جبر خطی

سرژ لانگ

محمد رجبی طرخورانی

جبر خطی

مؤلف:
سرژ لانگ

مترجم:
محمد رجبی طرخورانی

فهرست مطالب

مقدمهٔ مترجم

سرژلانگ یکی از ریاضیدانان برجستهٔ امریکایی است که در سال ۱۹۲۷ در پاریس به دنیا آمده و تاکلاس دهم تحصیلات خود را در همانجا ادامه داده و سپس به کالیفرنیای امریکا عزیمت نموده است. وی در سال ۱۹۵۱ دکترای ریاضی خود را از دانشگاه پرینستون دریافت نموده و سپس در همان دانشگاه به تدریس مشغول گشته است. در سالهای ۱۹۵۳ تا ۱۹۵۵ در دانشگاه شیکاگو و در سالهای ۱۹۵۵ تا ۱۹۷۰ به عنوان پروفسور در دانشگاه کلمبیا به تدریس پرداخته است. و اکنون در دانشگاه ییل مشغول تدریس و تحقیق است. وی تاکنون ۲۸ کتاب و بیش از ۶۰ مقاله تحقیقی نوشته است. او در تدریس و آموزش مطالب ریاضی دارای روش زنده و بی‌همتایی است و به همین جهت یاددادن و یادگرفتن از روی نوشته‌های او به خوبی امکان پذیر است، و همین امر باعث ترجمهٔ این اثر نویسنده به زبان فارسی گشته است. امیدواریم با ترجمهٔ این کتاب توانسته باشیم خدمتی، هرچند اندک، به آموزش ریاضیات در کشور خودکرده باشیم.

تهران ـ تیرماه ۱۳۷۲

محمد رجبی طرخورانی

مقدمه مؤلف

کتاب حاضر به عنوان یک متن درسی برای یک دورهٔ جبر خطی در سطح لیسانس تهیه شده است.

کتاب **مقدمه‌ای بر جبر خطی** اینجانب یک متن درسی برای دانشجویان مبتدی و در همان سطح حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی است. اما این کتاب در یک سطح بالاتری است و در واقع برای یک دورهٔ بعدی در جبر خطی نوشته شده و تأکید آن روی قضیه‌های ساختاری مختلف مانند مقادیر ویژه و بردارهای ویژه (که نهایتاً در انتهای دوره مقدماتی و آنهم به سرعت مطرح می‌شوند)، عملگرهای متقارن، هرمیتی و یکانی،و همچنین قضیهٔ طیفی آنها (قطری سازی)؛ مثلثی کردن ماتریسها و نگاشتهای خطی، فرم استاندارد ژردان ؛ مجموعه‌های محدب و قضیهٔ کرین ـ میلمن، می‌باشد. در یک فصل نیز یک نظریهٔ کامل از خواص اساسی دترمینانها ارائه شده است. در متن مقدماتی بخش جزیی از این مطلب آمده است. البته، هنوز نیز بخشهایی از این فصل می‌توانند حذف گردند.

فصل مجموعه‌های محدب اضافه شده است زیرا شامل نتایج اساسی جبر خطی است که در کاربردهای زیادی و همچنین جبر خطی «هندسی» به کارمی‌روند. چون به طور منطقی نتایجی از آنالیز مقدماتی (نظیر هرتابع پیوسته روی یک مجموعهٔ بسته دارای یک ماکزیمم است) را به کار می‌برد آن را در قسمت پایانی قرار دادم. اگر چنین نتایجی برای کلاس شناخته شده باشد، این فصل را می‌توان خیلی زودتر، مثلاً بعد از تعریف نگاشت خطی ارائه داد.

من معتقدم که این کتاب می‌تواند برای یک درس جبر خطی در یک ترم به کار رود. شش فصل اول آن مروری بر برخی مفاهیم اساسی است، و من آنها را به خاطر

تأکید آورده‌ام. بنابراین این قضیه که m معادلهٔ خطی همگن n مجهولی دارای یک جواب غیر بدیهی است به شرطی که $n>m$ باشد با استفاده از قضیهٔ بعد بهتر از راههای دیگری که در متنهای مقدماتی می‌آید نتیجه می‌شود. و اثبات اینکه دو پایه در یک فضای برداری دارای تعداد یکسانی عضو می‌باشند (که بعد را تعریف می‌کند) با استفاده از روش «تعویض» به سرعت انجام می‌گیرد. بحث مربوط به ماتریسهای مقدماتی، و روش حذف گاوس، که در کتاب **جبرخطی مقدماتی** اینجانب آمده بود را حذف کرده‌ایم. لذا بخش نخست کتاب حاضر نمی‌تواند جانشین یک متن مقدماتی گردد. و تنها به این خاطر است که این کتاب را خودکفا سازد ، هم از نظر ارجاع سریع به مطالب مقدماتی اساسی و هم به خاطر تأکید روی فصلهای پیشرفته‌تر. دورهٔ تحصیلات امروزی به این ترتیب است که اکثر دانشجویان، اگرنه همهٔ آنها، یک دورهٔ مقدماتی یک ترمه که تأکید آن روی مهارت با ماتریسهاست انتخاب می‌کنند. لذا باید در دورهٔ بعدی مستقیماً به قضایای ساختاری پرداخت.

در پیوست تعریف و خواص اساسی اعداد مختلط ارائه شده است. این قسمت شامل بستار جبری است. اثبات آن، البته، به برخی واقعیتهای مقدماتی آنالیز نیاز دارد، اما نظریهٔ متغیرهای مختلط را به کار نمی‌برد.

هرچند که برای راحتی، و اجتناب از بیان مطالب پایه‌ای، فضاهای برداری مطرح شده را روی هیاتهایی تعریف کرده‌ایم که بخشی از هیات اعداد مختلط هستند، ولی مدرسین می‌توانند روی خواص اساسی جمع، ضرب و تقسیم که در سرتاسر کتاب به کار می‌روند به هر طریق که مایلند تأکید کنند، البته با این استثنای مهم که در قضایای مربوط به حاصلضرب اسکالر معین مثبت هیات اعداد حقیقی و مختلط نقش اساسی را دارا هستند.

سرژ لانگ

۱

فضاهای برداری

طبق معمول، گردآیه‌ای از اشیاء رایك **مجموعه** می‌نامیم. اشیای گردآیه را **اعضای** مجموعه می‌نامیم. درعمل مفید است که برای نمایش مجموعه‌های مشخص ازعلامتهای کوتاه استفاده کنیم. به عنوان مثال مجموعهٔ اعداد حقیقی را با $\mathbf{R}$، مجموعهٔ اعداد مختلط را با $\mathbf{C}$ نمایش می‌دهیم. گفتن اینکه «x یك عدد حقیقی است» یا «x عضوی از $\mathbf{R}$ است» هردو بیان یك مفهوم است. مجموعهٔ تمام n تائیهای اعـداد حقیقی رابا $\mathbf{R}^n$ نمایش می‌دهیم. بنابراین «X عضوی‌از $\mathbf{R}^n$ است» و «X یك n تایی ازاعداد حقیقی‌است» به‌یك معنی است. مروری بر تعریف $\mathbf{C}$ وخواص آن درپیوست آمده است.

به جای اینکه بگوئیم u عضوی ازمجموعهٔ S است، اغلب می‌گوئیم u درمجموعهٔ S قراردارد ویا u متعلق به S است ومی‌نویسیم $u \in S$. اگر S و S' دومجموعه، واگر هرعضو S' عضوی از S باشد، می‌گوئیم S' **زیرمجموعهٔ** S است. بنابراین مجموعهٔ اعداد حقیقی زیرمجموعه‌ای ازمجموعهٔ اعداد مختلط است. گفتن اینکه S' زیرمجموعه‌ای از S است و گفتن اینکه S' بخشی از S است به یك معنی‌است. توجه‌کنیدکه تعریف ما از زیرمجموعه حالت‌تساوی $S = S'$ راشامل است. اگر S' زیرمجموعه‌ای از S و $S' \neq S$ باشد، آنگاه می‌گوئیم S' زیـرمجموعهٔ سرهٔ S است . بنابراین $\mathbf{C}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{C}$ است، اما $\mathbf{R}$ زیرمجموعهٔ سره‌ای از $\mathbf{C}$ است. اگـر S' زیرمجموعه‌ای از S باشد می‌نویسیم $S' \subset S$، وهمچنین می‌گوئیم S' **مشمول** S است.

اگر S_1 و S_2 دومجموعه بـاشند، آنگاه **اشتراك** S_1 و S_2 رابـا $S_1 \cap S_2$ نمایش

می‌دهیم، وعبارت است ازمجموعهٔ تمام اعضایی که متعلق به S_1 و S_2 هستند. **اجتماع** S_1 و S_2 را با $S_1 \cup S_2$ نمایش می‌دهیم وعبارت است از مجموعهٔ تمام اعضایی که متعلق به S_1 یامتعلق به S_2 هستند.

۱. تعریفها

فرض کنید K زیرمجموعه‌ای ازاعداد مختلط **C** است. می گوئیم K یك **هیات**است اگردرشرایط زیرصدق کند.

(الف) اگر x و y اعضایی از K باشند، آنگاه $x+y$ و xy نیز اعضایی از K هستند.

(ب) اگر $x \in K$، آنگاه $-x$ عضوی از K است. به‌علاوه، اگر $x \neq 0$ آنگاه x^{-1} نیزعضوی از **K** است.

(پ) اعضای ۰ و ۱ متعلق به K هستند.

توجه داریم که **R** و **C** هردوهیات هستند.

فرض کنید مجموعهٔ اعداد گویـا را با **Q** نمایش دهیم، یعنی مجموعهٔ تمام کسرهای $\frac{m}{n}$ به‌طوری که m و n اعدادصحیح هستند و $n \neq 0$. دراین‌صورت به سادگی دیده‌می‌شود که **Q** یك هیات است.

فرض کنید **Z** مجموعهٔ تمام اعداد صحیح است. دراین صورت **Z** یك هیات نیست، زیرا شرط (ب) فوق برقرارنیست. درواقع اگر n یك عدد صحیح مخالف صفر باشد، آنگاه $\frac{1}{n} = n^{-1}$ یك عددصحیح نیست(مگر حالت بدیهی $n = 1$ و $n = -1$). مثلاً $\frac{1}{2}$ یك عـدد صحیح نیست.

درواقع یك **هیات** مجموعه‌ای ازاشیاء است که می‌توان آنها را جمع وضرب کرد به طوری که جمع و ضرب درقواعد معمولی حساب صدق می‌کنند ویك را می‌توان برهرعضو مخالف صفر تقسیم کرد. می‌توان این مفاهیم رابه‌صورت اصل موضوعی بیان کرد، ولی برای اجتناب ازبحثهای مجرد که خواننده آنها را درسایردروس‌ریاضی خود خواهد دید به‌تأخیر می‌اندازیم. تاقبل‌ازاین تعمیم هیاتها، هیاتی که مادرنظرمی‌گیریم‌همان هیات اعداد(مختلط) است.

خواننده می‌تواند خود رابه هیات اعداد حقیقی یاهیات اعداد مختلط، در تمام جبر خطی، محدودسازد. چون، به‌هرحال، لازم است یکی‌ازاین هیاتها را موردبررسی‌قراردهیم.

حرف K را برای نمایش یك هیات انتخاب می‌کنیم.

فرض کنید K، L دوهیات و K مشمول L است (یعنی K زیرمجموعه‌ای از L است). دراین‌صورت می‌گوئیم که K یك **زیرهیات** L است. بنابـراین هریك از این هیاتهایی‌که مورد بررسی قرارمی‌دهیم زیرهیاتی ازهیات اعداد مختلط است. بـه‌ویژه، می‌گوئیم که $\mathbf{R}$ زیر هیات $\mathbf{C}$ و $\mathbf{Q}$ زیرهیات $\mathbf{R}$ است.

فرض کنید K یك هیات است. اعضای K را **اعداد** (بدون مشخص سازی) می‌نامیم هرگاه رجوع به K ازمتن روشن باشد، یا آنها را **اسکالر** می‌نامیم.

یك فضای برداری V روی هیات K مجموعهٔ اشیایی است که می‌توانند باهم جمع شوند وهمچنین‌می‌توانند دراعضای K ضرب‌شوند، به‌طریقی‌که، مجموع دوعضو V مجدداً عضوی از V باشد، همچنین ضرب یك عضو V دریك عضو K نیزعضوی از V بوده و در خواص زیرصدق کنند:

ف. ب. ۱. به‌ازای‌هرسه‌عضو دلخواه u، v و w از V داریم

$$(u+v)+w=u+(v+w)$$

ف. ب. ۲. یك عضو V وجود داردکه‌با o نمایش می‌دهیم‌ودرشرط زیرصدق می‌کند

$$u+o=o+u=u\ ,\ \forall u\in V$$

ف. ب. ۳. برای هرعضو $u\in V$ یك عضو $-u\in V$ وجود داردبه‌طوری‌که

$$u+(-u)=o$$

ف. ب. ۴. برای هردوعضو u و v متعلق به V داریم

$$u+v=v+u$$

ف. ب. ۵. اگر c یك عدد باشد، آنگاه

$$c(u+v)=cu+cv$$

ف. ب. ۶. اگر a و b دوعدد باشند، آنگاه

$$(a+b)v=av+bv$$

ف. ب. ۷. اگر a و b دوعدد باشند، آنگاه

$$(ab)v=a(bv)$$

ف. ب. ۸. برای تمام اعضای V داریم

$$1\cdot u=u$$

(منظور از ۱ عدد ۱ است).

تمام این قواعد را درمورد بردارها، یا توابع مورد استفاده قرار داده‌ایم، ولی می‌خواهیم ازاین به بعد اصولی‌تر بررسی شوند، وبدین جهت فهرستی از آنها ارائه‌نمودیم. خواص بیشتری که می‌توان به سادگی ازاینها به‌دست‌آورد را درتمرینها ارائه نموده‌ایم.

مثال ۱. فرض‌کنید $V=K^n$ مجموعهٔ تمام nتائیهای اعضای K است. فرض‌کنید

$$A=(a_1,\dots,a_n) \quad \text{و} \quad B=(b_1,\dots,b_n)$$

دوعضو K^n هستند. a_1، ...، a_n را **مؤلفه‌ها** ، یا **مختصات** A می‌نامیم. تعریف می‌کنیم

$$A+B=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$$

$$cA=(ca_1,\dots,ca_n) \quad , \quad c\in K$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که تمام خواص **ف.ب.۱** تا **ف.ب.۸** برقرار هستند. عضو صفر عبارت است از nتایی $O=(0,\dots,0)$ که همهٔ مختصات آن مساوی صفر است.

بنابراین $\mathbf{C}^n$ یك فضای برداری روی $\mathbf{C}$، و $\mathbf{Q}^n$ یك فضای برداری روی $\mathbf{Q}$ است. توجه‌کنیدکه $\mathbf{R}^n$ یك فضای برداری روی $\mathbf{C}$ نیست. بنابراین وقتی یك فضای برداری را مورد بررسی قرارمی‌دهیم باید هیاتی‌که روی آن فضای برداری را تعریف‌کرده‌ایم مشخص کنیم. وقتی می‌نویسیم K^n، همیشه منظورمان یك‌فضای برداری روی هیات K است. اعضای K^n را، وهمچنین اعضای هرفضای برداری‌دلخواه را **بردار** می‌نامیم.

اگر u و v دو بردار باشند(یعنی اعضای یك فضای برداری دلخواه V)، آنگاه

$$u+(-v)$$

را به صورت $u-v$ می‌نویسیم.

از 0 برای نمایش عدد صفر و O برای نمایش عضوی از فضای برداری‌که در خاصیت ف.ب.۲ صدق می‌کند استفاده می‌کنیم. همچنین این عضو راهم صفر می‌نامیم، اما هرگز باعدد صفر اشتباه نمی‌گیریم. توجه داریم‌که این عضوصفر O به‌طور منحصربه فردی طبق شرط ف.ب.۲ تعیین می‌شود (تمرین ۵ راببینید).

برای هرعضو $v\in V$ داریم

$$0v=O$$

اثبات آن ساده است:

$$0v+v=0v+1v=(0+1)v=1v=v$$

باافزودن $v-$ به‌دو طرف تساوی نتیجه می‌شودکه $0v=O$

خواص سادهٔ دیگر، مشابه خاصیت فوق، درتمرینها ارائه شده است. به عنوان مثال ثابت کنیدکه $(-1)v=-v$.

به سادگی می‌توان چندین عضویك فضای برداری را با هم جمع کرد. فرض کنید می‌خواهیم چهارعضو u، v، w و z راباهم جمع کنیم. نخست دوتا ازآنها را با هم جمع می‌کنیم ونتیجه راباسومی می‌گیریم، وحاصل راباعضوچهارم جمع می‌کنیم. با استفاده از قواعد **ف. ب. ۱** و **ف. ب. ۴** مشاهده می‌کنیم‌که ترتیب اعضا در محاسبهٔ مجموع تأثیری ندارد. این دقیقاً همان وضعیتی است‌که برای بردارها داشتیم. به‌عنوان مثال، داریم

$$\begin{aligned}((u+v)+w)+z&=(u+(v+w))+z\\&=((v+w)+u)+z\\&=(v+w)+(u+z)\end{aligned}$$

وغیره

به‌این جهت عموماً پرانتزها را حذف می‌کنیم وبه سادگی می‌نویسیم

$$u+v+w+z$$

همین توضیح درمورد مجموع هرتعداد دلخواه n از اعضای V درست است، وآن را با استقراء روی n می‌توان ثابت کرد.

فرض کنید V يك فضای برداری، و W يك زیرمجموعهٔ V است. می‌گوئیم W يك **زیرفضای** V است هرگاه درشرایط زیرصدق کند:

(i) اگر v و w دوعضو W باشند، آنگاه‌مجموع آنها، یعنی $v+w$ نیزعضوی‌از Wاست.

(ii) اگر v عضوی از W و c يك عدد باشد، آنگاه cv نیزعضوی از W است.

(iii) صفر V، یعنی O نیزعضوی از W است.

دراین‌صورت W خودش يك فضای برداری است. درواقع، خواص **ف. ب. ۱** تا **ف. ب. ۸** که برای تمام اعضای V برقرارند، به‌طور بدیهی برای اعضای W نیز برقرار می‌باشند.

مثال ۲. فرض کنید $V=K^n$ و W مجموعهٔ تمام بردارهایی از V هستندکه آخرین مؤلفهٔ آنها ۰ است.دراین‌صورت W يك زیرفضای V است، که ما آنرا با K^{n-1} یکی‌می‌گیریم.

ترکیبهای خطی. فرض کنید V يك فضای برداری دلخواه، و v_1، ...، v_n اعضایی از V

هستند. فرض‌کنید x_1، ...، x_n اعداد دلخواهی هستند. هرعبارتی به‌صورت

$$x_1v_1+\dots+x_nv_n$$

رایك **ترکیب خطی** v_1، ...، v_n می‌نامیم.

فرض کنید W مجموعهٔ تمام‌ترکیبهای خطی v_1، ...، v_n است. دراین‌صورت Wیك زیرفضای V است.

اثبات. فرض‌کنید y_1، ...، y_n اعداد دلخواهی هستند. دراین‌صورت

$$(x_1v_1+\dots+x_nv_n)+(y_1v_1+\dots+y_nv_n)=(x_1+y_1)v_1+\dots+(x_n+y_n)v_n$$

بنابراین مجموع دوعضو W مجدداً عضوی از W است، یعنی به صورت ترکیبی خطی از v_1، ...، v_n است. به‌علاوه، اگر c یك عدد باشد، آنگاه

$$c(x_1v_1+\dots+x_nv_n)=cx_1v_1+\dots+cx_nv_n$$

یك ترکیب خطی از v_1، ...، v_n، ودرنتیجه عضوی از W است. بالاخره

$$O=0v_1+\dots+0v_n$$

هم عضوی از W است. به‌این‌ترتیب W یك زیرفضای V است.

زیرفضای W تعریف‌شده دربالا رازیرفضای **تولید شده** توسط v_1، ...، v_nمی‌نامیم. اگر $W=V$، یعنی اگرهرعضو V رابتوان به صورت ترکیب خطی v_1، ...، v_n نوشت، آنگاه‌می‌گوئیم v_1، ...، v_n فضای V را **تولید** می‌کنند.

مثال ۳. فرض‌کنید $V=K^n$. فرض‌کنید A و B دو عضو K^n و $A=(a_1,\dots,a_n)$ و $B=(b_1,\dots,b_n)$. **حاصلضرب نقطه‌ای** یا **حاصلضرب اسکالر** آنها رابه‌صورت‌زیر تعریف می‌کنیم:

$$A\cdot B=a_1b_1+\dots+a_nb_n$$

به‌سادگی می‌توان خواص زیر راثابت‌کرد:

حا۱. داریم

$$A\cdot B=B\cdot A$$

حا۲. اگر A و B و C سه بردار دلخواه باشند، آنگاه

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C=(B+C)\cdot A$$

حا۳. اگر $x\in K$، آنگاه

$$(xA)\cdot B=x(A\cdot B) \quad \text{و} \quad A\cdot(xB)=x(A\cdot B)$$

اکنون این خاصیتها را اثبات می‌کنیم.

درارتباط باخاصیت اول داریم

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n=b_1a_1+\cdots+b_na_n$$

زیرا به‌ازای هردوعدد a و b داریم $ab=ba$. به‌این‌ترتیب خاصیت اول ثابت می‌شود.

برای خاصیت دوم، فرض کنید $C=(c_1,\ldots,c_n)$. دراین‌صورت

$$B+C=(b_1+c_1,\ldots,b_n+c_n)$$

و

$$\begin{aligned}A\cdot(B+C)&=a_1(b_1+c_1)+\cdots+a_n(b_n+c_n)\\&=a_1b_1+a_1c_1+\cdots+a_nb_n+a_nc_n\\&=a_1b_1+\cdots+a_nb_n+a_1c_1+\cdots+a_nc_n\\&=A\cdot B+A\cdot C\end{aligned}$$

اثبات خاصیت ۳ را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

به جای اینکه بنویسیم $A\cdot A$ می‌نویسیم A^2 (البته این فقط برای توان ۲ است و دیگر A^3 دارای معنی نیست)، به‌عنوان یك تمرین نشان دهیدکه

$$(A+B)^2=A^2+2A\cdot B+B^2$$

$$(A-B)^2=A^2-2A\cdot B+B^2$$

بسیاراتفاق می‌افتدکه‌حاصلضرب نقطه‌ای $A\cdot B$ مساوی صفر است بدون اینکه هیچ کدام از دو بردار A و B مساوی صفر باشند. به عنوان مثال اگر $A=(1,2,3)$ و $B=\left(2,1,-\frac{4}{3}\right)$ باشد آنگاه $A\cdot B=0$

دو بردار A و B را **عمود برهم** (یا **متعامد**) می‌نامیم هرگاه $A\cdot B=0$. فرض کنید A برداری در K^n است. فرض کنید W مجموعهٔ تمام اعضای B متعلق به K^n است به‌طوری که $B\cdot A=0$، یعنی B بر A عمود است. دراین‌صورت W یك زیرفضای K^n است. برای اثبات توجه‌کنیدکه $0\cdot A=0$ بنابراین 0 متعلق به W است. سپس فرض‌کنیدکه B و C بر A عمودند. دراین‌صورت

$$(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A=0$$

بنابراین $B+C$ بر A عمود است. بالاخره، اگر x یك عدد باشد، آنگاه

$$(xB)\cdot A=x(B\cdot A)=0$$

بنابراین xB بر A عمود است. این ثابت می‌کند که W یك زیرفضای K^n است.

مثال ۴. فضای توابع. فرض‌کنید S یك‌مجموعه و K یك هیات است. منظور از یك **تابع** از S در K تناظری است که به‌هرعضو S یك عضومنحصر به‌فرد از K را نظیرمی‌کند. بنابراین اگر f یك‌تابع از S در K باشد، آن را با نماد $f:S\to K$ نمایش می‌دهیم. همچنین می‌گوئیم f یك‌تابع K**ـ مقداری** است. فرض‌کنید V مجموعهٔ تمام توابع S در K است. اگر f و g دوتابع باشند، آنگاه می‌توانیم مجموع آنها، $f+g$، را تعریف‌کنیم. $f+g$ تابعی است که به‌هر x متعلق به S عضو $f(x)+g(x)$ را نسبت می‌دهد. می‌نویسیم

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

اگر $c\in K$، آنگاه cf را تابعی درنظرمی‌گیریم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(cf)(x)=cf(x)$$

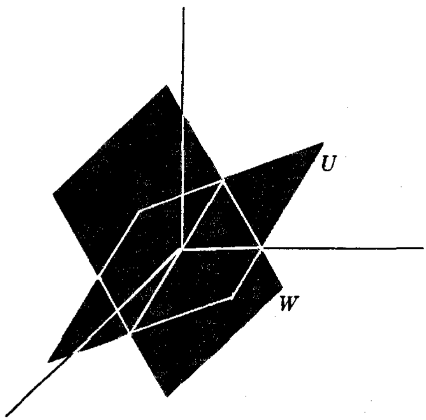
بنابراین مقدار cf در x مساوی $cf(x)$ است. به‌سادگی می‌توان نشان دادکه V یك‌فضای برداری روی K است. اثبات آن را به‌عهدهٔ خواننده واگذارمی‌کنیم. فقط تذکرمی‌دهیم‌که عضوصفر V تابع صفراست، یعنی تابعی مانند f به‌طوری‌که به‌ازای هر $x\in S$، $f(x)=0$. تابع صفر را با O نمایش می‌دهیم.

فرض‌کنید V مجموعهٔ کلیه توابع $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ است. دراین‌صورت V یك‌فضای برداری روی $\mathbf{R}$ است. فرض‌کنید W زیرمجموعهٔ تمام توابع پیوسته است. اگر f و g دوتابع پیوسته باشند، آنگاه $f+g$ پیوسته‌است. اگر c یك‌عدد حقیقی باشد، آنگاه cf نیز پیوسته است. تابع صفرهم پیوسته است. لذا W یك‌زیرفضای برداری‌کلیه توابع $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$است، یعنی W زیرفضایی از V است.

فرض‌کنید U مجموعهٔ‌کلیه توابع مشتق‌پذیر $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ است. اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f+g$ نیزمشتق‌پذیر است. اگر c یك‌عدد حقیقی باشد، آنگاه cf مشتق‌پذیر است. تابع صفرهم مشتق‌پذیر است. لذا U یك زیرفضای V است. درواقع، U یك زیرفضای W است، زیرا هرتابع مشتق‌پذیر پیوسته است.

فرض‌کنید V فضای برداری (روی $\mathbf{R}$) توابع $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ است. دوتابع e^t و e^{2t} را درنظرمی‌گیریم. این توابع یك زیرفضا ازفضای برداری‌کلیه توابع مشتق‌پذیر را تولید می‌کنند. تابع $3e^t+2e^{2t}$ تابعی از این زیرفضاست. همچنین است تابع $2e^t+\pi e^{2t}$.

مثال۵. فرض کنید V یك فضای برداری و U و W دوزیرفضای آن هستند. اشتراك U و W، یعنی مجموعهٔ تمام اعضایی که متعلق به U و W هستند، را با $U \cap W$ نمایش می‌دهیم. دراین صورت $U \cap W$ یك زیرفضای V است. به‌عنوان مثال، اگر U و W دوصفحه درفضای سه بعدی معمولی باشندکه ازمبدأ می‌گذرند، آنگاه درحالت کلی، اشتراك آنها یك خط راست گذرنده برمبدأ است،که درشکل زیرمشخص شده است.



شکل ۱

مثال۶. فرض کنید U، W زیرفضاهایی ازفضای برداری V هستند. با $U+W$ مجموعهٔ تمام اعضایی‌که به‌صورت $u+w$، $u\in U$ و $w\in W$ هستند را نمایش می‌دهیم. اثبات اینکه $U+W$ یك زیرفضای V است را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم. $U+W$ زیرفضای تولید شده به‌وسیلهٔ U و W است. این زیرفضا را **مجموع** U و W می‌نامیم.

تمرینها

۱. فرض کنید V یك فضای برداری است. با استفاده ازخواص **ف.ب۱** الی **ف.ب۸**، نشان دهیدکه اگر c یك عدد باشد، آنگاه $co=o$.

۲. فرض کنید c یك‌عدد مخالف صفرو v یك‌عضو V است. ثابت کنید که اگر $cv = o$، آنگاه $v = o$.

۳. درفضای برداری توابع، تابعی‌که درشرط ف.ب۲ صدق می‌کند چیست؟

۴. فرض کنید V یك فضای برداری و v و w دوعضو V هستند. اگر $v+w=o$ باشد نشان دهید که $w=-v$.

۵. فرض کنید V یك‌فضای برداری، و v و w دوعضو V هستند به‌طوری‌که $v+w=v$. نشان دهید که $w=o$.

۶. فرض کنید A_1، A_2 دوبردار $\mathbf{R}^n$ هستند. نشان دهیدکه مجموعهٔ تمام بردارهای B در $\mathbf{R}^n$ به‌طوری‌که بر A_1 و A_2 هردوعمود هستند، تشکیل یك زیرفضا می‌دهند.

۷. تمرین ۶ را تعمیم دهید، وثابت‌کنید: فرض‌کنید A_1،...،A_r بردارهایی در $\mathbf{R}^n$ هستند. فرض‌کنید W مجموعهٔ بردارهایی مانند B است‌که به‌طوری‌که $B \cdot A_i = 0$ برای هر $i=1,\dots,r$. نشان دهیدکه W یك زیرفضای $\mathbf{R}^n$ است.

۸. نشان دهیدکه زیرمجموعه‌های زیر از $\mathbf{R}^2$ یك زیرفضای $\mathbf{R}^2$ هستند.

(الف) مجموعهٔ تمام (x,y) هایی‌که $x=y$.

(ب) مجموعهٔ تمام (x,y) هایی‌که $x-y=0$.

(پ) مجموعهٔ تمام (x,y) هایی‌که $x+4y=0$.

۹. نشان دهیدکه زیرمجموعه‌های زیر از $\mathbf{R}^3$ یك زیرفضای $\mathbf{R}^3$ هستند.

(الف) مجموعهٔ‌تمام (x,y,z) هایی‌که $x+y+z=0$.

(ب) مجموعهٔ‌تمام (x,y,z) هایی‌که $x=y$ و $2y=z$.

(پ) مجموعهٔ‌تمام (x,y,z) هایی‌که $x+y=3z$.

۱۰. اگر U و W زیرفضاهای V باشند، نشان دهیدکه $U \cap W$ و $U+W$ زیرفضا هستند.

۱۱. فرض کنید K یك زیـرهیات L است. نشان دهیدکـه L یك فضای برداری روی K است. به‌ویژه، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{R}$ فضاهایی برداری روی $\mathbf{Q}$ هستند.

۱۲. فرض کنید K مجموعـهٔ‌تمام اعدادی استکـه می‌توان آنها را به‌صورت $a+b\sqrt{2}$ نوشت‌که a و b اعدادگویا هستند. نشان دهیدکه K یك هیات است.

۱۳. فرض کنید K مجموعهٔ‌تمام اعدادی است‌که می‌توان آنهارا به‌صورت $a+bi$ نوشت که a و b اعدادگویا هستند. نشان دهیدکه K یك هیات است.

۱۴. فرض کنید که c یك عدد گویای مثبت است، و فرض کنید γ یك‌عدد حقیقی‌است به‌طوری که $c=\gamma^{2}$. نشان دهید که مجموعهٔ تمام اعدادی که می‌توان آنها را به‌صورت $a+b\gamma$ نوشت که a و b اعداد گویا هستند، یك هیات است.

۲. پایه

فرض کنید V یك فضای برداری روی هیات K است، و فرض کنید $v_{1},\dots,v_{n}$ اعضای V هستند. می‌گوئیم $v_{1},\dots,v_{n}$ **بستگی خطی** دارند هرگاه اعضای $a_{1},\dots,a_{n}$ متعلق به K وجود داشته باشند به‌طوری که همگی صفر نبوده و

$$a_{1}v_{1}+\cdots+a_{n}v_{n}=o$$

باشد. اگر چنین اعدادی وجود نداشته باشند می‌گوئیم که بردارهای $v_{1},\dots,v_{n}$ **استقلال خطی** دارند. به‌عبارت دیگر، بردارهای $v_{1},\dots,v_{n}$ استقلال خطی دارند اگر وتنها اگر در شرط زیر صدق کنند:

هرگاه $a_{1},a_{2},\dots,a_{n}$ اعدادی هستند که

$$a_{1}v_{1}+\cdots+a_{n}v_{n}=0$$

آنگاه به‌ازای هر $i=1,2,\dots,n$ داشته باشیم $a_{i}=0$.

مثال ۱. فرض کنید $V=K^{n}$ و بردارهای زیر را درنظر می‌گیریم

$$E_{1}=(1,0,\dots,0)$$
$$\vdots$$
$$E_{n}=(0,0,\dots,1)$$

دراین صورت $E_{1},\dots,E_{n}$ استقلال خطی دارند. درواقع، فرض کنید $a_{1},\dots,a_{n}$ اعدادی هستند که

$$a_{1}E_{1}+\cdots+a_{n}E_{n}=0$$

چون

$$a_{1}E_{1}+\cdots+a_{n}E_{n}=(a_{1},\dots,a_{n})$$

نتیجه می‌شود که همهٔ a_{i}ها مساوی ۰ هستند.

مثال ۲. فرض کنید V فضای برداری تمام توابع از یک متغیر t هستند. فرض کنید $f_1, \dots, f_n$، n تابع هستند. گفتن اینکه این توابع بستگی خطی دارند، یعنی بیان این مطلب که اعداد $a_1, \dots, a_n$ که همگی صفر نیستند وجود دارند به‌طوری که به‌ازای تمام مقادیر t،

$$a_1 f_1(t) + \dots + a_n f_n(t) = 0$$

دو تابع e^t و e^{2t} استقلال خطی دارند. برای اثبات، فرض کنید که اعداد a و b چنان هستند که

$$ae^t + be^{2t} = 0$$

(برای تمام مقادیر t). از این رابطه مشتق می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$ae^t + 2be^{2t} = 0$$

از کم کردن دو رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود که $be^{2t} = 0$، و لذا $b = 0$. با توجه به رابطهٔ اول داریم $ae^t = 0$، و لذا $a = 0$. بنابراین e^t و e^{2t} مستقل خطی هستند.

اگر اعضای $v_1, \dots, v_n$ فضای برداری V را تولید کنند و استقلال خطی هم داشته باشند، می‌گوئیم $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایهٔ V است. همچنین می‌گوئیم که اعضای $v_1, \dots, v_n$ تشکیل یک پایه می‌دهند.

بردارهای $E_1, \dots, E_n$ مثال قبل تشکیل یک پایهٔ $\mathbf{R}^n$ را می‌دهند.

فرض کنید W فضای برداری توابع تولید شده توسط e^t و e^{2t} است. در این صورت $\{e^t, e^{2t}\}$ یک پایه برای W است.

اکنون **مختصات** یک عضو $v \in V$ را نسبت به یک پایه تعریف می‌کنیم. تعریف بستگی به‌واقعیت زیر دارد.

قضیهٔ ۲۰۱. فرض کنید V یک فضای برداری است. فرض کنید اعضای $v_1, \dots, v_n$ از V استقلال خطی دارند. فرض کنید $x_1, \dots, x_n$ و $y_1, \dots, y_n$ اعداد دلخواهی هستند. فرض کنید که داریم

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$$

در این صورت به‌ازای هر $i = 1, \dots, n$ داریم $x_i = y_i$.

اثبات. طرف راست تساوی را از طرف چپ آن کم می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$x_1 v_1 - y_1 v_1 + \dots + x_n v_n - y_n v_n = 0$$

این رابطه را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$(x_۱-y_۱)v_۱+\cdots+(x_n-y_n)v_n=۰$$

طبق تعریف باید به‌ازای هر $i=۱,\ldots,n$ داشته باشیم $x_i-y_i=۰$ یا $x_i=y_i$.

فرض کنید V یك فضای برداری، و $\{v_۱,\ldots,v_n\}$ یك پایهٔ V است. اعضای V را نسبت به‌این پایه می‌توانیم به‌طریق زیر به‌صورت n تائیهای مرتب بنویسیم. اگر یك عضو v از V به‌صورت ترکیب خطی

$$v=x_۱v_۱+\cdots+x_nv_n$$

نوشته شود، آنگاه طبق قضیهٔ قبل، n تایی $(x_۱,\ldots,x_n)$ به‌طور منحصر به‌فردی توسط v مشخص می‌شود. $(x_۱,\ldots,x_n)$ را **مختصات** v نسبت به‌پایهٔ داده شده، و x_i را i امین مختص آن می‌نامیم. مختصات نسبت به‌پایهٔ معمولی $E_۱$، ...، E_n از K^n را مختصات n تایی X می‌نامیم. می‌گوئیم که n تایی $X=(x_۱,\ldots,x_n)$ **بردار مختصاتی** v نسبت به‌پایهٔ $\{v_۱,\ldots,v_n\}$ است.

مثال۳. فرض کنید V فضای برداری توابع تولید شده توسط دو تابع e^t و $e^{۲t}$ است. در این صورت مختصات تابع $۳e^t+۵e^{۲t}$ نسبت به‌پایهٔ $\{e^t,e^{۲t}\}$ عبارت است از $(۳,۵)$.

مثال۴. نشان دهید که بردارهای $(۱,۱)$ و $(-۳,۲)$ استقلال خطی دارند.

فرض کنید a و b دو عدد هستند به‌طوری که

$$a(۱,۱)+b(-۳,۲)=۰$$

این رابطه را بر حسب مؤلفه‌ها می‌نویسیم، نتیجه می‌شود

$$a-۳b=۰\quad,\quad a+۲b=۰$$

این یك دستگاه دومعادله است که آن را نسبت به a و b حل می‌کنیم. دومی را از اولی کم می‌کنیم، نتیجه می‌شود که $-۵b=۰$، واز اینجا $b=۰$. پس از جایگذاری دریکی از معادلات به‌دست‌می‌آوریم $a=۰$. بنابراین a و b هر دو صفرند، ودر نتیجه بردارها استقلال خطی دارند.

مثال۵. مختصات $(۱,۰)$ را نسبت به‌دو بردار $(۱,۱)$ و $(-۱,۲)$ که تشکیل یك پایه می‌دهند به‌دست آورید.

باید اعداد a و b را طوری به‌دست آوریم که

$$a(۱,۱)+b(-۱,۲)=(۱,۰)$$

این معادله را برحسب مؤلفه‌ها می‌نویسیم، حاصل می‌شود

$$a-b=۱ \quad , \quad a+۲b=۰$$

اگر به‌طریق معمول نسبت بـه a و b حل‌کنیم نتیجه می‌شودکـه $b=-\frac{۱}{۳}$ و $a=\frac{۲}{۳}$. لذا مختصات $(۱,۰)$ نسبت به‌بردارهای $(۱,۱)$ و $(-۱,۲)$ عبارت‌است‌از $\left(\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳}\right)$.

مثال۶. نشان دهیدکه بردارهای $(۱,۱)$ و $(-۱,۲)$ تشکیل یك پایهٔ $\mathbf{R}^۲$ را می‌دهند.

باید نشان دهیم که مستقل‌خطی‌اند و $\mathbf{R}^۲$ را تولید می‌کنند. برای اثبات استقلال‌خطی، فرض‌کنیدکه a و b اعدادی هستندکه

$$a(۱,۱)+b(-۱,۲)=(۰,۰)$$

دراین صورت داریم

$$a-b=۰ \quad , \quad a+۲b=۰$$

اگرمعادلهٔ اول را از دومی‌کم‌کنیم نتیجه می‌شودکه $۳b=۰$، بنابراین $b=۰$. با توجه به معادلهٔ اول نتیجه می‌گیریم کـه $a=۰$. بنابراین دوبـردار داده شده استقلال خطی دارند. اکنون فرض‌کنیدکـه (a,b) عضودلخواهی از $\mathbf{R}^۲$ است. باید نشان دهیم‌که اعداد x و y وجود دارند به‌طوری‌که

$$x(۱,۱)+y(-۱,۲)=(a,b)$$

به‌عبارت دیگر باید دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x-\ \ y=a \\ x+۲y=b \end{cases}$$

را حل‌کنیم. معادلهٔ اول را ازمعادلهٔ دوم‌کم می‌کنیم. نتیجه می‌شود $۳y=b-a$ وازاینجا $y=\frac{b-a}{۳}$. پس ازجایگذاری درمعادلهٔ اول داریم $x=y+a=\frac{b-a}{۳}+a$. بنابراین مطلب مورد نظر ثـابت می‌شود. طبق تعریف مـا، (x,y) مختصات (a,b) نسبت بـه‌پایـهٔ $\{(۱,۱),(-۲,۲)\}$ است.

فرض‌کنید $\{v_۱,\dots,v_n\}$ یك مجموعـه از اعضای فضای برداری V است. فرض‌کنید r یك‌عدد صحیح مثبت کوچکتریا مساوی n است. می‌گوئیم که $\{v_۱,\dots,v_r\}$ یك‌زیرمجموعهٔ

ماکسیمال از اعضای مستقل خطی است اگر $v_1, \ldots, v_r$ مستقل خطی باشند، و اگر v_i، $i>r$ یک عضو داده شده باشد، آنگاه اعضای $v_1, \ldots, v_r$، v_i بستگی خطی داشته باشند.

قضیهٔ بعدی محک مفیدی برای تعیین اینکه چه موقع یک مجموعه از اعضای یک فضای برداری یک پایه می‌باشند به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۲۰۲. فرض کنید $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یک مجموعه از مولدهای فضای برداری V است. فرض کنید $\{v_1, \ldots, v_r\}$ یک زیرمجموعهٔ ماکسیمال از اعضای مستقل خطی است. دراین‌صورت $\{v_1, \ldots, v_r\}$ یک پایهٔ V است.

اثبات. باید ثابت کنیم که $v_1, \ldots, v_r$ فضای V را تولید می‌کنند. نخست ثابت می‌کنیم که هر v_i (برای $i>r$) یک ترکیب خطی از $v_1, \ldots, v_r$ است. طبق فرض برای هر v_i داده شده، اعداد $x_1, \ldots, x_r$ و y که همگی صفر نیستند وجود دارند به‌طوری‌که

$$x_1v_1 + \cdots + x_rv_r + yv_i = 0$$

بعلاوه، $y \neq 0$، زیرا اگر $y = 0$ باشد، آنگاه تساوی فوق نشاندهندهٔ بستگی خطی $v_1, \ldots, v_r$ است. لذا می‌توانیم طرفین را بر y تقسیم کنیم و v_i را به‌دست آوریم:

$$v_i = \frac{x_1}{-y_1} v_1 + \cdots + \frac{x_r}{-y} v_r$$

به‌این ترتیب v_i ترکیبی خطی از $v_1, \ldots, v_r$ است.

اکنون، فرض کنید v یک عضو دلخواه V است. اعداد $c_1, \ldots, c_n$ وجود دارند به طوری که

$$v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$$

دراین رابطه، هر v_i $(i>r)$ را می‌توانیم بایک ترکیب خطی از $v_1, \ldots, v_r$ تعویض کنیم. اگرچنین کنیم، وسپس جملات را جمع‌آوری نمائیم، به‌این نتیجه می‌رسیم که v ترکیبی خطی از $v_1, \ldots, v_r$ است. به‌این ترتیب ثابت می‌شود که $v_1, \ldots, v_r$ فضای V را تولید می‌کنند، و لذا تشکیل یک پایهٔ V می‌دهند.

تمرینها

۰۱ نشان دهیدکه بردارهای زیر (روی **C** یا **R**) مستقل خطی‌اند.

(الف) $(۱,۱,۱)$, $(۰,۱,-۲)$ (ب) $(۱,۰)$, $(۱,۱)$

(پ) $(-۱,۱,۰)$, $(۰,۱,۲)$ (ت) $(۲,-۱)$, $(۱,۰)$

(ث) $(\pi,۰)$, $(۰,۱)$ (ج) $(۱,۲)$, $(۱,۳)$

(چ) $(۱,۱,۰)$ ، $(۱,۱,۱)$ ، و $(۰,۱,-۱)$

(ح) $(۰,۱,۱)$ ، $(۰,۲,۱)$ ، و $(۱,۵,۳)$

۰۲ بردار داده شدهٔ X را به‌صورت ترکیب خطی بردارهای A و B بنویسید ومختصات X را نسبت به A و B به‌دست آورید.

(الف) $X=(۱,۰)$ ، $A=(۱,۱)$ ، $B=(۰,۱)$

(ب) $X=(۲,۱)$ ، $A=(۱,-۱)$ ، $B=(۱,۱)$

(پ) $X=(۱,۱)$ ، $A=(۲,۱)$ ، $B=(-۱,۰)$

(ت) $X=(۴,۳)$ ، $A=(۲,۱)$ ، $B=(-۱,۰)$

۰۳ مختصات X را نسبت به‌بردارهای A، B و C به‌دست آورید.

(الف) $X=(۱,۰,۰)$ ، $A=(۱,۱,۱)$ ، $B=(-۱,۱,۰)$ ، $C=(۱,۰,-۱)$

(ب) $X=(۱,۱,۱)$ ، $A=(۰,۱,-۱)$ ، $B=(۱,۱,۰)$ ، $C=(۱,۰,۲)$

(پ) $X=(۰,۰,۱)$ ، $A=(۱,۱,۱)$ ، $B=(-۱,۱,۰)$ ، $C=(۱,۰,-۱)$

۰۴ فرض کنید (a,b) و (c,d) دو بردار درصفحه هستند. اگر $ad-bc=۰$، نشان دهید که آنها بستگی خطی دارند. اگر $ad-bc\neq۰$، نشان دهیدکه استقلال خطی دارند.

۰۵ فضای برداری‌تمام توابع نسبت به‌یك متغیر t را درنظرمی‌گیریم. نشان دهیدکه هرجفت تابع زیر استقلال خطی دارند.

(الف) ۱ ، t (ب) t ، $t^۲$ (پ) t ، $t^۴$ (ت) e^t ، t

(ث) te^t ، $e^{۲t}$ (ج) $\sin t$ ، $\cos t$ (چ) t ، $\sin t$ (ح) $\sin t$ ، $\sin ۲t$

(خ) $\cos t$ ، $\cos ۳t$

۶. فضای برداری تمام توابعی را درنظر بگیرید که برای $t>0$ تعریف شده‌اند. نشان دهید که جفت توابع زیر استقلال خطی دارند.

(الف) t ، $\frac{1}{t}$ (ب) e^t ، $\log t$

۷. مختصات تابع $f(t)=3\sin t+5\cos t$ را نسبت به‌پایهٔ $\{\cos t, \sin t\}$ به‌دست آورید.

۸. فرض کنید D عمل مشتق‌گیری $\frac{d}{dt}$ است. فرض کنید $f(t)$ شبیه تمرین ۷ است. مختصات تابع $Df(t)$ را نسبت به‌پایهٔ تمرین ۷ به‌دست آورید.

۹. فرض کنید A_1،...،A_r بردارهایی در $\mathbf{R}^n$ هستند و فرض کنید که دو به دو متعامدند (یعنی هر دو تابعی از آنها برهم عمودند)، وفرض کنید که هیچ‌یك از آنها مساوی نیستند. ثابت کنید که آنها استقلال خطی دارند.

۱۰. فرض کنید v و w اعضای یك فضای برداری هستند وفرض کنید که $v\neq 0$. اگر v، w بستگی خطی داشته باشند، نشان دهید که یك‌عدد a وجود دارد به‌طوری که $w=av$.

۳. بعد یك فضای برداری

هدف اصلی این بخش این‌است که هر دوپایهٔ یك‌فضای برداری دارای تعداد اعضای‌یکسانی است. برای اثبات این مطلب، نیاز به‌یك نتیجهٔ واسط داریم.

قضیهٔ ۳.۱. فرض‌کنید V یك فضای برداری روی هیات K است. فرض کنید $\{v_1,\dots,v_m\}$ یك پایهٔ V روی K است. فرض‌کنید w_1،...،w_n اعضایی از V هستند، وفرض‌کنید که $n>m$. دراین صورت w_1،...،w_n بستگی خطی دارند.

اثبات. فرض‌کنید w_1،...،w_n استقلال خطی دارند. چون $\{v_1,\dots,v_m\}$ یك پایه است، اعضای a_1،...،a_m متعلق به K وجود دارند به‌طوری‌که

$$w_1=a_1v_1+\dots+a_mv_m$$

طبق فرض می‌دانیم که $w_1\neq 0$، ولذا برخی از a_i ها مخالف صفرهستند. پس‌ازنام‌گذاری مجدد v_1،...،v_m درصورت نیاز، بدون اینکه ازکلیت مسأله‌کم شود می‌توانیم فرض‌کنیم که $a_1\neq 0$. دراین صورت داریم

$$a_1v_1=w_1-a_2v_2-\cdots-a_mv_m$$

$$v_1=a_1^{-1}w_1-a_1^{-1}a_2v_2-\cdots-a_1^{-1}a_mv_m$$

زیرفضایی از V که توسط w_1، v_2،...، v_m تولید می‌شود شامل v_1 است، و لذا باید مساوی تمام V باشد زیرا w_1، v_2،...، v_m فضای V را تولید می‌کنند. هدف این است که این روش را گام به گام ادامه دهیم و متوالیاً v_2، v_3،... را با w_2، w_3،... جایگزین کنیم تا جایی که v_1،...، v_m حذف شوند و w_1،...، w_m فضای V را تولید کنند. فرض کنید با استقراء فرض کنیم که یک عدد صحیح r باشرط $1\leqslant r<m$ وجود دارد به‌طوری که بعد از نام‌گذاری مجدد v_1،...، v_m، اعضای w_1،...، w_r، v_{r+1}،...، v_m فضای V را تولید می‌کنند. اعضای b_1،...، b_r، c_{r+1}،...، c_m در K وجود دارند به‌طوری که

$$w_{r+1}=b_1w_1+\cdots+b_rw_r+c_{r+1}v_{r+1}+\cdots+c_mv_m$$

c_jها برای $j=r+1,\ldots,m$ همگی نمی‌توانند صفر باشند، زیرا در این صورت یک ترکیب خطی بین w_1،...، w_{r+1} به‌دست می‌آوریم که با فرض مستقل خطی بودن آنها مغایر است. بعد از نام‌گذاری مجدد v_{r+1}،...، v_m درصورت نیاز، بدون اینکه از کلیت مسأله کم شود می‌توانیم فرض کنیم $c_{r+1}\neq 0$. در این صورت داریم

$$c_{r+1}v_{r+1}=w_{r+1}-b_1w_1-\cdots-b_rw_r-c_{r+2}v_{r+2}-\cdots-c_mv_m$$

با تقسیم طرفین بر c_{r+1} نتیجه می‌گیریم که v_{r+1} در زیرفضای تولید شده توسط w_1،...، w_{r+1}، v_{r+2}،...، v_m است. طبق فرض استقراء، نتیجه می‌شود که w_1،...، w_{r+1}، v_{r+2}،... v_m فضای V را تولید می‌کند. بنابراین طبق اصل استقراء، ثابت کرده‌ایم که w_1،...، w_m فضای V را تولید می‌کنند. اگر $n>m$، آنگاه اعضای $d_1,d_2,\ldots,d_m\in K$ وجود دارند به‌طوری که

$$w_n=d_1w_1+\cdots+d_mw_m$$

به‌این ترتیب ثابت می‌شود که w_1،...، w_n بستگی خطی دارند، و اثبات قضیه هم تمام می‌شود.

قضیهٔ ۲.۳. فرض کنید V یک فضای برداری است و فرض کنید که یک پایهٔ آن دارای n عضو و پایهٔ دیگر دارای m عضو است. در این صورت $m=n$.

اثبات. قضیهٔ ۱.۳ را برای دو پایه به‌کار می‌بریم. قضیهٔ ۱.۳ نتیجه می‌دهد که هر دو حالت $n>m$ و $m>n$ غیرممکن است، و لذا داریم $m=n$.

فرض کنید V یک فضای برداری با پایه‌ای شامل n عضو است. در این صورت n را

بعد فضای V می‌نامیم. اگر V شامل فقط o باشد، آنگاه V دارای پایه نیست، ومی‌گوئیم V دارای بعد ۰ است.

مثال ۱. فضای برداری $\mathbf{R}^n$ دارای بعد n روی $\mathbf{R}$ است. همچنین فضای برداری $\mathbf{C}^n$ دارای بعد n روی $\mathbf{C}$ است. به‌طورکلی برای هرهیات K، فضای برداری K^n دارای بعد n روی K است. درواقع، n بردار

$$(۱,۰,\dots,۰)\ ,\ (۰,۱,\dots,۰)\ ,\dots,\ (۰,\dots,۰,۱)$$

تشکیل یك پایهٔ K^n روی K می‌دهند.

بعد فضای برداری V روی‌هیات K را با $\dim_K V$ ویا به‌طورسادهٔ $\dim V$ نمایش می‌دهیم.

یك فضای برداری‌که دارای پایه‌ای متشکل ازتعداد متناهی عضو باشد، ویا فضای برداری صفر را، فضای برداری با **بعد متناهی** می‌نامیم. بقیه فضاهای برداری را فضاهای برداری با **بعد نامتناهی** می‌نامیم. ممکن است تعریفی برای یك پایهٔ نامتناهی ارائه دهیم. خواننده می‌تواند آن را دریك متن پیشرفته‌تر ببیند. دراین‌کتاب، هروقت صحبت ازبعد یك فضای برداری می‌کنیم منظورفضای برداری با بعد متناهی است.

مثال ۲. فرض‌کنید K یك هیات است. دراین صورت K یك‌فضای برداری روی خودش است، وبعدآن مساوی ۱ است. درواقع، عضو $۱\in K$ تشکیل یك پایهٔ K را می‌دهد. زیرا هرعضو $x\in K$ را می‌توان به‌صورت منحصربه‌فرد $x=x\cdot ۱$ نوشت.

مثال ۳. فرض‌کنید V یك‌فضای برداری است. یك زیرفضای یك‌بعدی V رایك **خط**، ویك زیرفضای دوبعدی آن را یك **صفحه** می‌نامیم.

اکنون محکی را ارائه می‌دهیم تا به‌کمك‌آن بتوان مشخص‌کردکه چه موقع اعضای یك‌فضای برداری تشکیل یك‌پایه می‌دهند.

فرض‌کنید $v_۱$، ...، v_n اعضای مستقل خطی فضای برداری V هستند. می‌گوئیم این اعضا تشکیل یك **مجموعهٔ ماکسیمال از اعضای مستقل خطی** V را می‌دهند هرگاه به‌ازای هرعضو $w\in V$، اعضای w، $v_۱$،...، v_n بستگی خطی داشته باشند.

قضیهٔ ۳.۳. فرض‌کنید V یك‌فضای برداری، و $\{v_۱,\dots,v_n\}$ یك‌مجموعهٔ‌ماکسیمال از اعضای مستقل خطی V است. دراین‌صورت $\{v_۱,\dots,v_n\}$ یك پایهٔ V است.

اثبات باید نشان دهیم‌که $v_۱$،...، v_n فضای V را تولید می‌کنند، یعنی هرعضو V را می‌توان به‌صورت یك‌ترکیب خطی $v_۱$،...، v_n نوشت. فرض‌کنید w یك عضو V است. طبق فرض

اعضای w، v_1، ...، v_n از V باید بستگی خطی داشته باشند، لذا اعداد x_0، x_1، ...، x_n که همگی صفر نیستند وجود دارند به‌طوری که

$$x_0 w + x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$$

x_0 نمی‌تواند صفر باشد، زیرا دراین‌صورت یک‌بستگی خطی بین v_1، ...، v_n ایجادمی‌گردد. بنابراین w را می‌توان به‌دست آوریم:

$$w = -\frac{x_1}{x_0} v_1 - \cdots - \frac{x_n}{x_0} v_n$$

این نشان می‌دهدکه w یک‌ترکیب خطی از v_1، ...، v_n است، وبنابراین $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یک پایهٔ V است.

قضیهٔ ۴.۳. فرض‌کنید V یک فضای برداری n بعدی، و v_1، ...، v_n اعضایی از V هستندکه استقلال خطی دارند. دراین صورت v_1، ...، v_n تشکیل یک پایه برای V می‌دهند.

اثبات. بر طبق قضیهٔ ۱.۳، $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یک مجموعهٔ ماکسیمال از اعضای مستقل خطی V است. لذا طبق قضیهٔ ۳.۳ یک پایه است.

نتیجهٔ ۵.۳. فرض کنید V یک فضای برداری و W یک زیرفضای آن است. اگر $\dim W = \dim V$، آنگاه $V = W$.

اثبات. طبق قضیهٔ ۴.۳ یک‌پایه برای W باید پایه‌ای برای V هم باشد.

نتیجهٔ ۶.۳. فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی است. فرض‌کنید r یک عدد صحیح مثبت و $r<n$ است، و فرض کنید که v_1، ...، v_r اعضای مستقل خطی V هستند. در این صورت اعضای v_{r+1}، ...، v_n وجود دارند به‌طوری‌که $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یک پایهٔ V باشد.

اثبات. چون $r<n$ می‌دانیم که $\{v_1, \ldots, v_r\}$ تشکیل پایه‌ای از V نمی‌دهند، ولذا نمی‌تواند یک‌مجموعهٔ ماکسیمال از اعضای مستقل‌خطی V باشد. به‌ویژه، می‌توان v_{r+1} را در V یافت به‌طوری‌که v_1، ...، v_{r+1} مستقل خطی باشند. اگر $r+1<n$ باشد روش قبل را تکرار می‌کنیم. می‌توانیم(بااستقراء) مرحله به‌مرحله جلورویم تا n عضومستقل خطی $\{v_1, \ldots, v_n\}$ را به‌دست آوریم. طبق قضیهٔ ۴.۳ این مجموعه یک‌پایه است واثبات‌کامل می‌شود.

قضیهٔ ۷.۳. فرض‌کنید V یک فضای برداری با یک پایه‌متشکل از n عضو است. فرض‌کنید W یک زیر فضای V است‌که تنها از O تشکیل نشده است. در این صورت W دارای یک پایه است و $\dim W \leqslant n$.

اثبات. فرض کنید w_1 یك عضو مخالف صفر W است. اگر $\{w_1\}$ یك مجموعهٔ ماکسیمال از اعضای مستقل خطی W نباشد، می‌توانیم عضو w_2 متعلق به W را بیابیم به‌طوری که w_1 و w_2 مستقل خطی باشند. به‌همین شیوه جلو می‌رویم، تا اعضای مستقل خطی w_1، w_2، ...، w_m را بیابیم به‌طوری که $\{w_1,\dots,w_m\}$ یك مجموعهٔ ماکسیمال از اعضای مستقل خطی W باشد (طبق قضیهٔ ۱.۳ نمی‌توان روش مذکور را به‌طور بی‌پایان تکرار کرد و تعداد چنین اعضایی حداکثر n است). اگر قضیهٔ ۳.۳ را به‌کار بریم نتیجه می‌گیریم که $\{w_1,\dots,w_m\}$ یك پایهٔ W است.

۴. جمع و جمع مستقیم

فرض کنید V یك فضای برداری روی هیات K است. فرض کنید U و W زیرفضاهایی از V هستند. **جمع** U و W را زیرمجموعه‌ای از V تعریف می‌کنیم که متشکل از تمام مجموعهای $u+w$ است به‌طوری که $u\in U$ و $w\in W$. این مجموع را با $U+W$ نمایش می‌دهیم. این مجموعه زیرفضایی از V است. درواقع، اگر $u_1,u_2\in U$ و $w_1,w_2\in W$، آنگاه

$$(u_1+w_1)+(u_2+w_2)=u_1+u_2+w_1+w_2\in U+W$$

اگر $c\in K$، آنگاه

$$c(u_1+w_1)=cu_1+cw_1\in U+W$$

بالاخره $0=0+0\in U+W$. پس $U+W$ یك زیرفضاست.

می‌گوئیم V **جمع مستقیم** U و W است اگر برای هر عضو $v\in V$ اعضای منحصر به‌فرد $u\in U$ و $w\in W$ یافت شوند به‌طوری که $v=u+w$.

قضیهٔ ۱.۴. فرض کنید V یك فضای برداری روی هیات K، و U و W زیرفضاهایی از V هستند اگر $U+W=V$، و اگر $U\cap W=\{0\}$، آنگاه V جمع مستقیم U و W است.

اثبات. فرض کنید $v\in V$، طبق اولین فرض، اعضای $u\in U$ و $w\in W$ وجود دارند به‌طوری که $v=u+w$. بنابراین V مساوی جمع U و W است. برای اثبات اینکه این جمع مستقیم است، باید نشان دهیم که این اعضای u و w منحصر به‌فرد هستند. فرض کنید اعضای $u'\in U$ و $w'\in W$ وجود دارند به‌طوری که $v=u'+w'$. بنابراین $u+w=u'+w'$، و دراین صورت $u-u'=w'-w$. اما $u-u'\in U$ و $w'-w\in W$. طبق فرض دوم، نتیجه می‌گیریم که $u-u'=0$ و $w-w'=0$، لذا $u=u'$ و $w=w'$. پس اثبات قضیه تمام می‌شود.

وقتی V جمع مستقیم زیرفضاهای U و W است می‌نویسیم

$$V=U\oplus W$$

قضیهٔ ۲.۴. فرض کنید V یك فضای برداری بـا بعد متناهی روی هیات K است. فرض کنید W یك زیرفضای آن است. دراین صورت یك زیرفضای U وجود دارد به‌طوری که V جمع مستقیم W و U است.

اثبات. پایه‌ای برای W انتخـاب می‌کنیم، این پایه را به‌یك‌پایـه برای V تعمیم می‌دهیم، نتیجهٔ ۶.۳ را به‌کارمی‌بریم. حکم قضیهٔ ما آشکار است. برطبق علامت‌گذاری آن قضیه، اگر $\{v_1,\dots,v_r\}$ یك‌پایه برای W بـاشد، آنگاه فرض می‌کنیم U زیرفضای تـولید شده توسط $\{v_{r+1},\dots,v_n\}$ است.

توجه‌کنیدکـه به‌ازای زیرفضای داده شدهٔ W، معمولاً زیرفضاها زیادی مـانند U هستندکه V جمع مستقیم U و W است. (بـه‌عنوان مثال، تمرینها را ببینید). بعـداً دراین کتاب درمورد تعامد بحث می‌کنیم، بـا استفاده ازتعامد یك چنین زیرفضاهـایی را تعیین خواهیم کرد.

قضیهٔ ۳.۴. اگر V یك فضای بـرداری بـا بعد متناهی روی K بوده و V جمع مستقیم زیر فضاهای U و W باشد، آنگاه

$$\dim V=\dim U+\dim W$$

اثبات. فرض‌کنید $\{u_1,\dots,u_r\}$ یك پـایهٔ U و $\{w_1,\dots,w_s\}$ یك‌پایهٔ W است. هرعضو U دارای یك عبارت منحصر بـه‌فرد به‌صورت ترکیب خطی $x_1u_1+\dots+x_ru_r$ است کـه $x_i\in K$، وهمچنین هـرعضو W دارای یك عبـارت منحصر بـه‌فرد به‌صورت ترکیب خطی $y_1w_1+\dots+y_sw_s$ است که $y_j\in K$. لذا طبق‌تعریف، هرعضو V دارای یك‌عبارت‌منحصر به‌فرد به‌صورت ترکیب خطی

$$x_1u_1+\dots+x_ru_r+y_1w_1+\dots+y_sw_s$$

است. بنابراین $u_1,\dots,u_r$ و $w_1,\dots,w_s$ یك‌پایهٔ V است، وقضیه ثابت می‌شود.

اکنون‌فرض‌کنید U و W دوفضای برداری دلخواه روی هیات K است (یعنی، لزوماً زیرفضاهای یك‌فضای برداری نیستند). فرض می‌کنیم $U\times W$ مجموعهٔ‌تمام زوجهای‌مرتب (u,w) است که مؤلفهٔ اول آن، یعنی u، متعلق بـه U ومؤلفهٔ دوم آن، یعنی w، متعلق به W است. جمع چنین زوجهایی را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم: اگر $(u_1,w_1)\in U\times W$ و

$(u_2,w_2)\in U\times W$، آنگاه

$$(u_1,w_1)+(u_2,w_2)=(u_1+u_2\ ,\ w_1+w_2)$$

اگر $c\in K$، آنگاه $c(u_1,w_1)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c(u_1,w_1)=(cu_1\ ,\ cw_1)$$

به‌سادگی می‌توان دید که $U\times W$ یك‌فضای برداری است که به **حاصلضرب مستقیم U و W** موسوم است. وقتی‌که نگاشتهای خطی را بررسی می‌کنیم، حاصلضرب مستقیم و حاصل‌جمع مستقیم را مقایسه خواهیم کرد.

اگر n یك‌عدد صحیح مثبت بوده و به‌صورت مجموع دوعدد صحیح مثبت نوشته شود، یعنی $n=r+s$، آنگاه مشاهده می‌کنیم که K^n حاصلضرب مستقیم $K^r\times K^s$ است.

توجه داریم که

$$\dim(U\times W)=\dim U+\dim W$$

اثبات ساده است و به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذارمی‌کنیم.

البته، می‌توانیم مفهوم جمع مستقیم وضرب مستقیم را به‌عاملهای بیشتر تعمیم دهیم. فرض کنید V_1،...، V_n زیرفضاهای فضای برداری V هستند. می‌گوئیم که V **جمع مستقیم**

$$V=\bigoplus_{i=1}^{n}V_i=V_1\oplus\cdots\oplus V_n$$

است اگرهرعضو $v\in V$ را بتوان به‌صورت منحصربه‌فردی به‌شکل مجموع زیرنوشت:

$$v=v_1+\cdots+v_n\ \ ,\ \ v_i\in V_i$$

منظور از "منحصربه‌فرد" بودن این‌است‌که اگر

$$v=v'_1+\cdots+v'_n\ \ ;\ \ v'_i\in V_i$$

آنگاه به‌ازای هر $i=1,\dots,n$ داریم $v'_i=v_i$.

مشابهاً، فرض‌کنید W_1،...، W_n فضاهایی برداری هستند. حاصلضرب مستقیم

$$\prod_{i=1}^{n}W_i=W_1\times\cdots\times W_n$$

مجموعهٔ تمام n تائیهای $(w_1,\dots,w_n)$ است‌که $w_i\in W_i$. جمع به‌صورت جمع مؤلفه‌ای، وهمچنین ضرب دراسکالرنیز به‌صورت مؤلفه‌ای تعریف می‌گردد. دراین صورت ضرب مستقیم یك فضای برداری است.

تمرینها

۱. فرض کنید $V=\mathbf{R}^2$، و W زیر فضای تولیدشده توسط $(2,1)$، و U زیر فضای تولید شده توسط $(0,1)$ است. نشان دهید کـه V جمع مستقیم W و U است. اگر U' زیر فضای تولید شده توسط $(1,1)$ باشد، نشان دهید که V جمع مستقیم W و U' است.

۲. فرض کنید $V=K^3$ و K یـك هیات است. فرض کنید W زیر فضای تولید شده توسط $(1,0,0)$، و U زیر فضای تولید شده توسط $(1,1,0)$ و $(0,1,1)$ است. نشان دهید که V جمع مستقیم W و U است.

۳. فرض کنید A، B دو بردار در $\mathbf{R}^2$ هستند کـه هیچ کدام از آنهـا o نیستند. اگر هیچ عدد c ای وجود نداشته بـاشد به‌طوری که $cA=B$، نشان دهید که A و B تشکیل یك پایـهٔ $\mathbf{R}^2$ می‌دهند، ونشان دهید که $\mathbf{R}^2$ جمع‌مستقیم زیرفضاهای تولید شده توسط A و B است.

۴. آخرین حکم این بخش درارتباط با بعد $U\times W$ را ثابت کنید. اگر $\{u_1,\dots,u_r\}$ یك پایهٔ U و $\{w_1,\dots,w_s\}$ یك پایهٔ W باشد، یك پایهٔ $U\times W$ چیست؟

۲

ماتریسها

۱. فضای ماتریسها

اکنون نوع جدیدی از اشیاء، موسوم به‌ماتریسها را بررسی می‌کنیم. فرض‌کنید K یك‌هیات است. فرض‌کنید n، m دوعدد صحیح بزرگتر یا مساوی ۱ هستند. جدول زیر از اعداد متعلق به K را یك **ماتریس در** K می‌نامیم.

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{m۱} & a_{m۲} & a_{m۳} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

می‌توانیم ماتریس فوق را به‌شکل خلاصهٔ $[a_{ij}]$، $i=۱,\ldots,m$ و $j=۱,\ldots,n$ بنویسیم. می‌گوئیم که یك ماتریس m در n، ویا یك ماتریس $m\times n$ است. ماتریس فوق دارای m **سطر** و n **ستون** است. به‌عنوان مثال، ستون اول آن عبارت است

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m۱} \end{bmatrix}$$

وسطر دوم آن مساوی $(a_{۲۱},a_{۲۲},\cdots,a_{۲n})$ است. a_{ij} را **درایهٔ ij ام** یا مؤلفهٔ ij ام ماتریس می‌نامیم. اگرماتریس فوق را با A نمایش دهیم، آنگاه i امین سطر آن را بـا A_i نمایش می‌دهیم، وعبارت است از

$$A_i=(a_{i۱},a_{i۲},\cdots,a_{in})$$

j امین ستون مـاتریس A را با A^j نمایش می‌دهیم وعبارت است از

$$A^j=\begin{bmatrix} a_{۱j} \\ a_{۲j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

مثال ۱. ماتریس زیر یك ماتریس ۳ × ۲ است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۲ \\ -۱ & ۴ & -۵ \end{bmatrix}$$

این ماتریس دارای دوسطر وسه ستون است.

سطرهای‌ماتریس‌عبارتنداز (۲ — , ۱ , ۱) و(۵ — , ۴ , ۱ —). ستونهای آن‌عبارتند از

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -۲ \\ -۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین سطرهای ماتریس را می‌توان به‌صورت n تـائیها، وستونهای‌آن را بـه‌صورت m تائیهای عمودی نمایش دهیم. m تایی عمود را **بردارستونی** ماتریس می‌نامیم.

بردار $(x_۱,\cdots,x_n)$ یك‌ماتریس $n \times ۱$ است. بردارستونی

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

یك ماتریس $n \times ۱$ است.

وقتی یك ماتریس را به‌صورت $[a_{ij}]$ می‌نویسیم، دراین صورت i معرف سطر و j معرف ستون است. درمثال ۱، به‌عنوان مثال داریم $a_{۱۱} = ۱$ و $a_{۲۳} = -۵$.

عدد تنهای $[a]$ را به‌عنوان یك ماتریس ۱×۱ درنظرمی‌گیریم.

فرض‌کنید $[a_{ij}]$، $i = ۱,\ldots,m$ و $j = ۱,\ldots,n$ یك ماتریس است. اگر $m = n$، آنگاه می‌گوئیم‌که ماتریس **مربع** است. بنابراین

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۵ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

هردوماتریسهای مربع هستند.

اگر به‌ازای هر i و j، $a_{ij} = ۰$ باشد، آنگاه ماتریس را **ماتریس صفر** می‌نامیم. پس ماتریس صفر به‌شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{bmatrix}$$

آن را با O نمایش می‌دهیم. توجه داریدکه ازصفر زیاد استفاده می‌کنیم: عدد صفر، بردار صفر، ماتریس صفر.

اکنون جمع دوماتریس وضرب یك‌عدد دریك ماتریس را تعریف می‌کنیم.

جمع دوماتریس را تنها زمانی تعریف می‌کنیم‌که هردو دارای اندازهٔ یکسان هستند. فرض‌کنید m، n اعداد صحیح مثبت بزرگتر یا مساوی ۱ هستند. فرض‌کنیدکه $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دوماتریس $m \times n$ هستند. $A + B$ را ماتریسی تعریف می‌کنیم کـه درایـهٔ

سطر i ام و ستون j ام آن $a_{ij}+b_{ij}$ است. به عبارت دیگر، ماتریسهای هم‌اندازه را مؤلفه به‌مؤلفه جمع می‌کنیم.

مثال ۲. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۵ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

دراین صورت

$$A+B=\begin{bmatrix} ۶ & ۰ & -۱ \\ ۴ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

اگر O ماتریس صفر باشد، آنگاه برای هرماتریس A (هم‌اندازه با ماتریس O)، داریم $O+A=A+O=A$. این مطلب به‌سادگی ثابت می‌شود.

اکنون ضرب یك ماتریس دریك عدد را تعریف می‌کنیم. فرض کنید c یك عدد، و $A=[a_{ij}]$ یك‌ماتریس است. cA را ماتریسی تعریف می‌کنیم که مؤلفهٔ ij ام آن ca_{ij} است. می‌نویسیم $cA=[ca_{ij}]$. بنابراین هریك ازمؤلفه‌های A را در c ضرب می‌کنیم.

مثال ۳. فرض کنید A و B همان ماتریسهای مثال ۲، و $c=۲$ است. دراین صورت

$$۲A=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۰ \\ ۴ & ۶ & ۸ \end{bmatrix} \text{ و } ۲B=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۲ & -۲ \\ ۴ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

همچنین داریم

$$(-۱)A=-A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ \\ -۲ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}$$

برای هرماتریس A داریم $A+(-A)=۰$.

این را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم تاخواننده نشان دهدکه تمام خواص **ف.ب۱** الی **ف.ب۸** در مورد قواعد جمع ماتریسها وضرب یك ماتریس دریك‌عضو K برقرار است. مطلب اصلی توجه به این نکته است که جمع ماتریسها برحسب جمع مؤلفه‌های آنها تعریف می‌شود، وجمع مؤلفه‌ها در شرایط **ف.ب۱** الی **ف.ب۴** صدق می‌کند. و این خواص استاندار اعداد است. مشابهاً ، شرایط **ف.ب۵** الی **ف.ب۸** برای ضرب ماتریسها در اعضای K صدق می‌کنند، زیرا خواص متناظر آن برای اعضای K برقرارند.

بنابراین، مجموعهٔ تمام ماتریسهای هم‌اندازهٔ $m\times n$ با مولفه‌های متعلق به هیات K تشکیل یك فضای برداری روی هیات K می‌دهندکه‌آن را با $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ نمایش می‌دهیم.

مفهوم دیگری‌را درمورد ماتریسها تعریف می‌کنیم. فرض‌کنید $A=[a_{ij}]$ یك‌ماتریس $m\times n$ است. ماتریس $n\times m$ ‏$B=[b_{ji}]$ به‌طوری‌که $b_{ji}=a_{ij}$ را **ترانهادهٔ** ماتریس A می‌نامیم، و آن را با A^t نمایش می‌دهیم. وقتی ترانهادهٔ یك ماتریس را حساب می‌کنیم جای سطر وستونها را باهم عوض می‌کنیم. اگر A ماتریسی باشدکه درابتدای این بخش نوشتیم، آنگاه A^t عبارت است ازماتریس زیر

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مثلاً درحالت خاص، اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$،

$$A^t=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$ آنگاه،

اگر $A=(۲,۱,-۴)$ یك بردارسطری باشد، آنگاه

$$A^t=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ -۴ \end{bmatrix}$$

یك بردارستونی است.

ماتریس A را **متقارن** می‌نامیم اگر با ترانهادهٔ خود مساوی باشد، یعنی، اگر $A=A^t$. یك ماتریس متقارن لزوماً مربع است. به‌عنوان مثال، ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

یك ماتریس متقارن است.

فرض‌کنید $A=[a_{ij}]$ یك ماتریس مربع است. اعضای a_{11}، ...، a_{nn} را **اعضای قطری** ماتریس A می‌نامیم. یك ماتریس مربع را **قطری** می‌نامیم اگر تمام درایه‌های آن صفر باشند مگر احتمالاً درایه‌های روی قطر آن، یعنی اگر $a_{ij}=۰$ به‌ازای $i\neq j$. هر

ماتریس قطری یك ماتریس متقارن است. یك‌ماتریس قطری شبیه ماتریس زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

ماتریس واحد. ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های آن به‌جز درایه‌های روی‌قطر که همگی ۱ هستند، بقیه مساوی ۰ می‌باشند. ماتریس واحد را با I_n، یا اگر نیازی به‌مشخص کردن n نباشد، با I نمایش‌می‌دهیم. بنابراین

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

تمرین روی ماتریسها

۰۱ فرض‌کنید $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. مطلوب است محاسبهٔ $A+B$، $3B$، $-2B$، $A+2B$، $2A-B$، $A-2B$.

۰۲ فرض‌کنید $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$. مطلوب است $A+B$، $3B$، $-2B$، $A+2B$، $A-B$، $B-A$.

۰۳ در تمرین ۱، A^t و B^t را بیابید.

۴. در تمرین ۲، ${}^tA$ و ${}^tB$ را بیابید.

۵. اگر A، B دو ماتریس $m+n$ دلخواه باشد، نشان دهیدکه

$$ {}^t(A+B)={}^tA+{}^tB $$

۶. اگر c یك عدد باشد، نشان دهیدکه

$$ {}^t(cA)=c\,{}^tA $$

۷. اگر $A=[a_{ij}]$ یك ماتریس مربع باشد، آنگاه اعضای a_{jj} به اعضای **قطری** A موسومند. اعضای قطری A و ${}^tA$ چه فرقی باهم دارند.

۸. در تمرین ۲ مطلوب است ${}^t(A+B)$ و ${}^tA+{}^tB$.

۹. در تمرین ۲ مطلوب است $A+{}^tA$ و $B+{}^tB$.

۱۰. نشان دهیدکه برای ماتریس مربع A، $A+{}^tA$ متقارن است.

۱۱. بردارهای سطری وستونی ماتریسهای A و B تمرین ۱ را بنویسید.

۱۲. بردارهای سطری وستونی ماتریسهای A و B تمرین ۲ را بنویسید.

تمرین روی بعد

۱. بعد فضای برداری ماتریسهای 2×2 را بیابید. پایه‌ای برای این فضا بنویسید.

۲. بعد فضای برداری ماتریسهای $m\times n$ را مشخص کنید. پایه‌ای برای این فضا ارائه دهید.

۳. بعد فضای برداری ماتریسهای $n\times n$ قطری را معین کنید.

۴. بعد فضای برداری ماتریسهای $n\times n$ ای‌که بالا مثلثی هستند، یعنی به‌صورت

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

می‌باشند را به‌دست آورید.

۵. بعد فضای برداری ماتریسهای متقارن 2×2 (یعنی ماتریسهای 2×2 ای مانند A که در شرط $A = {}^tA$ صدق می‌کنند) را به‌دست آورید. پایه‌ای برای این فضا بنویسید.

۶. درحالت کلی‌تر، بعد فضای برداری ماتریسهای متقارن $n \times n$ را بیابید. یك پایهٔ این فضا را بنویسید.

۷. بعد فضای برداری ماتریسهای قطری $n \times n$ را به‌دست آورید. پایه‌ای از این فضا را بنویسید.

۸. فرض کنید V یك زیرفضای $\mathbf{R}^2$ است. بعدهای ممکن برای V را بنویسید.

۹. فرض کنید V یك زیرفضای $\mathbf{R}^3$ است. بعدهای ممکن برای V را بنویسید.

۴. معادلات خطی

اکنون کاربردهایی ازقضایای مربوط به‌بعد را درحل معادلات خطی ارائه می‌دهیم.

فرض کنید K یك هیات است. فرض کنید $A = [a_{ij}]$، $i = 1, \ldots, m$ و $j = 1, \ldots, n$ یك ماتریس در K است. فرض کنید b_1، ...، b_m اعضای K هستند. معادلاتی شبیه

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (*)$$

$$\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

را معادلات خطی می‌نامیم. همچنین می‌گوئیم که $(*)$ یك دستگاه معادلات خطی است. دستگاه معادلات خطی را **همگن** می‌نامیم اگر اعداد b_1، ...، b_m مساوی 0 باشند. عدد n را تعداد **مجهولات** و عدد m را تعداد معادلات می‌نامیم. ماتریس $[a_{ij}]$ را ماتریس **ضرایب** می‌نامیم.

دستگاه معادلات

$$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0$$
$$\cdots \qquad (**)$$
$$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0$$

را **دستگاه همگن** متناظر به $(*)$ می‌نامیم.

دستگاه $(**)$ همیشه دارای یک‌جواب است، و آن جواب عبارت است از $x_j=0$ به‌ازای هر j. این جواب به **جواب بدیهی** دستگاه موسوم است. یک‌جواب $(x_1,\ldots,x_n)$ به‌طوری‌که بعضی از x_iها مخالف صفر باشند را جواب **غیر بدیهی** می‌نامیم.

نخست دستگاه همگن $(**)$ را بررسی می‌کنیم. می‌توانیم این دستگاه را به‌صورت زیر نیز بنویسیم:

$$x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{m1}\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{mn}\end{bmatrix}=O$$

یا برحسب بردارهای ستونی ماتریس $A=[a_{ij}]$،

$$x_1A^1+\cdots+x_nA^n=O$$

یك جواب غیربـدیهی $X=(x_1,\ldots,x_n)$ ازدستگـاه $(**)$ چـیزی غیر از یك n تـایی $X\neq 0$ نیست که یك رابطهٔ بستگی خطی بین ستونهای A^1،...، A^n را به‌دست می‌دهد. این طریقهٔ بازنویسی دستگاه تعبیرخوبی از آن است و به‌ما اجازه می‌دهد تا ازقضیهٔ ۱.۳ فصل ۱ استفاده‌کنیم. بردارهای ستونی اعضای K^m هستندکه یك فضای برداری m بعدی روی K است. بنابراین:

قضیهٔ ۱.۲. فرض کنید

$$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0$$

یك دستگاه m معادلهٔ خطی n مجهولی با ضرایب متعلق به‌هیات K است. فرض‌کنیدکه $n>m$. دراین صورت دستگاه دارای یك جواب غیربدیهی در K است.

اثبات. طبق قضیهٔ ۱،۳ فصل ۱، می‌دانیم‌که بردارهای A^1،...، A^n باید بستگی خطی داشته باشند.

البته، برای حل صریح یك دستگاه معادلات خطی، تاکنون هیچ روش دیگری غیر ازروش مقدماتی حذف ازدبیرستان نمی‌دانیم. برخی ازدیدگاههای محاسباتی حل معادلات خطی درطول کتاب مقدمه‌ای بر جبرخطی اینجانب بحث شده است، وآن را اینجا تکرار نمی‌کنیم.

اکنون دستگاه معادلات اولیهٔ (*) را درنظرمی‌گیریم. فرض کنید B بردارستونی

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

است. می‌توانیم (*) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

ویا می‌توانیم به‌صورت خلاصه‌تر، برحسب بردارهای ستونی A بنویسیم،

$$x_1A^1+\cdots+x_nA^n=B$$

قضیهٔ ۲.۲. فرض کنیدکه دردستگاه (*) $m=n$ است، وبردارهای A^1،...، A^n استقلال خطی دارند. دراین صورت دستگاه (*) دارای یك جواب در K است، واین جواب منحصر به‌فرد است.

اثبات. بردارهای A^1، ...، A^n استقلال خطی دارند، لذا تشکیل یك پایهٔ K^n می‌دهند. پس هر بردار B دارای یك عبارت منحصر به‌فرد به‌شکل ترکیب خطی

$$B=x_1A^1+\cdots+x_nA^n$$

است به‌طوری‌که $x_j\in K$، و $X=(x_1,\ldots,x_n)$ همان جواب منحصر به‌فرد دستگاه است.

تمرینها

۱. فرض کنید (**) یك دستگاه معادلات خطی همگن درهیات K است، وفرض کنید که $m=n$. همچنین فرض کنید که بردارهای ستونی ضرایب دستگاه استقلال خطی دارند. نشان دهید که تنها جواب دستگاه جواب بدیهی است.

۲. فرض کنید (**) یك دستگاه معادلات خطی همگن n مجهولی درهیات K است. نشان دهید که مجموعهٔ جوابهای $X=(x_1,\dots,x_n)$ دستگاه تشکیل یك فضای برداری روی هیات K می‌دهد.

۳. فرض کنید A^1،...، A^n بردارهای ستونی بااندازهٔ m هستند. فرض کنید که مؤلفه‌های بردارها متعلق به $\mathbf{R}$ هستند، و بردارهای روی $\mathbf{R}^2$ مستقل خطی‌اند. نشان دهید که این بردارها روی $\mathbf{C}$ نیز استقلال خطی دارند.

۴. فرض کنید (**) یك دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب متعلق به $\mathbf{R}$ است. اگر این دستگاه دارای یك جواب غیربدیهی در $\mathbf{C}$ باشد، نشان دهید که دارای یك جواب غیربدیهی در $\mathbf{R}$ نیز هست.

۳. ضرب ماتریسها

ماتریسهای با درایه‌های متعلق به‌هیات K را درنظرمی‌گیریم. با حاصل‌ضرب نقطه‌ای تعریف شده درفصل ۱ شروع می‌کنیم. بنابراین اگر $A=(a_1,\dots,a_n)$ و $B=(b_1,\dots,b_n)$ متعلق به K^n باشند، $A\cdot B$ را به‌صورت

$$A\cdot B=a_1b_1+\dots+a_nb_n$$

که عضوی از K است، تعریف می‌کنیم. خواص زیر برقرار است:

حما ۱. برای هر A و B متعلق به K^n داریم $A\cdot B=B\cdot A$

حما ۲. برای هر A، B و C متعلق به K^n داریم

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C=(B+C)\cdot A$$

حما ۳. اگر $x\in K$، آنگاه

$$(xA)\cdot B=x(A\cdot B) \quad \text{و} \quad A\cdot(xB)=x(A\cdot B)$$

اگر A دارای مؤلفه‌های متعلق به $\mathbf{R}$ باشد، آنگاه

$$A^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant 0$$

و اگر $A \neq O$، آنگاه $A^2 > 0$. زیرا حداقل یکی از a_i^2ها بزرگتر از ۰ است. توجه کنید که خاصیت مثبت بودن همیشه برقرار نیست. به‌عنوان‌مثال، اگر $K = \mathbf{C}$، $A = (1, i)$، آنگاه $A \neq O$ اما

$$A \cdot A = 1 + i^2 = 0$$

برای بسیاری ازکاربردها، این مثبت بودن لازم نیست، ومی‌توان به‌جای این خاصیت از خاصیتی‌که آن را ناتباهیده می‌نامیم استفاده‌کرد. این خاصیت عبارت‌است‌از

۱) اگر $A \in K^n$، واگر $A \cdot X = 0$ برای هر $X \in K^n$، آنگاه $A = 0$

اثبات این خاصیت بدیهی است، زیرا برای هر بردار یکهٔ $E_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ که در i امین مؤلفهٔ آن ۱ وبقیه مؤلفه‌ها صفر است، داریم $A \cdot E_i = 0$. اما $A \cdot E_i = a_i$، و لذا برای تمام iها داریم $a_i = 0$ وبنابراین $A = O$.

اکنون حاصلضرب ماتریسها را تعریف می‌کنیم.

فرض کنید $A = [a_{ij}]$، $i = 1, \ldots, m$ و $j = 1, \ldots, n$ یك ماتریس $m \times n$ است. فرض کنید $B = [b_{jk}]$، $j = 1, \ldots, n$ و $k = 1, \ldots, s$ یك ماتریس $n \times s$ است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ & \cdots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}$$

حاصلضرب AB را ماتریس $m \times s$ ای درنظرمی‌گیریم که مؤلفه ik ام آن عبارت‌است از

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk}$$

اگر A_1، ...، A_m بردارهای سطری A، و B^1، ...، B^s بردارهای ستونی B باشد، آنگاه مؤلفهٔ ik ام حاصلضرب AB عبارت‌است از $A_i \cdot B^k$. بنابراین

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 & \cdots & A_1 \cdot B^s \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ A_m \cdot B^1 & \cdots & A_m \cdot B^s \end{bmatrix}$$

بنابراین ضرب ماتریسها تعمیمی ازحاصلضرب نقطه‌ای است.

