جبر خطی

کنت هافمن
ری کنزی

ترجمهٔ جمشید فرشیدی

جبر خطی

کنت هافمن
ری کنزی

ترجمهٔ جمشید فرشیدی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
پیشگفتار مؤلفین	۱
فصل ۱. معادلات خطی	۵
۱.۱. هیأتها	۵
۲.۱. دستگاههای معادلات خطی	۷
۳.۱. ماتریسها و اعمال سطری مقدماتی	۱۰
۴.۱. ماتریسهای تحویل شدهٔ سطری پلکانی	۱۸
۵.۱. ضرب ماتریسی	۲۵
۶.۱. ماتریسهای معکوس‌پذیر	۳۱
فصل ۲. فضاهای برداری	۴۱
۱.۲. فضاهای برداری	۴۱
۲.۲. زیرفضاها	۴۸
۳.۲. پایه و بعد	۵۶
۴.۲. مختصات	۶۷
۵.۲. خلاصهٔ هم‌ارزی سطری	۷۵
۶.۲. محاسبات مربوط به‌زیرفضاها	۷۸

عنوان	صفحه
فصل ۳. تبدیلهای خطی	۹۱
۱.۳. تبدیلهای خطی	۹۱
۲.۳. جبر تبدیلهای خطی	۱۰۰
۳.۳. یکریختی	۱۱۲
۴.۳. نمایش ماتریسی تبدیلها	۱۱۵
۵.۳. تابعکهای خطی	۱۲۹
۶.۳. دوگان مضاعف	۱۴۱
۷.۳. ترانهادهٔ تبدیل خطی	۱۴۷
فصل ۴. چند جمله‌ایها	۱۵۳
۱.۴. جبرها	۱۵۳
۲.۴. جبر چند جمله‌ایها	۱۵۶
۳.۴. درون‌یابی لاگرانژ	۱۶۱
۴.۴. ایدآلهای چند جمله‌ایها	۱۶۶
۵.۴. تجزیهٔ چند جمله‌ایها به‌سازه‌های اول	۱۷۵
فصل ۵. دترمینان	۱۸۳
۱.۵. حلقه‌های جابجایی	۱۸۳
۲.۵. تابع دترمینان	۱۸۴
۳.۵. جایگشتها و یکتایی دترمینان	۱۹۶
۴.۵. چند خاصیت دیگر دترمینان	۲۰۴
۵.۵. مدول	۲۱۴
۶.۵. تابع چند خطی	۲۱۶
۷.۵. حلقهٔ گراسمان	۲۲۶
فصل ۶. فرمهای متعارف مقدماتی	۲۳۷
۱.۶. مقدمه	۲۳۷
۲.۶. مقادیر سرشت‌نما	۲۳۸
۳.۶. چند جمله‌ایهای پوچساز	۲۴۹
۴.۶. زیرفضاهای پایا	۲۶۰

عنوان	صفحه
۵.۶. مثلث‌بندی همزمان با قطری‌سازی همزمان	۲۶۹
۶.۶ تجزیه به‌مجموع مستقیم	۲۷۲
۷.۶. مجموعهای مستقیم پایا	۲۷۸
۸.۶. قضیهٔ تجزیهٔ اولیه	۲۷۶
فصل ۷. فرمهای گویا و ژوردان	۲۹۷
۱.۷. زیرفضاهای دوری و پوچساز	۲۹۷
۲.۷. تجزیه‌های دوری و فرم گویا	۳۰۲
۳.۷. فرم ژوردان	۳۱۸
۴.۷. محاسبهٔ سازه‌های پایا	۳۲۸
۵.۷. خلاصه؛ عملگرهای نیم‌ساده	۳۴۱
فصل ۸. فضاهای ضرب داخلی	۳۵۱
۱.۸. ضربهای داخلی	۳۵۱
۲.۸. فضاهای ضرب داخلی	۳۵۹
۳.۸. تابعکهای خطی و الحاقیه	۳۷۶
۴.۸. عملکرهای یکانی	۳۸۸
۵.۸. عملگرهای نرمال	۴۰۳
فصل ۹. عملگرهای روی فضاهای ضرب داخلی	۴۱۳
۱.۹. مقدمه	۴۱۳
۲.۹ فرمهای روی فضاهای ضرب داخلی	۴۱۴
۳.۹. فرمهای مثبت	۴۲۰
۴.۹. چند مطلب دیگر دربارهٔ فرمها	۴۲۹
۵.۹. نظریهٔ طیفی	۴۳۳
۶.۹. چند خاصیت دیگر از عملگرهای نرمال	۴۴۹
فصل ۱۰. فرمهای دو خطی	۴۶۱
۱.۱۰. فرمهای دوخطی	۴۶۱
۲.۱۰. فرمهای دو خطی متقارن	۴۷۱

عنوان	صفحه
۳.۱۰. فرمهای دو خطی متقارن کج	۴۸۲
۴.۱۰. گروههای حافظ فرمهای دو خطی	۴۸۷
پیوستها	۴۹۵
پ.۱. مجموعه	۴۹۶
پ.۲. تابع	۴۹۷
پ.۳. رابطهٔ هم‌ارزی	۵۰۱
پ.۴. فضاهای خارج قسمت	۵۰۵
پ.۵. روابط هم‌ارزی در جبر خطی	۵۰۸
پ.۶. اصل موضوع انتخاب	۵۰۹
واژه‌نامهٔ انگلیسی به‌فارسی	۵۱۱
واژه‌نامهٔ فارسی به‌انگلیسی	۵۲۷
فهرست راهنما	۵۳۳

پیشگفتار مؤلفین

هدف اصلی ما از نوشتن این کتاب تهیهٔ کتابی درسی برای درس جبرخطی دورهٔ لیسانس در انستیتوتکنولوژی ماساچوست (M. I. T.) بوده است. این درس برای دانشجویان بامهاد ریاضی درسطح سال سوم طرح‌ریزی شده بود؛ با این وجود سه‌چهارم دانشجویان از سایررشته‌های علمی وفنی، از دانشجویان سال اول گرفته تا دانشجویان بعد ازلیسانس، جلب این درس می‌شدند. چنین توصیفی امروزه هم درمورد مستمعین این درس در M. I. T. عموماً درست است. در ده‌سالی که از چاپ اول این‌کتاب می گذرد، دوره‌های جبرخطی در سراسر کشور رشد نموده و به‌یکی ازمؤلفین فرصتی دست داده است تامطالب بنیانی این‌کتاب را برای گروههای مختلفی در دانشگاههای براندایز[1]، واشینگتن (سینت‌لوئیس[2])، وکالیفرنیا (ایروین[3]) تدریس کند.

منظور اصلی ما از تجدیدنظردرکتاب جبر خطی افزایش تنوع درسهایی بوده‌است که بسهولت بتواند ازروی آن تدریس شود. ازیك طرف، فصلها، بخصوص فصلهای‌مشکل را طوری پی‌ریزی کرده‌ایم که درطول راه ایستگاههای طبیعی متعددی وجود داشته باشدتا دست مدرس در انتخاب موضوع برای یك دورهٔ سه‌ماهه یا نیمساله به‌میزان قابل توجهی باز نگه داشته شود. ازطرف دیگر، مقدارمطالب‌کتاب را افزایش داده‌ایم، تا بتواندبرای یك دوره یکسالهٔ نسبتاً جامع در جبرخطی به‌کار رود وحتی به‌عنوان کتابی مرجع مورد استفادهٔ ریاضیدانان قرار گیرد.

تغییرات عمده، در نحوهٔ برخورد ما با فرمهای متعارف وفضاهای ضرب داخلی صورت گرفته است. دیگرآنکه فصل ۶ را همچون گذشته با نظریهٔ فضایی عمومی که زمینهٔ نظریهٔ فرمهای متعارف است آغازنمی‌کنیم. ابتدا مقادیر سرشت‌نما را دررابطه باقضایای قطری‌کردن ومثلثی‌کردن مطرح می‌کنیم‌وسپس راه‌خودرا به‌سوی نظریهٔ عمومی می گشاییم. فصل ۸ را به‌دو نیمه شکسته‌ایم تا به‌دنبال مطالب اساسی درمورد فضاهای ضرب داخلی

---

1. Brandeis　2. St. Louis　3. Irvine

وقطری کردن یکانی، فصل ۹ را بیاوریم که دربارهٔ فرمهای یك ونیم خطی است و دربارهٔ خواص پیچیده‌تر عملگرهای نرمال ازجمله عملگرهای نرمال روی فضاهای ضرب داخلی حقیقی به‌بحث می‌پردازد.

بعلاوه، نسبت به‌چاپ اول چند تغییر کوچك هم داده واصلاحاتی نیز درآن به‌عمل آورده‌ایم. اما فلسفهٔ بنیانی متن را همچنان حفظ کرده‌ایم.

ما برای این واقعیت که ممکن است اکثر دانشجویان عمدتاً به‌ریاضیات علاقه‌مند نباشند امتیاز خاصی قایل نشده‌ایم. زیرا اعتقاد داریم که دروس ریاضی نباید تکنیکهایی درهم وبرهم به‌دانشجویان رشته‌های علوم، مهندسی، یاعلوم اجتماعی بیاموزند، بلکه باید وسیله‌ای جهت درك مفاهیم بنیانی ریاضی برای آنان فراهم آورند.

از طرف دیگر، ما ازگوناگونی زمینه‌های تحصیلی دانشجویان وبخصوص از این واقعیت که دانشجویان ممکن است دراستدلال ریاضی مجرد تجربهٔ بسیار اندکی داشته باشند، بخوبی آگاه بوده‌ایم. بهمین دلیل درابتدای کتاب از معرفی بیش از حد ایده‌های مجرد خودداری کرده‌ایم. ضمناً پیوستی راکه متضمن مفاهیمی اساسی چون مجموعه، تابع، و رابطهٔ هم‌ارزی‌است به‌کتاب افزوده‌ایم. به‌تجربه دریافته‌ایم که روی این‌مفاهیم زیادمکث نکنیم، بلکه به‌دانشجویان‌توصیه نماییم که‌هنگام‌مواجههٔ با این مفاهیم به‌پیوست‌مراجعه‌کنند.

در سراسرکتاب مثالهای متنوع بسیاری برای مفاهیم مهمی‌که درمتن ظاهرمی‌شوند گنجانیده‌ایم. مطالعهٔ چنین مثالهایی واجد اهمیتی اساسی است و به‌کم شدن تعداد دانشجویانی منجر می‌شود که می‌توانند تعاریف، قضایا، و اثباتها را به‌ترتیب منطقی ولی بدون درك معانی مفاهیم مجرد تکرارکنند. کتاب همچنین شامل انواع بسیاری تمرین طبقه‌بندی شده (درحدود ششصدتمرین) است‌که مسائل سرراست را دربرمی گیرد تامسائلی راکه مخصوص دانشجویان خیلی زبده است. هدف این بوده است‌که تمرین بخش مهمی ازکتاب را تشکیل بدهد.

فصل یك با دستگاههای معادلات خطی ویافتن جواب آنها ازطریق عملهای سطری مقدماتی روی ماتریسها سروکار دارد. کار ما این بوده است‌که حدود شش ساعت درسی روی این مطالب وقت صرف‌کنیم. این فصل برای دانشجویان تصویری از خاستگاههای جبرخطی را فراهم می‌کند، ونیزشیوهٔ محاسباتی لازم‌جهت فهم مثالهایی ازمفاهیم مجردتری راکه درفصلهای بعد پیش می‌آیند به‌آنان می‌آموزد. فصل ۲ فضاهای برداری، زیرفضاها، پایه‌ها، و بعد را مورد بحث قرارمی‌دهد. فصل ۳ دربارهٔ تبدیلهای خطی، جبرآنها، نمایش آنها توسط ماتریسها، ونیز دربارهٔ یکریختیها، تابعکهای خطی، وفضاهای دوگان گفتگو می‌کند. فصل ۴ به‌تعریف جبر چندجمله‌ایهای بر روی یك هیأت، ایدآلهای درآن جبر، و تجزیهٔ چندجمله‌ایها به‌سازه‌های اول می‌پردازد. این فصل همچنین ریشه‌ها، فرمول‌تیلور، و فرمول درون‌یابی لاگرانژ را مورد بحث قرارمی‌دهد. فصل ۵ دترمینان ماتریسهای مربعی را عرضه می‌کند ـ دترمینان به‌عنوان تابع nخطی متناوبی از سطرهای ماتریس در نظر گرفته می‌شود ـ و سپس به‌توابع چندخطی روی مدولها ونیز به‌حلقهٔ گراسمان می‌پردازد.

مطالب مربوط به‌مدولها، مفهوم دترمینان را درمقامی گسترده‌تر وفراگیرنده‌تر از آنچه‌که معمولاً درکتب درسی مقدماتی یافت می‌شود، قـرارمی‌دهد. فصلهای ۶ و ۷ دربرگیرندهٔ بحثی است درمورد مفاهیمی‌که برای تحلیل یك تبدیل خطی تنها روی یك فضای‌برداری با بعد متناهی، تحلیل مقادیر سرشت‌نما (ویژه)، تبدیلهای مثلثی شونده وقطری شدنی، ونیز برای تحلیل مفاهیم اجزای قطری شدنی وپوچ توان تبدیلهای عمومیتر و فرمهای متعارف گـویا و ژردان بنیانی هستند. قضایای تجـزیهٔ اولیه وتجزیهٔ دوری،کـه قضیهٔ دوم ضمن مطالعهٔ زیرفضاهای مجـاز پیش می‌آید، نقشی اساسی به‌عهده دارند. فصل ۷ شامل مبحثی است درمورد ماتریسهای برروی یك میدان چند جمله‌ایها، محاسبهٔ سازه‌های پایا ومقسوم‌علیه‌های مقدماتی ماتریسها، ونیزشامل پروراندن فـرم متعارف اسمیت است. این فصل با بحثی راجع به‌عملگرهای نیم‌ساده،جهت تکمیل تحلیل یك عملگر، پایان می‌پذیرد. فصل ۸ بتفصیل دربارهٔ فضاهای ضرب داخلی بـا بعد متناهی گفتگو می کند. این فصل هندسهٔ پایه را،جهت ربط متعامدسازی با ایدهٔ «بهترین تقریب یـك بردار»،شامل می‌شود و راهش‌را به‌مفاهیم تصویرمتعامد یك بردار بروی یك زیرفضا و مکمل متعامد یك زیرفضا می گشاید. همچنین این فصل عملگرهای یکانی را مورد بحث قرارمی‌دهد، وبه‌قطری‌کردن‌عملگرهای خودالحاق و نرمال منتهی می‌شود. فصل ۹ پس از معرفی فـرمهای یك‌ونیم خطی،آنها را به عملگرهای مثبت و خودالحاق روی فضاهای ضـرب داخلی مربوط می‌سازد و به‌سمت نظریهٔ طیفی عملگرهای نرمال وسپس به‌سمت نتایج ظـریف‌تر دربارهٔ عملگرهای نرمـال روی فضاهای ضرب داخلی حقیقی یا مختلط به‌پیش می‌رود. فصل ۱۰ ضمن بحث دربارهٔ فرمهای دوخطی، برفرمهای متعارف برای فرمهای متقارن ومتقارن‌کـج ونیز برگروههای حافظ فرمهـای نابتهگون، به‌ویژه برگروههای متعامد، یکانی، شبه‌متعامد و لورنتس تأکید می‌کند.

به‌گمان ما هردرسی‌که این‌کتاب را مورد استفاده قراردهد باید فصلهای ۱، ۲، و۳ بجز احتمالاً بخشهای ۶.۳ و ۷.۳ راکه با دوگان مضاعف وترانهادهٔ تبدیلی خطی سروکار دارند تماماً شامـل شود. فصلهای ۴ و ۵ دربارهٔ چندجمله‌ایها و دترمینانها را می‌توان با درجات متفاوتی ازدقت تدریس‌کرد. درحقیقت، اید آلهای چندجمله‌ایها وخواص بنیانی دترمینانها را می‌توان‌کاملاً به‌طور خلاصه وبدون خدشهٔ جدی به‌سیرمنطقی متن درس‌داد؛ با این وجود، تمایل مااین است‌که این فصلها (به‌استثنای نتایج مربوط به‌مدولها) باکمال دقت مورد بحث قرارگیرند، چراکه این مطالب به‌نحـو بسیار بارزی نمایانگر ایده‌های اساسی جبرخطی هستند. بالاخره یك درس مقدماتی می‌تواند به‌طور مطلوبی باچهاربخش اول فصل ۶ همراه با فصل ۸ (جدید) پایان پذیرد. درصورتی‌که فرمهای گویا و ژردان نیز مدنظرباشند، پوشش جامع‌تری ازفصل ۶ الزامی است.

هنوزهم مدیون‌کسانی هستیم‌که ما را درچاپ اول یاری‌داده‌اند، بویژه به‌استادانی چون هری فورستنبرگ، لویس هوارد، دانیل‌کن، ادوارد ترپ، وبه‌خانم جودیت بوورز، خانم بتی آن (سارجنت) رز و دوشیزه فیلیس رویی. بعـلاوه، علاقه‌مندیم از بسیاری از

دانشجویان و همکارانی که نظر تیز بینشان سبب این تجدیدچاپ شده است ونیزازکارکنان پرنتیس-هال به‌خاطـر بردباریشان در سروکله زدن بـا دومؤلف گرفتار درعذاب مدیریت دانشگاهی تشکر کنیم. درپایان، تشکرخاص خود را به‌خانم سوفیاکولوراس، هم به‌خاطر مهارت و هم به‌لحاظ کوششهای خستگی‌ناپذیرش درماشین‌کردن نسخهٔ خطی تجدیدنظرشده تقدیم می کنیم.

ک. م. ه. / ر. ا. ک.

۱

معادلات خطی

۱.۱. هیأتها

فرض می‌کنیم خواننده با جبر مقدماتی اعداد حقیقی و اعداد مختلط آشنا باشد. خواص جبری اعدادی‌که در بخش عمده‌ای از این‌کتاب به‌کار خواهند رفت، ازفهرست مختصر خواص جمع وضرب مذکور در زیر بسهولت قابل استخراج‌اند. فرض‌کنیم F نمایشگر مجموعهٔ اعداد حقیقی یا مجموعهٔ اعداد مختلط باشد.

۱. جمع جابجایی است؛ یعنی به‌ازای هر x و y در F،

$$x+y=y+x.$$

۲. جمع شرکت‌پذیراست، یعنی به‌ازای هر x، y، و z در F،

$$x+(y+z)=(x+y)+z.$$

۳. عنصر[1] یکتایی مانند 0 (صفر) در F وجود دارد، به‌طوری‌که به‌ازای هر x در F، $x+0=x$.

۴. به‌هر x در F عنصر یکتای $(-x)$ در F متناظر است به‌طوری که $x+(-x)=0$.

۵. ضرب جابجایی است، یعنی به‌ازای هر x و y در F،

---

۱. عنصر را گاهی عضو هم می‌نامند.ـم.

$$xy = yx.$$

۶. ضرب شرکت‌پذیر است؛ یعنی به‌ازای هر x، y، و z در F،

$$x(yz) = (xy)z.$$

۷. عنصر غیرصفر یکتایی مانند ۱ (یك) در F وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر x در F، $x1 = x$.

۸. به‌هر x غیرصفر در F، عنصر یکتای x^{-1} (یا $1/x$) در F متناظر است به‌طوری که $xx^{-1} = 1$.

۹. ضرب برروی جمع پخش‌پذیر است؛ بدین معنی که، به‌ازای هر x، y، و z در F، $x(y+z) = xy + xz$.

فرض کنیم مجموعهٔ F متشکل از اشیاء x، y، z، ... ، و دو عمل، به‌صورت زیر، روی عناصر آن دردست باشند. عمل اول، که جمع نام دارد، به‌هرجفت عنصر x و y در F، عنصر $(x+y)$ در F را مربوط می‌سازد؛ عمل دوم، که ضرب نامیده می‌شود، به‌هر جفت x و y، عنصر xy در F را وابسته می‌سازد؛ بعلاوه، این دوعمل شرایط (۱)ـ(۹) فوق‌الذکر را برمی‌آورند. دراین صورت، مجموعهٔ F همراه با این دو عمل یك هیأت نامیده می‌شود. به‌صورت نادقیق، یك هیأت عبارت است ازمجموعه‌ای همراه با چندعمل روی اشیاء آن که رفتاری شبیه به‌اعمال جمع، ضرب، تفریق، و تقسیم معمولی در اعداد دارند؛ بدین معنی که از نه قاعدهٔ جبری مذکور دربالا تبعیت می‌کنند. C، مجموعهٔ اعداد مختلط، همراه با اعمال جمع و ضرب معمولی یك هیأت است، وهمچنین است R مجموعهٔ اعداد حقیقی.

دربخش اعظم این کتاب «اعداد»ی راکه به‌کار می‌بریم می‌توانند عناصر یك هیأت دلخواه مانند F باشند. برای تثبیت این عمومیت، به‌جای «عدد»، واژهٔ «اسکالر» را به‌کار خواهیم برد. هرگاه خواننده هیأت اسکالرهارا همواره زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط فرض کند، چیززیادی را ازدست نداده است. یك زیرهیأت از هیأت C، مجموعه‌ای است مانند F از اعداد مختلط که خود تحت اعمال معمولی جمع و ضرب اعداد مختلط، یك هیأت باشد. منظوراین است که ۰و۱ درمجموعهٔ F قرارداشته باشند، و اگر x و y عناصر F باشند، $(x+y)$، $-x$، xy، و x^{-1} (هرگاه $x \neq 0$) نیز در F باشند. مثالی ازاین‌گونه زیرهیأتها، هیأت اعداد حقیقی R است. زیرا، اگراعدادحقیقی را با اعداد مختلط $a+bi$ که در آنها $b = 0$ یکی بگیریم، ۰ و ۱ هیأت اعداد مختلط، اعدادی حقیقی محسوب می‌شوند، و اگر x و y حقیقی باشند، $(x+y)$، $-x$، xy، و x^{-1} (هرگاه $x \neq 0$) نیز حقیقی خواهند بود. مثالهای دیگری نیزدر زیر آورده خواهد شد. نکتهٔ بحثمان درمورد زیرهیأتها اساساً این است که: اگر بااسکالرهای زیرهیأت معینی از C کارکنیم، انجام اعمال جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم روی این اسکالرها ما را اززیرهیأت مفروض خارج نخواهد ساخت.

مثال ۱. مجموعهٔ **اعداد صحیح و مثبت**: ۱، ۲، ۳، ...، به‌دلایل مختلف زیر هیأتی از C نیست. مثلاً، ۰ عددی صحیح ومثبت نیست؛ به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت n، $n-$ عددی صحیح ومثبت نمی‌باشد؛ به‌ازای هرعدد صحیح ومثبت n، بجز ۱، $1/n$ عددی صحیح ومثبت نیست.

مثال ۲. مجموعهٔ **اعداد صحیح**: ...، ۲−، ۱−، ۰، ۱، ۲، ...، زیر هیأتی از C نیست، چراکه به‌ازای هرعدد صحیح n، $1/n$ عدد صحیحی نیست مگرآنکه n برابر ۱ یا ۱− باشد. مجموعهٔ اعداد صحیح همراه با اعمال جمع وضرب معمولی همهٔشرایط (۱)–(۹)، بجز شرط (۸) را برمی‌آورد.

مثال ۳. مجموعهٔ **اعداد گویا**، یعنی اعدادی به‌صورت p/q که درآنها p و q اعدادی صحیح‌اند و $q\neq 0$، زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط است. عمل تقسیم، که در مجموعهٔ اعداد صحیح ممکن نیست، درمجموعهٔ اعدادگویا امکان‌پذیر است. مناسب است که خوانندهٔ علاقه‌مند تحقیق کندکه هرزیرهیأت دلخواه C باید شامل همهٔ اعدادگویا باشد.

مثال ۴. مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط به‌صورت $x+y\sqrt{2}$، که در آنها x و y گویا هستند، زیرهیأتی از C است. تحقیق این مطلب را به‌خواننده وامی‌گذاریم.

درمثالها وتمرینات این کتاب خواننده بهتراست یا می‌بایدفرض کندکه هیأت‌درگیر دربحث زیرهیأتی ازهیأت اعداد مختلط است، مگرآنکه صریحاً قید شده باشدکه هیأت کلی‌تری منظورشده است. دراینجا قصدآن را نداریم که درمورد این نکته به‌بحث مفصلی بپردازیم؛ اما، به‌هرتقدیر بهتراست که علت قبول چنین قراردادی را بیان کنیم. درهیأت F ممکن است بتوان یکهٔ ۱ را چندین‌بار با خودش جمع کرد و به ۰ دست یافت (ر. ك. تمرین ۵ بخش ۲.۱):

$$1+1+\cdots+1=0.$$

این وضع در هیأت اعداد مختلط (یا در زیرهیأت دلخواهی ازآن) رخ نمی‌دهد. هرگاه چنین وضعی در F روی دهد، آنگاه کوچکترین nی که مجموع n تا ۱ برابر ۰ شود، **سرشت‌نمای هیأت** F نامیده می‌شود. اگرچنین وضعی درهیأت F رخ ندهد، آنگاه (به‌دلیلی کم‌وبیش عجیب) F را **هیأتی با سرشت‌نمای صفر** می‌نامند. اغلب، درمواری که F را زیرهیأتی از C فرض می‌کنیم، آنچه راکه می‌خواهیم تضمین بشود، این است که F هیأتی باشد با سرشت‌نمای صفر؛ اما، معمولاً بهتراست در نخستین برخورد با جبرخطی خیلی نگران سرشت‌نمای هیأتها نباشیم.

۲.۱. دستگاههای معادلات خطی

گیریم F یك هیأت باشد. حال مسئلهٔ یافتن n اسکالر(عنصر F) x_1، ...، x_n که درشرایط

$$
\begin{aligned}
A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= y_1 \\
A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= y_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad & \vdots \\
A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= y_m
\end{aligned} \tag{۱-۱}
$$

صدق می‌کنند، را مورد توجه قرارمی‌دهیم. دراینجا y_1، $\cdots$، y_m، و A_{ij}ها، به‌ازای $1 \leqslant i \leqslant m$ و $1 \leqslant j \leqslant n$، عناصر مفروضی از F هستند. (۱-۱) را یك **دستگاه m معادلهٔ خطی n مجهولی** می‌نامیم. هر nتایی $(x_1, \cdots, x_n)$ ازعناصر F که درهریك ازمعادلات (۱-۱) صدق کند، یك **جواب** دستگاه نامیده می‌شود. هرگاه $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$، گوییم دستگاه **همگن** است، یا آنکه هریك ازمعادلات همگن می‌باشد.

شاید اساسی‌ترین روش یافتن جوابهای یك دستگاه معادلات خطی، روش «حذف» باشد. این روش را می‌توان روی دستگاه همگن

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\
x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

نشان داد. اگر (-2) برابر معادلهٔ دوم را به‌معادلهٔ اول بیفزاییم، معادلهٔ

$$-7x_2 - 7x_3 = 0$$

یا $x_2 = -x_3$ را به‌دست می‌آوریم. اگر(۳)برابر معادلهٔ اول را به‌معادلهٔ دوم بیفزاییم، معادلهٔ

$$7x_1 + 7x_3 = 0$$

یا $x_1 = -x_3$ حاصل می‌شود. لذا، نتیجه می‌گیریم که اگر (x_1, x_2, x_3) یك جواب باشد، آنگاه $x_1 = x_2 = -x_3$. بعکس، بآسانی می‌توان دیدکه هرسه‌تایی ازاین نوع یك جواب است. بنا براین، مجموعهٔ جوابها متشکل‌است ازهمهٔ سه‌تاییهای $(-a, -a, a)$.

جوابهای این دستگاه معادلات را با «حذف مجهولها» یافتیم؛ بدین معنی که باضرب معادلات دراسکالرها وسپس افزودن آنها به‌هم معادلاتی به‌دست آوردیم که درآنها بعضی از x_jها ظاهر نشدند. می‌خواهیم این فرایند را اندکی رسمیت بخشیم تا علت درست بودنش را دریابیم ونیز بتوانیم محاسبات لازم برای حل یك دستگاه را با روشی منظم انجام بدهیم.

فرض‌کنیم برای دستگاه عمومی (۱-۱)، m اسکالر c_1، c_2، $\cdots$، c_m را انتخاب، معادلهٔ jم را در c_j ضرب، وسپس آنها را با هم جمع کرده باشیم. بدین‌نحو، معادلهٔ

$$
\begin{aligned}
(c_1A_{11} + \cdots + c_mA_{m1})x_1 + \cdots + (c_1A_{1n} + \cdots + c_mA_{mn})x_n \\
= c_1y_1 + \cdots + c_my_m
\end{aligned}
$$

را به‌دست می‌آوریم. چنین معادله‌ای را یك **ترکیب خطی** از معادلات (۱-۱) می‌نامیم. بدیهی است که هرجواب کل دستگاه معادلات (۱-۱)، یك جواب این معادلهٔ جدید نیز خواهد بود. این مطلب، ایدهٔ اساسی فرایند حذف است. اگر دستگاه معادلات خطی دیگر

$$\begin{aligned} B_{11}x_1 + \cdots + B_{1n}x_n &= z_1 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ B_{k1}x_1 + \cdots + B_{kn}x_n &= z_k \end{aligned} \tag{۱-۲}$$

را داشته باشیم، که در آن هریك ازاین k معادله ترکیبی خطی از معادلات دستگاه (۱-۱) باشد، آنگاه هرجواب (۱-۱) یك‌جواب‌دستگاه جدیدنیز هست. البته، این امکان‌وجود دارد که برخی ازجوابهای (۱-۲) جواب (۱-۱) نباشند. واضح است که اگر هرمعادلهٔ دستگاه‌اصلی ترکیبی خطی ازمعادلات دستگاه جدید باشد، این وضع پیش نخواهد آمد. دو دستگاه معادلات‌خطی را **هم‌ارز** نامیم، هر گاه هرمعادلهٔ یك دستگاه ترکیبی‌خطی ازمعادلات دستگاه دیگرباشد. بدین نحو، می‌توانیم مشاهدات خود را رسماً به‌صورت زیر بیان کنیم.

قضیهٔ ۱. جوابهای دستگاههای معادلات خطی هم‌ارز یکی هستند.

هر گاه فرایند حذف دریافتن جوابهای دستگاهی نظیر (۱-۱) مؤثر باشد، دراین صورت باید دید چگونه می‌توان با تشکیل ترکیبات خطی معادلات داده شده، دستگاه معادلات هم‌ارزی به‌دست آورد که حل آن ساده‌تر باشد. در بخش بعد، دربارهٔ یك روش انجام این‌کار بحث خواهیم کرد.

تمرین

۱. تحقیق کنید مجموعه‌ای از اعداد مختلط که در مثال ۴ توصیف شده زیرهیأتی از C است.

۲. فرض کنید F هیأت اعداد مختلط باشد. آیا دو دستگاه معادلات خطی زیرهم‌ارزند؟ اگر چنین‌است، هرمعادلهٔ این‌دو دستگاه را به‌صورت ترکیبی خطی ازمعادلات دستگاه دیگر بیان کنید.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

۳. دستگاههای معادلات زیررا همانند تمرین ۲ بررسی کنید.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{5}{2}x_3 = 0$$

۴. دستگاههای زیررا همانند تمرین ۲ مورد بررسی قراردهید.

$$\left(1+\frac{i}{2}\right)x_1 + 8x_2 - ix_3 - x_4 = 0 \qquad 2x_1 + (-1+i)x_2 + \qquad x_4 = 0$$

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \qquad 3x_2 - 2ix_3 + 5x_4 = 0$$

۵. فرض کنید F مجموعهٔ متشکل از تنها دوعنصره و ۱ باشد. اعمال جمع و ضرب را با جدولهای زیرتعریف می‌کنیم:

+	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۰

·	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

تحقیق کنید که F همراه با این دوعمل یك هیأت است.

۶. ثابت کنید که اگر جوابهای دودستگاه معادلات خطی همگن یکی باشند، آنگاه آن دو دستگاه هم‌ارزند.

۷. ثابت کنید که هرزیرهیأت ازهیأت اعداد مختلط شامل همهٔ اعدادگویاست.

۸. ثابت کنید که هرهیأت با سرشت‌نمای صفرشامل نسخه‌ای ازهیأت اعدادگویاست.

۳.۱. ماتریسها و اعمال سطری مقدماتی

درتشکیل ترکیبات خطی از معادلات خطی نمی‌توان بدون توجه به‌این نکته‌گذشت که نیازی به‌ادامهٔ نوشتن «مجهولهای» x_1، ...، x_n نیست،چرا که محاسبات عملاً فقط روی ضرایب A_{ij} و اسکالرهای y_i صورت می‌گیرند. دستگاه (۱-۱) را اکنون به‌صورت

$$AX = Y$$

که درآن

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

خلاصه می‌کنیم. A را **ماتریس ضرایب** این دستگاه می‌نامیم. دراصل باید بگوییم که آرایهٔ مستطیلی نموده شده در بالا یک ماتریس نیست، بلکه نمایشی از یک ماتریس است. یك **ماتریس** $m\times n$ **برروی هیأت** F عبارت است ازیك تابع A ازمجموعهٔ جفتهای (i, j) از اعداد صحیح، $1\leqslant i\leqslant m$ و $1\leqslant j\leqslant n$، در هیأت F. **درایه‌های** ماتریس A عبارتند از اسکالرهای $A(i, j)=A_{ij}$، واغلب بسیار راحت‌تراست که، همچون بالا، این ماتریس را با نمایش درایه‌هایش دریك آرایهٔ مستطیلی mسطری و nستونی توصیف کنیم. بدین نحو، X (در بالا) یك ماتریس $n\times 1$ است، یا یك ماتریس $n\times 1$ را تعریف می کند، و Y یك ماتریس $m\times 1$ می باشد. درحال حاضر، $AX=Y$ چیزی جز نمادی خلاصه‌نویسی برای دستگاه معادلات‌خطی ما نیست. بعدها، که ضرب ماتریسها را تعریف کردیم ، Y به‌معنی حاصل ضرب دوماتریس A و X نیزخواهد بود.

اکنون می‌خواهیم آن دسته ازاعمال روی سطرهای ماتریس A را، که متناظر به‌تشکیل ترکیبات خطی معادلات در دستگاه $AX=Y$ هستند، مورد توجه قراربدهیم. ابتدا، توجه خود را بەسه **عمل سطری مقدماتی** روی یک ماتریس $m\times n$، مانند A، برروی هیأت F محدود می‌سازیم:

۱. ضرب یك سطر A دریك اسکالر غیرصفر c؛

۲. گذاشتن به‌جای سطر rم A سطر r بعلاوهٔ c برابرسطر s، که درآن c یك اسکالر است و $r\neq s$.

۳. تعویض دوسطر A.

بدین‌نحو، یك عمل سطری مقدماتی عبارت است از نوعی تابع (قاعدهٔ) خاص مانند e که به‌هرماتریس $m\times n$، مانند A، ماتریس $e(A)$ راکه $m\times n$ است متناظر می‌سازد. e را بطوردقیق می‌توان دراین سه‌حالت، به‌صورت زیرتوصیف کرد:

۱. $e(A)_{ij}=A_{ij}$ هرگاه $i\neq r$، و $e(A)_{rj}=cA_{rj}$.

۲. $e(A)_{ij}=A_{ij}$ هرگاه $i\neq r$، و $e(A)_{rj}=A_{rj}+cA_{sj}$.

۳. $e(A)_{ij}=A_{ij}$ هرگاه i مخالف با r و مخالف با s باشد، و $e(A)_{rj}=A_{sj}$، و $e(A)_{sj}=A_{rj}$. درتعریف $e(A)$، درواقع این مهم نیست که ماتریس A چندستون دارد، اما تعداد سطرهای آن کاملاً حائزاهمیت است. مثلاً، درتصمیم گیری راجع به این که معنی تعویض سطرهای ۵ و ۶ در یك ماتریس 5×5 چیست، باید کمی نگران بود. برای اجتناب ازاین گونه پیچیدگیها، توافق می کنیم که عمل سطری مقدماتی e روی ردهٔ همهٔ ماتریسهای $m\times n$ برروی هیأت F، به‌ازای یك m ثابت اما هر n دلخواه، تعریف می‌شود. به بیان دیگر،

یك e بخصوص روی ردهٔ همهٔ ماتریسهای mسطری برروی F تعریف می‌شود.

یك دلیل این‌که ما خود را به‌این سه نوع ساده ازاعمال سطری محدود می‌سازیم این است که پس از انجام یك‌چنین عمل e روی یك ماتریس A، می‌توانیم با انجام عملی مشابه روی $e(A)$ ماتریس A را دوباره به‌دست بیاوریم.

قضیهٔ ۲. به هر عمل سطری مقدماتی e یك عمل سطری مقدماتی e_1، از همان نوع e، متناظر است، به‌طوری که به‌ازای هر ماتریس A، $e_1(e(A))=e(e_1(A))=A$. به‌بیان دیگر، عمل (تابع) معکوس هرعمل سطری مقدماتی وجود دارد، و خود یك عمل سطری مقدماتی از همان نوع است.

اثبات. (۱) فرض کنیم e عملی باشد که سطرrم یك ماتریس را در اسکالر غیرصفر c ضرب می‌کند. e_1 را عملی بگیرید که سطر r را در اسکالر c^{-1} ضرب می‌کند. (۲) فرض کنید e عملی باشد که سطر r را با سطر r بعلاوهٔ c برابر سطر s، $s\neq r$، جایگزین می‌کند. در این حالت، e_1 را عملی بگیرید که سطر rم را با سطر r بعلاوهٔ $(-c)$ برابر سطر s جایگزین می‌سازد. (۳) اگر e عمل تعویض سطرهای rم و sم باشد، e_1 را همان e بگیرید. در هریك از این سه حالت، به‌ازای هرماتریس A، بوضوح داریم

$$e_1(e(A))=e(e_1(A))=A. \quad \square$$

تعریف. اگر A و B دوماتریس $m\times n$ برروی هیأت F باشند، گوییم B هم ارزسطری A است، هرگاه بتوان B را با دنباله‌ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی از A به‌دست آورد.

با استفاده ازقضیهٔ ۲ خواننده براحتی می‌تواند مطالب زیر را تحقیق کند. هرماتریس هم‌ارز سطری خودش است؛ اگر B هم‌ارز سطری A باشد، آنگاه A هم‌ارز سطری B است؛ اگر B هم‌ارز سطری A و C هم‌ارز سطری B باشد، آنگاه C هم‌ارز سطری A است. به‌بیان دیگر، هم‌ارزی سطری یك رابطهٔ هم‌ارزی است (ر. ك. ضمیمه).

قضیهٔ ۳. اگر دو ماتریس $m\times n$، A و B هم‌ارز سطری باشند، آنگاه جوابهای دو دستگاه معادلات خطی همگن $AX=0$ و $BX=0$ یکی هستند.

اثبات. فرض کنیم با دنباله‌ای متناهی ازاعمال سطری مقدماتی، از A به B برسیم:

$$A=A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_k=B.$$

کافی است ثابت کنیم جوابهای دو دستگاه $A_jX=0$ و $A_{j+1}X=0$ یکی هستند؛ یعنی، اعمال سطری مقدماتی مجموعهٔ جوابها را تغییر نمی‌دهند.

لذا، فرض کنیم B با یك تك‌عمل سطری مقدماتی از A به‌دست آید. صرف‌نظر از نوع این عمل، اعم از (۱)، (۲)، یا (۳)، هرمعادله دستگاه $BX=0$ ترکیبی خطی از

معادلات دستگاه $AX=0$ است. چون معکوس یك عمل سطری مقدماتی خود یك عمل سطری مقدماتی است، هر معادلهٔ دستگاه $AX=0$ نیز ترکیبی خطی از معادلات دستگاه $BX=0$ می‌باشد. ازاین‌رو، این دودستگاه هم‌ارزند، و بنابر قضیهٔ ۱ جوابهایشان یکی است. □

مثال ۵. فرض کنیم A هیأت اعداد گویا باشد، و

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

دنباله‌ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس A انجام می‌دهیم، و با اعدادی در پرانتز نوع عمل انجام شده را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{55}{2} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

هم‌ارزی سطری ماتریس A با ماتریس آخر دنبالهٔ بالا، علی‌الخصوص برای ما روشن می‌سازد که جوابهای

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} x_3 - \frac{11}{3}x_4 &= 0 \\ x_1 \qquad + \frac{17}{3}x_4 &= 0 \\ x_2 \qquad - \frac{5}{3}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

یکی هستند. در دستگاه دوم، روشن است که هرگاه مقدار دلخواه گویای c را به x_4 نسبت بدهیم، جواب $(-\frac{17}{3}c, \frac{5}{3}, \frac{11}{3}c, c)$ را به‌دست می‌آوریم، و نیز روشن است که همهٔ جوابها به‌همین صورت می‌باشند.

مثال ۶. فرض کنیم F هیأت اعداد مختلط باشد، و

$$A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

در انجام اعمال سطری غالباً راحت‌تر است که چند عمل از نوع (۲) را توأماً انجام دهیم. با درنظر داشتن این مطلب،

$$\begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 2+i \\ 0 & 3+2i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3+2i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنا بر این، دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} -x_1 + ix_2 &= 0 \\ -ix_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

فقط دارای جواب بدیهی $x_1 = x_2 = 0$ است.

درمثالهای ۵ و۶، بدیهی است که اعمال سطری را به‌طور تصادفی انجام نداده‌ایم. گزینش ما ازاعمال سطری تحت تأثیر تمایلی برای ساده‌کردن ماتریس ضرایب، به‌گونه‌ای شبیه به«حذف مجهولها» دردستگاه معادلات خطی، صورت می‌گیرد. اکنون، اجازه‌بدهید تعریفی رسمی ازنوع ماتریسی راکه سعی داشتیم بدان دست یابیم، ارائه کنیم.

تعریف. ماتریسِ $m\times n$، مانند R، **تحویل شدهٔ سطری** نامیده می‌شود، هرگاه:

(الف) اولین درایهٔ غیرصفر در هر سطر غیرصفر R برابر ۱ باشد؛

(ب) همهٔ درایه‌های دیگر هرستونی از R که شامل درایهٔ غیر صفر مقدم یك سطر است، ۰ باشند.

مثال ۷. یك‌مثال ازماتریسهای تحویل شدهٔسطری، **ماتریس همانی** $n\times n$ (مربعی) I است. این ماتریس، ماتریسی $n\times n$ است که با

$$I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \text{ هرگاه } \\ 0 & i\neq j \text{ هرگاه } \end{cases}$$

تعریف می‌شود. این اولین کاربرد **دلتای‌کرونکر**[1] (δ) است که کراراً به‌کار خواهد رفت.

در مثالهای ۵ و۶، آخرین ماتریسها در دنباله‌های نمایش داده شده، ماتریسهای

1. Kronecker

تحویل شدهٔ سطری هستند. دومثال از ماتریسهایی که تحویل شدهٔ سطری نیستند، ماتریسهای زیرند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

دومین ماتریس درشرط (الف) صدق نمی‌کند، زیرا درایهٔ غیرصفرمقدم اولین سطرآن ۱ نیست. اولین ماتریس شرط (الف) را برمی‌آورد، اماستون ۳ آن حایزشرط (ب)نیست.

اکنون ثابت می‌کنیم که می‌توان از هرماتریس داده شده، با تعدادی متناهی عمل سطری مقدماتی، به‌یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری رسید. ترکیب این مطلب با قضیهٔ ۳ ابزار مؤثری برای حل دستگاههای معادلات خطی به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۴. هرماتریس $m \times n$ برروی هیأت F، هم‌ارز سطری یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری است.

اثبات. گیریم A یك ماتریس $m \times n$ برروی هیأت F باشد. اگر همهٔ درایه‌های سطراول A برابر ۰ باشند، آنگاه تا آنجایی‌که به‌سطر اول مربوط است، شرط (الف) برقرار است. اگرسطراول دارای یك درایهٔ غیرصفر باشد، k راکوچکترین عدد صحیح مثبت j می‌گیریم که به‌ازای آن $A_{1j} \neq 0$. سطر اول را در A_{1k}^{-1} ضرب می‌کنیم تا بدین ترتیب شرط (الف) درسطراول برقرارباشد. اکنون به‌ازای هر $i \geqslant 2$، $(-A_{ik})$ برابر سطراول‌را به‌سطر iام می‌افزاییم. بدین‌نحو، درایهٔ غیرصفرمقدم سطراول درستون kام قرار می‌گیرد؛ این درایه ۱ است، و هردرایهٔ دیگرستون kام برابر ۰ است.

اکنون ماتریس حاصل ازاعمال فوق را درنظرمی‌گیریم. هرگاه همهٔ درایه‌های‌سطر دوم ۰ باشند، روی آن هیچ‌عملی انجام‌نمی‌دهیم. اما، اگردرایه‌ای درسطردوم مخالف ۰ باشد، این سطررا دراسکالرمناسبی ضرب می‌کنیم تا درایهٔ غیرصفر مقدم آن ۱ بشود. در حالتی‌که سطراول، درایهٔ غیرصفرمقدمی درستون kام داشته باشد، این درایهٔ غیرصفرمقدم سطردوم‌نمی‌تواند‌درستون kام‌قرار گیرد. لذا، فرض کنیددرایهٔ اخیردرستون $k' \neq k$ باشد. با افزودن مضربهای مناسبی ازسطردوم به‌سطوردیگر، می‌توان ترتیبی دادکه تمامی درایه‌های ستون k'، بجز ۱ موجود درسطر دوم، ۰ گردند. نکتهٔ مهم قابل توجه این است‌که ضمن انجام اعمال اخیر، نه‌تنها درایه‌های سطر۱ در ستونهای ۱، ...، k تغییرنمی‌کنند، بلکه همهٔ درایه‌های ستون kام نیزبدون تغییر می‌مانند. البته، اگرهمهٔ درایه‌های سطراول صفر باشند، اعمال روی سطردوم تأثیری برسطراول نخواهند داشت.

هرگاه روش فوق‌الذکررا هربار روی یك سطربه‌کار بندیم، روشن است‌که پس ازطی مراحلی متناهی به‌یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری دست خواهیم یافت. □

تمرین

۱. همهٔ جوابهای دستگاه معادلات

$$(۱-i)x_۱-i\,x_۲=۰$$
$$۲x_۱+(۱-i)x_۲=۰$$

را به‌دست آورید.

۲. اگر

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

با تحویل سطری کردن A، همهٔ جوابهای $AX=۰$ را به‌دست آورید.

۳. اگر

$$A=\begin{bmatrix} ۶ & -۴ & ۰ \\ ۴ & -۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

همهٔ جوابهای دستگاههای $AX=۲X$ و $AX=۳X$ را به‌دست آورید. (علامت cX نشانگر ماتریسی است که هردرایهٔ آن c برابر درایهٔ متناظرش درماتریس X است.)

۴. یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری بیابید که هم‌ارز سطری ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} i & -(۱+i) & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۱ \\ ۱ & ۲i & -۱ \end{bmatrix}$$

باشد.

۵. ثابت کنید که دوماتریس زیرهم‌ارز سطری نیستند:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ a & -۱ & ۰ \\ b & c & ۳ \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}.$$

۶. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ماتریسی ۲ × ۲ با درایه‌های مختلط باشد. همچنین فرض کنید A تحویل شدهٔ سطری باشد، و $a+b+c+d=0$. ثابت کنید که دقیقاً سه ماتریس ازاین نوع وجود دارد.

۷. ثابت کنید که عمل تعویض دوسطر یك ماتریس را می‌توان با دنباله‌ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی از دو نوع دیگر انجام داد.

۸. دستگاه معادلات $AX=0$ را که در آن

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

یك ماتریس ۲ × ۲ بر روی هیأت F است، درنظر بگیرید. ثابت کنید که:

(الف) اگر همهٔ درایه‌های A صفر باشند، آنگاه هرجفت (x_1, x_2) جوابی برای $AX=0$ است.

(ب) اگر $ad-bc\neq 0$، آنگاه دستگاه $AX=0$ فقط دارای جواب بدیهی $x_1=x_2=0$ است.

(پ) اگر $ad-bc=0$ و درایه‌ای از A مخالف ۰ باشد، آنگاه جوابی چون (x_1^0, x_2^0) وجود دارد به‌طوری که (x_1, x_2) یك جواب دستگاه است اگر و تنها اگر اسکالری چون y با شرایط $x_1=yx_1^0$ و $x_2=yx_2^0$ وجود داشته باشد.

۴.۱ ماتریسهای تحویل شدهٔ سطری پلکانی

تا به‌حال، کار ما روی دستگاههای معادلات خطی از کوششی جهت یافتن جوابهای این دستگاهها نشأت می‌گرفت. در بخش ۳.۱ روشی متعارفی برای یافتن این جوابها بنیاد نهادیم. اکنون می‌خواهیم اطلاعاتی به‌دست آوریم که اندکی بیشتر جنبهٔ نظری دارند، و برای این منظور، مناسب است ازماتریسهای تحویل شدهٔ سطری پا را کمی فراتر نهیم.

تعریف. ماتریس $m\times n$ ی، مانند R، **تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی** نامیده می‌شود هرگاه:

(الف) R تحویل شدهٔ سطری باشد؛

(ب) هرسطر R که همهٔ درایه‌هایش صفرباشند، زیر همهٔ سطوری که دارای درایه‌ای غیرصفرند واقع بشود؛

(پ) اگرسطرهای $r, \ldots, 1$ سطرهای غیرصفر ماتریس R باشند و درایهٔ غیرصفر مقدم سطر i ام در ستون k_i ام، $i=1, 2, \ldots, r$، واقع بشود، آنگاه

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_r.$$

هرماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی $m\times n$ مانند R را می‌توان به‌صورت زیر توصیف کرد. یا هر درایهٔ R برابر ۰ است، و یا عدد صحیح مثبتی مانند r، $1\leqslant r\leqslant m$، و r عدد صحیح مثبت k_1، k_2، ...، k_r، با شرط $1\leqslant k_i\leqslant n$ وجود دارند به‌طوری که

(الف) به‌ازای $i>r$، $R_{ij}=0$؛ و اگر $j<k_i$، آنگاه $R_{ij}=0$.

(ب) $R_{ik_j}=\delta_{ij}$، $1\leqslant i\leqslant r$ و $1\leqslant j\leqslant r$.

(پ) $k_1<\cdots<k_r$.

مثال ۸. ماتریس همانی $n\times n$ و **ماتریس صفر** $m\times n$ که با $0^{m,n}$ نشان داده می‌شود و همهٔ درایه‌هایش ۰ هستند، دو مثال از ماتریسهای تحویل شدهٔ سطری پلکانی‌اند. هرچند، خواننده در ساختن مثالهای دیگر نباید مشکل چندانی داشته باشد، با این حال، علاقه‌مندیم مثالی غیربدیهی هم ارائه کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

قضیهٔ ۵. هر ماتریس $m\times n$ مانند A با یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی هم‌ارز سطری است.

اثبات. می‌دانیم که A هم‌ارز سطری با یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری است. تنها چیزی که باید ثابت کنیم این است که با انجام تعدادی متناهی عمل تعویض سطری روی یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری می‌توان آن را به‌شکل تحویل شدهٔ سطری پلکانی درآورد. □

در مثالهای ۵ و ۶ اهمیت ماتریسهای تحویل شدهٔ سطری را در حل دستگاههای معادلات خطی همگن دیدیم. اکنون به‌طور خلاصه دستگاه $RX=0$ را، که در آن R یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی است، مطرح می‌کنیم. فرض کنیم سطرهای ۱، ...، r سطرهای غیرصفر R، و درایهٔ غیرصفرمقدم سطر iام آن در ستون k_iام باشد. دراین‌صورت، دستگاه $RX=0$ مرکب از r معادلهٔ غیربدیهی است. بعلاوه، مجهول x_{k_i} فقط در iامین معادله (با ضریب غیرصفر) ظاهر می‌شود. اگر u_1، ...، u_{n-r} را $(n-r)$ مجهول غیراز x_{k_1}، ...، x_{k_r} فرض کنیم، آنگاه r معادلهٔ غیربدیهی در $RX=0$، به‌صورت

$$\begin{aligned} x_{k_1}+\sum_{j=1}^{n-r}c_{1j}u_j &= 0 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ x_{k_r}+\sum_{j=1}^{n-r}c_{rj}u_j &= 0 \end{aligned} \qquad (۳\text{-}۱)$$

هستند. همهٔ جوابهای دستگاه معادلات $RX=0$ با تخصیص مقادیری دلخواه به $u_1, \ldots,$ u_{n-r} و سپس محاسبهٔ مقادیر متناظر $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ از (۱-۳) به‌دست می‌آیند. مثلاً، اگر R ماتریس نشان داده شده در مثال ۸ باشد، آنگاه $r=2$، $k_1=2$، $k_2=4$، و دو معادلهٔ غیربدیهی در دستگاه $RX=0$، عبارتند از

$$x_2 - 3x_3 + \frac{1}{2}x_5 = 0 \qquad \text{یا} \qquad x_2 = 3x_3 - \frac{1}{2}x_5$$

$$x_4 + 2x_5 = 0 \qquad \text{یا} \qquad x_4 = -2x_5.$$

لذا، می‌توان هرمقداری به x_1، x_3، و x_5 تخصیص داد، مثلاً $x_1=a$، $x_3=b$، و $x_5=c$، و جواب $(a, 3b-\frac{1}{2}c, b, -2c, c)$ را به‌دست آورد.

حال درمورد دستگاه معادلات $RX=0$ مطلب دیگری را بررسی می‌کنیم. اگر r، تعداد سطرهای غیرصفرماتریس R، کمتر از n باشد، آنگاه دستگاه $RX=0$ دارای یک جواب غیربدیهی، یعنی یک جواب $(x_1, \ldots, x_n)$ است که در آن همهٔ x_jها صفر نیستند. زیرا، به‌دلیل اینکه $r<n$، می‌توانیم x_jای را انتخاب کنیم که در بین r مجهول x_{k_1}، $\ldots$، x_{k_r} نباشد، و دراین صورت می‌توانیم جوابی همچون جواب بالا راکه درآن این x_j برابر ۱ باشد، بسازیم. این مطلب ما را به‌یکی از بنیادیترین واقعیتهای در بارهٔ دستگاههای معادلات خطی همگن می‌رساند.

قضیهٔ ۶. اگر A یك ماتریس $m \times n$ و $m<n$ باشد، آنگاه دستگاه معادلات خطی همگن $AX=0$ یك جواب غیربدیهی دارد.

اثبات. فرض‌کنیم R یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی باشدکه با A هم‌ارز سطری است. بنابر قضیهٔ ۳، جوابهای دستگاههای $AX=0$ و $RX=0$ یکی هستند. اگر r تعداد سطرهای غیرصفر R باشد، آنگاه یقیناً $r \leqslant m$، وچون $m<n$، داریم $r<n$. از ملاحظات فوق بیدرنگ نتیجه می‌شودکه $AX=0$ یك جواب غیربدیهی دارد. □

قضیهٔ ۷. اگر A یك ماتریس $n \times n$ (مربعی) باشد، آنگاه A هم‌ارز سطری ماتریس همانی $n \times n$ است اگر و تنها اگر دستگاه معادلات $AX=0$ فقط جواب بدیهی داشته باشد.

اثبات. اگر A هم‌ارز سطری I باشد، آنگاه جوابهای $AX=0$ و $IX=0$ یکی هستند. بعکس، فرض‌کنیم $AX=0$ فقط دارای جواب بدیهی $X=0$ باشد. R را ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی $n \times n$ ی می‌گیریم که هم‌ارز سطری A است. فرض‌کنیم r تعداد سطرهای غیرصفر R باشد. در این صورت، $RX=0$ هیچ جواب غیربدیهی‌ندارد. بنابراین، $r \geqslant n$. از طرفی، چون R دارای n سطراست، روشن است که $r \leqslant n$ وبنابراین $r=n$. چون مطلب اخیر به‌این معنی است که R عملاً در هریك از n سطرش یك درایهٔ غیرصفرمقدم ۱ دارد، و نیز این ۱ها هریك در یکی از n ستون مختلف قرار دارند، R

می‌باید ماتریس همانی $n\times n$ باشد. □

اکنون این سؤال را مطرح می‌کنیم که اثر اعمال سطری مقدماتی درجریان حل یك دستگاه معادلات خطی ناهمگن $AX=Y$ چیست؟ در بدو امر، تفاوتی اساسی بین این حالت و حالت همگن مشاهده می‌شود، وآن این است که علی‌رغم این‌که دستگاه همگن همواره دارای جواب بدیهی $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ است، لازم نیست یك دستگاه ناهمگن اصلاً جوابی داشته باشد.

A'، **ماتریس افزودهٔ** دستگاه $AX=Y$ را تشکیل می‌دهیم. این ماتریس، ماتریسی $m\times(n+1)$ است که n ستون اولش ستونهای ماتریس A و ستون آخرش Y است. به‌طور دقیقتر،

$$A'_{ij}=A_{ij} \qquad \text{اگر } j\leqslant n،$$

$$A'_{i(n+1)}=y_i.$$

فرض کنیم دنباله‌ای از اعمال سطری‌مقدماتی روی A انجام داده‌ایم تا به‌یك ماتریس‌تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی R برسیم. اگر همین دنباله از اعمال سطری را روی ماتریس افزودهٔ A' انجام دهیم، به‌ماتریسی چون R' می‌رسیم که n ستون اولش ستونهای R، و ستون آخرش متشکل از اسکالرهای معین z_1، $\cdots$، z_m است. اسکالرهای z_i، درایه‌های ماتریس $m\times 1$

$$Z=\begin{bmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_m\end{bmatrix}$$

هستند که از به‌کار بستن دنبالهٔ اعمال سطری فوق روی ماتریس Y حاصل می‌شوند. برای خواننده می‌باید روشن باشد که، درست شبیه اثبات قضیهٔ ۳، دستگاههای $AX=Y$ و $RX=Z$ هم‌ارزند، و از این‌رو، جوابهایشان یکی است. تعیین این‌که آیا دستگاه $RX=Z$ دارای جوابی هست یا نه، و نیز تعیین همهٔ جوابهای این دستگاه، درصورت وجود،کار بسیار آسانی است. زیرا، اگر R دارای r سطرغیرصفر باشد، و درایهٔ غیرصفر مقدم سطر iام درستون k_iام، $i=1,2,\cdots,r$، قرار بگیرد،آنگاه r معادلهٔ اول $RX=Z$ عملاً x_{k_1}،$\cdots$،x_{k_r} را بر حسب $(n-r)$ مجهول باقیماندهٔ x_j واسکالرهای z_1،$\cdots$،z_r بیان می‌کنند. $(m-r)$ معادلهٔ آخرعبارتند از

$$\begin{aligned} 0&=z_{r+1}\\ \vdots\ &\quad\ \vdots\\ 0&=z_m\end{aligned}$$

و بنابراین، شرط وجود جواب برای دستگاه این است که به‌ازای $i > r$، $z_i = ۰$. اگر این شرط برقرار باشد، همهٔ جوابهای دستگاه، دقیقاً مانند حالت همگن، با تخصیص مقادیر دلخواه به $(n-r)$ مجهول x_j، وسپس محاسبهٔ x_{k_i} از i مین معادله به‌دست می‌آیند.

مثال ۹. گیریم F هیأت اعداد گویا و

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۵ & -۱ \end{bmatrix}$$

باشد، و بخواهیم دستگاه $AX=Y$ را، به‌ازای مقادیر $y_۱$، $y_۲$، و $y_۳$ حل کنیم. روی ماتریس افزودهٔ A' دنباله‌ای از اعمال سطری که A را تحویل شدهٔ سطری می‌سازد، انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & y_۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & y_۲ \\ ۰ & ۵ & -۱ & y_۳ \end{bmatrix} \xrightarrow{(۲)} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & y_۱ \\ ۰ & ۵ & -۱ & (y_۲-۲y_۱) \\ ۰ & ۵ & -۱ & y_۳ \end{bmatrix} \xrightarrow{(۲)}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & y_۱ \\ ۰ & ۵ & -۱ & (y_۲-۲y_۱) \\ ۰ & ۰ & ۰ & (y_۳-y_۲+۲y_۱) \end{bmatrix} \xrightarrow{(۱)}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & y_۱ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵}(y_۲-۲y_۱) \\ ۰ & ۰ & ۰ & (y_۳-y_۲+۲y_۱) \end{bmatrix} \xrightarrow{(۲)}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۳}{۵} & \frac{۱}{۵}(y_۱+۲y_۲) \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵}(y_۲-۲y_۱) \\ ۰ & ۰ & ۰ & (y_۳-y_۲+۲y_۱) \end{bmatrix}.$$

از این‌رو، شرطی که تحت آن دستگاه $AX=Y$ دارای جواب باشد، عبارت است از

$$۲y_۱-y_۲+y_۳=۰.$$

هرگاه اسکالرهای داده شدهٔ y_i این شرط را برآورند، همهٔ جوابها با تخصیص یک مقدار

دلخواه c به x_3، و سپس محاسبهٔ

$$x_1 = -\frac{3}{5}c + \frac{1}{5}(y_1 + 2y_2)$$

$$x_2 = \quad \frac{1}{5}c + \frac{1}{5}(y_2 - 2y_1)$$

به‌دست می‌آیند.

اکنون به‌مشاهدهٔ آخرین مطلب دربارهٔ دستگاه $AX = Y$ می‌پردازیم. فرض کنیم برحسب اتفاق درایه‌های ماتریس A و اسکالرهای y_1، ...، y_m در زیر هیأت F_1 از هیأت F قرار گیرند. اگر دستگاه معادلات $AX = Y$ دارای جوابی با x_1، ...، x_n در F باشد، این دستگاه دارای جوابی با x_1، ...، x_n در F_1 است؛ زیرا، برروی هریك از این دو هیأت، شرط وجود جواب برای دستگاه عبارت است از برقراری روابط‌معینی بین y_1، ...، y_m در F_1 (روابط $z_i = 0$، به‌ازای $i > r$، که قبلاً ذکر شد). به‌عنوان مثال، فرض کنیم $AX = Y$ دستگاهی از معادلات خطی باشد که در آن اسکالرهای y_k و همچنین A_{ij}ها همه حقیقی‌اند. اگر جوابی برای این دستگاه موجود باشد که در آن x_1، ...، x_n مختلط باشند، آنگاه این دستگاه دارای جوابی است که‌در آن x_1، ...، x_n حقیقی‌اند.

تمرین

۱. همهٔ جوابهای دستگاه معادلات زیر را با تحویل سطری کردن ماتریس ضرایب آن به‌دست آورید:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}x_1 + 2x_2 - 6\ x_3 &= 0\\
-4x_1 \qquad\quad + 5\ x_3 &= 0\\
-3x_1 + 6x_2 - 13x_3 &= 0\\
-\frac{7}{3}x_1 + 2x_2 - \frac{8}{3}\ x_3 &= 0.
\end{aligned}$$

۲. ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی‌ای بیابید که هم‌ارز سطری ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix}$$

باشد. جوابهای $AX = 0$ را به‌دست آورید.

۳. همهٔ ماتریسهای 2×2 تحویل شدهٔ سطری پلکانی را به‌طور صریح توصیف کنید.

۴. دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

را درنظر بگیرید. آیا این‌دستگاه‌جواب‌دارد؟ اگرچنین است، همهٔ این‌جوابهاراصریحاً توصیف کنید.

۵. مثالی ازیك دستگاه دومعادلهٔ خطی دومجهولی بیاوریدکه جواب نداشته باشد.

۶. نشان دهید دستگاه

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

جواب ندارد

۷. همهٔ جوابهای دستگاه

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= -2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 &= -2 \\ 2x_1 \qquad - 4x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= -7 \end{aligned}$$

را بیابید.

۸. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

به‌ازای کدام سه‌تاییهای (y_1, y_2, y_3) دستگاه $AX = Y$ جواب دارد؟

۹. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۶ & ۲ & -۱ \\ -۲ & ۴ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

به‌ازای کدام $(y_۱, y_۲, y_۳, y_۴)$ دستگاه $AX=Y$ جواب دارد؟

۱۰. فرض کنید R و R' دو ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی ۲ × ۳ باشند وجوابهای دستگاههای $RX=۰$ و $R'X=۰$ یکی باشند. ثابت کنید $R'=R$.

۵.۱. ضرب ماتریسی

واضح است که فرایند تشکیل ترکیبات خطی از سطرهای یک ماتریس، فرایندی بنیانی است (یا به‌هرحال، باید چنین باشد). بدین دلیل، ارائهٔ طرحی با نظام برای بیان این نکته‌که دقیقاً چه اعمالی باید انجام شوند، ارجح است. به‌صورت مشخصتر، فرض کنیم B ماتریسی $n\times p$ برروی هیأت F، با سطرهای $\beta_۱$، ...، β_n باشد، ونیز فرض‌کنیم از B ماتریس C با سطرهای $\gamma_۱$، ...، γ_m را با تشکیل ترکیبات خطی معین

$$\gamma_i = A_{i۱}\beta_۱ + A_{i۲}\beta_۲ + \cdots + A_{in}\beta_n \qquad (۴\text{-}۱)$$

ساخته‌ایم. سطرهای C با mn اسکالر A_{ij} که خود درایه‌های ماتریسی $m\times n$ مانند A هستند تعیین می‌شوند. اگر (۱-۴) را به‌صورت

$$(C_{i۱} \ \cdots \ C_{ip}) = \sum_{r=۱}^{n} (A_{ir}B_{r۱} \ \cdots \ A_{ir}B_{rp})$$

بسط دهیم، می‌بینیم که درایه‌های C با رابطهٔ زیرمشخص می‌شوند:

$$C_{ij} = \sum_{r=۱}^{n} A_{ir}B_{rj}.$$

تعریف. فرض کنیم A ماتریسی $m\times n$ بر روی هیأت F، و B ماتریسی $n\times p$ بر روی همین هیأت باشد. **حاصلضرب** AB، ماتریسی $m\times p$ مانند C است که درایهٔ (i, j) آن عبارت است از

$$C_{ij} = \sum_{r=۱}^{n} A_{ir}B_{rj}.$$

مثال ۱۰. در این مثال، چند حاصل ضرب از ماتریسهایی با درایه‌های گویا آمده است.

(الف)
$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 15 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

در اینجا

$$\gamma_1 = (5 \quad -1 \quad 2) = 1\cdot(5 \quad -1 \quad 2) + 0\cdot(15 \quad 4 \quad 8)$$
$$\gamma_2 = (0 \quad 7 \quad 2) = -3\cdot(5 \quad -1 \quad 2) + 1\cdot(15 \quad 4 \quad 8)$$

(ب)
$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 9 & 12 & -8 \\ 12 & 62 & -3 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

در اینجا

$$\gamma_2 = (9 \quad 12 \quad -8) = -2(0 \quad 6 \quad 1) + 3(3 \quad 8 \quad -2)$$
$$\gamma_3 = (12 \quad 62 \quad -3) = 5(0 \quad 6 \quad 1) + 4(3 \quad 8 \quad -2)$$

(پ)
$$\begin{bmatrix} 8 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(ت)
$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} [2 \quad 4].$$

در اینجا

$$\gamma_2 = (6 \quad 12) = 3(2 \quad 4)$$

(ث)
$$[2 \quad 4] \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = [10]$$

(ج)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(چ)
$$\begin{bmatrix} ۱ & -۵ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۹ & -۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \end{bmatrix}$$

توجه به این نکته مهم است که ضرب دوماتریس همواره قابل تعریف نیست؛ ضرب دوماتریس زمانی، وتنها زمانی، تعریف می‌شود که تعداد ستونهای ماتریس اول برابر با تعداد سطرهای ماتریس دوم باشد. لذا، تعویض ترتیب سازه‌ها دربندهای (الف)، (ب)، و (پ) مثال فوق بی‌معنی است. غالباً، ضربهایی مانند AB را بدون ذکرصریح اندازهٔ سازه‌های آن می‌نویسیم؛ در چنین حالاتی استنباط این است که ضرب تعریف می‌شود. از (ت)، (ث)، (ج)، و(چ) درمی‌یابیم که‌حتی اگرضربهای AB و BA هر دو تعریف بشوند، لزوماً $AB = BA$ درست نیست؛ به بیان دیگر، ضرب ماتریسی جابجایی نیست.

مثال ۱۱.

(الف) اگر I ماتریس‌همانی $m \times m$ و A ماتریسی $m \times n$ باشد، آنگاه $IA = A$.

(ب) اگر I ماتریس همانی $n \times n$ و A ماتریسی $m \times n$ باشد، آنگاه $AI = A$.

(پ) اگر $۰^{k,m}$ ماتریس صفر $k \times m$ باشد، آنگاه $۰^{k,m}A = ۰^{k,n}$. به طورمشابه $A۰^{n,p} = ۰^{m,p}$.

مثال ۱۲. فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ برروی هیأت F باشد. نماد اختصاری پیشین برای دستگاههای معادلات خطی، یعنی $AX = Y$، با تعریف ضرب ماتریسی سازگار است. زیرا، اگر

$$X = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

و x_i ها در F باشند، آنگاه AX ماتریس $m \times ۱$

$$Y = \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

است که در آن $y_i = A_{i۱}x_۱ + A_{i۲}x_۲ + \cdots + A_{in}x_n$.

استفاده ازماتریسهای ستونی نمادی را پیشنهاد می‌کندکه غالباً مفید است. اگر B

ماتریسی $n \times p$ باشد، ستونهای B ماتریسهای $n \times 1$ ، B_1 ، $\cdots$ ، B_p خواهند بود که به صورت

$$B_j = \begin{bmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{bmatrix}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p$$

تعریف می‌شوند، وماتریس B توالی این ستونهاست:

$$B = [B_1, \cdots, B_p].$$

درایهٔ (i, j) ماتریس‌حاصل‌ضرب AB ازسطر iام A وستون jام B شکل می گیرد. خواننده خود تحقیق خواهدکردکه ستون jام ماتریس AB برابر AB_j است:

$$AB = [AB_1, \cdots, AB_p].$$

علی‌رغم‌این‌که‌ضرب‌ماتریسها به‌ترتیب نوشتن‌سازه‌هایش بستگی دارد،اما همان‌طور که قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد ازنحوهٔ شرکت‌آنها مستقل است.

قضیهٔ ۸.۱ اگر A ، B ، و C ماتریسهایی برروی هیأت F باشند که ضربهای BC و $A(BC)$ تعریف بشوند، آنگاه ضربهای AB و $(AB)C$ نیز تعریف می‌شوند و

$$A(BC) = (AB)C.$$

اثبات. فرض‌کنیم B ماتریسی $n \times p$ باشد. چون BC تعریف‌می‌شود، C ماتریسی است با p سطر، ولذا BC، n سطر دارد. حال، به‌دلیل اینکه $A(BC)$ هم تعریف‌می‌شود می‌توانیم فرض‌کنیم‌که A ماتریسی است $m \times n$. بنابراین، حاصل‌ضرب AB وجود دارد وماتریسی $m \times p$ است. ازاینجا نتیجه می‌شودکه حاصل‌ضرب $(AB)C$ وجود دارد. برای نشان دادن تساوی $(AB)C = A(BC)$، کافی است نشان دهیم‌که به‌ازای هر i و j،

$$[A(BC)]_{ij} = [(AB)C]_{ij}.$$

طبق تعریف

$$\begin{aligned}
[A(BC)]_{ij} &= \sum_r A_{ir}(BC)_{rj} \\
&= \sum_r A_{ir} \sum_s B_{rs} C_{sj} \\
&= \sum_r \sum_s A_{ir} B_{rs} C_{sj} \\
&= \sum_s \sum_r A_{ir} B_{rs} C_{sj} \\
&= \sum_s \Big(\sum_r A_{ir} B_{rs}\Big) C_{sj} \\
&= \sum_s (AB)_{is} C_{sj} \\
&= [(AB)C]_{ij}. \ \square
\end{aligned}$$

اگر A ماتریسی $n\times n$ (مربعی) باشد، ضرب AA تعریف می‌شود. این ماتریس‌را با A^2 نشان می‌دهیم. بنابرقضیهٔ ۸، $A(AA)=(AA)A$ ، یا $A^2A=AA^2$، ازایـن رو، ضرب AAA بدون ابهام تعریف می‌شود. این حاصلضرب را با A^3 نشان مـی‌دهیم. در حالت عمومی، ضرب $A\cdots A$ (k بار) بدون ابهام تعریف می‌شود، واین حاصل ضرب را با A^k نشان می‌دهیم.

توجه کنید که ازجمله نتایجی که رابطهٔ $A(BC)=(AB)C$ ایجاب می‌کند، یکـی این است که ترکیبهایی خطی از ترکیبهای خطی سطرهای C ، مجدداً ترکیبهای خطی‌از سطرهای C هستند.

اگر B ماتریس مفروضی باشد و C به وسیلهٔ یك عمل سطری مقدماتی از B حاصل شده باشد، آنگاه هرسطر C ترکیبی خطی‌ازسطرهای B است؛ وازاین رو، ماتریسی‌چون A وجود دارد به‌طوری‌که $AB=C$. معمولاً ماتریسهایی با این خاصیت زیادند، و لـذا مناسبت دارد ونیزممکن است دربین‌آنها یکی‌راکه دارای خواص ویژه‌ای است انتخاب کنیم. قبل ازآنکه به‌این بحث وارد شویم، نیاز داریم‌که با رده‌ای ازماتریسها آشناشویم.

تعریف. یك ماتریس $m\times m$ **یك ماتریس مقدماتی** خوانده می‌شود هرگاه بتوان‌آن را ازماتریس همانی $m\times m$ با تنها یك عمل سطری مقدماتی به دست‌آورد.

مثال۱۳. یك ماتریس مقدماتی ۲ × ۲ لزوماً یکی ازماتریسهای زیر است:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad c\neq 0,\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix},\quad c\neq 0.$$

قضیهٔ۹. فرض‌کنیم e یك عمل سطری مقدماتـی و E ماتریس مقدماتی $m\times m$ ، $E=e(I)$ باشد. دراین صورت، به ازای هرماتریس $m\times n$ مانند A، داریم

$$e(A)=EA.$$

اثبات. نکتهٔ‌مهم این‌است که‌درایهٔ واقع درسطرiم وستون jم ماتریس‌حاصل‌ضرب EA، ازسطر iم ماتـریس E وستون jم ماتریس A شکل می‌گیرد. لذا، لازم است هریك ازسه نوع عمل سطری مقدماتی را جداگانه بررسی‌کنیم. دراینجا اثبات مفصلی برای عملی‌از نوع (۲) خواهیم‌آورد. بررسی دوحالت دیگر، حتی ازاین یکی‌هم ساده‌تر است و بـه عنوان تمرین واگذار می‌شود. فرض‌کنیم $r\neq s$ ، و e عمـل «جایگزینی سطر r با سطر r بعلاوهٔ c برابر سطر s » باشد. دراین‌صورت

$$E_{ik}=\begin{cases}\delta_{ik}, & i\neq r\\ \delta_{rk}+c\delta_{sk}, & i=r.\end{cases}$$

بنا بر این،

$$(EA)_{ij}=\sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj}=\begin{cases}A_{ik}, & i\neq r\\ A_{rj}+cA_{sj}, & i=r.\end{cases}$$

و به بیان دیگر، $EA=e(A)$. □

نتیجه. فرض کنیم A و B دو ماتریس $m\times n$ بر روی هیأت F باشند. در این صورت، B هم‌ارز سطری A است اگر و تنها اگر $B=PA$ و P حاصل ضربی از ماتریسهای مقدماتی $m\times m$ باشد.

اثبات. فرض کنیم $B=PA$، که در آن $P=E_s\cdots E_2E_1$، و E_i ها ماتریسهای مقدماتی $m\times m$ باشند. در این صورت، E_1A هم ارز سطری A ، و $E_2(E_1A)$ هم‌ارز سطری E_1A، و بنا بر این E_2E_1A هم ارزسطری A است؛ با ادامهٔ این راه می‌بینیم که $(E_s\cdots E_1)A$ هم ارزسطری A است.

حال فرض کنیم B هم ارزسطری A باشد، و E_1، E_2، ...، E_s ماتریسهای مقدماتی متناظر به دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی باشند که A را به B تبدیل می‌کنند. در این‌صورت، $B=(E_s\cdots E_1)A$. □

تمرین

۱. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ -1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}.$$

ماتریسهای ABC و CAB را محاسبه کنید.

۲. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 3\\ 4 & 4\end{bmatrix}.$$

مستقیماً تحقیق کنید که $A(AB)=A^2B$.

۳. دو ماتریس مختلف 2×2 مانند A بیابید به طوری که $A^2=0$ ولی $A\neq 0$.

۴. برای ماتریس A در تمرین ۲ ، ماتریسهای مقدماتی E_{1} ، E_{2} ، ... ، E_{k} را بیابید که

$$E_{k}\cdots E_{2}E_{1}A=I.$$

۵. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

آیا ماتریسی چون C باخاصیت $CA=B$ وجود دارد؟

۶. فرض کنید A ماتریسی $m\times n$ ، و B ماتریسی $n\times k$ باشد. نشان دهید که ستونهای $C=AB$ ترکیباتی خطی ازستونهای A هستند. اگر α_{1} ، ... ، α_{n} ستونهای ماتریس A ، و γ_{1} ، ... ، γ_{k} ستونهای ماتریس C باشند، آنگاه

$$\gamma_{j}=\sum_{r=1}^{n} B_{rj}\alpha_{r}.$$

۷. فرض کنید A و B دوماتریس ۲ × ۲ باشندکه $AB=I$. ثابت کنید $BA=I$.

۸. فرض کنید

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

ماتریسی ۲ × ۲ باشد. می‌خواهیم بدانیم چه‌وقت ممکن‌است ماتریسهایی ۲ × ۲ مانند A و B یافت به‌طوری که $C=AB-BA$. ثابت کنید چنین ماتریسهایی را می‌توان یافت اگر و تنها اگر $C_{11}+C_{22}=0$.

۶.۱. ماتریسهای معکوس‌پذیر

فرض کنیم ماتریس $m\times m$ ی مانند P حاصل‌ضربی از ماتریسهای مقدماتی باشد. به‌ازای هر ماتریس $m\times n$ مانند A ، ماتریس $B=PA$ هم‌ارز سطری A است؛ از این رو، A نیز هم‌ارز سطری B است و حاصل‌ضربی چون Q از ماتریسهای مقدماتی وجود دارد به‌طوری که $A=QB$. این امر، بخصوص، هنگامی که A ماتریس همانی $m\times m$ باشد، درست است. به‌بیان دیگر، ماتریس $m\times m$ ی چون Q که خودحاصل‌ضربی ازماتریسهای مقدماتی‌است، وجودداردبه‌طوری که $QP=I$. بزودی خواهیم‌دید که‌وجودماتریسی‌مانند Q

با خاصیت $QP=I$، هم‌ارز این مطلب است که P حاصل‌ضربی از ماتریسهای مقدماتی است.

تعریف. فرض کنیم A یك ماتریس $n\times n$ (مربعی) بر روی هیأت F باشد. یك ماتریس $n\times n$ مانند B، به‌طوری که $BA=I$، یك **معکوس چپ** A نامیده می‌شود؛ یك ماتریس $n\times n$ مانند B با این شرط که $AB=I$ یك **معکوس راست** A نام دارد. اگر $AB=BA=I$، آنگاه B به یك **معکوس دوطرفه** A موسوم است و A **معکوس‌پذیر** نامیده می‌شود.

لم. اگر A دارای یك معکوس چپ B و یك معکوس راست C باشد، آنگاه $B=C$.

اثبات. فرض کنیم $BA=I$ و $AC=I$. در این صورت

$$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C. \quad \square$$

بنابراین، اگر A یك معکوس چپ و یك معکوس راست داشته باشد، آنگاه A معکوس‌پذیر است و دارای معکوس دوطرفهٔ یکتایی است. این معکوس را که با A^{-1} نشان می‌دهیم، به‌طور ساده **معکوس** A می‌نامیم.

قضیهٔ ۱۰ فرض کنیم A و B دو ماتریس $n\times n$ بر روی هیأت F باشند.

(۱) اگر A معکوس‌پذیر باشد، A^{-1} نیز معکوس‌پذیر است و $A=(A^{-1})^{-1}$.

(۲) اگر A و B هر دو معکوس‌پذیر باشند، AB نیز معکوس‌پذیر است و $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

اثبات. گزارهٔ اول از تقارن تعریف بسادگی نتیجه می‌شود. گزارهٔ دوم، از تحقیق صحت روابط

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=(B^{-1}A^{-1})(AB)=I$$

به‌دست می‌آید. $\square$

نتیجه. هر حاصل‌ضربی از ماتریسهای معکوس‌پذیر ماتریسی است معکوس‌پذیر.

قضیهٔ ۱۱. هر ماتریس مقدماتی معکوس‌پذیر است.

اثبات. فرض کنیم E ماتریس مقدماتی متناظر به‌عمل سطری مقدماتی e باشد. اگر e_1 عمل معکوس e باشد (قضیهٔ ۲) و $E_1=e_1(I)$، آنگاه

$$EE_1=e(E_1)=e(e_1(I))=I$$

و

$$E_1E=e_1(E)=e_1(e(I))=I.$$

از این‌رو، E معکوس‌پذیر است و $E_1=E^{-1}$. $\square$

مثال ۱۴.

(الف)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب)
$$\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(پ)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix}$$

(ت) اگر $c \neq 0$،

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{bmatrix}.$$

قضیهٔ ۱۲. اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(۱) A معکوس‌پذیر است.

(۲) A هم‌ارز سطری ماتریس همانی $n \times n$ است.

(۳) A حاصلضربی است از ماتریسهای مقدماتی.

اثبات. گیریم R ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی‌ای باشد که هم‌ارز سطری A است. طبق قضیهٔ ۹ (یا نتیجهٔ آن)،

$$R = E_k \cdots E_2 E_1 A$$

که در آن E_1، ...، E_k ماتریسهای مقدماتی هستند. همهٔ E_jها معکوس پذیرند، و از این رو،

$$A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} R.$$

چون حاصلضرب ماتریسهای معکوس‌پذیر ماتریسی است معکوس‌پذیر، می‌بینیم که A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر R معکوس‌پذیر باشد. ازطرفی چون R یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی (مربعی) است، R معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر هر سطر R شامل یك درایهٔ غیر صفر باشد؛ یعنی، اگر و تنها اگر $R = I$. تا اینجا نشان داده‌ایم که A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $R = I$؛ و اگر $R = I$ آنگاه $A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1}$. اکنون، باید روشن باشد که (۱)، (۲)، و (۳) گزاره‌های هم‌ارزی در بارهٔ ماتریس A هستند. □

نتیجه. اگر A یك ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر باشد و دنباله‌ای ازاعمال سطری مقدماتی، A را به ماتریس همانی تحویل کند، آنگاه همان دنبالهٔ اعمال هنگامی که بر I به‌کار بسته شود، A^{-1} را به دست می‌دهد.

نتیجه. فرض‌کنیم A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند. در این صورت، B هم‌ارزسطری A است اگر وتنها اگر $B = PA$، و P یك ماتریس $m \times m$ معکوس‌پذیر باشد.

قضیهٔ ۱۳. برای ماتریسی $n \times n$ مانند A، گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(۱) A معکوس‌پذیر است.

(۲) دستگاه همگن $AX = 0$ فقط جواب بدیهی $X = 0$ را دارد.

(۳) دستگاه معادلات $AX = Y$، به ازای هر ماتریس $n \times 1$ مانند Y، لااقل یك جواب دارد.

اثبات. بنا بر قضیهٔ ۷، شرط (۲) هم ارز این مطلب است که A هم‌ارز سطری ماتریس همانی است. از این‌رو، بنابر قضیهٔ ۱۲، (۱) و (۲) هم‌ارزند. اگر A معکوس‌پذیر باشد، جواب دستگاه $AX = Y$ عبارت است از $X = A^{-1}Y$. بعکس، فرض‌کنیم دستگاه $AX = Y$ به‌ازای هر Y مفروض دارای یك‌جواب باشد. گیریم R ماتریس تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی‌ای باشد که هم‌ارز سطری A است. می‌خواهیم نشان بدهیم‌که $R = I$. بدین صورت، کافی است نشان دهیم‌که همهٔ درایه‌های آخرین سطر R برابر ۰ نیستند. فرض کنیم

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

اگر دستگاه $RX = E$ برای X قابل حل باشد، سطرآخر R هیچ‌گاه ۰ نیست. می‌دانیم که $R = PA$ و P ماتریسی معکوس‌پذیر است. بنابراین، $RX = E$ اگر و تنها اگر $AX = P^{-1}E$؛ و بنا بر (۳) دستگاه اخیر لااقل یك جواب دارد. □

نتیجه. ماتریسی مربعی که دارای یك معکوس چپ یا یك معکوس راست باشد، معکوس‌پذیر است.

اثبات. فرض کنیم A یك ماتریس $n \times n$ و دارای یك معکوس چپ باشد؛ یعنی، یك ماتریس B وجود داشته باشد به‌طوری‌که $BA = I$. در این صورت، چون $X = IX = B(AX)$، دستگاه $AX = 0$ فقط دارای جواب بدیهی است. بنابراین، A معکوس‌پذیر است. از طرف دیگر، فرض‌کنیم A دارای یك معکوس راست باشد؛ یعنی، ماتریسی چون C یافت شود به‌طوری‌که $AC = I$. آنگاه C دارای یك معکوس چپ است و بنابراین معکوس‌پذیر. پس $A = C^{-1}$، و از این‌رو A معکوس‌پذیر و دارای

معکوس C است. □

نتیجه. فرض کنیم $A = A_1A_2\cdots A_k$ و $A_1,\cdots,A_k$ ماتریسهایی $n\times n$ (مربعی) باشند. در این صورت، A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر هر A_j معکوس‌پذیر باشد.

اثبات. قبلاً نشان دادیم که حاصل‌ضرب دو ماتریس معکوس‌پذیر ماتریسی است معکوس‌پذیر. از این مطلب بسادگی مشهود است که اگر هر A_j معکوس‌پذیر باشد، آنگاه A نیز معکوس‌پذیر است.

حال فرض کنیم A معکوس‌پذیر باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم A_k معکوس‌پذیر است. فرض کنیم X ماتریسی $n\times 1$ باشد و $A_kX = 0$، در این صورت $AX = (A_1\cdots A_{k-1})A_kX = 0$. چون A معکوس‌پذیر است، باید داشته باشیم $X = 0$. بنابراین، دستگاه معادلات $A_kX = 0$ هیچ جواب نابدیهی ندارد. لذا، A_k معکوس‌پذیر است. حال، $A_1\cdots A_{k-1} = AA_k^{-1}$ معکوس‌پذیر است. با استدلال قبل، A_{k-1} نیز معکوس‌پذیر است، با ادامهٔ این راه بدین نتیجه می‌رسیم که هر A_j معکوس‌پذیر است. □

اکنون می‌خواهیم به‌آخرین نکته در بارهٔ حل معادلات خطی بپردازیم. فرض کنیم A ماتریسی $m\times n$ باشد و بخواهیم دستگاه معادلات $AX=Y$ را حل کنیم. اگر R یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی هم‌ارز سطری با A باشد، آنگاه $R=PA$ که در آن P ماتریسی $m\times m$ ومعکوس‌پذیر است. جوابهای دستگاه $AX=Y$ دقیقاً همان‌جوابهای دستگاه $RX=PY(=Z)$ هستند. درعمل، یافتن‌ماتریس P خیلی‌مشکلتر از تحویل کردن A به R نیست. زیرا، فرض کنیم ماتریس افزودهٔ A' از دستگاه $AX=Y$ را که در آن اسکالرهای دلخواه $y_1,\cdots,y_m$ در آخرین ستون قرار می‌گیرند، تشکیل داده باشیم. در این صورت، اگر روی A' دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی را به‌کار بندیم که A را به R سوق می‌دهد، آنگاه روشن خواهد شد که ماتریس P چیست. (بهتر است خواننده به مثال ۹ که در آن این فرایند به‌طور اساسی به‌کار بسته شده است، رجوع کند.) درحالت خاص، اگر A ماتریسی مربعی باشد، این فرایند روشن می‌سازد که A معکوس‌پذیر است یا نه، و اگر معکوس‌پذیر باشد، P، معکوس آن چیست. چون قبلاً لب مثالی از چنین محاسبه‌ای را ارائه کرده‌ایم، اینك به یك مثال ۲×۲ اکتفا می‌کنیم.

مثال ۱۵. فرض کنیم F هیأت اعدادگویا باشد، و

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}.$$

در این صورت،

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & y_1 \\ ۱ & ۳ & y_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(۳)} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & y_2 \\ ۲ & -۱ & y_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(۲)}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & y_۲ \\ ۰ & -۷ & y_۱ - ۲y_۲ \end{bmatrix} \xrightarrow{(۱)}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & y_۲ \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۷}(۲y_۲ - y_۱) \end{bmatrix} \xrightarrow{(۲)} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۱}{۷}(y_۲ + ۳y_۱) \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۷}(۲y_۲ - y_۱) \end{bmatrix}.$$

حال واضح است که A معکوس‌پذیر است و

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۷} & \frac{۱}{۷} \\ -\frac{۱}{۷} & \frac{۲}{۷} \end{bmatrix}.$$

ممکن است چنین به‌نظر آید که درمحاسبهٔ معکوسها ادامهٔ نوشتن اسکالرهای دلخواه $y_۱$، $y_۲$، ... پر زحمت باشد. عده‌ای حمل دو دنباله ازماتریسها را، یکی برای توصیف تحویل‌کردن A به‌ماتریس همانی، و دیگری برای ثبت اثر همان دنباله اعمال روی ماتریس همانی، ترجیح می‌دهند. خواننده خود قضاوت خواهدکرد که‌کدام روش از نظر ثبت مطالب و نوشتن روش بهتری است.

مثال ۱۶. می‌خواهیم معکوس ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}.$$

را بیابیم.

$$\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 60 & -60 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}.$$

این مطلب نباید از نظر خوانندگان دور مانده باشد که تاکنون در مورد سطرهای ماتریسها به‌طور مفصل بحث کرده‌ایم ولی مطلب چندانی دربارهٔ ستونها نگفته‌ایم. بدین جهت توجه خود را روی سطرها متمرکز کردیم که از دیدگاه معادلات خطی این امر طبیعیتر به‌نظر می‌آمد. چون مسلماً هیچ نکتهٔ خاصی در مورد سطرها وجود ندارد، بحث انجام شده در بخشهای قبل می‌توانست به‌جای سطرها روی ستونها هم انجام بگیرد.

روشن است که اگر یك عمل ستونی مقدماتی، و نیز هم‌ارزی ستونی به‌طریقی شبیه به‌طریقهٔ تعریف عمل سطری مقدماتی و هم‌ارزی سطری تعریف شود، هر ماتریس $m\times n$ هم‌ارز ستونی یك ماتریس «تحویل شدهٔ ستونی پلکانی» است. بعلاوه، هر عمل ستونی مقدماتی به‌شکل $A\to AE$ است که در آن E یك ماتریس مقدماتی $n\times n$ است ـ و الی آخر.

تمرین

۱. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۳ & ۵ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی R که هم‌ارز سطری A باشد، ونیز یك ماتریس ۳ × ۳ معکوس‌پذیر P بیابید که $R=PA$.

۲. تمرین ۱ را با ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & i \\ ۱ & -۳ & -i \\ i & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

انجام دهید.

۳. در مورد هر یك از دو ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۱ \\ ۴ & -۱ & ۲ \\ ۶ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

با به‌کاربردن اعمال سطری مقدماتی، معکوس‌پذیر بودن یا نبودن آنها را معلوم کنید؛ در صورت معکوس‌پذیر بودن، معکوس آنها را بیابید.

۴. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}.$$

به‌ازای کدام X یك اسکالر c وجود دارد به‌طوری که $AX=cX$؟

۰۵ معلوم کنیدکه ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

معکوس‌پذیر است یا نه و $A^{-۱}$ را در صورت وجود بیابید.

۰۶ فرض کنید A یك ماتریس ۱ × ۲، و B ماتریسی ۲ × ۱ باشد. ثابت‌کنیدکه $C=AB$ معکوس‌پذیر نیست.

۰۷ فرض کنید A یك ماتریس $n\times n$ (مربعی) باشد. دوگزارهٔ زیر را ثابت‌کنید:
(الف) اگر A معکوس‌پذیر باشد، و به‌ازای یك ماتریس $n\times n$ مانند B، $AB=۰$، آنگاه $B=۰$.
(ب) اگر A معکوس‌پذیر نباشد، آنگاه ماتریسی $n\times n$ مانند B وجود داردکه $AB=۰$ ولی $B\neq۰$.

۰۸ فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

با به‌کارگیری اعمال سطری مقدماتی ثابت کنیدکه A معکوس‌پذیر است اگر وتنها اگر $(ad-bc)\neq۰$.

۰۹ ماتریس $n\times n$ی مانند A **بالا مثلثی** نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای $j>i$، $A_{ij}=۰$؛ یعنی، هرگاه همهٔ درایه‌های واقع درزیر قطراصلی‌آن ۰ باشند. ثابت‌کنیدیك ماتریس (مربعی) بالا مثلثی معکوس‌پذیر است، اگر و تنها اگر همهٔ درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن مخالف صفر باشند.

۰۱۰ تعمیم زیر از تمرین ۶ را ثابت کنید: اگر A ماتریسی $m\times n$ و B ماتریسی $n\times m$ باشد و $n<m$، آنگاه AB معکوس‌پذیر نیست.

۰۱۱ فرض کنید A ماتریسی $n\times n$ باشد. نشان دهید که با تعدادی متناهی عمل سطری

و/یا ستونی مقدماتی می‌توان از A به‌یك ماتریس R رسید که هم «تحویل شدهٔ سطری پلکانی» وهم «تحویل شدهٔ ستونی پلکانی» باشد؛ یعنی، $R_{ij}=0$ هر گاه $i\neq j$، $R_{ii}=1$ به‌ازای $1\leqslant i\leqslant r$، و $R_{ii}=0$ هر گاه $i>r$. نشان دهید $R=PAQ$ که در آن P و Q بترتیب ماتریسهایی $m\times m$ و $n\times n$ معکوس‌پذیر هستند.

۱۲. نتیجهٔ مثال ۱۶ این مطلب را تداعی می‌کند که شاید ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

معکوس‌پذیر و معکوس آن A^{-1} دارای درایه‌های صحیح باشد. آیا می‌توانید این مطلب را ثابت کنید؟

۲

فضاهای برداری

۱.۲. فضاهای برداری

در بخشهای مختلف ریاضیات با مجموعه‌هایی روبرو می‌شویم که مطالعهٔ «ترکیبات خطی» عناصر آنها، هم بامعنی و هم جالب است. مثلا، هنگام مطالعهٔ معادلات خطی کاملا طبیعی به نظر رسید که ترکیبات خطی سطرهای یک ماتریس را مورد توجه قرار بدهیم. احتمال دارد که خواننده، درس حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطالعه کرده و در آنجا با ترکیبات خطی توابع روبروشده باشد؛ و اگر درس معادلات دیفرانسیل را گرفته باشد، قطعاً این مفهوم را دیده است. همچنین، احتمالا خواننده بردارهای درفضای اقلیدسی سه بعدی، بویژه ترکیبات خطی چنین بردارهایی را تجربه کرده است.

به بیان نادقیق، جبر خطی آن شاخه از ریاضیات است که دربارهٔ خواص عام دستگاههایی جبری متشکل از یک مجموعه همراه با مفهومی مناسب از نوعی «ترکیب خطی» از عناصر آن به بحث می‌پردازد. در این بخش ما به تعریف شیئی ریاضی می‌پردازیم که بنا بر تجربه مفیدترین تجرید از این نوع دستگاههای جبری است.

تعریف. یک **فضای برداری** (یا فضای خطی) متشکل است از:

۱. یک هیأت F از اسکالرها؛

۲. یک مجموعهٔ V از اشیائی به نام بردارها؛

۳. یک قاعده (یا عمل) به نام جمع برداری که به هر جفت از بردارهای α و β از

V بردار $\alpha+\beta$ از V راکه‌مجموع α و β نامیده‌می‌شود وابسته می‌سازد با این شرایط که

(الف) جمع جابجایی است؛ یعنی $\alpha+\beta=\beta+\alpha$؛

(ب) جمع شرکت‌پذیر است؛ یعنی $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\alpha)$؛

(پ) بردار یکتای 0 به نام بردار صفر در V موجود است به طوری که به ازای هر α در V، $\alpha+0=\alpha$؛

(ت) به ازای هر بردار α در V، بردار یکتای $-\alpha$ در V موجود است به‌طوری که $\alpha+(-\alpha)=0$؛

۴. یك قاعده (یا عمل) به نام ضرب اسکالری که به هر اسکالر c از F و هر بردار α از V بردار $c\alpha$ در V را که حاصل ضرب c و α نامیده می‌شود وابسته سازد با این شرایط‌که

(الف) به ازای هر α در V، $1\alpha=\alpha$ ؛

(ب) $(c_1c_2)\alpha=c_1(c_2\alpha)$ ؛

(پ) $c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$ ؛

(ت) $(c_1+c_2)\alpha=c_1\alpha+c_2\alpha$.

توجه به‌این نکته مهم است‌که طبق تعریف، یك فضای برداری شیئی است مرکب، متشکل ازیك هیأت، یك مجموعه ازبردارها، و دو عمل با خواص ویژهٔ معین. مجموعهٔ مفروضی ازبردارها می‌تواند بخشی‌ازچند فضای برداری متمایز باشد (ر. ك. مثال ۵ زیر). هرگاه هیچ امکان اشتباهی نباشد، فضای برداری را به طور ساده با V نشان می دهیم، و هنگامی‌که مشخص‌کردن هیأت نیزلازم باشد، خواهیم‌گفت‌که V **فضایی برداری برروی هیأت** F است. نام «بردار» عمدتاً به جهت سهولت به عناصر مجموعهٔ V اطلاق می‌شود. منشأ این نامگذاری را می‌توان ازمثال ۱ که درزیرآمده است دریافت؛ اما، به این نام نباید بیش از اندازه اهمیت داد، زیرا چیزهای متنوعی‌که به عنوان بردار در V قرار می‌گیرند ممکن است شباهت چندانی با هیچ‌یك ازمفاهیم بردارکه خواننده در ذهن دارد نداشته باشند. می‌کوشیم این تنوع را با چند مثال روشن کنیم؛ حین مطالعهٔ فضاهای برداری برتعداد این مثالها به طور قابل ملاحظه‌ای خواهیم افزود.

مثال۱. فضای nتایی F^n . فرض‌کنیم F هیأتی دلخواه‌و V مجموعهٔ همهٔ nتایی‌های $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ازاسکالرهای x_i در F باشد. با فرض $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ و y_i ها در F، مجموع α و β با

$$\alpha+\beta=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n) \qquad (۱-۲)$$

و حاصل‌ضرب اسکالر c و بردار α با

$$c\alpha=(cx_1,\ cx_2,\ \cdots,\ cx_n) \qquad (۲-۲)$$

تعریف می‌شود. بررسی این حکم که جمع برداری و ضرب اسکالری اخیر در شرایط (۳) و (۴) صدق می‌کنند با استفاده از خواص مشابه جمع و ضرب عناصر F آسان است.

مثال ۲. فضای ماتریسهای $m \times n$، $F^{m\times n}$. گیریم F هیأتی دلخواه و n و m اعدادی صحیح و مثبت باشند. فرض کنیم $F^{m\times n}$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $m\times n$ بر روی هیأت F باشد. مجموع دو بردار A و B از $F^{m\times n}$ با

$$(A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij} \qquad (۲\text{-}۳)$$

و حاصل‌ضرب اسکالر c و ماتریس A با

$$(cA)_{ij}=cA_{ij} \qquad (۲\text{-}۴)$$

تعریف می‌شود. توجه کنید که $F^{1\times n}=F^n$.

مثال ۳. فضای توابع از یک مجموعه به یک هیأت. گیریم F هیأتی دلخواه و S مجموعه‌ای غیر تهی باشد. فرض کنیم V مجموعهٔ همهٔ توابع از مجموعهٔ S در مجموعهٔ F باشد. مجموع دو بردار f و g از V بردار $f+g$ است؛ یعنی، تابعی از S در F است که با

$$(f+g)(s)=f(s)+g(s) \qquad (۲\text{-}۵)$$

تعریف می‌شود. حاصل‌ضرب اسکالر c و تابع f، تابع cf است که با

$$(cf)(s)=cf(s) \qquad (۲\text{-}۶)$$

تعریف می‌شود. مثالهای قبل حالات خاصی از این مثال هستند. زیرا هر n تایی از عناصر F ممکن است به عنوان تابعی از مجموعهٔ S متشکل از اعداد صحیح ۱، ۲، ...، n در F محسوب شود. به طور مشابه، هر ماتریس $m\times n$ بر روی هیأت F تابعی است از مجموعهٔ S متشکل از جفت اعداد صحیح (i,j) با شرایط $1\leqslant i\leqslant m$ و $1\leqslant j\leqslant n$، در هیأت F. حال برای این مثال، چگونگی بررسی صدق شرایط (۳) و (۴) توسط اعمال تعریف شده را نشان می‌دهیم. برای جمع برداری:

(الف) چون عمل جمع در F جابجایی است، به ازای هر s در S

$$f(s)+g(s)=g(s)+f(s)$$

و از این‌رو، دو تابع $f+g$ و $g+f$ یکی هستند.

(ب) چون عمل جمع در F شرکت‌پذیر است، به ازای هر s در S

$$f(s)+[g(s)+h(s)]=[f(s)+g(s)]+h(s)$$

و بنابراین، تابع $f+(g+h)$ همان تابع $(f+g)+h$ است.

(پ) بردار یکتای صفر، همان تابع صفر است که به هر عنصر S اسکالر ۰ از F را تخصیص می‌دهد.

(ت) به ازای هر f در V ، $(-f)$ تابعی است که با

$$(-f)(s)=-f(s)$$

تعریف می‌شود.

اکنون خواننده می‌بایست به‌آسانی بتواند با برهانی شبیه به‌آنچه که درمورد جمع برداری آوردیم، نشان دهد که ضرب اسکالری درشرایط مذکور در (۴) صدق می‌کند.

مثال۴. فضای توابع چند جمله‌ای برروی هیأت F. فرض‌کنیم F یك هیأت، و V مجموعهٔ همهٔ توابع f ، از F در F ، با قاعده‌ای به‌صورت

$$f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n \qquad (۲-۷)$$

باشد. دراینجا c_0، c_1، ...، c_n اسکالرهای ثابتی متعلق به F (ومستقل از x) هستند. چنین تابعی یك **تابع چند جمله‌ای برروی** F نامیده می‌شود. فرض‌کنیم جمع وضرب اسکالری طبق مثال۳ تعریف بشوند. دراینجا باید توجه داشت که اگر f و g دوتابع چندجمله‌ای و c در F باشد، آنگاه $f+g$ و cf هم توابعی چندجمله‌ای هستند.

مثال۵. هیأت‌اعدادمختلط C می‌تواند به عنوان فضایی برداری برروی هیأت‌اعداد حقیقی R محسوب شود. درحالت‌کلی‌تر، فرض‌کنیم F هیأت اعداد حقیقی باشد و V مجموعهٔ n تایی‌های $\alpha=(x_1, \ldots, x_n)$ که در آن x_1 ، ... ، x_n اعدادی مختلط هستند. جمع بردارها وضرب اسکالری را طبق (۲-۱) و (۲-۲) درمثال ۱ تعریف‌می‌کنیم. بدین طریق به یك فضای برداری برروی هیأت R دست می‌یابیم که با فضاهای C^n و R^n اختلاف بسیاردارد.

اینك به استخراج چند حکم ساده که تقریباً بلافاصله از تعریف فضای برداری نتیجه می‌شوند، می‌پردازیم. اگر c یك اسکالر و 0 بردار صفر باشد، آنگاه بنابر ۳ (پ) و ۴ (پ)

$$c0=c(0+0)=c0+c0 .$$

با افزودن $-(c0)$ به‌دو طرف این تساوی و استفاده از ۳ (ت) داریم

$$c0=0 . \qquad (۲-۸)$$

به‌طور مشابه، به‌ازای اسکالر 0 و هر بردار α داریم

$$0\alpha=0 . \qquad (۲-۹)$$

اگر c یك اسکالر غیر صفر و α برداری باشد که $c\alpha=0$، آنگاه بنابر (۲-۸)، $c^{-1}(c\alpha)=0$. اما

$$c^{-1}(c\alpha)=(c^{-1}c)\alpha=1\alpha=\alpha$$

و ازاینجا، $\alpha=0$. بنابراین، می‌بینیم که اگر c یك اسکالر و α یك بردار باشد و $c\alpha=0$، آنگاه یا c اسکالر صفراست و یا α بردار صفر.

اگر α برداری دلخواه در V باشد، آنگاه

$$0=0\alpha=(1-1)\alpha=1\alpha+(-1)\alpha=\alpha+(-1)\alpha$$

و ازآن نتیجه می‌شود که

$$(-1)\alpha=-\alpha. \qquad (۲-۱۰)$$

سرانجام، از خواص شرکت‌پذیری و جابجایی عمل جمع برداری نتیجه می‌شود که‌حاصل جمع چند بردار نیز مستقل از نحوهٔ ترکیب و شرکت این بردارها درجمع است. مثلاً، اگر α_1، α_2، α_3، و α_4 بردارهایی در V باشند، آنگاه

$$(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_3+\alpha_4)=[\alpha_2+(\alpha_1+\alpha_3)]+\alpha_4$$

و چنین مجموعی می‌تواند بدون ابهام به‌صورت

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$$

نوشته شود.

تعریف. بردار β از V یك **ترکیب خطی** بردارهای α_1، $\cdots$ ، α_n از V نامیده می‌شود، هرگاه اسکالرهایی چون c_1، $\cdots$ ، c_n در F وجود داشته باشند به‌طوری که

$$\beta=c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n$$
$$=\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i.$$

تعمیمهای دیگر خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری وخواص پخش‌پذیری ۴(پ) و ۴(ث) ضرب اسکالری، در ترکیبات خطی نیز به‌کار می‌روند:

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}d_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}(c_i+d_i)\alpha_i$$

$$c\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}(cc_i)\alpha_i.$$

بخشهای معینی از جبر خطی با هندسه ارتباطی نزدیك دارد. خود واژهٔ «فضا» مفهومی هندسی را تداعی می‌کند. همچنین است واژهٔ «بردار» نزد بیشترمردم. ضمن ادامهٔ مطالعهٔ فضاهای برداری، خواننده مشاهده خواهد کرد که بسیاری از اصطلاحات به‌طور ضمنی معنی هندسی دارند. قبل ازآنکه این بخش مقدماتی درمورد فضاهای برداری را

پایان دهیم، به‌بررسی رابطهٔ این فضاها با هندسه، تـا آنجایی‌که اقلاً منشأ نـام «فضای برداری» روشن شود، می‌پردازیم. این بررسی بحثی شهودی وخلاصه است.

فضای برداری R^3 را درنظرمی گیریم. درهندسهٔ تحلیلی، ۳تایی‌های (x_1, x_2, x_3) از اعداد حقیقی با نقاط فضای سه‌بعدی اقلیدسی یکی گرفته می‌شوند. با ایـن زمینه، یك بردار معمولاً به‌صورت یـك پاره‌خط جهت‌دار PQ، ازیك نقطهٔ P واقع در فضا به‌نقطهٔ دیگر Q تعریف می‌شود. این مطلب به فرمولبندی دقیق ایدهٔ «پیکان» از نقطهٔ P به‌نقطهٔ Q می‌انجامد. از نحوهٔ به‌کار رفتن بردارها چنین برمی‌آید که بردار باید با طول و جهتش مشخص شود. بنابراین، دوپاره‌خـط جهت‌دار با طـول برابر وجهت یکسان را باید یکی گرفت.

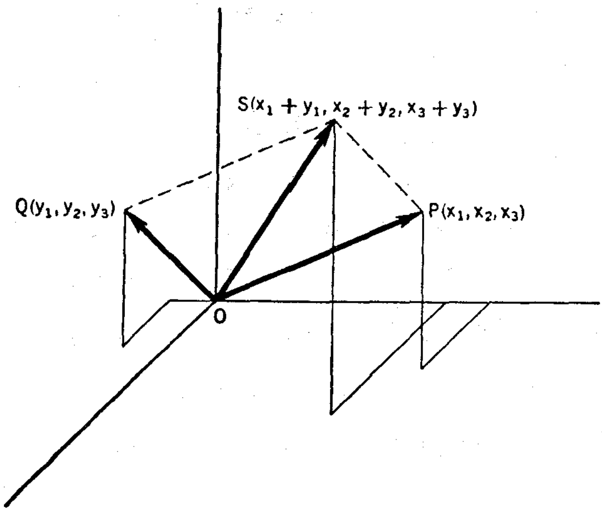
پاره‌خط جهت‌دار PQ، از نقطهٔ $P=(x_1, x_2, x_3)$ به‌نقطهٔ $Q=(y_1, y_2, y_3)$، و پاره‌خط جهت‌دار از مبدأ $0=(0, 0, 0)$ به نقطهٔ $(y_1-x_1, y_2-x_2, y_3-x_3)$ دارای یك طول و یك جهت هستند. بعلاوه، این تنها پاره‌خط جهت‌داری است که ازمبدأ آغاز می‌شود و دارای طول و جهتی مساوی PQ است. بنابراین، اگر توافق شود که تنها بردارهایی را مطرح کنیم که از مبدأ آغاز می‌شوند، به‌هرطول و هرجهت داده شده‌ای دقیقاً یك بردار مربوط می‌شود.

بردار OP، از مبدأ به نقطهٔ $P=(x_1, x_2, x_3)$، کاملاً با نقطهٔ P معین مـی‌شود؛ ازاین‌رو، می‌توان این بردار را با نقطهٔ P یکی دانست. به‌همین دلیل، در تعریف فضای برداری R^3 بردارها را به‌طور ساده با سه‌تایی‌های (x_1, x_2, x_3) تعریف کردیم.

با مفروض بودن دو نقطه $P=(x_1, x_2, x_3)$ و $Q=(y_1, y_2, y_3)$ تعریف‌مجموع بردارهای OP و OQ را می‌توان به‌طور هندسی بیان کرد. اگراین بردارها موازی نباشند، آنگاه پاره‌خطهای OP و OQ یك صفحه را مشخص مـی‌کنند و این دوپاره‌خط دو ضلع متوازی‌الاضلاعی را تشکیل می‌دهند که دراین صفحه قرار دارد (ر. ك. شکل ۱). یکی از قطرهای این‌متوازی‌الاضلاع از O به‌یك نقطهٔ S امتداد می یابد و مجموع دو بردار OP و OQ بنا بر تعریف بردار OS گرفته می‌شود. مختصات نقطهٔ S عبارتند از $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$؛ و ازاین‌رو، تعریف هندسی جمع برداری با تعریف جبری ارائه‌شده درمثال ۱ هم‌ارز است.

ضرب اسکالری تعبیرهندسی ساده‌تری دارد. اگر c عددی حقیقی باشد، آنگاه‌حاصل ضرب c و بردار OP، برداری است ازمبدأ با طولی $|c|$ برابر طول OP و جهتی‌موافق با جهت OP هرگاه $c>0$، و مخالف با جهت OP هرگاه $c<0$. حاصل ایـن ضرب اسکالری، دقیقاً بردار OT است که درآن $T=(cx_1, cx_2, cx_3)$؛ و بنابراین، با تعریف جبری ارائه شده برای R^3 سازگار است.

ممکن است گاهی خواننده مفید بداندکه دربارهٔ فضاهای برداری «به‌طور هندسی بیندیشد»؛ بدین‌معنی که برای خود و به‌جهت تصور بهتر و نیز برانگیختن برخی ازایده‌ها به‌ترسیم شکل بپردازد. درواقع، او باید چنین کند؛ اما، هنگام رسم چنین تصاویری باید به‌خاطر داشته باشد که چون برخورد ما با فضاهای برداری به‌صورت دستگاههای جبری



شکل ۱

است، تمام اثباتهایی هم که ارائه می‌کنیم طبیعتی جبری خواهند داشت.

تمرین

۱. هرگاه F یك هیأت باشد، تحقیق کنید که F^n (به‌صورتی که در مثال ۱ تعریف شد) فضایی برداری برروی هیأت F است.

۲. هرگاه V یك فضای برداری برروی هیأت F باشد، به ازای همهٔ بردارهای $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\alpha_۳$ و $\alpha_۴$ در V رابطهٔ

$$(\alpha_۱+\alpha_۲)+(\alpha_۳+\alpha_۴)=[\alpha_۲+(\alpha_۳+\alpha_۱)]+\alpha_۴$$

برقرار است.

۳. اگر C هیأت اعداد مختلط باشد، چه بردارهایی از $C^۳$ ترکیبی خطی از بردارهای $(۱, ۰, -۱)$، $(۰, ۱, ۱)$، و $(۱, ۱, ۱)$ هستند؟

۴. فرض کنید V مجموعهٔ همهٔ جفتهای (x, y) از اعداد حقیقی و F هیأت اعداد حقیقی باشد. آیا V با دو عمل تعریف شدهٔ زیر

$$(x, y)+(x_1, y_1)=(x+x_1, y+y_1)$$
$$c(x, y)=(cx, y)$$

فضایی برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی هست؟

۵. روی R^n دو عمل

$$\alpha\oplus\beta=\alpha-\beta$$
$$c\odot\alpha=-c\alpha$$

را تعریف می‌کنیم. اعمال سمت راست همان اعمال معمولی هستند. چه اصولی از فضاهای برداری توسط $(R^n, \oplus, \odot)$ برآورده می‌شوند؟

۶. فرض کنید V مجموعهٔ همهٔ توابع (با مقدار) مختلط f روی خط اعداد حقیقی با فرض

$$f(-t)=\overline{f(t)}$$

به‌ازای هر t در R باشد. در اینجا خط زبر نشانگر مزدوج عددی مختلط است. نشان دهید که V با دو عمل

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t)$$
$$(cf)(t)=cf(t)$$

فضایی برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی است. تابعی در V مثال بزنید که (بامقدار) حقیقی نباشد.

۷. فرض کنید V مجموعهٔ جفتهای (x, y) از اعداد حقیقی و F هیأت اعداد حقیقی باشد. آیا V با اعمال تعریف شدهٔ زیر

$$(x, y)+(x_1, y_1)=(x+x_1, 0)$$
$$c(x, y)=(cx, 0)$$

یك فضای برداری است؟

۲.۲. زیرفضاها

در این بخش به‌معرفی برخی از مفاهیم بنیادی مبحث فضاهای برداری می‌پردازیم.

تعریف. گیریم V فضایی برداری بر روی هیأت F باشد. یك **زیرفضای** V عبارت است از یك زیر مجموعهٔ W از V که خود با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری روی V، یك فضای برداری بر روی F باشد.

بررسی مستقیم اصول فضاهای برداری نشان می‌دهد که زیرمجموعهٔ W از V یك زیرفضاست هرگاه به‌ازای هر α و β در W بردار $\alpha+\beta$ نیز در W باشد؛ بردار 0 در W باشد؛ به‌ازای هر α در W بردار $(-\alpha)$ در W باشد؛ و بالاخره به‌ازای هر α در W و هراسکالر c بردار $c\alpha$ نیز در W باشد. بررسی خواص جابجایی و شرکت‌پذیری جمع برداری و خواص ۴ (الف)، (ب)، (پ)، و (ت) ضرب اسکالری لزومی ندارد؛ زیرا این خواص همان خواص اعمال روی V هستند. هنوزهم امکان ساده‌تر کردن مطالب هست.

قضیهٔ ۱. یك زیرمجموعهٔ غیرتهی W از V زیرفضایی از V است اگر و تنها اگر به‌ازای هردو بردار α و β از W و هر اسکالر c از F بردار $c\alpha+\beta$ در W باشد.

اثبات. فرض کنیم W زیرمجموعه‌ای غیر تهی از V باشدکه به‌ازای همهٔ‌بردارهای α و β از W و همهٔ اسکالرهای c از F بردار $c\alpha+\beta$ متعلق به W باشد. چون W غیر تهی است، برداری مانند ρ در W موجود است، و ازاین‌رو، $0=\rho+(-1)\rho$ به W تعلق‌دارد. دراین صورت، اگر α برداری دلخواه از W و c اسکالری‌دلخواه باشد، بردار $c\alpha=c\alpha+0$ نیز در W قراردارد. بخصوص، $(-1)\alpha=-\alpha$ هم در W است. سرانجام، اگر α و β در W باشند، آنگاه $\alpha+\beta=1\alpha+\beta$ نیزدر W است. بنابراین، W یك زیرفضای V است.

بعکس، اگر W زیرفضایی از V، α و β دو بردار از W، و c یك اسکالر باشد، یقیناً $c\alpha+\beta$ در W قرار دارد. □

بعضی ترجیح می‌دهندکه خاصیت $c\alpha+\beta$ از قضیهٔ ۱ را به‌عنوان تعریف یك‌زیر-فضا به‌کار برند، که البته با اصل آن اندکی تفاوت دارد. نکتهٔ مهم دراین است‌که اگر W زیرمجموعه‌ای غیرتهی از V باشد و به‌ازای همهٔ αها و βهای در W و همهٔ اسکالرهای c در F، بردار $c\alpha+\beta$ در W قراربگیرد، آنگاه W (با اعمالی‌که از V به‌ارث‌می‌برد) یك فضای برداری تشکیل می‌دهد. این مطلب چندین مثال جدید از فضاهای برداری‌برای ما تدارك می‌بیند.

مثال ۶.

(الف) اگر V فضای برداری دلخواهی باشد، آنگاه V زیرفضایی از V است؛ زیر-مجموعهٔ متشکل از بردارصفر تنها، زیرفضایی از V است‌که **زیرفضای صفر** V نامیده‌می‌شود.

(ب) در F^n، به‌ازای $n\geqslant 2$، مجموعهٔ همهٔ n تایی‌هـای $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ با شرط $x_1=0$ یك زیرفضاست؛ حال آنکه، مجموعهٔ این nتایی‌ها با شرط $x_1=1+x_2$ یك زیرفضا نیست.

(پ) فضای توابع چندجمله‌ای برروی هیأت F، زیر فضایی از فضای همهٔ توابع از F در F است.

(ت) یك ماتریس $n\times n$ (مربعی) A برروی هیأت F **متقارن** است هرگاه به‌ازای هر i و j، $A_{ij}=A_{ji}$. ماتریسهای متقارن زیرفضایی ازفضای همهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی

F را تشکیل می‌دهند.

(ث) یك ماتریس $n\times n$ (مربعی) A برروی هیأت اعداد مختلط C **هرمیتی** (یا **خودالحاقی**) است، هرگاه به‌ازای هر j و k

$$A_{jk}=\overline{A_{kj}}\ .$$

در اینجا خط زبر نمایشگر مزدوج عددی مختلط است. یك ماتریس ۲ $\times$ ۲ هرمیتی‌است اگر و تنها اگر به‌شکل

$$\begin{bmatrix} z & x+iy \\ x-iy & \omega \end{bmatrix}$$

باشدکه درآن x، y، z، و ω اعدادی حقیقی‌اند. مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای هرمیتی، زیرفضایی از فضای همهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی C نیست. زیرا، اگر A هرمیتی باشد درایه‌های قطری آن A_{11}، A_{22}، ...، همگی حقیقی خواهند بود؛ اما، درحالت عمومی، درایه‌های قطری iA حقیقی‌نیستند. ازطرف دیگر، بسادگی می‌توان تحقیق‌کردکه‌مجموعهٔ ماتریسهای هرمیتی مختلط $n\times n$ فضایی برداری برروی هیأت اعداد حقیقی R (بااعمال معمولی) است.

مثال ۷. فضای جواب یك دستگاه معادلات خطی همگن. گیریم A یك ماتریس $m\times n$ برروی هیأت F باشد. در این صورت، مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای ۱ $\times n$ (ستونی) مانند X برروی F به‌طوری‌که $AX=0$، زیرفضایی از فضای همهٔ ماتریسهای ۱ $\times n$ برروی F است. برای اثبات این موضوع، باید نشان دهیم وقتی‌که $AX=0$، $AY=0$، و c اسکالری دلخواه از F باشد، $A(cX+Y)=0$. این مطلب بیدرنگ از مطلب کلی زیر نتیجه می‌شود.

لم. اگر A ماتریسی $m\times n$ برروی F باشد، و B و C دو ماتریس $n\times p$ برروی F باشند، آنگاه به‌ازای هراسکالر d در F

$$A(dB+C)=d(AB)+AC. \tag{۲-۱۱}$$

اثبات.

$$\begin{aligned}[A(dB+C)]_{ij}&=\sum_k A_{ik}(dB+C)_{kj}\\ &=\sum_k (dA_{ik}B_{kj}+A_{ik}C_{kj})\\ &=d\sum_k A_{ik}B_{kj}+\sum_k A_{ik}C_{kj}\\ &=d(AB)_{ij}+(AC)_{ij}\\ &=[d(AB)+AC]_{ij}\cdot\ \square\end{aligned}$$

به‌طور مشابه، می‌توان نشان داد که به‌شرط تعریف‌شدن حاصل‌جمعها و حاصل‌ضربهای ماتریسی، $(dB+C)A=d(BA)+CA$.

قضیهٔ ۲. گیریم V فضایی برداری بر روی هیأت F باشد. اشتراك هر دسته از زیر-فضاهای V زیرفضایی از V است.

اثبات. فرض کنیم $\{W_a\}$ دسته‌ای از زیرفضاهای V، و $W=\bigcap_a W_a$ اشتراك آنها باشد. توجه دارید که W به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ عناصر متعلق به‌همهٔ W_aها تعریف می‌شود (ر. ك. ضمیمه). چون هر W_a زیرفضاست، شامل بردار صفرهم هست. بنابراین، بردارصفر در W است، و از این‌رو W غیرتهی است. گیریم α و β دو بردار در W و c یك اسکالر باشد. بنابرتعریف W، هم α وهم β به‌همهٔ W_aها تعلق دارند، وچون هر W_a زیرفضاست، بردار $(c\alpha+\beta)$ درهمهٔ W_aها قرار دارد. بنابراین، $(c\alpha+\beta)$ نیز در W است و بنابر قضیهٔ ۱، W یك زیرفضای V است. □

از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود که اگر S مجموعه‌ای دلخواه از بردارهای V باشد، آنگاه کوچکترین زیرفضایی از V که شامل S باشد هم وجود دارد؛ یعنی زیرفضایی از V وجود دارد که شامل S است و خود مشمول هرزیرفضای دیگر دربردارندهٔ S.

تعریف. گیریم S مجموعه‌ای از بردارهای فضای برداری V باشد. **زیرفضای پدید-آمده توسط** S، بنابر تعریف، عبارت است ازاشتراك W از همهٔ زیرفضاهای V که شامل S باشند. هنگامی که S مجموعه‌ای متناهی ازبردارها باشد، یعنی $S=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$، W **را زیرفضای پدیدآمده توسط بردارهای** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ نیز می‌نامیم.

قضیهٔ ۳. زیرفضای پدید آمده توسط یك زیرمجموعهٔ غیرتهی S از فضای برداری V عبارت است از مجموعهٔ همهٔ ترکیبات خطی بردارهای S.

اثبات. گیریم W زیرفضای پدید آمده توسط S باشد. دراین صورت، هرترکیب خطی

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m$$

ازبردارهای α_1، α_2، $\cdots$، α_m در S، مسلماً در W است. بنابراین، W شامل L، مجموعهٔ همهٔ ترکیبات خطی بردارهای واقع در S، است. از طرف دیگر، مجموعهٔ L شامل S و غیرتهی است. اگر α و β متعلق به L باشند، آنگاه α یك ترکیب خطی

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m$$

از بردارهای α_i در S، و β یك ترکیب خطی

$$\beta=y_1\beta_1+\cdots+y_n\beta_n$$

از بردارهای β_j در S است. حال، به‌ازای هراسکالر c

$$c\alpha+\beta=\sum_{i=1}^{m}(cx_i)\alpha_i+\sum_{j=1}^{n}y_j\beta_j \cdot$$

از این‌رو، $c\alpha+\beta$ به L تعلق دارد و L یك زیرفضای V است.

تا اینجا نشان داده‌ایم که L زیرفضایی است از V شامل S و همچنین نشان داده‌ایم هرزیر فضایی که شامل S باشد شامل L نیزهست. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که L اشتراك همهٔ زیرفضاهای شامل S است؛ یعنی L زیرفضای پدید آمده توسط مجموعهٔ S است. $\square$

تعریف. اگر S_1، S_2، $\cdots$، S_k زیرمجموعه‌هایی ازفضای برداری V باشند، مجموعهٔ همهٔ حاصل‌جمعهای

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$$

از بردارهای α_i در S_i، مجموع زیرمجموعه‌های S_1، S_2، $\cdots$، S_k نام دارد و با

$$S_1+S_2+\cdots+S_k$$

یا

$$\sum_{i=1}^{k}S_i$$

نشان داده می‌شود.

اگر W_1، W_2، $\cdots$، W_k زیرفضاهایی از V باشند، بسادگی دیده می‌شود که مجموع

$$W=W_1+W_2+\cdots+W_k$$

یك زیرفضای V است که شامل هریك از زیرفضاهای W_i است. همچنان که دراثبات قضیهٔ ۳ آمده است، از این مطلب نتیجه می‌شود که W زیرفضای پدیدآمده توسط اجتماع W_1، W_2، $\cdots$، W_k است.

مثال ۸. گیریم F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط باشد و

$$\alpha_1=(1,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0)$$
$$\alpha_2=(0,\ 0,\ 1,\ 4,\ 0)$$
$$\alpha_3=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1).$$

بنابرقضیهٔ ۳ بردار α در زیرفضای W پدیدآمده توسط α_1، α_2، و α_3 از فضای F^5 قرار دارد اگر و تنها اگر اسکالرهایی مانند c_1، c_2، و c_3 در F وجود داشته باشند به‌طوری که

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \cdot$$

از این‌رو، W متشکل است از همهٔ بردارهای به‌صورت

$$\alpha = (c_1,\ 2c_1,\ c_2,\ 3c_1 + 4c_2,\ c_3)$$

که درآن c_1، c_2، و c_3 اسکالرهایی دلخواه از F می‌باشند. به‌عبارت دیگر، می‌توان W را به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ ۵تایی‌های

$$\alpha = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$$

که درآن x_iها در F هستند و

$$x_2 = 2x_1$$

$$x_4 = 3x_1 + 4x_3$$

توصیف کرد. بدین‌نحو $(-3, -6, 1, -5, 2)$ در W قرار دارد، لیکن $(2, 4, 6, 7, 8)$ در W نیست.

مثال۹. گیریم F زیرهیأتی‌ازهیأت‌اعداد مختلط C و V فضای‌برداری‌همهٔ‌ماتریسهای 2×2 برروی F باشد. فرض‌کنیم W_1 زیرمجموعه‌ای است‌از V متشکل ازهمهٔ‌ماتریسهای به‌صورت

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix}$$

که درآن x، y و z اسکالرهای دلخواهی از F هستند. سرانجام، فرض کنیم W_2 زیر-فضایی از V باشد متشکل از همهٔ ماتریسهای به‌صورت

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

که درآن x و y اسکالرهای دلخواهی از F هستند. W_1 و W_2 دو زیرفضا از V هستند. همچنین

$$V = W_1 + W_2 \cdot$$

زیرا،

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

زیرفضای $W_1 \cap W_2$ متشکل ازهمهٔ ماتریسهای به‌صورت

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

است.

مثال ۱۰. گیریم A ماتریسی $m\times n$ برروی هیأت F باشد. **بردارهای سطری** ماتریس A بردارهایی در F^n هستند که با $\alpha_i=(A_{i1},\ \cdots,A_{in})$، $i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$، به‌دست می‌آیند. زیرفضایی از F^n که توسط بردارهای سطری A پدیدمی‌آید **فضای سطری** ماتریس A نامیده می‌شود. زیرفضایی که درمثال ۸ درنظر گرفته شد، فضای سطری ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است. این زیرفضا، فضای سطری ماتریس

$$B=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -8 & 1 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

نیز هست.

مثال ۱۱. فرض کنیم V فضای همهٔ توابع چندجمله‌ای برروی هیأت F باشد. گیریم S زیرمجموعه‌ای از V متشکل از توابع چندجمله‌ای f_0، f_1، f_2، $\cdots$ با تعریف

$$f_n(x)=x^n,\ \ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

باشد. در این صورت، V زیرفضای پدیدآمده توسط مجموعهٔ S است.

تمرین

۱. کدامیك از مجموعه‌های زیرمتشکل از بردارهای $\alpha=(a_1,\ \cdots,\ a_n)$ در R^n زیرفضایی از R^n $(n\geqslant 3)$ است؟

(الف) مجموعهٔ همهٔ αها به‌طوری که $a_1\geqslant 0$؛

(ب) مجموعهٔ همهٔ αها با شرط $a_1+3a_2=a_3$؛

(پ) مجموعهٔ همهٔ αها به‌طوری که $a_1^2=a_2$؛

(ت) مجموعهٔ همهٔ αها با شرط $a_1a_2=0$؛

(ث) مجموعهٔ همهٔ αها به‌طوری که a_2 گویا باشد.

۲. گیریم V فضای برداری (حقیقی) همهٔ توابع f از R در R باشد. کدامیك از مجموعه‌های توابع زیر، زیرفضایی از V است؟

(الف) همهٔ fهایی که برای آنها $f(x^2)=f(x)^2$؛

(ب) همهٔ fهای با شرط $f(0)=f(1)$؛

(پ) همهٔ fهایی که برای آنها $f(3)=1+f(-5)$؛

(ت) همهٔ fهای با شرط $f(-1)=0$؛

(ث) همهٔ fهایی که پیوسته هستند.

۳. آیا بردار $(3, -1, 0, -1)$ در زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای $(2, -1, 3, 2)$، $(-1, 1, 1, -3)$، و $(1, 1, 9, -5)$ از فضای R^5 قرار دارد؟

۴. گیریم W مجموعهٔ همهٔ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ها در R^5 باشد که در دستگاه

$$2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0$$

$$9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0$$

صدق می‌کنند. مجموعه‌ای متشکل از چندبردار بیابید که W را پدید آورد.

۵. فرض کنید F یك هیأت و n عدد صحیح مثبتی باشد ($n \geqslant 2$). گیریم V فضای برداری همهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی F باشد. کدامیك از مجموعه‌های زیرین از ماتریسهای A در V زیرفضایی از V است؟

(الف) همهٔ ماتریسهای معکوس‌پذیر A؛

(ب) همهٔ ماتریسهای معکوس‌ناپذیر A؛

(پ) همهٔ Aها با شرط $AB=BA$؛ که دراینجا B **یك** ماتریس ثابت در V است؛

(ت) همهٔ ماتریسهای A به‌طوری که $A^2=A$.

۶. (الف) ثابت کنید که زیرفضاهای R^1 فقط R^1 و زیرفضای صفرهستند.

(ب) ثابت کنید که هرزیرفضای R^2 یا خود R^2 است یا زیرفضای صفراست ویا متشکل از همهٔ مضربهای اسکالری یك بردار ثابت در R^2 است. (زیرفضای نوع آخر، به‌طور شهودی، خط راستی است که از مبدأ می‌گذرد.)

(پ) آیا می‌توانید زیرفضاهای R^3 را توصیف کنید؟

۷. فرض کنید W_1 و W_2 دو زیرفضا ازیك فضای برداری V، و نیز اجتماع (دومجموعهٔ)

W_1 و W_2 یك زیرفضای آن باشد. ثابت کنید که یکی از دو زیرفضای W_i شامل دیگری است.

۸. فرض کنید V فضای برداری همهٔ توابع از R در R باشد. فرض کنید V_e زیرمجموعهٔ توابع زوج باشد، یعنی توابعی مانند f به قسمی که $f(-x)=f(x)$؛ و V_o زیر مجموعهٔ توابع فرد باشد، یعنی توابعی مانند f به‌قسمی که $f(-x)=-f(x)$.

(الف) ثابت کنید V_e و V_o زیرفضاهای V هستند؛

(ب) ثابت کنید $V_e+V_o=V$؛

(پ) ثابت کنید $V_e \cap V_o=\{0\}$.

۹. فرض کنید W_1 و W_2 دو زیرفضای یك فضای برداری V با شرایط $W_1+W_2=V$ و $W_1 \cap W_2=\{0\}$ باشند. ثابت کنید به‌ازای هر بردار α در V، بردار یکتای α_1 در W_1 و بردار یکتای α_2 در W_2 وجود دارد به طوری که $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$.

۲.۳. پایه و بعد

اکنون، به امر مهم تخصیص بعد به فضاهای برداری معینی می‌پردازیم. هرچند معمولاً «بعد» را مقوله‌ای هندسی تلقی می‌کنیم، با این وجود باید تعریف جبری مناسبی برای بعد یك فضای برداری بیابیم. این مهم از طریق مفهوم پایه برای فضا انجام می‌گیرد.

تعریف. گیریم V فضایی برداری بر روی F باشد. یك زیرمجموعهٔ S از V **وابسته خطی** (یا به طور ساده **وابسته**) نامیده می‌شود هرگاه بردارهایی متمایز مانند α_1، α_2، $\cdots$، α_n در S و اسکالرهایی مانند c_1، c_2، $\cdots$، c_n که همگی صفر نباشند در F یافت شود، به طوری که

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n=0.$$

مجموعه‌ای که وابستهٔ خطی نباشد **مستقل خطی** (یا دارای استقلال خطی) نام دارد. اگر مجموعهٔ S تنها شامل تعدادی متناهی بردار $\alpha_1،\alpha_2،\cdots،\alpha_n$ باشد، گاهی به جای اینکه بگوییم S وابسته (یا مستقل) خطی است می‌گوییم $\alpha_1،\alpha_2،\cdots،\alpha_n$ وابسته (یا مستقل) خطی هستند.

نکات زیر پی‌آمدهای سادهٔ این تعریف هستند.

۱. هرمجموعه که شامل یك مجموعهٔ وابسته خطی باشد خود وابستهٔ خطی است.

۲. هرزیر مجموعهٔ یك مجموعهٔ مستقل خطی، مجموعه‌ای است مستقل خطی.

۳. هرمجموعه‌ای که شامل بردار 0 باشد وابستهٔ خطی است؛ زیرا $1.0=0$.

۴. مجموعهٔ S از بردارها، مستقل خطی است اگر و تنها اگر هرزیرمجموعهٔ متناهی S مستقل خطی باشد؛ یعنی، اگر و تنها اگر به ازای هرچند بردار متمایز $\alpha_1،\cdots،\alpha_n$ از

S ، تساوی $c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n=0$ ایجاب کند که همهٔ c_i ها صفر هستند.

تعریف. گیریم V فضایی برداری باشد . یك پایه برای V مجموعه‌ای مستقل خطی ازبردارهای V است که فضای V را پدیدآورد. فضای V دارای (یابا) بعد متناهی است هرگاه یك پایهٔ متناهی داشته باشد.

مثال۱۲. فرض کنیم F زیرهیأتی ازاعداد مختلط باشد. بردارهای

$$\alpha_1=(3,0,-3)$$
$$\alpha_2=(-1,1,2)$$
$$\alpha_3=(4,2,-2)$$
$$\alpha_4=(2,1,1)$$

از F^3 وابستهٔ خطی هستند؛ زیرا

$$2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+0.\alpha_4=0.$$

بردارهای

$$\epsilon_1=(1,0,0)$$
$$\epsilon_2=(0,1,0)$$
$$\epsilon_3=(0,0,1)$$

مستقل خطی هستند.

مثال۱۳. فرض کنیم F یك هیأت و S زیرمجموعه‌ای از F^n متشکل ازبردارهای ϵ_1،ϵ_2،$\cdots$،ϵ_n باتعریف

$$\epsilon_1=(1,0,0,\cdots,0)$$
$$\epsilon_2=(0,1,0,\cdots,0)$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\epsilon_n=(0,0,0,\cdots,1)$$

باشد. x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n را اسکالرهایی در F می‌گیریم وقرار می‌دهیم

$$\alpha=x_1\epsilon_1+x_2\epsilon_2+\cdots+x_n\epsilon_n.$$

دراین صورت،

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n). \tag{۲-۱۲}$$

این مطلب نشان می‌دهد که ϵ_1،$\cdots$،ϵ_n فضای F^n را پدید می‌آورند. چون $\alpha=0$ اگر و تنها اگر $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ ، بردارهای ϵ_1، ϵ_2،$\cdots$، ϵ_n مستقل‌خطی هستند.

درنتیجه، مجموعهٔ $S=\{\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n\}$ پایه‌ای برای F^n است. این پایهٔ خاص را پایه استانده‌ی F^n می‌نامیم.

مثال ۱۴. گیریم P یک ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیر بر روی هیأت F باشد. دراینصورت، ستونهای P ؛ یعنی، P_1، P_2، $\cdots$، P_n پایه‌ای برای فضاهای ماتریسهای ستونی $F^{n\times 1}$ تشکیل می‌دهند. دلیل این مطلب به شرح زیراست. اگر X ماتریسی ستونی باشد، آنگاه

$$PX=x_1P_1+\cdots+x_nP_n.$$

حال چون $PX=0$ تنها دارای جواب بدیهی $X=0$ است، نتیجه می‌گیریم که مجموعهٔ $\{P_1,\cdots,P_n\}$ مستقل خطی است. اما، چرا این مجموعه $F^{n\times 1}$ را پدید می‌آورد؟ فرض کنیم Y ماتریس ستونی دلخواهی باشد. اگربگیریم $X=P^{-1}Y$ ، آنگاه $Y=PX$ یا

$$Y=x_1P_1+\cdots+x_nP_n.$$

ازاین‌رو، $\{P_1,\cdots,P_n\}$ پایه‌ای برای $F^{n\times 1}$ است.

مثال ۱۵. گیریم A ماتریسی $m\times n$ و S فضای جواب دستگاه همگن $AX=0$ باشد (مثال ۷). فرض کنیم R یک ماتریس تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی هم‌ارز با A باشد. دراین‌صورت، S فضای جواب دستگاه $RX=0$ نیزهست. اگر R دارای r سطر غیرصفر باشد، آنگاه دستگاه معادلات $RX=0$ بوضوح r تا ازمجهولهای x_1،$\cdots$،x_n را برحسب $(n-r)$ مجهول باقیماندهٔ x_j بیان می‌کند. فرض کنیم درایه‌های غیرصفر مقدم سطرهای غیرصفردر ستونهای k_1،$\cdots$،k_r قرار گیرند. اگر j مجمـوعهٔ متشکل از $(n-r)$ نمایـهٔ غیر از k_1،$\cdots$،k_r باشد:

$$J=\{1,\cdots,n\}-\{k_1,\cdots,k_r\}$$

آنگاه، دستگاه $RX=0$ به صورت

$$x_{k_1}+\sum_J c_{1j}x_j=0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_{k_r}+\sum_J c_{rj}x_j=0$$

است که درآن c_{ij} ها اسکالرهای معینی هستند. همهٔ جوابها با تخصیص مقادیری(دلخواه) به x_j هایی که‌نمایهٔ j آنها در J قراردارد، وسپس محاسبهٔ مقادیر متناظر x_{k_1}،$\cdots$، x_{k_r} بـه دست می‌آیند. بـه ازای هـر j در J ، گیریم E_j جوابی باشد کـه از قرار دادن $x_j=1$ و $x_i=0$ به‌ازای همهٔ iهای دیگر واقع در J ، به‌دست‌می‌آید. ادعا می‌کنیم که $(n-r)$ بردار E_j ، j در J ، پایه‌ای برای فضای جواب تشکیل می‌دهند.

چون ماتریس ستونی E_j در سطر jام دارای درایهٔ ۱ و در سطرهای نمایه‌گذاری‌شده توسط عناصر دیگر J دارای درایهٔ صفر است، استدلال مثال۱۳ نشان می‌دهدکه مجموعهٔ این بردارها مستقل خطی است. به دلیل زیر، این مجموعه فضای جواب را پدید می‌آورد. اگرماتریس ستونی T با درایه‌های $t_1, \ldots, t_n$ درفضای جواب باشد، ماتریس

$$N = \sum_J t_j E_j$$

نیز درفضای جواب قراردارد وجوابی است که به ازای هر j در J، $x_j = t_j$. جوابی با این خاصیت، یکتاست؛ ازاین رو، $N = T$ و T درفضای پدیدآمده توسط بردارهای E_j قراردارد.

مثال۱۶. اکنون مثالی از یك پایهٔ نامتناهی می‌آوریم. گیریم F زیرهیأتی ازهیأت اعداد مختلط و V فضای توابع چندجمله‌ای برروی F باشد. یادآوری می‌کنیم که این توابع، توابعی از F در F هستند که قاعده‌ای به‌صورت

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

دارند. فرض کنیم $f_k(x) = x^k$ و $k = 0, 1, 2, \ldots$ مجموعهٔ (نامتناهی) $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ پایه‌ای برای V است. این مجموعه بوضوح V را پدید می‌آورد؛ زیرا تابع f (بالا) عبارت است از

$$f = c_0 f_0 + c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n.$$

خواننده باید متوجه باشدکه این فرمول در واقع تکراری از تعریف تابع چند جمله‌ای است؛ یعنی، تابع f از F در F، یك تابع چند جمله‌ای است اگر و تنها اگر یك عدد صحیح n و اسکالرهایی مانند $c_0, \ldots, c_n$ وجود داشته باشند به طوری که $f = c_0 f_0 + \cdots + c_n f_n$. چرا این توابع مستقل‌اند؟ نشان دادن اینکه مجموعهٔ $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ مستقل خطی است به‌معنی نشان دادن این است که هر زیرمجموعهٔ متناهی آن مستقل خطی است. پس، کافی است نشان دهیم به‌ازای هر n مجموعهٔ $\{f_0, \ldots, f_n\}$ مستقل خطی است. فرض کنیم

$$c_0 f_0 + \cdots + c_n f_n = 0.$$

این بدان معنی است که به‌ازای هر x در F

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0;$$

به‌بیان دیگر، هر x در F یك ریشهٔ چند جمله‌ای $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ است. فرض می‌کنیم خواننده بداندکه یك چند جمله‌ای از درجهٔ n با ضرایب مختلط نمی‌تواند بیش از n ریشهٔ متمایز داشته باشد. در این صورت، نتیجه می‌گیریم که $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$.

تا اینجا یك پایهٔ نامتناهی برای V ارائــه‌کرده‌ایم. آیا این بدان معنی است که V دارای بعد متناهی نیست؟ در واقع این طور است؛ ولی، ایــن نتیجه‌ای فوری از تعریف نیست؛ زیرا، تا جایی‌که ما می‌دانیم ممکن است V دارای پــایــهٔ متناهی نیز باشد. این امکان بسادگی قــابــل رفع است. (در قضیهٔ بعد ایــن مطلب را در حالت عمومی مرتفع می‌کنیم.) فــرض کنیم تعــدادی متناهی تــابــع چند جمله‌ای g_1، $\cdots$، g_r داشته باشیم. مسلماً بین توانهایی از x که در $g_1(x)$، $\cdots$، $g_r(x)$ (با ضریب غیرصفر) ظاهرمی‌شوند، بزرگترینی وجود دارد. اگر این توان k باشد، به‌طور قطع $f_{k+1}(x)=x^{k+1}$ درپدید-آمدهٔ خطی g_1، $\cdots$، g_r قرار ندارد. بنابراین، V با بعد متناهی نیست.

اینك بپردازیم بــه‌آخــریــن نکته در مورد ایــن مثال. پایه‌های نامتناهی ربطی به «ترکیبات خطی نامتناهی» ندارند. خواننده‌ای‌که قویاً احساس‌کند بین رشتهٔ توانی

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

و این مثال ربطی وجود دارد، بهتر است مجدداً و با دقت ایــن مثال را مطالعه‌کند. اگر این توصیه‌گشایشی ایجاد نکرد بهتر است از ایــن پس در پی محدودکردن توجه خود به فضاهای با بعد متناهی باشد.

قضیهٔ ۴. فرض کنید V فضای برداری پدیدآمده توسط مجموعــهٔ متناهی متشکل از بردارهای β_1، β_2، $\cdots$، β_m باشد. در این صورت، هر مجموعهٔ مستقل از بردارهای V متناهی است و بیش از m عنصر ندارد.

اثبات. برای اثبات قضیه‌کافی است نشان دهیم کــه هر زیــر مجموعهٔ S از V که شامل بیش از m بردار باشد، وابستهٔ خطی است. گیریم S چنین مجموعه‌ای باشد. پس، در S، n بردار متمایز α_1، α_2، $\cdots$، α_n با شرط $n>m$ وجــود دارد. چــون β_1، $\cdots$، β_m فضای V را پدید می‌آورند، اسکالرهایی مانند A_{ij} در F یافت می‌شوند به‌طوری که

$$\alpha_j=\sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i.$$

به‌ازای هر n اسکالر دلخواه x_1، x_2، $\cdots$، x_n داریم:

$$\begin{aligned} x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n &= \sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (A_{ij}x_j)\beta_i \\ &= \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\Big)\beta_i. \end{aligned}$$

چون $n>m$، قضیهٔ ۶ از فصل ۱ ایجاب می‌کند که اسکالرهایی مانند $x_1, x_2, \cdots, x_n$ که همگی ۰ نیستند، وجود داشته باشند به‌طوری که

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

از این‌رو، $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$. این نشان می‌دهد که مجموعهٔ S وابستهٔ خطی است. □

نتیجه ۱. اگر V یك فضای برداری با بعد متناهی باشد، آنگاه هر دو پایه از V به‌تعداد مساوی (و متناهی) عضو دارند.

اثبات. چون V با بعد متناهی است، دارای یك پایهٔ متناهی

$$\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m\}$$

است. بنابر قضیهٔ ۴، هر پایهٔ V، متناهی است و بیش از m عضو ندارد. پس، اگر $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ یك پایه باشد، آنگاه $n \leqslant m$. با برهانی مشابه، $m \leqslant n$ و بنابراین، $m=n$. □

این نتیجه به‌ما اجازه می‌دهد که **بعد** یك فضای برداری با بعد متناهی را به‌عنوان تعداد اعضای هر یك از پایه‌های آن تعریف کنیم. بعد یك فضای برداری با بعد متناهی V را با $\dim V$ یا بعد(V) نشان می‌دهیم. بنابراین مطلب قضیهٔ ۴ را به‌صورت زیر بازگو می‌کنیم.

نتیجهٔ ۲. فرض کنیم V یك فضای برداری با بعد متناهی باشد، و بعد $n=(V)$. در این صورت

(الف) هر زیر مجموعهٔ V که شامل بیش از n بردار باشد وابستهٔ خطی است.

(ب) هیچ زیر مجموعه‌ای از V که کمتر از n بردار داشته باشد نمی‌تواند V را پدید آورد.

مثال ۱۷. اگر F یك هیأت باشد، بعد F^n برابر n است؛ زیرا، پایهٔ استاندهٔ F^n شامل n بردار است. بعد فضای ماتریسی $F^{m\times n}$ برابر mn است. این مطلب در مقایسه با حالت F^n باید روشن باشد، چرا که mn ماتریسی که در مکان i, j خود درایهٔ ۱ و در مکانهای دیگر درایهٔ صفر دارند، تشکیل پایه‌ای برای $F^{m\times n}$ می‌دهند. اگر A ماتریسی $m\times n$ باشد، آنگاه بعد فضای جواب A برابر $n-r$ است؛ که در آن r تعداد سطرهای غیر صفر یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی است که هم‌ارز سطری A باشد. به‌مثال ۱۵ رجوع شود.

اگر V فضای برداری دلخواهی برروی F باشد زیرفضای صفر V توسط بردار ۰

پدید می‌آید، ولی مجموعهٔ $\{0\}$ یك پـایه نیست ، زیرا وابستهٔ خطی است. بدین دلیل، توافق می‌کنیم کـه زیـرفضای صفر دارای بعد ۰ باشد. همچنین با اثبات ایـن مطلب که مجموعهٔ تهی یك پایه برای زیرفضای صفراست، می‌توانیم به‌همان نتیجه برسیم. مجموعهٔ تهی،فضای $\{0\}$ را پدید می‌آورد؛ زیرا اشتراك همهٔ زیرفضاهای شامل مجموعهٔ تهی برابر $\{0\}$ است، و بعلاوه مجموعهٔ تهی مستقل خطی است، چرا که شامل هیچ برداری نیست.

لم. فرض کنیم S یك زیر مجموعهٔ مستقل خطی از فضای برداری V باشد و بردار β از V در زیرفضای پدیدآمده توسط S نباشد. دراین صورت، مجموعهٔ حاصل از الحاق β به S مستقل خطی است.

اثبات. فرض کنیم α_1،...،α_m بردارهای متمایزی از S باشند و

$$C_1\alpha_1+\cdots C_m\alpha_m+b\beta=0$$

آنگاه $b=0$؛ زیرا در غیر این صورت

$$\beta=\left(-\frac{c_1}{b}\right)\alpha_1+\cdots+\left(-\frac{c_m}{b}\right)\alpha_m.$$

وβ درزیرفضای پدیدآمده توسط S قرارمی‌گیرد. ازاین‌رو، $c_1\alpha_1+\cdots+c_m\alpha_m=0$ و چون S مستقل خطی است همهٔ c_iها صفرند. □

قضیهٔ۵. اگر W زیر فضایی از یك فضای با بعد متناهی V باشد ، هر زیر مجموعهٔ مستقل خطی از W متناهی است و قسمتی از یك پایهٔ (متناهی) W است.

اثبات.فرض کنیم S_0 یك زیرمجموعهٔمستقل خطی W باشد. اگرزیرمجموعهٔ مستقل خطی S از W شامل S_0 باشد، آنگاه S نیز یك زیر مجموعهٔ مستقل خطی V است؛ حال چون V با بعد متناهی است، S شامل بیش از $\dim V$ عنصر نیست.

به‌طریق زیر، S_0 را بـه‌پایه‌ای برای W گسترش می‌دهیم. اگـر S_0 فضای W را پدیدآورد، آنگاه S_0 یك پـایـهٔ W است وکار تمام است. هرگاه S_0 فضای W را پدید نیاورد، لم قبل را برای یافتن یك بردار β_1 در W به‌طوری که مجموعهٔ $S_1=S_0U\{\beta_1\}$ مستقل خطی باشد به‌کار می‌گیریم. اگـر S_1 فضای W را پدیدآورد، مراد حاصل است. درغیراین‌صورت، لم‌را برای‌دست‌یافتن به‌یك بردار β_2 درW به‌طوری که $S_2=S_1U\{\beta_2\}$ مستقل خطی باشد به‌کارمی‌بندیم. اگربه‌همین‌طریق ادامه دهیم، آنگاه (طی حداکثر $\dim V$ مرحله) به‌مجموعهٔ

$$S_m=S_0U\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$$

می‌رسیم که پایه‌ای برای W است. □

نتیجهٔ ۱. اگر W زیـرفضایی سره از فضای برداری V با بعد متناهی باشد، آنگاه

W با بعد متناهی است و $\dim W < \dim V$.

اثبات. می‌توانیم فرض کنیم W شامل بردار $\alpha \neq 0$ باشد. بنابر قضیهٔ ۵ و اثبات آن، پایه‌ای برای W شامل α وجود دارد که حاوی بیش از $\dim V$ عنصر نیست؛ از این‌رو، W با بعد متناهی است و $\dim W \leqslant \dim V$. چون W زیرفضای سره‌ای از V است، یك بردار β در V وجود دارد که در W نیست. با الحاق β به‌هر پایهٔ W، یك زیرمجموعهٔ مستقل خطی از V به‌دست می‌آوریم. پس، $\dim W < \dim V$. □

نتیجهٔ ۲. در هرفضای برداری بـا بعد متناهی، هرمجموعهٔ غیرتهی مستقل خطی از بردارها بخشی از یك پایه است.

نتیجهٔ ۳. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ برروی هیأت F باشد و بردارهای سطری A یك مجموعه مستقل خطی ازبردارهای F^n را تشکیل دهند. دراین صورت، A معکوس‌پذیر است.

اثبات. فرض کنیم α_1، α_2، $\cdots$ ، α_n بردارهای سطری A و W زیرفضای پدیدآمده توسط α_1، α_2، $\cdots$ ، α_n ازفضای F^n باشد. چون α_1، α_2، $\cdots$ ، α_n مستقل‌هستند، بعد W برابر n است. حال، نتیجهٔ ۱ نشان می‌دهد که $W = F^n$، از این‌رو، در F اسکالرهایی چون B_{ij} وجود دارند که

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

در اینجا $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n\}$ پـایـه استانده F^n است. از این‌رو، بـرای ماتریس B با درایه‌های B_{ij} داریم

$$BA = I. \quad \square$$

قضیهٔ ۶. اگر W_1 و W_2 دو زیرفضای با بعد متناهی از فضای برداری V باشند، آنگاه $W_1 + W_2$ با بعد متناهی است و

$$\text{بعد}\,(W_1 + W_2) + \text{بعد}\,(W_1 \cap W_2) = \text{بعد}\,(W_2) + \text{بعد}\,(W_1).$$

اثبات. بنابـرقضیهٔ ۵ و نتیجه‌هـای آن، فضـای $W_1 \cap W_2$ یـك پایـهٔ متناهـی $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ دارد که خود بخشی از یك پایهٔ

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots, \beta_m\}$$

برای W_1 و نیز بخشی از یك پایهٔ

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$$

برای W_2 است. زیرفضای $W_1 + W_2$ توسط بردارهای

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \quad \beta_1, \cdots, \beta_m, \quad \gamma_1, \cdots, \gamma_n$$

پدید می‌آید و این بردارها یك مجموعهٔ مستقل خطی تشکیل می‌دهند. زیرا، فرض کنیم

$$\Sigma x_i\alpha_i+\Sigma y_j\beta_j+\Sigma z_r\gamma_r=0.$$

آنگاه،

$$-\Sigma z_r\gamma_r=\Sigma x_i\alpha_i+\Sigma y_j\beta_j$$

که نشان می‌دهد $\Sigma z_r\gamma_r$ به W_1 تعلق دارد. چون $\Sigma z_r\gamma_r$ متعلق به W_2 نیز هست، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای اسکالرهای معین c_1، $\cdots$، c_k،

$$\Sigma z_r\gamma_r=\Sigma c_i\alpha_i\ .$$

چون مجموعهٔ

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$$

مستقل است، هریك از اسکالرهای z_r برابر صفر است. بنابراین،

$$\Sigma x_i\alpha_i+\Sigma y_j\beta_j=0$$

وچون

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots, \beta_m\}$$

نیز مجموعه‌ای مستقل است، هر x_i و نیز هر y_j برابر صفر است. از این‌رو،

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots, \beta_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$$

پایه‌ای برای W_1+W_2 است. سرانجام

$$\begin{aligned}\text{بعد}\,(W_1)+\text{بعد}\,(W_2)&=(k+m)+(k+n)\\&=k+(m+k+n)\\&=\text{بعد}\,(W_1\cap W_2)+\text{بعد}\,(W_1+W_2).\ \square\end{aligned}$$

این بخش را با تذکری دربارهٔ استقلال و وابستگی خطی به‌پایان می‌بریم. این مفاهیم را ما برای مجموعه‌ای از بردارها تعریف کردیم. لازم است که آنها را برای دنباله‌های متناهی (nتایی‌های مرتب) نیز تعریف کنیم. گوییم بردارهای α_1، $\cdots$، α_n **وابستهٔ خطی** هستند هرگاه اسکالرهایی مانند c_1، $\cdots$، c_n، که همگی ۰ نباشند، یافت شوند به‌طوری که $c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n=0$. کلاً این اصطلاح چنان طبیعی به‌نظر می‌رسد که خواننده ممکن است گمان کند که تابه‌حال نیز آن را به‌کار برده است. تفاوت بین دنبالهٔ متناهی $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$، و مجموعهٔ $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ چیست؟ دو تفاوت هست، یکی همانندی و دیگری ترتیب.

هرگاه مجموعهٔ $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ مورد بحث باشد، معمولاً فرض براین است که هیچ‌دو برداری در بین α_1، α_2، $\cdots$، α_n یکی نیستند. درحالی‌که دردنبالهٔ $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ممکن‌است همهٔ α_iها یکی باشند. اگر به‌ازای $i \neq j$، $\alpha_i = \alpha_j$، آنگاه دنبالهٔ $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ وابستهٔ خطی است:

$$\alpha_i + (-1)\alpha_j = 0 .$$

از این‌رو، اگر $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ مستقل خطی باشند، متمایـز نیز هستند و می‌توانیم دربارهٔ مجموعهٔ $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ صحبت‌کنیم و مطمئن باشیم که ایـن مجموعه دارای n بردار است. در این حالت مسلماً هیچ‌گونه ابهامی در بحث پایه و بعد وجـود نخواهد داشت. بعد یك فضای V با بعد متناهی بزرگترین n ی است که یك nتایی از بردارهای V مستقل خطی باشد ــ وغیره. خواننده‌ای‌که فکر کند مطالب این بند جز هیاهو چیزی نیست، خوب است از خود سؤال کند که آیا دوبردار

$$\alpha_1 = (e^{\pi/2}, 1)$$
$$\alpha_2 = (\sqrt[3]{110}, 1)$$

در R^2 مستقل خطی هستند یا نه.

عناصر یك دنباله به‌ترتیب معینی شماره‌گذاری می‌شوند. درحالی‌که یـك مجموعه دسته‌ای است از اشیاء بدون هیچ‌گونه آرایش و ترتیب خاص. البته، برای توصیف یك مجموعه باید اعضای آن را فهرست‌کنیم و این امرنیاز به‌اتخاذ یك ترتیب دارد. ولـی، ترتیب، جزئی از مجموعه نیست. مجموعه‌هـای $\{1, 2, 3, 4\}$ و $\{4, 3, 2, 1\}$ یکـی هستند، درحالی‌که دنبالهٔ متناهی $1, 2, 3, 4$ با دنبالهٔ $4, 3, 2, 1$ کاملاً متفاوت است. جنبهٔ ترتیب دنباله تأثیـری برمفاهیم استقلال، وابستگی، وغیـره ندارد، زیـرا وابستگی (آن‌طورکه تعریف شد) متأثر از ترتیب نیست. دنبالهٔ $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ وابسته است اگرو تنها اگر دنبالهٔ α_1، $\cdots$، α_n وابسته باشد. دربخش بعدی، ترتیب اهمیت خاصی خواهد داشت.

تمرین

۱. اگر دوبردار وابستهٔ‌خطی باشند، ثابت‌کنید یکی از آنها مضرب اسکالری دیگری‌است.

۲. آیا بردارهای

$$\alpha_1 = (1, 1, 2, 4), \qquad \alpha_2 = (2, -1, -5, 2)$$
$$\alpha_3 = (1, -1, -4, 0), \quad \alpha_4 = (2, 1, 1, 6)$$

در R^4 مستقل خطی هستند؟

۳. پایه‌ای برای زیرفضایی از R^4 که توسط چهار بردار تمرین ۲ پدید می‌آید بیابید.

۴. نشان دهید که بردارهای

$$\alpha_1=(1,\ 0,\ -1),\quad \alpha_2=(1,\ 2,\ 1),\quad \alpha_3=(0,\ -3,\ 2)$$

پایه‌ای برای R^3 تشکیل می‌دهند. هریك از بردارهای پایهٔ استانده را به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای α_1، α_2، و α_3 بیان کنید.

۵. سه بردار وابستهٔ خطی در R^3 بیابید که هرجفت از آنها مستقل خطی باشند.

۶. فرض کنید V فضـای برداری همهٔ ماتریسهای 2×2 برروی هیأت F باشد. با یافتن پایه‌ای برای V که ۴ عنصر داشته باشد، ثابت کنید V چهار بعدی است.

۷. فرض کنید V فضای برداری تمرین ۶، W_1 مجموعهٔ ماتریسهای به‌صورت

$$\begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix}$$

و W_2 مجموعهٔ ماتریسهای به‌صورت

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix}$$

باشند.

(الف) ثابت کنید W_1 و W_2 زیرفضاهای V هستند.

(ب) ابعاد W_1، W_1+W_2، و $W_1\cap W_2$ را بیابید.

۸. مجدداً فرض کنید V فضای ماتریسهای 2×2 برروی هیأت F باشد. پایه‌ای چون $\{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4\}$ برای V بیابید به‌طوری که به‌ازای هر j، $A_j^2=A_j$.

۹. فرض کنید V فضایی برداری برروی یك زیرهیأت F از اعداد مختلط باشد. فرض کنید بردارهای α، β، و γ در V مستقل خطی باشند. ثابت کنید $(\alpha+\beta)$، $(\beta+\gamma)$، و $(\gamma+\alpha)$ دارای استقلال خطی‌اند.

۱۰. فرض کنید V یـك فضای برداری برروی هیـأت F باشد و تعدادی متناهی بردار چون α_1، $\cdots$، α_r در V این فضا را پدید آورند. ثابت کنید V با بعد متناهی‌است.

۱۱. فرض کنید V مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای 2×2 مانند A با درایه‌های مختلط باشد که در شرط $A_{11}+A_{22}=0$ صدق می‌کنند.

(الف) نشان دهید V با اعمال معمولی جمع ماتریسی و ضرب ماتریس‌در اسکالر،

فضایی است برداری برروی هیأت اعداد حقیقی.
(ب) پایه‌ای برای این فضای برداری بیابید.
(پ) فرض کنید W مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای A در V با شرط $A_{21} = -\overline{A_{12}}$ باشد (خط زبر نمایشگرمزدوج عددی مختلط است). ثابت کنید W یك زیرفضای V است و پایه‌ای هم برای W بیابید.

۱۲. با یافتن پایه‌ای برای فضای همهٔ ماتریسهای $m\times n$ برروی هیأت F، ثابت کنید بعد این فضا mn است.

۱۳. تمرین ۹ را درحالتی‌که V یك فضای برداری برروی هیأت دوعنصری توصیف‌شدهٔ در تمرین ۵ بخش ۱.۱ باشد، مورد بحث قراردهید.

۱۴. فرض کنید V مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. V با اعمال معمولی را به‌عنوان فضایی برداری برروی هیأت اعدادگویا محسوب وثابت‌کنید این فضای برداری بعدمتناهی ندارد.

۴.۲. مختصات

یکی از جنبه‌های مفید یك پایهٔ $\mathscr{B}$ در فضای nبعدی V این است که اساساً به‌ما امکان می‌دهد در V، نظیر «مختصات طبیعی» x_i از یك بردار $\alpha=(x_1, \cdots, x_n)$ در فضای F^n، به‌معرفی مختصات بپردازیم. در این طرح، مختصات بردار α از V نسبت به‌پایه $\mathscr{B}$ اسکالرهایی خواهند بودکه در بیان α به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای پایه به‌کار می‌روند. از این‌رو، علاقه‌مندیم که مختصات طبیعی بردار α در F^n را به‌عنوان مختصاتی که توسط α وپایه استاندهٔ F^n تعریف می‌شوند، محسوب کنیم. اما، در پذیرش این‌دیدگاه باید دقت‌کافی به‌عمل آوریم. اگر

$$\alpha=(x_1, \cdots, x_n)=\sum x_i\epsilon_i$$

و $\mathscr{B}$ پایهٔ استاندهٔ F^n باشد، دقیقاً چگونه مختصات بردار α توسط $\mathscr{B}$ و α تعیین می‌شوند؟ یك راه پاسخ دادن به‌این سؤال چنین است. هر بردار مفروض α عبارت یکتایی به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای پایهٔ استانده دارد، و i مین مختص x_i از α ضریب ϵ_i دراین عبارت است. ازاین‌جهت می‌توانیم بگوییم iمین مختص کدام است. زیرا، ترتیبی«طبیعی» برای بردارهای پایهٔ استانده وجود دارد؛ یعنی قاعده‌ای دردست هست برای تعیین اینکه در پایه، کدام «اولین» بردار است، کدام «دومین»، والی آخر. اگر $\mathscr{B}$ پایهٔ دلخواهی ازفضای nبعدی V باشد، احتمالاً ترتیبی طبیعی برای بردارهای $\mathscr{B}$ نداریم، و از این‌رو، قبل از آنکه بتوانیم «iمین مختص α نسبت به $\mathscr{B}$» را تعریف کنیم، ضروری است ترتیبی برای این بردارها تحمیل کنیم. به‌تعبیر دیگر، مختصات نسبت به‌دنبالهٔ بردارها و نه‌مجموعهٔ **بردارها**

تعریف می‌شوند.

تعریف. اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، یک **پایهٔ مرتب** برای V دنباله‌ای متناهی از بردارهای مستقل خطی است‌که V را پدید آورند.

اگردنبالهٔ $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ پایهٔ مرتبی برای Vباشد، آنگاه مجموعهٔ $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V است. در واقع، پایهٔ مرتب مجموعه‌ای است همراه با ترتیبی معین. با مختصر سوءاستفاده از علامت‌گذاری، همهٔ این مطالب را با ذکراین‌که

$$\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

پایه مرتبی برای V است، خلاصه می‌کنیم.

حال فرض‌کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی برروی F و

$$\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

پایهٔ مرتبی برای V باشد. به ازای هر α در V، nتایی یکتایی چون $(x_1, \cdots, x_n)$ از اسکالرها وجود داردکه

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i \cdot$$

این nتایی یکتاست، زیرا اگر همچنین داشته باشیم

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n} z_i\alpha_i$$

آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)\alpha_i=0$$

و استقلال خطی بردارهای α_i ایجاب می‌کندکه به‌ازای هر i، $x_i-z_i=0$. x_i را، iامین **مختص α نسبت به‌پایهٔ مرتب**

$$\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

می‌نامیم. اگر

$$\beta=\sum_{i=1}^{n} y_i\alpha_i$$

آنگاه

$$\alpha+\beta=\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\alpha_i$$

و بنابراین، iامین مختص $(\alpha+\beta)$ نسبت به‌این پایهٔ مرتب (x_i+y_i) است. به‌طور مشابه، iامین مختص $(c\alpha)$ برابر cx_i است. همچنین، روشن است که هر nتایی $(x_1, \cdots, x_n)$ در F^n عبارت است از nتایی مختصات برداری در V، یعنی بردار

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i .$$

به‌طور خلاصه، هرپایهٔ مرتب برای V تناظری یك به‌یك

$$\alpha \rightarrow (x_1, \cdots, x_n)$$

بین مجموعهٔ همهٔ بردارهای V و مجموعهٔ همهٔ n تاییهای F^n برقرار می‌سازد. این تناظر دارای این خاصیت است که متناظر $(\alpha+\beta)$ همان حاصل‌جمع متناظرهای دو بردار α و β در F^n است، وهمچنین متناظر $(c\alpha)$ برابراست با حاصل‌ضرب اسکالر c و متناظر بردار α در F^n.

دراین مرحله، ممکن است این سؤال مطرح شودکه چرا صرفاً پایهٔ مرتبی برای V انتخاب نمی‌کنیم تا هر بردار V را به‌وسیلهٔ nتایی مختصات متناظرش توصیف نماییم؛ چراکه دراین صورت از راحتی‌کار با nتاییها برخوردار هستیم. این امر به‌دو دلیل نقض غرض خواهد بود. اولاً، همان‌طورکه تعریف اصل موضوعی فضاهای برداری نشان می‌دهد، سعی ما این است‌که فضاهای برداری را به‌عنوان دستگاههای جبری مجردبررسی کنیم. ثانیاً، حتی درآن حالاتی‌که مختصات را به‌کار می‌بریم، نتایج مهم از توانایی ما در تغییر دستگاه مختصات؛ یعنی، در تغییر پایهٔ مرتب، به‌دست می‌آیند.

اغلب، راحت‌تر است که به جای nتایی مختصات $(x_1, \cdots, x_n)$ از **ماتریس مختصات** α نسبت به **پایهٔ مرتب** $\mathscr{B}$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

استفاده‌کنیم. برای نمایاندن وابستگی این ماتریس مختصات به‌پایه، علامت

$$[\alpha]_{\mathscr{B}}$$

را برای ماتریس مختصات بردار α نسبت‌به‌پایهٔ مرتب $\mathscr{B}$ به‌کار خواهیم برد. این نماد،در مواردی نظیراین پرسش که درصورت تغییر پایهٔ مرتبی به‌پایهٔ مرتب دیگر چه تغییری در مختصات برداری چون α روی می‌دهد، خصوصاً مفید است.

پس، فرض‌کنیم V فضایی nبعدی باشد، و

$$\mathscr{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \quad \text{و} \quad \mathscr{B}' = \{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n\}$$

دوپایهٔ مرتب برای V باشند، دراین صورت، اسکالرهای یکتایی چون P_{ij} وجوددارندکه

$$\alpha'_j=\sum_{i=1}^{n}P_{ij}\alpha_i,\quad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{۱۳-۲}$$

گیریم $x'_1,\ldots,x'_n$ مختصات بردار مفروض α در (نسبت‌به) پایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ باشند. در این صورت

$$\begin{aligned}\alpha&=x'_1\alpha'_1+\cdots+x'_n\alpha'_n\\&=\sum_{j=1}^{n}x'_j\alpha'_j\\&=\sum_{j=1}^{n}x'_j\sum_{i=1}^{n}P_{ij}\alpha_i\\&=\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{n}(P_{ij}x'_j)\alpha_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}P_{ij}x'_j\Big)\alpha_i.\end{aligned}$$

پس، رابطهٔ

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}P_{ij}x'_j\Big)\alpha_i \tag{۱۴-۲}$$

به دست می‌آید. چون $x_1,x_2,\ldots,x_n$ مختصات بردار α درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$، به طوریکتا تعیین می‌شوند، از (۲-۱۴) نتیجه می‌شود که

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}P_{ij}x'_j,\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{۱۵-۲}$$

گیریم P ماتریس $n\times n$ی باشدکه درایهٔ i,j آن اسکالر P_{ij} است وگیریم X و X' ماتریسهای مختصات بردار α درپایه‌های مرتب $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ باشند. در این صورت (۲-۱۵) را می‌توان به صورت فرمول

$$X=PX' \tag{۱۶-۲}$$

نیز نوشت. چون $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ دومجموعهٔ مستقل خطی هستند، $X=0$ اگر وتنها اگر $X'=0$. لذا از (۲-۱۶) و قضیهٔ ۷ ازفصل ۱، نتیجه می‌گیریم که P معکوس‌پذیر است. ازاین‌رو،

$$X'=P^{-1}X. \tag{۱۷-۲}$$

اگرنماد معرفی شدهٔ فوق را برای ماتریس مختصات یك بردار نسبت به پایه‌ای مرتب به کارگیریم، آنگاه (۲-۱۶) و (۲-۱۷) بیان می‌کنندکه

$$[\alpha]_{\mathcal{B}}=P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$$
$$[\alpha]_{\mathcal{B}'}=P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

پس، این بحث را می‌توان به‌شرح زیرخلاصه کرد.

