جبر

ترجمه :

دکتر علینقی وحیدی

دکتر محمد گودرزی

دکتر کاظم لالی

بیژن شمس

تهران ۱۳۵۲

جبر

ترجمه :

دکتر محمد گودرزی

[illegible]

دکتر کاظم لالی

بیژن شمس

تهران ۱۳۵۲

چاپ و صحافی دوهزار نسخه از این کتاب در آبان ماه ۱۳۵۲ در چاپخانهٔ
مؤسسهٔ انتشارات و چاپ دانشگاه تهران انجام پذیرفته است

شماره ثبت در دفتر مخصوص کتابخانه ملی فرهنگ

۱۲۳۶

۱۹/۸/۵۲

پیش گفتار

دانش جبردر چند دهۀ گذشته، دستخوش تحولی شگرف بوده است، به گونه‌ای که چهرۀ ریاضیات ودیگررشته‌های وابسته به‌آن‌را دگرگون ساخته است. از اثر این تحول در برنامۀ آموزشی ریاضی درایران، چندسالی بیش نمی‌گذرد وگروه ریاضی دانشگاه تهران که یکی ازپیشروان‌این تحول‌است، برای دروس‌جبروآنالیز اثرارزندۀ **«ژاك دیکسمیه»***راپایۀ درسی سال‌های اول و دوم قرارداد.

«ژاك دیکسمیه» یکی از استادان با ارج دانشگاه‌پاریس است و نه تنها پژوهشهای وی درریاضی بسیارپرمایه وبا ارزش است بلکه ازلحاظ آموزشی نیز استادی مجرب‌می‌باشد. شیوۀ نگارش او آنچنان است که دانشجو را به‌اندیشیدن برمی‌انگیزد واورا برای درك مطالبی دیگر آماده می‌سازد. آنچه بایستۀ گفتن دراین زمینه بوده، استادانه به‌رشتۀ تحریر کشیده و ازگزافه گویی به کنار مانده است. همین روش پسندیدۀ او مارا برآن داشت‌تااین اثر پرارج وی را به‌پارسی برگردانیم.

دربرگرداندن این کتاب برآن شدیم تا دوبخش جبر وآنالیزرا ازیکدیگر جداسازیم. درچاپ نخست، بخش جبر در دوجلد و قسمتی از آنالیز دریك جلد انتشار یافت و اینك چاپ دوم بخش جبررا دریك جلد دردسترس دوستارانش می‌گذاریم.

چون درمتن اصلی کتاب تمرین گنجانده نشده است، برای آنکه فهم مطالب آسان‌تر گردد درچاپ دوم بیش‌ازدویست مسأله گردآوری و به آن افزوده‌ایم. این مسائل باآنچه درکتاب آمده هماهنگی کامل دارد وبیش‌از نیمی ازآنها به عنوان نمونه حل شده است تا راهنمایی برای دانشجویان باشد.

امیداست که بااین کوشش خود، هرچند که بسیارناچیز است، درراه گسترش ریاضی‌در ایران گامی برداشته باشیم.

---

* J. Dixmier:

۱) Cours de Math. de 1er cycle, 1ère année; Gauthier - Villars; 1969

۲) Cours de Math. de 1er cycle, 2ème année; Gauthier-Villars; 1969

فهرست

موضوع | صفحه

فصل اول

مجموعه‌ها

فصل دوم

قوانین ترکیب

موضوع صفحه

فصل سوم

گروه‌ها

فصل چهارم

حلقه‌ها

موضوع صفحه

فصل پنجم
چندجمله‌ای‌های یک متغیری

فصل ششم
کسرهای گویای یک متغیری

موضوع | صفحه

فصل هفتم
چند جمله‌ای‌های چند متغیری

فصل هشتم
فضاهای برداری

موضوع	صفحه

موضوع صفحه

فصل یازدهم

دستگاه معادله‌های خطی

فصل دوازدهم

فضاهای آفین

فصل سیزدهم

گروه‌ها (متمم فصل سوم)

موضوع **صفحه**

فصل هفدهم

فرم‌های هرمیتی

فصل هیجدهم

فرم‌های چند خطی متناوب

فصل اول

مجموعه ها

ممکن است خواننده بابرخی از مفاهیم این فصل آشنا باشد . هدف ما یادآوری مطالب وبه‌ویژه تثبیت واژه‌هایی است که دراین کتاب بکار خواهیم برد .

۱ . ۱- تعلق

۱ . ۱ . ۲ - یک دسته ازاشیاء داده شده‌را یک **مجموعه** وهرشیئی آنرا یک **عنصر** مجموعه ویایک **نقطهٔ** مجموعه می‌نامند .

۱ . ۱ . ۱ - **مثال :**

۱ - **شمارهای طبیعی** (یا شمارهای درست و مثبت) یعنی ... , ۳ , ۲ , ۱ , ۰ یک مجموعه تشکیل می‌دهند که آنرا باحرف **N** نمایش می‌دهند .

۲ - شمارهای درست مثبت و منفی یعنی ... , ۳ , ۲ , ۱ , ۰ , ۱— , ۲— , ۳— , ... یک مجموعه تشکیل می‌دهند که آنرا با حرف **Z** می‌نمایند .

۳ - **شمارهای گویا** یک مجموعه تشکیل می‌دهند که آنرا با حرف **Q** نمایش می‌دهند .

٤ - **شمارهای حقیقی** تشکیل یک مجموعه می‌دهند که‌آنرا باحرف **R** می‌نمایند .

٥- **شمارهای مختلط** تشکیل یک مجموعه می‌دهند که باحرف **C** نموده می‌شود .

٦- نقاط واقع دریک صفحه تشکیل یک مجموعه می‌دهند .

۷- خطوط فضای معمولی تشکیل یک مجموعه می‌دهند .

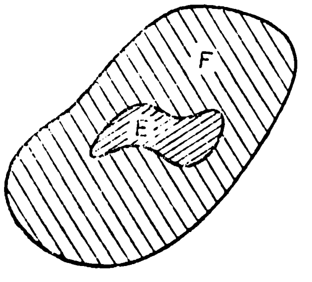
۱ . ۱ . ۳- اگر E یک مجموعه و x عنصری ازآن باشد ، عبارت « x عنصری است از E» راگاهی به‌صورت «x **متعلق است** به E» بیان می‌کنند و می‌نویسند $x \in E$. دراین صورت نفی $x \in E$ را به‌صورت $x \notin E$ می‌نویسند .

۱ . ۱ . ٤- مجموعه‌ای‌را که دارای هیچ عنصری نیست مجموعهٔ **تهی** می‌نامند وآن‌را با $\varnothing$ نمایش می‌دهند .

مجموعه‌ای را که تنها دارای یک عنصر x است با $\{x\}$ و مجموعه‌ای را که تنها دارای دوعنصر x و y است با $\{x , y\}$ نمایش می‌دهند . نمایش یک مجموعه سه‌عنصری ، چهار عنصری و ... نیز به روشی مشابه صورت می گیرد .

۱ . ۲ـ شامل ـ مشمول

۱ . ۲ . ۱ـ فرض می کنیم E و F دومجموعه باشند . گوییم F **شامل** E است (یا E **مشمول** F است، یا E **زیر مجموعهٔ** F است ویا E **بخشی** از F است) هرگاه هرعنصر E عنصری از F باشد دراین‌صورت می‌نویسیم $E\subset F$ ویا $F\supset E$.



شکل ۱

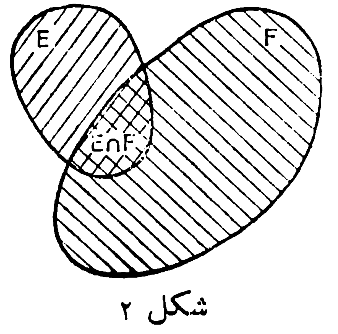
۱ . ۲ . ۲ـ **مثال** : مجموعهٔ شمارهای مختلط شامل مجموعه شمارهای حقیقی است :

$$\mathbf{R}\subset\mathbf{C} \text{ (ویا } \mathbf{C}\supset\mathbf{R})$$

۱ . ۲ . ۳ـ اگر $E\subset F$ و $F\subset G$ باشد داریم $E\subset G$.

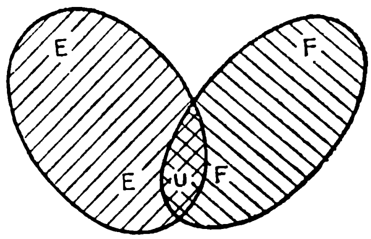
۱ . ۳ـ عملیات مقدماتی

۱ . ۳ . ۱ـ **مقطع دومجموعه** ـ مقطع دومجموعه E و F مجموعه همهٔ x هایی است که هم متعلق به E و هم متعلق به F می‌باشند . این مجموعه را با $E\cap F$ نشان می‌دهند ($E\cap F$ را بخوانید E مقطع F) . به همین ترتیب مقطع سه مجموعه E , F , G را با $E\cap F\cap G$ ومقطع چندمجموعه $E , F , G , \ldots , L$ را با $E\cap F\cap G\cap \cdots \cap L$ نمایش می‌دهند. اگر $E\cap F=\varnothing$ باشد گوییم که E و F **جدا** ازهم می‌باشند .



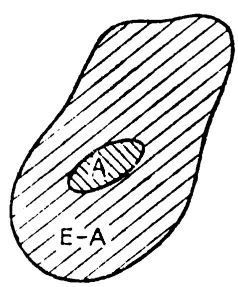
شکل ۲

۱ . ۳ . ۲- **اجتماع** - اجتماع دومجموعه E و F عبارت‌است‌از مجموعهٔ همهٔ xهایی که یا متعلق به E و یا متعلق به F و یا متعلق به‌هردوی آنها باشند . این مجموعه با $E\bigcup F$ نمایش داده می‌شود ($E\bigcup F$ را بخوانید E اجتماع F) . بهمین روش می‌توان اجتماع چندمجموعه $E , F \ldots , L$ را تعریف کرد وبه‌صورت $E\bigcup F\bigcup G\bigcup \cdots \bigcup L$ نمایش داد .



شکل ۳

۱ . ۳ . ۳- **مکمل** - فرض می‌کنیم E یک‌مجموعه و A بخشی‌از E باشد. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی‌از E مانند x راکه به A تعلق ندارند **مکمل A نسبت به E** و **باماندهٔ A از E** می‌نامیم وبا $E-A$ و یـا $\complement_E A$ نشان می‌دهیم. چنانچه مجموعهٔ E را بشناسیم بجای $\complement_E A$ علامت $\complement A$ را بکار خواهیم برد ($\complement A$ را بخوانید مکمل A در E) .



شکل ٤

۱ . ٤- ویژگی‌های عملیات مقدماتی

۱ . ٤ . ۱- مقطع و اجتماع ویژگی **جابجایی** دارند ، به‌عبارت دیگر :

$$E\bigcup F=F\bigcup E \quad , \quad E\bigcap F=F\bigcap E$$

۱ . ٤ . ۲- مقطع واجتماع دارای ویژگی **انجمنی** هستند ، به‌عبارت دیگر :

$$E\bigcap(F\bigcap G)=(E\bigcap F)\bigcap G \quad , \quad E\bigcup(F\bigcup G)=(E\bigcup F)\bigcup G$$

۱ . ٤ . ۳- مقطع نسبت به‌اجتماع دارای ویژگی **پخشی** است ، به‌عبارت دیگر :

$$E\bigcap(F\bigcup G)=(E\bigcap F)\bigcup(E\bigcap G)$$

اثبات ـ فرض می‌کنیم x عنصری از $E\cap(F\cup G)$ باشد . پس $x\in E$ و $x\in F\cup G$. از $x\in F\cup G$ نتیجه می‌شود که $x\in F$ و یا $x\in G$. اگر $x\in F$ باشد $x\in E\cap F$ است و اگر $x\in G$ باشد داریم $x\in E\cap G$ ، بنابراین درهردوصورت خواهیم داشت :

$$x\in(E\cap F)\cup(E\cap G)$$

به‌وارون فرض می‌کنیم x عنصری است از $(E\cap F)\cup(E\cap G)$. اگر $x\in E\cap F$ باشد خواهیم‌داشت $x\in E$ و $x\in F$ پس $x\in F\cup G$ وازآنجا $x\in E\cap(F\cup G)$. چنانچه $x\in E\cap G$ باشد خواهیم داشت $x\in E$ و $x\in G$ پس $x\in F\cup G$ وسرانجام داریم :

$$x\in E\cap(F\cup G)$$

۱ . ۴ . ۴ـ اجتماع نسبت به‌مقطع دارای ویژگی پخشی‌است ، به‌عبارت دیگر :

$$E\cup(F\cap G)=(E\cup F)\cap(E\cup G)$$

اثبات این‌مطلب مانند قسمت پیش است وبه خواننده واگذار می گردد .

۱ . ۴ . ۵ـ مکمل اجتماع چند مجموعه برابراست با مقطع مکمل های این مجموعه‌ها و مکمل مقطع چند مجموعه برابر با اجتماع مکمل های این مجموعه‌ها ست (مکمل‌ها همیشه نسبت به‌یک‌مجموعه که همه مجموعه‌های موردنظر را دربردارد گرفته می‌شوند) . به‌عبارت دیگر برای هردوبخش A و B از E داریم :

$$\complement_E(A\cup B)=(\complement_E A)\cap(\complement_E B) \quad , \quad \complement_E(A\cap B)=(\complement_E A)\cup(\complement_E B)$$

اثبات ـ فرض می‌کنیم x عنصری‌از $\complement_E(A\cup B)$ باشد دراینصورت داریم $x\in E$ و $x\notin A\cup B$. پس $x\notin A$ و $x\notin B$ ، بنابراین $x\in\complement_E A$ و $x\in\complement_E B$ وازآنجا :

$$x\in(\complement_E A)\cap(\complement_E B)$$

به‌وارون‌اگر x عنصری‌از $\complement_E A\cap\complement_E B$ باشد خواهیم‌داشت $x\in\complement_E A$ و $x\in\complement_E B$. پس $x\in E$ ، $x\notin A$ ، $x\notin B$؛ بنابراین $x\in E$ و $x\notin A\cup B$ ودرنتیجه $x\in\complement_E(A\cup B)$.
به‌این‌ترتیب فرمول اول ثابت می‌شود . برای‌اثبات فرمول دوم درفرمول‌اول $\complement_E A$ و $\complement_E B$ را به‌ترتیب‌جایگزین A و B می کنیم دراین‌صورت باتوجه‌به‌اینکه مکمل‌مکمل یک‌مجموعه برابر باخودآن‌مجموعه‌است خواهیم داشت $\complement_E(\complement_E A\cup\complement_E B)=A\cap B$. به‌عبارت دیگر $\complement_E A\cup\complement_E B=\complement_E(A\cap B)$ ودرنتیجه فرمول دوم اثبات می‌شود .

۱ . ۵ ـ حاصل‌ضرب مجموعه‌ها

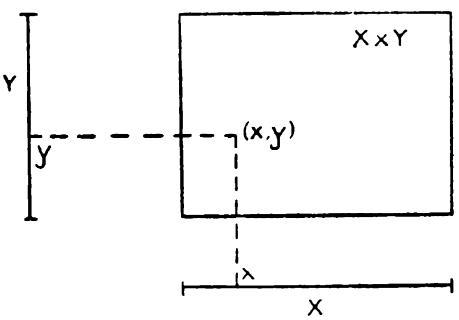
۱.۵.۱ـ اگر x و y دوشیی‌باشند، دنبالۀ دوعنصری را (برای‌تعریف دنباله به‌شماره ۱.۱۰.۱ رجوع شود) که عنصر اول‌آن x وعنصر دوم آن y باشد **جفت** x و y می‌نامیم

وبا (x و y) نشان می‌دهیم . بنابراین داریم $(x , y) \neq (y , x)$. مفهوم جفت (x , y) را نباید بامفهوم‌مجموعهٔ $\{x , y\}$ که درشماره ۱ . ۱ . ۴ تعریف‌شد یکی گرفت زیرا درمورد مجموعه $\{x , y\}$ داریم $\{x , y\} = \{y , x\}$.

۱ . ۵ . ۲- فرض می‌کنیم X و Y دومجموعه‌باشند. مجموعهٔ همهٔ جفت‌های (x,y) را به‌قسمی که $x \in X$ و $y \in Y$ باشد ، مجموعه **حاصل‌ضرب** X و Y می‌نامند و آنرا با $X \times Y$ نمایش می‌دهند .

۱ . ۵ . ۳- **مثال** - مجموعهٔ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ را درنظرمی‌گیریم . عنصرهای این‌مجموعه‌همهٔ جفت های (x,y) تشکیل‌شده از دوشمار حقیقی x و y هستند. برای درك بهتر این‌موضوع دریک‌صفحه P یکدستگاه محورهای‌مختصات درنظرمی‌گیریم وبه‌هرجفت (x,y) از $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ نقطه‌ای به‌مختصات xوy دراین‌صفحه وابسته می‌کنیم . بدین‌ترتیب $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ باصفحه P یکی گرفته می‌شود .

برای‌حاصلضرب دومجموعهٔ دلخواه‌هم می‌توان مثال بالارا درنظر داشت .



شکل ۵

۱ . ۵ . ۴ - **تعمیم** - با n شیئی x_1 ، x_2 ، . . . ، x_n می‌توان یک دنبالهٔ مرتب $(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ تعریف کرد . مجموعه‌های X_1 ، X_2 ، . . . ، X_n را درنظر می‌گیریم . مجموعهٔ همهٔ دنباله های مرتب $(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ را که برای آنها $x_1 \in X_1$ ، $x_2 \in X_2$ ، . . . ، $x_n \in X_n$ باشد؛ **حاصلضرب** مجموعه‌های X_1، X_2 ، . . . ، X_n می‌نامند وبا $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ نمایش می‌دهند .

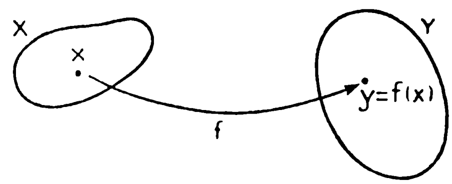
۱ . ۵ . ۵ - اگر $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ باشد ، حاصلضرب $X_1 \times X_2 \cdots \times X_n$ را با X^n نمایش می‌دهند . مثلا $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ با $\mathbf{R}^2$ نشان داده می‌شود .

۱ . ۵ . ۶ - اگر x ، y و z سه شیئی دلخواه باشند می‌توان $((x , y), z)$ را با (x , y , z) یکی گرفت . دراین‌صورت اگر X ، Y و Z سه مجموعه باشند مجموعهٔ $(X \times Y) \times Z$ را با $X \times Y \times Z$ یکی‌می‌گیرند . همچنین $((X \times Y) \times Z) \times T$

با $X \times Y \times Z \times T$ یکی گرفته می‌شود و . . . به‌عنوان مثال $\mathbf{R}^۲ \times \mathbf{R}$ با $\mathbf{R}^۳$ یکی‌است .

۱ . ۶ـ توابع

۱ . ۶ . ۱ـ دومجموعه X و Y را درنظرمی گیریم . هرقانونی که به هرعنصر ازمجموعهٔ X یک‌عنصر معین‌از Y را نسبت‌دهد یک **تابع** رویX بامقادیر واقع در Y نامیده می‌شود . مجموعهٔ X را **مجموعهٔ تعریف** تابع می‌نامیم . اگر f یک چنین تـابع ، x عنصری از X و y عنصر وابسته به x در Y باشد ؛ گوییم y **سایهٔ** x **به‌وسیله** f است ومی‌نویسیم $y = f(x)$. تابع f را گاهی **یک‌گسترش** X **در** Y نیز می‌نامیم وبه‌صورت $x \to f(x)$ می‌نویسیم .



شکل ۶

۱ . ۶ . ۲ـ مثال :

۱ـ اگر $Y = \mathbf{R}$ باشد گوییم f یک **تابع حقیقی** است . اگر $X = \mathbf{R}$ باشد ویـا به‌بیان کلی‌تر، اگر X بخشی‌از $\mathbf{R}$ باشد گوییم f یک **تابع با متغیر حقیقی** است . ما دراین‌درس بیشتر ازتوابع حقیقی بامتغیر حقیقی گفتگو خواهیم کرد . خواننده بـا مثال‌های زیادی ازاین گونه توابع آشنائی دارد. مثلا : $x \to x^۳$ یک تابع حقیقی است کـه در $\mathbf{R}$ تعریف شده است (یعنی مجموعهٔ تعریف آن $\mathbf{R}$ است) ؛

$x \to \frac{۲x+۱}{x-۳}$ تابعی‌است حقیقی که در $\mathbf{R} - \{۳\}$ تعریف شده است ؛

$x \to \sqrt{x}$ تابعی‌است حقیقی که برای $x \geqslant 0$ تعریف شده است .

برای سادگی این توابع را به‌ترتیب با $x^۳$ ، $\frac{۲x+۱}{x-۳}$ و $\sqrt{x}$ نشان می‌دهند گرچه این‌طرز نمایش کاملا درست نیست .

۲ـ برای هرجفت (x , y) از شمارهای حقیقی قرار می‌دهیم :

$$f(x , y) = x \sin(x^۲ + y^۲)$$

بدین‌ترتیب یک تابع f با مقادیر واقع در $\mathbf{R}$ تعریف کرده‌ایم که مجموعهٔ تعریف آن $\mathbf{R}^۲$

می‌باشد. یک‌تابع تعریف‌شده دربخشی‌از $\mathbf{R}^2$ را یک **تابع دومتغیری حقیقی** می‌نامند. به همین روش می‌توان توابع چند متغیری حقیقی‌را تعریف کرد .

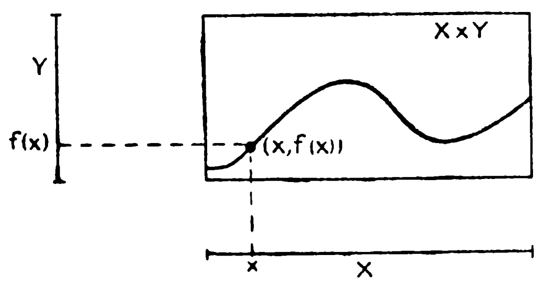
۳- حرکت وهمسانی (یاتجانس) هرکدام یک‌گسترش صفحه (فضا) درصفحه(فضا) می‌باشند. درصفحهٔ P یک‌انعکاس به‌مرکز O یک‌گسترش $P-\{O\}$ در $P-\{O\}$ است.

۴- مجموعهٔ E را درنظر می‌گیریم. گسترش $x \to x$ مجموعهٔ E در E را **گسترش همانی** می‌نامند و با id_E نمایش می‌دهند . بطورکلی اگر F بخشی‌از E باشد، $x \to x$ یک‌گسترش F در E است‌که **گسترش‌همانی F در E** نامیده می‌شود .

۵- فرض می‌کنیم f یک‌گسترش X در Y و X' بخشی‌از X باشد . اگر برای هر $x \in X'$ قراردهیم $f'(x)=f(x)$ دراین‌صورت f' یک‌گسترش X' در Y معین‌می‌کند که آنرا **تحدید** f به X' می‌نامند .

۱ . ۶ . ۳- **علامت‌گذاری** - برای سادگی بجای عبارت «f یک‌گسترش X در Y است» می‌نویسیم $f: X \to Y$ یا $X \xrightarrow{f} Y$ (هیچگونه بستگی بین‌این‌پیکان وپیکانی‌که برای نمایش حد بکارمی‌برند وجود ندارد). این علامت را با علامت $x \to f(x)$ که قبلا تعریف‌کرده‌ایم نباید اشتباه نمود .

۱ . ۶ . ٤- **نمودار یک‌تابع** - فرض‌می‌کنیم f یک‌گسترش X در Y باشد. هنگامی که x مجموعهٔ X را می‌پیماید جفت‌های $(x\,,\,f(x))$ بخشی‌از مجموعهٔ $X \times Y$ را تشکیل می‌دهندکه آنرا **نمودار** f می‌نامند . اگر f یک تابع حقیقی با متغیر حقیقی باشد تعریف بالا همان‌تعریف معمولی نمودار تابع است .



شکل ۷

۷.۱- ترکیب گسترشها

۱ . ۷ . ۱- فرض می‌کنیم X و Y و Z سه‌مجموعه و $f: X \to Y$ ، $g: Y \to Z$ دوگسترش باشند. گسترش $x \to g(f(x))$ مجموعه X در Z را **ترکیب g و f** می‌نامند ویا $g\circ f$ نشان می‌دهند (چنانچه باضرب معمولی اشتباه نشود $g\circ f$ را به صورت gf نیز نشان می‌دهند) .

۱ . ۷ . ۲- **مثال-** فرض می‌کنیم $X=Y=Z=\mathbf{R}$ و $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x^{2}$ باشد. داریم $(g\circ f)(x)=(\sin x)^{2}=\sin^{2}x$ و $(f\circ g)(x)=\sin(x^{2})$ به‌طوری که دیده می‌شود درحالت کلی $g\circ f\neq f\circ g$ است .

۱ . ۷ . ۳ - **تعمیم** - اگر گسترش های :

$$f_1 : X_1 \to X_2 \ , \ f_2 : X_2 \to X_3 \ , \ \ldots \ , \ f_n : X_n \to X_{n+1}$$

را داشته باشیم می‌توان ترکیب این گسترشها را تشکیل داد :

$$f_n\circ f_{n-1}\circ \cdots \circ f_2\circ f_1 : X_1 \to X_{n+1}$$

این ترکیب دارای ویژگی انجمنی است . یعنی :

$$f_1\circ(f_2\circ f_3)=(f_1\circ f_2)\circ f_3=f_1\circ f_2\circ f_3$$

۱ . ۷ . ٤ - اگر X یک مجموعه و f یک گسترش X در X باشد می‌توان $f\circ f$ و $f\circ f\circ f$ و . . . را تشکیل داد . چنانچه اشتباهی باضرب معمولی رخ ندهد این گسترش ها را با f^{2} و f^{3} و . . . نشان می‌دهند .

۱ . ۸ - گسترش‌های انژکتیو - سورژکتیو - بی‌ژکتیو

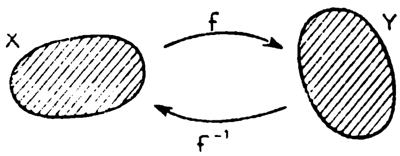
۱ . ۸ . ۱- فرض می کنیم f یک گسترش X در Y باشد .

الف- گوییم f **انژکتیو** است، اگرهردوعنصرمتمایزاز X دارای سایه‌های متمایز در Y باشند. به‌عبارت دیگر گسترش f انژکتیو است اگر ازبرابری $f(x)=f(x')$ (که درآن $x\in X$ و $x'\in X$) برابری $x=x'$ نتیجه شود .

ب - گوییم f **سورژکتیو** است ویا f یک گسترش X **روی** Y است اگر هرعنصر Y دست کم سایهٔ یک‌عنصر X بوسیله f باشد .

پ- گوییم f **بی‌ژکتیو** (یا **دوسویی**) است اگر f هم انژکتیو وهم‌سورژکتیوباشد. یک گسترش دوسویی X درخودش را یک **تبدیل** X می‌نامند .

۱ . ۸ . ۲ - **گسترش وارون یک گسترش‌دوسویی** - فرض‌میکنیم $f : X \to Y$ یک گسترش دوسویی و y عنصری‌از Y باشد ، چون f سورژکتیو است دست کم یک عنصر x از X وجوددارد به‌قسمی که‌داریم $y=f(x)$. به‌علاوه عنصر x یکتاست زیرا f انژکتیو نیزمی‌باشد. اگر عنصر x که بدین‌ترتیب به y وابسته می گردد با $g(y)$ نمایش داده شود یک گسترش Y در X تعریف‌می گردد که آنرا g می‌نامیم. گسترش g را گسترش **وارون** f می‌نامند وبا f^{-1} نشان می‌دهند .



شکل ۸

اگر x عنصری از X باشد ، تنها عنصر X که سایهٔ آن بوسیله f بر f(x) منطبق می‌شود همان عنصر x است . بنابراین :

$$f^{-1}(f(x))=x \qquad (۱)$$

به‌عبارت دیگر :

$$f^{-1}\circ f=id_X$$

اگر $y\in Y$ باشد برحسب تعریف $f^{-1}(y)$ داریم :

$$f((f^{-1}(y))=y \qquad (۲)$$

به‌عبارت دیگر :

$$f\circ f^{-1}=id_Y$$

اگر $x\in X$ و $y\in Y$ باشد خواهیم داشت :

$$y=f(x) \iff x=f^{-1}(y) \qquad (۳)$$

۳.۸.۱- **مثال** - قرارمی‌دهیم $X=Y=\mathbf{R}$ و $f(x)=x^3$. گسترش $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ انژکتیو است زیـرا از $x^3=x'^3$ نتیجه می‌شود $x=x'$. هم چنین f سورژکتیو است زیـرا هرشمار حقیقی ریشه سوم یک‌شمار حقیقی‌می‌باشد. پس f دارای یک گسترش وارونg‌است. اگر y متعلق‌به $\mathbf{R}$ باشد $g(y)$ شماری‌است‌حقیقی‌به‌قسمی که $(g(y))^3=y$، به‌عبارت‌دیگر:

$$g(y)=\sqrt[3]{y}$$

(به‌طوری که‌دیده‌می‌شود این f^{-1} با $\frac{1}{f}$ کاملا متفاوت است ، بنابراین باید در بکار بردن علامت f^{-1} رعایت احتیاط را نمود) .

۴.۸.۱ - **قضیه - فرض می کنیم X و Y دومجموعه و $f:X\to Y$ و $g:Y\to X$ دو گسترش باشند به‌طوری که داشته‌باشیم $g\circ f=id_X$. دراین‌صورت f انژکتیو و g سورژکتیو است.**

اثبات - فرض‌می‌کنیم x و x′ متعلق به X باشند وداشته باشیم $f(x)=f(x')$.

بنابراین خواهیم‌داشت $g(f(x))=g(f(x'))$ یعنی $x=x'$ ، پس f انژکتیو است. همچنین اگر u عنصری از X باشد داریم $u=g(f(u))$ پس u سایهٔ عنصر $f(u)$ از Y بوسیله g است. بنابراین g سورژکتیو است.

۱.۸.۵ - قضیه ـ فرض می‌کنیم X و Y دومجموعه و $f: X \to Y$ و $g: Y \to X$ دو گسترش باشند به‌قسمی که داشته باشیم $g \circ f = id_X$ و $f \circ g = id_Y$. دراین‌صورت f و g دوسویی است وداریم $f=g^{-1}$ ، $g=f^{-1}$.

اثبات ـ بااستفاده از ۱.۸.۴ ، f انژکتیو و g سورژکتیو وهمچنین g انژکتیو و f سورژکتیو است. بنابراین f و g دوسویی هستند. ازطرف دیگر اگر y عنصری از Y باشد از برابری $f(g(y))=y$ برمی‌آید که $g(y)=f^{-1}(y)$. پس $g=f^{-1}$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $f=g^{-1}$.

۱.۸.۶- تبصره ـ هرگاه $f: X \to Y$ یک گسترش دوسویی باشد f^{-1} نیز دوسویی است و داریم $f=(f^{-1})^{-1}$.

زیرا $f^{-1} \circ f = id_X$ و $f \circ f^{-1} = id_Y$ وبا استفاده از ۱.۸.۲ کافی است که قضیهٔ ۱.۸.۵ را بادرنظرگرفتن $g=f^{-1}$ به‌کار بریم.

۱.۸.۸ - قضیه ـ فرض می‌کنیم X و Y دومجموعهٔ باپایان n عنصری و f یک گسترش X در Y باشد ، شرطهای زیر هم‌ارزند :

(I)- f انژکتیو است

(II)- f سورژکتیو است

(III)- f دوسویی است

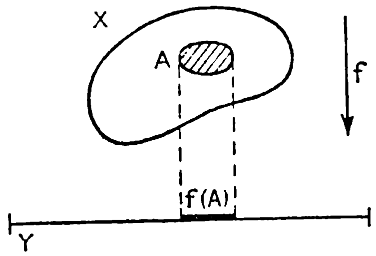
اثبات ـ $(I) \Longleftrightarrow (II)$: برای‌اینکه f سورژکتیو باشد بایا وبسنده‌است که $f(X)$ نیز دارای n عنصرباشد ، به‌عبارت‌دیگر شمارهٔ عنصرهای X برابر باشمارهٔ عنصرهای $f(X)$ باشد ، پس بایا وبسنده است که f انژکتیو باشد.

چون‌شرط (III)مجموع دوشرط (I)و (II)است به‌آسانی دیده می‌شود که‌شرط(III) هم‌ارز باهریک‌ازشرطهای (I) و (II) است.

۱ . ۹ ـ سایهٔ مستقیم وسایهٔ وارون

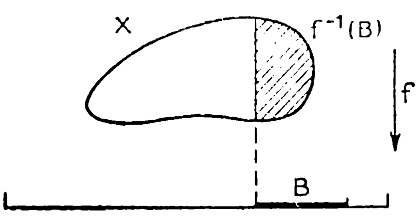
فرض می کنیم $f : X \to Y$ یک گسترش باشد .

۱ . ۹ . ۱ ـ اگر $A \subset X$ باشد مجموعهٔ تمام عنصرهای $f(x)$ از Y را هنگامیکه x همه A را می پیماید، **سایهٔ مستقیم** A **به‌وسیله** f ویا **سایهٔ** A **به‌وسیلهٔ** f می‌نامند وآن‌را با $f(A)$ نمایش می‌دهند . مجموعهٔ $f(X)$ را **مجموعهٔ مقادیر** f و دربرخی حالات‌برای سادگی **سایهٔ** f می‌نامند . عبارت «f سورژکتیو است» بیان‌می کند که $f(X) = Y$ است .



شکل ۹

۱ . ۹ . ۲ - اگر $B \subset Y$ باشد مجموعهٔ تمام نقطه های x از X را به قسمی که $f(x) \in B$ باشد ، **سایهٔ وارون** B **به‌وسیله** f می‌نامند. سایهٔ وارون B بوسیله f را با $f^{-1}(B)$ نمایش می‌دهند (هرچند که ممکن است f^{-1} همیشه معین نباشد) . چنانچه B تنها دارای یک عنصر b باشد بجای $f^{-1}(\{b\})$ به نوشتن $f^{-1}(b)$ اکتفا می کنیم .



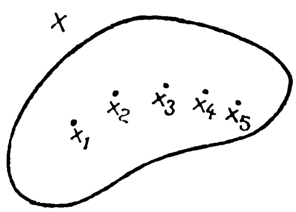
شکل ۱۰

۱ . ۹ . ۳ـ اگر f دوسویی‌باشد، علامت $f^{-1}(B)$ دومعنی‌دارد: اول آنکه $f^{-1}(B)$ سایهٔ وارون B بوسیله f است که آن‌را I می‌نامیم . دوم‌آنکه $f^{-1}(B)$ سایهٔ B بوسیلهٔ گسترش f^{-1} است که آن‌را با I' نمایش می‌دهیم . البته مجموعه های I و I' یکی هستند . زیرا اگر $x \in I$ باشد ، $y = f(x)$ عنصری‌از B است وچون $x = f^{-1}(y)$ است پس $x \in I'$.

به وارون اگر $x\in I'$ باشد خواهیم داشت $x=f^{-1}(y)$ که در آن y عنصری از B است وچون $f(x)=y$ است پس $x\in I$.

۱ . ۱۰- خانواده

۱.۱۰.۱- مجموعهٔ E داده شده است. **یک دنبالهٔ n عنصری** از X بدین ترتیب بدست می‌آید که به هرشمارهٔ i $(i=1, 2, \ldots, n)$ یک عنصر x_i از X نسبت دهیم. بنابراین یک دنبالهٔ n عنصری یک گسترش $\{1, 2, \ldots, n\}$ در X است. اگر x این گسترش را نشان دهد، باید مقادیر x را به صورت $x(1), x(2), \ldots, x(n)$ نوشت؛ ولی معمولا این مقادیر را به صورت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ می‌نویسند (این طرز نوشتن را اندیس گذاری می‌نامند) وچنین دنباله‌ای را بصورت $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ویا $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ نشان می‌دهند.



شکل ۱۱

۲.۱۰.۱- تعریف یک **دنبالهٔ بی‌پایان** به روشی مشابه است. بدین معنی که یک دنبالهٔ بی‌پایان ازعنصرهای X یک گسترش $\{1, 2, 3, \ldots\}$ در X می‌باشد. یک چنین دنباله‌ای با $(x_1, x_2, \ldots)$ ویا $(x_i)_{i\geqslant 1}$ نموده می‌شود. همچنین میتوان جمله‌های دنباله را از اندیس ۰، ۲، ... ویا n شروع کرد. اگر $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ یک دنبالهٔ کاملاً افزایشی ازشمارهای مثبت باشد وقرار دهیم:

$$x_{p_1}=y_1 \ , \ x_{p_2}=y_2 \ , \ x_{p_3}=y_3 \ , \ \ldots$$

دراین صورت دنبالهٔ $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ یک دنبالهٔ **استخراج شده** از دنبالهٔ $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ نامیده می‌شود.

۳.۱۰.۱- **تعمیم** - گیریم X یک مجموعهٔ دلخواه و I مجموعهٔ دیگری باشد که آنرا مجموعهٔ اندیس ها می‌نامیم. یک گسترش I در X را برحسب تعریف **یک خانواده از**

عنصرهای X اندیس‌دار شده با I می‌نامند. چنین خانواده‌ای را با $(x_i)_{i\in I}$ ودر صورتی که اشتباهی رخ ندهد تنها با (x_i) نمایش می‌دهند . دومفهوم خانواده وگسترش تفاوتی ندارند وتنها ازدو دید مختلف درنظر گرفته شده‌اند .

۱ . ۱۰ . ٤- یک **خانواده مجموعه** خانواده‌ای است که هرعنصر آن یک مجموعه باشد. برای چنین خانواده‌ای می‌توان مفاهیم اجتماع و مقطع را ، که تاکنون برای شماره باپایانی ازمجموعه‌ها تعریف‌شده است، تعمیم داد. اجتماع خانواده مجموعهٔ $(X_i)_{i\in I}$ که آنرا با $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$ ویا بطور اختصار با $\bigcup X_i$ نشان می‌دهند ، عبارت از مجموعه اشیایی است که هریک‌ازآنها دست‌کم به‌یکی از X_iها تعلق داشته باشد و مقطع X_iها که آن را با $\bigcap\limits_{i\in I} X_i$ ویا با $\bigcap X_i$ نشان می‌دهند ، مجموعهٔ اشیایی‌است که هریک‌ازآن‌ها متعلق به همهٔ X_i ها باشد .

۱۱.۱- بستگی هم‌ارزی

۱ . ۱۱ . ۱- فرض می‌کنیم E یک‌مجموعه باشد . هرویژگی که مربوط به‌جفت های (x, y) ازعنصرهای مجموعهٔ E باشد یک **بستگی دوتایی در** E نامیده می‌شود .

۱ . ۱۱ . ۲- **مثال :**

۱- اگر E مجموعهٔ خطوط واقع دریک‌صفحه و D و D' متعلق به E باشد عبارت «D بر D' عمود است» یک‌بستگی دوتایی در E است .

۲- اگر مجموعهٔ بردارهای فضا را با E نمایش دهیم عبارت «دوبردار $\vec{V}$, $\vec{W}$ همسنگ هستند» یک بستگی‌دوتایی در E است .

۳ - اگر E مجموعهٔ نقاط یک صفحه و $\triangle$ خطی‌از این صفحه باشد عبارت «نقاط M و N دارای یک تصویر قائم روی $\triangle$ هستند» یک‌بستگی دوتایی در E می‌باشد.

٤- فرض می‌کنیم E مجموعهٔ شمارهای مثبت‌ومنفی یعنی $\mathbf{Z}$ و a عنصری‌از $\mathbf{Z}$باشد. اگر n و n' دوعنصراز $\mathbf{Z}$ باشند، گوییم که n' و n **بامقیاس a برابرند** ومی‌نویسیم $n\equiv n' \pmod a$ هرگاه $n'-n$ بر a بخش‌پذیر باشد . دراین‌صورت عبارت «n و n' بامقیاس a برابرند» یک بستگی‌دوتایی در $\mathbf{Z}$ است.

۱.۱۱.۳- فرض می‌کنیم R یک‌بستگی دوتابی درمجموعهٔ E باشد (برای سادگی، هنگامی‌که جفت (x , y) دربستگی R صدق کند می‌نویسیم xRy) . گوییم که R یک **بستگی هم‌ارزی** است، هرگاه :

۱- بستگی R **بازتابی** باشد یعنی برای هرعنصر x از E داشته باشیم xRx .

۲- بستگی R **متقارن** باشد یعنی برای هردوعنصر x و y از E داشته باشیم :

$$xRy \implies yRx$$

۳- بستگی R **متعدی** باشد یعنی برای‌هر x ، y و z متعلق‌به E داشته باشیم:

$$(xRy \text{ و } yRz) \implies xRz$$

هنگامیکه R یک‌بستگی هم‌ارزی باشد ، عبارت xRy را چنین میخوانند «x و y نسبت به R هم‌ارزند» .

۱.۱۱.٤- درمثال ۱ شمارهٔ ۱.۱۱.۲ بستگی‌متقارن‌است ولی‌بازتابی ومتعدی نیست. همهٔ‌بستگی‌هایی‌که درمثالهای ۲ و ۳ و ٤ همین‌شماره دیده‌شد بستگی‌های هم‌ارزی‌اند. درمثالهای ۲ و ۳ این‌مطلب آشکار است وبرای مثال‌چهارم آنرا ثابت‌می‌کنیم. اگر $n \in \mathbf{Z}$ باشد داریم $n-n=0.a$ پس بستگی بازتابی است . اگر $n \in \mathbf{Z}$ و $n' \in \mathbf{Z}$ و $k \in \mathbf{Z}$ چنان باشندکه داشته باشیم $n-n'=ka$ ، خواهیم‌داشت $n'-n=(-k)a$ پس بستگی متقارن است . اگر n ، n' ، n'' ، k ، k' متعلق به Z باشد بطوریکه داشته باشیم $n-n'=ka$ و $n'-n''=k'a$ خواهیم داشت :

$$n-n''=(n-n')+(n'-n'')=(k+k')a$$

پس بستگی متعدی است .

۱.۱۱.٥ - **مثال کلی بستگی هم‌ارزی** - مجموعهٔ E را درنظر میگیریم وفرض می‌کنیم (X_i) یک‌خانواده ازبخش‌های E باشد به‌قسمی‌که‌اجتماع آن‌ها برابر با E ومقطع دو X_i متمایز تهی باشد . برای هردو عنصر x و y از E که متعلق به‌یک X_i باشند مینویسیم xRy دراین‌صورت R یک‌بستگی هم‌ارزی در E است .

۱ - فرض می‌کنیم $x \in E$ باشد چون داریم $\bigcup X_i = E$ بنابراین یک اندیس i وجود دارد به‌قسمی که $x \in X_i$ باشد دراین‌صورت خواهیم داشت xRx . یعنی R بازتابی است .

۲- روشن است که R متقارن میباشد .

۳- فرض میکنیم x ، y و z متعلق به E باشند و داشته باشیم xRy و yRz دراین‌صورت x و y هردومتعلق به‌یک X_i و y و z هردو متعلق به‌یک X_j می‌باشند. چون $y\in X_i\cap X_j$ است و دو X_i متمایز جدا ازهم‌اند ، پس داریم $X_i=X_j$ ، واز آنجا نتیجه می‌شود که x و z هردومتعلق به X_i می‌باشند وبستگی xRz برقرار است . پس R متعدی است .

درشماره ۹.۱۱.۱ خواهیم دید که مثال‌بالا کلی‌ترین صورت بستگی هم‌ارزی است.

۶.۱۱.۱ - **کلاسهای‌هم ارزی** - فرض می‌کنیم R یک بستگی هم‌ارزی روی مجموعهٔEباشد. اگر $x\in E$باشد، مجموعهٔ‌عنصرهای $y\in E$راکه نسبت‌به R با x هم‌ارزند کلاس هم‌ارزی x می‌نامند .

۷.۱۱.۱- درمثال ٤ شمارهٔ ۲.۱۱.۱ کلاس هم‌ارزی یک شمار n عبارت است از مجموعهٔ $\{\ldots, n-۲a, n-a, n, n+a, n+۲a, \ldots\}$ که **به‌کلاس هم‌ارزی n بامقیاس** a موسوم است. یک کلاس هم‌ارزی n بامقیاس a را یک **شمار درست** با مقیاس a نیز می‌نامند .

۸.۱۱.۱- **قضیه** ــ فرض می‌کنیم R یک‌بستگی هم‌ارزی در E باشد. اگر کلاس هم‌ارزی x نسبت‌به R را با C_x بنماییم داریم :

$$x\in C_x \qquad \text{—(I)}$$

$$.xRy \iff C_x=C_y \iff C_x\cap C_y\neq\varnothing \qquad \text{—(II)}$$

اثبات ــ چون داریم xRx پس $x\in C_x$. بنابراین (I) برقرار است . برای‌اثبات قسمت دوم به‌روش دَوری عمل می‌کنیم .

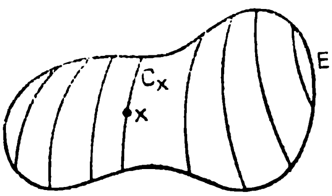
۱- فرض می‌کنیم بستگی xRy برقرار باشد . اگر $z\in C_y$ باشد خواهیم داشت yRz وازآنجا xRz . بنابراین $z\in C_x$ ویا $C_y\subset C_x$. همچنین داریم yRx پس $C_x\subset C_y$ ودرنتیجه $C_x=C_y$.

۲- فرض می‌کنیم $C_x=C_y$. دراینصورت $C_x\cap C_y=C_x$ ، که بادرنظرگرفتن (I) داریم $C_x\neq\varnothing$.

۳- فرض می‌کنیم $C_x\cap C_y\neq\varnothing$. بنابراین عنصری مانند z متعلق‌به $C_x\cap C_y$

وجود دارد به‌قسمی که داریم xRz و yRz واز آنجا خواهیم داشت zRy و در نتیجه xRy .

۱.۱۱.۹- به‌این‌ترتیب بااستفاده از (I) ثابت می‌شود که اجتماع کلاسهای هم‌ارزی برابر با E است و بنابرقسمت (II) دو کلاس هم‌ارزی متمایز ، جدا ازهم‌اند. بعلاوه تنها هنگامی بستگی xRy برقراراست که x و y هردو متعلق به‌یک کلاس هم‌ارزی باشند . بنابراین به‌صورت دیگری ازمثال ۱.۱۱.۵ می‌رسیم .



شکل ۱۲

۱.۱۱.۱۰ - **مجموعهٔ خارج قسمت** - بامفروضات پیش، کلاسهای هم‌ارزی‌نسبت به R یک‌مجموعه تشکیل می‌دهند که به **مجموعهٔ خارج قسمت E بر R** موسوم است وبا E/R نشان‌داده می‌شود .

۱.۱۱.۱۱ -**گسترش کانونیک E در E/R** - برحسب تعریف گسترش $x \to C_x$ مجموعهٔE در E/R گسترش کانونیک E در E/R نامیده‌می‌شود. این گسترش سورژکتیو است ، زیرا هرعنصر E/R یک کلاس هم‌ارزی است .

اگر $u \in E/R$ باشد ، هرعنصر دلخواه از E را که متعلق به u است یک **نماینده** u می‌نامند .

۱ . ۱۲- تجزیهٔ کانونیک یک گسترش

۱.۱۲.۱- فرض‌می‌کنیم $f: X \to Y$ یک گسترش باشد. اگر xRy را همان‌برابری بگیریم، روشن‌است که R یک‌بستگی هم‌ارزی در X است. اگر s گسترش کانونیک X در X/R باشد این گسترش سورژکتیو است (۱.۱۱.۱) . چنانچه i گسترش همانی $f(X)$ در Y باشد به‌آسانی دیده می‌شود که این گسترش انژکتیو است .

قضیه :

(I) — تنها یک گسترش h از X/R در $f(X)$ وجود دارد به‌قسمی که $f=i\circ h\circ S$ باشد .

(II) — گسترش h دوسویی است .

(III) — اگر u عنصری‌از X/R باشد سایهٔ آن بوسیلهٔ h برابر با سایهٔ یک نمایندهٔ دلخواه u بوسیلهٔ f است .

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & Y \\ X/R \arrow[r, "h"'] & f(X) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

شکل ۱۳

اثبات ـ فرض می‌کنیم u عنصری‌از X/R باشد ، یک نمایندهٔ x از u را انتخاب می‌کنیم . می‌خواهیم نشان دهیم که $f(x)$ بستگی به‌نمایندهٔ انتخاب شده نداشته و تنها بستگی به u دارد که دراین‌صورت می‌توان قرارداد $f(x)=h(u)$. به‌این‌ترتیب گسترش h از X/R در $f(X)$ که دارای ویژگی (III) است معین می‌گردد .

اگر x' یک‌نمایندهٔ دیگری‌از u باشد، x و x' متعلق به‌یک کلاس هم‌ارزی هستند وبرحسب تعریف داریم $f(x)=f(x')$. یعنی $f(x)$ به‌نمایندهٔ انتخاب‌شده بستگی‌ندارد .

چنانچه a متعلق به X باشد ، عنصر a یک‌نمایندهٔ $s(a)$ است وچون بنابه‌تعریف h داریم $h(s(a))=f(a)$ درستی‌برابری $i(h(s(a)))=h(s(a))$ آشکاراست. پس‌خواهیم داشت $f=i\circ h\circ s$.

فرض می‌کنیم h' یک گسترش دیگر X/R در $f(X)$ باشد به‌قسمی که داشته‌باشیم $f=i\circ h'\circ s$. می‌خواهیم نشان‌دهیم که برای هرعنصر u از X/R داریم :

$$h(u)=h'(u)$$

اگر x یک‌نمایندهٔ u باشد $u=s(x)$ است وبعلاوه :

$$h(u)=i(h(u))=i(h(s(x)))=f(x)$$

$$h'(u)=i(h'(u))=i(h'(s(x)))=f(x)$$

پس (I) برقرار است .

برای اثبات درستی (II) به‌روش زیر عمل می‌کنیم :

فرض می‌کنیم y عنصری از $f(X)$ باشد. در این‌صورت عنصری مانند x در X وجود دارد به‌قسمی که داریم $y=f(x)$ ویا $y=i(h(s(x)))=h(s(x))$ ، پس h سورژکتیو است . گیریم u و u' متعلق‌به X/R باشند به‌طوری که داشته باشیم $h(u)=h(u')$. چنانچه x یک‌نمایندهٔ u و x' یک‌نمایندهٔ u' باشد ، خواهیم داشت :

$$h(u)=f(x) \quad , \quad h(u')=f(x')$$

پس $f(x)=f(x')$ یعنی x و x' دریک کلاس هم‌ارزی نسبت‌به R واقع‌اند . به‌عبارت دیگر $u=u'$ است. پس گسترش h انژکتیو است.

۱. ۱۲. ۲- تجزیه $f=i\circ h\circ s$ را **تجزیهٔ کانونیک** f می‌نامند . به‌طوری که دیده می‌شود هر گسترش f را می‌توان به‌سه گسترش s و h و i تجزیه کرد به‌قسمی که گسترشهای s و i ازنوع ویژه‌ای می‌باشند و گسترش h دوسویی است .

۱۳.۱- بستگی ترتیبی

۱. ۱۳. ۱- فرض می‌کنیم X یک‌مجموعه باشد. بستگی $x\leqslant y$ در X یک **بستگی ترتیبی** نامیده می‌شود ، هرگاه :

۱- برای هر $x\in X$ داشته باشیم $x \leqslant x$

۲- برای هرسه‌عنصر x و y و z از X ، $(x \leqslant y \ , \ y \leqslant z) \Longrightarrow x \leqslant z$

۳- برای هردوعنصر x و y از X ، $(x \leqslant y \ , \ y \leqslant x) \Longrightarrow x=y$

دراین‌صورت X را یک‌مجموعهٔ **مرتب‌به‌وسیله** بستگی $\leqslant$ می‌نامند. اگر $x \leqslant y$ و $x \neq y$ باشد می‌نویسند $x < y$ ویا $y > x$. بستگی $x \leqslant y$ را بـه‌صورت $y \geqslant x$ نیز می‌نویسند .

۱. ۱۳. ۲- مثال :

۱- اگر $X=\mathbf{R}$ باشد بستگی معمولی $\leqslant$ بستگی‌ترتیبی است.

۲- اگر X مجموعهٔ بخش های یک‌مجموعهٔ A باشد . بستگی $x \subset y$ بین عنصرهای X یک‌بستگی ترتیبی است .

۳- اگر $X=\{1 , 2 , 3 , \ldots\}$ باشد «y بر x بخش‌پذیر است» یک‌بستگی ترتیبی بین عنصرهای X است.

۱.۱۳.۳- **مجموعهٔ تماماً مرتب**- اگر X مجموعهٔ مرتبی باشد ، دوعنصر x و y را بایکدیگر **سنجیدنی** می‌نامند ، چنانچه یکی‌از بستگی‌های $x \leqslant y$ و $y \leqslant x$ برقرار باشد. هرگاه هردوعنصردلخواه X بایکدیگرسنجیدنی‌باشند، می‌گویند X **تماماً مرتب** است. درمثال ۱ بالا مجموعه X تماماً مرتب‌است، امامثالهای ۲ و ۳ دارای این‌ویژگی‌نیستند.

۱.۱۳.۴- **توابع افزایشی** - فرض می‌کنیم X و Y دومجموعهٔ مرتب ، f یک گسترش X در Y و x و y دوعنصر دلخواه از X باشند . گوییم :

الف - f **افزایشی** است اگر $x<y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$

ب - f **کاملاً افزایشی** است اگر $x<y \Longrightarrow f(x) < f(y)$

پ - f **کاهشی** است اگر $x<y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$

ت - f **کاملاً کاهشی** است اگر $x<y \Longrightarrow f(x) > f(y)$

ث - f **یک‌نوا** ست اگر f افزایشی ویاکاهشی باشد .

ج - f **کاملایک‌نوا** است اگر f کاملاً افزایشی ویاکاملاً کاهشی باشد .

۱.۱۳.۵- **تعریف فاصله در R**-دوعنصر a و b از $\mathbf{R}$ را به‌طوری‌که $a \leqslant b$ باشد درنظر می‌گیریم :

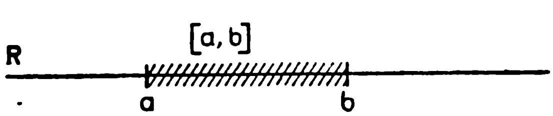
مجموعهٔ شمارهای حقیقی x را به‌طوری‌که $a \leqslant x \leqslant b$ باشد با $[a , b]$ ،

مجموعهٔ شمارهای حقیقی x را به‌طوری‌که $a<x<b$ باشد با $]a , b[$ ،

مجموعهٔ شمارهای حقیقی x را به‌طوری‌که $a \leqslant x<b$ باشد با $[a , b[$ ،

مجموعهٔ شمارهای حقیقی x را به‌طوری‌که $a<x \leqslant b$ باشد با $]a , b]$ ،

نشان می‌دهیم .



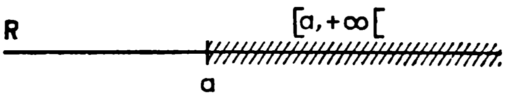
شکل ۱۴

این مجموعه هارا فاصلهٔ **به‌آغاز** a **و انجام** b (وگاهی‌به‌انجام‌های a و b) می‌نامند.

$[a , b]$ را فاصلهٔ **بسته** و $]a , b[$ را فاصلهٔ **باز** و $[a , b[$ و $]a , b]$ را فاصله‌های **نیم‌باز** می‌گویند.

مجموعهٔ نقاط x متعلق به $\mathbf{R}$ را وقتیکه $a \leqslant x$ است با $[a , +\infty[$ نشان‌می‌دهند. به‌همین‌روش $]a , +\infty[$ و $]-\infty , a]$ و $]-\infty , a[$ را تعریف می‌کنند. اغلب مجموعهٔ $\mathbf{R}$ را با $]-\infty , +\infty[$ نشان‌می‌دهند. این‌مجموعه‌هانیز فاصله نامیده‌می‌شوند. مثلاً $[a , +\infty[$ فاصلهٔ به‌آغاز a وانجام $+\infty$ می‌باشد.

یک‌نقطه‌ازیک‌فاصله‌را که متمایزازانجام‌های‌آن‌باشد، یک‌نقطهٔ **درون**فاصله‌می‌نامند.



شکل ۱۰

۱.۱٤ـ کران بالا ـ بزرگترین عنصر ـ کرانهٔ بالا

فرض می‌کنیم X یک‌مجموعهٔ مرتب و Y بخشی‌از X باشد.

۱.۱٤.۱ـ عنصر a از X را **یک‌کران‌بالای** بخش Y می‌نامند، اگربرای هرعنصر $y \in Y$ داشته باشیم $y \leqslant a$. چنانچه برای هرعنصر $y \in Y$ نابرابری $a \leqslant y$ برقرار باشد، a را **یک‌کران پایین** Y خوانند.

مثال ـ $X = \mathbf{R}$ را بابستگی ترتیبی معمولی درنظر می‌گیریم. بخش:

$$Y = [0 , +\infty[$$

دارای کران بالا نیست ولی تمام شمارهای منفی و صفر کران‌های پایین Y هستند.

اگر Y هم دارای کران بالا وهم‌دارای کران پایین باشد، آنرا **کراندار** می‌نامند.

۲.۱٤.۱ـ عنصر a از X را **بزرگترین عنصر** Y می‌گویند، اگر a متعلق به Y و یک کران بالای Y باشد. اگر Y دارای بزرگترین عنصر باشد این‌عنصر یکتاست. زیرا اگر a و a' هردو بزرگترین عنصر Y باشند، چون a یک کران بالای Y است پس‌داریم $a' \leqslant a$ وبه‌همین دلیل خواهیم داشت $a \leqslant a'$ وازآنجا $a = a'$ است. به‌همین‌ترتیب می‌توان **کوچکترین عنصر** Y را تعریف ویکتابودن آنرا ثابت کرد.

مثال ـ اگر $X = \mathbf{R}$ و $Y = [0 , 1[$ باشد، Y دارای کوچکترین عنصر (صفر) است، ولی دارای بزرگترین عنصر نیست.

۱.۱۴.۳- مفهوم کنارهٔ بالای Y که درزیر تعریف می‌شود، تعمیم مفهوم بزرگترین عنصراست ودرنتیجه دارای‌ویژگی‌های کمتری است. ولی‌برتری مفهوم کنارهٔبالا بربزرگترین عنصر این‌است که گاهی ممکن‌است کنارهٔ بالا **وجود** داشته باشد، امابزرگترین عنصروجود نداشته باشد.

کوچکترین‌عنصر مجموعهٔ کران‌های بالای Y را **کنارهٔ بالای** Y می‌نامند. اگر کنارهٔ بالا وجود داشته باشد یکتاست (۱.۱۴.۲). به‌روش مشابه می‌توان **کنارهٔ پایین** Y را تعریف کرد.

۱.۱۴.۴- قضیه- فرض‌می‌کنیم $a\in X$ باشد. چنانچه a بزرگترین‌عنصر Y باشد a کنارهٔ بالای Y و چنانچه a کنارهٔ بالای Y باشد a یک کران بالای Y خواهد بود (وارون قضیه درست نیست).

اثبات- درستی قسمت دوم قضیه روشن است. زیرا اگر a کناره بالای Y باشد a یک کران بالای Y است. برای اثبات قسمت‌اول گوییم اگر a بزرگترین عنصر Y باشد a یک کران بالای Y است. فرض می‌کنیم b یک کران بالای دیگر Y باشد، چون $a\in Y$ است داریم $a\leqslant b$ بنابراین a کوچکترین کران بالای Y می‌باشد. به‌عبارت دیگر a کناره بالای Y است.

۱.۱۴.۵- **مثال -** فرض‌می‌کنیم $X=\mathbf{R}$ و $Y=[0\ ,\ 1[$ باشد. روشن‌است که شمار ۱ کنارهٔ بالای Y است (ولی‌بزرگترین عنصر Y نیست زیرا $1\notin Y$).

۱.۱۴.۶- کنارهٔ بالای Y را درصورتی که وجودداشته باشد، با $\sup Y$ وکنارهٔپایین Y را درصورتی که وجود داشته باشد، با $\inf Y$ می‌نمایند.

۱.۱۴.۷- برای‌اینکه Y دارای کنارهٔ بالا باشد لازم است که Y دارای کران بالا باشد. درحالت کلی این‌شرط کافی نیست. باوجود این اگر یک بخش غیرتهی‌از $\mathbf{R}$ دارای کران بالا باشد دارای کنارهٔ بالاست. هم‌چنین اگر یک‌بخش غیرتهی از $\mathbf{R}$ دارای کران پایین باشد، دارای کنارهٔ پایین خواهد بود (رجوع شود به ۲.۲.۳ و ۲.۲.۴ کتاب آنالیز).

۱.۱۴.۸- فرض می‌کنیم که Y بخشی‌از $\mathbf{R}$ باشد. اگر Y دارای‌کران بالانباشد برحسب قرارداد گوییم که کنارهٔ بالای آن $+\infty$ است و اگر Y دارای کران پایین نباشد برحسب قرارداد گوییم که $-\infty$ کناره پایین آن است.

بااین قرارداد هربخش (با پایان ویا بی‌پایان) از $\mathbf{R}$ دارای کنارهٔ بالا وکنارهٔ پایین خواهد بود.

۱.۱٤.۹- قضیه ـ فرض می‌کنیم $Y \subset \mathbf{R}$ و a عنصری از $\mathbf{R}$ ویا $+\infty$ باشد. برای اینکه a کناره بالای Y باشد بایا و بسنده است که دوشرط زیر برای a برقرار باشد:

۱- برای هر $y \in Y$ داریم $a \geqslant y$.

۲- برای هرشمار b کوچکتر از a یك عنصر y متعلق به Y وجود دارد به‌قسمی که $y > b$.

اثبات ـ وقتی که Y دارای کران بالانیست قضیه روشن است. بنابراین فرض می‌کنیم که Y دارای کران بالاباشد. دراین‌صورت $+\infty$ کنارهٔ بالای Y نیست وبعلاوه $+\infty$ درشرط ۲ قضیه صدق نمی‌کند. پس فرض می‌کنیم که a عنصری از $\mathbf{R}$ است. باتوجه به‌اینکه b یك کران بالای Y نیست پس عنصری مانند y متعلق‌به Y وجود دارد به‌قسمی که داریم $b < y$، به‌این‌ترتیب شرطهای ۱ و ۲ بیان می‌کنند که a کناره بالای Y است.

۱.۱٤.۱۰- تعریف ـ فرض می‌کنیم E یك‌مجموعهٔ دلخواه و $f: E \to \mathbf{R}$ یك‌تابع‌حقیقی در E باشد. کنارهٔ بالای مجموعهٔ مقادیر f یعنی $\sup f(E)$ راکنارهٔ بالای f در E می‌نامند.

به‌همین‌ترتیب **کنارهٔ پایین** f **در** E تعریف می‌شود. این کناره‌ها همیشه وجود دارند و ممکن است با پایان و یا بی‌پایان باشند وآنها را به‌ترتیب به‌صورت‌های زیر نشان می‌دهند:

$$\sup_{x \in E} f(x) \quad , \quad \inf_{x \in E} f(x)$$

اگر $f(E)$ دارای کران بالا (کران پایین) باشد، گوییم که f در E دارای **کران بالا (کران پایین)** است. اگر f در E هم دارای کران بالا وهم دارای کران پایین باشد، گوییم که f **کراندار** است.

۱ . ۱۵ـ آنالیز ترکیبی

۱.۱۵.۱- قضیه-فرض‌می‌کنیم مجموعهٔ Y دارای p عنصر ومجموعهٔ X دارای n عنصر باشد و داشته باشیم $n \geqslant p$. در این‌صورت مجموعهٔ گسترش‌های انژکتیو Y در X دارای $n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-p+۱)$ عنصراست .

اثبات ـ اگر $y_۱$ ، $y_۲$ ، $\cdots$ ، y_p عنصرهای Y باشند ، برای تعیین یک‌گسترش انژکتیو Y در X بایا وبسنده است‌که مقادیر متمایز $f(y_۱)$ ، $f(y_۲)$ ، $\cdots$ ، $f(y_p)$ در X داده شده باشند . انتخاب $f(y_۱)$ به n صورت ممکن‌است . بعداز انتخاب $f(y_۱)$ می‌توان $f(y_۲)$ را به $n-۱$ روش برگزید . پس‌از انتخاب $f(y_۱)$, $f(y_۲)$ برگزیدن $f(y_۳)$ به $n-۲$ صورت امکان‌دارد . اگر به همین‌ترتیب عمل را ادامه دهیم ، به‌فرمول بالا می‌رسیم .

۲.۱۵.۱- مثال ـ فرض می‌کنیم $Y=\{۱ , ۲ , \ldots , p\}$ باشد . یک‌گسترش Y در X عبارت‌است ازیک‌دنبالهٔ p تایی ازعنصرهای X. همچنین یک‌گسترش **انژکتیو** Y در X یک‌دنباله p تایی‌ازعنصرهای X است به‌قسمی‌که p عنصراین‌دنباله متمایزباشند. چنین دنباله‌ای را یک **ترتیب p تایی ازعنصرهای** X نیز می‌نامند .

مثلاً ترتیب های‌دوتایی عنصرهای a ، b ، c و d عبارتنداز :

$$(a,b)\ ,\quad (a,c)\ ,\quad (a,d)\ ,\quad (b,a)\ ,\quad (b,c)\ ,\quad (b,d)\ ,$$
$$(c,a)\ ,\quad (c,b)\ ,\quad (c,d)\ ,\quad (d,a)\ ,\quad (d,b)\ ,\quad (d,c)\ .$$

چنانکه دیده می‌شود، شمارهٔ این‌ترتیب‌ها برابر با ۱۲ می‌باشد وبا قضیهٔ ۱.۱۵.۱ مطابقت دارد .

۳.۱۵.۱ - قضیه ـ چنانچه X یک مجموعهٔ n عنصری باشد ، شمارهٔ تبدیل های مجموعهٔ X برابر با $n! = ۱ \cdots (n-۲)(n-۱)n$ است ($n!$ را بخوانید فاکتوریل n) .

اثبات ـ درقضیهٔ پیش فرض می‌کنیم‌که $X=Y$ باشد . دراین‌صورت مجموعهٔ گسترش های انژکتیو X در X دارای $n!$ عنصر خواهد بود . ازطرف دیگر بااستفاده از شماره ۷.۸.۱ نتیجه می‌شود کـه گسترش‌های انژکتیو X در X همان تبدیل هـای X می‌باشند .

۴.۱۵.۱- مثال ـ فرض می‌کنیم $X=\{۱ , ۲ , \ldots , n\}$ باشد. یک تبدیل X

عبارت‌از شمارهای ۱ ، ... ، ۲ ، n است که به‌ترتیب معینی مرتب شده‌اند . مثلا تبدیل‌ های شمارهای ۱ و ۲ و ۳ عبارتند از (۱,۲,۳) ، (۱,۳,۲) ، (۲,۱,۳) ، (۲,۳,۱) ، (۳,۱,۲) و (۳,۲,۱). به‌طوری‌که دیده می‌شود شمارهٔ این‌تبدیل‌ها برابر با ۶ = !۳ می‌باشد .

۵.۱۰.۱- قضیه- مجموعهٔ X را که دارای n عنصر است در نظر می‌گیریم. چنانچه p شماری کوچکتر از n باشد ، شمارهٔ بخش‌های p عنصری مجموعهٔ X برابر با $\frac{n(n-۱)\cdots(n-p+۱)}{p!}$ است .

اثبات ــ A را مجموعهٔ گسترش‌های انژکتیو {۱ , ۲ , ... , p} در X می‌گیریم وفرض می‌کنیم B مجموعهٔ همهٔ بخش‌های p عنصری مجموعهٔ X باشد . برای‌هر f∈A سایهٔ {۱ , ۲ , ... , p} به‌وسیلهٔ f عنصری از B است . به‌این ترتیب یک گسترش A در B تعریف می‌شود که آنرا F می‌نامیم . برای هرعنصر Y از B (یعنی برای هربخش p عنصری مجموعهٔ X) شمارهٔ عنصرهای f∈A که برای آنها داریم F(f) = Y ، برابر است باشمارهٔ گسترش‌های دوسویی {۱ , ۲ , ... , p} روی Y . این‌شمار باتوجه به ۷.۸.۱ و ۱.۱۵.۱ برابر با !p است. پس‌اگر شمارهٔ عنصرهای B برابر با b باشد ، شمارهٔ‌عنصرهای A برابر با b · p! خواهد شد . از طرف دیگر می‌دانیم که شمارهٔ عنصرهای A برابر با n(n − ۱) · · · (n−p+۱) است (۱.۱۰.۱) . پس قضیه ثابت می‌شود .

۶.۱۰.۱- بخش‌ های p عنصری‌مجموعهٔ X را **ترکیب‌های p تایی عنصرهای** X نیز می‌نامیم . شمارهٔ این بخش‌ها ، که در ۵.۱۰.۱ داده شده است ، با C_n^p نموده می‌شود (دراینجا p را نباید با نما اشتباه کرد) . مثلا ترکیب‌ های دوتایی عنصرهای a , b ، c و d عبارتنداز :

$$\{a,b\}\ ,\ \{a,c\}\ ,\ \{a,d\}\ ,\ \{b,c\}\ ,\ \{b,d\}\ ,\ \{c,d\}$$

به‌طوری‌که دیده می‌شود شمارهٔ این‌ترکیب‌ها برابر است با $۶ = \frac{۴ \cdot ۳}{۲}$

۷.۱۰.۱- چنانچه صورت ومخرج عبارت C_n^p را در :

$$(n-p)(n-p-۱)\cdots ۱=(n-p)!$$

ضرب کنیم ، خواهیم داشت :

$$C_n^p=\frac{n!}{(n-p)!p!}$$

۱.۱۵.۸- داریم $C_n^n=C_n^0=۱$ ، زیرا تنها بخش n عنصری X عبارت‌از خود X است وتنهابخش X که دارای هیچ عنصرنباشد مجموعهٔ تهی می‌باشد . این‌شمار بااستفاده از ۱.۱۵.۷ نیز بدست می‌آید (بشرط اینکه $0!$ را بنابه‌قرارداد برابر بایک بگیریم) .

۱.۱۵.۹ - بااستفاده ازشماره ۱.۱۵.۷ چنین داریم :

$$C_n^۱=C_n^{n-۱}=n$$

$$C_n^۲=C_n^{n-۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

$$C_n^p=C_n^{n-p}$$

۱.۱۵.۱۰- قضیه ـ همواره دستور زیر برقرار است :

$$C_n^p=C_{n-۱}^p+C_{n-۱}^{p-۱}$$

اثبات ـ مجموعهٔ X راکه دارای n عنصراست درنظر می‌گیریم . عنصر x_0 از X را انتخاب کرده وفرض‌می‌کنیم B مجموعهٔ بخش‌های p عنصری‌مجموعهٔ X و B' مجموعهٔ بخش‌های p عنصری مجموعهٔ X که x_0 را دربردارند و B'' مجموعهٔ بخش‌های p عنصری مجموعهٔ X که x_0 را دربرندارند باشند . اگر b و b' و b'' به‌ترتیب شمارهٔ‌عنصرهای B و B' و B'' باشند، داریم :

$$b=b'+b'' \quad , \quad b=C_n^p$$

اما ازطرفی b'' برابر باشمارهٔ بخش‌های p عنصری مجموعهٔ $X-\{x_0\}$ و یا به‌عبارت دیگر برابربا $C_{n-۱}^p$ است،وازطرف‌دیگر هربخش p عنصری‌مجموعهٔ X که x_0 را دربردارد یک‌بخش $p-۱$ عنصری مجموعه $X-\{x_0\}$ را معین می‌کند وبه وارون . بنابراین داریم :

$$b'=C_{n-۱}^{p-۱}$$

درنتیجه دستور بالا به‌دست می‌آید.

۱۱.۱۵.۱ - C_n^p هارا درجدول زیر به‌قسمی مرتب می‌کنیم که n نمایندهٔ سطرها و p نمایندهٔ ستونها باشد :

$$
\begin{array}{llllll}
C_0^0 & & & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 - & C_4^3 & C_4^4 & \\
C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5
\end{array}
$$

بادرنظرگرفتن برابری‌های $C_n^0 = C_n^n = 1$ و $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ می‌توان هرسطر را با دردست داشتن سطرپیش حساب کرد .

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۰	۱								
۱	۱	۱							
۲	۱	۲	۱						
۳	۱	۳	۳	۱					
۴	۱	۴	۶	۴	۱				
۵	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱			
۶	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱		
۷	۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱	
۸	۱	۸	۲۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	۸	۱

این جدول‌را جدول **پاسکال** می‌نامند .

فصل دوم

قانونهای ترکیب

این فصل به‌تنهایی اهمیت چندانی ندارد. دراینجا هدف‌ما اثبات‌مطالبی ساده‌است که درموارد مختلف درفصل های سوم وچهارم وهشتم بکار خواهیم برد.

۲ . ۱- تعریف

۲ . ۱ . ۱- مجموعهٔ E داده شده است . اگر به هرجفت از عنصرهای E بتوانیم یک عنصراز E را نسبت دهیم گوییم که یک **قانون ترکیب در** E تعریف کرده‌ایم. درحقیقت هرقانون ترکیب یک گسترش $E \times E$ در E می‌باشد .

۲ . ۱ . ۲- **مثال** :

۱- چنانچه $E = \mathbf{R}$ باشد گسترش $(x , y) \rightarrow xy$ یک‌قانون ترکیب در $\mathbf{R}$ است .

۲- چنانچه $E = \mathbf{R}$ باشد گسترش $(x , y) \rightarrow x+y$ یک‌قانون ترکیب است.

۳- اگر E مجموعهٔ‌بخش‌های یک مجموعهٔ A باشد، $(x , y) \rightarrow x \cup y$ یک‌قانون ترکیب است .

۴- اگر E مجموعهٔ گسترش‌های یک مجموعهٔ A درخودش باشد ، $(f , g) \rightarrow f \circ g$ یک‌قانون ترکیب می‌باشد .

۲ . ۱ . ۳- ازنظر اهمیتی که مثال‌های ۱ و ۲ بالا دارند ، هنگامیکه قانون ترکیب مجردی‌را نیز بررسی‌می کنند، معمولا ترکیب‌دوعنصر xوy رابا $x . y$ ویا xy نمایش‌می‌دهند و **حاصل‌ضرب** دوعنصر x و y می‌نامند وچنین قانون ترکیبی‌را **ضربی** می گویند. گاهی نیز ترکیب دوعنصر x و y را با $x+y$ نشان می‌دهند و **حاصل‌جمع** دوعنصر x و y می‌نامند ودراین‌صورت قانون ترکیب‌را **جمعی** می گویند.

۲ . ۱ . ۴- **حاصل‌ضرب یک‌دنباله عنصرها** ـ فرض می کنیم E یک مجموعه باقانون ترکیب $(x,x) \rightarrow xy$ باشد . چنانچه $(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ یک دنباله از عنصرهای E باشد، به‌روش بازگشت روی n حاصل‌ضرب این‌عنصرهارا چنین تعریف‌می‌کنند:

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_1 (x_2 \cdots x_n)$$

این حاصل‌ضرب به‌صورت $\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ نشان داده می‌شود . اگر :

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$$

باشد، حاصل‌ضرب $x_1 x_2 \cdots x_n$ را با x^n نمایش می‌دهند . هرگاه قانون ترکیب جمعی باشد، به‌جای $x_1 x_2 \cdots x_n$ و $\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ و x^n به‌ترتیب :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{و} \quad nx$$

بکاربرده می‌شود .

۲ . ۱ . ۵ - **بخش پایدار** - فرض می‌کنیم A بخشی از E باشد . بخش A را ، نسبت به‌قانون ترکیب مجموعهٔ E ، **پایدار** می‌گوییم هرگاه داشته باشیم :

$$x \in A \ , \ y \in A \Longrightarrow xy \in A$$

دراین‌صورت گسترش $(x,y) \to xy$ مجموعه $A \times A$ در A یک‌قانون‌ترکیب در A است.

۲ . ۱ . ۶- **حاصل‌ضرب دوبخش E**- فرض‌می‌کنیم A و B دوبخش‌از E باشند . مجموعهٔ همهٔ عنصرهایی به‌صورت xy را که درآن $x \in A$ و $y \in B$ است ، با AB نشان می‌دهند (هنگامیکه قانون ترکیب جمعی باشد $A+B$ را به‌جای AB قرار می‌دهند) . چنانچه $A = \{x\}$ و $B = \{y\}$ باشد داریم $AB = \{xy\}$ ، که این همان قانون ترکیب مجموعهٔ E است. اگر $A = \{x\}$ و B یک‌بخش‌دلخواه E باشد به‌جای $\{x\}B$ می‌نویسند xB . همچنین Bx به‌جای $B\{x\}$ بکاربرده می‌شود .

۲ . ۱ . ۷ - مثلا اگر **R** را باقانون‌جمع درنظر بگیریم، داریم :

$$\{۱ \ , \ ۲\} + \{۴ \ , \ ۵\} = \{۵ \ , \ ۶ \ , \ ۷\}$$

۲ . ۱ . ۸ - **انتقال** - اگر x_0 عنصری از مجموعهٔ E باشد ، گسترش $x \to xx_0$ مجموعهٔ E در E را **انتقال راست به‌وسیلهٔ** x_0 می‌نامند. همچنین گسترش $x \to x_0x$ مجموعهٔ E در E را **انتقال چپ به‌وسیلهٔ** x_0 می‌گویند .

۲ . ۱ . ۹- مثلاً اگر مجموعهٔ E یک‌صفحه و O نقطهٔ ثابتی ازصفحه باشد. حاصل‌ضرب

دونقطهٔ M و 'M از E را نقطه‌ای مانند "M از E می‌گیریم که برای آن داشته باشیم :

$$\overrightarrow{OM''}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$$

دراین‌صورت انتقالی(راست یاچپ) که به‌وسیلهٔ M_0 معین می‌گردد ، یعنی :

$$\overrightarrow{OM} \to \overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{OM} \text{ یا } \overrightarrow{OM} \to \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM_0}$$

همان‌است که درهندسهٔ مقدماتی انتقال به‌بردار $\overrightarrow{OM_0}$ نامیده می‌شود .

۲.۲ـ قانون انجمنی

۱.۲.۲ ـگویند که قانون ترکیب $(x,y) \to xy$ در E ، **انجمنی** است ، اگر برای هرسه‌عنصر x و y و z از E داشته باشیم $(xy)z=x(yz)$. مثلاً قانون‌های ترکیبی که درشمارهٔ ۲.۱.۲ دیده شد ، انجمنی هستند .

۲.۲.۲ـ فرض می‌کنیم $(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_m)$ یک دنباله ازعنصرهای E باشد . این‌دنباله‌را به n دنبالهٔ جزئی‌زیر تقسیم می‌کنیم :

$$(x_1\,,x_2\,,\ldots\,,x_p)\ ,\ (x_{p+1}\ ,\ x_{p+2}\ ,\ \ldots\ ,\ x_q)\ ,\ \ldots\ ,$$
$$(x_{s+1}\ ,\ x_{s+2}\ ,\ \ldots\ ,\ x_m)$$

وقرار می‌دهیم :

$$y_1=x_1x_2\ldots x_p\ ,\ y_2=x_{p+1}x_{p+2}\ldots x_q\ ,\ \ldots\ ,$$
$$y_n=x_{s+1}x_{s+2}\ldots x_m$$

قضیه ـ اگرقانون ترکیب E انجمنی باشد داریم :

$$x_1x_2\ldots x_m=y_1y_2\ldots y_n$$

اثبات ـ برای $m=1$ قضیه روشن‌است . فرض می‌کنیم که قضیه‌را برای $m-1$ عنصر ثابت کرده باشیم. چنانچه قرار دهیم $y'_1=x_2x_3\ldots x_p$ ، خواهیم داشت :

$$x_2x_3\ldots x_m=y'_1y_2\ldots y_n \tag{1}$$

دراین‌صورت :

$$x_1x_2\ldots x_m=x_1(x_2x_3\ldots x_m) \quad \text{(باستفاده ازتعریف حاصل‌ضرب)}$$

[بنابه فرمول (۱)] $=x_1(y'_1y_2 \ldots y_n)$

(بنابه تعریف حاصل‌ضرب) $=x_1[y'_1(y_2 \ldots y_n)]$

(بااستفاده ازویژگی انجمنی) $=(x_1y'_1)(y_2 \ldots y_n)$

(بنابه‌تعریف حاصل‌ضرب) $=y_1(y_2 \ldots y_n)$

(بنابه‌تعریف حاصل‌ضرب) $=y_1y_2 \ldots y_n$

۲.۲.۳- نتیجه ـ اگرقانون ترکیب‌انجمنی باشد داریم :

$$x_1x_2 \ldots x_n=(x_1x_2 \ldots x_{n-1})x_n$$

که دستور دیگری برای محاسبه حاصل‌ضرب‌های متوالی است .

۲.۲.٤- نتیجه ـ اگر قانون ترکیب انجمنی و m و n شمارهای درست ومثبت باشند ، برای هر x متعلق‌به E داریم $x^mx^n=x^{m+n}$.

اثبات ـ ازتعریف حاصل‌ضرب داریم $x^mx^n=(xx \ldots x)(xx \ldots x)$ که پرانتز سمت‌چپ شامل m وپرانتز دیگرشامل n سازه x می‌باشد. پس بنابر شمارهٔ ۲.۲.۲ این حاصل‌ضرب شامل $m+n$ سازهٔ x است .