مثال ۱. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

آنگاه AB یك ماتریس ۲ × ۲ است، ومحاسبه نشان می‌دهدکه

$$AB=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۵ & ۱۵ \\ ۴ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

مثال ۲. فرض کنید

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

فرض کنید A و B همان ماتریسهای مثال ۱ هستند. دراین صورت

$$BC=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۵ \\ -۳ & -۵ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۵ \\ -۳ & -۵ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۳۰ \\ -۸ & ۰ \end{bmatrix}$$

$(AB)C$ را محاسبه کنید. چه به‌دست خواهید آورد؟

فرض کنید A یك ماتریس $m \times n$ و B یك ماتریس $n \times ۱$ است، یعنی یك ماتریس ستونی. دراین صورت AB هم یك ماتریس ستونی است. حاصلضرب آنها شبیه زیر است

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{m۱} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_۱ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_۱ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{bmatrix}$$

که در آن

$$c_i=\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}b_j = a_{i۱}b_۱+\cdots+a_{in}b_n$$

اگر $X=(x_1,\dots,x_m)$ یك بردارسطری، یعنی یك ماتریس $1\times m$ باشد، آنگاه می‌توانیم حاصلضرب XA را تشکیل دهیم، که شبیه عبارت زیر است

$$(x_1,\dots,x_m)\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=(y_1,\dots,y_n)$$

که در آن

$$y_k=x_1a_{1k}+\dots+x_ma_{mk}$$

دراین حالت، XA یك ماتریس $1\times n$، یعنی یك بردارسطری است.

قضیهٔ ۱.۳. فرض‌کنید A، B و C سه ماتریس دلخواه هستند به‌طوری‌که می‌توان A را در B، و A در C ضرب‌کرد، و می‌توان B و C را با هم جمع نمود. دراین صورت A را در $B+C$ می‌توان ضرب‌کرد، وداریم

$$A(B+C)=AB+AC$$

اگر x یك عدد باشد، آنگاه

$$A(xB)=x(AB)$$

اثبات. فرض‌کنید A_i، i امین سطر A و B^k، C^k به‌ترتیب k امین ستون B و C هستند. دراین صورت B^k+C^k، k امین ستون $B+C$ است. طبق تعریف، ik امین مؤلفهٔ AB عبارت است از $A_i\cdot B^k$، و ik امین مؤلفهٔ AC مساوی است با $A_i\cdot C^k$، و ik امین مؤلفهٔ $A(B+C)$ مساوی است با $A_i\cdot(B^k+C^k)$. چون

$$A_i\cdot(B^k+C^k)=A_i\cdot B^k+A_i\cdot C^k$$

حکم اول ما برقرار است. چون

$$A_i\cdot xB^k=x(A_i\cdot B^k)$$

حکم دوم هم نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۲.۳. فرض‌کنید A، B، C ماتریسهایی هستند به‌طوری‌که‌می‌توان A را در B، وهمچنین B را در C ضرب‌کرد. دراین‌صورت A را می‌توان در BC، و AB را در C ضرب نمود وداریم

$$(AB)C=A(BC)$$

اثبات. فرض‌کنید $A=[a_{ij}]$ یك ماتریس $m\times n$، و $B=[b_{jk}]$ یك ماتریس $n\times r$، و

$C=[c_{kl}]$ یک‌ماتریس $r\times s$ است. دراین صورت AB یک ماتریس $m\times r$ است که‌مؤلفهٔ ik ام آن مساوی مجموع زیر است:

$$a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}$$

این مجموع را با استفاده ازعلامت $\sum$ به‌صورت خلاصهٔ زیرمی‌نویسیم

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$$

طبق تعریف، il امین مؤلفهٔ $(AB)C$ مساوی است با

$$\sum_{k=1}^{r}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right]c_{kl}=\sum_{k=1}^{r}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}c_{kl}\right]$$

مجموع طرف راست را می‌توان به‌صورت مجموع جملات زیرنوشت

$$\sum a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

که در آن j و k به‌ترتیب روی تمام اعداد صحیح $1\leqslant j\leqslant n$ و $1\leqslant k\leqslant r$ تغییرمی‌کند.

اگر با مؤلفهٔ jl ام BC شروع‌کنیم وسپس مؤلفهٔ il ام $A(BC)$ را محاسبه‌کنیم دقیقاً به‌همان مجموع قبلی می‌رسیم. به‌این ترتیب اثبات قضیه تمام می‌شود.

فرض‌کنید A یک ماتریس مربع $n\times n$ است. می‌گوئیم که A **وارون‌پذیر** یا **ناتکین** است اگر یک‌ماتریس $n\times n$ مثل B یافت شود به‌طوری‌که

$$AB=BA=I_n$$

چنین ماتریس B ای به‌طورمنحصربه‌فرد به‌وسیلهٔ A تعریف می‌شود. زیرا اگر C چنان باشد که $AC=CA=I_k$، آنگاه

$$B=BI_n=B(AC)=(BA)C=I_nC=C$$

(تمرین ۱ را ببینید.) این‌ماتریس B را **وارون** A می‌نامیم وآن را با A^{-1} نمایش‌می‌دهیم. وقتی‌که دترمینانها را مطالعه می‌کنیم، طریقهٔ صریحی برای یافتن A^{-1}، درصورتی‌که وجود داشته باشد، ارائه می‌دهیم.

فرض‌کنید A یک ماتریس مربع است. دراین صورت می‌توانیم حاصل‌ضرب A در خودش را تشکیل دهیم، مثلاً AA، یا باتکرارهای متوالی $A\ldots A$، m مرتبه. طبق تعریف، اگر m یک عدد صحیح بزرگتر یا مساوی ۱ باشد، A^m را به‌صورت $A\ldots A$، m مرتبه تعریف می‌کنیم. طبق تعریف قرارمی‌دهیم $A^{\circ}=I$ (ماتریس واحد هم‌اندازه با A). قاعدهٔ

معمول $A^{r+s}=A^rA^s$ برای اعداد صحیح $r,s\geqslant 0$ برقرار است.

نتیجهٔ بعدی درارتباط با ترانهادهٔ حاصلضرب ماتریسهاست.

قضیهٔ ۳.۳. فرض‌کنید A، B ماتریسهایی هستندکه می‌توانند درهم‌ضرب شوند. دراین‌صورت ${}^tB$، ${}^tA$ هم می‌توانند درهم ضرب شوند، و

$${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$$

اثبات. فرض کنید $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{jk}]$. فرض‌کنید $AB=C$. دراین صورت

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$$

فرض‌کنید ${}^tB=[b'_{kj}]$ و ${}^tA=[a'_{ji}]$. دراین صورت طبق‌تعریف ki امین مؤلفهٔ ${}^tB\,{}^tA$ مساوی است با

$$\sum_{j=1}^{n}b'_{kj}a'_{ji}$$

چون $b'_{kj}=b_{jk}$ و $a'_{ji}=a_{ij}$، لذا

$$\sum_{j=1}^{n}b'_{kj}a'_{ji}=\sum_{j=1}^{n}b_{jk}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$$

طبق تعریف، این همان ki امین مؤلفهٔ ${}^tC$ است. پس اثبات قضیه تمام است.

برحسب حاصلضرب ماتریسها، می‌توانیم یك دستگاه معادلات خطی را به‌صورت

$$AX=B$$

بنویسیم که A یك ماتریس $m\times n$، X یك‌بردارستونی n عضوی و B یك‌بردارستونی m عضوی است.

تمرینها

۱. فرض‌کنید I ماتریس واحد $n\times n$ است. فرض کنید A یك ماتریس $n\times r$ است. مطلوب است IA. اگر A یك‌ماتریس $m\times n$ باشد، مطلوب است AI.

۲. فرض کنید O ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن ۰ است. فرض کنید A یك ماتریس است به‌طوری که حاصلضرب AO قابل تعریف است. مطلوب است AO.

۳. درهریك ازحالتهای زیر $(AB)C$ و $A(BC)$ را محاسبه کنید.

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \text{ ، } B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \text{ ، } A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$C=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} \text{ ، } B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \text{ ، } A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} \text{ ، } B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} \text{ ، } A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \quad \text{(پ)}$$

۴. فرض کنید A، B ماتریسهای مربع هم‌اندازه و $AB=BA$ است. نشان دهید که

$$(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$$

$$(A+B)(A-B)=A^۲-B^۲$$

خواص ماتریسها مذکور درقضیهٔ ۱.۳ را به‌کاربرید.

۵. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \text{ ، } B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبهٔ AB و BA.

۶. فرض کنید $\begin{bmatrix} ۷ & ۰ \\ ۰ & ۷ \end{bmatrix}=C$، وفرض کنید A و B شبیه‌تمرین ۵ هستند. CA، AC، CB و BC را به‌دست آورید. قاعدهٔ کلی که این تمرین حالت خاص از آن است را بیان کنید.

۷. فرض کنید $(۱,۰,۰)=X$ و

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۷ \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبهٔ XA.

۸. فرض کنید $(۰,۱,۰)=X$، وفرض کنید A یك ماتریس ۳×۳ است. چگونه می‌توانید

XA را توصیف کنید؟ اگر $X=(\circ,\circ,1)$ باشد چطور؟ مسأله را به‌ماتریسهای مربع $n\times n$ تعمیم دهید، وحاصل‌ضرب آنها را با بردارهای یکه درنظر بگیرید.

۹. فرض کنید A، B ماتریسهای تمرین ۳ (الف) هستند. با محاسبه نشان دهید که ${}^tB{}^tA={}^t(AB)$. آیا همین تساوی برای ۳ (ب) و۳ (پ) هم برقرار است؟ ثابت کنید که این قاعده برای هردوماتریس قابل ضرب A و B برقرار است. اگر A، B، C ماتریسهایی باشندکه قابل ضرب هستند، نشان دهیدکه ${}^t(ABC)={}^tC{}^tB{}^tA$.

۱۰. فرض کنید M یک‌ماتریس $n\times n$ است به‌طوری‌که ${}^tM=M$. دو بردار سطری nتایی A و B داده شده‌اند. $\langle A,B\rangle$را به‌صورت $\langle A,B\rangle=AM{}^tB$ تعریف‌می‌کنیم (عبارت است از یک‌ماتریس 1×1 که با همان عدد ماتریس یکی می‌گیریم). نشان دهیدکه شرایط حاصل‌ضرب اسکالر برقرار است بـه‌جز احتمالاً شرط مثبت بودن. مثالی از یک‌ماتریس وبردارهای A و B ارائه دهید به‌طوری‌که $AM{}^tB$ منفی باشد (n را مساوی ۲ بگیرید).

۱۱. (الف) فرض کنید A یک ماتریس

$$\begin{bmatrix} \circ & 1 & 1 \\ \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

است. A^2 وA^3 را محاسبه‌کنید. مسأله را به‌ماتریسهای 4×4 تعمیم دهید.

(ب) فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \circ & 1 & 1 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix}$$

A^2، A^3 وA^4 را حساب‌کنید.

۱۲. فرض کنید X بردارستونی داده‌شده، وA ماتریس‌مشخص‌شده درزیر است. AX را به صورت یک‌بردارستونی حساب‌کنید.

(الف) $X=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} 1 & \circ & 1 \\ 2 & \circ & 1 \\ 2 & \circ & -1 \end{bmatrix}$

(ب) $$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ، \quad X=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(پ) $$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ، \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(ت) $$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ، \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

۱۳. فرض کنید $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. مطلوب است AX برای هر یك از بردارهای ستونی X.

(الف) $X=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ب) $X=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

۱۴. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبهٔ AX برای بردارهای ستونی داده شده در تمرین ۱۳.

۱۵. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{m4} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبهٔ AX.

۱۶. فرض کنید X بردار ستونی است که همهٔ مؤلفه‌های آن ۰ است به‌جز مؤلفهٔ i ام آن که مساوی ۱ است. فرض کنید X یك ماتریس دلخواه است، که اندازهٔ آن چنان است که می‌توان

AX را حساب کرد. مطلوب است AX.

۱۷. فرض کنید $A=[a_{ij}]$، $i=1,\dots,m$ و $j=1,\dots,n$ یک ماتریس $m\times n$ است. فرض کنید $B=[b_{jk}]$، $j=1,\dots,n$ و $k=1,\dots,s$ یک ماتریس $n\times s$ است. فرض کنید $AB=C$. نشان دهید که k امین ستون C^k را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$C^k=b_{1k}A^1+\dots+b_{nk}A^n$$

(این نحوهٔ نوشتن برای یافتن دترمینان حاصل‌ضرب مفید است.)

۱۸. فرض کنید A یک ماتریس مربع است.

(الف) اگر $A^2=o$، نشان دهید که $I-A$ وارون‌پذیر است.

(ب) اگر $A^3=o$، نشان دهید که $I-A$ وارون‌پذیر است.

(پ) درحالت کلی، اگر به‌ازای یک عدد صحیح مثبت n، $A^n=o$ باشد نشان دهید که $A-I$ وارون‌پذیر است.

(ت) فرض کنید که $A^2+2A+I=o$. نشان دهید که A وارون‌پذیر است.

(ث) فرض کنید که $A^3-A+I=o$. نشان دهید که A وارون‌پذیر است.

۱۹. فرض کنید a و b دو عدد، و

$$A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

مطلوب است AB. اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد A^n را حساب کنید.

۲۰. نشان دهید که ماتریس A در تمرین ۱۹ دارای وارون است. وارون آن را به‌دست آورید.

۲۱. نشان دهید که اگر A و B، ماتریسهای $n\times n$ وارون‌پذیر باشند، آنگاه AB نیز وارون‌پذیر است.

۲۲. کلیه ماتریسهای 2×2، A را بیابید به‌طوری که $A^2=o$.

۲۳. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$. نشان دهید که $A^2=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}$

با استقراء روی n، A^n را حساب کنید.

۲۴. یک ماتریس 2×2، A بیابید به‌طوری که $A^2=-I=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

۲۵. فرض کنید A یک‌ماتریس $n \times n$ است. مجموع اعضای روی‌قطر A را **اثر** A می‌نامیم، و آن را با $\mathrm{tr}(A)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین اگر $A=[a_{ij}]$، آنگاه

$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=۱}^{n} a_{ii}$$

به‌عنوان مثال، اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$، آنگاه $\mathrm{tr}(A)=۱+۴=۵$. اگر

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & -۴ & ۷ \end{bmatrix}$$

آنگاه $\mathrm{tr}(A)=۹$. اثر ماتریسهای زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۳ \\ -۱ & ۵ & ۲ \\ ۲ & ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۳ & -۲ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۱ \\ -۳ & -۳ & -۳ \end{bmatrix}$

(پ) $\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۴ \\ -۵ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$

۲۶. فرض کنید A و B ماتریسهای داده شده درزیر است. نشان دهید که

$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$$

(الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

(ب) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۳ \\ -۱ & ۵ & ۲ \\ ۲ & ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۱ \\ -۷ & -۳ & ۲ \end{bmatrix}$

۲۷. درحالت کلی ثابت کنید که اگر A و B دوماتریس مربع $n \times n$ باشند، آنگاه

$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$$

۲۸. برای هرماتریس مربع A، نشان دهید که $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}({}^{t}A)$

۲۹. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

مطلوب است $A^{۲}$، $A^{۳}$، $A^{۴}$.

۳۰. فرض کنید A یک ماتریس قطری است و اعضای روی قطر آن $a_{۱}$، ...، a_n می‌باشند. مطلوب است محاسبهٔ $A^{۲}$، $A^{۳}$ و به‌ازای هر عدد صحیح مثبت k، A^k.

۳۱. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبهٔ $A^{۳}$.

۳۲. فرض کنید A یک ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ است. نشان دهید که

$${}^t(A^{-۱})=({}^tA)^{-۱}$$

بنا بر این بدون اینکه اشکال پیش آید می‌توانیم بنویسیم ${}^tA^{-۱}$.

۳۳. فرض کنید $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس مختلط است، و فرض کنید $\overline{A}=[\overline{a}_{ij}]$ مزدوج مختلط آن است. نشان دهید که

$${}^t(\overline{A})=\overline{{}^tA}$$

پس به‌سادگی می‌توانیم بنویسیم ${}^t\overline{A}$.

۳۴. فرض کنید A یک ماتریس قطری است:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱} & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a_{۲} & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

اگر به‌ازای هر i، $a_i \neq 0$ باشد، نشان دهید که A وارون‌پذیر است. وارون آن چیست؟

۳۵. فرض کنید A یك **ماتریس مثلثی بالایی اکید** است، یعنی یك ماتریس مربع $[a_{ij}]$ که تمام درایه‌های زیر وروی قطر آن مساوی ۰ است. این ماتریس را به‌صورت $a_{ij}=0$ اگر $i \geqslant j$ نمایش می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ثابت کنید که $A^n=0$. (اگر مایلید، می‌توانید درحالتهای $n=2,3,4$ مسأله را حل کنید. حالت کلی را می‌توانید با استقراء انجام دهید.)

۳۶. فرض کنید A یك ماتریس مثلثی بالایی است که روی قطر آن همگی ۱ است:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & & a_{2n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فرض کنید $N=A-I_n$. نشان دهید که $N^{n+1}=0$. توجه کنید که $A=I+N$. نشان دهید که A وارون‌پذیر است، ووارون آن مساوی است با

$$(I+N)^{-1}=I-N+N^2-\cdots+(-1)^n N^n$$

۳۷. اگر N یك ماتریس مربع باشد به‌طوری که به‌ازای یك عدد صحیح مثبت r، $N^{r+1}=0$، نشان دهید که $I-N$ وارون‌پذیر است ووارون آن مساوی است با $I+N+\cdots+N^r$.

۳۸. فرض کنید A یك ماتریس مثلثی است:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ ۰ & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

فرض کنید هیچ یك از اعضای روی قطر ۰ نیستند، و فرض کنید که

$$B=\begin{bmatrix} a_{۱۱}^{-۱} & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲}^{-۱} & \cdots & ۰ \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_{nn}^{-۱} \end{bmatrix}$$

نشان دهید که BA و AB ماتریسهای مثلثی هستند که روی قطر آنها همگی ۱ است.

۳۹. ماتریس مربع A را **پوچ توان** می‌نامیم اگر به‌ازای یك عدد صحیح مثبت r، $A^r=o$ باشد. فرض کنید A و B ماتریسهای پوچ توان هم‌اندازه هستند و فرض کنید که $AB=BA$. نشان دهید که AB و $A+B$ پوچ توان هستند.

۳

نگاشتهای خطی

مفهوم کلی نگاشت راکه تعمیمی ازمفهوم تابع است تعریف می‌کنیم. در بین نگاشتها، نگاشتهای خطی دارای بیشترین اهمیت هستند. مقدار نسبتاً زیادی از ریاضیات اختصاص به‌این دارد که سؤالات مربوط به نگاشتهای دلخواه را به‌سؤالات مربوط به نگاشتهای خطی تقلیل دهیم. زیرا خود این نگاشتها جالبند و ضمناً بسیاری از نگاشتها خطی‌اند. ازطرف دیگر، اغلب می‌توان یك نگاشت دلخواه را با یك نگاشت خطی، که مطالعهٔ آن ازمطالعهٔ نگاشت اولیه به مراتب ساده‌تراست، تقریب زد. این‌کاری است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع چند متغیر حقیقی انجام می‌دهند.

۱. نگاشتها.

فرض کنید S و S' دو مجموعه هستند. یك **نگاشت** از S در S' عبارت است از تناظری که به هرعضو S یك عضو S' را وابسته کند. به‌جای اینکه بگوئیم F یك نگاشت از S در S' است، اغلب می‌نویسیم $F : S \to S'$.

تابع نوع خاصی از نگاشت است: مثلاً نگاشتی است از یك مجموعه درمجموعه‌ای ازاعداد، یعنی در $\mathbf{R}$، یا $\mathbf{C}$، یا یك هیات K.

برخی ازعلامتهای استفاده شده برای توابع را به نگاشتها تعمیم می‌دهیم. بـه عنوان

مثال، اگر $T : S \to S'$ یك نگاشت و u عضوی از S باشد، آنگاه عضو S' متناظر بـه u به‌وسیلهٔ T را با $T(u)$، یا Tu نمایش می‌دهیم. $T(u)$ را **مقدار** T درنقطهٔ u، یـا تصویر u تحت T می‌نامیم. مجموعهٔ تمام اعضای $T(u)$ را، وقتی‌که u در S تغییر می‌کند، **تصویر** T می‌نامیم. اگر W زیرمجموعه‌ای از S باشد،آنگاه مجموعهٔ تمام اعضای $T(\omega)$ بـه‌طوری که ω درتمام W تغییرکند را **تصویر** W تحت T می‌نامیم و با $T(W)$ نمایش می‌دهیم.

فرض‌کنید $F : S \to S'$ یك نگاشت از S در S' است. اگر x عضو از S بـاشد، آنگاه اغلب می‌نویسیم

$$x \longmapsto F(x)$$

منظور ما ازپیکان ویژهٔ $\longmapsto$ تصویر x تحت F است. بـه‌عنوان مثال، اگرنگاشت F چنان باشدکه $F(x) = x^2$ می‌نویسیم $x \longmapsto x^2$.

مثال ۱. فرض‌کنید $S = S' = \mathbf{R}$، و $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ تـابع $f(x) = x^2$ است (یعنی تابعی‌که مقدارآن درنقطهٔ x مساوی x^2 است). دراین‌صورت f نگاشتی از $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ است. بردآن مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگتر یامساوی ۰ است.

مثال ۲. فرض‌کنید $S =]0, +\infty[$، و $S' = \mathbf{R}$، وفرض‌کنید $g : S \to S'$ تابعی است که به صورت $g(x) = \sqrt{x}$ تعریف می‌شود. دراین‌صورت g نگاشتی از S در $\mathbf{R}$ است.

مثال ۳. فرض‌کنید S مجموعهٔ توابعی‌است که‌روی بازهٔ $0 < t < 1$ ازهرمرتبه‌ای‌مشتق‌پذیرند و فرض کنید $S' = S$. درایـن صورت عمـلگرمشتق‌گیری $D = \frac{d}{dt}$ نگاشتی از S بـه S است. درواقع این نگاشت به هرتابع f مشتق آن $Df = \frac{df}{dt}$ را وابسته می‌کند. برحسب علامت‌گذاری ما، Df مقدار نگاشت D درنقطهٔ f است.

مثال ۴. فرض‌کنید S مجموعهٔ توابع پیوسته روی بازهٔ $[0, 1]$ و S' مجموعهٔ توابع مشتق‌پذیرروی این بازه است. نگاشت $F : S \to S'$ رابه صورت زیرتعریف می‌کنیم.

$$(F(f))(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

یعنی $F(f)$ راتابعی می‌گیریم که درهر نقطهٔ x به‌صورت فوق تعریف می‌شود. بـه سادگی دیده می‌شودکه F مشتق‌پذیر است.

مثال ۵. فرض‌کنید S مساوی مجموعهٔ $\mathbf{R}^3$ ، یعنی‌مجموعهٔ تمام سه‌تائیهای مرتب باشد.فرض

کنید $A=(2,3,-1)$. فرض کنید $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ نگاشتی باشد که مقدار آن در نقطهٔ $X=(x,y,z)$ مساوی $A\cdot X$ است. دراین‌صورت $L(X)=A\cdot X$ اگر $X=(1,1,-1)$ باشد، آنگاه مقدار L در نقطهٔ X مساوی است با ۶.

همچنانکه درمورد توابع انجام دادیم، یك نگاشت را با مقادیرش توصیف می‌کنیم. بنابراین، به‌جای بیان عبارتی‌که درمثال ۵ برای توصیف نگاشت L به‌کار بردیم، می‌گوئیم: فرض کنید $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ نگاشت $L(X)=A\cdot X$ است. گاهی‌این نوع بیان نادرست‌است، ولی خلاصه‌ترمی‌باشد، ومعمولاً باعث اشتباه نمی‌شود. به‌طور صحیح‌تر، می‌توان نوشت $X\mapsto L(X)$، یا $X\mapsto A\cdot X$. در واقع پیکان خاص $\mapsto$ اثر نگاشت L روی عضو X را مشخص می‌کنند.

مثال۶. فرض کنید $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ نگاشتی است‌که به‌صورت

$$F(x,y)=(2x,2y)$$

تعریف می‌شود. تصویر نقاط واقع روی دایرهٔ $x^2+y^2=1$ تحت F رامشخص کنید.

فرض کنید (x,y) نقطه‌ای روی دایرهٔ به‌شعاع ۱ است. فرض کنید $u=2x$ و $v=2y$. دراین صورت u و v در رابطهٔ زیرصدق می‌کنند:

$$\left(\frac{u}{2}\right)^2+\left(\frac{v}{2}\right)^2=1\Longrightarrow\frac{u^2}{4}+\frac{v^2}{4}=1$$

بنابراین (u,v) نقطه‌ای روی دایرهٔ به‌شعاع ۲ است. بنابراین تصویر دایرهٔ به‌شعاع ۱ تحت F زیرمجموعه‌ای ازدایرهٔ به‌شعاع ۲ است. برعکس، فرض کنید نقطهٔ (u,v) چنان است‌که $u^2+v^2=4$. فرض کنید $x=\frac{u}{2}$ و $y=\frac{v}{2}$. دراین‌صورت (x,y) درمعادلهٔ $x^2+y^2=1$ صدق می‌کند، ولذا نقطه‌ای از دایره به شعاع ۱ است. به‌علاوه $F(x,y)=(u,v)$. بنابراین هر نقطهٔ متعلق به‌دایرهٔ به شعاع ۲ تصویر نقطه‌ای از دایرهٔ به‌شعاع ۱ است. پس‌تصویر دایرهٔ به شعاع ۱ تحت F دقیقاً دایرهٔ به شعاع ۲ است.

توجه. درحالت‌کلی، فرض کنید S و S' دو مجموعه هستند. برای اثبات اینکه $S=S'$، باید نشان دهیم که S زیرمجموعه‌ای از S' و S' زیرمجموعه‌ای از S است. دراستدلال گذشته ماهمین عمل را انجام دادیم.

مثال۷. فرض کنید S یك مجموعه و V یك فضای برداری روی هیات K است. فرض کنید F و G نگاشتهایی از S در V هستند. دراین‌صورت می‌توانیم جمع آنها $F+G$ رابه عنوان نگاشتی که به هر عضو $t\in S$ عضو $F(t)+G(t)$ را نسبت می‌دهد، تعریف کنیم.

همچنین ضرب F درعضو $c\in K$ را نگاشتی فرض می‌کنیم که عضو $t\in S$ را به عضو $cF(t)$ از V می‌نگارد. به‌سادگی می‌توان دیدکه مجموعهٔ کلیه نگاشتهای S در V بـا قوانین $+$ و ضرب اسکالر فوق درتمام خواص‌فضای برداری صدق‌می‌کند، یعنی یك‌فضای برداری‌است.

مثال۸. فرض‌کنید S یك مجموعـه است. فـرض‌کنید $F : S\rightarrow K^n$ یك نگـاشت است. برای هرعضو $t\in S$، مقدار F در t، یعنی $F(t)$، یك‌بردار است. مختصات $F(t)$ بستگی به t دارند. لذا توابع f_1،...، f_n از S در K وجود دارند به‌طوری‌که

$$F(t)=(f_1(t),\cdots,f_n(t))$$

این توابع را **توابع مختصاتی** F می‌نـامیم. به‌عنوان مثال، اگر $K=\mathbf{R}$ و S بـازه‌ای از اعداد حقیقی مثل J باشد، آنگاه نگاشت

$$F : J\rightarrow \mathbf{R}^n$$

را یك منحنی (پارامتری) درفضای n بعدی می‌نامیم.

فرض‌کنید S یك مجموعـهٔ دلخواه، و $F,G : S\rightarrow K^n$ نگـاشتهایی از S در K^n هستند. فرض‌کنید f_1،...، f_n توابع‌مختصاتی F، و g_1،...، g_n توابع مختصاتی G هستند. دراین صورت برای هر $t\in S$ داریم $G(t)=(g_1(t),\cdots,g_n(t))$، و بعلاوه

$$(F+G)(t)=F(t)+G(t)=(f_1(t)+g_1(t),\cdots,f_n(t)+g_n(t))$$

و برای هر $c\in K$ داریم

$$(cF)(t)=cF(t)=(cf_1(t),\cdots,cf_n(t))$$

مشاهده می‌کنیم که توابع مختصاتی $F+G$ عبارتند از

$$f_1+g_1,\cdots,f_n+g_n$$

مثال۹. می‌توانیم نگاشت $F : \mathbf{R}\rightarrow \mathbf{R}^3$ را با تناظر

$$t\rightarrow (2t,10^t,t^3)$$

تعریف کنیم. بنابراین $F(t)=(2t,10^t,t^3)$، و $F(2)=(4,100,8)$. توابع مختصاتی F عبارتند از توابع f_1، f_2، f_3 به‌طوری‌که

$$f_1(t)=2t\ \ ,\ \ f_2(t)=10^t\ \ ,\ \ f_3(t)=t^3$$

فرض‌کنید U، V، W سه مجموعـهٔ دلخواه و $F : U\rightarrow V$ و $G : V\rightarrow W$ دونگـاشت هستند. دراین‌صورت می‌توانیم ترکیب‌این دونگاشت راکه به‌صورت $G\circ F$ نمایش‌می‌دهیم

تعریف کنیم:

$$G\circ F : U \to W$$

$$G\circ F(t) = G(F(t)) \quad , \quad \forall t\in U$$

اگر $f : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ و $g : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ دوتابع باشند، آنگاه $g\circ f$ ترکیب این دوتابع است.

عبارت زیر یکی از خواص مهم نگاشتهاست.

فرض کنید U، V، W، S مجموعه‌های دلخواه، و

$$F : U\to V \quad , \quad G : V\to W \quad , \quad H : W\to S$$

نگاشتهای دلخواهی هستند. دراین صورت

$$H\circ(G\circ F) = (H\circ G)\circ F$$

اثبات. اثبات تساوی فوق بسیارساده است. طبق تعریف برای هر $u\in U$ داریم

$$(H\circ(G\circ F))(u) = H((G\circ F)(u)) = H(G(F(u)))$$

ازطرف دیگر

$$((H\circ G)\circ F)(u) = (H\circ G)(F(u)) = H(G(F(u)))$$

پس طبق تعریف تساوی نگاشتها داریم

$$H\circ(G\circ F) = (H\circ G)\circ F$$

می‌توانیم وارون نگاشتها را مورد بررسی قرار دهیم، اما قبل از آن، لازم است دو خاصیت ویژهٔ نگاشتها را یادآور شویم. فرض کنید $f : S\to S'$ یك نگاشت است. می‌گوئیم نگاشت f **یك به‌یك** است اگر از $x,y\in S$ و $x\neq y$ نتیجه‌شود $f(x)\neq f(y)$. به‌عبارت دیگر، f یك به‌یك است هرگاه مقادیر متفاوت S را برمقادیر متفاوت S' بنگارد. بـه‌صورت هم‌ارز، می‌توان گفت که f یك به‌یك است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x,y\in S$،

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

مثال ۱۰. تابع $f : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ که به‌صورت $f(x) = x^{2}$ تعریف می‌شود یك بـه‌یك نیست، زیـرا $f(1) = f(-1) = 1$. همچنین تـابع $x \mapsto \sin x$ یـك بـه‌یك نیست، زیرا $\sin x = \sin(x+2\pi)$. نگاشت $f : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ به‌طوری‌که $f(x) = x+1$ یك بـه‌یك است، زیرا از $x+1 = y+1$ نتیجه می‌شود $x = y$.

نگاشت $f : S\to S'$ را **پوشا** می‌نامیم هرگاه تصویر f تمام S' باشد.

نگاشت $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ به‌طوری‌که $f(x)=x^2$ پوشا نیست، زیرا تصویر آن مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی نامنفی است، و این تصویر مساوی تمام $\mathbf{R}$ نیست. ولی نگاشت $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ به‌طوری‌که $f(x)=x^3$ پوشاست، زیرا به‌ازای هر عدد حقیقی y، یك عدد حقیقی x وجود دارد به‌طوری‌که $y=x^3$. بنابراین هرعدد حقیقی درتصویر این نگاشت قرار دارد.

نگاشتی‌که هردوخاصیت یك به‌یك وپوشا را داشته باشد به **نگاشت دوسویی** موسوم است.

فرض‌کنید $\mathbf{R}^+$ مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی است. بین نگاشتهای

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}\to\mathbf{R} & \qquad & \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+ \\ x\mapsto x^2 & & x\mapsto x^2 \end{array}$$

تفاوت وجود دارد. وقتی تناظر $x\mapsto x^2$ را به‌عنوان نگاشتی از $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ درنظر می‌گیریم نه یك به‌یك است ونه پوشا. درصورتی‌که اگر آن را نگاشتی از $\mathbf{R}^+$ در $\mathbf{R}^+$ درنظر بگیریم هردوخاصیت را داراست، زیرا هرعدد حقیقی مثبت دارای یك ریشهٔ دوم مثبت است، و چنین ریشه‌ای به‌طورمنحصر به‌فرد تعیین می‌گردد.

درحالت‌کلی، وقتی نگاشت $f: S\to S'$ را بررسی می‌کنیم، باید مجموعه‌های S و S' راکاملاً بشناسیم تا قادر باشیم یك به‌یك وپوشا بودن f را تعیین‌کنیم. برای اینکه یك علامت‌گذاری‌کاملاً دقیق داشته باشیم، باید بنویسیم $f_{S,S'}$، یا هرعلامت دیگری‌که S و S' دربرداشته باشد، اما انتخاب این‌نوع علائم چندان زیبا نیستند، ولی برای روشن‌شدن مفهوم به‌کاربردن آن را ترجیح می‌دهیم.

اگر S یك مجموعهٔ دلخواه باشد، **نگاشت همانی** I_S را به‌صورت زیر تعریف‌می‌کنیم:

$$I_S(x)=x \quad , \quad \forall x\in S$$

توجه داریدکه نگاشت همانی هم یك به‌یك است وهم پوشا. اگر نیازی به‌مشخص‌کردن مجموعهٔ S نباشد (ومثلاً درمتن مجموعهٔ S مشخص باشد) به‌جای I_S می‌نویسیم I. در این صورت برای هر $x\in S$ داریم $I(x)=x$. گاهی I_S را با id_S یا به‌طورسادهٔ id نمایش می‌دهیم.

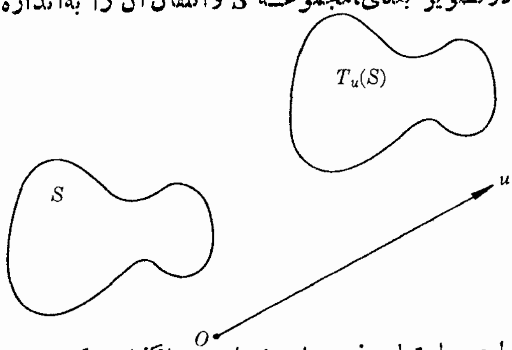
اکنون نگاشتهای وارون را تعریف می‌کنیم. فرض‌کنید $F: S\to S'$ نگاشتی از یك مجموعه درمجموعهٔ دیگری است. می‌گوئیم F دارای وارون است اگر نگاشتی مانند $G: S'\to S$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $G\circ F=I_S$ و $F\circ G=I_{S'}$.

مثال ۱۱. فرض‌کنید $S=S'$ مجموعهٔ‌کلیهٔ اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی ۰ است. فرض

کنید $f : S \rightarrow S'$ نگاشت $f(x)=x^2$ است. دراین‌صورت f دارای یك‌نگاشت وارون مانند $g : S \rightarrow S$ است به‌طوری‌که $g(x)=\sqrt{x}$.

مثال ۱۲. فرض کنید $\mathbf{R}_{>0}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ نگاشت $f(x)=e^x$ است. دراین صورت f دارای یك نگاشت وارون است که عبارت است از تابع لگاریتم.

مثال ۱۳. این مثال دارای اهمیت ویژه‌ای در کاربردهای هندسی است. فرض‌کنید V یك فضای برداری و u یك‌بردار ثابت V است. نگاشت $T_u : V \rightarrow V$ را به‌صورت $T_u(v)=v+u$ تعریف می‌کنیم. T_u را **انتقال** به‌اندازهٔ u می‌نامیم. اگر S یك زیرمجموعهٔ دلخواه V باشد، آنگاه $T_u(S)$ را **انتقال S به‌اندازهٔ u** می‌نامیم وعبارت است ازمجموعهٔ تمام بردارهایی به‌صورت $v+u$ به‌طوری‌که v در S تغییر می‌کند. این مجموعه را اغلب با $S+u$ نمایش می‌دهیم. درتصویر بعدی، مجموعهٔ S وانتقال آن را به‌اندازهٔ بردار u رسم کرده‌ایم.



به‌عنوان تمرین اثبات عبارتهای زیر را به‌خواننده واگذارمی‌کنیم.

اگر u_1، u_2 اعضای V باشند، آنگاه $T_{u_1+u_2}=T_{u_1}\circ T_{u_2}$

اگر u عضوی از V باشد، آنگاه $T_u : V \rightarrow V$ دارای یك‌نگاشت وارون است و وارون‌آن عبارت است از T_{-u}.

وبالاخره

فرض‌کنید $f : S \rightarrow S'$ نگاشتی است که دارای وارون g است. دراین صورت f یك به‌یك وپوشا، ودرنتیجه دوسویی است.

اثبات. فرض‌کنید $x, y \in S$. فرض‌کنید نگاشت $g : S' \rightarrow S$ وارون f است. اگر $f(x)=f(y)$، آنگاه

$$x=g(f(x))=g(f(y))=y$$

و بنابراین f یك بهیك است. برای اثبات اینکه f پوشاست، فرض‌کنید $z\in S'$. دراین صورت $z=f(g(z))$، زیرا f وارون g است،ولذا $z=f(x)$ به‌طوری‌که $x=g(z)$. پس f پوشاست.

عکس عبارت اثبات شدهٔ فوق نیز درست است:

فرض‌کنید $f: S\to S'$ یك نگاشت دوسویی است. دراین صورت f دارای نگاشت وارون است.

اثبات. فرض‌کنید $z\in S'$. چون f پوشاست، یك عضو $x\in S$ وجود دارد به‌طوری که $f(x)=z$. چون f یك به‌یك‌است، این عضو x به‌طورمنحصر به‌فردی به‌وسیلهٔ z تعیین می‌شود، از اینرومی‌توانیم $g(z)$ را مساوی x تعریف‌کنیم، $x=g(z)$. طبق تعریف g، داریم $f(g(z))=z$، و $g(f(x))=x$، وبنابراین g وارون f است.

بنابراین، می‌توان گفت، نگاشت $f: S\to S'$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر f دوسویی باشد.

تمرینها

۱. درمثال ۳، Df را به‌عنوان تابعی از x تعریف‌کردیم. Df را برای توابع زیر به‌دست آورید:

(الف) $f(x)=\sin x$ (ب) $f(x)=e^x$ (پ) $f(x)=\log x$

۲. عبارتهای ذکرشده درمثال ۱۳ درمورد انتقال را ثابت‌کنید.

۳. طبق آنچه درمثال ۵ گفته شد، $L(X)$ را برای بردارهای X به‌دست آورید.

(الف) $X=(1,2,-3)$ (ب) $X=(-1,5,0)$ (پ) $X=(2,1,1)$

۴. فرض‌کنید $F: \mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ نگاشتی باشدکه به‌صورت $F(t)=(e^t,t)$ تعریف شده‌است مطلوب است $F(1)$، $F(0)$ و $F(-1)$.

۵. فرض‌کنید $G: \mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ نگاشتی باشدکه به‌صورت $G(t)=(t,2t)$ تعریف‌شده‌است. فرض‌کنید F مانند مثال ۴ باشد. مطلوب است $(F+G)(1)$، $(F+G)(2)$، $(F+G)(0)$.

۶. فرض‌کنید F مانند مثال ۴ است، مطلوب است $(\text{۲}F)(\text{۰})$، $(\pi f)(\text{۱})$.

۷. فرض‌کنید $A=(\text{۱},\text{۱},-\text{۱},\text{۳})$. فرض‌کنید $F:\mathbf{R}^{\text{۴}}\to\mathbf{R}$ نگاشتی که به‌ازای هر $X=(x_\text{۱},x_\text{۲},x_\text{۳},x_\text{۴})$ به‌صورت $F(X)=X\cdot A+\text{۲}$ تعریف شده است. مطلوب است مقدار $F(X)$ به‌ازای (الف) $X=(\text{۱},\text{۱},\text{۰},-\text{۱})$ و (ب) $X=(\text{۲},\text{۳},-\text{۱},\text{۱})$.

در تمرینهای ۸ الی ۱۲ برای اثبات اینکه تصویر تابع مساوی مجموعهٔ مشخص S است، باید نشان دهیم که تصویر تابع مشمول S است وهرعضو S تصویر یك نقطه است.

۸. فرض‌کنید $F:\mathbf{R}^\text{۲}\to\mathbf{R}^\text{۲}$ نگاشت $F(x,y)=(\text{۲}x,\text{۳}y)$ است. تصویر نقاط واقع روی دایرهٔ $x^\text{۲}+y^\text{۲}=\text{۱}$ را به‌دست آورید.

۹. فرض‌کنید $F:\mathbf{R}^\text{۲}\to\mathbf{R}^\text{۲}$ نگاشت $F(xy)=(xy,y)$ است. تصویر خط راست $x=\text{۲}$ تحت F را به‌دست آورید.

۱۰. فرض‌کنید F نگاشت $F(x,y)=(e^x\cos y,e^x\sin y)$ است. تصویر خط راست $x=\text{۱}$ تحت F را به‌دست آورید. درحالت کلی‌تر، تصویر خط راست $x=c$ که در آن c یك عدد ثابت است، را تحت F به‌دست آورید.

۱۱. فرض‌کنید F نگاشت تعریف شده با $F(t,u)=(\cos t,\sin t,u)$ است. مفهوم هندسی تصویر تمام نقاط (t,u) متعلق به‌صفحه را تحت F به‌دست آورید.

۱۲. فرض‌کنید F نگاشت $F(x,y)=\left(\frac{x}{\text{۳}}\,,\,\frac{x}{\text{۴}}\right)$ است. تصویر بیضی $\frac{x^\text{۲}}{\text{۹}}+\frac{y^\text{۲}}{\text{۱۶}}=\text{۱}$ را تحت F به‌دست آورید.

۲. نگاشتهای خطی

فرض‌کنید V، V' فضاهای برداری روی هیات K هستند. نگاشت $F:V\to V'$ را یك **نگاشت‌خطی** می‌نامیم هرگاه

$$\forall u,v\in V\ ,\ F(u+v)=F(u)+F(v) \qquad \text{(الف)}$$

$$\forall c\in K,\forall v\in V\ ,\ F(cv)=cF(v) \qquad \text{(ب)}$$

اگر بخواهیم هیات K را مشخص‌کنیم، می‌گوئیم F یك‌نگاشت K- **خطی** است. چون‌اغلب با هیات ثابت K سروکار داریم، پیشوند K را حذف می‌کنیم و فقط ازنگاشتهای خطی صحبت می‌کنیم.

مثال ۱. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات K است. فرض کنید $\{v_1,\dots,v_n\}$ یك پایهٔ V است. نگاشت $F: V\to K^n$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که به هر عضو $v\in V$ بردار مختصاتی آن X، را نسبت به پایهٔ مذکور وابسته می‌کنیم. بنابراین اگر

$$v=x_1v_1+\dots+x_nv_n \quad ; \quad x_i\in K$$

آنگاه

$$F(v)=(x_1,\dots,x_n)$$

نگاشت F خطی است، زیرا اگر $w=y_1v_1+\dots+y_nv_n$ عضوی از V و $Y=(y_1,\dots,y_n)$ بردار مختصاتی آن باشد، آنگاه

$$v+w=(x_1+y_1)v_1+\dots+(x_n+y_n)\,v_n$$

لذا $F(v+w)=X+Y=F(v)+f(w)$. اگر $c\in K$ آنگاه $cv=cx_1v_1+\dots+cx_nv_n$ و لذا $F(cv)=cX=cF(v)$.

مثال ۲. فرض کنید $V=\mathbf{R}^3$ فضای برداری سه‌بعدی معمولی و $V'=\mathbf{R}^2$ فضای برداری ۲ بعدی است. نگاشت $F: \mathbf{R}^3\to \mathbf{R}^2$ را به‌صورت $F(x,y,z)=(x,y)$ تعریف می‌کنیم. این نگاشت یك نگاشت خطی است (بررسی کنید).

درحالت کلی‌تر، فرض کنید r و n دو عدد صحیح مثبت و $r<n$. دراین صورت نگاشت $F: K^n\to K^r$ که به‌صورت $F(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_r)$ تعریف می‌شود یك نگاشت خطی است.

مثال ۳. فرض کنید $A=(1,2,-1)$. فرض کنید $V=\mathbf{R}^3$ و $V'=\mathbf{R}$. نگاشت $L_A:\mathbf{R}^3\to \mathbf{R}$ به‌صورت $L_A(X)=X\cdot A$ تعریف می‌کنیم. نگاشت L_A خطی است، زیرا اگر X و Y دو عضو دلخواه $\mathbf{R}^3$ باشد داریم

$$(X+Y)\cdot A=X\cdot A+Y\cdot A$$

$$(cX)\cdot A=c(X\cdot A)$$

درحالت کلی‌تر، فرض کنید K یك هیات و A یك بردار ثابت K^n است. نگاشت خطی (K- خطی) $L_A: K^n\to K$ به‌صورت $L_A(X)=X\cdot A$ تعریف می‌شود.

می‌توان این تعریف را به ماتریسها تعمیم دهیم. فرض کنید A یك ماتریس $m\times n$ با درایه‌های متعلق به هیات K است. نگاشت خطی $L_A: K^n\to K^m$ را به‌صورت $L_A(X)=AX$ تعریف می‌کنیم. دراین صورت هم خطی بودن L_A از خواص ماتریسها به دست می‌آید. اگر $A=[a_{ij}]$ باشد، آنگاه AX به‌صورت زیر است:

$$AX=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

این نوع ضرب به‌کرات مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

مثال۴. فرض کنید V یك‌فضای برداری است. نگاشتی‌که به‌هر بردار $u\in V$ خود عضو u را متناظر می‌کنند یك‌نگاشت خطی است. این نگاشت را **نگاشت همانی** می‌نامیم، و آن را با id یا به‌طورساده با I نمایش می‌دهیم. پس $id(u)=u$.

مثال۵. فرض کنید V، V' دوفضای برداری‌روی‌هیات K هستند. نگاشتی‌که به‌هر بردار $u\in V$ بردار $O\in V'$ را متناظر می‌کند بـه **نگاشت صفر** موسوم است و آشکارا خطی است. ایـن نگاشت را با O نمایش‌می‌دهیم.

به‌عنوان تمرین (تمرین ۲) ثابت کنید که،

۱اگر $L:V\to W$ یك نگاشت خطی باشد،آ نگاه $L(o)=o$.

به‌ویژه، اگر $F:V\to W$ نگاشتی باشدکه $F(o)\neq o$،آنگاه F خطی‌ لزوماً نیست.

مثال۶. فضای برداری نگاشتهای خطی. فرض کنید V و V' دوفضای بـرداری روی هیات K هستند. مجموعهٔ تمام نگاشتهای خطی V در V' را درنظرگرفته وآن را با $\mathcal{L}(V,V')$ و یا اگر V و V' مشخص باشند با $\mathcal{L}$ نمایش می‌دهیم. جمع دونگاشت خطی وهمچنین‌ضرب یك اسکالر دریك نگـاشت خطی را چنان تعریف می‌کنیم‌که فضای $\mathcal{L}$ تبدیل بـه‌یك فضای برداری گردد.

فرض کنید $T:V\to V'$ و $F:V\to V'$ دونگـاشت خطی هستند. **مجموع** $T+F$ را نگاشتی‌تعریف می‌کنیم که به هر بردار $u\in V$ بردار $T(u)+F(u)$ متعلق به V' را نسبت می‌دهد. بنابراین می‌نویسیم

$$(T+F)(u)=T(u)+F(u)$$

نگاشت $T+F$ خطی است. زیرا برای هردوعضو دلخواه u و v متعلق به V داریم:

$$\begin{aligned}(T+F)(u+v)&=T(u+v)+F(u+v)\\&=T(u)+T(v)+F(u)+F(v)\\&=T(u)+F(u)+T(v)+F(v)\\&=(T+F)(u)+(T+F)(v)\end{aligned}$$

همچنین اگر $c\in K$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}(T+F)(cu)&=T(cu)+F(cu)\\&=cT(u)+cF(u)\\&=c[T(u)+F(u)]\\&=c[(T+F)(u)]\end{aligned}$$

بنا براین $T+F$ یك نگاشت خطی است.

اگر $a\in K$، و $T:V\to V'$ یك نگاشت خطی باشد، نگاشت aT از V در V' را به صورت $(aT)(u)=aT(u)$ تعریف می‌کنیم. به‌سادگی می‌توان نشان داد که aT یك نگاشت خطی است. اثبات آن را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

به‌این ترتیب اعمال جمع وضرب اسکالر را روی مجموعهٔ $\mathscr{L}$ تعریف کرده‌ایم، بعلاوه، اگر $T:V\to V'$ یك نگاشت خطی، یعنی عضوی از $\mathscr{L}$ باشد، آنگاه می‌توانیم $-T$ را به صورت $(-1)T$، یعنی حاصلضرب عدد -1 در T تعریف کنیم. بالاخره، نگاشتی که تمام اعضای V را بـه‌عضو o از V' می‌نگارد، **نگاشت صفر** می‌نـامیم. این نگاشت عضو بی‌اثر قانون جمع است. به‌این ترتیب $\mathscr{L}$، مجموعهٔ تمام نگاشتهای خطی از V در V'، یك فضای برداری است. بررسی اینکـه تمام خواص فضای برداری برقرار است را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

مثال ۷. فرض کنید $V=V'$ فضای برداری تمـام توابع حقیقی یك متغیری است کـه ازهر مرتبه‌ای مشتق‌پذیرند. فرض کنید D عملگر مشتق است. دراین صورت $D:V\to V$ نگاشتی خطی است، به‌عبارت دیگر، برای هردو نگاشت مشتق‌پذیر f و g، وهر ثابت c داریم:

$$D(f+g)=Df+Dg \quad \text{و} \quad D(cf)=cD(f)$$

اگر f متعلق به V و I نگاشت همانی باشد، آنگاه

$$(D+I)f=Df+f$$

بنابراین، وقتی f نگاشت $f(x)=e^x$ باشد، آنگاه $(D+I)f$ تـابعی است که مقدار آن درهر نقطهٔ x مساوی $e^x+e^x=2e^x$ است.

اگر $f(x)=\sin x$ باشد، آنگاه

$$((D+I)f)(x)=\cos x+\sin x$$

فرض کنید $T:V\to V'$ یك نگاشت خطی است. فرض کنید u، v و w اعضایی از V

هستند. دراین صورت

$$T(u+v+w)=T(u)+T(v)+T(w)$$

این تساوی را می‌توان به‌صورت بازگشتی وبا استفاده ازتعریف نگاشت خطی ثابت‌کرد.

$$T(u+v+w)=T(u+v)+T(w)=T(u)+T(v)+T(w)$$

به‌طریق مشابه، اگرمجموعی با بیش ازسه عضوداشته باشیم می‌توانیم تصویر آن را به‌دست آوریم. به‌عنوان مثال، فرض کنید u_1،...، u_n اعضایی از V هستند. دراین صورت

$$T(u_1+\cdots+u_n)=T(u_1)+\cdots+T(u_n)$$

مجموع طرف راست را می‌توان با هر ترتیبی درنظر گرفت. اثبات دقیق آن را می‌توان به سادگی وبا استفاده از استقراء انجام داد. ما از اثبات آن صرفنظرمی‌کنیم.

اگر a_1،...، a_n اسکالرهای دلخواه باشند، آنگاه

$$T(a_1u_1+\cdots+a_nu_n)=a_1T(u_1)+\cdots+a_nT(u_n)$$

این تساوی را برای سه عضوثابت می‌کنیم.

$$\begin{aligned}T(a_1u+a_2v+a_3w)&=T(a_1u)+T(a_2v)+T(a_3w)\\&=a_1T(u)+a_2T(v)+a_3T(w)\end{aligned}$$

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهدکه چگونه یك نگاشت خطی با معلوم بودن مقادیرش روی اعضای پایه تعیین می‌گردد.

قضیهٔ ۲.۱. فرض‌کنید U و W دوفضای برداری و $\{v_1,\ldots,v_n\}$ پایه‌ای از V و w_1،...، w_n اعضای دلخواهی از W است. دراین صورت یك نگاشت خطی منحصربه‌فرد $T: V\to W$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$T(v_1)=w_1,\ldots,T(v_n)=w_n$$

اگر x_1،...، x_n اسکالرهای دلخواهی باشند، آنگاه

$$T(x_1v_1+\cdots+x_nv_n)=x_1w_1+\cdots+x_nw_n$$

اثبات. ثابت خواهیم کرد که یك نگاشت خطی T با شرایط مورد نظر وجود دارد. فرض کنید v عضوی از V، و x_1،...، x_n اسکالرهای منحصر به فردی‌هستند که $v=x_1v_1+\cdots+x_nv_n$. فرض می‌کنیم

$$T(v)=x_1w_1+\cdots+x_nw_n$$

به‌این ترتیب نگاشت T از V در W تعریف شده است، اکنون نشان می‌دهیم که T خطی است. اگر v' عضوی از V، و $v' = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$ باشد، آنگاه

$$v + v' = (x_1 + y_1)v_1 + \cdots + (x_n + y_n)v_n$$

طبق تعریف، داریم

$$\begin{aligned} T(v+v') &= (x_1+y_1)w_1 + \cdots + (x_n+y_n)w_n \\ &= x_1w_1 + y_1w_1 + \cdots + x_nw_n + y_nw_n \\ &= T(v) + T(v') \end{aligned}$$

فرض کنید c یك اسکالر است. دراین صورت $cv = cx_1v_1 + \cdots + cx_nv_n$، ولذا

$$T(cv) = cx_1w_1 + \cdots + cx_nw_n = cT(v)$$

بنابراین T خطی است، وهمان نگاشت خطی مورد نظر است.

چنین نگاشتی منحصر به‌فرد است، زیرا برای هرعضو $x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ متعلق به V، هر نگاشت خطی $F : V \to W$ که درشرط $F(v_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ صدق کند باید در تساوی

$$\begin{aligned} F(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) &= x_1F(v_1) + \cdots + x_nF(v_n) \\ &= x_1w_1 + \cdots + x_nw_n \end{aligned}$$

صدق کند. این مطلب اثبات را کامل می‌کند.

تمرینها

۱. معین کنید که کدام یك از نگاشتهای زیر خطی‌اند.

(الف) $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ به‌طوری که $F(x, y, z) = (x, z)$

(ب) $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ به‌طوری که $F(X) = -X$

(پ) $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ به‌طوری که $F(X) = X + (0, -1, 0)$

(ت) $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ به‌طوری که $F(x, y) = (2x + y, y)$

(ث) $F:\mathbf{R}^۲\rightarrow\mathbf{R}^۲$ به‌طوری‌که $F(x,y)=(۲x,y-x)$

(ج) $F:\mathbf{R}^۲\rightarrow\mathbf{R}^۲$ به‌طوری‌که $F(x,y)=(y,x)$

(چ) $F:\mathbf{R}^۲\rightarrow\mathbf{R}$ به‌طوری‌که $F(x,y)=xy$

(ح) فرض‌کنید U یك زیرمجموعهٔ باز $\mathbf{R}^۳$، و V فضای برداری توابع مشتق‌پذیر روی U است. فرض کنید V' فضای برداری میدان برداری تعریف شده روی U است. در این صورت $\text{grad}: V\rightarrow V'$ یك نگاشت است. آیا این نگاشت خطی است؟ (برای قسمت (ح) فرض ما بر این است که شما مقداری حساب دیفرانسیل وانتگرال می‌دانید.)

۲. فرض‌کنید $T:V\rightarrow W$ یك نگاشت خطی از یك فضای برداری در یك فضای برداری دیگر است. نشان دهید که $T(o)=o$.

۳. فرض‌کنید $T:V\rightarrow W$ یك نگاشت خطی است. فرض‌کنید u و v اعضایی از V هستند، و $T(u)=w$. اگر $Tv=o$ باشد نشان دهید که $T(u+v)$ هم مساوی w است.

۴. فرض‌کنید $T:V\rightarrow W$ یك نگاشت خطی است. فرض‌کنید U مجموعهٔ تمام اعضای $u+v$ است به‌طوری‌که $T(u)=o$. فرض‌کنید $w\in W$ و $v_\circ$ عضوی از V است به‌طوری که $T(v_\circ)=w$. نشان دهید که مجموعهٔ اعضای $v\in V$ به‌طوری که $T(v)=w$ دقیقاً مساوی $v_\circ+U$ است.

۵. فرض‌کنید $T:V\rightarrow W$ یك نگاشت خطی است. فرض‌کنید v عضوی از V است. نشان دهید که $T(-v)=-T(v)$.

۶. فرض‌کنید V یك فضای برداری، و $f:V\rightarrow\mathbf{R}$، $g:V\rightarrow\mathbf{R}$ دو نگاشت خطی هستند. فرض‌کنید $F:V\rightarrow\mathbf{R}^۲$ نگاشتی است که به‌صورت $F(v)=(f(v),\ g(v))$ تعریف شده است. نشان دهید که F خطی است. مسأله را تعمیم دهید.

۷. فرض‌کنید V، W دو فضای برداری و $F:V\rightarrow W$ یك نگاشت خطی است. فرض‌کنید U زیرمجموعه‌ای از V متشکل از تمام اعضای v است به‌طوری‌که $F(v)=\circ$. ثابت کنید که U یك زیرفضای V است.

۸. کدام یك از نگاشتهای تمرینهای ۴، ۷، ۸، ۹ بخش ۱ خطی هستند.

۹. فرض‌کنید V یك فضای برداری روی $\mathbf{R}$ و v و w دو عضو V هستند. **خط گذرنده بر** $\mathbf{v}$ **وموازی با** $\mathbf{w}$ را مجموعهٔ تمام اعضای $v+tw$، $t\in\mathbf{R}$ تعریف می‌کنیم. **پاره خط** بین v

و $v+w$ را مجموعهٔ تمام اعضای

$$v+tw \quad \text{با شرط} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

تعریف می‌کنیم. فرض کنید $L: V \to U$ یك نگاشت خطی است. نشان دهید که تصویر هر پاره خط V یك پاره خط U است. بین چه نقاطی؟

نشان دهید که تصویر یك خط توسط L یا یك خط است و یا یك نقطه.

فرض کنید V یك فضای برداری، و v_1، v_2 دو عضو V هستند که مستقل خطی‌اند. مجموعهٔ تمام اعضای V که می‌توان آنها را به‌صورت $t_1v_1+t_2v_2$ نوشت به‌طوری که t_1 و t_2 درشرایط $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$ و $0 \leqslant t_2 \leqslant 1$ صدق کنند را یك **متوازی‌الاضلاع** تولید شده توسط v_1 و v_2 می‌نامیم.

۱۰. فرض کنید V و W دو فضای برداری و $F: V \to W$ یك نگاشت خطی است. فرض کنید v_1، v_2 دو عضو مستقل خطی V هستند، وفرض کنید $F(v_1)$ و $F(v_2)$ نیز مستقل خطی‌اند. نشان دهید که تصویر متوازی‌الاضلاع تولید شده توسط v_1 و v_2 متوازی‌الاضلاع تولید شده $F(v_1)$ و $F(v_2)$ خواهد بود.

۱۱. فرض کنید F یك نگاشت خطی از $\mathbf{R}^2$ درخودش است به‌طوری که

$$f(E_1)=(1,1) \quad \text{و} \quad F(E_2)=(-1,2)$$

فرض کنید S مربع به‌رئوس $(0,0)$، $(1,0)$، $(1,1)$، $(0,1)$ است. نشان دهید که تصویر این مربع تحت F یك متوازی‌الاضلاع است.

۱۲. فرض کنید A، B دو بردارمخالف صفر درصفحه هستند به‌طوری‌که هیچ ثابت $c \neq 0$ وجود ندارد به‌طوری که $B=cA$. فرض کنید T یك نگاشت خطی ازصفحه درخودش است به طوری که $T(E_1)=A$ و $T(E_2)=B$. تصویرمربع به‌رئوس $(0,1)$، $(3,0)$، $(0,0)$ و $(3,1)$ را تحت نگاشت T به‌دست آورید.

۱۳. فرض کنید A، B دو بردار مخالف صفر در صفحه هستند که هیچ ثابت $c \neq 0$ وجود ندارد به‌طوری که $B=cA$. تعبیر هندسی مجموعهٔ نقاط $tA+uB$ را برای مقادیر t و u به‌طوری که $0 \leqslant t \leqslant 5$، و $0 \leqslant u \leqslant 2$ به‌دست آورید.

۱۴. فرض کنید $T_u: V \to V$ انتقال به‌بردار u است. برای چه برداری u ای T_u یك نگاشت خطی است؟ اثبات؟

۱۵. فرض کنید U، W دو فضای برداری، و $F: V \to W$ یك نگاشت خطی است. فرض

کنید w_n ،...،w_1 اعضایی از W هستندکه استقلال خطی دارند، وفرض کنید v_n ،...،v_1 اعضایی از V هستند به‌طوری که $F(v_i)=w_i$ برای $i=1,\dots,n$. نشان دهیدکه v_n ،...،v_1 استقلال خطی دارند.

۱۶. فرض کنید V یك‌فضای برداری و $F:V\to \mathbf{R}$ یك‌نگاشت خطی است. فرض کنید W زیرمجموعه‌ای از V است که متشکل از تمام اعضای V می‌باشد به‌طوری که $F(v)=0$. فرض کنید که $W\neq V$، وفرض کنید v_0 عضوی از V است که متعلق به W نیست. نشان دهیدکه هرعضو V را می‌توان به‌صورت مجموع $w+cv_1$ نوشت به‌طوری که $w\in W$ و c یك‌عدد است.

۱۷. در تمرین ۱۶، نشان دهیدکه W یك زیرفضای V است. فرض کنید $\{v_1,\dots,v_n\}$ یك پایهٔ W است. نشان دهیدکه $\{v_0,v_1,\dots,v_n\}$ یك‌پایهٔ V است.

۱۸. فرض کنید $L:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ یك نگاشت خطی است که روی بردارهای مشخص شده دارای مقادیر زیرین‌است:

(الف) $L(3,1)=(1,2)$ و $L(-1,0)=(1,1)$

(ب) $L(4,1)=(1,1)$ و $L(1,1)=(3,-2)$

(پ) $L(1,1)=(2,1)$ و $L(-1,1)=(6,3)$

درهر حالت $L(1,0)$ را به‌دست آورید.

۱۹. فرض کنید L مثل قسمتهای (الف)، (ب)، و (پ) تمرین ۱۸ است، مطلوب است محاسبهٔ $L(0,1)$.

۳. هسته و تصویر یك نگاشت خطی

فرض کنید V و W دوفضای برداری روی هیات K، و $F:V\to W$ یك‌نگاشت خطی‌است. مجموعهٔ تمام بردارهای $v\in V$ که $F(v)=0$ باشد را **هستهٔ** F می‌نامیم، وبا $\operatorname{Ker} F$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱. فرض کنید $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ نگاشت $L(x,y,z)=3x-2y+z$ است. بنابراین اگر $A=(3,-2,1)$ باشد، آنگاه می‌توانیم بنویسیم

$$L(X)=X\cdot A=A\cdot X$$

دراین‌صورت هستهٔ L مجموعهٔ تمام جوابهای معادلهٔ $3x-2y+z=0$ است. درحالت کلی، اگر A یك بردار دلخواه $\mathbf{R}^n$ باشد، می‌توانیم نگاشت خطی $L_A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ را به صورت $L_A(X)=A\cdot X$ تعریف کنیم. هستهٔ این نگاشت مجموعهٔ تمام بردارهای X عمود بر بردار A است.

مثال ۲. فرض کنید $p:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ نگاشت تصویر $p(x,y,z)=(x,y)$ است. دراین صورت p یك نگاشت خطی است وهستهٔ آن مجموعهٔ تمام بردارهای متعلق به $\mathbf{R}^3$ است به طوری که دومؤلفهٔ اول آنهامساوی صفر باشد، یعنی مجموعهٔ تمام بردارهایی به‌صورت $(0,0,z)$ است که z در $\mathbf{R}$ به‌دلخواه تغییر می‌کند.

اکنون ثابت می‌کنیم که هستهٔ نگاشت خطی $F:V\to W$ یك زیرفضای V است. چون $F(O)=O$، لذا O متعلق به‌هستهٔ F است.

فرض کنید v و w متعلق به‌هسته هستند. تساوی

$$F(v+w)=F(v)+F(w)=O+O=O$$

نشان می‌دهد که $v+w$ متعلق به‌هسته است. اگر c یك اسکالر باشد، آنگاه $F(cv)=cF(v)=O$، پس cv نیز متعلق به هسته است. بنابراین هسته یك زیرفضاست.

هستهٔ یك نگاشت خطی برای تعیین اینکه نگاشت یك به‌یك است یا خیرمفید است. فرض کنید $F:V\to W$ یك نگاشت خطی است. ثابت می‌کنیم که دوشرط زیر باهم هم‌ارزند.

۱. هستهٔ F مساوی $\{O\}$ است.

۲. اگر v و w دوعضو V باشند به‌طوری‌که $F(v)=F(w)$، آنگاه $v=w$، به‌عبارت دیگر F یك به‌یك است.

برای اثبات، نخست فرض کنید که $\operatorname{Ker} F=\{O\}$ وفرض کنید v و w دوعضو V هستند به طوری که $F(v)=F(w)$. دراین صورت

$$F(v-w)=F(v)-F(w)=O$$

طبق فرض $v-w=O$ ودرنتیجه $v=w$ است.

برعکس، فرض کنیدکه F یك به‌یك است. اگر بردار v چنان باشدکه

$$F(v)=F(O)=O$$

آنگاه $v=O$.

همچنین هستهٔ F برای توصیف مجموعهٔ تمام اعضایی از V که تحت F دارای تصویر

یکسانی هستند مفید است. خواننده را به‌تمرین ۴ همین بخش ارجاع می‌دهیم.

قضیهٔ ۱۰۳. فرض‌کنید $F: V \to W$ یك نگاشت خطی است بـه‌طوری‌کـه هستهٔ‌آن $\{o\}$ است. اگر بردارهای $v_۱$، ...، v_n در V مستقل خطی باشند، آنگاه $F(v_۱)$، ...، $F(v_n)$ نیز در W استقلال خطی دارند.

اثبات. فرض‌کنید $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n اسکالرهایی هستند به‌طوری‌که

$$x_۱F(v_۱)+\cdots+x_nF(v_n)=o$$

بنا بر خاصیت خطی F داریم

$$F(x_۱v_۱+\cdots+x_nv_n)=o$$

از اینجا می‌شود که $x_۱v_۱+\cdots+x_nv_n=o$. چون $v_۱$، ...، v_n مستقل خطی‌اند، لذا

$$x_۱=x_۲=\cdots=x_n=o$$

فرض‌کنید $F: V \to W$ یك نگاشت خطی است. **تصویر** F مجموعـهٔ تمام اعضای $w \in W$ است به‌طوری‌که به‌ازای هر w عضوی مانند $v \in V$ یافت شود که $F(v)=w$.

تصویر F یك زیرفضای W است.

برای اثبات، نخست توجه‌کنیدکـه از $F(o)=o$ نتیجه می‌شود که o در تصویر F قراردارد. اکنون فرض‌کنیدکه $w_۱$ و $w_۲$ متعلق به‌تصویر هستند. دراین صورت بردارهـای $v_۱$ و $v_۲$ متعلق به V وجود دارند به‌طوری‌که $F(v_۱)=w_۱$ و $F(v_۲)=w_۲$. بنا براین

$$F(v_۱+v_۲)=F(v_۱)+F(v_۲)=w_۱+w_۲$$

به‌این‌ترتیب $w_۱+w_۲$ نیزمتعلق به‌تصویر F می‌گردد. اگر c یك‌اسکالر دلخواه باشد، آنگاه

$$F(cv_۱)=cF(v_۱)=cw_۱$$

یعنی $cw_۱$ نیزمتعلق به‌تصویر است. بنابراین تصویر F یك زیرفضای W است.

تصویر F را با $I_m F$ نمایش می‌دهیم.

قضیهٔ بعدی مربوط به‌بعد هسته و تصویر یك‌نگاشت خطی و بعد فضایی‌است‌که نگاشت روی‌آن تعریف شده است.

قضیهٔ ۲۰۳. فرض‌کنید V یك فضای بـرداری است. فرض‌کنید $L: V \to W$ یك نگاشت خطی از V در W است. فرض‌کنید n بعد V و q بعد هستهٔ L، و s بعد تصویر L است. دراین صورت $n=q+s$. به‌عبارت دیگر،

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} L + \dim I_m L$$

اثبات، اگر تصویر L فقط از o تشکیل شده باشد، آنگاه حکم به‌وضوح برقرار است. پس می‌توانیم فرض کنیم که $s > ۰$. فرض کنید $\{w_۱, \dots, w_s\}$ یك‌پایهٔ تصویر L است. فرض کنید $v_۱, \dots, v_s$ اعضایی از V هستند به‌طوری که $L(v_i) = w_i$، $i = ۱, \dots, s$. اگر هستهٔ F مخالف $\{o\}$ باشد، $\{u_۱, \dots, u_q\}$ را یك‌پایه آن در نظر می‌گیریم. اگر هستهٔ L مساوی $\{o\}$ باشد، تمام مراجعات به $\{u_۱, \dots, u_q\}$ را، در آنچه به‌دنبال می‌آید، حذف می‌کنیم. ثابت می‌کنیم $\{v_۱, \dots, v_s \ , \ u_۱, \dots, u_q\}$ یك‌پایهٔ V است. فرض کنید v عضو دلخواهی از V است. در این صورت اعداد $x_۱, \dots, x_s$ وجود دارند به‌طوری که

$$L(v) = x_۱ w_۱ + \dots + x_s w_s,$$

زیرا $\{w_۱, \dots, w_s\}$ یك‌پایهٔ تصویر L است. بنابرخاصیت خطی داریم

$$L(v) = L(x_۱ v_۱ + \dots + x_s v_s)$$

ومجدداً بنابرخاصیت خطی، طرف راست تساوی را از طرف چپ آن کم می‌کنیم، نتیجه می‌شود که

$$L(v - x_۱ v_۱ - \dots - x_s u_s) = ۰$$

لذا $v - x_۱ v_۱ - \dots - x_s v_s$ درهستهٔ L واقع است، ودرنتیجه اسکالرهای $y_۱, \dots, y_q$ وجود دارند به‌طوری که

$$v - x_۱ v_۱ - \dots - x_s v_s = y_۱ u_۱ + \dots + y_q u_q$$

پس

$$v = x_۱ v_۱ + \dots + x_s v_s + y_۱ u_۱ + \dots + y_q u_q$$

از اینجا نتیجه می‌شود که این $s + q$ بردار V را تولید می‌کنند.

اکنون نشان‌می‌دهیم که این بردارها استقلال خطی هم دارند، ودرنتیجه یك‌پایهٔ برای V می‌باشند. فرض‌کنید که یك ترکیب خطی از این بردارها مساوی صفر است:

$$x_۱ v_۱ + \dots + x_s v_s + y_۱ u_۱ + \dots + y_q u_q = ۰$$

L را روی دوطرف این تساوی اثر می‌دهیم و این واقعیت که برای $j = ۱, \dots, q$، $L(u_j) = ۰$ است را به‌کارمی‌بریم، نتیجه می‌شود

$$x_۱ L(v_۱) + \dots + x_s L(v_s) = ۰$$

اما $L(v_1)$، ...،$L(v_s)$ همان w_1، ...،w_s هستندکه فرض کردیم مستقل خطی می‌باشند. لذا برای $i=1,...,s$ داریم $x_i=0$. پس

$$y_1u_1+\dots+y_qu_q=o$$

اما u_1، ...،u_q یک‌پایهٔ هستهٔ L هستند، بنابراین دارای استقلال خطی‌اند، ودرنتیجه برای $j=1,...,q$ داریم $y_j=0$. بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

مثال ۱ (ادامه). هستهٔ نگاشت خطی $L:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ مثال ۱ که به‌صورت

$$L(x,y,z)=3x-2y+z$$

تعریف شده بود عبارت است ازمجموعهٔ تمام جوابهای معادلهٔ $3x-2y+z=0$. تصویر آن زیرفضایی از $\mathbf{R}$ است که مساوی $\{o\}$ نیست. پس تصویرمساوی تمام $\mathbf{R}$ است، یعنی بعد تصویرمساوی ۱، ودرنتیجه بعد هسته مساوی ۲ می‌باشد.

مثال ۲ (ادامه). نگاشت تصویر $P:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ مثال ۲ به‌وضوح پوشاست. لذا بعد هستهٔ آن مساوی ۱ می‌باشد.

درفصل ۵ بخش ۳ درحالت کلی بعد فضای جواب یك دستگاه معادلات خطی را مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

قضیهٔ ۳.۳. فرض کنید $L:V\to W$ یك نگاشت خطی است. فرض کنید که $\dim V=\dim W$. اگر $\operatorname{Ker} L=\{o\}$، یا $I_m L=W$، آنگاه L دوسویی است.

اثبات. فرض کنید $\operatorname{Ker} L=\{o\}$. طبق دستورقضیهٔ ۲.۳ داریم $\dim I_m L=\dim W$. طبق نتیجه ۵.۳ فصل ۱ نگاشت L پوشاست. اما L یك‌به‌یك هم هست، زیرا $\operatorname{Ker} L=\{o\}$ بنابراین L دوسویی است. اثبات اینکه از $I_m L=W$ نتیجه می‌شود که L دوسویی است به‌طریق مشابه انجام می‌شود وآن را به‌عهدهٔ خواننده واگذارمی‌کنیم.

تمرینها

۱. فرض کنید A و B دوبردار $\mathbf{R}^2$ هستندکه یك‌پایهٔ آن را تشکیل می‌دهند. فرض کنید $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^n$ یك نگاشت خطی است. نشان دهید که یا $F(A)$ و $F(B)$ مستقل خطی‌اند، یا بعد تصویر F مساوی ۱ است، یا تصویر F مساوی $\{o\}$ است.

۲. فرض کنید A یك بردار مخالف صفر $\mathbf{R}^2$ است. فرض کنید $F:\mathbf{R}^2\to W$ یك نگاشت خطی است به‌طوری‌که $F(A)=o$. نشان دهید که تصویر F یا یك خط مستقیم است، و یا اینکه مساوی $\{o\}$ می‌باشد.

۳. مطلوب است محاسبهٔ بعد زیرفضایی از $\mathbf{R}^4$ که متشکل از تمام بردارهای $X\in\mathbf{R}^4$ است به‌طوری‌که

$$x_1+2x_2=0 \quad , \quad x_3-15x_4=0$$

۴. فرض کنید $L:V\to W$ یك نگاشت خطی است. فرض کنید w عضوی از W است. فرض کنید v_0 عضوی از V است به‌طوری‌که $L(v_0)=w$. نشان دهید که هر جواب معادلهٔ $L(X)=w$ به‌صورت v_0+u است، به‌طوری‌که u عضوی از هستهٔ L است.

۵. فرض کنید V فضای برداری توابعی است که از هر مرتبه مشتق‌پذیر هستند، و فرض کنید $D:V\to V$ عمل مشتق‌گیری است، هستهٔ D را به‌دست آورید.

۶. فرض کنید D^2 مشتق دوم است. هستهٔ D^2 کدام است؟ در حالت کلی هستهٔ D^n (مشتق n ام) کدام است؟

۷. فرض کنید V فضای برداری توابعی است که از هر مرتبه مشتق‌پذیرند. فرض کنید W زیرفضای V متشکل از تمام توابع f ای است که در شرط

$$f''+4f=o \quad , \quad f(\pi)=o$$

صدق می‌کند. بعد W را به‌دست آورید.

۸. فرض کنید V فضای برداری توابع بینهایت بار مشتق‌پذیر است. توابع را به‌صورت توابعی از متغیر t می‌نویسیم. فرض کنید $D=\dfrac{d}{dt}$. فرض کنید $a_1,\dots,a_m$ اسکالر هستند. فرض کنید g عضوی از V است. توضیح دهید چگونه مسألهٔ یافتن یك جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$a_m\frac{d^m f}{dt^m}+a_{m-1}\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}+\dots+a_0 f=0$$

را می‌توان به‌عنوان وضعیت مجرد مناسب توصیف شده در تمرین ۴ تفسیر کرد.

۹. فرض کنید V فضای برداری تمام توابع بینهایت بار مشتق‌پذیر و $D:V\to V$ عمل مشتق‌گیری است.

(الف) فرض کنید $L=D-I$ و I نگاشت همانی است. مطلوب است محاسبهٔ هستهٔ L.

(ب) همان سؤال (الف) را برای $L=D-aI$ جواب دهید. a یك عدد است.

۱۰. (الف) بعد زیرفضایی از K^n که متشکل از تمام بردارهای $A=(a_1,\dots,a_n)$ است به طوری‌که $a_1+a_2+\dots+a_n=0$ را به‌دست آورید.

(ب) بعد زیرفضایی ازفضای برداری ماتریسهای $n\times n$ که متشکل ازماتریسهای $[a_{ij}]_{n\times n}$ که در آنها

$$a_{11}+\dots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=0$$

است را به‌دست آورید. [برای قسمت (ب) به‌تمرین بعدی توجه کنید.]

۱۱. فرض کنید $A=[a_{ij}]$ یك ماتریس $n\times n$ است. مجموعهٔ اعضای روی قطرماتریس A را اثر A نامیده و با $\operatorname{tr} A$ نمایش می‌دهیم. پس

$$\operatorname{tr} A=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(الف) نشان دهید که اثر یك نگاشت خطی ازفضای ماتریسهای $n\times n$ در K است.

(ب) اگر A، B دوماتریس $n\times n$ باشند، نشان دهید که $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$.

(پ) اگر B وارون‌پذیر باشد، نشان دهید که $\operatorname{tr}(B^{-1}AB)=\operatorname{tr} A$.

(ت) اگر A و B دوماتریس $n\times n$ باشند، نشان دهید که تناظر

$$(A,B)\to \operatorname{tr}(AB)=\langle A,B\rangle$$

درسه شرط حاصلضرب اسکالرصدق می‌کند. (برای تعریف عمومی، به‌فصل ۵ مراجعه کنید.)

(ث) ثابت کنید که هیچ ماتریس A و B ای وجود ندارند به‌طوری‌که

$$AB-BA=I_n$$

۱۲. فرض کنید S مجموعهٔ ماتریسهای متقارن $n\times n$ است. نشان دهید که S یك فضای برداری است. بعد S چند است؟ برای $n=2$ و $n=3$ یك پایه برای S بیابید.

۱۳. فرض کنید A یك ماتریس حقیقی متقارن $n\times n$ است. نشان دهید که $\operatorname{tr}(AA)\geqslant 0$، واگر $A\neq 0$ باشد، آنگاه $\operatorname{tr}(AA)>0$.

۱۴. ماتریس A از نوع $n\times n$ را **پادمتقارن** می‌نامیم هرگاه $A^t=-A$. نشان دهید که هر ماتریس A را می‌توان به‌صورت مجموع یك ماتریس متقارن B و یك ماتریس پاد متقارن C نوشت:

$A=B+C$. [راهنمایی: فرض کنید $B=(A+{}^tA)/۲$] نشان دهید که اگر $A=B_1+C_1$ باشد که B_1 متقارن و C_1 پادمتقارن است، آنگاه $B_1=B$ و $C_1=C$.

۱۵. فرض کنید M فضای برداری ماتریسهای $n\times n$ است. فرض کنید نگاشت $P:M\to M$ به‌صورت $P(A)=(A+{}^tA)/۲$ تعریف می‌شود.

(الف) نشان دهید که P خطی است.

(ب) نشان دهید که هستهٔ P متشکل از فضای برداری ماتریسهای پاد متقارن است.

(پ) بعد هستهٔ P را به‌دست آورید.

۱۶. فرض کنید M فضای برداری ماتریسهای $n\times n$ است. فرض کنید $F:M\to M$ نگاشت $F(A)=\dfrac{A-{}^tA}{۲}$ است.

(الف) نشان دهید که F خطی است.

(ب) هستهٔ F را مشخص کنید و بعد آن را به‌دست آورید.

۱۷. (الف) فرض کنید U، W دو فضای برداری هستند. فرض کنید $U\times W$ مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب (u,w) است به‌طوری که $u\in U$ و $w\in W$. اگر (u_1,w_1) و (u_2,w_2) دو زوج دلخواه باشند، جمع آنها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(u_1,w_1)+(u_2,w_2)=(u_1+u_2,w_1+w_2)$$

اگر c یك اسکالر باشد، آنگاه $c(u,w)$ را به صورت $c(u,w)=(cu,cw)$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که $U\times W$ با قوانین فوق یك فضای برداری است. عضو صفر کدام است؟

(ب) اگر بعد U مساوی n و بعد W مساوی m باشد، بعد $U\times W$ چند است؟ پایه‌ای برای $U\times W$ برحسب پایه‌های U و W به‌دست آورید.

(پ) اگر U یك زیرفضای V باشد، نشان دهید که زیرمجموعهٔ $V\times V$ متشکل از تمام زوجهای (u,u) با شرط $u\in U$ یك زیرفضاست.

۱۸. (این تمرین باید بعد از تمرین ۱۷ حل شود.) فرض کنید U و W زیرفضاهایی از V هستند. نشان دهید که

$$\boxed{\dim U+\dim W=\dim(U+W)+\dim(U\cap W)}$$

[راهنمایی: نشان دهید که نگاشت

$$L : U \times W \to V$$
$$L(u,w) = u - w$$

یك نگاشت خطی است. تصویر این نگاشت را به‌دست آورید. هستهٔ نگاشت چیست؟

۴. ترکیب ووارون نگاشتهای خطی

در بخش ۱ متذکر شدیم که‌می‌توانیم نگاشتهای دلخواه را باهم ترکیب کنیم. درمورد نگاشتهای خطی مطالب بیشتری می‌توانیم بگوئیم.

قضیهٔ ۱.۴. فرض‌کنید U، V و W فضاهای برداری روی هیات K و $F:U \to V$ و $G:V \to W$ دونگاشت خطی هستند. دراین صورت نگاشت مرکب $G \circ F$ نیزخطی است.

اثبات. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد. فرض کنید u و v اعضایی از U هستند. چون F خطی است، داریم $F(u+v) = F(u) + F(v)$. لذا

$$(G \circ F)(u+v) = G(F(u+v)) = G(F(u) + F(v))$$

چون G هم خطی است، داریم

$$G(F(u) + F(v)) = G(F(u)) + G(F(v))$$

پس

$$(G \circ F)(u+v) = (G \circ F)(u) + (G \circ F)(v))$$

اکنون فرض‌کنید که c یك اسکالر دلخواه است. دراین صورت

$$\begin{aligned}(G \circ F)(cu) &= G(F(cu)) \\ &= G(cF(u)) && \text{(زیرا } F \text{ خطی است)} \\ &= cG(F(u)) && \text{(زیرا } G \text{ خطی است.)}\end{aligned}$$

بنابراین $G \circ F$ یك نگاشت خطی است.

قضیهٔ بعدی مقرر می‌دارد که بعضی ازقواعد حساب نظیرضرب وجمع اعداد برای ترکیب ومجموع نگاشتهای خطی به‌کارمی‌روند.

قضیهٔ ۲.۴. فرض‌کنید U، V و W فضاهایی برداری روی هیات K هستند. فرض‌کنید

$F: U \to V$ یك نگاشت خطی، وG، H دونگاشت خطی ازV درW هستند. دراین صورت

$$(G+H)\circ F = G\circ F + H\circ F$$

اگر c یك اسکالر دلخواه باشد، آنگاه

$$(cG)\circ F = c(G\circ F)$$

اگر T یك نگاشت خطی از U در V باشد، آنگاه

$$G\circ(F+T) = G\circ F + G\circ T$$

اثباتها تماماً ساده‌اند. اولین حکم را ثابت وبقیه را به‌عنوان تمرین واگذارمی‌کنیم. فرض کنید u عضوی از U است. داریم

$$\begin{aligned}((G+H)\circ F)(u) &= (G+H)(F(u)) = G(F(u)) + H(F(u))\\ &= (G\circ F)(u) + (H\circ F)(u)\end{aligned}$$

طبق تعریف نتیجه می‌گیریم که $(G+H)\circ F = G\circ F + H\circ F$

ممکن است $U = V = W$. فرض کنید $F: U \to U$ و $G: U \to U$ دو نگاشت خطی هستند. دراین صورت می‌توانیم $F\circ G$ و $G\circ F$ را تشکیل دهیم. این مطلب همیشه درست نیست که این دو نگاشت با هم مساویند. به‌عنوان مثال، فرض کنید $U = \mathbf{R}^3$. فرض کنید F نگاشت خطی زیر است

$$F(x,y,z) = (x,y,0)$$

وفرض کنید که G نگاشت خطی

$$G(x,y,z) = (x,z,0)$$

است. دراین صورت

$$(G\circ F)(x,y,z) = (x,0,0)$$

اما

$$(F\circ G)(x,y,z) = (x,z,0)$$

فرض کنید $F: V \to V$ یك نگاشت خطی است. گاهی F رایك **عملگر** می‌نامیم. می‌توانیم $F\circ F$ راکه یك نگاشت خطی از V در V است تشکیل دهیم. به‌همین ترتیب می‌توانیم ترکیب $\underbrace{F\circ F\circ\ldots\circ F}_{n}$ رابرای $n \geqslant 1$ تشکیل دهیم. این ترکیب رابا F^n نمایش می‌دهیم. اگر $n = 0$

باشد، قرار می‌دهیم $F^{\circ}=I$ (نگاشت همانی). دراین صورت قاعدهٔ $F^{r+s}=F^{r}\circ F^{s}$ را برای اعداد صحیح وغیرمنفی r و s داریم.

قضیهٔ ۳.۴. فرض کنید $F:U\to V$ یك نگاشت خطی است که دارای وارون $G:V\to U$ است دراین صورت G نیز یك نگاشت خطی است.

اثبات. فرض کنید $v_{1},v_{2}\in V$. نخست باید نشان دهیم که

$$G(v_{1}+v_{2})=G(v_{1})+G(v_{2})$$

فرض کنید $u_{1}=G(v_{1})$ و $u_{2}=G(v_{2})$، طبق تعریف نگاشت وارون داریم

$$F(u_{1})=v_{1}\ ,\ F(u_{2})=v_{2}$$

چون F خطی است، نتیجه می‌شود که

$$F(u_{1}+u_{2})=F(u_{1})+F(u_{2})=v_{1}+v_{2}$$

طبق تعریف نگاشت وارون، از تساوی فوق نتیجه می‌شود که $G(v_{1}+v_{2})=u_{1}+u_{2}$، وهمان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. اثبات تساوی $G(cv)=cG(v)$ را بـه عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (تمرین ۳).

نتیجهٔ ۴.۴. فرض کنید $F:U\to V$ یك نگاشت خطی است که هستهٔ آن مساوی $\{o\}$، و پوشاست. دراین‌صورت F دارای یك نگاشت وارون است.

اثبات. در بخش ۳ دیدیم که اگر هستهٔ یك نگاشت مساوی $\{o\}$ باشد، آنگاه F یك بـه یك است. لذا نتیجه می‌گیریم که F هم یك بـه یك وهم پوشاست. بنابراین دارای یك وارون است، وطبق قضیهٔ ۳.۴ نگاشت وارون خطی است.

مثال ۱. فرض کنید $F:\mathbf{R}^{2}\to\mathbf{R}^{2}$ یك نگاشت خطی است به‌طوری‌که

$$F(x,y)=(3x-y,4x+2y)$$

می‌خواهیم نشان دهیم که F دارای وارون است. نخست توجه‌کنید که هستهٔ F مساوی $\{o\}$ است، زیرا اگر

$$\begin{cases}3x-y=0\\ 4x+2y=0\end{cases}$$

آنگاه دستگاه را نسبت به x و y به صورت زیر حل می‌کنیم:

معادلهٔ اولی را در ۲ ضرب‌کرده وبا دومی جمع می‌کنیم. نتیجه می‌شود $10x=0$،

لذا $x=o$. چون $y=2x$ است، داریم $y=o$. پس F یك به یك است، زیرا هستهٔ آن مساوی $\{o\}$ است. طبق قضیهٔ ۲.۳ تصویر F دارای بعد ۲ است. اما تصویر F زیر فضایی از $\mathbf{R}^2$ است. چون بعد زیرفضا با بعد تمام فضای $\mathbf{R}^2$ برابر است، لذا $I_mF=\mathbf{R}^2$ ودرنتیجه F پوشاست. بنابراین F دارای یك وارون است وطبق قضیهٔ ۳.۴ این وارون خطی است.