قضیهٔ ۷. فرض کنیم V یك‌فضای برداری n بعدی بر روی هیأت F باشد، و $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ دو پایهٔ مرتب برای V باشند. آنگاه یك ماتریس $n\times n$ یکتا ولزوماً معکوس‌پذیرمانند P که درایه‌هایش در F هستند وجود دارد به طوری‌که به ازای هربردار α در V

$$[\alpha]_{\mathcal{B}}=P[\alpha]_{\mathcal{B}'} \qquad (۱)$$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'}=P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}'} \qquad (۲)$$

ستونهای P با روابط

$$P_j=[\alpha_j']_{\mathcal{B}'} \quad j=۱,۲,\cdots,n$$

تعیین می‌شوند.

برای تکمیل تحلیل بالا، نتیجهٔ زیر را نیز اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ ۸. فرض کنیم P ماتریسی معکوس‌پذیر و $n\times n$ بر روی هیأت F ، V یك فضای برداری n بعدی بر روی F ، و $\mathcal{B}$ پایه‌ای مرتب برای V باشد. دراین صورت، پایهٔ مرتب یکتایی چون $\mathcal{B}'$ برای V وجود داردکه به ازای هربردار α در V

$$[\alpha]_{\mathcal{B}}=P[\alpha]_{\mathcal{B}'} \qquad (۱)$$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'}=P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}} \qquad (۲)$$

اثبات. گیریم $\mathcal{B}$ متشکل از بردارهای $\alpha_۱,\cdots,\alpha_n$ باشد. اگر $\mathcal{B}'=\{\alpha_۱',\cdots,\alpha_n'\}$ پایهٔ مرتبی برای V ودرموردآن (۱) معتبرباشد، واضح است که

$$\alpha_j'=\sum_{j=۱}^{n}P_{ij}\alpha_i.$$

پس، کافی است نشان دهیم بردارهای α_j' که با این معادلات تعریف می‌شوند، تشکیل یك پایه می‌دهند. فرض کنیم $Q=P^{-1}$. دراین‌صورت،

$$\begin{aligned}\sum_j Q_{jk}\alpha_j' &= \sum_j Q_{jk}\sum_i P_{ij}\alpha_i\\ &= \sum_j\sum_i P_{ij}Q_{jk}\alpha_i\\ &= \sum_i\Big(\sum_j P_{ij}Q_{jk}\Big)\alpha_i\\ &= \alpha_k.\end{aligned}$$

بنابراین، زیرفضای پدیدآمدهٔ توسط مجموعهٔ

$$\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n\}$$

شامل $\mathcal{B}$ ونتیجتاً مساوی با V است. پس، $\mathcal{B}'$ یك پایه است، وبنابر تعریف پایه وقضیهٔ ۷ واضح است که (۱) معتبر وازآنجا (۲) نیزمعتبر می‌باشد. □

مثال۱۸. گیریم F یك هیأت، و

$$\alpha = (x_1, x_2, \cdots x_n)$$

برداری از F^n باشد. اگر $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتب استاندهٔ F^n باشد:

$$\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$$

آنگاه ماتریس مختصات بردار α درپایهٔ $\mathcal{B}$ به وسیلهٔ

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

تعیین می‌شود.

مثال۱۹. فرض‌کنیم R هیأت اعداد حقیقی و θ عدد حقیقی ثابتی باشد. ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

معکوس‌پذیر است ومعکوس‌آن عبارت است از

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

پس، به ازای هر θ، مجموعهٔ $\mathcal{B}'$ متشکل از بردارهای $(\cos\theta ، \sin\theta)$ و $(-\sin\theta ، \cos\theta)$ پایه‌ای‌برای R^2 است. این پایه را به طور شهودی‌می‌توان به‌عنوان پایه‌ای‌که از دوران پایهٔ استانده به اندازهٔ زاویهٔ θ حاصل می‌شود، توصیف کرد. اگر α بردار (x_1, x_2) باشد،آنگاه

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

یا

$$x'_1=x_1\cos\theta+x_2\sin\theta$$
$$x'_2=-x_1\sin\theta+x_2\cos\theta.$$

مثال۲۰. گیریم F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط باشد. ماتریس

$$P=\begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

معکوس‌پذیر است و معکوس آن عبارت است از

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{11}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

بنابراین، بردارهای

$$\alpha'_1=(-1,\quad 0,0)$$
$$\alpha'_2=(\quad 4,\quad 2,0)$$
$$\alpha'_3=(\quad 5,\ -3,8)$$

پایه‌ای چون $\mathcal{B}'$ را برای F^3 تشکیل می دهند. مختصات x'_1،x'_2،x'_3 از بردار $\alpha=(x_1,x_2,x_3)$ درپایهٔ $\mathcal{B}'$ به وسیلهٔ

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x_1+2x_2+\frac{11}{8}x_3 \\ \frac{1}{2}x_2+\frac{3}{16}x_3 \\ \frac{1}{8}x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{11}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

تعیین می‌شوند. در حالت خاص

$$(۳, ۲, -۸) = -۱۰\alpha'_۱ - \frac{۱}{۲}\alpha'_۲ - \alpha'_۳.$$

تمرین

۱. نشان دهید که بردارهای

$$\alpha_۱ = (۱, ۱, ۰, ۰), \qquad \alpha_۲ = (۰, ۰, ۱, ۱)$$
$$\alpha_۳ = (۱, ۰, ۰, ۴), \qquad \alpha_۴ = (۰, ۰, ۰, ۲)$$

پایه‌ای برای $R^۴$ تشکیل می‌دهند. مختصات هریك از بردارهای پایهٔ استانده را نسبت به‌پایهٔ مرتب $\{\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳, \alpha_۴\}$ بیابید.

۲. ماتریس مختصات بردار $(۱, ۰, ۱)$ در پایه‌ای از $C^۳$ را که بترتیب متشکل است از بردارهای $(۲i, ۱, ۰)$، $(۲, -۱, ۱)$، و $(۰, ۱+i, ۱-i)$ بیابید.

۳. فرض کنید $\mathcal{B} = \{\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳\}$ پایه‌ای مرتب برای $R^۳$ متشکل از

$$\alpha_۱ = (۱, ۰, -۱), \qquad \alpha_۲ = (۱, ۱, ۱) \qquad \alpha_۳ = (۱, ۰, ۰)$$

باشد. مختصات بردار (a, b, c) در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ چیست؟

۴. فرض کنید W زیر فضایی از $C^۳$ باشد که توسط $\alpha_۱ = (۱, ۰, i)$ و $\alpha_۲ = (۱+i, ۱, -۱)$ پدید می‌آید.

(الف) نشان دهید که $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهند.

(ب) نشان دهید که بردارهای $\beta_۱ = (۱, ۱, ۰)$ و $\beta_۲ = (۱, i, ۱+i)$ در W قرار دارند و پایهٔ دیگری برای W تشکیل می‌دهند.

(پ) مختصات $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ در پایهٔ مرتب $\{\beta_۱, \beta_۲\}$ از W چه هستند؟

۵. فرض کنید $\alpha = (x_۱, x_۲)$ و $\beta = (y_۱, y_۲)$ دو بردار در $R^۲$ باشند که

$$x_۱y_۱ + x_۲y_۲ = ۰, \qquad x_۱^۲ + x_۲^۲ = y_۱^۲ + y_۲^۲ = ۱.$$

ثابت کنید که $\mathcal{B} = \{\alpha, \beta\}$ پایه‌ای برای $R^۲$ است. مختصات بردار (a, b) را درپایهٔ مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha, \beta\}$ بیابید. (ازنظر هندسی، شرایط روی α و β بیان می‌کنند که α و β متعامدند و هر یك طول ۱ دارند.)

۶. فرض کنید فضای برداری V بر روی اعداد مختلط، متشکل از همهٔ توابع از R در C باشد؛ یعنی، فضای همهٔ توابع (با مقدار) مختلط روی خط حقیقی باشد. فرض کنید

$f_1(x)=1$، $f_2(x)=e^{ix}$، و $f_3(x)=e^{-ix}$.

(الف) ثابت کنید که f_1، f_2، و f_3 مستقل خطی هستند.

(ب) فرض کنید $g_1(x)=1$، $g_2(x)=\cos x$، و $g_3(x)=\sin x$. ماتریس 3×3 معکوس‌پذیری چون P بیابید به‌طوری که

$$g_j=\sum_{i=1}^{3} P_{ij} f_i$$

۷. فرض کنید V فضای برداری (حقیقی) همهٔ توابع چندجمله‌ای از R در R از درجهٔ ۲ یا کمتر باشد؛ یعنی، فضای همهٔ توابع f به‌صورت

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$$

باشد. فرض کنید t عدد حقیقی ثابتی باشد، و توابع زیر را تعریف کنید:

$$g_1(x)=1,\quad g_2(x)=x+t,\quad g_3(x)=(x+t)^2.$$

ثابت کنید $\mathcal{B}=\{g_1, g_2, g_3\}$ پایه‌ای برای V است. اگر

$$f(x)=c_0+C_1x+C_2x^2,$$

مختصات f در پایه مرتب $\mathcal{B}$ چه هستند؟

۵.۲. خلاصهٔ هم ارزی سطری

در این بخش برای تکمیل بحث هم ارزی سطری ماتریسها، چند حکم مقدماتی در مورد پایه وبعد فضاهای برداری با بعد متناهی را مورد استفاده قرارمی‌دهیم. یادآوری‌می کنیم که اگر A ماتریس $m\times n$ی بر روی هیأت F باشد، بردارهای سطری A عبارتند از بردارهای α_1،...،α_m از F^n که توسط

$$\alpha_i=(A_{i1}, \cdots, A_{in})$$

تعریف می‌شوند؛ و نیز یادآور می‌شویم که فضای سطری A زیر فضایی است از F^n که توسط این بردارها پدید می‌آید. **رتبهٔ سطری** A عبارت است از بعد فضای سطری A.

اگر P ماتریسی $k\times m$ بر روی F باشد، آنگاه حاصل‌ضرب $B=PA$ ماتریسی $k\times n$ است که بردارهای سطری آن β_1،...،β_k ترکیبات خطی

$$\beta_i=P_{i1}\alpha_1+\cdots+P_{im}\alpha_m$$

از بردارهای سطری A هستند. بدین نحو، فضای سطری B زیر فضایی از فضای سطری A است. اگر P ماتریس $m\times m$ معکوس‌پذیری باشد، آنگاه B هم ارز سطری A است، و نتیجتاً تقارن هم‌ارزی سطری، یا معادلهٔ $A=P^{-1}B$، ایجاب می کند که فضای سطری A نیز زیر فضایی از فضای سطری B باشد.

قضیهٔ ۹. فضاهای سطری ماتریسهای هم ارز سطری یکی هستند.

از این‌رو، می بینیم که برای مطالعهٔ فضای سطری A کافی است به‌مطالعهٔ فضای

سطری یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی که هم‌ارز سطری A باشد بپردازیم؛ واین، همان چیزی است که قصد انجام آن را داریم.

قضیهٔ ۱۰. فرض کنیم R یك ماتـریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی غیر صفر باشد. دراین صورت بردارهای سطری غیرصفرR برای فضای سطری R یك‌پایه تشکیل می‌دهند.

اثبات. گیریم $\rho_1, \cdots, \rho_r$ بردارهای سطری غیر صفر ماتریس R باشند:

$$\rho_i = (R_{i1}, \cdots, R_{in}).$$

مطمئناً این بردارها فضای سطری R را پدید می‌آورند؛ پس تنها لازم است ثابت کنیم که این بردارها مستقل خطی‌اند. چون R یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی است، اعداد صحیح و مثبتی چون $k_1, \cdots, k_r$ وجود دارندکه به‌ازای $i \leqslant r$

(۲-۱۸)
(الف) $R(i, j) = 0$ هرگاه $j < k_i$
(ب) $R(i, k_j) = \delta_{ij}$
(پ) $k_1 < \cdots < k_r$.

فرض‌کنیم $\beta = (b_1, \cdots, b_n)$ برداری در فضای سطری R باشد:

$$\beta = c_1\rho_1 + \cdots + c_r\rho_r. \qquad (۲\text{-}۱۹)$$

در این صورت، ادعا می‌کنیم که $c_j = b_{k_j}$. زیرا، بنابر (۲-۱۸)

$$\begin{aligned} b_{k_j} &= \sum_{i=1}^{r} c_i R(i, k_j) \qquad (۲\text{-}۲۰) \\ &= \sum_{i=1}^{r} c_i \delta_{ij} \\ &= c_j. \end{aligned}$$

درحالت خاص، اگر $\beta = 0$، یعنی $c_1\rho_1 + \cdots + c_r\rho_r = 0$، آنگاه c_j باید مختص k_jم بردار صفر باشد، و بنابرایــن، $c_j = 0$، $j = 1, \cdots, r$. پس، $\rho_1, \cdots, \rho_r$ مستقل خطی هستند. □

قضیهٔ ۱۱. گیریم m و n دو عدد صحیح مثبت و F یك هیأت باشد. فرض کنیم W زیرفضایی از F^n باشد و $\dim W \leqslant m$. دراین صورت، تنها یك ماتریس $m \times n$ تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی بر روی F وجود دارد که فضای سطری آن W باشد.

اثبات. حداقل یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی $m \times n$ که فضای سطری آن W باشد وجود دارد. چون $\dim W \leqslant m$، می‌توان m بردار $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ در W انتخاب کرد که W را پدیدآورند. گیریم A ماتریس $m \times n$ با بردارهای سطری $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ و R یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی که هم ارزسطری A است باشد. دراین صورت، فضای سطری R همان W است.

حال فرض می‌کنیم R ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی دلخواهی باشد که فضای سطری آن W است. گیریم $\rho_1, \cdots, \rho_r$ بردارهای سطری غیرصفر R باشند، و درایهٔ غیر صفر مقدم ρ_i در ستون k_i، $i=1, \cdots, r$، واقع شود. بردارهای $\rho_1, \cdots, \rho_r$ پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهند. در اثبات قضیهٔ ۱۰ مشاهده کردیم که اگر $\beta=(b_1, \cdots, b_n)$ در W باشد، آنگاه

$$\beta = c_1\rho_1 + \cdots + c_r\rho_r,$$

و $c_i = b_{k_i}$؛ به‌بیان دیگر، عبارت یکتای β به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای $\rho_1, \cdots, \rho_r$ عبارت است از

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} b_{k_i}\rho_i. \qquad (۲-۲۱)$$

بنابراین، هر بردار β با در دست بودن مختصات b_{k_i} آن، $i=1, \cdots, r$، معین می‌شود. مثلاً*، ρ_s، تنها بردار واقع در W است که مختص k_sام آن ۱ و به‌ازای $i \neq s$ مختص k_iام آن ۰ است.

فرض کنیم β در W باشد و $\beta \neq 0$. ادعا می‌کنیم که اولین مختص غیرصفر β در یکی از ستونهای k_s واقع می‌شود. چون

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} b_{k_i}\rho_i,$$

و $\beta \neq 0$، می‌توان نوشت

$$\beta = \sum_{i=s}^{r} b_{k_i}\rho_i, \quad b_{k_s} \neq 0. \qquad (۲-۲۲)$$

اگر $i > s$ و $j \leqslant k_s$، بنابر شرایط (۲-۱۸) داریم $R_{ij}=0$. بنابراین

$$\beta = (0, \cdots, 0, b_{k_s}, \cdots b_n), \quad b_{k_s} \neq 0$$

و اولین مختص غیر صفر β در ستون k_s قرار می‌گیرد. همچنین توجه باید داشت که به ازای هر k_s، $S=1, \cdots, r$، برداری در W وجود دارد که مختص k_sام آن غیر صفر است؛ این بردار همان ρ_s است.

اکنون روشن است که R به‌طور یکتا توسط W تعیین می‌شود. توصیف R برحسب W به‌شرح زیراست. همهٔ بردارهای $\beta=(b_1, \cdots, b_n)$ واقع در W را درنظرمی گیریم. اگر $\beta \neq 0$، اولین مختص غیر صفر β باید در ستونی چون t قرار گیرد:

$$\beta = (0, \cdots, 0, b_t, \cdots, b_n), \quad b_t \neq 0.$$

گیریم $k_1, \cdots, k_r$ آن اعداد صحیح مثبت t باشند که به‌ازای هر یك برداری چون $\beta \neq 0$ در W وجود داشته باشد به‌طوری که اولین مختص غیرصفرش در ستون t واقع

شود. اعداد $k_1, \ldots, k_r$ را با ترتیب $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ مرتب می‌کنیم. به‌ازای هر یك از اعداد صحیح مثبت k_s، یك و تنها یك بردار ρ_s در W وجود دارد به‌طوری که مختص k_sام بردار ρ_s برابر ۱، و به‌ازای $i \neq s$ مختص k_iام آن صفر باشد. دراین‌صورت R ماتریسی است $m \times n$ با بردارهای‌سطری $\rho_1, \ldots, \rho_r, 0, \ldots, 0$. □

نتیجه. هر ماتریس $m \times n$ مانند A هم ارز سطری یك وتنها یك ماتریس تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی است.

اثبات. می‌دانیم که A حداقل با یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی R هم‌ارز سطری است. اگر A هم‌ارز سطری یکی دیگر از این‌گونه ماتریسها، مثلاً R'، باشد؛ آنگاه R هم‌ارز سطری R' است؛ و از این‌رو، R و R' دارای فضاهای سطری‌مساوی‌اند و باید یکی باشند. □

نتیجه. فرض‌کنیم A و B دو ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت F باشند. در این‌صورت A و B هم‌ارز سطری‌اند اگر و تنها اگر دارای فضاهای سطری مساوی باشند.

اثبات. می‌دانیم که اگر A و B هم‌ارز سطری باشند، آنگاه دارای فضاهای سطری مساوی هستند. لذا فرض می‌کنیم که A و B دارای فضاهای سطری مساوی باشند، در این صورت، A هم‌ارز سطری یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی R، و B هم‌ارز سطری یك‌ماتریس‌تحویل‌شدهٔ سطری‌پلکانی R' است. چون A و B دارای‌فضاهای سطری‌مساویند، R و R' نیز فضای سطری مساوی‌دارند. بنابراین، $R = R'$، و A هم‌ارزسطری B است. □

خلاصه‌آنکه: اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت F باشند، احکام زیر هم ارزند:

۱. A و B هم ارز سطری‌اند.
۲. A و B دارای فضاهای سطری مساوی‌اند.
۳. $B = PA$، که درآن P یك ماتریس $m \times m$ معکوس‌پذیر است.

یك‌حکم‌هم‌ارزچهارم هم‌این‌است که دودستگاه همگن $AX = 0$ و $BX = 0$ دارای جوابهای مساوی‌اند؛ اما، با اینکه می‌دانیم هم‌ارزی سطری A و B ایجاب می‌کند که این دو دستگاه دارای جوابهای مساوی باشند، به‌نظر می‌رسد بهتر است اثبات عکس‌آن را به بعد موکول کنیم.

۶.۲. محاسبات مربوط به‌زیر فضاها

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه اعمال سطری مقدماتی روشی استاندە شده را برای پاسخگویی به‌پرسشهای واقعی معینی در رابطه با زیرفضاهای F^n به‌دست می‌دهند. قبلاً احکام مورد نیاز را فراهم‌کرده‌ایم و برای راحتی خواننده آنها را در اینجا گرد می‌آوریم. این بحث در مورد هر فضای برداری n بعدی بر روی هیأت F در صورتی

صادق است که یك پایهٔ مرتب ثابت $\mathscr{B}$ انتخاب شود وهر بردار α از V به‌وسیلهٔ یك nتایی $(x_1, \cdots, x_n)$ که مختصات α را در پایهٔ مرتب $\mathscr{B}$ به‌دست می‌دهد، توصیف شود.

فرض‌کنیم m بردار $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ از F^n مفروض باشند. پرسشهای زیــر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱. چگونه‌معلوم‌می‌شودکه بردارهای $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ مستقل خطی‌اند؟ یا به‌طورکلی، چگونه می‌توان بعد W، زیر فضای پدیدآمده توسط این بردارها، را یافت؟

۲. با مفروض بودن β در F^n، چگونه می‌توان معلوم‌کردکه‌آیا β ترکیبی خطی‌از بردارهای $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ هست یا نه؛ یعنی، β در زیرفضای W قرار دارد یا نه؟

۳. چگونه می‌توان توصیفی صریح از زیرفضای W به‌دست داد؟

سومین سؤال قدری مبهم است، زیرا مشخص نیست‌که منظور از «توصیف صریح» چیست؛ به‌هرحال، ابتدا نوع توصیفی را که درذهن داریم ارائه می‌دهیم. بااین توصیف، فوراً می‌توان به‌پرسشهای (۱) و (۲) پاسخ داد.

گیریم A ماتریسی $m \times n$ با بردارهای سطری α_i باشد:

$$\alpha_i = (A_{i1}, \cdots, A_{in}).$$

دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی را به‌کارگیریدکه از A آغاز و به‌یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی R ختم شود. قبلاً چگونگی انجام این‌کار را توضیح داده‌ایم. در این مرحله، بعد W (فضای سطری A) مشخص است، چراکه ایــن بعد چیزی نیست جز تعداد بردارهای سطری غیر صفر R. اگــر $\rho_1, \cdots, \rho_r$ بردارهای سطری غیر صفر R باشند، آنگاه $\mathscr{B} = \{\rho_1, \cdots, \rho_r\}$ پایه‌ای برای W است. اگراولین مختص غیرصفر ρ_i، مختص k_iام باشد، آنگاه به‌ازای $i \leqslant r$ داریم

(الف) $R(i, j) = 0$، هرگاه $j < k_i$.

(ب) $R(i, k_j) = \delta_{ij}$

(پ) $k_1 < \cdots < k_r$.

زیرفضای W متشکل است از همهٔ بردارهای

$$\begin{aligned}\beta &= c_1\rho_1 + \cdots + c_r\rho_r \\ &= \sum_{i=1}^{r} c_i (R_{i1}, \cdots, R_{in}).\end{aligned}$$

در این صورت، مختصات $b_1, \cdots, b_n$ یك چنین بردار β عبارتند از

$$b_j = \sum_{i=1}^{r} c_i R_{ij}. \qquad (۲-۲۳)$$

بخصوص $b_{k_j} = c_j$، و از این‌رو اگر $\beta = (b_1, \cdots, b_n)$ ترکیبی خطی از ρ_iها باشد، باید به‌صورت ترکیب خطی خاص

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} b_{k_i} \rho_i \qquad (۲۴\text{-}۲)$$

باشد. شرایط روی β برای برقراری (۲-۲۴) عبارتند از

$$b_j = \sum_{i=1}^{r} b_{k_i} R_{ij}, \quad j = 1, \cdots, n. \qquad (۲۵\text{-}۲)$$

حال (۲-۲۵) توصیف صریح W، زیرفضای پدیدآمده توسط α_1، ...، α_m است؛ یعنی این زیرفضا متشکل است ازهمهٔ بردارهای β در F^n که مختصاتشان در (۲-۲۵) صدق می‌کنند. (۲-۲۵) چه نوع توصیفی است؟ عمدتاً این توصیف W را به‌عنوان همهٔ جوابهای $\beta = (b_1, \cdots, b_n)$ از دستگاه معادلات خطی همگن (۲-۲۵) بیان می‌کند. این دستگاه معادلات، از طبیعت بسیار ویژه‌ای برخوردار است؛ زیرا، $(n-r)$ مختص را به‌صورت ترکیبات خطی r مختص مشخص b_{k_1}، ...، b_{k_r} به‌دست می‌دهد. در انتخاب مختصات b_{k_i} آزادی کامل وجود دارد؛ یعنی اگر c_1، ...، c_r اسکالرهایی دلخواه باشند، یك وتنها یك بردار β در W وجود دارد که c_i مختص k_iام آن است.

نکتهٔ قابل توجه در اینجا این است: با مفروض بودن بردارهای α_i، تحویل سطری روشی است سرراست برای تعیین اعداد صحیح r، k_1، ...، k_r واسکالرهای R_{ij} که توصیف (۲-۲۵) از زیرفضای پدید آمده توسط α_1، ...، α_m را به‌دست می‌دهند. همان‌طورکه در قضیهٔ ۱۱ نشان دادیم، مشاهده می‌شودکه هرزیرفضای W از F^n دارای توصیفی از نوع (۲-۲۵) است. دربارهٔ سؤال (۲) نیز به‌نکاتی اشاره می‌کنیم. قبلا، در بخش ۱.۴، بیان‌کرده‌ایم که چگونه می‌توان یك ماتریس معکوس‌پذیر $m \times m$ مانند P یافت به‌طوری که $R = PA$. با اطلاع از P درصورت امکان می‌توان اسکالرهایی مانند x_1، ...، x_n را یافت به‌طوری‌که

$$\beta = x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m .$$

زیرا، بردارهای سطری R از معادلهٔ

$$\rho_i = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}\alpha_j$$

به‌دست می‌آیند وبنابراین، اگر β ترکیبی خطی از α_jها باشد، داریم

$$\begin{aligned}
\beta &= \sum_{i=1}^{r} b_{k_i}\rho_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} b_{k_i} \sum_{j=1}^{m} P_{ij}\alpha_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{r} b_{k_i} P_{ij}\alpha_j
\end{aligned}$$

و از این‌رو

$$x_j = \sum_{i=1}^{r} b_{k_i} P_{ij}$$

یکی از انتخابهای ممکن برای x_j است (ممکن است امکانات دیگری هم باشد).

همچنین این سؤال را که آیا $\beta=(b_1, \dots, b_n)$ ترکیبی خطی از α_iها هست یا نه، و اگر هست، اسکالرهای x_i چه هستند، می‌توان به‌صورت این پرسش که آیا دستگاه معادلات

$$\sum_{i=1}^{m} A_{ij}x_i=b_j, \qquad j=1, \dots, n$$

جواب دارد و درصورت وجود، جوابها چه هستند، مطرح کرد. ماتریس ضرایب این دستگاه معادلات، ماتریسی $n\times m$ مانند B با بردارهای ستونی α_1، $\dots$، α_m است. در فصل ۱ کاربرد اعمال سطری مقدماتی درحل دستگاه معادلات $BX=Y$ را مورد بحث قرار دادیم. اکنون مثالی را مطرح می‌کنیم که درآن در پاسخگویی به‌سؤالات مربوط به زیرفضاهای F^n هردو نقطه‌نظر اعمال می‌شود.

مثال ۲۱. دراین مثال مسئلهٔ زیررا مطرح می‌کنیم. فرض کنیم W زیرفضایی از R^4 باشدکه توسط بردارهای

$$\alpha_1=(1, 2, 2, 1)$$
$$\alpha_2=(0, 2, 0, 1)$$
$$\alpha_3=(-2, 0, -4, 3)$$

پدید آید.

(الف) ثابت کنیدکه α_1، α_2، α_3 پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهند؛ یعنی، ثابت کنید این بردارها مستقل خطی هستند.

(ب) گیریم $\beta=(b_1, b_2, b_3, b_4)$ برداری در W باشد. مختصات β نسبت‌به‌پایهٔ مرتب $\{\alpha_1، \alpha_2، \alpha_3\}$ چیست؟

(پ) فرض کنید

$$\alpha'_1=(1, 0, 2, 0)$$
$$\alpha'_2=(0, 2, 0, 1)$$
$$\alpha'_3=(0, 0, 0, 3)$$

نشان دهید α'_1، α'_2، α'_3 پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهند.

(ت) اگر β در W باشد، فرض کنید X ماتریس مختصات β در α - پایه و X' ماتریس مختصات β در α' - پایه را نشان دهد. ماتریسی 3×3 مانند P را که به‌ازای هرچنین β، $X=PX'$ بیابید.

برای پاسخگویی به‌این سؤالات با روش اول، ماتریس A با بردارهای سطری

α_1، α_2، α_3 را تشکیل می‌دهیم، ماتریس تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی R راکه هم‌ارزسطری A است، می‌یابیم، و همزمان همان اعمال را روی ماتریس همانی به‌کار می‌بریم تا به‌ماتریس معکوس‌پذیر Q که $R=QA$ دست یابیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \to R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to Q = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

(الف) واضح است که R دارای رتبهٔ ۳ است، و لذا α_1، α_2، و α_3 مستقل خطی هستند.

(ب) از بردارهای $\beta=(b_1, b_2, b_3, b_4)$ کدام در W قراردارند؟ پایه‌ای برای W داریم که توسط ρ_1، ρ_2، و ρ_3، یعنی بردارهای سطری R، معین می‌شود. با یک نظر می‌توان دید که زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای ρ_1، ρ_2، ρ_3 متشکل است از بردارهایی چون β که به‌ازای آنها $b_3=2b_1$. برای چنین بردار β داریم

$$\begin{aligned} \beta &= b_1\rho_1 + b_2\rho_2 + b_4\rho_3 \\ &= [b_1 b_2 b_4]R \\ &= [b_1 b_2 b_4]QA \\ &= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \end{aligned}$$

که در آن $x_i=[b_1\ b_2\ b_4]Q_i$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \quad b_1 - \frac{1}{3} b_2 + \frac{2}{3} b_4 \\ x_2 &= -b_1 + \frac{5}{6} b_2 - \frac{2}{3} b_4 \qquad (۲۶\text{-}۲) \\ x_3 &= \qquad -\frac{1}{6} b_2 + \frac{1}{3} b_4 \cdot \end{aligned}$$

(پ) بردارهای α_1'، α_2'، و α_3' همگی به‌شکل (y_1, y_2, y_3, y_4) باشرط $y_3=2y_1$ هستند، و از این‌رو در W قرار دارند. با یک نظر می‌توان دید که این بردارها مستقل خطی هستند.

(ت) ماتریس P دارای ستونهای

$$P_j=[\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$$

است که درآن $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. معادلات (۲-۲۶) به‌ما نشان می‌دهند که ماتریسهای مختصات α'_1، α'_2، α'_3 را چگونه پیداکنیم. مثلاً، به‌ازای $\beta=\alpha'_1$ داریم $b_1=1$، $b_2=0$، $b_3=2$، $b_4=0$، و

$$x_1= \quad 1-\frac{1}{3}(0)+\frac{2}{3}(0)=1$$

$$x_2=-1+\frac{5}{6}(0)-\frac{2}{3}(0)=-1$$

$$x_3= \quad -\frac{1}{6}(0)+\frac{1}{3}(0)=0.$$

پس، $\alpha'_1=\alpha_1-\alpha_2$. به‌طورمشابه به‌دست‌می‌آوریم $\alpha'_2=\alpha_2$ و $\alpha'_3=2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$. بنابراین

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

اکنون ببینیم با روش دومی که تشریح کردیم چگونه به‌این پرسشها پاسخ می‌دهیم. ماتریسی ۳×۴ مانند B را با بردارهای ستونی α_1، α_2، و α_3 تشکیل می‌دهیم:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

تحقیق می‌کنیم که به‌ازای کدام اسکالرهای y_1، y_2، y_3، y_4 دستگاه $BX=Y$ دارای جواب است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & y_1 \\ 2 & 2 & 0 & y_2 \\ 2 & 0 & -4 & y_3 \\ 1 & 1 & 3 & y_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & y_1 \\ 0 & 2 & 4 & y_2-2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3-2y_1 \\ 0 & 1 & 5 & y_4-y_1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & y_1 \\ 0 & 0 & -6 & y_2-2y_4 \\ 0 & 1 & 5 & y_4-y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3-2y_1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6}(2y_4-y_2) \\ 0 & 1 & 0 & -y_1+\frac{5}{6}y_2-\frac{2}{3}y_4 \\ 0 & 0 & 0 & y_3-2y_1 \end{bmatrix}.$$

بنابراین، شرط جواب داشتن دستگاه $BX=Y$، این است که $y_3=2y_1$. لذا $\beta=(b_1, b_2, b_3, b_4)$ در W قرار دارد اگر و تنها اگر $b_3=2b_1$. اگر β در W باشد، آنگاه مختصات (x_1, x_2, x_3) درپایهٔ مرتب $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ را می‌توان ازآخرین ماتریس بالاخواند ویک‌باردیگر، فرمولهای (۲-۲۶) را برای این مختصات به‌دست‌آورد.

اکنون به‌پرسشهای (پ) و (ت) مثل قبل پاسخ می‌دهیم.

مثال ۲۲. ماتریس ۵ × ۵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و مسائل زیر دربارهٔ آن را درنظر می‌گیریم.

(الف) یك ماتریس معکوس‌پذیر P بیابید به‌طوری که PA یك ماتریس تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی‌مانند R باشد.

(ب) پایه‌ای برای W، فضای سطری A، بیابید.

(پ) تعیین‌کنیدکدام یك از بردارهای $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ در W قراردارند.

(ت) ماتریس مختصات هر بردار $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ از W را در پایهٔ مرتب انتخاب شده در (ب) بیابید.

(ث) هر بردار $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ از W را به‌صورت ترکیبی‌خطی ازسطرهای A بنویسید.

(ج) توصیف صریحی از V، فضای برداری همهٔ ماتریسهای ستونی ۱ × ۵ مانند X با شرط $AX = 0$ را به‌دست دهید.

(چ) پایه‌ای برای V بیابید.

(ح) به‌ازای کدام یك از ماتریسهای ستونی ۱ × ۵ مانند Y، معادله $AX = Y$، دارای جواب X است؟

برای حل ایـن مسائل ماتریس افزودهٔ A' از دستگاه $AX = Y$ را تشکیل می‌دهیم و دنباله‌ای مناسب از اعمال سطری روی A' به‌کار می‌بندیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_3 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -y_1+y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2y_1+y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_1-y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1+y_2+y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3y_1+y_2+y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_1-y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1+y_2+y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3y_1+y_2+y_4-y_5 \end{bmatrix}$$

(الف) اگر به‌ازای هر Y

$$PY=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1-y_2 \\ y_5 \\ -y_1+y_2+y_3 \\ -3y_1+y_2+y_4-y_5 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

و از این‌رو، PA ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

است. باید تأکید کرد که ماتریس P یکتا نیست. در واقع، تعداد زیادی ماتریس معکوس‌پذیر P (که از انتخابهای گوناگون اعمال مورد استفاده جهت تحویل A' ناشی می‌شوند) وجود دارند که $PA=R$.

(ب) به‌عنوان پایه‌ای برای W، می‌توان بردارهای سطری غیرصفر

$$\rho_۱=(۱,\ ۲,\ ۰,\ ۳,\ ۰)$$
$$\rho_۲=(۰,\ ۰,\ ۱,\ ۴,\ ۰)$$
$$\rho_۳=(۰,\ ۰,\ ۰,\ ۰,\ ۱)$$

از ماتریس R را انتخاب کرد.

(پ) فضای سطری W متشکل ازهمهٔ بردارهای به‌صورت

$$\begin{aligned}\beta&=c_۱\rho_۱+c_۲\rho_۲+c_۳\rho_۳\\&=(c_۱,\ ۲c_۱,\ c_۲,\ ۳c_۱+۴c_۲,\ c_۳)\end{aligned}$$

است که در آن $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$ اسکالرهای دلخواهی هستند. پس، $(b_۱,\ b_۲,\ b_۳,\ b_۴,\ b_۵)$ در W است اگر وتنها اگر

$$(b_۱,\ b_۲,\ b_۳,\ b_۴,\ b_۵)=b_۱\rho_۱+b_۳\rho_۲+b_۵\rho_۳$$

و این تساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$$b_۲=۲b_۱$$
$$b_۴=۳b_۱+۴b_۳.$$

این معادلات نمونه‌هایی از دستگاه عمومی (۲-۲۵) هستند که با استفاده ازآنها با یك نگاه می‌توان گفت که آیا برداری مفروض در W هست یا خیر. بنابراین، $(-۵,\ -۱۰,\ ۱,\ -۱۱,\ ۲۰)$ ترکیبی‌خطی‌ازسطرهای A هست، اما $(۱,\ ۲,\ ۳,\ ۴,\ ۵)$ چنین نیست.

(ت) ماتریس مختصات بردار $(b_۱,\ ۲b_۱,\ b_۳,\ ۳b_۱+۴b_۳,\ b_۵)$ در پایهٔ $\{\rho_۱,\ \rho_۲,\ \rho_۳\}$، مسلماً عبارت است از

$$\begin{bmatrix} b_۱\\ b_۳\\ b_۵\end{bmatrix}.$$

(ث) طرق بسیاری برای نوشتن بردارهای W به صورت ترکیبات خطی سطرهای A وجود دارد. شاید آسانترین راه‌آن باشد که ازنخستین شیوهٔ بیان شدهٔ قبل ازمثال ۲۱ پیروی کنیم:

$$\begin{aligned}\beta &= (b_1,\ 2b_1,\ b_3,\ 3b_1+4b_3,\ b_5)\\ &= [b_1,\ b_3,\ b_5,\ 0,\ 0]\cdot R\\ &= [b_1,\ b_3,\ b_5,\ 0,\ 0]\cdot PA\end{aligned}$$

$$= [b_1,\ b_3,\ b_5,\ 0,\ 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\cdot A$$

$$= [b_1+b_3,\ -b_3,\ 0,\ 0,\ b_5]\cdot A.$$

درحالت خاص، در ازای $\beta=(-5, -10, 1, -11, 20)$ داریم

$$\beta = [-4, -1, 0, 0, 20]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0\\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(ج) معادلات دستگاه $RX=0$ عبارتند از

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_4 &= 0\\ x_3+4x_4 &= 0\\ x_5 &= 0.\end{aligned}$$

از این‌رو، V متشکل از همهٔ ستونهای به‌شکل

$$X=\begin{bmatrix} -2x_2-3x_4\\ x_2\\ -4x_4\\ x_4\\ 0\end{bmatrix}$$

است که در آن $x_۲$ و $x_۴$ دلخواه هستند.

(چ) دوستون

$$\begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \\ -۴ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند. این پایه مثالی است از پایهٔ توصیف شده در مثال ۱۵.

(ح) معادلهٔ $AX=Y$ دارای جوابهای X است اگر وتنها اگر

$$\begin{aligned} -\ y_۱+y_۲+y_۳ \qquad &= ۰ \\ -۳y_۱+y_۲+y_۴-y_۵ &= ۰. \end{aligned}$$

تمرین

۱. فرض کنید $n > s$ و A ماتریسی $s\times n$ باشد که درایه‌هایش متعلق به‌هیأت F هستند. ازقضیهٔ ۴ (و نه‌اثبات آن) استفاده کنید تا نشان‌دهید که یك X غیرصفر در $F^{n\times ۱}$ وجود دارد که $AX=۰$.

۲. فرض کنید

$$\alpha_۱=(۱,\ ۱,-۲,\ ۱),\quad \alpha_۲=(۳,\ ۰,\ ۴,-۱),\quad \alpha_۳=(-۱,\ ۲,\ ۵,\ ۲)$$

و

$$\alpha=(۴,-۵,\ ۹,-۷),\quad \beta=(۳,\ ۱,-۴,\ ۴),\quad \gamma=(-۱,\ ۱,\ ۰,\ ۱).$$

(الف) کدام یك از بردارهای α، β، γ در زیرفضایی از $R^۴$ که توسط α_iها پدید می‌آید قرار دارد؟

(ب) کدام یك از بردارهای α، β، γ در زیرفضایی از $C^۴$ پدید آمده توسط α_iها قرار دارد؟

(پ) آیا این مطلب قضیه‌ای را به‌یاد نمی‌آورد؟

۳. بردارهای

$$\alpha_۱=(-۱,\ ۰,\ ۱,\ ۲),\quad \alpha_۲=(۳,\ ۴,-۲,\ ۵),\quad \alpha_۳=(۱,\ ۴,\ ۰,\ ۹)$$

از $R^۴$ را درنظر بگیرید. دستگاهی از معادلات خطی همگن بیابید که فضای جواب آن

دقیقاً زیرفضای پدیدآمده توسط این سه‌بردار از $R^۴$ باشد.

۴. فرض کنید

$$\alpha_۱=(۱,۰,-i),\quad \alpha_۲=(۱+i,۱-i,۱)\quad \alpha_۳=(i,i,i)$$

از $C^۳$ باشند. ثابت‌کنید که این بردارها پایه‌ای برای $C^۳$ تشکیل می‌دهند. مختصات بردار (a,b,c) دراین پایه‌کدامند؟

۵. توصیفی صریح از نوع (۲-۲۵) برای بردارهای

$$\beta=(b_۱,b_۲,b_۳,b_۴,b_۵)$$

در $R^۵$، که ترکیبهای خطی بردارهای

$$\alpha_۱=(۱,۰,۲,۱,-۱),\qquad \alpha_۲=(-۱,۲,-۴,۲,۰)$$
$$\alpha_۳=(۲,-۱,۵,۲,۱),\qquad \alpha_۴=(۲,۱,۳,۵,۲)$$

هستند ارائه‌کنید.

۶. فرض‌کنید V فضای برداری حقیقی پدیدآمده توسط سطرهای ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲۱ & ۰ & ۹ & ۰ \\ ۱ & ۷ & -۱ & -۲ & -۱ \\ ۲ & ۱۴ & ۰ & ۶ & ۱ \\ ۶ & ۴۲ & -۱ & ۱۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

باشد.

(الف) پایه‌ای برای V بیابید.

(ب) کدام‌یك از بردارهای $(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴,x_۵)$ عناصری از V هستند؟

(پ) اگر $(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴,x_۵)$ در V باشد، مختصات آن در پایهٔ مطلوب بند (الف) چیست؟

۷. A را ماتریسی $m\times n$ برروی هیأت F فرض‌کنید و دستگاه معادلات $AX=Y$ رادر نظربگیرید. ثابت کنید این دستگاه معادلات دارای جواب است. اگر و تنها اگر رتبهٔ سطری ماتریس A با رتبهٔ سطری ماتریس افزودهٔ دستگاه برابرباشد.

۳

تبدیلهای خطی

۱.۳. تبدیلهای خطی

اکنون به معرفی تبدیل خطی، یعنی مفهومی که دراکثر مطالب باقیماندهٔ این کتاب مورد مطالعه است، می‌پردازیم. چون ازاین پس اصطلاحات مبحث توابع مندرج درضمیمه را آزادانه به‌کار می‌بریم، مطالعه (یا مطالعهٔ مجدد) این مبحث را به‌خواننده توصیه می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم V و W دوفضای برداری برروی هیأت F باشند. یك **تبدیل خطی از V در W** تابعی از V در W است‌که به ازای همهٔ α ها و β ها از V و همهٔ اسکالرهای c از F

$$T(c\alpha+\beta)=c(T\alpha)+T\beta.$$

مثال۱. اگر V فضای برداری دلخواهی باشد، **تبدیل همانی** I که با $I\alpha=\alpha$ تعریف می شود تبدیلی خطی از V در V است. **تبدیل صفر** 0 که با $0\alpha=0$ تعریف می‌شود نیز تبدیلی خطی از V در V است.

مثال۲. فرض‌کنیم F یك هیأت و V فضای توابع چندجمله‌ای f از F در F باشدکه به‌صورت

$$f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_kx^k$$

هستند. بنا بر تعریف قرارمی‌دهیم

$$(Df)(x)=c_1+2c_2x+\cdots+kc_kx^{k-1}.$$

دراین صورت، D تبدیلی خطی از V در V ـ به‌نام تبدیل مشتق گیری ـ است.

مثال۳. فرض کنیم A یك ماتریس $m\times n$ ثابت با درایه های متعلق به هیأت F باشد. تابع T که با $T(X)=AX$ تعریف می‌شود تبدیلی خطی از $F^{n\times 1}$ در $F^{m\times 1}$ ، و تابع U که با $U(\alpha)=\alpha A$ تعریف می‌شود تبدیلی خطی از F^m در F^n است.

مثال۴. فرض کنیم ماتریس $m\times m$ ثابت P بادرایه‌های متعلق به هیأت F وماتریس $n\times n$ ثابت Q بـرروی F داده شده باشند. تابع T ازفضای $F^{m\times n}$ درخودش را بـا $T(A)=PAQ$ تعریف می کنیم. دراین صورت، T تبدیلی خطـی از $F^{m\times n}$ در $F^{m\times n}$ است، زیرا

$$\begin{aligned}T(cA+B)&=P(cA+B)Q\\&=(cPA+PB)Q\\&=cPAQ+PBQ\\&=cT(A)+T(B).\end{aligned}$$

مثال۵. فرض کنیم R هیأت اعداد حقیقی، و V فضای همهٔ توابع پیوسته از R در R باشد. اگر T را با

$$(Tf)(x)=\int_0^x f(t)dt$$

تعریف کنیم، آنگاه T تبدیلی خطی از V در V است. تابع Tf نه تنها پیـوسته است بلکه دارای مشتق اول پیوسته نیزهست. خطی بودن انتگرال یکی ازخواص اساسی آن به شمارمی آید.

خواننده درنشان دادن این حکم که تبدیلهای تعریف شده درمثالهـای ۱، ۲، ۳، و۵ تبدیلهایی خطی هستند، به مشکلی برنخواهد خورد. همچنان که مطالـب بیشتری دربـارهٔ تبدیلهای خطی می‌آموزیم. فهرست مثالها را نیز به طورقابل ملاحظه‌ای گسترش می‌دهیم.

تذکر این نکته مهم است که اگـر T تبدیلی خطـی از V در W باشد، آنگـاه $T(0)=0$؛ این مطلب را می‌توان ازتعریف فهمید، زیرا

$$T(0)=T(0+0)=T(0)+T(0).$$

این نکته برای کسی که برای اولین بار جبرخطی را مطالعه می کند، غالباً گیج کننده‌است، زیرا، احتمالا وی قبلا اصطلاح «تابع‌خطی» را به طورمتفاوتی به‌کار برده است. توضیحی

کوتاه سبب رفع این گیجی می‌شود. فرض کنیم V فضای برداری R^1 باشد. دراین‌صورت، یك تبدیل خطی از V در V نوع خاصی تابع (با مقدار) حقیقی روی خط حقیقی R است. در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال، چنین تابعی احتمالاً خطی نامیده می‌شود هر گاه نمودار آن یك خط راست باشد. حال آنکه بنا بر تعریف ما، یك تبدیل خطی از R^1 در R^1، تابعی است از R در R که نمودار آن یك خط راست مار بر مبدأ باشد.

تبدیل خطی عمومی T علاوه بر خاصیت $T(0)=0$ خاصیت دیگری هم دارد. چنین تبدیلی، ترکیبات خطی را «حفظ» می‌کند؛ یعنی، اگر $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ بردارهایی از V و $c_1,\dots,c_n$ اسکالرهای داده شده‌ای باشند، آنگاه

$$T(c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n)=c_1(T\alpha_1)+\cdots+c_n(T\alpha_n).$$

این رابطه فوراً از تعریف نتیجه می‌شود. مثلاً،

$$\begin{aligned}T(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)&=c_1(T\alpha_1)+T(c_2\alpha_2)\\&=c_1(T\alpha_1)+c_2(T\alpha_2).\end{aligned}$$

قضیهٔ ۱. فرض کنیم V یك فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F، و $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ پایه‌ای مرتب برای V باشد. همچنین فرض کنیم W فضایی برداری بر روی همان هیأت F و $\beta_1,\dots,\beta_n$ بردارهای دلخواهی از W باشند. دراین صورت، تنها یك تبدیل خطی T از V در W وجود دارد که

$$T\alpha_j=\beta_j,\quad j=1,\dots,n.$$

اثبات. برای اثبات وجود تبدیلی خطی مانند T با شرط $T\alpha_j=\beta_j$، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. به‌ازای هر α در V، یك n تایی $(x_1,\dots,x_n)$ وجود دارد به طوری که

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n.$$

به‌ازای این بردار α، چنین تعریف می‌کنیم

$$T\alpha=x_1\beta_1+\cdots+x_n\beta_n.$$

دراین صورت، T قاعده‌ای است خوش تعریف برای مربوط ساختن هر بردار α از V با بردار $T\alpha$ از W. بنا به‌تعریف، روشن است که به‌ازای هر j، $T\alpha_j=\beta_j$. برای اینکه ببینیم T خطی است، فرض می‌کنیم

$$\beta=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n$$

برداری در V و c اسکالر دلخواهی باشد. حال

$$c\alpha+\beta=(cx_1+y_1)\alpha_1+\cdots+(cx_n+y_n)\alpha_n$$

و لذا بنا بر تعریف

$$T(c\alpha+\beta)=(cx_1-y_1)\beta_1+\cdots+(cx_n+y_n)\beta_n.$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned}c(T\alpha)+T\beta&=c\sum_{i=1}^{n}x_i\beta_i+\sum_{i=1}^{n}y_i\beta_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(cx_i+y_i)\beta_i\end{aligned}$$

و از این‌رو

$$T(c\alpha+\beta)=c(T\alpha)+T\beta.$$

اگر U تبدیلی خطی از V در W با خاصیت $U\alpha_j=\beta_j$، $j=1,\cdots,n$، باشد آنگاه به‌ازای بردار $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$ داریم

$$\begin{aligned}U\alpha&=U\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i\Big)\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i(U\alpha_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i\beta_i\end{aligned}$$

و بنابراین U دقیقاً همان قاعدهٔ T است که در بالا تعریف کردیم. این‌مطلب نشان می‌دهد که تبدیل خطی T، با خاصیت $T\alpha_j=\beta_j$، یکتاست. □

گرچه قضیهٔ ۱ بسیار ابتدایی است، اما چنان اساسی است که لازم دیدیم آن را به طور رسمی بیان کنیم. مفهوم تابع بسیار عمومی است. اگر V و W دو فضای برداری (غیر صفر) باشند، تعداد زیادی تابع از V در W وجود دارد. قضیهٔ ۱ در تأکید بر این واقعیت که توابع خطی بیش از حد، خاص هستند به‌ما کمک می‌کند.

مثال ۶. بردارهای

$$\begin{aligned}\alpha_1&=(1,2)\\\alpha_2&=(3,4)\end{aligned}$$

مستقل‌خطی‌اند و بنابراین پایه‌ای برای R^2 تشکیل می‌دهند. بنابرقضیهٔ ۱ تبدیل‌خطی یکتایی از R^2 در R^3 وجود دارد که

$$\begin{aligned}T\alpha_1&=(3,2,1)\\T\alpha_2&=(6,5,4).\end{aligned}$$

درچنین حالتی باید بتوانیم $T(\epsilon_1)$ را بیابیم. اسکالرهای c_1 و c_2 راکه $\epsilon_1=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$ می‌یابیم و سپس از این مطلب استفاده مـی‌کنیـم کـه $T\epsilon_1=c_1T\alpha_1+c_2T\alpha_2$. اگـر $(1, 0)=c_1(1, 2)+c_2(3, 4)$، آنگاه $c_1=-2$ و $c_2=1$. از این‌رو

$$T(1, 0)=-2(3, 2, 1)+(6, 5, 4)$$
$$=(0, 1, 2).$$

مثال ۷. فـرض کنیم T تبدیل خطی ازفضای m تاییهای F^m درفضای n تاییهای F^n باشد. قضیهٔ ۱ می‌گویدکـه T بـه‌طور یکتا توسط دنبالهٔ بردارهای $\beta_1,\dots,\beta_m$ با خاصیت

$$\beta_i=T\epsilon_i, \quad i=1,\dots,m$$

تعیین می‌شود. به‌طور خلاصه، T توسط نگاره‌های بردارهای پایـهٔ استانده بـه‌طور یکتا تعیین می‌شود. روش‌کار چنین است:

$$\alpha=(x_1,\dots,x_m)$$
$$T\alpha=x_1\beta_1+\dots+x_m\beta_m.$$

اگر B ماتریس $m\times n$ ی باشدکـه بردارهای سطری آن β_1،...،β_m هستند، این رابطه بیان می‌کندکه

$$T\alpha=\alpha B.$$

به‌بیان دیگر، اگر $\beta_i=(B_{i1},\dots, B_{in})$، آنگاه

$$T(x_1,\dots,x_n)=[x_1\cdots x_m]\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \\ B_{m1} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix}.$$

این توصیفی بسیار صریح ازتبدیل خطی است. در بخش ۴.۳ به‌مطالعه‌ای عمیق در مورد رابطهٔ بین تبدیلهای خطی و ماتریسها می‌پردازیم و از این توصیف خاص $T\alpha=\alpha B$ هم استفاده نمی‌کنیم، زیرا در این رابطه ماتریس B در سمت راست بردار α واقع است و این مطلب ممکن است به‌اشتباه‌کاریهایی بینجامد. نکتهٔ اصلی در ایـن مثال ایـن است‌که می‌توانیم توصیفی صریح و نسبتاً ساده ازهمهٔ تبدیلهای خطی از F^m در F^n به‌دست‌دهیم.

اگر T تبدیلی خطی از V در W باشد، آنگاه برد T نـه تنها زیر مجموعه‌ای از W بلکه زیرفضایی ازآن است. گیریم R_T برد T، یعنی مجموعهٔ همهٔ بردارهای β در W باشدکه به‌ازای آن عنصری مانند α در V هست‌که $\beta=T\alpha$. فرض‌کنیم β_1 و β_2 در R_T باشند و c یك اسکالر. بردارهایی مانند α_1 و α_2 در V وجود دارند به‌طوری‌که $T\alpha_1=\beta_1$ و $T\alpha_2=\beta_2$. به علت خطی بودن T

$$\begin{aligned} T(c\alpha_1+\alpha_2) &= cT\alpha_1+T\alpha_2 \\ &= c\beta_1+\beta_2 \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $c\beta_1+\beta_2$ نیز در R_T است.

زیرفضای جالب دیگر وابسته به‌تبدیل خطی T، مجموعهٔ N متشکل از بردارهای α در V با شرط $T\alpha=0$ است. این مجموعه زیرفضایی از V است، زیرا

(الف) $T(0)=0$، بنابراین N غیرتهی است؛

(ب) اگر $T\alpha_1=T\alpha_2=0$، آنگاه

$$\begin{aligned} T(c\alpha_1+\alpha_2) &= cT\alpha_1+T\alpha_2 \\ &= c0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

و بنابراین $c\alpha_1+\alpha_2$ در N قرار دارد.

تعریف. فرض کنیم V و W دو فضای برداری بر روی هیأت F، و T تبدیلی خطی از V در W باشد. **فضای پوچ**[1] T عبارت است از مجموعهٔ همهٔ بردارهای α از V با شرط $T\alpha=0$.

هرگاه بعد V متناهی باشد، **رتبهٔ** T بعدبرد T است و **پوچی**[2] T بعد فضای پوچ T.

قضیهٔ زیر یکی از مهمترین قضایای جبر خطی است.

قضیهٔ ۲. فرض‌کنیم V و W دو فضای برداری برروی هیأت F، و T تبدیلی‌خطی از V در W باشد. اگر بعد V متناهی باشد، آنگاه

$$\text{بعد }(V)=\text{پوچی }(T)+\text{رتبهٔ }(T).$$

اثبات. گیریم $\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$ پایه‌ای برای N، فضای پوچ T، باشد. بردارهایی چون $\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n$ در V وجود دارند بـه‌طوری‌کـه $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. اکنون ثابت می‌کنیم $\{T\alpha_{k+1},\dots,T\alpha_n\}$ پایه‌ای برای برد T است. بردارهای $T\alpha_1,\dots,T\alpha_n$ یقیناً برد T را پدید می‌آورند؛ و چـون به‌ازای هر $j\leqslant k$، $T\alpha_j=0$، می‌بینیم که پدیدآورنده برد $T\alpha_{k+1},\dots,$ و $T\alpha_n$ هستند. برای اثبات استقلال خطی این بردارها، فرض‌کنیم اسکالرهایی چون c_i وجود دارندکه

$$\sum_{i=k+1}^{n} c_i(T\alpha_i)=0.$$

این رابطه بیان می‌کندکه

---

۱. این‌فضا را هسته‌ی T هم می‌نامند.ــم.

۲. پوچی را بعد هسته هم می‌نامند.ــم.

$$T\Big(\sum_{i=k+1}^{n} c_i\alpha_i\Big)=0,$$

ودرنتیجه بردار $\alpha=\sum_{i=k+1}^{n} c_i\alpha_i$ درفضای پوچ T است. چون α_1، ...، α_k پایه‌ای برای N تشکیل می‌دهند، باید اسکالرهایی مانند b_1، ...، b_k وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\alpha=\sum_{i=1}^{k} b_i\alpha_i .$$

پس

$$\sum_{i=1}^{k} b_i\alpha_i-\sum_{j=k+1}^{n} c_j\alpha_j=0$$

وچون α_1، ...، α_n مستقل خطی هستند، باید داشته باشیم

$$b_1=\cdots=b_k=c_{k+1}=\cdots=c_n=0 .$$

اگر r رتبهٔ T باشد، این واقعیت که $T\alpha_{k+1}$، ...، $T\alpha_n$ پایه‌ای برای برد T تشکیل می‌دهند، تصریح می‌کند که $r=n-k$. حال چون k پوچی T، و n بعد V است، اثبات تمام است. □

قضیهٔ ۴. اگر A ماتریسی $m\times n$ با درایه‌های متعلق به‌هیأت F باشد، آنگاه

$$\text{رتبهٔ سطری}\ (A)=\text{رتبهٔ ستونی}\ (A).$$

اثبات. فرض کنیم T تبدیل خطی از $F^{n\times 1}$ در $F^{m\times 1}$ تعریف‌شده با $T(X)=AX$ باشد. فضای پوچ T عبارت است از فضای جواب دستگاه $AX=0$؛ یعنی مجموعه همهٔ ماتریسهای ستونی X به‌طوری‌که $AX=0$. برد T مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای ستونی $m\times 1$، مانند Y، است که $AX=Y$ جوابی برای مجهول X داشته باشد. اگر A_1، ...، A_n ستونهای ماتریس A باشند، آنگاه

$$AX=x_1A_1+\cdots+x_nA_n .$$

بنابراین، برد T عبارت است از زیرفضای پدید آمده توسط ستونهای A. به‌بیان‌دیگر، برد T فضای ستونی A است. بنابراین،

$$\text{رتبهٔ}\ (T)=\text{رتبهٔ ستونی}\ (A).$$

قضیهٔ ۲ بیان می‌کند که اگر S فضای جواب دستگاه $AX=0$، باشد آنگاه

$$n=\text{رتبهٔ ستونی}\ (A)+\text{بعد}\ (S) .$$

اکنون به‌مثال ۱۵ از فصل ۲ رجوع می‌کنیم. درآنجا بررسی‌مان نشان داد که اگر r بعد فضای سطری A باشد، آنگاه فضای جواب S پایه‌ای متشکل از $n-r$ بردار دارد:

$$\text{رتبهٔ سطری } (A) = n - \text{بعد } (S) \;.$$

اکنون واضح است که

$$\text{رتبهٔ سطری } (A) = \text{رتبهٔ ستونی } (A) \;. \quad \square$$

اثبات قضیهٔ ۳ که هم‌اکنون ارائه شد، بستگی به‌محاسباتی صریح دربارهٔ دستگاههای معادلات خطی دارد. اثباتی بیشتر ادراکی هم وجود دارد که براین‌گونه محاسبات متکی نیست. چنین اثباتی را دربخش ۷.۳ عرضه می‌کنیم.

تمرین

۱. کدام‌یك از توابع T از $R^۲$ در $R^۲$ که درزیر آمده‌اند تبدیلی خطی است؟

(الف) $T(x_۱, x_۲) = (۱ + x_۱, x_۲)$؛
(ب) $T(x_۱, x_۲) = (x_۲, x_۱)$؛
(پ) $T(x_۱, x_۲) = (x_۱^۲, x_۲)$؛
(ت) $T(x_۱, x_۲) = (\sin x_۱, x_۲)$؛
(ث) $T(x_۱, x_۲) = (x_۱ - x_۲, ۰)$.

۲. برد، رتبه، فضای پوچ، وپوچی تبدیل صفر وهمچنین تبدیل همانی روی فضای برداری با بعد متناهی V را بیابید.

۳. برد وفضای پـوچ تبدیل مشتق‌گیری در مثالِ ۲ را توصیف‌کنید. همین‌کار را برای تبدیل انتگرال‌گیری درمثال ۵ انجام دهید.

۴. آیا تبدیلی خطی‌مانند T از $R^۳$ در $R^۲$ وجود داردکه $T(۱, -۱, ۱) = (۱, ۰)$ و $T(۱, ۱, ۱) = (۰, ۱)$؟

۵. اگر

$$\alpha_۱ = (۱, -۱), \qquad \beta_۱ = (۱, ۰)$$
$$\alpha_۲ = (۲, -۱), \qquad \beta_۲ = (۰, ۱)$$
$$\alpha_۳ = (-۳, ۲), \qquad \beta_۳ = (۱, ۱)$$

آیا تبدیلی خطی مانند T از $R^۲$ در $R^۲$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳$، $T\alpha_i = \beta_i$؟

۶. تبدیل خطی T از $F^۲$ در $F^۲$ را که توسط $T\epsilon_۱ = (a, b)$ و $T\epsilon_۲ = (c, d)$ تعریف

می‌شود به‌طور صریح (نظیر تمرینهای ۱ و ۲) توصیف کنید.

۰۷ فرض کنیم F زیرهیأتی ازاعداد مختلط و T تابعی از F^3 در F^3 باشدکه توسط

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2,\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

تعریف می‌شود.

(الف) نشان دهیدکه T تبدیلی خطی است.

(ب) اگر (a, b, c) برداری در F^3 باشد، تحت چه شرایطی روی a، b، و c این بردار در برد T قرار دارد؟ رتبهٔ T چیست؟

(پ) a، b، و c چه شرایطی داشته باشند تا بردار (a, b, c) در فضای پوچ T قرار گیرد؟ پوچی T چیست؟

۰۸ تبدیلی خطی از R^3 در R^3 را که زیرفضای پدید آمده توسط $(1, 0, -1)$ و $(1, 2, 2)$ بردش باشد، به‌طور صریح توصیف کنید.

۰۹ فرض کنید V فضای برداری همهٔ ماتریسهای $n \times n$ برروی هیأت F، و B ماتریس $n \times n$ ثابتی باشد. اگر

$$T(A) = AB - BA,$$

نشان دهید T تبدیلی خطی از V در V است.

۰۱۰ فرض کنید V مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط باشد و به‌عنوان یك فضای برداری برروی هیأت اعداد حقیقی (با اعمال معمولی) درنظر گرفته شود. تابعی از V در V بیابید که یك تبدیل خطی روی این فضای برداری باشد، اما تبدیلی خطی روی C^1 نباشد، یعنی خطی مختلط نباشد.

۰۱۱ فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times 1$ برروی هیأت F، و W فضای ماتریسهای $m \times 1$ برروی همین هیأت باشد. فرض کنید A ماتریس $m \times n$ ثابتی برروی F، و T تبدیل خطی از V در W تعریف شده توسط $T(X) = AX$ باشد. ثابت کنید T تبدیل صفراست اگر و تنها اگر A ماتریس صفر باشد.

۰۱۲ فرض کنید V یك فضای برداری nبعدی برروی هیأت F باشد و T یك تبدیل خطی از V در V با برد و فضای پوچ مساوی. ثابت کنید n زوج است. (آیا می‌توانید مثالی ازچنین تبدیل خطی بیاورید؟)

۰۱۳ فرض کنید V فضایی برداری و T تبدیلی خطی از V در V باشد. ثابت کنید دوحکم زیر دربارهٔ T هم‌ارزند.

(الف) اشتراك برد T وفضای پوچ T زیرفضای صفر V است.
(ب) اگر $T(T\alpha)=0$، آنگاه $T\alpha=0$.

۲.۳. جبر تبدیلهای خطی

درمطالعهٔ تبدیلهای خطی از V در W، این مطلب اهمیت اساسی داردکه مجموعهٔ این تبدیلها ساختارعادی یك فضای برداری را به‌ارث می‌برد. ساختار جبری مجموعهٔ‌تبدیلهای خطی از فضای V درخودش، از این هم غنی‌تر است؛ زیرا ترکیب عادی توابع، عمل «ضربی» هم برای این‌گونه تبدیلها فراهم می‌آورد. در این بخش، به‌تجسس این مفاهیم می‌پردازیم.

قضیهٔ ۴. فرض‌کنیم V و W دوفضای برداری بر روی هیأت F، و T و U دو تبدیل خطی از V در W باشند. تابع $(T+U)$ که با

$$(T+U)(\alpha)=T\alpha+U\alpha$$

تعریف می‌شود تبدیلی خطی از V در W است. اگر c عنصری دلخواه از F باشد، تابع (cT) که با

$$(cT)(\alpha)=c(T\alpha)$$

تعریف می‌شود نیز تبدیلی خطی از V در W است. مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای خطی از V در W همراه با اعمال جمع وضرب اسکالری که در بالا تعریف شد، فضایی برداری برروی هیأت F تشکیل می‌دهند.

اثبات. فرض می کنیم T و U دو تبدیل خطی از V در W باشند، و $(T+U)$ مانند بالا تعریف شده باشد. دراین صورت

$$\begin{aligned}(T+U)(c\alpha+\beta)&=T(c\alpha+\beta)+U(c\alpha+\beta)\\&=c(T\alpha)+T\beta+c(U\alpha)+U\beta\\&=c(T\alpha+U\alpha)+(T\beta+U\beta)\\&=c(T+U)(\alpha)+(T+U)(\beta)\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $(T+U)$ تبدیلی خطی است. به‌طور مشابه

$$\begin{aligned}(cT)(d\alpha+\beta)&=c[T(d\alpha+\beta)]\\&=c[d(T\alpha)+T\beta]\\&=cd(T\alpha)+c(T\beta)\\&=d[c(T\alpha)]+c(T\beta)\\&=d[(cT)\alpha]+(cT)\beta\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد (cT) نیز تبدیلی خطی است.

برای این‌که نشان دهیم مجموعهٔ تبدیلهای خطی از V در W (همراه با دوعمل مذکور) فضایی برداری است، باید هریك از شرایط جمع برداری وضرب اسکالری را مستقیماً بررسی کنیم. این‌کار را به‌خواننده واگذار می‌کنیم، وخود به‌این توضیح بسنده می‌کنیم که: بردار صفردراین فضا تبدیل صفراست‌که هر بردار V را به‌بردارصفر W می‌فرستد؛ بعلاوه، هریك ازخواص این دوعمل از خاصیت متناظرمربوط به‌اعمال فضای W نتیجه می‌شود. □

شاید بهتر باشد راه دیگرنگرش به‌این قضیه را هم ذکرکنیم. اگر جمع وضرب اسکالری را مانند بالا تعریف‌کنیم، آنگاه مجموعهٔ همهٔ توابع از V در W فضایی است برداری برروی هیأت F. این مطلب ربطی به‌این‌که V فضای برداری است ندارد؛ کافی است V مجموعه‌ای غیرتهی باشد. هرگاه V فضایی برداری باشد، می‌توانیم تبدیلهایی خطی از V در W را هم تعریف‌کنیم، و در این صورت قضیهٔ ۴ حکم می‌کند که تبدیلهای خطی زیرفضایی از فضای همهٔ توابع از V در W هستند.

فضای تبدیلهای خطی از V در W را با $L(V, W)$ نشان می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که $L(V, W)$ تنها زمانی تعریف می‌شودکه V و W فضاهایی برداری برروی هیأتی واحد باشند.

قضیهٔ ۵. فرض کنیم V و W دو فضای برداری برروی هیأت F، بترتیب، با ابعاد n و m باشند. در این صورت بعد فضای $L(V,W)$ متناهی و برابر mn است.

اثبات. فرض کنیم

$$\mathcal{B}'=\{\beta_1, \cdots, \beta_m\} \quad \text{و} \quad \mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

بترتیب، پایه‌های مرتبی برای V و W باشند. به‌ازای هرجفت از اعداد صحیح $(p\ ,\ q)$ با شرایط $1 \leqslant p \leqslant m$ و $1 \leqslant q \leqslant n$، تبدیل خطی $E^{p,q}$ از V در W را با

$$E^{p,q}(\alpha_i)=\begin{cases} 0 & \text{هرگاه } i\neq q \\ \beta_p & \text{هرگاه } i=q \end{cases}$$
$$=\delta_{iq}\beta_p$$

تعریف می‌کنیم. بنابرقضیهٔ ۱، تبدیل خطی یکتایی از V در W هست که دراین‌شرایط صدق می‌کند. ادعا این است‌که mn تبدیل E^{pq} پایه‌ای را برای $L(V, W)$ تشکیل می‌دهند.

فرض کنیم T تبدیلی خطی از V در W باشد. به‌ازای هر j که $1 \leqslant j \leqslant n$، گیریم A_{1j}، $\cdots$، A_{mj} مختصات بردار $T\alpha_j$ درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ باشند؛ یعنی

$$T\alpha_j=\sum_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p \, . \qquad (3\text{-}1)$$

می‌خواهیم نشان دهیم

$$T=\sum_{p=1}^{m}\ \sum_{q=1}^{n} A_{pq}E^{p,q}\ . \tag{۲-۳}$$

فرض کنیم U تبدیل خطی موجود درسمت راست تساوی (۳-۲) باشد. آنگاه، به‌ازای هر j

$$\begin{aligned}U\alpha_j &= \sum_p \sum_q A_{pq}E^{p,q}(\alpha_j)\\ &= \sum_p \sum_q A_{pq}\delta_{jq}\beta_p\\ &= \sum_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p\\ &= T\alpha_j\end{aligned}$$

و از اینجا $U=T$. حال (۳-۲) نشان می‌دهد که $E^{p,q}$ها $L(V,W)$ را پدید می‌آورند. باید ثابت کنیم که اینها مستقل خطی نیزهستند. اما، این مطلب ازآنچه در بالا انجام شد روشن است؛ زیرا، اگر تبدیل

$$U=\sum_p \sum_q A_{pq}E^{p,q}$$

تبدیل صفر باشد، آنگاه به‌ازای همهٔ jها، $U\alpha_j=0$، پس

$$\sum_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p=0\ .$$

حال استقلال β_pها ایجاب می‌کندکه به‌ازای هر p و j، $A_{pj}=0$. □

قضیهٔ ۶. فرض کنیم V، W، و Z سه‌فضای برداری بر روی هیأت F باشند. اگر T تبدیلی‌خطی از V در W و U تبدیلی خطی از W در Z باشد، آنگاه تابع مرکب UT که با $(UT)(\alpha)=U(T(\alpha))$ تعریف می‌شود، تبدیلی خطی از V در Z است.

اثبات.

$$\begin{aligned}(UT)(c\alpha+\beta) &= U[T(c\alpha+\beta)]\\ &= U(cT\alpha+T\beta)\\ &= c[U(T\alpha)]+U(T\beta)\\ &= c(UT)(\alpha)+(UT)(\beta)\ . \ \square\end{aligned}$$

درآنچه‌که به‌دنبال می‌آید عمدتاً سروکار ما با تبدیلهای خطی از فضایی برداری

درخودش است. چون مکرراً ناگزیر از نوشتن «T تبدیلی خطی از V در V است» هستیم، به‌جای آن عبارت «T عملگری خطی روی V است» را می‌نویسیم.

تعریف. اگر V فضایی برداری برروی هیأتی چون F باشد، **یك عملگرخطی روی** V عبارت است از تبدیلی خطی از V در V.

درمورد قضیهٔ ۶، درحالتی که $V=W=Z$ ودرنتیجه U و T دوعملگر خطی روی فضای V هستند، دیده می‌شود که ترکیب UT هم عملگری خطی روی V است. بنابراین فضای $L(V, V)$ یك «عمل ضرب» هم داردکه توسط عمل ترکیب روی آن تعریف می‌شود. دراین حالت، عملگر TU نیز تعریف می‌شود، ولی باید توجه داشت که عموماً $UT \neq TU$؛ یعنی، $UT-TU\neq 0$. این نکته هم باید مورد توجه خاص قراربگیردکه اگر T عملگری خطی روی V باشد، آنگاه می‌توان T را با T ترکیب کرد. لذا نماد $T^2=TT$، و در حالت کلی به‌ازای $n=1, 2, 3, \ldots$، نماد: $T^n = T \cdots T$ (nبار) را به‌کار خواهیم برد و اگر $T\neq 0$، بنابرتعریف قرارمی‌دهیم $T^0=I$.

لم. فرض‌کنیم V فضایی برداری برروی‌هیأت F باشد. اگر U، T_1، و T_2 عملگرهایی خطی روی V و c عضوی از F باشد، آنگاه

(الف) $IU=UI=U$؛

(ب) $U(T_1+T_2)=UT_1+UT_2$؛ $(T_1+T_2)U=T_1U+T_2U$؛

(پ) $c(UT_1)=(cU)T_1=U(cT_1)$.

اثبات. (الف) این خاصیت تابع همانی، بدیهی است و بیان آن در اینجا صرفاً برای تأکید است.

(ب)

$$\begin{aligned}[U(T_1+T_2)](\alpha) &= U[(T_1+T_2)(\alpha)]\\ &= U(T_1\alpha+T_2\alpha)\\ &= U(T_1\alpha)+U(T_2\alpha)\\ &= (UT_1)(\alpha)+(UT_2)(\alpha)\end{aligned}$$

و بنابراین $U(T_1+T_2)=UT_1+UT_2$. همچنین

$$\begin{aligned}[(T_1+T_2)U](\alpha) &= (T_1+T_2)(U\alpha)\\ &= T_1(U\alpha)+T_2(U\alpha)\\ &= (T_1U)(\alpha)+(T_2U)(\alpha).\end{aligned}$$

پس، $(T_1+T_2)U=T_1U+T_2U$. (خواننده ممکن است توجه کرده باشدکه در اثبات این دو قانون پخش‌پذیری، از خطی بودن T_1 و T_2 استفاده نشد؛ دراثبات (پ) هم‌خطی

بودن U به‌کار نمی‌رود.)

(پ) اثبات این قسمت به‌خواننده واگذار می‌شود. □

مضمون این لم‌ومضمون قسمتی ازقضیهٔ ۵ نشان می‌دهندکه فضای‌برداری $L(V, V)$ همراه با عمل ترکیب همان چیزی است که به‌جبرخطی با عنصرهمانی مشهور است. این مطلب را درفصل ۴ مورد بحث قرارخواهیم داد.

مثال ۸. اگر A ماتریسی $m\times n$ با درایه‌های متعلق به F باشد، تبدیلی خطی T از $F^{n\times 1}$ در $F^{m\times 1}$ را داریم‌که با $T(X)=AX$ تعریف می‌شود؛ و اگر B ماتریسی $p\times m$ باشد، تبدیل خطی U از $F^{m\times 1}$ در $F^{p\times 1}$ را هم داریم که توسط $U(Y)=BY$ تعریف می‌شود. ترکیب UT بسادگی قابل توصیف است:

$$\begin{aligned}(UT)(X)&=U(T(X))\\&=U(AX)\\&=B(AX)\\&=(BA)X.\end{aligned}$$

پس، UT عبارت است از «عمل ضرب چپ درماتریس حاصل‌ضرب BA».

مثال ۹. فرض‌کنیم F یك هیأت و V فضای برداری همهٔ توابع چندجمله‌ای از F در F باشد. گیریم D عملگر مشتق‌گیری تعریف شده در مثال ۲ و T عملگر خطی «ضرب در x»:

$$(Tf)(x)=xf(x)$$

باشد. دراین‌صورت، $DT\neq TD$. درواقع، اگر I عملگرهمانی باشد، خواننده بایدبتواند $DT-TD=I$ را بآسانی اثبات‌کند.

هرچند «ضرب» تعریف شده روی $L(V, V)$ جابجایی نیست، اما با اعمال فضای برداری $L(V, V)$ رابطهٔ زیبایی دارد.

مثال ۱۰. فرض‌کنیم $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای فضای برداری V باشد. عملگرهای خطی $E^{p,q}$ را که دراثبات قضیهٔ ۵ پدید آمدند، درنظرمی‌گیریم:

$$E^{p,q}(\alpha_i)=\delta_{iq}\alpha_p\ .$$

این n^2 عملگرخطی پایه‌ای برای فضای عملگرهای خطی روی V تشکیل می‌دهند. $E^{p,q}E^{r,s}$ چیست؟ داریم

$$\begin{aligned}(E^{p,q}E^{r,s})(\alpha_i) &= E^{p,q}(\delta_{is}\alpha_r)\\ &= \delta_{is}E^{p,q}(\alpha_r)\\ &= \delta_{is}\delta_{rq}\alpha_p\ .\end{aligned}$$

بنا براین،

$$E^{p,q}E^{r,s} = \begin{cases} 0 & \text{هر گاه } r\neq q \\ E^{p,s} & \text{هر گاه } r=q \end{cases}$$

گیریم T عملگری خطی روی V باشد. دراثبات قضیهٔ ۵ نشان دادیم که اگر

$$A_j = [T\alpha_j]_{\mathfrak{B}}$$
$$A = [A_1, \cdots, A_n]$$

آنگاه

$$T = \sum_p \sum_q A_{pq}E^{p,q}\ .$$

اگر

$$U = \sum_r \sum_s B_{rs}E^{r,s}$$

عملگرخطی دیگری روی V باشد، آنگاه آخرین لم ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}TU &= (\sum_p \sum_q A_{pq}E^{p,q})\ (\sum_r \sum_s B_{rs}E^{r,s})\\ &= \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s A_{pq}B_{rs}E^{p,q}E^{r,s}\ .\end{aligned}$$

همچنان که مشاهده کرده‌ایم، تنها جملاتی که در این مجموع بسیار بزرگ باقی می‌مانند جملاتی هستند که برای آنها $q=r$، که در این صورت چون $E^{p,r}E^{r,s}=E^{p,s}$ داریم

$$\begin{aligned}TU &= \sum_p \sum_s (\sum_r A_{pr}B_{rs})E^{p,s}\\ &= \sum_p \sum_s (AB)_{ps}E^{p,s}\ .\end{aligned}$$

پس، نتیجهٔ عمل ترکیب T و U ضرب ماتریسهای A و B است.

در بحث راجع به‌اعمال جبری روی تبدیلهای خطی، تاکنون چیزی درمورد معکوس‌پذیری نگفته‌ایم. دراین مورد یك پرسش مشخص وجالب این است: برای کدام عملگر خطی T روی فضای V، عملگری خطی چون T^{-1} وجود دارد که $TT^{-1}=T^{-1}T=I$؟

تابــع T از V در W **معکوس‌پذیر** نامیده می‌شود، هرگاه یــك تابع U از W در V یافت شود به طوری که UT تابع همانی روی V، و TU تابــع همانی روی W باشد. اگر T معکوس‌پذیر باشد، تابع U یکتا است و با T^{-1} نشان داده می‌شود. (ر. ك. ضمیمه.) بعلاوه، T معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر

۱. T یك به‌یك باشد؛ یعنی از $T\alpha=T\beta$ نتیجه بشود که $\alpha=\beta$؛
۲. T پوشا باشد؛ یعنی برد T (تمام) W باشد.

قضیهٔ ۷. فرض کنیم V و W دو فضای برداری بر روی هیأت F و T تبدیلی‌خطی از V در W باشد. اگر T معکوس‌پذیر باشد، آنگاه تابــع معکوس آن، T^{-1}، تبدیلی خطی از W بروی V است.

اثبات. حرفهایمان را برای تأکید بریك نکته تکرار می‌کنیم. وقتی T یك به‌یك و پوشا باشد، یك تابع معکوس T^{-1} وجود دارد که به‌طور یکتا تعیین می‌شود و W را بروی V چنان می‌نگارد که $T^{-1}T$ تابع همانی روی V، و TT^{-1} تابع همانی روی W باشد. مطلبی که در اینجا باید ثابت کنیم این است که اگر تابع خطی T معکوس‌پذیر باشد، آنگاه معکوسش T^{-1} نیز خطی است.

گیریم β_1 و β_2 بردارهایی از W، و c یك اسکالر باشد. می‌خواهیم نشان دهیم کــه

$$T^{-1}(c\beta_1+\beta_2)=cT^{-1}\beta_1+T^{-1}\beta_2.$$

فرض کنیم به‌ازای $i=1,2$، $\alpha_i=T^{-1}\beta_i$؛ یعنی، α_i یکتابردار در V باشد که $T\alpha_i=\beta_i$. چون T خطی است

$$\begin{aligned}T(c\alpha_1+\alpha_2)&=cT\alpha_1+T\alpha_2\\&=c\beta_1+\beta_2\,.\end{aligned}$$

پس، $c\alpha_1+\alpha_2$ یکتا بردار در V است که توسط T به $c\beta_1+\beta_2$ فرستاده می‌شود، لذا

$$\begin{aligned}T^{-1}(c\beta_1+\beta_2)&=c\alpha_1+\alpha_2\\&=c(T^{-1}\beta_1)+T^{-1}\beta_2\end{aligned}$$

و T^{-1} خطی است. $\square$

فرض کنیم تبدیل خطی معکوس‌پذیر T از V بروی W و تبدیل خطی معکوس‌پذیر U از W بروی Z داده شده‌اند. آنگاه، UT معکوس‌پذیر است و $(UT)^{-1}=T^{-1}U^{-1}$. این حکم، نه‌نیازی به‌خطی بودن UT دارد و نه مستلزم بررسی جداگانهٔ یك به‌یك وپوشا بودن آن است. فقط لازم است نشان دهیم که $T^{-1}U^{-1}$ هم معکوس چپ و هم معکوس راست UT است.

اگر T خطی باشد، آنگاه $T(\alpha-\beta)=T\alpha-T\beta$؛ از این‌رو، $T\alpha=T\beta$ اگر و

تنها اگر $T(\alpha-\beta)=0$. ایـن مطلب، تحقیق یك به‌یك بودن T را بسیار ساده می‌کند. تبدیل‌خطی T را **نامنفرد** نامیم، هرگاه $T\gamma=0$ ایجاب کند که $\gamma=0$؛ یعنی هرگاه‌فضای پوچ T برابر با $\{0\}$ باشد. بدیهی است که T، یك به‌یك است اگـر و تنها اگر T نامنفرد باشد. تعمیم ایـن تذکر این است کـه تبدیلهای خطی نامنفرد، آنهایی هستند که استقلال خطی را حفظ می‌کنند.

قضیهٔ ۸. فرض کنیم T تبدیلی خطی از V در W باشد. آنگاه، T نامنفرد است اگر و تنها اگر T هرزیر مجموعهٔ مستقل خطی از V را بروی یك زیرمجموعهٔ مستقل خطی از W ببرد.

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم T نامنفرد باشد و S را یك زیرمجموعهٔ مستقل خطی‌از V می‌گیریم. اگر α_1، $\cdots$، α_k بردارهایی از S باشند، آنگاه $T\alpha_1$، $\cdots$، $T\alpha_k$ مستقل خطی هستند؛ زیرا اگر

$$c_1(T\alpha_1)+\cdots+c_k(T\alpha_k)=0$$

آنگاه

$$T(c_1\alpha_1+\cdots+c_k\alpha_k)=0$$

وچون T نامنفرد است،

$$c_1\alpha_1+\cdots+c_k\alpha_k=0$$

که ازآن به‌علت مستقل بودن مجموعهٔ S نتیجه می‌شود هرc_i برابرصفراست. این استدلال نشان می‌دهد که نگارهٔ S تحت T مجموعه‌ای است مستقل خطی.

فرض کنیم T هرزیرمجموعهٔ مستقل خطـی را بروی یك زیـرمجموعهٔ مستقل خطی ببرد. گیریم α برداری غیرصفر از V باشد. آنگاه، مجمـوعهٔ S متشکل از بـردارα مستقل است. نگارهٔ S مجموعـه‌ای است متشکل ازبردار$T\alpha$ و ایـن مجموعه نیـزمستقل است. بنابراین، $T\alpha\neq 0$، زیرا مجموعهٔ تك‌عنصری بردار صفر وابسته است. ایـن مطلب نشان می‌دهد که فضای پوچ T همان زیرفضای صفراست؛ یعنی، T نامنفرد است. □

مثال ۱۱. فرض‌کنیم F زیرهیأتی ازاعداد مختلط (یا هیأتی با سرشت‌نمای‌صفر)، وV فضای توابع چندجمله‌ای برروی F باشد. دوعملگرمشتق‌گیری، D، و «ضرب درx»، T، درمثال ۹ را درنظرمی‌گیریم.چون D همهٔ ثابتها را به ۰ می‌فرستد، منفرد است. گرچه بعد V متناهی نیست، اما برد D تمام V است، واین امکان هست‌که معکوسی راست‌برای D تعریف شود. مثلاً، اگرE عملگرانتگرال‌گیری نامعین باشد:

$$E(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n)=c_0x+\frac{1}{2}c_1x^2+\cdots+\frac{1}{n+1}c_nx^{n+1}$$

آنگاه E عملگری خطی روی V است و $DE=I$. از طرف دیگر $ED\neq I$، زیرا ED همهٔ ثابتها را به ۰ می‌فرستد. عملگر T حالتی شبیه به عکس این حالت را دارد. اگر به‌ازای همهٔ xها $xf(x)=0$، آنگاه $f=0$. ازاین‌رو، T نامنفرد است، ویافتن معکوسی چپ برای T ممکن. مثلاً، اگر U عملگر «حذف جملهٔ ثابت وتقسیم آن بر x» باشد:

$$U(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n)=c_1+c_2x+\cdots c_nx^{n-1}$$

آنگاه، U عملگری خطی روی V است و $UT=I$. ولی $TU\neq I$، زیرا هرتابع واقع دربرد TU، دربرد T یعنی درفضای توابع چندجمله‌ای f با شرط $f(0)=0$ نیزهست.

مثال ۱۲. فرض‌کنیم F یك هیأت و T عملگرخطی روی F^2 تعریف شده با

$$T(x_1, x_2)=(x_1+x_2, x_1)$$

باشد. دراین صورت، T نامنفرد است، زیرا اگر $T(x_1, x_2)=0$ داریم

$$x_1+x_2=0$$
$$x_1=0$$

وبنابراین $x_1=x_2=0$. همچنین مشاهده می‌شودکه T پوشاست؛ زیرا، فرض‌کنیم (z_1, z_2) بردار دلخواهی از F^2 باشد. برای اینکه نشان دهیم (z_1, z_2) در برد T است، باید اسکالرهایی چون x_1 و x_2 بیابیم که

$$x_1+x_2=z_1$$
$$x_1=z_2\,.$$

واضح است که جواب عبارت است از $x_1=z_2$ و $x_2=z_1-z_2$. محاسبهٔ اخیرفرمول صریحی برای T^{-1} به‌دست می‌دهد، که چنین است:

$$T^{-1}(z_1, z_2)=(z_2, z_1-z_2).$$

درمثال ۱۱ دیدیم که یك تبدیل خطی ممکن است بدون پوشا بودن نامنفرد، و نیز بدون نامنفرد بودن پوشا باشد. مثال اخیرحالت مهمی را نشان می‌دهدکه درآن این‌واقعه نمی‌تواند روی دهد.

قضیهٔ ۹. فرض کنیم V و W دو فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت F باشند و $\dim V=\dim W$. اگر T تبدیلی خطی از V در W باشد، احکام زیرهم‌ارزند:

(۱) T معکوس‌پذیر است.
(۲) T نامنفرد است.
(۳) T پوشا است؛ یعنی برد T برابر با W است.

اثبات. گیریم بعد $(W)=$ بعد$(V)=n$. بنابرقضیهٔ ۲

$$(T) \text{ رتبهٔ } + (T) \text{ پوچی } = n.$$

اکنون T نامنفرد است اگر وتنها اگر ۰ = پوچی (T)، و (چون $n = \dim W$) برد T برابر با W است اگروتنها اگر n = رتبهٔ (T). چون مجموع رتبه وپوچی برابر n است، پوچی دقیقاً وقتی ۰ است که رتبه برابر n باشد. بنا براین، T نامنفرد است اگر و تنها اگر $T(V) = W$. لذا، اگریکی ازشرایط (۲) یا (۳) برقرار باشد، دیگری هم برقرار و T معکوس‌پذیراست. □

به‌خواننده هشدار می‌دهیم که قضیهٔ ۹ را جزدرحالت متناهی بودن بعد و جز با شرط $\dim V = \dim W$ به‌کار نبندد. تحت فرضهای قضیهٔ ۹، شرایط (۱)، (۲) و(۳) با احکام زیرنیز هم‌ارزند:

(۴) اگر $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایه‌ای بـرای V باشد، آنگاه $\{T\alpha_1, \cdots, T\alpha_n\}$ پایه‌ای برای W است.

(۵) پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای V وجود دارد کـه $\{T\alpha_1, \cdots, T\alpha_n\}$ پایه‌ای برای W است.

ذیلاً اثباتی برای هم‌ارز بودن این پنج شرط ارائه می‌کنیم. ایـن اثبات شامل اثبات تازه‌ای از هم‌ارز بودن (۱) و (۲) و (۳) هم هست.

(۲) ← (۱). اگر T معکوس‌پذیر باشد، T نامنفرد است. (۳) ← (۲). فـرض کنیم T نامنفرد و $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. بنا برقضیهٔ ۸، $\{T\alpha_1, \cdots, T\alpha_n\}$ یك مجموعهٔ مستقل خطی از بردارهای W است؛ وچون بعد W نیز n است، این‌مجموعه از بردارها پایه‌ای برای Wاست. حال گیریم β برداری دلخواه از W باشد. اسکالرهایی چون c_1، $\cdots$، c_n وجود دارند که

$$\begin{aligned}\beta &= c_1(T\alpha_1) + \cdots + c_n(T\alpha_n)\\ &= T(c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n)\end{aligned}$$

واین خود نشان می‌دهد که β در برد T است. (۴) ← (۳). اکنون فـرض می‌کنیم T پوشا باشد. اگر $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایه‌ای بـرای V باشد، بردارهای $T\alpha_1$، $\cdots$، $T\alpha_n$ برد T را، که بنا به‌فرض تمام W است، پدید می‌آورند. چون بعد W برابر n است، این n بـردار باید مستقـل خطـی باشند؛ یعنی، بایـد پایـه‌ای را بـرای W تشکیل بدهند. (۵) ← (۴)، این حکم نیازی به‌توضیح ندارد. (۱) ← (۵). فـرض کنیم پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای V وجود داشته باشد که $\{T\alpha_1, \cdots, T\alpha_n\}$، هـم پایه‌ای برای W باشد. چون $T\alpha_i$ها W را پدید می‌آورند، واضح است که برد T تمام W است. اگر $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$ درفضای پوچ T باشد، آنگاه

$$T(c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n) = 0$$

یا

$$c_1(T\alpha_1)+\cdots+c_n(T\alpha_n)=0$$

وچون $T\alpha_i$ها مستقل هستند، هر c_i برابر صفر است، ولذا $\alpha=0$. تا اینجا نشان داده‌ایم که برد T برابر با W است و T نامنفرد؛ بنابراین، T معکوس‌پذیر است.

مجموعهٔ عملگرهای خطی معکوس‌پذیر روی یك فضای V همراه با عمل ترکیب، مثال‌خوبی برای چیزی که درجبر به «گروه» معروف است، به‌دست می‌دهد. گرچه‌فرصت آن را نداریم که بتفصیل درمورد گروهها به‌بحث بپردازیم، مع‌هذا تعریف آن را ذیلاً ارائه می‌کنیم.

تعریف. یك گروه متشکل است از

۱. یك مجموعهٔ G؛

۲. یك قاعده (یا عمل) که به‌هر جفت x و y از عناصر G، عنصر xy از G را با شرایط زیر وابسته می‌سازد:

(الف) به‌ازای هر x، y، و z از G، $x(yz)=(xy)z$ (شرکت‌پذیری)؛

(ب) یك عنصر e در G وجود دارد، به‌طوری‌که به‌ازای هر x از G، $ex=xe=x$؛

(پ) به هر عنصر x از G، عنصری چون x^{-1} از G متناظر است به‌طوری که $xx^{-1}=x^{-1}x=e$.

قبلاً دیده‌ایم که ترکیب $(U,T)\to UT$ به‌هر جفت عملگر خطی معکوس‌پذیر روی فضای V، عملگر معکوس‌پذیر دیگری روی V را متناظر می‌سازد. ترکیب، یك عمل شرکت‌پذیر است. به‌ازای هر T، عملگر همانی I در $IT=TI$ صدق می‌کند، و به‌ازای هرعملگر معکوس‌پذیر T (بنابر قضیهٔ ۷) عملگر خطی معکوس‌پذیر T^{-1} وجود دارد که $TT^{-1}=T^{-1}T=I$. ازاین‌رو، مجموعهٔ عملگرهای خطی معکوس‌پذیر روی V همراه با این‌عمل یك گروه است. مجموعهٔ ماتریسهای $n\times n$ معکوس‌پذیر، همراه با ضرب‌ماتریسی به‌عنوان عمل، مثال دیگری از یك گروه است. یك گروه **جابجایی** نامیده می‌شود، هر گاه شرط $xy=yx$ به‌ازای هر x و y برقرار باشد. هیچ‌یك از دومثالی راکه در بالا ذکر کردیم درحالت کلی گروه جابجایی نیست. عمل یك گروه جابجایی غالباً به‌صورت $(x,y)\to x+y$ نوشته می‌شود ونه به‌صورت $(x,y)\to xy$، ودراین‌حالت به‌جای عنصر«همانی» e ازنماد 0 استفاده می‌شود. مجموعهٔ بردارهای یك فضای برداری همراه با عمل‌جمع برداری، یك گروه‌جابجایی است. یك هیأت رامی‌توان به‌صورت مجموعه‌ای با دوعمل به‌نامهای جمع وضرب توصیف کرد که تحت عمل جمع، گروهی جابجایی است، عناصر غیرصفرش تحت عمل ضرب، گروهی جابجایی تشکیل می‌دهند، و قانون پخش‌پذیری $x(y+z)=xy+xz$ نیز درآن برقرار است.

تمرین

۱. فرض کنید T و U دوعملگر خطی روی R^2 باشند که با

$$T(x_1, x_2)=(x_2, x_1) \quad \text{و} \quad U(x_1, x_2)=(x_1, 0)$$

تعریف می‌شوند.

(الف) T و U به‌طور هندسی چگونه توصیف می‌شوند؟

(ب) برای هریک از تبدیلهای $(U+T)$، UT، TU، T^2 و U^2 قواعدی شبیه به‌تعریف T و U به‌دست آورید.

۲. فرض کنید T (یکتا) عملگر خطی روی C^3 باشد که برای آن

$$T\epsilon_1=(1, 0, i), \qquad T\epsilon_2=(0, 1, 1), \qquad T\epsilon_3=(i, 1, 0).$$

آیا T معکوس‌پذیر است؟

۳. عملگرخطی T روی R^3 با

$$T(x_1, x_2, x_3)=(3x_1, x_1-x_2, 2x_1+x_2+x_3)$$

تعریف می‌شود. آیا T معکوس‌پذیر است؟ اگرچنین باشد، قاعده‌ای برای T^{-1}، شبیه به آنکه T را تعریف می‌کند، بیابید.

۴. برای عملگرخطی T تمرین ۳ ثابت کنید

$$(T^2-I)(T-2I)=0.$$

۵. فرض کنید $C^{2\times 2}$ فضای برداری مختلط ماتریسهای 2×2 با درایه‌های مختلط باشد. با فرض

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

T را عملگر خطی روی $C^{2\times 2}$ بگیرید که با $T(A)=BA$ تعریف می‌شود. رتبهٔ T چیست؟ آیا می‌توانید T^2 را توصیف کنید؟

۶. فرض کنید T تبدیلی خطی از R^3 در R^2 و U تبدیلی خطی از R^2 در R^3 باشد. ثابت کنید تبدیل UT معکوس‌پذیر نیست. این قضیه را تعمیم بدهید.

۷. دوعملگر خطی T و U روی R^2 بیابید که $TU=0$ ولی $UT\neq 0$.

۸. فرض کنید V فضایی برداری برروی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد. اگر $T^2=0$ دربارهٔ رابطهٔ برد T وفضای پوچ T چه می‌توانید بگویید؟ یک عملگر

خطی T روی R^{2} مثال بزنید که $T^{2}=0$ ولی $T\neq 0$.

۹. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای V با بعد متناهی باشد و فرض کنید عملگری خطی چون U روی V وجود داشته باشد که $TU=I$. ثابت کنید T معکوس‌پذیر است و $U=T^{-1}$. مثالی بیاورید که نشان دهد وقتی V با بعد متناهی نباشد این مطلب صحیح نیست. (راهنمایی: فرض کنید $T=D$. D عملگر مشتق‌گیری روی فضای توابع چندجمله‌ای است.)

۱۰. فرض کنید A ماتریسی $m\times n$ با درایه‌های متعلق به‌هیأت F و T تبدیلی خطی از $F^{n\times 1}$ در $F^{m\times 1}$ باشد که با $T(X)=AX$ تعریف می‌شود. هرگاه $m<n$ نشان دهید ممکن است T پوشا باشد ودرعین‌حال نامنفرد نباشد. به‌طور مشابه، نشان دهید که اگر $m>n$، ممکن است T نامنفرد باشد ولی پوشا نباشد.

۱۱. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد. اگر رتبهٔ $(T^{2})=$ رتبهٔ (T)، ثابت کنید برد وفضای‌پوچ T مجزا هستند؛ یعنی، تنها در بردار صفر مشترکند.

۱۲. فرض کنید p، m، و n اعدادی صحیح ومثبت باشند و F یك‌هیأت باشد. فرض کنید V فضای ماتریسهای $m\times n$ برروی F و W فضای ماتریسهای $p\times n$ برروی F باشد. اگر B ماتریسی $p\times m$ و ثابت و T تبدیلی خطی از V در W تعریف شده توسط $T(A)=BA$ باشد، ثابت کنید T معکوس‌پذیر است اگروتنها اگر $p=m$ و B ماتریسی $m\times m$ ومعکوس‌پذیر باشد.

۳.۳. یکریختی[1]

اگر V و W دوفضای برداری برروی هیأت F باشند، هرتبدیل خطی یك به‌یك T، از V بروی W، یك **یکریختی** از V **بروی** W نامیده می‌شود. هرگاه یك یکریختی از V بروی W موجود باشد، گوییم V با W **یکریخت** است.

واضح است که V با V یکریخت است، زیرا عملگر همانی یك یکریختی از V بروی V است. همچنین، اگر V تحت یکریختی T با W یکریخت باشد، آنگاه W نیز با V یکریخت است، زیرا T^{-1} یك یکریختی از W بروی V است. خواننده باید بآسانی بتواند نشان دهد که اگر V با W و W با Z یکریخت باشد، آنگاه V با Z هم یکریخت‌است. به‌طور خلاصه، یکریختی یك‌رابطهٔ هم‌ارزی روی ردهٔ فضاهای‌برداری است. اگریك یکریختی از V بروی W موجود باشد، گاهی به‌جای اینکه بگوییم V با W

---

۱ این اصطلاح را ایزومورفیسم هم می‌نامند.ـم.

یکریخت است، می‌گوییم، V و W یکریخت‌اند. این موضوع اشکالی ایجاد نمی‌کند، زیرا V با W یکریخت است اگر وتنها اگر W با V یکریخت باشد.

قضیهٔ ۱۰. هرفضای برداری n بعدی برروی هیأت F با فضای F^n یکریخت است.

اثبات. فرض کنیم V یک فضای برداری nبعدی برروی هیأت F، و $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای آن باشد. تابع T از V در F^n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر α در V باشد، $T\alpha$ را n تایی مختصات $(x_1, \cdots, x_n)$ بردار α نسبت به‌پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ می‌گیریم؛ یعنی، nتایی‌ای که

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n.$$

درمبحث مختصات ازفصل ۲ نشان دادیم که این T خطی ویک‌به‌یک است و V را بروی F^n می‌نگارد. □

با وجودی که بردارها و اعمال درفضاهای برداری یکریخت ممکن است کاملاً متفاوت باشند، به‌منظورهای گوناگون، غالباً آنها را «یکی» تلقی می‌کنیم؛ یعنی، فضاهای یکریخت راغالباً یکی می‌گیریم. درحال‌حاضر در بارهٔ این ایده به بحثی طولانی نمی‌پردازیم، زیرا مایلیم درک مفهوم یکریختی واحساس «یکی» بودن فضاهای یکریخت پا به‌پای تداوم مطالعهٔ فضاهای برداری تقویت شوند.

اکنون به‌چند توضیح کوتاه می‌پردازیم. فرض کنیم T یک یکریختی از V بروی W باشد. اگر S زیرمجموعه‌ای از V باشد، آنگاه بنابرقضیهٔ ۸، S مستقل خطی است اگر و تنها اگر زیرمجموعهٔ $T(S)$ از W مستقل باشد. ازاین‌رو، در تصمیم‌گیری راجع به‌مستقل بودن S می‌توان به‌جای S به‌بررسی $T(S)$ پرداخت. ازاین مطلب مشهود است که یکریختی، «حافظ بعد» است؛ بدین معنی که بعدهر زیرفضای با بعد متناهی ازفضای V با بعدنگاره‌اش تحت T مساوی است. به‌تشریحی ساده ازاین ایده توجه کنید. فرض کنیم A ماتریسی $m\times n$ برروی هیأت F باشد. درواقع ما تاکنون دوتعریف برای فضای جواب ماتریس A ارائه کرده‌ایم. اولی عبارت است ازمجموعهٔ همهٔ nتاییهای $(x_1, \cdots, x_n)$ از F^n که درهریک ازمعادلات دستگاه $AX=0$ صدق کنند. دومی مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای ستونی $n\times 1$ مانند X است که $AX=0$. بدین لحاظ، اولین فضای جواب زیرفضایی از F^n است، درحالی که دومی زیرفضایی از فضای همهٔ ماتریسهای $n\times 1$ برروی هیأت F. اما یک یکریختی کاملاً واضح بین F^n و $F^{n\times 1}$ دیده می‌شود وآن

$$(x_1, \cdots, x_n) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

است. تحت این‌یکریختی، اولین فضای جواب A بروی دومین فضای‌جواب برده می‌شود.

بعد این فضاها مساوی است، وازاین‌رو اگر بخواهیم قضیه‌ای در بارهٔ بعد فضای جواب اثبات کنیم، اهمیتی ندارد که کدام فضا را برای بحث انتخاب کنیم. درواقع، اگر تصمیم می گرفتیم F^n وفضای ماتریسهای $n \times 1$ را یکی بگیریم، محتملاً خواننده مانع نمی‌شد. این کار را جز درمواردی که مناسب باشد انجام نخواهیم داد.

تمرین

۱. فرض کنید V مجموعهٔ اعداد مختلط و F هیأت اعدادحقیقی باشد. مجموعهٔ V با اعمال معمولی فضایی برداری برروی F است. یك یکریختی ازاین فضا بروی R^2 را به‌طور صریح توصیف کنید.

۲. V را فضایی برداری برروی هیأت اعداد مختلط بگیرید، وفرض کنید یك یکریختی T از V بروی C^3 وجود داشته باشد. فرض کنید α_1، α_2، α_3، و α_4 بردارهایی از V باشندکه

$$T\alpha_1=(1,\ 0,\ i), \qquad T\alpha_2=(-2,\ 1+i,\ 0),$$
$$T\alpha_3=(-1,\ 1,\ 1), \qquad T\alpha_4=(\sqrt{2},\ i,\ 3).$$

(الف) آیا α_1 درزیرفضای پدیدآمده توسط α_2 و α_3 قراردارد؟
(ب) اگر W_1 زیرفضای پدید آمده توسط α_1 و α_2، و W_2 زیرفضای پدیدآمده توسط α_3 و α_4 باشد، اشتراك W_1 و W_2 را به‌دست آورید.
(پ) پایه‌ای برای زیرفضایی از V که توسط چهار بردار α_j پدید می‌آید، بیابید.

۳. فرض کنید W مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای هرمیتی مختلط 2×2. یعنی مجموعهٔ ماتریسهای مختلط 2×2 چون A، باشرط $A_{ij}=\bar{A}_{ji}$ باشد (خط زبرنمایشگر مزدوج عددی مختلط است). همان‌طورکه درمثال ۶ از فصل ۲ اشاره شد، W با اعمال معمولی، فضایی است برداری برروی هیأت اعداد حقیقی. نشان دهید

$$(x,\ y,\ z,\ t) \to \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

یك یکریختی از R^4 بروی W است.

۴. نشان دهید $F^{m \times n}$ با F^{mn} یکریخت است.

۵. فرض کنید مجموعهٔ اعداد مختلط V به‌عنوان یك فضای برداری برروی هیأت اعداد حقیقی درنظرگرفته شده باشد (تمرین ۱). تابع T از V در فضای ماتریسهای حقیقی 2×2 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $z=x+iy$ و x و y حقیقی باشند،

آنگاه

$$T(z)=\begin{bmatrix} x+7y & 5y \\ -10y & x-7y \end{bmatrix}.$$

(الف) نشان دهید T یك تبدیل خطـی (حقیقی) یك به‌یك از V در فضای ماتریسهای حقیقی 2×2 است.

(ب) نشان دهید $T(z_1 z_2)=T(z_1)T(z_2)$.

(پ) برد T را چگونه توصیف می‌کنید؟

۶. دوفضای برداری V و W با بعد متناهی برروی هیأت F را درنظر بگیرید وثابت کنید V و W یکریختند اگروتنها اگر $dim\, V = dim\, W$.

۷. فرض کنید V و W دوفضای برداری برروی هیأت F باشند، و U یك یکریختی از V بروی W باشد. ثابت کنید $T \to UTU^{-1}$ یك یکریختی از $L(V, V)$ بروی $L(W, W)$ است.

۴.۳. نمایش ماتریسی تبدیلها

فرض کنیم V یك فضای بردار nبعدی و W یك فضای برداری m بعدی برروی هیأت F باشنـد. هـمچنیـن فـرض کنیـم $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پـایـهٔ مـرتبی بـرای V و $\mathcal{B}'=\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ پایهٔ مرتبی برای W باشد. اگر T تبدیل خطی دلخواهی از V در W باشد، آنگاه T بـا عملکردش روی بردارهای α_j تعیین می‌شود. هـریك از n بردار $T\alpha_j$ به‌طوریکتا به‌صورت یك ترکیب خطی

$$T\alpha_j=\sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i \tag{۳-۳}$$

از β_iها، که در آن اسکالرهای A_{1j}، $\cdots$، A_{mj} مختصات $T\alpha_j$ درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ می‌باشند، قابل بیان است. از این‌رو، تبدیل T ازطریق فرمولهای (۳-۳) بـا mn اسکالر A_{ij} تعیین می‌شود. ماتریس $m \times n$ A که با $A(i, j)=A_{ij}$ تعریف‌می‌شود، **ماتریس T نسبت به‌دو پایهٔ مرتب** $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ نامیده می‌شود. کاربعدی ما این است که به‌طور واضح بفهمیم چگونه ماتریس A تبدیل خطی T را تعیین می‌کند.

اگر $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$ برداری از V باشد، آنگاه

$$T\alpha=T\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j\Big)$$
$$=\sum_{j=1}^{n} x_j(T\alpha_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \Big)\beta_i$$

و اگر X ماتریس مختصات α در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ باشد، محاسبهٔ بالا نشان می‌دهد که AX ماتریس مختصات بردار $T\alpha$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ است، زیرا اسکالر

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}X_j$$

درایهٔ iمین سطر ماتریس ستونی AX است. همچنین مشاهده می‌شود که اگر A ماتریس $m\times n$ دلخواهی برروی هیأت F باشد، آنگاه

$$T\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j\Big) = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\Big)\beta_i \qquad (۴\text{-}۳)$$

تبدیل خطی T از V در W را تعریف می‌کند که ماتریس آن نسبت به $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ عبارت است از A. این مطلب را به‌طور رسمی خلاصه می‌کنیم:

قضیهٔ ۱۱. فرض کنیم V یك فضای برداری nبعدی برروی هیأت F و W یك فضای برداری mبعدی برروی F باشد. و نیز فرض کنیم $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتبی برای V، و $\mathcal{B}'$ پایهٔ مرتبی برای W باشد. برای هر تبدیل خطی T از V در W یك ماتریس $m\times n$، مانند A، که درایه‌هایش در F هستند، یافت می‌شود به‌طوری که به‌ازای هربردار α از V،

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}'} = A[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

بعلاوه، $A \to T$ یك تناظر یك به‌یك بین مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای خطی از V در W و مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $m\times n$ برروی هیأت F است.

ماتریس A، که بنابر قضیهٔ ۱۱ با T در تناظر است، **ماتریس T نسبت به‌پایه‌های مرتب $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$** نام دارد. به‌خاطرداشته باشیم تساوی (۳-۳) بیان می‌کند A ماتریسی است که ستونهایش A_1، $\cdots$، A_n توسط

$$A_j = [T\alpha_j]_{\mathcal{B}'}, \qquad j = 1, \cdots, n$$

تعیین می‌شوند. اگر U تبدیل خطی دیگری از V در W، و $B = [B_1, \cdots, B_n]$ ماتریس U نسبت به‌پایه‌های مرتب $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ باشد، آنگاه $cA+B$ ماتریس $cT+U$ نسبت به $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ است. این مطلب واضح است، زیرا

$$cA_j + B_j = c[T\alpha_j]_{\mathcal{B}'} + [U\alpha_j]_{\mathcal{B}'}$$
$$= [cT\alpha_j + U\alpha_j]_{\mathcal{B}'}$$
$$= [(cT+U)\alpha_j]_{\mathcal{B}'}.$$

قضیهٔ ۱۲. فرض کنیم V یك فضای برداری nبعدی و W یك فضای برداری mبعدی بررویِ هیأت F باشند. بهازای هرجفت پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$، بترتیب برای V و W، تابعی که بههر تبدیل خطی T، ماتریسش نسبت به $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ را تخصیص میدهد، یك یکریختی بین فضای $L(V, W)$ و فضای همهٔ ماتریسهای $m\times n$ بررویِ هیأت F است.

اثبات. قبلاً ملاحظه کردیم که تابع موردنظرخطی است؛ همچنانکه درقضیهٔ ۱۱ بیان شد، این تابع یك بهیك نیزهست و $L(V, W)$ را برروی مجموعهٔ ماتریسهای $m\times n$ مینگارد. □

دراین بررسی، بخصوص بهنمایش ماتریسی تبدیلهای خطی ازیك فضا در خودش، یعنی بهعملگرهای خطی رویِ یك فضای V، علاقهمند هستیم. دراین حالت بسیار مناسب است که در هرمورد از پایههای یکسان استفاده کنیم؛ یعنی، فرض کنیم که $\mathcal{B}=\mathcal{B}'$. دراین صورت، ماتریس نمایش را بهطورساده **ماتریس T نسبت بهپایه مرتب** $\mathcal{B}$ مینامیم. چون این مفهوم برایمان بسیارمهم است، تعریف آن را دوباره بیان میکنیم. اگر T تبدیلی خطی رویِ فضای برداری با بعد متناهی V و $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای V باشد، ماتریس T نسبت به $\mathcal{B}$ (یا، ماتریس T در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$) عبارت است ازماتریس $n\times n$ ی مانند A که درایههایش، A_{ij}، با معادلات

$$T\alpha_j=\sum_{i=1}^{n} A_{ij}\alpha_i, \qquad j=1, \cdots, n \tag{۵-۳}$$

تعریف میشوند. همواره باید بهخاطرداشت که این ماتریس که T را نمایش میدهد بهپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ وابسته است، وبعلاوه درهرپایهٔ مرتب V نمایشی ماتریسی برای T موجوداست. (برای تبدیلهای ازیك فضا درفضای دیگر، این ماتریس بهدو پایهٔ مرتب، یکی برای V و دیگری از آن W، وابسته است.) برایآنکه این وابستگی را ازیاد نبریم، برای ماتریس عملگرخطی T درپایهٔ مرتب β ازنماد

$$[T]_{\mathcal{B}}$$

استفاده میکنیم. طریقهایکه باآن این ماتریس واین پایهٔ مرتب T را توصیف میکنند، این است که بهازای هر α در V

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

مثال ۱۳. فرض کنیم V فضای ماتریسهای ستونی $n\times 1$ برروی هیأت F، W فضای ماتریسهای $m\times 1$ برروی همین هیأت، و A ماتریس $m\times n$ ثابتی برروی F باشد. همچنین فرض کنیم T تبدیل خطی از V در W تعریف شده با $T(X)=AX$ باشد. $\mathcal{B}$ را پایهٔ مرتبی برای V میگیریم که نظیرپایهٔ استاندهٔ F^n باشد، یعنی iمین بردار در $\mathcal{B}$ همان ماتریس $n\times 1$، X_i باشد با درایهٔ ۱ درسطر iم و درایهٔ ۰ در سطرهای دیگر. فرض کنیم

$\mathcal{B}'$ پایهٔ مرتب متناظر آن برای W باشد، یعنی j زمین بردار $\mathcal{B}'$ ماتریس $m\times 1$، Y_j با درایهٔ ۱ در سطر jم و درایهٔ ۰ در سایر سطرها باشد. دراین صورت، ماتریس T نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$، خود ماتریس A است. این مطلب واضح است، زیرا ماتریس AX_j، j زمین ستون ماتریس A است.

مثال ۱۴. گیریم F یك هیأت، و T عملگری روی F^2 باشد که با

$$T(x_1, x_2)=(x_1, 0)$$

تعریف می‌شود. بسهولت دیده می‌شود که T عملگری خطی روی F^2 است. فرض کنیم $\mathcal{B}=\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ پایهٔ مرتب استاندهٔ F^2 باشد. حال

$$T\epsilon_1=T(1, 0)=(1, 0)=1\epsilon_1+0\epsilon_2$$
$$T\epsilon_2=T(0, 1)=(0, 0)=0\epsilon_1+0\epsilon_2$$

ولذا ماتریس T درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ عبارت است از

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

مثال ۱۵. فرض کنیم V فضای همهٔ توابع چندجمله‌ای از R در R به‌شکل

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$$

یعنی، فضای توابع چندجمله‌ای ازدرجهٔ سه یا کمترباشد. عملگرمشتق گیری D در مثال ۲، V را در V می‌نگارد، زیرا D «کاهش‌دهندهٔ درجه» است. فرض کنیم پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ برای V متشکل از چهارتابع f_1، f_2، f_3، و f_4 باشد که‌با $f_j(x)=x^{j-1}$ تعریف می‌شوند. دراین صورت،

$$(Df_1)(x)=0, \qquad Df_1=0f_1+0f_2+0f_3+0f_4$$
$$(Df_2)(x)=1, \qquad Df_2=1f_1+0f_2+0f_3+0f_4$$
$$(Df_3)(x)=2x, \qquad Df_3=0f_1+2f_2+0f_3+0f_4$$
$$(Df_4)(x)=3x^2, \qquad Df_4=0f_1+0f_2+3f_3+0f_4$$

وبنابراین ماتریس D درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ عبارت است از

$$[D]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

قبلاً دیدیم که هنگام جمع تبدیلها، چیزی که برای ماتریسهای نمایش اتفاق می‌افتد این است که آنها هم جمع می‌شوند. اکنون می‌خواهیم بدانیم هنگام ترکیب تبدیلها چه اتفاق می‌افتد. به‌صورت دقیقتر، فرض کنید V، W، و Z فضاهایی برداری بر روی هیأت F، و بترتیب، با ابعاد n، m، و p باشند. T را تبدیلی خطی از V در W، و U را تبدیلی خطی از W در Z می گیریم. فرض کنیم پایه‌های مرتب

$$\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, \quad \mathcal{B}'=\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}, \quad \mathcal{B}''=\{\gamma_1, \cdots, \gamma_p\}$$

بترتیب، برای فضاهای V، W، و Z داده شده‌اند و A ماتریس T نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$، و B ماتریس U نسبت به‌جفت $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{B}''$ است. در این صورت، بسادگی دیده می‌شود که C، ماتریس تبدیل UT نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}''$ عبارت است ازحاصل‌ضرب A و B. زیرا، اگر α برداری دلخواه از V باشد، آنگاه

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}'}=A[\alpha]_{\mathcal{B}}$$
$$[U(T\alpha)]_{\mathcal{B}''}=B[T\alpha]_{\mathcal{B}'}.$$

پس

$$[(UT)(\alpha)]_{\mathcal{B}''}=BA[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

و از این‌رو، بنابرتعریف ویکتا بودن ماتریس نمایش، بایدداشته باشیم $C=BA$. باانجام محاسبهٔ ذیل نیزمی‌توان به‌این نتیجه دست یافت

$$\begin{aligned}(UT)(\alpha_j)&=U(T\alpha_j)\\ &=U\Big(\sum_{k=1}^{m} A_{kj}\beta_k\Big)\\ &=\sum_{k=1}^{m} A_{kj}(U\beta_k)\\ &=\sum_{k=1}^{m} A_{kj}\sum_{i=1}^{p} B_{ik}\gamma_i\\ &=\sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{m} B_{ik}A_{kj}\Big)\gamma_i\end{aligned}$$

وبنابراین باید داشته باشیم

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{m} B_{ik}A_{kj}. \tag{۳-۶}$$

اعمال روی سطرهای ماتریسها موجب ایجاد انگیزه برای تعریف (۳-۶) ضرب ماتریسی شدند. دراینجا دیده می‌شود که ترکیب تبدیلهای خطی هم انگیزه‌ای بسیار قوی برای این تعریف است. خلاصهٔ این مطالب به‌طور رسمی چنین است.

قضیهٔ ۱۳. فرض‌کنیم V، W، و Z سه فضای برداری با بعدمتناهی بر روی هیأت F، T تبدیلی خطی از V در W و U تبدیلی‌خطی از W در Z باشند. اگر $\mathscr{B}$، $\mathscr{B}'$، و $\mathscr{B}''$ پایه‌هایی مرتب، بترتیب، برای V، W، و Z باشند و اگر A ماتریس T نسبت به‌جفت $\mathscr{B}$ و $\mathscr{B}'$، و B ماتریس U نسبت به‌جفت $\mathscr{B}'$ و $\mathscr{B}''$ باشد، آنگاه ماتریس ترکیب UT نسبت به‌جفت $\mathscr{B}$ و $\mathscr{B}''$ عبارت است از ماتریس حاصل‌ضرب $C=BA$.

ملاحظه‌می‌کنیم که قضیهٔ ۱۳، اثباتی‌ازشرکت‌پذیری ضرب‌ماتریسی به‌دست‌می‌دهد- اثباتی‌که نیازی به‌محاسبه ندارد، ومستقل از اثباتی است‌که درفصل ۱ ارائه شد. بعلاوه، خاطرنشان می‌کنیم‌که حالت خاصی ازقضیهٔ ۱۳ را درمثال ۱۲ هم اثبات‌کردیم.

تذکراین مطلب مهم است‌کــه اگر T و U عملگرهایی خطی روی فضای V باشند و نمایش ماتریسی را نسبت به‌پایهٔ واحدی چون $\mathscr{B}$ انجام دهیم، آنگاه قضیهٔ ۱۳ شکل سادهٔ $[UT]_{\mathscr{B}}=[U]_{\mathscr{B}}[T]_{\mathscr{B}}$ را به‌خود می‌گیرد. پس، دراین حالت، تناظری‌که $\mathscr{B}$ بین‌عملگرها وماتریسها برقرار می‌کند، نه‌تنها یك یکریختی فضای برداری است، بلکه ضربها را نیز حفظ‌می‌کند. نتیجه‌ای ساده ازاین مطلب این است‌که عملگرخطی T معکوس‌پذیراست‌اگر وتنها اگر $[T]_{\mathscr{B}}$ ماتریسی معکوس‌پذیر باشد. زیرا، عملگرهمانی I درهرپایهٔ مرتب‌دلخواه توسط ماتریس همانی نمایش داده می‌شود، وازاین‌رو

$$UT=TU=I$$

هم‌ارز است با

$$[U]_{\mathscr{B}}[T]_{\mathscr{B}}=[T]_{\mathscr{B}}[U]_{\mathscr{B}}=I.$$

البته، وقتی T معکوس‌پذیر باشد

$$[T^{-1}]_{\mathscr{B}}=[T]_{\mathscr{B}}^{-1}$$

اکنون می‌خواهیم بدانیم هنگامی‌که پایه تغییرکند، چه تغییری درماتریسهای‌نمایش رخ می‌دهد. به‌منظور سادگی، این پرسش را تنها برای عملگرهای خطی روی یك‌فضای V مطرح می‌کنیم تــا بتوانیم از پایهٔ مرتب واحــدی استفاده کنیم. سؤال به‌طور مشخص چنین است: فرض‌کنیم T عملگری خطی روی فضای V با بعد متناهی و

$$\mathscr{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, \qquad \mathscr{B}'=\{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n\}$$

دوپایهٔ مرتب برای V باشند. ارتباط ماتریسهای $[T]_{\mathscr{B}}$ و $[T]_{\mathscr{B}'}$ چیست؟ همان گونه‌که در فصل ۲ مشاهده‌کردیم، یك ماتریس $n\times n$ (معکوس‌پذیر) یکتای P وجود دارد، به‌طوری که به‌ازای هربردار α از V،

$$[\alpha]_{\mathscr{B}}=P[\alpha]_{\mathscr{B}'}. \tag{۷-۳}$$

این ماتریس عبارت است از $P=[P_1, \cdots, P_n]$ که درآن $P_j=[\alpha'_j]_{\mathscr{B}}$. بنا به‌تعریف

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}. \qquad (۳-۸)$$

اگر(۳-۷) را بر بردار $T\alpha$ به‌کار بندیم، داریم

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}}=P[T\alpha]_{\mathcal{B}'}. \qquad (۳-۹)$$

از ترکیب (۳-۷)، (۳-۸)، و (۳-۹) به‌دست می‌آوریم

$$[T]\ P[\alpha]_{\mathcal{B}'}=P[T\alpha]_{\mathcal{B}'}$$

یا

$$P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P[\alpha]_{\mathcal{B}'}=[T\alpha]_{\mathcal{B}'}$$

واز این‌رو باید داشته باشیم

$$[T]_{\mathcal{B}'}=P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P. \qquad (۳-۱۰)$$

این رابطه به‌پرسش ما پاسخ می‌گوید.

قبل ازآنکه این نتیجه را رسماً بیان کنیم، به‌مشاهدهٔ مطلب زیر می‌پردازیم. عملگر خطی یکتایی چون U وجود دارد که با

$$U\alpha_j=\alpha'_j, \qquad j=1,\ \cdots,\ n$$

تعریف می‌شود و $\mathcal{B}$ را بروی $\mathcal{B}'$ انتقال می‌دهد. عملگر U معکوس‌پذیراست، زیرا پایه‌ای از V را بـروی پایه‌ای از V می‌برد. ماتریس P (بالا) دقیقاً ماتریس عملگـر U درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ است. زیرا P با

$$\alpha'_j=\sum_{i=1}^{n}P_{ij}\alpha_i$$

تعریف می‌شود وچون $U\alpha_j=\alpha'_j$، این تساوی می‌تواند به‌صورت

$$U\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}P_{ij}\alpha_i$$

نیز نوشته شود. پس، طبق تعریف $P=[U]_{\mathcal{B}}$.

قضیه ۱۴. فرض‌کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت F،

$$\mathcal{B}=\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\}, \quad \mathcal{B}'=\{\alpha'_1,\ \cdots,\ \alpha'_n\}$$

دو پایهٔ مرتب برای V و T عملگـری خطی روی V باشد. اگـر $P=[P_1,\ \cdots,\ P_n]$ ماتریس $n\times n$ با ستونهای $P_j=[\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$ باشد، آنگاه

$$[T]_{\mathcal{B}'}=P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P.$$

درنتیجه، اگر U عملگر معکوس‌پذیر تعریف شده با $U\alpha_j=\alpha'_j$، $j=1,\ \cdots,\ n$، روی V

باشد، آنگاه

$$[T]_{\mathcal{B}'}=[U]_{\mathcal{B}}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}[U]_{\mathcal{B}}.$$

مثال ۱۶. فرض کنیم عملگر خطی T روی R^2 با $T(x_1, x_2)=(x_1, 0)$ تعریف بشود. در مثال ۱۴ نشان دادیم که ماتریس T در پایهٔ مرتب استاندهٔ $\mathcal{B}=\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ برابر

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

است. اگر پایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ برای R^2 متشکل از بردارهای $\epsilon'_1=(1, 1)$ و $\epsilon'_2=(2, 1)$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \epsilon'_1 &= \epsilon_1+\epsilon_2 \\ \epsilon'_2 &= 2\epsilon_1+\epsilon_2 \end{aligned}$$

ولذا P عبارت است از ماتریس

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

با محاسبهٔ کوتاهی نتیجه می‌شود

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

از این‌رو

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}'} &= P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

بسادگی می‌توانیم صحت این نتیجه را بررسی کنیم، زیرا

$$T\epsilon'_1=(1,0)=-\epsilon'_1+\epsilon'_2$$
$$T\epsilon'_2=(2,0)=-2\epsilon'_1+2\epsilon'_2$$

مثال. فرض‌کنیم V فضای توابع چندجمله‌ای از R در R با «درجهٔ» کمتر از ۳ یا مساوی با آن باشد. نظیر مثال ۱۵، D را عملگر مشتق‌گیری روی V می‌گیریم، و فرض می‌کنیم

$$\mathcal{B}=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

پایهٔ مرتب‌تعریف شده با $f_i(x)=x^{i-1}$ برای V باشد. عدد حقیقی t را در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $g_i(x)=(x+t)^{i-1}$، به‌عبارت دیگر

$$\begin{aligned}
g_1&=f_1\\
g_2&=tf_1+f_2\\
g_3&=t^2f_1+2tf_2+f_3\\
g_4&=t^3f_1+3t^2f_2+3tf_3+f_4.
\end{aligned}$$

همان‌گونه‌که بسادگی دیده می‌شود چون ماتریس

$$P=\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3\\ 0 & 1 & 2t & 3t^2\\ 0 & 0 & 1 & 3t\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

معکوس‌پذیر، ومعکوسش

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3\\ 0 & 1 & -2t & 3t^2\\ 0 & 0 & 1 & -3t\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

است، نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{B}'=\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ پایهٔ مرتبی بـرای V است. در مثال ۱۵، معلوم شدکه ماتریس D درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ عبارت است از

$$[D]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

پس، ماتریس D در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ عبارت است از

$$P^{-1}[D]_{\mathcal{B}}P=\begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین، D در پایه‌های مرتب $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ با یک ماتریس نمایش داده می‌شود. البته این نتیجه را می‌توان به‌نحو مستقیم‌تری هم مشاهده کرد، زیرا

$$Dg_1 = 0$$
$$Dg_2 = g_1$$
$$Dg_3 = 2g_2$$
$$Dg_4 = 3g_3.$$

این مثال نکتهٔ خوبی را نشان می‌دهد. اگرماتریس عملگری‌خطی را دریك پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ بشناسیم وبخواهیم ماتریس‌آن را درپایهٔ مرتب دیگر $\mathcal{B}'$ بیابیم، هرچند ممکن است‌یافتن ماتریس نمایش با توسل مستقیم‌به‌تعریف‌کار بسیار ساده‌ای باشد، اما غالباً تغییر مختصات با استفاده ازماتریس معکوس‌پذیر P خیلی مناسب‌تراست.

تعریف. فرض کنیم A و B دوماتریس $n\times n$ (مربعی) برروی هیأت F باشند. گوییم B **متشابه با** A **برروی** F است، هرگاه یك ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیر P یافت شود به‌طوری که $B=P^{-1}AP$.

بنابرقضیهٔ ۱۴، نتیجهٔ زیررا داریم: اگر V یك فضای برداری nبعدی برروی F و $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ دوپایهٔ مرتب برای V باشند، آنگاه به‌ازای هرعملگر خطی T روی V، ماتریس $B=[T]_{\mathcal{B}'}$ متشابه با ماتریس $A=[T]_{\mathcal{B}}$ است. عکس این حکم نیزصادق است. فرض کنیم A و B دو ماتریس $n\times n$، و B متشابه با A باشد. همچنین فرض‌کنیم V فضای nبعدی دلخواهی برروی F، و $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتبی برای V باشد. T را آن عملگرخطی روی V می‌گیریم که درپایهٔ $\mathcal{B}$ با A نمایش داده می‌شود. اگر $B=P^{-1}AP$، $\mathcal{B}'$ را پایهٔ‌مرتبی برای V می‌گیریم که از $\mathcal{B}$ توسط P حاصل می‌شود، یعنی

$$\alpha'_j=\sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i.$$

دراین صورت، ماتریس T درپایهٔ $\mathcal{B}'$ همان B خواهد بود.

پس، این گفته‌که B متشابه با A است، بدین معنی است‌که روی هرفضای nبعدی برروی F، ماتریسهای A و B یك تبدیل خطی در دوپایهٔ مرتب (احیاناً) مختلف رانمایش می‌دهند.

توجه‌کنیدکه با به‌کارگرفتن $P=I$، هرماتریس $n\times n$ مانند A متشابه با خودش است. اگر B متشابه با A باشد،آنگاه A نیزمتشابه با B است، زیرا $B=P^{-1}AP$ ایجاب می‌کندکه $A=(P^{-1})^{-1}BP^{-1}$. اگر B متشابه با A و C متشابه با B باشد، آنگاه C متشابه با A است، چراکه $B=P^{-1}AP$ و $C=Q^{-1}BQ$ ایجاب می‌کنندکه $C=(PQ)^{-1}A(PQ)$. پس، تشابه رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی هیأت F است. همچنین توجه‌کنیدکه تنها ماتریس متشابه با ماتریس همانی I خود I است، وتنها ماتریس متشابه با ماتریس صفر، خود ماتریس صفراست.

تمرین

۱. فرض کنید T عملگرخطی روی C^2 تعریف شده با $T(x_1, x_2)=(x_1, 0)$ باشد. فرض کنید $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتب استاندهٔ C^2، و $\mathcal{B}'=\{\alpha_1, \alpha_2\}$ پایهٔ مرتب تعریف شده با $\alpha_1=(1, i)$ و $\alpha_2=(-i, 2)$ باشد.

(الف) ماتریس T نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ چیست؟

(ب) ماتریس T نسبت به‌جفت $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{B}$ کدام است؟

(پ) ماتریس T درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ چیست؟

(ت) ماتریس T درپایهٔ مرتب $\{\alpha_2, \alpha_1\}$ کدام است؟

۲. فرض کنید T تبدیل خطی از R^3 در R^2 تعریف شده با

$$T(x_1, x_2, x_3)=(x_1+x_2, 2x_3-x_1)$$

باشد.

(الف) اگر $\mathcal{B}$ پایهٔ‌مرتب‌استاندهٔ R^3 و $\mathcal{B}'$ پایهٔ‌مرتب‌استاندهٔ R^2 باشد، ماتریس T نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ کدام است؟

(ب) اگر $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ و $\mathcal{B}'=\{\beta_1, \beta_2\}$ ودرآنها

$$\alpha_1=(1, 0, -1),\ \alpha_2=(1, 1, 1),\ \alpha_3=(1, 0, 0),$$
$$\beta_1=(0, 1),\ \beta_2=(1, 0)$$

ماتریس T نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ کدام است؟

۳. فرض کنید T عملگری خطی روی F^n و A ماتریس T درپایهٔ مرتب استاندهٔ F^n باشد. فرض کنید W زیرفضای F^n پدیدآمده با بردارهای ستونی A باشد. رابطهٔ W با T چیست؟

۴. فرض کنید V یك فضای برداری ۲ بعدی برروی هیأت F و $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتبی برای V باشد. اگر T عملگری خطی روی V باشد و

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ثابت کنید $T^2-(a+d)T+(ad-bc)I=0$.

۵. فرض کنید T عملگری‌خطی روی R^3 باشدکه ماتریسش درپایهٔ مرتب استانده برابر با

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

است. پایه‌ای برای برد T وپایه‌ای برای فضای پوچ T بیابید.

۶. فرض کنید T عملگرخطی روی R^2 تعریف شده با

$$T(x_1, x_2)=(-x_2, x_1)$$

باشد.

(الف) ماتریس T درپایهٔ مرتب استاندهٔ R^2 چیست؟

(ب) ماتریس T در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \alpha_2\}$، که در آن $\alpha_1=(1, 2)$ و $\alpha_2=(1, -1)$ چیست؟

(پ) ثابت کنید به‌ازای هرعدد حقیقی c عملگر $(T-cI)$ معکوس‌پذیر است.

(ت) اگر $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتب دلخواهی برای R^2 باشد و $[T]_{\mathcal{B}}=A$، ثابت کنید که $A_{12}A_{21}\neq 0$.

۷. فرض کنید T عملگرخطی روی R^3 تعریف شده با

$$T(x_1, x_2, x_3)=(3x_1+x_3,\ -2x_1+x_2,\ -x_1+2x_2+4x_3)$$

باشد.

(الف) ماتریس T درپایهٔ مرتب استاندهٔ R^3 چیست؟

(ب) ماتریس T درپایهٔ مرتب

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$

که درآن $\alpha_1=(1, 0, 1)$، $\alpha_2=(-1, 2, 1)$، و $\alpha_3=(2, 1, 1)$ چیست؟

(پ) ثابت کنید T معکوس‌پذیر است وقاعده‌ای شبیه آنکه T را تعریف می کند، برای T^{-1} به‌دست آورید.

۸. اگر θ عددی حقیقی باشد، ثابت کنید دوماتریس

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{bmatrix}$$

بر روی هیأت اعداد مختلط متشابه‌اند. (راهنمایی: فرض کنید T عملگر خطی روی C^2 باشد که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس اول نمایش داده می‌شود. آنگاه دو بردار α_1 و α_2 بیابید که $T\alpha_1=e^{i\theta}\alpha_1$ و $T\alpha_2=e^{-i\theta}\alpha_2$ و $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ یك پایه باشد.)

۹. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت F و T و S عملگرهایی خطی روی V باشند. سؤال: چه‌وقت پایه‌های مرتب $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ برای V یافت می‌شوند که

$[S]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}'}$؟ ثابت کنید چنین پایه‌هایی وجود دارند اگر وتنها اگر یك عملگرخطی معکوس‌پذیر UرویVیافت‌شود که $T=USU^{-1}$. (طرح اثبات: اگر، $[S]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}'}$، آنگاه$U$را عملگری بگیرید که $\mathcal{B}$را بروی $\mathcal{B}'$ ببرد ونشان‌دهید که $S=UTU^{-1}$. بعکس، اگر به‌ازای عملگـــر معکوس‌پذیری چون U داشته باشیم $T=USU^{-1}$، آنگاه $\mathcal{B}$را پایهٔ مرتب دلخواهی بـــرای V و $\mathcal{B}'$ را نگارهٔ آن تحت U فـــرض کنید. سپس نشان دهید $[S]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}'}$.)

۱۰. قبلاً دیده‌ایم که عملگرخطی T روی R^2 تعریف شده با $T(x_1, x_2)=(x_1, 0)$ در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. این عملگر دررابطهٔ $T^2=T$ صدق می‌کند. ثابت کنید اگر S عملگری خطی روی R^2 باشد به‌طوری‌که $S^2=S$، آنگاه یا $S=0$ یا $S=I$، و یا پایه‌ای مرتب چون $\mathcal{B}$ برای R^2 وجود داردکه $[S]_{\mathcal{B}}=A$ (منظـور از A همان ماتریس فوق است).

۱۱. فرض‌کنید W فضای همهٔ ماتریسهای ستونی $n\times 1$ برروی هیأت F باشد. اگـر A ماتریسی $n\times n$ برروی F باشد، آنگاه A باضرب ازچپ، عملگرخطی L_A را روی W تعریف می‌کند: $L_A(X)=AX$. ثابت کنید هرعملگـرخطی روی W، یك ضرب ازچپ‌درماتریسی $n\times n$ است؛ یعنی به‌ازای ماتریسی چون A یك L_A است.

حال فرض‌کنید V یك فضای برداری nبعدی برروی هیأت F و $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتبی برای V باشد. به‌ازای هرα در V، تعریف می‌کنیم $U\alpha=[\alpha]_{\mathcal{B}}$. ثابت کنید U یك یکریختی ازV بروی W است. اگرT عملگری خطی روی Vباشد، آنگاه UTU^{-1} عملگری خطی روی W است. در نتیجه، UTU^{-1} ضرب ازچپ درماتریسی $n\times n$ مانند A است. Aکدام ماتریس است؟

۱۲. فرض‌کنید V یك فضای برداری nبعدی برروی هیأت F و $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای V باشد.

(الف) بنا بر قضیهٔ ۱ عملگرخطی یکتایی چون T روی V وجود دارد به طوری که

$$T\alpha_j=\alpha_{j+1}, \quad j=1, \cdots, n-1, \ T\alpha_n=0.$$

ماتریس A مربوط به‌عملگرT درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ چیست؟

(ب) ثابت‌کنید $T^n=0$ ولی $T^{n-1}\neq 0$.

(پ) فرض کنید S عملگری خطـی روی V باشد کـه $S^n=0$ ولـی $S^{n-1}\neq 0$.

ثابت‌کنید پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}'$ برای V وجود دارد که ماتریس S در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ همان ماتریس A درقسمت (الف) باشد.

(ت) ثابت کنید اگر M و N ماتریسهایی $n\times n$ برروی F باشند که $M^n=N^n=0$ ولی $M^{n-1}\neq 0\neq N^{n-1}$، آنگاه M و N متشابه‌اند.

۱۳. فرض‌کنید V و W دوفضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت F و T تبدیلی خطی از V در W باشد.

اگر

$$\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \text{ و } \mathcal{B}'=\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}،$$

بترتیب، دوپایهٔ مرتب برای V و W باشند، تبدیلهای $E^{p,q}$ را به‌صورتی که دراثبات قضیهٔ ۵ تعریف شدند در نظر بگیرید: $E^{p,q}(\alpha_i)=\delta_{iq}\beta_p$. آنگاه $E^{p,q}$ها، $1\leqslant p\leqslant m$، $1\leqslant q\leqslant n$، پایه‌ای برای $L(V, W)$ تشکیل می‌دهند و لذا به‌ازای اسکالرهای معین A_{pq} (مختصات T دراین پایه از $L(V, W)$)

$$T=\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} A_{pq}E^{p,q}.$$

نشان دهید ماتریس A با درایه‌های $A(p, q)=A_{pq}$ دقیقاً همان ماتریس T نسبت به‌جفت $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ است.

۵.۳. تابعکهای خطی

اگر V فضایی برداری برروی هیأت F باشد، یك‌تبدیل خطی f از V درهیأت‌اسکالرهای F یك **تابعك خطی** روی V نامیده می‌شود. با توجه به‌مفهوم تبدیل خطی، این بدان معنی است که f تابعی است از V در F که به‌ازای همهٔ بردارهای α و β از V وهمهٔ اسکالرهای c از F

$$f(c\alpha+\beta)=cf(\alpha)+f(\beta).$$

مفهوم تابعك خطی در مطالعهٔ فضاهای با بعد متناهی مهم است، زیرا درسازمان دادن و روشن‌کردن مبحث زیرفضاها، معادلات خطی، ومختصات یاری‌دهنده است.

مثال ۱۸. گیریم F یك هیأت باشد و a_1، $\cdots$، a_n اسکالرهایی از F باشند. تابع f روی F^n را با

$$f(x_1, \cdots, x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، f تابعکی خطی روی F^n است. این همان تابعك خطی است که توسط ماتریس $[a_1 \cdots a_n]$ نسبت به‌پایهٔ مرتب استانده F^n وپایهٔ $\{1\}$ برای F

نمایش داده می‌شود:

$$a_j = f(\epsilon_j), \quad j = 1, \cdots, n.$$

هر تابعك خطی دلخواه روی F^n نیز به‌ازای اسکالرهایی چون a_1، a_2، $\cdots$، a_n به‌همین شکل است. این مطلب بلافاصله از تعریف تابعك خطی نتیجه می‌شود، زیرا با تعریف $a_j = f(\epsilon_j)$ واستفاده ازخطی بودن، داریم

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f(\sum_j x_j \epsilon_j)$$
$$= \sum_j x_j f(\epsilon_j)$$
$$= \sum_j a_j x_j .$$

مثال ۱۹. اینك به‌مثالی مهم از تابعکهای خطی می‌پردازیم. فرض کنیم n عددی صحیح مثبت و F یك هیأت باشد. اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های متعلق به F باشد، رد A عبارت است ازاسکالر

$$tr A = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}.$$

تابع رد تابعکی خطی روی فضای ماتریسی $F^{n\times n}$ است، زیرا

$$tr(cA+B) = \sum_{i=1}^{n} (cA_{ii} + B_{ii})$$
$$= c\sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii}$$
$$= c\, tr(A) + tr B.$$

مثال ۲۰. فرض کنیم V فضای همهٔ توابع چندجمله‌ای ازهیأت F در خودش و t عنصری از F باشد. اگرتعریف کنیم

$$L_t(p) = p(t)$$

آنگاه، L_t تابعکی خطی روی V است. معمولاً این مطلب به‌این صورت توصیف می‌شود که به‌ازای هر t «تعیین مقدار در t» تابعکی خطی روی فضای توابع چندجمله‌ای است. لازم است این نکته را متذکرشویم که چندجمله‌ای بودن توابع، نقشی دراین مثال ندارد. تعیین مقدار در t، تابعکی خطی روی فضای همهٔ توابع از F در F است.

مثال ۲۱. تابعك زیر ممکن است مهمترین تابعك خطی در ریاضیات باشد. گیریم $[a, b]$ فاصله‌ای بسته روی خط حقیقی و $C([a, b])$ فضای توابع (با مقدار) حقیقی

پیوسته روی $[a,b]$ باشد. در این صورت،

$$L(g)=\int_a^b g(t)dt$$

تابعك خطی L روی $C[a,b]$ را تعریف می‌کند.

اگر V فضایی برداری باشد، دستهٔ همهٔ تابعکهای خطی روی V، بـه‌طریقی طبیعی فضایی برداری تشکیل می‌دهد. این فضا همان $L(V،F)$ است. ما این فضا را با V^* نشان می‌دهیم و آن را **فضای دوگان** V می‌نامیم:

$$V^*=L(V,F).$$

اگر بعد V متناهی باشد، مـی‌توانیم توصیفی نسبتاً صریح از V^* فضای دوگان V به‌دست‌آوریم. در مورد فضای V^* طبق قضیهٔ ۵ مطلبی می‌دانیم، و آن این است که

$$\text{بعد}(V^*)=\text{بعد}(V).$$

فرض‌کنیم $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. بنابر قضیهٔ ۱ (به‌ازای هر i) یك تابعك خطی یکتای f_i روی V وجود دارد که

$$f_i(\alpha_j)=\delta_{ij}. \tag{۳-۱۱}$$

بدین طریق، از $\mathcal{B}$ مجموعه‌ای از n تابعك خطی متمایـز $f_1،\dots،f_n$ روی V بـه‌دست می‌آوریم. این تابعکها دارای استقلال خطی نیز هستند. زیرا، فرض‌کنیم

$$f=\sum_{i=1}^{n}c_if_i \tag{۳-۱۲}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} f(\alpha_j)&=\sum_{i=1}^{n}c_if_i(\alpha_j)\\ &=\sum_{i=1}^{n}c_i\delta_{ij}\\ &=c_j. \end{aligned}$$

بخصوص، اگر f تابعك صفر باشد، بـه‌ازای هر j داریم $f(\alpha_j)=0$، و لذا اسکالرهای c_j همگی ۰ هستند. حال n تابعك $f_1،\dots،f_n$ مستقل خطی هستند وچون می‌دانیم که بعد V^* برابر n است، مجموعهٔ $\mathcal{B}^*=\{f_1,\dots,f_n\}$ لزوماً بایدپایه‌ای برای V^* باشد. این پایه، **پایهٔ دوگان** $\mathcal{B}$ نامیده می‌شود.

قضیهٔ ۱۵. فرض کنیم V فضای بـرداری بـا بعد متناهـی بر روی هیأت F، و $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. در ایـن صورت، یك پـایـهٔ دوگان یکتای

$\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ برای V^* وجود دارد به‌طوری که $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. به‌ازای هرتابعك خطی f روی V داریم

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i \tag{۱۳-۳}$$

و به ازای هر بردار α از V داریم

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\alpha_i. \tag{۱۴-۳}$$

اثبات. قبلاً نشان دادیم که پایه‌ای یکتا که «دوگان» $\mathcal{B}$ است وجود دارد. اگر f تابعکی خطی روی V باشد، آنگاه f ترکیبی خطی همچون (۳-۱۲) از f_iهاست، و همان طور که بعد از تساوی (۳-۱۲) ملاحظه کردیم اسکالرهای c_j باید از $c_j = f(\alpha_j)$ به‌دست آیند. به‌طور مشابه، اگر

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$$

برداری از V باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} f_j(\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} x_i f_j(\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij} \\ &= x_j. \end{aligned}$$

بدین‌نحو، عبارت یکتای α به‌عنوان ترکیبی خطی از α_iها

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\alpha_i$$

است. □

معادلهٔ (۳-۱۴) روش خوبی جهت‌توصیف ماهیت پایهٔ‌دوگان برایمان فراهم‌می‌کند. این‌معادله می‌گوید که اگر $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایهٔ‌مرتبی برای V و $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ پایهٔ دوگان آن باشد، آنگاه f_i دقیقاً تابعی است که به‌هر بردار α از V، iامین مختص α نسبت به‌پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ را تخصیص می‌دهد. از این‌رو، می‌توانیم f_iها را توابع مختصی برای $\mathcal{B}$ نیز بنامیم. فرمول (۳-۱۳) وقتی با (۳-۱۴) ترکیب شود می‌گوید که: اگر f در V^* با فرض $f(\alpha_i) = a_i$ باشد، آنگاه وقتی

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

داریم

$$f(\alpha)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n. \tag{۱۵-۳}$$

به بیان دیگر، هرگاه پایهٔ مرتبی برای V انتخاب کنیم، و هر بردار V را توسط nتایی مختصاتش نسبت به $\mathcal{B}$، یعنی $(x_1,\cdots,x_n)$، توصیف کنیم، آنگاه هر تابعك خطی روی V به‌صورت (۳-۱۵) است. این مطلب تعمیم طبیعی مثال ۱۸ است که حالت خاص $V=F^n$، $\mathcal{B}=\{\epsilon_1\cdots,\epsilon_n\}$ است.

مثال ۲۲. فرض کنیم V فضای برداری همهٔ توابع چند جمله‌ای از R در R با درجهٔ ۲ یا کمتر باشد. گیریم t_1، t_2، و t_3 سه عدد حقیقی متمایز دلخواه باشند و

$$L_i(p)=p(t_i).$$

در این صورت، L_1، L_2، و L_3 تابعکهایی خطی روی V هستند. این تابعکها مستقل خطی هستند؛ زیرا، فرض کنیم

$$L=c_1L_1+c_2L_2+c_3L_3.$$

اگر $L=0$؛ یعنی، به ازای هر p از V، $L(p)=0$، آنگاه با به‌کار بستن L بر «توابع» چند جمله‌ای خاص ۱، x، و x^2 به‌دست می‌آوریم

$$c_1+c_2+c_3=0$$
$$t_1c_1+t_2c_2+t_3c_3=0$$
$$t_1^2c_1+t_2^2c_2+t_3^2c_3=0.$$

از این معادلات نتیجه می‌شود که $c_1=c_2=c_3=0$، زیرا (همان‌طور که محاسبهٔ کوتاهی نشان می‌دهد) ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix}$$

وقتی t_1، t_2، و t_3 متمایز باشند، معکوس‌پذیر است. پس L_iها مستقل‌اند و چون بعد V برابر ۳ است، این تابعکها پایه‌ای برای V^* تشکیل می‌دهند. این، پایهٔ دوگان کدام پایه از V است؟ یك چنین پایهٔ $\{p_1, p_2, p_3\}$ از V باید در شرط

$$L_i(p_j)=\delta_{ij}$$

یا

$$p_j(t_i)=\delta_{ij}$$

صدق کند. نسبتاً بسهولت دیده می‌شود که این توابع چندجمله‌ای عبارتند از

$$p_۱(x)=\frac{(x-t_۲)(x-t_۳)}{(t_۱-t_۲)(t_۱-t_۳)}$$

$$p_۲(x)=\frac{(x-t_۱)(x-t_۳)}{(t_۲-t_۱)(t_۲-t_۳)}$$

$$p_۳(x)=\frac{(x-t_۱)(x-t_۲)}{(t_۳-t_۱)(t_۳-t_۲)}\,.$$

پایهٔ $\{p_۱, p_۲, p_۳\}$ از V جالب است، زیرا بنابر (۳-۱۴) به‌ازای هر p در V داریم

$$p=P(t_۱)p_۱+p(t_۲)P_۲+P(t_۳)p_۳.$$

از این‌رو، اگر $c_۱$، $c_۲$، و $c_۳$ سه عدد حقیقی دلخواه باشند، دقیقاً یك تابع چندجمله‌ای p بر روی R وجود دارد که درجه‌اش حداکثر ۲ باشد ودرشرایط $p(t_j)=c_j$، $J=۱,۲,۳$، صدق کند. این تابع چندجمله‌ای عبارت است از $p=c_۱p_۱+c_۲p_۲+c_۳p_۳$.

اکنون دربارهٔ رابطهٔ بین تابعکهای خطی و زیرفضاها به بحث می‌پردازیم. اگر f تابعك خطی غیر صفری باشد، آنگاه رتبهٔ f یك است، زیرا برد f زیرفضایی غیر صفراز هیأت اسکالرهاست و(بنابراین) بایدهمان‌هیأت‌اسکالرها باشد. اگربعدفضای‌زمینه، V، متناهی باشد، قضیهٔ‌رتبه باضافهٔ پوچی (قضیهٔ۲) به‌ما می‌گویدکه بعد فضای پوچ N_f عبارت‌است‌از

$$\text{بعد}\,(N_f)=\text{بعد}\,(V)-۱\,.$$

درهر فضای برداری با بعد n، زیرفضایی با بعد $n-۱$ یك **ابرفضا** نامیده می‌شود. چنین زیر فضایی گاهی ابر صفحه یا زیرفضای با همبعد ۱ نیز نامیده می‌شود. آیا هر ابر فضا، فضای پوچ تابعکی خطی است؟ بسادگی دیده می‌شودکـه جواب مثبت است. نشان دادن این مطلب‌چندان مشکل نیست‌که هر زیرفضای d بعدی از فضایی n بعدی اشتراك فضاهای پوچ $(n-d)$ تابعك خطی است (قضیهٔ ۱۶ زیر).

تعریف. اگر V فضایی برداری بر روی هیأت F و S زیـرمجموعه‌ای از V، باشد، **پوچساز** S عبارت است از مجموعهٔ S° متشکل از تابعکهای خطی f روی V که به‌ازای هر α در S، $f(\alpha)=0$.

این مطلب باید روشن باشدکـه خواه S زیر فضایی از V باشد خواه نباشد، S° همواره زیرفضایی از V^* است. اگر مجموعهٔ S تنها متشکل از بـردار صفر باشد، آنگاه $S^\circ=V^*$، و اگر $S=V$ آنگاه S° زیرفضای صفر V^* است. (وقتی بعد V متناهی‌باشد، مشاهدهٔ این مطلب ساده است.)

قضیهٔ ۱۶. فرض کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F، و W زیرفضایی از V باشد. در این صورت،

$$\text{بعد}\,(W)+\text{بعد}\,(W^\circ)=\text{بعد}\,(V)\,.$$

اثبات. گیریم k بعد W و $\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$ پایه‌ای برای آن باشد. بردارهای α_{k+1}،…،α_n از V را طوری انتخاب می‌کنیم که $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ پایه‌ای برای V گردد. فرض کنیم دوگان این پایه از V پایهٔ $\{f_1,\dots,f_n\}$ برای V^* باشد. ادعا این است که $\{f_{k+1},\dots,f_n\}$ پایه‌ای برای پوچساز W° است. مسلماً به‌ازای هر $i\geqslant k+1$، f_i به W° تعلق دارد، زیرا

$$f_i(\alpha_j)=\delta_{ij}$$

و هرگاه $i\geqslant k+1$ و $j\leqslant k$، $\delta_{ij}=0$. از این مطلب نتیجه می‌شود که به‌ازای $i\geqslant k+1$، $f_i(\alpha)=0$ البته با این شرط که α ترکیبی خطی از α_1،…،α_k باشد. تابعکهای f_{k+1}،…،f_n مستقل خطی هستند، از این‌رو تنها چیزی که باید نشان دهیم این است که آنها W° را پدید می‌آورند. فرض کنیم f در V^* باشد. حال

$$f=\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)f_i$$

و اگر f در W° باشد، به‌ازای $i\leqslant k$ داریم $f(\alpha_i)=0$ و

$$f=\sum_{i=k+1}^{n} f(\alpha_i)f_i.$$

پس نشان داده‌ایم که اگر $\dim W=k$ و $\dim V=n$، آنگاه $\dim W^\circ=n-k$. □

نتیجه. اگر W زیرفضایی k بعدی از یک فضای برداری n بعدی V باشد، آنگاه W اشتراک $(n-k)$ ابر فضا از V است.

اثبات. این مطلب بیشتر نتیجه‌ای از اثبات قضیهٔ ۱۶ است تا از صورت آن. در نمادگذاری اثبات، W دقیقاً مجموعهٔ بردارهای α است که $f_i(\alpha)=0$، $i=k+1,\dots,n$. در حالت $k=n-1$، W فضای پوچ f_n است. □

نتیجه. اگر W_1 و W_2 زیرفضاهای یک فضای برداری با بعد متناهی باشند، آنگاه $W_1=W_2$ اگر و تنها اگر $W_1^\circ=W_2^\circ$.

اثبات. اگر $W_1=W_2$، آنگاه مسلماً $W_1^\circ=W_2^\circ$. اما اگر $W_1\neq W_2$، آنگاه یکی از این دو زیر فضا شامل برداری است که در زیرفضای دیگر نیست. فرض کنیم برداری چون α در W_2 هست که در W_1 نیست. بنا بر نتیجهٔ قبل (یا اثبات قضیهٔ ۱۶) تابعکی خطی چون f موجود است که به‌ازای هر بردار β از W_1، $f(\beta)=0$، اما $f(\alpha)\neq 0$. در این صورت f در W_1° هست ولی در W_2° نیست و لذا $W_2^\circ\neq W_1^\circ$. □

در بخش بعد اثباتهای مختلفی برای این‌دو نتیجه خواهیم آورد. نتیجهٔ اول می‌گوید که: اگر پایهٔ مرتبی برای فضا انتخاب کنیم، هر زیرفضای k بعدی می‌تواند با وضع $(n-k)$ شرط خطی همگن روی مختصات نسبت به آن پایه توصیف شود.

اکنون به‌طور اجمال، ازدیدگاه تابعکهای خطی، نظری به دستگاههای معادلات خطی

همگن می‌افکنیم. فرض کنیم دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned}A_{11}x_1+\cdots+A_{1n}x_n&=0\\ \vdots\qquad\quad&\vdots\\ A_{m1}x_1+\cdots+A_{mn}x_n&=0\end{aligned}$$

داده شده و بخواهیم جوابهای آن را بیابیم. اگر فرض کنیم f_iها، $i=1,\ldots,m$، تابعکهایی خطی روی F^n باشند که با

$$f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n)=A_{i1}x_1+\ \cdots\ +A_{in}x_n$$

تعریف می‌شوند، آنگاه زیرفضایی از F^n متشکل از همهٔ αهایی را می‌جوییم که

$$f_i(\alpha)=0,\quad i=1,\ \cdots,\ m.$$

به‌بیان دیگر، زیرفضایی را جستجو می‌کنیم که توسط f_1، $\ldots$، f_m پوچ می‌شود. عمل تحویل سطری ماتریس ضرایب، روشی بانظام جهت یافتن این زیرفضا دراختیار ما می‌گذارد. nتایی $(A_{i1},\ \ldots,\ A_{in})$، مختصات تابعک خطی f_i نسبت به‌پایه‌ای که‌دوگان پایهٔ استانده F^n است‌را به‌دست می‌دهد. لذا، فضای سطری ماتریس ضرایب را می‌توان به‌عنوان فضای تابعکهای خطی پدید آمده توسط f_1، $\ldots$، fm به‌حساب آورد. فضای جواب، زیرفضای پوچ شده توسط این فضا از تابعکها است.

اکنون می‌توان از دیدگاه «دوگان» به‌دستگاه معادلات نظر کرد. به‌این‌معنی که فرض کنیم m بردار

$$\alpha_i=(A_{i1},\ \cdots,\ A_{in})$$

از F^n به‌ما داده شده باشند وبخواهیم پوچساز زیرفضای پدید آمده توسط این بردارها را بیابیم. چون هرتابعک خطی روی F^n نوعاً به‌صورت

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_n)=c_1x_1+\ \cdots\ +c_nx_n$$

است، شرط بودن f دراین پوچساز این است که

$$\sum_{j=1}^{n}A_{ij}c_j=0,\qquad i=1,\ \cdots,\ m$$

یعنی، این است‌که $(c_1,\ \ldots,\ c_n)$ جوابی از دستگاه $AX=0$ باشد. با این دید، عمل تحویل سطری، روشی بانظام برای یافتن پوچساز زیرفضای پدید آمده توسط مجموعهٔ متناهی مفروضی از بردارهای F^n به‌دست می‌دهد.

مثال ۲۳. ذیلاً سه تابعک خطی روی R^4 داده شده است:

$$\begin{aligned}f_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)&=\ \ x_1+2x_2+2x_3+x_4\\ f_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)&=\ \ 2x_2+\ x_4\\ f_3(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)&=-2x_1-4x_3+3x_4.\end{aligned}$$

زیرفضایی که توسط این تابعکها پوچ می‌شود، با یافتن شکل تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۰ & -۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

به‌طور صریح به‌دست می‌آید. محاسبه‌ای کوتاه یا نظری به‌مثال ۲۱ از فصل ۲ نشان می‌دهد که

$$R=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

بنابراین، تابعکهای خطی

$$g_۱(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)=x_۱+۲x_۳$$
$$g_۲(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)=x_۲$$
$$g_۳(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)=x_۴$$

همان زیرفضایی از $(R^۴)^*$ را پدید می‌آورند که تابعکهای $f_۱$، $f_۲$، و $f_۳$؛ و همان زیر-فضایی از $R^۴$ را پوچ می‌سازند که $f_۱$، $f_۲$، و $f_۳$. زیرفضای پوچ‌شده، متشکل از بردارهایی است که در شرایط

$$x_۱=-۲x_۳$$
$$x_۲=x_۴=۰$$

صدق می‌کنند.

مثال ۲۴. فرض کنیم W زیرفضایی از $R^۵$ باشد که توسط بردارهای

$$\alpha_۱=(۲, -۲, ۳, ۴, -۱) \qquad \alpha_۳=(۰, ۰, -۱, -۲, ۳)$$
$$\alpha_۲=(-۱, ۱, ۲, ۵, ۲) \qquad \alpha_۴=(۱, -۱, ۲, ۳, ۰)$$

پدید می‌آید. چگونه می‌توان W°، پوچساز W را توصیف کرد؟ ماتریسی ۴×۵، مانند A، با بردارهای سطری $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\alpha_۳$، و $\alpha_۴$ را تشکیل می‌دهیم و ماتریس تحویل شده‌سطری پلکانی R را که هم‌ارز سطری A است می‌یابیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۳ & ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۲ & ۵ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۲ & ۳ \\ ۱ & -۱ & ۲ & ۳ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow R=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

اگر f تابعکی خطی روی R^5 باشد:

$$f(x_1, \cdots, x_5)=\sum_{j=1}^{5} c_j x_j$$

آنگاه f در W° قرار دارد اگروتنها اگر $f(\alpha_i)=0$، به‌ازای $i=1, 2, 3, 4$؛ یعنی، اگروتنها اگر

$$\sum_{j=1}^{5} A_{ij}c_j=0, \quad 1\leqslant i\leqslant 4.$$

واین خود هم‌ارز است با

$$\sum_{j=1}^{5} R_{ij}c_j=0, \quad 1\leqslant i\leqslant 3$$

یا

$$\begin{aligned} c_1-c_2-c_4&=0\\ c_3+2c_4&=0\\ c_5&=0. \end{aligned}$$

همهٔ این‌گونه تابعکهای‌خطی f را با تخصیص‌مقادیری دلخواه به c_2 و c_4، مثلاً $c_2=a$ و $c_4=b$، وسپس‌یافتن‌مقادیرمتناظر $c_1=a+b$، $c_3=-2b$، و $c_5=0$ به‌دست‌می‌آوریم. بنا براین W° متشکل ازهمهٔ تابعکهای خطی f به‌صورت

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(a+b)x_1+ax_2-2bx_3+bx_4$$

است. بعد W° دواست وپایهٔ $\{f_1, f_2\}$ برای W° ازقراردادن $a=1$ و $b=0$ درابتدا، وسپس $a=0$ و $b=1$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \cdots, x_5)&=x_1+x_2\\ f_2(x_1, \cdots, x_5)&=x_1-2x_3+x_4. \end{aligned}$$

تابعك نوعی f از W° عبارت است از: $f=af_1+bf_2$.

تمرین

۱. در R^3 بردارهای $\alpha_1=(1, 0, 1)$، $\alpha_2=(0, 1, -2)$، و $\alpha_3=(-1, -1, 0)$ را انتخاب می‌کنیم

(الف) هرگاه تابعك خطی f روی R^3 با شرایط

$$f(\alpha_1)=1, \quad f(\alpha_2)=-1, \quad f(\alpha_3)=3$$

باشد و $\alpha=(a, b, c)$، دراین صورت $f(\alpha)$ را بیابید.

(ب) تابعك خطی f روی R^3 راکه

$$f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=0 \quad \text{ولی} \quad f(\alpha_3)\neq 0$$

به‌طورصریح توصیف کنید.

(پ) فرض کنید تابعك خطی f با خواص

$$f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=0, \quad f(\alpha_3)\neq 0$$

باشد و $\alpha=(2, 3, -1)$. نشان دهید $f(\alpha)\neq 0$.

۲. فرض کنید پایهٔ $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \alpha_2\ \alpha_3\}$ برای C^3 به‌صورت

$$\alpha_1=(1, 0, -1), \quad \alpha_2=(1, 1, 1), \quad \alpha_3=(2, 2, 0)$$

تعریف شده است. پایهٔ دوگان $\mathcal{B}$ را بیابید.

۳. اگر A و B دوماتریس $n\times n$ برروی هیأت F باشند، نشان دهید $tr(AB)=tr(BA)$. سپس نشان دهید ماتریسهای متشابه، ردهای متساوی دارند.

۴. فرض کنید V فضای برداری همهٔ توابع چند جمله‌ای p از R در R با درجهٔ ۲ یا کمتر باشد:

$$p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2.$$

سه تبدیل خطی توسط

$$f_1(p)=\int_0^1 p(x)dx, \quad f_2(p)=\int_0^2 p(x)dx,$$
$$f_3(p)=\int_0^{-1} p(x)dx$$

روی V تعریف می‌کنیم. با ارائه پایه‌ای برای V که $\{f_1, f_2, f_3\}$ دوگان آن باشد، نشان دهید $\{f_1, f_2, f_3\}$ پایه‌ای برای V^* است.

۵. اگر A و B دوماتریس مختلط $n\times n$ باشند، نشان دهید که تساوی $AB-BA=I$ غیر ممکن است.

۶. فرض کنید m و n دوعدد صحیح‌مثبت و F يك هیأت باشد، و f_1، ...، f_m تابعکهایی خطی روی F^n باشند. به‌ازای هر α در F^n تعریف می‌کنیم

$$T\alpha=(f_1(\alpha), \cdots, f_m(\alpha)).$$

نشان‌دهید T تبدیلی خطی از F^n در F^m است. سپس نشان‌دهید هر تبدیل خطی از F^n در F^m، به‌ازای f_1، ...، f_m هایی، به‌شکل بالاست.

۷ . فرض کنید $\alpha_1=(1,0,-1,2)$ و $\alpha_2=(2,3,1,1)$، و W زیرفضای پدیدآمده توسط α_1 و α_2 از R^4 باشد. از تابعکهایی خطی مانند f به‌صورت

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4$$

کدام درپوچساز W قراردارد؟

۸ . فرض کنید W زیرفضایی از R^5 باشدکه توسط بردارهای

$$\alpha_1=\epsilon_1+2\epsilon_2+\epsilon_3, \qquad \alpha_2=\epsilon_2+3\epsilon_3+3\epsilon_4+\epsilon_5$$

$$\alpha_3=\epsilon_1+4\epsilon_2+6\epsilon_3+4\epsilon_4+\epsilon_5$$

پدید می‌آید. پایه‌ای برای W° بیابید.

۹ . فرض کنید V فضای برداری همهٔ ماتریسهای 2×2 برروی هیأت اعداد حقیقی باشد، و

$$B=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

فرض کنید W زیرفضای متشکل از همهٔ Aهای با شرط $AB=0$ از V، و تابعک خطی f روی V متعلق به پوچساز W باشد. اگر $f(I)=0$، $f(C)=3$، I ماتریس همانی 2×2 و

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باشند، $f(B)$ را بیابید.

۱۰ . فرض کنید F زیرهیأتی از اعداد مختلط باشد. n تابعک خطی روی F^n $(n\geqslant 2)$ توسط

$$f_k(x_1, \cdots, x_n)=\sum_{j=1}^{n}(k-j)x_j, \quad 1\leqslant k\leqslant n$$

تعریف می‌کنیم. بعد زیرفضای پوچ شده توسط f_1، $\cdots$، f_n چیست؟

۱۱ . فرض کنید W_1 و W_2 دوزیرفضا ازیك فضای برداری با بعد متناهی V باشند.
(الف) ثابت کنید $(W_1+W_2)^\circ=W_1^\circ\cap W_2^\circ$.
(ب) ثابت کنید $(W_1\cap W_2)^\circ=W_1^\circ+W_2^\circ$.

۱۲ . فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت F و W زیرفضایی از V باشد. اگر f تابعکی خطی روی W باشد، ثابت کنید یك تابعك خطی g روی V

یافت می‌شود به‌طوری‌که به‌ازای هر α درزیرفضای W، $g(\alpha)=f(\alpha)$.

۱۳. فرض‌کنید F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط و V فضای برداری دلخواهی برروی F باشد. f و g را تابعکهایی خطی روی V می‌گیریم به‌قسمی‌که تابع h تعریف شده توسط $h(\alpha)=f(\alpha)g(\alpha)$ نیز تابعکی خطی روی V شود. ثابت‌کنید $f=0$ یا $g=0$.

۱۴. فرض‌کنید F هیأتی با سرشت‌نمای صفر و V یك فضای برداری با بعد متناهی برروی F باشد. اگر α_1، $\cdots$، α_m تعدادی متناهی بردار از V باشند، و همه مخالف بردار صفر، ثابت‌کنید یك تابعك f روی V یافت می‌شود به‌طوری‌که

$$f(\alpha_i)\neq 0, \quad i=1, \cdots, m.$$

۱۵. بنابرتمرین ۳، ماتریسهای متشابه دارای ردهای متساوی‌اند. از این‌رو، می‌توانیم رد یك عملگرخطی روی یك فضای با بعد متناهی را رد هرماتریسی‌که آن عملگررا در یك پایهٔ مرتب نمایش دهد تعریف‌کنیم. این مفهوم خوش تعریف است، چرا که همهٔ این‌گونه ماتریسهای نمایش برای یك عملگر با هم متشابه‌اند.
حال فرض کنید V فضای همهٔ ماتریسهای 2×2 برروی هیأت F و P ماتریس 2×2 ثابتی‌باشد. فرض‌کنید T عملگرخطی تعریف شده توسط $T(A)=PA$ روی V باشد. ثابت‌کنید $tr(A)=2tr(P)$.

۱۶. نشان دهید تابعك رد روی ماتریسهای $n\times n$، به‌مفهوم زیر، یکتاست. اگر W فضای ماتریسهای $n\times n$ برروی هیأت F، و f تابعکی خطی روی W باشدکه به‌ازای هر A و B از W، $f(AB)=f(BA)$، آنگاه f مضربی اسکالری از تابع رد است. اگرعلاوه براین $f(I)=n$، آنگاه f خود تابع رد می‌باشد.

۱۷. فرض‌کنید W فضای ماتریسهای $n\times n$ برروی هیأت F و W_0 زیرفضای پدیدآمده توسط‌ماتریسهای C به‌صورت $C=AB-BA$ باشد. ثابت‌کنید W_0 دقیقاً زیرفضای متشکل ازماتریسهایی‌است‌که دارای رد صفرهستند. (راهنمایی: بعدفضای ماتریسهای با رد صفر چیست؟ از «واحدهای» ماتریسی، یعنی از ماتریسهایی‌که تنها یك درایهٔ غیرصفردارند برای ساختن تعداد کافی ماتریس مستقل خطی به‌صورت $AB-BA$ استفاده‌کنید.)

۶.۳. دوگان مضاعف

یك پرسش دربارهٔ پایه‌های دوگان که در بخش قبل بدان پاسخ ندادیم، این بود که آیا هرپایه برای V^* دوگان پایه‌ای برای V هست یا نه. روشی برای پاسخگویی به‌این

پرسش این است که V^{**}، فضای دوگان V را بررسی کنیم.

اگر α برداری از V باشد، آنگاه α تبدیل خطی L_α را که با

$$L_\alpha(f)=f(\alpha)، \quad \text{به‌ازای هر } f \text{ در } V^*$$

تعریف می‌شود، روی V^* القا می‌کند. اثبات این که L_α خطی است، چیزی نیست جز فرمولبندی مجدد تعریف اعمال خطی در V^*:

$$\begin{aligned} L_\alpha(cf+g) &= (cf+g)(\alpha) \\ &= (cf)(\alpha)+g(\alpha) \\ &= cf(\alpha)+g(\alpha) \\ &= cL_\alpha(f)+L_\alpha(g). \end{aligned}$$

اگر V با بعد متناهی باشد و $\alpha\neq 0$، آنگاه $L_\alpha\neq 0$؛ به بیان دیگر، یک تابعک خطی f وجود دارد که $f(\alpha)\neq 0$. اثبات این مطلب بسیارساده است ودربخش ۵.۳ آمده است: پایهٔمرتب $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ با شرط $\alpha_1=\alpha$ را برای V انتخاب کنید و f راتابعکی خطی بگیرید که به‌هر بردار V، اولین مختصش درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ را نسبت دهد.

قضیهٔ ۱۷. فرض کنیم V یک فضای برداری بابعد متناهی برروی هیأت F باشد. به‌ازای هربردار α از V تعریف می‌کنیم

$$L_\alpha(f)=f(\alpha)، \quad \text{به‌ازای هر } f \text{ در } V^*.$$

دراین صورت، نگاشت $\alpha\to L_\alpha$ یک یکریختی از V بروی V^{**} است.

