دهیم.

تعریف۸ ــ ۱. فرض کنیم G یک گروه و τ یک توپولوژی روی G باشد. G را یک گروه توپولوژیک گوییم هرگاه توابع $(x,y) \mapsto xy$ از $G \times G \to G$ و $x \mapsto x^{-1}$ از $G \to G$ پیوسته باشند.

هر گروه نسبت به توپولوژی گسسته یک گروه توپولوژیک است. می‌دانیم $\mathbb{R}$ نسبت به عمل جمع یک گروه و با توپولوژی اقلیدسی یک گروه توپولوژیک است.

نکته۱. اگر G گروهی توپولوژیک و $a \in G$ عنصری دلخواه باشد، به‌راحتی دیده می‌شود که تابع $x \mapsto ax$ از G به‌روی G پیوسته است. تابع $x \mapsto a^{-1}x$ معکوس پیوسته تابع $x \mapsto ax$ است و لذا تابع $x \mapsto ax$ یک همیومورفیسم است. از آنجا که تابع $x \mapsto x^{-1}$ پیوسته است، لذا معکوس آن نیز که به‌صورت $x^{-1} \mapsto x$ است پیوسته می‌باشد. نتیجه این‌که $x \mapsto x^{-1}$ یک همیومورفیسم است.

از نکته‌ی بالا نتیجه می‌گیریم که اگر U باز باشد، آنگاه aU و $U^{-1} = \{x^{-1};\ x \in U\}$ باز هستند. بعلاوه اگر $\{U_\alpha;\ \alpha \in I\}$ پایه‌ی موضعی برای عنصر همانی e از G داده شده باشد، در آن‌صورت $\{aU_\alpha;\ \alpha \in I\}$ پایه‌ی موضعی برای عنصر دلخواه a از G است. بنابراین پایه‌ی موضعی در یک نقطه، توپولوژی G را به‌طور کامل مشخص می‌کند. اکنون قصد داریم از پیوستگی عمل ضرب و عمل وارون استفاده کرده و نتایج مورد نیاز را به‌دست آوریم. برای این کار ابتدا تعریف یک مجموعه متقارن را ارائه می‌کنیم. زیرمجموعه‌ی A از گروه G را متقارن گوییم هرگاه $A = A^{-1}$. زیرمجموعه‌های متقارن نقش به‌سزایی در برهان قضایا دارند.

اگر G یک گروه توپولوژیک و V مجموعه‌ی بازی شامل e باشد. از پیوستگی عمل ضرب گروه استفاده کرده و مجموعه‌های باز G و W شامل e را طوری می‌یابیم که $GW \subseteq V$. قرار می‌دهیم $U = G \cap W$، لذا U مجموعه‌ی بازی شامل e است که $UU \subseteq V$. از طرف دیگر از پیوستگی تابع $x \mapsto x^{-1}$ استفاده کرده و مجموعه‌ی باز O شامل e را طوری می‌یابیم که $O^{-1} \subseteq U$. قرار دهید $Q = O \cap O^{-1}$، واضح است که Q مجموعه‌ی باز متقارن شامل e بوده که $QQ \subseteq UU \subseteq V$. نتیجه این‌که برای هر مجموعه‌ی باز V شامل e، مجموعه‌ی باز متقارن Q شامل e وجود دارد که $QQ \subseteq V$.

قضیه۸ ــ ۲. *هر گروه توپولوژیک $T_\circ$، یک گروه توپولوژیک هاسدورف است.*

برهان. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک $T_\circ$ و x و y دو عنصر از G باشند. بدون این‌که به کلیت خللی وارد آید فرض کنیم مجموعه‌ی بازی چون V شامل x موجود باشد که شامل y نیست. بنابه توضیحات داده شده در بالا، مجموعه‌ی باز U شامل e وجود دارد که $xU \subseteq V$. مجموعه‌ی باز و متقارن Q شامل e را طوری می‌یابیم که $QQ \subseteq U$. از آنجا که xQ و yQ مجموعه‌های باز، به‌ترتیب شامل x و y هستند برای اتمام برهان کافیست ثابت کنیم که این دو مجموعه‌ی مجزا هستند. فرض کنیم $z \in xQ \cap yQ$. بنابراین برای دو عنصر p و q از Q داریم $z = xp = yq$. نتیجه این‌که $y = xpq^{-1} \in xQQ \subseteq xU \subseteq V$، که یک تناقض است. بنابراین گروه G، گروهی هاسدورف است. ■