نگاشت $F:U\to V$ که‌دارای یك وارون $G:V\to U$ باشد را یك **یکریختی** می‌نامیم.

مثال۲. فرض کنید V یك فضای برداری n بعدی است. فرض کنید $\{v_1,\dots,v_n\}$ پایه‌ای برای V است. فرض کنید $L:\mathbf{R}^n\to V$ نگاشتی است که به‌صورت

$$L(x_1,\dots,x_n)=x_1v_1+\dots+x_nv_n$$

تعریف شده است. دراین‌صورت L یك یکریختی است.

اثبات. هستهٔ L مساوی $\{o\}$ است، زیرا اگر

$$x_1v_1+\dots+x_nv_n=o$$

آنگاه‌تمام x_iها مساوی‌صفرند (چون v_1، ...، v_n مستقل خطی می‌باشند). تصویر L مساوی V است، زیرا v_1، ...، v_n فضای V راتولید می‌کنند. طبق نتیجهٔ ۴.۴، نتیجه می‌گیریم که L یك یکریختی است.

توضیح درمورد علامت‌گذاری. فرض کنید $F:V\to V$ و $G:V\to V$ دونگاشت خطی ازیك فضای برداری درخودش هستند. اغلب، به‌جای $F\circ G$ می‌نویسیم FG، به‌عبارت دیگر، علامت دایرهٔ $\circ$ بین F و G راحذف می‌کنیم. دراین‌صورت قانون توزیع‌پذیری‌شبیه اعداد خوانده می‌شود

$$F(G+H)=FG+FH$$

ولی باید به‌این امر توجه‌کنیم که ممکن است F و G جابجایی نباشند، یعنی معمولاً

$$FG\neq GF$$

اگر F و G جابجا شوند، آنگاه می‌توانیم با نگاشتهای خطی درست شبیه اعداد عمل‌کنیم.

توانهای I، F، F^2، F^3،... بایکدیگر جابجا می‌شوند.

تمرینها

۱. فرض کنید $L:\mathbf{R}^{۲}\to\mathbf{R}^{۲}$ یك نگاشت خطی است به طوری که $L\neq o$ اما $L^{۲}=L\circ L=o$. نشان دهید که یك پایهٔ $\{A,B\}$ از $\mathbf{R}^{۲}$ وجود دارد به‌طوری که

$$L(A)=B\ ,\ L(B)=\circ$$

۲. فرض کنید $\dim V>\dim W$. فرض کنید $L:V\to W$ یك نگاشت خطی است. نشان دهید که هستهٔ L مساوی $\{o\}$ است.

۳. اثبات قضیهٔ ۳.۴ را تمام کنید.

۴. فرض کنید $\dim V=\dim W$. فرض کنید $L:V\to W$ یك نگاشت خطی است به‌طوری که هستهٔ آن مساوی $\{o\}$ است. نشان دهید که L دارای یك نگاشت وارون است.

۵. فرض کنید F، G نگاشتهای خطی وارون‌پذیر از فضای برداری V درخودش هستند. نشان دهید که

$$(F\circ G)^{-۱}=G^{-۱}\circ F^{-۱}$$

۶. فرض کنید $L:\mathbf{R}^{۲}\to\mathbf{R}^{۲}$ یك نگاشت خطی است که به‌صورت

$$L(x,y)=(x+y,x-y)$$

تعریف می‌شود. نشان دهید که L وارون‌پذیر است.

۷. فرض کنید $L:\mathbf{R}^{۲}\to\mathbf{R}^{۲}$ نگاشت تعریف شده به صورت

$$L(x,y)=(۲x+y,۳x-۵y)$$

است. نشان دهید که L وارون‌پذیر است.

۸. فرض کنید $L:\mathbf{R}^{۳}\to\mathbf{R}^{۳}$ نگاشتی خطی است که به یکی از صورتهای زیر تعریف شده است. نشان دهید که درهر حالت L وارون‌پذیر است.

(الف) $L(x,y,z)=(x-y,x+z,x+y+۲z)$

(ب) $L(x,y,z)=(۲x-y+z,x+y,۳x+y+z)$

۹. (الف) فرض کنید $L:V\to V$ یك نگاشت خطی است به‌طوری که $L^{۲}=\circ$. نشان دهید که $I-L$ وارون‌پذیر است. (I نگاشت همانی V است.)

(ب) فرض کنید $L : V \to V$ یك نگاشت خطی است به‌طوری‌که $L^{۲}+۲L+I=o$. نشان دهید که L وارون‌پذیر است.

(پ) فرض کنید $L : V \to V$ یك نگاشت خطی است به طوری‌که $L^{۳}=o$. نشان دهید که $I-L$ وارون‌پذیر است.

۱۰. فرض کنید V یك فضای برداری است. فرض کنید $P : V \to V$ یك نگاشت خطی‌است به طوری‌که $P^{۲}=P$. نشان دهید که

$$V=\mathrm{Ker}\,P+I_m P \ , \ \mathrm{Ker}\,P \cap I_m P=\{o\}$$

به عبارت دیگر، V جمع مستقیم $\mathrm{Ker}\,P$ و $I_m p$ است. [راهنمایی: برای اثبات اینکه V به صورت مجموع است، هرعضو v متعلق به V را می‌توان به صورت $v=v-Pv+Pv$ نوشت.]

۱۱. فرض کنید V یك فضای برداری و P، Q دو نگاشت خطی از V در V هستند. فرض کنید که آنها درشرایط زیر صدق می‌کنند:

(الف) $P+Q=I$ (نگاشت همانی)

(ب) $PQ=QP=o$

(پ) $P^{۲}=P$، $Q^{۲}=Q$

نشان دهید که V جمع مستقیم I_mP و I_mQ است.

۱۲. باعلامت گذاریهای تمرین ۱۱، نشان دهید که تصویر P مساوی هستهٔ Q است. [ثابت کنید که $I_mP \subset \mathrm{Ker}Q$ و $\mathrm{Ker}Q \subset I_mP$]

۱۳. فرض کنید $T:V \to V$ یك نگاشت خطی است به طوری‌که $I=T^{۲}$. فرض کنید

$$P=\frac{۱}{۲}(I+T) \ , \quad Q=\frac{۱}{۲}(I-T)$$

ثابت کنید که $P+Q=I$، $P^{۲}=P$، $Q^{۲}=Q$، $PQ=QP=o$

۱۴. فرض کنید $F:V \to W$ و $G:W \to U$ یکریختی بین فضاهای برداری روی هیات K هستند. نشان دهید که $G\circ F$ وارون‌پذیر است، و

$$(G\circ F)^{-۱}=F^{-۱}\circ G^{-۱}$$

۱۵. فرض کنید $F:V \to W$ و $G:W \to U$ یکریختی بین فضاهای برداری روی هیات K

هستند. نشان دهید که $G\circ F : V \longrightarrow U$ هم یك یکریختی است.

۱۶. فرض کنید V، W دوفضای برداری با بعد n روی هیات K هستند. نشان دهید که Vو W یکریخت هستند.

۱۷. فرض کنید A یك نگاشت خطی ازیك فضای برداری درخودش می‌باشد، ودر شرط $A^{2}-A+I=0$ صدق می‌کند. (I نگاشت همانی است). نشان دهید که A^{-1} وجود داشته ومساوی $I-A$ است. مسأله را تعمیم دهید. (به تمرین ۳۷ فصل ۲ بخش ۳ مراجعه کنید)

۱۸. فرض کنید A، B دونگاشت خطی ازیك فضای برداری در خودش هستند. فرض کنید که $AB=BA$. نشان دهید که

$$(A+B)^{2}=A^{2}+2AB+B^{2}$$

$$(A+B)(A-B)=A^{2}-B^{2}$$

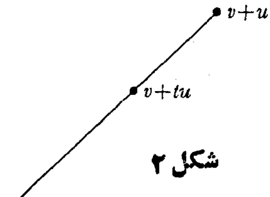
۱۹. فرض کنید A و B دونگاشت خطی‌ازیك فضای برداری درخودش‌هستند. اگرهستهٔ A وهستهٔ B مساوی $\{o\}$ باشند، نشان دهید که هستهٔ AB نیزمساوی $\{o\}$ است.

۲۰. درحالت کلی‌تر، فرض کنید $A : V\longrightarrow W$ ، $B : W\longrightarrow U$ نگاشتهای خطی هستند. فرض کنید که هستهٔ A و B هردومساوی $\{o\}$ است. نشان دهید که هستهٔ BA نیزمساوی $\{o\}$ است.

۲۱. فرض کنید $A : V\longrightarrow W$ و $B : W\longrightarrow U$ نگاشتهای خطی هستند. فرض کنید که A و B پوشا هستند. نشان دهید که BA نیزپوشاست.

۵. کاربردهای هندسی

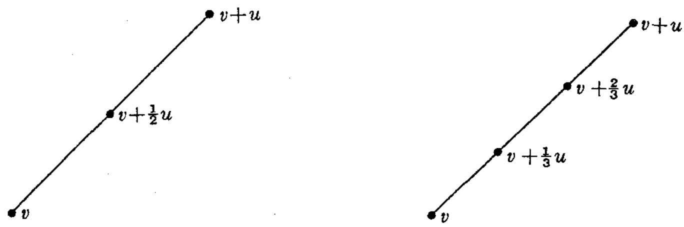
فرض کنید V یك فضای برداری و v و u دو عضو V هستند. **پاره خط** بین v و $v+u$ را مجموعهٔ تمام نقاط $v+tu$، $0\leqslant t\leqslant 1$ تعریف می‌کنیم. این پاره خط درشکل زیرمشخص شده است.



شکل ۲

به عنوان مثال، اگر $t=1/2$ باشد، آنگاه $v+\frac{1}{2}u$ نقطهٔ میانی بین v و $v+u$ است.

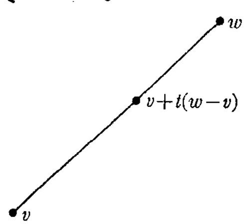
مشابهاً، اگر $t=1/3$، آنگاه $v+\frac{1}{3}u$ نقطه‌ای بین v و $v+u$ است که فاصلهٔ آن تا v، $1/3$ تمام فاصله است (شکل ۳).



(الف) (ب)

شکل ۳

اگر v و w دوعضو V باشند، قرار می‌دهیم $u=w-v$. دراین‌صورت پاره خط بین v و w مجموعهٔ تمام نقاط $v+tu$، یا $v+t(w-v)$ است به‌طوری‌که $0\leqslant t\leqslant 1$.



شکل ۴

توجه کنید که می‌توانیم آنرا به صورت

$$(1-t)v+tw\ ,\quad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{1}$$

ویا بافرض $s=1-t$ و $t=1-s$، آنرا به‌صورت

$$sv+(1-s)w\ ,\quad 0\leqslant s\leqslant 1$$

نمایش دهیم. بالاخره می‌توانیم نقاط این پاره خط رابه صورت

$$t_1v+t_2w \tag{2}$$

بنویسیم به‌طوری‌که $t_2\geqslant 0$ و t_1 و $t_1+t_2=1$. درواقع، اگرقرار دهیم $t=t_2$، مشاهده می‌کنیم که هر نقطه‌ای که بتوانیم آنرا به‌صورت (۲) بنویسیم در (۱) هم صدق می‌کند. برعکس، بافرض $t_1=1-t$ و $t_2=t$ مشاهده می‌کنیم که هر نقطه به‌شکل (۱) را می‌توان به‌صورت (۲) نوشت.

فرض‌کنید $L:V\to V'$ یك نگاشت خطی است. فرض‌کنید S پاره خط بین نقاط v

و w در فضای V است. دراین‌صورت $L(S)$ پاره خط بین‌نقاط $L(v)$ و $L(w)$ در V' است. این مطلب از (۲) به وضوح دیده می‌شود، زیرا

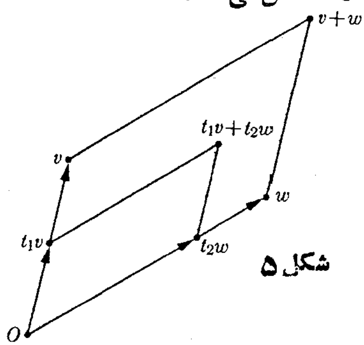
$$L(t_1v+t_2w)=t_1L(v)+t_2L(w)$$

اکنون این بحث را به اشکال با بعد بالاتر تعمیم می‌دهیم.

فرض‌کنید v و w دوعضومستقل خطی از فضای برداری V هستند. **متوازی‌الاضلاع تولید شده** توسط v و w رامجموعهٔ تمام نقاط

$$t_1v+t_2w,\ \ 0\leqslant t_i\leqslant 1,\ \ i=1,2$$

تعریف می‌کنیم. به‌وضوح دیده می‌شود که این تعریف صحیح است، زیرا t_1v نقطه‌ای از پاره خط واصل بین o و v (شکل ۵)، t_2v نقطه‌ای از پاره خط واصل بین o و w است. برای تمام مقادیر t_1 و t_2 که مستقلاً بین ۰ و ۱ تغییرمی‌کنند، به‌طور هندسی مشاهده می‌کنیم که t_1v+t_2w تمام نقاط متوازی‌الاضلاع رامشخص می‌کند.



شکل ۵

درانتهای بخش ۱ **انتقالها** راتعریف‌کردیم. با انتقال متوازی‌الاضلاع فوق متوازی‌الاضلاع عمومی‌تر (شکل ۶) به‌دست می‌آید. بنابراین اگر u عضوی از V باشد، آنگاه انتقال به‌اندازهٔ u متوازی‌الاضلاع ساخته شده با v و w متشکل ازتمام نقاط

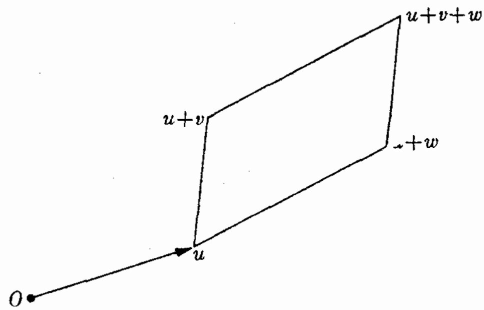
$$u+t_1v+t_2w,\ \ 0\leqslant t_i\leqslant 1,\ \ i=1,2$$

است.

شبیه پاره خطها، مشاهده می‌کنیم که اگر $L:V\to V'$ یك نگاشت خطی باشد، آنگاه تصویر هرمتوازی‌الاضلاع تحت L یك متوازی‌الاضلاع است (اگر تباهیده نباشد)، زیرا تصویر عبارت است از مجموعهٔ نقاط

$$L(u+t_1v+t_2w)=L(u)+t_1L(v)+t_2L(w)$$

که در آن $0\leqslant t\leqslant 1$ و $i=1,2$.

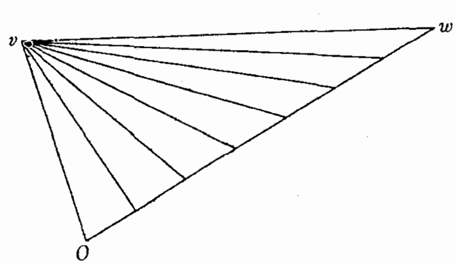


شکل ۶

اکنون به توصیف مثلثها می‌پردازیم. ابتدا با مثلثهای واقع در مرکز شروع می‌کنیم. فرض کنید v و w مستقل خطی‌اند. **مثلث تولید شده** به وسیلهٔ o، v و w رامجموعهٔ نقاط

$$t_1 v + t_2 w, \quad 0 \leqslant t_i, \quad t_1 + t_2 = 1 \qquad (۳)$$

تعریف می‌کنیم. باید خود را متقاعد سازیم که این تعریف قابل‌قبول است. برای این‌منظور نشان می‌دهیم که مثلث تعریف شده دربالا بامجموعهٔ نقاط واقع روی تمام پاره خطهای‌واقع بین نقطهٔ v وتمام نقاط پاره خط واصل بین o و w برابراست. با توجه به شکل ۷، دومین تعبیر یك مثلث باشهود هندسی ما ازیك مثلث مطابقت دارد.



شکل ۷

پاره خط بین o و w را با $\overline{ow}$ نمایش می‌دهیم. یك نقطهٔ واقع روی $\overline{ow}$ رامی‌توانیم به صورت tw، $0 \leqslant t \leqslant 1$ نمایش‌دهیم. مجموعهٔ نقاط واقع بین v و tw عبارتنداز مجموعهٔ نقاط

$$sv+(1-s)tw,\quad 0\leqslant s\leqslant 1 \tag{۴}$$

فرض کنید $t_1=s$ و $t_2=(1-s)t$. در این صورت

$$t_1+t_2=s+(1-s)t\leqslant s+(1-s)\leqslant 1$$

لذا تمام نقاطی که در رابطهٔ (۴) صدق می‌کنند رابطهٔ (۳) را نیز بر آورده می‌سازند. برعکس، فرض کنید که نقطهٔ t_1v+t_2w در شرط (۳) صدق می‌کند، در این صورت $t_1+t_2\leqslant 1$، و در نتیجه $t_2\leqslant 1-t_1$. اگر $t_1=1$، آنگاه $t_2=0$ و ما آنرا انجام داده‌ایم. اگر $t_1<1$، آنگاه قرار می‌دهیم

$$s=t_1\ ,\ t=t_2/(1-t)$$

در این صورت

$$t_1v+t_2w=t_1v+(1-t_1)\frac{t_2}{(1-t_1)}w=sw+(1-s)tw$$

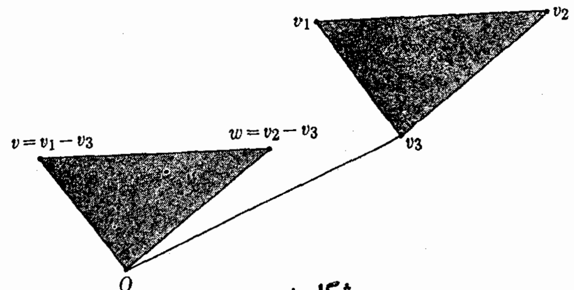
که نشان می‌دهد هر نقطه‌ای که در شرط (۳) صدق کند در شرط (۴) هم صدق خواهد کرد. بنابراین تعریف اولیهٔ ما از مثلث باواقعیت منطبق است.

همانند متوازی‌الاضلاع، یک مثلث دلخواه با انتقال مثلث واقع در مبدأ به‌دست می‌آید. در واقع توصیف زیر از یک مثلث را داریم.

فرض کنید v_1، v_2، v_3 اعضایی از V هستند به طوری که v_1-v_3 و v_2-v_3 مستقل خطی‌اند. فرض کنید $v=v_1-v_3$ و $w=v_2-v_3$. فرض کنید S مجموعهٔ تمام نقاط

$$t_1v_1+t_2v_2+t_3v_3;\quad 0\leqslant t_i,\quad i=1,2,3$$
$$t_1+t_2+t_3=1 \tag{۵}$$

است. در این صورت S انتقال یافتهٔ مثلث تولید شده با نقاط o، v و w به‌اندازهٔ v_3 است. (شکل ۸ را ببینید.)



شکل ۸

اثبات. فرض کنید $P=t_1v_1+t_2v_2+t_3v_3$ نقطه‌ای باشد که در رابطهٔ (۵) صدق می‌کند. دراین‌صورت

$$P=t_1(v_1-v_3)+t_2(v_2-v_3)+t_1v_3+t_2v_3+t_3v_3$$
$$=t_1v+t_2w+v_3$$

و $t_1+t_2\leqslant 1$. پس نقطهٔ P انتقال یافته نقاط (۳) به‌اندازهٔ v_3 است. برعکس، فرض کنید نقطه‌ای درشرط (۳) صدق می‌کند. این نقطه را به اندازهٔ v_3 منتقل می‌کنیم. فرض کنید $t_3=1-t_2-t_1$. دراین‌صورت می‌توانیم مراحلی راکه پیمودیم تا به

$$t_1v+t_2w+v_3=t_1v_1+t_2v_2+t_3v_3$$

رسیدیم درجهت عکس بپیمائیم. به‌این ترتیب آنچه می‌خواستیم ثابت می‌شود.

درواقع این رابطهٔ (۵) است که مفیدترین توصیف‌ازیك مثلث می‌باشد، زیرا رئوس v_1، v_2، v_3 دارای یك وضعیت متقارن درتعریف هستند.

یکی از امتیازات بیان مثلث به صورتی‌که انجام دادیم در این است‌که بـه سادگی می‌توانیم تصویر آنرا تحت یك نگاشت خطی به دست آوریم. فرض‌کنید $L:V\to W$ یك نگاشت خطی است، و فـرض‌کنید v و w اعضایی از V هستندکـه دارای استقلال خطـی می‌باشند. فرض‌کنید $L(v)$ و $L(w)$ هم مستقل خطی می‌باشند. فرض کنید S مثلث تـولید شده توسط o، v و w است. دراین‌صورت‌تصویر S تحت L، یعنی $L(S)$، مثلث تولیدشده توسط o، $L(v)$ و $L(w)$ است. درواقع، مجموعهٔ تمام نقاط

$$L(t_1v+t_2w)=t_1L(v)+t_2L(w)$$

باشرایط $t_i\geqslant 0$ و $t_1+t_2\leqslant 1$ است.

متشابهاً، فرض‌کنید S مثلث تولیدشده توسط v_1، v_2، v_3 است. دراین‌صورت‌تصویر S تحت L مثلث تولید شده توسط $L(v_1)$، $L(v_2)$ و $L(v_3)$ است (به شرطی‌که این نقاط روی یك خط راست نباشند)، زیرا تصویر S مجموعه تمام نقاط

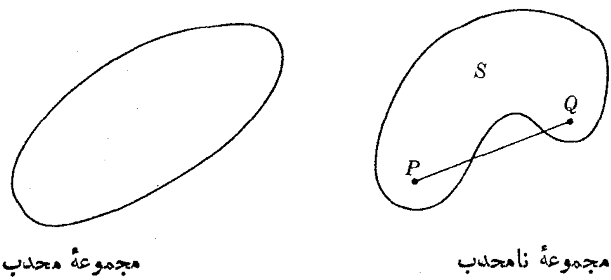
$$L(t_1v_1+t_2v_2+t_3v_3)=t_1L(v_1)+t_2L(v_2)+t_3L(v_3)$$

باشرط $t_i\geqslant 0$ و $t_1+t_2+t_3=1$ است.

شرایط (۵) قابل‌تعمیم به‌مفهوم مجموعهٔ محدب‌است‌که اکنون به‌بحث آن می‌پردازیم.

فرض‌کنید S زیرمجموعه‌ای ازفضای برداری V است. می‌گوئیم S **محدب** است‌اگر به‌ازای هردونقطهٔ P و Q متعلق به S، پاره خط بین P و Q تماماً داخل S باشد. در شکل

۹، مجموعهٔ سمت چپ محدب است. مجموعهٔ طرف راست محدب نیست، زیرا پاره خط بین P و Q تماماً داخل S قرار نگرفته است.



شکل ۹

قضیهٔ ۱۰۵ فرض کنید P_1، ...، P_n اعضایی از فضای برداری V هستند. فرض کنید S مجموعهٔ تمام ترکیبهای خطی $t_1P_1+\dots+t_nP_n$ است به طوری که $t_i \geqslant 0$ و $t_1+\dots+t_n=1$. دراین صورت S محدب است.

اثبات. فرض کنید $P=t_1P_1+\dots+t_nP_n$ و $Q=s_1P_1+\dots+s_nP_n$ به طوری که $t_i \geqslant 0$ و $s_i \geqslant 0$، و $t_1+\dots+t_n=1$، $s_1+\dots+s_n=1$. فرض کنید $0 \leqslant t \leqslant 1$. در این صورت

$$(1-t)P+tQ=(1-t)t_1P_1+\dots+(1-t)t_nP_n+ts_1P_1+\dots+ts_nP_n$$
$$=[(1-t)t_1+ts_1]P_1+\dots+[(1-t)t_n+ts_n]P_n$$

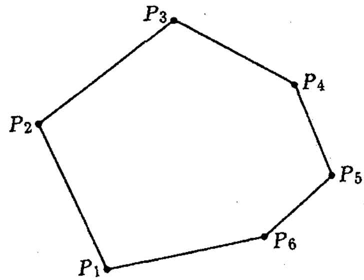
برای هر i داریم $(1-t)t_i+ts_i \geqslant 0$، و

$$\begin{aligned}&(1-t)t_1+ts_1+\dots+(1-t)t_n+s_n\\&=(1-t)(t_1+\dots+t_n)+t(s_1+\dots+s_n)\\&=(1-t)+t\\&=1\end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

از قضیهٔ ۱.۵ مشاهده می‌کنیم که یك مثلث که به‌طور تحلیلی آنرا تعریف کردیم محدب

است. بنابراین مجموعهٔ محدب قضیهٔ ۱.۵ یک تعمیم طبیعی مثلث است (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

مجموعهٔ محدب قضیهٔ ۱.۵ را مجموعهٔ محدب **تولید شده** با P_1، ...، P_n می‌نامیم. گرچه به نتیجهٔ زیر نیازی نداریم، اما نشان می‌دهد که این مجموعهٔ محدب کوچکترین مجموعهٔ محدب شامل نقاط P_1، ...، P_n است.

قضیهٔ ۲.۵. فرض کنید P_1، ...، P_n نقاطی از فضای برداری V هستند. هرمجموعهٔ محدب S' که شامل P_1، ...، P_n باشد شامل تمام ترکیبهای خطی $t_1P_1+\dots+t_nP_n$ با شرط $t_i\geqslant 0$ و $t_1+\dots+t_n=1$ هم می‌باشد.

اثبات. قضیه را با استقراء روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n=1$، آنگاه $t_1=1$، وحکم بدیهی است. فرض کنید قضیه برای $n-1\geqslant 1$ درست است، ثابت می‌کنیم که برای n هم درست است. فرض کنید t_1، ...، t_n اعدادی هستند که درشرایط قضیه صدق می‌کنند. اگر $t_n=1$، آنگاه حکم بدیهی است، زیرا دراین‌صورت $t_1=\dots=t_{n-1}=0$. فرض کنید $t_n\neq 1$. در این‌صورت ترکیب خطی $t_1P_1+\dots+t_nP_n$ مساوی است با

$$(1-t_n)\left(\frac{t_1}{1-t_n}P_1+\dots+\frac{t_{n-1}}{1-t_n}P_{n-1}\right)+t_nP_n$$

فرض کنید که برای $i=1,\dots,n-1$ داریم $s_i=\frac{t_n}{1-t_n}$. در این صورت $s_i\geqslant 0$ و $s_1+\dots+s_{n-1}=1$. پس طبق فرض استقراء نتیجه می‌گیریم که $Q=s_1P_1+\dots+s_{n-1}P_{n-1}$ متعلق به S' است. اما دراین‌صورت

$$(1-t_n)Q+t_nP_n=t_1P_1+\cdots+t_nP_n$$

طبق تعریف مجموعهٔ محدب متعلق به S' است.

مثال. فرض کنید V یك فضای برداری، و $L: V \to \mathbf{R}$ یك نگاشت خطی است. فرض کنید که S مجموعهٔ تمام اعضای $v\in V$ است به‌طوری که $L(v)<0$. ثابت کنید که S یك مجموعهٔ محدب است.

اثبات. فرض کنید $L(v)<0$ و $L(w)<0$. فرض کنید $0<t<1$. در این‌صورت

$$L(tv+(1-t)w)=tL(v)+(1-t)L(w)$$

اکنون از $tL(v)<0$ و $(1-t)L(w)<0$ نتیجه‌می‌شود که $tL(v)+(1-t)L(w)<0$. بنابراین $tv+(1-t)w$ متعلق به S است. اگر $t=0$ یا $t=1$، آنگاه $tv+(1-t)w$ مساوی v یا w است و بنابراین متعلق به S است. پس مجموعهٔ S محدب است.

برای تعمیمی از این مثال، تمرین ۶ را ببینید.
برای قضایای عمیق‌تر پیرامون مجموعه‌های محدب، آخرین فصل را ببینید.

تمرینها

۱. نشان دهید که تصویر یك مجموعهٔ محدب تحت یك نگاشت خطی مجموعه‌ای محدب است.

۲. فرض کنید S_1 و S_2 مجموعه‌های محدبی در V هستند. ثابت کنید که $S_1\cap S_2$ هم‌محدب است.

۳. فرض کنید $L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ یك نگاشت خطی است. فرض کنید S مجموعهٔ تمام نقاط $A\in\mathbf{R}^n$ است به‌طوری که $L(A)\geqslant 0$. ثابت کنید که S محدب است.

۴. فرض کنید $L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ یك نگاشت خطی و c یك عدد است. نشان دهید که مجموعهٔ S متشکل از تمام نقاط $A\in\mathbf{R}^n$ به‌طوری که $L(A)>c$، یك مجموعهٔ محدب است.

۵. فرض کنید A یك بردار مخالف صفر $\mathbf{R}^n$ و c یك عدد است. نشان دهید که مجموعهٔ تمام نقاط X به طوری که $X\cdot A\geqslant c$، یك مجموعهٔ محدب است.

۶. فرض کنید $L: V \longrightarrow W$ یك نگاشت خطی است. فرض کنید S' یك مجموعهٔ محدب در W است. فرض کنید S مجموعهٔ تمام اعضای $p \in V$ است به‌طوری‌که $L(p)$ متعلق به S' است نشان دهید که S محدب است.

توضیح. اگر پیرامون علامتهای به‌کار رفته در تمرینهای ۳، ۴، ۵ جستجو کنیم درخواهیم یافت که چرا این تمرینها حالت خاصی از تمرین ۶ هستند. مجموعهٔ S در تمرین ۶ به **تصویر معکوس** S' تحت L موسوم است.

۷. نشان دهید که یك متوازی‌الاضلاع مجموعه‌ای محدب است.

۸. فرض کنید S مجموعه‌ای محدب در V و u یك عضو V است. فرض کنید $T_u: V \longrightarrow V$ انتقال به اندازهٔ u است. نشان دهید که تصویر $T_u(S)$ محدب است.

۹. فرض کنید S مجموعه‌ای محدب در V و c یك عدد است. فرض کنید cS مجموعهٔ تمام اعضای cv باشد به‌طوری‌که $v \in S$. نشان دهید که cS محدب است.

۱۰. فرض کنید u و v دو عضو مستقل خطی فضای برداری V هستند. فرض کنید $F: V \longrightarrow W$ یك نگاشت خطی است. فرض کنید $F(v)$ و $F(w)$ بستگی خطی دارند. نشان دهید که تصویر متوازی‌الاضلاع تولید شده با v و w تحت F مساوی یك نقطه یا یك پاره خط است.

۴

نگاشتهای خطی وماتریسها

۱. نگاشت خطی وابسته به‌یك ماتریس

فرض کنید

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

یك ماتریس $m \times n$ است. به‌ماتریس A نگاشت

$$L_A : K^n \rightarrow K^m$$

که برای هر بردار X متعلق به K^n به‌صورت

$$L_A(X) = AX$$

تعریف می‌شود را وابسته می‌کنیم. بنابراین L_A به‌وسیلهٔ تناظر $X \mapsto AX$، که ضرب همان ضرب ماتریسهاست، تعریف می‌گردد. اینکه L_A یك نگاشت خطی است به‌سادگی نتیجه می‌شود وحالت خاص قضیهٔ ۱.۳ ، فصل ۲ مربوط به‌خواص ضرب ماتریسهاست. در واقع برای هردوبردار X و Y متعلق به K^n وهرعدد دلخواه c داریم

$$A(X+Y)=AX+AY \ , \ A(cX)=cAX$$

L_A را نگاشت خطی **وابسته** به‌ماتریس A می‌نامیم.

مثال. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ و $X=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۷ \end{bmatrix}$، آنگاه

$$L_A(X)=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶+۷ \\ -۳+۳۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۳ \\ ۳۲ \end{bmatrix}$$

قضیهٔ ۱۰.۱۰۱ اگر A و B ماتریسهای $m\times n$ و اگر $L_A=L_B$، آنگاه $A=B$. به‌عبارت دیگر، اگرماتریسهای A و B نگاشت خطی یکسانی را به‌دست دهند، آنگاه باهم مساویند.

اثبات. طبق تعریف، به‌ازای هر i داریم $A_i.X=B_i.X$، که در آن A_i، i امین سطر A و B_j، j امین سطر B است. پس به‌ازای هر i وهر X داریم $(A_i-B_i).X=o$. لذا بـه ازای هر i، $A_i-B_i=o$، یعنی $A_i=B_i$، ودرنتیجه $A=B$ است.

می‌توانیم تعبیر جدیدی برای یک‌دستگاه معادلات خطی همگن برحسب نگاشت خطی وابسته به‌یک ماتریس ارائه دهیم. درواقع، چنین دستگاهی را می‌توان به‌صورت

$$AX=o$$

نوشت، وبا توجه به این مطلب مشاهده می‌کنیم که مجموعهٔ جواب دستگاه عبارت است از هستهٔ نگاشت خطی L_A.

تمرینها

۱. درهریك ازحالتهای زیر بردار $L_A(X)$ را به‌دست آورید.

(الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ، $X=\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$

(ب) $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ، $X=\begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix}$

(پ) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ، $X=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$

$$X=\begin{bmatrix}۷\\-۳\end{bmatrix}\ ،\ A=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\quad \text{(ت)}$$

۲. ماتریس وابسته به‌یك نگاشت خطی

نخست یك حالت خاص را درنظر می‌گیریم. فرض کنید

$$L: K^n \rightarrow K$$

یك نگاشت خطی است. یك بردارمنحصر به‌فرد $A\in K^n$ وجود دارد به‌طوری‌که $L=L_A$؛ یعنی، به‌ازای هر بردار دلخواه X داریم

$$L(X)=A\cdot X$$

فرض کنید E_1، ...، E_n بردارهـای یکه در K^n هستند. اگر $X=x_1E_1+\dots+x_nE_n$ یك بردار دلخواه باشد، آنگاه

$$L(X)=L(x_1E_1+\dots+x_nE_n)=x_1L(E_1)+\dots+x_nL(E_n)$$

اگر اکنون قراردهیم $a_i=L(E_i)$، آنگاه مشاهده می‌کنیم که

$$L(X)=x_1a_1+\dots+x_na_n=X\cdot A$$

این مطلب آنچه راکه ما می‌خواهیم اثبات می‌کند. همچنین بـه‌ما اجازه می‌دهدکه بردار A را به‌طورصریح چنان بیابیم‌که $L=L_A$، مثلاً مؤلفه‌های A دقیقاً عبارتنداز $L(E_1)$، ...، $L(E_n)$ که در آن E_i $(i=۱,\dots,n)$ بردارهای یکهٔ K^n هستند.

اکنون این مسألـه را بـه حالتی‌که L یك نگاشت خطی از K^n در K^m است تعمیم می‌دهیم.

قضیهٔ ۱.۲. فرض‌کنید $L:K^n\rightarrow K^m$ یك نگاشت خطی است. دراین صورت یك ماتریس منحصربه‌فرد A وجود دارد به‌طوری‌که $L=L_A$.

اثبات. طبق معمول، فرض‌کنید E^1، ...، E^n بردارهای ستونی یکه در K^n، و e^1، ...، e^m بردارهای ستونی یکـه در K^m هستند. هر بردار X متعلق بـه K^n را می‌توانیم بـه‌صورت ترکیب خطی

$$X=x_1E^1+\dots+x_nE^n=\begin{bmatrix}x_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{bmatrix}$$

بنویسیم که x_j، j امین مؤلفهٔ X است. طبق خاصیت خطی، نتیجه می‌گیریم که

$$L(X)=x_1L(E^1)+\cdots+x_nL(E^n)$$

ومی‌توانیم هر $L(E^j)$ را برحسب $e^1,\ldots,e^m$ بنویسیم. به‌عبارت دیگر اعداد a_{ij} وجود دارند به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}L(E^1)&=a_{11}e^1+\cdots+a_{m1}e^m\\&\vdots\\L(E^n)&=a_{1n}e^1+\cdots+a_{mn}e^m\end{aligned}$$

یا برحسب بردارهای ستونی

$$L(E^1)=\begin{bmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix},\ldots,L(E^n)=\begin{bmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix}$$

لذا

$$\begin{aligned}L(X)&=x_1(a_{11}e^1+\cdots+a_{m1}e^m)+\cdots+x_n(a_{1n}e^1+\cdots+a_{mn}e^m)\\&=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)e^1+\cdots+(a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n)e^m\end{aligned}$$

نتیجتاً، اگر فرض کنیم $A=[a_{ij}]$، آنگاه داریم

$$L(X)=AX$$

یا

$$\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}$$

بنابراین $L=L_A$ نگاشت خطی وابسته به‌ماتریس A است. همچنین A را **ماتریس وابسته به نگاشت خطی** L می‌نامیم. بنابر قضیهٔ ۱.۱ این ماتریس به‌طورمنحصربه‌فرد تعیین می‌گردد.

مثال ۱. فرض کنید $F:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ نگاشت تصویر است، یعنی

$$F(x_۱,x_۲,x_۳)=(x_۱,x_۲)$$

دراین صورت ماتریس وابسته به F عبارت است از

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

مثال۲. فرض کنید $I: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ نگاشت همانی است. دراین صورت ماتریس وابسته به I عبارت است از

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

که مؤلفه‌های روی قطر آن ۱ و بقیهٔ آنها صفر است.

مثال۳. برطبق قضیهٔ ۱.۲ فصل ۳ یك نگاشت خطی منحصر به‌فرد $L: \mathbf{R}^۴ \to \mathbf{R}^۲$ وجود دارد به‌طوری که

$$L(E^۱)=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix},\ L(E^۲)=\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix},\ L(E^۳)=\begin{bmatrix} -۵ \\ ۴ \end{bmatrix},\ L(E^۴)=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

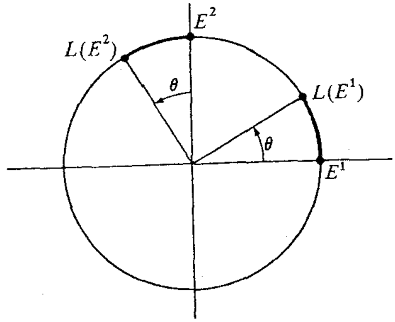
برطبق رابطهٔ (*) ماتریس وابسته به L عبارت است از

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۵ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۴ & ۷ \end{bmatrix}$$

مثال۴ (دورانها). می‌توانیم یك **دوران** را به‌صورت یك ماتریس تعریف کنیم. درواقع، نگاشت خطی $L: \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۲$ را یك **دوران** می‌نامیم اگر ماتریس وابسته به آن را بتوانیم به‌صورت

$$R(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

بنویسیم. تعبیر هندسی این تعریف ازشکل ۱ حاصل می‌شود



شکل ۱

مشاهده می‌کنیم که

$$L(E^۱)=(\cos\theta)E^۱+(\sin\theta)E^۲$$
$$L(E^۲)=(-\sin\theta)E^۱+(\cos\theta)E^۲$$

بنابراین تعریف ما دقیقاً متناظر به‌شکل فوق است. وقتی‌که ماتریس دوران به‌صورت فوق است، مشاهده می‌کنیم که دورانی با زاویهٔ θ داریم. به‌عنوان مثال، ماتریس وابسته به‌دوران به زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}$ عبارت است از

$$R\left(\frac{\pi}{۲}\right)=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

بالاخره مشاهده می‌کنیم که عملیات روی ماتریسها متناظر به‌عملیات روی نگاشتهای وابسته به‌آنهاست. به‌عنوان مثال، اگر A و B دوماتریس $m\times n$ باشد، آنگاه

$$L_{A+B}=L_A+L_B$$

و اگر c یك عدد باشد، آنگاه

$$L_{cA}=cL_A$$

این روابط آشکارا برقرارند، زیرا

$$(A+B)X=AX+BX\quad,\quad (cA)X=c(AX)$$

روابط مشابهی برای ترکیب نگاشتها داریم. درواقع اگر

$$F : K^n \to K^m \quad , \quad G : K^m \to K^s$$

دو نگاشت خطی، و A و B به‌ترتیب ماتریسهای وابسته به A و B باشند، آنگاه برای هر بردار $X \in K^n$ داریم

$$(G \circ F)(X) = G(F(X)) = B(AX) = (BA)X$$

بنابراین ضرب BA ماتریس وابسته به‌نگاشت خطی $G \circ F$ است.

قضیهٔ ۲.۲. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$، و $A^۱$، ...، A^n ستونهای آن هستند. دراین صورت A وارون‌پذیر است اگروتنها اگر بردارهای $A^۱$، ...، A^n مستقل خطی باشند.

اثبات. فرض کنید $A^۱$، ...، A^n مستقل خطی‌اند. دراین صورت $\{A^۱, \ldots, A^n\}$ یک‌پایهٔ K^n است، و درنتیجه بردارهای یکه‌ای $E^۱$، ...، E^n را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از $A^۱$، ...، A^n نوشت. از اینجا نتیجه می‌شود که یک ماتریس B وجود دارد به‌طوری‌که

$$BA^j = E^j \quad , \quad j = ۱, ۲, \cdots, n$$

قضیهٔ ۱.۲ فصل ۳ را ببینید. اما این مطلب معادل است با اینکه $BA = I$. بنابراین A وارون‌پذیر است. برعکس، فرض کنید A وارون‌پذیر است. نگاشت خطی L_A چنان است که

$$L_A(X) = AX = x_۱ A^۱ + \cdots + x_n A^n$$

چون A وارون‌پذیر است، باید داشته باشیم $\operatorname{Ker} L_A = o$، زیرا اگر $AX = o$، آنگاه $A^{-۱}AX = X = o$. لذا $A^۱$، ...، A^n مستقل خطی‌اند. به‌این ترتیب قضیه اثبات می‌شود.

تمرینها

۱. ماتریس وابسته به‌هریک ازنگاشتهای خطی زیررا به‌دست آورید. بردارها را به‌صورت سطری وباگذاشتن علامت ترانهاده روی آنها می‌نویسیم.

(الف) $F : \mathbf{R}^۴ \to \mathbf{R}^۲$ که به‌صورت $F({}^t(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)) = {}^t(x_۱, x_۲)$ تعریف شده است.

(ب) نگاشت تصویر از $\mathbf{R}^۴$ به‌روی $\mathbf{R}^۲$.

(پ) $F:\mathbf{R}^۲\to\mathbf{R}^۲$ که به‌صورت $F({}^t(x,y))={}^t(۳x,۳y)$ تعریف شده‌است.

(ت) $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ که به‌صورت $F(X)=۷X$ تعریف شده است.

(ث) $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ به‌طوری‌که $F(X)=-X$

(ج) $F:\mathbf{R}^۴\to\mathbf{R}^۴$ به‌طوری‌که $F({}^t(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴))={}^t(x_۱,x_۲,۰,۰)$

۲. ماتریس $R(\theta)$ وابسته به‌دوران به‌زاویه‌های زیر را به‌دست آورید.

(الف) $\theta=\frac{\pi}{۲}$ (ب) $\theta=\frac{\pi}{۴}$ (پ) $\theta=-\pi$

(ت) $\theta=-\frac{\pi}{۳}$ (ث) $\theta=\frac{\pi}{۶}$ (ج) $\theta=\frac{۵\pi}{۴}$

۳. درحالت‌کلی، فرض‌کنید $\theta>۰$. ماتریس وابسته به‌دوران به زاویهٔ $-\theta$ (یعنی دوران به‌زاویهٔ θ ودرجهت حرکت عقربه‌های ساعت) را به‌دست آورید.

۴. فرض کنید $X={}^t(۱,۲)$ نقطه‌ای درصفحه است. فرض‌کنید F دوران به‌زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$ است. مطلوب است تعیین مختصات $F(X)$ نسبت به‌پایهٔ معمولی $\{F^۱,F^۲\}$.

۵. مسألهٔ ۴ را وقتی $X={}^t(-۱,۳)$، و F دوران به‌زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}$ باشد حل کنید.

۶. فرض کنید $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ یک‌نگاشت خطی وارون‌پذیر است. نشان دهیدکه اگر A ماتریس وابسته به F باشد، آنگاه $A^{-۱}$ ماتریس وابسته به‌وارون F است.

۷. فرض کنید F دورانی به‌زاویهٔ θ است. نشان دهیدکه برای هربردار X متعلق به $\mathbf{R}^۲$ داریم $||F(X)||=||X||$ (یعنی F حافظ نرم است). که در آن

$$||(a,b)||=\sqrt{a^۲+b^۲}$$

۸. فرض کنید c یک‌عدد، و $L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ یک‌نگاشت خطی‌است به‌طوری‌که $L(X)=cX$. ماتریس وابسته به‌این نگاشت خطی را به‌دست آورید.

۹. فرض کنید F_θ دوران به‌زاویهٔ θ است. اگر θ و φ دوعدد باشند، ماتریس وابسته به نگاشت خطی $F_\theta\circ F_\varphi$ را حساب‌کنید ونشان دهیدکه مساوی ماتریس نگاشت خطی

$F_{\theta+\varphi}$ است.

۱۰. فرض‌کنید F_θ دوران به‌زاویهٔ θ است. نشان دهیدکه F_θ وارون‌پذیر است، وماتریس وابسته به F_θ^{-1} را به‌دست آورید.

۳. پایه، ماتریس، ونگاشت خطی

دردوبخش قبلی رابطهٔ بین ماتریسها ونگاشتهای خطی K^n در K^m را بررسی‌کردیم. اکنون فرض‌کنید V و W دوفضای برداری با بعد متناهی‌دلخواه روی هیات K هستند. فرض کنید

$$\mathrm{B}=\{v_1,\cdots,v_n\} \quad , \quad \mathrm{B}'=\{w_1,\cdots,w_m\}$$

به‌ترتیب پایه‌هایی از V و W هستند. دراین صورت می‌دانیم‌که اعضای V و W دارای بردارهای مختصاتی نسبت به‌این پایه‌ها هستند. به‌عبارت دیگر، اگر $v\in V$ آنگاه می‌توانیم تنها به‌یك طریق v را به‌صورت ترکیب خطی زیر نوشت

$$v=x_1v_1+\cdots+v_nv_n \quad , \quad x_i\in K$$

بنابراین V یکریخت با K^n تحت نگاشت $K^n\to V$ تعریف شده به‌وسیلهٔ

$$(x_1,\cdots,x_n) \to x_1v_1+\cdots+x_nv_n$$

است. شبیه این مطلب را برای W داریم. اگر $F: V\to W$ یك‌نگاشت خطی باشد، آنگاه با استفاده از یکریختی فوق، می‌توانیم F را به‌عنوان نگاشتی خطی از K^n در K^m تعبیر کنیم، ودرنتیجه می‌توانیم یك ماتریس به F وابسته‌کنیم که بستگی به‌پایه‌های انتخاب شده دارد وآنرا با $M_{B'}^{B}(F)$ نمایش می‌دهیم. این‌ماتریس منحصر به‌فرد است ودارای خاصیت زیر می‌باشد:

اگر X بردار مختصاتی (ستونی) عضو v از V نسبت به‌پایهٔ B باشد، آنگاه AX بردارمختصاتی (ستونی) $F(v)$ نسبت به‌پایهٔ B' است.

برای نمایش اینکه بردارمختصاتی X به‌بردار v وپایهٔ B بستگی دارد ازعلامت $X_B(v)$ نمایش می‌دهیم. دراین صورت خاصیت فوق را می‌توان به صورت قضیهٔ زیر بیان کرد.

قضیهٔ ۱.۳. فرض‌کنید V و W دوفضای برداری روی K، و $F: V\to W$ یك نگاشت خطی است. فرض‌کنید B یك‌پایهٔ V و B' یك‌پایهٔ W است. اگر $v\in V$، آنگاه

$$X_{B'}(F(v))=M^{B}_{B'}(F)\,X_B(v)$$

نتیجهٔ ۲.۳. فرض کنید V یک فضای برداری، B و B' دو پایهٔ V و $v\in V$. در این صورت

$$X_{B'}(v)=M^{B}_{B'}(id)\,X_B(v)$$

این نتیجه چگونگی تغییر مختصات یك بردار را در اثر تغییر پایه بیان می‌دارد.

اگر $A=M^{B}_{B'}(F)$، و X بردار مختصاتی v نسبت به پایهٔ B باشد، آنگاه طبق تعریف

$$F(v)=(A_1\cdot X)w_1+\cdots+(A_m\cdot X)w_m$$

ماتریس A به‌وسیلهٔ اثر F روی اعضای پایه به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

فرض کنید

$$\begin{aligned}F(v_1)&=a_{11}w_1+\cdots+a_{m1}w_m\\ &\;\;\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (*)\\ F(v_n)&=a_{1n}w_1+\cdots+a_{mn}w_m\end{aligned}$$

در این صورت A ترانهادهٔ ماتریس زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m1}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

درواقع داریم

$$F(v)=F(x_1v_1+\cdots+x_nv_n)=x_1F(v_1)+\cdots+x_nF(v_n)$$

با توجه به‌مقادیر $F(v_1)$، ...، $F(v_n)$ درعبارت $(*)$، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}F(v)&=x_1(a_{11}w_1+\cdots+a_{m1}w_m)+\cdots+x_n(a_{1n}w_1+\cdots+a_{mn}w_m)\\ &=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)w_1+\cdots+(a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n)w_m\\ &=(A_1\cdot X)w_1+\cdots+(A_m\cdot X)w_m\end{aligned}$$

مثال ۱. فرض کنید که $\dim V=2$ و $\dim W=3$. فرض کنید که F نگاشت خطی زیر است:

$$F(v_۱)=۳w_۱-w_۲+۱۷w_۳$$

$$F(v_۲)=w_۱+w_۲-w_۳$$

دراین‌صورت ماتریس وابسته به F عبارت است از

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۱ & ۱ \\ ۱۷ & -۱ \end{bmatrix}$$

که ترانهادهٔ ماتریس زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱۷ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

مثال۲. فرض‌کنید $id: V \to V$ نگاشت همانی است. دراین صورت برای هرپایهٔ B از V داریم

$$M_B^B(id)=I$$

که در آن I ماتریس واحد $n\times n$ است (به‌شرطی‌که $\dim V=n$). این‌مطلب به‌سادگی نتیجه می‌شود.

اخطار. فرض‌کنیدکه $V=W$،اما با دوپایهٔ متفاوت B و B'. دراین‌صورت ماتریس وابسته به‌نگاشت همانی V نسبت به‌این دوپایهٔ متفاوت ماتریس واحد نخواهد بود.

مثال۳. فرض‌کنید $\mathrm{B}=\{v_۱,\dots,v_n\}$ و $\mathrm{B}'=\{w_۱,\dots,w_n\}$ دوپایه ازفضای برداری V است. ماتریس $A=[a_{ij}]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$w_۱=a_{۱۱}v_۱+\dots+a_{۱n}v_n$$
$$\vdots$$
$$w_n=a_{n۱}v_۱+\dots+a_{nn}v_n$$

دراین صورت برای هر i، $i=۱,۲,\dots,n$ داریم $w_i=id(w_i)$. بنابراین طبق تعریف

$$M_B^{B'}(id)={}^tA$$

ازطرف دیگر، یك‌نگاشت خطی منحصربه‌فرد $F: V\to V$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$F(v_۱)=w_۱,\dots,F(v_n)=w_n$$

مجدداً طبق تعریف داریم

$$M_B^B(F)={}^tA$$

قضیهٔ ۳۰۲۰ فرض‌کنید V و W دوفضای برداری هستند. فرض‌کنید B یك‌پایهٔ V و B′ یك‌پایهٔ W است. فرض‌کنید f و g دونگاشت خطی از V در W هستند. فرض‌کنید $M=M_{B'}^{B}$. دراین صورت

$$M(f+g)=M(f)+M(g)$$

اگر c یك عدد باشد، آنگاه

$$M(cf)=cM(f)$$

تناظر $f\rightarrow M_{B'}^{B}(f)$ یك یکریختی بین فضای برداری نگاشتهای خطی $\mathcal{L}(V,W)$ و فضای برداری ماتریسهای $m\times n$ (به‌شرطی‌که $\dim V=n$ و $\dim W=m$) است.

اثبات. فرمولهای نخست باتوجه به‌تعریف ماتریس وابسته به‌نگاشت خطی نشان می‌دهند که نگاشت $f\rightarrow M(f)$ خطی است. تناظر $f\rightarrow M(f)$ یك به‌یك است، زیرا $M(f)=M(g)$ نتیجه می‌دهد که $f=g$، وپوشاست زیرا هرنگاشت خطی به‌وسیلهٔ یك یك‌ماتریس نمایش داده می‌شود. بنابراین $f\rightarrow M(f)$ یك یکریختی بین فضاهای برداری است.

اکنون ازخواص جمعی ماتریس وابسته گذشته و به‌خواص ضربی آن می‌پردازیم. فرض‌کنید U، V، W سه مجموعهٔ دلخواه و $F: U\rightarrow V$ و $G: V\rightarrow W$ دونگاشت داده شده‌اند. دراین صورت می‌توانیم ترکیب بین این دونگاشت را تشکیل دهیم و آن را با $G\circ F$ نمایش می‌دهیم.

قضیهٔ ۴۰۳۰ فرض‌کنید V و W و U سه فضای برداری وB، B′ و B″ به‌ترتیب پایه‌هایی از V و W و U هستند. فرض‌کنید

$$F:V\rightarrow W\quad,\quad G:W\rightarrow U$$

دونگاشت خطی هستند. دراین صورت

$$M_{B''}^{B}(G)\,M_{B'}^{B}(F)=M_{B''}^{B}(G\circ F)$$

(توجه. نسبت به‌پایه‌های انتخاب شده، قضیه بیانگر این مطلب است‌که ترکیب نگاشتها متناظر به‌ضرب ماتریسهاست.)

اثبات. فرض‌کنید A ماتریس وابسته به F نسبت به‌پایه‌های B و B′، و C″ماتریس وابسته به G نسبت به‌پایه‌های B′ و B″ است. فرض‌کنید v عضودلخواهی‌از V و X بردارمختصاتی

(ستونی) آن نسبت بـه‌پایهٔ B است. دراین صورت بردارمختصاتی $F(v)$ نسبت به‌پایهٔ B′ مساوی است با AX. طبق تعریف بردارمختصاتی $G(F(v))$ نسبت به‌پایهٔ B″ عبارت‌است از $C(AX)$ کـه مساوی است بـا $(CA)X$. امـا $G(F(v))=(G\circ F)(v)$. پس بردار مختصاتی $(G\circ F)(v)$ نسبت بـه‌پایـهٔ B″ عبارت است از $(CA)X$. طبق تعریف از اینجا نتیجه می‌شود که CA ماتریس وابسته به‌نگاشت خطی $G\circ F$ است.

توضیح. دربسیاری ازکاربردها، با نگاشتهای خطی ازفضای برداری V درخودش‌مواجهیم. اگر پـایهٔ B از V انتخاب شده و $F: V\to V$ یك‌نگـاشت خطی بـاشد، آنگاه مـاتریس $M_B^B(F)$ را معمولاً ماتریس وابسته به **نگاشت F نسبت به‌پایهٔ** B (بـه‌جای نسبت به‌پایه‌های B و B) می‌نامیم. ازتعریف برمی‌آیدکه $M_B^B(id)=I$، که I ماتریس واحد است. به‌عنوان نتیجهٔ مستقیم ۲.۳ به‌دست می‌آوریم:

نتیجه۳.۵. فرض‌کنید V یك‌فضای برداری وB و B′ پایه‌هایی ازV هستند. دراین صورت

$$M_{B'}^{B}(id)\ M_{B}^{B'}(id)=I=M_{B}^{B'}(id)\ M_{B'}^{B}(id)$$

به‌ویژه، $M_{B'}^{B}(id)$ وارون‌پذیر است.

اثبات. فرض‌کنید درقضیهٔ ۴.۳ $V=W=U$، و $F=G=id$ و $\mathrm{B}''=\mathrm{B}$.

فرمول کلی قضیهٔ ۲.۳ به‌ما اجازه می‌دهدکه توصیف دقیقی ازچگونگی تغییرماتریس وابسته به‌نگاشت خطی دراثرتغییر پایه ارائه دهیم.

قضیهٔ ۶.۳. فرض‌کنید $F:V\to V$ یك نگاشت‌خطی وB و B′ پایه‌هایی ازV هستند. دراین صورت یك ماتریس وارون‌پذیر N وجود دارد به‌طوری‌که

$$M_{B'}^{B}(F)=N^{-1}M_{B}^{B}(F)N$$

درواقع می‌توانیم قراردهیم

$$N=M_{B}^{B'}(id)$$

اثبات. اگرقضیهٔ ۲.۳ را قدم به‌قدم دنبال‌کنیم به‌این نتیجه می‌گیریم که

$$M_{B'}^{B}(F)=M_{B'}^{B}(id)\,M_{B}^{B}(F)\,M_{B}^{B'}(id)$$

با توجه به‌نتیجهٔ ۵.۳ حکم مورد نظر اثبات می‌شود.

فرض‌کنید V یك‌فضای برداری بـا بعد متناهی روی K و $F: V\to V$ یك نگاشت خطی است. می‌گوئیم پایهٔ B از V نگـاشت F را **قطری** می‌کند اگر ماتریس وابسته بـه F نسبت به B یك‌ماتریس قطری باشد. اگرچنین پایه‌ای وجود داشته باشدکه F را قطری

کند می‌گوئیم F **قابل قطری شدن** است. این مطلب همیشه درست نیست که یك نگاشت خطی را می‌توان قطری کرد. درفصلهای بعدی شرایط کافی‌ای که تحت آن بتوان نگاشت را قطری کرد به‌دست خواهیم آورد. اگر A یك ماتریس $n\times n$ در K باشد، می‌گوئیم A (در K) **قابل قطری شدن** است اگر نگاشت خطی تعریف شده به‌وسیلهٔ A قابل‌قطری شدن باشد. ازقضیهٔ ۶.۳، نتیجه می‌گیریم که:

قضیهٔ ۷.۳. فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات K، و $F: V\longrightarrow V$ یك نگاشت خطی، و M ماتریس وابسته به F نسبت به‌پایهٔ B است. دراین صورت F (یا M) را می‌توان قطری‌کرد اگر وتنها اگر یك ماتریس وارون‌پذیر N وجود داشته باشد به طوری‌که $N^{-1}MN$ یك ماتریس قطری باشد.

به‌خاطر اهمیت نگاشت $M\longrightarrow N^{-1}MN$، به آن اسم خاص می‌دهیم. دو ماتریس M و M' را (روی هیات K) **متشابه** می‌نامیم اگر یك ماتریس وارون‌پذیری مانند N وجود داشته باشد به‌طوری‌که $M'=N^{-1}MN$.

تمرینها

۰۱ درهریك ازحالتهای زیرماتریس $M^{B}_{B'}(id)$ را بیابید. فضای برداری درهریك‌ازحالتها $\mathbf{R}^{3}$ است.

(الف)
$$\mathrm{B}=\{(1,1,0)\,,\,(-1,1,1)\,,\,(0,1,2)\}$$
$$\mathrm{B}'=\{(2,1,1)\,,\,(0,0,1)\,,\,(-1,1,1)\}$$

(ب)
$$\mathrm{B}=\{(3,2,1)\,,\,(0,-2,5)\,,\,(1,1,2)\}$$
$$\mathrm{B}'=\{(1,1,0)\,,\,(-1,2,4)\,,\,(2,-1,1)\}$$

۰۲ فرض کنید $L: V\longrightarrow V$ یك‌نگاشت خطی است. فرض کنید $\mathrm{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ یك پایهٔ V است. فرض‌کنیدکه اعداد c_1، ...، c_n وجود دارند به‌طوری‌که $L(v_i)=c_iv_i$ برای $i=1,\dots,n$. مطلوب است ماتریس $M^{B}_{B}(L)$.

۰۳ برای هرعدد حقیقی θ، فرض‌کنید $F_\theta: \mathbf{R}^{2}\longrightarrow \mathbf{R}^{2}$ نگاشت خطی تعریف شده به‌وسیلهٔ ماتریس

$$R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

است. نشان دهیدکه اگر θ و θ' اعداد حقیقی باشند، آنگاه $F_\theta F_{\theta'}=F_{\theta+\theta'}$. (باید فرمول مجموع را برای‌سینوس وکسینوس به‌کار برید.) همچنین نشان دهیدکه $F_\theta^{-1}=F_{-\theta}$.

۴. درحالت‌کلی، فرض‌کنید $\theta>0$. مطلوب است ماتریس وابسته به‌نگاشت همانی، و دوران پایه‌ها به‌اندازهٔ زاویهٔ $-\theta$ (یعنی درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و به اندازهٔ θ).

۵. فرض‌کنید $X={}^t(1,2)$ نقطه‌ای ازصفحه است. فرض‌کنید F دوران به‌زاویهٔ $\frac{\pi}{4}$ است. مطلوب است مختصات $F(X)$ نسبت به‌پایهٔ معمولی $\{E^1,E^2\}$.

۶. همان سؤال مسأله ۵ را وقتی $X={}^t(-1,3)$، و F دوران به‌زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$ باشد پاسخ دهید.

۷. درحالت‌کلی، فرض‌کنید F دوران به‌زاویهٔ θ است. فرض‌کنید (x,y) نقطه‌ای ازصفحه دردستگاه مختصات استاندارد است. فرض‌کنید (x',y') مختصات نقطهٔ دوران یافته است. x' و y' را برحسب x و y و θ بیان‌کنید.

۸. درهریك‌ازحالتهای زیرفرض‌کنید $D=\frac{d}{dt}$ عملگرمشتق‌گیری، و B مجموعه‌ای ازتوابع مستقل‌خطی است. این بردارها یك‌فضای‌برداری V را تولیدمی‌کنند، و D نگاشتی‌خطی از V در V است. ماتریس وابسته به D نسبت به‌پایه‌های B و B را به‌دست آورید.

(الف) $\{e^t,e^{2t}\}$ (ب) $\{1,t\}$ (پ) $\{e^t,te^t\}$

(ت) $\{1,t,t^2\}$ (ث) $\{1,t,e^t,e^{2t},te^{2t}\}$ (ج) $\{\sin t,\cos t\}$

۹. (الف) فرض‌کنید N یك ماتریس مربع است. می‌گوئیم N **پوچ توان** است اگرعدد صحیح مثبتی مانند r وجود داشته باشد به‌طوری‌که $N^r=o$. ثابت‌کنیدکه اگر N پوچ توان باشد، آنگاه $I-N$ وارون‌پذیر است.

(ب) شبیه عبارت فوق را برای نگاشتهای خطی از یك فضای برداری در خودش بیان واثبات‌کنید.

۱۰. فرض کنید P_n فضای برداری چند جمله‌ایهای با درجهٔ کوچکتر یا مساوی n است. در این صورت عملگر مشتق $D: P_n \to P_n$ یك نگاشت خطی است. فرض کنید I نگاشت همانی است. ثابت کنید نگاشتهای خطی زیر وارون‌پذیرند.

(الف) $I - D^2$

(ب) $D^m - I$ برای هرعدد صحیح مثبت m

(پ) $D^m - cI$ برای هرعدد $c \neq 0$

۱۱. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ زیر است

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که یك ماتریس بالا مثلثی است که روی قطرش صفر وهردرایهٔ بالای قطر ۱ وبقیه آنها صفر است.

(الف) اثر L_A را روی پایهٔ استاندارد $\{E^1, \ldots, E^n\}$ از K^n چگونه می‌توان تعبیر کرد.

(ب) با محاسبهٔ اثر توانهای A روی بردارهای پایه نشان دهید که $A^n = O$ و $A^{n-1} \neq O$.

۵

حاصلضرب اسکالر و تعامد

۱. حاصلضرب اسکالر

فرض کنید V یك فضای برداری روی هیات K است. یك **حاصلضرب اسکالر** روی V عبارت است از نگاشتی که به هر زوج عناصر v و w متعلق به V یك اسکالر نسبت می‌دهد، این اسکالر را با $<v,w>$ یا $v.w$ نمایش می‌دهیم و در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. به‌ازای هر $v,w\in W$ داریم $<v,w>=<w,v>$

۲. اگر u، v و w عناصری از V باشند، آنگاه

$$<u,v+w>=<u,v>+<u,w>$$

۳. اگر $x\in K$، آنگاه

$$<xu,v>=x<u,v> \quad \text{و} \quad <u,xv>=x<u,v>$$

حاصلضرب اسکالر را ناتباهیده می‌نامیم اگر در شرط زیر هم صدق کند:

اگر v عضوی از V و به‌ازای هر $w\in V$ داشته باشیم $<v,w>=0$، آنگاه $v=0$.

مثال ۱. فرض کنید $V=K^n$. در این صورت نگاشت

$$(X,Y)\rightarrow X.Y$$

که به‌اعضای X و Y متعلق به K^n حـاصلضرب نقطه‌ای را آنها را نسبت می‌دهد، بـه‌مفهوم فعلی یك‌ضرب اسکالر است.

مثال ۲. فرض کنید V فضای برداری توابع حقیقی پیوسته روی فاصلهٔ $[0,1]$ است. فرض کنید به‌ازای هر $f,g \in V$

$$<f,g>=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

خواص سادهٔ انتگرال نشان می‌دهدکه نگاشت فوق یك‌حاصلضرب اسکالر است.

درهر دومثال حاصلضربهای تعریف‌شده ناتباهیده هستند. این خـاصیت را قبلاً برای مثال ۱ ثابت‌کردیم. درمورد مثال ۲ به‌سادگی ازخواص انتگرال نتیجه حاصل می‌شود.

درحساب دیفرانسیل وانتگرال، مثال دوم را بررسی می‌کنیم،که منجر به‌نظریهٔ سری فوریه می‌شود. ما تنها خواص عمومی‌حاصلضربهای اسکالر وکاربردآنها درفضاهای‌اقلیدسی را بررسی می‌کنیم. علامت $<,>$ را مورد استفاده قرارمی‌دهیم، زیرا درفضای برداری توابع، حاصلضرب نقطه‌ای $f.g$ ممکن است با حاصلضرب معمولی توابع اشتباه شود.

فرض‌کنید V یك‌فضای برداری با یك حاصلضرب اسکالر است. مثل همیشه می‌گوئیم بردارهای v و w بـرهم عمودند، ومی‌نویسیم $v\perp w$ اگر $<v,w>=0$. اگر S زیـر مجموعه‌ای از V باشد، مجموعهٔ‌کلیه اعضای $w\in V$ که برهمهٔ اعضای S عمود هستند را، یعنی به ازای هر $v\in S$ داریـم $<w,v>=0$ ، با $S^\perp$ نمایش می‌دهیم. بـااستفاده ازخواص ۲ و ۳ بـه‌سادگی می‌توان نشان دادکه $S^\perp$ زیرفضایی‌از V است.این زیرفضا را **فضای‌عمود بر** S می‌نامیم. اگر w بر S عمود بـاشد، می‌نویسیم $w\perp S$. فرض‌کنید U زیرفضای تولید شده توسط اعضای S است. اگر w بر S عمود باشد، واگر $v_1,v_2\in S$، آنگاه

$$<w,v_1+v_2>=<w,v_1>+<w,v_2>=0$$

اگر c یك اسکالر باشد، آنگاه

$$<w,cv_1>=c<w,v_1>$$

لذا w برترکیبات خطی اعضای S هم عمود است، ودرنتیجه w بر U عمود است.

مثال ۳. فرض‌کنید $[a_{ij}]$ یك‌ماتریس $m\times n$ بادرایه‌های متعلق به K، و A_1، A_2، ...، A_m بردارهای سطری آن است. فرض‌کنید $X={}^t(x_1,\dots,x_n)$. دستگاه معادلات خطی همگن

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0\\ (**)\qquad &\vdots\\ &a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=0 \end{aligned}$$

را هم می‌توان به‌صورت خلاصهٔ

$$A_1 \cdot X = 0 \quad ,\ldots, \quad A_m \cdot X = 0$$

نوشت. مجموعهٔ جواب این دستگاه یك فضای برداری روی K است. درواقع، فرض‌کنید W فضای تولید شده توسط A_1، ...، A_m است. فرض‌کنید U فضای متشکل ازکلیه بردارهای K^n عمودبر A_1،...،A_m است. دراین‌صورت U دقیقاً فضای‌برداری جوابهای(**) است. بردارهای A_1 ،...، A_m ممکن است مستقل‌خطی‌نباشند. بنابراین $\dim W \leqslant m$، ودرواقع **بعد فضای جواب دستگاه معادلات خطی** عبارت است از

$$\dim U = \dim W^{\perp}$$

بعداً درمورد این بعد مفصلتر بحث خواهیم‌کرد.

فرض‌کنید V یك‌فضای برداری روی هیات K بایك حاصلضرب اسکالر است.

فرض‌کنید $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یك پایهٔ V است. می‌گوئیم این پایه یك **پایهٔ متعامد** است هرگاه به‌ازای هر $i \neq j$ داشته باشیم $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. بعداً نشان خواهیم دادکه اگر V یك‌فضای برداری با بعد متناهی و با یك حاصلضرب اسکالر باشد، آنگاه همیشه یك‌پایهٔ متعامد برای V وجود دارد. به هر حال، نخست حالتهای ویژهٔ مهم روی هیات اعداد حقیقی ومختلط را بحث می‌کنیم.

حالت معین مثبت حقیقی

فرض‌کنید V یك‌فضای برداری روی هیات $\mathbf{R}$، بایك حاصلضرب اسکالر است. این حاصل‌ضرب اسکالر را **معین مثبت** می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $v \in V$ داشته باشیم $\langle v, v \rangle \geqslant 0$، و $\langle v, v \rangle > 0$ اگر $v \neq 0$. ضرب نقطه‌ای معمولی بردارها در $\mathbf{R}^n$ معین مثبت است، و همچنین است حاصلضرب اسکالرمثال ۲ فوق.

فرض‌کنید V یك‌فضای برداری روی $\mathbf{R}$، بایك حاصلضرب اسکالرمعین مثبت است که با $\langle , \rangle$ نمایش می‌دهیم. فرض‌کنید W یك زیر فضاست. دراین صورت W دارای یك‌حاصلضرب‌اسکالر است‌که با همان قاعدهٔ حاصلضرب اسکالر V تعریف می‌شود. به‌عبارت دیگر، اگر w و w' اعضای W باشند، حاصلضرب آنها عبارت است از $\langle w, w' \rangle$. این حاصلضرب اسکالر روی W به‌وضوح معین مثبت است.

به‌عنوان مثال، اگر W زیرفضایی از $\mathbf{R}^3$ تولید شده به‌وسیلهٔ دو بردار $(1, 2, -2)$ و $(\pi, -1, 0)$ باشد، آنگاه W یك‌فضای برداری است ومی‌توانیم ضرب نقطه‌ای بردارها

را روی W درنظر گرفته، و آن را به‌عنوان یك‌حاصلضرب اسکالرمعین مثبت روی W منظور نمائیم. اغلب مجبوریم چنین زیرفضاهایی را بررسی‌کنیم، و این یکی ازدلایلی است‌که ما نظریهٔ خود را بــه‌فضاهای برداری (با بعد متناهی) روی $\mathbf{R}$ بــا یك حاصلضرب اسکالرمعین مثبت داده شده تعمیم می‌دهیم، و به‌جای کارکردن روی $\mathbf{R}^n$ با ضرب نقطه‌ای‌اش آن زیرفضاها را درنظر می‌گیریم. دلیل دیگر این است‌که مایلیم نظریه‌مان را درمورد شرایطی‌که درمثال ۲ بخش ۱ توضیح داده شده به‌کار بریم.

نرم عضو $v\in V$ را به‌صورت

$$||v||=\sqrt{<v,v>}$$

تعریف می‌کنیم. اگر c یك‌عدد دلخواه باشد، آنگاه به‌سادگی داریم

$$||cv||=|c|\ ||v||$$

زیرا

$$||cv||=\sqrt{<cv,cv>}=\sqrt{c^2<v,v>}=|c|\ ||v||$$

فاصلهٔ بین دو عضو v و w متعلق به V را به صورت

$$\text{dist}\,(v,w)=||v-w||$$

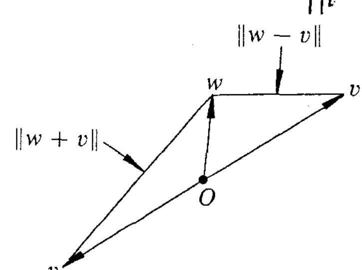
تعریف می‌کنیم. این تعریف ازقضیهٔ فیثاغورث نتیجه می‌شود. بــه عنوان مثال، فرض‌کنید $V=\mathbf{R}^3$ است‌که حاصلضرب اسکالر آن‌همان‌ضرب نقطه‌ایش‌می‌باشد. اگر $X=(x,y,z)\in V$ آنگاه

$$||X||=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

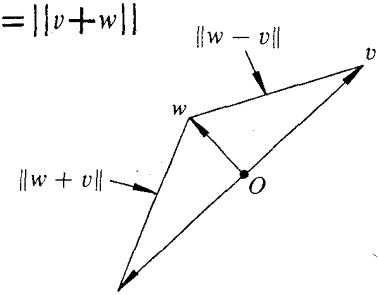
این مفهوم با مفهوم فاصلهٔ اقلیدسی مبدأ تا نقطه A منطبق است.

همچنین می‌توانیم تعریف تعامد را نیز ارائه دهیم. بااستنباط ازهندسهٔ مسطحه وشکل زیرمی‌توان گفت‌که v بر w عمود است اگروتنها اگر

$$||v-w||=||v+w||$$



(الف)



(ب)

اما

$$\begin{aligned}||v-w||=||v+w|| &\Longleftrightarrow ||v-w||^{۲}=||v+w||^{۲}\\ &\Longleftrightarrow (v-w)^{۲}=(v+w)^{۲}\\ &\Longleftrightarrow v^{۲}-۲v\cdot w+w^{۲}=v^{۲}+۲v\cdot w+w^{۲}\\ &\Longleftrightarrow ۴v\cdot w=۰\\ &\Longleftrightarrow v\cdot w=۰\end{aligned}$$

و این همان مفهوم مورد نظر ماست.

احتمالاً ضرب نقطه‌ای n تائیها را دردروس قبلی مطالعه‌کرده‌اید. خواص اساسی‌ای که بدون استفاده ازمختصات ثابت‌کرده‌ایم را می‌توانیم برای حاصلضرب اسکالر درحالت کلی آن ثابت کنیم.

می‌گوئیم عضو $v\in V$ یك **بردار یکه‌ای** است اگر $||v||=۱$. اگر $v\in V$ و $v\neq ۰$، آنگاه $\frac{v}{||v||}$ یك بردار یکه‌ای است.

اتحادهای زیر مستقیماً از تعریف فاصله نتیجه می‌شوند.

قضیهٔ فیثاغورث. اگر v و w متعامد باشند، آنگاه

$$||v+w||^{۲}=||v||^{۲}+||w||^{۲}$$

قانون متوازی‌الاضلاع. برای هردوبردار v و w داریم

$$||v+w||^{۲}+||v-w||^{۲}=۲||v||^{۲}+۲||w||^{۲}$$

اثباتها به‌سادگی انجام می‌پذیرند. اولی را ثابت می‌کنیم، واثبات دومی را به‌عنوان تمرین واگذارمی‌کنیم.

$$\begin{aligned}||v+w||^{۲}&=\langle v+w,v+w\rangle=\langle v,v\rangle+۲\langle v,w\rangle+\langle w,w\rangle\\ &=||v||^{۲}+||w||^{۲} \qquad (\text{زیرا } v\perp w)\end{aligned}$$

فرض کنید w یك‌عضو V است به‌طوری‌که $||w||\neq ۰$. برای هر v یك‌عدد منحصر به‌فرد c وجود دارد به‌طوری‌که $v-cw$ بر w عمود است. درواقع، برای اینکه $v-cw$ بر w عمود باشد باید

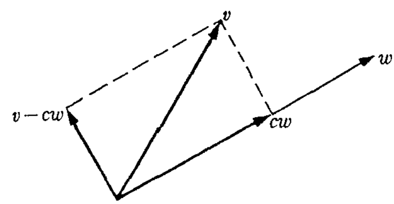
$$\langle v-cw,w\rangle=۰$$

یعنی $0=\langle v,w\rangle-\langle cw,w\rangle$، یا $\langle v,w\rangle=c\langle w,w\rangle$. بنابراین باید

$$c=\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$$

برعکس، فرض کنید c دارای این مقدار است، به‌سادگی دیده می‌شود که $v-cw$ بر w عمود است. در این صورت c را **مؤلفهٔ v درراستای w** می‌نامیم. cw را **تصویر v درطول w** می‌نامیم.

شبیه فضای برداری $\mathbf{R}^n$، تصویر v **درطول** w را مساوی بردار cw تعریف می‌کنیم، به‌شکل زیر توجه کنید.



شکل ۲

به‌ویژه، اگر w بردار یکه‌ای باشد، آنگاه مؤلفهٔ v **درطول** w عبارت است از

$$c=\langle v,w\rangle$$

مثال۴. فرض کنید $V=\mathbf{R}^n$ با حاصاضرب اسکالر معمولی آن، یعنی ضرب نقطه‌ای‌اش است. اگر E_i مساوی i امین برداریکه، و $X=(x_1,\ldots,x_n)$ باشد، آنگاه مؤلفهٔ X درطول E_i عبارت است از

$$X\cdot E_1=x_i$$

یعنی i امین مؤلفهٔ X.

مثال۵. فرض کنید V فضای برداری توابع پیوسته روی $[-\pi,\pi]$ است. فرض کنید تابع f به‌صورت $f(x)=\sin kx$ تعریف‌شده که k یك‌عدد صحیح مثبت‌است. دراین‌صورت

$$||f||=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}$$

درمثال فعلی، فضای برداری توابع حقیقی، مؤلفهٔ g درطول f را **ضریب فوریه** g نسبت به f می‌نامیم. اگر g یك تابع پیوستهٔ دلخواه روی $[-\pi,\pi]$ باشد، آنگاه ضریب

فوریهٔ g نسبت به f عبارت است از

$$\frac{<g,f>}{<f,f>}=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin kx\,dx$$

قضیهٔ ۱.۱. نامساوی شوارتز. برای هر v و w متعلق به V داریم

$$|<v,w>|\leqslant ||v||\,||w||$$

اثبات. اگر $w=0$، آنگاه دوطرف نامساوی ۰ است و درنتیجه نامساوی برقرارخواهد بود. اکنون فرض‌کنید $w=e$ برداریکه است، یعنی $e\in V$ و $||e||=1$. اگر c مؤلفهٔ v درطول e باشد، آنگاه $v-ce$ بر e، وهمچنین بر ce عمود است. لذا طبق قضیهٔ فیثاغورث داریم

$$||v||^2=||v-ce||^2+||ce||^2$$
$$=||v-ce||^2+c^2$$

لذا $c^2\leqslant ||v||^2$، وبنابراین $|c|\leqslant ||v||$. بالاخره اگر w یك بردارمخالف صفر دلخواه باشد، آنگاه $e=\frac{w}{||w||}$ یك بردار یکه است، بنابراین برطبق حالت قبل

$$\left|<v,\ \frac{w}{||w||}>\right|\leqslant ||v||$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$|<v,w>|\leqslant ||v||\,||w||$$

قضیهٔ ۲.۱. نامساوی مثلث. اگر $v,w\in V$، آنگاه

$$||v+w||\leqslant ||v||+||w||$$

اثبات. هر دوطرف این نامساوی مثبت یا ۰ هستند. لذاکافی است ثابت کنیم که توان دوآنها درنامساوی خواسته شده صدق می‌کند، به‌عبارت دیگر کافی است ثابت کنیم که

$$(v+w)^2\leqslant(||v||+||w||)^2$$

برای اثبات این مسأله داریم

$$\begin{aligned}(v+w)^2&=(v+w)\cdot(v+w)=v^2+2v\cdot w+w^2\\&\leqslant ||v||^2+2||v||\,||w||+||w^2|| \qquad \text{(طبق قضیهٔ ۱.۱)}\\&=(||v||+||w||)^2\end{aligned}$$

بنا بر این نامساوی مثلث ثابت می‌شود.

فرض کنید v_1، ...، v_n اعضای مخالف صفر V هستند که دو به‌دو متعامدند، یعنی اگر $i\neq j$، آنگاه $<v_i,v_j>=0$. فرض کنید c_i مؤلفهٔ v درطول v_i است. دراین‌صورت

$$v-c_1v_1-\dots-c_nv_n$$

بر v_1، v_2،...، v_n عمود است. برای اثبات این مطلب باید حاصلضرب این عضو را با هر عضو v_j حساب کنیم. تمام جملات شامل $<v_i,v_j>$ وقتی $i\neq j$ باشد مساوی صفر هستند، ودو جملهٔ باقیماندهٔ

$$<v,v_j>-c_j<v_j,v_j>$$

هستند که باهم حذف می‌شوند. بنا بر این تفاضل ترکیب خطی فوق v را نسبت به v_1،...، v_n متعامد می‌کند. قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که $c_1v_1+\dots+c_nv_n$ بهترین تقریب v به عنوان ترکیبی خطی از v_1،...، v_n است.

قضیهٔ ۳۰۱ فرض‌کنید v_1،...، v_n بردارهایی هستندکه دوبه‌دو متعامد بوده وبه‌ازای هر i، $\|v_i\|\neq 0$ است. فرض‌کنید v عضوی از V، و c_i مولفهٔ v درطول v_i است. فرض‌کنید a_1،...، a_n اعداد دلخواهی هستند. دراین صورت

$$\left\|v-\sum_{k=1}^{n} c_kv_k\right\|\leqslant\left\|v-\sum_{k=1}^{n} a_kv_k\right\|$$

اثبات. می‌دانیم که

$$v-\sum_{k=1}^{n} c_kv_k$$

برهریك از v_i ها، $i=1,2,\dots,n$، عمود است. لذا برهرترکیب خطی دلخواه از v_1،...، v_n عمود می‌باشد. اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورث داریم

$$\begin{aligned}\left\|v-\sum a_kv_k\right\|^2&=\left\|v-\sum c_kv_k+\sum(c_k-a_k)v_k\right\|^2\\&=\left\|v-\sum c_kv_k\right\|^2+\left\|\sum(c_k-a_k)v_k\right\|^2\end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\left\|v-\sum c_kv_k\right\|^2\leqslant\left\|v-\sum a_kv_k\right\|^2$$

وبه‌این ترتیب اثبات قضیه تمام می‌شود.

قضیهٔ بعدی به **نامساوی بسل** موسوم است.

قضیهٔ ۴۰۱۰ اگر v_1، ...، v_n بردارهـای یکه‌ای دوبه‌دومتعامد بوده، و c_i مؤلفهٔ v درطول v_i باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leqslant ||v||^2$$

اثبات. عضوهای $v-\sum c_i v_i$، v_1، ...، v_n دو به‌دومتعامد هستند. بنا بر این:

$$||v||^2 = ||v-\sum c_i v_i||^2 + ||\sum c_i v_i||^2 \qquad \text{(فیثاغورث)}$$

$$\geqslant ||\sum c_i v_i||^2 \qquad \text{(زیرا نرم بزرگتر یا مساوی صفر است)}$$

$$= \sum c_i^2 \qquad \text{(فیثاغورث)}$$

زیرا v_1، ...، v_n دو به‌دومتعامد و $||v_i||^2=1$.

تمرینها

۱. فرض کنید V یك‌فضای برداری با یك حاصلضرب اسکالر است. نشان دهیدکـه به‌ازای هر $v\in V$، $<o,v>=0$.

۲. فرض کنیدکه یك حـاصلضرب اسکالرمعین مثبت داریم. فـرض کنید v_1، ...، v_n اعضای مخالف صفری‌هستند که‌دو به‌دومجزا می‌باشند، یعنی $<v_i,v_j>=0$ اگر $i\neq j$. نشان دهید این بردارها مستقل خطی‌اند.

۳. فرض کنید M یك‌ماتریس $n\times n$ است کـه با ترانهادهٔ خود مساوی است. اگر X، Y بردارهای ستونی باشند، آنگاه ${}^tXMY$ یك‌ماتریس 1×1 است، که ما آن را بایك‌عدد یکی می‌گیریم. نشان دهیدکه نگاشت

$$(X,Y)\rightarrow {}^tXMY$$

درخواص ۱، ۲ و۳ حاصلضرب اسکالرصدق می‌کند. یك‌ماتریس 2×2، M ارائه‌دهید به‌طوری که حاصلضرب فوق معین مثبت نباشد.

۲. پایه‌های متعامد، حالت معین مثبت

درطول این بخش فرض‌کنید V یك فضای برداری با یك حاصلضرب معین مثبت است. یك پایهٔ $\{v_1,\dots,v_n\}$ از V را **متعامد** می‌نامیم اگر بردارهـای آن دو به‌دومتعامد بـاشند، یعنی $<v_i,v_j>=0$ وقتی $i\neq j$. اگرعلاوه بر آن نرم بردارها مساوی ۱ باشد، آنگاه پایه را **یکه‌ای متعامد** می‌نامیم.

بردارهای یکه‌ای $\mathbf{R}^n$ تشکیل یك پایهٔ یکه‌ای متعامد $\mathbf{R}^n$ نسبت به‌ضرب نقطه‌ای‌معمولی می‌دهند.

قضیهٔ ۲.۱. فرض‌کنید V یك‌فضای برداری بـا بعد متناهی، بایك حاصلضرب اسکالرمعین مثبت است. فرض‌کنید W یك زیرفضای V، و $\{w_1,\dots,w_m\}$ یك پایـهٔ یکه‌ای متعامدآن است. اگر $W\neq V$، آنگاه اعضای $w_{m+1},\dots,w_n$ متعلق به V وجود دارند به طوری است که $\{w_1,\dots,w_n\}$ یك‌پایهٔ یکه‌ای متعامد V باشد.

اثبات. روش اثبات بـه‌اهمیت خـود قضیه است، و بـه **روش متعامدسازی گرام ـ اشمیت** مـرسوم است. از فصل ۲ بخش ۳ مـی‌دانیم کـه بردارهای $v_{m+1},\dots,v_n$ از V وجـود دارند به‌طوری‌که $\{w_1,\dots,w_m\ ,\ v_{m+1},\dots,v_n\}$ یك‌پایهٔ V است. البته، این پایه یك پایهٔ یکه‌ای متعامد نیست. فرض‌کنید W_{m+1} زیرفضای تولید شده توسط $w_1,\dots,w_m$ و w_{m+1} است. نخست یك‌پایهٔ متعامد برای W_{m+1} به‌دست می‌آوریم. ایده آن است که v_{m+1} را در نظرگرفته وازآن تصویرهایش درطول $w_1,\dots,w_m$ راکم‌کنیم. فرض‌کنیدکه

$$c_1=\frac{<v_{m+1},w_1>}{<w_1,w_1>}\ ,\dots,\ c_m=\frac{<v_{m+1},w_m>}{<w_m,w_m>}$$

فرض‌کنید

$$w_{m+1}=v_{m+1}-c_1w_1-\dots-c_mw_m$$

دراین صورت w_{m+1} بر $w_1,\dots,w_m$ عمود است. بعلاوه، $w_{m+1}\neq 0$ (درغیر این‌صورت v_{m+1} ترکیبی‌از $w_1,\dots,w_m$ خواهد شد) و v_{m+1} درزیرفضای تولید شده توسط $w_1,\dots,$ w_{m+1} قرارمی‌گیرد، زیرا

$$v_{m+1}=w_{m+1}+c_1w_1+\dots+c_mw_m$$

لذا $\{w_1,\dots,w_{m+1}\}$ یك‌پایهٔ متعامد W_{m+1} است. اکنون می‌توانیم بـا استقراء نشان دهیم که به‌ازای $s=1,\dots,n-m$ فضای W_{m+s} تولید شده توسط

$$w_1,\dots,w_m\ ,\ v_{m+1},\dots,v_{m+s}$$

دارای یك پایهٔ متعامد $\{w_۱,\ldots,w_{m+۱},\ldots,w_{m+s}\}$ است.

نتیجهٔ ۲۰۲. فرض‌کنید V یك‌فضای برداری با بعد متناهی و با یك حاصلضرب اسکالرمعین مثبت است. فرض‌کنیدکه $V\neq\{o\}$. دراین صورت V دارای یك‌پایهٔ متعامد است.