۲.۲.۵ - نتیجه ـ اگرقانون ترکیب انجمنی وm و n دوشمار درست ومثبت باشند ، برای هر x متعلق به E داریم $(x^m)^n=x^{mn}$.

اثبات ـ بنابه‌تعریف حاصل‌ضرب داریم :

$$(x^m)^n=(xx \ldots x)(xx \ldots x) \ldots (xx \ldots x)$$

که درآن n شمارهٔ پرانتزها وهر پرانتزشامل m سازهٔ x است . بااستفاده ازشمارهٔ ۲.۲.۲ دیده می‌شود که این‌حاصل‌ضرب شامل mn سازهٔ x می‌باشد .

۲.۲.٦- هنگامیکه قانون ترکیب جمعی باشد دونتیجهٔ ۲.۲.٤ و ۲.۲.۵ به‌صورت زیر نوشته می‌شوند :

$$mx+nx=(m+n)x \ , \ n(mx)=(mn)x$$

۲.۳ـ قانون ترکیب جابجایی

۲.۳.۱- چنانچه $(x,y) \to xy$ یک قانون ترکیب در E باشد ، دوعنصر x و y متعلق به E را **گردش‌پذیر** می‌نامیم، هرگاه داشته باشیم $xy=yx$. هنگامیکه هردو عنصر دلخواه E گردش‌پذیرباشند قانون ترکیب‌را **جابجایی** می گویند.

۲.۳.۲- درمثالهای ۱ و ۲ و ۳ شمارهٔ ۲.۱.۲ قانون‌های‌ترکیب جابجایی هستند. اما قانون ترکیب مثال ٤ شمارهٔ ۲.۱.۲ جابجایی نیست .

۳.۳.۲ - قضیه - اگر قانون ترکیب مجموعهٔ E انجمنی و جابجایی باشد، حاصل‌ضرب یک دنباله ازعنصرهای E بستگی به‌ترتیب آنها ندارد.

اثبات- فرض می‌کنیم $(i, j, k, \ldots, m)$ یک‌تبدیل از $\{1, 2, \ldots, n\}$ باشد ، باید ثابت کنیم :

$$x_1x_2 \ldots x_n = x_ix_jx_k \ldots x_m$$

بستگی بالا برای $n=1$ روشن‌است. فرض می‌کنیم که این‌بستگی برای یک‌دنبالهٔ $n-1$ عنصری‌نیز برقرار باشد ، پس داریم :

$$x_1x_2 \ldots x_{i-1}x_{i+1} \ldots x_n = x_jx_k \ldots x_m \tag{1}$$

چنانچه قرار دهیم :

$$x_1x_2 \ldots x_{i-1} = y \quad , \quad x_{i+1}x_{i+2} \ldots x_n = z$$

بااستفاده از دستور (۱) شماره ۲.۲.۲ خواهیم داشت :

$$yz = x_jx_k \ldots x_m \tag{2}$$

وازآنجا :

$x_ix_jx_k \ldots x_m = x_i(x_jx_k \ldots x_m)$ (بنابه‌تعریف حاصل‌ضرب)

$= x_i(yz)$ [بنابر دستور (۲)]

$= (x_iy)z$ (بنابر ویژگی انجمنی)

$= (yx_i)z$ (بنابر ویژگی جابجایی)

$= yx_iz$ (بنابر شماره ۲.۲.۲)

$= (x_1x_2 \ldots x_{i-1})x_i(x_{i+1}x_{i+2} \ldots x_n)$ (بنابه‌تعریف y و z)

$= x_1x_2 \ldots x_n$ (بنابرشمارهٔ ۲.۲.۲)

۲.۴- عنصر بی‌اثر

۲.۴.۱- چنانچه $(x,y) \to xy$ یک‌قانون ترکیب در E باشد ، عنصر e متعلق به E را (برای قانون ترکیب‌داده شده) عنصر بی‌اثر می‌نامند، هرگاه برای هر x متعلق به E داشته باشیم $xe=ex=x$.

۲.۴.۲- **مثال** - درمثال ۱ شمارهٔ ۲.۱.۲ شمار ۱ عنصر بی‌اثر است.
درمثال ۲ شمارهٔ ۲.۱.۲ شمار ۰ عنصر بی‌اثر است .
درمثال ۳ شمارهٔ ۲.۱.۲ مجموعه $\varnothing$ عنصر بی‌اثر است .
درمثال ۴ شمارهٔ ۲.۱.۲ گسترش id_A عنصر بی‌اثر است .

۲.۴.۳- قضیه - چنانچه عنصر بی‌اثر وجود داشته باشد این عنصر یکتاست .

اثبات - فرض می‌کنیم که e و $é$ دوعنصر بی‌اثر باشند ، داریم :

$$eé=\begin{cases} é & \text{زیرا } e \text{ عنصر بی‌اثر است} \\ e & \text{زیرا } é \text{ عنصر بی‌اثر است} \end{cases}$$

وازآنجا خواهیم داشت $e=é$.

۲.۴.۴- هنگامی که قانون ترکیب ضربی باشد اغلب به‌جای عنصر بی‌اثر (چنانچه این عنصر وجود داشته باشد) ۱ قرارمی‌دهند ودر حالتی که قانون ترکیب جمعی و عنصر بی‌اثر وجود داشته باشد ، معمولا آنرا با ۰ نمایش می‌دهند .

۲.۴.۵- فرض می‌کنیم که عنصر بی‌اثر e وجود داشته باشد . برای هر x متعلق به E قرار می‌دهیم $x^0=e$.

قضیه - چنانچه قانون ترکیب انجمنی و x متعلق به E باشد ، برای هردوشمار درست (بزرگتر ویا برابر باصفر) m و n داریم :

$$x^m x^n = x^{m+n} \quad , \quad (x^m)^n = x^{mn}$$

اثبات - درستی این قضیه را برای $m>0$ و $n>0$ درشماره ۲.۲.۴ دیدیم . اکنون آنرا برای $m=0$ و $n=0$ ثابت می‌کنیم :

۱ ـ اگر $m=0$ و $n>0$ باشد داریم :

$$x^m x^n = x^\circ x^n = e x^n = x^n = x^{m+n}$$

۲ ـ اگر $m>0$ و $n=0$ باشد داریم :

$$x^m x^n = x^m x^\circ = x^m e = x^m = x^{m+n}$$

۳ ـ اگر $m=n=0$ باشد داریم :

$$x^m x^n = x^\circ x^\circ = ee = e = x^\circ = x^{m+n}$$

برای اثبات $(x^m)^n = x^{mn}$ به روش مشابه عمل می‌کنیم .

۲ . ۵ ـ عنصر وارون

۲ . ۵ . ۱ ـ فرض می‌کنیم $(x,y) \to xy$ یک قانون‌ترکیب در E و e عنصر بی‌اثر این قانون باشد و این فرض را تا پایان شمارهٔ ۲ . ۵ برقرار می‌گیریم .

تعریف- دوعنصر x و x' از E را وارون یکدیگر گوییم هرگاه داشته باشیم :

$$xx' = x'x = e$$

(هنگامیکه قانون ترکیب جمعی باشد به جای واژهٔ **«وارون»** کلمهٔ **«قرینه»** را بکار می‌برند) .

۲ . ۵ . ۲ ـ مثال:

۱ ـ درمثال ۱ شمارهٔ ۲ . ۱ . ۲ ، اگر $x \neq 0$ باشد دوشمار x و $x' = \frac{1}{x}$ وارون یکدیگرند زیرا :

$$x'x = \frac{1}{x} x = 1$$

۲ ـ درمثال ۲ شمارهٔ ۲ . ۱ . ۲ دوشمار x و $-x$ قرینهٔ یکدیگرند زیرا داریم :

$$x + (-x) = 0$$

۳ ـ درمثال۳ شمارهٔ ۲ . ۱ . ۲ ، برای‌اینکه‌دوعنصر x و x' از E وارون یکدیگرباشند باید داشته باشیم $x \cup x' = \varnothing$ (این برابری تنها برای $x = x' = \varnothing$ برقرار است) .

۴- درمثال ۴ شمارهٔ ۲.۱.۲ ، دوگسترش x و x' وارون یکدیگرند اگر داشته باشیم:

$$x \circ x' = x' \circ x = id_A$$

با استفاده از شمارهٔ ۵.۸.۱ ، این بستگی می‌رساند که x و x' دوسویی و $x' = x^{-1}$ است.

۳.۵.۲ - روشن است که وارون عنصر بی‌اثر e خود e است. زیرا داریم:

$$ee = ee = e$$

۴.۵.۲ - تعریف - عنصر x از E را وارون‌پذیر گویند اگر x دارای یک عنصر وارون باشد.

۵.۵.۲ - مثال:

۱ - درمثال ۱ شمارهٔ ۲.۱.۲ تمام شمارهای مخالف باصفر وارون‌پذیرند.

۲ - درمثال ۲ شمارهٔ ۲.۱.۲ تمام شمارها دارای قرینه هستند.

۳ - درمثال ۳ شمارهٔ ۲.۱.۲ تنها مجموعهٔ $\varnothing$ وارون‌پذیر است.

۴ - درمثال ۴ شمارهٔ ۲.۱.۲ گسترش‌های دوسویی وارون‌پذیرند.

۶.۵.۲ - قضیه - فرض می‌کنیم قانون ترکیب انجمنی باشد. چنانچه عنصر x وارون‌پذیر باشد وارون آن یکتاست.

اثبات - اگر x' و x'' وارونهای x باشند داریم:

$$x'xx'' = \begin{cases} x'(xx'') = x'e = x' \\ (x'x)x'' = ex'' = x'' \end{cases}$$

و ازآنجا نتیجه می‌شود $x' = x''$.

(تا پایان شمارهٔ ۲.۵ فرض می‌کنیم که قانون E انجمنی است).

۷.۵.۲ - قرارداد - اگر عنصر x وارون‌پذیر باشد، درقانون ترکیب ضربی، وارون x را با x^{-1} ودرقانون ترکیب جمعی وارون x (یا به‌عبارت دیگر قرینهٔ x) را با $-x$ نشان می‌دهند.

۸.۵.۲ - قضیه - اگر x وارون‌پذیر باشد x^{-1} نیز وارون‌پذیر است و داریم $(x^{-1})^{-1} = x$.

زیرا $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

۲.۰.۹ - قضیه ـ اگر x و y وارون‌پذیر باشند xy نیز وارون‌پذیر است وداریم $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$.

اثبات- زیرا می‌توان نوشت :

$$(xy)(y^{-1}x^{-1})=x(yy^{-1})x^{-1}=xex^{-1}=xx^{-1}=e$$

$$(y^{-1}x^{-1})(xy)=y^{-1}(x^{-1}x)y=y^{-1}ey=y^{-1}y=e$$

۲.۰.۱۰ - نتیجه - چنانچه x_1 ، x_2 ، ... ، x_n وارون پذیر باشند $x_1x_2 \cdots x_n$ نیز وارون پذیراست وداریم :

$$(x_1x_2 \cdots x_n)^{-1}=x_n^{-1}x_{n-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}$$

این نتیجه با استفاده از روش بازگشت روی n و قضیهٔ پیش بدست‌می‌آید.

۲.۰.۱۱ - نتیجه - اگر x وارون پذیر و n شمار درست مثبت و یا برابر باصفر باشد x^n وارون پذیر است و داریم $(x^n)^{-1}=(x^{-1})^n$.

زیرا درحالت $n>0$ این نتیجه ازشمارهٔ ۲.۰.۱۰ ، با قراردادن :

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=x$$

به دست می‌آید وچنانچه $n=0$ باشد داریم :

$$x^n=(x^{-1})^n=e$$

۲.۰.۱۲ - قرارداد ـ اگر n شمار درست مثبتی باشد برای هرعنصر وارون پذیر x قرار می‌دهیم $x^{-n}=(x^{-1})^n$.

۲.۰.۱۳ - قضیه ـ فرض‌می‌کنیم عنصر x وارون‌پذیر و m و n متعلق به Z باشند. دراین‌صورت داریم :

$$x^mx^n=x^{m+n} \quad , \quad (x^m)^n=x^{mn}$$

اثبات ـ این قضیه را هنگامیکه $m\geqslant 0$ و $n\geqslant 0$ باشد ثابت‌کردیم . اگر $m<0$ و $n\geqslant 0$ باشد قرارمیدهیم $m'=-m>0$ پس خواهیم داشت :

$$x^mx^n=(x^{-1}x^{-1} \cdots x^{-1})(xx \cdots x)$$

که درآن پرانتز اول شامل m' سازه وپرانتز دوم شامل n سازه می‌باشد. چنانچه $n\geqslant m'$

باشد این حاصل‌ضرب برابر با $x^{n-m'}=x^{n+m}$ است و اگر n کوچکتر از m' باشد این حاصل‌ضرب برابر است با $(x^{-1})^{m'-n}=x^{-(m'-n)}=x^{m+n}$.

حالت $m\geqslant 0$ و $n<0$ نیز به‌روش مشابه اثبات می‌شود . چنانچه m و n هردو کوچکتر ازصفر باشند ، $x^m x^n$ برابر با حاصل‌ضرب $(m+n)-$ سازهٔ x^{-1} می‌باشد ، یعنی برابر با x^{m+n} است .

به‌روش مشابه می‌توان نشان داد که $(x^m)^n=x^{mn}$ است .

۲ . ۵ . ۱۴ - هنگامیکه قانون‌ترکیب‌جمعی‌باشدقضیهٔ ۲ . ۵ . ۱۳ بصورت‌زیردرمی‌آید :

$$(m+n)x=mx+nx$$

$$m(nx)=(mn)x$$

که درآن m و n متعلق به $\mathbf{Z}$ می‌باشند .

۲ . ۵ . ۱۰ - قضیه - چنانچه x یک عنصر وارون‌پذیر E باشدانتقالهای چپ که بوسیلهٔ x و x^{-1} در E تعریف می‌شوند دوسویی‌ووارون‌یکدیگرند .

اثبات ـ فرض می‌کنیم f و f' دوانتقال باشند. برای هرعنصر y در E داریم :

$$f'(f(y))=f'(xy)=x^{-1}(xy)=ey=y$$

$$f(f'(y))=f(x^{-1}y)=x(x^{-1}y)=ey=y$$

پس $f'\circ f=f\circ f'=id_E$ و با استفاده از شمارهٔ ۱ . ۸ . ۰ قضیه ثابت می‌شود .

درمورد انتقال راست نیز می‌توان قضیه‌ای مشابهٔ با قضیهٔ بالا بیان نمود .

۲ . ۵ . ۱۶ - قضیه ـ فرض می‌کنیم x یک عنصر وارون‌پذیر E باشد دراین‌صورت :

۱ - برابری‌های $y=x^{-1}z$ و $xy=z$ هم‌ارز می‌باشند .

۲ - برابری‌های $y=zx^{-1}$ و $yx=z$ هم‌ارز می‌باشند .

۳ - اگر $xx'=e$ باشد خواهیم داشت $x'=x^{-1}$.

٤ - چنانچه $x'x=e$ باشد خواهیم داشت $x'=x^{-1}$.

اثبات ـ قسمت اول از قضیهٔ شمارهٔ ۲ . ۵ . ۱۵ نتیجه می‌گردد . قسمت سوم‌حالت ویژه‌ای از قسمت اول است و قسمتهای دوم و چهارم به روش مشابهی اثبات می‌شوند .

۱۷.۰.۲ - **تبصره ـ** فرض می‌کنیم قانون‌ترکیب‌جابجایی وجمعی باشد. چنانچه $x\in E$ و $-x$ قرینهٔ آن وجود داشته باشد ، برای هرعنصر $z\in E$ عنصر :

$$(-x)+z=z+(-x)$$

بصورت $z-x$ نوشته می‌شود و بنابرشمارهٔ ۱۶.۰.۲ خواهیم‌داشت $z=x+(z-x)$.

۶.۲ ـ هومرفیسم

۱.۶.۲ - **تعریف ـ دومجموعهٔ E و E' که هریک ازآنها دارای یک قانون ترکیب است داده شده‌اند. قانون ترکیب E را با $\top$ وقانون ترکیب E' را با $\perp$ نمایش می‌دهیم. اگر f یک‌گسترش E در E' باشد ، گسترش f را یک‌هومرفیسم‌می‌نامند چنانچه برای هردوعنصر x و y از E داشته باشیم :**

$$f(x\top y)=f(x)\perp f(y)$$

۲.۶.۲ - **قضیه ـ اگر $f: E\to E'$ یک هومرفیسم باشد $f(E)$ یک بخش‌پایدار E' است .**

اثبات - فرض می‌کنیم x' و y' متعلق به $f(E)$ باشند . باید ثابت نمودکه $x'\perp y'$ نیزمتعلق به $f(E)$ است. چون x' و y' متعلق به $f(E)$ هستند پس عنصرهایی مانند x و y در E می‌توان یافت بطوریکه $x'=f(x)$ و $y'=f(y)$. بنابراین :

$$x'\perp y'=f(x)\perp f(y)=f(x\top y)\in f(E)$$

۳.۶.۲ - **قضیه - اگر $f: E\to E'$ و $f': E'\to E''$ دو هومرفیسم باشند $f'\circ f$ نیز یک هومرفیسم است .**

از اثبات این قضیه بجهت سادگی آن چشم می‌پوشیم .

۴.۶.۲ - **قضیه ـ اگر $f: E\to E'$ یک هومرفیسم دوسویی باشد f^{-1} نیز یک هومرفیسم دوسویی است .**

اثبات ـ بنابرشمارهٔ ۸.۰.۱ می‌دانیم‌که f^{-1} دوسویی است. فرض می‌کنیم x' و y' متعلق به E' باشند و قرارمی‌دهیم $f^{-1}(y')=y$ و $f^{-1}(x')=x$ ، دراین‌صورت خواهیم داشت $f(y)=y'$ و $f(x)=x'$ و ازآنجا :

$$x'\perp y'=f(x)\perp f(y)=f(x\top y)$$

یعنی $$f^{-1}(x' \perp y') = x \top y = f^{-1}(x') \top f^{-1}(y')$$

۵.۶.۲ - یک هومومرفیسم دوسویی E روی E' را **ایزومرفیسم** می‌نامند . اگر یک‌ایزومرفیسم E روی E' وجود داشته باشدگویند E و E' (نسبت به قوانین ترکیب داده شده) ایزومرف هستند .

۶.۶.۲ - **قضیه - بستگی « E و E' ایزومرف هستند » یک بستگی هم‌ارزی است .**

اثبات :

۱ - مجموعهٔ E با خودش ایزومرف است زیرا گسترش همانی یک ایزومرفیسم E روی E می‌باشد .

۲ - اگر ایزومرفیسم $f : E \to E'$ وجود داشته باشد بطوریکه‌دیدیم $f^{-1} : E' \to E$ نیز یک ایزومرفیسم است.

۳ - اگر ایزومرفیسم‌های $f : E \to E'$ و $f' : E' \to E''$ وجود داشته باشند $f' \circ f : E \to E''$ نیز یک ایزومرفیسم است .

۷.۶.۲ - یک هومومرفیسم E در E را **یک‌آندومرفیسم** E می‌نامند. همچنین یک ایزومرفیسم E روی E را **یک اتومرفیسم** E می‌گویند .

از تعاریف بالا نتیجه می‌شود :

$$\begin{tikzcd} \text{اتومرفیسم} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{ایزومرفیسم} \arrow[d, Rightarrow] \\ \text{آندومرفیسم} \arrow[r, Rightarrow] & \text{هومومرفیسم} \end{tikzcd}$$

فصل سوم
گروه‌ها

نظریه گروه بسیار وسیع است وبه نتایجی عمیق وموزون منتهی می گردد. دراین فصل ما تنها به بیان تعاریف ابتدایی ونتایج ساده‌ای چنداکتفا می کنیم . درحقیقت اگر دراین جا به گروه‌ها توجهی شده است تنها به‌این علت است که نظریهٔ گروه زیر بنای نظریهٔ حلقه‌ها و فضاهای برداری است .

۳ . ۱ ـ گروه

۳ . ۱ . ۱ ـ **تعریف ـ مجموعه‌ای که دارای یک قانون ترکیب باویژگی‌های زیر باشد گروه نامیده می‌شود :**

۱ ـ **قانون ترکیب انجمنی باشد.**

۲ ـ **یک عنصر بی‌اثر وجود داشته باشد.**

۳ ـ **هرعنصر ازمجموعه وارون‌پذیر باشد.**

به علاوه اگر قانون ترکیب دارای‌ویژگی‌جابجایی نیز باشدگروه را **گروه آبلی** یا **گروه جابجایی** می‌نامند .

۳ . ۱ . ۲ ـ شمارهٔ عنصرهای یک گروه **مرتبه** آن نامیده می‌شود . مرتبه یک گروه ممکن است با پایان ویا بی‌پایان باشد.

۳ . ۱ . ۳ ـ **مثال :**

۱ ـ مجموعهٔ $\mathbf{R}$ با قانون جمع یک گروه جابجایی است .

۲ ـ مجموعهٔ $\mathbf{R}$ با قانون ضرب یک گروه نیست ، زیرا عنصر ۰ وارون‌پذیر نمی‌باشد . اما مجموعه‌های $\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}-\{0\}$ و $\mathbf{R}^*=\mathbf{R}-\{0\}$ و $\mathbf{C}^*=\mathbf{C}-\{0\}$ باقانون ضرب تشکیل گروه می‌دهند و به‌علاوه این گروه‌ها جابجایی هستند .

۳ ـ اگر A یک مجموعه و M مجموعهٔ گسترش‌های A در A باشد ، معمولاً M با قانون ترکیب گسترش‌ها یک گروه نیست . اما زیر مجموعهٔ M که از تبدیل‌های A تشکیل می‌شود یک گروه است (درحالت کلی این گروه آبلی نیست) .

۴ - مجموعهٔ همانندی‌های فضا (با قانون ضرب همانندی‌ها) یک گروه است.
۵ - مجموعهٔ یک عنصری $\{e\}$ با قانون ترکیب $e \cdot e = e$ یک گروه است.
۶ - مجموعهٔ $\{e , a\}$ باجدول ترکیب زیر یک گروه‌است:

	e	a
e	e	a
a	a	e

(بررسی این مطلب ساده است و انجام آنرا به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. درآینده به‌همین گروه و یا به گروه ایزومرف با آن یعنی $\mathbf{Z}/۲\mathbf{Z}$ برخورد خواهیم کرد) .

۳ . ۲ - زیرگروه‌های یک گروه

۳ . ۲ . ۱ - فرض می‌کنیم G یک گروه ، e عنصر بی‌اثر آن و H بخشی از G باشد.

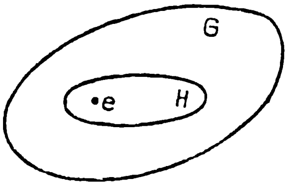
تعریف ـ H را زیرگروه G می‌نامند ، اگر دارای ویژگی‌های زیر باشد :

۱ - $e \in H$ باشد.

۲ - $\forall x , y \in H \Longrightarrow xy \in H$

۳ - $\forall x \in H \Longrightarrow x^{-1} \in H$

مجموعهٔ H با قانون ترکیب بالا که از قانون ترکیب G نتیجه شده است یک گروه می‌باشد ازاینجا دلیل نام گذاری « زیرگروه » روشن می گردد .



شکل ۱۶

۳ . ۲ . ۲ - **مثال** :

۱ - G یک زیرگروه G است .

۲ - $\{e\}$ یک زیرگروه G است .

۳ - گروه $G=\mathbf{R}$ را با قانون جمع درنظر می‌گیریم . مجموعه‌های $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Q}$ و مجموعهٔ شمارهای دهدهی زیرگروه‌های $\mathbf{R}$ هستند .

۴ - گروه $\mathbf{R}^*=\mathbf{R}-\{۰\}$ را با قانون ضرب درنظر می‌گیریم . مجموعهٔ شمارهای بزرگتر از صفر و مجموعهٔ $\{۱- , ۱\}$ از زیرگروه‌های $\mathbf{R}^*$ هستند .

۵ - فرض می‌کنیم G گروه همانندی‌های فضا باشد. مجموعهٔ حرکت‌ها ، مجموعهٔ انتقال‌ها، مجموعهٔ همسانی‌ها وانتقال‌ها، مجموعهٔ چرخش‌ها به‌دور یک خط ثابت ومجموعهٔ چرخش‌هایی که محورهای آنها از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند مثالهایی از زیرگروه‌های G هستند .

۶ - گروه $G=\mathbf{Z}$ را با قانون جمع درنظر میگیریم و فرض می‌کنیم a یک عنصر ثابت از $\mathbf{Z}$ باشد . مجموعهٔ همهٔ مضربهای a (یعنی مجموعهٔ همهٔ عنصرهای an هنگامی که n مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ را می‌پیماید) یک‌زیرگروه‌از $\mathbf{Z}$ است. بنابرتعریف کلی ۲ .۱ .۶ این زیر گروه را به‌صورت $a\mathbf{Z}$ می‌نویسند .

۳ .۲ .۳ - قضیه ـ اگر H یک زیرگروه ازگروه $\mathbf{Z}$ باشد ، یک شمار $a\geqslant ۰$ وتنها یکی وجود دارد به‌طوریکه داشته باشیم $H=a\mathbf{Z}$.

اثبات ـ برای $H=\{۰\}$ قضیه روشن‌است (a برابر باصفر است) . بنابراین‌فرض می‌کنیم که‌زیرگروه H دارای عنصرهای دیگری به غیرازصفر باشد . اگر مجموعهٔ شمارهای بزرگترازصفرومتعلق به H را با H' نشان‌دهیم، خواهیم داشت :

$$H=\{۰\}\bigcup H'\bigcup(-H')$$

پس H' تهی نیست . چنانچه کوچکترین عنصر H' را a بنامیم شمارهای $a+a=۲a$ و $۲a+a=۳a$ و . . . متعلق به H' هستند . به‌وارون اگر b متعلق به H' باشد شمارهای درست q و r وجود دارد به قسمی که داریم :

$$b=aq+r \ , \ a>r\geqslant ۰ \ , \ q\geqslant ۰$$

چون b و aq متعلق به H هستند پس $r=b-aq$ نیز عنصری‌از H خواهد بود. اگر $r>۰$ باشد ، شمار r متعلق به H' خواهد شد واین خلاف فرضی‌است که a کوچکترین عنصر H' است . پس داریم $r=۰$ و $b=aq$ و به‌این ترتیب :

$$H' = \{a, ۲a, ۳a, \cdots\}$$

از آنجا :

$$H = \{\cdots, -۳a, -۲a, -a, ۰, a, ۲a, ۳a, \cdots\} = a\mathbf{Z}$$

ازاستدلال بالا برمی‌آید که a کوچکترین شمار بزرگتراز صفر در H است، پس a یکتا می‌باشد .

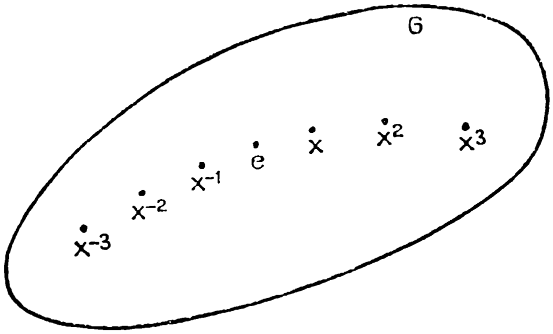
۳.۲.۴ - تبصره (برابری بزو) - چنانچه a و b دوشمار درست (مثبت یا منفی) و d بزرگترین بخشیاب مشترك آنها باشد، شمارهای درست u و v وجود دارند به‌طوریکه $d = au + bv$. به‌ویژه اگر a و b نسبت به‌هم اول باشند دوشماردرست u و v وجود دارند به قسمی که $au + bv = ۱$.

اثبات - مجموعهٔ شمارهای به صورت $au + bv$ را که درآن u و v متعلق به $\mathbf{Z}$ هستند با H نمایش می‌دهیم . به‌آسانی دیده می‌شود که H یك زیرگروه $\mathbf{Z}$ است . پس شماری مانند $n \geqslant ۰$ وجود دارد به قسمی که $H = n\mathbf{Z}$ باشد. اگر شماری a و b را بشمارد هرعنصر دلخواه از H به ویژه n را نیز خواهد شمرد . به‌وارون هرشماری که n را بشمارد همهٔ عنصرهای H به‌ویژه a و b را خواهد شمرد ، پس داریم $n = \pm d$ یعنی $d \in H$. بنابراین دو شمار درست u و v وجود دارند به قسمی که $d = au + bv$.

۳.۲.۵ - زیرگروه پدید آمده بوسیلهٔ یك عنصر - گروه G و عنصر x متعلق به G مفروض‌اند. اگر x متعلق به یك زیرگروه G باشد ناگزیر تمام عنصرهای $x^۲$ ، $x^۳$ ، $\cdots$ وهمچنین $x^{-۱}$ و درنتیجه $x^{-۲}$ ، $x^{-۳}$ ، $\cdots$ و همچنین e متعلق به آن زیرگروه خواهند بود. به‌عبارت ساده‌ترهرزیرگروه G که عنصر x را دربرداشته باشد شامل مجموعهٔ زیر است :

$$H = \{\cdots, x^{-۳}, x^{-۲}, x^{-۱}, e, x, x^۲, x^۳, \cdots\}$$

به علاوه به‌روشنی دیده می‌شود که H یك زیرگروه G است. بنابراین H کوچکترین زیر گروهی است‌از G که x را دربردارد وآنرا زیرگروه G **پدیدآمده به‌وسیلهٔ** x می‌نامند .



شکل ۱۷

چون برای هردوشمار درست m و n متعلق به **Z** داریم $x^m x^n = x^n x^m$ پس زیر گروه H جابجایی‌است. مرتبهٔ زیرگرو H را **مرتبهٔ** x می‌نامند.

۳ . ۳ ـ کلاس نسبت به یک زیرگروه

۱.۳.۳- قضیه ـ فرض‌می‌کنیم G یک‌گروه ، H یک‌زیرگروه از G و R بستگی $x^{-1}y \in H$ بین عنصرهای x و y متعلق به G باشد.

(I) – R یک بستگی هم‌ارزی است.

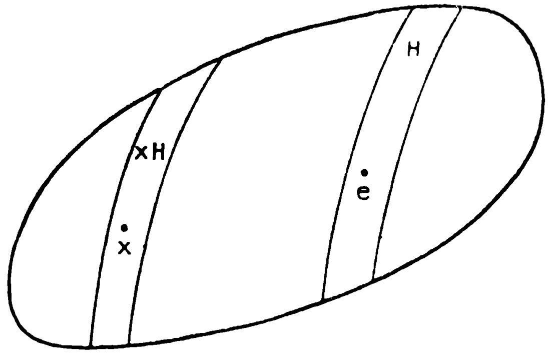
(II) — کلاس x نسبت به R مجموعهٔ xH است.

(III) — گسترش $y \to xy$ مجموعه H در xH یک‌گسترش‌دوسویی‌است.

اثبات ـ (I) ـ برای هرعنصر x متعلق به G داریم $xx^{-1} = e \in H$ پس بستگی R بازتابی است. اگر x و y متعلق به G و $x^{-1}y$ متعلق به H باشند خواهیم‌داشت $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in H$ پس بستگی R متقارن است. اگر x و y و z متعلق بـه G و $x^{-1}y$ و $y^{-1}z$ متعلق به H باشند خواهیم داشت $x^{-1}z = (x^{-1}y)(y^{-1}z) \in H$ بنابراین بستگی R متعدی است و درستی (I) ثابت می‌شود.

(II) – اگر x متعلق به G و y نسبت به R هم‌ارز x باشد ، داریم $x^{-1}y \in H$ پس $y = x(x^{-1}y) \in xH$. به وارون اگر y عنصری‌از xH باشد خواهیم‌داشت $y = xz$ که درآن $z = x^{-1}y$ متعلق به H می‌باشد و این درستی (II) را می‌رساند.

(III)— با استفاده از ۱۰.۵.۲ گسترش $y \to xy$ گروه G در G دوسویی‌است بنابراین تحدید این گسترش به H انژکتیو است . چون این‌گسترش H را به xH بدل می‌کند پس یک گسترش دوسویی H روی xH می‌باشد یعنی (III) برقرار است .



شکل ۱۸

۲.۳.۳ - اگر درقضیهٔ بالا بستگی R را $xy^{-1}\in H$ بگیریم قضیه‌ای شبیه ۱.۳.۳ خواهیم داشت که درآن Hx جایگزین xH می گردد .

۳.۳.۳- مجموعه هایی به‌صورت xH را **کلاس‌های چپ نسبت به** H ومجموعه هایی به‌صورت Hx را **کلاس‌های راست نسبت به** H می‌نامند. دریک گروه جابجایی تفاوتی بین کلاسهای چپ و کلاسهای راست نیست وتنها از **کلاس‌ها نسبت به** H صحبت می‌شود.

۴.۳.۳ - **مثال-** اگر $G=Z$ و $H=aZ$ گرفته شود (a عنصری از Z است) بستگی هم‌ارزی ۱.۳.۳ بصورت $y-x\in aZ$ درمی‌آید. به‌عبارت‌دیگر $y\equiv x(\mathrm{mod}\ a)$.

بنابراین کلاس هم‌ارزی شمار درست x عبارت‌است از مجموعهٔ شمارهای درستی که با مقیاس a با x برابرند (۷.۱۱.۱) ، یعنی :

$$\{\cdots, x-2a, x-a, x, x+a, x+2a, \cdots\}$$

۵.۳.۳ - **قضیه - اگر G یک گروه با پایان و H یک زیرگروه G باشد ، مرتبهٔ G بر مرتبهٔ H بخش‌پذیر است .**

اثبات - فرض می کنیم C_1 ، C_2 ، ... ، C_n کلاسهای‌چپ نسبت به H ومتمایز باشند . بنابر ۹.۱۱.۱ این زیر مجموعه‌ها دو به دو ازهم جدا و اجتماع آنها G است . زیرا C_1 ، C_2 ، ... ، C_n کلاسهای هم‌ارزی نسبت به یک بستگی هم‌ارزی می‌باشند . از قضیه ۱.۳.۳ برمی‌آید که شمارهٔ عنصرهای هریک ازاین کلاسها برابر با مرتبهٔ H است. درنتیجه شمارهٔ عنصرهای کلاسها باهم برابر می‌باشند . پس شمارهٔ عنصرهای G برابراست با حاصل‌ضرب n درمرتبهٔ H .

۶.۳.۳ - تبصره ـ فرض‌می‌کنیم مرتبهٔ گروه G یک‌شمار اول باشد. دراین‌صورت G تنها شامل دوزیرگروه $\{e\}$ و G می‌باشد (چنین گروهی‌را **گروه ساده** می‌گویند).

۳ . ۴ ـ گروه خارج قسمت یک‌گروه جابجایی

۱.۴.۳ - فرض می‌کنیم G یک‌گروه جابجایی و H یک زیرگروه G و R بستگی هم‌ارزی $x^{-1}y\in H$ باشد (شمارهٔ ۱.۳.۲). مجموعهٔ خارج قسمت G بر R را با $E=G/R$ نشان می‌دهیم.

می‌خواهیم قانون ترکیبی‌درمجموعهٔ E تعریف‌کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم u و v ازعنصرهای E باشند. یک نمایندهٔ x از u و یک نمایندهٔ y از v انتخاب می‌کنیم ونشان‌می‌دهیم که‌کلاس‌عنصر xy تنها بستگی‌به‌کلاسهای u و v دارد وبستگی به‌انتخاب نماینده‌ها ندارد. دراین‌صورت اگرکلاس عنصر xy را ترکیب u و v بنامیم و با uv نشان دهیم یک قانون ترکیب در E تعریف‌کرده‌ایم.

اگر x_1 و y_1 به ترتیب دونمایندهٔ دیگر u و v باشند داریم $x_1=xs$ و $y_1=yt$ که s و t متعلق به H هستند. پس $x_1y_1=xsyt=(xy)st$. یعنی‌کلاس عنصر xy بستگی به x و y (نماینده‌های u و v) ندارد زیرا $st\in H$.

۲.۴.۳ - **قضیه**:

(I) – **با قانون ترکیب ۱.۴.۳ مجموعهٔ E یک‌گروه جابجایی است.**

(II) – **گسترش کانونیک G در $E=G/R$ یک همومرفیسم است.**

اثبات ـ گسترش کانونیک G روی G/R را φ می‌نامیم و فرض می‌کنیم x و y متعلق به G باشند. پس داریم $\varphi(x)\in E$ و $\varphi(y)\in E$. عنصر x را نمایندهٔ کلاس $\varphi(x)$ وعنصر y را نمایندهٔ $\varphi(y)$ می‌گیریم. بنابراین $\varphi(x)\varphi(y)$ کلاس عنصر xy و یا به‌گفتهٔ دیگر $\varphi(xy)$ را نشان می‌دهد و درستی (II) ثابت می‌شود.

فرض می‌کنیم x و y و z ازعنصرهای G باشند. پس داریم:

$$\varphi(x)[\varphi(y)\varphi(z)]=\varphi(x)\varphi(yz)=\varphi(x(yz))$$

$$[\varphi(x)\varphi(y)]\varphi(z)=\varphi(xy)\varphi(z)=\varphi((xy)z)=\varphi(x(yz))$$

چون $\varphi(x)$ و $\varphi(y)$ و $\varphi(z)$ سه عنصر دلخواه از E هستند به‌آسانی دیده می‌شود که قانون ترکیب E دارای ویژگی انجمنی است .

روشن است که $\varphi(e)$ عنصر بی‌اثر E است . زیرا برای هر $x \in G$ خواهیم‌داشت:

$$\varphi(e)\varphi(x)=\varphi(ex)=\varphi(x)$$
$$\varphi(x)\varphi(e)=\varphi(xe)=\varphi(x)$$

هرعنصر $\varphi(x) \in E$ وارون‌پذیر است و وارون آن $\varphi(x^{-1})$ می‌باشد زیرا :

$$\varphi(x)\varphi(x^{-1})=\varphi(xx^{-1})=\varphi(e) \ , \ \varphi(x^{-1})\varphi(x)=\varphi(x^{-1}x)=\varphi(e)$$

سرانجام بستگی زیر قضیه را ثابت می‌کند .

$$\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(xy)=\varphi(yx)=\varphi(y)\varphi(x)$$

۳.۴.۳ - گروه E که به‌ترتیب بالا تعریف شد **گروه خارج قسمت G بر H** نامیده می‌شود و آنرا با G/H نشان میدهند.

هنگامیکه گروه G جابجایی نباشد می‌توان موضوع بالا را تعمیم داد (این مطلب در فصل سیزدهم موردبررسی قرار خواهد گرفت) .

۴.۴.۳ - مثال :

۱ - فرض می‌کنیم a شمار درستی باشد . دراین‌صورت $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ یک گروه جابجایی است (**گروه شمارهای با مقیاس** a) . بنابراین ترکیب کلاس شمار x و کلاس شمار y همان کلاس شمار $x+y$ می‌باشد .

برای $a=0$ کلاس یک شمار درست x به خود x تبدیل می‌شود . دراین حالت داریم $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$.

فرض می‌کنیم شمار درست a مخالف با صفر باشد. همواره می‌توان a را مثبت فرض نمود (زیرا درصورت لزوم می‌توان a را به $-a$ تبدیل کرد و بدین‌ترتیب درمجموعهٔ $a\mathbf{Z}$ تغییری داده نمی‌شود). هرشمار درست با یکی و تنها بایکی‌ازشمارهای $0, 1, 2, \ldots, a-1$ با مقیاس a برابر است . پس مرتبهٔ گروه $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ همان شمار a است .

۲ - می‌دانیم که $\mathbf{Z}$ (با قانون جمع) یک زیر گروه $\mathbf{R}$ است. گروه خارج قسمت $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ را گروه شمارهای حقیقی بامقیاس یک می‌نامند . بنابراین کلاس هم‌ارزی یک‌شمار حقیقی x عبارت است از مجموعهٔ :

$$\{\cdots, x-۲, x-۱, x, x+۱, x+۲, \cdots\}$$

محاسبه در $\mathbf{R/Z}$ به محاسبه در $\mathbf{R}$ که درآن ازبخش‌های درست شمارها چشم‌پوشی شده است برمی‌گردد . به گفتهٔ دیگر تنها بخش‌های کوچکتر از یک شمارها درمحاسبات دخالت دارند .

۳ . ۵ ـ هومومرفیسم گروه

۱.۵.۳ ـ دو گروه G و G' مفروض‌اند . قانون ترکیب G را با $\top$ و قانون ترکیب G' را با $\perp$ نشان می‌دهیم . چنانچه در ۱.۶.۲ دیده شد ، گسترش f گروه G در G' راهومومرفیسم گویند ، اگر برای هردوعنصردلخواه x و y متعلق به G داشته باشیم:

$$f(x\top y)=f(x)\perp f(y)$$

۲.۵.۳ ـ اگر f یک هومومرفیسم گروه G در G' و e و e' به ترتیب عنصرهای بی‌اثر G و G' باشند، خواهیم داشت $f(e)=e'$. زیرا برای هرعنصر x از G داریم:

$$f(x)=f(e\top x)=f(e)\perp f(x) \quad \text{ویا} \quad f(e)=f(x)\perp f(x)^{-1}=e'$$

۳.۵.۳ ـ اگر f یک هومومرفیسم G در G' باشد . برای هرعنصر دلخواه x متعلق به G خواهیم داشت $f(x^{-1})=f(x)^{-1}$. بستگی‌های زیر درستی این مطلب را می‌رسانند :

$$f(x^{-1})\perp f(x)=f(x^{-1}\top x)=f(e)=e'$$
$$f(x)\perp f(x^{-1})=f(x\top x^{-1})=f(e)=e'$$

از ۱.۵.۳ و ۲.۵.۳ ودوبستگی بالا نتیجه می‌شود که برای هرشمار n متعلق به $\mathbf{Z}$ داریم:

$$f(x^n)=(f(x))^n$$

۴.۵.۳ ـ به هرهومومرفیسم گروه دو زیرگروه مهم وابسته می‌شود :

قضیه ـ فرض می‌کنیم f یک هومومرفیسم G در G' باشد .

(I) ـ مجموعهٔ $f(G)$ یک زیرگروه از G' است .

(II) ـ مجموعهٔ $f^{-1}(e')$ یک زیرگروه از G است .

[به‌طوریکه‌در ۱.۹.۲ دیده شد $f^{-1}(e')$ سایهٔ وارون e' را به‌وسیلهٔ f نشان‌می‌دهد و بنابراین لازم نیست که f دوسویی باشد] .

اثبات (I) به‌آسانی انجام‌پذیر است .

برای اثبات (II) قرارمی‌دهیم $N=f^{-1}(e')$. چون داریم $f(e)=e'$ پس e متعلق به N می‌باشد. اگر x و y دوعنصر N باشند داریم $f(x)=f(y)=e'$ بنابراین بستگی $f(x\top y)=f(x)\perp f(y)=e'\perp e'=e'$ برقرار است. پس $x\top y$ متعلق به N می‌باشد . همچنین از بستگی $f(x^{-1})=(f(x))^{-1}=e'^{-1}=e'$ نتیجه می‌شود که x^{-1} متعلق به N است . بنابراین N یک زیرگروه G می‌باشد.

۳.۰.۵ - تعریف ـ زیرگروه $f^{-1}(e')$ را هستهٔ‌هومومرفیسم f می‌نامند.

۳.۰.۶ - مثال :

۱ - اگر G گروه شمارهای حقیقی با قانون جمع و G' گروه شمارهای حقیقی بزرگتر از صفر با قانون ضرب باشد ، گسترش $x\to e^x$ یک هومومرفیسم G در G' است . زیرا داریم $e^{x+y}=e^xe^y$ و با درنظرگرفتن ویژگی‌های توابع نمایی معلوم می‌شود که این هومومرفیسم‌دوسویی‌است ، بنابراین یک‌ایزومرفیسم G روی G' است. گسترش $x\to \mathrm{Log}x$ ایزومرفیسم وارون آن است .

۲ - گروه G وعنصر x متعلق به‌آن‌مفروض‌است. گسترش f مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ در G که با $f(n)=x^n$ معین شده است یک هومومرفیسم می‌باشد، زیرا داریم $x^{n+n'}=x^n\cdot x^{n'}$.

بنابرشمارهٔ ۳.۲.۰ مجموعهٔ $f(\mathbf{Z})\subset G$ زیرگروهٔ پدیدآمده بوسیلهٔ x است. هستهٔ این هومومرفیسم مجموعهٔ شمارهای n متعلق به $\mathbf{Z}$ است به قسمی که $x^n=e$. اگر این هسته‌را N بنامیم، N یک‌زیرگروهٔ $\mathbf{Z}$ است که بنابر۳.۲.۳ به‌صورت $a\mathbf{Z}$ می‌باشد$(a\geqslant 0)$.

برای $a=0$ داریم $N=\{0\}$. به گفتهٔ دیگر بستگی $x^n=e$ تنها برای $n=0$ برقرار است . اگر a بزرگتر از صفر باشد همهٔ عنصرهای :

$$\ldots, x^{-2a}, x^{-a}, x^0, x^a, x^{2a}, \ldots$$

برابر با e هستند .

۳.۵.۷ - قضیه - فرض‌می‌کنیم f یک‌هومومرفیسم G در G' و N هستهٔ f باشد. دراین‌صورت :

(I) - برای هردوعنصر x و y متعلق‌به G بستگی $f(x)=f(y)$ هم‌ارز با بستگی $y\in x\top N$ است.

(II) - برای اینکه f انژکتیو باشد بایاوبسنده است که داشته باشیم $N=\{e\}$.

اثبات- همواره بستگی‌های زیر را داریم :

$$f(x)=f(y) \Longleftrightarrow f(x)^{-1}\perp f(y)=e'$$
$$\Longleftrightarrow f(x^{-1}\top y)=e' \Longleftrightarrow x^{-1}\top y\in N \Longleftrightarrow y\in x\top N$$

بستگی‌های بالا درستی (I) را آشکار می‌سازند و به‌آسانی می‌توان (II) را از (I) نتیجه گرفت.

۳ . ۶ - تجزیه‌کانونیک یک هومرفیسم

۳.۶.۱ - دوگروهٔ G و G' را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم f یک هومرفیسم G در G' و N هستهٔ f باشد. بعلاوه گروهٔ G را جابجایی می‌گیریم.

می‌خواهیم تجزیهٔ کانونیک f را پیدا کنیم. بستگی هم‌ارزی‌ای که باید روی G درنظرگرفته شود بنابر ۱.۱۲.۱ عبارت از $f(x)=f(y)$ و یا بنابر ۳.۵.۷ عبارت از $x\in y\top N$ است. بنابراین کلاسهای هم‌ارزی همان کلاسهای G نسبت به N می‌باشند (بنابرشمارهٔ ۳.۳.۳).

پس تجزیهٔ کانونیک f به‌صورت زیر است :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad f \quad} & G' \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ G/N & \xrightarrow[\quad h \quad]{} & f(G) \end{array}$$

که درآنجا s گسترش کانونیک G روی G/N و i گسترش همانی $f(G)$ در G' را نشان می‌دهد.

روشن است که i یک هومرفیسم و بنابر (۳.۴.۲) گسترش s نیز یک هومرفیسم

می‌باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که h یک ایزومرفیسم است . شمارهٔ (۱.۱۲.۱) نشان می‌دهد که h دوسویی است .

پس کافی است ثابت کنیم که h یک هومرفیسم است . دوعنصر دلخواه $s(x)$ و $s(y)$ متعلق به G/N را درنظرمی گیریم (x و y دوعنصر دلخواه از G هستند) . داریم :

$$h(s(x))=i(h(s(x)))=f(x)$$

وهمچنین :

$$h(s(y))=f(y)\ ,\ h(s(x\top y))=f(x\top y)$$

پس :

$$\begin{aligned}h(s(x)\top s(y))=h(s(x\top y))=f(x\top y)&=f(x)\perp f(y)\\&=h(s(x))\perp h(s(y))\end{aligned}$$

یعنی h یک هومرفیسم و درنتیجه یک ایزومرفیسم است .

۲.۶.۳ - قضیه ـ فرض می کنیم G یک گروه و x عنصری از G و H زیرگروهٔ G پدیدآمده به‌وسیلهٔ x باشد . دراین‌صورت :

(I) ــ اگر مرتبهٔ x بی‌پایان باشد ، برای هردوشمار متمایز n و n' متعلق به $\mathbf{Z}$ خواهیم داشت $x^n\neq x^{n'}$ و H با $\mathbf{Z}$ ایزومرف است.

(II) ــ اگر مرتبهٔ x با پایان و برابر با شمار a باشد چنین داریم :

$$x^n=x^{n'}\iff n\equiv n'\pmod a$$

و H با $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ ایزومرف است .

اثبات ـ برای هرعدد n متعلق به $\mathbf{Z}$ قرار می‌دهیم $f(n)=x^n$. بنابر ۶.۵.۳ f یک هومرفیسم $\mathbf{Z}$ در G است. از ۵.۲.۳ نتیجه می‌شود که $f(\mathbf{Z})=H$. اگر N هستهٔ f باشد ، N یک زیرگروهٔ $\mathbf{Z}$ خواهد بود . پس یک شمار درست $a\geqslant 0$ می‌توان یافت به‌طوریکه $N=a\mathbf{Z}$ باشد (۳.۲.۳).

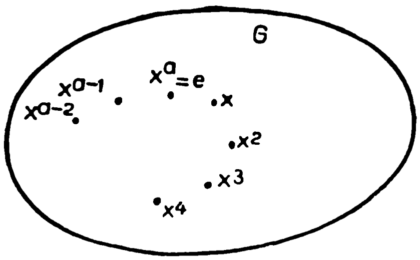
برای $a=0$ بنابر (۷.۵.۳) ، f انژکتیو وبنابراین f یک ایزومرفیسم $\mathbf{Z}$ روی H است . پس مرتبهٔ x بی‌پایان و ازآنجا (I) نتیجه می‌شود .

برای $a>0$ ، با توجه به (۱.۶.۳) ، H با $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ ایزومرف است ، پس a مرتبهٔ x می‌باشد. اگر n و n' متعلق به $\mathbf{Z}$ باشند ، با استفاده از ۷.۵.۳ خواهیم داشت:

$$x^n = x^{n'} \Leftrightarrow f(n) = f(n') \Leftrightarrow n' \in n + N \Leftrightarrow n' \equiv n \pmod a$$

و درستی (II) ثابت می‌شود .

۳.۶.۳ - نتیجه ـ اگر مرتبهٔ عنصر x از یک گروه برابر باشمار باپایان a باشد، a کوچکترین شمار درست بزرگتر از صفر است که در بستگی $x^a = e$ صدق می کند.



شکل ۱۹

۴.۶.۳ - نتیجه ـ چنانچه G یک گروهٔ باپایان ودارای مرتبهٔ n باشد ، برای هرعنصر x متعلق به G داریم $x^n = e$.

زیرا مرتبهٔ عنصر x یعنی شمار a ، برابر بامرتبهٔ یک‌زیر گروهٔ G می‌باشد. پس یک شمار درست b وجود دارد به قسمی که $n = ab$ باشد(۵.۳.۲). بنابراین با درنظر گرفتن ۳.۶.۳ داریم :

$$x^n = (x^a)^b = e^b = e$$

۵.۶.۳ - نتیجه - گروهٔ G که مرتبهٔ آن شمار اول p باشد با $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ایزومرف است .

زیرا اگر p مرتبهٔ گروه G و $x \neq e$ عنصری از G باشد ، چنانچه H را زیر گروهٔ G پدید آمده به‌وسیلهٔ x بگیریم، باتوجه به ۶.۳.۳ یاداریم $H = G$ ویا $H = \{e\}$.
اما چون x متعلق به H است پس $H = G$. بنابراین G با یک گروهٔ $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ ، که درآن $a > 0$ می‌باشد ، ایزومرف است (۲.۶.۳) . چون G و $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ به ترتیب دارای p و a عنصر می‌باشند بنابراین $p = a$ است .

۳ . ۷ ـ گروه‌های عامل در یک مجموعه

۳ . ۷ . ۱ ـ فرض می‌کنیم G یک گروه و X یک مجموعه باشد. اگر یک هومرفیسم G درگروهٔ تبدیل های X داشته باشیم ، گوییم G **در X عمل می‌کند.**

چنانچه هومرفیسم بالا را با Φ نشان دهیم (از نوشتن قانون ترکیب G خودداری می‌کنیم) خواهیم داشت :

$$\Phi(gg')=\Phi(g)\circ\Phi(g') \quad (g\in G\ ,\ g'\in G) \tag{۱}$$

$$\Phi(g^{-1})=\Phi(g)^{-1} \quad (g\in G) \tag{۲}$$

$$\Phi(e)=id_X \quad (\text{عنصر بی‌اثر گروه } G \text{ است } e) \tag{۳}$$

۳ . ۷ . ۲ ـ اگر $g\in G$ و $x\in X$ باشد معمولاً بجای $(\Phi(g))(x)$ می‌نویسند $g\cdot x$ ویا gx . این عنصر راکه متعلق به X است **همتای x به‌وسیلهٔ** g می‌نامند. بنابراین بستگی $[(\Phi(gg'))(x)=\Phi(g)[\Phi(g')(x)]$ که از (۱) نتیجه می گردد به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(gg')x=g(g'x)$$

۳ . ۷ . ۳ ـ هنگامی که x متعلق به X است ، مجموعهٔ همتاهای x که عنصرهایی به‌صورت gx هستند (g مجموعهٔ G را می‌پیماید) **مدار** x نامیده می‌شود .

۳ . ۷ . ٤ ـ قضیه ـ فرض می‌کنیم x و y متعلق به X باشند و عنصری از G یافت شود به‌قسمی‌که $y=gx$ باشد. دراین‌صورت می‌نویسیم $x\sim y$ و ثابت می‌کنیم که بستگی $x\sim y$ یک بستگی هم‌ارزی در X است .

اثبات ـ برای هر $x\in X$ داریم $x=id_X(x)=ex$ پس بستگی بالا بازتابی است . اگر $y=gx$ باشد خواهیم داشت :

$$g^{-1}y=g^{-1}(gx)=(g^{-1}g)x=ex=id_X(x)=x$$

و این تقارن بستگی بالا را می‌رساند . چنانچه $y=gx$ و $z=g'y$ باشد داریم :

$$z=g'(gx)=(g'g)x$$

پس بستگی $\sim$ متعدی است .

۳ . ۷ . ۵ ـ برای بستگی‌هم‌ارزی ۳ . ۷ . ٤ کلاس هم‌ارزی عنصر x از X همان مدار x است.

۳ . ۷ . ٦ ـ گوییم G در X **متعدی** است اگرهردوعنصر دلخواهٔ X همتای‌یکدیگر به‌وسیلهٔ یک عنصر G باشند، به‌گفته دیگر G در X متعدی‌است هرگاه X یک‌مدار باشد.

فصل چهارم

حلقه‌ها

درآینده مثالهای مهمی از حلقه‌ها را خواهیم دید (مثلاً حلقه‌های چند جمله‌ای‌ها ، حلقه‌های ماتریسها) . دراینجا برخی از نتایج سادهٔ نظریهٔ کلی حلقه‌ها را مطالعه خواهیم کرد . مهمترین حلقه‌ها هیأت‌ها هستند (مثلاً $\mathbf{Q}$ ، $\mathbf{R}$ ، $\mathbf{C}$ و هیأت شمارهای درست با مقیاس یک شماراول) . به کمک غوطه‌ورکردن یک حلقهٔ انتگر دریک هیأت ، $\mathbf{Q}$ ازروی $\mathbf{Z}$ ساخته می‌شود (خوانند‌ه با این مثال آشنایی‌دارد) ودرفصل ششم کسرهای گویای یک متغیری تعریف می گردد .

۴ . ۱ ـ حلقه‌ها

۱.۴.۱ - تعریف- مجموعهٔ A، که دارای دوقانون ترکیب ، یکی جمع $(x, y) \to x+y$ و دیگری ضرب $(x, y) \to xy$ با ویژگی‌های زیراست، حلقه نامیده می‌شود :

۱ - قانون جمع یک‌قانون ترکیب گروهٔ جابجایی‌است. به عبارت‌دیگر:

-برای هرسه عنصر x ، y و z متعلق به A داریم :

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$

$$x+y=y+x$$

-یک‌عنصر بی‌اثر ۰ برای‌قانون جمع‌وجود دارد به‌طوری‌که برای هرعنصر x متعلق به A داریم :

$$0+x=x+0=x$$

-هرعنصر x دارای یک عنصر قرینهٔ $-x$ است به قسمی‌که :

$$(-x)+x=x+(-x)=0$$

۲ - قانون ضرب‌انجمنی‌است یعنی برای هرسه عنصر x ، y و z متعلق به A داریم :

$$x(yz)=(xy)z$$

۳ - قانون ضرب نسبت به جمع دارای ویژگی پخشی است یعنی برای هرسه عنصر x ، y و z متعلق به A داریم :

$$(y+z)x=yx+zx \ , \ x(y+z)=xy+xz$$

بعلاوه اگر قانون ضرب جابجایی باشد ، A را **حلقهٔ جابجایی** می‌نامند .

چنانچه A دارای یک عنصر بی‌اثر برای قانون ضرب باشد این عنصر را معمولاً با ۱ نمایش می‌دهندوآن‌را **عنصر یکه** می گویند. دراین‌صورت A **حلقهٔ یکه‌دار** نامیده می‌شود.

۲.۱.٤ - مثال :

۱ - مجموعه های $\mathbf{Z}$ ، $\mathbf{Q}$ ، $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ باجمع وضرب معمولی‌حلقه های جابجایی ویکه‌دار هستند .

۲ - مجموعهٔ چندجمله‌ای‌های یک متغیری که ضرایب آنها متعلق به $\mathbf{C}$ باشد(بجای $\mathbf{C}$ می‌توان یکی از مجموعه‌های $\mathbf{R}$ یا $\mathbf{Q}$ و یا $\mathbf{Z}$ را اختیار کرد) با جمع و ضرب معمولی یک حلقهٔ جابجایی یکه‌دار درست می کنند .

۳ - مجموعهٔ $\{0\}$ که دارای تنها عنصر صفراست بادوقانون‌ترکیب $0=0+0$ و $0=0\cdot 0$ یک حلقهٔ جابجایی و یکه‌دار است که عنصر یکه آن همان 0 می‌باشد .

۳.۱.٤ - چنانچه A یک‌حلقه باشد، برای‌هرسه عنصر x ، y و z متعلق به‌Aداریم:

$$x(y-z)=xy-xz$$

زیرا :

$$x(y-z)+xz=x[(y-z)+z]=xy$$

همچنین :

$$(y-z)x=yx-zx$$

٤.۱.٤ - اگر در ۳.۱.٤ قرار دهیم $y=z$ خواهیم داشت :

$$\forall x\in A \ , \ x\cdot 0=0 \ , \ 0\cdot x=0$$

۵.۱.٤ - چنانچه‌در۳.۱.٤ قراردهیم $y=0$ ، بادرنظر گرفتن ٤.۱.٤ خواهیم‌داشت:

$$x\cdot(-z)=-(xz) \ , \ (-z)\cdot x=-(zx)$$

و ازآنجا نتیجه می‌شود :

$$(-x)(-z)=-[x(-z)]=-[-xz]=xz$$

٦.۱.٤ - از ۵.۱.٤ با استفاده از روش بازگشت بدست می‌آید :

اگر شمار درست و مثبت n زوج باشد $\quad (-x)^n = x^n$

اگر شمار درست و مثبت n فرد باشد $\quad (-x)^n = -x^n$

٧.١.٤ - چنانچه حلقهٔ A دارای عنصر یکه ١ باشد ، برای هرعنصر x متعلق به A و $n \in \mathbf{Z}$ می‌توان (مانند ٢.١.٤) حاصل‌ضرب nx را تشکیل‌داد. به‌ویژه می‌توان‌نوشت:

$$nx = (n1)x$$

که طرف‌راست‌آن حاصل‌ضرب عنصرهای $n1$ و x از A می‌باشد. برای $n > 0$ ، بنابرویژگی پخشی، برابری بالا روشن‌است. اگر $n = 0$ باشد باتوجه به ٥.٤.٢ داریم $nx = n1 = 0$ و بنابر ٤.١.٤ خواهیم داشت $(n1)x = 0$. برای $n < 0$ قرار می‌دهیم $n' = -n$ پس داریم $nx = -(n'x) = -[(n'1)x]$ که با استفاده از ٥.١.٤ نتیجه می‌شود :

$$[-(n'1)]x = (n1)x$$

همچنین داریم : $\quad nx = x(n1)$

٨.١.٤ - دریک حلقهٔ جابجایی می‌توان تمام دستورهای محاسبات معمولی در $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ را که درآنها تنها عملیات جمع و تفریق و ضرب دخالت می‌کند برقرار کرد . به عنوان مثال اگر A یک حلقهٔ جابجایی و $x, y \in A$ باشند داریم :

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + \cdots$$
$$+ C_n^p x^{n-p}y^p + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n$$

(این فرمول را بسط دوجمله‌ای می‌نامند) .

اثبات ـ برای $n = 1$ فرمول بالا به‌صورت $x+y = x+y$ درمی‌آید . پس فرض می‌کنیم که این فرمول برای n برقرار باشد ودرستی آنرا برای $n+1$ ثابت‌می‌کنیم . داریم:

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y)\\ &= (x^n + C_n^1 x^{n-1}y + \cdots + C_n^p x^{n-p}y^p + \cdots + y^n)(x+y)\\ &= (x^{n+1} + C_n^1 x^n y + \cdots + C_n^p x^{n-p+1}y^p + \cdots + xy^n\\ &\quad + x^n y + \cdots + C_n^{p-1} x^{n-p+1}y^p + \cdots + C_n^{n-1} xy^n + y^{n+1}\end{aligned}$$

بنابر ١٠.١٥.١ ضریب $x^{n-p+1}y^p$ عبارت است از :

$$C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$$

و درنتیجه خواهیم داشت :

$$(x+y)^{n+1}=x^{n+1}+C_{n+1}^{1}x^{n}y+\cdots+C_{n+1}^{p}x^{n+1-p}y^{p}+\cdots+y^{n+1}$$

و به‌این‌ترتیب بسط دوجمله‌ای به‌روش بازگشت اثبات می‌گردد .

۴.۱.۹ - اگر حلقهٔ A جابجایی‌نباشد وتنها عنصرهای x و y را گردش‌پذیر بگیریم، فرمول دوجمله‌ای همچنان برقرار و استدلال بالا درست است .

۴ . ۲ - زیر حلقه - ایدآل

۴.۲.۱ - فرض می‌کنیم A یک حلقه و B بخشی از A باشد .

تعریف - گویند B یک‌زیرحلقهٔ A است، چنانچه دارای ویژگی‌های زیر باشد :

الف - B یک زیرگروه ازگروهٔ جمعی A باشد .

ب - اگر x و y متعلق به B باشند ، داشته باشیم $xy\in B$.

از شرط الف نتیجه می‌شود که $0\in B$ است و B برای عمل جمع پایدار می‌باشد . به سادگی دیده می‌شود که مجموعهٔ B با دو قانون ترکیب نتیجه شده از قانونهای A یک حلقه است و ازاینجا دلیل نام‌گذاری « زیر حلقه » روشن می‌گردد .

۴.۲.۲ - **مثال** - مجموعهٔ **Z** یک زیر حلقهٔ **R** و حلقهٔ **R** یک زیر حلقهٔ **C** است.

۴.۲.۳ - فرض می‌کنیم A یک حلقهٔ **جابجایی** و B بخشی از A باشد .

تعریف - گویند B یک‌ایدآل‌حلقهٔ A است‌چنانچه B دارای‌ویژگیهای زیر باشد :

الف - B یک زیرگروه ازگروهٔ جمعی A باشد .

ب - اگر $x\in B$ و $y\in A$ باشد داشته باشیم $xy\in B$.

بکاربردن کلمهٔ « ایدآل » دلایل‌تاریخی‌دارد که از بیان آنها صرف‌نظرمی‌کنیم . تنها یادآور می‌شویم که **کومر** درمطالعهٔ برخی ازمسائل حساب با شمارهایی که درحقیقت وجود ندارند برخورد کرد و آنهارا **«شمارهای ایدآل»** نامید. این‌نامگذاری رفته‌رفته به‌تعریف کنونی ایدآل انجامید.

۴.۲.۴ - **مثال** :

۱ - چنانچه $a\in\mathbf{Z}$ باشد ، مجموعهٔ $a\mathbf{Z}$ یک‌ایدآل **Z** است. به علاوه تنها ایدآلهای **Z** همان $a\mathbf{Z}$ ها هستند زیرا بنابر ۳.۲.۳ یک‌زیرگروهٔجمعی **Z** ناگزیر به‌صورت $a\mathbf{Z}$ است.

۲ ـ دریک‌حلقهٔ جابجاییA، عنصر a را **مضرب** عنصر b می‌نامندهرگاه یک عنصر c متعلق به A یافت شود به قسمی که برابری $a=bc$ برقرار گردد.

دراین‌صورت نیزگویند که b عنصر a رامی‌شمارد ویا b **بخشیاب** a است. به‌آسانی دیده می‌شود که ۰ مضرب هرعنصر متعلق به A است اما تنها بخشیاب خودش می‌باشد. روشن است که مضربهای یک عنصر دلخواه از A تشکیل یک ایدآل از A را می‌دهند.

۳ ـ $\mathbf{Z}$ یک ایدآل $\mathbf{R}$ نیست.

۴.۲.۵ ـ فرض می‌کنیم A یک حلقهٔ جابجایی یکه‌دار و B یک بخش غیرتهی از A باشد به‌طوریکه:

۱ ـ اگر $x\in B$ و $y\in B$ باشد داشته باشیم $x+y\in B$.

۲ ـ اگر $x\in B$ و $y\in A$ باشد داشته باشیم $xy\in B$.

دراین‌صورت B یک ایدآل A است.

زیرا چنانچه $x\in B$ باشد $-x=x(-1)\in B$ است، پس $0=x+(-x)\in B$ می‌باشدوبا درنظرگرفتن شرط (۱) ثابت می‌شود که B یک‌زیرگروه ازگروهٔ جمعی A است.

۴ . ۳ ـ حلقهٔ خارج قسمت یک حلقهٔ جابجایی

۴.۳.۱ ـ فرض می‌کنیم A یک حلقهٔ جابجایی و B یک ایدآل A باشد. چون B یک زیرگروه ازگروهٔ جمعی A است، می‌توان گروهٔ خارج قسمت A/B را تشکیل داد. یادآوری می‌شود که عنصرهای A/B کلاسهای هم‌ارزی نسبت به بستگی $x-y\in B$ می‌باشند. این کلاسها بخشهایی بشکل $x+B$ از A هستند. مجموع دوکلاس به‌وسیلهٔ مجموع نماینده‌های این دوکلاس معلوم می‌گردد.

در A/B نیزمانند A قانون جمع را با $+$ نشان می‌دهیم.

می‌خواهیم در A/B یک قانون ترکیب دوم معین کنیم که ضرب نامیده می‌شود.

فرض می‌کنیم u و v دوعنصر از A/B باشند. نماینده‌های x و y کلاسهای u و v را در A اختیارمی‌کنیم. کلاس xy تنها به u و v بستگی دارد. زیرا اگر $x_1=x+s$ و $y_1=y+t$ باشد که درآنها $s\in B$ و $t\in B$ است، داریم:

$$x_1y_1=xy+(xt+sy+st)$$

که درآنجا $xt+sy+st$ متعلق به B است زیرا B یک ایدآل است . ما کلاس xy را با uv نشان می‌دهیم .

۲.۳.۴ - قضیه :

(I) — A/B با دوقانون جمع وضرب یک حلقهٔ جابجایی است .

(II) — گسترش کانونیک Φ حلقهٔ A در A/B نسبت به جمع وضرب یک همومرفیسم است .

اثبات - این قضیه مانند ۲.۴.۳ ثابت می‌گردد . چنانچه x و y متعلق به A باشند بنا به تعریف قانونهای ترکیب در A/B داریم :

$$\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y) \quad , \quad \Phi(xy)=\Phi(x)\Phi(y)$$

به‌این ترتیب قسمت (II) قضیه ثابت می‌شود .

از پیش می‌دانیم که A/B یک گروهٔ جمعی است ، وچون در A ویژگیهای انجمنی و جابجایی قانون ضرب و پخشی آن نسبت به قانون جمع برقرار است ، به کمک همومرفیسم Φ نتیجه می‌شود که این ویژگیها در A/B نیز برقرارند .

۳.۳.۴ - حلقهٔ A/B **حلقهٔ خارج قسمت A بر ایدآل B** نامیده‌می‌شود . هنگامیکه A جابجایی نباشد ، می‌توان تعریف بالارا تعمیم داد که ما از بیان آن خودداری می کنیم .

۴.۳.۴ - **تبصره -** چنانچه حلقهٔ A دارای عنصر یکه ۱ باشد به‌آسانی دیده می‌شود که $\Phi(۱)$ عنصر یکه A/B است . به علاوه $\Phi(۰)$ عنصر ۰ حلقهٔ A/B می‌باشد .

۵.۳.۴ - **مثال -** اگر $a\in\mathbf{Z}$ باشد چون $a\mathbf{Z}$ یک ایدآل $\mathbf{Z}$ است می‌توان حلقهٔ $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ را تشکیل داد . این حلقه جابجایی و دارای عنصر یکه است و حلقهٔ شمارهای درست با مقیاس a نامیده می‌شود (حلقهٔ شمارهای درست که با مقیاس a برابرند) . این حلقه درپیش به‌صورت یک گروهٔ جمعی بنام گروهٔ شمارهای درست با مقیاس a، درنظر گرفته شد . به عنوان مثال $\mathbf{Z}/۳\mathbf{Z}$ راکه یک حلقهٔ جابجایی است درنظر می گیریم . این‌حلقه دارای ۳ عنصراست که کلاسهای شمارهای درست ۰ ، ۱ ، ۲ با مقیاس ۳ می‌باشند . برای سادگی این کلاسها را نیز با ۰ ، ۱ ، ۲ نشان‌می‌دهیم . ساختمان $\mathbf{Z}/۳\mathbf{Z}$ به‌وسیلهٔ جدولهای جمع و ضرب زیر معین شده است :

جدول جمع

	۰	۱	۲
۰	۰	۱	۲
۱	۱	۲	۰
۲	۲	۰	۱

جدول ضرب

	۰	۱	۲
۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲
۲	۰	۲	۱

۴ . ۴ ـ همومرفیسم حلقه‌ها

۴ . ۴ . ۱ـ فرض می‌کنیم A و A' دوحلقه و f یک گسترش A در A' باشد. گسترش f یک همومرفیسم حلقهٔ A در A' نامیده می‌شود ، هرگاه برای هردوعنصر دلخواه x و y از A برابری‌های: $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(xy)=f(x)f(y)$ برقرار باشد (ازاین پس‌از نوشتن علامتهای قانونهای ترکیب خودداری و درصورت لزوم به نوشتن . اکتفا می‌شود) .

۴ . ۴ . ۲ ـ دراینجا نیز ویژگیهای همومرفیسم گروهها برقرار است و به ویژه داریم :

۱ ـ $f(0)=0$

۲ ـ $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in A$

۳ ـ مجموعهٔ $f(A)$ یک زیرگروهٔ A' است .

۴ ـ هستهٔ N گسترش f ، یعنی مجموعهٔ x های متعلق به A به‌طوریکه $f(x)=0$ باشد ، یک زیرگروهٔ A است .

۴ . ۴ . ۳ ـ چنانکه به‌آسانی دیده می‌شود $f(A)$ یک زیر حلقهٔ A' است .

۴ . ۴ . ۴ ـ اگر A جابجایی باشد هستهٔ N گسترش f ، یک ایدآل A است . زیرا چنانچه $x\in N$ و $y\in A$ باشد خواهیم داشت $f(x)=0$ پس :

$$f(xy)=f(x)\cdot f(y)=0\cdot f(y)=0$$

و ازآنجا $xy\in N$.

۴ . ۴ . ۵ ـ حلقهٔ خارج قسمت A/N وتجزیهٔ کانونیک گسترش f را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & A' \\ A/N \arrow[r, "h"'] & f(A) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

دراین تجزیه بنابر ۲.۳.۴ ، گسترش s یک‌همومرفیسم حلقه است و به‌آسانی دیده می‌شود که i نیز یک همومرفیسم حلقه می‌باشد. اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم که h یک ایزومرفیسم حلقه‌است. بنابر ۱.۶.۳ ، می‌دانیم که h دوسویی‌است و بعلاوه یک‌همومرفیسم گروه می‌باشد . ازطرف دیگر چنانچه $s(x)$ و $s(y)$ دوعنصر دلخواهٔ A/N باشند (که درآنها $x , y \in A$ است) داریم :

$$h(s(x))h(s(y))=f(x)f(y)=f(xy)$$

و :

$$h(s(x)s(y))=h(s(xy))=f(xy)$$

پس h یک ایزومرفیسم است .

۶.۴.۴ - **مثال** - فرض می‌کنیم حلقهٔ A دارای عنصر یکه ۱ باشد . گسترش f حلقهٔ $\mathbf{Z}$ در A راکه عنصر $n \in \mathbf{Z}$ را به عنصر n ۱ از A تبدیل‌می‌کند، درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم که f یک همومرفیسم حلقه است . بنابر ۱۴.۵.۲ می‌دانیم که f یک همومرفیسم گروه برای قانون جمع است. به علاوه با درنظر گرفتن ۷.۱.۴ و ۱۴.۵.۲ داریم :

$$\begin{aligned} f(n)f(n') &= (n\,۱)\,(n'\,۱) = n(n'\,۱) = (nn')\,۱ \\ &= f(nn') \end{aligned}$$

۴ . ۵ - هیأت

۱.۵.۴ - تعریف - حلقهٔ جابجایی A را یک‌هیأت می‌نامند اگر بخش $A-\{۰\}$ با قانون ضرب یک‌گروه تشکیل دهد .

(درحقیقت چنین هیأتی را باید هیأت جابجایی نامید . اما چون از هیأت‌هایی که دارای ویژگی‌جابجایی‌نیستند گفتگو نخواهیم کرد، ازتکرار کلمهٔ جابجایی چشم می‌پوشیم) .

۲.۵.۴ - **مثال** - حلقه‌های $\mathbf{Q}$ ، $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ هیأت هستند اما حلقهٔ $\mathbf{Z}$ هیأت نیست .

۳.۵.۴ - چنانچه A یک هیأت باشد، حاصل‌ضرب دوعنصر مخالف باصفر از A یک عنصر مخالف با صفر از A است (زیرا $A-\{۰\}$ باید برای قانون ضرب پایدار باشد) .

۴.۵.۴ - چنانچه ۱ عنصر بی‌اثر گروهٔ ضربی $A-\{۰\}$ باشد ۱ عنصر یکه A است . زیرا از یک طرف برای $x \neq ۰$ داریم $x \cdot ۱ = ۱ \cdot x = x$ و ازطرف دیگر بنابر

۴.۰.۴ داریم $\circ = 1 \cdot \circ = 1 \cdot \circ$ به‌این ترتیب هیأت یک حلقهٔ یکه‌دار است و عنصر یکهٔ آن متمایز از صفر است .

۵.۰.۴ ـ اگر x یک عنصر مخالف با صفر از A باشد، تنها یک عنصر مخالف باصفر x^{-1} از A وجود دارد به قسمی‌که $xx^{-1} = 1$ باشد .

اغلب $x^{-1}y = yx^{-1}$ را به صورت $\frac{y}{x}$ می‌نویسند. کلیهٔ قواعد محاسبات در $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ دریک هیأت‌جابجایی نیز برقرارند و بررسی‌درستی آنها را به عهده خواننده می‌گذاریم.

۶.۰.۴ ـ حلقهٔ جابجایی A را درنظر می‌گیریم . **برای اینکه A یک هیأت باشد بایاو بسنده است‌که :**

۱ ـ A دارای یک عنصر یکه ۱ باشد.

۲ ـ $A \neq \{\circ\}$ باشد.

۳ ـ هرعنصر مخالف با صفر از A دارای یک وارون باشد.

بنابر ۴.۰.۴ و ۵.۰.۴ شرایط بالا لازم‌اند . به‌وارون فرض می‌کنیم این شرایط برقرار باشند. چون $A \neq \{\circ\}$ است داریم $1 \in A - \{\circ\}$. اگر x و y به $A - \{\circ\}$ تعلق داشته باشند x^{-1} و y^{-1} وجود دارند و داریم $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = 1$ پس $xy \neq \circ$ می‌باشد و $A - \{\circ\}$ نسبت به‌ضرب پایدار است . روشن است‌که در $A - \{\circ\}$ قانون ضرب دارای ویژگی انجمنی است و ۱ عنصر بی‌اثر $A - \{\circ\}$ می‌باشد ، هرعنصر x از $A - \{\circ\}$ دارای یک عنصر وارون x^{-1} در A است و $x^{-1} \neq \circ$ می‌باشد (زیرا $1 \neq \circ = x \cdot \circ$) . پس $A - \{\circ\}$ یک‌گروه ضربی است .

۷.۰.۴ ـ چنانچه K یک هیأت باشد ، بنابر ۶.۴.۴ گسترش $n \to n \cdot 1$ حلقهٔ $\mathbf{Z}$ در K یک همومرفیسم است . هستهٔ این گسترش بنابر ۳.۲.۳ به‌صورت $p\mathbf{Z}$ می‌باشد که درآن p یک شمار درست یکتاست $(p \geqslant \circ)$.

قضیه ـ شمار p بالا یا برابر با صفر است و یا یک شمار اول می‌باشد.

اثبات ـ فرض می‌کنیم $p > \circ$ باشد . اگر شمارهای درست a و b به قسمی وجود داشته باشندکه $\circ < a < p$ ، $\circ < b < p$ و $ab = p$ باشد ، خواهیم‌داشت :

$$(a \cdot ۱)\ (b \cdot ۱) = (ab) \cdot ۱ = p \cdot ۱ = ۰$$

و $a \cdot ۱ \neq ۰$ و $b \cdot ۱ \neq ۰$ (زیرا $a \notin p\mathbf{Z}$ و $b \notin p\mathbf{Z}$) و این مخالف با ۳.۰.۴ است. پس یا p برابر با ۱ است و یا یک شمار اول می‌باشد . اما p از شمار ۱ متمایز است زیرا عنصر یکه K متمایز از صفر می‌باشد .

۸.۰.۴ ـ شمار درست p که در بالا دیدیم **مشخص** هیأت K نامیده می‌شود. بنابر تعریف p، شمارهای درست n به‌طوریکه $n \cdot ۱ = ۰$ باشدمضربهای p هستند. هیأت‌های Q و R و C دارای مشخص صفرند .

۹.۰.۴ ـ قضیه ـ چنانچه x و x′ عنصرهایی ازهیأت K و n عنصری از Z باشد به‌طوریکه داشته باشیم $nx = nx'$ ، اگر n مضربی از مشخص هیأت K نباشد داریم $x = x'$.

اثبات ـ بنابر ۷.۱.۴ ازبرابری $nx = nx'$ نتیجه می‌شود $(n \cdot ۱)x = (n \cdot ۱)x'$ و ازآنجا $(n \cdot ۱)\ (x - x') = ۰$. اما $n \cdot ۱ \neq ۰$ است . پس بنابر ۳.۰.۴ خواهیم داشت $x - x' = ۰$ و یا $x = x'$.

۱۰.۰.۴ ـ قضیه ـ شماردرست $a > ۰$ داده شده است . برای اینکه حلقهٔ $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ یک هیأت باشد بایاو بسنده است که a اول باشد . دراین‌صورت مشخص‌هیأت $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ همان شمار a است .

اثبات ـ قرار می‌دهیم $A = \mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ و برای اینکه اشتباهی پیش نیاید ، عنصر یکه A را به‌صورت $\bar{۱}$ می‌نویسیم . چنانچه $n \in \mathbf{Z}$ باشد $n\bar{۱}$ کلاس n با مقیاس a خواهد بود . پس تنها هنگامی $n\bar{۱}$ برابر با کلاس ۰ است که n مضربی از a باشد . بنابراین اگر A یک هیأت باشد از ۷.۰.۴ نتیجه می گردد که a یک شمار اول است و مشخص A می‌باشد . به‌وارون فرض می کنیم که a اول باشد . عنصر $\bar{۱}$ متعلق به A مخالف با صفر است (زیرا شمار ۱ مضربی از a نیست) . چنانچه x عنصری دیگر از A ومخالف با صفر باشد ، x کلاس یک شمار درست u است که بر a بخش‌پذیر نیست . شمارهای درست u و a نسبت به یکدیگر اول هستند پس بنابر ۴.۲.۳ شمارهای درست $t_۱$ و $t_۲$ را می‌توان یافت به قسمی که $ut_۱ + at_۲ = ۱$ باشد . ازآنجا نتیجه می‌شود :

$$ut_۱ \equiv ۱ \pmod a$$

هرگاه x' کلاس t_1 در A باشد بستگی بالا در A چنین نوشته می‌شود :

$$xx' = ۱$$

به‌این ترتیب x وارون‌پذیر است و بنابر ۶.۵.۴ مجموعهٔ A یک هیأت می‌باشد .

برای هرشمار اول دلخواه p می‌توان یک هیأت p عنصری ساخت (هیأت شمارهای درست با مقیاس p و یا هیأت شمارهایی که با مقیاس p با یکدیگر برابرند) .

۱۱.۵.۴ - نتیجه (قضیهٔ فرما) - چنانچه p یک شمار اول و a یک شمار درست باشد که بر p بخش‌پذیر نیست، $a^{p-1} - ۱$ بر p بخش‌پذیر است.

اثبات - اگر x کلاس a در $K = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ باشد داریم $x \neq ۰$. چون گروه $K - \{۰\}$ دارای $(p - ۱)$ عنصر است پس بنابر ۴.۶.۳ خواهیم داشت $x^{p-1} = ۱$. اما x^{p-1} همان کلاس a^{p-1} با مقیاس p است به عبارت دیگر $a^{p-1} - ۱$ بر p بخش‌پذیر است .