نکته ۲. اگر V مجموعه‌ی بازی شامل همانی باشد، بنابراین مجموعه‌ی باز متقارن U شامل همانی وجود دارد که $UU \subseteq V$. ادعا می‌کنیم که $\overline{U} \subseteq V$، برای این کار عنصر دلخواه $x \in \overline{U}$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم xU مجموعه‌ی بازی شامل x است و لذا $xU \cap U \neq \emptyset$. بنابراین برای $u_1, u_2 \in U$، $xu_1 = u_2$. درنتیجه $x = u_2u_1^{-1} \in UU \subseteq V$ و این ادعا را ثابت می‌کند. اگر W مجموعه‌ی بازی شامل x باشد، مجموعه‌ی باز شامل e چون V موجود است که $xV \subseteq W$. مجموعه‌ی باز شامل e مانند U وجود دارد که $\overline{U} \subseteq V$. بنابراین

$$\overline{xU} = x\overline{U} \subseteq xV \subseteq W$$

این نشان می‌دهد که هر گروه توپولوژیک منظم است و لذا هر گروه توپولوژیک $T_\circ$، یک گروه توپولوژیک T_2 است.

بستار یک مجموعه‌ی متقارن، یک مجموعه‌ی متقارن است. در حقیقت اگر A متقارن و $x \in \overline{A}$. در این‌صورت توری مانند $\{a_\alpha\}_{\alpha \in D}$ وجود دارد که $a_\alpha \to x$. از پیوستگی تابع $x \mapsto x^{-1}$ نتیجه می‌گیریم که $a_\alpha^{-1} \to x^{-1}$. چون A متقارن است، لذا $x^{-1} \in \overline{A}$.

قضیه ۸ ـ ۳. *برای یک گروه توپولوژیک G، گزاره‌های زیر برقرارند.*

الف) *اگر A و B دو زیرمجموعه از G و A باز باشد، آنگاه AB باز است.*

ب) *اگر A و B دو زیرمجموعه از G و A فشرده و B بسته باشد، آنگاه AB بسته است.*

ج) *اگر A و B دو زیرمجموعه‌ی فشرده از G باشد، آنگاه AB فشرده است.*

برهان. برای $b \in B$، چون تابع $x \mapsto xb$ یک همیومورفیسم است، لذا Ab باز است. از طرف دیگر $AB = \bigcup_{b \in B} Ab$ و لذا AB باز است.

برای اثبات قسمت (ب)، $x \in \overline{AB}$ را در نظر می‌گیریم. توری از AB مانند $\{a_\alpha b_\alpha\}_{\alpha \in I}$ وجود

دارد که $a_\alpha b_\alpha \to x$. چون A فشرده است، لذا تور $\{a_\alpha\}_{\alpha\in I}$ دارای زیرتوری همگرا مانند $\{a_\beta\}_{\beta\in J}$ به عنصری چون $a\in A$ است. از پیوستگی عمل ضرب و عمل وارون، $b_\beta = a_\beta^{-1}(a_\beta b_\beta)\to a^{-1}x$. چون B بسته است، لذا $a^{-1}x\in B$ و بنابراین $x\in AB$. این نشان می‌دهد که AB بسته است.

برای اثبات قسمت (ج)، چون $A\times B$ بنابه قضیه‌ی تیخونوف فشرده است و چون عمل ضرب پیوسته است، بنابراین AB فشرده است. ■

فرض کنیم G گروهی فشرده‌ی موضعی باشد. برای هر تابع تعریف شده روی G و هر $x\in G$، تابع $_xf$ را روی G به‌صورت $_xf(y)=f(xy)$ تعریف می‌کنیم. تابع پیوسته و کران‌دار f روی G را پیوسته‌ی یکنواخت چپ گوییم هرگاه تابع $x\mapsto {_xf}$ از G به‌توی $C_b(G)$ پیوسته باشد. مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته‌ی یکنواخت چپ روی G را با نماد $LUC(G)$ نمایش می‌دهیم. به‌سادگی دیده می‌شود که $LUC(G)$ زیر فضایی بسته از $C_b(G)$ بوده و شامل توابع ثابت است. این فضا در آنالیز نقش مهمی دارد و ما در این بخش تنها ثابت می‌کنیم که این فضا شامل همه‌ی توابع پیوسته‌ای است که در بی‌نهایت صفر می‌شود.