اثبات. طبق‌فرض، یك‌عضو $v_۱\in V$ وجود دارد به‌طوری که $v_۱\neq o$. فرض می‌کنیم W زیر فضای تولید شده توسط $v_۱$ است. اکنون قضیهٔ قبل را به‌کارمی‌بریم تا پایهٔ مورد نظرحاصل شود.

روش قضیهٔ ۱۰۲ رایك‌بار دیگر خلاصه‌می‌کنیم. فرض‌کنید یك‌پایهٔ دلخواه $\{v_۱,\ldots,v_n\}$ از V داده شده است. می‌خواهیم آن را متعامدکنیم به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض‌می‌کنیم

$$v'_۱=v_۱$$

$$v'_۲=v_۲-\frac{<v_۲,v'_۱>}{<v'_۱,v'_۱>}v'_۱$$

$$v'_۳=v_۳-\frac{<v_۳,v'_۲>}{<v'_۲,v'_۲>}v'_۲-\frac{<v_۳,v'_۱>}{<v'_۱,v'_۱>}v'_۱$$

$$\vdots$$

$$v'_n=v_n-\frac{<v_n,v'_{n-۱}>}{<v'_{n-۱},v'_{n-۱}>}v'_{n-۱}-\cdots-\frac{<v_n,v'_۱>}{<v'_۱,v'_۱>}v'_۱$$

دراین صورت $\{v'_۱,\ldots,v'_n\}$ یك‌پایه متعامد است.

اگر یك پایهٔ متعامد داشته باشیم، با تقسیم هر بردار بر نرمش می‌توانیم یك‌پایهٔ یکه‌ای متعامد به‌دست آوریم.

مثال ۱. یك پایهٔ یکه‌ای متعامد برای‌فضای برداری‌تولید شده توسط بردارهای $(۱,۱,۰,۱)$ $(۱,-۲,۰,۰)$، و $(۱,۰,-۱,۲)$ به‌دست آورید.

فرض‌کنید این بردارها را با A، B، C نمایش دهیم. فرض‌کنید

$$B'=B-\frac{B\cdot A}{A\cdot A}A$$

به‌عبارت دیگر، از B تصویرش درطول A راکم می‌کنیم. دراین صورت B' بر A عمود است. به‌دست می‌آوریم

$$B' = \frac{۱}{۳}\ (۴, -۴, ۰, ۱)$$

اکنون از C تصویرش درطول A و B' راکم می‌کنیم، وفرض می‌کنیم

$$C' = C - \frac{C \cdot A}{A \cdot A}\, A - \frac{C \cdot B'}{B' \cdot B'} B'$$

چون A و B' متعامد هستند، با محاسبهٔ حاصلضرب اسکالر C' با A و B' نتیجه می‌گیریم که C' بر A و B' عمود است. به‌دست می‌آوریم

$$C' = \frac{۱}{۷}\,(-۴, -۲, -۷, ۶)$$

بردارهای A، B'، C' مخالف صفرند ودو به‌دو برهم عمود می‌باشند. این بردارها درفضای تولید شده توسط بردارهای A، B، C قرار دارند. بنا براین تشکیل یك‌پایهٔ متعامد برای این فضا می‌دهند. اگر بخواهیم این پایه یکه‌ای متعامد باشد، هر بردار را بر نرمش تقسیم می‌کنیم. درنتیجه بردارهای

$$\frac{A}{||A||} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,(۱, ۱, ۰, ۱)$$

$$\frac{B'}{||B||} = \frac{۱}{\sqrt{۴۲}}\ (۴, -۵, ۰, ۱)$$

$$\frac{C'}{||C||} = \frac{۱}{\sqrt{۱۰۵}}\,(-۴, -۲, -۷, ۶)$$

تشکیل یك‌پایهٔ یکه‌ای متعامد می‌دهند.

قضیهٔ ۳۰۲. فرض‌کنید V یك‌فضای برداری n بعدی روی $\mathbf{R}$ با یك حاصلضرب اسکالرمعین مثبت است. فرض‌کنید W یك زیرفضای r بعدی V است. فرض‌کنید $W^{\perp}$ زیرفضای متشکل ازتمام بردارهایی است‌که بر W عمودند. دراین صورت V جمع مستقیم W و $W^{\perp}$ است، و $W^{\perp}$ دارای بعد $n-r$ می‌باشد. به‌عبارت دیگر

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$$

اثبات. اگر W مساوی $\{o\}$ یا $W=V$ باشد آنگاه حکم به‌وضوح برقرار است. پس فرض کنید $W \neq V$ و $W \neq \{o\}$. فرض کنید $\{w_1, \ldots, w_r\}$ یك‌پایهٔ یکه‌ای متعامد W است. طبق قضیهٔ ۱۰۲، بردارهای u_{r+1}، ...، u_n از V وجود دارند به‌طوری که

$$\{w_1,\dots,w_r\ ,\ u_{r+1},\dots,u_n\}$$

یك پایهٔ یکه‌ای متعامد V باشد. اکنون ثابت می‌کنیم که $\{u_{r+1},\dots,u_n\}$ یك پایهٔ یکه‌ای متعامد $W^\perp$ است.

فرض کنید u عضوی از $W^\perp$ است. دراین صورت اعداد x_1، ...، x_n وجود دارند به‌طوری که

$$u=x_1w_1+\dots+x_rw_r+x_{r+1}u_{r+1}+\dots+x_nu_n$$

چون u بر W عمود است، اگر حاصلضرب آن‌را با هریك از w_i ها $(i=1,\dots,r)$ به‌دست آوریم خواهیم داشت

$$o=\langle u,w_i\rangle=x_i\langle w_i,w_i\rangle=x_i$$

بنابراین تمام x_i ها $(i=1,\dots,r)$ مساوی صفرند. پس u یك ترکیب خطی از u_{r+1}،...، u_n است.

برعکس، فرض کنید $u=x_{r+1}u_{r+1}+\dots+x_nu_n$ یك ترکیب خطی از u_{r+1}،...، u_n است. حاصلضرب این بردار با هریك از w_i ها مساوی o است، لذا u برهریك از w_i ها $(i=1,\dots,r)$ ودرنتیجه بر W عمود است. بنابراین u_{r+1}، ...، u_n زیرفضای $W^\perp$ را تولید می‌کنند. چون این بردارها دوبه‌دومتعامد و نرم هرکدام مساوی ۱ است، لذا تشکیل یك پایهٔ یکه‌ای متعامد برای $W^\perp$ می‌دهند ودرنتیجه بعد $W^\perp$ مساوی $n-r$ است. بعلاوه، هرعضو V را می‌توان تنها به‌یك طریق به‌صورت ترکیب خطی

$$x_1w_1+\dots+x_rw_r+x_{r+1}u_{r+1}+\dots+x_nu_n$$

نوشت، واین نشان می‌دهد که هرعضو V را می‌توان تنها به‌یك‌طریق به‌صورت $w+u$ نوشت به‌طوری که $w\in W$ و $u\in W^\perp$، پس V جمع مستقیم زیرفضای W و $W^\perp$ است.

زیرفضای $W^\perp$ را **مکمل متعامد** W می‌نامیم.

مثال۲. فضای $\mathbf{R}^3$ را درنظرمی‌گیریم. فرض کنید A و B دو بردارمستقل خطی در $\mathbf{R}^3$ هستند. زیرفضای بردارهایی که برهردوبردار A و B عمودند یك زیرفضای ۱ بعدی است. اگر $\{N\}$ پایه‌ای برای این فضا باشد، آنگاه هرپایهٔ دیگر این زیرفضا به‌صورت $\{tN\}$ است به‌طوری که t یك اسکالرمخالف صفر است.

مجدداً در $\mathbf{R}^3$ فرض کنید N یك‌بردارمخالف صفراست. دراین‌صورت فضای بردار-های عمود بر N یك زیرفضای دوبعدی است، یعنی یك صفحه است که ازمبدأ می‌گذرد.

فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{R}$ وبا یك حاصلضرب اسکالر

معین مثبت است. فرض کنید $\{e_1,\ldots,e_n\}$ یك پایهٔ یکه‌ای متعامد برای V است. فرض کنید $v,w\in V$. دراین صورت اعداد x_1،...، x_n وهمچنین y_1،...، y_n متعلق به $\mathbf{R}$ وجود دارند به‌طوری که

$$v=x_1e_1+\cdots+x_ne_n \quad \text{و} \quad w=y_1e_1+\cdots+y_ne_n$$

دراین صورت

$$\langle v,w\rangle=\langle x_1e_1+\cdots+x_ne_n\ ,\ y_1e_1+\cdots+y_ne_n\rangle$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j\langle e_i,e_j\rangle=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

بنابراین برحسب این پایهٔ یکه‌ای متعامد، اگر X و Y بردارهای مؤلفه‌ای v و w باشند، حاصلضرب اسکالر بوسیلهٔ حاصلضرب نقطه‌ای $X.Y$ داده می‌شود. اگر پایهٔ داده شده یکه‌ای متعامد نباشد چنین عملی امکان‌پذیر نیست. درواقع اگر $\{v_1,\ldots,v_n\}$ یك پایهٔ دلخواه V باشد، وقرار دهیم

$$v=x_1v_1+\cdots+x_nv_n$$
$$w=y_1v_1+\cdots+y_nv_n$$

آنگاه

$$\langle v,w\rangle=\sum_{i,j=1}^{n} x_iy_i\langle v_i,v_j\rangle$$

که هریك از $\langle v_i,v_j\rangle$ ها یك عدد هستند. اگرقراردهیم $a_{ij}=\langle v_i,v_j\rangle$ آنگاه داریم

$$\langle r,w\rangle=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_ix_j$$

حاصلضرب هرمیتی

اکنون اصلاحات لازم را انجام می‌دهیم تا بتوانیم نتایج قبل را برای فضاهای برداری روی اعداد مختلط بیان کنیم. می‌خواهیم مفهوم حاصلضرب اسکالر معین مثبت را تاحد امکان حفظ کنیم. چون ممکن است ضرب نقطه‌ای بردارهای با مؤلفه مختلط مساوی ۰ باشند بدون اینکه هیچ یك از آنها صفر باشند، لذا باید درتعریف تعبیری بدهیم، واین تغییر خیلی کم است.

فرض کنید V یك فضای برداری روی هیات اعداد مختلط است. یك **حاصلضرب هرمیتی**

روی V قاعده‌ای است که به‌هر جفت بردار v و w از V یك‌عدد مختلط نسبت می‌دهد که با $<v,w>$ نمایش می‌دهیم و درخواص زیر صدق می‌کند:

ح ۱. به‌ازای هر $v,w\in V$ داریم $<v,w>=\overline{<w,v>}$ (در اینجا بار معرف مزدوج مختلط است).

ح ۲. اگر u، v و w اعضای V باشند، آنگاه

$$<u,v+w>=<u,v>+<u,w>$$

ح ۳. اگر $\alpha\in\mathbf{C}$، آنگاه

$$<\alpha u,v>=\alpha<u,v> \quad , \quad <u,\alpha v>=\bar{\alpha}<u,v>$$

حاصلضرب هرمیتی را معین مثبت می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $v\in V$ داشته باشیم $<v,v>\geqslant 0$ و اگر $v\neq 0$، آنگاه $<v,v>>0$.

مفاهیم **متعامد، تعامد، پایهٔ متعامد، مکمل متعامد** را مانند گذشته تعریف می‌کنیم. در تعریف **مؤلفه، تصویر v در امتداد w** هیچ تغییری روی نمی‌دهد، همچنین در توضیحاتی که در ارتباط با آنها داده‌ایم تغییری حاصل نمی‌شود.

مثال ۳. فرض کنید $V=C^n$. اگر $X=(x_1,\dots,x_n)$ و $Y=(y_1,\dots,y_n)$ بردارهایی در C^n باشند، **حاصلضرب هرمیتی** آنها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$<X,Y>=x_1\bar{y}_1+\dots+x_n\bar{y}_n$$

شرایط ح ۱، ح ۲، ح ۳، به‌راحتی تحقیق می‌شوند. این حاصلضرب معین مثبت است، زیرا اگر $X\neq 0$، آنگاه لااقل یکی از x_i ها مخالف صفر است. اگر مثلاً $x_i\neq 0$، آنگاه $x_i\bar{x}_i>0$ و در نتیجه $<Y,X>>0$.

توجه دارید که اگر $X=(1,i)$، آنگاه

$$X\cdot X=1-1=0$$

مثال ۴. فرض کنید V فضای برداری توابع مختلط پیوسته روی فاصلهٔ $[-\pi,\pi]$ است. اگر $f,g\in V$، تعریف می‌کنیم

$$<f,g>=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

خواص استاندارد انتگرال نتیجه می‌دهد که ضرب فوق یك حاصلضرب معین مثبت است.

فرض کنید f_n تابعی باشد که به‌صورت

$$f_n(t)=e^{\text{int}}$$

تعریف شده است. یك محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که اگر n مخالف m باشد، آنگاه f_n بر f_m عمود است. به علاوه، داریم

$$<f_n,f_n>=\int_{-\pi}^{\pi} e^{\text{int}}e^{-\text{int}}dt=۲\pi$$

اگر $f\in V$، آنگاه **ضرایب فوریهٔ** آن نسبت به f_n مساوی است با

$$\frac{<f,f_n>}{<f_n,f_n>}=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\text{int}}dt$$

که خوانندهٔ آشنا با آنالیز بلادرنگ تشخیص خواهد داد.

به بحث عمومی خود دربارهٔ حاصلضربهای هرمیتی برمی‌گردیم. شبیه قضیهٔ ۱.۲ و همچنین نتیجهٔ آنرا برای حاصلضربهای هرمیتی معین مثبت داریم.

قضیهٔ ۴.۲. فرض‌کنید V یك فضای برداری بابعد متناهی روی هیات اعداد مختلط بایك حاصلضرب هرمیتی معین‌مثبت‌است. فرض‌کنید W یك زیرفضای V است، و $\{w_1,\dots,w_m\}$ یك پایهٔ متعامد W است. اگر $W\neq V$، آنگاه اعضای $w_{m+1},\dots,w_n$ از V وجود دارند به‌طوری که $\{w_1,\dots,w_n\}$ یك پایهٔ متعامد V است.

نتیجهٔ ۵.۲. فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات اعداد مختلط‌است که دارای یك حاصلضرب هرمیتی معین مثبت می‌باشد. فرض کنید که $V\neq\{o\}$. در این صورت V دارای یك پایهٔ متعامد است.

اثباتها دقیقاً شبیه همان‌است که قبلاً برای حالت حقیقی ارائه گردید و نیازی به‌تکرار آنها نیست.

اکنون به نظریهٔ نرم برمی‌گردیم. فرض‌کنید V یك فضای برداری روی $\mathbf{C}$ بایك حاصلضرب هرمیتی‌معین مثبت‌است. اگر $v\in V$، آنگاه **نرم** v را به‌صورت زیر تعریف‌می‌کنیم:

$$||v||=\sqrt{<v,v>}$$

چون $<v,v>$ حقیقی و بزرگتر یا مساوی ০ است، لذا جذرآن راعدد حقیقی نامنفی می‌گیریم که مربع آن‌مساوی $<v,v>$ است.

نامساوی شوارتز را داریم

$$|<v,w>|\leqslant||v||\,||w||$$

سه خاصیت نرم شبیه حالت حقیقی برقرار است:

برای هر $v\in V$ داریم $\|v\|\geqslant 0$ و $\|v\|=0$ اگر وتنها اگر $v=o$

برای هرعدد مختلط α داریم $\|\alpha v\|=|\alpha|\,\|v\|$

برای هر $v,w\in V$ داریم $\|v+w\|\leqslant\|v\|+\|w\|$

همهٔ این روابط بـه‌سادگی ثـابت می‌شوند. دوخاصیت اول را بـه عنوان تمرین واگذار می‌کنیم، ولی خاصیت سوم را به‌طورکامل اثبات می‌کنیم، در اثبات آن از نامساوی شوارتز استفاده می‌کنیم.

کافی است ثابت کنیم که

$$\|v+w\|^{2}\leqslant(\|v\|+\|w\|)^{2}$$

برای این منظور مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\|v+w\|^{2}&=\langle v+w,v+w\rangle\\&=\langle v,v\rangle+\langle w,v\rangle+\langle v,w\rangle+\langle w,w\rangle\end{aligned}$$

اما $|\langle v,w\rangle|\leqslant 2\langle v,w\rangle+\overline{\langle v,w\rangle}=\langle v,w\rangle+\langle w,v\rangle$. لـذا طبق نامساوی شوارتز

$$\begin{aligned}\|v+w\|^{2}&\leqslant\|v\|^{2}+2|\langle v,w\rangle|+\|w\|^{2}\\&\leqslant\|v\|^{2}+2\|v\|\,\|w\|+\|w\|^{2}=(\|v\|+\|w\|)^{2}\end{aligned}$$

باریشه دوم گرفتن ازهردوطرف به نتیجهٔ مورد نظرمی‌رسیم.

شبیه حالت حقیقی، یك عضو $v\in V$ رایك **بردار یکه** می‌نامیم هرگاه $\|v\|=1$. پایهٔ متعامد $\{v_1,\dots,v_n\}$ رایك پایهٔ یکه‌ای متعامد می‌نامیم اگرهمهٔ بردارهای آن یکه‌ای باشند. مانندگذشته، باتقسیم هر بردار بر نرمش می‌توانیم یك پایهٔ متعامد رابه یك پایهٔ یکه‌ای متعامد تبدیل کنیم.

فرض کنید $\{e_1,\dots,e_n\}$ یك پایهٔ یکه‌ای متعامد V است. همچنین فرض کنید $v,w\in V$. اعداد مختلط α_1، ...، α_n وهمچنین β_1، ...، β_n وجود دارند به‌طوری که

$$v=\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n$$
$$w=\beta_1e_1+\dots+\beta_ne_n$$

دراین‌صورت

$$\langle v,w\rangle=\langle\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n,\beta_1e_1+\dots+\beta_ne_n\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \langle e_i, e_j \rangle$$
$$= \alpha_1 \overline{\beta_1} + \cdots + \alpha_n \overline{\beta_n}$$

بنابراین نسبت‌به، این پایهٔ یکه‌ای متعامد، اگر A و B بردارهای مؤلفه‌ای v و w باشند، حاصلضرب هرمیتی ارائه شده درمثال ۳ را با $A \cdot \overline{B}$ نمایش می‌دهیم.

اکنون قضایایی داریم که همزمان برای حالتهای حقیقی و مختلط برقرارند. اثباتها کلمه به‌کلمه شبیه اثبات قضیهٔ ۳.۲ هستند، وبنابراین تکرار نخواهند شد.

قضیهٔ ۶.۲. فرض کنید V یك فضای برداری روی $\mathbf{R}$ بایك حاصلضرب اسکالرمعین مثبت، یایك فضای برداری روی $\mathbf{C}$ بایك حاصلضرب هرمیتی معین مثبت است. فرض‌کنید V دارای بعد n است. فرض‌کنید W یك زیرفضای r بعدی V است. فرض‌کنید $W^{\perp}$ زیرفضایی از V است که متشکل‌ازتمام بردارهای‌عمود بر W است. دراین‌صورت $W^{\perp}$ دارای بعد $n-r$ است. به‌عبارت دیگر،

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$$

قضیهٔ ۷.۲. فرض‌کنید V یك فضای برداری روی $\mathbf{R}$ بایك حاصلضرب اسکالرمعین مثبت، یایك فضای برداری روی $\mathbf{C}$ بایك حاصلضرب هرمیتی معین مثبت است. فرض‌کنید V با بعد متناهی است. فرض‌کنید W یك زیرفضای V است. دراین‌صورت V جمع مستقیم دوزیرفضای W و $W^{\perp}$ است.

تمرینها

۰. بعد زیرفضایی از $\mathbf{R}^6$ که بردوبردار $(1,1,-2,3,4,5)$ و $(0,0,1,1,0,7)$ عمود است را به دست آورید.

۱. یك پایهٔ یکه‌ای متعامد برای زیرفضایی از $\mathbf{R}^3$ که به‌وسیلهٔ بردارهای زیر تولید می‌شود به‌دست آورید:

(الف) $(1,1,-1)$ و $(1,0,1)$ (ب) $(2,1,1)$ و $(1,3,-1)$

۲. یك پایهٔ یکه‌ای متعامد برای زیرفضایی از $\mathbf{R}^4$ که به‌وسیلهٔ بردارهای زیر تولید می‌شود به‌دست آورید:

(الف) $(1,2,1,0)$ و $(1,2,3,1)$

(ب) $(1,1,0,0)$، $(1,-1,1,1)$، و $(-1,0,2,1)$

۳. در تمرین ۳ الی ۵ فضای برداری توابع حقیقی پیوسته روی فاصلهٔ $[0,1]$ را در نظر می‌گیریم. حاصلضرب اسکالر دوتابع f و g را با قاعدهٔ

$$<f,g> = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

تعریف می‌کنیم. با استفاده از خواص انتگرال، نشان دهید که تعریف فوق در تعریف حاصلضرب اسکالر صدق می‌کند.

۴. فرض کنید V زیرفضایی از توابع پدیدآمده بـه وسیلهٔ دو تابع $f(t)=t$ و $g(t)=t^2$ است. یك پایهٔ یکه‌ای متعامد برای V به‌دست آورید.

۵. فرض کنید V زیرفضای پدیدآمده به‌وسیله سه تابع ۱، t، t^2 است (که منظور از ۱ تابع ثابت است). یك پایهٔ یکه‌ای متعامد برای V به‌دست آورید.

۶. یك پایهٔ یکه‌ای متعامد برای زیرفضایی از $\mathbf{C}^3$ که به‌وسیلهٔ بردارهای زیر تولید می‌شود به‌دست آورید:

(الف) $(1,i,0)$ و $(1,1,1)$

(ب) $(1,-1,-i)$ و $(i,1,2)$

۷. (الف) فرض کنید V فضای بـرداری تمام ماتـریسهای $n\times n$ روی $\mathbf{R}$ است. روی V حاصلضرب اسکالر دوماتریس A و B را با

$$<A,B> = \mathrm{tr}(AB)$$

تعریف می‌کنیم، که منظور از tr اثرماتریس (یعنی مجموع عناصر روی قطر آن) می‌بـاشد. نشان دهید که این یك حاصلضرب اسکالر ناتباهیده است.

(ب) اگر A یك ماتریس حقیقی‌متقارن باشد، نشان دهید که $\mathrm{tr}(AA)\geqslant 0$، و $\mathrm{tr}(AA)>0$ اگر $A\neq 0$. بنا براین‌اثر، یك حاصلضرب اسکالرمعین مثبت روی فضای برداری ماتریسهای متقارن حقیقی تعریف می‌کند.

(پ) فرض‌کنید V فضای برداری ماتریسهای متقارن حقیقی $n\times n$ است. $\dim V$ چند است؟

۸. با همان علائم تمرین ۷، مکمل متعامد زیرفضای ماتریسهای قطری را به دست آورید. بعد این مکمل متعامد چند است؟

۹. فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{R}$ با یك حاصلضرب معین مثبت است. فرض‌کنید $\{v_1,\dots,v_m\}$ یك مجموعه از عناصر V با نرم ۱ و دو به دو متعامد است (یعنی $<v_i,v_j>=0$ اگر $i\neq j$). فرض‌کنید که برای هر $v\in V$ داریم

$$||v||^2=\sum_{i=1}^{m}<v,v_i>^2$$

نشان دهید که $\{v_1,\dots,v_m\}$ یك پایهٔ V است.

۱۰. فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{R}$ با یك حاصلضرب معین مثبت است. قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع را ثابت کنید، یعنی نشان دهید که برای هر $v,w\in V$ داریم

$$||u+v||^2+||u-v||^2=2(||u||^2+||v||^2)$$

۳. کاربرد درمعادلات خطی؛ رتبه

قضیهٔ ۳.۲ بخش قبل دارای یك‌کاربرد جالب درنظریهٔ معادلات خطی است. دستگاه معادلات زیر رادرنظرمی‌گیریم

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n&=0\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n&=0 \end{aligned} \qquad (**)$$

می‌توانیم فضای حل دستگاه را به سه طریق زیر تعبیر کنیم:

(الف) فضای جواب از بردارهای Xای تشکیل شده که بین ستونهای A روابط خطی

$$x_1A^1+\cdots+x_nA^n=0$$

برقرار باشد.

(ب) جوابها تشکیل فضای برداری عمود بر بردارهای ستونی ماتریس A را می‌دهند.

(پ) جوابها تشکیل هستهٔ نگاشت خطی وابسته به A را می‌دهند. یعنی جوابها به‌صورت $AX=0$ هستند.

فرض بر این است که ضرایب a_{ij} معادلات خطی متعلق به هیات K هستند. شبیه قضیهٔ ۳.۲ برای حاصلضرب اسکالر K^n نیز درست است. در واقع، فرض کنید W زیرفضایی از K^n و $W^\perp$ زیرمجموعهٔ تمام اعضای $X\in K^n$ باشد که

$$X.Y=0,\quad \forall Y\in W$$

در این صورت $W^\perp$ یك زیرفضای K^n است. توجه کنید که ممکن است $X.X=0$ حتی وقتی که $X\neq 0$ است. به عنوان مثال، فرض کنید که $K=\mathbf{C}$ هیات اعداد مختلط و $X=(1,i)$ باشد. در این صورت $X.X=1-1=0$. به هر حال، شبیه قضیهٔ ۳.۲ هنوز هم برقرار است.

قضیهٔ ۱.۳. فرض کنید W یك زیرفضای K^n است. در این صورت

$$\dim W+\dim W^\perp=n$$

این قضیه را در بخش ۶، قضیهٔ ۴.۶ ثابت خواهیم کرد. فعلاً از آن درمطالعهٔ معادلات خطی استفاده می‌کنیم.

اگر $A=[a_{ij}]$ یك ماتریس $m\times n$ باشد، آنگاه ستونهای A^1، ...، A^n زیرفضایی را پدید می‌آورند که بعد آنرا **رتبهٔ ستونی** A می‌نامیم. سطرهای A_1، ...، A_n زیرفضایی را پدید می‌آورند که بعد آنرا **رتبهٔ سطری** A می‌نامیم. می‌توانیم رتبهٔ ستونی A را بیشترین تعداد ستونهای مستقل خطی A، ورتبهٔ سطری آنرا بیشترین تعداد سطرهای مستقل خطی A تعریف می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۳. فرض‌کنید $A=[a_{ij}]$ یك ماتریس $m\times n$ است. در این صورت رتبهٔ سطری و رتبهٔ ستونی A باهم مساوی ومساوی r هستند. به‌علاوه، $n-r$ بعد فضای جواب دستگاه معادلات خطی (**) است.

اثبات. نگاشت

$$L:K^n\to K^m$$

$$L(X)=x_1A^1+\cdots+x_nA^n$$

را درنظرمی‌گیریم. این نگاشت به‌وضوح خطی‌است. تصویر آن عبارت است از فضای‌پدید آمده توسط بردارهای‌ستونی A. هستهٔ آن، طبق تعریف، فضای جواب دستگاه معادلات‌خطی است. طبق قضیهٔ ۲.۳ فصل ۳ بخش ۳، داریم

$$n=\text{بعدفضای جواب}+\text{رتبهٔ ستونی}$$

به‌عبارت دیگر، باتوجه‌اینکه فضای جواب مساوی است با فضای عمود بر بردارهای‌سطری ماتریس A، وبا استفاده ازقضیهٔ مربوط به بعد زیرفضای متعامد، داریم

$$n=\text{بعد فضای جواب}+\text{رتبهٔ سطری}$$

از روی این تساوی، تمام احکام موردنظر نتیجه می‌شود، وقضیهٔ ۲.۳ ثابت می‌گردد.

باتوجه به قضیهٔ ۲.۳، رتبهٔ سطری، یارتبهٔ ستونی A را رتبهٔ ماتریس A می‌نامیم.

تبصره. فرض‌کنید $L=L_A:K^n\to K^m$ نگاشت خطی تعریف شده به‌صورت

$$X\mapsto AX$$

باشد. دراین‌صورت L مطابق فرمول

$$L(X)=x_1A^1+\cdots+x_nA^n$$

تعریف می‌شود. بنابراین

$$\boxed{\text{رتبهٔ } A=\dim I_mL_A}$$

فرض کنید b_1، ...، b_n اعداد دلخواه ودستگاه غیرهمگن

$$\begin{aligned}A_1\cdot X&=b_1\\&\vdots\qquad(*)\\A_m\cdot X&=b_m\end{aligned}$$

را درنظر می‌گیریم.

ممکن است این دستگاه دارای هیچ جوابی نباشد، یعنی معادلات ناسازگار باشند. به‌عنوان مثال، دستگاه

$$۲x+۳y-z=۱$$

$$۲x+۳y-z=۲$$

دارای جوابی نیست. به هرحال، اگر حداقل یك جواب وجود داشته باشد، آنگاه کلیهٔ جوابهای دستگاه ازروی این جواب و با افزودن یك جواب دلخواه دستگاه همگن (**) مربوط به‌این جواب به دست می‌آید. (تمرین ۷). لذا دراین‌حالت هم می‌توانیم از بعد مجموعهٔ جواب صحبت کنیم. بعد مجموعهٔ جواب عبارت است از بعد جوابهای دستگاه همگن وابسته به‌آن.

مثال ۱. رتبهٔ ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

را به دست آورید.

چون‌فقط دو سطر وجود دارد، رتبهٔ ماتریس‌حداکثر ۲ است. ازطرف دیگر،دوستون

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \text{و} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

مستقل خطی‌اند، زیرا اگر a و b دوعدد باشند به‌طوری‌که

$$a\begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

آنگاه داریم

$$۲a+b=۰$$

$$b=۰$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که $a=b=۰$. بنابراین، دو ستون مذکور مستقل خطی‌اند. پس رتبهٔ A مساوی ۲ است.

مثال ۲. بعد مجموعهٔ جواب دستگاه معادلات زیررا به دست آورده ومجموعهٔ جواب را در $\mathbf{R}^۳$ مشخص کنید:

$$۲x+y+z=۱$$
$$y-z=۰$$

به راحتی دیده می‌شود که $y=z=۰$ و $x=\frac{۱}{۲}$ یك جواب دستگاه است. رتبهٔ ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

مساوی ۲ است. لذا بعد مجموعهٔ جواب مساوی ۱ است. فضای برداری جواب دستگاه همگن دارای بعد ۱ است، ویکی ازجوابها مساوی

$$y=z=۱ \text{ و } x=-\frac{۱}{۲}$$

است. بنابراین مجموعهٔ جواب دستگاه ناهمگن عبارت است ازمجموعهٔ تمام جوابهایی به صورت

$$\left(\frac{۱}{۲},۰,۰\right)+t\left(-\frac{۱}{۲},۱,۱\right)$$

که t روی تمام مجموعهٔ اعداد حقیقی تغییر می‌کند. مشاهده می‌کنیم که مجموعهٔ جواب یك خط مستقیم است.

مثال۳. یك پایهٔ فضای جواب معادلهٔ

$$۳x-۲y+z=۰$$

را به دست آورید.

فرض کنید $A=(۳,-۲,۱)$. فضای جواب عبارت‌است ازفضای برداری عمود بر A، ولذا دارای بعد ۲ است. بدیهی است که پایه‌های بسیاری برای این فضا وجود دارد. برای یافتن یکی از آنها، نخست $A=(۳,-۲,۱)$ را به یك پایه برای $\mathbf{R}^۳$ تعمیم می‌دهیم. این‌کار را با انتخاب بردارهای B و C به طوری که A، B، C مستقل خطی باشند انجام می‌دهیم. به‌عنوان مثال، قرارمی‌دهیم

$$B=(۰,۱,۰) \text{ و } C=(۰,۰,۱)$$

دراین‌صورت A، B و C استقلال خطی دارند. زیرا اگر a، b و c اعدادی باشندکه

$$aA+bB+cC=۰$$

آنگاه

$$۳a=۰$$
$$-۲a+b=۰$$
$$a+c=۰$$

از اینجا به راحتی دیده می‌شود که $a=b=c=۰$. بنابراین A، B و C مستقل خطی‌اند.
اکنون با یك این پایه را متعامدکنیم. فرض کنید

$$B'=B\cdot\frac{<B,A>}{<A,A>}A=\left(\frac{۳}{۷},\frac{۵}{۷},\frac{۱}{۷}\right)$$

$$C'=C-\frac{<C,A>}{<A,A>}\;A-\frac{<C,B'>}{<B',B'>}B'$$
$$=(۰,۰,۱)-\frac{۱}{۱۴}(۳,-۲,۱)-\frac{۱}{۳۵}(۳,۵,۱)$$

دراین‌صورت $\{B',C'\}$ یك پایهٔ فضای حواب معادلهٔ داده شده می‌باشد.

تمرینها

۱. رتبهٔ ماتریسهای زیر را به دست آورید.

(الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۷ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۲ \\ ۳ & ۴ & -۵ \end{bmatrix}$

(پ) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۲ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}$

(ت) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ -۱ & -۲ & ۲ \\ ۴ & ۸ & -۱۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

(ث) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ -۵ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۸ & -۷ \end{bmatrix}$

(ح) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ -۱ & -۲ & ۳ \\ ۴ & ۸ & -۱۲ \\ ۱ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}$

۲. فرض کنید A و B دوماتریس هستندکه می‌توانند درهم‌ضرب شوند. نشان دهیدکه

رتبهٔ $AB \leqslant$ رتبهٔ A

رتبهٔ $AB \leqslant$ رتبهٔ B

۳. فرض کنید A یك ماتریس مثلثی است. مثلاً

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ ۰ & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & & \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

فرض کنید هیچ یك از اعضای قطر آن صفر نیست. رتبهٔ A چند است؟

۴. بعد فضای جواب دستگاه معادلات زیر را به دست آورید. همچنین پایه‌ای برای این فضاهای جواب بیابید.

(الف) $۲x+y-z=۰$
$y+z=۰$

(ب) $x-y+z=۰$

(پ) $۴x+۷y-\pi z=۰$
$۲x-y+z=۰$

(ت) $x+y+z=۰$
$x-y=۰$
$y+z=۰$

۵. بعد فضای جواب دستگاه معادلات خطی زیر را بیابید.

(الف) $۲x-۳y+z=۰$
$x+y-z=۰$

(ب) $۲x+۷y=۰$
$x-۲y+z=۰$

(پ) $2x-3y+z=0$

$x+y-z=0$

$3x+4y=0$

$5x+y+z=0$

(ت) $x+y+z=0$

$2x+2y+2z=0$

۶. فرض کنید A یک بردار غیرصفر در یک فضای برداری n بعدی است. فرض کنید P نقطه‌ای در این فضاست. بعد مجموعهٔ جواب معادلهٔ زیر چند است؟

$$X\cdot A=P\cdot A$$

۷. فرض کنید $AX=B$ یک دستگاه معادلات خطی است، که در آن A یک ماتریس $m\times n$، X یک بردار با n مؤلفه، و B یک بردار با m مؤلفه است. فرض کنید که یک جواب $X=X_0$ برای دستگاه وجود دارد. نشان دهید که هر جواب دستگاه به‌صورت X_0+Y است که در آن Y یک جواب دستگاه همگن $AY=0$ است، و برعکس هر بردار به صورت X_0+Y یک جواب دستگاه است.

۴. نگاشتهای دوخطی و ماتریسها

فرض کنید U، V و W فضاهای برداری روی هیات K، و

$$g: U\times V\to W$$

یک نگاشت است. می‌گوئیم g **دوخطی** است اگر برای هر $u\in U$ نگاشت

$$v\to g(u,v)$$

وهمچنین برای هر $v\in V$ نگاشت

$$u\to g(u,v)$$

خطی باشد. شرط اول به‌صورت

$$g(u,v_1+v_2)=g(u,v_1)+g(u,v_2)$$
$$g(u,cv)=cg(u,v)$$

ومشابهاً شرط دوم به‌صورت

$$g(u_1+u_2,v)=g(u_1,v)+g(u_2,v)$$

$$g(cu,v)=cg(u,v)$$

نوشته می‌شود.

مثال. فرض کنید A یك ماتریس $m\times n$ به‌صورت $A=[a_{ij}]$ است. نگاشت

$$g_A: K^m\times K^n\rightarrow K$$

را به‌صورت

$$g_A(X,Y)={}^tXAY$$

تعریف می‌کنیم. به‌عبارت دیگر

$$g_A(X,Y)=(x_1,\cdots,x_m)\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n\end{bmatrix}$$

چون بردارهای X و Y را بردارهای ستونی درنظرمی‌گیریم، ${}^tX$ یك بردارسطری است، مطابق آنچه نمایش داده شده. دراین صورت ${}^tXA$ یك بردارسطری است، و ${}^tXAY$ یك ماتریس 1×1 یعنی یك اسکالر است. بنابراین g_A برجفت بردار X و Y را به‌یك‌عضو K می‌نگارد. یك‌چنین‌نگاشتی درخواصی شبیه‌آنچه درمورد حاصلضرب اسکالر گفته شد صدق می‌کند. اگر X را ثابت نگه داریم آنگاه نگاشت $Y\rightarrow{}^tXAY$ یك نگاشت خطی است، و اگر Y را ثابت بگیریم، آنگاه نگاشت $X\rightarrow{}^tXAY$ یك نگاشت خطی است. به‌عبارت دیگر، وقتی X ثابت است داریم

$$g_A(X,Y+Y')=g_A(X,Y)+g_A(X,Y')$$
$$g_A(X,cY)=cg_A(X,Y)$$

هنگامی‌که Y ثبت است روابط مشابهی داریم. این مطلب یك دوباره‌نویسی خواص ضرب ماتریسهاست، مثلاً

$${}^tXA(Y+Y')={}^tXAY+{}^tXAY'$$
$${}^tXA(cY)=c\,{}^tXAY$$

مناسب‌تر است که حاصل‌ضرب ${}^tXAY$ را به‌صورت یك مجموع بنویسیم. توجه کنید که

$$^tXA=\left(\sum_{i=1}^{m}x_ia_{i1},\cdots,\sum_{i=1}^{m}x_ia_{in}\right)$$

و بنابراین

$$^tXAY=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_i\,a_{ij}y_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\,x_iy_j$$

مثال. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

اگر $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ و $Y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$، آنگاه

$$^tXAY=x_1y_1+2x_1y_2+3x_2y_1-x_2y_2$$

قضیهٔ ۱۰۴. نگاشت دوخطی $g: K^m\times K^n\to K$ داده شده‌است. دراین‌صورت یك ماتریس منحصر به‌فرد A وجود دارد به‌طوری‌که $g=g_A$، یعنی

$$g(X,Y)={}^tXAY$$

مجموعهٔ نگاشتهای دوخطی از $K^m\times K^n$ در K یك فضای برداری است که با $\mathrm{Bil}(K^m\times K^n,K)$ نمایش می‌دهیم، وتناظر

$$A\to g_A$$

یك یکریختی بین $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ و $\mathrm{Bil}(K^m\times K^n,K)$ است.

اثبات. نخست عبارت اول را ثابت می‌کنیم، یعنی ابتدا وجود ماتریس منحصر به‌فرد A را نشان می‌دهیم به‌طوری‌که $g=g_A$. این عبارت شبیه عبارتی است که نگاشتهای خطی را با ماتریسها نمایش می‌دهد، واثبات آن تعمیمی از اثباتهای قبلی است. به‌خاطر آورید که ما از پایهٔ استاندارد K^n وهمچنین با استفاده‌ازمختصات، نتایج قبلی را ثابت کردیم. اینجا هم همان‌کار را می‌کنیم. فرض‌کنید E^1،...، E^m بردارهای یکه‌ای استاندارد برای K^m، و U^1،...، U^n بردارهای یکه‌ای استاندارد برای K^n هستند. دراین صورت می‌توانیم هر بردار $X\in K^m$ را به‌صورت

$$X=\sum_{i=1}^{m}x_iE^i$$

وهر بردار $Y\in K^n$ را به‌صورت

$$Y=\sum_{j=1}^{n} y_j U^j$$

نمایش دهیم. دراین صورت داریم

$$g(X,Y)=g(x_1E^1+\cdots+x_mE^m\ ,\ y_1U^1+\cdots+y_nU^n)$$

اگرخاصیت خطی نسبت به‌مؤلفه اول را به‌کاربریم داریم

$$g(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}x_i g(E^i\ ,\ y_1U^1+\cdots+y_nU^n)$$

همچنین با توجه به‌خاصیت خطی نسبت به‌مؤلفهٔ دوم داریم

$$g(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n} x_i y_j g(E^i,U^j)$$

فرض‌کنید $a_{ij}=g(E^i,U^j)$. دراین‌صورت

$$g(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_i y_j$$

این عبارت دقیقاً همان عبارت حاصل ازحاصلضرب

$${}^tXAY$$

است به‌طوری‌که A ماتریس $[a_{ij}]$ باشد، بنابراین تساوی $g=g_A$ با فرض $A=[a_{ij}]$ ثابت می‌شود.

یکتایی آن را نیز به‌سادگی می‌توان نشان داد. فرض‌کنید B یك‌ماتریس است به‌طوری‌که $g=g_B$. دراین صورت برای تمام بردارهای X و Y داریم

$${}^tXAY={}^tXBY$$

از اینجا نتیجه می‌شودکه برای هر X و Y داریم

$${}^tX(A-B)Y=0$$

فرض‌کنید $B=A-B$. بنابراین رابطهٔ فوق به‌صورت

$${}^tXCY=0$$

نوشته می‌شود. فرض‌کنید $C=[c_{ij}]$. باید ثابت‌کنیم‌که $c_{ij}=0$. معادلهٔ بالا برای تمام X و Yها به‌ویژه برای $X=E^k$ و $Y=U^l$ (بردارهای یکه) درست است. اما با این انتخابها داریم

$$o = {}^tE^kCU^l = c_{kl}$$

بنا بر این به‌ازای هر k و l داریم $c_{kl} = 0$، و به‌این ترتیب اثبات عبارت اول کامل می‌شود.
اثبات عبارت دوم، یعنی یکریختی بین فضای ماتریسها وفضای نگاشتهای دوخطی را به‌عنوان تمرین واگذارمی‌کنیم. تمرین ۳ و ۴ را ببینید.

تمرینها

۱. فرض کنید A یك ماتریس $n \times n$ متقارن است، یعنی $A = {}^tA$. فرض کنید $g_A : K^n \times K^n \to K$ نگاشت دوخطی متناظر به‌آن است. نشان دهیدکه به‌ازای هر X و Y متعلق به K^n داریم

$$g_A(X,Y) = g_A(Y,X)$$

و بنا بر این g_A یك حاصلضرب اسکالر است، یعنی در شرایط ۱، ۲، ۳ صدق می‌کند.

۲. برعکس، فرض کنیدکه A یك ماتریس $n \times n$ است به‌طوری‌که برای هر X و Y داریم

$$g_A(X,Y) = g_A(Y,X)$$

نشان دهیدکه A متقارن است.

۳. نشان دهیدکه نگاشتهای دوخطی $K^n \times K^m$ در K تشکیل یك فضای برداری می‌دهند. به‌طورکلی، فرض کنید $\mathrm{Bil}(U \times V, W)$ مجموعهٔ نگاشتهای دوخطی از $U \times V$ در W است. نشان دهیدکه $\mathrm{Bil}(U \times V, W)$ یك فضای برداری است.

۴. نشان دهیدکه تناظر $A \to g_A$ یك یکریختی بین فضای برداری ماتریسهای $n \times n$ و فضای برداری نگاشتهای دوخطی $K^m \times K^n$ در K است.

توجه. درحساب دیفرانسیل وانتگرال، اگر f یك تابع n متغیری باشد، می‌توان به f یك ماتریس متشکل ازمشتقات جزیی مرتبهٔ دوم

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial y_j}\right)$$

وابسته کردکه یك ماتریس متقارن است. این ماتریس معرف مشتق دوم است؛ که یك نگاشت

دوخطی است.

۵. عبارت ${}^tXAY$ را برای هریك ازماتریسهای زیر وهمچنین بردارهای X و Y با ابعاد مناسب، برحسب مختصات بیان کنید.

(الف) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

(پ) $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ \pi & 7 \end{bmatrix}$ (ت) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

(ث) $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 1 & \frac{2}{3} & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

۶. فرض کنید

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وتعریف کنید $g(X,Y)={}^tXCY$. دو بردار $X,Y\in\mathbf{R}^3$ را بیابید به‌طوری‌که

$$g(X,Y)\neq g(Y,X)$$

۵. پایه‌های متعامد عام

فرض‌کنید V یك فضای برداری بـا بعد متناهی روی هیات K بـا یك حاصلضرب اسکالر است. لازم نیست که این حاصلضرب اسکالرمعین مثبت باشد، اما مثالهای جالبی بااین نوع حاصل‌ضرب وجود دارند، حتی روی هیات اعداد حقیقی. بـه‌عنوان مثال، می‌توان حاصل‌ضرب دوبـردار $X=(x_1,x_2)$ و $Y=(y_1,y_2)$ را به‌صورت $x_1y_1-x_2y_2$ تعریف کرد. دراین صورت

$$\langle X,X\rangle=x_1^2-x_2^2$$

چنین حاصلضربهایی در بسیاری ازکاربردهـای ریاضی پیش می‌آیند، مثلاً درفیزیك وقتی حاصلضرب بردارهای ۴ بعدی مورد بررسی قرارمی‌گیرند به‌طوری‌که اگر

$$X=(x,y,z,t)$$

آنگاه

$$\langle X,X\rangle = x^{2}+y^{2}+z^{2}-t^{2}$$

دراین‌قسمت، مشاهده خواهیم کرد که چه‌فضاهایی درارتباط با پایه‌های متعامدخواهیم داشت.

فرض کنید V یك‌فضای برداری با بعد متناهی روی هیات K با یك حاصل‌ضرب اسکالر است. اگر W یك زیرفضای V باشد، آنگاه همیشه نمی‌توان V را به‌صورت جمع مستقیم W و $W^{\perp}$ نوشت. زیرا ممکن‌است بردارهایی مانند $v\in V$ وجود داشته باشند به‌طوری که $\langle v,v\rangle = 0$. به‌عنوان مثال روی هیات اعداد مختلط $(1,i)$ چنین برداری است. قضیهٔ مربوط به‌یك پایهٔ متعامد هنوز برقرار است. این قضیه را با یك‌تغییرات مناسب دراستدلال بخش قبل ثابت خواهیم کرد.

با توضیحاتی شروع می‌کنیم. نخست، فرض کنید که برای هرعضو u متعلق به V داریم $\langle u,u\rangle = 0$. در این صورت حاصلضرب اسکالر را **حاصلضرب پوچ**، و V را **فضای پوچ** می‌نامیم. علت این نامگذاری این است که به‌ازای هر v و w متعلق به V داریم $\langle v,w\rangle = 0$، زیرا

$$\langle v,w\rangle = \frac{1}{2}\,[\langle v+w\ ,\ v+w\rangle - \langle v,v\rangle - \langle w,w\rangle]$$

طبق فرض طرف راست تساوی فوق صفر است. دراین صورت هرپایهٔ V یك پایهٔ متعامد است.

قضیهٔ ۱۰۵. فرض کنید V یك‌فضای برداری با بعد متناهی روی هیات K با یك‌حاصلضرب اسکالر است. اگر $V\neq\{O\}$، آنگاه V دارای یك‌پایهٔ متعامد است.

اثبات. قضیه را با استقراء روی بعد V ثابت می‌کنیم. اگر V دارای بعد ۱ باشد، آنگاه هر بردارغیرصفر V یك‌پایهٔ متعامد V است وبنابراین حکم به‌وضوح برقرار است.

اکنون فرض کنید $\dim V = n > 1$. دوحالت پیش می‌آید:

حالت ۱. برای هر $u\in V$ داریم $\langle u,u\rangle = 0$. دراین صورت هرپایهٔ V یك‌پایهٔ متعامد است.

حالت ۲. یك‌بردار $v_{1}\in V$ وجوددارد به‌طوری که $\langle v_{1},v_{1}\rangle \neq 0$. دراین‌صورت همان روش به‌کاررفته درحالت معین‌مثبت، یعنی روش‌متعامدسازی گرام‌ـ اشمیت را به‌کارمی‌بریم.

در حقیقت ثابت می‌کنیم که اگر v_1 یک عضو V باشد به‌طوری که $\langle v_1,v_1\rangle\neq 0$، و اگر V_1 زیرفضای ۱ بعدی تولید شده توسط v_1 باشد، آنگاه V جمع مستقیم V_1 و $V_1^{\perp}$ خواهد بود. فرض کنید $v\in V$، و فرض کنید c طبق معمول مساوی

$$c=\frac{\langle v,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}$$

باشد. در این صورت $v-cv_1$ متعلق به $V_1^{\perp}$ است، و لذا عبارت

$$v=(v-cv_1)+cv_1$$

نشان می‌دهد که V جمع V_1 و $V_1^{\perp}$ است. این جمع مستقیم است، زیرا $V_1\cap V_1^{\perp}$ یک زیرفضای V_1 است، که نمی‌تواند مساوی V_1 باشد (زیرا $\langle v_1,v_1\rangle\neq 0$)، و لذا باید مساوی $\{O\}$ باشد زیرا V_1 یک بعدی است. چون $\dim V_1^{\perp}<\dim V$، می‌توانیم عمل را برای فضای $V_1^{\perp}$ تکرار کنیم، به‌عبارت دیگر استقراء را به‌کار بریم. به‌این ترتیب یک پایهٔ $\{v_2,\dots,v_n\}$ برای $V_1^{\perp}$ به‌دست می‌آوریم. این نشان می‌دهد که $\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایهٔ متعامد V است.

مثال ۱. در $\mathbf{R}^2$، فرض کنید $X=(x_1,x_2)$ و $Y=(y_1,y_2)$. حاصلضرب این دو بردار را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle X,Y\rangle=x_1y_1-x_2y_2$$

در این صورت (۱,۰) و (۰,۱) یک پایهٔ متعامد برای این حاصلضرب هم تشکیل می‌دهند. به‌هر حال، (۱,۲) و (۲,۱) هم تشکیل یک پایهٔ متعامد نسبت به‌این حاصلضرب می‌دهند، ولی این پایه یک پایهٔ متعامد نسبت به‌حاصلضرب نقطه‌ای معمولی نیست.

مثال ۲. فرض کنید V زیرفضایی از $\mathbf{R}^3$ پدیده آمده به‌وسیلهٔ بردارهای $A=(1,2,1)$ و $B=(1,1,1)$ است. اگر $X=(x_1,x_2,x_3)$ و $Y=(y_1,y_2,y_3)$ بردارهایی از $\mathbf{R}^3$ باشند، حاصل‌ضرب آنها را به‌صورت

$$\langle X,Y\rangle=x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3$$

تعریف می‌کنیم. می‌خواهیم یک پایهٔ متعامد V را نسبت به‌این حاصلضرب به‌دست آوریم. توجه دارید که $\langle A,A\rangle=1-4-1=-4\neq 0$. فرض می‌کنیم $v_1=A$. در این صورت می‌توانیم B را متعامد کنیم. برای این منظور قرار می‌دهیم

$$c=\frac{<B,A>}{<A,A>}=\frac{۱}{۲}$$

و $v_۲=B-\frac{۱}{۲}A$. دراین صورت $\{v_۱,v_۲\}$ یك‌پایهٔ متعامد V نسبت به‌پایهٔ داده شده است.

تمرینها

۱. درهریك ازحالتهای زیر، یك‌پایهٔ متعامد برای زیرفضایی از $\mathbf{R}^۳$ که به‌وسیلهٔ بردارهای A و B تولید می‌شوند را نسبت به‌حاصلضرب اسکالر $X\cdot Y$ داده شده به‌دست آورید.

(الف) $A=(۱,۱,۱)$ ، $B=(۱,-۱,۲)$

$$X\cdot Y=x_۱y_۱+۲x_۲y_۲+x_۳y_۳$$

(ب) $A=(۱,-۱,۳)$ ، $B=(-۱,۱,۳)$

$$X\cdot Y=x_۱y_۱-۳x_۲y_۲+x_۱y_۳+y_۱x_۳-x_۳y_۲-x_۲y_۳$$

۲. یك‌پایهٔ متعامد برای فضای $\mathbf{C}^۲$ روی $\mathbf{C}$ با حاصلضرب اسکالر

$$X\cdot Y=x_۱y_۱-ix_۲y_۱-ix_۱y_۲-۲x_۲y_۲$$

به‌دست آورید.

۳. سؤال مسألهٔ ۲ را وقتی حاصلضرب اسکالر به‌صورت زیر است، جواب دهید

$$X\cdot Y=x_۱y_۲+x_۲y_۱+۴x_۱y_۱$$

۶. فضای دوگان وحاصلضربهای اسکالر

این قسمت فقط نامی برای بعضی علامتها وخواص‌که قبلاً درحالت عام‌ترمورد بررسی‌قرار دادیم معرفی می‌کند. اما حالت ویژه‌ای‌که بررسی می‌گردد مهم است.

فرض‌کنید V یك فضای برداری روی هیات K است. می‌توانیم K را به‌عنوان یك فضای برداری ۱ بعدی روی خودش درنظر بگیریم. مجموعهٔ‌تمام نگاشتهای خطی V در K

را **فضای دوگان** V نامیده و با V^* نمایش می‌دهیم. پس طبق تعریف

$$V^* = \mathcal{L}(V,K)$$

اعضای فضای دوآل را معمولاً **فرم خطی** می‌نامیم.

فرض کنید که V یک‌فضای برداری n بعدی است. دراین‌صورت V با K^n یکریخت است. به‌عبارت دیگر، بعد از انتخاب یک‌پایه، می‌توانیم به‌هرعضو V بردارمختصاتی آن را در K^n وابسته‌کنیم. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $V = K^n$.

طبق آنچه درفصل ۴ بخشهای ۲ و۳ دیدیم، به‌ازای هرفرم خطی

$$\varphi : K^n \to K$$

یک عضو منحصر به‌فرد $A \in K^n$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\varphi(X) = A \cdot X \quad , \quad \forall X \in K^n$$

بنابراین $\varphi = L_A$. همچنین دیدیم که تناظر

$$A \to L_A$$

یک‌نگاشت خطی است، وبنابراین این تناظر یک یکریختی بین K^n و V^* است. به‌ویژه:

قضیهٔ ۱.۶. فرض‌کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی است. در این صورت $\dim V^* = \dim V$.

مثال ۱. فرض‌کنید $V = K^n$. فرض کنید $\varphi : K^n \to K$ نگاشت تصویر روی مؤلفهٔ اول است. یعنی

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = x_1$$

φ یک‌فرم خطی است. مشابهاً به‌ازای هر $i = 1,\dots,n$ یک‌فرم خطی φ_i داریم:

$$\varphi_i(x_1,\dots,x_n) = x_i$$

این فرمهای خطی **توابع مختصاتی** هستند.

فرض‌کنید V یک فضای برداری n بعدی است. فرض‌کنید $\{v_1,\dots,v_n\}$ یک‌پایهٔ V است. هرعضو v را برحسب مختصاتش می‌نویسیم

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

برای هر i فرض می‌کنیم

$$\varphi_i : V \to K$$

یك‌فرم خطی باشد که به‌صورت

$$\varphi_i(v_i) = ۱ \ , \ \varphi_i(v_j) = ۰ \ , \ i \neq j$$

تعریف می‌شود. دراین صورت

$$\varphi_i(v) = x_i$$

فرمهای خطی $\{\varphi_۱, \dots, \varphi_n\}$ تشکیل یك‌پایه برای V^* می‌دهند، و به **پایهٔ دوگان** $\{v_۱, \dots, v_n\}$ موسومند.

مثال۲. فرض‌کنید V یك‌فضای برداری روی K با یك حاصلضرب اسکالر است. فرض‌کنید $v_۰$ یك‌عضو V است. نگاشت

$$v \to (v, v_۰) \ , \ v \in V$$

یك‌فرم خطی است، که بلافاصله از تعریف حاصلضرب اسکالر نتیجه می‌شود.

مثال۳. فرض‌کنید V فضای برداری توابع حقیقی پیوسته روی فاصلهٔ $[۰,۱]$ است. فرم خطی $L : V \to \mathbf{R}$ را به‌صورت

$$L(f) = \int_۰^۱ f(t)\,dt \ , \quad f \in V$$

تعریف می‌کنیم. خواص استاندارد انتگرال نشان می‌دهد که L یك‌نگاشت خطی است. اگر $f_۰$ یك‌عضو ثابت V باشد، آنگاه نگاشت

$$f \to \int_۰^۱ f_۰(t) f(t)\,dt$$

نیز یك‌فرم خطی روی V است.

مثال۴. فرض‌کنید V مطابق‌مثال۳ است. فرض‌کنید $\delta: V \to \mathbf{R}$ نگاشتی باشدکه به‌صورت $\delta(f) = f(۰)$ تعریف می‌شود. دراین‌صورت δ یك‌فرم خطی‌است، که به **فرم خطی دیراك** موسوم است.

مثال۵. فرض‌کنید V یك فضای برداری روی هیات اعداد مختلط است، وفرض‌کنیدکه V مجهز به‌یك حاصلضرب هرمیتی است. فرض‌کنید $v_۰$ یك‌عضو V است. نگاشت

$$v \to \langle v, v_۰ \rangle \ , \ v \in V$$

یك فرم خطی است. اما نگاشت $v \to <v_\circ, v>$ یك فرم خطی نیست. درواقع برای هر $\alpha \in C$ داریم

$$<v_\circ, \alpha v> = \bar{\alpha} <v_\circ, v>$$

لذا این نگاشت خطی نیست. گاهی این نگاشت را **پاد خطی** یا **نیم خطی** می‌نامند.

فرض کنید V یك فضای برداری روی هیات K با یك حاصلضرب اسکالر است. به‌هر عضو $v \in V$ می‌توانیم یك نگاشت خطی L_v درفضای دوگان وابسته کنیم که به‌صورت

$$L_v(w) = <v, w> \quad , \quad \forall w \in V$$

تعریف می‌شود. اگر $v_1, v_2 \in V$، آنگاه $L_{v_1+v_2} = L_{v_1} + L_{v_2}$. اگر $c \in K$، آنگاه $L_{cv} = cL_v$. این روابط لزوماً بیان دوبارهٔ تعریف ضرب اسکالر است. بنابراین نگاشت

$$v \to L_v$$

یك نگاشت خطی از V درفضای دوآل V^* است. قضیهٔ بعدی خیلی مهم است.

قضیهٔ ۲۰۶. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات K بایك حاصلضرب اسکالر ناتباهیده است. دراین صورت نگاشت

$$v \to L_v$$

یك یکریختی از V درفضای دوگان V^* است.

اثبات. دیدیم که این نگاشت خطی است. فرض کنید $L_v = o$. پس به‌ازای هر $w \in V$ داریم $<v, w> = \circ$. طبق تعریف ناتباهیده، نتیجه می‌شود که $v = o$. لذا نگاشت $v \to L_v$ یك به‌یك است. چون $\dim V = \dim V^*$. ازقضیهٔ ۳.۳ نتیجه می‌شود که این نگاشت یك یکریختی است.

دراین قضیه، می‌گوئیم بردار v فرم خطی L را نسبت به حاصلضرب اسکالر ناتباهیده **مشخص** می‌کند.

مثال. فرض کنید $V = K^n$ با ضرب نقطه‌ای است، یعنی

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

این حاصلضرب ناتباهیده است. اگر

$$\varphi : V \to K$$

یك نگاشت خطی باشد، آنگاه یك بردار منحصر به فرد $A\in K^n$ وجود دارد بـه طوری‌که برای هر $H\in K$ داریم

$$\varphi(H)=A\cdot H$$

مثالهایی از حساب دیفرانسیل و انتگرال. فرض‌کنید U یك مجموعهٔ باز $\mathbf{R}^n$ است، وفرض کنید

$$f:U\longrightarrow \mathbf{R}$$

یك نگاشت مشتق‌پذیر است. در حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیری، این مطلب بدین معناست‌که برای هر نقطهٔ $X\in\mathbf{R}^n$ یك تابع $g(H)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای بردارهای کوچك H داریم

$$\lim_{H\longrightarrow \circ} g(H)=\circ$$

ویك نگاشت خطی $L:\mathbf{R}^n\longrightarrow \mathbf{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f(X+H)=f(X)+L(H)+||H||g(H)$$

طبق بررسی بالا، یك بردار منحصر به‌فرد $A\in\mathbf{R}^n$ وجود دارد به‌طوری‌که $L=L_A$، یعنی

$$f(X+H)=f(X)+A\cdot H+||H||g(H)$$

درواقع، این بردار A بردارمشتقات جزیی است

$$A=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

و A به **گرادیان** f درنقطهٔ X موسوم است. بنابراین فرمول رامی‌توان به‌صورت

$$f(X+H)=f(X)+(\mathrm{grad}\ f)(X)\cdot H+||H||g(H)$$

نوشت. بردار $(\mathrm{grad}\ f)(X)$ معرف فرم‌خطی $L:\mathbf{R}^n\longrightarrow \mathbf{R}$ است. فرم خطی L معمولاً با $f'(X)$ نمایش داده می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت

$$f(X+H)=f(X)+f'(X)H+||H||g(H)$$

فرم خطی L مشتق f درنقطهٔ X نامیده می‌شود.

قضیهٔ ۶.۳ فرض‌کنید V یك فضای برداری n بعدی است. فرض‌کنید W یك زیرفضای V و

$$W^{\perp}=\{\varphi\in V^*|\varphi(W)=\circ\}$$

دراین صورت

$$\dim W + \dim W^{\perp} = n$$

اثبات. اگر $W=\{o\}$، قضیه به‌وضوح برقرار است. فرض کنید $W\neq\{o\}$، و فرض کنید $\{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ یك پایهٔ W است. این پایه را به یك پایهٔ

$$\{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n\}$$

فضای V تعمیم می‌دهیم. فرض کنید $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ پایهٔ دوگان آن است. اکنون نشان می‌دهیم که $\{\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n\}$ یك پایهٔ $W^{\perp}$ است. در واقع، $\varphi_j(W)=0$ اگر $j=r+1, \dots, n$، و بنا براین $\{\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n\}$ یك پایهٔ زیرفضای $W^{\perp}$ است. برعکس، فرض کنید $\varphi\in W^{\perp}$. می‌نویسیم

$$\varphi = a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n$$

چون $\varphi(W)=0$، داریم

$$\varphi(w_i) = a_i = 0 \quad , \quad i=1, \dots, r$$

لذا φ درزیرفضای تولید شده توسط φ_{r+1}، ...، φ_n قراردارد. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

فرض کنید V یك فضای برداری n بعدی با یك حاصلضرب اسکالر ناتباهیده است. در قضیهٔ ۲.۶ مشاهده کردیم که نگاشت

$$v \longmapsto L_v$$

یك یکریختی بین V و V^* است. فرض کنید W یك زیرفضای V است. دراین صورت دو مکمل متعامد ممکن برای W داریم:

اولاً، تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{Per} P_V(W) = \{v\in V \mid \langle v, w\rangle = 0, \forall w\in W\}$$

ثانیاً، می‌توانیم تعریف کنیم

$$\operatorname{Per} P_{V^*}(W) = \{\varphi\in V^* \mid \varphi(W) = 0\}$$

نگاشت

$$v \longmapsto L_v$$

قضیهٔ ۲.۶ یك یکریختی

$$\operatorname{Per} P_V(W) \xrightarrow{\approx} \operatorname{Per} P_{V_\circ}(W)$$

است. بنابراین به‌عنوان نتیجه‌ای‌از قضیهٔ ۳.۶ داریم:

قضیهٔ ۴.۶. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی و با یك حاصلضرب اسکالر ناتباهیده است. فرض کنید W یك زیر فضای V است. فرض کنید $W^{\perp}$ زیر فضایی از V متشکل از تمام اعضای $v \in V$ است به طوری که به ازای هر $w \in W$ ، $\langle v,w\rangle = \circ$. دراین صورت

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$$

این مطلب قضیهٔ ۱.۳، که برای مطالعهٔ معادلات خطی‌مورد نیازاست را ثابت می‌کند. دراین‌کاربرد ویژه، فرض می‌کنیم حاصلضرب اسکالر، ضرب نقطه‌ای معمولی است. بنابراین اگر W یك زیرفضای K^n و

$$W^{\perp} = \{X \in K^n \mid X \cdot Y = \circ, \forall Y \in W\}$$

آنگاه

$$\dim W + \dim W^{\perp} = n$$

تمرینها

۱. فرض‌کنید A و B دوبردار مستقل خطی در $\mathbf{R}^n$ هستند. بعد فضای عمود بر این دوبردار چند است؟

۲. فرض‌کنید A و B دوبردار مستقل خطی در $\mathbf{C}^n$ است. بعد زیـرفضای $\mathbf{C}^n$ که بـرهردو بردار A و B عمود باشد چند است؟

۳. فرض‌کنید W زیرفضایی از $\mathbf{C}^3$ است که به‌وسیلهٔ بردار $(1, i, \circ)$ تولید می‌شود. یك‌پایه برای زیرفضای $W^{\perp}$ از $\mathbf{C}^3$ (نسبت به ضرب نقطه‌ای معمولی بردارها) به‌دست آورید.

۴. فرض‌کنید V یك فضای برداری n بعدی روی هیات K است. فرض کنید φ یك فرم خطی روی V است، و $\varphi \neq o$. بعد هستهٔ φ چند است؟ ثابت کنید.

۵. فرض‌کنید V یك فضای برداری روی هیات K است. فرض‌کنید ψ و φ دو فرم خطی غیرصفر روی V هستند. فرض کنیدکه هیچ عضو $c \in K$، $c \neq o$ وجود ندارد به طوری که $\psi = c\varphi$. نشان دهیدکه $(\operatorname{Ker}\varphi) \cap (\operatorname{Ker}\psi)$ دارای بعد $n-۲$ است.

۶. فرض‌کنید V یك فضای برداری n بعدی روی هیات K است. فرض کنید V^{**} فضای دوگان V^* است. نشان دهیدکه هرعضو $v \in V$ منجر به‌یك عضو λ_v در V^{**} می‌شود ونگاشت $v \rightarrow \lambda_v$ یك یکریختی از V در V^{**} است.

۷. فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات K است‌که مجهز به یك حاصلضرب اسکالر ناتباهیده می‌باشد. فرض کنید W یك زیرفضای V است. نشان دهیدکه $W^{\perp\perp} = W$.

۷. فرمهای درجه دوم

یك حاصلضرب اسکالر روی یك فضای برداری را یك **فرم دوخطی متقارن** نیز می‌نامند. کلمهٔ «متقارن» به خاطرشرط ۱ فصل ۴ وکلمهٔ «دوخطی» به‌خاطرشرط ۲ و۳همان فصل است. کلمهٔ «فرم» به خاطر اینکه مقدار نگاشت

$$(v,w) \rightarrow \langle v,w \rangle$$

اسکالراست مورد استفاده قرار می‌گیرد. یك چنین حاصلضرب اسکالری را معمولاً با یك حرف، شبیه تابع

$$g : V \times V \rightarrow K$$

نمایش می‌دهند. بنابراین می‌توان نوشت

$$g(v,w) = \langle v,w \rangle$$

فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات K است. فرض‌کنید $g = \langle , \rangle$ یك حاصلضرب اسکالر روی V است. منظور از **فرم درجه دوم** تعیین شده به وسیلهٔ g، تابع

$$f : V \rightarrow K$$

است به طوری که $f(v)=g(v,v)=\langle v,v\rangle$،

مثال ۱. اگر $V=K^n$، آنگاه $f(X)=X\cdot X=x_1^2+\dots+x_n^2$ فرم درجه دوم تعیین شده توسط ضرب نقطه‌ای معمولی است.

درحالت کلی، اگر $V=K^n$ و C یك ماتریس متقارن با درایه‌های متعلق به K باشد، که درنتیجه یك فرم دوخطی متقارن رامعرفی می‌کند، آنگاه فرم درجه دوم وابسته به عنوان تابعی از X به‌صورت

$$f(X)={}^tXCX=\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}x_ix_j$$

تعریف می‌شود. اگر C یك ماتریس قطری به‌صورت

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

باشد، آنگاه فرم درجه دوم دارای عبارت سادهٔ زیراست:

$$f(X)=c_1x_1^2+\dots+c_nx_n^2$$

فرض کنید V یك فضای برداری بـا بعد متناهی روی هیات K است. فرض کنید g یك حاصلضرب اسکالر، و f فرم درجه دوم آن‌است. دراین‌صورت می‌توانیم مقادیر g را برحسب f بیان کنیم، زیرا برای $v,w\in V$ داریم

$$\boxed{\langle v,w\rangle=\frac{1}{4}\left[\langle v+w,v+w\rangle-\langle v-w,v-w\rangle\right]}$$

یا

$$g(v,w)=\frac{1}{4}[f(v+w)-f(v-w)]$$

همچنین فرمول زیر راهم داریم

$$\boxed{\langle v,w\rangle=\frac{۱}{۲}[\langle v+w,v+w\rangle-\langle v,v\rangle-\langle w,w\rangle]}$$

اثبات ساده است.کافی است بااستفاده ازخواص نگاشت دوخطی‌طرف راست رابسط دهیم. به‌عنوان مثال، برای فرمول دوم، داریم

$$\begin{aligned}&\langle v+w,v+w\rangle-\langle v,v\rangle-\langle w,w\rangle\\&=\langle v,v\rangle+۲\langle v,w\rangle+\langle w,w\rangle-\langle v,v\rangle-\langle w,w\rangle\\&=۲\langle v,w\rangle\end{aligned}$$

تساوی اول رابه عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

مثال۲. فرض کنید $V=\mathbf{R}^{۲}$ و $X=(x,y)$، معرف اعضای $\mathbf{R}^{۲}$ باشد. تابع f به‌طوری‌که

$$f(x,y)=۲x^{۲}+۳xy+y^{۲}$$

یك فرم درجه دوم است. فرض‌کنید بخواهیم ماتریس فرم دوخطی متقارن g را بـه دست آوریم. این ماتریس رابه صورت

$$C=\begin{bmatrix}a&b\\b&d\end{bmatrix}$$

می‌نویسیم، وباید داشته باشیم

$$f(x,y)=(x,y)\begin{bmatrix}a&b\\b&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر

$$۲x^{۲}+۳xy+y^{۲}=ax^{۲}+۲bxy+dy^{۲}$$

ازاینجا نتیجه می‌شودکه $a=۲$، $۲b=۳$ و $d=۱$. بنابراین ماتریس بـه صورت زیـر است:

$$C=\begin{bmatrix}۲&\frac{۳}{۲}\\\frac{۳}{۲}&۱\end{bmatrix}$$

کاربرد درحساب دیفرانسیل وانتگرال. فرض‌کنید $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ تابعی باشدکه دارای مشتقات نسبی مرتبهٔ ۱ و ۲ است ومشتقات نسبی آن پیوسته هستند. فرض‌کنیدکه

$$f(tX)=t^{2}f(X)\ ,\ \ \forall X\in\mathbf{R}^n$$

دراین صورت f یك فرم درجه دوم است. درنتیجه یك ماتریس متقارن $A=[a_{ij}]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f(X)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

البته اثبات آن نیازبه حساب دیفرانسیل وانتگرال توابع چند متغیری دارد. به‌عنوان مثال، می‌توانید به‌کتاب نویسنده دراین مورد مراجعه‌کنید.

تمرینها

۱. فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی‌روی هیات K است. فرض‌کنید $f:V\to K$ یك تابع، وهمچنین فرض‌کنیدکه تابع g تعریف شده با

$$g(v,w)=f(v+w)-f(v)-f(w)$$

یك نگاشت دو خطی است. فرض‌کنیدکه $f(av)=a^{2}f(v)$ و $\forall v\in V$ و $\forall a\in K$. نشان دهیدکه f یك فرم درجه دوم است، وفرم دوخطی حاصل‌ازآنرا به‌دست آورید. نشان‌دهید که فرم دوخطی منحصربه فرداست.

۲. ماتریس وابسته به فرم درجه دوم

$$f(X)=x^{2}-3xy+4y^{2}$$

$X=(x,y,z)$، چیست؟

۳. فرض‌کنید x_1، x_2، x_3، x_4 مؤلفه‌های یك بردار X و y_1، y_2، y_3، y_4 مؤلفه‌های بردار Y است. فرمهای دوخطی وابسته به‌هریك ازفرمهای درجه دوم زیر رابرحسب این مؤلفه‌ها بنویسید.

(الف) x_1x_2 (ب) $x_1x_3+x_4^2$

(پ) $2x_1x_2-x_3x_4$ (ت) $x_1^2-5x_2x_3+x_4^2$

۴. نشان دهیدکه اگر f_1 فرم‌درجه دوم‌فرم دوخطی g_1، و f_2 فرم درجه دوم فرم‌دوخطی g_2 باشد، آنگاه f_1+f_2 فرم درجه دوم فرم دوخطی g_1+g_2 است.

۸. قضیهٔ سیلوستر

فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت اعداد حقیقی است. فرض کنید $<,>$ یک حاصلضرب اسکالر روی V است. مطابق آنچه ازقضیهٔ ۱.۵ می‌دانیم می‌توانیم همیشه یک پایهٔ متعامد برای V به دست آوریم. حاصلضرب اسکالر V لازم نیست معین‌مثبت باشد، و لذا ممکن‌است بردار $v\in V$ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که $<v,v>=0$، یا $<v,v>=-1$.

مثال. فرض کنید $V=\mathbf{R}^2$، وفرض کنید فرم موردنظر باماتریس زیرمعرفی می‌شود:

$$C=\begin{bmatrix}-1 & +1\\ +1 & -1\end{bmatrix}$$

دراین‌صورت بردارهای

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \text{ و } v_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

تشکیل یک پایهٔ متعامد برای این فرم می‌دهند، وداریم

$$<v_1,v_1>=-1 \text{ و } <v_2,v_2>=0$$

به‌عنوان مثال، برحسب مختصات، اگر $X=(1,1)^t$ مؤلفه‌های برداری مثل v_2 نسبت به پایهٔ استاندارد $\mathbf{R}^2$ باشد، آنگاه یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهدکه

$$<X,X>={}^tXCX=0$$

هدف مادراین‌بخش تجزیه وتحلیل حالت عمومی درابعاد دلخواه است.

فرض کنید $\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایهٔ متعامد V است. فرض کنید

$$C_i=<v_i,v_i>$$

بعداز شماره‌گذاری مجدداعضای پایه درصورت لزوم، می‌توانیم فرض کنیم که $\{v_1,\dots,v_n\}$

چنان مرتب شده‌اندکه:

$$c_1, c_2, \dots, c_r > 0$$

$$c_{r+1}, \dots, c_s < 0$$

$$c_{s+1}, \dots, c_n = 0$$

درمیان «مربعات» $\langle v_i, v_i \rangle$ به تعداد جملات مثبت، جملات منفی، و تعداد جملات صفر علاقه‌مندیم. دراین‌بخش خواهیم دیدکه این تعداد بستگی به‌انتخاب پایهٔ متعامد ندارد.

اگر X بردار مختصاتی یك عضو V نسبت به پایهٔ انتخابی، واگر f فرم درجه دوم وابسته به حاصلضرب اسکالر باشد، آنگاه نسبت به بردار مختصاتی، داریم

$$f(X) = c_1 x_1^2 + \dots + c_r x_r^2 + c_{r+1} x_{r+1}^2 + \dots + c_s x_s^2$$

مشاهده می‌کنیم که درعبارت f برحسب مختصات، دقیقاً r جملهٔ مثبت و $s-r$ جملهٔ منفی وجود دارد. به‌علاوه $n-s$ متغیر ظاهر نشده است.

اگر پایهٔ انتخابی رامتعامدکنیم حتی این مطلب را واضح‌ترخواهیم دید.

مفهوم پایهٔ یکه‌ای متعامد راتعمیم می‌دهیم. پایهٔ متعامد $\{v_1, \dots, v_n\}$ را **یکه‌ای متعامد** می‌نامیم اگر برای هر i داشته باشیم

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \quad \text{یا} \quad \langle v_i, v_i \rangle = -1 \quad \text{یا} \quad \langle v_i, v_i \rangle = 0$$

اگر $\{v_1, \dots, v_n\}$ یك پایهٔ متعامد باشد، آنگاه می‌توانیم یك پایهٔ یکه‌ای متعامدازروی آن به‌دست آوریم، همچنانکه درحالت معین‌مثبت انجام‌دادیم. فرض کنید $c_i = \langle v_i, v_i \rangle$.

اگر $c_i = 0$ قرار می‌دهیم $v_i' = v_i$، و اگر $c_i > 0$ قرارمی‌دهیم $v_i' = \frac{v_i}{\sqrt{c_i}}$، و اگر $c_i < 0$ قرارمی‌دهیم $v_i' = \frac{v_i}{\sqrt{-c_i}}$. دراین‌صورت $\{v_1', \dots, v_n'\}$ یك‌پایهٔ یکه‌ای متعامد است.

فرض‌کنید $\{v_1, \dots, v_n\}$ یك پایهٔ یکه‌ای متعامد V برای حاصلضرب اسکالرداده شده هستند. اگر X بردار مختصاتی یك عضو V باشد، آنگاه نسبت به پایهٔ یکه‌ای متعامد داریم

$$f(X) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_s^2$$

بااستفاده ازپایهٔ یکه‌ای متعامد، تعداد جملات مثبت ومنفی به‌وضوح دیده می‌شود. برای اثبات اینکه این تعداد بستگی به پایهٔ یکه‌ای متعامد ندارد، نخست تعداد جملاتی‌که ظاهر نمی‌شوند رابررسی می‌کنیم، ویك تعبیرهندسی برای آن ارائه می‌دهیم.

قضیهٔ ۱.۸. فرض‌کنید V یك فضای برداری بابعد متناهی روی هیات $\mathbf{R}$ بایك‌حاصلضرب اسکالراست. فرض‌کنید که $\dim V > 0$. فرض کنید V_0 زیرفضایی از V باشدکه متشکل‌از تمام بردارهای $v\in V$ است به‌طوری که به‌ازای هر $w\in V$، $\langle v,w\rangle=0$. فرض کنید $\{v_1,\dots,v_n\}$ یك پایهٔ متعامد V است. در این صورت تعداد اعداد صحیح i به‌طوری‌که $\langle v_i,v_i\rangle=0$ مساوی بعد زیرفضای V_0 است.

اثبات. فرض می‌کنیم $\{v_1,\dots,v_n\}$ چنان مرتب شده‌اندکه

$$\langle v_1,v_1\rangle\neq 0,\dots,\langle v_s,v_s\rangle\neq 0 \quad \text{و} \quad \langle v_i,v_i\rangle=0,\ i>s$$

چون $\{v_1,\dots,v_n\}$ یك پایهٔ متعامد است لذا v_{s+1}، ...، v_n متعلق به V_0 هستند. فرض‌کنید v عضو دلخواهی از V_0 است. می‌نویسیم

$$v=x_1v_1+\dots+x_sv_s+\dots+x_nv_n\ ;\ x_i\in\mathbf{R}$$

حاصلضرب v رابا هر v_j به‌طوری‌که $j\leqslant s$ به‌دست می‌آوریم. نتیجه می‌شود

$$0=\langle v,v_j\rangle=x_j\langle v_j,v_j\rangle$$

چون $\langle v_j,v_j\rangle\neq 0$، لذا $x_j=0$. پس v درفضای تولیدشده توسط v_{s+1}، ...، v_n قرار دارد. بنابراین v_{s+1}، ...، v_n یك پایهٔ V_0 است.

درقضیهٔ ۱.۸ بعد V_0 را **نشان پوچی فرم** می‌نامیم. از اینجا نتیجه می‌شودکه فرم ناتباهیده است اگروتنها اگرنشان پوچی‌آن صفرباشد.

قضیهٔ ۲.۸ (قضیهٔ سیلوستر). فرض‌کنید V یك فضای برداری بابعد متناهی روی $\mathbf{R}$ بایك حاصلضرب اسکالر است. یك عدد صحیح $r\geqslant 0$ باخاصیت زیروجود دارد. اگر $\{v_1,\dots,v_n\}$ یك پایهٔ متعامد در V باشد، آنگاه دقیقاً r عدد صحیح i وجود دارد به‌طوری‌که $\langle v_i,v_i\rangle>0$.

اثبات. فرض‌کنید $\{v_1,\dots,v_n\}$ و $\{w_1,\dots,w_n\}$ پایه‌های متعامدهستند. فرض‌می‌کنیم‌اعضای آنها طوری مرتب شده‌اندکه

$$\langle v_i,v_i\rangle>0\ ;\quad \text{اگر}\ 1\leqslant i\leqslant r$$
$$\langle v_i,v_i\rangle<0\ ;\quad \text{اگر}\ r+1\leqslant i\leqslant s$$
$$\langle v_i,v_i\rangle=0\ ;\quad \text{اگر}\ s+1\leqslant i\leqslant n$$

مشابهاً،

$$<w_i,w_i> > 0 \quad ; \quad 1 \leqslant i \leqslant r' \quad \text{اگر}$$
$$<w_i,w_i> < 0 \quad ; \quad r'+1 \leqslant i \leqslant s' \quad \text{اگر}$$
$$<w_i,w_i> = 0 \quad ; \quad s'+1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{اگر}$$

نخست ثابت می‌کنیم که

$$v_1,\cdots,v_r,w_{r'+1},\cdots,w_n$$

مستقل خطی هستند.

فرض‌کنید رابطهٔ زیر را داریم:

$$x_1v_1+\cdots+x_rv_r+y_{r'+1},w_{r'+1}+\cdots+y_nw_n=0$$

دراین‌صورت

$$x_1v_1+\cdots+x_rv_r=-(y_{r'+1}w_{r'+1}+\cdots+y_nw_n)$$

فرض‌کنید به ازای هر i، $c_i=<v_i,v_i>$ و $d_i=<w_i,w_i>$. حاصلضرب اسکالر هر یك ازدوطرف تساوی فوق را باخودش درنظرمی‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$c_1x_1^2+\cdots+c_rx_r^2=d_{r'+1}y_{r'+1}^2+\cdots+d_{s'}y_{s'}^2$$

طرف چپ بزرگتریامساوی صفراست. طرف راست‌کوچکتریا مساوی صفراست. بنابراین تنها امکان موجود این است که هردومساوی صفرباشند، واینهم زمانی امکان‌پذیراست‌که

$$x_1=\cdots=x_r=0$$

از مستقل خطی بودن $w_{r'+1}$، ....، w_n نتیجه می‌شودکه $y_{r'+1}$، ....، y_n همگی مساوی 0 هستند.

چون $\dim V=n$، نتیجه می‌گیریم که

$$r+n-r'\leqslant n \Longrightarrow r\leqslant r'$$

اما وضعیت موجود نسبت به پایه‌های‌انتخاب‌شده متقارن است، پس به‌طریق مشابه می‌توان نتیجه‌گرفت‌که $r\leqslant r'$. بنابراین باید $r=r'$ باشد. به‌این ترتیب قضیهٔ سیلوستراثبات می‌گردد.

عدد صحیح r درقضیهٔ سیلوستر را **نشان مثبتی** حاصلضرب اسکالرمی‌نامیم.

تمرینها

۱. نشان پوچی و نشان مثبتی هریك ازحاصلضربهای تعریف شده به وسیلهٔ ماتریسهای متقارن زیر در $\mathbf{R}^{۲}$ راتعیین کنید.

(الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ (پ) $\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$

۲. فرض کنید V یك فضای برداری با بعدمتناهی روی $\mathbf{R}$، و $<,>$ یك حاصلضرب اسکالر روی V است. نشان دهیدکه V رامی‌توان به‌صورت جمع مستقیم

$$V=V^{+}\oplus V^{-}\oplus V_{\circ}$$

نوشت به‌طوری‌که $V_{\circ}$ درقضیهٔ ۱.۶ تعریف شده، وضرب روی V^{+} معین مثبت، وروی V^{-} معین منفی است. یعنی

$$\forall v\in V^{+}, v\neq \circ, <v,v> > \circ$$
$$\forall v\in V^{-}, v\neq \circ, <v,v> < \circ$$

نشان دهیدکه بعد فضاهای V^{+} و V^{-} درتمام تجزیه‌ها باهم مساویند.

۳. فرض کنید V فضای برداری ماتریسهای حقیقی متقارن ۲ × ۲ روی $\mathbf{R}$ است.

(الف) ماتریسهای متقارن $A=\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$ داده شده است. نشان دهیدکه (x,y,z) مختصات A نسبت به برخی ازپایه‌های فضای برداری V است. چه پایه‌هایی؟

(ب) فرض کنید

$$f(A)=xz-yy=xz-y^{۲}$$

اگر (x,y,z) رابه عنوان مختصات A درنظربگیریم، آنگاه مشاهده می‌کنیم که f یك فرم درجه دوم روی V است. توجه‌کنیدکه $f(A)$ دترمینان A است،که در اینجا می‌تواند به صورت ساده تعریف گردد.

فرض کنید W زیرفضایی از V باشدکه متشکل ازتمام Aهایی است‌که $\mathrm{tr}(A)=\circ$. نشان دهیدکه برای هر $A\in W$ که $A\neq\circ$ داریم $f(A)<\circ$. یعنی نشان دهیدکه فرم درجه دوم روی W معین منفی است.

۶

دترمینانها

ضمن کار با بردارها، اغلب به‌این نتیجه می‌رسیم که روشی برای تعیین استقلال‌خطی آنها مورد نیاز است. تاکنون، تنها روش قابل قبول برای ما، حل یك دستگاه معادلات خطی با روش حذف بود. دراین فصل، یك روش کارآمد محاسباتی برای حل دستگاه معادلات خطی‌ارائه خواهیم داد، ومشخص می‌کنیم که چه‌موقع بردارها بستگی‌خطی دارند.

حالت دترمینانهای ۲ × ۲ و ۳ × ۳ را جداگانه بـه‌طور کامل بحث خواهیم کرد، زیرا حالت کلی $n \times n$ شامل علامتهایی است که بر اشکال فهم دترمینانها می‌افزاید. پیشنهاد ما این است که دراولین‌بار اثبات قضایا درحالت‌کلی را حذف کنیم.

۱. دترمینانهای مرتبهٔ ۲

قبل ازشروع خواص‌کلی یك دترمینان دلخواه، حالت خاصی را درنظرمی‌گیریم. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

یك ماتریس ۲ × ۲ دریك‌هیات K است. دترمینان A را مساوی $ad-bc$ تعریف‌می‌کنیم. بنا براین دترمینان A یك‌عضو K است. آن را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

به‌عنوان مثال، دترمینان ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

مساوی $۷ = ۱.۱ - ۲.۴$ است. دترمینان ماتریس

$$\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

مساوی $۲ = ۱۲ + ۱۰- = ۴.(۳-) - ۵.(۲-)$ است.

دترمینان را می‌توان به‌عنوان تابعی ازماتریس A درنظر گرفت. همچنین می‌توان آن را به‌عنوان تابعی از دوستون درنظر گرفت. فرض‌کنید این دوستون را با $A^۱$ و $A^۲$ نمایش دهیم. دراین صورت دترمینان A را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$D(A) \text{ ، } \operatorname{Det}(A) \text{ ، یا } D(A^۱, A^۲)$$

خواص زیررا به‌آسانی می‌توان با محاسبهٔ مستقیم به‌دست آورد.

به‌عنوان تابعی ازبردارهای ستونی، دترمینان خطی است. یعنی اگر b' و d' دوعدد باشند، آنگاه

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{bmatrix} = \operatorname{Det}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \operatorname{Det}\begin{bmatrix} a & b' \\ c & d' \end{bmatrix}$$

به‌علاوه، اگر t یك عدد دلخواه باشد، آنگاه

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} a & tb \\ c & td \end{bmatrix} = t \operatorname{Det}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

خواص مشابهی برای ستون اول نیز برقرار است. اثبات جمع‌پذیری نسبت بـه‌ستون دوم را ارائه می‌دهیم تا نشان دهیم‌که چه اندازه‌آسان است.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det}\begin{bmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{bmatrix} &= a(d+d') - c(b+b') \\
&= ad + ad' - cb - cb' \\
&= ad - bc + ad' - b'c \\
&= \operatorname{Det}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \operatorname{Det}\begin{bmatrix} a & b' \\ c & d' \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

بنا بر این طبق علامت گذاری فصل ۶، بخش ۴ می‌توان گفت که دترمینان یك نگاشت دوخطی است.