اثبات. نشان دادیم که به‌ازای هر α تابع L_α خطی است. فرض کنیم α و β در V و c در F باشد، وهمچنین $\gamma=c\alpha+\beta$. دراین صورت، به‌ازای هر f در V^*،

$$\begin{aligned} L_\gamma(f) &= f(\gamma) \\ &= f(c\alpha+\beta) \\ &= cf(\alpha)+f(\beta) \\ &= cL_\alpha(f)+L_\beta(f) \end{aligned}$$

وازاین‌رو

$$L_\gamma=cL_\alpha+L_\beta\,.$$

این نشان می‌دهد که نگاشت $\alpha\to L_\alpha$، تبدیلی‌خطی از V در V^{**} است. این تبدیل نامنفرد است؛ زیرا، بنا برملاحظات فوق، $L_\alpha=0$ اگر وتنها اگر $\alpha=0$. پس $\alpha\to L_\alpha$ تبدیل خطی نامنفردی از V در V^{**} است وچون

$$\text{بعد}\,(V)=\text{بعد}\,(V^*)=\text{بعد}\,(V^{**})$$

قضیهٔ ۹ بیان می‌کند که این تبدیل معکوس‌پذیر، و بنابراین یك یکریختی از V بروی V^{**} است. □

نتیجه. فرض کنیم V یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت F باشد. اگر L تابعکی خطی روی V^*، فضای دوگان V، باشد، آنگاه یك بردار یکتای α در V موجود است به‌طوری که به‌ازای هر f در V^*

$$L(f)=f(\alpha)\,.$$

نتیجه. فرض‌کنیم V یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت F باشد. هرپایه از V^* دوگان پایه‌ای از V است.

اثبات. گیریم $\mathcal{B}^*=\{f_1, \ldots, f_n\}$ پایه‌ای برای V^* باشد. بنابر قضیهٔ ۱۵، پایه‌ای چون $\{L_1, \ldots, L_n\}$ برای V^{**} با این خاصیت یافت می‌شود که

$$L_i(f_j)=\delta_{ij}\,.$$

با استفاده از نتیجهٔ قبل، به‌ازای هر i یك بردار α_i در V وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر f در V^*

$$L_i(f)=f(\alpha_i)$$

یعنی، $L_i=L_{\alpha_i}$. ازاینجا بلافاصله نتیجه می‌شود که $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V است و $\mathcal{B}^*$ دوگان این پایه است. □

نظر به‌قضیهٔ ۱۷، معمولاً α را با L_α یکی می‌گیریم، ومی‌گوییم V دوگان فضای V^* «است»، یااینکه فضاهای V و V^* به‌طورطبیعی در دوگانی یکدیگر هستند، ویا اینکه هرفضا دوگان فضای دیگراست. آخرین نتیجه گواه مفید بودن این نتایج است. گواه‌دیگر به‌شرح زیراست.

اگر E زیرمجموعه‌ای از V^* باشد، آنگاه پوچساز E° (بنابه‌قاعده) زیرمجموعه‌ای از V^{**} است. اگرنظر به‌قضیهٔ ۱۷ تصمیم به‌یکی انگاشتن V و V^{**} بگیریم، آنگاه E° زیرفضایی از V خواهد بود که مجموعهٔ همهٔ αهای V با شرط $f(\alpha)=0$ به‌ازای همهٔ fهای در E است. دریکی از نتیجه‌های قضیهٔ ۱۶ مشاهده‌کردیم که هرزیرفضای W توسط پوچسازش W° تعیین می‌شود. چگونه؟ پاسخ این است که W زیرفضای پوچ شده توسط همهٔ fهای در W°، یعنی اشتراك فضاهای پوچ همهٔ fهای متعلق به W° است. با توجه به‌نماد مورد استفاده برای پوچسازها، پاسخ را می‌توان بسیار ساده بیان کرد: $W=(W^\circ)^\circ$.

قضیهٔ ۱۸. اگر S زیرمجموعه‌ای از فضای برداری با بعد متناهی V باشد، آنگاه $(S^\circ)^\circ$ زیرفضای پدیدآمده توسط S است.

اثبات. گیریم W زیر فضای پدید آمده توسط S باشد. واضح است که $S^\circ = W^\circ$. بنا براین، کافی است اثبات کنیم که $W = W^{\circ\circ}$. قبلاً* اثباتی از این مطلب عرضه کردیم، و اینك اثباتی دیگر. بنا بر قضیهٔ ۱۶

$$\text{بعد}\ (V) = \text{بعد}\ (W^\circ) + \text{بعد}\ (W)$$
$$\text{بعد}\ (V^*) = \text{بعد}\ (W^{\circ\circ}) + \text{بعد}\ (W^\circ)$$

و چون بعد $(V^*) =$ بعد (V) داریم

$$\text{بعد}\ (W^{\circ\circ}) = \text{بعد}\ (W).$$

چون W زیر فضای $W^{\circ\circ}$ است، می‌بینیم که $W = W^{\circ\circ}$. □

نتایج این بخش برای فضاهای برداری دلخواه نیز برقرار هستند؛ لکن، اثباتها مستلزم استفاده از به‌اصطلاح اصل انتخاب می‌باشند. چون نمی‌خواهیم خود را درگیر بحثی طولانی دربارهٔ این اصل بکنیم، پوچسازها را در فضاهای برداری عمومی مورد بحث قرارنمی‌دهیم. اما، دو نتیجه دربارهٔ تابعکهای خطی روی فضاهای برداری دلخواه چنان اساسی هستند که نمی‌توان از آنها بسادگی گذشت.

گیریم V فضایی برداری باشد. می‌خواهیم ابر فضاهای V را تعریف کنیم. بجز در حالتی که بعد V متناهی باشد، نمی‌توانیم ابرفضاها را از طریق بعدآنها تعریف کنیم. ولی می‌توانیم این ایده را که زیر فضای N برای پرکردن V دقیقاً یك بعدکم دارد، به‌طریق زیر بیان کنیم:

۱. N زیرفضایی سره از V است؛

۲. اگرزیرفضای W از V شامل N باشد، آنگاه یا $W = N$ و یا $W = V$. شرایط (۱) و (۲) توأماً بیان می‌کنند که N زیرفضایی سره است، و زیرفضای سره‌ای بزرگتر از آن وجود ندارد؛ به‌طور خلاصه، N یك زیرفضای سرهٔ ماکسیمال است.

تعریف. اگر V فضایی برداری باشد، یك **ابرفضای** V یك زیرفضای سرهٔ ماکسیمال V است.

قضیهٔ ۱۹. اگر f تابعك خطی غیرصفری روی فضای برداری V باشد، آنگاه فضای پوچ f، یك ابرفضای V است. بعکس، هر ابرفضای V، فضای پوچ تابعك خطی غیر صفری (نه لزوماً یکتا) روی است.

اثبات. فرض کنیم f تابعك خطی غیرصفری روی V، و N_f فضای پوچ آن باشد. α را برداری از V می‌گیریم که در N_f نباشد؛ یعنی، α را برداری می‌گیریم که $f(\alpha) \neq 0$. نشان می‌دهیم که هر بردار V، در فضای پدیدآمده توسط N_f و α قرار دارد. این زیر-فضا شامل همهٔ بردارهای

$$\gamma + c\alpha, \quad \gamma \text{ در } N_f, \ c \text{ در } F$$

است. هرگاه β در V باشد، تعریف می‌کنیم

$$c=\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}\,.$$

این تعریف بامعنی است چرا که $f(\alpha)\neq 0$. دراین صورت، بردار $\gamma=\beta-c\alpha$ در N_f است، زیرا

$$\begin{aligned} f(\gamma)&=f(\beta-c\alpha)\\ &=f(\beta)-cf(\alpha)\\ &=0. \end{aligned}$$

لذا، β در زیر فضای پدیدآمده توسط N_f و α قرار دارد.

حال N را یك ابرفضای V فرض می‌کنیم و برداری چون α را در نظر می‌گیریم که در N نباشد. چون N یك زیرفضای سرهٔ ماکسیمال است، زیرفضای پدیدآمده توسط N و α کل فضای V است. بنابراین، هر بردار β از V به‌صورت

$$\beta=\gamma+c\alpha،\quad \gamma \text{ در } N \text{ و } c \text{ در } F$$

است. بردار γ و اسکالر c توسط β به‌طور یکتا تعیین می‌شوند. زیر، اگر همچنین‌داشته باشیم

$$\beta'=\gamma'+c'\alpha،\quad \gamma' \text{ در } N \text{ و } c' \text{ در } F$$

آنگاه

$$(c'-c)\alpha=\gamma-\gamma'.$$

اگر $c-c'\neq 0$، آنگاه α باید در N باشد؛ از این‌رو، $c=c'$ و $\gamma=\gamma'$. طریقی دیگر برای بیان نتیجهٔ حاصل چنین است. اگر β در V باشد، اسکالریکتایی چون c وجوددارد که $\beta-c\alpha$ در N است. این اسکالر را $g(\beta)$ می‌نامیم. حال، بررسی این‌که g تابعکی خطی روی V و N فضای پوچ g است، آسان می‌باشد. □

لم. اگر f و g تابعکهایی خطی روی فضای برداری V باشند، آنگاه g مضرب اسکالری f است اگر و تنها اگر فضای پوچ g شامل فضای پوچ f باشد؛ یعنی اگر و تنها اگر $f(\alpha)=0$ ایجاب کندکه $g(\alpha)=0$.

اثبات. اگر $f=0$، آنگاه به‌همین نحو $g=0$ و مسلماً g مضربی اسکالری از f است. فرض کنیم $f\neq 0$؛ آنگاه فضای پوچ N_f یك ابر فضای V است. بردار α از V را با شرط $f(\alpha)\neq 0$ انتخاب و فرض می‌کنیم

$$c=\frac{g(\alpha)}{f(\alpha)}\,.$$

تابعك خطی $h=g-cf$ روی N_f صفر است، زیرا f و g هر دو روی N_f صفرهستندو $h(\alpha)=g(\alpha)-cf(\alpha)=0$. پس، h روی زیرفضای پدید آمده توسط N_f و α، صفر است و این زیر فضا خود V است. نتیجه اینکــه $h=0$، یعنی، $g=cf$. □

قضیهٔ ۲۰. فرض کنیم g، f_1، $\dots$، f_r تابعکهایی خطی روی فضای برداری V، بترتیب، با فضاهای پوچ N، N_1، $\dots$، و N_r باشند. در این صورت، g ترکیبی خطی از f_1، $\dots$، و f_r است اگر و تنها اگر N شامل اشتراك $N_1\cap\dots\cap N_r$ باشد.

اثبات. اگر $g=c_1f_1+\dots+c_rf_r$، وبه‌ازای هر i داشته باشیم $f_i(\alpha)=0$، آنگاه بوضوح $g(\alpha)=0$. بنابراین، N شامل $N_1\cap\dots\cap N_r$ است.

حالت عکس (نیمهٔ «اگر» قضیه) را به استقرا نسبت بــه r اثبات می‌کنیم. لم قبل اثبات‌حالت $r=1$ را به‌دست می‌دهد. فرض‌کنیم قضیه را برای حالت $r=k-1$ بدانیم و تابعکهای خطی f_1، $\dots$، و f_k را با فضاهای پوچ N_1، $\dots$، N_k با این شرط کــه $N_1\cap\dots\cap N_k$ مشمول در N، فضــای پــوچ g، بــاشد در نظــر مــی گیریم. اگــر g'، f'_1، $\dots$، f'_{k-1} تحدیدهای g، f_1، $\dots$، و f_{k-1} به زیرفضای N_k باشند، آنگاه g'، f'_1، $\dots$، و f'_{k-1} تابعکهایی خطی روی فضای برداری N_k هستند. بعلاوه، اگر α برداری در N_k باشد وبه‌ازای $i=1,\dots,k-1$ داشته باشیم $f'_i(\alpha)=0$، آنگاه α در $N_1\cap\dots\cap N_k$ است و لذا $g'(\alpha)=0$. بنا بــه‌فرض استقرا (حــالت $r=k-1$) اسکالرهایی چون c_i وجود دارندکه

$$g'=c_1f'_1+\dots+c_{k-1}f'_{k-1}.$$

اکنون فرض می‌کنیم

$$h=g-\sum_{i=1}^{k-1}c_if_i. \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

در این صورت، h تابعکی خطی روی V است و (۳-۱۶) می‌گویدکــه به‌ازای هر α از N_k، $h(\alpha)=0$. بنا بر لم قبل، h مضربی اسکالری از f_k است. اگر $h=c_kf_k$، آنگاه

$$g=\sum_{i=1}^{k}c_if_i. \quad \square$$

تمرین

۱. فرض کنید n عددی صحیح مثبت و F یك هیأت باشد. W را مجموعهٔ همهٔ بردارهای $(x_1,\dots,x_n)$ از F^n بگیریدکه $x_1+\dots+x_n=0$.

(الف) ثابت‌کنید W^0 متشکل است از همهٔ تابعکهای خطی f به‌صورت

$$f(x_1,\dots,x_n)=c\sum_{j=1}^{n}x_j.$$

(ب) نشان دهید W^*، فضای دوگان W را می‌توان «به‌طور طبیعی» با تابعکهای خطی

$$f(x_1,\cdots,x_n)=c_1x_1+\cdots+c_nx_n$$

روی F^n با شرط $c_1+\cdots+c_n=0$ یکی گرفت.

۲. قضیهٔ ۲۰ را برای اثبات مطلب ذیل بـه‌کار ببرید. اگر W زیرفضایی از یك فضای برداری با بعد متناهی V و $\{g_1,\cdots,g_r\}$ پایه‌ای برای W° باشد، آنگاه

$$W=\bigcap_{i=1}^{r}N_{g_i}.$$

۳. فرض کنید S یك مجموعه، F یك هیأت، و $V(S;F)$ فضای همهٔ توابع از S در F با خواص

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(cf)(x)=cf(x)$$

باشد. W را زیرفضای n بعدی دلخواهی از $V(S;F)$ بگیریـد و نشان دهید نقاطی چون $x_1,\cdots,x_n$ در S و توابعی چون $f_1,\cdots,f_n$ در W یافت می‌شوند به‌طوری که $f_i(x_j)=\delta_{ij}$.

۷.۳. ترانهادهٔ تبدیل خطی

فرض کنیم دوفضای برداری V و W بر روی هیأت F و تبدیل خطی T از V در W داده شده باشند. در این صورت، T تبدیلی خطی از W^* در V^*، بـه‌طریق زیر، القا می‌کند. فرض کنید g تابعکی خطی روی W باشد و به‌ازای هر α از V

$$f(\alpha)=g(T\alpha). \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

در این صورت، (۳-۱۷) یك تابع f از V در F تعریف می‌کند. ایـن تابع از ترکیب تابع T از V در W با تابع g از W در F حاصل می‌شود. چـون T و g هر دو خطی هستند، قضیهٔ ۶ می‌گوید که f نیز خطی است؛ یعنی، f تابعکی خطی روی V است. پس، T یك قاعدهٔ T^t در دسترس ما می‌گذارد که هر تابعك خطی g روی W را بـه‌یك تابعك خطی $f=T^tg$ روی V، که طبق (۳-۱۷) تعریف می‌شود، مربوط می‌سازد. بعلاوه، توجه کنید که T^t درواقع تبدیلی خطی از W^* در V^* است؛ زیرا، اگر g_1 و g_2 در W^* باشند و c یك اسکالر

$$\begin{aligned}[T^t(cg_1+g_2)](\alpha)&=(cg_1+g_2)(T\alpha)\\&=cg_1(T\alpha)+g_2(T\alpha)\\&=c(T^tg_1)(\alpha)+(T^tg_2)(\alpha)\end{aligned}$$

و از اینجا $T'(cg_1+g_2)=cT'g_1+T'g_2$. این مطلب را خلاصه می‌کنیم.

قضیهٔ ۲۱. فرض کنیم V و W فضاهایی برداری بر روی هیأت F باشند. به‌ازای هر تبدیل خطی T از V در W یك تبدیل خطی یکتای T' از W^* در V^* وجود داردکه به ازای هر g از W^* و هر α از V،

$$(T'g)(\alpha)=g(T\alpha).$$

T' را **ترانهادهٔ** T می‌نامیم. تبدیل T' اغلب‌الحاقی T هم نامیده می‌شود، لکن، ما این اصطلاح را به‌کار نخواهیم برد.

قضیهٔ ۲۲. فرض کنیم V و W فضاهایی برداری بر روی هیأت F، و T تبدیلی خطی از V در W باشد. فضای پوچ T' پوچساز برد T است. اگر V و W با بعدمتناهی باشند، آنگاه

(۱) رتبهٔ $(T)=$ رتبهٔ (T')؛

(۲) برد T' پوچساز فضای پوچ T است.

اثبات. اگر g در W^* باشد،آنگاه بنا بر تعریف به‌ازای هر α از V،

$$(T'g)(\alpha)=g(T\alpha).$$

این‌که g در فضای پوچ T' باشد بدین معنی است که به‌ازای هر α از V، $g(T\alpha)=0$. پس، فضای پوچ T' دقیقاً همان پوچساز برد T است.

فرض‌کنیم V و W با بعد متناهی باشند، مثلاً $\dim V=n$ و $\dim W=m$. برای اثبات (۱): گیریم r رتبهٔ T، یعنی بعد برد T باشد. طبق قضیهٔ ۱۶، بعد پوچساز برد T برابر $(m-r)$ است. بنابر اولین حکم این قضیه، پوچی T' باید $(m-r)$ باشد. اما در آن صورت، چون T' تبدیلی خطی روی یك فضای m بعدی است، رتبهٔ T' برابر $m-(m-r)=r$ است، و لذا رتبه‌های T و T' برابرند. برای اثبات (۲): گیریم N فضای پوچ T باشد. هر تابعك واقع در برد T' در پوچساز N قرار دارد؛ زیرا، فرض کنیم به‌ازای یك g از W^* داشته باشیم $f=T'g$؛ در این صورت، اگر α در N باشد

$$f(\alpha)=(T'g)(\alpha)=g(T\alpha)=g(0)=0.$$

حال برد T' زیرفضایی از فضای N° است، و

$$\text{رتبهٔ }(T')=\text{رتبهٔ }(T)=\text{بعد }(N)-n=\text{بعد }(N^\circ)$$

و بنابراین برد T' باید دقیقاً N° باشد. □

قضیهٔ ۲۳. فرض کنیم V و W دو فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F باشند. $\mathcal{B}$ را پایهٔ مرتبی برای V با پایهٔ دوگان $\mathcal{B}^*$، و $\mathcal{B}'$ را پایهٔ مرتبی برای W با پایهٔ

دوگان $\mathcal{B}'^*$ می‌گیریم. اگر T تبدیلی خطی از V در W، A ماتریس T نسبت به $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$، و B ماتریس T^t نسبت به $\mathcal{B}'^*$ و $\mathcal{B}^*$ باشد، آنگاه $B_{ij}=A_{ji}$.

اثبات. فرض کنیم

$$\mathcal{B}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},\qquad \mathcal{B}'=\{\beta_1,\cdots,\beta_m\},$$
$$\mathcal{B}^*=\{f_1,\cdots,f_n\},\qquad \mathcal{B}'^*=\{g_1,\cdots,g_m\}.$$

بنا بر تعریف

$$T\alpha_j=\sum_{i=1}^{m}A_{ij}\beta_i,\quad j=1,\cdots,n$$

$$T^tg_j=\sum_{i=1}^{n}B_{ij}f_i,\quad j=1,\cdots,m.$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}(T^tg_j)(\alpha_i)&=g_j(T\alpha_i)\\&=g_j\Big(\sum_{k=1}^{m}A_{ki}\beta_k\Big)\\&=\sum_{k=1}^{m}A_{ki}g_j(\beta_k)\\&=\sum_{k=1}^{m}A_{ki}\delta_{jk}\\&=A_{ji}.\end{aligned}$$

برای هر تابعک خطی دلخواه f روی V

$$f=\sum_{i=1}^{m}f(\alpha_i)f_i.$$

اگر این فرمول را بر تابعک $f=T^tg_j$ به‌کار بندیم واز این واقعیت‌که $(T^tg_j)(\alpha_i)=A_{ji}$ استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$T^tg_j=\sum_{i=1}^{n}A_{ji}f_i$$

که از آن بیدرنگ نتیجه می‌شود $B_{ij}=A_{ji}$. □

تعریف. اگر A ماتریسی $m\times n$ بر روی هیأت F باشد، **ترانهادهٔ** A عبارت است از ماتریس $n\times m$ ی A^t که با $A^t_{ij}=A_{ji}$ تعریف می‌شود.

بدین سان قضیهٔ ۲۳ بیان می‌کندکه اگر T تبدیلی خطی از V در W باشدکه

ماتریسش نسبت به‌یك جفت پایـه A است،آنگاه تبدیـل ترانهادهٔ T^t در جفت دوگان آن پایه‌ها توسط ماتریس ترانهادهٔ A^t نمایش داده می‌شود.

قضیهٔ ۲۴. فرض کنیم A ماتریس $m\times n$ دلخواهی بر روی هیأت F باشد. آنگاه رتبهٔ سطری A با رتبهٔ ستونی A برابر است.

اثبات. پایهٔ مرتب‌استاندهٔ F^n را $\mathscr{B}$ وپایهٔ مرتب استاندهٔ F^m را $\mathscr{B}'$ می‌نامیم.فرض کنیم T تبدیلی خطی از F^n در F^m باشدکـه ماتریس‌آن نسبت بـه‌جفت $\mathscr{B}$، $\mathscr{B}'$ برابر A است؛ یعنی،

$$T(x_1,\cdots,x_n)=(y_1,\cdots,y_m)$$

که درآن

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j.$$

رتبهٔ ستونی A برابر رتبهٔ تبدیـل T است؛ زیرا، برد T متشکل از همهٔ m تایی‌هایی است که ترکیبی خطی از بردارهای ستونی A هستند.

نگاشت ترانهادهٔ T^t نسبت به‌پایه‌های دوگان $\mathscr{B}'^*$ و $\mathscr{B}^*$ توسط ماتریس A^t نمایش داده می‌شود. چون ستونهای A^t همان سطرهای A هستند، بنا بر همین استدلال می‌بینیم که رتبهٔ سطری A (رتبهٔ ستونی A^t) برابر رتبهٔ T^t است. بنا بـر قضیهٔ ۲۲، رتبه‌های T و T^t برابرند، و لذا رتبهٔ سطری A برابر رتبهٔ ستونی A است. □

اکنون می‌بینیم که اگر A ماتریسی $m\times n$ برروی F و T تبدیل خطی تعریف شده در فوق از F^n در F^m باشند،آنگاه

$$\text{رتبهٔ}\ (T)=\text{رتبهٔ سطری}\ (A)=\text{رتبهٔ ستونی}\ (A)\ .$$

این عدد را به‌طور ساده **رتبهٔ** A می‌نامیم.

مثال ۲۵. دراین مثال به‌مطلبی کلی می‌پردازیم ـ و بیشتر بحث است تا مثال.فرض کنیم فضای برداری n بعـدی V بر روی هیأت F و عملگـر خطی T روی V داده شده باشند، و نیز $\mathscr{B}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ پایـهٔ مرتبی برای V باشد. بنا بر تعریف، ماتریس T در پایهٔ مرتب $\mathscr{B}$ عبارت است از ماتریس Aی $n\times n$ به‌طوری که

$$T\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}A_{ij}\alpha_i\ .$$

به‌بیان‌دیگر، A_{ij}همان iامین‌مختص بردار$T\alpha_j$ درپایهٔ مرتب $\mathscr{B}$ است. اگر$\{f_1,\cdots,f_n\}$ پایهٔ دوگان $\mathscr{B}$ باشد، این مطلب به‌صورت سادهٔ

$$A_{ij}=f_i(T\alpha_j)$$

بیان می‌شود. اکنون ببینیم هنگام تغییر پایه چه رخ می‌دهد. فرض کنیم

$$\mathcal{B}'=\{\alpha'_1,\cdots,\alpha'_n\}$$

پایهٔ مرتب دیگری برای V با پایهٔ دوگان $\{f'_1,\cdots,f'_n\}$ باشد. اگر B ماتریس T در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ باشد، آنگاه

$$B_{ij}=f'_i(T\alpha'_j).$$

گیریم U عملگر خطی معکوس‌پذیری باشد که $U\alpha_j=\alpha'_j$. در این صورت، ترانهادهٔ U از $U^tf'_i=f_i$ به‌دست می‌آید. بسادگی می‌توان نشان داد که چون U معکوس‌پذیر است، U^t نیز معکوس‌پذیر است و $(U^t)^{-1}=(U^{-1})^t$. از این‌رو، $f'_i=(U^{-1})^tf_i$، به‌ازای $i=1,\cdots,n$. بنابراین،

$$\begin{aligned}B_{ij}&=[(U^{-1})^tf_i](T\alpha'_j)\\&=f_i(U^{-1}T\alpha'_j)\\&=f_i(U^{-1}TU\alpha_j).\end{aligned}$$

اما، این رابطه چه می‌گوید؟ $f_i(U^{-1}TU\alpha_j)$ چیزی جز درایهٔ i و j ماتریس $U^{-1}TU$ در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ نیست. محاسبات بالا نشان می‌دهد که این اسکالر درایهٔ i,j ماتریس T در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ هم هست. به‌بیان دیگر

$$\begin{aligned}[T]_{\mathcal{B}'}&=[U^{-1}TU]_{\mathcal{B}}\\&=[U^{-1}]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}[U]_{\mathcal{B}}\\&=[U]_{\mathcal{B}}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}[U]_{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

و این دقیقاً همان فرمول تغییر پایه است که قبلاً استخراج کردیم.

تمرین

۱. فرض کنید هیأتی چون F و تابعك خطی f روی F^2 تعریف شده توسط $f(x_1,x_2)=ax_1+bx_2$ داده شده‌اند. به‌ازای هر یك از عملگرهای خطی زیر، فرض کنید $g=T^tf$ و $g(x_1,x_2)$ را بیابید.

(الف) $T(x_1,x_2)=(x_1,0)$؛

(ب) $T(x_1,x_2)=(-x_2,x_1)$؛

(پ) $T(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_1+x_2)$.

۲. فرض کنید V فضای برداری همهٔ توابع چند جمله‌ای بر روی هیأت اعداد حقیقی

باشد. a و b را دو عدد حقیقی ثابت بگیرید، و فرض‌کنید f تابعکی خطی روی V باشد که توسط

$$f(p)=\int_a^b p(x)dx$$

تعریف می‌شود. اگر D عملگر مشتق‌گیری روی V باشد، $D^t f$ چیست؟

۳. فرض‌کنید V فضای همهٔ ماتریسهای $n\times n$ بر روی هیأت F و B ماتریس $n\times n$ ثابتی باشد. اگر عملگر خطی T روی V با $T(A)=AB-BA$ تعریف بشود و f تابع‌رد باشد، $T^t f$ چیست؟

۴. فرض‌کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد. c را یك اسکالر بگیرید و فرض‌کنید بردار غیر صفری چون α در V موجود است که $T\alpha=c\alpha$. ثابت‌کنید تابعك خطی غیر صفری چون f روی V وجود دارد که $T^t f=cf$.

۵. فرض‌کنید A ماتریسی $m\times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت‌کنید $A=0$ اگر و تنها اگر $tr(A^t A)=0$.

۶. فرض‌کنید n عددی صحیح ومثبت باشد، و V فضای همهٔ توابع چند جمله‌ای با درجهٔ حداکثر n، یعنی توابع به‌صورت

$$f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$$

بر روی هیأت اعداد حقیقی. اگر D عملگر مشتق‌گیری روی V باشد، پایه‌ای برای فضای پوچ عملگر ترانهادهٔ D^t بیابید.

۷. فرض‌کنید V فضایی برداری با بعد متناهی برروی هیأت F باشد. نشان دهید $T\to T^t$ یك یکریختی از $L(V, V)$ برروی $L(V^*, V^*)$ است.

۸. فرض‌کنید V فضای برداری ماتریسهای $n\times n$ بر روی هیأت F باشد.

(الف) اگر B ماتریس $n\times n$ ثابتی باشد، تابع f_B روی V را طبق $f_B(A)=tr(B^t A)$ تعریف‌کنید. نشان دهید f_B تابعکی خطی روی V است.

(ب) نشان دهید هر تابعك خطی روی V بـه‌صورت بالا است؛ یعنی، بـه‌ازای ماتریسی چون B برابر f_B است.

(پ) نشان دهید $B\to f_B$ یك یکریختی از V بروی V^* است.

۴

چندجمله ایها

۱.۴ جبرها

هدف ما در این فصل این است که چند خاصیت بنیانی جبر چندجمله‌ایهای بر روی یك هیأت F را اثبات کنیم. جهت تسهیل کار ابتدا به معرفی مفهوم جبر خطی بر روی هیأت F می‌پردازیم.

تعریف. فرض می‌کنیم F یك هیأت باشد. یك **جبر خطی برروی هیأت** F فضایی برداری مانند $\mathfrak{a}$ برروی F همراه با عملی اضافی به‌نام **ضرب برداری** است که هرجفت از بردارهای α و β از $\mathfrak{a}$ را به‌بردار $\alpha\beta$ از $\mathfrak{a}$، به‌نام **حاصل‌ضرب** α و β، چنان وابسته می‌سازد که

(الف) ضرب شرکت‌پذیر است،

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$$

(ب) ضرب نسبت به‌جمع پخش‌پذیر است،

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \quad \text{و} \quad (\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$$

(پ) به‌ازای هراسکالر c از F

$$c(\alpha\beta)=(c\alpha)\beta=\alpha(c\beta).$$

اگر عنصری چون ۱ در $\mathfrak{a}$ موجود باشد، به‌طوری که به ازای هر α از $\mathfrak{a}$، $\alpha=\alpha 1=1\alpha$، $\mathfrak{a}$ را **یك جبرخطی با عنصرهمانی برروی F** و ۱ را عنصر همانی می‌نامیم. جبر $\mathfrak{a}$ **جابجایی** نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای همهٔ αها و βهای در $\mathfrak{a}$، $\alpha\beta=\beta\alpha$.

مثال ۱. مجموعهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی یك هیأت همراه بااعمال معمولی یك جبرخطی با عنصرهمانی است؛ بخصوص، خود هیأت هم یك جبر با عنصرهمانی است. این جبردرصورتی که $n\geqslant 2$ جابجایی *نیست*. خود هیأت (البته) جابجایی است.

مثال ۲. فضای همهٔ عملگرهای خطی روی یك فضای برداری همراه با ترکیب عملگرها، به‌عنوان ضرب، یك جبرخطی با عنصرهمانی است. این جبرجابجایی است اگر وتنها اگرفضا یك بعدی باشد.[1]

خواننده ممکن است دربارهٔ ضرب نقطه‌ای وضرب خارجی بردارهای در R^3 تجربیاتی داشته باشد. در این صورت وی باید متوجه باشد که هیچ‌یك ازاین ضربها، از نوع توصیف شده درتعریف جبرخطی نیست. ضرب نقطه‌ای یك «ضرب اسکالری» است؛ بدین معنی که به‌هرجفت برداریك اسکالروابسته می‌سازد وازاین‌رو، یقیناً ازنوع ضربی نیست که درحال حاضرمورد بحث ماست. ضرب خارجی هرچند به‌هرجفت بردار R^3 یك بردار وابسته می‌کند، اما شرکت‌پذیر نیست.

بقیهٔ این بخش به‌ساختن جبری خطی اختصاص داردکه با جبرهای مطرح شده در هریك ازمثالهای پیشین به‌طوربارزی متفاوت است. فرض‌کنیم F یك هیأت و S مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی باشد. بنابرمثال ۳ ازفصل ۲، مجموعهٔ همهٔ توابع از S در F فضایی برداری برروی F است. ما این فضای برداری را با F^∞ نشان می‌دهیم. لذا، بردارهای F^∞ دنباله‌های نامتناهی $f=(f_0, f_1, f_2, \cdots)$ از اسکالرهای f_i از F هستند. اگر $g=(g_0, g_1, g_2, \cdots)$، هر g_i در F، و a و b اسکالرهایی از F باشند، $af+bg$ دنباله‌ای نامتناهی است که با

$$af+bg=(af_0+bg_0, af_1+bg_1, af_2+bg_2, \cdots) \qquad (۴-۱)$$

تعریف می‌شود. با وابسته‌کردن هرجفت f و g از بردارهای F^∞ به‌بردار fg که با

$$(fg)_n=\sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}, \quad n=0, 1, 2, \cdots \qquad (۴-۲)$$

معین می‌شود، یك ضرب در F^∞ تعریف می‌کنیم. پس

$$fg=(f_0g_0, f_0g_1+f_1g_0, f_0g_2+f_1g_1+f_2g_0, \cdots)$$

---

۱. درصورتی که فضا صفربعدی هم باشد این جبر جابجایی است. برای اجتناب از این‌گونه پیچیدگیها فرض می‌کنیم فضا حداقل دوعنصرمتمایز داشته باشد. ــم.

وچون به‌ازای $n=0, 1, 2, \cdots$،

$$(gf)_n=\sum_{i=0}^{n} g_i f_{n-i}=\sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}=(fg)_n,$$

نتیجه می‌گیریم که این ضرب جابجایی است، $gf=fg$. اگـر h نیزمتعلق به F^∞ باشد، آنگاه به‌ازای $n=0, 1, 2, \cdots$،

$$\begin{aligned}[(fg)h]_n&=\sum_{i=0}^{n}(fg)_i h_{n-i}\\&=\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j}\Big)h_{n-i}\\&=\sum_{i=0}^{n}\ \sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j} h_{n-i}\\&=\sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{n-i-j}\\&=\sum_{j=0}^{n} f_j (gh)_{n-j}=[f(gh)]_n\end{aligned}$$

و بنابراین

$$(fg)h=f(gh). \tag{۴-۳}$$

از خواننده می‌خواهیم نشان دهد که ضـرب تعریف شده توسط (۴-۲) در شرایط (ب) و (پ) تعریف جبر خطی هم صدق می‌کند و بردار $(1, 0, 0, \cdots)=1$ چون یك عنصر همانی برای F^∞ عمل می‌نماید. دراین صورت، F^∞ همراه با اعمال تعریف شده در بالا یك جبرخطی جابجایی با عنصرهمانی برروی هیأت F است.

درمطالبی که متعاقباً خواهد آمد، بردار $(0, 1, 0, \cdots, 0, \cdots)$ نقش ممتازی برعهده دارد و ما آن را همواره با x نشان می‌دهیم. در سراسراین فصل، x هرگز برای نشان دادن عنصری ازهیأت F به‌کار نخواهد رفت. حاصل‌ضرب n بار x در خودش را با x^n نشان می‌دهیم و بنابرقرارداد می‌گیریم $x^0=1$. دراین صورت

$$x^2=(0, 0, 1, 0, \cdots), \quad x^3=(0, 0, 0, 1, 0, \cdots)$$

ودرحالت کلی به‌ازای هرعدد صحیح $k\geqslant 0$، $(x^k)_k=1$ و به‌ازای همـهٔ اعداد صحیح نامنفی $n\neq k$، $(x^k)_n=0$. درخاتمهٔ این بخش ملاحظه می‌کنیم کـه مجموعهٔ متشکل از 1، x، x^2، $\cdots$ هم مستقل است وهم نامتناهی. پس، بعد جبر F^∞ متناهی نیست.

جبـر F^∞ گاهـی جبـر **رشته‌های توانی صوری** برروی F نامیده می‌شود. عنصـر $f=(f_0, f_1, f_2, \cdots)$ غالباً به‌صورت

$$f=\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \qquad (۴-۴)$$

نوشته می‌شود. این نماد در مواجهه با اعمال جبری بسیارمناسب است. هنگام استفاده از آن باید به‌خاطرداشت که این نماد صددرصد صوری است. در جبر، «مجموع نامتناهی» وجود ندارد و قرار براین نیست که نماد رشتهٔ توانی (۴-۴) چیزی دربارهٔ همگرایی، در صورتی که خواننده بداند همگرایی چیست، القا کند. پس، با استفاده از دنباله‌ها و بدون آنکه درمخاطرهٔ ابهام مطالبی چون مجموع نامتناهی قراربگیریم توانستیم جبری راکه‌در آن عملهای جبری، رفتاری شبیه به‌جمع و ضرب رشته‌های توانی صوری دارند، به‌طور دقیق تعریف کنیم.

۲.۴. جبرچندجمله‌ایها

اکنون درموقعیتی هستیم که بتوانیم یك چندجمله‌ای برروی هیأت F را تعریف کنیم.

تعریف. فرض کنیم $F[x]$ زیرفضای پدید آمــده توسط بردارهای ۱، x، x^2، ... از F^∞ باشد. هرعنصر $F[x]$ یك **چندجمله‌ای برروی** F نامیده می‌شود.

چون $F[x]$ متشکل‌ازهمهٔ ترکیبات خطی (متناهی) x وتوانهای آن است،هر بردار غیرصفر f از F^∞، یك چندجمله‌ای است اگروتنها اگریك عدد صحیح $n \geqslant 0$ وجودداشته باشد به‌طوری‌که $f_n \neq 0$ و به‌ازای همهٔ اعداد صحیح $k>n$، $f_k=0$؛ این عددصحیح راکه (درصورت وجود) مسلماً یکتاست **درجهٔ** f می‌نامیم. درجهٔ چندجمله‌ای f را بــا $\deg f$ نشان می‌دهیم، امــا درجه‌ای به‌چندجمله‌ای ۰ اختصاص نمی‌دهیم.[۱] اگــر f یك چندجمله‌ای غیرصفرازدرجهٔ n باشد، داریم

$$f=f_0x^0+f_1x+f_2x^2+\cdots+f_nx^n,\quad f_n\neq 0 \qquad (۵-۴)$$

اسکالرهای f_0، f_1، ...، f_n گاهی **ضرایب** f نامیــده می‌شوند، و گفته می‌شود f یك چندجمله‌ای با ضرایب متعلق به F است. چندجمله‌ایهای به‌صورت cx^0 را **چندجمله‌ایهای اسکالری** می‌نامیم وغالباً به‌جــای cx^0 می‌نویسیم c. هرچندجمله‌ای غیر صفر f از درجهٔ n با شرط $f_n=1$ یك چندجمله‌ای **تکین** نامیده می‌شود.

خواننده بایدتوجه داشته باشد که چندجمله‌ایها چیزهایی ازقبیل توابع چندجمله‌ای روی F که تاکنون درچند مورد دربارهٔ آنها صحبت کرده‌ایم، نیستند. اگر F شامل تعدادی نامتناهی عنصرباشد، بین $F[x]$ وجبرتوابع چندجمله‌ای برروی F یك یکریختی طبیعی برقراراست. این موضوع را دربخش بعد مورد بحث قرار می‌دهیم واکنون نشان‌می‌دهیم که $F[x]$ یك جبرخطی است.

---

۱. $\deg f$ را با درجهٔ (f) هم نشان می‌دهند. ـــم.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم f و g دوچندجمله‌ای غیرصفر برروی F باشند. دراین صورت
(۱) fg یك چندجمله‌ای غیرصفراست؛
(۲) $\deg(fg) = \deg f + \deg g$؛
(۳) هرگاه f و g هردوچندجمله‌هایی تکین باشند، آنگاه fg نیز یك‌چندجمله‌ای تکین است؛
(۴) fg یك‌چندجمله‌ای اسکالری است اگروتنها اگر f و g هردوچندجمله‌ای‌هایی اسکالری باشند؛
(۵) اگر $f+g\neq 0$، داریم

$$\deg(f+g)\leqslant \max(\deg f, \deg g).$$

اثبات. فرض‌کنیم f از درجهٔ m، و g از درجهٔ n باشد. اگـر k عددی صحیح و غیرمنفی باشد،

$$(fg)_{m+n+k}=\sum_{i=0}^{m+n+k} f_i g_{m+n+k-i}\,.$$

برای این‌که $f_i g_{m+n+k-i}\neq 0$، لازم است $i\leqslant m$ و $m+n+k-i\leqslant n$. از این‌رو، لازم است $m+k\leqslant i\leqslant m$ که خود ایجاب می‌کند $k=0$ و $i=m$. لذا

$$(fg)_{m+n}=f_m g_n \tag{۶-۴}$$

و

$$(fg)_{m+n+k}=0,\quad k>0\,. \tag{۷-۴}$$

احکام (۱)، (۲)، و (۳) بیدرنگ از (۴-۶) و (۴-۷) نتیجه می‌شوند، درحالی‌کـه (۴) پیامدی از (۱) و (۲) است. تحقیق درستی (۵) را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. □

نتیجهٔ ۱. مجموعهٔ همهٔ‌چندجمله‌ایهای برروی یك هیأت مفروض F، مجهزبه‌اعمال (۴-۱) و (۴-۲)، یك جبرخطی جابجایی با عضوهمانی برروی F است.
اثبات. چون اعمال (۴-۱) و (۴-۲) همان اعمال تعریف شده در جبر F^∞ هستند و چون $F[x]$ زیرفضایی از F^∞ است،کافی است ثابت‌کنیم که حاصل‌ضرب دوچندجمله‌ای خرد یك چندجمله‌ای است. این مطلب درصورت 0 بودن یکی ازسازه‌ها بدیهی است و درغیراین صورت از (۱) نتیجه می‌شود. □

نتیجهٔ ۲. فرض کنیم f، g و h چندجمله‌ایهایی برروی هیأت F باشند که $f\neq 0$ و $fg=fh$. دراین صورت $g=h$.
اثبات. چون $fg=fh$، داریم $f(g-h)=0$، و نظر به‌اینکه $f\neq 0$، بیدرنگ از (۱) نتیجه می‌شودکه $g-h=0$. □

چند واقعیت دیگرهم نسبتاً بآسانی از اثبات قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شوند و ما برخی را دراینجا ذکرمی کنیم.

فرض کنیم

$$f=\sum_{i=0}^{m} f_i x^i \quad \text{و} \quad g=\sum_{j=0}^{n} g_j x^j.$$

دراین صورت از (۴-۷) نتیجه می‌شود که

$$fg=\sum_{s=0}^{m+n}\Big(\sum_{r=0}^{s} f_r g_{s-r}\Big)x^s. \tag{۴-۸}$$

ازخواننده می‌خواهیم نشان دهد که درحالت خاص $f=cx^m$، $g=dx^n$، با c و d در F، (۴-۸) به‌صورت

$$(cx^m)(dx^n)=cdx^{m+n} \tag{۴-۹}$$

درمی آید. حال، از (۴-۹) و قوانین پخش‌پذیری $F[x]$، نتیجه می‌شود که حاصل‌ضرب (۴-۸) به‌صورت

$$\sum_{i,j} f_i g_j x^{i+j} \tag{۴-۱۰}$$

نیزمی‌تواند نوشته شود. دراینجا، مجموع روی همهٔ جفت اعداد صحیح i, j با شرایط $0 \leqslant i \leqslant m$ و $0 \leqslant j \leqslant n$ درنظر گرفته می‌شود.

تعریف. فرض کنیم $\mathfrak{a}$ یک جبرخطی با عنصرهمانی بر روی هیأت F باشد. عنصر همانی $\mathfrak{a}$ را با 1 نشان می‌دهیم و قرارداد می‌کنیم‌که به‌ازای هرα از $\mathfrak{a}$، $\alpha^0 = 1$. دراین صورت به‌هر چندجمله‌ای $f=\sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ برروی F و هرα از $\mathfrak{a}$، یك عنصر $f(\alpha)$ از $\mathfrak{a}$ را بنابرقاعدهٔ

$$f(\alpha)=\sum_{i=0}^{n} f_i \alpha^i$$

وابسته می‌سازیم.

مثال ۳. گیریم C هیأت اعداد مختلط و $f=x^2+2$ باشد.

(الف) اگر $\mathfrak{a}=C$ و z متعلق به C باشد، آنگاه $f(z)=z^2+2$؛ بخصوص $f(2)=6$ و

$$f\Big(\frac{1+i}{1-i}\Big)=1.$$

(ب) اگر $\mathfrak{a}$ جبرهمهٔ ماتریسهای 2×2 برروی C باشد و

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$f(B)=۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}^{۲}=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}.$$

(پ) اگر $\mathfrak{A}$ جبر همهٔ عملگرهای خطی روی $C^{۳}$ و T عنصری از $\mathfrak{A}$ داده شده توسط

$$T(c_{۱},\ c_{۲},\ c_{۳})=(i\sqrt{۲}c_{۱},\ c_{۲},\ i\sqrt{۲}c_{۳})$$

باشد، آنگاه $f(T)$ عملگری خطی روی $C^{۳}$ است که توسط

$$f(T)(c_{۱},\ c_{۲},\ c_{۳})=(۰,\ ۳c_{۲},\ ۰)$$

تعریف می‌شود.

(ت) اگر $\mathfrak{A}$ جبر همهٔ چندجمله‌ایهای بر روی C و $g=x^{۴}+۳i$ باشد، آنگاه $f(g)$ آن چندجمله‌ای در $\mathfrak{A}$ است که به‌وسیلهٔ

$$f(g)=-۷+۶ix^{۴}+x^{۸}$$

تعیین می‌شود.

دربارهٔ مثال اخیر خوانندهٔ نکته‌بین ممکن است متوجه شود که اگر f چندجمله‌ای مفروضی برروی یک هیأت دلخواه و x چندجمله‌ای $(۰,۱,۰,\ldots)$ باشد، آنگاه $f=f(x)$، اما به‌وی توصیه می‌کنیم که این واقعیت را نادیده انگارد.

قضیهٔ ۲. فرض‌کنیم F یك هیأت و $\mathfrak{A}$ جبری خطی با عنصرهمانی برروی F باشد. اگر f و g چندجمله‌ایهایی برروی F، α عنصری از $\mathfrak{A}$ و c متعلق به F باشد، آنگاه

(۱) $(cf+g)(\alpha)=cf(\alpha)+g(\alpha)$؛

(۲) $(fg)(\alpha)=f(\alpha)g(\alpha)$.

اثبات. نظر به اینکه اثبات (۱) کاملاً ساده است، تنها به اثبات (۲) می‌پردازیم. فرض کنیم

$$g=\sum_{j=۰}^{n} g_j x^j \quad و \quad f=\sum_{i=۰}^{m} f_i x^i$$

بنابر (۴-۱۰)

$$fg=\sum_{i,\ j} f_i g_j x^{i+j}$$

وازاین‌رو، بنابر (۱)

$$\begin{aligned}(fg)(\alpha) &= \sum_{i,j} f_i g_j \alpha^{i+j} \\ &= \Big(\sum_{i=0}^{m} f_i \alpha^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} g_j \alpha^j\Big) \\ &= f(\alpha)g(\alpha)\,. \ \square\end{aligned}$$

تمرین

۱. فرض کنید F زیرهیأتی ازهیأت اعداد مختلط باشد و A ماتریسی ۲×۲ بــر روی F به‌صورت

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}.$$

برای‌هر یك ازچندجمله‌ایهای داده شدۀ زیر بر روی F، ماتریس $f(A)$ را محاسبه کنید.

(الف) $f = x^{۲} - x + ۲$؛

(ب) $f = x^{۳} - ۱$؛

(پ) $f = x^{۲} - ۵x + ۷$.

۲. فرض کنید T عملگر خطی روی $R^{۳}$ تعریف شده توسط

$$T(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}) = (x_{۱}, x_{۳}, -۲x_{۲} - x_{۳})$$

باشد و f چندجمله‌ای روی R تعریف شده تــوسط $f = -x^{۳} + ۲$. مطلــوب است $f(T)$.

۳. فرض کنید A یك ماتریس قطری $n \times n$ برروی هیأت F باشد؛ یعنــی،ماتریسی باشد که به‌ازای $i \neq j$ درشرط $A_{ij} = ۰$ صدق کند. چندجمله‌ای f برروی F که توسط

$$f = (x - A_{۱۱}) \cdots (x - A_{nn})$$

تعریف می‌شود داده شده است. مطلوب است $f(A)$.

۴. اگر f و g دوچندجمله‌ای مستقل خطی برروی هیأت F و h یك چند جمله‌ای غیرصفر برروی F باشند، نشان دهید fh و gh مستقل‌اند.

۵. اگر F هیأتی باشد، نشان دهید که حاصلضرب دوعضو غیرصفر F^{∞} غیرصفر است.

۶. فرض کنید S مجموعه‌ای ازچندجمله‌ایهای غیرصفر بروی هیأت F باشد. اگر هیچ دو

عضوی از S درجهٔ مساوی نداشته باشند، نشان دهید که S در $F[x]$ مجموعهٔ مستقلی است.

۷. اگر a و b اعضای هیأت F باشند و $a\neq 0$، نشان دهید که چندجمله‌ایهای ۱، $ax+b$، $(ax+b)^2$، $(ax+b)^3$، ... پایه‌ای برای $F[x]$ تشکیل می‌دهند.

۸. اگر F یك هیأت و h یك چندجمله‌ای از درجه‌ای بزرگتر از یا مساوی با یك بر روی F باشد، نشان دهید نگاشت $f\to f(h)$ یك تبدیل خطی یك به یك از $F[x]$ در $F[x]$ است. همچنین نشان دهید این تبدیل یك‌یکریختی از $F[x]$ بروی $F[x]$ است اگر و تنها اگر $\deg h=1$.

۹. فرض کنید F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط و T و D تبدیلهای تعریف شده توسط

$$T\Big(\sum_{i=0}^{n}c_ix^i\Big)=\sum_{i=0}^{n}\frac{c_i}{1+i}x^{i+1}$$

و

$$D\Big(\sum_{i=0}^{n}c_ix^i\Big)=\sum_{i=1}^{n}ic_ix^{i-1}$$

روی $F[x]$ باشند.

(الف) نشان‌دهید T عملگر خطی نامنفردی روی $F[x]$ است. همچنین نشان دهید T معکوس‌پذیر نیست.

(ب) نشان دهید D عملگری خطی روی $F[x]$ است وفضای پوچ آن را به‌دست آورید.

(پ) نشان دهید $DT=I$ و $TD\neq I$.

(ت) به‌ازای هر f و g از $F[x]$ نشان دهید

$$T[(Tf)g]=(Tf)(Tg)-T[f(Tg)].$$

(ث) قاعده‌ای برای D مشابه با قاعدهٔ داده شده در (ت) برای T بیان و آن را اثبات کنید.

(ج) فرض کنید V زیرفضای غیرصفری از $F[x]$ باشد که به ازای هر f در V، چندجمله‌ای Tf متعلق به V است. نشان دهید بعد V متناهی نیست.

(چ) فرض کنید V زیرفضایی با بعد متناهی از $F[x]$ باشد ثابت کنید یك عدد صحیح $m\geqslant 0$ یافت می‌شود که به‌ازای هر f در V، $D^mf=0$.

۴.۴. درون‌یابی لاگرانژ

درسراسر این بخش فرض می‌کنیم F هیأتی ثابت و t_0، t_1، ...، t_n، $n+1$ عنصر متمایز از F باشند. فرض کنیم V زیرفضایی از $F[x]$ متشکل از همهٔ چندجمله‌ایهای از درجه کمتر از

یا مساوی با n (همراه با چندجمله‌ای ۰) و L_i تابعی از V در F تعریف شده توسط

$$L_i(f)=f(t_i), \quad 0\leqslant i\leqslant n$$

به‌ازای هر f از V باشد. بنابرحکم (۱) قضیهٔ ۲، هر L_i تابعکی خطی روی V است. یکی ازمطالبی که می‌خواهیم نشان دهیم این است کـه مجموعهٔ متشکل از L_0، L_1، $\ldots$، L_n پایه‌ای برای V^*، فضای دوگان V، تشکیل می‌دهد.

بدیهی است برای این منظورکافی است که $\{L_0, L_1, \ldots, L_n\}$ دوگان پایـه‌ای چـون $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ از V باشد (با قضیهٔ ۱۵ درفصل ۳ مقایسه شود). چنین پایه‌ای یکی بیشترنیست و درصورت وجود با

$$L_j(P_i)=P_i(t_j)=\delta_{ij} \tag{۱۱-۴}$$

تعیین می‌شود. چندجمله‌ایهای

$$P_i=\frac{(x-t_0)\cdots(x-t_{i-1})(x-t_{i+1})\cdots(x-t_n)}{(t_i-t_0)\cdots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\cdots(t_i-t_n)} \tag{۱۲-۴}$$

$$=\prod_{j\neq i}\left(\frac{x-t_j}{t_i-t_j}\right)$$

از درجهٔ n هستند، ازاین‌رو به V تعلق دارند و بنابرقضیهٔ ۲ در (۴-۱۱) صدق می‌کنند.

اگر $f=\sum\limits_i c_iP_i$، آنگاه به‌ازای هر j

$$f(t_j)=\sum_i c_iP_i(t_j)=c_j\,. \tag{۱۳-۴}$$

چون چندجمله‌ای ۰ دارای ایـن خاصیت است کـه به‌ازای هر t از F، $0(t)=0$، از (۴-۱۳) نتیجه می‌شود کـه چندجمله‌ایهای P_0، P_1، $\ldots$، P_n مستقل خطی هستند. چندجمله‌ایهای ۱، x، $\ldots$، x^n پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند و لذا بعد V برابر $(n+1)$ است. بنابراین، مجموعهٔ مستقل $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ نیزبایـد پایه‌ای برای V باشد. پس، به‌ازای هر f از V

$$f=\sum_{i=0}^{n}f(t_i)P_i\,. \tag{۱۴-۴}$$

عبارت (۴-۱۴)، **فرمول درون‌یابی لاگرانژ** نامیده می‌شود. اگر $f=x^j$ را در (۴-۱۴) قراردهیم، چنین به‌دست می‌آوریم

$$x^j=\sum_{i=0}^{n}(t_i)^jP_i\,.$$

اکنون ازقضیهٔ ۷ در فصل ۲ نتیجه می‌شودکه ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{bmatrix} \qquad (۱۵\text{-}۴)$$

معکوس‌پذیر است. ماتریس (۴-۱۵) **ماتریس واندرموند**[1] نامیده می‌شود؛ نشان دادن مستقیم معکوس‌پذیری این ماتریس، هنگامی که t_0، t_1، ...، t_n اعضایی متمایز از F باشند، تمرین جالبی است.

در بحث حاضر اگر f یك چندجمله‌ای دلخواه برروی F باشد، تابع چندجمله‌ای از F در F را که هر t در F را به $f(t)$ می‌برد، با $f^{\sim}$ نشان می‌دهیم. بنابر تعریف (با مثال ۴ درفصل ۲ مقایسه شود) هرتابع چندجمله‌ای به‌همین طریق به‌وجود می‌آید؛ هرچند برحسب اتفاق به ازای دوچندجمله‌ای f و g با شرط $f \neq g$ ممکن است داشته باشیم $f^{\sim} = g^{\sim}$، خوشبختانه، به‌طوری که خواهیم دید، این وضع ناخوش‌آیند تنها درحالتی که F هیأتی با تعدادی متناهی عنصرمتمایز باشد پیش می‌آید. برای‌اینکه رابطهٔ بین چندجمله‌ایها وتوابع چندجمله‌ای را با روشی دقیق وجامع تشریح کنیم، نیاز به‌تعریف ضرب دوتابع چندجمله‌ای داریم. اگر f و g دوچندجمله‌ای برروی F باشند، حاصل‌ضرب $f^{\sim}$ و $g^{\sim}$ عبارت است ازتابع $f^{\sim}g^{\sim}$ از F در F که با

$$(f^{\sim}g^{\sim})(t) = f^{\sim}(t)g^{\sim}(t) \qquad \text{به‌ازای } t \text{ در } F \qquad (۱۶\text{-}۴)$$

تعریف می‌شود. بنابرقسمت (۲) قضیهٔ ۲، $(fg)(t) = f(t)g(t)$، ولذا به‌ازای هر t از F

$$(fg)^{\sim}(t) = f^{\sim}(t)g^{\sim}(t).$$

از این‌رو، $f^{\sim}g^{\sim} = (fg)^{\sim}$ وتابعی چندجمله‌ای است. در این‌جا، بررسی این نکته که فضای برداری توابع‌چندجمله‌ای برروی F، درصورتی که ضرب مطابق (۴-۱۶) تعریف شود، یك جبرخطی با عنصرهمانی برروی F است، موضوعی است سرراست وآن را به‌خواننده واگذارمی‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم هیأت F و جبرهای خطی $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{A}^{\sim}$ برروی F داده شده باشند. جبرهای $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{A}^{\sim}$ **یکریخت** خوانده می‌شوند هرگاه یك نگاشت یك به‌یك $\alpha \to \alpha^{\sim}$ از $\mathfrak{A}$ بروی $\mathfrak{A}^{\sim}$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر α و β از $\mathfrak{A}$ و هردو اسکالر c و d از F،

$$(c\alpha + d\beta)^{\sim} = c\alpha^{\sim} + d\beta^{\sim} \qquad \text{(الف)}$$

---

1. Vandermonde

و

$$(\alpha\beta)^{\sim} = \alpha^{\sim}\beta^{\sim} \qquad \text{(ب)}$$

نگاشت $\alpha \to \alpha^{\sim}$ یك **یکریختی** از $\mathfrak{a}$ بروی $\mathfrak{a}^{\sim}$ نامیده می‌شود. از این‌رو، هریکریختی از $\mathfrak{a}$ بروی $\mathfrak{a}^{\sim}$، یك یکریختی فضای برداری از $\mathfrak{a}$ بروی $\mathfrak{a}^{\sim}$ است که دارای خاصیت اضافی (ب) مربوط به «حفظ» حاصلضرب هم هست.

مثال ۴. گیریم V یك فضای برداری nبعدی برروی هیأت F باشد. بنا بر قضیهٔ ۱۳ درفصل ۳ و تذکرات متعاقب آن، هرپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ از V یك یکریختی $T \to [T]_{\mathcal{B}}$ ازجبرعملگرهای خطی روی V بروی جبر ماتریسهای $n\times n$ برروی F تعیین می کند. حال فرض کنیم عملگرخطی ثابت U روی V وچندجمله‌ای

$$f = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

با ضرایب c_i از F داده شده باشند. دراین صورت

$$f(U) = \sum_{i=0}^{n} c_i U^i,$$

وچون $T \to [T]_{\mathcal{B}}$ نگاشتی خطی است

$$[f(V)]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=0}^{n} c_i [U^i]_{\mathcal{B}}.$$

اکنون ازاین واقعیت که به‌ازای هر T_1 و T_2 از $L(V, V)$

$$[T_1T_2]_{\mathcal{B}} = [T_1]_{\mathcal{B}}[T_2]_{\mathcal{B}}$$

نتیجه می گیریم که

$$[U^i]_{\mathcal{B}} = ([U]_{\mathcal{B}})^i, \quad 2 \leqslant i \leqslant n.$$

نظر به‌اینکه این رابطه به‌ازای $i = 0, 1$ نیزمعتبراست، این نتیجه را به‌دست می آوریم که

$$[f(U)]_{\mathcal{B}} = f([U]_{\mathcal{B}}). \qquad (۱۷\text{-}۴)$$

به‌زبان کلمات، اگر U عملگری خطی روی V باشد، ماتریس یك چندجمله‌ای از U، در پایه‌ای مفروض، عبارت است ازهمان چندجمله‌ای برحسب ماتریس U.

قضیهٔ ۳. اگر F هیأتی مشتمل برتعدادی نامتناهی عنصرمتمایز باشد، نگاشت $f \to f^{\sim}$ یك یکریختی ازجبرچندجمله‌ایهای برروی F بروی جبر توابع چندجمله‌ای برروی F است.

اثبات. طبق تعریف، این نگاشت پوشاست؛ و اگر f و g متعلق به $F[x]$ باشند،

واضح است که به‌ازای همهٔ اسکالرهای c و d،

$$(cf+dg)^{\sim}=cf^{\sim}+dg^{\sim}.$$

چون قبلاً ثابت کردیم که $(fg)^{\sim}=f^{\sim}g^{\sim}$، تنها نیازمندیم نشان دهیم که این نگاشت یك‌به‌یك است. برای انجام این‌کار، به‌خاطر خطی بودن نگاشت، کافی است نشان دهیم $f^{\sim}=0$ ایجاب می‌کند که $f=0$. دراین صورت فرض کنیم f یك چندجمله‌ای ازدرجهٔ n یا کمتر باشد، به‌طوری که $f^{\sim}=0$. گیریم t_0، t_1، $\ldots$، t_n، $n+1$ عنصر متمایز از F باشند. چون $f^{\sim}=0$، به‌ازای $i=0,1,\ldots,n$، داریم $f(t_i)=0$، و یك نتیجهٔ آنی از (۴-۱۴) این است که $f=0$. □

از نتایج بخش بعد اثبات کاملاً متفاوتی برای این قضیه به‌دست خواهیم آورد.

تمرین

۱. با استفاده از فرمول درون‌یابی لاگرانژ، یك چندجمله‌ای f با ضرایب حقیقی بیابید که از درجهٔ کوچکتر از یا مساوی با ۳ باشد و $f(-1)=-6$، $f(0)=2$، $f(1)=-2$، $f(2)=6$.

۲. فرض کنید α، β، γ، δ اعدادی حقیقی باشند. می‌خواهیم بدانیم چه وقت ممکن است یك چندجمله‌ای f روی R ازدرجهٔ نابیشتر از ۲ بیابیم که $f(-1)=\alpha$، $f(1)=\beta$، $f(3)=\gamma$، و $f(0)=\delta$. ثابت کنید این امر ممکن است اگر و تنها اگر

$$3\alpha+6\beta-\gamma-8\delta=0.$$

۳. فرض کنید F هیأت اعداد حقیقی باشد وداشته باشیم

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p=(x-2)(x-3)(x-1).$$

(الف) نشان دهید $p(A)=0$.

(ب) فرض کنید P_1، P_2، و P_3 چندجمله‌ایهای لاگرانژ به‌ازای $t_1=2$، $t_2=3$، و $t_3=1$ باشند. ماتریس $E_i=P_i(A)$، $i=1,2,3$، را محاسبه کنید.

(پ) نشان دهید $E_1+E_2+E_3=I$، $E_iE_j=0$ هرگاه $i\neq j$، و $E_i^2=E_i$.
(ت) نشان دهید $A=2E_1+3E_2+E_3$.

۴. فرض کنید $p=(x-2)(x-3)(x-1)$، و T عملگری خطی روی R^4 باشد که $p(T)=0$. فرض کنید P_1، P_2، و P_3 چندجمله‌ایهای لاگرانژ در تمرین ۳ باشند و $E_i=P_i(T)$، $i=1, 2, 3$. ثابت کنید

$$E_1+E_2+E_3=I,$$

$$E_iE_j=0 \quad \text{هرگاه } i\neq j$$

$$E_i^2=E_i,$$

$$T=2E_1+3E_2+E_3.$$

۵. عدد صحیح مثبت n و هیأت F داده شده‌اند. فرض کنید A ماتریسی $n\times n$ و P ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری بر روی F باشند. اگر f چندجمله‌ای دلخواهی بر روی F باشد، ثابت کنید

$$f(P^{-1}AP)=P^{-1}f(A)P.$$

۶. فرض کنید F یك هیأت باشد. بعضی از تابعکهای خطی خاص روی $F[x]$ را که از طریق «تعیین مقدار در t»:

$$L(f)=f(t)$$

به‌دست می‌آیند قبلاً دیده‌ایم. این گونه تابعکها نه‌تنها خطی هستند بلکه دارای این خاصیت نیز می‌باشند که $L(fg)=L(f)L(g)$. ثابت کنید اگر L تابعکی خطی روی $F[x]$ باشد که به‌ازای هر f و g،

$$L(fg)=L(f)L(g),$$

آنگاه، یا $L=0$ یا یك t در F یافت می‌شود که به‌ازای همهٔ fها، $L(f)=f(t)$.

۴.۴. ایدآلهای چندجمله‌ایها

در این بخش به‌نتایجی که عمدتاً به‌ساختار ضربی جبر چندجمله‌ایهای بر روی یك هیأت وابسته هستند می‌پردازیم.

لم. فرض کنیم f و d دو چندجمله‌ای غیر صفر بر روی هیأت F باشند و $\deg d\leqslant \deg f$. در این صورت، یك چندجمله‌ای g در $F[x]$ با یکی از دو شرط زیر یافت می‌شود:

$\deg(f-dg)<\deg f$ یا $f-dg=0$.

اثبات. فرض کنیم

$$f=a_m x^m+\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i, \quad a_m\neq 0$$

و

$$d=b_n x^n+\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i, \quad b_n\neq 0.$$

در این صورت $m\geqslant n$ و

$$\deg\left[f-\left(\frac{a_m}{b_n}\right)x^{m-n}d\right]<\deg f \text{ یا } f-\left(\frac{a_m}{b_n}\right)x^{m-n}d=0.$$

بدین سان می‌توان g را مساوی $(a_m/b_n)x^{m-n}$ اختیار کرد. □

با استفاده از این لم می‌توانیم نشان دهیم که فرایند آشنای «تقسیمات متوالی» برای چندجمله‌ایهای با ضرایب حقیقی یا مختلط بر روی هرهیأت دلخواه نیز امکان‌پذیر است.

قضیهٔ ۴. اگر f و d دو چندجمله‌ای بر روی هیأت F باشند و d مخالف ۰، آنگاه دو چندجمله‌ای q و r در $F[x]$ وجود دارند به‌طوری که

(۱) $f=dq+r$.

(۲) $r=0$ و یا $\deg r<\deg d$.

چند جمله‌ایهای q و r که در شرایط (۱) و (۲) صدق می‌کنند یکتا هستند.

اثبات. اگر f چندجمله‌ای ۰ باشد یا $\deg f<\deg d$ آنگاه، $q=0$ و $r=f$ یك پاسخ است. در حالت $f\neq 0$ و $\deg f\geqslant \deg d$، لم قبل نشان می‌دهد که می‌توان یك چندجمله‌ای g با شرط $f-dg=0$ یا $\deg(f-dg)<\deg f$ انتخاب کرد. اگر $f-dg\neq 0$ و $\deg(f-dg)\geqslant \deg d$، چندجمله‌ای h را طوری انتخاب می‌کنیم که $(f-dg)-dh=0$ یا

$$\deg[f-d(g+h)]<\deg(f-dg).$$

با ادامهٔ این فرایند تا حد لزوم، سرانجام چندجمله‌ایهای q و r با شرط $r=0$ یا $\deg r<\deg d$، و شرط $f=dq+r$ حاصل می‌شوند. حال فرض کنیم همچنین داشته باشیم $f=dq_1+r_1$ که در آن $r_1=0$ یا $\deg r_1<\deg d$. در این صورت، $dq+r=dq_1+r_1$ و $d(q-q_1)=r_1-r$. اگر $q-q_1\neq 0$ آنگاه، $d(q-q_1)\neq 0$ و

$$\deg d+\deg(q-q_1)=\deg(r_1-r).$$

اما چون درجهٔ r_1-r کمتر از درجهٔ d است، چنین چیزی ممکن نیست، و $q-q_1=0$. از این‌رو، همچنین داریم $r_1-r=0$. □

تعریف. چند جمله‌ای غیر صفر d بر روی F مفروض است. اگر f در $F[x]$ باشد، قضیهٔ قبل نشان می‌دهد که حداکثر یك چندجمله‌ای q در $F(x]$ موجود است که $f=dq$. اگر چنین qیی وجود داشته باشد، گوییم d چندجمله‌ای f را **عاد** می‌کند، f بر d **تقسیم (بخش) پذیر** است یا f **مضربی** از d است. در این صورت، می‌نویسیم $q=f/d$ و q را **خارج قسمت** f بر d می‌نامیم.

نتیجهٔ ۱. فرض‌کنیم f یك چندجمله‌ای برروی هیأت F، و c عنصری از F باشد. در این صورت، f بر $x-c$ تقسیم‌پذیر است، اگر و تنها اگر $f(c)=0$.

اثبات. بنا بر قضیهٔ فوق $f=(x-c)q+r$ و در آن r یك چندجمله‌ای اسکالری است. طبق قضیهٔ ۲

$$f(c)=0q(c)+r(c)=r(c).$$

از این‌رو، $r=0$ اگر و تنها اگر $f(c)=0$. □

تعریف. فرض کنیم F یك هیأت باشد. عنصر c از F **ریشه** یا **صفر** چندجمله‌ای مفروض f بر روی F خوانده می‌شود، هرگاه $f(c)=0$.

نتیجهٔ ۲. یك چندجمله‌ای f از درجهٔ n بر روی هیأت F حداکثر n ریشه در F دارد.

اثبات. نتیجه برای چند جمله‌ایهای از درجهٔ ۰ و درجهٔ ۱ به‌طور آشکار درست است. فرض می‌کنیم که نتیجه برای چندجمله‌ایهای از درجهٔ $n-1$ نیز درست باشد. اگر a ریشه‌ای از f باشد، آنگاه $f=(x-a)q$ ودرآن q دارای درجهٔ $n-1$ است. چون $f(b)=0$ اگر و تنها اگر $a=b$ یا $q(b)=0$، بنا بر فرض استقرا نتیجه می‌شود که f حداکثر n ریشه دارد. □

خواننده توجه دارد که گام اصلی در اثبات قضیهٔ ۳ بیدرنگ از این نتیجه به دست می‌آید.

در مبحث ریشه‌های چندگانه مقولهٔ مشتقات صوری چندجمله‌ایها مفیدواقع می‌شود. **مشتق چندجمله‌ای**

$$f=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$$

عبارت است از چند جمله‌ای

$$f' = c_1 + 2c_2x + \cdots + nc_nx^{n-1}.$$

از نماد $D_f = f'$ هم استفاده خواهیم کرد. مشتق‌گیری خطی است؛ بدین معنی که، D عملگری خطی روی $F[x]$ است. مشتقات صوری مراتب بالاتر $D^2f = f''$، $D^3f = f^{(3)}$، و غیره نیز وجود دارند.

قضیهٔ ۵. **(فرمول تیلور[1])** فرض کنیم F هیأتی با سرشت نمای صفر، c عنصری از F و n عددی صحیح مثبت باشد. اگر چند جمله‌ای f بر روی F با $\deg f \leqslant n$ باشد، آنگاه

$$f = \sum_{k=0}^{m} \frac{(D^k f)}{k!}(c)(x-c)^k.$$

اثبات. فرمول تیلور پیامدی از قضیهٔ دوجمله‌ای، و خطی بودن عملگرهای D، D^2، $\ldots$، D^n است. قضیهٔ دوجمله‌ای که بآسانی با استقرا ثابت می‌شود مدعی است که

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k.$$

در این فرمول

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times k}$$

همان ضریب دوجمله‌ای مشهور است که تعداد ترکیبات k شیء از m شیء را به‌دست می‌دهد. بنا بر قضیهٔ دوجمله‌ای

$$\begin{aligned} x^m &= [c+(x-c)]^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} c^{m-k}(x-c)^k \\ &= c^m + mc^{m-1}(x-c) + \cdots + (x-c)^m \end{aligned}$$

و این، بیان فرمول تیلور برای حالت $f = x^m$ است. اگر

$$f = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$$

آنگاه

$$D^k f(c) = \sum_m a_m (D^k x^m)(c)$$

و

---

1. Taylor

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{D^k f(c)}{k!}(x-c)^k=\sum_k\sum_m a_m\frac{D^k x^m}{k!}(c)(x-c)^k$$
$$=\sum_m a_m\sum_k\frac{D^k x^m}{k!}(c)(x-c)^k$$
$$=\sum_m a_m x^m$$
$$=f\,.\ \square$$

باید متذکر شدکه به‌علت مستقل خطی بودن چند جمله‌ایهای ۱، $(x-c)$،...،$(x-c)^n$ (بـا تمرین،در بخش ۲.۴ مقایسه شود) فـرمول تیلور روش منحصر به فرد نوشتن f به صورت ترکیبی خطی از چند جمله‌ایهای $(x-c)^k$ $(0\leqslant k\leqslant n)$ را به‌دست می‌دهد.

در این مرحله، تذکر این مطلب، بدون ذکر جزئیات، ممکن است خالی از ارزش نباشدکه با تعبیرمناسبی فرمول تیلوربرای چندجمله‌ایهای بر روی هیأتهای با سرشت‌نمای متناهی نیز معتبراست. اگر سرشت‌نمای هیأت F متناهی باشد (مجموع تعدادی متناهی ۱ در F برابره شود) آنگاه ممکن است در F داشته باشیم $k!=0$، که در این حالت‌تقسیم $(D^k f)(c)$ بر $k!$ بی‌معنی است. با ایـن حال ، تقسیم $D^k f$ بر $k!$ می‌تواند بامعنی باشد، زیرا که هر ضریب $D^k f$ حاصل‌ضرب عنصری است از F در عددی صحیح تقسیم‌پذیر بر $k!$. اگر این مطالب گیج‌کننده به‌نظر برسند، به‌خواننده توصیه می‌شودکه توجه خود رابه هیأتهای با سرشت نمای صفر یا به‌زیر هیأتهایی از اعداد مختلط معطوف دارد.

اگر c ریشه‌ای از چند جملـه‌ای f باشد، **چندگانگی** c بـه عنوان ریشه‌ای از f بزرگترین عدد صحیح مثبت r است به‌طوری‌که f بر $(x-c)^r$ تقسیم‌پذیر باشد.

چندگانگی یك ریشه، بوضوح کوچکتراست ازیا مساوی استبا درجهٔ f. در مورد چندجمله‌ایهای بر روی هیأتهایی با سرشت نمای صفر، چندگانگی c بـه‌عنوان ریشه‌ای از f، در ارتباط است با تعداد مشتقاتی از f که در c صفر می‌شوند.

قضیهٔ ۶. فرض کنید F هیأتی با سرشت نمای صفر و f یك چند جمله‌ای بر روی F با $\deg f\leqslant n$ باشد. دراین صورت، اسکالر c ریشه‌ای از f با چندگانگی r است اگر و تنها اگر

$$(D^k f)(c)=0,\quad 0\leqslant k\leqslant r-1$$
$$(D^r f)(c)\neq 0.$$

اثبات. فرض‌کنیم r چندگانگی c به‌عنوان یك ریشهٔ f باشد. دراین صورت یك چندجمله‌ای g با خواص $f=(x-c)^r g$ و $g(c)\neq 0$ وجود دارد . زیـرا در غیر این صورت، بنا بر نتیجهٔ ۱ از قضیهٔ ۴، f بر $(x-c)^{r+1}$ تقسیم‌پذیـر است. با به‌کار بستن

فرمول تیلور بر g،

$$f=(x-c)^r\left[\sum_{m=0}^{n-r}\frac{(D^m g)}{m!}(c)(x-c)^m\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{n-r}\frac{(D^m g)}{m!}(c)(x-c)^{r+m}.$$

چون تنها یك راه برای نوشتن f به‌عنوان ترکیبی خطی از توانهای $(x-c)^k$ $(0\leqslant k\leqslant n)$ وجود دارد، داریم

$$\frac{(D^k f)(c)}{k!}=\begin{cases}0 & 0\leqslant k\leqslant r-1 \text{ اگر }\\ \dfrac{D^{k-r}g(c)}{(k-r)!} & r\leqslant k\leqslant n \text{ اگر }\end{cases}.$$

بنابراین، به‌ازای $0\leqslant k\leqslant r-1$، $D^k f(c)=0$ و $D^r f(c)=g(c)\neq 0$. بعکس، اگر این شرایط برآورده شوند، از فرمول تیلور بیدرنگ نتیجه می‌شود که یك چندجمله‌ای g با شرایط $f=(x-c)^r g$ و $g(c)\neq 0$ وجـود دارد. حال فرض کنیم r بزرگترین عدد صحیح مثبتی نباشد که $(x-c)^r$ چندجمله‌ای f را عاد کند. در این صورت، یك چندجمله‌ای h وجود دارد که $f=(x-c)^{r+1}h$. ولی این مطلب، بنا به نتیجهٔ ۲ از قضیهٔ ۱، ایجاب می‌کند که $g=(x-c)h$؛ لذا $g(c)=0$ که هنوز خود یك تناقض است. □

تعریف. گیریم F یك هیأت باشد. یك **ایدآل** $F[x]$ زیرفضایی چون M از $F[x]$ است که به ازای هر f از $F[x]$ و هر g از M، چندجمله‌ای fg متعلق به M باشد.

مثال ۵. اگر F یك هیأت و d یك چندجمله‌ای برروی F باشد، مجموعهٔ $M=dF[x]$ متشکل ازهمهٔ مضربهای df از d با fهای دلخواه در $F[x]$، یك ایدآل است. زیرا، M غیرتهی است ودرواقع M شامل d است؛ واگر f و g متعلق به $F[x]$ باشند و c یك اسکالر، آنگاه

$$c(df)-dg=d(cf-g)$$

متعلق به M است و بنابرایـن M زیـر فضـاست. سرانجام M بـه همین نحـو شامل $(df)g=d(fg)$ هم هست. ایدآل M **ایدآل اصلی تولیدشده توسط** d نامیده می‌شود.

مثال ۶. فرض کنیم $d_1,\dots,d_n$ تعدادی متناهی چندجمله‌ای برروی F باشند. دراین صورت M، مجموع زیرفضاهای $d_iF[x]$ یك زیرفضاست و نیز یك ایدآل. زیرا، فرض کنیم p متعلق به M باشد. دراین صورت، چند جمله‌ایهایی مانند $f_1,\dots,f_n$ در $F[x]$ وجود دارند که $p=d_1f_1+\dots+d_nf_n$. اگـر g چندجمله‌ای دلخواهی بر روی F باشد، آنگاه

$$pg=d_1(f_1g)+\cdots+d_n(f_ng)$$

و بنابراین pg نیز به M تعلق دارد. از این‌رو، M یك ایدآل است، و می‌گوییم که M ایدآل **تولید شده** توسط چند جمله‌ایهای d_1،...،d_n می‌باشد.

مثال ۷. F را زیر هیأتی از اعداد مختلط فرض می‌کنیم و ایدآل

$$M=(x+2)F[x]+(x^2+8x+16)F[x]$$

را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که $M=F[x]$. زیرا، M شامل

$$x^2+8x+16-x(x+2)=6x+16$$

و از این‌رو، شامل $6x+16-6(x+2)=4$ است. پس، چندجمله‌ای اسکالری ۱، ودر نتیجه همهٔ مضربهای آن به M تعلق دارند.

قضیهٔ ۷. اگر F یك هیأت، و M ایدآل غیر صفری از $F[x]$ باشد، چندجمله‌ای تکین یکتایی چون d در $F[x]$ یافت می‌شود که M ایدآل اصلی تولیدشده توسط d باشد.

اثبات. طبق فرض، M شامل یك چندجمله‌ای غیر صفر است؛ در بین همهٔ چندجمله‌ایهای غیر صفر M، یك چند جمله‌ای d از کمترین درجه وجود دارد. می‌توان فرض کرد که d تکین است؛ زیرا، در غیر این صورت با ضرب d در یك اسکالر می‌توان آن را تکین ساخت. حال، اگر f به M تعلق داشته باشد، قضیهٔ ۴ نشان می‌دهد $f=dq+r$ با این شرط که $r=0$ یا $\deg r<\deg d$. چون d در M است، dq و $f-dq=r$ نیز به M تعلق دارند. ازطرفی چون d عنصری از M و از کمترین درجه است نمی‌توانیم داشته باشیم $\deg r<\deg d$، لذا $r=0$. پس، $M=dF[x]$. اگر g چندجمله‌ای تکین دیگری باشد که $M=gF[x]$، آنگاه در چندجمله‌ای غیر صفر p و q وجود دارند که $d=gp$ و $g=dq$. از این‌رو، $d=dpq$ و

$$\deg d=\deg d+\deg p+\deg q.$$

بنابراین، $\deg p=\deg q=0$، و چون d و g تکین هستند، $p=q=1$ و در نتیجه $d=g$. □

مشاهدهٔ این مطلب با ارزش است که دراثباتی که هم اکنون ارائه‌شد، حالت‌خاصی از یك واقعیت نسبتاً مفید و عمومی به‌شرح زیر مورد استفاده قرارگرفت: اگر p چندجمله‌ای غیرصفری از یك ایدآل M باشد و اگر چندجمله‌ای f در M بر p تقسیم‌پذیر نباشد، آنگاه $f=pq+r$ و «باقیماندهٔ» r نه تنها به M تعلق دارد و مخالف ۰ است، بلکه درجه‌اش کوچکتر از درجهٔ p هم هست. قبلاً، در مثال ۷ نیز برای نشان دادن این‌که چندجمله‌ای اسکالری ۱ مولد تکین ایدآل مورد نظر است، از این واقعیت استفاده کردیم. اصولاً، یافتن چندجمله‌ای تکینی که ایدآل غیر صفر مفروضی را تولید کند، همواره

امکان‌پذیر است. زیرا، در هر ایدآل می‌توان به‌توسط تعدادی متناهی از تقسیم متوالـی، نهایتاً یك چندجمله‌ای با کمترین درجه به‌دست آورد.

نتیجه. اگر p_1، $\cdots$، p_n چند جمله‌ایهایـی بر روی هیأت F باشند و همـه صفر نباشند، یك چندجمله‌ای تکین یکتای d در $F[x]$ وجود داردکه

(الف) d در ایدآل تولید شده توسط p_1،$\cdots$،p_n قرار دارد.

(ب) d هر یك از چندجمله‌ایهای p_i را عاد می‌کند.

هر چندجمله‌ای که در (الف) و (ب) صدق کند، لزوماً شرط زیر را نیز برمی‌آورد.

(پ) d بر هر چندجمله‌ای که همهٔ چندجمله‌ایهای p_1،$\cdots$، p_n را بخش کند، بخش پذیر است.

اثبات. گیریم d مولد تکین ایدآل

$$p_1F[x]+\cdots+p_nF[x]$$

باشد. هرعنصراین ایدآل بر d بخش‌پذیر است؛ لذا، همهٔ چندجمله‌ایهای p_i بر d بخش‌پذیرند. حال فرض کنیم f یك چندجملدای باشد که همهٔ چندجمله‌ایهای p_1،$\cdots$،p_n را عاد کند. در این صورت، چندجمله‌ایهایی چون g_1، $\cdots$ ، g_n وجود دارند که $p_i=fg_i$، $1\leqslant i\leqslant n$. بعلاوه، چون d در ایدآل

$$p_1F[x]+\cdots+P_nF[x]$$

است، چندجمله‌ایهایی چون q_1،$\cdots$،q_n در $F[x]$ یافت می‌شوند که

$$d=p_1q_1+\cdots+p_nq_n.$$

پس

$$d=f[g_1q_1+\cdots+g_nq_n].$$

تا اینجا نشان داده‌ایم که d چندجمله‌ای تکینی است کـه در (الف)، (ب)، و (پ) صدق می‌کند. اگر d' یك چندجمله‌ای باشدکه شرایط (الف) و (ب) را برآورد، از (الف)و تعریف d نتیجه می‌شودکـه d' مضربی اسکالری از d است و در (پ) نیز صدق می‌کند. سرانجام، در حالتی که d' چندجمله‌ای تکینی باشد، داریم $d'=d$. □

تعریف. اگر p_1،$\cdots$،p_n چندجمله‌ایهایی برروی هیأتF باشند وهمگی ۰ نباشند، آنگاه ، d ،مولد تکین ایدآل

$$p_1F[x]+\cdots+p_nF[x]$$

بزرگترین مقسوم‌علیه مشتركچندجمله‌ایهای p_1، $\cdots$ ، p_n نامیده می‌شود. این اصطلاح توسط لم قبل توجیه می‌شود. گوییم چندجمله‌ایهای p_1، $\cdots$ ، p_n **نسبت به‌هم اول‌هستند**، هرگاه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آنها ۱ باشد، یا معادل آن، هرگاه ایدآلی را که آنها

تولید می‌کنند همهٔ $F[x]$ باشد.

مثال ۸. گیریم C هیأت اعداد مختلط باشد. دراین صورت
(الف) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $x+۲$ و $x^۲+۸x+۱۶$ برابر ۱ است (مثال ۷ را ببینید)؛
(ب) بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك $(x-۲)^۲(x+i)$ و $(x-۲)(x^۲+۱)$ برابر $(x-۲)(x+i)$ است. زیرا ایدآل

$$(x-۲)^۲(x+i)F[x]+(x-۲)(x^۲+۱)F[x]$$

شامل

$$(x-۲)^۲(x+i)-(x-۲)(x^۲+۱)=(x-۲)(x+i)(i-۲)$$

وبنابراین شامل $(x-۲)(x+i)$ است که تکین است وهردوی

$$(x-۲)^۲(x+i) \text{ و } (x-۲)(x^۲+۱)$$

را عاد می‌کند.

مثال ۹. F را هیأت اعداد گویا می‌گیریم ودر $F[x]$ فرض می‌کنیم M ایدآل تولید‌شده توسط

$$(x-۱)(x+۲)^۲\text{،}\ (x+۲)^۲(x-۳)\text{،}\ \text{و}\ (x-۳)$$

باشد. دراین صورت، M شامل

$$\frac{۱}{۲}(x+۲)^۲[(x-۱)-(x-۳)]=(x+۲)^۲$$

است وچون

$$(x+۲)^۲=(x-۳)(x+۷)-۱۷$$

M شامل چندجمله‌ای اسکالری ۱ هم هست. ازاین‌رو، $M=F[x]$ وچندجمله‌ایهای

$$(x-۱)(x+۲)^۲\text{،}\ (x+۲)^۲(x-۳)\text{،}\ \text{و}\ (x-۳)$$

نسبت به‌هم اول هستند.

تمرین

۱. فرض کنید Q هیأت اعداد گویا باشد. تعیین کنید کدامیك از زیرمجموعه‌های زیر از $Q[x]$ ایدآل است. هرگاه مجموعهٔ داده شده ایدآل باشد، مولد تکین آن را بیابید.
(الف) همهٔ fهای از درجهٔ زوج؛

(ب) همهٔ fهای از درجهٔ بزرگتر ازیا مساوی با ۵؛
(پ) همهٔ fهایی که $f(0)=0$؛
(ت) همهٔ fهایی که $f(2)=f(4)=0$؛
(ث) همهٔ fهای واقع دربرد عملگرخطی T تعریف شده توسط

$$T\left(\sum_{i=0}^{n} c_i x^i\right)=\sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{i+1} x^{i+1}.$$

۲. مطلوب است بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك هریك ازجفت چندجمله‌ایهای زیر:

(الف) $2x^5-x^3-3x^2-6x+4$ و $x^4+x^3-x^2-2x-2$؛
(ب) $3x^4+8x^2-3$ و x^3+2x^2+3x+6؛
(پ) $x^4-2x^3-2x^2-2x-3$ و x^3+6x^2+7x+1.

۳. اگر A ماتریسی $n\times n$ برروی هیأت F باشد، نشان دهید مجموعهٔ همه چندجمله‌ایهای f در $F[x]$ با شرط $f(A)=0$ یك ایدآل است.

۴. فرض کنید F زیرهیأتی از اعداد مختلط باشد و

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

مولد تکین ایدآل متشکل ازهمهٔ چندجمله‌ایهای f در $F[x]$ راکه $f(A)=0$ بیابید.

۵. اگر F یك هیأت باشد، نشان دهید اشتراك هرتعداد دلخواه از ایدآلهای $F[x]$ خود یك ایدآل است.

۶. گیریم F یك هیأت باشد. نشان دهید ایدآل تولید شده توسط تعدادی متناهی چندجمله‌ای از $F[x]$ چون f_1، ...، f_n عبارت است ازاشتراك همهٔ ایدآلهای شامل آنها.

۷. فرض کنید K زیرهیأتی از یك هیأت F و f و g چندجمله‌ایهایی در $K[x]$ باشند. اگر M_k ایدآل تولید شده توسط f و g در $K[x]$، و M_F ایدال تولید شده توسط آنها در $F[x]$ باشد، نشان دهید M_k و M_fدارای مولدهای تکین‌مساوی‌هستند.

۴.۵. تجزیهٔ چندجمله‌ایها به‌سازه‌های اول

در این بخش اثبات می‌کنیم که هرچندجمله‌ای برروی هیأت F را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضربی از چندجمله‌ایهای «اول» نوشت. این تجزیه به‌سازه‌ها، ابزار مؤثری برای

یافتن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك هر تعداد متناهی از چندجمله‌ایها، و بخصوص، وسیلهٔ مؤثری برای اتخاذ تصمیم درمورد اینکه چه‌وقت این چندجمله‌ایها نسبت به‌هم اول هستند، فراهم می‌آورد.

تعریف. فرض کنیم F یك هیأت باشد. چندجمله‌ای f در $F[x]$ را **تحویل‌پذیر بر روی** F می‌نامیم، هرگاه چندجمله‌ایهای g و h از درجهٔ بزرگتر از یا مساوی با یك در $F[x]$ وجود داشته باشند به‌طوری که $f = gh$؛ وگرنه، f را **تحویل‌ناپذیر برروی** F می‌نامیم. هرچندجمله‌ای تحویل‌ناپذیرغیراسکالری برروی F یك **چندجمله‌ای اول برروی** F نام دارد وگاهی یك **اول در** $F[x]$ نیز نامیده می‌شود.

مثال ۱۰. چندجمله‌ای $x^{۲}+۱$ برروی هیأت C ازاعداد مختلط تحویل‌پذیر است. زیرا

$$x^{۲}+۱=(x+i)(x-i)$$

و چندجمله‌ایهای $x+i$ و $x-i$ به $C[x]$ تعلق دارند. از طرف دیگر، $x^{۲}+۱$ برروی هیأت اعداد حقیقی R تحویل‌ناپذیراست. چراکه اگر

$$x^{۲}+۱=(ax+b)(a'x+b')$$

و a، a'، b و b' در R باشند، آنگاه

$$aa'=۱,\quad ab'+ba'=۰,\quad bb'=۱.$$

این روابط ایجاب می‌کنند که $a^{۲}+b^{۲}=۰$، که این خود با حقیقی بودن اعداد a و b غیرممکن است، مگر آنکه $a=b=۰$.

قضیهٔ ۸. گیریم p، f، و g چندجمله‌ایهایی بر روی هیأت F باشند. فرض کنیم p چندجمله‌ای اولی باشدکه حاصلضرب fg را عاد کند. در این صورت، p یا f را عاد می‌کند یا g را.

اثبات. اگرفرض کنیم p چندجمله‌ای اول تکینی است، ازعمومیت اثبات نکاسته‌ایم. دراین صورت، این واقعیت که p اول است، چیزی جزاین نمی‌گویدکه ۱ و p تنها مقسوم‌علیه‌های تکین p هستند. گیریم d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك f و p است. دراین‌صورت، یا $d=۱$ یا $d=p$؛ چراکه d چندجمله‌ای تکینی‌است که p را تقسیم می‌کند. اگر $d=p$، آنگاه p چندجمله‌ای f را تقسیم می‌کند وکار به‌انجام می‌رسد. از این‌رو، فرض می‌کنیم $d=۱$؛ یعنی، فرض می‌کنیم f و p نسبت به‌هم اول باشند. ثابت خواهیم کرد که p چندجمله‌ای g را عاد می‌کند. چون بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك f و p یك‌است، چندجمله‌ایهایی چون $f_{۰}$ و $p_{۰}$ وجود دارندکه $f_{۰}f+p_{۰}p=۱$. با ضرب این رابطه در g داریم

$$g = f_\circ f g + p_\circ p g$$
$$= (fg)f_\circ + p(p_\circ g)\,.$$

چون p، چندجمله‌ای fg را عاد می‌کند، $(fg)f_\circ$ و نیز مسلماً $p(p_\circ g)$ را نیز تقسیم می‌کند. بدین‌سان g بر p بخش‌پذیر است. □

نتیجه. اگر p یك اول باشد و حاصل‌ضرب $f_1 \cdots f_n$ را عادکند، آنگاه p یکی از چندجمله‌ایهای f_1، ...، f_n را عاد می‌کند.

اثبات. اثبات به‌استقرا صورت می گیرد. وقتی $n=2$، نتیجه‌چیزی جزصورت‌قضیهٔ۶ نیست. فرض کنیم نتیجه را برای $n=k$ اثبات کرده باشیم و p حاصل‌ضرب $f_1 \cdots f_{k+1}$ از $(k+1)$ چندجمله‌ای را تقسیم کند. چون p چندجمله‌ای $(f_1 \cdots f_k)f_{k+1}$ را تقسیم می‌کند. p یا f_{k+1} را عاد می‌کند یا $f_1 \cdots f_k$ را. بنابرفرض استقرا، اگر p چندجمله‌ای $f_1 \cdots f_k$ را عادکند، آنگاه jیی هست که $1 \leqslant j \leqslant k$ و p چندجمله‌ای f_j را عاد می‌کند. بدین لحاظ می‌بینیم که درهرحالت، p باید یکی از f_jها، $1 \leqslant j \leqslant k+1$، را عادکند. □

قضیهٔ ۹. اگر F یك هیأت باشد، هرچندجمله‌ای تکین غیر اسکالری در $F[x]$ را می‌توان به‌یك، وبدون احتساب ترتیب، تنها به‌یك طریق به‌صورت حاصل‌ضربی ازاولهای تکین در $F[x]$ تجزیه کرد.

اثبات. فرض کنیم f چندجمله‌ای غیراسکالری تکینی برروی F باشد. هرگاه $\deg f = 1$ چیزی برای اثبات نمی‌ماند؛ زیرا چندجمله‌ایهای درجهٔ یك خود تحویل‌ناپذیرند. فرض‌کنیم f دارای درجهٔ $n > 1$ باشد. بنابر فرض استقرا می‌توانیم فرض کنیم که قضیه برای همهٔ چندجمله‌ایهای تکین غیراسکالری از درجهٔ کمتر از n درست‌است. اگر f تحویل‌ناپذیر باشد، خود هم اکنون به‌صورت حاصل‌ضربی از اولهای تکین هست. درغیر این صورت، $f=gh$ که در آن g و h دوچندجمله‌ای تکین غیر اسکالری از درجهٔ کمتر از n هستند. پس، g و h می‌توانند به‌صورت حاصل‌ضربهایی از اولهای تکین در $F[x]$ تجزیه شوند، و از اینجا به‌همین‌نحو f. حال فرض کنیم

$$f = p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_n$$

که در آن p_1، ...، p_m و $q_1 \cdots q_n$ اولهای تکینی از $F[x]$ هستند. در این صورت، p_m حاصل‌ضرب $q_1 \cdots q_n$ را تقسیم می‌کند. بنابرنتیجهٔ قبل، p_m باید یکی از q_iها را عادکند. چون q_i و p_m هردو چندجمله‌ایهای اول تکینی هستند، این بدان معنی است که

$$q_i = p_m. \tag{۴-۱۶}$$

از (۴-۱۶) می‌بینیم که اگر $m=1$ یا $n=1$، داریم $m=n=1$؛ زیرا

$$\deg f = \sum_{i=1}^{m} \deg p_i = \sum_{j=1}^{n} \deg q_j$$

دراین حالت چیزی بیشتر برای اثبات نمی‌ماند، لذا فرض می‌کنیم $m > 1$ و $n > 1$. پس از ترتیب‌بندی مجدد qها می‌توانیم فرض کنیم که $p_m = q_n$ و

$$p_1 \cdots p_{m-1} p_m = q_1 \cdots q_{n-1} p_m .$$

حال بنا به‌نتیجهٔ ۲ از قضیهٔ ۱ داریم

$$p_1 \cdots p_{m-1} = q_1 \cdots q_{n-1}.$$

چون درجهٔ چندجمله‌ای $p_1 \cdots p_m$ کمتر از n است، فرض استقرا به‌کار می‌رود ونشان می‌دهدکه دنبالهٔ q_1، ...، q_{n-1} حداکثر ترتیب‌بندی‌جدیدی از دنبالهٔ p_1، ...، p_{m-1} است. این مطلب همراه با (۴-۱۶) نشان می‌دهدکه تجزیهٔ f به‌صورت حاصلضربی از اولهای تکین، بدون توجه به‌ترتیب سازه‌ها، یکتاست. □

درتجزیهٔ چندجمله‌ای تکین غیراسکالری f مفروض دربالا، بعضی ازسازه‌های اول تکین‌ممکن است تکرارشوند. اگر p_1، p_2، ...، p_r، اولهای تکین متمایزی باشند که در این تجزیهٔ f ظاهرمی‌شوند، آنگاه

$$f = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r} \tag{۴-۱۷}$$

که درآن نمای n_i تعداد دفعاتی است که سازهٔ اول p_i درتجزیه ظاهر می‌شود، این تجزیه نیزمسلماً یکتاست، و **تجزیهٔ اولیهٔ** f نامیده‌می‌شود. بسادگی می‌توان نشان دادکه‌هرمقسوم‌علیه تکین f به‌صورت

$$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}, \quad 0 \leqslant m_i \leqslant n_i \tag{۴-۱۸}$$

است. از(۴-۱۸) نتیجه‌می‌شودکه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك تعدادی متناهی‌چندجمله‌ای تکین غیراسکالری f_1، ...، f_s ازترکیب همهٔ سازه‌های اول تکینی به‌دست می‌آیدکه به‌طور همزمان در تجزیه‌های f_1، ...، f_s ظاهرمی‌شوند. نمایی‌که برای هریك از سازه‌های اول فوق‌الذکر باید درنظر گرفته شود، بزرگترین نمایی است‌که آن سازه به‌توان این نما، سازه‌ای‌ازهمهٔ f_iها باشد. هرگاه هیچ‌توانی (غیرصفر) ازچندجمله‌ایهای اول، سازه‌ای ازهمهٔ f_iها نباشد، این چندجمله‌ایها نسبت به‌هم اول هستند.

مثال ۱۱. فرض‌کنیم هیأت F وعناصرمتمایز a، b، و c از F داده شده باشند. در این صورت، چندجمله‌ایهای $x-a$، $x-b$، و $x-c$ اولهای تکین متمایزی از $F[x]$ هستند. اگر m، n، و s اعداد صحیح مثبتی باشند، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك‌چندجمله‌ایهای

$$(x-a)^m (x-c)^s \quad \text{و} \quad (x-b)^n (x-c)^s$$

$(x-c)^s$ است، حال آنکه سه چندجمله‌ای

$$(x-b)^n(x-c)^s, \quad (x-a)^m(x-c)^s, \quad (x-a)^m(x-b)^n$$

نسبت به‌هم اول هستند.

قضیهٔ ۱۰. فرض کنیم f یك چندجمله‌ای تکین غیراسکالری برروی هیأت F و

$$f = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$$

تجزیهٔ f به‌سازه‌های اول باشد. به‌ازای هر j، $1 \leqslant j \leqslant k$، گیریم

$$f_j = \frac{f}{p_j^{n_j}} = \prod_{i \neq j} p_i^{n_i}.$$

دراین صورت f_1، $\cdots$، f_k نسبت به‌هم اول هستند.

اثبات. اثبات (آسان) این قضیه را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. این قضیه را بیشتر بدین منظور بیان کردیم که بعدها بتوانیم به‌آن رجوع کنیم. □

قضیهٔ ۱۱. فرض کنیم چندجمله‌ای f برروی هیأت F و مشتق آن f' داده شده باشند. در این صورت f حاصلضربی از چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر متمایز برروی F است اگر و تنها اگر f و f' نسبت به‌هم اول باشند.

اثبات. فرض کنیم درتجزیهٔ f به‌سازه‌های اول برروی هیأت F، چندجمله‌ای اول (غیراسکالری) p تکرار بشود. درایـن صورت، به‌ازای عنصری چون h از $F[x]$، $f = p^2h$. آنگاه

$$f' = p^2h' + 2pp'h$$

و p مقسوم‌علیه f' نیزهست. پس، f و f' نسبت به‌هم اول نیستند.

حال فرض کنیم $f = p_1 \cdots p_k$ و p_1، $\cdots$، p_k چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر غیراسکالری متمایزی برروی F باشند. اگر $f_j = f/p_j$، آنگاه

$$f' = p_1'f_1 + p_2'f_2 + \cdots + p_k'f_k.$$

گیریم p چندجمله‌ای اولی باشدکه هم f و هم f' را عاد می‌کند. در این صورت i یی هست که $p = p_i$. حـال به‌ازای $j \neq i$، p_i چندجمله‌ای f_j را عـاد می‌کند، وچـون p_i چندجمله‌ای

$$f' = \sum_{j=1}^{k} p_j' f_j$$

را هم تقسیم می‌کند، می‌بینیم که p_i باید $p_i'f_i$ را نیز عادکند. بنابراین p_i یا f_i را عاد می‌کندیا p_i' را. ولی p_i چندجمله‌ای f_i را عادنمی‌کند،چرا که p_1، $\cdots$، p_k از هم‌متمایزند. لذا، p_i چندجمله‌ای p_i' را عاد می‌کند. این‌هم‌ممکن‌نیست، زیرا درجهٔ p_i' یکی کمتر از درجهٔ p_i است. پس، نتیجه می‌گیریم که‌هیچ اولی هم f وهم f' را عادنمی‌کند، یا آنکه f و f'

نسبت به‌هم اول هستند. □

تعریف. هیأت F **بستهٔ جبری** نامیده می‌شود، هرگاه هرچندجمله‌ای اول برروی F دارای درجهٔ ۱ باشد.

اینکه می‌گوییم F بستهٔ‌جبری است بدین معنی که‌هر چندجمله‌ای تکین تحویل‌ناپذیر غیراسکالری برروی F به‌صورت $(x-c)$ است. قبلاً دیده‌ایم که هرچندجمله‌ای از این نوع برروی هرهیأت F تحویل‌ناپذیراست. بدین‌سان، یك تعریف هم‌ارز برای هیأت بستهٔ‌جبری عبارت ازاین است: هیأتی چون F که هرچندجمله‌ای غیراسکالری f در $F[x]$ بتواند به‌صورت

$$f=c(x-c_1)^{n_1}\cdots(x-c_k)^{n_k}$$

که در آن c یك اسکالر، c_1، $\cdots$، c_k عناصرمتمایزی از F و n_1، $\cdots$، n_k اعداد صحیح مثبتی هستند، بیان شود. یك فرمولبندی دیگرهم این است که اگر f یك چندجمله‌ای غیر اسکالری برروی F باشد، آنگاه عنصری چون c در F وجود داردکه $f(c)=0$.

هیأت R از اعداد حقیقی بستهٔ جبری نیست؛ زیرا چندجمله‌ای (x^2+1) برروی R که از درجهٔ ۱ نیست تحویل‌ناپذیر است و یا به‌این علت که عددی حقیقی مانند c وجود ندارد که $c^2+1=0$. قضیهٔ موسوم به قضیهٔ بنیادی جبر بیان می‌کندکه هیأت C ازاعداد مختلط بستهٔ جبری است. اگرچه این قضیهٔ را دراین‌کتاب بعداً هم به‌کار می‌بریم ولی آن را اثبات نمی‌کنیم. اثبات این قضیه ازیك‌سو به‌علت محدودیت زمانی، واز سوی دیگر به‌این خاطرکه به‌خاصیتی «غیرجبری» ازاعداد حقیقی وابسته است،کنارگذاشته شده‌است. برای دیدن اثباتی‌ازاین قضیه، خوانندهٔ‌علاقه‌مند می‌تواند به‌کتاب شرایر و اسپرنر[1] مندرج درفهرست مراجع رجوع کند.

قضیهٔ بنیادی جبرهمچنین روشن می‌کندکه چه امکاناتی برای تجزیهٔ چندجمله‌ایهای با ضرایب حقیقی به‌سازه‌های اول وجود دارد. اگرچندجمله‌ای f با ضرایب حقیقی باشد و c ریشه‌ای مختلط از f، آنگاه $\bar{c}$، مزدوج مختلط c، نیزیك ریشهٔ f است. بنابراین، ریشه‌های مختلطی که حقیقی نیستند باید به‌صورت جفتهای مزدوج ظاهر بشوند. درنتیجه مجموعهٔ همهٔ ریشه‌ها به‌صورت $\{t_1,\cdots,t_k,c_1,\bar{c}_1,\cdots,c_r,\bar{c}_r\}$ است که در آن t_1، $\cdots$، t_k اعدادی‌حقیقی و c_1، $\cdots$، c_r اعدادی‌مختلط وغیرحقیقی‌هستند. پس، f به‌صورت

$$f=c(x-t_1)\cdots(x-t_k)p_1\cdots p_r$$

تجزیه می‌شود، که در آن p_i چندجمله‌ای درجهٔ دوم

$$p_i=(x-c_i)(x-\bar{c}_i)$$

است. البته ضرایب این چندجمله‌ایهای p_i حقیقی هستند. نتیجه می گیریم که درجهٔ‌هرچند-

1. Schreier and Sperner

جمله‌ای تحویل‌ناپذیر برروی هیأت اعداد حقیقی ۱ یا ۲ است، و هرچندجمله‌ای برروی R حاصلضربی است ازچند سازهٔ خطی، کــه از ریشه‌های حقیقی f به‌دست می‌آیند، در چند چندجمله‌ای درجهٔ دوم تحویل‌ناپذیر.

تمرین

۱. فرض‌کنید چندجمله‌ای تکین p برروی هیأت F و چندجمله‌ایهای نسبت به‌هم اول f و g برروی F داده شده باشند. ثابت‌کنید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك pf و pg برابر p است.

۲. با قبول قضیهٔ بنیادی جبر، مطلب زیررا اثبات‌کنید. اگر f و g چندجمله‌ایهایی برروی هیأت اعداد مختلط باشند، آنگاه f و g نسبت به‌هم اولند اگر وتنها اگــر f و g ریشه مشترکی نداشته باشند.

۳. فرض‌کنید D عملگرمشتق‌گیری روی فضای چندجمله‌ایهای برروی هیأت اعدادمختلط و f یك چندجمله‌ای تکین برروی همین هیأت باشد. ثابت‌کنید تساوی

$$f=(x-c_1)\cdots(x-c_k)$$

که درآن c_1، ...، c_k اعداد مختلط متمایزی هستند برقراراست اگروتنها اگــر f و Df نسبت به‌هم اول باشند. به‌بیان دیگر، f دارای ریشهٔ تکراری نیست اگر و تنها اگر f و Df ریشهٔ مشترکی نداشته باشند. (قضیهٔ بنیادی جبررا دانسته فرض‌کنید.)

۴. تعمیم زیراز فرمول تیلور را ثابت‌کنید: فرض‌کنید f، g، و h چندجمله‌ایهایی برروی زیرهیأتی ازاعداد مختلط باشند به‌طوری‌که $\deg f\leqslant n$. دراین صورت

$$f(g)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(h)(g-h)^k.$$

(در اینجا $f(g)$ به‌معنی «ترکیب f با g» است.)

دربقیهٔ تمرینها به‌تعریف زیرنیازمندیم: اگر f، g، و p چندجمله‌ایهایی برروی‌هیأت F باشند و $p\neq 0$، گوییم f **همنهشت** با g **به پیمانهٔ** p است، هرگاه $(f-g)$ بــر p بخش‌پذیر باشد. هرگاه f همنهشت با g به‌پیمانهٔ p باشد، می‌نویسیم

$$f\equiv g \bmod p\,.$$

۵. به‌ازای هرچندجمله‌ای غیــرصفر p، ثابت‌کنید همنهشتی به‌پیمانهٔ p رابطه‌ای هم‌ارزی است؛ یعنی،

(الف) انعکاسی است: $f\equiv f \bmod p$.

(ب) متقارن است: اگر $f\equiv g \bmod p$، آنگاه $g\equiv f \bmod p$.
(پ) متعدی‌است: اگر $f\equiv g \bmod p$ و $g\equiv h \bmod p$، آنگاه $f\equiv h \bmod p$.

۶. فرض کنید $f\equiv g \bmod p$ و $f_1\equiv g_1 \bmod p$.
(الف) ثابت کنید $f+f_1\equiv g+g_1 \bmod p$.
(ب) ثابت کنید $ff_1\equiv gg_1 \bmod p$.

۷. از تمرین ۶ برای اثبات مطلب زیر استفاده کنید اگر f، g، h، و p چندجمله‌ایهایی بر روی هیأت F باشند و $p\neq 0$ و اگر همچنین $f\equiv g \bmod p$، آنگاه $h(f)\equiv h(g) \bmod p$.

۸. اگر p چندجمله‌ای تحویل ناپذیری باشد و $fg\equiv 0 \bmod p$، ثابت کنید یا $f\equiv 0 \bmod p$ یا $g\equiv 0 \bmod p$. اگر p تحویل‌پذیر نباشد، مثالی بیاورید که نشان دهد مطلب فوق نادرست است.

۵

دترمینان

۱.۵. حلقه‌های جابجایی

در این فصل، به‌اثبات احکام اصلی دترمینانهای ماتریسهای مربعی می‌پردازیم. این امر را نه‌تنها برای ماتریسهای بر روی هیأتها، بلکه همچنین برای ماتریسهایی که درایه‌های آنها «اسکالر»هایی از نوع عمومی‌تری هستند، انجام می‌دهیم. ایـــن تعمیم دو دلیل دارد. اول آنکه، در فصل بعد در مـــوارد معینی ناگزیر از بحث دربارهٔ دترمینانهای ماتریسهایی با درایه‌های چندجمله‌ای هستیم. دوم آنکه، در آنچه که دربارهٔ دترمینانها خواهیم آورد، یکی ازاصول موضوع هیأتها، یعنی اصلی که وجودمعکوس ضربی هر عنصر غیرصفر را تضمین می‌کند، هیچ‌گونه نقشی ندارد. بـه‌این دلایل، مناسب استکـــه نظریهٔ دترمینانها را برای ماتریسهایی که درایه‌های آنها عناصری از یك حلقهٔ جابجایی با عنصر همانی باشند، تعمیم دهیم.

تعریف. یك **حلقه** عبارت است ازیك مجموعهٔ K همراه با دوعمل $(x,y)\to x+y$ و $(x,\, y)\to xy$ که شرایط زیر را برآورند:

(الف) K تحت عمل $(x,\, y)\to x+y$ یك گروه جابجایی است (K تحت جمع یك گروه جابجایی است)؛

(ب) $(xy)z=x(yz)$ (ضرب شرکت پذیر است)؛

(پ) $x(y+z)=xy+xz$ و $(y+z)x=yx+zx$ (دو قانـــون پخش‌پذیری

برقرارند).

اگر به ازای هر x و y از K داشته باشیم $xy=yx$،گوییم حلقهٔ K **جابجایی** است. اگر عنصری چون ۱ در K یافت شود به طوری که به ازای هر x، $x=x1=1x$، گوییم K **حلقه‌ای با عنصر همانی** است و ۱ را **عنصر همانی** K می‌نامیم.

در اینجا حلقه‌های جابجایی با عنصر همانی مورد نظر ما هستند. چنین حلقه‌ای را می‌توان به‌طور خلاصه به‌صورت مجموعه‌ای چون K همراه با دو عمل توصیف کرد که همهٔ اصول موضوع هیأت راکه درفصل ۱ ارائه شد ارضا می‌کنند مگر احتمالاً اصل موضوع (۸) و شرط $0\neq 1$ را. بدین سان، یك هیأت عبارت است از حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی غیر صفرکه به‌هر x غیر صفر، عنصر x^{-1} با خاصیت $xx^{-1}=1$ متناظر شود. مجموعهٔ اعداد صحیح همراه با اعمال معمولی، یك حلقهٔ جابجایی با عنصر همانی است، اما یك هیأت نیست. مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ایهای بر روی یك هیأت همراه با جمع‌وضربی که برای چندجمله‌ایها تعریف‌کردیم حلقهٔ جابجایی دیگری با عنصر همانی است.

اگر K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد، هرماتریس $m\times n$ بر روی K را به‌صورت تابعی چون A از مجموعهٔ جفتهای (i, j) از اعداد صحیح $1\leqslant i\leqslant m$ و $1\leqslant j\leqslant n$ در K تعریف می‌کنیم. طبق معمول چنین ماتریسی را با آرایه‌ای مستطیلی که دارای m سطر و n ستون باشد، نمایش می‌دهیم. مجموع و حاصل ضرب ماتریسهای بر روی K، به‌همان نحوکه برای ماتریسهای بر روی هیأتها تعریف شدند، تعریف می‌شوند:

$$(A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$$
$$(AB)_{ij}=\sum_k A_{ik}B_{kj}.$$

جمع آنگاه تعریف می‌شودکه A و B دارای تعداد سطرها و نیز تعداد ستونهای مساوی باشند، و ضرب هنگامی تعریف می‌شودکه تعداد ستونهای A برابر با تعداد سطرهای B باشد. خواص جبری اساسی این اعمال در اینجا هم معتبرند. مثلاً

$A(B+C)=AB+AC$، $(AB)C=A(BC)$، و غیره.

همچون مورد هیأتها، عناصر K را هم اسکالر می‌نامیم. با این قرار، ترکیب خطی سطرها یا ستونهای هر ماتریس را می‌توان همچون گذشته، تعریف کرد. به‌طور اجمال، به استثنای نتایجی‌که به «تقسیم» پذیری در K مربوط‌اند، کلیهٔ احکامی را که قبلاً برای ماتریسهای بر روی هیأتها به‌دست‌آوردیم برای ماتریسهای بر روی K نیز معتبرند.

۲.۵. تابع دترمینان

فرض‌کنیم K یك حلقهٔ جابجایی با عنصر همانی باشد. می‌خواهیم به‌هر ماتریس $n\times n$ (مربعی) بر روی K، اسکالری (عنصری از K) که به‌عنوان دترمینان آن ماتریس شناخته

می‌شود، اختصاص دهیم. این امکان وجود داردکه دترمینان ماتریس مربعی A را تنها با نوشتن فرمولی برحسب درایه‌های A تعریف کنیم. در این صورت، خواص گوناگون دترمینان را می‌توان از این فرمول به‌دست‌آورد. اما، چنین فرمولی نسبتاً پیچیده است، و ما برای دست‌یابی به‌مزیتی تکنیکی به‌صورت زیرعمل می‌کنیم. یك «تابع دترمینان» روی $K^{n\times n}$ را چنان تابعی تعریف می‌کنیم که به‌هر ماتریس $n\times n$ بر روی K اسکالری را تخصیص بدهد و دارای خواص ویژهٔ زیر باشد: این تابع، به‌عنوان تابعی از هر یك از سطرهای ماتریس، خطی باشد؛ مقدارآن روی هر ماتریس با دو سطر متساوی برابر صفر باشد؛ و مقدارآن روی ماتریس همانی $n\times n$ برابر با ۱ باشد. ثابت می‌کنیم که چنین تابعی وجود دارد و سپس یکتا بودن‌آن را اثبات می‌کنیم؛ یعنی، ثابت می‌کنیم که دقیقاً یك تابع با این ویژگیها وجود دارد. حین اثبات یکتایی، فرمولی صریح برای دترمینان و نیز چندین خاصیت مفیدآن را به‌دست خواهیم‌آورد.

این بخش به‌تعریف «تابع دترمینان» و به‌اثبات وجود حداقل یك تابع دترمینان اختصاص دارد.

تعریف. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی، n عددی صحیح مثبت، و D تابعی باشدکه به هرماتریس $n\times n$ مانند A بر روی K اسکالر $D(A)$ از K را متناظر سازد، گوییم D تابعی **n خطی** است هرگاه به ازای هر i، $1\leqslant i\leqslant n$، D تابعی خطی‌از iمین سطر با ثابت نگاه داشتن $(n-1)$ سطر دیگر باشد.

این تعریف نیازمند چند توضیح است. اگر D تابعی از $K^{n\times n}$ در K و $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ سطرهای ماتریس A باشند، می‌نویسیم

$$D(A)=D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

یعنی، D را به‌عنوان تابعی از سطرهای A نیز به‌شمار می‌آوریم. در این صورت، این بیان که D تابعی n خطی است، بدین معنی است که

$$D(\alpha_1, \cdots, c\alpha_i+\alpha_i', \cdots, \alpha_n)=cD(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n) +D(\alpha_1, \cdots, \alpha_i', \cdots, \alpha_n). \qquad (۱\text{-}۵)$$

اگر همهٔ سطرها به‌جز سطر iم را ثابت نگاهداریم و D را به‌عنوان تابعی از سطر iم محسوب کنیم، معمولاً مناسبتر است که به‌جای $D(A)$ بنویسیم $D(\alpha_i)$. بدین صورت، می‌توانیم (۱-۵) را به‌صورت

$$D(c\alpha_i+\alpha_i')=cD(\alpha_i)+D(\alpha_i'),$$

به‌شرطی که معنی‌آن روشن باشد، خلاصه‌کنیم.

مثال ۱. فرض‌کنیم اعداد صحیح مثبت $k_1, \cdots, k_n$، $1\leqslant k_i\leqslant n$، و عنصر a از

K مفروض باشند. به‌ازای هر ماتریس $n\times n$ مانند A بر روی K، تعریف می‌کنیم

$$D(A)=\alpha A(1,\ k_1)\cdots A(n,\ k_n). \qquad (۵-۲)$$

در این صورت تابع D تعریف شده توسط (۵-۲) تابعی n خطی است. زیرا، اگر D را به عنوان تابعی از سطر iام ماتریس A با ثابت نگاهداشتن سطرهای دیگر بینگاریم، می‌توانیم بنویسیم

$$D(\alpha_i)=A(i,\ k_i)b.$$

در اینجا b عنصر ثابتی از K است. گیریم $\alpha_i'=(A_{i1}',\ \ldots,\ A_{in}')$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}D(c\alpha_i+\alpha_i')&=[cA(i,\ k_i)+A'(i,\ k_i)]b\\&=cD(\alpha_i)+D(\alpha_i').\end{aligned}$$

پس، D تابعی خطی از هر یك از سطرهای A است.

تابع n خطی ویژه‌ای از این نوع، تابع

$$D(A)=A_{11}A_{22}\cdots A_{nn}$$

است. به‌عبارت دیگر، «حاصلضرب درایه‌های قطری» تابعی n خطی روی $K^{n\times n}$ است.

مثال ۲. ذیلاً همهٔ توابع ۲ خطی روی ماتریسهای 2×2 بر روی K را می‌یابیم. فرض کنیم D چنین تابعی باشد. اگر سطرهای ماتریس همانی 2×2 را با ϵ_1 و ϵ_2 نشان دهیم، داریم

$$D(A)=D(A_{11}\epsilon_1+A_{12}\epsilon_2,\ A_{21}\epsilon_1+A_{22}\epsilon_2).$$

با استفاده از این حکم که D تابعی ۲ خطی است مطابق (۵-۱) داریم

$$\begin{aligned}D(A)&=A_{11}D(\epsilon_1,\ A_{21}\epsilon_1+A_{22}\epsilon_2)+A_{12}D(\epsilon_2,\ A_{21}\epsilon_1+A_{22}\epsilon_2)\\&=A_{11}A_{21}D(\epsilon_1,\ \epsilon_1)+A_{11}A_{22}D(\epsilon_1,\ \epsilon_2)+A_{12}A_{21}D(\epsilon_2,\ \epsilon_1)\\&\quad+A_{12}A_{22}D(\epsilon_2,\ \epsilon_2).\end{aligned}$$

از این‌رو، D توسط چهار اسکالر

$$D(\epsilon_1,\ \epsilon_1)\text{، }D(\epsilon_1,\ \epsilon_2)\text{، }D(\epsilon_2,\ \epsilon_1)\text{ و }D(\epsilon_2,\ \epsilon_2)$$

کاملاً تعیین می‌شود. خواننده باید بآسانی بتواند نشان دهدکه اگر a، b، c، و d چهار اسکالر دلخواه در K باشند و تعریف کنیم

$$D(A)=A_{11}A_{21}a+A_{11}A_{22}b+A_{12}A_{21}c+A_{12}A_{22}d$$

آنگاه D تابعی ۲ خطی روی ماتریسهای 2×2 بر روی K است و

$$D(\epsilon_1, \epsilon_1) = a, \quad D(\epsilon_1, \epsilon_2) = b,$$
$$D(\epsilon_2, \epsilon_1) = c, \quad D(\epsilon_2, \epsilon_2) = d.$$

لم. هر ترکیب خطی از توابع n خطی، خود n خطی است.

اثبات. کافی است ثابت کنیم که ترکیبی خطی از دو تابع n خطی تابعی است nخطی. گیریم D و E توابعی n خطی باشند. اگر a و b به K تعلق داشته باشند، بدیهی است که ترکیب خطی $aD+bE$ توسط

$$(aD+bE)(A) = aD(A)+bE(A)$$

تعریف می‌شود. از این‌رو، اگر همهٔ سطرها، به‌جز سطر i، را ثابت نگاهداریم

$$\begin{aligned}(aD+bE)(c\alpha_i+\alpha_i') &= aD(c\alpha_i+\alpha_i')+bE(c\alpha_i+\alpha_i')\\ &= acD(\alpha_i)+aD(\alpha_i')+bcE(\alpha_i)+bE(\alpha_i')\\ &= c(aD+bE)(\alpha_i)+(aD+bE)(\alpha_i'). \square\end{aligned}$$

اگر K یك هیأت و V مجموعهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی K باشند، لم بالا بیان می‌کند که مجموعهٔ توابع nخطی روی V زیرفضایی ازفضای همهٔ توابع از V در Kاست.

مثال ۳. فرض‌کنیم تابع D روی ماتریسهای ۲ × ۲ برروی K توسط

$$D(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \tag{۳-۵}$$

تعریف شده باشد. دراین‌صورت، D مجموع دو تابع‌ازنوع توصیف شده درمثال ۱ است:

$$D = D_1 + D_2$$
$$D_1(A) = A_{11}A_{22}$$
$$D_2(A) = -A_{12}A_{21}.$$

بنابر لم بالا، D تابعی ۲خطی است. خواننده‌ای‌که مختصرتجربه‌ای با دترمینانها داشته باشد این مطلب را شگفت‌آور نخواهد یافت؛ زیرا، (۳-۵) چیزی جزتعریف معمولی دترمینان یك ماتریس ۲ × ۲ نیست. بدیهی است تابع Dکه هم‌اکنون تعریف شدنمونهٔ توابع ۲ خطی نیست. این تابع دارای خواص ویژهٔ بسیاری است که اینك به‌ذکر برخی ازآنها می‌پردازیم. اول، اگر I ماتریس همانی ۲ × ۲ باشد، آنگاه $D(I) = 1$؛ یعنی، $D(\epsilon_1, \epsilon_2) = 1$. دوم، اگردوسطر A برابرباشند، داریم

$$D(A) = A_{11}A_{12} - A_{12}A_{11} = 0.$$

سوم، اگر A' ماتریسی باشدکه ازتعویض سطرهای ماتریس Aی ۲ × ۲حاصل شده باشد، آنگاه $D(A') = -D(A)$؛ زیرا

$$
\begin{aligned}
D(A') &= A'_{11}A'_{22} - A'_{12}A'_{21} \\
&= A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11} \\
&= -D(A)\,.
\end{aligned}
$$

تعریف. تابع nخطی D را **متناوب** گوییم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

(الف) وقتی دو سطر A متساوی باشند، $D(A)=0$.

(ب) اگر ماتریس A' از تعویض دو سطر A حاصل شده باشد، آنگاه $D(A')=-D(A)$.

ذیلاً ثابت می‌کنیم هر تابع n خطی D که شرط (الف) را برآورد، خود به‌خود شرط (ب) را نیز برمی‌آورد. با این وجود، برای راحتی است که در تعریف تابع nخطی متناوب هردو خاصیت را گنجانده‌ایم. خواننده احتمالاً خود درخواهد یافت که اگر D درشرط (ب) صدق کند و دوسطر از سطرهای ماتریس A متساوی باشند، آنگاه $D(A)=-D(A)$. این مطلب ما را وسوسه می‌کند حکم کنیم که در این صورت D در شرط (الف) نیزصدق می‌کند. به‌عنوان مثال، اگر k هیأتی باشدکه در آن $1+1\neq 0$، این مطلب درست است، ولی درحالت عمومی (الف) نتیجه‌ای از (ب) نیست.

تعریف. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی، nعددی صحیح مثبت و D تابعی از ماتریسهای $n\times n$ برروی K در K باشد. گوییم D **تابع دترمینان** است، هرگاه D، nخطی و متناوب باشد و $D(I)=1$.

همچنان‌که قبلا نیز بیان‌کردیم، نهایتاً نشان خواهیم دادکه روی ماتریسهای $n\times n$ برروی K دقیقاً یك تابع دترمینان وجود دارد. این مطلب درمورد ماتریسهای 1×1، $A=[a]$ برروی K، بسادگی قابل مشاهده است. تابع D که با $D(A)=a$ داده شود، یك تابع دترمینان است وواضح است‌که این تنها تابع دترمینان روی ماتریسهای 1×1 است. ازاین گذشته درموقعیتی هستیم که تکلیف حالت $n=2$ را نیزمعلوم‌کنیم. درمثال ۳ نشان داده شدکه تابع

$$D(A)=A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}$$

یك تابع دترمینان است. بعلاوه، فرمولی‌که در مثال ۲ ارائه شد، نشان می‌دهدکه D تنها تابع دترمینان روی ماتریسهای 2×2 است. زیرانشان دادیم که به‌ازای هرتابع ۲خطی D

$$
\begin{aligned}
D(A) = {} & A_{11}A_{21}D(\epsilon_1,\epsilon_1)+A_{11}A_{22}D(\epsilon_1,\epsilon_2)+A_{12}A_{21}D(\epsilon_2,\epsilon_1)+ \\
& A_{12}A_{22}D(\epsilon_2,\epsilon_2).
\end{aligned}
$$

اگر D متناوب باشد، آنگاه

$$D(\epsilon_1, \epsilon_1) = D(\epsilon_2, \epsilon_2) = 0$$

و

$$D(\epsilon_2, \epsilon_1) = -D(\epsilon_1, \epsilon_2) = -D(I).$$

اگر D درشرط $D(I)=1$ نیز صدق کند، آنگاه

$$D(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

مثال ۴. هیأت F و تابع ۳خطی متناوب دلخواه D روی ماتریسهای 3×3 بر روی حلقهٔ چندجمله‌ای $F[x]$ را درنظر می‌گیریم.

فرض می‌کنیم

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{bmatrix}.$$

اگرسطرهای ماتریس همانی 3×3 را با ϵ_1، ϵ_2، و ϵ_3 نشان دهیم، آنگاه

$$D(A) = D(x\epsilon_1 - x^2\epsilon_3, \epsilon_2, \epsilon_1 + x^3\epsilon_3).$$

ازآنجاکه D، به‌عنوان تابعی از هرسطر، خطی است

$$\begin{aligned} D(A) &= xD(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1 + x^3\epsilon_3) - x^2D(\epsilon_3, \epsilon_2, \epsilon_1 + x^3\epsilon_3) \\ &= xD(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1) + x^4D(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) - x^2D(\epsilon_3, \epsilon_2, \epsilon_1) \\ &\qquad - x^5D(\epsilon_3, \epsilon_2, \epsilon_3). \end{aligned}$$

چون D متناوب است، داریم

$$D(A) = (x^4 + x^2)D(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3).$$

لم. فرض کنیم تابع ۲ خطی D با این خاصیت باشد که به‌ازای هرماتریس Aی 2×2 برروی K با سطرهای متساوی، $D(A)=0$. در این‌صورت D متناوب است.

اثبات. آنچه‌که باید نشان دهیم‌این است‌که اگر A ماتریسی 2×2 باشد و A' از تعویض سطرهای A حاصل بشود، آنگاه $D(A') = -D(A)$. اگرسطرهای A را α و β بنامیم، این بدان معنی است‌که باید نشان دهیم $D(\beta, \alpha) = -D(\alpha, \beta)$. چون D تابعی ۲خطی است

$$D(\alpha+\beta, \alpha+\beta) = D(\alpha, \alpha) + D(\alpha, \beta) + D(\beta, \alpha) + D(\beta, \beta).$$

بنابه‌فرض $D(\alpha+\beta, \alpha+\beta) = D(\alpha, \alpha) = D(\beta, \beta) = 0$. بنابراین

$$D(\alpha, \beta)+D(\beta, \alpha)=0. \square$$

لم. تابع nخطی D روی ماتریسهای $n\times n$ برروی K مفروض است. فرض کنیم D دارای این خاصیت باشدکه هرگاه دوسطرمجاور A متساوی باشند، آنگاه $D(A)=0$. در این صورت D متناوب است.

اثبات. باید نشان دهیم وقتی که دوسطر دلخواه A متساوی باشند آنگاه $D(A)=0$، ونیزوقتی که A' از تعویض دوسطر دلخواه A حاصل بشود آنگـاه $D(A')=-D(A)$. ابتدا، فرض می کنیم A' ازتعویض دوسطرمجاور A حاصل شده باشد. شایان توجه است که برهانی که دراثبات لم قبل به‌کار رفت شامل این حالت نیزمی‌شود و $D(A')=-D(A)$ را به‌دست می دهد.

اینك فرض می کنیم B ازتعویض سطرهای i و j ماتریس A با شرط $i<j$ حاصل شده باشد. بدیهی است می‌توانیم B را با چند تعویض متوالی سطرهای مجاور A به‌طور جفت‌جفت به‌دست آوریم. ازتعویض سطر i با سطر $(i+1)$ شروع می کنیم وکاررا ادامه می‌دهیم تااینکه سطرها بترتیب

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_j, \alpha_i, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n$$

درآیند. این عمل نیاز به $k=j-i$ تعویض سطرهای مجاور دارد. اکنون با استفاده از $(k-1)$ تعویض سطرهای مجاور، α_j را به‌مـکان iم منتقل می کنیم. بدین‌سان، B را با $k+(k-1)=2k-1$ تعویض سطرهای مجاور، از A به‌دست می‌آوریم. پس

$$D(B)=(-1)^{2k-1}D(A)=-D(A).$$

فرض می‌کنیم A ماتریسی $n\times n$ بـا دوسطر متساوی، مثلاً $\alpha_i=\alpha_j$ بـا $i<j$، باشد. اگر $j=i+1$، آنگاه A دارای دوسطرمجاورمتساوی است و $D(A)=0$. اگـر $j>i+1$، α_{i+1} و α_j را تعـویض می کنیم. ماتریس حاصـل؛ یعنی B، دارای دوسطر مجـاور متساوی است و لـذا $D(B)=0$. از سوی دیگـر، $D(B)=-D(A)$، پس $D(A)=0$. $\square$

تعریف. اگـر $n>1$ و A یك ماتـریس $n\times n$ بـر روی K بـاشد، ماتـریس $(n-1)\times(n-1)$ حاصل از حذف سطر iم و ستون jم ماتریس A را با $A(i|j)$ نشان می‌دهیم. اگـر D تابعی $(n-1)$ خطی و A ماتریسی $n\times n$ باشد، قـرار می‌گذاریم که $D_{ij}(A)=D[A(i|j)]$.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $n>1$ و D تابع $(n-1)$ خطی متناوبی روی ماتریسهای $(n-1)\times(n-1)$ بر روی K باشد. به‌ازای هر j، $1\leqslant j\leqslant n$، تابع E_j تعریف شده توسط

$$E_j(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}D_{ij}(A) \qquad (4\text{-}5)$$

تابع nخطی متناوبی روی ماتریسهای Aی $n\times n$ است. اگر D یك تابع دترمینان باشد، هر E_j نیز یك تابع دترمینان است.

اثبات. اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد، $D_{ij}(A)$ مستقل از iامین سطر A است. چون D، $(n-1)$ خطی است، واضح است که D_{ij} به‌عنوان تابعی از هر سطر، به‌جز سطر i، خطی است. بنابراین $A_{ij}D_{ij}(A)$ تابعی n خطی از A است. هر ترکیب خطی از توابع nخطی، خود nخطی است؛ ازاین‌رو، E_j هم nخطی‌است. برای اینکه‌ثابت‌کنیم E_j متناوب نیزهست، کافی است نشان‌دهیم هنگامی که A دارای دوسطرمجاورمتساوی باشد $E_j(A)=0$. فرض می‌کنیم $\alpha_k=\alpha_{k+1}$. اگر $i\neq k$ و $i\neq k+1$ ماتریس $A(i|j)$ دارای دوسطر متساوی است ولذا $D_{ij}(A)=0$. بنابراین

$$E_j(A)=(-1)^{k+j}A_{kj}D_{kj}(A)+(-1)^{k+1+j}A_{(k+1)j}D_{(k+1)j}(A).$$

چون $\alpha_k=\alpha_{k+1}$

$$A_{kj}=A_{(k+1)j} \quad \text{و} \quad A(k|j)=A(k+1|j).$$

دراین صورت مسلماً $E_j(A)=0$.

حال فرض می‌کنیم D یك‌تابع دترمینان باشد. اگر $I^{(n)}$ ماتریس همانی $n\times n$ باشد، آنگاه $I^{(n)}(j|j)$ ماتریس همانی $(n-1)\times(n-1)$، یعنی $I^{(n-1)}$، است. چون $I_{ij}^{(n)}=\delta_{ij}$ از (۴-۵) نتیجه می‌شود که

$$E_j(I^{(n)})=D(I^{(n-1)}). \qquad (5\text{-}5)$$

حال $D(I^{(n-1)})=1$، از این‌رو $E_j(I^{(n)})=1$ و E_j نیزیك تابع دترمینان است. □

نتیجه. اگر K حلقه‌ای جابجایی باعنصر همانی و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه حداقل یك تابع دترمینان روی $K^{n\times n}$ وجود دارد.

اثبات. قبلاً وجود یك تابع دترمینان روی ماتریسهای 1×1 برروی K، وحتی روی ماتریسهای 2×2 برروی K را نشان دادیم. قضیهٔ ۱ بوضوح نشان می‌دهد که با در دست داشتن یك تابع‌دترمینان روی ماتریسهای $(n-1)\times(n-1)$، چگونه‌می‌توان یك تابع‌دترمینان روی ماتریسهای $n\times n$ راساخت. حال، اثبات این‌نتیجه با استقرا تکمیل می‌شود. □

مثال ۵. فرض‌کنیم B ماتریسی 2×2 برروی K باشد و

$$|B|=B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21}.$$

دراین‌صورت، اگر D یك‌تابع دترمینان‌روی ماتریسهای 2×2 باشد، آنگاه $D(B)=|B|$.

نشان دادیم که این تابع روی $K^{2\times 2}$ یکتاست. گیریم

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

ماتریسی ۳ × ۳ برروی K باشد. اگر E_1، E_2، و E_3 را طبق (۵-۴) تعریف کنیم، آنگاه

$$E_1(A)= \quad A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{21}\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{31}\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} \quad (۵\text{-}۶)$$

$$E_2(A)= -A_{12}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{22}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{32}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} \quad (۵\text{-}۷)$$

$$E_3(A)= \quad A_{13}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} - A_{23}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} + A_{33}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}. \quad (۵\text{-}۸)$$

از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که E_1، E_2، و E_3 توابع دترمینان هستند. درواقع، چنانکه بعداً نشان خواهیم داد، $E_1=E_2=E_3$، ولی هنوز این موضوع حتی دراین حالت ساده هم روشن نیست. به‌هرصورت، این موضوع را مستقیماً با بسط هریك ازعبارات بالامی‌توان نشان داد. به‌جای انجام این‌کار، چند مثال خاص می‌آوریم.

(الف) فرض‌کنیم $K=R[x]$ و

$$A=\begin{bmatrix} x-1 & x^2 & x^3 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \end{bmatrix}.$$

دراین‌صورت

$$E_1(A)=(x-1)\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix}=(x-1)(x-2)(x-3),$$

$$E_2(A)=-\ x^2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix}+(x-2)\begin{vmatrix} (x-1) & x^3 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$=(x-۱)(x-۲)(x-۳),$$

و

$$E_۳(A)=x^۳\begin{vmatrix} ۰ & x-۲ \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x-۱ & x^۲ \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix}+(x-۳)\begin{vmatrix} x-۱ & x^۲ \\ ۰ & x-۲ \end{vmatrix}$$

$$=(x-۱)(x-۲)(x-۳).$$

(ب) گیریم $K=R$ و

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

دراین صورت

$$E_۱(A)=\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}=۱$$

$$E_۲(A)=-\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix}=۱$$

$$E_۳(A)=-\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix}=۱.$$

تمرین

۱. هریك از عبارات زیر، یك تابع D روی مجموعهٔ ماتریسهای ۳ × ۳ برروی هیئت اعداد حقیقی تعریف می‌کند. درکدام یك ازاین حالات D تابعی ۳خطی است؟

(الف) $D(A)=A_{۱۱}+A_{۲۲}+A_{۳۳}$؛
(ب) $D(A)=(A_{۱۱})^۲+۳A_{۱۱}A_{۲۲}$؛
(پ) $D(A)=A_{۱۱}A_{۱۲}A_{۳۳}$؛
(ت) $D(A)=A_{۱۳}A_{۲۲}A_{۳۲}+۵A_{۱۲}A_{۲۲}A_{۳۲}$؛
(ث) $D(A)=۰$؛
(ج) $D(A)=۱$.

۲. مستقیماً نشان دهید که سه تابع E_1، E_2، و E_3 تعریف شده توسط (۵-۶)، (۵-۷)، و (۵-۸) مساوی‌اند.

۳. حلقهٔ جابجایی K با عنصرهمانی مفروض است. اگر A ماتریسی 2×2 برروی K باشد، **الحاقی کلاسیک** A عبارت از ماتریس 2×2ی $\operatorname{adj} A$ است که به‌صورت

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود. اگر $\det$ تابع یکتای دترمینان روی ماتریسهای 2×2 برروی K را نمایش دهد، نشان دهید

(الف) $(\operatorname{adj} A)A = A(\operatorname{adj} A) = (\det A)I$؛

(ب) $\det(\operatorname{adj} A) = \det(A)$؛

(پ) $\operatorname{adj}(A^t) = (\operatorname{adj} A)^t$.

(A^t ترانهادهٔ A را نشان می‌دهد.)

۴. فرض کنید A ماتریسی 2×2 برروی هیأت F باشد. نشان دهید که A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$. اگر A معکوس‌پذیر باشد، فرمولی برای A^{-1} به‌دست آورید.

۵. فرض کنید A ماتریسی 2×2 برروی هیأت F باشد و $A^2 = 0$. نشان دهید به‌ازای هر اسکالر c داریم $\det(cI - A) = c^2$.

۶. زیرهیأت K از اعداد مختلط و عدد صحیح مثبت n مفروض‌اند. فرض کنید j_1، ...، j_n و k_1، ...، k_n اعداد صحیح مثبتی کوچکتر از یا متساوی با n باشند. به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ی A برروی K تعریف می‌کنیم

$$D(A) = A(j_1, k_1)A(j_2, k_2) \cdots A(j_n, k_n).$$

ثابت کنید D تابعی nخطی است اگر و تنها اگر اعداد صحیح j_1، ...، j_n متمایز باشند.

۷. فرض کنید K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد. نشان دهید تابع دترمینان روی ماتریسهای 2×2ی A برروی K به‌عنوان تابعی از ستونهای A تابعی است متناوب و ۲خطی.

۸. حلقهٔ جابجایی K با عنصرهمانی را درنظر بگیرید و تابع D روی ماتریسهای 3×3 برروی K را با قاعدهٔ

$$D(A)=A_{11}\det\begin{bmatrix}A_{22} & A_{23}\\ A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}-A_{12}\det\begin{bmatrix}A_{21} & A_{23}\\ A_{31} & A_{33}\end{bmatrix}$$
$$+A_{13}\det\begin{bmatrix}A_{21} & A_{22}\\ A_{31} & A_{32}\end{bmatrix}$$

تعریف کنید. نشان دهید D به‌عنوان تابعی از ستونهای A متناوب و ۳خطی است.

۹. فرض کنید K حلقه‌ای جابجایی با عنصرهمانی باشد و D تابع nخطی متناوبی روی ماتریسهای $n\times n$ برروی K. نشان دهید

(الف) هرگاه یکی از سطرهای A برابر ۰ باشد، $D(A)=0$.

(ب) هرگاه B از A با اضافه‌کردن مضربی اسکالری ازیك سطرA به سطری دیگر حاصل شده باشد، $D(B)=D(A)$.

۱۰. هیأتی چون F، یك ماتریس Aی ۳ × ۲ برروی F، وبردار (c_1, c_2, c_3) از F^3 تعریف شده توسط

$$c_1=\begin{vmatrix}A_{12} & A_{13}\\ A_{22} & A_{23}\end{vmatrix},\quad c_2=\begin{vmatrix}A_{13} & A_{11}\\ A_{23} & A_{21}\end{vmatrix},\quad c_3=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}.$$

داده شده‌اند. نشان دهید

(الف) ۲ = رتبهٔ (A) اگروتنها اگر $(c_1, c_2, c_3)\neq 0$؛

(ب) اگر A دارای رتبهٔ ۲ باشد، آنگاه (c_1, c_2, c_3) پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه معادلات $AX=0$ است.

۱۱. فرض کنید K حلقه‌ای جابجایی با عنصرهمانی و D تابع ۲خطی متناوبی روی ماتریسهای۲ × ۲ بررویK باشد. نشان‌دهیدبه‌ازای هرA، $D(A)=(\det A)D(I)$. حال ازاین نتیجه استفاده‌کنید (هیچ محاسبه‌ای روی درایه‌هاجایزنیست) ونشان‌دهید که به‌ازای هردوماتریس A و Bی ۲ × ۲ برروی K داریم

$$\det(AB)=(\det A)(\det B).$$

۱۲. یك هیأت F ویك تابع D روی ماتریسهای $n\times n$ برروی F (با مقادیر درF)داده شده‌اند. فرض کنید به‌ازای‌هر A وB، $D(AB)=D(A)D(B)$. نشان‌دهید که‌یا به‌ازای هر A داریم $D(A)=0$ یا $D(I)=1$. درحالت اخیر، نشان دهید هنگامی که A معکوس‌پذیر باشد آنگاه $D(A)\neq 0$.

۱۳. فرض کنید R هیأت اعداد حقیقی باشد و تابع D روی ماتریسهای ۲ × ۲ برروی R با مقادیر در R چنان باشد که به‌ازای همهٔ Aها و Bها، $D(AB)=D(A)D(B)$.
همچنین فرض کنید

$$D\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \neq D\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

مطالب زیررا اثبات کنید:

(الف) $D(0)=0$؛

(ب) هرگاه $A^2=0$ آنگاه $D(A)=0$؛

(پ) هرگاه B از تعویض سطرها (یا ستونهای) A حاصل شده باشد، آنگاه $D(B)=-D(A)$؛

(ت) هرگاه یك سطر (یا یك ستون) A صفر باشد آنگاه $D(A)=0$؛

(ث) هرگاه A منفرد باشد آنگاه $D(A)=0$.

۱۴. فرض کنید A ماتریسی ۲ × ۲ برروی هیأت F باشد. دراین صورت، مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای به‌صورت $f(A)$ که در آن f یك چندجمله‌ای برروی F است حلقه‌ای است جابجایی با عنصر همانی که آن را با K نمایش می‌دهیم. اگر B ماتریسی ۲ × ۲ برروی K باشد، آنگاه دترمینان B، ماتریسی ۲ × ۲ برروی F و به‌صورت $f(A)$ است. فرض کنید I ماتریس همانی ۲ × ۲ برروی F و B ماتریس ۲ × ۲ برروی K به‌این صورت باشد که

$$B=\begin{bmatrix} A-A_{11}I & -A_{12}I \\ -A_{21}I & A-A_{22}I \end{bmatrix}.$$

نشان دهید $\det B=f(A)$، که در آن $f=x^2-(A_{11}+A_{22})x+\det A$، و همچنین نشان دهید $f(A)=0$.

۳.۵. جایگشتها و یکتایی دترمینان

دراین بخش، یکتایی تابع دترمینان روی ماتریسهای $n\times n$ برروی K را اثبات‌می کنیم. اثبات، به‌طورکاملاً طبیعی، ما را به‌درنظر گرفتن جایگشتها وبرخی از خواص بنیانی آنها رهنمون می کند.

فرض کنیم D تابع nخطی متناوبی روی ماتریسهای $n\times n$ برروی K باشد. ماتریس Aی $n\times n$ برروی K با سطرهای α_1، α_2، . . . ، α_n را درنظر می گیریم. اگرسطرهای ماتریس همانی $n\times n$ برروی K را با ϵ_1، ϵ_2، . . . ، ϵ_n نشان دهیم، داریم

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}A(i,\ j)\epsilon_j,\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{۹-۵}$$

ازاین‌رو

$$D(A)=D\ (\sum_j A(1,\ j)\epsilon_j,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$$
$$=\sum_j A(1,\ j)D(\epsilon_j,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n).$$

اکنون اگر $\sum_k A(2,\ k)\epsilon_k$ را جایگزین α_2 کنیم، می‌بینیم که

$$D(\epsilon_j,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)=\sum_k A(2,\ k)D(\epsilon_j,\ \epsilon_k,\ \cdots,\ \alpha_n).$$

پس

$$D(A)=\sum_{j,\ k}A(1,\ j)A(2,\ k)D(\epsilon_j,\ \epsilon_k,\ \cdots,\ \alpha_n).$$

سپس در $D(\epsilon_j,\ \epsilon_k,\ \cdots,\ \alpha_n)$، $\sum A(3,\ l)\epsilon_l$ را به‌جای α_3 می‌گذاریم، والی آخـر. سرانجام برای $D(A)$ به‌عبارتی پیچیده ولی از نظرتئوری مهم دست می‌یابیم وآن:

$$D(A)=\sum_{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n}A(1,\ k_1)A(2,\ k_2)\ \cdots\ A(n,\ k_n)\times$$
$$D(\epsilon_{k_1},\ \epsilon_{k_2},\ \cdots,\ \epsilon_{k_n}). \tag{۱۰-۵}$$

در (۵-۱۰) مجموع به‌ازای همهٔ دنباله‌های $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ از اعداد صحیح‌مثبت نابیشتر از n محاسبه می‌شود. این مطلب نشان می‌دهدکه D مجموعی متناهی از توابع‌از نوع توصیف شده توسط (۵-۲) است. باید توجه داشت‌کـه (۵-۱۰) صرفـاً نتیجه‌ای از فرض nخطی بودن D است، ونیزاینکه حالت خاصی از (۵-۱۰) درمثال ۲ به‌دست آمد. چون D متناوب است

$$D(\epsilon_{k_1},\ \epsilon_{k_2},\ \cdots,\ \epsilon_{k_n})=0$$

با این شرط‌که دو نمایهٔ k_i متساوی باشند. دنبالهٔ $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ از اعداد صحیح مثبت نابیشتر از n با این خاصیت‌که هیچ دوتایی از k_iها متساوی نباشند، **یك جـایگشت از درجـهٔ** n نامیده می‌شود. بنابراین، در (۵-۱۰)، ضرورت دارد فقط عمل جمع، برروی دنباله‌هایی صورت گیردکه جایگشتهایی از درجهٔ n هستند.

چون هردنبالهٔ متناهی یا هرnتایی تابعی‌است تعریف شده روی اولین n عددصحیح مثبت، هـرجایگشت از درجـهٔ n را می‌تـوان به‌عنوان تابعـی یـك به‌یك از مجمـوعهٔ $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ به‌روی خـودش تعـریف کـرد. چنین تابعـی، مثـلاً σ، با nتایـی $(\sigma1,\ \sigma2,\ \cdots,\ \sigma n)$ متناظـر است و از این‌رو چیزی جـزقاعده‌ای برای ترتیب‌بندی

اعداد ۱، ۲، ...، n به‌یك روش کاملاً خوش تعریف نیست.

اگر D تابع nخطی متناوبی باشد و A ماتریسی $n\times n$ برروی K، آنگاه داریم

$$D(A)=\sum_{\sigma} A(1\,,\sigma 1)\cdots A(n,\sigma n)D(\epsilon_{\sigma 1},\cdots,\epsilon_{\sigma n}) \qquad (۵\text{-}۱۱)$$

که درآن مجموع به‌ازای جایگشتهای متمایز σ از درجهٔ n محاسبه می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که

$$D(\epsilon_{\sigma 1},\cdots,\epsilon_{\sigma n})=\pm D(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n) \qquad (۵\text{-}۱۲)$$

که در آن علامت $\pm$ تنها به‌جایگشت σ وابسته است. دلیل این نکته به‌شرح زیر است. دنبالهٔ $(\sigma 1,\sigma 2,\cdots,\sigma n)$ را می‌توان از دنبالهٔ $(1,2,\cdots,n)$ با تعدادی متناهی تعویض جفتی عناصر به‌دست آورد. مثلاً، اگر $1\neq\sigma 1$، می‌توان جای ۱ و $\sigma 1$ را عوض کرد و $(\sigma 1,\cdots,1,\cdots)$ را به‌دست آورد. با ادامهٔ این راه، پس از حداکثر nبار تعویض جفتهایی ازاین نوع به‌دنبالهٔ $(\sigma 1,\cdots,\sigma n)$ دست می‌یابیم. چون D متناوب است، هربارکه دوسطر ϵ_i و ϵ_j را تعویض کنیم، علامت مقدارآن هم تغییرمی‌کند. پس، اگر از $(1,2,\cdots,n)$ با m تعویض از جفتهای (i,j) به $(\sigma 1,\sigma 2,\cdots,\sigma n)$ برسیم، داریم

$$D(\epsilon_{\sigma 1},\cdots,\epsilon_{\sigma n})=(-1)^m D(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n).$$

درحالت خاص، اگر D یك تابع دترمینان باشد

$$D(\epsilon_{\sigma 1},\cdots,\epsilon_{\sigma n})=(-1)^m \qquad (۵\text{-}۱۳)$$

که درآن m تنها به σ وابسته است و نه به D. بنابراین، همهٔ توابع دترمینان، به‌ماتریسی با سطرهای $\epsilon_{\sigma 1}$، ...، $\epsilon_{\sigma n}$ یك مقدار تخصیص می‌دهند، واین مقدار یا ۱ است یا ۱ −.

حکمی بنیانی درمورد جایگشتها به‌شرح زیراست: اگر σ جایگشتی از درجهٔ n باشد، می‌توان از دنبالهٔ $(1,2,\cdots,n)$، با تعویضهایی متوالی ازجفتها، به‌دنبالهٔ $(\sigma 1,\sigma 2,\cdots,\sigma n)$ رسید. گرچه این امرمی‌تواند به‌طرق گوناگون انجام شود، ولی بدون توجه به‌چگونگی انجام آن، تعداد تعویضهای به‌کاررفته یا همواره زوج است و یا همواره فرد. دراین صورت، جایگشت بترتیب **زوج** یا **فرد** نامیده می‌شود. **علامت** جایگشت σ توسط

$$\operatorname{sgn}\sigma=\begin{cases} 1 & \text{هرگاه } \sigma \text{ زوج باشد} \\ -1 & \text{هرگاه } \sigma \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

تعریف می‌شود. دراینجا نماد «۱» عدد صحیح ۱ را نشان می‌دهد.

ذیلاً نشان خواهیم دادکه این خاصیت بنیانی‌جایگشتها را می‌توانیم از مطالبی که هم‌اکنون درمورد توابع دترمینان می‌دانیم نیز به‌دست آوریم. اما، عجالتاً این مطلب را

دانسته فرض می‌کنیم. پس، عدد صحیح m موجود در (۵-۱۳) همواره زوج است هرگاه σ جایگشتی زوج باشد، وهمواره فرد است هرگاه σ جایگشتی فرد باشد. دراین‌صورت، به‌ازای هرتابع nخطی متناوب D داریم

$$D(\epsilon_{\sigma 1}, \cdots, \epsilon_{\sigma n}) = (\operatorname{sgn} \sigma) D(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$$

وبا استفاده از (۵-۱۱) داریم

$$D(A) = \left[\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) A(1, \sigma 1) \cdots A(n, \sigma n) \right] D(I). \quad (۵\text{-}۱۴)$$

بدیهی است که I ماتریس همانی $n \times n$ را نشان می‌دهد.

از (۵-۱۴) می‌توان دریافت که دقیقاً یك تابــع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ برروی K وجود دارد. هرگاه این تابع را با det نمایش دهیم، داریم

$$\det (A) = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) A(1, \sigma 1) \cdots A(n, \sigma n) \qquad (۵\text{-}۱۵)$$

که در آن مجموع به‌ازای جایگشتهای متمایز σ از درجهٔ n محاسبه می‌شود. این مطالب رسماً به‌صورت زیرخلاصه می‌شوند.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی و nعددی صحیح مثبت باشد. دقیقاً یك تابع دترمینان روی مجموعهٔ ماتریسهای $n \times n$ برروی K وجود دارد، و این تابع همان تابع det تعریف شده در (۵-۱۵) است. اگر D تابــع nخطی متناوبی روی $K^{n \times n}$ باشد، آنگاه به‌ازای هرماتریس Aی $n \times n$

$$D(A) = (\det A) D(I).$$

این همان قضیه‌ای است که درجستجویش بودیم، اما کمبودی در اثبات آن وجـود دارد. این کمبود عبارت از اثبات این مطلب است که به‌ازای هرجایگشت مفروض σ وقتی با تعویض جفتها از $(1, 2, \cdots, n)$ به $(\sigma 1, \sigma 2, \cdots, \sigma n)$ برسیم، تعداد تعویضها یا همواره زوج است یا همواره فرد. ایــن حکم بنیانی مربوط به ترکیبات، بدون هرگونه رجوعی به‌دترمینانها قابل اثبات است؛ با ایــن وجود، مایلیم نشان دهیم کــه چگونه این واقعیت از وجود یك تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ نتیجه می‌شود.

فرض کنیم K حلقهٔ اعداد صحیح باشد و D تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ بر روی K. σ را جایگشتی از درجهٔ n می‌گیریم و فرض می‌کنیم از $(1, 2, \cdots, n)$ با m تعویض از جفتهای (i, j)، $i \neq j$، به $(\sigma 1, \sigma 2, \cdots, \sigma n)$ برسیم. چنانکــه در (۵-۱۳) نشان دادیم

$$(-1)^m = D(\epsilon_{\sigma 1}, \cdots, \epsilon_{\sigma n})$$

یعنی، عدد $(-1)^m$ باید مقدار D روی ماتریس با سطرهای $\epsilon_{\sigma 1}, \cdots, \epsilon_{\sigma n}$ باشد. اگر

$$D(\epsilon_{\sigma 1}, \cdots, \epsilon_{\sigma n}) = 1$$

آنگاه، m لزوماً زوج است و اگر

$$D(\epsilon_{\sigma 1}, \cdots, \epsilon_{\sigma n}) = -1$$

آنگاه، m حتماً فرد است.

چون فرمولی صریح برای دترمینان ماتریسهای $n \times n$ در دست هست واین فرمول حاوی جایگشتهای از درجهٔ n است، ایـن بخش را بـا چند مشاهدهٔ دیگـر در مـورد جایگشتها به‌پایان می‌رسانیم. ابتدا، متذکر می‌شویم که دقیقاً $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ جایگشت ازدرجهٔ n وجود دارد. زیرا، اگر σ چنین جایگشتی باشد، n امکان برای انتخاب $\sigma 1$ وجود دارد؛ وقتی این انتخاب صورت گرفت، $(n-1)$ انتخاب برای $\sigma 2$ موجـود است، سپس $(n-2)$ انتخاب برای $\sigma 3$، و الی‌آخر. بنا براین

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

جایگشت مانند σ وجود دارد. پس، فرمول (۵-۱۵) برای $\det(A)$، این‌تابع را به‌صورت مجموعی از $n!$ جمله، یك جمله به‌ازای هر جایگشت ازدرجهٔ n، به‌دست می‌دهد. هرجملهٔ مفروض حاصل ضربی چون

$$A(1, \sigma 1) \cdots A(n, \sigma n)$$

از n درایهٔ A است، یك درایه از هر سطر و یکی از هر ستون با علامتی «$+$» یا «$-$» برحسب اینکه σ جایگشتی زوج یا جایگشتی فرد باشد.

وقتی جایگشتها به‌عنوان توابعی یك بـه‌یك از مجموعهٔ $\{1, 2, \cdots, n\}$ به‌روی خودش محسوب شوند، تعریف یك نوع ضرب برای جایگشتها میسر می‌شود. حاصلضرب σ و τ بسادگی می‌تواند تابع مرکب $\sigma\tau$ با تعریف

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$$

باشد. اگر ϵ جایگشت‌همانی، $\epsilon(i) = i$، رانشان دهد، آنگاه هر σ دارای یك معکوس σ^{-1} است که

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \epsilon.$$

این‌مشاهدات را می‌توان با این‌گفته که مجموعهٔ جایگشتهای ازدرجهٔ n تحت عمل ترکیب یك‌گروه است خلاصه‌کرد. این‌گروه غالباً **گروه متقارن درجهٔ n** نامیده می‌شود.

ازدیدگاه حاصل ضرب جایگشتها، خاصیت بنیانی علامت هر جایگشت این‌است که

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau). \qquad (5\text{-}16)$$

به‌بیان دیگر، $\sigma\tau$ جایگشتی زوج است هرگاه σ و τ یا هر دو زوج باشند یا هر دو فرد، درحالی‌که $\sigma\tau$ فرد است هرگاه یکی از دوجایگشت فرد و دیگری زوج باشد. این‌مطلب

را می‌توان از تعریف علامت، برحسب تعویضهای متوالی جفتهای (i, j) دریافت. با این وجود، نشان دادن چگونگی حصول رابطهٔ $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)$ از یك خاصیت بنیانی دترمینانها ممکن است آموزنده هم باشد.

گیریم K حلقهٔ اعداد صحیح و σ و τ جایگشتهایی از درجهٔ n باشند. $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ را سطرهای ماتریس همانی $n \times n$ بر روی K می‌گیریم و فرض می‌کنیم A ماتریس با سطرهای $\epsilon_{\tau 1}, \cdots, \epsilon_{\tau n}$، و B ماتریس با سطرهای $\epsilon_{\sigma 1}, \cdots, \epsilon_{\sigma n}$ باشد. iمین سطر A دقیقاً شامل یك درایهٔ غیرصفر، یعنی همان ۱ واقع در ستون τi است. از اینجا بسادگی مشاهده می‌شود که $\epsilon_{\sigma\tau i}$ همان iمین سطر ماتریس حاصلضرب AB است. حال

$$\det(A) = \operatorname{sgn}\tau ،\ \det(B) = \operatorname{sgn}\sigma ،\ \text{و}\ \det(AB) = \operatorname{sgn}(\sigma\tau).$$

از این‌رو، بلافاصله پس از اثبات قضیهٔ زیر داریم $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)$.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی، و A و B ماتریسهایی $n \times n$ بر روی K باشند. در این صورت

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

اثبات. B را ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی K می‌گیریم و به‌ازای هر ماتریس Aی $n \times n$ تعریف می‌کنیم $D(A) = \det(AB)$. اگر سطرهای A را با $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ نشان دهیم، آنگاه

$$D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \det(\alpha_1 B, \cdots, \alpha_n B).$$

در اینجا $\alpha_i B$ ماتریسی $1 \times n$ را نشان می‌دهد که حاصلضرب ماتریس $1 \times n$ی α_j و ماتریس $n \times n$ی B است. از آنجا که

$$(c\alpha_i + \alpha'_i)B = c\alpha_i B \times \alpha'_i B$$

و $\det$ تابعی n خطی است، بسادگی دیده می‌شود که D تابعی n خطی است. اگر $\alpha_i = \alpha_j$، آنگاه $\alpha_i B = \alpha_j B$، و چون $\det$ متناوب است

$$D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0.$$

از این‌رو، D نیز متناوب است. پس D یك تابع n خطی متناوب است، و بنا بر قضیهٔ ۲

$$D(A) = (\det A) D(I).$$

اما $D(I) = \det(IB) = \det B$، بنابراین

$$\det(AB) = D(A) = (\det A)(\det B). \quad \square$$

حکم $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)$، تنها یکی از چند نتیجهٔ قضیهٔ ۳ است. بعضی از این نتیجه‌ها را در بخش بعد ملاحظه خواهیم کرد.

تمرین

۱ . اگر K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی و A ماتریسی بر روی K به‌صورت

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

باشند، نشان دهید $\det A=0$.

۲ . ثابت کنید دترمینان ماتریس واندرموند

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

برابر $(b-a)(c-a)(c-b)$ است.

۳ . شش جایگشت درجهٔ ۳ را به‌طور صریح بنویسید و مشخص کنید کدام فرد وکدام زوج است، وآنها را در ارائهٔ فرمول کامل (۵-۱۵) برای دترمینان یك ماتریس 3×3 به‌کار ببرید.

۴ . فرض کنید σ و τ جایگشتهایی از درجهٔ ۴ باشند که با $\sigma 1=2$، $\sigma 2=3$، $\sigma 3=4$، $\sigma 4=1$، $\tau 1=3$، $\tau 2=1$، $\tau 3=2$، $\tau 4=4$ تعریف شده‌اند.
(الف) σ فرد است یا زوج؟ τ فرد است یا زوج؟
(ب) $\sigma\tau$ و $\tau\sigma$ را بیابید.

۵ . اگر A ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری بر روی یك هیأت باشد، نشان دهید $\det A\neq 0$.

۶ . A ماتریسی 2×2 برروی یك هیأت است. ثابت کنید $\det(I+A)=1+\det A$ اگر و تنها اگر $\operatorname{tr}(A)=0$.

۷ . ماتریس $n\times n$ ای مانند A **مثلثی** نامیده می‌شود، هرگاه $A_{ij}=0$ وقتی که $i>j$، یا هرگاه $A_{ij}=0$ وقتی که $i<j$. ثابت کنید که دترمینان هر ماتریس مثلثی برابر حاصل ضرب $A_{11}A_{22}\cdots A_{nn}$ از درایه‌های قطری آن است.

۸ . فرض کنید A ماتریسی 3×3 بر روی هیأت اعداد مختلط باشد. ماتریس $xI-A$ با درایه‌های چندجمله‌ای را تشکیل می‌دهیم؛ درایهٔ i,j این ماتریس چندجمله‌ای

$\delta_{ij}x-A_{ij}$ است. اگر $f=\det(xI-A)$، نشان دهید f یک چندجمله‌ای تکین درجهٔ ۳ است. اگر به‌ازای اعداد مختلط c_1، c_2، و c_3 را داشته باشیم

$$f=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$$

ثابت کنید

$$c_1+c_2+c_3=\operatorname{tr}(A) \quad \text{و} \quad c_1c_2c_3=\det A.$$

۹ . فرض کنید n عددی صحیح مثبت و F یك هیأت باشد. اگر σ جایگشتی از درجهٔ n باشد، ثابت کنید که تابع

$$T(x_1,\cdots,x_n)=(x_{\sigma 1},\cdots x_{\sigma n})$$

یك عملگر خطی معکوس‌پذیر روی F^n است.

۱۰. فرض کنید F یك هیأت، n عددی صحیح مثبت، و S مجموعهٔ ماتریسهای $n\times n$ بر روی F باشد. فرض کنید V فضای برداری همهٔ توابع از S در F، و W مجموعهٔ توابع n خطی متناوب روی S باشد. ثابت کنید W زیرفضایی از V است. بعد W چند است؟

۱۱. عملگر خطی T روی F^n داده شده است. تابع D_T را به‌صورت

$$D_T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\det(T\alpha_1,\cdots,T\alpha_n).$$

تعریف می‌کنیم.

(الف) نشان دهید D_T یك تابع n خطی متناوب است.

(ب) اگر

$$c=\det(T\epsilon_1,\cdots,T\epsilon_n)$$

نشان دهید که به‌ازای هر n بردار داده شدهٔ α_1،…،α_n داریم

$$\det(T\alpha_1,\cdots,T\alpha_n)=c\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_n).$$

(پ) اگر $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتبی برای F^n و A ماتریس T در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ باشد، نشان دهید $\det A=c$.

(ت) فکر می‌کنید چه نامی برای اسکالر c مناسب است؟

۱۲. اگر σ جایگشتی از درجهٔ n و A ماتریسی $n\times n$ بر روی هیأت F با بردارهای سطری α_1،…،α_n باشد، فرض کنید $\sigma(A)$ ماتریس $n\times n$ با بردارهای سطری $\alpha_{\sigma 1}$،…،$\alpha_{\sigma n}$ را نمایش دهد.

(الف) ثابت کنید $\sigma(AB)=\sigma(A)B$ و در حالت خاص $\sigma(A)=\sigma(I)A$.

(ب) اگر T عملگر خطی تمرین ۹ باشد، ثابت‌کنید ماتریس T در پایهٔ مرتب استانده برابر $\sigma(I)$ است.
(پ) آیا $\sigma^{-1}(I)$ ماتریس $\sigma(I)$ است؟
(ت) آیا این درست است که $\sigma(A)$ با A متشابه است؟

۱۳. ثابت‌کنید تابع علامت روی جایگشتها به‌مفهوم زیر یکتاست. اگر f تابعی باشدکه به‌هرجایگشت درجهٔn یك عددصحیح راتخصیص بدهدواگر $f(\sigma\tau)=f(\sigma)f(\tau)$، آنگاه f یا متحداً ۰ است یا متحداً ۱، و یا تابع علامت است.

۴.۵. چند خاصیت دیگر دترمینان

در این بخش به‌شرح برخی از خواص مفید تابع دترمینان روی ماتریسهای $n\times n$ می‌پردازیم. شاید اولین نکته‌ای را که باید خاطرنشان‌کنیم، مطلب ذیل باشد. در بحث $\det A$، سطرهای A نقش ممتازی را ایفا کردند. چون تفاوتی اساسی بین سطرها و ستونها وجود ندارد، می‌توان انتظار داشت‌که $\det A$ تابع n خطی متناوبی از ستونهای A هم باشد. در واقع چنین است و برای اثبات‌آن‌کافی است نشان دهیم

$$\det(A^t)=\det(A) \qquad (۱۷\text{-}۵)$$

که درآن A^t نمایشگر ترانهادهٔ A است.

اگر σ جایگشتی از درجهٔ n باشد،

$$A^t(i,\ \sigma i)=A(\sigma i,\ i).$$

در این صورت بنا به‌عبارت (۵-۱۵) داریم

$$\det(A^t)=\sum_\sigma(\operatorname{sgn}\sigma)A(\sigma 1,1)\cdots A(\sigma n,n).$$

وقتی‌که $i=\sigma^{-1}j$ داریم $A(\sigma i\ ,i)=A(j,\ \sigma^{-1}j)$. از این‌رو

$$A(\sigma 1,\ 1)\cdots A(\sigma n,\ n)=A(1,\sigma^{-1}1)\cdots A(n,\ \sigma^{-1}n).$$

چون $\sigma\sigma^{-1}$ جایگشت همانی است،

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}(\sigma) \quad \text{یا} \quad (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\sigma^{-1})=1$$

بعلاوه، چون σ روی همهٔ جایگشتهای درجهٔ n تغییر می‌کند، σ^{-1} نیز چنین تغییر می‌کند. بنابراین

$$\begin{aligned}\det(A^t)&=\sum_\sigma(\operatorname{sgn}\sigma^{-1})A(1,\ \sigma^{-1}1)\cdots A(n,\ \sigma^{-1}n)\\&=\det A\end{aligned}$$

و (۵-۱۷) اثبات می‌شود.

درموارد معینی به‌محاسبهٔ دترمینانهای مشخصی نیازمندیم. هنگامی که این امر ضرورت یابد، غالباً استفاده از حکم زیر مفید است. اگر B از A با افزودن مضربی از یک سطر A به سطری دیگر (یا مضربی از یک ستون به ستونی دیگر) حاصل شود، آنگاه

$$\det B=\det A. \tag{۱۸-۵}$$

ما این حکم را در مورد سطرها اثبات می‌کنیم. فرض کنیم B از A با افزودن $c\alpha_j$ به α_i، با فرض $i<j$، حاصل بشود. چون $\det$، به‌عنوان تابعی از iمین سطر، خطی است

$$\begin{aligned}\det B&=\det A+c\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n)\\&=\det A.\end{aligned}$$

حکم مفید دیگری هم به‌شرح زیر است. فرض کنیم ماتریسی $n\times n$ به‌صورت بلوکی

$$\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & C\end{bmatrix}$$

داده شده باشد. در اینجا A ماتریسی $r\times r$، C ماتریسی $s\times s$، B ماتریسی $r\times s$، و 0 ماتریس صفر $s\times r$ را نشان می‌دهد. در این صورت

$$\det\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & C\end{bmatrix}=(\det A)(\det C). \tag{۱۹-۵}$$

برای اثبات این مطلب، تعریف می‌کنیم

$$D(A,B,C)=\det\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & C\end{bmatrix}.$$

اگر A و B را ثابت نگاهداریم، آنگاه D به‌عنوان تابعی از سطرهای C متناوب و s خطی است. از این‌رو، بنا بر قضیهٔ ۲

$$D(A,B,C)=(\det C)D(A,B,I).$$

که درآن I ماتریس همانی $s\times s$ است. با تفریق مضاربی از سطرهای I ازسطرهای B و به‌کار بردن حکم پیش از رابطهٔ (۱۸-۵)، داریم

$$D(A,B,I)=D(A,0,I).$$

حال $D(A,0,I)$ به‌عنوان تابعی از سطرهای A مسلماً متناوب و r خطی است. ازاین‌رو

$$D(A,0,I)=(\det A)D(I,0,I).$$

اما، $D(I,0,I)=1$، پس

$$D(A,\ B,\ C)=(\det C)D(A,\ B,\ I)$$
$$=(\det C)D(A,\ 0,\ I)$$
$$=(\det C)(\det A).$$

با برهانی از همین نوع یا با استفاده از ترانهاده‌ها داریم

$$\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}=(\det A)(\det C). \qquad (۵-۲۰)$$

مثال ۶. فرض‌کنیم K هیأت اعدادگویا باشد وبخواهیم دترمینان ماتریس 4×4

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

را محاسبه‌کنیم. با تفریق مضربهای مناسب سطر ۱ از سطرهای ۲، ۳، و ۴ ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

را به‌دست می‌آوریم و می‌دانیم‌که بنا بر (۵-۱۸) این ماتریس همان دترمینان ماتریس A را دارد. اگر ۵/۴ سطر ۲ را از سطر ۳، و سپس ۳/۴ سطر ۲ را از سطر ۴ کم‌کنیم، داریم

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

و بار دیگر $\det B=\det A$. از صورت بلوکی B برمی‌آیدکه

$$\det A=\det B=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=4(32)=128.$$

حال فرض‌کنیم $n>1$ و A ماتریسی $n\times n$ بر روی K باشد. در قضیهٔ ۱ با مفروض بودن تابع دترمینان روی ماتریسهای $(n-1)\times(n-1)$ نشان دادیم که یك تابع دترمینان روی ماتریسهای $n\times n$ چگونه ساخته می‌شود. حال که یکتایی تابع دترمینان را ثابت کرده‌ایم، فرمول (۵-۴) مطلب زیر را بیان می‌کند. اگر هر نمایهٔ ستونی دلخواه j را ثابت نگاهداریم.

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}\det A(i|j).$$

اسکالر $(-1)^{i+j}\det A(i|j)$ معمولاً **همسازهٔ** i و j ماتریس A یا همسازهٔ درایهٔ i و j ماتریس A نامیده می‌شود. در این صورت، فرمول فوق برای $\det A$ بسط $\det A$ به‌وسیلهٔ همسازه‌های ستون jم (یا گاهی بسط به‌وسیلهٔ کهادهای ستون jم) نامیده می‌شود. اگر بنویسیم

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}\det A(i|j)$$

آنگاه از فرمول فوق برمی‌آید که به‌ازای هر j

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}A_{ij}C_{ij}.$$

دراینجا همسازهٔ C_{ij}، $(-1)^{i+j}$ برابر دترمینان ماتریس $(n-1)\times(n-1)$ حاصل از حذف سطر iم و ستون jم ماتریس A است.