۴ . ۶ - حلقهٔ انتگر

۱.۶.۴- تعریف-حلقهٔ جابجایی A راکه‌دارای یک عنصر یکه متمایز ازصفراست درنظرمی‌گیریم . چنانچه حاصل‌ضرب هردوعنصر مخالف با ۰ از A مخالف با ۰ باشد حلقه را انتگرمی‌نامند.

۲.۶.۴ - دریک‌حلقهٔ انتگر می‌توان برابری $ab = ab'$ را که درآن $a \neq ۰$ است «ساده» کرد و نوشت $b = b'$. زیرا داریم $a(b - b') = ۰$ پس یا $a = ۰$ و یا $b - b' = ۰$ است و چون داریم $a \neq ۰$ پس $b - b' = ۰$ می‌باشد .

۳.۶.۴ - هرهیأت یک حلقهٔ انتگر است . مثلاً $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ حلقه های انتگر هستند .

۴.۶.۴ - **تبصره** - بطورکلی هرگاه K یک هیأت باشد ، هرزیر حلقهٔ یکه‌دار K یک حلقهٔ انتگر است. مثلاً زیر حلقهٔ $\mathbf{Z}$ از هیأت $\mathbf{Q}$ با اینکه یک هیأت نیست یک‌حلقهٔ انتگر می‌باشد .

۵.۶.۴ - می‌خواهیم نشان‌دهیم که عملاً کلیهٔ حلقه های انتگر با استفاده از تبصرهٔ ۴.۶.۴ بدست می‌آیند. برای این کار یک حلقهٔ انتگر درنظر می گیریم و آنرا ، با بکاربردن همان روشی که از حلقهٔ انتگر $\mathbf{Z}$ هیأت $\mathbf{Q}$ را می‌سازد ، دریک هیأت غوطه‌ور می کنیم .

پس فرض می‌کنیم A یک حلقهٔ انتگر و E مجموعهٔ جفتهای (p , q) باشد که در آنجا $p\in A$ و $q\in A$ و $q\neq 0$ است . چنانچه (p , q) و (p_1 , q_1) متعلق به E باشند ، هنگامیکه $pq_1=qp_1$ است می‌نویسیم $R : (p , q)\sim(p_1 , q_1)$. روشن است که بستگی R بازتابی و متقارن است . این بستگی متعدی نیز هست زیرا اگر $(p , q)\sim(p_1 , q_1)$ و $(p_1 , q_1)\sim(p_2 , q_2)$ باشد داریم :

$$pq_1=qp_1 , p_1q_2=q_1p_2 \text{ ، پس } pq_1q_2=qp_1q_2=qq_1p_2$$

چون A یک حلقهٔ انتگر و $q_1\neq 0$ می‌باشد از برابری اخیر نتیجه می‌شود $pq_2=qp_2$ پس $(p , q)\sim(p_2 , q_2)$ است . بنابراین R یک بستگی هم‌ارزی است .

مجموعهٔ E/R را با K نشان می‌دهیم و یک قانون‌ضرب درمجموعهٔ K چنین تعریف می‌کنیم : چنانچه x و y متعلق به K باشند نماینده‌های (p , q) و (r , s) کلاسهای x و y را انتخاب می‌نماییم و کلاسی را که یک نمایندهٔ آن (pr , qs) است با xy معین می‌کنیم [چون $q\neq 0$ و $s\neq 0$ است پس $qs\neq 0$ می‌باشد به‌طوریکه داریم $(pr , qs)\in E$] . می‌خواهیم ثابت کنیم که xy و یا به گفتهٔ دیگر کلاس (pr , qs) ، تنها به x و y بستگی دارد .

اگر (p_1 , q_1) یک نمایندهٔ دیگر x و (r_1 , s_1) یک نمایندهٔ دیگر y باشد داریم $pq_1=qp_1$ و $rs_1=sr_1$. پس $prq_1s_1=qsp_1r_1$ است و درنتیجه :

$$(pr , qs)\sim(p_1r_1 , q_1s_1)$$

می‌باشد یعنی xy بستگی به‌انتخاب نماینده‌های عنصرهـای x و y ندارد . علاوه برقانون ضرب بالا ، در K یک قانون جمع نیز تعریف می‌شود . عنصرهای x و y بالا را اختیار می‌نماییم و کلاسی را که نمایندهٔ آن $(ps+qr , qs)$ است با $x+y$ نشان می‌دهیم . دراینجا نیز باید ثابت کرد که عنصر $x+y$ تنها به x و y بستگی دارد . چون داریم:

$$(ps+qr)q_1s_1=(pq_1)(ss_1)+(qq_1)(rs_1)=(p_1q)(ss_1)+(qq_1)(r_1s)$$
$$=(p_1s_1+q_1r_1)qs$$

پس $(ps+qr , qs)\sim(p_1s_1+q_1r_1 , q_1s_1)$ یعنی $x+y$ تنها بستگی به عنصرهای x و y دارد .

چنانچه $(p\ ,\ q)\in E$ باشد کلاس هم‌ارزی آنرا که عنصری از K است با $\frac{p}{q}$ نشان می‌دهیم . بنابراین عملیات ضرب وجمع در K بصورت زیر در می‌آیند :

$$\frac{p}{q}\,\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}\ ,\ \ \frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+qr}{qs}$$

و بستگی هم‌ارزی R بیان می‌کند که :

$$\frac{p}{q}=\frac{r}{s}\Longleftrightarrow ps=qr$$

به کمک این فرمولها و چند محاسبهٔ ساده دیده می‌شود که :

الف ـ جمع و ضرب در K جابجایی و انجمنی هستند .

ب ـ ضرب نسبت به جمع دارای ویژگی پخشی است .

پ ـ $\frac{0}{1}$ عنصر بی‌اثر جمع و $\frac{1}{1}$ عنصر بی‌اثر ضرب است .

ت ـ هرعنصر $\frac{p}{q}$ دارای عنصر قرینهٔ $-\frac{p}{q}$ است .

پس K یک حلقهٔ جابجایی ویکه‌دار است.

برای اینکه عنصر $\frac{p}{q}$ متعلق به K برابربا $\frac{0}{1}$ باشدبایاوبسنده‌است که $p\cdot 1=q\cdot 0$ یعنی $p=0$ باشد . از اینجا نتیجه می‌شود که $\frac{0}{1}\neq\frac{1}{1}$ است . به‌علاوه اگر $\frac{p}{q}\neq\frac{0}{1}$ باشد با توجه به اینکه $p\neq 0$ است می‌توان عنصر $\frac{q}{p}$ را تشکیل داد ، داریم :

$$\frac{p}{q}\,\frac{q}{p}=\frac{pq}{pq}=\frac{1}{1}$$

پس هرعنصر K که مخالف با صفر باشد وارون پذیر است. بنابراین ، با استفاده از ۶.۰.۴ نتیجه می‌شود که K یک هیأت می‌باشد .

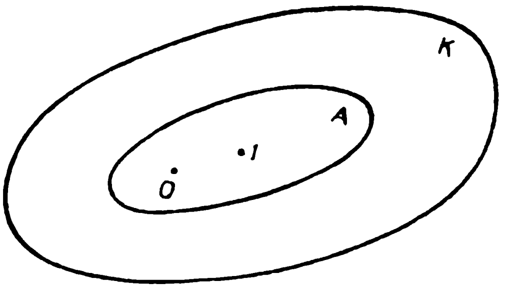
هرگاه برای هرعنصر p از A عنصر $\frac{p}{1}$ از K را با $\Phi(p)$ نشان دهیم ، برای $p\in A$ و $q\in A$ خواهیم داشت :

$$\Phi(p)+\Phi(q)=\frac{p}{۱}+\frac{q}{۱}=\frac{p\cdot ۱+q\cdot ۱}{۱\cdot ۱}=\frac{p+q}{۱}=\Phi(p+q)$$

$$\Phi(p)\,\Phi(q)=\frac{p}{۱}\cdot\frac{q}{۱}=\frac{pq}{۱\cdot ۱}=\frac{pq}{۱}=\Phi(pq)$$

بنابراین Φ یک همومرفیسم حلقهٔ A در هیأت K می‌باشد. این همومرفیسم انژکتیو است زیرا اگر $\frac{p}{۱}=\frac{q}{۱}$ باشد داریم $p\cdot ۱=۱\cdot q$ ویا $p=q$. به این ترتیب Φ یک ایزومرفیسم A روی یک زیر حلقهٔ K است. به‌علت وجود این ایزومرفیسم دو عنصر p و $\frac{p}{۱}$ را یکسان می‌گیرند.

۴ . ۶ . ۶ - تعریف - هیأت K ، که به روش بالا ساخته شد ، هیأت کسرهای حلقهٔ انتگر A نامیده می‌شود.



شکل ۲۰

بنابرآنچه که دیده شد A با یک زیر حلقهٔ K یکی می‌گردد و هر عنصر p از A با عنصر $\frac{p}{۱}$ از K یکی گرفته می‌شود. به ویژه عنصر ۰ از A با $\frac{۰}{۱}$ یعنی عنصر بی‌اثر K برای جمع ، وعنصر ۱ از A با $\frac{۱}{۱}$ یعنی عنصر بی اثر K برای ضرب، یکی گرفته می‌شود.

چنانچه $p\in A$ و $q\in A$ و $q\neq ۰$ باشد داریم :

$$\frac{p}{q}\cdot q=\frac{pq}{q}=\frac{p}{۱}=p$$

پس $\frac{p}{q}=pq^{-۱}$ است.

همان طوری که گفته شد، حلقهٔ انتگر A دریک هیأت (هیأت کسرهای A) غوطه‌ور گردید.

۴ ۰ ۶ ۰ ۷ - اگرساختمان هیأت کسرها را برای حلقهٔ Z بکار بریم هیأت Q بدست می‌آید.

۴ . ۷ - ساختمان حلقهٔ Z

۴ ۰ ۷ ۰ ۱ - در بخش اول شمارهٔ ۴ ۰ ۶ ۰ ۵ تنها یک قانون ترکیب در A معین گردید (ضرب). درحالتهای دیگر نیز می‌توان به روش مشابه عمل نمود. به‌عنوان مثال می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه می‌توان به‌طور دقیق، از روی N مجموعهٔ Z را ساخت (ویژگی‌های معمولی N را دانسته فرض می‌کنیم).

مجموعهٔ جفت‌های (m , n) را، که در آنجا m و n متعلق به N هستند، با E نشان می‌دهیم (دراینجا فرض $n \neq 0$ زاید است). چنانچه $m+n_1=m_1+n$ باشد قرار می‌دهیم $(m , n) \sim (m_1 , n_1)$. به‌این ترتیب یک بستگی هم‌ارزی R بدست می‌آید.

مجموعهٔ E/R را با Z نشان می‌دهیم. برای تعیین قانون جمع در Z دو عنصردلخواه x و y رادر نظر می‌گیریم. اگر (m , n) یک نمایندهٔ x و (m' , n') یک نمایندهٔ y باشد، $x+y$ کلاس عنصر $(m+m' , n+n')$ خواهد شد. بدین ترتیب قانون جمع درمجموعهٔ Z معین می‌گردد که دارای ویژگی‌های انجمنی و جابجایی می‌باشد وعنصر بی‌اثر آن کلاس عنصر $(0 , 0)$ است. گسترش Φ که یک عنصر n از N را به کلاس عنصر $(n , 0)$ تبدیل می‌کند یک همومرفیسم انژکتیو N در Z است.

۴ ۰ ۷ ۰ ۲ - به‌علاوه هرعنصر Z دارای یک عنصر قرینه است. زیرا اگر $(m,n) \in E$ باشد حاصل جمع دو کلاس به نماینده‌های (m , n) و (n , m) کلاسی است به نمایندهٔ $(m+n , n+m)$ و در نتیجه $(0 , 0)$ یک نمایندهٔ این کلاس است، زیرا $(0 , 0)$ هم ارز $(m+n , m+n)$ می‌باشد. به این ترتیب Z یک گروهٔ جابجایی برای قانون جمع است.

۴ ۰ ۷ ۰ ۳ - هرعنصر n از N راباعنصر $\Phi(n)$ از Z یکی می‌گیرند. به‌این ترتیب N در Z غوطه‌ورمی گردد به‌طوری که جمع وتفریق در Z تعمیم جمع و تفریق N می‌شود (روشن است که در N تفریق همیشه ممکن نیست) و عنصر 0 از N با کلاس عنصر $(0 , 0)$ یعنی با عنصر صفر Z یکی می‌گردد. چنانچه $(m , n) \in E$ باشد، حاصل‌جمع

کلاس عنصر (m , n) وکلاس عنصر $(\circ , n)$ کلاس عنصر $(m+n , n)$ می‌باشد وکلاس هم‌ارزی $(m+n , n)$ برابر باکلاس عنصر $(\circ , m)$ یعنی m است. پس کلاس عنصر (m , n) برابر با $m-n$ می گردد.

ازاینجانتیجه می‌شودکه $\mathbf{Z}=\mathbf{N}\bigcup(-\mathbf{N})$ است. اگر $p\in\mathbf{N}\bigcap(-\mathbf{N})$ باشد داریم $p\in\mathbf{N}$ و $p\in-\mathbf{N}$. پس عنصر q از $\mathbf{N}$ وجود داردبه طوری که $p=-q$ و ازآنجا $p+q=\circ$ است . پس $p=\circ$ می‌باشد ، و داریم :

$$\mathbf{N}\bigcap(-\mathbf{N})=\{\circ\}$$

۴ . ۷ . ۴ ـ در $\mathbf{Z}$ قانون ضرب را به‌صورت زیر معین می کنیم :

$$(m-n)(m_1-n_1)=mm_1+nn_1-(mn_1+nm_1)$$

این حاصلضرب بستگی‌به‌انتخاب‌عنصرهای (m_1 , n_1) و (m , n) ندارد و تنها بستگی به $m-n$ و m_1-n_1 دارد . می‌توان نشان دادکه $\mathbf{Z}$ یک حلقهٔ جابجایی است‌که دارای عنصریکهٔ ۱ می‌باشد . به علاوه $\mathbf{Z}$ یک حلقهٔ انتگر است .

فصل پنجم
چند جمله‌ای‌های یک متغیری

خواننده از پیش با چندجمله‌ای‌های یک متغیری که ضرایب آنها متعلق به $\mathbf{R}$ یا $\mathbf{C}$ باشد آشنایی دارد. دراینجا یک چندجمله‌ای را از نظر صوری مطالعه خواهیم کرد. همچنین بخش پذیری چندجمله‌ای‌ها را که شباهت کامل به بخش پذیری در $\mathbf{Z}$ دارد بررسی خواهیم نمود. بااستفاده‌از قضیهٔ معروف دالامبر ـ گوس که‌ما آنرا بدون اثبات می‌پذیریم، ویژگیهای بخش پذیری در چند جمله‌ای‌های با ضرایب مختلط به‌صورت بسیار ساده‌ای در می‌آیند. بعلاوه برتری شمارهای مختلط برشمارهای حقیقی آشکار می گردد (شماره‌های ۴۰۱۱۰۰ و ۱۱۰۱۲۰۰ را با هم مقایسه کنید).

۱۰۵ - تعریف

۱.۱.۰ - معمولاً چند جمله‌ای‌هایی که تاکنون دیده‌ایم گسترش هایی به‌صورت:

$$x \to \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$$

هستند که درآن‌ها متغیر x و ضرایب α_i ، $0 \leqslant i \leqslant n$ ، متعلق به $\mathbf{R}$ می‌باشند. دراین فصل با قرار دادن حلقهٔ یکه‌دار وجابجایی دلخواه K به‌جای $\mathbf{R}$ می‌خواهیم‌این مطلب را تعمیم دهیم. به علاوه یک چند جمله‌ای را به‌صورت یک گسترش درنظر نمی گیریم، بلکه هدف ما در آغاز، خود عبارت‌صوری‌چندجمله‌ای‌است. بنابراین می‌توان چند جمله‌ای‌هایی را که مورد بررسی قرار می گیرند عبارت از دستگاه ضرایب $(\alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots)$ دانست که در هریک از آنها از ردیف معینی به بعد همهٔ ضرایب برابر با صفرند.

۲۰۱۰۰ - تعریف - فرض می‌کنیم K یک حلقهٔ‌جابجایی و یکه‌دار باشد. دنبالهٔ $(\alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots)$ ازعنصرهای K که در آن از ردیف‌معینی به بعدهمهٔ α_i ها برابر باصفرند چند، جمله‌ای باضرایب متعلق به K نامیده می‌شود.

عنصرهای α_i را ضرایب چند جمله‌ای و به ویژه α_0 را مقدار ثابت چند جمله‌ای می‌نامند.

۵ . ۱ . ۳ - **جمع چند جمله‌ای ها** - اگر $P=(\alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2 , \cdots)$ و $Q=(\beta_0 , \beta_1 , \beta_2 , \cdots)$ دو چند جمله‌ای باضرایب متعلق به K باشند ، قرار می‌دهیم:

$$P+Q=(\alpha_0+\beta_0 , \alpha_1+\beta_1 , \cdots)$$

به‌طوری که دیده می‌شود $P+Q$ یک چند جمله‌ای باضرایب متعلق به K است و مجموعهٔ چندجمله‌ای‌ها با قانون ترکیب بالا (جمع) یک گروه جابجایی تشکیل می‌دهد. عنصریکه این گروه ، چند جمله‌ای $(0 , 0 , 0 , \cdots)$ است که با 0 نشان داده می‌شود . قرینهٔ چندجمله‌ای $P=(\alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2 , \cdots)$ چند جمله‌ای $(-\alpha_0 , -\alpha_1 , -\alpha_2 , \cdots)$ می‌باشد و آنرا با $-P$ می‌نمایند .

۵ . ۱ . ۴ - **ضرب چند جمله‌ای‌ها** - اگر $P=(\alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2 , \cdots)$ و $Q=(\beta_0 , \beta_1 , \beta_2 , \cdots)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب متعلق به K باشند قرارمی‌دهیم $PQ=(\rho_0 , \rho_1 , \rho_2 , \cdots)$ که در آن :

$$\rho_0=\alpha_0\beta_0 ,$$

$$\rho_1=\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0 ,$$

$$\rho_2=\alpha_0\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_0 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho_n=\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_p\beta_{n-p}+\cdots+\alpha_n\beta_0=\sum_{i+j=n}\alpha_i\beta_j$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

چنانچه α_i برای $i>N$ و β_j برای $j>M$ برابرباصفرباشند، ρ_n ها برای $n>N+M$ برابر باصفر خواهند بود . زیرا اگر $n>N+M$ باشد ، دست‌کم یکی از دو بستگی $i>N$ ویا $j>M$ برقرار است و هرجملهٔ $\alpha_i\beta_j$ از ρ_n برابر باصفر می‌باشد .

چنانکه دیده می‌شود PQ یک چند جمله‌ای با ضرایب متعلق به K است.

۵ . ۱ . ۵ - چون حلقهٔ K جابجایی است ، به سادگی دیده می‌شود که ضرب چند جمله‌ای‌ها گردش پذیر است ، وبه‌علاوه نسبت به‌جمع دارای ویژگی پخشی می‌باشد. برای اثبات‌ویژگی‌انجمنی‌ضرب چند جمله‌ای‌دیگر $R=(\gamma_0 , \gamma_1 , \gamma_2 , \cdots)$ را درنظرمی گیریم و قرار می‌دهیم :

$$QR=(\sigma_0 , \sigma_1 , \sigma_2 , \cdots) , \quad P(QR)=(\tau_0 , \tau_1 , \tau_2 , \cdots) ,$$

$$(PQ)R=(\tau'_0 , \tau'_1 , \tau'_2 , \cdots)$$

داریم :

$$\tau_n = \sum_{i+s=n} \alpha_i \sigma_s = \sum_{i+s=n} \alpha_i \left(\sum_{j+k=s} \beta_j \gamma_k \right) = \sum_{i+j+k=n} \alpha_i (\beta_j \gamma_k)$$

$$\tau'_n = \sum_{r+k=n} \rho_r \gamma_k = \sum_{r+k=n} \left(\sum_{i+j=r} \alpha_i \beta_j \right) \gamma_k = \sum_{i+j+k=n} (\alpha_i \beta_j) \gamma_k$$

و ازآنجا $\tau_n = \tau'_n$ پس $(PQ)R = P(QR)$ است .

بدین ترتیب مجموعهٔ چندجمله‌ای‌ها ، باضرایب متعلق به K ، تشکیل یک حلقهٔ جابجایی می‌دهند .

۶۰۱۰۰ - اگر α عنصری از K باشد ، چند جمله‌ای $(\alpha, ۰, ۰, \cdots)$ را با $\bar{\alpha}$ نشان می‌دهیم . به آسانی دیده می‌شود که گسترش $\alpha \to \bar{\alpha}$ یک هومرفیسم K در حلقهٔ چند جمله‌ای‌ها ست ویا به گفتهٔ دیگر داریم :

$$\overline{\alpha+\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}\ ,\ \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\,\bar{\beta}$$

به روشنی دیده می‌شود که هومرفیسم بالا انژکتیو است . همچنین می‌توان $\bar{\alpha}$ را با α یکی گرفت [همان‌طوری که چند جمله‌ای $(۰, ۰, ۰, \cdots)$ را با ۰ نشان دادیم].

بدین‌ترتیب دیده می‌شود که K یک زیر حلقه ازحلقهٔ چند جمله‌ای‌ها و عنصریکه آن همان عنصریکه حلقهٔ چند جمله‌ای‌هاست .

اگر $\alpha \in K$ و $P = (\alpha_۰, \alpha_۱, \cdots)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب متعلق به K باشد ، به‌آسانی‌دیده می‌شود که $\alpha P = (\alpha\alpha_۰, \alpha\alpha_۱, \alpha\alpha_۲, \cdots)$ است .

۷۰۱۰۰ - **نمایش‌معمولی‌یک‌چندجمله‌ای** - چندجمله‌ای $(۰, ۱, ۰, ۰, ۰, \cdots)$ را اختیار می‌کنیم و آن رابا X می‌نماییم . بااستفاده از تعریف ضرب چند جمله‌ای‌هاداریم:

$$X^۲ = (۰, ۰, ۱, ۰, ۰, \cdots)$$

$$X^۳ = (۰, ۰, ۰, ۱, ۰, \cdots)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X^n = (۰, ۰, ۰, \cdots, ۰, ۱, ۰, ۰, \cdots)$$

[که در آن ضریب $(n+۱)$ ام برابر با ۱ یعنی عنصریکه K می‌باشد].

پس خواهیم داشت :

$$a_nX^n = (0, 0, 0, \cdots, 0, a_n, 0, 0, \cdots)$$

و چنانچه a_i ها هنگامیکه $i > n$ است برابر باصفر باشند می‌توان نوشت :

$$(a_0 , a_1 , a_2 , \cdots) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

از این پس یک چند جمله‌ای را به صورت :

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

نشان می‌دهیم و آنرا چندجمله‌ای از X می‌خوانیم . دراین عبارت X **متغیر** ویا **مجهول** گفته می‌شود . روشن است که بجای X می‌توان حرف دیگری به کاربرد .

۸ . ۱ . ۵ - حلقهٔ چندجمله‌ای‌های X باضرایب متعلق به K را با $K[X]$ نشان می‌دهیم .

۲ . ۵ - درجهٔ یک چند جمله‌ای

۱ . ۲ . ۵ - چندجمله‌ای $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots \in K[X]$ مفرض است . **درجهٔ** P ، که با $\deg P$ نموده می‌شود ، عبارت‌است‌از بزرگترین شمارد رست n به‌طوری که $a_n \neq 0$ باشد . این شمار بجز در موردچندجمله‌ای 0 همواره وجود دارد و تنها چندجمله‌ای 0 دارای درجه نیست .

پس اگر P یک چندجمله‌ای درجهٔ n باشد ، داریم :

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$$

که در آن $a_n \neq 0$ است . عنصر a_n را **ضریب بزرگترین درجهٔ** چند جمله‌ای P می‌نامند . چند جمله‌ای P را **یکانی** گویند اگر $a_n = 1$ باشد .

۲ . ۲ . ۵ - نابرابری $\deg P \leqslant n$ بیان می‌کند که یا $\deg P \leqslant n$ ویا $P = 0$ است . همچنین است هنگامیکه $\deg P < n$ باشد .

۳ . ۲ . ۵ - اگر P و Q دوچندجمله‌ای مخالف باصفر باشند ، به‌آسانی دیده می‌شود که :

$$\deg (P+Q) \leqslant \sup (\deg p , \deg Q)$$

است . هم‌چنین از فرمول (۱) شمارهٔ ۵ . ۱ . ۴ نابرابری :

$$\deg(PQ) \leqslant \deg P + \deg Q$$

نتیجه می‌شود .

۵ . ۲ . ۴ - قضیه - فرض می‌کنیم K یک حلقهٔ انتگر باشد ، در این صورت :

I — حلقهٔ $K[X]$ انتگر است .

II — اگر P و Q متعلق به $K[X]$ ومخالف با صفر باشند ، داریم :

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

اثبات - چند جمله‌ای ۱ مخالف با ۰ و عنصریکه حلقهٔ $K[X]$ می‌باشد . فرض می‌کنیم :

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \cdots + \alpha_n X^n \ , \quad (\alpha_n \neq 0)$$
$$Q = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \cdots + \beta_p X^p \ , \quad (\beta_p \neq 0)$$

بنابراین داریم :

$$PQ = \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)X + \cdots + \alpha_n\beta_p X^{n+p}$$

اما بنا به فرض حلقهٔ K انتگر است ، پس $\alpha_n\beta_p \neq 0$ می‌باشد . این بستگی نشان‌می‌دهد که $PQ \neq 0$ است یعنی $K[X]$ انتگر می‌باشد و به‌علاوه :

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

۵ . ۳ - تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر حسب نماهای کاهشی

فرض می‌کنیم K یک‌هیأت باشد (تا پایان شمارهٔ ۵ . ۷ این فرض را پایدار می‌گیریم) .

۵ . ۳ . ۱ - قضیه - چنانچه A و B متعلق به $K[X]$ و $B \neq 0$ باشد ، دو چندجمله‌ای یکتای Q و R متعلق‌به $K[X]$ وجود دارند به‌طوری‌که :

$$A = BQ + R \ , \quad \deg R < \deg B$$

(چند جمله‌ای Q را **خارج قسمت** و R **راماندهٔ** تقسیم A بر B می‌نامند) .

اثبات :

۱ - **یکتایی** Q و R - فرض می‌کنیم :

$$A=BQ+R=BQ_1+R_1 \ , \ \deg R<\deg B \ , \ \deg R_1<\deg B$$

باشد خواهیم داشت $R-R_1=B(Q_1-Q)$. برای $Q_1=Q$ یکتایی Q و R روشن است . اگر $Q_1-Q\neq 0$ باشد ،بنابر شمارهٔ ۵ ۰ ۲ ۰ ٤ باید داشته باشیم :

$$\deg(R-R_1)\geqslant \deg B \quad \text{ویا} \quad \deg(B(Q_1-Q))\geqslant \deg B$$

که ممکن نیست . پس $Q_1=Q$ و دراین‌صورت $R_1=R$ است .

۲ - **وجود Q و R** - فرض می‌کنیم :

$$A=\alpha_nX^n+\alpha_{n-1}X^{n-1}+\cdots+\alpha_0$$

$$B=\beta_mX^m+\beta_{m-1}X^{m-1}+\cdots+\beta_0 \ , \ (\beta_m\neq 0)$$

اگر درجهٔ A کوچکترازدرجهٔ Bباشد می‌توان Q و R را به ترتیب برابر با ۰ و A گرفت. چنانچه $\deg A\geqslant \deg B$ باشد (دراین صورت $A\neq 0$ است و می‌توان فرض کرد که α_n مخالف صفر باشد) $n\geqslant m$ است. قرار می‌دهیم :

$$q_1=\frac{\alpha_n}{\beta_n}X^{n-m}$$

پس جمله‌ای از Bq_1 که دارای بزرگترین درجه می‌باشد عبارت از α_nX^n است و خواهیم داشت :

$$A-Bq_1=A_1 \ , \ \deg A_1<\deg A \qquad (1)$$

اگر $\deg A_1$ کوچکتر از $\deg B$ باشد قضیه ثابت است ، وگرنه یک جمله‌ای q_2 به قسمی وجود دارد که :

$$A_1-Bq_2=A_2 \ , \ \deg A_2<\deg A_1 \ , \cdots \qquad (2)$$

این روش را ادامه می‌دهیم تا به بستگی زیر برسیم :

$$A_{n-1}-Bq_n=A_n \ , \ \deg A_n<\deg B \qquad (n)$$

چنانچه دوطرف برابری‌های(۱) ، (۲) ، ۰ ۰ ۰ و (n) را با هم جمع کنیم خواهیم‌داشت:

$$A-B(q_1+q_2+\cdots+q_n)=A_n$$

که با اختیار $Q=q_1+q_2+\cdots+q_n$ و $R=A_n$ وجود Q و Rثابت‌می‌گردد.

۵ ۰ ۳ ۰ ۲ - اثبات بالا یک روش عملی برای محاسبهٔ Q و R بدست می‌دهد. مثال زیر چگونگی روش بالا را درحالتی‌که $K=\mathbf{R}$ است نشان می‌دهد :

$$
\begin{array}{ll|l}
A & :\ x^5+2x^4-x^3+22x & x^2-4x+1\ :B \\
\cline{3-3}
Bq_1 & :\ x^5-4x^4+x^3 & \underbrace{\underbrace{x^3}_{q_1}+\underbrace{6x^2}_{q_2}+\underbrace{22x}_{q_3}+\underbrace{82}_{q_4}}_{Q} \\
\cline{2-2}
A_1 & :\ 6x^4-2x^3+22x & \\
Bq_2 & :\ 6x^4-24x^3+6x^2 & \\
\cline{2-2}
A_2 & :\ 22x^3-6x^2+22x & \\
Bq_3 & :\ 22x^3-88x^2+22x & \\
\cline{2-2}
A_3 & :\ 82x^2 & \\
Bq_4 & :\ 82x^2-328x+82 & \\
\cline{2-2}
A_4 & :\ \underbrace{328x-82}_{R} &
\end{array}
$$

(در عمل از نوشتن حروف A ، B ، A_1 ، . . . خودداری می‌کنند) .

۵ . ۴ ـ بخش پذیری چند جمله‌ای‌ها

۵ . ۴ . ۱ ـ فرض می‌کنیم $\lambda \neq 0$ متعلق به K باشد . λ هرچندجمله‌ای $A \in K[X]$ را بخش می‌کند . زیرا (با در نظر گرفتن تعریف بخش پذیری (۴ . ۲ . ۴)) داریم :

$$A=\lambda\left(\frac{1}{\lambda}A\right)$$

۵ . ۴ . ۲ ـ فرض می‌کنیم A و B دوعنصر از $K[X]$ باشند. اگر B بر A بخش‌پذیر و $B \neq 0$ باشد خواهیم داشت $\deg A \leqslant \deg B$. در حالتی که $\deg A=\deg B$ باشد داریم $B=\lambda A$ که در آنجا $\lambda \in K$ و $\lambda \neq 0$ است (زیرا از برابری $B=CA$ برابری $\deg C=\deg B-\deg A=0$ نتیجه می‌شود) .

۵ . ۴ . ۳ ـ اگر A و B بخشیاب یکدیگر باشند، خواهیم داشت $B=\lambda A$ که در آنجا $\lambda \in K$ و $\lambda \neq 0$ است (این مطلب برای $A \neq 0$ و $B \neq 0$ از شمارهٔ ۵ . ۴ . ۲ بدست می‌آید و درحالتی که $A=0$ و $B=0$ باشد درستی آن روشن است). وارون این مطلب نیز آشکار است. هنگامی که A و B بخشیاب یکدیگرند، گوییم که A و B **متناسب‌اند**. به‌آسانی می‌توان دید که عبارت « A و B متناسب‌اند » یک بستگی هم‌ارزی است . دوچندجمله‌ای متناسب از نظر بخش‌پذیری درست دارای یک نقش هستند . هرچند جمله‌ای مخالف باصفر تنها و تنها متناسب با یک چند جمله‌ای یگانی است .

۰ . ۴ . ۴ - لم - اگر I یک ایده آل $K[X]$ باشد :

I – یک چند جمله‌ای P متعلق به $K[X]$ به قسمتی وجود دارد که هر عنصر I بر آن بخش پذیر است.

II– چند جمله‌ای P که با ویژگی (I) معین می‌شود با تقریب یک ضریب مخالف با صفر، یکتاست.

اثبات - برای $I=\{0\}$ لم روشن است . بنابراین فرض می‌کنیم $I\neq\{0\}$ باشد. عنصر P متعلق به I را که مخالف با صفر است وکوچکترین درجهٔ ممکن را دارد در نظر می گیریم . می‌دانیم که همهٔ مضرب های P متعلق به I است . به‌وارون بنابر ۰ . ۳ . ۱ برای هرچند جمله‌ای A متعلق به I ، چند جمله‌ای‌های Q و R متعلق به $K[X]$ وجود دارند به طوری که $A=PQ+R$ و $\deg R<\deg P$ باشد . چون A و P متعلق به I هستند داریم $R=A-PQ\in I$. اگر $R\neq 0$ باشد نا برابری $\deg R<\deg P$ با انتخاب P ناسازگار است . پس $R=0$ و $A=PQ$ مضرب P می‌باشد . بدین‌ترتیب (I) ثابت می‌شود . روشن است که برای هر λ متعلق به K ومخالف با صفر، I مجموعهٔ مضرب‌های λP نیز هست . به وارون اگر I مجموعهٔ مضرب‌های چند جمله‌ای P' باشد P و P' مضرب یکدیگرند. پس با استفاده از شمارهٔ ۰ . ۴ . ۳ داریم $P'=\lambda P$ ، $\lambda\in K$ و $\lambda\neq 0$. بدین‌ترتیب (II) ثابت می گردد .

۰ . ۴ . ۵ - قضیه - فرض می‌کنیم A و B دوعنصر از $K[X]$ باشند.

(I) – عنصر D متعلق به $K[X]$ وجود داردبه‌طوری که بخشیاب‌های مشترك A و B بخشیاب های D باشند.

(II) – چند جمله‌ای D بالا با تقریب یک ضریب ثابت مخالف با صفر یکتاست.

(III) – اگرچند جمله‌ای های A و B هردو برابر با صفر نباشند درجهٔ D بزرگتر از درجهٔ هر بخشیاب مشترك A و B است.

(IV) – دو چند جمله‌ای U و V متعلق به $K[X]$ وجود دارد به قسمتی که داریم :

$$AU+BV=D \qquad (۱)$$

اثبات - مجموعهٔ چند جمله‌ای هایی را که به صورت $AP+BQ$ هستند ودرآنها P و Q متعلق به $K[X]$ می‌باشند با I نشان می‌دهیم . به آسانی دیده می‌شود که I یک ایدآل $K[X]$ است . پس‌بنابر ۰ . ۴ . ۴ یک چند جمله‌ای D متعلق به

$K[X]$ وجود دارد به‌طوری که هر عنصر I مضرب D باشد . بنابراین برای هرچندجمله‌ای H متعلق به $K[X]$ هم‌ارزی‌های زیر را داریم :

H بخشیاب مشترك A و B است .

$\Longleftrightarrow H$ بخشیاب هرچند جمله‌ای به صورت $AP+BQ$ است که درآن P و Q متعلق به $K[X]$ هستند .

$\Longleftrightarrow H$ بخشیاب عنصرهای I است .

$\Longleftrightarrow H$ بخشیاب چند جمله‌ای D می‌باشد .

پس D دارای ویژگی (I) است . چنانچه D' چند جمله‌ای دیگری با ویژگی (I) باشد بنابر ۰ . ٤ . ۳ ، D و D' بخشیاب یکدیگرندو داریم $D'=\lambda D$ ، $\lambda\in K$ و $\lambda\neq 0$.
اگر دست کم یکی از دوچند جمله‌ای A و B مخالف باصفرباشد ، D مخالف با صفر است و با استفاده از (I) و شمارهٔ ۰ . ٤ . ۲ ویژگی (III) نتیجه می‌شود . ویژگی (IV) با توجه به اینکه $D\in I$ است بدست می‌آید .

۰ . ٤ . ٦ - تعریف - چند جمله‌ای D را بزرگترین بخشیاب مشترك A و B می‌نامند . بستگی (۱) برابری بزوگفته می‌شود .

۰ . ٤ . ۷ - روش پیداکردن بزرگترین بخشیاب مشترك دو چند جمله‌ای A و B - هرگاه $B=0$ باشد ، بخشیاب‌های مشترك A و B بخشیاب های A هستند . پس A بزرگترین بخشیاب مشترك A و B است .

فرض می‌کنیم $B\neq 0$ باشد . با استفاده از شمارهٔ ۰ . ۳ . ۱ داریم :

$$A=BQ+R_1 \ , \ \deg R_1<\deg B$$

بنابراین بخشیابهای مشترك A و B بخشیابهای R_1 نیز هستند . پس بزرگترین بخشیاب مشترك A و B بزرگترین بخشیاب مشترك B و R_1 نیز می‌باشد .

اگر $R_1=0$ باشد چند جمله‌ای B بزرگترین بخشیاب مشترك B و R_1 است .

فرض می‌کنیم R_1 مخالف با صفرباشد . می‌توان نوشت $B=R_1Q_1+R_2$ که $\deg R_2<\deg R_1$. هربخشیاب مشترك B و R_1 بخشیاب مشترك R_1 و R_2 نیزهست پس بزرگترین بخشیاب مشترك B و R_1 بزرگترین بخشیاب مشترك R_1 و R_2 است .

چون درجهٔ چند جمله‌ای‌های B ، R_1 ، R_2 ، . . . کاملاً کاهشی است و این

کاهش نمی‌تواند تا بی‌پایان ادامه یابد، سرانجام به بستگی $R_{n-1}=R_nQ_n+R_{n+1}$ خواهیم رسید به قسمی که $R_{n+1}=0$ باشد. پس بزرگترین بخشیاب مشترک A و B بزرگترین بخشیاب مشترک R_n و R_{n+1}، یعنی R_n است.

۰ . ۴ . ۸ - قضیه - چنانچه A و B و P متعلق به $K[X]$ و چند جمله‌ای D بزرگترین بخشیاب مشترک A و B باشد، DP بزرگترین بخشیاب مشترک AP و BP است.

اثبات - چون AP و BP مضرب‌های DP هستند، پس هربخشیاب DP بخشیاب AP و BP نیزهست. به‌وارون اگر Q یک بخشیاب مشترک AP و BP باشد، بنابرشمارهٔ ۰ . ۴ . ۵ چندجمله‌ای Q بخشیاب چند جمله‌ای $APU+BPV=(AU+BV)P=DP$ می‌باشد.

۰ . ۴ . ۹ - قضیه - فرض می‌کنیم A و B برچند جمله‌ای Q که مخالف با صفر است بخش پذیر بوده و A_1 و B_1 به ترتیب خارج قسمت‌های A و B بر Q باشند. دراین صورت چند جمله‌ای D (بزرگترین بخشیاب مشترک A و B) بر Q بخش پذیر است و چندجمله‌ای D_1 (خارج قسمت D بر Q) بزرگترین بخشیاب مشترک A_1 و B_1 می‌باشد.

اثبات - اگر D'_1 بزرگترین بخشیاب مشترک A_1 و B_1 باشد، D'_1Q بزرگترین بخشیاب‌مشترک A و B خواهد شد(۰ . ۴ . ۸). پس D'_1Q متناسب با D است. بنابراین دو چند جمله‌ای D_1 و D'_1 متناسب‌اند.

۰ . ۴ . ۱۰ - به‌آسانی‌می‌توان‌مطالب این پاراگراف‌را در مورد بیش ازدوچندجمله‌ای تعمیم داد. مثلاً اگر A و B و C متعلق به $K[X]$ باشند، بزرگترین بخشیاب‌مشترک چند جمله‌ای‌های A و B و C به‌صورت $AU+BV+CW$ است.

۵.۵ - چند جمله‌ای‌هایی که نسبت به هم اول‌اند

۰ . ۵ . ۱ - تعریف - چنانچه A و B متعلق به $K[X]$ و بزرگترین بخشیاب مشترک آنها برابر با ۱ باشد، A و B را نسبت به هم اول‌گویند.

۰ . ۵ . ۲ - قضیه - فرض می‌کنیم A و B و C متعلق به $K[X]$ باشند.

اگر BC بر A بخش پذیر و A و B نسبت به هم اول باشند، چند جمله‌ای C بر A بخش پذیر است.

اثبات - چون چند جمله‌ای‌های BC و AC بر A بخش‌پذیرند بزرگترین بخشیاب مشترک آنها نیز بر A بخش پذیر می‌باشد. اما بنابر ۵ . ٤ . ۸ بزرگترین بخشیاب مشترک BC و AC عبارت است از $C = C \cdot ۱$ پس C بر A بخش پذیر است.

۵ . ۵ . ۳ - قضیه - فرض می‌کنیم A و B متعلق به $K[X]$ باشند. برای اینکه A و B نسبت به هم اول باشند، با یاوبسنده است که دو عنصر U و V از $K[X]$ بتوان یافت به طوری که $AU + BV = ۱$ باشند.

اثبات - از برابری بزو برمی‌آید که شرط بالالازم است. به‌علاوه اگر U و V متعلق به $K[X]$ وجود داشته باشند به طوریکه $AU + BV = ۱$ باشد، هربخشیاب مشترک A و B بخشیاب $AU + BV = ۱$ نیزهست، پس عنصری است از K. بنابراین ۱ بزرگترین بخشیاب مشترک A و B می‌باشد.

۵ . ۵ . ٤ - قضیه - فرض می‌کنیم A و B متعلق به $K[X]$ وچند جمله‌ای D یک بخشیاب مشترک مخالف با صفر A و B باشد. چنانچه $A_۱$ و $B_۱$ به ترتیب خارج قسمت‌های A و B بر D باشند، برای اینکه D بزرگترین بخشیاب مشترک A و B باشد با یاوبسنده است که $A_۱$ و $B_۱$ نسبت به هم اول باشند.

اثبات - اگر D' بزرگترین بخشیاب مشترک A و B باشد، بزرگترین بخشیاب مشترک $A_۱$ و $B_۱$ خارج قسمت D' بر D است(۵ . ٤ . ۹). بنابراین برای اینکه D و D' متناسب باشند، بایاوبسنده است که ۱ بزرگترین بخشیاب مشترک $A_۱$ و $B_۱$ باشد.

۵ . ۵ . ۵ - قضیه - اگر A نسبت به هر یک ازچندجمله‌ای‌های $B_۱$ ، $B_۲$ ، . . . ، B_n اول باشد، A وچند جمله‌ای $B_۱B_۲ \cdots B_n$ نسبت به‌هم اول‌اند.

اثبات - با استفاده‌از روش بازگشت کافی‌است که قضیه را برای $n = ۲$ ثابت کنیم. بنابه‌فرض چندجمله‌ای‌های $U_۱$ ، $V_۱$ ، $U_۲$ و $V_۲$ متعلق به $K[X]$ به قسمی وجود دارند

که $AU_1+B_1V_1=1$ و $AU_2+B_2V_2=1$ باشد. از ضرب این دو برابری خواهیم داشت:

$$A(U_1AU_2+U_1B_2V_2+B_1V_1U_2)+B_1B_2(V_1V_2)=1$$

برابری بالا بیان می‌کند که A و B_1B_2 نسبت به هم اول‌اند (۵ . ۵ . ۳).

۵ . ۵ . ۶ - چند جمله‌ای‌های A ، B ، . . . ، C متعلق به $K[X]$ را نسبت به هم اول می‌نامند اگر بزرگترین بخشیاب مشترکشان برابر با ۱ باشد. در این صورت می‌توان مانند شمارهٔ ۵ . ۵ . ۳ نشان داد که چندجمله‌ای‌های U ، V . . . ، W متعلق به $K[X]$ وجود دارند به قسمی که $AU+BV+\cdots+CW=1$ باشد.

۵ . ۶ - مضربهای مشترک دوچندجمله‌ای

۵ . ۶ . ۱ - قضیه - فرض می‌کنیم A و B دوعنصر از $K[X]$ باشند.

(I) — یک چندجمله‌ای M متعلق به $K[X]$ با ویژگی زیر وجود دارد: مضرب‌های مشترک A و B بر M بخش پذیرند.

(II) — چند جمله‌ای M که با ویژگی بالا معین شده است با تقریب یک ضریب مخالف با ۰ یکتاست.

(III) — اگر $A\neq 0$ و $B\neq 0$ باشد، درجهٔ چند جمله‌ای M از درجهٔ هر مضرب مشترک A و B کوچکتر است.

اثبات - روشن است که مجموعهٔ مضرب‌های مشترک A و B یک ایدآل I از $K[X]$ می‌باشد. بنابر شمارهٔ ۵ . ۴ . ۴ یک چندجمله‌ای مانند M وجود دارد به قسمی که هرعنصر I مضربی از M باشد و M با تقریب یک ضریب ثابت مخالف با صفر تنها عنصری است که دارای این ویژگی می‌باشد. به این ترتیب (I) و (II) قضیه ثابت می‌شود. چنانچه A و B مخالف با صفر باشند، چند جمله‌ای AB مخالف با صفر است، و چون $AB\in I$ است، پس $I\neq\{0\}$ می‌باشد و از آنجا داریم $M\neq 0$. بنابراین درجهٔ M معین است و (III) از (I) و شمارهٔ ۵ . ۴ . ۲ نتیجه می‌گردد.

۵ . ۶ . ۲ - تعریف - چندجمله‌ای M کوچکترین مضرب مشترک A و B نامیده می‌شود.

۷.۵- چند جمله‌ای‌های ساده نشدنی

۰.۷.۱- تعریف - چند جمله‌ای P متعلق به K[X] را ساده نشدنی می‌گویند اگر :

۱- $\deg P \geqslant ۱$ باشد.

۲- هر بخشیاب P متناسب با یکی از دو چند جمله‌ای P یا ۱ باشد.

بااستفاده از ۰.۴.۲ می‌توان‌شرط زیر راجایگزین (۲) کرد : چند جمله‌ای P دارای هیچ بخشیابی سانند Q نباشد که در نابرابری $۰ < \deg Q < \deg P$ صدق کند.

چند جمله‌ای‌های ساده نشدنی دارای همان نقش شمارهای اول در نظریهٔ شمارهای درست می‌باشند.

۰.۷.۲- مثال - هرچند جمله‌ای درجهٔ اول ساده نشدنی است.

۰.۷.۳- مثال - چند جمله‌ای $X^۲+۱$ متعلق به $\mathbf{R}[X]$ ساده نشدنی است. زیرا اگر $X^۲+۱$ دارای بخشیابهای درجهٔ اول باشد خواهیم داشت :

$$X^۲+۱=(X+a)(X+a')$$

که درآن a و a′ متعلق به **R** می‌باشند. پس باید $a+a'=۰$ و $aa'=۱$ و یا $a^۲=-۱$ باشد که غیر ممکن است.

بعداً خواهیم‌دید که $X^۲+۱$ در حلقهٔ $\mathbf{C}[X]$ که‌درآنجا **C** هیأت شمارهای‌مختلط رانشان می‌دهد چندجمله‌ای ساده شدنی‌است. زیرا $X^۲+۱=(X+i)(X-i)$ می‌باشد.

۰.۷.۴- مثال - چند جمله‌ای $X^۲-۲$ درحلقهٔ $\mathbf{Q}[X]$ ساده نشدنی است (مانند ۰.۷.۳ کافی‌است‌نشان دهیم که‌درحلقهٔ **Q** دوشمار a و a′ یافت نمی‌شوند که درشرطهای $a+a'=۰$ و $aa'=-۲$ صدق کنند ، زیرا از این‌دو بستگی به $a^۲=۲$ می‌رسیم). اما اگر $X^۲-۲$ را عنصری از $\mathbf{R}[X]$ فرض کنیم ، خواهیم داشت :

$$X^۲-۲=(X-\sqrt{۲})(X+\sqrt{۲})$$

که نشان می‌دهد $X^۲-۲$ در $\mathbf{R}[X]$ ساده شدنی است.

۰.۷.۵- فرض می‌کنیم P و Q دوعنصر از K[X] باشند و چند جلمه‌ای Q ساده نشدنی باشد. دراین صورت یا P و Q نسبت به هم اولند و یا Q بخشیاب P است. زیرا

اگر P و Q نسبت به هم اول‌نباشند بخشیاب مشترکی‌خواهند داشت. اگراین بخشیاب مشترك راکه عنصری از K نیست R بنامیم چون Q ساده نشدنی است ، پس Q و R متناسب‌اند. بنابراین Q بخشیاب P است.

۶.۷.۰- فرض می‌کنیم P و Q دو عنصر ساده نشدنی از $K[X]$ باشند. دراین‌صورت‌چند جمله‌ای‌های P و Q یا نسبت به هم اولند و یا باهم متناسب‌اند. این مطلب به سادگی از ۵.۷.۰ نتیجه می‌شود. به‌ویژه دوچند جمله‌ای ساده نشدنی یگانی‌یا نسبت به‌هم اولند و یا باهم برابرند.

۷.۷.۰- فرض می‌کنیم $(P_i)_{i\in I}$ یک خانواده ازعنصرهای ساده نشدنی ویگانی $K[X]$ باشد که به‌دلخواه اندیس گذاری شده‌اند (به قسمی که برای $i\neq j$ داشته‌باشیم $P_i\neq P_j$). عنصرهای این خانواده ممکن است به شمارهٔ بی‌پایان باشند. از ۶.۷.۰ نتیجه می‌شود که P_i ها دو به دو نسبت به هم اولند.

قضیه - چنانچه P عنصر مخالف صفری از $K[X]$ باشد ، P رامی‌توان تنها به یك روش به‌صورت :

$$P=\lambda\prod_{i\in I}P_i^{\alpha_i} \tag{1}$$

نوشت که‌درآنجا $\lambda\in K$ و α_i ها $(\alpha_i\geqslant 0)$ شمارهای درستی‌هستندکه به‌جز شمارهٔ با پایانی ازآنها برابر با صفر می‌باشند.

[درحقیقت‌حاصل‌ضرب(۱) که به‌ظاهربی‌پایان است یک حاصل‌ضرب با پایان می‌باشد. زیرا تنها شمارهٔ باپایانی از α_i ها مخالف با صفر است].

اثبات - هرگاه $\deg P=0$ باشدقضیه روشن‌است. فرض می کنیم $\deg P=n\geqslant 1$ و قضیه برای چند جمله‌ای‌هایی‌که درجهٔ آنها کوچکتر از n است برقرار باشد.

مجموعهٔ بخشیاب‌های P راکه درجه‌شان بزرگتر یا برابر با یک است با E نشان می‌دهیم. چون P بخشیاب خودش است داریم $P\in E$ و بنابراین $E\neq\varnothing$. عنصر Q از E راکه دارای کوچکترین درجهٔ ممکن است انتخاب می‌کنیم. روشن است که Q ساده نشدنی است. پس برای اندیسی مانند j چند جمله‌ای P بر P_j بخش پذیر است. قرار می‌دهیم $P=P_jR$ که درآن R عنصری از $K[X]$ می‌باشد ، داریم

$\deg R<n$. بنابراین قضیه برای چند جمله‌ای R برقرار است. یعنی R به‌صورت (۱) تجزیه می‌شود. پس چند جمله‌ای $P=P_jR$ نیز دارای تجزیه‌ای به صورت (۱) است.

اکنون فرض می‌کنیم که به جز برابری (۱) برابری دیگر $P=\mu\prod_{i\in I}P_i^{\beta_i}$ ، که درآن $\mu\in K$ و β_i ها $(\beta_i\geqslant 0)$ شمارهای‌درستی هستند که تنهاشمارهٔ باپایانی‌ازآنها مخالف با صفر می‌باشند ، وجود داشته باشد. اگربرای اندیس j داشته باشیم $\alpha_j=0$ ، بااستفاده از ۰.۰.۰ چند جمله‌ای‌های P و P_j نسبت به‌هم اول خواهند شد ، پس $\beta_j=0$ است. بنابراین اگر برای اندیس j داشته باشیم $\beta_j>0$ ، خواهیم داشت $\alpha_j>0$. چنانچه دو طرف برابری $\lambda\prod_{i\in I}P_i^{\alpha_i}=\mu\prod_{i\in I}P_i^{\beta_i}$ را به P_j بخش کنیم به یک‌برابری ازهمین نوع که درجهٔ آن کوچکتر از n است خواهیم رسید ، و با استفاده از فرض بازگشت خواهیم داشت $\lambda=\mu$ ، $\alpha_i=\beta_i$ (برای $i\neq j$) و $\alpha_j-1=\beta_j-1$. درنتیجه‌داریم $\alpha_j=\beta_j$ یعنی تجزیهٔ P یکتاست.

۸.۷.۰- قضیه - فرض می‌کنیم $P=\lambda\prod P_i^{\alpha_i}$ و $Q=\mu\prod P_i^{\beta_i}$ دو چند جمله‌ای مخالف‌باصفر از $K[X]$ باشند. برای اینکه P بخشیاب Q باشد بایاو بسنده است که برای همهٔ i های متعلق به I داشته باشیم $\alpha_i\leqslant\beta_i$.

اثبات - اگر برای‌هراندیس i نابرابری $\alpha_i\leqslant\beta_i$ برقرار باشد ، روشن است که P یک بخشیاب Q است. به‌وارون از برابری‌های $Q=PR$ و $R=\nu\prod P_i^{\gamma_i}$ برابری $Q=\lambda\nu\prod P_i^{\alpha_i+\gamma_i}$ نتیجه می‌شود. بنابراین برای همهٔ i ها داریم:

$$\beta_i=\alpha_i+\gamma_i\geqslant\alpha_i$$

۹.۷.۰- نتیجه-چنانچه $P=\lambda\prod P_i^{\alpha_i}$ و $Q=\mu\prod P_i^{\beta_i}$ دو عنصر مخالف با صفر از $K[X]$ و D و M به‌ترتیب بزرگترین بخشیاب مشترک و کوچکترین مضرب مشترک P و Q باشند خواهیم داشت :

$$M=\prod P_i^{\sup(\alpha_i\ ,\ \beta_i)} \quad , \quad D=\prod P_i^{\inf\ (\alpha_i\beta_i)}$$

(دو برابری بالا به آسانی از ۸.۷.۵ نتیجه می‌شوند).

۱۰.۷.۵- اگر P ، Q ، D و M چندجمله‌ای‌های داده شده در ۹.۷.۵ باشند، چند جمله‌ای‌های PQ و DM متناسب‌اند. زیرا برای هراندیس i داریم:

$$\inf(\alpha_i\ ,\ \beta_i)+\sup(\alpha_i\ ,\ \beta_i)=\alpha_i+\beta_i$$

پس:

$$DM=\left(\prod P_i^{\alpha_i}\right)\left(\prod P_i^{\beta_i}\right)$$

۸.۵- توابع چند جمله‌ای

۱.۸.۵- فرض می‌کنیم A یک حلقه باعنصر یکهٔ ۱ و K یک زیر حلقهٔ جابجایی از A که شامل عنصریکه است باشد. عنصر x متعلق به A راکه با همه عنصرهای K گردش پذیر است درنظر می‌گیریم وگسترش Φ حلقهٔ $K[X]$ در A را به صورت زیر معین می‌کنیم:

$$\Phi(\alpha_0+\alpha_1X+\alpha_2X^2+\cdots+\alpha_nX^n)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_nx^n$$

۲.۸.۵- قضیه - گسترش Φ یك همومرفیسم حلقهٔ $K[X]$ در حلقهٔ A است.

اثبات - لازم است که درستی دو برابری $\Phi(P+P')=\Phi(P)+\Phi(P')$ و $\Phi(PP')=\Phi(P)\Phi(P')$ ثابت شود. اگر:

$$P'=\sum\alpha'_iX^i \quad , \quad P=\sum\alpha_iX^i$$

باشد، داریم:

$$\Phi(P+P')=\Phi(\sum(\alpha_i+\alpha'_i)X^i)=\sum(\alpha_i+\alpha'_i)x^i=\sum\alpha_ix^i+\sum\alpha'_ix^i$$
$$=\Phi(P)+\Phi(P')$$

چنانچه قرار دهیم $\beta_i=\sum\limits_{j+k=i}\alpha_j\alpha'_k$ خواهیم داشت $PP'=\sum\beta_iX^i$ پس:

$$\Phi(PP')=\Phi(\sum\beta_iX^i)=\sum\beta_ix^i$$

و چون x با همهٔ عنصرهای K گردش پذیر است داریم :

$$\Phi(P)\Phi(P')=(\sum_j \alpha_j x^j)(\sum_k \alpha'_k x^k)=\sum_{j,k}\alpha_j x^j \alpha'_k x^k=\sum_{j,k}\alpha_j \alpha'_k x^{j+k}$$

$$=\sum_i(\sum_{j+k=i}\alpha_j\alpha'_k)x^i=\sum_i \beta_i x^i$$

پس :

$$\Phi(PP')=\Phi(P)\Phi(P')$$

۰.۸.۳- اگر $P=\alpha_0+\alpha_1 X+\cdots+\alpha_n X^n$ باشد عنصر $\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n$ را که با قرار دادن x به جای X به دست می‌آید ، با $P(x)$ نمایش می‌دهیم. از قضیهٔ ۰.۸.۲ دستورهای محاسبهٔ زیر نتیجه می‌شود :

$$(P+P')(x)=P(x)+P'(x) \quad , \quad PP'(x)=P(x)P'(x)$$

به آسانی دیده می‌شود که اگر λ متعلق به K و P متعلق به $K[X]$ باشد ، خواهیم داشت :

$$(\lambda P)(x)=\lambda P(x)$$

۰.۸.۴- اگر $A=K[X]$ و $x=X$ باشد به آسانی دیده می‌شود که $P(X)$ همان P است. به‌این علت‌است که‌بین $P(X)$ و P تفاوتی نمی‌گذارند و آنها را به‌جای یکدیگر بکار می‌برند.

۰.۸.۵- به‌ویژه مطالب شماره‌های ۰.۸.۱ و ۰.۸.۲ و ۰.۸.۳ را هنگامی بکار می‌بریم که $A=K$ باشد. به‌این معنی که‌برای‌هر x از K وهرچند جمله‌ای P از $K[X]$، عنصر $P(x)$ متعلق‌به K راباقرار دادن x به‌جای X در P معین می‌کنیم که دردستورهای محاسبهٔ بالا صدق می‌کند. بدین ترتیب تابع $x \to P(x)$ در K و با مقادیر متعلق به K تعریف می‌شود کـه آنرا **تابع چند جمله‌ای معین شده به‌وسیلهٔ** P می‌نامند. چنانچه $K=\mathbf{R}$ باشد به چند جمله‌ای‌های معمولی می‌رسیم.

۹.۵- ریشه‌های یک چند جمله‌ای

بار دیگر فرض می‌کنیم K یک هیأت باشد(تاپایان شمارهٔ ۰.۱۲ این فرض‌را برقرار می‌گیریم).

۰.۹.۱- تعریف - چنانچه P عنصری از $K[X]$ و $p\in K$ طوری باشد

که داشته باشیم $P(\rho)=0$، گوییم ρ یك ریشه یا جواب چند جمله‌ای P و یا ریشهٔ معادلهٔ $P(X)=0$ است.

۲.۹.۰- قضیه - برای اینکه $\rho\in K$ ریشهٔ چند جمله‌ای $P\in K[X]$ باشد بایاو بسنده است که P بر $X-\rho$ بخش پذیر باشد.

اثبات - چنانچه $P(X)=(X-\rho)Q(X)$ و $Q\in K[X]$ باشد، بااستفاده از ۳.۸.۰ خواهیم داشت:

$$P(\rho)=(\rho-\rho)Q(\rho)=0$$

به وارون فرض می‌کنیم $P(\rho)=0$ باشد، اگر $P(X)$ را به $X-\rho$ بخش کنیم:

$$P(X)=(X-\rho)Q(X)+R(X) \qquad (1)$$

که در آن داریم $\deg R(X)<\deg(X-\rho)=1$. یعنی R عنصری مانند λ از K است و از برابری (۱) نتیجه می‌شود:

$$0=P(\rho)=(\rho-\rho)Q(\rho)+\lambda=\lambda$$

پس $R=0$ است و برابری (۱) نشان می‌دهد که P بر $X-\rho$ بخش پذیر می‌باشد.

۳.۹.۰- قضیه - فرض می‌کنیم $P\in K[X]$ و $\rho\in K$ و h یك شمار درست بزرگتر از 0 باشد. شرطهای زیرهم‌ارزند:

(I) — چندجمله‌ای P بر $(X-\rho)^{h+1}$ بخش‌پذیر نیست ولی بر $(X-\rho)^h$ بخش‌پذیر می‌باشد.

(II) — داریم $P=(X-\rho)^hQ$ که در آنجا ρ ریشهٔ چند جمله‌ای $Q\in K[X]$ نیست.

اثبات - بااستفاده از ۲.۹.۰ به آسانی از (I) به (II) می‌رسیم.

فرض می‌کنیم (II) برقرار باشد. روشن است که P بر $(X-\rho)^h$ بخش پذیر است. چنانچه P بر $(X-\rho)^{h+1}$ نیز بخش‌پذیر باشد، چند جمله‌ای Q_1 وجود دارد به‌طوری که داشته باشیم $P=(X-\rho)^{h+1}Q_1$. پس بااستفاده از ۴.۲.۰ خواهیم داشت $Q=(X-\rho)Q_1$. بنابراین باید $Q(\rho)=0$ باشد که برخلاف فرض است.

۴.۹.۰- تعریف - اگر چند جمله‌ای P شرطهای قضیهٔ ۳.۹.۰ را دارا باشد ρ را ریشهٔ مرتبهٔ h چندجمله‌ای P و h را مرتبهٔ چندگانگی ρ می‌نامند.

ریشهٔ مرتبهٔ یك را ریشهٔ ساده و ریشهٔ مرتبهٔ دو را ریشهٔ دوگانه می‌گویند.

۰.۹.۵- فرض می‌کنیم چند جمله‌ای $P \neq 0$ و ρ یک ریشهٔ P باشد. از تعریف مرتبهٔ چندگانگی یک ریشه چنین برمی‌آید که برای هرشمار درست h چند جمله‌ای P بر $(X-\rho)^h$ بخش‌پذیر نیست و تنها یک شمار درست h وجود دارد به قسمی که P بر $(X-\rho)^h$ بخش‌پذیر است و بر $(X-\rho)^{h+1}$ بخش‌پذیر نیست. بنابراین هرریشهٔ P دارای مرتبهٔ چندگانگی معینی است.

۰.۹.۶- گاهی عنصر a متعلق به K را که ریشهٔ چند جمله‌ای P نیست ریشهٔ مرتبهٔ صفر P می‌نامند.

۰.۹.۷- **قضیه - فرض می‌کنیم P یك عنصر از $K[X]$ و ρ_1 ، ρ_2 ، ... ، ρ_p ریشه‌های متمایز چند جمله‌ای P باشند. اگر h_1 ، h_2 ، ... ، h_p را به‌ترتیب مرتبهٔ چندگانگی ریشه‌های ρ_1 ، ρ_2 ، ... ، ρ_p بگیریم داریم:**

$$P(X)=(X-\rho_1)^{h_1}(X-\rho_2)^{h_2}\cdots(X-\rho_p)^{h_p}Q(X) \qquad (۲)$$

که درآنجا Q عنصری از $K[X]$ و ρ_1 ، ρ_2 ، ... ، ρ_p ریشه‌های مرتبهٔ صفر Q هستند.

اثبات - چنانچه $p=1$ باشد قضیه همان تعریف ۰.۹.۴ است. فرض می‌کنیم قضیه برای $p-1$ برقرار باشد و داشته باشیم:

$$P(X)=(X-\rho_1)^{h_1}(X-\rho_2)^{h_2}\cdots(X-\rho_{p-1})^{h_{p-1}}R(X)$$

که در آن $R\in K[X]$ است. چون ρ_p با هیچ یک از ریشه‌های ρ_1 ، ... ، ρ_{p-1} برابرنیست ، پس $X-\rho_p$ با $X-\rho_1$ ، ... ، $X-\rho_{p-1}$ اول است و از ۰.۵.۵ نتیجه می‌شود که $(X-\rho_p)^{h_p}$ نسبت به $(X-\rho_1)^{h_1}\cdots(X-\rho_{p-1})^{h_{p-1}}$ نیز اول می‌باشد. اما $(X-\rho_p)^{h_p}$ بخشیاب چند جمله‌ای $P(X)$ است، پس چند جمله‌ای $R(X)$ بر $(X-\rho_p)^{h_p}$ بخش‌پذیر می‌باشد (۰.۵.۲) ، یعنی داریم:

$$R(X)=(X-\rho_p)^{h_p}Q(X)$$

که درآنجا Q متعلق به $K[X]$ است. بدین ترتیب برابری(۲)به دست می‌آید. اکنون

اگر ρ_i ریشهٔ چند جمله‌ای Q باشد ، Q بر $X-\rho_i$ بخش‌پذیر است و بنابراین P بر $(X-\rho_i)^{h_i+1}$ بخش‌پذیر خواهد شد ، و این برخلاف فرض است.

۰.۹.۸- نتیجه ـ چنانچه P یك چند جمله‌ای‌درجهٔ n از $K[X]$ باشد، چند جمله‌ای P بیش‌از n ریشهٔ متمایز ندارد.

زیرا اگر ρ_1 ، ρ_2 ، $\cdots$ ، ρ_{n+1} ریشه‌های متمایز چند جمله‌ای P باشند از ۰.۹.۷ نتیجه می‌شودکه P برچند جمله‌ای $(X-\rho_1)(X-\rho_2)\cdots(X-\rho_{n+1})$ بخش‌پذیر است و این ممکن نیست زیرا درجهٔ P برابر با n است.

۰.۹.۹- نتیجه - چنانچه‌هیأت K بی‌پایان و P و Q دوعنصر از $K[X]$ باشندکه یك تابع‌چند جمله‌ای را معین می‌کنند ، خواهیم داشت $P=Q$.

زیرا اگر $P-Q\neq 0$ و $\deg(P-Q)=n$ باشد برای هرعنصر دلخواه $\rho\in K$ خواهیم داشت $(P-Q)(\rho)=0$. پس این برابری برای بیش‌از n مقدار ρ برقرار است‌که با ۰.۹.۸ سازگارنیست.

۰.۹.۱۰- اگر هیأت K بی‌پایان باشد (مثلاً هنگامیکه K برابر با $\mathbf{Q}$ یا $\mathbf{R}$ و یا $\mathbf{C}$ است) می‌توان هرچند جمله‌ای را با تابع چند جمله‌ای‌آن یکی‌گرفت. اما به وارون‌اگر p یك‌شمار‌اول و $K=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ باشد ، به طوری‌که در ۰.۵.۱۱ دیدیم برای هر $x\neq 0$ از K داریم $x^{p-1}-1=0$. پس برای هر x متعلق به K برابری $x^p-x=0$ برقرار است. بنابراین عنصر X^p-X از $K[X]$ تابع ۰ را روی K معین می‌کند ، درحالیکه این چندجمله‌ای‌صفرنیست. این مطلب درستی نمایش چند جمله‌ای‌ها را به‌وسیلهٔ عبارتهای صوری ،که در آغاز این فصل اختیارکردیم ، می‌رساند.

۰.۹.۱۱-کار برد - قضیه ویلسون - برای اینکه شمار درست $p\geqslant 2$ اول باشد بایاوبسنده است‌که $(p-1)!+1$ بر p بخش‌پذیر باشد.

اثبات - اگر p اول نباشد می‌توان نوشت $p=qr$ که $1<q<p$ و $1<r<p$ است. پس $(p-1)!$ بر q بخش‌پذیر است. بنابراین شمار $(p-1)!+1$ بر q و در نتیجه بر p بخش‌پذیر نیست.

چنانچه p اول‌و K هیأت $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ باشدازقضیهٔ **فرما** معلوم می‌شودکه ۱ ، ۲ ، $\cdots$ ،

$p-1$ ریشه‌های چند جمله‌ای $X^{p-1}-1\in K[X]$ هستند (اگر $k\in \mathbf{Z}$ باشد برای آسانی کلاس هم‌ارزی‌شمارهایی‌را که‌با مقیاس p با k برابرند باخود k نشان می‌دهیم).
پس بنابر ۷.۹.۵ خواهیم داشت:

$$X^{p-1}-1=(X-1)(X-2)\cdots(X-(p-1))Q$$

که در آنجا $Q\in K[X]$ است. چون درجهٔ چند جمله‌ای،

$$(X-1)(X-2)\cdots(X-(p-1))Q$$

برابر با $p-1$ است، پس Q از درجهٔ صفر است. به عبارت دیگر Q عنصری مانند λ متعلق به K است و با درنظر گرفتن جملهٔ X^{p-1} خواهیم داشت $\lambda=1$. بنابراین داریم $X^{p-1}-1=(X-1)(X-2)\cdots(X-(p-1))$. چنانچه دراین برابری‌جمله‌های ثابت‌دوطرف‌را اختیار کنیم بستگی $-1=(-1)^{p-1}(p-1)!$ در K به دست می‌آید. اگر p فرد باشد برابری $(p-1)!+1=0$ را در K داریم، به عبارت دیگر شمار $(p-1)!+1$ بر p بخش‌پذیر است. چنانچه $p=2$ باشد خواهیم داشت:

$$(p-1)!+1=1+1=2$$

که بازهم بر ۲ بخش‌پذیر می‌باشد.

۵. ۱۰ـ دستور انترپلاسیون لاگرانژ

۱.۱۰.۵ـ فرض می‌کنیم ρ_1، ρ_2، $\cdots$، ρ_n و λ_1، λ_2، $\cdots$، λ_n از عنصرهای K و ρ_1، ρ_2، $\cdots$، ρ_n از یکدیگر متمایز باشند. می‌خواهیم چند جمله‌ای $P\in K[X]$ را به‌دست آوریم به‌طوری‌که $P(\rho_1)=\lambda_1$، $\cdots$، $P(\rho_2)=\lambda_2$، $P(\rho_n)=\lambda_n$ باشد.

۲.۱۰.۵ـ **قضیه ـ علاوه برفرض‌های بالا اگر $\deg P\leqslant n-1$ باشد چند جمله‌ای P وجود دارد و یکتاست.**

اثبات ـ چنانچه دو چند جمله‌ای P و Q درشرط‌های قضیه صدق کنند داریم:

$$\deg(P-Q)\leqslant n-1$$

و ρ_1، ρ_2، $\cdots$، ρ_n ریشه‌های چند جمله‌ای $P-Q$ می‌باشند. پس $P-Q=0$ است (۸.۹.۵). یعنی چند جمله‌ای P یکتاست. اکنون قرار می‌دهیم:

$$P_i(X)=\frac{(X-\rho_1)\cdots(X-\rho_{i-1})(X-\rho_{i+1})\cdots(X-\rho_n)}{(\rho_i-\rho_1)\cdots(\rho_i-\rho_{i-1})(\rho_i-\rho_{i+1})\cdots(\rho_i-\rho_n)} \qquad (1)$$

داریم:

$$P_i(\rho_1)=P_i(\rho_2)=\cdots=P_i(\rho_{i-1})=P_i(\rho_{i+1})=\cdots=P_i(\rho_n)=0 \quad \text{و} \quad P_i(\rho_i)=1$$

پس :

$$P=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\cdots+\lambda_nP_n \qquad (2)$$

چند جمله‌ای مورد نظر است. یعنی P وجود دارد.

دستور(۲)(که درآن P_i هابه‌وسیلهٔ برابری(۱)داده شده‌اند) **دستور انترپلاسیون لاگرانژ** نامیده می‌شود.

۱۱.۵- حالت $K=C$

۱.۱۱.۰- قضیهٔ دالامبر - گوس - هر چند جمله‌ای از $C[X]$ که درجهٔ آن بزرگتر یا برابر با یك باشد، دست‌کم دارای یك ریشه است (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم).

۲.۱۱.۰- بااستفاده از ۲.۹.۰ دیده می‌شودکه هرچند جمله‌ای P از $C[X]$ که درجهٔ آن بزرگتر از صفر باشد دست‌کم دارای بخشیابی از درجهٔ یک است. پس تنها عنصرهای ساده نشدنی $C[X]$ چند جمله‌ای‌های درجهٔ یک آن هستند.

۳.۱۱.۰- **تبصره** - قضیهٔ دالامبر - گوس ،برای‌چند جمله‌ای‌های درجهٔ اول روشن است. اکنون آنرا برای یک چند جمله‌ای درجهٔ دوم ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم :

$$P(X)=aX^2+bX+c$$

باشدکه درآن a ، b و c متعلق به C هستند و $a\neq 0$ است. داریم :

$$P(X)=a\left[\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

اما هرشمار مختلط دست‌کم دارای یک ریشهٔ دوم است. اگر یکی از ریشه‌های دوم b^2-4ac را با $\sqrt{b^2-4ac}$ نشان دهیم خواهیم داشت :

$$P(X)=a\left[\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

$$=a\left(X+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(X+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=a\left(X-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(X-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

دیده می‌شود که اگر $b^۲-۴ac\neq ۰$ باشد ، $P(X)$ دارای دو ریشهٔ سادهٔ :

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

است. چنانچه $b^۲-۴ac=۰$ باشد $P(X)$ دارای یک ریشهٔ دوگانهٔ $-\frac{b}{۲a}$ است.

۰.۱۱.۴- قضیه - فرض می‌کنیم P یک چند جمله‌ای درجهٔ n از $C[X]$ و مخالف با صفر باشد. چنانچه $\rho_۱$ ، $\rho_۲$ ، $\cdots$ ، ρ_p تنها ریشه‌های متمایز P و $h_۱$ ، $h_۲$ ، $\cdots$ ، h_p به ترتیب مرتبهٔ چندگانگی این ریشه‌ها باشند ، داریم :

$$P(X)=\lambda(X-\rho_۱)^{h_۱}(X-\rho_۲)^{h_۲}\cdots(X-\rho_p)^{h_p} \qquad -(I)$$

که در آن λ ضریب جمله‌ای از P است که دارای بزرگترین درجه می‌باشد.

$$h_۱+h_۲+\cdots+h_p=n \qquad -(II)$$

اثبات - از ۰.۹.۷ نتیجه می‌شود :

$$P(X)=(X-\rho_۱)^{h_۱}\cdots(X-\rho_p)^{h_p}Q(X)$$

که در آن هیچ یک از شمارهای مختلط $\rho_۱$ ، $\rho_۲$ ، $\cdots$ ، ρ_p ریشهٔ $Q(X)$ نیستند. اما ریشه‌های Q ریشه‌های P نیز می‌باشند، پس Q دارای هیچ ریشه‌ای نیست. بنابراین Q عنصری مانند λ از C است (۰.۱۱.۱). چون جملهٔ $\lambda X^{h_۱+\cdots+h_p}$ از $(X-\rho_۱)^{h_۱}\cdots(X-\rho_p)^{h_p}Q(X)$ دارای بزرگترین درجه است قضیه ثابت می‌شود.

۰.۱۱.۵- فرمول (I) شمارهٔ ۰.۱۱.۴ تجزیهٔ چند جمله‌ای P به سازه‌های یگانی ساده نشدنی است. بنابر ۰.۷.۷ این تنها تجزیهٔ P به حاصل‌ضرب سازه‌های یگانی درجهٔ اول می‌باشد.

۰.۱۱.۶- برابری (II) شمارهٔ ۰.۱۱.۴ نشان می‌دهد که هرچند جمله‌ای مخالف با صفر و از درجهٔ n با ضرایب متعلق به C درست دارای n ریشه است، که در آنجا هرریشهٔ ساده یک بار و هرریشهٔ دوگانه دوبار و ... به حساب می‌آیند.

۰.۱۱.۷- قضیه - (بستگی‌های بین ضرایب و ریشه‌ها) - **فرض می‌کنیم :**

$$P=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0$$

یک چند جمله‌ای از درجهٔ n و متعلق به $C[X]$ و r_1 ، r_2 ، ... ، r_n ریشه‌های P باشند ،که درآنجا $n \geqslant 1$ و هر ریشه به شمارهٔ مرتبهٔ چندگانگی همان ریشه تکرار شده است. چنانچه «توابع متقارن» σ_1 ، σ_2 ، ... ، σ_n از ریشه‌های P را به ترتیب زیر معین کنیم :

$$\sigma_1=\sum_i r_i=r_1+r_2+\cdots+r_n$$

$$\sigma_2=\sum_{i<j}' r_ir_j=r_1r_2+r_1r_3+\cdots+r_{n-1}r_n$$

$$\sigma_3=\sum_{i<j<k} r_ir_jr_k=r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+\cdots+r_{n-2}r_{n-1}r_n$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\sigma_n=r_1r_2\cdots r_n$$

داریم :

$$\sigma_1=-\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad , \qquad \sigma_2=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sigma_3=-\frac{a_{n-3}}{a_n} \qquad , \ldots , \qquad \sigma_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

اثبات - بنابر ۰.۱۱.۰۵.۴ داریم:

$$a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0\equiv a_n(X-r_1)(X-r_2)\cdots(X-r_n)$$

چنانچه دو طرف برابری را باهم مقایسه کنیم خواهیم داشت:

$$a_{n-p}=a_n\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}(-1)^p r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_p}=(-1)^p a_n\sigma_p$$

و قضیه ثابت می‌شود.

۱۲.۵- حالت $K=R$

۰.۱۲.۰۵.۱- اگر $P=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$ یک عنصر از $C[X]$ باشد

چند جمله‌ای $\overline{\alpha_0}+\overline{\alpha_1}X+\cdots+\overline{\alpha_n}X^n$ را **مزدوج** چند جمله‌ای P می‌نامند و با $\overline{P}$ نمایش می‌دهند.

۲.۱۲.۰- برای دو چند جمله‌ای $P\in C[X]$ ، $Q\in C[X]$ و $\lambda\in C$ همواره داریم :

$$\overline{P+Q}=\overline{P}+\overline{Q}$$
$$\overline{\lambda P}=\overline{\lambda}\,\overline{P}$$
$$\overline{PQ}=\overline{P}\,\overline{Q}$$
$$\overline{\overline{P}}=P$$

اثبات همهٔ دستورهای بالا مشابهٔ یکدیگر است. برای نمونه دستور سوم را ثابت می‌کنیم. اگر $P=\Sigma\alpha_iX^i$ و $Q=\Sigma\beta_jX^j$ باشد داریم :

$$PQ=\sum\gamma_kX^k \qquad , \qquad \gamma_k=\sum_{i+j=k}\alpha_i\beta_j$$

همچنین :

$$\overline{P}=\sum\overline{\alpha_i}X_i \qquad , \qquad \overline{Q}=\sum\overline{\beta_j}X^j$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$\overline{P}\,\overline{Q}=\sum\gamma'_kX^k \quad , \quad \gamma'_k=\sum_{i+j=k}\overline{\alpha_i}\cdot\overline{\beta_j}=\sum_{i+j=k}\overline{\alpha_i\beta_j}=\overline{\gamma_k}$$

پس $\overline{P}\,\overline{Q}=\overline{PQ}$ می‌باشد.

۳.۱۲.۰- اگر $P\in C[X]$ باشد از ۲.۱۲.۰ نتیجه می‌شود که چند جمله‌ای‌های $P+\overline{P}$ و $P\overline{P}$ با مزدوجشان برابرند ، پس ضرایب‌شان متعلق به $\mathbf{R}$ است.

۴.۱۲.۰- از بستگی $\overline{PQ}=\overline{P}\,\overline{Q}$ نتیجه می‌شود که اگر P بر P_1 بخش‌پذیر باشد $\overline{P}$ بر $\overline{P_1}$ بخش‌پذیر است. وارون این مطلب نیز درست است زیرا $\overline{\overline{P}}=P$ می‌باشد.

۵.۱۲.۰- اگر $x\in C$ باشد داریم $\overline{P(x)}=\overline{P}(\overline{x})$ زیرا از $P=\sum\alpha_iX^i$ به دست می‌آید :

$$\overline{P}(\overline{x})=\sum\overline{\alpha_i}\,\overline{x^i}=\overline{\sum\alpha_ix^i}=\overline{P(x)}$$

۶.۱۲.۰- **قضیه - فرض می‌کنیم P یک عنصر از $C[X]$ و ρ متعلق**

به C باشد. دراین صورت هم‌ارزی‌های زیر را داریم:

(I) – ρ ریشهٔ مرتبهٔ h چند جمله‌ای P است $\Longleftrightarrow$ $\bar{\rho}$ ریشهٔ مرتبهٔ h چند جمله‌ای $\bar{P}$ است.

(II) – اگر ضریب‌های P متعلق به R باشند:

ρ ریشهٔ مرتبهٔ h چند جمله‌ای P است $\Longleftrightarrow$ $\bar{\rho}$ ریشهٔ مرتبهٔ h چند جمله‌ای P است.

اثبات - بنابر ۴.۱۲.۰ برای اینکه P بر $(X-\rho)^h$ بخش‌پذیر باشد و بر $(X-\rho)^{h+1}$ بخش‌پذیر نباشد بایاوبسنده است که $\bar{P}$ بر $\overline{(X-\rho)^h}$ بخش‌پذیر باشد و بر $\overline{(X-\rho)^{h+1}}$ بخش‌پذیر نباشد. اما بااستفاده از ۲.۱۲.۰ داریم:

$$\overline{(X-\rho)^h}=(X-\bar{\rho})^h$$

که از آن (I) نتیجه می‌شود و (II) به آسانی از (I) به‌دست می‌آید.