اگر دریك دترمینان دوستون مساوی باشند،آنگاه مقدار دترمینان صفر است.

اگر A ماتریس واحد باشد، یعنی

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

آنگاه $\mathrm{Det}(A)=۱$

دترمینان خواص اضافی زیررا نیز برآورده می‌کند.

اگرمضربی از یك ستون را به‌ستون دیگر بیفزائیم،آنگاه مقدار دترمینان تغییرنمی‌کند.

به‌عبارت دیگر، اگر t یك‌عدد دلخواه باشد،آنگاه

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a+tb & b \\ c+td & d \end{bmatrix}=\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & d \\ c & b \end{bmatrix}$$

وهمچنین است وقتی‌که مضربی ازستون اول را به‌ستون دوم می‌افزائیم.

اگر دوستون دترمینان را عوض‌کنیم، مقدار دترمینان تغییرعلامت می‌دهد.

به‌عبارت دیگر، داریم

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=-\mathrm{Dte}\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

دترمینان A مساوی دترمینان ترانهادهٔ A است، یعنی $D(A)=D(A^t)$

به‌عبارت صریح‌تر

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\mathrm{Det}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

بردارهای $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ بستگی خطی دارند اگروتنها اگــر دترمینان $ad-bc$ مساوی صفر باشد.

اثبات مستقیمی از این خاصیت را ارائه خواهیم داد. فرض‌کنید اعداد x و y وجود دارند که هردوتواماً صفر نبوده وداریم

$$ax+yb=۰$$

$$xc+yd=۰$$

فرض کنید $x \neq 0$. معادلهٔ اولی را در d ودومی را در b ضرب کرده وازهم کم می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$xad - xbc = 0 \quad \text{یا} \quad x(ad-bc) = 0$$

چون $x \neq 0$، لذا $ad-bc=0$. برعکس فرض کنید $ad-bc=0$ ودو بردار (a,c) و (b,d) تواماً صفر نیستند (درغیر این صورت، به‌وضوح بستگی خطی خواهند داشت). فرض کنید که مثلاً $a \neq 0$. اگر قراردهیم $y=-a$ و $x=b$، آنگاه آشکارا داریم

$$xa + yb = 0$$

$$xc + yd = 0$$

بنابراین (a,c) و (b,d) بستگی خطی دارند، واثبات حکم کامل است.

۲. وجود دترمینانها

دترمینانها را بااستقراء تعریف کرده، و همزمان فرمولی برای محاسبهٔ آنها در ارائه می‌دهیم. نخست با حالت 3×3 شروع می‌کنیم.

قبلاً دترمینانهای 2×2 را تعریف کرده‌ایم. فرض کنید

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

یك ماتریس 3×3 است. دترمینان آن را طبق فرمول موسوم به **بسط نسبت به‌یك سطر**، مثلاً نسبت به‌سطر اول، تعریف می‌کنیم. یعنی تعریف می‌کنیم

$$\operatorname{Det}(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (*)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

این مجموع را به‌صورت زیر توصیف می‌کنیم. فرض کنید A_{ij} ماتریس حاصل از A با حذف سطر i ام وستون j ام آن است. دراین صورت مجموع عبارت $\operatorname{Det}(A)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a_{11}\operatorname{Det}(A_{11}) + a_{12}\operatorname{Det}(A_{12}) + a_{13}\operatorname{Det}(A_{13})$$

به‌عبارت دیگر، هر جمله متشکل از ضرب یك عضو سطر اول در یك دترمینان ۲×۲ است که از حذف سطر اول و ستون j ام با قراردادن علامت مناسب درجلوی آنها حاصل شده است.

مثال ۱. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۴ \\ -۳ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

دراین صورت

$$A_{۱۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}, \quad A_{۱۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}, \quad A_{۱۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

وفرمول ارائه شده برای دترمینان درمورد A به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(A) &= ۲\begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix} + ۱\begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ -۳ & ۵ \end{vmatrix} + ۰\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -۳ & ۲ \end{vmatrix} \\ &= ۲(۵-۸)-۱(۵+۱۲)+۰ \\ &= -۲۳\end{aligned}$$

دترمینان یك ماتریس ۳×۳ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$D(A)=\mathrm{Det}(A)=D(A^{۱},A^{۲},A^{۳})$$

وقتی می‌خواهیم دترمینان را به‌عنوان تابعی از ستونهای A درنظر بگیریم از آخرین علامت گذاری استفاده می‌کنیم.

سرانجام دترمینان یك ماتریس $n \times n$ را تعریف خواهیم کرد، وازهمان علامت برای نمایش آن استفاده خواهیم کرد:

$$|A|=D(A)=\mathrm{Det}(A)=D(A^{۱},A^{۲},\cdots,A^{n})$$

قبلا می‌توانیم خواص بیان شده درقضیهٔ بعد راکه به‌هرحال، درحالت کلی آن را برقرارخواهیم کرد، درحالت ۳×۳ ثابت کنیم.

قضیهٔ ۲.۱. دترمینان درخواص زیرصدق می‌کند:

۱. به‌عنوان تابعی ازهر بردارستونی، دترمینان خطی است، یعنی اگرستون j ام یعنی A^j مجموع دو بردارستونی، مثلا $A^j=C+C'$ باشد، آنگاه

$$D(A^{۱},\cdots,C+C',\cdots,A^{n})=D(A^{۱},\cdots,C,\cdots,A^{n})+D(A^{۱},\cdots,C',\cdots,A^{n})$$

بعلاوه، اگر t یك عدد دلخواه باشد، آنگاه

$$D(A^{1},\cdots,tA^{j},\cdots,A^{n})=tD(A^{1},\cdots,A^{j},\cdots,A^{n})$$

۲. اگردوستون متوالی مساوی باشند، یعنی اگر $A^{j}=A^{j+1}$ برای $j=1,2,\cdots,n-1$ آنگاه $D(A)$ مساوی 0 است.

۳. اگر I ماتریس واحد باشد، آنگاه $D(I)=1$.

۱ثبات. (درحالت 3×3). بـا محاسبهٔ مستقیم اثبات می‌کنیم. فرض‌کنید مثلا ستون اول مجموع دوستون است:

$$\begin{bmatrix}a_{1}\\a_{2}\\a_{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{1}\\b_{2}\\b_{3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_{1}\\c_{2}\\c_{3}\end{bmatrix} \quad \text{یعنی}\ ،\ A^{1}=B+C$$

اگر این مقادیر را درهر جملهٔ (*) قرار دهیم مشاهده می‌کنیم که هر جمله به‌مجموع دوجملهٔ متناظر به B و C تبدیل می‌شود. مثلاً

$$a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}=b_{1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+c_{1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{21}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$a_{12}\begin{vmatrix}b_{2}+c_{2}&a_{23}\\b_{3}+c_{3}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{12}\begin{vmatrix}b_{2}&a_{23}\\b_{3}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix}c_{2}&a_{23}\\c_{3}&a_{33}\end{vmatrix}$$

ومشابهاً برای جملهٔ سوم. اثبات نسبت به‌بقیهٔ ستونها شبیه همین است. به‌علاوه، اگر t یك عدد دلخواه باشد، آنگاه

$$\operatorname{Det}(A^{1},A^{2},A^{3})=ta_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}ta_{21}&a_{23}\\ta_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}ta_{21}&a_{22}\\ta_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$$
$$=t\operatorname{Det}(A^{1},A^{2},A^{3})$$

زیرا هریك از دترمینانهای 2×2 نسبت بـه‌ستون اول خطی است، ومی‌توانیم t را ازهر یك ازجملات دوم وسوم خـارج‌کنیم. مجدداً اثبات برای ستونهای دیگر به‌طریق مشابـه انجام می‌شود. جایگذاری مستقیم نشان می‌دهدکه اگر دوستون متوالی مساوی باشند، آنگاه فرمول (*) مساوی ۰ می‌شود.

بالاخره، به‌سادگی می‌توان دیدکه اگر A ماتریس واحد باشد، آنگاه $\operatorname{Det}(A)=1$. بنابراین هرسه خاصیت اثبات شد.

دراثبات بالا، دیدیم که خواص دترمینانهای 2×2 برای‌اثبات خواص دترمینانهای 3×3 مورد استفاده قرارگرفتند.

بـه‌علاوه، هیچ دلیل خـاصی برای انتخاب بسط نسبت به‌سطر اول وجـود ندارد. می‌توانیم ازسطر دوم استفاده‌کرده وبنویسیم

$$\operatorname{Det}(A)=-a_{۲۱}\begin{vmatrix}a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۲۲}\begin{vmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۳}\end{vmatrix}-a_{۲۳}\begin{vmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲}\end{vmatrix}$$
$$=-a_{۲۱}\operatorname{Det}(A_{۲۱})+a_{۲۲}\operatorname{Det}(A_{۲۲})-a_{۲۳}\operatorname{Det}(A_{۲۳})$$

مجدداً، هرجمله حاصلضرب $a_{۲j}$ و دترمینان یك‌ماتریس ۲ × ۲ است‌که ازحذف سطردوم وستون j ام ماتریس A حاصل شده وضمناً علامت مناسبی جلوی هرجمله قرارگرفته‌است. این علامتها براساس طرح زیر است:

$$\begin{bmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{bmatrix}$$

هرکس می‌تواند مستقیماً مشاهده‌کندکه دترمینان را می‌توان‌نسبت به‌هرسطر بسط داده وسپس دترمینانهای ۲ × ۲ حاصل را محاسبه‌کرده وبه‌مجموع شش جمله به‌صورت زیررسید:

$$\operatorname{Det}(A)=a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳}-a_{۱۱}a_{۳۲}a_{۲۳}-a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳}+a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱}+a_{۱۳}a_{۲۱}a_{۳۲}-a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱} \qquad (**)$$

به‌علاوه، می‌توانیم دترمینان را نسبت به‌ستونها بسط دهیم. مثلا اگرنسبت به‌ستون اول بسط دهیم و به‌صورت

$$a_{۱۱}\begin{vmatrix}a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{vmatrix}-a_{۲۱}\begin{vmatrix}a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۳۱}\begin{vmatrix}a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۲} & a_{۲۳}\end{vmatrix}$$

بنویسیم وسپس دترمینانهای ۲ × ۲ را حساب‌کنیم به‌همان عبارت (**) خواهیم رسید.

خواننده باید حـالت کلی‌ارائه شده درقضیهٔ ۲۰۲ را توجه‌کرده وسپس برای حالت ۳ × ۳ مقادیر i و j را مساوی ۱، ۲ و ۳ قراردهد.

چون دترمینان یك‌ماتریس۳ × ۳ نسبت به‌هریك‌ازستونها تابعی خطی‌است،می‌گوئیم که یك‌تابع **سه خطی** است، همچنانکه دتـرمینانهای ۲ × ۲ را **دوخطی** نامیدیم. درحالت $n \times n$، دترمینان را یك‌تابع n **خطـی** ، یا **چند خطی** می‌نامیم.

درحالت دترمینانهای ۳ × ۳، نتیجهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ ۳.۲ ۰ دترمینان قـاعدهٔ بسط نسبت بـه‌سطرهـا وستونها را بـرآورده می‌سازد وداریـم $\operatorname{Det}(A)=\operatorname{Det}(A^{t})$. به‌عبارت دیگر، دترمینان یك‌ماتریس مساوی دترمینان ترانهادهٔ آن

ماتریس است.

این خاصیت برقرار است به‌این دلیل که وقتی ترانهادهٔ یك‌ماتریس را به‌دست می‌آوریم جای سطر و ستونها عوض می‌شود.

مثال۲. دترمینان

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۵ \\ -۱ & ۴ & ۲ \end{vmatrix}$$

را با بسط نسبت به‌ستون دوم محاسبه کنید.

دترمینان مساوی است با

$$۲\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix} - ۴\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix} = ۲(۶-(-۱)) - ۴(۱۵-۱) = -۴۲$$

توجه کنید که وجود یك ۰ درستون دوم یکی‌ازجملات بسط را حذف‌می‌کند. زیرا این جمله مساوی ۰ می‌شود.

همچنین می‌توانیم دترمینان فوق را نسبت به ستون سوم بسط دهیم، دراین صورت داریم

$$+۱\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix} - ۵\begin{vmatrix} ۳ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{vmatrix} + ۲\begin{vmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = -۴۲$$

حالت n×n

فرض کنید

$$F: K^n \times \cdots \times K^n \to K$$

یك‌تابع n متغیری است که هر یك ازمتغیرها روی K^n تغییر می‌کند. می‌گوئیم F **چند خطی است**، هرگاه درخواص فهرست شده درقضیهٔ ۱.۲ صدق کند، یعنی

$$F(A^۱,\dots,C+C',\dots,A^n) = F(A^۱,\dots,C,\dots,A^n) + F(A^۱,\dots,C',\dots,A^n)$$

$$F(A^۱,\dots,tC,\dots,A^n) = tF(A^۱,\dots,C,\dots,A^n)$$

این به‌این معنی است که اگر اندیسی مانند j را درنظر گرفته، و A^k را برای $k \neq j$ ثابت بگیریم، آنگاه تابع $X^j \to F(A^۱\dots,X^j,\dots,A^n)$ یك تابع خطی نسبت به j امین متغیر است.

می‌گوئیم F یك تابع خطی **متناوب** است اگر به‌ازای j ای داشته‌باشیم $A^j = A^{j+1}$، آنگاه

$$F(A^1, \cdots, A^j, A^j, \cdots, A^n) = 0$$

این دومین خاصیت دترمینان است.

یك قضیهٔ اساسی این فصل را می‌توان به‌صورت زیر فرموله‌کرد.

قضیهٔ ۳.۲. یك تابع خطی متناوب

$$F : K^n \times \cdots \times K^n \to K$$

وجود دارد به‌طوری‌که $F(I) = 1$. چنین تابعی به‌طورمنحصربه‌فرد به‌وسیلهٔ این سه‌خاصیت تعیین می‌شود.

اثبات یکتایی تاقضیهٔ ۲.۷ به‌تعویق خواهد افتاد. مثلاً بخش وجودی قضیه را برای حالت $n = 2$ و $n = 3$ ثابت‌کردیم. اکنون حالت‌کلی آن را ثابت می‌کنیم.

درحالت‌کلی که دترمینانهای $n \times n$ مورد نظرهستند، اعمال را با استقراء انجام می‌دهیم. فرض کنید که قادریم دترمینانهای $(n-1) \times (n-1)$ راتعریف‌کنیم. فرض کنید که i و j دوعدد صحیح بین ۱ و n هستند. اگرسطر i ام وستون j ام را دریك ماتریس $n \times n$، A حذف کنیم، به‌یك ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ می‌رسیم که با A_{ij} نمایش می‌دهیم. پس

$$A_{ij} = \begin{array}{c} \qquad\quad j \\ \left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \hline \vdots & a_{ij} & \vdots \\ \hline a_{n1} \cdots & \cdots & a_{nn} \end{array}\right] \end{array}$$

عبارتی برای دترمینان یك‌ماتریس $n \times n$ برحسب دترمینانهای $(n-1) \times (n-1)$ ارائه می‌دهیم. فرض‌کنید i یك‌عدد صحیح، $1 \leqslant i \leqslant n$ است. تعریف می‌کنیم

$$\boxed{D(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \operatorname{Det}(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \operatorname{Det}(A_{in})}$$

هر A_{ij} یك ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ است.

این مجموع را می‌توان برحسب جملات بیان‌کرد. به‌ازای هرعضوسطر i ام، یك جمله درمجموع داریم. این جمله مساوی است با $+$ یا $-$ حاصل‌ضرب این عضو در دترمینان ماتریس حاصل ازحذف سطر i ام وستونی‌که عضومورد نظر در آن واقع است. علامت $+$ یا $-$ برحسب طرح جدول زیر تعیین می‌شود.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ & & \cdots & & \end{bmatrix}$$

این مجموع را **بسط دترمینان نسبت به‌سطر i ام** می‌نامیم. ثابت می‌کنیم که این تابع D در خواص ۱ و ۲ و ۳ زیر صدق می‌کند.

توجه‌کنید که $D(A)$ مجموعی‌ازجملات

$$(-1)^{i+j} a_{ij} \operatorname{Det}(A_{ij})$$

است که در آن j از ۱ تا n تغییر می‌کند.

۱. D را به‌عنوان تابعی ازستون k ام فرض کرده وهریك ازجملات

$$(-1)^{i+j} a_{ij} \operatorname{Det}(A_{ij})$$

را درنظر بگیرید. اگر $j \neq k$، آنگاه a_{ij} بستگی به‌ستون k ام ندارد، ولی $\operatorname{Det}(A_{ij})$ بستگی خطی به‌ستون k ام دارد. اگر $j=k$، آنگاه a_{ij} بستگی خطی به‌ستون k ام دارد، ولی $\operatorname{Det}(A_{ij})$ بستگی به‌ستون k ام ندارد. درهرحال، هریك ازجملات مجموع بستگی خطی به‌ستون k ام دارد. چون $D(A)$ مجموعی ازچنین‌جملات است، لذا $D(A)$ بستگی خطی به‌ستون k ام دارد، ودرنتیجه خاصیت ۱ ثابت می‌شود.

۲. فرض‌کنید دو ستون مجاور A مساوی هستند، مثلاً $A^k = A^{k+1}$. فرض‌کنید اندیس j مخالف k یا مخالف $k+1$ است. دراین صورت ماتریس A_{ij} دارای دوستون مجاور مساوی است، ولذا دترمینان آن 0 است. بنابراین درهرحال جملهٔ متناظر به‌اندیس $j \neq k$ یا $j \neq k+1$ در $D(A)$ مساوی 0 است. دوجملهٔ باقیمانده را می‌توان به‌صورت

$$(-1)^{i+k} a_{ik} \operatorname{Det}(A_{ik}) + (-1)^{i+k+1} a_{i,k+1} \operatorname{Det}(A_{i,k+1})$$

نوشت. دوماتریس A_{ik} و A_{ik+1} باهم مساویند، زیرا طبق فرض ستون k ام ماتریس A با ستون $(k+1)$ ام آن مساوی است. همچنین $a_{ik} = a_{ik+1}$. لذا این دوجمله نیز با هم حذف می‌شوند زیرا علامت آنها باهم مخالف‌اند. به‌این‌ترتیب خاصیت ۲ نیز ثابت‌می‌شود.

۳. فرض‌کنید A ماتریس واحد است. دراین صورت $a_{ij} = 0$ مگروقتی‌که $i=j$، ودر این‌حالت $a_{ii} = 1$ می‌باشد. هر A_{jj} ماتریس واحد $(n-1) \times (n-1)$ است. تنها جملهٔ مخالف صفر در مجموع همان جملهٔ $(-1)^{i+i} a_{ii} \operatorname{Det}(A_{ii})$ است که مساوی ۱ می‌باشد. بنابراین خاصیت ۳ نیز برقرار است.

مثال۳. می‌خواهیم دترمینان

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۵ \end{vmatrix}$$

را محاسبه‌کنیم. از بسط نسبت به‌سطر سوم استفاده می‌کنیم (زیرا این سطر دارای یك صفر است)، و تنها دو جملهٔ مخالف صفر عبارتند از

$$(-۱)\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} + ۵\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix}$$

می‌توان دترمینانهای ۲×۲ را مستقیماً مطابق آنچه در ۱ گفته شد حساب کرده ومقدار ۲۳ را برای دترمینان ۳×۳ به‌دست آورد.

در بخش بعد نشان خواهیم داد که دترمینان یك‌ماتریس با دترمینان‌ترانهادهٔ آن‌ماتریس مساوی است. پس از اثبات این خاصیت، نشان خواهیم داد که:

قضیهٔ ۴.۳. دترمینانها در قاعدهٔ بسط نسبت سطرها وستونها صدق می‌کنند، وبرای هرستون A^j ازماتریس $A=(a_{ij})$ داریم

$$\boxed{D(A)=(-۱)^{۱+j}a_{۱j}\,D(A_{۱j})+\dots+(-۱)^{n+j}\,a_{nj}\,D(A_{nj})}$$

درعمل، همیشه محاسبهٔ یك دترمینان بر اساس بسط نسبت به‌یك سطر یا یك ستون انجام می‌گیرد.

تمرینها

۱. فرض‌کنید c یك عدد و A یك ماتریس ۳×۳ است. نشان دهید که

$$D(cA)=c^{۳}D(A)$$

۲. فرض کنید c یك عدد و A یك ماتریس $n \times n$ است. نشان دهید که

$$D(cA)=c^{n}D(A)$$

۳. خواص دیگر دترمینان

برای محاسبهٔ دترمینان نیاز به‌خواص دیگری از دترمینان داریم که از سه خاصیت ۱، ۲ و ۳ قضیهٔ ۱ حاصل می‌شوند. دراینجا هیچ اختلافی بین ماتریسهای ۳ $\times$ ۳ و $n \times n$ نیست، لذا حالت $n \times n$ را درنظر می‌گیریم. ولی اگرمایل باشید می‌توانند نخست حالت ۳ $\times$ ۳ را درنظر بگیرید.

۴. فرض‌کنید i و j اعدادی بین ۱ و n هستند، $1 \leqslant i, j \leqslant n$. اگرستون i ام و j ام را با هم عوض‌کنیم، مقدار دترمینان در ۱ $-$ ضرب می‌شود.

اثبات. نخست ثابت می‌کنیم که اگر ستونهای j ام و $(j+1)$ام را باهم عوض‌کنیم مقدار دترمینان در ۱ $-$ ضرب‌می‌شود. درماتریس A، ستون j ام و $(j+1)$ام را با $A^j + A^{j+1}$ عوض می‌کنیم. ماتریسی با دوستون مساوی به‌دست می‌آوریم که طبق خاصیت ۲ داریم

$$o = D(\cdots, A^j + A^{j+1}, A^j + A^{j+1}, \cdots)$$

با استفاده ازخاصیت ۱ آن را بسط می‌دهیم، نتیجه می‌شود

$$o = D(\cdots, A^j, A^j, \cdots) + D(\cdots, A^{j+1}, A^j, \cdots) + D(\cdots, A^j, A^{j+1}, \cdots) + \\ + D(\cdots, A^{j+1}, A^{j+1}, \cdots)$$

طبق خاصیت ۲ مشاهده می‌کنیم که دربین چهاردترمینان‌فوق، دوتا ازآنها مساوی صفراست، ولذا

$$o = D(\cdots, A^{j+1}, A^j, \cdots) + D(\cdots, A^j, A^{j+1}, \cdots)$$

بنابراین

$$D(\cdots, A^{j+1}, A^j, \cdots) = -D(\cdots, A^j, A^{j+1}, \cdots)$$

قبل از اثبات این خاصیت برای دوستون دلخواه، خاصیت دیگری را ثابت‌می‌کنیم.

۵. اگردوستون A^j و A^i باهم مساوی باشند $(i \neq j)$، آنگاه مقداردترمینان مساوی ۰ است.

اثبات. فرض می‌کنیم که دوستون ماتریس A باهم مساویند. می‌توانیم با جابجاکردن‌متوالی ستونها به‌ماتریسی برسیم که دوستون مجاور آن باهم مساوی است. (باید این مطلب را بااستقراء به‌طوردقیق ثابت‌کنیم.) هربارکه جای دوستون را عوض می‌کنیم، مقداردترمینان در ۱ $-$ ضرب می‌شود واین مطلب تغییری در ۰ بودن یا نبودن‌آن ندارد. از اینجا باتوجه به‌خاصیت ۲ نتیجه می‌گیریم که $D(A) = o$ اگر دوستون A باهم مساوی باشند.

اکنون به‌اثبات خاصیت ۴ برای هر i و j، $i \neq j$ برمی‌گردیم. با استفاده از خاصیت ۵ همان استدلال ارائه شده دراثبات ۴ برای j و $j+1$ درحالت‌کلی نیز قابل اجراست. توجه‌کنید که

$$0 = D(\cdots, A^i + A^j, \cdots, A^i + A^j, \cdots)$$

اگر طرف راست این تساوی را بسط دهیم به‌نتیجهٔ مورد نظرمی‌رسیم.

۶. اگرمضربی از یك‌ستون را به‌ستون دیگر بیفزائیم مقدار دترمینان تغییرنخواهدکرد.

اثبات. دوستون متمایز مثلا ستونهای k ام و j ام، A^k و A^j را با فرض $k \neq j$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید t یك اسکالر دلخواه است. اکنون tA^j را با A^k جمع می‌کنیم. طبق خاصیت ۱، داریم

$$D(\cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{A^k + tA^j}, \cdots) = D(\cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{A^k}, \cdots) + D(\cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{tA^j}, \cdots)$$

درهردوجملهٔ سمت راست، ستون مشخص شده ستون k ام است. اما $D(\cdots, A^k, \cdots)$ همان $D(A)$ است. به‌علاوه

$$D(\cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{tA^j}, \cdots) = tD(\cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{A^j}, \cdots)$$

چون $k \neq j$، دترمینان سمت راست دارای دوستون مساوی است، زیرا A^j درستون k ام وهمچنین j ام ظاهر شده است. پس مقدار آن مساوی ۰ است. بنابراین

$$D(\cdots, A^k + tA^j, \cdots) = D(\cdots, A^k, \cdots)$$

به‌این ترتیب خاصیت ۶ ثابت می‌شود.

اکنون با توجه به‌خواص فوق خیلی سریعتر می‌توانیم یك دترمینان 3×3 را حساب کنیم. برای این منظور ازخاصیت ۶، که هم برای سطرها برقرار است وهم برای ستونها، زیرا $D(A) = D({}^tA)$، استفاده می‌کنیم. به‌کمك این خاصیت بسیاری ازدرایه‌های ماتریس A را ۰ کنیم. به‌خصوص سعی‌می‌کنیم. که تمای اعضای یك ستون (یا یك سطر) را به‌جز یك عضو آن را ۰ کنیم، وسپس دترمینان رانسبت به آن ستون (یاسطر) بسط دهیم. دراین‌صورت، بسط فقط شامل یك‌جمله خواهد بود وآن هم یك دترمینان 2×2 است.

مثال ۱. دترمینان

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۵ \\ -۱ & ۴ & ۲ \end{vmatrix}$$

را حساب کنید.

یك ۰ درستون دوم داریم. دوبرابرسطردوم را ازسطرسوم کم می‌کنیم. دترمینان ما مساوی دترمینان زیرخواهد شد:

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۵ \\ -۳ & ۰ & -۸ \end{vmatrix}$$

اکنون دترمینان را نسبت به‌ستون دوم بسط دهیم. بسط فقط شامل یك جملهٔ مخالف صفر با یك علامت $+$ است. یعنی مساوی است با

$$۲\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ -۳ & ۸ \end{vmatrix}$$

دترمینان ۲×۲ را می‌توان طبق تعریف $ad-bc$ محاسبه‌کرد، پس مقداردترمینان مساوی است با

$$۲(-۲۴-(-۳)) = -۴۲$$

مثال۲. دترمینان زیررا حساب کنید

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۵ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۱ & -۳ & ۷ \end{vmatrix}$$

سطردوم را باسطرسوم جمع می‌کنیم، سپس سطرسوم را باسطرچهارم جمع می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۷ & ۵ \\ ۱ & -۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۱ & -۳ & ۷ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۷ & ۵ \\ ۱ & -۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۰ & -۱ & ۱۰ \end{vmatrix}$$

اکنون سه برابرسطرسوم را با سطر اول جمع می‌کنیم، حاصل می‌شود

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۰ & ۷ & ۱۰ \\ ۱ & ۰ & ۷ & ۵ \\ ۱ & -۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۰ & -۱ & ۱۰ \end{vmatrix}$$

حال می‌توانیم دترمینان را نسبت به‌ستون دوم بسط دهیم. بسط فقط شامل یك‌جمله است، و مقدار آن مساوی است با

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۷ & ۱۰ \\ ۳ & ۷ & ۵ \\ ۵ & -۱ & ۱۰ \end{vmatrix}$$

دو برابر سطر دوم را از سطر اول، وسپس ازسطر سوم کم می‌کنیم، نتیجه می‌شود

$$\begin{vmatrix} -۲ & -۷ & ۰ \\ ۳ & ۷ & ۵ \\ -۱ & -۱۵ & ۰ \end{vmatrix}$$

که اگر آن را نسبت به‌ستون سوم بسط دهیم مقدار آن مساوی است با

$$-۵(۳۰-۷) = -۵(۲۳) = -۱۱۵$$

تمرینها

۰۱ دترمینانهای زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ۳ & -۱ & ۵ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ -۲ & ۴ & ۳ \end{vmatrix}$ (پ) $\begin{vmatrix} ۲ & ۴ & ۳ \\ -۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}$

(ت) $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۷ \end{vmatrix}$ (ث) $\begin{vmatrix} -۱ & ۵ & ۳ \\ ۴ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۷ & ۸ \end{vmatrix}$ (ج) $\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ & ۱ \\ -۱ & ۲ & -۳ \end{vmatrix}$

۰۲ دترمینانهای زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & -۲ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۲ & ۵ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} -۱ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۵ & ۷ \end{vmatrix}$

(پ) $\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۵ \\ ۸ & ۷ & ۷ \end{vmatrix}$ (ت) $\begin{vmatrix} ۴ & -۹ & ۲ \\ ۴ & -۹ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}$ (ث) $\begin{vmatrix} ۴ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۵ & ۷ \end{vmatrix}$

(ج) $\begin{vmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۸ & ۵ & ۷ \end{vmatrix}$ (چ) $\begin{vmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲۷ \end{vmatrix}$ (ح) $\begin{vmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۹ \end{vmatrix}$

(خ) $\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۳ & ۱ & ۵ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}$

۳. درحالت کلی، دترمینان یک ماتریس قطری چیست؟

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲} & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & & & & \vdots \\ ۰ & ۰ & & & ۰ \\ ۰ & \cdots & \cdots & ۰ & a_{n۲} \end{vmatrix}$$

۴. دترمینان زیررا محاسبه کنید

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

۵. (الف) فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ اعداد دلخواهند. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} ۱ & x_۱ & x_۱^۲ \\ ۱ & x_۲ & x_۲^۲ \\ ۱ & x_۳ & x_۳^۲ \end{vmatrix} = (x_۲-x_۱)(x_۳-x_۱)(x_۳-x_۲)$$

(ب) اگر $x_۱$، ...، x_n اعداد دلخواهی باشند، بااستقراء نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} ۱ & x_۱ & \cdots & x_۱^{n-۱} \\ ۱ & x_۲ & \cdots & x_۲^{n-۱} \\ \vdots & & & \\ ۱ & x_n & \cdots & x_n^{n-۱} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j-x_i)$$

نماد سمت راست به معنی حاصلضرب تمام جملات (x_j-x_i) با شرط $i<j$ است که i و j مقادیر ۱ تا n را می‌گیرند. این دترمینان به دترمینان **واندرموند** V_n موسوم است.

برای اینکه استقراء را به‌راحتی به‌کاربرید، هرستون را در x_1 ضرب کرده و آن را از ستون سمت راست بعدی کم کنید، از سمت راست شروع کنید. به‌دست می‌آورید

$$V_n=(x_n-x_1)\cdots(x_2-x_1)V_{n-1}$$

۶. دترمینان ماتریسهای زیررا به‌دست آورید:

(الف) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 20 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

(پ) $\begin{bmatrix} 2 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (ت) $\begin{bmatrix} -7 & 98 & 54 \\ 0 & 2 & 46 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(ث) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 79 & 54 & 1 \end{bmatrix}$

(چ) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (ح) $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & 1 & 0 \\ 96 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(خ) فرض کنید A یك ماتریس مثلثی $n\times n$، مثلاً ماتریسی است که درایه‌های زیر قطر آن صفرند:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & & & & * \\ 0 & a_{22} & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مقدار $D(A)$ چقدر است؟

۷. اگر $a(t)$، $b(t)$، $c(t)$، $d(t)$ توابعی از t باشند، آنگاه می‌توان دترمینان

$$\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}$$

را مانند اعداد حساب کرد. مقدار دترمینان زیر را حساب کنید

$$\begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{vmatrix}$$

۸. دترمینان زیر را حساب کنید

$$\begin{vmatrix} t+۱ & t-۱ \\ t & ۲t+۵ \end{vmatrix}$$

۹. فرض کنید $f(t)$، $g(t)$ توابعی هستند که دارای مشتقات از همهٔ مراتب می‌باشند. فرض کنید φ تابعی است که با دترمینان زیر تعریف می‌شود

$$\varphi(t)=\begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$$

نشان دهید که

$$\varphi'(t)=\begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f''(t) & g''(t) \end{vmatrix}$$

۱۰. فرض کنید

$$A(t)=\begin{bmatrix} b_۱(t) & c_۱(t) \\ b_۲(t) & c_۲(t) \end{bmatrix}$$

یك ماتریس ۲ $\times$ ۲ از توابع مشتق‌پذیر است. فرض کنید $B(t)$ و $C(t)$ بردارهای ستونی آن هستند. فرض کنید

$$\varphi(t)=\mathrm{Det}(A(t))$$

نشان دهید که

$$\varphi'(t)=D(B'(t),C(t))+D(B(t),C'(t))$$

۱۱. فرض کنید $\alpha_۱$، ...، α_n اعداد متمایز مخالف صفر هستند. نشان دهید که توابع

$$e^{\alpha_۱ t},\dots,e^{\alpha_n t}$$

روی میدان اعداد مختلط مستقل خطی‌اند. [راهنمایی: فرض کنید

$$c_1e^{\alpha_1 t}+\cdots+c_ne^{\alpha_n t}=0$$

یك ترکیب خطی ازاین توابع است که c_iها اعداد ثابت وتساوی برای تمام tها بـرقرار است. اگرهمهٔ c_iها توأماً صفر نباشند، بدون‌اینکه ازکلیت مسأله‌کم شود،می‌توان فرض‌کرد که هیچ‌یك از آنها صفر نیستند. از رابطهٔ بالا، $n-1$ بـار مشتق می‌گیریم. یك دستگاه از معادلات خطی به‌دست می‌آوریم. دترمینان ضرایب این‌دستگاه بایدمساوی ۰ باشد (چرا؟). تناقضی ازاین مطلب به دست‌آورید.]

۴. قاعدهٔ کرامر

با استفاده ازخواص بخش قبل می‌توان قاعدهٔ معروفی راثابت‌کردکه در حل معادلات خطی مورد استفاده قرارمی‌گیرد.

قضیهٔ ۴.۱۰ فرض‌کنید A^1، ...، A^n بردارهای ستونی هستند به طوری‌که

$$D(A^1,\cdots,A^n)\neq 0$$

فرض‌کنید B یك بردارستونی است. اگر x_1، ...، x_n اعدادی باشند به‌طوری‌که

$$x_1A^1+\cdots+x_nA^n=B$$

آنگاه برای هر $j=1,2,\cdots,n$ داریم

$$x_j=\frac{D(A^1,\cdots,B,\cdots,A^n)}{D(A^1,\cdots,A^n)}$$

که بردار B به‌جای A^j درستون jام ظاهرشده است. به‌عبارت دیگر

$$x_j=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

(دترمینان صورت‌کسر ازقــراردادن B به‌جای A^j درستون jام ماتـریس A حاصل شده. مخرج‌کسرهمان دترمینان A است.)

قضیهٔ ۱.۴ یك راه صحیح یافتن مؤلفه‌های B نسبت به A^1، ...، A^n است. در زبان معادلات خطی، قضیهٔ ۱.۴ به‌ما اجازه می‌دهدکه یك دستگاه n معادلهٔ n مجهولی

$$x_1 a_{11}+\cdots+x_n a_{1n}=b_1$$
$$\vdots$$
$$x_1 a_{n1}+\cdots+x_n a_{nn}=b^n$$

راحل‌کنیم. اکنون قضیهٔ ۱.۴ را اثبات می‌کنیم.

فـرض‌کنـیـد B بـه صـورت عبـارت نـوشته شده در قضیـه است، یعـنـی $B=x_1 A^1+\cdots+x_n A^n$، ودترمینان ماتریس حاصل از تعویض ستون jام ماتریس A با B را درنظر بگیرید. دراین صورت

$$D(A^1,\cdots,B,\cdots,A^n)=D(A^1,\cdots,x_1 A^1+\cdots+x_n A^n,\cdots,A^n)$$

بااستفاده ازخاصیت ۱ عبارت فوق به‌صورت زیرنوشته می‌شود

$$D(A^1,\cdots,x_1 A^1,\cdots,A^n)+\cdots+D(A^1,\cdots,x_j A^j,\cdots,A^n)$$
$$+\cdots+D(A^1,\cdots,x_n A^n,\cdots,A^n)$$

مجدداً خاصیت ۱ عبارت فوق رابه‌صورت زیردرمی‌آورد

$$x_1 D(A^1,\cdots,A^1,\cdots,A^n)+\cdots+x_j D(A^1,\cdots,A^n)+\cdots+x_n D(A^1,\cdots,A^n,\cdots,A^n)$$

هریك از جملات فوق بـه جز جملهٔ jام، دارای دوستون مساوی هستند و مقدار آنها طبق خاصیت ۵ مساوی ۰ است. جملهٔ jام مساوی است با

$$x_j D(A^1,\cdots,A^n)$$

واینهم مساوی دترمینانی است‌که با آن شروع‌کردیم، یعنی

$$D(A^1,\cdots,B,\cdots,A^n)=x_j D(A^1,\cdots,A^n)$$

بنابراین دستگاه رابرای x_j حل‌کرده ودقیقاً همان عبارت مذکور درصورت قضیه رابرای x_j به‌دست آوردیم.

قاعدهٔ قضیهٔ ۱.۴ که جواب دستگاه معادلات خطی رابـرحسب دترمینانها بـه دست

می‌آید، به **قاعدهٔ کرامر** موسوم است.

مثال. دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} ۳x+۲y+۴z=۱ \\ ۲x-y+z=۰ \\ x+۲y+۲z=۱ \end{cases}$$

داریم

$$x=\frac{\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}},\ y=\frac{\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}},\ z=\frac{\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}}$$

توجه کنید که چگونه ستون

$$B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

از ستون اول، وقتی‌که جواب x را می‌یابیم، به‌ستون دوم برای حل y، و به ستون سوم برای یافتن z انتقال می‌یابد. مخرج کسر در تمام عبارتها یکسان است، وعبارت است از دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه.

می‌دانیم که چگونه دترمینانهای ۳×۳ را به دست آوریم. دراین‌صورت داریم

$$x=-\frac{۱}{۵},\ y=۰,\ z=\frac{۲}{۵}$$

با استفاده از دترمینان می‌توانیم استقلال خطی بردارها را تعیین کنیم.

قضیهٔ ۲.۴. فرض کنید $A^۱$، …، A^n بردارهای ستونی (n بعدی) هستند. اگراین بردارها بستگی خطی داشته باشند، آنگاه

$$D(A^۱,\dots,A^n)=۰$$

اگر $D(A^۱,\dots,A^n)\neq۰$، آنگاه بردارهای $A^۱$، …، A^n استقلال خطی دارند.

اثبات. حکم دوم هم‌ارز حکم اول است. پس‌کافی است حکم اول راثابت کنیم. فرض کنید

که A^1، ...، A^n بستگی خطی دارند، می‌توانیم اعداد x_1، x_2، ...، x_n که همگی آنها صفر نیستند بیابیم به‌طوری که

$$x_1 A^1 + \cdots + x_n A^n = 0$$

فرض کنید $x_j \neq 0$. دراین‌صورت

$$x_j A^j = -\sum_{k \neq j} x_k A^k$$

توجه کنید درمجموع سمت راست جملهٔ jام وجود ندارد. با تقسیم طرفین بر x_j، A^j را به صورت ترکیبی خطی از بردارهای A^k با $k \neq j$ به‌دست می‌آوریم. به‌عبارت دیگر، اعداد y_k $(k \neq j)$ وجود دارند به‌طوری که

$$A^j = \sum_{k \neq j} y_k A^k$$

در واقع $y_k = -\frac{x_k}{x_j}$. بنا برخطی بودن دترمینان داریم

$$D(A^1, \cdots, A^n) = D(A^1, \cdots, \sum_{k \neq j} y_k A^k, \cdots, A^n)$$
$$= \sum_{k \neq j} y_k D(A^1, \cdots, A^k, \cdots, A^n)$$

توجه کنید که A^k درستون jام واقع است و $k \neq j$. درمجموع سمت راست، هر جملهٔ آن دارای ستونهای kام و jام مساوی است و بنابراین مقدار آن طبق خاصیت ۵ صفراست. به این ترتیب قضیهٔ ۲.۴ ثابت می‌شود.

نتیجهٔ ۳.۴ اگر A^1،...،A^n بردارهای ستونی از $\mathbf{R}^n$ باشند به‌طوری که $D(A^1, \cdots, A^n) \neq 0$ و اگر B یك بردار ستونی دلخواه از $\mathbf{R}^n$ باشد، آنگاه اعداد x_1، ...، x_n وجود دارند به‌طوری که

$$x_1 A^1 + \cdots + x_n A^n = B$$

اثبات. طبق قضیهٔ قبل A^1، ...، A^n مستقل خطی‌اند، و لذا تشکیل یك پایه برای $\mathbf{R}^n$ می‌دهند. لذا هر بردار $\mathbf{R}^n$ را می‌توان به‌صورت ترکیبی از A^1، ...، A^n نوشت.

به زبان معادلات خطی، این نتیجه نشان می‌دهد که:

اگر یك دستگاه همگن از n معادلهٔ n مجهولی دارای ماتریس ضرایبی باشد که دترمینان آن مخالف صفراست. آنگاه این دستگاه دارای یك جواب است که بااستفاده‌از قاعدهٔ کرامر می‌توان آنرا به دست آورد.

درقضیهٔ ۳.۵ عکس نتیجهٔ ۳.۴ راثابت می‌کنیم، وبنابراین داریم

قضیهٔ ۴.۴. دترمینان $D(A^1,\dots,A^n)$ مساوی ۰ است اگر وتنها اگر A^1، ...، A^n استقلال خطی داشته باشند.

تمرینها

۱. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

(الف)
$$\begin{aligned} ۳x+y-z&=۰\\ x+y-z&=۰\\ y-z&=۰\end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} ۲x-y+z&=۱\\ x+۳y-۲z&=۰\\ ۴x-۳y+z&=۰\end{aligned}$$

(پ)
$$\begin{aligned} ۳x+y+z+w&=۱\\ x-y+۲z-۳w&=۰\\ ۲x+y+۳z+۵w&=۰\\ x+y-z-w&=۲\end{aligned}$$

(ت)
$$\begin{aligned} x+۲y-۳z+۵w&=۰\\ ۲x+y-۴z-w&=۱\\ x+y+z+w&=۰\\ -x-y-z+w&=۴\end{aligned}$$

۵. مثلثی کردن یك ماتریس به‌وسیلهٔ عملیات ستونی

برای محاسبهٔ دترمینان باید دوعمل ستونی زیررا به‌کاربریم:

س ۱. افزودن مضربی ازیك ستون به ستون دیگر

س ۲. تعویض جای دوستون

می‌گوئیم دوماتریس $n\times n$، A و B **هم‌ارزستونی** هستند اگر بتوان با انجام اعمال ستونی س ۱ و س ۲ به‌طور پی درپی از A به B رسید. دراین‌صورت داریم

گزارهٔ ۱.۵. اگر A و B هم‌ارز ستونی باشند، آنگاه

$$\text{رتبهٔ } A = \text{رتبهٔ } B$$

A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر B وارون‌پذیر باشد؛ $\mathrm{Det}(A)=0$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Det}(B)=0$.

اثبات. فرض کنید A یك ماتریس $n\times n$ است. اگر دوستون A را باهم تعویض کنیم، آنگاه فضای ستونی، یعنی فضای تولید شده به وسیله ستونهای A، تغییر نمی‌کند. فرض کنید A^1، ...، A^n ستونهای A هستند. فرض کنید x یك اسکالر است. دراین‌صورت فضای تولید شده توسط

$$A^1+xA^2, A^2, \cdots, A^n$$

همان فضای تولیدشده توسط A^1، A^2، ...، A^n است. لذا اگر B هم‌ارز ستونی A باشد، آنگاه فضای ستونی B مساوی فضای ستونی A است، بنابراین رتبهٔ A مساوی رتبهٔ B می‌باشد.

بر اثر انجام یك عمل ستونی مقداردترمینان در ۱ — ضرب می‌شود، لذا $\mathrm{Det}(A)=0$ اگروتنها اگر $\mathrm{Det}(B)=0$.

بالاخره، اگر A وارون‌پذیر باشد، آنگاه طبق قضیهٔ ۲.۲ فصل ۴ رتبهٔ A مساوی n است. بنابراین رتبهٔ B نیزمساوی n خواهد شدو لذاطبق همان قضیهٔ B نیز وارون‌پذیر است. این اثبات را کامل می‌کند.

قضیهٔ ۲.۵. فرض‌کنید A یك ماتریس $n\times n$ است، دراین‌صورت A هم‌ارز ستونی با ماتریس مثلثی زیراست

$$\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

اثبات. با استقراء روی n قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $A=[a_{ij}]$. اگر $n=1$ باشد چیزی برای اثبات نداریم. فرض کنید $n>1$. اگر تمام اعضای سطر اول ماتریس A مساوی صفر باشند، آنگاه بااستفاده ازفرض استقراء ماتریس $(n-1)\times(n-1)$ باقیمانده یعنی

$$\begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

را می‌توان مثلثی کرد. فرض کنید برخی از اعضای سطر اول ماتریس A مخالف صفر است. با اعمال ستونی می‌توانیم فرض کنیم که $a_{11} \neq 0$. با افزودن مضربی از ستون اول به هر یك از ستونها ماتریس هم‌ارزی مانند B به دست می‌آوریم که در آن

$$b_{12} = \dots = b_{1n} = 0$$

یعنی اعضای سطر اول B به جز a_{11} همگی صفرند. اکنون استقراء را روی ماتریس حاصل از حذف سطر اول وستون اول به‌کار می‌بریم. به‌این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

قضیهٔ ۳.۵. فرض کنید $A = (A^1, \dots, A^n)$ یك ماتریس مربع است. شرایط زیر هم‌ارزند:

(الف) A وارون‌پذیراست.

(ب) ستونهای A^1، ...، A^n استقلال خطی دارند.

(پ) $D(A) \neq 0$

اثبات. اینکه (الف) هم‌ارز (ب) است در قضیهٔ ۲.۲ ازفصل ۴ ثابت شد. طبق قضیهٔ ۱.۵ و ۲.۵ می‌توانیم فرض کنیم که A یك ماتریس مثلثی است. دراین‌صورت دترمینان ماتریس مساوی حاصلضرب اعضای روی قطرش می‌باشد، ومساوی صفر است اگر وتنها اگر برخی‌ازاعضای قطرصفر باشند. اما این شرط هم‌ارز این‌است که بردارهای ستونی بستگی خطی داشته‌باشند.

تمرینها

۱. (الف) فرض کنید $1 \leqslant r$، $s \leqslant n$ و $r \neq s$. فرض کنید J_{rs} یك ماتریس $n \times n$ است که درایهٔ rsام آن مساوی ۱ وبقیهٔ آنها مساوی ۰ است. فرض کنید $E_{rs} = I + J_{rs}$. نشان دهید که $D(E_{rs}) = 1$.

(ب) فرض کنید A یك ماتریس $n \times n$ است. ازضرب E_{rs} در A، یعنی $E_{rs}A$، چه تغییری در A حاصل می‌شود؟

۲. دراثبات قضیهٔ ۳.۵، از این واقعیت استفاده کردیم که اگر A یك ماتریس مثلثی باشد، آنگاه ستونهای آن استقلال خطی دارند اگر وتنها اگرهمگی اعضای روی قطر آن مخالف

۵ باشند. این مطلب را با جزئیات اثبات کنید.

۶. جایگشتها

فقط جایگشتهای مجموعهٔ $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ را بررسی می‌کنیم. طبق تعریف، یك جایگشت این مجموعه، عبارت است از نگاشت

$$\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$$

به‌طوری‌که اگر $i, j \in J_n$ و $i \neq j$، آنگاه $\sigma(i) \neq \sigma(j)$، اگر σ چنین جایگشتی باشد، آنگاه مجموعهٔ اعداد

$$\{\sigma(1), \cdots, \sigma(n)\}$$

دارای n عضومتمایز است و لذا مجدداً مساوی همان‌اعداد ۱، ...، n است با ترتیبی‌متفاوت. بنا بر این به‌ازای هر $j \in J_n$ یك عدد صحیح منحصر به فرد k وجود دارد به‌طوری‌که $\sigma(k) = j$. **نگاشت وارون** σ را با σ^{-1} نمایش می‌دهیم و عبارت است از نگاشت $\sigma^{-1} : J_n \to J_n$ به‌طوری‌که $\sigma^{-1}(k)$ مساوی عدد صحیح منحصر به فرد $j \in J_n$ است به قسمی‌که $\sigma(j) = k$. اگر σ و τ جایگشتهایی از J_n باشند، آنگاه می‌توانیم ترکیب آنها یعنی $\sigma \circ \tau$ راتشکیل دهیم. این ترکیب هم یك جایگشت است. ما معمولاً دایرهٔ‌کوچك بین آنها راحذف می‌کنیم و ترکیب σ و τ رابا $\sigma\tau$ نمایش می‌دهیم. پس

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$$

طبق تعریف، برای هرجایگشت σ داریم

$$\sigma\sigma^{-1} = id \text{ و } \sigma^{-1}\sigma = id$$

که id جایگشت همانی است، یعنی جایگشتی است‌که برای هر $j = 1, \ldots, n$ داریم $id(j) = j$.

اگر σ_1، ...، σ_r جایگشتهایی از J_n باشند، آنگاه وارون نگاشت مرکب $\sigma_r \ldots \sigma_1$ جایگشت $\sigma_1^{-1} \ldots \sigma_r^{-1}$ است.

یك **ترانهش** جایگشتی است‌که دوعضو راجابجا می‌کند و بقیه راثابت نگه می‌دارد. وارون ترانهش τ مساوی خود τ است، یعنی $\tau^2 = id$.

گزارهٔ ۶.۱. هرجایگشت J_n را می‌توان به صورت حاصلضرب ترانهشها بیان کرد.

اثبات. با استقراء روی n قضیه راثابت می‌کنیم. برای $n = 1$ چیزی برای اثبات وجود

ندارد. فرض کنید $n>1$ و فرض کنید که حکم برای $n-1$ ثابت شده است. فرض کنید σ جایگشتی از J_n است. فرض کنید $\sigma(n)=k$. اگر $k\neq n$ باشد آنگاه τ را ترانهشی از J_n می‌گیریم که $\tau(k)=n$ و $\tau(n)=k$. اگر $k=n$، آنگاه قرار می‌دهیم $\tau=id$. در این صورت $\tau\sigma$ جایگشتی است که

$$\tau\sigma(n)=\tau(k)=n$$

به‌عبارت دیگر، $\tau\sigma$ عضو n را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین طبق فرض استقراء $\tau\sigma$ را می‌توانیم به‌صورت حاصلضرب ترانهشهای J_{n-1} بنویسیم. یعنی ترانهشهای τ_1، ...، τ_s از J_{n-1}، که n را ثابت نگه می‌دارند، وجود دارند به‌طوری که

$$\tau\sigma=\tau_1\cdots\tau_s$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\sigma=\tau^{-1}\tau_1\cdots\tau_s=\tau\tau_1\cdots\tau_s$$

به‌این‌ترتیب اثبات قضیهٔ تمام است.

مثال ۱. جایگشت σ از اعداد $\{1,\ldots,n\}$ را با $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & & \sigma(n)\end{pmatrix}$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ جایگشتی مثل σ را مشخص می‌کند به‌طوری‌که $\sigma(1)=2$، $\sigma(2)=1$ و $\sigma(3)=3$. این جایگشت درواقع یك ترانهش است. اگر σ' جایگشت

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

باشد، آنگاه $\sigma\sigma'=\sigma\circ\sigma'$ جایگشتی است که

$$\sigma\sigma'(1)=\sigma(\sigma'(1))=\sigma(3)=3$$

$$\sigma\sigma'(2)=\sigma(\sigma'(2))=\sigma(1)=2$$

$$\sigma\sigma'(3)=\sigma(\sigma'(3))=\sigma(2)=1$$

بنابراین

$$\sigma\sigma'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

به‌علاوه، وارون σ' جایگشت

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$$

است. زیرا از $۳=\sigma'(۱)$ نتیجه می‌شود $۱=\sigma'^{-۱}(۳)$ واز $۱=\sigma'(۲)$ نتیجه می‌شود که $۲=\sigma'^{-۱}(۱)$ وبالاخره از $۲=\sigma'(۳)$ نتیجه می‌شود $۳=\sigma'^{-۱}(۲)$.

مثال۲. می‌خواهیم جایگشت

$$\sigma=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

را به‌صورت حاصلضرب ترانهشها بنویسیم. فرض کنید τ ترانهشی است که ۳ و ۱ را جابجا می‌کند و ۲ را ثابت نگه می‌دارد. دراین‌صورت

$$\tau\sigma=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}$$

بنابراین $\tau\sigma$ یك ترانهش است، آنرا با τ' نمایش می‌دهیم. پس $\tau'=\tau\sigma$، ودرنتیجه

$$\sigma=\tau^{-۱}\tau'=\tau\tau'$$

زیرا $\tau^{-۱}=\tau$.

مثال۳. جایگشت

$$\sigma=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}$$

را به‌صورت حاصلضرب ترانهشها بنویسید.

فرض کنید $\tau_۱$ ترانهشی است که ۱ و ۲ راتعویض می‌کند و ۳ و ۴ راثابت نگه می‌دارد. دراین‌صورت

$$\tau_۱\sigma=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۴ & ۲ \end{pmatrix}$$

اکنون فرض کنیدکه $\tau_۲$ ترانهشی‌باشدکه ۲ و ۳ راتعویض می‌کندوبقیه راثابت نگه‌می‌دارد. دراین‌صورت

$$\tau_۲\tau_۱\sigma=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}$$

پس $\tau_۲\tau_۱\sigma$ ترانهشی مانند $\tau_۳$ است. دراین‌صورت $\tau_۲\tau_۱\sigma=\tau_۳$ ودرنتیجه $\sigma=\tau_۱\tau_۲\tau_۳$.

گزارهٔ ۲.۶. به هر جایگشت σ از J_n می‌توان علامت ۱ یا ۱ − را نسبت داد. این عدد را با $\epsilon(\sigma)$ نمایش می‌دهیم ودرشرایط زیرصدق می‌کند.

(الف) اگر τ یك ترانهش باشد، آنگاه $\epsilon(\tau)=-1$.

(ب) اگر σ و σ' دوجایگشت از J_n باشند، آنگاه

$$\epsilon(\sigma\sigma')=\epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$$

درواقع، اگر $A=(A^1,\dots,A^n)$ یك ماتریس $n\times n$ باشد،آنگاه $\epsilon(\sigma)$ را می‌توان باشرط

$$D(A^{\sigma(1)},\dots,A^{\sigma(n)})=\epsilon(\sigma)\ D(A^1,\dots,A^n)$$

تعریف کرد.

اثبات. توجه‌کنیدکه $(A^{\sigma(1)},\dots,A^{\sigma(n)})$ ترتیب دیگری از $(A^1,\dots,A^n)$ است. فرض‌کنید σ جایگشتی از J_n است. دراین‌صورت

$$D(A^{\sigma(1)},\dots,A^{\sigma(n)})=\pm D(A^1,\dots,A^n)$$

وعلامت + و − توسط σ مشخص می‌شود، و به A^1، ...، A^n بستگی ندارد، درواقع، با اعمال ترانهش‌های متوالی می‌توانیم $(A^{\sigma(1)},\dots,A^{\sigma(n)})$ رابه‌ترتیب استاندارد آن $(A^1,\dots,A^n)$ تبدیل‌کنیم، وهر ترانهش به وسیله یك علامت مشخص می‌شود. بنابراین می‌توانیم $\epsilon(\sigma)$ رابه‌صورت زیر تعریف‌کنیم:

$$\epsilon(\sigma)=\frac{D(A^{\sigma(1)},\dots,A^{\sigma(n)})}{D(A^1,\dots,A^n)}$$

البته برای هر انتخابی از A^1، ...، A^n که دترمینان آن مخالف صفر باشد، مثلاً برای بردارهای یکه‌ای E^1، ...، E^n.

البته راههای زیادی برای‌کاربرد متوالی‌ترانهشهاوجود داردکه $(A^{\sigma(1)},\dots,A^{\sigma(n)})$ رابه شکل استانداردآن برگردانند، اما چون دترمینان خوب تعریف شده است، لذا علامت $\epsilon(\sigma)$ نیزخوش تعریف است، وبستگی به‌اینکه چه راهی رابرگزینیم ندارد. بنابراین‌داریم

$$D(A^{\sigma(1)},\dots,A^{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)\ D(A^1,\dots,A^n)$$

البته این تساوی وقتی $D(A^1,\dots,A^n)=0$ باشد نیز برقرار است، زیرا دراین‌حالت دو طرف تساوی صفرند.

اگر τ یك ترانهش باشد، آنگاه حکم (الف) فقط یك برگردان خاصیت ۴ است.

بالاخره، فرض کنید σ و σ' دو جایگشت از J_n هستند، فرض کنید $C^j = A^{\sigma'(j)}$ برای $j=1,\dots,n$ دراین‌صورت ازیك طرف داریم

$$D(A^{\sigma'\sigma(1)},\dots,A^{\sigma'\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma\sigma')\,N(A^1,\dots,A^n) \qquad (*)$$

ازطرف دیگر، داریم

$$\begin{aligned} D(A^{\sigma'\sigma(1)},\dots,A^{\sigma'\sigma(n)}) &= D(C^{\sigma(1)},\dots,C^{\sigma(n)}) \\ &= \epsilon(\sigma)\,D(C^1,\dots,C^n) \\ &= \epsilon(\sigma)\,D(A^{\sigma'(1)},\dots,A^{\sigma'(n)}) \qquad (**) \\ &= \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')\,D(B^1,\dots,A^n) \end{aligned}$$

فرض کنید A^1، ...، A^n بردارهای یکهٔ E^1، ...، E^n هستند. از تساوی بین $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌گیریم که $\epsilon(\sigma'\sigma) = \epsilon(\sigma')\epsilon(\sigma)$، وحکم ثابت می‌شود.

نتیجهٔ ۳.۶. اگرجایگشت σ به‌صورت حاصلضرب $\sigma = \tau_1\dots\tau_s$ نوشته‌شودکه هریك‌از τ_iها یك ترانهش هستند،آنگاه s زوج یافرد است هرگاه $\epsilon(\sigma)=1$ یا $\epsilon(\sigma)=-1$ باشد.

اثبات. داریم

$$\epsilon(\sigma) = \epsilon(\tau_1)\dots\epsilon(\tau_s) = (-1)^s$$

بنابراین حکم واضح است.

نتیجهٔ ۴.۶. اگر σ یك جایگشت J_n باشد، آنگاه $\epsilon(\sigma)=\epsilon(\sigma^{-1})$

اثبات. داریم

$$1 = \epsilon(id) = \epsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma^{-1})$$

بنابراین $\epsilon(\sigma)$ و $\epsilon(\sigma^{-1})$ یاهردومساوی ۱، ویاهردومساوی ۱ــ هستند.

یك جایگشت را **زوج** می‌نامیم هرگاه علامت آن ۱، و **فرد** می‌نامیم‌هرگاه علامت آن ۱ــ باشد. بنابراین هرترانهش فرد است.

مثال۴. علامت جایگشت σ درمثال ۲ مساوی ۱ است،زیرا $\sigma = \tau\tau'$. علامت جایگشت σ درمثال ۳ مساوی ۱ــ است، زیرا $\sigma = \tau_1\tau_2\tau_3$.

تمرینها

۱. علامت جایگشتهای زیر را تعیین کنید.

(الف) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$ (پ) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$

(ت) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}$ (ث) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}$

(چ) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$ (ح) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۱ & ۴ & ۲ \end{pmatrix}$ (خ) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$

۲. درهریك ازحالتهای تمرین ۱، جایگشت وارون رابنویسید.

۳. نشان دهیدکه تعداد جایگشتهای فرد J_n با تعداد جایگشتهای زوج آن مساوی است ($n \geqslant ۲$). نشان دهیدکه نگاشت $\sigma \mapsto \tau\sigma$ یك نگاشت دوسویی بین مجموعهٔ جایگشتهای زوج وفرد است.

۷. دستور بسط دترمینان و یکتایی آن.

تذکراتی درموردبسط دترمینانها ارائه می‌دهیم. دوخطی بودن دترمینان راکه درفصل ۵ بخش ۴ برای حالت ۳ × ۳ ذکرکردیم توسعه می‌دهیم.

فرض‌کنید $X^۱$، $X^۲$، $X^۳$ سه بردار در $K^۳$ هستند و فرض‌کنید $[b_{ij}]$ ($i,j=۱,\dots,n$) یك ماتریس ۳ × ۳ است. فرض‌کنید

$$A^۱ = b_{۱۱}X^۱ + b_{۲۱}X^۲ + b_{۳۱}X^۳ = \sum_{k=۱}^{۳} b_{k۱}X^k$$

$$A^۲ = b_{۱۲}X^۱ + b_{۲۲}X^۲ + b_{۳۲}X^۳ = \sum_{l=۱}^{۳} b_{l۲}X^l$$

$$A^۳ = b_{۱۳}X^۱ + b_{۲۳}X^۲ + b_{۳۳}X^۳ = \sum_{m=۱}^{۳} b_{m۳}X^m$$

دراین‌صورت بااستفاده ازخطی‌بودن دترمینان داریم

$$D(A^{۱},A^{۳},A^{۳})=D\left(\sum_{k=۱}^{۳}b_{k۱}X^{k},\ \sum_{l=۱}^{۳}b_{l۲}X^{l}\ ,\ \sum_{m=۱}^{۳}b_{m۳}X^{m}\right)$$
$$=\sum_{k=۱}^{۳}b_{k۱}D\left(X^{k},\ \sum_{l=۱}^{۳}b_{l۲}X^{l}\ ,\ \sum_{m=۱}^{۳}b_{m۳}X^{m}\right)$$
$$=\sum_{k=۱}^{۳}\sum_{l=۱}^{۳}b_{k۱}b_{l۲}D\left(X^{k},X^{l},\sum_{m=۱}^{۳}b_{m۳}X^{m}\right)$$
$$=\sum_{k=۱}^{۳}\sum_{l=۱}^{۳}\sum_{m=۱}^{۳}b_{k۱}b_{l۲}b_{m۳}D(X^{k},X^{l},X^{m})$$

بنابراین

$$\boxed{D(A^{۱},A^{۲},A^{۳})=\sum_{k=۱}^{۳}\sum_{l=۱}^{۳}\sum_{m=۱}^{۳}b_{k۱}b_{l۲}b_{m۳}D(X^{۱},X^{۲},X^{۳})}$$

اگر بخواهیم بسط مشابهی برای ماتریسهای $n\times n$ به‌دست آوریم، باید به‌طوروضوح علامت گذاری راتعدیل کنیم، درغیر این‌صورت حروف k، l و m راتمام خواهیم کرد. بنا بـراین به‌جای استفاده از k، l، m، مشاهده می‌کنیم که این مقادیر k، l و m متناظر به یك انتخاب دلخواه‌ازیك عدد صحیح ۱، یا ۲، یا ۳ برای‌هریك ازاعداد ۱، ۲، ۳ ظاهر شده دراندیس دوم b_{ij} هستند، بنا براین اگر فرض کنیم که σ یك چنین انتخابی رامشخص می‌کند،می‌توانیم بنویسیم

$$k=\sigma(۱)\ \ l=\sigma(۲)\ \ \text{و}\ \ m=\sigma(۳)$$

و

$$b_{k۱}b_{l۲}b_{m۳}=b_{\sigma(۱),۱}b_{\sigma(۲),۲}b_{\sigma(۳),۳}$$

بنا براین $\sigma:\{۱,۲,۳\}\rightarrow\{۱,۲,۳\}$ یك تناظردوسویی است ومی‌توانیم بنویسیم

$$D(A^{۱},A^{۲},A^{۳})=\sum b_{\sigma(۱),۱}b_{\sigma(۲),۲}b_{\sigma(۳),۳}D(X^{\sigma(۱)},X^{\sigma(۲)},X^{\sigma(۳)})$$

جمع روی تمام چنین σهایی گرفته شده است.

می‌توانیم بسطی بـرای دترمینان بیابیم که متناظر به شش جمله بـرای حالت ۳ × ۳ است. همزمان، توجه‌کنید خواص به‌کار رفته دراثبات تنها خواص ۱، ۲، ۳ ونتایج ۴، ۵و ۶ است. بنا براین اثبات ماهر تابع D که دراین خواص صدق کند رابه‌کار می‌گیرد.

نخست استدلالی برای حالت ۲ × ۲ ارائه می‌دهیم. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

یك ماتریس ۲ × ۲ و $A^{۱}=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$، $A^{۲}=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ بردارهای ستونی آن است. می‌توانیم بنویسیم

$$A^{۱}=aE^{۱}+cE^{۲} \quad \text{و} \quad A^{۲}=bE^{۱}+dE^{۲}$$

که $E^{۱}$ و $E^{۲}$ بردارهای یکه‌ای ستونی هستند. دراین‌صورت

$$\begin{aligned} D(A)=D(A^{۱},A^{۲})&=D(aE^{۱}+cE^{۲},bE^{۱}+dE^{۲}) \\ &=ab\, D(E^{۱},E^{۱})+cb\, D(E^{۲},E^{۱})+ad\, D(E^{۱},E^{۲})+cd\, D(E^{۲},E^{۲}) \\ &=-bc\, D(E^{۱},E^{۲})+ad\, D(E^{۱},E^{۲}) \\ &=ad-bc \end{aligned}$$

به‌این ترتیب ثابت می‌شود که هر تابع D که درخواص اصلی دترمینان صدق کند، مطابق فرمول بخش ۱ داده می‌شود، یعنی به‌صورت $ad-bc$.

اثبات درحالت کلی کاملاً شبیه همین حالت است. می‌توانیم آنرا درلم زیر که یك لم کلیدی است خلاصه کنیم.

لم ۷.۱. فرض کنید $X^{۱}$، ...، X^{n}، n برداردریك فضای برداری n بعدی هستند. فرض کنید $B=[b_{ij}]$ یك ماتریس $n\times n$ است، وفرض کنید

$$A^{۱}=b_{۱۱}X^{۱}+\cdots+b_{n۱}X^{n}$$

$$\vdots$$

$$A^{n}=b_{۱n}X^{۱}+\cdots+b_{nn}X^{n}$$

دراین صورت

$$D(A^{۱},\cdots,A^{n})=\sum_{\sigma}\epsilon(\sigma)b_{\sigma(۱),۱}\cdots b_{\sigma(n),n}\, D(X^{۱},\cdots,X^{n})$$

که مجموع روی تمام جایگشتهای مجموعهٔ $J_n=\{۱,\ldots,n\}$ گرفته شده است.

اثبات. باید

$$D(b_{11}X^1+\cdots+b_{n1}X^n,\ldots,b_{1n}X^1+\cdots+b_{nn}X^n)$$

رامحاسبه کنیم. با استفاده ازخاصیت خطی‌نسبت به‌هر ستون، می‌توانیم آنرا به‌صورت‌مجموع زیر بسط دهیم

$$\sum_{\sigma} b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n}\ D(X^{\sigma(1)},\ldots,X^{\sigma(n)}) \qquad (*)$$

که در آن $\sigma(1)$، ...، $\sigma(n)$ یك انتخاب از یك عدد صحیح بین ۱ و n برای هر یك از مقادیر ۱، ...، n است. بنابراین هر σ یك نگاشت ازمجموعهٔ $\{1,\ldots,n\}$ درخودش است، ومجموع روی تمامی این نگاشتهاست. اگر یك σ به دو مقدار i و j بین ۱ تا n یك عدد صحیح رانسبت دهد، آنگاه دترمینان سمت راست دارای دوستون مساوی می‌شود، ودر نتیجه مقدار آن مساوی صفرمی گردد. بنابراین می‌توانیم مجموع را روی آن نگاشتهای σای بگیریم که به‌ازای $i\neq j$، $\sigma(i)\neq\sigma(j)$ باشد، یعنی روی جایگشتها. طبق گزارهٔ ۲.۶ داریم

$$D(X^{\sigma(1)},\ldots,X^{\sigma(n)})=\epsilon(\sigma)\ D(X^1,\ldots,X^n)$$

با جایگذاری این مقدار در $(*)$ نتیجهٔ موردنظرحاصل می‌گردد.

قضیهٔ ۲.۷. دترمینانها به‌صورت منحصربه فردی برحسب خواص ۱، ۲، ۳ مشخص می‌شوند. فرض کنید $A=[a_{ij}]$. دترمینان دربسط زیرصدق می‌کند

$$D(A^1,\ldots,A^n)=\sum\epsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

که درآن جمع روی تمام جایگشتهای مجموعهٔ $\{1,\ldots,n\}$ گرفته شده است.

اثبات. فرض‌کنید $X^j=E^j$ بردار یکه‌ای باشدکه jامین مؤلفهٔ آن ۱ است، وفرض‌می‌کنیم درلم ۱.۷، $b_{ij}=a_{ij}$. چون طبق فرض داریم $D(E^1,\ldots,E^n)=1$، مشاهده می‌کنیم که فرمول قضیهٔ ۲.۷.

کاربردهای بیشتری ازلم‌کلیدی ۱.۷ به‌دست می‌آوریم. هر یك ازنتایج بعدی‌کاربرد مستقیمی ازاین لم است.

قضیهٔ ۳.۷. فرض می‌کنیم A، B دوماتریس $n\times n$ است. دراین صورت

$$\det(AB)=\det(A)\ \det(B)$$

دترمینان حاصلضرب مساوی حاصلضرب دترمینانهاست.

اثبات. فرض‌کنید $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{jk}]$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

فرض کنید $AB=C$، وفرض کنید C^k، kامین ستون C است. دراین‌صورت طبق تعریف،

$$C^k = b_{1k}A^1 + \cdots + b_{nk}A^n$$

$$\begin{aligned} D(AB) &= D(C^1,\dots,C^n) \\ &= D(b_{11}A^1+\cdots+b_{1n}A^n,\dots,b_{1n}A^1+\cdots+b_{nn}A^n) \\ &= \sum_\sigma b_{\sigma(1),1}\cdots b_{\sigma(n),n} D(A^{\sigma(1)},\dots,A^{\sigma(n)}) \\ &= \sum_\sigma \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1}\cdots b_{\sigma(n),n} D(A^1,\dots,A^n) \qquad \text{طبق لم ۱۰۷} \\ &= D(B)\, D(A) \qquad \text{طبق لم ۲۰۷} \end{aligned}$$

وقضیه ثابت می‌شود.

نتیجهٔ ۶۰۷. فرض کنید A یك ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ است. دراین‌صورت

$$\mathrm{Det}(A^{-1}) = \mathrm{Det}(A)^{-1}$$

اثبات. داریم $1 = D(I) = D(AA^{-1}) = D(A)\, D(A^{-1})$. پس حکم ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۵۰۷. فرض کنید A یك ماتریس مربع است. در این‌صورت $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}({}^tA)$.

اثبات. درقضیهٔ ۲۰۷، داریم

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_\sigma \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} \qquad (*)$$

فرض کنید σ یك جایگشت $\{1,\dots,n\}$ است. اگر $\sigma(j)=k$، آنگاه $\sigma^{-1}(k)=j$. دراین‌صورت می‌توانیم بنویسیم $a_{\sigma(j),j} = a_{k,\sigma^{-1}(k)}$. در حاصلضرب $a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$ هرعدد k از ۱ تا n دقیقاً یك بار درمیان اعداد $\sigma(1)$، ...، $\sigma(n)$ ظاهرمی‌شود. لذا این حاصلضرب رامی‌توانیم به‌صورت $a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$ بنویسیم. دراین‌صورت‌مجموع $(*)$ مساوی

$$\sum_\sigma \epsilon(\sigma^{-1}) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

می‌شود، زیرا $\in(\sigma)=\in(\sigma^{-1})$. در این مجموع، هر جمله متناظر به یك جایگشت σ است. به‌هر حال، چون σ روی مجموعهٔ تمام جایگشتها تغییر می‌کند، لذا σ^{-1} هم روی تمام جایگشتها تغییر خواهد کرد، زیرا σ^{-1} یك جایگشت است و به‌طور منحصر به فردی تعیین می‌گردد. بنابراین مجموع فوق مساوی

$$\sum \in(\sigma)a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \qquad (**)$$

است. مجموع (**) دقیقاً مساوی مجموعی است که دترمینان ترانهادهٔ A رامشخص می‌کند. پس آنچه راکه می‌خواستیم ثابت کردیم.

تمرینها

۱. نشان دهیدکه وقتی $n=3$ است، بسط قضیهٔ ۲.۷ همان شش جملهٔ ارائه شده در بخش ۲ است.

۲. به‌اثبات قضیهٔ ۱.۷ مراجعه‌کنید ونشان دهیدکه لازم نیست تمام خواص دترمینانها را دراثبات به‌کاربرد. فقط دوخاصیت اول مورد استفاده است. بنابراین فرض‌کنید F یك‌تابع متناوب و چند خطی است. همانند لم ۱.۷، فرض‌کنید به ازای هر $j=1,\dots,n$، $A^j=\sum_{i=1}^{n} b_{ij}X^i$. دراین‌صورت

$$F(A^1,\dots,A^n)=\sum_{\sigma}\in(\sigma)b_{\sigma(1),1}\cdots b_{\sigma(n),n}\,F(X^1,\dots,X^n)$$

چرا می‌توان نتیجه‌گرفت که اگر B ماتریس $[b_{ij}]$ باشد، آنگاه

$$f(A^1,\dots,A^n)=D(B)\,F(X^1,\dots,X^n)\,?$$

۳. فرض‌کنید $F:\mathbf{R}^n\times\dots\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ یك‌تابع از n متغیر است که هریك ازمتغیرها روی $\mathbf{R}^n$ تغییرمی‌کنند. فرض‌کنیدکه F نسبت به هر یك از متغیرها خطی است، و اگر $A^1,\dots,A^n\in\mathbf{R}^n$، و اگر یك زوج عدد صحیح r و s، $1\leqslant r,s\leqslant n$ وجود داشته باشد که $r\neq s$ و $A^r=A^s$، آنگاه $F(A^1,\dots,A^n)=0$. فرض‌کنید B^iها، $i=1,\dots,n$، بردار، و c_{ij}ها اعدادی هستند که $A^j=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}B^i$،

(الف) اگر $-۳ = F(B^۱,\dots,B^n)$ و $\det(c_{ij}) = ۵$، مطلوب است $F(A^۱,\dots,A^n)$. جواب خود را به قضایای مناسب مستند کنید، و یا اینکه آنرا ثابت نمائید.

(ب) اگر $F(E^۱,\dots,E^n) = ۲$ باشد ($E^۱$، …، E^n بردارهای یکهٔ استاندارد هستند)، و اگر $F(A^۱,\dots,A^n) = ۱۰$، مطلوب است $D(A^۱,\dots,A^n)$. مجدداً برای جواب خود دلیل ارائه دهید.

۸. وارون یك ماتریس

نخست یك حالت خاص را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یك ماتریس ۲×۲ با دترمینان $ad - bc \neq ۰$ است. می‌خواهیم وارون A را پیدا کنیم، یعنی یك ماتریس ۲×۲ مانند $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ بیابیم به‌طوری که $AX = XA = I$. اکنون تساوی $AX = I$ را در نظر گرفته وماتریسهای A و X را در آن قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

اگرستون اول ماتریس AX را درنظر بگیریم، داریم

$$ax + bz = ۱$$

$$cx + dz = ۰$$

ازحل این‌دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی، مجهولات x و z به دست می‌آیند. اگرستون دوم ماتریس AX رادرنظر بگیریم به دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی

$$ay + bw = ۰$$

$$cy + dw = ۱$$

می‌رسیم که ازحل آن y و w به‌دست می‌آیند.

مثال. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$. دراین‌صورت برای یافتن ماتریس X به‌طوری که $AX = I$، باید دستگاههای

$$\begin{array}{ll} ۲x+z=۱ & ۲y+w=۰ \\ ۴x+۳z=۰ & ۴y+۳w=۰ \end{array} \quad \text{و}$$

راحل‌کنیم. ازحل این دستگاهها به این نتیجه می‌رسیم که

$$x=\frac{۳}{۲}\,,\ z=-۲ \quad \text{و} \quad y=-\frac{۱}{۲}\,,\ w=۱$$

بنا براین ماتریس $X=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ درشرط $AX=I$ صدق‌می‌کند، به‌سادگی‌می‌توان دیدکه این ماتریس درشرط $XA=I$ هم صدق می‌کند.

مشابهاً، درحالت ۳ × ۳، می‌توانیم سه‌دستگاه معادلات خطی، متناظر بـه ستون اول، ستون دوم، وستون سوم به‌دست آوریم.هریك ازدستگاهها باید حل شوند تاوارون ماتریس به‌دست آید. اکنون استدلال کلی ارائه می‌دهیم.

فرض‌کنید A یك‌ماتریس $n\times n$ است.اگر B ماتریسی‌باشدکه $AB=I$ و $BA=I$ (I ماتریس‌واحد $n\times n$ است)، آنگاه B رایك **وارون** A می‌نامیم ومی‌نویسیم $B=A^{-۱}$.

اگریك وارون برای A وجود داشته باشد، آن وارون منحصر به‌فرد است.

اثبات. فرض‌کنید C یك وارون A است. دراین‌صورت $CA=I$. دوطـرف را در B از سمت راست ضرب می‌کنیم، نتیجه می‌شود $CAB=B$.اما $CAB=C(AB)=CI=C$. لذا $C=B$. استدلال مشابهی نشان می‌دهدکه $AC=I$.

ماتریس مربعی‌که دترمینان آن مخالف صفر، یا به‌طورهم‌ارز ماتریسی‌که دارای‌وارون است، راماتریس **ناتکین** می‌نامیم.

قضیهٔ ۸۰۱۰. فرض‌کنید $A=[a_{ij}]$ یك ماتریس $n\times n$ است، وفـرض کنیدکه $D(A)\neq ۰$. دراین‌صورت A وارون‌پذیر است. فـرض کنید E^j، jامین بردار ستونی یکه است، و فرض کنید

$$b_{ij}=\frac{D(A^۱,\cdots,E^j,\cdots,A^n)}{D(A)}$$

که در آن E^j در j امین ستون ظاهر شده است. در ایـن صورت $B=[b_{ij}]$ یك وارون A است.

اثبات. فرض کنید $X=[x_{ij}]$ یك ماتریس‌مجهول $n\times n$ است. می‌خواهیم درایه‌های x_{ij} راچنان به‌دست آوریم که $AX=I$. از تعریف حاصلضرب دوماتریس نتیجه می‌گیریم که باید به‌ازای هر j، معادلهٔ

$$E^j=x_{1j}A^1+\cdots+x_{nj}A^n$$

را حل کنیم. این یك دستگاه معادلات خطی است که به‌طورمنحصر به‌فردی باروش کرامرحل می‌شود، ونتیجه می‌گیریم که

$$x_{ij}=\frac{D(A^1,\dots,E^j,\dots,A^n)}{D(A)}$$

واین همان فرمول داده شده درقضیه است.

هنوز باید ثابت کنیم که $XA=I$. توجه کنید که $D({}^tA)\neq 0$. لذا طبق آنچه قبلاً انجام دادیم، می‌توانیم ماتریس Y راچنان بیابیم که ${}^tAY=I$. اکنون ازدوطرف ترانهاده می‌گیریم، نتیجه می‌شود ${}^tYA=I$. اکنون داریم

$$I={}^tY(AX)A={}^tYA(XA)=XA$$

بنابراین آنچه می‌خواستیم ثابت کردیم. پس $X=B$ وارون A است.

می‌توانیم مؤلفه‌های ماتریس B درقضیهٔ ۱.۸ را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$b_{ij}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{j1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\operatorname{Det}(A)}$$

اگر دترمینان صورت رانسبت به ستون iام بسط دهیم، آنگاه تمام جملات به جزیك جملهٔ آن صفرمی‌شود، ودرنتیجه صورت b_{ij} به‌صورت زیردترمینانی از $\operatorname{Det}(A)$ نوشته می‌شود. فرض کنید A_{ij} ماتریس حاصل ازحذف سطر iام وستون jام ماتریس A است. دراین‌صورت

$$b_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}\,\mathrm{Det}(A_{ij})}{\mathrm{Det}(A)}$$

(به وارون شدن اندیسها توجه‌کنید) و بنا بر این فرمول زیر را داریم

$$\boxed{A^{-1}=\left[\frac{(-1)^{i+j}\,\mathrm{Det}(A_{ji})}{\mathrm{Det}(A)}\right] \text{ترانهادهٔ}}$$

تمرینها

۱. وارون ماتریسهای تمرین ۱ بخش ۳ را به دست آورید.

۲. با استفاده از این مطلب که

$$\mathrm{Det}(AB)=\mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(B)$$

ثابت‌کنید که اگر A ماتریسی باشد که $\mathrm{Det}(A)=0$، آنگاهٔ A وارون‌پذیر نیست.

۳. وارون ماتریسهای زیر را بنویسید:

(الف) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (پ) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

۴. اگر A یك ماتریس $n\times n$ با دترمینان مخالف صفر، و B یك بردار داده شده در فضای n بعدی باشد، نشان دهیدکه دستگاه معادلات خطی $AX=B$ دارای جواب منحصر به‌فرد است. اگر $B=o$، این جواب مساوی $X=o$ است.

۹. رتبهٔ یك ماتریس و زیر دترمینانها

چون ازدترمینانها برای تشخیص استقلال خطی می‌توان استفاده‌کرد، می‌توان آنهارا برای تعیین رتبهٔ ماتریسها نیز به‌کار برد.

مثال ۱. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۲ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

A یك ماتریس ۴ × ۳ است. رتبهٔ آن حداکثر ۳ است. اگر بتوانیم سه ستون مستقل خطی بیابیم، آنگاه رتبهٔ آن مساوی ۳ است. اما دترمینان

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۵ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

مساوی صفر نیست(مقدار آن مساوی۴ − است، زیرا باکم کردن ستون دوم از ستون اول و بسط دادن نسبت به سطر آخر به نتیجه ۴ − می‌رسیم). لذا رتبهٔ A مساوی ۳ است.

دریك ماتریس ۴ × ۳ ممکن است بعضی از دترمینانهای ۳ × ۳ مساوی ۰، اما ماتریس ۴ × ۳ دارای رتبهٔ ۳ باشد. به عنوان مثال، فرض کنید

$$B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۲ & -۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

دترمینان حاصل از سه ستون اول صفر است، یعنی

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۴ & ۳ & ۱ \end{vmatrix}=۰$$

زیرا سطر آخر مجموع دوسطر اول ودوم است. اما دترمینان

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۵ \\ ۲ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

مساوی صفر نیست (چرا؟) بنابراین رتبهٔ ماتریس B مساوی ۳ است.

اگر رتبهٔ ماتریس ۴ × ۳

$$\begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳} & c_{۱۴} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} & c_{۲۳} & c_{۲۴} \\ c_{۳۱} & c_{۳۲} & c_{۳۳} & c_{۳۴} \end{bmatrix}$$

مساوی ۲ یا کمتر باشد، آنگاه تمام دترمینانهای ۳×۳ باید ٥ باشند، زیرا درغیر اینصورت شبیه قبل به این نتیجه می‌رسیم که سه تا ازستونهای ماتریس استقلال خطی دارنـد. تـوجه داریم که چهار زیردترمینان داریم که هرکدام ازحذف یکی از ستونهای ماتـریس حاصل می‌شوند. برعکس، اگرهرچنین زیردترمینان ۳×۳ای مساوی ٥ باشد، آنگاه بـه سادگی می‌توان دیدکه رتبهٔ ماتریس حداکثر ۲ است. زیرا اگر رتبهٔ مساوی ۳ باشد، آنگاه بـاید سه‌تا ازستونهای ماتریس استقلال خطی داشته باشند، ودرنتیجه دترمینان آنها مخالف صفر است. واین یك تناقض است.

مثال۲. فرض کنید

$$C = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۲ & -۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۱ & ۷ \end{bmatrix}$$

اگرتمام دترمینهای ۳×۳ راحساب کنیم می‌بینیم که تمام آنها صفرهستند. لذا رتبهٔ ماتریس C حـداکثـر ۲ است. اما، دو سطر اول استقلال خطـی دارنـد، زیـرا مثلاً دتـرمینان $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = ۵ \neq ٥$. این دترمینان، دترمینان حاصل از دوستون اول ماتریس ۲×۴ زیـر است

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

لذا رتبهٔ ماتریس ۲ است.

البته، اگرتوجه کنیم آخرین سطر C مساوی مجموع دوسطر اول ودوم است. پس درهمان نظر اول متوجه می‌شویم که رتبهٔ ماتریس کوچکتریا مساوی ۲ است.

تمرینها

رتبهٔ ماتریسهای زیر را به دست آورید.

۱. $\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۲. $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۵ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۲ \\ ۵ & ۲ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$

۳. $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۵ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۲ \\ ۹ & ۳ & ۹ & ۸ \end{bmatrix}$

۴. $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۵ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۲ \\ ۵ & ۲ & ۱ & ۷ \end{bmatrix}$

۵. $\begin{bmatrix} ۵ & ۶ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

۶. $\begin{bmatrix} ۶ & ۶ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۵ & ۷ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۴ & -۲ \end{bmatrix}$

۷. $\begin{bmatrix} ۶ & ۶ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۵ & ۷ & ۲ & ۵ \\ ۴ & ۸ & ۳ & ۸ \end{bmatrix}$

۸. $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۷ & ۹ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۷ \end{bmatrix}$

۷

عملگرهای متقارن، هرمیتی و یکانی

فرض کنید V یک فضای برداری بـا بعد متناهی روی هیات اعداد حقیقی یا مختلط، بـا یک حاصلضرب اسکالر معین مثبت است. فرض کنید $A:V\to V$ یک نگاشت خطی است. سه حالت ویژهٔ مهم ذکر شده درعنوان فصل را مطـالعه می کنیم. وقتی یک پـایه برای V انتخاب شود، چنین نگاشتهایی به‌وسیلهٔ ماتریسهایی معرفی می‌شوند که به‌همین نامها معروفند.

درفصل ۸ چنین نگاشتهایی را بیشترمطالعه می کنیم و نشان می‌دهیم که می‌توان پایه‌ای انتخاب کرد که در آن پایه‌ماتریس این نگاشتها به صورت قطری نوشته شود. این عمل بـا نظریهٔ بردارها ومقادیر ویژه انجام می گیرد.

۱. عملگرهای متقارن

درطول این بخش فـرض می‌کنیم V یک‌فضای برداری با بعد متناهی روی یک هیات K است. فرض می‌کنیم V دارای یک حاصلضرب اسکالرناتباهیده است که‌برای هرw و v متعلق به V با $\langle v,w\rangle$ نمایش می‌دهیم.

خواننده می‌تواند فرض کند که $V=K^n$ و حاصلضرب اسکالر آن همان ضرب نقطه‌ای معمولی‌است، یعنی

$$\langle X,Y\rangle={}^tXY$$

که درآن X و Y بردارهـای ستونی در K^n هستند. ازنقطه نظرعملی ثـابت‌گرفتن چنین پایه‌ای ایدهٔ خوبی نیست.

نگاشت خطی $A:V\to V$ را **عملگر** می‌نامیم.