اگر $j\neq k$، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n}A_{ik}C_{ij}=0.$$

زیرا، اگر kمین ستون A را جایگزین jمین ستون آن بکنیم، وماتریس حاصل را B بنامیم، آنگاه B دارای دو ستون متساوی است و لذا $\det B=0$. چون $B(i|j)=A(i|j)$، داریم

$$\begin{aligned}0&=\det B\\&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}B_{ij}\det B(i|j)\\&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ik}\det A(i|j)\\&=\sum_{i=1}^{n}A_{ik}C_{ij}.\end{aligned}$$

این خواص همسازه‌ها را می‌توان به‌صورت

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik}C_{ij}=\delta_{jk}\det A \qquad (۵-۲۱)$$

خلاصه کرد.

ماتریس $n\times n$، $\mathrm{adj}A$، که ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌های A است، **الحاقی کلاسیک** A نامیده می‌شود. بدین نحو

$$(\mathrm{adj}A)_{ij}=C_{ji}=(-1)^{i+j}\det A(j|i). \qquad (۵-۲۲)$$

فرمول (۵-۲۱) را می‌توان در معادلهٔ ماتریسی

$$(\mathrm{adj}A)A=(\det A)I \qquad (۵-۲۳)$$

خلاصه کرد.

حال مایلیم که تساوی $A(\mathrm{adj}A)=(\det A)I$ را هم اثبات کنیم. چون $A^t(i|j)=A(j|i)^t$، داریم

$$(-1)^{i+j}\det A^t(i|j)=(-1)^{j+i}\det A(j|i)$$

که به‌طور ساده بیانگر این مطلب است که همسازهٔ j , i ماتریس A^t همان همسازهٔ i , j، A است. بنابراین

$$\mathrm{adj}(A^t)=(\mathrm{adj}A)^t. \qquad (۵-۲۴)$$

با به‌کار بستن (۵-۲۳) بر A^t، به‌دست می‌آوریم

$$(\mathrm{adj}A^t)A^t=(\det A^t)I=(\det A)I$$

و با ترانهش آن داریم

$$A(\mathrm{adj}A^t)^t=(\det A)I.$$

حال با استفاده از (۵-۲۴) به آنچه که می‌خواستیم دست می‌یابیم:

$$A(\mathrm{adj}A)=(\det A)I. \qquad (۵-۲۵)$$

نظیر مورد ماتریسهای بر روی هیأتها، ماتریس $n\times n$ ی A بر روی K، **معکوس‌پذیر بر روی** K نامیده می‌شود هرگاه ماتریسی $n\times n$ چون A^{-1} با درایه‌های متعلق به K یافت شود به‌طوری که $AA^{-1}=A^{-1}A=I$. اگر چنین ماتریس معکوسی موجود باشد، یکتاست؛ زیرا، همان برهانی که در فصل ۱ به‌کار رفت نشان می‌دهد که اگر $BA=AC=I$، آنگاه $B=C$. فرمولهای (۵-۲۳) و (۵-۲۵)، دربارهٔ معکوس‌پذیری ماتریسهای بر روی K مطالب زیر را به‌دست می‌دهند. اگر عنصر $\det A$ در K معکوس ضربی داشته باشد، آنگاه A معکوس‌پذیر است و $A^{-1}=(\det A)^{-1}\mathrm{adj}A$ یکتا معکوس A است. بعکس، بسادگی دیده می‌شود که اگر A بر روی K معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $\det A$ در K معکوس‌پذیر است. زیرا، اگر $BA=I$، داریم

$$1=\det I=\det(AB)=(\det A)(\det B).$$

حاصل آنچه که ثابت کرده‌ایم قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۴. فرض کنیم A ماتریسی $n\times n$ بر روی K باشد. در این صورت A بر روی K معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $\det A$ در K معکوس‌پذیر باشد. وقتی A معکوس‌پذیر باشد، یکتا معکوس A عبارت است از

$$A^{-1}=(\det A)^{-1}\operatorname{adj} A.$$

بخصوص، هرماتریس $n\times n$ بر روی یك هیأت، معکوس‌پذیر است اگرو تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد.

باید خاطرنشان کنیم که این معیار دترمینانی برای معکوس‌پذیری، ثابت می کند که هر ماتریس $n\times n$ با معکوسی چپ یا راست، معکوس‌پذیر است. این اثبات کاملاً مستقل از اثباتی است که در فصل ۱ برای ماتریسهای بر روی هیأتها ارائه کردیم. مایلیم مفهوم معکوس‌پذیری ماتریسهای با درایه‌های چندجمله‌ای را نیز خاطرنشان کنیم. اگر K حلقهٔ چندجمله‌ای $F[x]$ باشد، تنها عناصری از K که معکوس‌پذیر هستند، عبارتند از چندجمله‌ایهای اسکالری غیر صفر؛ زیرا، اگر f و g دو چندجمله‌ای با شرط $fg=1$ باشند داریم $\deg f+\deg g=0$، پس $\deg f=\deg g=0$؛ یعنی، f و g دو چندجمله‌ای اسکالری هستند. از این‌رو، هر ماتریس $n\times n$ بر روی حلقهٔ چندجمله‌ای $F[x]$، بر روی $F[x]$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر دترمینان آن یك چندجمله‌ای اسکالری غیر صفر باشد.

مثال ۷. فرض کنیم $K=R[x]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای بر روی هیأت اعداد حقیقی باشد. اگر

$$A=\begin{bmatrix} x^2+x & x+1\\ x-1 & 1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} x^2-1 & x+2\\ x^2-2x+3 & x\end{bmatrix}$$

آنگاه، با یك محاسبهٔ کوتاه، داریم $\det A=x+1$ و $\det B=-6$. از این‌رو، A بر روی K معکوس‌پذیر نیست، درحالی که B بر روی K معکوس‌پذیر است. توجه کنید که

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix} 1 & -x-1\\ -x+1 & x^2+x\end{bmatrix},\quad \operatorname{adj} B=\begin{bmatrix} x & -x-2\\ -x^2+2x-3 & x^2-1\end{bmatrix},$$

$(\operatorname{adj} A)A=(x+1)I$ و $(\operatorname{adj} B)B=-6I$. بدیهی است که

$$B^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix} x & -x-2\\ -x^2+2x-3 & 1-x^2\end{bmatrix}.$$

مثال ۸. فرض کنیم K حلقهٔ اعداد صحیح باشد و

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}.$$

در این صورت $\det A=-۲$ و

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}.$$

از این رو، A به‌عنوان یك ماتریس بر روی حلقهٔ اعداد صحیح، معکوس‌پذیـر نیست؛ با این وجود، می‌توانیم A را به‌عنوان ماتریسی بر روی هیأت اعداد گویا نیزمحسوب کنیم، که در این صورت A معکوس‌پذیر است و

$$A^{-۱}=-\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ \frac{۳}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}.$$

در رابطه با ماتریسهای معکوس‌پـذیـر، مایلیم بـه‌ذکـر حکم مقدماتی دیگری هم بپردازیم. ماتریسهای متشابه، دترمینانهای مساوی دارند؛ یعنی، اگر P برروی K معکوس‌پذیـر باشد و $B=P^{-۱}AP$، آنگاه $\det B=\det A$. این مطلب واضح است، زیرا

$$\det(P^{-۱}AP)=(\det P^{-۱})(\det A)(\det P)=\det A.$$

این مشاهدهٔ ساده، این امکان را به‌وجود می‌آورد که دترمینان هر عملگر خطی روی فضایی برداری با بعد متناهی را تعریف کنیم. اگـر T عملگری خطی روی V باشد، دترمینان T را دترمینان هرماتریس $n\times n$ی تعریف می‌کنیم که نمایش T در پایهٔ مرتبی از V باشد. چون همهٔ این ماتریسها متشابـه هستند، دترمینانهای مساوی دارند و ایـن تعریف بامعنی است. در این باره به‌تمرین ۱۱ بخش ۳.۵ رجوع کنید.

حـال به بحث دربارهٔ **قاعدهٔ کرامر**[1] برای حل دستگاه معادلات خطی می‌پردازیم. فرض کنیم A ماتریسی $n\times n$ بر روی هیأت F باشد، و بخواهیم دستگاه معادلات خطی $AX=Y$ را به‌ازای nتایی مفروض $(y_۱,\dots,y_n)$ حل کنیم. اگر $AX=Y$، آنگاه

$$(\operatorname{adj}A)AX=(\operatorname{adj}A)Y$$

و بنابراین

$$(\det A)X=(\operatorname{adj}A)Y.$$

پس

---

1. Cramer

$$(\det A)x_j = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{adj}A)_{ji} y_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} y_i \det A(i|j).$$

عبارت آخر همان دترمینان ماتریس $n\times n$ حاصل از جایگزینی Y به جای jمین ستون A است. اگر $\det A=0$، از این مطالب چیزی معلوم نمی‌شود؛ اما، اگر $\det A\neq 0$ به قاعده‌ای دست می‌یابیم که به‌قاعدهٔ کرامرمشهوراست. گیریم A یك ماتریس $n\times n$ برروی هیأت F باشد و $\det A\neq 0$. اگر $y_1, \cdots, y_n$ اسکالرهایی از F باشند، یکتا جواب $X=A^{-1}Y$ از دستگاه معادلات $AX=Y$ به‌صورت

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}, \quad j=1,\cdots,n$$

به‌دست می‌آید. در اینجا B_j ماتریس $n\times n$ حاصل از جایگزینی Y به‌جای jمین ستون ماتریس A است.

در خاتمهٔ این بخش، علاقه‌مندیم به‌چند توضیح که به‌اعتقاد ما به‌نمایاندن چهرهٔ واقعی دترمینان کمك می‌کنند، بپردازیم. گه‌گاه لازم است دترمینانهای مشخصی را محاسبه کنیم، و لذا جزئی از این بخش را به روشهایی که این محاسبات را آسان می‌سازند اختصاص دادیم. لکن، نقش اصلی دترمینان در این کتاب، هرچند زیبایی احکامی همچون قاعدهٔ کرامرانکارناپذیراست، نظری است. اما، قاعدهٔ کرامرعمدتاً به‌این‌علت که‌خود درگیر محاسبات‌بسیاری‌است، وسیلهٔ مؤثری برای حل دستگاههای معادلات خطی نیست. لذا باید فکرخود را برآنچه‌که قاعدهٔ کرامر بیان می‌کند متمرکز سازیم تا برچگونگی محاسبه با آن. در واقع، امیدواریم که‌خواننده‌ضمن‌تفکرروی تمامی این فصل، تأکید بیشتری بردرك مفهوم‌دترمینان‌وچگونگی‌رفتارآن‌داشته‌باشد تا برچگونگی‌محاسبهٔ دترمینان‌ماتریسهای‌معین.

تمرین

۱. از فرمول الحاقی کلاسیك برای محاسبهٔ معکوس هر یك از ماتریسهای حقیقی 3×3 زیر استفاده کنید.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

۲. قاعدهٔ کرامر را برای حل هر یك از دستگاه معادلات خطی زیر بر روی هیأت اعداد گویا به‌کار گیرید.

$$\begin{aligned} x+y+z&=11 \\ 2x-6y-z&=0 \\ 3x+4y+2z&=0 \end{aligned}$$ (الف)

$$\begin{aligned} 3x-2y&=7 \\ 3y-2z&=6 \\ 3z-2x&=-1 \end{aligned}$$ (ب)

۳. ماتریس $n\times n$ ی A بر روی هیأت F **متقارن‌کج** است هرگاه $A^t=-A$. اگر A یك ماتریس $n\times n$ متقارن‌کج با درایه‌های مختلط باشد و n عددی فرد، ثابت کنید $\det A=0$.

۴. ماتریس $n\times n$ ی A بر روی هیأت F **متعامد** نامیده می‌شود هرگاه $AA^t=I$. اگر A متعامد باشد، نشان دهید $\det A=\pm 1$. یك ماتریس متعامد مثال بزنید که به‌ازای آن $\det A=-1$.

۵. ماتریس $n\times n$ ی A بر روی هیأت اعداد مختلط را **یکانی** خوانیم هرگاه $AA^*=I$ (A^* نمایشگر ترانهادهٔ مزدوج A است). اگر A یکانی باشد، نشان دهید که $|\det A|=1$.

۶. فرض کنید T و U دو عملگر خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V باشند. ثابت کنید

(الف) $\det(TU)=(\det T)(\det U)$؛
(ب) T معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $\det T\neq 0$.

۷. فرض کنید A ماتریسی $n\times n$ بر روی K که حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی است، باشد. فرض کنید A صورت بلوکی

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

را داشته باشد. در اینجا A_j ماتریسی $r_j\times r_j$ است. ثابت کنید

$$\det A=(\det A_1)(\det A_2)\cdots(\det A_k).$$

۸ . گیریم V فضای برداری ماتریسهای $n\times n$ بر روی هیأت F باشد. فرض کنید B عنصر ثابتی از V، و T_B عملگر خطی روی V تعریف‌شده توسط $T_B(A)=AB-BA$ باشد. نشان دهید $\det T_B=0$.

۹ . ماتریس A ی $n\times n$، بر روی هیأتی مفروض است و $A\neq 0$. اگر r عدد صحیح مثبت دلخواهی بین ۱ و n باشد، **یک زیرماتریس** $r\times r$ از A عبارت است از ماتریس $r\times r$ حاصل از حذف $(n-r)$ سطر و $(n-r)$ ستون از A. **رتبهٔ دترمینانی** A بزرگترین عدد صحیح مثبت r است که زیرماتریسی $r\times r$ از A دارای دترمینان غیر صفر باشد. ثابت کنید درتبهٔ دترمینانی A برابر رتبهٔ سطری A ($=$ رتبهٔ ستونی A) است.

۱۰. اگر A ماتریسی $n\times n$ بر روی هیأت F باشد، ثابت کنید حداکثر n اسکالر متمایز c در F وجود دارد که $\det(cI-A)=0$.

۱۱. دو ماتریس $n\times n$، A و B بر روی هیات F داده شده‌اند. نشان دهید که اگر A معکوس‌پذیر باشد، حداکثر n اسکالر c در F وجود دارد که به‌ازای آنها ماتریس $cA+B$ معکوس‌پذیر نیست.

۱۲. اگر V فضای برداری ماتریسهای $n\times n$ بر روی F و B ماتریس $n\times n$ ثابتی بر روی F باشد، فرض کنید L_B و R_B دو عملگر خطی روی V باشند که با $L_B(A)=BA$ و $R_B(A)=AB$ تعریف می‌شوند. نشان دهید

(الف) $\det L_B=(\det B)^n$

(ب) $\det R_B=(\det B)^n$.

۱۳. فرض کنید V فضای برداری همهٔ ماتریسهای $n\times n$ بر روی هیأت اعداد مختلط و B ماتریس $n\times n$ ثابتی بر روی C باشد. عملگر خطی M_B روی V را توسط $M_B(A)=BAB^*$، که در آن $B^*=\overline{B^t}$، تعریف می کنیم. نشان دهید

$$\det M_B=|\det B|^{2n}.$$

حال فرض کنید H مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای هرمیتی در V باشد؛ A هرمیتی است هرگاه $A=A^*$. در این صورت H فضایی برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی است. نشان دهید تابع T_B تعریف شده توسط $T_B(A)=BAB^*$ عملگری خطی روی فضای برداری‌حقیقی H است، وسپس نشان دهید $\det T_B=|\det B|^{2n}$. (راهنمایی: در محاسبهٔ $\det T_B$، نشان دهید V دارای پایه‌ای متشکل ازماتریسهای هرمیتی است، و سپس نشان دهید $\det T_B=\det M_B$.)

۱۴. فرض کنید A، B، C، و D ماتریسهای $n\times n$ جابجا شونده‌ای بر روی هیأت F

باشند. نشان دهید دترمینان ماتریس $2n\times 2n$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

برابر $\det(AD-BC)$ است.

۵.۵. مدول

اگر K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد، هر مدول بر روی K دستگاهی جبری است که مانندفضای برداری عمل می‌کند ودرآن K نقش هیأت اسکالرها را برعهده دارد. به‌طور دقیق، گوییم V **یك مدول بر روی** K (یا یك K-**مدول**) است، هرگاه

۱. عملی به‌نام جمع: $(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha+\beta$ روی V یافت شود به‌طوری که تحت آن V گروهی جابجایی باشد

۲. عملی به‌نام ضرب: $(c, \alpha) \rightarrow c\alpha$ ازعناصر α در V و c در K موجودباشدکه

$$(c_1+c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$$
$$c(\alpha_1+\alpha_2) = c\alpha_1 + c\alpha_2$$
$$(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$$
$$1\alpha = \alpha.$$

برای منظورما، مهمترین K-مدولها، مدولهای nتایی K^n هستند، هرچندمدولهای ماتریسی $K^{n\times n}$ نیز مهم‌اند. اگر V مدول دلخواهی باشد، عیناً به‌همان نحوکه در مورد فضای برداری عمل کردیم می‌توانیم ازترکیبات خطی، وابستگی خطی، و استقلال خطی صحبت کنیم. باید مواظب باشیم نتایجی از فضاهای برداری را که به عمل تقسیم بر اسکالرهای غیرصفروابسته‌اند، یعنی اعمالی که به‌هیأت مربوط‌اند و ممکن است حلقهٔ K فاقدآنها باشد، در مورد V به کار نبندیم. مثلاً، اگر α_1،...،α_k وابستهٔ خطی باشند، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که یکی از α_iها ترکیبی خطی از بقیهٔ آنهاست. این مطلب یافتن پایه در مدول را مشکل‌تر می‌سازد.

یك **پایه** برای مدول V زیرمجموعه‌ای مستقل خطی است که مدول را پدیدمی‌آورد (یا تولید می‌کند). این همان تعریفی است که در مورد فضای برداری هم ارائه‌کردیم. خاصیت مهم پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ این است که هر عنصر V را می‌توان به طور یکتا به صورت ترکیبی خطی از(تعدادی متناهی از) عناصر $\mathcal{B}$ بیان کرد. اگردر ریاضیات اصل انتخاب (ر.ك. پیوست) پذیرفته شود، می‌توان نشان داد که هر فضای برداری دارای پایه است. خواننده بخوبی آگاه است که در هر فضای برداری دلخواهی که توسط تعدادی متناهی بردار پدیدآید، پایه هم وجود دارد. اما، برای مدول وضعیت چنین نیست. از

این‌رو، برای مدولهایی که پـایـه دارند، و نیز برای مدولهایی که توسط تعدادی متناهی عنصر پدید می‌آیند، نیاز به‌نامهای خاصی داریم.

تعریف. K-مدول V، یك **مدول آزاد** نامیده می‌شود، هرگاه دارای پایه باشد. اگر V دارای پـایه‌ای متناهی شامـل n عنصر باشد، آنگاه V یك K-**مدول آزاد با n مولد** نامیده می‌شود.

تعریف. مدول V **به‌طور متناهی تولید می‌شود** هرگاه شامل زیر مجموعه‌ای متناهی باشد کـه V را پدید آورد. **رتبهٔ** مدولی کـه به طور متناهی تولید بشود کـوچکترین عدد صحیح مثبت k است که V توسط k عنصر پدید آید.

تکرار می‌کنیم که ممکن است مدولی به‌طور متناهی تولید بشود، بدون‌آنکه پایه‌ای متناهی داشته باشد. اگر V، K-مدول آزادی با n مـولـد باشد، آنگاه V با مـدول K^n یکریخت است. اگر $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ پـایـه‌ای برای V باشد، یك یکریختی کـه بردار $c_1\beta_1 + \cdots + c_n\beta_n$ را به روی nتایـی $(c_1, \ldots, c_n)$ از K^n بفرستد، وجـود دارد. فوراً دیده نمی‌شود که مدول V نمی‌تواند مدولی آزاد با k مولد با شرط $k \neq n$ باشد. به بیان دیگر، واضح نیست که تعداد عناصر هر دو پایهٔ دلخواه V باید لزوماً مساوی باشند. اثبات این حقیقت بر اساس‌کار برد جالبی از دترمینانهاست.

قضیهٔ ۵. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد. اگـر V یك K-مدول آزاد با n مولد باشد، آنگاه رتبهٔ V برابر n است.

اثبات. می‌خواهیم ثابت‌کنیم کـه V نمی‌تواند توسط تعدادی‌کمتر از n عنصر از خودش پدیدآید. چون V با K^n یکریخت است، باید نشان دهیم کـه اگر $m<n$، مدول K^n توسط nتاییهای $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ پدید نمی‌آید. ماتریس A با سطرهای $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم هر یك از بردارهای $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ از پایهٔ استانده ترکیبی خطی از $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ باشد. در این صورت ماتریسی چون P در $K^{n\times m}$ وجود دارد که

$$PA = I.$$

دراینجا I ماتریس همانی $n\times n$ است. گیریم $\tilde{A}$ ماتریس $n\times n$ حاصل ازافزودن $n-m$ سطر ۰ درزیرسطرهای A باشد و $\tilde{P}$ ماتریس $n\times n$ دلخواهی که ستونهای P را به‌عنوان n ستون اول خود دارد. در این صورت

$$\tilde{P}\tilde{A} = I.$$

بنابراین، $\det \tilde{A} \neq 0$. اما چون $m<n$ درایـه‌های اقلاً یك سطر $\tilde{A}$ همه صفرند. این تناقض نشان می‌دهد که $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ مدول K^n را پدید نمی‌آورند. □

توجه به این نکته مهم است که قضیهٔ ۵ یکتایی بعد هر فضای برداری (با بعدمتناهی)

را ثابت می‌کند. این اثبات که بر وجود تابع دترمینان استوار است با اثباتی که در فصل۲ عرضه کردیم کاملاً متفاوت است. از قضیهٔ ۵ بر می‌آید که «مدول آزاد از رتبهٔ n» با «مدول آزاد با n مولد» یکی است.

اگر V مدولی بر روی K باشد، **مدول دوگان** V^* متشکل است ازهمهٔ توابع خطی f از V در K. اگر V مدول آزادی از رتبهٔ n باشد، آنگاه V^* نیز مدولی آزاد از رتبهٔ n است. اثبات این مطلب عیناً همان اثبات درموردفضاهای برداری است. اگر $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ پایهٔ مرتبی برای V باشد، **پایهٔ دوگان** وابسته‌ای چون $\{f_1, \cdots, f_n\}$ برای مدول V^* وجود دارد. تابع f_i به‌هر α از V، iامین مختصش نسبت به $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ را تخصیص می‌دهد:

$$\alpha = f_1(\alpha)\beta_1 + \cdots + f_n(\alpha)\beta_n$$

اگر f تابعی خطی روی V باشد، آنگاه

$$f = f(\beta_1)f_1 + \cdots + f(\beta_n)f_n.$$

۶.۵. تابع چند خطی

هدف این بخش بیان بحث دترمینان درقالبی است که به‌اعتقاد ما چهرهٔ واقعی دترمینان را می‌نمایاند. برای این منظور ، فرمهای چند خطی متناوب روی مدولها را مورد بحث قرار می‌دهیم. این فرمها تعمیم طبیعی دترمینان، آن طور که ما آن را عرضه کردیم، هستند. خواننده‌ای هم که شرح مختصر مدولها در بخش ۵.۵ را نخوانده باشد (یا مایل نباشد که بخواند) نیزمی‌تواند این بخش را با بهره‌وری مطالعه کند مشروط بر این که «فضای برداری بر روی F با بعد n» را همواره به‌جای «مدول آزاد بر روی K از رتبهٔ n» منظور کند.

فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصرهمانی و V مدولی بر روی K باشد. اگر r عدد صحیح مثبتی باشد، تابع L از $V^r = V \times V \times \cdots \times V$ در K **چند خطی** نامیده می‌شود، هرگاه $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ به‌عنوان تابعی از هر α_i، وقتی α_jهای دیگر ثابت نگه داشته شوند، خطی باشد؛ یعنی، هرگاه به‌ازای هر i

$$L(\alpha_1, \cdots, c\alpha_i + \beta_i, \cdots, \alpha_r) = cL(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_r) + L(\alpha_1, \cdots, \beta_i, \cdots, \alpha_r).$$

یک تابع چند خطی روی V^r یك **فرم r خطی** روی V، یا یك **فرم چند خطی از درجهٔ r** روی V نیز نامیده می‌شود. به‌چنین تابعی گاهی یك **rـ تانسور** روی V نیز گفته می‌شود. دستهٔ همهٔ توابع چند خطی روی V^r با $M^r(V)$ نشان داده می‌شود. اگر L و M در $M^r(V)$ باشند، آنگاه مجموع $L+M$، که به‌این صورت تعریف می‌شود:

$$(L+M)(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) + M(\alpha_1, \cdots, \alpha_r),$$

نیز چند خطی است؛ و اگر c عنصری از K باشد، حاصل ضرب cL، که به‌این صورت

تعریف می‌شود:

$$(cL)(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = cL(\alpha_1, \cdots, \alpha_r),$$

نیز چندخطی است. بنابراین، $M^r(V)$ یك K-مدول (زیرمدولی ازمدول همهٔ توابع از V^r در K) است.

اگر $r=1$، داریم $M^1(V) = V^*$ که همان مدول دوگان توابع خطی روی V است. از توابع خطی نیز می‌توان برای ساختن مثالهایی از فرمهای چندخطی از مراتب بالاتر استفاده کرد. اگر f_1، $\cdots$، f_r توابعی خطی روی V باشند، تعریف می‌کنیم

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = f_1(\alpha_1) f_2(\alpha_2) \cdots f_r(\alpha_r).$$

واضح است که L فرمی rخطی روی V است.

مثال ۹. اگر V مدول باشد، یك فرم ۲خطی روی V معمولاً یك **فرم دوخطی** روی V نامیده می‌شود. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های متعلق به K باشد. در این‌صورت

$$L(X, Y) = Y^t A X$$

فرم دوخطی L را روی مدول $K^{n\times 1}$ تعریف می‌کند. به‌طور مشابه

$$M(\alpha, \beta) = \alpha A \beta^t$$

فرم دوخطی M را روی K^n تعریف می‌کند.

مثال ۱۰. تابع دترمینان به‌هرماتریس $n \times n$ ی A عنصر $\det A$ از K را مربوط می‌سازد. اگر $\det A$ به‌عنوان تابعی ازسطرهای A درنظر گرفته شود:

$$\det A = D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n),$$

آنگاه D فرمی nخطی روی K^n است.

مثال ۱۱. به‌دست‌آوردن عبارتی جبری برای فرم rخطی نوعی، روی مدول K^n آسان است. اگر α_1، $\cdots$، α_r بردارهایی از V و A ماتریسی $r \times n$ با سطرهای α_1، $\cdots$، α_r باشد، آنگاه به‌ازای هرتابع L از $M^r(K^n)$

$$\begin{aligned}
L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) &= L\Big(\sum_{j=1}^{n} A_{1j}\epsilon_j, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\Big)\\
&= \sum_{j=1}^{n} A_{1j} L(\epsilon_j, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)\\
&= \sum_{j=1}^{n} A_{1j} L\Big(\epsilon_j, \sum_{k=1}^{n} A_{2k}\epsilon_k, \cdots, \alpha_r\Big)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{1j}A_{2k} L(\epsilon_j, \epsilon_k, \alpha_3, \cdots, \alpha_r)\\
&= \sum_{j,k=1}^{n} A_{1j}A_{2k} L(\epsilon_j, \epsilon_k, \alpha_3, \cdots, \alpha_r).
\end{aligned}$$

اگر به‌جای α_3، $\cdots$، α_r به‌نوبت برابرهایشان برحسب ترکیبات خطی بردارهای پایهٔ استانده را قراردهیم و $A(i, j)$ را به‌جای A_{ij} بنویسیم، فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = \sum_{j_1, \cdots, j_r = 1}^{n} A(1, j_1) \cdots A(r, j_r) L(\epsilon_{j_1}, \cdots, \epsilon_{j_r}). \tag{۵-۲۶}$$

در (۵-۲۶) به‌ازای هر rتایی مانند $J = (j_1, \cdots, j_r)$ از اعداد صحیح مثبت بین ۱و n، یك جمله وجود دارد. تعداد این نوع rتایی‌ها برابر n^r است. پس، L کاملاً توسط (۵-۲۶) و مقادیر خاص:

$$c_J = L(\epsilon_{j_1}, \cdots, \epsilon_{j_r})$$

تخصیص یافته به n^r عنصر $(\epsilon_{j_1}, \cdots, \epsilon_{j_r})$ تعیین می‌شود. همچنین بآسانی دیده می‌شود که اگر به‌ازای هر rتایی مانند J عنصری چون c_J از K را انتخاب کنیم، آنگاه

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = \sum_J A(1, j_1) \cdots A(r, j_r) c_J \tag{۵-۲۷}$$

فرمی rخطی روی K^n تعریف می‌کند.

فرض‌کنیم L تابعی چندخطی روی V^r باشد و M تابعی چند خطی روی V^s. تابع $L \otimes M$ روی V^{r+s} را با

$$(L \otimes M)(\alpha_1, \cdots, \alpha_{r+s}) = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) M(\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_{r+s}) \tag{۵-۲۸}$$

تعریف می‌کنیم. اگر تصورمان از V^{r+s} همان $V^r \times V^s$ باشد، آنگاه به‌ازای α در V^r و β در V^s

$$(L\otimes M)(\alpha,\beta)=L(\alpha)M(\beta).$$

واضح است که $L\otimes M$ روی V^{r+s} چندخطی است. تابع $L\otimes M$ **ضرب تانسوری** L و M نامیده می‌شود. ضرب تانسوری جابجایی نیست. درواقع، $M\otimes L\neq L\otimes M$ مگرآنکه $L=0$ یا $M=0$؛ با این وجود، ضرب تانسوری به‌طور مطلوبی با اعمال مدولی در M^r و M^s مربوط است.

لم. فرض کنیم L و L_1 فرمهایی rخطی روی V، M و M_1 فرمهایی s خطی روی V، و c عنصری از K باشد.

(الف) $(cL+L_1)\otimes M=c(L\otimes M)+L_1\otimes M$

(ب) $L\otimes(cM+M_1)=c(L\otimes M)+L\otimes M_1$.

اثبات. تمرین.

ضرب تانسوری شرکت‌پذیراست؛ یعنی، اگر L، M، و N (بترتیب) فرمهایی r، s، و tخطی روی V باشند، آنگاه

$$(L\otimes M)\otimes N=L\otimes(M\otimes N).$$

این مطلب نتیجه‌ای آنی از این واقعیت است که عمل ضرب در K شرکت‌پذیر است. بنابراین، اگر L_1، L_2، ...، L_k توابعی چندخطی روی V^{r_1}، ...، V^{r_k} باشند، آنگاه ضرب تانسوری

$$L=L_1\otimes\cdots\otimes L_k$$

به‌عنوان تابعی چندخطی روی V^r که درآن $r=r_1+\cdots+r_k$، بدون ابهام تعریف می‌شود. قبلاً حالت خاصی از این را ذکر کردیم. اگر f_1، ...، f_r توابعی خطی روی V باشند، آنگاه ضرب تانسوری

$$L=f_1\otimes\cdots\otimes f_r$$

توسط

$$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=f_1(\alpha_1)\cdots f_r(\alpha_r)$$

تعریف می‌شود.

قضیهٔ ۶. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد. اگر V یك K-مدول آزاد از رتبهٔ n باشد، آنگاه $M^r(V)$ یك K-مدول آزاد از رتبهٔ n^r است؛ درواقع، اگر $\{f_1,\ldots,f_n\}$ پایه‌ای برای مدول دوگان V^* باشد، آنگاه n^r ضرب تانسوری

$$f_{j_1}\otimes\cdots\otimes f_{j_r},\quad 1\leqslant j_1\leqslant n,\ \ldots,\ 1\leqslant j_r\leqslant n$$

پایه‌ای برای $M^r(V)$ تشکیل می‌دهند.

اثبات. فرض‌کنیم $\{f_1,\ldots,f_n\}$ پایهٔ مرتبی برای V^* باشدکه دوگان پایهٔ

$\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ از V است. به‌ازای هر بردار α از V، داریم

$$\alpha = f_1(\alpha)\beta_1 + \cdots + f_n(\alpha)\beta_n.$$

اکنون به‌محاسبه‌ای نظیر آنچه در مثال ۱۱ انجام شد می‌پردازیم. اگر L فرمی rخطی روی V و α_1، ...، α_r عناصری از V باشند، آنگاه بنابر (۵-۲۶)

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = \sum_{j_1, \cdots, j_r} f_{j_1}(\alpha_1) \cdots f_{j_r}(\alpha_r) L(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}).$$

به‌بیان دیگر،

$$L = \sum_{j_1, \cdots, j_r} L(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}) f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_r}. \qquad (۵\text{-}۲۹)$$

این رابطه نشان می‌دهد که n^r ضرب تانسوری

$$E_J = f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_r} \qquad (۵\text{-}۳۰)$$

که با rتاییهای $J = (j_1, \cdots, j_r)$ معین می‌شوند مدول $M^r(V)$ را پدید می‌آورند. بنابه‌دلیل زیر، r فرمهای مختلف E_J مستقل هستند. فرض‌کنیم به‌ازای هر J، عنصری‌چون c_J در K وجود داشته باشد و تابع چندخطی

$$L = \sum_J c_J E_J \qquad (۵\text{-}۳۱)$$

را تشکیل داده باشیم. توجه‌کنید که اگر $I = (i_1, \cdots, i_r)$، آنگاه

$$E_J(\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_r}) = \begin{cases} 0, & I \neq J \\ 1, & I = J. \end{cases}$$

بنابراین از (۵-۳۱) مشاهده می‌شود که

$$c_I = L(\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_r}). \qquad (۵\text{-}۳۲)$$

بخصوص، اگر $L = 0$، آنگاه به‌ازای هر rتایی I، $c_I = 0$. □

تعریف. فرض کنیم L فرمی rخطی روی K-مدول V باشد. گوییم L **متناوب** است، درصورتی که وقتی $\alpha_i = \alpha_j$، به‌ازای $i \neq j$، آنگاه $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = 0$.

اگر L تابع چندخطی‌متناوبی روی V^r باشد، آنگاه

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_r) = -L(\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_r).$$

به‌بیان دیگر، اگرجای دوبردار (با نمایه‌های مختلف) را در rتایی $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ تعویض کنیم، مقدار L تغییر علامت می‌دهد. چون هرجایگشت σ حاصل‌ضربی از ترانهشهاست، می‌بینیم که $L(\alpha_{\sigma 1}, \cdots, \alpha_{\sigma r}) = (\operatorname{sgn} \sigma) L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$.

دستهٔ همهٔ فرمهای rخطی متناوب روی V را با $\Lambda^r(V)$ نشان می‌دهیم. باید روشن باشد که $\Lambda^r(V)$ زیرمدولی از $M^r(V)$ است.

مثال۱۲. قبلاً در این فصل نشان دادیم که روی مدول K^n، دقیقاً یك فرم nخطی متناوب D با خاصیت $D(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)=1$ وجود دارد. همچنین درقضیهٔ ۲ نشان دادیم که اگر L فرم دلخواهی از $\Lambda^n(K^n)$ باشد، آنگاه

$$L=L(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)D.$$

به‌عبارت دیگر، $\Lambda^n(K^n)$، K-مدولی آزاد از رتبهٔ ۱ است. گذشته از این، فرمول صریح (۵-۱۵) را برای D به‌دست آوردیم. برحسب نمادی که جدیداً به‌کار می‌بریم، این‌فرمول را می‌توان به‌صورت

$$D=\sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma) f_{\sigma 1}\otimes \cdots \otimes f_{\sigma n} \tag{۵-۳۳}$$

هم نوشت. دراینجا f_1، $\cdots$، f_n توابع مختصی استانده روی K^n هستند ومجموع برروی $n!$ جایگشت مختلف σ ازمجموعهٔ $\{1, \cdots, n\}$ گسترش دارد. اگر دترمینان ماتریس A را به‌صورت

$$\det A=\sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma) A(\sigma 1, 1) \cdots A(\sigma n, n)$$

بنویسیم، آنگاه عبارت متفاوتی برای D به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) &= \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma) f_1(\alpha_{\sigma 1}) \cdots f_n(\alpha_{\sigma n}) \\ &= \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma) L(\alpha_{\sigma 1}, \cdots, \alpha_{\sigma n}) \end{aligned} \tag{۵-۳۴}$$

که در آن $L=f_1\otimes \cdots \otimes f_n$.

یك روش عمومی برای مربوط ساختن فرمی متناوب به‌فرمی چندخطی وجوددارد. اگر L فرمی rخطی روی مدول V باشد و σ جایگشتی از $\{1, \cdots, r\}$، با تعریف

$$L_\sigma(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)=L(\alpha_{\sigma 1}, \cdots, \alpha_{\sigma r})$$

تابع rخطی دیگر L_σ به‌دست می‌آید. اگر برحسب اتفاق L متناوب باشد، آنگاه $L_\sigma=(\operatorname{sgn}\sigma)L$. اکنون، به‌ازای هر L از $M^r(V)$ تابع $\pi_r L$ از $M^r(V)$ را بنابر

$$\pi_r L=\sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma) L_\sigma \tag{۵-۳۵}$$

تعریف می‌کنیم، بدین معنی که

$$(\pi_r L)(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)=\sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma) L(\alpha_{\sigma 1}, \cdots, \alpha_{\sigma r}). \tag{۵-۳۶}$$

لم. π_r تبدیلی خطی از $M^r(V)$ در $\Lambda^r(V)$ است. اگر L در $\Lambda^r(V)$ باشد، آنگاه $\pi_r L = r!L$.

اثبات. فرض کنیم τ جایگشت دلخواهی از $\{1, \cdots, r\}$ باشد. دراین‌صورت

$$(\pi_r L)(\alpha_{\tau 1}, \cdots, \alpha_{\tau r}) = \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma) L(\alpha_{\tau\sigma 1}, \cdots, \alpha_{\tau\sigma r})$$
$$= (\operatorname{sgn}\tau) \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\tau\sigma) L(\alpha_{\tau\sigma 1}, \cdots, \alpha_{\tau\sigma r}).$$

اگر σ همهٔ جایگشتهای $\{1, \cdots, r\}$ را (یکبار) احراز کند، $\tau\sigma$ نیزچنین می‌کند. بنابراین،

$$(\pi_r L)(\alpha_{\tau 1}, \cdots, \alpha_{\tau r}) = (\operatorname{sgn}\tau)(\pi_r L)(\alpha_1, \cdots, \alpha_r),$$

ولذا، $\pi_r L$ فرمی متناوب است.

اگر L در $\Lambda^r(V)$ باشد، آنگاه به‌ازای هر σ داریم

$$L(\alpha_{\sigma 1}, \cdots, \alpha_{\sigma r}) = (\operatorname{sgn}\sigma) L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r);$$

از این‌رو، $\pi_r L = r!L$. $\square$

در (۵-۳۳) نشان دادیم که تابع دترمینان D از $\Lambda^n(K^n)$ عبارت است از

$$D = \pi_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n).$$

دراینجا f_1، ...، f_n توابع مختصی استانده روی K^n هستند. دربارهٔ آخرین لم، نکتهٔ مهمی هست که باید آن را متذکرشویم. اگر K هیأتی با سرشت‌نمای صفر و $r!$ در K معکوس‌پذیر باشد، آنگاه π فضای $M^r(V)$ را به‌روی $\Lambda^r(V)$ می‌نگارد. در واقع، دراین حالت به‌کاربردن نگاشت $\pi_1 = (1/r!)\pi$ به‌جای π ازیك دیدگاه، طبیعی‌تر است، زیرا π_1 نگاشتی تصویری از $M^r(V)$ به‌روی $\Lambda^r(V)$ است؛ یعنی، نگاشتی است خطی از $M^r(V)$ به‌روی $\Lambda^r(V)$ با این خاصیت که $\pi_1(L) = L$ اگروتنها اگر L در $\Lambda^r(V)$ باشد.

قضیهٔ ۷. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصرهمانی و V، K-مدول‌آزادی از رتبهٔ n باشد. اگر $r > n$، آنگاه $\Lambda^r(V) = \{0\}$. اگر $1 \leqslant r \leqslant n$، آنگاه $\Lambda^r(V)$، K-مدول آزادی از رتبهٔ $\binom{n}{r}$ است.

اثبات. فرض کنیم $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ پایهٔ مرتبی برای V با پایهٔ دوگان $\{f_1, \cdots, f_n\}$ باشد. اگر L در $M^r(V)$ باشد، داریم

$$L = \sum_J L(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}) f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_r} \qquad (۵\text{-}۳۷)$$

که درآن مجموع به‌ازای همهٔ rتاییهای $J = (j_1, \cdots, j_r)$ از اعداد صحیح بین ۱ و n محاسبه می‌شود. اگر L متناوب و دوتا از نمایه‌های j_i مساوی باشند، آنگاه

$$L(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}) = 0.$$

اگر $r>n$، آنگاه در هر rتایی مانند J عددی صحیح باید تکرار بشود. از این‌رو، اگر $r>n$ آنگاه $\Lambda^r(V)=\{0\}$.

حال فرض می‌کنیم $1\leqslant r\leqslant n$. اگر L در $\Lambda^r(V)$ باشد، مجموع در (۵-۳۷) لازم است تنها به‌ازای آن rتاییهای J محاسبه شود که به‌ازای آنها j_1، ...، j_r متمایز هستند؛ زیرا همهٔ جملات دیگر ۰ می‌باشند. هر rتایی از اعداد صحیح متمایز بین ۱ و n جایگشتی از یك r تایی $J=(j_1, \cdots, j_r)$، است که $j_1<\cdots<j_r$. این نوع خاص از rتاییها یك r-بُر از $\{1, \cdots, n\}$ نامیده می‌شود. تعداد چنین برهایی

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

است.

r-بر ثابت J را درنظرمی گیریم. فرض‌کنیم L_J مجموع همهٔ جملاتی از (۵-۳۷) باشد که با جایگشتهای بر J متناظر هستند. اگر σ جایگشتی از $\{1, \cdots, r\}$ باشد، آنگاه

$$L(\beta_{j_{\sigma1}}, \cdots, \beta_{j_{\sigma r}})=(\operatorname{sgn}\sigma)L(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}).$$

پس

$$L_J=L(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r})D_J \tag{۵-۳۸}$$

که در آن

$$\begin{aligned} D_J &= \sum_\sigma(\operatorname{sgn}\sigma)f_{j_{\sigma1}}\otimes\cdots\otimes f_{j_{\sigma r}} \\ &= \pi_r(f_{j_1}\otimes\cdots\otimes f_{j_r}). \end{aligned} \tag{۵-۳۹}$$

از (۵-۳۹) درمی‌یابیم که همهٔ D_Jها متناوب هستند و به‌ازای هر L در $\Lambda^r(V)$

$$L=\sum_{J \text{ برهای}} L(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r})D_J. \tag{۵-۴۰}$$

ادعا این است که $\binom{n}{r}$ فرم D_J پایه‌ای برای $\Lambda^r(V)$ تشکیل می‌دهند. قبلاً دیده‌ایم که اینها $\Lambda^r(V)$ راپدید می‌آورند. بآسانی دیده می‌شود که این فرمها مستقل خطی هم‌هستند؛ زیرا، اگر برهای $I=(i_1, \cdots, i_r)$ و $J=(j_1, \cdots, j_r)$ داده شده باشند، آنگاه

$$D_J(\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_r})=\begin{cases}1, & I=J\\ 0, & I\neq J\end{cases}. \tag{۵-۴۱}$$

حال فرض‌کنیم به‌ازای هربر، اسکالری چون c_J داشته باشیم و

$$L=\sum_J c_J D_J$$

را تعریف کنیم. از (۵-۴۰) و (۵-۴۱) نتیجه می گیریم

$$c_I=L(\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_r}).$$

بخصوص، اگر $L=0$، آنگاه به‌ازای هر I داریم $c_I=0$. □

نتیجه. اگر V، K-مدول آزادی از رتبهٔ n باشد، آنگاه $\Lambda^n(V)$، K-مدولی آزاد از رتبهٔ ۱ است. اگر T عملگری خطی V باشد، عنصر یکتایی چون c در K یافت می‌شود که به‌ازای هرفرم nخطی متناوب L روی V

$$L(T\alpha_1, \cdots, T\alpha_n)=cL(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

اثبات. اگر L در $\Lambda^n(V)$ باشد، آنگاه بوضوح ضابطهٔ

$$L_T(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)=L(T\alpha_1, \cdots, T\alpha_n)$$

فرم nخطی متناوب L_T راتعریف می‌کند. فرض‌کنیم M مولدی برای $\Lambda^n(V)$، که مدولی از رتبهٔ یك است، باشد. هر L در $\Lambda^n(V)$، به‌طور یکتا به‌صورت $L=aM$، به‌ازای یك a در K، قابل بیان است. بویژه، به‌ازای c معینی $M_T=cM$. برای $L=aM$ داریم

$$\begin{aligned} L_T &= (aM)_T \\ &= aM_T \\ &= a(cM) \\ &= c(aM) \\ &= cL. \ \square \end{aligned}$$

طبیعی‌است که‌عنصر c در نتیجهٔ اخیر را **دترمینان** T بنامیم. در حالت $r=n$ (وقتی که تنها یك بـر $J=(1, \cdots, n)$ وجود دارد) از (۵-۳۹) نتیجه می‌شود که دترمینان T برابر دترمینان ماتریسی است که T را در هرپایهٔ مرتب $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ نمایش دهد. ببینیم چرا. درایهٔ i, j این ماتریس نمایش برابراست با

$$A_{ij}=f_j(T\beta_i),$$

و لذا

$$\begin{aligned} D_J(T\beta_1, \cdots, T\beta_n) &= \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma)A(1, \sigma 1) \cdots A(n, \sigma n) \\ &= \det A. \end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} D_J(T\beta_1, \cdots, T\beta_n) &= (\det T)D_J(\beta_1, \cdots, \beta_n) \\ &= \det T. \end{aligned}$$

اهمیت این تذکرها دراین است که باکمك قضیهٔ ۷ ونتیجهٔ آن، تعریفی بـرای دترمینان عملگرهای خطی به‌دست می‌آوریم کـه بستگی به‌شناخت دترمینان ماتریسها ندارد. سپس می‌توانیم دترمینان ماتریسها را برحسب دترمینان عملگرها، به‌جـای عکس ایـن طریق، تعریف کنیم.

حال می‌خواهیم قـدری بیشتر درمورد فرمهای rخطی متناوب خـاص D_J، که در (۵-۳۹) آنها را به‌پایهٔ $\{f_1, \cdots, f_n\}$ برای V^* مربوط ساختیم، گفتگـوکنیم. درك این نکته مهم است که $D_J(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ دترمینان ماتریس $r\times r$ معینی است. اگر

$$A_{ij}=f_j(\alpha_i), \qquad 1\leqslant i\leqslant r, \qquad 1\leqslant j\leqslant n$$

یعنی، اگر

$$\alpha_i=A_{i1}\beta_1+\cdots+A_{in}\beta_n, \qquad 1\leqslant i\leqslant r$$

و J بر rتایی $(j_1, \cdots, j_r)$ باشد، آنگاه

$$D_J(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)=\sum_\sigma(\operatorname{sgn}\sigma)A(1, j_{\sigma1})\cdots A(r, j_{\sigma r}) \tag{۵-۴۲}$$

$$=\det\begin{bmatrix} A(1, j_1) & \cdots & A(1, j_r) \\ A(r, j_1) & \cdots & A(r, j_r)\end{bmatrix}.$$

پس، $D_J(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ بـرابـر دتـرمینان ماتـریسی $r\times r$ است کـه از ستونهـای j_1، $\cdots$، j_r ماتریسی $r\times n$ که (nتاییهای مختصات) α_1، $\cdots$، α_r را به‌عنوان سطرهای خود دارد، شکل می‌گیرد. نماد دیگری که گاهی برای این دترمینان مورد استفاده قـرار می‌گیرد، عبارت است از

$$D_J(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)=\frac{\partial(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)}{\partial(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r})}. \tag{۵-۴۳}$$

برمبنای این نماد، اثبات قضیهٔ ۷ نشان می‌دهد که هرفرم rخطی متناوب L می‌تواند نسبت به‌پایه‌ای چون $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ توسط معادلهٔ

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)= \tag{۵-۴۴}$$

$$\sum_{j_1<\cdots<j_r}\frac{\partial(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)}{\partial(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r})}L(\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r})$$

بیان شود.

۷.۵. حلقهٔ گراسمان[1]

بسیاری از خواص مهم دترمینانها و فرمهای چندخطی متناوب، به‌بهترین‌وجه برحسب یك عمل ضرب روی فرمها، به‌نام ضرب خارجی، تشریح می‌شوند. اگر L و M، بترتیب، فرمهای r و sخطی متناوبی روی مدول V باشند، آنگاه ضربی وابسته به L و M، یعنی ضرب تانسوری $L\otimes M$، وجود دارد. ولی، این ضرب فرمی متناوب نیست، مگر آنکه $L=0$ یا $M=0$؛ با این وجود، راهی طبیعی برای تصویر این ضرب در $\Lambda^{r+s}(V)$ در دست هست. به‌نظرمی‌رسد که

$$L \cdot M=\pi_{r+s}(L\otimes M) \tag{۴۵-۵}$$

ضرب «طبیعی» فرمهای متناوب باشد. ولی، آیا این‌طور است؟

بیایید مثال خاصی را درنظر بگیریم. فرض‌کنیم V مدول K^n، و f_1، ...، f_n توابع مختصی استانده روی K^n باشند. اگر $i\neq j$، آنگاه

$$f_i \cdot f_j=\pi_2(f_i\otimes f_j)$$

تابع (دترمینان)

$$D_{ij}=f_i\otimes f_j-f_j\otimes f_i$$

است که با (۵-۳۹) تعریف می‌شود. حال فرض‌کنیم k نمایه‌ای متفاوت با i و j باشد.در این صورت

$$\begin{aligned} D_{ij} \cdot f_k &=\pi_3[(f_i\otimes f_j-f_j\otimes f_i)\otimes f_k] \\ &=\pi_3(f_j\otimes f_j\otimes f_k)-\pi_3(f_j\otimes f_i\otimes f_k). \end{aligned}$$

اثبات لم بعدازمعادلهٔ (۵-۳۶) نشان می‌دهد که به‌ازای هرفرم rخطی مانند L وهرجایگشت σ از $\{r، ...، 1\}$،

$$\pi_r(L_\sigma)=\operatorname{sgn}\sigma\ \pi_r(L).$$

از این‌رو، $D_{ij} \cdot f_k=2\pi_3(f_i\otimes f_j\otimes f_k)$. با محاسبه‌ای مشابه

$$f_i \cdot D_{jk}=2\pi_3(f_i\otimes f_j\otimes f_k).$$

بنابراین داریم

$$(f_i \cdot f_j) \cdot f_k=f_i \cdot (f_j \cdot f_k).$$

تمام این مطالب بسیار نویددهنده به‌نظرمی‌رسند. اما گیری هم وجود دارد. با وجود محاسبه‌ای که هم‌اکنون به‌انجام رساندیم، به‌اصطلاح ضرب داده شده در(۵-۴۵) شرکت‌پذیر نیست. درواقع، اگر l نمایه‌ای متفاوت با i، j و k باشد، آنگاه می‌توان با

---

1. Grassman

محاسبه‌ای نشان داد که

$$D_{ij} \cdot D_{kl} = ۴\pi_۴(f_i \otimes f_j \otimes f_k \otimes f_l)$$

و نیز

$$(D_{ij} \cdot f_k) \cdot f_l = ۶\pi_۴(f_i \otimes f_j \otimes f_k \otimes f_l).$$

پس عموماً

$$(f_i \cdot f_j) \cdot (f_k \cdot f_l) \neq [(f_i \cdot f_j) \cdot f_k] \cdot f_l$$

و می‌بینیم که اولین تلاش ما برای یافتن ضرب به‌عملی شرکت‌ناپذیر منجر شد.

اگر خواننده برای نشان‌دادن شرکت‌ناپذیری، ارائهٔ اثبات مستقیم دومعادله راامری نسبتاً ملال‌آور یابد نباید متعجب شود. خصلت موضوع این است، و اینکه وجود دستوری عمومی‌کار را به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند هم نمونه است.

فرض کنیم L فرمی rخطی و M فرمی sخطی روی مدول V باشد. در ایـن صورت

$$\begin{aligned}\pi_{r+s}((\pi_r L) \otimes (\pi_s M)) &= \pi_{r+s}(\sum_{\sigma,\tau} (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau) L_\sigma \otimes M_\tau) \\ &= \sum_{\sigma,\tau} (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau) \pi_{r+s}(L_\sigma \otimes M_\tau)\end{aligned}$$

که‌در آن σ برروی گروه متقارن S_r متشکل ازهمهٔ جایگشتهای $\{۱, \cdots, r\}$، و τ برروی S_s تغییر می‌کند. هرجفت σ و τ، عنصر (σ, τ) از S_{r+s} را به‌دست می‌دهد کـه r عنصر اول $\{۱, \cdots, r+s\}$ را طبق σ و s عنصر آخر آن را طبق τ جای می‌گرداند. روشن است که

$$\operatorname{sgn}(\sigma, \tau) = (\operatorname{sgn} \sigma)(\operatorname{sgn} \tau)$$

و

$$(L \otimes M)_{(\sigma,\tau)} = L_\sigma \otimes M_\tau.$$

بنابراین

$$\pi_{r+s}[(\pi_r L) \otimes (\pi_s M)] = \sum_{\sigma,\tau} \operatorname{sgn}(\sigma, \tau) \pi_{r+s}[(L \otimes M)_{(\sigma,\tau)}].$$

اما، قبلا مشاهده‌کرده‌ایم که

$$\operatorname{sgn}(\sigma, \tau) \pi_{r+s}[(L \otimes M)_{(\sigma,\tau)}] = \pi_{r+s}(L \otimes M).$$

از این‌رو، نتیجه می‌گیریم که

$$\pi_{r+s}[(\pi_r L) \otimes (\pi_s M)] = r!s!\pi_{r+s}(L \otimes M). \qquad (۴۶\text{-}۵)$$

ایـن فرمـول محاسبات چنـدی را ساده مـی‌کند. مثـلاً، فـرض کنیم یـك r-بُر مـانند $I = (i_۱, \cdots, i_r)$، ویك s-بر مانند $J = (j_۱, \cdots, j_s)$ در دست باشد. برای‌سادگی کار، همچنین فرض کنیم

$$i_1<\cdots<i_r<j_1<\cdots<j_s.$$

در این صورت توابع دترمینان وابسته

$$D_I=\pi_r(E_I)$$
$$D_J=\pi_s(E_J)$$

را که درآنها E_I و E_J توسط (۵-۳۰) تعیین می‌شوند، خواهیم داشت. با استفاده از (۵-۴۶) بلافاصله می بینیم که

$$D_I\cdot D_J=\pi_{r+s}[\pi_r(E_I)\otimes\pi_s(E_J)]$$
$$=r!s!\pi_{r+s}(E_I\otimes E_J).$$

چون $E_I\otimes E_J=E_{I\cup J}$، نتیجه می گیریم که

$$D_I\cdot D_J=r!s!D_{I\cup J}.$$

این فرمول حاکی است که شرکت‌ناپذیری ضرب (۵-۴۵)، از این واقعیت ناشی می‌شود که $D_I\cdot D_J\neq D_{I\cup J}$. گذشته‌ازهمهٔ اینها، حاصل‌ضرب D_I و D_J باید $D_{I\cup J}$ باشد. برای اصلاح وضع، لازم است ضرب جدیدی به‌نام **ضرب خارجی** (یا **ضرب گوه‌ای**) فرم rخطی متناوب L و فرم s خطی متناوب M را به‌صورت

$$L\wedge M=\frac{1}{r!s!}\pi_{r+s}(L\otimes M)\qquad(۵\text{-}۴۷)$$

تعریف کنیم. در این صورت، برای توابع دترمینان روی K^n داریم

$$D_I\wedge D_J=D_{I\cup J}$$

وانصاف این‌است که به‌ضرب صحیح فرمهای چندخطی متناوب دست یافته باشیم. متأسفانه، (۵-۴۷) برای عمومی‌ترین حالت تحت بررسی فاقد معنی است، چرا که ممکن است در حلقهٔ K قادر به‌تقسیم بر $r!s!$ نباشیم. اگر K هیأتی با سرشت نمای صفر باشد، آنگاه (۵-۴۷) بامعنی است و خیلی سریع می‌توان نشان داد که ضرب گوه‌ای شرکت‌پذیر است.

قضیهٔ ۸. فرض کنیم K هیأتی با سرشت نمای صفرو V فضایی برداری بر روی K باشد. در این صورت ضرب خارجی عملی شرکت‌پذیر روی فرمهای چند خطی متناوب روی V است. به‌بیان دیگر، اگر L، M، و N فرمهای چند خطی متناوبی روی V، بترتیب از درجات r، s، و t باشند، آنگاه

$$(L\wedge M)\wedge N=L\wedge(M\wedge N).$$

اثبات. از (۵-۴۷) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر دو اسکالر دلخواه c و d، $cd(L\wedge M)=cL\wedge dM$. از این‌رو

$$r!s!t![(L\wedge M)\wedge N]=r!s!(L\wedge M)\wedge t!N$$

و چون $\pi_t(N)=t!N$ ، داریم

$$r!s!t![(L\wedge M)\wedge N]=\pi_{r+s}(L\otimes M)\wedge\pi_t(N)$$
$$=\frac{1}{(r+s)!}\,\frac{1}{t!}\pi_{r+s+t}[\pi_{r+s}(L\otimes M)\otimes\pi_t(N)].$$

اکنون از (۵-۴۶) مشهود است که

$$r!s!t![(L\wedge M)\wedge N]=\pi_{r+s+t}(L\otimes M\otimes N).$$

با محاسبه‌ای مشابه

$$r!s!t![L\wedge(M\wedge N)]=\pi_{r+s+t}(L\otimes M\otimes N)$$

و بنابراین، $(L\wedge M)\wedge N=L\wedge(M\wedge N)$. □

اکنون به‌حالت عمومی که در آن تنها فرض می‌شود K یك حلقهٔ جابجایی با عنصر همانی است، بازمی‌گردیم. مسألهٔ اول ما ایـن است که (۵-۴۷) را با تعریفی هم‌ارز که در حالت عمومی هم‌کار کند، عوض کنیم. اگر L و M فرمهای چندخطی متناوبی، بترتیب از درجات r و s ، باشند می‌خـواهیم فرم چند خطی متناوب متعارف $L\wedge M$ از درجهٔ $r+s$ را که

$$r!s!(L\wedge M)=\pi_{r+s}(L\otimes M)$$

بسازیم.

اکنون به‌یادآوری چگونگی تعریف $\pi_{r+s}(L\otimes M)$ می‌پردازیم. به‌هر جایگشت σ از $\{1,\cdots,r+s\}$ تابع چند خطی

$$(\text{sgn}\sigma)(L\otimes M)_\sigma \qquad (۵\text{-}۴۸)$$

را که در آن

$$(L\otimes M)_\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_{r+s})=(L\otimes M)(\alpha_{\sigma 1},\cdots,\alpha_{\sigma(r+s)})$$

مربوط می‌سازیم وتوابع (۵-۴۸) را به‌ازای همهٔ جایگشتهای σ جمع می کنیم. $(r+s)!$ جایگشت وجـود دارد؛ اما، بـه‌علت متناوب بـودن L و M بسیاری از توابع (۵-۴۸) مساوی‌اند. در واقع، حداکثر

$$\frac{(r+s)!}{r!s!}$$

تابع متمایز (۵-۴۸) وجـود دارد. ببینیم چـرا. فرض کنیم S_{r+s} مجموعـهٔ جایگشتهای $\{1,\cdots,r+s\}$، یعنی گروه متقارن از درجـهٔ $r+s$ باشد. نظیر اثبات (۵-۴۶) زیر-

مجموعهٔ G متشکل از جایگشتهای σ را که مجموعه‌های $\{1,\dots,r\}$ و $\{r+1,\dots,r+s\}$ را در داخل خودشان جای می‌گردانند، جدا می‌کنیم. به‌بیان دیگر، σ در G است، هرگاه به‌ازای هر i بین ۱ و r داشته باشیم $1 \leqslant \sigma i \leqslant r$. (لزوماً نتیجه می‌شود که به‌ازای هر j بین $r+1$ و $r+s$، $r+1 \leqslant \sigma j \leqslant r+s$.) حال G زیرگروهی از S_{r+s} است، پس اگر σ و τ در G باشند، آنگاه $\sigma\tau^{-1}$ نیز در G است. آشکار است که G، $r!s!$ عضو دارد.

حال نگاشت

$$S_{r+s} \xrightarrow{\psi} M^{r+s}(V)$$

تعریف شده توسط

$$\psi(\sigma) = (\operatorname{sgn} \sigma)(L \otimes M)_\sigma$$

در دست است. چون L و M متناوب هستند، به‌ازای هر γ در G

$$\psi(\gamma) = L \otimes M.$$

بنابراین، چون هر فرم $r+s$ خطی N روی V، $(N_\sigma)_\tau = N_{\tau\sigma}$،

به‌ازای هر γ در G و τ در S_{r+s} داریم $\psi(\tau\gamma) = \psi(\tau)$.

این مطلب نشان می‌دهد که نگاشت ψ روی هر **هم‌مجموعه** (چپ) τG از زیرگروه G ثابت است. اگر τ_1 و τ_2 در S_{r+s} باشند، برحسب اینکه $\tau_2^{-1}\tau_1$ در G باشد یا نباشد هم‌مجموعه‌های $\tau_1 G$ و $\tau_2 G$ یا مساوی‌اند یا مجزا. هرهم‌مجموعه‌شامل $r!s!$ عنصر است، از این‌رو

$$\frac{(r+s)!}{r!s!}$$

هم‌مجموعهٔ متمایز وجود دارد. اگر S_{r+s}/G دستهٔ هم‌مجموعه‌ها را نشان دهد، آنگاه ψ تابعی روی S_{r+s}/G تعریف می‌کند؛ بدین معنی که، بنابرآنچه نشان داده‌ایم، تابعی چون $\tilde{\psi}$ روی‌آن مجموعه وجود دارد که به‌ازای هر τ در S_{r+s}

$$\psi(\tau) = \tilde{\psi}(\tau G).$$

اگر H هم‌مجموعهٔ چپی از G باشد، آنگاه به‌ازای هر τ در H، $\tilde{\psi}(H) = \psi(\tau)$.

اکنون **ضرب خارجی** فرمهای چندخطی متناوب L و M از درجه‌های r و s را با قرار دادن

$$L \wedge M = \sum_H \tilde{\psi}(H) \tag{۵-۴۹}$$

که در آن H روی S_{r+s}/G تغییر می‌کند، تعریف می‌کنیم. روش دیگر بیان تعریف $L \wedge M$ چنین است. فرض کنیم S مجموعهٔ دلخواهی ازجایگشتهای $\{1,\dots,r+s\}$

باشد که از هر هم‌ـمجموعهٔ چپ G دقیقاً یك عنصر را شامل است. دراین صورت

$$L\wedge M=\sum_{\sigma}(\mathrm{sgn}\sigma)(L\otimes M)_{\sigma} \qquad (۵۰\text{-}۵)$$

که درآن σ بر روی S تغییر می‌کند. واضح است که

$$r!s!L\wedge M=\pi_{r+s}(L\otimes M)$$

و از این رو، تعریف جدید وقتی K هیأتی با سرشت نمای صفر باشد با (۵-۴۷) هم ارز است.

قضیهٔ ۹. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی و V مدولی روی K باشد. در این صورت ضرب خارجی عملی شرکت پذیر روی فرمهای چند خطی متناوب روی V است. به بیان دیگر، اگر L، M، و N فرمهای چند خطی متناوبی روی V، بترتیب از درجات r، s، و t باشند، آنگاه

$$(L\wedge M)\wedge N=L\wedge(M\wedge N).$$

اثبات. گرچه اثبات قضیهٔ ۸ دراینجا به‌کار نمی‌آید، اما در چگونگی اثبات‌حالت عمومی الهام بخش است. فرض‌کنیم $G(r, s, t)$ زیر گروهی از S_{r+s+t} متشکل از جایگشتهایی باشد که مجموعه‌های

$$\{1,\cdots,r\},\quad \{r+1,\cdots,r+s\},\quad \{r+s+1,\cdots,r+s+t\}$$

را داخل خودشان جای می‌گردانند. دراین‌صورت به‌ازای‌همهٔ μهای واقع درهم‌ـمجموعهٔ چپ‌مفروضی از $G(r, s, t)$، توابع چند خطی $(\mathrm{sgn}\mu)(L\otimes M\otimes N)_{\mu}$ مساوی‌اند. از هر هم‌ـمجموعهٔ چپ $G(r, s, t)$ عنصری انتخاب می‌کنیم و E را مجموع جملات متناظر $(\mathrm{sgn}\mu)(L\otimes M\otimes N)_{\mu}$ می‌گیریم. آنگاه E مستقل از نحوهٔ انتخاب نمایشگرهای μ است و

$$r!s!t!E=\pi_{r+s+t}(L\otimes M\otimes N).$$

نشان خواهیم داد که $(L\wedge M)\wedge N$ و $L\wedge(M\wedge N)$ هر دو با E متساوی هستند.

فرض‌کنیم $G(r+s, t)$ زیر گروهی از S_{r+s+t} باشد که مجموعه‌های

$$\{1,\cdots,r+s\},\quad \{r+s+1,\cdots,r+s+t\}$$

را در داخل خودشان جای می‌گرداند. فرض کنیم T مجموعه‌ای از جایگشتهای $\{1,\cdots,r+s+t\}$ باشد، که شامل دقیقاً یك عنصر ازهر هم‌ـمجموعهٔ چپ $G(r+s,t)$ است. بنا بر (۵-۵۰)

$$(L\wedge M)\wedge N=\sum_{\tau}(\mathrm{sgn}\tau)[(L\wedge M)\otimes N]_{\tau}$$

که در آن مجموع بر روی همهٔ جایگشتهای τ در T نوشته می‌شود. حال فرض کنیم $G(r, s)$ زیر گروهی از S_{r+s} باشد که مجموعه‌های

$$\{1, \cdots, r\}, \quad \{r+1, \cdots, r+s\}$$

را در داخل خودشان جای می‌گرداند. گیریم S مجموعهٔ دلخواهی از جایگشتهای $\{1, \cdots, r+s\}$ باشد که شامل دقیقاً یك عنصر از هر هم‌ـمجموعهٔ چپ $G(r, s)$ است. از (۵-۵۰) وآنچه در بالا نشان دادیم، نتیجه می‌شود که

$$(L\wedge M)\wedge N=\sum_{\sigma,\tau}(\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)[(L\otimes M)_\sigma\otimes N]_\tau$$

که در آن مجموع به‌ازای همهٔ جفتهای τ ، σ در $S\times T$ محاسبه می‌شود. اگر توافق کنیم که هر σ در S_{r+s} را با عنصری از S_{r+s+t}، که روی $\{1, \cdots, r+s\}$ با σ توافق داشته و روی $\{r+s+1, \cdots, r+s+t\}$ برابر عنصر همانی باشد یکی بگیریم، آنگاه می‌توانیم بنویسیم

$$(L\wedge M)\wedge N=\sum_{\sigma,\tau}\operatorname{sgn}(\sigma\tau)[(L\otimes M\otimes N)_\sigma]_\tau.$$

اما

$$[(L\otimes M\otimes N)_\sigma]_\tau=(L\otimes M\otimes N)_{\tau\sigma}.$$

بنابراین

$$(L\wedge M)\wedge N=\sum_{\sigma,\tau}\operatorname{sgn}(\tau\sigma)(L\otimes M\otimes N)_{\tau\sigma}.$$

حال فرض کنیم به‌ازای σ_i در S، τ_i در T، و γ در $G(r, s, t)$ داشته باشیم

$$\tau_1\sigma_1=\tau_2\sigma_2\gamma.$$

دراین صورت $\tau_2^{-1}\tau_1=\sigma_2\gamma\sigma_1^{-1}$ وچون $\sigma_2\gamma\sigma_1^{-1}$ در $G(r+s, t)$ است نتیجه می‌شود که τ_1 و τ_2 در یك هم‌ـمجموعهٔ چپ $G(r+s, t)$ قرار دارند. بنابراین $\tau_1=\tau_2$ و $\sigma_1=\sigma_2\gamma$. اما این مطلب ایجاب می‌کند که σ_1 و σ_2 (به‌عنوان عناصری از S_{r+s}) دریکی از هم‌ـمجموعه‌های $G(r, s)$ واقع شوند؛ از این‌رو، $\sigma_1=\sigma_2$. پس، حاصل ضربهای $\tau\sigma$ که با

$$\frac{(r+s+t)!}{(r+s)!t!}\;\frac{(r+s)!}{r!s!}$$

جفت (τ, σ) در $T\times S$ متناظرند، همگی متمایز هستند و در هم‌ـمجموعه‌های متمایزی‌از $G(r, s, t)$ قرار می‌گیرند. چون دقیقاً

$$\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}$$

هم‌-مجموعهٔ‌چپ $G(r,s,t)$ در S_{r+s+t} وجود دارد، نتیجه‌می‌شود که $E = (L\wedge M)\wedge N$. با استدلال مشابهی، همچنین $L\wedge(M\wedge N)=E$. □

مثال ۱۳. ضرب خارجی با فرمولهای معین مربوط به‌محاسبهٔ دترمینان، مشهور به **بسطهای لاپلاس**، ارتباط نزدیك دارد. گیریم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی و n عدد صحیح مثبتی باشد. فرض‌کنیم $1 \leqslant r < n$ و L فرم r خطی متناوب روی K^n تعریف شده توسط

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=\det\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr}\end{bmatrix}$$

باشد. اگر $s=n-r$، و M فرم S خطی متناوب

$$M(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=\det\begin{bmatrix} A_{1(r+1)} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s(r+1)} & \cdots & A_{sn}\end{bmatrix}$$

باشد، آنگاه $L\wedge M = D$ تابع دترمینان K^n است. این امر نتیجه‌ای فوری از این حکم است که $L\wedge M$ فرم n خطی متناوبی است و (چنانکه می‌توان دید)

$$(L\wedge M)(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)=1.$$

حال اگر $L\wedge M$ را به‌طرز صحیح توصیف کنیم، یکی از بسطهای لاپلاس برای دترمینان هر ماتریس $n\times n$ بر روی K را به‌دست می‌آوریم.

در گروه‌جایگشتی S_n، فرض‌کنیم G زیرگروهی باشد که مجموعه‌های $\{1,\cdots,r\}$ و $\{r+1,\cdots,n\}$ را در داخل خودشان جای بگرداند. هر هم‌-مجموعهٔ چپ G شامل دقیقاً یك جایگشت σ است که $\sigma 1<\sigma 2<\cdots<\sigma r$ و $\sigma(r+1)<\cdots<\sigma n$. علامت این جایگشت توسط

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^{\sigma 1+\cdots+\sigma r-\left(\frac{r(r+1)}{2}\right)}$$

مشخص می‌شود[1]. ضرب گوه‌ای $L\wedge M$ با

---

۱. فرمولی که در متن اصلی آمده چنین است:

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^{\sigma 1+\cdots+\sigma r+\left(\frac{r(r-1)}{2}\right)}$$

که صحیح نیست، زیرا اگر r عددی فرد بین ۱ و n، و ϵ جایگشت همانی باشد، برای هم‌-مجموعهٔ ←

$$(L\wedge M)(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sum(\operatorname{sgn}\sigma)L(\alpha_{\sigma 1},\cdots,\alpha_{\sigma r})M(\alpha_{\sigma(r+1)},\cdots,\alpha_{\sigma n})$$

معین می‌شود که در آن مجموع بر روی دسته‌ای از σها، از هرهم‌ـمجموعهٔ G یکی، محاسبه می‌شود. بنابراین

$$(L\wedge M)(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j_1<\cdots<j_r} e_J L(\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r})M(\alpha_{k_1},\cdots,\alpha_{k_s})$$

و در آن

$$e_J=(-1)^{j_1+\cdots+j_r-(r(r+1)/2)}$$
$$k_i=\sigma(r+i).$$

به‌بیان دیگر

$$\det A=\sum_{j_1<\cdots<j_r} e_J\begin{vmatrix}A_{j_1,1} & \cdots & A_{j_1,r}\\ \vdots & & \\ A_{j_r,1} & \cdots & A_{j_r,r}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_{k_1,r+1} & \cdots & A_{k_1,n}\\ \vdots & & \\ A_{k_r,r+1} & \cdots & A_{k_r,n}\end{vmatrix}.$$

این یك بسط لاپلاس است. بسطهای دیگر را می‌توان با عوض‌کردن مجموعه‌های $\{1,\ldots,r\}$ و $\{r+1,\ldots,n\}$ با دو مجموعهٔ مکمل متفاوتی از نمایه‌ها به دست آورد.

$\epsilon G=\vec{G}$، تنها جایگشتی‌که می‌تواند دارای خاصیت مذکور باشد، جایگشت همانی ϵ است. اما مطابق این فرمول

$$\operatorname{sgn}\epsilon=(-1)^{r^2}=-1.$$

فرمول صحیح باید

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^{\sigma 1+\cdots+\sigma r-\frac{r(r+1)}{2}}$$

باشد، که به‌طریق زیر اثبات می‌شود. برای چنین σیی تعداد $(\sigma 1-1)$ تعویض لازم است که $\sigma 1$ عنصر ابتدای جایگشت باشد. و نیز $\sigma 2-2$ تعویض لازم است که $\sigma 2$ عنصر دوم جایگشت باشد. و به‌همین منوال $\sigma r-r$ تعویض لازم است که σr عنصر rم جایگشت باشد. پس از این تعویضها $\sigma(r+1),\ldots,\sigma(n)$ بدون تغییر و با ترتیب درست درجای خودقرار می‌گیرد. بدین‌سان

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^{\sigma 1-1}\cdot(-1)^{\sigma 2-2}\cdots(-1)^{\sigma r-r}$$
$$=(-1)^{\sigma 1+\cdots+\sigma r-\frac{r(r+1)}{2}}.$$

درترجمه صورت صحیح این‌فرمول، و نیز صورت تصحیح شدهٔ نتایج‌مربوط به‌آن آمده است.ـم.

اگر V یك Kـمدول باشد، می‌توانیم مدولهای فرمی گوناگون $\bigwedge^r(V)$ را پهلوی هم قرار دهیم و با استفاده ازضرب خارجی حلقه‌ای تعریف کنیم. برای سادگی، این‌کار را تنها برای حالت Kـمدول آزادی از رتبهٔ n انجام می‌دهیم. در این صورت، به‌ازای $r>n$ مدولهای $\bigwedge^r(V)$ بدیهی هستند. حال

$$\bigwedge(V)=\bigwedge^0(V)\oplus\bigwedge^1(V)\oplus\cdots\oplus\bigwedge^n(V)$$

را تعریف می‌کنیم. این یك مجموع مستقیم خارجی است ـ مفهومی که قبلاً ازآن صحبت نشده‌است. عناصر $\bigwedge(V)$ عبارتند از $n+1$تاییهای $(L_0,\cdots,L_n)$ با L_r در $\bigwedge^r(V)$. جمع، و ضرب در K، به‌همان صورت که برای $n+1$تاییها انتظار می‌رود، تعریف می‌شوند. ضمناً $\bigwedge^0(V)=K$. اگر $\bigwedge^r(K)$ را با $n+1$ تاییهای $(0,\cdots,0,L,0,\cdots,0)$ که درآن L از $\bigwedge^r(K)$ است، یکی بگیریم، آنگاه $\bigwedge^r(K)$ زیر مدولی از $\bigwedge(V)$ می‌باشد و تجزیه به‌مجموع مستقیم

$$\bigwedge(V)=\bigwedge^0(V)\oplus\cdots\oplus\bigwedge^n(V)$$

به مفهوم معمولی آن، بر قرار است. چون $\bigwedge^r(V)$، Kـمدول آزادی از رتبهٔ $\binom{n}{r}$است، می‌بینیم که $\bigwedge(V)$ نیز یك Kـمدول آزاد است و

$$\text{رتبهٔ}\,(\bigwedge(V))=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}$$

$$=2^n.$$

ضرب خارجی یك عمل ضرب در $\bigwedge(V)$ تعریف می‌کند: از ضرب خارجی روی فرمها استفاده می‌کنیم وآن را به‌طور خطی به $\bigwedge(V)$ سرایت می‌دهیم. این عمل، نسبت به عمل جمع روی $\bigwedge(V)$ پخش‌پذیر است و به $\bigwedge(V)$ ساختار حلقه می‌بخشد. این حلقه، **حلقهٔ گراسمان** روی V^* است. این حلقه جابجایی نیست؛ مثلاً اگر L و M بترتیب در $\bigwedge^r$ و $\bigwedge^s$ باشند، آنگاه

$$L\wedge M=(-1)^{rs}M\wedge L.$$

با این وجود، حلقهٔ گراسمان در چندین شاخهٔ ریاضیات حائز اهمیت است.

٦

فرمهای متعارف مقدماتی

۱.۶. مقدمه

قبلاً اشاره کرده‌ایم که هدف اصلی ما مطالعهٔ تبدیلهای خطی روی فضاهای برداری با بعد متناهی است. تا اینجا، مثالهای خاص بسیاری از تبدیلهای خطی دیدیم و قضایایی چند دربارهٔ تبدیل خطی کلی اثبات کردیم. درحالت فضاهای با بعد متناهی، از پایه‌های مرتب برای نمایش ماتریسی این گونه تبدیلها استفاده کردیم و این نمایش مسلماً به‌بینش ما در مورد رفتار آنها افزود. فضای برداری $L(V, W)$ متشکل از تبدیلهای خطی ازیك فضادر فضایی دیگرونیزجبرخطی $L(V, V)$ متشکل از تبدیلهای خطی ازیك فضا درخودش را مورد بررسی قراردادیم.

در دوفصل آتی، به‌بررسی عملگرهای خطی مشغول می‌شویم. برنامهٔ ما این است که تنها یك عملگرخطی T روی فضای برداری با بعدمتناهی V را برگزینیم و «آن را تفکیك کنیم تا بفهمیم در درون آن چه می‌گذرد.» دراین مرحلهٔ اولیه، ساده‌ترین راه آن است که هدف خود را به‌زبان ماتریسی بیان کنیم: برای عملگر خطی داده شدهٔ T پایهٔ مرتبی برای V بیابیدکه نسبت به‌آن، ماتریس T شکل سادهٔ منتخبی را به‌خود بگیرد.

دراینجا تصویری ازآنچه‌که در ذهن داریم، آورده شده است. شاید ازنظرانجام کار ساده‌ترین ماتریسها، بعد از مضربهای اسکالری ماتریس همانی، ماتریسهای قطری

$$D=\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots c_n \end{bmatrix} \qquad (۱-۶)$$

باشند. فرض‌کنیم T عملگری خطی روی یك فضای nبعدی V باشد. اگر می‌توانستیم پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای V بیابیم که درآن T توسط ماتریس قطری D در (۶-۱) نمایش داده شود، مسلماً اطلاعات قابل‌ملاحظه‌ای دربارهٔ T کسب می‌کردیم. به‌عنوان نمونه، برخی ازاعداد سادهٔ وابسته به T، مثل رتبهٔ T یادترمینان T رامی‌توانستیم با اندك کوششی فراتر از یك نگاه به‌ماتریس D، تعیین‌کنیم. همچنین می‌توانستیم به‌طور آشکار برد وفضای پوچ T را توصیف کنیم. چون $[T]_{\mathcal{B}}=D$ اگر وتنها اگر

$$T\alpha_k=c_k\alpha_k, \qquad k=1, \cdots, n \qquad (۲-۶)$$

برد برابر زیرفضای پدیدآمده توسط α_kهایی است که به‌ازای آنها $c_k\neq 0$، وفضای پوچ زیرفضای پدیدآمده توسط بقیهٔ α_kهاست. درواقع، به‌نظرمنصفانه می‌آیدکه‌بگوییم، اگر پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ و ماتریسی قطری چون D را می‌شناختیم که $[T]_{\mathcal{B}}=D$، می‌توانستیم به‌هر سؤال احتمالی در مورد T بآسانی پاسخ دهیم.

آیا هرعملگرخطی T می‌تواند توسط ماتریسی قطری درپایه‌ای مرتب، نمایش‌داده شود؟ اگرچنین نیست، برای‌کدام عملگرهای Tچنین پایه‌ای وجود دارد؟ درصورت‌وجود چگونه می‌توانیم چنین پایه‌ای را بیابیم؟ اگر چنین پایه‌ای وجود نداشته باشد، ساده‌ترین نوع ماتریسی‌که توسط آن می‌توانیم T را نمایش دهیم،کدام است؟ اینها برخی از سؤالاتی هستندکه دراین فصل (وفصل بعدی) به‌آنهاخواهیم پرداخت. همچنان‌که‌ازبرخی از مشکلات آگاهی می‌یابیم، شکل سؤالات ما نیز پیچیده‌تر و ظریفتر خواهد شد.

۲.۶. مقادیر سرشت‌نما

تذکرات مقدماتی بخش قبل، نقطهٔ شروعی برای تلاش جهت تجزیه و تحلیل عملگرخطی عمومی T به‌دست می‌دهد. ما مطلب‌کلیدی خود را از (۶-۲) می‌گیریم که پیشنهادمی‌کند بردارهایی را مورد مطالعه قرار دهیم که توسط T به‌مضربهای اسکالری خودشان‌فرستاده می‌شوند.

تعریف. فرض کنیم V فضایی برداری برروی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد. یك **مقدار سرشت‌نمای** T اسکالری چون c در F است که برای آن بردار غیرصفری چون α در V با خاصیت $T\alpha=c\alpha$ وجود داشته باشد. اگر c یك مقدار سرشت‌نمای T

باشد، آنگاه

(الف) هر α با خاصیت $T\alpha=c\alpha$ یک **بردار سرشت‌نمای** T وابسته به مقدار سرشت‌نمای c نامیده می‌شود.

(ب) دستهٔ همهٔ αها که $T\alpha=c\alpha$ **فضای سرشت نمای** وابسته به c نامیده می‌شود.

مقادیر سرشت‌نما درمواردی ریشه‌های سرشت‌نما، ریشه‌های راکد، مقادیر ویژه، مقادیر سره، یا مقادیر طیفی هم‌نامیده می‌شوند. در این کتاب تنها از نام «مقادیر سرشت‌نما» استفاده خواهیم کرد.

اگر T عملگری خطی و c اسکالری دلخواه باشد، مجموعهٔ بردارهای α به‌طوری که $T\alpha=c\alpha$، زیرفضایی از V است. این زیرفضا، فضای پوچ تبدیل خطی $(T-cI)$ است. c را یك مقدار سرشت‌نمای T می‌نامیم، هرگاه این زیرفضا، زیرفضای صفر نباشد؛ یعنی، هرگاه $(T-cI)$ یك به‌یك نباشد. درصورتی که فضای زمینهٔ V با بعد متناهی باشد، $(T-cI)$ دقیقاً زمانی یك به‌یك نیست که دترمینان آن ۰ باشد. حال مطالب فوق را خلاصه می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V و c اسکالر دلخواهی باشد. احکام زیر هم‌ارزند.

(۱) c یك مقدار سرشت‌نمای T است.

(۲) عملگر $(T-cI)$ منفرد (معکوس‌ناپذیر) است.

(۳) $\det(T-cI)=0$.

معیاردترمینانی (۳) بسیار مهم است، زیرا به ما می‌گوید که کجا مقادیرسرشت‌نمای T را جستجو کنیم. چون $\det(T-cI)$ نسبت به‌متغیر c یك چندجمله‌ای درجهٔ n است، مقادیر سرشت‌نما را به‌صورت ریشه‌های این چندجمله‌ای به‌دست می‌آوریم. اجازه بدهید این مطلب را با دقت بیان کنیم.

اگر $\mathscr{B}$ پایهٔ مرتبی برای V باشد و $A=[T]_{\mathscr{B}}$، آنگاه $(T-cI)$ معکوس‌پذیر است اگروتنها اگرماتریس $(A-cI)$ معکوس‌پذیر باشد. درنتیجه، تعریف زیرمصداق دارد.

تعریف. اگر A ماتریسی $n\times n$ برروی هیأت F باشد، **یک مقدار سرشت‌نمای** A **در** F، اسکالری چون c از F است که ماتریس $(A-cI)$ منفرد (معکوس‌ناپذیر) باشد.

چون c یک مقدار سرشت‌نمای A است اگروتنها اگر $\det(A-cI)=0$، یا به‌طور هم‌ارز، اگروتنها اگر $\det(cI-A)=0$، پس ماتریس $(xI-A)$ با درایه‌های چندجمله‌ای را تشکیل می‌دهیم و چندجمله‌ای $f=\det(xI-A)$ را درنظر می‌گیریم. بوضوح مقادیرسرشت‌نمای A در F دقیقاً اسکالرهایی چون c در F هستند که $f(c)=0$.

بدین‌دلیل، f **چندجمله‌ای سرشت‌نمای** A نامیده می‌شود. توجه به‌این نکته مهم است که f چندجمله‌ای تکینی است که دقیقاً از درجهٔ n است. این مطلب بسادگی از فرمول‌دترمینان ماتریس برحسب درایه‌هایش قابل مشاهده است.

لم. ماتریسهای متشابه، چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی دارند.

اثبات. اگر $B=P^{-1}AP$، آنگاه

$$\begin{aligned}\det(xI-B)&=\det(xI-P^{-1}AP)\\&=\det(P^{-1}(xI-A)P)\\&=\det P^{-1}\cdot\det(xI-A)\quad\det P\\&=\det(xI-A)\cdot\ \square\end{aligned}$$

این لم مارا قادر می‌سازد که آگاهانه چندجمله‌ای سرشت نمای‌عملگر T را به‌عنوان چندجمله‌ای سرشت‌نمای هرماتریس $n\times n$ دلخواهی که T را درپایهٔ مرتبی از V نمایش دهد تعریف کنیم. عیناً همچـون درمورد ماتریسها، مقادیـرسرشت‌نمای T ریشه‌های چند-جمله‌ای سرشت‌نمای T هستند. بخصوص، این مطلب نشان می‌دهد که T نمی‌تواند بیش‌از nمقـدار سرشت‌نمای متمایز داشته باشد. توجه به‌این نکته مهم است کـه ممکن است T هیچ مقدار سرشت‌نما نداشته باشد.

مثال ۱. فرض کنیم T عملگری خطی روی R^{2} باشد که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}.$$

نمایش داده می‌شود. چندجمله‌ای سرشت‌نمای T (یا A) عبارت است از

$$\det(xI-A)=\begin{vmatrix}x&1\\-1&x\end{vmatrix}=x^{2}+1.$$

چون این چندجمله‌ای دارای ریشهٔ حقیقی نیست، T هیچ مقدار سرشت‌نما ندارد. اگر U عملگری خطی‌روی C^{2} باشد که درپایهٔ‌مرتب استانده‌توسط A نمایش‌داده‌می‌شود، آنگاه U دارای دومقدار سرشت‌نمای i و $i-$ است. دراینجا نکته‌ای ظریف دیده می‌شود. در بحث مربوط به‌مقادیرسرشت‌نمای ماتریس مفروض A باید مواظب باشیم که هیأت موردنظر را تصریح کنیم. دراین مثال ماتریس‌A دارای هیچ مقدار سرشت‌نما درR نیست، امادومقدار سرشت‌نمای i و $i-$ در C دارد.

مثال ۲. گیریم A ماتریس ۳×۳ (حقیقی)

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

باشد. دراین‌صورت چندجمله‌ای سرشت‌نمای A عبارت است از

$$\begin{vmatrix} x-۳ & -۱ & ۱ \\ -۲ & x-۲ & ۱ \\ -۲ & -۲ & x \end{vmatrix} = x^{۳}-۵x^{۲}+۸x-۴=(x-۱)(x-۲)^{۲}.$$

از این‌رو، مقادیر سرشت‌نمای A عبارتند از ۱ و ۲.

فرض کنیم T عملگری خطی روی $R^{۳}$ باشد که درپایهٔ استانده توسط A نمایش‌داده می‌شود. بردارهای سرشت‌نمای T وابسته به‌مقادیر سرشت‌نمای ۱ و ۲ را می‌یابیم. داریم

$$A-I=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}.$$

با یك‌نظر روشن است که $A-I$ دارای رتبهٔ ۲ است (و لذا پوچی $T-I$ برابر ۱ است). از این‌رو، فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به مقدار سرشت‌نمای ۱ یك‌ـبعدی است. بردار $\alpha_{۱}=(۱, ۰, ۲)$ فضای پوچ $T-I$ را پدید می‌آورد. پس، $T\alpha=\alpha$ اگر و تنها اگر α مضربی اسکالری از $\alpha_{۱}$ باشد. اکنون

$$A-۲I=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

را درنظرمی‌گیریم. آشکار است که رتبهٔ $A-۲I$ نیز ۲ است، بنابراین فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای ۲دارای بعد ۱است. بدیهی است که $T\alpha=۲\alpha$ اگروتنها اگر α مضربی اسکالری از $\alpha_{۲}=(۱, ۱, ۲)$ باشد.

تعریف. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V باشد. گوییم T **قطری شدنی** است، هرگاه پایه‌ای برای V وجود داشته باشد که هر بردار آن یك بردار سرشت‌نمای T باشد.

دلیل این نام‌گذاری باید روشن باشد؛ زیرا، اگر پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای V وجود داشته باشد که در آن هر α_i یك بردار سرشت‌نمای T باشد، آنگاه ماتریس T در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ قطری است. اگر $T\alpha_i=c_i\alpha_i$، داریم

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} c_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & c_2 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \cdots c_n \end{bmatrix}$$

حتماً لازم نیست که اسکالرهای c_1، $\cdots$، c_n متمایز باشند؛ در واقع، ممکن است همگی یك اسکالر باشند (وقتی که T مضربی اسکالری از عملگر همانی است).

همچنین می‌توان تعریف کرد که T قطری شدنی است هرگاه بردارهای سرشت‌نمای T فضای V را پدید آورند. این تعریف تنها از نظر ظاهر با تعریف قبلی متفاوت است، چراکه می‌توان بین هر مجموعهٔ پدیدآورنده‌ای از بردارها، پایه‌ای انتخاب کرد.

در مثالهای ۱ و ۲ عمداً عملگرهایی خطی روی R^n برگزیدیم که قطری شدنی نباشند. در مثال ۱، عملگری خطی روی R^2 داریم که قطری شدنی نیست، چراکه مقادیر سرشت‌نما ندارد. درمثال ۲، عملگر T مقادیر سرشت‌نما دارد؛ درواقع، چندجمله‌ای سرشت‌نمای T، به‌طور کامل برروی هیأت اعداد حقیقی تجزیه می‌شود: $f=(x-1)(x-2)^2$. با این‌حال، T قطری شدنی نیست. به‌هریك از دومقدار سرشت‌نمای T، تنها یك فضای یك‌بعدی از بردارهای سرشت‌نما وابسته است. از این‌رو، ممکن نیست بتوانیم پایه‌ای برای R^2 تشکیل دهیم که متشکل از بردارهای سرشت‌نمای T باشد.

فرض کنیم عملگرخطی T قطری‌شدنی باشد. بعلاوه فرض کنیم c_1، $\cdots$، c_k مقادیر سرشت‌نمای متمایز T باشند. در این صورت، پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}$ وجود دارد که در آن T توسط ماتریسی قطری با درایه‌های قطری c_i نمایش داده می‌شود و هریك از c_iها به‌تعداد دفعات معینی تکرار می‌شوند. اگرتعداد دفعات تکرار c_i برابر d_i باشد، آنگاه (باانتخاب ترتیبی درست) ماتریس شکل بلوکی

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} c_1I_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & c_2I_2 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \cdots c_kI_k \end{bmatrix} \tag{۳-۶}$$

دارد که درآن I_j ماتریس همانی $d_j \times d_j$ است. ازاین ماتریس دومطلب مشاهده می‌شود. اول اینکه، چندجمله‌ای سرشت‌نمای T، حاصل ضربی ازسازه‌های خطی (احتمالاً مکرر) است:

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k} .$$

اگر هیأت اسکالری F بستهٔ جبری، مثلاً هیأت اعداد مختلط باشد، هر چند جمله‌ای بر روی F را می‌توان بدین صورت به سازه‌ها تجزیه‌کرد (ر. ک. بخش ۵.۴)؛ اما، اگر F بستهٔ جبری نباشد، وقتی‌که بگوییم چند جمله‌ای سرشت نمای T دارای چنین تجزیه‌ای به سازه‌هاست، داریم ویژگی خاصی ازآن را ذکر می‌کنیم. دومین مطلبی‌که از (۶-۳) مشاهده می‌شود. این است‌که d_i، تعداد دفعاتی‌که c_i به‌عنوان ریشهٔ f تکرار می‌شود، برابر با بعد فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به‌مقدار سرشت نمای c_i است. علت آن است‌که پوچی هر ماتریس قطری برابر است با تعداد صفرهایی‌که روی قطر اصلی خود دارد، و ماتریس $[T - c_i I]_{\mathscr{B}}$ هم d_i صفر روی قطر اصلیش دارد. هرچند این رابطهٔ بین بعد فضای سرشت نما و چندگانگی مقدار سرشت‌نما به‌عنوان ریشه‌ای از f در ابتدا جالب به‌نظرنمی‌آید، اما راه‌ساده‌ای است برای تعیین اینکه آیا عملگرمفروضی قطری‌شدنی است یا خیر.

لم. فرض کنیم $T\alpha = c\alpha$. اگر f چند جمله‌ای دلخواهی باشد، آنگاه $f(T)\alpha = f(c)\alpha$.

اثبات. تمرین.

لم. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V باشد. گیریم $c_1, \ldots, c_k$ مقادیر سرشت نمای متمایز T و W_i فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به مقدار سرشت نمای c_i باشد. اگر $W = W_1 + \cdots + W_k$، آنگاه

$$\dim W = \dim W_1 + \cdots + \dim W_k .$$

در واقع، اگر $\mathscr{B}_i$ پایهٔ مرتبی برای W_i باشد، آنگاه $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_k)$ پایهٔ مرتبی برای W است.

اثبات. فضای $W = W_1 + \cdots + W_k$ زیرفضای پدیدآمده‌توسط‌همهٔ بردارهای سرشت‌نمای T است. معمولاً وقتی‌که مجموع W از زیرفضاهای W_i راتشکیل می‌دهیم، به‌دلیل روابطی خطی‌که ممکن است بین بردارهای فضاهای گوناگون موجود باشد، انتظار داریم‌که $\dim W < \dim W_1 + \cdots + \dim W_k$. این لم بیان می‌کندکه فضاهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقادیر سرشت‌نمای متفاوت مستقل از یکدیگرند.

فرض‌کنیم‌که (به‌ازای هر i) برداری چون β_i از W_i در دست باشد و نیز فرض کنیم $\beta_1 + \cdots + \beta_k = 0$. نشان می‌دهیم که به‌ازای هر i، $\beta_i = 0$. گیریم f چندجمله‌ای

دلخواهی باشد. چون $T\beta_i = c_i\beta_i$، لم قبل می‌گوید که

$$\begin{aligned} 0 = f(T)0 &= f(T)\beta_1 + \cdots + f(T)\beta_k \\ &= f(c_1)\beta_1 + \cdots + f(c_k)\beta_k. \end{aligned}$$

چندجمله‌ایهای f_1، ...، f_k را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$f_i(c_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} 0 = f_i(T)0 &= \sum_j \delta_{ij}\beta_j \\ &= \beta_i. \end{aligned}$$

حال، فرض کنیم $\mathcal{B}_i$ پایهٔ مرتبی برای W_i و $\mathcal{B}$ دنبالهٔ $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ باشد. در این صورت $\mathcal{B}$ زیرفضای $W = W_1 + \cdots + W_k$ را پدید می‌آورد. بعلاوه، به‌دلیل زیر $\mathcal{B}$ یك دنبالهٔ مستقل خطی از بردارهاست. هر رابطهٔ خطی بین بردارهای $\mathcal{B}$ شکل $0 = \beta_1 + \cdots + \beta_k$ را که در آن β_i ترکیبی خطی از بردارهای $\mathcal{B}_i$ است، خواهد داشت. بنابرآنچه‌که هم اکنون انجام دادیم، می‌دانیم که به‌ازای‌هر i، $\beta_i = 0$. چون‌هر $\mathcal{B}_i$ مستقل خطی است، مشاهده می‌کنیم که تنها رابطهٔ خطی بین بردارهای $\mathcal{B}$، رابطهٔ خطی بدیهی است. □

قضیهٔ ۲. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V باشد. گیریم c_1، ...، c_k مقادیر سرشت‌نمای متمایز T و W_i فضای پوچ $(T - c_iI)$ باشد. مطالب ذیل هم ارزند.

(۱) T قطری شدنی است.

(۲) چندجمله‌ای سرشت‌نمای T عبارت است از

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

و $\dim W_i = d_i$، $i = 1, \ldots, k$.

(۳) $\dim W_1 + \cdots + \dim W_k = \dim V$.

اثبات. قبلاً دیده‌ایم که (۲) از (۱) نتیجه می‌شود. اگرچندجمله‌ای سرشت‌نمای f حاصل ضرب سازه‌های خطی باشد، چنانکه در (۲) هم هست، آنگاه $d_1 + \cdots + d_k = \dim V$. زیرا مجموع d_iها برابر درجهٔ چندجمله‌ای سرشت‌نماست، و این درجه همان $\dim V$ است. بنابراین (۳) از(۲) نتیجه می‌شود. حال فرض کنیم (۳) برقرار باشد. بنا بر لم، باید داشته باشیم $V = W_1 + \cdots + W_k$. پس، بردارهای

سرشت‌نمای T فضای V را پدید می‌آورند. □

نظیر ماتریسی قضیهٔ ۲ را می‌توان به‌صورت زیر تنظیم کرد. فرض کنیم A ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های متعلق به‌هیأت F، و $c_1, \cdots, c_k$ مقادیر سرشت نمای متمایز A در F باشند. به ازای هر i، گیریم W_i فضای ماتریسهای ستونی X (با درایه‌های متعلق به F) باشد که

$$(A-c_iI)X=0$$

و فرض کنیم $\mathcal{B}_i$ پایهٔ مرتبی برای W_i باشد. اگر پایه‌های $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_k$ به‌طور دسته جمعی به‌دنبال هم بیایند، دنبالهٔ ستونهای ماتریسی چون P

$$P=[P_1, P_2, \cdots]=(\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_k).$$

را تشکیل می‌دهند. ماتریس A روی F متشابه ماتریسی قطری است اگر و تنها اگر P ماتریسی مربعی باشد. وقتی P مربعی باشد، معکوس‌پذیرهم هست و $P^{-1}AP$ قطری است.

مثال ۳. فرض کنیم T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. می‌خواهیم با استفاده از اعمال مختلف سطری و ستونی چگونگی محاسبهٔ چندجمله‌ای سرشت‌نما را نشان دهیم.

$$\begin{vmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-5 & 0 & 6 \\ 1 & x-2 & -2 \\ -3 & 2-x & x+4 \end{vmatrix}$$

$$=(x-2)\begin{vmatrix} x-5 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$=(x-2)\begin{vmatrix} x-5 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & x+2 \end{vmatrix}$$

$$=(x-۲)\begin{vmatrix} x-۵ & ۶ \\ -۲ & x+۲ \end{vmatrix}$$
$$=(x-۲)(x^۲-۳x+۲)$$
$$=(x-۲)^۲(x-۱).$$

ابعاد فضاهای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌این دو مقدار سرشت‌نما چیستند؟ داریم

$$A-\ \ I=\begin{bmatrix} ۴ & -۶ & -۶ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & -۶ & -۵ \end{bmatrix}$$

$$A-۲I=\begin{bmatrix} ۳ & -۶ & -۶ \\ -۱ & ۲ & ۲ \\ ۳ & -۶ & -۶ \end{bmatrix}.$$

می‌دانیم که $A-I$ منفرد است و بوضوح ۲ $\geqslant$ رتبهٔ $(A-I)$. بنابراین، ۲ $=$ رتبهٔ $(A-I)$. بدیهی است که ۱ $=$ رتبهٔ $(A-۲I)$.

فرض کنیم $W_۱$ و $W_۲$ فضاهای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقادیر سرشت‌نمای ۱ و ۲ باشند. می‌دانیم که $\dim W_۱=۱$ و $\dim W_۲=۲$. بنا بر قضیهٔ ۲، T قطری‌شدنی است. ارائهٔ پایه‌ای برای $R^۳$ که در آن T توسط ماتریسی قطری نمایش داده شود، آسان است. فضای پوچ $(T-I)$ توسط بردار $\alpha_۱=(۳,\ -۱,\ ۳)$ پدیدمی‌آید، ولذا $\{\alpha_۱\}$ پایه‌ای‌برای $W_۱$ است. فضای پوچ $T-۲I$ (یعنی فضای $W_۲$) متشکل‌است از بردارهای $(x_۱,\ x_۲,\ x_۳)$ با شرط $x_۱=۲x_۲+۲x_۳$. از این رو، به‌عنوان پایه‌ای برای $W_۲$ مثلاً می‌توانیم این دو بردار را برگزینیم:

$$\alpha_۲=(۲,\ ۱,\ ۰)$$
$$\alpha_۳=(۲,\ ۰,۱).$$

اگر $\mathcal{B}=\{\alpha_۱,\ \alpha_۲,\ \alpha_۳\}$، آنگاه $[T]_{\mathcal{B}}$ عبارت است از ماتریس قطری

$$D=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}.$$

این واقعیت که T قطری شدنی است، بدین معنی است که‌ماتریس اولیهٔ A باماتریس قطری D (بر روی R) متشابه است. ماتریس P که ما را قادر به‌تغییر مختصات از پایهٔ $\mathcal{B}$ به پایهٔ استانده می‌سازد (مسلماً) ماتریسی است که ترانهاده‌های $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\alpha_۳$ را به‌عنوان

بردارهای ستونی خود دارد:

$$P=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

بعلاوه، $AP=PD$، بنابراین

$$P^{-1}Ap=D.$$

تمرین

۱. در هر یك از حالات زیر فرض‌کنیم T و U دو عملگر خطی بترتیب روی R^2 و C^2 باشندکه هر دو بترتیب در پایهٔ مرتب استاندهٔ R^2 و پایهٔ مرتب استاندهٔ C^2 توسط A نمایش‌داده می‌شوند. چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای T و U، همچنین مقادیر سرشت‌نمای هر عملگر را بیابید، و نیز بـه‌ازای هر مقدار سرشت‌نما چون c پایه‌ای برای فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌آن بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

۲. فضای برداری nبعدی V بر روی F داده شده است. چندجمله‌ای سرشت‌نمای عملگر همانی روی V چیست؟ چندجمله‌ای سرشت‌نمای عملگر صفر چیست؟

۳. ماتریس مثلثی شکل Aی $n\times n$ بر روی هیأت F مفروض است. ثابت‌کنیدکه مقادیر سرشت‌نمای A درایه‌های قطری A، یعنی اسکالرهای A_{ii} می‌باشند.

۴. فرض‌کنید T عملگر خطی روی R^3 باشدکه در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. با ارائهٔ پایه‌ای برای R^3 که هر بردارآن یك بردارسرشت‌نمای T باشد، ثابت‌کنید T قطری شدنی است.

۵. فرض‌کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۶ & -۳ & -۲ \\ ۴ & -۱ & -۲ \\ ۱۰ & -۵ & -۳ \end{bmatrix}.$$

آیا A بر روی هیأت R با ماتریسی قطری متشابه است؟ آیا A بر روی هیأت C با ماتریسی قطری متشابه است؟

۶ . فرض‌کنید T عملگری خطی روی $R^۴$ باشد که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ a & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & c & ۰ \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. تحت چه شرایطی روی a، b، و c عملگر T قطری شدنی‌است؟

۷ . T را عملگری خطی روی فضای برداری n بعدی V بگیرید و فرض‌کنید n مقدار سرشت‌نمای متمایز داشته باشد. ثابت‌کنید T قطری شدنی است.

۸ . فرض‌کنید A و B دو ماتریس $n\times n$ بر روی هیأت F باشند. ثابت‌کنید که اگر $(I-AB)$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $I-BA$ نیز معکوس‌پذیر است و

$$(I-BA)^{-۱}=I+B(I-AB)^{-۱}A.$$

۹ . از نتیجهٔ تمرین ۸ استفاده و ثابت کنید که اگر A و B دو ماتریس $n\times n$ بر روی هیأت F باشند، آنگاه مقادیر سرشت‌نمای AB و BA در F مساوی هستند.

۱۰. فرض‌کنید A ماتریس ۲×۲ متقارنی $(A^t=A)$ با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت کنید A بر روی R با ماتریسی قطری متشابه است.

۱۱. ماتریس ۲×۲ مختلط N را که $N^۲=۰$ در نظر بگیرید. ثابت‌کنید یا $N=۰$ یا N بر روی C با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

متشابه است.

۱۲. از نتیجهٔ تمرین ۱۱ برای اثبات مطلب زیر استفاده کنید: اگر A ماتریسی ۲ × ۲ با درایه‌های مختلط باشد، آنگاه A بر روی C با ماتریسی از یکی از دو نوع

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

متشابه است.

۱۳. فرض کنید V فضای برداری همهٔ توابع پیوستهٔ از R در R، یعنی فضای توابع حقیقی (مقدار) پیوسته روی خط حقیقی، باشد. فرض کنید T عملگر خطی روی V تعریف شده توسط

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

باشد. ثابت کنید که T دارای هیچ مقدار سرشت‌نما نیست.

۱۴. ماتریس قطری Aی $n \times n$ با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$(x-c_1)^{d_1} \cdots (x-c_k)^{d_k}$$

را که در آن $c_1, \ldots, c_k$ متمایزهستند، درنظر بگیرید. فرض کنید V فضای ماتریسهای Bی $n \times n$ با شرط $AB = BA$ باشد. ثابت کنید که بعد V برابر $d_1^2 + \cdots + d_k^2$ است.

۱۵. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی F و A ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی F باشد. فرض کنید T عملگر خطی «ضرب از چپ در A» روی V باشد. آیا این درست است که A و T مقادیر سرشت‌نمای مساوی دارند؟

۶.۳. چندجمله‌ایهای پوچساز

در تلاش برای تحلیل عملگر خطی T یکی از مفیدترین مقولاتی که باید بدانیم، ردهٔ چندجمله‌ایهایی است که T را پوچ می‌سازند. به‌بیان دقیقتر، فرض کنیم V فضایی برداری برروی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد. اگر p یك چندجمله‌ای بر روی F باشد، آنگاه $p(T)$ نیز عملگری خطی روی V است. اگر q چندجمله‌ای دیگری بر روی F باشد، آنگاه

$$(p+q)(T) = p(T) + q(T)$$
$$(pq)(T) = P(T)q(T).$$

از این‌رو، دستهٔ چندجمله‌ایهای p که T را پوچ می‌سازند، بدین معنی که

$$p(T)=0$$

یك ایدآل در جبر چندجمله‌ای $F[x]$ است. ایــن ایدآل ممکن است ایدآل صفر باشد، بدین معنی که ممکن است T توسط هیچ چندجمله‌ای غیر صفری پوچ نشود. اما، اگر بعد فضای V متناهی باشد، این امر نمی‌تواند روی دهد.

فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای n بعدی V باشد. n^2+1 توان اول T را مورد نظر قرار می‌دهیم:

$$I, T, T^2, \cdots, T^{n^2}.$$

این دنباله، از n^2+1 عملگــر در $L(V, V)$، فضای عملگــرهای خطی روی V، تشکیل می‌شود. بعد فضای $L(V, V)$ برابر n^2 است. بنابراین، این دنباله از n^2+1 عملگر باید وابسته خطی باشد؛ یعنی، به‌ازای چند اسکالر c_i که همگی صفر نباشند، داریم

$$c_0 I+c_1 T+\cdots+c_{n^2} T^{n^2}=0.$$

از این رو، ایدآل چندجمله‌ایهایی که T را پوچ می‌سازند شامل چندجمله‌ای غیر صفری از درجهٔ n^2 یا کمتر هم هست.

بنا بر قضیهٔ ۵ از فصل ۴، هــر ایدآل چندجمله‌ایها متشکل از همهٔ مضربهای چند-جمله‌ای تکین ثابتی است که مولد آن ایدآل است. پس، عملگر T با چندجمله‌ای تکین p با خاصیت زیــر در تناظر است: اگر f چندجملــه‌ای مفروضی بر روی F باشد، آنگاه $f(T)=0$ اگرو تنها اگر $f=pg$ باشد، که در آن g نیزیك چندجمله‌ای برروی F است.

تعریف. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V برروی هیأت F باشد. **چندجمله‌ای مینیمال** T عبارت است از (یکتا) مــولــد تکین ایدآل چند-جمله‌ایهایی بر روی F که T را پوچ می‌سازند.

نام «چندجمله‌ای مینیمال» از این واقعیت ریشه می‌گیرد که مولد هر ایدآل چند-جمله‌ایها با چندجمله‌ای تکین از درجهٔ مینیمم در آن ایدآل مشخص می‌شود. ایــن بدان معنی است که چندجمله‌ای مینیمال p برای عملگر خطی T به‌طور یکتا با سه خاصیت زیر معین می‌شود:

(۱) p چندجمله‌ای تکینی بر روی هیأت اسکالری F است.

(۲) $p(T)=0$.

(۳) درجهٔ هیچ چندجمله‌ای برروی F که T را پوچ می‌سازد کمتر از درجهٔ p نیست.

اگر A مــاتــریسی $n\times n$ بر روی F باشد، **چندجمله‌ای مینیمال** A را به طریقی مشابه، بــه عنوان یکتا مولد تکین ایدآل همهٔ چندجمله‌ایهای بر روی F کــه A را پوچ می‌سازند، تعریف می‌کنیم. اگر عملگر T در پایــهٔ مرتبی توسط ماتریس A نمایش داده

شود، آنگاه T و A چندجمله‌ای مینیمال مساوی دارند. این بدان خاطر است که $f(T)$ در آن پایه با ماتریس $f(A)$ نمایش داده می‌شود و بنابراین، $f(T)=0$ اگر و تنها اگر $f(A)=0$.

از تذکر اخیر درمورد عملگرها و ماتریسها نتیجه‌می‌گیریم که ماتریسهای متشابه‌دارای چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی هستند. این حکم از تعاریف نیز روشن است، زیرا به‌ازای هر چندجمله‌ای f

$$f(P^{-1}AP)=P^{-1}f(A)P.$$

نکتهٔ اساسی دیگری هم درمورد چندجمله‌ایهای مینیمال ماتریسها هست که باید متذکر شویم. فرض کنیم A ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های متعلق به‌هیأت F باشد. فرض کنیم F_1 هیأتی باشد که F را به‌عنوان یك زیرهیأت شامل است. (مثلاً، A ممکن است ماتریسی با درایه‌های گویا باشد، درحالی که F_1 هیأت اعداد حقیقی. یا A ممکن است ماتریسی با درایه‌های حقیقی باشد، درحالی که F_1 هیأت اعداد مختلط.) می‌توان A را به‌عنوان ماتریسی $n\times n$ برروی F، یا به‌عنوان ماتریسی $n\times n$ برروی F_1 محسوب کرد. درظاهر، ممکن‌است به‌نظر رسد که برای A دو چندجمله‌ای مینیمال متفاوت به‌دست می‌آید. خوشبختانه این‌طور نیست؛ و باید ببینیم چرا. تعریف چندجمله‌ای مینیمال A، درصورتی که به‌عنوان ماتریسی $n\times n$ برروی هیأت F محسوب شود، چیست؟ همهٔ چندجمله‌ایهای تکین با ضرایب متعلق به F که A را پوچ می‌سازند درنظر می‌گیریم و آن را که با کوچکترین درجه‌است انتخاب می‌کنیم. اگر f چندجمله‌ای تکینی برروی F باشد:

$$f=x^k+\sum_{j=0}^{k-1}a_jx^j \tag{۶-۴}$$

آنگاه $f(A)=0$ صرفاً بیان می‌کند که رابطه‌ای خطی بین توانهای A در دست است:

$$A^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0. \tag{۶-۵}$$

درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال، کوچکترین عدد صحیح مثبت k است که یك رابطهٔ خطی به‌صورت (۶-۵) بین توانهای I، A، ...، A^k وجود داشته باشد. بعلاوه، بنابر یکتایی چندجمله‌ای مینیمال به ازای این k یك و تنها یك رابطه به‌صورت (۶-۵) برقرار است؛ بدین معنی که، وقتی درجهٔ این چندجمله‌ای مینیمال، k، تعیین شود، اسکالرهایی یکتا چون a_0، ...، a_{k-1} در F یافت می‌شوند که در (۶-۵) صدق کنند. اینها، ضرایب چندجمله‌ای مینیمال هستند.

حال (به‌ازای هر k) در (۶-۵) دستگاهی متشکل از n^2 معادلهٔ خطی برای «مجهولهای» a_0، ...، a_{k-1} داریم. چون درایه‌های A در F قرار دارند، ضرایب دستگاه معادلات (۶-۵) هم در F هستند. بنابراین، اگر دستگاه به‌ازای a_0، ...، a_{k-1} در F_1 جوابی داشته باشد، به ازای a_0، ...، a_{k-1} در F نیز دارای جوابی است. (ر. ك. انتهای بخش ۱.۴.) اکنون باید روشن باشد که دو چندجمله‌ای مینیمال مساوی هستند.

تااینجا چه مطالبی در بارهٔ چندجمله‌ای مینیمال عملگری خطی روی فضاییn بعدی آموخته‌ایم؟ تنها چیزی که می‌دانیم این است که درجهٔ آن از n^2 تجاوز نمی‌کند. معلوم می‌شود که این تخمین نسبتاً ضعیف است، چراکه این درجه نمی‌تواند بیش از n باشد. بزودی ثابت می‌کنیم که این عملگر به وسیلهٔ چندجمله‌ای سرشت‌نمایش پوچ می‌شود. ابتدا، به‌مشاهدهٔ حکمی مقدماتی‌تر می‌پردازیم.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری nبعدی V باشد [یا، A ماتریسی $n\times n$ باشد]. چندجمله‌ایهای سرشت‌نما ومینیمال T[یاA]، دارای ریشه‌های مساوی ولی احتمالاً با چندگانگیهای متفاوت هستند.

اثبات. گیریم p چندجمله‌ای مینیمال T و c یك اسکالر باشد. آنچه راکه‌می‌خواهیم نشان بدهیم این است که $p(c)=0$، اگر و تنها اگر c یك مقدار سرشت‌نمای T باشد.

ابتدا فرض کنیم $p(c)=0$. دراین صورت

$$p=(x-c)q$$

که درآن q یك‌چندجمله‌ای است. چون $\deg q<\deg p$، تعریف چندجمله‌ای مینیمال p تصریح می‌کند که $q(T)\neq 0$. برداری‌چون β انتخاب می‌کنیم که $q(T)\beta\neq 0$. گیریم $\alpha=q(T)\beta$. دراین صورت

$$\begin{aligned} 0&=p(T)\beta\\ &=(T-cI)q(T)\beta\\ &=(T-cI)\alpha \end{aligned}$$

و بنابراین، c یك مقدار سرشت‌نمای T است.

حال، فرض کنیم c یك مقدار سرشت‌نمای T، مثلاً $T\alpha=c\alpha$ و $\alpha\neq 0$، باشد. همان‌طورکه دریکی از لمهای پیش متذکرشدیم

$$p(T)\alpha=p(c)\alpha.$$

چون $p(T)=0$ و $\alpha\neq 0$، داریم $p(c)=0$. □

فرض‌کنیم T یك عملگرخطی قطری‌شدنی و c_1، . . . ، c_k مقادیرسرشت‌نمای‌متمایز T باشند. در این صورت بآسانی دیده می‌شود که چندجمله‌ای مینیمال T عبارت است از چندجمله‌ای

$$p=(x-c_1)\cdots(x-c_k).$$

اگر α یك بردار سرشت‌نما باشد، آنگاه یکی از عملگرهای $T-c_1I$، . . . ، $T-c_kI$ بردار α را به 0 می‌فرستد. بنابراین به‌ازای هر بردار سرشت‌نمای α

$$(T-c_1I)\cdots(T-c_kI)\alpha=0.$$

پایه‌ای برای فضای‌زمینه وجود دارد که متشکل از بردارهای سرشت‌نمای T است؛ ازاین‌رو

$$p(T) = (T - c_1 I) \cdots (T - c_k I) = 0.$$

ماحصل‌کارمان چنین است. اگر T یك عملگرخطی قطری شدنی باشد، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال T حاصل‌ضربی ازسازه‌های خطی متمایزاست. به‌طوری‌که بزودی خواهیم دید، این خاصیت مشخص‌کننده عملگرهای قطری شدنی است.

مثال ۴. سعی مـی‌کنیم چندجمله‌ایهای مینیمال عملگرهای مثالهای ۱، ۲، و ۳ را بیابیم. ما آنها را به‌عکس ترتیب فوق مورد بحث قرارمی‌دهیم. قبلاً معلوم شدکه‌عملگر مثال ۳ قطری‌شدنی وبا چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f = (x-1)(x-2)^2$$

است. از بند قبل بر می‌آید که چندجمله‌ای مینیمال T عبارت است از

$$P = (x-1)(x-2).$$

خواننده می‌تواند با بررسی مستقیم‌کاملاً اطمینان یابدکه

$$(A-I)(A-2I) = 0.$$

درمثال ۲، عملگر T نیزچندجمله‌ای سرشت‌نمای $f = (x-1)(x-2)^2$ را دارد. اما، این T قطری‌شدنی نیست ولذا نمی‌دانیم که چندجمله‌ای مینیمال‌آن $(x-1)(x-2)$ است. در این حالت دربارهٔ چندجمله‌ای مینیمال چه می‌دانیم؟ به واسطهٔ قضیهٔ ۳ می‌دانیم که ریشه‌های این چندجمله‌ای همان ۱ و ۲ هستند، البته احتمالاً باچندگانگیهایی دیگر. پس p رامیان چندجمله‌ایهایی به‌صورت $(x-1)^k(x-2)^l$، $k \geqslant 1$، $l \geqslant 1$ جستجومی کنیم. چندجمله‌ای $(x-1)(x-2)$ را آزمایش می کنیم:

$$(A-I)(A-2I) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

از این‌رو، درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال اقلاً ۳ است. پس، باید $(x-1)^2(x-2)$ یا $(x-1)(x-2)^2$ را بیازماییم. دومی که چندجمله‌ای سرشت‌نما است، انتخابی محتمل به‌نظرمی‌رسد. بآسانی‌می‌توان محاسبه‌کردکه $(A-I)(A-2I)^2 = 0$. پس، چندجمله‌ای مینیمال T همان چندجمله‌ای سرشت‌نمای آن است.

در مثال ۱، عملگرخطی T روی R^2 راکه درپایهٔ استاندە توسط ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود مورد بحث قرار دادیم. چندجمله‌ای سرشت‌نما، x^2+1 است که هیچ ریشهٔ حقیقی ندارد. برای تعیین چندجمله‌ای مینیمال T، T را کنار می‌گذاریم و حواس خود را روی A متمرکز می‌کنیم. به‌عنوان ماتریسی مختلط، A دارای مقادیر سرشت‌نمای i و $-i$ است. هر دو ریشه باید در چندجمله‌ای مینیمال ظاهر شوند. پس چندجمله‌ای مینیمال بر x^2+1 تقسیم‌پذیر است. بآسانی می‌توان نشان داد که $A^2+I=0$. بنابراین، چندجمله‌ای مینیمال x^2+1 است.

قضیهٔ ۴ (کیلی-همیلتن)[1]. عملگر خطی T روی فضای برداری بعد متناهی V داده شده است. اگر f چندجمله‌ای سرشت‌نمای T باشد، آنگاه $f(T)=0$؛ به بیان دیگر، چندجمله‌ای مینیمال T چندجمله‌ای سرشت‌نمای T را عاد می‌کند.

اثبات. بعدها دو اثبات دیگر از این قضیه، مستقل از اثبات ارائه شده در اینجا، عرضه خواهیم کرد. اثبات حاضر هرچند کوتاه، ولی احتمالاً فهم آن مشکل است. گذشته از اختصار، این اثبات این حسن را هم دارد که کاربردی آموزنده و کاملاً غیربدیهی از نظریهٔ عمومی دترمینانها که در فصل ۵ گسترش یافت، عرضه می‌کند.

فرض کنیم K حلقهٔ جابجایی با عنصر همانی متشکل از همهٔ چندجمله‌ایهای از T باشد. بدیهی است که K در واقع جبری جابجایی با عنصرهمانی برروی هیأت اسکالری است. پایهٔ مرتبی چون $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای V انتخاب می‌کنیم و A را ماتریسی می‌گیریم که T را در آن پایه نمایش می‌دهد. دراین صورت

$$T\alpha_i=\sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j, \qquad 1\leqslant i\leqslant n .$$

این معادلات را می‌توان به‌صورت هم‌ارز

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ji}T-A_{ji}I)\alpha_j=0, \qquad 1\leqslant i\leqslant n$$

نیز نوشت. فرض کنیم B عنصری از $K^{n\times n}$ با درایه‌های

$$B_{ij}=\delta_{ij}T-A_{ji}I$$

باشد. وقتی $n=2$

$$B=\begin{bmatrix} T-A_{11}I & -A_{21}I \\ -A_{12}I & T-A_{22}I \end{bmatrix}$$

---

1. Cayley-Hamilton

و

$$\det B=(T-A_{11}I)(T-A_{22}I)-A_{12}A_{21}I$$
$$=T^2-(A_{11}+A_{22})T+(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})I$$
$$=f(T)$$

که در آن f چندجمله‌ای سرشت‌نما است:

$$f=x^2-(\operatorname{tr} A)x+\det A.$$

درحالت $n>2$ نیز روشن است که

$$\det B=f(T)$$

چراکه f دترمینان ماتریس $xI-A$ است که درایه‌هایش چندجمله‌ایهای

$$(xI-A)_{ij}=\delta_{ij}x-A_{ij}$$

می‌باشند.[1]

می‌خواهیم نشان دهیم که $f(T)=0$. برای اینکه $f(T)$ عملگر صفر باشد لازم و کافی است که به‌ازای $k=1,\ldots,n$، $(\det B)\alpha_k=0$. طبق تعریف B، بردارهای α_1، $\ldots$، α_n درمعادلات

$$\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j=0,\qquad 1\leqslant i\leqslant n \tag{6-6}$$

صدق می‌کنند. وقتی $n=2$ ، نوشتن (۶-۶) به‌صورت

$$\begin{bmatrix} T-A_{11}I & -A_{21}I \\ -A_{12}I & T-A_{22}I \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

الهام‌بخش است. دراین حالت، الحاقی کلاسیك، یعنی $\operatorname{adj} B$، عبارت است ازماتریس

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} T-A_{22}I & A_{21}I \\ A_{12}I & T-A_{11}I \end{bmatrix}$$

و

---

۱. این قسمت از اثبات اندکی تصحیح شده است درمتن اصلی دراین رابطه بجای A_{ij}، A_{ji} آمده است که با تصحیح این اشتباه، شکافی در اثبات به‌وجود می‌آید. خوشبختانه با استفاده از

$$(xI-A)^t_{ij}=xI_{ji}-A_{ji} \quad \text{و} \quad f=\det(xI-A)=\det(xI-A)^t$$

نتیجه‌مطلوب؛ یعنی، $\det(B)=\det(TI-A)^t=\det(TI-A)=f(T)$ به‌دست‌می‌آید.ـم.

$$\tilde{B}B = \begin{bmatrix} \det B & 0 \\ 0 & \det B \end{bmatrix}.$$

از این‌رو، داریم

$$\begin{aligned}(\det B)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} &= (\tilde{B}B)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{B}\left(B\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

درحالت کلی، فرض کنیم $\tilde{B} = \operatorname{adj} B$. دراین صورت بنابر (۶-۶) به‌ازای هرجفت k، i

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij} \alpha_j = 0,$$

وبا مجموع گیری روی i، داریم

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij} \alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij} \Big) \alpha_j. \end{aligned}$$

حال $\tilde{B}B = (\det B)I$، و ازاین‌رو

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij} = \delta_{kj} \det B.$$

پس

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj} (\det B) \alpha_j \\ &= (\det B)\alpha_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \ \square \end{aligned}$$

قضیهٔ کیلی-همیلتن، عمدتاً بدین‌خاطر دراین مرحله مفید است که حیطهٔ جستجو برای چندجمله‌ایهای مینیمال عملگرهای گوناگون را محدود می‌سازد. اگر ماتریس A راکه نمایشگر T درپایهٔ مرتبی است بشناسیم، آنگاه می‌توانیم چندجمله‌ای سرشت‌نمای آن، f، را محاسبه کنیم. می‌دانیم که چندجمله‌ای مینیمال p چندجمله‌ای f را عاد می‌کند و هردو

ریشه‌های مساوی دارند. هیچ روش خاصی برای محاسبهٔ دقیق ریشه‌های چندجمله‌ایها (مگردرصورت کوچك بودن درجه) در دست نیست؛ اما، اگر f به‌سازه‌ها تجزیه شود:

$f=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}$، با فرض متمایز بودن c_1، …، c_k، $d_i\geqslant 1$ (۶-۷)

آنگاه

$$p=(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k}\,,\qquad 1\leqslant r_j\leqslant d_j\,. \tag{۶-۸}$$

این تنها چیزی است که درحالت عمومی می‌توان ابرازکرد. اگر f چندجمله‌ای (۶-۷) با درجهٔ n باشد، آنگاه به‌ازای هرچندجمله‌ای p نظیر (۶-۸) می‌توانیم ماتریسی $n\times n$ بیابیم که f را به‌عنوان چندجمله‌ای سرشت‌نمای خود و p را به‌عنوان چندجمله‌ای‌مینیمال خود دارا باشد. این مطلب را حالا اثبات نمی‌کنیم. ولی، می‌خواهیم این واقعیت را تأکید کنیم که علم به‌اینکه چندجمله‌ای سرشت‌نما شکل (۶-۷) را دارد، تصریح می کند که چندجمله‌ای مینیمال به‌شکل (۶-۸) است وهیچ چیزدیگری درمورد p ابراز نمی‌کند.

مثال ۵. گیریم A ماتریس (گویای) 4×4

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

باشد. توانهای A بسادگی قابل محاسبه‌اند:

$$A^2=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4\\ 4 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 4\\ 4 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix}.$$

پس $A^۳ = ۴A$؛ یعنی، اگـر $p = x^۳ - ۴x = x(x+۲)(x-۲)$، آنگـاه $p(A) = ۰$ چندجمله‌ای مینیمال A باید p را تقسیم کند. این چندجمله‌ای مینیمال بوضوح از درجهٔ ۱ نیست، چرا کـه این مطلب بدان معنی است که A مضربی اسکالری از عنصرهمانی است. از این‌رو، نامـزدهـای چندجمله‌ای مینیمال عبارتند از: p، $x(x+۲)$، $x(x-۲)$، و $x^۲ - ۴$. سه چندجمله‌ای درجهٔ دوم را می‌توان حذف کرد، زیرا با یك‌نظر آشکار است که $A^۲ \neq -۲A$، $A^۲ \neq ۲A$، و $A^۲ \neq ۴A$. بنابراین p چندجمله‌ای‌مینیمال A است. بخصوص ۰، ۲ و ۲ — مقادیر سرشت‌نمای A هستند. یکی از سازه‌های x، $x-۲$، و $x+۲$ باید دوبار درچندجمله‌ای سرشت‌نما تکرار شود. آشکار است کـه ۲ = رتبهٔ (A). درنتیجــه، فضایی دوبعــدی از بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای ۰ وجــود دارد. اکنون ازقضیهٔ ۲ باید روشن باشد که چندجمله‌ای‌سرشت‌نما $x^۲(x^۲ - ۴)$ است، ونیزاینکه A برروی هیأت اعدادگویا با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

متشابه است.

تمرین

۱. فرض‌کنید V فضایی برداری با بعــد متناهی باشد. چندجمله‌ای مینیمال عملگر همانی روی V کدام است؟ چندجمله‌ای مینیمال عملگرصفرچیست؟

۲. فرض کنید a، b، و c عناصرهیأت F و A ماتریس ۳×۳ زیربرروی F باشد:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & c \\ ۱ & ۰ & b \\ ۰ & ۱ & a \end{bmatrix}.$$

ثابت‌کنید چندجمله‌ای سرشت‌نمای A عبارت است از $x^۳ - ax^۲ - bx - c$ و این، چندجمله‌ای مینیمال A نیزهست.

۳. فرض‌کنید A ماتریس حقیقی ۴×۴

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. نشان دهید چندجمله‌ای سرشت‌نمای A، $x^2(x-1)^2$ است که چندجمله‌ای مینیمال آن نیز هست.

۴. آیا ماتریس A از تمرین ۳ برروی هیأت اعداد مختلط با ماتریسی قطری متشابه است؟

۵. فضای برداری nبعدی V و عملگر خطی T روی V داده شده‌اند. فرض کنید عدد صحیح مثبتی چون k موجود است که $T^k=0$. ثابت کنید $T^n=0$.

۶. ماتریسی 3×3 بیابید که چندجمله‌ای مینیمال آن x^2 باشد.

۷. فرض کنید n عددی صحیح مثبت و V فضای چندجمله‌ایهای برروی R که درجهٔ آنها حداکثر n است باشد (چندجمله‌ای ۰ را نیز در V قرار دهید). فرض کنید D عملگر مشتق‌گیری روی V باشد. چندجمله‌ای مینیمال D کدام است؟

۸. فرض کنید P عملگری روی R^2 باشد که هر بردار را به‌موازات محور yها بروی محور xها تصویر کند: $P(x,\ y)=(x,\ 0)$. نشان دهید که P خطی است. چندجمله‌ای مینیمال P چیست؟

۹. فرض کنید A ماتریسی $n\times n$ با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}$$

باشد. نشان دهید که

$$c_1d_1+\cdots+c_kd_k=\operatorname{tr}(A).$$

۱۰. فرض کنید V فضای برداری ماتریسهای $n\times n$ برروی هیأت F باشد. فرض کنید A یك ماتریس $n\times n$ ثابت و T عملگر خطی روی V تعریف شده توسط

$$T(B)=AB$$

باشد. نشان دهید که چندجمله‌ای مینیمال T برابر چندجمله‌ای مینیمال A است.

۱۱. ماتریسهای A و Bی $n\times n$ برروی هیأت F داده شده‌اند. بنابر تمرین ۹ در بخش

۱۰۶ دوماتریس AB و BA دارای مقادیرسرشت‌نمای مساوی‌اند. آیا چندجمله‌ایهای سرشت نمای آنها هم مساوی‌اند؟ آیا چند جمله‌ایها مینیمال آنها مساوی‌اند؟

۴.۶.زیرفضاهای پایا

دراین بخش به‌معرفی چند مفهوم می‌پردازیم که در تحلیل عملگرهای خطی مفید واقع خواهند شد. از این ایده‌ها برای به‌دست آوردن سرشت‌نمایی عملگرهای قطری شدنی (و مثلثی شونده) برحسب چندجمله‌ایهای مینیمالشان، استفاده خواهیم کرد.

تعریف. فرض کنیم V فضایی برداری و T عملگری خطی روی V باشد. اگر W زیرفضایی از V باشد، گوییم W **تحت T پایا** است، هرگاه به‌ازای هربردار α در W، بردار $T\alpha$ هم در W باشد؛ یعنی، هرگاه $T(W)$ مشمول W باشد.

مثال ۶. اگر T عملگر خطی دلخواهی روی V باشد، آنگاه V تحت T پایاست، همین‌طور است زیرفضای صفر. برد T وفضای پوچ T نیز تحت T پایا هستند.

مثال ۷. هیأت F وعملگرمشتق‌گیری Dروی‌فضای$F[x]$ متشکل ازچندجمله‌ایهای برروی F مفروض‌اند. فرض کنیم nعددی صحیح مثبت و W زیرفضای چندجمله‌ایهای از درجهٔ حداکثر n باشد. دراین صورت W تحت D پایاست. این امردقیقاً طریق دیگربیان این مطلب است که D «کاهش‌دهندهٔ درجه» است.

مثال ۸. دراینجا به‌تعمیمی بسیار مفید ازمثال ۶ می‌پردازیم. عملگرخطی T روی V مفروض است. فرض کنیم Uعملگرخطی‌دلخواهی روی V باشدکه با T جابجامی‌شود؛ یعنی $TU=UT$. همچنین فرض کنیم W برد U و N فضای پوچ U باشد. W و N هردو تحت Tپایا هستند. اگر α دربرد Uباشد، مثلاً $\alpha=U\beta$، آنگاه $T\alpha=T(U\beta)=U(T\beta)$ و ازاین‌رو، $T\alpha$ در برد U قرارد دارد. اگر α در N باشد، آنگاه

$$U(T\alpha)=T(U\alpha)=T(0)=0\ ;$$

پس، $T\alpha$ متعلق به N است.

نوع خاصی از عملگرهایی‌که با T جابجا می‌شوند، عملگری چون $U=g(T)$ است که در آن g یك‌چندجمله‌ای است. مثلاً، ممکن است داشته باشیم. $U=T-cI$ که در آن c یك مقدار سرشت‌نمای T است، فضای پوچ U برای ما آشناست. می‌بینیم که‌این مثال، این حکم (بدیهی) را شامل است که فضای‌بردارهای سرشت‌نمای Tوابسته‌به‌مقدار سرشت‌نمای c تحت T پایا است.

مثال ۹. فرض کنیم Tعملگری‌خطی‌رویR^2باشدکه درپایهٔ مرتب‌استانده باماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. دراین صورت تنها زیرفضاهایی از R^2 که تحت T پایا هستند، عبارتند از R^2 و زیرفضای صفر. هرزیرفضای پایای دیگری لزوماً باید دارای بعد یك باشد. اما، اگر W زیرفضایی باشدکه توسط بردار غیرصفر α پدید می‌آید، این حکم‌که W تحت T پایاست به‌معنی این است‌که α یك بردار سرشت‌نماست، ولی A هیچ مقدار سرشت‌نمای حقیقی ندارد.

هرگاه زیرفضای W تحت عملگر T پایا باشد، T عملگری خطی چون T_W روی فضای W القا می‌کند. عملگر خطی T_W طبق $T_W(\alpha)=T(\alpha)$، به‌ازای هر α در W، تعریف می‌شود، ولی T_W با Tکاملاً متفاوت است، زیرا دامنه آن W است نه V.

وقتی بعد V متناهی باشد، پایایی W تحت T تعبیرماتریسی ساده‌ای دارد و شاید بهتر باشدکه آن را در اینجا ذکرکنیم. فرض‌کنیم پایهٔ مرتب $\mathscr{B}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ را برای V چنان انتخاب کرده باشیم که $\mathscr{B}'=\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ پایهٔ مرتبی برای W باشد ($r=\dim W$). گیریم $A=[T]_{\mathscr{B}}$ وازآنجا

$$T\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}A_{ij}\alpha_i\ .$$

چون W تحت T پایاست، به‌ازای $j\leqslant r$ بردار $T\alpha_j$ به W تعلق دارد. این بدان معنی است که

$$T\alpha_j=\sum_{i=1}^{r}A_{ij}\alpha_i,\qquad j\leqslant r. \tag{۶-۹}$$

به‌عبارت دیگر، هرگاه $j\leqslant r$ و $i>r$، $A_{ij}=0$.

از نظرظاهر، A به‌صورت بلوکی

$$A=\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} \tag{۶-۱۰}$$

است، که‌در آن Bماتریسی $r\times r$، Cماتریسی $r\times(n-r)$، و Dماتریسی $(n-r)\times(n-r)$ است. خواننده توجه داردکه بنابر (۶-۹)، ماتریس B دقیقاً ماتریس عملگر القا شدهٔ T_W در پایهٔ مرتب $\mathscr{B}'$ است.

اکثر اوقات، بحث در خصوص T و T_W را بدون استفاده از صورت بلوکی ماتریس A در (۶-۱۰) انجام می‌دهیم. اما، به‌این نکته‌که روابط معین بین T_W و T چگونه از این صورت بلوکی دیده می‌شوند باید توجه‌کرد.

لم. فرض کنیم W زیرفضایی پایا از T باشد. چندجمله‌ای سرشت‌نمای عملگر

تحدیدی T_W چندجمله‌ای سرشت‌نمای T را عاد می‌کند، و نیزچندجمله‌ای مینیمال T_W چندجمله‌ای مینیمال T را.

اثبات. داریم

$$A=\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

که در آن $A=[T]_{\mathcal{B}}$ و $B=[T_W]_{\mathcal{B}'}$. به واسطهٔ صورت بلوکی این ماتریس

$$\det(xI-A)=\det(xI-B)\det(xI-D).$$

این تساوی، حکم در خصوص چندجمله‌ایهای سرشت‌نما را اثبات می‌کند. توجه داشته باشید که I برای نمایش ماتریسهای همانی با سه‌اندازهٔ مختلف، به‌کار رفته است.

kمین توان ماتریس A دارای صورت بلوکی

$$A^k=\begin{bmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{bmatrix}$$

است که در آن C_k ماتریسی $r\times(n-r)$ است. بنابراین، هرچند جمله‌ای که A را پوچ سازد B را نیز (و ایضاً D را) پوچ می‌سازد. از این‌رو، چندجمله‌ای مینیمال B چندجمله‌ای مینیمال A را عاد می‌کند. □

مثال ۱۵. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V، W زیرفضای پدیدآمده توسط همهٔ بردارهای سرشت‌نمای T و c_1، ...، c_k مقادیرسرشت‌نمای متمایز T باشند. به‌ازای هر i، گیریم W_i فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای c_i و $\mathcal{B}_i$ پایهٔ مرتبی برای W_i باشد. لم پیش از قضیهٔ ۲ می‌گوید که $\mathcal{B}'=(\mathcal{B}_1,\ldots,B_k)$ پایهٔ مرتبی برای W است. بویژه

$$\dim W=\dim W_1+\cdots+\dim W_k.$$

فرض کنیم $\mathcal{B}'=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ به صورتی باشد که چند αی نخست آن پایه $\mathcal{B}_1$، چندتای بعدی پایهٔ $\mathcal{B}_2$، و به‌همین نحو بقیه را تشکیل دهند. با این قرار

$$T\alpha_i=t_i\alpha_i,\qquad i=1,\ldots,r$$

که‌درآن $(t_1,\ldots,t_r)=(c_1,c_1,\ldots,c_1,\ldots,c_k,c_k,\ldots,c_k)$ واین‌درحالی است که c_i به‌تعداد $\dim W_i$ بار تکرار شده باشد.

حال W تحت T پایاست، چراکه به‌ازای هر α در W داریم

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r$$

$$T\alpha = t_1 x_1 \alpha_1 + \cdots + t_r x_r \alpha_r.$$

بردارهای دیگری چون α_{r+1}، $\cdots$، α_n را در V به‌نحوی انتخاب می‌کنیم که $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. ماتریس T نسبت به $\mathcal{B}$ صورت بلوکی (۱۰-۶) را دارد وماتریس عملگرتحدیدی T_W نسبت به‌پایهٔ $\mathcal{B}'$ برابر با

$$B = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & t_2 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & t_r \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای سرشت‌نمای B (یعنی، چندجمله‌ای سرشت‌نمای T_W) عبارت است از

$$g = (x - c_1)^{e_1} \cdots (x - c_k)^{e_k}$$

که درآن $e_i = \dim W_i$. از این گذشته، g چندجمله‌ای سرشت‌نمای f از T را عاد می‌کند. بنابراین، چندگانگی c_i، به‌عنوان ریشه‌ای از f، حداقل برابر $\dim W_i$ است.

این مطالب باید قضیهٔ ۲ را روشن‌کرده باشند. قضیهٔ مذکور صرفاً بیان می‌کندکه T قطری شدنی است اگر و تنها اگر $r = n$ یا اگروتنها اگر $e_1 + \cdots + e_k = n$. در حالت قطری نشدنی این مطالب کمك زیادی نمی‌کنند، چراکه ماتریسهای C و D در (۱۰-۶) را نمی‌شناسیم.

تعریف. فرض کنیم W زیرفضایی پایا از T و α برداری از V باشد. T — **هادی α در W** عبارت است از مجموعهٔ $S_T(\alpha; W)$ متشکل از همهٔ چندجمله‌ایهای g (برروی هیأت اسکالری) که $g(T)\alpha$ متعلق به W باشد.

چون عملگر T در بیشتر مباحث ثابت است، معمولاً زیرنمایهٔ T را حذف‌می‌کنیم و می‌نویسیم $S(\alpha; W)$. مؤلفین معمولاً این دسته از چندجمله‌ایها را «پرکننده» (ایدال پرکننده) می‌نامند. «هادی» اصطلاح متداول‌تری است که مورد ترجیح کسانی است که عملگر نه‌چندان مهاجم $g(T)$ را در تصور دارندکه با ملایمت بردار α را به W سوق می‌دهد. درحالت خاص $W = \{0\}$، هادی را T- **پوچساز** α می‌نامیم.

لم. اگر W زیرفضای پایایی برای T باشد، آنگاه W تحت هرچندجمله‌ای در T پایاست. پس، به ازای هر α در V، هادی $S(\alpha; W)$ ایدآلی در جبرچندجمله‌ای $F[x]$ است.

اثبات. اگر β در W باشد، آنگاه $T\beta$ متعلق به W است. در نتیجه،

$T(T\beta)=T^2\beta$ هم در W است. به‌استقرا، به‌ازای هر k، بردار $T^k\beta$ در W است. با در نظر گرفتن ترکیبات خطی، دیده می‌شود که به‌ازای هر چندجمله‌ای f، $f(T)\beta$ متعلق به W است.

اگر W زیر مجموعهٔ دلخواهی از V باشد، تعریف $S(\alpha; W)$ بامعنی است. اگر W یك زیرفضا باشد، آنگاه $S(\alpha; W)$ هم زیرفضایی از $F[x]$ است، زیرا

$$(cf+g)(T)=cf(T)+g(T).$$

درصورتی که W تحت T نیز پایا باشد، g را یك چندجمله‌ای در $S(\alpha; W)$ می‌گیریم؛ یعنی، فرض می‌کنیم $g(T)\alpha$ در W باشد. اگر f یك چندجمله‌ای دلخواه باشد، آنگاه $f(T)[g(T)\alpha]$ در W است. چون

$$(fg)(T)=f(T)g(T)$$

fg متعلق به $S(\alpha; W)$ است. پس مجموعهٔ هادی، عمل ضرب در هرچندجمله‌ای دلخواه را پذیرا است. □

یکتا مولد تکین ایدآل $S(\alpha; W)$، T- **هادی** α **در** W (T- **پوچساز**، در حالت $W=\{0\}$) نیز نامیده می‌شود. T- هادی α در W چندجمله‌ای تکینی مانند g باکمترین درجه است که $g(T)\alpha$ در W باشد. چندجمله‌ای f در $S(\alpha; W)$ است اگروتنها اگر g چندجمله‌ای f را عاد کند. توجه کنید که هادی $S(\alpha; W)$ همواره چندجمله‌ای مینیمال T را شامل است؛ از این‌رو، هر T- هادی چندجمله‌ای مینیمال T را عاد می‌کند.

به‌عنوان اولین مثال از چگونگی استفاده از هادی $S(\alpha; W)$، عملگرهای مثلثی شونده را سرشت‌نمایی می‌کنیم. عملگرخطی T **مثلثی‌شونده** نامیده می‌شود، هرگاه پایهٔ مرتبی وجود داشته باشد که در آن T با ماتریسی مثلثی نمایش داده شود.

لم. فرض کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی برروی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد که چندجمله‌ای مینیمال T حاصل‌ضربی از سازه‌های خطی به‌صورت

$$p=(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k} \quad \text{با فرض } c_i \text{ در } F$$

باشد. همچنین فرض کنیم W زیرفضایی سره $(W\neq V)$ از V باشد که تحت T پایاست. برداری چون α در V وجود دارد که

(الف) α در W نیست؛

(ب) به‌ازای یك مقدار سرشت‌نمای c از عملگر T، بردار $(T-cI)\alpha$ متعلق به W است.

اثبات. آنچه راکه (الف) و (ب) بیان می‌کنند این است که T- هادی α در W یك چندجمله‌ای خطی است. گیریم β برداری در V باشدکه در W نباشد و g برابر T- هادی β در W باشد. در این صورت g چندجمله‌ای مینیمال p از T را عاد می‌کند.

چون β در W قرار ندارد، چندجمله‌ای g ثابت نیست. بنابراین،

$$g=(x-c_1)^{e_1}\cdots(x-c_k)^{e_k}$$

که در آن حداقل یکی از اعداد صحیح e_i مثبت است. j را طوری انتخاب می‌کنیم که $e_j>0$. دراین صورت $(x-c_j)$ چندجمله‌ای g را عاد می‌کند:

$$g=(x-c_j)h.$$

بنابر تعریف g، بردار $\alpha=h(T)\beta$ نمی‌تواند در W باشد. اما

$$\begin{aligned}(T-c_jI)\alpha&=(T-c_jI)h(T)\beta\\&=g(T)\beta\end{aligned}$$

متعلق به W است. □

قضیهٔ ۵. فرض کنیم V فضایی برداری با بعدمتناهی برروی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد. در این صورت T مثلثی شونده است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال T حاصلضربی از چندجمله‌ایهای خطی برروی F باشد.

اثبات. فرض کنیم چندجمله‌ای مینیمال، به‌صورت

$$p=(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k}$$

به‌سازه‌ها تجزیه شود. با به‌کاربستن مکرر لم بالا، به‌پایهٔ مرتب $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ دست می‌یابیم که در آن نمایش ماتریسی T بالامثلثی است:

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}. \qquad (۱۱\text{-}۶)$$

(۶-۱۱) صرفاً بیان می‌کند که

$$T\alpha_j=a_{1j}\alpha_1+\cdots+a_{jj}\alpha_j,\qquad 1\leqslant j\leqslant n \qquad (۱۲\text{-}۶)$$

یعنی، $T\alpha_j$ در زیرفضای پدیدآمده توسط α_1، ...، α_j قرار دارد. برای یافتن α_1، ...، α_n با به‌کاربردن لم درمورد زیرفضای $W=\{0\}$ اول α_1 را به‌دست‌می‌آوریم. آنگاه لم را درمورد W_1، فضای پدیدآمده توسط α_1، به‌کار می‌بندیم تا α_2 را به‌دست آوریم. سپس لم را درمورد W_2، فضای پدیدآمده توسط α_1 و α_2، به کار می‌بندیم، و

به‌همین طریق ادامه می‌دهیم. یك نکته را هم باید متذکر شویم. پس از اینکه α_1، $\cdots$، α_n را یافتیم، این روابط مثلث گونهٔ (۶-۱۲)، به‌ازای $i=j$، $1, \cdots, j$، هستند که متضمن پایا بودن زیرفضای پدیدآمده توسط α_1، $\cdots$، α_i تحت عملگر T هستند.

اگر T مثلثی شونده باشد، بدیهی است که چندجمله‌ای سرشت‌نمای T به‌صورت

$$f=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}\text{، } c_i \text{ در } F$$

است. اکنون به‌ماتریس مثلثی (۶-۱۱) توجه کنید. درایه‌های قطری α_{11}، $\cdots$، α_{nn} مقادیر سرشت‌نما هستند که c_i بـه تعداد d_i بار تکرار می‌شود. اما، اگر f بتواند بدین صورت تجزیه شود، چندجمله‌ای مینیمال p نیز این طور تجزیه می‌شود، چرا که p چندجمله‌ای f را عاد می‌کند. □

نتیجه. فرض کنیم F یك هیأت بستهٔ جبری، چـون هیأت اعداد مختلط باشد. هر ماتریس $n\times n$ بر روی F، با یك ماتریس مثلثی بر روی F متشابه است.

قضیهٔ ۶. فضای برداری با بعد متناهی V بر روی هیأت F و عملگرخطی T روی V داده شده‌اند. T قطری شدنی است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال T به‌صورت

$$p=(x-c_1)\cdots(x-c_k)$$

باشد که در آن c_1، $\cdots$، c_k عناصری متمایز از F هستند.

اثبات. قبلاً گفته‌ایم که اگر T قطری شدنی باشد، چندجمله‌ای مینیمال آن حاصل‌ضربی از سازه‌های خطی متمایز است (ر. ك. بحث پیش از مثال ۴). برای اثبات حالت عکس، W را زیر فضای پـدیـدآمده توسط همهٔ بردارهای سرشت‌نمای T می‌گیریم و فرض می‌کنیم $W\neq V$. بنا بر لمی که در اثبات قضیهٔ ۵ به‌کار رفت، برداری چون α که در W نیست و نیز مقدار سرشت‌نمایی چون c_j از T وجود دارند که بردار

$$\beta=(T-c_jI)\alpha$$

در W قرار می‌گیرد. چون β در W است،

$$\beta=\beta_1+\cdots+\beta_k$$

که در آن $T\beta_i=c_i\beta_i$، $1\leqslant i\leqslant k$ و بنابراین به‌ازای هر چندجمله‌ای h، بردار

$$h(T)\beta=h(c_1)\beta_1+\cdots+h(c_k)\beta_k$$

در W قرار دارد.

حال، یك چندجمله‌ای چون q وجود دارد که $p=(x-c_j)q$. همچنین

$$q-q(c_j)=(x-c_j)h.$$

پس، داریم

$$q(T)\alpha - q(c_j)\alpha = h(T)(T - c_jI)\alpha = h(T)\beta.$$

اما $h(T)\beta$ متعلق به W است و چون

$$0 = p(T)\alpha = (T - c_jI)q(T)\alpha$$

بردار $q(T)\alpha$ در W قرار دارد. بنابراین، $q(c_j)\alpha$ هم در W است. چون α در W نیست، $q(c_j) = 0$. این مطلب متناقض با این واقعیت است که p ریشه‌های متمایزی دارد. □

درانتهای بخش ۶.۷، اثبات متفاوتی از قضیهٔ ۶ ارائه خواهیم کرد. قضیهٔ ۶ علاوه بر اینکه نتیجهٔ زیبایی است، از نظر محاسباتی نیز مفید است. فرض کنیم عملگر خطی T که در پایهٔ مرتبی با ماتریس A نمایش داده می‌شود در دست باشد و بخواهیم بدانیم که آیا T قطری شدنی است یا نه. چند جمله‌ای سرشت‌نمای f را محاسبه می‌کنیم. اگر بتوانیم f را به‌سازه‌ها تجزیه کنیم:

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

دو روش متفاوت برای تعیین اینکه آیا T قطری شدنی است یا نه، در اختیار داریم. یك روش این است که ببینیم آیا می‌توانیم به‌ازای هر i، تعداد d_i بردار سرشت نمای مستقل، وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای c_i، بیابیم یا نه. روش دیگر، بررسی این مطلب است که آیا $(T - c_1I)\cdots(T - c_kI)$ عملگر صفر هست یا نه.

قضیهٔ ۵، اثبات متفاوتی از قضیهٔ کیلی-همیلتن به‌دست می‌دهد. قضیهٔ اخیر درمورد ماتریسهای مثلثی آسان است. از این‌رو، به واسطهٔ قضیهٔ ۵، نتیجه را برای هر ماتریس دلخواه بر روی هیأتی بستهٔ جبری، به‌دست می‌آوریم. هر هیأت، زیرهیأتی از یك هیأت بستهٔ جبری است. با دانستن این قضیه، اثباتی برای قضیهٔ کیلی-همیلتن برای ماتریسهای بر روی هیأتی دلخواه به‌دست می‌آید. اگر در این بحث، دست‌کم قضیهٔ بنیادی جبر (هیأت اعداد مختلط بستهٔ جبری است) را بپذیریم، آنگاه قضیهٔ ۵ اثباتی از قضیهٔ کیلی-همیلتن برای ماتریسهای مختلط هم فراهم می‌آورد و این اثبات مستقل از اثباتی است که قبلاً ارائه کردیم.

تمرین

۱. فرض کنید T عملگری خطی روی R^2 باشد که ماتریس آن در پایهٔ مرتب استانده

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

است.

(الف) ثابت کنید تنها زیرفضاهای R^2 که تحت T پایا هستند، R^2 و زیرفضای

صفر می‌باشند.

(ب) اگرماتریس عملگر خطی U روی C^{2} در پایهٔ مرتب استانده A باشد،نشان دهید U دارای زیرفضاهای پایای یك بعدی است.

۲. فرض‌کنید W زیرفضای پایایی برای T باشد. بدون رجوع به‌ماتریسها، ثابت‌کنید که چندجمله‌ای مینیمال عملگر تحدیدی T_W، چندجمله‌ای مینیمال T را عاد می‌کند.

۳. c را یك مقدار سرشت‌نمای T و W را فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای c بگیرید. عملگر تحدیدی T_W چیست؟

۴. فرض‌کنید

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

آیا A بر روی هیأت اعداد حقیقی با ماتریسی مثلثی متشابه است؟ اگر این طورباشد، چنین ماتریس مثلثی را بیابید.

۵. هر ماتریس A، با این خاصیت که $A^{2}=A$، با ماتریسی قطری متشابه است.

۶. فرض‌کنید T یك عملگر خطی قطری شدنی روی فضای برداری n بعدی V باشد. اگر W زیرفضایی باشدکه تحت T پایاست، ثابت‌کنید عملگر تحدیدی T_Wقطری‌شدنی است.

۷. فرض‌کنید T عملگرخطی روی یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت‌اعداد مختلط باشد. ثابت‌کنیدT قطری شدنی است اگروتنها اگر T توسط یك‌چندجمله‌ای بر روی C با ریشه‌های متمایز، پوچ شود.

۸. فرض‌کنید T عملگری خطی روی V باشد. اگر هرزیرفضای V تحت T پایا باشد، آنگاه T مضربی اسکالری از عملگر همانی است.

۹. فرض‌کنید T عملگر انتگرال نامعین

$$(Tf)(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

روی فضای توابع پیوستهٔ روی فاصلهٔ $[0, 1]$ باشد.آیا فضای توابع چندجمله‌ای

تحت T پایا است؟ فضای توابع مشتق‌پذیر چطور؟ فضای توابعی که در $x = ۱/۲$ صفر می‌شوند چطور؟

۱۰. فرض کنید A ماتریسی ۳×۳ با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت کنید که اگر A بر روی R با ماتریسی مثلثی متشابه نباشد، آنگاه A بر روی C با ماتریسی قطری متشابه است.

۱۱. این حکم درست است یا غلط: اگر ماتریس مثلثی A با ماتریسی قطری متشابه باشد، آنگاه A خود قطری است.

۱۲. فرض کنید T عملگری خطی روی یك فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت بستهٔ جبری F، و f یك چندجمله‌ای برروی F باشد. ثابت کنید c یك مقدارسرشت‌نمای $f(T)$ است اگر و تنها اگر $c = f(t)$. در اینجا t یك مقدار سرشت نمای T است.

۱۳. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی F و A ماتریس $n \times n$ ثابتی برروی F باشد. فرض کنید T و U عملگرهای خطی روی V تعریف شده توسط

$$T(B) = AB$$

$$U(B) = AB - BA$$

باشند.

(الف) این حکم درست است یا غلط: اگر A (بر روی F) قطری شدنی باشد، آنگاه T قطری شدنی است.

(ب) این حکم درست است یا غلط: اگر A قطری شدنی باشد، آنگاه U نیز قطری شدنی است.

۶.۵. مثلث‌بندی همزمان؛ قطری سازی همزمان

فرض کنیم V فضایی با بعد متناهی و $\mathscr{F}$ خانواده‌ای از عملگرهای خطی روی V باشد. می‌خواهیم بدانیم کی می‌توانیم عملگرهای واقع در $\mathscr{F}$ را به‌طور همزمان مثلث‌بندی کنیم یا قطری سازیم؛ یعنی، پایه‌ای چون $\mathscr{B}$ بیابیم که همهٔ ماتریسهای $[T]_{\mathscr{B}}$، T در $\mathscr{F}$، مثلثی (یا قطری) باشند. در مورد قطری سازی، لازم است $\mathscr{F}$ خانواده‌ای ازعملگرهای جابجاشونده باشد: به‌ازای هر T و U در $\mathscr{F}$، $UT = TU$. این مطلب، از این واقعیت ناشی می‌شود که همهٔ ماتریسهای قطری جابجا می‌شوند. البته، این نیز لازم است که هر عملگر در $\mathscr{F}$، عملگری قطری شدنی باشد. برای مثلث‌بندی همزمان، هر عملگر در $\mathscr{F}$ باید مثلثی-

شونده باشد. لازم نیست که $\mathscr{F}$ خانواده‌ای جابجا شونده باشد؛ هرچند، این شرط (که هر T به‌تنهایی می‌تواند مثلث‌بندی شود) برای مثلث‌بندی همزمان کافی است. این نتایج، از تغییراتی جزئی در اثبات قضایای ۵ و ۶ حاصل می‌شوند.

زیرفضای W **تحت** (خانوادهٔ عملگرهای) $\mathscr{F}$ **پایاست**، هرگاه W تحت هر یك از عملگرهای واقع در $\mathscr{F}$ پایا باشد.

لم. گیریم $\mathscr{F}$ خانوادهٔ جابجا شونده‌ای از عملگرهای خطی مثلثی شونده روی V باشد. فرض کنیم W زیرفضایی سره از V باشد که تحت $\mathscr{F}$ پایاست. برداری چون α در V وجود دارد که

(الف) α در W نیست؛

(ب) به ازای هر T در $\mathscr{F}$، بردار $T\alpha$ در زیرفضای پدیدآمده توسط α و W قرار دارد.

اثبات. به دلیل مشاهدهٔ ذیل هرگاه فرض کنیم $\mathscr{F}$ فقط شامل تعدادی متناهی عملگر باشد از عمومیت مسأله نکاسته‌ایم. گیریم $\{T_1, \ldots, T_r\}$ یك زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکسیمال $\mathscr{F}$، یعنی پایه‌ای برای زیرفضای پدیدآمده توسط $\mathscr{F}$ باشد. اگر α برداری باشد که برای آن شرط (ب) به‌ازای هر T_i برقرار باشد، آنگاه (ب) به‌ازای هر عملگری که ترکیبی خطی از T_1، $\ldots$، T_r باشد نیز برقرار است.

بنا بر لم قبل از قضیهٔ ۵ (همین لم برای تنها یك عملگر) می‌توانیم برداری چون β_1 (که در W نیست) و اسکالری چون c_1 بیابیم که $(T_1 - c_1 I)\beta_1$ متعلق به W باشد. گیریم V_1 دستهٔ همهٔ بردارهایی چون β در V باشد که $(T_1 - c_1 I)\beta$ متعلق به W است. در این صورت V_1 زیرفضایی از V است که به‌طور سره بزرگتر از W می‌باشد. از این گذشته، V_1 تحت $\mathscr{F}$ پایاست؛ زیرا، اگر T با T_1 جابجا شود، آنگاه

$$(T_1 - c_1 I)(T\beta) = T(T_1 - c_1 I)\beta.$$

اگر β در V_1 باشد، آنگاه $(T_1 - c_1 I)\beta$ در W است. چون W تحت هر T در $\mathscr{F}$ پایاست، $T(T_1 - c_1 I)\beta$ متعلق به W است؛ یعنی، بـه‌ازای هر β در V_1 و هر T در $\mathscr{F}$، $T\beta$ در V_1 قرار دارد.

حال W زیرفضایی سره از V_1 است. گیریم U_2 عملگر خطی روی V_1 باشد که از تحدید T_2 به زیرفضای V_1 حاصل می‌شود. چندجمله‌ای مینیمال U_2 چندجمله‌ای مینیمال T_2 را تقسیم می‌کند. بنابرایـن، می‌توانیم لم قبل از قضیهٔ ۵ را در مورد ایـن عملگر و زیرفضای پایای W به‌کار بندیم. برداری چون β_2 در V_1 (و نه در W) و اسکالری چون c_2 را به‌دست می‌آوریم که $(T_2 - c_2 I)\beta_2$ در W باشد. توجه کنید که

(الف) β_2 متعلق به W نیست؛

(ب) $(T_1 - c_1 I)\beta_2$ در W است؛

(پ) $(T_2 - c_2 I)\beta_2$ هم در W است.

فرض کنیم V_2 مجموعهٔ همهٔ بردارهای β در V_1 باشد که $(T_2 - c_2 I)\beta$ در W است. در این صورت V_2 تحت $\mathscr{F}$ پایاست. لم قبل از قضیهٔ ۵ را در مورد U_3، تحدید T_3 به V_2، به‌کار می‌بندیم. اگر بدین طریق ادامه دهیم به برداری چون $\alpha = \beta_r$ (که در W نیست) خواهیم رسید که $(T_j - c_j I)\alpha$، $j = 1, \dots, r$، در W است. □

قضیهٔ ۷. فرض کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و $\mathscr{F}$ خانوادهٔ جابجا شونده‌ای از عملگرهای خطی مثلثی شونده روی V باشد. پایهٔ مرتبی برای V وجود دارد که درآن پایه، هرعملگر واقع در $\mathscr{F}$ توسط ماتریسی مثلثی نمایش داده می‌شود.

اثبات. با در اختیار داشتن لمی که هم اکنون اثبات شد، چنانچه $\mathscr{F}$ جایگزین T گردد، آنگاه این قضیه همان اثبات قضیهٔ ۵ را خواهد داشت. □

نتیجه. گیریم $\mathscr{F}$ خانوادهٔ جابجاشونده‌ای از ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت بستهٔ جبری F باشد. ماتریس $n \times n$ نامنفردی چون P، با درایه‌های متعلق به F وجود داردکه به ازای هر ماتریس A در $\mathscr{F}$، ماتریس $P^{-1}AP$ بالا مثلثی است.

قضیهٔ ۸. فرض کنیم $\mathscr{F}$ خانوادهٔ جابجا شونده‌ای از عملگرهای خطی قطری‌شدنی روی فضای برداری با بعد متناهی V باشد. پایهٔ مرتبی برای V وجود داردکه درآن پایه، هر عملگر واقع در $\mathscr{F}$ توسط ماتریسی قطری نمایش داده می‌شود.

اثبات. همچنان که قضیهٔ ۶ را با اقتباس از لم قبل از قضیهٔ ۵ برای حالت قطری شدنی ثابت کردیم، می‌توانیم این قضیه را هم با اقتباس لم قبل از قضیهٔ ۷ برای حالت قطری شدنی اثبات کنیم. ولی، در این مرحله ساده‌تر آن است که با استقرار روی بعد V به‌پیش برویم.

اگر ۱ = بعد (V) چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. قضیه را برای فضاهای برداری با ابعاد کمتر از n فرض می‌کنیم و V را فضایی n بعدی می‌گیریم. عنصری چون T از $\mathscr{F}$ انتخاب می‌کنیم که مضربی اسکالری ازعنصرهمانی نباشد. اسکالرهای $c_1, \dots, c_k$ را مقادیر سرشت نمای متمایز T، و (به‌ازای هر i) W_i را فضای پوچ $T - c_i I$ فرض می‌کنیم. نمایه‌ای چون i را تثبیت می‌کنیم. در این صورت W_i تحت هر عملگری که با T جابجا شود پایاست. $\mathscr{F}_i$ را خانوادهٔ عملگرهای خطی روی W_i می‌گیریم که از تحدید عملگرهای در $\mathscr{F}$ به‌زیر فضاهای (پایای) W_i حاصل بشوند. هرعملگر متعلق به $\mathscr{F}_i$ قطری‌شدنی است، زیرا چندجمله‌ای مینیمال آن، چندجمله‌ای مینیمال عملگر متناظرش در $\mathscr{F}$ راعادمی‌کند. چون $\dim W_i < \dim V$، عملگرهای واقع در $\mathscr{F}_i$ می‌توانند همزمان قطری شوند. به‌بیان‌دیگر، W_i پایه‌ای چون $\mathscr{B}_i$ دارد، متشکل ازبردارهایی که همزمان بردارهای سرشت‌نمای هر یك از عملگرهای متعلق به $\mathscr{F}_i$ هستند.

چون T قطری شدنی است، لم قبل از قضیهٔ ۲ می‌گوید که $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_k)$ پایه‌ای برای V است. این همان پایه‌ای است که در جستجویش هستیم. □

تمرین

۱. ماتریس حقیقی معکوس پذیری چون P بیابید که $P^{-۱}AP$ و $P^{-۱}BP$ هر دوقطری‌شدنی باشند. در اینجا A و B ماتریسهای حقیقی زیر هستند.

(الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۸ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$.

(ب) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & a \\ a & ۱ \end{bmatrix}$.

۲. فرض کنید $\mathscr{F}$ خانوادهٔ جابجاشونده‌ای از ماتریسهای مختلط ۳×۳ باشد. خانوادهٔ $\mathscr{F}$ چند ماتریس مستقل خطی را می‌تواند شامل باشد؟ در حالت $n\times n$ چه می‌توان گفت؟

۳. T را عملگری خطی روی فضایی n بعدی بگیرید و فرض کنید T دارای n مقدار سرشت نمای متمایز باشد. ثابت کنید هر عملگر خطی که با T جابجا شود، یك چند‌جمله‌ای برحسب T است.

۴. فرض کنید A، B، C، و D چهار ماتریس مختلط $n\times n$ باشند که (با یکدیگر) جابجا می‌شوند. فرض کنید E ماتریس $۲n\times ۲n$

$$E=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

باشد. ثابت کنید $\det E=\det(AD-BC)$.

۵. فرض کنید F یك هیأت، n عددی صحیح مثبت، و V فضای ماتریسهای $n\times n$ بر روی F باشد. اگر A ماتریس $n\times n$ ثابتی بر روی F باشد، T_A را عملگر خطی روی V تعریف‌شده توسط $T_A(B)=AB-BA$ بگیرید. خانوادهٔ عملگرهای خطی T_A را که با تغییر A روی همهٔ ماتریسهای قطری، حاصل می‌شود در نظر بگیرید. ثابت کنید عملگرهای واقع در این خانواده همزمان قطری شدنی هستند.

۶.۶. تجزیه به مجموع مستقیم

همچنان که به تحلیل خود از یك تك عملگر خطی ادامه می‌دهیم، ایده‌هایمان را به‌طریقی استادانه‌تر ـ کمتر برحسب ماتریسها و بیشتر برحسب زیرفضاها ـ تنظیم می‌کنیم. در آغاز این فصل هدف خود را بدین صورت تشریح کردیم: یافتن پایهٔ مرتبی که در آن ماتریس T

شکل سادهٔ خاصی به خود بگیرد. اکنون، هدف خود را به‌صورت زیر تشریح می‌کنیم: تجزیهٔ فضای زمینهٔ V به‌مجموع از زیرفضاهای پایا برای T به‌طوری‌که عملگرهای تحدیدی روی این زیرفضاها ساده باشند.

تعریف. گیریم $W_1, \ldots, W_k$ زیرفضاهایی از فضای برداری V باشند. گوییم $W_1, \ldots, W_k$ **مستقل هستند**، هرگاه

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0, \quad \alpha_i \text{ در } W_i$$

ایجاب کند که همهٔ α_iها صفر باشند.

به‌ازای $k = 2$، معنی استقلال همان $\{0\}$ بودن اشتراک است، به‌عبارت دیگر، W_1 و W_2 مستقل هستند اگر و تنها اگر $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. اگر $k > 2$، استقلال $W_1, \ldots, W_k$ بیانگر مطالب بسیار بیشتری از $W_1 \cap \cdots \cap W_k = \{0\}$ است. این استقلال بیان می‌کند که هر W_j با مجموع زیر فضاهای دیگر W_i تنها در بردار صفر شریک است.

اهمیت استقلال در نکتهٔ زیر نهفته است. گیریم $W = W_1 + \cdots + W_k$ زیرفضای پدیدآمده توسط $W_1, \ldots, W_k$ باشد. هر بردار α در W را می‌توان به‌صورت مجموعی چون

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k, \quad \alpha_i \text{ در } W_i$$

نوشت. اگر $W_1, \ldots, W_k$ مستقل باشند، آنگاه این عبارت برای α یکتا است؛ زیرا اگر

$$\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_k, \quad \beta_i \text{ در } W_i$$

آنگاه $(\alpha_1 - \beta_1) + \cdots + (\alpha_k - \beta_k) = 0$، وازاین‌رو $\alpha_i - \beta_i = 0$، $i = 1, \ldots, k$. پس، وقتی که $W_1, \ldots, W_k$ مستقل باشند، به همان طریقی که با بردارهای R^k به‌مثابهٔ k تاییهایی از اعداد رفتار می‌کردیم، می‌توانیم با بردارهای W نیز به‌صورت k تاییهای $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$، α_i در W_i، رفتار کنیم.

لم. فرض کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی باشد. $W_1, \ldots, W_k$ را زیر-فضاهایی از V می‌گیریم و فرض می‌کنیم $W = W_1 + \cdots + W_k$. احکام زیر هم ارزند.

(الف) $W_1, \ldots, W_k$ مستقل هستند.

(ب) به ازای هر j، $2 \leqslant j \leqslant k$، داریم

$$W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1}) = \{0\}.$$

(پ) اگر $\mathcal{B}_i$ پایهٔ مرتبی برای W_i، $1 \leqslant i \leqslant k$، باشد آنگاه دنبالهٔ $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ پایهٔ مرتبی برای W است.

اثبات. (الف) را فرض می‌گیریم. فرض کنیم α برداری در اشتراک

$(W_1+\cdots+W_{j-1}) \cap W_j$ باشد. در این صورت بردارهایی چون $\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}$،
که α_i در W_i است، وجود دارند که $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_{j-1}$. چون

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_{j-1}+(-\alpha)+0+\cdots+0=0$$

و از طرفی $W_1, \cdots, W_k$ مستقل هستند، باید داشته باشیم $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{j-1}=\alpha=0$.

اکنون ثابت می‌کنیم که (ب) حکم (الف) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم

$$0=\alpha_1+\cdots+\alpha_k،\quad \alpha_i \text{ در } W_i.$$

j را بزرگترین عدد صحیح i می‌گیریم که $\alpha_i \neq 0$، در این صورت

$$0=\alpha_1+\cdots+\alpha_j,\quad \alpha_j\neq 0.$$

پس $\alpha_j=-\alpha_1-\cdots-\alpha_{j-1}$ بردار غیر صفری در $W_j \cap (W_1+\cdots+W_{j-1})$ است.

تااینجا می‌دانیم که (الف) و(ب) یکی هستند، ببینیم چرا (الف) و(پ) هم‌ارزند. (الف) را فرض می‌گیریم. فرض کنیم $\mathcal{B}_i$ پایه‌ای برای W_i، $1\leqslant i\leqslant k$، باشد و $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_k)$. هر رابطهٔ خطی بین بردارهای $\mathcal{B}$ صورت

$$\beta_1+\cdots+\beta_k=0$$

را دارد که در آن β_i ترکیبی خطی از بردارهای متعلق به $\mathcal{B}_i$ است. چون $W_1, \cdots, W_k$ مستقل هستند، هر β_i برابر 0 است. چون هر $\mathcal{B}_i$ مستقل است، رابطه‌ای که بین بردارهای واقع در $\mathcal{B}$ داریم رابطه‌ای بدیهی است.