قضیه۸ ـ ۴. *اگر G گروهی فشرده‌ی موضعی باشد، در آن‌صورت* $C_0(G)\subseteq LUC(G)$.

برهان. چون $LUC(G)$ زیرفضایی بسته از $C_b(G)$ بوده و $C_{00}(G)$ زیرفضایی چگال از فضای $C_0(G)$ است، لذا کافیست ثابت کنیم $C_{00}(G)\subseteq LUC(G)$. فرض کنیم $f\in C_{00}(G)$ و $\epsilon>0$ داده شده باشد. مجموعه‌ی فشرده K را طوری در نظر می‌گیریم که f خارج K صفر باشد. برای هر $x\in K$ مجموعه‌ی بازی شامل e مانند U_x وجود دارد که برای هر $u\in U_x$، $|f(ux)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2}$. مجموعه‌ی باز متقارن V_x شامل e وجود دارد که $V_xV_x\subseteq U_x$. چون K فشرده است، عناصر x_1 و ... و x_n از K وجود دارد که $K\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}V_{x_i}x_i$. قرار دهید $V=\bigcap_{i=1}^{n}V_{x_i}$. V مجموعه‌ی بازی شامل عنصر همانی است. اکنون فرض کنید $x\in G$ و $v\in V$ دو عنصر دلخواه باشند. اگر $x\in K$، i ای وجود دارد که $x\in V_{x_i}x_i$ و لذا برای یک $v_i\in V_{x_i}$، $x=v_ix_i$. بعلاوه $vv_i\in V_{x_i}V_{x_i}\subseteq U_{x_i}$ و لذا $|f(vv_ix_i)-f(x_i)|<\frac{\epsilon}{2}$. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}|f(vx)-f(x)| &\le |f(vx)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(x)|\\ &\le |f(vv_ix_i)-f(x_i)|+\frac{\epsilon}{2}<\epsilon.\end{aligned}$$

اگر $vx\in K$، به روشی مشابه $|f(vx)-f(x)|<\epsilon$. در آخر این‌که اگر x و vx در K قرار نداشته باشند، در آن‌صورت $f(x)=f(vx)=0$. با این توضیحات نتیجه می‌گیریم که برای هر $\epsilon>0$، مجموعه‌ی بازی شامل e مانند V یافت می‌شود که برای هر $v\in V$ و هر $x\in G$،

$|f(vx)-f(x)|<\epsilon$. اکنون فرض کنیم $x_\circ \in G$. برای هر $x\in Vx_\circ$ و هر $t\in G$،

$$|f(xx_\circ^{-1}t)-f(t)|<\epsilon.$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که برای هر $x\in Vx_\circ$ و هر $t\in G$، $|f(xt)-f(x_\circ t)|<\epsilon$. لذا تابع $x\mapsto {}_xf$ در نقطه‌ی $x_\circ$ پیوسته و حکم اثبات می‌شود. ■

قضیه‌۸ ـ ۵. *برای یک گروه توپولوژیک G، گزاره‌های زیر برقرارند.*

الف) *اگر U زیرمجموعه‌ی باز و متقارن شامل e باشد، آنگاه $H=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}U^n$ زیرگروهی باز از G است.*

ب) *هر زیرگروه باز از G، بسته است.*

ج) *اگر G هاسدورف باشد، مرکز G زیرگروهی نرمال و بسته است.*

د) *مؤلفه‌ی همانی از گروه G، زیرگروهی نرمال و بسته از G است.*

برهان. فرض کنیم x و y دو عنصر از H باشند. در آن‌صورت برای m و n ای، $x\in U^m$ و $y\in U^n$. بنابراین $xy\in U^mU^n=U^{m+n}\subseteq H$. بعلاوه $x^{-1}\in (U^m)^{-1}=U^m\subseteq H$ که نشان می‌دهد H زیرگروهی از G است. چون U باز است، برای هر n، U^n باز است و لذا H باز است.

برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنیم H زیرگروهی باز از G باشد. برای هر $x\in G$، xH باز است. از آنجا که همدسته‌های زیرگروه H افرازی برای گروه G می‌باشند، لذا $H=G\backslash\bigcup\limits_{xH\neq H}xH$. این نتیجه می‌دهد که H بسته است.

برای اثبات قسمت (ج)، به‌راحتی دیده می‌شود که مرکز یک گروه، زیرگروهی نرمال است. فرض کنیم $Z(G)$ مرکز گروه G باشد. فرض کنیم $x\in\overline{Z(G)}$ و $y\in G$ عنصری دلخواه باشد. توری در $Z(G)$ مانند $\{z_\alpha\}_{\alpha\in I}$ وجود دارد که $z_\alpha\to x$. بنابه پیوستگی عمل ضرب، $z_\alpha y\to xy$ و $yz_\alpha\to yx$. اما برای هر α، $yz_\alpha=z_\alpha y$ و بنابراین $xy=yx$. این نشان می‌دهد که $x\in Z(G)$ و لذا $Z(G)$ بسته است.

سرانجام فرض کنیم C مؤلفه‌ی همانی از گروه G باشد. چون هر مؤلفه‌ی بسته است، لذا C بسته است. اگر $x\in C$، چون عمل ضرب پیوسته است لذا $x^{-1}C$ زیرمجموعه‌ای همبند شامل همانی است. بنابراین $x^{-1}C\subseteq C$، این نشان می‌دهد که $x^{-1}\in C$. از طرف دیگر $\bigcup\limits_{x\in C}x^{-1}C=C^{-1}C\subseteq C$ و لذا C زیرگروهی از G است. اگر $y\in G$ عنصری دلخواه باشد، چون تابع $x\mapsto y^{-1}xy$ پیوسته است بنابراین $y^{-1}Cy$ همبند است. چون $e\in y^{-1}Cy$، لذا $y^{-1}Cy\subseteq C$ و بنابراین C زیرگروهی نرمال است. ■

فرض کنیم H زیرگروهی نرمال از گروه توپولوژیک G باشد. در این‌صورت $G/H = \{xH;\ x \in G\}$ با عمل ضرب $xHyH = xyH$ تشکیل یک گروه می‌دهد. تابع $\pi : G \to G/H$ را با ضابطه $\pi(x) = xH$ در نظر می‌گیریم. گوییم $W \subseteq G/H$ باز است اگر و تنها اگر $\pi^{-1}(W)$ در G باز باشد. با توپولوژی تعریف شده روی G/H، این گروه به یک فضای توپولوژیک تبدیل می‌شود و تابع π تحت این توپولوژی پیوسته است. بعلاوه این‌که π باز است، در حقیقت اگر U زیرمجموعه‌ی بازی از G باشد، آنگاه $UH = \pi^{-1}\big(\pi(U)\big)$. چون UH باز است، لذا $\pi(U)$ باز است.

قضیه۸ ـ ۶. اگر H زیرگروهی نرمال از گروه توپولوژیک G باشد، آنگاه G/H یک گروه توپولوژیک است.

برهان. فرض کنیم $W \subseteq G/H$ زیرمجموعه‌ی بازی شامل xyH باشد. در این‌صورت $\pi^{-1}(W)$ زیرمجموعه‌ی بازی از G شامل xy است. چون G گروهی توپولوژیک است، لذا مجموعه‌ی بازی چون U شامل همانی وجود دارد که $xUyU \subseteq \pi^{-1}(W)$. اما

$$xHyH \in \pi(xU)\pi(yU) = \pi(xUyU) \subseteq \pi\big(\pi^{-1}(W)\big) \subseteq W.$$

چون π باز است، لذا عمل ضرب پیوسته است.

به روشی مشابه ثابت می‌شود که تابع $xH \mapsto x^{-1}H$ پیوسته است و لذا G/H گروهی توپولوژیک است. ∎

قضیه۸ ـ ۷. اگر H زیرگروهی نرمال از گروه توپولوژیک G باشد، در آن‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

الف) *H بسته است اگر و تنها اگر G/H هاسدورف باشد.*

ب) *H باز است اگر و تنها اگر G/H گروهی گسسته باشد.*

برهان. اگر H زیرگروهی بسته از G باشد، در آن‌صورت برای هر $x \in G$، xH زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از G است. بنابراین $G\backslash xH$ زیرمجموعه‌ی بازی از G است و لذا $\pi(G\backslash xH)$ در گروه G/H باز خواهد بود. از طرف دیگر $\pi(G\backslash xH) = G/H\backslash\{xH\}$، یعنی $\{xH\}$ در G/H بسته و لذا G/H یک فضای T_0 است. بنابراین G/H هاسدورف است.