لم ۱۰۰۱ فرض‌کنید $A:V\to V$ یـك عملگر است. دراین صورت یك عملگرمنحصر بـه‌فرد $B:V\to V$ وجود دارد به‌طوری‌که برای تمام v و w های متعلق به V داریم

$$<Av,w>=<v,Bw>$$

اثبات. فـرض‌کنیـد $w\in V$ و $L:V\to K$ یـك نگـاشت خطی است‌کـه بـه صـورت $L(v)=<Av,w>$ تعریف شده است. بـه سادگی می‌توان دیدکه L یك نگاشت خطی است. بنابراین L یك‌فرم خطی، یعنی عضوی ازفضای دوگـان V^* است. طبق قضیهٔ ۲۰۶ فصل ۵ یك عضومنحصر به‌فرد $w'\in V$ وجود دارد به‌طوری‌که برای تمام v های متعلق به V داریم $L(v)=<v,w'>$. این عضو w' وابسته به w (همچنین وابسته به A) است. این عضو w' را با Bw نمایش‌می‌دهیم. بستگی $w\to Bw$ یك‌نگاشت از V در V است.کافی‌است ثابت‌کنیم کـه B خطی است. فرض‌کنید w_1 و w_2 متعلق بـه V است. دراین صورت برای هر $v\in V$ داریم

$$\begin{aligned}<v,B(w_1+w_2)>&=<Av,w_1+w_2>=<Av,w_1>+<Av,w_2>\\&=<v,Bw_1>+<v,Bw_2>\\&=<v,Bw_1+Bw_2>\end{aligned}$$

لذا $B(w_1+w_2)$ و Bw_1+Bw_2 یك‌فرم خطی یکسانی را معرفی می‌کنند ودرنتیجه بـا هم برابرند. فرض‌کنید $c\in K$. دراین صورت

$$\begin{aligned}<v,B(cw)>&=<Av,cw>=c<Av,w>\\&=c<v,Bw>=<v,cBw>\end{aligned}$$

بنابراین $B(cw)$ و cBw یك‌فرم خطی یکسانی را معرفی می‌کنند ودر نتیجه با هم مساویند. به‌این ترتیب اثبات لم تمام می‌شود.

طبق تعریف، عملگر B دراثبات قبل را **ترانهادهٔ** A می‌نامیم وبا ${}^tA$ نمایش می‌دهیم. عملگر A را **متقارن**گوئیم (نسبت به‌حاصلضرب اسکالر ناتباهیدهٔ $<,>$) هرگاه $A={}^tA$.

برای هرعملگر A از V، طبق تعریف فرمول زیررا داریم

$$\boxed{<Av,w>=<v,{}^tAw>\ ,\ \forall v,w\in V}$$

اگر A یک‌عملگر متقارن باشد، آنگاه $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ و برعکس.

مثال ۱. فرض کنید $V = K^n$ وحاصلضرب اسکالر آن همان حاصلضرب نقطه‌ای معمولی است. دراین صورت A را یک‌ماتریس بـا درایه‌های متعلق به K می‌گیریم، واعضای K^n را بـه عنوان بردارهای ستونی X و Y فرض‌می‌کنیم. حاصلضرب نقطه‌ای V را می‌توانیم به‌صورت ضرب ماتریسی

$$\langle X, Y\rangle = {}^tXY$$

بنویسیم. داریم

$$\langle AX, Y\rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY = \langle X, {}^tAY\rangle$$

منظور از ${}^tA$ ترانهادهٔ مـاتریس A است. بنابراین وقتی باضرب نقطه‌ای معمولی n تـائیها سروکارداریم، ترانهـادهٔ یک عملگرمعرف ترانهادهٔ ماتریس وابسته به‌عملگر است. بـه‌این دلیل است که علامت یکسانی را درهردوحالت برگزیدیم.

ترانهاده درشرایط زیرصدق می‌کند:

قضیهٔ ۲۰۱. فرض‌کنید V یک‌فضای برداری بـا بعد متناهی روی هیات K است‌که دارای یك حاصلضرب اسکالرناتباهیدهٔ $\langle\,,\rangle$ است. فرض‌کنید A، B دوعملگر V و $c \in K$ است. دراین صورت

$$^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \qquad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

$$^t(cA) = c\,{}^tA \qquad {}^{tt}A = A$$

اثبات. فقط فرمول دوم را اثبات می‌کنیم. برای هر v و w متعلق به V داریم

$$\langle ABv, w\rangle = \langle Bv, {}^tAw\rangle = \langle v, {}^tB\,{}^tAw\rangle$$

طبق تعریف تساوی فوق بـه‌این معناست‌که ${}^tB\,{}^tA = {}^t(AB)$. بقیهٔ فرمولها نیز بـه‌سادگی ثابت می‌شوند.

تمرینها

۰۱ (الف) ماتریس A را **پاد متقارن** می‌نامیم هرگاه ${}^tA = -A$. نشان دهید که هرماتریس

M را می‌توان به‌طورمنحصر به‌فردی به‌صورت مجموع یک‌ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشت. [راهنمایی: فرض کنند $(M+{}^tM)$ $A=\frac{1}{2}$.]

(ب) ثابت کنید که اگر A یک‌ماتریس پاد متقارن باشد، آنگاه A^2 متقارن است.

(پ) فرض کنید A یک‌ماتریس پاد متقارن‌است. نشان دهید که $\mathrm{Det}(A)$ مساوی ۰ است اگر A یک‌ماتریس $n \times n$ و n فرد باشد.

۲. فرض کنید A یک‌ماتریس‌متقارن وارون‌پذیر است. نشان دهید که A^{-1} متقارن است.

۳. نشان دهید که هرماتریس متقارن مثلثی قطری است.

۴. نشان دهید که درایه‌های روی قطر یک‌ماتریس پاد متقارن مساوی ۰ است.

۵. فرض کنید V یک‌فضای برداری با بعد متناهی روی هیات K با یک حاصلضرب اسکالر ناتباهیده است. فرض کنید v_0، w_0 اعضای V هستند. فرض کنید $A:V\to V$ یک‌نگاشت خطی است به‌طوری که $A(v)=\langle v_0,v\rangle w_0$. ${}^tA$ را توصیف کنید.

۶. فرض کنید V فضای برداری توابع بینهایت بار مشتق‌پذیر روی $\mathbf{R}$ است که خارج یک فاصلهٔ داده شده صفرمی‌شوند. فرض کنید حاصلضرب اسکالرطبق معمول به‌صورت

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

تعریف می‌شود. فرض کنید D عملگر مشتق‌است. نشان دهید که ${}^tD$ را می‌توان مثل گذشته تعریف کرد، و ${}^tD=-D$ است.

۷. فرض کنید V یک‌فضای برداری با بعد متناهی روی هیات K با یک حاصلضرب اسکالر ناتباهیده است. فرض کنید $A:V\to V$ یک‌نگاشت خطی است. نشان دهید که تصویر ${}^tA$ فضای عمود برهستهٔ A است.

۸. فرض کنید V یک‌فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{R}$، با یک حاصلضرب اسکالرمعین مثبت است. فرض کنید $P:V\to V$ یک‌نگاشت خطی است به‌طوری که $PP=P$. فرض کنید $P{}^tP={}^tPP$. نشان دهید که $P={}^tP$.

۹. ماتریس متقارن حقیقی $n\times n$، A را **معین مثبت** می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $X\neq 0$، ${}^tXAX>0$ باشد. اگر A و B متقارن (از یک اندازه) باشند می‌گوئیم $A<B$ هرگاه $B-A$ معین مثبت باشد. نشان دهید که اگر $A<B$ و $B<C$، آنگاه $A<C$.

۱۰. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{R}$ با یک حاصلضرب اسکالر معین مثبت $\langle , \rangle$ است. عملگر A از V را نیم مثبت می‌نامیم هرگاه به ازای هر $v \in V$ و $v \neq 0$ داشته باشیم $\langle Av, v \rangle \geqslant 0$. فرض کنید که $V = W + W^{\perp}$ جمع مستقیم زیرفضای W و مکمل متعامد آن است. فرض کنید P نگاشت تصویر روی W و $W \neq \{o\}$ است. نشان دهید که P متقارن و نیم مثبت است.

۱۱. فرض کنید علامت گذاریها شبیه تمرین ۱۰ است. فرض کنید c یک عدد حقیقی، و A عملگری است که اگر بتوانیم v را به صورت $v = w + w'$ بنویسیم که $w \in W$ و $w' \in W^{\perp}$، آنگاه $Av = cw$. نشان دهید که A متقارن است.

۱۲. فرض کنید علامت گذاریها شبیه تمرین ۱۰ است. فرض کنید P نگاشت تصویر روی W است. نشان دهید که عملگر متقارن A وجود دارد به‌طوری که $A^{2} = I + P$.

۱۳. فرض کنید A یک ماتریس متقارن حقیقی است. نشان دهید که یک عدد حقیقی c وجود دارد به‌طوری که $A + cI$ مثبت است.

۱۴. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیات K با یک حاصلضرب اسکالر ناتباهیده $\langle , \rangle$ است. اگر $A: V \to V$ یک نگاشت خطی باشد به‌طوری که

$$\forall v, w \in V \quad , \quad \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$$

نشان دهید که $\operatorname{Det}(A) = \pm 1$ [راهنمایی: نخست فرض کنید که $V = K^{n}$ با حاصل‌ضرب اسکالر معمولی آن است. در این صورت AA^{t} و همچنین $\operatorname{Det}({}^{t}AA)$ مساوی چیست؟]

۱۵. فرض کنید A و B ماتریسهای متقارن هم‌اندازه روی هیات K است. نشان دهید که AB متقارن است اگر و تنها اگر $AB = BA$.

۲. عملگرهای هرمیتی

درطول این بخش فرض می‌کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی روی هیات اعداد مختلط است. فرض می‌کنیم که V دارای یک حاصلضرب هرمیتی معین مثبت ثابت شبیه آنچه درفصل ۵ بخش ۲ تعریف شده است. این حاصلضرب را با $\langle v, w \rangle$ بر $v, w \in V$، نمایش می‌دهیم.

یک حاصلضرب هرمیتی را یک فرم هرمیتی نیز می‌نامیم. اگر خوانندگان مایل باشند، می‌توانند فرض کنید $V = \mathbf{C}^{n}$، و حاصلضرب هرمیتی آن را همان ضرب استاندارد

$$<X,Y>={}^tX\bar{Y}$$

که X و Y بردارهای ستونی از $\mathbf{C}^n$ هستند، درنظر بگیرید.

فرض کنید $V\to V$:A یـك عملگر است، یعنی یك نگـاشت خطی از V در V است. برای هر $w\in V$، نگاشت $L_w V\to\mathbf{C}$ به‌طوری که

$$L_w(v)=<Av,w>\ ,\ \forall v\in V$$

یك فرم خطی است.

قضیهٔ ۱۰۲. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{C}$ بایك فرم هرمیتی معین مثبت $<,>$ است. به‌ازای هرفرم خطی $L:V\to\mathbf{C}$، یك عضومنحصربه‌فرد $w'\in V$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $v\in V$، $L(v)=<v,w'>$.

اثبات. اثبات شبیه اثباتی‌است که درحالت حقیقی برای قضیهٔ ۲.۶ فصل ۵ ارائه کردیم. اثبات این قضیه را به‌عهدهٔ خواننده واگذارمی‌کنیم.

از قضیهٔ ۱.۲، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای w داده شده یك w' منحصر به‌فرد وجوددارد به‌طوری که برای هر $v\in V$ داریم

$$<Av,w>=<v,w'>$$

توضیح. تناظر $L_w \longleftrightarrow w$ یك یکریختی از V درفضای دوگان آن نیست. درواقع، اگر $\alpha\in\mathbf{C}$ آنگاه $L_{\alpha w}=\bar{\alpha}L_w$.

نگاشت $w\longmapsto w'$ از V درخودش را با A^* نمایش می‌دهیم. خواص اساسی A^* را درلم زیرخلاصه می‌کنیم.

لم ۲.۲. برای هرعملگر $A:V\to V$ یك عملگرمنحصربه‌فرد $A^*:V\to V$ وجود دارد به‌طوری برای هر $v,w\in V$ داریم

$$<Av,w>=<v,A^*w>$$

اثبات. شبیه اثبات لم ۱.۱ است.

عملگر A^* را **الحاق** A می‌نامیم. توجه کنید که $A^*:V\to V$ خطی است، نه‌پاد خطی.

مثال. فرض کنید $V=\mathbf{C}^n$ وفرم هرمیتی آن همان فرم استاندارد

$$(X,Y)\to{}^tX\bar{Y}=<X,Y>$$

است. دراین صورت برای هرماتریس A که معرف یک نگاشت خطی از V درخودش است، داریم

$$<AX,Y> = {}^t(AX)\bar{Y} = {}^tX\,{}^tA\bar{Y} = {}^tX(\overline{{}^t\bar{A}Y})$$

بعلاوه، طبق تعریف، حاصلضرب $<AX,Y>$ مساوی

$$<X,A^*Y> = {}^tX\overline{(A^*Y)}$$

است. از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\boxed{A^* = {}^t\bar{A}}$$

عملگر A را **هرمیتی** (یا **خودالحاق**) می‌نامیم اگر $A = A^*$. این بدان معناست که برای هر $v,w \in V$ داریم

$$<Av,w> = <v,Aw>$$

با توجه به‌مثال قبل، ماتریس مربع مختلط A هرمیتی است اگر $A = {}^t\bar{A}$، یا به‌طور هم‌ارز $\bar{A} = {}^tA$. اگر A یک‌ماتریس هرمیتی باشد، آنگاه می‌توانیم روی $\mathbf{C}^n$ یک‌حاصلضرب هرمیتی به‌صورت

$$(X,Y) \to {}^t(AX)\bar{Y}$$

تعریف کنیم (جزئیات آن را ثابت کنید.)

عملگر * شبیه عملگر ترانهاده درخواص زیر صدق می‌کند:

قضیهٔ ۲.۳. فرض‌کنید V یک‌فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{C}$ با یک فرم هرمیتی معین مثبت ثابت $<,>$ است. فرض‌کنید A B عملگرهایی از V هستند، وفرض‌کنید $\alpha \in \mathbf{C}$. دراین صورت

$$(A+B)^* = A^* + B^* \quad , \quad (AB)^* = B^*A^*$$
$$(\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^* \qquad , \quad A^{**} = A$$

اثبات. سومین قاعده را اثبات می‌کنیم، و اثبات بقیه را به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم. برای تمام اعضای $v,w \in V$ داریم

$$<\alpha Av,w> = \alpha<Av,w> = \alpha<v,A^*w> = <v,\bar{\alpha}A^*w>$$

ازطرف دیگرطبق تعریف داریم

$$<\alpha Av,w>=<v,(\alpha A)^*w>$$

بنابراین $(\alpha A^*)=\bar{\alpha}A^*$.

اتحادهای قطبی‌سازی زیر را داریم:

$$\boxed{<A(v+w),v+w>-<A(v-w),v-w>=۲[<Aw,v>+<Av,w>]}$$

برای تمام $v,w\in V$، وهمچنین

$$\boxed{<A(v+w),v+w>-<Av,v>-<Aw,w>=<Av,w>+<Aw,v>}$$

اثبات این اتحادها بسیارساده است،کافی است طرف چپ تساویها را بسط دهیم.

قضیهٔ بعدی لزوماً به‌اعداد مختلط بستگی دارد. شبیه آن روی اعداد حقیقی درست نیست.

قضیهٔ ۴.۲. فرض‌کنید V شبیه‌گذشته است. فرض‌کنید A عملگری است‌که به‌ازای هر $v\in V$ داریم $<Av,v>=۰$. دراین صورت $A=o$

اثبات. طرف چپ اتحادهای قطبی‌سازی به‌ازای تمام v و wهای متعلق به V مساوی صفر است. لذا داریم

$$<Aw,v>+<Av,w>=۰\quad,\quad \forall v,w\in V \qquad (۱)$$

v را با iv جایگزین می‌کنیم. دراین صورت طبق قواعد حاصلضرب هرمیتی داریم

$$-i<Aw,v>+i<Av,w>=۰$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$-<Aw,v>+<Av,w>=۰ \qquad (۲)$$

ازجمع تساویهای (۱) و(۲) نتیجه می‌گیریم که

$$۲<Av,w>=۰\quad,\quad \forall v,w\in V$$

بنابراین $A=o$.

قضیهٔ ۵.۲. فرض‌کنید V مثل‌گذشته، و A یك‌عملگر است. دراین صورت A هرمیتی است

اگر وتنها اگر برای تمام v های متعلق به V، $\langle Av,v\rangle$ حقیقی باشد.

اثبات. فرض کنید A هرمیتی است. دراین صورت

$$\langle Av,v\rangle=\langle v,Av\rangle=\overline{\langle Av\ ,\ v\rangle}$$

چون عدد مختلطی که بـا مزدوج خود مساوی بـاشد عددی حقیقی است، لذا $\langle Av,v\rangle$ حقیقی است. برعکس، فرض کنید که $\langle Av,v\rangle$ به ازای تمام v های متعلق بـه V حقیقی است. دراین صورت

$$\langle Av,v\rangle=\overline{\langle Av\ ,\ v\rangle}=\langle v,Av\rangle=\langle A^*v,v\rangle$$

از اینجا نتیجه می‌شود که بـه‌ازای هـر $v\in V$ داریم $\langle (A-A^*)v,v\rangle=0$. پس طبق قضیهٔ ۴.۲ داریم $A-A^*=0$ ودرنتیجه $A=A^*$، یعنی A هرمیتی است.

تمرینها

۱. فرض کنید A یك ماتریس هرمیتی وارون‌پذیراست. نشان دهید که A^{-1} هم هرمیتی‌است.

۲. نشان دهید کـه شبیه قضیهٔ ۴.۲ وقتی V یك‌فضای برداری بـا بعد متناهی روی $\mathbf{R}$ است غلط است. به‌عبارت دیگر، نشان دهید که ممکن است به‌ازای هر $v\in V$، Av بر v عمود باشد بدون اینکه A نگاشت صفر باشد.

۳. نشان دهید که شبیه قضیهٔ ۴.۲ وقتی V یك فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{R}$ بـاشد درست است به‌شرطی که A متقارن هم باشد.

۴. کدام یك ازماتریسهای زیرهرمیتی است:

(الف) $\begin{bmatrix} ۲ & i \\ -i & ۵ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۱+i & ۲ \\ ۲ & ۵i \end{bmatrix}$

(پ) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱+i & ۵ \\ ۱-i & ۲ & i \\ ۵ & -i & ۷ \end{bmatrix}$

۵. نشان دهید که اعضای روی قطر هرماتریس هرمیتی حقیقی است.

۶. نشان دهید که هرماتریس هرمیتی مثلثی، قطری است.

۷. فرض کنید A و B دوماتریس هرمیتی(هم‌اندازه) هستند. نشان دهید که $A+B$ هم‌هرمیتی است. اگر $AB=BA$، آنگاه ثابت کنید که AB نیزهرمیتی است.

۸. فرض کنید V یك‌فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{C}$ همراه با یك حاصلضرب هرمیتی معین است. فـرض‌کنید $A:V\rightarrow V$ یك عملگرهرمیتی است. نشان دهیدکـه $I+iA$ و $I-iA$ وارون‌پذیرند. [راهنمایی: اگر $v\neq o$، نشان دهید که $\|(I+iA)v\|\neq o$.]

۹. فرض کنید A یك‌ماتریس هرمیتی‌است. نشان دهید که A^t و A نیزهرمیتی هستند. اگر A وارون‌پذیر باشد، نشان دهید که A^{-1} نیزهرمیتی است.

۱۰. فرض کنید V یك‌فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{C}$ همراه با یك حاصلضرب هرمیتی معین مثبت $<,>$ است. فرض کنید $A:V\rightarrow V$ یك نگاشت خطی است. نشان دهید که شرایط زیرهم‌ارزند:

(الف) داریم $AA^*=A^*A$

(ب) برای هر $v\in V$ داریم $\|Av\|=\|A^*v\|$ (که در آن $\|v\|=\sqrt{<v,v>}$)

(پ) می‌توان‌نوشت $A=B+iC$ به‌طوری‌که B و C هرمیتی هستند و $BC=CB$.

۱۱. فرض کنید A یك‌ماتریس هرمیتی مخالف صفر است نشان دهید که $\operatorname{tr}(AA^*)>o$.

۳. عملگرهای یکانی

فرض‌کنید V یك‌فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{R}$ همراه بایك‌حاصلضرب اسکالرمعین مثبت است.

فرض کنید $A:V\rightarrow V$ یك‌نگاشت خطی است. می‌گوئیم A **یکانی حقیقی** است اگر

$$<Av,Aw>=<v,w>\ ,\ \forall v,w\in V$$

وقتی می‌گوئیم A **یکانی** است بـه این معناست کـه **حافظ حاصلضرب** است. نگاشت یکانی حقیقی را نگاشت **متعامد** هم می‌نـامند. دلیل اینکه‌اصطلاح **یکانی** را بـه‌کارمی‌بریم درقضیهٔ بعدی آمده است.

قضیهٔ ۱۰۳. فرض‌کنید V مثل‌گذشته است. فرض‌کنید $A:V\rightarrow V$ یك نگاشت خطی است. شرایط زیر روی A هم‌ارزند:

(۱) A یکانی است.

(۲) A نرم بردارها را حفظ می‌کند، یعنی برای هر $v\in V$ داریم $||Av||=||v||$

(۳) برای هر بردار یکهٔ $v\in V$، بردار Av نیز یکه‌ای است.

اثبات. هم‌ارزی بین (۲) و (۳) را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. بدیهی است که (۱) شرط (۲) را نتیجه می‌دهد، زیرا مربع نرم $<Av, Av>$ حالت خاصی از حاصلضرب است. برعکس، ثابت می‌کنیم که شرط (۲) شرط (۱) را نتیجه می‌دهد. داریم

$$<A(v+w)\ ,\ A(v+w)>-<A(v-w)\ ,\ A(v-w)>=4<Av, Aw>$$

شرط (۲) را به‌کارمی‌بریم، و به‌این نکته نیز توجه می‌کنیم که طرف چپ تساوی فوق تفاضل دونرم است. بنابراین طرف چپ تساوی مساوی است با

$$<v+w,v+w>-<v-w,v-w>=4<v,w>$$

از اینجا حکم به‌سادگی ثابت می‌شود

قضیهٔ ۱.۳ نشان می‌دهد که چرا این‌نوع نگاشتها را یکانی می‌نامیم: این نگاشتها با این خاصیت که بردارهای یکه را به‌بردارهای یکه تبدیل می‌کنند مشخص می‌شوند.

البته نگاشت یکانی U تعامد را نیز حفظ می‌کند، یعنی اگر v و w برهم عمود باشند، آنگاه Uv و Uw هم برهم عمودند، زیرا

$$<Uv,Uw>=<v,w>=0$$

ازطرف دیگر، اگر نگاشتی تعامد را حفظ‌کند لزوماً یکانی‌نیست. به‌عنوان مثال، روی‌اعداد حقیقی، نگاشتی که هر بردار v را به $2v$ می‌فرستد حافظ تعامد است اما یکانی نیست. متأسفانه، این یک علامت‌گذاری استاندارد است که نگاشتهای یکانی حقیقی را نگاشتهای متعامد می‌نامند. تأکید می‌کنیم که این نگاشتها علاوه براینکه تعامد را حفظ می‌کنند حافظ نرم نیزهستند.

قضیهٔ ۲.۳. فرض‌کنید V یک‌فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{R}$ همراه با یک حاصلضرب معین مثبت است. نگاشت خطی $A:V\to V$ یکانی است اگر وتنها اگر $^{t}AA=I$

اثبات. عملگر A یکانی است اگر وتنها اگر

$$<Av, Aw>=<v,w>\ ,\ \forall v,w\in V$$

این شرط معادل است با

$$<{}^{t}AAv,w>=<v,w>\ ,\ \forall v,w\in V$$

و لذا معادل است با $^{t}AA=I$،

تعبیر ماتریسی اینکه A یکانی است باقیمانده است. نخست توجه کنید که هر نگاشت یکانی وارون‌پذیر است. درواقع اگر A یکانی و $Av=o$ باشد، آنگاه $v=o$ زیرا A حافظ نرم است.

اگر درقضیهٔ ۲.۳ قراردهیم $V=\mathbf{R}^n$ وحاصلضرب اسکالر آن را همان حاصلضرب نقطه‌ایش درنظر بگیریم، آنگاه می‌توانیم A را بایك ماتریس حقیقی نمایش دهیم. بنابراین طبیعی‌است که ماتریس A را **یکانی** (یا متعامد) تعریف‌کنیم اگر $^{t}AA=I_n$، یا به‌طورهم‌ارز

$$\boxed{^{t}A=A^{-1}}$$

مثال. تنها نگاشتهای یکانی ازصفحهٔ $\mathbf{R}^2$ درخودش نگاشتهایی هستندکه ماتریسهای آنها به صورت

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$$

هستند. اگر دترمینان چنین نگاشتی ۱ باشدآنگاه ماتریس آن نسبت به‌پایهٔ یکه‌ای متعامد لزوماً ازنوع اول است، ونگاشت مربوطه موسوم به **دوران** است. رسم یك شکل نشان می‌دهدکه این نام‌گذاری صحیح است. برخی ازعبارتهای مربوط به‌نگاشتهای یکانی‌صفحه درتمرینها داده خواهد شد.

حالت مختلط. طبق معمول، مفاهیم مشابهی درحالت مختلط داریم. فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{C}$ همراه بایك حاصلضرب هرمیتی معین مثبت است. فرض کنید $A:V\to V$ یك‌نگاشت خطی است. A را **یکانی مختلط** می‌نامیم هرگاه

$$\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle \ , \ \forall v, w\in V$$

شبیه قضیهٔ ۱.۳ را برای حالت مختلط داریم: نگاشت A یکانی است اگروتنها اگرحافظ نرم باشد، وهمچنین اگر وتنها اگرحافظ بردارهای یکه باشد. اثبات اینها را به‌خواننده واگذارمی‌کنیم.

قضیهٔ ۳.۳. فرض‌کنید V یك‌فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{C}$ همراه بایك‌حاصلضرب هرمیتی معین مثبت است. نگاشت خطی $A:V\to V$ یکانی است اگر وتنها اگر

$$A^{*}A=I$$

اثبات آن را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

فرض کنید $V=\mathbf{C}^n$ همراه با ضرب هرمیتی معمولی آن، یعنی

$$<X,Y>=x_1\overline{y_1}+\cdots+x_n\overline{y_n}$$

است. می‌توانیم A را بایک‌ماتریس مختلط نشان دهیم. ازاینجا می‌توانیم یک‌ماتریس‌مختلط یکانی را تعریف کنیم. ماتریس مختلط A را **یکانی** می‌نامیم اگر $^t\overline{A}A=I_n$، یا

$$^t\overline{A}=A^{-1}$$

قضیهٔ ۴.۳. فرض‌کنید V یک‌فضای برداری روی $\mathbf{R}$ بایک حاصلضرب اسکالرمعین مثبت، یا روی $\mathbf{C}$ بـایک حاصلضرب هرمیتی معین مثبت است. فـرض‌کنید $A:V\to V$ یک نگاشت خطی است. فرض‌کنید $\{v_1,\ldots,v_n\}$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد V است.

(الف) اگر A یکانی باشدآنگاه $\{Av_1,\ldots,Av_n\}$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد V است.

(ب) فرض‌کنید $\{w_1,\ldots,w_n\}$ پـایهٔ یکه‌ای متعامد دیگـری است. فرض‌کنید $Av_i=w_i$ به‌ازای $i=1,\ldots,n$. دراین صورت A یکانی است.

اثبات. اثبات قضیه بلافاصله ازتعاریف نتیجه می‌شود ولذا به‌عنوان تمرین واگذارمی‌شود. تمرینهای ۱ و ۲ را ببینید.

تمرینها

۱. (الف) فرض کنید V یک‌فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{R}$ همراه با یک حاصلضرب معین مثبت است. فرض کنید $\{v_1,\ldots,v_n\}$ و $\{w_1,\ldots,w_n\}$ پایه‌های یکه‌ای متعامدهستند. فرض کنید $A:V\to V$ عملگری‌از V است به‌طوری که $Av_i=w_i$. نشان دهیدکه A یکانی حقیقی است.

(ب) عبارت مشابهی برای حالت مختلط بیان وسپس اثبات کنید.

۲. فرض کنید V شبیه تمرین ۱ است. فـرض کنید $\{v_1,\ldots,v_n\}$ یک‌پـایهٔ یکه‌ای متعامد V است. فرض کنید A یک‌عملگر یکانی است. نشان دهیدکه $\{Av_1,\ldots,Av_n\}$ یک‌پایهٔ یکه‌ای متعامد است.

۳. فرض کنید A یك ماتریس یکانی حقیقی است.

(الف) نشان دهید که A^t نیز یکانی است.

(ب) نشان دهید که A^{-1} وجود دارد و یکانی است.

(پ) اگر B یکانی حقیقی باشد، نشان دهید که AB و $B^{-1}AB$ یکانی است.

۴. فرض کنید A یك ماتریس یکانی مختلط است.

(الف) نشان دهید که A^t نیز یکانی است.

(ب) نشان دهید که A^{-1} وجود دارد و یکانی است.

(پ) اگر B یکانی مختلط باشد، نشان دهید که AB و $B^{-1}AB$ یکانی است.

۵. (الف) فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{R}$ همراه با یك حاصلضرب اسکالرمعین مثبت است. فرض کنید $\mathrm{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ و $\mathrm{B}'=\{w_1,\dots,w_n\}$ پایه‌های یکه‌ای متعامد V هستند. نشان دهید که ماتریس $M^{B}_{B'}(id)$ یکانی است. [راهنمایی: از روابط $\langle w_i,w_i\rangle=1$ و $\langle w_i,w_j\rangle=0$ اگر $i\neq j$ استفاده کنید، وهمچنین w_i ها را برحسب v_j ها بیان کنید، یعنی $w_i=\sum a_{ij}v_j$، که در آن $a_{ij}\in\mathbf{R}$.]

(ب) فرض کنید $F:V\to V$ چنان باشد که $F(v_i)=w_i$ به‌ازای تمام i ها. نشان دهید که $M^{B}_{B'}(F)$ یکانی است.

۶. نشان دهید که قدرمطلق دترمینان هرماتریس یکانی حقیقی مساوی ۱ است، نتیجه بگیرید که اگر A یك ماتریس یکانی حقیقی باشد، آنگاه $\mathrm{Det}(A)=1$ یا -1.

۷. اگر A یك ماتریس مربع مختلط باشد، نشان دهید که $\mathrm{Det}(\overline{A})=\overline{\mathrm{Det}(A)}$. نتیجه بگیرید که قدرمطلق دترمینان هرماتریس یکانی مختلط مساوی ۱ است.

۸. فرض کنید A یك ماتریس یکانی حقیقی قطری است. نشان دهید که اعضای روی قطر آن مساوی ۱ یا ۱− هستند.

۹. فرض کنید A یك ماتریس یکانی مختلط است. نشان دهید که هرعضو روی قطر A دارای قدرمطلق ۱ هستند، ولذا ازنوع $e^{i\theta}$ هستند که θ حقیقی است.

تمرینهای زیرخواص مختلف نگاشتهای یکانی حقیقی صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ را توصیف می‌کنند.

۱۰. فرض کنید V یك فضای برداری ۲ بعدی روی $\mathbf{R}$ همراه با یك حاصلضرب اسکالر معین مثبت، و A یك نگاشت یکانی حقیقی از V درخودش است. فرض کنید $\{v_1,v_2\}$ و

$\{w_1, w_2\}$ پایه‌های یکه‌ای متعامد از V هستند به‌طوری‌که $Av_i = w_i$ برای $i = 1, 2$.
فرض کنید a، b، c و d اعداد حقیقی هستند به‌طوری‌که

$$w_1 = av_1 + bv_2$$
$$w_2 = cv_1 + dv_2$$

نشان دهید که $a^2 + b^2 = 1$، $c^2 + d^2 = 1$، $ac + bd = 0$، $a^2 = d^2$ و $c^2 = b^2$.

۱۱. نشان دهید که دترمینان $ad - bc$ مساوی ۱ یا ۱ — است. (نشان دهید که مربع آن مساوی ۱ است.)

۱۲. دورانی از V تعریف کنید که یك نگاشت یکانی حقیقی از V در V باشد که دترمینان آن ۱ است. نشان دهید که ماتریس A نسبت به یك پایهٔ یکه‌ای متعامد به‌صورت

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

است، که در آن a و b اعدادی حقیقی هستند به‌طوری‌که $a^2 + b^2 = 1$. همچنین عکس آن را ثابت کنید، یعنی نشان دهید که هر نگاشت خطی از V در خودش که ماتریس آن نسبت به یك پایهٔ یکه‌ای متعامد به‌صورت فوق باشد یکانی است و دترمینان آن ۱ است. با استفاده ازحساب دیفرانسیل وانتگرال می‌توان نشان داد که یك عدد θ وجود دارد به طوری که $a = \cos\theta$ و $b = \sin\theta$.

۱۳. نشان دهید که یك ماتریس یکانی مختلط U وجود دارد به‌طوری‌که، اگر

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

آنگاه $U^{-1}AU = B$.

۱۴. فرض کنید $V = \mathbf{C}$ به‌عنوان یك فضای برداری ۲ بعدی روی $\mathbf{R}$ است. فرض کنید $\alpha \in \mathbf{C}$، و فرض کنید $L_\alpha : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ نگاشت $z \to \alpha z$ است. نشان دهید که L_α یك نگاشت R خطی از V در V است. به‌ازای چه عدد مختلط α ای L_α نسبت به‌حاصلضرب اسکالر $<z, w> = \mathrm{Re}(z\bar{w})$ یك نگاشت یکانی است. ماتریس L_α نسبت به‌پایهٔ $\{1, i\}$ از $\mathbf{C}$ روی $\mathbf{R}$ را به‌دست آورید.

۸

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

در این فصل خواص اصلی مقدماتی بردارهای ویژه را ارائه می‌کنیم. کاربردی از دترمینان درمحاسبهٔ چندجمله‌ای مشخصه راعرضه می‌داریم. در بخش۳، امتزاج جالبی از حساب دیفرانسیل وانتگرال و جبرخطی را بامربوط ساختن بردارهای ویژه به مسألهٔ یافتن ماکزیمم ومینیمم یك تابع درجه دوم روی کره به دست می‌دهیم. اکثردانشجویان جبرخطی را بعد از گذراندن بخشی از حساب دیفرانسیل وانتگرال انتخاب می‌کنند. اما اگرمجبور به اجتناب از حساب دیفرانسیل و انتگرال باشیم، اثباتی که اعداد مختلط را به‌جای اصل ماکزیمم به کار مـی‌برد می‌تواند برای یافتن مقادیر ویژهٔ یك ماتریس متقارن بـه کار رود. خواص اساسی اعداد مختلط را در پیوست یادآور خواهیم شد.

۱. بردارهای ویژه ومقادیر ویژه.

فرض کنید V یك فضای برداری و $A:V\to V$ یك نگاشت خطی است. عضو $v\in V$ رایك **بردارویژهٔ** A می‌نامیم اگراسکالر λ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $Av=\lambda v$. اگـر

$v\neq 0$، آنگاه λ به‌طور منحصربه فردی تعیین می‌شود. زیرا از $\lambda_1 v=\lambda_2 v$ نتیجه می‌شود که $\lambda_1=\lambda_2$. دراین‌حالت، می‌گوئیم که λ یك **مقدارویژهٔ** A وابسته بـه‌بـردار ویژهٔ v است. همچنین‌می‌گوئیم v یك بردار ویژه وابسته به‌مقدارویژهٔ λ است. به‌جای بردار ویژه ومقدار ویژه، ممکن است‌کسی لفظ **بردار مشخصه** و **مقدار مشخصه** را به‌کار برد.

اگر A یك ماتـریس مربع $n\times n$ بـاشدآنگاه یك **برداروپژهٔ** A طبق تعریف یك بردار ویژهٔ نگاشت خطی K^nدرK^n است‌که به‌وسیلهٔ این ماتریس معرفی می‌شود. بنابراین یك بردار ویژهٔ X از A عبارت است ازبرداری (ستونی) از K^n به‌طوری‌که بـه‌ازای‌آن یك اسکالر $\lambda\in K$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $AX=\lambda X$.

مثال۱. فرض کنیدکه V فضای برداری‌توابع بینهایت بار مشتق‌پذیرروی $\mathbf{R}$ است.فرض کنید $\lambda\in\mathbf{R}$. دراین‌صورت تابع f که به‌صورت $f(t)=e^{\lambda t}$ تعریف می‌شود یك بـردار ویـژه برای عمل مشتق‌گیری $\frac{d}{dt}$ است، زیرا

$$\frac{d}{dt}f(t)=\lambda e^{\lambda t}$$

مثال۲. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

یك ماتریس قطری است. در این‌صورت هر بردار یکه‌ای E^i $(i=1,2,\ldots,n)$ یك‌بردار ویژهٔ A است. درواقع، داریم $AE^i=a_iE^i$:

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

مثال۳. اگر $A:V\to V$ یك نگاشت خطی، و v یك بردار ویژهٔ A باشد، آنگاه بـرای هر اسکالرمخالف صفر c، cv نیز یك برداروپژهٔ A باهمان مقدار ویژه است.

قضیهٔ ۱.۱۰ فرض‌کنید V یك فضای برداری و $A: V \to V$ یك نگاشت خطی است. فرض کنید $\lambda \in K$. فرض‌کنید V_λ زیرفضایی از V است‌که به وسیلهٔ بردارهای ویژهٔ A با مقدارویژهٔ λ تولید می‌شود. دراین‌صورت هرعضومخالف صفر V_λ یك بردار ویژهٔ A وابسته به‌مقدارویژهٔ λ است.

اثبات. فرض‌کنید $v_1, v_2 \in V$ چنان باشندکه $Av_1 = \lambda v_1$ و $Av_2 = \lambda v_2$. دراین‌صورت

$$A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

اگر $c \in K$، آنگاه $A(cv_1) = cAv_1 = c\lambda v_1 = \lambda c v_1$. به‌این‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

زیرفضای V_λ درقضیهٔ ۱.۱ را **زیرفضای ویژهٔ** A وابسته به‌مقدارویژهٔ λ می‌نامیم.

تذکر. اگر v_1 و v_2 دوبردار ویژهٔ A با مقادیرویژهٔ متمایز λ_1 و λ_2 باشند، آنگاه $v_1 + v_2$ یك بردار ویژهٔ A نخواهد بود. درواقع قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۲.۱۰ فرض‌کنید V یك فضای برداری و $A: V \to V$ یك نگاشت خطی است. فرض کنید v_1، ...، v_m بردارهای‌ویژهٔ A به‌ترتیب وابسته به مقادیر ویژهٔ λ_1، λ_2، ...، λ_m هستند، همچنین فرض‌کنید که این مقادیر ویژه متمایزهستند، یعنی

$$\lambda_i \neq \lambda_j \;,\; i \neq j$$

دراین‌صورت v_1، v_2، ...، v_m مستقل خطی‌اند.

اثبات. بااستقراء روی m. برای $m = 1$، یك بردار $v_1 \in V$ و $v \neq 0$ داریم‌که مستقل خطی است. فرض‌کنید $m > 1$. فرض‌کنیدکه رابطهٔ

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0 \qquad (*)$$

راداریم‌که در آن c_iها اسکالرهای دلخواه هستند. ثابت می‌کنیم که همگی c_iها مساوی ۰ هستند. اگرطرفین تساوی (*) رادر λ_1 ضرب کنیم خواهیم‌داشت

$$c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_m \lambda_1 v_m = 0$$

همچنین A را روی طرفین تساوی (*) اثرمی‌دهیم. چون A خطی است، نتیجه می‌گیریم که

$$v_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_m \lambda_m v_m = 0$$

اکنون دوتساوی آخری را ازهم کم می‌کنیم، حاصل می‌شود

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + c_m(\lambda_m - \lambda_1)v_m = 0$$

چون به‌ازای هر $j = 2, \dots, m$، $\lambda_j - \lambda_1 \neq 0$ است، برطبق‌فرض‌استقراء نتیجه می‌گیریم که

$$c_2 = \dots = c_m = 0$$

به رابطهٔ اولیه برمی‌گردیم، مشاهده می‌کنیم که $c_1 v_1 = 0$، و لذا $c_1 = 0$ و اثبات قضیه تمام می‌شود.

مثال۴. فرض کنید V فضـای برداری توابع حقیقی مشتق‌پذیر از یك متغیر t هستند. فرض کنید α_1، ...، α_m اعداد متمایز هستند. دراین‌صورت توابع

$$e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_m t}$$

بردارهای ویژهٔ عمل مشتق‌گیری، وابسته بـه مقادیرویژهٔ α_1، ...، α_m هستند، ولـذا دارای استقلال خطی می‌باشند.

تبصرهٔ ۱. درقضیهٔ ۲۰۱، فرض کنید V یك‌فضای‌برداری n بعدی و $A: V \to V$ یك‌نگاشت خطی است که دارای n بردار ویژهٔ v_1، ...، v_n می‌بـاشد که مقادیرویژهٔ آنها λ_1، ...، λ_n متمایزند. دراین‌صورت $\{v_1, \dots, v_n\}$ یك پایه برای V است.

تبصرهٔ ۲. ممکن است باوضعیتی شبیه قضیهٔ ۲۰۱ درنظریهٔ‌معادلات دیفرانسیل خطی برخورد کنیم. فرض کنید $A = [a_{ij}]$ یك ماتریس $n \times n$ است، وفرض کنید

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

یك بردار ستونی ازتوابعی است که درمعادلهٔ

$$\frac{dF}{dt} = AF(t)$$

صدق می‌کنند. برحسب مختصات معادلهٔ فوق به‌صورت

$$\frac{df_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(t)$$

نوشته می‌شود. اکنون فرض‌کنید A یك ماتریس قطری است، یعنی

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \qquad a_i \neq 0, \forall i$$

دراین‌صورت هر تابع $f_i(t)$ معادلهٔ

$$\frac{df_i}{dt}=a_i f_i(t)$$

را بر آورده می‌کند. پس‌از محاسبه نتیجه می‌شود که اعداد c_1، c_2، ...، c_n وجود دارند به طوری‌که برای $i=1,2,\ldots,n$ داریم

$$f_i(t)=c_i e^{a_i t}$$

[اثبات. اگر $\frac{df}{dt}=af(t)$، آنگاه مشتق $\frac{f(t)}{e^{at}}$ مساوی صفر است، بنابراین $f(t)/e^{at}$ مقداری است ثابت.] برعکس، اگر c_1، ...، c_n اعداد حقیقی باشند وقرار دهیم

$$F(t)=\begin{bmatrix} c_1 e^{a_1 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n e^{a_n t}\end{bmatrix}$$

آنگاه $F(t)$ درمعادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dF}{dt}=AF(t)$$

صدق می‌کند. فرض‌کنید V مجموعهٔ حلهای $F(t)$ برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dF}{dt}=AF(t)$$

است. دراین‌صورت به‌سادگی دیده می‌شود که V یك فضای برداری است، و استدلال فوق نشان می‌دهد که بردارهای

$$\begin{bmatrix} e^{a_1 t} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ e^{a_2 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0\end{bmatrix},\ldots,\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ e^{a_n t}\end{bmatrix}$$

تشکیل یك پایه برای V می‌دهند. به‌علاوه، این عناصر بردارهای ویژهٔ A هستند، و همچنین

بردارهای ویژه برای عمل مشتق‌گیری(که یك نگاشت خطی است).

مطالب فوق معتبراست هرگاه A یك ماتریس‌قطری باشد. اگر A قطری نباشد،آنگاه سعی می‌کنیم پایه‌ای برای فضا پیداکنیم که نسبت به‌آن پایه بتوانیم ماتریس A را به شکل قطری بنویسیم.

درحالت‌کلی، فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی و

$$L : V \longrightarrow V$$

یك نگاشت خطی است. فرض‌کنید $\{v_1,\ldots,v_n\}$ یك پایه برای V است. می‌گوئیم این‌پایه L را **قطری** می‌کند، هرگاه هر V_i یك بردار ویژهٔ L باشد، مثلاً بەازای یك اسکالرخاص c_i داشته باشیم $Lv_i = c_iv_i$، دراین صورت ماتریس L نسبت به‌این پایه به صورت قطری

$$A=\begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

نوشته می‌شود.می‌گوئیم **نگاشت خطی** L می‌تواند **قطری شود** اگرپایه‌ای‌متشکل‌ازبردارهای ویژه برای V وجود داشته باشد. بعداً دراین فصل نشان خواهیم دادکه اگر A ماتریس متقارن و

$$L_A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

نگاشت خطی وابسته به‌آن باشد،آنگاه L_A رامی‌توان قطری‌کرد. می‌گوئیم **ماتریس** $n\times n$ A رامی‌توان **قطری‌کرد** هرگاه نگاشت خطی L_A رابتوان قطری نمود.

تمرینها

۱. فرض‌کنید $a\in K$ و $a\neq 0$. ثابت‌کنیدکه بردارهای ویژهٔ ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یك فضای یك بعدی راتولید می‌کنند، وپایه‌ای برای این فضا ارائه دهید.

۲. ثابت کنیدکه بردارهای ویژهٔ ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

یك فضای ۲ بعدی راتولید می‌کنند و پایه‌ای ازاین فضا را ارائه دهید، مقادیرویژهٔ این ماتریس را به دست آورید.

۳. فرض کنید A یك ماتریس قطری با عناصرروی قطر $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$، ...، و a_{nn} است. بعد زیرفضای تولیدشده توسط بردارهای ویژهٔ A چند است؟ پایه‌ای ازاین زیرفضا رابه‌دست آورید ومقادیرویژهٔ A راحساب کنید.

۴. فرض کنید $A=[a_{ij}]$ یك ماتریس $n\times n$ است به‌طوری‌که برای هر $i=۱,۲,...,n$ داریم

$$\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}=۰$$

نشان دهیدکه ۰ یك مقدارویژهٔ A است.

۵. (الف) نشان دهیدکه اگر $\theta\in\mathbf{R}$، آنگاه ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

همیشه دارای یك بردارویژه در $\mathbf{R}^۲$ است، ودرواقع یك بردار $v_۱$ وجود دارد به‌طوری‌که $Av_۱=v_۱$. [راهنمایی: فرض کنیدکه اولین مؤلفهٔ $v_۱$ عبارت است از

$$x=\frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta}$$

اگر $\cos\theta\neq ۱$. سپس معادله رابرای y حل کنید. اگر $\cos\theta=۱$ باشد چه؟]

(ب) فرض کنید $v_۲$ برداری‌از $\mathbf{R}^۲$ وعمود بر بردار $v_۱$ به‌دست آمده درقسمت (الف) است. نشان دهیدکه $Av_۲=-v_۲$. این مطلب بیان‌کنندهٔ آن است که A بازتابی است.

۶. فرض کنید

$$R(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ماتریس یك دوران است. نشان دهیدکه $R(\theta)$ دارای هیچ مقدارویژهٔ حقیقی نیست، مگردر

حالت $R(\theta)=\pm I$ [حل این تمرین بعداز مطالعهٔ قسمت بعدآسانتر است.]

۷. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی است. فرض کنید A و B نگاشتهایی خطی از V در V هستند. همچنین فرض کنید $AB=BA$. نشان دهید که اگر v یك بردار ویژهٔ A با مقدار ویژهٔ λ باشد، آنگاه Bv هم یك بردار ویژهٔ A با مقدار ویژهٔ λ است به شرطی که $Bv\neq 0$.

۲. چندجمله‌ای مشخصه.

دراین قسمت خواهیم دید که چگونه می‌توان از دترمینان برای یافتن مقادیر ویژهٔ یك ماتریس استفاده کرد.

قضیهٔ ۲.۱. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی، و λ یك عدد است. فرض کنید $A:V\to V$ یك نگاشت خطی است. دراین‌صورت λ یك مقدار ویژهٔ A است اگروتنها اگر $A-\lambda I$ وارون‌پذیر نباشد.

اثبات. فرض کنید که λ یك مقدار ویژهٔ A است. دراین‌صورت یك عضو $v\in V$ و $v\neq 0$ وجود دارد به طوری که $Av=\lambda v$. از اینجا نتیجه می‌شود که $Av-\lambda v=0$ و $(A-\lambda I)v=0$. لذا $A-\lambda I$ دارای هستهٔ مخالف صفر است، وبنابراین $A-\lambda I$ نمی‌تواند وارون‌پذیر باشد. برعکس، فرض کنید که $A-\lambda I$ وارون‌پذیر نیست. طبق قضیهٔ ۳.۲ فصل ۳، باید $A-\lambda I$ دارای هستهٔ مخالف صفر باشد. بنابراین بردار $v\in V$ و $v\neq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $(A-\lambda I)v=0$. لذا $Av-\lambda v=0$ یا $Av=\lambda v$. بنابراین λ یك مقدار ویژهٔ A است.

فرض کنید $A=[a_{ij}]$ یك ماتریس $n\times n$ است. **چندجمله‌ای مشخصهٔ** P_A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$P_A(t)=\mathrm{Det}(tI-A)$$

یا به صورت کامل

$$P(t)=\begin{bmatrix} t-a_{11} & & \\ & \ddots & \\ -a_{ij} & & -a_{ij} \\ & \ddots & \\ & & t-a_{nn} \end{bmatrix}$$

همچنین می‌توانیم A را به‌عنوان نگاشتی خطی از K^n در K^n درنظر بگیریم، دراین‌صورت

$P_A(t)$ را **چند جمله‌ای مشخصهٔ این نگاشت خطی** می‌نامیم.

مثال ۱. چند جمله‌ای مشخصهٔ ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ -۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

عبارت است از

$$\begin{vmatrix} t-۱ & ۱ & -۳ \\ ۲ & t-۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & t+۱ \end{vmatrix}$$

که می‌توانیم آنرا نسبت به‌ستون اول بسط داده و به‌دست آوریم

$$P_A(t)=t^۳-t^۲-۴t+۶$$

برای یك ماتریس دلخواه $A=[a_{ij}]$، چند جمله‌ای مشخصهٔ آن را می‌توان با بسط نسبت به‌ستون اول به‌دست آورد، وهمیشه متشکل ازمجموعی به‌صورت

$$(t-a_{۱۱})\cdots(t-a_{nn})+\cdots$$

است. هر جملهٔ دیگرغیر ازجملهٔ نوشته شده دارای درجهٔ کوچکتر از n می‌باشد. بنا براین چند جمله‌ای مشخصهٔ آن به‌صورت زیر است

$$P_A(t)=t^n+\text{جملات با درجهٔ کمتر}$$

قضیهٔ ۲.۲. فرض‌کنید A یك ماتریس $n\times n$ است. عدد λ یك‌مقدار ویژهٔ A است اگروتنها اگر λ یك ریشهٔ چند جمله‌ای مشخصهٔ A باشد.

اثبات. فرض کنید λ یك‌مقدارویژهٔ A است. دراین‌صورت‌طبق قضیهٔ ۱.۲، $\lambda I-A$ وارون پذیر نیست، ولذا طبق قضیهٔ ۳.۵فصل ۶، $\mathrm{Det}(\lambda I-A)=۰$. بنا براین λ یك ریشهٔ چند جمله‌ای مشخصهٔ A است. برعکس، فرض‌کنید λ یك ریشهٔ چند جمله‌ای مشخصهٔ A است، دراین صورت

$$\mathrm{Det}(\lambda I-A)=۰$$

ولذا طبق قضیهٔ ۳.۵ فصل ۶ ماتریس $\lambda I-A$ وارون‌پذیر نیست. بنابراین طبق قضیهٔ ۱.۲، λ یك مقدار ویژهٔ A است.

قضیهٔ ۲.۲ یك راه صریح برای محاسبهٔ مقادیرویژهٔ یك‌ماتریس به‌دست می‌دهد، البته به‌شرطی‌که بتوانیم صریحاً ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه را به‌دست آوریم. این‌کار اغلب ساده است، به خصوص درتمرینهای پایان این فصل، ماتریسهای پیشنهاد شده چنان هستندکه ریشه‌ها را می‌توان به‌راحتی حدس زد ویا محاسبه نمود. دربقیه حالتها مسأله مشکلتر است.

به‌عنوان مثال، برای تعیین ریشه‌های چند جمله‌ای مثال ۱، لازم است‌که نظریه چند جمله‌ایهای درجهٔ سه را توسعه دهیم. این کارشدنی است، اما فرمولهای موجود اغلب مشکلتر ازفرمول مورد نیاز برای حل معادلهٔ درجه دوم است. همچنین می‌توان ریشه‌ها را به‌طورتقریبی محاسبه نمود. درهرحال، بحث‌درتعیین چنین‌روشهایی به‌موضوع مورد مطالعه دراین‌فصل‌مربوط نیست.

مثال۲. مقادیرویژهٔ ماتریس‌زیر وهمچنین‌پایه‌ای‌برای فضای ویژهٔ ماتریس‌رابه‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

چند جمله‌ای مشخصهٔ آن عبارت است از

$$\begin{vmatrix} t-۱ & -۴ \\ -۲ & t-۳ \end{vmatrix} = (t-۱)(t-۳)-۸ = t^۲-۴t-۵ = (t-۵)(t+۱)$$

بنابراین مقادیرویژه عبارتند از ۵ و ۱ـ.

برای هرمقدارویژهٔ λ، بردار ویژه، برداری مانند $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ است به‌طوری‌که

$$x+۴y=\lambda x$$

$$۲x+۳y=\lambda y$$

یا به‌طورهم‌ارز

$$(۱-\lambda)x+۴y=۰$$

$$۲x+(۳-\lambda)y=۰$$

به x مقادیرمختلفی می‌دهیم، مثلاً $x=۱$، وهریك ازمعادله‌ها را برای y حل می‌کنیم. از معادلهٔ دوم نتیجه‌می‌شود $y=\frac{-۲}{۳-\lambda}$. از اینجا بردارویژهٔ

$$X(\lambda)=\begin{bmatrix} ۱ \\ \dfrac{-۲}{۳-\lambda} \end{bmatrix}$$

به‌دست می‌آید. به‌جای λ مقادیر ۵ و ۱ − را قرار می‌دهیم. بردارهای ویژهٔ

$$\lambda=۵ \text{ برای } X^{۱}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \lambda=-۱ \text{ برای } X^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

به‌دست می‌آید. فضای ویژه برای $\lambda=۵$ دارای پایهٔ $X^{۱}$ و فضای ویژه برای $\lambda=-۱$ دارای پایهٔ $X^{۲}$ است. توجه کنید که هرضریب مخالف صفر این بردارها نیز یك پایهٔ فضاست. به‌عنوان مثال، به‌جای $X^{۲}$ می‌توان بردار $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$ را گرفت.

مثال ۳. مقادیر ویژه وهمچنین پایه‌ای برای فضای ویژهٔ ماتریس زیر به‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

چند جمله‌ای مشخصهٔ ماتریس عبارت است از

$$\begin{vmatrix} t-۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & t-۱ & ۱ \\ ۰ & -۲ & t-۴ \end{vmatrix}=(t-۲)^{۲}(t-۳)$$

بنابراین مقادیر ویژه عبارتند از ۲ و ۳.

برای بردارهای ویژه، باید معادلات زیر را حل کنیم

$$(۲-\lambda)x+y=۰$$

$$(۱-\lambda)y-z=۰$$

$$۲y+(۴-\lambda)z=۰$$

به‌ضریب $(\lambda-۲)$ از x توجه کنید.

فرض کنید می‌خواهیم فضای ویژه را برای مقدار ویژهٔ $\lambda=۲$ به‌دست آوریم. دراین صورت معادلهٔ اولی منحصر به $y=۰$ می‌شود، که دراین صورت ازمعادلهٔ دومی حاصل می‌شود $z=۰$. می‌توانیم به x هرمقدار دلخواه را نسبت دهیم، مثلاً $x=۱$. دراین‌صورت

بردار

$$X^{۱}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

پایه‌ای برای فضای ویژهٔ وابسته به‌مقدار ویژهٔ $۲=\lambda$ است.

اکنون فرض کنید که $\lambda\neq ۲$، بنابراین $\lambda=۳$. اگر قرار دهیم $x=۱$، آنگاه می‌توانیم معادله را برای y حل کنیم. ازمعادلهٔ اول نتیجه می‌شود که $y=۱$، و دراین صورت معادلهٔ دوم را برای z حل می‌کنیم که به‌نتیجه $z=-۲$ می‌رسیم. پس

$$X^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

پایه‌ای برای بردارهای ویژه وابسته به‌مقدار ویژهٔ ۳ است. هرضریب مخالف صفر $X^{۲}$ نیز می‌تواند پایه‌ای برای زیرفضای ویژه وابسته باشد.

مثال۴. چند جمله‌ای مشخصهٔ ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۵ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

عبارت است از $(t-۱)(t-۵)(t-۷)$. آیا می‌توانید این مطلب را تعمیم دهید.

مثال۵. مقادیرویژه وپایه‌ای برای فضای ویژهٔ ماتریس مثال ۴ به‌دست آورید.

مقادیرویژه عبارتند از ۱، ۵ و ۷. فرض کنید X یك بردار ویژه مخالف صفر است، مثلاً

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{و یا} \quad {}^{t}X=(x,y,z)$$

دراین صورت طبق تعریف بردار ویژه، یك‌عدد λ وجود دارد به‌طوری‌که $AX=\lambda X$، که نتیجه می‌دهد

$$x+y+۲z=\lambda x$$
$$۵y-z=\lambda y$$
$$۷z=\lambda z$$

حالت ۱. $z=۰$، $y=۰$. چون می‌خواهیم بردارویژه مخالف صفر باشد، باید $x\neq ۰$

که دراین صورت ازمعادلهٔ ۱ نتیجه می‌شود $\lambda = ۱$. فرض کنید $X^۱ = E^۱$ اولین بردار واحد، یا هرمضرب مخالف صفر آن است، که یك بردارویژهٔ وابسته به‌مقدار ویژهٔ ۱ را به دست می‌دهد.

حالت ۲. $z = ۰$ و $y \neq ۰$. طبق‌معادلهٔ دوم باید داشته‌باشیم $\lambda = ۵$. به y یك‌مقدارخاص، مثلاً $y = ۱$ می‌دهیم سپس معادلهٔ اولی را نسبت به x حل می‌کنیم:

$$x + ۱ = ۵x \implies x = \frac{۱}{۴}$$

فرض کنید

$$X^۲ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

دراین صورت $X^۲$ یك بردار ویژه وابسته به‌مقدارویژهٔ ۵ است.

حالت ۳. $z \neq ۰$. دراین صورت ازمعادلهٔ سوم، نتیجه می‌گیریم که $\lambda = ۷$. به z یك مقدار مشخص مخالف صفر، مثلاً $z = ۱$ را نسبت می‌دهیم. دراین صورت باید دومعادلهٔ همزمان

$$x + y + ۲ = ۷x$$

$$۵y - ۱ = ۷y$$

را حل کنیم. از اینجا نتیجه می‌شود که $y = -\frac{۱}{۲}$ و $x = \frac{۱}{۴}$. فرض کنید

$$X^۳ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} \\ -\frac{۱}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix}$$

دراین صورت $X^۳$ یك‌بردار ویژه وابسته به‌مقدارویژهٔ ۷ است.

ضرایب عددی $X^۱$، $X^۲$، $X^۳$ نیز بردارهای ویژه‌ای هستند که به‌ترتیب وابسته به مقادیر ویژهٔ مربوط به‌بردارهای $X^۱$، $X^۲$ و $X^۳$ می‌باشند. چون این سه‌بردار دارای مقایر ویژهٔ متمایزهستند، دارای استقلال خطی می‌باشند، و لذا تشکیل یك پایه برای $\mathbf{R}^۳$ می‌دهند. طبق مسألهٔ ۱۴، هیچ بردارویژهٔ دیگری‌وجود ندارد.

اکنون فرض کنیدکه هیات K، هیات اعداد مختلط است. در این صورت ازمطلب

اثبات شده در بخش پیوست استفاده می‌کنیم:

هرچند جمله‌ای غیرثابت با ضرایب مختلط دارای یك ریشهٔ مختلط است.

اگر A یك‌ماتریس مختلط $n\times n$ باشد، آنگاه چند جمله‌ای مشخصهٔ A دارای ضرایب مختلط است، ودرجهٔ آن مساوی n است که بزرگتر یا مساوی ۱ می‌باشد. بنابراین دارای یك ریشهٔ مختلط است که یك‌مقدارویژهٔ A می‌باشد. بنابراین داریم:

قضیهٔ ۳.۲ فرض‌کنید A یك ماتریس $n\times n$ با ضرایب مختلط است. دراین صورت A دارای یك‌بردار ویژهٔ مخالف صفر ویك مقدار ویژهٔ مختلط است.

این مطلب همیشه روی هیات اعداد حقیقی برقرار نیست (مثال بیاورید). در بخش بعدی، حالت مهمی را مشاهده خواهیم کرد که یك ماتریس حقیقی همیشه دارای یك مقدار ویژهٔ حقیقی است.

قضیهٔ ۴.۲ فرض‌کنید A، B دوماتریس $n\times n$ و B وارون‌پذیر است، دراین صورت چند جمله‌ای مشخصهٔ A مساوی چند جمله‌ای مشخصهٔ $B^{-1}AB$ است.

اثبات. طبق تعریف، وخواص دترمینان داریم

$$\operatorname{Det}(tI-A)=\operatorname{Det}(B^{-1}(tI-A)B)=\operatorname{Det}(tB^{-1}B-B^{-1}AB)$$
$$=\operatorname{Det}(tI-B^{-1}AB)$$

واین آنچه راکه مورد نظرماست اثبات می‌کند.

فرض کنید

$$L: V\rightarrow V$$

یك‌نگاشت خطی ازیك‌فضای برداری بابعد متناهی درخودش است، بنابراین L یك‌عملگر است. پایه‌ای برای V انتخاب می‌کنیم، وفرض می‌کنیم

$$A=M_B^B(L)$$

ماتریس نگاشت L نسبت به‌این‌پایه‌است. **چند جمله‌ای مشخصهٔ** L رامساوی‌چندجمله‌ای مشخصهٔ A تعریف می‌کنیم. اگر پایه را عوض کنیم، آنگاه A تبدیل به‌ماتریس $B^{-1}AB$ می‌شود که B یك‌ماتریس وارون‌پذیر است. برطبق‌قضیهٔ ۴.۲، نتیجه می‌گیریم که چندجمله‌ای مشخصه بستگی به‌انتخاب پایه برای فضا ندارد.

قضیهٔ ۳.۲ را می‌توان برای L نیز بیان کرد:

فرض کنید V یك فضای برداری بـا بعد متناهی و بزرگتر ازصفر روی $\mathbf{C}$ است. فرض کنید $L:V \to V$ یك عملگر است. دراین صورت L دارای یك بردار ویژهٔ مخالف صفرویك مقدار ویژهٔ دراعداد مختلط است.

اکنون مثالهایی ارائه می‌دهیم کـه در آنها مقادیرویژه و بردارهای ویژه را درهیات اعداد مختلط به‌دست می‌آوریم، هرچندکـه درایه‌های ماتریس اعداد حقیقی هستند. یادآور می‌شویم که وقتی مقادیرویژه را مختلط می‌گیریم،فضای برداری را روی هیات اعداد مختلط درنظر گرفته‌ایم، وبنابراین ترکیبات خطی عناصر پایه را با ضرایب مختلط فرض می‌کنیم.

مثال۶. مقادیر ویژه وپایه‌ای برای فضاهای ویژهٔ ماتریس زیر به‌دست آورید:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

چند جمله‌ای مشخصهٔ ماتریس عبارت است از

$$\begin{vmatrix} t-۲ & ۱ \\ -۳ & t-۱ \end{vmatrix}=(t-۲)(t-۱)+۳=t^۲-۳t+۵$$

لذا مقادیر ویژهٔ ماتریس عبارتند از

$$\frac{۳\pm\sqrt{۹-۲۰}}{۲}$$

بنابراین دومقدارویژهٔ متمایز (اما نه حقیقی) وجود دارد:

$$\lambda_۱=\frac{۳+\sqrt{-۱۱}}{۲} \text{ و } \lambda_۲=\frac{۳-\sqrt{-۱۱}}{۲}$$

فرض کنید $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ باشدکه x وy هردوتواماً صفر نیستند. دراین صورت X یك بردار ویژه است اگر وتنها اگر $AX=\lambda X$، یعنی

$$۲x-y=\lambda x$$

$$۳x+y=\lambda y$$

که λ یك‌مقدار ویژه است. این دستگاه هم‌ارز است با

$$(۲-\lambda)x-y=۰$$

$$۳x+(۱-\lambda)y=۰$$

به x یک‌مقدار دلخواه، مثلاً $x=1$ نسبت داده ومقدار y را حساب می‌کنیم. ازمعادلهٔ اول نتیجه می‌شود $y=(\lambda-2)$. دراین صورت بردارهای ویژه

$$X(\lambda_1)=\begin{bmatrix}1\\2-\lambda_1\end{bmatrix}\ ,\ X(\lambda_2)=\begin{bmatrix}1\\2-\lambda_2\end{bmatrix}$$

توضیح. یکی‌ازمعادلات را نسبت به y حل می‌کنیم. این مطلب باحل معادلهٔ دیگر نسبت به y سازگاراست. درواقع، اگر $x=1$ و $y=2-\lambda$ درطرف چپ معادلهٔ دوم قراردهیم، به‌دست می‌آوریم

$$3+(1-\lambda)(2-\lambda)=0$$

زیرا λ یك ریشهٔ چند جمله‌ای مشخصه است.

دراین صورت $X(\lambda_1)$ یك‌پایه برای زیرفضای ویژهٔ یك‌بعدی وابسته به λ_1، و $X(\lambda_2)$ یك‌پایه برای زیرفضای ویژهٔ یك‌بعدی وابسته به λ_2 است.

مثال۷. مقادیر ویژه وپایه‌ای برای فضاهای ویژهٔ ماتریس زیر به‌دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

چند جمله‌ای مشخصهٔ A را حساب می‌کنیم، عبارت‌است از

$$\begin{vmatrix}t-1&-1&1\\0&t-1&0\\-1&0&t-1\end{vmatrix}$$

به‌سادگی دیده می‌شود که

$$P(t)=(t-1)(t^2-2t+2)$$

اکنون باید ریشه‌های حقیقی ومختلط $P(t)$ را حساب کنیم. طبق‌فرمول درجه دوم، ریشه‌های t^2-2t+2 عبارتند از

$$\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=1\pm\sqrt{-1}$$

پس تنها مقدارویژهٔ حقیقی ۱ است وماتریس دارای دومقدار ویژهٔ مختلط

$$1+\sqrt{-1}\ \text{و}\ 1-\sqrt{-1}$$

است. قرار می‌دهیم

$$\lambda_1=1 \ , \ \lambda_2=1+\sqrt{-1} \ \text{و} \ \lambda_3=1-\sqrt{-1}$$

فرض کنید

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

یک بردار مخالف صفر است. دراین صورت X یک بردار ویژه برای A است اگر و تنها اگر معادلات زیر به‌ازای یک‌مقدار ویژهٔ λ برآورده شود

$$x+y-z=\lambda x$$
$$y=\lambda y$$
$$x+z=\lambda z$$

این دستگاه هم‌ارز است با

$$(1-\lambda)x+y-z=0$$
$$(1-\lambda)y=0$$
$$x+(1-\lambda)z=0$$

حالت ۱. $\lambda=1$. دراین صورت معادلهٔ دوم به‌ازای هرمقدار دلخواه y درست است. قرار می‌دهیم $y=1$. ازمعادلهٔ اول نتیجه می‌شود که $z=1$، و ازمعادلهٔ سوم به‌دست می‌آید $x=0$. لذا بردار ویژهٔ

$$X^1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

به‌دست می‌آید.

حالت ۲. $\lambda\neq 1$. دراین صورت ازمعادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $y=0$. این مقدار را در معادلهٔ اول و سوم قرار می‌دهیم. نتیجه می‌شود

$$(1-\lambda)x-z=0$$
$$x+(1-\lambda)z=0$$

اگر این معادلات مستقل باشند، آنگاه تنها جواب دستگاه $x=y=0$ است. این حالت نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا بردارویژه باید مخالف صفر باشد. به راحتی می‌توانید ببینید که $(1-\lambda)$ برابر معادلهٔ اولی مساوی معادلهٔ دومی است. درهرحال، می‌توانیم یکی از متغیرها را دلخواه انتخاب کرده و دیگری را برحسب آن به‌دست آوریم. مثلاً می‌توان فرض کرد $z=1$. دراین صورت $x=\frac{1}{1-\lambda}$. بنابراین به بردارویژهٔ

$$X(\lambda)=\begin{bmatrix}\frac{1}{1-\lambda}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

می‌رسیم. می‌توانیم قرار دهیم $\lambda=\lambda_1$ و $\lambda=\lambda_2$ تا بردارهای ویژهٔ وابسته به‌مقادیر ویژهٔ λ_1 و λ_2 را به‌دست آوریم.

به‌این طریق، سه‌بردار ویژه وابسته به‌مقادیر ویژهٔ متمایز به‌دست آورده‌ایم:

$$X^1 \;,\; X(\lambda_1) \;,\; X(\lambda_2)$$

مثال ۸. مقادیر ویژه و پایه‌ای برای فضاهای ویژهٔ ماتریس زیررا به‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

چند جمله‌ای مشخصهٔ ماتریس عبارت است از

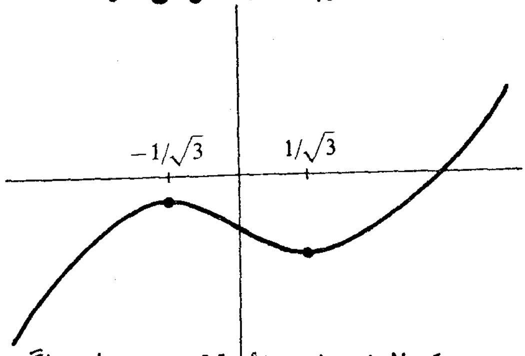
$$\begin{vmatrix}t-1 & 1 & -2\\ 2 & t-1 & -3\\ -1 & 1 & t-1\end{vmatrix}=(t-1)^3-(t-1)-1$$

مقادیرویژه ریشه‌های یک‌معادلهٔ درجه سوم هستند. درحالت‌کلی یافتن چنین ریشه‌هایی آسان نیست، واین مورد ازجملهٔ همین حالتهاست. فرض‌کنید $u=t-1$. دراین صورت چند جمله‌ای مشخصه به‌صورت زیر درمی‌آید

$$Q(u)=u^3-u-1$$

می‌دانیم‌که تنها ریشه‌های گویا باید اعداد صحیح بوده وعدد ۱ را عادکنند. بنابراین تنها ریشه‌های گویای ممکن ± 1 هستند، که‌اینها هم ریشه‌نیستند. بنابراین هیچ مقدارویژهٔ‌گویایی

وجود ندارد. اما یک معادلهٔ درجه سوم دارای شکل کلی زیر است:



از اینجا نتیجه می‌شود که لااقل یک ریشهٔ حقیقی وجود دارد. اگر بتوانید این ریشه را محاسبه کنید، آنگاه ابزار لازم برای تعیین ماکزیمم و مینیمم نسبی در اختیار است، نتیجه که تابع $u^۳-u-۱$ دارای ماکزیمم نسبی $u=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ است که $Q=\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)$ منفی است. لذا تنها یک ریشهٔ حقیقی وجود دارد. دو ریشهٔ دیگر مختلط هستند. با ابزاری که در دست داریم این نهایت کاری است که می‌توانیم برویم. درهرحال به این ریشه‌ها نامی می‌دهیم و فرض می‌کنیم که $\lambda_۳$، $\lambda_۲$، $\lambda_۱$ مقادیر ویژهٔ متمایز باشند. این مقادیر از یکدیگر متمایزند.

به‌هرحال می‌توانیم بردارهای ویژه را برحسب مقادیر ویژهٔ حساب کنیم. فرض کنید

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

یک بردار مخالف صفر است. این بردار، یک بردار ویژه است اگر و تنها اگر $AX=\lambda X$، یعنی

$$x-y+۲z=\lambda x$$
$$-۲x+y+۳z=\lambda y$$
$$x-y+z=\lambda z$$

این دستگاه معادلات هم‌ارز است با دستگاه

$$(۱-\lambda)x-y+۲z=۰$$
$$-۲x+(۱-\lambda)y+۳z=۰$$
$$x-y+(۱-\lambda)z=۰$$

به z یك مقدار دلخواه، مثلاً $z=1$، نسبت داده ودومعادلهٔ اولی دستگاه را برای x و y حل می‌کنیم. داریم

$$(\lambda-1)x+y=2$$

$$2x+(\lambda-1)y=3$$

معادلهٔ اولی را در ۲ ودومی را در $(\lambda-1)$ ضرب کرده وازهم کم می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$y(\lambda)=\frac{3(\lambda-1)-4}{(\lambda-1)^2-2}$$

ازمعادلهٔ اولی نتیجه می‌شود که

$$x(\lambda)=\frac{2-y}{\lambda-1}$$

بنابراین، بردارهای ویژه عبارتند از

$$X(\lambda_1)=\begin{bmatrix}x(\lambda_1)\\y(\lambda_1)\\1\end{bmatrix}\;,\;X(\lambda_2)=\begin{bmatrix}x(\lambda_2)\\y(\lambda_2)\\1\end{bmatrix}\;,\;X(\lambda_3)=\begin{bmatrix}x(\lambda_3)\\y(\lambda_3)\\1\end{bmatrix}$$

λ_1، λ_2، λ_3 مقادیرویژه هستند. این یك جواب صریح بهاین مطلب است که قادریم این مقادیرویژه را تعیین کنیم. بهوسیلهٔ ماشین یا یك کامپیوتر، می‌توان با به‌کار بردن ابزارمناسب، تقریب مناسبی برای λ_1، λ_2، λ_3 به‌دست آورده وسپس به‌ازای آن مقادیر بردارهای ویژهٔ متناظر به‌آنها را به‌دست آورد. توجه کنید که در اینجا بردارهای ویژهٔ مختلط را به‌دست آورده‌ایم. فرض کنید λ_1 یك مقدارویژهٔ حقیقی است (که دراین مورد فقط یکی است). در این صورت با توجه به‌مؤلفه‌های بردار $X(\lambda)$، مشاهده می‌کنیم که $y(\lambda)$ یا $x(\lambda)$ حقیقی هستند. بنابراین، فقط یك بردار ویژهٔ حقیقی، مثلاً $X(\lambda_1)$، وجود دارد. دو بردار ویژهٔ دیگر مختلط هستند. هر بردار ویژه یك‌پایه برای فضای متناظرش می‌باشد.

تمرینها

۱. فرض کنید A یک ماتریس قطری است:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱} & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a_{۲} & \cdots & ۰ \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_{n} \end{bmatrix}$$

(الف) چند جمله‌ای مشخصهٔ A را به‌دست آورید.

(ب) مقادیر ویژهٔ A را بیابید.

۲. فرض کنید A یک ماتریس مثلثی است:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & \cdots & ۰ \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & & ۰ \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژهٔ A را بیابید.

چند جمله‌ای مشخصه، مقادیر ویژه، و پایه‌ای برای فضاهای ویژهٔ ماتریسهای زیر بیابید:

۳. (الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

(پ) $\begin{bmatrix} -۲ & -۷ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ (ت) $\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$

۴. (الف) $\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۳ \\ ۳ & -۵ & ۳ \\ ۶ & -۶ & ۴ \end{bmatrix}$

(پ) $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ (ت) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$

۵. مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریسهای زیررا به‌دست آورید. نشان دهیدکه بردارهای ویژه تشکیل یك‌فضای ۱ بعدی می‌دهند.

(الف) $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

(پ) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ (ت) $\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

۶. مقادیرویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریسهای زیررا بیابید. نشان دهیدکه بردارهای ویژهٔ تشکیل یك فضای ۱ بعدی می‌دهند.

(الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۷. مقادیرویژه وپایه‌ای برای فضاهای ویژهٔ ماتریسهای زیر بیابید.

(الف) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۰ \\ -۴ & ۱۳ & -۱ \end{bmatrix}$

۸. مقادیرویژه وپایه‌ای برای فضاهای ویژهٔ ماتریسهای زیر بیابید.

(الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ (پ) $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$

(ت) $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ -۳ & -۶ & -۶ \end{bmatrix}$ (ت) $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} -۱ & ۴ & -۲ \\ -۳ & ۴ & ۰ \\ -۳ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$

۹. فرض‌کنید V یك فضای برداری n بعدی است، و فرض کنیدکه چند جمله‌ای مشخصهٔ نگاشت خطی $A: V \to V$ دارای n ریشهٔ متمایز است. نشان دهیدکه V دارای یك‌پایه متشکل از بردارهای ویژهٔ A است.

۱۰. فرض‌کنید A یك‌ماتریس مربع است. نشان دهیدکه مقادیر ویژهٔ A^t همان مقادیر ویژهٔ A هستند.

۱۱. فرض کنید A یك ماتریس وارون‌پذیر است. اگر λ یك مقدار ویژهٔ A باشد نشان‌دهید که $\lambda\neq0$ و λ^{-1} یك مقدار ویژهٔ A^{-1} است.

۱۲. فرض کنید V فضای برداری تولید شده توسط دو تابع $\sin t$ و $\cos t$ روی هیأت اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ است. آیا عمل مشتق‌گیری (به‌عنوان یك نگاشت خطی از V درخودش) دارای بردار ویژهٔ مخالف صفری در V است؟ اگر دارد، آنرا بیابید.

۱۳. فرض کنید D عمل مشتق‌گیری است که به‌عنوان یك‌نگاشت خطی روی فضای برداری توابع مشتق‌پذیر عمل می‌کند. فرض کنید k یك عدد صحیح مخالف صفراست. نشان دهید که توابع $\sin kx$ و $\cos kx$ بردارهای‌ویژه‌برای D^2 هستند. مقادیر ویژهٔ آنها چیست؟

۱۴. فرض کنید $A: V\to V$ یك نگاشت خطی، و $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ پایه‌ای از V متشکل‌از بردارهای ویژهٔ وابسته به مقادیرویژهٔ متمایز c_1، ...، c_n هستند. نشان دهیدکه هر برداروویژهٔ v از A متعلق به V مضربی از یك v_i است.

۱۵. فرض کنید A، B ماتریسهای مربع هم مرتبه هستند. نشان دهیدکه مقادیرویژهٔ AB با مقادیرویژهٔ BA مساوی هستند.

۳. مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریسهای متقارن

دو اثبات برای قضیهٔ زیرارائهٔ خواهیم داد.

قضیهٔ ۱.۳ فرض کنید A یك ماتریس حقیقی متقارن $n\times n$ است. دراین صورت یك بردار ویژهٔ حقیقی مخالف صفر برای A وجود دارد.

اولین اثبات اعداد مختلط را به‌کارمی‌برد. طبق قضیهٔ ۳.۲، می‌دانیم که A دارای‌یك‌مقدار ویژهٔ λ در $\mathbf{C}$، ویك بردار ویژهٔ Z با مؤلفه‌های مختلط است. اکنون کافی است ثابت‌کنیم:

قضیهٔ ۲.۳. فرض‌کنید A یك ماتریس حقیقی متقارن، و λ یك مقدار ویژهٔ آن در $\mathbf{C}$ است. دراین‌صورت λ حقیقی است. اگر $Z\neq0$ یك بردار ویژهٔ مختلط بامقدار ویژهٔ λ، و $Z=X+iY$ باشد که X و Y متعلق به $\mathbf{R}^n$ هستند، آنگاه X و Y بردارهای ویژهٔ حقیقی A بامقدار ویژهٔ λ بوده، وداریم $X\neq0$ یا $Y\neq0$.

اثبات. فرض کنید $Z={}^t(z_1,\ldots,z_n)$ که مؤلفه‌های z_i مختلط هستند. دراین‌صورت

$$Z\cdot\overline{Z}=\overline{Z}\cdot Z={}^t\overline{Z}\cdot Z=\overline{z}_1z_1+\cdots+\overline{z}_nz_n=|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2>0$$

طبق فرض، داریم $AZ=\lambda Z$. دراین‌صورت

$$'\overline{Z}AZ='\overline{Z}\lambda Z=\lambda'\overline{Z}Z$$

ترانهادهٔ یك ماتریس ۱ × ۱ مساوی خودش است، لذا

$$'Z'A\overline{Z}='\overline{Z}AZ=\lambda'\overline{Z}Z$$

اما $\overline{AZ}=\overline{A}\,\overline{Z}=A\overline{Z}$، و $\overline{AZ}=\overline{\lambda Z}=\overline{\lambda}\,\overline{Z}$. بنابراین

$$\lambda'\overline{Z}Z=\overline{\lambda}'Z\overline{Z}$$

چون $'Z\overline{Z}\neq 0$، نتیجه می‌شود که $\lambda=\overline{\lambda}$، بنابراین λ حقیقی است.

اکنون از $AZ=\lambda Z$ نتیجه می‌گیریم که

$$AX+iAY=\lambda X+i\lambda Y$$

چون A، X، Y حقیقی هستند، لذا $AX=\lambda X$ و $AY=\lambda Y$. بنابراین اثبات قضیه کامل می‌شود.

بعداً اثبات دیگری برای قضیه ارائه می‌دهیم که‌در آن ازحساب دیفرانسیل وانتگرال توابع چندمتغیری استفاده می‌شود.

تابع

$$f(X)='XAX\ ,\quad X\in\mathbf{R}^n \text{ برای}$$

را درنظرمی‌گیریم. چنین تابعی بــه **فرم‌درجه دوم‌وابسته به** A موسوم است. اگر $'X=(x_1,\dots,x_n)$ و $A=[a_{ij}]$ باشد، آنگاه

$$f(X)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

مثال. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

فرض کنید $'X=(x,y)$. دراین‌صورت

$$'XAX=(x,y)\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=3x^2-2xy+2y^2$$

درحالت کلی‌تر، فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$(x,y)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=ax^{۲}+۲bxy+dy^{۲}$$

مثال. فرض‌کنید عبارت درجه دوم

$$f(x,y)=۳x^{۲}+۵xy-۴y^{۲}$$

داده شده است. دراین‌صورت این‌عبارت فرم درجه دوم ماتریس متقارن

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & \frac{۵}{۲} \\ \frac{۵}{۲} & -۴ \end{bmatrix}$$

است.

در بسیاری از کاربردها، می‌خواهیم ماکزیمم یک چنین تابعی را روی کرهٔ واحد به دست آوریم. به‌خاطر آورید که **کرهٔ واحد** مجموعهٔ کلیهٔ Xهایی است که $||X||=۱$، که در آن $||X||=\sqrt{X\cdot X}$. دردرسهای آنالیز نشان داده می‌شود که تابع پیوستهٔ f شبیه فوق، لزوماً دارای یك ماکزیمم روی‌کره است. یك **ماکزیمم** روی کرهٔ واحد نقطه‌ای مانند P است به‌طوری‌که $||P||=۱$ و

$$f(P)\geqslant f(X) \quad \text{،}||X||=۱ \text{ با } X \text{ به‌ازای هر}$$

قضیهٔ بعدی این مسأله را به مسأله یافتن بردارهای ویژه مربوط می‌کند.

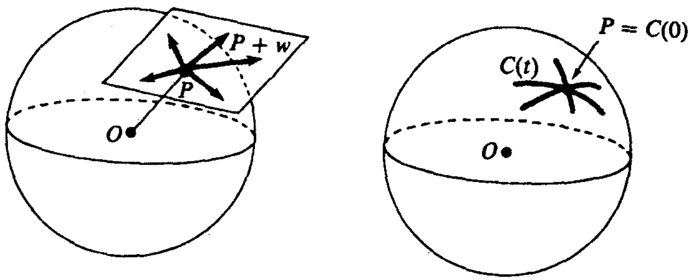
قضیهٔ ۳.۳. فرض‌کنید A یك ماتریس حقیقی متقارن، و $f(X)={}^{t}XAX$ فرم درجه دوم وابسته به آن است. فرض‌کنید P یك نقطه روی کرهٔ واحد است به طوری‌که $f(P)$ یك ماکزیمم برای f روی‌کره است. دراین‌صورت P یک بردار ویژه برای A است. به عبارت دیگر، یک عدد λ وجود دارد به‌طوری که $AP=\lambda P$

اثبات. فرض‌کنید W زیرفضای $\mathbf{R}^n$ عمود بر P است، یعنی $W=P^{\perp}$. دراین صورت $\dim W=n-۱$. برای هر $w\in W$، $||w||=۱$، منحنی

$$C(t)=(\cos t)P+(\sin t)w$$

را تعریف می‌کنیم. جهت بردارهای $w\in W$ عبارتند ازجهتهای مماس بر کره درنقطهٔ P،

همچنانکه درشکل زیر نشان داده شده است.



منحنی $C(t)$ روی کره واقع است زیرا $1 = ||C(t)||$. این مطلب را به راحتی می‌توانید بامحاسبهٔ $C(t) \cdot C(t)$ و استفاده ازفرض $P.W = 0$ ثابت‌کنید. بـه علاوه $C(0) = P$، بنابـراین $C(t)$ یك منحنی روی کـره است‌که از نقطه P می‌گذرد. همچنین مشتق $C'(t)$ عبارت است از

$$C'(t) = (-\sin t)P + (\cos t)w$$

و بنابراین $C'(0) = w$. پس‌جهت منحنی‌درجهت w است، ودرنقطهٔ P برکره عمود است، زیرا $w.P = 0$. تابع

$$g(t) = f(C(t)) = C(t) \cdot AC(t)$$

را درنظر بگیرید. بااستفاده ازقاعدهٔ مشتق حاصلضرب نقطه‌ای داریم

$$\begin{aligned} g(t) &= C'(t) \cdot AC(t) + C(t) \cdot AC'(t) \\ &= 2C'(t) \cdot AC(t) \end{aligned}$$

زیرا A متقارن‌است. چون $f(P)$ ماکزیمم و $g(0) = f(P)$ است، لـذا نتیجه می‌شود‌که $g'(0) = 0$. دراین‌صورت به‌دست می‌آوریم

$$0 = g'(0) = 2C'(0) \cdot AC(0) = 2w \cdot AP$$

لذا AP به‌ازای هر $w \in W$ عمود بر W است اما $W^{\perp}$ یك فضای ۱ بعدی است‌که به وسیلهٔ P تولید می‌شود. لذا یك عدد λ وجود دارد به‌طوری‌که $AP = \lambda P$. بنابراین اثبات‌قضیه تمام می‌شود.

نتیجهٔ ۴.۳. مقدار ماکزیمم f روی کرهٔ واحد مساوی بزرگترین مقدار ویژهٔ A است.

اثبات. فرض‌کنید λ یك مقدار ویژهٔ دلخواه و P یك بردارویژه روی‌کرهٔ واحد است، لذا

$\|P\| = ۱$. دراین‌صورت

$$f(P) = {}^tPAP = {}^tP\lambda P = \lambda {}^tPP = \lambda$$

بنابراین مقدار f دریك بردارویژهٔ متعلق به‌کرهٔ واحد مساوی مقدارویژه است. قضیهٔ ۳.۳ می‌گویدکه ماکزیمم f روی‌کرهٔ واحد به‌ازای یك بردار ویژه حاصل می‌شود. لذاماکزیمم f روی‌کرهٔ واحد مساوی است با بزرگترین مقدارویژه.

مثال. فرض‌کنید $f(x,y) = ۲x^۲ - ۳xy + y^۲$. فرض‌کنید A ماتریس متقارن وابسته به f است. بردارهای ویژهٔ A روی دایرهٔ واحد، و همچنین ماکزیمم f روی دایرهٔ واحد را به دست آورید.

نخست توجه‌کنیدکه f فرم درجه دوم وابسته به ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -\frac{۳}{۲} \\ -\frac{۳}{۲} & ۱ \end{bmatrix}$$

است. طبق قضیهٔ ۳.۳ مقدارماکزیمم به‌ازای یك بردار ویژه اتفاق می‌افتد. لـذا در ابتدا مقادیرویژه وبردارهای ویژه رابه دست می‌آوریم.

چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس عبارت است ازدترمینان

$$\begin{vmatrix} t-۲ & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۳}{۲} & t-۱ \end{vmatrix} = t^۲ - ۳t - \frac{۱}{۴}$$

بنابراین مقادیرویژه عبارتنداز

$$\lambda = \frac{۳ \pm \sqrt{۱۰}}{۲}$$

برای بردارهای ویژه، باید معادلات زیررا حل‌کنیم

$$۲x - \frac{۳}{۲}y = \lambda x$$

$$-\frac{۳}{۲}x + y = \lambda y$$

قرارمی‌دهیم $x = ۱$، دراین‌صورت بردار ویژه

$$X(\lambda)=\begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۳}{۲}(۲-\lambda) \end{bmatrix}$$

حاصل می‌شود. بنا بر این، با تقریب مضارب عددی مخالف صفر، دو بـردار ویژهٔ این چنینی داریم. بردارهای ویژه واقع بر دایرهٔ واحد عبارتند از

$$P(\lambda)=\frac{X(\lambda)}{||X(\lambda)||}$$

که در آن $\lambda=\frac{۱+\sqrt{۱۰}}{۲}$ و $\lambda=\frac{۱-\sqrt{۱۰}}{۲}$ است. بر طبق نتیجهٔ ۴.۳، ماکزیمم نقطه‌ای با مقدارویژهٔ بزرگتراست، و بنابراین باید نقطهٔ

$$P(\lambda) \text{ به‌ازای } \lambda=\frac{۳+\sqrt{۱۰}}{۲}$$

باشد. پس مقدارماکزیمم f روی دایرهٔ واحد مساوی $\frac{۳+\sqrt{۱۰}}{۲}$ است.