۷.۱۲.۰- قضیه ـ فرض می‌کنیم P یک‌عنصرمخالف با صفراز R[X] باشدکه ریشه‌های حقیقی و متمایز آنرا با r_1 ، r_2 ، … ، r_p و ریشه‌های مختلط و متمایزآنرا با ρ_1 ، $\overline{\rho_1}$ ، ρ_2 ، $\overline{\rho_2}$ ، … ، ρ_q ، $\overline{\rho_q}$ می‌نماییم.اگر h_i مرتبهٔ چندگانگی r_i و k_i مرتبهٔ چندگانگی ρ_i و $\overline{\rho_i}$ باشد داریم:

$$P=\lambda(X-r_1)^{h_1}\cdots(X-r_p)^{h_p}(X-\rho_1)^{k_1}(X-\overline{\rho_1})^{k_1}\cdots$$
$$(X-\rho_q)^{k_q}(X-\overline{\rho_q})^{k_q}$$

که درآن λ ضریب جمله‌ای از P است که دارای بزرگترین درجه می‌باشد.

اثبات این قضیه ازشمارهٔ ۴.۱۱.۰ نتیجه می‌شود.

۸.۱۲.۰- تبصره - در تجزیه بالا(۷.۱۲.۰)ممکن است همهٔ ریشه‌های Pحقیقی باشندکه دراین صورت سازه‌های $(X-\rho_i)^{k_i}(X-\overline{\rho_i})^{k_i}$ در تجزیه پیدا نمی‌شوند. همچنین ممکن است هیچ یک از ریشه‌های P حقیقی نباشندکه دراین حالت سازه‌های $(X-r_j)^{h_j}$ در تجزیه وجود نخواهند داشت.

۹.۱۲.۰- لم ـ اگر β و γ شمارهای مختلط و $P=X^2+\beta X+\gamma$ باشد، شرطهای زیر هم‌ارزند:

(I) — سه جمله‌ای P متعلق به $\mathbf{R}[X]$ می‌باشد و دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

(II) — شمار مختلط (غیر حقیقی) ρ وجود دارد به طوری که داریم:

$$P=(X-\rho)(X-\bar{\rho})$$

(III) — دو شمار حقیقی p و $q\neq ۰$ وجود دارند به قسمی که داریم:

$$P=(X-p)^۲+q^۲$$

اثبات - (III) $\Longrightarrow$ (II) : با فرض (III) داریم :

$$P=(X-p+iq)(X-p-iq)=(X-\rho)(X-\bar{\rho})$$

که در آنجا $\rho=p+iq$ شمار حقیقی نیست زیرا $q\neq ۰$ است.

(II) $\Longrightarrow$ (I) : با فرض (II) سه جمله‌ای P دارای ضرایب حقیقی است (۳.۱۲.۵).
به‌علاوه ریشه‌های P عبارتند از ρ و $\bar{\rho}$ که حقیقی نیستند.

(I) $\Longrightarrow$ (III) : با فرض (I) شمارهای β و γ حقیقی هستند و $\beta^۲-۴\gamma<۰$ است. به علاوه می‌توان نوشت :

$$P=\left(X+\frac{\beta}{۲}\right)^۲+\frac{۴\gamma-\beta^۲}{۴}$$

که با قرار دادن :

$$p=-\frac{\beta}{۲} \quad , \quad q=\frac{\sqrt{۴\gamma-\beta^۲}}{۲}$$

خواهیم داشت $P=(X-p)^۲+q^۲$, $p\in\mathbf{R}$, $q\in\mathbf{R}$, $q\neq ۰$.

۱۰.۱۲.۵- قضیه - عنصرهای ساده نشدنی $\mathbf{R}[X]$ عبارتند از :

(I) — چند جمله‌ای‌های درجهٔ اول.

(II) — چند جمله‌ای‌های درجهٔ دوم که مبین آنها منفی است.

اثبات :

روشن است که چندجمله‌ای‌های درجهٔ اول ساده نشدنی هستند (۲.۷.۵). همچنین سه جمله‌ای‌های درجهٔ دوم که دارای مبین منفی می‌باشند، ریشهٔ حقیقی ندارند. پس دارای بخشیاب درجهٔ اول نیستند، به‌عبارت دیگر ساده نشدنی می‌باشند.

به وارون اگر P یک چند جمله‌ای ساده نشدنی از $\mathbf{R}[X]$ باشد ، بنابر ۱.۱۱.۵ P دارای یک‌ریشهٔ مختلط ρ است . چنانچه ρ متعلق به $\mathbf{R}$ باشد ، در $\mathbf{R}[X]$ چندجمله‌ای P بر $X-\rho$ بخش‌پذیر است (۲.۹.۵) ، پس P متناسب با $X-\rho$ و درنتیجه از درجهٔ اول است. اگر ρ متعلق به $\mathbf{R}$ نباشد بادرنظر گرفتن(۷.۱۲.۵) چند جمله‌ای P به‌صورت :

$$P=(X-\rho)(X-\bar{\rho})Q$$

نوشته می‌شود که در آن Q متعلق به $\mathbf{C}[X]$ است. چنانچه :

$$A=(X-\rho)(X-\bar{\rho})$$

باشد ، بنابر شمارهٔ ۳.۱۲.۵ ، چند جمله‌ای A متعلق به $\mathbf{R}[X]$ است. پس $\mathbf{Q}$ که خارج قسمت P بر A می‌باشد یک عنصراز $\mathbf{R}[X]$ است. چون P در $\mathbf{R}[X]$ ساده‌نشدنی است ، پس P متناسب با A است ، و با استفاده از ۹.۱۲.۵ نتیجه می‌شود که مبین A منفی است.

۱۱.۱۲.۵- قضیه - اگر P یک عنصر مخالف با صفر از $\mathbf{R}[X]$ باشد، تجزیهٔ P به‌صورت‌حاصل‌ضرب یک شمار حقیقی درچند جمله‌ای‌هایی مانند :

$$X-r \quad , \quad (X-p)^2+q^2$$

نوشته می‌شود که درآنجا p ، q و r متعلق به $\mathbf{R}$ و $q\neq 0$ است. به علاوه این تجزیه یکتاست.

اثبات این قضیه از ۷.۷.۵و ۱۰.۱۲.۵ نتیجه می‌شود.

۱۲.۱۲.۵- ممکن است پیدا کردن ریشه های یک چند جمله‌ای از $\mathbf{C}[X]$ دشوار باشد و همواره نتوان یک چند جمله‌ای رابه‌صورت‌های ۴.۱۱.۵ و ۱۱.۱۲.۵ تجزیه کرد.

۱۳.۵- مشتق یک چند جمله‌ای

۱.۱۳.۵- فرض می‌کنیم K یک حلقهٔ جابجایی و یگانی و :

$$P=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$$

عنصری از $K[X]$ باشد. چند جمله‌ای :

$$a_1+2a_2X+3a_3X^2+\cdots+na_nX^{n-1}$$

را **مشتق** P می‌نامند وبا P' نمایش می‌دهند (هنگامیکه $K=\mathbf{R}$ باشد تعریف بالا همان تعریف مشتق در آنالیز است).

۲.۱۳.۰- قضیه ـ اگر چند جمله‌ای‌های P و Q متعلق به $K[X]$ و $\lambda\in K$ و n یک شمار درست بزرگتر از صفر باشد داریم :

$$(P+Q)'=P'+Q' \qquad (۱)$$

$$(\lambda P)'=\lambda P' \qquad (۲)$$

$$(PQ)'=P'Q+PQ' \qquad (۳)$$

$$(P^n)'=nP^{n-1}P' \qquad (۴)$$

اثبات - درستی دستورهای (۱) و (۲) آشکار است.

فرض می‌کنیم دستور (۳) برای جفت‌های $(P\ ,\ Q)$ و $(P_1\ ,\ Q)$ برقرار و λ و λ_1 متعلق به K باشند. دراین صورت این دستور برای $(\lambda P+\lambda_1P_1\ ,\ Q)$ نیز برقرار است. زیرا :

$$\begin{aligned}[(\lambda P+\lambda_1P_1)Q]'&=(\lambda PQ+\lambda_1P_1Q)'=\lambda(PQ)'+\lambda_1(P_1Q)'\\&=\lambda(P'Q+PQ')+\lambda_1(P_1'Q+P_1Q')\\&=(\lambda P'+\lambda_1P_1')Q+(\lambda P+\lambda_1P_1)Q'\\&=(\lambda P+\lambda_1P_1)'Q+(\lambda P+\lambda P_1)Q'\end{aligned}$$

به این ترتیب اثبات (۳) به حالت $P=X^p$ و سپس به حالت $Q=X^q$ برمی‌گردد و دراین‌صورت داریم :

$$(X^pX^q)'=(X^{p+q})'=(p+q)X^{p+q-1}$$

$$(X^p)'X^q+X^p(X^q)'=pX^{p-1}X^q+X^pqX^{q-1}=(p+q)X^{p+q-1}$$

بنابراین (۳) ثابت می‌شود. دستور (۴) بااستفاده از روش بازگشت و دستور (۳) به‌دست می‌آید.

۳.۱۳.۰- مشتقهای پی‌درپی - مشتقهای پی‌درپی P' ، P'' ، ... ، $P^{(n)}$ ، ... چند جمله‌ای P را به روش بازگشت و با قرار دادن $P^{(n)}=(P^{(n-1)})'$ تعریف می‌کنند.

۰.۱۳.۰.۴- **مثال** ـ فرض می‌کنیم ρ عنصری متعلق به K و h یک شمار درست بزرگتر از صفر باشد. مشتق های پی‌در‌پی $P=(X-\rho)^h$ ، بنابر ۰.۱۳.۰.۲. (۴) عبارتند از :

$$P'=h(X-\rho)^{h-1}$$

$$P''=h(h-1)(X-\rho)^{h-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P^{(h)}=h!$$

$$P^{(h+1)}=P^{(h+2)}=\cdots=0$$

به‌طوری که دیده می‌شود $P^{(h)}(\rho)=h!$ است و برای $i\neq h$ داریم $P^{(i)}(\rho)=0$.

۰.۱۳.۰.۵- قضیه(دستور تیلر)ـ فرض می کنیم K یک هیأت بامشخص صفر و $\rho\in K$ باشد. برای هر عنصر P از $K[X]$ داریم :

$$P(X)=P(\rho)+\frac{1}{1!}P'(\rho)(X-\rho)+\frac{1}{2!}P''(\rho)(X-\rho)^2+\cdots \tag{۵}$$

$$=\sum_{i\geqslant 0}\frac{1}{i!}P^{(i)}(\rho)(X-\rho)^i$$

(در حقیقت شمارهٔ جمله های مجموع طرف دوم باپایان است. زیرا اگر $\deg P=n$ باشد، خواهیم داشت $P^{(n+1)}=P^{(n+2)}=\cdots=0$. هنگامی که $K=\mathbf{R}$ باشد دستور(۵) از ۱.۱.۷ کتاب آنالیز نتیجه می‌شود).

اثبات ـ هرعنصر متعلق به $K[X]$ را می‌توان به‌صورت مجموع جمله هایی‌مانند $\lambda(X-\rho)^h$ نوشت که درآنجا $\lambda\in K$ و h یک شمار درست بزرگتر و یا برابر با صفر است. زیرا برای هرجمله مانند X^p داریم :

$$X^p=((X-\rho)+\rho)^p=\sum_{q=0}^{p}C_p^q(X-\rho)^q\rho^{p-q}$$

به‌علاوه اگر دستور (۵) برای دو چند جمله‌ای P و Q برقرار باشد به‌آسانی دیده می‌شود که این دستور برای $P+Q$ و λP نیز برقرار است ($\lambda\in K$). پس کافی است دستور (۵) را برای $P=(X-\rho)^h$ ثابت کنیم. اما دراین صورت ، بنابر ۰.۱۳.۰.۴ ، طرف

دوم برابری (۰) به شکل $\frac{1}{h!}\, h!\,(X-\rho)^h$ درمی‌آید و بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

(دستور (۵) با فرض این که مشخص K برابر با صفر باشد دارای مفهوم است. زیرا لازم است که بتوانیم عنصر $P^{(i)}(\rho)$ متعلق به K را بر $i!$ بخش کنیم).

۶.۱۳.۰- قضیه ـ فرض می‌کنیم K یک هیأت با مشخص صفر و چند جمله‌ای P متعلق به $K[X]$ باشد. اگر عنصر ρ متعلق به K ریشهٔ مرتبهٔ h چند جمله‌ای P باشد، ρ ریشهٔ مرتبهٔ $h-1$ چند جمله‌ای P' است.

اثبات ـ بنابر تعریف ۴.۹.۰ داریم $P=(X-\rho)^hQ$ و $Q(\rho)\neq 0$. پس:

$$P'=(X-\rho)^hQ'+h(X-\rho)^{h-1}Q=(X-\rho)^{h-1}R$$

که در آن $R=(X-\rho)Q'+hQ$ و $R(\rho)=hQ(\rho)$ است. اما $Q(\rho)\neq 0$ می‌باشد وچون مشخص K برابر با صفراست، پس $h1\neq 0$ و درنتیجه $R(\rho)\neq 0$ است.

۷.۱۳.۰- فرض می‌کنیم K یک هیأت با مشخص صفر باشد. اگر ρ متعلق به K و چند جمله‌ای P متعلق به $K[X]$ باشد، شرط‌های زیر هم‌ارزند:

(I) ـ ρ ریشهٔ مرتبهٔ h چند جمله‌ای P است.

(II) ـ ρ ریشهٔ چند جمله‌ای‌های P، P'، ...، $P^{(h-1)}$ است اما ریشهٔ $P^{(h)}$ نیست.

اثبات:

(I) $\Longleftarrow$ (II) ـ این مطلب از ۶.۱۳۰۵ نتیجه می‌شود.

(II) $\Longleftarrow$ (I) ـ زیرا اگر شرط (II) برقرارباشد خواهیم داشت $n=\deg P \geqslant h$ و فرمول تیلر به صورت زیر درمی‌آید:

$$P(X)=\frac{1}{h!}P^{(h)}(\rho)(X-\rho)^h+\frac{1}{(h-1)!}P^{(h+1)}(\rho)(X-\rho)^{h+1}+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}P^{(n)}(\rho)(X-\rho)^n=(X-\rho)^hQ(X)$$

که در آن $Q(\rho)=\frac{1}{h!}P^{(h)}(\rho)\neq 0$ است. پس ρ ریشهٔ مرتبهٔ h چند جمله‌ای P می‌باشد.

۱۴.۵- تقسیم چند جمله‌ای‌ها برحسب نماهای افزایشی

۱.۱۴.۵- کاربرد قضیهٔ زیر در ۴.۴.۶ دیده خواهد شد.

قضیه - فرض می‌کنیم K یک هیأت و A و B دو چند جمله‌ای از $K[X]$ و مقدار ثابت‌چند جمله‌ای B مخالف با صفر باشد. اگر k یک‌شمار درست $\geqslant 0$ باشد، تنها دو چند جمله‌ای Q و R متعلق به $K[X]$ یافت می‌شود به قسمی که:

$$A=BQ+X^{k+1}R \quad , \quad \deg Q\leqslant k$$

باشد.

اثبات:

۱- چنانچه $A=BQ+X^{k+1}R=BQ_1+X^{k+1}R_1$ و $\deg Q\leqslant k$ و $\deg Q_1\leqslant k$ باشد خواهیم داشت $B(Q-Q_1)=X^{k+1}(R_1-R)$. فرض می‌کنیم $Q-Q_1\neq 0$ باشد. چون $\deg(Q_1-Q)\leqslant k$ است، داریم:

$$Q-Q_1=a_pX^p+a_{p+1}X^{p+1}+\cdots \quad , \quad a_p\neq 0 \quad , \quad 0\leqslant p\leqslant k$$

اما مقدارثابت‌چندجمله‌ای B مخالف‌باصفر می‌باشد، پس ضریب X^p نیزدر $B(Q-Q_1)$ مخالف با صفر است. بنابراین برابری $B(Q-Q_1)=X^{k+1}(R_1-R)$ غیر ممکن است. پس $Q=Q_1$ و درنتیجه $R=R_1$ است، و این یکتایی Q و R را می‌رساند.

۲- چون مقدار ثابت چند جمله‌ای B مخالف با 0 است، عنصر $\lambda_0\in K$ وجوددارد به طوری‌که چندجمله‌ای‌های A و λ_0B دارای مقدارثابت برابرباشند. دراین‌صورت‌داریم:

$$A-\lambda_0B=XR_1 \quad , \quad R_1\in K[X]$$

به همین ترتیب عنصرهای λ_1 ، λ_2 ، $\cdots$ ، λ_k متعلق به K یافت می‌شوند به قسمی‌که داشته باشیم:

$$R_1-\lambda_1B=XR_2 \;,\; R_2\in K[X]$$

. . . .

$$R_k-\lambda_kB=XR_{k+1} \;,\; R_{k+1}\in K[X]$$

اگر برابری‌های بالا را به ترتیب در ۱ ، X ، X^2 ، … ، X^k ضرب کنیم و با هم جمع کنیم، خواهیم داشت :

$$A-\lambda_0 B-\lambda_1 BX-\cdots-\lambda_k BX^k=X^{k+1}R_{k+1}$$

که با قرار دادن $Q=\lambda_0+\lambda_1 X+\cdots+\lambda_k X^k$ ، $R=R_{k+1}$

به‌صورت

$$A-BQ=X^{k+1}R$$

در می‌آید. از اینجا وجود دو چند جمله‌ای Q و R نتیجه می‌شود.

۲.۱۴.۵- چندجمله‌ای‌های Q و $X^{k+1}R$ شمارهٔ بالا، به ترتیب **خارج قسمت و ماندهٔ تقسیم A بر B برحسب نماهای افزایشی، تا مرتبهٔ k** نامیده می‌شوند.

۳.۱۴.۵- اثبات قضیهٔ شمارهٔ ۱.۱۴.۵ یک روش عملی برای محاسبهٔ Q و R به دست می‌دهد. مثال زیر (که در آن $K=\mathbf{R}$ است) چگونگی محاسبهٔ Q و R را آشکار می‌سازد :

$$\begin{array}{rllll}
A: & 1-x & & & \\
\lambda_0 B: & 1 & -x^2 & +x^4 & \\
\hline
xR_1: & -x+x^2 & & -x^4 & \\
\lambda_1 xB: & -x & +x^3 & & -x^5 \\
\hline
x^2R_2: & & x^2-x^3-x^4+x^5 & & \\
\lambda_2 x^2 B: & & x^2 & -x^4 & +x^6 \\
\hline
x^3R_3: & & -x^3 & & +x^5-x^6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l}
1-x^2+x^4 \quad : B \\
\hline
\underbrace{\underbrace{1}_{\lambda_0}-\underbrace{x}_{\lambda_1 x}+\underbrace{x^2}_{\lambda_2 x^2}}_{Q}
\end{array}$$

پس داریم :

$$(1-x)=(1-x^2+x^4)(1-x+x^2)+x^3(-1+x^2-x^3)$$

(دراینجا k را برابر با ۲ گرفته‌ایم. ممکن است عمل تقسیم را بهمان روش ادامه داد که در آن صورت برای k مقادیر بزرگتری خواهیم داشت).

در عمل از نوشتن A ، B ، Q ، … خودداری می‌شود.

۱۵.۵- شمارهای مختلط

۰.۱۵.۱- تابحال شمارهای مختلط را شناخته شده فرض می‌کردیم و آنها را بکار می‌بردیم. اکنون می‌خواهیم بااستفاده ازچند جمله‌ای‌ها شمارهای مختلط را تعریف کنیم و ویژگیهای آنهارا مورد مطالعه‌قراردهیم. بدین منظور تنها از چند جمله‌ای‌های باضرایب حقیقی استفاده‌خواهیم کرد، که دراین‌صورت تعریف و بررسی این شمارها عاری از هرگونه اشکال منطقی خواهد بود.

۰.۱۵.۲- حلقهٔ $\mathbf{R}[X]$ را با A و ایدآل A راکه از چند جمله‌ای‌های بخش‌پذیر بر $X^۲+۱$ تشکیل‌شده است با I نشان می‌دهیم. حلقهٔ جابجایی A/I را با $\mathbf{C}$ می‌نمایند و عنصرهای آنرا **شمارهای مختلط** می‌نامند.

گسترش کانونیک Φ حلقهٔ A روی $\mathbf{C}$ یک هموسرفیسم حلقه است [۲.۳.۴ , (II)]، و چون $X^۲+۱$ متعلق به I است، داریم $\Phi(X^۲+۱)=۰$ یعنی:

$$\Phi(X)^۲=-\Phi(۱) \qquad (۱)$$

۰.۱۵.۳- **لم - اگر مجموعهٔ عنصرهای متعلق به A راکه درجهٔ آنها کوچکتر و یا برابر با یک است با $A_۱$ و تحدیدگسترش Φ به $A_۱$ را با $\Phi_۱$ نشان دهیم، $\Phi_۱$ یک‌گسترش دوسویی $A_۱$ روی $\mathbf{C}$ است.**

اثبات:

۱- دو عنصر $\alpha_۰+\alpha_۱X$ و $\beta_۰+\beta_۱X$ متعلق به $A_۱$ را درنظر می‌گیریم ($\alpha_۰$ ، $\alpha_۱$ ، $\beta_۰$ ، $\beta_۱$ متعلق به $\mathbf{R}$ هستند). اگر سایه‌های این دو عنصر به وسیلهٔ $\Phi_۱$ برابر باشند خواهیم داشت $(\alpha_۰+\alpha_۱X)-(\beta_۰+\beta_۱X)\in I$. پس باید:

$$(\alpha_۰-\beta_۰)+(\alpha_۱-\beta_۱)X$$

مضربی از $X^۲+۱$ باشد. یعنی داشته باشیم $\alpha_۰-\beta_۰=\alpha_۱-\beta_۱=۰$ که از آنجا نتیجه می‌شود $\alpha_۰+\beta_۰X=\alpha_۱+\beta_۱X$. این برابری نشان می‌دهد که $\Phi_۱$ انژکتیو است.

۲- هرعنصر متعلق به A را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\alpha_۰+\alpha_۲X^۲+\alpha_۴X^۴+\cdots+X(\alpha_۱+\alpha_۳X^۲+\alpha_۵X^۴+\cdots)$$

که در آن α_i ها شمارهای حقیقی هستند. بنابراین هرشمار مختلط را می‌توان چنین نوشت :

$$\Phi(\alpha_0)+\Phi(\alpha_2)\Phi(X)^2+\Phi(\alpha_4)\Phi(X)^4+\cdots$$
$$+\Phi(X)[\Phi(\alpha_1)+\Phi(\alpha_3)\Phi(X)^2+\Phi(\alpha_5)\Phi(X)^4+\cdots]$$

که بااستفاده از برابری (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\Phi(\alpha_0-\alpha_2+\alpha_4-\cdots+(\alpha_1-\alpha_3+\alpha_5-\cdots)X)$$

و این نشان می‌دهد که Φ_1 سورژکتیو است و قضیه ثابت می‌شود.

۴.۱۰.۵- به ویژه ، تحدید Φ به $\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ یک زیر حلقهٔ A است) یک ایزومرفیسم حلقهٔ $\mathbf{R}$ روی زیر حلقهٔ $\Phi(\mathbf{R})$ از $\mathbf{C}$ است. به‌وسیله این ایزومرفیسم حلقهٔ $\mathbf{R}$ را با $\Phi(\mathbf{R})$ یکی می‌گیرند. بنابراین اگر α یک شمار حقیقی باشد ، شمار مختلط $\Phi(\alpha)$ را با خود α نشان می‌دهند. پس شمارهای حقیقی صورت ویژه‌ای از شمارهای مختلط هستند. مثلاً شمار ۱ را به جای $\Phi(1)$ ، که عنصر یگانهٔ $\mathbf{C}$ است (۴.۳.۴) ، می‌نویسند و این نیز با قرار دادهای معمولی سازگار است.

۵.۱۰.۵- چنانچه قرار دهیم $\Phi(X)=i$ فرمول (۱) با درنظر گرفتن ۴.۱۰.۵ به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$i^2=-1$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$i^3=-i\,,\, i^4=1\ ,\ i^5=i\,,\, i^6=-1\ ,\ \cdots$$

۶.۱۰.۵- قضیه - هر شمار مختلط تنها به یک روش به‌صورت $\alpha+\beta i$، که در آن α و β متعلق به $\mathbf{R}$ هستند ، نوشته می‌شود.

اثبات - این قضیه صورت دیگر لم ۳.۱۰.۵ است ، زیرا داریم :

$$\alpha+\beta i=\Phi(\alpha+\beta X)$$

۷.۱۰.۵- پس از این شمارهای مختلط را به صورت $\alpha+\beta i$ خواهیم نوشت که در آن α و β متعلق به $\mathbf{R}$ می‌باشند. شمار مختلط $\alpha+\beta i$ را با z نشان می‌دهیم. α **بخش حقیقی** و β **بخش انگاری** z نامیده می‌شود. برای اینکه z حقیقی باشد بایاوبسنده است که بخش انگاری z صفر شود. شمارهای مختلط که بخش حقیقی آنها صفر است، **انگاری محض**

نامیده می‌شوند. با استفاده از شمارهٔ ۵.۱۰.۵ و دستورهای محاسبه در حلقه‌های جابجایی داریم:

$$(\alpha+\beta i)+(\alpha'+\beta' i)=\alpha+\alpha'+(\beta+\beta')i$$

$$(\alpha+\beta i)-(\alpha'+\beta' i)=\alpha-\alpha'+(\beta-\beta')i$$

$$(\alpha+\beta i)(\alpha'+\beta' i)=\alpha\alpha'+\alpha\beta' i+\beta\alpha' i+\beta\beta' i^2=\alpha\alpha'-\beta\beta' +(\alpha\beta'+\beta\alpha')i$$

۸.۱۰.۵- چنانچه $z=\alpha+\beta i$ یک شمار مختلط باشد، شمار مختلط $\alpha-\beta i$ را **مزدوج** z می‌نامند و با $\bar{z}$ نشان می‌دهند. پس برای اینکه z حقیقی باشد بایاویسنده‌است که $\bar{z}=z$ باشد. اگر z و z' دو شمار مختلط دلخواه باشند داریم:

$$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'} \tag{۲}$$

$$\overline{z-z'}=\bar{z}-\bar{z'} \tag{۳}$$

$$\overline{zz'}=\bar{z}\,\bar{z'} \tag{۴}$$

زیرا با قرار دادن $z=\alpha+\beta i$ و $z'=\alpha'+\beta' i$ خواهیم داشت:

$$\overline{zz'}=\overline{(\alpha+\beta i)(\alpha'+\beta' i)}=\overline{\alpha\alpha'-\beta\beta'+(\alpha\beta'+\beta\alpha')i}$$

$$=\alpha\alpha'-\beta\beta'-(\alpha\beta'+\beta\alpha')i=(\alpha-\beta i)(\alpha'-\beta' i)=\bar{z}\,\bar{z'}$$

و بدین ترتیب فرمول (۴) بدست می‌آید. فرمولهای (۲) و (۳) به روش مشابه اثبات می‌شوند. پس می‌توان گفت که گسترش $z \to \bar{z}$ حلقهٔ $\mathbf{C}$ در $\mathbf{C}$ یک اتومرفیسم حلقهٔ $\mathbf{C}$ است. روشن است که داریم:

$$\bar{\bar{z}}=z \tag{۵}$$

۹.۱۰.۵- فرض می‌کنیم $z=\alpha+\beta i$ یک شمار مختلط باشد. به آسانی دیده می‌شود که داریم:

$$z+\bar{z}=2\alpha \tag{۶}$$

$$z\bar{z}=\alpha^2+\beta^2 \tag{۷}$$

پس $z+\bar{z}$ و $z\bar{z}$ شمارهای حقیقی هستند و داریم $z\bar{z}\geqslant 0$. تنها هنگامی $z\bar{z}$ برابر با صفر است که $z=0$ باشد.

۰.۱۰.۱۰- قضیه ـ حلقهٔ C یک هیأت است.

اثبات - با درنظر گرفتن ٦.٥.٤ ،کافی است ثابت کنیم که هرشمار مختلط $z \neq 0$ وارون پذیر است. بنابر ۹.۱۰.۵ ، اگر $z \neq 0$ باشد شمار $z\bar{z}$ حقیقی و مخالف با ۰ است. پس می‌توان شمار حقیقی $\frac{1}{z\bar{z}}$ را تشکیل داد. چنانچه قرار دهیم $z' = \left(\frac{1}{z\bar{z}}\right)\bar{z}$، خواهیم داشت :

$$zz' = \left(\frac{1}{z\bar{z}}\right) z\bar{z} = 1$$

پس شمار z' وارون z می‌باشد و آنرا با z^{-1} نشان می‌دهند.

۰.۱۰.۱۱- فرض می‌کنیم $z = \alpha + \beta i$ یک شمار مختلط مخالف با صفر باشد. اثبات قضیهٔ ۰.۱۰.۱۰ فرمول زیر را به دست می‌دهد :

$$z^{-1} = \frac{\alpha - \beta i}{\alpha^2 + \beta^2}$$

۰.۱۰.۱۲- به آسانی از شمارهٔ ۰.۱۰.۱۱ نتیجه می‌شود که $(\overline{z^{-1}}) = (\bar{z})^{-1}$ است. پس اگر z و z' متعلق به C و z' مخالف با صفر باشد، خواهیم داشت :

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

۰.۱۰.۱۳- اگر $z = \alpha + \beta i$ یک شمار مختلط باشد و قرار دهیم :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

شمار $|z|$ را ،که بزرگتر و یا برابر با ۰ است، **مدول** z می‌نامند. اگر z حقیقی باشد مدول z عبارت از قدر مطلق آن است. به علاوه داریم :

$$|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0 \qquad (8)$$

$$|zz'| = |z| \cdot |z'| \qquad (9)$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad , \quad z' \neq 0 \qquad (10)$$

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'| \qquad (11)$$

زیرا :

$$|z|=0 \Longleftrightarrow \alpha^2+\beta^2=0 \Longleftrightarrow \alpha=\beta=0 \Longleftrightarrow z=0$$

$$|zz'|^2=zz'\overline{zz'}=zz'\bar{z}\,\bar{z}'=z\bar{z}\,z'\bar{z}'=|z|^2|z'|^2 \quad ,$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right|^2=\frac{z}{z'}\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{z}{z'}\;\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}=\frac{z\bar{z}}{z'\bar{z}'}=\frac{|z|^2}{|z'|^2}$$

برای اثبات فرمول (۱۱) کافی است ثابت کنیم :

$$|z+z'|^2 \leqslant (|z|+|z'|)^2$$

اگر قرار دهیم $z'=\alpha'+\beta' i$ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}|z+z'|^2&=|\alpha+\alpha'+(\beta+\beta')i|^2=(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2\\&=\alpha^2+\beta^2+\alpha'^2+\beta'^2+2(\alpha\alpha'+\beta\beta')\end{aligned}$$

همچنین :

$$\begin{aligned}(|z|+|z'|)^2&=(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2})^2\\&=\alpha^2+\beta^2+\alpha'^2+\beta'^2+2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}\end{aligned}$$

بنابراین باید داشته باشیم :

$$\alpha\alpha'+\beta\beta' \leqslant \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$$

اما داریم :

$$(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2=\alpha^2\alpha'^2+\beta^2\beta'^2+2\alpha\beta\alpha'\beta'$$

و

$$\begin{aligned}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2})^2=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)=\alpha^2\alpha'^2+\beta^2\beta'^2+\alpha^2\beta'^2\\+\beta^2\alpha'^2\end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$\alpha^2\beta'^2+\beta^2\alpha'^2-2\alpha\beta\alpha'\beta'=(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2 \geqslant 0$$

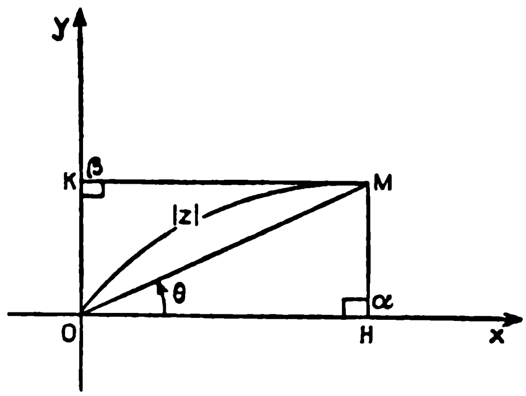
۰.۱۰.۱۴ـ درصفحهٔ P دو محورعمود برهم Ox و Oy را درنظر می‌گیریم. اگر $z=\alpha+\beta i$ یک شمار مختلط باشد ، نقطهٔ M از صفحهٔ P ، به آراینده‌های (مختصات) α و β **سایهٔ** z نامیده می‌شود و داریم $OM=|z|$. پس شمارهای حقیقی عنصرهایی‌از C هستندکه سایه‌شان متعلق به Ox است. همچنین شمارهای انگاری محض عنصرهایی

از C هستند که سایه‌شان متعلق به Oy است. محور Ox را محور حقیقی و محور Oy را محور انگاری می‌نامند.

۰.۱۰.۰۱۰- اگر شمار مختلط $z \neq 0$ باشد (M بر O منطبق نباشد)، محور OM که سوی آن از O به طرف M می‌باشد کاملاً معین است. پس می‌توان زاویهٔ $(\widehat{Ox, OM})$ را در صفحهٔ سودار P، که سوی آن بستگی به سوی دستگاه محورهای Ox و Oy دارد، درنظر گرفت. اندازهٔ این زاویه برحسب رادیان **آرگومان** z نامیده می‌شود. اگر θ آرگومان z باشد، $\theta + 2k\pi$ نیز آرگومان z است که در آنجا $k \in \mathbf{Z}$ می‌باشد (شمار صفر دارای آرگومان نیست). با توجه به شکل (۲۱) داریم:

$$\cos\theta = \frac{\overline{OH}}{OM} = \frac{\alpha}{|z|} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{\overline{OK}}{OM} = \frac{\beta}{|z|} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$



شکل ۲۱

پس:

$$\alpha = |z| \cos\theta \quad , \quad \beta = |z| \sin\theta$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$$

این عبارت **صورت مثلثاتی** z نامیده می‌شود.

به وارون فرض می‌کنیم شمار مختلط z به صورت $\rho(\cos\omega + i \sin\omega)$ باشد، که

در آنجا ω و ρ شمارهای حقیقی هستند و $\rho \geqslant 0$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$|z|^2=\rho^2\cos^2\omega+\rho^2\sin^2\omega=\rho^2$$

پس $\rho=|z|$.

اکنون فرض می‌کنیم $z \neq 0$ باشد (پس $\rho \neq 0$ است). چنانچه θ را یک آرگومان z بگیریم خواهیم داشت :

$$|z|(\cos\theta+i\sin\theta)=z=|z|(\cos\omega+i\sin\omega)$$

پس $\cos\theta=\cos\omega$ و $\sin\theta=\sin\omega$ یعنی ρ **مدول** z و ω **یک آرگومان** z **است.**

۰.۱۰.۱۶- اگر z و z' دو شمار مختلط مخالف با صفر و θ و θ' به ترتیب آرگومان‌هایی از z و z' باشند، $\theta+\theta'$ یک آرگومان zz' است. زیرا داریم :

$$\begin{aligned}zz'&=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)\,|z'|(\cos\theta'+i\sin\theta')\\&=|z|\cdot|z'|(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'))\\&=|zz'|(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta'))\end{aligned}$$

که با توجه به ۰.۱۰.۱۵ مطلب آشکار می‌گردد.

۰.۱۰.۱۷- اگر z و z' دوشمار مختلط مخالف باصفر و θ و θ' به‌ترتیب آرگومان‌هایی از z و z' باشند، $\theta-\theta'$ یک آرگومان $\frac{z}{z'}$ است.

فرض می‌کنیم θ'' یک آرگومان $\frac{z}{z'}$ باشد. داریم $z=\frac{z}{z'}z'$. پس $\theta''+\theta'$ یک آرگومان z است (۰.۱۰.۱۶). یعنی $\theta''+\theta'=\theta+2k\pi$ می‌باشد که در آن k متعلق به $\mathbf{Z}$ است. بنابراین داریم $\theta''=\theta-\theta'+2k\pi$.

۰.۱۰.۱۸- بنابر ۰.۱۰.۱۵ هرشمار مختلط z که مدول آن برابر با ۱ و آرگومان آن θ باشد به‌صورت $\cos\theta+i\sin\theta$ نوشته می‌شود. به علاوه از ۰.۱۰.۱۶ و ۰.۱۰.۱۷ چنین برمی‌آید که توان n ام z یعنی z^n که در آنجا $n\in\mathbf{Z}$ می‌باشد، دارای مدول یک و آرگومان $n\theta$ است. از اینجا فرمول **موآور** به دست می‌آید :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \quad , \quad (n\in\mathbf{Z})$$

۰.۱۰.۱۹- فرض می‌کنیم z_0 متعلق به $\mathbf{C}$ و n یک شمار درست بزرگتر از صفر

باشد. می‌خواهیم شمارهای مختلط z را پیدا کنیم به طوریکه داشته باشیم $z^n = z_0$.

قضیه :

(I) – چنانچه $z_0 = 0$ باشد، تنها شمار مختلطی که در معادلهٔ $z^n = z_0$ صدق می‌کند $z = 0$ است.

(II) – چنانچه $z_0 \neq 0$ و θ_0 یک آرگومان z_0 باشد، معادلهٔ $z^n = z_0$ دارای n جواب است که مدول آنها برابر با $\sqrt[n]{|z_0|}$ و آرگومان‌هایشان عبارتند از:

$$\frac{\theta_0}{n}, \quad \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{\theta_0}{n} + \frac{4\pi}{n}, \quad \frac{\theta_0}{n} + \frac{6\pi}{n}, \quad \dots, \quad \frac{\theta_0}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

اثبات – درستی (I) آشکار است زیرا $\mathbf{C}$ یک حلقهٔ کامل می‌باشد. پس فرض می‌کنیم $z_0 \neq 0$ باشد. بنابراین جوابهای $z^n = z_0$ شمارهای مختلط مخالف با صفرند. اگر $z \neq 0$ یک شمار مختلط و ρ مدول و θ یک آرگومان آن باشد، ρ^n مدول z^n و $n\theta$ یک آرگومان آن می‌باشد. پس داریم:

$$z^n = z_0 \iff \begin{cases} \rho^n = |z_0| \\ n\theta \in \theta_0 + 2\pi\mathbf{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{|z_0|} \\ \theta \in \dfrac{\theta_0}{n} + \dfrac{2\pi}{n}\mathbf{Z} \end{cases}$$

اکنون دو شمار مختلط که مدول هردو برابر با $\sqrt[n]{|z_0|}$ وآرگومان یکی $\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ و آرگومان دیگری $\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k'\pi}{n}$ باشد در نظر می‌گیریم $(k, k' \in \mathbf{Z})$. برای اینکه این دو شمار با یکدیگر برابر باشند بایاوبسنده است که $\frac{2k\pi}{n} - \frac{2k'\pi}{n} \in 2\pi\mathbf{Z}$ باشد، به عبارت دیگر $k - k'$ مضرب n باشد. از اینجا اثبات (II) نتیجه می‌شود.

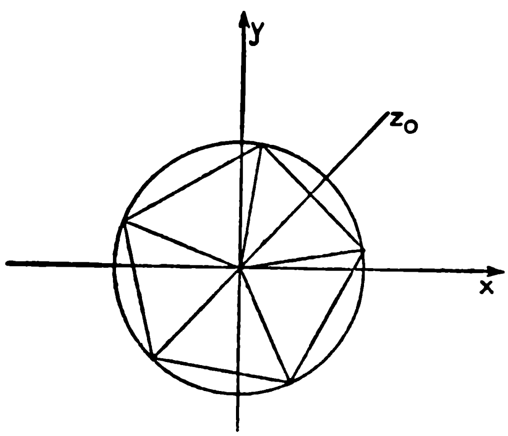
۰.۱۵.۲۰ - جوابهای معادلهٔ $z^n = z_0$ را ریشه‌های n ام z_0 می‌نامند. با استفاده ازشمارهٔ ۰.۱۵.۱۹، دیده می‌شود که سایه‌های ریشه‌های n ام z_0 رأسهای یک n برمنظم را تشکیل می‌دهند.

۰.۱۵.۲۱ - به ویژه شمار ۱ دارای n ریشهٔ n ام می‌باشد. این ریشه‌ها شمارهای

مختلطی‌هستند که مدول‌آنها یک و آرگومانشان $\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ است. به گفتهٔ دیگر ریشه‌های n ام شمار ۱ عبارتند از :

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

که در آن $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$ است. برای $k=0$ شمار ۱ که ریشهٔ nام ۱ می‌باشد بدست می‌آید.



شکل ۲۲

فصل ششم
کسرهای گویای یک متغیری

ازسالهای پیش خواننده باکسرهای گویایی‌از x یعنی با خارج قسمت دو چندجمله‌ای از x سروکار داشته است. دراین فصل تجزیهٔ کسرهای گویا را به‌کسرهای گویای ساده (عنصرهای ساده)، خواهیم دید. همچنین خواهیم دید حالتی‌که ضرایب کسرهای گویا شمارهای مختلط می‌باشند ساده‌ترازحالتی‌است که ضرایب این کسرها شمارهای حقیقی‌است.

۱.۶- تعریف

۱.۱.۶- فرض می‌کنیم K یک هیأت باشد. بنابر ۴.۲.۵ ، $K[X]$ یک حلقهٔ انتگر است. هیأت‌کسرهای حلقهٔ $K[X]$ را با $K(X)$ نمایش می‌دهیم (۶.۶.۴) و عنصرهای $K(X)$ را **کسرهای‌گویا از X با ضرایب متعلق به K** می‌نامیم.

۲.۱.۶- هرکسرگویا از $K(X)$ به صورت $\frac{A}{B}$ (و یا AB^{-1}) نوشته می‌شود که درآن A و B چند جمله‌ای‌هایی از $K[X]$ هستند و $B \neq 0$ است. اگر $\frac{A}{B}$ و $\frac{A_1}{B_1}$ متعلق به $K(X)$ باشند بنابر ۵.۶.۴ داریم:

$$\frac{A}{B}=\frac{A_1}{B_1} \Longleftrightarrow AB_1=A_1B$$

۳.۱.۶- **قضیه - اگر R عنصری از $K(X)$ باشد:**

(I) — دو عنصر A و B متعلق به $K[X]$ که نسبت به هم اول باشند می‌توان یافت به طوری‌که داشته باشیم $R=AB^{-1}$.

(II) — چنانچه A_1 و B_1 متعلق به $K[X]$ و نسبت به‌هم اول باشند و داشته باشیم $R=A_1B_1^{-1}$ ، عنصر $\lambda \neq 0$ متعلق به K وجود دارد به قسمی‌که $A_1=\lambda A$ و $B_1=\lambda B$ باشد.

اثبات - کسر $R=PQ^{-1}$ را ، که درآن P و Q متعلق به $K[X]$ و $Q \neq 0$

است ، درنظر می گیریم. اگر D بزرگترین بخشیاب مشترك P و Q باشد $D\neq 0$ است و چند جمله‌ای‌های A و B متعلق به $K[X]$ وجود دارند به قسمی که داشته باشیم $P=AD$, $Q=BD$, $B\neq 0$. پس $R=AB^{-1}$ است (۲.۱.۶) و A و B نسبت به هم اول می‌باشند (۴.۵.۵). از اینجا درستی (I) نتیجه می‌شود.

چنانچه برای A_1 و B_1 متعلق‌به $K[X]$ داشته باشیم $R=A_1B_1^{-1}$ ، خواهیم داشت $A_1B=AB_1$(۲.۱.۶). پس B یک بخشیاب AB_1 است و با A اول می‌باشد. بنابراین B_1 بر B بخش‌پذیر است (۲.۵.۵). به عبارت دیگر داریم $B_1=BC$ و $C\in K[X]$.

هم‌چنین از برابری $A_1B=AB_1$ که درنتیجه به صورت $A_1B=ABC$ نوشته می‌شود ، به دست می‌آید $A_1=AC$. زیرا $K[X]$ یک حلقهٔ انتگر و $B\neq 0$ می‌باشد. اکنون اگر A_1 و B_1 نسبت به هم اول باشند خواهیم داشت $C=\lambda\in K$ و این درستی (II) را می‌رساند.

۴.۱.۶- تعریف - فرض می‌کنیم R عنصری از $K(X)$ و AB^{-1} که درآن A و B متعلق به $K[X]$ هستند یک نمایندهٔ R باشد. اگر A و B نسبت به‌هم اول باشند AB^{-1} را فرم ساده شدهٔ R می‌نامند.

بنابر ۳.۱.۶ فرم ساده شدهٔ R همیشه وجود دارد و با تقریب یک ضریب مخالف با صفر و متعلق به K یکتاست.

۵.۱.۶- از اثبات قضیهٔ ۳.۱.۶ قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود :

قضیه - اگر R عنصری از $K(X)$ و AB^{-1} فرم ساده شدهٔ R باشد، همهٔ فرمهای دیگر R به‌صورت $(AC)(BC)^{-1}$ هستند که درآنجا C عنصر مخالف صفری از $K[X]$ است.

۶.۱.۶- تعریف - چنانچه R عنصری از $K(X)$ و AB^{-1} یک صورت ساده شدهٔ R باشد ، ریشه‌های B را قطب‌های R می‌نامند. اگر ρ ریشهٔ مرتبهٔ h چند جمله‌ای B باشد ρ را قطب مرتبهٔ h کسر R می‌گویند.

از ۳.۱.۶ نتیجه می‌شود که قطب‌های R و مرتبهٔ آنها تنها بستگی به R دارد وبه انتخاب فرم ساده شدهٔ آن بستگی ندارد.

۷.۱.۶- از ۸.۹.۵ نتیجه می‌شود که شمارهٔ قطب‌های یک کسر گویا باپایان است.

۶ . ۱ . ۸ - **تابع معین‌شده به‌وسیلهٔ یک کسر گویا** - فرض می‌کنیم R عنصری از $K(X)$ و AB^{-1} یک‌صورت ساده شدهٔ آن باشد. مجموعهٔ عنصرهای متعلق به K را که قطب R نیستند با E نشان می‌دهیم. برای هرعنصر x از E عنصر $A(x)(B(x))^{-1}$ متعلق به K کاملاً معین است، زیرا $B(x) \neq 0$ می‌باشد. عنصر $A(x)(B(x))^{-1}$ را که بنابر ۶ . ۱ . ۳ بستگی به‌صورت ساده شدهٔ R ندارد با $R(x)$ نشان می‌دهیم، وتابع $x \to R(x)$ ، $(x \in E)$ ، را **تابع معین شده به‌وسیلهٔ** R می‌نامیم. هنگامی‌که $K=\mathbf{R}$ باشد به‌نظریهٔ معمولی کسرهای گویا می‌رسیم.

۶ . ۱ . ۹ - اگر توان مجموعهٔ K بی‌پایان باشد و R و R_1 متعلق به $K(X)$ یک تابع را مشخص کنند، داریم $R=R_1$. زیرا اگر AB^{-1} و $A_1B_1^{-1}$ به‌ترتیب صورتهای ساده شدهٔ R و R_1 باشند، هنگامی‌که x قطب R و R_1 نباشد داریم :

$$A(x)(B(x))^{-1}=A_1(x)(B_1(x))^{-1}$$

پس‌بنابر ۶ . ۱ . ۷ این بستگی و در نتیجه بستگی $(AB_1-BA_1)(x)=0$ برای شمارهٔ بی‌پایانی‌از عنصرهای x متعلق به K برقرار است . بنابراین با توجه به ۵ . ۹ . ۹ داریم $AB_1-BA_1=0$. پس با درنظرگرفتن ۶ . ۱ . ۲ خواهیم داشت $R=R_1$. به‌این‌علت یک کسر گویا و تابع وابسته به‌آنرا یکی می‌گیرند.

۶ . ۲ - بخش درست یک کسر گویا

۶ . ۲ . ۱ - فرض می‌کنیم عنصر R از $K(X)$ دارای نماینده‌ای به‌صورت AB^{-1} باشد که‌درآنجا داریم $\deg A < \deg B$. از شمارهٔ ۶ . ۱ . ۵ نتیجه‌می‌شود که‌برای هرنمایندهٔ دیگر $A_1B_1^{-1}$ از کسر R نابرابری $\deg A_1 < \deg B_1$ برقراراست . بنابراین می‌توان بدون ابهام ازکسرهای گویا که درجهٔ صورت آنها کوچکتر از درجهٔ مخرجشان می‌باشد گفتگو کرد.

۶ . ۲ . ۲ - اگر درجهٔ صورت کسرهای R_1 ، R_2 ، ... ، R_p کوچکتر از درجهٔ مخرج آنها باشد، درجهٔ صورت کسر $R_1+R_2+\cdots+R_p$ نیز از درجهٔ مخرج آن کوچکتر است. زیرا بنابر ۶ . ۲ . ۱ نماینده‌های کسرهای R_1 ، R_2 ، ... ، R_p را می‌توان طوری انتخاب کرد که دارای یک مخرج باشند. دراین‌صورت درستی مطلب بالا آشکار می‌گردد.

۳.۲.٦ - قضیه- هر عنصر دلخواه R متعلق به $K(X)$ تنها به‌یك روش به‌صورت $P+R_1$ نوشته می‌شود که در آن $P\in K[X]$ و R_1 کسر گویایی است که درجهٔ صورت آن کوچکتر از درجهٔ مخرج آن می‌باشد.

اثبات - فرض می‌کنیم $A\in K[X]$ و $B\in K[X]$ و $B\neq 0$ و $R=AB^{-1}$ باشد. بنابر ۱.۳.۵ چند جمله‌ای‌های P و C متعلق به $K[X]$ وجود دارند به‌طوری‌که داریم $A=PB+C$ و $\deg C<\deg B$. پس اگر قرار دهیم $R_1=CB^{-1}$ خواهیم داشت $R=AB^{-1}=P+R_1$.

اکنون فرض می‌کنیم $R=P^*+R_1^*$ که در آن $P^*\in K[X]$ و R_1^* کسر گویایی است که درجهٔ صورت آن کوچکتر از درجهٔ مخرج آن می‌باشد. پس خواهیم داشت:

$$P-P^*=R_1^*-R_1$$

بنابراین درجهٔ صورت کسر $\dfrac{P-P^*}{1}$ از درجهٔ مخرج آن کوچکتر می‌باشد، و این برای $P-P^*\neq 0$ ممکن نیست. پس $P=P^*$ وازآنجا خواهیم داشت $R_1=R_1^*$.

٤.۲.٦ - چندجمله‌ای P را **بخش درست** کسر R می‌گویند. از اثبات بالا نتیجه می‌شود که بخش درست AB^{-1} از تقسیم چندجمله‌ای A بر B برحسب توانهای کاهشی به‌دست می‌آید.

٦ . ۳ - تجزیه کسر به کسرهای ساده

۱.۳.٦ - فرض می‌کنیم کسر A/B عنصری از $K(X)$ باشد. تجزیهٔ این کسر که ازقضیهٔ زیر به‌دست می‌آید، **تجزیهٔ** A/B **به‌کسرهای ساده** نامیده می‌شود.

قضیه- چنانچه $B=\lambda P^\alpha Q^\beta\cdots R^\gamma$ تجزیهٔ B به‌چندجمله‌ای های ساده نشدنی باشد (۷.۷.۵)، کسر A/B را، تنها به‌یك روش، به‌صورت:

$$\begin{aligned}\frac{A}{B}=E&+\frac{C_\alpha}{P^\alpha}+\frac{C_{\alpha-1}}{P^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{C_1}{P}\\&+\frac{D_\beta}{Q^\beta}+\frac{D_{\beta-1}}{Q^{\beta-1}}+\cdots+\frac{D_1}{Q}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\frac{E_\gamma}{R^\gamma}+\frac{E_{\gamma-1}}{R^{\gamma-1}}+\cdots+\frac{E_1}{R}\end{aligned}$$

می‌توان تجزیه کرد که در آن E ، C_α ، … ، C_1 ، D_β ، … ، D_1 ، … ، E_γ ، … ، E_1 عنصرهای $K[X]$ هستند به‌طوری که برای هر مقدار i داریم:

$$\deg C_i < \deg P \ , \ \deg D_i < \deg Q \ , \ \cdots \ , \ \deg E_i < \deg R$$

به‌علاوه E بخش درست $\frac{A}{B}$ می‌باشد.

اثبات این قضیه از لم‌های ۴.۳.۶ و ۵.۳.۶ ، که در زیر بیان می‌کنیم ، نتیجه می‌شود .

۲.۳.۶ - **لم - کسر گویای $\frac{A}{B}$ را که در آن $\deg A < \deg B$ است در نظر می‌گیریم . چنانچه $B = B_1 B_2$ باشد که در آن B_1 و B_2 نسبت به‌هم اول‌اند ، تنها یک تجزیهٔ $\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2}$ وجود دارد به‌طوری که :**

$$\deg A_1 < \deg B_1 \ , \ \deg A_2 < \deg B_2$$

باشد .

اثبات - بنابر ۳.۵.۵ دوچند جمله‌ای U_1 و U_2 می‌توان یافت به‌طوریکه داشته باشیم $U_2 B_1 + U_1 B_2 = 1$. پس چند جمله‌ای‌های V_1 و V_2 که در برابری :

$$V_2 B_1 + V_1 B_2 = A$$

صدق می‌کنندوجود دارند. همچنین‌چندجمله‌ای‌های Q و A_2 یافت می‌شوند به‌طوری که $V_2 = B_2 Q + A_2$ و $\deg A_2 < \deg B_2$ باشد (۱.۳.۵). دراین‌صورت داریم :

$$A = V_2 B_1 + V_1 B_2 = (B_2 Q + A_2) B_1 + V_1 B_2 = A_2 B_1 + A_1 B_2$$

که درآن $A_1 = Q B_1 + V_1$ است . بنابراین خواهیم داشت :

$$\frac{A}{B} = \frac{A_2 B_1 + A_1 B_2}{B_1 B_2} = \frac{A_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1}$$

چون $\deg A < \deg B$ و $\deg A_2 < \deg B_2$ می‌باشد ، پس‌از برابری :

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A}{B} - \frac{A_2}{B_2}$$

و شمارهٔ ۲.۲.۶ نابرابری $\deg A_1 < \deg B_1$ نتیجه می‌شود. به‌این‌ترتیب وجود تجزیهٔ بالا ثابت می‌گردد. اکنون فرض می‌کنیم :

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1^*}{B_1} + \frac{A_2^*}{B_2} \ , \ \deg A_1^* < \deg B_1 \ , \ \deg A_2^* < \deg B_2$$

باشد. پس خواهیم داشت :

$$A_1^* B_2 + A_2^* B_1 = A_1B_2 + A_2B_1$$

ویا :

$$(A_1^* - A_1) B_2 = (A_2 - A_2^*) B_1$$

بنابراین B_1 بخشیاب چند جمله‌ای $(A_1^* - A_1)B_2$ می‌باشد وبا B_2 اول است ، پس $A_1^* - A_1$ بر B_1 بخش‌پذیر است. به‌علاوه $\deg(A_1^* - A_1) < \deg B_1$ می‌باشد، پس داریم $A_1^* - A_1 = 0$ و ازآنجا $A_2 - A_2^* = 0$. پس تجزیهٔ بالا یکتاست .

۳.۳.۶ - لم- کسر $\frac{A}{B}$ را که درآن $\deg A < \deg B$ است در نظر می‌گیریم. چنانچه $B = B_1B_2 \cdots B_p$ و برای $i \neq j$ چندجمله‌ای‌های B_i و B_j نسبت‌بهم اول باشند ، تنها یك تجزیهٔ A/B به‌صورت :

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} + \cdots + \frac{A_p}{B_p}$$

وجود دارد به‌طوریکه :

$$\deg A_1 < \deg B_1 \ , \ \deg A_2 < \deg B_2 \ , \cdots , \ \deg A_p < \deg B_p$$

باشد.

اثبات - این لم برای $p = 1$ روشن است. فرض می‌کنیم هنگامیکه مخرج کسر حاصل‌ضرب $p - 1$ سازه است، لم بالا درست باشد و قرارمی‌دهیم $B_0 = B_2B_3 \cdots B_p$. دراین‌صورت B_1 و B_0 نسبت به‌ هم اول‌اند (۵.۵.۵). پس‌بنابر ۲.۳.۶ تجزیهٔ :

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_0}{B_0}$$

وجود دارد و داریم $\deg A_1 < \deg B_1$ و $\deg A_0 < \deg B_0$ ، که اگر روش‌بازگشت را درمورد کسر A_0/B_0 بکار بریم ، تجزیهٔ A/B به‌صورتی‌که گفته شد بدست می‌آید.

اکنون فرض می‌کنیم $\frac{A}{B} = \frac{A_1^*}{B_1} + \cdots + \frac{A_p^*}{B_p}$ ، $\deg A_1^* < \deg B_1$ ، $\cdots$ و $\deg A_p^* < \deg B_p$ باشد .

چنانچه قراردهیم $\frac{A_0^*}{B_0} = \frac{A_p^*}{B_p} + \cdots + \frac{A_2^*}{B_2}$ با توجه به‌شمارهٔ ۲.۲.۶ خواهیم داشت $\deg A_0^* < \deg B_0$ ، وبنابر شمارهٔ ۲.۳.۶ از برابری :

$$\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_0}{B_0}=\frac{A_1^*}{B_1}+\frac{A_0^*}{B_0}$$

نتیجه می‌شود $A_1 = A_1^*$. به همین روش برابری $A_i = A_i^*$ برای تمام‌مقادیر i ثابت می گردد .

۶.۳.۴ - لم-فرض می کنیم $\frac{A}{B}$ عنصری از $K(X)$ و :

$$B=\lambda P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_r^{\alpha_r}$$

تجزیهٔ B به‌چند جمله‌ای‌های ساده نشدنی باشد. تنها یك تجزیهٔ:

$$\frac{A}{B}=E+\frac{A_1}{P_1^{\alpha_1}}+\cdots+\frac{A_r}{P_r^{\alpha_r}}$$

وجود دارد که در آنجا $E\in K[X]$ است و برای همهٔ i ها داریم :

$$\deg A_i<\deg P_i^{\alpha_i}$$

به‌علاوه E بخش درست $\frac{A}{B}$ می‌باشد .

اثبات - وجود این‌تجزیه از ۶.۲.۳ و ۶.۳.۳ نتیجه می‌شود. برای اثبات‌یکتایی آن فرض می کنیم :

$$\frac{A}{B}=E^*+\frac{A_1^*}{P_1^{\alpha_1}}+\cdots+\frac{A_r^*}{P_r^{\alpha_r}}$$

باشد که درآنجا برای هراندیس i داریم $\deg A_i^* < \deg P_i^{\alpha_i}$ و $E^*\in K[X]$. چنانچه قراردهیم :

$$\sum\frac{A_i}{P_i^{\alpha_i}}=\frac{A'}{B}\quad,\quad\sum\frac{A_i^*}{P_i^{\alpha_i}}=\frac{A'^*}{B}$$

خواهیم‌داشت $\deg A'<\deg B$ و $\deg A'^*<\deg B$ (۶.۲.۲). اما از برابری :

$$E+\frac{A'}{B}=E^*+\frac{A'^*}{B}$$

برابری $E=E^*$ نتیجه می‌شود (۳.۲.۶). پس خواهیم داشت :

$$\sum \frac{A_i}{P_i^{\alpha_i}} = \sum \frac{A_i^*}{P_i^{\alpha_i}}$$

وبنابر ۳.۳.۶ برای همهٔ i ها $A_i^* = A_i$ می‌باشد.

۵.۳.۶ - لم - چند جمله‌ای‌های A و P متعلق‌به $K[X]$ وشمار درست $\alpha > 1$ را درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم $\deg A < \deg P^\alpha$ باشد. دراین صورت تنها یك تجزیهٔ :

$$\frac{A}{P^\alpha} = \frac{A_\alpha}{P^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{P^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{P}$$

وجود دارد به‌قسمی‌که برای همهٔ i ها نابرابری $\deg A_i < \deg P$ برقرار است.

اثبات - این لم برای $\alpha = 1$ روشن است. فرض می‌کنیم برای $\alpha - 1$ نیز لم بالا درست باشد. بنابر ۱.۳.۵ دوچندجمله‌ای P و Q متعلق‌به $K[X]$ وجود دارد به‌قسمی که داریم $A = PQ + R$ و $\deg R < \deg P$. پس خواهیم داشت :

$$\frac{A}{P^\alpha} = \frac{R}{P^\alpha} + \frac{Q}{P^{\alpha-1}}$$

چون $\frac{A-R}{P^\alpha} = \frac{Q}{P^{\alpha-1}}$ می‌باشد، پس درجهٔ صورت کسر $\frac{Q}{P^{\alpha-1}}$ کوچکتر از درجهٔ مخرج آن است (۲.۲.۶). بنابراین با توجه به‌فرض بازگشت درمورد $\frac{Q}{P^{\alpha-1}}$ وجود تجزیهٔ بالا ثابت می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم $\frac{A}{P^\alpha} = \frac{A_\alpha^*}{P^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}^*}{P^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1^*}{P}$ یک تجزیهٔ دیگر $\frac{A}{P^\alpha}$ باشد ($\deg A_i^* < \deg P$). از ضرب دوطرف برابری:

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{P^i} = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i^*}{P^i}$$

در P^α خواهیم داشت :

$$A_\alpha + PS = A_\alpha^* + PS^*$$

که در آن S و S^* متعلق به $K[X]$ هستند . چون $\deg A_\alpha < \deg P$ و $\deg A_\alpha^* < \deg P$ می‌باشد ، یکتایی تقسیم نشان می‌دهد که $A_\alpha = A_\alpha^*$ است. پس داریم $\sum_{i=1}^{\alpha-1} \frac{A_i^*}{P_i} = \sum_{i=1}^{\alpha-1} \frac{A_i}{P_i}$ وبا توجه به‌فرض بازگشت برابری $A_i = A_i^*$ برای همهٔ i ها ثابت می گردد .

۶ . ٤ - حالت هیأت C

۶ . ٤ . ۱ - قضیه - فرض می کنیم $\frac{A}{B}$ عنصری از $C(X)$ و :

$$B = \lambda(X-\rho)^h \cdots (X-\sigma)^k$$

باشد که در آن ρ ، ... ، σ ریشه‌های متمایز چندجمله‌ای B هستند . تنها یك تجزیهٔ :

$$\frac{A}{B} = E + \frac{\lambda_h}{(X-\rho)^h} + \frac{\lambda_{h-1}}{(X-\rho)^{h-1}} + \cdots + \frac{\lambda_1}{X-\rho} \tag{1}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ \frac{\mu_k}{(X-\sigma)^k} + \frac{\mu_{k-1}}{(X-\sigma)^{k-1}} + \cdots + \frac{\mu_1}{X-\sigma}$$

وجود دارد که در آنجا $E \in C[X]$ و λ_h ، ... ، λ_1 ، ... ، μ_k ، ... ، μ_1 متعلق به C می‌باشند .

این قضیه حالت ویژه‌ای از ۱.۳.۶ است.

۶ . ٤ . ۲ - چنانچه عبارت $\frac{A}{B}$ صورت ساده شد یک کسر باشد ، ضریب نخستین جملهٔ هریک ازسطرهای فرمول(۱) ، یعنی λ_h ، ... ، μ_k ، مخالف با صفر است. زیرا اگر مثلاً $\lambda_h = 0$ باشد ، چنانچه درطرف دوم برابری (۱) مخرج کسرها را یکی کنیم ، برابری $\frac{A^*}{B^*} = \frac{A}{B}$ بدست می‌آید که درآنجا داریم $B^* = (X-\rho)^{h-1} \cdots (X-\sigma)^k$ ؛

واین مطلب با قضیهٔ ٦ . ۱ . ٥ سازگار نیست. باید دانست که شمارهای λ_{h-1} ، ... ، λ_1 ، ... ، μ_{k-1} ، ... ، μ_1 می‌توانند برابر با صفر باشند.

روش عملی تجزیه

٦ . ٤ . ٣ ـ چنانکه درپیش دیدیم E از تقسیم A بر B برحسب توانهای کاهشی بدست می‌آید (٦ . ۲ . ٤). اگر $\deg A < \deg B$ باشد خواهیم داشت $E=0$.

٦ . ٤ . ٤ ـ می‌خواهیم نشان دهیم که λ_h ، λ_{h-1} ، ... ، λ_1 را می‌توان از تقسیم A بر B برحسب توانهای افزایشی بدست آورد. چون می‌توان با تعویض متغییر $X-\rho=X'$ بحالت $\rho=0$ رسید ، پس فرض می‌کنیم $\rho=0$ باشد. دراین‌صورت خواهیم داشت $B=X^hB_1$ که درآنجا B_1 بر X بخش‌پذیر نیست (به گفتهٔ دیگر مقدار ثابت چند جمله‌ای B_1 مخالف با صفر است). پس می‌توان تقسیم A بر B_1 را برحسب توانهای افزایشی تا مرتبهٔ $h-1$ انجام داد (٥ . ١٤ . ١) :

$$A=B_1(v_0+v_1X+\cdots \times v_{h-1}X^{h-1})+X^hR$$

که درآن v_0 ، v_1 ، ... ، v_{h-1} متعلق به C و R متعلق به $C[X]$ است. بنابراین خواهیم داشت :

$$\frac{A}{B}=\frac{v_0}{X^h}+\frac{v_1}{X^{h-1}}+\cdots+\frac{v_{h-1}}{X}+\frac{R}{B_1}$$

با تجزیهٔ $\frac{R}{B_1}$ به کسرهای ساده (درمخرج کسرهای این تجزیه X^i وجود نخواهد داشت)، و افزودن آن به $\frac{v_{h-1}}{X}+\cdots+\frac{v_0}{X^h}$ ، تجزیهٔ $\frac{A}{B}$ به کسرهای ساده بدست می‌آید ، وبا توجه به‌یکتایی تجزیهٔ کسرها خواهیم‌داشت $v_0=\lambda_h$ ، $v_1=\lambda_{h-1}$ ، ... ، $v_{h-1}=\lambda_1$ (بهمین روش می‌توان μ_i ها را از تقسیم A بر B بدست آورد).

٦ . ٤ . ٥ ـ اگر دوطرف برابری (۱) را در $(X-\rho)^h$ ضرب کنیم و سپس X را برابر با ρ بگیریم، خواهیم داشت :

$$\lambda_h=\frac{A(\rho)}{B_1(\rho)} \qquad (۲)$$

که درآنجا $B=(X-\rho)^hB_1$ است.

چنانچه همهٔ قطب‌های $\frac{A}{B}$ ساده باشند، با این روش می‌توان همهٔ ضرایب λ_i، ... ، μ_i را بدست آورد.

۶.۴.۶ ـ اگر ρ یک قطب ساده باشد، در برخی از موارد می‌توان فرمولی ساده‌تراز فرمول(۲) بدست‌آورد. چنانچه از برابری $B=(X-\rho)B_1$ مشتق بگیریم خواهیم‌داشت:

$$B'=B_1+(X-\rho)B'_1 \quad , \quad B'(\rho)=B_1(\rho)$$

بنابراین برای $h=1$ چنین داریم :

$$\lambda_1=\frac{A(\rho)}{B'(\rho)} \qquad (۳)$$

۶ . ٤ . ۷ ـ اگر در برابری (۱) به X مقادیر ویژه‌ای نسبت دهیم بستگی‌هایی بین λ_iها ، ... ، μ_iها بدست‌می‌آید. به‌ویژه فرض می‌کنیم $\deg A<\deg B$ باشد $(E=0)$. چنانچه دوطرف (۱)را در X ضرب‌کنیم وسپس X را به‌سمت بی‌نهایت میل‌دهیم ، خواهیم داشت :

$$\lim_{X\to\infty}\frac{XA(X)}{B(X)}=\lambda_1+\cdots+\mu_1$$

(دراینجا X یک متغیر مختلط را معین می‌کند. هنگامیکه می‌گوییم X بسمت بی‌نهایت می‌گراید به‌این معنی است‌که $|X|$ بسمت $+\infty$ میل می‌کند) .

۸.٤.۶ ـ چنانچه دوطرف (۱) را در B ضرب‌کنیم، یک برابری بین‌چند جمله‌ای A و یک چندجمله‌ای دیگر بدست می‌آید، که اگر درآن ضرایب چند جمله‌ای‌های دوطرف را با یکدیگر برابر بگیریم بستگی‌هایی خطی بین λ_i ها و ... و μ_iها حاصل می‌شود. این بستگی‌ها λ_i ها و ... و μ_i ها را به‌طورکامل وتنها به‌یک صورت معین می‌کنند (یکتایی λ_i ها و ... و μ_i ها از ۱.٤.۶ نتیجه می‌شود) .

۶ . ۵ ـ حالت هیأت R

۶ . ۵ . ۱ ـ قضیه ـ چنانچه $\frac{A}{B}$ متعلق به $R(X)$ و :

$$B=\lambda(X-r)^h\cdots(X-s)^k(X^2+aX+b)^l\cdots(X^2+cX+d)^m$$

تجزیهٔ B به‌چندجمله‌ای‌های ساده نشدنی در $\mathbf{R}[X]$ باشد، تنها یك تجزیه به‌صورت:

$$\frac{A}{B}=E+\frac{\lambda_h}{(X-r)^h}+\frac{\lambda_{h-1}}{(X-r)^{h-1}}+\cdots+\frac{\lambda_1}{X-r}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\mu_k}{(X-s)^k}+\frac{\mu_{k-1}}{(X-s)^{k-1}}+\cdots+\frac{\mu_1}{X-s}$$

$$+\frac{\nu_l X+\rho_l}{(X^2+aX+b)^l}+\frac{\nu_{l-1}X+\rho_{l-1}}{(X^2+aX+b)^{l-1}}+\cdots$$

$$+\frac{\nu_1 X+\rho_1}{X^2+aX+b}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\sigma_m X+\tau_m}{(X^2+cX+d)^m}+\frac{\sigma_{m-1}X+\tau_{m-1}}{(X^2+cX+d)^{m-1}}+\cdots$$

$$+\frac{\sigma_1 X+\tau_1}{X^2+cX+d}$$

وجود دارد که درآنجا $E\in\mathbf{R}[X]$ و λ_1 ، ... ، λ_h ، μ_1 ، ... ، μ_k ، ν_1 ، ρ_1 ، ... ، ν_l ، ρ_l ، ... ، σ_1 ، τ_1 ، ... ، σ_m ، τ_m **متعلق به $\mathbf{R}$ هستند.**

این قضیه حالت ویژهٔ ۱.۳.۶ می‌باشد.

۲.۵.۶ ـ کسرهای سادهٔ $\frac{\lambda_i}{(X-r)^i}$ ، ... ، $\frac{\mu_i}{(X-s)^i}$ را **کسرهای سادهٔ نوع اول** و کسرهای سادهٔ $\frac{\nu_i X+\rho_i}{(X^2+aX+b)^i}$ ، ... ، $\frac{\sigma_i X+\tau_i}{(X^2+cX+d)^i}$ را **کسرهای سادهٔ نوع دوم** می‌نامند.

۳.۵.۶ ـ دراینجا نیز درستی مطالب شماره‌های ۳.۴.۶ تا ۸.۴.۶ درمورد تجزیهٔ کسر $\frac{A}{B}$ برقراراست، ولی‌تنها بااستفاده از روشهای ۷.۴.۶ و ۸.۴.۶ می‌توان‌شمارهای

ν_i ، ρ_i ، ... ، σ_i ، τ_i را بدست آورد. برای تجزیهٔ یک کسر با ضرایب حقیقی بهتراست، با درنظرگرفتن نکات زیر، به‌حالت کسرهای مختلط برگردیم.

بستگی بین تجزیه‌های یک کسر در $\mathbf{R}$ و در $\mathbf{C}$

۶.۵.۴ - قضیه - چنانچه $R=\frac{A}{B}$ عنصری از $\mathbf{C}(X)$ باشد، کسر $\frac{\bar{A}}{\bar{B}}$ تنها بستگی به R دارد و بستگی به نمایش آن به‌صورت $\frac{A}{B}$ ندارد.

اثبات - اگر $\frac{A_1}{B_1}$ صورت ساده شدهٔ R باشد، داریم $A=A_1C$ و $B=B_1C$ که C متعلق به $\mathbf{C}[X]$ است (۶.۱.۵). پس خواهیم داشت:

$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}}=\frac{\bar{A}_1\bar{C}}{\bar{B}_1\bar{C}}=\frac{\bar{A}_1}{\bar{B}_1}$$

و قضیه ثابت می‌شود.

۶.۵.۵ - قرارمی‌دهیم $\bar{R}=\frac{\bar{A}}{\bar{B}}$ و کسرگویای $\bar{R}$ را **مزدوج کسرگویای** $R=\frac{A}{B}$ می‌نامیم. درحالتی‌که R یک چند جمله‌ای باشد به‌تعریف مزدوج یک چند جمله‌ای‌که درپیش بیان شد می‌رسیم. بدیهی است که $\bar{\bar{R}}=R$ وچنانچه $S\in\mathbf{C}(X)$ باشد داریم $\overline{R+S}=\bar{R}+\bar{S}$ و $\overline{RS}=\bar{R}\,\bar{S}$ (۵.۱۲.۲) . اگر ρ قطب مرتبهٔ h کسر R باشد، از ۵.۱۲.۶ نتیجه می‌شودکه $\bar{\rho}$ قطب مرتبه h کسر $\bar{R}$ می‌باشد. بنابر ۵.۱۲.۵ برای هر x متعلق به $\mathbf{C}$ که قطب R نباشد داریم $\overline{R(x)}=\bar{R}(\bar{x})$.

۶.۵.۶ - فرض می‌کنیم $R=\frac{A}{B}$ عنصری از $\mathbf{C}(X)$ و:

$$B=\lambda(X-\rho)^h\cdots(X-\sigma)^k$$

باشد، که درآنجا ρ ، ... ، σ ریشه‌های متمایز چند جمله‌ای B هستند. چنانچه تجزیهٔ کسر R را به‌صورت (۱) شمارهٔ ۶.۴.۱ بنویسیم، با استفادهٔ از ۶.۵.۵ خواهیم داشت:

$$\bar{R}=\bar{E}+\frac{\bar{\lambda}_h}{(X-\bar{\rho})^h}+\frac{\bar{\lambda}_{h-1}}{(X-\bar{\rho})^{h-1}}+\cdots+\frac{\bar{\lambda}_1}{X-\bar{\rho}}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\bar{\mu}_k}{(X-\bar{\sigma})}+\frac{\bar{\mu}_{k-1}}{(X-\bar{\sigma})^{k-1}}+\cdots+\frac{\bar{\mu}_1}{X-\bar{\sigma}}$$

چون تجزیهٔ شمارهٔ ۱.۴.۶ یکتاست ، پس برابری بالا تجزیهٔ $\bar{R}$ به‌عنصرهای‌ساده‌می‌باشد. به‌طوریکه دیده می‌شود تجزیهٔ $\bar{R}$ به‌کسرهای ساده از تجزیهٔ R ، که درآن بجای E و ρ ، ... ، σ ، λ_i ، ... ، μ_i به‌ترتیب $\bar{E}$ و $\bar{\rho}$ ، ... ، σ ، $\bar{\lambda}_i$ ، ... ، $\bar{\mu}_i$ را قرارداده‌ایم، بدست می‌آید.

۷.۵.۶ ـ اگر R متعلق به $\mathbf{R}(X)$ باشد ، می‌توان آنرا عنصری از $\mathbf{C}(X)$ گرفت وبا استفاده از ۱.۴.۶ تجزیهٔ Δ آنرا نوشت. چنانچه ρ یک قطب مرتبهٔ h کسر R باشد ، $\bar{\rho}$ نیز یک قطب مرتبهٔ h کسر $\bar{R}$ خواهد بود (۶.۱۲.۵) . اگر :

$$\frac{\lambda_h}{(X-\rho)^h}+\frac{\lambda_{h-1}}{(X-\rho)^{h-1}}+\cdots+\frac{\lambda_1}{X-\rho}$$

و

$$\frac{\mu_h}{(X-\bar{\rho})^h}+\frac{\mu_{h-1}}{(X-\bar{\rho})^{h-1}}+\cdots+\frac{\mu_1}{X-\bar{\rho}}$$

عنصرهای سادهٔ وابسته به قطب‌های ρ و $\bar{\rho}$ باشند ، چون $R=\bar{R}$ است ، از ۶.۵.۶ نتیجه می‌شود $\mu_h=\bar{\lambda}_h$ ، $\mu_{h-1}=\bar{\lambda}_{h-1}$ ، ... ، $\mu_1=\bar{\lambda}_1$ به‌ویژه اگرشمار ρ حقیقی باشد شمارهای λ_1 ، ... ، λ_h حقیقی خواهند بود.

اکنون فرض می‌کنیم شمار ρ حقیقی نباشد. داریم :

$$\frac{\lambda_i}{(X-\rho)^i}+\frac{\bar{\lambda}_i}{(X-\bar{\rho})^i}=\frac{\lambda_i(X-\bar{\rho})^i+\bar{\lambda}_i(X-\rho)^i}{[(X-\rho)(X-\bar{\rho})]^i} \qquad (۱)$$

چند جمله‌ای $A=(X-\rho)(X-\bar{\rho})$ یک عنصر ساده نشدنی از $\mathbf{R}[X]$ است (۱۰.۱۲.۵). همچنین چند جمله‌ای $T_i=\lambda_i(X-\bar{\rho})^i+\bar{\lambda}_i(X-\rho)^i$ که باسزدوج

خود برابر است ، عنصری از $\mathbf{R}[X]$ می‌باشد و بنابر (۱) و ۲.۲.۶ داریم :

$$\deg T_i < \deg A^i$$

با درنظر گرفتن ۵.۳.۶ می‌توان نوشت :

$$\frac{T_i}{A^i} = \frac{\mu_i X + \nu_i}{A^i} + \frac{\mu_{i-1} X + \nu_{i-1}}{A^{i-1}} + \cdots + \frac{\mu_1 X + \nu_1}{A}$$

تجزیهٔ $\frac{T_i}{A_i}$ را می‌توان از تقسیم صورت به‌مخرج بدست آورد (بنابر اثبات ۳.۵.۶) .

به‌طورخلاصه می‌توان گفت کسرهای سادهٔ نوع اول R همان عنصرهای سادهٔ Δ وابسته به‌قطب‌های حقیقی هستند، و کسرهای سادهٔ نوع دوم R با دسته‌بندی کسرهای مزدوج Δ وابسته به‌قطب‌های غیرحقیقی R و انجام عمل تقسیم بدست می‌آیند.

فصل هفتم

چند جمله‌ای‌های چند متغیری

خواننده از پیش با چند جمله‌ای‌هایی از x ، y ، z ، ... آشنایی دارد. دراین‌فصل برخی‌از نتایج فصل پنجم را درمورد این چند جمله‌ای‌ها تعمیم می‌دهیم (همهٔ نتایج فصل پنجم را نمی‌توان درمورد این چندجمله‌ای‌ها تعمیم داد). این فصل درمطالعهٔ فصل‌های آینده اهمیت چندانی ندارد.

۷ . ۱ ـ تعریف

۷ . ۱ . ۱ ـ معمولاً ، چند جمله‌ای‌های دومتغیری گسترش‌هایی به‌صورت :

$$(x, y) \longrightarrow \sum \alpha_{ij} x^i x^i$$

هستند، که درآن متغیرهای x و y وضرایب α_{ij} متعلق به $\mathbf{R}$ می‌باشند. دراینجا نیز مانند فصل پنجم ، تعریف دیگری برای این چند جمله‌ای‌ها اختیار می‌کنیم.

۷ . ۱ . ۲ ـ فرض می‌کنیم K یک حلقهٔ جابجایی و یگانی باشد. دنبالهٔ دوگانهٔ $(\alpha_{ij})_{i \geqslant 0, j \geqslant 0}$ ازعنصرهای K که درآن از ردیف معینی به‌بعد همهٔ α_{ij} ها برابر با صفرند **چند جمله‌ای دومتغیری با ضرایب متعلق به** K نامیده می‌شود. α_{ij} ها را **ضرایب** چند جمله‌ای و α_{00} را **مقدار ثابت** آن می‌نامند.

۷ . ۱ . ۳ ـ جمع وضرب چندجمله‌ای‌های دومتغیری به‌وسیلهٔ فرمول‌های زیرمعین می‌شوند:

$$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \ , \ (\alpha_{ij})(\beta_{ij}) = (\gamma_{ij})$$

که درآنجا داریم :

$$\gamma_{ij} = \sum_{i'+i''=i \ , \ j'+j''=j} \alpha_{i'j'} \beta_{i''j''}$$

دراین‌صورت می‌توان مانند ۵ . ۱ ثابت‌نمود که‌مجموعهٔ چندجمله‌ای‌های دومتغیری باضرایب متعلق به K یک حلقهٔ جابجایی‌تشکیل می‌دهند. اگر α عنصری از K باشد چندجمله‌ای

(a_{ij}) را که همهٔ ضرایب آن برابر با صفراست و داریم $a_{00}=a$ با a یکی می گیریم. بدین ترتیب K یک زیرحلقه ازحلقهٔ چندجمله‌ای‌های دومتغیری می‌شود. بنابراین عنصریکهٔ K عنصریکه حلقهٔ چند جمله‌ای‌های دو متغیری خواهد شد.

۴.۱.۷ - چند جمله‌ای (a_{ij}) را که در آن $a_{10}=1$ و سایر a_{ij} ها برابر باصفراست با X نشان می‌دهیم. همچنین چند جمله‌ای (a_{ij}) راکه درآن $a_{01}=1$ وسایر a_{ij} ها برابر با صفرند، با Y می‌نماییم. دراین‌صورت به‌آسانی دیده می‌شود که داریم:

$$(a_{ij})=\sum_{i\geqslant 0\,,\,j\geqslant 0} a_{ij}X^iY^j$$

ازاین‌پس هر چند جمله‌ای دومتغیری را به‌صورت $\sum\limits_{i\geqslant 0\,,\,j\geqslant 0} a_{ij}X^iY^j$ نشان می‌دهیم (روشن است که بجای X و Y می‌توان حروف دیگری بکار برد) و X و Y را **متغیر** یا **مجهول** می‌نامیم. پس عبارت $\sum a_{ij}X^iY^j$ یک چند جمله‌ای دو متغیری از X و Y را نشان می‌دهد. حلقهٔ چند جمله‌ای‌های دومتغیری از X و Y با ضرایب متعلق به K را با $K[X\,,\,Y]$ نشان می‌دهند.