برعکس، اگر G/H گروهی هاسدورف باشد در آن‌صورت $\{H\}$ بسته است و لذا $H = \pi^{-1}(\{H\})$ بسته است.

برای اثبات قسمت (ب)، فرض کنیم H زیرگروهی باز باشد. بنابراین برای هر $x \in G$، xH در

G باز است. اما $xH = \pi^{-1}(\{xH\})$ و لذا $\{xH\}$ در G/H باز است، یعنی G/H گروهی گسسته است.

برعکس، اگر G/H گروهی گسسته باشد، لذا $\{H\}$ باز است و بنابراین $H = \pi^{-1}(\{H\})$ در G باز است. ■

تمرین ۸

۱. ثابت کنید حاصل‌ضرب هر تعداد از گروه‌های توپولوژیک نسبت به توپولوژی حاصل‌ضربی یک گروه توپولوژیک است.

۲. می‌دانیم $\mathbb{R}$ با عمل جمع یک گروه توپولوژیک است. همچنین $\mathbb{Z}$ زیرگروهی نرمال از $\mathbb{R}$ است. گروه $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ با چه گروه شناخته شده‌ای همیومورف است. ادعای خود را ثابت کنید.

۳. اگر G گروهی توپولوژیک و C مؤلفه‌ی همانی در G باشد. ثابت کنید G/C ناهمبند کلی است.

۴. اگر G گروه توپولوژیک شمارای اول و H زیرگروهی نرمال از آن باشد، ثابت کنید G/H شمارای اول است.

۵. اگر H زیرگروه نرمال و فشرده از گروه توپولوژیک هاسدورف G باشد. ثابت کنید π تابعی بسته است.

۶. اگر H زیرگروهی نرمال از گروه توپولوژیک G بوده که H و G/H فشرده باشد، ثابت کنید G نیز فشرده است.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

(X, τ)	فضای توپولوژیک
(X, d)	فضای متریک
A'	مجموعه‌ی نقاط حدی A
$\overline{A}$	مجموعه‌ی نقاط چسبیدگی A
A°	مجموعه‌ی نقاط درونی A
A^c	متمم A
$\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$	حاصل‌ضرب $\{A_\alpha;\ \alpha \in I\}$
π_α	تابع تصویر
$\emptyset$	مجموعه‌ی تهی
$\mathrm{bd}(A)$	مجموعه‌ی نقاط مرزی A
$C([۰, ۱])$	مجموعه‌ی توابع پیوسته روی $[۰, ۱]$.
$d(a, b)$	فاصله‌ی a و b
$\inf(A)$	اینفیموم A
$\mathbb{N}$	مجموعه‌ی اعداد طبیعی
$\mathcal{P}(A)$	مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A
$\mathbb{Q}$	مجموعه‌ی اعداد گویا
$\mathbb{R}$	مجموعه‌ی اعداد حقیقی
$S_r(x)$	گوی به مرکز x و شعاع r
$\sup(A)$	سوپریموم A
τ	توپولوژی
τ_q	توپولوژی خارج قسمتی
$X/\sim$	فضای خارج قسمتی
X^*	فشرده‌سازی تک نقطه‌ای X
$\mathbb{Z}$	مجموعه‌ی اعداد صحیح

مراجع

[1] J. DUGUNDJI, *Topology*, *Universal Book Stall New Delhi*, (2002).

[2] E. HEWITT and K. A. ROSS, *Abstract harmonic analysis*, *Springer-Verlag, Berline*, (1970).

[3] J. L. KELLY, *General topology*, *D. Van Nostrand Co., Princeton*, (1955).

[4] J. R. MUNKERES, *Topology a first course*, *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey*, (1975).

[5] W. RUDIN, *Functional analysis*, *McGraw Hill, New York*, (1991).

[6] W. RUDIN, *Principles of mathematical analysis*, *McGraw Hill, New York*, (1976).

[7] G. F. SIMMONS, *Introduction to topology and modern analysis*, *McGraw Hill*, (1963).