باروش مشابه، مقدار مینیمم f روی دایرهٔ واحد عبارت است از $\frac{۳-\sqrt{۱۰}}{۲}$.

تمرینها

۱. مقادیرویژه و همچنین مقدارماکزیمم فرمهای درجه‌دوم وابسته به‌ماتریسهای زیررا روی دایرهٔ واحد به‌دست آورید.

(الف) $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۲. همان سئوال، به‌جز یافتن ماکزیمم روی کرهٔ واحد

(الف) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$

۳. ماکزیمم ومینیمم تابع

$$f(x,y)=3x^3+5xy-4y^2$$

را روی دایرهٔ واحد به‌دست آورید.

۴. قطری سازی یك نگاشت خطی متقارن

درطول این بخش، مگر اینکه خلاف آن تصریح شود، فرض می‌کنیم V یك فضای برداری n بعدی روی $\mathbf{R}$، با یك حاصلضرب اسکالر معین مثبت می‌باشد.

کاربردی ازوجود بردارهای ویژهٔ ثابت شده دربخش ۳ را ارائه خواهیم داد. فرض کنید

$$A:V\to V$$

یك نگاشت خطی است. به‌یادآورید که A **(نسبت به حاصلضرب اسکالر) متقارن** است اگر برای هر v و w متعلق به V داشته باشیم

$$\langle Av,w\rangle=\langle v,Aw\rangle$$

می‌توان قضیهٔ ۱.۳ را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

قضیهٔ ۱.۴. فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی ویك حاصلضرب اسکالر معین مثبت است. فرض‌کنید $A:V\to V$ یك نگاشت خطی متقارن است، دراین صورت A دارای یك بردار ویژهٔ مخالف صفر است.

فرض‌کنید W یك زیرفضای V و $A:V\to V$ یك نگاشت خطی متقارن است. می‌گوئیم که W **تحت A پایدار** است اگر $A(W)\subset W$، یعنی به‌ازای هر $u\in W$ داشته باشیم $Au\in W$.

قضیهٔ ۲.۴. فرض‌کنید $A:V\to V$ یك نگاشت خطی متقارن است. فرض‌کنیدکه v یك بردار ویژهٔ مخالف صفر A است. اگر w یك عضو V وعمود بر v باشد، آنگاه Aw نیزبر v عمود است.

اگر W یك زیرفضای V وپایدارتحت A باشد،آنگاه $W^{\perp}$ نیزتحت A پایداراست.

اثبات. فرض کنیدکه v یك بردارویژهٔ A است. دراین‌صورت

$$\langle Aw,v\rangle=\langle w,Av\rangle=\langle w,\lambda v\rangle=\lambda\langle w,v\rangle=0$$

لذا Aw بر v عمود است.

دوم، فرض کنید W تحت A پایدار است. فرض کنید $u\in W^{\perp}$. دراین صورت برای هر $w\in W$ داریم

$$<Au,w>=<u,Aw>=\circ$$

زیرا $Aw\in W$ است. لذا $Au\in W^{\perp}$، و به‌این ترتیب حکم دوم قضیه نیز اثبات می‌شود.

قضیهٔ ۳.۴. (قضیهٔ طیفی). فرض‌کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی اعداد حقیقی با بعد $n>\circ$ است. همچنین فرض‌کنید که V دارای یک حاصلضرب اسکالر معین مثبت می‌باشد. فرض‌کنید

$$A:V\longrightarrow V$$

یک نگاشت خطی‌متقارن نسبت‌به حاصلضرب تعریف شده می‌باشد. دراین‌صورت Vدارای یک پایهٔ یکه‌ای متعامد متشکل ازبردارهای ویژه است.

اثبات. طبق قضیهٔ ۱.۳، یك برداروِیژهٔ غیرصفر v برای A وجود دارد. فرض‌کنید W زیر فضای ۱ بعدی پدیدآمده توسط v است. دراین‌صورت W تحت A پایدار است. طبق قضیهٔ ۲.۴، $W^{\perp}$ نیز تحت A پایدار است ویك فضای برداری $n-1$ بعدی است. می‌توانیم A را به‌عنوان یك نگاشت خطی متقارن از $W^{\perp}$ درخودش درنظربگیریم. این عمل را تکرار می‌کنیم. قرارمی‌دهیم $v=v_1$، و با استقراء یك پایهٔ $\{v_2,\dots,v_n\}$ برای $W^{\perp}$ متشکل از بردارهای ویژه به‌دست می‌آوریم. دراین‌صورت

$$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$$

یك پایهٔ متعامد V است‌که از بردارهای ویژه تشکیل شده است. اگرهر بردار را برطولش تقسیم کنیم یك پایهٔ یکه‌ای متعامد برای V به دست می‌آوریم.

اگر $\{e_1,\dots,e_n\}$ پایهٔ یکه‌ای متعامد باشدکه هر یك از e_iها یك بردار ویژه هستند، آنگاه ماتریس A نسبت به‌این پایه یك ماتریس قطری است، و عناصر روی قطرش دقیقاً مقادیرویژه هستند.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \lambda_2 & & \circ \\ \vdots & & & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

درچنین نمایش ساده‌ای از A، اثر A واضح‌تر از زمانی می‌شود که به‌وسیلهٔ یك ماتریس پیچیده‌تر نسبت به پایه‌ای دیگر نمایش داده شود.

پایهٔ $\{v_1,\ldots,v_n\}$ به‌طوری‌که هر v_i یك بردارویژهٔ A باشد رایك **پایهٔ طیفی** برای A می‌نامیم. همچنین می‌گوئیم که این پایه A را **قطری می‌کند**، زیرا ماتریس A دراین پایه‌یك ماتریس قطری است.

مثال. کاربردی ازاین مطلب را درمعادلات دیفرانسیل خطی ارائه می‌دهیم. فرض‌کنید A یك ماتریس حقیقی متقارن $n\times n$ است. می‌خواهیم جوابهای معادله دیفرانسیل

$$\frac{dX(t)}{dt}=AX(t)$$

راکه درآن

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n(t)\end{bmatrix}$$

ومؤلفه‌ها توابعی از t هستند، در $\mathbf{R}^n$ به‌دست آوریم. البته منظور از $\frac{dX(t)}{dt}$ عبارت‌است‌از

$$\frac{dX(t)}{dt}=\begin{bmatrix} dx_1/dt\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ dx_n/dt\end{bmatrix}$$

نوشتن این معادله برحسب مؤلفه‌های دلخواه باعث شلوغی می‌شود. بنابراین، بهتراست، درابتدا ازاین‌کارصرفنظرکنیم، و $\mathbf{R}^n$ رابه عنوان یك فضای برداری n بعدی با یك حاصلضرب‌اسکالرمعین‌مثبت‌درنظر بگیریم. یك‌پایهٔ یکه‌ای‌متعامد (معمولاً متمایزازپایهٔ اولیه) برای V که متشکل‌از بردارهای ویژهٔ A است‌درنظرمی‌گیریم. اکنون نسبت به‌این‌پایهٔ‌جدید می‌توانیم V را با $\mathbf{R}^n$ بامؤلفه‌های جدیدی‌که با y_1، ...، y_n نمایش می‌دهیم یکی بگیریم. نسبت به‌این مؤلفه‌های جدید، ماتریس نگاشت خطی L_A عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

که در آن λ_1 ،...، λ_n مقادیر ویژه هستند. اما برحسب این مؤلفه‌های مناسب‌تر، معادله دیفرانسیل‌ها به‌صورت سادهٔ

$$\frac{dy_1}{dt}=\lambda_1 y_1,\dots,\ \frac{dy_n}{dt}=\lambda_n y_n$$

نوشته می‌شود. بنابراین عمومی‌ترین جواب معادله به‌صورت

$$y_i(t)=c_i e^{\lambda_i t}$$

درمی‌آید که c_iها مقادیر ثابت هستند.

نتیجهٔ این مثال این است که نباید یک‌پایه را به‌سهولت انتخاب کرد، و باید تا جایی که ممکن است علامت‌گذاری بدون استفاده ازمختصات را به‌کار برد، مگراینکه انتخاب مختصات حل مسأله را ساده‌تر سازد.

قضیهٔ ۴.۴. فرض‌کنید A یک‌ماتریس $n\times n$ حقیقی‌متقارن‌است. دراین صورت یک‌ماتریس یکانی U وجود دارد به‌طوری‌که

$${}^tUAU=U^{-1}AU$$

یک ماتریس قطری است.

اثبات. فرض‌کنیدA ماتریس وابسته به‌نگاشت خطی متقارن

$$F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$$

نسبت به‌پایهٔ استاندارد $B=\{e^1,\dots,e^n\}$ است. طبق قضیهٔ ۳.۴ می‌توانیم یک‌پایهٔ یکه‌ای متعامد $B'=\{w_1,\dots,w_n\}$ از $\mathbf{R}^n$ بیابیم به‌طوری‌که $M^{B'}_{B'}(F)$ قطری باشد. فرض‌کنید $U=M^{B}_{B'}(id)$. دراین صورت $U^{-1}AU$ قطری است. به‌علاوه U یکانی است. در واقع فرض‌کنید $U=[c_{ij}]$. دراین صورت

$$w_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ji}e_j\ ,\ \forall i=1,2,\dots,n$$

شرطهای $\langle w_i,w_i\rangle=1$ و $\langle w_i,w_j\rangle=0$ اگر $i\neq j$، نتیجه می‌دهند که

$${}^tUU=I\implies {}^tU=U^{-1}$$

به‌این‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

توجه. قضیهٔ ۴.۴ به‌ما نشان‌می‌دهد که‌چگونه‌تمام‌ماتریسهای‌حقیقی‌متقارن را بیابیم. هرماتریس

حقیقی متقارن A را می‌توان به‌صورت

$$^{t}UBU$$

نوشت که B یك ماتریس قطری و U یك‌ماتریس یکانی حقیقی است.

تمرینها

۱. فرض‌کنیدکه A یك‌ماتریس قطری $n\times n$ است. برای هر $X\in\mathbf{R}^n$، مطلوب‌است‌محاسبهٔ ^{t}XAX برحسب مؤلفه‌های X ودرایه‌های قطری A.

۲. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

یك ماتریس قطری با شرط $\lambda_1\geqslant 0,\ldots,\lambda_n\geqslant 0$ است. نشان دهیدکه ماتریس قطری B وجوددارد به‌طوری‌که $B^2=A$.

۳. فرض‌کنید V یك‌فضای برداری با بعد متناهی و با یك‌حاصلضرب معین‌مثبت است. فرض کنید $A: V\to V$ یك‌نگاشت خطی متقارن‌است. می‌گوئیم A معین مثبت است هرگاه به ازای هر $v\in V$ و $v\neq 0$ داشته باشیم $\langle Av,v\rangle>0$. ثابت کنیدکه

(الف) اگر A معین‌مثبت باشد، آنگاه تمام مقادیر ویژهٔ آن بزرگتر از ۰ هستند.

(ب) اگر A معین‌مثبت باشد، آنگاه یك‌نگاشت خطی‌متقارن B وجود دارد به‌طوری‌که $B^2=A$ و $AB=BA$. مقادیر ویژهٔ B را به‌دست‌آورید. [راهنمایی: پایه‌ای از V متشکل از بردارهای ویژه درنظر بگیرید.]

۴. می‌گوئیم A نیم مثبت است اگر برای هر $v\in V$ داشته باشیم $\langle Av,v\rangle\geqslant 0$. مشابه احکام ذکر شده درقسمتهای (الف) و(ب) تمرین ۳ را برای نگاشت خطی نیم مثبت A ثابت‌کنید. بنابراین مقادیر ویژهٔ A بزرگتر یا مساوی ۰ هستند، ونگاشت خطی متقارن

B وجود دارد به‌طوری‌که $B^{2} = A$.

۵. فرض کنید که A یك نگاشت خطی متقارن معین‌مثبت است. نشان دهید کـه A^{2} و A^{-1} نیز متقارن معین مثبت هستند.

۶. فرض کنید $A: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}^{n}$ یك نگاشت خطی وارون‌پذیر است.

(الف) نشان دهید که AA^{t} نگاشت خطی‌متقارن معین‌مثبت است.

(ب) طبق تمرین ۳ (ب)، یك نگاشت خطی‌متقارن معین‌مثبت B وجود دارد به‌طوری‌که $B^{2} = {}^{t}AA$. فرض کنید $U = AB^{-1}$. نشان دهید که U یکانی است.

(پ) نشان دهید که $A = UB$.

۷. فرض کنید B متقارن معین‌مثبت وهمچنین یکانی است. ثابت کنید که $B = I$.

۸. ثابت کنید که ماتریس حقیقی‌متقارن A معین‌مثبت است اگر وتنها اگر یك ماتریس حقیقی ناتکین N وجود داشته باشد به طوری‌که $A = {}^{t}NN$. [راهنمایی: قضیهٔ ۴.۴ را به‌کار برده و ${}^{t}UAU$ را بـه‌صورت مربع یك‌مـاتریس قطری، مثلاً B^{2}، بنویسید. فرض کنید $N = UB^{-1}$.]

۹. یك پایهٔ یکه‌ای متعامد برای $\mathbf{R}^{2}$ متشکل از بردارهای ویژهٔ ماتریس دادهٔ شدهٔ زیر به‌دست آورید.

(الف) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (پ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(ت) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ث) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

۱۰. فرض کنید A یك ماتریس حقیقی متقارن 2×2 است. ثابت کنید که اگر مقادیر ویژهٔ A متمایز باشند، آنگاه بردارهای ویژهٔ آن تشکیل یك پایهٔ یکه‌ای متعامد برای $\mathbf{R}^{2}$ می‌دهند.

۱۱. فرض کنید V یك فضای برداری با بعدمتناهی n روی $\mathbf{R}$ و با حاصلضرب معین‌مثبت است. فرض کنید $A: V \to V$ یك نگـاشت خطی است. فرض کنید v_{1} و v_{2} بردارهـای ویژهٔ A وابسته به‌مقادیر ویژهٔ λ_{1} و λ_{2} هستند. اگر $\lambda_{1} \neq \lambda_{2}$ باشد نشان دهید که v_{1} بر v_{2} عمود است.

۱۲. فرض کنید V فضای برداری تمرین ۱۱ است. فرض کنید $A: V \to V$ یك نگاشت خطی متقارن است. اگر A فقط دارای یك مقدار ویژه باشد، نشان دهید که هر پایهٔ یکه‌ای متعامد

برای V متشکل از بردارهای ویژهٔ A است.

۱۳. فرض کنید V فضای برداری تمرین ۱۱ است. فرض کنید $A:V\to V$ یك نگاشت خطی متقارن است. فرض کنید $\dim V=n$، وفرض کنید که n مقدار ویژهٔ متمایز برای A وجود دارد. نشان دهید که بردارهای ویژهٔ A تشکیل یك پایهٔ یکه‌ای متعامد V را می‌دهند.

۱۴. فرض کنید V فضای برداری تمرین ۱۱ است. فرض کنید $A:V\to V$ یك نگاشت خطی متقارن است. اگر هستهٔ A مساوی $\{o\}$ باشد، آنگاه هیچ مقدار ویژهٔ A مساوی o نیست و برعکس.

۱۵. فرض کنید V فضای برداری تمرین ۱۱ است. فرض کنید $A:V\to V$ یك نگاشت خطی متقارن است. ثابت کنید که شرایط زیر روی A هم‌ارزند.

(الف) تمام مقادیر ویژهٔ A مثبت هستند.

(ب) برای هر $v\in V$ و $v\neq o$ داریم $\langle Av,v\rangle>o$.

اگر نگاشت A درشرایط فوق صدق کند، می‌گوئیم A **معین‌مثبت** است. بنابراین شرط دوم برحسب مؤلفه‌های بردار وحاصلضرب اسکالرمعمولی $\mathbf{R}^n$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

(ب′) برای تمام بردارهای $X\in\mathbf{R}^n$، $X\neq o$ داریم

$${}^tXAX>o$$

۱۶. مشخص کنید کدام یك ازماتریسهای زیر معین‌مثبت است.

(الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ (پ) $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

(ت) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & o & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ (ث) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & o \\ -۱ & o & ۱ \\ o & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

۱۷. ثابت کنید که شرایط زیر درمورد یك ماتریس متقارن حقیقی هم‌ارزند. ماتریسی که در این شرایط صدق می‌کند را **معین منفی** می‌نامیم.

(الف) تمام مقادیر ویژهٔ A منفی هستند.

(ب) برای تمام بردارهای $X\in\mathbf{R}^n$ و $X\neq o$ داریم ${}^tXAX<o$.

۱۸. فرض کنید A یك ماتریس $n\times n$ حقیقی متقارن ناتکین است. عبارتهای زیررا ثابت کنید.

(الف) اگر λ یك مقدارویژهٔ A باشد، آنگاه $\lambda \neq 0$.

(ب) اگر λ یك مقدار ویژهٔ A باشد، آنگاه λ^{-1} یك‌مقدار ویژهٔ A^{-1} است.

(پ) مجموعهٔ بردارهای ویژهٔ ماتریسهای A و A^{-1} باهم مساویند.

۱۹. فرض کنید A یك ماتریس حقیقی متقارن معین‌مثبت است. نشان دهید که A^{-1} وجود داشته و معین مثبت است.

۲۰. فرض کنید V یك‌فضای برداری با بعد متناهی‌و با یك حاصلضرب معین‌مثبت‌است. فرض کنید A و B دوعملگر متقارن روی V هستند به‌طوری‌که $AB = BA$. نشان دهید که یك پایهٔ یکه‌ای‌متعامد V وجود داردکه متشکل از بردارهای ویژهٔ A و B است. [راهنمایی: اگر λ یك مقدار ویژهٔ A، و V_λ متشکل ازکلیه بردارهای $v \in V$ باشد به‌طوری‌که $Av = \lambda v$. نشان دهید که BV_λ مشمول در V_λ است. این مطلب مسأله را به‌حالتی‌که $A = \lambda I$ است تبدیل می‌کند.]

۲۱. فرض کنید V فضای برداری تمرین ۲۰ است. فرض کنید $A: V \to V$ یك‌عملگر متقارن است. فرض کنید $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ مقادیرویژهٔ متمایز A هستند. اگر λ یك‌مقدارویژهٔ A باشد، فرض کنید $V_\lambda(A)$ متشکل ازمجموعه بردارهای $v \in V$ است به‌طوری‌که $Av = \lambda v$.

(الف) نشان دهیدکه $V_\lambda(A)$ یك زیرفضای V است و A زیرفضای $V_\lambda(A)$ را در خودش می‌نگارد. $V_\lambda(A)$ را **زیرفضای ویژهٔ** A وابسته به λ می‌نامیم.

(ب) نشان دهیدکه V جمع مستقیم زیرفضاهای

$$V = V_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}(A)$$

است، یعنی هر بردار $v \in V$ را می‌توان به‌طورمنحصر به‌فرد به‌صورت مجموع زیر نوشت:

$$v = v_1 + \cdots + v_r \;;\; v_i \in V_{\lambda_i}$$

(پ) فرض کنید λ_1، λ_2 دومقدار ویژهٔ متمایز A است. نشان دهیدکه V_{λ_1} بر V_{λ_2} عمود است.

۲۲. اگر P_1 و P_2 دوماتریس‌حقیقی‌متقارن‌معین مثبت (هم‌مرتبه)، و t، u دوعدد حقیقی مثبت باشند، نشان دهیدکه $tP_1 + uP_2$ متقارن معین مثبت است.

۲۳. فرض کنید V فضای برداری با بعد متناهی‌و با یك‌حاصلضرب معین‌مثبت‌است. فرض کنید $A: V \to V$ یك‌عملگر متقارن است. فرض کنید $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ مقادیرویژهٔ متمایز A هستند.

نشان دهیدکه

$$(A-\lambda_1 I)\dots(A-\lambda_r I)=o$$

۲۴. فرض کنید V فضای برداری تمرین ۲۲ است. فرض کنید $A:V\to V$ یك عملگر متقارن است. زیرفضای W از V را تحت A **پایدار** می‌نامیم اگر برای هر $w\in W$ داشته باشیم $Aw\in W$، یعنی $AW\subset W$. ثابت کنید که اگر A دارای هیچ زیرفضای پایدار به‌جز O و V نباشد، آنگاه به‌ازای یك عدد λ داریم $A=\lambda I$. [راهنمایی: نخست نشان دهید که A فقط دارای یك مقدار ویژه است.]

۲۵. (برای کسانی‌که قضیهٔ سیلوستر را خوانده‌اند.) فرض کنید $A:V\to V$ یك نگاشت خطی متقارن است. با مراجعه به‌قضیهٔ سیلوستر، نشان دهید که نشان و پوچی فرم

$$\langle v,w\rangle\to\langle Av,w\rangle$$

مساوی بعد هستهٔ A است. نشان‌دهید که نشان‌مثبتی A مساوی تعداد بردارهای ویژهٔ در یك پایهٔ طیفی است که دارای مقدار ویژهٔ مثبت هستند.

۵. حالت هرمیتی

در طول این بخش فرض می‌کنیم V یك فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{C}$ با یك حاصلضرب هرمیتی معین مثبت است.

نه‌تنها حالت هرمیتی شبیه حالت حقیقی است بلکه باتوجه به‌نتیجه زیر دقیقاً یکسان هستند.

قضیهٔ ۱.۵. فرض کنید $A:V\to V$ یك عملگر هرمیتی است. دراین صورت هرمقدار ویژهٔ A حقیقی است.

اثبات. فرض کنید v یك بردار ویژه با مقدار ویژهٔ λ است. طبق قضیهٔ ۴.۲ فصل ۷ می‌دانیم که $\langle Av,v\rangle$ حقیقی است. چون $Av=\lambda v$، به‌این نتیجه می‌رسیم که

$$\langle Av,v\rangle=\lambda\langle v,v\rangle$$

اما طبق فرض $\langle v,v\rangle$ یك‌عدد حقیقی بزرگتر از o است. لذا λ حقیقی است. بنابراین اثبات قضیه‌کامل می‌شود.

می‌دانیم که هر عملگر روی $\mathbf{C}$ دارای یك بردار ویژه و یك مقدار ویژه است. بنابراین شبیه قضیهٔ ۱.۴ برای حالت فعلی نیز برقرار است. بنابراین مشابه قضیهٔ ۲.۴ و ۳.۴ را به

صورت زیر داریم.

قضیهٔ ۲.۵. فرض کنید $A:V\to V$ یک عملگرهرمیتی است. فرض کنید v یک بردارویژهٔ مخالف صفر A است. اگر w یک عضو V عمود بر v باشد، آنگاه Aw نیز یک بردارعمود بر v خواهد بود.

اگر W یک زیرفضای V وپایدارتحت A باشد، آنگاه $W^{\perp}$ نیزتحت A پایدار است.

اثبات شبیه قضیهٔ ۲.۴ است.

قضیهٔ ۳.۵. **(قضیهٔطیفی).** فرض کنید $A:V\to V$ یک نگاشت خطی هرمیتی است. دراین صورت V دارای یک پایهٔ یکه‌ای متعامد متشکل از بردارهای ویژهٔ A است.

اثبات شبیه قضیهٔ ۳.۴ است.

توجه. اگر $\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه همانند پایهٔ مذکور درقضیه باشد، آنگاه ماتریس نگاشت A نسبت به‌این پایه یک ماتریس قطری حقیقی است. این بدان معناست که نگاشتها (یا ماتریسها)ی هرمیتی را می‌توان نظیرحالت حقیقی به‌جلو برد.

قضیهٔ ۴.۵. فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ هرمیتی‌مختلط‌است. دراین صورت یک ماتریس یکانی U وجود دارد به‌طوری‌که

$$U^*AU=U^{-1}AU$$

یک ماتریس‌قطری است.

اثبات قضیه شبیه قضیهٔ ۴.۴. است.

تمرینها

درتمام این تمرینها، فرض می‌کنیم که V یک‌فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{C}$، با یک حاصلضرب معین مثبت است. همچنین، فرض می‌کنیم $\dim V>0$.

فرض کنید $A:V\to V$ یک‌عملگر هرمیتی است. می‌گوئیم A معین مثبت است اگر

$$\langle Av,v\rangle>0\ ,\ \forall v\in V\ ,\ v\neq 0$$

همچنین می‌گوئیم A **نیم مثبت** یا **نیم معین** است اگر

$$\langle Av,v\rangle \geqslant 0 \quad , \quad \forall v\in V$$

۰۱ ثابت کنید:

(الف) اگر A معین مثبت باشد، آنگاه تمام مقادیر ویژهٔ آن بزرگتر ازصفر است.

(ب) اگر A معین مثبت باشد، آنگاه یك نگاشت خطی هرمیتی B وجود دارد به‌طوری که $A=B^2$ و $BA=AB$. مقدار ویژهٔ B را بیابید؟ [راهنمایی: تمرین ۳ بخش ۴ را ببینید.]

۰۲ قسمتهای (الف) و(ب) تمرین ۱ را وقتی A فقط نیم معین است ثابت کنید.

۰۳ فرض کنید که A هرمیتی معین مثبت است. نشان دهید که A^2 و A^{-1} نیزهرمیتی معین مثبت هستند.

۰۴ فرض کنید $A:V\to V$ یك عملگر وارون‌پذیر دلخواه است. نشان دهید که یك عملگر یکانی مختلط U و یك عملگر هرمیتی معین مثبت P وجود دارند به‌طوری که $A=UP$. [راهنمایی: فرض کنید P یك عملگرهرمیتی مثبت است به‌طوری که $A^*A=P^2$. فرض کنید $U=AP^{-1}$. نشان دهید که U یکانی است.

۰۵ فرض کنید A یك ماتریس مختلط نامنفرد است. نشان دهید که A هرمیتی معین مثبت است اگروتنها اگر یك ماتریس نامنفرد N وجود داشته باشد به‌طوری که $A=N^*N$.

۰۶ نشان دهید که ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

نیم مثبت است ویك ریشهٔ دوم آن را بیابید.

۰۷ ماتریس یکانی U را بیابید به‌طوری که U^*AU قطری باشد. A ماتریس زیر است:

(الف) $\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

۰۸ فرض کنید $A:V\to V$ یك عملگر هرمیتی است. نشان دهید که عملگرهای نیم مثبت P_1، P_2 وجود دارند به‌طوری که $A=P_1-P_2$.

۰۹ عملگر $A:V\to V$ را **نرمال** می‌نامیم اگر $AA^*=A^*A$ باشد.

(الف) فرض کنید A و B عملگرهای نرمالی هستند که $AB=BA$. نشان دهید که AB

نرمال است.

(ب) اگر A نرمال باشد قضیهٔ طیفی‌را برای A بیان و اثبات کنید. [راهنمایی برای اثبات: یك بردار ویژهٔ مشترك برای A و A^* بیابید.]

۱۵. نشان دهید که ماتریس مختلط

$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & i \end{bmatrix}$$

نرمال است، اما هرمیتی نیست و یکانی هم نیست.

۶. عملگرهای یکانی

درقضیهٔ طیفی بخش قبل یك پایهٔ یکه‌ای متعامد از بردارهـای ویژهٔ یك‌عملگرهرمیتی برای فضای برداری یافتیم. اکنون شبیه آن‌را برای یك‌عملگر یکانی مورد بحث قرارمی‌دهیم. حالت مختلط ساده‌تـر وواضح‌تر است. بدین جهت باحالت مختلط شروع می‌کنیم. حالت حقیقی را بعدازآن مورد بحث قرارمی‌دهیم.

فرض می‌کنیم V یك فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{C}$ بایك حاصلضرب اسکالر هرمیتی معین مثبت است.

فرض می‌کنیم $U:V\to V$ یك‌عملگر یکانی است. یعنی فرض می‌کنیم U درهریك ازشرایط هم‌ارز زیرصدق می‌کند:

U حافظ نرم است، یعنی برای هر $v\in V$، $||Uv||=||v||$

U حافظ ضرب اسکالر است، یعنی $<Uv,Uw>=<v,w>$ بـرای هر v و w متعلق به V.

U بردار یکه را بربردار یکه می‌نگارد.

چون روی میدان اعداد مختلط هستیم، می‌دانیم که U دارای یك‌بردار ویژهٔ v وابسته به‌یك مقدار ویژهٔ $\lambda\neq 0$ است (زیرا U وارون‌پذیر است). زیرفضای یك بعدی پدید آمده به‌وسیلهٔ v یك زیرفضای پایدار است.

لم ۶.۱. فرض‌کنید W یك زیرفضای V است‌که نسبت به U پـایدار است. دراین صورت

$W^{\perp}$ نیز نسبت به U پایدار است.

اثبات. فرض کنید $v\in W^{\perp}$، بنابراین برای هر $w\in W$ داریم $<v,w>=0$. به‌خاطر آورید که $U^*=U^{-1}$. چون $U:W\to W$ زیرفضای W را درخودش می‌نگارد، وچون U دارای هستهٔ $\{o\}$ است، نتیجه می‌شود که U^{-1} نیز W را درخودش‌می‌نگارد. اکنون

$$<w,Uv>=<U^*w,v>=<U^{-1}w,v>=0$$

بنابراین لم اثبات می‌شود.

قضیهٔ ۲.۶. فرض‌کنید V یک‌فضای برداری با بعد متناهی ومخالف صفرروی هیات اعداد مختلط است، که دارای یک‌حاصلضرب هرمیتی معین مثبت‌است. فرض‌کنید $U:V\to V$ یک عملگر یکانی است. دراین صورت V دارای یک‌پایهٔ یکه‌ای متعامد متشکل از بردارهای ویژهٔ U است.

اثبات. فرض کنید v_1 یک‌بردار ویژهٔ مخالف صفر است، وفرض کنید V_1 زیرفضای یک‌بعدی تولید شده توسط v_1 است. درست شبیه لم ۱.۶، مشاهده می‌کنیم که مکمل متعامد $V_1^{\perp}$ زیرفضایی است که تحت U پایدار است، وبه‌این طریق با استقراء می‌توانیم یک‌پایهٔ یکه‌ای متعامد $\{v_2,\dots,v_n\}$ برای $V_1^{\perp}$ متشکل از بردارهای ویژهٔ U به‌دست آوریم. دراین صورت $\{v_1,\dots,v_n\}$ پایه مورد نظر V است.

اکنون حالت حقیقی را مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

قضیهٔ ۳.۶. فرض‌کنید V یک‌فضای برداری با بعد متناهی ومثبت روی هیات اعدادحقیقی است، وفرض‌کنید روی V یک حاصلضرب اسکالرمعین مثبت وجود دارد. فرض‌کنید T یک عملگر یکانی روی V است. در این‌صورت V را می‌توان به‌صورت جمع مستقیم

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_r$$

از زیرفضاهای پایدار تحت T نوشت که دوبه دومتعامد هستند(یعنی اگر $i\neq j$ باشد V_i بر V_j عمود است). ضمناً به‌ازای هر i، $\dim V_i$ مساوی ۱ یا ۲ است.

اثبات. بعد از انتخاب یک‌پایه برای V روی $\mathbf{R}$، می‌توانیم فرض کنیم که $V=\mathbf{R}^n$ وحاصل‌ضرب اسکالرمعین مثبت آن همان حاصلضرب‌نقطه‌ای معمولی است. دراین صورت‌می‌توانیم T را به‌صورت یک‌ماتریس M معرفی‌کنیم. دراین صورت M یک‌ماتریس یکانی است.

اکنون می‌توانیم M را به‌عنوان عملگری روی $\mathbf{C}^n$ در نظر بگیریم. چون M حقیقی است و ${}^tM=M^{-1}$، لذا تساوی

$$ {}^t\overline{M}=M^{-1} $$

نیز درست است. بنابراین M یک ماتریس یکانی مختلط نیز هست.

فرض کنید Z یک بردار ویژهٔ مخالف صفر M در $\mathbf{C}^n$ وابسته به مقدار ویژهٔ λ است، دراین صورت

$$ MZ=\lambda Z $$

چون $\|Z\|=\|MZ\|$، از اینجا نتیجه می‌گیریم که $|\lambda|=1$. بنابراین یک عدد حقیقی θ وجود دارد به‌طوری که $\lambda=e^{i\theta}$. پس داریم

$$ MZ=e^{i\theta}Z $$

اکنون Z را به‌صورت

$$ Z=X+iY \quad , \quad X,Y\in\mathbf{R}^n $$

می‌نویسیم.

حالت ۱. $\lambda=e^{i\theta}$ حقیقی است. دراین صورت $e^{i\theta}=1$ یا -1. بنابراین

$$ MX=\lambda X \quad , \quad MY=\lambda Y $$

چون $Z\neq 0$، نتیجه می‌گیریم که حداقل یکی از X و Y مخالف صفر است. بنابراین یک بردار ویژهٔ مخالف صفر v برای T به‌دست آورده‌ایم. دراین صورت روش معمول را ادامه می‌دهیم. فرض کنید $V_1=\langle v\rangle$ زیرفضای تولید شده به وسیلهٔ v روی $\mathbf{R}$ است. دراین صورت

$$ V=V_1\oplus V_1^{\perp} $$

لم ۱۰۶ برای حالت حقیقی هم به‌کار می‌رود، بنابراین T زیرفضای $V_1^{\perp}$ را درخودش می‌نگارد. اکنون می‌توانیم با استقراء اثبات را کامل کنیم.

حالت ۲. $\lambda=e^{i\theta}$ حقیقی نیست. دراین صورت $\lambda\neq\overline{\lambda}$، و $\overline{\lambda}=e^{-i\theta}$. چون M حقیقی است، توجه داریم که

$$ M\overline{Z}=\overline{\lambda}\,\overline{Z} $$

بنابراین $\overline{Z}=X-iY$ نیز یك بردار ویژهٔ وابسته به‌مقدار ویژهٔ $\overline{\lambda}$ است. اگر بنویسیم

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

آنگاه

$$\begin{aligned}MZ=MX+iMY&=(\cos\theta+i\sin\theta)(X+iY)\\&=((\cos\theta)X-(\sin\theta)Y)+i\,((\cos\theta)Y+(\sin\theta)X)\end{aligned}$$

بنابراین

$$MX=(\cos\theta)X+(\sin\theta)Y$$

$$MY=(\sin\theta)X+(\cos\theta)Y$$

دو بردار X و Y روی $\mathbf{R}$ مستقل خطی‌اند، درغیراین صورت Z و $\overline{Z}$ نمی‌توانند وابسته به دومقدار ویژهٔ متمایز M باشند. فرض می‌کنیم

$V_1=$ زیرفضای V تولیدی شده توسط X و Y روی $\mathbf{R}$ است

دراین‌صورت فرمولهای حاصل برای MX و MY نشان‌می‌دهند که V_1 تحت T پایدار است. بنابراین یك زیرفضای دوبعدی پایدار تحت T پیداکرده‌ایم. طبق لم ۱.۶، وقتی برای حالت حقیقی به‌کارمی‌رود، نتیجه می‌گیریم که $V_1^{\perp}$ نیز تحت T پایدار است، و

$$V=V_1\oplus V_1^{\perp}$$

می‌توانیم اثبات قضیه را بااستقراءکامل‌کنیم. درواقع با نشان‌دادن اینکه ماتریس T نسبت به‌یك‌پایهٔ مناسب به‌چه‌شکلی‌است، مطلب بیشتری را ثابت‌کرده‌ایم. به‌قضیهٔ زیرتوجه‌کنید.

قضیهٔ ۴.۶. فرض‌کنید V یك‌فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{R}$ و $\dim V>0$، فرض کنید روی V یك حاصلضرب اسکالرمعین مثبت وجود دارد. فرض‌کنید T یك عملگر یکانی روی V است. دراین صورت یك پایه برای V وجود دارد به‌طوری‌که ماتریس T نسبت به این پایه متشکل از بلوکهایی به‌صورت

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & M_2 & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot\\ 0 & 0 & & & M_r\end{bmatrix}$$

است به‌طوری‌که هریك از M_i ها ماتریسهای ۱×۱ یا ۲×۲ به‌صورت زیر هستند:

$$[1] \ , \ [-1] \ , \ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که روی هریك اززیرفضاهای V_i درتجزیهٔ

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

نگاشت خطی T مساوی نگاشت همانی I، یا انعکاس $-I$، یا یك دوران است. این تعبیر هندسی قضیهٔ ۳.۶ و ۴.۶ است.

۹

چند جمله‌ایها و ماتریسها

۱. چندجمله‌ایها.

فرض‌کنید K یك هیات است. منظور از یك **چندجمله‌ای** روی هیات K عبارتی صوری به‌شکل

$$f(t)=a_n t^n+\cdots+a_\circ$$

است، به‌طوری‌که t یك «متغیر» است. می‌خواهیم شرح دهیم که چگونه مجموع وحاصلضرب چنین عبارتهایی را حساب می‌کنیم. فرض کنید

$$g(t)=b_m t^m+\cdots+b_\circ$$

یك چندجمله‌ای دیگر است که $b_j\in K$. اگر، مثلاً $n\geqslant m$، می‌توانیم برای $j>m$ فرض کنیم $b_j=\circ$،

$$g(t)=\circ t^n+\cdots+b_m t^m+\cdots+b_\circ$$

و در این‌صورت می‌توانیم بنویسیم

$$(f+g)(t)=(a_n+b_n)t^n+\cdots+(a_\circ+b_\circ)$$

بنابراین $f+g$ یك چندجمله‌ای است. اگر $c\in K$، آنگاه

$$(cf)(t)=ca_nt^n+\cdots+ca_0$$

ولذا cf یك چندجمله‌ای است. بنابراین چندجمله‌ایها تشکیل یك فضای برداری روی هیات K می‌دهند.

همچنین می‌توانیم حاصلضرب دوچندجمله‌ای fg راحساب کنیم،

$$(fg)(t)=(a_nb_m)t^{n+m}+\cdots+a_0b_0$$

بنابراین fg یك چندجمله‌ای است. درواقع، اگر بنویسیم

$$(fg)(t)=c_{n+m}t^{n+m}+\cdots+c_0$$

آنگاه

$$c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0$$

تمامی قواعد قبل احتمالاً برای شما آشنا هستند، اما آنها را متذکر شدیم تا وضعیت خوبی به‌خودبگیرند.

وقتی یك چندجمله‌ای f رابه‌صورت

$$f(t)=a_nt^n+\cdots+a_0\qquad,\ a_i\in K$$

می‌نویسیم، آنگاه اعداد a_0، ...، a_n را **ضرایب** چندجمله‌ای می‌نامیم. اگر n بزرگترین عدد صحیحی باشدکه $a_n\neq 0$، آنگاه می‌گوئیم که n **درجهٔ** چندجمله‌ای f است و می‌نویسیم $n=\deg f$. همچنین می‌گوئیم که a_n **ضریب پیشرو** f است. a_0 را **جملهٔ ثابت** f می‌نامیم. اگر f چندجمله‌ای صفر باشد، آنگاه قرارداد $\deg f=-\infty$ رابه‌کار می‌بریم. بااین قرارداد موافقت می‌کنیم که

$$-\infty+-\infty=-\infty$$

$$-\infty+a=-\infty\ ,\ -\infty<a\qquad(\text{برای هرعدد صحیح } a)$$

وهیچ عمل دیگری با $-\infty$ تعریف نمی‌شود.

دلیل انتخاب قرارداد فوق این است که قضیهٔ زیر بدون هیچ استثنایی برقراراست.

قضیهٔ ۱۰۱. فرض کنید f و g چندجمله‌ایهایی باضرایب متعلق به K هستند. دراین‌صورت

$$\deg(fg)=\deg f+\deg g$$

اثبات. فرض‌کنید

$$f(t)=a_nt^n+\cdots+a_0\ \text{و}\ g(t)=b_mt^m+\cdots+b_0$$

به‌طوری‌که $a_n\neq 0$ و $b_m\neq 0$. دراین‌صورت از قاعدهٔ ضرب برای fg، مشاهده می‌شود که

$$f(t)g(t)=a_nb_mt^{n+m}+\text{جملات با درجهٔ کمتر}$$

و $a_nb_m\neq 0$. بنابراین $\deg fg=n+m=\deg f+\deg g$. اگر f یا g مساوی ۰ باشد، آنگاه قرارداد ما دربارهٔ $-\infty$ حکم مارا برقرار نگه می‌دارد.

یك چندجمله‌ای درجهٔ ۱ را یك چندجمله‌ای **خطی** می‌نامیم.

عدد α را **ریشهٔ** چندجمله‌ای f می‌نامیم هرگاه $f(\alpha)=0$. گزارهٔ زیر را بدون اثبات می‌پذیریم:

قضیهٔ ۲۰۱. فرض‌کنید f یك چندجمله‌ای با ضرایب مختلط واز درجهٔ بزرگتر یا مساوی ۱ است. دراین‌صورت f دارای یك ریشه در $\mathbf{C}$ است.

این‌قضیه را درپیوست ثابت می‌کنیم، ودراثبات آن از بعضی از واقعیتهای آنالیز استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۳۰۱. فرض کنید f یك چندجمله‌ای با ضرایب مختلط، با ضریب پیشرو ۱ است، و $\deg f=n\geqslant 1$. دراین‌صورت اعداد مختلط α_1، ...، α_n وجود دارند به‌طوری‌که

$$f(t)=(t-\alpha_1)\dots(t-\alpha_n)$$

اعداد α_1، ...، α_n به‌طور منحصربه‌فردی باتقریب یك جایگشت تعیین می‌شوند. هرریشهٔ α از f مساوی یك α_i است وبرعکس.

اثبات. اثبات قضیهٔ ۴۰۱ را (با قبول قضیهٔ ۲۰۱) درفصل ۱۱ ارائه می‌دهیم. چون دراین فصل، ودوفصل آینده، نیازی به‌دانستن چیزی پیرامون چندجمله‌ایها، به‌جزمطالب سادهٔ این فصل، نداریم ترجیح می‌دهیم اثبات اینها را به بعد موکول کنیم. به‌علاوه، بحث بیشتر در مورد چندجمله‌ایها که درفصل ۱۱ انجام‌گرفته دارای کاربردهای بیشتری درنظریهٔ نگاشتهای خطی وماتریسها است.

فرض‌کنید α_1، α_2، ...، α_r ریشه‌های متمایز چندجمله‌ای f در $\mathbf{C}$ هستند. دراین صورت می‌توانیم بنویسیم

$$f(t)=(t-\alpha_1)^{m_1}\dots(t-\alpha_r)^{m_r}$$

که m_1، ...، m_r اعداد صحیح مثبت هستند وبه‌طور منحصربه‌فردی تعیین می‌شوند. m را **چندگانگی ریشهٔ** α_i از f می‌نامیم.

۲. چندجمله‌ایهای ماتریسی و نگاشتهای خطی

مجموعهٔ چندجمله‌ایهای باضرایب متعلق به K را با $K[t]$ نمایش می‌دهیم.
فرض کنید A یك ماتریس‌مربع بادرایه‌های متعلق به K است. فرض کنید $f\in K[t]$، و

$$f(t)=a_nt^n+\dots+a_0 \quad , \quad a_j\in K$$

دراین‌صورت $f(A)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(A)=a_nA^n+\dots+a_0I$$

مثال ۱. فرض کنید $f(t)=3t^2-2t+5$. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$. دراین صورت

$$f(A)=3\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

قضیهٔ ۲.۱. فرض کنید $f,g\in K[t]$. فرض کنید A یک ماتریس مربع با درایه‌های متعلق به K است. دراین‌صورت

$$(f+g)(A)=f(A)+g(A)$$
$$(fg)(A)=f(A)g(A)$$

اگر $c\in K$، آنگاه $(cf)(A)=cf(A)$.

اثبات. فرض‌کنید $f(t)$ و $g(t)$ به‌صورت زیرهستند

$$f(t)=a_nt^n+\dots+a_0 \quad \text{و} \quad g(t)=b_mt^m+\dots+b_0$$

که $a_i,b_j\in K$. دراین‌صورت

$$(fg)(t)=c_{m+n}t^{m+n}+\dots+c_0$$

به‌طوری‌که $c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$. طبق تعریف

$$(fg)(A)=c_{m+n}A^{m+n}+\dots+c_0I$$

ازطرف دیگر

$$f(A)=a_nA^n+\dots+a_0I \quad \text{و} \quad g(A)=b_mA^m+\dots+b_0I$$

لذا

$$f(A)g(A)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_i\cdot A^i\, b_j\cdot A^j=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_i\cdot b_j\cdot A^{i+j}=\sum_{k=0}^{m+n}c_k A^k$$

بنابراین $f(A)g(A)=(fg)(A)$.

برای جمع، فرض کنید $m\leqslant n$، وفرض کنید $b_j=0$ اگر $j>m$. داریم

$$\begin{aligned}(f+g)(A)&=(a_n+b_n)A^n+\cdots+(a_0+b_0)I\\&=a_nA^n+b_nA^n+\cdots+a_0I+b_0I\\&=f(A)=g(A)\end{aligned}$$

اگر $c\in K$، آنگاه

$$(cf)(A)=ca_nA^n+\cdots+ca_0I=cf(A)$$

اثبات قضیه تمام می‌شود.

مثال ۲. فرض کنید $f(t)=(t-1)(t+3)=t^2+2t-3$. دراین‌صورت

$$f(A)=A^2+2A-3I=(A-I)(A+3I)$$

اگر دوعامل آخری ضرب رامستقیماً درهم‌ضرب کرده وازقواعدضرب ماتریسها استفاده‌کنیم، خواهیم داشت

$$A^2-IA+3AI=3I^2=A^2+2A-3I$$

مثال ۳. فرض کنید α_1، ...، α_n اعداد دلخواه هستند. فرض کنید

$$f(t)=(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_n)$$

دراین‌صورت

$$f(A)=(A-\alpha_1I)\cdots(A-\alpha_nI)$$

فرض کنید V یك فضای برداری روی هیات K، و $f:V\to V$ یك عملگر است (یعنی یك نگاشت خطی از V در V). دراین صورت می‌توانیم $A^2=A\circ A=AA$ را تشکیل دهیم، ودرحالت کلی برای هرعدد صحیح مثبت n، A^n مساوی است باترکیب nبار A باخودش. A^0 را مساوی I تعریف می‌کنیم (دراینجا I معرف نگاشت همانی است). داریم

$$A^{m+n}=A^mA^n$$

برای تمام اعداد صحیح $m,n\geqslant 0$. اگر f یك چندجمله‌ای در $K[t]$ باشد، آنگاه

می‌توانیم $f(A)$ را به‌همان‌طریقی که‌درمورد ماتریسها عمل کردیم تشکیل دهیم، وهمان‌قواعد قضیهٔ ۱.۲ برقراراست. اثبات شبیه‌اثبات قضیهٔ ۱.۲ است. آنچه که مورد استفاده قرارداديم قواعد معمولی جمع وضرب بود، واینها برای نگاشتهای خطی نیز برقرارند.

قضیهٔ ۲.۲. فرض کنید A یك ماتریس $n\times n$ درهیات K است. درایـن‌صورت یك چند جمله‌ای مخالف صفر $f\in K[t]$ وجود دارد به‌طوری که $f(A)=0$.

اثبات. فضای برداری ماتریسهای $n\times n$ روی هیات K یك فضای برداری با بعد متناهی n^2 است. لذا توانهای

$$I,A,A^2,\dots,A^N$$

برای $N>n^2$ بستگی خطی دارند. بنابراین اعداد a_0، ...، $a_N\in K$ وجود دارند به‌طوری که همگی ۰ نبوده‌وداریم

$$a_N A^N+\dots+a_0 I=0$$

قرارمی‌دهیم $f(t)=a_N t^N=\dots+a_0$، دراین‌صورت $f(A)=0$.

شبیه قضیهٔ ۱.۲، متذکرمی‌شویم که‌قضیهٔ ۲.۲ هم برای یك نگاشت‌خطی A ازیك‌فضای برداری با بعد متناهی روی هیات K نیز درست است. اثبات شبیه‌آنچه‌گذشت است، وقضیهٔ ۲.۲ رابرای ماتریسها ونگاشتهای خطی بدون اشکال به‌کارمی‌بریم.

درفصل ۱۰، بخش ۲ چندجمله‌ای $P(t)$ را می‌سازیم به‌طوری که $P(A)=0$.

اگرچندجمله‌ای f درقضیهٔ ۲.۲ را برضریب پیشرو آن تقسیم کنیم، یك چندجمله‌ای g باضریب پیشرو ۱ به‌دست می‌آوریم به‌طوری‌که $g(A)=0$. معمولاً مناسب است که با چندجمله‌ایهایی که ضریب پیشروآنها ۱ است سروکار داشته باشیم، زیرا علامت‌گذاری را ساده‌تر می‌کند.

تمرینها

۱. اگر $f(t)=t^3-2t+1$ و $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ باشد، $f(A)$ راحساب کنید

۲. فرض کنید A یك ماتریس متقارن، و f یك چندجمله‌ای بـاضرایب حقیقی است. نشان دهید که $f(A)$ نیز متقارن است.

۳. فرض کنید A یك ماتریس هرمیتی، و f یك چندجمله‌ای بـاضرایب حقیقی است. نشان دهید که $f(A)$ هرمیتی است.

۴. فرض کنید A، B دوماتریس $n \times n$ درهیات K هستند، وفرض کنید که B وارون‌پـذیر است. نشان دهید که به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n،

$$(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$$

۵. فرض کنید $f \in K[t]$. فرض کنید A و B شبیه تمرین ۴ هستند. نشان دهید که

$$f(B^{-1}AB) = B^{-1}f(A)B$$

۱۰

مثلثی کردن ماتریسها و نگاشتهای خطی

۱. امکان مثلثی کردن

فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیأت K است، و فرض کنید که $n = \dim V \geqslant ۱$. فرض کنید $A: V \to V$ یك نگاشت خطی است. فرض کنید W یك زیر فضای V است. می‌گوئیم که W یك زیر فضای **ناوردای** A است، یا W یك زیر فضای A **ناورداست**، اگر A زیر فضای W را بر خودش بنگارد. یعنی اگر $w \in W$، آنگاه Aw نیز متعلق به W باشد. این خاصیت را بــه صورت $AW \subset W$ نیز نمایش می‌دهیم. منظور از یك **فن** A (در V) یك دنباله از زیر فضاهای $\{V_۱, \ldots, V_n\}$ است به‌طوری که بــه‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n - ۱$، V_i مشمول در $V_{i+۱}$ بوده و $\dim V_i = i$، و بالاخره هر V_i یك زیر فضای A ناوردا باشد. مشاهده می‌کنیم که بعدهای زیر فضاهای $V_۱$، ...، V_n از یك زیــرفضا بــه‌زیر فضای بعدی یك واحد افزایش می‌یابد، به‌علاوه $V = V_n$.

تعبیری از فن‌ها به‌وسیلهٔ ماتریسها را ارائه می‌دهیم. فرض کنید $\{V_۱, \ldots, V_n\}$ یك فن برای A است. منظور از یك **پایهٔ فن** پایه‌ای مانند $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ از V است بــه طــوری که $\{v_۱, \ldots, v_i\}$ یك پایه برای V_i باشد. به سادگی می‌توان دید که یك پایهٔ فن وجود دارد. به عنوان مثال، فرض کنید $v_۱$ یك پایهٔ $V_۱$ است. $v_۱$ را به پایهٔ $\{v_۱, v_۲\}$ برای $V_۲$ تعمیم می‌دهیم (طبق یکی از قضایای گذشته امکان‌پذیر است)، این پایه را به یك پایهٔ $\{v_۱, v_۲, v_۳\}$ از $V_۳$، و

به‌همین‌ترتیب ادامه می‌دهیم تا به‌یك پایهٔ $\{v_1,\dots,v_n\}$ برای V_n برسیم.

قضیهٔ ۱۰۱. فرض‌کنید $\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایهٔ فن برای A است. دراین‌صورت ماتریس A نسبت به‌این پایه یک ماتریس مثلثی بالایی است.

اثبات. چون به‌ازای هر $i=1,\dots,n$، AV_i مشمول V_i است، اعداد a_{ij} وجود دارند به طوری‌که

$$
\begin{aligned}
Av_1 &= a_{11}v_1\\
Av_2 &= a_{12}v_1+a_{22}v_2\\
&\vdots\\
Av_i &= a_{1i}v_1+a_{2i}v_2+\dots+a_{ii}v_i\\
&\vdots\\
Av_n &= a_{1n}v_1+a_{2n}v_2+\dots+a_{nn}v_n
\end{aligned}
$$

پس ماتریس وابسته به A نسبت به‌این پایه یك ماتریس مثلثی به شکل زیر است:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
$$

توضیح. فرض‌کنید A یك ماتریس مثلثی بالایی شبیه ماتریس بالاست. A را به‌عنوان یك نگاشت خطی از K^n درخودش در نظرمی‌گیریم. دراین‌صورت بردارهای ستونی یکه e^1، ...، e^n تشکیل یك پایهٔ فن برای A می‌دهند. اگر V_i رافضای تولید شده توسط e^1، ...، e^i بنامیم آنگاه $\{V_1,\dots,V_n\}$ فن‌متناظر است. بنابراین عکس قضیهٔ ۱۰۱ نیز همیشه برقرار است.

یادآورمی‌شویم که همیشه امکان یافتن بردارویژه (بامقدار ویژه) برای یك نگاشت خطی، وقتی‌که K هیات اعداد مختلط نیست، وجود ندارد. همچنین، اگر K هیات اعداد حقیقی باشد همیشه‌امکان یافتن‌یك فن برای نگاشت خطی نیست. اگر $A:V\to V$ یك‌نگاشت خطی، ویك پایه برای V وجود داشته باشدکه ماتریس متناظر به A درآن پایه مثلثی باشد،

آنگاه می‌گوئیم که A **قابل مثلثی شدن** است. متشابهاً، اگر A یك‌ماتریس $n\times n$ روی‌هیات K باشد، می‌گوئیم که A **روی** K **مثلثی شدنی** است اگروقتی به عنوان یك نگاشت خطی از K^n در K^n منظور می‌گردد قابل‌قطری شدن باشد. معادل بااین است‌که بگوئیم یك ماتریس نا‌تکین B در K وجود دارد به‌طوری‌که $B^{-1}AB$ یك ماتریس بالامثلثی باشد.

بااستفاده ازوجود بردارهای ویژه روی هیات اعداد مختلط، ثابت خواهیم کردکه هرماتریس یانگاشت خطی را می‌توان روی هیات اعداد مختلط مثلثی‌کرد.

قضیهٔ ۲۰۱. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات اعداد مختلط است و $\dim V\geqslant 1$، فرض کنید $A:V\to V$ یك نگاشت خطی است. دراین‌صورت یك فن A در V وجود دارد.

اثبات. قضیه را با استقراء ثابت می‌کنیم. اگر $\dim V=1$ آنگاه چیزی برای اثبات وجود ندارد. فرض کنیدکه قضیه برای $\dim V=n-1$ و $n>1$ برقراراست. طبق قضیهٔ ۳.۲ فصل ۸ یك بردار ویژهٔ مخالف صفر v_1 برای A وجود دارد. فرض می‌کنیم V_1 زیرفضای یك بعدی تولید شده توسط v_1 است. می‌توانیم V رابه‌ازای یك زیرفضای W به صورت جمع مستقیم $V=V_1\oplus W$ بنویسیم (طبق قضیهٔ ۲.۴ فصل ۱ زیرفضای W وجود دارد). مسأله این است‌که اکنون A زیرفضای W رابرخودش نمی‌نگارد. فرض‌کنید P_1 تصویر V بر V_1، و P_2 تصویر V بر W است. دراین‌صورت P_2A یك نگاشت خطی از V در V است‌که W رادر W می‌نگارد. (زیرا P_2 هرعضو V رابه W می‌برد). بنابراین P_2A یك نگاشت خطی از W درخودش است. طبق استقراء، یك فن P_2A در W، مانند $\{W_1,\dots,W_{n-1}\}$ وجود دارد. قرارمی‌دهیم

$$V_i=V_1+W_{i-1} \quad \text{و} \quad i=2,\dots,n$$

دراین‌صورت به‌ازای هر i، $i=1,\dots,n$، V_i مشمول V_{i+1} است، و به‌سادگی دیده‌می‌شود که $\dim V_i=i$.

(اگر $\{u_1,\dots,u_{n-1}\}$ یك‌پایهٔ W باشد به‌طوری‌که $\{u_1,\dots,u_j\}$ یك پایهٔ W_j است دراین‌صورت $\{v_1,u_1,\dots,u_{i-1}\}$ یك‌پایهٔ V_i برای $i=2,\dots,n$ است.)

برای اثبات اینکه $\{V_1,\dots,V_n\}$ یك فن برای A در V است، کافی است ثابت‌کنیم که AV_i مشمول V_i است. برای این منظور، توجه‌کنیدکه

$$A=IA=(P_1+P_2)A=P_1A+P_2A$$

فرض‌کنید $v\in V_i$. می‌توانیم بنویسیم $v=cv_1+w_i$، که $c\in\mathbf{C}$ و $w_i\in W_i$. دراین‌صورت

$P_1Av = P_1(Av)$ در V_1 و درنتیجه در V_i قرار دارد، به‌علاوه،

$$P_2Av = P_2A(cv_1) + P_2Aw_i$$

چون $P_2A(cv_1) = cP_2Av_1$، و چون v_1 یك بردار ویژهٔ A است، مثلاً $Av_1 = \lambda_1 v_1$، نتیجه می‌گیریم $P_2A(cv_1) = P_2(c\lambda_1 v_1) = o$. طبق فرض استقراء، P_2A، W_i را به خودش می‌نگارد، و لذا P_2AW_i در W_i قرار دارد. بنابراین P_2Av در V_i واقع است و اثبات قضیه تمام می‌شود.

نتیجهٔ ۳.۱ فرض‌کنید V یك زیرفضای برداری با بعد متناهی روی هیات اعداد مختلط و $\dim V \geqslant 1$. فرض کنید $A:V \to V$ یك نگاشت خطی است. دراین‌صورت یك پایهٔ V وجود دارد به‌طوری‌که ماتریس A نسبت به‌این پایه مثلثی است.

اثبات. قبلاً استدلال آن درقضیهٔ ۱.۱ ارائه شده است.

نتیجهٔ ۴.۱ فرض کنید M یك ماتریس مختلط است. یك ماتریس ناتکین B وجود دارد به‌طوری‌که $B^{-1}MB$ یك ماتریس مثلثی است.

اثبات. با توجه به تعبیر استاندارد تغییرماتریسها دراثر تغییر پایه و با توجه به نتیجهٔ ۳.۱ حکم بدیهی است.

تمرینها

۱. فرض‌کنید A یك ماتریس مثلثی بالایی است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ o & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ o & o & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وقتی A را به‌عنوان نگاشت خطی‌درنظرمی‌گیریم، مقادیرویژهٔ A^2، A^3، و به‌طور کلی، به‌ازای هرعدد صحیح مثبت $r \geqslant 1$ مقادیرویژهٔ A^r را به‌دست آورید.

۲. فرض‌کنید A یك ماتریس مربع است، می‌گوئیم‌که A **پوچ توان** است اگر یك عدد صحیح $r \geqslant 1$ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که $A^r = o$. نشان دهیدکه اگر A پوچ توان باشد، آنگاه مقادیرویژهٔ A مساوی o هستند.

۳. فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات اعداد مختلط و $A:V \to V$ یك نگاشت خطی است. فرض‌کنیدکه تمام مقادیرویژهٔ A مساوی o هستند. نشان

دهیدکه A پوچ توان است.

(دردوتمرین قبل، نخست مسأله را برای حالت ۲ × ۲ حل کنید.)

۴. با استفاده از فن‌ها، ثابت کنیدکه وارون هرماتریس‌مثلثی وارون‌پذیر، یك ماتریس مثلثی است. درواقع، اگر V یك فضای برداری با بعد متناهی و $A:V\to V$ یك نگاشت‌خطی وارون‌پذیر، واگر $\{V_1,\ldots,V_n\}$ یك فن برای A باشد، نشان‌دهیدکه یك فن برای A^{-1} نیز خواهد بود.

۵. فرض‌کنید A یك ماتریس مربع مختلط است به‌طوری‌که برای یك‌عدد صحیح r، $A^r=I$ باشد. اگر α یك مقدار ویژهٔ A باشد، نشان دهیدکه $\alpha^r=1$.

۶. یك پایهٔ فن برای‌نگاشتهای خطی‌ای از $\mathbf{C}^2$ که‌باماتریسهای‌زیرمعرفی می‌شوند را به‌دست آورید.

(الف) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ (پ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ i & i \end{bmatrix}$

۷. ثابت کنیدکه یك عملگر $A:V\to V$ روی یك فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbf{C}$ رامی‌توان به‌صورت مجموع $A=D+N$ نوشت به‌طوری‌که D قابل‌قطری شدن و N پوچ توان است.

اکنون کاربردی ازمثلثی‌کردن نوع خاصی ازماتریسها را ارائه می‌دهیم.

فرض‌کنید $A=[a_{ij}]$ یك ماتریس مختلط $n\times n$ است. اگر مجموع اعضای هر ستون A مساوی ۱ باشد، آنگاه A را **ماتریس مارکف** می‌نامیم. به‌طور نمادی، برای هر j داریم

$$\sum_i a_{ij}=1$$

خواص زیررا به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

خاصیت ۱. ثابت کنیدکه اگر A، B ماتریسهای مارکف باشند، آنگاه AB نیزماتریس مارکف است. به‌ویژه، اگر A ماتریس مارکف باشد، آنگاه به‌ازای هرعدد صحیح مثبت k، A^k، ماتریس مارکف است.

خاصیت ۲. ثابت کنیدکه اگر A، B ماتریسهای مارکف باشند به‌طوری‌که به ازای هر j و i، $|a_{ij}|\leqslant 1$ و $|b_{ij}|\leqslant 1$ واگر $AB=C=[c_{ij}]$، آنگاه به‌ازای هر i و j، $|c_{ij}|\leqslant 1$.

قضیهٔ ۵.۱. فرض‌کنید A یك ماتریس‌مارکف‌است به‌طوری‌که به‌ازای هر i و j، $|a_{ij}|\leqslant 1$. دراین‌صورت قدرمطلق هرمقدارویژهٔ A کوچکتر یا مساوی ۱ است.

اثبات. طبق نتیجهٔ ۴.۱ یك ماتریس B وجود دارد به‌طوری‌که BAB^{-1} مثلثی است. فرض کنید. λ_1، ...، λ_n اعضای روی قطرهستند. دراین‌صورت

$$BA^kB^{-1}=(BAB^{-1})^k$$

و بنابراین

$$BA^kB^{-1}=\begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & & * \\ & \lambda_2^k & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ \bigcirc & & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

اما A^k، به‌ازای هر k یك ماتریس مارکف است وطبق خاصیت ۲، قدرمطلق هر درایهٔ A^k کوچکتر یامساوی ۱ است. دراین‌صورت قدرمطلق درایه‌های BA^kB^{-1} کراندار است. اگر به‌ازای یك i داشته باشیم $|\lambda_i|>1$، آنگاه $|\lambda_i^k|\to\infty$ وقتی $k\to\infty$ که با حکم قبلی متناقض است، وبه‌این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

۲. قضیهٔ کیلی هامیلتون

فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات K، و $A:V\to V$ یك نگاشت خطی است. فرض‌کنیدکه V شامل یك پایه متشکل از بردارهای ویژهٔ A، مثلاً $\{v_1,\dots,v_n\}$ است. فرض‌کنید $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ مجموعهٔ مقادیرویژهٔ متناظر است. دراین‌صورت چندجمله‌ای مشخصهٔ A عبارت است از

$$P(t)=(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$$

و

$$P(A)=(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_n I)$$

اگر $P(A)$ راروی‌هر یك از بردارهای v_i اثردهیم، آنگاه $A-\lambda_i I$ آنرا ۰ می‌کند، به‌عبارت دیگر $P(A)v_i=0$. نتیجتاً $P(A)=0$.

درحالت‌کلی نمی‌توانیم پایه‌ای مانند بالا به‌دست‌آوریم. به هرحال، با استفاده از فن‌ها، می‌توانیم تعمیمی از استدلال به‌کار رفته درحالت قطری‌رابسازیم.

قضیهٔ ۱.۲. فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات اعداد مختلط و $\dim V\geqslant 1$، و $A:V\to V$ یك نگاشت خطی است. فرض کنید P چندجمله‌ای مشخصهٔ

A است. دراین‌صورت $P(A)=0$.

اثبات. طبق قضیهٔ ۲.۱، می‌توانیم یك فن برای A مثل $\{V_1,\ldots,V_n\}$ به‌دست آوریم. فرض کنید

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ماتریس A نسبت به پایهٔ فن $\{v_1,\ldots,v_n\}$ است. دراین‌صورت

$$Av_i = a_{ii}v_i + V_{i-1} \text{ یك عضو از}$$

یا به عبارت دیگر، چون $(A-a_{ii}I)v_i = Av_i - a_{ii}v_i$، نتیجه می‌گیریم که $(A-a_{ii}I)v_i$ در V_{i-1} واقع است.

به‌علاوه، چندجمله‌ای مشخصهٔ A عبارت است از

$$P(t)=(t-a_{11})\cdots(t-a_{nn})$$

بنا براین،

$$P(A)=(A-a_{11}I)\cdots(A-a_{nn}I)$$

با استقراء نشان می‌دهیم که برای هر $v\in V_i$ و $i=1,\ldots,n$ داریم

$$(A-a_{11}I)\cdots(A-a_{ii}I)v=0$$

وقتی $i=n$ است قضیه حاصل می‌شود.

فرض کنید $i=1$. دراین‌صورت $(A-a_{11}I)v_1 = Av_1 - a_{11}v_1 = 0$ وحکم ثابت است.

فرض کنید $i>1$، و فرض کنید حکم برای $i-1$ برقرار است. هرعضو V_i را می‌توان به‌صورت مجموع $v'+cv_i$ نوشت که $v'\in V_{i-1}$ و c یك اسکالر است. توجه داریم که $(A-a_{ii}I)v'$ در V_{i-1} واقع است زیرا AV_{i-1} مشمول V_{i-1} وهمچنین است $a_{ii}v'$. طبق استقراء

$$(A-a_{11}I)\cdots(A-a_{i-1,i-1}I)(A-a_{ii}I)v'=0$$

ازطرف دیگر، $(A-a_{ii}I)cv_i$ در V_{i-1} واقع است. و لذا طبق استقراء

$$(A-a_{11}I)\cdots(A-a_{i-1,i-1}I)(A-a_{ii}I)cv_i=0$$

بنابراین برای $v\in V_i$ داریم

$$(A-a_{11}I)\cdots(A-a_{ii}I)v=0$$

بنابراین قضیه ثابت می‌شود.

نتیجهٔ ۲۰۲. فرض‌کنید A یك ماتریس مختلط $n\times n$ است، و فرض‌کنید P چندجمله‌ای مشخصهٔ آن است. دراین‌صورت $P(A)=0$.

اثبات. می‌توانیم A را به‌عنوان یك نگاشت خطی از $\mathbf{C}^n$ در $\mathbf{C}^n$ درنظر بگیریم، وقضیهٔ قبل را به‌کار بریم.

نتیجهٔ ۳۰۲. فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات K و $A:V\to V$ یك نگاشت خطی است فرض کنید P چند جمله‌ای مشخصهٔ A است. در این‌صورت $P(A)=0$.

اثبات. یك پایه برای V درنظر بگیرید، وفرض‌کنید M ماتریس A نسبت‌به‌این پایه است. دراین‌صورت $P_M=P_A$، وکافی است ثابت‌کنیم‌که $P_M(M)=0$. برای این منظور می‌توانیم قضیهٔ ۱۰۲ رابه‌کاربریم واثبات حکم رانتیجه بگیریم.

توضیح. می‌توان اثباتی ازقضیهٔ ۱۰۲ رابریك استدلال پیوسته استوارساخت. یك ماتریس مختلط A داده شده است، باروشهای مختلفی‌که دراینجا قصد ارائه‌آنها را نداریم می‌توان نشان دادکه ماتریسهای Z هم‌اندازه با A، بسیارنزدیك A (یعنی هردرایهٔ Z نزدیك درایهٔ متناظر به‌آن از A است) وجود دارد به‌طوری‌که P_Z دارای تمام ریشه‌های باچندگانگی ۱ از آن است. درواقع چندجمله‌ایهای مختلط‌که دارای ریشه‌های با چندگانگی بزرگتراز ۱ هستند باظرافت در بین‌کلیه چندجمله‌ایها بخش شده‌اند. اکنون اگر Z مانند بالا باشد، آنگاه نگاشت خطی‌ای‌که معرفی می‌کند قطری شدنی است (زیرا Z دارای مقادیرویژهٔ متمایز است)، ولذا $P_Z(Z)$ به $P_A(A)$ میل می‌کند وقتی‌که Z به سمت A میل کند. لذا $P_A(A)=0$.

۳. قطری‌سازی نگاشتهای یکانی.

بااستفاده ازروشهای این فصل، استدلال تازه‌ای برای قضیهٔ زیر،که قبلاً درفصل ۸ ثابت شده،ارائه می‌دهیم.

قضیهٔ ۳.۱۰. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات اعداد مختلط است، و $\dim V \geqslant 1$. فرض کنید یك حاصلضرب هرمیتی معین مثبت روی V داده شده است. فرض کنید $A: V \to V$ یك نگاشت یکانی است. دراین صورت یك پایهٔ متعامد V متشکل از بردارهای ویژهٔ A وجود دارد.

اثبات. نخست توجه‌کنیدکه اگر w یك بردار ویژه برای A وابسته به مقدار ویژهٔ λ باشد، آنگاه $Aw = \lambda w$ و $\lambda \neq 0$ زیرا A طول را حفظ می‌کند.

طبق قضیهٔ ۲.۱ می‌توان یك فن برای A مثل $\{V_1, \ldots, V_n\}$ به‌دست آورد. فرض کنید $\{v_1, \ldots, v_n\}$ یك پایهٔ فن است. می‌توانیم بااستفاده از روش متعامدسازی گرام اشمیت آنرا متعامد کنیم. این روش را یادآوری می‌کنیم:

$$v'_1 = v_1$$

$$v'_2 = v_2 - \frac{<v_2, v_1>}{<v_1, v_1>} v_1$$

$$\cdots$$

با توجه به نحوهٔ ساختن مشاهده می‌کنیم که $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ یك پایهٔ متعامد است که مجدداً یك پایهٔ فن است، زیرا $\{v'_1, \ldots, v'_i\}$ مثل $\{v_1, \ldots, v_i\}$ یك پایه برای همان زیرفضای V_i است. هر v'_i رابرنرمش تقسیم می‌کنیم، یك پایهٔ فن $\{w_1, \ldots, w_n\}$ به‌دست می‌آوریم که یکه‌ای متعامد است. نشان می‌دهیم که هر w_i یك‌بردار ویژه برای A است. این عمل را بااستقراء ثابت می‌کنیم. چون Aw_1 در V_1 واقع است، لذا یك اسکالر λ_1 وجود دارد به‌طوری‌که $Aw_1 = \lambda_1 w_1$، بنابراین w_1 یك بردار ویژه است و $\lambda_1 \neq 0$. فرض‌کنیدکه قبلاً ثابت کرده‌ایم که $w_1, \ldots, w_{i-1}$ بردارهای ویژه با مقادیرویژهٔ مخالف صفر هستند. اسکالرهای c_1، ...، c_i وجود دارند به‌طوری‌که

$$Aw_i = c_1 w_1 + \cdots + c_i w_i$$

چون A تعامدراحفظ‌می‌کند، برای هر $k < i$، Aw_i بر Aw_k عموداست.اما $Aw_k = \lambda_k w_k$. لذا Aw_i برخود w_k عمود است، و لذا $c_k = 0$. بنابراین $Aw_i = c_i w_i$ و $c_i \neq 0$ زیرا A طول راثابت نگه می‌دارد. می‌توانیم از ۱ تا n ادامه دهیم‌تاقضیه ثابت شود.

نتیجهٔ ۳.۲۰. فرض‌کنید A یك ماتریس یکانی‌مختلط است. دراین‌صورت یك‌ماتریس یکانی U وجود دارد به طوری که $U^{-1}AU$ یك ماتریس قطری است.

اثبات.فرض کنید $\mathrm{B} = \{e^1, \ldots, e^n\}$ پایهٔ‌یکه‌ای متعامداستاندارد $\mathbf{C}^n$، و $\mathrm{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$

پایهٔ یکه‌ای متعامدی است که A را بـه عنوان یك نگاشت از $\mathbf{C}^n$ درخودش، قطری می‌کند. فرض کنید

$$U = M_B^{B'}(id)$$

دراین‌صورت U یکانی است (تمرین ۵ فصل ۷ بخش ۳ راببینید)، و اگر M' ماتریس A نسبت به پایهٔ B' باشد، آنگاه

$$M' = U^{-1}AU$$

واین حکم را ثابت می‌کند.

تمرینها

۱. فرض کنید A یك ماتریس‌یکانی‌مختلط است. نشان دهیدکه هرمقدار ویژهٔ A را می‌توان به‌صورت $e^{i\theta}$ نوشت که θ یك عدد حقیقی است.

۲. فرض کنید A یك ماتریس یکانی مختلط است. نشان دهیدکه یك ماتریس قطری B ویك ماتریس یکانی مختلط U وجود دارد به طوری که $A = U^{-1}BU$.

۱۱

چند جمله‌ایها و تجزیهٔ اولیه

۰۱ الگوریتم اقلیدس

قبلاً چندجمله‌ایها، ودرجهٔ آنها را درفصل ۷ تعریف کردیم. دراین‌فصل، خواص استاندارد دیگری ازچند جمله‌ایها را بررسی می‌کنیم. یکی ازخواص اساسی آنها الگوریتم‌اقلیدس، یا تقسیم طولانی است‌که درتمام دبیرستانهای مقدماتی تدریس می‌گردد.

قضیهٔ ۰۱۰۱ فرض‌کنید f و g چند جمله‌ایهایی روی هیات K، یعنی متعلق به $K[t]$ هستند، وفرض‌کنید $\deg g \geqslant 0$. دراین صورت چند جمله‌ایهای q و r در $K[t]$ وجود دارند به طوری‌که

$$f(x)=q(t)g(t)+r(t)$$

و $\deg r<\deg g$. چند جمله‌ایهای q و r به‌طورمنحصر به‌فردی توسط این شرایط تعیین می‌شوند.

اثبات. فرض‌کنید $m=\deg g \geqslant 0$. می‌نویسیم

$$f(t)=a_n t^n+\cdots+a_0 \;,$$
$$g(t)=b_m t^m+\cdots+b_0$$

با شرط $b_m\neq 0$. اگر $n<m$، فرض‌کنید $q=0$ و $r=f$. اگر $n\geqslant m$، فرض‌کنید

$$h(t)=f(t)-a_n b_m^{-1}\, t^{n-m} g(t)$$

(این اولین قــدم درفرآیند تقسیم طولانی است.) در ایــن صورت $\deg f_1 < \deg f$. به‌این‌ترتیب ادامه می‌دهیم، یا به‌طورصوری‌تر با استقراء روی n، می‌توانیم چندجمله‌ایهای q_1 و r را چنان بیابیم که

$$f_1 = q_1 g + r$$

که $\deg r < \deg g$. دراین صورت

$$\begin{aligned} f(t) &= a_n b_m^{-1} t^{n-m} g(t) + f_1(t) \\ &= a_n b_m^{-1} t^{n-m} g(t) + g_1(t)\, g(t) + r(t) \\ &= (a_n b_m^{-1} t^{n-m} + q_1) g(t) + r(t) \end{aligned}$$

ومی‌توانیم این عمل را تا نتیجهٔ مطلوب ادامه دهیم.

برای اثبات یکتایی، فرض‌کنید

$$f = q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2$$

که $\deg r_1 < \deg g$ و $\deg r_2 < \deg g$. دراین صورت

$$(q_1 - q_2) g = r_2 - r_1$$

درجهٔ چند جمله‌ای سمت چپ بزرگتر یــا مساوی $\deg g$ است، و یا اینکه چند جمله‌ای سمت چپ مساوی o است. درجهٔ چند جمله‌ای سمت راست کوچکتر از درجهٔ g است، و یا اینکه چند جمله‌ای سمت راست مساوی o است. بنابراین تنها امکان این است که هردو مساوی o باشند، لذا

$$q_1 = q_2 \quad , \quad r_1 = r_2$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

نتیجهٔ ۲۰۱. فرض‌کنید f یک چند جمله‌ای غیرصفر در $K[t]$ است. فرض‌کنید $\alpha \in K$ چنان باشدکه $f(\alpha) = 0$. دراین صورت یک چند جمله‌ای $q(t) \in K[t]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f(t) = (t - \alpha) q(t)$$

اثبات. می‌توانیم بنویسیم

$$f(t) = q(t)(t - \alpha) + r(t)$$

که $\deg r < \deg (t - \alpha)$. اما $\deg (t - \alpha) = 1$. لذا r یک چندجمله‌ای ثابت است. چون

$$o=f(\alpha)=q(\alpha)\,(\alpha-\alpha)+r(\alpha)=r(\alpha)$$

لذا $r=o$.

نتیجهٔ ۳.۱. فرض‌کنید K یك هیات است به طوری‌که هر چندجمله‌ای مخالف صفر در $K[t]$ دارای یك ریشه در K است. فرض‌کنید f یك‌چنین چند جمله‌ای است. دراین صورت اعضای $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ متعلق به K و $c\in K$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$f(t)=c(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_n)$$

اثبات. در نتیجهٔ ۲.۱ توجه‌کنید که $\deg q=\deg f-1$. فرض‌کنید درنتیجهٔ ۱.۲، $\alpha=\alpha_1$ است. طبق فرض، اگر q ثابت نباشد می‌توانیم یك ریشهٔ α_2 از q بیابیم و بنویسیم

$$f(t)=q_2(t)\,(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)$$

عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که q_n یك چند جمله‌ای ثابت شود.

می‌دانیم که هیات اعداد مختلط شرط نتیجهٔ ۳.۱ را بر آورده می‌سازد، بنابراین هر چند جمله‌ای با ضرایب متعلق به‌هیات اعداد مختلط به‌عاملهای درجهٔ اول تجزیه می‌شود. یکتائی آن را در بخش بعد ثابت خواهیم کرد.

نتیجهٔ ۴.۱. فرض‌کنید f یك چند جمله‌ای درجهٔ n در $K[t]$ است. f حداکثر دارای n ریشه در K است.

اثبات. اگر $m>n$، و $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ ریشه‌های متمایز f در K باشد، آنگاه به‌ازای یك چند جمله‌ای g داریم

$$f(t)=(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_m)\,g(t)$$

دراین صورت $\deg f\geqslant m$ واین یك‌تناقض است.

تمرینها

۱. درهر یك از حالتهای زیر بنویسید $f=qg+r$ به‌طوری‌که $\deg r>\deg g$.

(الف) $f(t)=t^2-2t+1$ ، $g(t)=t-1$

(ب) $f(t)=t^۳+t-۱$ ، $g(t)=t^۲+۱$

(پ) $f(t)=t^۳+t$ ، $g(t)=t$

(ت) $f(t)=t^۳-۱$ ، $g(t)=t-۱$

۲. اگر $f(t)$ دارای ضرایب صحیح، و $g(t)$ دارای ضرایب صحیح با ضریب پیشرو ۱ باشد، نشان دهید که وقتی f را به صورت $f=qg+r$ با $\deg r<\deg g$ می‌نویسیم، چند جمله‌ایهای q و r هم دارای ضرایب صحیح هستند.

۳. با استفاده از قضیهٔ مقدارمیانگین درحساب دیفرانسیل وانتگرال، نشان دهید که هر چند جمله‌ای با درجهٔ فرد روی هیات اعداد حقیقی دارای یك ریشهٔ حقیقی است.

۴. فرض کنید $f(t)=t^n+\dots+a_۱$ یك چند جمله‌ای با ضرایب مختلط ازدرجهٔ n، و α یك ریشهٔ آن است. نشان دهید که $|\alpha|\leqslant n\cdot\max_i|a_i|$. [راهنمایی: بنویسید $-\alpha^n=a_{n-۱}\alpha^{n-۱}+\dots+a_۰$. اگر $|\alpha|>n\cdot\max_i|a_i|$ باشد، بر α^n تقسیم کنید وقدرمطلق بگیرید، همراه با یك تخمین ساده به‌یك تناقض برسید.]

۲. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك

مفهومی‌را درمجموعهٔ چندجمله‌ایهای $K[t]$ تعریف می‌کنیم شبیه مفهوم زیرفضا درفضاهای برداری است.

منظور از یك **ایده‌آل** $K[t]$، یا یك **ایده‌آل چند جمله‌ای**، یا به‌طورخلاصه‌تر یك **ایده‌آل** زیرمجموعه‌ای مانند J از $K[t]$ است که درشرایط زیرصدق کند.

چند جمله‌ای صفر در J است. اگر f و g در J باشند، آنگاه $f+g$ در J است.
اگر f در J، و g یك چند جمله‌ای دلخواه باشد، آنگاه gf در J است.

از این شرط آخری، نتیجه می‌شود که اگر $c\in K$، و f متعلق به J، آنگاه cf نیز متعلق به J است. بنابراین یك ایده‌آل یك زیرفضای برداری روی K هم هست. اما بیشتر از آن است، زیرا حاصلضرب هرعضو J درهرعضو $K[t]$، نه‌فقط چند جمله‌ایهای ثابت، متعلق به J هستند.

مثال ۱. فرض کنید $f_۱$، ...، f_n چند جمله‌ایهایی در $K[t]$ هستند. فرض کنید J مجموعهٔ تمام چند جمله‌ایهایی است که می‌توان آنها را به‌صورت

$$g=g_۱f_۱+\dots+g_nf_n$$

نوشت به‌طوری‌که $g_i \in K[t]$. دراین صورت J یك ایده‌آل است. درواقع، اگر

$$h = h_1 f_1 + \cdots + h_n f_n$$

که $h_j \in K[t]$، آنگاه

$$g + h = (g_1 + h_1) f_1 + \cdots + (g_n + h_n) f_n$$

نیز متعلق به J است. همچنین $0 = 0 f_1 + \cdots + 0 f_n$ متعلق به J است. اگر f یك چند جمله‌ای دلخواه در $K[t]$ باشد، آنگاه

$$fg = (fg_1) f_1 + \cdots + (fg_n) f_n$$

نیز در J واقع است. بنابراین کلیهٔ شرایط برقرار است.

ایده‌آل J درمثال ۱ توسط چند جمله‌ایهای f_1،...، f_n **تولید می‌شود**، ومی‌گوئیم f_1،...، f_n **یك مجموعهٔ مولد** J است.

توجه کنید که هر f_i درایده‌آل J مثال ۱ واقع است. زیرا به‌عنوان مثال

$$f_1 = 1 \cdot f_1 + 0 f_1 + \cdots + 0 f_n$$

مثال ۲. تنها عضو o یك ایده‌آل است. همچنین، خود $K[t]$ هم یك ایده‌آل است. توجه کنید که ۱ یك مولد $K[t]$ است، که آن را **ایده‌آل یکه** می‌نامیم.

مثال ۳. ایده‌آل پدیدآمده توسط دوچند جمله‌ای $t-1$ و $t-2$ را درنظرمی‌گیریم. این ایده‌آل بـا ایده‌آل یکه مساوی است، زیرا $(t-1)-(t-2)=1$ در آن قرار دارد. بنابراین ممکن است مولدهای زیادی برای یك ایده‌آل ارائه گردد، وبا وجود این ممکن است یك مولد یکتا برای آن نیز وجود داشته باشد. دراین مورد درقضیه‌های زیر توضیح بیشتری می‌دهیم.

قضیهٔ ۱.۲. فرض کنید J یك ایده‌آل $K[t]$ است. دراین صورت یك چند جمله‌ای g وجود دارد به‌طوری‌که J را تولید می‌کند.

اثبات. فرض کنید که J ایده‌آل صفر نیست. فرض کنید g یك چند جمله‌ای در J است که o نیست، و درجهٔ آن کمترین است. ثابت می‌کنیم که g یك مولد برای J است. فرض کنید f یك عضودلخواه J است. طبق الگوریتم اقلیدس می‌توانیم چند جمله‌ایهای q و r را چنان به‌دست آوریم که

$$f = qg + r$$

به‌طوری که $\deg r < \deg g$. دراین صورت $r = f - qg$، وطبق تعریف ایده آل، نتیجه می گیریم که r هم متعلق به J است. چون $\deg r < \deg g$ ، باید داشته باشیم $r = 0$. لذا $f = qg$، و g یك مولد J است.

توضیح. فرض کنید g_1 یك‌مولد غیرصفر برای ایده‌آل J، و g_2 هم یك مولد آن است. در این صورت یك چند جمله‌ای q وجود دارد به‌طوری که $g_1 = qg_2$. چون

$$\deg g_1 = \deg q + \deg g_2$$

نتیجه می‌گیریم که $\deg g_2 \leqslant \deg g_1$. به همین ترتیب (به‌خاطر تقارن) می‌توانیم نتیجه بگیریم $\deg g_1 \leqslant \deg g_2$، درنتیجه $\deg g_2 = \deg g_1$. لذا q ثابت است. می‌توانیم بنویسیم $g_1 = cg_2$ که c یك ثابت است. می‌نویسیم

$$g_2(t) = a_n t^n + \cdots + a_0 \quad , \quad a_n \neq 0$$

قرارمی‌دهیم $b = a_n^{-1}$. دراین صورت bg_2 نیز یك مولد J است، وضریب پیشروآن ۱ است. بنابراین همیشه می‌توانیم یك مولد برای یك ایده آل $(\neq 0)$ بیابیم که ضریب پیشرو آن ۱ است. علاوه بر آن، بدیهی است که این مولد به‌طورمنحصر به‌فرد تعیین می‌شود.

فرض کنید f و g چند جمله‌ایهای غیرصفر هستند. می‌گوئیم g **عاد می‌کند** f را، و می‌نویسیم $g|f$ ، اگر یك چند جمله‌ای q وجود داشته باشد به‌طوری که $f = gq$. فرض کنید f_1 و f_2 مخالف o هستند. منظور از **بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك** f_1 و f_2 یك چند جمله‌ای مانند g است به‌طوری که g چند جمله‌ایهای f_1 و f_2 را عادکند، و به‌علاوه، اگر h چند جمله‌ایهای f_1 و f_2 را عاد کند، آنگاه h، g را نیزعادکند.

قضیهٔ ۲۰۲. فرض کنید f_1، f_2 چند جمله‌ایهای غیرصفر در $K[t]$ هستند. فرض‌کنید g یك مولد برای ایده‌آل تولید شده توسط f_1 و f_2 است. دراین‌صورت g بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك f_1 و f_2 است.

اثبات. چون f_1 درایده‌آل تولید شده توسط f_1 و f_2 قراردارد. یك چند جمله‌ای q_1 وجود دارد به‌طوری که

$$f_1 = q_1 g$$

لذا g، f_1 را عاد می‌کند. مشابهاً، g، f_2 را عاد می‌کند. فرض‌کنید h یك چند جمله‌ای باشد که f_1 و f_2 را عاد می‌کند. می‌نویسیم

$$f_1 = h_1 h \quad , \quad f_2 = h_2 h$$

که h_1 و h_2 دوچند جمله‌ای هستند. چون g در ایده‌آل تولید شده توسط f_1 و f_2 است، چند جمله‌ایهای g_1 و g_2 وجود دارند به‌طوری‌که $g=g_1f_1+g_2f_2$، لذا

$$g=g_1h_1h+g_2h_2h=(g_1h_1+g_2h_2)h$$

بنابراین h، g را عاد می‌کند، وقضیه ثابت می‌شود.