۵.۱.۷ - **تعمیم** - به‌روش مشابه حلقهٔ چند جمله‌ای‌های n متغیری‌از X_1 ، X_2 ، ... ، X_n باضرایب‌متعلق‌به K را تعریف می‌کنند وآنرا با $K[X_1\,,\,X_2\,,\,\cdots\,,\,X_n]$ نمایش می‌دهند. هرعنصر این حلقه به‌صورت:

$$\sum_{i_1\geqslant 0\,,\,\cdots\,,\,i_n\geqslant 0} a_{i_1i_2\,,\,\cdots\,,\,i_n} X_1^{i_1}X_2^{i_2}\cdots X_n^{i_n}$$

نوشته می‌شود که در آن ازیک ردیف به‌بعد همهٔ ضرایب برابر با صفرند.

۲.۷ - بستگی چند جمله‌ای‌های یک متغیری و چندمتغیری

۱.۲.۷ - فرض می‌کنیم K یک حلقهٔ جابجایی و یکه‌دار $A=K[X]$ باشد. چنانکه در ۶.۱.۵ دیدیم A یک حلقه جابجایی و یکه‌دار است.

اگر $P=P_0+P_1Y+P_2Y^2+\cdots$ عنصری از $A[Y]$ باشد، P_j ها عنصرهایی از $A=K[X]$ هستند. قرارمی‌دهیم $P_j=\sum\limits_i a_{ij}X^i$ ، که درآن a_{ij} متعلق به K

می‌باشد ، و به‌چند جمله‌ای P چندجمله‌ای $Q=\sum_{i,j} a_{ij}X^iY^j \in K[X, Y]$ را وابسته می‌کنیم .

قضیه - گسترش $P \to Q$ یك ایزومرفیسم حلقهٔ $A[Y]$ در حلقهٔ $K[X, Y]$ است.

اثبات :

۱ - به‌آسانی دیده می‌شود که این گسترش یک همومرفیسم حلقه است.

۲ - فرض می‌کنیم $P^*=\sum_j P_j^* Y^j$ یک عنصر از $A[Y]$ و $P_j^*=\sum a_{ij}^* X^i$ باشد. سایهٔ P^* به‌وسیلهٔ گسترش بالا برابر با $Q^*=\sum_{i,j} a_{ij}^* X^iY^j$ است. اگر $Q=Q^*$ باشد برای همهٔ اندیس‌های i و j خواهیم داشت $a_{ij}^*=a_{ij}$ و ازآنجا $P^*=P$ ، پس گسترش بالا انژکتیو است.

۳ - فرض می‌کنیم $\sum_{i,j} b_{ij}X^iY^j$ عنصر دلخواهی از $K[X, Y]$ باشد. قرار می‌دهیم $P_j=\sum_i b_{ij}X^i$. چندجمله‌ای‌های P_j متعلق به A می‌باشد و شمارهٔ باپایانی ازآنها مخالف با صفر است. بنابراین چند جمله‌ای $\sum_j P_jY^j$ عنصری از $A[Y]$ می‌باشد و عنصر وابسته به آن در $K[X, Y]$ همان $\sum_{i,j} b_{ij}X^iY^j$ است. پس گسترش بالا سورژکتیو است.

۲.۲.۷- به‌روش مشابه می‌توان ثابت کرد که یک ایزومرفیسم حلقهٔ $K[X_1,\cdots,X_n]$ روی حلقهٔ $K[X_1, \cdots, X_p][X_{p+1}, \cdots, X_n]$ وجود دارد.

۳.۲.۷ - **قضیه - اگر K یك حلقهٔ انتگر باشد، $K[X_1, \cdots, X_n]$ نیز یك حلقهٔ انتگر است.**

اثبات - این قضیه درمورد چندجمله‌ای‌های یک متغیری دیده شد (۴.۲.۵). اکنون درستی آنرا برای چند جمله‌ای‌های $n-1$ متغیری می‌پذیریم و برای چند جمله‌ای‌های n متغیری ثابت می‌کنیم. چون حلقهٔ $K[X_1, \cdots, X_{n-1}]$ انتگر است ، بنابر ۴.۲.۵ ، حلقهٔ $K[X_1, \cdots, X_{n-1}][X_n]$ نیز یک حلقهٔ انتگر می‌باشد. پس $K[X_1, \cdots, X_n]$ یک حلقهٔ انتگراست (۲.۲.۷) .

۷ . ۳ - درجهٔ چند جمله‌ای‌های چند متغیری

۱.۳.۷ - فرض می‌کنیم $P=\sum\alpha_{ij}X^iY^j$ عنصری از $K[X , Y]$ باشد. بزرگترین‌شمار درست i را به‌قسمی‌که $\alpha_{ij}\neq 0$ باشد **درجهٔ چند جمله‌ای P نسبت به X** می‌نامند. همچنین بزرگترین شمار j را به‌طوریکه $\alpha_{ij}\neq 0$ باشد **درجهٔ P نسبت به Y** می‌گویند.

درجهٔ کل چند جمله‌ای P بزرگترین شمار درست $i+j$ است به‌قسمی‌که دست‌کم یکی‌از α_{ij} هایی‌که درآنها $i+j$ بزرگترین مقدار را دارد مخالف با صفر باشد. چند جمله‌ای ۰ دارای درجه نیست. درجهٔ کل چندجمله‌ای P را با $\deg P$ نشان می‌دهند.

۲.۳.۷ - اگر P و Q متعلق به $K[X , Y]$ باشند به‌آسانی دیده می‌شود که داریم:

$$\deg(P+Q)\leqslant \sup(\deg P , \deg Q) , \deg(PQ)\leqslant \deg P+\deg Q$$

۳.۳.۷ - چند جمله‌ای $P=\sum\alpha_{ij}X^iY^j$ را **همگن درجهٔ** d می‌نامند اگر برای هر $i+j\neq d$ داشته باشیم $\alpha_{ij}=0$. به‌گفتهٔ دیگر اگر P از جمع یک جمله‌ای‌های $\alpha_{ij}X^iY^j$ که دارای درجهٔ کل d هستند تشکیل شده باشد. بنابه‌تعریف، چند جمله‌ای ۰ همگن درجهٔ دلخواه است (این مطلب با قراردادی‌که درمورد چند جمله‌ای ۰ درحالت چند جمله‌ای‌های ناهمگن کردیم اندکی تفاوت دارد) . اگر P و Q چند جمله‌ای‌های همگن درجهٔ p باشند $P+Q$ همگن درجهٔ p است و چنانچه P و Q به‌ترتیب همگن درجهٔ p و q باشند چند جمله‌ای PQ از درجهٔ $p+q$ خواهد شد. چند جمله‌ای‌های همگن درجهٔ صفر عنصرهای K یعنی اسکالرها هستند. چندجمله‌ای‌های دومتغیری همگن درجهٔ یک به‌صورت $\alpha X+\beta Y$ و چند جمله‌ای‌های همگن دومتغیری درجهٔ دو به‌صورت $\alpha X^2+\beta XY+\gamma Y^2$ نوشته می‌شوند.

۴.۳.۷ - هرچند جمله‌ای P متعلق‌به $K[X , Y]$ که درجهٔ کل آن p باشدتنها به‌یک روش به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P=P_0+P_1+P_2+\cdots+P_p$$

که درآنجا P_i ها همگن درجهٔ i می‌باشند و داریم $P_p \neq 0$. چند جمله‌ای P_i را **مؤلفهٔ همگن درجهٔ** i چند جمله‌ای P می‌نامند.

۷.۳.۵ - اگر K یک حلقهٔ انتگر و P و Q دوعنصرمخالف باصفراز $K[X , Y]$ باشند داریم $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$. زیرا اگر $\deg P = p$ و $\deg Q = q$ باشد بنابر ۷.۳.۴ چند جمله‌ای‌های P و Q را می‌توان چنین نوشت $P = P^* + P_p$ و $Q = Q^* + Q_q$ که درآنجا $\deg P^* < p$ و $\deg Q^* < q$ است و چند جمله‌ای‌های P_p و Q_q مخالف با صفروبه‌ترتیب همگن درجهٔ p و q می‌باشند. دراین‌صورت خواهیم داشت

$$PQ = (P^*Q^* + P_pQ^* + P^*Q_q) + P_pQ_q$$

و $\deg(P^*Q^* + P_pQ^* + P^*Q_q) < p+q$ ، و چون P_pQ_q مخالف با صفر (۷.۲.۳) واز درجهٔ $p+q$ است بنابراین داریم $\deg(PQ) = p+q$.

۷.۳.۶ - به‌آسانی می‌توان کلیهٔ مطالب بالا را درمورد چند جمله‌ای‌های n متغیری تعمیم داد.

۷ . ٤ - توابع چندجمله‌ای

۷.٤.۱ - حلقهٔ جابجایی ویکه‌دار A وزیر حلقهٔ K ازآنرا که‌شامل عنصرهای ۱، x و y می‌باشد درنظر می‌گیریم. به‌آسانی دیده می‌شود که گسترش :

$$\sum \alpha_{ij} X^i Y^j \longrightarrow \sum \alpha_{ij} x^i y^j$$

حلقهٔ $K[X , Y]$ در A یک هومرفیسم حلقه است. اگر $P = \sum \alpha_{ij} X^i Y^j$ باشد ، قرارمی‌دهیم $\sum \alpha_{ij} x^i y^j = P(x,y)$. دراین‌صورت برای چند جمله‌ای‌های P و P' متعلق به $K[X , Y]$ و λ متعلق به K داریم :

$$(P+P')(x , y) = P(x , y) + P'(x , y)$$
$$(PP')(x , y) = P(x , y)P'(x , y)$$
$$(\lambda P)(x , y) = \lambda P(x , y)$$

۷.٤.۲ - اگر $A = K[X , Y]$ باشد ، به‌آسانی دیده می‌شود که $P(X , Y)$ با خود P یکی است . به‌این جهت علامت $P(X , Y)$ را بجای P بکار می‌برند.

۷ . ٤ . ۳ ـ فرض می‌کنیم P یک چندجمله‌ای از $K[X , Y]$ باشد. **گسترش** $P(x , y) \longrightarrow (x , y)$ حلقهٔ $K^۲$ در K ، **تابع چندجمله‌ای معین شده به‌وسیلهٔ P** نامیده می‌شود. چنانچه $K = \mathbf{R}$ باشد به‌مفهوم سادهٔ چند جمله‌ای‌ها می‌رسیم.

۷ . ٤ . ٤ ـ به‌آسانی می‌توان کلیهٔ مطالب بالا را درمورد چند جمله‌ای‌های n متغیری تعمیم داد.

۷ . ٤ . ٥ ـ قضیه ـ فرض می‌کنیم K یك حلقهٔ انتگر و بی‌پایان باشد. اگر دوعنصر P و Q متعلق به $K[X_۱ , X_۲ , \ldots , X_n]$ یك تابع چند جمله‌ای را معین کنند، داریم $P = Q$.

اثبات :

الف ـ ابتدا فرض می‌کنیم $n = ۱$ باشد. بنابر ٤ . ٦ . ٦ حلقهٔ انتگر A در هیأت کسرهای خود، که آنرا با $\mathbf{C}$ می‌نماییم، غوطه‌ور می‌گردد. پس اگر $P \in \mathbf{C}[X_۱]$ و $Q \in \mathbf{C}[X_۱]$ باشد ، همهٔ عنصرهای K (به‌شمارهٔ بی‌پایان) ریشه‌های چند جمله‌ای $P - Q$ هستند. بنابراین با توجه به شمارهٔ ۹ . ۹ . ٥ خواهیم داشت $P - Q = ۰$.

ب ـ اکنون فرض می‌کنیم قضیهٔ بالا درمورد چند جمله‌ای‌های $n - ۱$ متغیری درست باشد. چنانچه چند جمله‌ای $P - Q$ را درنظر بگیریم ، برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که اگر R یک عنصر مخالف با صفرحلقهٔ $K[X_۱ , X_۲ , \ldots , X_n]$ باشد ، R یک تابع مخالف با صفر را معین می‌کند. اما اگر $R = \sum\limits_j R_j X_n^j$ باشد که در آن R_j ها متعلق به $K[X_۱ , \ldots , X_{n-۱}]$ هستند ، چون R مخالف با صفر است دست کم یک اندیس i وجود دارد به‌طوریکه داشته‌باشیم $R_i \neq ۰$. همچنین بنابه‌فرض بازگشت عنصرهای $x_۱$ ، $x_۲$ ، $\cdots$ ، $x_{n-۱}$ متعلق به K وجود دارند به‌طوری که :

$$R_i(x_۱ , x_۲ , \ldots , x_{n-۱}) \neq ۰$$

باشد . بنابراین چند جمله‌ای $\sum\limits_j R_j(x_۱ , \ldots , x_{n-۱}) X_n^j$ ، که متعلق به $K[X_n]$ است ، مخالف با صفر می‌باشد. پس بنابرقسمت (الف) عنصر x_n متعلق به K وجود دارد به‌طوری که داریم $\sum R_j(x_۱ , \ldots , x_{n-۱}) x_n^j \neq ۰$ ، به‌عبارت دیگر $R(x_۱ , \ldots , x_n)$ مخالف با صفر می‌باشد و بدین‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۷ . ٤ . ٦ ـ هنگامیکه K یک حلقهٔ انتگر و بی‌پایان باشد (مثلاً $K=\mathbf{Z}$ ، یا $\mathbf{R}$ ، یا $\mathbf{C}$) ، هرچند جمله‌ای با تابعی که تعیین می کند یکی گرفته می‌شود. درستی این مطلب از قضیهٔ ۷ . ٤ . ٥ آشکار است.

۷ . ۵ ـ تعریف دیگر چندجمله‌ای‌های همگن

۷ . ۵ . ۱ ـ چند جمله‌ای n متغیری :

$$P(X_1 , X_2 , \cdots , X_n)=\sum a_{i_1 i_2 \cdots i_n} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$$

را درنظر می گیریم و P را به‌صورت $P=P_1+P_2+ \cdots + P_p$ می‌نویسیم، که در آنجا P_i یک چندجمله‌ای همگن درجهٔ i می‌باشد و داریم $P_p \neq 0$ هرگاه $P \neq 0$ باشد. بنابرشمارهٔ ۷ . ٤ . ۱ می‌توان عنصرهایی از حلقهٔ $K[X_1 , \cdots , X_n , T]$ را ، که درآنجا T متغیر جدیدی را مشخص می کند ، جایگزین متغیرهای X_1 ، X_2 ، $\cdots$ ، X_n چند جمله‌ای P نمود. به‌ویژه می‌توان چندجمله‌ای $P(X_1T , X_2T , \cdots , X_nT)$ را تشکیل داد. چون داریم :

$$a_{i_1 i_2 \cdots i_n}(X_1T)^{i_1} (X_2T)^{i_2} \cdots (X_nT)^{i_n}=$$

$$a_{i_1 i_2 \cdots i_n} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n} T^{i_1+i_2+ \cdots +i_n}$$

به‌آسانی دیده می‌شود که خواهیم داشت :

$$P(X_1T, X_2T, \cdots , X_nT)=P_0+P_1T+P_2T^2+ \cdots +P_pT^p$$

۷ . ۵ . ۲ ـ به ویژه اگر $P \neq 0$ باشد ، $\deg P$ برابر با درجه چند جمله‌ای $P(X_1T , X_2T , \cdots , X_nT)$ نسبت به T می‌باشد.

۷ . ۵ . ۳ ـ **قضیه- برای اینکه چند جمله‌ای P همگن درجهٔ p باشد بایا و بسنده است که داشته باشیم :**

$$P(X_1T , X_2T , \cdots , X_nT)=T^pP(X_1 , X_2 , \cdots , X_n)$$

اثبات ـ بنابر ۷ . ۵ . ۱ شرط بالا لازم است. به‌وارون اگر این شرط برقرار باشد خواهیم داشت :

$$P_0+P_1T+P_2T^2+\cdots+P_pT^p=P(X_1T, X_2T, \cdots, X_nT)$$
$$=T^pP(X_1, X_2, \cdots, X_n)=(P_0+P_1+\cdots+P_p)T^p$$

پس برای $i<p$ داریم $P_i=0$. بنابراین P همگن درجهٔ p است.

۷ . ۶ ـ مشتق چندجمله‌ای‌های چند متغیری

۱.۶.۷ ـ فرض می‌کنیم $P=\sum a_{ij}X^iY^j$ باشد. **مشتقهای نسبی** P **نسبت** به X و Y به‌صورت‌زیر تعریف می‌شوند :

$$P'_x=\sum i a_{ij}X^{i-1}Y^j \quad , \quad P'_y=\sum j a_{ij}X^iY^{j-1}$$

(هرگاه $K=\mathbf{R}$ باشد ، این مشتقهای نسبی همان مشتقهای نسبی تعریف شده در شمارهٔ ۲.۱.۱۱ کتاب آنالیز هستند) .

۲.۶.۷ ـ دستورهای‌محاسبهٔ‌مشتقهای‌نسبی‌شبیه‌دستورهای شمارهٔ ۲.۱۳.۰ می‌باشند . (به‌علاوه باتوجه‌به ۱.۲.۷ می‌توان P را به‌صورت یک چند جمله‌ای یک‌متغیری از X ویا از Y درنظرگرفت و به‌حالت چند جمله‌ای‌های یک متغیری برگشت) .

۳.۶.۷ ـ داریم $P''_{XY}=P''_{YX}$. کافی است درستی این برابری را درمورد $P=X^iY^j$ بررسی‌کنیم‌که آن‌نیز آشکار است. زیرا :

$$P''_{XY}=(iX^{i-1}Y^j)'_Y=jiX^{i-1}Y^{j-1}$$
$$P''_{YX}=(jX^iY^{j-1})'_X=ijX^{i-1}Y^{j-1}$$

۴.۶.۷ ـ ازاین‌جانتیجه‌می‌شود که می‌توان‌مشتقهای نسبی وپی‌درپی یک‌چندجمله‌ای P را بدون‌رعایت‌ترتیب مشتق گیری محاسبه کرد. چنانچه m بار از چند جمله‌ای P نسبت به X و n بار نسبت به Y مشتق بگیریم یک چند جمله‌ای بدست می‌آید که آنرا با $P^{(m+n)}_{X^mY^n}$ نشان می‌دهیم.

۵.۶.۷ ـ **مثال** ـ اگر ρ و σ متعلق‌به K و $P=(X-\rho)^i(Y-\sigma)^j$ باشد، مانند شمارهٔ ۴.۱۳.۰ می‌توان نشان داد که $P^{(m+n)}_{X^mY^n}(\rho, \sigma)=0$ است مگرآنکه داشته باشیم $m=i$ و $n=j$ که دراین‌صورت $P^{(i+j)}_{X^iY^j}(\rho, \sigma)=i!j!$ می‌باشد.

۶.۶.۷ - قضیه- (فرمول تیلر) - چنانچه K یک‌هیأت با مشخص صفر و ρ و σ متعلق به K و P عنصری از $K[X, Y]$ باشد ، داریم :

$$P(X,Y) = \sum_{i\geqslant 0 \,,\, j\geqslant 0} \frac{1}{i!\, j!} P^{(i+j)}_{X^iY^j}(\rho, \sigma)(X-\rho)^i(Y-\sigma)^j$$

(جمله های مجموع بالا به‌شمارهٔ با پایان‌است ، زیرا هنگامیکه $i+j$ به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد همهٔ چند جمله‌ای‌های $P^{(i+j)}_{X^iY^j}$ برابر با صفرند) .

اثبات - همانطوریکه در مورد چندجمله‌ای‌های یک متغیری دیده شد کافی است قضیه را برای چند جمله‌ای $P(X, Y)=(X-\rho)^i(Y-\sigma)^j$ ثابت کنیم ، که آن‌نیز با توجه به‌مثال ۵.۶.۷ آشکار است.

۷.۶.۷ - هرگاه $P(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ یک چند جمله‌ای n متغیری باشد، ابتدا مشتقهای نسبی‌مرتبهٔ اول P'_{X_1} ، P'_{X_2} ، ... ، P'_{X_n} را مانند ۱.۶.۷ و سپس مشتقهای نسبی مرتبه های بالا یعنی به‌طورکلی :

$$P^{(i_1+i_2+\cdots+i_n)}_{X_1^{i_1}X_2^{i_2}\cdots X_n^{i_n}}$$

را تعریف می‌کنند. دراین‌حالت نیز فرمول تیلر برقرار است که اثبات آن‌را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم .

۸.۶.۷ - قضیه (فرمول اولر)-فرض می‌کنیم K یك هیأت بامشخص ۰ وچند جمله‌ای P متعلق به $K[X, Y]$ باشد. برای اینکه P همگن‌درجهٔ m باشد ، بایا و بسنده است که داشته باشیم $mP=XP'_X+YP'_Y$.

اثبات :

۱ - فرض می‌کنیم P همگن درجهٔ m باشد . برای اثبات قضیه کافی است درستی آنرا برای چند جمله‌ای $P=X^iY^j$ ، که درآنجا $i+j=m$ است نشان دهیم. اما دراین حالت داریم :

$$XP'_X+YP'_Y=XiX^{i-1}Y^j+YjX^iY^{j-1}=(i+j)X^iY^j=mP$$

پس قضیه برقرار است.

۲ - فرض می‌کنیم برابری $mP = XP'_X + YP'_Y$ را داشته باشیم. بنابر ۴.۳.۷ می‌توان چنین نوشت :

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots$$

که در آنجا چند جمله‌ای P_i همگن درجهٔ i است بنابراین داریم :

$$mP = mP_0 + mP_1 + mP_2 + \cdots$$

به‌علاوه بنابر قسمت اول همین قضیه خواهیم داشت:

$$XP'_X + YP'_Y = 0\,P_0 + 1\,P_1 + 2\,P_2 + \ldots$$

پس برای همهٔ i ها $(m-i)P_i = 0$ و درنتیجه هنگامیکه $i \neq m$ است $P_i = 0$ می‌باشد، زیرا مشخص هیأت K برابر با صفر است. به‌این ترتیب قضیه ثابت می‌گردد.

۹.۶.۷ - **تعمیم** - برای اینکه چند جمله‌ای $P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ همگن درجهٔ m باشد، با یا وبسنده است که داشته باشیم :

$$mP = X_1 P'_{X_1} + X_2 P'_{X_2} + \ldots + X_n P'_{X_n}$$

(دراین حالت نیز مشخص هیأت K برابر با صفر فرض می‌شود) .

فصل هشتم

فضاهای برداری

این فصل یکی از مهم‌ترین فصل‌های درس جبر است. دراین فصل فضاهای‌برداری به‌ویژه‌فضاهای‌برداری با بعد باپایان به‌طوردقیق مورد مطالعه قرارمی گیرند. نظریهٔ‌فضاهای برداری تعمیم محاسبات برداری معمولی است ، و خواننده می‌تواند از تصور هندسی خود برای فهم بهتر مطالب کمک بگیرد. پایه ، بعد و گسترش خطی ازمفاهیم مهمتر این‌فصل می‌باشند. این مفاهیم عملاً در همهٔ قسمتهای ریاضی بکار برده می‌شوند.

۸ . ۱ ـ تعریف

۱.۱.۸ ـ فرض می کنیم K یک هیأت باشد. مجموعهٔ E که در روی آن دوقانون زیر تعریف شده است یک **فضای برداری روی هیأت** K نامیده می‌شود :

۱ - قانون جمع که از مجموعهٔ E یک گروه جابجایی درست می کند.

۲ـ یک گسترش $K\times E$ در E که به هرجفت (λ , x) ، که درآن $\lambda\in K$ و $x\in E$ است ، یک‌عنصر از E راکه به‌صورت λx یا $\lambda\cdot x$ نمایش می‌دهند وابسته می کند ودارای ویژگیهای زیر می‌باشد :

$$\forall\lambda , x , y ; \lambda\in K , x\in E , y\in E \quad : \lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$$

$$\forall\lambda , \mu , x ; \lambda\in K , \mu\in K , x\in E \quad : (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$$

$$\forall\lambda , \mu , x ; \lambda\in K , \mu\in K , x\in E \quad : (\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$$

$$\forall x\in E \qquad 1\cdot x=x$$

(اگر به‌جای هیأت K حلقهٔ جابجایی K را درنظر بگیریم E را ، به‌جای فضای برداری ، یک **مدول روی** K گویند).

۲.۱.۸ـ معمولاً عنصرهای K را **اسکالر** وعنصرهای E را **بردار** می‌نامند. یک‌فضای برداری روی R (روی C) **فضای برداری حقیقی (فضای برداری مختلط)** گفته می‌شود. عنصر بی‌اثر o متعلق به E را **مبدأ** گویند.

مثال :

۳.۱.۸ ـ مجموعهٔ E بردارهای آزاد فضای معمولی با عملیات جمع برداری :

$$(\vec{V}, \vec{V'}) \rightarrow \vec{V}+\vec{V'}$$

و ضرب بردار در اسکالر $(\lambda, \vec{V}) \rightarrow \lambda\vec{V}$ یک فضای برداری حقیقی تشکیل می‌دهد .
اگر درفضای معمولی یک مبدأ O انتخاب کرده وبه‌نقطهٔ M بردار $\overrightarrow{OM}$ را وابسته کنیم فضای E همان فضای معمولی خواهد شد.

۴.۱.۸ ـ مجموعهٔ $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}$ را در نظر می گیریم. برای $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathbf{R}^n$ و $(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in\mathbf{R}^n$ قرار می‌دهیم:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق نمود که این جمع جابجایی و انجمنی و دارای عنصر بی‌اثر :

$$0 = (0, 0, \cdots, 0)$$

است‌وهرعنصر $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ دارای عنصر وارونهٔ $(-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$ می‌باشد.

همچنین اگر $\lambda\in\mathbf{R}$ باشد قرار می‌دهیم :

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$

روشن است که به‌این‌ترتیب $\mathbf{R}^n$ یک فضای برداری روی $\mathbf{R}$ خواهد بود. به‌روش مشابه $\mathbf{C}^n$ را می‌توان به‌صورت یک فضای برداری روی $\mathbf{C}$ درنظر گرفت. به‌طور کلی اگر K یک هیأت باشد ، K^n را می‌توان به‌عنوان یک فضای برداری روی هیأت K درنظر گرفت.

مثلاً $\mathbf{R}^3$ و $\mathbf{R}^2$ و همچنین خود $\mathbf{R}$ فضاهای برداری حقیقی هستند و $\mathbf{C}^3$ و $\mathbf{C}^2$ و همین‌طور خود $\mathbf{C}$ فضاهای برداری مختلط می‌باشند.

۵.۱.۸ ـ اگر K یک هیأت باشد ، $K[X]$ یک فضای برداری روی K برای قانونهای $(P, Q) \rightarrow P+Q$ و $(\lambda, P) \rightarrow \lambda P$ ، (۳.۱.۵ و ۶.۱.۵) می‌باشد. همین‌طور برای $K[X_1, X_2, \cdots, X_n]$.

۶.۱.۸- فرض می کنیم E مجموعهٔ توابع حقیقی درفاصلهٔ I از $\mathbf{R}$ باشد. اگر $f, g\in E$ و $\lambda\in\mathbf{R}$ باشد $f+g$ و λf را به‌صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\forall x\in I\ ,\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)\ ,\ (\lambda f)(x)=\lambda f(x)$$

دراین‌صورت E یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

به‌جای توابع حقیقی دلخواه ممکن است توابع پیوسته ویا توابعی که دوبار مشتق‌پذیر باشند و غیره را اختیارکرد.

نتیجه :

۷.۱.۸ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی هیأت K باشد. اگر $x\in E$ ، $y\in E$ و $\lambda\in K$ باشند داریم $\lambda(x-y)=\lambda x-\lambda y$ زیرا :

$$\lambda(x-y)+\lambda y=\lambda[(x-y)+y]=\lambda x$$

۸.۱.۸ - اگر دربستگی بالا قراردهیم $x=y$ خواهیم داشت $\lambda\cdot 0=0$

۹.۱.۸ - اگر در ۷.۱.۸ قراردهیم $x=0$ خواهیم داشت $\lambda(-y)=-(\lambda y)$

۱۰.۱.۸ - اگر $x\in E$ ، $\lambda\in K$ و $\mu\in K$ باشد خواهیم داشت :

$$(\lambda-\mu)x=\lambda x-\mu x$$

زیرا

$$(\lambda-\mu)x+\mu x=[(\lambda-\mu)+\mu]x=\lambda x$$

۱۱.۱.۸ - اگر در (۱۰.۱.۸) ، $\lambda=\mu$ باشد خواهیم داشت $0\cdot x=0$.

۱۲.۱.۸ - اگر در ۱۰.۱.۸ اسکالر λ را برابر با صفر بگیریم بدست می‌آوریم $(-\mu)x=-(\mu x)$. به‌ویژه خواهیم داشت $(-1)x=-x$.

۱۳.۱.۸ - از ۹.۱.۸ و ۱۲.۱.۸ نتیجه می‌شود که $(-\lambda)(-x)=\lambda x$ است.

۱۴.۱.۸ - فرض می‌کنیم x متعلق به E و λ متعلق به K باشد. برای اینکه داشته‌باشیم $\lambda x=0$ با یا وبسنده است که یکی‌ازبرابری‌های $\lambda=0$ ویا $x=0$ برقرارباشد. زیرا بنابر ۸.۱.۸ و ۱۱.۱.۸ شرط بالا کافی است. به‌وارون اگر $\lambda x=0$ و $\lambda\neq 0$ باشد، λ^{-1} وجود دارد و خواهیم داشت :

$$x=1\cdot x=(\lambda^{-1}\lambda)x=\lambda^{-1}(\lambda x)=\lambda^{-1}\cdot 0=0$$

۱۵.۱.۸ - اگر $x\in E$ و $n\in Z$ باشد داریم $nx=(n1)x$ که در آن nx درگروه جمعی E تعریف‌شده است و $n1$ عنصری از K می‌باشد. این نتیجه مانند ۷.۱.۴ ثابت می‌شود.

۱۶.۱.۸ - اگر $\lambda\in K$ باشد ، گسترش h_λ را که به‌صورت $h_\lambda(x)=\lambda x$ معین می‌شود **همسانی به‌نسبت** λ در E گویند. اگر $\lambda\neq 0$ باشد ، λ^{-1} وجود دارد و به‌آسانی

می‌توان دید که داریم $h_\lambda \circ h_\lambda^{-1} = h_\lambda^{-1} \circ h_\lambda = id_E$. ازاینجا به‌ویژه دوسویی بودن h_λ نتیجه می‌گردد.

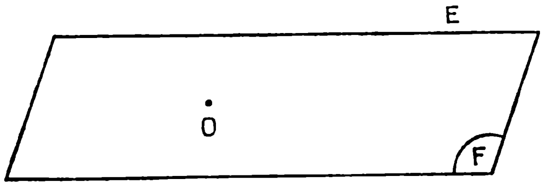
۸ . ۲ ـ زیرفضاهای برداری

۸ . ۲ . ۱ ـ فرض می‌کنیم K یک هیأت و E یک فضای برداری روی K باشد. بخش F از E یک **زیرفضای برداری از** E گفته می‌شود هرگاه ویژگی‌های زیر را دارا باشد:

(I) $\quad 0 \in F$

(II) $\quad \forall x, y ; x \in F, y \in F \Longrightarrow x+y \in F$

(III) $\quad \forall x, \lambda ; x \in F, \lambda \in K \Longrightarrow \lambda x \in F$



شکل ۲۳

۸ . ۲ . ۲ ـ از بستگی (III) نتیجه می‌شود که:

$$\forall x , x \in F \Longrightarrow -x \in F$$

پس F یک زیرگروه E است.

۸ . ۲ . ۳ ـ به‌آسانی مشاهده می‌گردد که مجموعهٔ F بادوقانون نتیجه شده از قانونهای

$$(x , y) \to x+y , (\lambda , x) \to \lambda x$$

یک فضای برداری است. این مطلب انگیزهٔ نام‌گذاری « زیر فضای برداری » را روشن می‌سازد.

۸ . ۲ . ٤ ـ **مثال** ـ فضای E رافضای معمولی که دارای یک مبدأ O است می‌گیریم. دراین‌صورت $\{O\}$، خط‌های گذرنده بر O، صفحه‌های گذرنده‌بر O وخود E زیرفضاهای برداری E هستند. درآینده خواهیم دید (۸ . ۱۰ . ۱۲) که در E زیر فضاهای برداری دیگری به‌جز زیر فضاهای نامبرده، در بالا، وجود ندارد.

۸.۲.۵ - **مثال** - اگر E یک‌فضای‌برداری دلخواه باشد، $\{O\}$ و E زیرفضاهای برداری E هستند.

۸.۲.۶ - **مثال** - فرض می‌کنیم I یک فاصله از $\mathbf{R}$ و E فضای برداری حقیقی توابع حقیقی باشد که در I تعریف شده‌اند. مجموعهٔ توابع حقیقی پیوسته در فاصلهٔ I یک زیرفضای برداری از E می‌باشد.

۸.۲.۷ - **قضیه - اگر E یك فضای برداری باشد، هر مقطع از زیر فضاهای برداری E یك زیرفضای برداری‌از E است.**

اثبات - فرض می‌کنیم (F_i) یک خانواده از زیر فضاهای برداری E و F مقطع آنها باشد. دراین‌صورت‌برای‌هرمقدار i داریم $o\in F_i$ پس $o\in F$. اگر x و y عنصرهایی از F باشند برای هرمقدار i، x و y ازعنصرهای F_i خواهند بود. پس $x+y\in F_i$ و در نتیجه $x+y\in F$ می‌باشد. همین‌طور دیده می‌شود که اگر $x\in F$ و λ یک اسکالر باشد $\lambda x\in F$ است و به‌این‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۸.۲.۸ - به‌وارون همان‌طوریکه درمثال ۸.۲.۴ دیده‌می‌شود، درحالت کلی‌اجتماع دو زیر فضای برداری یک زیر فضای برداری نخواهد بود.

۸.۲.۹ - **تعریف - اگر E یك فضای برداری روی هیأت K و A بخشی از E باشد، هرعنصر به‌صورت $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$ را که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\in K$ و $x_1, x_2, \cdots, x_n\in A$ است یك ترکیب خطی از عنصرهای A می‌گویند.**

مثلاً خود عنصرهای A ترکیب های خطی از عنصرهای A هستند.

۸.۲.۱۰ - **قضیه - فرض می‌کنیم E یك فضای برداری روی‌هیأت K و A یك بخش غیرتهی‌از E باشد. بین تمام زیرفضاهای برداری E که شامل A هستند یك زیرفضا وجود دارد که ازهمه کوچکتر است و آن عبارت است از مجموعهٔ ترکیب‌های خطی عنصرهای A.**

اثبات - فرض می‌کنیم F مجموعهٔ ترکیب های خطی عنصرهای A باشد. برای اثبات قضیه کافی است ثابت کنیم که:

۱ - F یک زیر فضای‌برداری از E (و شامل A) می‌باشد.

۲ - اگر F' یک زیر فضای دیگر E و شامل A باشد داریم $F \subset F'$.

برای اثبات قسمت اول گوییم که اگر $z \in A$ باشد داریم $z - z \in F$ $= 0$. اگر x و y از عنصرهای F باشند ، عنصرهای x_1 ، $\cdots$ ، x_n و y_1 ، $\cdots$ ، y_p از A و اسکالرهای λ_1 ، $\cdots$ ، λ_n و μ_1 ، $\cdots$ ، μ_p وجود دارند به‌طوریکه داشته باشیم :

$$x=\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n \ , \ y=\mu_1 y_1+\cdots+\mu_p y_p$$

بنابراین :

$$x+y=(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n)+(\mu_1 y_1+\cdots+\mu_p y_p)$$

و :

$$\lambda x=\lambda(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n)=(\lambda\lambda_1)x_1+\cdots+(\lambda\lambda_n)x_n$$

نیز ترکیب های خطی عنصرهای A می‌باشند و در نتیجه به F تعلق دارند.

برای اثبات قسمت دوم باتوجه به‌فرض های پیش کافی است نشان دهیم که $x \in F'$ است. چون داریم $A \subset F'$ پس $x_1 \in F'$ ، $\cdots$ ، $x_n \in F'$ ، ازآنجا حاصل می‌شود $\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n \in F'$ زیرا F' یک زیر فضای برداری E می‌باشد.

۸ . ۲ . ۱۱ - زیرفضای‌برداری F که در ۸ . ۲ . ۱۰ مشخص گردید، زیرفضای‌برداری E **پدید آمده به‌وسیلهٔ** A نامیده می‌شود. همچنین گویند که A زیرفضای F را **پدید می‌آورد.**

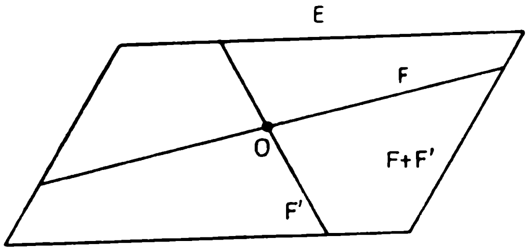
۸ . ۲ . ۱۲ - **نتیجه ۱ - چنانچه x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n عنصرهای E باشند ، زیرفضای برداری E پدید آمده به‌وسیلهٔ x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n عبارت است از مجموعهٔ ترکیب‌های خطی $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n$ از x_i ها.**

زیرا هرترکیب خطی از عنصرهای $\{x_1 , x_2 , \cdots , x_n\}$ را می‌توان به‌صورت $\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n$ نوشت که در آن ممکن است برخی از λ_i ها صفر باشند.

۸ . ۲ . ۱۳ - **نتیجه ۲ - اگر F و F' دو زیرفضای برداری E باشند ، زیرفضای برداری G از E پدید آمده به‌وسیلهٔ F و F' عبارت است از $F+F'$ یعنی (۲ . ۱ . ۶) مجموعهٔ عنصرهایی به‌صورت $x+x'$ که در آن‌ها x زیرفضای برداری F و x' زیرفضای برداری F' را می‌پیماید .**

روشن است که $F+F' \subset G$. به‌علاوه چنانچه $x \in G$ باشد داریم $x=y+y'$ که درآن y یک ترکیب خطی عنصرهای F و y' یک ترکیب خطی عنصرهای F'

است . به این‌ترتیب $y \in F$ و $y' \in F'$ می‌باشد. پس $x \in F + F'$ و در نتیجه $G \subset F + F'$.



شکل ۲٤

۱٤.۲.۸ - **مثال** - فرض می‌کنیم E فضای معمولی دارای مبدأ O و F و F' دوخط گذرنده بر O باشند. اگر $F \neq F'$ باشد ، $F + F'$ صفحه گذرنده بر F و F' است و چنانچه $F = F'$ باشد خواهیم داشت $F + F' = F$.

۱۵.۲.۸ - نتیجهٔ ۱۳.۲.۸ با استفاده از روش بازگشت درمورد ۳ ، ٤ و ... زیرفضای برداری E تعمیم داده می‌شود.

۸ . ۳ - فضای برداری خارج قسمت

۱.۳.۸ - فرض می‌کنیم K یک هیأت و E یک فضای برداری روی K و F یک زیرفضای‌برداری از E باشد. چون E یک گروه جابجایی‌وF یک زیرگروه E است، می‌توان گروه خارج قسمت E/F را تشکیل داد (۳.٤.۳). دراین گروه نیز مانند گروه جمعی E قانون جمع را با علامت $+$ نشان می‌دهیم. اکنون‌می‌خواهیم از E/F یک فضای‌برداری روی هیأت K درست کنیم .

۲.۳.۸- فرض‌می‌کنیم $y \in E/F$ و $\lambda \in K$ باشد. چنانچه x یک نماینده ازکلاس y در E باشد ، کلاسی راکه نسبت به F دارای نمایندهٔ λx است با λy معین می‌کنیم. باید ثابت کنیم که این کلاس بستگی‌به‌نمایندهٔ انتخاب شده ندارد. اگر x' نمایندهٔ دیگری ازکلاس y باشد ، $x - x' \in F$ است (۱.۳.۲) . پس $\lambda x - \lambda x' = \lambda(x - x') \in F$ می‌باشد و در نتیجه کلاسهای وابسته به λx و $\lambda x'$ نسبت به F ، یکی هستند واین‌درستی تعریف λy را آشکار می‌سازد.

اکنون باید نشان داد که گروه جابجایی E/F با قانون $(\lambda , y) \to \lambda y$ یک

فضای برداری روی هیأت K می‌باشد. چنانچه Φ گسترش کانونیک E روی E/F باشد، می‌دانیم که (۲.۴.۳) برای عنصرهای دلخواه x و y از E داریم:

$$\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y) \qquad (۱)$$

به‌علاوه اگر $x\in E$ و $\lambda\in K$ باشد، عنصر $\Phi(x)$ از E/F کلاس نمایندهٔ x خواهد بود. پس $\lambda\Phi(x)$ کلاس نمایندهٔ λx است. به‌عبارت دیگر داریم:

$$\Phi(\lambda x)=\lambda\Phi(x) \qquad (۲)$$

بنابراین چنانچه x و y متعلق به E و λ متعلق به K باشد، خواهیم داشت:

$$\lambda(\Phi(x)+\Phi(y))=\lambda\Phi(x+y)=\Phi(\lambda(x+y))$$

$$\lambda\Phi(x)+\lambda\Phi(y)=\Phi(\lambda x)+\Phi(\lambda y)=\Phi(\lambda x+\lambda y)=\Phi(\lambda(x+y))$$

پس $\lambda(\Phi(x)+\Phi(y))=\lambda\Phi(x)+\lambda\Phi(y)$ است و این نخستین ویژگی قسمت دوم ۱.۱.۸ می‌باشد، زیرا $\Phi(x)$ و $\Phi(y)$ عنصرهای دلخواهی از E/F هستند.

سه ویژگی دیگر ۱.۱.۸ به‌روش مشابه اثبات می‌گردند.

فضای برداری E/F را **فضای برداری خارج قسمت E بر F** می‌گویند.

۸ . ۴ ـ گسترش‌های خطی

۱.۴.۸ ـ فرض می‌کنیم E و F دوفضای‌برداری روی هیأت K و Φ یک گسترش E در F باشد. گوییم گسترش Φ **خطی** است هرگاه برای عنصرهای دلخواه x و y از E و λ از K داشته باشیم:

$$\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)\ ,\ \Phi(\lambda x)=\lambda\Phi(x)$$

چنین گسترشی را یک **هومرفیسم** E در F نیز می‌گویند. باید دانست شرط:

$$\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)$$

بیان می‌کند که Φ یک هومرفیسم گروه E درگروه F می‌باشد.

۲.۴.۸ ـ آشکار است که ترکیب دوگسترش خطی یک گسترش خطی است.

۳.۴.۸ ـ اگر گسترش‌خطی Φ فضای برداری E در F دوسویی باشد، به‌آسانی‌دیده می‌شود که Φ^{-1} نیز یک گسترش خطی F در E است. دراین صورت گوییم که Φ یک **ایزومرفیسم** E روی F می‌باشد.

یک ایزومرفیسم E روی E یک **اتومرفیسم** E گفته می‌شود. پس هرگسترش خطی و وارون‌پذیر، متعلق به‌مجموعهٔ همهٔ گسترشهای خطی E در E ، یک اتومرفیسم است.

مجموعهٔ اتومرفیسم های E تشکیل یک گروه می‌دهند که درآن قانون گروه، ترکیب گسترش هاست. این گروه را **گروه خطی** E می‌نامند و با $GL(E)$ نمایش می‌دهند.

۸ . ۴ . ۴ - فرض می‌کنیم E و F دوفضای برداری باشند. چنانچه ایزومرفیسمی از E روی F وجود داشته باشد، گویند E و F **ایزومرف** هستند. دراین‌صورت هردوفضا دارای ویژگیهای یکسان می‌باشند.

۸ . ۴ . ۵ - **مثال** - چنانچه E فضای معمولی دارای مبدأ O باشد، همانندی‌های به مرکز O گسترش های خطی E در E می‌باشند.

۸ . ۴ . ۶ - **مثال** - فرض می‌کنیم E فضای‌برداری‌توابع‌حقیقی، که تا مرتبهٔ بی‌پایان مشتق پذیرند، روی **R** باشد. گسترش $f \to f'$ فضای E در E خطی است (f' مشتق f است) .

۸ . ۴ . ۷ - **مثال** - به‌آسانی می‌توان تحقیق نمود که دریک فضای برداری دلخواه، همسانی‌ها گسترش های خطی هستند.

۸ . ۴ . ۸ - **مثال** - اگر E یک فضای برداری و F یک زیر فضای برداری E باشد، گسترش همانی F در E خطی است.

۸ . ۴ . ۹ - **مثال** - همچنین در شمارهٔ ۸ . ۴ . ۸ گسترش کانونیک E روی E/F خطی است. این مطلب در ۸ . ۳ . ۲ به‌وسیله فرمولهای (۱) و (۲) ثابت شده است.

۸ . ۴ . ۱۰ - **قضیه - چنانچه E و F دوفضای‌برداری روی هیأت K و Φ یک‌گسترش خطی E در F باشد، $\Phi(E)$ یک زیرفضای برداری F و هستهٔ $N=\Phi^{-1}(0)$ گسترش Φ یک زیرفضای برداری‌از E خواهد بود.**

اثبات - می‌دانیم که $\Phi(E)$ یک زیرگروه F و N یک زیرگروه E است (۴ . ۵ . ۳) . چنانچه $y\in\Phi(E)$ و $\lambda\in K$ باشد، یک عنصر x در E وجود دارد به‌طوریکه داشته باشیم $y=\Phi(x)$. دراین‌صورت داریم $\lambda y=\lambda\Phi(x)=\Phi(\lambda x)\in\Phi(E)$. پس $\Phi(E)$ یک زیرفضای‌برداری از F می‌باشد. هرگاه $z\in N$ و $\lambda\in K$ باشد داریم $\Phi(z)=0$.

پس $\lambda z\in N$ و $\Phi(\lambda z) = \lambda\Phi(z) = \circ$. بنابراین N یک زیر فضای برداری‌از E خواهد بود.

۸.٤.۱۱ - **تجزیهٔ کانونیک یک گسترش خطی** - اگر E و F دو فضای برداری روی‌هیأت K و φ یک گسترش خطی E در F و N هستهٔ‌آن باشد تجزیهٔ کانونیک φ عبارت است از :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ s\downarrow & & \uparrow i \\ E/N & \xrightarrow[\psi]{} & \varphi(E) \end{array}$$

بنابر (۸.٤.۱۰) و (۸.۳.۲) مجموعهٔ E/N یک فضای برداری است. همچنین بنابر (۸.٤.۱۰) و (۸.۲.۳) مجموعهٔ φ(E) یک فضای برداری می‌باشد ، ونیز می‌دانیم که (۸.٤.۸ و ۸.٤.۹) گسترشهای s و i خطی هستند. اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم که گسترش ψ یک ایزومرفیسم فضاهای برداری است. می‌دانیم که ψ یک ایزومرفیسم گروه‌هاست (۳.٦.۱) . پس کافی است نشان دهیم که برای $y\in E/N$ و $\lambda\in K$ داریم $\psi(\lambda y)=\lambda\psi(y)$. اما درفضای E یک عنصر x وجود دارد به‌طوریکه $y=s(x)$ باشد. بنابراین :

$$\psi(\lambda y)=\psi(\lambda s(x))=\psi(s(\lambda x))=\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)=\lambda\psi(s(x))=\lambda\psi(y)$$

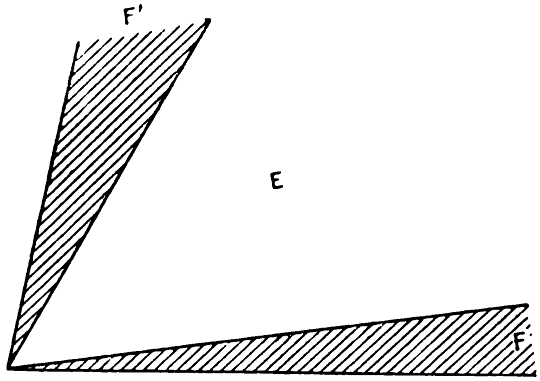
۸ . ۵ - زیرفضای برداری متمم

۸.۵.۱ - قضیه - چنانچه E یك فضای برداری و F و F′ دوزیر فضای برداری E باشند ، شرطهای زیر هم‌ارزند :

(I) — $F+F'=E$ و $F\cap F'=\{\circ\}$.

(II) — **هر بردار از E تنها به‌یک‌روش به‌صورت $x+x'$ نوشته می‌شود که در‌آن $x\in F$ و $x'\in F'$ است .**

(III) — $F+F'=E$ واز $x+x'=\circ$ ، ($x\in F$ و $x'\in F'$)، نتیجه‌می‌شود $x=x'=\circ$.



شکل ۲۵

اثبات :

(I) $\Longleftarrow$ (II): فرض می‌کنیم شرط (I) برقرار و $y\in E$ باشد. پس y به‌صورت $y=x+x'$ نوشته می‌شود که درآن $x\in F$ و $x'\in F'$ ، زیرا داریم $F+F'=E$. چنانچه $y=x_1+x'_1$ یک تجزیهٔ دیگر y باشد که درآن $x_1\in F$ و $x'_1\in F'$ است ، خواهیم داشت $x+x'=x_1+x'_1$ پس $x-x_1=x'_1-x'$. اما $x-x_1\in F$ و $x'_1-x'\in F'$ می‌باشد پس :

$$x-x_1=x'_1-x'\in F\cap F'$$

و چون $F\cap F'=\{0\}$ ، خواهیم داشت $x=x_1$ و $x'=x'_1$. یعنی شرط (II) برقرار است.

(II) $\Longleftarrow$ (III) : اکنون فرض می‌کنیم شرط (II) برقرار باشد. اولاً آشکار است که داریم $F+F'=E$. اگر x عنصری از F و x' عنصری از F' باشد به‌طوریکه داشته باشیم $x+x'=0$ ، از برابری $x+x'=0+0$ و فرض یکتایی وابسته به شرط (II) نتیجه می‌شود که $x=0$ و $x'=0$ است و درستی شرط (III) ثابت می‌گردد.

(III) $\Longleftarrow$ (I) : چنانچه‌شرط (III) برقرار و $z\in F\cap F'$ باشد، خواهیم داشت $z\in F$ و $-z\in F'$ و $z+(-z)=0$ وازآنجا $z=-z=0$ یعنی $F\cap F'=\{0\}$ ، و این درستی شرط (I) را می‌رساند.

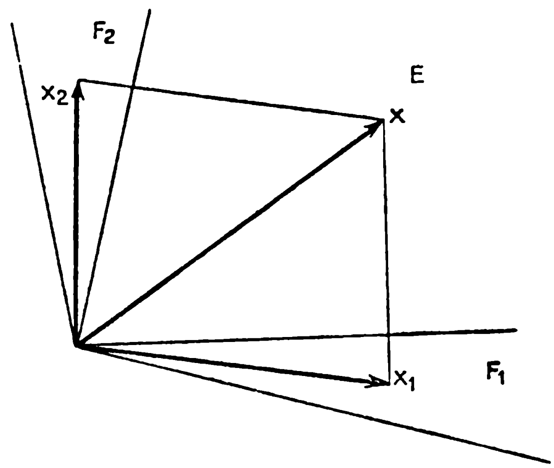
۲.۰.۸ - تعریف ـ هنگامی‌که یکی از شرط‌های (I) ، (II) یا (III) شمارهٔ ۱.۰.۸ برقرار باشد ، زیرفضاهای برداری F و F' زیر فضاهای برداری متمم در E نامیده می‌شوند .

۸.۵.۳ - **مثال** - فرض می‌کنیم E فضای معمولی به‌مبداء O باشد. صفحهٔ P وخط Δ راکه بر O می‌گذرند درنظر می‌گیریم. اگر Δ در P واقع نباشد، Δ و P زیر فضاهای برداری متمم در E هستند.

۸.۵.۴ - قضیه-فرض می‌کنیم E یك فضای برداری و F_1 و F_2 دو زیرفضای برداری متمم در E باشند.

(I) - به‌هرعنصر $x=x_1+x_2$ از E (که درآن $x_1 \in F_1$ و $x_2 \in F_2$ است) عنصر x_1 از F_1 را وابسته می‌کنیم. گسترش E در F_1 که به‌این ترتیب معین می‌شود، خطی، سورژکتیو و دارای هستهٔ F_2 می‌باشد.

(II) - فضاهای برداری E/F_2 و F_1 ایزومرف هستند.



شکل ۲۶

اثبات - چنانچه $x=x_1+x_2$ و $y=y_1+y_2$ دوعنصر از E باشند ($x_1 \in F_1$، $x_2 \in F_2$، $y_1 \in F_1$، $y_2 \in F_2$) داریم $x+y=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)$، $x_1+y_1 \in F_1$، $x_2+y_2 \in F_2$. پس اگر گسترشی راکه در (I) درنظر گرفتیم با Φ نشان دهیم خواهیم داشت $\Phi(x+y)=x_1+y_1=\Phi(x)+\Phi(y)$. همچنین داریم $\lambda x=\lambda x_1+\lambda x_2$، $\lambda x_1 \in F_1$ و $\lambda x_2 \in F_2$ پس $\Phi(\lambda x)=\lambda x_1=\lambda\Phi(x)$. یعنی گسترش Φ خطی است. برای اینکه x به هستهٔ Φ متعلق باشد یا وبسنده است که $x_1=0$ یعنی $x \in F_2$ باشد. بنابراین F_2 هستهٔ Φ است. اگر $x \in F_1$ باشد خواهیم

داشت $x=\Phi(x)$ ، پس گسترش Φ سورژکتیو است و قسمت (I) قضیه ثابت می‌گردد.

بنابر ۱۱.۴.۸ ، تجزیهٔ کانونیک Φ یک ایزومرفیسم E/F_2 روی $\Phi(E)=F_1$ به‌دست می‌دهد و ازآن قسمت (II) قضیه نتیجه می‌شود.

۵.۵.۸ - گسترش E روی F_1 ، که در ۴.۵.۸ درنظرگرفتیم ، « **تصویر E روی F_1 در راستای F_2** » نامیده می‌شود. بهمین‌ترتیب تصویر E روی F_2 در راستای F_1 تعریف می‌گردد. با توجه به‌مثال ۳.۵.۸ دلیل این نام‌گذاری آشکار می‌شود.

تعمیم درحالت چند زیرفضای برداری

۶.۵.۸ - **تعمیم‌قضیه ۱.۵.۸ - چنانچه E یك فضای برداری و F_1 ، F_2 ، $\cdots$ ، F_n زیرفضاهای برداری E باشند ، شرطهای زیر هم‌ارزند :**

(I)—

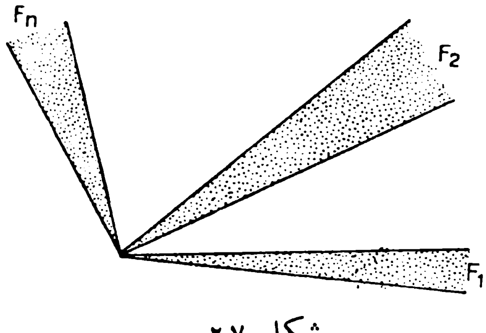
$$(\forall i=1,2,\cdots,n),\quad F_i\cap\Big(\sum_{j\neq i}F_j\Big)=\{0\}$$

و

$$F_1+F_2+\cdots+F_n=E$$

(II) – **هر بردار از E تنها به‌یك روش به‌صورت** $x_1+x_2+\cdots+x_n$ **نوشته می‌شود که درآن** $x_1\in F_1$ ، $x_2\in F_2$ ، $\cdots$ ، $x_n\in F_n$.

(III) – $F_1+F_2+\cdots+F_n=E$ **و از** $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ ، $x_1\in F_1$ ، $x_2\in F_2$ ، $\cdots$ ، $x_n\in F_n$ **نتیجه می‌شود** $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.



شکل ۲۷

اثبات - (I) $\Longrightarrow$ (II) : فرض می‌کنیم شرط (I) برقرار و $x\in E$ باشد . پس x به‌صورت $x=x_1+x_2+\cdots+x_n$ نوشته می‌شود که‌درآن $x_1\in F_1$ ، $\cdots$ ، $x_n\in F_n$

است ، زیرا داریم $F_1+F_2+\cdots+F_n=E$. چنانچه $x=x'_1+x'_2+\cdots+x'_n$ یک تجزیهٔ دیگر x باشد که درآن $x'_1\in F_1$ ، ... ، $x'_n\in F_n$ است ، خواهیم داشت :

$$x_1-x'_1=(x'_2-x_2)+\cdots+(x'_n-x_n)$$

اما :

$$x_1-x'_1\in F_1 \quad \text{و} \quad (x'_2-x_2)+\cdots+(x'_n-x_n)\in F_2+\cdots+F_n$$

می‌باشد و چون $F_1\bigcap(F_2+\cdots+F_n)=\{0\}$ خواهیم داشت $x_1-x'_1=0$ ویا $x_1=x'_1$. اگر بجای اندیس ۱ اندیسهای ۲ ، ۳ ، ... ، n را اختیار کنیم ، بابکار بردن روش بالا برابری‌های $x_2=x'_2$ ، ... ، $x_n=x'_n$ نتیجه می‌شود. یعنی شرط (II) برقرار است.

(II) $\Longrightarrow$ (III) : اکنون فرض می‌کنیم شرط (II) برقرار باشد. آشکار است که داریم $F_1+F_2+\cdots+F_n=E$. چنانچه $x_1\in F_1$ ، ... ، $x_n\in F_n$ و $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ باشد ، ازبرابری $x_1+\cdots+x_n=0+\cdots+0$ و فرض یکتایی وابسته به‌شرط (II) نتیجه می‌شود که $x_1=0$ ، ... ، $x_n=0$ و درستی شرط (III) ثابت می‌گردد.

(III) $\Longrightarrow$ (I) : چنانچه شرط (III) برقرار و $z\in F_1\bigcap(F_2+\cdots+F_n)$ باشد ، چون $z\in F_2+\cdots+F_n$ است می‌توان نوشت $z=x_2+\cdots+x_n$ ، که درآن $x_2\in F_2$ ، ... ، $x_n\in F_n$. پس داریم $(-z)+x_2+\cdots+x_n=0$ که درآن $(-z)\in F_1$ می‌باشد ، و از فرض شرط (III) نتیجه می‌شود که $-z=0$ یعنی برابری $F_1\bigcap(F_2+\cdots+F_n)=\{0\}$ برقرار است. به‌همین روش ثابت می‌شود که برای هراندیس i داریم $F_i\bigcap(\sum_{j\neq i}F_j)=\{0\}$ و این درستی شرط (I) را می‌رساند .

۸ . ۰ . ۷ - **تعریف - هنگامیکه یکی از شرط‌های (I) ، (II) یا (III) شمارهٔ ۸ . ۰ . ۶ برقرار باشد ، فضای برداری E مجموع مستقیم زیرفضاهای برداری F_1 ، F_2 ، ... ، F_n نامیده می‌شود .**

به‌ویژه عبارتهای : « E مجموع مستقیم F_1 و F_2 است » و « F_1 و F_2 در E متمم هستند » هم‌ارزند.

۸.۵.۸ - **مثال**- چنانچه E را فضای معمولی به‌مبداء O بگیریم و Δ_1 ، Δ_2 و Δ_3 سه خط ناهم‌صفحه وگذرنده بر O باشند ، فضای E مجموع مستقیم Δ_1 ، Δ_2 و Δ_3 است .

۸ . ۶ - حاصل‌ضرب فضاهای برداری

۱.۶.۸ - فرض می‌کنیم E_1 و E_2 دوفضای برداری روی هیأت K باشند . می‌خواهیم از مجموعهٔ $E_1 \times E_2$ یک فضای برداری روی K درست کنیم . چنانچه (x_1 , x_2) و (y_1 , y_2) دوعنصر از $E_1 \times E_2$ و $\lambda \in K$ باشد قرار می‌دهیم :

$$(x_1 , x_2) + (y_1 , y_2) = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2)$$
$$\lambda(x_1 , x_2) = (\lambda x_1 , \lambda x_2)$$

به‌آسانی می‌توان درستی ویژگیهای فضای برداری را بررسی نمود . فضای برداری $E_1 \times E_2$ را **فضای برداری حاصل‌ضرب** E_1 و E_2 می‌نامند که مبداء آن عنصر $(0 , 0)$ می‌باشد .

۲.۶.۸ - چنانچه E'_1 مجموعهٔ عنصرهای $E_1 \times E_2$ باشد که به‌صورت $(x_1 , 0)$ هستند ، به‌آسانی می‌توان دید که E'_1 یک زیرفضای برداری $E_1 \times E_2$ وگسترش $x_1 \to (x_1 , 0)$ یک ایزومرفیسم E_1 روی E'_1 می‌باشد . به‌علت وجود این ایزومرفیسم معمولاً E_1 و E'_1 را یکی می‌گیرند و E_1 را مانند یک زیرفضای برداری $E_1 \times E_2$ تصور می‌کنند . همچنین به‌علت وجود ایزومرفیسم $x_2 \to (0 , x_2)$ فضای برداری E_2 مانند یک زیرفضای برداری $E_1 \times E_2$ درنظر گرفته می‌شود .

۳.۶.۸ - با توجه به‌مطالب بالا ، هرعنصر (x_1 , x_2) از $E_1 \times E_2$ را می‌توان به‌صورت $(x_1 , 0) + (0 , x_2) = x_1 + x_2$ نوشت . به‌علاوه اگر $(x_1 , x_2) = y_1 + y_2$ باشد ، که درآن $y_1 \in F_1$ و $y_2 \in F_2$ است ، خواهیم داشت :

$$(x_1 , x_2) = (y_1 , 0) + (0 , y_2) = (y_1 , y_2)$$

پس $x_1 = y_1$ و $x_2 = y_2$ می‌باشد . به‌این‌ترتیب هرعنصر از $E_1 \times E_2$ تنها به‌یک روش به‌صورت مجموع یک عنصر از E_1 و یک عنصر از E_2 نوشته می‌شود . به‌عبارت دیگر E_1 و E_2 دو زیرفضای برداری **متمم** در $E_1 \times E_2$ هستند . به‌علاوه برابری $(x_1 , x_2) = x_1 + x_2$ نشان می‌دهد که اگر (x_1 , x_2) را در روی E_1 در راستای E_2 تصویر کنیم x_1 به‌دست می‌آید (۸.۵.۵).

بنابرشمارهٔ (۸ . ۵ . ٤) فضای‌برداری $(E_1 \times E_2)/E_2$ با E_1 ایزومرف است.

٤ . ٦ . ۸ - می‌خواهیم نشان‌دهیم که کلی‌ترین مثال زیرفضاهای‌برداری متمم ازشمارهٔ ۳ . ٦ . ۸ به‌دست می‌آید.

قضیه - چنانچه E یك‌فضای‌برداری و F_1 و F_2 دو زیرفضای برداری متمم در E باشند، گسترش Φ فضای $F_1 \times F_2$ در E که عنصر x_1+x_2 را به (x_1, x_2) وابسته می‌کند، یك ایزومرفیسم $F_1 \times F_2$ روی E است که در روی F_1 و F_2 به‌گسترش همانی بدل می‌گردد.

اثبات:

۱ - اگر $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ و $(x'_1, x'_2) \in F_1 \times F_2$ باشد داریم:

$$\begin{aligned}\Phi((x_1, x_2)+(x'_1, x'_2)) &= \Phi((x_1+x'_1), (x_2+x'_2))\\ &= (x_1+x'_1)+(x_2+x'_2)\\ &= (x_1+x_2)+(x'_1+x'_2)\\ &= \Phi((x_1, x_2))+\Phi((x'_1, x'_2))\end{aligned}$$

همچنین اگر $\lambda \in K$ باشد داریم:

$$\Phi(\lambda(x_1, x_2))=\Phi((\lambda x_1, \lambda x_2))=\lambda x_1+\lambda x_2=\lambda(x_1+x_2)=\lambda\Phi((x_1, x_2))$$

پس گسترش Φ خطی است.

۲ - گسترش Φ انژکتیو است. زیرا اگر (x_1, x_2) و (x'_1, x'_2) دو عنصر از $F_1 \times F_2$ باشند به‌طوریکه داشته باشیم $\Phi((x_1, x_2))=\Phi((x'_1, x'_2))$ خواهیم‌داشت $x_1+x_2=x'_1+x'_2$ وچون F_1 و F_2 متمم هستند پس $x_1=x'_1$ و $x_2=x'_2$ و از آنجا $(x_1, x_2)=(x'_1, x'_2)$.

۳ - گسترش Φ سورژکتیو است. زیرا، چون F_1 و F_2 متمم هستند هرعنصر E به‌صورت $x_1+x_2=\Phi((x_1, x_2))$ نوشته‌می‌شود که‌درآن $x_1 \in F_1$ و $x_2 \in F_2$ می‌باشد.

٤ - پس گسترش Φ یک ایزومرفیسم $F_1 \times F_2$ روی E است.

۵ - اگر $x_1 \in F_1$ و $x_2 \in F_2$ باشد داریم:

$$\Phi(x_1)=\Phi((x_1\ ,\ \circ))=x_1+\circ=x_1$$
$$\Phi(x_2)=\Phi((\circ\ ,\ x_2))=\circ+x_2=x_2$$

پس Φ گسترش همانی روی F_1 و F_2 می‌باشد.

۵.۶.۸ - **تعمیم** - اگر E_1 ، E_2 ، ... ، E_n فضاهای برداری روی K باشند، فضای‌برداری $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ را می‌توان مانند شمارهٔ (۸. ۶. ۱) تعریف کرد. دراینجا نیز هر E_i با یک زیرفضای‌برداری از $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ یکی می‌گردد و به‌طوریکه دیده می‌شود $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ مجموع مستقیم E_1 ، E_2 ، ... ، E_n می‌باشد (مشابهٔ شمارهٔ ۸.۶.۳).

درحالت ویژه فضای‌برداری K^n که در شمارهٔ ۸.۱.۴ درنظرگرفته شد به دست می‌آید.

۸.۶.۶ - **قضیه-فرض‌می‌کنیم E یک‌فضای‌برداری‌و F_1 ، F_2 ، ... ، F_n زیر فضاهای برداری E باشند. چنانچه E مجموع مستقیم F_i ها باشد، گسترش فضای $F_1\times F_2\times\cdots\times F_n$ در E که عنصر $x_1+x_2+\cdots+x_n$ را به $(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots\ ,\ x_n)$ وابسته می‌کند یک ایزومرفیسم $F_1\times F_2\times\cdots\times F_n$ روی E است‌که درروی F_1 ، F_2 ، ... ، F_n به‌گسترش‌همانی بدل‌می‌گردد.**

اثبات این قضیه مانند ۸.۶.۴ است.

۸ . ۷ - نابستگی خطی

۸.۷.۱ - قضیه - **چنانچه E یک فضای برداری روی هیأت K و x_1 ، x_2 ، ... ، x_n متعلق به E باشند، شرطهای زیرهم‌ارزند :**

(I) - یک بستگی به‌صورت $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n=\circ$ وجود داردکه درآن λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n عنصرهایی از K هستندکه همهٔ آنها با هم صفر نمی‌باشند.

(II) - یکی‌از x_i ها ترکیب خطی از سایرین است.

اثبات :

$(II)\Longrightarrow(I)$: فرض می‌کنیم مثلاً x_1 به‌صورت $\mu_2 x_2+\cdots+\mu_n x_n$ باشد که درآن μ_2 ، ... ، μ_n متعلق به K هستند. داریم :

$$1\cdot x_1+(-\mu_2)x_2+\cdots+(-\mu_n)x_n=\circ$$

وچون $0 \neq 1$ می‌باشد پس شرط (I) برقرار است.

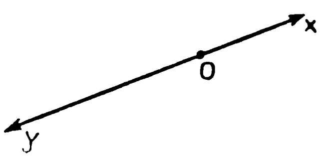
(I) $\Longleftarrow$ (II) : فرض می‌کنیم بستگی $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ را داشته باشیم که درآن مثلاً $\lambda_1 \neq 0$ است. دراین صورت داریم :

$$x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} x_n$$

پس x_1 یک ترکیب خطی از x_2 ، $\cdots$ ، x_n است و شرط (II) برقرار می‌باشد.

۲.۷.۸ - **تعریف - اگر شرطهای ۱.۷.۸ برقرار باشد ، گوییم که x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n بستگی‌خطی‌دارند ، وچنانچه‌این شرطها برقرار نباشد‌گوییم که x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n نابستگی‌خطی‌دارند و یا اینکه دنبالهٔ $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ آزاد است .**

۳.۷.۸ - **مثال** - هنگامیکه می‌گوییم دو بردار x و y از E بستگی خطی دارند به‌این معنی است که یا x به‌صورت μy است ویا y به‌شکل λx می‌باشد ، که درآنجا λ و μ متعلق به K هستند. دراین‌صورت x و y را **متناسب** می‌نامند.



شکل ۲۸

فرض می‌کنیم x و y متناسب باشند. چهار حالت پیش می‌آید :

۱ - $x \neq 0$ و $y \neq 0$: چنانچه مثلاً $y = \lambda x$ باشد داریم $\lambda \neq 0$ و می‌توان نوشت $x = \lambda^{-1} y$. به‌علاوه λ یکتاست ، زیرا اگر $y = \lambda' x$ باشد خواهیم داشت $(\lambda - \lambda')x = 0$ ، که چون $x \neq 0$ می‌باشد (۱۴.۱.۸) پس $\lambda - \lambda' = 0$. دراین‌حالت گاهی می‌نویسند $\lambda = \dfrac{y}{x}$.

۲- $x \neq 0$ و $y = 0$: دراین‌صورت داریم $y = 0 \cdot x$ اما هیچ عنصری از K مانند μ وجود ندارد به‌طوریکه داشته باشیم $x = \mu \cdot y$.

۳ - $x = 0$ و $y \neq 0$: دراین‌صورت داریم $x = 0 \cdot y$ اما هیچ عنصری از K مانند λ وجود ندارد به‌طوریکه داشته باشیم $y = \lambda \cdot x$.

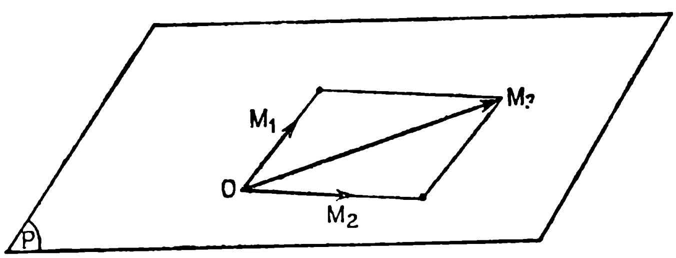
۴ - $x=y=0$: دراین‌صورت برای عنصرهای دلخواه λ و μ از K داریم:

$$y=\lambda x \ , \ x=\mu y$$

۴.۷.۸ - **مثال** - فضای E را فضای معمولی دارای مبداء O فرض می‌کنیم و بردارهای $\overrightarrow{OM_1}$ ، $\overrightarrow{OM_2}$ و $\overrightarrow{OM_3}$ را درنظر می‌گیریم. اگر این بردارها بستگی‌خطی داشته باشند هم‌صفحه خواهند بود. زیرا مثلاً داریم:

$$\overrightarrow{OM_3}=\lambda_1\overrightarrow{OM_1}+\lambda_2\overrightarrow{OM_2}$$

ویک صفحهٔ P وجود دارد (ممکن است بیش‌ازیک صفحه وجود داشته باشد) که شامل $\overrightarrow{OM_1}$ و $\overrightarrow{OM_2}$ باشد. آشکار است که این‌صفحه شامل $\overrightarrow{OM_3}$ خواهد بود. به‌وارون فرض می‌کنیم سه‌بردار $\overrightarrow{OM_1}$ ، $\overrightarrow{OM_2}$ و $\overrightarrow{OM_3}$ دریک صفحهٔ P واقع باشند و نشان می‌دهیم که بستگی خطی دارند. اگر سه‌بردار صفر باشند مطلب روشن است و چنانچه مثلاً $\overrightarrow{OM_1}\neq 0$ و $\overrightarrow{OM_2}$ و $\overrightarrow{OM_3}$ متناسب با $\overrightarrow{OM_1}$ باشند بازهم درستی آن آشکار است. درحالتیکه مثلاً $\overrightarrow{OM_2}$ با $\overrightarrow{OM_1}\neq 0$ متناسب نباشد، دو بردار $\overrightarrow{OM_1}$ و $\overrightarrow{OM_2}$ تنها یک صفحه درست می‌کنند که همان صفحهٔ P است، و چون $\overrightarrow{OM_3}$ در صفحهٔ P واقع است پس باید به‌صورت $\lambda_1\overrightarrow{OM_1}+\lambda_2\overrightarrow{OM_2}$ نوشته شود.



شکل ۲۹

۵.۷.۸ - **مثال** - هنگامی‌که می‌گوییم بردار x آزاد می‌باشد به‌این معنی است که $x\neq 0$ است. درحقیقت اگر $x=0$ باشد داریم $1\cdot x=0$ و بردار x آزاد نخواهد بود. به‌وارون چنانچه بردار x آزاد نباشد برای یک شمار λ مخالف با صفر خواهیم داشت $\lambda x=0$ پس $x=0$ است.

۶.۷.۸ - اگر x_1 ، x_2 ، ... ، x_n نابستگی خطی داشته باشند همهٔ آنها ازیکدیگر

متمایزخواهندبود. زیرا چنانچه برای $i \neq j$ داشته‌باشیم $x_i = x_j$ ، x_i به‌صورت یک‌ترکیب خطی از x_k ها درمی‌آید $(k \neq i)$.

۷.۷.۸ - اگر دنبالهٔ $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ آزاد باشد ، آشکار است که هردنباله که از دنبالهٔ $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ استخراج شود آزاد خواهد بود. به‌ویژه بنابر ۵.۷.۸ هیچیک از x_i ها صفر نخواهد بود.

۸.۷.۸ - **قضیه - اگر بردارهای x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n نابستگی خطی‌داشته باشند و بردار x ترکیبی خطی از بردارهای x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n نباشد ، بردارهای x ، x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n نابستگی خطی دارند .**

اثبات - بستگی $\lambda x + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ را درنظر می‌گیریم. باید ثابت کرد که λ ، λ_1 ، ... ، λ_n صفر هستند. اگر $\lambda \neq 0$ باشد داریم :

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n$$

واین مخالف است با فرض این‌که x ترکیبی خطی از x_1 ، $\cdots$ ، x_n نباشد . پس باید داشته باشیم $\lambda = 0$ و دراین‌صورت خواهیم داشت :

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

و چون x_1 ، $\cdots$ ، x_n نابستگی خطی دارند نتیجه خواهد شد $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

۸ . ۸ - پایهٔ یک فضای برداری

۱.۸.۸ - **تعریف - اگر E یک‌فضای برداری‌و x_1 ، $\cdots$ ، x_n عنصرهایی از E باشند ، گوییم که $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ یک پایهٔ E است اگر x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n نابستگی خطی داشته باشند و فضای E را پدید آورند .**

هنگامی‌که می‌گوییم x_1 ، $\cdots$ ، x_n فضای E را پدید می‌آورند به‌این معنی است که ترکیبهای خطی x_1 ، $\cdots$ ، x_n تمام E را درست می‌کنند (۱۲.۲.۸) ، به‌عبارت دیگر هربردار از E ترکیبی خطی از x_1 ، $\cdots$ ، x_n می‌باشد.

۲.۸.۸ - **مثال** - چنانچه E فضای معمولی دارای مبداء O باشد ، سه‌بردار ناهم صفحهٔ $\overrightarrow{OM_1}$ ، $\overrightarrow{OM_2}$ و $\overrightarrow{OM_3}$ یک پایهٔ E را پدید می‌آورند.

۳.۸.۸ - **مثال** - فرض می‌کنیم $E=\mathbf{R}^n$. بردارهای زیر را که متعلق به $\mathbf{R}^n$ هستند درنظر می‌گیریم :

$$e_1=(1,0,0,\dots,0)$$
$$e_2=(0,1,0,\dots,0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n=(0,0,0,\dots,1)$$

این بردارها یک پایهٔ $\mathbf{R}^n$ را تشکیل می‌دهند (این پایه را **پایهٔ کانونیک $\mathbf{R}^n$** می‌گویند). زیرا هربستگی $\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n=0$ را می‌توان به‌صورت $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=0$ نوشت که ازآن $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$ نتیجه می‌شود. بنابراین بردارهای $e_1,\dots,e_n$ نابستگی‌خطی‌دارند. به‌علاوه هربردار $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ از $\mathbf{R}^n$ به‌صورت $\mu_1 e_1+\cdots+\mu_n e_n$ نوشته می‌شود. پس e_1 ، ... ، e_n فضای E را پدید می‌آورند.

اگر بجای $\mathbf{R}^n$ فضای K^n را درنظر بگیریم (K یک هیأت دلخواه است) بازهم مطلب بالا برقرار است.

۴.۸.۸ - **قضیه - چنانچه E یک فضای برداری و $(e_1,\dots,e_n)$ یک پایهٔ E باشد، هر بردار x از فضای E تنها به‌یک روش به‌صورت :**

$$x=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$$

نوشته می‌شود که در آن λ_1 ، ... ، λ_n اسکالر هستند.

اثبات - چون e_1 ، ... ، e_n فضای E را پدید می‌آورند ، بردار x دست‌کم به‌یک روش به‌صورت $x=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$ نوشته می‌شود. همچنین فرض می‌کنیم $x=\lambda'_1 e_1+\cdots+\lambda'_n e^n$ باشد. دراین‌صورت داریم :

$$(\lambda_1-\lambda'_1)e_1+\cdots+(\lambda_n-\lambda'_n)e_n=0$$

وبا توجه به‌اینکه e_1 ، ... ، e_n نابستگی خطی دارند خواهیم داشت :

$$\lambda_1-\lambda'_1=\cdots=\lambda_n-\lambda'_n=0 \quad \text{یا} \quad \lambda_1=\lambda'_1,\dots,\lambda_n=\lambda'_n$$

۵.۸.۸ - اسکالرهای λ_1 ، ... ، λ_n که درشمارهٔ پیش به‌کار بردیم ، **آراینده‌ها** (مختصات) یا **مؤلفه‌های** x نسبت به‌پایهٔ $(e_1,\dots,e_n)$ نامیده می‌شوند. با این نامگذاری، درمثال ۲.۸.۸ ، به‌تعریف کلاسیک مختصات می‌رسیم. در مثال ۳.۸.۸

بردار $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ از K^n دارای مؤلفه‌های μ_1 ، ... ، μ_n نسبت به پایهٔ کانونیک می‌باشد.

۶.۸.۸ - قضیه - فرض می‌کنیم E و F دو فضای برداری روی یك هیأت و $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یك پایهٔ E و $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ یك دنبالهٔ دلخواه n برداری از F باشد.

(I) — تنها یك گسترش خطی u فضای برداری E در F وجود دارد به‌طوریکه $u(e_1)=f_1$ ، ... ، $u(e_n)=f_n$ باشد.

(II) — برای اینکه گسترش u انژکتیو باشد، بایاوبسنده است که f_1 ، ... ، f_n نابستگی خطی داشته باشند.

(III) — برای اینکه گسترش u سورژکتیو باشد، بایا و بسنده است که f_1 ، ... ، f_n فضای F را پدید آورند.

(IV) - برای اینکه u یك ایزومرفیسم E روی F باشد، بایاوبسنده است که f_1 ، ... ، f_n یك پایهٔ F باشد.

اثبات:

۱ - **گسترش u وجود دارد**: هربردار x از E تنها به‌یک روش به‌صورت $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ که درآن λ_i ها اسکالرهستند، نوشته می‌شود (۴.۸.۸). چنانچه قراردهیم $u(x)=\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ یک گسترش u فضای E در F معین می‌گردد و روشن است که داریم $u(e_1)=f_1$ ، ... ، $u(e_n)=f_n$. می‌خواهیم نشان دهیم که u خطی است. اگر $x'=\lambda'_1 e_1 + \cdots + \lambda'_n e_n$ بردار دیگری از E باشد، داریم:

$$x+x'=(\lambda_1+\lambda'_1)e_1 + \cdots + (\lambda_n+\lambda'_n)e_n$$

اما بنابرتعریف u می‌توان نوشت:

$$u(x+x')=(\lambda_1+\lambda'_1)f_1 + \cdots + (\lambda_n+\lambda'_n)f_n$$

$$u(x)=\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$$

$$u(x')=\lambda'_1 f_1 + \cdots + \lambda'_n f_n$$

که از روی‌آنها بستگی $u(x+x')=u(x)+u(x')$ نتیجه می‌شود. به همین‌ترتیب دیده می‌شود که برای هر اسکالر λ داریم $u(\lambda x)=\lambda u(x)$ ، پس u خطی است.

۲ ـ **گسترش u یکتاست** : اگر u' یک گسترش دیگر E در F باشد بطوریکه داشته‌باشیم $u'(e_1)=f_1$ ، ... ، $u'(e_n)=f_n$ ، برای هربردار $x=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$ از E خواهیم داشت :

$$u'(x)=u'(\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n)$$
$$=\lambda_1 u'(e_1)+\cdots+\lambda_n u'(e_n)=\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_n f_n=u(x)$$

پس $u=u'$ و اثبات قسمت (I) کامل می‌شود.