اثبات این‌که (پ) حکم (الف) را ایجاب می‌کند به‌تمرین (تمرین ۲) ارجاع می‌شود. □

اگر هر یك از (و در نتیجه همهٔ) شرایط لم اخیر برقرار باشد، گوییم مجموع $W=W_1+\cdots+W_k$ **مستقیم** است یا W **مجموع مستقیم** $W_1, \cdots, W_k$ است و می‌نویسیم

$$W=W_1\oplus\cdots\oplus W_k.$$

خواننده ممکن است در نوشتارهای ریاضی این‌مجموع مستقیم را با عناوین مجموع‌مستقل یا مجموع مستقیم درونی $W_1, \cdots, W_k$ هم بیابد.

مثال ۱۱. گیریم V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی‌هیأت F و $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. اگر W_i زیرفضای یك بعدی پدیدآمده توسط α_i باشد، آنگاه $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_n$.

مثال ۱۲. فرض کنیم n عددی صحیح مثبت، F زیر هیأتی از اعداد مختلط، و V

فضای همهٔ ماتریسهای $n\times n$ بر روی F باشد. گیریم W_1 زیرفضای همهٔ ماتریسهای **متقارن**، یعنی ماتریسهایی چون A با شرط $A=A^t$، و W_2 زیرفضای همهٔ ماتریسهای **متقارن کج**، یعنی ماتریسهایی چون A با شرط $A^t=-A$، باشند. در این صورت $V=W_1\oplus W_2$. اگر A ماتریسی دلخواه در V باشد، عبارت یکتایی که A را به‌صورت مجموعی از ماتریسها، یکی در W_1 و دیگری در W_2، بیان کند عبارت است از

$$A=A_1+A_2$$

$$A_1=\frac{1}{2}(A+A^t)$$

$$A_2=\frac{1}{2}(A-A^t).$$

مثال ۱۳. فرض کنیم T عملگر خطی دلخواهی روی فضای با بعد متناهی V باشد. گیریم $c_1,\dots,c_k$ مقادیر سرشت‌نمای متمایز T، و W_i فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای c_i باشند. در این صورت $W_1,\dots,W_k$ مستقل‌اند. به‌لم قبل از قضیهٔ ۲ مراجعه کنید. بخصوص، اگر T قطری‌شدنی باشد، آنگاه $V=W_1\oplus\dots\oplus W_k$.

تعریف. اگر V فضایی برداری باشد، یك **تصویر**[1] V عملگری خطی چون E روی V است که $E^2=E$.

فرض کنیم E یك تصویر باشد. R را برد E و N را فضای پوچ E می‌گیریم.

۱. بردار β در برد R است اگر و تنها اگر $E\beta=\beta$. اگر $\beta=E\alpha$، آنگاه $E\beta=E^2\alpha=E\alpha=\beta$. بعکس، اگر $\beta=E\beta$، آنگاه (مسلماً) β در برد E قراردارد.

۲. $V=R\oplus N$.

۳. عبارت یکتای α به‌صورت مجموعی از بردارهای در R و N عبارت است از $\alpha=E\alpha+(\alpha-E\alpha)$.

از (۱)، (۲)، و (۳) بسادگی دیده می‌شود که اگر R و N دو زیرفضای V باشند و $V=R\oplus N$، یك و تنها یك عملگر تصویر E وجود دارد که بردش R و فضای پوچش N باشد. این عملگر، **تصویر** روی R **در راستای** N نامیده می‌شود.

هر تصویر E (به‌طور بدیهی) قطری شدنی است. اگر $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ پایه‌ای برای R و $\{\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n\}$ پایه‌ای برای N باشد، آنگاه پایهٔ $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ ماتریس E را قطری می‌کند:

$$[E]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

---

۱. این اصطلاح را یك عملگر تصویری یا به‌طور خلاصه یك تصویری می‌نامند.ـم.

در اینجا I ماتریس همانی $r \times r$ است. این موضوع به تفسیر برخی از اصطلاحات دربارهٔ تصویرها کمك می‌کند. خواننده باید حالات گوناگون در صفحهٔ R^2 (یا فضای ۳بعدی R^3) را بررسی و خود را متقاعدکند که تصویر روی R در راستای N، هر بردار را با تصویرکردنش به‌موازات N، در R می‌فرستد.

از تصویرها می‌توان در تشریح تجزیه به مجموعهای مستقیم فضای V استفاده کرد. زیرا،گیریم $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. به ازای هر j عملگری چون E_j روی V تعریف می‌کنیم. فرض کنیم α در V باشد؛ مثلا فرض کنیم $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ و α_i در W_i باشد. بنا به‌تعریف می‌گیریم $E_j\alpha = \alpha_j$. در این صورت E_j قاعده‌ای خوش تعریف‌است. بسادگی‌دیده می‌شود که E_j خطی است، برد E_j برابر W_j است و $E_j^2 = E_j$. فضای پوچ E_j برابر است با زیرفضای

$$(W_1 + \cdots + W_{j-1} + W_{j+1} + \cdots + W_k)$$

زیرا، حکم $E_j\alpha = 0$، چیزی جز $\alpha_j = 0$ نیست؛ یعنی، α عملاً مجموعی از بردارهای واقع درفضاهای W_i با $i \neq j$ است. برحسب تصویرهای E_j به‌ازای هر α در V داریم

$$\alpha = E_1\alpha + \cdots + E_k\alpha.$$

مطلبی‌که (۶-۱۳) بیان می‌کند این است

$$I = E_1 + \cdots + E_k.$$

توجه نیزداشته باشید که اگر $i \neq j$،آنگاه $E_iE_j = 0$، زیرا برد E_j زیرفضای W_j است که مشمول در فضای پوچ E_i است. اکنون یافته‌های خود را خلاصه و عکس قضیه را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ ۹. اگر $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$، آنگاه k عملگرخطی $E_1، \cdots، E_k$ روی V وجود دارندکه

(۱) هر E_i یك تصویر است $(E_i^2 = E_i)$؛

(۲) $E_iE_j = 0$، هرگاه $i \neq j$؛

(۳) $I = E_1 + \cdots + E_k$؛

(۴) برد E_i برابر W_i است.

بعکس، اگر $E_1، \cdots، E_k$ عملگرهایی خطی روی V باشند که در شرایط (۱)، (۲)، و (۳) صدق کنند و اگر W_i برد E_i باشد، آنگاه $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.

اثبات. تنها باید حکم عکس را اثبات کنیم. فرض کنیم $E_1، \cdots، E_k$ عملگرهایی خطی روی V باشندکه سه شرط اول را برمی‌آورند وهمچنین فرض می‌کنیم W_i برد E_i باشد. در این صورت یقیناً

$$V = W_1 + \cdots + W_k ;$$

زیرا، بنا بر شرط (۳)، به‌ازای هر α در V داریم

$$\alpha = E_1\alpha + \cdots + E_k\alpha$$

و $E_i\alpha$ هم در W قرار دارد. این عبارت برای α یکتاست، زیرا اگر

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$$

و α_i در W_i باشد، مثلاً $\alpha_i = E_i\beta_i$، آنگاه با استفاده از (۱) و (۲) داریم

$$\begin{aligned} E_j\alpha &= \sum_{i=1}^{k} E_j\alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} E_jE_i\beta_i \\ &= E_j^2\beta_j \\ &= E_j\beta_j \\ &= \alpha_j. \end{aligned}$$

این مطلب نشان می‌دهد که V مجموع مستقیم W_iهاست. □

تمرین

۱. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی و W_1 زیرفضایی از V باشد. ثابت کنید زیرفضایی چون W_2 از V وجود دارد که $V = W_1 \oplus W_2$.

۲. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی و W_1، ...، W_k زیرفضاهایی از V باشند که $V = W_1 + \cdots + W_k$ و بعد$(V) =$ بعد$(W_1) + \cdots +$ بعد(W_k).
ثابت کنید $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.

۳. تصویر E را بیابید که R^2 را بروی زیرفضای پدیدآمده توسط بردار $(1, -1)$، در راستای زیرفضای پدیدآمده توسط بردار $(1, 2)$، تصویر کند.

۴. این حکم درست است یا غلط: اگر E_1 و E_2 تصویرهایی بروی زیرفضاهایی مستقل باشند، آنگاه $E_1 + E_2$ یك تصویر است.

۵. اگر E یك تصویر و f یك چندجمله‌ای باشد، آنگاه $f(E) = aI + bE$. مقادیر a و b برحسب ضرایب f چه هستند؟

۶. این حکم درست است یا غلط: اگر عملگری قطری شدنی تنها دارای مقادیر سرشت-

نمای ۰ و ۱ باشد، یك تصویر است.

۷ . ثابت کنید که اگر E تصویر روی R در راستای N باشد، آنگاه $(I-E)$ تصویر روی N در راستای R است.

۸ . فرض کنید $E_1, \ldots, E_k$ عملگرهایی خطی روی فضای V باشند و $E_1 + \cdots + E_k = I$.
(الف) ثابت کنید که اگر به‌ازای $i \neq j$ داشته باشیم $E_i E_j = 0$، آنگاه به‌ازای هر i، $E_i^2 = E_i$.
(ب) درحالت $k=2$، عکس (الف) را اثبات کنید؛ یعنی، اگر $E_1 + E_2 = I$، $E_1^2 = E_1$ و $E_2^2 = E_2$، آنگاه $E_1 E_2 = 0$.

۹ . فرض کنید V یك فضای برداری حقیقی و E یك عملگر خطی خود توان روی V، یعنی یك تصویر باشد. ثابت کنید $(I+E)$ معکوس‌پذیر است. $(I+E)^{-1}$ را نیز بیابید.

۱۰. فرض کنید F زیرهیأتی از اعداد مختلط (یا، هر هیأتی با سرشت‌نمای صفر) و V یك‌فضای برداری با بعدمتناهی برروی F باشد. فرض کنید $E_1, \ldots, E_k$ تصویرهایی از V باشند و $E_1 + \cdots + E_k = I$. ثابت کنید به ازای $i \neq j$، $E_i E_j = 0$.
(راهنمایی: ازتابع رد استفاده کنید، و از خود سؤال کنید که رد هر تصویر چیست.)

۱۱. فرض کنید V فضایی برداری و $W_1, \ldots, W_k$ زیرفضاهایی از V باشند. فرض کنید

$$V_j = W_1 + \cdots + W_{j-1} + W_{j+1} + \cdots + W_k.$$

همچنین فرض کنید که $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. ثابت کنید فضای دوگان V^* به مجموع مستقیم $V^* = V_1^\circ \oplus \cdots \oplus V_k^\circ$ تجزیه می‌شود.

۷.۶. مجموعهای مستقیم پایا

ما در وهلهٔ نخست به‌تجزیه به‌مجموع مستقیم $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$، که در آن هر یك از زیرفضاهای W_i تحت عملگر خطی مفروض T پایا باشد، علاقه‌مندیم. با در دست بودن چنین تجزیه‌ای از V، T به‌وسیلهٔ تحدید، عملگری خطی چون T_i روی هر W_i القا می‌کند. پس، کنش T عبارت از این است که اگر α برداری از V باشد بردارهای یکتایی چون $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$، با α_i در W_i را داریم که

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k.$$

و در این صورت

$$T\alpha = T_1\alpha_1 + \cdots + T_k\alpha_k.$$

این وضعیت را با گفتن اینکه T **مجموع مستقیم** عملگرهای T_1، ...، T_k است توصیف می‌کنیم. در استفاده از این اصطلاح، باید به‌خاطرداشت که T_iها عملگرهایی خطی روی فضای V نیستند، بلکه عملگرهایی خطی روی زیرفضاهای مختلف W_i هستند. این حقیقت که $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$، ما را قادر می‌سازد که به‌هر α در V، kتایی یکتایی چون $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ از بردارهای α_i واقع در W_i (بنابر $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$) را به‌طریقی وابسته سازیم که بتوانیم اعمال خطی در V را با کار روی تك زیرفضاهای W_i انجام دهیم. این‌واقعیت که هر W_i تحت T پایاست، اجازه می‌دهد که به‌کنش T به‌صورت کنشهای مستقل عملگرهای T_i روی زیرفضاهای W_i بنگریم. هدف ما مطالعهٔ T، با یافتن تجزیه به‌مجموع مستقیم پایایی است که درآن عملگرهای T_i از نوعی ابتدایی باشند.

پیش از ذکر یك مثال، اجازه دهید به‌نظیرماتریسی این وضعیت بپردازیم. فرض کنیم پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}_i$ را برای هر W_i انتخاب، وبرای اینکه $\mathcal{B}$ متشکل از اجتماع $\mathcal{B}_i$ها پایهٔ مرتبی برای V باشدآنها را بترتیب $\mathcal{B}_1$، ...، $\mathcal{B}_k$ مرتب کرده باشیم. از بحثی که‌دربارهٔ نظیر ماتریسی یك زیرفضای پایای تنهاکردیم بسادگی مشهود است که اگر $A = [T]_{\mathcal{B}}$ و $A_i = [T_i]_{\mathcal{B}_i}$، آنگاه A دارای صورت بلوکی

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix} \qquad (۱۴\text{-}۶)$$

است. در (۶-۱۴)، A_i ماتریسی $d_i \times d_i$ $(d_i = \dim W_i)$ است و ۰ها نمادهایی برای بلوکهای مستطیلی شکل ازاسکالرهای ۰ با اندازه‌های مختلف هستند. بعلاوه، به‌نظرمناسب می‌رسدکه (۶-۱۴) را با گفتن اینکه A **مجموع مستقیم** ماتریسهای A_1، ...، A_k است توصیف کنیم.

بسیاری از اوقات، زیرفضای W_i را با تصویرهای وابستهٔ E_i (قضیهٔ ۹) توصیف خواهیم‌کرد. بنابراین، ضرورت داردکه بتوانیم‌پایایی زیرفضاهای W_i را برحسب E_iها بیان کنیم.

قضیهٔ ۱۰. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای V و W_1، ...، W_k و نیز E_1، ...، E_k به‌صورتی‌که در قضیهٔ۹ آمده‌اند، باشند. دراین صورت، شرطی لازم و کافی برای اینکه هرزیرفضای W_i تحت T پایا باشد این است که T با هریك از تصویرهای E_i جابجا شود؛ یعنی،

$$TE_i=E_iT, \quad i=1, \cdots, k.$$

اثبات. فرض کنیم T با هر E_i جابجا شود و α در W_j باشد. دراین صورت $E_j\alpha=\alpha$ و

$$\begin{aligned} T\alpha &= T(E_j\alpha) \\ &= E_j(T\alpha) \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $T\alpha$ دربرد E_j قرار دارد؛ یعنی، W_j تحت T پایاست.

اکنون فرض می‌کنیم هر W_i تحت T پایاباشد، نشان‌خواهیم داد که $TE_j=E_jT$. گیریم α برداری در V باشد. دراین صورت

$$\alpha=E_1\alpha+\cdots+E_k\alpha$$
$$T\alpha=TE_1\alpha+\cdots+TE_k\alpha.$$

چون $E_i\alpha$ در W_i که‌تحت T پایاست قراردارد، باید به‌ازای برداری چون β_i داشته‌باشیم $T(E_i\alpha)=E_i\beta_i$. دراین صورت

$$\begin{aligned} E_jTE_i\alpha &= E_jE_i\beta_i \\ &= \begin{cases} 0 & \text{اگر } i\neq j \\ E_j\beta_j & \text{اگر } i=j \end{cases} \end{aligned}$$

وبنابراین

$$\begin{aligned} E_jT\alpha &= E_jTE_1\alpha+\cdots+E_jTE_k\alpha \\ &= E_j\beta_j \\ &= TE_j\alpha. \end{aligned}$$

این رابطه به‌ازای هر α در V برقرار است و از این‌رو، $E_jT=TE_j$. □

اکنون عملگری قطری شدنی چون T را به‌زبان تجزیه به مجموع مستقیم پایا (تصویرهایی که با T جابجا می‌شوند) توصیف می‌کنیم. این مطلب بعدها کمك شایانی‌در فهم چند قضیهٔ عمیق تجزیهٔ فضاها خواهد کرد. خواننده ممکن است تصور کند که توصیفی که درصددعرضهٔ آن هستیم، درمقایسه با فرمولبندی ماتریسی، یااین بیان ساده که‌بردارهای سرشت‌نمای T فضای زمینه را پدید می‌آورند، نسبتاً پیچیده است. ولی، باید درنظرداشته باشد که این اولین نظراجمالی ما به‌روشی بسیار مؤثراست که به‌وسیلهٔ آن می‌توانیم‌مسائل مختلفی در رابطه با زیرفضاها، پایه‌ها، ماتریسها، و نظایر آنها را به‌محاسبات جبری عملگرهای خطی، تحویل کنیم. با اندکی تجربه،کارآیی، و ظرافت این روش استدلال آشکار خواهد شد.

قضیهٔ ۱۱. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای بعد متناهی V باشد. اگر T قطری شدنی و c_1، ...، c_k مقادیر سرشت‌نمای متمایز T باشند، آنگاه عملگرهایی خطی چون E_1، ...، E_k روی V وجود دارند که

(۱) $T = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k$؛

(۲) $I = E_1 + \cdots + E_k$؛

(۳) $E_iE_j = 0$، $i \neq j$؛

(۴) $E_i^2 = E_i$ (E_i یک تصویر است)؛

(۵) برد E_i، فضای سرشت‌نمای T وابسته به c_i است.

بعکس، اگر k اسکالر متمایز c_1، ...، c_k و k عملگر خطی غیرصفر E_1، ...، E_k موجود باشند که شرایط (۱)، (۲)، و (۳) را برآورند، آنگاه T قطری شدنی است؛ c_1، ...، c_k مقادیر سرشت‌نمای متمایز T هستند؛ و شرایط (۴) و (۵) نیز برقرارند.

اثبات. فرض کنیم T قطری شدنی و با مقادیر سرشت‌نمای متمایز c_1، ...، c_k باشد. گیریم W_i فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای c_i باشد. همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

گیریم E_1، ...، E_k همچون درقضیهٔ ۹ تصویرهای وابسته به‌این تجزیه باشند. دراین صورت (۲)، (۳)، (۴)، و (۵) برقرارند. برای اثبات (۱) به‌شرح زیر عمل می‌کنیم. به‌ازای هر α در V

$$\alpha = E_1\alpha + \cdots + E_k\alpha$$

و ازاین‌رو

$$T\alpha = TE_1\alpha + \cdots + TE_k\alpha$$
$$= c_1E_1\alpha + \cdots + c_kE_k\alpha.$$

به‌بیان دیگر، $T = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k$.

حال فرض کنید عملگری خطی‌چون T، همراه با اسکالرهای متمایز c_i وعملگرهای غیرصفر E_i که (۱)، (۲)، و (۳) را برمی‌آورند داده شده باشند. چون به‌ازای $i \neq j$، $E_iE_j = 0$، دوطرف $I = E_1 + \cdots + E_k$ راکه در E_i ضرب کنیم بلافاصله $E_i^2 = E_i$ را به‌دست می‌آوریم. با ضرب $T = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k$ در E_i خواهیم داشت $TE_i = c_iE_i$، که نشان می‌دهد هر بردار در برد E_i، درفضای پوچ $(T - c_iI)$ نیز هست. چون فرض کرده‌ایم که $E_i \neq 0$، این مطلب ثابت می‌کند که برداری غیرصفر در فضای پوچ $(T - c_iI)$ وجود دارد؛ بدین معنی که c_i یک مقدار سرشت‌نمای T است. بعلاوه، c_iها کل مقادیر سرشت‌نمای T هستند؛ زیرا، اگر c اسکالری دلخواه باشد، آنگاه

$$T-cI=(c_1-c)E_1+\cdots+(c_k-c)E_k$$

لذا اگر $(T-cI)\alpha=0$ باید داشته باشیم $(c_i-c)E_i\alpha=0$. اگر α بردار صفر نباشد، آنگاه iیی هست که $E_i\alpha\neq 0$، و از این‌رو به‌ازای این i داریم $c_i-c=0$.

مطمئناً T قطری‌شدنی است، زیرا نشان داده‌ایم که هر بردار غیرصفردر برد E_i، یك بردار سرشت‌نمای T نیزهست و این واقعیت که $I=E_1+\cdots+E_k$ نشان‌می‌دهد که این بردارهای سرشت‌نما V را پدید می‌آورند. آنچه برای اثبات باقی می‌ماند این‌است که فضای پوچ $(T-c_iI)$ دقیقاً برد E_i است. اما این موضوع واضح است، چراکه‌اگر $T\alpha=c_i\alpha$، آنگاه

$$\sum_{j=1}^{k}(c_j-c_i)E_j\alpha=0.$$

ازاین‌رو

$$(c_j-c_i)E_j\alpha=0 \qquad \text{به‌ازای هر } j،$$

وآنگاه

$$E_j\alpha=0, \qquad j\neq i.$$

چون $\alpha=E_1\alpha+\cdots+E_k\alpha$، و به‌ازای $j\neq i$، $E_j\alpha=0$، پس داریم $\alpha=E_i\alpha$، که خود نشان می‌دهد که α در برد E_i است. $\sqcap$

بخشی از قضیهٔ ۹ بیان می‌کندکه برای عملگری قطری شدنی چون T، اسکالرهای c_1، $\ldots$، c_k و عملگرهای E_1، $\ldots$، E_k به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ شرایط (۱)، (۲)، (۳)، این شرط که c_iها متمایزند واین شرط که E_iها غیرصفرند، تعیین می‌شوند. یکی ازخواص جالب تجزیهٔ $T=c_1E_1+\cdots+c_kE_k$ این است که اگـر g چندجمله‌ای دلخواهی برروی هیأت F باشد، آنگاه

$$g(T)=g(c_1)E_1+\cdots+g(c_k)E_k.$$

جزئیات اثبات را به‌خواننده وامی‌گذاریم. برای مشاهده چگونگی اثبات این مطلب،تنها نیازمند به‌محاسبهٔ T^r، به‌ازای هرعدد صحیح r، هستیم. به‌عنوان نمونه

$$\begin{aligned}T^2&=\sum_{i=1}^{k}c_iE_i\sum_{j=1}^{k}c_jE_j\\&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}c_ic_jE_iE_j\\&=\sum_{i=1}^{k}c_i^2E_i^2\\&=\sum_{i=1}^{k}c_i^2E_i\,.\end{aligned}$$

لازم است خواننده این را با $g(A)$ که در آن A ماتریسی قطری است مقایسه کند؛ زیرا در این‌صورت $g(A)$ چیزی جز ماتریسی قطری با درایه‌های‌قطری $g(A_{11})$، ...، $g(A_{nn})$ نخواهد بود.

درحالت خاص، مایلیم بدانیم هنگام به‌کار بردن چندجمله‌ایهای لاگرانژ متناظر با اسکالرهای c_1، ...، c_k:

$$p_j = \prod_{i \neq j} \frac{(x - c_i)}{(c_j - c_i)}$$

چه رخ می‌دهد. داریم $p_j(c_i) = \delta_{ij}$، یعنی

$$\begin{aligned} p_j(T) &= \sum_{i=1}^{k} \delta_{ij} E_i \\ &= E_j. \end{aligned}$$

پس، تصویرهای E_j نه‌تنها با T جابجا می‌شوند، بلکه چندجمله‌ایهای برحسب T هستند.

ازاین‌گونه محاسبات با چندجمله‌ایهای برحسب T می‌توان برای ارائهٔ اثباتی‌دیگر از قضیهٔ ۶ که عملگرهای قطری‌شدنی را برحسب چندجمله‌ایهای مینیمالشان سرشت‌نمایی می‌کند، استفاده‌کرد. این اثبات‌کاملاً مستقل از اثبات قبلی است.

اگر T قطری شدنی باشد، $T = c_1 E_1 + \cdots + c_k E_k$، آنگاه به‌ازای هرچند‌جمله‌ای g

$$g(T) = g(c_1) E_1 + \cdots + g(c_k) E_k.$$

پس، $g(T) = 0$ اگر وتنها اگر به‌ازای هر i، $g(c_i) = 0$. بخصوص، چندجمله‌ای‌مینیمال T عبارت است از

$$p = (x - c_1) \cdots (x - c_k).$$

حال فرض کنیم T عملگری‌خطی باچندجمله‌ای‌مینیمال $p = (x - c_1) \cdots (x - c_k)$ باشد و c_1، ...، c_k عناصرمتمایزی ازهیأت اسکالری. چندجمله‌ایهای لاگرانژ راتشکیل می‌دهیم

$$p_j = \prod_{i \neq j} \frac{(x - c_i)}{(c_j - c_i)}.$$

از فصل ۴ یادآوری می‌کنیم که $P_j(c_i) = \delta_{ij}$ وبه‌ازای هرچندجمله‌ای g با درجهٔ‌حداکثر $(k-1)$، داریم

$$g = g(c_1) p_1 + \cdots + g(c_k) p_k.$$

اگر g را چندجمله‌ای اسکالری ۱ وسپس چندجمله‌ای x بگیریم، داریم

$$۱ = p_۱ + \cdots + p_k$$
(۶-۱۵)
$$x = c_۱ p_۱ + \cdots + c_k p_k.$$

(خوانندهٔ زیرك توجه خواهد کرد که ممکن است استفاده از x درست نباشد، چرا که k ممکن است ۱ باشد. اما اگر $k = ۱$، T مضربی اسکالری از عنصرهمانی است و لذا قطری‌شدنی.) حال فرض کنیم $E_j = p_j(T)$. بنابر (۶-۱۵) داریم
$$I = E_۱ + \cdots + E_k$$
(۶-۱۶)
$$T = c_۱ E_۱ + \cdots + c_k E_k.$$

توجه‌کنیدکه اگر $i \neq j$، آنگاه $p_i p_j$ برچندجمله‌ای مینیمال p بخش‌پذیراست، چراکه $p_i p_j$ همهٔ $(x - c_r)$ها را به‌عنوان سازه‌ای شامل است. پس
$$E_i E_j = ۰, \qquad i \neq j. \qquad (۶\text{-}۱۷)$$

مطلب دیگری راکه باید نشان دهیم این است‌که به‌ازای هر i، $E_i \neq ۰$. اما این مطلب‌از این واقعیت نتیجه می‌شودکه p چندجمله‌ای مینیمال T است، و از این‌رو نمی‌توانیم داشته باشیم $p_i(T) = ۰$، چراکه درجهٔ p_i از درجهٔ p کمتر است. این نکتهٔ آخر، همراه با (۶-۱۶)، (۶-۱۷)، واین امرکه c_iها متمایزند، ما را قادر می‌سازدکه قضیهٔ ۱۱ رابه‌کار بندیم ونتیجه بگیریم‌که T قطری‌شدنی است. □

تمرین

۱. فرض‌کنید E یك تصویر V و T عملگری خطی روی V باشد. ثابت‌کنیدکه برد E تحت T پایاست اگروتنها اگر $ETE = TE$. همچنین ثابت‌کنیدکه برد وفضای پوچ E هردو تحت T پایا هستند اگروتنها اگر $ET = TE$.

۲. فرض‌کنید T عملگری خطی روی $R^۲$ باشدکه ماتریس آن درپایهٔ مرتب استانده
$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$
است. فرض‌کنید $W_۱$ زیرفضایی از $R^۲$ پدیدآمده توسط بردار $\epsilon_۱ = (۱, ۰)$ باشد.

(الف) ثابت‌کنید $W_۱$ تحت T پایاست.

(ب) ثابت کنید هیچ زیرفضایی از $W_۲$ وجود ندارد که تحت T پایا و مکمل $W_۱$ باشد:
$$R^۲ = W_۱ \oplus W_۲.$$
(با تمرین ۱ از بخش ۶.۵ مقایسه شود.)

۳. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V باشد. فرض کنید R برد T و N فضای پوچ T باشد. ثابت کنید R و N مستقل هستند اگر وتنها اگر $V=R\oplus N$.

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی V باشد ونیز $V=W_1\oplus \cdots \oplus W_k$ که هر W_i تحت T پایاست. فرض کنید T_i عملگر (تحدیدی) القا شده روی W_i باشد.

(الف) ثابت کنید $\det(T)=\det(T_1)\cdots\det(T_k)$.

(ب) ثابت کنید که چندجمله‌ای سرشت‌نمای f عبارت است از حاصل‌ضرب چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای f_1، ...، f_k.

(پ) ثابت کنید چند جمله‌ای مینیمال T کوچکترین مضرب مشترك چند جمله‌ایهای مینیمال T_1، ...، T_k است. (راهنمایی: احکام متناظر مربوط به‌مجموع مستقیم ماتریسها را اثبات کنید وسپس آنها را به‌کار بندید.)

۵. فرض کنید T عملگری خطی قطری‌شدنی روی R^3 باشد که در مثال ۳ از بخش ۲.۶ مورد بحث قرار گرفت. چندجمله‌ایهای لاگرانژ را به‌کار گیرید تا ماتریس نمایش A را به‌صورت $A=E_1+2E_2$، $E_1+E_2=I$ و $E_1E_2=0$ بنویسید.

۶. A را ماتریس 4×4 درمثال ۵ از بخش ۳.۶ بگیرید. ماتریسهایی چون E_1، E_2، و E_3 بیابید که

$$A=c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3،\ E_1+E_2+E_3=I،\ E_iE_j=0 \text{ و } ،\ i\neq j .$$

۷. در تمرینهای ۵ و ۶ توجه کنید که (به‌ازای هر i) فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای c_i توسط بردارهای ستونی ماتریسهای مختلف E_j با $j\neq i$ پدید می‌آید. آیا این امر تصادفی است؟

۸. فرض کنید T عملگری خطی روی V باشد که با هرعملگر تصویری روی V جابجا شود. درمورد T چه می‌توان گفت؟

۹. فرض کنید V فضای برداری توابع (با مقدار) حقیقی پیوسته روی فاصلهٔ $[-1, +1]$ از خط حقیقی باشد. همچنین فرض کنید W_e زیرفضای توابع زوج، $f(-x)=f(x)$، و W_o زیرفضای توابع فرد، $f(-x)=-f(x)$، باشد.

(الف) نشان دهید $V=W_e\oplus W_o$.

(ب) اگر T عملگر انتگرال نامعین

$$(Tf)(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

باشد، آیا W_e و W_0 تحت T پایا هستند؟

۸.۶. قضیهٔ تجزیهٔ اولیه

کوشش ما دراین بخش این است که عملگرخطی T روی فضای با بعد متناهی V را از طریق تجزیهٔ T به‌مجموعی مستقیم از عملگرهایی که به‌معنایی ابتدایی هستند، مطالعه کنیم. می‌توانیم این‌کار را در برخی از حالات خاص معین، مثلاً هنگامی که چندجمله‌ای مینیمال T برروی هیأت اسکالری F به‌حاصل‌ضربی از چندجمله‌ایهای تکین متمایز از درجهٔ ۱ تجزیه شود، ازطریق بردارها ومقادیرسرشت‌نمای T انجام دهیم. درحالت کلی چه‌می‌توانیم بکنیم؟ درصورتی که سعی کنیم T را با استفاده ازمقادیر سرشت‌نما مطالعه‌کنیم با دومسأله روبرو خواهیم شد. اول آنکه، T ممکن است حتی‌یك مقدارسرشت‌نما هم نداشته باشد؛ این وضع، درواقع نقیصه‌ای است از هیأت اسکالری، بدین معنی که این هیأت بستهٔ جبری نیست. دوم، حتی اگرچندجمله‌ای سرشت‌نما به‌طورکامل برروی F به‌حاصل‌ضربی ازچندجمله‌ایهای درجهٔ ۱ تجزیه شود، ممکن است برای T به‌اندازهٔکافی بردار سرشت‌نماجهت پدیدآوردن فضای V موجودنباشد؛ واضح است که این‌وضع نقیصه‌ای از T است. وضعیت دوم، با عملگر T روی F^3 (F هیأتی دلخواه) که در پایهٔ استانده توسط

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود، تشریح می‌گردد. چندجمله‌ای سرشت‌نمای A عبارت است از $(x-2)^2(x+1)$ که بوضوح چندجمله‌ای مینیمال A (یا T) نیز هست. پس، T قطری‌شدنی نیست. واضح است که این‌واقعه به‌دلیل اینکه بعد فضای پوچ $(T-2I)$ یك‌است، رخ می‌دهد. از طرف دیگر، فضای پوچ $(T+I)$ و فضای پوچ $(T-2I)^2$ با هم V را پدید می‌آورند؛ اولی زیرفضای پدیدآمده توسط ϵ_3، و دومی زیرفضای پدیدآمده توسط ϵ_1 و ϵ_2 است.

این روش، کم وبیش روش عمومی درمورد دومین مسأله است. اگر چندجمله‌ای مینیمال T به‌صورت زیرتجزیه شود (به‌خاطرداشته باشیدکه این فرض است)

$$p=(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k}$$

و c_1، ...، c_k عناصر متمایز F باشند، آنگاه نشان خواهیم دادکه فضای V مجموع

مستقیم‌فضاهای پوچ عملگرهای $(T-c_iI)^{r_i}$، $i=1,\dots,k$، است. این فرض درمورد p با این حقیقت هم‌ارز است که T مثلثی‌شونده است (قضیه ۵)؛ گرچه، علم به‌این‌واقعیت هم کمکی به‌ما نخواهد کرد.

قضیه‌ای را که اثبات می کنیم، عمومی‌تر ازمطلبی است که تشریح کردیم، چراکه‌این قضیه به‌تجزیهٔ اولیهٔ چندجمله‌ای مینیمال مربوط است، خواه سازه‌های اولی کـه در کار وارد می‌شوند همگی از درجهٔ یکم باشند خواه نباشند. برای خواننده مفید است که‌حالت خاصی راکه سازه‌های اول از درجهٔ ۱ باشند وحتی به‌طـور اخص اثبات تصویری‌گونهٔ قضیهٔ ۶ راکه حالت خاصی ازاین قضیه است، به‌تصور آورد.

قضیهٔ ۱۲. (قضیهٔ تجزیهٔ اولیه). فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری بعدمتناهی V برروی هیأت F، و p چندجمله‌ای مینیمال T

$$p=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$$

باشد. دراینجا p_iها چندجمله‌ایهای تکین تحویل‌ناپذیر متمایزی برروی F و r_iها اعداد صحیح مثبتی هستند. گیریم W_i فضای پوچ $p_i(T)^{r_i}$، $i=1,\dots,k$، باشد. در ایـن صورت

(۱) $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$؛

(۲) همهٔ W_iها تحت T پایا هستند.

(۳) اگر T_i عملگر القا شده توسط T روی W_i باشد، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال T_i عبارت است از $p_i^{r_i}$.

اثبات. طرح اثبات چنین است. اگر تجزیه به‌مجموع مستقیم (۱) معتبر باشد، چگونه می‌توانیم تصویرهای E_1، $\dots$، E_k وابسته به‌این تجزیه را به‌دست آوریم؟ تصویر E_i، روی W_i، عنصرهمانی و روی دیگر W_jها صفراست. یك چندجمله‌ای چون h_i می‌یابیم کـه $h_i(T)$ روی W_i عنصـر همانـی و روی W_j های دیگـر صفـر بـاشد و بعـلاوه $h_1(T)+\cdots+h_k(T)=I$ وغیره.

به‌ازای هر i، فرض کنیم

$$f_i=\frac{p}{p_i^{r_i}}=\prod_{j\neq i}p_j^{r_j}\,.$$

چـون p_1، $\dots$، p_k چندجمله‌ایهای اول متمایزی هستند، چندجمله‌ایهای f_1، $\dots$، f_k نسبت به‌هم اول می‌باشند (قضیهٔ ۱۰، فصل ۴). پس، چندجمله‌ایهایی چـون g_1، $\dots$، g_k وجود دارند که

$$\sum_{i=1}^{n} f_ig_i=1.$$

بعلاوه توجه کنید که اگر $i\neq j$، آنگاه f_if_j برچندجمله‌ای p تقسیم‌پذیر است، زیرا f_if_j

هر $p_m^{r_m}$ را به‌عنوان سازه‌ای در بردارد. نشان خواهیم داد که چند جمله‌ایهای $h_i = f_i g_i$ هم به‌همان طریقی که در اولین بند اثبات تشریح شد، عمل می‌کنند.

فرض کنیم $E_i = h_i(T) = f_i(T)g_i(T)$. چون $h_1 + \cdots + h_k = 1$ و p، به‌ازای $i \neq j$، $f_i f_j$ را عاد می‌کند، داریم

$$E_1 + \cdots + E_k = I$$

$$E_i E_j = 0 \quad \text{و هر گاه } i \neq j\text{،}$$

پس، E_iها تصویرهایی هستند که با تجزیه‌ای به‌مجموع مستقیم از فضای V در تناظر می‌باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که برد E_i دقیقاً همان زیرفضای W_i است. واضح است که هر بردار دربرد E_i، در W_i نیزهست، زیرا اگر α دربرد E_i باشد، آنگاه $\alpha = E_i\alpha$، ولذا

$$\begin{aligned} p_i(T)^{r_i}\alpha &= p_i(T)^{r_i}E_i\alpha \\ &= p_i(T)^{r_i} f_i(T)g_i(T)\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

چرا که $p_i^{r_i} f_i g_i$ برچندجمله‌ای مینیمال p تقسیم‌پذیر است. بعکس، فرض کنیم α درفضای پوچ $p_i(T)^{r_i}$ باشد. اگر $j \neq i$، آنگاه $f_j g_j$ بر $p_i^{r_i}$ تقسیم‌پذیر است و لذا $f_j(T)g_j(T)\alpha = 0$؛ یعنی، به‌ازای $j \neq i$، $E_j\alpha = 0$. اما دراین صورت، ضروری‌است که $E_i\alpha = \alpha$؛ یعنی، α در برد E_i باشد. این مطلب اثبات حکم (۱) راکامل می‌کند.

به‌طورحتم واضح است که زیرفضاهای W_i تحت T پایا هستند. اگر T_i عملگرالقا شده توسط T روی W_i باشد، آنگاه بدیهی است که $p_i(T_i)^{r_i} = 0$، چراکه بنابرتعریف، $p_i(T)^{r_i}$ روی‌زیرفضای W_i برابر ۰ است. این مطلب نشان می‌دهد که چندجمله‌ای‌مینیمال T_i چندجمله‌ای $p_i^{r_i}$ را عاد می‌کند. بعکس، فرض کنیم g یک چندجمله‌ای باشد که $g(T_i) = 0$. دراین‌صورت $g(T)f_i(T) = 0$. پس، gf_i برچندجمله‌ای‌مینیمال T، یعنی p، تقسیم‌پذیر است؛ یعنی، $p_i^{r_i} f_i$ چندجمله‌ای gf_i را عاد می‌کند. بسادگی‌دیده می‌شود که $p_i^{r_i}$ هم g را عاد می‌کند. از این‌رو، چندجمله‌ای مینیمال T_i عبارت است از $p_i^{r_i}$. □

نتیجه. اگر E_1، $\ldots$، E_k تصویرهای وابسته به‌تجزیهٔ اولیه T باشند، آنگاه هر E_i یك چندجمله‌ای برحسب T است و لذا اگر عملگر خطی U با T جابجا شود، آنگاه U با هریك از E_iها جابجا می‌شود، و درنتیجه هرزیرفضای W_i تحت U پایاست.

برحسب نمادگذاری اثبات قضیهٔ ۱۲، نظری می‌کنیم به‌حالت خاصی که درآن‌چندجمله‌ای مینیمال T حاصل‌ضربی ازچندجمله‌ایهای درجهٔ یکم باشد، یعنی حالتی که درآن هر p_i به‌صورت $p_i = x - c_i$ است. حال برد E_i عبارت است از W_i، یعنی فضای پوچ

$(T-c_iI)^{r_i}$. فرض می کنیم $D=c_1E_1+\cdots+c_kE_k$. بنا بر قضیهٔ ۱۱، D عملگری قطری‌شدنی است که آن را **جزء قطری‌شدنی** T می‌نامیم. به‌عملگر $N=T-D$ توجه کنید. داریم

$$T=TE_1+\cdots+TE_k$$
$$D=c_1E_1+\cdots+c_kE_k$$

لذا

$$N=(T-c_1I)E_1+\cdots+(T-c_kI)E_k.$$

خواننده باید تاکنون به‌قدرکافی با تصویرها آشنایی پیداکرده باشدکه ببیند

$$N^2=(T-c_1I)^2E_1+\cdots+(T-c_kI)^2E_k$$

ودرحالت کلی

$$N^r=(T-c_1I)^rE_1+\cdots+(T-c_kI)^rE_k.$$

وقتی به‌ازای هر i، $r\geqslant r_i$ آنگاه $N^r=0$، چراکه دراین صورت عملگر $(T-c_iI)^r$ روی برد E_i برابر ۰ است.

تعریف. فرض کنیم N عملگری خطی روی فضای برداری V باشد. گوییم N **پوچ‌توان** است، هرگاه عدد صحیح مثبتی چون r وجود داشته باشد که $N^r=0$.

قضیهٔ ۱۳. گیریم T عملگری‌خطی روی فضای برداری بعدمتناهی V برروی هیأت F باشد. فرض کنیم چندجمله‌ای مینیمال T، برروی F به‌حاصل‌ضربی از چندجمله‌ایهای خطی تجزیه شود. در این صورت عملگری قطری‌شدنی چون D روی V و عملگر پوچ‌توانی چون N روی V وجود دارد که

(۱) $T=D+N$،
(۲) $DN=ND$.

عملگر قطری‌شدنی D و عملگر پوچ‌توان N توسط (۱) و (۲) به‌طوریکتا تعیین می‌شوند و هریك از آنها یك چندجمله‌ای برحسب T است.

اثبات. قریباً مشاهده کردیم که می‌توانیم بنویسیم $T=D+N$؛ دراینجا D قطری‌شدنی و N پوچ‌توان است و نیز D و N نه‌تنها جابجا می‌شوند بلکه چندجمله‌ایهایی برحسب T هستند. حال فرض کنیم $T=D'+N'$ را هم داریم که درآن D' قطری‌شدنی و N' پوچ‌توان است و $D'N'=N'D'$. ثابت خواهیم کرد که $D=D'$ و $N=N'$.

چون D' و N' با یکدیگرجابجا می‌شوند و $T=D'+N'$، می‌بینیم که D' و N' با T هم جابجا می‌شوند. پس، D' و N' با هرچندجمله‌ای برحسب T جابجا می‌شوند؛ ازاین‌رو، آنها با D و N نیز جابجا می‌شوند. حال داریم

$$D+N=D'+N'$$

یا

$$D-D'=N'-N$$

واین چهار عملگر همه با هم جابجا می‌شوند. چون D و D' هردو قطری‌شدنی هستند و باهم جابجا می‌شوند، همزمان نیز قطری‌شدنی هستند و $D-D'$ هم قطری‌شدنی است. چون N و N' هردو پوچ‌توان هستند و با هم جابجا می‌شوند، عملگر $(N'-N)$ پوچ‌توان است؛ زیرا، با استفاده از این حکم که N و N' با هم جابجا می‌شوند

$$(N'-N)^r=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(N')^{r-j}(-N)^j$$

ولذا وقتی که r به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد هر جمله در این بسط $(N'-N)^r$ برابر ۰ است. (درواقع، nمین توان هرعملگر پوچ‌توان روی فضایی nبعدی باید ۰ باشد. دراینجا اگر $r=2n$ فرض شود، r به‌اندازهٔ کافی بزرگ هست و از اینجا نتیجه می‌شود که $r=n$ هم به‌اندازهٔ کافی بزرگ است؛ اما این مطلب از عبارت بالا آشکار نیست.) حال $D-D'$ عملگری قطری‌شدنی است که پوچ‌توان نیزهست. چنین عملگری بوضوح عملگر صفراست؛ زیرا به‌علت پوچ‌توان بودن، rی هست که $r\leqslant n$ وچندجمله‌ای مینیمالش به‌صورت x^r باشد. اما در این صورت، چون این عملگر قطری‌شدنی است، چندجمله‌ای مینیمال آن نمی‌تواند ریشه‌ای مکرر داشته باشد؛ ازاین‌رو، $r=1$ وچندجمله‌ای مینیمال چیزی جز x نیست، واین خود حاکی است که این عملگر ۰ است. پس، می‌بینیم که $D=D'$ و $N=N'$. □

نتیجه. گیریم V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت بستهٔ جبری F، مثلاً هیأت اعداد مختلط، باشد. در این صورت هرعملگرخطی T روی V می‌تواند به‌صورت مجموع یك عملگرقطری‌شدنی D ویك عملگر پوچ‌توان N که با یکدیگر جابجا می‌شوند، نوشته شود. این عملگرهای D و N یکتا هستند و هریك از آنها یك چندجمله‌ای برحسب T است.

ازاین نتایج مشهود است که مطالعهٔ عملگرهای خطی روی فضاهای برداری برروی هیأتی بستهٔ جبری، اساساً به‌مطالعهٔ عملگرهای پوچ‌توان تحویل می‌شود. برای فضاهای برداری برروی هیأتهایی که بستهٔ‌جبری نباشند، هنوزهم لازم است جانشینی برای‌بردارها ومقادیرسرشت‌نما بیابیم. نکتهٔ بسیارجالب در اینجاست که این دومسئله می‌توانند همزمان مورد بررسی قرار گیرند، واین مطلبی است که درفصل بعد به‌انجام آن خواهیم پرداخت.

درخاتمه این بخش، مایلیم مثالی عرضه کنیم که برخی از ایده‌های قضیهٔ تجزیهٔ‌اولیهٔ را تشریح می‌کند. چون این مثال با معادلات دیفرانسیل سروکار دارد، وازاین نظر به‌طور مطلق جبرخطی نیست، ارائهٔ آن را به‌انتهای بخش موکول کردیم.

مثال ۱۴. در قضیهٔ تجزیهٔ اولیه‌لازم نیست که فضای برداری V با بعد متناهی باشد، و نیز در قسمتهای (۱) و(۲) لازم نیست که p چندجمله‌ای مینیمال T باشد. اگر Tعملگری خطی روی فضای برداری دلخواهی باشد و اگر چندجمله‌ای تکینی چون p وجود داشته باشد که $p(T)=0$، آنگاه با اثباتی که ارائه کردیم، قسمتهای (۱) و (۲) قضیهٔ ۱۲ برای T هم معتبر هستند.

گیریم nعددی صحیح مثبت و V فضای همهٔ توابع nبار به‌طـور پیوسته مشتق‌پذیر f روی خط حقیقی باشد که در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^n f}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{df}{dt}+a_0 f=0 \qquad (۱۸\text{-}۶)$$

صدق می‌کنند. در اینجا a_0، $\cdots$، a_{n-1} ثابتهای مشخصی هستند. اگر C_n فضای توابع nبار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر را نشان دهد، آنگاه V، فضای جوابهای این معادلهٔ دیفرانسیل، زیرفضایی از C_n است. اگر D عملگر مشتق‌گیری را نشان دهد و p چندجمله‌ای

$$p=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

باشد، آنگاه V فضای پوچ عملگر $p(D)$ است، زیرا (۶-۱۸) بسادگی بیان می‌کند کـه $p(D)f=0$. بنابراین، V تحت D پایاست. اکنون D را به‌عنوان عملگری خطی روی زیرفضای V محسوب می‌کنیم. دراین صورت $p(D)=0$.

اگر توابع مختلط (مقدار) مشتق‌پذیر مورد بحث باشند، آنگاه C_n و V دو فضای برداری مختلط هستند و a_0، $\cdots$، a_{n-1} می‌توانند اعداد مختلط دلخواهی باشند. اکنون با فرض اینکه c_1، $\cdots$، c_k اعداد مختلط متمایزی باشند می‌نویسیم

$$p=(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k}.$$

اگر W_j فضای پوچ $(D-c_jI)^{r_j}$ باشد، آنگاه قضیهٔ ۱۲ بیان می‌کند که

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k.$$

به‌بیان دیگر، اگر f درمعادلهٔ دیفرانسیل (۶-۱۸) صدق کند، آنگاه f به‌طور یکتا به‌صورت

$$f=f_1+\cdots+f_k$$

قابل توصیف است و هر f_j در معادلهٔ دیفرانسیل $(D-c_jI)^{r_j}f_j=0$ صـدق می‌کند. بنابراین، مطالعهٔ جوابهای معادلهٔ (۶-۱۸)، به‌مطالعهٔ فضای جـوابهای معادلـهٔ دیفرانسیلی به‌صورت

$$(D-cI)^r f=0 \qquad (۱۹\text{-}۶)$$

تحویل می‌شود. این تحویل، با روش عمومی جبرخطی، یعنی با قضیهٔ تجزیهٔ اولیه، صورت گرفته است.

برای توصیف فضای جوابهای (۶-۱۹) باید مطالبی درمورد معادلات دیفرانسیل بدانیم؛ یعنی باید درمورد D مطالبی سوای این واقعیت که عملگری خطی است بدانیم. با این وجود، نیازی به‌دانستن‌مطالب‌زیادی نداریم. با استقرا روی r بسیار آسان‌می‌توانیم ثابت کنیم که اگر f در C_r باشد، آنگاه

$$(D-cI)^r f = e^{ct} D^r (e^{-ct} f)$$

یعنی،

$$\frac{df}{dt} - cf(t) = e^{ct}\frac{d}{dt}(e^{-ct} f)، \quad \text{و غیره.}$$

پس، $(D-cI)^r f = 0$ اگر وتنها اگر $D^r(e^{-ct}f)=0$. تابعی چون g که $D^r g = 0$، یعنی $d^r g/dt^r = 0$، باید تابعی چندجمله‌ای از درجهٔ $(r-1)$ یا کمتر باشد:

$$g(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_{r-1} t^{r-1}.$$

پس f در (۶-۱۹) صدق می‌کند اگر وتنها اگر f به‌صورت

$$f(t) = e^{ct}(b_0 + b_1 t + \cdots + b_{r-1} t^{r-1})$$

باشد. بنابراین، «توابع» e^{ct}، te^{ct}، ...، $t^{r-1}e^{ct}$ فضای جوابهای (۶-۱۹) را پدید می‌آورند. چون توابع ۱، t، ...، t^{r-1} مستقل خطی هستند و تابع نمایی صفر ندارد، این r تابع $t^j e^{ct}$، $0 \leqslant j \leqslant r-1$، پایه‌ای برای فضای جوابها تشکیل می‌دهند.

با بازگشت به‌معادلهٔ دیفرانسیل (۶-۱۸) که همان معادلهٔ

$$p(D)f = 0$$

$$p = (x-c_1)^{r_1} \cdots (x-c_k)^{r_k}$$

است، می‌بینیم که n تابع $t^m e^{c_j t}$، $0 \leqslant m \leqslant r_j - 1$ و $1 \leqslant j \leqslant k$، پایه‌ای برای فضای جوابهای (۶-۱۸) تشکیل می‌دهند. بخصوص، فضای جوابها با بعد متناهی است و بعدش برابر با درجهٔ چندجمله‌ای p است.

تمرین

۱. فرض‌کنید T عملگری خطی روی R^3 باشد که درپایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. چندجمله‌ای مینیمال p از T را به‌صورت $p = p_1 p_2$، که در آن

p_1 و p_2 تکین و برروی هیأت اعـداد حقیقی تحویل‌ناپذیر باشند، بیان کنید. گیریم W_i فضای پوچ $p_i(T)$ باشد. پایه‌های $\mathcal{B}_i$ برای فضاهای W_1 و W_2 را بیابید. اگر T_i عملگر القا شده توسط T روی W_i باشد، ماتریس T_i درپایهٔ $\mathcal{B}_i$ (در بالا) را بیابید.

۲. فرض کنید T عملگری خطی روی R^3 باشد که با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

درپایهٔ مرتب استانده نمایش داده می‌شود. نشان دهید عملگری قطری شدنی چون D روی R^3 وعملگـری پوچ‌توان چـون N روی R^3 وجود داردکـه $T=D+N$ و $DN=ND$. ماتریسهای D و N را درپایهٔ استانده بیابید. (عیناً اثبات قضیهٔ ۱۲ را برای این حالت خاص تکرارکنید.)

۳. اگر V فضای همهٔ چندجمله‌ایهای از درجـهٔ n یا کمتر برروی هیأت F باشد، ثابت کنیدکه عملگرمشتق‌گیری روی V پوچ‌توان است.

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}$$

وچندجمله‌ای مینیمال

$$p=(x-c_1)^{r_1}\cdots(x-c_k)^{r_k}$$

باشد. ونیزفرض کنید W_i فضای پوچ $(T-c_iI)^{r_i}$ باشد.

(الف) ثابت کنید W_i مجموعهٔ همهٔ بردارهای α در V است کـه به‌ازای عدد صحیح مثبتی چون m (که ممکن است به α وابسته باشد) $(T-c_iI)^m\alpha=0$.

(ب) ثـابت کنید بعد W_i برابر d_i است. (راهنمایی: اگر T_i عملگر القا شده توسط T روی W_i باشد، آنگاه T_i-c_iI پوچ‌توان است. پس، چندجمله‌ای سرشت‌نمای T_i-c_iI باید x^{e_i}، که درآن e_i بعد W_i است، باشد (اثبات؟). بدین‌سان، چندجمله‌ای سرشت‌نمای T_i عبارت است از $(x-c_i)^{e_i}$. حال ایـن واقعیت را کـه چندجمله‌ای سرشت‌نمای T حاصل‌ضرب چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای T_i است به‌کارگیرید و نشان دهیدکه $e_i=d_i$.)

۵. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی برروی هیأت اعـداد مختلط باشد. فرض کنید T عملگری خطی روی V، و D جزء قطری‌شدنی T باشد. ثابت کنیدکـه اگر g

یك چندجمله‌ای با ضرایب مختلط باشد، آنگاه جزء قطری شدنی $g(T)$ عبارت است از $g(D)$.

۶ . فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی برروی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد و داشته باشیم ۱ = رتبهٔ (T). ثابت کنید که یا T قطری‌شدنی است یا پوچ‌توان، ولی نه‌هردو.

۷ . فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی برروی F و T عملگری خطی روی V باشد. فرض کنید T با هرعملگر خطی قطری‌شدنی روی V جابجا شود. ثابت کنید T مضربی اسکالری از عملگر همانی است.

۸ . فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ برروی هیأت F و A ماتریس $n \times n$ ثابتی برروی F باشد. عملگر خطی T روی V را طبق $T(B) = AB - BA$ تعریف کنید. ثابت کنید که اگر A ماتریسی پوچ‌توان باشد، آنگاه T عملگری پوچ‌توان است.

۹ . دو ماتریس پوچ‌توان ۴×۴ مثال بزنید که دارای چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند (لزوماً چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی هم دارند)، اما متشابه نباشند.

۱۰ . گیریم T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V و $p = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ چندجمله‌ای مینیمال آن باشد. فرض کنید $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ تجزیهٔ اولیه T، یعنی W_j فضای پوچ $p_j(T)^{r_j}$، باشد. همچنین فرض کنید W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایاست. ثابت کنید

$$W = (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_k).$$

۱۱ . اشتباه «اثبات» زیر برای قضیهٔ ۱۳ در کجاست؟ فرض کنید چندجمله‌ای مینیمال T حاصل‌ضربی از سازه‌های خطی باشد. دراین صورت بنابرقضیهٔ ۵، T مثلثی‌شونده است. $\mathscr{B}$ را پایهٔ مرتبی بگیرید که $A = [T]_{\mathscr{B}}$ از بالا مثلثی باشد. گیریم D ماتریسی قطری با درایه‌های قطری a_{11}، $\ldots$، a_{nn} باشد. دراین صورت $A = D + N$، که در آن N اکیداً از بالا مثلثی است. بدیهی است که N پوچ‌توان است.

۱۲ . اگر دربارهٔ تمرین ۱۱ فکر کرده‌اید، پس از مشاهدهٔ آنچه که قضیهٔ ۷ دربارهٔ اجزای قطری‌شدنی وپوچ‌توان T می‌گوید، دوباره روی آن فکر کنید.

۱۳ . فرض کنید T عملگری خطی روی V باشد که چندجمله‌ای مینیمال آن به‌صورت p^n، و p برروی هیأت اسکالری مربوط تحویل‌ناپذیر باشد. نشان دهید برداری چون α در V وجود دارد که T-پوچساز α برابر p^n باشد.

۱۴. قضیهٔ تجزیهٔ اولیه و نتیجهٔ تمرین ۱۳ را برای اثبات حکم زیر به‌کار گیرید. اگر T عملگری خطی روی فضای برداری بعد متناهی V باشد، آنگاه برداری چون α در V وجود دارد که T-پوچساز آن چندجمله‌ای مینیمال T است.

۱۵. اگر N عملگرخطی پوچ‌توانی روی یك فضای برداری nبعدی باشد، آنگاه چندجمله‌ای سرشت‌نمای N عبارت است از x^n.

۷

فرمهای گویا و ژوردان

۱.۷. زیرفضاهای دوری و پوچسازها

یکبار دیگر V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و T عملگر خطی ثابتی (اما دلخواه) روی V فرض می‌شود. اگر α بردار دلخواهی از V باشد، کوچکترین زیر-فضایی از V که تحت T پایا و شامل α نیز باشد، وجود دارد. این زیرفضا را می‌توان به‌صورت اشتراك همهٔ زیرفضاهای T-پایا که شامل α نیز باشند، تعریف کرد؛ اما، اکنون مناسبتر است که به‌روش زیر به‌مطالب بنگریم. اگر W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایا و شامل α باشد، آنگاه W باید شامل بردار $T\alpha$ نیز باشد؛ ازاین‌رو، W باید شامل $T(T\alpha)=T^{2}\alpha$، $T(T^{2}\alpha)=T^{3}\alpha$، وغیره نیز باشد. به‌بیان دیگر، W باید به‌ازای هر-چندجمله‌ای g بر روی F، شامل $g(T)\alpha$ نیز باشد. مجموعهٔ همهٔ بردارهای به‌صورت $g(T)\alpha$، به‌ازای g متعلق به $F[x]$، بوضوح تحت T پایاست، و از این رو کوچکترین زیرفضای T-پایایی است که شامل α است.

تعریف. اگر α بردار دلخواهی از V باشد، **زیرفضای T-دوری تولید شده توسط α** عبارت است از زیرفضای $Z(\alpha;T)$ متشکل از همهٔ بردارهای به صورت $g(T)\alpha$، که g در $F[x]$ است. اگر $Z(\alpha;T)=V$، آنگاه α یك **بردار دوری** برای T نامیده می‌شود.

طریق دیگر توصیف زیرفضای $Z(\alpha;T)$ این است که $Z(\alpha;T)$ زیرفضای پدیدآمده توسط بردارهای $T^{k}\alpha$، $k\geqslant 0$ است، و ازاین قرار α برداری دوری برای T است

اگر و تنها اگر این بردارها V را پدیدآورند. به‌خواننده هشدار می‌دهیم که درحالت کلی عملگر T ممکن است بردار دوری نداشته باشد.

مثال ۱. به‌ازای هر T، زیرفضای T-دوری تولید شده توسط بردار صفر عبارت است از زیرفضای صفر. فضای $Z(\alpha;T)$ یك بعدی است اگر و تنها اگر α یك بردار سرشت‌نمای T باشد. برای عملگرهمانی، هر بردار غیرصفر زیرفضایی دوری و یك‌بعدی تولید می‌کند؛ پس، اگر $\dim V > ۱$، عملگر همانی دارای بردار دوری نیست. عملگر خطی T روی $F^۲$ که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود، مثالی ازعملگری است که برداری دوری دارد. دراینجا برداردوری (یك بردار دوری) $\epsilon_۱$ است؛ زیرا، اگر $\beta=(a, b)$، آنگاه در ازای $g=a+bx$ داریم $\beta=g(T)\epsilon_۱$. برای همین عملگر T، زیر فضای دوری تولید شده توسط $\epsilon_۲$، فضای یك‌بعدی پدیدآمده توسط $\epsilon_۲$ است، چرا که $\epsilon_۲$ یك بردار سرشت‌نمای T است.

به‌ازای هر T و هر α، به‌روابط

$$c_۰\alpha+c_۱T\alpha+\cdots+c_kT^k\alpha=۰$$

بین بردارهای $T^j\alpha$، یعنی، به چند جمله‌ایهای $g=c_۰+c_۱x+\cdots+c_kx^k$ که دارای خاصیت $g(T)\alpha=۰$ باشند، علاقه‌مندهستیم. مجموعهٔ همهٔ gهای متعلق به $F[x]$ به‌طوری که $g(T)\alpha=۰$، بوضوح یك ایدآل $F[x]$ است. این مجموعه همچنین یك ایدآل غیرصفر است، زیرا که شامل چندجمله‌ای مینیمال p از عملگر T است (به‌ازای هر α در V، $p(T)\alpha=۰$).

تعریف. اگر α بردار دلخواهی از V باشد، T-**پوچساز** α عبارت است از ایدآل $M(\alpha;T)$ در $F[x]$ متشکل از همهٔ چندجمله‌ایهای g بر روی F با شرط $g(T)\alpha=۰$. چندجمله‌ای تکین یکتای p_α که این ایدآل را تولید می‌کند، نیز T-**پوچساز** α نامیده می‌شود.

همچنان که در بالا نشان دادیم، T-پوچساز p_α، چند جمله‌ای مینیمال عملگر T را عاد می‌کند. خواننده باید همچنین توجه کند که $\deg(p_\alpha)>۰$، مگر آنکه α بردار صفر باشد.

قضیهٔ ۱. گیریم α بردار غیرصفر دلخواهی از V و p_α، T-پوچساز α باشد.

(۱) درجهٔ p_α برابر است با بعد زیرفضای دوری $Z(\alpha;T)$.

(۲) اگر درجهٔ p_α برابر k باشد، آنگاه بردارهای α، $T\alpha$، $T^2\alpha$، ...، $T^{k-1}\alpha$ پایه‌ای برای $Z(\alpha;T)$ تشکیل می‌دهند.

(۳) اگر U عملگرخطی القاشده توسط T روی $Z(\alpha;T)$ باشد، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال U برابر p_α است.

اثبات. فرض کنیم g یك چندجمله‌ای بر روی هیأت F باشد. می‌نویسیم

$$g=p_\alpha q+r$$

که در آن یا $r=0$ یا $\deg(r)<\deg(p_\alpha)=k$. چندجمله‌ای $p_\alpha q$ در T-پوچساز α قرار دارد و لذا

$$g(T)\alpha=r(T)\alpha.$$

چون $r=0$ یا $\deg(r)<k$، بردار $r(T)\alpha$ ترکیبی خطی از بردارهای α، $T\alpha$، ...، $T^{k-1}\alpha$ است و چون $g(T)\alpha$ برداری نوعی از $Z(\alpha;T)$ است، این مطلب نشان می‌دهد که این k بردار $Z(\alpha;T)$ را پدید می‌آورند. این بردارها یقیناً مستقل خطی هستند، زیرا هر رابطهٔ خطی غیر بدیهی بین آنها، چندجمله‌ای غیر صفری چون g را که $g(T)\alpha=0$ و $\deg(g)<\deg(p_\alpha)$ به‌ما خواهدداد، که خود بی‌معنی است. این مطلب (۱) و (۲) را اثبات می‌کند.

U را عملگر خطی روی $Z(\alpha;T)$ حاصل از تحدید T به‌آن زیرفضا فرض می‌کنیم. اگر g چندجمله‌ای دلخواهی بر روی F باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}p_\alpha(U)g(T)\alpha &= p_\alpha(T)g(T)\alpha\\ &= g(T)p_\alpha(T)\alpha\\ &= g(T)0\\ &= 0.\end{aligned}$$

بنابراین عملگر $p_\alpha(U)$ هر بردار در $Z(\alpha;T)$ را به 0 می‌فرستد و از این‌رو، روی $Z(\alpha;T)$ عملگر صفر است. بعلاوه، اگر چندجمله‌ای h از درجهٔ کمتر از k باشد، نمی‌توانیم داشته باشیم $h(U)=0$، زیرادرآن‌صورت $h(U)\alpha=h(T)\alpha=0$ که متناقض با تعریف p_α است. این نشان می‌دهد که p_α چندجمله‌ای مینیمال U است. □

یك پیامد خاص این قضیه چنین است: اگر α بر حسب اتفاق برداری دوری برای T باشد، آنگاه چند جمله‌ای مینیمال T باید درجه‌ای برابر با بعد فضای V داشته باشد؛ از این‌رو، قضیهٔ کیلی-همیلتن حاکی است که چندجمله‌ای مینیمال T همان چندجمله‌ای سرشت‌نمای T است. بعداً ثابت خواهیم کرد که برای هر T برداری چون α در V وجود دارد که چندجمله‌ای مینیمال T را به‌عنوان پوچساز خود داراست. پس، نتیجه خواهد شد که T دارای برداری دوری است اگر وتنها اگر چندجمله ایهای مینیمال و سرشت‌نمای T

مساوی باشند. اما تا دیدن این مطلب کمی کار در پیش است.

نقشهٔ ما مطالعهٔ T عمومی با استفاده از عملگرهایی است که برداری دوری داشته باشند. لذا، به عملگر خطی U روی فضای W با بعد k که برداری دوری چون α داشته باشد، توجه می‌کنیم. بنا بر قضیهٔ ۱، بردارهای $\alpha, \ldots, U^{k-1}\alpha$ پایه‌ای برای فضای W تشکیل می‌دهند و پوچساز p_α از α، چندجمله‌ای مینیمال U (و از این رو، همچنین چندجمله‌ای سرشت‌نمای U) است. اگر $\alpha_i = U^{i-1}\alpha$، $i = 1, \ldots, k$، فرض شود، آنگاه کنش U روی پایهٔ مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ عبارت است از

$$\begin{aligned} U\alpha_i &= \alpha_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, k-1 \\ U\alpha_k &= -c_0\alpha_1 - c_1\alpha_2 - \cdots - c_{k-1}\alpha_k \end{aligned} \tag{۷-۱}$$

البته $p_\alpha = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k-1}x^{k-1} + x^k$. عبارت داده شده برای $U\alpha_k$ از این حکم که $p_\alpha(U) = 0$، یعنی

$$U^k\alpha + c_{k-1}U^{k-1}\alpha + \cdots + c_1 U\alpha + c_0\alpha = 0$$

نتیجه می‌شود. این مطلب حکم می‌کند که ماتریس U در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ عبارت باشد از

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{k-1} \end{bmatrix} \tag{۷-۲}$$

ماتریس (۷-۲)، **ماتریس همدم** چندجمله‌ای تکین p_α نامیده می‌شود.

قضیهٔ ۲. اگر U عملگری خطی روی فضای بعد متناهی W باشد، آنگاه U دارای برداری دوری است، اگر و تنها اگر پایهٔ مرتبی برای W وجود داشته باشد که در آن U توسط ماتریس همدم چندجمله‌ای مینیمال U نمایش داده شود.

اثبات. قبلاً مشاهده کردیم که اگر U دارای برداری دوری باشد، آنگاه چنین پایهٔ مرتبی برای W وجود دارد. بعکس، اگر پایهٔ مرتبی چون $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ برای W داشته باشیم که در آن U توسط ماتریس همدم چند جمله‌ای مینیمالش نمایش داده شود، روشن است که α_1 برداری دوری برای U است. □

نتیجه. اگر A ماتریس همدم چندجمله‌ای تکین p باشد، آنگاه p هم چندجمله‌ای مینیمال و هم چند جمله‌ای سرشت‌نمای A است.

اثبات. یک‌راه برای دیدن این مطلب، این است که U را عملگری خطی روی F^k بگیریم که در پایه مرتب استانده با A نمایش داده می‌شود و قضیهٔ ۱ را همراه با قضیهٔ کیلی-همیلتن مورد استفاده قرار دهیم. روش دیگر این است که با استفاده از قضیهٔ ۱ نشان دهیم p چندجمله‌ای مینیمال A است و با محاسبه‌ای مستقیم بررسی کنیم که p چندجمله‌ای سرشت‌نمای A نیز است. □

توضیح آخر ـ اگر T عملگر خطی دلخواهی روی فضای V و α هر برداری از V باشد، آنگاه عملگر U که T روی زیرفضای دوری $Z(\alpha;T)$ القا می‌کند دارای برداری دوری، مثلاً α است. پس، $Z(\alpha;T)$ دارای پایهٔ مرتبی است که درآن U توسط ماتریس همدم p_α، Tـ پوچساز α، نمایش داده می‌شود.

تمرین

۱. فرض کنید T عملگری خطی روی F^2 باشد. ثابت‌کنید هر بردار غیرصفری که بردار سرشت‌نمای T نباشد برای T برداری‌دوری است. ازاینجا ثابت‌کنید که یا T برداری دوری‌دارد یااینکه T مضربی اسکالری از عملگرهمانی است.

۲. T را عملگری خطی روی R^3 بگیریدکه درپایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. ثابت‌کنید T هیچ بردار دوری ندارد. زیرفضای T-دوری‌تولید‌شده توسط بردار $(1, -1, 3)$ چیست؟

۳. فرض‌کنید T عملگری خطی روی C^3 باشدکه درپایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 2 & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. T-پوچساز بردار $(1, 0, 0)$ و نیز T-پوچساز $(1, 0, i)$ را بیابید.

۴. ثابت کنید که اگر T^2 برداری دوری داشته باشد، آنگاه T هم برداری دوری دارد. آیا عکس مطلب درست است؟

۵. فضای برداری nبعدی V برروی هیأت F و عملگرخطی پوچ‌توان N روی V داده شده‌اند. فرض کنید $N^{n-1}\neq 0$، و α برداری از V باشد که $N^{n-1}\alpha\neq 0$. ثابت کنید α برداری دوری برای N است. ماتریس N درپایهٔ‌مرتب $\{\alpha, N\alpha, \cdots, N^{n-1}\alpha\}$ دقیقاً چیست؟

۶. اثباتی مستقیم از این مطلب که اگر A ماتریس همدم چندجمله‌ای تکین p باشد، آنگاه p چندجمله‌ای سرشت‌نمای A است، ارائه کنید.

۷. فضای برداری nبعدی V و عملگرخطی T روی V مفروض‌اند. فرض کنید T قطری‌شدنی باشد.

(الف) اگر T برداری دوری داشته باشد، نشان دهید T، n مقدار سرشت‌نمای متمایز دارد.

(ب) اگر T دارای nمقدار سرشت‌نمای متمایز، و $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایه‌ای از بردارهای‌سرشت‌نمای T باشد، نشان دهید $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ برداری دوری برای T است.

۸. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V و T دارای‌برداری دوری باشد. ثابت کنید اگر U عملگری خطی باشد که با T جابجا می‌شود، آنگاه U یك چندجمله‌ای برحسب T است.

۲.۷. تجزیه‌های دوری وفرم گویا

هدف اصلی این بخش اثبات این مطلب است که اگر T عملگری خطی روی فضایی با بعد متناهی مانند V باشد، آنگاه بردارهایی چون α_1، $\cdots$، α_r در V وجود دارند که

$$V=Z(\alpha_1; T)\oplus\cdots\oplus Z(\alpha_r; T).$$

به‌بیان دیگر، می‌خواهیم ثابت کنیم که V مجموع مستقیمی از زیرفضاهای T-دوری است. این مطلب نشان می‌دهد که T مجموع مستقیم تعدادی متناهی از عملگرهایی خطی است که هریك دارای برداری دوری است. نتیجهٔ این مطلب، تحویل پرسشهای بسیاری دربارهٔ عملگرخطی عمومی به‌پرسشهای مشابهی است درمورد عملگری که برداری دوری داشته باشد. قضیه‌ای راکه اثبات خواهیم کرد (قضیهٔ ۳) یکی از عمیق‌ترین نتایج جبرخطی و دارای نتیجه‌های جالب بسیاری است.

قضیهٔ تجزیهٔ دوری در رابطهٔ نزدیك با سؤال زیر است. کدام‌یك از زیرفضاهای

T-پایای W دارای این خاصیت است که زیرفضای T-پایایی چون W' با شرط $V=W\oplus W'$ وجود داشته باشد؟ اگر W زیرفضایی دلخواه از فضای با بعد متناهی V باشد، آنگاه زیرفضایی چون W' وجود دارد که $V=W\oplus W'$. معمولاً این گونه زیرفضاهای W' زیادند، و هر یك از آنها **مکمل** W نامیده می‌شود. می‌خواهیم بدانیم چه‌وقت زیرفضایی T-پایا، زیرفضای مکملی دارد که تحت T پایا هم هست.

فرض می‌کنیم $V=W\oplus W'$ و درآن W و W' هردو تحت T پایا باشند. حال ببینیم دربارهٔ زیرفضای W چه مطالبی را می‌توانیم کشف کنیم. هر بردار β در V به‌صورت $\beta=\gamma+\gamma'$ است، که در آن γ در W و γ' در W' است. اگر f یك چندجمله‌ای برروی هیأت اسکالری باشد، آنگاه

$$f(T)\beta=f(T)\gamma+f(T)\gamma'.$$

چون W و W' تحت T پایا هستند، بردار $f(T)\gamma$ در W و بردار $f(T)\gamma'$ در W' قرار دارد. بنابراین، $f(T)\beta$ در W است اگر وتنها اگر $f(T)\gamma'=0$. آنچه توجه ما را جلب می‌کند این حقیقت به‌ظاهر ساده است که اگر $f(T)\beta$ در W باشد، آنگاه $f(T)\beta=f(T)\gamma$.

تعریف. گیریم T عملگری خطی روی فضای برداری V و W زیرفضایی از V باشد. گوییم W زیرفضایی **T-مجاز** است،

(۱) اگر W تحت T پایا باشد؛

(۲) و اگر $f(T)\beta$ در W باشد، آنگاه برداری چون γ در W وجود داشته باشدکه $f(T)\beta=f(T)\gamma$.

چنانکه قریباً نشان دادیم اگر W پایا و دارای زیرفضای پایای مکملی باشد، آنگاه W مجاز است. یکی از پیامدهای قضیهٔ ۳ عکس این مطلب است، و از آنجا مجاز بودن زیرفضاهای پایایی راکه دارای زیرفضای پایای مکمل هستند مشخص می‌کند.

حال نشان می‌دهیم خاصیت مجاز بودن چگونه وارد تلاش ما در به‌دست آوردن تجزیه‌ای چون

$$V=Z(\alpha_1;T)\oplus\cdots\oplus Z(\alpha_r;T)$$

می‌شود. روش اساسی برای دست‌یافتن به‌چنین تجزیه‌ای، انتخاب از راه استقرا بردارهای α_1، ...، α_r است. فرض کنیم به‌گونه‌ای α_1، ...، α_j را انتخاب کرده باشیم و زیرفضای

$$W_j=Z(\alpha_1;T)+\cdots+Z(\alpha_j;T)$$

سره باشد. علاقه‌مندیم بردار غیرصفری چون α_{j+1} بیابیم که

$$W_j\cap Z(\alpha_{j+1};T)=\{0\}.$$

زیرا در این صورت زیرفضای $W_{j+1}=W_j\oplus Z(\alpha_{j+1};T)$ دست‌کم یك بعد به‌تکمیل

V نزدیک‌تر خواهد بود. اما چرا باید چنین α_{j+1}ی موجود باشد؟ اگر α_1، $\cdots$، α_j طوری انتخاب شده باشند که W_j زیرفضایی T-مجاز باشد، آنگاه نسبتاً بسادگی دیده می‌شود که می‌توانیم α_{j+1} مناسبی بیابیم. حتی اگر نحوهٔ بیان استدلال ما هم چنین نباشد، درواقع این همان مطلبی است که کار اثبات قضیهٔ ۳ را به‌پیش می‌برد. گیریم W زیرفضای T-پایای سره‌ای باشد. سعی می‌کنیم بردار غیرصفری چون α بیابیم که

$$W\bigcap Z(\alpha; T)=\{\circ\}. \qquad (۳\text{-}۷)$$

می‌توان برداری چون β را انتخاب کرد که در W نباشد. فضای T-هادی $S(\beta; W)$ را که متشکل از همهٔ چندجمله‌ایهای g است که $g(T)\beta$ در W قراردارد، درنظر می‌گیریم. یادآوری می‌کنیم که چندجمله‌ای تکین $f=s(\beta; W)$ که ایدآل $S(\beta; W)$ را تولید می‌کند نیز T- هادی β در W نامیده می‌شود. بردار $f(T)\beta$ در W است. حال، اگر W، T-مجاز باشد، عنصری چون γ در W قراردارد که $f(T)\beta=f(T)\gamma$. فرض کنیم $\alpha=\beta-\gamma$ و g چندجمله‌ای دلخواهی باشد. چون $\beta-\alpha$ در W قراردارد، $g(T)\beta$ در W است اگر وتنها اگر $g(T)\alpha$ نیز در W باشد؛ به‌بیان دیگر، $S(\alpha; W)=S(\beta; W)$. پس، چندجمله‌ای f نیز T-هادی α در W است. اما $f(T)\alpha=\circ$. این موضوع می‌رساند که $g(T)\alpha$ در W است اگروتنها اگر $g(T)\alpha=\circ$؛ در اینجا، زیرفضاهای $Z(\alpha; T)$ و W مستقل هستند (۳-۷) و f همان T-پوچساز α است.

قضیهٔ ۳ (قضیهٔ تجزیه دوری). گیریم T عملگری خطی روی فضای برداری بعد متناهی V و $W_\circ$ زیرفضای T-مجاز سره‌ای از V باشد. بردارهای غیرصفری چون α_1، $\cdots$، α_r در V بترتیب با T-پوچسازهای p_1، $\cdots$، p_r وجود دارند که

(۱) $V=W_\circ\oplus Z(\alpha_1; T)\oplus\cdots\oplus Z(\alpha_r; T)$؛

(۲) p_k چندجمله‌ای p_{k-1} را عاد می‌کند، $k=2, \cdots, r$.

بعلاوه، عدد صحیح r و پوچسازهای p_1، $\cdots$، p_r توسط (۱) ، (۲) و این واقعیت که هیچ یك از α_kها صفر نیستند، به‌طور یکتا تعیین می‌شوند.

اثبات. اثبات نسبتاً طولانی است؛ از این‌رو، آن را به‌چهار مرحله تقسیم می‌کنیم. گرچه در مطالعهٔ اول، ممکن است فرض $W_\circ=\{\circ\}$ اثبات را ساده‌تر جلوه دهد، اما واقعاً این فرض سادگی عمده‌ای را سبب نمی‌شود. در سرتاسر اثبات، $f(T)\beta$ را باختصار به‌صورت $f\beta$ می‌نویسیم.

مرحلهٔ ۱. بردارهای غیرصفری چون β_1، $\cdots$، β_r وجود دارندکه

(الف) $V=W_\circ+Z(\beta_1; T)+\cdots+Z(\beta_r; T)$؛

(ب) اگر $1\leqslant k\leqslant r$ و

$$W_k=W_\circ+Z(\beta_1; T)+\cdots+Z(\beta_k; T)$$

آنگاه درجهٔ هادی $p_k=s(\beta_k; W_{k-1})$ در بین همهٔ T-هادیهای در زیرفضای W_{k-1}

ماکسیمم است؛ یعنی، به‌ازای هر k

$$\deg p_k = \max_{\alpha \text{ در } V} \deg s(\alpha; W_{k-1}).$$

این مرحله تنها به‌این امر بستگی دارد که W_0 زیرفضای پایایی است. اگر W زیرفضای T-پایای سره ای باشد، آنگاه

$$0 < \max_{\alpha} \deg s(\alpha; W) \leqslant \text{بعد}\,(V)$$

و می‌توانیم برداری چون β انتخاب کنیم کـه $\deg s(\beta; W)$ همان ماکسیمم باشد. در این صورت زیرفضای $W + Z(\beta; T)$، T-پایا ودارای بعدی بزرگتر از بعد (W) است. ایـن فـرایند را بـرای بـه دست آوردن β_1 روی $W = W_0$ بـه‌کار می‌بندیـم. اگـر $W_1 = W_0 + Z(\beta_1; T)$ هنوز هم سره باشد، آنگاه فرایند را برای به‌دست آوردن β_2 روی W_1 به‌کار می‌بریم. این روش را ادامه می‌دهیم. چون بعد $(W_k) >$ بعد (W_{k-1})، باید در حداکثر بعد (V) مرحله به $W_r = V$ برسیم.

مرحلهٔ ۲. گیریم β_1، $\cdots$، β_r بردارهای غیرصفری باشند که شرایط (الف) و (ب) از مرحلهٔ ۱ را برآورند. k را ثابت می‌گیریم، $1 \leqslant k \leqslant r$. فرض می‌کنیم β برداری دلخواه از V باشد و می‌نویسیم $f = s(\beta; W_{k-1})$. اگر

$$f\beta = \beta_0 + \sum_{1 \leqslant i < k} g_i \beta_i \quad , \quad \beta_i \text{ در } W_i$$

آنگاه f همهٔ چندجمله‌ایهای g_i را عـاد می‌کند و بـا فرض این کـه γ_0 در W_0 باشد، $\beta_0 = f\gamma_0$.

اگر $k = 1$، این حکم عین این است که W_0 زیرفضایی T-مجاز باشد. جهت اثبات حکم برای $k > 1$ آلگوریتم تقسیم را به‌کار می‌بندیم:

$$g_i = f h_i + r_i ، \quad r_i = 0 \quad \text{یا} \quad \deg r_i < \deg f. \tag{۴-۷}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که به‌ازای هر i، $r_i = 0$. فرض کنید

$$\gamma = \beta - \sum_1^{k-1} h_i \beta_i\,. \tag{۵-۷}$$

چون $\gamma - \beta$ در W_{k-1} است

$$s(\gamma; W_{k-1}) = s(\beta; W_{k-1}) = f.$$

بعلاوه

$$f\gamma = \beta_0 + \sum_1^{k-1} r_i \beta_i\,. \tag{۶-۷}$$

تصور کنید یکی از r_iها مخالف ۰ باشد. دراین‌حال تناقضی به‌دست خواهیم آورد. گیریم j بزرگترین نمایهٔ i باشدکه به‌ازای آن $r_i \neq 0$. دراین صورت

$$f\gamma = \beta_0 + \sum_1^j r_i\beta_i ، \quad r_j \neq 0 \quad \text{و} \quad \deg r_j < \deg f . \tag{۷-۷}$$

می‌نویسیم $p = s(\gamma; W_{j-1})$. چون W_{k-1} شامل W_{j-1} است، هادی $f = s(\gamma; W_{k-1})$ باید p را عاد کند:

$$p = fg.$$

$g(T)$ را برهردوطرف (۷-۷) به‌کار می‌بندیم:

$$p\gamma = gf\gamma = gr_j\beta_j + g\beta_0 + \sum_{1 \leqslant i < j} gr_i\beta_i. \tag{۸-۷}$$

بنابرتعریف، $p\gamma$ در W_{j-1} است و دوجملهٔ آخرسمت راست (۸-۷) نیز متعلق به W_{j-1} است. بنابراین، $gr_j\beta_j$ هم در W_{j-1} قراردارد. حال از شرط (ب) مرحلهٔ ۱ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\deg(gr_j) &\geqslant \deg s(\beta_j; W_{j-1}) \\
&= \deg p_j \\
&\geqslant \deg s(\gamma; W_{j-1}) \\
&= \deg p \\
&= \deg(fg).
\end{aligned}$$

پس $\deg r_j \geqslant \deg f$، و این موضوع با انتخاب j تناقض دارد. تااینجا می‌دانیم که f همهٔ g_iها را عاد می‌کند و ازاین‌رو $\beta_0 = f\gamma$. چون W_0 زیرفضایی T-مجاز است، با فرض اینکه γ_0 در W_0 باشد، $\beta_0 = f\gamma_0$. ضمناً متذکر می‌شویم که مرحلهٔ ۲ صورت قویتری از این حکم است که هریك از زیرفضاهای W_1، W_2، $\cdots$، W_r زیرفضایی T-مجاز است.

مرحلهٔ ۳. بردارهای غیرصفری چون α_1، $\cdots$، α_r در V وجود دارند که در شرایط (۱) و (۲) قضیهٔ ۳ صدق می‌کنند.

همچون مرحلهٔ ۱، بـا بردارهای β_1، $\cdots$، β_r آغاز می‌کنیم و k را ثابت نگه می‌داریم، $1 \leqslant k \leqslant r$. مرحلهٔ ۲ را بر بردار $\beta = \beta_k$ و T-هادی $f = p_k$ به‌کارمی‌بندیم. داریم

$$p_k\beta_k = p_k\gamma_0 + \sum_{1 \leqslant i < k} p_k h_i \beta_i \tag{۹-۷}$$

که درآن γ_0 در W_0 است و h_1، $\cdots$، h_{k-1} چندجمله‌ایهایی هستند. می‌نویسیم

$$\alpha_k=\beta_k-\gamma_\circ-\sum_{1\leqslant i<k}h_i\beta_i\,. \tag{۱۰-۷}$$

چون $\beta_k-\alpha_k$ در W_{k-1} است

$$s(\alpha_k;W_{k-1})=s(\beta_k;W_{k-1})=p_k \tag{۱۱-۷}$$

و چون $p_k\alpha_k=\circ$، داریم

$$W_{k-1}\cap Z(\alpha_k;T)=\{\circ\}. \tag{۱۲-۷}$$

چون همهٔ α_kها (۷-۱۱) و (۷-۱۲) را برمی‌آورند، نتیجه می‌گیریم که

$$W_k=W_\circ\oplus Z(\alpha_1;T)\oplus\cdots\oplus Z(\alpha_k;T).$$

و p_k چندجمله‌ای T-پوچساز α_k است. به‌بیان دیگر، بردارهای α_1، ...، α_r همان‌دنباله از زیرفضاهای W_1، W_2، ... را تعریف می‌کنندکه بردارهای β_1، ...، β_r؛ و نیز T-هادیهای $p_k=s(\alpha_k;W_{k-1})$ همان خواص ماکسیمال بودن (شرط (ب) مرحلهٔ ۱) را دارا هستند. بردارهای α_1، ...، α_r دارای‌این خاصیت اضافی هم هستندکه زیرفضاهای $W_\circ$، $Z(\alpha_1;T)$، $Z(\alpha_2;T)$، ... مستقل هستند. بنابراین بررسی شرط (۲) درقضیهٔ ۳ آسان است. چون به‌ازای هر i، $p_i\alpha_i=\circ$، رابطهٔ بدیهی

$$p_k\alpha_k=\circ+p_1\alpha_1+\cdots+p_{k-1}\alpha_{k-1}$$

در دست است. مرحلهٔ ۲ را با گذاشتن α_1، ...، α_k به‌جای β_1، ...، β_k وبا $\beta=\alpha_k$ به‌کار می‌بندیم. نتیجه: p_k هر p_i را، به‌ازای $i<k$، عاد می‌کند.

مرحلهٔ ۴. عدد r و چندجمله‌ایهای p_1، ...، p_r به‌طور یکتا توسط شرایط قضیهٔ ۳ تعیین می‌شوند.

فرض می‌کنیم علاوه بر بردارهای α_1، ...، α_r در قضیهٔ ۳، بردارهای غیر صفر γ_1، ...، γ_s بترتیب با T-پوچسازهای g_1، ...، g_s را هم داریم به‌طوری‌که

$$V=W_\circ\oplus Z(\gamma_1;T)\oplus\cdots\oplus Z(\gamma_s;T)$$

(۱۳-۷) ونیز به‌ازای $k=2,\ldots,s$، g_k چندجمله‌ای g_{k-1} راعاد می‌کند

نشان خواهیم دادکه $r=s$، و به‌ازای هر i، $p_i=g_i$.

بسادگی دیده می‌شودکه $p_1=g_1$. چندجمله‌ای g_1 به‌عنوان T-هادی V در $W_\circ$از (۷-۱۳) حاصل می‌شود. گیریم $S(V;W_\circ)$ دسته‌ای ازچندجمله‌ایهایی چون f است که به‌ازای هر β در V، بردار $f\beta$ در $W_\circ$ باشد؛ یعنی، چندجمله‌ایهایی چون f است که برد $f(T)$ مشمول در $W_\circ$ باشد. آنگاه $S(V;W_\circ)$ ایدآل غیرصفری درجبرچندجمله‌ایها است. به‌دلیل زیر، چندجمله‌ای g_1 مولد تکین این ایدآل است. هر β در V به‌صورت

$$\beta=\beta_\circ+f_1\gamma_1+\cdots+f_s\gamma_s$$

است؛ و لذا

$$g_1\beta=g_1\beta_0+\sum_1^s g_1f_i\gamma_i \cdot$$

چون هر g_i چندجمله‌ای g_1 را عاد می‌کند، به‌ازای همهٔ iها داریم $g_1\gamma_i=0$ و نیز $g_1\beta=g_1\beta_0$ متعلق به W_0 است. پس g_1 در $S(V;W_0)$ قرار دارد. چون g_1 چندجمله‌ای تکین از کوچکترین درجه است که γ_1 را در W_0 می‌فرستد، می‌بینیم که g_1 چندجمله‌ای تکین از کوچکترین درجهٔ موجود در ایدآل $S(V;W_0)$ است. با همین استدلال، p_1 مولد این ایدآل است و از اینجا $p_1=g_1$.

اگر f یك چندجمله‌ای و W زیرفضایی از V باشد، مجموعهٔ همهٔ بردارهای $f\alpha$ به‌ازای α در W را باختصار به‌صورت fW می‌نویسیم. اثبات سه‌حکم زیر را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

۱. $fZ(\alpha;T)=Z(f\alpha;T)$.

۲. اگر $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$ و هر V_i تحت T پایا باشد، آنگاه

$$fV=fV_1\oplus\cdots\oplus fV_k \cdot$$

۳. اگر α و γ، T-پوچسازهای مساوی داشته باشند، آنگاه $f\alpha$ و $f\gamma$ نیز T-پوچسازهای مساوی دارند و (بنابراین)

$$\text{بعد}\,(Z(f\alpha;T))=\text{بعد}\,(Z(f\gamma;T)) \cdot$$

اکنون، برای اینکه نشان دهیم $r=s$ و به‌ازای $i=2,\ldots,r$، $p_i=g_i$، به‌استقرا به‌پیش می‌رویم. برهان برشمارش ابعاد به‌طریق درست استوار است. ما اثبات این مطلب را که اگر $r\geqslant 2$ آنگاه $p_2=g_2$ ارائه می‌دهیم و امیدواریم استقرا از آن دیده شود. فرض کنیم $r\geqslant 2$. دراین صورت

$$\text{بعد}\,(V)>\text{بعد}\,(Z(\alpha_1;T))+\text{بعد}\,(W_0)$$

چون می‌دانیم $p_1=g_1$، نتیجه می‌گیریم که بعدهای $Z(\alpha_1;T)$ و $Z(\gamma_1;T)$ مساوی‌اند. بنابراین

$$\text{بعد}\,(V)>\text{بعد}\,(Z(\gamma_1;T))+\text{بعد}\,(W_0).$$

که نشان می‌دهد $s\geqslant 2$. اکنون می‌توانیم بپرسیم که آیا $p_2=g_2$ یا نه. از دو تجزیهٔ V، دو تجزیه هم برای زیرفضای p_2V به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}p_2V&=p_2W_0\oplus Z(p_2\alpha_1;T)\\ p_2V&=p_2W_0\oplus Z(p_2\gamma_1;T)\oplus\cdots\oplus Z(p_2\gamma_s;T).\end{aligned}\tag{۱۴-۷}$$

دراینجا از احکام (۱) و (۲) بالا استفاده کرده واین حقیقت را هم که $p_2\alpha_i=0$، $i\geqslant 2$، به‌کار برده‌ایم. چون می‌دانیم $p_1=g_1$، حکم (۳) بالا می‌گوید که بعدهای $Z(p_2\alpha_1;T)$ و $Z(p_2\gamma_1;T)$ مساوی‌اند. از این‌رو، از (۷-۱۴) آشکار است که

$$(Z(p_۲\gamma_i; T))\ \text{بعد} = ۰ . \quad i \geqslant ۲.$$

نتیجه اینکه $p_۲\gamma_۲ = ۰$، و $g_۲$ چندجمله‌ای $p_۲$ را عاد می‌کند. این برهان را می‌توان معکوس کرد و نشان داد که $p_۲$ نیز $g_۲$ را عاد می‌کند. بنابراین $p_۲ = g_۲$. □

نتیجه. اگر T عملگری خطی روی فضایی برداری با بعد متناهی باشد، آنگاه هرزیرفضای T-مجاز زیرفضای مکملی داردکه تحت Tپایاست.

اثبات. گیریم $W_۰$ زیرفضای مجازی از V باشد. اگر $W_۰ = V$ مکملی که در جستجوی آن هستیم $\{۰\}$ است، و اگر $W_۰$ سره باشد، قضیهٔ ۳ را به‌کار می‌بندیم و می‌نویسیم

$$W'_۰ = Z(\alpha_۱; T) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_r; T).$$

دراین صورت $W'_۰$ تحت Tپایاست و $V = W_۰ \oplus W'_۰$. □

نتیجه. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری بعد متناهی V باشد.

(الف) برداری چون α در V وجود دارد که T- پوچساز α چندجمله‌ای مینیمال T است.

(ب) T برداری دوری دارد اگر و تنها اگر چندجمله‌ایهای سرشت‌نما و مینیمال T مساوی باشند.

اثبات. اگر $V = \{۰\}$ نتایج به‌طور بدیهی درست هستند. اگر $V \neq \{۰\}$، فرض می‌کنیم

$$V = Z(\alpha_۱; T) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_r; T). \qquad (۱۵\text{-}۷)$$

دراینجا T-پوچسازهای $p_۱$، ...، p_r طوری هستند که به‌ازای $۱ \leqslant k \leqslant r-۱$، $p_{k+۱}$ چندجمله‌ای p_k را عاد می‌کند. همچنان‌که در اثبات قضیهٔ ۳ ملاحظه کردیم، بسادگی نتیجه می‌شود که $p_۱$ چندجمله‌ای مینیمال T، یعنی T-هادی V در $\{۰\}$ است. پس (الف) را اثبات کردیم.

در بخش ۱.۷ دیدیم که اگر T دارای برداری دوری باشد چندجمله‌ای مینیمال T بر چندجمله‌ای سرشت‌نما منطبق است. حکم (ب) عکس این حالت را هم در بر دارد. هرαای را همچون در (الف)، انتخاب کنید. اگر درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال برابر بعد (V) باشد، آنگاه $V = Z(\alpha; T)$. □

قضیهٔ ۴ (تعمیم قضیهٔ کیلی-همیلتن). فرض کنیم Tعملگری خطی روی فضای برداری بعد متناهی V باشد. p و f رابترتیب چندجمله‌ایهای مینیمال و سرشت‌نمای T می‌گیریم.

(۱) p چندجمله‌ای f را عاد می‌کند.

(۲) سازه‌های اول p و f مساوی‌اند، ولی ممکن است چندگانگیهای مختلف داشته باشند.

(۳) اگر

$$p=f_1^{r_1}\cdots f_k^{r_k} \tag{۷-۱۶}$$

تجزیهٔ p به‌سازه‌های اول باشد، آنگاه

$$f=f_1^{d_1}\cdots f_k^{d_k} \tag{۷-۱۷}$$

که درآن d_i پوچی $f_i(T)^{r_i}$ تقسیم بردرجهٔ f_i است.

اثبات. حالت بدیهی $V=\{0\}$ را منظور نمی‌کنیم. برای اثبات (۱) و (۲) تجزیه‌ای دوری چون (۷-۱۵) از V راکه از قضیهٔ ۳ به‌دست می‌آید درنظر می‌گیریم. همچنان که دراثبات نتیجهٔ دوم ملاحظه‌کردیم $p_1=p$. گیریم U_i تحدید T بر $Z(\alpha_i;T)$ باشد. دراین صورت U_i برداری دوری دارد ولذا p_i هم چندجمله‌ای مینیمال وهم چندجمله‌ای سرشت‌نمای U_i است. بنابراین، چندجمله‌ای سرشت‌نمای f عبارت است از حاصل‌ضرب $f=p_1\cdots p_r$. این مطلب از صورت بلوکی (۶-۱۴)، که ماتریس T در پایهٔ مناسبی می‌باشد، آشکار است. واضح است که $p_1=p$، f را عاد می‌کند، و (۱) اثبات می‌شود. بدیهی است که هر مقسوم‌علیه اول p، مقسوم‌علیه اول f هم هست. بعکس، هرمقسوم‌علیه اول $f=p_1\cdots p_r$ باید یکی ازسازه‌های p_i را عادکندواین به‌نوبهٔ خود p_1 را هم‌عاد می‌کند.

فرض کنیم (۷-۱۶) تجزیه به‌سازه‌های اول p باشد. قضیهٔ تجزیهٔ اولیه (قضیهٔ ۱۲ فصل ۶) را به‌کار می‌بریم. آن قضیه حاکی است که اگر V_i فضای پوچ $f_i(T)^{r_i}$ باشد، آنگاه

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k \tag{۷-۱۸}$$

و $f_i^{r_i}$ چندجمله‌ای مینیمال عملگر T_i حاصل از تحدید T برزیر فضای (پایای) V_iاست. حال قسمت (۲) قضیهٔ حاضر را درمورد عملگر T_i به‌کار می‌بندیم. چون چندجمله‌ای مینیمال آن توانی از سازهٔ اول f_i است، چندجمله‌ای سرشت‌نمای T_i به‌صورت $f_i^{d_i}$ است، که درآن $d_i\geqslant r_i$. آشکار است که

$$d_i=\frac{\text{بعد}\,(V_i)}{\deg f_i}$$

و (تقریباً طبق تعریف)، پوچی $(f_i(T)^{r_i})=\dim V_i$. چون T مجموع مستقیم عملگرهای T_1، ...، T_k است، چندجمله‌ای سرشت‌نمای f عبارت از حاصل‌ضرب

$$f=f_1^{d_1}\cdots f_k^{d_k}.\ \square$$

نتیجه. اگر T عملگر خطی پوچ‌توانی روی فضایی برداری با بعد n باشد، آنگاه چندجمله‌ای سرشت‌نمای T عبارت است از x^n.

اکنون به‌نظیر ماتریسی قضیهٔ تجزیهٔ دوری می‌پردازیم. اگر عملگر T و تجزیهٔ به‌مجموع مستقیم قضیهٔ ۳ داده شده باشند، فرض می‌کنیم $\mathcal{B}_i$ «پایهٔ مرتب دوری»

$$\{\alpha_i, T\alpha_i, \cdots, T^{k_i-1}\alpha_i\}$$

برای $Z(\alpha_i; T)$ باشد. دراینجا k_i بعد $Z(\alpha_i; T)$، یعنی درجهٔ پوچساز p_i رانشان‌می‌دهد. ماتریس عملگر القا شدهٔ T_i درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}_i$ ماتریس همدم چندجمله‌ای p_i است. پس، اگر $\mathcal{B}$ راپایهٔ مرتب V حاصل از تلفیق اجتماع $\mathcal{B}_i$ها، بترتیب $\mathcal{B}_1$، $\cdots$، $\mathcal{B}_r$، فرض‌کنیم، آنگاه ماتریس T درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ به‌صورت زیراست:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{bmatrix} \tag{۱۹-۷}$$

که درآن A_i ماتریس همدم $k_i \times k_i$ برای p_i است. گوییم یک ماتریس $n\times n$، A در **فرم‌گویا** است، هرگاه A مجموع مستقیم (۱۹-۷) از ماتریسهای همدم چندجمله‌ایهای تکین غیراسکالری p_1، $\cdots$، p_r باشد که به‌ازای $i=1, \cdots, r-1$، p_{i+1}، چندجمله‌ای p_i را عاد می‌کند. قضیهٔ تجزیهٔ دوری دربارهٔ ماتریسها مطلب زیر را بیان‌می‌کند.

قضیهٔ ۵. فرض‌کنیم F یک هیأت و B ماتریسی $n\times n$ برروی F باشد. در این صورت B برروی هیأت F با یك و تنها یك ماتریس در فرم گویا متشابه است.

اثبات. T را عملگری خطی روی F^n می‌گیریم که در پایهٔ مرتب استانده با B نمایش داده می‌شود. همچنان‌که قریباً ملاحظه‌کردیم، پایهٔ مرتبی برای F^n وجود دارد که درآن T با ماتریسی چون A که درفرم‌گویا است، نمایش داده می‌شود. دراین صورت B با این ماتریس Aمتشابه است. فرض‌کنیم B برروی F با ماتریس دیگری چون C هم‌که درفرم‌گویاست متشابه باشد. واین بدین معنی است‌که پایهٔ مرتبی برای F^n وجود داردکه درآن عملگر T با ماتریس C نمایش داده می‌شود. اگر C مجموع مستقیم ماتریسهای‌همدم c_i از چندجمله‌ایهای تکین g_1، $\cdots$، g_s باشدکه به‌ازای $i=1, \cdots, s-1$، g_{i+1} چندجمله‌ای g_i را عادکند، آنگاه آشکار است‌که بردارهای غیرصفر $\beta_1, \cdots, \beta_s$ در F^n، بترتیب با T-پوچسازهای g_1، $\cdots$،g_s، وجود دارندکه

$$V=Z(\beta_1; T)\oplus \cdots \oplus Z(\beta_s; T).$$

اما دراین صورت بنا بر حکم یکتایی در قضیهٔ تجزیهٔ دوری، چندجمله‌ایهای g_i با چندجمله‌ایهای p_i که ماتریس A را تعریف می‌کنند مساوی هستند. پس، $C=A$. □

چندجمله‌ایهای p_1 ، ... ، p_r **سازه‌های پایای** ماتریس B نامیده می‌شوند. در بخش ۴.۷ برای محاسبهٔ سازه‌های پایای ماتریس مفروضی چون B آلگوریتمی به‌دست خواهیم داد. وجه تسمیهٔ فرم گویا از این واقعیت ناشی می‌شود که توسط تعداد متناهی عمل گویا روی درایدهای B محاسبهٔ این چندجمله‌ایها امکان‌پذیر است.

مثال ۲. فرض کنیم فضای برداری دوبعدی V بر روی هیأت F و عملگر خطی T روی V داده شده‌اند. امکانات برای تجزیه کردن T به زیر فضاهای دوری بسیار محدود است. زیرا، اگر درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال T، ۲ باشد، خود با چندجمله‌ای سرشت‌نمای T برابر است و T دارای برداری دوری است. پس، پایهٔ مرتبی برای V وجود دارد که در آن T با ماتریس همدم چندجمله‌ای سرشت‌نمایش نشان داده می‌شود. از طرف دیگر، اگر درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال T یك باشد، آنگاه T مضربی اسکالری از عملگر همانی است. اگر $T=cI$ ، آنگاه به‌ازای هردو بردار مستقل خطی α_1 و α_2 در V ، داریم

$$V=Z(\alpha_1\,;\,T)\oplus Z(\alpha_2\,;\,T)$$

$$p_1=p_2=x-c\,.$$

درمورد ماتریسها، این تحلیل حاکی است که هرماتریس 2×2 برروی هیأت F ، دقیقاً با یکی از ماتریسهای ازنوع

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}\,,\quad \begin{bmatrix} 0 & -c_0 \\ 1 & -c_1 \end{bmatrix}$$

بر روی F متشابه است.

مثال ۳. گیریم T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. قبلا محاسبه کرده‌ایم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای T برابر $f=(x-1)(x-2)^2$ ، و چندجمله‌ای مینیمال T برابر $p=(x-1)(x-2)$ است. بدین‌سان می‌دانیم که در تجزیهٔ دوری برای T ، اولین بردار α_1 ، p را به‌عنوان T-پوچساز خود خواهد داشت. چون در فضایی سه‌بعدی کار می‌کنیم، تنها یك بردار دیگر چون α_2 می‌تواند در آن وجود داشته باشد. این بردار باید زیرفضایی دوری با بعد ۱ را تولید کند؛ یعنی، باید برداری سرشت‌نما برای T باشد. پوچسازش p_2 باید $(x-2)$ باشد؛ زیرا باید داشته باشیم $pp_2=f$. توجه کنید که این مطلب بلافاصله حاکی است که ماتریس A با ماتریس

$$B=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

متشابه است؛ بدین‌معنی که T در پایهٔ مرتبی توسط B نمایش داده می‌شود. چگونه‌می‌توانیم بردارهای مناسب α_1 و α_2 را بیابیم؟ خوب،می‌دانیم هر برداری که زیر فضایی T-دوری از بعد ۲ را تولید کند، α_1 مناسبی است. از این‌رو، بیایید ϵ_1 را بیازماییم. داریم

$$T\epsilon_1=(5, -1, 3)$$

که مضربی اسکالری از ϵ_1 نیست؛ پس $Z(\epsilon_1 ; T)$ دارای بعد ۲ است. این فضا متشکل است از همهٔ بردارهای $a\epsilon_1+b(T\epsilon_1)$:

$$a(1, 0, 0)+b(5, -1, 3)=(a+5b, -b, 3b)$$

یا همهٔ بردارهای (x_1, x_2, x_3) که درشرط $x_3=-3x_2$ صدق کنند. اکنون به برداری چون α_2 نیاز داریم که $T\alpha_2=2\alpha_2$ ، و $Z(\alpha_2 ; T)$ مجزا از $Z(\epsilon_1 ; T)$ باشد. چون α_2 باید برداری سرشت‌نما برای T باشد، فضای $Z(\alpha_2 ; T)$ چیزی جز فضای یك بعدی پدید آمده توسط α_2 نخواهد بود؛ ولـذا شرط ما این است که α_2 در $Z(\epsilon_1 ; T)$ نباشد. اگر $\alpha=(x_1, x_2, x_3)$ ، بسادگی می‌توان نشان داد که $T\alpha=2\alpha$ ، اگـر و تنها اگر $x_1=2x_2+2x_3$. پس، $\alpha_2=(2, 1, 0)$ در $T\alpha_2=2\alpha_2$ صدق‌می‌کند و زیرفضایی T-دوری مجزا از $Z(\epsilon_1 ; T)$ تولید می‌نماید. خواننده باید‌مستقیماً نشان‌دهد که‌ماتریس T درپایهٔ مرتب

$$\{(1, 0, 0), (5, -1, 3), (2, 1, 0)\}$$

ماتریس B بالا است.

مثال ۴. فرض کنیم T یك عملگر خطی قطری شدنی روی V باشد. این‌جالب‌است که تجزیه‌ای دوری برای T را به پایه‌ای که ماتریس T راقطری می کند مربوط بسازیم. c_1 ، . . . ، c_k را مقادیر سرشت‌نمای متمایز T و V_i را فضای بـردارهای سرشت‌نمای وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای c_i می گیریم. در این صورت

$$V=V_1\oplus \cdots \oplus V_k$$

واگر بعد $d_i=(V_i)$ ، آنگاه

$$f=(x-c_1)^{d_1} \cdots (x-c_k)^{d_k}$$

چندجمله‌ای سرشت‌نمای T است. اگر α برداری از V باشد، مربوط ساختن زیر فضای دوری $Z(\alpha ; T)$ به‌زیرفضاهای V_1 ، . . . ، V_k آسان است. بردارهای یکتایی چـون β_1 ، . . . ، β_k وجود دارند که β_i در V_i باشد و

$$\alpha=\beta_1+\cdots+\beta_k .$$

چون $T\beta_i=c_i\beta_i$ ، به‌ازای هر چندجمله‌ای f داریم

$$f(T)\alpha=f(c_1)\beta_1+\cdots+f(c_k)\beta_k . \qquad (۲۰\text{-}۷)$$

با مفروض بودن اسکالرهای t_1، ...، t_k چندجمله‌ایی چون f وجود دارد که $f(c_i)=t_i$ ، $1\leqslant i\leqslant k$. بنابراین، $Z(\alpha\,;T)$ عیناً زیرفضای پدیدآمده توسط بردارهای β_1 ، ...، β_k است. پوچساز α چیست؟ بنابر (۲۰-۷)، $f(T)\alpha=0$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر i ، $f(c_i)\beta_i=0$. به‌بیان دیگر ، $f(T)\alpha=0$ ، مشروط براینکه به‌ازای iهایی که به‌ازای آنها $\beta_i\neq 0$ داشته باشیم $f(c_i)=0$. از این‌رو، پوچساز α عبارت است از حاصلضرب

$$\prod_{\beta_i\neq 0}(x-c_i) . \qquad (۲۱\text{-}۷)$$

حال، $\mathcal{B}_i=\{\beta_1^i,\ \ldots,\ \beta_{d_i}^i\}$ را پایهٔ مرتبی برای V_i می‌گیریم و می‌نویسیم

$$r=\max_i d_i .$$

بردارهای α_1 ، ...، α_r را توسط

$$\alpha_j=\sum_{d_i\geqslant j}\beta_j^i,\qquad 1\leqslant j\leqslant r \qquad (۲۲\text{-}۷)$$

تعریف می‌کنیم. زیرفضای دوری $Z(\alpha_j\,;T)$ عبارت است از زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای β_j^i بااین‌شرط که iنمایه‌هایی را بپذیرد که به‌ازای آنها $d_i\geqslant j$. T پوچساز α_i

$$p_j=\prod_{d_i\geqslant j}(x-c_i) \qquad (۲۳\text{-}۷)$$

است. همچنین

$$V=Z(\alpha_1\,;T)\oplus\cdots\oplus Z(\alpha_r\,;T)$$

زیرا هر β_j^i به‌یکی وتنها یکی از زیر فضاهای $Z(\alpha_1;T)$ ، ...، $Z(\alpha_r;T)$ تعلق دارد و $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_1,\ \ldots,\ \mathcal{B}_k)$ پایه‌ای برای V است. طبق (۲۳-۷)، p_{j+1} چندجمله‌ای p_j را نیز عاد می‌کند.

تمرین

۱. فرض‌کنید T عملگری خطی روی F^2 باشد، که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرض کنید $\alpha_1 = (1, 0)$. نشان دهید $F^2 \neq Z(\alpha_1; T)$ و هیچ بردار غیر صفری چون α_2 در F^2 وجود ندارد که $Z(\alpha_2; T)$ مجزا از $Z(\alpha_1; T)$ باشد.

۲. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V و R برد T باشد.
(الف) ثابت کنید R زیرفضای T-پایای مکملی دارد اگر و تنها اگر R مستقل از فضای پوچ N از T باشد.
(ب) اگر R و N مستقل باشند، ثابت کنید N یکتا زیر فضای T-پایای مکمل R است.

۳. فرض کنید T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرض کنید W فضای پوچ $T - 2I$ باشد. ثابت کنید W هیچ زیرفضای T-پایای مکملی ندارد. (راهنمایی: فرض کنید $\beta = \epsilon_1$، و مشاهده کنید که $(T - 2I)\beta$ در W است. ثابت کنید هیچ αیی در W وجود ندارد که $(T - 2I)\beta = (T - 2I)\alpha$.)

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی F^4 باشد که در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرض کنید W فضای پوچ $T - cI$ باشد.
(الف) ثابت کنید W زیرفضای پدید آمده توسط ϵ_4 است.
(ب) مولدهای تکین ایدآلهای $S(\epsilon_4; W)$، $S(\epsilon_3; W)$، $S(\epsilon_2; W)$، $S(\epsilon_1; W)$ را بیابید.

۵. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای برداری V بر روی هیأت F باشد. اگر چندجمله‌ای f بر روی F و α در V باشد، می‌نویسیم $f\alpha = f(T)\alpha$. اگر

V_1، ...، V_k زیرفضاهایی T- پایا باشند و $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$، نشان دهید

$$fV=fV_1\oplus\cdots\oplus fV_k.$$

۶. T، V، و F را همچون درتمرین ۵ بگیرید. فرض کنید α و β بردارهایی از V باشند که T- پوچسازهای مساوی دارند. ثابت‌کنید که به‌ازای هرچندجمله‌ای f، بردارهای $f\alpha$ و $f\beta$ نیز T- پوچسازهای مساوی دارند.

۷. چندجمله‌ایهای مینیمال و فرمهای گویای هریك از ماتریسهای حقیقی زیر را بیابید

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 & -1 \\ 0 & c & 1 \\ -1 & 1 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

۸. گیریم T عملگری خطی روی R^3 باشدکه درپایهٔ مرتب استانده با

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. بردارهای غیرصفر α_1، ...، α_r راکه در شرایط قضیهٔ ۳ صدق می‌کنند بیابید.

۹. ماتریس حقیقی

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

داده شده است. ماتریس حقیقی ۳ × ۳ معکوس‌پذیری چون P بیابیدکه $P^{-1}AP$ به‌فرم گویا باشد.

۱۰. فرض‌کنید F زیرهیأتی از اعداد مختلط و T عملگری خطی روی F^4 باشدکه در پایهٔ مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b & 2 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. چندجمله‌ای سرشت‌نمای T را بیابید. حالات ۱ $=a=b$؛ $a=b=$ ۰؛ $a=$ ۰، $b=$ ۱ را در نظر بگیرید. در هریك ازاین حالات، چندجمله‌ای مینیمال T و بردارهای غیرصفر α_1، ...، α_r راکه در شرایط قضیهٔ ۳ صدق می‌کنند بیابید.

۱۱. ثابت کنیدکه اگر A و B ماتریسهایی ۳×۳ برروی هیأت F باشند، شرطی لازم و کافی برای‌اینکه A و B برروی F متشابه باشنداین‌است که آنها دارای چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی وچندجمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند. مثالی بیاوریدکه نشان دهد این موضوع برای ماتریسهای ۴×۴ غلط است.

۱۲. فرض کنید F زیرهیأتی ازهیأت اعداد مختلط و A و B ماتریسهایی $n\times n$ برروی F باشند: ثابت کنیدکه اگر A و B برروی هیأت اعداد مختلط متشابه باشند، آنگاه برروی F نیز متشابه‌اند. (راهنمایی: ثابت کنیدکه فرم‌گویای A، چه A به‌عنوان ماتریسی روی F درنظر گرفته شود وچه ماتریسی روی C، یکی است؛ و به‌همین‌نحو برای B.)

۱۳. فرض کنید A ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های مختلط باشد. ثابت کنیدکه اگرهمهٔ‌مقادیر سرشت‌نمای A، حقیقی باشند، آنگاه A با ماتریسی با درایه‌های حقیقی متشابه‌است.

۱۴. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای بعد متناهی V باشد. ثابت کنید برداری چون α باخاصیت زیر در V وجود دارد. اگر f یك چندجمله‌ای باشد و $f(T)\alpha=0$، آنگاه $f(T)=0$. (برداری چون α، یك **بردارجداکننده** برای جبر چندجمله‌ایهای در T نامیده می‌شود.) هنگامی که T برداری دوری داشته باشد، اثباتی مستقیم ازاین مطلب که هر برداردوری برداری جداکننده برای جبرچندجمله‌ایهای در T نیزهست، ارائه کنید.

۱۵. فرض کنید F زیر هیأتی از هیأت اعداد مختلط، A ماتریسی $n\times n$ برروی F، و p چندجمله‌ای مینیمال A باشد. اگر A را به‌عنوان ماتریسی برروی C محسوب کنیم، آنگاه A به‌عنوان ماتریسی $n\times n$ برروی C چندجمله‌ای مینیمالی چون f دارد. از قضیه‌ای دربارهٔ معادلات خطی جهت اثبات $p=f$ استفاده کنید. آیا همچنین می‌توانید دریابیدکه این مطلب ازقضیهٔ تجزیهٔ دوری چگونه نتیجه می‌شود؟

۱۶. فرض کنید ماتریس Aی $n\times n$ با درایه‌های حقیقی چنان باشدکه $A^2+I=0$. ثابت کنید n زوج است و اگر $n=2k$ فرض شود، آنگاه A برروی هیأت اعداد حقیقی با ماتریسی به‌صورت بلوکی

$$\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن I ماتریس همانی $k \times k$ است، متشابه است.

۱۷. عملگر خطی T روی فضای برداری بعد متناهی V داده شده است. فرض کنید
(الف) چندجمله‌ای مینیمال T توانی از یك چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر باشد؛
(ب) چندجمله‌ای مینیمال با چندجمله‌ای سرشت‌نما برابر باشد.
نشان دهید که هیچ زیرفضای T-پایای غیربدیهی، یك زیرفضای T-پایای مکمل ندارد.

۱۸. اگر T یك عملگر خطی قطری‌شدنی باشد، آنگاه هر زیرفضای T-پایا، یك زیرفضای T-پایای مکمل نیز دارد.

۱۹. گیریم T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V باشد. ثابت کنید T برداری دوری دارد اگر وتنها اگرمطلب زیر درست باشد: هرعملگرخطی U که با T جابجا شود یك چندجمله‌ای برحسب T است.

۲۰. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی برروی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد. می‌پرسیم چه‌وقت این مطلب درست است که هر بردار غیرصفر در V برداری دوری برای T است. ثابت کنید وضع چنین‌است اگروتنها اگرچندجمله‌ای سرشت‌نمای T برروی F تحویل‌ناپذیر باشد.

۲۱. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. فرض کنید T عملگری‌خطی روی R^n باشد که توسط A درپایهٔ مرتب استانده نمایش داده می‌شود و U عملگری خطی روی C^n باشد که آن هم درپایهٔ مرتب استانده با A نمایش داده می‌شود. برای اثبات مطلب زیر ازنتیجهٔ تمرین ۲۰ استفاده کنید: اگر زیرفضاهای پایای تحت T تنها R^n و زیرفضای صفر باشند، آنگاه U قطری‌شدنی است.

۳.۷. فرم ژوردان

فرض کنیم N عملگر خطی پوچ‌توانی روی فضای با بعد متناهی V باشد. تجزیهٔ دوری N حاصل از قضیهٔ ۳ را مورد توجه قرار می‌دهیم. عدد صحیح مثبتی چون r، و r بردار غیرصفر α_1، ...، α_r در V با N-پوچسازهای p_1، ...، p_r که

$$V = Z(\alpha_1; V) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_r; V)$$

وبه‌ازای $i = 1, \ldots, r-1$، p_{i+1}، چندجمله‌ای p_i را عاد می‌کند وجود دارند. چون

N پوچ‌توان است، kیی هست که $k \leqslant n$ وچندجمله‌ای مینیمال N به‌صورت x^k باشد. پس، هر p_i به‌صورت $p_i = x^{k_i}$ است وشرط تقسیم‌پذیری چیزی جزشرط

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_r$$

نیست. بدیهی است که $k_1 = k$ و $k_r \geqslant 1$. ماتریس همدم x^{k_i} عبارت است از ماتریس $k_i \times k_i$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (۷-۲۴)$$

بدین‌سان قضیهٔ ۳ پایهٔ مرتبی برای V به‌دست می‌دهد که نسبت به‌آن ماتریس N مجموع مستقیم ماتریسهای پوچ توان مقدماتی (۷-۲۴) است که وقتی i افزایش یابد اندازه‌شان کاهش می‌یابد. از این مطلب دیده می‌شود که به‌هرماتریس $n \times n$ پوچ‌توانی عدد صحیح مثبتی چون r و r عدد صحیح مثبت $k_1, \ldots, k_r$ طوری وابسته‌اندکه $k_1 + \cdots + k_r = n$ و $k_i \geqslant k_{i+1}$ و نیز این اعداد صحیح مثبت فرم گویای ماتریس را تعیین؛ یعنی، ماتریس را تا میزان تشابه معین می‌کنند.

درمورد عملگرپوچ توان فوق مطلبی وجود داردکه بایدآن‌را در اینجا خاطرنشان سازیم. عدد صحیح مثبت r دقیقاً برابر پوچی N است؛ در واقع، فضای پوچ، پایه‌ای مشتمل بر r بردار

$$N^{k_i - 1}\alpha_i \qquad (۷-۲۵)$$

دارد. زیرا، فرض می‌کنیم α در فضای پوچ N باشد. حال α را به‌صورت

$$\alpha = f_1\alpha_1 + \cdots + f_r\alpha_r$$

که درآن f_i یك‌چندجمله‌ای است ودرجهٔ آن رامی‌توان کمتر از k_i فرض کرد،می‌نویسیم. چون $N\alpha = 0$، به‌ازای هر i داریم

$$\begin{aligned} 0 &= N(f_i\alpha_i) \\ &= Nf_i(N)\alpha_i \\ &= (xf_i)\alpha_i. \end{aligned}$$

پس، xf_i بر x^{k_i} تقسیم‌پذیراست، وچون $\deg(f_i) < k_i$،این بدان‌معنی است که‌به‌ازای

اسکالری چون c_i

$$f_i = c_i x^{k_i - 1}.$$

ولی آنگاه

$$\alpha = c_1(x^{k_1-1}\alpha_1) + \cdots + c_r(x^{k_r-1}\alpha_r)$$

که نشان می‌دهد بردارهای (۷-۲۵) پایه‌ای برای فضای پوچ N تشکیل می‌دهند. خواننده باید توجه داشته باشد که این حکم از دیدگاه ماتریسی نیز کاملاً روشن است.

اکنون مایلیم یافته‌های خود درمورد عملگرها یا ماتریسهای پوچ‌توان را بـا قضیهٔ تجزیهٔ اولیه از فصل ۶ تلفیق کنیم. وضع چنین است: فرض کنیم T عملگری خطی روی V باشد و نیزچندجمله‌ای سرشت‌نمای T برروی F به‌صورت زیر به‌سازه‌ها تجزیه شود:

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}.$$

در اینجا c_1، ...، c_k عناصـر متمایزی از F هستند و $d_i \geqslant 1$. در ایـن صورت چند-جمله‌ای مینیمال T

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

است که درآن $1 \leqslant r_i \leqslant d_i$. اگر W_i فضای پوچ $(T - c_iI)^{r_i}$ باشد، آنگاه قضیهٔ‌تجزیهٔ اولیه حاکی است که

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

ونیزعملگر T_i، القا شده توسط T روی W_i، دارای چندجمله‌ای مینیمال $(x - c_i)^{r_i}$ است. N_i را عملگری خطی روی W_i تعریف شده توسط $N_i = T_i - c_iI$ می‌گیریم. در ایـن صورت N_i پوچ‌توان و دارای چندجمله‌ای مینیمال x^{r_i} است. عملگـر T روی W_i مانند حاصل‌جمع N_i و c_i برابر عملگر همانی عمل می‌کند. فرض کنیم پایه‌ای برای زیرفضای W_i، متناظر به‌تجـزیهٔ دوری عملگرپوچ‌توان N_i، انتخاب کرده باشیم. در ایـن صورت ماتریس T_i دراین پایهٔ مرتب، مجموع مستقیم ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} c & 0 \cdots 0 & 0 \\ 1 & c \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & c & \\ 0 & 0 \cdots 1 & c \end{bmatrix} \qquad (۷\text{-}۲۶)$$

است که در هریك $c = c_i$. بعلاوه، اندازهٔ ایـن ماتریسها وقتی از چپ به‌راست خـوانده شوند، کاهش می‌یابند. ماتریسی به‌صورت (۷-۲۶)، یك **ماتریس مقدماتی ژوردان به‌ازای**

مقدار سرشت‌نمای c نامیده می‌شود. حال اگر همهٔ پایه‌های W_iها را پهلوی هم قراردهیم، پایهٔ مرتبی برای V به‌دست می‌آوریم. می‌خواهیم دراین پایهٔ مرتب ماتریس A از T را توصیف کنیم.

ماتریس A عبارت است از مجموع مستقیم ماتریسهای A_1، ۰۰۰، A_k

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}. \qquad (27\text{-}7)$$

A_i هم به‌صورت

$$A_i=\begin{bmatrix} J_1^{(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^{(i)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_i}^{(i)} \end{bmatrix}$$

است که در آن هر $J_j^{(i)}$ یك ماتریس مقدماتی ژوردان به‌ازای مقدار سرشت‌نمای c_i است. همچنین، داخل هر A_i، اندازهٔ ماتریسهای $J_j^{(i)}$ با افزایش j کاهش می‌یابد. گوییم ماتریسی $n \times n$ مانند A به **فرم ژوردان** است هرگاه‌همهٔ شرایط تشریح شده‌دراین بند را (به‌ازای اسکالرهای متمایزی چون c_1، ۰۰۰، c_k) برآورد.

قریباً نشان دادیم که اگر Tعملگری‌خطی باشد که چندجمله‌ای سرشت‌نمایش برروی هیأت اسکالری، به‌طورکامل به‌سازه‌ها تجزیه شود، آنگاه پایهٔ مرتبی برای V وجود دارد که در آن T با ماتریسی کــه به‌فرم ژوردان است نمایش داده می‌شود. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که این ماتریس، بدون احتساب ترتیبی که در آن مقادیر سرشت‌نمای T نوشته می‌شوند، به‌طور یکتا به T وابسته است. به‌بیان دیگر، اگــر دوماتریس به‌فــرم ژوردان متشابه باشند، آنگاه می‌توانند تنها در ترتیب اسکالرهای c_i متفاوت باشند.

این یکتایی به‌صورت زیر ثابت می‌شود. فرض‌کنیم پایهٔ مرتبی برای V وجودداشته باشدکه درآن T با ماتریس ژوردان A توصیف شده دربند قبل، نمایش داده شود. اگر A_i ماتریسی $d_i \times d_i$ باشد، آنگاه بوضوح d_i، چندگانگی c_i به عنوان ریشه‌ای از چند‌جمله‌ای سرشت‌نمای A یا T، است. به‌بیان‌دیگر، چندجمله‌ای سرشت‌نمای Tعبارت‌است‌از

$$f=(x-c_1)^{d_1} \cdots (x-c_k)^{d_k}.$$

این مطلب نشان می‌دهد که c_1، $\cdots$، c_k و d_1، $\cdots$، d_k بدون احتساب ترتیبی که آنها را می‌نویسیم، یکتا هستند. این واقعیت که A مجموع مستقیم ماتریسهای A_i است، تجزیه به‌مجموع مستقیمی‌چون $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ راکه تحت T پایاست ایجاب می‌کند. اکنون توجه کنید که W_i باید فضای پوچ $(T-c_iI)^n$، با بعد $(V)=n$، باشد؛زیرا، روشن است که A_i-c_iI پوچ‌توان وبه‌ازای $j\neq i$، ماتریس A_j-c_iI نامنفرد است. از این‌رو، می‌بینیم که زیرفضاهای W_i یکتا هستند. اگر T_i عملگرالقا شده توسط T روی W_i باشد، آنگاه ماتریس A_i، به‌عنوان فرم گویای T_i، به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

اکنون می‌خواهیم‌در بارهٔ عملگر T وماتریس ژوردان A که T را درپایهٔ‌مرتبی‌نمایش می‌دهد به‌مشاهدهٔ بیشتری بپردازیم. فهرست یك رشته از مشاهدات چنین است:

(۱) هردرایهٔ A که نه‌روی قطراصلی باشد و نه‌بلافاصله زیرآن برابر ۰ است.روی قطرA، k مقدار سرشت‌نمای متمایز c_1، $\cdots$، c_k از T قرار می گیرند. همچنین، c_i به‌تعداد d_i بار تکرار می‌شود. در اینجا d_i چندگانگی c_i به‌عنوان ریشه‌ای از چندجمله‌ای سرشت‌نماست؛ یعنی، بعد $(W_i)=d_i$.

(۲) به‌ازای هر i، ماتریس A_i مجموع مستقیم n_i ماتریس مقدماتی ژوردان $J_j^{(i)}$، به‌ازای مقدار سرشت‌نمای c_i، است. عدد n_i دقیقاً بعدفضای بردارهای سرشت‌نمای‌وابسته به‌مقدار سرشت‌نمای c_i است. زیرا، n_i تعداد بلوکهای پوچ‌توان مقدماتی درفرم گویای (T_i-c_iI) است و از این قرار برابر بعد فضای پوچ $(T-c_iI)$ است. بخصوص توجه داشته باشید که T قطری‌شدنی است اگروتنها اگر به‌ازای هر i، $n_i=d_i$.

(۳) به‌ازای هرi، اولین بلوك $J_1^{(i)}$ درماتریس A_iماتریسی‌است $r_i\times r_i$،که در آن r_i چندگانگی c_i به‌عنوان ریشه‌ای از چندجمله‌ای مینیمال T است. این مطلب از این واقعیت نتیجه می‌شود که چندجمله‌ای مینیمال عملگر پوچ‌توان (T_i-c_iI) عبارت است از x^{r_i}.

البته طبق معمول این‌مطلب نتیجهٔ ماتریسی ساده‌ای هم دارد. اگر B ماتریسی $n\times n$ برروی هیأت F باشد، و اگر چندجمله‌ای سرشت‌نمای B برروی F به‌طورکامل به‌سازه‌ها تجزیه شود، آنگاه B برروی F با ماتریسی $n\times n$ چون A به‌فرم ژوردان متشابه است و A، بدون احتساب پس وپیش‌کردن ترتیب مقادیرسرشت‌نمایش، یکتا است. A را **فرم ـ ژوردان** B می‌نامیم.

همچنین، توجه‌کنید که اگر F-هیأتی بستهٔ جبری باشد،آنگاه ملاحظات بالا درمورد هرعملگرخطی روی فضایی با بعد متناهی برروی F، یا برهرماتریس $n\times n$ برروی F، هم مصداق دارد. بدین‌سان، مثلاً، هرماتریس $n\times n$ بر روی هیأت اعداد مختلط با ماتریسی اساساً یکتا در فرم ژوردان متشابه است.

مثال ۵. فرض کنیم T عملگری خطی روی C^2 باشد. چندجمله‌ای سرشت‌نمای T یا $(x-c_1)(x-c_2)$ است،که در آن c_1 و c_2 اعداد مختلط متمایزی می باشند، یا

$(x-c)^۲$. درحالت نخست T قطری‌شدنی است ودرپایهٔ مرتبی با ماتریس

$$\begin{bmatrix} c_۱ & ۰ \\ ۰ & c_۲ \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. درحالت دوم، چندجمله‌ای مینیمال T ممکن است $(x-c)$ باشد که دراین حالت $T=cI$، یا $(x-c)^۲$ باشدکه دراین حالت T درپایهٔ مرتبی با ماتریس

$$\begin{bmatrix} c & ۰ \\ ۱ & c \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. بدین‌سان، هرماتریس ۲ × ۲ برروی هیأت اعداد مختلط، با ماتریسی از یکی از دونوع فوق، احتمالا با $c_۱=c_۲$، متشابه است.

مثال ۶. فرض کنیم A ماتریس ۳ × ۳ مختلط

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ a & ۲ & ۰ \\ b & c & -۱ \end{bmatrix}$$

باشد. چندجمله‌ای سرشت‌نمای A به طور بدیهی عبارت است از $(x-۲)^۲(x+۱)$. یا این چندجمله‌ای مینیمال است، که دراین حالت A با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

متشابه است، ویا اینکه چندجمله‌ای مینیمال $(x-۲)(x+۱)$ است که دراین حالت A با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

متشابه است. حال

$$(A-۲I)(A+I)=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳a & ۰ & ۰ \\ ac & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

و بنابراین، A با ماتریسی قطری متشابه است اگر و تنها اگر $a=۰$.

مثال ۷. فرض کنیم

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & a & ۲ \end{bmatrix}.$$

چندجمله‌ای سرشت‌نمای A عبارت است از $(x-۲)^۴$. چون A مجموع مستقیم دوماتریس ۲×۲ است، واضح است که $(x-۲)^۲$ چندجمله‌ای مینیمال A است. حال اگر $a=۰$ یا اگر $a=۱$، آنگاه ماتریس A به‌فرم ژوردان است. توجه‌کنید دوماتریسی راکه به‌ازای $a=۰$ و $a=۱$ به دست می‌آوریم، چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی و چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی دارند، لکن متشابه نیستند. این دو ماتریس بدین‌دلیل متشابه نیستندکه برای اولین ماتریس فضای جواب $(A-۲I)$ بعد ۳ دارد، درحالی که برای دومین ماتریس بعدش ۲ است.

مثال ۸. معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت (مثال ۱۴ در فصل۶) مثال خوبی از فرم ژوردان به‌دست می‌دهند. گیریم $a_۰$، ...، $a_{n-۱}$ اعدادی مختلط و Vفضای همهٔ توابع nبار مشتق‌پذیر f روی فاصله‌ای ازخط حقیقی باشدکه درمعادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^n f}{dx^n}+a_{n-۱}\frac{d^{n-۱} f}{dx^{n-۱}}+\cdots+a_۱\frac{df}{dx}+a_۰ f=۰$$

صدق می‌کنند. D را عملگرمشتق‌گیری می‌گیریم. دراین صورت V تحت Dپایاست،چرا که V فضای پوچ $p(D)$ است که

$$p=x^n+\cdots+a_۱x+a_۰.$$

فرم ژوردان عملگر مشتق‌گیری روی V چیست؟

فرض‌کنیم $c_۱$، ...، c_k ریشه‌های مختلط‌متمایز p باشند:

$$p=(x-c_۱)^{r_۱}\cdots(x-c_k)^{r_k}.$$

V_i را فضای پوچ $(D-c_iI)^{r_i}$، یعنی، مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D-c_iI)^{r_i} f=۰$$

می‌گیریم. دراین صورت همان‌گونه که درمثال ۱۵ در فصل ۶ ملاحظه‌کردیم، قضیهٔ تجزیهٔ اولیه حاکی است که

$$V=V_۱\oplus\cdots\oplus V_k.$$

فرض‌کنیم N_i تحدید $D-c_iI$ به V_i باشد. دراین صورت فرم ژوردان عملگر D(روی V) به‌وسیلهٔ فرمهای گویای عملگرهای پوچ‌توان $N_۱$، ...، N_k روی فضاهای

V_1، . . .، V_k تعیین می‌شود.

از این‌رو، آنچه راکه باید (به‌ازای مقادیرمختلف c) بدانیم، فرم گـویای عملگر $N=(D-cI)$، روی فضای V_c است که متشکل ازجوابهای معادلهٔ

$$(D-cI)^r f = 0.$$

است. درفرم‌گویای N، چندبلوك پوچ‌توان مقدماتی وجود دارد؟ تعداد آنها برابر پوچی N، یعنی بعد فضای سرشت‌نمای وابسته به مقدار سرشت‌نمای c، خواهد بـود. این بعد ۱ است، زیرا هرتابعی که درمعادلهٔ دیفرانسیل

$$Df = cf$$

صدق کند، مضربی اسکالری از تابع‌نمایی $h(x)=e^{cx}$ است. بنابراین، عملگر N (روی فضای V_c) برداری دوری دارد. انتخابی مناسب برای برداری دوری عبـارت است از $g=x^{r-1}h$:

$$g(x)=x^{r-1}e^{cx}.$$

از اینجا داریم

$$Ng=(r-1)x^{r-2}h$$
$$\vdots$$
$$N^{r-1}g=(r-1)!h$$

بند قبل به‌ما نشان می‌دهد که فـرم ژوردان D(روی فضای V)، مجموع مستقیم k ماتریس مقدماتی ژوردان، یك ماتریس به‌ازای هرریشهٔ c_i، است.

تمرین

۱. فرض کنید N_1 و N_2 ماتریسهای ۳ × ۳ پوچ‌توانی برروی هیأت F باشند. ثابت‌کنید که N_1 و N_2 متشابه‌اند اگر وتنها اگـر دارای چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند.

۲. از نتیجهٔ تمرین ۱ و فرم ژوردان برای اثبات مطلب زیر استفاده‌کنید: فرض کنید A و B ماتریسهایی $n \times n$ برروی هیأت F باشند که چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی

$$f=(x-c_1)^{d_1} \cdots (x-c_k)^{d_k}$$

و چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی دارند. اگـر هیچ یك از d_iهـا بزرگتر از ۳ نباشد، آنگاه A و B متشابه‌اند.

۳. اگرماتریس ۵ × ۵ مختلط A با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f=(x-2)^3(x+7)^2$$

وچندجمله‌ای مینیمال $p=(x-۲)^{۲}(x+۷)$ باشد، فرم ژوردان A را بیابید؟

۴ . چه تعداد فرم ژوردان ممکن، برای یک ماتریس مختلط ۶×۶ با چندجمله‌ای سرشت‌نمای $(x+۲)^{۴}(x-۱)^{۲}$ داریم؟

۵ . عملگر مشتق‌گیری روی فضای چندجمله‌ایهای از درجهٔ نابیشتر از ۳، درپایهٔ مرتب «طبیعی» با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرم ژوردان این ماتریس کدام است؟ (F زیرهیأتی از اعداد مختلط است.)

۶ . فرض کنید A ماتریس مختلط

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

باشد. فرم ژوردان A را بیابید.

۷ . اگر A ماتریسی $n\times n$ برروی هیأت F، با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f=(x-c_{۱})^{d_{۱}}\cdots(x-c_{k})^{d_{k}}$$

باشد، رد A را بیابید.

۸ . بدون احتساب تشابه، همهٔ ماتریسهای مختلط A ی ۳×۳ راکه برای آنها $A^{۳}=I$ رده‌بندی کنید.

۹. بدون احتساب تشابه، همهٔ ماتریسهای مختلط A ی $n\times n$ را که برای آنها $A^n=I$. رده‌بندی کنید.

۱۰. فرض کنید n عددی صحیح مثبت، $n\geqslant 2$، و N ماتریسی $n\times n$ برروی هیأت F باشد که $N^n=0$ اما $N^{n-1}\neq 0$. ثابت کنید N ریشهٔ دوم (جذر) ندارد، یعنی اینکه، هیچ ماتریس $n\times n$ ی چون A وجود ندارد که $A^2=N$.

۱۱. N_1 و N_2 دو ماتریس پوچ‌توان 6×6 برروی هیأت F هستند. فرض کنید N_1 و N_2 چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی و پوچی مساوی داشته باشند. ثابت کنید که N_1 و N_2 متشابه‌اند. نشان دهید که این مطلب درمورد ماتریسهای پوچ‌توان 7×7 درست نیست.

۱۲. نتیجهٔ تمرین ۱۱ وفرم ژوردان را برای اثبات مطلب ذیل به‌کار ببرید: فرض کنید A و B ماتریسهایی $n\times n$ برروی هیأت F باشند که دارای چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی

$$f=(x-c_1)^{d_1}\cdots(x-c_k)^{d_k}$$

و چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند. همچنین فرض کنید به‌ازای هر i، فضاهای جواب $(A-c_iI)$ و $(B-c_iI)$ بعدمساوی داشته باشند. اگرهیچ‌یك از d_iها بزرگتر از ۶ نباشد، آنگاه A و B متشابه‌اند.

۱۳. اگر N یك‌ماتریس $k\times k$ پوچ‌توان مقدماتی باشد؛ یعنی، $N^k=0$ اما $N^{k-1}\neq 0$، نشان دهید N^t با N متشابه است. حال از فرم ژوردان استفاده و ثابت کنید هر- ماتریس $n\times n$ مختلط با ترانهادهٔ خودش متشابه است.

۱۴. چه اشتباهی در اثبات زیر وجود دارد؟ اگر A یك ماتریس $n\times n$ مختلط باشد و $A^t=-A$، آنگاه A ماتریس ۰ است. (اثبات: J را فرم ژوردان A می‌گیریم. چون $A^t=-A$ داریم $J^t=-J$. اما چون J مثلثی است، $J^t=-J$ ایجاب می‌کند که همهٔ درایه‌های J صفر باشند. چون $J=0$ و A با J متشابه است، می‌بینیم که $A=0$.) (مثالی از یك A ی غیرصفر بیاورید که $A^t=-A$.)

۱۵. اگر N ماتریس 3×3 پوچ‌توانی برروی C باشد، ثابت کنید که $A=I+\frac{1}{2}N-\frac{1}{8}N^2$ در $A^2=I+N$ صدق می‌کند؛ یعنی، A یك ریشهٔ دوم $I+N$ است. رشتهٔ دوجمله‌ای برای $(1+t)^{1/2}$ را به کار ببرید و فرمول مشابهی برای یك ریشهٔ دوم $I+N$، که در آن N ماتریس $n\times n$ پوچ‌توانی برروی C است، به‌دست آورید.

۱۶. نتیجهٔ تمرین ۱۵ را به‌کار ببرید و ثابت کنید که اگر c عدد مختلط غیرصفری و N ماتریس مختلط پوچ‌توانی باشد، آنگاه $(cI+N)$ ریشهٔ دومی دارد. حال فرم ژوردان را جهت اثبات این حکم که هرماتریس $n\times n$ مختلط نامنفرد ریشهٔ دوم‌دارد به‌کار ببرید.

۴.۷. محاسبهٔ سازه‌های پایا

فرض کنیم A ماتریسی $n\times n$ با درایه‌هایی از هیأت F باشد. می‌خواهیم روشی برای محاسبهٔ سازه‌های پایای p_1، $\cdots$، p_r که فرم گویای A را تعریف می‌کنند، بیابیم. از حالتی بسیار ساده که درآن A ماتریس همدم (۲.۷) چندجمله‌ای تکینی چون

$$p=x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$$

است، آغاز می‌کنیم. دربخش ۱.۷ دیدیم که p، هم چندجمله‌ای مینیمال وهم‌چندجمله‌ای سرشت‌نمای ماتریس همدم A است. اکنون، می‌خواهیم محاسبه‌ای مستقیم به‌دست‌دهیم که نشان می‌دهد p چند‌جمله‌ای سرشت‌نمای A است. دراین حالت

$$xI-A=\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

x برابر سطر n را به‌سطر $(n-1)$ اضافه می‌کنیم. این عمل، x را از مکان $(n-1,\ n-1)$ برمی‌دارد، ولی دترمینان را تغییرنمی‌دهد. سپس x برابرسطر $(n-1)$ جدید را به‌سطر $(n-2)$ اضافه می‌کنیم. این عمل را متوالیاً ادامه می‌دهیم تا با این فرایند همهٔ xهای روی قطراصلی برداشته شوند. نتیجه، ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^n+\cdots+c_1x+c_0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{n-1}+\cdots+c_2x+c_1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & x^{n-2}+\cdots+c_3x+c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2+c_{n-1}x+c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+c_{n-1} \end{bmatrix}$$

است که دترمینانش با دترمینان $xI-A$ برابر است. بالاترین درایهٔ سمت راست این ماتریس چندجمله‌ای p است. ستون آخر را، با افزودن مضربهای مناسبی از دیگرستونها به‌آن، ساده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

هریك از $(n-1)$ ستون اول را در -1 ضرب، و سپس $(n-1)$ تعویض از ستونهای مجاور انجام می‌دهیم تا ستون nفعلی را به‌ستون اول برسانیم. اثـر نهایی $2n-2$ تغییر علامت این است که دترمینان را بدون تغییر باقی می‌گذارد. ازاینجا ماتریس

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲۸\text{-}۷)$$

حاصل می‌شود. پس از این واضح است که $p=\det(xI-A)$.

می‌خواهیم نشان دهیم که به‌ازای هرماتریسی $n\times n$ چون A، یك توالی از اعمال سطری وستونی وجود داردکه $xI-A$ را به‌ماتریسی بسیار شبیه به (۲۸-۷)، کــه درآن سازه‌های پایای A زیر قطـر اصلی ظاهر می‌شوند، تبدیل می‌کند. اجازه دهید اعمالی را که به‌کار خواهیم برد، کاملاً روشن کنیم.

دراینجا با $F[x]^{m\times n}$، دستهٔ ماتریسهای $m\times n$ بـا درایه‌هایی کــه چندجمله‌ایهای برروی هیأت F هستند، سروکار خواهیم داشت. اگـر M چنین ماتریسی باشد، **یك عمل سطری مقدماتی** روی M یکی از اعمال زیراست:

۱. ضرب یك سطراز M در اسکالر غیرصفری از F؛
۲. جایگزین کـردن سطر rم M، بـا سطر r باضافـهٔ f برابرسطر s، کـه درآن f

چندجمله‌ای دلخواهی برروی F است و $r\neq s$؛

۳. تعویض دوسطر M.

عمل معکوس یك عمل سطری مقدماتی نیزعملی است سطری مقدماتی واز همان نوع. توجه کنید که اگر در (۱) چندجمله‌ایهای غیراسکالری هم منظور می‌شدند، دادن چنین حکمی امکان نداشت. یك **ماتریس مقدماتی** $m\times m$، یعنی ماتریسی مقدماتی از $F[x]^{m\times m}$، ماتریسی است که بتواند از ماتریس همانی $m\times m$ به وسیلهٔ تنها یك عمل سطری مقدماتی حاصل بشود. واضح است که هرعمل سطری مقدماتی روی M می‌تواند از طریق ضرب M ازچپ درماتریس مقدماتی $m\times m$ مناسبی نتیجه بشود؛ درواقع، اگر e آن عمل باشد، آنگاه

$$e(M)=e(I)M.$$

گیریم M و N دوماتریس در $F[x]^{m\times n}$ باشند. گوییم N **هم‌ارز سطری** M است، هرگاه N بتواند توسط یك توالی متناهی از اعمال سطری مقدماتی از M حاصل شود:

$$M=M_{0}\rightarrow M_{1}\rightarrow \cdots \rightarrow M_{k}=N.$$

بدیهی است که N هم‌ارز سطری M است اگر و تنها اگر M هم‌ارز سطری N باشد، بنابراین می‌توانیم اصطلاح «M و N هم ارز سطری هستند» را به‌کار گیریم. اگر N هم‌ارز سطری M باشد، آنگاه

$$N=PM$$

که درآن ماتریس Pی $m\times m$، حاصلضربی از ماتریسهای مقدماتی است:

$$P=E_{1}\cdots E_{k}.$$

بخصوص، P ماتریسی است معکوس‌پذیر که معکوس آن عبارت است از

$$P^{-1}=E_{k}^{-1}\cdots E_{1}^{-1}.$$

مسلماً، معکوس E_j از معکوس عمل سطری مقدماتی مربوط ناشی می‌شود.

همهٔ این مطالب، درست نظیرهمان مطالب درمورد ماتریسهای با درایه‌های متعلق به F هستند. این مطالب با نتایج مقدماتی فصل ۱ مشابهت دارند. از این‌رو، مسئلهٔ بعدی که خود را می‌نمایاند، معرفی یك فرم تحویل شدهٔ سطری پلکانی برای ماتریسهای روی چندجمله‌ایهاست. در اینجا، به‌مانعی جدید برمی‌خوریم. چگونه چنین ماتریسی را تحویل سطری کنیم؟ اولین مرحله این است که درایهٔ غیرصفرمقدم سطر۱ را انتخاب وهمهٔ درایه‌های سطر ۱ را برآن تقسیم کنیم. وقتی که درایه‌های ماتریس چندجمله‌ای باشند، (لزوماً) نمی‌توانیم این عمل را انجام دهیم. هرچند، فرم تحویل شدهٔ سطری کاملاً مناسبی برای ماتریسی عمومی از $F[x]^{m\times n}$ وجود ندارد، ولی به‌طوری که در قضیهٔ بعد خواهیم دید درحالات معینی می‌توان براین مشکل فایق آمد. هرگاه اعمال ستونی را هم معرفی‌ونوع

هم‌ارزی را که از پذیرش استفاده از هردونوع عمل نتیجه می‌شود مطالعه کنیم، می‌توانیم فرم استانده بسیار مفیدی برای هرماتریس به‌دست آوریم. ابزار اساسی لم زیر است.

لم. فرض کنیم M ماتریسی از $F[x]^{m\times n}$ باشد که اولین ستونش درایهٔ غیرصفری داشته، و p بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک درایه‌های واقع در ستون اول M باشد. در این صورت M با ماتریسی چون N که

$$\begin{bmatrix} p \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix}$$

را به‌عنوان اولین ستونش دارد، هم‌ارز سطری است.

اثبات. در اینجا به‌اثبات چیزی بیش از آنچه که بیان کردیم، می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که الگوریتمی برای یافتن N، یعنی دستورالعملی که بتواند برای محاسبهٔ N در تعدادی متناهی مرحله مورد استفادهٔ یك ماشین قرار بگیرد، وجود دارد. ابتدا به نمادهایی نیازمندیم.

گیریم M ماتریسی $m\times n$ با درایه‌های واقع در $F[x]$ باشد که اولین ستون غیر-صفری چون

$$M_1 = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

دارد. تعریف می‌کنیم:

$$l(M_1) = \min_{f_i \neq \circ} \deg f_i$$

(۲۹-۷)

$$p(M_1) = (f_1, \dots, f_m) \text{ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك}$$

j را نمایه‌ای می‌گیریم که $\deg f_j = l(M_1)$. جهت تصریح، فرض می‌کنیم j کوچکترین نمایه‌ای چون i باشد که برای آن $\deg f_i = l(M_1)$. می‌کوشیم تا هر f_i را بر f_j تقسیم کنیم:

(۳۰-۷) $\quad f_i = f_j g_i + r_i$، $\quad r_i = \circ$ یا $\deg r_i < \deg f_j$.

به‌ازای هر i غیر از j، به‌جای سطر i ماتریس M، سطر i منهای g_i برابر سطر j را قرار

می‌دهیم. سطر j را درعکس ضریب مقدم f_j ضرب و سپس سطرهای j و ۱ را تعویض می‌کنیم. نتیجهٔ همهٔ این اعمال ماتریسی چون M' است که اولین ستونش

$$M'_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_j \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{j-1} \\ r_1 \\ r_{j+1} \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \qquad (۳۱\text{-}۷)$$

است. در اینجا $\mathcal{F}_j$ چندجمله‌ای تکین حاصل از نرمال‌کردن f_j، برای داشتن ۱ به‌عنوان ضریب مقدم، است. تااینجا، روشی خوش تعریف برای وابسته‌کردن ماتریسی چون M' با خواص زیر به‌هر ماتریس M عرضه کردیم:

(الف) M' هم‌ارز سطری M است.

(ب) $p(M'_1) = p(M_1)$.

(پ) یا $l(M'_1) < l(M_1)$ یا

$$M'_1 = \begin{bmatrix} p(M_1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

نشان دادن (ب) و (پ) از روی (۷-۳۰) و (۷-۳۱) آسان است. خاصیت (پ) درست راه دیگر بیان این مطلب است که یا iیی وجود دارد که $r_i \neq 0$ و $\deg r_i < \deg f_j$ یا اینکه به‌ازای همهٔ iها $r_i = 0$ و(بنابراین) $\mathcal{F}_j$ بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك f_1، ...، f_m است.

اکنون اثبات لم بسیار ساده می‌نماید. با ماتریس M شروع می‌کنیم و روش فوق جهت تحصیل M' را به‌کار می‌بندیم. خاصیت (پ) حاکی است که یا M' بجای ماتریس

N درلم به‌کار خواهد آمد یااینکه $l(M'_1) < l(M_1)$. درحالت دوم، روش را بر M' به‌کار می‌بندیم تا ماتریس $M^{(2)} = (M')'$ را به‌دست آوریم. اگر $M^{(2)}$، N مناسبی‌نباشد، $M^{(3)} = (M^{(2)})'$ را تشکیل می‌دهیم، و به‌همین‌نحو ادامه می‌دهیم. نکته دراینجاست که نامساویهای اکید

$$l(M_1) > l(M'_1) > l(M_1^{(2)}) > \cdots$$

نمی‌توانند همچنان ادامه داشته باشند. پس از حداکثر $l(M_1)$ بار تکرار این روش، باید به‌ماتریسی چون $M^{(k)}$ که دارای خواص مطلوب است، دست‌یابیم. □

قضیهٔ ۶. فرض کنیم ماتریس $m \times m$ ی P با درایه‌های متعلق به‌جبر چندجمله‌ای $F[x]$ داده شده باشد. احکام زیر هم‌ارزند.

(۱) P معکوس‌پذیر است.

(۲) دترمینان P چندجمله‌ای اسکالری غیرصفری است.

(۳) P هم‌ارز سطری ماتریس همانی $m \times m$ است.

(۴) P حاصلضربی از ماتریسهای مقدماتی است.

اثبات. واضح است که (۲) از (۱) نتیجه می‌شود، چرا که تابع دترمینان دارای خاصیت ضربی است وتنها چندجمله‌ایهای معکوس‌پذیر در $F[x]$ چندجمله‌ایهای اسکالری غیرصفر هستند. حقیقت امر این است که درفصل ۵، برای‌اینکه نشان دهیم (۱) و (۲) هم‌ارزند، از الحاقی کلاسیك استفاده‌کردیم. لذا برهان اخیر، اثبات دیگری است ازاین مطلب که (۱) از (۲) نتیجه می‌شود. ما «چرخ فلك»

$$\begin{array}{ccc} (1) & \rightarrow & (2) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (4) & \leftarrow & (3) \end{array}$$

را تکمیل خواهیم‌کرد. تنها‌حکمی که‌بدیهی نیست، این است که (۳) از(۲) نتیجه‌می‌شود.

(۲) را فرض می‌کنیم و اولین ستون P را درنظر می‌گیریم. این ستون شامل چندجمله‌ایهای معین p_1، $\cdots$، p_m است و

$$1 = \text{بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك } (p_1, \cdots, p_m)$$

چراکه هر مقسوم‌علیه مشترك p_1، $\cdots$، p_m باید (اسکالر) $\det P$ را عادکند. لم قبل را برای به‌دست آوردن ماتریسی چون

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_m \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \qquad (32\text{-}7)$$

که هم‌ارز سطری P است بر P به‌کار می‌بندیم. هرعمل سطری مقدماتی، دترمینان‌ماتریس مفروضی را (حداکثر) درحد سازهٔ اسکالری غیرصفری تغییر می‌دهد. پس، $\det Q$ یك چندجمله‌ای اسکالری غیرصفر است. بدیهی است که ماتریس Bی $(m-۱)\times(m-۱)$ در (۷-۳۲) همان دترمینان Q را دارد. بنابراین، می‌توانیم لم اخیر را درمورد B به‌کار ببریم. اگر این روش را تا mمرحله ادامه دهیم، ماتریسی بالامثلثی چون

$$R=\begin{bmatrix} ۱ & a_۲ & \cdots & a_m \\ ۰ & ۱ & \cdots & b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

راکه هم‌ارز سطری P است، به‌دست می‌آوریم. معلوم است که R هم‌ارز سطری‌ماتریس همانی $m\times m$ است. □

نتیجه. گیریم M و N دو ماتریس $m\times n$ با درایه‌های متعلق به‌جبر چندجمله‌ای $F[x]$ باشند. دراین صورت N هم‌ارز سطری M است اگر و تنها اگر

$$N=PM$$

که درآن P ماتریس $m\times m$ معکوس‌پذیری است با درایه‌های متعلق به $F[x]$.

اکنون **اعمال ستونی مقدماتی و هم‌ارزی ستونی**را به‌صورتی شبیه به‌اعمال سطری و هم‌ارزی سطری تعریف می‌کنیم. نیازی به‌مفهومی جدید از ماتریس مقدماتی نداریم، زیرا ردهٔ ماتریسهایی که بتوانند به‌وسیلهٔ انجام یك عمل ستونی مقدماتی روی ماتریس همانی به‌دست آیند، عیناً با رده‌ای که با استفاده از تنها یك عمل سطری مقدماتی حاصل می‌شود مساوی است.

تعریف. ماتریس N با ماتریس M **هم‌ارز** است، هرگاه بتوانیم از M به‌وسیلهٔ دنباله‌ای از اعمال

$$M=M_۰\rightarrow M_۱\rightarrow\cdots\rightarrow M_k=N$$

که هریك عملی سطری مقدماتی یا عملی ستونی مقدماتی است، به N برسیم.

قضیهٔ ۷. فرض کنیم M و N دو ماتریس $m\times n$ با درایه‌های متعلق به‌جبر چند-جمله‌ای $F[x]$ باشند. در این صورت N با M هم‌ارز است اگر و تنها اگر

$$N=PMQ$$

که درآن P ماتریسی معکوس‌پذیر در $F[x]^{m\times m}$ و Q ماتریسی معکوس‌پذیر در $F[x]^{n\times n}$ است.

قضیهٔ ۸. فرض کنیم A ماتریسی $n\times n$ بـا درایه‌های متعلـق به‌هیأت F باشد و p_1، . . .، p_r سازه‌های پایای A باشند، ماتریس $xI-A$ با ماتریس قطری $n\times n$ با درایه‌های قطری p_1، . . .، p_r، ۱، ۱، . . .، ۱ هم‌ارز است.

اثبات. ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری چون P با درایه‌های متعلق به F وجود دارد که PAP^{-1} به‌فرم گویا، یعنی به‌صورت بلوکی

$$PAP^{-1}=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{bmatrix}$$

است که درآن A_i ماتریس همدم چندجمله‌ای p_i است. بنا برقضیهٔ ۷ ماتریس

$$P(xI-A)P^{-1}=xI-PAP^{-1} \tag{۳۳-۷}$$

با $xI-A$ هم‌ارز است. حال

$$xI-PAP^{-1}=\begin{bmatrix} xI-A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & xI-A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & xI-A_r \end{bmatrix} \tag{۳۴-۷}$$

که درآن Iهای گوناگونی که به‌کار رفته است، ماتریسهایی همانی با اندازه‌های مناسب هستند. درآغاز این بخش نشان دادیم که $xI-A_i$ با ماتریس

$$\begin{bmatrix} p_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

هم‌ارز است. در ایـن صورت از (۳۳-۷) و (۳۴-۷) واضح است کـه $xI-A$ هم‌ارز

ماتریسی قطری است که قطراصلیش شامل چندجمله‌ایهای p_i و $(n-r)$ تا ۱ است. باچند تعویض متوالی سطرها و ستونها می‌توانیم این درایه‌های قطری را به‌ترتیبی دلخواه، مثلاً $p_۱$، $\cdots$، p_r، ۱، $\cdots$، ۱ مرتب کنیم. □

قضیهٔ ۸ راه مؤثری برای محاسبهٔ مقسوم‌علیه‌های مقدماتی $p_۱$، $\cdots$، p_r ارائه نمی‌کند، چرا که اثبات ما به قضیهٔ تجزیهٔ دوری وابسته است. اکنون آلگوریتمی صریح برای تحویل یك ماتریس چندجمله‌ای به‌فرم قطری ارائه می‌کنیم. قضیهٔ ۸ می‌رساند که می‌توانیم ترتیبی دهیم که عناصر متوالی روی قطر اصلی یکدیگررا عاد هم بکنند.

تعریف. گیریم N ماتریسی در $F[x]^{m\times n}$ باشد. گوییم N به **فرم نرمال** (اسمیت[1]) است، هرگاه

(الف) هردرایهٔ بیرون از قطراصلی N برابر ۰ باشد؛

(ب) روی قطر اصلی N (بترتیب) چندجمله‌ایهای $f_۱$، $\cdots$، f_l که f_k چندجمله‌ای $f_{k+۱}$ را عاد می‌کند، $۱\leqslant k\leqslant l-۱$، ظاهر شوند.

دراین تعریف، عدد l عبارت است از $l=\min(m, n)$. درایه‌های قطراصلی عبارتند از $f_k=N_{kk}$، $k=۱, \cdots, l$.

قضیهٔ ۹. فرض کنیم M ماتریسی $m\times n$ با درایه‌های متعلق به جبر چندجمله‌ای $F[x]$ باشد. دراین صورت M با ماتریسی چون N که به‌فرم نرمال است هم‌ارز است.

اثبات. اگر $M=۰$، چیزی برای اثبات نداریم. اگر $M\neq ۰$، آلگوریتمی برای یافتن ماتریسی چون M' که با M هم‌ارز و به‌صورت

$$M'=\begin{bmatrix} f_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & & & \\ \vdots & & R & \\ ۰ & & & \end{bmatrix} \qquad (۳۵\text{-}۷)$$

باشد، ارائه خواهیم کرد. در اینجا R ماتریسی است $(m-۱)\times(n-۱)$ و $f_۱$ همهٔ درایه‌های R را عاد می‌کند. در این صورت کار تمام است، چرا که می‌توان همین روش را بر R به‌کار بست و $f_۲$ را به‌دست آورد، وغیره.

گیریم $l(M)$ مینیمم درجات درایه‌های غیرصفر M باشد. اولین ستونی را که شامل درایه‌ای بادرجهٔ $l(M)$ است می‌یابیم واین ستون را با ستون ۱ تعویض می‌کنیم. ماتریس

---
1. Smith

حاصل را $M^{(0)}$ می‌نامیم. حال برای یافتن ماتریسی به‌صورت

$$\begin{bmatrix} g & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & S & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \tag{۳۶-۷}$$

که با $M^{(0)}$ هم‌ارز باشد، روشی را شرح می‌دهیم. با به‌کار بستن روش لم قبل از قضیهٔ ۶ بر ماتریس $M^{(0)}$، روشی که ما آن را PL۶ خواهیم نامید[1]، کار خود را آغاز می‌کنیم. حاصل‌کار ماتریسی چون

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} p & a & \cdots & b \\ 0 & c & \cdots & d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & e & \cdots & f \end{bmatrix} \tag{۳۷-۷}$$

است. اگر درایه‌های a، ...، b همگی ۰ باشند، عالی است. وگرنه، نظیر PL۶ را که می‌تواند $PL6'$ نامیده شود، درمورد اولین سطر به کار می‌بریم. نتیجه ماتریسی چون

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} g & 0 & \cdots & 0 \\ a' & c' & \cdots & e' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b' & d' & \cdots & f' \end{bmatrix} \tag{۳۸-۷}$$

است که در آن g بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك p، a، ...، b است. در استخراج $M^{(2)}$، این امکان هست که شکل خوب ستون ۱ به‌هم خورده باشد. دراین صورت، یك بار دیگر PL۶ را می‌توان به‌کار بست. نکته دراین‌جاست: درحداکثر $l(M)$ مرحله

$$M^{(0)} \xrightarrow{PL6} M^{(1)} \xrightarrow{PL6'} M^{(2)} \xrightarrow{PL6} \cdots \rightarrow M^{(t)}$$

باید به‌ماتریسی‌چون $M^{(t)}$ که به‌صورت (۷-۳۶) است، دست‌یابیم، چراکه بین هردومرحلهٔ

---

۱. P حرف اول Procedure بمعنی روش و L حرف اول Lemma بمعنی لم است.ـ‌م.

متوالی داریم $l(M^{(k+1)}) < l(M^{(k)})$. روندی را که هم اکنون تعریف کردیم، P۳۶-۷ می نامیم:

$$M^{(0)} \xrightarrow{P36-7} M^{(t)}.$$

در (۷-۳۶)، چندجمله‌ای g ممکن است همهٔ درایه‌های S را عاد کند. در غیراین صورت، اولین ستونی را که درایه‌ای غیرقابل تقسیم بر g داشته باشد می‌یابیم و آن را به‌ستون ۱ اضافه می کنیم. ستون اول جدید، هم g را شامل است و هم درایهٔ $gh+r$ را که در آن $r \neq 0$ و $\deg r < \deg g$. اکنون روند P۳۶-۷ راکه به‌کار بندیم نتیجه ماتریس دیگری به‌صورت (۷-۳۶) خواهد بود که درآن‌درجهٔ g مربوط کاهش یافته‌است.

حال باید آشکار باشد که در تعدادی متناهی مرحله، (۷-۳۵) را به‌دست خواهیم آورد؛ یعنی، به‌ماتریسی به‌صورت (۷-۳۶) خواهیم رسید، که در آن درجهٔ g دیگر تقلیل پذیر نیست. □

می‌خواهیم نشان دهیم که فرم نرمال وابسته به‌هرماتریس M، یکتاست. به‌دومطلب برخورده‌ایم که راهنماییهایی درمورد چگونگی تعیین یکتا گونه چندجمله‌ایهای f_1، ...، f_l درقضیهٔ ۹ توسط M به‌ما عرضه می کنند. اول آنکه، اعمال سطری‌وستونی مقدماتی، دترمینان ماتریسی مربعی را بیش از سازهٔ اسکالری غیرصفری تغییر نمی‌دهند. دوم، اعمال سطری و ستونی مقدماتی بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك درایه‌های هیچ ماتریسی را تغییر نمی‌دهند

تعریف. فرض کنیم M ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های متعلق به $F[x]$ باشد. اگر $1 \leqslant k \leqslant \min(m, n)$، $\delta_k(M)$ را بزرگترین مقسوم علیه مشترك دترمینانهای همهٔ زیر-ماتریسهای $k \times k$ ی M تعریف می کنیم.

یادآور می‌شویم که یك زیرماتریس $k \times k$ ی M ماتریسی است که از حذف $m-k$ سطر و $n-k$ ستون M پدید می آید. به‌بیان دیگر، kتاییهای معین

$$I=(i_1, \cdots, i_k) \qquad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m$$

$$J=(j_1, \cdots, j_k) \qquad 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n$$

را انتخاب می کنیم وماتریس متشکله ازاین سطرها واین ستونهای M را درنظرمی گیریم. دترمینانهای

$$D_{I,J}(M)=\det\begin{bmatrix} M_{i_1 j_1} & \cdots & M_{i_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{i_k j_1} & \cdots & M_{i_k j_k} \end{bmatrix} \qquad (۷-۳۹)$$

مورد توجه ما هستند. وقتی که I و J روی kتاییهای ممکن تغییر کنند، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك چندجمله‌ایهای $D_{I,J}(M)$ چندجمله‌ای $\delta_k(M)$ است.

قضیهٔ ۱۵.۰ اگر M و N ماتریسهای $m\times n$ هم ارز و با درایه‌های متعلق به $F[x]$ باشند، آنگاه

$$\delta_k(M)=\delta_k(N), \qquad 1\leqslant k\leqslant \min(m, n). \tag{۴۰-۷}$$

اثبات. کافی است که نشان دهیم هیچ عمل سطری مقدماتی، چون e، δ_k را تغییر نمی‌دهد. چون معکوس e نیز عملی سطری مقدماتی است، کافی است نشان دهیم که: اگر چندجمله‌ایی چون f، به‌ازای همهٔ kتاییهای I و J، $D_{I,J}(M)$ها را عاد کند، آنگاه f چندجمله‌ایهای $D_{I,J}(e(M))$ را نیز عاد می‌کند. چون عملی سطری مورد توجه است، سطرهای M را α_1، $\cdots$، α_m می‌نامیم و از نماد

$$D_J(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_k})=D_{I,J}(M)$$

نیز استفاده می‌کنیم. با مفروض بودن I و J چه رابطه‌ای بین $D_{I,J}(M)$ و $D_{I,J}(e(M))$ برقرار است؟ سه نوع عمل e را درنظر می‌گیریم:

(الف) ضرب سطر r در اسکالر غیرصفری چون c؛
(ب) جایگزین کردن سطر r با سطر r باضافهٔ g برابر s، $r\neq s$؛
(پ) تعویض سطرهای r و s، $r\neq s$.

موقتاً عملهای نوع (پ) را فراموش و حواس خود را روی انواع (الف) و (ب) که تنها سطر r را تغییر می‌دهند، متمرکز می‌کنیم. اگر r هیچ‌یك از نمایه‌های i_1، $\cdots$، i_k نباشد، آنگاه

$$D_{I,J}(e(M))=D_{I,J}(M).$$

اگر r دربین نمایه‌های i_1، $\cdots$، i_k باشد، آنگاه برای دوحالت فوق داریم

$$\text{(الف)}\quad \begin{aligned} D_{I,J}(e(M)) &= D_J(\alpha_{i_1}, \cdots, c\alpha_r, \cdots, \alpha_{i_k})\\ &= cD_J(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_{i_k})\\ &= cD_{I,J}(M)\end{aligned}$$

$$\text{(ب)}\quad \begin{aligned} D_{I,J}(e(M)) &= D_J(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_r+g\alpha_s, \cdots, \alpha_{i_k})\\ &= D_{I,J}(M)+gD_J(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_s, \cdots, \alpha_{i_k})\end{aligned}$$

درمورد عملهای از نوع (الف) واضح است هر f که $D_{I,J}(M)$ را عاد کند، $D_{I,J}(e(M))$ را نیزعاد می‌کند. درمورد حالت عملی از نوع (ب) توجه‌کنید که

هرگاه jیی باشد که $s=i_j$، $\quad D_J(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_s, \cdots, \alpha_{i_k})=0$

وهرگاه به‌ازای هر j، $s\neq i_j$، $\quad D_J(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_s, \cdots, \alpha_{i_k})=\pm D_{I',J}(M)$.

I' درمعادلهٔ آخر، k تایی$(i_1, \ldots, s, \ldots, i_k)$ است که به‌ترتیب‌صعودی‌مرتب‌شده است. اکنون باید آشکار باشدکه اگر f هر $D_{I,J}(M)$ را عاد کند، آنگاه f هر $D_{I,J}(e(M))$ را نیزعاد می‌کند
عمل نوع (پ) را می‌توان، قطع‌نظر از جزئیات، با استدلال مشابهی ویا با استفاده از این واقعیت که چنین عملی می‌تواند حاصل دنباله‌ای از عملهای از نوع (الف) و(ب) باشد، مورد بررسی قرارداد. □

نتیجه. هر ماتریس M در $F[x]^{m\times n}$ دقیقاً با یك ماتریس N که در فرم نرمال باشد هم‌ارزاست. چندجمله‌ایهای f_1، $\ldots$، f_l که روی قطراصلی N قرارمی‌گیرند،عبارتنداز

$$f_k = \frac{\delta_k(M)}{\delta_{k-1}(M)}\ , \qquad 1 \leqslant k \leqslant \min(m, n)$$

که درآن، برای سهولت‌کار، $\delta_0(M) = 1$ تعریف می‌شود.
اثبات. اگر N در فرم نرمال و با درایه‌های قطری f_1، $\ldots$، f_l باشد، بسیار ساده دیده می‌شودکه

$$\delta_k(N) = f_1 f_2 \cdots f_k. \ \square$$

بدیهی است که ماتریس N درنتیجهٔ اخیر را **فرم نرمال** M بنامیم. چندجمله‌ایهای f_1، $\ldots$، f_l غالباً **سازه‌های پایای** M نامیده می‌شوند.
فرض‌کنیم A ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های متعلق به F و p_1، $\ldots$، p_r سازه‌های پایای A باشند.اکنون می‌بینیم که درایه‌های قطری فرم نرمال ماتریس $xI-A$ عبارتنداز 1،1،$\ldots$،1،p_r، $\ldots$، p_1.نتیجهٔ‌اخیرمی‌فهماندکه p_1، $\ldots$، p_r،برحسب‌زیرماتریسهای $xI-A$ چه هستند. عدد $n-r$ بزرگترین kیی است که $\delta_k(xI-A)=1$. چندجمله‌ای مینیمال p_1 حاصل تقسیم چندجمله‌ای سرشت‌نمای A، بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دترمینانهای همهٔ زیرماتریسهای $(n-1)\times(n-1)$ از $xI-A$ است، و الی آخر.

تمرین

۱. مطلب ذیل درست است یا غلط؟ هرماتریس در $F[x]^{m\times n}$ هم‌ارز سطری ماتریسی از بالامثلثی است.

۲. فرض‌کنید T عملگری خطی روی فضایی برداری با بعد متناهی و A ماتریس T در پایهٔ مرتبی باشد. دراین صورت T برداری دوری دارد اگر وتنها اگر دترمینانهای زیرماتریسهای $(n-1)\times(n-1)$ از $xI-A$ نسبت به‌هم اول باشند.

۳. فرض‌کنید Aماتریسی $n\times n$ با درایه‌های متعلق به‌هیأت F و f_1، $\ldots$، f_n درایه‌های

قطری فرم نرمال $xI - A$ باشند. برای کدام ماتریس A، خاصیت $f_1 \neq 1$ برقرار است.