توضیح ۱. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك با تقریب یك ضریب ثابت تعیین می‌شود. اگر یك بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك با ضریب پیشرو ۱ انتخاب‌کنیم، آنگاه منحصر به‌فرد است.

توضیح ۲. دقیقاً همان اثبات برای حالتی‌که بیش از دوچند جمله‌ای داریم برقرار است. به‌عنوان مثال، اگر f_1،...، f_n چندجمله‌ایهای غیرصفر باشند، واگر g مولدی برای ایده‌آل تولید شده توسط f_1،...، f_n باشد، آنگاه g بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك f_1،...، f_n است.

چند جمله‌ایهای f_1،...، f_n را **نسبت بهم اول** می‌نامیم هرگاه بزرگترین مقسوم علیه مشترك آنها ۱ باشد.

تمرینها

۱. نشان دهیدکه t^n-1 بر $t-1$ بخش‌پذیر است.

۲. نشان دهیدکه t^4+4 می‌تواند به‌عنوان حاصلضرب چند جمله‌ایهای درجهٔ ۲ باضرایب صحیح تجزیه شود.

۳. اگر n فرد باشد خارج‌قسمت t^n+1 بر $t+1$ را به‌دست آورید.

۴. فرض‌کنید A یك‌ماتریس $n\times n$ روی هیات K است، وفرض‌کنید J مجموعهٔ‌کلیه‌چند جمله‌ایهای $f(t)\in K[t]$ باشد به‌طوری‌که $f(A)=0$. نشان دهیدکه J یك ایده‌آل $K[t]$ است.

۳. تجزیهٔ یکتا

چند جمله‌ای P متعلق به $K[t]$ را **تحویل‌ناپذیر** می‌نامیم اگردرجهٔ آن بزرگتر یا مساوی

۱ بوده واگر به‌صورت $P=fg$ تجزیه شود که $f,g\in K[t]$، آنگاه $\deg f$ یا $\deg g$ مساوی ٥ باشد (یعنی f یا g ثابت باشند). بنابراین با تقریب یک‌مقدارثابت مخالف صفر، تنها عاملهای P، خود P و ۱ هستند.

مثال ۱. تنها چند جمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر روی هیات اعداد مختلط چند جمله‌ایهای درجهٔ ۱ هستند، یعنی مضرب غیرصفری ازچند جمله‌ایهای نوع $t-\alpha$، که $\alpha\in\mathbf{C}$.

مثال ۲. چند جمله‌ای $t^{۲}+۱$ روی $\mathbf{R}$ تحویل‌ناپذیر است.

قضیهٔ ۱.۳. هرچند جمله‌ای در $K[t]$ ازدرجهٔ بزرگتر یا مساوی ۱ را می‌توان به‌صورت حاصلضرب $P_{۱}$، ...، P_m ازچند جمله‌ایهای تحویل‌ناپذیرنوشت. درچنین حاصلضربی، چند جمله‌ایهای $P_{۱}$،...، P_m، با تقریب ترتیب وهمچنین با تقریب ضریب ثابت، به‌طورمنحصر به‌فردی تعیین می‌شوند.

اثبات. نخست وجود تجزیه به‌حاصلضرب چند جمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر را ثابت می‌کنیم. فرض‌کنید $f\in K[t]$ ودرجهٔ f بزرگتر یا مساوی ۱ است. اگر f تحویل‌ناپذیر باشد، حکم ثابت است. درغیراین‌صورت می‌توانیم بنویسیم $f=gh$، به‌طوری‌که $\deg g<\deg f$ و $\deg h<\deg f$. اگر g و h تحویل‌ناپذیر باشند، حکم ثابت است، درغیراین صورت g و h را به‌چند جمله‌ایهای بادرجهٔ‌کمتر تجزیه می‌کنیم. این عمل نمی‌تواند به‌طوربی‌پایانی ادامه یابد، ولذا یک‌تجزیه برای f وجود دارد. (بدیهی است‌که می‌توانیم اثبات را با استقراء نیز انجام دهیم.)

اکنون باید یکتایی تجزیه را اثبات‌کنیم. نیاز به‌یک لم داریم.

لم ۲.۳. فرض‌کنید P در $K[t]$ تحویل‌ناپذیراست. فرض‌کنید $f,g\in K[t]$ چندجمله‌ایهای غیرصفرهستند، وفرض‌کنیدکه P، fg را عاد می‌کند. دراین صورت P یا f را عاد می‌کند ویا g را.

اثبات. فرض‌کنید P، f را عاد نمی‌کند. دراین‌صورت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک P و f مساوی ۱ است، وچند جمله‌ایهای $h_{۱}$ و $h_{۲}$ در $K[t]$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$۱=h_{۱}p+h_{۲}f$$

(قضیهٔ ۲.۲ را به‌کارمی‌بریم.) طرفین را در g ضرب می‌کنیم:

$$g=gh_{۱}p+h_{۲}fg$$

اما به‌ازای یک $h_{۳}$ داریم $fg=ph_{۳}$، لذا

$$g=(gh_{۱}+h_{۲}h_{۳})p$$

بنابراین p چند جمله‌ای g را عاد می‌کند، وهمان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

این لم را وقتی p حاصلضرب چندجمله‌ایهای $q_1 \cdots q_s$ را عاد می‌کند به‌کارمی‌بریم. درآن حالت، p، q_1 را عاد می‌کند، ویا $p_2 \cdots q_s$ را. لذا یك ثابت c وجود دارد به‌طوری که $p = cq_1$، یا p عاد می‌کند $q_2 \cdots q_s$. درحـالت اخیر، می‌توانیم مساله را تکرارکنیم و نتیجه بگیریم که به‌ازای یك اندیس i، p و q_i دریك ضریب ثابت باهم متفاوتند.

اکنون فرض کنید دوحاصلضرب ازچند جمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر داریم

$$p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$$

بعدازنام‌گذاری مجدد q_i ها، می‌توانیم فرض‌کنیم که $p_1 = c_1 q_1$ برای یك‌ثابت c_1 . q_1 را حذف می‌کنیم، نتیجه می‌شود

$$c_1 p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s$$

این عمل را به‌طور استقرایی تکرارمی‌کنیم، نتیجه می‌گیریم کـه به‌ازای هر i یك ثابت c_i وجود دارد به‌طوری‌که $p_i = c_i q_i$ البته بعدازجابجائیهای ممکن روی $q_1, \ldots, q_s$. به‌این ترتیب مسألهٔ یکتایی قضیهٔ قبل ثابت می‌شود.

نتیجهٔ ۳.۳. فرض‌کنید f یك چند جمله‌ای در $K[t]$ با درجهٔ بزرگتر یا مساوی ۱ است. دراین صورت f دارای یك تجزیـه به‌صورت $f = cp_1 \cdots p_s$ استکـه $p_1, \ldots, p_s$ چند جمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر باضریب پیشرو ۱ هستند، وبا تقریب یك جایگشت به‌طورمنحصربه فرد تعیین می‌شوند.

نتیجهٔ ۴.۳. فرض‌کنید f یك‌چند جمله‌ای در $\mathbf{C}[t]$ وبا درجهٔ بزرگتر یا مساوی ۱ است، دراین صورت f دارای تجزیه‌ای به صورت

$$f(t) = c(t - \alpha_1) \cdots (t - \alpha_n)$$

است به‌طوری‌که $\alpha_i \in \mathbf{C}$ و $c \in \mathbf{C}$. عاملهای $t - \alpha_i$ با تقریب جایگشت به‌طورمنحصر به‌فرد تعیین می‌شوند.

اکثراً با چند جمله‌ایهای با ضریب پیشرو ۱ سروکار داریم. فرض‌کنید f یك چند جمله‌ای با درجهٔ بزرگتر یا مساوی ۱ است. فرض‌کنید $p_1, \ldots, p_r$ چند جمله‌ایهای‌تحویل ناپذیرمتمایز (با ضریب پیشرو ۱) هستندکه در تجزیهٔ f ظاهرمی‌شوند. دراین صورت f را می‌توانیم به‌صورت حاصلضرب

$$f = p_1^{i_1} \cdots p_r^{i_r}$$

بیان کنیم که $i_1, \ldots, i_r$ اعداد صحیح مثبت هستند و به‌طور منحصر به‌فردی نسبت به $p_1, \ldots, p_r$ تعیین می‌شوند. این تجزیه را یك تجزیهٔ نرمال برای f می‌نامیم. به‌ویژه روی هیات اعداد مختلط می‌توانیم بنویسیم

$$f(t)=(t-\alpha_1)^{i_1} \cdots (t-\alpha_r)^{i_r}$$

یك چند جمله‌ای با ضریب پیشرو ۱ را اغلب **تکین** می‌نامیم.

اگر p تحویل‌ناپذیر، و $f=p^m g$ باشد که p، g را عاد نمی‌کند، و m یك عدد صحیح بزرگتر یا مساوی ۰ است، آنگاه می‌گوئیم که m **چندگانگی** p در f است (p^0 را مساوی ۱ تعریف می‌کنیم.) این چندگانگی را با $\operatorname{ord}_p f$ نمایش می‌دهیم، وهمچنین آن‌را **مرتبهٔ** f در p می‌نامیم.

اگر α یك ریشهٔ f باشد، و

$$f(t)=(t-\alpha)^m g(t)$$

که $g(\alpha)\neq 0$، آنگاه $t-\alpha$، $g(t)$ را عاد نمی‌کند، و m چندگانگی $t-\alpha$ در f است. همچنین می‌گوئیم که m **چندگانگی α در f** است.

یك آزمون ساده برای $m>1$ برحسب مشتق وجود دارد.

فرض کنید $f(t)=a_n t^n+\cdots+a_0$ یك چند جمله‌ای است. مشتق (صوری) آن را به‌صورت

$$Df(t)=f'(t)=na_n t^{n-1}+(n-1)\, a_{n-1} t^{n-2}+\cdots+a_1$$

تعریف می‌کنیم. دراین صورت عبارتهای زیررا داریم، که اثبات آنها را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

(الف) اگر f و g چند جمله‌ای باشند، آنگاه

$$(f+g)'=f'+g'$$

و همچنین

$$(fg)'=f'g+fg'$$

اگر c یك ثابت باشد، آنگاه $(cf)'=cf'$

(ب) فرض‌کنید α یك ریشهٔ f و $\deg f \geqslant 1$. نشان دهید که چندگانگی α در f بزرگتر از ۱ است اگروتنها اگر $f'(\alpha)=0$. لذا اگر $f'(\alpha)\neq 0$، آنگاه چندگانگی α مساوی ۱ است.

تمرینها

۱. فرض کنید f یك چند جمله‌ای درجهٔ ۲ روی هیات K است. نشان دهید که f روی K تحویل‌ناپذیر است، یا f به‌عاملهای خطی روی K تجزیه می‌شود.

۲. فرض کنید f یك‌چند جمله‌ای درجهٔ ۳ روی هیـات K است. اگر f روی K تحویل‌ناپذیر نباشد، نشان دهید که f دارای یك ریشه در K است.

۳. فرض کنید $f(t)$ یك‌چند جمله‌ای تحویل‌ناپذیر بـا ضریب پیشرو ۱ روی هیات اعداد حقیقی است. فرض کنید $\deg f = ۲$. نشان دهید که $f(t)$ را می‌توان به‌صورت

$$f(t)=(t-a)^{۲}+b^{۲}$$

نوشت به‌طوری که $a,b\in\mathbf{R}$ و $b\neq ۰$. برعکس، ثابت کنید که هر چنین چند جمله‌ای روی $\mathbf{R}$ تحویل‌ناپذیر است.

۴. فرض کنید f یك‌چند جمله‌ای با ضرایب مختلط، مثلاً

$$f(t)=\alpha_n t^n+\dots+\alpha_۰$$

است. مزدوج مختلط f را به‌صورت

$$\bar{f}(t)=\bar{\alpha}_n\, t^n+\dots+\bar{\alpha}_۰$$

تعریف می‌کنیم، که ضرایب $\bar{f}$ مزدوج مختلط ضرایب f هستند. نشان دهید که اگر f و g دو چند جمله‌ای در $\mathbf{C}[t]$ باشند، آنگاه

$$(\overline{f+g})=\bar{f}+\bar{g} \quad , \quad (\overline{fg})=\bar{f}\,\bar{g}$$

و اگر $\beta\in\mathbf{C}$، آنگاه $(\overline{\beta f})=\bar{\beta}\,\bar{f}$.

۵. فرض کنید $f(t)$ یك‌چند جمله‌ای باضرایب حقیقی‌است. فرض کنید α یك‌ریشهٔ f است، که مختلط است ولی حقیقی‌نیست. نشان دهید که $\bar{\alpha}$ نیز یك ریشهٔ f است.

۶. با توجه به‌علامت‌گذاری تمرین ۵، نشان دهید که چندگانگی α در f مساوی چندگانگی $\bar{\alpha}$ است.

۷. فرض کنید A یك ماتریس $n\times n$ روی هیـات K است. فرض کنید J مجموعـهٔ چند جمله‌ایهای f متعلق به $K[t]$ است به‌طوری که $f(A)=۰$. نشان دهید که J یك ایده‌

آل است. مولد تکین J را چند جمله‌ای مینیمال A روی K می‌نامیم. تعریف مشابهی داریم اگر A یك نگاشت خطی از فضای برداری با بعد متناهی V درخودش باشد.

۸. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی K است. فرض کنید $A:V\to V$ یك نگاشت خطی است. فرض کنید f چند جمله‌ای مینیمال آن است. اگر A بتواند قطری شود (یعنی، اگر یك پایهٔ V متشکل از بردارهای ویژهٔ A وجود داشته باشد)، نشان دهیدکه چند جمله‌ای مینیمال آن مساوی حاصلضرب

$$(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_r)$$

است که $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ مقادیر ویژهٔ متمایز A هستند.

۹. نشان دهیدکه چند جمله‌ایهای زیرین دارای هیچ ریشهٔ چندگانه در $\mathbf{C}$ نیستند.

(الف) t^4+t (ب) t^5-5t+1

۱۰. نشان دهیدکه چند جمله‌ای t^n-1 دارای هیچ ریشهٔ چندگانه در $\mathbf{C}$ نیست. آیا می‌توانید تمام ریشه‌های آن را به‌دست آورید، وتجزیهٔ آن را به عاملهای درجهٔ ۱ ارائه دهید؟

۱۱. فرض کنید f و g چند جمله‌ایهایی در $K[t]$ هستندکه نسبت به‌هم اولند. نشان دهید که می‌توان چند جمله‌ایهای f_1 و g_1 را یافت به‌طوری‌که دترمینان زیرمساوی ۱ باشد

$$\begin{vmatrix} f & g \\ f_1 & g_1 \end{vmatrix}$$

۱۲. فرض کنید f_1، f_2، f_3 چند جمله‌ایهایی در $K[t]$ هستند وفرض کنیدکه ایده‌آل یکه را تولید می‌کنند. نشان دهیدکه می‌توان چند جمله‌ایهای f_{ij} را در $K[t]$ یافت به‌طوری‌که دترمینان زیرمساوی ۱ باشد

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

۱۳. فرض کنید α یك عدد مختلط، و J مجموعهٔ تمام چند جمله‌ایهای $f(t)$ در $K[t]$ است به‌طوری‌که $f(\alpha)=0$. نشان دهیدکه J یك ایده‌آل است. فرض کنیدکه J ایده‌آل صفر نیست. نشان دهیدکه مولد تکین J تحویل‌ناپذیر است.

۱۴. فرض کنید f و g دو چند جمله‌ای هستندکه به‌صورت

$$f = p_1^{i_1} \cdots p_r^{i_r} \quad , \quad g = p_1^{j_1} \cdots p_r^{j_r}$$

نوشته می‌شوند که i_ν و j_ν اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی ۰، و $p_1, \dots, p_r$ چند جمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر متمایز هستند.

(الف) نشان دهید که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك f و g را می‌توان به‌صورت حاصلضرب $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ نوشت به‌طوری که $k_1, \dots, k_r$ اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی ۰ هستند. k_ν را برحسب i_ν و j_ν بیان کنید.

(ب) کوچکترین مضرب مشترك چند جمله‌ایها را تعریف کنید، و کوچکترین مضرب مشترك f و g را به‌صورت حاصلضرب $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ بیان کنید که اعداد صحیح $k_\nu \geqslant 0$ هستند. k_ν را برحسب i_ν و j_ν بیان کنید.

۱۵. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك و کوچکترین مضرب مشترك چند جمله‌ایهای زیر را به دست آورید.

(الف) $(t-1)(t-2)(t-3)^3$ و $(t-2)^3(t-3)^3(t-i)$

(ب) $(t+i)^3(t^3-1)$ و $(t^2+1)(t^2-1)$

۴. کاربرد در تجزیهٔ يك فضای برداری

فرض کنید V يك فضای برداری روی هیات K، و $A:V \to V$ يك عملگر V است. فرض کنید W يك زیرفضای V است. می‌گوئیم که W يك **زیرفضای پایدار** تحت A است اگر به‌ازای هر $w \in W$، $Aw \in W$ باشد، یعنی AW مشمول W باشد.

مثال ۱. فرض کنید v_1 يك بردار ویژهٔ غیرصفر A، و V_1 فضای ۱ بعدی تولید شده توسط v_1 است. دراین صورت V_1 يك زیرفضای پایدار A است.

مثال ۲. فرض کنید λ يك مقدار ویژهٔ A، و V_λ زیرفضایی از V متشکل از تمام vهای متعلق به V است به‌طوری که $Av = \lambda v$. دراین صورت V_λ يك زیرفضای پایدار تحت A است، آن را **زیرفضای ویژهٔ** وابسته به λ می‌نامیم.

مثال ۳. فرض کنید $f(t) \in K[t]$ يك چند جمله‌ای، و W هستهٔ $f(A)$ است. دراین‌صورت W يك زیرفضای پایدار تحت A است.

اثبات. فرض کنید که $f(A)w = 0$. چون $tf(t) = f(t)t$، نتیجه می‌گیریم که

$$Af(A) = f(A)A$$

لذا

$$f(A)(Aw)=f(A)\,Aw=Af(A)\,w=0$$

بنابراین Aw درهستهٔ $f(A)$ قرار دارد، وبه‌این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

توجه‌کنیدکه درحالت‌کلی برای هردوچند جمله‌ای f و g داریم

$$f(A)\,g(A)=g(A)\,f(A)$$

زیرا $f(t)g(t)=g(t)f(t)$. از این مطلب به‌کرات استفاده خواهیم‌کرد.

اکنون توضیح می‌دهیم‌که چگونه تجزیهٔ یك چند جمله‌ای به دو عامل‌که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آنها ۱ است، درتجزیه یك‌فضای برداری V به‌مجموع زیرفضاهای پایدار نقش دارد.

قضیهٔ ۴.۱۰ فرض‌کنید $f(t)\in K[t]$ یك‌چند جمله‌ای است، وفرض‌کنیدکه $f=f_1f_2$ به‌طوری‌که f_1 و f_2 چند جمله‌ایهای با درجهٔ بزرگتر یا مساوی ۱ هستند، و بزرگترین مقسوم علیه مشترك‌آنها ۱ است. فرض‌کنید $A:V\to V$ یك‌عملگر است. فرض‌کنید که $f(A)=0$. فرض کنید

$$W_1=\operatorname{Ker} f_1(A)\quad,\quad W_2=\operatorname{Ker} f_2(A)$$

دراین صورت V جمع مستقیم W_1 و W_2 است.

اثبات. طبق فرض چند جمله‌ایهای g_1 و g_2 وجود دارند به‌طوری‌که

$$g_1(t)\,f_1(t)+g_2(t)\,f_2(t)=1$$

لذا

$$g_1(A)f_1(A)+g_2(A)f_2(A)=I \tag{*}$$

وفرض‌کنید $v\in V$. دراین صورت

$$v=g_1(A)f_1(A)v+g_2(A)f_2(A)v$$

اولین جملهٔ مجموع متعلق به W_2 است، زیرا

$$f_2(A)g_1(A)f_1(A)v=g_1(A)f_1(A)\,f_2(A)v=g_1(A)f(A)v=0$$

به‌همین ترتیب ثابت می‌شودکه جملهٔ دوم متعلق به W_1 است. بنابراین V مساوی مجموع W_1 و W_2 است.

برای اثبات اینکه جمع مستقیم است، باید نشان دهیم‌که عبارت $v=w_1+w_2$ به

طوری‌که $w_{۱}\in W_{۱}$ و $w_{۲}\in W_{۲}$ بـه صورت منحصر بـه فردی بر حسب v نوشته می‌شود. $g_{۱}(A)f_{۱}(A)$ را روی این مجموع اثرمی‌دهیم. نتیجه می‌شود

$$g_{۱}(A)f_{۱}(A)v=g_{۱}(A)f_{۱}(A)w_{۲}$$

زیرا $f_{۱}(A)w_{۱}=o$. عبارت (*) را روی $w_{۲}$ اثرمی‌دهیم، نتیجه می‌شود

$$w_{۲}=g_{۱}(A)f_{۱}(A)w_{۲}$$

زیرا $f_{۲}(A)w_{۲}=o$. نتیجتاً

$$w_{۲}=g_{۱}(A)\,f_{۱}(A)\,v$$

پس $w_{۲}$ به‌طور منحصر به‌فرد تعیین می‌شود. مشابهاً $w_{۱}=g_{۲}(A)f_{۲}(A)v$ به‌طور منحصر به‌فرد تعیین می‌شود، وبنابراین جمع مستقیم است، واثبات قضیه تمام می‌شود.

قضیهٔ ۱.۴ برای حالتی کـه f به‌صورت حاصلضرب چندین عـامل هـم نوشته شود برقرار است. نتیجه را روی هیات اعداد مختلط بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۴. فرض‌کنید V یک‌فضای برداری روی $\mathbf{C}$، و $A:V\to V$ یک‌عملگر است. فرض کنید $p(t)$ یک‌چند جمله‌ای است به‌طوری‌که $p(A)=o$، وبه‌صورت

$$p(t)=(t-\alpha_{۱})^{m_{۱}}\ \dots\ (t-\alpha_{r})^{m_{r}}$$

تجزیه می‌شودکـه $\alpha_{۱},\dots,\alpha_{r}$ ریشه‌های متمایزهستند. فرض‌کنید W_{i} هستهٔ $(A-\alpha_{i}I)^{m_{i}}$ است. دراین صورت V مساوی جمع‌مستقیم زیرفضاهای $W_{۱},\dots,W_{r}$ است.

اثبات. اثبـات را می‌توان بـا استقراء انجام داد. عـاملها را یکی یکی در نظرمی‌گیریم: $(t-\alpha_{۱})^{m_{۱}}$، $(t-\alpha_{۲})^{m_{۲}}$، ...، فرض کنید

$$W_{۱}=\mathrm{Ker}(A-\alpha_{۱}I)^{m_{۱}}$$

$$W=\mathrm{Ker}(A-\alpha_{۲}I)^{m_{۲}}\cdots(A-\alpha_{r}I)^{m_{r}}$$

طبق‌قضیهٔ ۱.۴ داریم $V=W_{۱}\oplus W$. اکنون، به‌طور استقرایی، می‌توانیم W را به‌صورت جمع مستقیم زیر بنویسیم

$$W=W_{۲}\oplus\cdots\oplus W_{r}$$

به‌طوری که $W_{j}\ (j=۲,\dots,r)$ هستهٔ $(A-\alpha_{j}I)^{m_{j}}$ در W است. بنابراین

$$V=W_{۱}\oplus W_{۲}\oplus\cdots\oplus W_{r}$$

باید نشان دهیم‌که W_j $(j=1,\dots,r)$ هستهٔ $(A-\alpha_j I)^{m_j}$ در V است. فرض‌کنید

$$v=w_1+w_2+\dots+w_r$$

عضوی از V است که $w_i \in W_i$، وچنان است که v درهستهٔ $(A-\alpha_j I)^{m_j}$ است. دراین صورت، به‌ویژه v درهستهٔ

$$(A-\alpha_2 I)^{m_2}\dots(A-\alpha_r I)^{m_r}$$

قراردارد، لذا v باید در W واقع باشد، و نتیجتاً $w_1=0$. چون v در W قرار دارد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $v=w_j$ زیرا W جمع مستقیم W_2،...،W_r است.

مثال ۴. معادلات دیفرانسیل. فرض‌کنید V فضای برداری جوابهای (بینهایت بارمشتق‌پذیر) معادلهٔ دیفرانسیل

$$D^n f+a_{n-1}D^{n-1}f+\dots+a_0 f=0$$

با ضرایب ثابت مختلط a_i است.

قضیهٔ ۳.۴. فرض‌کنید

$$p(t)=t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\dots+a_0$$

$p(t)$ را شبیه قضیهٔ ۲.۴ تجزیه می‌کنیم

$$p(t)=(t-\alpha_1)^{m_1}\dots(t-\alpha_r)^{r}$$

دراین صورت V جمع مستقیم فضاهای جواب معادلات

$$(D-\alpha_i)^{m_i} f=0 \quad , \quad i=1,\dots,r$$

است.

اثبات. این فقط‌کاربرد مستقیمی ازقضیهٔ ۲.۴ است.

بنا براین مطالعهٔ معادلهٔ دیفرانسیل اولیه به‌مطالعهٔ معادلات ساده‌تر

$$(D-\alpha I)^m f=0$$

تبدیل می‌شودکه جواب آنها به‌سادگی قابل محاسبه است.

قضیهٔ ۴.۴. فرض‌کنید α یک‌عدد مختلط است. فرض‌کنید W فضای جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D-\alpha I)^m f=0$$

است. دراین صورت W فضای تولید شده توسط توابع

$$e^{\alpha t}\ ,\ te^{\alpha t},\dots,t^{m-1}e^{\alpha t}$$

است واین توابع تشکیل یک‌پایه برای این فضا می‌دهند، وبنابراین دارای بعد m است.

اثبات. برای هرعدد مختلط α داریم

$$(D-\alpha I)^m f=e^{\alpha t}D^m(e^{-\alpha t}f)$$

(اثبات به سادگی بـا استقراء انجام می‌شود). نتیجتاً، f درهستهٔ $(D-\alpha I)^m$ قرار دارد اگروتنها اگر

$$D^m(e^{-\alpha t}f)=0$$

تنها توابعی‌که مشتق m ام آنها صفر است چند جمله‌ایهای بـا درجهٔکوچکتر یـا مساوی $m-1$ هستند. لذا فضای جواب $(D-\alpha I)^m f=0$ فضای تولید شده توسط توابع

$$e^{\alpha t}\ ,\ te^{\alpha t},\dots,t^{m-1}e^{\alpha t}$$

است. بالاخره این توابع مستقل خطی هم هستند. فرض‌کنید ترکیب خطی زیررا برای هر t دلخواه وثابتهای $c_0,\dots,c_{m-1}$ داریم

$$c_0e^{\alpha t}+c_1te^{\alpha t}+\dots+c_{m-1}t^{m-1}e^{\alpha t}=0$$

فرض‌کنید

$$q(t)=c_0+c_1t+\dots+c_{m-1}t^{m-1}$$

دراین صورت $q(t)$ یک‌چند جمله‌ای غیرصفر است، وداریم

$$q(t)\,e^{\alpha t}=0\quad ,\ \forall t$$

اما $e^{\alpha t}\neq 0$ برای تمام مقادیر t، لـذا بـه‌ازای هرمقدار t، $q(t)=0$. چـون q یک‌چند جمله‌ای است باید همهٔ c_i ها، $i=0,\dots,m-1$ مساوی صفر باشند. پس اثبات کامل است.

تمرینها

۰۱ درقضیهٔ ۱.۴ نشان دهیدکه تصویر $f_1(A)$ مساوی هستهٔ $f_2(A)$ است.

۰۲ فرض کنید $A:V\to V$ یك عملگر و V یك‌فضای برداری با بعد متناهی است. فرض کنید که $A=A^3$. نشان دهیدکه V مستقیم

$$V=V_0\oplus V_1\oplus V_{-1}$$

است که $V_0=\operatorname{Ker} A$ و V_1 زیرفضای ویژهٔ وابسته به‌مقدار ویژهٔ ۱ و V_{-1} زیرفضای ویژهٔ وابسته به‌مقدار ویژهٔ ۱ — است.

۰۳ فرض کنید $A:V\to V$ یك عملگر و V یك فضای برداری با بعدمتناهی است. فرض کنید که چندجمله‌ای مشخصهٔ A دارای تجزیهٔ

$$P_A(t)=(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_n)$$

است که α_1، ....، α_n اعضای متمایز هیات K هستند. نشان دهیدکه V دارای یك پـایه متشکل از بردارهای ویژهٔ A است.

۰۵ لم شور

فرض کنید V یك فضای برداری روی هیات K، و S یك مجموعه از عملگرهای V است. فرض کنید W یك زیرفضای V است. می‌گوئیم W یك زیرفضای S پایاست اگر به ازای‌هر $B\in S$ داشته‌باشیم $BW\subset W$. می‌گوئیم V یك S **فضای ساده** است اگر $V\neq\{o\}$ وتنها زیرفضاهای S پایای آن خود V وزیرفضای صفر باشد.

توضیح ۱. فرض کنید $A:V\to V$ یك عملگر است به‌طوری که به‌ازای هر $B\in S$، $AB=BA$. دراین‌صورت تصویروهستهٔ A زیرفضاهای S پایای V هستند.

اثبات. فرض کنید w در تصویر A قرار دارد، مثلاً $w=Av$ به‌طوری که $v\in V$. دراین‌صورت $Bw=BAv=ABv$. این نشان می‌دهدکه Bw هم درتصویـر A است، لذا تصویر A، Sـ پایاست. فرض کنید u درهستهٔ A است. دراین‌صورت $ABu=BAu=0$. لذا Bu نیز در هستهٔ A واقع است. پس هستهٔ A نیزیك زیرفضای S پایاست.

توضیح ۲. فرض کنید S مثل بالاست، و فرض کنید $A:V\to V$ یك عملگر است. فرض کنید به‌ازای هر $B\in S$، $AB=BA$. اگر f یك چندجمله‌ای در $K[t]$ باشد، آنگاه به‌ازای هر $B\in S$، $f(A)B=Bf(A)$.

به‌عنوان یك تمرین ساده آن را اثبات کنید.

قضیهٔ ۱.۰۵. فرض کنید V یك فضای برداری روی هیات K، و S یك مجموعهٔ ازعملگرهای V است. فرض کنید که V یك S فضای ساده است. فرض کنید $A:V\to V$ یك نگاشت خطی است به‌طوری که برای هر $B\in S$ داریم $AB=BA$. دراین‌صورت یا A وارون‌پذیر است ویا اینکه نگاشت صفر است.

اثبات. فرض کنید $A\neq o$. طبق توضیح ۱، هستهٔ A مساوی $\{o\}$، وتصویر آن تمام V است. پس A وارون‌پذیر است.

قضیهٔ ۲.۰۵. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات اعداد مختلط است. فرض کنید S یك مجموعه ازعملگرهای V، و V یك S فضای ساده است. فرض کنید $A:V\to V$ یك نگاشت خطی است به‌طوری که به‌ازای هر $B\in S$، $AB=BA$. دراین‌صورت یك عدد λ وجود دارد به‌طوری که $A=\lambda I$.

اثبات. فرض کنید J ایده‌آل چندجمله‌ایهای f متعلق به $\mathbf{C}[t]$ است به‌طوری که $f(A)=o$ فرض کنید g یك مولد برای این ایده‌آل با ضریب پیشرو ۱ است. دراین‌صورت $g\neq o$. نشان می‌دهیم که g تحویل‌ناپذیر است. درغیراین‌صورت، می‌توانیم بنویسیم $g=h_1h_2$ به‌طوری که h_1 و h_2 چندجمله‌ایهایی با درجهٔ کوچکتر از $\deg g$ هستند. نتیجتاً $h_1(A)\neq o$. طبق قضیهٔ ۱.۰۵ و توضیحات ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که $h_1(A)$ وارون‌پذیر است. مشابهاً، $h_2(A)$ هم وارون‌پذیر است. پس $h_1(A)h_2(A)$ وارون‌پذیر است، واین غیرممکن است. پس g تحویل‌ناپذیر است. اما چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر روی هیات اعداد مختلط عبارتند از چندجمله‌ایهای درجهٔ ۱، پس برای یك $\lambda\in\mathbf{C}$ داریم به طوری که $g(t)=t-\lambda$. چون $g(A)=o$، لذا $A-\lambda I=o$ ویا $A=\lambda I$، واثبات تمام است.

تمرینها

۰۱ فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات K، و S مجموعهٔ تمام نگاشتهای خطی V در V است. نشان دهیدکه V یك S فضای ساده است.

۰۲ فرض کنید $V=\mathbf{R}^{2}$، و S متشکل ازماتریس $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ به‌عنوان نگاشت خطی از V در V است. در اینجا a یك عدد حقیقی غیرصفر ثابت است. تمام زیرفضاهای S پایای V را به‌دست آورید.

۰۳ فرض کنید A یك فضای برداری روی هیات K، و $\{v_1,\ldots,v_n\}$ یك پایهٔ V است. برای هرجایگشت σ از $\{1,\ldots,n\}$ فرض می‌کنیم $A_\sigma:V\to V$ نگاشت خطی‌ای باشدکه

$$A_\sigma(v_i)=v_{\sigma(i)}$$

(الف) نشان دهیدکه برای هردوجایگشت σ و τ داریم

$$A_\sigma A_\tau=A_{\sigma\tau}$$

و $A_{id}=I$

(ب) نشان دهیدکه زیرفضای پدیدآمده به وسیلهٔ $v=v_1+\cdots+v_n$ یك زیرفضای پایا نسبت به مجموعهٔ S_n متشکل ازتمام A_σ هاست.

(پ) نشان دهیدکه عضو v قسمت (ب) یك بردار ویژه برای هر A_σ است. مقدار ویژهٔ A_σ وابسته به v چیست؟

(ت) فرض کنید $n=2$، و σ یك جایگشت غیرهمانی است. نشان دهیدکه v_1-v_2 یك زیرفضای یك بعدی تولید می‌کندکه تحت A_σ پایاست. نشان دهیدکه v_1-v_2 یك‌بردار ویژهٔ A_σ است. مقدار ویژهٔ آن چیست؟

۰۴ فرض کنید V یك فضای برداری روی هیات K، و $A:V\to V$ یك عملگراست. فرض کنیدکه به ازای یك عدد صحیح $r\geqslant 1$ داریم $A^r=I$. فرض کنید $T=I+A+\cdots+A^{r-1}$. فرض کنید v_0 یك عضو V است. نشان دهیدکه زیرفضای تولید شده توسط Tv_0 یك زیرفضای پایای A است، و Tv_0 یك بردار ویژهٔ A است. اگر $Tv_0\neq 0$، مقدارویژهٔ آن چیست؟

۰۵ فرض‌کنید V یك فضای برداری روی هیات K است، وفرض‌کنید S یك مجموعه از عملگرهای V است. فرض‌کنید U و W زیرفضاهای S پایای V هستند. نشان دهید که $U+W$ و $U\cap W$ زیرفضاهای S پایا هستند.

۶. صورت نرمال ژردان

در فصل ۱۰ بخش ۱ ثابت‌کردیم‌که یك نگاشت خطی روی هیات اعداد مختلط همیشه می‌تواند مثلثی شود. این نتیجه برای بسیاری ازکاربردها کافی است، ولی می‌توان آن را اصلاح‌کرده ویك پایه یافت به‌طوری‌که ماتریس نگاشت خطی دارای یك صورت‌مثلثی به‌طور استثنایی ساده باشد، این عمل را انجام می‌دهیم، وتجزیهٔ ابتدائی را به‌کار می‌بریم.

نخست یك حالت ویژه را بررسی می‌کنیم‌که اغلب به‌آن مراجعه می‌کنیم. فرض‌کنید V یك فضای برداری روی هیات اعداد مختلط است. فرض‌کنید $A:V\rightarrow V$ یك نگاشت خطی است. فرض‌کنید $\alpha\in\mathbf{C}$ و $v\in V$، $v\neq o$. می‌گوئیم که v، $(A-\alpha I)$ **دوری** است‌اگر یك عدد صحیح $r\geqslant ۱$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $(A-\alpha I)^r v=o$، کوچکترین‌عدد صحیح مثبت r باخاصیت فوق را **دورهٔ** v نسبت به $A-\alpha I$ می‌نامیم. اگر r یك چنین دوره‌ای باشد، آنگاه برای هرعدد صحیح k، $۰\leqslant k<r$ داریم $(A-\alpha I)^k v\neq o$.

لم ۶.۱. اگر $v\neq o$، $(A-\alpha I)$ دوری، بادورهٔ r باشد، آنگاه اعضای

$$v,(A-\alpha I)v,\cdots,(A-\alpha I)^{r-1}v$$

مستقل خطی‌اند.

اثبات. فرض‌کنید $B=A-\alpha I$. یك ترکیب خطی بین اعضای فوق رامی‌توان به‌صورت

$$f(B)v=o$$

نوشت که f یك چندجمله‌ای مخالف ۰ بادرجهٔ کوچکتر یامساوی $r-۱$، مثلاً

$$c_0v+c_1Bv+\cdots+c_sB^sv=o$$

باشرط $f(t)=c_0+c_1t+\cdots+c_st^s$ و $s\leqslant r-۱$ است. همچنین طبق فرض داریم $B^rv=o$. فرض‌کنید $g(t)=t^r$. اگر h بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك f و g باشد، آنگاه می‌توانیم بنویسیم

$$h=f_1f+g_1g$$

که f_1، g_1 چندجمله‌ای هستند، و بنا بر این $h(B)=f_1(B)f(B)+g_1(B)g(B)$. نتیجه می‌شود که $h(B)u=o$. اما $h(t)$، t^r را تقسیم می‌کند و درجهٔ آن کوچکتر یا مساوی $r-1$ است، بنا بر این $h(t)=t^d$ با شرط $d<r$. و این با شرط اینکه r دورهٔ v است متناقض است، و به‌این ترتیب لم ثابت می‌شود.

فضای برداری V را **دوری** می‌نامیم اگر یك عدد α و یك عضو $v\in V$ وجود داشته باشد به‌طوری که $(A-\alpha I)$ دوری باشد. دراین حالت، لم ۱.۶ نتیجه می‌دهد که

$$\{(A-\alpha I)^{r-1}v,\dots,(A-\alpha I)v,v\} \tag{*}$$

یك پایه برای V است. نسبت به‌این پایه، ماتریس A به‌طور ویژه‌ای ساده است. در واقع، برای هر k داریم

$$A(A-\alpha I)^k v=(A-\alpha I)^{k+1}v+\alpha(A-\alpha I)^k v$$

طبق تعریف، نتیجه می‌شود که ماتریس وابسته به A نسبت به‌این پایه مساوی ماتریس مثلثی

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

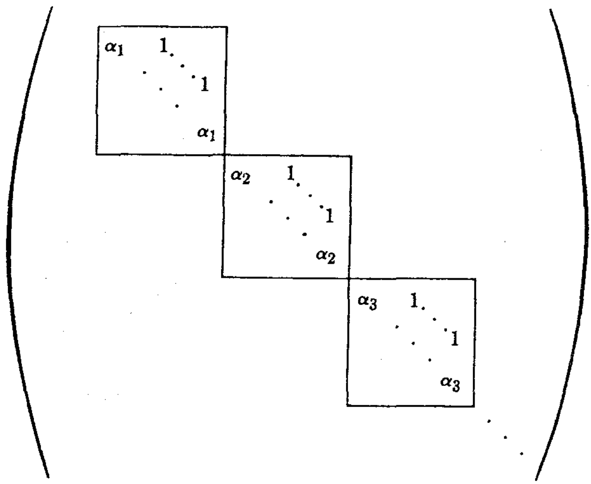
است. روی قطر این‌ماتریس α و بالای آن ۱ و در بقیهٔ جاها ۰ است. خواننده توجه دارد که $(A-\alpha I)^{r-1}v$ یك بردار ویژه برای A است و α مقدار ویژهٔ آن است.

پایهٔ (*) را **یك پایهٔ ژردان برای V نسبت به A** می‌نامیم.

فرض کنید که V به‌صورت جمع مستقیم زیرفضاهای A پایا بیان شده است،

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_m$$

و فرض کنید که هر V_i دوری است. اگر یك پایهٔ ژردان برای هر V_i انتخاب کنیم، آنگاه دنبالهٔ این پایه‌ها تشکیل یك پایه برای V می‌دهند، که مجدداً به‌یك **پایهٔ ژردان برای V نسبت به A** موسوم است. نسبت به‌این پایه، ماتریس A به‌صورت بلوکهای زیرشکسته خواهد شد (شکل ۱).



شکل ۱

درهر بلوك يك مقدارويژهٔ α_i داريم‌كه روى قطرواقع است‌وردیف بالای قطر ۱ وبقیه جاها ۰ است. این ماتریس به **صورت نرمال ژردان** A موسوم است. قضیهٔ اصلی ما دراین‌بخش این است‌که این‌صورت نرمال همیشه قابل دسترسی است.

قضیهٔ ۲.۶. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات اعداد مختلط است و $V\neq\{o\}$. فرض‌کنید $A:V\to V$ یك عملگراست. دراین‌صورت V را می‌توان به‌صورت جمع مستقیم زیرفضاهای A پایای دوری نوشت.

اثبات. طبق قضیهٔ ۲.۴ بدون اینکه از کلیت مسأله‌کم شود می‌توانیم فرض‌کنیم یك عدد α و یك عدد صحیح $r\geqslant 1$ وجود دارد به‌طوری‌که $(A-\alpha I)^r=o$. فرض‌کنید $B=A-\alpha I$. دراین‌صورت $B^r=o$. فرض می‌کنیم که r کوچکترین عدد صحیح با این‌خاصیت است. در این‌صورت $B^{r-1}\neq o$. زیرفضای BV مساوی V نیست زیرا بعد آن اکیداً از بعد V کوچکتراست. (به‌عنوان مثال، یك $w\in V$ وجود دارد به‌طوری‌که $B^{r-1}w\neq o$. فرض‌کنید $v=B^{r-1}w$. دراین‌صورت $Bv=o$. حکم‌ما از رابطهٔ $\dim BV=\dim\operatorname{Ker}B=\dim V$ نتیجه می‌شود.) برطبق استقراء می‌توانیم BV رابه‌صورت جمع مستقیم زیرفضاهای A پایا (یا B پایا) که دوری هستند بنویسیم، مثلاً

$$BV=W_1\oplus\cdots\oplus W_m$$

به‌طوری‌که W_i دارای یك پایه متشکل از اعضای $B^k w_i$ به ازای یك بردار دوری $w_i \in W_i$ بادورهٔ r_i است. فرض کنید $v_i \in V$ چنان باشدکه $Bv_i = w_i$. دراین‌صورت هر v_i یك‌بردار دوری است، زیرا

$$\text{اگر } B^{r_i} w_i = o \text{، آنگاه } B^{r_i+1} v_i = o$$

فرض کنید V_i زیرفضایی از V تولیدشده‌توسط بردارهای $B^k v_i$، $k=1,\dots,r_i+1$است. ادعا می‌کنیم‌که زیرفضای $V' = V_1 + \dots + V_m$ جمع مستقیم است. برای این‌منظور باید نشان دهیم‌که هرعضو u دراین‌مجموع را می‌توان فقط به یك صورت به‌شکل

$$u = u_1 + \dots + u_m \ , \ u_i \in V_i$$

نوشت. هرعضو V_i به‌صورت $f_i(B)v_i$ است‌که f_i یك چندجمله‌ای بادرجهٔ‌کوچکتر یا مساوی r_i+1 است. فرض کنید که

$$f_1(B)v_1 + \dots + f_m(B)v_m = o \tag{1}$$

B را به‌کاربرده وباتوجه به‌اینکه $Bf_i(B) = f_i(B)B$ به‌دست می‌آوریم

$$f_1(B)w_1 + \dots + f_m(B)w_m = o$$

اما $W_1 + \dots + W_m$ تجزیهٔ BV به جمع مستقیم‌است، لذا

$$f_i(B)w_i = 0 \ , \ \forall i = 1,\dots,m$$

بنابراین t^{r_i}، $f_i(t)$ را عاد می‌کند، وبه ویژه t، $f_i(t)$ را عاد می‌کند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$f_i(t) = g_i(t)t$$

برای یك چندجمله‌ای g_i، ولذا $f_i(B) = g_i(B)B$. از (۱) نتیجه می‌شودکه

$$g_1(B)w_1 + \dots + g_m(B)w_m = o$$

مجدداً t^{r_i}، عاد می‌کند $g_i(t)$ را، لذا t^{r_i+1}، $f_i(t)$ را عاد می‌کند، و بنابراین $f_i(B)v_i = o$. به‌این‌ترتیب ثابت می‌شودکه V' جمع مستقیم V_1، ...، V_m است.

ازساختن V' مشاهده می‌کنیم‌که $BV' = BV$، زیرا هرعضو BV به شکل

$$f_1(B)w_1 + \dots + f_m(B)w_m$$

است‌که f_iها چندجمله‌ای هستند، وبنابراین تصویرعضو

$$f_1(B)v_1 + \dots + f_m(B)v_m$$

تحت B متعلق به V' است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$V=V'+\mathrm{Ker}\ B$$

درواقع، فرض کنید $v\in V$. دراین‌صورت $Bv=Bv'$ به ازای یك $v'\in V'$، و لذا $B(v-v')=o$. بنابراین

$$v=v'+(v-v')$$

پس ثابت کرده‌ایم که $V=V'+\mathrm{Ker}\ B$. البته این مجموع مستقیم نیست. به‌هرحال، فرض کنید B' یك پایهٔ ژردان V' است. با استفاده از اعضای $\mathrm{Ker}\ B$، می‌توانیم B' را به یك پایهٔ V توسعه دهیم. مثلاً، اگر $\{u_1,\dots,u_s\}$ یك‌پایهٔ $\mathrm{Ker}\ B$ باشد، آنگاه‌به‌ازای اندیسهای مناسب j_1، ...، j_l،

$$\{\mathrm{B}',u_{j_1},\cdots,u_{j_l}\}$$

یك پایهٔ V است. هر u_j شرط $Bu_j=o$ رابرآورده می‌سازد، لذا u_j یك بردار ویژه برای A است، وزیرفضای یك بعدی تولید شده توسط u_j، Aپایا و دوری است. این زیرفضا را با U_j نمایش می‌دهیم. دراین‌صورت داریم

$$\begin{aligned}V&=V'\oplus U_{j_1}\oplus\cdots\oplus U_{j_l}\\&=V_1\oplus\cdots\oplus V_m\oplus U_{j_1}\oplus\cdots\oplus U_{j_l}\end{aligned}$$

بنابراین V به صورت جمع مستقیم زیرفضاهای دوری نوشته می‌شود،واثبات قضیه هم‌پایان می‌یابد.

تمرینها

درتمرینهای زیر، فرض می‌کنیم V یك فضای برداری با بعد متناهی روی هیات‌اعداد مختلط و $A:V\to V$ یك عملگر است.

۱. نشان دهیدکه A رامی‌توان به‌صورت $A=D+N$ نوشت‌که درآن D یك عملگر قطری شدنی و N یك عملگر پوچ توان است و $DN=ND$.

۲. فرض‌کنید که V دوری است. نشان دهید که زیرفضای تولید شده توسط بردارهای ویژهٔ A یك بعدی است.

۳. فرض‌کنید که V دوری است. فرض‌کنید f یك چندجمله‌ای است. مقادیرویـژهٔ $f(A)$ برحسب مقادیرویژهٔ A چه هستند؟ همین سؤال را وقتی V دوری نیست جواب دهید.

۴. اگر A پوچ توان ومخالف صفر باشد، نشان دهید که A قطری شدنی نیست.

۵. فرض‌کنید P_A چندجمله‌ای مشخصهٔ A است وبه‌صورت

$$P_A(t)=\prod_{i=1}^{r}(t-\alpha_i)^{m_i}$$

نوشته می‌شود که α_1، ...، α_r متمایزند. فرض‌کنید f یك چندجمله‌ای است. چندجمله‌ای مشخصهٔ $P_{f(A)}$ رابرحسب عاملهای درجهٔ ۱ بیان کنید.

۱۲

مجموعه‌های محدب

۱. تعریفها

فرض کنید S یك زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}^m$ است. می‌گوئیم که S **محدب** است اگر به‌ازای هر دو نقطهٔ P و Q متعلق به S، پاره خط واصل بین P و Q نیز تماماً در S باشد.

یادآوری می‌کنیم که پاره خط واصل بین P و Q، مجموعهٔ تمام نقاطی به‌صورت $P+t(Q-P)$ است به‌طوری‌که $0 \leqslant t \leqslant 1$، یا مجموعهٔ تمام نقاطی است به‌صورت

$$(1-t)P+tQ$$

به‌طوری‌که $0 \leqslant t \leqslant 1$.

قضیهٔ ۱.۱. فرض کنید $P_1, \ldots, P_n$ نقاطی از $\mathbf{R}^m$ هستند. مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی

$$x_1P_1+\cdots+x_nP_n$$

به‌طوری‌که $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ و $x_1+\cdots+x_n=1$، یك مجموعهٔ محدب است.

قضیهٔ ۲.۱. فرض کنید $P_1, \ldots, P_n$ نقاطی از $\mathbf{R}^m$ هستند. هرمجموعهٔ محدب که شامل $P_1, \ldots, P_n$ باشد، شامل تمام ترکیبات خطی

$$x_1P_1+\cdots+x_nP_n$$

است به‌طوری‌که به‌ازای هر i، $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ و $x_1+\cdots+x_n=1$.

یا اثبات اینها را به‌عنوان تمرین انجام دهید، یا به‌فصل ۳ بخش ۵ مراجعه‌کنید.

بر اساس قضیه‌های ۱.۱ و ۲.۱ نتیجه می‌گیریم کـه مجموعهٔ ترکیبات خطی توصیف شده در این قضیه‌ها، کوچکترین مجموعهٔ محدب شامل نقاط P_1، ...، P_n است.

عبارتهای زیر قبلاً به‌عنوان تمرین آمده‌اند، و آنها را اینجا برای یادآوری وتکمیل مطلب می‌آوریم.

(۱) اگر S و S' مجموعه‌های محدب باشند، آنگاه $S \cap S'$ هم محدب است.

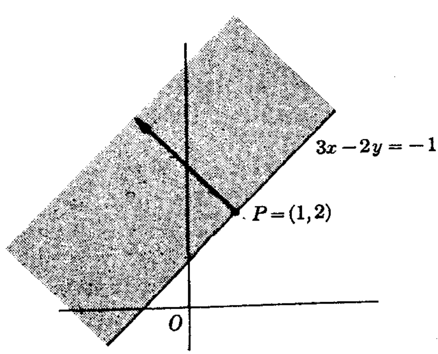
(۲) فرض‌کنید $F: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ یك نگاشت خطی است. اگر S یك مجموعهٔ محدب $\mathbf{R}^m$ باشد، آنگاه $F(S)$ (تصویر S تحت F) در $\mathbf{R}^n$ محدب است.

(۳) فرض‌کنید $F: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ یك نگاشت خطی است. فرض‌کنیدکه S' یك مجموعهٔ محدب $\mathbf{R}^n$ است. فرض کنید $S = F^{-1}(S')$ مجموعـهٔ تمام $X \in \mathbf{R}^m$ بـاشد به‌طوری‌کـه $f(X) \in S'$. دراین صورت S محدب است.

مثالها. فرض‌کنید A برداری در $\mathbf{R}^n$ است. نگاشت F به‌طوری‌کـه $F(X) = A \cdot X$ یك نگاشت خطی است. توجه‌کنیدکه یك نقطهٔ $c \in \mathbf{R}$ یك مجموعهٔ محدب است. لذا **ابرصفحهٔ** H متشکل از تمام Xهایی‌که $A \cdot X = c$ یك مجموعهٔ محدب است.

به‌علاوه، مجموعـهٔ S' متشکل از تمام x های متعلق به $\mathbf{R}$ به‌طوری‌که $x > c$ محدب است. لذا مجموعهٔ تمام Xهای‌متعلق به $\mathbf{R}^n$ به‌طوری‌که $A \cdot X > c$ محدب‌است. این‌مجموعه را یك **نیم فضای** باز می‌نامیم. متشابهاً، مجموعـهٔ تمام نقاط $X \in \mathbf{R}^n$ به‌طوری‌که $A \cdot X \geqslant c$ را یك **نیم فضای بسته** می‌نامیم.

درشکل زیر، یك ابرصفحه (خط) را در $\mathbf{R}^2$ ویك نیم صفحهٔ مشخص شده بـا آن را نشان داده‌ایم.



شکل ۱

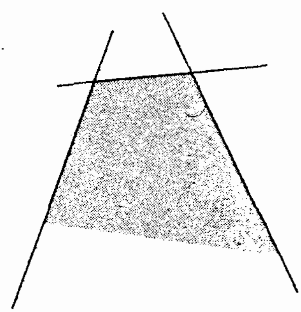
خط بـا معادلـهٔ $3x-2y=-1$ تعریـف شده و ازنقطـهٔ $P=(1,2)$ می‌گـذرد، و $N=(3,-2)$ بردارقـائم برخط است. نیم فضای متشکل از Xهایی‌که $X\cdot N\leqslant -1$ را سایه زده‌ایم.

مشاهده می‌کنیم که ابرصفحه‌ای کـه معادلهٔ آن $X\cdot N=c$ است. دونیم فضای بستهٔ را مشخص می‌کندکه با معادلات زیرتعریف می‌شوند

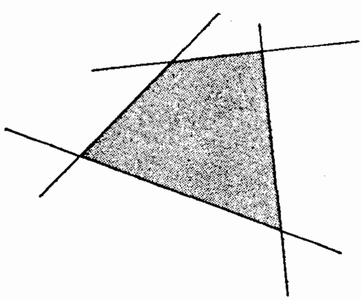
$$X\cdot N\geqslant c \quad , \quad X\cdot N\leqslant c$$

وبه‌همین ترتیب است برای نیم فضاهای باز.

چون اشتراك مجموعه‌های محدب مجموعه‌ای محدب است، اشتراك تعداد با پایانی ازنیم فضاها محدب است. درتصویر بعدی (تصویرهای ۲ و۳) فصل مشترك تعداد باپایانی ازنیم فضاها رسم شده است. چنین فصل مشترکهایی ممکن است‌کراندار یا بیکران باشد. (یادآوری می‌کنیم که یك زیرمجموعهٔ S از $\mathbf{R}^n$ **کراندار** است هرگاه یك‌عدد $c>0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $X\in S$، $||x||\leqslant c$.)



شکل ۳



شکل ۲

ابرصفحه‌های جداکننده

قضیهٔ ۱۰۲. فرض‌کنید S یك مجموعهٔ بستهٔ محدب در $\mathbf{R}^n$ است. فرض کنید P یك نقطه از $\mathbf{R}^n$ است. دراین صورت یا P متعلق به S است، یایك ابرصفحهٔ H وجود داردکه شامل P بوده وچنان است‌که H مشمول دریکی ازنیم فضاهای بازتعیین شده توسط H خواهد بود.

اثبات. از یك مطلب درحساب دیفرانسیل وانتگرال استفـاده می‌کنیم. فرض‌کنید P متعلق به S نیست. تابع f تعریف شده روی مجموعهٔ بستهٔ S با ضابطهٔ

$$f(X)=||X-P||$$

را درنظر می‌گیریم. درحساب دیفرانسیل وانتگرال (با ε و δ) ثابت می‌شود که این تابع دارای یك مینیمم روی S است. فرض کنید Q نقطه‌ای روی S باشد به‌طوری که

$$\forall X\in S\ ,\ ||Q-P||\leqslant||X-P||$$

فرض کنید $N=Q-P$. چون P روی S نیست، پس $Q-P\neq o$، و $N\neq o$. ادعا می‌کنیم که ابرصفحهٔ گذرنده بر P وعمود بر N درخواست ما صدق می‌کند. فرض کنید Q' یك نقطهٔ دلخواه S است، و $Q\neq Q'$. دراین صورت برای هر t، $\circ<t\leqslant ۱$ داریم

$$||Q-P||\leqslant||Q+t(Q'-Q)-P||=||(Q-P)+t(Q'-Q)||$$

دوطرف را مربع می‌کنیم:

$$(Q-P)^{۲}\leqslant(Q-P)^{۲}+۲t(Q-P)\cdot(Q'-Q)+t^{۲}(Q'-Q)^{۲}$$

پس ازحذف وتقسیم بر t نتیجه می‌شود

$$\circ\leqslant ۲(Q-P)\cdot(Q'-Q)+t(Q'-Q)^{۲}$$

فرض می‌کنیم که t به‌سمت ۰ میل کند، دراین‌صورت داریم

$$\begin{aligned}\circ&\leqslant(Q-P)\cdot(Q'-Q)\\&\leqslant N\cdot(Q'-P)+N\cdot(P-Q)\\&\leqslant N\cdot(Q'-P)-N\cdot N\end{aligned}$$

اما $N\cdot N>\circ$. لذا

$$Q'\cdot N>P\cdot N$$

این ثابت می‌کند که S مشمول درنیم فضاهای بازتعریف شده توسط $X\cdot N>P\cdot N$ است.

فرض‌کنید S یك مجموعهٔ محدب در $\mathbf{R}^n$ است. دراین صورت بستار S (که با $\overline{S}$ نمایش می‌دهیم) محدب است.

این به‌سادگی ثابت می‌شود، زیرا اگر P و Q نقاطی دربستار باشند، می‌توانیم نقاطی مانند P_k و Q_k که به‌سمت P و Q میل می‌کنند بیابیم. دراین صورت برای $\circ\leqslant t\leqslant ۱$، $tP_k+(۱-t)Q_k$ به‌سمت $tP+(۱-t)Q$ میل می‌کند، که بنابراین دربستار S واقع است.

فرض‌کنید S یك‌مجموعهٔ محدب در $\mathbf{R}^n$ است. فرض کنید P یك‌نقطهٔ مرزی S است.

(یعنی نقطه‌ای است که برای هر $\varepsilon>0$، گوی باز به‌مرکز P و به‌شعاع ε در $\mathbf{R}^n$ شامل نقاطی از S و نقـاطی خارج S است.) می‌گوئیم ابرصفحهٔ H **یك ابرصفحهٔ حامی S در P** است اگر P مشمول H و S مشمول یکی از دونیم فضای بستهٔ تعیین شده توسط H باشد.

قضیهٔ ۲.۲. فرض‌کنید S یك مجموعهٔ محدب در $\mathbf{R}^n$، و P یك نقطهٔ مرزی S است. دراین صورت یك ابرصفحهٔ حامی S در P وجود دارد.

اثبات. فـرض‌کنید $\bar{S}$ بستار S است. دراین صورت دیدیم کـه $\bar{S}$ محدب است، و P یـك نقطهٔ مرزی $\bar{S}$ است. اگر قضیه را برای $\bar{S}$ ثابت‌کنیم مسلماً برای S نیز برقرار خواهـد بود. بنابراین بدون اینکه ازکلیت مسأله‌کم شود می‌توانیم فرض‌کنیم که S بسته است.

برای هرعدد صحیح $k>2$، می‌توانیم یك‌نقطهٔ P_k به‌دست آوریم که روی S نیست، اما درفاصله‌ای‌کمتر از $\frac{1}{k}$ از P قرار دارد. طبق قضیهٔ ۱.۲، یك‌نقطهٔ Q_k روی S بـه‌دست می‌آوریم که فاصلهٔ آن از P_k مینیمم است، وقرارمی‌دهیم $N_k=Q_k-P_k$. فرض‌کنید N'_k برداری در جهت N_k ولی با نرم ۱ است. دنبالهٔ بردارهای N'_k دارای یك‌نقطهٔ انباشتگی روی‌کرهٔ به‌شعاع ۱، مثلاً N'، است، زیراکره فشرده است. طبق‌قضیهٔ ۱.۲ برای هر $X\in S$ داریم

$$X\cdot N_k\geqslant P_k\cdot N_k\quad,\ \forall k$$

دوطرف را بر نرم N_k تقسیم می‌کنیم، نتیجه می‌شود

$$X\cdot N'_k>P_k\cdot N'_k\quad,\ \forall k$$

چون N' یك‌نقطهٔ انباشتگی $\{N'_k\}$ است، وچون P یك‌نقطهٔ حدی $\{P_k\}$ است، با استفاده از پیوستگی نتیجه می‌گیریم که برای هر $X\in S$،

$$X\cdot N'\geqslant P\cdot N'$$

اثبات قضیه تمام می‌شود.

توضیح. فرض‌کنید S یك‌مجموعهٔ محدب، و H یك ابرصفحه است‌که توسط معادلهٔ

$$X\cdot N=a$$

تعریف‌می‌شود. فرض کنید برای هر $X\in S$ داریم $X\cdot N\geqslant a$. اگر P نقطه‌ای از S واقع‌در ابرصفحه باشد، آنگاه P یك‌نقطهٔ مرزی S است. درغیراین‌صورت، برای $\varepsilon>0$ و به‌اندازهٔ کافی‌کوچك، باید $P-\varepsilon N$ یك‌نقطه از S باشد، وبنابراین

$$(P-\varepsilon N)\cdot N=P\cdot N-\varepsilon N\cdot N=a-\varepsilon N\cdot N<a$$

ومتناقض با فرض. نتیجه می‌گیریم که H یک ابرصفحهٔ حامی S در P است.

۳. نقاط اکسترم و ابرصفحه‌های حامی

فرض کنید S یک مجموعهٔ محدب و P یک نقطه از S است. می‌گوئیم که P یک **نقطهٔ اکسترم** S است اگر نقاط Q_1 و Q_2 متعلق به S با شرط $Q_1\neq Q_2$ وجود نداشته باشند به‌طوری که P را بتوان به‌صورت

$$P=tQ_1+(1-t)Q_2\;,\quad 0<t<1$$

نوشت. به‌عبارت دیگر، P نمی‌تواند روی یک پاره‌خط مشمول S قرار گیرد مگر اینکه یکی از نقاط کناری پاره خط باشد.

قضیهٔ ۱۰۳. فرض کنید S یک مجموعهٔ محدب کراندار است. دراین صورت هر ابرصفحهٔ حامی S شامل یک نقطهٔ اکسترم است.

اثبات. فرض کنید H یک ابرصفحهٔ حامی است، که با معادلهٔ $X\cdot N=P_0\cdot N$ در نقطهٔ مرزی P_0 تعریف می‌شود، ومثلاً برای هر $X\in S$، $X\cdot N\geqslant P_0\cdot N$. فرض کنید T اشتراک S و ابرصفحه است. دراین صورت T محدب، بسته، کراندار است. ادعا می‌کنیم که یک نقطهٔ اکسترم T یک نقطهٔ اکسترم S نیز خواهد بود. برای اثبات، فرض کنید P یک نقطهٔ اکسترم T است، و فرض کنید بتوانیم بنویسیم

$$P=tQ_1+(1-t)Q_2\;,\quad 0<t<1$$

در N ضرب کرده واز اینکه P روی ابرصفحه است استفاده می‌کنیم، لذا $P\cdot N=P_0\cdot N$، به‌دست می‌آوریم

$$P_0\cdot N=tQ_1\cdot N+(1-t)Q_2\cdot N \qquad (1)$$

داریم $Q_1\cdot N\geqslant P_0\cdot N$ و $Q_2\cdot N$ زیرا Q_1 و Q_2 در S قراردارند. اگر یکی از اینها اکیداً بزرگتر از $P_0\cdot N$، مثلاً $Q_1\cdot N>P_0\cdot N$، باشد، آنگاه طرف راست معادلهٔ (۱) بزرگتر است از

$$tP_0\cdot N+(1-t)P_0\cdot N=P_0\cdot N$$

واین غیرممکن است. لذا Q_1 و Q_2 هردو در ابرصفحه قراردارند، بنابراین فرض اینکه P

یك‌نقطهٔ اکسترم T است نقض می‌شود.

اکنون یك نقطهٔ اکسترم T را بـه‌دست می‌آوریم. درمیان تمام نقاط T، حداقل یك نقطه وجود داردکـه مختص اول آن‌کوچکترین است، زیرا T بسته وکراندار است. (روی مختص اول تصویر کرده‌ایم. سایهٔ T تحت این عمل دارای یك بزرگترین‌کران پائین است که به‌وسیلهٔ یك‌عضو t حاصل می‌شود زیرا T بسته است.) فرض‌کنید T_1 زیرمجموعه‌ای‌از T متشکل از تمـام نقاطی استکـه مختص اول‌آنها مساوی این‌کوچکترین است. دراین صورت T_1 بسته، وکراندار است. لـذا می‌توانیم نقطه‌ای از T_1 بـه‌دست‌آوریم‌که مختص دوم آن دربین نقاط T_1کوچکترین باشد، مجموعهٔ T_2 متشکل ازتمام نقاط T_1کـه دارای این مختص دوم هستند وکراندار است. می‌توانیم این عمل را تکرارکنیم تا نقطه‌ای مانند P از T بیابیم‌که دارای مختصات اول، دوم،... و n ام‌کوچکترین باشد. ادعا می‌کنیم کـه این نقطهٔ P یك‌نقطهٔ اکسترم T است. فرض‌کنید $P=(p_1,\cdots,p_n)$.

فرض‌کنیدکه بتوانیم بنویسیم

$$P=tX+(1-t)Y \quad , \quad 0<t<1$$

ونـقاط $X=(x_1,\cdots,x_n)$ ، $y=(y_1,\cdots,y_n)$ متعلق بـه T هستنـد. درایـن صـورت $x_1,y_1\geqslant p_1$ و

$$p_1=tx_1+(1-t)y_1$$

اگر $y_1>p_1$ یا x_1، آنگاه

$$tx_1+(1-t)y_1>tp_1+(1-t)p_1=p_1$$

که غیرممکن است. لذا $x_1=y_1=p_1$. به‌طور استقرائی عمل می‌کنیم. فرض‌کنید ثابت کرده‌ایم‌که برای $i=1,\dots,r$ داریم $x_i=y_i=p_i$. دراین صورت اگر $r<n$،

$$p_{r+1}=tx_{r+1}+(1-t)y_{r+1}$$

ومی‌توانیم استدلال‌گذشته را تکرارکنیم. نتیجه می‌شودکه

$$X=Y=P$$

بنابراین P یك‌نقطهٔ اکسترم است.

۴. قضیهٔ کرین ـ میلمن

فرض کنید که E یك مجموعـه از نقاط $\mathbf{R}^n$ (بـا حداقل یك عضو) است. مـی‌خواهیم

کوچکترین مجموعهٔ محدب شامل E را توصیف کنیم. می‌گوئیم که این مجموعه عبارت است از اشتراك تمام مجموعه‌های محدب شامل E، زیرا این اشتراك محدب است و به‌طور وضوح کوچکترین.

اکنون این کوچکترین مجموعهٔ محدب را به‌طریق دیگر توصیف می‌کنیم. فرض کنید E^c مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی

$$t_1P_1+\cdots+t_mP_m$$

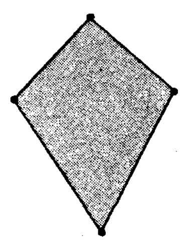
از نقاط P_1، ...، P_m متعلق به E باضرایب حقیقی t_i است به‌طوری‌که

$$0\leqslant t_i\leqslant 1 \quad , \quad t_1+\cdots+t_m=1$$

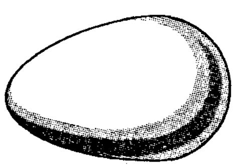
دراین صورت مجموعهٔ E^c محدب است. اثبات این حکم ساده را به خواننده واگذار می‌کنیم. هرمجموعهٔ محدب شامل E، باید شامل E^c باشد، و لذا E^c کوچکترین مجموعهٔ محدب شامل E است. E^c را **بستارمحدب** E می‌نامیم.

فرض کنید S یك مجموعهٔ محدب و E مجموعهٔ نقاط اکسترم آن است. دراین صورت E^c مشمول S است، تحت چه شرایطی $E^c=S$ است؟

ازنقطه‌نظرهندسی، نقاط اکسترم می‌توانند شبیه نقاط واقع روی قشر یك تخم‌مرغ، یا شبیه نقاط واقع روی رئوس یك چندضلعی باشند:



شکل ۵



شکل ۴

یك مجموعهٔ محدب بیکران لازم نیست مساوی بستارمحدب نقاط اکسترم خودباشد، مثل نیم صفحهٔ بستهٔ بالایی که دارای نقاط اکسترم نیست. همچنین، یك مجموعهٔ بازمحدب لازم نیست با بستارمحدب نقاط اکسترم خود مساوی باشد (درون تخم‌مرغ دارای هیچ نقطهٔ اکسترم نیست.) قضیهٔ کرین ـ میلمن می‌گوید که اگر این امکان را حذف کنیم، آنگاه هیچ مشکلی دیگری نمی‌تواند ظاهرشود.

قضیهٔ ۴.۱۰ فرض‌کنید S یك مجموعهٔ محدب، کراندار بسته است. دراین صورت S مساوی بستار محدب نقاط اکسترم خود است.

اثبات. فرض‌کنید S' بستارمحدب نقاط اکسترم S است. باید نشان دهیم‌که S مشمول S' است. فرض‌کنید $P\in S$، ولی $P\notin S'$. طبق قضیهٔ ۲.۱ یك ابـرصفحهٔ H گذرنده بر نقطهٔ P وجود دارد، و با معادله‌ای نظیر

$$X\cdot N=c$$

تعریف می‌شود که به‌ازای‌هر $X\in S'$، $X\cdot N>c$ است. فرض‌کنید $L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ یك‌نگاشت خطی باشد به‌طوری‌که $L(X)=X\cdot N$. دراین صورت $L(P)=c$، و $L(P)$ مشمول در $L(S')$ نیست. چون S بسته‌وکراندار است، تصویر $L(S)$ هم بسته وکراندار است، واین تصویر محدب هـم هست. لذا $L(S)$ یك فاصلهٔ بسته مانند $[a,b]$ شامل c است. بنابراین $a\leqslant c\leqslant b$. فرض‌کنید H_a ابرصفحهٔ تعریف شده با معادلهٔ

$$X\cdot N=a$$

است. باتوجه به‌توضیح ذیل قضیهٔ ۲.۲، می‌دانیم‌که H_a ابرصفحهٔ حامی S است. طبق‌قضیهٔ ۳.۱، نتیجه می‌گیریم‌که H_a شامل یك‌نقطهٔ اکسترم S است. این نقطهٔ اکسترم در S' واقع است. واین بااین مطلب‌که به‌ازای هر $X\in S'$، $X\cdot N>c\geqslant a$ متناقض است، و بنابراین قضیهٔ‌کرین‌ــ میلمن ثابت می‌شود.

تمرینها

۱. فرض‌کنید A یك‌بردار در $\mathbf{R}^n$ است. فرض‌کنید $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ انتقال

$$F(X)=X+A$$

است. نشان دهیدکه اگر S یك‌مجموعهٔ محدب $\mathbf{R}^n$ باشد، آنگاه $F(S)$ نیزمحدب است.

۲. فرض‌کنید c یك عدد بزرگتر از ۰، و P یك‌نقطه در $\mathbf{R}^n$ است. فرض‌کنید S مجموعـهٔ نقاط X است به‌طوری‌کـه $||X-P||<c$. نشان دهیدکـه S محدب است. مشابهاً، نشان دهیدکه مجموعهٔ نقاط X به‌طوری‌که $||X-P||\leqslant c$ محدب است.

۳. بستارمحدب مجموعهٔ نقاط زیررا رسم کنید.

(الف) $(۱,۲)$، $(۱,-۱)$، $(۱,۳)$، $(-۱,۱)$

(ب) $(-۱,۲)$، $(۲,۳)$، $(-۱,-۱)$، $(۱,۰)$

۴. فرض کنید $L:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ یك نگاشت خطی و وارون‌پذیر است. فرض کنید S در $\mathbf{R}^n$ محدب و P یك نقطهٔ اکسترم S است. نشان دهید که $L(P)$ یك نقطهٔ اکسترم $L(S)$ است. آیا اگر L وارون‌پذیر نباشد بازهم حکم برقرار است؟

۵. ثابت کنید که اشتراك تعداد با پایانی از نیم فضاهای بستهٔ $\mathbf{R}^n$ می‌تواند تنها دارای تعداد با پایانی نقاط اکسترم باشد.

۶. فرض کنید B یك بردارستونی در $\mathbf{R}^n$، و A یك ماتریس $n \times n$ است. نشان دهید که مجموعهٔ جوابهای معادلات خطی $AX = B$ یك مجموعهٔ محدب در $\mathbf{R}^n$ است.

پیوست

اعداد مختلط

اعداد مختلط یك مجموعه از اشیاء است که می‌توان آنها را باهم جمع ودرهم ضرب کرد؛ مجموع وحاصلضرب دوعدد مختلط هم عددی مختلط است، وشرایط زیر را برآورده می‌سازند.

(۱) هرعدد حقیقی یك عدد مختلط است، واگر α، β دوعدد حقیقی باشند، آنگاه مجموع وحاصلضرب آنها به‌عنوان اعداد مختلط بامجموع وحاصلضرب آنها به‌عنوان اعداد حقیقی یکی است.

(۲) یك عدد مختلط وجود داردکه با i نمایش می‌دهیم به‌طوری که $i^2 = -1$.

(۳) هرعدد مختلط رامی‌توان به‌طور منحصر به‌فردی به‌شکل $a+bi$ نوشت که در آن a و b اعداد حقیقی‌اند.

(۴) قواعد معمولی حساب مربوط به جمع وضرب برقرارند. این قواعد رافهرست می‌کنیم:

اگر α، β، γ اعدادمختلط باشند، آنگاه

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \quad \text{و} \quad (\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$$

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \qquad \alpha\beta=\beta\alpha$$

$$(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha \qquad \alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

اگر ۱ عدد حقیقی یك باشد، آنگاه $1\alpha=\alpha$

اگر ۰ عدد حقیقی صفر باشد، آنگاه $0\alpha=0$

داریم $\alpha+(-1)\alpha=0$

اکنون نتایجی از این خواص به‌دست می‌آوریم. با هر عدد مختلط $a+bi$، یك بردار (a,b) درصفحه متناظر می‌کنیم. فرض کنید $\alpha=a_1+a_2i$ و $\beta=b_1+b_2i$ دوعدد مختلط هستند. دراین‌صورت

$$\alpha+\beta=a_1+b_1+(a_2+b_2)i$$

پس جمع اعداد مختلط به‌طور «مؤلفه‌ای» انجام می‌شود ومتناظر به جمع بردارها درصفحه است. به‌عنوان مثال

$$(2+3i)+(-1+5i)=1+8i$$

درضرب اعداد مختلط، از قاعدهٔ $i^2=-1$ برای ساده‌کردن ضرب و تبدیل آن به شکل $a+bi$ استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال، فرض‌کنید $\alpha=2+3i$ و $\beta=1-i$. در این‌صورت

$$\begin{aligned}\alpha\beta=(2+3i)(1-i)&=2(1-i)+3i(1-i)\\&=2-2i+3i-3i^2\\&=2+i-3(-1)\\&=2+3+i\\&=5+i\end{aligned}$$

فرض‌کنید $\alpha=a+bi$ یك عدد مختلط است. $\bar{\alpha}$ رامساوی $a-bi$ تعریف می‌کنیم. بنابراین اگر $\alpha=2+3i$، آنگاه $\bar{\alpha}=2-3i$. عدد مختلط $\bar{\alpha}$ را **مزدوج** α می‌نامیم. بدیهی است که

$$\alpha\bar{\alpha}=a^2+b^2$$

با تعبیر برداری اعداد مختلط، مشاهده می‌کنیم که $\alpha\bar{\alpha}$ مربع فاصلهٔ نقطهٔ (a,b) ازمبدأ است.

اکنون یك خاصیت مهم دیگر اعداد مختلط راداریم که اجازه تقسیم برهرعدد مختلط غیرصفر را می‌دهد.

اگر $\alpha=a+bi$ یك عدد مختلط مخالف ۰ باشد، واگر قراردهیم

$$\lambda=\frac{\bar{\alpha}}{a^{2}+b^{2}}$$

آنگاه $\alpha\lambda=\lambda\alpha=1$.

اثبات این خاصیت نتیجهٔ فوری قاعدهٔ ضرب اعداد مختلط است، زیرا

$$\alpha\frac{\bar{\alpha}}{a^{2}+b^{2}}=\frac{\alpha\bar{\alpha}}{a^{2}+b^{2}}=1$$

عدد مختلط λ را **وارون** α نامیده و با α^{-1} یا $\frac{1}{\alpha}$ نمایش می‌دهیم. اگر α، β دوعددمختلط باشند، اغلب به‌جای $\alpha^{-1}\beta$ (یا $\beta\alpha^{-1}$) می‌نویسیم $\frac{\beta}{\alpha}$، درست شبیه اعدادحقیقی. بنا براین می‌توانیم برهرعدد مختلط مخالف صفر تقسیم کنیم.

قدرمطلق عدد مختلط $\beta=a_{1}+ia_{2}$ رامساوی

$$|\alpha|=\sqrt{a_{1}^{2}+a_{2}^{2}}$$

تعریف می‌کنیم. این قدرمطلق چیزی غیراز نرم بردار (a_{1},a_{2}) نیست. برحسب قدرمطلق می‌توانیم بنویسیم

$$\alpha^{-1}=\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^{2}}$$

به شرطی‌که $\alpha\neq 0$.

نامساوی مثلث برای نرم بردارها را می‌توان برای اعداد مختلط هم برقرار کرد. اگر α و β دوعدد مختلط باشد، آنگاه

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$$

خاصیت دیگری ازقدر مطلق درتمرین ۵ آمده است.

بااستفاده از برخی مطالب مقدماتی آنالیز، اکنون قضیهٔ زیر را ثابت خواهیم کرد.

قضیه. مجموعهٔ اعداد مختلط به‌طور جبری بسته است، به‌عبارت دیگر، هرچند جمله‌ای $f\in\mathbf{C}[t]$ بادرجهٔ بزرگتر یامساوی ۱ دارای یك ریشه در $\mathbf{C}$ است.

اثبات. می‌نویسیم

$$f(t)=a_{n}t^{n}+a_{n-1}t^{n-1}+\dots+a_{0}\ ,\ \ a_{n}\neq 0$$

برای هرعدد حقیقی $R>0$، تابع $|f|$ به‌طوری‌که

$$t \longmapsto |f(t)|$$

روی قرص بستهٔ به شعاع R پیوسته‌است، ولذا دارای یك مقدار مینیمم روی این قرص باشد. ازطرف دیگر، ازعبارت

$$f(t)=a_n t^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n t}+\cdots+\frac{a_0}{a_0 t^n}\right)$$

مشاهده می‌کنیم که وقتی $|t|$ بزرگ می‌شود، آنگاه $|f(t)|$ هم بزرگ می‌گردد، یعنی بـه ازای هر $c>0$ یك $R>0$ وجود دارد بـه طوری‌که اگر $|t|>R$، آنگاه $|f(t)|>c$. نتیجتاً یك عدد مثبت R_0 وجود دارد به طوری‌که، اگر z_0 نقطهٔ مینیمم $|f|$ روی قرص بستهٔ به شعاع R_0 باشد، آنگاه به‌ازای هرعدد مختلط t داریم

$$|f(t)|\geqslant|f(z_0)|$$

به‌عبارت دیگر، z_0 مینیمم مطلق $|f|$ است. ثابت خواهیم‌کردکه $f(z_0)=0$.

f رابه صورت

$$f(t)=c_0+c_1(t-z_0)+\cdots+c_n(t-z_0)^n$$

بیان می‌کنیم. (این‌کار را درسها انجام می‌دهیم،اما می‌توانید بانوشتن $t=z_0+(t-z_0)$ وقراردادن آن در $f(t)$ مستقیماً انجام دهید.) اگر $f(z_0)\neq 0$، آنگاه $c_0=f(z_0)\neq 0$. فرض کنید $z=t-z_0$ و m کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد به طوری‌که $c_m\neq 0$. این عدد صحیح m وجود دارد زیرا فرض کرده‌ایم f دارای درجهٔ بزرگتر یا مساوی ۱ است. دراین‌صورت می‌توانیم بنویسیم

$$f(t)=f_1(z)=c_0+c_m z^m+z^{m+1}g(z)$$

که g یك چندجمله‌ای است. ضمناً f_1 نیزیك چندجمله‌ای است (که ازروی f با تعویض متغیر به دست آمده‌است). فرض کنید z_1 یك عدد مختلط است به‌طوری‌که

$$z_1^m=-\frac{c_0}{c_m}$$

ومقادیر z به‌صورت

$$z=\lambda z_1$$

راکه λ یك عدد حقیقی و $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ است درنظرمی‌گیریم. داریم

$$f(t)=f_{۱}(\lambda z_{۱})=c_{\circ}-\lambda^{m}c_{\circ}+\lambda^{m+۱}z_{۱}^{m+۱}g(\lambda z_{۱})$$
$$=c_{\circ}[۱-\lambda^{m}+\lambda^{m+۱}z_{۱}^{m+۱}c_{\circ}^{-۱}g(\lambda z_{۱})]$$

یك عدد $c>\circ$ وجود دارد به طوری که برای هر λ با شرط $۱\leqslant\lambda\leqslant\circ$ داریم $|z_{۱}^{m+۱}c_{\circ}^{-۱}g(\lambda z_{۱})|\leqslant c$، و لذا

$$|f_{۱}(\lambda z_{۱})|\leqslant|c_{\circ}|(۱-\lambda^{m}+c\lambda^{m+۱})$$

اگر اکنون بتوانیم برای λ به‌اندازهٔ کافی کوچك با شرط $۱>\lambda>\circ$ ثابت کنیم

$$\circ<۱-\lambda^{m}+c\lambda^{m+۱}<۱$$

آنگاه برای چنین λای داریم $|f_{۱}(\lambda z_{۱})|<|c_{\circ}|$، ومتناقض با این فرض که به‌ازای‌هر عدد مختلط t، $|f(t)|\geqslant|f(z_{\circ})|$. نامساوی سمت چپ بدیهی‌است زیرا $۱>\lambda>\circ$. نامساوی سمت راست معادل $c\lambda^{m+۱}<\lambda^{m}$، یا $c\lambda<۱$ است که این نامساوی هم برای λهای به اندازهٔ کافی کوچك برقرار است. به‌این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

تمرینها

۱. اعداد مختلط زیر را به صورت $x+iy$ بنویسید که x و y اعداد حقیقی‌اند.

(الف) $(-۱+۳i)^{-۱}$ (ب) $(۱+i)(۱-i)$

(پ) $(۱+i)i(۲-i)$ (ت) $(i-۱)(۲-i)$

(ث) $(۷+\pi i)(\pi+i)$ (ج) $(۲i+۱)\pi i$

(چ) $(\sqrt{۲}+i)(\pi+۳i)$ (ح) $(i+۱)(i-۲)(i+۳)$

۲. اعداد مختلط زیر را به صورت $x+iy$ بنویسید که x و y اعداد حقیقی‌اند.

(الف) $(۱+i)^{-۱}$ (ب) $\frac{۱}{۳+i}$ (پ) $\frac{۲+i}{۲-i}$ (ت) $\frac{۱}{۲-i}$

(ث) $\frac{۱+i}{i}$ (ج) $\frac{i}{۱+i}$ (چ) $\frac{۲i}{۳-i}$ (ح) $\frac{۱}{-۱+i}$

۳. فرض کنید α یك عدد مختلط مخالف صفر است. مطلوب است قدرمطلق $\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}$، و $\bar{\bar{\alpha}}$.

۴. فرض کنید α و β دوعدد مختلط است. نشان دهید که

$$\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\,\bar{\beta}\ ,\ \overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$$

۵. نشان دهید که $|\alpha\beta|=|\alpha|\,|\beta|$

۶. جمع n تائیهای اعداد مختلط، وضرب n تائیهای اعداد مختلط را به‌طور مؤلفه‌ای تعریف می‌کنیم. اگر $A=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ و $B=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ دو n تایی ازاعداد مختلط باشند، حاصلضرب $<A,B>$ را به‌صورت

$$\alpha_1\overline{\beta_1}+\dots+\alpha_n\overline{\beta_n}$$

تعریف می‌کنیم. قواعد زیررا ثابت کنید

(۱) $<A,A>=\overline{<B,A>}$

(۲) $<A,B+C>=<A,B>+<A,C>$

(۳) اگر α یك عدد مختلط باشد، آنگاه

$$<\alpha A,B>=\alpha<A,B>\ \ ,\ \ <A,\alpha B>=\bar{\alpha}<A,B>$$

(۴) اگر $A=o$، آنگاه $<A,A>=o$، در غیراین‌صورت $<A,A> > o$

۷. فرض می‌کنیم درمورد توابع سینوس وکسینوس وهمچنین فرمولهای جمع آنها اطلاع داریم. فرض کنید θ یك عدد حقیقی است.

(الف) تعریف می‌کنیم

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

نشان دهید که اگر θ_1 و θ_2 دوعدد حقیقی باشند، آنگاه

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$$

نشان دهید که هرعدد مختلط باقدرمطلق ۱ رامی‌توان به‌ازای یك عدد حقیقی t به‌صورت e^{it} نوشت.

(ب) نشان دهید که هرعدد مختلط رامی‌توان به‌صورت $re^{i\theta}$ نوشت که r و θ اعدادی

حقیقی و $r \geqslant 0$ است.

(پ) اگر $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ باشندکه $r_1, r_2 \geqslant 0$ و θ_1 و θ_2 حقیقی‌اند، نشان دهیدکه

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

(ت) اگر z یك عدد مختلط و n یك عدد صحیح مثبت باشد، نشان دهیدکه یك عدد مختلط w وجود دارد به طوری‌که $z = w^n$. اگر $z \neq 0$، نشان دهیدکه n عدد مختلط متمایز w با ویژگی فوق وجود دارد. [راهنمایی. اگر $z = re^{i\theta}$، نخست $r^{\frac{1}{n}} e^{i\theta/n}$ را در نظر بگیرید.]

۸. فرض کنیدکه مجموعهٔ اعدادمختلط به‌طور جبری بسته‌است. ثابت‌کنیدکه هرچندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر روی اعدادحقیقی دارای درجهٔ ۱ یا ۲ است. [راهنمایی.چندجمله‌ای را روی هیأت اعداد مختلط تجزیه‌کنید وسپس ریشه‌هایی‌که باهم‌مزدوج مختلط هستند را جفت‌کنید.]

فهرست راهنما

Infinite dimensional	۲۷	بعد نامتناهی
Algebraically closed	۳۲۳	به طور جبری بسته
Skew - symmetric	۷۹، ۲۰۹	پاد متقارن
Segment	۷۱، ۸۷	پاره (خط)
Basis	۲۰، ۱۰۵	پایه
Dual basis	۱۴۹	پایهٔ دوگان
Jordan basis	۳۰۶	پایهٔ ژردان
Fan basis	۲۷۵	پایهٔ فن
Orthogonal basis	۱۲۲	پایهٔ متعامد
Nilpotent	۵۶، ۹۴، ۲۷۸	پوچ توان
Surjective	۶۱	پوشا
Unique factorization	۲۹۱	تجزیهٔ یکتا
Irreducible	۲۵۱	تحویل‌ناپذیر
Transpose of matrix	۳۷، ۵۰، ۱۰۶	ترانهادهٔ ماتریس
Transpose of linear map	۲۰۸	ترانهادهٔ نگاشت‌خطی
Transposition	۱۸۸	ترانهش
Linear Combination	۱۳	ترکیب خطی
Image	۷۵	تصویر (نگار)
Projection	۱۱۸	تصویر
Inverse image	۹۶	تصویر معکوس
Coordinate functions	۶۰	توابع مختصاتی
Span	۸۹، ۹۰، ۹۴	تولید
Generate	۱۴، ۲۸۹	تولید کردن (پدید آوردن)
Permutation	۱۸۸	جایگشت
Even permutation	۱۹۲	جایگشت زوج
Odd permutation	۱۹۲	جایشگت فرد
Direct sum	۲۹، ۳۱، ۱۳۰، ۲۹۹	جمع مستقیم
Constant term	۲۶۸	جملهٔ ثابت
Polynomial	۲۶۷	چندجمله‌ای
Charactristic polynomial	۲۳۰، ۲۳۶	چندجمله‌ای مشخصه
Minimal polynomial	۲۹۶	چندجمله‌ای مینیمال