۳ ـ فرض می‌کنیم u انژکتیو باشد. بستگی $\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_n f_n=0$ را درنظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که λ_i ها صفر هستند. بستگی بالا چنین نوشته می‌شود

$$\lambda_1 u(e_1)+\cdots+\lambda_n u(e_n)=0 \qquad \text{یا} \qquad u(\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n)=0$$

چون u انژکتیو است ازبستگی بالا نتیجه می‌شود $\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n=0$ وبا توجه به‌اینکه e_1 ، ... ، e_n نابستگی خطی دارند خواهیم داشت $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. پس f_1 ، ... ، f_n نابستگی خطی دارند.

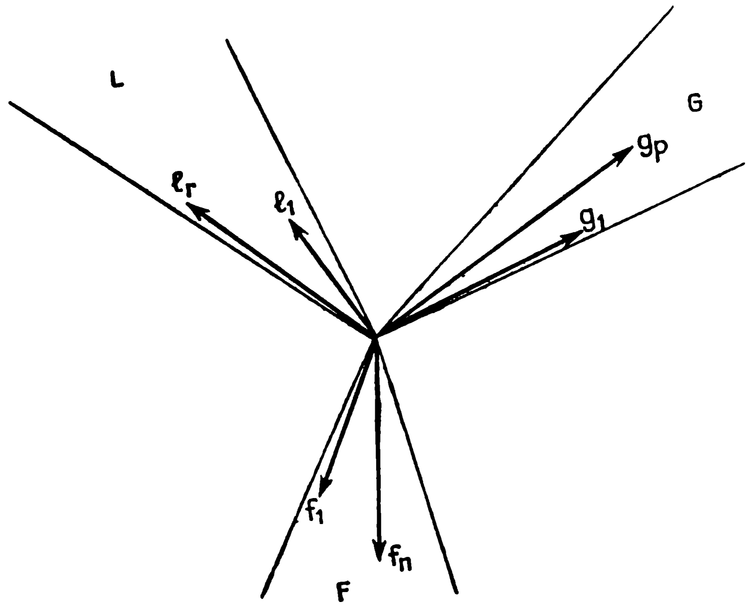
به‌وارون فرض می‌کنیم f_1 ، ... ، f_n نابستگی خطی داشته باشند و ثابت می‌کنم که گسترش u انژکتیو است. بنابر ۳.۵.۷ کافی است نشان دهیم که هستهٔ N گسترش u برابر با $\{0\}$ است. چنانچه $x=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$ عنصری از N باشد داریم $u(x)=0$. یعنی $\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_n f_n=0$. چون f_i ها نابستگی خطی دارند، از بستگی بالا نتیجه می‌شود $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$ پس $x=0$ است و به‌این‌ترتیب قسمت (II) ثابت می‌گردد.

٤ ـ چون E مجموعهٔ ترکیب‌های‌خطی e_i هاست ، $u(E)$ مجموعهٔ ترکیبهای خطی f_i ها خواهد بود. پس هنگامی‌که می‌گوییم u سورژکتیو است به‌این معنی است‌که هر عنصر F ترکیبی‌خطی از f_i هاست ویا اینکه f_i ها F را پدید می‌آورند و این قسمت (III) را ثابت می‌کند.

۵ ـ قسمت (IV) قضیه نتیجهٔ آنی قسمتهای (II) و (III) می‌باشد.

۷.۸.۸ ـ **قضیه ـ فرض می‌کنیم E یک‌فضای‌برداری و F ، G ، ... ، L زیرفضاهای برداری E باشند. چنانچه E مجموع مستقیم F ، G ، ... ، L و $(f_1, \ldots, f_n)$ یک پایهٔ F و $(g_1, \ldots, g_p)$ یک پایهٔ G و... و $(l_1, \ldots, l_r)$**

یک پایهٔ L باشد $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p, \dots, l_1, \dots, l_r)$ یک پایهٔ E خواهد بود.



شکل ۳۰

اثبات ـ بستگی:

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n + \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_p g_p + \cdots + \rho_1 l_1 + \cdots + \rho_r l_r = 0$$

را درنظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم:

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = f \;,\; \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_p g_p = g \,, \cdots ,$$
$$\rho_1 l_1 + \cdots + \rho_r l_r = l$$

داریم $f+g+\cdots+l=0$ که درآن $f\in F$ ، $g\in G$ ، … ، $l\in L$. پس خواهیم داشت $f=g=\cdots=l=0$ زیرا E مجموع مستقیم F ، G ، … ، L است. اما ازبستگی $f=0$ نتیجه می‌شود $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$ زیرا f_1 ، f_2 ، … ، f_n نابستگی‌خطی دارند. بهمین‌ترتیب دیده می‌شود که μ_i ها و … و ρ_j ها صفر هستند و ازاینجا نابستگی خطی f_1 ، … ، f_n ، g_1 ، … ، g_p ، … ، l_1 ، … ، l_r ثابت می‌گردد. به‌علاوه زیر فضای‌برداری E' از E ، پدید آمده به‌وسیلهٔ f_1 ، … ، f_n ، g_1 ، … ، g_p ، … ، l_1 ، … ، l_r شامل F ، G ، … ، L است پس شامل:

$$F+G+\cdots+L=E$$

نیزخواهدبود ، درنتیجه خواهیم‌داشت $E'=E$ و به‌این‌ترتیب ثابت می‌شود که بردارهای f_1 ، … ، f_n ، g_1 ، … ، g_p ، … ، l_1 ، … ، l_r فضای E را پدید می‌آورند.

۸.۸.۸ - **قضیه - فرض می‌کنیم E یك فضای برداری باشد . یك پایهٔ E راكه از اجتماع‌دنباله‌های متمایز $(f_1 , \dots , f_n)$ و $(g_1 , \dots , g_p)$ و…و $(l_1 , \dots , l_r)$ تشکیل شده است ، درنظر می‌گیریم . چنانچه F زیرفضای پدیدآمده به‌وسیلهٔ f_1 ، … ، f_n و G زیرفضای‌پدیدآمده به‌وسیلهٔ g_1 ، … ، g_p و … و L زیر فضای پدید آمده به‌وسیلهٔ l_1 ، … ، l_r باشد فضای E مجموع مستقیم F ، G ، … ، L است .**

اثبات - زیرفضای برداری $F+G+ \cdots +L$ شامل همهٔ ترکیبهای خطی f_1 ، … ، f_n ، g_1 ، … ، g_p ، … ، l_1 ، … ، l_r می‌باشد ، پس داریم :

$$F+G+ \cdots +L=E$$

به‌علاوه اگر یک عنصر x از E به‌دو روش متمایز به‌صورت $f+g + \cdots +l$ ، که درآن $f\in F$ ، $g\in G$ ، … ، $l\in L$ است ، نوشته شود ، به دو روش مختلف به‌صورت ترکیبی خطی از f_1 ، … ، f_n ، g_1 ، … ، g_p ، … ، l_1 ، … ، l_r نوشته خواهد شد واین ممکن نیست.

۸ . ۹ - وجود پایه‌ها

۱.۹.۸ - **قضیه - فرض می‌کنیم E یك فضای برداری A و A' دو بخش با پایان E باشند به‌طوریکه داشته باشیم $A\subset A'$. چنانچه بردارهای A نابستگی خطی داشته و بردارهای A' فضای E را پدید آورند، یك پایهٔ B از فضای E وجود داردبه‌طوریکه $A\subset B\subset A'$ باشد .**

اثبات - بخشهایی مانند B از فضای برداری E را به‌طوریکه $A\subset B\subset A'$ باشد درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم بردارهای B دارای نابستگی‌خطی باشند. روشن‌است که چنین بخشهایی وجود دارد (مثلاً A) وشمارهٔ آنها باپایان‌است (زیرا A' با پایان‌است) .

بخش B را طوری‌انتخاب می‌کنیم که شمارهٔعنصرهای‌آن‌بزرگترین مقدارممکن‌را دارا باشد . اگر x عنصری از A' باشد که‌به B متعلق نباشد بردارهای $B\cup\{ x \}$ دارای‌نابستگی‌خطی

نیستند (وگرنه شمارهٔ عنصرهای B دارای بزرگترین مقدار ممکن نخواهد بود)، پس x یک ترکیب خطی‌عنصرهای B است(۸.۷.۸). به‌این ترتیب هرعنصر A' یک ترکیب خطی از عنصرهای B می‌باشد و در نتیجه هرعنصر E یک ترکیب خطی از عنصرهای B خواهد بود. چون بردارهای B نابستگی خطی دارند B یک پایهٔ E است.

۸.۹.۲- نتیجه ـ چنانچه E یک فضای برداری و x_1 ، x_2 ، ... ، x_n بردارهایی‌از E باشندکه E راپدید می‌آورند، اندیسهای i_1 ، i_2 ، ... ، i_p وجود دارد به‌طوریکه $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p})$ یک پایهٔ E باشد.

کافی است قضیهٔ شمارهٔ ۸.۹.۱ را ، که درآن $A=\varnothing$ و:

$$A'=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

باشد ، به‌کار بریم.

۸.۹.۳- تعریف ـ یک فضای برداری را دارای بعد با پایان‌گویند هرگاه شمارهٔ با پایانی از عنصرها بتواندآن فضا را پدیدآورد.

درستی این نام‌گذاری درشمارهٔ ۸.۱۰.۳ آشکارخواهد شد.

۸.۹.۴- باید یادآور شد که‌فضای معمولی دارای بعد باپایان‌است (زیرا ممکن است به‌وسیلهٔ سه بردار پدید آید). فضای برداری K^n دارای بعد باپایان می‌باشد (درشمارهٔ ۸.۸.۳ دیدیم که این فضا به‌وسیلهٔ n بردار پدید می‌آید). فضاهای برداری‌ای وجود دارند که بعد آنها باپایان نیست (گویند این فضاها دارای بعد بی‌پایان می‌باشد). مثلاً فضای‌برداری $K[X]$ دارای‌بعدبی‌پایان‌است. زیرا برای‌هرشماردرست وباپایان q درجهٔ چند جمله‌ایهای P_1 ، P_2 ، ... ، P_q از شمار درستی مانند N کوچکتر است و هرترکیب خطی از P_i ها دارای درجهٔ کوچکتر از N خواهد بود به‌طوریکه P_i ها نمی‌توانند $K[X]$ را پدید آورند.

۸.۹.۵- نتیجه - هرفضای برداری که دارای بعد باپایان باشد، دارای یک پایه خواهد بود.

این مطلب به آسانی از شمارهٔ ۸.۹.۲ نتیجه می‌شود.

۸.۹.۶- نتیجه - چنانچه E یک فضای برداری دارای بعد باپایان و y_1 ، y_2 ، ... ، y_p بردارهایی از E باشندکه نابستگی خطی دارند ،

بردارهایی مانند y_{p+1} ، ... ، y_q **از** E **وجود دارد به‌طوریکه :**

$$(y_1 , y_2 , \dots , y_p , y_{p+1} , \dots , y_q)$$

یک پایهٔ E **باشد .**

زیرا اگر $A=\{y_1 , y_2 , \dots , y_p\}$ و A_1 یک مجموعهٔ باپایان از بردارهایی باشدکه E را پدید می‌آورد ، مجموعهٔ $A'=A\bigcup A_1$ نیز با پایان می‌باشد و E را پدید می‌آورد ، و بعلاوه $A\subset A'$ است. اکنون چنانچه قضیهٔ شمارهٔ ۱.۹.۸ را درمورد A و A' بکار بریم درستی نتیجهٔ بالا آشکار می‌گردد.

۱۰.۸- بعد

۱.۱۰.۸- لم ـ اگر E **یک‌فضای برداری و** x_1 ، x_2 ، ... ، x_p **بردارهایی از** E و y_1 ، y_2 ، ... ، y_{p+1} **ترکیبهایی خطی از** x_1 ، ... ، x_p **باشند ،** y_1 ، y_2 ، ... ، y_{p+1} **بستگی خطی دارند .**

اثبات ـ برای $p=1$ داریم $y_1=\lambda_1 x_1$ و $y_2=\lambda_2 x_1$ وازآنجاه $\lambda_2 y_1-\lambda_1 y_2=$ این برابری بیان می‌کندکه y_1 و y_2 بستگی خطی دارند. اگر $\lambda_1=\lambda_2=0$ باشد خواهیم‌داشت $y_1=y_2=0$ و دراین‌صورت نیز y_1 و y_2 بستگی خطی دارند. اکنون فرض می‌کنیم لم بالا برای $p-1$ بردار برقرار باشد. بنابه فرض می‌توان نوشت :

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\dots+\alpha_{1p}x_p \\ y_2=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\dots+\alpha_{2p}x_p \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{p+1}=\alpha_{p+1,1}x_1+\alpha_{p+1,2}x_2+\dots+\alpha_{p+1,p}x_p \end{cases}$$

که درآن α_{ij} ها اسکالر هستند. اگر همهٔ α_{i1} ها صفر باشند بردارهای y_1 ، ... ، y_p ترکیبهایی خطی از x_2 ، x_3 ، ... ، x_p خواهند بود و بنابه فرض دارای بستگی خطی می‌باشند. درنتیجه y_1 ، y_2 ، ... ، y_{p+1} بستگی خطی خواهند داشت (۷.۷.۸).

پس‌فرض می‌کنیم که یکی‌از α_{i1} ها مثلاً α_{11} مخالف با صفر باشد. دراین‌صورت x_1 را می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از y_1 ، x_2 ، x_3 ، ... ، x_p نوشت. چنانچه

برابری‌های(۱)رادرنظربگیریم دیده می‌شود که y_2 ، y_3 ، ... ، y_{p+1} به‌صورت ترکیبهایی خطی از y_1 ، x_2 ، ... ، x_p درمی‌آیند :

$$y_2=\beta_2 y_1+\gamma_{22}x_2+\cdots+\gamma_{2p}x_p$$

$$y_3=\beta_3 y_1+\gamma_{32}x_2+\cdots+\gamma_{3p}x_p$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{p+1}=\beta_{p+1}y_1+\gamma_{p+1,2}x_2+\cdots+\gamma_{p+1,p}x_p$$

پس $y_2-\beta_2 y_1$ ، $y_3-\beta_3 y_1$ ، ... ، $y_{p+1}-\beta_{p+1}y_1$ ترکیب‌هایی خطی از x_2 ، x_3 ، ... ، x_p هستند و بنا به‌فرض اسکالرهایی مانند λ_2 ، λ_3 ، ... ، λ_{p+1} که همه باهم صفر نیستند وجود دارد به طوریکه داشته باشیم :

$$\lambda_2(y_2-\beta_2 y_1)+\lambda_3(y_3-\beta_3 y_1)+\cdots+\lambda_{p+1}(y_{p+1}-\beta_{p+1}y_1)=0$$

برابری بالا را می‌توان چنین نوشت :

$$\lambda_2 y_2+\lambda_3 y_3+\cdots+\lambda_{p+1}y_{p+1}+\lambda y_1=0$$

و چون λ_2 ، λ_3 ، ... ، λ_{p+1} همه باهم صفر نیستند ، دیده می‌شود که y_1 ، y_2 ، ... ، y_{p+1} بستگی خطی دارند.

۸.۱۰.۲- قضیه - چنانچه فضای برداری E دارای بعد باپایان باشد ، شمارهٔ عنصرهای تمام پایه‌های‌آن باهم برابر است .

اثبات - اگر $(x_1, \ldots, x_p)$ و $(y_1, \ldots, y_q)$ دوپایه از E باشند ، y_j ها ترکیبهایی خطی از x_i ها خواهند بود. چنانچه $q \geqslant p+1$ باشد ، بنابر لم ۸.۱۰.۱ y_j ها بستگی خطی خواهند داشت واین ممکن نیست. پس باید داشته باشیم $q \leqslant p$. به همین ترتیب دیده می‌شود که $p \leqslant q$ می‌باشد. پس داریم $p=q$.

۸.۱۰.۳- چنانچه فضای برداری E دارای بعد باپایان باشد ، شمارهٔ عنصرهای هرپایه‌از E **بعد** E نامیده می‌شود که آنرا به‌صورت $\dim E$ نشان می‌دهند. گاهی‌برای آنکه هیأت اسکالرها را نیز مشخص کنند ، بعد فضای E را به صورت $\dim_K E$ نمایش می‌دهند. (این تعریف درستی عبارت «بعد باپایان» راکه درشمارهٔ ۸.۹.۳ بکار برده شد ، آشکار می‌نماید).

۸ . ۱۰ . ٤- **مثال** - بنابرشمارهٔ ۸ . ۸ . ۲ بعد فضای معمولی به مبدأ O برابر با ۳ است.

۸ . ۱۰ . ٥- **مثال** - فرض می‌کنیم K یک هیأت باشد. در شمارهٔ ۸ . ۸ . ۳ دیدیم که پایهٔ کانونیک فضای برداری K^n دارای n عنصر است. پس داریم $\dim K^n = n$.

۸ . ۱۰ . ٦- اگرفضای برداری E دارای بعد باپایان و $E \neq \{0\}$ باشد، فضای E شامل یک بردار غیرصفرمانند y_1 خواهد بود و بنابر شمارهٔ ۸ . ۹ . ٦ دارای پایه‌ای به صورت $(y_1, y_2, \dots, y_q)$ می‌باشد. پس $\dim E \geqslant 1$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که شرط $\dim E \neq 0$ هم‌ارز با شرط $E \neq \{0\}$ می‌باشد.

۸ . ۱۰ . ۷- **قضیه - هرفضای برداری n بعدی روی هیأت K با K^n ایزومرف است.**

اثبات - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری و $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ یک پایهٔ E باشد. اگر $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ پایهٔ کانونیک K^n باشدبنابر شمارهٔ ۸ . ۸ . ٦ (IV) یک ایزومرفیسم E روی K^n وجود دارد که e_1 را به f_1 و ... و e_n را به f_n بدل می‌کند. (پس با تقریب یک ایزومرفیسم، تنها یک فضای برداری n بعدی روی هیأت K وجود دارد).

۸ . ۱۰ . ۸- **قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی باشد.**

(I) - چنانچه بردارهای x_1 ، x_2 ، ... ، x_p فضای E را پدیدآورند $p \geqslant n$ است، و اگر $p=n$ باشد $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ یک پایهٔ E را تشکیل می‌دهد.

(II) - چنانچه بردارهای y_1 ، y_2 ، ... ، y_q نابستگی خطی داشته باشند $q \leqslant n$ است، واگر $q=n$ باشد $(y_1, y_2, \dots, y_q)$ یک پایهٔ E را تشکیل می‌دهد.

اثبات - بنابر شمارهٔ ۸ . ۹ . ۲ مجموعهٔ $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ شامل یک پایهٔ B است و این پایه دارای n عنصر می‌باشد. پس داریم $p \geqslant n$. اگر $p=n$ باشد ناگزیر خواهیم داشت $B = \{x_1, \dots, x_p\}$. بنابراین (I) ثابت می‌شود.

بنابر شمارهٔ ۶.۹.۸ یک پایهٔ B' وجود دارد که شامل مجموعهٔ $\{y_1 , y_2 , \ldots , y_q\}$ است و این پایه دارای n عنصر می‌باشد. پس داریم $q \leqslant n$. چنانچه $q=n$ باشد ناگزیر خواهیم داشت $\{y_1 , y_2 , \ldots , y_q\}=B'$ و این اثبات (II) را می‌رساند.

۹.۱۰.۸- اگر E یک فضای برداری n بعدی پدید آمده به‌وسیلهٔ بردارهای x_1 ، x_2 ، $\ldots$ ، x_p باشد ، بنابر شمارهٔ ۲.۹.۸ از دنبالهٔ $(x_1 , x_2 , \ldots , x_p)$ می‌توان n بردار انتخاب کرد که نابستگی خطی داشته باشند. همچنین بنابر شمارهٔ ۸.۱۰.۸ (II) از دنبالهٔ $(x_1 , x_2 , \ldots , x_p)$ نمی‌توان بیش از n بردار که دارای نابستگی خطی باشند برگزید. پس n شمارهٔ ماکزیمم بردارهایی است که می‌توان از $(x_1 , x_2 , \ldots , x_p)$ انتخاب کرد به طوری که نابستگی خطی داشته باشند.

۱۰.۱۰.۸- قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری دارای بعد باپایان و F یک زیر فضای برداری از E باشد.

(I)— F دارای بعد باپایان است.

(II)— $\dim F \leqslant \dim E$ است.

(III)— اگر $\dim F=\dim E$ باشد ، $F=E$ است.

اثبات - فرض می‌کنیم $\dim E=n$ باشد. بنابر شمارهٔ ۸.۱۰.۸ (II) ، مجموعهٔ بردارهایی که در E نابستگی خطی داشته باشند (در F نیز نابستگی خواهند داشت) حداکثر دارای n عنصر است. پس اگر بردارهای x_1 ، x_2 ، $\ldots$ ، x_p از F را ، که نابستگی خطی دارند وشمارهٔ آن‌ها ماکزیمم است ، در نظر بگیریم ، بنابر آنچه که گفته شد داریم $p \leqslant n$. می‌خواهیم ثابت کنیم که $(x_1 , x_2 , \ldots , x_p)$ یک پایهٔ F را تشکیل می‌دهد. چون x_1 ، x_2 ، $\ldots$ ، x_p نابستگی خطی دارند کافی است نشان دهیم که زیر فضای برداری F' از F ، پدید آمده به‌وسیلهٔ بردارهای x_1 ، x_2 ، $\ldots$ ، x_p ، برابر با F می‌باشد. اگر $F' \neq F$ باشد ، عنصری مانند x از F وجود دارد که ترکیبی خطی از x_1 ، $\ldots$ ، x_p نیست وبنابرشمارهٔ (۸.۷.۸) بردارهای x ، x_1 ، $\ldots$ ، x_p دارای نابستگی خطی خواهندبود. پس شمارهٔ بردارهای دستگاه $(x , x_1 , x_2 , \ldots , x_p)$ از F که نابستگی خطی دارند برابر با $p+1$ می‌باشد و این ممکن نیست. بنابراین $(x_1 , x_2 , \ldots , x_p)$

یک پایهٔ F است. به این ترتیب قسمت (I) ثابت می‌گردد. به علاوه معلوم می‌شود که $\dim F = p \leqslant n$ است.

چنانچه $n = p$ باشد، بنابر ۸.۱۰.۸ (II) دستگاه $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ یک پایهٔ E است. پس هربردار E ترکیبی‌خطی از x_i ها می‌باشد و درنتیجه به F تعلق‌دارد. بنابراین $F = E$ خواهد بود.

۸.۱۰.۱۱- اگر E یک فضای برداری n بعدی باشد، هرزیر فضای برداری یک بعدی از E یک **خط** نامیده می‌شود. همچنین هرزیر فضای برداری دو بعدی را **صفحه** می‌گویند (هنگامی که E فضای معمولی به مبدأ معین O باشد، نام‌گذاری بالا باتعریف خط وصفحه معمولی، باتقریب خطها وصفحه های گذرنده برمبداء O، سازگار است). زیر فضاهای برداری $n - 1$ بعدی را **هیپرپلان** می‌نامند.

۸.۱۰.۱۲- درفضای معمولی E به مبداء O، بعد زیرفضاهای برداری ممکن‌است ۰، ۱، ۲ یا ۳ باشد. $\{0\}$ تنها زیر فضایی است‌که دارای بعد ۰ می‌باشد. زیرفضاهای یک بعدی خط‌های گذرنده بر O و زیر فضاهای‌دوبعدی صفحه های گذرنده بر O می‌باشند. تنها زیرفضای ۳ بعدی E خود فضای E است.

۸.۱۰.۱۳- قضیه - چنانچه فضای برداری E مجموع مستقیم زیر فضاهای برداری E_1 ، E_2 ، ... ، E_p و این زیر فضاها دارای بعد باپایان باشند، فضای E دارای بعد باپایان است و داریم:

$$\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 + \cdots + \dim E_p$$

زیرا بنابر شمارهٔ ۸.۸.۷ اجتماع یک پایهٔ E_1 ، یک پایهٔ E_2 ،... ، یک پایهٔ E_p تشکیل یک پایهٔ E را می‌دهد.

۸.۱۰.۱۴- قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی و F یک زیر فضای برداری p بعدی E باشد.

(I) – F دست‌کم دارای یک زیر فضای برداری متمم در E است.

(II) — هرزیر فضای برداری متمم F در E دارای بعد $n - p$ است.

(III) — فضای E/F دارای‌بعدباپایان است وداریم $\dim E/F = n - p$.

اثبات - فرض می‌کنیم $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ یک پایهٔ F باشد. بنابرشمارهٔ

۶.۹.۸ بردارهای x_{p+1} ، ... ، x_n از E وجود دارد به‌طوریکه $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک پایهٔ E باشد. همچنین بنابرشمارهٔ ۸.۸.۸ زیرفضای‌برداری E که به‌وسیلهٔ بردارهای x_{p+1} ، ... ، x_n پدید آید متمم F در E است و به این ترتیب قسمت (I) قضیه ثابت می‌شود. اثبات قسمت (II) از شمارهٔ ۱۳.۱۰.۸ و اثبات قسمت (III) از قسمت (II) و از شمارهٔ ۴.۵.۸ (II) نتیجه می‌شود.

۱۱.۸- رتبهٔ یک‌گسترش خطی

۱.۱۱.۸- قضیه - فرض می‌کنیم E_1 و E_2 دوفضای برداری با بعدهای باپایان روی هیأت K باشند. چنانچه u یک‌گسترش خطی E_1 در E_2 و N هستهٔ u باشد داریم :

$$\dim u(E_1) = \dim(E_1/N) = \dim E_1 - \dim N$$

اثبات ـ هنگام بررسی تجزیهٔ کانونیک u ، دیدیم که E_1/N و $u(E_1)$ ایزومرف هستند (۱۱.۴.۸) ، بنابراین دارای یک بعد می‌باشند. به علاوه می‌دانیم که :

$$\dim(E_1/N) = \dim E_1 - \dim N$$

[شمارهٔ ۱۴.۱۰.۸ (III)].

۲.۱۱.۸- مقدار مشترک $\dim u(E_1)$ و $\dim(E_1/N)$ و $\dim E_1 - \dim N$ **رتبهٔ** u نامیده می‌شود.

۳.۱۱.۸- قضیه - فرض می‌کنیم E_1 و E_2 دوفضای برداری با بعدهای باپایان ، u یک‌گسترش خطی E_1 در E_2 و ρ رتبه u باشد.

(I) — داریم $\rho \leqslant \dim E_1$ و $\rho \leqslant \dim E_2$.

(II) — برای اینکه داشته باشیم $\rho = \dim E_1$ بایاوبسنده است که u انژکتیو باشد.

(III) — برای اینکه داشته باشیم $\rho = \dim E_2$ بایاوبسنده است که u سورژکتیو باشد.

اثبات - فرض می‌کنیم N هستهٔ u باشد ، داریم :

$$\rho=\dim E_1-\dim N \leqslant \dim E_1$$

$$\rho=\dim u(E_1) \leqslant \dim E_2$$ (بنابر شمارهٔ ۸ . ۱۰ . ۱۰)

چون $\rho=\dim E_1-\dim N$ است ، شرط $\rho=\dim E_1$ هم‌ارز با $\dim N=0$ ویا (بنابر شمارهٔ ۸ . ۱۰ . ٦) هم‌ارز با $N=\{0\}$ می‌باشد. اما بنابر ۳ . ۵ . ۷ شرط اخیر بیان می‌کند که u انژکتیو است.

همچنین شرط $\rho=\dim E_2$ هم‌ارز با $\dim u(E_1)=\dim E_2$ و یا بنابر ۸ . ۱۰ . ۱۰ هم‌ارز با $u(E_1)=E_2$ می‌باشد. پس u سورژکتیو است.

۸ . ۱۱ . ٤- نتیجه ـ چنانچه E یک فضای برداری n بعدی و u یک گسترش خطی E در E باشد ، ویژگیهای زیر هم‌ارزند :

(I) — u یک اتومرفیسم E است.

(II) — u انژکتیو است .

(III) — u سورژکتیو است .

(IV) — رتبهٔ u برابر با n است .

(V) — یک گسترش خطی E در E که آن را v می‌نامیم ، وجود دارد بطوریکه :

$$uv=\mathrm{id}_E$$

(VI) — یک گسترش خطی E در E که آن را w می‌نامیم ، وجود دارد بطوریکه :

$$wu=\mathrm{id}_E$$

به‌علاوه اگر این شرطها برقرار باشند ، داریم $v=w=u^{-1}$

اثبات ـ بنابر ۸ . ۱۱ . ۳ داریم (II) $\Leftrightarrow$ (IV) و (III) $\Leftrightarrow$ (IV) پس (II) $\Leftrightarrow$ (III) $\Leftrightarrow$ (IV). به علاوه روشن است که (I) $\Longrightarrow$ (II) ، و چون (I) از (II) و (III) نتیجه می‌شود ، هم‌ارزی (I) ، (II) ، (III) و (IV) ثابت می‌گردد. همچنین بنابر شمارهٔ ۱ . ۸ . ٤ داریم (I) $\Longrightarrow$ (V) و (V) $\Longrightarrow$ (III) ونیزبنابرهمین شماره (I) $\Longrightarrow$ (VI) و (VI) $\Longrightarrow$ (II) پس (V) و (VI) هم‌ارز با هریک از چهار شرط اول هستند. اکنون با توجه به ۲ . ۵ . ۱٦ دیده می‌شود که اگراین شرطها برقرار باشند داریم $v=w=u^{-1}$.

۵.۱۱.۸- فرض می‌کنیم E_1 و E_2 فضاهای برداری و دارای بعد باپایان باشند. یک گسترش خطی E_1 در E_2 و یک پایهٔ $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ از E_1 رادرنظر می‌گیریم، و این گسترش خطی را با u نشان می‌دهیم.

رتبهٔ u برابر است با بعد زیر فضای برداری V از E_2 که به‌وسیلهٔ $u(e_1)$ ، ... ، $u(e_n)$ پدید می‌آید. زیرا بنابر ۱۲.۲.۸ ، زیرفضای V عبارت است از مجموعهٔ بردارهای

$$\lambda_1 u(e_1)+\cdots+\lambda_n u(e_n)=u(\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n)$$

یعنی $u(E_1)$ (شمارهٔ ۱.۸.۸). (اسکالرهای λ_1 ، ... ، λ_n متعلق به هیأت K وابسته به فضاهای E_1 و E_2 می‌باشند). همچنین می‌توان گفت که رتبهٔ u برابر است با شمارهٔ ماکزیمم بردارهایی که می‌توان ازبین بردارهای $u(e_1)$ ، $u(e_2)$ ، ... ، $u(e_n)$ انتخاب کرد به طوریکه نابستگی خطی داشته باشند. بنابر شمارهٔ ۹.۱۰.۸ این مطلب باآنچه که در بالا بیان کردیم هم‌ارز می‌باشد.

۱۲.۸- فضای برداری $\mathscr{L}(E, F)$

۱.۱۲.۸- فرض می‌کنیم E و F دوفضای برداری روی هیأت K باشند. پس‌از این ، مجموعهٔ گسترشهای خطی E در F را با $\mathscr{L}(E, F)$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم از مجموعهٔ $\mathscr{L}(E, F)$ یک فضای برداری بسازیم.

۲.۱۲.۸- **قانون جمع در $\mathscr{L}(E,F)$** - عنصرهای u و v متعلق به $\mathscr{L}(E, F)$ را درنظر می‌گیریم و گسترش E در F را ، که با $u+v$ می‌نماییم ، به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\forall x\in E \;,\; (u+v)(x)=u(x)+v(x)$$

به آسانی دیده می‌شود که $u+v\in\mathscr{L}(E, F)$. زیرا اگر x و y متعلق به E باشند داریم :

$$(u+v)(x+y)=u(x+y)+v(x+y)=u(x)+u(y)+v(x)+v(y)$$
$$(u+v)(x)=u(x)+v(x)$$
$$(u+v)(y)=u(y)+v(y)$$

پس :

$$(u+y)(x+y)=(u+v)(x)+(u+v)(y)$$

همچنین می‌توان درستی برابری $(u+v)(\lambda x)=\lambda(u+v)(x)$ را برای هراسکالر λ ثابت نمود.

۳.۱۲.۸- این قانون جمع از مجموعهٔ $\mathscr{L}(E, F)$ یک گروه جابجایی می‌سازد. زیرا اگر u ، v و w متعلق به $\mathscr{L}(E, F)$ و $x \in E$ باشد داریم:

$$[(u+v)+w](x)=(u+v)(x)+w(x)=(u(x)+v(x))+w(x)$$

$$[u+(v+w)](x)=u(x)+(v+w)(x)=u(x)+(v(x)+w(x))$$

پس:

$$[(u+v)+w](x)=[u+(v+w)](x)$$

در نتیجه خواهیم داشت $(u+v)+w=u+(v+w)$. به علاوه دیده می‌شود که داریم $u+v=v+u$. گسترش (خطی) E در F را، که هرعنصر E را به بردار صفر F بدل می‌کند، با 0 نشان می‌دهیم. دراین صورت برای هرعنصر u از $\mathscr{L}(E, F)$ داریم $u+0=0+u=u$، همچنین گسترش (خطی) E در F را، که هربردار x از E را به $-(u(x))$ بدل می‌کند، با $-u$ نشان می‌دهیم. دراین صورت:

$$u+(-u)=(-u)+u=0$$

۴.۱۲.۸- بار دیگر فرض می‌کنیم که گسترشهای u و v متعلق به $\mathscr{L}(E, F)$ باشند. چنانچه w یک گسترش خطی F در یک فضای برداری دیگر باشد داریم:

$$w(u+v)=wu+wv$$

زیرا برای هربردار x از E می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}[w(u+v)](x)&=w[(u+v)(x)]=w[u(x)+v(x)]\\&=w(u(x))+w(v(x))=(wu)(x)+(wv)(x)\\&=(wu+wv)(x)\end{aligned}$$

۵.۱۲.۸- چنانچه u و v متعلق به $\mathscr{L}(E, F)$ و w یک گسترش خطی یک فضای برداری دیگر G در E باشد، داریم $(u+v)(w)=uw+vw$.

زیرا برای هربردار x از G می‌توان نوشت:

$$[(u+v)w](x)=(u+v)(w(x))=u(w(x))+v(w(x))$$
$$=(uw)(x)+(vw)(x)=(uw+vw)(x)$$

۸.۱۲.۶- **ضرب $\mathscr{L}(E\,,F)$ در اسکالرها** - فرض می‌کنیم u متعلق به $\mathscr{L}(E\,,F)$ و λ متعلق به K باشد. گسترش E در F را، که با λu نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall x\in E\ ,\ (\lambda u)(x)=\lambda(u(x))$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که $\lambda u\in\mathscr{L}(E\,,F)$ است. اگر x و y متعلق به E باشند داریم:

$$(\lambda u)(x+y)=\lambda(u(x+y))=\lambda(u(x)+u(y))$$
$$=\lambda(u(x))+\lambda(u(y))=(\lambda u)(x)+(\lambda u)(y)$$

همچنین دیده می‌شود که برای هر اسکالر μ از K داریم $(\lambda u)(\mu x)=\mu((\lambda u)(x))$.

۸.۱۲.۷- آزمون برقراری اصول فضای برداری $\mathscr{L}(E\,,F)$ را به خواننده واگذار می‌کنیم.

۸.۱۲.۸- **حالت E=F** ـ بنابر آنچه که گذشت، مجموعهٔ $\mathscr{L}(E$ و $E)$ دارای یک ساختمان فضای برداری است. به‌علاوه این مجموعه دارای حاصلضرب $(uv)\to uv$ است (ترکیب گسترشها). اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که مجموعهٔ $\mathscr{L}(E\,,E)$ با قانون جمع و ضرب تعریف شده تشکیل یک **حلقه** می‌دهد. از طرفی بنابر شمارهٔ ۸.۱۲.۳ می‌دانیم که این مجموعه با قانون جمع یک گروه جابجایی است. از طرف دیگر بنابر شمارهٔ ۱.۷.۳ قانون ضرب دارای ویژگی انجمنی است. همچنین بنابر شماره‌های ۸.۱۲.۴ و ۸.۱۲.۵، در $\mathscr{L}(E\,,E)$ داریم:

$$u(v+w)=uv+uw\ \ ,\ \ (v+w)u=vu+wu$$

در حالت کلی حلقهٔ $\mathscr{L}(E\,,E)$ جابجایی نیست.

۸.۱۲.۹- حلقهٔ $\mathscr{L}(E\,,E)$ دارای یک عنصر یکه است: چنانچه گسترش همانی E را (که خطی است) با ۱ مشخص کنیم، آشکار است که برای هر گسترش u از $\mathscr{L}(E\,,E)$ داریم $1\cdot u=u\cdot 1=u$.

۸.۱۲.۱۰- اگر $\lambda\in K$ باشد، گسترش خطی $\lambda\cdot 1$ عبارت از گسترش $x\to\lambda x$

یعنی همسانی به نسبت λ می‌باشد. به آسانی می‌توان دید که برای هر گسترش u در $\mathscr{L}(E, E)$ داریم $(\lambda \cdot 1) \cdot u = u(\lambda \cdot 1) = \lambda u$ به علاوه :

$$(\lambda+\lambda') \cdot 1 = \lambda \cdot 1 + \lambda' \cdot 1 \quad , \quad (\lambda\lambda') \cdot 1 = (\lambda \cdot 1) \cdot (\lambda' \cdot 1)$$

به این دلیل است که برای سادگی اغلب λ را به جای $\lambda \cdot 1$ می‌نویسند.

۱۳.۸- دوآل یک فضای برداری

۱.۱۳.۸- تعریف - چنانچه E یک فضای برداری روی هیأت K باشد، هر گسترش خطی E در K ، یعنی هر گسترش f فضای E در K که دارای ویژگیهای زیر باشد ، یک فرم خطی روی E نامیده می‌شود :

$$\forall x , y \in E , f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

$$\forall x \in E , \forall \lambda \in K , f(\lambda x) = \lambda f(x) \tag{2}$$

۲.۱۳.۸- ازتعریف بالا نتیجه می‌شود که مجموعهٔ فرم های خطی روی E عبارت‌است از مجموعهٔ $\mathscr{L}(E, K)$. بنابر شمارهٔ ۷.۱۲.۸ این مجموعه دارای یک ساختمان فضای برداری است. این فضای برداری **دوآل** فضای E گفته می‌شود و آنرا با E^* نشان می‌دهند. یادآوری می‌شود (۲.۱۲.۸ و ۶.۱۲.۸) که اگر $f \in E^*$ ، $g \in E^*$ و $\lambda \in K$ باشد $f+g$ و λf به‌وسیلهٔ فرمولهای زیر معین می‌شوند :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \tag{3}$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \tag{4}$$

۳.۱۳.۸- تعریف دیگر فضای دوآل یک فضای برداری - اگر $x \in E$ و $f \in E^*$ باشد ،اسکالر $f(x)$ را به صورت $\langle f , x \rangle$ نیزنشان می‌دهند. بدین‌ترتیب فرمولهای (۱) ، (۲) ، (۳) و (۴) را می‌توان چنین نوشت :

$$\langle f , x+y \rangle = \langle f , x \rangle + \langle f , y \rangle$$

$$\langle f , \lambda x \rangle = \lambda \langle f , x \rangle$$

$$\langle f+g , x \rangle = \langle f , x \rangle + \langle g , x \rangle$$

$$\langle \lambda f , x \rangle = \lambda \langle f , x \rangle$$

پس برای اینکه دو عنصر f و f' از E^* با یکدیگر برابر باشند بایاوبسنده است که برای هربردار x از E داشته باشیم $<f, x> = <f', x>$.

۸.۱۳.۴- یک پایهٔ ثابت $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ از فضای E درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم کلیهٔ فرمهای خطی را روی فضای E بنا کنیم.

n اسکالر α_1 ، ... ، α_n اختیار می‌کنیم و برای هربردار x از E به مؤلفه‌های λ_1 ، ... ، λ_n قرار می‌دهیم :

$$f(x) = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n$$

روشن است که f یک فرم خطی روی E می‌باشد و داریم :

$$f(e_1) = \alpha_1 , \ldots , f(e_n) = \alpha_n$$

به این ترتیب به هرعنصر $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ از K^n یک عنصر f از E^* وابسته می‌شود. می‌خواهیم نشان دهیم که هرفرم خطی روی E به روش بالا بدست می‌آید. به بیان دقیقتر :

۸.۱۳.۵- قضیه ـ گسترش K^n در E^* (که در بالا معین گردید) یک ایزومرفیسم فضای برداری K^n روی فضای برداری E^* می‌باشد.

اثبات :

۱- **گسترش نامبرده انژکتیو است** : فرض می‌کنیم دوعنصر $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ و $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ از K^n یک فرم خطی f را معین کنند. بنابر ۸.۱۳.۴ داریم $f(e_1) = \alpha_1$ و همچنین $f(e_1) = \alpha'_1$ پس باید $\alpha_1 = \alpha'_1$ باشد. به همین ترتیب این برابری را می‌توان برای اندیسهای دیگر ثابت کرد.

۲- **گسترش نامبرده سورژکتیو است** : فرض می‌کنیم $f \in E^*$ و قرار می‌دهیم $\alpha_1 = f(e_1)$ ، ... ، $\alpha_n = f(e_n)$ اگر f' فرم خطی وابسته به $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ باشد داریم $f'(e_1) = \alpha_1 = f(e_1)$ ، ... ، $f'(e_n) = \alpha_n = f(e_n)$ پس $f = f'$ (بنابر شمارهٔ ۸.۸.۶ (I)).

۳- **گسترش نامبرده خطی است** : چنانچه فرمهای f ، g و h را که به‌ترتیب به وسیلهٔ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ، $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ و :

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)+(\beta_1, \ldots, \beta_n)=(\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_n+\beta_n)$$

معین شده‌اند در نظر بگیریم ، برای هراندیس i داریم :

$$h(e_i)=\alpha_i+\beta_i=f(e_i)+g(e_i)=(f+g)(e_i)$$

پس بنابر شمارهٔ ۶.۸.۸ (I) خواهیم داشت $h=f+g$. همچنین به آسانی دیده می‌شود که به دستگاه $(\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n)$ فرم λf وابسته می گردد.

۶.۱۳.۸- نتیجه - اگر بعد فضای برداری E برابر با n باشد ، بعد فضای برداری E^* نیز n خواهد بود.

اثبات این مطلب از شماره‌های ۵.۱۰.۷ و ۵.۱۳.۸ نتیجه می‌شود.

۷.۱۳.۸- قضیه ـ فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی K و $(e_1, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ E باشد. تنها یک پایهٔ $(f_1, \ldots, f_n)$ از E^* وجود دارد به طوریکه برای هریک از اندیسهای i و j داریم $<f_i, e_j>=\delta_{ij}$

که در آن

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 0, & (\text{برای } i\neq j) \\ 1, & (\text{برای } i=j) \end{cases}$$

(δ_{ij} را «نشان کرونکر» گویند).

اثبات:

۱- وجود پایهٔ $(f_1, \ldots, f_n)$: بار دیگر ایزومرفیسم K^n روی E^* را که در شماره‌های ۴.۱۳.۸ و ۵.۱۳.۸ بررسی کردیم درنظر می گیریم. این ایزومرفیسم پایهٔ کانونیک $(e_1, \ldots, e_n)$ از K^n را به یک پایهٔ $(f_1, \ldots, f_n)$ از E^* بدل می کند. چون e_1 همان عنصر $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ از K^n می‌باشد ، بنابر شمارهٔ ۴.۱۳.۸ برای عنصر وابسته به آن یعنی f_1 از E^* داریم :

$$f_1(e_1)=1, f_1(e_2)=0, f_1(e_3)=0, \ldots, f_1(e_n)=0$$

به همین ترتیب خواهیم داشت $f_i(e_j)=\delta_{ij}$.

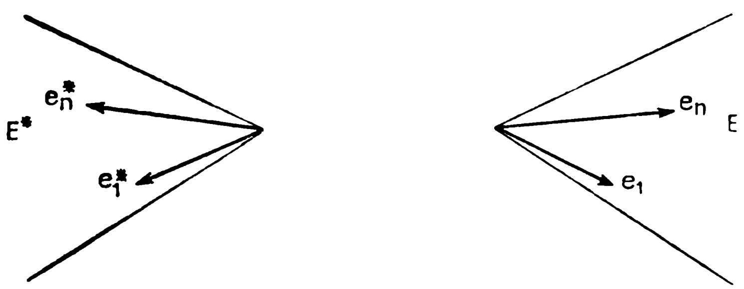
۲- یکتایی پایهٔ $(f_1, \ldots, f_n)$: بنابر شمارهٔ ۶.۸.۸ (I) برای یک اندیس ثابت i فرمولهای :

$$<f_i\, e_1> = \delta_{i1} \;,\; <f_i\,, e_2> = \delta_{i2}\,,\, \ldots \,,\; <f_i\,, e_n> = \delta_{in}$$

تنها یک f_i را مشخص می‌کنند.

۸.۱۳.۸- پایهٔ $(f_1\,, f_2\,, \ldots\,, f_n)$ که درشمارهٔ ۷.۱۳.۸ معین گردید **پایهٔ دوآل** پایهٔ $(e_1\,, e_2\,, \ldots\,, e_n)$ نامیده می‌شود وآنرا به‌صورت $(e_1^*\,, e_2^*\,, \ldots\,, e_n^*)$ نشان می‌دهند. بنابراین داریم :

$$<e_i^*\,,\; e_j> = \delta_{ij} \tag{۵}$$



شکل ۳۱

۹.۱۳.۸- از فرمول (۵) و فرمولهای شمارهٔ ۳.۱۳.۸ فرمول زیر بدست می‌آید ، که در آن اسکالرهای λ_1 ، ... ، λ_n و μ_1 ، ... ، μ_n دلخواه هستند :

$$\begin{aligned} &<\mu_1 e_1^* + \mu_2 e_2^* + \cdots + \mu_n e_n^*\,,\; \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n> \\ &= \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \cdots + \lambda_n\mu_n \end{aligned} \tag{۶}$$

۱۰.۱۳.۸- **قضیه - فرض می‌کنیم** $(e_1\,, e_2\,, \ldots\,, e_n)$ **یک پایهٔ E و** $(e_1^*\,, e_2^*\,, \ldots\,, e_n^*)$ **پایهٔ دوآل آن از** E^* **باشد .**

(I) – **اگر** $f \in E^*$ **باشد ، مؤلفه‌های f نسبت به** $(e_1^*\,, \ldots\,, e_n^*)$ **عبارتند از :**

$$<f\,, e_1>\,,\, \ldots\,,\, <f\,, e_n>$$

(II) – **اگر** $x \in E$ **باشد، مؤلفه‌های x نسبت به** $(e_1\,, \ldots\,, e_n)$ **عبارتند از :**

$$<e_1^*\,, x>\,,\, \ldots\,,\, <e_n^*\,, x>

اثبات - چنانچه قرار دهیم $x=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$ و $f=\mu_1 e_1^*+\cdots+\mu_n e_n^*$ داریم:

$$<f\,,\ e_i> = <\sum_{j=1}^{n}\mu_j e_j^*\,,\ e_i> = \sum_{j=1}^{n}\mu_j\delta_{ij}=\mu_i$$

$$<e_j^*\,,\ x> = <e_j^*\,,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i> = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{ij}=\lambda_j$$

۱۱.۱۳.۸- **دوآل K^n**-فضای برداری K^n دارای یک پایهٔ کانونیک $(e_1,\ldots,e_n)$ است. قضیهٔ ۵.۱۳.۸ یک ایزومرفیسم کانونیک بین K^n و $(K^n)^*$ برقرار می‌کند که بنابر اثبات قضیهٔ ۷.۱۳.۸ ، این ایزومرفیسم پایهٔ $(e_1\,,\ldots,\,e_n)$ را به پایهٔ دوآل آن یعنی $(e_1^*\,,\ldots,\,e_n^*)$ بدل می‌کند. **به واسطهٔ این ایزومرفیسم معمولاً K^n و $(K^n)^*$ را یکی می‌گیرند.** بنابراین پایهٔ $(e_1\,,\ldots,\,e_n)$ با پایهٔ دوآل آن یکی می‌شود. بنابرشمارهٔ ۴.۱۳.۸ فرم‌خطی‌ای که به‌وسیلهٔ عنصر $(\mu_1\,,\ldots,\,\mu_n)\in K^n$ روی K^n معین می‌شود عبارت‌است از فرم $(\lambda_1\,,\ldots,\,\lambda_n)\to\lambda_1\mu_1+\cdots+\lambda_n\mu_n$. پس بنابر یکسانی $(K^n)^*$ و K^n داریم:

$$<(\mu_1\,,\mu_2\,,\ldots,\,\mu_n)\,,\ (\lambda_1\,,\lambda_2\,,\ldots,\,\lambda_n)> = \lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\cdots+\lambda_n\mu_n$$

باید توجه‌داشت که برای یک فضای برداری n بعدی دلخواه E یک‌چنین ایزومرفیسم E^* روی E وجود ندارد (بااینکه E و E^* بنابر ۶.۱۳.۸ ایزومرف هستند). ساختمان این ایزومرفیسم ، برای $E=K^n$ ، تنها به واسطهٔ وجود پایهٔ کانونیک K^n امکان‌پذیر است.

۱۲.۱۳.۸- فرض می‌کنیم E فضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی باشد. چنانچه $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ دو بردار از E باشند تعریف حاصل‌ضرب اسکالر $\vec{V}\cdot\vec{V'}$ را می‌شناسیم و می‌دانیم که اگر $\vec{V_0}$ یک بردار ثابت از E باشد ، گسترش $\vec{V}\to\vec{V_0}\cdot\vec{V}$ یک‌فرم خطی روی E است. یادآور می‌شویم که اگر مؤلفه‌های $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ نسبت به یک پایهٔ متعامد به‌ترتیب $(\xi\,,\eta\,,\zeta)$ و $(\xi'\,,\eta'\,,\zeta')$ باشد، برای حاصل‌ضرب اسکالر $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ داریم

باتوجه به مطالب بالا و بنابر ۸ . ۱۳ . ۵ نتیجه می‌شود که $\vec{V} \cdot \vec{V'} = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'$ اگر f یک فرم خطی روی E باشد تنها یک بردار $\vec{V}_\circ \in E$ وجود دارد به طوریکه برای هربردار $\vec{V}$ از E داشته باشیم $f(\vec{V}) = \vec{V}_\circ \cdot \vec{V}$.

۸ . ۱۴ ـ بیدوآل یک فضای برداری

۸ . ۱۴ . ۱ ـ دوآل فضای برداری E^* را **بیدوآل** فضای برداری E می‌نامندوبا E^{**} نشان می‌دهند.

۸ . ۱۴ . ۲ ـ می‌خواهیم یک گسترش E در E^{**}، که دارای اهمیت ویژه‌ای است، تعریف کنیم. اگر $x_\circ \in E$ باشد، گسترش $f \to f(x_\circ)$ فضای E^* در K را درنظر می‌گیریم. چنانچه این گسترش را که به $x_\circ$ بستگی دارد با $\overline{x_\circ}$ نشان دهیم، بنا به تعریف برای هرعنصر f از E^* داریم:

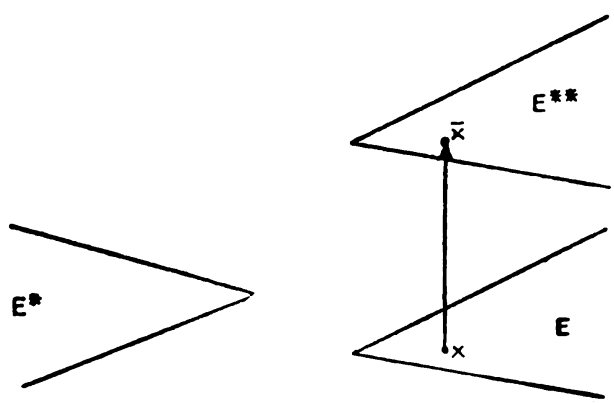
$$\overline{x_\circ}(f) = f(x_\circ) \tag{1}$$

اگر $f_1 \in E^*, f_2 \in E^*$ و $\lambda \in K$ باشد بنابر(۱) و شمارهٔ ۸ . ۱۳ . ۲ می‌توان چنین نوشت:

$$\overline{x_\circ}(f_1+f_2) = (f_1+f_2)(x_\circ) = f_1(x_\circ) + f_2(x_\circ) = \overline{x_\circ}(f_1) + \overline{x_\circ}(f_2),$$

$$\overline{x_\circ}(\lambda f_1) = (\lambda f_1)(x_\circ) = \lambda(f_1(x_\circ)) = \lambda(\overline{x_\circ}(f_1))$$

بنابراین $\overline{x_\circ}$ یک فرم خطی روی E^* یعنی یک عنصر از E^{**} می‌باشد. به این ترتیب به هرعنصر x از E عنصر $\overline{x}$ از E^{**} وابسته می‌شود.



شکل ۳۲

۸ . ۱۴ . ۳ - می‌خواهیم نشان دهیم که گسترش $x \to \bar{x}$ خطی است . چنانچه x_1 و x_2 متعلق به E باشند بنابر(۱) وشماره‌های ۸ . ۱۳ . ۱ و ۸ . ۱۳ . ۲ برای هر گسترش f متعلق به E^* داریم :

$$\overline{(x_1+x_2)}(f)=f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)=\bar{x}_1(f)+\bar{x}_2(f)$$

$$=(\bar{x}_1+\bar{x}_2)(f)$$

پس $\overline{x_1+x_2}=\bar{x}_1+\bar{x}_2$. همچنین می‌توان ثابت کرد که برای هر بردار $x\in E$ و هر اسکالر $\lambda\in K$ داریم $\overline{\lambda x}=\lambda\bar{x}$ بنابراین خطی بودن گسترش $x \to \bar{x}$ اثبات می گردد .

۸ . ۱۴ . ۴ - قضیه - اگر فضای برداری E دارای بعد با پایان باشد ، گسترش $x \to \bar{x}$ یك ایزومرفیسم E روی E^{**} است .

اثبات - می‌دانیم که گسترش $x \to \bar{x}$ خطی است ، ثابت می کنیم که این گسترش انژکتیو است . به این منظور نشان می‌دهیم که هستهٔ N آن برابر با $\{0\}$ است . چنانچه $x_1\in N$ و $x_1 \neq 0$ باشد، یک پایهٔ $(x_1 , x_2 , \cdots , x_n)$ در E وجود دارد که با x_1 شروع می‌شود (۸ . ۹ . ۶) . اگر $(x_1^* , x_2^* , \cdots , x_n^*)$ پایهٔ دوآل این پایه در E^* باشد بنابه تعریف $\bar{x}_1$ داریم $\bar{x}_1(x_1^*)=x_1^*(x_1)$ پس بنابر شمارهٔ ۸ . ۱۳ . ۸، ۱ $=\bar{x}_1(x_1^*)$ و در نتیجه $\bar{x}_1 \neq 0$ خواهد شد واین ممکن نیست زیرا $x_1\in N$. پس $x_1=0$ می‌باشد و از آنجا $N=\{0\}$ یعنی گسترش انژکتیو است . بنابراین گسترش $x \to \bar{x}$ یک ایزومرفیسم E روی یک زیر فضای برداری E' از E^{**} می‌باشد . از اینجا نتیجه می‌شود که $\dim E'=\dim E$. اما بنابر ۸ . ۱۳ . ۶ داریم $\dim E=\dim E^*$ و نیز $\dim E^*=\dim E^{**}$. پس $\dim E'=\dim E^{**}$ و باتوجه به شمارهٔ ۸ . ۱۰ . ۱۰ (III) خواهیم داشت $E'=E^{**}$ یعنی گسترش سورژکتیو است.

۸ . ۱۴ . ۵ - به‌طور کلی اگر بعد فضای E با پایان باشد ، E و E^{**} را به وسیلهٔ ایزومرفیسم $x \to \bar{x}$ یکی می گیرند. به این ترتیب با درنظر گرفتن فرمول (I) شمارهٔ ۸ . ۱۴ . ۲ ، هرعنصر x از E به وسیلهٔ فرمول $x(f)=f(x)$ به‌صورت یک فرم خطی روی E^* درمی‌آید. بنابراین $<f , x>$ با $<x , f>$ یکی خواهد بود و می‌توان نوشت :

$$f(x)=x(f)=<f , x>=<x , f>$$

دو آل‌فضای E،فضای E^*،و دو آل E^* فضای E می‌باشد. به‌این‌ترتیب‌درفضا های برداری که بعد با پایان دارند فضا و دو آل آن دارای نقشهای کاملاً قرینه می‌باشند. پس از این از فضای بیدوآل یک فضا گفتگو نخواهیم کرد.

برای این‌که ثابت کنیم دو عنصر x و x' از E برابر هستند کافی است نشان‌دهیم که برای‌هرعنصر f از E^* داریم $<f , x> = <f , x'>$. این مطلب نیزازشمارۀ ۸ . ۱۳ . ۳ با تعویض نقشهای E و E^* نتیجه می گردد.

۸ . ۱٤ . ٦ - **قضیه- اگر E یک‌فضای برداری با بعدبا پایان ،$(e_1 , \cdots ,e_n)$ یک پایۀ E و $(e_1^* , \cdots , e_n^*)$ پایۀدو آل آن در E^* باشد ، پایۀ دوآل پایۀ $(e_1^* , \cdots , e_n^*)$ همان پایۀ $(e_1 , \cdots e_n)$ است .**

اثبات ـ بردارهای‌پایۀ$(e_1' , \cdots , e_n')$ ،دوال $(e_1^* , \cdots , e_n^*)$ ، بردارهایی از $E = E^{**}$می‌باشند که‌بنابر ۸ . ۱۳ . ۸ به وسیلۀ برابری‌های $<e_i' , e_j^*> = \delta_{ij}$ مشخص می‌شوند. چون داریم $<e_i , e_j^*> = \delta_{ij}$ پس خواهیم داشت $e_i' = e_i$.

۸ . ۱۵ - تعامد

۸ . ۱۵ . ۱ - **تعریف - چنانچه E یک‌فضای برداری ، x یک عنصر از E و x' یک عنصر از E^* باشد ، x و x' را متعامد (یا عمود بر یکدیگر) می‌گویندهرگاه $<x , x'> = 0$ باشد .**

اگر M یک‌بخش از E و M' یک‌بخش از E^* باشد ، گویند که Mو M' متعامدند چنانچه هر بردار از M به هر بردار از M' عمود باشد .

۸ . ۱۵ . ۲ - **مثال**- فرض‌می‌کنیم $E = K^n$ باشد (دراین حالت E^* با K^nیکی می گردد) . دو عنصر$x = (\lambda_1 , \lambda_2 , \cdots , \lambda_n)$ و $x' = (\lambda_1' , \lambda_2' , \cdots , \lambda_n')$ ازK^n بریکدیگرعمودندهرگاه داشته‌باشیم$\lambda_1\lambda_1' + \lambda_2\lambda_2' + \cdots + \lambda_n\lambda_n' = 0$(شمارۀ ۸ . ۱۳ . ۱۱)

۸ . ۱۵ . ۳ - **مثال**- فرض می‌کنیم E فضای معمولی به مبداء O باشد . سه‌بردار $\vec{e_1}$ ، $\vec{e_2}$ ، $\vec{e_3}$ را ، که درازای هریک ازآنها برابر با یک بوده و دو بدو برهم عمودند ، یک پایه از E می گیریم . یک بردار $\overrightarrow{OM}$ از E به وسیلۀ سه مؤلفه‌اش معین می‌شود به‌طوری که E با R^3 یکی می‌شود . همچنین E^* بر R^3 منطبق می گردد. بنا به تعریف

پیش،دو عنصر $(\lambda_۳ , \lambda_۲ , \lambda_۱)$ و $(\lambda'_۳ , \lambda'_۲ , \lambda'_۱)$ از $E=\mathbf{R}^۳$ متعامدند اگر :

$$\lambda_۱\lambda'_۱+\lambda_۲\lambda'_۲+\lambda_۳\lambda'_۳=۰$$

باشد (۸ . ۱۵ . ۲). اما بستگی بالا همان شرط عمود بودن دو بردار به مؤلفه‌های $(\lambda_۱,\lambda_۲,\lambda_۳)$ و $(\lambda'_۳ , \lambda'_۲ , \lambda'_۱)$ در هندسهٔ معمولی است. از اینجا انگیزهٔ کاربرد کلمهٔ « متعامد » در تعریف شمارهٔ ۸ . ۱۵ . ۱ روشن می‌گردد.

۸ . ۱۵ . ۴ - قضیه - چنانچه $M\subset E$ و $M'\subset E^*$ دو بخش متعامد باشد، هر ترکیب خطی از عنصرهای M به هر ترکیب خطی از عنصرهای M' عمود است.

اثبات - اگر عنصرهای $x_۱$ ، $x_۲$ ، ... ، x_n متعلق به M ، عنصرهای $x'_۱$ ، $x'_۲$ ، ... ، x'_p متعلق به M' و $\lambda_۱$ ، $\lambda_۲$ ، ... ، λ_n ، $\lambda'_۱$ ، $\lambda'_۲$ ، ... ، λ'_p اسکالرباشند، داریم :

$$< \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i x_i \ , \ \sum_{j=۱}^{p} \lambda'_j x'_j > = \sum_{i=۱}^{n} \ \sum_{j=۱}^{p} \lambda_i \lambda'_j < x_i \ , x'_j > =۰$$

زیرا اندیسهای i و j هرچه باشند داریم $<x_i \ , \ x'_j>=۰$.

۸ . ۱۵ . ۵ نتیجه - چنانچه $M\subset E$ باشد ، مجموعهٔ بردارهایی از E^* که بر M عمودند یک زیر فضای برداری N از E^* تشکیل می‌دهند.

زیرا اگر دو عنصر $x'\in E^*$ و $y'\in E^*$ بر M عمودباشند و λ یک اسکالردلخواه باشد ، بنابر شمارهٔ ۸ . ۱۵ . ۴ عنصرهای $x'+y'$ و $\lambda x'$ بر M عمودند .

۸ . ۱۵ . ۶ - مجموعهٔ N شمارهٔ ۸ . ۱۵ . ۵ را **زیر فضای برداری عمود بر M** در E^* می‌نامند و با $M^{\perp}$ نمایش می‌دهند .

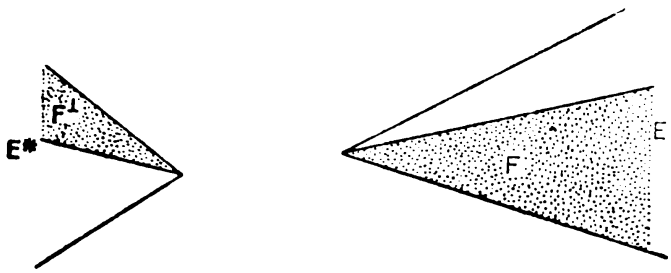
مثلاً فضای برداری $E^{\perp}$ تنها عنصر $\{۰\}$ و فضای برداری $\{۰\}^{\perp}$ خود فضای E^* است .

۸ . ۱۵ . ۷ - بنابرشمارهٔ ۸ . ۱۵ . ۴ اگر بجای M زیر فضای برداری پدید آمده به‌وسیلهٔ M را قرار دهیم $M^{\perp}$ تغییر نمی‌کند.

۸ . ۱۵ . ۸ - اگر M' بخشی از E^* باشد ، زیر فضای برداری $M'^{\perp}$ از E نیز که

بر M' عمود است به‌روش بالا تعریف می‌گردد ، وچنانچه بجای M' زیر فضای برداری‌پدید آمده بوسیلهٔ M' را قرار دهیم ، زیر فضای برداری $M'^{\perp}$ تغییر نمی‌کند .

۸ . ۱۰ . ۹ - قضیه ـ اگر E یک فضای برداری n بعدی و F یک‌زیر فضای برداری p بعدی از E باشد ، بعد $F^{\perp}$ برابر است با $n-p$.



شکل ۳۲

اثبات - چنانچه $(e_1 , \dots , e_p)$ یک پایهٔ F باشد بنابر شمارهٔ ۸ . ۹ . ۶ بردارهای $e_{p+1} , \dots , e_n$ از E وجود دارند به طوری‌که $(e_1 , e_2 , \dots , e_n)$ یک پایهٔ E باشد . اگرپایهٔ $(e_1^* , e_2^* , \dots , e_n^*)$ ازفضای دوال E^* را درنظر بگیریم ، برای این‌که بردار $\mu_1 e_1^* + \dots + \mu_n e_n^*$ از E^* بر F عمود باشد (بنابر شمارهٔ ۸ . ۱۰ . ۴) بایاوبسنده‌است که‌این بردار بر $e_1 , e_2 , \dots , e_p$ عمودباشد ؛ به عبارت دیگرداشته‌باشیم:

$$<\mu_1 e_1^* + \dots + \mu_n e_n^* , e_j> = 0 , \quad j = 1 , 2 , \dots , p$$

چون بنابر شمارهٔ ۸ . ۱۳ . ۹ داریم $<\mu_1 e_1^* + \dots + \mu_n e_n^* , e_j> = \mu_j$ پس $E^{\perp}$ مجموعهٔ ترکیب‌های خطی $e_{p+1}^* , \dots , e_n^*$ است. بنابراین $(e_{p+1}^* , \dots , e_n^*)$ یک پایهٔ $F^{\perp}$ می‌باشد و قضیه بر قرار است .

۸.۱۰ . ۱۰ - اگر E یک فضای برداری n بعدی و G یک فضای برداری p بعدی از E^* باشد ، بعد زیر فضای برداری $G^{\perp}$ از E برابر است‌با $n-p$. این مطلب ازشمارهٔ ۸. ۱۰ .۹ (با تعویض نقشهای E و E^*) نتیجه می‌شود .

۸ . ۱۰ . ۱۱ - قضیه - چنانچه E یک فضای برداری‌با بعد با پایان و F یک زیر فضای برداری از E باشد ، داریم $(F^{\perp})^{\perp} = F$

اثبات - هربردار از F بر $F^{\perp}$ عموداست، پس به $(F^{\perp})^{\perp}$ تعلق دارد یعنی $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.
اگر قراردهیم $\dim E = n$ و $\dim F = p$ ، بنابر شمارهٔ ۸. ۱۰ . ۹ خواهیم داشت $\dim F^{\perp} = n - p$. که با توجه به شمارهٔ ۸. ۱۰ . ۱۰ نتیجه می‌شود :

$$\dim (F^{\perp})^{\perp} = n-(n-p) \quad \text{ویا} \quad \dim (F^{\perp})^{\perp} = \dim F$$

اکنون چنانچه قسمت (III) قضیه ۸ . ۱۰ . ۱۰ را در مورد F و $(F^{\perp})^{\perp}$ بکاربریم خواهیم داشت :

$$F = (F^{\perp})^{\perp}$$

۸ . ۱۰ . ۱۲ ـ اگر E یک فضای برداری با بعد با پایان و F' یک زیر فضای برداری از E^* باشد داریم $(F'^{\perp})^{\perp} = F'$. زیرا کافی است که در شمارهٔ ۸ . ۱۰ . ۱۱ نقش فضاهای E و E^* را با یکدیگر عوض کنیم .

۸ . ۱۰ . ۱۳ ـ فرض می کنیم E یک فضای برداری با بعد با پایان، S مجموعهٔ زیر فضاهای برداری E و S' مجموعهٔ زیر فضاهای برداری E^* باشد. گسترش $F \to F^{\perp}$ یک گسترش دوسویی S روی S' است . زیرا اگر برای هر F از S و برای هر F' از S' قرار دهیم $\Phi(F) = F^{\perp}$ و $\Phi'(F') = F'^{\perp}$ ، بنابر شماره‌های ۸ . ۰ . ۱۱ و ۸ . ۰ . ۱۲ به‌ترتیب خواهیم داشت $\Phi' \circ \Phi = id_S$ و $\Phi \circ \Phi' = id_{S'}$.

اکنون برای اثبات دوسویی‌بودن گسترش بالا کافی است قضیهٔ ۱ . ۸ . ۵ رابکاربریم .

۸ . ۱۰ . ۱٤ - قضیه ـ فضای برداری n بعدی E را در نظر می‌گیریم:

(I) ـ چنانچه f_1 ، f_2 ، ... ، f_p فرمهایی خطی روی E و F' زیر فضای برداری E^* پدید آمده به وسیلهٔ آنها باشد ، مجموعهٔ بردارهای x از E که در برابری‌های $f_1(x) = 0$ ، $f_2(x) = 0$ ، ... ، $f_p(x) = 0$ صدق می‌کنند یك زیر فضای برداری F از E است و داریم $F = F'^{\perp}$.

(II) ـ چنانچه g_1 ، g_2 ، ... ، g_q فرمهای خطی روی E و G مجموعهٔ بردارهای x از E باشد که در برابری‌های $g_1(x) = 0$ ، $g_2(x) = 0$ ، ... ، $g_q(x) = 0$ صدق می‌کنند ، برای این که داشته باشیم $F = G$ بایا و بسنده است که هر g_i یك ترکیب خطی f_1 ، f_2 ، ... ، f_p وهر f_i یك ترکیب خطی g_1 ، g_2 ، ... ، g_q باشد .

(III) ـ اگر f_1 ، f_2 ، ... ، f_p نابستگی خطی داشته باشند داریم :

$$\dim F = n - p$$

اثبات - برای $x \in E$ داریم :

$(x$ بر f_1 ، f_2 ، ... ، f_p عمود است$) \iff f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_p(x)=0$

x بر F' عمود است (بنابر شمارهٔ ۸ . ۱۰ . ٤) $\iff$

بنابراین مجموعهٔ عنصرهای x که در معادله های $f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_p(x)=0$

صدق می‌کنند همان $F'^{\perp}$ است . به این ترتیب (I) ثابت می‌گردد.

اگر G' زیر فضای برداری E^* پدید آمده بوسیلهٔ g_1 ، g_2 ، ... ، g_q باشد ، مجموعهٔ G که در (II) معین گردید همان $G'^{\perp}$ است . بنا برشمارهٔ ۸ . ۱۰ . ۱۳، برای این‌که داشته باشیم $F=G$ بایاوبسنده‌است که $F'=G'$ باشد ، یعنی مجموعهٔ ترکیبهای خطی f_j بر مجموعهٔ ترکیبهای خطی g_i منطبق گردد و این اثبات (II) را میرساند.

چنانچه f_1 ، f_2 ، ... ، f_p نابستگی خطی داشته باشند ، $(f_1, f_2, \cdots, f_p)$ یک پایهٔ F' است. پس داریم $\dim F'=p$ و بنابرشمارهٔ ۸ . ۱۰ . ۱۰ ، $\dim E'^{\perp}=n-p$.

۸ . ۱۰ . ۱۰ - به ویژه هرگاه f یک فرم خطی مخالف باصفر روی E باشد مجموعهٔ x های E که در معادلهٔ $f(x)=0$ صدق می‌کنند یک هیپرپلان H از E است (شمارهٔ ۸ . ۱۰ . ۱۱) . چنانچه g یک فرم خطی دیگر مخالف با صفر روی E باشد ، هیپرپلان به معادلهٔ $g(x)=0$ با H یکی است اگر و تنها اگر f و g متناسب باشند .

۸ . ۱۰ . ۱٦ - مثلاً مجموعهٔ نقاط (ξ, η, ζ) از $\mathbf{R}^3$ که در معادلهٔ :

$$\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=0$$

صدق‌می‌کنند (که‌در آن هرسه شمار حقیقی ثابت α و β و γ با یکدیگرصفرنیستند) ، یک صفحهٔ P گذرنده برمبدأ می‌باشد. چنانچه α' و β' و γ' سه شمار حقیقی ثابت‌دیگرباشند که باهم صفر نیستند، برای اینکه صفحهٔ P' بمعادلهٔ $\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta=0$ برصفحهٔ P منطبق گردد با یاوبسنده است که (α, β, γ) و $(\alpha', \beta', \gamma')$ متناسب باشند ، به عبارت دیگر یک شمار حقیقی λ بتوان یافت به‌طوری که داشته باشیم $\alpha'=\lambda\alpha$ و $\beta'=\lambda\beta$ و $\gamma'=\lambda\gamma$ (برای روشن شدن بیشتر این مطلب به درس هندسه رجوع شود).

اگر سه شمار α و β و γ باهم صفرباشند ، معادلهٔ $\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=0$ معادلهٔ یک صفحه نیست ، زیرا هر نقطهٔ (ξ, η, ζ) از $\mathbf{R}^3$ در آن صدق می‌کند.

۸ . ۱۰ . ۱۷ - هنگامی که سه‌شمار حقیقی‌و ثابت α_1 و β_1 و γ_1 وهمچنین‌سه‌شمار

حقیقی و ثابت α_2 و β_2 و γ_2 با یکدیگر صفر نباشند، مجموعهٔ نقاط (ξ, η, ζ) از $\mathbf{R}^3$ (این مجموعه را با D نشان می‌دهیم) که در معادله های:

$$\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta=0 \qquad (1)$$

$$\alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2\zeta=0 \qquad (2)$$

صدق می‌کنند، برشگاه‌دوصفحه P_1و P_2 است که به ترتیب با معادله های(۱)و(۲) معین شده‌اند. اگر $P_1 \neq P_2$ باشد، یعنی‌چنانچه $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ و $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ متناسب نباشد،Dیک‌خط گذرنده بر مبدأ است. هرگاه $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ و $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ متناسب باشند داریم $P_1=P_2=D$.

صورتهای دیگری برای نمایش D به وسیلهٔ دو معادلهٔ خطی وجود دارد. مثلاً معادله های:

$$(\alpha_1+\alpha_2)\xi+(\beta_1+\beta_2)\eta+(\gamma_1+\gamma_2)\zeta=0$$

$$\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta=0$$

نیز مجموعهٔ D را معین می‌کنند.

این مثال‌حالت‌ویژه‌ای ازشمارهٔ ۸. ۱۵. ۱٤ می‌باشد که در آن $n=3$ و $p=2$ است.

۸. ۱۵. ۱۸ - اکنون قضیهٔ زیر را که وارون قضیهٔ شمارهٔ ۸. ۱۵. ۱٤ است ثابت می‌کنیم.

قضیه - فرض می‌کنیم E یك فضای برداری n بعدی و F یك زیر فضای برداری از E باشد.

(I) - چنانچه f_1 ، f_2 ، ... ، f_p عنصرهایی از E^* باشند که زیر فضای برداری $F^{\perp}$ ازE^* را پدیدمی‌آورند، F مجموعهٔ بردارهایx متعلق به E است که‌در معادله‌های$f_1(x)=0$ ، $f_2(x)=0$ ، ... ، $f_p(x)=0$ صدق می‌کنند.

(II) - اگر $\dim F=q$ باشد، f_1 ، f_2 ، ... ، f_{n-q} که درآن $n-q=p$ است، نابستگی خطی دارند.

اثبات - بنابر ۷. ۱۵. ۱٤ مجموعهٔ x های E که درمعادله های $f_1(x)=0$ ، $f_2(x)=0$ ، ... ، $f_p(x)=0$ صدق می‌کنند همان $(F^{\perp})^{\perp}$ است. امابنابر۸. ۱۵. ۱۱ داریم $(F^{\perp})^{\perp}=F$.

بنابر ۸ . ۱۰ . ۹ اگر $\dim F=q$ باشد $\dim F^{\perp}=n-q$ است. چنانچه یک پایهٔ $F^{\perp}$ را $(f_1, f_2, \cdots, f_p)$ بگیریم خواهیم داشت $p=n-q$ و روشن است که f_1 ، f_2 ، $\cdots$ ، f_p نابستگی خطی دارند .

۸ . ۱۰ . ۱۹ - به‌ویژه هرگاه F یک هیپرپلان از E باشد ، یک فرم خطی f (مخالف باصفر) روی E یافت می‌شود به‌طوری که F مجموعهٔ xهای E باشد که درمعادلهٔ $f(x)=0$ صدق می‌کنند . بنابر ۸ . ۱۰ . ۱۵ ، این فرم خطی با تقریب یک ضریب ثابت مخالف با صفر کاملاً معین است. گویند که $f(x)=0$ معادلهٔ F است (بهتراست گفته‌شود $f(x)=0$ **یك** معادلهٔ F است) .

۸ . ۱۰ . ۲۰ - مثلاً هرصفحه از $\mathbf{R}^3$ که برمبدأ می‌گذرد به وسیلهٔ معادلهٔ :

$$\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=0$$

که در آن سه شمار حقیقی و ثابت α و β و γ بایکدیگر صفر نیستند ، نشان داده می‌شود (به‌درس هندسه رجوع شود) .

۸ . ۱۶ - ترانسپوزیسیون

۸ . ۱۶ . ۱ - فرض می‌کنیم E و F دوفضای برداری روی هیأت K و $u\in\mathscr{L}(E,F)$ باشد. می‌خواهیم یک گسترش خطی F^* در E^* که **ترانسپوزهٔ u** گفته‌می‌شود به u وابسته نماییم. این گسترش را با ${}^tu$ نمایش خواهیم داد.

۸ . ۱۶ . ۲ - نخست ${}^tu$ رابه‌صورت گسترش F^* در E^* درنظر می‌گیریم (خطی‌بودن این گسترش در شمارهٔ ۸ . ۱۶ . ۴ دیده خواهد شد) . پس بهر عنصر $y'\in F^*$ یک‌عنصر از E^* را باید وابسته کرد . بنابراین $y'\circ u$ یک گسترش خطی E در K یعنی یک عنصر از E^* است. این عنصر را با ${}^tu(y')$ می‌نماییم.

۸ . ۱۶ . ۳ - مفهوم ${}^tu(y')$ این است که برای هر عنصر $x\in E$ داریم :

$$[{}^tu(y')](x)=(y'\circ u)(x)=y'(u(x))$$

به گفتهٔ دیگر ${}^tu(y')$ به وسیلهٔ فرمول زیر معین می‌شود :

$$<{}^tu(y')\ ,\ x>=<y'\ ,\ u(x)> \qquad (x\in E\ ,\ y'\in F^*) \qquad (1)$$

$$x \in E \xrightarrow{u} F \ni u(x)$$

$$^{t}u(y') \in E^{*} \xleftarrow[^{t}u]{} F^{*} \ni y'$$

بهتر است بجای تعریف $^{t}u(y') = y' \circ u$ فرمول (۱) را بخاطر سپرد .

۸ . ۱٦ . ٤ - اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که گسترش ^{t}u خطی است . هرگاه y'_1 و y'_2 متعلق به F^{*} باشند ، برای هر عنصر x از E داریم :

$$<^{t}u<y'_1 + y'_2) \,,\, x> = <y'_1 + y'_2 \,,\, u(x)> \qquad \text{(بنابر (۱))} ,$$

$$= <y'_1 \,,\, u(x)> + <y'_2 \,,\, u(x)> \quad \text{(بنابر ۸ . ۱۳ . ۳)} ,$$

$$= <^{t}u(y'_1) \,,\, x> + <^{t}u(y'_2) \,,\, x> \qquad \text{بنابر (۱))} ,$$

$$= <^{t}u(y'_1) + {}^{t}u(y'_2) \,,\, x> \qquad \text{(بنابر ۸ . ۱۳ . ۳)} ,$$

چون بستگی‌های بالا برای هر عنصر $x \in E$ برقرارند پس می‌توان نوشت :

$$^{t}u(y'_1 + y'_2) = {}^{t}u(y'_1) + {}^{t}u(y'_2)$$

به همین ترتیب دیده می‌شود که برای هرعنصر $y' \in F^{*}$ و هراسکالر λ داریم :

$$^{t}u(\lambda y') = \lambda\, {}^{t}u(y')$$

۸ . ۱٦ . ٥ - قضیه - چنانچه u و v متعلق به $\mathscr{L}(E \,,\, F)$ و λ اسکالری دلخواه باشد داریم :

$$^{t}(u+v) = {}^{t}u + {}^{t}v \quad , \quad {}^{t}(\lambda u) = \lambda({}^{t}u)$$

اثبات ـ یکی از دو فرمول بالامثلاً فرمول سمت‌چپ را ثابت می‌کنیم (فرمول‌سمت راست نیز به‌روش‌مشابه اثبات می‌شود) . برای هرعنصر $y' \in F^{*}$ و هر عنصر $x \in E$ داریم :

$$<^{t}(u+v)(y') \,,\, x> = <y' \,,\, (u+v)(x)> \qquad \text{(بنابر (۱))} ,$$

$$= <y' \,,\, u(x) + v(x)> \qquad \text{(بنابر ۸ . ۱۲ . ۲)} ,$$

$$= <y' \,,\, u(x)> + <y' \,,\, v(x)> \qquad \text{(بنابر ۸ . ۱۳ . ۳)} ,$$

$$= <^{t}u(y') \,,\, x> + <^{t}v(y') \,,\, x> \qquad \text{(بنابر ۱))} ,$$

$=<{}^tu(y')+{}^tv(y')\ ,\ x>$ ، (بنابر ۳.۱۳.۸)

$=<({}^tu+{}^tv)(y')\ ,\ x>$ ، (بنابر ۲.۱۲.۸)

از اینجا نتیجه‌می‌شود که $^t(u+v)(y')=({}^tu+{}^tv)\ (y')$ یعنی فرمول سمت چپ‌برقرار است.

۶.۱۶.۸ - قضیه ـ فرض‌می‌کنیم E و F و G سه فضای برداری روی هیأتK باشند. چنانچه $u\in\mathscr{L}(E\ ,\ F)$ و $v\in\mathscr{L}(F\ ,\ G)$ باشد داریم $^t(v\circ u)={}^tu\circ{}^tv$.