۴. عملگری خطی چون T با چندجمله‌ای مینیمال $x^2(x-1)^2$ و چندجمله‌ای سرشت‌نمای $x^3(x-1)^4$ بسازید. تجزیهٔ اولیهٔ فضای برداری تحت T را توصیف کنید و تصویرهای روی مؤلفه‌های اولیه را بیابید. پایه‌ای بیابید که در آن ماتریس T در فرم ژوردان باشد. همچنین تجزیه به‌مجموع مستقیم صریحی از فضا به‌زیرفضاهای T-دوری همانند قضیهٔ ۳ را پیدا کنید و سازه‌های پایا را به‌دست آورید.

۵. فرض کنید T عملگری خطی روی R^8 باشد که در پایهٔ استانده با ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود.

(الف) چندجمله‌ای سرشت‌نما و سازه‌های پایا را بیابید.

(ب) تجزیهٔ اولیه R^8 تحت T و تصویرهای روی مؤلفه‌های اولیه‌را بیابید. تجزیهٔ دوری هرمؤلفهٔ اولیه را، آن‌طور که درقضیهٔ ۳ آمده است، پیدا کنید.

(پ) فرم ژوردان A را بیابید.

(ت) یك تجزیه به‌مجموع مستقیم از R^8 به‌زیرفضاهای T-دوری، همانند قضیهٔ ۳، پیدا کنید. (راهنمایی: یك راه برای انجام این‌کار استفاده ازنتایج در(ب) و نیز استفاده از تعمیمی مناسب از ایده‌های بحث شده درمثال ۴ است.)

۵.۷ خلاصه؛ عملگرهای نیم‌ساده

در دو فصل اخیر با تك‌عملگری خطی چون T روی فضای برداری بعدمتناهی V سروکار داشتیم. برنامهٔ‌کار، تجزیهٔ T به‌مجموعی مستقیم از عملگرهایی خطی بـا طبیعتی ابتدایی، به‌منظور کسب اطلاعاتی مفصل دراین مورد که T روی فضای V چگـونه «عمل می کند»،

بوده است. حال وضع فعلی را به‌طور خلاصه مرور می‌کنیم.

مطالعهٔ T را با کمك مقادیر سرشت‌نما و بردارهای سرشت‌نما آغاز کردیم. عملگرهای قطری‌شدنی، یعنی عملگرهایی که می‌توانند به‌طور کامل برحسب مقادیر و بردارهای سرشت‌نما توصیف شوند، را معرفی کردیم. سپس مشاهده نمودیم که ممکن است T حتی یك بردار سرشت‌نما هم نداشته باشد. حتی درمورد هیأت اسکالری بستهٔ جبری نیز، که هر عملگر خطی به‌تحقیق‌دست کم یك بردار سرشت‌نما دارد، ملاحظه کردیم که بردارهای سرشت‌نمای T لزوماً فضا را پدید نمی‌آورند.

سپس قضیهٔ تجزیهٔ دوری را اثبات کردیم که، بدون هیچ گونه فرضی درمورد هیأت اسکالری، هر عملگر خطی را به صورت مجموع مستقیم عملگرهایی با یك بردار دوری، بیان می‌کرد. اگر U عملگری خطی با برداری دوری باشد، آنگاه پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ با خاصیت

$$U\alpha_j = \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \cdots, n-1$$

$$U\alpha_n = -c_0\alpha_1 - c_1\alpha_2 - \cdots - c_{n-1}\alpha_n$$

وجود دارد. از این‌رو کنش U روی این پایه، انتقال هر α_j به‌بردار بعدی α_{j+1} است، بجز اینکه $U\alpha_n$ ترکیب خطی مشخصی از بردارهای پایه است. چون عملگر خطی عمومی T مجموع مستقیم تعدادی متناهی از این‌گونه عملگرهای U است، توصیفی صریح و نسبتاً ابتدایی از کنش T به‌دست آوردیم.

آنگاه قضیهٔ تجزیهٔ دوری را روی عملگرهای پوچ‌توان به‌کار بستیم. درحالت هیأت اسکالری بستهٔ جبری، این موضوع را با قضیهٔ تجزیهٔ اولیه تلفیق کردیم و فرم ژوردان را به‌دست آوردیم. فرم ژوردان، پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای فضای V را به‌دست می‌دهد که به‌ازای هر j، یا $T\alpha_j$ مضربی اسکالری از α_j است یا $T\alpha_j = c\alpha_j + \alpha_{j+1}$. چنین پایه‌ای به‌طور قطع کنش T را به‌طریقی صریح و ابتدایی توصیف می‌کند.

اهمیت فرم گویا (یا فرم ژوردان) از این واقعیت ناشی می‌شود که همواره وجود دارد و نه از اینکه درحالاتی خاص امکان محاسبهٔ آن هست. بدیهی است که اگر عملگر خطی خاصی چون T مفروض باشد، و بتوان فرم ژوردان یا دوریش را محاسبه کرد، حتماً باید محاسبه را انجام داد؛ زیرا، با در دست داشتن چنین فرمی، می‌توان اطلاعات زیادی درمورد T جمع‌آوری کرد. در محاسبهٔ این فرمهای استانده دونوع اشکال بروز می‌کند. یك اشکال، مسلماً طولانی بودن محاسبات است. اشکال دیگر این است که حتی اگر کسی وقت‌وحوصلهٔ لازم را داشته باشد، ممکن است روشی برای انجام محاسبات وجودنداشته باشد. مثلاً، در تلاش برای یافتن فرم ژوردان ماتریسی مختلط اشکال دوم رخ می‌دهد. اصلاً روش خوش تعریفی برای تجزیهٔ چندجمله‌ای سرشت‌نما به‌سازه‌ها وجود ندارد و بدین‌سان شخص در آغازازکار بازمی‌ماند. فرم گویا از این اشکال صدمه نمی‌بیند. همان‌طور که در بخش ۴.۷ نشان دادیم، روشی خوش‌تعریف برای یافتن فرم گویای هر ماتریس

$n\times n$ مفروضی، وجود دارد؛ البته، معمولاً این‌گونه محاسبات بسیار طولانی هستند.

درخلاصهٔ قضایای این دوفصل آخر، تاکنون به‌یکی از قضایایی که اثبات کردیم اشاره‌ای نشده است. این قضیه حاکی از این است که اگر T عملگری خطی روی فضایی برداری با بعد متناهی برروی هیأتی بستهٔ جبری باشد، آنگاه T به‌طور یکتا به صورت مجموع عملگری قطری‌شدنی وعملگری پوچ‌توان، که با یکدیگرجابجا می‌شوند، قابل بیان است. این نتیجه باکمك قضیهٔ تجزیهٔ اولیه واطلاعات معینی درموردعملگرهای قطری‌شدنی، اثبات شد. قضیهٔ اخیر به‌عمق قضیهٔ تجزیهٔ دوری ویا وجود فرم ژوردان نیست، ولی یقیناً دارای کاربردهای مهم ومفیدی در بخشهایی از ریاضیات هست. در خاتمهٔ این فصل، بدون اینکه فرض کنیم هیأت اسکالری بستهٔ جبری است، قضیهٔ مشابهی را اثبات خواهیم کرد. با تعریف عملگرهایی که نقش عملگرهای قطری‌شدنی را بازی می‌کنند کاررا آغازمی کنیم.

تعریف. فرض کنیم V یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت F، و T عملگری خطی روی V باشد. گوییم T **نیم‌ساده** است هرگاه هر زیرفضای T-پایا، دارای زیرفضای T-پایای مکملی باشد.

چیزی راکه درشرف اثبات آن هستیم این است که با محدودیتهایی روی هیأت F، هرعملگرخطی T به‌طور یکتا به‌صورت $T=S+N$ که درآن S نیم‌ساده است، N پوچ‌توان است، و $SN=NS$ قابل بیان است. ابتدا، عملگرهای نیم‌ساده را با چندجمله‌ایهای مینیمالشان مشخص می‌کنیم. این مشخص‌سازی نشان خواهد دادکه وقتی F بستهٔ جبری باشد، عملگری مفروض نیم‌ساده است اگر وتنها اگر آن عملگرقطری‌شدنی باشد.

لم. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V و $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ تجزیهٔ اولیهٔ T باشد. به‌بیان دیگر، اگر p چندجمله‌ای مینیمال T و $p=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$ تجزیهٔ p به‌سازه‌های اول باشد، آنگاه W_j فضای پوچ $p_j(T)^{r_j}$ است. بعلاوه، فرض می‌کنیم W زیرفضایی از V باشد که تحت Tپایاست. در این صورت

$$W=(W\cap W_1)\oplus\cdots\oplus(W\cap W_k).$$

اثبات. برای اثبات، لازم است نتیجه‌ای ازاثبات قضیهٔ تجزیهٔ اولیهٔ مربوط به‌بخش ۸.۶ را یادآوری کنیم. اگر E_1، ...، E_k تصویرهای وابسته به‌تجزیهٔ

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$$

باشند، آنگاه هر E_j یك چندجمله‌ای در T است. یعنی، چندجمله‌ایهایی‌چون h_1، ...، h_k وجود دارند که $E_j=h_j(T)$.

حال زیرفضای W راکه تحت Tپایاست درنظر می‌گیریم. اگر α برداری دلخواه از W باشد، آنگاه $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$، که درآن α_j در W_j قراردارد. اما

$\alpha_j=E_j\alpha=h_j(T)\alpha$ وچون W تحت Tپایاست، هر α_j نیز در W قرار دارد. پس، هر بردار α در W به صورت $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$ است و α_j در اشتراك $W\cap W_j$ می‌باشد. این عبارت یکتاست، زیرا $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$. بنابراین

$$W=(W\cap W_1)\oplus\cdots\oplus(W\cap W_k).\ \square$$

لم. T را عملگری خطی روی V می‌گیریم و فرض می‌کنیم چندجمله‌ای مینیمال T برروی هیأت اسکالری F تحویل‌ناپذیر باشد. دراین صورت T نیم‌ساده است.

اثبات. فرض کنیم زیرفضای W از V تحت Tپایا باشد. باید ثابت کنیم W زیرفضای T-پایای مکملی دارد. بنابرنتیجه‌ای از قضیهٔ ۳، کافی است ثابت کنیم که اگر f یك چندجمله‌ای و β برداری از V باشد که $f(T)\beta$ در W قرار بگیرد، آنگاه برداری چون α در W وجود دارد که $f(T)\beta=f(T)\alpha$. لذا فرض می کنیم β در V و f یك چندجمله‌ای باشد که $f(T)\beta$ در W قراردارد. اگر $f(T)\beta=0$، فرض می‌کنیم $\alpha=0$ ودراین صورت α برداری در W است و $f(T)\beta=f(T)\alpha$. اگر $f(T)\beta\neq 0$، چندجمله‌ای f برچندجمله‌ای مینیمال p از عملگر T تقسیم‌پذیر *نیست*. چون p اول است، این بدان معنی است که f و p نسبت به‌هم اول هستند وچندجمله‌ایهایی چون g و h وجود دارند که $fg+ph=1$. چون $p(T)=0$ خواهیم داشت $f(T)g(T)=I$. از این مطلب نتیجه می‌شود که بردار β خود باید در زیرفضای W باشد؛ زیرا

$$\begin{aligned}\beta&=g(T)f(T)\beta\\&=g(T)(f(T)\beta)\end{aligned}$$

درحالی که $f(T)\beta$ در W قرار دارد و W تحت Tپایاست. حال می گیریم $\alpha=\beta$. $\square$

قضیهٔ ۱۱. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری بعدمتناهی V باشد. یك شرط لازم وکافی برای اینکه T نیم‌ساده باشد این است‌که چندجمله‌ای مینیمال p از T به‌صورت $p=p_1\cdots p_k$ باشد و p_1، $\cdots$، p_k نیز چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر متمایزی برروی هیأت اسکالری F باشند.

اثبات. فرض کنیم T نیم‌ساده باشد. نشان خواهیم دادکه در تجزیهٔ چندجمله‌ای مینیمال p به‌سازه‌های اول، هیچ چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیری تکرار نمی‌شود. خلاف این را فرض کنیم. آنگاه یك چندجمله‌ای تکین غیراسکالری چون g وجود دارد که g^2 چندجمله‌ای p را عاد می‌کند. گیریم W فضای پوچ عملگر $g(T)$ باشد. در این صورت W تحت Tپایاست. حال چندجمله‌ایی مانند h هست که $p=g^2h$. چون g یك چندجمله‌ای اسکالری نیست، عملگر $g(T)h(T)$ عملگرصفرنیست و برداری چون β در V وجوددارد که $g(T)h(T)\beta\neq 0$؛ یعنی، $(gh)\beta\neq 0$. حال $(gh)\beta$ در زیرفضای W قرار دارد، چون که $g(gh\beta)=g^2h\beta=p\beta=0$. اما هیچ برداری چون α در W وجود ندارد که $gh\beta=gh\alpha$؛ زیرا، اگر α در W باشد

$$(gh)\alpha=(hg)\alpha=h(g\alpha)=h(0)=0.$$

پس، W نمی‌تواند زیرفضای T-پایای مکملی داشته باشد؛ و این خود متناقض این فرض است که T نیم‌ساده است.

حال فرض کنیم تجزیهٔ p به‌سازه‌های اول به‌صورت $p=p_1 \cdots p_k$ باشد و p_1، ...، p_k هم‌چندجمله‌ایهای تکین (غیراسکالری) تحویل‌ناپذیر متمایزی باشند. گیریم W زیرفضایی از V باشد که تحت Tپایاست. ثابت خواهیم کرد که W زیرفضای T-پایای مکملی دارد. $V=W_1\oplus \cdots \oplus W_k$ را تجزیهٔ اولیه برای T می‌گیریم؛ یعنی، W_j را فضای پوچ $p_j(T)$ فرض می‌کنیم. T_j را عملگر خطی القا شده توسط T روی W_j می‌گیریم. دراین صورت چندجمله‌ای مینیمال T_j چندجمله‌ای اولی چون p_j است. حال $W\bigcap W_j$ زیرفضایی از W_j است که تحت T_j (یا تحت T) پایا است. بنابر آخرین لم زیرفضایی چون V_j از W_j وجود دارد که $W_j=(W\bigcap W_j)\oplus V_j$ و V_j تحت T_j (و از این‌رو تحت T) پایاست. دراین صورت داریم

$$\begin{aligned} V&=W_1\oplus \cdots \oplus W_k\\ &=(W\bigcap W_1)\oplus V_1\oplus \cdots \oplus(W\bigcap W_k)\oplus V_k\\ &=(W\bigcap W_1)+ \cdots +(W\bigcap W_k)\oplus V_1\oplus \cdots \oplus V_k. \end{aligned}$$

بنابراولین لم فوق، $W=(W\bigcap W_1)\oplus \cdots \oplus(W\bigcap W_k)$ و از اینجا، اگر $W'=V_1\oplus \cdots \oplus V_k$، آنگاه، $V=W\oplus W'$، و W' تحت Tپایاست. □

نتیجه. اگر T عملگری‌خطی روی فضایی برداری با بعد متناهی برروی هیأتی‌بستهٔ جبری باشد، آنگاه T نیم‌ساده است اگر و تنها اگر T قطری‌شدنی باشد.

اثبات. اگر هیأت اسکالری F بستهٔ جبری باشد، چندجمله‌ایهای اول تکین برروی F همان چندجمله‌ایهای $x-c$ هستند. دراین حالت، T نیم‌ساده است، اگروتنها اگرچندجمله‌ای مینیمال T برابر $p=(x-c_1)\cdots(x-c_k)$ باشد، که درآن c_1، ...، c_k عناصر متمایزی از F هستند. این دقیقاً همان معیاری است که درفصل ۶ جهت قطری‌شدن T به‌دست آوردیم. □

باید خاطرنشان کنیم که T نیم‌ساده است اگروتنها اگر یك چندجمله‌ای چون f، که حاصل‌ضربی ازچندجمله‌ایهای اول‌متمایزاست، وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که $f(T)=0$. تفاوت این حکم با این شرط که چندجمله‌ای مینیمال، حاصل‌ضربی ازچندجمله‌ایهای اول متمایز باشد فقط ظاهری است.

اکنون بازمی‌گردیم به‌اینکه، عملگری خطی را به‌صورت مجموع عملگری‌نیم‌ساده وعملگری پوچ‌توان که با یکدیگر جابجا هم می‌شوند، بیان کنیم. دراین مورد، هیأت اسکالری را به‌زیرهیأتی ازاعداد مختلط محدود می‌کنیم. خوانندهٔ آگاه توجه دارد که آنچه

مهم است این است که هیأت F هیأتی با سرشت‌نمای صفر باشد؛ یعنی اینکه، به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n، مجموع $1+\cdots+1$ (n بار) هیچگاه در F برابر 0 نباشد. برای هرچندجمله‌ای f برروی F، kمین مشتق صوری f را با $f^{(k)}$ نشان می‌دهیم. به‌بیان‌دیگر، $f^{(k)}=D^kf$ که‌در آن D عملگرمشتق گیری روی فضای چندجمله‌ایهاست. اگر g چندجمله‌ای دیگری باشد، $f(g)$ نتیجهٔ قراردادن g در f را، یعنی چندجمله‌ای حاصل از کاربست f به‌عنصر g در جبرخطی $F[x]$ را، نشان می‌دهد.

لم (فرمول تیلور). فرض‌کنیم F هیأتی باسرشت‌نمای صفر و g و h دوچندجمله‌ای برروی F باشند. اگر f چندجمله‌ای دلخواهی برروی F با $\deg f\leqslant n$ باشد، آنگاه

$$f(g)=f(h)+f^{(1)}(h)(g-h)+\frac{f^{(2)}(h)}{2!}(g-h)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(h)}{n!}(g-h)^n.$$

اثبات. چیزی راکه می‌خواهیم اثبات‌کنیم تعمیمی از فرمول تیلور است. خواننده احتمالاً با حالت خاصی که در آن $h=c$ چندجمله‌ای اسکالری، و $g=x$ باشد، آشناست. دراین حالت فرمول بیان می‌کند که

$$f=f(x)=f(c)+f^{(1)}(c)(x-c)+\frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

اثبات فرمول عمومی، دقیقاً کاربردی از قضیهٔ دوجمله‌ای

$$(a+b)^k=a^k+ka^{k-1}b+\frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^2+\cdots+b^k$$

است. زیرا، همان‌طورکه خواننده می‌داند چون جایگزینی و مشتق گیری فرایندهایی خطی هستند فقط لازم است فرمول را برای حالتی که در آن $f=x^k$ اثبات کنیم. این فرمول درمورد $f=\sum\limits_{k=0}^{n}c_kx^k$ باکمك ترکیب خطی نتیجه می‌شود. در حالت $f=x^k$ با شرط $k\leqslant n$، فرمول حاکی است که

$$g^k=h^k+kh^{k-1}(g-h)+\frac{k(k-1)}{2!}h^{k-2}(g-h)^2+\cdots+(g-h)^k$$

واین دقیقاً بسط دوجمله‌ای

$$g^k=[h+(g-h)]^k$$

است. □

لم. فرض کنیم F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط، f یك چندجمله‌ای برروی F، و f' مشتق f باشد. احکام زیر هم‌ارزند:

(الف) f حاصلضرب چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر متمایزی برروی F است.

(ب) f و f' نسبت به‌هم اول هستند.

(پ) f به‌عنوان یك چندجمله‌ای با ضرایب مختلط، هیچ ریشهٔ تکراری ندارد.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که (الف) و (ب) احکامی هم‌ارز دربارهٔ f هستند. فرض‌کنیم در تجزیهٔ اولیهٔ f برروی هیأت F، چندجمله‌ای اولی (غیراسکالری) چون p تکرار بشود. آنگاه h ای در $F[x]$ هست که $f = p^2h$. پس

$$f' = p^2h' + 2pp'h$$

ولذا p مقسوم‌علیهی از f' نیز هست. از این‌رو، f و f' نسبت به‌هم اول نیستند. ازاینجا نتیجه می‌گیریم که (ب)، حکم (الف) را ایجاب می‌کند.

حال فرض کنیم $f = p_1 \cdots p_k$ و p_1، $\ldots$، p_k چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر غیراسکالری متمایزی برروی F باشند. گیریم $f_j = f/p_j$. دراین صورت

$$f' = p_1'f_1 + p_2'f_2 + \cdots + p_k'f_k.$$

فرض‌کنیم p چندجمله‌ای‌اولی باشدکه هم f و هم f' را عاد می‌کند. دراین صورت i یی هست که $p = p_i$. اما p_i به‌ازای $j \neq i$، چندجمله‌ای f_j را عاد می‌کند، وچون p_i همچنین

$$f' = \sum_{j=1}^{k} p_j'f_j$$

را عاد می‌کند، درمی‌یابیم که p_i باید $p_i'f_i$ را هم عادکند. بنابراین p_i یا f_i را عاد می‌کند یا p_i' را. ولی p_i چندجمله‌ای f_i راعاد نمی‌کندچراکه p_1، $\ldots$، p_k متمایزند. از این‌رو، p_i چندجمله‌ای p_i' را عاد می‌کند. اما این ممکن نیست، چراکه درجهٔ p_i' یکی کمتر از درجهٔ p_i است. پس نتیجه می‌گیریم که هیچ چندجمله‌ای اولی هردوی f و f' را عاد نمی‌کند، ویا $(f, f') = 1$.

برای دیدن این که حکم (پ) با (الف) و با (ب) هم‌ارز است، تنها لازم است مطلب ذیل را مشاهده‌کنیم: فرض‌کنیم f و g دوچندجمله‌ای برروی F، زیرهیأتی از اعداد مختلط، باشند. می‌توانیم f و g را به‌عنوان چندجمله‌ایهایی باضرایب مختلط نیز محسوب‌کنیم. این که f و g، به‌عنوان چندجمله‌ایهایی برروی F نسبت به‌هم اول هستند، هم‌ارز این حکم است که f و g، به‌عنوان چندجمله‌ایهایی برروی هیأت اعداد مختلط، نسبت به‌هم اول می‌باشند. اثبات این مطلب را به‌عنوان تمرین باقی می‌گذاریم. از این حکم با $g = f'$ استفاده می‌کنیم. توجه‌کنید وقتی‌که f به‌عنوان یك چندجمله‌ای برروی هیأت اعداد مختلط محسوب شود، (پ) عیناً همان (الف) است. پس (ب) و (پ)، با همان استدلالی‌که دربالا به‌کار بردیم، هم‌ارز هستند. □

اکنون می‌توانیم قضیه‌ای را ثابت کنیم که رابطهٔ بین عملگرهای نیم‌ساده و عملگرهای قطری‌شدنی را از این هم آشکارتر می‌سازد.

قضیهٔ ۱۲. فرض کنیم F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط، V فضایی برداری با بعد متناهی برروی F، و T عملگری خطی روی V باشد. همچنین فرض کنیم $\mathscr{B}$ پایهٔ مرتبی برای V و A ماتریس T در پایهٔ مرتب $\mathscr{B}$ باشد. دراین صورت T نیم‌ساده است اگر وتنها ماتریس A برروی هیات اعداد مختلط با ماتریسی قطری متشابه باشد.

اثبات. گیریم p چندجمله‌ای مینیمال T باشد. بنا بر قضیهٔ ۱۱، T نیم‌ساده است اگر وتنها اگر $p=p_1 \cdots p_k$، و p_1، $\cdots$، p_k چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر متمایزی برروی F باشند. به‌واسطهٔ آخرین لم می‌بینیم که T نیم‌ساده است اگر وتنها اگر p هیچ ریشهٔ مختلط تکراری نداشته باشد.

اما p چندجمله‌ای مینیمال ماتریس A نیز هست. می‌دانیم که A برروی هیأت‌اعداد مختلط با ماتریسی قطری متشابه است اگر وتنها اگرچندجمله‌ای مینیمال آن دارای ریشهٔ مختلط تکراری نباشد. این مطلب قضیه را اثبات می‌کند. □

قضیهٔ ۱۳. فرض کنیم F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط، V فضایی برداری با بعد متناهی برروی F، و T عملگری خطی روی V باشد. عملگر نیم‌ساده‌ای چون S روی V و عملگر پوچ‌توانی چون N روی V وجود دارد که

$$T=S+N \quad (۱)$$

$$SN=NS \quad (۲)$$

بعلاوه، عملگرهای نیم‌ساده S و پوچ‌توان N، که در (۱) و (۲) صدق می‌کنند، یکتا هستند و هریک یک چندجمله‌ای برحسب T است.

اثبات. فرض می‌کنیم $p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ تجزیهٔ چندجمله‌ای مینیمال T به سازه‌های اول باشد، ومی‌نویسیم $f=p_1 \cdots p_k$. گیریم بین اعداد صحیح مثبت r_1، $\cdots$، r_k، عدد r بزرگترین باشد. دراین صورت چندجمله‌ای f حاصلضربی ازچندجمله‌ایهای اول متمایز است، f^r برچندجمله‌ای مینیمال T تقسیم‌پذیر است، و لذا

$$f(T)^r=0.$$

می‌خواهیم دنباله‌ای ازچندجمله‌ایهای g_0، g_1، g_2، $\cdots$ بسازیم که

$$f\Big(x-\sum_{j=0}^{n} g_j f^j\Big)$$

بر f^{n+1}، $n=0,1,2,\cdots$، تقسیم‌پذیر باشد. فرض می‌کنیم $g_0=0$ که دراین‌صورت $f(x-g_0 f^0)=f(x)=f$ بر f تقسیم‌پذیراست. گیریم g_0، $\cdots$، g_{n-1} را انتخاب

کرده باشیم. می‌نویسیم

$$h=x-\sum_{j=0}^{n-1} g_j f^j$$

و طبق فرض، $f(h)$ بر f^n تقسیم پذیر است. می‌خواهیم g_n را طوری انتخاب کنیم که

$$f(h-g_n f^n)$$

بر f^{n+1} تقسیم‌پذیر باشد. فرمول عمومی تیلور را به‌کار می‌بریم، و

$$f(h-g_n f^n)=f(h)-g_n f^n f'(h)+f^{n+1}b$$

را که درآن b یك چندجمله‌ای است به‌دست می‌آوریم. بنا به‌فرض $f(h)=qf^n$. پس، برای‌آنکه $f(h-g_nf^n)$ بر f^{n+1} تقسیم‌پذیر باشد، تنهالازم است g_n را طوری‌انتخاب کنیم‌که $(q-g_nf'(h))$ بر f تقسیم‌پذیر باشد. این امرقابل اجراست، زیرا f سازه‌های اول تکراری ندارد و لذا f و f' نسبت به‌هم اول هستند. اگر a و e چندجمله‌ایهایی باشندکه $af+ef'=1$ و اگر $g_n=eq$ گرفته شود، آنگاه $q-g_nf'$ بر f تقسیم‌پذیر است.

حال دنباله‌ای چون g_0، g_1، ... را داریم‌که f^{n+1} چندجمله‌ای

$$f\Big(x-\sum_{j=0}^{n} g_j f^j\Big)$$

را عاد می‌کند. فرض می‌کنیم $n=r-1$، و دراین صورت چون $f(T)^r=0$،

$$f\Big(T-\sum_{j=0}^{r-1} g_j(T)f(T)^j\Big)=0\,.$$

فرض کنیم

$$N=\sum_{j=1}^{r-1} g_j(T)f(T)^j=\sum_{j=0}^{r-1} g_j(T)f(T)^j\,.$$

چون $\sum_{j=1}^{n} g_j f^j$ بر f تقسیم‌پذیراست، می‌بینیم‌که $N^r=0$ ولذا N پوچ‌توان است. فرض کنیم $S=T-N$. دراین صورت $f(S)=f(T-N)=0$. چون f سازه‌های اول متمایز دارد S نیم‌ساده است.

حال $T=S+N$ راکه درآن S نیم‌ساده و N پوچ‌توان است داریم، و هرکدام یك چندجمله‌ای برحسب T است. برای اثبات حکم یکتایی، ازهیأت اسکالری F به‌هیأت اعداد مختلط می‌رویم. $\mathscr{B}$ را پایهٔ مرتبی برای فضای V می‌گیریم. دراین صورت داریم

$$[T]_{\mathscr{B}}=[S]_{\mathscr{B}}+[N]_{\mathscr{B}}$$

که درآن $[S]_{\mathscr{B}}$ بر روی اعداد مختلط قطری‌شدنی است و $[N]_{\mathscr{B}}$ هم پوچ توان است. این ماتریسهای قطری‌شدنی و پوچ توان‌که با یکدیگر جابجا هم می‌شوند، همان‌گونه که در فصل ۶ نشان دادیم، به‌طور یکتا تعیین می‌شوند. □

تمرین

۱. اگر N عملگر خطی پوچ‌توانی روی V باشد نشان دهید که به‌ازای هرچند جمله‌ای f، جزء نیم‌سادهٔ $f(N)$ مضربی اسکالری از عملگر همانی است (F زیرهیأتی از Cاست).

۲. فرض کنید F زیرهیأتی از اعداد مختلط، V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی F، و T عملگر خطی نیم‌ساده‌ای روی V باشد. اگر f یک چندجمله‌ای بر روی F باشد، ثابت کنید که $f(T)$ نیم‌ساده است.

۳. فرض کنید T عملگری خطی روی فضایی با بعد متناهی بر روی زیرهیأتی از C باشد. ثابت کنید T نیم‌ساده است اگر و تنها اگر مطلب ذیل درست باشد: اگر f یک چندجمله‌ای و $f(T)$ پوچ‌توان باشد، آنگاه $f(T) = 0$.

۸

فضاهای ضرب داخلی

۱.۸. ضربهای داخلی

در سراسراین فصل، تنها فضاهای برداری حقیقی ومختلط؛ یعنی، فضاهای برداری برروی هیأت اعداد حقیقی و یا هیأت اعداد مختلط درنظرگرفته می‌شوند. مقصود اصلی ما مطالعهٔ فضاهایی برداری است که درآنها سخن گفتن از«طول» یك بردار و «زاویهٔ» بین دوبردار معنی داشته باشد. این‌کار را با مطالعهٔ نوع خاصی از توابع اسکالری، معروف به‌ضرب داخلی، روی جفت بردارها انجام خواهیم داد. مثالی ازضرب داخلی همان ضرب نقطه‌ای یا اسکالری بردارهای در R^3 است. ضرب اسکالری بردارهای

$$\beta=(y_1, y_2, y_3) \text{ و } \alpha=(x_1, x_2, x_3)$$

در R^3 عبارت است ازعدد حقیقی

$$(\alpha|\beta)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

از نظرهندسی، این ضرب نقطه‌ای عبارت است از حاصلضرب طول α درطول β در کسینوس زاویهٔ بین α و β. بنابراین مفاهیم هندسی «طول» و «زاویه» در R^3 را می‌توان با ضرب اسکالری که به‌طور جبری تعریف می‌شود نیز تعریف کرد.

یك ضرب داخلی روی فضایی برداری عبارت است از تابعی با خواصی مشابه با خواص ضرب نقطه‌ای در R^3 و برحسب یك چنین ضرب داخلی «طول» و «زاویه» را

می‌توان تعریف کرد. اظهارات ما دربارهٔ مفهوم عمومی زاویه، به‌ایدهٔ عمودبودن (یا تعامد) بردارها محدود خواهد بود. در این بخش اول، خواهیم گفت که یك ضرب داخلی چیست، چند مثال خاص را بررسی خواهیم کرد، وچند خاصیت اساسی ضربهای داخلی را به‌دست خواهیم داد. سپس به‌کار بحث دربارهٔ طول و تعامد بازخواهیم گشت.

تعریف. فرض کنیم F هیأت اعداد حقیقی یا هیأت اعداد مختلط و V فضایی برداری بر روی F باشد. یك **ضرب داخلی** روی V تابعی است که به‌هرجفت مرتب از بردارهای α، β در V اسکالری چون $(\alpha|\beta)$ در F را طوری اختصاص می‌دهد که به‌ازای همهٔ αها، βها، و γهای در V و همهٔ اسکالرهای c داشته باشیم:

(الف) $(\alpha+\beta|\gamma)=(\alpha|\gamma)+(\beta|\gamma)$؛

(ب) $(c\alpha|\beta)=c(\alpha|\beta)$؛

(پ) $(\beta|\alpha)=\overline{(\alpha|\beta)}$، خط زیر نمایشگر مزدوج اعداد مختلط است؛

(ت) هرگاه $\alpha\neq 0$، $(\alpha|\alpha)>0$.

مشاهده می‌شود که شرایط (الف)، (ب) و (پ) ایجاب می‌کنند که

(ث) $(\alpha|c\beta+\gamma)=\bar{c}(\alpha|\beta)+(\alpha|\gamma)$.

نکتهٔ دیگری را هم باید خاطرنشان کنیم. وقتی F هیأت اعداد حقیقی R باشد، مزدوجهای مختلطی که در (پ) و (ث) ظاهر می‌شوند، غیر ضرور هستند؛ اما، درحالت مختلط برای سازگاری شرایط لازم می‌باشند. بدون این مزدوجهای مختلط، با تناقض ذیل مواجه خواهیم شد:

$$(\alpha|\alpha)>0 \quad \text{و} \quad (i\alpha|i\alpha)=-1(\alpha|\alpha)>0 .$$

در مثالهایی که درذیل می‌آیند، ونیز درسراسر این فصل، F یا هیأت اعداد حقیقی است یا هیأت اعداد مختلط.

مثال ۱. روی F^n ضربی داخلی وجود دارد که ما آن را **ضرب داخلی استانده** می‌نامیم. این داخلی روی $\alpha=(x_1, \dots, x_n)$ و $\beta=(y_1, \dots, y_n)$ با

$$(\alpha|\beta)=\sum_j x_j\bar{y}_j \tag{۱-۸}$$

تعریف می‌شود. وقتی که $F=R$ این قاعده را می‌توان به‌صورت

$$(\alpha|\beta)=\sum_j x_j y_j$$

نیز نوشت. ضرب داخلی استانده در حالت حقیقی غالباً ضرب نقطه‌ای یا اسکالری نامیده و توسط $\alpha\cdot\beta$ نشان داده می‌شود.

مثال ۲. به‌ازای $\alpha=(x_1, x_2)$ و $\beta=(y_1, y_2)$ در R^2، فرض کنیم

$$(\alpha|\beta)=x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2.$$

چون $(\alpha|\alpha)=(x_1-x_2)^2+3x_2^2$، نتیجه می‌شود که اگر $\alpha\neq 0$، $(\alpha|\alpha)>0$. شرایط (الف)، (ب)، و (پ) تعریف نیز بسادگی نشان داده می‌شوند.

مثال ۳. فرض کنیم V فضای همهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی F، یعنی $F^{n\times n}$، باشد. در این صورت V به‌طریقی طبیعی با F^{n^2} یکریخت است. بنابراین، ازمثال ۱ نتیجه‌می‌شود که معادله

$$(A|B)=\sum_{j,k}A_{jk}\bar{B}_{jk}$$

ضربی داخلی روی V تعریف می‌کند. بعلاوه، اگر ماتریس **ترانهادهٔ مزدوج** B^* راکه در آن $B^*_{kj}=\bar{B}_{jk}$، معرفی کنیم، می‌توانیم ایـن ضرب داخلی روی $F^{n\times n}$ را برحسب تابع رد نیز بیان کنیم:

$$(A|B)=\operatorname{tr}(AB^*)=\operatorname{tr}(B^*A)$$

زیرا

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB^*)&=\sum_j(AB^*)_{jj}\\&=\sum_j\sum_k A_{jk}B^*_{kj}\\&=\sum_j\sum_k A_{jk}\bar{B}_{jk}.\end{aligned}$$

مثال ۴. گیریم $F^{n\times 1}$ فضـای ماتریسهای (ستونی) $n\times 1$ برروی F و Q یـك ماتریس معکوس‌پذیر $n\times n$ برروی F باشد. به‌ازای X و Y در $F^{n\times 1}$ می‌نویسیم

$$(X|Y)=Y^*Q^*QX.$$

در اینجا ماتریس 1×1 سمت راست را با تك درایهٔ آن یکـی گرفته‌ایم. هنگامی که Q ماتریس همانی باشد، این ضرب داخلی اساساً با ضرب داخلی در مثال ۱ یکی است؛ ما این ضرب داخلی را **ضرب داخلی استانده** روی $F^{n\times 1}$ می‌نامیم. خواننده باید متوجه‌باشد که اصطلاح «ضرب داخلـی استانده» در دو زمینهٔ خـاص به‌کارمی‌رود. برای یك فضای برداری با بعد متناهی دلخواه برروی F، ضرب داخلی آشکاری که بتوان آن را استانده نامید وجود ندارد.

مثال ۵. گیریم V فضای بـرداری همـهٔ توابع مختلط پیوسته روی فاصلهٔ یکـهٔ $0\leqslant t\leqslant 1$ باشد. فرض کنیم

$$(f|g)=\int_{\circ}^{\backslash} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

احتمالاً خواننده با فضای توابع پیوستهٔ حقیقی روی فاصلهٔ یکه بیشتر آشنا باشد. برای چنین فضایی علامت مزدوج مختلط روی g باید حذف گردد.

مثال ۶. این مثال درواقع ردهای است از مثالها. با روش زیر از ضرب داخلی مفروضی می‌توان ضربهای داخلی جدیدی به‌وجود آورد. V و W را فضاهایی برداری بر روی F می‌گیریم و فرض می‌کنیم $(\ |\ )$ ضربی داخلی روی W باشد. اگر T تبدیل خطی نامنفردی از V در W باشد، آنگاه معادلهٔ

$$p_T(\alpha,\beta)=(T\alpha|T\beta)$$

ضرب داخلی p_T روی V را تعریف می‌کند. ضرب داخلی درمثال ۴ حالت خاصی ازاین ضرب است. ضربهای داخلی ذیل نیز حالتهایی خاص ازآن هستند.

(الف) گیریم V فضایی برداری با بعد متناهی و

$$\mathscr{B}=\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\}$$

پایهٔ مرتبی برای V باشد. ϵ_1، $\cdots$، ϵ_n را بردارهای پایهٔ استاندهٔ F^n، و T را تبدیل خطی از V در F^n می‌گیریم که $T\alpha_j=\epsilon_j$، $j=1,\ \cdots,\ n$. به‌عبارت دیگر، T را یکریختی «طبیعی» از V بروی F^n که توسط $\mathscr{B}$ تعیین می‌شود می‌گیریم. اگرضرب داخلی استانده روی F^n را اتخاذکنیم، آنگاه

$$p_T\Big(\sum_j x_j\alpha_j,\ \sum_k y_k\alpha_k\Big)=\sum_{j=1}^{n} x_j\bar{y}_j\ .$$

پس، به‌ازای هرپایهٔ V، ضربی داخلی روی V با این خاصیت که $(\alpha_j|\alpha_k)=\delta_{jk}$ وجود دارد؛ درواقع، بسادگی می‌توان نشان داد که تنها یك ضرب داخلی از این نوع وجود دارد. بعداً نشان خواهیم دادکه هرضرب داخلی روی V، توسط پایه‌ای چون $\mathscr{B}$ وبه‌طریق بالا تعیین می‌شود.

(ب) دوباره به‌مثال ۵ برمی‌گردیم و فرض می‌کنیم‌که $V=W$. با این فرض که W فضای توابع پیوسته روی فاصلهٔ یکه باشد، T را عملگر خطی «ضرب در t»، یعنی $(Tf)(t)=tf(t)$، $\circ\leqslant t\leqslant 1$، می‌گیریم. بآسانی دیده می‌شود که T خطی‌است. همچنین T نامنفرد است؛ زیرا فرض کنیم $Tf=\circ$. دراین صورت به‌ازای $\circ\leqslant t\leqslant 1$، $tf(t)=\circ$؛ از این‌رو، به‌ازای $t>\circ$، $f(t)=\circ$. چون f پیوسته است، همچنین‌داریم $f(\circ)=\circ$ یا $f=\circ$. حال با استفاده ازضرب داخلی مثال ۵ ضرب داخلی جدیدی با قراردادن

$$p_T(f, g)=\int_0^1 (Tf)(t)\overline{(Tg)(t)}\, dt$$
$$=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}t^2\, dt$$

روی V بنا می‌کنیم.

اکنون به‌چند مشاهدهٔ عمومی دربارهٔ ضربهای داخلی می‌پردازیم. فرض کنیم V یك فضای برداری مختلط با ضربی داخلی باشد. دراین صورت به‌ازای هر α و β در V،

$$(\alpha|\beta)=\operatorname{Re}(\alpha|\beta)+i\, Im(\alpha|\beta)$$

که در آن $\operatorname{Re}(\alpha|\beta)$ و $Im(\alpha|\beta)$ اجزای حقیقی و موهومی عدد مختلط $(\alpha|\beta)$ هستند. اگر z عددی مختلط باشد، آنگاه $Im(z)=\operatorname{Re}(-iz)$. نتیجه‌اینکه

$$Im(\alpha|\beta)=\operatorname{Re}[-i(\alpha|\beta)]=\operatorname{Re}(\alpha|i\beta).$$

پس، ضرب داخلی به‌طورکامل توسط «جزء حقیقی»اش طبق

$$(\alpha|\beta)=\operatorname{Re}(\alpha|\beta)+i\operatorname{Re}(\alpha|i\beta) \qquad (۸\text{-}۲)$$

تعیین می‌شود.

گاهی بسی مفید است بدانیم که هرضرب داخلی روی یك فضای برداری حقیقی یا مختلط، توسط تابع دیگری موسوم به‌فرم درجهٔ دوم تعیین شده توسط آن ضرب داخلی هم تعیین می‌شود. برای تعریف آن، ابتدا ریشهٔ دوم مثبت $(\alpha|\alpha)$ را با $||\alpha||$ نشان می‌دهیم؛ $||\alpha||$، **نرم** α نسبت به‌ضرب داخلی نامیده می‌شود. با مشاهدهٔ ضربهای داخلی استاندارد در R^1، C^1 ، R^2، و R^3، خواننده باید بتواند خود را متقاعد سازد که تصور نرم α به‌عنوان «طول» یا «اندازه» α بیجا نیست. **فرم درجهٔ دوم** تعیین شده‌توسط ضرب‌داخلی عبارت است از تابعی که به‌هر بردار α اسکالر $||\alpha||^2$ را اختصاص می‌دهد. از خواص ضرب داخلی چنین نتیجه می‌شود که به‌ازای هر بردار α و β،

$$||\alpha\pm\beta||^2=||\alpha||^2\pm 2\operatorname{Re}(\alpha|\beta)+||\beta||^2.$$

پس، درحالت حقیقی

$$(\alpha|\beta)=\frac{1}{4}||\alpha+\beta||^2-\frac{1}{4}||\alpha-\beta||^2 . \qquad (۸\text{-}۳)$$

درحالت مختلط، (۸-۲) را به‌کار می‌بریم وعبارت پیچیده‌تر

$$(\alpha|\beta)=\frac{1}{4}||\alpha+\beta||^2-\frac{1}{4}||\alpha-\beta||^2+\frac{i}{4}||\alpha+i\beta||^2-\frac{i}{4}||\alpha-i\beta||^2 \qquad (۸\text{-}۴)$$

را به‌دست می‌آوریم. معادلات (۸-۳) و (۸-۴)، **اتحادهای قطبی** نامیده می‌شوند. توجه

کنید که (۸-۴) می‌تواند به‌صورت ذیل نیز نوشته شود:

$$(\alpha|\beta)=\frac{۱}{۴}\sum_{n=۱}^{۴} i^n\|\alpha+i^n\beta\|^۲.$$

خواصی که در بالا به‌دست آمدند برای هر ضرب داخلی روی هرفضای برداری حقیقی یا مختلط V، بدون توجه به‌بعد، برقرارند. اکنون به‌حالتی که در آن V با بعد متناهی است، بازمی‌گردیم. همان‌طور که ممکن است حدس زده شود، یك ضرب داخلی روی یك فضای با بعد متناهی، همواره می‌تواند برحسب پایه‌ای مرتب با یك ماتریس توصیف شود.

فرض کنیم بعد V متناهی و

$$\mathscr{B}=\{\alpha_۱, \cdots, \alpha_n\}$$

پایهٔ مرتبی برای V باشد و نیز ضرب داخلی خاصی روی V داده شده باشد؛ نشان‌خواهیم داد که این ضرب داخلی به‌طورکامل توسط مقادیر

$$G_{jk}=(\alpha_k|\alpha_j) \tag{۸-۵}$$

که به‌جفت بردارهای $\mathscr{B}$ تعلق می‌گیرد، تعیین می‌شود. اگر $\alpha=\sum_k x_k\alpha_k$ و $\beta=\sum_j y_j\alpha_j$، آنگاه

$$\begin{aligned}(\alpha|\beta)&=(\sum_k x_k\alpha_k|\beta)\\ &= \sum_k x_k(\alpha_k|\beta)\\ &= \sum_k x_k\sum_j \bar{y}_j(\alpha_k|\alpha_j)\\ &= \sum_{j,k} \bar{y}_j G_{jk} x_k\\ &=Y^*GX.\end{aligned}$$

دراینجا X و Y ماتریسهای مختصات α و β در پایهٔ مرتب $\mathscr{B}$، و G ماتریس با درایه‌های $G_{jk}=(\alpha_k|\alpha_j)$ است. G را **ماتریس ضرب داخلی درپایهٔ مرتب** $\mathscr{B}$ می‌نامیم. از (۸-۵) نتیجه می‌شود که G هرمیتی است؛ یعنی، $G=G^*$؛ اما G نوع نسبتاً خاصی از ماتریسهای هرمیتی است. زیرا G باید در شرط اضافی

$$X^*GX>۰ \quad ،X\neq ۰ \tag{۸-۶}$$

نیز صدق کند. بخصوص، G باید معکوس‌پذیر باشد. زیرا، درغیراین صورت یك $X\neq ۰$ وجود داردکه $GX=۰$ و به‌ازای چنین Xی (۸-۶) غیرممکن است. به‌طور صریحتر، (۸-۶) حاکی است که به‌ازای همهٔ اسکالرهایی چون $x_۱$، $\cdots$، x_n که دست‌کم یکی‌از

آنها صفر نباشد

$$\sum_{j,k} \bar{x}_j G_{jk} x_k > 0. \qquad (۷-۸)$$

ازاین مطلب بلافاصله می‌بینیم که همهٔ درایه‌های قطری G باید مثبت باشند؛ با این وجود، برای اطمینان از درستی (۸-۶) این شرط روی درایه‌های قطری به‌هیچ‌وجه کافی نیست. شرایط کافی برای درستی (۸-۶) بعداً ارائه خواهند شد.

روند بالا وارونه‌پذیر است؛ بدین‌معنی که اگر G ماتریسی $n \times n$ روی F باشد که در (۸-۶) و شرط $G = G^*$ صدق کند، آنگاه G ماتریس یك ضرب داخلی روی V در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ است. این ضرب داخلی با معادلهٔ

$$(\alpha|\beta) = Y^* G X$$

که در آن X و Y ماتریسهای مختصات α و β در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ هستند تعیین می‌شود.

تمرین

۱. فرض کنید V فضایی برداری و $(\ |\ )$ ضربی داخلی روی V باشد.
(الف) نشان دهید به‌ازای هر β در V، $(0|\beta) = 0$.
(ب) نشان دهید که اگر به‌ازای هر β در V، $(\alpha|\beta) = 0$ آنگاه $\alpha = 0$.

۲. فرض کنید V فضایی برداری برروی F باشد. نشان دهید مجموع دوضرب داخلی روی V، ضربی داخلی روی V است. آیا تفاضل دوضرب داخلی هم یك ضرب داخلی است؟ نشان دهید که مضربی مثبت ازیك ضرب داخلی، ضربی داخلی است.

۳. همهٔ ضربهای داخلی روی R^1 و روی C^1 را به‌طور صریح تشریح کنید.

۴. نشان دهید که ضرب داخلی استانده روی F^n ضربی داخلی است.

۵. $(\ |\ )$ را ضرب داخلی استانده روی R^2 بگیرید.
(الف) فرض کنید $\alpha = (1, 2)$ و $\beta = (-1, 1)$. اگر γ برداری باشد که $(\alpha|\gamma) = -1$ و $(\beta|\gamma) = 3$، γ را بیابید.
(ب) نشان دهید که به‌ازای هر α در R^2 داریم $\alpha = (\alpha|\epsilon_1)\epsilon_1 + (\alpha|\epsilon_2)\epsilon_2$.

۶. $(\ |\ )$ را ضرب داخلی استانده روی R^2 و T را عملگر خطی

$$T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

بگیرید. T «دوران به‌اندازهٔ $90°$» است واین خاصیت را دارد که به‌ازای هر α در R^2، $(\alpha|T\alpha) = 0$. همهٔ ضربهای داخلی $[\ |\ ]$ روی R^2 راکه به‌ازای هر α، $[\alpha|T\alpha] = 0$ بیابید.

۰۷ (|) را ضرب داخلی استانده روی C^2 بگیرید و ثابت کنید که هیچ عملگر خطی غیرصفری روی C^2 وجود ندارد که به‌ازای هر α در C^2، $(\alpha|T\alpha)=0$. این مطلب را تعمیم دهید.

۰۸ فرض کنید A ماتریسی 2×2 با درایه‌های حقیقی باشد. به ازای X و Y در $R^{2\times 1}$ فرض کنید

$$f_A(X, Y)=Y^tAX.$$

نشان‌دهید f_A ضربی داخلی روی $R^{2\times 1}$ است اگر وتنها اگر $A=A^t$، $A_{11}>0$، $A_{22}>0$، و $\det A>0$.

۰۹ فرض کنید V یك فضای برداری حقیقی یا مختلط با ضربی داخلی باشد. نشان دهید که فرم درجهٔ دوم تعیین شده توسط ضرب داخلی در **قانون متوازی‌الاضلاع**

$$\|\alpha+\beta\|^2+\|\alpha-\beta\|^2=2\|\alpha\|^2+2\|\beta\|^2$$

صدق می‌کند.

۱۰. فرض کنید (|) ضرب داخلی روی R^2 باشد که در مثال ۲ تعریف شد و $\mathscr{B}$ پایهٔ مرتب استانده برای R^2 باشد. ماتریس این ضرب داخلی را نسبت به $\mathscr{B}$ بیابید.

۱۱. نشان دهید که فرمول

$$\left(\sum_j a_jx^j\Big|\sum_k b_kx^k\right)=\sum_{j,k}\frac{a_jb_k}{j+k+1}$$

ضربی داخلی روی فضای $R[x]$، چندجمله‌ایهای بر روی هیأت R، تعریف می‌کند. W را زیرفضای متشکل از چندجمله‌ایهای از درجهٔ کمتر ازیا برابر با n بگیرید. ضرب داخلی مذکور را به W محدود کنید و ماتریس این ضرب داخلی روی W را نسبت به‌پایهٔ مرتب $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ بیابید. (راهنمایی: برای‌اینکه نشان دهید این فرمول یك ضرب داخلی تعریف می‌کند، مشاهده کنید که

$$(f|g)=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

و روی این انتگرال کار کنید.)

۱۲. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی و $\mathscr{B}=\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. فرض کنید (|) ضربی داخلی روی V باشد. اگر c_1، $\dots$، c_n، و n اسکالر دلخواه باشند، نشان دهید دقیقاً یك بردار چون α در V وجود دارد که $(\alpha|\alpha_j)=c_j$، $j=1, \dots, n$.

۱۳. فرض کنید V یك فضای برداری مختلط باشد. تابعی چون J از V در V یك **تزویج** نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر اسکالر c و هر α و β در V،

$$J(\alpha+\beta)=J(\alpha)+J(\beta)\text{،}\ J(c\alpha)=\bar{c}J(\alpha)\ \text{و}\ J(J(\alpha))=\alpha.$$

اگر J یك تزویج باشد، نشان دهید

(الف) مجموعهٔ W متشکل از همهٔ αهای در V با ویژگی $J\alpha=\alpha$ نسبت به‌عملهای تعریف شده در V یك فضای برداری بر روی R است.

(ب) به‌ازای هر α در V، بردارهای یکتایی چون β و γ در W وجود دارند که $\alpha=\beta+i\gamma$.

۱۴. فرض کنید V یك فضای برداری مختلط و W زیرمجموعه‌ای از V با خواص ذیل باشد:

(الف) W نسبت به‌عملهای تعریف شده در V، یك فضای برداری حقیقی است.

(ب) به ازای هر α در V، بردارهای یکتایی چون β و γ در W وجود دارند که $\alpha=\beta+i\gamma$.

نشان دهید معادلهٔ $J\alpha=\beta-i\gamma$، یك تزویج روی V تعریف می‌کند با این‌خاصیت که $J\alpha=\alpha$ اگروتنها اگر α متعلق به W باشد؛ و نیز نشان دهید که J تنها تزویج روی V با این خاصیت است.

۱۵. همهٔ تزویجهای روی C^1 و C^2 را بیابید.

۱۶. فرض کنید W زیرفضایی حقیقی با بعد متناهی از یك فضای برداری مختلط V باشد. نشان دهید که W در شرط (ب) از تمرین ۱۴ صدق می‌کند اگروتنها اگر هر پایهٔ W پایه‌ای برای V نیز باشد.

۱۷. فرض کنید V یك فضای برداری مختلط، J یك تزویج روی V، W مجموعهٔ αهای در V با ویژگی $J\alpha=\alpha$ و f ضربی داخلی روی W باشد. نشان دهید:

(الف) ضرب داخلی یکتایی چون g روی V وجود دارد که به‌ازای هر α و β در W، $g(\alpha,\beta)=f(\alpha,\beta)$.

(ب) به‌ازای هر α و β در V، $g(J\alpha,J\beta)=g(\beta,\alpha)$.

قسمت (الف) دربارهٔ رابطهٔ بین ضربهای داخلی استانده روی R^1 و C^1 یا روی R^n و C^n چه می‌گوید؟

۲.۸. فضاهای ضرب داخلی

اکنون که ایده‌هایی دربارهٔ ضرب داخلی پیدا کرده‌ایم، توجه خود را به‌آنچه دربارهٔ

ترکیب یك فضای برداری و یك ضرب داخلی خاص روی آن می‌توان گفت، معطوف می‌کنیم. بویژه، خواص بنیادی مفاهیم «طول» و «تعامد» را که به‌وسیلهٔ ضرب داخلی روی فضا تحمیل می‌شوند، به‌دست می‌آوریم.

تعریف. یك **فضای ضرب داخلی** عبارت است از یك فضای برداری حقیقی یا مختلط همراه با ضرب داخلی مشخصی روی آن فضا.

یك فضای ضرب داخلی حقیقی با بعد متناهی، غالباً یك **فضای اقلیدسی** هم نامیده می‌شود. از یك فضای ضرب داخلی مختلط، بیشتر به‌عنوان یك **فضای یکانی** نام برده می‌شود.

قضیهٔ ۰۱ اگر V یك فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه به‌ازای هر دو بردار α و β در V و هر اسکالر c

(۱) $\|c\alpha\|=|c|\ \|\alpha\|$؛

(۲) به‌ازای $\alpha\neq 0$، $\|\alpha\|>0$؛

(۳) $|(\alpha|\beta)|\leqslant\|\alpha\|\ \|\beta\|$؛

(۴) $\|\alpha+\beta\|\leqslant\|\alpha\|+\|\beta\|$.

اثبات. احکام (۱) و (۲) تقریباً بلافاصله از تعاریف گوناگون مربوط نتیجه می‌شوند. وقتی $\alpha=0$ نامساوی (۳) بوضوح درست است. اگر $\alpha\neq 0$، می‌نویسیم

$$\gamma=\beta-\frac{(\beta|\alpha)}{\|\alpha\|^2}\alpha\cdot$$

دراین صورت $(\gamma|\alpha)=0$ و

$$0\leqslant\|\gamma\|^2=\left(\beta-\frac{(\beta|\alpha)}{\|\alpha\|^2}\alpha\,\middle|\,\beta-\frac{(\beta|\alpha)}{\|\alpha\|^2}\alpha\right)$$

$$=(\beta|\beta)-\frac{(\beta|\alpha)(\alpha|\beta)}{\|\alpha\|^2}$$

$$=\|\beta\|^2-\frac{|(\alpha|\beta)|^2}{\|\alpha\|^2}.$$

از این‌رو، $|(\alpha|\beta)|^2\leqslant\|\alpha\|^2\|\beta\|^2$. حال با استفاده از (۳) به‌دست می‌آوریم

$$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+(\alpha|\beta)+(\beta|\alpha)+\|\beta\|^2$$
$$=\|\alpha\|^2+2\operatorname{Re}(\alpha|\beta)+\|\beta\|^2$$
$$\leqslant\|\alpha\|^2+2\|\alpha\|\ \|\beta\|+\|\beta\|^2$$
$$=(\|\alpha\|+\|\beta\|)^2.$$

پس، $\|\alpha+\beta\| \leqslant \|\alpha\|+\|\beta\|$. $\square$

نامساوی (۳)، **نامساوی کوشی-شوارتز**[1] نامیده می‌شود. این نامساوی کاربردهای گوناگون فراوانی دارد. اثبات نشان می‌دهد که اگر (مثلاً) α غیر صفر باشد، آنگاه $|(\alpha|\beta)| < \|\alpha\|\ \|\beta\|$، مگر اینکه

$$\beta=\frac{(\beta|\alpha)}{\|\alpha\|^2}\alpha \cdot$$

بدین‌سان، در (۳) تساوی برقرار است اگر وتنها اگر α و β وابستهٔ خطی باشند.

مثال ۷. اگر نامساوی کوشی-دشوارتز را به ضربهای داخلی مفروض در مثالهای ۱، ۲، ۳، و ۵ به‌کار بندیم، نامساویهای ذیل را به‌دست می‌آوریم:

(الف) $|\sum x_k\bar{y}_k| \leqslant (\sum |x_k|^2)^{1/2}(\sum |y_k|^2)^{1/2}$

(ب)
$$|x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2| \leqslant ((x_1-x_2)^2+3x_2^2)^{1/2}((y_1-y_2)^2+3y_2^2)^{1/2}$$

(پ) $|\operatorname{tr}(AB^*)| \leqslant (\operatorname{tr}(AA^*))^{1/2}(\operatorname{tr}(BB^*))^{1/2}$

(ت)
$$\left|\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx\right| \leqslant \left(\int_0^1 |f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |g(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

تعریف. فرض کنیم α و β بردارهایی از یك فضای ضرب داخلی V باشند. دراین صورت α بر β **متعامد** است هرگاه $(\alpha|\beta)=0$؛ چون این تساوی ایجاب می‌کند که β نیز بر α متعامد باشد، اغلب فقط می‌گوییم که α و β متعامدند. اگر S مجموعه‌ای از بردارهای متعلق به V باشد، S یك **مجموعهٔ متعامد** نامیده می‌شود هرگاه همهٔ جفت بردارهای متمایز در S متعامد باشند. یك **مجموعهٔ متعامد یکه** مجموعهٔ متعامدی چون S است همراه با این خاصیت اضافی که به‌ازای هر α در S، $\|\alpha\|=1$.

بردار صفر برهمهٔ بردارهای V متعامد است وتنها برداری است که این ویژگی را دارد. بجاست که یك مجموعهٔ متعامد یکه به‌عنوان مجموعه‌ای از بردارهای دوبه‌دو متعامد که همهٔ دارای طول ۱ باشند، تصور شود.

مثال ۸. پایهٔ استاندهٔ R^n یا C^n نسبت به‌ضرب داخلی استانده یك مجموعهٔ متعامد یکه است.

مثال ۹. بردار (x, y) در R^2، نسبت به‌ضرب داخلی استانده بر $(-y, x)$ متعامد

---

1. Cauchy-Schwarz

است، زیرا

$$((x, y)|(-y, x)) = -xy + yx = ۰ .$$

اما، اگر $R^۲$ با ضرب داخلی مثال ۲ تجهیز شود، آنگاه (x, y) و $(-y, x)$ متعامد خواهند بود اگر و تنها اگر

$$y = \frac{۱}{۲}(-۳ \pm \sqrt{۱۳})x .$$

مثال ۱۰. V رافضای ماتریسهای $n\times n$ مختلط $C^{n\times n}$ و E^{pq} راماتریسی می‌گیریم که تنها درایهٔ غیرصفرش یك ۱ در سطر p وستون q باشد. آنگاه مجموعهٔ همهٔ این‌چنین ماتریسهای E^{pq}، نسبت به‌ضرب داخلی مفروض درمثال ۳ متعامد یکه است. زیرا

$$(E^{pq}|E^{rs}) = \operatorname{tr}(E^{pq}E^{sr}) = \delta_{qs}\operatorname{tr}(E^{pr}) = \delta_{qs}\delta_{pr}.$$

مثال ۱۱. گیریم V فضای توابع مختلط (یاحقیقی) پیوسته روی فاصلهٔ $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ با ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_۰^۱ f(x)\overline{g(x)}dx$$

باشد. فرض کنیم $f_n(x) = \sqrt{۲}\cos ۲\pi nx$ و $g_n(x) = \sqrt{۲}\sin ۲\pi nx$. دراین‌صورت $\{۱, f_۱, g_۱, f_۲, g_۲, \dots\}$ یك مجموعهٔ متعامد یکهٔ نامتناهی است. درحالت‌مختلط، می‌توانیم ترکیبات خطی

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}(f_n + ig_n), \qquad n = ۱, ۲, \dots$$

را نیز تشکیل دهیم. بدین‌طریق، مجموعهٔ متعامد یکهٔ جدیدی چون S متشکل ازهمهٔ توابع به‌صورت

$$h_n(x) = e^{۲\pi inx}, \qquad n = \pm۱, \pm۲, \dots$$

را به‌دست می‌آوریم. مجموعهٔ S' حاصل ازالحاق تابع ثابت ۱ به S نیزمتعامد یکه‌است. دراینجا فرض می‌کنیم خواننده بـا محاسبهٔ انتگرالهای مورد بحث آشنایی داشته باشد.

مجموعه‌های متعامد یکهٔ ارائه شده درمثالهای بالاهمگی مستقل خطی هستند. اکنون نشان می‌دهیم که همواره چنین است.

قضیهٔ ۲. هرمجموعهٔ متعامد از بردارهای غیرصفر، مستقل خطی است.

اثبات. گیریم S مجموعه‌ای متعامد متناهی یا نامتناهی از بردارهای غیرصفرفضای ضرب داخلی مفروضی باشد. فـرض‌کنیم $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\dots$، α_m بردارهای متمایـزی از S

باشند، و

$$\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m.$$

دراین صورت

$$\begin{aligned}(\beta|\alpha_k) &= (\sum_j c_j\alpha_j|\alpha_k)\\ &= \sum_j c_j(\alpha_j|\alpha_k)\\ &= c_k(\alpha_k|\alpha_k).\end{aligned}$$

چون $(\alpha_k|\alpha_k)\neq 0$، نتیجه می‌شود که

$$c_k = \frac{(\beta|\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2}, \quad 1\leqslant k\leqslant m.$$

پس وقتی‌که $\beta = 0$، به‌ازای هر k، $c_k = 0$؛ بنابراین، S مجموعه‌ای مستقل است. □

نتیجه. اگر برداری چون β، ترکیبی خطی از یك دنبالهٔ متعامد از بردارهای غیرصفر α_1، ...، α_m باشد، آنگاه β عبارت است از ترکیب خطی خاص

$$\beta = \sum_{k=1}^{m} \frac{(\beta|\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2}\alpha_k.$$

این نتیجه ازاثبات قضیه منتج می‌شود. نتیجهٔ دیگری هم‌هست که‌گرچه بدیهی‌است، ولی ذکرش لازم است. اگر $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ مجموعهٔ متعامدی از بردارهای غیرصفر يك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی V باشد، آنگاه $m\leqslant \dim V$. این مطلب حاکی است‌که تعداد جهتهای دوبه‌دو عمود برهم در V، نمی‌تواند از بعد جبری V تجاوز کند. تعداد ماکزیمم جهتهای دو به‌دو عمود برهم در V، عددی است‌که می‌تواند با درك مستقیم و به‌طور حسی به‌عنوان بعد هندسی V محسوب شود، وقریباً دیدیم‌که این بعد ازبعدجبری بیشتر نیست. این واقعیت‌که این‌دوبعد برابرهستند، نتیجه‌ای خاص ازقضیهٔ بعدی است.

قضیهٔ ۳. گیریم V يك فضای ضرب داخلی و β_1، ...، β_n بردارهایی مستقل از V باشند. دراین صورت می‌توان بردارهای متعامدی چون α_1، ...، α_n را چنان در V ساخت که به‌ازای هر $k = 1, 2, \ldots, n$، مجموعهٔ

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$$

پایه‌ای برای زیرفضای پدید آمده توسط β_1، ...، β_k باشد.

اثبات. بردارهای $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ با ساختمانی معروف به **فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت**[1]، به دست خواهندآمد. ابتدا می‌گیریم $\alpha_1 = \beta_1$، سپس بردارهای دیگر به‌طور

1. Gram–Schmidt

استقرایی به صورت زیر به دست می‌آیند: فرض کنیم $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ $(1 \leqslant m < n)$ طوری انتخاب شده باشند که به ازای هر k،

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}\ ,\ 1 \leqslant k \leqslant m$$

پایهٔ متعامدی برای زیرفضای V پدید آمده توسط $\beta_1, \cdots, \beta_k$ باشد. برای ساختن بردار بعدی یعنی، α_{m+1} ، قرارمی‌دهیم:

$$\alpha_{m+1} = \beta_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{(\beta_{m+1}|\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2}\alpha_k\ . \qquad (۸-۹)$$

آنگاه $\alpha_{m+1} \neq 0$. زیرا درغیراین‌صورت β_{m+1} ترکیبی خطی از $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$، و ازاین رو ترکیبی خطی از $\beta_1, \cdots, \beta_m$ است. بعلاوه، اگر $1 \leqslant j \leqslant m$، آنگاه

$$\begin{aligned}(\alpha_{m+1}|\alpha_j) &= (\beta_{m+1}|\alpha_j) - \sum_{k=1}^{m} \frac{(\beta_{m+1}|\alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2}(\alpha_k|\alpha_j) \\ &= (\beta_{m+1}|\alpha_j) - (\beta_{m+1}|\alpha_j) \\ &= 0.\end{aligned}$$

بنابراین، $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{m+1}\}$ مجموعهٔ متعامدی متشکل از $m+1$ بردار غیرصفر از زیرفضای پدید آمده توسط $\beta_1, \cdots, \beta_{m+1}$ است. بنابرقضیهٔ ۲، این مجموعه پایه‌ای برای این زیرفضاست. پس بردارهای $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ یکی پس از دیگری، طبق (۸-۹)می‌توانند ساخته شوند. بخصوص، وقتی که $n = 4$ ، داریم

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \beta_1 \\ \alpha_2 &= \beta_2 - \frac{(\beta_2|\alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2}\alpha_1 \\ \alpha_3 &= \beta_3 - \frac{(\beta_3|\alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2}\alpha_1 - \frac{(\beta_3|\alpha_2)}{\|\alpha_2\|^2}\alpha_2 \qquad (۸-۱۰) \\ \alpha_4 &= \beta_4 - \frac{(\beta_4|\alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2}\alpha_1 - \frac{(\beta_4|\alpha_2)}{\|\alpha_2\|^2}\alpha_2 - \frac{(\beta_4|\alpha_3)}{\|\alpha_3\|^2}\alpha_3 . \ \square\end{aligned}$$

نتیجه. هرفضای ضرب داخلی با بعد متناهی دارای یك پایهٔ متعامد یکه است.

اثبات. V را یك‌فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ را پایه‌ای برای V می گیریم. فرایند گرام‌ـاشمیت را به‌کار می‌بندیم وپایهٔ متعامد $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ را می‌سازیم . آنگاه برای به دست آوردن یك پایهٔ متعامدیکه، به جای هر بردار α_k بردار $\alpha_k/\|\alpha_k\|$ را قرار می‌دهیم. $\square$

یکی از مزایای عمده‌ای که پایه‌های متعامد یکه برپایه‌های دلخواه دارند این است که در آنها محاسبات مربوط به‌مختصات ساده‌ترهستند. برای این که کلاً نشان دهیم که چرا این مطلب درست است، فرض می‌کنیم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. آنگاه، مانند بخش قبل، می‌توانیم معادلهٔ (۸-۵) را برای وابسته‌کردن ماتریسی چون G به هرپایهٔ مرتب $\mathscr{B}=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ از V، به‌کار ببریم. با استفاده از این ماتریس که در آن

$$G_{jk}=(\alpha_k|\alpha_j)$$

می‌توانیم ضربهای داخلی را بر حسب مختصات محاسبه کنیم. اگر $\mathscr{B}$ یك پایهٔ متعامد یکه باشد، آنگاه G ماتریس همانی است وبه ازای همهٔ اسکالرهای x_j و y_k

$$(\sum_j x_j\alpha_j|\sum_k y_k\alpha_k)=\sum_j x_j\bar{y}_j.$$

بدین‌گونه، برحسب یك پایهٔ متعامد یکه، ضرب داخلی در V مثل ضرب داخلی استانده در F^n به نظرمی‌رسد.

جالب است بدانیم که فرایندگرام ــ اشمیت می‌تواند برای آزمایش وابستگی خطی نیزمورد استفاده قرارگیرد؛ هرچند این کاربرد درمحاسبات مختلف دارای استفاده‌های عملی محدودی است. زیرا، فرض کنیم β_1، ...، β_n بردارهایی وابستهٔ خطی در یك فضای ضرب‌داخلی V باشند. برای اینکه‌حالتی بدیهی را مستثنی‌کنیم، فرض می‌کنیم $\beta_1\neq 0$. m را بزرگترین عدد صحیحی می‌گیریم که به ازای آن β_1، ...، β_m مستقل باشند. در این صورت $1\leqslant m<n$. α_1، ...، α_m را بردارهای حاصل از به‌کاربستن فرایند متعامدسازی به β_1، ...، β_m فرض می‌کنیم. در این صورت بردار α_{m+1} حاصل از (۸-۹)، لزوماً ۰ است. چرا که α_{m+1} در زیر فضای پدیدآمده توسط α_1، ...، α_m قرار دارد و بر هریك ازاین بردارها عمود است، از این رو، بنابر (۸-۸)، برابر ۰ می‌باشد. بعکس، اگر α_1، ...، α_m مخالف ۰ باشندو $\alpha_{m+1}=0$، آنگاه β_1، ...، β_{m+1} وابسته خطی هستند.

مثال ۱۲. بردارهای

$$\beta_1=(3,0,4)$$

$$\beta_2=(-1,0,7)$$

$$\beta_3=(2,9,11)$$

در R^3، مجهز به‌ضرب‌داخلی استانده را درنظرمی‌گیریم. با به‌کاربستن فرایندگرام ــ اشمیت به β_1، β_2، β_3 بردارهای زیر به دست می‌آیند.

$$\alpha_1 = (3,0,4)$$

$$\alpha_2 = (-1,0,7) - \frac{((-1,0,7)|(3,0,4))}{25}(3,0,4)$$

$$= (-1,0,7) - (3,0,4)$$

$$= (-4,0,3)$$

$$\alpha_3 = (2,9,11) - \frac{((2,9,11)|(3,0,4))}{25}(3,0,4)$$

$$- \frac{((2,9,11)|(-4,0,3))}{25}(-4,0,3)$$

$$= (2,9,11) - 2(3,0,4) - (-4,0,3)$$

$$= (0,9,0).$$

بدیهی است که این بردارها غیرصفر هستند و دو به دو برهم متعامد. ازاین‌رو، $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ پایهٔ متعامدی برای R^3 است. برای بیان یك بردار دلخواه (x_1, x_2, x_3) در R^3 به‌صورت ترکیبی خطی از α_1، α_2، α_3 لزومی به حل هیچ معادلهٔ خطی نیست؛ زیرا، کافی است (۸−۸) به‌کار بسته شود. پس، بسادگی نشان داده می‌شود که

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{3x_1 + 4x_3}{25}\alpha_1 + \frac{-4x_1 + 3x_3}{25}\alpha_2 + \frac{x_2}{9}\alpha_3.$$

بخصوص،

$$(1,2,3) = \frac{3}{5}(3,0,4) + \frac{1}{5}(-4,0,3) + \frac{2}{9}(0,9,0).$$

آنچه را که نشان داده‌ایم به عبارتی دیگر چنین است: پایهٔ $\{f_1, f_2, f_3\}$ از $(R^3)^*$ که دوگان پایهٔ $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ است، به‌طور صریح طبق معادلات

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{3x_1 + 4x_3}{25}$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{-4x_1 + 3x_3}{25}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{9}$$

تعریف می‌شود. این معادلات می‌توانند به صورت کلیتر

$$f_j(x_1, x_2, x_3) = \frac{((x_1, x_2, x_3)|\alpha_j)}{||\alpha_j||^2}$$

نیز نوشته شوند. سرانجام، توجه کنید که از α_1، α_2، α_3 پایهٔ متعامد یکهٔ

$$\frac{1}{5}(3, 0, 4), \frac{1}{5}(-4, 0, 3), (0, 1, 0)$$

به دست می‌آید.

مثال ۱۳. فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و در آن d, c, b, a اعداد مختلطی باشند. می‌نویسیم $\beta_1 = (a, b)$، $\beta_2 = (c, d)$ وفرض می‌کنیم $\beta_1 \neq 0$. اگر فرایند متعامدسازی را با استفاده از ضرب داخلی استانده در C^2، روی β_1 و β_2 به‌کار بندیم، بردارهای زیر را به دست می‌آوریم:

$$\alpha_1 = (a, b)$$

$$\alpha_2 = (c, d) - \frac{((c, d)|(a, b))}{|a|^2 + |b|^2}(a, b)$$

$$= (c, d) - \frac{(c\bar{a} + d\bar{b})}{|a|^2 + |b|^2}(a, b)$$

$$= \left(\frac{cb\bar{b} - d\bar{b}a}{|a|^2 + |b|^2}, \frac{d\bar{a}a - c\bar{a}b}{|a|^2 + |b|^2}\right)$$

$$= \frac{\det A}{|a|^2 + |b|^2}(-\bar{b}, \bar{a}).$$

حال نظریهٔ عمومی حاکی است که $\alpha_2 \neq 0$ اگر وتنها اگر β_1 و β_2 مستقل خطی باشند. از طرف دیگر، فرمول α_2 نشان می‌دهد که این مطلب برقرار است اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$.

دراصل، فرایند گرام-اشمیت متشکل از کاربستهای مکرر یک عمل هندسی بنیادی موسوم به تصویر متعامد است، وازاین دیدگاه است که به بهترین وجه مفهوم می‌شود. روش تصویر متعامد، به طور طبیعی درحل یک مسئلهٔ مهم تقریب نیز پیش می‌آید.

فرض کنیم W زیرفضایی ازیک فضای ضرب داخلی V باشد و β بردار دلخواهی از V. مسئله عبارت است ازیافتن بهترین تقریب ممکن برای β توسط بردارهای W. این مطلب بدین معنی است که می‌خواهیم برداری چون α را بیابیم که به ازای آن

$\|\beta-\alpha\|$ تا حد ممکن کوچك باشد، منوط به این محدودیت که α به W تعلق داشته‌باشد. حال گفتهٔ خویش را دقیقتر بیان کنیم.

یك بهترین تقریب برای β توسط بردارهای W برداری است مانند α در W که به ازای هر بردار γ در W

$$\|\beta-\alpha\| \leqslant \|\beta-\gamma\|.$$

با توجه به همین مسئله در R^2 یا در R^3، به‌طور شهودی درمی‌یابیم که بهترین تقریب‌برای β توسط بردارهای W باید برداری چون α در W باشد که $\beta-\alpha$ بر W عمود باشد، و نیز اینکه باید دقیقاً یك چنین αیی وجود داشته باشد. این ایده‌های شهودی برای زیر-فضاهای با بعد متناهی، ونیز برای برخی از، ولی نه‌همه، زیرفضاهای با بعد نامتناهی درست‌هستند. چون وضعیت دقیق بسیار پیچیده‌تر از آن است که بتواند دراینجا موردبحث قرارگیرد، تنها قضیهٔ زیررا اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ۴. فرض کنیم W زیر فضایی از یك فضای ضرب داخلی V و β برداری از V باشد.

(۱) بردار α در W، یك بهترین تقریب برای β توسط بردارهای W است اگر وتنها اگر $\beta-\alpha$ بر هربردار W عمود باشد.

(۲) اگر یك بهترین تقریب برای β توسط بردار های W وجود داشته باشد، یکتاست.

(۳) اگر W با بعد متناهی و $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه برای W باشد، آنگاه بردار

$$\alpha=\sum_k (\beta|\alpha_k)\alpha_k \qquad (۸\text{–}۱۱)$$

بهترین تقریب (یکتای) β توسط بردارهای W است.

اثبات. ابتدا توجه کنید که اگر γ برداری دلخواه در V باشد، آنگاه $\beta-\gamma=(\beta-\alpha)+(\alpha-\gamma)$ و

$$\|\beta-\gamma\|^2=\|\beta-\alpha\|^2+2\operatorname{Re}(\beta-\alpha|\alpha-\gamma)+\|\alpha-\gamma\|^2.$$

حال فرض کنیم $\beta-\alpha$ بر هربردار W عمود باشد، γ در W باشد، و $\gamma\neq\alpha$. در این صورت، چون $\alpha-\gamma$ در W قراردارد، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\|\beta-\gamma\|^2&=\|\beta-\alpha\|^2+\|\alpha-\gamma\|^2\\&>\|\beta-\alpha\|^2.\end{aligned}$$

بعکس، فرض کنیم به‌ازای هر γ در W، $\|\beta-\gamma\| \geqslant \|\beta-\alpha\|$. آنگاه از اولین معادلهٔ بالا نتیجه می‌شود که به ازای هر γ در W،

$$2\,\mathrm{Re}(\beta-\alpha|\alpha-\gamma)+\|\alpha-\gamma\|^2\geqslant 0.$$

چون هر بردار در W می‌تواند بـه صورت $\alpha-\gamma$ ، به‌ازای γ یـی در W ، بیان شود، می‌بینیم که به ازای هر τ در W

$$2\,\mathrm{Re}(\beta-\alpha|\tau)+\|\tau\|^2\geqslant 0.$$

بخصوص، اگر γ در W باشد و $\gamma\neq\alpha$ ، می‌توانیم داشته باشیم

$$\tau=-\frac{(\beta-\alpha|\alpha-\gamma)}{\|\alpha-\gamma\|^2}(\alpha-\gamma).$$

در این صورت نامساوی به حکم زیر تحویل می‌شود

$$-2\frac{|(\beta-\alpha|\alpha-\gamma)|^2}{\|\alpha-\gamma\|^2}+\frac{|(\beta-\alpha|\alpha-\gamma)|^2}{\|\alpha-\gamma\|^2}\geqslant 0\,.$$

این نامساوی برقرار است اگر وتنها اگر $(\beta-\alpha|\alpha-\gamma)=0$. بنابراین $\beta-\alpha$ برهر بردار W عمود است. این مطلب اثبات هم ارزی دوشرط داده شده‌در (۱) روی α راکامل می‌کند. بدیهی است شرط تعامد حداکثر توسط یك بردار W برآورده می‌شود و این (۲) را اثبات می‌کند.

حال فرض‌کنیم W یك زیرفضای با بعد متناهی V باشد. در این صورت به عنوان نتیجه‌ای ازقضیهٔ ۳ می‌دانیم که W یك پایهٔ متعامد یکه دارد. $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ را یك پایهٔ متعامد یکه برای W می‌گیریم و α را طبق (۸–۱۱) تعریف می‌کنیم. دراین صورت، طبق محاسبهٔ موجود در اثبات قضیهٔ ۳، $\beta-\alpha$ برهربردار α_k عمود است ($\beta-\alpha$ برداری‌است که درآخرین مرحله، وقتی‌که فرایند متعامد سازی بر $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ ، β به‌کار بسته‌می‌شود، به دست می‌آید). پس ، $\beta-\alpha$ برهرترکیب خطی $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$، یعنی بـر هربردار W عمود است. اگر γ در W باشد و $\gamma\neq\alpha$ ، نتیجه مـی‌شود که $\|\beta-\gamma\|>\|\beta-\alpha\|$. بنابراین α بهترین تقریب برای β است که در W قرار دارد. □

تعریف. گیریم V یك فضای ضرب داخلی و S مجموعه‌ای ازبردارهای V بـاشد . **مکمل متعامد** S عبارت است از مجموعه $S^\perp$ متشکل از همهٔ بـردارهایی از V که بـرهمهٔ بردارهای S عمود باشند.

مکمل متعامد V عبارت‌است ازز یرفضای صفر و بعکس $V=\{0\}^\perp$. اگر S زیر-مجموعه‌ای از V باشد ، مکمل متعامدآن $S^\perp$ (S عمود) همواره زیرفضایـی از V است. زیرا $S^\perp$ غیرتهی است، چراکه‌شامل 0 است و درصورتی‌که α و β در $S^\perp$ و c اسکالری دلخواه باشد، به ازای هر γ در S

$$(c\alpha+\beta|\gamma)=c(\alpha|\gamma)+(\beta|\gamma)$$
$$=c0+0$$
$$=0$$

پس، $c\alpha+\beta$ نیز در S قرار می‌گیرد. بنابر قضیهٔ ۴، خاصیت مشخص بردار α این‌است که تنها بردار W است که $\beta-\alpha$ به $W^\perp$ تعلق دارد.

تعریف. درصورتی که بردار α در قضیهٔ ۴ وجود داشته باشد، **تصویرمتعامد β روی W** نامیده می‌شود. اگر هربردار V تصویر متعامدی روی W داشته باشد، نگاشتی که به‌هر بردار V تصویر متعامد آن روی W را اختصاص می‌دهد، **تصویرمتعامد V روی W** نام دارد.

طبق قضیهٔ ۴، تصویرمتعامد هرفضای ضرب داخلی روی یك زیرفضای با بعدمتناهی، همواره وجود دارد. قضیهٔ ۴ همچنین نتیجهٔ زیررا ایجاب می‌کند.

نتیجه. گیریم V یك فضای ضرب داخلی، W یك زیر فضای با بعد متناهی، و E تصویرمتعامد V روی W باشد. دراین صورت نگاشت

$$\beta\rightarrow\beta-E\beta$$

تصویر متعامد V روی $W^\perp$ است.

اثبات. β را بردار دلخواهی از V می‌گیریم. آنگاه $\beta-E\beta$ در $W^\perp$ قرار دارد و به‌ازای هر γ در $W^\perp$، $\beta-\gamma=E\beta+(\beta-E\beta-\gamma)$. چون $E\beta$ در W و $\beta-E\beta-\gamma$ متعلق به $W^\perp$ است، نتیجه می‌شود که

$$||\beta-\gamma||^2=||E\beta||^2+||\beta-E\beta-\gamma||^2$$
$$\geqslant||\beta-(\beta-E\beta)||^2$$

و وقتی $\gamma\neq\beta-E\beta$، نامساوی اکید است. بنابراین، $\beta-E\beta$ بهترین تقریب برای β توسط بردارهای $W^\perp$است. □

مثال ۱۴. به R^3 ضرب داخلی استانده را می‌دهیم. دراین صورت تصویر متعامد $(-10, 2, 8)$ روی زیرفضای W، پدیدآمده توسط $(3, 12, -1)$، عبارت است از بردار

$$\alpha=\frac{((-10, 2, 8)|(3, 12, -1))}{9+144+1}(3, 12, -1)$$

$$=\frac{-14}{154}(3, 12, -1).$$

تصویر متعامد $R^۳$ روی W تبدیل خطی E تعریف شده توسط

$$(x_۱, x_۲, x_۳) \rightarrow \left(\frac{۳x_۱ + ۱۲x_۲ - x_۳}{۱۵۴}\right)(۳, ۱۲, -۱)$$

است. مسلماً رتبهٔ E برابر ۱ است؛ وازاین‌رو، پوچیش برابر ۲ است. ازطرف دیگر

$$E(x_۱, x_۲, x_۳) = (۰, ۰, ۰)$$

اگر و تنها اگر $۳x_۱ + ۱۲x_۲ - x_۳ = ۰$. و این مطلب برقرار است اگر و تنها اگر $(x_۱, x_۲, x_۳)$ در $W^\perp$ باشد. بنابراین، $W^\perp$ فضای پوچ E است و $\dim(W^\perp) = ۲$. با محاسبهٔ

$$(x_۱, x_۲, x_۳) - \left(\frac{۳x_۱ + ۱۲x_۲ - x_۳}{۱۵۴}\right)(۳, ۱۲, -۱)$$

می‌بینیم که تصویر متعامد $R^۳$ روی $W^\perp$ عبارت است از تبدیل خطی $I - E$ که بردار $(x_۱, x_۲, x_۳)$ را روی بردار

$$\frac{۱}{۱۵۴}(۱۴۵x_۱ - ۳۶x_۲ + ۳x_۳, -۳۶x_۱ + ۱۰x_۲ +$$
$$۱۲x_۳, ۳x_۱ + ۱۲x_۲ + ۱۵۳x_۳)$$

می‌نگارد.

مشاهداتی که درمثال ۱۴ به‌عمل آمد، به گونهٔ زیر تعمیم می‌یابند.

قضیهٔ ۵. فرض کنیم W زیرفضایی با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی V و E تصویر متعامد V روی W باشد. در این صورت E تبدیل خطی خودتوانی از V روی W است، $W^\perp$ فضای پوچ E است، و

$$V = W \oplus W^\perp.$$

اثبات. β را برداری دلخواه در V می‌گیریم. دراین صورت $E\beta$ بهترین تقریب برای β است که در W قرار دارد. بخصوص، وقتی که β متعلق به W باشد، $E\beta = \beta$. بنابراین، به‌ازای هر β در V، $E(E\beta) = E\beta$؛ یعنی، E خودتوان است: $E^۲ = E$. برای اینکه ثابت کنیم E تبدیلی خطی است، α و β را بردارهایی از V، و c را اسکالری دلخواه می‌گیریم. دراین صورت، بنابر قضیهٔ ۴، $\alpha - E\alpha$ و $\beta - E\beta$ هردو برهر بردار W عمود هستند. ازاین‌رو، بردار

$$c(\alpha - E\alpha) + (\beta - E\beta) = (c\alpha + \beta) - (cE\alpha + E\beta)$$

نیز به $W^\perp$ تعلق دارد. چون $cE\alpha + E\beta$ برداری است در W، از قضیهٔ ۴ نتیجه می‌شود که

$$E(c\alpha+\beta)=cE\alpha+E\beta.$$

بدیهی است که می‌توان خطی بودن E را با استفاده از (۸-۱۱) نیز اثبات کرد. مجدداً β را برداری از V می‌گیریم. آنگاه $E\beta$ یکتا بردار در W است که $\beta-E\beta$ در $W^{\perp}$ قرار دارد. پس، وقتی که β در $W^{\perp}$ باشد، $E\beta=0$. بعکس، وقتی که $E\beta=0$، β در $W^{\perp}$ است. پس، $W^{\perp}$ فضای پوچ E است. معادلهٔ

$$\beta=E\beta+\beta-E\beta$$

نشان می‌دهد که $V=W+W^{\perp}$؛ بعلاوه، $W\bigcap W^{\perp}=\{0\}$. زیرا اگر α برداری در $W\bigcap W^{\perp}$ باشد، آنگاه $(\alpha|\alpha)=0$. بنابراین $\alpha=0$، و V مجموع مستقیم W و $W^{\perp}$ می‌باشد. □

نتیجه. تحت شرایط قضیهٔ فوق، $I-E$ تصویر متعامد V روی $W^{\perp}$ است. این تصویر تبدیل خطی خودتوانی از V روی $W^{\perp}$ و با فضای پوچ W است.

اثبات. پیش از این دیدیم که نگاشت $\beta\rightarrow\beta-E\beta$ تصویر متعامد V روی $W^{\perp}$ است. چون E تبدیلی خطی است، این تصویر روی $W^{\perp}$ تبدیل خطی $I-E$ می‌باشد. ازخواص هندسی این تبدیل خطی مشهود است که $I-E$ تبدیل خودتوانی از V روی W است. این موضوع از محاسبهٔ

$$\begin{aligned}(I-E)(I-E)&=I-E-E+E^{2}\\&=I-E\end{aligned}$$

نیز نتیجه می‌شود. بعلاوه، $(I-E)\beta=0$ اگر و تنها اگر $\beta=E\beta$؛ این مطلب برقرار است اگروتنها اگر β در W باشد. بنابراین W فضای پوچ $I-E$ است. □

اکنون فرایند گرام-اشمیت را می‌توان به‌طور هندسی به‌طریق زیر تشریح کرد. با مفروض بودن یك فضای ضرب داخلی V و بردارهای β_1، $\dots$، β_n در V، عملگر P_k $(k>1)$ را تصویر متعامد V روی مکمل متعامد زیرفضای پدیدآمده توسط β_1، $\dots$، β_{k-1} می‌گیریم و قرار می‌دهیم $P_1=I$. در این صورت بردارهایی که از به‌کاربستن فرایند متعامدسازی روی β_1، $\dots$، β_n به‌دست می‌آیند، با معادلات

$$\alpha_k=P_k\beta_k \qquad 1\leqslant k\leqslant n \tag{۸-۱۲}$$

تعریف می‌شوند.

قضیهٔ ۵ نتیجه دیگری را نیزایجاب می‌کند که‌به **نامساوی بسل**[1] مشهور است.

نتیجه. فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ مجموعه‌ای متعامد از بردارهای غیرصفرفضای

---

1. Bessel

ضرب داخلی V باشد. اگر β برداری از V باشد، آنگاه

$$\sum_k \frac{|(\beta|\alpha_k)|^2}{||\alpha_k||^2} \leqslant ||\beta||^2$$

وتساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$$\beta = \sum_k \frac{(\beta|\alpha_k)}{||\alpha_k||^2}\alpha_k .$$

اثبات. فرض کنیم $\gamma = \sum_k [(\beta|\alpha_k)/||\alpha_k||^2]\alpha_k$. دراین صورت $\beta = \gamma + \delta$ ودر آن $(\gamma|\delta) = 0$. از این‌رو

$$||\beta||^2 = ||\gamma||^2 + ||\delta||^2.$$

اکنون کافی است ثابت کنیم که

$$||\gamma||^2 = \sum_k \frac{|(\beta|\alpha_k)|^2}{||\alpha_k||^2} .$$

ایـن محاسبهٔ سرراستی است کـه درآن ازاین مطلب کـه به‌ازای $j \neq k$، $(\alpha_j|\alpha_k) = 0$، استفاده می‌شود. □

درحالت خاصی که در آن $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ یك مجموعهٔ‌متعامد یکه‌باشد، نامساوی بسل می‌گوید که

$$\sum_k |(\beta|\alpha_k)|^2 \leqslant ||\beta||^2.$$

این نتیجـه همچنین حاکی است کـه درایـن حـالت β در زیرفضای پدیدآمـده توسط α_1، $\ldots$، α_n قراردارد اگر وتنها اگر

$$\beta = \sum_k (\beta|\alpha_k)\alpha_k$$

یا اگروتنها اگرنامساوی بسل واقعاً یك تساوی باشد. بدیهی است درموردی‌که V با بعد متناهی و $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه برای V باشد، فرمول بالا برای هربردار β در V برقرار است. به‌بیان دیگر، اگر $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه برای V باشد، kمین مختص β درپایهٔ مرتب $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ عبارت است از $(\beta|\alpha_k)$.

مثال ۱۵. نتیجهٔ اخیررا روی مجموعه‌های متعامد توصیف شده در مثال ۱۱ به‌کار می‌بندیم وبه‌دست می‌آوریم که

$$\sum_{k=-n}^{n} \left|\int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}dt\right|^2 \leqslant \int_0^1 |f(t)|^2 dt \qquad \text{(الف)}$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi ikt}\right|^2 dt = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \quad \text{(ب)}$$

$$\int_0^1 (\sqrt{2}\cos 2\pi t + \sqrt{2}\sin 4\pi t)^2 dt = 1 + 1 = 2. \quad \text{(پ)}$$

تمرین

۱. R^4 با ضرب داخلی استانده را درنظر بگیرید. W را زیرفضایی از R^4 متشکل از همهٔ بردارهایی که هم‌بر $\alpha=(1, 0, -1, 1)$ و هم‌بر $\beta=(2, 3, -1, 2)$ عمود هستند فرض کنید و پایه‌ای برای W بیابید.

۲. فرایند گرام ـ اشمیت را بر بردارهای $\beta_1=(1, 0, 1)$، $\beta_2=(1, 0, -1)$، و $\beta_3=(0, 3, 4)$ به‌کاربندید تا پایهٔ متعامدیکه‌ای برای R^3 با ضرب داخلی استانده به‌دست آورید.

۳. C^3 را با ضرب داخلی استانده درنظر بگیرید. یك پایهٔ متعامد یکه برای زیرفضای پدیدآمده توسط $\beta_1=(1, 0, i)$ و $\beta_2=(2, 1, 1+i)$ بیابید.

۴. فرض کنید V یك فضای ضرب داخلی باشد. **فاصلهٔ** بین دوبردار α و β در V با

$$d(\alpha, \beta)=\|\alpha-\beta\|$$

تعریف می‌شود. نشان‌دهید که

(الف) $d(\alpha, \beta)\geqslant 0$؛
(ب) $d(\alpha, \beta)=0$ اگر وتنها اگر $\alpha=\beta$؛
(پ) $d(\alpha, \beta)=d(\beta, \alpha)$؛
(ت) $d(\alpha, \beta)\leqslant d(\alpha, \gamma)+d(\gamma, \beta)$.

۵. فرض کنید V یك‌فضای ضرب‌داخلی‌باشد، و α و β بردارهایی از V باشند. نشان‌دهید $\alpha=\beta$ اگر وتنها اگر به‌ازای هر γ در V، $(\alpha|\gamma)=(\beta|\gamma)$.

۶. فرض کنید W زیرفضایی از R^2 پدید آمده توسط بردار $(3, 4)$ باشد. بااستفاده از ضرب داخلی استانده، E را تصویر متعامد R^2 بروی W بگیرید. مطلوب است:

(الف) فرمولی برای $E(x_1, x_2)$؛
(ب) ماتریس E درپایهٔ مرتب استانده؛
(پ) $W^\perp$؛
(ت) پایهٔ متعامد یکه‌ای که در آن E با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده شود.

۷. فرض کنید V فضای داخلی متشکل از R^2 همراه با ضرب داخلی باشد که فرم درجهٔ دوم آن طبق

$$||(x_1, x_2)||^2 = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$$

تعریف می‌شود. E را تصویر متعامد V بروی زیرفضای W پدید آمده توسط بردار (۳ ,۴) می‌گیریم. اکنون به‌چهار پرسش تمرین ۶ پاسخ دهید.

۸. ضربی داخلی روی R^2 بیابید که $(\epsilon_1, \epsilon_2) = 2$.

۹. فرض کنید V زیرفضایی از $R[x]$ متشکل از چندجمله‌ایهای از درجهٔ حداکثر ۳ باشد. V را به‌ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

مجهز کنید.

(الف) مکمل متعامد زیرفضای چندجمله‌ایهای اسکالری را بیابید.
(ب) فرایند گرام ـ اشمیت را برپایهٔ $\{1, x, x^2, x^3\}$ به‌کار بندید.

۱۰. فرض کنید V فضای برداری همهٔ ماتریسهای $n \times n$ برروی C با ضرب داخلی $(A|B) = \operatorname{tr}(AB^*)$ باشد. مکمل متعامد زیرفضای ماتریسهای قطری را بیابید.

۱۱. فرض کنید V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامدیکه برای V باشد. نشان‌دهید که به‌ازای هر دوبردار α و β در V

$$(\alpha|\beta) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha|\alpha_k)(\overline{\beta|\alpha_k}) .$$

۱۲. فرض کنید W زیرفضایی با بعد متناهی از یك فضای ضرب داخلی V، و E تصویر متعامد V روی W باشد. ثابت کنید که بازای‌هر α و β در V، $(E\alpha|\beta) = (\alpha|E\beta)$.

۱۳. S را زیرمجموعه‌ای از یك فضای ضرب داخلی V می‌گیریم. نشان‌دهید $(S^\perp)^\perp$ زیرفضای پدیدآمده توسط S را دربردارد. وقتی که V با بعد متناهی باشد، نشان‌دهید $(S^\perp)^\perp$ همان زیرفضای پدید آمده توسط S است.

۱۴. فرض کنید V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه برای V باشد. فرض کنید T عملگری خطی روی V و A ماتریس T در پایهٔ مرتب $\mathscr{B}$ باشد. ثابت کنید

$$A_{ij} = (T\alpha_j|\alpha_i) \cdot$$

۱۵. فرض کنید $V = W_1 \oplus W_2$ و f_1 و f_2 بترتیب ضربهایی داخلی روی W_1 و W_2 باشند. نشان دهید ضرب‌داخلی یکتایی چون f روی V وجود دارد که

(الف) $W_2 = W_1^{\perp}$ ؛

(ب) وقتی α و β در W_k ، $k = 1, 2$ ، باشند، $f(\alpha, \beta) = f_k(\alpha, \beta)$.

۱۶. فرض کنید V یك فضای ضرب داخلی و W زیرفضایی با بعد متناهی از V باشد. (معمولاً) تصویرهای بسیاری یافت می‌شوند که برد شان W است. یکی از اینها، که تصویر متعامد روی W است، این خاصیت را دارد که به‌ازای هر α در V ، $||E\alpha|| \leqslant ||\alpha||$. ثابت کنید که اگر E یك تصویر با برد W باشد و به‌ازای هر α در V ، $||E\alpha|| \leqslant ||\alpha||$ ، آنگاه E تصویر متعامد روی W است.

۱۷. فرض کنید V فضای ضرب داخلی حقیقی متشکل از فضای توابع پیوستهٔ حقیقی روی فاصلهٔ $-1 \leqslant t \leqslant 1$ با ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_{-1}^{+1} f(t)g(t)dt$$

باشد. W را زیرفضای توابع فرد، یعنی توابعی که در $f(-t) = -f(t)$ صدق می‌کنند، می‌گیریم. مکمل متعامد W را بیابید.

۳.۸. تابعکهای خطی و الحاقیها

قسمت اول این بخش به بحث درمورد تابعکهای خطی روی یك فضای ضرب داخلی و رابطهٔ آنها با ضرب داخلی اختصاص دارد. نتیجهٔ بنیادی این است که هر تابعك خطی f روی یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، «ضربی‌داخلی درازای برداری ثابت از فضا» است؛ یعنی، چنین f ی به‌ازای β ی ثابتی از V به‌صورت $f(\alpha) = (\alpha|\beta)$ است. این نتیجه را برای اثبات وجود «الحاقی» عملگری خطی چون T روی V ، که خود عملگری خطی چون T^* باشرط $(T\alpha|\beta) = (\alpha|T^*\beta)$ به‌ازای همهٔ αها و βهای در V است، به‌کار می‌بریم. با استفاده از یك پایهٔ متعامدیکه، این عمل الحاقی روی عملگرهای خطی (رسیدن از T به T^*) همانند با عمل تشکیل ترانهادهٔ مزدوج یك ماتریس، گرفته می‌شود. سپس دربارهٔ شباهت بین عمل الحاقی ومزدوج گیری دراعداد مختلط به‌اندك کاوشی می‌پردازیم.

فرض کنیم V فضای ضرب داخلی دلخواه و β بردار ثابتی از V باشد. تابعی چون

f_β از V درهیأت اسکالری را طبق

$$f_\beta(\alpha)=(\alpha|\beta)$$

تعریف می‌کنیم. این تابع f_β تابعکی خطی روی V است؛ زیرا، بنابر تعریف، $(\alpha|\beta)$ به‌عنوان تابعی از α خطی است. اگر V با بعد متناهی باشد، هر تابعك خطی روی V بدین‌طریق از برداری چون β حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۶. فرض کنیم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و f تابعکی خطی روی V باشد. در این صورت بردار یکتایی چون β در V وجود دارد، که به ازای هر α در V، $f(\alpha)=(\alpha|\beta)$.

اثبات. فرض کنیم $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامدیکه برای V باشد. می‌نویسیم

$$\beta=\sum_{j=1}^{n}\overline{f(\alpha_j)}\alpha_j \qquad (۸-۱۳)$$

وفرض می‌کنیم f_β تابعك خطی تعریف شده توسط

$$f_\beta(\alpha)=(\alpha|\beta)$$

باشد. دراین صورت

$$f_\beta(\alpha_k)=(\alpha_k|\sum_j\overline{f(a_j)}\,\alpha_j)=f(\alpha_k).$$

چون این مطلب به ازای هر α_k درست است، نتیجه می‌شود که $f=f_\beta$. حال فرض کنیم γ برداری در V باشد به طوری که به ازای هر α، $(\alpha|\beta)=(\alpha|\gamma)$. آنگاه $(\beta-\gamma|\beta-\gamma)=0$ و $\beta=\gamma$. پس، دقیقاً یك بردارچون β وجود داردکه تابعك‌خطی f را به طریقه‌ای که ذکر شد، تعیین می‌کند. □

اثبات این قضیه‌می‌تواند به‌صورت دیگری برحسب نمایش تابعکهای خطی دریك‌پایه هم بیان شود. اگرپایه متعامدیکهٔ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ را برای V انتخاب کنیم، ضرب‌داخلی $\alpha=x_1\alpha_1+\dots+x_n\alpha_n$ و $\beta=y_1\alpha_1+\dots+y_n\alpha_n$ برابر است با

$$(\alpha|\beta)=x_1\bar{y}_1+\dots+x_n\bar{y}_n.$$

اگر f تابعکی خطی‌روی V باشد، آنگاه f به ازای‌اسکالرهای ثابتی چون $c_1, \dots, c_n$ که توسط این پایه تعیین می‌شوند، به صورت

$$f(\alpha)=c_1x_1+\dots+c_nx_n$$

نوشته می‌شود. بدیهی است که $c_j=f(\alpha_j)$. اگر بخواهیم برداری چون β در V بیابیم که به ازای هر α ، $f(\alpha)=(\alpha|\beta)$، روشن است که مختصات y_j از β باید در $\bar{y}_j=c_j$ یا $y_j=\overline{f(\alpha_j)}$ صدق کنند. ازاین‌رو،

$$\beta=\overline{f(\alpha_1)}\alpha_1+\cdots+\overline{f(\alpha_n)}\alpha_n$$

بردار مطلوب است.

چند توضیح دیگرهم درپیش است. اثباتی راکه برای قضیهٔ ۶ ارائه‌کردیم به‌طور رضایت‌بخشی خلاصه است، اما براین واقعیت مهم هندسی کــه β در مکمل متعامد فضای پوچ f قــرار دارد هیچ تأکید نمی‌کند. گیریم W فضای پوچ f باشد. در این صورت $V=W+W^\perp$ و f توسط مقادیرش روی $W^\perp$ کاملا تعیین می‌شود. درواقع، اگــر P تصویر متعامد V روی $W^\perp$ باشد، آنگاه به ازای هر α در V

$$f(\alpha)=f(P\alpha)\,.$$

فرض‌کنیم $f\neq 0$. آنگاه f از رتبهٔ ۱ است و ۱ $=$ بعد $(W^\perp)$. اگر γ برداری غیر صفر در $W^\perp$ باشد، نتیجه می‌شود که به ازای هر α در V

$$P\alpha=\frac{(\alpha|\gamma)}{||\gamma||^2}\gamma.$$

پس، به ازای هر α

$$f(\alpha)=(\alpha|\gamma)\cdot\frac{f(\gamma)}{||\gamma||^2}$$

و $\beta=[\overline{f(\gamma)}/||\gamma||^2]\gamma$.

مثال ۱۶. بهتر است مثالی بزنیم که نشان دهد قضیهٔ ۶ بدون این فرض که V بــا بعد متناهی است، درست نیست. V را فضای برداری چند جمله‌ایهای برروی هیأت‌اعداد مختلط با ضرب داخلی

$$(f|g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

می‌گیریم. این ضرب داخلی رامی‌توان به‌طورجبری نیز تعریف‌کرد. اگر $f=\sum\alpha_k x^k$ و $g=\sum b_k x^k$ ، آنگاه

$$(f|g)=\sum_{j,k}\frac{1}{j+k+1}\alpha_j\bar{b}_k.$$

گیریم z عدد مختلط ثابتی و L تابعك خطی «تعیین مقدار در z» باشد:

$$L(f)=f(z).$$

آیا یك چند جمله‌ای چون g وجود داردکه به ازای هر f ، $(f|g)=L(f)$؟ جواب منفی است؛ زیرا فرض کنیم به ازای هر f داشته باشیم

$$f(z)=\int_{0}^{1}f(t)\overline{g(t)}dt\,.$$

با فرض $h=x-z$ ، به ازای هر f داریم $(hf)(z)=0$. دراین صورت به ازای هر f

$$0=\int_{0}^{1}h(t)f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

بخصوص، این تساوی برای $f=\bar{h}g$ نیز برقرار است، پس

$$\int_{0}^{1}|h(t)|^2|g(t)|^2dt=0$$

و از این رو، $hg=0$. چون $h\neq 0$ ، باید داشته باشیم $g=0$. ولی L تابعك صفر نیست؛ بنابراین، چنین gیی وجود ندارد.

این مثال را می‌توان تا اندازه‌ای به حالتی که در آن L ترکیبی خطی از تعیین مقدارهای نقطه‌ای باشد تعمیم داد. فرض کنیم اعداد مختلط ثابتی چون z_1، . . . ، z_n و اسکالرهایی چون c_1، . . . ، c_n انتخاب شده باشند و

$$L(f)=c_1f(z_1)+\cdots+c_nf(z_n)$$

را درنظر بگیریم. دراین صورت L تابعکی خطی روی V است، اما هیچ g با خاصیت $L(f)=(f|g)$ وجود ندارد مگر آنکه $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$. حال عیناً استدلال بالا را با $h=(x-z_1)\cdots(x-z_n)$ تکرار می‌کنیم.

اکنون به مفهوم الحاقی یك عملگر خطی بازمی‌گردیم.

قضیهٔ ۷. به ازای هر عملگر خطی T روی یك فضای ضرب داخلی بعدمتناهی V ، عملگر خطی یکتایی چون T^* روی V وجود دارد که به ازای هر α وهر β از V ،

$$(T\alpha|\beta)=(\alpha|T^*\beta). \qquad (۱۴-۸)$$

اثبات. گیریم β برداری دلخواه از V باشد. دراین صورت $\alpha\to(T\alpha|\beta)$ تابعکی خطی روی V است. بنابرقضیهٔ ۶، برداریکتایی چون β' در V وجود دارد که به ازای‌هر α در V ، $(T\alpha|\beta)=(\alpha|\beta')$. فرض‌کنیم T^* نگاشت $\beta\to\beta'$ را نشان‌دهد:

$$\beta' = T^*\beta.$$

لذا (۸ـ۱۴) برقرار است، اما باید نشان دهیم که T^* عملگری خطی است. گیریم β و γ در V و c یك اسکالر باشد. دراین صورت به ازای هر α ،

$$\begin{aligned}(\alpha|T^*(c\beta+\gamma)) &= (T\alpha|c\beta+\gamma)\\ &= (T\alpha|c\beta)+(T\alpha|\gamma)\\ &= \bar{c}(T\alpha|\beta)+(T\alpha|\gamma)\\ &= \bar{c}(\alpha|T^*\beta)+(\alpha|T^*\gamma)\\ &= (\alpha|cT^*\beta)+(\alpha|T^*\gamma)\\ &= (\alpha|cT^*\beta+T^*\gamma)\ .\end{aligned}$$

پس ، $T^*(c\beta+\gamma)=cT^*\beta+T^*\gamma$ و T^* خطی است.

یکتایی T^* واضح است. به ازای هر β در V ، بردار $T^*\beta$ به عنوان بردار β' با این شرط که به ازای هر α ، $(T\alpha|\beta)=(\alpha|\beta')$ به طور یکتا تعیین می‌شود. □

قضیهٔ ۸. فرض‌کنیم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه (مرتب) برای V باشد. T را عملگری خطی روی V و A را ماتریس T درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ می‌گیریم، آنگاه $A_{kj}=(T\alpha_j|\alpha_k)$.

اثبات. چون $\mathcal{B}$ یك پایهٔ متعامد یکه است، داریم

$$\alpha=\sum_{k=1}^{n}(\alpha|\alpha_k)\alpha_k.$$

ماتریس A با

$$T\alpha_j=\sum_{k=1}^{n}A_{kj}\alpha_k$$

تعریف می‌شود، وچون

$$T\alpha_j=\sum_{k=1}^{n}(T\alpha_j|\alpha_k)\alpha_k$$

داریم

$$A_{kj}=(T\alpha_j|\alpha_k).\ \square$$

نتیجه. گیریم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V

باشد. در هر پایهٔ متعامد یکه برای V، ماتریس T^* عبارت است از ترانهادهٔ مزدوج ماتریس T.

اثبات. $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ را پایهٔ متعامد یکه‌ای برای V می‌گیریم و فرض می‌کنیم $B=[T^*]_{\mathcal{B}}$، $A=[T]_{\mathcal{B}}$.

بنا بر قضیهٔ ۸

$$A_{kj}=(T\alpha_j|\alpha_k)$$
$$B_{kj}=(T^*\alpha_j|\alpha_k).$$

دراین صورت طبق تعریف T^* داریم

$$\begin{aligned} B_{kj} &= (T^*\alpha_j|\alpha_k) \\ &= \overline{(\alpha_k|T^*\alpha_j)} \\ &= \overline{(T\alpha_k|\alpha_j)} \\ &= \overline{A_{jk}}. \square \end{aligned}$$

مثال ۱۷. فرض کنیم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و E تصویر متعامد V روی یك زیرفضای W باشد. دراین صورت به ازای هردوبردار α و β در V،

$$\begin{aligned} (E\alpha|\beta) &= (E\alpha|E\beta+(1-E)\beta) \\ &= (E\alpha|E\beta) \\ &= (E\alpha+(1-E)\alpha|E\beta) \\ &= (\alpha|E\beta). \end{aligned}$$

بنا بریکتایی عملگر E^* نتیجه می‌شود که $E=E^*$. حال تصویر E توصیف شده درمثال ۱۴ را درنظر می‌گیریم. دراین صورت

$$A=\frac{1}{154}\begin{bmatrix} 9 & 36 & -3 \\ 36 & 144 & -12 \\ -3 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$

عبارت است از ماتریس E در پایهٔ متعامد یکه استانده. چون $E=E^*$، A ماتریس E^* نیزهست، وچون $A=A^*$، این مطلب ناقض نتیجهٔ فوق نیست. ازطرف دیگر، فرض کنیم

$$\alpha_1=(154, 0, 0)$$
$$\alpha_2=(145, -36, 3)$$

$$\alpha_3=(-36,\ 10,\ 12).$$

دراین‌صورت $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ یك پایه است و

$$E\alpha_1=(9,\ 36,\ -3)$$

$$E\alpha_2=(0,\ 0,\ 0)$$

$$E\alpha_3=(0,\ 0,\ 0).$$

چون $(9, 36, -3) = -(154, 0, 0)-(145, -36, 3)$ ، B ، ماتریس E درپایهٔ $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ، با تساوی

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود. دراین حالت ، $B\neq B^*$ و B^* ماتریس $E^*=E$ درپایهٔ $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ نیست. با به‌کاربستن نتیجهٔ فوق درمی‌یابیم که $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ یك پایهٔ متعامد یکه نیست. البته، به‌هرحال این مطلب آشکار هست.

تعریف. گیریم T عملگری خطی روی یــك فضای ضرب داخلی V باشد. در این صورت‌گوییم **T دارای یك الحاقی روی V** است، هرگاه عملگری خطی چون T^* روی V موجود باشدکه به‌ازای هر α و β در V ، $(T\alpha|\beta)=(\alpha|T^*\beta)$.

بنا برقضیهٔ ۷، هرعملگر خطی روی یك فضای ضرب‌داخلی با بعد متناهی V دارای یك الحاقی روی V است. درحالت با بعد نامتناهی، این مطلب همیشه درست نیست. ولی درهرصورت، حداکثر یك چنین عملگر T^* وجود دارد؛ وقتی که این عملگر وجود داشته باشد، آن‌را **الحاقی T** می‌نامیم.

درحالت بعد متناهی، تذکر دومطلب لازم است.

۱. الحاقی T نه‌تنها به T ، بلکه به‌ضرب داخلی نیز وابسته است.

۲. همان‌طورکه درمثال ۱۷ نشان داده شد، درپایهٔ مرتب دلخواهی چون $\mathcal{B}$ ، رابطهٔ بین $[T]_{\mathcal{B}}$ و $[T^*]_{\mathcal{B}}$ پیچیده‌تراز آن است‌که درنتیجهٔ فوق ارائه شد.

مثال ۱۸. V را $C^{n\times 1}$ ، فضای ماتریسهای $n\times 1$ مختلط ، بـا ضـرب داخلـی $(X|Y)=Y^*X$ می‌گیریم. اگر A ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های مختلط باشد، الحاقـی عملگر خطی $X\to AX$ عبارت است از عملگر $X\to A^*X$ زیرا ،

$$(AX|Y) = Y^*AX = (A^*Y)^*X = (X|A^*Y).$$

خواننده باید خود را متقاعدکند که این مثال در واقع حالت خاصی از نتیجهٔ اخیر است.

مثال ۱۹. این مثال مشابه مثال ۱۸ است. V را $C^{n\times n}$ با ضرب داخلی $(A|B) = \operatorname{tr}(B^*A)$ می‌گیریم. فرض کنیم M ماتریس $n\times n$ ثابتی بر روی C باشد. الحاقی ضرب ازچپ در M، برابر ضرب ازچپ در M^* است. بدیهی است که «ضرب از چپ در M» عملگر خطی L_M تعریف شده با $L_M(A) = MA$ است.

$$\begin{aligned}(L_M(A)|B) &= \operatorname{tr}(B^*(MA))\\ &= \operatorname{tr}(MAB^*)\\ &= \operatorname{tr}(AB^*M)\\ &= \operatorname{tr}(A(M^*B)^*)\\ &= (A|L_M{}^*(B)).\end{aligned}$$

پس $L_M{}^* = (L_M)^*$. درمحاسبهٔ بالا از خاصیت مشخص تابع رد: $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ دوبار استفاده شده است.

مثال ۲۰. فرض کنیم V فضای چندجمله‌ایهای برروی هیأت اعداد مختلط با ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

باشد. اگر f چندجمله‌ای $f = \sum a_k x^k$ باشد، فرض می‌کنیم $\bar{f} = \sum \bar{a}_k x^k$. درحقیقت، $\bar{f}$ آن‌چندجمله‌ای است که تابع چندجمله‌ای وابسته بدان مزدوج مختلط تابع چندجمله‌ای برای f است:

$$\bar{f}(t) = \overline{f(t)} \quad \text{و} \quad t \text{حقیقی}$$

عملگر «ضرب در f»، یعنی عملگرخطی M_f تعریف‌شده توسط $M_f(g) = fg$ را درنظر می‌گیریم. این عملگر دارای یك الحاقی، یعنی عملگر ضرب در $\bar{f}$ است. زیرا

$$\begin{aligned}(M_f(g)|h) &= (fg|h)\\ &= \int_0^1 f(t)g(t)\overline{h(t)}\,dt\\ &= \int_0^1 g(t)[\overline{\overline{f(t)}h(t)}]\,dt\end{aligned}$$

$$= (g|\bar{f}h)$$
$$= (g|M_{\bar{f}}(h))$$

واز این‌رو، $(M_{\bar{f}})^* = M_f$.

مثال ۲۱. درمثال ۲۰ دیدیم که برخی از عملگرهـای خطی روی فضاهای ضرب داخلی با بعد نامتناهی نیز دارای الحاقی هستند. به‌طوری که قبلاً توضیح دادیم، برخی نیز الحاقی ندارند. گیریم V فضای ضرب داخلی مثال ۲۰ و D عملگر مشتق‌گیری روی $C[x]$ باشد. انتگرال‌گیری جزء به‌جزء نشان می‌دهد که

$$(Df|g) = f(1)g(1) - f(0)g(0) - f(Dg)$$

g را ثابت می‌گیریم وتحقیق می‌کنیم که چه وقت یك چندجمله‌ای چون D^*g وجود دارد که به‌ازای هر f، $(Df|g) = (f|D^*g)$. اگرچنین D^*g یـی وجود داشته باشد، خواهیم داشت

$$(f|D^*g) = f(1)g(1) - f(0)g(0) - (f|Dg)$$

یا

$$(f|D^*g + Dg) = f(1)g(1) - f(0)g(0).$$

با g ثابت، $L(f) = f(1)g(1) - f(0)g(0)$ تابعکی خطی از نوع درنظر گرفته شده در مثال ۱۶ است و نمی‌تواند به‌صورت $L(f) = (f|h)$ باشد مگرآنکه $L = 0$. اگـر D^*g وجود داشته باشد، آنگاه به‌ازای $h = D^*g + Dg$، البته داریـم $L(f) = (f|h)$ و ازاین‌رو $g(0) = g(1) = 0$. وجود چندجمله‌ای مناسبی چون D^*g ایجاب می‌کند که $g(1) = g(0) = 0$. بعـکس، اگـر $g(1) = g(0) = 0$، چندجمله‌ای $D^*g = -Dg$، به‌ازای هر f، در $(Df|g) = (f|D^*g)$ صدق می‌کند. اگریك g انتخاب کنیم که به‌ازای آن $g(0) \neq 0$ یا $g(1) \neq 0$، نمی‌تـوانیم D^*g را به‌صورت مناسبی تعـریف کنیم و از این‌رو نتیجه می‌گیریم که D دارای الحاقی نیست.

امیدواریم که این مثالها درك خواننده را درمورد الحاقی عملگرهای خطی بیفزاید. می‌بینیم که عمل الحاقی، از T به T^* رسیدن، به‌نحوی شبیه به‌مزدوج‌گیری روی اعداد مختلط رفتار می‌کند. قضیهٔ زیراین شباهت را تقویت می‌کند.

قضیهٔ ۹. گیریم V یـك فضای ضرب داخلی با بعـد متناهی باشد. اگـر T و U عملگرهای خطی روی V باشند و c یك اسکالر باشد،

(۱) $(T+U)^* = T^* + U^*$؛

(۲) $(cT)^* = \bar{c}T^*$؛

(۳) $(TU)^* = U^*T^*$؛

(۴) $(T^*)^* = T$.

اثبات. برای اثبات (۱)، α و β را بردارهایی دلخواه از V می‌گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned}((T+U)\alpha|\beta) &= (T\alpha+U\alpha|\beta)\\ &= (T\alpha|\beta)+(U\alpha|\beta)\\ &= (\alpha|T^*\beta)+(\alpha|U^*\beta)\\ &= (\alpha|T^*\beta+U^*\beta)\\ &= (\alpha|(T^*+U^*)\beta).\end{aligned}$$

بنابریکتایی الحاقی، داریم $(T+U)^* = T^*+U^*$. اثبات (۲) را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. (۳) و (۴) را از روابط

$$(TU\alpha|\beta) = (U\alpha|T^*\beta) = (\alpha|U^*T^*\beta)$$

$$(T^*\alpha|\beta) = \overline{(\beta\,|\,T^*\alpha)} = \overline{(T\beta\,|\,\alpha)} = (\alpha\,|\,T\beta)$$

به‌دست می‌آوریم. □

قضیهٔ ۹ غالباً به‌صورت زیر بیان می‌شود: نگاشت $T \to T^*$ یاد یکریختی خطی مزدوجی با دورهٔ تناوب ۲ است. شباهت این عمل با مزدوج گیری مختلط، که دربالا ذکر شد، مسلماً برپایهٔ این مشاهده استوار است که مزدوج گیری مختلط دارای خواص $\overline{(z_1+z_2)} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$، $\overline{(z_1z_2)} = \bar{z}_1\bar{z}_2$، و $\bar{\bar{z}} = z$ است. باید مواظب باشیم که وارونی ترتیب دریك ضرب، که عمل الحاقی ایجاب می‌کند، رعایت شود: $(UT)^* = T^*U^*$. همچنان که به‌مطالعهٔ خود دربارهٔ عملگرهای خطی روی یك فضای ضرب داخلی ادامه می‌دهیم، گسترش این شباهت را نیز ذکرمی‌کنیم. اکنون می‌توانیم مطلبی دراین زمینه‌بیان کنیم. یك عدد مختلط z حقیقی است اگروتنها اگر $\bar{z} = z$. ممکن است تصور شود که عملگرخطی T با شرط $T = T^*$ بوجهی شبیه به اعداد حقیقی عمل می‌کند. درواقع همین‌طور است. مثلاً، اگر T عملگری خطی روی یك فضای ضرب داخلی مختلط بابعد متناهی باشد، آنگاه

$$T = U_1 + iU_2 \qquad (۱۵\text{-}۸)$$

که در آن $U_1 = U_1^*$ و $U_2 = U_2^*$. پس، به یك معنی، T دارای یك «جزء حقیقی» و یك «جزء موهومی» است. عملگرهای U_1 و U_2، که در $U_1 = U_1^*$، $U_2 = U_2^*$، و (۸-۱۵) صدق می‌کنند، یکتا هستند، واز روابط

$$U_1 = \frac{1}{2}(T+T^*)$$

$$U_2 = \frac{1}{2i}(T-T^*)$$

به‌دست می‌آیند.

عملگری خطی مانند T که $T=T^*$، **خودالحاق** (یا **هرمیتی**) نامیده می‌شود. اگر $\mathcal{B}$ پایهٔ متعامد یکه‌ای برای V باشد، آنگاه

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]^*_{\mathcal{B}}$$

و لذا T خودالحاق است اگروتنها اگرماتریس آن درهرپایهٔ متعامدیکه ماتریسی‌خودالحاق باشد. عملگرهای خودالحاق، نه‌تنها بدین‌دلیل ساده‌که نوعی اجزای حقیقی وموهومی برای عملگرخطی عمومی فراهم می‌آورند، بلکه به‌دلایل زیرنیز از اهمیت برخوردارند: (۱) عملگرهای خودالحاق دارای خواص ویژهٔ بسیاری هستند. مثلاً، برای یک چنین عملگری، پایهٔ متعامدیکه‌ای از بردارهای سرشت‌نماوجود دارد. (۲) بسیاری ازعملگرهایی که درعمل پیش می‌آیند خودالحاق هستند. خواص ویژهٔ عملگرهای خودالحاق را بعداً مورد رسیدگی قرارخواهیم داد.

تمرین

۱. V را فضای C^2 با ضرب داخلی استانده بگیرید و فرض کنید T عملگرخطی تعریف‌شده توسط $T\epsilon_1 = (1, -2)$ و $T\epsilon_2 = (i, -1)$ باشد. اگر $\alpha = (x_1, x_2)$ آنگاه $T^*\alpha$ را بیابید.

۲. فرض کنید T عملگری‌خطی روی C^2 باشدکه با $T\epsilon_1 = (1+i, 2)$ و $T\epsilon_2 = (i, i)$ تعریف می‌شود. با استفاده ازضرب داخلی استانده، ماتریس T^* درپایهٔ مرتب استانده را بیابید. آیا T با T^* جابجا می‌شود؟

۳. فرض کنید V فضای C^3 با ضرب داخلی استانده باشد. فرض کنید T عملگری خطی روی V باشدکه ماتریس آن درپایهٔ مرتب استانده با

$$A_{jk} = i^{j+k}, \qquad (i^2 = -1)$$

تعریف می‌شود. پایه‌ای برای فضای پوچ T^* بیابید.

۴. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد. نشان دهیدکه برد T^* مکمل متعامد فضای پوچ T است.

۵. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد.

اگر T معکوس‌پذیر باشد. نشان‌دهید که T^* نیز معکرس‌پذیر است و $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

۶. فرض کنید V یك فضای ضرب داخلی و β و γ بردارهای ثابتی از V باشند. نشان دهید که $T\alpha = (\alpha | \beta)\gamma$ عملگری خطی روی V تعریف می‌کند. همچنین نشان‌دهید T دارای یك الحاقی است، و T^* را هم به‌طور صریح توصیف کنید.
اکنون فرض کنید V فضای C^n باضرب داخلی‌استانده‌باشد و $\beta = (y_1, \cdots, y_n)$ و $\gamma = (x_1, \cdots, x_n)$، درایهٔ j, k ماتریس T درپایهٔ مرتب استانده چیست؟ رتبهٔ این ماتریس چند است؟

۷. نشان دهید حاصلضرب دوعملگر خودالحاق، عملگری است خودالحاق اگروتنها اگر دوعملگر با یکدیگرجابجا شوند.

۸. فرض کنید V فضای برداری چندجمله‌ایهای برروی R با درجه حداکثر ۳ و باضرب داخلی

$$(f | g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$$

باشد. اگر t عددی حقیقی باشد، چندجمله‌ای g_t در V راکه برای آن به‌ازای هر f در V، $(f | g_t) = f(t)$ بیابید.

۹. V را فضای ضرب داخلی تمرین ۸ و D را عملگر مشتق‌گیری روی V بگیرید. D^* را بیابید.

۱۰. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ برروی اعداد مختلط با ضرب داخلی $(A, B) = \operatorname{tr}(AB^*)$ باشد. فرض کنید P ماتریس معکوس‌پذیر ثابتی از V و T_P عملگری خطی روی V تعریف شده توسط $T_P(A) = P^{-1}AP$ باشد. الحاقی T_P را بیابید.

۱۱. فرض کنید V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و E عملگرخطی خودتوانی روی V باشد، بدین‌معنی که $E = E^2$. ثابت کنید E خودالحاق است اگروتنها اگر $EE^* = E^*E$.

۱۲. فرض کنید V یك فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی و T عملگری خطی‌روی V باشد. ثابت کنید که T خودالحاق است اگروتنها اگر به‌ازای هر α در V $(T\alpha | \alpha)$ حقیقی باشد.

۴.۸. عملگرهای یکانی

دراین بخش، مفهوم یکریختی بین دوفضای ضرب داخلی را مورد توجه قرارمی‌دهیم. اگر V و W فضاهایی برداری باشند، یك یکریختی از V بروی W تبدیل خطی یك به‌یکی از V بروی W، یعنی، تناظری یك به یك بین عناصر V و عناصر W است که عملهای فضای برداری را هم حفظ می‌کند. اما یك فضای ضرب داخلی متشکل است از یك فضای برداری ویك ضرب داخلی مشخص روی آن فضا. پس وقتی که V و W فضاهای ضرب داخلی باشند، به‌چنان یکریختی از V بروی W نیاز خواهیم داشت که نه‌تنها عملهای خطی بلکه ضربهای داخلی را نیزحفظ کند. یك یکریختی از یك فضای ضرب داخلی بروی خودش یك «عملگریکانی» روی آن فضا نامیده می‌شود. ما مثالهای گوناگونی ازعملگرهای یکانی را مورد رسیدگی قرارخواهیم داد وخواص بنیادی آنها را محقق خواهیم ساخت.

تعریف. گیریم V و W دو فضای ضرب داخلی برروی یك هیأت و T تبدیلی خطی از V در W باشد. گوییم T **ضربهای داخلی را حفظ می‌کند** هرگاه به‌ازای هر α و هر β در V، $(T\alpha|T\beta)=(\alpha|\beta)$. یك **یکریختی** از V بروی W عبارت است از یك یکریختی فضای برداری مانند T از V بروی W که ضربهای داخلی را نیز حفظ کند.

اگر T ضربهای داخلی را حفظ کند، آنگاه $\|T\alpha\|=\|\alpha\|$ ولذا T لزوماً نامنفرد است. پس یك یکریختی از V بروی W را همچنین می‌توان به‌عنوان تبدیلی خطی از V بروی W که ضربهای داخلی را نیزحفظ می‌کند، تعریف کرد. اگر T یك یکریختی از V بروی W باشد، آنگاه T^{-1} یك یکریختی از W بروی V است؛ ازاین‌رو، وقتی که چنین Tیی موجود باشد، به‌طور ساده خواهیم گفت که V و W **یکریخت** هستند. بدیهی است که یکریختی فضاهای ضرب داخلی، یك رابطهٔ هم‌ارزی است.

قضیهٔ ۱۰. گیریم V و W دوفضای ضرب داخلی با بعدمتناهی و با ابعاد برابربرروی یك هیأت باشند. اگر T تبدیلی خطی از V در W باشد، احکام ذیل هم‌ارزند.

(۱) T ضربهای داخلی را حفظ می‌کند.

(۲) T یك یکریختی (فضای ضرب داخلی) است.

(۳) T هرپایهٔ متعامد یکه از V را بروی یك پایهٔ متعامد یکه از W انتقال می‌دهد.

(۴) T پایهٔ متعامد یکه‌ای از V را بروی یك پایهٔ متعامد یکه از W انتقال می‌دهد.

اثبات. (۲) $\leftarrow$ (۱). اگر T ضربهای داخلی را حفظ کند، آنگاه به‌ازای هر α در V، $\|T\alpha\|=\|\alpha\|$. پس، T نامنفرد است، وچون بعد $(W)=$ بعد (V)، می‌دانیم که T یك یکریختی فضای برداری است.

(۳) $\leftarrow$ (۲). فرض کنیم T یك یکریختی باشد. $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ را یك پایهٔ متعامد یکه برای V می‌گیریم. چون T یك یکریختی فضای برداری است و بعد $(V)=$ بعد (W)، نتیجه می‌شود که $\{T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n\}$ پایه‌ای برای W است.

چون T ضربهای داخلی را نیزحفظ می کند، $(T\alpha_j | T\alpha_k) = (\alpha_j | \alpha_k) = \delta_{jk}$.

(۴) ← (۳). این مرحله نیازی به‌توضیح ندارد.

(۱) ← (۴). فرض کنیم $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ چنان پایهٔ متعامد یکه‌ای برای V باشد که $\{T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n\}$ نیزیك پایهٔ متعامد یکه برای W باشد. آنگاه

$$(T\alpha_j | T\alpha_k) = (\alpha_j | \alpha_k) = \delta_{jk}.$$

به‌ازای هر $\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$ و $\beta = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n$ در V، داریم

$$(\alpha | \beta) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$$

$$\begin{aligned}(T\alpha | T\beta) &= (\sum_j x_j T\alpha_j | \sum_k y_k T\alpha_k) \\ &= \sum_j \sum_k x_j \bar{y}_k (T\alpha_j | T\alpha_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j\end{aligned}$$

ولذا T حاصلضربهای داخلی را حفظ می کند. □

نتیجه. گیریم V و W دو فضای ضرب داخلی با بعد متناهی برروی یك هیأت باشند. در این صورت V و W یکریخت‌اند اگروتنها اگر دارای ابعاد برابر باشند.

اثبات. اگر $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه برای V و $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه برای W باشد، فرض می کنیم T تبدیلی خطی از V در W باشدکه با $T\alpha_j = \beta_j$ تعریف می‌شود. دراین صورت T یك یکریختی از V بروی W است. □

مثال ۲۲. اگر V یك‌فضای‌ضرب‌داخلی nبعدی باشد، آنگاه‌هرپایهٔ متعامد یکهٔ مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ یك یکریختی از V بروی F^n با ضرب داخلی استانده، تعیین می کند. این یکریختی چیزی نیست جز تبدیل خطی

$$T(x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n) = (x_1, \ldots, x_n).$$

یکریختی ظاهراً متفاوتی از V بروی فضای $F^{n\times 1}$ با $(X|Y) = Y^*X$ به عنوان ضرب داخلی هم وجود داردکه با $\mathcal{B}$ تعیین می‌شود. این یکریختی عبارت است از

$$\alpha \rightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}}$$

یعنی تبدیلی که α را به‌ماتریس مختصات آن درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ می‌فرستد. به‌ازای هرپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$، این یك یکریختی فضای برداری است؛ اما، این یکریختی، یك یکریختی از دو فضای ضرب داخلی است اگروتنها اگر $\mathcal{B}$ متعامد یکه باشد.

مثال ۲۳. دراینجا به‌یکریختی پرمایه‌تری می‌پردازیم. گیریم W فضای همهٔ

ماتریسهای ۳ × ۳ چون A بر روی R که متقارن کج هستند، یعنی $A^t = -A$ باشد. W را به ضرب داخلی $(A|B) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(AB^t)$ مجهز می‌کنیم؛ $\frac{1}{2}$ صرفاً به‌منظور راحتی گذاشته شده است. V را فضای R^3 با ضرب داخلی‌استانده می‌گیریم. فرض کنیم T تبدیلی خطی از V در W تعریف شده توسط

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. دراین صورت T فضای V را بروی W می‌نگارد و با قراردادن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

داریم

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AB^t) &= x_3y_3 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_1 \\ &= 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3). \end{aligned}$$

پس، $(\alpha|\beta) = (T\alpha|T\beta)$ و T یك یکریختی فضای برداری است. توجه کنید که T پایهٔ استانده $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ را بروی پایهٔ متعامد یکه متشکل از سه ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

انتقال می‌دهد.

مثال ۲۴. تشریح یك یکریختی همیشه برحسب پایه‌های متعامد یکه نیست که راحت است. مثلاً، $G = P^*P$ را که درآن P ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری با درایه‌های مختلط است در نظرمی‌گیریم. فرض کنیم V فضای ماتریسهای $n \times 1$ مختلط با ضرب داخلی $[X|Y] = Y^*GX$ باشد. W را همان فضای برداری ولی با ضرب داخلی استانده $(X|Y) = Y^*X$ می‌گیریم. می‌دانیم که V و W دوفضای ضرب داخلی یکریخت هستند. به‌نظر می‌رسد که مناسبترین راه برای تشریح یك یکریختی بین V و W طریق زیر باشد:

گیریم T تبدیلی خطی از V در W تعریف شده با $T(X)=PX$ باشد. دراین‌صورت

$$\begin{aligned}(TX\,|\,TY)&=(PX\,|\,PY)\\&=(PY)^*(PX)\\&=Y^*P^*PX\\&=Y^*GX\\&=[X\,|\,Y].\end{aligned}$$

از این رو، T یك یکریختی است.

مثال ۲۵. گیریم V فضای همهٔ توابع حقیقی پیوسته روی فاصلهٔ یکهٔ $0\leqslant t\leqslant 1$ با ضرب داخلی

$$[f\,|\,g]=\int_0^1 f(t)g(t)t^2dt$$

باشد. W را همان فضای برداری ولی با ضرب داخلی

$$(f\,|\,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\;dt$$

می‌گیریم. فرض‌کنیم T تبدیلی خطی از V در W باشد‌که با

$$(Tf)(t)=tf(t)$$

داده می‌شود. دراین صورت $(Tf\,|\,Tg)=[f\,|\,g]$، و لذا T ضربهای داخلی را حفظ می‌کند؛ ولی T یك یکریختی از V بروی W نیست، چراکه برد T برابر تمام W نیست. بدیهی است، این امر به این دلیل رخ می‌دهد‌که بعد فضای برداری زمینه متناهی نیست.

قضیهٔ ۱۱. گیریم V و W دوفضای ضرب داخلی برروی یك هیات و T تبدیلی‌خطی از V در W باشد. دراین صورت T ضربهای داخلی را حفظ می‌کند اگر وتنها اگر به‌ازای هر α در V، $\|T\alpha\|=\|\alpha\|$.

اثبات. اگر T ضربهای داخلی را حفظ‌کند، «نرمها را نیز حفظ می‌کند». فرض کنیم به ازای هر α در V، $\|T\alpha\|=\|\alpha\|$. در این صورت $\|T\alpha\|^2=\|\alpha\|^2$. حال با استفاده از اتحاد قطبی مناسبی چون (۸ــ۳) یا (۸ــ۴) و این واقعیت‌که T خطی‌است، به‌آسانی دیده می‌شود‌که به ازای هر α وهر β در V، $(\alpha|\beta)=(T\alpha|T\beta)$. □

تعریف. یك عملگریکانی روی یك فضای ضرب‌داخلی، عبارت‌است از یك‌یکریختی ازآن فضا بروی خودش.

حاصل‌ضرب دو عملگر یکانی عملگری است یکانی زیرا ، اگر U_1 و U_2 یکانی باشند، آنگاه U_2U_1 معکوس‌پذیر است و به‌ازای هر α، $\|U_2U_1\alpha\| = \|U_1\alpha\| = \|\alpha\|$. همچنین، معکوس یك عملگر یکانی عملگری است یکانی؛ زیرا $\|U\alpha\| = \|\alpha\|$ حاکی است که $\|U^{-1}\beta\| = \|\beta\|$؛ در اینجا $U\alpha = \beta$. چون عملگر همانی به‌وضوح یکانی است، می‌بینیم که مجموعهٔ همهٔ عملگرهای یکانی روی یك فضای ضرب‌داخلی تحت عمل ترکیب یك گروه است.

اگر V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و U عملگری خطی روی V باشد ، قضیهٔ ۱۰ حاکی است که U یکانی است اگر و تنها اگر به ازای هر α و β در V ، $(U\alpha|U\beta) = (\alpha|\beta)$؛ یا ، اگر و تنها اگر به‌ازای یك (هر) پایهٔ متعامد یکه $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$، این درست باشد که $\{U\alpha_1, \ldots, U\alpha_n\}$ هم یك پایهٔ متعامد یکه است.

قضیهٔ ۱۲. گیریم U عملگری خطی روی یك فضای ضرب داخلی V باشد. آنگاه U یکانی است اگر وتنها اگر U^* ، الحاقی U ، وجود داشته باشد و $UU^* = U^*U = I$.

اثبات. فرض کنیم U یکانی باشد. در این صورت U معکوس‌پذیر است و به ازای هر α و هر β

$$(U\alpha|\beta) = (U\alpha|UU^{-1}\beta) = (\alpha|U^{-1}\beta).$$

ازاین رو U^{-1} الحاقی U است.

بعکس، فرض کنیم U^* وجود داشته باشد و $UU^* = U^*U = I$. آنگاه U معکوس‌پذیر است و $U^{-1} = U^*$. لذا، کافی است نشان دهیم که U ضربهای داخلی را حفظ می‌کند به ازای همهٔ α ها و همهٔ β ها داریم

$$\begin{aligned}(U\alpha|U\beta) &= (\alpha|U^*U\beta)\\ &= (\alpha|I\beta)\\ &= (\alpha|\beta)\,.\ \square\end{aligned}$$

مثال ۲۶. $C^{n\times 1}$ را با ضرب داخلی $(X|Y) = Y^*X$ درنظر می‌گیریم. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ برروی C و U عملگر خطی تعریف شده توسط $U(X) = AX$ باشد. آنگاه به ازای هر X وهر Y

$$(UX|UY) = (AX|AY) = Y^*A^*AX.$$

ازاین رو، U یکانی است اگر وتنها اگر $A^*A = I$.

تعریف. ماتریس $n \times n$ مختلط A **یکانی** نامیده می‌شود ، هرگاه $A^*A = I$.

قضیهٔ ۱۳. فرض کنیم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و U عملگری خطی روی V باشد. در این صورت U یکانی است اگر وتنها اگر ماتریس U دریك (یا هر) پایهٔ

متعامد یکه مرتب ماتریسی‌یکانی باشد.

اثبات. دراین مرحله ازکار، این چندان قضیه‌ای نیست، ولی ما عمدتاً آن رابرای تأکید بیان می‌کنیم. اگر $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ پایهٔ‌متعامدیکهٔ مرتبی برای V و A ماتریس U نسبت به $\mathcal{B}$ باشد، آنگاه $A^*A=I$ اگر وتنها اگر $U^*U=I$. اکنـون نتیجهٔ ازقضیهٔ ۱۲ حاصل می‌شود. □

گیریم A ماتریسی $n\times n$ باشد.این عبارت که A یکانی است، به‌طور ساده بدین‌معنی است که

$$(A^*A)_{jk}=\delta_{jk}$$

یا

$$\sum_{r=1}^{n}\overline{A_{rj}}A_{rk}=\delta_{jk}\,.$$

به‌بیان دیگر، معنی آن این است که ستونهای A مجموعهٔ متعامدیکه‌ای ازماتریسهای‌ستونی، نسبت به ضرب داخلی استانده $(X|Y)=Y^*X$ ، تشکیل می دهند. چون $A^*A=I$ اگر وتنهااگر $AA^*=I$ ، می‌بینیم که A دقیقاً وقتی یکانی است که سطرهای A متضمن‌مجموعهٔ متعامد یکه‌ای‌از n تاییهای‌واقع در C^n (باضرب داخلی‌استانده) باشند. لذا، با به‌کارگیری ضربهای داخلی استانده ، A یکانی است اگر وتنها اگر سطرها وستونهای A مجموعه‌های متعامد یکه باشند. دراینجا مثالی ازقدرت این قضیه‌حاکی ازاینکه هرمعکوس یك‌طرفه‌یك ماتریس یك معکوس دوطرفه آن‌هم‌هست، به چشم می‌خورد. همان‌طورکه دربالا هم‌انجام دادیم، با به کاربستن این قضیه مثلا روی‌ماتریسهای حقیقی، نتیجهٔ زیرعاید می‌شود. فرض کنیم یك‌آرایهٔ مربعی از اعداد حقیقـی داشته باشیم به‌طوری‌که مجمـوع تـوانهای دوم درایه‌های هر سطر برابر ۱ ، وسطرهای متمایز متعامد باشند. آنگاه مجموع توانهای‌دوم درایه‌های هرستون برابر ۱ است وستونهای متمایز هم متعامد هستند. اگربدون استفاده‌از هرگونه معلوماتی دربارهٔ ماتریسها، اثبات این مطلب را برای یك‌آرایهٔ ۳ × ۳ بنویسید، مسلماً تحت تأثیر قرار خواهیدگرفت.

تعریف. یك ماتریس $n\times n$ حقیقی یا مختلط A ، **متعامد** نامیده مـی‌شود ، هرگاه $A^tA=I$.

هر ماتریس متعامد حقیقی، یکانی هم هست؛ وهرماتریس یکانی متعامـد است اگر و تنها اگر همهٔ درایه‌هایش حقیقی باشند.

مثال ۲۷. حال چند مثال ازماتریسهای یکانی ومتعامد عرضه می‌کنیم.

(الف) ماتریس ۱ × ۱، $[c]$ متعامد است اگر وتنها اگر $c=\pm 1$ ویکانی است اگر

و تنها اگر $\bar{c}c=1$، شرط دوم (به‌طور بدیهی) بدین معنی است که $|c|=1$ یا $c=e^{i\theta}$ که در آن θ حقیقی است.

(ب) فرض کنیم

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

آنگاه A متعامد است اگر و تنها اگر

$$A^t=A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

بسادگی دیده می‌شود که دترمینان هرماتریس متعامد برابر ± 1 است. پس A متعامداست اگر وتنها اگر

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

یا

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

که درآن $a^2+b^2=1$. این دوحالت به وسیلهٔ مقدار $\det A$ مشخص می‌شوند.

(پ) روابط معروف بین توابع مثلثاتی نشان می‌دهند که ماتریس

$$A_\theta=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

متعامد است. اگر θ عددی حقیقی باشد، آنگاه A_θ عبارت است ازماتریس عملگرخطی U_θ، دوران به اندازهٔ زاویهٔ θ، درپایهٔ مرتب استاندهٔ R^2. این بیان که A_θ یك‌ماتریس متعامد حقیقی (و ازاین رو یکانی) است، جز اینکه U_θ عملگری یکانی است معنایی ندارد واین هم بدین معنی است که ضربهای نقطه‌ای حفظ می‌شوند.

(ت) فرض کنیم

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

آنگاه A یکانی است اگر وتنها اگر

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} = \frac{۱}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

قدرمطلق دترمینان هر ماتریس یکانی برابر ۱ است و از این روعددی مختلط به صورت $e^{i\theta}$ ، به ازای عدد حقیقی θ ، است. پس ، A یکانی است‌اگر وتنها اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -e^{i\theta}\bar{b} & e^{i\theta}\bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

که‌در آن θ عددی‌حقیقی است و a و b اعدادی مختلط باشرط $|a|^۲ + |b|^۲ = ۱$ هستند.

همان طورکه قبلا هم ذکرشد، عملگرهایی یکانی روی یك فضای ضرب داخلی‌یك گروه تشکیل می‌دهند. ازاین مطلب وقضیهٔ ۱۳ نتیجه می شودکه مجموعهٔ $U(n)$ متشکل از همهٔ‌ماتریسهای یکانی $n \times n$ نیزیك گروه است. پس،معکوس‌یك ماتریس‌یکانی‌وحاصل‌ضرب دوماتریس یکانی ماتریسی است یکانی. البته این مطلب به‌طور مستقیم هم به‌آسانی دیده می‌شود. ماتریس $n \times n$ای مانند A با درایه‌های مختلط یکانی است اگر و تنها اگر $A^{-۱} = A^*$. بنابراین، اگر A یکانی باشد، داریم $(A^{-۱})^{-۱} = A = (A^*)^{-۱} = (A^{-۱})^*$.

اگر A و B دوماتریس یکانی $n \times n$ باشند، آنگاه

$$(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱} = B^*A^* = (AB)^*.$$

فرایندگرام ــ اشمیت در C^n نتیجه‌ای جالب برای ماتریسها داردکه متضمن گروه $U(n)$ است.

قضیهٔ ۱۴. به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ مختلط معکوس‌پذیر B ماتریس پایین مثلثی یکتایی چون M ، با درایه‌های مثبت روی قطر اصلی، وجود داردکه MB یکانی است.

اثبات. سطرهای $\beta_۱$ ، . . . ، β_n از B یك پایه برای C^n تشکیل می‌دهند. گیریم $\alpha_۱$ ، . . . ، α_n بردارهای حاصل‌از $\beta_۱$ ، . . . ، β_n با فرایند گرام ـ اشمیت باشند. دراین‌صورت، به‌ازای $۱ \leqslant k \leqslant n$ ، $\{\alpha_۱, \ldots, \alpha_k\}$ پایهٔ متعامدی‌برای زیرفضای‌پدید‌آمده توسط $\{\beta_۱, \ldots, \beta_k\}$ است و

$$\alpha_k = \beta_k - \sum_{j<k} \frac{(\beta_k | \alpha_j)}{||\alpha_j||^۲} \alpha_j .$$

ازاین‌رو، به‌ازای هر k اسکالرهای یکتا چون C_{kj} وجود دارندکه

$$\alpha_k = \beta_k - \sum_{j<k} C_{kj}\beta_j .$$

گیریم U ماتریسی یکانی با سطرهای

$$\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\|\alpha_n\|}$$

و M ماتریس تعریف شده توسط

$$M_{kj} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\|\alpha_k\|} C_{kj} & \text{هرگاه } j<k \\ \dfrac{1}{\|\alpha_k\|} & \text{هرگاه } j=k \\ 0 & \text{هرگاه } j>k \end{cases}$$

باشد. دراین‌صورت M پایین مثلثی است، به‌این معنی‌که درایه‌های بالای قطر اصلی آن ۰ هستند. درایه‌های M_{kk} از M که روی قطر اصلی قرار دارند همه مثبت هستند و

$$\frac{\alpha_k}{\|\alpha_k\|} = \sum_{j=1}^{n} M_{kj}\beta_j, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n .$$

مسلماً این تساویها چیزی جز

$$U = MB$$

را بیان نمی‌کنند. برای اثبات یکتایی M، فرض‌کنیم $T^+(n)$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای پایین مثلثی $n \times n$ مختلط با درایه‌های مثبت روی قطر اصلی را نشان دهد. فرض‌کنیم M_1 و M_2 عناصری از $T^+(n)$ باشندکه به‌ازای $i = 1, 2$، M_iB در $U(n)$ قرار داشته باشد. دراین‌صورت چون $U(n)$ یك گروه است

$$(M_1B)(M_2B)^{-1} = M_1M_2^{-1}$$

نیز در $U(n)$ قرار می‌گیرد. ازطرف دیگر، هرچند کلاً آشکار نیست، $T^+(n)$ نیز تحت ضرب ماتریسی یك‌گروه است. راهی برای‌دیدن این مطلب، درنظر گرفتن خواص هندسی تبدیلهای خطی

$$X \rightarrow MX, \qquad (M \text{ در } T^+(n))$$

روی فضای ماتریسهای ستونی است. پس M_2^{-1}، $M_1M_2^{-1}$، $(M_1M_2^{-1})^{-1}$ همه در $T^+(n)$ قرار دارند. اماچون $M_1M_2^{-1}$ در $U(n)$ است، $(M_1M_2^{-1})^{-1} = (M_1M_2^{-1})^*$. ترانهاده یا ترانهادهٔ مزدوج هرماتریس پایین مثلثی، یك‌ماتریس بالا مثلثی است. بنابراین، $M_1M_2^{-1}$ هم بالا مثلثی وهم‌پایین مثلثی است، یعنی قطری است. یك ماتریس قطری یکانی است اگر و تنها اگر قدرمطلق هریك‌از درایه‌های روی قطر اصلی‌آن مساوی ۱ باشد؛ اگر درایه‌های قطری همه مثبت باشند، باید برابر ۱ باشند. از این‌رو، $M_1M_2^{-1} = I$ و $M_1 = M_2$. □

فرض‌کنیم $GL(n)$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n \times n$ مختلط معکوس‌پذیر رانشان‌دهد.

آنگاه $GL(n)$ نیز تحت ضرب ماتریسی یک گروه است. این گروه را **گروه خطی عمومی** می‌نامیم. قضیهٔ ۱۴ با نتیجهٔ ذیل هم‌ارز است.

نتیجه. به‌ازای هر B در $GL(n)$ ماتریسهای یکتایی چون N و U وجود دارند که N در $T^+(n)$ و U در $U(n)$ است، و

$$B = N \cdot U \cdot$$

اثبات. بنابرقضیه، ماتریس یکتایی چون M در $T^+(n)$ وجود دارد که MB در $U(n)$ است. فرض کنیم $MB = U$ و $N = M^{-1}$. دراین‌صورت، N در $T^+(n)$ است و $B = N \cdot U$. از طرف دیگر، اگر دوماتریس N و U داده شده باشند به‌طوری‌که N در $T^+(n)$ و U در $U(n)$ باشد و $B = N \cdot U$، آنگاه $N^{-1}B$ در $U(n)$ قراردارد و N^{-1} همان ماتریس یکتای M است که قضیه مشخص می‌کند؛ علاوه‌براین، U لزوماً همان $N^{-1}B$ است. □

مثال ۲۸. گیریم x_1 و x_2 اعدادی حقیقی باشند که $x_1^2 + x_2^2 = 1$ و $x_1 \neq 0$. فرض کنیم

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

با به‌کار بستن فرایند گرام ـ اشمیت برسطرهای B، بردارهای

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (x_1, x_2, 0) \\ \alpha_2 &= (0, 1, 0) - x_2(x_1, x_2, 0) \\ &= x_1(-x_2, x_1, 0) \\ \alpha_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

حاصل می‌شوند. U را ماتریسی باسطرهای α_1، (α_2/x_1)، و α_3 می‌گیریم. دراین‌صورت U یکانی است و

$$U = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{x_2}{x_1} & \dfrac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

حال با ضرب در معکوس ماتریس

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{x_1} & \frac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

درمی‌یابیم که

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

اکنون باختصار تغییرمختصات دریك‌فضای ضرب داخلی را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم V یك‌فضای‌ضرب‌داخلی با بعدمتناهی و $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ و $\mathcal{B}'=\{\alpha'_1,\cdots,\alpha'_n\}$ دوپایهٔ متعامد یکهٔ مرتب برای V باشند. ماتریس $n\times n$ (لـزوماً معکوس‌پذیر) یکتایـی چون P وجود داردکه به ازای هر α در V

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'}=P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

اگر V یکتا عملگر خطی روی V تعریف شده توسط $U\alpha_j=\alpha'_j$ باشد، آنگاه P عبارت است از ماتریس U درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$:

$$\alpha'_k=\sum_{j=1}^{n}P_{jk}\alpha_j.$$

چون $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ دوپایهٔ متعامدیکه هستند، U عملگری یکانی و P ماتریسی یکانی است. اگر T عملگر خطی دلخواهی روی V باشد، آنگاه

$$[T]_{\mathcal{B}'}=P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P=P^{*}[T]_{\mathcal{B}}P.$$

تعریف. گیریم A و B دوماتریس $n\times n$ مختلط باشند. گوییم B **هم‌ارز یکانی** با A است، هرگاه‌ماتریس یکانی $n\times n$ی‌مانند P وجودداشته باشد به‌طوری‌که $B=P^{-1}AP$. گوییم B **هم‌ارزمتعامد** با A است، هرگاه ماتریس متعامد $n\times n$ ی مانند P وجـود داشته باشد به طوری‌که $B=P^{-1}AP$.

با این تعریف آنچه راکه دربالا مشاهده‌کردیم می‌توانیم به شرح ذیل بیان‌کنیم : اگر $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ دوپایهٔ متعامد یکه مرتب برای V باشند، آنگاه به ازای هر عملگر خطی T

روی V ماتریس $[T]_{\mathfrak{B}}$ هم‌ارز یکانی با ماتریس $[T]_{\mathfrak{B}}$ است. درحالتی‌که V یك فضای ضرب داخلی حقیقی باشد، این ماتریسها ، با واسطهٔ یك ماتریس متعامد حقیقی، هم ارز متعامد هستند.

تمرین

۱. ماتریسی یکانی بیابیدکه متعامد نباشد، وماتریس متعامدی بیابیدکه یکانی نباشد.

۲. فرض‌کنید V فضای ماتریسهای $n\times n$ مختلط با ضرب داخلی $(A|B)=\mathrm{tr}(AB^*)$ باشد. به ازای هر M در V ، T_M را عملگری خطی بگیریدکه بـا $T_M(A)=MA$ تعریف می‌شود. نشان دهید کـه T_M یکانی است اگـر و تنها اگر M ماتریسی یکانی باشد.

۳. فرض‌کنید V مجموعهٔ اعداد مختلط باشدکه به عنوان یك فضای برداری حقیقی درنظر گرفته شده است.

(الف) نشان دهید $(\alpha|\beta)=\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta})$ ضربی داخلی روی V تعریف می‌کند.

(ب) یك یکریختی (فضای ضرب داخلی) از V بروی R^2 با ضرب داخلی استانده عرضه‌کنید.

(پ) به ازای هرγ در V ، M_γ را عملگرخطی‌روی V تعریف شده با $M_\gamma\alpha=\gamma\alpha$ بگیرید ونشان دهید $(M_\gamma)^*=M_{\bar{\gamma}}$

(ت) به ازای‌کدام اعداد مختلط مانند γ ، ماتریس M_γ خودالحاق است؟

(ث) به ازای‌کدام γ ، ماتریس M_γ یکانی است؟

(ج) به ازای‌کدام γ ، ماتریس M_γ مثبت است؟

(چ) $\det(M_\gamma)$ چیست؟

(ح) ماتریس M_γ را درپایهٔ $\{1,i\}$ به دست‌آورید.

(خ) اگر T عملگری خطی روی V باشد، شرایطی لازم وکافی برای T بیابیدکـه به ازای γ یی مساوی M_γ باشد.

(د) عملگری یکانی روی V بیابیدکه به ازای هر γ مساوی M_γ نباشد.

۴. فرض‌کنید V فضای R^2 باضرب داخلی استانده باشد. اگر U عملگری یکانی روی V باشد، نشان دهیدماتریس U درپایهٔ مرتب‌استانده، به ازای θ یی‌حقیقی، $0\leqslant\theta<2\pi$. یکی از دوماتریس زیر است:

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$$

U_θ را عملگر خطی متناظر به اولین ماتریس، یعنی U_θ را دوران به اندازهٔ زاویهٔ θ بگیرید. حال خود را متقاعد کنید که هر عملگر یکانی روی V یا یك دوران است یا یك انعکاس حول محور ϵ_1 و به دنبالش یك دوران.

(الف) $U_\theta U_\phi$ چیست؟

(ب) نشان دهید که $U^*_\theta = U_\theta$.

(پ) فرض کنید ϕ یك عدد حقیقی ثابت و $\mathscr{B} = \{\alpha_1 \text{ و } \alpha_2\}$ پایهٔ متعامد یکهٔ حاصل از دوران $\{\epsilon_1 \text{ و } \epsilon_2\}$ به اندازهٔ زاویه ϕ باشد، یعنی $\alpha_j = U_\phi \epsilon_j$. اگر θ عدد حقیقی دیگری باشد، ماتریس U_θ در پایهٔ مرتب $\mathscr{B}$ چیست؟

۵. فرض کنید V فضای R^3 با ضرب داخلی استانده باشد. فرض کنید W صفحهٔ پدیدآمده توسط $\alpha = (1, 1, 1)$ و $\beta = (1, 1, -2)$ باشد. U را عملگری خطی بگیرید که به‌طور هندسی، به‌صورت زیر تعریف می‌شود: U دوران به اندازهٔ زاویهٔ θ حول خط مستقیم مار ازمبدأ است که بر W عمود است. عملاً دو دوران از این نوع وجود دارد. یکی را انتخاب کنید و ماتریس U را در پایهٔ مرتب استانده بیابید. (یکی از راههایی را که می‌توان در پیش گرفت این است. α_1 و α_2 یی را که پایهٔ متعامد یکه‌ای برای W تشکیل می‌دهند، بیابید. α_3 را برداری با نرم ۱ بگیرید که بر W عمود باشد. ماتریس U در پایهٔ $\{\alpha_1 \text{ و } \alpha_2 \text{ و } \alpha_3\}$ را بیابید. یك تغییر پایه انجام دهید.)

۶. فرض کنید V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و W زیرفضایی از V باشد. دراین صورت $V = W \oplus W^\perp$؛ یعنی، هر α در V به طور یکتا به صورت $\alpha = \beta + \gamma$ با β در W و γ در $W^\perp$. قابل بیان است. حال عملگری خطی چون U را طبق $U\alpha = \beta - \gamma$ تعریف کنید.

(الف) ثابت کنید U هم خود الحاق است و هم یکانی.

(ب) اگر V فضای R^3 با ضرب داخلی استانده و W زیرفضای پدیدآمده توسط $(1, 0, 1)$ باشد، ماتریس U را در پایهٔ مرتب استانده بیابید.

۷. فرض کنید V یك فضای ضرب داخلی مختلط و T عملگر خطی خودالحاقی روی V باشد. نشان دهید

(الف) به ازای هر α در V، $\|\alpha + iT\alpha\| = \|\alpha - iT\alpha\|$

(ب) $\alpha + iT\alpha = \beta + iT\beta$ اگر و تنها اگر $\alpha = \beta$.

(پ) $I + iT$ نامنفرد است.

(ت) $I - iT$ نامنفرد است.

(ث) حال فرض کنید V با بعد متناهی باشد. ثابت کنید

$$U = (I - iT)(I + iT)^{-1}$$

عملگری یکانی است؛ U را **مبدل کیلی** برای T می‌نامیم. بـه معنای خاصی، $U=f(t)$ و $.f(x)=\frac{1-ix}{1+ix}$

۸. اگر θ عددی حقیقی باشد، ثابت‌کنید ماتریسهای ذیل به‌طور یکانی هم‌ارزند.

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{bmatrix}.$$

۹. فرض‌کنید V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، T عملگـر خطی مثبتی روی V و P_T ضرب داخلی روی V تعریف شده با $p_T(\alpha,\beta)=(T\alpha|\beta)$ باشد. فرض کنید U عملگری خطی روی V و U^* الحاقی‌آن نسبت به $(|)$ باشد. ثابت‌کنیدکه U نسبت‌به ضرب داخلی p_T یکانی است اگر وتنها اگر $T=U^*TU$.

۱۰. فرض‌کنید V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. به ازای هـر α و β در V، $T_{\alpha,\beta}$ را عملگر خطـی روی V تعریف شـده با $T_{\alpha,\beta}(\gamma)=(\gamma|\beta)\alpha$ بگیرید ونشان دهید:

(الف) $.T^*_{\alpha,\beta}=T_{\beta,\alpha}$

(ب) $.\mathrm{tr}(T_{\alpha,\beta})=(\alpha|\beta)$

(پ) $.T_{\alpha,\beta}T_{\gamma,\delta}=T_{\alpha,(\beta|\gamma)\delta}$

(ت) تحت چه شرایطی $T_{\alpha,\beta}$ خودالحاق است؟

۱۱. فرض‌کنید V یك فضای ضرب داخلی m بعدی بر روی هیأت F و $L(V,V)$ فضای عملگرهای خطی روی V باشد. نشان دهید یك ضرب‌داخلی یکتا روی $L(V,V)$ با این خاصیت وجود دارد که به ازای هر α و β در V، $\|T_{\alpha,\beta}\|^2=\|\alpha\|^2\|\beta\|^2$. ($T_{\alpha,\beta}$ عملگر تعریف شده در تمرین ۱۰ است.) یك یکریختی بین $L(V,V)$ با این ضرب‌داخلی‌وفضای‌ماتریسهای $n\times n$ برروی F باضرب‌داخلی $(A|B)=\mathrm{tr}(AB^*)$ بیابید .

۱۲. فرض‌کنید V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. در تمرین ۶ نشان دادیم که عملگرهایی خطی روی V که هم خودالحاق وهم یکانـی باشند چگونـه ساخته می‌شوند. حال ثابت‌کنیدکه عملگر دیگری ازاین نوع وجود ندارد، یعنی ثابت‌کنید که هرعملگر یکانی خودالحاق، اززیرفضایی چون W طبـق آنچه‌که در تمریـن ۶ تشریح شد ناشی می‌شود.

۱۳. فرض‌کنید V و W دوفضای‌ضرب داخلی بابعد متناهی وبا ابعاد مساوی باشند. فرض کنید U یك یکریختی از V بروی W باشد. نشان دهید:

(الف) نگاشت $T \to UTU^{-1}$ یك یکریختی از فضای برداری $L(V, V)$ بروی فضای برداری $L(W, W)$ است.
(ب) به‌ازای هر T در $L(V, V)$، $\operatorname{tr}(UTU^{-1}) = \operatorname{tr}(T)$.
(پ) $UT_{\alpha,\beta}U^{-1} = T_{U\alpha, U\beta}$ ($T_{\alpha,\beta}$ درتمرین ۱۰ تعریف شده است).
(ت) $(UTU^{-1})^* = UT^*U^{-1}$.
(ث) اگر $L(V, V)$ را به‌ضرب داخلی $(T_1|T_2) = \operatorname{tr}(T_1T_2)^*$ مجهز و به‌همین نحو درمورد $L(W, W)$ عمل کنیم، آنگاه $T \to UTU^{-1}$ یك یکریختی فضاهای ضرب داخلی خواهد بود.

۱۴. اگر V یك فضای ضرب داخلی باشد، یك **حرکت صلب** عبارت است از تابعی چون T (نه لزوماً خطی) از V در V، به‌طوری که به‌ازای هر α و β در V،

$$\|T\alpha - T\beta\| = \|\alpha - \beta\|.$$

هر عملگر یکانی خطی مثالی ازحرکت صلب است. مثالی دیگر، انتقال به‌اندازه یك بردار ثابت γ است:

$$T_\gamma(\alpha) = \alpha + \gamma$$

(الف) فرض‌کنید V فضای R^2 باضرب داخلی استانده باشد. فرض‌کنید T حرکتی صلب از V باشد، و نیز $T(0) = 0$. ثابت‌کنید T خطی وعملگری یکانی است.
(ب) نتیجهٔ قسمت (الف) را به‌کارگیرید و ثابت‌کنید که هرحرکت صلب از R^2 ترکیبی است ازیك انتقال وبه‌دنبال آن عملگری یکانی.
(پ) اکنون نشان دهیدکه هرحرکت صلب از R^2 یا انتقالی است که یك دوران به‌دنبال آن می‌آید یا انتقالی است که به‌دنبالش یك انعکاس وسپس یك دوران‌می‌آید.

۱۵. یك عملگریکانی روی R^4 (باضرب داخلی استانده) به‌طور ساده عملگری خطی‌است که فرم درجه دوم

$$\|(x, y, z, t)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

را حفظ می‌کند، یعنی عملگری خطی چون U است که به ازای هر α در R^4، $\|U\alpha\|^2 = \|\alpha\|^2$. دربخش معینی از نظریهٔ نسبیت یافتن عملگرخطی T که فرم

$$\|(x, y, z, t)\|_L^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

را حفظ کند، موردنظراست. $\|\ \ \|_L^2$ منتج ازضربی داخلی نیست، بلکه ازچیزی به‌نام «متریك لورنتس[1]» (که وارد بحث آن نمی‌شویم) ناشی می‌شود. بدین‌دلیل، عملگری خطی‌چون T روی R^4 که به‌ازای هر α در R_4، $\|T\alpha\|_L^2 = \|\alpha\|_L^2$، یك **تبدیل لورنتس** نامیده می‌شود.
(الف) نشان دهید تابع U که با

---
1. Lorentz

$$U(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود، یك یکریختی از $R^۴$ بروی فضای برداری حقیقی H متشکل ازهمهٔ ماتریسهای مختلط ۲ × ۲ خودالحاق است.

(ب) نشان دهید $\|\alpha\|_L^۲ = \det(U\alpha)$.

(پ) فرض کنید T یك عملگرخطی (حقیقی) روی فضای H متشکل از ماتریسهای خودالحاق ۲ × ۲ باشد. نشان دهید $L = U^{-۱}TU$ عملگری خطی روی $R^۴$ است.

(ت) گیریم M یك ماتریس مختلط ۲ × ۲ باشد. نشان دهید که $T_M(A) = M^*AM$ عملگری خطی چون T_M روی H تعریف می‌کند. (حتماً بررسی کنید که T_M، H را در H می‌نگارد.)

(ث) اگر M ماتریسی ۲ × ۲ باشد با $|\det M| = ۱$، نشان دهید که $L_M = U^{-۱}T_MU$ یك تبدیل لورنتس روی $R^۴$ است.

(ج) یك تبدیل لورنتس بیابید که به‌صورت L_M نباشد.

۵.۸. عملگرهای نرمال

هدف اصلی دراین بخش حل مسئلهٔ زیراست. اگر T عملگری خطی روی یك فضای‌ضرب داخلی با بعد متناهی V باشد، تحت چه شرایطی V دارای یك پایهٔ متعامد یکهٔ متشکل از بردارهای سرشت‌نمای Tاست؟ به‌بیان دیگر، چه‌وقت یك‌پایهٔ متعامد یکهٔ $\mathcal{B}$ برای Vوجود دارد که ماتریس T درپایهٔ $\mathcal{B}$ قطری باشد؟

کار خود را با استخراج چند شرط لازم روی T که بعداً نشان خواهیم داد این شرایط کافی نیزهستند، آغاز می‌کنیم. فرض‌کنیم $\mathcal{B}\{\alpha_۱, \cdots, \alpha_n\}$ پایهٔ متعامد یکه‌ای برای V با خاصیت

$$T\alpha_j = c_j\alpha_j, \quad j = ۱, \cdots, n \tag{۱۶-۸}$$

باشد. این شرط صرفاً بیان می‌کند که ماتریس T در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ ماتریسی قطری با درایه‌های قطری $c_۱$، ...، c_n است. عملگر الحاقی T^* در همین پایهٔ مرتب توسط ماتریس ترانهادهٔ مزدوج، یعنی ماتریس قطری با درایه‌های‌قطری $\bar{c}_۱$، $\cdots$، $\bar{c}_n$ نمایش داده می‌شود. اگر V یك‌فضای‌ضرب داخلی‌حقیقی‌باشد، اسکالرهای $c_۱$، $\cdots$، c_n (مسلماً) حقیقی هستند، و از این‌رو باید داشته باشیم $T = T^*$. به‌بیان دیگر، اگر V یك فضای‌ضرب‌داخلی‌حقیقی با بعد متناهی باشد و T هم عملگری خطی‌که برایش یك پایهٔ متعامد یکه از بردارهای سرشت‌نما وجود دارد، آنگاه T باید خودالحاق باشد. اگر V یك فضای ضرب داخلی مختلط باشد، لزومی ندارد که اسکالرهای $c_۱$، $\cdots$، c_n حقیقی باشند، یعنی لازم نیست که T خودالحاق باشد. ولی توجه کنید که T باید در

$$TT^* = T^*T \tag{۱۷-۸}$$

صدق کند. زیرا، هردو ماتریس قطری با هم جابجا می‌شوند وچون T و T^* درپایهٔ‌مرتب $\mathscr{B}$ هردو توسط‌ماتریسهای قطری نمایش داده می‌شوند، (۸-۱۷) برقرار است. این‌واقعیت، نسبتاً جالب است‌که درحالت مختلط هم این شرط برای ایجاب وجود یك پایهٔ متعامدیکه از بردارهای سرشت‌نما کافی است.

تعریف. گیریم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد. گوییم T **نرمال** است، هرگاه با الحاقیش جابجا شود، یعنی $TT^* = T^*T$.

هرعملگـرخودالحاق نرمال است، همان‌طورکه هرعملگر یکانی هـم نرمال است. هرمضرب اسکالری هـرعملگر نرمال عملگری است نرمال. امـا، مجموع و حاصل‌ضرب عملگرهای نرمال، درحالت عمومی نرمال نیستند. گرچه به‌هیچ‌وجه لازم نیست، ولـی ما مطالعهٔ دربارهٔ عملگرهای نرمال را با بررسی عملگرهای خودالحاق آغاز می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۵. گیریم V یك فضای ضرب داخلی و T عملگرخطی خودالحاق روی V باشد. در این صورت هـرمقدار سرشت‌نمای T حقیقی است و بردارهای سرشت‌نمـای T وابسته به‌مقادیر سرشت‌نمای متمایز، متعامد هستند.

اثبات. فرض‌کنیم cیك مقدار سرشت‌نمای T باشد، یعنی، به‌ازای بردارغیرصفری چون α، $T\alpha = c\alpha$. در این صورت:

$$\begin{aligned} c(\alpha|\alpha) &= (c\alpha|\alpha) \\ &= (T\alpha|\alpha) \\ &= (\alpha|T\alpha) \\ &= (\alpha|c\alpha) \\ &= \bar{c}(\alpha|\alpha)\,. \end{aligned}$$

چون $(\alpha|\alpha) \neq 0$، باید داشته باشیم $c = \bar{c}$. همچنین فرض کنیم داشته باشیم $T\beta = d\beta$ با $\beta \neq 0$. آنگاه

$$\begin{aligned} c(\alpha|\beta) &= (T\alpha|\beta) \\ &= (\alpha|T\beta) \\ &= (\alpha|d\beta) \\ &= \bar{d}(\alpha|\beta) \\ &= d(\alpha|\beta). \end{aligned}$$

اگر $c \neq d$، آنگاه $(\alpha|\beta) = 0$. $\square$

باید خاطر نشان کنیم که قضیهٔ ۱۵ مطلبی دربارهٔ وجود مقادیر سرشت‌نما و یا بردارهای سرشت‌نما بیان نمی‌کند.

قضیهٔ ۱۶. روی یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی مثبت، هرعملگر خودالحاق دارای یك بردار سرشت‌نمای (غیرصفر) است.