اثبات ـ داده‌های قضیه را می‌توان به صورت زیر نمایش داد :

$$E\xrightarrow{u}F\xrightarrow{v}G$$
$$E^*\xleftarrow[{}^tu]{}F^*\xleftarrow[{}^tv]{}G^*$$

گسترش‌های $^t(v\circ u)$ و $^tu\circ{}^tv$ دوگسترش G^* در E^* می‌باشند . فرض می‌کنیم $z'\in G^*$ و $x\in E$باشد. چنانچه‌فرمول (۱)را به ترتیب درمورد $(E\ ,\ G)$ و $(F$ و $G)$ و $(E\ ,\ F)$ بکار بریم نتیجه می‌شود :

$$<{}^t(v\circ u)(z')\ ,\ x>=<z',v(u(x))>$$
$$=<{}^tv(z')\ ,\ u(x)>=<{}^tu({}^tv(z'))\ ,\ x>$$

و از آنجا چنین‌داریم $^t(v\circ u)(z')={}^tu({}^tv(z'))$ که همان برابری خواسته‌شده است. برای انجام این محاسبات می‌توانستیم از شمای زیر استفاده کنیم:

$$\begin{array}{ccccc}
x & & u(x) & & v(u(x))\\
\cap & & \cap & & \cap\\
E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G\\
E^* & \longleftarrow & F^* & \longleftarrow & G^*\\
\cup & & \cup & & \cup\\
{}^tu({}^tv(z')) & & {}^tv(z') & & z'
\end{array}$$

۷.۱۶.۸ - قضیه ـ چنانچه‌گسترش u متعلق به $\mathscr{L}(E\ ,\ F)$ دوسویی باشد، ^tu دوسویی است و داریم $({}^tu)^{-1}={}^t(u^{-1})$.

اثبات ـ می‌دانیم $u\circ u^{-1}=id_F$ و $u^{-1}\circ u=id_E$ است . پس بنابر ۶.۱۶.۸ خواهیم داشت :

$$^t(u^{-1})\circ{}^tu={}^t(id_F)\qquad ,\qquad {}^tu\circ{}^t(u^{-1})={}^t(id_E)$$

اما به آسانی از ۲.۱۶.۸ نتیجه می‌شود :

$${}^t(\mathrm{id}_E)=\mathrm{id}_{E^*} \qquad , \qquad {}^t(\mathrm{id}_F)=\mathrm{id}_{F^*}$$

که با در نظرگرفتن ۵. ۸.۱ قضیه ثابت می‌گردد.

۸.۱۶.۸ - اگر $u\in \mathscr{L}(E , F)$ باشد ${}^tu\in \mathscr{L}(F^* , E^*)$ است. پس ${}^t({}^tu)$ متعلق به $\mathscr{L}(E^{**} , F^{**})$ خواهد بود. فرض می‌کنیم بعد فضاهای برداری E و F باپایان باشد. دراین‌صورت بنابرشمارهٔ ۵.۱۴.۸ داریم $E=E^{**}$ و $F=F^{**}$ پس ${}^t({}^tu)\in \mathscr{L}(E , F)$ است وقضیهٔ زیر را خواهیم داشت:

۹.۱۶.۸ - قضیه - چنانچه E وF دارای بعدهای باپایان و $u\in \mathscr{L}(E , F)$ باشد داریم ${}^t({}^tu)=u$.

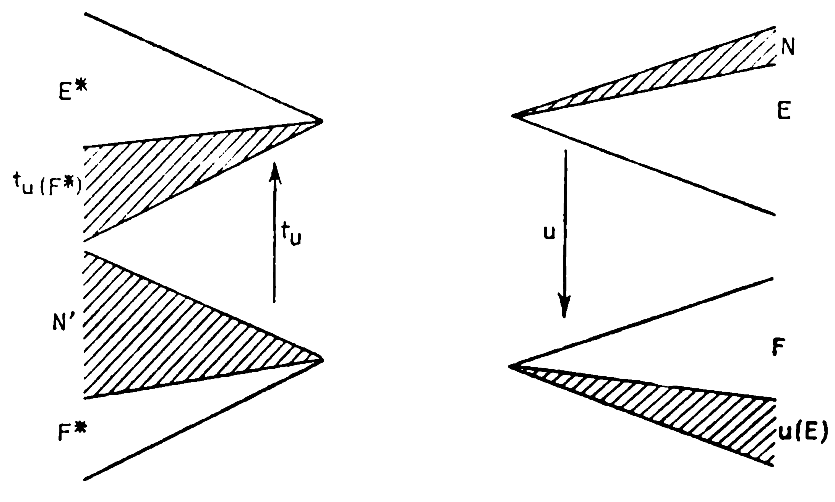
اثبات - فرض می‌کنیم x عنصری از E و y' عنصری از F^* باشد. اگرفرمول (۱) را دوبار بکار بریم چنین خواهیم داشت :

$$<{}^t({}^tu)(x) , y'> = <x , {}^tu(y')> = <u(x) , y'>$$

پس بنابر ۵.۱۴.۸ برای هرعنصر x داریم ${}^t({}^tu)(x)=u(x)$ و قضیه بر قرار است.

به بیان‌دیگر اگر v ترانسپوزهٔ u باشد، u ترانسپوزهٔ v است. ازاین‌جا چنین برمی‌آید که یک فضای برداری و دوآل آن دارای نقش‌های کاملا قرینه می‌باشند (درحالتی که بعد فضای برداری باپایان باشد).

۱۰.۱۶.۸ - قضیه - فرض می‌کنیم فضاهای برداری E و F دارای بعد های با پایان و $u\in \mathscr{L}(E , F)$ باشد. چنانچه N و N' به ترتیب هسته‌های u و ${}^tu$ باشند داریم $N'=(u(E))^{\perp}$ و $N=N({}^tu(F^*))^{-}$



شکل ۲۴

اثبات - اگر نقش‌های u و ^tu را با یکدیگر عوض کنیم برابری دوم از برابری اول نتیجه می‌شود . بنابراین تنها برابری اول را ثابت می‌کنیم . چنانچه $y'\in F^*$ باشد داریم :

$$y'\in(u(E))^{\perp}\Leftrightarrow\langle y', u(x)\rangle=0,\ \forall x\in E, \qquad \text{(بنابرتعریف } (u(E))^{\perp}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \langle {}^tu(y'), x\rangle=0,\ \forall x\in E, \qquad \text{(بنابر (۱))}$$

$$\Leftrightarrow {}^tu(y')=0$$

$$\Leftrightarrow y'\in N', \qquad \text{(بنابر تعریف } N'\text{)}$$

و از آنجا

$$N'=(u(E))^{\perp}$$

۸. ۱۶. ۱۱ - **نتیجه - رتبهٔ u برابر است با رتبهٔ ^tu .**

زیرا اگر ρ رتبهٔ u و ρ' رتبهٔ ^tu باشد داریم :

$$\rho'=\dim F^*-\dim N'$$

$$=\dim F-\dim N', \qquad \text{(بنابر ۸. ۱۳. ۶)}$$

$$=\dim F-\dim u(E)^{\perp}, \qquad \text{(بنابر ۸. ۱۶. ۱۰)}$$

$$=\dim u(E), \qquad \text{(بنابر ۸. ۱۵. ۹)}$$

$$=\rho$$

۸ . ۱۷ - فرمهای دوخطی

۸. ۱۷. ۱ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی هیأت K باشد . فرمهای خطی روی E را به صورت توابعی از یک بردار متعلق به E که مجموعهٔ مقادیر آنها هیأت K می‌باشد ، تعریف کردیم. اکنون می‌خواهیم فرمهای دوخطی ، سه خطی و به طور کلی p خطی را روی E که توابعی از دو بردار ، سه بردار و به طور کلی p بردار متعلق به E هستند و مجموعهٔ مقادیر آنها K می‌باشد ، تعریف کنیم. ابتدا به تعریف فرمهای دوخطی روی E می‌پردازیم .

۸. ۱۷. ۲ - **تعریف - فضای برداری E را روی هیأت K در نظر می‌گیریم . گسترش f فضای برداری $E\times E$ در K یک فرم دوخطی روی E نامیده می‌شود**

هرگاه گسترش f نسبت به‌هریك از متغیرها خطی باشد. به‌گفتهٔ دیگر اگر x ، x_1 ، x_2 و y ، y_1 ، y_2 متعلق به E و λ و μ دوعنصر از K باشند داشته باشیم:

$$f(x_1+x_2\,,\,y)=f(x_1\,,\,y)+f(x_2\,,\,y) \tag{۱}$$

$$f(\lambda x\,,\,y)=\lambda f(x\,,\,y) \tag{۲}$$

$$f(x\,,\,y_1+y_2)=f(x\,,\,y_1)+f(x\,,\,y_2) \tag{۳}$$

$$f(x\,,\,\mu y)=\mu f(x\,,\,y) \tag{۴}$$

۳.۱۷.۸ ـ بااستفاده از (۱) و (۲) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که برای بردارهای دلخواه x_1 ، ... ، x_n و y_1 ، ... ، y_p و اسکالرهای λ_1 ، ... ، λ_n و μ_1 ، ... ، μ_p داریم:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\,,\,\sum_{j=1}^{p}\mu_j y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_i\mu_j f(x_i\,,\,y_j) \tag{۵}$$

۴.۱۷.۸ ـ **مثال** ـ درفضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی ، حاصل‌ضرب داخلی $\vec{V}\,.\,\vec{V}' \longrightarrow (\vec{V}\,,\,\vec{V}')$ یک فرم دوخطی است.

۵.۱۷.۸ ـ فضای برداری E رادرنظرمی گیریم وفرض می کنیم $(e_1\,,\,e_2\,,\,\cdots\,,\,e_n)$ یک پایهٔ E باشد. می‌خواهیم بابکار بردن روش شماره‌های ۴.۱۳.۸ و ۵.۱۳.۸ کلیهٔ فرم‌های دوخطی را روی E بنا کنیم.

n^2 اسکالر α_{ij} $(1\leqslant i\leqslant n$ و $1\leqslant j\leqslant n)$ را اختیار می کنیم و برای بردارهای دلخواه $x=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n$ و $y=\mu_1e_1+\cdots+\mu_ne_n$ از E قرار می‌دهیم:

$$f(x\,,\,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\lambda_i\mu_j$$

روشن است که f یک فرم دوخطی روی E می‌باشد و داریم $f(e_i\,,\,e_j)=\alpha_{ij}$.

به این ترتیب به هرعنصر (α_{ij}) از K^{n^2} یک فرم دو خطی وابسته می‌شود. می‌خواهیم نشان دهیم که هر فرم دوخطی روی E به روش بالا بدست می‌آید. به بیان دقیق‌تر:

۸ . ۱۷ . ۶ - قضیه - گسترش K^{n^2} در مجموعهٔ فرم های دو خطی روی E یعنی گسترش $f \longrightarrow (\alpha_{ij})$ دوسویی است.

اثبات - فرض‌می‌کنیم دوعنصر (α_{ij}) و (α'_{ij}) از K^{n^2} یک فرم دوخطی را معین کنند. بنابر ۸ . ۱۷ . ۵ برای همهٔ اندیسهای i و j چنین داریم:

$$\alpha_{ij}=(e_i\ ,\ e_j)=\alpha'_{ij}$$

پس $(\alpha_{ij})=(\alpha'_{ij})$ بنابراین گسترش بالا انژکتیواست.

فرض می‌کنیم f یک فرم دوخطی روی E باشد وقرار می‌دهیم $f(e_i\ ,\ e_j)=\alpha_{ij}$.

چنانچه فرم وابسته به (α_{ij}) را با f' نشان دهیم، برای هردوعنصر دلخواه:

$$x=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n\ ,\ y=\mu_1 e_1+\cdots+\mu_n e_n$$

خواهیم داشت:

$$f(x\ ,\ y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j f(e_i\ ,\ e_j) \qquad , \quad (\text{بنابر}(۵))$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j\alpha_{ij}$$

$$=f'(x\ ,\ y)$$

پس $f=f'$ است، یعنی گسترش بالا سورژکتیو می‌باشد.

۸ . ۱۷ . ۷ - **مثال** - درفضای برداری $\mathbf{R}^3$ فرم‌های دوخطی عبارتند ازگسترش های:

$$((\lambda_1\ ,\ \lambda_2\ ,\ \lambda_3)\ ,\ (\mu_1\ ,\ \mu_2\ ,\ \mu_3)) \longrightarrow \alpha_{11}\lambda_1\mu_1+\alpha_{12}\lambda_1\mu_2+\alpha_{13}\lambda_1\mu_3$$
$$+\alpha_{21}\lambda_2\mu_1+\alpha_{22}\lambda_2\mu_2+\alpha_{23}\lambda_2\mu_3+\alpha_{31}\lambda_3\mu_1+\alpha_{32}\lambda_3\mu_2$$
$$+\alpha_{33}\lambda_3\mu_3$$

که در آنها α_{11} ، α_{12} ، ... ، α_{33} شمارهای حقیقی و ثابت می‌باشند.

۱۸.۸ - فرم‌های چند خطی روی فضای برداری E

۱.۱۸.۸ - تعریف - فضای برداری E روی هیأت K و شمار درست $p \geqslant 1$ را در نظر می‌گیریم. گسترش $(x_1, \cdots, x_p) \longrightarrow f(x_1, \cdots, x_p)$ فضای برداری E^p در K فرم p خطی روی E نامیده می‌شود هرگاه این گسترش نسبت به هر یك از x_i ها خطی باشد.

هنگامی که نیازی به نام بردن از شمار درست p نباشد f را **فرم چند خطی** می‌نامند.

۲.۱۸.۸ - مثلاً اگر f یک فرم ۳ خطی روی E و x_i ، y_j ، z_k بردارهای دلخواهی از E و λ_i ، μ_j ، ν_k اسکالرهای دلخواهی باشند چنین داریم:

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i , \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j , \sum_{k=1}^{p} \nu_k z_k\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda_i \mu_j \nu_k f(x_i , y_j , z_k)$$

۳.۱۸.۸ - به ویژه اگر $(e_1 , e_2 , \cdots , e_q)$ یک پایهٔ E باشد، فرم ۳ خطی f با در دست داشتن اسکالرهای $f(e_i , e_j , e_k) = \alpha_{ijk}$ کاملاً معین است. زیرا:

$$f\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i e_i , \sum_{j=1}^{q} \mu_j e_j , \sum_{k=1}^{q} \nu_k e_k\right) = \sum_{i,j,k=1}^{q} \lambda_i \mu_j \nu_k \alpha_{ijk}$$

به‌وارون برای اسکالرهای دلخواه α_{ijk} فرمول بالا یک فرم ۳ خطی روی E معین می‌کند. به این ترتیب می‌توان همهٔ فرم‌های ۳ خطی را روی E بنا کرد.

۴.۱۸.۸ - به روش مشابه می‌توان فرم‌های p خطی را تشکیل داد. نوشتن این فرم‌ها دشوارتر است زیرا برای آنها باید از اندیسهای p گانه استفاده کرد.

فصل نهم

ماتریس‌ها

مطالب این فصل دنباله مستقیم مطالب فصل پیش است. اما دراین فصل به‌جای بررسی جنبه‌های هندسی و مجرد مطالب آن، به بررسی جنبهٔ محاسبه‌ای آنها پرداخته شده است. همان‌طور که درمطالعهٔ یک بردارگاهی استفاده از مؤلفه‌های آن بردارکار راساده‌تر می‌کند، در مطالعهٔ یک گسترش خطی نیز استفاده از «ماتریس» آن گسترش کار را آسان‌تر می‌سازد. به علاوه نظریهٔ ماتریس‌ها کاربردهای دیگری نیز دارد.

۱.۹- تعریف

۱.۱.۹- هیأت K را درنظر می‌گیریم. یک جدول مستطیلی شکل ازعنصرهای K به صورت:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

یک **ماتریس با عنصرهای واقع در** K نامیده می‌شود. ردیف‌های افقی را **سطر**، ردیف‌های قائم را **ستون** و α_{11}، α_{12}، ...، α_{nm} را **عنصرهای** ماتریس می‌نامند (α_{ij} عبارت‌است‌از عنصر متعلق به سطر i ام و ستون j ام). ماتریس بالا، و هرماتریسی که دارای n سطر و m ستون باشد، یک ماتریس از رستهٔ (n , m) گفته می‌شود. گاهی ماتریس بالا را به طور اختصار به صورت $[\alpha_{ij}]_{1\leqslant i\leqslant n \,,\, 1\leqslant j\leqslant m}$ و یا اگر اشتباهی رخ ندهد به‌شکل سادهٔ $[\alpha_{ij}]$ می‌نویسند. همچنین ممکن‌است‌در نمایش یک ماتریس‌اندیس ستون را به صورت نما نوشت، به این ترتیب $[\alpha_i^j]$ نیز ماتریس بالا را نشان می‌دهد.

۹.۱.۲- اگر $K=\mathbf{R}$ باشد ماتریس را **حقیقی** و چنانچه $K=\mathbf{C}$ باشد ماتریس را **مختلط** می‌گویند.

۹.۱.۳- هرگاه در یک ماتریس $n=m$ باشد یعنی شمارهٔ سطرها برابر با شمارهٔ ستونها باشد، ماتریس را **مربع** می‌نامند. در ماتریس مربع $[\alpha_{ij}]$ عنصرهای α_{11} ، α_{22} ، ... ، α_{nn} **قطر اصلی** ماتریس گفته می‌شوند (این عنصرها در روی قطری از مربع که قطر اصلی نامیده می‌شود قرار دارند).

۹.۱.۴- چنانچه در ماتریس مربع $[\alpha_{ij}]$ همهٔ عنصرهای واقع در خارج قطر اصلی برابر با صفر باشند $[\alpha_{ij}]$ را **ماتریس قطری** می‌نامند، به گفته دیگر ماتریس $[\alpha_{ij}]$ قطری است اگر برای $i\neq j$ داشته باشیم $\alpha_{ij}=0$.

۹.۱.۵- هرگاه در ماتریس مربع $[\alpha_{ij}]$ همهٔ عنصرهای واقع در بالای قطر اصلی برابر با صفر باشند $[\alpha_{ij}]$ **ماتریس سه‌بری زیرین** نامیده می‌شود، به گفته دیگر $[\alpha_{ij}]$ یک ماتریس سه‌بری زیرین است اگر برای $i<j$ برابری $\alpha_{ij}=0$ برقرار باشد. به همین ترتیب **ماتریس سه‌بری زبرین** تعریف می‌گردد.

۹.۱.۶- اگر در ماتریس مربع $[\alpha_{ij}]$ برای همهٔ جفت‌های (i , j) برابری $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$ برقرار باشد $[\alpha_{ij}]$ را **ماتریس متقارن** می‌نامند.

۹.۲- ماتریس یک گسترش خطی

۹.۲.۱- فضاهای برداری E و F را، که بعد آنها باپایان است، روی هیأت K درنظرمی گیریم وفرض می‌کنیم $(e_1 , e_2 , \dots , e_m)$ یک پایهٔ E ، $(f_1 , f_2 , \dots , f_n)$ یک پایهٔ F و u عنصری از $\mathscr{L}(E , F)$ باشد.

تعریف ــ ماتریس دستهٔ (n , m) را، که عنصرهای ستون j ام آن از مؤلفه‌های $u(e_j)$ نسبت به پایهٔ $(f_1 , \dots , f_n)$ ($j=1 , \dots , m$) تشکیل شده است، ماتریس گسترش خطی u نسبت به پایه‌های $(e_1 , \dots , e_m)$ و $(f_1 , \dots , f_n)$ می‌نامند.

پس اگر این ماتریس را با $[\alpha_{ij}]$ نشان دهیم داریم:

$$u(e_j)=\alpha_{1j}f_1+\alpha_{2j}f_2+\cdots+\alpha_{nj}f_n \qquad (1)$$

۹ . ۲ . ۲- چنانچه $E=F$ و برای همهٔ i ها $e_i=f_i$ باشد ، ماتریس $[\alpha_{ij}]$ ماتریس گسترش خطی u نسبت به پایهٔ $(e_1, \ldots, e_n)$ نامیده می‌شود.

۹ . ۲ . ۳- **مثال** - درصفحهٔ معمولی مبدأ O و دوبرداریکه‌ای ومتعامد e_1 و e_2 را درنظر می‌گیریم و سوی‌صفحه را به وسیلهٔ پایهٔ (e_1, e_2) معین می‌کنیم (۱۵ . ۱۱ . ٤).
چنانچه u چرخش به مرکز O وبه‌زاویهٔ φ باشد ، $\cos\varphi$و$\sin\varphi$ مؤلفه‌های بردار $u(e_1)$ و $\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\varphi$ ، $\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\varphi$ مؤلفه‌های بردار $u(e_2)$ خواهند بود. پس ماتریس چرخش u نسبت به پایهٔ (e_1, e_2) چنین است :

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

۹ . ۲ . ٤- بار دیگر مطالب شمارهٔ ۹ . ۲ . ۱ را درنظر می‌گیریم و به اثبات قضیهٔ زیر می‌پردازیم.

قضیه - چنانچه u یک گسترش خطی متعلق به $\mathscr{L}(E, F)$ و $M(u)$ ماتریس آن باشد ، گسترش $u \to M(u)$ یک گسترش دوسویی $\mathscr{L}(E, F)$ روی مجموعهٔ ماتریس‌های رستهٔ (n, m) با عنصرهای واقع در K می‌باشد.

اثبات - اگر برای گسترشهای u و u' متعلق به $\mathscr{L}(E, F)$ داشته باشیم $M(u)=M(u')$ ، برای هراندیس j خواهیم داشت $u(e_j)=u'(e_j)$. پس بنابر (۸ . ۸ . ٦ . (I)) ، $u=u'$ یعنی گسترش $u \to M(u)$ انژکتیو است. چنانچه $[\alpha_{ij}]$ یک ماتریس رسته (n, m) با عنصرهای واقع در K باشد ، بنابر شمارهٔ (۸ . ۸ . ٦ . (I)) یک عنصر u از $\mathscr{L}(E, F)$ وجود دارد به‌طوریکه برای آن فرمولهای (۱) برقرارند. پس خواهیم داشت $M(u)=[\alpha_{ij}]$ یعنی گسترش $u \to M(u)$ سورژکتیو است.

۹ . ۲ . ۵- باتوجه به مطالب بالا می‌توان گفت که گسترشهای خطی به‌وسیلهٔ ماتریسهای خود کاملاً مشخص می‌شوند (همانطوریکه بردارها به‌وسیلهٔ مؤلفه‌های خود معین می‌گردند).

۹ . ۲ . ٦- **قضیه - فرض می‌کنیم u عنصری از $\mathscr{L}(E, F)$ و $[\alpha_{ij}]$ ماتریس u نسبت به پایه‌های $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ و $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ باشد. بردار x متعلق به E را درنظر می‌گیریم و مؤلفه‌های آن را نسبت به پایهٔ $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ به ترتیب λ_1 ، λ_2 ، $\ldots$ ، λ_m می‌نامیم. اگر**

μ_1 ، μ_2 ، ... ، μ_n **مؤلفه‌های بردار** $u(x)$ **نسبت به پایهٔ** $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ **باشد، داریم :**

$$\mu_1 = \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1m}\lambda_m$$

$$\mu_2 = \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2m}\lambda_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_n = \alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{nm}\lambda_m$$

اثبات ــ داریم :

$$u(x) = u\Big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u(e_j)$$

با توجه به فرمولهای (۱) شمارهٔ ۱.۲.۹ برابری بالا را می‌توان چنین نوشت :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i\Big)$$

که در آن ضریب f_i برابر است با $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ij}$. این ضریب همان مؤلفهٔ i ام بردار $u(x)$ یعنی μ_i می‌باشد.

۷.۲.۹ـ چنانچه در مثال ۳.۲.۹ آرایندهای یک نقطهٔ M از صفحه را x و y و آرایندهای نقطهٔ $u(M)$ را x' و y' بگیریم ، بنابر ۶.۲.۹ خواهیم داشت :

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$

$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

۸.۲.۹ـ **گسترش خطی وابسته به یک ماتریس** ـ در شمارهٔ ۱.۲.۹ گسترش خطی u را درنظر گرفتیم و به آن ماتریس $M(u)$ را وابسته کردیم. اکنون ماتریس n سطری و m ستونی $M = [\alpha_{ij}]$ با عنصرهای متعلق به K را درنظر می‌گیریم. بنابر ۴.۲.۹ ماتریس M عبارتست از ماتریس یک گسترش خطی معین v فضای برداری K^m در K^n ، نسبت به پایه‌های کانونیک K^m و K^n. گسترش v را **گسترش خطی وابسته به ماتریس** M می‌نامند.

۹.۲.۹- برحسب تعریف، رتبهٔ گسترش خطی v (شمارهٔ ۲.۱۱.۸) را **رتبهٔ ماتریس** M می‌نامیم. پس رتبهٔ M شمار درستی است مانند r به‌طوریکه داریم $r \leqslant m$ و $0 \leqslant r \leqslant n$ (شمارهٔ ۳.۱۱.۸). بنابر شماره‌های ۵.۱۱.۸ و ۱.۲.۹ شمار r عبارت‌است از شمارهٔ ماکزیمم ستونهایی از M، که نابستگی خطی دارند (هرستون ماتریس M به عنوان برداری از K^n درنظر گرفته می‌شود). درشمارهٔ ۱۰.۱۰ یک‌روش عملی برای محاسبهٔ r خواهیم دید.

۱۰.۲.۹- قضیه - فضاهای برداری E و F را روی هیأت K درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ یک پایهٔ E و $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ یک پایهٔ F و u عنصری از $\mathscr{L}(E, F)$ باشد. چنانچه M ماتریس u نسبت به پایه‌های $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ و $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ باشد رتبهٔ u برابر با رتبهٔ M است.

اثبات - فرض می‌کنیم $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_m)$ پایهٔ کانونیک K^m و $(f'_1, f'_2, \ldots, f'_n)$ پایهٔ کانونیک K^n و v گسترش خطی K^m در K^n، وابسته به M باشد. چنانچه ω ایزومرفیسم F روی K^n باشد که f_1، f_2، ...، f_n را به ترتیب به f'_1، f'_2، ...، f'_n بدل می‌کند خواهیم داشت:

$$\omega(u(e_j)) = \omega(\alpha_{1j}f_1 + \cdots + \alpha_{nj}f_n) = \alpha_{1j}f'_1 + \cdots + \alpha_{nj}f'_n = v(e'_j)$$

پس تحدید گسترش ω به $u(E)$ یک گسترش خطی انژکتیو $u(E)$ [زیر فضای برداری پدید آمده به‌وسیلهٔ $u(e_j)$ ها (۵.۱۱.۸)] روی $v(K^m)$ [زیر فضای برداری پدیدآمده به‌وسیلهٔ $v(e'_j)$ ها (۵.۱۱.۸)] می‌باشد. بنابراین فضاهای برداری $u(E)$ و $v(K^m)$ ایزومرف هستند ودرنتیجه بعدهای آنها با یکدیگر برابراست. اما بنابر ۲.۱۱.۸ بعد $u(E)$ برابر با رتبهٔ u و بنابر ۹.۲.۹ بعد $v(K^m)$ برابر با رتبهٔ ماتریس M است.

۳.۹- عملیات روی ماتریس‌ها

به‌طوریکه در زیر خواهیم دید عملیات روی ماتریس‌ها از عملیات روی گسترش‌های خطی نتیجه می‌شوند.

جمع ماتریس‌ها

۱.۳.۹- فضاهای‌برداری E و F را روی هیأت K درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم

$(e_1, \ldots, e_m)$ یک پایهٔ E و $(f_1, \ldots, f_n)$ یک پایهٔ F و u و v متعلق به $\mathscr{L}(E, F)$ باشند. چنانچه $M(u)=[\alpha_{ij}]$ و $M(v)=[\beta_{ij}]$ و $M(u+v)=[\gamma_{ij}]$ به‌ترتیب ماتریس‌های u و v و $u+v$ نسبت‌به‌پایه‌های $(e_1, \ldots, e_m)$ و $(f_1, \ldots, f_n)$ باشند، با توجه به شماره‌های ۲.۱۲.۸ و ۱.۲.۹ خواهیم داشت:

$$(u+u)(e_j)=u(e_j)+v(e_j)=\alpha_{1j}f_1+\cdots+\alpha_{nj}f_n+\beta_{1j}f_1+\cdots+\beta_{nj}f_n$$
$$=(\alpha_{1j}+\beta_{1j})f_1+\cdots+(\alpha_{nj}+\beta_{nj})f_n$$

و از آنجا برابری‌های $\gamma_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}$ بدست می‌آید.

۲.۳.۹- دوماتریس $M=[\lambda_{ij}]$ و $M'=[\lambda'_{ij}]$ را که هردو از رستهٔ (n, m) می‌باشند درنظر می‌گیریم. ماتریس $[\lambda_{ij}+\lambda'_{ij}]$ را که از رستهٔ (n, m) می‌باشد **مجموع دوماتریس M و M'** می‌نامند و با $M+M'$ نشان می‌دهند.

۳.۳.۹- بااستفاده از تعریف بالا نتیجهٔ شمارهٔ ۱.۳.۹ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M(u+v)=M(u)+M(v)$$

ضرب یک ماتریس در یک اسکالر

۴.۳.۹- فرض می‌کنیم λ عنصری‌از K، E و F دو فضای برداری روی هیأت K، $u\in\mathscr{L}(E, F)$ و $M(\lambda u)=[\alpha'_{ij}]$ ماتریس گسترش خطی λu نسبت به پایه‌های $(e_1, \ldots, e_m)$ و $(f_1, \ldots, f_n)$ باشد. بنابر شماره‌های ۶.۱۲.۸ و ۱.۲.۹ خواهیم داشت:

$$(\lambda u)(e_j)=\lambda(u(e_j))=\lambda\alpha_{1j}f_1+\cdots+\lambda\alpha_{nj}f_n$$

و از آنجا برابری‌های $\alpha'_{ij}=\lambda\alpha_{ij}$ به دست می‌آید.

۵.۳.۹- چنانچه $M=[\lambda_{ij}]$ باشد، ماتریس $[\lambda\lambda_{ij}]$ را، که از ضرب همهٔ عنصرهای ماتریس M در λ به دست می‌آید، با λM نشان می‌دهند.

۶.۳.۹- بااستفاده‌ازشمارهٔ بالا، نتیجه شمارهٔ ۴.۳.۹ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M(\lambda u)=\lambda M(u)$$

ضرب دو ماتریس

۷.۳.۹- فضاهای برداری E، F و G را روی هیأت K درنظر می‌گیریم و فرض

می کنیم $(e_1 , \dots , e_m)$ ، $(f_1 , \dots , f_n)$ و $(g_1 , \dots , g_p)$ به ترتیب ، پایه‌هایی از E ، F و G باشند. چنانچه v عنصری از $\mathscr{L}(E , F)$ و u عنصری‌از $\mathscr{L}(F , G)$ باشد،ماتریس های u ، v و uv رانسبت به پایه‌های داده شده‌به ترتیب $[\alpha_{ij}]$ ، $[\beta_{ij}]$ و $[\gamma_{ij}]$ می‌نامیم. دراین‌صورت داریم :

$$(uv)(e_j)=u(v(e_j))=u(\sum_{k=1}^{n}\beta_{kj}f_k)=\sum_{k=1}^{n}\beta_{kj}u(f_k)=\sum_{k=1}^{n}\beta_{kj}(\sum_{i=1}^{p}\alpha_{ik}g_i)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p}\beta_{kj}\alpha_{ik}g_i=\sum_{i=1}^{p}(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\beta_{kj})g_i$$

و از آنجا $\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\beta_{kj}$.

۹. ۳. ۸- چنانچه $M=[\lambda_{ij}]$ یک ماتریس رستهٔ (r , s) و $M'=[\lambda'_{ij}]$ یک ماتریس رستهٔ (s , t) باشد ، **حاصلضرب M و M'** را ، که ماتریسی‌از رستهٔ (r , t) است و با $MM'=[\lambda''_{ij}]$ نشان داده می‌شود ، به‌وسیلهٔ فرمولهای زیر تعریف می کنیم :

$$\lambda''_{ij}=\sum_{k=1}^{s}\lambda_{ik}\lambda'_{kj}$$

درستی فرمولهای‌بالا باتوجه به‌اینکه‌شمارهٔ ستونهای M برابر باشمارهٔ سطرهای M′ می‌باشد آشکار است. به طوریکه دیده می‌شود λ''_{ij} عبارت‌است از مجموع حاصل‌ضربهای عنصرهای سطر i ام M درعنصرهای هم‌ردیف ستون j ام M′. بنابراین حاصل‌ضرب MM′ ازضرب سطرهای M در ستونهای M′ به‌دست می‌آید.

باید دانست که اگر ماتریس M از رسته (r , s) و ماتریس M′ از رسته (s_1 , t) و $s \neq s_1$ باشد حاصل‌ضرب MM′ دارای معنی نیست.

۹. ۳. ۹- بااستفاده ازشمارهٔ بالا ، نتیجه شمارهٔ ۹. ۳. ۷ به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$M(uv)=M(u)M(v)$$

۹. ۳. ۱۰- از ویژگی‌های قانون‌های ترکیب گسترش های خطی ، ویژگی‌هایی برای قانون‌های ترکیب ماتریس هابه‌دست‌می‌آید که درزیر به‌بیان چندنمونه‌ازآن‌هامی‌پردازیم.

الف - ماتریس های n سطری‌و m ستونی با عنصرهای واقع در K یک فضای‌برداری

روی K است. این فضارا T می‌نامیم و فرض می‌کنیم E و F دو فضای برداری روی K باشند که بعدهای آنها به ترتیب m و n است و درهرکدام یک پایه درنظرگرفته شده است. گسترش $u \to M(u)$ یک ایزومرفیسم $\mathscr{L}(E, F)$ روی فضای برداری T است. مبدأ فضای برداری T ماتریس گسترش خطی صفر است، یعنی ماتریسی که همهٔ عنصرهای آن برابر با صفرمی‌باشند (این ماتریس را با ۰ نشان می‌دهند). اگر ماتریس $M=[\alpha_{ij}]$ یک ماتریس n سطری و m ستونی باشد، ماتریس $[-\alpha_{ij}]$ را با $-M$ نشان می‌دهند. دراین‌صورت داریم $M+[-M]=[-M]+M=0$. ماتریس $-M$ را **قرینهٔ** M می‌نامند. برای هرگسترش خطی u از $\mathscr{L}(E, F)$ برابری $M(-u)=-M(u)$ برقرار است.

ب ـ می‌دانیم که حاصل‌ضرب گسترش‌های خطی انجمنی است، پس اگر M و M' و M'' ماتریس‌هایی با عنصرهای متعلق به K و حاصل‌ضرب‌های MM' و $M'M''$ معین باشند خواهیم داشت:

$$M(M'M'')=(MM')M''$$

پ ـ با توجه به شماره‌های ۴.۱۲.۸ و ۵.۱۲.۸ چنین داریم:

$$M(M'+M'')=MM'+MM'' \ , \ (M'+M'')M=M'M+M''M$$

(به شرط آنکه حاصل‌ضرب‌های بالا معین باشند).

۴.۹ـ ماتریس‌های مربع

۱.۴.۹ـ فضای برداری E را روی هیأت K درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ E و $M(u)$ ماتریس گسترش خطی u متعلق به $\mathscr{L}(E, E)$ نسبت‌به‌پایهٔ $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ باشد (۲.۲.۹). چون $\mathscr{L}(E, E)$ نسبت به دوقانون جمع‌وضرب یک‌حلقه است(۸.۱۲.۸)، ازفرمولهای ۳.۳.۹ و ۹.۳.۹ نتیجه می‌شود که مجموعهٔ ماتریس‌های n سطری و n ستونی با عنصرهای متعلق به K یک‌حلقهٔ A می‌باشد. به‌علاوه گسترش $u \to M(u)$ یک ایزومرفیسم حلقهٔ$\mathscr{L}(E, E)$ روی A است. باید دانست که حلقهٔ A در حالت کلی جابجایی نیست.

۲.۴.۹ـ از ۹.۱۲.۸ نتیجه می‌شود که حلقهٔ A دارای عنصریکه است، و این عنصریکه همان ماتریس گسترش همانی E یعنی:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdot & \cdot & \cdot & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdot & \cdot & \cdot & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdot & \cdot & \cdot & ۰ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdot & \cdot & \cdot & ۱ \end{bmatrix}$$

می‌باشد که آنرا **ماتریس یکه** می‌گویند و با I نشان می‌دهند (هنگامی که بخواهند شماره سطرها و ستونها را نیز نشان دهند این ماتریس را با I_n می‌نمایند).

۹ . ٤ . ۳- برای هر اندومرفیسم u از E شرط لازم و کافی برای اینکه $M(u)$ ماتریسی قطری باشد این است که گسترش u به هربردار e_i از پایهٔ داده شده $(e_۱ , \ldots , e_n)$ برداری متناسب با e_i وابسته کند. به گفتهٔ دیگر قطری بودن $M(u)$ هم‌ارز این است که داشته باشیم $u(e_۱)=\alpha_۱e_۱$ ، $u(e_۲)=\alpha_۲e_۲$ ، $\ldots$ ، $u(e_n)=\alpha_ne_n$ ودراین‌صورت :

$$M(u)=\begin{bmatrix} \alpha_۱ & ۰ & \cdot & \cdot & \cdot & ۰ \\ ۰ & \alpha_۲ & \cdot & \cdot & \cdot & ۰ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ۰ & ۰ & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_n \end{bmatrix}$$

به آسانی دیده می‌شود که مجموع وحاصل‌ضرب دو ماتریس قطری یک ماتریس قطری‌است.

۹ . ٤ . ٤- دربین ماتریس‌های قطری ماتریس قطری :

$$\begin{bmatrix} \alpha & ۰ & \cdot & \cdot & \cdot & ۰ \\ ۰ & \alpha & \cdot & \cdot & \cdot & ۰ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ۰ & ۰ & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha \end{bmatrix}$$

را که برابر با αI است اسکالر می‌نامند. گسترش خطی این ماتریس یک همسانی به‌نسبت α درفضای E است. بنابر شمارهٔ ۸ . ۱۲ . ۱۰ برای هرماتریس M از A داریم

$\lambda M = (\lambda I) M = M (\lambda I)$. همچنین $(\lambda + \lambda')I = \lambda I + \lambda' I$ و $(\lambda\lambda')I = (\lambda I)\ (\lambda' I)$.
بدین جهت اغلب بجای λI تنها λ را می‌نویسند.

۹ . ۴ . ۵- هنگامیکه می‌گوییم ماتریس $M(u)$ سه بری زیرین می‌باشد ، به‌این‌معنی است که u هربردار e_i را به یک ترکیب خطی از بردارهای e_j که درآن $i \leqslant j$ است بدل می‌کند. چنانچه زیرفضای برداری پدید آمده به‌وسیلهٔ e_i ، e_{i+1} ، $\cdots$ ، e_n را با E_i نشان دهیم مطلب بالا بیان می‌کند که برای هر i ، $(i = ۱ , ۲ , \ldots , n)$ داریم $u(E_i) \subset E_i$ از این‌جا نتیجه می‌شود که مجموع وحاصل‌ضرب دو ماتریس سه‌بری زیرین یک ماتریس سه‌بری زیرین است. این مطلب به آسانی از روی محاسبه نیز به دست می‌آید. در مورد ماتریس‌های سه‌بری زبرین نیز ویژگیهایی شبیه آنچه که گذشت برقرار است.

۹.۵- ماتریس‌های سطری و ستونی

۹ . ۵ . ۱- ماتریسی که تنها دارای یک سطر باشد **ماتریس سطری** و ماتریسی که تنها شامل یک ستون باشد **ماتریس ستونی** نامیده می‌شود.

۹ . ۵ . ۲- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی هیأت K و $(e_۱ , e_۲ , \ldots , e_m)$ یک پایهٔ E باشد. هرفرم خطی f روی E یک گسترش خطی E در K است. چنانچه K را با پایهٔ کانونیک آن درنظربگیریم (می‌دانیم که پایهٔ کانونیک K تنهادارای عنصر ۱ است)، بنابر شمارهٔ ۹ . ۲ . ۱ گسترش f [نسبت‌به پایه‌های $(e_۱ , e_۲ , \ldots , e_m)$ و (۱)] دارای ماتریسی است که آنرا با $M(f)$ نشان می‌دهیم. ماتریس $M(f)$ عبارت است از ماتریس سطری :

$$[\alpha_۱\ \alpha_۲\ \cdots\ \alpha_m]$$

که در آن $\alpha_i = f(e_i)$ است. به‌طوریکه دیدیم (۸ . ۱۳ . ۵) هنگامیکه α_i ها داده شده باشند گسترش f کاملاً معین است. دراین‌جا این مطلب به‌صورت حالت ویژه‌ای از شمارهٔ ۹ . ۲ . ۴ درمی‌آید.

۹ . ۵ . ۳- بردار x متعلق به E را درنظر می‌گیریم. گسترش $\lambda \to \lambda x$ هیأت K در E به‌وسیلهٔ بردار x کاملاً معین می‌شود. چنانچه $M(x)$ ماتریس این گسترش نسبت به پایه‌های (۱) و $(e_۱ , e_۲ , \ldots , e_m)$ باشد ، با توجه به ۹ . ۲ . ۱ ماتریس $M(x)$ عبارت است از ماتریس ستونی :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_m \end{bmatrix}$$

که درآن λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_m مؤلفه‌های بردار x نسبت به پایهٔ $(e_1 , e_2 , \ldots , e_m)$ می‌باشند. $M(x)$ را ماتریس x نسبت به پایهٔ $(e_1 , e_2 , \ldots , e_m)$ می‌نامند.

۹.۰.۴- فرض می‌کنیم F فضای برداری دیگری روی هیأت K و $(f_1 , f_2 , \ldots , f_n)$ یک پایهٔ F باشد. چنانچه u یک گسترش خطی E در F و $M(u)$ ماتریس u نسبت به‌پایه‌های $(e_1 , e_2 , \ldots , e_m)$ و $(f_1 , f_2 , \ldots , f_n)$ باشد ومؤلفه‌های بردار $u(x)$ رادر پایهٔ $(f_1 , \ldots , f_n)$ با μ_1 ، μ_2 ، ... ، μ_n نشان دهیم بردار $u(x)$ ماتریس ستونی $M(u(x))$ را معین خواهد کرد و فرمول‌های ۹.۲.۶ چنین نوشته می‌شوند :

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_m \end{bmatrix}$$

عبارت بالا را می‌توان به‌صورت سادهٔ زیر نوشت :

$$M(u(x)) = M(u)M(x) \qquad (1)$$

این فرمول از دستور کلی $M(uv) = M(u)M(v)$ نیز به‌دست می‌آید. زیرا گسترش خطی $\lambda \rightarrow \lambda u(x)$ هیأت K در F از ترکیب گسترشهای خطی $\lambda \rightarrow \lambda x$ هیأت K در E و گسترش خطی u فضای برداری E در F نتیجه می‌شود.

۹.۰.۵- با درنظر گرفتن فرض‌های ۹.۰.۲ و ۹.۰.۳ خواهیم داشت :

$$(۲)\quad M(f)M(x)=[\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_m]\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_m\end{bmatrix}=\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\cdots+\alpha_m\lambda_m=<f, x>$$

که در آن ماتریس $[\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\cdots+\alpha_m\lambda_m]$ را که از رستهٔ (۱ , ۱) می‌باشد با اسکالر $\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\cdots+\alpha_m\lambda_m$ یکی گرفته‌ایم.

۶.۹- ترانسپوزهٔ یک ماتریس

۱.۶.۹- فرض می‌کنیم $X=[\alpha_{ij}]$ یک ماتریس از رستهٔ (n , m) باشد. ماتریس $[\beta_{ij}]$ از رسته (m , n) را به قسمی که $\beta_{ij}=\alpha_{ji}$ باشد، **ترانسپوزهٔ ماتریس** X می‌نامند و با ${}^tX$ نشان می‌دهند.

۲.۶.۹- قضیه- فرض می‌کنیم E و F دوفضای برداری، $(e_1 , \ldots , e_m)$ یك پایهٔ E و $(f_1 , \ldots , f_n)$ یك پایهٔ F باشد. چنانچه پایه‌های دوآل این دو پایه را به‌ترتیب $(e_1^* , \ldots , e_m^*)$ و $(f_1^* , \ldots , f_n^*)$ بگیریم و u عنصری از $\mathscr{L}(E , F)$ باشد ${}^tu$ متعلق به $\mathscr{L}(F^* , E^*)$ است و داریم:

$$M({}^tu)={}^t(M(u))$$

[روشن است که $M(u)$ ماتریس گسترش خطی u نسبت به پایه‌های $(e_1 , \ldots , e_m)$ و $(f_1 , \ldots , f_n)$ و $M({}^tu)$ ماتریس گسترش ${}^tu$ نسبت به پایه‌های $(f_1^* , \ldots , f_n^*)$ و $(e_1^* , \ldots , e_n^*)$ می‌باشد].

اثبات - قرار می‌دهیم $M(u)=[\alpha_{ij}]$ و $M({}^tu)=[\beta_{ij}]$. بنابر ۱.۲.۹ داریم:

$$u(e_j)=\alpha_{1j}f_1+\alpha_{2j}f_2+\cdots+\alpha_{nj}f_n$$

با استفاده از ۸.۱۳.۱۰ . (II) خواهیم داشت:

$$\alpha_{ij}=<u(e_j) \ , \ f_i^* >$$

همچنین در مورد ${}^tu$ داریم ${}^tu(f_j^*)=\beta_{1j}e_1^*+\beta_{2j}e_2^*+\cdots+\beta_{mj}e_m^*$ پس:

$$\beta_{ij}=<{}^tu(f_j^*) \ , \ e_i>$$

اما بنابر ۳.۱۶.۸ داریم :

$$< u(e_j)\ ,\ f_i^* > = < e_j\ ,\ {}^t u(f_i^*) >$$

پس خواهیم داشت $\beta_{ji} = \alpha_{ij}$ و قضیه ثابت می‌گردد.

بنابراین به هرویژگی ترانسپوزهٔ یک گسترش خطی، یک‌ویژگی ترانسپوزهٔ یک ماتریس وابسته می‌شود.

۳.۶.۹- چنانچه دو ماتریس X و Y از یک رسته باشند، بنابر ۵.۱۶.۸ خواهیم داشت :

$${}^t(X+Y) = {}^tX + {}^tY$$

۴.۶.۹- اگر X یک ماتریس و λ یک‌اسکالرباشد، بنابر ۵.۱۶.۸ خواهیم داشت:

$${}^t(\lambda X) = \lambda {}^tX$$

۵.۶.۹- چنانچه X یک ماتریس باشد، بنابر ۹.۱۶.۸ خواهیم داشت :

$${}^t({}^tX) = X$$

ویژگیهای بالا را می‌توان به‌آسانی از روی تعریف ترانسپوزهٔ یک ماتریس نتیجه گرفت.

۶.۶.۹- هرگاه X یک ماتریس‌رسته $(m\ ,\ n)$ و Y یک ماتریس‌رسته $(n\ ,\ p)$ باشد، با توجه به قضیه ۶.۱۶.۸ خواهیم داشت :

$${}^t(XY) = {}^tY {}^tX$$

۷.۶.۹- بنابر نتیجه ۱۱.۱۶.۸ ماتریس‌های X و ${}^tX$ دارای یک رتبه هستند.

۸.۶.۹- بنابر ۷.۶.۹ و ۹.۲.۹ رتبهٔ ماتریس X عبارت است از ماکزیمم شمارهٔ سطرهای ماتریس X که نابستگی خطی دارند.

۷.۹- ماتریس‌های وارون‌پذیر

۱.۷.۹- بنابر۱.۴.۹ ماتریس‌های مربع n سطری و n ستونی با عنصرهای متعلق به K، تشکیل یک حلقهٔ A را می‌دهند. این حلقه دارای عنصریکه I_n می‌باشد (شمارهٔ ۲.۴.۹). پس می‌توان از ماتریس‌های مربع وارون‌پذیر گفتگو کرد :

ماتریس M ازحلقهٔ A **وارون‌پذیر** گفته می‌شود هرگاه ماتریس M' متعلق‌به A یافت شود به قسمی که داشته باشیم $M'M = MM' = I_n$. ماتریس M' را **وارون ماتریس** M می‌نامند و آن را با M^{-1} نشان می‌دهند.

۹.۷.۲- قضیه- چنانچه M یك ماتریس مربع رسته (n,n) با عنصرهای متعلق به K باشد شرطهای زیر هم‌ارزند :

(I) — ماتریس M وارون‌پذیر است .

(II) — ماتریس ${}^tM$ وارون‌پذیر است .

(III) — یك ماتریس M' از رستهٔ $(n\ ,\ n)$ وجوددارد به‌طوریکه $MM'=I_n$.

(IV) — یك ماتریس M'' از رسته $(n\ ,\ n)$ وجود دارد به قسمی که $M''M=I_n$.

(V) — سطرهای M (هرسطر به‌صورت عنصری از K^n درنظرگرفته می‌شود) نابستگی خطی دارند .

(VI) — ستونهای M (هرستون به‌صورت عنصری از K^n درنظرگرفته می‌شود) نابستگی خطی دارند .

(VII) — رتبهٔ M برابر با n است .

به‌علاوه چنانچه شرطهای بالا برقرار باشند داریم :

$$M'=M''=M^{-1}$$

اثبات - بنابر ۸.۱۶.۷، $(I)\Longrightarrow(II)$. همچنین با تعویض نقش‌های M و ${}^tM$ $(II)\Longrightarrow(I)$. با توجه به شمارهٔ ۸.۱۱.۴ :

$$(I)\Longleftrightarrow(III)\Longleftrightarrow(IV)\Longleftrightarrow(VII)$$

و از شمارهٔ ۹.۶.۸ نتیجه می‌شود که (V) و (VII) هم‌ارزند. سرانجام از ۹.۲.۹ هم‌ارزی (VI) و (VII) به دست می‌آید. چنانچه شرطهای بالا برقرار باشند ، باتوجه به ۲.۵.۱۶ چنین داریم $M'=M''=M^{-1}$.

۹.۷.۳- قضیه - اگر M یك ماتریس وارون‌پذیر باشد داریم :

$${}^t(M^{-1})=({}^tM)^{-1}$$

اثبات این قضیه از شمارهٔ ۸.۶ .۷ نتیجه می‌شود .

۹ .۷ .۴- به علت وجود برابری ${}^t(M^{-1})=({}^tM)^{-1}$ ، در نوشتن ${}^t(M^{-1})$ و $({}^tM)^{-1}$ از بکار بردن پرانتز خودداری می‌کنند و به‌طور ساده می‌نویسند ${}^tM^{-1}$.

۸.۹- تعویض پایه

۹ .۸ .۱- فضای برداری E ودوپایهٔ $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ و $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ از E را درنظر می‌گیریم.

تعریف - ماتریس M از رسته (n, n) ، که عنصرهای ستون j ام آن $(j=1, 2, \ldots, n)$ مؤلفه‌های بردار e'_j نسبت به پایهٔ $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ می‌باشد ، ماتریس تعویض پایهٔ $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ به پایهٔ $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ نامیده می‌شود.

۹ .۸ .۲- بنابر ۹ .۲ .۱ ماتریس M نسبت به پایهٔ $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ عبارت است ازماتریس گسترش خطی‌ای که بردار e_i را به e'_i بدل می‌کند $(i=1, 2, \ldots, n)$.

۹ .۸ .۳- با توجه به ۹ .۲ .۱ ماتریس M ماتریس گسترش خطی id_E نسبت به پایه‌های $(e'_1, \ldots, e'_n)$ و $(e_1, \ldots, e_n)$ ، (با رعایت ترتیب پایه‌ها) می‌باشد.

۹ .۸ .۴- فرض می‌کنیم N ماتریس تعویض پایهٔ $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ به پایهٔ $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ باشد. از ۹ .۸ .۳ نتیجه می‌شود که N ماتریس گسترش خطی id_E نسبت به پایه‌های $(e_1, \ldots, e_n)$ و $(e'_1, \ldots, e'_n)$ است. اما با درنظر گرفتن ۹ .۳ .۹ ماتریس NM ماتریس گسترش خطی $id_E \circ id_E = id_E$ نسبت به پایه‌های $(e'_1, \ldots, e'_n)$ و $(e'_1, \ldots, e'_n)$ می‌باشد ، بنابراین $NM=I_n$.

در نتیجه ماتریس M وارون‌پذیر است و داریم $N=M^{-1}$.

۹ .۸ .۵- **اثر تعویض پایه روی مؤلفه‌های یك بردار** - بار دیگر فرض های شمارهٔ پیش رادرنظر می‌گیریم. چنانچه x برداری از E و مؤلفه های آن نسبت به پایه‌های $(e_1, \ldots, e_n)$ و $(e'_1, \ldots, e'_n)$ به ترتیب $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ و $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ باشد ، داریم :

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_n\end{bmatrix}=M\cdot\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \mu_n\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \mu_n\end{bmatrix}=M^{-1}\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_n\end{bmatrix} \tag{۱}$$

زیرا اگر فرمول (۱) شمارهٔ ۴.۵.۹ را با فرض $E=F$ و $u=id_E$ و $(e'_1 , \dots , e'_n)$ پایهٔ اول و $(e_1 , e_2 , \dots , e_n)$ پایهٔ دوم به‌کار بریم ، با توجه به ۳.۸.۹ فرمول اول (۱) به‌دست می‌آید. فرمول دوم را می‌توان مانند فرمول اول اثبات کرد ، و یا آن را ازضرب دو طرف فرمول اول (۱) (از چپ) در ماتریس M^{-1} نتیجه گرفت.

۶.۸.۹- اثر تعویض پایه روی ماتریس یک گسترش خطی - فضاهای برداری E و F روی هیأت K داده شده‌اند. گسترش خطی u متعلق به $\mathscr{L}(E , F)$ و دوپایهٔ $(e_1 , \dots , e_m)$ و $(e'_1 , \dots , e'_m)$ از E و همچنین دوپایهٔ $(f_1 , \dots , f_n)$ و $(f'_1 , \dots , f'_n)$ از F را درنظر می‌گیریم. چنانچه R ماتریس تعویض پایهٔ $(e_1 , \dots , e_m)$ به $(e'_1 , \dots , e'_m)$ و S ماتریس تعویض پایهٔ $(f_1 , \dots , f_n)$ به $(f'_1 , \dots , f'_n)$ و U ماتریس گسترش‌خطی u نسبت به پایه‌های $(e_1 , \dots , e_m)$ و $(f_1 , \dots , f_n)$ باشد ، ماتریس گسترش خطی u نسبت به پایه‌های $(e'_1 , \dots , e'_m)$ و $(f'_1 , \dots , f'_n)$ ، که آنرا با U' نشان می‌دهیم به‌وسیلهٔ فرمول زیر داده می‌شود :

$$U'=S^{-1}UR \tag{۲}$$

برای آشکار شدن این مطلب شمای زیر را درنظر می‌گیریم :

$$\begin{array}{ccccccc} & id_E & & u & & id_E & \\ E & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F\\ (e'_i) & & (e_i) & & (f_i) & & (f'_i)\end{array}$$

چون ماتریس گسترش id_E نسبت به پایه‌های $(e'_1 , \dots , e'_m)$ و $(e_1 , \dots , e_m)$ برابر با R و ماتریس گسترش u نسبت به پایه‌های $(e_1 , \dots , e_m)$ و $(f_1 , \dots , f_n)$

برابر با U و ماتریس گسترش id_F نسبت به پایه‌های $(f_1, \ldots, f_n)$ و $(f'_1, \ldots, f'_n)$ برابر با S^{-1} می‌باشد (۹.۸.۴) ، پس بنابرشمارهٔ ۹.۳.۹ ماتریس گسترش :

$$id_F \circ u \circ id_E = u$$

نسبت به پایه‌های $(e'_1, \ldots, e'_m)$ و $(f'_1, \ldots, f'_n)$ ، یعنی ماتریس U' ، برابر با $S^{-1}UR$ است .

۹.۸.۷- درشمارهٔ ۹.۸.۴ دیدیم که ماتریس تعویض پایه وارون‌پذیراست. به‌وارون فرض‌می‌کنیم $(e_1, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ فضای برداری E و M یک ماتریس وارون‌پذیر از رستهٔ (n, n) باشد. برداری از E راکه مؤلفه‌های آن نسبت به پایهٔ $(e_1, \ldots, e_n)$ عنصرهای ستون j ام ماتریس M باشند e'_j می‌نامیم . گسترش خطی E در E راکه e_1 را به e'_1 ، e_2 را به e'_2 ، ... ، e_n را به e'_n بدل می‌کند ، درنظر می‌گیریم . ماتریس این گسترش نسبت به پایهٔ $(e_1, \ldots, e_n)$ همان M می‌باشد و درنتیجه وارون‌پذیراست. بنابراین $(e'_1, \ldots, e'_n)$ یک‌پایهٔ فضای برداری E می‌باشد [۸.۸.٦ . (IV)] و روشن است‌که M ماتریس تعویض پایهٔ $(e_1, \ldots, e_n)$ به $(e'_1, \ldots, e'_n)$ است .

۹.۹ ـ ماتریس‌های هم‌ارز

۹.۹.۱ - **تعریف - دوماتریس M و M' از رستهٔ (n, m) را هم‌ارز می‌نامندهرگاه یک‌ماتریس‌وارون‌پذیر P از رستهٔ (n, n) ویک‌ماتریس وارون‌پذیر Q از رستهٔ(m, m) یافت شودبه‌طوری‌که $M' = PMQ$ باشد.**

۹.۹.۲ ـ ماتریس گسترش خطی u (متعلق به $\mathscr{L}(E, F)$) نسبت به‌پایه‌های $(e_1, \ldots, e_m)$ و $(f_1, \ldots, f_n)$ را M می‌نامیم . برای اینکه M' با M هم‌ارز باشد بایاوبسنده است که M' ماتریس گسترش خطی u نسبت به پایه‌های $(e'_1, \ldots, e'_m)$ و $(f'_1, \ldots, f'_n)$ باشد .

زیرا اگر شرط بالا برقرار و R ماتریس تعویض پایهٔ $(e_1, \ldots, e_m)$ به $(e'_1, \ldots, e'_m)$ و S ماتریس تعویض پایهٔ $(f_1, \ldots, f_n)$ به $(f'_1, \ldots, f'_n)$ باشد، با توجه به ۹.۸.٦ خواهیم داشت $M' = S^{-1}MR$. وچون R و S^{-1} وارون‌پذیرند M و M' هم‌ارزمی‌باشند .

به وارون فرض می‌کنیم M و M' هم‌ارز و P و Q ماتریس‌های نام‌برده درتعریف ۱.۹.۹ باشند. بنابرشمارهٔ ۷.۸.۹ یک پایهٔ $(e'_1, \dots, e'_m)$ ازفضای برداری E وجود دارد به‌طوری‌که Q ماتریس تعویض پایهٔ $(e_1, \dots, e_m)$ به $(e'_1, \dots, e'_m)$ باشد. همچنین یک‌پایهٔ $(f'_1, \dots, f'_n)$ ازفضای‌برداری F وجود دارد به‌قسمی‌که P^{-1} ماتریس تعویض پایهٔ $(f_1, \dots, f_n)$ به $(f'_1, \dots, f'_n)$ باشد. بنابراین با توجه به ۶.۸.۹ ماتریس گسترش خطی u نسبت به پایه‌های $(e'_1, \dots, e'_m)$ و $(f'_1, \dots, f'_n)$ عبارت است از $(P^{-1})^{-1}MQ = PMQ = M'$.

۳.۹.۹- ازآنچه که‌درشمارهٔ ۲.۹.۹ بیان گردیدنتیجه می‌شود که هم‌ارزی ماتریس‌ها یک بستگی هم‌ارزی است (این مطلب درستی نام‌گذاری بالا را می‌رساند) .

۴.۹.۹ ـ همچنین از شماره‌های ۱۰.۲.۹ و ۲.۹.۹ نتیجه می‌شود که دوماتریس هم‌ارز دارای یک رتبه می‌باشند. به‌وارون می‌خواهیم ثابت‌کنیم که دوماتریس n سطری و m ستونی‌که رتبهٔ آنها برابر باشد هم‌ارزند. به‌بیان دقیق‌تر :

قضیه - چنانچه ماتریس U از ردهٔ (n, m) و رتبهٔ آن r باشد، U هم‌ارز ماتریس زیر است :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\qquad r \qquad} & \overleftrightarrow{\qquad m-r \qquad} \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ r \\ \\ \\ n-r \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right]
\end{array}$$

اثبات :

۱ ـ با توجه به شمارهٔ ۲.۹.۹ ، کافی است ثابت‌کنیم که اگر E و F دو فضای برداری با بعدهای m و n و u یک‌گسترش خطی E در F و r رتبهٔ u باشد ، یک‌پایه

از E و یک‌پایه از F وجود دارد به‌طوری‌که ماتریس گسترش u نسبت به‌این پایه‌ها همان ماتریس بالا باشد .

۲ - چنانچه N هستهٔ گسترش خطی u باشد ، N دارای یک زیر فضای متمم در E است (۸.۱۰.٤) که آنرا M می‌نامیم . اگر تحدید گسترش u به M را با v نشان دهیم هستهٔ v برابر با $M\cap N=\{0\}$ می‌باشد (۸.۵.۲) ؛ پس v انژکتیو است (۷.۵.۳). وچون $u(N)=\{0\}$ می‌باشد بنابر ۸.۵.۲ داریم :

$$v(M)=u(M)=u(M)+u(N)=u(M+N)=u(E)$$

بنابراین v یک ایزومرفیسم M روی $u(E)$ است و درنتیجه با توجه به ۸.۱۱.۲ داریم :

$$\dim M=\dim u(E)=r$$

۳ - فرض می‌کنیم $(e_1 , \ldots , e_r)$ یک پایهٔ M باشد . گسترش v این پایه را به یک پایهٔ $(f_1 , \ldots , f_r)$ از زیر فضای برداری $u(E)$ بدل می‌کند . از افزودن پایهٔ $(e_{r+1} , \ldots , e_m)$ از زیر فضای N، به‌پایهٔ $(e_1 , \ldots , e_r)$ از M یک پایه از فضای E به‌دست می‌آید (۸.۸.۷). همچنین با افزودن بردارهایی به پایهٔ $(f_1 , \ldots , f_r)$ یک پایهٔ F را تشکیل می‌دهیم . دراین‌صورت ماتریس گسترش u نسبت به پایه‌های بدست آمده برای E و F همان ماتریس موردنظر است (ماتریس صفحهٔ ۲۱۰) . زیرا داریم :

$$u(e_1)=f_1 , \ldots , u(e_r)=f_r \ , \ u(e_{r+1})=0 , \ldots , u(e_m)=0$$

۹.۱۰ - ماتریس‌های همانند

۹.۱۰.۱ - تعریف-دوماتریس‌مربع M و M' از رستهٔ (n , n) راهمانند می‌گویند چنانچه یک‌ماتریس وارون‌پذیر P از رستهٔ (n , n) یافت شود به‌طوری‌که $M'=PMP^{-1}$ باشد.

۹.۱۰.۲ - فرض می‌کنیم M ماتریس یک‌گسترش خطی E در E نسبت بـه یک پایهٔ داده شده از E باشد(۹.۲.۲). هنگامی‌که می‌گوییم ماتریس M' همانند M است به‌این‌معنی‌است‌که M' ماتریس **همین** گسترش‌خطی نسبت به‌یک پایهٔ دیگر E می‌باشد (این‌مطلب مانند ۹.۹.۲ اثبات‌می‌گردد). ازاینجا نتیجه می‌شود که همانندی ماتریس‌ها یک بستگی هم‌ارزی است .

۹.۱۰.۳ - روشن است که دوماتریس همانند هم‌ارزند ، اما درحالت کلی دوماتریس هم‌ارز همانند نیستند (حتی اگر ماتریس‌ها مربع باشند) .

۹.۱۰.۴ - چنانچه M یک‌ماتریس مربع باشد، ساده‌ترین ماتریس M' همانند M را می‌توان به‌دست آورد .

بدین‌منظوراگر E را یک‌فضای‌برداری بابعد باپایان و u را عنصری‌از $\mathscr{L}(E,E)$ بگیریم، به‌جای‌پیداکردن M' می‌توان یک پایهٔ E را یافت به‌طوری‌که ماتریس گسترش u نسبت به‌این پایه ساده‌ترین صورت ممکن را داشته باشد. این مطلب را درآینده بررسی خواهیم کرد .

۹.۱۱ - ماتریس یک فرم دوخطی

۹.۱۱.۱ - فضای برداری E روی هیأت K داده شده است. پایهٔ $(e_1 , \dots , e_n)$ از E و فرم دوخطی f را روی E درنظر می‌گیریم . ماتریس $[\alpha_{ij}]$ از رستهٔ (n , n) را به‌قسمی‌که $\alpha_{ij}=f(e_i , e_j)$ باشد ، **ماتریس فرم دوخطی f نسبت به پایهٔ $(e_1 , \dots , e_n)$ می‌نامند .**

۹.۱۱.۲ - اگر مجموعهٔ فرم‌های دوخطی روی E را با $\mathscr{E}$ و مجموعهٔ ماتریس‌های از رستهٔ (n , n) با عنصرهای واقع در K را با $\mathscr{m}$ نشان دهیم، بنابرشماره‌های ۸.۱۷.۵ و ۸.۱۷.۶ گسترش $f \to [\alpha_{ij}]$ مجموعهٔ $\mathscr{E}$ درمجموعهٔ $\mathscr{m}$ دوسویی است.

۹.۱۱.۳ - فرض می‌کنیم $M=[\alpha_{ij}]$ ماتریس گسترش f نسبت به پایهٔ $(e_1 , \dots , e_n)$ باشد . چنانچه $(e'_1 , \dots , e'_n)$ یک پایهٔ دیگر E و $M'=[\alpha'_{ij}]$ ماتریس گسترش f نسبت به پایهٔ $(e'_1 , \dots , e'_n)$ باشد ، برای ماتریس تعویض پایهٔ (e_i) به (e'_i) که آنرا با P می‌نماییم چنین داریم :

$$M'={}^tPMP$$

زیرا اگر قراردهیم $P=[\lambda_{ij}]$ خواهیم داشت :

$$e'_i=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ki}e_k$$

پس :

$$a'_{ij}=f(e'_i\,,\,e'_j)=f\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ki}e_k\;,\;\sum_{l=1}^{n}\lambda_{lj}e_l\Big)=\sum_{k,l=1}^{n}\lambda_{ki}\lambda_{lj}f(e_k\,,e_l)$$

$$=\sum_{k,l=1}^{n}\lambda_{ki}\lambda_{lj}a_{kl}$$

اکنون اگر قرار دهیم $[\mu_{ij}]={}^tP$ که درآن $\mu_{ij}=\lambda_{ji}$ است، دیده می‌شود که عنصر سطر i ام و ستون j ام ماتریس ${}^tPMP$ عبارت است از :

$$\sum_{k=1}^{n}\mu_{ik}\Big(\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\lambda_{lj}\Big)=\sum_{k,l=1}^{n}\lambda_{ki}a_{kl}\lambda_{lj}=a'_{ij}$$

ازاینجا برابری $M'={}^tPMP$ به‌دست می‌آید .

فصل دهم

دترمینان‌ها

دراین فصل وسیله‌هایی برای محاسبات عملی درحل برخی از مسائل هندسی مانند شناخت اینکه آیا یک گسترش خطی وارون‌پذیر است ؟ آیا یک‌دستگاه از بردارها نابستگی خطی دارند ؟ ... داده می‌شود . این وسیله‌های عملی محاسبه برروی مفهوم دترمینان پایه گذاری شده‌است. تا پایان‌شمارهٔ ۱۰ . ۳ ازاین‌فصل ،تنها مقدمه‌های لازم برای بیان‌این مطالب گفته شده و این‌مقدمه‌ها تا حدی نیز مشکل‌است. درپایان فصل به بررسی‌درهندسهٔ معمولی پرداخته‌ایم .

۱۰ . ۱ ـ نشان یک تبدیل

۱۰ . ۱ . ۱ ـ گروه تبدیل‌های مجموعهٔ {n , ... , ۲ , ۱} را درنظر می گیریم وآن را با G_n نشان می‌دهیم. به‌هرعنصر π از G_n دو شمار زیر را وابسته می کنیم :

۱° ـ شمارهٔ وارونی (یا انورسیون) های π که آنرا با v_π می‌نماییم ($v_\pi \geqslant$ ۰) .

۲° ـ نشان π که آنرا با ε_π نمایش می‌دهیم ($\varepsilon_\pi = \pm$ ۱) .

۱۰ . ۱ . ۲ **شمارهٔوارونی‌های** π ـ مجموعهٔ بخش‌های‌دوعنصری {n , ... , ۲ , ۱} را با A و مجموعهٔ عنصرهایی مانند { i , j } از مجموعهٔ A را به قسمی که تحدید π به { i , j } کاهشی باشد با B نشان می‌دهیم . پس B عبارت است ازمجموعهٔ عنصرهایی به‌صورت { i , j } متعلق به A به‌طوریکه اگر $i > j$ باشد داشته باشیم $\pi(i) < \pi(j)$ و چنانچه $i < j$ باشد داشته باشیم $\pi(i) > \pi(j)$. هرعنصر B را یک ***وارونی*** تبدیل π می‌نامند . پس شمارهٔ وارونی‌های π ، یعنی v_π ، همان شمارهٔ عنصرهای B می‌باشد .

۱۰ . ۱ . ۳ ـ **مثال**ـچنانچه n=۵ و π=(۴ , ۱ , ۲ , ۳ , ۵) باشد ، عنصرهای A عبارتند از {۲ , ۱} ، {۳ , ۱} ، {۴ , ۱} ، {۵ , ۱} ، {۳ , ۲} ، {۴ , ۲} ، {۵ , ۲} ، {۴ , ۳} ، {۵ , ۳} و {۵ , ۴} وعنصرهای B مجموعه های دو عنصری

$\{۲ , ۱\}$ ، $\{۳ , ۱\}$ ، $\{۴ , ۱\}$ ، $\{۵ , ۱\}$ ، $\{۳ , ۲\}$ ، $\{۴ , ۲\}$ و $\{۴ , ۳\}$
می‌باشند. بنابراین $v_\pi = ۷$ است .

۱۰.۱.۴ - **نشان** π - شمار درست $(۱-)^{v_\pi} = \varepsilon_\pi$ **نشان** π نامیده می‌شود .

۱۰.۱.۵ - هرگاه شمار درست v_π زوج باشد خواهیم داشت $\varepsilon_\pi = ۱$. دراین‌صورت تبدیل π را **زوج** می‌نامند. چنانچه v_π فردباشدیعنی $\varepsilon_\pi = -۱$ ، تبدیل‌را **فرد** می گویند.

۱۰.۱.۶ - **قضیه- برای‌هر دوعنصر دلخواه π و π' متعلق به G_n برابری $\varepsilon_{\pi' \circ \pi} = \varepsilon_\pi \varepsilon_{\pi'}$ برقراراست.**

اثبات- مجموعهٔ عنصرهایی مانند $\{i , j\}$ از A را به‌ قسمی‌ که تحدید π (تحدید π') به $\{i , j\}$ کاهشی باشد با B (با B') نشان می‌دهیم . پس داریم :

$$v_\pi = B \text{ شمارهٔ عنصرهای } \qquad (۱)$$

$$v_{\pi'} = B' \text{ شمارهٔ عنصرهای } \qquad (۲)$$

همچنین مجموعهٔ عنصرهای $\{i , j\}$ متعلق به A را به‌طوری که $\{\pi(i) , \pi(j)\}$ متعلق به B' باشد با C می‌نماییم . گسترش $\{i , j\} \longrightarrow \{\pi(i) , \pi(j)\}$ یک گسترش دوسویی A روی A است، زیرا π یک گسترس دوسویی $\{۱ , ۲ , \ldots , n\}$ روی $\{۱ , ۲ , \ldots , n\}$ می‌باشد. پس شمارهٔ عنصرهای B' برابر با شمارهٔ عنصرهای C است و ازآنجا :

$$v_{\pi'} = C \text{ شمارهٔ عنصرهای } \qquad (۳)$$

اکنون فرض می کنیم $\{i , j\}$ متعلق به A و مثلاً $i < j$ باشد . چهار حالت زیر پیش می‌آید :

۱ - $\{i , j\} \in B \cap C$ ، دراین‌صورت :

$$\pi(i) > \pi(j) \quad , \quad \{\pi(i) \ , \ \pi(j)\} \in B'$$

پس خواهیم داشت $\pi'(\pi(i)) < \pi'(\pi(j))$.

۲ - $\{i\,,\,j\} \in B \cap \complement C$ ، دراین‌صورت :

$$\pi(i) > \pi(j) \quad , \quad \{\pi(i)\ ,\ \pi(j)\} \in B'$$

پس خواهیم داشت $\pi'(\pi(i)) > \pi'(\pi(j))$.

۳ - $\{i\,,\,j\} \in \complement B \cap C$ ، دراین‌صورت :

$$\pi(i) < \pi(j) \quad , \quad \{\pi(i)\ ,\ \pi(j)\} \in B'$$

پس خواهیم داشت $\pi'(\pi(i)) > \pi'(\pi(j))$.

٤ - $\{i\,,\,j\} \in \complement B \cap \complement C$ ، دراین‌صورت :

$$\pi(i) < \pi(j) \quad , \quad \{\pi(i)\ ,\ \pi(j)\} \notin B'$$

پس خواهیم داشت $\pi'(\pi(i)) < \pi'(\pi(j))$.

چنانچه n_1 ، n_2 ، n_3 ، n_4 به‌ترتیب شمارهٔ عنصرهای $B \cap C$ ، $B \cap \complement C$ ، $\complement B \cap C$ و $\complement B \cap \complement C$ باشند ، از مطالب بالا نتیجه می‌شود :

$$v_{\pi' \circ \pi} = n_2 + n_3 \tag{٤}$$

به علاوه بنابر (۱) داریم :

$$v_\pi = B \text{ شمارهٔ عنصرهای } = n_1 + n_2 \tag{٥}$$

همچنین بنابر (۳) داریم :

$$v_{\pi'} = C \text{ شمارهٔ عنصرهای } = n_1 + n_3 \tag{٦}$$

از مقایسهٔ (٤) و (٥) و (٦) خواهیم داشت :

$$v_{\pi' \circ \pi} = v_{\pi'} + v_\pi - 2n_1$$

پس

$$\varepsilon_{\pi' \circ \pi} = \varepsilon_\pi \varepsilon_{\pi'}$$

۱۰.۱.۷ - قضیهٔ ۱۰.۱.٦ را می‌توان به‌صورت زیر نیز بیان کرد :

گسترش $\pi \rightarrow \varepsilon_\pi$ یک هومرفیسم گروه G_n درگروه ضربی $\{1\ ,\ -1\}$ است .

ازاینجا نتیجه می‌شود که نشان تبدیل همانی ۱+ می‌باشد (این مطلب آشکار است) و داریم $\varepsilon_{\pi^{-1}}=(\varepsilon_\pi)^{-1}$ وچون درگروه $\{1, -1\}$ هرعنصر با وارون خود برابر است پس خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{\pi^{-1}}=\varepsilon_\pi$$

۱۰.۱.۸ - تعریف- عنصر π از G_n را یک جایگشت (یا یک ترانسپوزیسیون) می‌گویند هرگاه دوشمار متمایز i و j از $\{1, 2, \dots, n\}$ وجود داشته باشد به‌طوریکه $\pi(i)=j$ ، $\pi(j)=i$ و $\pi(k)=k$ باشد ($k\neq i$, $k\neq j$).

۱۰.۱.۹ - روشن است که هرجایگشت با وارون خود برابر می‌باشد.

۱۰.۱.۱۰ - قضیه- هرجایگشت تبدیلی است فرد.

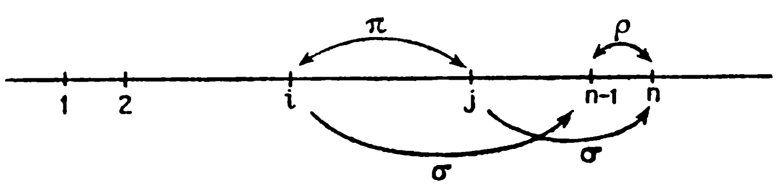
اثبات- دوعنصر متمایز i و j از $\{1, 2, \dots, n\}$ و جایگشت π متعلق به G_n را، که i و j را بهم بدل می‌کند، درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم ρ جایگشتی از G_n باشد که n و $n-1$ را به‌هم بدل می‌کند. چنانچه σ عنصری از G_n باشد که i را به $n-1$ و j را به n بدل کند، قرار می‌دهیم $\pi'=\sigma^{-1}\rho\sigma$. اگر p عنصری از $\{1, 2, \dots, n\}$ و متمایز از i و j باشد $\sigma(p)$ متمایز از $n-1$ و n است، پس $\rho(\sigma(p))=\sigma(p)$ و ازآنجا $\pi'(p)=p$. به علاوه چنین داریم:

$$\pi'(i)=\sigma^{-1}\rho(n-1)=\sigma^{-1}(n)=j\ ,\ \pi'(j)=\sigma^{-1}\rho(n)=\sigma^{-1}(n-1)=i$$

پس $\pi=\pi'$ و بنابر ۱۰.۱.۶ از برابری $\pi=\sigma^{-1}\rho\sigma$ نتیجه می‌شود:

$$\varepsilon_\pi=\varepsilon_{\sigma^{-1}}\varepsilon_\rho\varepsilon_\sigma=\varepsilon_\rho$$

اما برابری $v_\rho=1$ آشکاراست. پس خواهیم داشت $\varepsilon_\rho=-1$ و $\varepsilon_\pi=-1$.



شکل ۳۰

۱۰.۱.۱۱ - قضیه- هرعنصر G_n ترکیبی ازجایگشت‌هاست.

اثبات- شمار درست p را که در نابرابری‌های $0 \leqslant p \leqslant n$ صدق می‌کند درنظر می‌گیریم . مجموعهٔ تبدیل‌های σ متعلق به G_n را به قسمی‌که $\sigma(p+1)=p+1$ ، $\sigma(p+2)=p+2$ ، . . . ، $\sigma(n)=n$ باشد با E_p وحکم زیر را با (A_p) نشان می‌دهیم :

هرعنصر E_p ترکیبی از جایگشت‌ها می‌باشد .

چون E_0 تنها از تبدیل‌همانی (توان دوم هرجایگشت) تشکیل می‌گردد پس‌حکم (A_0) برقرار است . اکنون می‌خواهیم ثابت‌کنیم که ازحکم (A_p) حکم (A_{p+1}) نتیجه می‌شود . دراین‌صورت (A_n) برقرار وچون $E_n=G_n$ است قضیه ثابت می‌گردد .

پس فرض می‌کنیم (A_p) برقرار و σ عنصری از E_{p+1} باشد ، باید ثابت‌کنیم که σ از ترکیب جایگشت‌ها بدست می‌آید . داریم :

$$\sigma(p+2)=p+2 \;,\; \sigma(p+3)=p+3 \;,\; \dots \;,\; \sigma(n)=n$$

پس $q=\sigma(p+1)$ شمار درست مثبتی است که کوچکتر یا برابر با $p+1$ می‌باشد . اگر $q=p+1$ باشد σ عنصری از E_p خواهد شد و بنابراین از ترکیب جایگشت‌ها بدست می‌آید . چنانچه $q \neq p+1$ و τ جایگشتی باشدکه q و $p+1$ را بـه هم بدل می‌کند ، قرار می‌دهیم $\rho=\tau\sigma$ ، درنتیجه خواهیم داشت :

$$\rho(P+2)=\tau(p+2)=p+2 \;,\; \rho(p+3)=\tau(p+3)=p+3 \;,\; \dots \;,\\ \rho(n)=n$$

و :

$$\rho(p+1)=\tau(q)=p+1$$

از اینجا نتیجه می‌شودکه ρ متعلق به E_p است و بنا به فرض از حاصل‌ضرب جایگشت‌ها به دست می‌آید . به عبارت دیگر داریم $\rho=\tau_1\tau_2 \dots \tau_r$ ، پس خواهیم داشت :

$$\sigma=\tau^{-1}\rho=\tau\rho=\tau\tau_1\tau_2 \dots \tau_r$$

۱۰.۲ ـ فرم‌های چند خطی متناوب

۱.۲.۱۰ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری و :

$$(x_1 , x_2 , \ldots , x_p) \to f(x_1 , x_2 , \ldots x_p)$$

یک فرم چند خطی روی E باشد . فرم f را **متناوب** می‌نامند اگر هنگامی که دوتا از بردارهای x_i برابر باشند، $f(x_1 , x_2 , \ldots , x_p) = 0$ باشد .

۲.۲.۱۰ - **قضیه - چنانچه فرم چند خطی f متناوب باشد ، برای هر تبدیل σ از $\{1 , 2 , \ldots , p\}$ داریم :**

$$f(x_{\sigma(1)} , x_{\sigma(2)} , \ldots , x_{\sigma(p)}) = \varepsilon_\sigma f(x_1 , x_2 , \ldots , x_p)$$

اثبات :

۱ - فرض می‌کنیم $p = 2$ باشد . باید ثابت کنیم $f(y , x) = -f(x , y)$
چون f یک فرم دوخطی و متناوب است داریم :

$$0 = f(x+y , x+y) = f(x , x) + f(x , y) + f(y , x) + f(y , y) = f(x , y) + f(y , x)$$

پس
$$f(x , y) = -f(y , x)$$

۲ - فرض می‌کنیم شمار درست p دلخواه و σ جایگشتی باشد که دواندیس i و j را به یکدیگر بدل می‌کند . با درنظر گرفتن ۱۰.۱.۱۰ باید ثابت کنیم :

$$f(x_1 , \ldots , x_{i-1} , x_i , x_{i+1} , \ldots , x_{j-1} , x_j , x_{j+1} , \ldots , x_p)$$
$$= -f(x_1 , \ldots , x_{i-1} , x_j , x_{i+1} , \ldots , x_{j-1} , x_i , x_{j+1} , \ldots , x_p)$$

چنانچه عنصرهای x و y متعلق به E باشند قرار می‌دهیم :

$$g(x , y) = f(x_1 , \ldots , x_{i-1} , x , x_{i+1} , \ldots , x_{j-1} , y , x_{j+1} , \ldots , x_p)$$

به‌طوریکه دیده می‌شود $g(x , y)$ یک فرم دوخطی است ، و چون f متناوب است پس $g(x , x) = 0$ می‌باشد ؛ یعنی g نیز متناوب است . با استفاده از قسمت اول اثبات قضیه

داریم $g(x_i , x_j) = -g(x_j , x_i)$ که با توجه به تعریف g درستی برابری موردنظر آشکار می گردد .