اثبات. گیریم V یك فضای ضرب داخلی با بعد n، $n>0$، T عملگر خودالحاقی روی V باشد. پایهٔ متعامد یکه‌ای چون $\mathcal{B}$ برای V انتخاب وفرض می‌کنیم $A=[T]_{\mathcal{B}}$. چون $T=T^*$، داریم $A=A^*$. حال گیریم W فضای ماتریسهای $n\times 1$ روی C باضرب داخلی $(X|Y)=Y^*X$ باشد. دراین صورت $U(X)=AX$ عملگر خطی خودالحاق U روی W را تعریف می‌کند. چندجمله‌ای سرشت‌نما، $\det(xI-A)$، یك‌چندجمله‌ای درجهٔ n بر روی اعداد مختلط است؛ و هر چندجمله‌ای بر روی C از درجهٔ مثبت یك ریشه دارد. پس عدد مختلطی چون c وجود دارد که $\det(cI-A)=0$. این بدان معنی است که $A-cI$ منفرد است، یااینکه X غیرصفری وجود دارد که $AX=cX$. چون عملگر U (ضرب در A) خودالحاق است، از قضیهٔ ۱۵ نتیجه می‌شود که c حقیقی است. اگر Vیك فضای برداری حقیقی باشد، می‌توانیم X را طوری انتخاب کنیم که درایه‌هایش حقیقی باشند. زیرا در آن صورت A و $A-cI$ دارای درایه‌های حقیقی هستند و چون $A-cI$ منفرد است، دستگاه $(A-cI)X=0$ یك جواب حقیقی غیرصفر X دارد. نتیجه اینکه بردار غیرصفری چون α در V وجود دارد که $T\alpha=c\alpha$. □

چند نکته درمورد اثبات وجود دارد که بهتراست به‌ذکر آنها پرداخته شود.

(۱) اثبات وجود X غیرصفری که $AX=cX$، ربطی به‌این واقعیت که A هرمیتی (خودالحاق) است ندارد. این اثبات نشان می‌دهد که هرعملگرخطی روی یك‌فضای برداری مختلط با بعد متناهی، دارای برداری سرشت‌نماست. درمورد یك فضای ضرب داخلی حقیقی، ازخاصیت خود الحاقی A قویاً استفاده می‌شود تا به‌ما بفهماند که مقادیر سرشت‌نمای A حقیقی هستند و ازاین‌رو می‌توانیم X مناسبی با درایه‌های حقیقی بیابیم.

(۲) استدلال نشان می‌دهد که چندجمله‌ای سرشت‌نمای هرماتریس خودالحاق، علیرغم اینکه درایه‌های این ماتریس ممکن است حقیقی نباشند، ضرایب حقیقی دارد.

(۳) این فرض که V با بعد متناهی است برای اثبات قضیهٔ لازم است؛ یك‌عملگر خود-الحاق روی یك فضای ضرب داخلی با بعد نامتناهی ممکن است حتی یك مقدارسرشت‌نما هم نداشته باشد.

مثال ۲۹. گیریم V فضای برداری توابع مختلط (یا حقیقی) پیوسته روی فاصلهٔ یکه $0\leqslant t\leqslant 1$، با ضرب داخلی

$$(f|g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

باشد. عملگر «ضرب توسط t»، $(Tf)(t)=tf(t)$، خودالحاق است. فرض می‌کنیم $Tf=cf$. دراین صورت

$$(t-c)f(t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

وازاین‌رو، به‌ازای $t\neq c$، $f(t)=0$. چون f پیوسته است، $f=0$. پس، T هیچ مقدار (بردار) سرشت‌نما ندارد.

قضیهٔ ۱۷. گیریم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد. فرض‌کنیم W زیرفضایی از V باشدکه تحت T پایاست. دراین صورت مکمل متعامد W تحت T^* هم‌پایاست.

اثبات. یادآوری می‌کنیم این واقعیت که W تحت T پایاست بدین معنی نیست که هر بردار W توسط T ثابت نگهداشته می‌شود؛ بلکه بدین‌معنی است که اگر α در W باشد، آنگاه $T\alpha$ نیز در W قراردارد. β را در $W^\perp$ می‌گیریم. باید نشان دهیم که $T^*\beta$ در $W^\perp$ قراردارد، یعنی باید نشان دهیم که به‌ازای هر α در W، $(\alpha|T^*\beta)=0$. اگر α در W باشد، آنگاه $T\alpha$ هم در W قرار دارد و ازاین‌رو $(T\alpha|\beta)=0$. ولی $(T\alpha|\beta)=(\alpha|T^*\beta)$. □

قضیهٔ ۱۸. گیریم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگر خطی خودالحاقی روی V باشد. دراین صورت پایهٔ‌متعامد یکه‌ای برای V وجود دارد که‌هربردار آن یك بردار سرشت‌نمای T است.

اثبات. فرض کنیم $0 <$ بعد (V). بنا برقضیهٔ ۱۶، T دارای بردار سرشت‌نمایی چون α است. بردار $\alpha_1=\alpha/\|\alpha\|$ را درنظرمی‌گیریم و دراین صورت α_1 یك بردار سرشت‌نمای T است که $\|\alpha_1\|=1$. اگر $1=$ بعد (V)، کار تمام است. اکنون به‌استقرا روی بعد V پیش می‌رویم. فرض‌کنیم قضیه برای فضاهای ضرب داخلی با ابعاد کمتر از بعد (V) درست باشد. W را زیرفضای یك‌بعدی پدید آمده توسط بردار α_1 می‌گیریم. این حکم که α_1 یك بردار سرشت‌نمای T است، به‌طورساده بدین معنی است که W تحت T پایاست. بنا برقضیهٔ ۱۷، مکمل متعامد $W^\perp$ تحت $T^*=T$ پایاست. حال $W^\perp$، باضرب داخلی V، یك فضای ضرب داخلی است که بعدش یکی‌کمتراز بعد V است. U را عملگر خطی القا شده توسط T روی $W^\perp$، یعنی تحدید T به $W^\perp$ می‌گیریم. آنگاه U خودالحاق است، وبنا بر فرض استقرا، $W^\perp$ پایهٔ متعامد یکه‌ای چون $\{\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ متشکل از بردارهای سرشت‌نمای U دارد. حال هریك از این بردارها یك بردار سرشت‌نمای T هم هست وچون $V=W\oplus W^\perp$، نتیجه می‌گیریم که $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ پایهٔ مطلوب برای V است. □

نتیجه. فرض کنیم A یك ماتریس هرمیتی (خودالحاقی) $n\times n$ باشد. دراین صورت

ماتریسی یکانی چون P وجود دارد که $P^{-1}AP$ قطری است (A هم‌ارز یکانی با ماتریسی قطری است). اگر A یك ماتریس متقارن حقیقی باشد، یك ماتریس متعامد حقیقی چون P وجود دارد که $P^{-1}AP$ قطری است.

اثبات. گیریم V فضای $C^{n\times 1}$ با ضرب داخلی استانده و T عملگری خطی روی V باشد که در پایهٔ مرتب استانده توسط A نمایش داده می‌شود. چون $A=A^*$ داریم $T=T^*$. فرض کنیم $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایهٔ متعامد یکهٔ مرتبی برای V باشد که $T\alpha_j=c_j\alpha_j$، $j=1, \dots, n$. اگر $D=[T]_{\mathcal{B}}$، آنگاه D ماتریسی قطری با درایه‌های قطری c_1، ...، c_n است. P را ماتریسی با بردارهای ستونی α_1، ...، α_n می‌گیریم. دراین صورت $D=P^{-1}AP$.

درحالتی که همهٔ درایه‌های A حقیقی باشند، می‌توان Vرا فضای R^n با ضرب‌داخلی استانده گرفت واستدلال را تکرار کرد. دراین حالت، Pماتریسی‌یکانی با درایه‌های‌حقیقی، یعنی یك ماتریس متعامد حقیقی خواهد بود. □

از ترکیب قضیهٔ ۱۸ با نکاتی که درابتدای این بخش ذکر شد نتیجهٔ ذیل حاصل می‌شود: اگر V یك فضای ضرب داخلی حقیقی با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد، آنگاه V یك پایهٔ متعامد یکه از بردارهای سرشت‌نمای T دارد اگر وتنها اگر A خودالحاق باشد. به‌بیانی هم‌ارز، اگر A ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های حقیقی باشد، یك ماتریس متعامد حقیقی چون P وجود دارد که P^tAP قطری است اگروتنها اگر $A=A^t$. برای ماتریسهای متقارن مختلط چنین‌نتیجه‌ای وجود ندارد. به‌بیان‌دیگر، برای ماتریسهای مختلط، بین شرایط $A=A^t$ و $A=A^*$ تفاوت عمده‌ای وجود دارد.

با تعیین تکلیف حالت خودالحاق، اکنون به‌مطالعهٔ حالت عمومی عملگرهای‌نرمال بازمی‌گردیم. نظیر قضیهٔ ۱۸ را برای عملگرهای نرمال درحالت مختلط، اثبات خواهیم کرد. البته دلیلی برای این محدودیت وجود دارد. یك عملگرنرمال روی یك فضای‌ضرب داخلی حقیقی ممکن است هیچ بردار سرشت‌نمای غیرصفری نداشته باشد. به‌عنوان مثال، این امر برای همهٔ دورانهای در R^2، بجز دوتا، صادق است.

قضیهٔ ۱۹. فرض کنیم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، T عملگری‌نرمال روی V و α برداری در V باشد. دراین صورت α یك بردار سرشت‌نمای T با مقدار سرشت‌نمای c است اگر و تنها اگر α یك بردار سرشت‌نمای T^* با مقدار سرشت‌نمای $\bar{c}$ باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم U عملگری نرمال روی V باشد. آنگاه $\|U\alpha\|=\|U^*\alpha\|$. زیرا با به‌کار بردن شرط $UU^*=U^*U$ دیده می‌شود که

$$\begin{aligned}\|U\alpha\|^2&=(U\alpha|U\alpha)=(\alpha|U^*U\alpha)\\&=(\alpha|UU^*\alpha)=(U^*\alpha|U^*\alpha)=\|U^*\alpha\|^2.\end{aligned}$$

اگر c اسکالر دلخواهی باشد، عملگر $U=T-cI$ نرمال است. زیرا

$$(T-cI)^*=T^*-\bar{c}I$$

وبسادگی ثابت می‌شودکه $UU^*=U^*U$. پس

$$\|(T-cI)\alpha\|=\|(T^*-\bar{c}I)\alpha\|.$$

ازاین‌رو، $(T-cI)\alpha=0$ اگروتنها اگر $(T^*-\bar{c}I)\alpha=0$. □

تعریف. ماتریس $n\times n$ مختلط A **نرمال** نامیده می‌شود هرگاه $AA^*=A^*A$.

درك اینکه نرمال بودن ماتریسها یا عملگرها واقعاً به‌چه معنی است، چندان آسان نیست؛ اما، درتلاش جهت ایجاد تصوری برای این مفهوم، لازم است توجه شودکه ماتریسی مثلثی نرمال است اگروتنها اگرقطری باشد.

قضیهٔ ۲۰. گیریم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، T عملگری خطی روی V، و $\mathcal{B}$ پایهٔ متعامد یکه‌ای برای V باشد. فرض کنیم A، ماتریس T در پایهٔ $\mathcal{B}$ بالامثلثی باشد. دراین صورت T نرمال است. اگر وتنها اگر A ماتریسی قطری باشد.

اثبات. چون $\mathcal{B}$ یك پایهٔ متعامد یکه است، A^* ماتریس T^* در$\mathcal{B}$ است. اگرAقطری باشد، آنگاه $AA^*=A^*A$، واین مطلب ایجاب می‌کند که $TT^*=T^*T$. بعکس، فرض کنیمTنرمال‌باشد و$\mathcal{B}=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. آنگاه،چون$A$بالامثلثی است، $T\alpha_1=A_{11}\alpha_1$. بنا برقضیهٔ ۱۹، این مطلب ایجاب می‌کند که $T^*\alpha_1=\bar{A}_{11}\alpha_1$. ازطرف دیگر،

$$\begin{aligned}T^*\alpha_1&=\sum_j(A^*)_{j1}\alpha_j\\&=\sum_j\bar{A}_{1j}\alpha_j.\end{aligned}$$

بنابراین، به‌ازای هر $j>1$، $A_{1j}=0$ بخصوص، $A_{12}=0$ و چون A بالامثلثی است، نتیجه می‌گیریم که

$$T\alpha_2=A_{22}\alpha_2.$$

پس، $T^*\alpha_2=\bar{A}_{22}\alpha_2$ وبه‌ازای هر $j\neq2$، $A_{2j}=0$. با ادامهٔ این روش درمی‌یابیم که A قطری است. □

قضیهٔ ۲۱. فرض کنیم Vیك فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی وT عملگری خطی روی V باشد. در این صورت پایهٔ متعامد یکه‌ای برای V وجود دارد که در آن ماتریس T بالامثلثی است.

اثبات. گیریم n بعد V باشد. وقتی $n=1$، قضیه درست است. با استقرا روی n پیش می‌رویم و فرض می‌کنیم که نتیجه برای عملگرهای خطی روی فضاهای ضرب‌داخلی

مختلط با بعد $n-1$ درست باشد. چون V یك فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی است، بردار یکه‌ای چون α در V و اسکالری چون c وجود دارند که

$$T^{*}\alpha = c\alpha.$$

گیریم W مکمل متعامد زیرفضای پدیدآمده توسط α و S تحدید T به W باشد. بنا بر قضیهٔ ۱۷، فضای W تحت T پایاست. پس S عملگری خطی روی W است. چون W دارای بعد $n-1$ است، فرض استقرا وجود پایهٔ متعامد یکه‌ای چون $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}\}$ برای W را ایجاب می‌کند که درآن ماتریس S بالامثلثی است. حال فرض می‌کنیم $\alpha_n = \alpha$. آنگاه $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایهٔ متعامد یکه‌ای برای V است که درآن ماتریس T بالامثلثی است. □

این قضیه برای ماتریسها نتیجهٔ زیررا ایجاب می‌کند.

نتیجه. به‌ازای هرماتریس $n \times n$ مختلط A ماتریسی یکانی چون U وجود داردکه $U^{-1}AU$ بالامثلثی است.

اکنون با ترکیب قضیهٔ ۲۱ وقضیهٔ ۲۰، بلافاصله مشابه قضیهٔ ۱۸را به‌شرح زیربرای عملگرهای نرمال به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۲۲. فرض می‌کنیم V یك فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی و T عملگر نرمالی روی Vباشد. دراین صورت Vدارای پایهٔ متعامد یکه‌ای متشکل‌ازبردارهای سرشت‌نمای T است.

مجدداً تعبیری ماتریسی هم وجود دارد.

نتیجه. به‌ازای هرماتریس نرمال A، ماتریسی یکانی چون P وجود داردکه $P^{-1}AP$ ماتریسی قطری است.

تمرین

۱. برای هریك از ماتریسهای متقارن حقیقی A در ذیل، یك ماتریس متعامد حقیقی چون P بیابید که $P^{t}AP$ قطری باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

۲. آیا هرماتریس متقارن مختلط، خودالحاق است؟ آیا نرمال است؟

۰۳ برای

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

یك ماتریس متعامد حقیقی چون P وجود دارد که $P^tAP=D$ قطری است. یکی از این ماتریسهای قطری D را بیابید.

۰۴ V را $C^۲$ با ضرب داخلی استانده بگیرید. T را عملگری خطی روی V بگیرید که‌در پایهٔ مرتب استانده توسط ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & i \\ i & ۱ \end{bmatrix}$$

نمایش‌داده می‌شود. نشان دهید که T نرمال است و پایهٔ متعامد یکه‌ای، متشکل از بردارهای سرشت‌نمای T برای V بیابید.

۰۵ مثالی از یك ماتریس ۲ × ۲ چون A بیاورید که $A^۲$ نرمال باشد ولی A نرمال نباشد.

۰۶ فرض کنید T عملگر نرمالی روی یك فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی باشد. ثابت کنید بر حسب اینکه همهٔ مقادیر سرشت‌نمای T حقیقی، مثبت، یا با قدرمطلق ۱ باشند، T خودالحاق، مثبت، یا یکانی است. (ازقضیهٔ ۲۲ برای تحویل مسئله به‌سؤالی مشابه دربارهٔ ماتریسهای قطری استفاده کنید.)

۰۷ T را عملگری خطی روی فضای ضرب داخلی بعد متناهی V بگیرید وفرض کنید T هم‌مثبت و هم یکانی باشد. ثابت کنید $T=I$.

۰۸ ثابت کنید T نرمال است اگروتنها اگر $T=T_۱+iT_۲$، که در آن $T_۱$ و $T_۲$ عملگرهای خودالحاقی هستند که با یکدیگر جابجا می‌شوند.

۰۹ ثابت کنید که هرماتریس متقارن حقیقی دارای یك ریشهٔ سوم متقارن حقیقی است، یعنی اگر A متقارن حقیقی باشد، ماتریسی متقارن حقیقی چون B وجود دارد که $B^۳=A$.

۰۱۰ ثابت کنید که هرماتریس مثبت، مربع یك ماتریس مثبت است.

۰۱۱ ثابت کنید که هرعملگر نرمال وپوچ‌توان برابرعملگرصفراست.

۰۱۲ اگر T عملگری نرمال باشد، ثابت کنید بردارهای سرشت‌نمای T وابسته به‌مقادیر

سرشت‌نمای متمایز، متعامدند.

۱۳. فرض کنید T عملگری نرمال روی یك فضای ضرب داخلی مختلط با بعدمتناهی باشد. ثابت کنید یك چندجمله‌ای چون f با ضرایب مختلط وجود دارد کـه $T^* = f(T)$. (T را توسط ماتریسی قطری نمایش دهید و ببینید f چه باید باشد.)

۱۴. اگر دوعملگر نرمال (با یکدیگر) جابجا شوند، ثابت کنید که حاصل‌ضرب آنها نیـز نرمال است.

۹

عملگرهای روی فضاهای ضرب داخلی

۱.۹. مقدمه

بیشتر مطالب مورد بحث درفصل ۸ بنیانی هستند وهرکسی باید آنها را بداند. فصل حاضر برای دانشجویان پیشرفته‌تر یا برای خوانندگانی درنظر گرفته شده است که مشتاقانـد معلومات خود را دربارهٔ عملگرهای روی فضاهای ضرب داخلی گسترش دهند. به‌استثنای قضیهٔ محور اصلی که اساساً چیزی‌جز فرمول‌بندی دیگری ازقضیهٔ ۱۸ دربارهٔ قطری‌کردن متعامد عملگرهای خودالحاق نیست وبجز سایر قضایای بخش۲.۹ مربوط به‌فرمها، مطالب ارائه شده پیچیده‌تر وعموماً درگیر مسایل فنی‌تری هستند. عیناً همان‌طورکـه درقسمتهای آخر فصلهای ۵ و ۷ انتظار زیادتری داشتیم دراین فصل نیز از خـواننده توقع بیشتری داریم. استدلالها و اثباتها به‌شیوه‌ای فشرده‌تر نوشته شده‌انـد و تقریباً هیچ مثالـی جهت هموار ساختن راه وجود ندارد. بااین وجود سعی کرده‌ایم تعداد زیادی تمرین در دسترس خواننده بگذاریم.

سه‌بخش اول به‌نتایج مـربوط به‌فرمهای روی فضاهای ضرب داخلـی و رابطهٔ بین فرمها و عملگرهای خطی اختصاص داده شده‌اند. بخش بعد مـربوط به‌نظریهٔ طیفی است؛ یعنی بانتایج قضایای ۱۸ و ۲۲ ازفصل ۸ دربارهٔ قطری‌کردن عملگرهای نرمال وخودالحاق سروکار دارد. دربخش آخر، مطالعهٔ عملگرهای نرمال را دنبال می‌کنیم؛ بخصوص به‌حالت حقیقی می‌پردازیم و ضمن عمل، این پرسش را که قضیهٔ تجزیهٔ اولیه ازفصل ۶ دربـارهٔ

عملگرهای نرمال چه می‌گوید، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۹. فرمهای روی فضاهای ضرب داخلی

اگر T عملگری خطی روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد، تابع تعریف‌شده روی $V\times V$ طبق

$$f(\alpha, \beta)=(T\alpha|\beta)$$

ممکن است به‌عنوان نوعی جانشین برای T محسوب شود. بسیاری از پرسشهای دربارهٔ T با سؤالاتی دربارهٔ f هم‌ارز هستند. در حقیقت، بسادگی دیده می‌شود که f عملگر T را مشخص می‌کند. زیرا اگر $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه متعامدیکه‌ای برای V باشد، آنگاه درایه‌های ماتریس T در $\mathcal{B}$ با

$$A_{jk}=f(\alpha_k, \alpha_j)$$

تعیین می‌شوند. فهم این نکته مهم است که از دیدگاهی بیشتر تجریدی چگونه f عملگر T را مشخص می‌کند. تعریف ذیل خواص بسیار مهم f را تشریح می‌کند.

تعریف. یك فرم (**یك و نیم خطی**) روی یك فضای برداری حقیقی یا مختلط V، تابعی چون f روی $V\times V$ با مقادیر درهیأت اسکالرهاست که به‌ازای هر α، β، و γ در V وهمهٔ اسکالرهای c

$$f(c\alpha+\beta, \gamma)=cf(\alpha, \gamma)+f(\beta, \gamma) \qquad \text{(الف)}$$

$$f(\alpha, c\beta+\gamma)=\bar{c}f(\alpha, \beta)+f(\alpha, \gamma) \qquad \text{(ب)}$$

پس، یك فرم یك‌ونیم‌خطی f تابعی روی $V\times V$ است که به‌ازای یك β ثابت $f(\alpha,\beta)$ تابعی خطی از α باشد وبه‌ازای یك α ثابت تابع خطی مزدوجی از β. درحالت حقیقی $f(\alpha, \beta)$، به‌عنوان تابعی ازهریك ازشناسه‌ها، خطی است، به‌بیان دیگر، **یك‌فرم دوخطی** است. درحالت مختلط، فرم‌یك‌ونیم خطی f دوخطی نیست، مگر آنکه $f=0$. درباقیماندهٔ این فصل، بجز درمواردی‌که ذکر آن مهم به‌نظر برسد صفت «یك‌ونیم خطی» را حذف خواهیم کرد.

اگر f و g دوفرم روی V باشند و c یك اسکالر، به‌آسانی می‌توان نشان داد که $cf+g$ نیز یك فرم است. ازاین‌مطلب نتیجه می‌شود که هرترکیب خطی از فرمهای‌روی V، مجدداً یك فرم است. از این‌رو، مجموعهٔ همه فرمهای روی V زیرفضایی از فضای برداری همهٔ توابع اسکالری روی $V\times V$ است.

قضیهٔ ۱: گیریم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و f یك فرم روی V باشد. دراین‌صورت عملگر خطی یکتایی چون T روی V وجود داردکه به‌ازای هر α و β در V

$$f(\alpha, \beta)=(T\alpha|\beta)$$

ونگاشت $T \rightarrow f$ یك یکریختی از فضای فرمها بروی $L(V, V)$ است.

اثبات. بردار ثابت β از V را درنظر مـی‌گیریم. آنگاه $\alpha \rightarrow f(\alpha, \beta)$ تابعی (تابعکی) خطی روی V است. بنا برقضیهٔ ۶ از فصل ۸ بردار یکتایی چون β' در V وجود دارد که به‌ازای هر α، $f(\alpha, \beta)=(\alpha|\beta')$. تابعی چون U از V در V را با قراردادن $U\beta=\beta'$ تعریف‌می کنیم. دراین‌صورت به‌ازای هر α، β، و γ در V وهمه اسکالرهای c

$$\begin{aligned} f(\alpha|c\beta+\gamma)&=(\alpha|U(c\beta+\gamma)) \\ &=\bar{c}f(\alpha, \beta)+f(\alpha, \gamma) \\ &=\bar{c}(\alpha|U\beta)+(\alpha|U\gamma) \\ &=(\alpha|c\,U\beta+U\gamma). \end{aligned}$$

پس U عملگری خطی روی V است و $T=U^*$ عملگری است که به‌ازای هر α و هر β داریم $f(\alpha, \beta)=(T\alpha|\beta)$. اگر همچنین داشته باشیم $f(\alpha, \beta)=(T'\alpha|\beta)$، آنگاه به‌ازای هر α وهر β،

$$(T\alpha-T'\alpha|\beta)=0$$

و ازاین‌رو، به‌ازای هر α داریم $T\alpha=T'\alpha$. پس، به‌ازای هرفرم f، عملگر خطی‌یکتایی چون T_f وجود دارد که به‌ازای هر α و β در V

$$f(\alpha, \beta)=(T_f\alpha|\beta).$$

اگر f و g دوفرم باشند و c یك اسکالر، آنگاه به‌ازای هر α و β در V

$$\begin{aligned} (cf+g)(\alpha, \beta)&=(T_{cf+g}\alpha|\beta) \\ &=cf(\alpha, \beta)+g(\alpha, \beta) \\ &=c(T_f\alpha|\beta)+(T_g\alpha|\beta) \\ &=((cT_f+T_g)\alpha|\beta). \end{aligned}$$

بنابراین

$$T_{cf+g}=cT_f+T_g$$

و ازاین‌رو، $f \rightarrow T_f$ نگاشتی خطی است. به‌ازای هر T در $L(V, V)$، تساوی

$$f(\alpha, \beta)=(T\alpha|\beta)$$

فرمی تعریف می کند که $T_f=T$ و $T_f=0$ اگر وتنها اگر $f=0$. بنابراین، $f \rightarrow T_f$ یك یکریختی است. □

نتیجه. تساوی

$$(f\,|\,g)=\operatorname{tr}(T_fT_g^*)$$

ضربی داخلی روی فضای فرمها بااین خاصیت تعریف می‌کندکه به‌ازای هرپایهٔ متعامدیکه $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ از V

$$(f\,|\,g)=\sum_{j,k}f(\alpha_k\,,\,\alpha_j)\overline{g(\alpha_k\,,\,\alpha_j)}.$$

اثبات. از مثال ۳ فصل ۸ بسادگی نتیجه می‌شود که $(T, U)=\operatorname{tr}(TU^*)$ ضربی داخلی روی $L(V, V)$ است. چون $f\to T_f$ یك یکریختی است، مثال ۶ ازفصل ۸ نشان می‌دهد که

$$(f\,|\,g)=\operatorname{tr}(T_fT_g^*)$$

نیز یك ضرب داخلی است. حال فرض کنیم A و B ماتریسهای T_f و T_g درپایه متعامدیکه $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ باشند. دراین‌صورت

$$A_{jk}=(T_f\alpha_k\,|\,\alpha_j)=f(\alpha_k\,,\,\alpha_j)$$

و $B_{jk}=(T_g\alpha_k\,|\,\alpha_j)=g(\alpha_k, \alpha_j)$. چون AB^* ماتریس $T_fT_g^*$ درپایهٔ $\mathcal{B}$ است، نتیجه می‌گیریم که

$$(f\,|\,g)=\operatorname{tr}(AB^*)=\sum_{j,k}A_{jk}\bar{B}_{jk}. \quad \square$$

تعریف. اگر f یك فرم باشد و $\mathcal{B}=\{\alpha_1\,,\,\cdots\,,\,\alpha_n\}$ پایهٔ مرتب دلخواهی از V، ماتریس A با درایه‌های

$$A_{jk}=f(\alpha_k\,,\,\alpha_j)$$

ماتریس f درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ نامیده می‌شود.

وقتی که $\mathcal{B}$ یك پایهٔ متعامدیکه باشد، ماتریس f در $\mathcal{B}$ ماتریس تبدیل خطی T_f نیز هست، اما درحالت عمومی این‌طور نیست.

اگر A ماتریس f درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ باشد، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای همهٔ اسکالرهای x_s و y_r $(1\leqslant r, s\leqslant n)$

$$f\Big(\sum_s x_s\alpha_s\,,\,\sum_r y_r\alpha_r\Big)=\sum_{r,s}\bar{y}_rA_{rs}x_s\,. \tag{۹–۱}$$

به‌بیان دیگر، ماتریس A دارای این خاصیت است که

$$f(\alpha, \beta)=Y^*AX.$$

دراینجا X و Y بترتیب ماتریسهای مختصات α و β درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ هستند. ماتریس f

در پایهٔ دیگر

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i, \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

بنا بر معادلهٔ

$$A' = P^* A P \tag{۹-۲}$$

تعیین می‌شود. زیرا

$$\begin{aligned} A'_{jk} &= f(\alpha'_k, \alpha'_j) \\ &= f(\sum_s P_{sk}\alpha_s, \sum_r P_{rj}\alpha_r) \\ &= \sum_{r,s} \overline{P}_{rj} A_{rs} P_{sk} \\ &= (P^* A P)_{jk}. \end{aligned}$$

چون برای ماتریسهای یکانی، $P^* = P^{-1}$، از (۹-۲) چنین برمی‌آید که نتایج مربوط به‌هم ارزی یکانی را می‌توان در مطالعهٔ فرمها هم به‌کار برد.

قضیهٔ ۲. گیریم f فرمی روی یك فضای ضرب داخلی مختلط بعدمتناهی V باشد. در این صورت پایهٔ متعامدیکه‌ای برای V وجود داردکه در آن ماتریس f بالا مثلثی است.

اثبات. فرض کنیم T عملگری خطی روی V باشدکه به ازای هر α و β، $f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$. بنا بر قضیهٔ ۲۱، پایهٔ متعامد یکه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ وجود داردکه درآن ماتریس T بالامثلثی است. از این‌رو وقتی که $j > k$

$$f(\alpha_k, \alpha_j) = (T\alpha_k | \alpha_j) = 0. \square$$

تعریف. یك فرم f روی یك فضای برداری حقیقی یا مختلط V **هرمیتی** نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر α و β در V

$$f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)}.$$

اگر T عملگری خطی روی یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی V باشد و f فرم

$$f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$$

آنگاه $\overline{f(\beta, \alpha)} = (\alpha | T\beta) = (T^*\alpha | \beta)$؛ از این رو، f هرمیتی است اگر و تنها اگر T خود الحاق باشد.

وقتی که f هرمیتی باشد، به‌ازای هرα، مقدار $f(\alpha, \alpha)$ حقیقی است واین خاصیت روی فضاهای مختلط فرمهای هرمیتی را مشخص می‌سازد.

قضیهٔ ۳ گیریم V یك فضای برداری مختلط باشد و f فرمی روی V که به ازای هر α، $f(\alpha, \alpha)$ حقیقی است. در این صورت f هرمیتی است.

اثبات. گیریم α و β بردارهایی از V باشند. باید نشان دهیم که

$$f(\alpha, \beta)=\overline{f(\beta, \alpha)}$$

اما

$$f(\alpha+\beta, \alpha+\beta)=f(\alpha, \alpha)+f(\alpha, \beta)+f(\beta, \alpha)+f(\beta, \beta).$$

چون $f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)$، $f(\alpha,\alpha)$، و $f(\beta,\beta)$ همه حقیقی هستند، عدد $f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)$ هم حقیقی است. با استفاده از همین برهان ولی با $\alpha+i\beta$ بـه جای $\alpha+\beta$، می‌بینیم که $-if(\alpha, \beta)+if(\beta, \alpha)$ نیز حقیقی است. با این نتیجه‌گیری که دو عدد حقیقی هستند، آنها را برابر مزدوجهای مختلطشان قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم که

$$f(\alpha, \beta)+f(\beta, \alpha)=\overline{f(\alpha, \beta)}+\overline{f(\beta, \alpha)}$$

$$-if(\alpha, \beta)+if(\beta, \alpha)=i\overline{f(\alpha, \beta)}-i\overline{f(\beta, \alpha)}.$$

اگر معادلهٔ دوم را در i ضرب کنیم و نتیجه را به‌معادلهٔ اول بیفزاییم، داریم

$$۲f(\alpha, \beta)=۲\overline{f(\beta, \alpha)}. \square$$

نتیجه. گیریم T عملگری خطی روی یك فضای ضرب داخلی با بعدمتناهی مختلط باشد. در این صورت T خودالحاق است اگر و تنها اگر بـه ازای هر α در V، $(T\alpha|\alpha)$ حقیقی باشد.

قضیهٔ ۴. (**قضیهٔ محور اصلی**). بـه ازای هر فرم هرمیتی f روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی V، پایهٔ متعامد یکه‌ای برای V وجود داردکه درآن f با یك ماتریس قطری با درایه‌های حقیقی نمایش داده می‌شود.

اثبات. گیریم T عملگری خطی باشد که به‌ازای هر α و β در V، $f(\alpha,\beta)=(T\alpha|\beta)$. در این صورت چون $f(\alpha, \beta)=\overline{f(\beta, \alpha)}$ و $\overline{(T\beta|\alpha)}=(\alpha|T\beta)$، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر α و β

$$(T\alpha|\beta)=\overline{f(\beta, \alpha)}=(\alpha|T\beta)$$

و از این‌رو، $T=T^*$. بنا بر قضیهٔ ۱۸ از فصل ۸، پایهٔ متعامد یکه‌ای برای V وجوددارد که متشکل از بردارهای سرشت‌نمای T است. فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یك پایهٔ متعامد یکه باشد و به‌ازای هر $1\leqslant j\leqslant n$

$$T\alpha_j=c_j\alpha_j.$$

در این صورت

$$f(\alpha_k, \alpha_j)=(T\alpha_k|\alpha_j)=\delta_{kj}c_k$$

و بنا بر قضیهٔ ۱۵ در فصل ۸ همهٔ c_kها حقیقی هستند. $\square$

نتیجه. تحت شرایط بالا

$$f(\sum_j x_j\alpha_j,\ \sum_k y_k\alpha_k)=\sum_j c_jx_j\bar{y}_j.$$

تمرین

۱. کدامیك از توابع f ذیل، تعریف‌شده روی بردارهای $\beta=(y_۱, y_۲)$، $\alpha=(x_۱, x_۲)$ در $C^۲$، فرمهایی (یك و نیم خطی) روی $C^۲$ هستند؟

(الف) $f(\alpha, \beta)=۱$.

(ب) $f(\alpha, \beta)=(x_۱-\bar{y}_۱)^۲+x_۲\bar{y}_۲$.

(پ) $f(\alpha, \beta)=(x_۱+\bar{y}_۱)^۲-(x_۱-\bar{y}_۱)^۲$.

(ت) $f(\alpha, \beta)=x_۱\bar{y}_۲-\bar{x}_۲y_۱$.

۲. فرض کنید f فرمی روی $R^۲$ باشد که با

$$f(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲))=x_۱y_۱+x_۲y_۲$$

تعریف می‌شود. ماتریس f در هر یك از پایه‌های ذیل را بیابید:

$$\{(۱, ۰), (۰, ۱)\}, \{(۱, -۱), (۱, ۱)\}, \{(۱, ۲), (۳, ۴)\}.$$

۳. فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & i \\ -i & ۲ \end{bmatrix}$$

و g فرم (روی فضای ماتریسهای مختلط ۱ × ۲) تعریف‌شده توسط $g(X, Y)=Y^*AX$ باشد. آیا g ضربی داخلی است؟

۴. فرض کنید V یك فضای برداری مختلط و f فرم (یك و نیم خطی) متقارنی روی V باشد: $f(\alpha, \beta)=f(\beta, \alpha)$. f چیست؟

۵. فرض کنید f فرمی باشد که توسط

$$f((x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲))=x_۱y_۱+۴x_۲y_۲+۲x_۱y_۲+۲x_۲y_۱$$

تعیین می‌شود. پایهٔ مرتبی بیابید که در آن f توسط ماتریسی قطری نمایش داده شود.

۶. فرم f را **ناتبهگون** (چپ) نامیم، هرگاه بردار ۰ تنها بردار α با این خاصیت باشد که به‌ازای هر β، $f(\alpha, \beta)=۰$. گیریم f فرمی روی یك فضای ضرب داخلی باشد. ثابت کنید f ناتبهگون است اگر و تنها اگر عملگر خطی وابستهٔ T_f (قضیهٔ ۱) نامنفرد باشد.

۰۷ فرض کنید f فرمی روی یك فضای برداری بعد متناهی V باشد. به تعریف ناتبهگونی چپ ارائه شده در تمرین ۶ توجه‌کنید. ناتبهگونی راست را تعریف و ثابت‌کنیدکه فرم f ناتبهگون چپ است اگر و تنها اگر f ناتبهگون راست باشد.

۰۸ فرض کنید f فرمی ناتبهگون (تمرینهای ۶ و ۷) روی یك فضای بعد متناهی V باشد. فرض‌کنید L تابعکی خطی روی V باشد. نشان دهید یك و تنها یك بردار چون β در V وجود داردکه به‌ازای هر α، $L(\alpha)=f(\alpha, \beta)$.

۰۹ فرض کنید f فرمی ناتبهگون روی یك فضای بعدمتناهی V باشد. نشان دهید هرعملگر خطی S دارای یك «الحاقی نسبت به f» است، یعنی عملگری چون S' وجود داردکه به‌ازای همهٔ αها و βها، $f(S\alpha, \beta)=f(\alpha, S'\beta)$.

۳.۹. فرمهای مثبت

دراین بخش، دربارهٔ فرمهای (یك‌ونیم خطی) نامنفی و رابطهٔ آنها با ضرب داخلی‌مفروض روی فضای برداری زمینه بحث می‌کنیم.

تعاریف. یك فرم f روی یك فضای برداری حقیقی یا مختلط V نامنفی است، هرگاه هرمیتی باشد و به‌ازای هر α در V، $f(\alpha, \alpha)\geqslant 0$. فرم f **مثبت** است، هرگاه f هرمیتی و به ازای هر $\alpha\neq 0$، $f(\alpha, \alpha)>0$ باشد.

یك فرم مثبت روی V چیزی جز ضربی داخلی روی V نیست. هر فرم نامنفی در همهٔ خواص یك ضرب داخلی صدق می‌کند با این استثنا که برخی از بردارهای غیرصفر ممکن است برخودشان عمود باشند.

گیریم f فرمی‌روی فضای با بعدمتناهی V باشد. فرض‌کنیم $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای V و A ماتریس f درپایهٔ $\mathcal{B}$ باشد؛ یعنی، $A_{jk}=f(\alpha_k, \alpha_j)$. اگر $\alpha=x_1\alpha_1+\dots+x_n\alpha_n$، آنگاه

$$
\begin{aligned}
f(\alpha,\alpha) &= f\Big(\sum_j x_j\alpha_j, \sum_k x_k\alpha_k\Big) \\
&= \sum_j \sum_k x_j\bar{x}_k f(\alpha_j, \alpha_k) \\
&= \sum_j \sum_k A_{kj}x_j\bar{x}_k.
\end{aligned}
$$

از این‌رو، می‌بینیم که f نامنفی است اگر و تنها اگر

$$A=A^*$$

و

$$(۳\text{-}۹)\qquad \text{به‌ازای همهٔ اسکالرهای } x_1,\dots,x_n\qquad \sum_j\sum_k A_{kj}x_j\bar{x}_k \geqslant 0.$$

برای اینکه f مثبت باشد، باید به‌ازای همهٔ $(x_1,\dots,x_n)\neq 0$ نامساوی (۹-۳) اکید باشد. شرایط استخراج شده حاکی از این هستند که f فرمی مثبت روی V است اگر و تنها اگر تابع

$$g(X,Y)=Y^*AX$$

فرمی مثبت روی فضای ماتریسهای ستونی $n\times 1$ بر روی هیأت اسکالرها باشد.

قضیهٔ ۵. گیریم F هیات اعداد حقیقی یا هیأت اعداد مختلط و A ماتریسی $n\times n$ بر روی F باشد. تابع g تعریف شده توسط

$$g(X,Y)=Y^*AX \qquad (۴\text{-}۹)$$

فرمی‌مثبت روی فضای $F^{n\times 1}$ است اگر وتنها اگرماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری چون P با درایه‌های واقع در F وجود داشته باشد به‌طوری که $A=P^*P$.

اثبات. به‌ازای هرماتریس $n\times n$ دلخواهی مانند A، تابع g در(۹-۴) روی‌فضای ماتریسهای ستونی یك فرم است. قصدمان این است که ثابت‌کنیم g مثبت است اگر و تنها اگر $A=P^*P$. ابتدا، فرض‌کنیم $A=P^*P$. دراین‌صورت g هرمیتی است، و

$$\begin{aligned} g(X,X)&=X^*P^*PX\\ &=(PX)^*PX\\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

اگر P معکوس‌پذیر باشد و $X\neq 0$، آنگاه $(PX)^*PX>0$.

حال، فرض‌کنیم g فرمی مثبت روی فضای ماتریسهای ستونی باشد. در این‌صورت g ضربی داخلی است و از این‌رو، ماتریسهایی ستونی چون $Q_1,\dots,Q_n$ وجوددارندکه

$$\begin{aligned} \delta_{jk}&=g(Q_j,Q_k)\\ &=Q_k^*AQ_j\,. \end{aligned}$$

اما این مطلب دقیقاً حاکی است که اگر Q ماتریسی با ستونها $Q_1,\dots,Q_n$ باشد، آنگاه $Q^*AQ=I$. چون $\{Q_1,\dots,Q_n\}$ یك پایه است، Q معکوس‌پذیر می‌باشد. حال با فرض $P=Q^{-1}$، داریم $A=P^*P$. □

در عمل، بررسی اینکه ماتریس مفروضی چون A معیار مثبت بودنی را که تااینجا عرضه کرده‌ایم ارضا می‌کند، آسان نیست. پیامدی از قضیهٔ اخیراین است که اگر g مثبت باشد، آنگاه $\det A>0$، زیرا

$$\det A=\det(P^*P)=\det P^*\det P=|\det P|^2.$$

این واقعیت‌که $\det A>0$ به‌هیچ وجه برای تضمین مثبت بودن g کافی نیست؛ اما،وابسته

به A، n دترمینان وجود دارند که خاصیت ذیل را دارند: اگر $A=A^*$ و اگر هر یك از این دترمینانها مثبت باشند. آنگاه g فرمی مثبت است.

تعریف. گیریم A ماتریسی $n\times n$ برروی‌هیأت F باشد. ***کهادهای اصلی*** A اسکالرهای $\Delta_k(A)$ تعریف شده به‌صورت

$$\Delta_k(A)=\det\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{k1} & & A_{kk}\end{bmatrix},\quad 1\leqslant k\leqslant n$$

هستند.

لم. گیریم A ماتریس $n\times n$ معکوس پذیری با درایه‌های واقع در هیأتی چون F باشد. دو حکم ذیل هم ارزند.

(الف) ماتریسی بالا مثلثی چون P با $P_{kk}=1$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ وجود دارد که ماتریس $B=AP$ پایین مثلثی است.

(ب) کهادهای اصلی A همگی مخالف ۰ هستند.

اثبات. P را ماتریس $n\times n$ دلخواهی می‌گیریم و قرار می‌دهیم $B=AP$. آنگاه

$$B_{jk}=\sum_r A_{jr}P_{rk}.$$

اگر P بالامثلثی و به‌ازای هر k، $P_{kk}=1$ باشدآنگاه

$$\sum_{r=1}^{k-1} A_{jr}P_{rk}=B_{jk}-A_{kk},\quad k>1.$$

اما، B پایین مثلثی است مشروط به‌اینکه به ازای $j<k$، $B_{jk}=0$. پس، B پایین مثلثی خواهد بود اگر و تنها اگر

$$\sum_{r=1}^{k-1} A_{jr}P_{rk}=-A_{kk},\quad \begin{matrix}1\leqslant j\leqslant k-1\\ 2\leqslant k\leqslant n.\end{matrix} \tag{۵-۹}$$

از این‌رو، می‌بینیم که حکم (الف) هم‌ارز با این حکم است که اسکالرهایی چون P_{rk}، $1\leqslant r\leqslant k$، $1\leqslant k\leqslant n$ وجوددارند که‌در (۵-۹) صدق‌می‌کنند و $P_{kk}=1$، $1\leqslant k\leqslant n$.

در (۵-۹)، به ازای هر $k>1$ دستگاهی از $k-1$ معادلهٔ خطی با مجهولهای P_{1k}، P_{2k}، $\cdots$، $P_{k-1,k}$ وجود دارد. ماتریس ضرایب این دستگاه عبارت است از

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k-1,1} & & A_{k-1,k-1} \end{bmatrix}$$

و دترمینان آن برابر کهاد اصلی $\Delta_{k-1}(A)$ است. اگـر هر $\Delta_{k-1}(A)\neq 0$ دستگاههای (۹-۵) دارای جوابهای یکتا می‌باشند. تا اینجا نشان داده‌ایم که حکم (ب) حکم (الف) را ایجاب می‌کند و ماتریس P یکتاست

حال فرض کنیم که (الف) برقرار باشد. آنگاه، همان‌طور که خواهیم دید

$$\begin{aligned} \Delta_k(A) &= \Delta_k(B) \\ &= B_{11}B_{22}\cdots B_{kk}, \quad k=1,\cdots,n. \end{aligned} \tag{۹-۶}$$

برای بررسی (۹-۶)، فـرض کنیم A_1 ، $\cdots$ ، A_n و B_1 ، $\cdots$ ، B_n بترتیب ستونهای A و B باشند. دراین‌صورت

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_r &= \sum_{j=1}^{r-1} P_{jr}A_j + A_r, \quad r>1 \end{aligned} \tag{۹-۷}$$

حال k را ثابت می گیریم $1\leqslant k\leqslant n$. از (۹-۷) بر می‌آید که rمین ستون ماتریس

$$\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{k1} & \cdots & B_{kk} \end{bmatrix}$$

باافزودن ترکیبی خطی از دیگر ستونها به‌ستون rم

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

به دست می‌آید. چنین اعمالی دترمینان را تغییر نمی‌دهند. ایـن مطلب ، (۹-۶) را ثابت می‌کند، به‌استثنای این مطلب بدیهی که چون B مثلثی است، $\Delta_k(B)=B_{11}\cdots B_{kk}$. چون A و P معکوس‌پذیرند B نیز معکوس‌پذیر است. بنابراین

$$\Delta(B)=B_{11}\cdots B_{nn}\neq 0$$

واز این‌رو $\Delta_k(A)\neq 0$ ، $k=1,\cdots,n$. □

قضیهٔ ۶. گیریم f یک فرم روی یک فضای برداری بعد متناهی V و A ماتریس f در یک پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ باشد. دراین صورت f یک فرم مثبت است اگر وتنها اگر $A=A^*$ وکهادهای اصلی A همگی مثبت باشند.

اثبات. ابتدا نیمهٔ جالب قضیه را انجام می‌دهیم. فرض کنیم $A=A^*$ و $\Delta_k(A)>0$، $1\leqslant k\leqslant n$. طبق لم، یك ماتریس بالا مثلثی (یکتای) P با $P_{kk}=1$ وجود دارد که $B=AP$ پایین مثلثی است. ماتریس P^* نیز پایین مثلثی است، بنابراین $P^*B=P^*AP$ نیز پایین مثلثی است. چون A خود الحاق است، ماتریس $D=P^*AP$ هم خودالحاق می‌باشد. هر ماتریس مثلثی خودالحاق لزوماً ماتریسی قطری است. با همان استدلالی که منجر به (۹-۶) شد داریم

$$\begin{aligned}\Delta_k(D)&=\Delta_k(P^*B)\\&=\Delta_k(B)\\&=\Delta_k(A).\end{aligned}$$

چون D قطری است کهادهای اصلی آن عبارتنداز

$$\Delta_k(D)=D_{11}\cdots D_{kk}.$$

بنابر $\Delta_k(D)>0$، $1\leqslant k\leqslant n$، به‌ازای هر k، داریم $D_{kk}>0$.

اگر A ماتریس فرم f در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ باشد، آنگاه $D=P^*AP$ ماتریس f در پایهٔ $\{\alpha'_1,\cdots,\alpha'_n\}$ تعریف شده توسط

$$\alpha'_j=\sum_{i=1}^{n}P_{ij}\alpha_i$$

است. حال به (۹-۲) توجه کنید. چون D قطری است و درایه‌های روی قطرش مثبت هستند، بدیهی است که

$$X^*DX>0,\quad X\neq 0$$

که از آن نتیجه می‌شود f فرمی مثبت است.

حال، فرض کنیم با فرم مثبتی چون f آغاز کرده باشیم. می‌دانیم که $A=A^*$. چگونه نشان دهیم که $\Delta_k(A)>0$، $1\leqslant k\leqslant n$؟ فرض می کنیم V_k زیرفضای پدیدآمده توسط α_1، $\cdots$، α_k و f_k تحدید f به $V_k\times V_k$ باشد. به‌بیانی هم‌ارز، f_k فرمی مثبت روی V_k است و درپایهٔ $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ با ماتریس

$$\begin{bmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1k}\\\vdots&&\\A_{k1}&\cdots&A_{kk}\end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود، به‌عنوان پیامدی ازقضیهٔ ۵، ملاحظه کردیم که مثبت بودن یك فرم

ایجاب می‌کند که دترمینان هرماتریس نمایش آن هم مثبت باشد. □

برای تکمیل بحث خود دربارهٔ رابطهٔ بین فرمهای مثبت وماتریسها، چند نکته‌وجود دارد که بایدآنها را متذکرشویم. چه‌چیزی مشخص‌کنندهٔ ماتریسهایی است‌که فرمهای‌مثبت را نمایش می‌دهند؟ اگر f فرمی روی یک فضای برداری مختلط و A ماتریس f درپایهٔ مرتبی باشد، آنگاه f مثبت خواهد بود اگروتنها اگر $A=A^*$ و

(۸-۹) به‌ازای هر $X\neq 0$ مختلط $X^*AX>0$.

از قضیهٔ ۳ نتیجه می‌شودکه شرط $A=A^*$ زاید است، یعنی (۸-۹) شرط $A=A^*$ را هم ایجاب می‌کند. ازطرف دیگر، اگربا یك فضای برداری حقیقی سروکار داشته باشیم، فرم f مثبت خواهد بود اگروتنهااگر $A=A^t$ و

(۹-۹) به‌ازای هر $X\neq 0$ حقیقی $X^tAX>0$.

باید تأکیدکنیم‌که اگرماتریسی حقیقی چون A در (۹-۹) صدق‌کند، نتیجه نمی‌شود که $A=A^t$. مطلبی که درست است این است‌که اگر $A=A^t$ و (۹-۹) برقرارباشد، آنگاه (۸-۹) نیزبرقرار است. این امر بدین‌دلیل است‌که

$$
\begin{aligned}
(X+iY)^*A(X+iY) &= (X^t-iY^t)A(X+iY)\\
&= X^tAX+Y^tAY+i[X^tAY-Y^tAX]
\end{aligned}
$$

واگر $A=A^t$ آنگاه $Y^tAX=X^tAY$.

اگر A ماتریسی $n\times n$ با درایه‌های مختلط باشد و اگر A در (۸-۹) صدق کند، A را یك **ماتریس مثبت** خواهیم نامید. نکاتی راکه قریباً متذکر شدیم با گفتن مطلب ذیل می‌توان خلاصه‌کرد: در هریك از حالات حقیقی یا مختلط، فرمی چون f مثبت است اگر وتنهااگر ماتریس آن دریك (درواقع، درهر) پایهٔ مرتب، ماتریسی مثبت باشد.

حال فرض کنیم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد و f فرمی نامنفی روی V. عملگرخطی خودالحاق یکتایی چون T روی V وجود داردکه

$$f(\alpha,\beta)=(T\alpha|\beta). \tag{۱۰-۹}$$

بعلاوه T دارای این خاصیت اضافی نیزهست‌که $(T\alpha|\alpha)\geqslant 0$

تعریف. عملگری خطی چون T روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی V نامنفی است هرگاه $T=T^*$ و به‌ازای هر α در V، $(T\alpha|\alpha)\geqslant 0$. یك عملگر خطی مثبت عملگری مانند T است که $T=T^*$ و به‌ازای هر $\alpha\neq 0$ $(T\alpha|\alpha)>0$.

اگر V یك فضای برداری (حقیقی یا مختلط) با بعد متناهی و $(\cdot|\cdot)$ ضربی داخلی روی V باشد، روی V ردهٔ وابسته‌ای از عملگرهای خطی مثبت وجود دارد. به واسطهٔ

(۹-۱۰) تناظری یك به‌یك بین این رده از عملگرهای مثبت ودستهٔ همهٔ فرمهای مثبت‌روی V یافت می‌شود. جهت تأکید روی روابط بین عملگرهای مثبت، فرمهای مثبت،وماتریسهای مثبت ازتمرینات این بخش استفاده خواهیم‌کرد. آنچه راکه گفتیم خلاصه می کنیم.

اگر A ماتریسی $n\times n$ برروی هیأت اعداد مختلط باشد، احکام زیرهم‌ارزند.

(۱) A مثبت است، یعنی وقتی که x_1، ...، x_n اعدادی مختلط باشند و لااقل یکی ازآنها ۰ نباشد، آنگاه $\sum\limits_j \sum\limits_k A_{kj} x_j \bar{x}_k > 0$.

(۲) $(X|Y)=Y^* AX$ ضربی داخلی روی فضای ماتریسهای مختلط $n\times 1$ است.

(۳) نسبت به‌ضرب داخلی استانده $(X|Y)=Y^* X$ روی ماتریسهای $n\times 1$،عملگر خطی $X \to AX$ مثبت است.

(۴) به‌ازای ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری چون P روی C، $A=P^* P$.

(۵) $A=A^*$ وکهادهای اصلی A همه مثبت هستند.

اگرهمهٔ درایه‌های A حقیقی باشند، این مطالب هم‌ارزند با:

(۶) $A=A^t$ و $\sum\limits_j \sum\limits_k A_{kj} x_j x_k > 0$، درصورتی که x_1، ...، x_n اعدادی‌حقیقی باشند، ولااقل یکی ازآنها صفرنباشد.

(۷) $(X|Y)=Y^t AX$ ضربی داخلی روی فضای ماتریسهای حقیقی $n\times 1$ است.

(۸) نسبت به‌ضرب‌داخلی استاندهٔ $(X|Y)=Y^t X$ روی‌ماتریسهای حقیقی $n\times 1$، عملگر خطی $X \to AX$ مثبت است.

(۹) ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری چون P با درایه‌های حقیقی وجود دارد که $A=P^t P$.

تمرین

۱. فرض‌کنید V فضای C^2 با ضرب داخلی استانده باشد. به‌ازای کدام بردار α در V، عملگر خطی مثبتی چون T وجود داردکه $\alpha=T\epsilon_1$؟

۲. فرض‌کنید V فضای R^2 با ضرب داخلی استانده باشد. اگر θ عددی حقیقی باشد، T را عملگر خطی «دوران به‌اندازهٔ θ» بگیرید:

$$T_\theta(x_1, x_2)=(x_1\cos\theta - x_2\sin\theta,\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta).$$

به‌ازای کدام مقادیر θ، عملگر T_θ مثبت است؟

۳. Vرا فضای ماتریسهای $n\times 1$ برروی C باضرب داخلی $(X|Y)=Y^* GX$ (که درآن G ماتریس $n\times n$ی است‌که تابع اخیر یك ضرب داخلی باشد) بگیرید. فرض‌کنید A ماتریسی $n\times n$ و T عملگر خطی $T(X)=AX$ باشد. T^* را بیابید. اگر Y عنصر ثابتی از V باشد، عنصر Z از V را که تابعك خطی $X \to Y^* X$ را تعیین می کند،

بیابید. به‌بیان دیگر، Zی را بیابیدکه به‌ازای هر X در V، $Y^*X=(X|Z)$.

۴. فرض‌کنید V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. اگر T و U دوعملگر خطی مثبت روی V باشند ثابت‌کنید $(T+U)$ هم‌مثبت است. مثالی بیاوریدکه نشان دهد TU لزوماً مثبت نیست.

۵. فرض‌کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}.$$

(الف) نشان‌دهیدکه A مثبت است.

(ب) V را فضای ماتریسهای حقیقی ۱ × ۲ با ضرب داخلی $(X|Y)=Y^tAX$ بگیرید. با به‌کار بستن فرایندگرام‌ـاشمیت برپایهٔ $\{X_۱, X_۲\}$ با فرض

$$X_۱=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \qquad X_۲=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

پایهٔ متعامد یکه‌ای برای V بیابید.

(پ) ماتریس حقیقی ۲ × ۲ معکوس‌پذیری چون P بیابید که $A=P^tP$

۶. کدام‌یك از ماتریسهای ذیل مثبت‌اند؟

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۱+i \\ ۱-i & ۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}.$$

۷. مثالی از ماتریسی $n\times n$ بیاوریدکه همهٔ کهادهای اصلی آن مثبت باشند ولی خود ماتریسی مثبت نباشد.

۸. آیا $((x_۱, x_۲)|(y_۱ \ \ y_۲))=x_۱\bar{y}_۱+۲x_۲\bar{y}_۱+۲x_۱\bar{y}_۲+x_۲\bar{y}_۲$ ضربی داخلی روی $C^۲$ تعریف می‌کند؟

۹. ثابت کنید که همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریسی مثبت اعدادی مثبت هستند.

۱۰. فرض کنید V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. اگر T و U عملگرهایی خطی روی V باشند می‌نویسیم $T<U$ هرگاه $U-T$ عملگر مثبتی باشد. احکام زیر را ثابت کنید:

(الف) $T<U$ و $U<T$ غیرممکن است.
(ب) اگر $T<U$ و $U<S$، آنگاه $T<S$.
(پ) اگر $T<U$ و $S>0$ لزومی ندارد که $ST<SU$

۱۱. فرض کنید V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و E تصویر متعامد V بروی‌زیر فضای دلخواهی باشد.
(الف) ثابت کنید که به‌ازای هرعدد مثبت c، عملگر $cI+E$ مثبت است.
(ب) عملگر خطی خودالحاق T را که $T^2=I+E$ برحسب E بیان کنید.

۱۲. فرض کنید n عددی صحیح مثبت و A ماتریس $n\times n$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

باشد. ثابت کنید A مثبت است.

۱۳. فرض کنید A ماتریس $n\times n$ خودالحاقی باشد. ثابت کنید عددی حقیقی چون c وجود دارد که ماتریس $cI+A$ مثبت باشد.

۱۴. ثابت کنید حاصلضرب دوعملگرخطی مثبت عملگری است مثبت اگروتنها اگر آن دو عملگر جابجا شوند.

۱۵. فرض کنید S و T دو عملگر مثبت باشند. ثابت کنید که همهٔ مقادیر سرشت‌نمای ST مثبت هستند.

۴.۹. چند مطلب دیگر دربارهٔ فرمها

این بخش شامل دو قضیه است که اطلاعات مشروح‌تری دربارهٔ فرمهای (یک و نیم‌خطی) به‌دست می‌دهند.

قضیهٔ ۷. گیریم f فرمی روی یک فضای برداری حقیقی یا مختلط V و $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ پایه‌ای برای زیرفضای بعد متناهی W از V باشد. فرض کنیم M ماتریسی $r\times r$ با درایه‌های

$$M_{jk}=f(\alpha_k, \alpha_j)$$

و W' مجموعهٔ همهٔ بردارهایی چون β از V باشد که به‌ازای هر α در W، $f(\alpha, \beta)=0$. دراین‌صورت W' زیرفضایی از V است و $W\cap W'=\{0\}$ اگر و تنها اگر M معکوس‌پذیر باشد. درصورت وقوع چنین وضعی $V=W+W'$

اثبات. اگر β و γ بردارهایی از W' باشند و c یک اسکالر، آنگاه به‌ازای هر α در W

$$f(\alpha, c\beta+\gamma)=\bar{c}f(\alpha, \beta)+f(\alpha, \gamma)$$
$$=0.$$

از این‌رو، W' یک زیرفضای V است.

حال فرض کنیم $\alpha=\sum_{k=1}^{r}x_k\alpha_k$ و $\beta=\sum_{j=1}^{r}y_j\alpha_j$. دراین‌صورت

$$f(\alpha, \beta)=\sum_{j,k}\bar{y}_jM_{jk}x_k$$
$$=\sum_k\Big(\sum_j\bar{y}_jM_{jk}\Big)x_k.$$

ازاین مطلب نتیجه می‌شود که $W\cap W'\neq\{0\}$ اگر و تنها اگر دستگاه همگن

$$\sum_{j=1}^{r}\bar{y}_jM_{jk}=0, \quad 1\leqslant k\leqslant r$$

دارای یک جواب غیرصفر $(y_1, \cdots, y_r)$ باشد. ازاین‌رو، $W\cap W'=\{0\}$ اگر و تنها اگر M^* معکوس‌پذیر باشد. اما معکوس‌پذیری M^* هم‌ارز با معکوس‌پذیری M است.

فرض کنیم M معکوس‌پذیر باشد و بگیریم

$$A=(M^*)^{-1}=(M^{-1})^*.$$

g_j را روی V بنابر معادلهٔ

$$g_j(\beta)=\sum_{k=1}^{r}A_{jk}\overline{f(\alpha_k, \beta)}$$

تعریف می‌کنیم. آنگاه

$$\begin{aligned} g_j(c\beta+\gamma) &= \sum_k A_{jk}\overline{f(\alpha_k,\ c\beta+\gamma)} \\ &= c\sum_k A_{jk}\overline{f(\alpha_k,\ \beta)}+\sum_k A_{jk}\overline{f(\alpha_k,\ \gamma)} \\ &= cg_j(\beta)+g_j(\gamma). \end{aligned}$$

ازاین‌رو، هر g_j تابعی خطی روی V است. پس، می‌توانیم عملگری خطی چون E روی V را با قراردادن

$$E\beta=\sum_{j=1}^{r} g_j(\beta)\alpha_j$$

تعریف کنیم. چون

$$\begin{aligned} g_j(\alpha_n) &= \sum_k A_{jk}\overline{f(\alpha_k,\ \alpha_n)} \\ &= \sum_k A_{jk}(M^*)_{kn} \\ &= \delta_{jn} \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که به‌ازای $1\leqslant n\leqslant r$، $E(\alpha_n)=\alpha_n$. این مطلب ایجاب می‌کند که به‌ازای هر α در W، $E\alpha=\alpha$. بنابراین E، V را بروی W می‌نگارد و $E^2=E$. اگر β برداری دلخواه از V باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} f(\alpha_n,\ E\beta) &= f(\alpha_n,\ \sum_j g_j(\beta)\alpha_j) \\ &= \sum_j \overline{g_j(\beta)} f(\alpha_n,\ \alpha_j) \\ &= \sum_j \Big(\sum_k \overline{A}_{jk} f(\alpha_k,\ \beta)\Big) f(\alpha_n,\ \alpha_j). \end{aligned}$$

چون $A^*=M^{-1}$، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} f(\alpha_n,\ E\beta) &= \sum_k \Big(\sum_j (M^{-1})_{kj} M_{jn}\Big) f(\alpha_k,\ \beta) \\ &= \sum_k \delta_{kn} f(\alpha_k,\ \beta) \\ &= f(\alpha_n,\ \beta). \end{aligned}$$

این مطلب ایجاب می‌کند که به‌ازای هر α در W، $f(\alpha,\ E\beta)=f(\alpha,\ \beta)$. از این‌رو به‌ازای هر α در W و هر β در V

$$f(\alpha,\ \beta-E\beta)=0.$$

پس، $I-E$، V را در W' می‌نگارد. تساوی

$$\beta = E\beta + (I-E)\beta$$

نشان می‌دهد که $V = W + W'$. سرانجام به‌یك نكتهٔ نهایی هم باید اشاره‌کنیم. چون $W \cap W' = \{0\}$، هر بردار در V به‌طور یکتا عبارت است از مجموع یك بردار در W و یك بردار در W'. اگر β در W' باشد، نتیجه می‌شود که $E\beta = 0$. ازاین‌رو، $I - E$، V را بروی W' می‌نگارد. □

تصویر E راکه دراثبات ساخته شد می‌توان به‌شرح ذیل مشخص کرد: $E\beta = \alpha$ اگروتنها اگر α در W و $\beta - \alpha$ متعلق به W' باشد. پس، E مستقل از پایه‌ای از Wاست که درساختنش به‌کار رفت. ازاین‌رو، می‌توان به E به‌عنوان **تصویر V روی W** که **توسط** تجزیهٔ به‌مجموع مستقیم

$$V = W \oplus W'$$

تعیین می‌شود ارجاع کرد. توجه‌کنید که E یك تصویرمتعامد است اگر و تنها اگر $W' = W^{\perp}$

قضیهٔ ۸. گیریم f یك فرم روی یك‌فضای برداری حقیقی یامختلط V و A ماتریس f درپایهٔ مرتب $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ از V باشد. فرض کنیم کهادهای اصلی A همگی مخالف ۰ باشند. دراین صورت ماتریس بالامثلثی یکتایی چون P با $P_{kk} = 1$، ($1 \leqslant k \leqslant n$) وجود دارد که

$$P^* A P$$

نیز بالامثلثی باشد.

اثبات. چون $\Delta_k(A^*) = \overline{\Delta_k(A)}$، ($1 \leqslant k \leqslant n$)، کهادهای اصلی A^* همگی‌مخالف ۰ هستند. از این‌رو، بنابر لمی که در اثبات قضیهٔ ۶ به‌کار رفت ماتریسی بالامثلثی چون P با $P_{kk} = 1$ وجود دارد که A^*P پایین‌مثلثی باشد. بنابراین، $P^*A = (A^*P)^*$ بالامثلثی است. چون حاصل‌ضرب دوماتریس بالامثلثی خود بالامثلثی است، نتیجه می گیریم که P^*AP بالامثلثی می‌باشد. این مطلب وجود P، و نه‌یکتایی P، را نشان می‌دهد. اما، استدلالی بیشترهندسی هم وجود دارد که می‌تواند هم برای اثبات وجود وهم برای‌اثبات یکتایی P به‌کار رود.

گیریم W_k زیرفضای پدیدآمده توسط α_1، ...، α_k و W'_k مجموعهٔ همهٔ βهای در V باشدکه به‌ازای هر α در W_k، $f(\alpha, \beta) = 0$. چون $\Delta_k(A) \neq 0$، ماتریس M با درایه‌های

$$M_{ij} = f(\alpha_j, \alpha_i) = A_{ij}$$

($1 \leqslant i, j \leqslant k$) یك ماتریس $k \times k$ی معکوس‌پذیر است. بنابرقضیهٔ ۷

$$V = W_k \oplus W'_k.$$

E_k را تصویر V روی W_k که توسط این تجزیه تعیین می‌شود می گیریم و قرارمی‌دهیم $E_0 = 0$. فرض کنیم

$$\beta_k = \alpha_k - E_{k-1}\alpha_k, \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

دراین صورت $\beta_1 = \alpha_1$ و به‌ازای هر $k > 1$، $E_{k-1}\alpha_k$ به W_{k-1} تعلق دارد. پس وقتی که $k > 1$ اسکالرهای یکتایی چون P_{jk} وجود دارند که

$$E_{k-1}\alpha_k = -\sum_{j=1}^{k-1} P_{jk}\alpha_j.$$

پس از قراردادن $P_{kk} = 1$ و $P_{jk} = 0$ به‌ازای $j > k$، ماتریس بالامثلثی $n \times n$، P با $P_{kk} = 1$ و

$$\beta_k = \sum_{j=1}^{k} P_{jk}\alpha_j$$

به‌ازای $k = 1, \dots, n$ را خواهیم داشت. فرض کنیم $1 \leqslant i < k$. آنگاه β_i در W_i است و $W_i \subset W_{k-1}$. چون β_k به W'_{k-1} تعلق دارد، نتیجه می گیریم که $f(\beta_i, \beta_k) = 0$. فرض کنیم B ماتریس f درپایهٔ مرتب $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ را نشان دهد. دراین صورت

$$B_{ki} = f(\beta_i, \beta_k)$$

وازاین‌رو، وقتی که $k > i$، $B_{ki} = 0$ پس B بالامثلثی است. ازطرف دیگر

$$B = P^*AP.$$

بعکس، فرض کنیم P ماتریس بالامثلثی با $P_{kk} = 1$ باشدکه P^*AP هم بالامثلثی است. حال می‌نویسیم

$$\beta_k = \sum_j P_{jk}\alpha_j, \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

آنگاه $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ به‌طورآشکار پایه‌ای برای W_k می‌باشد. فرض کنیم $k > 1$. در این صورت $\{\beta_1, \dots, \beta_{k-1}\}$ پایه‌ای برای W_{k-1} است و چون وقتی که $i < k$، $f(\beta_i, \beta_k) = 0$ می بینیم که β_k برداری از W'_{k-1} است. معادله‌ای که β_k راتعریف‌می کند ایجاب می‌نماید که

$$\alpha_k = -\left(\sum_{j=1}^{k-1} P_{jk}\alpha_j\right) + \beta_k.$$

حال $\sum_{j=1}^{k-1} P_{jk}\alpha_j$ متعلق به W_{k-1} است، و β_k در W'_{k-1} قرار دارد. بنابراین، P_{1k}، $\dots$، P_{k-1k} اسکالرهای یکتایی هستند که

$$E_{k-1}\alpha_k=-\sum_{j=1}^{k-1}P_{jk}\alpha_j$$

و ازاین‌رو P همان ماتریس ساخته شدهٔ قبلی است. □

۵.۹. نظریهٔ طیفی

دراین بخش، پیامدهای قضایای ۱۸ و ۲۲ درفصل ۸ را دررابطه با قطری کردن عملگرهای خودالحاق ونرمال دنبال می کنیم.

قضیهٔ ۹ (قضیهٔ طیفی). گیریم T عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی مختلط بعد متناهی V یا عملگری خودالحاق روی یک فضای ضرب داخلی حقیقی بعد متناهی V باشد. فرض کنیم c_1، ...، c_k مقادیر سرشت‌نمای متمایز T باشند. فرض کنیم W_j فضای سرشت‌نمای وابسته به c_j و E_j تصویر متعامد V روی W_j باشد. دراین‌صورت، وقتی $i\neq j$، W_j بر W_i عمود است، فضای V مجموع مستقیم W_1، ...، W_k است و

$$T=c_1E_1+\cdots+c_kE_k. \qquad (۱۱\text{-}۹)$$

اثبات. α را برداری از W_j، β را برداری از W_i می‌گیریم وفرض می کنیم $i\neq j$. در این صورت $c_j(\alpha|\beta)=(T\alpha|\beta)=(\alpha|T^*\beta)=(\alpha|c_i\beta)$. از این‌رو، $(c_j-c_i)(\alpha|\beta)=0$ وچون $c_j-c_i\neq 0$، نتیجه می‌شود که $(\alpha|\beta)=0$. پس وقتی $i\neq j$، W_j بر W_i عمود است. بنابراین واقعیت که V دارای پایهٔ متعامد یکه‌ای متشکل از بردارهای سرشت‌نماست (با قضایای ۱۸ و ۲۲ فصل ۸ مقایسه شود) نتیجه می گیریم که $V=W_1+\cdots+W_k$. اگر α_j به W_j $(1\leqslant j\leqslant k)$ تعلق داشته باشد و $\alpha_1+\cdots+\alpha_k=0$، آنگاه به‌ازای هر i

$$0=(\alpha_i|\sum_j\alpha_j)=\sum_j(\alpha_i|\alpha_j)$$
$$=\|\alpha_i\|^2$$

وازاین‌رو، V برابرمجموع مستقیم W_1، ...، W_k است. بنابراین $E_1+\cdots+E_k=I$ و

$$T=TE_1+\cdots+TE_k$$
$$=c_1E_1+\cdots+c_kE_k. \ \square$$

تجزیهٔ (۹-۱۱)، تفکیک طیفی T نامیده می‌شود. این اصطلاح تا اندازه‌ای از کاربردهای فیزیکی که موجب تعریف طیف یك عملگر خطی روی یك فضای برداری با بعد متناهی، به‌عنوان مجموعهٔ مقادیر سرشت‌نمای آن عملگر شدند ناشی می‌شود. این مهم است بدانیم که تصویرهای E_1،...،E_k به‌طور متعارف به T وابسته‌اند؛ درحقیقت،

اینها چندجمله‌ایهایی برحسب T هستند.

نتیجه. اگر $e_j=\prod_{i\neq j}\left(\frac{x-c_i}{c_j-c_i}\right)$، آنگاه به ازای $1\leqslant j\leqslant k$، $E_j=e_j(T)$.

اثبات. چون وقتی $i\neq j$، $E_iE_j=0$ لذا نتیجه می‌شود که

$$T^2=c_1^2E_1+\cdots+c_k^2E_k.$$

و نیز با برهان استقرایی ساده‌ای به‌ازای هر عدد صحیح $n\geqslant 0$، داریم

$$T^n=c_1^nE_1+\cdots+c_k^nE_k.$$

به‌ازای هر چند جمله‌ای دلخواه

$$f=\sum_{n=0}^{r}a_nx^n$$

داریم

$$\begin{aligned}f(T)&=\sum_{n=0}^{r}a_nT^n\\&=\sum_{n=0}^{r}a_n\sum_{j=1}^{k}c_j^nE_j\\&=\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{n=0}^{r}a_nc_j^n\right)E_j\\&=\sum_{j=1}^{k}f(c_j)E_j.\end{aligned}$$

از آنجا که $e_j(c_m)=\delta_{jm}$، نتیجه می‌شود که $e_j(T)=E_j$. □

چون $E_1,\cdots,E_k$ به‌طور متعارف به T وابسته هستند و

$$I=E_1+\cdots+E_k$$

خانوادهٔ تصویرهای $\{E_1,\cdots,E_k\}$، **تفکیک همانی تعریف شده توسط** T نامیده‌می‌شود.

نکته‌ای دربارهٔ اثبات قضیهٔ طیفی وجود دارد که باید تذکر داده شود. ما این قضیه را با استفاده از قضایای ۱۸ و ۲۲ فصل ۸ در بارهٔ قطری‌کردن عملگرهای خودالحاق و نرمال استنتاج کردیم. اثبات دیگری هم وجود دارد که بیشتر جبری است و درآن ابتدا باید نشان داد که چند جمله‌ای مینیمال هر عملگر نرمال برابر حاصل ضربی از سازه‌های اول متمایز است. آنگاه همچون اثبات قضیهٔ تجزیهٔ اولیه (قضیهٔ ۱۲ در فصل ۶) می‌توان به‌پیش رفت. چنین اثباتی را در بخش بعد ارائه خواهیم کرد.

درکاربردهای گوناگون لازم است بدانیم که‌آیا می‌توان توابع معینی از عملگرها و ماتریسها، مثلاً ریشهٔ دوم آنها را محاسبه‌کرد یا خیر. ایـن امر را می‌توان به‌طور نسبتاً

ساده در مورد عملگرهای نرمال قطری شدنی انجام داد.

تعریف. گیریم T یك عملگر نرمال قطری شدنی روی یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و

$$T=\sum_{j=1}^{k} f(c_j)E_j$$

تفکیك طیفی آن باشد. فرض کنیم f تابعی باشد که دامنه‌اش طیف T را شامل است و مقادیرش در هیأت اسکالرها هستند. دراین صورت عملگر خطی $f(T)$ بنابر معادلهٔ

$$f(T)=\sum_{j=1}^{k} f(c_j)E_j \tag{۱۲-۹}$$

تعریف می‌شود.

قضیهٔ ۱۰. گیریم T یك عملگر نرمال قطری‌شدنی باطیف S روی یك فضای‌ضرب داخلی بعد متناهی V باشد. فرض کنیم f تابعی باشد که دامنه‌اش S را شامل است و مقادیرش در هیأت اسکالرها هستند. در این صورت $f(T)$ یك عملگر نرمال قطری‌شدنی با طیف $f(S)$ است. اگر U نگاشتی یکانی از V بروی V' باشد و $T'=UTU^{-1}$، آنگاه S طیف T' هم هست و

$$f(T')=Uf(T)U^{-1}.$$

اثبات. نرمال بودن $f(T)$ با محاسبهٔ ساده‌ای از (۱۲-۹) و با استفاده از این واقعیت که

$$f(T)^*=\sum_j \overline{f(c_j)}E_j$$

نتیجه می‌شود. علاوه براین، واضح است که به‌ازای هر α در $E_j(V)$

$$f(T)\alpha=f(c_j)\alpha.$$

پس مجموعهٔ $f(S)$ متشکل از همهٔ $f(c)$ها، به‌ازای c در S، درطیف $f(T)$ جای دارد. بعکس، فرض کنیم $\alpha\neq 0$ و

$$f(T)\,\alpha=b\alpha.$$

آنگاه $\alpha=\sum_j E_j\alpha$ و

$$\begin{aligned} f(T)\alpha &= \sum_j f(T)E_j\alpha \\ &= \sum_j f(c_j)E_j\alpha \end{aligned}$$

$$= \sum_j bE_j\alpha.$$

ازاین‌رو،

$$\|\sum_j (f(c_j)-b)E_j\alpha\|^2 = \sum_j |f(c_j)-b|^2\|E_j\alpha\|^2$$
$$= 0.$$

بنابراین، $f(c_j)=b$ یا $E_j\alpha=0$. بنابه‌فرض، $\alpha\neq 0$ و لذا نمایه‌ای چون i وجود دارد که $E_i\alpha\neq 0$. حال نتیجه می‌گیریم که $f(c_i)=b$ و لذا $f(S)$ خود طیف $f(T)$ است. درواقع فرض کنیم

$$f(S)=\{b_1, \cdots, b_r\}$$

که درآن $b_m\neq b_n$ هرگاه $m\neq n$. گیریم X_m مجموعهٔ نمایه‌هایی چون i باشد که $1\leqslant i\leqslant k$ و $f(c_i)=b_m$. فرض می‌کنیم $P_m=\sum_i E_i$. دراینجا مجموع برروی نمایه‌های i در X_m گرفته می‌شود. دراین صورت P_m تصویرمتعامد V روی زیرفضای بردارهای سرشت‌نمای متعلق به‌مقدار سرشت‌نمای b_m از $f(T)$ است و

$$f(T)=\sum_{m=1}^{r} b_m P_m$$

تفکیک طیفی $f(T)$ است.

حال فرض کنیم U تبدیلی یکانی از V بروی V' باشد و $T'=UTU^{-1}$. دراین صورت معادلهٔ

$$T\alpha=c\alpha$$

برقراراست اگروتنها اگر

$$T'U\alpha=cU\alpha.$$

پس، S طیف T' است و U هرزیرفضای سرشت‌نما برای T را بروی زیرفضای متناظرش برای T' می‌نگارد. درواقع، با استفاده از (۹-۱۲)، می‌بینیم که

$$T'=\sum_j c_jE'_j, \qquad E'_j=UE_jU^{-1}$$

تفکیک طیفی T' است. ازاین‌رو،

$$f(T')=\sum_j f(c_j)E'_j$$
$$=\sum_j f(c_j)UE_jU^{-1}$$

$$=U\Big(\sum_j f(c_j)E_j\Big)U^{-1}$$
$$=Uf(T)U^{-1}. \square$$

هنگام تفکر روی بحث قبل، این مهم است به‌خاطر داشته باشیم که طیف عملگر نرمال T مجموعهٔ

$$S=\{c_1, \cdots, c_k\}$$

از مقادیر سرشت‌نمای متمایز است. وقتی T توسط ماتریسی قطری در پایه‌ای از بردارهای سرشت‌نما نمایش داده می‌شود، لازم است که هرمقدار c_j به‌تعداد بعد فضای بردارهای سرشت‌نمای متناظرش تکرار بشود. علت تغییر نماد و درنتیجهٔ ذیل همین امر است.

نتیجه. با فرضهای قضیهٔ ۱۰، فرض‌کنیم T در پایهٔ مرتب $\mathscr{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ توسط ماتریس قطری D، با درایه‌های قطری d_1، $\cdots$، d_n، نمایش داده شود. آنگاه درپایهٔ $\mathscr{B}$، $f(T)$ توسط‌ماتریس قطری $f(D)$ بادرایه‌های قطری $f(d_1)$، $\cdots$، $f(d_n)$ نمایش داده می‌شود. اگر $\mathscr{B}'=\{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n\}$ پایهٔ مرتب دیگری بوده و P ماتریسی باشدکه

$$\alpha'_j=\sum_j P_{ij}\alpha_i$$

آنگاه $P^{-1}f(D)P$ عبارت است از ماتریس $f(T)$ درپایهٔ $\mathscr{B}'$.

اثبات. به‌ازای هرنمایهٔ i، نمایهٔ j یکتایی وجود دارد که $1\leqslant j\leqslant k$، α_i متعلق به $E_j(V)$ است، و $d_i=c_j$. پس، به‌ازای هر i، $f(T)\alpha_i=f(d_i)\alpha_i$ و

$$f(T)\alpha'_j=\sum_i P_{ij}f(T)\alpha_i$$
$$=\sum_i f(d_i)P_{ij}\alpha_i$$
$$=\sum_i (f(D)P)_{ij}\alpha_i$$
$$=\sum_i (f(D)P)_{ij}\sum_k P^{-1}_{ki}\alpha'_k$$
$$=\sum_k (P^{-1}f(D)P)_{kj}\, \alpha'_k. \square$$

ازاین نتیجه چنین استنباط می‌شود که می‌توان از هرماتریس نرمال توابع معینی تشکیل‌داد. زیرا فرض‌کنیم A ماتریسی‌نرمال باشد. دراین‌صورت ماتریس معکوس‌پذیری چون P، و درواقع ماتریسی یکانی چون P وجود داردکه PAP^{-1} ماتریسی قطری، مثلاً D با درایه‌های d_1، $\cdots$، d_n باشد. گیریم f تابع مختلطی باشدکه بتواند روی d_1،$\cdots$،d_n به‌کاربسته شودو $f(D)$ ماتریس قطری با درایه‌های $f(d_1)$، $\cdots$، $f(d_n)$

باشد. دراین صورت $P^{-1}f(D)P$ مستقل از D است و به‌معنی ذیل دقیقاً تابعی از A است. اگر Q ماتریس معکوس‌پذیر دیگر باشد که QAQ^{-1} ماتریسی قطری چون D'است، آنگاه f را می‌توان بردرایه‌های قطری D' به‌کار بست و

$$P^{-1}f(D)P = Q^{-1}f(D')Q.$$

تعریف. تحت شرایط بالا، $f(A)$ به‌صورت $P^{-1}f(D)P$ تعریف می‌شود.

ماتریس $f(A)$ را می‌توان به‌طریق دیگری هم مشخص کرد. برای انجام این امر، ذیلاً برخی از نتایج مربوط به‌ماتریسهای نرمال را که با فرمولبندی نظیر ماتریسی قضیهٔ قبل به‌دست می‌آیند بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۱. گیریم A ماتریسی نرمال و c_1، $\cdots$، c_k ریشه‌های مختلط متمایز $\det(xI-A)$ باشند. فرض کنیم

$$e_i = \prod_{j\neq i}\left(\frac{x-c_j}{c_i-c_j}\right)$$

و $E_i = e_i(A)$ $(1\leqslant i\leqslant k)$. دراین صورت $E_iE_j = 0$ (هرگاه $i\neq j$)، $E_i^2 = E_i$، $E_i^* = E_i$، و

$$I = E_1 + \cdots + E_k.$$

اگر f تابع مختلطی باشد که دامنهٔ آن شامل c_1، $\cdots$، c_k است، آنگاه

$$f(A) = f(c_1)E_1 + \cdots + f(c_k)E_k$$

و بخصوص، $A = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k$.

یادآوری می‌کنیم که هرعملگر روی یک فضای ضرب داخلی V نامنفی است، هر گاه T خودالحاق باشد و به‌ازای هر α در V، $(T\alpha|\alpha)\geqslant 0$.

قضیهٔ ۱۲. فرض کنیم T یک عملگر نرمال قطری شدنی روی یک فضای ضرب‌داخلی بعد متناهی V باشد. در این‌صورت T خودالحاق، نامنفی، یایکانی است، برحسب اینکه هرمقدار سرشت‌نمای T حقیقی، نامنفی، یا با قدرمطلق ۱ باشد.

اثبات. اگر T دارای تکفیک طیفی $T = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k$ باشد، آنگاه $T^* = \bar{c}_1E_1 + \cdots + \bar{c}_kE_k$. این گفته که T خودالحاق‌است عیناً مثل این‌است که‌بگوییم $T = T^*$ یا

$$(c_1-\bar{c}_1)E_1 + \cdots + (c_k-\bar{c}_k)E_k = 0.$$

با استفاده ازاین واقعیت که به‌ازای $i\neq j$ ، $E_iE_j = 0$ و نیز ازاینکه هیچ‌یك از E_jها عملگرصفر نیست، می‌بینیم که T خودالحاق است اگروتنها اگر $c_j = \bar{c}_j$، $j = 1, \cdots, k$.

برای تشخیص عملگرهای نرمالی که نامنفی می‌باشند، به

$$(T\alpha|\alpha)=\Big(\sum_{j=1}^{k} c_jE_j\alpha\Big|\sum_{i=1}^{k} E_i\alpha\Big)$$
$$=\sum_i\sum_j c_j(E_j\alpha|E_i\alpha)$$
$$=\sum_j c_j\|E_j\alpha\|^2$$

توجه کنید. دراینجا ازاین واقعیت که به‌ازای $i\neq j$ ، $(E_j\alpha|E_i\alpha)=0$ استفاده کرده‌ایم. ازاین مطلب آشکار است که شرط $(T\alpha|\alpha)\geqslant 0$ برآورده می‌شود اگر وتنها اگر به‌ازای هر j ، $c_j\geqslant 0$. برای تشخیص عملگرهای یکانی مشاهده می کنیم که

$$TT^*=c_1\bar{c}_1E_1+\cdots+c_k\bar{c}_kE_k$$
$$=|c_1|^2E_1+\cdots+|c_k|^2E_k.$$

اگر $TT^*=I$، آنگاه $I=|c_1|^2E_1+\cdots+|c_k|^2E_k$ وبااثر دادن E_j،

$$E_j=|c_j|^2E_j\,.$$

چون $E_j\neq 0$ داریم $|c_j|^2=1$ یا $|c_j|=1$. بعکس، اگر به‌ازای‌هر j، $|c_j|^2=1$ واضح است که $TT^*=I$. □

توجه به‌این نکته که این‌قضیه، قضیه‌ای درمورد عملگرهای نرمال است حائز اهمیت است. اگر T یك عملگر خطی عمومی روی V با مقادیر سرشت‌نمای حقیقی باشد، نتیجه نمی‌توان گرفت که T خودالحاق است. این قضیهٔ حکم می کندکه اگر T دارای مقادیر سرشت‌نمای حقیقی‌باشد و اگر T قطری شدنی ونرمال باشد، آنگاه T خودالحاق است. قضیه‌ای ازاین نوع، شباهت بین عمل الحاق و فرایند تشکیل مزدوج اعداد مختلط را تقویت‌می کند. اگر به‌ازای‌عدد مختلط z داشته باشیم $z=\bar{z}$ یا $\bar{z}z=1$، آنگاه یا z عددی حقیقی است یا قدرمطلقش ۱ است. همچنین، اگر به‌ازای عملگر T داشته باشیم $T=T^*$ یا $T^*T=I$ آنگاه یا T عملگری است خودالحاق یا یکانی.

اکنون می‌خواهیم دوقضیهٔ اثبات‌کنیم که نظیر دوحکم زیر هستند:

(۱) هرعدد نامنفی یك جذر (ریشهٔ دوم) نامنفی یکتا دارد.

(۲) هرعددمختلط، به‌صورت ru ، که درآن r نامنفی و $|u|=1$، قابل بیان است. این همان تجزیهٔ قطبی $z=re^{i\theta}$ برای اعداد مختلط است.

قضیهٔ ۱۳. گیریم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری نامنفی روی V باشد. در این‌صورت T دارای یك جذر (ریشهٔ دوم) نامنفی یکتاست، یعنی یك وتنها یك عملگر نامنفی چون N روی V وجود داردکه $N^2=T$.

اثبات. $T = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k$ را تفکیك طیفی T می گیریم. بنابرقضیهٔ ۱۲، هر c_j نامنفی است. اگر c یك عدد حقیقی نامنفی باشد، فرض می کنیم $\sqrt{c}$ جذر نامنفی c را نشان دهد. دراین‌صورت، بنابرقضیهٔ ۱۱ و (۹-۱۲) $N = \sqrt{T}$ عملگر نرمال قطری‌شدنی خوش تعریفی روی V است. بنابرقضیهٔ ۱۲ این عملگر نامنفی است و با محاسبه‌ای ساده $N^2 = T$.

حال گیریم P عملگری نامنفی روی V باشد و $P^2 = T$. ثابت خواهیم کرد که $P = N$. فرض کنیم

$$P = d_1F_1 + \cdots + d_rF_r$$

تفکیك طیفی P باشد. دراین‌صورت به‌ازای هر j، $d_j \geqslant 0$ چراکه P نامنفی است. بنابر $P^2 = T$ داریم

$$T = d_1^2F_1 + \cdots + d_r^2F_r.$$

حال F_1، $\cdots$، F_r درشرایط $I = F_1 + \cdots + F_r$، $F_iF_j = 0$ به‌ازای $i \neq j$ واینکه هیچ یك از F_jها ۰ نیست، صدق می کنند. اعداد d_1^2، $\cdots$، d_r^2 متمایزند، چرا که اعداد نامنفی متمایز دارای جذرهای متمایز هستند. بنابر یکتایی تفکیك طیفی باید داشته باشیم $r = k$ و (احیاناً با تغییر ترتیب) $F_j = E_j$ و $d_j^2 = c_j$. پس $P = N$. □

قضیهٔ ۱۴. فرض‌کنیم V یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد. در این‌صورت عملگری یکانی چون U روی V و عملگری نامنفی چون N روی V وجود دارند به‌طوری‌که $T = UN$ عملگر نامنفی N یکتاست. اگر T معکوس‌پذیر باشد، عملگر U نیز یکتاست.

اثبات. فرض کنیم داشته باشیم $T = UN$ که در آن U یکانی و N نامنفی است. دراین‌صورت $T^* = (UN)^* = N^*U^* = NU^*$. پس، $T^*T = NU^*UN = N^2$. این مطلب نشان می‌دهد که N به‌گونه‌ای یکتا به‌عنوان جذر نامنفی عملگر نامنفی T^*T تعیین می‌شود.

ازاین‌رو، برای شروع اثبات وجود U و N قضیهٔ ۱۳ را برای تعریف N به‌عنوان یکتا جذر نامنفی T^*T به‌کار می بریم. اگر T معکوس‌پذیر باشد، آنگاه N نیز معکوس‌پذیر است، چراکه

$$(N\alpha|N\alpha) = (N^2\alpha|\alpha) = (T^*T\alpha|\alpha) = (T\alpha|T\alpha).$$

دراین حالت $U = TN^{-1}$ را تعریف و اثبات می‌کنیم که U یکانی است. اما $U^* = (TN^{-1})^* = (N^{-1})^*T^* = (N^*)^{-1}T^* = N^{-1}T^*$. پس

$$\begin{aligned} UU^* &= TN^{-1}N^{-1}T^* \\ &= T(N^{-1})^2T^* \end{aligned}$$

$$=T(N^2)^{-1}T^*$$
$$=T(T^*T)^{-1}T^*$$
$$=TT^{-1}(T^*)^{-1}T^*$$
$$=I$$

و U یکانی است.

اگر T معکوس‌پذیرنباشد، برای تعریف U ناگزیر به‌انجام کمی کار بیشتر هستیم. ابتدا U را روی برد N تعریف می‌کنیم. گیریم α برداری دربرد N، مثلاً $\alpha=N\beta$ باشد. با این‌انگیزه که می‌خواهیم $UN\beta=T\beta$ باشد، $U\alpha$ را مساوی $T\beta$ تعریف‌می کنیم. باید نشان دهیم که U روی برد N خوش تعریف است؛ به‌بیان دیگر، اگر $N\beta'=N\beta$، آنگاه $T\beta'=T\beta$. قبلاً نشان دادیم که به‌ازای هر γ در V، $\|T\gamma\|^2=\|N\gamma\|^2$. پس، به‌ازای $\gamma=\beta-\beta'$ می‌بینیم که $N(\beta-\beta')=0$ اگر وتنها اگر $T(\beta-\beta')=0$. از این‌رو، U روی برد N خوش‌تعریف و واضح است که در جایی که تعریف شود، خطی است. حال اگر W برد N باشد، U را روی $W^{\perp}$ تعریف می کنیم. برای انجام این‌کار، به‌مطلب ذیل نیازمندیم. چون فضاهای پوچ T و N مساوی هستند، بعد بردشان نیز مساوی است. درنتیجه، $W^{\perp}$ همان بعدی را داردکه مکمل متعامد برد T. بنابراین، یك یکریختی (فضای ضرب داخلی) چون U_0 از $W^{\perp}$ بروی $T(V)^{\perp}$ وجود دارد. تا اینجا U را روی W تعریف کرده‌ایم، وحالا روی $W^{\perp}$، U را همان U_0 تعریف می کنیم.

اجازه دهید تعریف U را تکرارکنیم. چون $V=W\oplus W^{\perp}$، هر α در V به‌طور یکتا به‌صورت $\alpha=N\beta+\gamma$ قابل بیان است. دراینجا $N\beta$ در W، یعنی دربرد N است و γ در $W^{\perp}$. حال تعریف می‌کنیم

$$U\alpha=T\beta+U_0\gamma.$$

این U بوضوح خطی است و قبلاً نشان دادیم که خوش تعریف نیزهست. همچنین

$$(U\alpha|U\alpha)=(T\beta+U_0\gamma|T\beta+U_0\gamma)$$
$$=(T\beta|T\beta)+(U_0\gamma|U_0\gamma)$$
$$=(N\beta|N\beta)+(\gamma|\gamma)$$
$$=(\alpha|\alpha).$$

پس، V یکانی است. بعلاوه به‌ازای هر β داریم $UN\beta=T\beta$. □

$T=UN$ را **تجزیه‌ای قطبی** برای T می‌نامیم. مسلماً نمی‌توانیم آن‌را تنها تجزیهٔ قطبی بنامیم، چراکه U یکتا نیست. حتی وقتی که T معکوس‌پذیر و درنتیجه U یکتا باشد این مشکل را داریم که U و N ممکن است جابجا نشوند. در واقع، آنها جابجا می‌شوند

اگر و تنها اگر T نرمال باشد. مثلاً، اگر به‌ازای N نامنفی و U یکانی $T=UN=NU$، آنگاه

$$TT^*=(NU)(NU)^*=NUU^*N=N^۲=T^*T.$$

عملگر عمومی T نیز تجزیه‌ای چون $T=N_۱U_۱$ با $N_۱$ نامنفی و $U_۱$ یکانی خواهد داشت. دراینجا، $N_۱$ جذر نامنفی TT^* است. این‌نتیجه را می‌توان با به‌کار بستن قضیه‌ای که قریباً اثبات شد، روی عملگر T^* وسپس با گرفتن الحاقی، به‌دست آورد.

اکنون به‌مسئلهٔ قطری‌کردن همزمان خانواده‌های جابجا شوندهٔ عملگرهای نرمال باز می‌گردیم برای این‌منظور، اصطلاح ذیل مناسب است.

تعاریف. گیریم $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از عملگرهای روی یك فضای ضرب داخلی V باشد. تابعی چون r روی $\mathcal{F}$ با مقادیر درهیأت اسکالرهای F، یك ریشهٔ $\mathcal{F}$ نامیده می‌شود هرگاه αی غیر صفری در V وجود داشته باشدکه به‌ازای هر T در $\mathcal{F}$

$$T\alpha=r(T)\alpha.$$

به‌ازای‌هرتابع r از $\mathcal{F}$ به F، $V(r)$ را مجموعهٔ همهٔ αهای در V می‌گیریم‌که به‌ازای هر T در $\mathcal{F}$، $T\alpha=r(T)\alpha$.

دراین‌صورت $V(r)$ زیرفضایی از V و r ریشه‌ای از $\mathcal{F}$ است اگر و تنها اگر $V(r)\neq\{0\}$. هر αی غیرصفر در $V(r)$ به‌طور همزمان یك بردار سرشت‌نما برای همهٔ Tهای در $\mathcal{F}$ است.

قضیهٔ ۱۵. گیریم $\mathcal{F}$ خانوادهٔ جابجا شونده‌ای از عملگرهای نرمال قطری شدنی روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد. دراین صورت $\mathcal{F}$ تنها دارای تعدادی متناهی ریشه است. اگر $r_۱$، $\cdots$، r_k ریشه‌های متمایز $\mathcal{F}$ باشند، آنگاه

(۱) وقتی $i\neq j$، $V(r_i)$ بر $V(r_j)$ عمود است، و

(۲) $V=V(r_۱)\oplus\cdots\oplus V(r_k)$

اثبات. فرض‌کنیم r و s ریشه‌های متمایز $\mathcal{F}$ باشند. دراین‌صورت عملگری چون T در $\mathcal{F}$ وجود داردکه $r(T)\neq s(T)$. ازآنجاکه بردارهای سرشت‌نمای متعلق به مقادیر سرشت‌نمای متمایز T لزوماً متعامد می‌باشند، نتیجه می‌شودکه $V(r)$ بر $V(s)$ عموداست. چون V با بعد متناهی است این مطلب ایجاب می‌کندکه $\mathcal{F}$ حداکثر تعداد متناهی ریشه داشته باشد. $r_۱$، $\cdots$، r_k را ریشه‌های $\mathcal{F}$ می‌گیریم. فرض کنیم $\{T_۱,\cdots,T_m\}$ یك زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکسیمال $\mathcal{F}$ باشد و

$$\{E_{i۱},E_{i۲},\cdots\}$$

تفکیك همانی تعریف شده توسط T_i $(۱\leqslant i\leqslant m)$. آنگاه تصویرهای E_{ij} خانواده‌ای

جابجایی تشکیل می‌دهند. زیـرا هر E_{ij} یك چندجمله‌ای در T_i است و T_1، ...، T_m با یکدیگر جابجا می‌شوند. چون

$$I=(\sum_{j_1}E_{1j_1})(\sum_{j_2}E_{2j_2})\cdots(\sum_{j_m}E_{mj_m})$$

هر بردار α در V را می‌توان به‌صورت

$$\alpha=\sum_{j_1,\ldots,j_m}E_{1j_1}E_{2j_2}\cdots E_{mj_m}\alpha \tag{۹-۱۳}$$

نوشت. فرض کنیم j_1، ...، j_m نمایه‌هایی باشند که به‌ازای آنها

$$\beta=E_{1j_1}E_{2j_2}\cdots E_{mj_m}\alpha\neq 0.$$

می‌نویسیم

$$\beta_i=(\prod_{n\neq i}E_{nj_n})\alpha.$$

دراین صورت $\beta=E_{ij_i}\beta_i$؛ پس اسکالری چون c_i وجود دارد که

$$T_i\beta=c_i\beta,\qquad 1\leqslant i\leqslant m.$$

به‌ازای هر T در $\mathscr{F}$ اسکالرهای یکتایی چون b_i وجود دارند که

$$T=\sum_{i=1}^{m}b_iT_i.$$

پس

$$\begin{aligned}T\beta&=\sum_i b_iT_i\beta\\&=(\sum_i b_ic_i)\beta.\end{aligned}$$

بدیهی است تابـع $T\rightarrow\sum_i b_ic_i$ یکی‌از ریشه‌های $\mathscr{F}$، مثلا r_t ، است و β هم در $V(r_t)$ قرار دارد. بنا براین،هر جملهٔ غیرصفر در (۹-۱۳) به‌یکی‌ازفضاهای $V(r_1)$، ...، $V(r_k)$ تعلق دارد. از اینجا نتیجه مـی‌شود که V مجموع مستقیم متعامـد $V(r_1)$، ...، $V(r_k)$ است. □

نتیجه. تحت فرضهای قضیهٔ فوق، P_j را تصویرمتعامد V روی $V(r_j)$ ، $1\leqslant j\leqslant k$ می‌گیریم. آنگاه وقتی‌که $i\neq j$ ، $P_iP_j=0$،

$$I=P_1+\cdots+P_k$$

و هر T در $\mathscr{F}$ می‌تواند به‌صورت

$$T=\sum_j r_j(T)P_j \tag{۹-۱۴}$$

نوشته شود.

تعاریف. خانوادهٔ تصویرهای متعامد $\{P_1, \dots, P_k\}$ **به‌تفکیك همانی تعیین‌شده توسط** $\mathcal{F}$ و (۹-۱۴) **به‌تفکیك طیفی** T **برحسب این خانواده**، موسوم است.

با اینکه تصویرهای P_1، $\dots$، P_k درنتیجهٔ قبل به‌طور متعارف به خانوادهٔ $\mathcal{F}$ وابسته‌اند، عموماً نه در $\mathcal{F}$ قرار دارند و نه حتی ترکیبهایی خطی از عملگرهای واقع در $\mathcal{F}$ هستند؛ بااین وجود نشان خواهیم داد که این تصویرها را می‌توان از تشکیل حاصل‌ضربهای معینی از چندجمله‌ایهایی از اعضای $\mathcal{F}$ به‌دست آورد.

درمطالعهٔ هرخانواده‌ای از عملگرهای خطی روی یك فضای ضرب داخلی، درنظر گرفتن جبر خودالحاق تولید شده توسط این خانواده معمولاً سودمند است.

تعریف. یك **جبر خودالحاق از عملگرهای** روی یك فضای ضرب‌داخلی V زیرجبری خطی از $L(V, V)$ است‌که شامل الحاقی هریك از عناصرش باشد.

مثالی ازیك جبرخودالحاق، خود $L(V, V)$ است. چون‌اشتراك هردسته ازجبرهای خودالحاق مجدداً جبری خودالحاق است، اصطلاح ذیل بامعنی است.

تعریف. اگر $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از عملگرهای خطی روی یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد، **جبر خودالحاق تولید شده توسط** $\mathcal{F}$ عبارت است از کوچکترین جبر خودالحاقی‌که شامل $\mathcal{F}$ باشد.

قضیهٔ ۱۶. **گیریم $\mathcal{F}$ خانواده‌ای جابجا شونده از عملگرهای نرمال قطری شدنی روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی V و $\mathcal{A}$ جبر خودالحاق تولید شده توسط $\mathcal{F}$ و عملگر همانی باشد. فرض‌کنیم $\{P_1, \dots, P_k\}$ تفکیك همانی تعریف‌شده توسط $\mathcal{F}$ باشد. دراین‌صورت $\mathcal{A}$ مجموعهٔ همهٔ عملگرهای به‌صورت**

$$T = \sum_{j=1}^{k} c_j P_j \tag{۹-۱۵}$$

روی V است‌که درآنها c_1، $\dots$، c_k اسکالرهایی دلخواه هستند.

اثبات. فرض‌کنیم $\mathcal{C}$ مجموعهٔ همهٔ عملگرهای به‌صورت (۹-۱۵) روی V را نشان دهد. دراین‌صورت $\mathcal{C}$ شامل عملگر همانی والحاقی

$$T^* = \sum_j \bar{c}_j P_j$$

از هریك از عناصرش است. اگر $T = \sum_j c_j P_j$ و $U = \sum_j d_j P_j$، آنگاه به‌ازای هر اسکالر a

$$aT+U=\sum_j (ac+d_j)P_j$$

و

$$TU=\sum_{i,j} c_i d_j P_i P_j$$
$$=\sum_j c_j d_j P_j$$
$$=UT\cdot$$

پس $\mathcal{C}$ جبر جابجایی خودالحاقی است شامل $\mathcal{T}$ و عملگر همانی. بنابراین $\mathcal{C}$ شامل $\mathcal{A}$ هم هست.

حال فرض کنیم r_1، ... ، r_k همهٔ ریشه‌های $\mathcal{T}$ باشند. آنگاه به‌ازای هرجفت از نمایه‌های (i, n) با $i\neq n$ ، در $\mathcal{T}$ عملگری‌چون T_{in} وجود داردکه $r_i(T_{in})\neq r_n(T_{in})$. فرض کنیم $a_{in}=r_i(T_{in})-r_n(T_{in})$ و $b_{in}=r_n(T_{in})$. دراین صورت عملگر خطی

$$Q_i=\prod_{n\neq i} a_{in}^{-1}(T_{in}-b_{in}I)$$

عنصری از جبر $\mathcal{A}$ است. نشان خواهیم دادکه $Q_i=P_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$. برای این منظور، فرض کنیم $j\neq i$ و نیز α بردار دلخواهی از $V(r_j)$ باشد. دراین صورت

$$T_{ij}\alpha=r_j(T_{ij})\alpha$$
$$=b_{ij}\alpha$$

پس $(T_{ij}-b_{ij}I)\alpha=0$. چون سازه‌های در Q_i همگی (با یکدیگر) جابجا می‌شوند، نتیجه می گیریم که $Q_i\alpha=0$. پس درصورتی که $j\neq i$، Q_i روی $V(r_j)$ با P_i مساوی است. حال فرض کنیم α برداری از $V(r_i)$ باشد. آنگاه $T_{in}\alpha=r_i(T_{in})\alpha$ و

$$a_{in}^{-1}(T_{in}-b_{in}I)\alpha=a_{in}^{-1}[r_i(T_{in})-r_n(T_{in})]\alpha=\alpha\cdot$$

پس، $Q_i\alpha=\alpha$ و Q_i روی $V(r_i)$ با P_i مساوی است؛ بنابراین به‌ازای $i=1,\ \ldots,\ k$، $Q_i=P_i$. ازاین مطلب نتیجه می‌شودکه $\mathcal{C}=\mathcal{A}$. $\square$

این قضیه نشان می‌دهدکه جبر $\mathcal{A}$ جابجایی است وهرعنصر $\mathcal{A}$ یك عملگر نرمال قطری‌شدنی است. حال نشان می‌دهیم که $\mathcal{A}$ یك تك مولد هم دارد.

نتیجه. تحت فرضهای قضیه،عملگری چون T در $\mathcal{A}$ وجود داردکه هرعنصر $\mathcal{A}$ یك چند-جمله‌ای برحسب T است.

اثبات. فرض کنیم $T=\sum_{j=1}^{k} t_j P_j$ و t_1، ... ، t_k اسکالرهایی متمایزباشند. دراین صورت به‌ازای $n=1,\ 2,\ \ldots$

$$T^n = \sum_{j=1}^{k} t_j^n P_j \,.$$

اگر

$$f = \sum_{n=1}^{s} a_n x^n$$

نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned} f(T) &= \sum_{n=1}^{s} a_n T^n = \sum_{n=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} a_n t_j^n P_j \\ &= \sum_{n=1}^{k} \left(\sum_{n=1}^{s} a_n t_j^n \right) P_j \\ &= \sum_{j=1}^{k} f(t_j) P_j . \end{aligned}$$

به‌ازای هرعملگردلخواه در $\mathfrak{A}$ مانند

$$U = \sum_{j=1}^{k} c_j P_j$$

يك چندجمله‌ای چون f وجود داردکه $f(t_j) = c_j$، $1 \leqslant j \leqslant k$؛ وبه‌ازای هر fی به‌این صورت‌داریم $U = f(T)$. $\square$

تمرین

۱. تعریفی معقول از یك ماتریس $n \times n$ نامنفی ارائه کنید، وسپس ثابت کنیدکه چنین ماتریسی دارای جذری نامنفی ویکتاست.

۲. فرض‌کنید A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های مختلط با شرط $A^* = -A$ باشد وفرض کنید $B = e^A$. نشان دهیدکه
(الف) $\det B = e^{\operatorname{tr} A}$؛
(ب) $B^* = e^{-A}$؛
(پ) B یکانی است.

۳. اگر U و T عملگرهای نرمالی باشندکه جابجا شوند، ثابت‌کنید $U+T$ و UT نیز نرمال‌اند.

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای ضرب داخلی مختلط بعد متناهی V باشد. ثابت‌کنیدکه ده حکم ذیل دربارهٔ T هم‌ارزند.
(الف) T نرمال است.
(ب) به‌ازای هر α در V، $\|T\alpha\| = \|T^*\alpha\|$.

(پ) $T=T_1+iT_2$ که درآن T_1 و T_2 خودالحاق‌اند و $T_1T_2=T_2T_1$.
(ت) اگر α یك بردار و c یك اسکالر باشد و $T\alpha=c\alpha$، آنگاه $T^*\alpha=\bar{c}\alpha$.
(ث) پایهٔ متعامد یکه‌ای متشکل از بردارهای سرشت‌نمای T برای V وجود دارد.
(ج) پایهٔ متعامد یکه‌ای چون $\mathcal{B}$ وجود دارد که $[T]_{\mathcal{B}}$ قطری است.
(چ) یك چندجمله‌ای چون g با ضرایب مختلط وجود دارد که $T^*=g(T)$
(ح) هرزیرفضایی که تحت T پایا باشد تحت T^* نیز پایاست.
(خ) $T=NU$ که‌درآن N نامنفی و U یکانی است ونیز N با U جابجا می‌شود.
(د) $T=c_1E_1+\cdots+c_kE_k$ که درآن $I=E_1+\cdots+E_k$، به‌ازای $i\neq j$ داریم $E_iE_j=0$، و $E_j^2=E_j=E_j^*$.

۵. تمرین ۳ را برای اثبات این مطلب به‌کار ببرید که هرخانوادهٔ جابجاشونده‌ای از عملگرهای نرمال (نه لزوماً عملگرهایی قطری‌شدنی) روی یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، یك جبرخودالحاق جابجایی از عملگرهای نرمال تولید می‌کند.

۶ . فرض کنید V یك فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی و U عملگری یکانی روی V باشد که $U\alpha=\alpha$ ایجاب کند $\alpha=0$. فرض کنید

$$f(z)=i\frac{(1+z)}{(1-z)}\,,\quad z\neq 1$$

ونشان دهید که

(الف) $f(U)=i(I+U)(I-U)^{-1}$؛
(ب) $f(U)$ خودالحاق است؛
(پ) به‌ازای هرعملگرخودالحاق T روی V، عملگر

$$U=(T-iI)(T+iI)^{-1}$$

یکانی است و دارای خاصیت $T=f(U)$ است.

۷ . فرض کنید V فضای ماتریسهای $n\times n$ مختلط مجهز به‌ضرب داخلی

$$(A|B)=\operatorname{tr}(AB^*)$$

باشد. اگر B عنصری از V باشد، فرض کنید L_B، R_B و T_B عملگرهای خطی روی V تعریف شده توسط

(الف) $L_B(A)=BA$
(ب) $R_B(A)=AB$
(پ) $T_B(A)=BA-AB$

را نشان بدهند. سه خانواده از عملگرهای حاصل از تغییر B روی همهٔ ماتریسهای

قطری را درنظر بگیرید. نشان‌دهیدهر یك ازاین‌خانواده‌ها یك جبرخودالحاق‌جابجایی است و تفکیکهای طیفیشان را نیز بیابید.

۸ . اگر B عنصری دلخواه از فضای ضرب داخلی در تمرین ۷ باشد، نشان دهید که L_B به‌طور یکانی با R_{B^t} هم‌ارز است.

۹ . فرض کنید V فضای ضرب داخلی درتمرین ۷ و G گروه ماتریسهای یکانی در V باشد. اگر B در G باشد، فرض‌کنید C_B عملگرخطی روی V تعریف شده توسط

$$C_B(A) = BAB^{-1}$$

را نشان دهد. ثابت‌کنید که

(الف) C_B یك عملگریکانی روی V است؛

(ب) $C_{B_1B_2} = C_{B_1}C_{B_2}$ ؛

(پ) هیچ تبدیلی یکانی چون U روی V وجود نداردکه به‌ازای هر B در G

$$UL_BU^{-1} = C_B.$$

۱۰. فرض‌کنید $\mathscr{F}$ خانواده‌ای دلخواه از عملگرهای خطی روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی V و $\mathscr{A}$ جبرخودالحاق تولید شده توسط $\mathscr{F}$ باشد. نشان دهیدکه

(الف) هرریشهٔ $\mathscr{A}$ ریشه‌ای از $\mathscr{F}$ را تعریف می‌کند؛

(ب) هرریشهٔ r از $\mathscr{A}$ یك تابع خطی ضربی روی A است؛ یعنی، به‌ازای همهٔ Tها و U های در $\mathscr{A}$ و همهٔ اسکالرهای c

$$r(TU) = r(T)r(U)$$
$$r(cT+U) = cr(T)+r(U).$$

۱۱. فرض‌کنید $\mathscr{F}$ خانوادهٔ جابجا شونده‌ای از عملگرهای نرمال قطری‌شدنی روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد و فرض‌کنید $\mathscr{A}$ جبر خودالحاق تولید شده توسط $\mathscr{F}$ و عملگرهمانی I باشد. نشان دهید هرریشهٔ $\mathscr{A}$ مخالف ۰ است و به‌ازای هرریشهٔ r از $\mathscr{F}$ ریشهٔ یکتایی چون s از $\mathscr{A}$ وجود داردکه به‌ازای هر T در $\mathscr{F}$، $s(T) = r(T)$.

۱۲. فرض‌کنید $\mathscr{F}$ خانوادهٔ جابجاشونده‌ای ازعملگرهای‌نرمال قطری‌شدنی روی‌یك‌فضای ضرب داخلی با بعد متناهی V و A_0 جبر خودالحاق تولید شده توسط $\mathscr{F}$ باشد. $\mathscr{A}$ را جبرخودالحاق تولید شده توسط $\mathscr{F}$ و عملگرهمانی I بگیرید. نشان دهیدکه

(الف) $\mathscr{A}$ مجموعهٔ همهٔ عملگرهای روی V به‌صورت $cI+T$ است که در آن c یك اسکالر و T عملگری در A_0 است.

(ب) حداکثریك ریشه‌چون r از $\mathfrak{A}$ وجود داردکه‌به‌ازای هر T در $A_\circ$، $r(T)=\circ$.
(پ) اگریکی از ریشه‌های $\mathfrak{A}$ روی $A_\circ$ برابر ۰ باشد، تصویرهای P_1، ...، P_k درتفکیك همانی تعریف شده توسط $\mathcal{T}$ را می‌توان به‌طوری نمایه‌گذاری کردکه $A_\circ$ متشکل ازهمهٔ عملگرهای روی V به‌صورت

$$T=\sum_{j=2}^{k} c_j P_j$$

باشد. دراینجا c_2، ...، c_k همه اسکالرهایی دلخواه هستند.
(ت) $\mathfrak{A}=A_\circ$ اگر وتنها اگــر به‌ازای هرریشهٔ r از $\mathfrak{A}$ عملگری چــون T در $A_\circ$ موجود باشدکه $r(T)\neq\circ$.

۶.۹. چند خاصیت دیگر از عملگرهای نرمال

دربخش ۵.۸ خواص اساسی عملگرهای خودالحاق و نرمال را بــا استفاده از ساده‌ترین و مستقیم‌ترین روشهای ممکن گسترش دادیم. در بخش ۵.۹ صورگوناگون نظــریهٔ طیفی را بررسی کردیم. دراینجا به‌اثبات برخــی قضایاکــه ازماهیتی بیشترفنی برخوردارند و عمدتاً دربارهٔ عملگرهای نرمال روی فضاهای حقیقی هستند می‌پردازیم.

با اثبات صورت دقیقتری ازقضیهٔ تجزیهٔ اولیه ازفصل ۶ درمورد عملگرهای‌نرمال، کارخود را آغاز می‌کنیم. این اثبات در هردوحالت حقیقی ومختلط به‌کار می‌رود.

قضیهٔ ۱۷. گیریم T عملگری نرمال روی یك فضای ضرب داخلی بعــد متناهی V باشد. فرض کنیم p چندجمله‌ای مینیمال T و p_1، ...، p_k سازه‌های اول تکین متمایز آن باشند. دراین صورت هر P_j با چندگانگی ۱ در تجزیهٔ p ظاهر می‌شود و دارای درجهٔ ۱ یا ۲ است. فرض کنیم W_j فضای پوچ $p_j(T)$ باشد. دراین صورت
(۱) هرگاه $i\neq j$، فضای W_i بر W_j عمود است؛
(۲) $V=W_1\oplus\cdots W_k$؛
(۳) W_j تحت Tپایاست وچندجمله‌ای مینیمال تحدید T به W_j همان p_j است.
(۴) به‌ازای هر j، یك چندجمله‌ای چون e_j بــا ضرایب در هیأت اسکالری وجود دارد که $e_j(T)$ تصویر متعامد V روی W_j است.

دراثبات از احکام اساسی معینی استفاده خواهیم کردکه آنها را به‌صورت لمهایی بیان می‌کنیم.

لم ۱. گیریم Nعملگری نرمال روی یك‌فضای ضرب داخلی Wباشد. دراین‌صورت فضای پوچ N مکمل متعامد برد آن است.

اثبات. فرض کنیم به‌ازای همهٔ βهای درW، $(\alpha|N\beta)=\circ$. دراین صورت‌به‌ازای همهٔ βها $(N^*\alpha|\beta)=\circ$. ازاین‌رو، $N^*\alpha=\circ$. بنابرقضیهٔ ۱۹ از فصل ۸، این امرایجاب

می‌کند که $N\alpha=0$. بعکس، اگر $N\alpha=0$، آنگاه $N^*\alpha=0$ و به‌ازای همهٔ βهای در W

$$(N^*\alpha|\beta)=(\alpha|N\beta)=0. \square$$

لم ۲. اگر N عملگری نرمال و α برداری باشدکه $N^2\alpha=0$، آنگاه $N\alpha=0$.

اثبات. فرض کنیم N نرمال باشد و $N^2\alpha=0$. دراین‌صورت $N\alpha$ در برد N و نیز درفضای پوچ N واقع می‌شود. بنابر لم ۱، این ایجاب می‌کندکه $N\alpha=0$. $\square$

لم ۳. گیریم T عملگری نرمال و f چندجمله‌ای دلخواهی با ضرایب درهیأت اسکالری باشد. دراین‌صورت $f(T)$ نیز نرمال است.

اثبات. فرض کنیم $f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. دراین‌صورت

$$f(T)=a_0I+a_1T+\cdots a_nT^n$$

و

$$f(T)^*=\bar{a}_0I+\bar{a}_1T^*+\cdots+\bar{a}_n(T^*)^n.$$

چون $T^*T=TT^*$، نتیجه می‌گیریم که $f(T)$ با $f(T)^*$ جابجا می‌شود. $\square$

لم ۴. گیریم T عملگری نرمال و f و g دوچندجمله‌ای نسبت به‌هم اول وباضرایب درهیأت اسکالری‌باشند. فرض کنیم α و β بردارهایی‌باشندکه $f(T)\alpha=0$ و $g(T)\beta=0$. دراین صورت $(\alpha|\beta)=0$.

اثبات. چندجمله‌ایهایی چون a و b با ضرایب درهیأت اسکالری وجود دارند که $af+bg=1$. پس

$$a(T)f(T)+b(T)g(T)=I$$

و $\alpha=g(T)b(T)\alpha$. نتیجه اینکه

$$(\alpha|\beta)=(g(T)b(T)\alpha|\beta)=(b(T)\alpha|g(T)^*\beta).$$

طبق فرض $g(T)\beta=0$. بنابرلم ۳، $g(T)$ نرمال است. بنابراین طبق قضیهٔ ۱۹ ازفصل ۸، $g(T)^*\beta=0$؛ پس، $(\alpha|\beta)=0$. $\square$

اثبات قضیهٔ ۱۷. به‌یاد آورید که چندجمله‌ای‌مینیمال T عبارت است ازچندجمله‌ای تکین باکوچکترین درجه دربین همهٔ چندجمله‌ایهایی مانند f که $f(T)=0$. وجودچنین چندجمله‌ایهایی از این فرض ناشی می‌شود که V با بعد متناهی است. فرض کنیم سازهٔ اولی چون p_j از p تکرار شده باشد. دراین صورت به‌ازای یك چندجمله‌ای چون g، $p=p_j^2g$. چون $p(T)=0$، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر α در V

$$(p_j(T))^2g(T)\alpha=0\ .$$

بنابر لم ۳، $p_j(T)$ نرمال است. پس، لم ۲ ایجاب می‌کند که به‌ازای هر α در V

$$p_j(T)g(T)\alpha = 0.$$

ولی این مطلب با این فرض که p در بین همهٔ fهایی که $f(T)=0$ دارای کوچکترین درجه است متناقض است. بنابراین، $p = p_1 \cdots p_k$. اگر V یک فضای ضرب داخلی مختلط باشد هر p_j لزوماً به‌صورت

$$P_j = x - c_j$$

است که c_j حقیقی یا مختلط است. ازطرف دیگر، اگر V یک فضای ضرب داخلی حقیقی باشد، آنگاه یا $p_j = x_j - c_j$ و c_j در R است، یا

$$p_j = (x-c)(x-\bar{c})$$

و c عدد مختلطی غیرحقیقی است.

حال فرض می‌کنیم $f_j = \dfrac{p}{p_j}$. دراین صورت چون f_1، $\cdots$، f_k نسبت به هم اول‌اند چندجمله‌ایهایی چون g_j با ضرایب درهیأت اسکالری وجود دارند که

$$1 = \sum_j f_j g_j. \qquad (۱۶-۹)$$

حال به‌طور خلاصه نشان می‌دهیم که چگونه چنین g_jهایی را می‌توان ساخت. اگر $p_j = x - c_j$، آنگاه $f_j(c_j) \neq 0$ و برای g_j چندجمله‌ای اسکالری $1/f_j(c_j)$ را برمی‌گزینیم. وقتی که هر p_j بدین‌صورت باشد، f_jg_jها چندجمله‌ایهای آشنای لاگرانژ وابسته به c_1، $\cdots$، c_k هستند. و (۱۶-۹) بوضوح درست است. فرض کنیم یک p_j به‌صورت $p_j = (x-c)(x-\bar{c})$ باشد که در آن c یک عدد مختلط غیرحقیقی است. دراین‌صورت V یک فضای ضرب داخلی حقیقی است و می‌نویسیم

$$g_j = \frac{x-\bar{c}}{s} + \frac{x-c}{\bar{s}}$$

که در آن $s = (c-\bar{c})f_j(c)$. آنگاه

$$g_j = \frac{(s+\bar{s})x - (cs+\bar{c}\bar{s})}{s\bar{s}}$$

پس، g_j یک چندجمله‌ای باضرایب حقیقی است. اگر درجهٔ p برابر n باشد، آنگاه

$$1 - \sum_j f_j g_j$$

یک چندجمله‌ای باضرایب حقیقی وبادرجهٔ حداکثر $n-1$ است؛ بعلاوه، این چندجمله‌ای به‌ازای هریک از n ریشهٔ (مختلط) p صفر می‌شود ولذا متحداً برابر 0 است.

حال گیریم α برداری دلخواه از V باشد. دراین‌صورت بنابر (۱۶-۹)

$$\alpha = \sum_j f_j(T)\, g_j(T)\alpha$$

وچون $p_j(T)f_j(T) = 0$، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر j، $f_j(T)g_j(T)\alpha$ در W_j قرار دارد. طبق لم۴، درصورتی که $i \neq j$ فضای W_j بر W_i عمود است. بنابراین، V مجموع مستقیم متعامد W_1، ...، W_k است. اگر β برداری از W_j باشد، آنگاه

$$p_j(T)T\beta = T\, p_j(T)\beta = 0$$

پس W_j تحت T پایاست. گیریم T_j تحدید T روی W_j باشد. دراین‌صورت $p_j(T_j) = 0$ وازاین‌رو P_j برچندجمله‌ای مینیمال T_j تقسیم‌پذیراست. چون p_j برروی هیأت اسکالری تحویل‌ناپذیر است نتیجه می‌گیریم که p_j چندجمله‌ای مینیمال T_j است.

حال، فرض کنیم $e_j = f_j g_j$ و $E_j = e_j(T)$. دراین‌صورت به‌ازای هر بردار α در V، بردار $E_j\alpha$ در W_j قرار دارد و

$$\alpha = \sum_j E_j\alpha.$$

پس، $\alpha - E_i\alpha = \sum_{j\neq i} E_j\alpha$؛ چون وقتی $j \neq i$ فضای W_j بر W_i عمود است، این مطلب ایجاب می‌کند که $\alpha - E_i\alpha$ در $W_i^{\perp}$ قرار داشته باشد. اکنون از قضیهٔ ۴ درفصل۸ نتیجه می‌شود که E_i تصویر متعامد V روی W_i است. □

تعریف. زیرفضاهای $W_j\ (1 \leqslant j \leqslant k)$ را **مؤلفه‌های اولیهٔ** V **تحت** T می‌نامیم.

نتیجه. گیریم T عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V و W_1، ...، W_k مؤلفه‌های اولیهٔ V تحت T باشند. فرض‌کنیم W زیرفضایی از V باشدکه تحت T پایاست. دراین‌صورت

$$W = \sum_j W \cap W_j .$$

اثبات. واضح است که W شامل $\sum_j W \cap W_j$ است. ازطرف‌دیگر، W که تحت T پایاست تحت هر چندجمله‌ای برحسب T نیز پایاست. بخصوص، W تحت تصویر متعامد E_j از V روی W_j پایاست. اگر α در W باشد نتیجه می‌گیریم که $E_j\alpha$ در $W \cap W_j$ است و درعین‌حال $\alpha = \sum_j E_j\alpha$. بنابراین W مشمول $\sum_j W \cap W_j$ است. □

قضیهٔ ۱۷ نشان می‌دهد که هرعملگر نرمال T روی یك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی به طور متعارف توسط تعدادی متناهی از عملگرهای نرمال T_j مشخص می‌شود، و این عملگرهای نرمال روی مؤلفه‌های اولیهٔ W_j از V تحت T تعریف می‌شوند وهریك از چندجمله‌ایهای مینیمالشان بر روی هیأت اسکالرها تحویل‌ناپذیر است. برای تکمیل

استنباط خود از عملگرهای نرمال، لازم است که عملگرهای نرمال ازاین نوع خاص را بررسی کنیم.

واضح است عملگر نرمالی که چندجمله‌ای مینیمالش از درجهٔ ۱ باشد دقیقاً مضربی اسکالری ازعنصرهمانی است. ازطرف دیگر، وقتی که چندجمله‌ای مینیمال، تحویل‌ناپذیر و از درجهٔ ۲ باشد وضعیت پیچیده‌تر است.

مثال ۱. فرض کنیم $r>0$ و θ عددی حقیقی باشدکه مضربی درست از π نیست. گیریم T عملگر نرمال روی R^2 باشدکه ماتریس آن در پایهٔ متعامد یکهٔ استانده عبارت است از

$$A=r\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

دراین‌صورت T مضربی اسکالری ازتبدیلی متعامد، و لذا نرمال است گیریم p چندجمله‌ای سرشت‌نمای T باشد. دراین‌صورت

$$\begin{aligned}p&=\det(xI-A)\\&=(x-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta\\&=x-2r\cos\theta x+r^2.\end{aligned}$$

فرض کنیم $a=r\cos\theta$، $b=r\sin\theta$ و $c=a+ib$. آنگاه $b\neq 0$، $c=re^{i\theta}$،

$$A=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$$

و $p=(x-c)(x-\bar{c})$. ازاین‌رو، p برروی R تحویل‌ناپذیر است. چون p بر چندجمله‌ای مینیمال T تقسیم‌پذیراست، نتیجه می‌گیریم که p خود چندجمله‌ای مینیمال است.

این مثال حالت عکسی را پیشنهاد می‌کندکه ذیلاً عرضه می‌شود.

قضیهٔ ۱۸. گیریم T عملگری نرمال روی یك فضای ضرب داخلی حقیقی بعد متناهی V و p چندجمله‌ای مینیمال آن باشد. فرض کنیم

$$p=(x-a)^2+b^2$$

که درآن a و b اعدادی حقیقی هستند و $b\neq 0$. آنگاه عددی صحیح چون $s>0$ وجود داردکه p^s چندجمله‌ای سرشت‌نمای T است و زیرفضاهایی چون V_1، ...، V_s از V وجود دارندکه

(۱) وقتی $i\neq j$، فضای V_j بر V_i عمود است،

(۲) $V=V_1\oplus \cdots \oplus V_s$؛
(۳) هر V_j دارای پایهٔ متعامدیکه‌ای چون $\{\alpha_j, \beta_j\}$ باخاصیت ذیل است

$$T\alpha_j=a\alpha_j+b\beta_j$$
$$T\beta_j=-b\alpha_j+a\beta_j\ .$$

به بیان دیگر، اگر $r=\sqrt{a^2+b^2}$ و θ به‌نحوی انتخاب شود که $a=r\cos\theta$ و $b=r\sin\theta$، آنگاه V مجموع مستقیم متعامدی از زیرفضاهای دو بعدی V_j است که T روی هریک همچون «r برابر دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ θ» عمل می‌کند.

اثبات قضیهٔ ۱۸ برپایهٔ لم ذیل استوار خواهد بود.

لم. گیریم V یک فضای ضرب داخلی حقیقی و S عملگر نرمالی روی V باشد که $S^2+I^2=0$. فرض کنیم α برداری دلخواه از V باشد و $\beta=S\alpha$. دراین‌صورت

$$S^*\alpha=-\beta$$
$$S^*\beta=\alpha, \qquad (۱۷\text{-}۹)$$

$(\alpha|\beta)=0$ و $\|\alpha\|=\|\beta\|$.

اثبات. داریم $S\alpha=\beta$ و $S\beta=S^2\alpha=-\alpha$. بنابراین

$$0=\|S\alpha-\beta\|^2+\|S\beta+\alpha\|^2=\|S\alpha\|^2-2(S\alpha|\beta)+\|\beta\|^2$$
$$+\|S\beta\|^2+2(S\beta|\alpha)+\|\alpha\|^2.$$

چون S نرمال است نتیجه می‌گیریم که

$$0=\|S^*\alpha\|^2-2(S^*\beta|\alpha)+\|\beta\|^2+\|S^*\beta\|^2+2(S^*\alpha|\beta)+\|\alpha\|^2$$
$$=\|S^*\alpha+\beta\|^2+\|S^*\beta-\alpha\|^2.$$

این تساوی (۹-۱۷) را ایجاب می‌کند، و درنتیجه

$$(\alpha|\beta)=(S^*\beta|\beta)=(\beta|S\beta)$$
$$=(\beta|-\alpha)$$
$$=-(\alpha|\beta)$$

و $(\alpha|\beta)=0$. به‌طورمشابه

$$\|\alpha\|^2=(S^*\beta|\alpha)=(\beta|S\alpha)=\|\beta\|^2.$$

اثبات قضیهٔ ۱۸. گیریم V_1، ...، V_s دسته ماکسیمالی از زیرفضاهای دو بعدی باشندکه شرایط (۱) و (۲)، ونیز شرایط اضافی

$$T^*\alpha_j = a\alpha_j - b\beta_j, \qquad \qquad (۱۸\text{-}۹)$$
$$T^*\beta_j = b\alpha_j + a\beta_j, \qquad ۱ \leqslant j \leqslant s$$

را برمی‌آورند. همچنین فرض کنیم $W = V_۱ + \cdots + V_s$. دراین‌صورت W مجموع مستقیم متعامد $V_۱$، $\ldots$، V_s است. نشان خواهیم داد که $W = V$. فرض کنیم این‌طور نباشد، آنگاه $W^\perp \neq \{۰\}$. بعلاوه، چون (۳) و (۱۸-۹) ایجاب می‌کنند که W تحت T و T^* پایا باشد، نتیجه می‌گیریم که $W^\perp$ تحت T^* پایاست و $T = T^*$. گیریم $S = b^{-۱}(T - aI)$. دراین‌صورت $S^* = b^{-۱}(T^* - aI)$، $S^*S = SS^*$ و $W^\perp$ تحت S و S^* پایاست. چون $(T - aI)^۲ + b^۲I = ۰$، نتیجه می‌گیریم که $S^۲ + I = ۰$. α را هر برداری با نرم ۱ از $W^\perp$ درنظرمی‌گیریم و می‌نویسیم $\beta = S\alpha$. آنگاه β در $W^\perp$ قرار دارد و $S\beta = -\alpha$. چون $T = aI + bS$، این مطلب ایجاب می‌کند که

$$T\alpha = a\alpha + b\beta$$
$$T\beta = -b\alpha + a\beta.$$

مطابق لم، $S^*\alpha = -\beta$، $S^*\beta = \alpha$، $(\alpha|\beta) = ۰$ و $||\beta|| = ۱$. چون $T^* = aI + bS^*$، نتیجه می‌شود که

$$T^*\alpha = a\alpha - b\beta$$
$$T^*\beta = b\alpha + a\beta.$$

ولی این مطلب با این واقعیت که $V_۱$، $\ldots$، V_s دستهٔ ماکسیمالی از زیر فضاهایی است که در (۱)، (۳)، و (۱۸-۹) صدق می‌کنند متناقض‌است. بنابراین $W = V$، ونظر به اینکه

$$\det\begin{bmatrix} x - a & b \\ -b & x - a \end{bmatrix} = (x - a)^۲ + b^۲$$

از (۱)، (۲)، و (۳) نتیجه می‌گیریم که

$$\det(xI - T) = [(x - a)^۲ + b^۲]^s. \ \square$$

نتیجه. تحت‌شرایط قضیهٔ فوق، T معکوس‌پذیر است و

$$T^* = (a^۲ + b^۲)T^{-۱}.$$

اثبات. چون

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^۲ + b^۲ & ۰ \\ ۰ & a^۲ + b^۲ \end{bmatrix}$$

از (۳) و (۹-۱۸) نتیجه می‌شود که $TT^*=(a^2+b^2)I$. پس T معکوس‌پذیر است و $T^*=(a^2+b^2)T^{-1}$. □

قضیهٔ ۱۹. گیریم T عملگری نرمال روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد. دراین‌صورت هرعملگر خطی‌که با T جابجا شود با T^* نیز جابجا می‌شود. بعلاوه، هر زیرفضای پایای تحت T تحت T^* نیز پایاست.

اثبات. فرض‌کنیم U عملگری خطی روی V باشد که با T جابجا مـی‌شود. E_j را تصویر متعامد V روی مؤلفهٔ اولیهٔ W_j $(1\leqslant j\leqslant k)$ از V تحت T می گیریم. آنگاه E_j یك چندجمله‌ای برحسب T است و ازاین‌رو با U جابجا می‌شود. پس،

$$E_jUE_j=UE_j^2=UE_j.$$

بدین‌سان، $U(W_j)$ زیرمجموعه‌ای از W_j است. فرض کنیم T_j و U_j تحدیدهای T و U روی W_j را نشان دهند. فرض‌کنیم I_j عملگر همانی روی W_j باشد. دراین صورت U_j با T_j جابجا می‌شود و اگر $T_j=c_jI_j$، بوضوح U_j نیز با $T_j^*=\bar{c}_jI_j$ جابجا مـی‌شود. ازطرف دیگر، اگر T_j مضرب اسکالری از I_j نباشد، آنگاه T_j معکوس‌پذیـر است و اعدادی حقیقی چون. a_j و b_j وجود دارند که

$$T_j^*=(a_j^2+b_j^2)T_j^{-1}\,.$$

چون $U_jT_j=T_jU_j$، نتیجه می گیریم که $T_j^{-1}U_j=U_jT_j^{-1}$. بنابراین U_j درهردوحالت با T_j^* جابجا می‌شود. اما T^* نیز با E_j جابجا می‌شود و ازاین‌رو W_j تحت T^* پایاست. بعلاوه به‌ازای هر α و β در W_j

$$(T_j\alpha|\beta)=(T\alpha|\beta)=(\alpha|T^*\beta)=(\alpha|T_j^*\beta).$$

چون $T^*(W_j)$ مشمول W_j است، این مطلب ایجاب می کندکه T_j^* تحدیـد T^* روی W_j باشد. بنابراین، به‌ازای‌هر α_j در W_j

$$UT^*\alpha_j=T^*U\alpha_j\,.$$

چون V مجموع W_1، $\dots$، W_k است، نتیجه می گیریم که به‌ازای هر α در V

$$UT^*\alpha=T^*U\alpha,$$

پس U با T^* جابجا می‌شود.

حال فرض‌کنیم W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایاست، ونیز فـرض کنیم $Z_j=W\bigcap W_j$. بنابر نتیجهٔ قضیهٔ ۱۷، $W=\sum_j Z_j$. پس کافی است نشان دهیم که هر Z_j تحت T_j^* پایاست. هر گاه $T_j=c_jI$ این مطلب روشن است. وقتی این‌طور نباشد، T_j معکوس‌پذیراست و Z_j را در، وازاین‌رو روی Z_j، می‌نگارد. بنابراین، $T_j^{-1}(Z_j)=Z_j$ وچون

$$T_j^* = (a_j^2 + b_j^2) T_j^{-1}$$

نتیجه می گیریم که به‌ازای هر j، $T^*(Z_j)$ مشمول Z_j است. □

فرض کنیم T عملگری نرمال روی یك فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد. و W زیرفضایی پایا تحت T. دراین‌صورت نتیجهٔ قبل نشان می‌دهد که W تحت T^* نیز پایاست. ازاین مطلب نتیجه می‌شود که $W^\perp$ تحت $T = T^{**}$ (و درنتیجه تحت T^* نیز) پایاست. بااستفاده از این واقعیت، بآسانی می‌توان حالت تقویت شدهٔ ذیل از قضیهٔ تجزیهٔ دوری راکه درفصل ۷ آمده است، اثبات کرد.

قضیهٔ ۲۰. گیریم T عملگر خطی نرمالی روی یك فضای ضرب داخلی بعدمتناهی V (بعد$(V) \geqslant 1$) باشد. دراین‌صورت r بردار غیرصفر $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ در V بترتیب با T-پوچساز‌های $e_1, \ldots, e_r$ وجود دارندکه

(۱) $V = Z(\alpha_1 ; T) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_r ; T)$؛

(۲) اگر $1 \leqslant k \leqslant r - 1$، آنگاه e_{k+1} چندجمله‌ای e_k را عاد می‌کند؛

(۳) وقتی $j \neq k$، فضای $Z(\alpha_j ; T)$ بر $Z(\alpha_k ; T)$ عموداست. بعلاوه عددصحیح r وپوچسازهای $e_1, \ldots, e_r$ به‌طوریکتا توسط شرایط (۱) و (۲) واین واقعیت‌که هیچ‌یك از α_kها صفر نیستند تعیین می‌شوند.

نتیجه. اگر A ماتریس نرمالی بادرایه‌های حقیقی (مختلط) باشد، آنگاه یك ماتریس متعامد حقیقی (یکانی) چون P وجود داردکه $P^{-1}AP$ درفرم متعارف گویا ست.

نتیجه اینکه دو ماتریس نرمال A و B به‌طوریکانی هم‌ارزند اگر وتنها اگر دارای فرم گویای مساوی باشند؛ A و B به‌طور متعامد هم‌ارز هستند هرگاه دارای درایه‌های حقیقی باشند و فرم گویای مساوی‌هم داشته باشند.

ازطرف‌دیگر، معیار ساده‌تری‌هم برای هم‌ارزی یکانی ماتریسهای نرمال وعملگرهای نرمال وجود دارد.

تعاریف. گیریم V و V' دوفضای ضرب داخلی برروی هیأت مفروضی باشند. تبدیلی خطی چون

$$U : V \rightarrow V'$$

یك **تبدیل یکانی** نامیده می‌شود، هرگاه V را بروی V' بنگارد و ضربهای داخلی راحفظ کند. اگر T عملگری خطی روی V و T' عملگری خطی روی V' باشد، آنگاه T **هم‌ارز یکانی** با T' است، هرگاه تبدیلی یکانی چون U از V بروی V' وجود داشته‌باشدکه

$$UTU^{-1} = T'.$$

لم. گیریم V و V' دو فضای ضرب داخلی با بعد متناهی برروی هیأت مفروضی باشند. فرض کنیم T عملگری خطی روی V و T' عملگری خطی روی V' باشد. آنگاه T هم‌ارزیکانی با T' است اگر وتنها اگرپایهٔ متعامدیکه‌ای چون $\mathcal{B}$ از V ونیز پایهٔ متعامدیکه‌ای چون $\mathcal{B}'$ از V' وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$[T]_{\mathcal{B}} = [T']_{\mathcal{B}'}\cdot$$

اثبات. فرض کنیم تبدیلی یکانی چون U از V بروی V' وجود داشته باشد به‌طوری که $UTU^{-1} = T'$. $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ را پایهٔ متعامدیکهٔ (مرتب) دلخـواهی برای V می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم $\alpha'_j = U\alpha_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. آنگاه $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n\}$ پایهٔ متعامد یکه‌ای برای V' است و باقراردادن

$$T\alpha_j = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}\alpha_k$$

دیده می‌شود که

$$\begin{aligned} T'\alpha'_j &= UT\alpha_j \\ &= \sum_k A_{kj} U\alpha_k \\ &= \sum_k A_{kj}\alpha'_k. \end{aligned}$$

پس $[T]_{\mathcal{B}} = A = [T']_{\mathcal{B}'}$.

بعکس، فرض کنیم پایهٔ متعامدیکه‌ای چون $\mathcal{B}$ از V و پایهٔ متعامدیکه‌ای چون $\mathcal{B}'$ برای V' وجود داشته باشد به‌طوری که

$$[T]_{\mathcal{B}} = [T']_{\mathcal{B}'}$$

و گیریم $A = [T]_{\mathcal{B}}$. همچنین فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ و $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n\}$. اگر U تبدیل خطی از V در V' باشرط $U\alpha_j = \alpha'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ باشد، آنگاه U تبدیلی یکانی از V بروی V' است و

$$\begin{aligned} UTU^{-1}\alpha'_j &= UT\alpha_j \\ &= U\sum_k A_{kj}\alpha_k \\ &= \sum_k A_{kj}\alpha'_k\,. \end{aligned}$$

بنابراین، $UTU^{-1}\alpha'_j = T'\alpha'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$، که‌خود ایجاب می‌کند که $UTU^{-1} = T'$. □

از لم بلافاصله نتیجه مـی‌شود کـه عملگرهای هم‌ارزیکانی روی فضاهای بـا بعد

متناهی چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی دارند. برای عملگرهای نرمال، حالت عکس‌هم درست است.

قضیهٔ ۲۱. گیریم V و V' دوفضای ضرب داخلی بابعد متناهی برروی هیأت مفروضی باشند. فرض‌کنیم T عملگری نرمال روی V و T' عملگری نرمال روی V' باشد. آنگاه T هم‌ارز یکانی با T' است اگر وتنها اگر T و T' دارای چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی باشند.

اثبات. فرض کنیم T و T' دارای چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی f باشند. W_jها $(1 \leqslant j \leqslant k)$ را مؤلفه‌های اولیهٔ V تحت T و T_j را تحدید T روی W_j می‌گیریم. فرض‌کنیم I_j عملگر همانی روی W_j باشد. دراین‌صورت

$$f = \prod_{j=1}^{k} \det (xI_j - T_j).$$

p_j را چندجمله‌ای مینیمال T_j می‌گیریم. اگر $p_j = x - c_j$، روشن است که

$$\det (xI_j - T_j) = (x - c_j)^{s_j}$$

و درآن s_j بعد W_j است. از طرف دیگر، اگر $p_j = (x - a_j)^2 + b_j^2$ که درآن a_j، b_j اعدادی حقیقی‌اند و $b_j \neq 0$ آنگاه از قضیهٔ ۱۸ نتیجه می‌شود که

$$\det (xI_j - T_j) = p_j^{s_j}$$

و دراین‌حالت $2s_j$ بعد W_j است. بنابراین $f = \prod_j p_j^{s_j}$. حال می‌توانیم f را با همین روش وبااستفاده از مؤلفه‌های اولیه V' تحت T' هم محاسبه کنیم. چون p_1، ...، p_k سازه‌های اول متمایزی هستند، از یکتایی تجزیه به سازه‌های اول f نتیجه می‌شود که دقیقاً k مؤلفهٔ اولیهٔ W'_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ از V' تحت T' وجود دارد واین مؤلفه‌هارامی‌توان طوری نمایه‌گذاری کرد که p_j، چندجمله‌ای مینیمال برای T'_j، تحدید T' به W'_j، باشد. اگر $p_j = x - c_j$ آنگاه $T_j = c_j I_j$ و $T'_j = c_j I'_j$ که در آن I'_j عملگر همانی روی W'_j است. دراین‌حالت بدیهی است که T_j هم‌ارزیکانی با T'_j است. اگر مانند بالا $p_j = (x - a_j)^2 + b_j^2$ آنگاه با استفاده از لم وقضیهٔ ۲۰، دوباره می‌بینیم که T_j هم‌ارز یکانی با T'_j است. پس، به‌ازای هر j دوپایهٔ متعامدیکهٔ $\mathcal{B}_j$ و $\mathcal{B}'_j$ بترتیب برای W_j و W'_j وجود دار وبه‌طوری که

$$[T_j]_{\mathcal{B}_j} = [T'_j]_{\mathcal{B}'_j}.$$

حال گیریم U تبدیل خطی از V در V' باشد که‌هر $\mathcal{B}_j$ رابروی $\mathcal{B}'_j$ می‌نگارد. دراین‌صورت U تبدیلی یکانی از V بروی V' است و $UTU^{-1} = T'$. □

۱۰

فرمهای دوخطی

۱.۱۰. فرمهای دوخطی

دراین فصل فرمهای دوخطی روی فضاهای برداری با بعد متناهی را مورد بحث قرار می‌دهیم. احتمالاً خواننده بین برخی ازمطالب ومباحث دترمینانها ازفصل ۵ وموضوعهای ضربهای داخلی وفرمها از فصل ۸ و فصل ۹ وجه تشابهی مشاهده خواهدکرد. رابطهٔ بین فرمهای دوخطی وضربهای داخلی به‌وجه خاصی محکم است؛ بااین وجود، دراین فصل هیچ‌یك ازمطالب فصلهای ۸ یا ۹ دانسته فرض نمی‌شود. خواننده‌ای که با ضربهای‌داخلی آشنا نباشد، حین مطالعهٔ مبحث فرمهای دوخطی، اگراولین بخش فصل ۸ را مطالعه‌کند احتمالاً بهره‌ای خواهد برد.

اولین بخش، فضای فرمهای دوخطی روی یك فضای برداری nبعدی را موردبحث قرار می‌دهد. ماتریس یك‌فرم دوخطی درپایهٔ مرتب مفروضی معرفی ویکریختی بین فضای فرمها وفضای ماتریسهای $n\times n$ بنیان گذاشته می‌شود. رتبهٔ یك فرم‌دوخطی تعریف می‌شود وفرمهای دوخطی ناتبهگون معرفی می‌شوند. بخش دوم‌به‌بحث روی فرمهای دوخطی‌متقارن وقطری‌کردن آنها می‌پردازد. بخش سوم فرمهای دوخطی متقارن‌کج را مورد بحث‌قرار می‌دهد. چهارمین بخش‌گروه حافظ یك فرم دوخطی ناتبهگون را با توجه خاصی نسبت به‌گروههای متعامد، گروههای شبه‌متعامد، ویك گروه شبه‌متعامد خاص‌ـ گروه لورنتس‌ـ به‌بحث می‌گذارد.

تعریف. گیریم V فضایی برداری برروی هیـأت F باشد. یك فرم دوخطی روی V تابعی چون f است که به‌هرجفت مرتب از بردارهای α و β در V یـك اسکالر $f(\alpha, \beta)$ در F را تخصیص دهد و در شرایط زیر صدق کند.

$$\begin{aligned} f(c\alpha_1+\alpha_2, \beta) &= cf(\alpha_1, \beta)+f(\alpha_2, \beta) \\ f(\alpha, c\beta_1+\beta_2) &= cf(\alpha, \beta_1)+f(\alpha, \beta_2)\,. \end{aligned} \tag{۱-۱۰}$$

اگر فرض کنیم $V \times V$ مجموعهٔ همهٔ جفتهای مرتب از بردارهای واقع در V را نشان دهد، این تعریف می‌تواند به‌شرح زیرهم بیان شود: یك فرم دوخطی روی V تابعی چون f از $V \times V$ در F است که به‌عنوان تابعی ازهریك ازشناسه‌هایش، باشرط ثابت بودن دیگری، خطی باشد. واضح است که تابع صفر از $V \times V$ در F فرمی دوخطی است. این نیز درست است که هر ترکیب خطی از فرمهای دوخطی روی V خود فرمی دوخطی است. برای اثبات این مطلب، کافی است ترکیبات خطی از نوع $cf+g$ را که در آن f و g فرمهایی دوخطی روی V هستند درنظر بگیریم. اثبات این مطلب که $cf+g$ در (۱-۱۰) صدق می‌کند، شبیه بسیاری از اثباتهای دیگری است که قبلاً دیده‌ایم و از این رو آن را حذف می‌کنیم. همهٔ این مطالب می‌تواند با گفتن اینکه مجموعهٔ همه فرمهای دوخطی روی V زیرفضایی است ازفضای همهٔ توابع از $V \times V$ در F (مثال ۳ در فصل ۲) خلاصه شود. فضای فرمهای دوخطی روی V را با $L(V, V, F)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱. گیریم V یك فضای برداری برروی هیأت F باشد، و L_1 و L_2 تابعکهایی خطی روی V باشند. f را با ضابطهٔ

$$f(\alpha, \beta)=L_1(\alpha)L_2(\beta)$$

تعریف می‌کنیم. اگر β را ثابت نگاه داریم و f را به‌عنوان تابعی از α محسوب کنیم، آنگاه چیزی جز مضربی اسکالری از تابعك خطی L_1 نخواهیم داشت. با ثابت بودن α، f مضربی اسکالری از L_2 است. پس، واضح است که f فرمی دوخطی روی V است.

مثال ۲. فرض کنیم m و n اعدادی صحیح مثبت باشند، و F یك هیأت باشد. V را فضای برداری همهٔ ماتریسهای $m \times n$ بر روی F و A را ماتریس $m \times m$ ثابتی برروی F می‌گیریم. تابع f_A را چنین تعریف می‌کنیم

$$f_A(X, Y)=\operatorname{tr}(X^t AY).$$

دراین صورت f_A فرمی دوخطی روی V است. زیرا، اگر X، Y، و Z سه ماتریس $m \times n$ برروی F باشند،

$$\begin{aligned} f_A(cX+Z, Y) &= \operatorname{tr}[(cX+Z)^t AY] \\ &= \operatorname{tr}(cX^t AY)+\operatorname{tr}(Z^t AY) \\ &= cf_A(X, Y)+f_A(Z, Y). \end{aligned}$$

دراینجا ازاین مطلب که عمل ترانهش و تابع ردخطی هستند استفاده شده است. نشان‌دادن اینکه f_A به‌عنوان تابعی از شناسهٔ دومش خطی است ازاین هم ساده‌تر است. درحالت خاص ۱ $=n$، ماتریس X^tAY یك دریك، یعنی یك اسکالر است وفرم دوخطی چیزی‌جز

$$f_A(X, Y) = X^tAY$$
$$= \sum_i \sum_j A_{ij}x_iy_j$$

نیست. بزودی نشان خواهیم دادکه هرفرم دوخطی روی فضای ماتریسهای $m \times 1$ ازاین نوع است، یعنی به‌ازای ماتریسی $m \times m$ چون A برابر f_A است.

مثال ۳. گیریم F یك هیأت باشد. می‌خواهیم همهٔ فرمهای دوخطی روی فضای F^2 را بیابیم. فرض‌کنیم f یك چنین فرم دوخطی باشد. اگر $\alpha = (x_1, x_2)$ و $\beta = (y_1, y_2)$ بردارهایی از F^2 باشند، آنگاه

$$f(\alpha, \beta) = f(x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2, \beta)$$
$$= x_1 f(\epsilon_1, \beta) + x_2 f(\epsilon_2, \beta)$$
$$= x_1 f(\epsilon_1, y_1\epsilon_1 + y_2\epsilon_2) + x_2 f(\epsilon_2, y_1\epsilon_1 + y_2\epsilon_2)$$
$$= x_1y_1 f(\epsilon_1, \epsilon_1) + x_1y_2 f(\epsilon_1, \epsilon_2) + x_2y_1 f(\epsilon_2, \epsilon_1)$$
$$+ x_2y_2 f(\epsilon_2, \epsilon_2).$$

پس، f به‌طورکامل توسط چهاراسکالر $A_{ij} = f(\epsilon_i, \epsilon_j)$، بنابر

$$f(\alpha, \beta) = A_{11}x_1y_1 + A_{12}x_1y_2 + A_{21}x_2y_1 + A_{22}x_2y_2$$
$$= \sum_{i,j} A_{ij}x_iy_j$$

تعیین می‌شود.

اگر X و Y ماتریسهای مختصات α و β و A ماتریس 2×2 با درایه‌های $A(i, j) = A_{ij} = f(\epsilon_i, \epsilon_j)$ باشد، آنگاه

$$f(\alpha, \beta) = X^tAY. \tag{۲-۱۰}$$

در مثال ۲ مشاهده‌کردیم که اگر A ماتریسی 2×2 برروی F باشد، آنگاه (۲-۱۰) فرمی دوخطی روی F^2 تعریف می‌کند. می‌بینیم که فرمهای دوخطی روی F^2، دقیقاً آنهایی هستند که از ماتریسی 2×2 طبق (۲-۱۰) به‌دست می‌آیند.

بحث مثال ۳ را می‌توان برای تشریح همهٔ فرمهای دوخطی روی یك فضای‌برداری با بعد متناهی تعمیم داد. گیریم V یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت F و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای V باشد. فرض کنیم f فرمی دوخطی‌روی V باشد.

اگر

$$\beta = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n \quad \text{و} \quad \alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$$

بردارهایی از V باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= f(\sum_i x_i\alpha_i, \beta) \\ &= \sum_i x_i f(\alpha_i, \beta) \\ &= \sum_i x_i f(\alpha_i, \sum_j y_j\alpha_j) \\ &= \sum_i \sum_j x_i y_j f(\alpha_i, \alpha_j). \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $A_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$، آنگاه

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= \sum_i \sum_j A_{ij} x_i y_i \\ &= X^t A Y \end{aligned}$$

که در آن X و Y ماتریسهای مختصات α و β در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ هستند. پس، هرفرم دوخطی روی V، به‌ازای ماتریس $n \times n$ی چون A برروی F از نوع

$$f(\alpha, \beta) = [\alpha]^t_{\mathcal{B}} A [\beta]_{\mathcal{B}} \tag{۳-۱۰}$$

است. بعکس، اگر ماتریس $n \times n$ی مـانند A داده شده باشد، بسهولت دیده می‌شود کـه (۳-۱۰) فرمی دوخطی چون f روی V تعریف می‌کند و $A_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$.

تعریف. گیریم V یك فضای برداری با بعد متناهی و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای V باشد. اگر f فرمی دوخطی روی V باشد، **ماتریس f در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$** عبارت است از ماتریس $n \times n$ی A با درایه‌های $A_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$. گاهی این ماتریس را با $[f]$ نشان خواهیم داد.

قضیهٔ ۱. گیریم V یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت F باشد. به‌ازای هرپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ از V تابعی کـه به‌هرفرم دو خطی روی V ماتریسش در پایـهٔ مرتب $\mathcal{B}$ را مربوط سازد، یك یکریختی ازفضای $L(V, V, F)$ بروی فضای ماتریسهای $n \times n$ برروی هیأت F است.

اثبات. قبلاً دیدیم که $f \to [f]_{\mathcal{B}}$ تناظری یك‌به‌یك بین مجموعهٔ فرمهای دوخطی روی V ومجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n \times n$ برروی F است. اینکه ایـن تناظر تبدیلی خطی است، مطلبی است که به‌آسانی دیده می‌شود، زیرا به‌ازای هر i و j

$$(cf+g)(\alpha_i, \alpha_j)=cf(\alpha_i, \alpha_j)+g(\alpha_i, \alpha_j).$$

واین چیزی نیست جز

$$[cf+g]_{\mathcal{B}}=c[f]_{\mathcal{B}}+[g]_{\mathcal{B}}. \square$$

نتیجه. اگر $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای V و $\mathcal{B}^*=\{L_1, \cdots, L_n\}$ پایهٔ دوگان برای V^* باشد، آنگاه n^2 فرم دوخطی

$$f_{ij}(\alpha, \beta)=L_i(\alpha)L_j(\beta),\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n$$

پایه‌ای برای فضای $L(V, V, F)$ تشکیل می‌دهند. بویژه، بعد $L(V, V, F)$ برابر n^2 است.

اثبات. پایهٔ دوگان $\{L_1, \cdots, L_n\}$ اساساً بنابراین واقعیت که $L_i(\alpha)$ (به‌ازای هر α در V) iامین مختص α درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ است تعریف می‌شود. حال توابع f_{ij} تعریف‌شده توسط

$$f_{ij}(\alpha, \beta)=L_i(\alpha)L_j(\beta)$$

فرمهای دوخطی ازنوع بررسی شده درمثال ۱ هستند. اگر

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n \quad \text{و} \quad \beta=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n$$

آنگاه

$$f_{ij}(\alpha, \beta)=x_iy_j.$$

گیریم f فرمی دوخطی روی V و A ماتریس f درپایهٔ‌مرتب $\mathcal{B}$ باشد. دراین‌صورت

$$f(\alpha, \beta)=\sum_{i,j}A_{ij}x_iy_j$$

که چیزی جز

$$f=\sum_{i,j}A_{ij}f_{ij}$$

نیست. اکنون واضح‌است که n^2 فرم f_{ij} پایه‌ای برای $L(V, V, F)$ تشکیل می‌دهند. $\square$

اثبات این نتیجه را می‌توان به‌صورت ذیل هم بیان کرد. فرم دوخطی f_{ij} «یکهٔ» ماتریسی $E^{i,j}$ راکه تنها درایهٔ غیرصفرش یك ۱ درسطر i وستون j است، به‌عنوان‌ماتریس خود در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ دارد. چون این یکه‌های ماتریسی پایه‌ای برای فضای ماتریسهای $n\times n$ بنا می‌کنند، فرمهای f_{ij} یك پایه برای فضای فرمهای دوخطی تشکیل می‌دهند.

مفهوم ماتریس یك فرم دوخطی دریك پایهٔ مرتب، مشابه با مفهوم ماتریس یك‌عملگر خطی دریك پایهٔ مرتب است. درست نظیرعملگرهای خطی، علاقه‌مندیم تغییرات حاصل در ماتریس نمایش یك فرم دوخطی را هنگامی که پایهٔ مرتبی به‌پایهٔ مرتب دیگری تغییر

می‌یابد بدانیم. لذا فرض می‌کنیم $\mathcal{B}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ و $\mathcal{B}'=\{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n\}$ دو پایهٔ مرتب برای V و f فرمی دوخطی روی V باشد. ماتریسهای $[f]_{\mathcal{B}}$ و $[f]_{\mathcal{B}'}$ چه رابطه‌ای با یکدیگردارند؟ خوب، P را ماتریس $n\times n$ (معکوس‌پذیری) می‌گیریم که به‌ازای هر α در V

$$[\alpha]_{\mathcal{B}}=P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$$

به‌بیان دیگر، P را به‌وسیلهٔ

$$\alpha'_j=\sum_{i=1}^{n}P_{ij}\alpha_i$$

تعریف می‌کنیم. به‌ازای هردو بردار α و β در V

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= [\alpha]^t_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}[\beta]_{\mathcal{B}} \\ &= (P[\alpha]_{\mathcal{B}'})^t[f]_{\mathcal{B}}P[\beta]_{\mathcal{B}'} \\ &= [\alpha]^t_{\mathcal{B}'}(P^t[f]_{\mathcal{B}}P)[\beta]_{\mathcal{B}'}. \end{aligned}$$

بنابرتعریف و یکتایی ماتریسی‌که f را درپایهٔ مرتب $\mathcal{B}'$ نمایش می‌دهد، باید داشته‌باشیم

$$[f]_{\mathcal{B}'}=P^t[f]_{\mathcal{B}}P. \tag{۴-۱۰}$$

مثال ۴. گیریم V فضای برداری R^2 باشد. فرض می‌کنیم f فرمی دوخطی باشد که روی $\alpha=(x_1, x_2)$ و $\beta=(y_1, y_2)$ بنابر

$$f(\alpha, \beta)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$$

تعریف شود. دراین صورت

$$f(\alpha, \beta)=[x_1, x_2]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ولذا ماتریس f درپایهٔ مرتب استانده $\mathcal{B}=\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ عبارت است از

$$[f]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

فرض می‌کنیم $\mathcal{B}'=\{\epsilon'_1, \epsilon'_2\}$ پایهٔ مرتب تعریف شده توسط $\epsilon'_1=(1, -1)$ و $\epsilon'_2=(1, 1)$ باشد. در این حالت ماتریس P که مختصات را از $\mathcal{B}'$ به $\mathcal{B}$ تغییرمی‌دهد عبارت است از

$$P=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

پس

$$\begin{aligned}[f]_{\mathcal{B}'} &= P^t[f]_{\mathcal{B}}P \\ &= \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

معنی این نمایش ماتریسی آن است که اگر بردارهای α و β را به‌وسیلهٔ مختصاتشان در پایهٔ $\mathcal{B}'$ همچون

$$\alpha = x'_۱\epsilon'_۱ + x'_۲\epsilon'_۲ \quad \text{و} \quad \beta = y'_۱\epsilon'_۱ + y'_۲\epsilon'_۲$$

بیان کنیم، آنگاه

$$f(\alpha, \beta) = ۴x'_۲y'_۲.$$

نتیجه‌ای از فرمول تغییر پایهٔ (۱۰-۴) مطلب زیر است:
اگر A و B ماتریسهایی $n\times n$ باشند که فرم دوخطی مشخصی روی V را در (احتمالاً) پایه‌های مرتب مختلفی نمایش دهند، آنگاه A و B دارای یك رتبه هستند. زیرا، اگر P ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری باشد و $B=P^tAP$، بدیهی است که A و B دارای یك رتبه هستند. این مطلب به‌ما امکان می‌دهد که رتبهٔ یك فرم دوخطی روی V را به‌عنوان رتبهٔ هرماتریسی که آن فرم را درپایهٔ مرتبی برای V نمایش می‌دهد، تعریف کنیم.

بهتراست تعریفی طبیعی‌تر برای رتبهٔ یك فرم دوخطی ارائه کنیم. این‌کار را می‌توان به‌شرح زیرانجام داد: فرض کنیم f فرمی دوخطی روی فضای برداری V باشد. اگر برداری چون α را در V ثابت نگه داریم، آنگاه $f(\alpha, \beta)$ به عنوان تابعی از β خطی است. بدین طریق، هرαی ثابت، تابعکی خطی روی V تعیین می‌کند. این تابعك خطی را با $L_f(\alpha)$ نشان می‌دهیم. خلاصه می‌کنیم: اگر α بردار دلخواهی از V باشد، آنگاه $L_f(\alpha)$ آن تابعك‌خطی روی V است که مقدار آن روی هربردار β برابر $f(\alpha, \beta)$ است. این مطلب تبدیلی چون $\alpha \rightarrow L_f(\alpha)$ از V در فضای دوگان V^* را به‌دست می‌دهد. چون

$$f(c\alpha_1+\alpha_2,\ \beta)=cf(\alpha_1,\ \beta)+f(\alpha_2,\ \beta)$$

می بینیم که

$$L_f(c\alpha_1+\alpha_2)=cL_f(\alpha_1)+L_f(\alpha_2)$$

یعنی، L_f تبدیلی خطی از V در V^* است.

به طریقی مشابه، f تبدیلی خطی چون R_f از V در V^* را تعیین مـی کند. بهازای هر β ثابتی از V، $f(\alpha,\ \beta)$ بهعنوان تابعی از α خطی است. $R_f(\beta)$ را آن تابعك خطی روی V تعریف می کنیم که مقدار آن روی بردار α برابر $f(\alpha,\ \beta)$ باشد.

قضیهٔ ۲. گیریم f فرمی دوخطی روی فضای برداری بعد متناهی V باشد. فرض کنیم L_f و R_f تبدیلهای خطی از V در V^* تعریفشده توسط $L_f(\alpha)(\beta)=f(\alpha,\beta)=(R_f\beta)(\alpha)$ باشند. دراین صورت رتبهٔ $(R_f)=$ رتبهٔ (L_f).

اثبات. می توان اثباتی «مستقل ازمختصات» برای این قضیهٔ ارائه داد. چنین اثباتی شبیه بهاثبات این مطلب (دربخش ۷.۳) است که رتبهٔ سطری هرماتریس برابر رتبهٔستونی آن است. لذا، دراینجا اثباتی راعرضه می کنیم که با انتخاب یك دستگاه مختصات (پایه) بهپیش می رود وسپس ازقضیهٔ «رتبهٔ سطری برابر رتبهٔ ستونی است» استفاده می شود.

برای اینکه، ثابت کنیم رتبهٔ $(R_f)=$ رتبهٔ (L_f)، کافی است ثابت کنیم که L_f و R_f دارای پوچی مساوی هستند. گیریم $\mathcal{B}$ پایهٔ مرتبی برای V باشد و $A=[f]_{\mathcal{B}}$. اگر α و β دو بـردار در V بـا مـاتـریسهای مختصات X و Y در پـایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ بـاشند، آنـگاه $f(\alpha,\beta)=X^tAY$. حال $R_f(\beta)=0$ بدین معنی است که بهازای هر α در V، $f(\alpha,\beta)=0$؛ یعنی، بهازای هر ماتریسی $n\times 1$ چون X، $X^tAY=0$. شرایط اخیر چیزی جز $AY=0$ نیست. بنابراین، پوچی R_f برابر است با بعد فضای جوابهای $AY=0$.

بهطور مشابه، $L_f(\alpha)=0$ اگـر و تنها اگـر بهازای هر ماتریسی $n\times 1$ چـون Y، $X^tAY=0$. پس، α در فضای پـوچ L_f است اگر و تنها اگـر $X^tA=0$؛ یعنی، $A^tX=0$. بنابراین، پـوچی L_f برابر است با بعد فضای جـوابهای $A^tX=0$. چـون ماتریسهای A و A^t دارای رتبههای ستونی مساوی هستند، می بینیم که

$$\text{پوچی }(R_f)=\text{پوچی }(L_f).\quad\square$$

تعریف. اگر f فرمی دوخطی رویفضای بعد متناهی V باشد، رتبهٔ f عبارتاستاز عدد صحیح $r=$ رتبهٔ $(R_f)=$ رتبهٔ (L_f).

نتیجهٔ ۱. رتبهٔ هرفرم دوخطی برابر است با رتبهٔ ماتریس آن فرم درهرپایهٔ مرتب.

نتیجهٔ ۲. اگر f فرمی دوخطی روی فضای برداری n بعدی V باشد، احکام زیـر همارز هستند:

(الف) $n =$ رتبهٔ (f).

(ب) به‌ازای هربردار غیرصفر α در V، βیی در V وجود داردکه $f(\alpha, \beta) \neq 0$.

(پ) به‌ازای هربردار غیرصفر β در V، αیی در V وجود داردکه $f(\alpha, \beta) \neq 0$.

اثبات. حکم (ب) چیزی جز این نیست که فضای پوچ L_f زیـرفضای صفر است. حکم (پ) نیز حاکی است که فضای پوچ R_f زیرفضای صفر است. تبدیلهای خطی L_f و R_f دارای پوچی ۰ هستند اگر و تنها اگـر دارای رتبهٔ n باشند، یعنی اگر و تنها اگـر $n =$ رتبهٔ (f). □

تعریف. فرمی دوخطی چون f روی یك فضای برداری V **ناتبهگون** (یا **نامنفرد**) نامیده می‌شود، هرگاه درشرایط (ب) و (پ) نتیجهٔ ۲ صدق کند.

اگر V با بعد متناهی باشد، آنگاه f ناتبهگون است به‌شرط آنکـه f دریکی از سه‌شرط نتیجهٔ ۲ صدق کند. بخصوص f ناتبهگون (نامنفرد) است اگر وتنها اگر ماتریس آن در (هر) پایهٔ مرتبی برای V یك ماتریس نامنفرد باشد.

مثال ۵. گیریم $V = R^n$ و f فرمی دوخطی باشد که به‌ازای $\alpha = (x_1, \cdots, x_n)$ و $\beta = (y_1, \cdots, y_n)$ توسط

$$f(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

تعریف می‌شود. دراین‌صورت f یك فرم دوخطی ناتبهگون روی R^n است. ماتـریس f درپایهٔ مرتب استانده عبارت است‌از ماتریس همانی $n \times n$:

$$f(X, Y) = X^t Y\,.$$

این f، معمولاً ضرب نقطه‌ای (یا اسکالری) نامیده می‌شود. خواننده احتمالاً با این فرم دوخطی، دست‌کم درحالت $n = 3$ آشنا باشد. ازنظـر هندسی، عـدد $f(\alpha, \beta)$ عبارت است‌از حـاصل‌ضرب طـول α درطـول β درکسینوس زاویـهٔ بین α و β. بخصوص، $f(\alpha, \beta) = 0$ اگر وتنها اگر بردارهای α و β متعامد (عمود برهم) باشند.

تمرین

۱. کدامیك ازتوابع f در زیر تعریف‌شده روی‌بردارهای $\alpha = (x_1, x_2)$ و $\beta = (y_1, y_2)$ در R^2 فرمهایی دوخطی هستند؟

(الف) $f(\alpha, \beta) = 1$.

(ب) $f(\alpha, \beta) = (x_1 - y_1)^2 + x_2 y_2$.

(پ) $f(\alpha, \beta) = (x_1 + y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2$.

(ت) $f(\alpha, \beta) = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

۲. فرض کنید f فرمی دوخطی روی $R^۲$ تعریف شده توسط

$$f((x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲)) = x_۱y_۱ + x_۲x_۲$$

باشد. ماتریس f را درهریك از پایه‌های زیر بیابید:

$$\{(۱, ۰), (۰, ۱)\}, \{(۱, -۱), (۱, ۱)\}, \{(۱, ۲), (۳, ۴)\}.$$

۳. فرض کنید V فضای همهٔ ماتریسهای ۳ × ۲ بر روی R و f فرمی دوخطی روی V تعریف‌شده توسط $f(X, Y) = \operatorname{tr}(X^t AY)$ باشد و

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}.$$

مطلوب است ماتریس f درپایهٔ مرتب

$$\{E^{۱۱}, E^{۱۲}, E^{۱۳}, E^{۲۱}, E^{۲۲}, E^{۲۳}\}$$

که در آن E^{ij} ماتریسی است که تنها درایهٔ غیر صفرش یك ۱ درسطر i و ستون j است.

۴. همهٔ فرمهای دوخطی f روی $R^۳$ را با این خاصیت که به ازای هر α و β، $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$ به‌طور صریح توصیف کنید.

۵. فرمهای دوخطی‌روی $R^۳$ راکه به‌ازای‌همهٔ αها و β ها در $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$ صدق می کنند توصیف کنید.

۶. فرض کنید n عددی صحیح مثبت‌و V فضای همهٔ ماتریسهای $n \times n$ برروی هیأت اعداد مختلط باشد. نشان‌دهید معادلهٔ

$$f(A, B) = n \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B)$$

فرمی دوخطی چون f روی V تعریف می‌کند. آیا این درست است که به‌ازای هر A و B، $f(A, B) = f(B, A)$؟

۷. فرض کنید f فرم دوخطی تعریف شده در تمرین ۶ باشد. نشان‌دهید که f تبهگون (غیر ناتبهگون) است. فرض کنید $V_۱$ زیرفضایی از V متشکل‌از ماتریسهای با رد ۰ و $f_۱$ تحدید f روی $V_۱$ باشد. نشان دهیدکه $f_۱$ ناتبهگون است.

۸. فرض کنید f فرم دوخطی تعریف شده در تمرین ۶ و $V_۲$ زیر فضای V متشکل‌از همهٔ ماتریسهای A باشد که $\operatorname{tr}(A) = ۰$ و $A^* = -A$ (A^* ترانهادهٔ مزدوج A است). تحدید f روی $V_۲$ را با $f_۲$ نشان می‌دهیم. ثابت‌کنید که $f_۲$ معین منفی است، یعنی به‌ازای هر A غیرصفر در $V_۲$، $f_۲(A, A) < ۰$.

۹. فرض کنید f فرم دوخطی تعریف شده در تمرین ۶ باشد. فرض کنید W مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای A در V باشد که به‌ازای هر B، $f(A, B) = 0$. نشان دهید W زیرفضایی از V است، W را به‌طور صریح توصیف کنید وسپس آن را بیابید.

۱۰. فرض کنید f فرمی دوخطی روی یك فضای برداری بعد متناهی V و W زیرفضای متشکل ازهمهٔ βهایی باشد که به‌ازای هر α، $f(\alpha, \beta) = 0$. نشان دهید

$$\text{بعد}\,(W) = \text{بعد}\,(V) - \text{رتبهٔ}\,(f).$$

این نتیجه و نتیجهٔ تمرین ۹ را به‌کار گیرید تا رتبهٔ فرم دوخطی تعریف شده در تمرین ۶ را محاسبه کنید.

۱۱. فرض کنید f فرمی دوخطی روی یك فضای برداری بعد متناهی V باشد. فرض کنید V_1 زیرفضایی از V باشد با این خاصیت که تحدید f روی V_1 ناتبهگون است. نشان دهید بعد $(V_1) \leqslant$ رتبهٔ (f).

۱۲. فرض کنید f و g فرمهایی دوخطی روی یك فضای برداری بعدمتناهی V باشند. فرض کنید g نامنفرد باشد. نشان دهید که عملگرهای خطی یکتایی چون T_1، T_2 روی V وجود دارند که به‌ازای هر α و β

$$f(\alpha, \beta) = g(T_1\alpha, \beta) = g(\alpha, T_2\beta).$$

۱۳. نشان دهید که اگر g منفرد باشد، لزوماً نتیجهٔ به‌دست آمدهٔ درتمرین ۱۲ درست نیست.

۱۴. فرض کنید f فرمی دو خطی روی یك فضای برداری بعد متناهی V باشد. نشان دهید f می‌تواند به‌صورت حاصلضربی از دو تابعك خطی بیان شود (یعنی، به‌ازای L_1 و L_2 در V^*، $f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta)$) اگروتنها اگر f دارای رتبهٔ ۱ باشد.

۲.۱۰. فرمهای دوخطی متقارن

هدف اصلی این بخش، پاسخگویی به‌سؤال زیراست: اگر f فرمی دوخطی روی فضای برداری بعد متناهی V باشد، چه‌وقت پایهٔ مرتبی چون $\mathscr{B}$ برای V وجود دارد که در آن f توسط ماتریسی قطری نمایش داده می‌شود؟ ثابت می‌کنیم که این امر امکان‌پذیر است اگروتنها اگر f فرم دوخطی متقارنی باشد، یعنی $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$. قضیه تنها وقتی ثابت می‌شود که هیأت اسکالری سرشت‌نمای صفرداشته باشد، بدین معنی که اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، مجموع $1 + \cdots + 1$ (nبار) در F صفر نباشد.

تعریف. گیریم f فرمی دوخطی روی فضای برداری V باشد. گوییم f **متقارن** است

هرگاه به‌ازای همهٔ بردارهای α، β در V، $f(\alpha, \beta)=f(\beta, \alpha)$.

اگر V با بعد متناهی باشد، فرم دوخطی f متقارن است اگروتنها اگر ماتریس‌آن، A، دریك (یا هر) پایهٔ مرتب، متقارن باشد: $A^t = A$. برای اثبات این مطلب، بایدبررسی کنیم‌که چه‌وقت فرم دوخطی

$$f(X, Y)=X^t AY$$

متقارن است. این فرم متقارن است اگروتنها اگر به‌ازای همهٔ ماتریسهای ستونی X و Y، $X^tAY=Y^tAX$. چون X^tAY ماتریسی یــك در یك است، داریم $X^tAY=Y^tA^tX$. پس، f متقارن است اگروتنها اگر به‌ازای هر X و Y، $Y^tA^tX=Y^tAX$. واضح است که این دقیقاً بدین‌معنی است‌کــه $A=A^t$. بخصوص، باید توجه‌کردکه اگــر پایهٔ مرتبی برای V وجود داشته باشد،که در آن f توسط ماتریسی قطری نمایش داده شود، آنگــاه f متقارن است؛ زیرا هرماتریس قطری یك ماتریس متقارن است.

اگر f فــرم دوخطی متقارنی باشد، **فرم درجهٔ دوم وابسته به** f، عبارت است از تابع q از V در F تعریف شده توسط

$$q(\alpha)=f(\alpha, \alpha).$$

اگر F زیرهیأتی از اعداد مختلط باشد، فرم دوخطی متقارن f به‌طـورکامل توسط فرم درجهٔ دوم وابسته‌اش، طبق **اتحاد قطبی**

$$f(\alpha, \beta)=\frac{1}{4}q(\alpha+\beta)-\frac{1}{4}q(\alpha-\beta) \qquad (۵\text{-}۱۰)$$

تعیین می‌شود. اثبات (۱۰-۵) محاسبه‌ای عادی است‌که آن را حذف می‌کنیم. اگر fفرم درجهٔ دوم ضرب نقطه‌ای درمثال ۵ باشد، فرم درجهٔ دوم وابسته به‌آن عبارت است از

$$q(x_1, \cdots, x_n)=x_1^2+\cdots+x_n^2.$$

به بیان دیگر، $q(\alpha)$ مجذور طول α است. برای فرم دوخطی $f_A(X, Y)=X^tAY$ فرم درجهٔ دوم وابسته عبارت است از

$$q_A(X)=X^tAX=\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j.$$

یکی از رده‌های مهم فرمهای دوخطی متقارن، ردهٔ ضربهای داخلــی روی فضاهای برداری حقیقی‌هستندکه درفصل ۸موردبحث قرارگرفت. اگرV یك فضای برداری حقیقی باشد، **یك ضرب داخلی** روی V فرم دوخطی متقارنی چون f روی V است که در شرط

$$f(\alpha, \alpha)>0 \text{ هرگاه } \alpha\neq 0 \qquad (۶\text{-}۱۰)$$

صدق می‌کند. هرفرم دوخطی‌که در (۱۰-۶) صدق‌کند، **معین مثبت** نامیــده می‌شود. پس، هرضرب داخلی روی یك فضای برداری حقیقی، یك فرم دوخطی متقارن معین مثبت روی

آن فضاست. توجه کنید که هرضرب داخلی ناتبهگون است. دو بردار α و β نسبت به ضرب داخلی f **متعامد** نامیده می‌شوند، هرگاه $f(\alpha, \beta) = 0$. فرم درجهٔ دوم $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$ تنها مقادیر نامنفی را می‌پذیرد و $q(\alpha)$ غالباً به‌عنوان مجذور طول α درنظر گرفته می‌شود. بدیهی است که مفاهیم طول و تعامد، از مهمترین مثال ضربهای داخلی ــ ضرب نقطه‌ای در مثال ۵ــ ریشه می‌گیرند.

اگر f فرم دوخطی متقارنی روی یك فضای برداری V باشد، مناسب است برخی از اصطلاحات ضربهای داخلی را برای f هم به‌کار ببریم. بویژه مناسب است بگوییم که α و β نسبت به f متعامدند، هرگاه $f(\alpha, \beta) = 0$. مصلحت نیست که $f(\alpha, \alpha)$ به‌عنوان مجذور طول α درنظر گرفته شود؛ برای مثال، اگر V یك فضای برداری مختلط باشد، ممکن است داشته باشیم $f(\alpha, \alpha) = \sqrt{-1}$ یا روی یك فضای برداری حقیقی داشته باشیم $f(\alpha, \alpha) = -2$.

اکنون به‌قضیهٔ اساسی این بخش می‌پردازیم. درخواندن اثبات، تجسم حالت خاصی که در آن V یك فضای برداری حقیقی و f ضربی داخلی روی V باشد به‌خواننده کمك خواهد کرد.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم V یك فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأتی با سرشت‌نمای صفر و f فرم دوخطی متقارنی روی V باشد. در این صورت پایهٔ مرتبی برای V وجود دارد که در آن f توسط ماتریسی قطری نمایش داده می‌شود.

اثبات. آنچه را که باید بیابیم پایهٔ مرتبی چون

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

است که به‌ازای $i \neq j$، $f(\alpha_i, \alpha_j) = 0$. اگر $f = 0$ یا $n = 1$، قضیه به‌طور بدیهی درست است. پس می‌توان فرض کرد که $f \neq 0$ و $n > 1$. اگر به‌ازای هر α در V، $f(\alpha, \alpha) = 0$، فرم درجهٔ دوم وابستهٔ q متحداً 0 است و اتحاد قطبی (۱۰-۵) نشان می‌دهد که $f = 0$. پس در V برداری چون α وجود دارد که $f(\alpha, \alpha) = q(\alpha) \neq 0$. گیریم W زیرفضایی یك بعدی از V باشد که توسط α پدید می‌آید و $W^\perp$ مجموعهٔ همهٔ بردارهای β در V که $f(\alpha, \beta) = 0$. اکنون ادعا می‌کنیم که $V = W \oplus W^\perp$. به‌طور یقین زیرفضاهای W و $W^\perp$ مستقل هستند. یك بردار نمونه در W، $c\alpha$ است که در آن c یك اسکالر است. اگر $c\alpha$ در $W^\perp$ نیز باشد، آنگاه $f(c\alpha, c\alpha) = c^2 f(\alpha, \alpha) = 0$ ولی $f(\alpha, \alpha) \neq 0$، پس $c = 0$. همچنین، هربردار در V مجموع برداری در W و برداری در $W^\perp$ است. زیرا، فرض کنیم γ برداری دلخواه در V باشد، قرارمی‌دهیم

$$\beta = \gamma - \frac{f(\gamma, \alpha)}{f(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

دراین‌صورت

$$f(\alpha, \beta)=f(\alpha, \gamma)-\frac{f(\gamma, \alpha)}{f(\alpha, \alpha)}f(\alpha, \alpha)$$

و چون f متقارن است، $f(\alpha, \beta)=0$. پس، β در زیر فضای $W^{\perp}$ قراردارد. عبارت

$$\gamma=\frac{f(\gamma, \alpha)}{f(\alpha, \alpha)}\alpha+\beta$$

نشان می‌دهد که $V=W+W^{\perp}$.

تحدید f روی $W^{\perp}$ یك فرم دوخطی متقارن روی $W^{\perp}$ است. چون $W^{\perp}$ دارای بعد $(n-1)$ است می‌توانیم بنا به استقرا فرض کنیم که $W^{\perp}$ دارای پایه‌ای چون $\{\alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ است که

$$f(\alpha_i, \alpha_j)=0, \qquad i\neq j(i\geqslant 2, j\geqslant 2)$$

با قراردادن $\alpha_1=\alpha$، پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای V به‌دست می‌آید و به ازای $i\neq j$ داریم $f(\alpha_i, \alpha_j)=0$. □

نتیجه. گیریم F زیر هیأتی از اعداد مختلط و A ماتریس $n\times n$ متقارنی برروی F باشد. دراین‌صورت ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری چون P برروی F وجود داردکه P^tAP قطری است.

درحالتی که F هیأت اعداد حقیقی باشد، ماتریس معکوس‌پذیر P در این نتیجه را می‌توان ماتریسی متعامد انتخاب کرد. بدین معنی که $P^t=P^{-1}$. به بیان دیگر، اگر A یك ماتریس $n\times n$ متقارن حقیقی باشد، یك ماتریس‌متعامد حقیقی چون P وجود داردکه P^tAP قطری است؛ لکن، این مطلب به‌هیچ وجه از آنچه در بالا انجام شد آشکار نیست (فصل ۸ را ببینید).

قضیهٔ ۴. گیریم V یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأت اعداد مختلط باشد. فرض کنیم f فرم دو خطی متقارنی روی V با رتبهٔ r باشد. دراین صورت برای V پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}=\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ وجود داردکه

(۱) ماتریس f در پایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ قطری است

$$f(\beta_j, \beta_j)=\begin{cases}1, & j=1, \cdots, r\\ 0, & j>r\end{cases} \qquad (۲)$$

اثبات. بنابر قضیهٔ ۳ پایهٔ مرتبی چون $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای V وجود داردکه

$$f(\alpha_i, \alpha_j)=0 \quad i\neq j \quad \text{به ازای}$$

چون f دارای رتبهٔ r است، رتبهٔ ماتریس آن در پایهٔ مرتب $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ نیز r است. پس، به‌ازای دقیقاً r مقدار j باید داشته باشیم $f(\alpha_j, \alpha_j)\neq 0$. با تغییر ترتیب بردارهای α_j ، می‌توان فرض کرد که

$$f(\alpha_j, \alpha_j)\neq 0, \quad j=1, \cdots, r$$

اکنون از این واقعیت استفاده می‌کنیم که هیأت اسکالرها همان هیأت اعداد مختلط است. اگر $\sqrt{f(\alpha_j, \alpha_j)}$ نشانگر یکی از ریشه‌های دوم (جذر) مختلط $f(\alpha_j, \alpha_j)$ باشد و اگر قراردهیم

$$\beta_j=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{f(\alpha_j, \alpha_j)}}\alpha_j, & j=1, \cdots, r\\ \alpha_j, & j>r\end{cases}$$

آنگاه پایهٔ $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ شرایط (۱) و (۲) را ارضا می‌کند. □

بدیهی است، در صورتی که هیأت اسکالری زیر هیأتی از اعداد مختلط باشد که‌در آن هرعنصرش ریشهٔ دومی داشته باشد، قضیهٔ ۴ بازهم معتبر است. این قضیه مثلاً وقتی که هیأت اسکالری هیأت اعداد حقیقی باشد، معتبر نیست. روی هیأت اعداد حقیقی بجای قضیهٔ ۴ قضیهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ ۵. گیریم V یک فضای برداری n بعدی برروی هیأت اعداد حقیقی و f فرم دوخطی متقارنی‌روی V بارتبهٔ r باشد. دراین‌صورت پایهٔ‌مرتبی‌چون $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ برای V وجود داردکه در آن ماتریس f قطری است

$$f(\beta_j, \beta_j)=\pm 1, \qquad j=1, \cdots, r.$$

بعلاوه تعداد بردارهای پایه‌ای β_j که به ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j)=1$ مستقل از انتخاب پایه است.

اثبات. پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ برای V وجود دارد که

$$f(\alpha_i, \alpha_j)=0, \quad i\neq j$$
$$f(\alpha_j, \alpha_j)\neq 0, \quad 1\leqslant j\leqslant r$$
$$f(\alpha_j, \alpha_j)=0, \quad j>r.$$

گیریم

$$\beta_j=|f(\alpha_j, \alpha_j)|^{-1/2}\alpha_j, \quad 1\leqslant j\leqslant r$$
$$\beta_j=\alpha_j, \quad j>r.$$

آنگاه $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ پایه‌ای است با خواص مطلوب.

گیریم p تعداد بردارهای پایه‌ای β_j باشدکه به‌ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j)=1$؛ باید نشان دهیم که عدد p مستقل از پایهٔ خاصی است‌که ما آن را برگـزیده‌ایم و در شرایط مذکور صدق می‌کند. گیریم V^+ زیرفضایی از V باشد که توسط بردارهای پایه‌ای β_j با شرط $f(\beta_j, \beta_j)=1$ پدید می‌آید، و V^- زیرفضای پدیدآمده توسط بردارهای پایه‌ای β_j باشدکه به‌ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j)=-1$. حال بعد $p=(V^+)$ ، پس باید یکتابودن بعد V^+ را ثابت کنیم. بسهولت دیده می‌شودکه اگر α بـردار غیرصفری از V^+ باشد، آنگاه $f(\alpha, \alpha)>0$؛ به بیان‌دیگر، f روی زیرفضای V^+ معین‌مثبت است. به‌طورمشابه، اگر α برداری غیرصفر از V^- باشد، آنگاه $f(\alpha, \alpha)<0$، یعنی f روی زیرفضای V^- معین منفی است. حال گیریم $V^\perp$ زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای پایه‌ای β_j بـاشد که به ازای آنهـا $f(\beta_j, \beta_j)=0$. اگر α در $V^\perp$ باشد، آنگاه به‌ازای هـر β در V ، $f(\alpha, \beta)=0$.

چون $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ پایه‌ای برای V است، داریم

$$V=V^+\oplus V^-\oplus V^\perp .$$

علاوه‌براین، ادعا می‌کنیم کـه اگر W زیرفضایی از V باشدکـه روی آن f معین مثبت است، آنگاه زیر فضاهای W ، V^- ، و $V^\perp$ مستقل هستند. زیـرا، فرض‌کنیم، α در W، β در V^- ، و γ در $V^\perp$، و $\alpha+\beta+\gamma=0$. در این‌صورت

$$0=f(\alpha, \alpha+\beta+\gamma)=f(\alpha, \alpha)+f(\alpha, \beta)+f(\alpha, \gamma)$$
$$0=f(\beta, \alpha+\beta+\gamma)=f(\beta, \alpha)+f(\beta, \beta)+f(\beta, \gamma) .$$

چون γ در $V^\perp$ است $f(\alpha, \gamma)=f(\beta, \gamma)=0$ ؛ و چون f متقارن است، داریم

$$0=f(\alpha, \alpha)+f(\alpha, \beta)$$
$$0=f(\beta, \beta)+f(\alpha, \beta)$$

پس، $f(\alpha, \alpha)=f(\beta, \beta)$. چون $f(\alpha, \alpha)\geqslant 0$ و $f(\beta, \beta)\leqslant 0$ نتیجه می‌گیریم که

$$f(\alpha, \alpha)=f(\beta, \beta)=0 .$$

ولی f روی W معین مثبت است و روی V^- معین منفی. نتیجه اینکـه $\alpha=\beta=0$ و از این‌رو γ نیز برابر صفر است.

چون

$$V=V^+\oplus V^-\oplus V^\perp$$

و W، V^- ، و $V^\perp$ مستقل هستند دیده می‌شود کـه بعد $(V^+)\geqslant$ بعد (W) ، یعنی اگر W زیرفضایی از V باشدکه روی‌آن f معین مثبت است، بعد W نمی‌تواند ازبعد V^+ تجاوز

کند. اگر $\mathscr{B}_1$ پایهٔ مرتب دیگری برای V باشد و درشرایط قضیه صدق کند، زیرفضاهای متناظر V_1^+ ، V_1^- ، و $V_1^\perp$ را خواهیم داشت؛ و استدلال بالا نشان می‌دهد که بعد$(V^+) \leqslant$ بعد(V_1^+). با وارونه کردن استدلال بعد$(V_1^+) \leqslant$ بعد(V^+) را به‌دست‌می‌آوریم و نتیجتاً

$$\text{بعد}(V_1^+) = \text{بعد}(V^+). \quad \square$$

باید نکات چندی را در رابطه با پایهٔ $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ درقضیهٔ ۵ و زیرفضاهای وابستهٔ V^+، V^-، و $V^\perp$ متذکر شویم. ابتدا، توجه کنید که $V^\perp$ درست همان زیرفضای بردارهایی است که برهمهٔ V «عمود» هستند. قریباً توضیح دادیم که $V^\perp$ مشمول دراین زیرفضاست؛ اما،

$$\text{بعد}(V^\perp) = \text{بعد}(V) - (\text{بعد}(V^+) + \text{بعد}(V^-)) = \text{بعد}(V) - \text{رتبهٔ}(f)$$

لذا هر بردار α که به‌ازای هر β داشته باشیم $f(\alpha, \beta) = 0$ باید در V^+ باشد. پس زیرفضای $V^\perp$ یکتاست. زیرفضاهای V^+ و V^- یکتا نیستند؛ اما ابعاد آنها یکتا هستند. اثبات قضیهٔ ۵ نشان می‌دهد که بعد (V^+) برابر است بابزرگترین بعد ممکن زیرفضاهایی که روی آنها f معین مثبت است. به‌طور مشابه بعد(V^-) برابر است با بزرگترین بعد زیرفضاهایی که روی آنها f معین منفی است. بدیهی است که

$$\text{رتبهٔ}(f) = \text{بعد}(V^+) + \text{بعد}(V^-).$$

عدد

$$\text{بعد}(V^+) - \text{بعد}(V^-)$$

غالباً **نشان** f نامیده می‌شود. دلیل معرفی این اصطلاح این است که ابعاد V^+ و V^- از روی رتبهٔ f ونشان f بسهولت تعیین می‌شوند.

شاید بهتر باشد دربارهٔ رابطهٔ بین فرمهای دوخطی متقارن روی فضاهای برداری حقیقی وضربهای‌داخلی به‌نکتهٔ دیگری‌هم اشاره کنیم. فرض کنیم V یك فضای‌برداری‌حقیقی با بعد متناهی و V_1 ، V_2 ، V_3 زیرفضاهایی از V باشندکه

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3.$$

فرض کنیم f_1 ضربی داخلی روی V_1 و f_2 ضربی داخلی روی V_2 باشد. دراین‌صورت می‌توانیم فرم دوخطی متقارنی چون f روی V به‌شرح زیر تعریف کنیم: اگر α و β بردارهایی از V باشند، آنگاه به‌ازای α_j و β_jهایی از V می‌توان نوشت

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \text{و} \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3.$$

گیریم

$$f(\alpha, \beta) = f_1(\alpha_1, \beta_1) - f_2(\alpha_2, \beta_2).$$

برای f زیرفضای $V^{\perp}$ عبارت خواهد بود از V_3؛ برای f، V_1 یك V^{+} مناسب است و V_2 یك V^{-} مناسب. یك قسمت از حکم قضیهٔ ۵ این است که هرفرم دوخطی متقارن روی V، به‌همین‌طریق پدید می‌آید. محتوای دیگر قضیه این است که هرضرب داخلی را می‌توان درپایهٔ مرتب معینی توسط ماتریس همانی نمایش داد.

تمرین

۱. عبارات زیر، فرمهای درجهٔ دوم q روی R^2 را تعریف می‌کنند. فرم دوخطی متقارن f متناظر به‌هر q را بیابید.

(الف) ax_1^2

(ب) bx_1x_2

(پ) cx_2^2

(ت) $2x_1^2-\frac{1}{3}x_1x_2$

(ث) $x_1^2+9x_2^2$

(ج) $3x_1x_2-x_2^2$

(چ) $4x_1^2+6x_1x_2-3x_2^2$.

۲. ماتریس درپایهٔ مرتب استانده و رتبهٔ هریك از فرمهای دوخطی تعیین شده در تمرین ۱ را بیابید. مشخص کنید که کدامیك از این فرمها ناتبهگون هستند.

۳. فرض کنید $q(x_1, x_2)=ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2$ فرم درجهٔ دوم وابسته به فرم دوخطی متقارنی چون f روی R^2 باشد. نشان‌دهید f ناتبهگون است اگر وتنها اگر $b^2-4ac\neq 0$.

۴. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی برروی زیرهیأتی چون F از اعداد مختلط و S مجموعهٔ همهٔ فرمهای دوخطی متقارن روی V باشد.

(الف) نشان‌دهید S زیرفضایی از $L(V, V, F)$ است.

(ب) بعد (S) را بیابید.

گیریم Q مجموعهٔ همهٔ فرمهای درجهٔ دوم روی V باشد.

(پ) نشان دهید Q زیرفضایی ازفضای همهٔ توابع‌از V در F است.

(ت) بدون رجوع به‌هیچ پایه‌ای یك یکریختی چون T از Q بروی S را به‌طور صریح توصیف کنید.

(ث) فرض‌کنید U عملگری خطی روی V و q عنصری از Q باشد. نشان دهید که معادلهٔ $(U^{\dagger}q)(\alpha)=q(U\alpha)$ فرم درجهٔ دوم $U^{\dagger}q$ را روی V تعریف می‌کند.

(ج) اگر U عملگری خطی روی V باشد نشان‌دهید تابع $U^{\dagger}$ که دربخش (ث) تعریف شد عملگری خطی روی Q است. نشان‌دهید $U^{\dagger}$ معکوس‌پذیر است اگر وتنها

اگر U معکوس‌پذیر باشد.

۵. فرض کنید q فرم درجهٔ دوم روی R^2 تعریف شده توسط

$$q(x_1, x_2)=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2, \quad a\neq 0$$

باشد. عملگر خطی معکوس‌پذیری چون U روی R^2 بیابید که

$$(U^\dagger q)(x_1, x_2)=ax_1^2+\left(c-\frac{b^2}{a}\right)x_2^2.$$

(راهنمایی: برای یافتن U^{-1} (و درنتیجه U) مربع را کامل کنید. برای تعریف $U^\dagger$ به‌قسمت (ث) تمرین ۴ رجوع کنید.)

۶. فرض کنید q فرم درجهٔ دوم روی R^2 داده شده توسط

$$q(x_1, x_2)=2bx_1x_2$$

باشد. عملگر خطی معکوس‌پذیری چون U روی R^2 بیابید که

$$(U^\dagger q)(x_1, x_2)=2bx_1^2-2bx_2^2$$

۷. فرض کنید q فرم درجهٔ دوم روی R^3 داده شده توسط

$$q(x_1, x_2, x_3)=x_1x_2+2x_1x_3+x_3^2$$

باشد. عملگر خطی معکوس‌پذیری چون U روی R^3 بیابید که

$$(U^\dagger q)(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2.$$

(راهنمایی: U را به‌صورت حاصل‌ضرب عملگرهایی شبیه به عملگرهای به‌کار گرفته شدهٔ درتمرینهای ۵ و ۶ بیان کنید.)

۸. فرض کنید A ماتریس $n\times n$ متقارنی برروی R و q فرم درجهٔ دوم روی R^n داده‌شده توسط

$$q(x_1, \cdots, x_n)=\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j$$

باشد. روش به‌کار گرفته شده درتمرین ۷ را برای نشان دادن این مطلب که عملگرخطی معکوس‌پذیری چون U روی R^n وجود دارد که

$$(U^\dagger q)(x_1, \cdots, x_n)=\sum_{i=1}^{n} c_ix_i^2$$

تعمیم دهید. دراینجا c_i به‌ازای $i=1, \cdots, n$ برابر ۱، ۱ —، یا ۰ است.

۹. فرض کنید f فرم دوخطی متقارنی روی R^n باشد. نتیجهٔ تمرین ۸ را برای اثبات وجود پایهٔ مرتبی چون $\mathcal{B}$ به‌نحوی که $[f]_{\mathcal{B}}$ قطری باشد به‌کار گیرید.

۱۰. فرض کنید V فضای برداری حقیقی همهٔ ماتریسهای هرمیتی (مختلط) ۲×۲ باشد، یعنی ماتریسهای مختلط ۲×۲یی چون A باشد که در $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$ صدق می‌کنند.

(الف) نشان دهید معادلهٔ $q(A) = \det A$ فرم درجهٔ دوم q را روی V تعریف می‌کند.

(ب) فرض کنید W زیرفضایی از V متشکل از ماتریسهای با رد ۰ باشد. نشان‌دهید فرم دوخطی f تعیین شده توسط q روی زیرفضای W معین منفی است.

۱۱. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی و f فرم دوخطی متقارن ناتبهگونی روی V باشد. نشان‌دهید که به‌ازای هر عملگر خطی T روی V عملگر خطی یکتایی چون T' روی V وجود دارد که به‌ازای هر α و β در V، $f(T\alpha, \beta) = f(\alpha, T'\beta)$. همچنین نشان‌دهید که

$$(T_۱T_۲)' = T_۲'T_۱'$$

$$(c_۱T_۱ + c_۲T_۲)' = c_۱T_۱' + c_۲T_۲'$$

$$(T')' = T.$$

بدون این فرض که T ناتبهگون است، چه‌مقدار از مطالب بالا معتبر است؟

۱۲. فرض کنید F یك هیأت و V فضای ماتریسهای $n \times ۱$ برروی F باشد. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ ثابتی برروی F و f فرم دوخطی تعریف‌شده توسط $f(X, Y) = X^tAY$ روی V باشد. بعلاوه فرض کنید f متقارن و ناتبهگون باشد. فرض کنید B ماتریسی $n \times n$ برروی F و T عملگری خطی روی V باشد که X را به BX می‌فرستد. عملگر T' در تمرین ۱۱ را بیابید.

۱۳. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی و f فرم دوخطی متقارن ناتبهگونی روی V باشد. وابستهٔ به f یك یکریختی «طبیعی» از V بروی فضای دوگان V^* وجود دارد که همان تبدیل L_f از بخش ۱۰.۱ است. L_f را به‌کار برید و نشان‌دهید که به‌ازای هرپایهٔ $\mathcal{B} = \{\alpha_۱, \ldots, \alpha_n\}$ از V پایهٔ یکتایی چون $\mathcal{B}' = \{\alpha_۱', \ldots, \alpha_n'\}$ از V وجود دارد که $f(\alpha_i, \alpha_j') = \delta_{ij}$. سپس نشان‌دهید به‌ازای هر بردار α در V داریم

$$\alpha = \sum_i f(\alpha, \alpha_i')\alpha_i = \sum_i f(\alpha_i, \alpha)\alpha_i'.$$

۱۴. فرض کنید V، f، $\mathcal{B}$، و $\mathcal{B}'$ همچون در تمرین ۱۳ باشند. فرض کنید T عملگری خطی

روی V و T' عملگری خطی باشد که f آن‌را همچون درتمرین ۱۱ به T وابسته می‌سازد. نشان دهید

(الف) $[T']_{\mathcal{B}'}=[T]^t_{\mathcal{B}}$.

(ب) $\operatorname{tr}(T)=\operatorname{tr}(T')=\sum_i f(T\alpha_i, \alpha'_i)$.

۱۵. فرض کنید V، f، $\mathcal{B}$، و $\mathcal{B}'$ همچون‌در تمرین ۱۳ باشند. فرض کنید $A=[f]_{\mathcal{B}}$. نشان‌دهید نشان دهید

$$\alpha'_i=\sum_j (A^{-1})_{ij}\alpha_j=\sum_j (A^{-1})_{ji}\alpha_j.$$

۱۶. فرض کنید F یك هیأت و V فضای ماتریسهای $n\times 1$ برروی F باشد. فرض کنید A ماتریس $n\times n$ متقارن معکوس‌پذیری برروی F ونیز f فرم دوخطی روی V تعریف شده توسط $f(X, Y)=X^tAY$ باشد. فرض کنید P ماتریس $n\times n$ معکوس‌پذیری برروی F و $\mathcal{B}$ پایهٔ متشکل از ستونهای P برای V باشد. نشان‌دهید که پایهٔ $\mathcal{B}'$ در تمرین ۱۳ متشکل از ستونهای ماتریس $A^{-1}(P^t)^{-1}$ است.

۱۷. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی برروی هیأتی چون F و f فرم‌دوخطی متقارنی روی V باشد. به‌ازای هر زیرفضای W از V، گیریم $W^{\perp}$ مجموعهٔ همهٔ بردارهای α در V باشد که به‌ازای هر β در W، $f(\alpha, \beta)=0$. نشان‌دهید

(الف) $W^{\perp}$ یك زیرفضاست.

(ب) $V=\{0\}^{\perp}$.

(پ) $V^{\perp}=\{0\}$ اگر وتنها اگر f ناتبهگون باشد.

(ت) بعد$(V^{\perp})$ — بعد(V) = رتبهٔ(f)

(ث) اگر بعد$(V)=n$ و بعد$(W)=m$، آنگاه بعد$(W^{\perp})\geqslant n-m$.
(راهنمایی: $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ را پایه‌ای برای W بگیرید ونگاشت

$$\alpha \to (f(\alpha, \beta_1), \dots, f(\alpha, \beta_m))$$

از V در F^m را موردتوجه قرار دهید.)

(ج) تحدید f روی W ناتبهگون است اگر وتنها اگر

$$W\cap W^{\perp}=\{0\}.$$

(چ) $V=W\oplus W^{\perp}$ اگر وتنها اگر تحدید f روی W ناتبهگون باشد.

۱۸. فرض کنید V یك فضای برداری با بعد متناهی برروی C و f فرم دوخطی متقارن ناتبهگونی روی V باشد. ثابت کنید پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ از V وجود داردکه $\mathcal{B}'=\mathcal{B}$ (برای تعریف $\mathcal{B}'$ تمرین ۱۳ را ببینید).

۳.۱۰. فرمهای دوخطی متقارن کج

در تمام این بخش، V یك فضای برداری بر روی یك زیرهیأت F از هیأت اعدادمختلط خواهد بود. فرمی دوخطی چون f روی V **متقارن کج** نامیده می‌شود، هر گاه به‌ازای همهٔ بردارهای α و β در V، $f(\alpha, \beta)=-f(\beta, \alpha)$. در رابطه با ساده کردن ماتریس فرم دوخطی متقارن‌کجی روی یك فضای بعد متناهی V قضیه‌ای را اثبات خواهیم کرد. ولی بیایید ابتدا به چند مشاهدهٔ عمومی بپردازیم.

فرض کنید f فرم دو خطی دلخواهی روی V باشد، اگر فرض کنیم

$$g(\alpha, \beta)=\frac{۱}{۲}\left[f(\alpha, \beta)+f(\beta, \alpha)\right]$$

$$h(\alpha, \beta)=\frac{۱}{۲}\left[f(\alpha, \beta)-f(\beta, \alpha)\right]$$

آنگاه بسادگی می‌توان نشان داد که g فرم دوخطی متقارنی روی V و h فرم دوخطی متقارن کجی روی V است. ازاین گذشته، $f=g+h$. بعلاوه، این عبارت برای f، به صورت مجموع فرمی متقارن و فرمی متقارن کج، یکتاست. پس، فضای $L(V, V, F)$ مجموع مستقیم زیرفضای فرمهای متقارن و زیرفضای فرمهای متقارن کج است.

اگر بعد V متناهی باشد، فرم دوخطی f متقارن‌کج است اگر و تنها اگر ماتریس آن A، در یك (یا هر) پایهٔ مرتبی متقارن کج باشد: $A^t=-A$. این قضیه، عیناً مثل حکم متناظر دربارهٔ فرمهای دوخطی متقارن اثبات می‌شود. وقتی f متقارن کج باشد همهٔ درایه‌های قطری ماتریس f، در هر پایهٔ مرتبی، ۰ خواهند بود. این درست متناظر این مشاهده است که به‌ازای هر α در V، $f(\alpha, \alpha)=۰$، چراکه $f(\alpha, \alpha)=-f(\alpha, \alpha)$.

حال فرض می‌کنیم f فرم دوخطی متقارن کج غیر صفری روی V باشد. چون $f\neq ۰$، بردارهایی چون α و β در V وجود دارند که $f(\alpha, \beta)\neq ۰$.[۱] با ضرب α در اسکالر مناسبی، می‌توان فرض کرد که $f(\alpha, \beta)=۱$. گیریم γ برداری دلخواه در زیرفضای پدیدآمده توسط α و β، مثلاً $\gamma=c\alpha+d\beta$، باشد. در این صورت

$$f(\gamma, \alpha)=f(c\alpha+d\beta, \alpha)=df(\beta, \alpha)=-d$$
$$f(\gamma, \beta)=f(c\alpha+d\beta, \beta)=cf(\alpha, \beta)=c$$

و لذا

$$\gamma=f(\gamma, \beta)\alpha-f(\gamma, \alpha)\beta. \tag{۷-۱۰}$$

بخصوص، توجه کنید که α و β لزوماً مستقل خطی هستند؛ زیرا، اگر $\gamma=۰$، آنگاه

---

۱. این حکم در صورتی امکان‌پذیر است که ۲ $\leqslant$ بعد (V). در طول بحث، این شرط باید در نظر گرفته شود. ـم.

$f(\gamma, \alpha)=f(\gamma, \beta)=\circ$.

فرض کنید W زیرفضای دوبعدی پدیدآمده توسط α و β باشد. بعلاوه فرض کنید $W^{\perp}$ مجموعهٔ همهٔ بردارهایی چون δ در V باشدکه $f(\delta, \alpha)=f(\delta, \beta)=\circ$؛ یعنی، مجموعهٔ همهٔ δ هایی باشدکه به‌ازای هر γ در زیرفضای W، $f(\delta, \gamma)=\circ$. ادعامی کنیم که $V=W \oplus W^{\perp}$. زیرا، گیریم ϵ بردار دلخواهی در V باشد و

$$\gamma=f(\epsilon, \beta)\alpha-f(\epsilon, \alpha)\beta$$

$$\delta=\epsilon-\gamma.$$

آنگاه γ در W و δ در $W^{\perp}$ است، چرا که

$$\begin{aligned} f(\delta, \alpha) &= f(\epsilon-f(\epsilon, \beta)\alpha+f(\epsilon, \alpha)\beta, \alpha) \\ &= f(\epsilon, \alpha)+f(\epsilon, \alpha)f(\beta, \alpha) \\ &= \circ \end{aligned}$$

و به‌طور مشابه $f(\delta, \beta)=\circ$. پس، هر ϵ در V به‌صورت $\epsilon=\gamma+\delta$ با فرض γ در W و δ در $W^{\perp}$ است. از (۱۰-۷) واضح است که $W \cap W^{\perp}=\{\circ\}$ ولذا $V=W \oplus W^{\perp}$.

حال تحدید f روی $W^{\perp}$ فرم دوخطی متقارن‌کجی روی $W^{\perp}$ است. ایـن تحدید ممکن است فرم صفر باشد. اگر نباشد، بردارهایی چون α' و β' در $W^{\perp}$ وجود دارندکه $f(\alpha', \beta')=۱$. اگر فرض‌کنیم W' زیرفضای دوبعدی پدیدآمده توسط α' و β' باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$V=W \oplus W' \oplus W_{\circ}$$

که در آن $W_{\circ}$ عبارت است از مجموعـهٔ همه بردارهایی چـون δ در $W^{\perp}$ بـه‌طوری که $f(\alpha', \delta)=f(\beta', \delta)=\circ$. اگـر تحدید f روی $W_{\circ}$ فـرم صفر نباشد، مـی‌تـوانیم بردارهایی چون α'' و β'' در $W_{\circ}$ را چنان انتخاب کنیم که $f(\alpha'', \beta'')=۱$ و بعد ادامه دهیم.

در حالت بعد متناهـی باید واضح باشدکـه دنباله‌ای متناهی از جفت بردارهای

$$(\alpha_{۱}, \beta_{۱}), (\alpha_{۲}, \beta_{۲}), \cdots, (\alpha_k, \beta_k)$$

با خواص زیر به دست می‌آیند:

(الف) $f(\alpha_j, \beta_j)=۱$، $j=۱, \cdots, k$.

(ب) $f(\alpha_i, \alpha_j)=f(\beta_i, \beta_j)=f(\alpha_i, \beta_j)=\circ$، $i\neq j$.

(پ) اگر W_j زیرفضای دوبعدی پدید آمده توسط α_j و β_j باشد، آنگاه

$$V=W_{۱}\oplus \cdots \oplus W_k \oplus W_{\circ}$$

که درآن هر بردار در W_0 بر همهٔ α_jها و β_jها «عمود» است و تحدید f روی W_0 فرم صفر است.

قضیهٔ ۶. گیریم V یك فضای برداری n بعدی برروی زیرهیأتی از اعدادمختلف و f فرم دوخطی مفروضی‌راحفظ می‌کنند، تحت تشکیل حاصل‌ضربها(ی عملگرها)، بسته است. مرتبی برای V وجود داردکه در آن ماتریس f عبارت است از مجموع مستقیم ماتریس صفر $(n-r)\times(n-r)$ و k نسخه از ماتریس 2×2ی

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

اثبات. فرض می‌کنیم α_1، β_1، $\cdots$، α_k، β_k بردارهایی باشند که در شرایط (الف)، (ب)، و (پ) بالا صدق می‌کنند. گیریم $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_s\}$ پایهٔ مرتب دلخواهی برای زیرفضای W_0 باشد. دراین صورت

$$\mathscr{B}\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_k, \beta_k, \gamma_1, \cdots, \gamma_s\}$$

پایهٔ مرتبی برای V است. از (الف)، (ب)، و (پ) واضح است که ماتریس f در پایهٔ مرتب $\mathscr{B}$ عبارت‌است ازمجموع مستقیم ماتریس صفر $(n-2k)\times(n-2k)$ و k نسخه از ماتریس 2×2ی

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{۸-۱۰}$$

بعلاوه، واضح است که رتبهٔ این ماتریس، و در نتیجه f، برابر $2k$ است. □

یکی از نتایج مطالب بالا این است که اگر f فرم دوخطی متقارن کج ناتبهگونی روی V باشد، آنگاه بعد V باید زوج باشد. اگر $2k =$ بعد (V)، پایهٔ مرتبی چون $\{\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_k, \beta_k\}$ برای V وجود خواهد داشت که

$$f(\alpha_i, \beta_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$f(\alpha_i, \alpha_j) = f(\beta_i, \beta_j) = 0.$$

ماتریس f در این پایهٔ مرتب مجموع مستقیم k نسخه از ماتریس متقارن کج 2×2ی (۸-۱۰) است. اگر به‌جای پایهٔ مرتب بالا، پایهٔ مرتب

$$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_k, \cdots, \beta_1\}$$

را درنظر بگیریم، صورت استانندهٔ دیگری برای ماتریس یك فرم متقارن کج ناتبهگون

به‌دست می‌آوریم. خواننده باید به آسانی بتواند نشان دهدکه ماتریس f در پایهٔ مرتب اخیر صورت بلوکی

$$\begin{bmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{bmatrix}$$

را داردکه در آن J عبارت است از ماتریس $k \times k$ی

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

تمرین

۱. فرض‌کنید V فضایی برداری برروی هیأتی چون F باشد. نشان دهیدکه مجموعهٔ همهٔ فرمهای دوخطی متقارن کج روی V زیرفضایی از $L(V, V, F)$ است.

۲. همهٔ فرمهای دوخطی متقارن‌کج روی R^3 را بیابید.

۳. پایه‌ای برای فضای همهٔ فرمهای دوخطی متقارن‌کج روی R^n بیابید.

۴. فرض‌کنید f فرم دوخطی متقارنی روی C^n و g فرم دوخطی متقارن‌کجی روی C^n باشد. فرض کنید $f+g=0$. نشان دهید که $f=g=0$.

۵. فرض‌کنید V یك فضای‌برداری n بعدی برروی زیرهیأتی چون F از C باشد. احکام زیر را ثابت‌کنید.

(الف) معادلهٔ $(Pf)(\alpha, \beta)=\frac{1}{2}f(\alpha,\beta)-\frac{1}{2}f(\beta,\alpha)$ یك عملگرخطی P روی $L(V, V, F)$ تعریف می‌کند.

(ب) $P^2=P$، یعنی P یك تصویر است.

(پ) $\frac{n(n-1)}{2}=$ رتبهٔ (P)؛ $\frac{n(n+1)}{2}=$ پوچی (P).

(ت) اگر U عملگری‌خطی‌روی V باشد، معادلهٔ $(U^\dagger f)(\alpha, \beta)=f(U\alpha, U\beta)$ یك عملگر خطی $U^\dagger$ روی $L(V, V, F)$ تعریف می‌کند.

(ث) به‌ازای هرعملگر خطی U، تصویر P با $U^\dagger$ جابجا می‌شود.

۶. نظیر تمرین ۱۱ در بخش ۲.۱۰، حکمی را برای فرمهای دوخطی متقارن کج ناتبهگون ثابت کنید.

۷. فرض کنید f فرمی دوخطی روی یک فضای برداری V باشد. فرض کنید L_f و R_f نگاشتهای از V در V^* وابسته به f، داده شده در بخش ۱.۱۰ باشند. ثابت کنید f متقارن کج است اگر وتنها اگر $L_f = -R_f$.

۸. نظیر تمرین ۱۷ در بخش ۲.۱۰، حکمی را برای فرمهای متقارن کج ثابت کنید.

۹. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی باشد و L_1 و L_2 تابعکهایی خطی روی V باشند. نشان دهید که معادلهٔ

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha)$$

فرم دوخطی متقارن کجی روی V تعریف می‌کند. نشان دهید که $f = 0$ اگر وتنها اگر L_1 و L_2 وابستهٔ خطی باشند.

۱۰. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی زیرهیأتی از اعداد مختلط و f فرم دوخطی متقارن کجی روی V باشد. نشان دهید f دارای رتبهٔ ۲ است اگر وتنها اگر تابعکهای خطی مستقل خطی L_1 و L_2 روی V وجود داشته باشند که

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha).$$

۱۱. فرض کنید f فرم دوخطی متقارن کجی روی R^3 باشد. ثابت کنید تابعکهایی خطی چون L_1 و L_2 وجود دارند که

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha).$$

۱۲. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی برروی زیرهیأتی از اعداد مختلط و f و g دوفرم دوخطی متقارن کجی روی V باشند. نشان دهید عملگر خطی معکوس‌پذیری چون T روی V وجود دارد که به‌ازای هر α و β، $f(T\alpha, T\beta) = g(\alpha, \beta)$ اگر وتنها اگر f و g رتبهٔ مساوی داشته باشند.

۱۳. نشان دهید که نتیجهٔ تمرین ۱۲ برای فرمهای دوخطی متقارن روی فضاهای برداری مختلط معتبر است ولی برای فرمهای دوخطی متقارن روی فضاهای برداری حقیقی معتبر نیست.

۴.۱۰. گروههای حافظ فرمهای دوخطی

گیریم f فرمی دوخطی روی فضای برداری V و T عملگری خطی روی V باشد. گوییم T فرم f را **حفظ می‌کند**، هرگاه به‌ازای‌هر α و β در V، $f(T\alpha, T\beta)=f(\alpha, \beta)$. به‌ازای‌هر Tو f بسادگی‌دیده‌می‌شود که تابع g تعریف‌شده‌توسط $g(\alpha, \beta)=f(T\alpha, T\beta)$ فرمی دوخطی روی V است. اینکه بگوییم T، f را حفظ می‌کند چیزی جزاینکه بگوییم $g=f$ نیست. عملگر همانی، هرفرم دوخطی را حفظ می‌کند. اگر S و T عملگرهایی خطی باشند که f را حفظ کنند حاصل‌ضرب ST نیز f را حفظ می‌کند؛ زیرا $f(ST\alpha, ST\beta)=f(T\alpha, T\beta)=f(\alpha, \beta)$. به‌بیان دیگر، دستهٔ عملگرهای خطی‌که فرم دوخطی مفروضی را حفظ می‌کنند، تحت‌تشکیل‌حاصل‌ضربها (ی عملگرها)، بسته‌است. درحالت عمومی، دربارهٔ این دسته از عملگرها چیز بیشتری نمی‌توان گفت؛ اما، اگر f ناتبهگون باشد، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیهٔ ۷. گیریم f فرم دوخطی ناتبهگونی روی یك فضای برداری بعد متناهی V باشد. مجموعهٔ همهٔ عملگرهای خطی روی V که f را حفظ می‌کنند، تحت عمل ترکیب، یك گروه است.

اثبات. گیریم G مجموعهٔ عملگرهایی خطی باشد‌که f را حفظ می‌کنند. مشاهده کردیم که عملگرهمانی در G قراردارد، و درصورتی‌که S و T در G باشند، ترکیب ST نیز در G است. بنابراین فرض‌که f ناتبهگون است، ثابت خواهیم‌کرد‌که هر عملگر T در G معکوس‌پذیر است و T^{-1} نیز در G قرار دارد. فرض‌کنیم T فرم f را حفظ‌کند. گیریم α برداری درفضای پوچ T باشد. دراین‌صورت به‌ازای هر β در V داریم

$$f(\alpha, \beta)=f(T\alpha, T\beta)=f(0, T\beta)=0.$$

چون f ناتبهگون است، پس $\alpha=0$. درنتیجه T معکوس‌پذیر است. واضح است که T^{-1} نیز f را حفظ می‌کند؛ زیرا

$$f(T^{-1}\alpha, T^{-1}\beta)=f(TT^{-1}\alpha, TT^{-1}\beta)=f(\alpha, \beta). \quad \square$$

اگر f فرم‌دوخطی ناتبهگونی روی فضای بعد متناهی V باشد، آنگاه هرپایهٔ مرتب $\mathcal{B}$ برای V گروهی از ماتریسهای «حافظ» f را تعیین می‌کند. مجموعهٔ همهٔ‌ماتریسهای $[T]_{\mathcal{B}}$ که درآن T یك عملگر خطی حافظ f است، تحت ضرب ماتریسی یك‌گروه‌خواهد بود. برای این گروه از ماتریسها، توصیف دیگری به‌صورت زیرهم وجود دارد. گیریم $A=[f]_{\mathcal{B}}$، بنابراین اگر α و β بردارهایی از V بترتیب با ماتریسهای مختصات X و Y نسبت به $\mathcal{B}$ باشند، خواهیم داشت

$$f(\alpha, \beta)=X^{t}AY.$$

گیریم T عملگری خطی روی V باشد، و $M=[T]_{\mathcal{B}}$. دراین‌صورت

$$f(T\alpha, T\beta) = (MX)^t A(MY)$$
$$= X^t(M^t AM)Y$$

بنابراین، T فرم f را حفظ می‌کند اگر وتنها اگر $M^t AM = A$. دراین‌صورت، قضیهٔ ۷ به‌زبان ماتریسی مطلب زیر را بیان می‌کند: اگر A ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری باشد، مجموعهٔ همه ماتریسهای $n \times n$ چون M، باشرط $M^t AM = A$ تحت ضرب ماتریسی یك گروه است. اگر $A = [f]_{\mathfrak{B}}$، آنگاه M دراین گروه از ماتریسها است اگــر و تنها اگر $M = [T]_{\mathfrak{B}}$ و T عملگری خطی باشدکه f را حفظ می‌کند.

قبل‌از پرداختن به‌چند مثال، به‌ذکر نکته‌ای دیگر می‌پردازیم. فرض کنیم f فــرم دوخطی متقارنی باشد. عملگر خطی T فرم f را حفظ می‌کند اگــر و تنها اگر T فــرم درجهٔ دوم

$$q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$$

وابسته به f را حفظ‌کند. اگر T فرم f را حفظ‌کند مطمئناً به‌ازای هر α در V داریم

$$q(T\alpha) = f(T\alpha, T\alpha) = f(\alpha, \alpha) = q(\alpha).$$

به‌عکس، چون f متقارن است، اتحاد قطبی

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} q(\alpha + \beta) - \frac{1}{4} q(\alpha - \beta)$$

نشان می‌دهد T وقتی f را حفظ می‌کند که به‌ازای هر γ در V، $q(T\gamma) = q(\gamma)$. (دراینجا فرض براین است که هیأت اسکالری زیرهیأتی از اعداد مختلط است.)

مثال ۶. گیریم V فضای R^n یا فضای C^n باشد. فرض می‌کنیم f فرم دوخطی

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

باشد که درآن $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$ و $\beta = (y_1, \ldots, y_n)$. گــروه حافظ f **گروه متعامد** (حقیقی یا مختلط) nبعدی نامیده می‌شود. نام «گروه متعامد» بیشتر به‌گروه وابستهٔ ماتریسهای درپایهٔ مرتب استانده اطلاق می‌شود. چون ماتریس f درپایهٔ استانده همان I است، این گروه متشکل‌از ماتریسهای M است کــه در $M^t M = I$ صدق مــی کنند. چنین ماتریس M به‌یك **ماتریس متعامد** (حقیقی یا مختلط) $n \times n$ مــوسوم است. این دو گروه متعامد $n \times n$، غالباً به‌صورت $O(n, R)$ و $O(n, C)$ نمایش داده می‌شوند. بدیهی‌است گروه متعامد، همچنین گروهی است که فرم درجهٔ دوم

$$q(x_1, \ldots x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

را حفظ می‌کند.

مثال ۷. گیریم f فرم دوخطی متقارن روی R^n با فرم درجهٔ دوم

$$q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 - \sum_{j=p+1}^{n} x_j^2$$

باشد. آنگاه f ناتبهگون و دارای نشان $2p-n$ است. گـروه ماتریسهای حافظ فـرمـی ازاین نوع یك **گروه شبه متعامد** نامیده می‌شود. وقتی که $p=n$، گروه متعامد $O(n, R)$ به‌عنوان نوع خاصی از گروههای شبه متعامدبه‌دست می‌آید. به‌ازای‌هریك از $n+1$ مقدار $p=0, 1, 2, \cdots, n$ فرمهای دوخطی مختلفی‌چون f به‌دست می‌آوریم؛ اما، به‌ازای $p=k$ و $p=n-k$، فرمها قرینهٔ یکدیگراند وازاین‌رو دارای گروههای وابستهٔ مساوی هستند. پس، وقتی که n فرد باشد، $(n+1)/2$ گـروه شبه متعامد از ماتـریسهای $n\times n$، وهنگامی که n زوج‌باشد، $(n+2)/2$ ازچنین گروههایی حاصل می‌شوند.

قضیهٔ ۸. گیریم V یك فضای برداری n بعدی برروی هیأت اعداد مختلط و f فرم دوخطی متقارن ناتبهگونی روی V باشد. دراین صورت گروه حافظ f باگـروه متعامد مختلط $O(n, C)$ یکریخت است.

اثبات. بدیهی است که منظورمان از یك یکریختی بین دوگروه، یك تناظر یك‌به‌یك بین اعضای آنهاست که عمل گروه را «حفظ مـی‌کند». گیریم G گروه عملگرهای خطی روی V باشدکه فرم دوخطی f را حفظ می‌کنند. چون f هم‌متقارن و هم‌ناتبهگون است قضیهٔ ۴ حاکی است که پایهٔ مرتبی چون $\mathscr{B}$ برای V وجود داردکه‌درآن f توسط ماتریس همانی $n\times n$ نمایش‌داده می‌شود. بنابراین، عملگری خطی چون T فرم f را حفظ‌می‌کند اگر و تنها اگر ماتریس آن درپایهٔ مرتب $\mathscr{B}$ ماتریس متعامد مختلطی باشد. ازاین‌رو،

$$T \to [T]_{\mathscr{B}}$$

یك یکریختی از G بروی $O(n, C)$ است. □

قضیهٔ ۹. گیریم V یك فضای برداری n بعدی برروی هیأت اعداد حقیقی و f فـرم دوخطی متقارن ناتبهگونی روی V باشد. دراین‌صورت‌گروه حافظ f باگـروه $n\times n$ شبه متعامدی یکریخت است.

اثبات. اثبات قضیهٔ ۸ را با استفاده از قضیهٔ ۵ به‌جای قضیهٔ ۴ تکرار کنید. □

مثال ۸. گیریم f فرم دوخطی متقارن روی R^4 با فرم درجهٔ دوم

$$q(x, y, z, t) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

باشد. عملگری خطی چون T روی R^4 که این فرم دوخطی (یا درجهٔ دوم) خاص راحفظ می‌کند، یك **تبدیل لورنتس** نامیده می‌شود وگروه حافظ f به **گروه لورنتس** موسوم‌است. می‌خواهیم یکی از روشهای تشریح چند تبدیل لورنتس را به‌دست می‌دهیم.

گیریم H فضای‌برداری حقیقی همهٔ ماتریسهای‌مختلط Aی 2×2 که هرمیتی‌هستند،

$A=A^*$، باشد. به‌آسانی می‌توان نشان داد که

$$\Phi(x, y, z, t)=\begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

یك یکریختی Φ از R^4 بروی فضای H تعریف می‌کند. تحت ایـن یکریختی، فرم درجهٔ دوم q بروی تابع دترمینان برده می‌شود؛ یعنی

$$q(x, y, z, t)=\det\begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

یا

$$q(\alpha)=\det \Phi(\alpha).$$

این مطلب اشاره براین دارد که بامطالعهٔ عملگرهای خطی روی H که دترمینانها را حفظ می‌کنند می‌توان تبدیلهای لورنتس روی R^4 را بررسی کرد.

M را ماتریس 2×2 مختلط دلخواهی می‌گیریم و برای هر ماتریس هـرمیتی A تعریف می‌کنیم:

$$U_M(A)=MAM^*.$$

حال MAM^* نیز هرمیتی است. ازاین مطلب بآسانی دیده می‌شود که U_M یك‌عملگر خطی (حقیقی) روی H است. می‌خواهیم بدانیم چه‌وقت این مطلب درست است که U_M دترمینانها را «حفظ می‌کند»؛ یعنی به‌ازای هر A در H، $\det[U_M(A)]=\det A$. چون دترمینان M^* برابر مزدوج مختلط دترمینان M است، می‌بینیم که

$$\det[U_M(A)]=|\det M|^2\det A.$$

پس U_M دترمینانها را درست وقتی حفظ می‌کند که $\det M$ دارای قدرمطلق ۱ باشد.

لذا اکنون ماتریس مختلط 2×2 یی چون M را که $|\det M|=1$ انتخاب می‌کنیم. دراین‌صورت U_M یك عملگر خطی روی H است که دترمینانها را حفظ می‌کند. حال

$$T_M=\Phi^{-1}U_M\Phi$$

را تعریف می‌کنیم. چون Φ یـك یکریختی است T_M هم‌عملگری خطی روی R^4 است. همچنین، T_M یك تبدیل لورنتس است؛ زیرا

$$\begin{aligned} q(T_M\alpha) &= q(\Phi^{-1}U_M\Phi\alpha) \\ &= \det(\Phi\Phi^{-1}U_M\Phi\alpha) \\ &= \det(U_M\Phi\alpha) \end{aligned}$$

$$= \det(\Phi\alpha)$$
$$= q(\alpha)$$

وازاین‌رو، T_M فرم درجهٔ دوم q را حفظ می‌کند.

با به‌کارگیری‌ماتریسهای ۲×۲ویژهٔ M می‌توان‌روش‌بالارا برای محاسبهٔ تبدیلهای لورنتس‌ویژه مورداستفاده قرارداد. دونکته‌هست که دراینجا می‌توان به‌ذکرآنها پرداخت؛ بررسی آنهاهم مشکل نیست.

(۱) اگر $M_۱$ و $M_۲$ ماتریسهای ۲×۲ معکوس‌پذیری با درایه‌های مختلط باشند، آنگاه $U_{M_۱} = U_{M_۲}$ اگر وتنها اگر $M_۲$ مضربی اسکالری از $M_۱$ باشد. پس،همهٔ تبدیلهای لورنتس نمایش داده شده درفــوق از ماتریسهای تك مدولیM، یعنی از ماتــریسهای M باشرط $\det M = ۱$، قابل‌حصول هستند. اگر $M_۱$ و $M_۲$ ماتریسهایی تك‌مدولی باشندکه $M_۱ \neq M_۲$ و $M_۱ \neq -M_۲$، آنگاه $T_{M_۱} \neq T_{M_۲}$.

(۲) همهٔ تبدیلهای لورنتس با روش بالا قابل حصول نیستند.

تمرین

۱. فرض‌کنید M عنصری ازگروه متعامد مختلط $O(n, C)$ باشد. نشان‌دهیدکه M^t، $\overline{M}$، و $M^* = \overline{M}^t$ نیز به $O(n, C)$ تعلق دارند.

۲. فرض‌کنیدM متعلق به $O(n, C)$ و M' متشابه با M باشد. آیا M' نیز به $O(n, C)$ تعلق دارد؟

۳. فرض‌کنید

$$y_j = \sum_{k=۱}^{n} M_{jk} x_k$$

که درآن M عنصری از $O(n, C)$ است. نشان دهیدکه

$$\sum_j y_j^۲ = \sum_j x_j^۲.$$

۴. فرض کنید M ماتریسی $n \times n$ بــرروی C باستونهای $M_۱$، $M_۲$، $\cdots$، M_n بــاشد. نشان‌دهیدکه M متعلق به $O(n, C)$ است اگر وتنها اگر

$$M_j^t M_k = \delta_{jk}.$$

۵. فرض‌کنید X یك ماتریس $n \times ۱$ برروی C باشد. تحت‌چه‌شرایطی $O(n, C)$ شامــل ماتریسی چون M است که ستون اولش X باشد؟

۶. ماتریسی در $O(3, C)$ بیابید که سطر اولش $(2i, 2i, 3)$ باشد.

۷. فرض کنید V فضای همهٔ ماتریسهای $n \times 1$ برروی C و f فرم دوخطی روی V داده‌شده توسط $f(X, Y) = X^t Y$ باشد. فرض کنید M متعلق به $O(n, C)$ باشد. ماتریس f در پایهٔ V متشکل از ستونهای M_1، M_2، ...، M_n از M چیست؟

۸. گیریم X یك ماتریس $n \times 1$ برروی C با شرط $X^t X = 1$؛ و I_j برابر jامین ستون ماتریس همانی باشد. نشان دهید ماتریسی چون M در $O(n, C)$ وجود دارد که $MX = I_j$. اگر X دارای درایه‌های حقیقی باشد، نشان‌دهید که یك M در $O(n, C)$ وجود دارد با این خاصیت که $MX = I_j$.

۹. فرض کنید V فضای همهٔ ماتریسهای $n \times 1$ برروی C، A یك ماتریس $n \times n$ برروی C، و f فرم دوخطی روی V داده شده توسط $f(X, Y) = X^t AY$ باشد. نشان‌دهید که f تحت $O(n, C)$ پایاست، یعنی به‌ازای‌هر X و Y در V وهر M در $O(n, C)$، $f(MX, MY) = f(X, Y)$ اگر وتنها اگر A باهرعنصر $O(n, C)$ جابجا شود.

۱۰. فرض کنید S مجموعه‌ای دلخواه ازماتریسهای $n \times n$ برروی C، و S' مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n \times n$ برروی C باشد که باهرعنصر S جابجا می‌شود. نشان‌دهید که S' یك جبر برروی C است.

۱۱. فرض کنید F زیرهیأتی از C، V فضایی برداری با بعد متناهی برروی F، و f فرم دوخطی نامنفردی روی V باشد. اگر T عملگری خطی روی V و حافظ f باشد، ثابت کنید $\det T = \pm 1$.

۱۲. فرض کنید F زیرهیأتی از C، V فضای ماتریسهای $n \times 1$ برروی F، A ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری بروی F ، و f فرم دوخطی روی V داده شده توسط $f(X, Y) = X^t AY$ باشد . اگر M ماتریسی $n \times n$ بروی F باشد، نشان دهید که M، f را حفظ می کند اگر وتنها اگر $A^{-1} M^t A = M^{-1}$.

۱۳. فرض کنید g فرم دوخطی نامنفردی روی یك فضای برداری بعد متناهی V باشد. فرض کنید T عملگرخطی معکوس‌پذیری‌روی V و f فرم دوخطی روی V تعیین‌شده توسط $f(\alpha, \beta) = g(\alpha, T\beta)$ باشد. اگر U عملگری خطی روی V باشد، شرایطی لازم وکافی برای U بیابید که f را حفظ کند.

۱۴. فرض کنید T عملگری خطی روی C^2 باشد که فرم درجهٔ دوم $x_1^2 - x_2^2$ را حفظ می کند. نشان دهید

(الف) $\det (T) = \pm 1$

(ب) اگر M ماتریس T در پایهٔ استانده باشد، آنگاه $M_{۲۲}=\pm M_{۱۱}$، $M_{۲۱}=\pm M_{۱۲}$، $M_{۱۱}^۲-M_{۱۲}^۲=۱$.

(پ) اگر $\det M=۱$، آنگاه عدد مختلط غیرصفری چون c وجود دارد که

$$M=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} c+\frac{۱}{c} & c-\frac{۱}{c} \\ c-\frac{۱}{c} & c+\frac{۱}{c} \end{bmatrix}.$$

(ت) اگر $\det M=-۱$، آنگاه عدد مختلطی چون c وجود دارد که

$$M=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} c+\frac{۱}{c} & c-\frac{۱}{c} \\ -c+\frac{۱}{c} & -c-\frac{۱}{c} \end{bmatrix}.$$

۱۵. فرض کنید f فرم دوخطی روی $C^۲$ تعریف شده توسط

$$f((x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲))=x_۱y_۲-x_۲y_۱$$

باشد. نشان دهید

(الف) اگر T عملگری خطی روی $C^۲$ باشد، آنگاه به‌ازای هر α و β در $C^۲$ داریم $f(T\alpha, T\beta)=(\det T)f(\alpha, \beta)$.

(ب) T، f را حفظ می‌کند اگر وتنها اگر $\det T=+۱$.

(پ) بند (ب) دربارهٔ گروه ماتریسهای ۲×۲ی M با شرط $M^tAM=A$ که در آن

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

چه می‌گوید؟

۱۶. فرض کنید n عدد صحیحی مثبت، I ماتریس همانی $n\times n$ بر روی C، و J ماتریس $۲n\times ۲n$ داده شده توسط

$$J=\begin{bmatrix} ۰ & I \\ -I & ۰ \end{bmatrix}$$

باشد. فرض می‌کنیم M ماتریسی $2n \times 2n$ برروی C به‌صورت

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

باشد که درآن A، B، C، و D ماتریسهایی $n \times n$ بر روی C هستند. شرایطی لازم و کافی روی A، B، C، و D پیدا کنید که $M^t J M = J$.

۱۷. همهٔ فرمهای دوخطی‌روی فضای ماتریسهای $n \times 1$ برروی R راکه تحت $O(n, R)$ پایا هستند، بیابید.

۱۸. همهٔ فرمهای دوخطی روی فضای ماتریسهای $n \times 1$ برروی C راکه تحت $O(n, C)$ پایا هستند پیدا کنید.

پیوست

این پیوست از لحاظ منطقی به دو قسمت تقسیم می‌شود. قسمت اول که سه بخش اول را در بر می‌گیرد شامل مفاهیم بنیانی معینی است که در سرتاسر کتاب (درحقیقت، در تمام ریاضیات) ظاهرمی‌شوند. این قسمت بیشتر به‌منزلهٔ مقدمه‌ای است برای کتاب تا یك پیوست. اما قسمت دوم واقعاً پیوستی برای متن اصلی است.

بخش ۱ حاوی بحثی در مورد مجموعه‌ها، اجتماع، و اشتراك آنهاست. بخش ۲ مفهوم تابع و ایده‌های وابسته چون برد، دامنه، تابع معکوس، و تحدید تابعی به زیر-مجموعه‌ای از دامنه‌اش را مورد بحث قرار می‌دهد. بخش ۳ در بارهٔ رابطه‌های هم‌ارزی بحث می‌کند. مطالب این سه بخش، خصوصاً مطالب بخشهای ۱ و ۲، به‌اختصار ارائه می‌شوند. مطالب، بیشتر به‌جهت تثبیت اصطلاحات بیان می‌شوند تابرای تشریح جزئیات. به‌معنی منطقی دقیق، این مطالب قسمتی از پیش نیازهای لازم جهت مطالعه‌کتاب راتشکیل می‌دهند. اما، در صورتی‌که خواننده در مطالعهٔ اول نتواند مفاد این ایده‌ها را به‌طورکامل جذب کند نباید دلسرد شود. البته این ایده‌ها مهم هستند، ولی خواننده‌ای‌که با آنها خیلی آشنا نیست، هرگاه حین‌مطالعهٔ متن اصلی گه‌گاه این‌مبحث را هم دوره کند،آسانترمی‌تواند آنها را فرا بگیرد.

بخشهای ۴ و ۵ رابطه‌های هم ارزی را در رابطه با جبر خطی مورد بررسی قرار می‌دهند. بخش ۴ شامل بحث مختصری دربارهٔ فضاهای خارج قسمت است. این بخش‌را می‌توان در هر زمانی پس از مطالعهٔ دو یا سه فصل اول کتاب خواند. بخش ۵ به چند رابطهٔ هم‌ارزی‌که درکتاب پیش می‌آیند نظری می‌افکند، با این قصدکه نشان دهد برخی از نتایج حاصل را چگونه می‌توان از دیدگاه رابطه‌های هم‌ارزی تفسیر کرد. بخش ۶، اصل انتخاب و نتایجش را در مورد جبر خطی تشریح می‌کند.

پ.۱. مجموعه

هرچند ما واژهٔ «مجموعه» را ترجیح می‌دهیم ولی «رده»، «دسته» و «خانواده» را هم با همان مفهوم به کار خواهیم برد. اگـر S یك مجموعه، و x شیئی در مجموعـهٔ S باشد، خواهیم گفت که x یك **عنصر** S است، یا x **متعلق** به S است و یا به‌طور ساده اینکه x در S است. اگر S تنها دارای تعدادی متناهی عنصر چون $x_۱$،...،x_n باشد، غالباً S را با نشان دادن عناصرش در بین دو ابرو توصیف می کنیم:

$$S=\{x_۱,\cdots,x_n\}.$$

پس، مجموعهٔ S متشکل از اعداد صحیح مثبت از ۱ تا ۵ عبارت است از

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵\}.$$

اگر S و T دو مجموعه باشند، گوییم S یك **زیرمجموعهٔ** T است یا S **مشمول در** T است هرگاه هر عنصر S عنصری از T نیز باشد. هـر مجموعهٔ S زیـر مجموعه‌ای از خودش است. اگر S زیرمجموعه‌ای از T باشد، اما S و T یکی نباشند، S را **یك زیر-مجموعهٔ سرهٔ** T می‌نامیم. به بیان دیگر، S زیر مجموعهٔ سره‌ای از T است به‌این شرط که S مشمول در T باشد ولی T مشمول در S نباشد.

اگر S و T دو مجموعـه باشند. **اجتماع S و T** عبارت است از مجموعهٔ $S\bigcup T$ متشکل ازهمهٔ اشیائی چون x که عنصر S یا عنصر T باشند. **اشتراك S و T** عبارت‌است ازمجموعهٔ $S\bigcap T$ متشکل از همهٔ xهایی که هم عنصر S و هم عنصر T باشند. به‌ازای هر دو مجموعهٔ مفروض S و T، اشتراك $S\bigcap T$ زیرمجموعه‌ای است از اجتماع $S\bigcup T$. این امر باید به‌روشن شدن مورد استفادهٔ واژهٔ «یا» که در این‌کتاب رایج است کمك کند. وقتی می گوییم x یا در S است یا در T، این امکان را که x هم در S و هم در T باشد رفع نمی کنیم.

برای اینکه اشتراك S و T همواره مجموعه باشد، لازم است **مجموعهٔ تهی**، یعنی، مجموعه‌ای با هیچ عنصر هم معرفی شود. پس $S\bigcap T$ مجموعهٔ تهی است اگر و تنها اگر S و T هیچ عنصری در اشتراك نداشته باشند.

غالباً نیازمندیم کـه اجتماع یا اشتراك مجموعه‌های متعددی را بررسی کنیم. اگر $S_۱$،...،S_n مجموعه‌هایی باشند، **اجتماع** آنها عبارت است از مجموعهٔ $\bigcup\limits_{j=۱}^{n}S_j$ متشکل از همهٔ x هایی که دست‌کم عنصر یکی از مجموعـه‌هـای $S_۱$،...،S_n باشند. **اشتراك** آنها عبارت است از مجموعهٔ $\bigcap\limits_{j=۱}^{n}S_j$ متشکل‌ازهمهٔxهایی که‌عنصر همهٔ‌مجموعه‌های $S_۱$،...،S_n باشند. درچند مورد، اجتماع یا اشتراك دسته‌ای نامتناهی از مجموعه‌ها را نیز مورد بحث قرار خواهیم داد. اینکـه چنین اجتماع یا اشتراکی چگونـه تعریف می‌شود باید واضح باشد. مثال زیر، این تعاریف را روشن می‌سازد و نمادهایی را برای آنها ارائه می‌نماید.

مثال ۰۱ گیریم R مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی (خط حقیقی) را نشان دهد. اگر t در R باشد، به t زیر مجموعه‌ای چون S_t از R را که به صورت زیر تعریف می‌شود. وابسته می‌سازیم: S_t متشکل است از همهٔ اعداد حقیقی چون x که از t کمتر نباشد.

(الف) $S_{t_1} \cup S_{t_2} = S_t$ که در آن t کوچکترین t_1 و t_2 است.

(ب) $S_{t_1} \cap S_{t_2} = S_t$ که در آن t بزرگترین t_1 و t_2 است.

(پ) گیریم I فاصلهٔ یکه، یعنی مجموعهٔ همهٔ t های در R با شرط $0 \leqslant t \leqslant 1$ باشد. آنگاه

$$\bigcup_{t \text{ در } I} S_t = S_0$$

$$\bigcap_{t \text{ در } I} S_t = S_1$$

پ.۲. تابع

یك **تابع** متشکل است از:

(۱) مجموعه‌ای چون X که دامنهٔ تابع نامیده می‌شود؛

(۲) مجموعه‌ای چون Y که همدامنهٔ تابع نامیده می‌شود؛

(۳) قاعده‌ای (یا تناظری) چون f که به‌هرعنصر x از X تك عنصری از Y چون $f(x)$ را وابسته می‌سازد.

اگر (X, Y, f) یك تابع باشد، f را **تابعی از X در Y** هم می گوییم. گفتن این مطلب حاکی ازکمی عدم دقت است چراکه این f نیست که تابع است؛ f قاعدهٔ تابع است. با این وجود استفاده از نماد واحد برای تابع و قاعده‌اش محاوره دربارهٔ توابع‌را بسیارآسان می کند. پس، اگر بگوییم که f تابعی از X در Y است، یا X دامنهٔ f است یا اینکه Y همدامنهٔ f است ــ همه حاکی از این هستندکه طبق تعریف فوق (X, Y, f) یك تابع است. واژه‌های متعدد دیگری هم وجود دارندکه معمولاً به‌جای واژهٔ «تابع» به کار می‌روند. برخی از اینها عبارتند از «تبدیـل»، «عملگر»، و «نگاشت». این واژه‌ها در زمینه‌هایی بـه کار می‌روندکه در رساندن نقش ایفا شده توسط تابعی خاص به‌نظر الهام‌بخش‌تر باشند.

اگر f تابعی از X در Y باشد، **برد** (یا **نگارهٔ**) f عبارت است از مجموعهٔ همهٔ $f(x)$های با شرط x در X. به‌بیان دیگر، برد f متشکل است از همهٔ عناصر y در Y با این شرط کـه x ی در X باشدکه $y = f(x)$. هرگاه برد f تمام Y باشد، می گوییم f **تابعی از X بروی Y** است یـا به‌طور ساده f **پوشاست**. غـالباً بـرد f با $f(X)$ نشان داده می‌شود.

مثال ۲. (الف) فرض کنیم X مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد و $Y=X$. گیریم f تابعی از X در Y تعریف شده با $f(x)=x^{2}$ باشد. برد f مجموعـهٔ همهٔ اعداد حقیقی نامنفی است و بدین سان f پوشا نیست.

(ب) گیریم X صفحهٔ اقلیدسی باشدو $Y=X$. فرض کنیم f به‌صورت زیر تعریف شود: اگر P نقطه‌ای از صفحه باشد، آنگاه $f(P)$ عبارت است از نقطهٔ حاصل از دوران P به‌اندازهٔ 90° (حول مبدأ درجهت عکس عقربه‌های ساعت). برد f همهٔ Y یعنی تمام صفحه است و لذا f پوشاست.

(پ) دوباره X را صفحهٔ اقلیدسی می‌گیریم. با روش معمول در هندسهٔ تحلیلی، با استفاده از دو خط عمود برهم دستگاه مختصاتی در X می‌سازیم تا نقاط X را با جفتهای مرتب (x_1, x_2) از اعداد حقیقی یکـی بگیریم. فـرض کنیم Y محور x_1هـا یعنی همهٔ نقاط (x_1, x_2) با $x_2=0$ باشد. اگـر P نقطه‌ای از X باشد، $f(P)$ را نقطهٔ حاصل از تصویر P بـروی محـور x_1ها بـه موازات محـور x_2 ها می‌گیریـم. بـه بیان دیگر، $f((x_1, x_2))=(x_1, 0)$. در این صورت برد f همهٔ Y است و لذا f پوشاست.

(ت) گیریم X مجموعهٔ اعداد حقیقی و Y مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت باشد. تابع f از X در Y را بـا ضابطهٔ $f(x)=e^{x}$ تعریف می‌کنیم. آنگاه f تـابعی است از X بروی Y.

(ث) فرض کنیم X مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و Y مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. گیریم f تابع لگاریتم طبیعی، یعنی تابـع تعریف‌شده تـوسط $f(x)=\log x=\ln x$ باشد. مجدداً f پوشاست، یعنی هر عدد حقیقی لگاریتم طبیعی عددی مثبت است.

فرض کنیم X، Y، و Z سه مجموعه، f تابعی از X در Y، و g تابعی از Y در Z باشد. وابسته به f و g تابعی چون $g\circ f$ از X در Z هست که به **ترکیب** g و f معروف است. این تابع طبق

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

تعریف می‌شود. به عنوان مثالی ساده، گیریـم $X=Y=Z$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشند. فرض کنیم f، g، h سه تابع از X در X باشندکه با ضابطه‌های

$$f(x)=x^{2},\ g(x)=e^{x},\ h(x)=e^{x^{2}}$$

تعریف می‌شوند. دراین‌صورت $h=g\circ f$. ترکیب $g\circ f$ غالباً به‌طورساده با gf نمایش داده می‌شود؛ اما، چنانکه مثال سادهٔ بالا نشان می‌دهد، گاهی ممکن است این طرز نمایش گمراه کننده باشد.

یکی از سؤالهای جالب، سؤال زیر است: فرض کنیم f تابعی از X در Y باشد. چه‌وقت تابعی چون g از Y در X وجود داردکه به‌ازای هر x در X، $g(f(x))=x$؟ اگر I **تابع همانی** روی X، یعنی تابع از X در X تعریف شده توسط $I(x)=x$ را نمایش

دهد، سؤال این است: چه وقت تابعی چون g از Y در X وجـود داردکـه $g\circ f=I$؟ به‌اجمال، تابعی‌چون g را می‌خواهیم که «هرعنصر Y را به‌جای اولش پس بفرستد». برای اینکه این تابع g وجود داشته باشد، مسلماً f باید یك بـه یك باشد، یعنی f باید دارای این خاصیت باشدکه اگر $x_1\neq x_2$ آنگاه $f(x_1)\neq f(x_2)$. اگر f یك به‌یك باشد،این تابع g مسلماً وجود دارد و بـه‌صورت زیر تعریف می‌شود: گیریم y عنصری از Y باشد. اگر y در برد f باشد،آنگاه عنصری چون x در X وجود داردکه $y=f(x)$؛ و چون f یك بـه‌یك است چنین xی یکتاست. تعریف می‌کنیم $g(y)=x$. اما، اگـر y در برد f نباشد، $g(y)$ را عنصر دلخواهی از X تعریف می‌کنیم. واضح استکـه در این صورت $g\circ f=I$.

فرض‌کنیم f تابعی از X در Y باشد. گـوییم f **معکوس‌پذیر** است هرگاه تابعی چون g از Y در X وجود داشته باشدکه

(۱) $g\circ f$ تابع همانی روی X باشد،

(۲) $f\circ g$ تابع همانی روی Y باشد.

هم اکنون دیدیم که اگر gیی وجود داشته باشدکه در (۱) صدق‌کند،آنگاه f یك به یك است. به‌طور مشابه، می‌توان دیدکه اگر gیی وجود داشته باشدکه در (۲) صدق‌کند،برد f همهٔ Y است. یعنی f پوشاست. پس، اگر f معکوس پذیر باشد، fیك به‌یك و پوشاست. بعکس، اگر f یك به‌یك و پوشا باشد، تابعی چون g از Y در X وجود داردکه در (۱) و (۲) صدق می‌کند. بعلاوه، این g یکتاست. ایـن تابع، تابعی از Y در X است کـه با قاعدهٔ زیر تعریف می‌شود: اگر y در Y باشد،آنگاه $g(y)$ همان عنصر و تنها عنصر چون x در X استکه به‌ازای آن $y=f(x)$.

اگر f معکوس‌پذیر (یك به‌یك و پوشا) باشد، **معکوس** f یکتا تابع f^{-1} از Yدر X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

($1'$) به‌ازای هر x در X، $f^{-1}(f(x))=x$،

($2'$) به‌ازای هر y در Y، $f(f^{-1}(y))=y$.

مثال ۳. توابع در مثال ۲ را مجدداً بررسی می‌کنیم.

(الف) اگر $X=Y$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد و $f(x)=x^2$،آنگاه f معکوس‌پذیر نیست. زیرا f نه یك به‌یك است و نه پوشا.

(ب) اگر $X=Y$ صفحهٔ اقلیدسی و f «دوران به‌اندازهٔ 90°» باشد،آنگاه f هم یك بـه یك و هم پوشاست. تابع معکوس f^{-1} «دوران به‌اندازهٔ -90°» یـا «دوران به‌اندازهٔ 270°» است.

(پ) اگر X صفحهٔ اقلیدسی، Y محور x_1، و $f((x_1, x_2))=(x_1, 0)$ باشد، آنگاه f معکوس پذیر نیست. زیرا، اگرچه f پوشاست اما یك به‌یك نیست.

(ت) اگر X مجموعهٔ اعداد حقیقی، Y مجموعهٔ‌اعدادحقیقی مثبت، و $f(x)=e^x$

باشد، آنگاه f معکوس‌پذیر است. تابع f^{-1} همان تابع لگاریتم طبیعی است که در قسمت (ث) آمد: $\log e^x = x$، $e^{\log y} = y$.

(ث) معکوس تابع لگاریتم طبیعی همان تابع نمایی در قسمت (ت) است.

گیریم f تابعی از X در Y و $f_\circ$ تابعی از $X_\circ$ در $Y_\circ$ باشد. $f_\circ$ را یك **تحدید** (یا یك تحدید f به $X_\circ$) نامیم، هرگاه

(۱) $X_\circ$ زیر مجموعه‌ای از X باشد،

(۲) به‌ازای هر x در $X_\circ$، $f_\circ(x) = f(x)$.

بدیهی است وقتی که $f_\circ$ یك تحدید f باشد، نتیجه می‌گیریم که $Y_\circ$ زیر مجموعه‌ای است از Y. نام «تحدید» از این امر ناشی می‌شود که f و $f_\circ$ دارای یك قاعده هستند و عمدتاً بدین لحاظ فرق دارند که دامنهٔ تعریف قاعده را به‌زیرمجموعهٔ $X_\circ$ از X محدود می‌کنیم.

اگر تابع f و زیر مجموعهٔ دلخواهی چون $X_\circ$ از X به‌ما داده شود، برای ساختن یك تحدید f بـه $X_\circ$ روش ساده‌ای وجود دارد. تابعی چون $f_\circ$ از $X_\circ$ در Y را بنا بر $f_\circ(x) = f(x)$، به‌ازای هر x در $X_\circ$، تعریف می‌کنیم. ممکن است تعجب‌آور باشد که چرا این تابع را تحدید[1] f به $X_\circ$ نامیده‌ایم. دلیل این امر این است که در بحث مربوط به‌تحدیدهای f، همانند تغییر دامنهٔ X خواهان آزادی تغییر همدامنهٔ Y نیز هستیم.

مثال ۴. (الف) گیریم X مجموعـهٔ اعداد حقیقی و f تابع از X در X تعریف‌شده توسط $f(x) = x^2$ باشد. در این صورت f تابعی معکوس‌پذیر نیست، اما اگر دامنهٔ آن را به‌اعداد حقیقی نامنفی محدود کنیم معکوس‌پـذیـر است. گیریم $X_\circ$ مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی و $f_\circ$ تـابع از $X_\circ$ در $X_\circ$ تعریف شده توسط $f_\circ(x) = x^2$ باشد، در این صورت $f_\circ$ یك تحدید f به $X_\circ$ است. حال آنکه f نه یك به‌یك است و نه پوشا، درحالی که $f_\circ$ هم یك به‌یك است و هم پوشا. بیان اخیر چیزی جز این نیست که هرعدد نامنفی، توان دوم دقیقاً یك عدد نامنفی است. تابع معکوس $f_\circ^{-1}$ تابـعی از $X_\circ$ در $X_\circ$ است که با $f_\circ^{-1}(x) = \sqrt{x}$ تعریف می‌شود.

(ب) گیریم X مجموعـهٔ اعداد حقیقی و f تابع از X در X تعریف شده توسط $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ باشد. برد f همهٔ X و لذا f پوشاست. تابع f قطعاً یك به یك نیست، مثلاً $f(\circ) = f(-1)$. اما f روی $X_\circ$، مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی، یك‌به‌یك است چرا که مشتق f به‌ازای $x > \circ$ مثبت است. وقتی کـه x بر روی همهٔ اعداد نامنفی تغییر کند، $f(x)$ بر روی همه اعداد حقیقی y، با شرط $y \geqslant 1$، تغییر می‌کند. اگر $Y_\circ$ را مجموعهٔ همهٔ $y \geqslant 1$ و $f_\circ$ را تابـع از $X_\circ$ در $Y_\circ$ تعریف شده توسط $f_\circ(x) = f(x)$ بگیریم، آنگاه $f_\circ$ تابعی یك به‌یك از $X_\circ$ بروی $Y_\circ$ است. از این قرار، $f_\circ$ تابع معکوسی

---

۱. در مقابل یك تحدید f به $X_\circ$.ـم.

چون $f_{\circ}^{-1}$ از $Y_{\circ}$ بروی $X_{\circ}$ دارد. هر فرمولی برای $f_{\circ}^{-1}(y)$ نسبتاً پیچیده است.

(پ) مجدداً X را مجموعهٔ اعداد حقیقی و f را تابع سینوس، یعنی تابع از X در X تعریف شده توسط $f(x)=\sin x$ می‌گیریم. برد f مجموعهٔ همهٔ yهایی است که در $-1\leqslant y\leqslant 1$ صدق می‌کنند. از این رو، f پوشا نیست. چون $f(x+2\pi)=f(x)$ می‌بینیم که f یک به‌یک هم نیست. اگر $X_{\circ}$ را فاصلهٔ $-\pi/2\leqslant x\leqslant \pi/2$ بگیریم، آنگاه f روی $X_{\circ}$ یک به‌یک است. گیریم $Y_{\circ}$ فاصلهٔ $-1\leqslant y\leqslant 1$ و $f_{\circ}$ تابع از $X_{\circ}$ در $Y_{\circ}$ تعریف شده توسط $f_{\circ}(x)=\sin x$ باشد. در این صورت $f_{\circ}$ یک تحدید f به‌فاصلهٔ $X_{\circ}$ است که هم یک به‌یک و هم پوشاست.

این درست طریق دیگری از بیان این واقعیت است که روی فاصلهٔ از $-\pi/2$ تا $\pi/2$، تابع سینوس هر مقدار بین -1 و $+1$ را تنها یک باز اختیار می‌کند. تابع $f_{\circ}^{-1}$، تابع سینوس معکوس است:

$$f_{\circ}^{-1}(y)=\sin^{-1}y=\arcsin y.$$

(ت) مثالی عمومی‌از تحدیدی برای یک تابع، مثال زیر است. این مثال نمونهٔ خیلی بهتری است از نوع تحدیدهایی که در این کتاب به‌کار خواهیم برد تا مثالهای بندهای (ب) و (پ). مثالی که در (الف) آمد حالت خاصی است از این مثال. گیریم X یک مجموعه و f تابعی از X درخودش باشد. گیریم $X_{\circ}$ زیرمجموعه‌ای از X باشد. گوییم $X_{\circ}$ **تحت f پایاست**، هرگاه به ازای هر x در $X_{\circ}$، عنصر $f(x)$ در $X_{\circ}$ باشد. اگر $X_{\circ}$ **تحت f پایا** باشد، آنگاه f با تحدید دامنهٔ تعریفش به $X_{\circ}$، تابعی چون $f_{\circ}$ از $X_{\circ}$ در خودش را القا می‌کند. اهمیت پایانی در این است که به وسیلهٔ تحدید f به $X_{\circ}$ می‌توان تابعی از $X_{\circ}$ در خودش به دست آورد و نه تابعی صرفاً از $X_{\circ}$ در X.

پ.۳. رابطهٔ هم‌ارزی

رابطهٔ هم ارزی نوع ویژه‌ای از روابط بین‌جفت عناصر یک مجموعه است. برای تعریف یک رابطهٔ هم ارزی، ابتدا باید روشن‌کنیم که یک «رابطه» چیست.

به‌طور قطع هر تعریف رسمی از «رابطه» باید روابط آشنایی چون «$x=y$»، «$x<y$»، «x مادر y است»، و «x مسن‌تر از y است» را در بر گیرد. اگر X یک‌مجموعه باشد، چه چیزی باعث تعیین رابطه‌ای بین جفتهای از عناصر X می‌شود؟ بدیهی است که پاسخ قاعده‌ای است برای تعیین اینکه آیا به‌ازای هر دو عنصر مفروض x و y از X، x در رابطهٔ داده شده با y قرار می‌گیرد یا نه. چنین قاعدهٔ R را، **رابطه‌ای** (دوتایی) روی X می‌نامیم. اگر بخواهیم اندکی دقیق‌تر باشیم، بهتر است به‌صورت زیر به پیش برویم. گیریم $X\times X$ مجموعهٔ همهٔ جفتهای مرتب (x, y) از عناصر X را نشان دهد. رابطه‌ای دوتایی روی X تابعی است چون R از $X\times X$ در مجموعهٔ $\{\circ, 1\}$. به بیان دیگر، R به هر جفت مرتب (x, y) یا ۱ یا ۰ را اختصاص می‌دهد. منظور این است که اگر

$1 = R(x, y)$، آنگاه x در رابطهٔ مفروض با y قرار می‌گیرد، و اگر $0 = R(x, y)$، در این رابطه قرار نمی‌گیرد.

اگر R رابطه‌ای دوتایی روی مجموعهٔ X باشد، وقتی که $1 = R(x, y)$، نوشتن xRy به‌جای آن راحت‌تر است. رابطه‌ای دوتایی چون R

(۱) **انعکاسی** نامیده‌می‌شود، هرگاه به‌ازای هر x در X، xRx؛

(۲) **متقارن** است، هرگاه از xRy نتیجه بگیریم yRx؛

(۳) **متعدی** نام دارد، هرگاه از xRy و yRz نتیجه شود xRz.

یك **رابطهٔ هم‌ارزی** روی X عبارت است از یك رابطهٔ دوتایی انعکاسی، متقارن، و متعدی روی X.

مثال ۵. (الف) روی هر مجموعه تساوی رابطه‌ای هم ارزی است. به بیان دیگر، اگر xRy به‌معنی $x = y$ باشد، آنگاه R رابطه‌ای هم ارزی است. زیرا $x = x$؛ اگر $x = y$ آنگاه $y = x$؛ و اگر $x = y$ و $y = z$ آنگاه $x = z$. رابطهٔ «$x \neq y$» متقارن است، اما نه انعکاسی است و نه متعدی.

(ب) X را مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌گیریم و فرض می‌کنیم xRy به‌معنی $x < y$ باشد. در این صورت R رابطه‌ای هم‌ارزی نیست. این رابطه متعدی است، اما نه انعکاسی است و نه متقارن، رابطهٔ «$x \leqslant y$» انعکاسی و متعدی است ولی متقارن نیست.

(پ) گیریم E صفحهٔ اقلیدسی و X مجموعهٔ همهٔ مثلثهای واقع در صفحهٔ E باشد. در این صورت تشابه رابطه‌ای است هم‌ارزی روی X، یعنی، «$T_1 \cong T_2$» (T_1 متشابه‌به T_2 است) رابطه‌ای هم ارزی روی مجموعهٔ همهٔ مثلثهای واقع در یك صفحه است.

(ت) گیریم X مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح:

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

و فرض کنیم n عدد صحیح‌مثبت ثابتی باشد. رابطهٔ R_n روی X را چنین تعریف می‌کنیم: xR_ny اگر و تنها اگر $(x-y)$ بر n قابـل قسمت باشد. رابطهٔ R_n **همنهشتی به‌پیمانهٔ** n نامیده می‌شود. وقتی کـه $(x-y)$ بر n قابل قسمت باشد به جای xR_ny معمولاً نوشته می‌شود

$$x \equiv y, \operatorname{mod} n \text{ (}x\text{ همنهشت } y \text{ به‌پیمانهٔ } n \text{ است).}$$

به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n، همنهشتی به‌پیمانهٔ n رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعهٔ‌اعداد صحیح است.

(ث) گیریم X و Y دو مجموعه و f تابعی از X در Y باشد. رابطهٔ R روی X را چنین تعریف می‌کنیم: x_1Rx_2 اگر و تنها اگـر $f(x_1) = f(x_2)$. بسادگی می‌توان نشان دادکه R رابطه‌ای هم ارزی روی مجموعهٔ X است، چنانکه خواهیم دید، این مثال عملاً همهٔ روابط هم ارزی را در بر می‌گیرد.

فرض کنیم R رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشد. اگر x عنصری از X باشد، فرض می‌کنیم $E(x;R)$ مجموعهٔ همهٔ عناصری مانند y از X را نشان دهد که xRy. مجموعهٔ $E(x;R)$ **ردهٔ هم ارزی** x (به ازای رابطهٔ هم ارزی R) نامیده می‌شود. چون R رابطه‌ای هم ارزی است، رده‌های هم‌ارزی خواص زیر را دارند:

(۱) همهٔ $E(x;R)$ها ناتهی هستند؛ زیرا، نظر به‌اینکه xRx، عنصر x متعلق به $E(x;R)$ است.

(۲) گیریم x و y عناصر X باشند. چون R متقارن است، y به $E(x;R)$ تعلق دارد اگر و تنها اگر x متعلق به $E(y;R)$ باشد.

(۳) اگر x و y عناصر X باشند، رده‌های هم‌ارزی $E(x;R)$ و $E(y;R)$ یامساوی‌اند ویا هیچ‌عنصرمشترکی ندارند. ابتدا، فرض‌کنیم xRy. گیریم z عنصری از $E(x;R)$، یعنی عنصری از X باشد که xRz. چون R متقارن‌است، همچنین‌داریم zRx. بنا به‌فرض xRy و چون R متعدی‌است داریم zRy، پس yRz. این‌مطلب نشان‌می‌دهد که هرعنصر $E(x;R)$ عنصری از $E(y;R)$ نیز هست. بنابر تقارن R، همچنین می‌بینیم که هر عنصر $E(y;R)$ عنصری از $E(x;R)$ هم هست؛ پس $E(x;R)=E(y;R)$. حال استدلال می‌کنیم که اگر رابطهٔ xRy برقرار نباشد، آنگاه $E(x;R)\bigcap E(y;R)$ تهی است. زیرا، اگر z در هر دوی این رده‌های هم ارزی باشد، داریم xRz و yRz؛ پس xRz و zRy و بدین سان xRy.

اگر $\mathcal{F}$ را خانوادهٔ رده‌های هم‌ارزی برای رابطهٔ هم‌ارزی R بگیریم، می‌بینیم که (۱) هر مجموعه‌ای از خانوادهٔ $\mathcal{F}$ ناتهی است، (۲) هر عنصر x از X به یك و تنها یکی از مجموعه‌های خانوادهٔ $\mathcal{F}$ تعلق دارد، (۳) xRy، اگر و تنها اگر x و y هر دو متعلق به یك مجموعه از خانوادهٔ $\mathcal{F}$ باشند. به طور خلاصه، رابطهٔ هم‌ارزی R مجموعهٔ X را به‌اجتماع خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های (ناتهی) نامتداخل تقسیم می‌کند. سوی دیگر قضیه نیز قابل استدلال است. فرض کنیم $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد که در شرایط (۱) و (۲) اخیر صدق می‌کنند. اگر بنا بر (۳) رابطه‌ای مانند R را تعریف کنیم، آنگاه R رابطه‌ای هم‌ارزی روی X است و $\mathcal{F}$ خانوادهٔ رده‌های هم ارزی برای R.

مثال ۶. ببینیم رده‌های هم‌ارزی برای رابطه‌های هم‌ارزی در مثال ۵ چه هستند.

(الف) اگر R رابطهٔ تساوی روی مجموعهٔ X باشد، آنگاه ردهٔ هم‌ارزی عنصر x چیزی جز مجموعهٔ $\{x\}$، که تنها عنصر آن x است، نیست.

(ب) اگر X مجموعهٔ همهٔ مثلثهای واقع دریك صفحه و R رابطهٔ تشابه باشد، قریب تمامی آنچه‌که در وهلهٔ نخست می‌توان گفت این‌است که ردهٔ هم‌ارزی مثلث T متشکل است ازهمهٔ مثلثهایی که‌با T متشابه هستند. یکی ازوظایف‌هندسهٔ مسطحه ارائهٔ توصیفهای‌دیگری از این رده‌های هم‌ارزی است.

(پ) اگر X مجموعهٔ اعداد صحیح و R_n رابطهٔ «همنهشتی به‌پیمانهٔ n» باشد، آنگاه

دقیقاً n ردهٔ هم‌ارزی داریم. هرعددصحیح x به‌طوریکتا به‌صورت $x=qn+r$ قابل بیان است که در آن q و r اعدادی صحیح‌اند و $\circ \leqslant r \leqslant n-۱$. این مطلب نشان می‌دهد که هر x دقیقاً با یکی از n عدد صحیح ۰، ۱، ۲، . . . ، $n-۱$ همنهشت به پیمانهٔ n است. رده‌های هم‌ارزی عبارتند از

$$E_\circ=\{\cdots, -۲n, -n, \circ, n, ۲n, \cdots\}$$
$$E_۱=\{\cdots, ۱-۲n, ۱-n, ۱+n, ۱+۲n, \cdots\}$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$E_{n-۱}=\{\cdots, n-۱-۲n, n-۱-n, n-۱, n-۱+n, n-۱+۲n, \cdots\}.$$

(ت) فرض کنیم X و Y دومجموعه، f تابعی‌از X در Y، و R رابطه‌ای هم‌ارزی باشد که چنین‌تعریف‌می‌شود: $x_۱Rx_۲$ اگر وتنها اگر $f(x_۱)=f(x_۲)$. رده‌های‌هم‌ارزی برای R درست بزرگترین زیرمجموعه‌های X هستند که روی آنها f «ثابت» است. توصیف دیگر این رده‌های هم‌ارزی بدین صورت است. این رده‌های هم‌ارزی درتناظر یك به یك با عناصر برد f قرار دارند. اگر y در برد f باشد، مجموعهٔ همهٔ xهای در X با شرط $f(x)=y$ رده‌ای هم‌ارزی برای R است؛ و این خود تناظری یك به‌یك بین عناصر برد f و رده‌های هم‌ارزی R تعریف می‌کند.

حال به توضیحی دیگر در بارهٔ روابط هم‌ارزی می‌پردازیم. با مفروض بودن رابطه‌ای هم‌ارزی چون R روی X، گیریم $\mathscr{F}$ خانوادهٔ رده‌های هم‌ارزی برای R باشد. وابستگی ردهٔ هم‌ارزی $E(x; R)$ به عنصر x، تابعی چون f از X در $\mathscr{F}$ (در حقیقت، بروی $\mathscr{F}$) تعریف می‌کند:

$$f(x)=E(x; R).$$

این نشان می‌دهد که R، همچون در مثال ۵ (ث)، رابطهٔ هم‌ارزی وابسته به تابعی است که دامنهٔ آن X است. آنچه این‌مطلب می‌گوید این است که هر رابطهٔ هم‌ارزی روی‌مجموعهٔ X به‌صورت زیر تعیین می‌شود. قاعده‌ای (تابعی) چون f داریم که به‌هر عنصر x از X شیئی چون $f(x)$ را وابسته می‌سازد و xRy اگر و تنها اگر $f(x)=f(y)$. اکنون باید $f(x)$ را به‌عنوان‌خاصیتی از x درنظر گرفت که آنچه رابطهٔ هم‌ارزی انجام می‌دهد (اجمالاً) عبارت از گردآوردن همهٔ آن عناصری از X باشد که این خاصیت را مشترکاً دارا هستند. اگر شیء $f(x)$ ردهٔ هم‌ارزی x باشد، آنگاه آنچه گفته شد این است که خاصیت مشترك عناصر یك ردهٔ هم‌ارزی، تعلق داشتن آنها به یکی از رده‌های هم‌ارزی است. بدیهی است که این مطلب چیز زیادی نمی‌گوید. درحالت عمومی، تعداد بسیاری تابع متفاوت چون f وجود دارند که رابطهٔ هم ارزی مفروضی را به‌صورت بالا تعیین می‌کنند و یکی از اهداف موردنظر درمطالعهٔ روابط هم‌ارزی یافتن یکی از این توابع f است که توصیفی ابتدایی و در عین حال بامعنی از رابطهٔ هم‌ارزی به‌دست دهد. در بخش

پ. ۵. خواهیم دید که در مورد چند رابطهٔ هم‌ارزی خاصی که در جبرخطی پیش‌می‌آیند، این امر چگونه انجام می‌شود.

پ. ۴. فضاهای خارج قسمت

فرض‌کنیم V فضایی برداری برروی هیأت F و W زیرفضایی از V باشد. در حالت عمومی، تعداد زیادی‌زیرفضا چون W' وجود دارندکه مکمل W هستند؛ یعنی، زیرفضایی با این خاصیت هستند که $V=W\oplus W'$. اگر ضربی داخلی روی V داشته باشیم و بعد W هم متناهی باشد، زیرفضای خاصی‌وجود داردکه یحتمل نام زیرفضای مکمل «طبیعی» W برای آن مناسب است. این زیرفضا، مکمل متعامد W است. اما، اگر V بجز ساختار فضای برداری‌ساختار دیگری نداشته باشد، هیچ راهی برای گزینش زیرفضایی چون W' که بتوان آن را زیرفضای مکمل طبیعی W نامید وجود ندارد. با این وجود، از V و W می‌توان فضایی برداری چون V/W را ساخت که به «خارج قسمت» V و W مشهور است ونقش‌مکمل طبیعی W را بازی‌کند. این‌فضای خارج قسمت زیرفضایی از Vنیست، ولذا نمی‌تواند عملاً زیرفضایی مکمل برای W باشد، ولی فضایی برداری است‌که تنها برحسب V و W تعریف می‌شود و دارای این خاصیت است‌که با هر زیرفضای مکمل W، مانند W' یکریخت است.

گیریم W زیرفضایی ازفضای برداری V باشد. اگر α و βبردارهایی از V باشند، گوییم α **همنهشت** β به **پیمانهٔ** W است هرگاه بردار $(\alpha-\beta)$ در زیرفضای W باشد. اگر α همنهشت β به‌پیمانهٔ W باشد، می‌نویسیم

$$\alpha\equiv\beta,\quad \mathrm{mod}\, W.$$

همنهشتی به پیمانهٔ W رابطه‌ای هم‌ارزی روی V است.

(۱) $\alpha\equiv\alpha,\ \mathrm{mod}\, W$، زیرا $\alpha-\alpha=0$ در W است.

(۲) اگر $\alpha\equiv\beta,\ \mathrm{mod}\, W$، آنگاه $\beta\equiv\alpha,\ \mathrm{mod}\, W$. زیرا، ازآنجاکه W زیر-فضایی از V است، بردار $(\alpha-\beta)$ در W است اگر و تنها اگر $(\beta-\alpha)$ در W باشد.

(۳) اگر $\alpha\equiv\beta,\ \mathrm{mod}\, W$و $\beta\equiv\gamma,\mathrm{mod}\, W$، آنگاه $\alpha\equiv\gamma,\mathrm{mod}\, W$. زیرا اگر $(\alpha-\beta)$ و$(\beta-\gamma)$ در W باشند، آنگاه $\alpha-\gamma=(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)$ هم‌در W است.

رده‌های هم‌ارزی برای این رابطهٔ هم ارزی به‌عنوان **همجموعه‌های** W شناخته می‌شوند. ردهٔ هم‌ارزی (**همجموعه**) برداری چون α چیست؟ این ردهٔ هم‌ارزی متشکل‌از همهٔ بردارهای β در V است‌که $(\beta-\alpha)$ در W باشد، یعنی همهٔ بردارهای β به‌صورت $\beta=\alpha+\gamma$ که γ در W باشد. بدین‌دلیل، همجموعهٔ بردار α با

$$\alpha+W$$

نشان داده می‌شود. مناسب است که همجموعهٔ α نسبت به W به عنوان مجموعهٔ بردارهای حاصل از انتقال زیرفضای W توسط بردار α درنظر گرفته شود. برای تجسم

این هممجموعه‌ها، بهتر است خواننده حالت خاص زیر را در نظر بگیرد. گیریم V فضای R^2 و W زیرفضایی یک بعدی از V باشد. اگر V را به‌عنوان صفحهٔ اقلیدسی تصور کنیم، W خطی مستقیم مار بر مبدأ خواهد بود. اگر $\alpha=(x_1, x_2)$ برداری در V باشد، هممجموعهٔ $\alpha+W$ خط مستقیمی‌است که از نقطهٔ (x_1, x_2) می‌گذرد و موازی W است.

دستهٔ همهٔ هممجموعه‌های W با V/W نشان داده خواهد شد. اکنون به صورت زیر، جمعی برداری وضربی اسکالری روی V/W تعریف می‌کنیم:

$$(\alpha+W)+(\beta+W)=(\alpha+\beta)+W$$

$$c(\alpha+W)=(c\alpha)+W$$

به‌بیان دیگر، مجموع هممجموعهٔ α وهمجموعهٔ β عبارت است‌ازهمجموعهٔ $(\alpha+\beta)$و حاصل‌ضرب اسکالر c و همجموعهٔ α عبارت است از همجموعهٔ بردار $c\alpha$. بردارهای متفاوت بسیاری از V نسبت به W همجموعه‌های مساوی خواهند داشت ولذا باید نشان دهیم که جمع وضرب فوق تنها به همجموعه‌های مورد بحث وابسته‌اند. این بدین معنی است که بایداحکام زیر را اثبات کنیم:

(الف) اگر $\alpha\equiv\alpha', \bmod W$ و $\beta\equiv\beta', \bmod W$، آنگاه

$$\alpha+\beta\equiv\alpha'+\beta', \bmod W$$

(ب) اگر $\alpha\equiv\alpha', \bmod W$ ، آنگاه $c\alpha\equiv c\alpha', \bmod W$.

نشان دادن‌این احکام ساده است. (۱) اگر $\alpha-\alpha'$ و $\beta-\beta'$ در W باشند، آنگاه چون $(\alpha+\beta)-(\alpha'+\beta')=(\alpha-\alpha')+(\beta-\beta')$ ، می‌بینیم که $\alpha+\beta$ همنهشت $\alpha'+\beta'$ به پیمانهٔ W است. (۲) اگر $\alpha-\alpha'$ در W و c اسکالری باشد ، آنگاه $c\alpha-c\alpha'=c(\alpha-\alpha')$ در W است.

اکنون بسادگی‌می‌توان نشان داد که V/W همراه باجمع برداری وضرب اسکالری تعریف شده‌درفوق فضایی‌برداری برروی هیأت F تشکیل‌می‌دهد. البته‌هریک از اصول یک فضای برداری را باید به‌طور مستقیم بررسی کرد. هریک ازخواص جمع برداری‌وضرب اسکالری از خاصیت متناظر اعمال در V منتج می‌شوند. نکته‌ای را هم باید متذکر شد. بردار صفر در V/W همجموعهٔ بردار صفر در V است. به‌بیان دیگر، W بردار صفر در V/W است .

فضای برداری V/W **خارج قسمت** (یا تفاضل) V و W نامیده می‌شود. یک تبدیل خطی طبیعی چون Q از V برروی V/W وجود دارد. این تبدیل با $Q(\alpha)=\alpha+W$ تعریف می‌شود. باید در نظرداشت که عملهای در V/W را درست طوری تعریف کردیم که این تبدیل Q خطی باشد. توجه کنید که فضای پوچ Q دقیقاً زیرفضای W است. Q را **تبدیل خارج قسمت** (یا **نگاشت خارج قسمت**) از V برروی W می‌نامیم.

حال می‌توان رابطهٔ بین فضای خارج قسمت V/W و زیر فضاهایی از V را که مکمل W هستند به‌شرح زیر بیان کرد.

قضیه. گیریم W زیرفضایی از فضای برداری V و Q نگاشت خارج قسمت از V بروی V/W باشد. فرض کنیم W' زیرفضایی از V باشد. در این صورت $V=W\oplus W'$ اگر وتنها اگر تحدید Q به W' یك یکریختی از W' بروی V/W باشد:

اثبات. فرض کنیم $V=W\oplus W'$. پس هر بردار α در V به‌طور یکتا به صورت $\alpha=\gamma+\gamma'$، کـه در آن γ در W و γ' در W' است، قابل بیان است. در این صورت $Q\alpha=Q\gamma+Q\gamma'=Q\gamma'$؛ یعنی $\alpha+W=\gamma'+W$. این نشان می‌دهد کـه Q، W' را بروی V/W می‌نگارد، یعنی $Q(W')=V/W$. بعلاوه Q روی W' یك به‌یك است؛ زیرا، فـرض کنیم γ'_1 و γ'_2 دو بـردار در W' بـاشند و $Q\gamma'_1=Q\gamma'_2$. در این صورت $Q(\gamma'_1-\gamma'_2)=0$، پس $\gamma'_1-\gamma'_2$ در W قـراردارد. این بردار همچنین در W' که مجزا از W است قراردارد؛ پس $\gamma'_1-\gamma'_2=0$. بنابراین تحدید Q به W' تبدیل خطی یك به یکی از W' بروی V/W است.

فرض کنیم W' چنان زیـرفضایی از V باشد کـه Q روی W' یك به یك باشد و $Q(W')=V/W$. گیریم α برداری از V باشد. دراین‌صورت برداری چون γ' در W' وجود دارد که $Q\gamma'=Q\alpha$؛ یعنی $\gamma'+W=\alpha+W$. پس برداری چون γ در W هست که $\alpha=\gamma+\gamma'$. بنابراین $V=W+W'$. برای‌اینکه نشان‌دهیم W و W' مجزا هستند، فرض‌کنیم γ هم در W و هم در W' باشد. چون γ در W است ، داریم $Q\gamma=0$. ولی Q روی W' یك‌به‌یك است ولذا باید داشته‌باشیم $\gamma=0$. بدین‌سان $V=W\oplus W'$. □

آنچه که حقیقتاً این قضیه می‌گوید این است‌که W' مکمل W است اگر وتنها اگر W' زیرفضایی باشدکه دقیقاً یك عضو ازهر همجموعه W را شامل باشد. این قضیه‌نشان می‌دهد کـه وقتی $V=W\oplus W'$، نگاشت خارج قسمت Q، فضای W' را بـا V/W «یکی می‌کند». به‌طور خلاصه $(W\oplus W')/W$ به‌طریقی طبیعی با W' یکریخت است.

نکته‌ای نسبتاً آشکار را هم باید متذکرشد. اگر W زیرفضایی از فضای بـرداری بعد متناهی V باشد، آنگاه

$$\text{بعد}(V)=\text{بعد}(W)+\text{بعد}(V/W)\ .$$

این مطلب را می‌توان از قضیهٔ بالا نتیجه‌گرفت. شاید آسانتر باشد مشاهده‌کنیم که آنچه این فرمول بعدی بیان می‌کند این است‌که

$$\text{بعد}(V)=\text{رتبهٔ}(Q)+\text{پوچی}(Q)$$

هدف ما در اینجا بررسی دقیق فضاهای خارج قسمت نیست. لکن نتیجه‌ای بنیانی هست‌که لازم است اثبات آن ارائه شود.

قضیه. گیریم V و Z دو فضای برداری بروی هیأت F باشند. فرض کنیم T تبدیلی خطی‌از V بروی Z باشد. اگر W فضای‌پوچ T باشد، آنگاه Z با V/W یکریخت‌است.

اثبات. تبدیلی چون U از V/W در Z را به صورت $U(\alpha+W)=T\alpha$ تعریف می‌کنیم. باید نشان دهیم که U خوش‌تعریف است، یعنی اگر $\alpha+W=\beta+W$، آنگاه $T\alpha=T\beta$. این مطلب از این واقعیت ناشی می‌شود که W فضای پوچ T است؛ زیرا $\alpha+W=\beta+W$ بدین معنی است که $\alpha-\beta$ در W است و این امر صورت می‌پذیرد اگر و تنها اگر $T(\alpha-\beta)=0$. این مطلب نه تنها نشان می‌دهد که U خوش تعریف است، بلکه نشان می‌دهد که U یك به‌یك نیز هست.

اکنون بررسی اینکه U خطی است و V/W را بروی Z می‌فرستد بسادگی میسر است، زیرا که T تبدیلی خطی از V بروی Z است. □

پ. ۵. روابط هم ارزی در جبر خطی

حال برخی از روابط هم‌ارزی را که درمتن این کتاب ظاهر می‌شوند، مورد توجه قرار می‌دهیم. مجموعهٔ زیر درست نمونه‌ای از این روابط است.

(۱) گیریم m و n دو عدد صحیح مثبت و F یك هیأت باشد. X را مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $m\times n$ برروی F می‌گیریم. دراین‌صورت هم‌ارزی‌سطری، رابطه‌ای‌هم‌ارزی روی مجموعهٔ X است. حکم «A هم‌ارز سطری B است» بدین معنی است که A می‌تواند از B توسط دنباله‌ای متناهی از عملهای سطری مقدماتی به‌دست آید. اگر به‌جای «A هم‌ارز سطری B است» بنویسیم $A\sim B$، آنگاه بررسی خواص زیر مشکل نیست: (۱) $A\sim A$؛ (۲) اگر $A\sim B$، آنگاه $B\sim A$؛ (۳) اگر $A\sim B$ و $B\sim C$، آنگاه $A\sim C$. دربارهٔ این رابطهٔ هم‌ارزی چه می‌دانیم؟ در واقع، مطالب زیادی دراین مورد می‌دانیم. مثلاً می‌دانیم که $A\sim B$ اگر و تنها اگر به‌ازای ماتریس $m\times m$ معکوس‌پذیری چون P، $A=PB$؛ یا $A\sim B$ اگر و تنها اگر دستگاههای همگن معادلات خطی $AX=0$ و $BX=0$ دارای جوابهای مساوی باشند. همچنین اطلاعات بسیار واضحی دربارهٔ رده‌های هم‌ارزی این رابطه داریم. هرماتریس $m\times n$ی مانند A بایك و تنها یك ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی هم‌ارز سطری است. آنچه این مطلب می‌گوید این است که هرردهٔ هم‌ارزی برای این رابطه دقیقاً شامل یك ماتریس تحویل‌شدهٔ سطری پلکانی R است؛ ردهٔ هم‌ارزی تعیین‌شده توسط R متشکل از همهٔ ماتریسهای $A=PR$ است که در آن P ماتریس $m\times m$ معکوس‌پذیری است. این توصیف از رده‌های هم‌ارزی را می‌توان به‌طریق زیرهم تصور کرد. با مفروض بودن ماتریس $m\times n$ی مانند A، قاعده‌ای (تابعی) چون f داریم که به A ماتریس‌تحویل‌شدهٔ‌سطری‌پلکانی $f(A)$ را که‌هم‌ارزسطری A است‌وابسته‌می‌کند. رابطهٔ هم‌ارزی‌سطری کاملاً توسط f تعیین می‌شود. زیرا، $A\sim B$ اگروتنها اگر $f(A)=f(B)$؛ یعنی، اگر و تنها اگر A و B دارای یك شکل تحویل شدهٔ سطری پلکانی باشند.

(۲) گیریم n عددی صحیح مثبت و F یك هیأت باشد. فرض می‌کنیم X مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n\times n$ برروی F باشد. آنگاه تشابه رابطه‌ای هم‌ارزی روی X است؛ هر ماتریس $n\times n$ی مانند A متشابه با خودش است؛ اگر A متشابه با B باشد، آنگاه B متشابه به

با A است؛ اگر A متشابه‌با B و B متشابه با C باشد، آنگاه A متشابه با C است. دربارهٔ این رابطهٔ هم‌ارزی نیز مطالب نسبتاً زیادی می‌دانیم. مثلاً، A متشابه با B است اگر و تنها اگر A و B روی F^n عملگرهای خطی‌مساوی را (احتمالاً) درپایه‌های مرتب‌متفاوتی نمایش دهند. اما، مطلبی عمیق‌تر از این می‌دانیم. هر ماتریس $n \times n$ مانند A، برروی F، با یك و تنها یك ماتریس که درفرم گویاست (فصل ۷)، (برروی F)، متشابه است. به‌بیان دیگر، هر ردهٔ‌هم‌ارزی برای‌رابطهٔ تشابه دقیقاً شامل‌یك ماتریس‌است که درفرم‌گویاست. هر ماتریس در فرم گویا، توسط یك kتایی $(p_1, \ldots, p_k)$ از چندجمله‌ایهای تکین‌دارای این خاصیت‌که p_{j+1} چند جمله‌ای p_j را عاد می‌کند، $j = 1, \ldots, k-1$، تعیین می‌شود. بدین‌سان، تابعی چون f داریم که به هر ماتریس $n \times n$ مانند A یك kتایی $f(A) = (p_1, \ldots, p_k)$ را که درشرط تقسیم‌پذیری p_{j+1} بر p_j صدق می‌کند وابسته می‌سازد؛ و A و B متشابه‌اند اگر و تنها اگر $f(A) = f(B)$.

(۳) اینك حالت خاصی از همین مثال ۲. گیریم X مجموعهٔ ماتریسهای ۳×۳ بر روی‌هیأتی چون F باشد. رابطهٔ تشابه‌روی X را مورد بررسی قرارمی‌دهیم. اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ برروی F باشند. آنگاه A و B متشابه‌اند اگر و تنها اگر دارای چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی و چند جمله‌ای مینیمال مساوی باشند. به‌ازای هرماتریس ۳×۳ چون A، جفتی مانند (f, p) از دو چندجمله‌ای تکین داریم که

(الف) $\deg f = ۳$،

(ب) p چندجمله‌ای f را عاد می‌کند،

f چندجمله‌ای سرشت‌نمای A است و p چندجمله‌ای مینیمال A. با مفروض بودن چندجمله‌ایهای تکین f و p برروی F که در شرایط (الف) و (ب) صدق می‌کنند، به‌آسانی‌می‌توان ماتریسی ۳×۳ برروی F به‌دست‌آورد که f و p را، بترتیب، به‌عنوان چندجمله‌ایهای سرشت‌نما و مینیمال خود داشته باشد. لب همهٔ این مطالب چنین است. اگر رابطهٔ تشابه روی مجموعهٔ ماتریسهای ۳×۳ برروی F را مورد بررسی قرار دهیم، رده‌های هم‌ارزی درتناظریك‌به‌یك خواهند بود باجفتهای‌مرتب (f, p) ازچندجمله‌ایهای تکین برروی F که درشرایط (الف) و (ب) صدق می‌کنند.

پ. ۶. اصل موضوع انتخاب

به‌بیانی مجمل، اصل انتخاب یك قاعده (یا اصل) فکرکردن است حاکی از اینکه با در دست داشتن خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی، می‌توانیم از هر مجموعه یك عنصر را برگزینیم. برای بیان دقیق‌تر مطلب، فرض‌کنیم مجموعهٔ نمایه‌ای چون A و به‌ازای هر α در A مجموعه‌ای وابسته وغیر تهی چون S_α در دست باشد. «انتخاب» یك عنصر از هر S_α به‌معنی ارائهٔ قاعده‌ای است چون f که به هر α یك عنصر $f(\alpha)$ از مجموعهٔ S_α را وابسته سازد. اصل انتخاب حاکی‌است که این امر امکان‌پذیر است، یعنی بادر دست‌داشتن

خانوادهٔ مجموعه‌های $\{S_\alpha\}$ تابعی چون f از A در

$$\bigcup_\alpha S_\alpha$$

یافت‌می‌شودکه به‌ازای هر α، $f(\alpha)$ در S_α باشد. این‌اصل هرچند مورد پذیرش‌اکثریت ریاضیدانان است در موارد بسیاری به‌هیچ‌وجه روشن نیست‌که تابع صریحی چون f را چگونه می‌توان به‌دست آورد.

اصل انتخاب پیامدهای تکان‌دهنده‌ای هم دارد. اکثر این نتایج، به مواد مورد بحث این‌کتاب یا ارتباط اندکی دارند یا هیچ ربطی پیدا نمی‌کنند. اما، یك پیامد شایستهٔ‌ذکر است: هرفضای برداری پایه‌ای‌دارد. مثلاً هیأت اعداد حقیقی به‌عنوان یك فضای‌برداری بر روی هیأت اعدادگویا، دارای یك پایه است. به‌بیان دیگر، زیرمجموعه‌ای چون S از R وجود داردکه برروی هیأت اعدادگویا مستقل خطی است و دارای این خاصیت‌است که هرعدد حقیقی ترکیب خطی‌گویایی از تعدادی متناهی از عناصر S است. ما در اینجا برای استنتاج این‌قضیهٔ مربوط به‌فضاهای برداری ازاصل انتخاب خود را معطل نمی‌کنیم و برای دیدن اثباتی از آن، خواننده را به‌کتاب کلی[1] که در فهرست مراجع آمده است، ارجاع می‌دهیم.

مراجع

Halmos, P., *Finite-Dimensional Vector Spaces*, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1958.

Jacobson, N., *Lectures in Abstract Algebra*, II, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1953.

Kelley, John L., *General Topology*, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1955.

MacLane, S. and Birkhoff, G., *Algebra*, The Macmillan Co., New York, 1967.

Schreier, O. and Sperner, E., *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*, 2nd Ed., Chelsea Publishing Co., New York, 1955.

van der Waerden, B. L., *Modern Algebra* (two volumes), Rev. Ed., Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1969.

1. Kelley

واژه‌نامهٔ انگلیسی به‌فارسی

action	عمل، کنش
add	اضافه کردن
adjacent	مجاور
adjoint	الحاقی
-operation	عمل الحاق
-operator	عملگر-
adjunction	الحاق
admissible	مجاز
algebra	جبر
algebraic	جبری
algebraically closed	بستهٔ جبری
algorithm	الگوریتم
alternating	متناوب
analysis	آنالیز
angle	زاویه
annihilating polynomial	چندجمله‌ای پوچساز
annihilator	پوچساز
anti-isomorphism	پادیکریختی
application	کاربرد
approximation	تقریب-نزدیک‌سازی
arbitrary	دلخواه
argument	استدلال، آوند

array	آرایش
assertion	حکم
associativity law	قانون شرکت‌پذیری
augmented matrix	ماتریس افزوده
axial	محوری
axis	محور
axiom of choice	اصل موضوع انتخاب
base	پایه، مبنا [لگاریتم]
basis	پایه
bilinear	دوخطی
–form	فرم–
binary	دوتایی
binomial	دوجمله‌ای
calculation(→computation)	محاسبه
canonical	متعارف
character	سرشت
characterisation	سرشت‌نمایی
characteristic	سرشت‌نما
–polynomial	چندجمله‌ای–
–value	مقدار– [= مقدار ویژه]
–vector	بردار–
class	رده
classic	کلاسیك
classical adjoint	الحاقی کلاسیك
classification	رده‌بندی
codimension	همبعد
codomain	همدامنه
coefficient	ضریب
cofactor	همسازه
coincidence	انطباق
collection	گردآورده، دسته

column	ستون
-operation	عمل ستونی
-rank	رتبهٔ ستونی
combination	ترکیب
linear-	ـ خطی
combinatorial analysis	آنالیز ترکیبی
commutative	جابجایی
commutator	جابجاگر
commute	جابجاشدن
companion	همدم
-matrix	ماتریس ـ
complement	مکمل
complex	مختلط
component	مؤلفه
composed function	تابع مرکب
composition	ترکیب [توابع]
computation(→calculation)	محاسبه
conductor	هادی
congruence	همنهشتی
-modulo n	ـ به‌پیمانهٔ n
congruent	همنهشت
conjugate	مزدوج
-transpose	ترانهادهٔ ـ
conjugation function	تابع تزویجی
consequence	پی‌آمد
consistant	سازگار
continuous	پیوسته
convergence	همگرایی
convergent	همگرا
converse	عکس
coordinate	مختص
corollary	نتیجه
correspondence	تناظر
correspondent	متناظر

coset	هم‌مجموعه
countability	شمارش‌پذیری
countable	شمارش‌پذیر
criterion	معیار
cross product	ضرب خارجی
cyclic	دوری
-decomposition	تجزیهٔ ــ
-subspace	زیرفضای ــ
-vector	بردار ــ
decomposable	تجزیه‌پذیر
decompose	تجزیه کردن
decomposition	تجزیه
decrease	نزول کردن
decreasing	نزولی
deduction	قیاس، استنتاج
definite	معین
-integral	انتگرال ــ
degenerate	تبهگون
degree	درجه
dependence	وابستگی
dependent	وابسته
derivative	مشتق
determinant	دترمینان
-rank	رتبهٔ ــ
diagonal	قطر، قطری
-matrix	ماتریس قطری
diagonalizable	قطری‌شدنی
-operator	عملگر ــ
diagonalization	قطری کردن
differentiable	مشتق‌پذیر
differential	دیفرانسیل
differentiation	مشتق‌گیری، دیفرانسیل‌گیری
-transformation	تبدیل ــ

dimension	بعد
direct	مستقیم
-sum	مجموعِ ــ
direction	سو
directional	سویی
disjoint	مجزا
distance	فاصله [دونقطه]
distributive law	قانون پخش‌پذیری
divide	تقسیم کردن-بخش کردن، عاد کردن
divident	مقسوم
divisibility	بخش‌پذیری
division	تقسیم
divisor	مقسوم‌علیه
domain	دامنه
dot product	ضرب نقطه‌ای
double	مضاعف
-dual	دوگانِ ــ
dual	دوگان
-basis	پایهٔ ــ
-space	فضای ــ
duality	دوگانی
echelon	پلکانی
eigenvalue	مقدارویژه [= مقدار سرشت‌نما]
element	عنصر، عضو
elimination	حذف
-process	فرآیندِ ــ
empty	تهی
entire	تام
-space	فضای ــ
entry	درایه
equivalence	هم‌ارزی
-relation	رابطهٔ ــ
equivalent	هم‌ارز

evaluation	محاسبه، تعیین‌مقدار
expand	بسط دادن
expansion	بسط
explicit	صریح
exponent	نما
exponential	نمایی
extension	گسترش
factor	سازه
factorization	تجزیه به‌سازه‌ها
field	هیأت
finite	متناهی
finitely generated	بطور متناهی تولیدشده
form	فرم، صورت
formal	صوری
–power series	سری‌توانی–
formula	فرمول
free module	مدول آزاد
function	تابع
functional	تابعك
generalization	تعمیم
generalize	تعمیم‌دادن، عمومیت‌دادن
generate	تولیدکردن
generated	تولیدشده
generator	مولد
graph	نمودار
greatest common divisor	بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك
group	گروه
Hermitian[=self adjoint]	هرمیتی
–form	فرم–
homogeneous	همگن

homomorphic	همریخت
homomorphism	همریختی
hyperplane	ابرصفحه
hyperspace	ابرفضا
hypothesis	فرض
ideal	ایدآل
idempotence	خودتوانی
idempotent	خودتوان
–operator	عملگر–
identical	همانند، یکسان
identity	همانی [=عنصرهمانی]، اتحاد
–function	تابع همانی
image	نگاره
imaginary	موهومی-انگاری
increasing	صعودی
inclusion	شمول
independence	استقلال
independent	مستقل
–variable	متغیر–
index	نمایه
indices	نمایه‌ها
induce	القاکردن
induced operator	عملگرالقاشده
induction	استقرا
inductive	استقرایی
inequality	نامساوی
infinite	نامتناهی
inner product	ضرب داخلی
integration	انتگرال گیری
–by parts	– جزء به‌جزء
interpolation	درونیابی
intersection	اشتراك
interval	فاصله

invariance	پایایی
invariant	پایا
–subspace	زیرفضای–
inverse	معکوس
inversion	انعکاس
invertible	معکوس‌پذیر
irreducible	تحویل‌ناپذیر
isomorphic	یکریخت
isomorphism	یکریختی
iterated	مکرر
iteration	تکرار
kernel	هسته
latent root	ریشهٔ راکد، [= مقدار سرشت‌نما]
leading	مقدم
–nonzero entry	درایهٔ غیرصفر–
least common divisor	کوچکترین مضرب مشترك
lemma	لم
length	طول
line	خط
linear	خطی
–combination	ترکیب–
–function	تابع–
–functional	تابعك–
–transformation	تبدیل–
linearly dependent	وابستهٔ خطی
linearly independent	مستقل خطی
lower triangular	پایین‌مثلثی
magnitude	بزرگی
main diagonal	قطر اصلی
map = mapping	نگاشت

matrix	ماتریس
maximal	ماکسیمال
–subspace	زیرفضای–
maximum	ماکسیمم
member	عضو
minimal	مینیمال
–polynomial	چندجمله‌ای–
minimum	مینیمم
minor	کهاد
module	مدول
monic polynomial	چندجمله‌ای تکین
motion	حرکت
multilinear function	تابع چندخطی
multiplicand	مضروب
multiplication	ضرب
multiplicity	چندگانگی
multiplier	ضریب، مضروب‌فیه
mutually perpendicular	دوبه‌دوعمود برهم
negative	منفی
nilpotent	پوچ‌توان
non-degenerate	ناتبهگون
–bilinear form	فرم دوخطی–
non-overlapping	نامتداخل
non-singular	نامنفرد
norm	نرم
normal	نرمال
–operator	عملگر–
normalizer	نرمال‌کننده
normed	نرم‌دار
notation	نماد، نمادگذاری
n-tuple	nتایی
nullity	پوچی
null- space	فضای پوچ

odd	فرد
on	روی
one-one	یك به‌یك
onto	پوشا، بروی
operate	عمل کردن
operation	عمل
operator	عملگر
order	مرتبه
ordered basis	پایهٔ مرتب
origin	مبدأ
orthogonal	متعامد
–basis	پایه–
–complement	مکمل–
–group	گروه–
–projection	تصویر–
–set	مجموعهٔ–
–vector	بردار–
orthogonality	تعامد
orthogonalization	متعامدسازی
orthonormal	متعامدیکه
–basis	پایهٔ–
–set	مجموعهٔ–
over	برروی
overlap	تداخل کردن
parallel	موازی
parallelogram law	قانون متوازی‌الاضلاع
period	دورهٔ تناوب
periodic	دوره‌ای
permutation	جایگشت
–group	گروه جایگشتی
perpendicular	عمود
perpendicularity	عمود بودن، تعامد
polar	قطبی

polarization identity	اتحاد قطبی
pole	قطب
polynomial	چندجمله‌ای
positive	مثبت
–definite	معین–
– –bilinear form	فرم دوخطی– –
–form	فرم–
power series	رشتهٔ توانی
primary	اولیه
–decomposition	تجزیهٔ–
prime	اول
principal ideal	ایدآل اصلی
process	فرآیند
product	حاصل‌ضرب، ضرب
project	طرح، تصویر کردن
projection	تصویر
–operator	عملگر–
proof	اثبات
proper	سره
–subset	زیرمجموعهٔ–
–value	مقدار–
pseudo orthogonal group	گروه شبه متعامد
quadratic	درجهٔ دوم
–form	فرم–
quotient	خارج قسمت
–space	فضای–
range	برد
rank	رتبه
rational	گویا
–form	فرم–
real	حقیقی
–line	خط–

-valued function	تابع حقیقی
reciproca	عکس [یک‌عدد]
rectangle	مستطیل
rectangular	مستطیلی
reduced	تحویل شده
reducibility	تحویل‌پذیری
reflection	انعکاس
reflective	انعکاسی
relation	رابطهٔ
relatively prime	نسبت به‌هم اول
remainder	باقیمانده
representation	نمایش
representative	نمایشگر
resolution	تفکیک، حل
restrict	تحدید کردن
restricted	محدود شده
restriction	تحدید
-operator	عملگر ـ
reverse	وارونه، وارونه کردن
reversible	وارونه‌پذیر
rigid motion	حرکت صلب
ring	حلقه
root	ریشه
rotation	دوران
row	سطر
-equivalence	هم‌ارز سطری
-operation	عمل سطری
-rank	رتبهٔ سطری
-reduced	تحویل‌شدهٔ سطری
- - echelon	ـ ـ پلکانی
-space	فضای سطری
-vector	بردار سطری
r-shuffle	r-بر

scalar	اسکالر
-polynomial	چندجمله‌ای-
-product	ضرب-
self adjoint[=Hermitian]	خودالحاق
semi-simple operator	عملگر نیم‌ساده
separating vector	بردارجداکننده
separation	جداسازی
sequence	دنباله
series	رشته، سری
sesqui-linear	یک‌ونیم‌خطی
-form	فرم-
set	مجموعه
shift	انتقال
shuffle	بر
sign	علامت
signature	نشان
signum	علامت
similarity	تشابه
simultaneous	همزمان
-diagonalization	قطری‌سازی-
-triangulation	مثلث‌بندی-
singular	منفرد
-matrix	ماتریس-
-transformation	تبدیل-
skew	کج
-symmetric	متقارن-
--bilinear form	فرم دوخطی --
solution	جواب
space	فضا
span	پدیدآوردن
spanned by	پدیدآمده توسط
spanning	پدیدآورنده
spatial	فضایی
spectral	طیفی

-resolution	تفکیک-
-value	مقدار-
spectrum	طیف
square	مربع، مجذور
-matrix	ماتریس مربعی
-root	جذر، ریشهٔ دوم
standard	استانده
-basis	پایهٔ-
strict	اکید
structure	ساختار-ساخت
stuffer	پرکننده [= T-هادی]
subdivision	زیربخش
subfield	زیرهیأت
submatrix	زیرماتریس
submodule	زیرمدول
subscript	شاخص‌زیر
subset	زیرمجموعه
subspace	زیرفضا
substitution	جایگزینی
subtraction	تفریق
succession	توالی
successive	متوالی
sum	مجموع
symbol	نماد
symmetric	متقارن
-bilinear form	فرم دوخطی-
-group	گروه متقارن-
symmetry	تقارن
T-conductor	T-هادی
tensor	تانسور
-product	ضرب تانسوری
term	جمله، اصطلاح
theorem	قضیه

theory	نظریه
trace	رد
–of linear transformation	ـ تبدیل خطی
–of matrix	ـ ماتریس
transformation	تبدیل
transitive	متعدی
transitivity	تعدی
translation	انتقال
transpose	ترانهاده
transposition	ترانهش
triangulable	مثلثی‌شونده
triangular	مثلثی
triangulation	مثلث‌بندی
trivial	بدیهی
unimodular	تک‌مدولی
union	اجتماع
unique	یکتا
unit	یکه
unitary	یکانی
–diagonalization	قطری‌کردنـ
unity	یگانی
upper triangular	بالامثلثی
validity	اعتبار
value	مقدار
vanish	صفرشدن
variable	متغیر
variation	تغییر
vector	بردار
–space	فضای برداری

wedge product	ضرب گوه‌ای
well-defined	خوش تعریف
zero	صفر

واژه‌نامهٔ فارسی به‌انگلیسی

آرایش	array
آر-بر [r-بر]	r-shuffle
آزاد	free
آنالیز	analysis
— ترکیبی	combinatorial–
آوند	argument
ابرصفحه	hyperplane
ابرفضا	hyperspace
اتحاد	identity
— قطبی	polarization–
اثبات	proof
اجتماع	union
استانده	standard
استدلال	argument
استقرا	induction
استقرایی	inductive
استقلال	independence
استنتاج	deduction
اسکالر	scalar
اشتراک	intersection
اصطلاح	term

axiom	اصل موضوع
principal	اصلی
add	اضافه کردن
validity	اعتبار
augmented	افزوده
strict	اکید
adjunction	الحاق
adjoint	الحاقی
classical–	ـ کلاسیک
induce	القا کردن
algorithm	الگوریتم
shift	انتقال
translation	انتقال
integral	انتگرال
definite–	ـ معین
integration	انتگرال گیری
–by parts	ـ جزء به‌جزء
coincidence	انطباق
reflection	انعکاس
inversion	انعکاس
imaginary	انگاری [= موهومی]
prime	اول
primary	اولیه
ideal	ایدال
principal–	ـ اصلی
remainder	باقیمانده
upper triangular	بالامثلثی
divisibility	بخش‌پذیری
trivial	بدیهی
shuffle	بر
range	برد
vector	بردار

separating-	ـ جدا کننده
cyclic-	ـ دوری
row-	ـ سطری
orthogonel-	ـ متعامد
over	برروی
greatest common divisor	بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك
magnitude	بزرگی
algebraically closed	بستهٔ جبری
expansion	بسط
expand	بسط دادن
dimension	بعد
anti-isomorphism	پاد یکریختی
invariant	پایا
invariance	پایایی
base	پایه
basis	پایه
dual-	ـ دوگان
orthogonal-	ـ متعامد
orthonormal-	ـ متعامد یکه
ordered-	ـ مرتب
lower triangular	پایین مثلثی
distributive	پخش‌پذیری
spanned by	پدیدآمده توسط
span	پدیدآوردن
spanning	پدیدآورنده
stuffer	پرکننده
echelon	پلکانی
nilpotent	پوچ‌توان
annihilator	پوچساز
nullity	پوچی
onto	پوشا
continuous	پیوسته

تابع	function
ـ ترویجی	conjugation–
ـ چندخطی	multilinear–
ـ خطی	linear–
ـ مرکب	composed–
تابعك	functional
ـ خطی	linear–
تام	entire
تانسور	tensor
تبدیل	transformation
ـ خطی	linear–
ـ مشتق‌گیری [= دیفرانسیل گیری]	differentiation–
ـ منفرد	singular–
تبهگون	degenerate
تجزیه	decomposition
ـ اولیه	primary–
تجزیه به‌سازه‌ها	factorization
تجزیه‌پذیر	decomposable
تجزیه کردن	decompose
تحدید	restriction
تحویل شده	reduced
ـ سطری	row–
ـ ـ پلکانی	– – echelon
تحویل‌ناپذیر	irreducible
تداخل‌کردن	overlap
ترانهاده	transpose
ـ مزدوج	conjugate–
ترانهش	transposition
ترکیب	combination
ـ خطی	linear–
ترکیب [توابع]	composition
تزویجی	conjugation
تشابه	similarity
تصویر	projection

ـ متعامد	orthogonal-
تصویر کردن	project
تعامد	orthogonality[=perpendicularity]
تعدی	transitivity
تعمیم	generalization
تعمیم دادن	generalize
تعیین مقدار [= محاسبه]	evaluation
تغییر	variation
تفریق	subtraction
تفکیك	resolution
ـ طیفی	spectral-
تقارن	symmetry
تقریب	approximation
تقسیم	division
تقسیم کردن، بخش کردن، عاد کردن	divide
تکرار	iteration
تك‌مدولی	unimodular
تناظر	correspondence
توالی	succession
تولید کردن	generate
تهی	empty
Tـ هادی [Tـهادی]	T-conductor
ابجا شدن	commute
جابجا گر	commutator
جابجایی	commutative
جایگزینی	substitution
جایگشت	permutation
جبر	algebra
جبری	algebraic
جداسازی	separation
جمله	term
جواب	solution

polynomial	چندجمله‌ای
annihilating-	ـ پوچساز
monic-	ـ تکین
characteristic-	ـ سرشت‌نما
multiplicity	چندگانگی
product	حاصل‌ضرب ، ضرب
elimination	حذف
motion	حرکت
rigid-	ـ صلب
real	حقیقی
assertion	حکم
resolution	حل
ring	حلقه
quotient	خارج قسمت
line	خط
real-	ـ حقیقی
linear	خطی
self adjoint	خودالحاق
idempotent	خودتوان
idempotence	خودتوانی
well defined	خوش‌تعریف
domain	دامنه
determinant	دترمینان
entry	درایه
nonzero-	ـ غیرصفر
leading- -	ـ ـ مقدم
degree	درجه
quadratic	درجهٔ دوم
interpolation	درون‌یابی
arbitrary	دلخواه

sequence	دنباله
binary	دوتایی
binomial	دوجمله‌ای
rotation	دوران
periodic	دوره‌ای
period	دورهٔ تناوب
cyclic	دوری
dual	دوگان
double-	ـ مضاعف
duality	دوگانی
differential	دیفرانسیل
differentiation	ـ گیری [= مشتق‌گیری]
relation	رابطه
equivalence-	ـ هم‌ارزی
rank	رتبه
determinant-	ـ دترمینان
column-	ـ ستونی
row-	ـ سطری
trace	رد
of linear transformation	ـ تبدیل خطی
of Matrix-	ـ ماتریس
class	رده
classification	رده‌بندی
series	رشته
power-	ـ توانی
Formal power-	ـ توانی صوری
root	ریشه
latent-	ـ راکد، [= مقدار سرشت‌نما]
angle	زاویه
subdivision	زیربخش
subspace	زیرفضا

cyclic-	ـ ی دوری
maximal-	ـ ی ماکسیمال
submatrix	زیرماتریس
subset	زیرمجموعه
proper-	ـ سره
submodule	زیرمدول
structure	ساختار
consistant	سازگار
factor	سازه
column	ستون
character	سرشت
characteristic	سرشت‌نما
characterization	سرشت‌نمایی
proper	سره
row	سطر
direction	سو
directional	سویی
subscript	شاخص زیر
associativity	شرکت‌پذیری
countable	شمارش‌پذیر
countability	شمارش‌پذیری
inclusion	شمول
explicit	صریح
increasing	صعودی
zero	صفر
vanish	صفر شدن
multiplication	ضرب
product	ضرب ، حاصلضرب
tensor-	ـ تانسوری

cross–	ـ خارجی
inner–	ـ داخلی
wedge–	ـ گوه‌ای
dot–	ـ نقطه‌ای
coefficient	ضریب
multiplier	ضریب [= مضروب‌فیه]
project	طرح
length	طول
spectrum	طیف
member	عضو [= عنصر]
converse	عکس
sign[=signum]	علامت
action	عمل
operation	عمل
adjoint–	ـ الحاق
column–	ـ ستونی
row	ـ سطری
operator	عملگر
adjoint–	ـ الحاقی
induced–	ـ القاء شده
projection–	ـ تصویر
idempotent–	ـ خودتوان
diagonalizable–	ـ قطری‌شدنی
normal–	ـ نرمال
semi-simple–	ـ نیم‌ساده
sesqui-linear–	ـ یک‌ونیم‌خطی
perpendicular	عمود
perpendicularity	عمود بودن
element	عنصر [= عضو]
identity–	ـ همانی

فاصله [اعداد حقیقی]	interval
فاصله [دو نقطه]	distance
فرآیند	process
ـ حذف	elimination-
فرد	odd
فرض	hypothesis
فرم	form
ـ چندخطی	multilinear-
ـ درجهٔ دوم	quadratic-
ـ دوخطی	bilinear-
ـ متقارن	symmetric-
ـ متقارن کج	skew-symmetric-
ـ معین مثبت	positive definite-
ـ ناتبهگون	non-degenerate-
ـ هرمیتی	Hermitian-
فرمول	formula
فضا	space
ـ ی برداری	vector-
ـ ی پوچ	null-
ـ ی تام	entire-
ـ ی خارج قسمت	quotient-
ـ ی دوگان	dual-
ـ ی سطری	row-
فضایی	spatial
قضیه	theorem
قطب	pole
قطبی	polar
قطر	diagonal
ـ اصلی	main-
قطری‌شدنی	diagonalizable
قطری کردن	diagonalization
ـ یکانی	unitary-

کاربرد	application
کج	skew
کلاسیك	classical
کنش	action
کوچکترین مضرب مشترك	least common divisor
کهاد	minor
گردآورده	collection
گروه	group
ـ جایگشتی	permutation-
ـ شبه متعامد	pseudo-orthogonal-
ـ متعامد	orthogonal-
ـ متقارن	symmetric-
گسترش	extension
گویا	rational
لم	lemma
ماتریس	matrix
ـ قطری	diagonal-
ـ مربعی	square-
ـ منفرد	singular-
ـ همدم	companion-
ماکسیمال	maximal
ماکسیمم	maximum
مبدأ	origion
مبنا [لگاریتم]	base
متعارف	canonical
متعامد	orthogonal
متعامدسازی	orthogonalization
متعامدیکه	orthonormal
متعدی	transitive
متغیر	variable

ـ مستقل	independent-
متقارن	symmetric
ـ کج	skew-
متناظر	correspondent
متناوب	alternating
متناهی	finite
متوازی‌الاضلاع	parallelogram
متوالی	successive
مثبت	positive
مثلث‌بندی	triangulation
مثلثی	triangular
مثلثی‌شونده	triangulable
مجاز	admissible
مجاور	adjacent
مجزا	disjoint
مجموع	sum
ـ مستقیم	direct-
مجموعه	set
ـ متعامد	orthogonal-
ـ ـ یکه	orthonormal-
محاسبه	calculation
محاسبه	computation
محاسبه [= تعیین مقدار]	evaluation
محور	axis
محوری	axial
مختص	coordinate
مختلط	complex
مدول	module
ـ آزاد	free-
مربع	square
مرتبه	order
مرکب	composed
مزدوج	conjugate
ـ خطی	linear-

مستطیل	rectangle
مستطیلی	rectangular
مستقل	independent
ـ خطی	linearly-
مستقیم	direct
مشتق	derivative
مشتق‌پذیر	differentiable
مشتق گیری ،دیفرانسیل گیری	differentiation
مضاعف	double
مضروب	multiplicand
مضروب‌فیه [= ضریب]	multiplier
معکوس	inverse
معکوس‌پذیر	invertible
معیار	criterion
معین	definite
ـ مثبت	positive-
مقدار سرشت‌نما [= مقدارویژه]	characteristic value
مقدارسره	proper value
مقدارطیفی	spectral value
مقدارویژه	eigen value
مقدم	leading
مقسوم	divident
مقسوم‌علیه	divisor
مکرر	iterated
مکمل	complement
ـ متعامد	orthogonal-
منفرد	singular
منفی	negative
موازی	parallel
مولد	generator
مؤلفه	component
موهومی [= انگاری]	imaginary
مینیمال	minimal
مینیمم	minimum

non-degenerate	ناتبهگون
non-empty	ناتهی
non-overlapping	نامتداخل
infinite	نامتناهی
inequality	نامساوی
non-singular	نامنفرد
corollary	نتیجه
norm	نرم
normal	نرمال
normalizer	نرمال کننده
normed	نرم‌دار
decrease	نزول کردن
decreasing	نزولی
relatively prime	نسبت به‌هم اول
signature	نشان
theory	نظریه
image	نگاره
map[= mapping]	نگاشت
exponent	نما
symbol	نماد
notation	نماد
notation-	ــ گذاری
representation	نمایش
representative	نمایشگر
index	نمایه
indices	نمایه‌ها
exponential	نمایی
graph	نمودار
dependence	وابستگی
linearly-	ــ خطی
dependent	وابسته
reverse	وارونه
reversible	وارونه‌پذیر

وارونه کردن	reverse
هادی	conductor
هرمیتی	Hermition
هسته	kernel
هم‌ارز	equivalent
هم‌ارزی	equivalence
ـ سطری	row-
همانی [= عنصر همانی] ،اتحاد	identity
همبعد	codimension
همدامنه	codomain
همدم	companion
همریخت	homomorphic
همریختی	homomorphism
همزمان	simultaneous
همسازه	cofactor
همگرا	convergent
همگرایی	convergence
همگن	homogeneous
هم‌مجموعه	coset
همنهشت	congruent
همنهشتی	congruence
ـ به‌پیمانهٔ n	-modulo n
هیأت	field
یکانی	unitary
یك به‌یك	one-one
یکتا	unique
یکریخت	isomorphic
یکریختی	isomorphism
یکه	unit
یگانی	unity

فهرست راهنما

rــ بر ۲۲۳
آزاد، مدول ــ ←

ابرفضا ۱۳۴، ۱۱۴
اتحاد قطبی ۳۵۵، ۴۷۲
اجتماع ۴۹۶
استانده
پایهٔ ــ ←
ضرب داخلی ــ ←
استقلال خطی ۵۶، ۶۴
اسکالر ۶
چندجمله‌ای ــ ←
اشتراك ۴۹۶
پوچساز ــ ←
ــ زیرفضاها ۵۱
اصل (موضوع) انتخاب ۵۰۹
اعداد
ــ حقیقی ۶
ــ صحیح ۷
ــ ــ مثبت ۷
ــ گویا ۷
ــ مختلط ۶
اعمال ستونی مقدماتی ۳۸، ۳۳۴
اعمال سطری مقدماتی ۱۱، ۳۲۹
افزوده، ماتریس ــ ←
اقلیدس، فضای ــ ی ←
الحاقی
ــ تبدیل خطی ۳۸۲
ــ کلاسیك ۱۹۴ (تمرین ۳)، ۲۰۸
ایدآل ۱۷۱
ــ اصلی ۱۷۱
ــ پرکننده ۲۶۳

بالامثلثی، ماتریس ــ ←
بخش‌پذیری چندجمله‌ایها ← تقسیم‌پذیری چندجمله‌ایها
بر۲۲۳
برد ۹۵
ــ تابع ۴۹۷
ــ تبدیل خطی ۹۶
بردار
ــ جداکننده ۳۱۷ (تمرین ۱۴)
ــ دوری ۲۹۷
ــ سرشت‌نما ۲۳۹
ــ سطری ۵۴
ــ های متعامد ۳۶۱، ۴۷۳

ترکیب خطی‌ـها ←
Tـپوچسازـ ←
مختصـ ←
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک ۱۷۳
بستهٔ جبری، هیأتـ ←
بسطهای لاپلاس ۲۳۳
بعد ۶۱
ـفضای برداری ۶۱
ـمتناهی ۵۷
فرمولـ ۶۱

پایا
زیرفضایـ ←
زیرمجموعهٔـ ←
سازه‌هایـ ←
مجموع مستقیمـ ←
پایه ۵۷
ـاستانده ۵۸
ـبرای مدول ۲۱۴
ـدوگان ۱۳۱، ۲۱۶
ـفضای برداری ۵۷
ـمتعامد ۳۶۴
ـیکه ۳۶۴
ـمرتب ۶۸
تغییرـ ←
پرکننده ←ایدآل پرکننده
پوچ‌توان
تبدیل خطیـ ←
عملگرـ ←
ماتریسـ ←
پوچساز
ـاشتراک ۱۴۰ (تمرین ۱۱)
ـبردارها ←Tـپوچساز
ـزیرفضاها ۱۳۵
ـزیرمجموعه ۱۳۴
ـمجموع ۱۴۰ (تمرین ۱۱)
پوچی تبدیل خطی ۹۶
پوشا ۴۹۷

تابع ۴۹۷
بردـ ←
ـ nخطی ۱۸۵
ـ nخطی متناوب ۱۸۸، ۲۲۰
ـتحدید ۵۰۰
ـچندجمله‌ایها ۴۴
ـچندخطی ۲۱۶
ـخطی ۹۱، ۱۲۹، ۳۷۶
ـدترمینان ۱۸۸
ـمعکوس‌پذیر ۴۹۹
ـهمانی ۴۹۸
معکوسـ ←
تابعک‌خطی ۱۲۹
تانسور ۲۱۶
ضربـیـ ←
تبدیل
ـخارج‌قسمت ۵۰۶
ـلورنتز ۴۵۲ (تمرین ۱۵)، ۴۸۹
ـمشتق گیری ۹۲
ـصفر ۹۱
ـیکانی ۴۵۷
تبدیلهای خطی ۹۱، ۱۰۳
الحاقیـ ←
بردـ ←
پوچیـ ←
ـپوچ‌توان ۲۸۹
ـخارج‌قسمت ۵۰۶
ـخودالحاق ۳۸۶، ۴۰۶
ـقطری‌شدنی ۲۴۱

ـ کیلی ۴۰۱ (تمرین ۷)
ـمتعامد ۳۹۳
ـمثبت ۴۲۵
ـمثلثی‌شونده ۲۶۴، ۴۰۸
ـمعکوس‌پذیر ۱۰۶
ـنامنفرد ۱۰۷
ـنامنفی ←عملگر نامنفی
ـنرمال ۴۰۳
ـنیم‌ساده ←عملگر نیم‌ساده
ـیکانی ۳۹۱
تجزیهٔ دوری ← ـ
تجزیهٔ قطبی ← ـ
ترانهادهٔ ← ـ
جزءقطری‌شدنی ← ـ
چندجمله‌ایهای مینیمال ← ـ
دترمینان ← ـ
رتبهٔ ← ـ
رد ← ـ
ضرب ← ـ
ماتریس ← ـ
ـدرپایهٔ متعامد یکه ← ـ
تجزیهٔ
ـاولیهٔ چندجمله‌ایها ۱۷۸
ـچندجمله‌ایها به‌سازه‌های اول ۱۷۷
ـدوری تبدیلهای خطی ۳۰۴
ـقطبی تبدیل خطی ۴۴۱
قضیهٔ ـ اولیه ←
تحدید
ـتابع ۵۰۰
عملگر ـی ←
تحویل شدهٔ
ـسطری ۱۵
ـپلکانی ۱۸، ۷۶
تحویل‌ناپذیر، چندجمله‌ای ← ـ
ترانهادهٔ
ـتبدیل‌خطی ۱۴۷
ـماتریس ۱۴۹
ـمزدوج ماتریس ۳۵۳
ترکیب
ـتوابع ۴۹۸
ـخطی بردارها ۴۵
ـخطی معادلات ۹
تزویجی ۳۵۹ (تمرین ۱۳)
تشابه ماتریسها ۱۲۵
تصویر
ـفضای‌برداری ۲۷۵
ـمتعامد ۳۷۰
تغییرپایه ۱۲۱
تفکیك
ـطیفی ۴۳۳، ۴۴۴
ـهمانی ۴۳۴، ۴۴۴
تقریب ۳۶۸
تقسیم‌پذیری چندجمله‌ایها ۱۶۸
Tـپوچساز ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۸۹
Tـمجاز ۳۰۳
Tـهادی ۲۶۳، ۲۶۴، ۳۰۴

جابجایی
جبر ـ ←
حلقهٔ ـ ←
گروه ـ ←
جایگشتها ۱۹۷
ـی زوج ۱۹۸
ـی فرد ۱۹۸
ضرب ـ ←
علامت ـ ←
جبر ۱۵۳
ـجابجایی ۱۵۴

ـخطی ۱۵۳
ـخودالحاق ۴۴۴
ـرشته‌های توانی صوری ۱۵۵
جذر ۴۳۹
جزء قطری‌شدنی تبدیل خطی ۲۸۹

چندجمله‌ایها
تابع ـ←
تجزیهٔ اولیهٔ ـ←
تجزیهٔ ـ به‌سازه‌های اول ←
تقسیم‌پذیری ـ←
ـی اسکالر ۱۵۶
ـی اول ۱۷۶
ـی تحویل‌پذیر ۱۷۶
ـی تحویل‌ناپذیر ۱۷۶
ـی تکین ۱۵۶
ـی سرشت‌نما ۲۴۰
ـی مینیمال تبدیلهای خطی ۲۵۰
ـماتریسها ۲۵۰
درجهٔ ـ←
ریشه‌های ـ←
صفرهای ـ←
ضرایب ـ←
مشتق ـ←
چندخطی
تابع ـ←
فرم ـ←

حاصلضرب ← ضرب
حرکت صلب ۴۰۲ (تمرین ۱۴)
حقیقی، اعداد ـ←
حلقه ۱۸۳
ـجابجایی ۱۸۳، ۱۸۴
ـگراسمان ۲۳۵

خارج‌قسمت
تبدیلهای خطی ـ←
ـفضاهای برداری ۵۰۶
عملگر ـ←
خارجی، ضرب ـ←
خطی، تابع ـ←
خودالحاق
تبدیلهای خطی ـ←
جبر ـ←
عملگر ـ←
فرم ـ←
ماتریس ـ←
خودتوان، عملگر ـ←

دترمینان ۱۸۳–۲۳۵
تابع ـ←
ـتبدیل خطی ۲۲۴
رتبهٔ ـ←
درایهٔ ماتریس ۱۱
درجهٔ
ـچندجمله‌ایها ۱۵۶
ـفرم چندخطی ۲۱۶
فرم ـ دوم ←
درون‌یابی، ۱۶۱
دستگاه معادلات
ـخطی، ۷
ـهم‌ارز ۹
ـهمگن ۸
دلتای کرونکر ۱۵
دنبالهٔ بردارها ۶۴
دوخطی، فرم ـ←
دوران ۷۲، ۴۰۰ (تمرین ۴)
دوری
بردار ـ←

زیرفضای ــ ←
قضیهٔ تجزیهٔ ــ
دوگان
پایهٔ ــ ←
فضای ــ ←
مدول ــ ←

رابطه ۵۰۱
ــ هم‌ارزی ۵۰۲
رتبهٔ
ــ تبدیل خطی ۹۶
ــ دترمینان ۲۱۳ (تمرین ۹)
ــ ستونی ماتریس ۹۷، ۱۵۰
ــ سطری ماتریس ۷۵، ۹۷، ۱۵۰
ــ فرم دوخطی ۴۶۸
ــ ماتریس ۱۵۰
ــ مدول ۲۱۵
رد
ــ تبدیل خطی ۱۴۱ (تمرین ۱۵)
ــ ماتریس ۱۳۰
رشتهٔ
ــ توانی ۱۵۵
ــ توانی صوری ۱۵۵
ریشهٔ
ــ چندجمله‌ایها، ۱۶۸
ــ خانواده‌ای ازعملگرها، ۴۴۲
ــ دوم ← جذر
ــ راکد ← مقدارسرشت‌نما

زیرفضاها، ۴۸
پوچساز ــ ←
ــ ی پایا ۲۶۰، ۲۷۰، ۴۰۶
ــ ی پدیدآمده ۵۱
ــ ی T ــ مجاز ۳۰۳
ــ ی دوری ۲۹۷
ــ ی صفر ۴۹
ــ ی مکمل ۳۰۳
ــ ی مکمل متعامد ۳۶۹
ــ ی مجزا ← زیرفضاهای مستقل
ــ ی مستقل ۲۷۳
مجموع ــ ←
زیرماتریس ۲۱۳ (تمرین ۹)
زیرمجموعهٔ
پوچساز ــ ←
ــ پایا ۵۰۱
ــ سره ۴۹۶
زیرهیأت ۶

ژوردان، فرم ــ ماتریس ←

سازه‌های پایای ماتریس ۳۱۲، ۳۴۰
ستونی
اعمال ــ ←
رتبهٔ ــ ←
هم‌ارزی ــ ←
سرشت‌نما
بردار ــ ←
چندجمله‌ای ــ ←
فضای ــ ←
مقدار ــ ←
سرشت‌نمایی هیأت ۷
سطری
اعمال ــ ←
بردار ــ ←
رتبهٔ ــ ←
فضای ــ ←
هم‌ارزی ــ ←

شبه متعامد، گروه‌ــ ←
شرکت‌پذیری ۵
ــجمع برداری ۴۲
ــضرب ماتریسها ۲۸، ۱۲۰

صفر
تبدیل‌ــ ←
زیرفضاهای‌ــ ←
ــهای چندجمله‌ایها ۱۶۸
ماتریس‌ــ ←

ضرایب چندجمله‌ایها، ۱۵۶
ضرب، حاصلضرب
ــتانسوری ۲۱۹
ــتبدیلهای خطی ۱۰۳
ــجایگشتها ۲۰۰
ــخارجی ۲۲۸، ۲۳۰
ــداخلی ۳۵۱
ــاستانده ۳۵۲، ۳۵۳
ــضرب گوه‌ای ←ضرب داخلی
ــماتریسها ۲۵، ۱۱۹
شرکت‌پذیری‌ــ ←
ــنقطه‌ای ←ضرب داخلی
فرم درجهٔ دوم‌ــداخلی ←
فضای‌ــداخلی ←
ماتریس‌ــداخلی ←

طیف، ۴۳۳
طیفی، ۴۳۳
تفکیک‌ــ ←
قضیهٔ‌ــ ←
نظریهٔ‌ــ ←

عادکردن ۱۶۸

عضو ←عنصر
علامت جایگشتها ۱۹۸
عمل ←اعمال
عملگر ۱۰۳
ــپوچ‌توان ۲۸۹
ــتحدیدی ۲۶۱
ــتصویر ۲۷۵
ــخارج قسمت ۵۰۶
ــخودالحاق ۳۸۶، ۴۰۶
ــخودتوان ←تصویرفضاهای برداری
ــقطری‌شدنی ۲۴۱
ــمثبت ۴۲۵
ــنامنفی ۴۲۵، ۴۳۹
ــنرمال ۴۰۳
ــنیم‌ساده ۳۴۳
ــیکانی ۳۹۱
مجموع مستقیم‌ــها ←
عنصرمجموعه ۴۹۶
عنصرهمانی ۱۵۴، ۱۸۴

فاصله ۳۷۴ (تمرین ۴)
فرآیند متعامدسازی گرام‌ــاشمیت ۳۶۳، ۳۷۲
فرد، جایگشتهای‌ــ ←
فرم
ــr‌خطی ۲۱۶
ــچندخطی ۲۱۶
ــخودالحاق ۴۱۷
ــدرجهٔ دوم ۳۵۵، ۴۷۲
ــدوخطی ۲۱۷، ۴۱۴، ۴۶۰
ــناتبهگون ۴۶۹
ــژردان ماتریس، ۳۲۲
ــگویای ماتریسها ۳۱۱
ــمتناوب ۲۲۰
ــمثبت ۴۲۰، ۴۲۳

ـ ناتبهگون ۴۱۹ (تمرین ۶)
نامنفرد ← فرم ناتبهگون
ـ نامنفی ۴۲۵
ـ نرمال ۳۳۶، ۳۴۰
ـ هرمیتی ← فرم خودالحاق
ـ یک‌ونیم‌خطی ۴۱۴
ماتریس ـ ←
فرم‌دوخطی ۲۱۷، ۴۱۴، ۴۶۰
رتبهٔ ـ ←
ـ متقارن ۴۷۱
ـ متقارن‌کج ۴۸۲
ـ معین مثبت ۴۷۹
ـ ناتبهگون ۴۶۹
ـ نامنفرد ← فرم دوخطی ناتبهگون
قطری‌سازی ـ ←
گروه حافظ ـ ←
ماتریس ـ ←
نشان ـ ←
فرمول
ـ بعد، ۶۳
ـ تیلور ۱۶۹، ۳۴۶
ـ درون‌یابی لاگرانژ ۱۶۲
فضاها
ـ ی F^n ۴۲
ـ ی $F^{m\times n}$ ۴۳
ـ ی اقلیدسی ۳۶۰
ـ ی برداری ۴۱
ـ ی پوچ ۹۶
ـ ی جواب ۵۰
ـ ی خارج قسمت ۵۰۵
ـ ی دوگان ۱۳۱
ـ ی سرشت‌نما ۲۳۹
ـ ی سطری ۵۴
ـ ی ضرب داخلی ۳۵۹
ـ ی یکانی ۳۶۰
فضاهای برداری
بعد ـ ←
پایهٔ ـ ←
تصویر ـ ←
خارج‌قسمت ـ ←
زیرفضاهای ـ ←
ـ nتاییها ۴۱
ـ با بعد متناهی ۴۲
ـ توابع چندجمله‌ای ۴۴
ـ جواب دستگاه معادلات خطی ۵۰
یکریختی ـ ←

قاعدهٔ کرامر ۲۱۰
قانون متوازی‌الاضلاع ۳۵۸ (تمرین ۹)
قضیهٔ
ـ اساسی جبر ۱۸۰
ـ تجزیهٔ اولیه ۲۸۶
ـ تجزیهٔ دوری ۳۰۴
ـ طیفی ۴۳۳
ـ کیلی ـ همیلتون ۲۵۴، ۳۰۹
ـ محوراصلی ۴۱۸
قطبی
تجزیهٔ ـ تبدیل خطی ←
قطری‌شدنی
جزء ـ تبدیل خطی ←
عملگر ـ ←
قطری‌کردن ۲۶۶، ۲۶۹، ۲۸۱
ـ فرم دوخطی ۴۷۳
ـ فرم دوخطی متقارن ۴۷۴
ـ فرم هرمیتی ۴۱۸
ـ ماتریس (عملگر) خودالحاقی ۴۰۹
ـ ماتریس (عملگر) نرمال ۴۰۹
ـ همزمان ۲۶۹

ـیکانی ۴۰۹

کرونکر، دلتای‌ـ ←
کلاسیک، الحاقی‌ـ ←
کهادهای اصلی ماتریس ۴۲۲

گروه ۱۱۰
ـجابجایی ۱۱۰
ـحافظ فرم ۴۸۷
ـخطی عمومی ۳۹۷
ـشبه متعامد ۴۸۹
ـلورنتز ۴۸۹
ـمتعامد ۴۸۸
ـمتقارن ۲۰۰
گویا
اعداد‌ـ ←
فرم‌ـ‌ی‌ماتریسها ←

لورنتز
گروه‌ـ ←
تبدیل‌ـ ←

ماتریس ۱۰
ترانهادهٔ‌ـ ←
ترانهادهٔ مزدوج‌ـ ←
تشابه‌ـها ←
چندجمله‌ایهای مینیمال‌ـها ←
رتبهٔ‌ـ ←
رتبه ستونی‌ـ ←
رتبهٔ سطری‌ـ ←
رد‌ـ ←
سازه‌های پایای‌ـ ←
ضرب‌ـها ←
فرم ژوردان‌ـ ←
فرم گویای‌ـ ←
کهادهای اصلی‌ـ ←
ـافزوده ۲۱
ـالحاقی کلاسیک ۱۹۴ (تمرین ۳)، ۲۰۸
ـبالامثلثی ۳۹ (تمرین ۹)
ـپوچ‌توان ۳۱۹
ـتبدیلهای خطی ۱۱۶، ۱۱۷
ـــدر پایهٔ متعامد یکه ۳۸۰
تحویل شدهٔ سطری ۱۵
ـ ـ۱۸، ۷۶
ـخودالحاقی ←ماتریس هرمیتی
ـصفر ۱۹
ـضرایب ۱۱
ـضرب داخلی ۳۵۶
ـفرم یک‌ونیم خطی ۴۱۶
ـفرم دوخطی ۴۶۴
ـمتعامد ۲۱۲ (تمرین ۴)، ۴۸۸
ـمتقارن ۴۹، ۲۷۵
ـمتقارن کج ۲۱۲ (تمرین ۳)، ۲۷۵
ـمثبت ۴۲۵
ـمثلثی ۲۰۲ (تمرین ۷)
ـشونده ۲۶۴، ۴۰۸
ـمختصات ۶۹
ـمعکوس‌پذیر ۳۲، ۲۰۹
ـمقدماتی ۲۹، ۳۳۰
ـژوردان ۳۲۰
ـنرمال ۴۰۸
ـوندرموند ۱۶۳
ـهرمیتی ۵۰، ۴۰۶
ـهمانی ۱۵
ـهمدم ۳۰۰
همسازه‌های‌ـ ←
ـیکانی ۲۱۲ (تمرین ۵)، ۳۹۲
مجموع مستقیم‌ـها ←

معکوس—←

متعامد

بردارهای—←

تبدیل خطی—←

تصویر—←

گروه—←

ماتریس—←

مجموعهٔ—←

مکمل—←

هم‌ارزی—ماتریسها ←

متعامدسازی ۳۶۳

متعامد یکه

پایهٔ—←

مجموعهٔ—←

متقارن

فرم دوخطی—←

گروه—←

ماتریس—←

متقارن کج

فرم دوخطی—←

ماتریس—←

متناوب، فرم—←

مثبت

اعداد صحیح—←

عملگر—←

فرم—←

ماتریس—←

مثلث‌بندی ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۹، ۳۳۱

—همزمان ۲۶۹

مثلثی، ماتریس—←

مثلثی‌شونده، ماتریس—←

مجاز، زیرفضاهای—←

مجموع زیرفضاها ۵۲

مجموع مستقیم ۲۷۴

—پایا ۲۷۸

—عمگرها ۲۷۹

—ماتریسها ۲۷۹

مجموعه

عنصر—←

—تهی ۴۹۶

—متعامد ۳۶۱

—یکه ۳۶۱

مختصات

—بردار ۶۷

ماتریس—←

مختلط، اعداد—←

مدول ۲۱۴

پایه برای—←

رتبهٔ—←

—آزاد ۲۱۵

—به‌طور متناهی تولیدشده ۲۱۵

—دوگان ۲۱۶

مزدوج

ترانهادهٔ—ماتریس ←

مستقل

زیرفضاهای—←

—خطی ۵۶، ۶۴

مشتق چندجمله‌ایها ۱۶۸، ۱۶۹، ۳۴۶

مضرب بودن ۱۶۸

معادلات خطی ۷

معادلات دیفرانسیل ۲۲۴ (مثال ۸)، ۲۹۱ (مثال ۱۴)

معکوس

—تابع ۴۹۹

—چپ ۳۲

—دوطرفه ۳۲

—راست ۳۲

—ماتریس ۳۲، ۲۰۹

معکوس‌پذیر
تابع ــ ←
تبدیل خطی ــ ←
ماتریس ــ ←
معین مثبت ۴۷۲
مقدار سرشت‌نما ۲۳۸، ۲۳۹
مقدار طیفی ← مقدار سرشت‌نما
مقدار ویژه ← مقدار سرشت‌نما
مقدماتی
اعمال ستونی ــ ←
اعمال سطری ــ ←
ماتریس ــ ←
ــ ژوردان ←
مکمل ۳۰۳
ــ متعامد ۳۶۹
مینیمال، چندجمله‌ایهای ــ ←

ناتبهگون
فرم دوخطی ــ ←
فرم ــ ←
نامساوی
ــ بسل ۳۷۲
ــ کوشی ــ شوارتز ۳۶۱
نامنفرد
تبدیل خطی ــ ←
فرم ــ ← فرم ناتبهگون
نامنفی
عملگر ــ ←
فرم ــ ←
نرم ۳۵۵
نرمال
عملگر ــ ←
فرم ــ ←
ماتریس ــ ←

نشان فرم دوخطی متقارن ۴۷۷
نظریهٔ طیفی ۴۳۳
نیم‌ساده، عملگر ــ ←
وابستگی خطی ۵۶، ۶۴
وجود تابع دترمینان ۱۹۱

هادی ۲۶۳، ۲۶۴، ۳۰۴
هرمیتی ← خودالحاق
هم‌ارزی
رابطهٔ ــ ←
ــ ستونی ۳۳۴
ــ سطری ۱۲، ۷۸، ۳۳۰
ــ متعامد ماتریسها ۳۹۸
ــ یکانی تبدیلهای خطی ۴۵۷
ــ یکانی ماتریسها ۳۹۸
همانی
تابع ــ ←
تفکیک ــ ←
عنصر ــ ←
ماتریس ــ ←
همدم، ماتریس ــ ←
همسازه‌های ماتریس ۲۰۷
هم‌مجموعه ۲۳۰، ۵۰۵
همنهشتی ۱۸۱، ۵۰۲، ۵۰۵
ــ به پیمانهٔ n ۵۰۵
هیأت ۶
زیر ــ ←
سرشت‌نمایی ــ ←
ــ بستهٔ جبری ۱۸۰

یکتایی تابع دترمینان ۱۹۹
یکریختی
ــ فضاهای برداری ۱۱۲
ــ فضاهای ضرب داخلی ۳۸۸

یکانی
تبدیل ــ ←
تبدیلهای خطی ــ ←
عملگر ــ ←
فضای ــ ←

قطری کردن ــ ←
ماتریس ــ ←
هم‌ارزی ــ تبدیلهای خطی ←
هم‌ارزی ــ ماتریسها ←