۳ ـ اکنون به اثبات حالت کلی می‌پردازیم . می‌دانیم که هرتبدیل مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, p\}$ از حاصل‌ضرب جایگشت‌ها تشکیل شده است . فرض می کنیم قضیه برای یک تبدیل ρ که حاصل‌ضرب r جایگشت است برقرار باشد و آن را برای تبدیل $\sigma = \tau\rho$ ثابت می کنیم (τ یک جایگشت است) . چنانچه قرار دهیم :

$$x_{\tau(1)} = y_1 , \ldots , x_{\tau(p)} = y_p$$

خواهیم داشت :

$$x_{\sigma(i)} = x_{\tau(\rho(i))} = y_{\rho(i)}$$

و درنتیجه :

$$f(x_{\sigma(1)} , \ldots , x_{\sigma(p)}) = f(y_{\rho(1)} , \ldots , y_{\rho(p)})$$

با توجه به فرض بازگشت برابری بالا چنین نوشته می‌شود :

$$f(y_{\rho(1)} , \ldots , y_{\rho(p)}) = \varepsilon_\rho f(y_1 , \ldots , y_p) = \varepsilon_\rho f(x_{\tau(1)} , \ldots , x_{\tau(p)})$$

که با استفاده از بخش دوم اثبات قضیه به صورت زیر درمی‌آید :

$$f(x_{\sigma(1)} , \ldots , x_{\sigma(p)}) = \varepsilon_\tau \varepsilon_\rho f(x_1 , \ldots , x_p) = \varepsilon_{\tau\rho} f(x_1 , \ldots , x_p)$$
$$= \varepsilon_\sigma f(x_1 , \ldots , x_p)$$

بدین‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود .

۳.۲.۱۰ ـ قضیه ـ چنانچه فرم چندخطی f متناوب و بردارهای x_1 ، x_2 ، ... ، x_p بستگی خطی داشته باشند داریم $f(x_1 , x_2 , \ldots , x_p) = 0$.

اثبات ـ اگر x_1 ، ... ، x_p بستگی خطی داشته باشند یکی از بردارها مثلاً x_i به‌صورت :

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \lambda_p x_p$$

نوشته می‌شود که درآن λ_j ها اسکالرند . پس خواهیم داشت :

$$f(x_1 , \ldots , x_p) = \sum_{j \neq i} \lambda_j f(x_1 , \ldots , x_{i-1}\, x_j , x_{i+1} , \ldots , x_p)$$

وهرجملهٔ $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_p)$ از مجموع بالا برابر با صفراست زیرا x_j با یکی از بردارهای x_1 ، ... ، x_{i-1} ، x_{i+1} ، ... ، x_p برابر است.

۴.۲.۱۰ - نتیجه-فرض می‌کنیم f یک فرم چند خطی متناوب باشد. اگر به یکی از x_i ها ترکیبی خطی از x_j هارا $(j \neq i)$ بیفزاییم مقدار $f(x_1, \ldots, x_p)$ تغییر نمی‌کند.

زیرا اگر y یک ترکیب خطی از x_j ها باشد $(j \neq i)$ با توجه به ۳.۲.۱۰ خواهیم داشت $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_p) = 0$ و ازآنجا :

$$\begin{aligned} & f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + y, x_{i+1}, \ldots, x_p) \\ & = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p) \\ & \quad + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_p) \\ & = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p) \end{aligned}$$

۳.۱۰ - فرم‌های n خطی متناوب روی فضای برداری n بعدی

۱.۳.۱۰ - محاسبه‌های مقدماتی - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری، $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ E و g یک فرم n خطی متناوب روی E باشد . n بردار x_1 ، x_2 ، ... ، x_n متعلق به E را به‌صورت زیر درنظر میگیریم :

x_1 به مؤلفه‌های λ_1^1 ، λ_2^1 ، ... ، λ_n^1

x_2 به مؤلفه‌های λ_1^2 ، λ_2^2 ، ... ، λ_n^2

. . . .

x_n به مؤلفه‌های λ_1^n ، λ_2^n ، ... ، λ_n^n

خواهیم داشت :

$$g(x_1, \ldots, x_n) = g(\lambda_1^1 e_1 + \lambda_2^1 e_2 + \cdots + \lambda_n^1 e_n, \ldots, \lambda_1^n e_1 + \lambda_2^n e_2 + \cdots + \lambda_n^n e_n)$$

چنانچه طرف دوم برابری بالا را با توجه به‌اینکه g یک فرم n خطی‌است بسط دهیم، یک مجموع n^n جمله‌ای به‌دست می‌آید که هرجملهٔ آن به‌صورت :

$$\lambda^1_{i_1}\lambda^2_{i_2}\cdots\lambda^n_{i_n}g(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$$

است که در آن i_1 ، i_2 ، . . . ، i_n عنصرهای دلخواهی از $\{1, 2, \ldots, n\}$ می‌باشند. چون g متناوب است جمله های بالا برابر باصفرند مگر اینکه همه اندیس های i_1 ، i_2 ، . . . ، i_n متمایز باشند ، به‌عبارت‌دیگر جمله های بالاصفرند مگر اینکه $i_1=\sigma(1)$ ، $i_2=\sigma(2)$ ، . . . ، $i_n=\sigma(n)$ باشد ، که در آن σ متعلق به گروه تبدیل های $\{1, 2, \ldots, n\}$ یعنی G_n ، می‌باشد . پس می‌توان نوشت :

$$g(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{\sigma\in G_n}\lambda^1_{\sigma(1)}\lambda^2_{\sigma(2)}\cdots\lambda^n_{\sigma(n)}g(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$$

که با استفاده از قضیهٔ ۲.۲.۱۰ خواهیم داشت :

$$(1)\quad g(x_1, \ldots x_n)=[\sum_{\sigma\in G_n}\varepsilon_\sigma\lambda^1_{\sigma(1)}\lambda^2_{\sigma(2)}\cdots\lambda^n_{\sigma(n)}]g(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

۲.۳.۱۰-قضیه-فرض می کنیم E یک فضای برداری و $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ E باشد.

(I) - برای هر دستگاه n برداری :

$$x_1=\lambda^1_1e_1+\lambda^1_2e_2+\cdots+\lambda^1_ne_n, \ldots, x_n=\lambda^n_1e_1+\lambda^n_2e_2+\cdots+\lambda^n_ne_n$$

از بردارهای E قرار می‌دهیم :

$$(2)\qquad f(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{\sigma\in G_n}\varepsilon_\sigma\lambda^1_{\sigma(1)}\lambda^2_{\sigma(2)}\cdots\lambda^n_{\sigma(n)}$$

دراین‌صورت f تنها فرم n خطی متناوب روی E است که برای آن داریم :

$$f(e_1, e_2, \ldots, e_n)=1$$

(II) - اگر g یک فرم n خطی متناوب روی E باشد وقراردهیم :

$$g(e_1, e_2, \ldots, e_n)=\mu$$

برای هردستگاه x_1 ، x_2 ، ... ، x_n ازبردارهای E ، داریم :

$$g(x_1 , \dots , x_n)=\mu f(x_1 , \dots , x_n)$$

اثبات :

الف ـ هرجملهٔ مجموع (۲) یک تابع خطی ازهریک ازبردارهای x_1 ، x_2 ، ... ، x_n است . پس f یک فرم n خطی روی E می‌باشد . اکنون نشان می‌دهیم که f متناوب است . بدین منظور فرض می‌کنیم i و j دوشمار متمایز متعلق به $\{1 , 2 , \dots , n\}$ باشند به‌قسمی که داشته باشیم $x_i=x_j$. باید ثابت کنیم که $f(x_1 , x_2 , \dots , x_n)=0$ است .

چنانچه τ جایگشتی باشد که i و j را به یکدیگر بدل می‌کند ، زیرگروه H از G_n که به‌وسیلهٔ τ پدید می‌آید تنها از $\{e , \tau\}$ تشکیل می‌شود زیرا $\tau^2=e$ است (شمارهٔ ۳.۲.۵) . در G_n هرکلاس چپ نسبت به H ، یک مجموعهٔ دوعنصری است و می‌دانیم که این کلاس‌ها دوبه‌دو از هم جدا هستند واجتماع آنها برابر با G_n می‌باشد (۳.۳.۱) . درهرکلاس چپ c نسبت به H ، عنصر σ_c را انتخاب می‌کنیم (باتوجه به ۳.۳.۱ عنصر دیگر c عبارت است از $\sigma_c\tau$) و مجموعهٔ σ_c ها را با A نشان می‌دهیم . دراین‌صورت G_n اجتماع دومجموعهٔ جدا ازهم A و $A\tau$ می‌باشد و خواهیم داشت :

$$f(x_1 , \dots , x_n)= \sum_{\sigma\in A} \varepsilon_\sigma\lambda^1_{\sigma(1)}\lambda^2_{\sigma(2)}\cdots\lambda^n_{\sigma(n)}+$$
$$\sum_{\sigma\in A} \varepsilon_{\sigma\tau}\lambda^1_{\sigma\tau(1)}\lambda^2_{\sigma\tau(2)}\cdots\lambda^n_{\sigma\tau(n)}$$

چون $\varepsilon_{\sigma\tau}=\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau=-\varepsilon_\sigma$ است عبارت طرف راست برابری بالا چنین نوشته می‌شود :

$$\sum_{\sigma\in A} \varepsilon_\sigma[\lambda^1_{\sigma(1)}\lambda^2_{\sigma(2)}\cdots\lambda^n_{\sigma(n)}-\lambda^1_{\sigma\tau(1)}\lambda^2_{\sigma\tau(2)}\cdots\lambda^n_{\sigma\tau(n)}] \qquad (3)$$

اکنون به بررسی $\lambda^k_{\sigma\tau(k)}$ می‌پردازیم . سه‌حالت پیش می‌آید :

۱ ـ $k\neq i$ و $k\neq j$: دراین‌صورت $\lambda^k_{\sigma\tau(k)}=\lambda^k_{\sigma(k)}$.

۲ - $k=i$: چون دراین‌حالت $x_i=x_j$ می‌باشد پس :

$$\lambda^{i}_{\sigma\tau(i)}=\lambda^{i}_{\sigma(j)}=\lambda^{j}_{\sigma(j)}$$

۳ - $k=j$: چون دراین‌حالت $x_i=x_j$ می‌باشد پس :

$$\lambda^{j}_{\sigma\tau(j)}=\lambda^{j}_{\sigma(i)}=\lambda^{i}_{\sigma(i)}$$

بنابراین :

$$\lambda^{1}_{\sigma(1)}\lambda^{2}_{\sigma(2)}\cdots\lambda^{n}_{\sigma(n)}=\lambda^{1}_{\sigma\tau(1)}\lambda^{2}_{\sigma\tau(2)}\cdots\lambda^{n}_{\sigma\tau(n)}$$

پس هریک ازکروشه‌های مجموع (۳) برابر باصفراست واین متناوب بودن f را می‌رساند.

ب ـ اگر $x_1=e_1$ ، ... ، $x_n=e_n$ باشد برای $i\neq j$ خواهیم داشت $\lambda^{j}_{i}=0$.
پس هریک از جمله‌های مجموع (۲) برابر با صفر می‌باشند مگر تنها جمله‌ای‌که برای آن $\sigma(1)=1$ ، $\sigma(2)=2$ ، ... ، $\sigma(n)=n$. بنابراین خواهیم داشت :

$$f(e_1,\ldots,e_n)=1\cdot 1\cdots 1=1$$

پ ـ قسمت دوم قضیه از فرمول (۱) شمارهٔ ۱۰.۳.۱ نتیجه می‌شود .

ت ـ به ویژه اگر g یک فرم n خطی‌متناوب روی E باشد به قسمی‌که داشته باشیم $g(e_1,\ldots,e_n)=1$ خواهیم داشت $g=f$. ازاینجا یکتایی f و درنتیجه قسمت(I) قضیه ثابت می‌شود .

۱۰ . ۴ ـ دترمینان یک دستگاه بردار نسبت به یک پایه

۱۰.۴.۱ ـ فضای برداری E را روی هیأت K درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم :

$$B=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$$

یک پایهٔ E باشد . بنابر ۱۰.۳.۲ یک فرم n خطی متناوب f روی E و تنها یکی وجود دارد به‌طوری‌که داریم :

$$f(e_1,e_2,\ldots,e_n)=1$$

تعریف-اگر n بردار x_1 ، x_2 ، ... ، x_n متعلق به E باشند، اسکالر $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ رادترمینان بردارهای x_1 ، x_2 ، ... ، x_n نسبت به پایهٔ B می‌نامند وآنرا چنین می‌نویسند :

$$\det_B(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

۱۰ . ۴ . ۲- چنانچه مؤلفه‌های x_i را نسبت به B با λ_1^i ، λ_2^i ، ... ، λ_n^i نشان‌دهیم باستفاده از قسمت (I) قضیه ۱۰ . ۳ . ۲ نتیجه می‌شود :

$$\det_B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon_\sigma \lambda^1_{\sigma(1)} \lambda^2_{\sigma(2)} \cdots \lambda^n_{\sigma(n)}$$

۱۰ . ۴ . ۳- از تعریف ۱۰ . ۴ . ۱ به‌آسانی برابری‌زیر بدست می‌آید :

$$\det_B(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$$

۱۰ . ۴ . ۴- قضیه :

(I) — $\det_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نسبت به هریك از x_i ها تابعی خطی است .

(II) — هرگاه دو تا از x_i ها برابر باشند داریم :

$$\det_B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

(III) — اگر σ عنصری از G_n باشد داریم :

$$\det_B(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma \det_B(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

(IV) — چنانچه به یکی از بردارهای x_i یك ترکیب خطی از $n-1$ بردار دیگر بیفزاییم $\det_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تغییر نمی‌کند .

(V) — برای اینکه $\det_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ برابر با صفر شود بایاوبسنده است‌که x_1 ، x_2 ، ... ، x_n بستگی خطی داشته باشند .

اثبات - ویژگی‌های (I) تا (IV) همان ویژگی‌های کلی فرم‌های چند خطی متناوب می‌باشند (شماره‌های ۱۰ . ۲ . ۱ ، ۱۰ . ۲ . ۲ و۱۰ . ۲ . ۴) .

بنابر ۱۰ . ۲ . ۳ اگر x_1 ، x_2 ، ... ، x_n بستگی خطی داشته باشند :

$$\det_B(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

است. اکنون فرض می‌کنیم $\det_B(x_1, \ldots, x_n) = 0$ باشد. دراین‌صورت با توجه به‌بخش (II) قضیهٔ ۱۰ . ۳ . ۲ هرفرم n خطی متناوب روی E در نقطهٔ $(x_1, \ldots, x_n)$ از E^n برابر با صفر خواهد شد. اما اگر x_1 ، ... ، x_n نابستگی خطی داشته باشند یک پایهٔ E را تشکیل خواهند داد (۸ . ۱۰ . ۸) و بادرنظرگرفتن بخش (I) قضیهٔ۱۰ . ۳ . ۲(که

درآن x_1 ، x_2 ، ... ، x_n نقش e_1 ، e_2 ، ... ، e_n را دارند) یک فرم n خطی‌متناوب روی E وجود خواهد داشت که درنقطهٔ $(x_1, \ldots, x_n)$ مخالف باصفر باشد واین باآنچه که در بالا بیان گردید ناسازگار است. پس نتیجه می‌شود که x_1 ، ... ، x_n بستگی خطی دارند.

۱۰.۴.۵- **قضیه - چنانچه $(e_1, \ldots, e_n)$ و $(e'_1, \ldots, e'_n)$ دو پایه ازفضای برداری E و x_1 ، ... ، x_n بردارهایی از E باشند داریم:**

$$(1)\quad \det_{(e'_1, \ldots, e'_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{(e_1, \ldots, e_n)}(x_1, \ldots, x_n)\det_{(e'_1, \ldots, e'_n)}(e_1, \ldots, e_n)$$

اثبات- بنابربخش (II) قضیه ۱۰.۳.۲ یک اسکالر μ که‌بستگی‌به x_1 ، ... ، x_n نداشته باشد می‌توان یافت به‌طوری که:

$$(2)\quad \det_{(e'_1, \ldots, e'_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \mu \det_{(e_1, \ldots, e_n)}(x_1, \ldots, x_n)$$

چنانچه قرار دهیم $x_1 = e_1$ ، ... ، $x_n = e_n$ با توجه به ۱۰.۴.۳ خواهیم داشت:

$$\det_{(e'_1, \ldots, e'_n)}(e_1, \ldots, e_n) = \mu \det_{(e_1, \ldots, e_n)}(e_1, \ldots, e_n) = \mu$$

و در نتیجه برابری (۱) از برابری (۲) به دست می‌آید.

۱۰.۵- دترمینان یک‌گسترش خطی E در E

۱۰.۵.۱- **قضیه - فرض می‌کنیم E یك فضای برداری n بعدی و u یك‌گسترش خطی E در E باشد. یك اسکالر λ و تنها یکی وجود دارد به‌طوریکه برای بردارهای دلخواه x_1 ، ... ، x_n و پایهٔ دلخواه B ازفضای E داریم:**

$$(1)\quad \det_B(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \lambda \det_B(x_1, \ldots, x_n)$$

اثبات - پایهٔ B از فضای E را درنظر می‌گیریم. ازبخش‌های (I) و (II) قضیه ۱۰.۴.۴ و خطی بودن u نتیجه می‌شود که گسترش:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \det_B(u(x_1), \ldots, u(x_n))$$

یک فرم n خطی متناوب‌روی E می‌باشد. بنابر بخش (II) قضیه ۱۰.۳.۲ یک اسکالر λ

که بستگی به x_1 ، ... ، x_n ندارد ، می‌توان یافت که برابری (۱) را برقرار کند. اکنون اگر B' یک پایهٔ دیگر در E باشد داریم :

$$\det_{B'}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det_B(u(x_1), \ldots, u(x_n))\det_{B'}(B)$$
$$= \lambda \det_B(x_1, \ldots, x_n)\det_{B'}(B)$$
$$= \lambda \det_{B'}(x_1, \ldots, x_n) \quad , \qquad \text{(بنابر ۱۰.۴.۵)}$$

پس برابری(۱) برای اسکالر λ که بستگی به x_1 ، ... ، x_n و پایهٔ B ندارد برقرار است. به‌علاوه یکتایی λ آشکار است زیرا اگر $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ پایه‌ای از E باشد داریم:

$$(۲) \qquad \det_{(e_1, \ldots, e_n)}(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = \lambda \det_{(e_1, \ldots, e_n)}(e_1, \ldots, e_n) = \lambda$$

۱۰.۵.۲- تعریف - اسکالر λ که‌در قضیهٔ ۱۰.۵.۱ معین گردید دترمینان u نامیده می‌شود و آنرا با $\det u$ نشان می‌دهند.

۱۰.۵.۳- بنابر آنچه که دیده شد ، برای هرپایهٔ دلخواه B وبرای هردستگاه بردار x_1 ، ... ، x_n داریم :

$$(۳) \qquad \det_B(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = (\det u)(\det_B(x_1, \ldots, x_n))$$

به‌ویژه چنانچه $(e_1, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ E باشد خواهیم داشت :

$$(٤) \qquad \det_{(e_1, \ldots, e_n)}(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = \det u$$

۱۰.۵.٤- چنانکه دیده می‌شود اگر u گسترش همانی E باشد $\det u = 1$ است. به‌طورکلی هرگاه u همسانی به‌نسبت λ باشد داریم $\det u = \lambda^n$. این مطلب را می‌توان مثلاً از فرمول (٤) و شمارهٔ ۱۰.٤.٤. (I) نتیجه گرفت.

۱۰.۵.۵- قضیه - عنصر u از $\mathscr{L}(E, E)$ را درنظر می‌گیریم. برای اینکه u وارون‌پذیر باشد بایاوبسنده است که داشته باشیم $\det u \neq 0$.

اثبات - فرض می‌کنیم $(e_1, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ E باشد. بنابر ۸.۱۱.٤

برای اینکه u وارون‌پذیرباشد یاباوبسنده است که u انژکتیوباشد یعنی بردارهای $u(e_1)$ ، $u(e_2)$ ، ... ، $u(e_n)$ نابستگی خطی داشته باشند (٦.٨.٨) ، و این بدان معنی است که $\det_B(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ مخالف با صفر باشد (بخش (V) قضیهٔ ٤.٤.١٠) و دراین صورت با توجه به فرمول (٤) خواهیم داشت $\det u \neq 0$.

٦.٥.١٠- قضیه - برای هردو عنصر u و v از $\mathscr{L}(E, E)$ داریم :

$$\det(uv) = (\det u)(\det v)$$

اثبات - عنصرهای دلخواه x_1 ، x_2 ، ... ، x_n از E ویک پایهٔ B از آن‌را درنظر می‌گیریم. چنانچه فرمول (٣) را دوبار بکار بریم نتیجه می‌شود :

$$\begin{aligned}\det_B(u(v(x_1)), \ldots, u(v(x_n))) &= (\det u)(\det_B(v(x_1), \ldots, v(x_n)))\\ &= (\det u)(\det v)\det_B(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

به‌طوریکه دیده می‌شود برای گسترش uv ، اسکالر λ که در قضیهٔ ١.٥.١٠ معین شد برابر با $(\det u)(\det v)$ است و بدین‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

٧.٥.١٠- نتیجه - اگر u وارون‌پذیر باشد داریم :

$$\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$$

زیرا بنابر شماره‌های ٤.٥.١٠ و ٦.٥.١٠ از برابری $uu^{-1} = id_E$ نتیجه می‌شود :

$$(\det u)(\det u^{-1}) = 1$$

٨.٥.١٠- درمورد $\det(u+v)$ فرمول ساده‌ای وجود ندارد.

٦.١٠- دترمینان یک ماتریس مربع

١.٦.١٠- ماتریس n سطری و n ستونی :

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^n \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda_n^1 & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

با عنصرهای متعلق به K را درنظر می‌گیریم. ستونهای ماتریس مربع M بردارهایی از $\mathbf{K}^n$ هستند که آنها را به‌ترتیب x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n می‌نامیم. فرض می‌کنیم B پایهٔ کانونیک $\mathbf{K}^n$ باشد:

تعریف - اسکالر $\det_B(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ را دترمینان ماتریس M می‌نامند و با $\det M$ نشان می‌دهند.

۱۰.۶.۲- بنابر شمارهٔ ۱۰.۴.۲ برای $\det M$ چنین داریم:

$$\det M = \sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon_\sigma \lambda^1_{\sigma(1)} \lambda^2_{\sigma(2)} \cdots \lambda^n_{\sigma(n)}$$

۱۰.۶.۳- دترمینان بالا را به‌صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\begin{vmatrix} \lambda^1_1 & \lambda^2_1 & \cdots & \lambda^n_1 \\ \lambda^1_2 & \lambda^2_2 & \cdots & \lambda^n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda^1_n & \lambda^2_n & \cdots & \lambda^n_n \end{vmatrix}$$

۱۰.۶.۴- **مثال - گروه G_2** از دو تبدیل $(1\,,\,2)$ و $(2\,,\,1)$ تشکیل می‌شود. پس بنابر ۱۰.۶.۲ داریم:

$$\begin{vmatrix} \lambda^1_1 & \lambda^2_1 \\ \lambda^1_2 & \lambda^2_2 \end{vmatrix} = \lambda^1_1 \lambda^2_2 - \lambda^1_2 \lambda^2_1$$

این فرمول را می‌توان به‌صورت زیر نوشت که به‌خاطر سپردن آن آسان‌تر است:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

۱۰.۶.۵- **مثال** - چنانچه ماتریس M دارای یک سطر و یک ستون باشد، M یک اسکالر λ است و به آسانی دیده می‌شود که $\det M = \lambda$ می‌باشد. دراین حالت‌باید از بکار بردن علامت $|\lambda|$ برای دترمینان M خودداری کرد. زیرا اگر $\lambda \in \mathbf{C}$ باشد $|\lambda|$ مدول شمار مختلط λ را نشان می‌دهد.

۶.۶.۱۰- قضیه :

(I)— دترمینان ماتریس M نسبت به هریك از ستونهای M یك گسترش خطی است .

(II)— هرگاه M دارای‌دوستون برابر باشد دترمینان‌آن صفر است .

(III) — اگر تبدیل σ روی ستونهای M عمل‌کند ، detM در ε_σ ضرب می‌شود .

(IV)— چنانچه به یکی از ستونهای M یك ترکیب خطی از سایر ستونها بیفزاییم detM تغییر نمی‌کند .

اثبات این قضیه به آسانی از شماره‌های ۱.۶.۱۰ و ۴.۴.۱۰ نتیجه می‌شود .

مثال - بنابر (I) ، (II) ، (III) ، (IV) برابری‌های زیر را به‌ترتیب می‌توان نوشت :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

و

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

و

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۷ & ۱ \\ ۵ & -۱ & ۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲-۲ & ۱ \\ ۴ & ۷-۲ & ۱ \\ ۵ & -۱-۴ & ۲ \end{vmatrix}$$

۱۰.۶.۷- قضیه - اگر در یك ماتریس مربع M جای سطرها و ستونهای هم‌ردیف را با یکدیگر عوض کنیم دترمینان ماتریس تغییر نمی‌کند. به‌عبارت دیگر داریم $\det M = \det({}^tM)$.

اثبات - مانند بالا قرار می‌دهیم $M=[\lambda_i^j]$. چنانچه ${}^tM=[\mu_i^j]$ باشد خواهیم داشت $\mu_i^j=\lambda_j^i$. در بسط $\det M$ (شمارهٔ ۱۰.۶.۲) جملهٔ $\lambda^1_{\sigma(1)}\lambda^2_{\sigma(2)}\cdots\lambda^n_{\sigma(n)}$ را درنظر می‌گیریم. اگر τ یک عنصر دلخواه G_n باشد، روشن است که جملهٔ بالا برابر با :

$$\lambda^{\tau(1)}_{\sigma(\tau(1))}\lambda^{\tau(2)}_{\sigma(\tau(2))}\cdots\lambda^{\tau(n)}_{\sigma(\tau(n))}$$

می‌باشد (زیرا تنها سازه‌های حاصل‌ضرب جابجا شده است). به‌ویژه اگر $\tau=\sigma^{-1}$ باشد خواهیم داشت :

$$\lambda_1^{\sigma^{-1}(1)}\lambda_2^{\sigma^{-1}(2)}\cdots\lambda_n^{\sigma^{-1}(n)}$$

و چون داریم $\varepsilon_\sigma=\varepsilon_{\sigma^{-1}}$ برابری زیر بدست می‌آید :

$$\det M=\sum_{\sigma\in G_n}\varepsilon^{\sigma^{-1}}\lambda_1^{\sigma^{-1}(1)}\lambda_2^{\sigma^{-1}(2)}\cdots\lambda_n^{\sigma^{-1}(n)}$$

به‌عبارت دیگر چون $\sigma\to\sigma^{-1}$ یک گسترش دوسویی G_n روی G_n است، خواهیم داشت :

$$\det M=\sum_{\sigma\in G_n}\varepsilon_\sigma\lambda_1^{\sigma(1)}\lambda_2^{\sigma(2)}\cdots\lambda_n^{\sigma(n)}=$$

$$\sum_{\sigma\in G_n}\varepsilon_\sigma\mu^1_{\sigma(1)}\mu^2_{\sigma(2)}\cdots\mu^n_{\sigma(n)}=\det({}^tM)$$

۱۰.۶.۸- نتیجه - در قضیه ۱۰.۶.۶ می‌توان همه‌جا به‌جای کلمهٔ «ستون» کلمهٔ «سطر» را قرار داد.

۹.۶.۱۰- تعریف‌های ۱.۴.۱۰ ، ۲.۵.۱۰ و ۱.۶.۱۰ به وسیلهٔ شماره‌های ۳.۵.۱۰ و ۱.۶.۱۰ به یکدیگر وابسته شده‌اند ، اکنون بستگی‌های دیگری بین آنهابیان می‌کنیم :

قضیه - فرض می‌کنیم E یک‌فضای برداری و $B=(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ E باشد.

(I) - چنانچه بردارهای x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n متعلق به E و $(\lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_n^i)$ مؤلفه‌های x_i نسبت به پایهٔ B باشد ، داریم :

$$\det_B(x_1, \ldots, x_n) = \det[\lambda_i^j]$$

(II) - اگر u یک‌گسترش خطی E در E و $M(u)$ ماتریس‌گسترش u وابسته به B باشد ، داریم $\det u = \det M(u)$.

(از اینجا یک روش عملی برای محاسبهٔ دترمینان یک‌گسترش خطی E در E به‌دست می‌آید) .

اثبات - بخش (I) از شماره‌های ۲.۴.۱۰ و ۲.۶.۱۰ نتیجه می‌شود. برای اثبات (II) قرار می‌دهیم $u(e_j) = \mu_1^j e_1 + \cdots + \mu_n^j e_n$ بنابر ۳.۵.۱۰ خواهیم داشت :

$$\det u = \det_{(e_1, \ldots, e_n)}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$$

$$= \det[\mu_i^j] \qquad , \qquad (\text{بنابر (I)})$$

به‌علاوه بنابر ۱.۲.۹ داریم $M(u) = [\mu_i^j]$ و بدین ترتیب بخش (II) نیز ثابت می‌شود.

۱۰.۶.۱۰- **نتیجه-دوماتریس همانند دارای یک دترمینان می‌باشند .**

زیرا اگردوماتریس M_1 و M_2 همانند باشند، یک فضای برداری E و یک گسترش خطی u فضای E در E و پایه‌های B_1 و B_2 از E وجود دارند به‌طوریکه M_1 و M_2 به‌ترتیب ماتریس‌های گسترش u نسبت به پایه‌های B_1 و B_2 باشند (۲.۱۰.۹). دراین صورت با درنظرگرفتن ۹.۶.۱۰ خواهیم داشت $\det M_1 = \det u = \det M_2$.

۱۱.۶.۱۰- **قضیه - چنانچه M یک ماتریس از دستهٔ (n, n) باشد ، هفت شرط هم‌ارز شمارهٔ ۲.۷.۹ (به‌ویژه شرط (I)) هم‌ارز باشرط $\det M \neq 0$ نیز می‌باشند .**

این قضیه از شماره‌های ۹.۶.۱۰ و ۵.۵.۱۰ نتیجه می‌شود.

۱۲.۶.۱۰- قضیه :

(I) — هرگاه M و M' دوماتریس ازرستهٔ (n , n) باشند، داریم :

$$\det(MM') = (\det M)(\det M')$$

(II) — چنانچه ماتریس M وارون‌پذیر باشد داریم :

$$\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1}$$

این قضیه ازشماره‌های ۹.۶.۱۰ ، ۶.۵.۱۰ و ۷.۵.۱۰ نتیجه می‌شود.

۱۳.۶.۱۰- قضیه - چنانچه E یك فضای برداری با بعد با پایان و u یك گسترش خطی E در E باشد داریم :

$$\det({}^t u) = \det u$$

این قضیه از شماره‌های ۹.۶.۱۰ و ۷.۶.۱۰ ، ۲.۶.۹ نتیجه می‌شود.

۷.۱۰- محاسبهٔ دترمینان با بلوك

۱.۷.۱۰- ماتریس رستهٔ $(n'+n'' \, , \, n'+n'')$ زیر را درنظر می‌گیریم :

$$X = \begin{array}{c} \\ n' \\ n'' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{n'}{\longleftrightarrow} & \overset{n''}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} M' & N \\ \hline 0 & M'' \end{array} \right] \end{array}$$

که درآن M' یك ماتریس ازرستهٔ (n' , n') و M'' یك ماتریس از رستهٔ (n'' , n'') و N یك ماتریس رستهٔ (n' , n'') و ۰ ماتریس‌صفرازرستهٔ (n'' , n') می‌باشند. دراین‌صورت :

قضیه - داریم $\quad \det X = (\det M')(\det M'')$

اثبات :

۱- فرض می‌کنیم E یك فضای برداری و E' و E'' دو زیر فضای برداری متمم E و $B' = (e_1 , \dots , e_{n'})$ یك‌پایهٔ E' و $B'' = (f_1 , \dots , f_{n''})$ یك پایهٔ E'' باشد.

با توجه به ۷.۸.۸ ، $B = (e_1 , \dots , e_{n'} \, , \, f_1 , \dots , f_{n''})$ یك پایهٔ E خواهد بود.

۲- بردارهای متغیر x_1 ، ... ، $x_{n'}$ از E' رادرنظرمی گیریم. بنابر ۱۰.٤.٤ گسترش

$$(x_1, \dots, x_{n'}) \to \det_B(x_1, \dots, x_{n'}, f_1, \dots, f_{n''})$$

یک فرم n' خطی متناوب روی E' است که مقدار آن هنگامی که $B'=(x_1, \dots, x_{n'})$ باشد ، برابر با ۱ است. پس با توجه به ۱۰.٤.۱ خواهیم داشت :

$$(1) \qquad \det_B(x_1, \dots, x_{n'}, f_1, \dots, f_{n''}) = \det_{B'}(x_1, \dots, x_{n'})$$

۳- اکنون بردارهای x_1 ، ... ، $x_{n'}$ از E' را ثابت فرض می کنیم و بردارهای متغیر y_1 ، ... ، $y_{n''}$ از E'' را درنظر می گیریم. گسترش :

$$(y_1, \dots, y_{n''}) \to \det_B(x_1, \dots, x_{n'}, y_1, \dots, y_{n''})$$

یک فرم n'' خطی متناوب روی E'' است و بنابر (۱) هنگامی که $B''=(y_1, \dots, y_{n''})$ باشد ، مقدار آن برابر است با :

$$\mu = \det_B(x_1, \dots, x_{n'}, f_1, \dots, f_{n''}) = \det_{B'}(x_1, \dots, x_{n'})$$

پس بااستفاده از ۱۰.۳.۲ و ۱۰.٤.۱ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}(2) \qquad \det_B(x_1, \dots, x_{n'}, y_1, \dots, y_{n''}) &= \mu \det_{B''}(y_1, \dots, y_{n''}) \\ &= \det_{B'}(x_1, \dots, x_{n'}) \det_{B''}(y_1, \dots, y_{n''})\end{aligned}$$

٤- به علاوه چنانچه بردارهای z_1 ، ... ، $z_{n''}$ متعلق به E' باشند با توجه به بخش (I) قضیه ۱۰.٤.٤ اسکالر :

$$\det_B(x_1, \dots, x_{n'}, y_1+z_1, \dots, y_{n''}+z_{n''})$$

برابر است با :

$$(3) \qquad \Sigma \det_B(x_1, \dots, x_{n'}, t_1, \dots, t_{n''})$$

که در آن هر t_i برابر با y_i و یا برابر با z_i می‌باشد. اگر یکی از t_i ها ، مثلاً t_{i_0} ، برابر با z_{i_0} باشد $(n'+1)$ بردار $(x_1, \dots, x_{n'}, t_{i_0})$ متعلق به E' است و بستگی خطی دارند (بخش (II) قضیه ۸.۱۰.۸). پس با توجه به بخش (V) قضیه ۱۰.٤.٤ اسکالر :

$$\det_B(x_1, \dots, x_{n'}, t_1, \dots, t_{n''})$$

برابر با صفر است. بنابراین تنها جمله‌ای از مجموع (۳) که ممکن است مخالف با صفر نباشد عبارت است از :

$$\det_B(x_1, \ldots, x_{n'}, y_1, \ldots, y_{n''})$$

و با درنظر گرفتن برابری (۲) خواهیم داشت :

$$\det_B(x_1, \ldots, x_{n'}, y_1+z_1, \ldots, y_{n''}+z_{n''}) = \det_{B'}(x_1, \ldots, x_{n'})\det_{B''}(y_1, \ldots, y_{n''}) \quad (4)$$

۵- مؤلفه‌های بردارهای x_i ، y_i ، z_i نسبت به پایهٔ B به‌صورت زیر می‌باشد :

$$x_i : \lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_{n'}^i, 0, 0, \ldots, 0$$

$$y_i : 0, 0, \ldots, 0, \mu_1^i, \mu_2^i, \ldots, \mu_{n''}^i$$

$$z_i : \nu_1^i, \nu_2^i, \ldots, \nu_{n'}^i, 0, 0, \ldots, 0$$

پس بنابر بخش (I) شمارهٔ ۹.۶.۱۰ فرمول (٤) به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n'} & \nu_1^1 & \nu_1^2 & \cdots & \nu_1^{n''} \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n'} & \nu_2^1 & \nu_2^2 & \cdots & \nu_2^{n''} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n'}^1 & \lambda_{n'}^2 & \cdots & \lambda_{n'}^{n'} & \nu_{n'}^1 & \nu_{n'}^2 & \cdots & \nu_{n'}^{n''} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_1^1 & \mu_1^2 & \cdots & \mu_1^{n''} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_2^1 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_2^{n''} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_{n''}^1 & \mu_{n''}^2 & \cdots & \mu_{n''}^{n''} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n'} \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n'}^1 & \lambda_{n'}^2 & \cdots & \lambda_{n'}^{n'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mu_1^1 & \mu_1^2 & \cdots & \mu_1^{n''} \\ \mu_2^1 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_2^{n''} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_{n''}^1 & \mu_{n''}^2 & \cdots & \mu_{n''}^{n''} \end{vmatrix}$$

و بدین‌ترتیب قضیه ثابت می‌گردد.

۲.۷.۱۰- نتیجه - چنانچه p_1 ، p_2 ، $\cdots$ ، p_n شمارهای درست و بزرگتر از صفر باشند و جدول ماتریس‌های زیر را

$$X=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overleftrightarrow{p_1} & \overleftrightarrow{p_2} & \overleftrightarrow{p_3} & \quad\quad & \overleftrightarrow{p_n} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} X_{11} & X_{12} & X_{13} & \cdots & X_{1n} \\ \hline 0 & X_{22} & X_{23} & \cdots & X_{2n} \\ \hline 0 & 0 & X_{33} & \cdots & X_{3n} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & X_{nn} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow p_1 \\ \updownarrow p_2 \\ \updownarrow p_3 \\ \\ \updownarrow p_n \end{array}$$

که درآن X_{ij} ماتریسی از رستهٔ $(p_i\ ,\ p_j)$ می‌باشد،درنظر بگیریم ، داریم :

$$\det X=(\det X_{11})(\det X_{22})\cdots(\det X_{nn})$$

زیرا برای $n=1$ مطلب بالا روشن است،و درحالت کلی بااستفاده از روش بازگشت‌روی n وقرار دادن :

$$Y=\begin{bmatrix} X_{22} & X_{23} & \cdots & X_{2n} \\ 0 & X_{33} & \cdots & X_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & X_{nn} \end{bmatrix} \text{ و } Z=[X_{12}X_{13}\cdots X_{1n}]$$

خواهیم داشت :

$$X=\begin{bmatrix} X_{11} & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

با توجه به ۱.۷.۱۰ برابری $\det X=(\det X_{11})\ (\det Y)$ به دست می‌آید. اما بنابه فرض بازگشت $\det Y=(\det X_{22})\ (\det X_{33})\cdots(\det X_{nn})$ می‌باشد. پس نتیجه بالا برقرار است.

۳.۷.۱۰- نتیجه - چنانچه M یك ماتریس سه‌بری‌زبرین باشد، $\det M$ برابر با حاصل‌ضرب عنصرهای واقع در روی قطر اصلی ماتریس M است.

این نتیجه با توجه به ۵.۶.۱۰ حالت ویژهٔ شمارهٔ ۲.۷.۱۰ می‌باشد.

۴.۷.۱۰- در مورد ماتریس‌های سه‌بری زیرین و همچنین برای جدول ماتریس‌های سه بری زیرین نتایج مشابهی وجود دارد.

۸.۱۰- بسط یک دترمینان نسبت به عنصرهای یک سطر یا یک ستون

۱.۸.۱۰- فرض می‌کنیم $M=[\alpha_{ij}]$ یک ماتریس از رستهٔ (n, n) باشد. ماتریسی را که از حذف سطر i ام و ستون j ام M به دست می‌آید با M_{ij} نشان می‌دهیم. اسکالر $(-۱)^{i+j}\det M_{ij}$ را **کوفاکتور اندیس‌های** i و j در M می‌نامند.

۲.۸.۱۰- قضیه - فرض می‌کنیم A_{ij} کوفاکتور اندیس‌های i و j در M باشد. برای هر شمار درست i $(۱ \leqslant i \leqslant n)$ داریم:

$$\det M=\alpha_{۱i}A_{۱i}+\alpha_{۲i}A_{۲i}+\cdots+\alpha_{ni}A_{ni}$$

$$\det M=\alpha_{i۱}A_{i۱}+\alpha_{i۲}A_{i۲}+\cdots+\alpha_{in}A_{in}$$

[فرمول اول بسط $\det M$ نسبت به عنصرهای ستون i ام و فرمول دوم بسط $\det M$ نسبت به عنصرهای سطر i ام نامیده می‌شود. این فرمول‌ها محاسبهٔ یک دترمینان n سطری و n ستونی را به محاسبهٔ دترمینان‌های $(n-۱)$ سطری و $(n-۱)$ ستونی بدل می‌کنند].

اثبات - دراینجا تنها به اثبات فرمول دوم می‌پردازیم، فرمول اول مانند دوم ثابت می‌شود.

الف - چنانچه $\alpha_{nn}=۱$ وسایر عنصرهای سطر n ام برابر با صفر باشند، بنابر شمارهٔ ۱.۷.۱۰ خواهیم داشت $\det M=(\det M_{nn})\cdot ۱=\det M_{nn}$.

ب - هرگاه $\alpha_{nj}=۱$ و سایر عنصرهای سطر n ام برابر با صفر باشند، خواهیم‌داشت

$$\det M=(-۱)^{n-j}\det M_{nj}$$

زیرا اگر M' ماتریسی باشد که از ماتریس M با قرار دادن ستون j ام آن به‌جای

ستون n ام به‌دست آید، چون ماتریس M' از تعویض پی‌درپی ستون j ام باستون $(j+۱)$ ام و ستون $(j+۱)$ ام باستون $(j+۲)$ ام و ... وستون $(n-۱)$ ام باستون n ام ماتریس M بدست می‌آید (پس به‌وسیلهٔ $n-j$ جایگشت در روی ستونهای M) ، بنابر شماره‌های ۶.۶.۱۰ ، ۶.۱.۱۰ و ۱۰.۱.۱۰ خواهیم داشت :

$$\det M=(-۱)^{n-j}\det M'$$

به‌علاوه با توجه به‌بخش (الف) داریم $\det M'=\det M'_{nn}$. اما M'_{nn} که از حذف سطر n ام و ستون n ام M' نتیجه می‌شود همان ماتریسی است که از حذف سطر n ام و ستون j ام M بدست می‌آید. پس داریم $M'_{nn}=M_{nj}$ و از آنجا :

$$\det M=(-۱)^{n-j}\det M'_{nn}=(-۱)^{n-j}\det M_{nj}$$

پ ـ اگر $a_{ij}=۱$ باشد وسایرعنصرهای سطر i ام برابر با صفر باشند، خواهیم داشت $\det M=A_{ij}$. زیرا چنانچه M' ماتریسی باشد که از ماتریس M با قرار دادن سطر i ام به‌جای سطر n ام بدست آید ، بااستدلالی مشابه با حالت (ب) دیده می‌شود که :

$$\det M=(-۱)^{n-i}\det M'$$

می‌باشد. به‌علاوه بنابر (ب) داریم $\det M'=(-۱)^{n-j}\det M'_{nj}$. اما M'_{nj} که از حذف سطر n ام وستون j ام ماتریس M نتیجه می‌شود همان ماتریسی است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس M بدست می‌آید. پس داریم $M'_{nj}=M_{ij}$ و ازآنجا :

$$\det M=(-۱)^{n-i}\det M'=(-۱)^{n-i}(-۱)^{n-j}\det M_{ij}=$$
$$(-۱)^{i+j}\det M_{ij}=A_{ij}$$

ت ـ در فضای برداری K^n داریم :

$$(a_{i۱},a_{i۲},\ldots,a_{in})=a_{i۱}(۱,۰,\ldots,۰)+a_{i۲}(۰,۱,۰,\ldots,۰)$$
$$+\cdots+a_{in}(۰,۰,\ldots,۰,۱)$$

پس قضیه از شماره‌های ۶.۶.۱۰ . (I) و ۸.۶.۱۰ وحالت (پ) بالانتیجه می‌شود.

۳.۸.۱۰- **مثال** - بااستفاده ازقضیهٔ ۲.۸.۱۰ برابری زیر به‌دست می‌آید :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$= a(b'c''-c'b'') - b(a'c''-c'a'') + c(a'b''-b'a'')$$

۱۰.۸.۴- نتیجه - برای شمارهای درست و متمایز i و i' واقع بین ۱ و n داریم :

$$\alpha_{1i'}A_{1i} + \alpha_{2i'}A_{2i} + \cdots + \alpha_{ni'}A_{ni} = 0$$

$$\alpha_{i'1}A_{i1} + \alpha_{i'2}A_{i2} + \cdots + \alpha_{i'n}A_{in} = 0$$

زیرا کوفاکتورهای A_{1i} ، A_{2i} ، $\cdots$ ، A_{ni} بستگی به عنصرهای ستون i ام M ندارند و بااستفاده از ۱۰.۸.۲ داریم $\alpha_{1i'}A_{1i}+\cdots+\alpha_{ni'}A_{ni}=\det N$ که در آن N از ماتریس M با قرار دادن $(\alpha_{1i'}, \alpha_{2i'}, \ldots, \alpha_{ni'})$ به‌جای ستون i ام ماتریس M بدست آمده است. چون N دارای دوستون برابرمی‌باشد پس با توجه به ۱۰.۶.۶ خواهیم داشت $\det N=0$. از اینجا فرمول اول نتیجه می‌شود. فرمول دوم به روش مشابه به‌دست می‌آید.

۱۰.۸.۵- نتیجه ـ چنانچه $L=[A_{ij}]$ ماتریس کوفاکتورهای M باشد داریم

$$M\cdot({}^tL) = ({}^tL)\cdot M = (\det M)\cdot I_n$$

زیرا بنابر شمارهٔ ۹.۳.۸ عنصر ماتریس $M\cdot({}^tL)$ که درسطر i ام و ستون j ام واقع است برابر با $\alpha_{i1}A_{j1}+\alpha_{i2}A_{j2}+\cdots+\alpha_{in}A_{jn}$ می‌باشد ، و با توجه به ۱۰.۸.۴ هنگامیکه $i\neq j$ است این مجموع برابر با صفر و بنابر ۱۰.۸.۲ برای $i=j$ این مجموع برابر با $\det M$ است. از اینجا برابری $M\cdot({}^tL)=(\det M)\cdot I_n$ نتیجه می‌شود. برابری $({}^tL)\cdot M=(\det M)\cdot I_n$ به روش مشابه بدست می‌آید.

۱۰.۸.۶- نتیجه - چنانچه M وارون‌پذیر باشد داریم :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}({}^tL)$$

به‌عبارت دیگرعنصر سطر i ام و ستون j ام ماتریس M^{-1} برابر با $\dfrac{A_{ji}}{\det M}$

می‌باشد (از اینجا روش محاسبهٔ ماتریس وارون یک ماتریس به‌دست می‌آید).

این مطلب از شماره ۸.۵.۱۰ نتیجه می‌شود. باید توجه داشت که $\det M \neq 0$ است (۱۱.۶.۱۰).

۹.۱۰- شرط نابستگی خطی بردارها

۱.۹.۱۰- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری، $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ E و بردارهای x_1، x_2، ...، x_p متعلق به E باشند. می‌دانیم که برای $p > n$ این بردارها بستگی خطی دارند (۸.۱۰.۸). پس فرض می‌کنیم $p \leqslant n$ باشد. چنانچه λ_{1j}، λ_{2j}، ...، λ_{nj} مؤلفه‌های بردار x_j باشند، می‌خواهیم ببینیم λ_{ij} ها درچه شرطی (بایاوبسنده) باید صدق کنند تا اینکه بردارهای x_j نابستگی خطی داشته باشند.

۲.۹.۱۰- بدین منظور ابتدا به بیان یک تعریف می‌پردازیم. چنانچه M ماتریس دلخواهی باشد، هرماتریسی را که از حذف شماره‌ای از سطرها و ستونهای M به‌دست آید **ماتریس استخراج شده از** M می‌نامند.

۳.۹.۱۰- بار دیگر فرض‌های شمارهٔ ۱.۹.۱۰ را درنظر می‌گیریم و ماتریس $[\lambda_{ij}]$ را با M نشان می‌دهیم:

قضیه - برای اینکه بردارهای x_1، x_2، ...، x_p نابستگی خطی‌داشته باشند بایاوبسنده است که یک ماتریس M' از رستهٔ (p, p) استخراج شده از M وجود داشته باشد به‌طوریکه داشته باشیم $\det M' \neq 0$

اثبات:

۱- فرض می‌کنیم $\det M' \neq 0$ باشد. با تعویض روش شماره‌گذاری e_i ها می‌توان ماتریس M' را ماتریس تشکیل شده از p سطر اول و p ستون اول ماتریس M گرفت. اکنون بردارهای x_1، x_2، ...، x_p، e_{p+1}، ...، e_n را درنظر می‌گیریم. چنانچه X ماتریس n سطری و n ستونی باشد که ستونهای آن از مؤلفه‌های بردارهای x_1، x_2، ...، x_p، e_{p+1}، ...، e_n نسبت به پایهٔ $(e_1, \ldots, e_n)$ تشکیل شده است، خواهیم داشت:

$$X=\begin{bmatrix} M' & \circ \\ M'' & I_{n-p} \end{bmatrix}$$

پس بنابرشمارهٔ ۴.۷.۱۰ داریم :

$$\det X=(\det M')(\det I_{n-p})=\det M' \neq \circ$$

و با توجه به ۹.۶.۱۰ داریم :

$$\det X=\det_{(e_1\,,\,\ldots\,,\,e_n)}(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_p\,,\,e_{p+1}\,,\,\ldots\,,\,e_n)$$

بنابراین بردارهای x_1 ، . . . . ، x_p ، e_{p+1} ، . . . . ، e_n نابستگی خطی دارند [شمارهٔ ۴.۴.۱۰ . (V)] ، و درنتیجه x_1 ، x_2 ، . . . . ، x_p نابستگی خطی خواهند داشت.

۲- فرض می‌کنیم x_1 ، . . . . ، x_p نابستگی خطی داشته باشند. باتوجه به ۱.۹.۸ می‌توان با افزودن شماره‌ای از بردارهای e_i به بردارهای x_1 ، . . . . ، x_p یک پایه از E به‌دست‌آورد. چنانچه باتعویض روش‌شماره گذاری e_i ها، $(x_1,\ldots,x_p\,,e_{p+1},\ldots,e_n)$ را پایهٔ به‌دست‌آمده بگیریم ومانند بالاماتریس X را دخالت‌دهیم بنابرشمارهٔ ۴.۴.۱۰ .(V) خواهیم داشت $\det X \neq \circ$ وچون $\det X=\det M'$ می‌باشد (۴.۷.۱۰) پس $\det M' \neq \circ$ است و بدین‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود .

۴.۹.۱۰ - **تبصره** - می‌توان قضیه ۳.۹.۱۰ را برای $p>n$ نیز به‌کار برد زیرا دراین‌حالت ازطرفی بنابر ۸.۱۰.۸ بردارهای x_1 ، . . . . ، x_p بستگی خطی دارند و از طرف دیگر نمی‌توان از M یک ماتریس رستهٔ $(p\,,\,p)$ استخراج کرد چون M بیش از n سطر ندارد .

۱۰.۱۰ - محاسبهٔ رتبهٔ یک ماتریس

قضیه - رتبهٔ هرماتریس دلخواه M از رستهٔ $(n\,,\,m)$ برابر است با بزرگترین شمار درستی مانند s به‌طوری‌که بتوان از M یک ماتریس s سطری و s ستونی استخراج کردکه دترمینان آن مخالف با صفر باشد .

اثبات- اگر رتبهٔ M برابر با r باشد بنابرشمارهٔ ۹.۲.۹ می‌توان r ستون ازماتریس

M انتخاب کرد به‌طوری‌که این ستونها نابستگی خطی داشته باشند. فرض می‌کنیم M' ماتریس تشکیل‌شده ازاین ستونها باشد (ماتریس M' از M استخراج شده است) . باتوجه به ۳.۹.۱۰ می‌توان از M' یک‌ماتریس M'' از رستهٔ (r , r) استخراج کرد به‌قسمی‌که دترمینان M'' مخالف باصفر باشد . چون M'' از M استخراج شده است پس $r \leqslant s$.

به علاوه می‌توان از M یک ماتریس N از رستهٔ (s , s) استخراج کرد به قسمی‌که دترمینان N مخالف با صفر باشد. ستونهای N را درنظر می‌گیریم ؛ این ستونها ازستونهای M استخراج شده‌اند ، و بنابر ۳.۹.۱۰ این ستونها نابستگی خطی دارند پس با توجه به ۹.۲.۹ داریم $r \geqslant s$ ، و ازآنجا $r=s$.

۱۰ . ۱۱ ـ سوی فضاهای برداری حقیقی

۱.۱۱.۱۰ ـ فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی $\mathbf{R}$ با بعد $r>0$ و B و B' دوپایه از E باشند . بنابرشمارهٔ ۴.۴.۱۰ . (V) داریم $\det_B(B') \neq 0$. بنابراین یا $\det_B(B') < 0$ یا $\det_B(B') > 0$ است.

چنانچه $\det_B(B') > 0$ باشد B و B' را **هم‌سو** و اگر $\det_B(B') < 0$ باشد B و B' را **ناهم‌سو** یا **باسوهای مخالف** می‌نامند .

۲.۱۱.۱۰ ـ مجموعهٔ پایه‌های E را با $\mathscr{B}$ نشان می‌دهیم :

قضیه :

(I) ـ **بستگی «B و B' هم‌سو هستند» یک بستگی هم‌ارزی R روی $\mathscr{B}$ است .**

(II) ـ **تنها دو کلاس‌هم‌ارزی نسبت به R وجود دارد .**

اثبات ـ اگر B عنصری از $\mathscr{B}$ باشد بنابر ۳.۴.۱۰ داریم $\det_B(B)=1$ پس بستگی R بازتابی‌است. چنانچه B و B' و B'' متعلق‌به $\mathscr{B}$ باشند بنابر ۵.۴.۱۰ داریم:

$$\det_B(B'')=\det_{B'}(B'')\det_B(B')$$

پس بستگی R متعدی‌است . همچنین با توجه به شماره‌های ۳.۴.۱۰ و ۵.۴.۱۰ خواهیم داشت $\det_B(B')\det_{B'}(B)=\det_B(B)=1$. پس $\det_{B'}(B)$ و $\det_B(B')$ دارای یک علامت‌اند، یعنی بستگی R متقارن است. بنابراین R یک بستگی هم‌ارزی‌است.

چنانچه $B=(e_1, \dots, e_n)$ یک پایهٔ E باشد و قرار دهیم :

$$B_1=(e_1, \dots, e_{n-1}, -e_n)$$

بنابرشمارهٔ ۱۰.۴.۴ . (I) خواهیم داشت $\det_B(B_1)=-\det_B(B)$ یعنی :

$$\det_B(B_1)=-1$$

چنانچه B' عنصر دلخواهی از $\mathscr{B}$ باشد خواهیم داشت $\det_B(B')=-\det_{B_1}(B')$ (بنابر ۱۰.۴.۵) ، پس B' یا با B هم‌سو می‌باشد یا با B_1 ، بدین‌ترتیب قسمت (II) قضیه نیز اثبات می‌شود .

۱۰.۱۱.۳ - **قضیه - چنانچه $(e_1, \dots, e_n)$ یک پایهٔ فضای برداری E و σ یک تبدیل $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد ، پایه‌های $(e_1, \dots, e_n)$ و $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ هم‌سو هستند هرگاه σ زوج ، و با سوهای مخالفند هرگاه σ فرد باشد .**

اثبات این قضیه ازشمارهٔ ۱۰.۴.۴ . (III) نتیجه می‌شود .

۱۰.۱۱.۴ - هنگامی که یکی‌ازدوکلاس هم‌ارزی بالا در $\mathscr{B}$ انتخاب شده باشد، فضای برداری E **سودار** نامیده می‌شود . دراین‌صورت پایه‌های متعلق به این کلاس هم‌ارزی را با سوی مثبت و پایه‌های متعلق به‌کلاس دیگر را با سوی منفی می‌نامند . در فضای $\mathbf{R}^3$ معمولاً سوی معین شده به‌وسیلهٔ آدمک آمپر را سوی مثبت می‌گیرند .

در $\mathbf{R}^n$ معمولاً سوی پایهٔ کانونیک $\mathbf{R}^n$ را سوی مثبت اختیار می‌کنند .

۱۰.۱۱.۵ - **قضیه-فرض می‌کنیم u یک اتومرفیسم فضای برداری E باشد. چنانچه $\det u>0$ باشد u هرپایهٔ دلخواه E را به‌یک پایهٔ هم‌سو باآن بدل می‌کند و هرگاه $\det u<0$ باشد u هرپایهٔ دلخواه E را به‌یک پایه باسوی مخالف باآن بدل میکند.**

اثبات این قضیه ازفرمول (۴) شمارهٔ ۱۰.۵.۳ نتیجه می‌شود زیرا داریم :

$$\det_B(u(B))=\det u$$

۱۰.۱۱.۶ - درحالتی‌که $\det u>0$ باشد گویندکه u **سوی فضا را تغییر نمی‌دهد** و درحالتی‌که $\det u<0$ باشد گویندکه u **سوی فضا را تغییر می‌دهد.**

مجموعهٔ اتومرفیسم‌های E که سوی فضا را تغییر نمی‌دهند یک زیرگروه از $GL(E)$ تشکیل می‌دهند.

۷.۱۱.۱۰ - فرض می‌کنیم بعد E برابر با ۱ یعنی E یک خط باشد. یک پایهٔ E عبارت است از یک بردار مخالف با صفر. چنانچه B و B' دو پایهٔ فضای E باشند که به ترتیب از بردارهای e و e' تشکیل شده‌اند، داریم $e'=\lambda e$ که درآن λ یک شمار حقیقی مخالف با صفر است. دراین صورت:

$$\det_B(B')=\lambda \det_{(e)}(e)=\lambda$$

پس اگر $\lambda>0$ باشد B و B' هم‌سو هستند و چنانچه $\lambda<0$ باشد B و B' دارای سوهای مخالفند. یکی ازکلاسهای هم‌ارزی $\mathscr{B}$ شامل همهٔ بردارهایی است که از بردار e به‌وسیلهٔ همسانی‌هایی که نسبت آنها بزرگتر از صفر است به‌دست می‌آیند، کلاس دیگر شامل همهٔ بردارهایی است که از بردار e به‌وسیلهٔ همسانی‌هایی که نسبت آنها کوچکتر از صفر است نتیجه می‌شوند. دراینجا انتخاب یکی ازاین دو کلاس همان مفهوم سادهٔ سوی یک خط را به‌دست می‌دهد.

۸.۱۱.۱۰ - فرض می‌کنیم بعد E برابر با ۲، یعنی E یک صفحه باشد. چنانچه:

$$B=(e_1\ ,\ e_2) \qquad , \qquad B'=(e_1\ ,\ e'_2)$$

دو پایه از E باشند که بردارهای اول آنها یکی است و $(\xi\ ,\ \eta)$ را مؤلفه‌های e'_2 نسبت به پایهٔ B بگیریم خواهیم داشت:

$$\det_B(B')=\begin{vmatrix} 1 & \xi \\ 0 & \eta \end{vmatrix}=\eta$$

پس برای اینکه B و B' هم‌سو باشند بایاوبسنده است که $\eta>0$ باشد، به عبارت دیگر e_2 و e'_2 دریک طرف خطی که بردار e_1 در روی آن قرار دارد واقع باشند.

۱۲.۱۰ - حاصل‌ضرب مختلط درفضای معمولی سودار

۱.۱۲.۱۰ - فضای برداری E را که از بردارهای آزاد فضای معمولی تشکیل شده است، درنظر می‌گیریم. E یک فضای برداری حقیقی سه بعدی است. فرض می‌کنیم که این فضا سودار باشد.

پایهٔ یکه‌ای‌متعامد $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ را در فضای E اختیار می‌کنیم و سوی آن را مثبت می‌گیریم [چنین پایه‌ای وجود دارد. زیرا اگر پایهٔ یکه‌ای‌متعامد $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ دارای سوی منفی باشد کافی است که بجای بردار $\vec{e}_1$ بردار $-\vec{e}_1$ را قرار دهیم] .

فرض می‌کنیم $\vec{V}$ ، $\vec{V}'$ و $\vec{V}''$ سه بردار از E باشند . می‌خواهیم نشان‌دهیم که:

$$\det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} (\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$$

بستگی به **انتخاب** پایهٔ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ندارد . پس اگر $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد دیگر E و با سوی مثبت باشد باید ثابت‌کنیم که :

$$\det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} (\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') = \det_{(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)} (\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$$

و یا بنابرشمارهٔ ۵.۴.۱۰ کافی است نشان دهیم که :

$$\det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3) = 1$$

اما ازطرفی این دترمینان بزرگتر از صفر است [زیرا پایه‌های $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ و $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ دارای یک سو هستند] ، وازطرف دیگر اگر $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ را مؤلفه‌های بردار $\vec{e}'_i$ نسبت به پایهٔ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ بگیریم ، توان دوم این دترمینان برابر است با یک . زیرا داریم :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 & \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2 & \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3 \\ \alpha_2\alpha_1+\beta_2\beta_1+\gamma_2\gamma_1 & \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 & \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1 & \alpha_3\alpha_2+\beta_3\beta_2+\gamma_3\gamma_2 & \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

۲.۱۲.۱۰ - اکنون می‌توان تعریف زیر را بیان داشت :

تعریف-اسکالر $\det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''})$ را حاصل‌ضرب‌مختلط بردارهای $\vec{V}$ ، $\vec{V'}$ و $\vec{V''}$ می‌نامند.

حاصل‌ضرب مختلط سه بردار $\vec{V}$ ، $\vec{V'}$ و $\vec{V''}$ را معمولاً با $(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''})$ نشان می‌دهند که نباید آنرا با دنبالهٔ سه برداری $\vec{V}$ ، $\vec{V'}$ و $\vec{V''}$ اشتباه کرد .

۳.۱۲.۱۰ - بنابرشمارهٔ ۴.۴.۱۰ حاصل‌ضرب مختلط $(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''})$ تابعی‌خطی از هریک از بردارهای $\vec{V}$ ، $\vec{V'}$ و $\vec{V''}$ است .

۴.۱۲.۱۰ - با استفاده از شمارهٔ ۴.۴.۱۰ . (III) داریم :

$$(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''})=(\vec{V'}, \vec{V''}, \vec{V})=(\vec{V''}, \vec{V'}, \vec{V})$$

$$=-(\vec{V'}, \vec{V}, \vec{V''})=-(\vec{V}, \vec{V''}, \vec{V'})=-(\vec{V''}, \vec{V'}, \vec{V})$$

۵.۱۲.۱۰ - با توجه به شمارهٔ ۴.۴.۱۰ . (V) داریم $(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''})\neq 0$ اگر و تنها اگر بردارهای $\vec{V}$ ، $\vec{V'}$ و $\vec{V''}$ نابستگی خطی داشته باشند .

به علاوه $(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''})>0$ است هرگاه سوی پایهٔ $(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''})$ مثبت و $(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''})<0$ است هرگاه سوی پایهٔ $(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''})$ منفی‌باشد(۱.۱۱.۱۰) .

۶.۱۲.۱۰ - چنانچه (ξ, η, ζ) ، (ξ', η', ζ') و (ξ'', η'', ζ'')

به ترتیب مؤلفه‌های $\vec{V}$ ، $\vec{V}'$ و $\vec{V}''$ نسبت به یک پایهٔ یکه‌ای متعامد باسوی مثبت باشند، بنابرشمارهٔ ۹.۶.۱۰ داریم :

$$(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}$$

۱۰ . ۱۳ ـ حاصلضرب برداری درفضای معمولی سودار

۱.۱۳.۱۰ - فضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی را با E نشان می‌دهیم و آن را سودار فرض می‌کنیم . بردارهای $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ متعلق به E را اختیار می‌کنیم و آنها را ثابت می‌گیریم . چنانچه $\vec{W}$ یک بردار دلخواه از E باشد ، گسترش:

$$\vec{W} \to (\vec{V}, \vec{V}', \vec{W})$$

یک فرم خطی روی E است (۳.۱۲.۱۰) . پس بنابـرشمارهٔ ۱۲.۱۳.۸ تنها یک بـردار $\vec{U}$ متعلق به E وجود دارد به‌طوری‌که :

$$(\vec{V}, \vec{V}', \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{W}$$

باشد . بردار $\vec{U}$ راکه بستگی به $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ دارد **حاصلضرب برداری** $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ می‌نامند و با $\vec{V} \wedge \vec{V}'$ نشان می‌دهند.

۲.۱۳.۱۰ - برحسب تعریف برای هرسه بردار $\vec{V}$ ، $\vec{V}'$ و $\vec{V}''$ متعلق به E داریم:

$$(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') = (\vec{V} \wedge \vec{V}') \cdot \vec{V}''$$

۳.۱۳.۱۰ - برای اینکه $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ نابستگی خطی داشته باشند باید و بسنده است که $\vec{V} \wedge \vec{V}' = 0$ باشد .

زیرا اگـر $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ بستگی خطی داشته باشند بنابرشمارهٔ ۵.۱۲.۱۰ برای هربردار

$\vec{V}''$ از E خواهیم داشت $0=(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$. پس با استفاده از ۱.۱۳.۱۰ داریم $\vec{V} \wedge \vec{V}'=0$. همچنین اگر $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ نابستگی خطی داشته باشند بنابر ۶.۹.۸ بردار $\vec{V}''$ به قسمی یافت می‌شود که $\vec{V}$ ، $\vec{V}'$ و $\vec{V}''$ نابستگی خطی داشته باشند . پس باتوجه به ۵.۱۲.۱۰ خواهیم داشت $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') \neq 0$ ، و از شمارهٔ ۱.۱۳.۱۰ نتیجه می‌شود $V \wedge V' \neq 0$.

۴.۱۳.۱۰ ـ به‌ویژه برای هربردار $\vec{V}$ چنین داریم $\vec{V} \wedge \vec{V}=0$.

۵.۱۳.۱۰ ـ حاصل‌ضرب‌برداری $\vec{V} \wedge \vec{V}'$ تابعی خطی از V و V' است . زیرا داریم :

$$(\lambda_1 \vec{V}_1+\lambda_2 \vec{V}_2 , \vec{V}' , \vec{W})$$

$$=\lambda_1(\vec{V}_1 , \vec{V}' , \vec{W}) + \lambda_2 (\vec{V}_2 , \vec{V}' , \vec{W}) \quad \text{(بنابر ۳.۱۲.۱۰)}$$

$$=\lambda_1 (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}') \cdot \vec{W}+\lambda_2 (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}') \cdot \vec{W} \quad \text{(بنابر ۲.۱۳.۱۰)}$$

$$=[\lambda(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}')+\lambda_2(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}')] \cdot \vec{W}$$

پس با توجه به تعریف ضرب‌برداری خواهیم داشت :

$$(\lambda_1 \vec{V}_1+\lambda_2 \vec{V}_2) \wedge \vec{V}'=\lambda_1 (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}')+\lambda_2 (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}')$$

به همین روش دیده می‌شود که $\vec{V} \wedge \vec{V}'$ تابعی خطی از $\vec{V}'$ است .

۶.۱۳.۱۰ ـ داریم :

$$\vec{V} \wedge \vec{V}'=-\vec{V}' \wedge \vec{V}$$

زیرا با توجه به شماره‌های ۴.۱۳.۱۰ و ۵.۱۳.۱۰ خواهیم داشت :

$$0=(\vec{V}+\vec{V}') \wedge (\vec{V}+\vec{V}')=\vec{V} \wedge \vec{V}+\vec{V} \wedge \vec{V}'+\vec{V}' \wedge V+$$

$$\vec{V}' \wedge \vec{V}'=\vec{V} \wedge \vec{V}'+\vec{V}' \wedge \vec{V}$$

۷.۱۳.۱۰ - بردار $\vec{V} \wedge \vec{V'}$ به بردارهای $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ عمود است .

زیرا بنابرشماره‌های ۲.۱۳.۱۰ و ۵.۱۲.۱۰ داریم :

$$(\vec{V} \wedge \vec{V'}) \cdot \vec{V} = (\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V}) = 0$$

و

$$(\vec{V} \wedge \vec{V'}) \cdot \vec{V'} = (\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V'}) = 0$$

۸.۱۳.۱۰ - چنانچه بردارهای $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ نابستگی خطی داشته باشند ، دستگاه $(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V} \wedge \vec{V'})$ یک پایه با سوی مثبت است .

زیرا با توجه به ۲.۱۳.۱۰ ، حاصل‌ضرب مختلط $(\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V} \wedge \vec{V'})$ برابر است با :

$$(\vec{V} \wedge \vec{V'}) \cdot (\vec{V} \wedge \vec{V'})$$

و این مقدار بنابرشمارهٔ ۳.۱۳.۱۰ بزرگتر از صفر می‌باشد . پس با استفاده از ۵.۱۲.۱۰ مطلب ثابت می‌شود .

۹.۱۳.۱۰ - مؤلفه‌های حاصل‌ضرب برداری نسبت به پایهٔ یکه‌ای متعامد و باسوی مثبت $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

فرض می‌کنیم (ξ, η, ζ) ، (ξ', η', ζ') و (α, β, γ) به ترتیب مؤلفه‌های سه بردار $\vec{V}$ ، $\vec{V'}$ و $\vec{V} \wedge \vec{V'}$ باشند. برای هربردار $\vec{V''}$ به مؤلفه‌های (ξ'', η'', ζ'') داریم :

$$\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta''$$

$$= (\vec{V} \wedge \vec{V'}) \cdot \vec{V''} = (\vec{V}, \vec{V'}, \vec{V''})$$ (بنابر ۲.۱۳.۱۰) ،

$$= \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}$$ (بنابر ۶.۱۲.۱۰) ،

$$= (\eta\zeta' - \zeta\eta')\xi'' + (\zeta\xi' - \xi\zeta')\eta'' + (\xi\eta' - \eta\xi')\zeta''$$ (بنابر ۳.۸.۱۰) ،

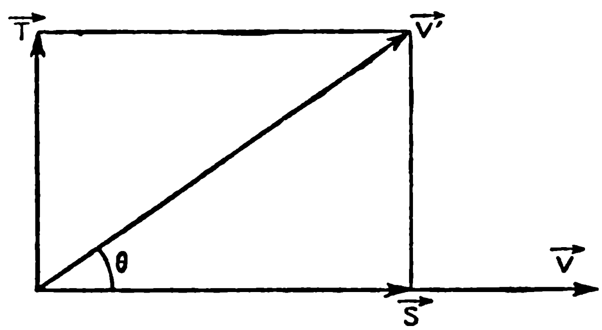
چون این برابری برای تمام مقادیر ξ'' ، η'' و ζ'' برقرار است پس خواهیم داشت :

$$\alpha=\eta\zeta'-\zeta\eta' \quad , \quad \beta=\zeta\xi'-\xi\zeta' \quad , \quad \gamma=\xi\eta'-\eta\xi'$$

۱۰.۱۳.۱۰ - به‌ویژه داریم :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2=\vec{e}_3 \quad , \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3=\vec{e}_1 \quad , \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1=\vec{e}_2$$

۱۱.۱۳.۱۰ - فرض می‌کنیم $\vec{V}\neq 0$ و $\vec{V'}\neq 0$ باشند. بنابراین می‌توان θ زاویهٔ بین دوبردار $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ را درنظر گرفت و داریم $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.



شکل ۳۶

بردار $\vec{V'}$ را به بردارهای $\vec{S}$ و $\vec{T}$ تجزیه می‌کنیم به‌طوری‌که بردار $\vec{S}$ هم‌راستا با $\vec{V}$ و بردار $\vec{T}$ عمود بر $\vec{V}$ باشد . داریم :

$$\vec{V}\wedge\vec{V'}=\vec{V}\wedge(\vec{S}+\vec{T})$$

$$=\vec{V}\wedge\vec{S}+\vec{V}\wedge\vec{T}$$ (بنابر ۵.۱۳.۱۰) ،

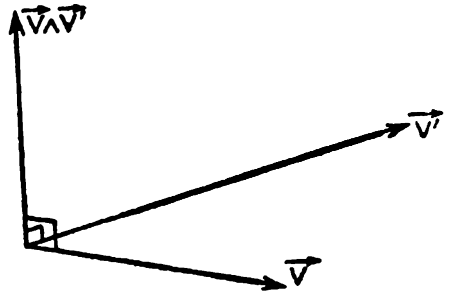
$$=\vec{V}\wedge\vec{T}$$ (بنابر ۳.۱۳.۱۰) ،

چنانچه درازای بردار دلخواه $\vec{W}$ را با $|\vec{W}|$ نشان‌دهیم ، با توجه به شماره‌های ۵.۱۳.۱۰ و ۱۰.۱۳.۱۰ درازای بردار $\vec{V}\wedge\vec{T}$ برابر با $|\vec{V}|\cdot|\vec{T}|$ خواهد شد . اما :

$$|\vec{V}|\cdot|\vec{T}|=|\vec{V}|\cdot|\vec{V'}|\cdot\sin\theta$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی دوبردار $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ ساخته می‌شود برابر است با :

$$\left|\vec{V} \wedge \vec{V'}\right| = \left|\vec{V}\right| \cdot \left|\vec{V'}\right| \sin\theta$$



شکل ۳۷

ازاین مطلب و شماره‌های ۷.۱۳.۱۰ و ۸.۱۳.۱۰ ساختمان هندسی $\vec{V} \wedge \vec{V'}$ به دست می‌آید.

فصل یازدهم
دستگاه معادله‌های خطی

مطالب این فصل کاربرد دیگری از مفهوم دترمینان را آشکار می‌سازد. خواننده از پیش با حل دستگاه‌های دو معادلهٔ خطی دو مجهولی آشنا شده‌است. در اینجا حالت n معادلهٔ خطی m مجهولی موردنظر است.

۱.۱۱ - تعریف

۱.۱.۱۱ - دستگاه :

$$(۱) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\cdots+\alpha_{1m}\xi_m=\beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\cdots+\alpha_{2m}\xi_m=\beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\xi_1+\alpha_{n2}\xi_2+\cdots+\alpha_{nm}\xi_m=\beta_n \end{cases}$$

را دستگاه n معادلهٔ خطی m مجهولی می‌نامند.

α_{ij} ها و β_i ها عنصرهای داده شده‌ای از یک هیأت K هستند و مجهولهای ξ_1 ، ξ_2 ، ... ، ξ_m در K بدست می‌آیند. هردنبالهٔ $(\xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_m)$ که در دستگاه(۱) صدق نماید یک **جواب** دستگاه نامیده می‌شود. β_i ها را عنصرهای طرف دوم دستگاه می‌گویند. اگر $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n=0$ باشد دستگاه‌را **همگن** می‌نامند. هردستگاه همگن دست‌کم دارای جواب $(0 , 0 , \ldots , 0)$ است که **جواب صفر** گفته می‌شود. اگر β_i ها دلخواه باشند، دستگاه جدیدی که از دستگاه (۱) با قرار دادن صفر بجای β_iها به‌دست می‌آید **دستگاه همگن وابسته** به دستگاه (۱) نامیده میشود.

۲.۱.۱۱ - **تعبیر هندسی** - ماتریس $[\alpha_{ij}]$ ماتریس یک گسترش خطی u از K^m در K^n است. چنانچه قرار دهیم :

$$x=(\xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_m) \qquad , \qquad y=(\beta_1 , \beta_2 , \ldots , \beta_n)$$

که درآن y برداری از K^n و x برداری از K^m است . با توجه به ۶.۲.۹ دستگاه (۱) هم‌ارز با معادلهٔ :

$$u(x)=y \tag{۲}$$

است ، که درآن گسترش u و بردار y معین می‌باشند و بردار x مجهول است .

۳.۱.۱۱ ـ چنانچه $y=0$ یعنی دستگاه (۱) همگن باشد ، جوابهای معادلهٔ (۲) عنصرهای N (هستهٔ گسترش u) می‌باشند. پس اگر $(x_1, \ldots, x_s)$ یک پایهٔ N باشد جوابهای (۲) ترکیب‌های خطی x_1 ، . . . ، x_s خواهند بود .

۴.۱.۱۱ ـ اکنون حالت کلی را درنظر می گیریم و فرض می کنیم x_0 یک جواب ویژهٔ دستگاه (۲) باشد . دراین‌صورت معادلهٔ (۲) هم‌ارز با $u(x)=u(x_0)$ و یا $u(x-x_0)=0$ است ، یعنی $x-x_0 \in N$ و یا $x \in x_0+N$ می‌باشد . پس جواب عمومی دستگاه (۱) با افزودن یک جواب ویژه دستگاه (۱) به جواب عمومی دستگاه همگن وابسته به‌آن به‌دست می‌آید .

۵.۱.۱۱ ـ همواره می‌توان درمورد یک‌بستگی به‌صورت $y=u(x)$ ، که درآن u یک گسترش خطی ازیک فضای برداری E دریک فضای برداری F و y یک عنصر معین از F و x یک مجهول متعلق به E است ، استدلال ۴.۱.۱۱ را به‌کار برد .

۲.۱۱ ـ دستگاه کرامر

۱.۲.۱۱ ـ با فرض‌های ۱.۱۱ داریم :

قضیه-چنانچه $m=n$ یعنی شمارهٔ معادله‌های دستگاه (۱) برابر با شمارهٔ مجهول‌ها باشد شرط‌های زیر هم‌ارزند :

(I) — ماتریس $[\alpha_{ij}]$ وارون‌پذیر است .

(II) — عنصرهای طرف دوم دستگاه (۱) هرچه باشند ، دستگاه دست کم دارای یک جواب است .

(III) — عنصرهای طرف‌دوم دستگاه (۱) هرچه باشند ، دستگاه بیش ازیک جواب ندارد .

(IV) — عنصرهای طرف دوم دستگاه (۱) هرچه باشند، دستگاه تنها دارای یک جواب است.

(V) — $\det [\alpha_{ij}] \neq 0$ است.

(VI) — جواب صفر تنها جواب دستگاه همگن وابسته به (۱) می‌باشد.

اثبات- شرطهای بالا به ترتیب به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

(I) — u وارون‌پذیر است.

(II) — u سورژکتیو است.

(III) — u انژکتیو می‌باشد.

(IV) — u دوسویی است.

(V) — $\det u \neq 0$ است.

(VI) — هستهٔ گسترش u برابر با $\{0\}$ است.

و بنابرشماره‌های ۷.۵.۳ و ۴.۱۱.۸ و ۵.۵.۱۰ این شرطها هم‌ارزند.

۲.۲.۱۱ - **تعریف- چنانچه $\det [\alpha_{ij}] \neq 0$ باشد، دستگاه (۱) را یک دستگاه کرامر می‌نامند.**

۳.۲.۱۱ - پس عنصرهای طرف دوم دستگاه (۱) هرچه باشند، دستگاه کرامر تنها دارای یک جواب است. دراین‌صورت جواب معادلهٔ (۲) عبارت‌است از $x = u^{-1}(y)$. فرض می‌کنیم A_{ij} کوفاکتور α_{ij} باشد. با توجه به ۶.۸.۱۰ ماتریس گسترش خطی u^{-1} وابسته به پایهٔ کانونیک K^n برابر است با $\frac{1}{\det [\alpha_{ij}]}\, {}^t[A_{ij}]$. پس بادرنظرگرفتن ۵.۲.۹ خواهیم داشت:

$$\xi_i = \frac{1}{\det [\alpha_{ij}]} [A_{1i}\beta_1 + A_{2i}\beta_2 + \cdots + A_{ni}\beta_n] \tag{۳}$$

چنانچه N ماتریسی باشد که از $[\alpha_{ij}]$ با قرار دادن $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ به‌جای ستون i ام آن به‌دست‌آید، کروشه (۳) عبارت خواهد بود از بسط دترمینان ماتریس N نسبت به عنصرهای ستون i ام آن، پس خواهیم داشت:

$$\xi_1=\frac{\begin{vmatrix}\beta_1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \beta_2 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \beta_n & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}}\qquad \xi_2=\frac{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \beta_1 & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \beta_2 & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_{n1} & \beta_n & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}},\cdots,$$

$$\xi_n=\frac{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \beta_1\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \beta_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \beta_n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}}$$

این فرمول‌ها را **فرمول‌های کرامر** می‌نامند.

۴.۲.۱۱ - درعمل بهتراست که مجهولها را پی‌درپی بین معادله‌ها حذف کرد (مثلاً ξ_1 را از معادله اول به‌دست آورده درمعادله‌های دیگر قرارداد تا $n-1$ معادلهٔ $n-1$ مجهولی به‌دست آید و این عمل را پی‌درپی تکرارکرد).

۳.۱۱ ـ دستگاه خطی دلخواه

۱.۳.۱۱ - رتبهٔ ماتریس $[\alpha_{ij}]$، که درشمارهٔ ۱.۱۱ معین گردید، **رتبهٔ دستگاه** (۱) نامیده می‌شود. پس اگر این رتبه را r بنامیم دترمینان هرماتریس مربع که ازماتریس $[\alpha_{ij}]$ استخراج شده و شمارهٔ سطرهای آن بزرگتر از r باشد برابر باصفر خواهد بود. اما

بنابرشمارهٔ ۱۰.۱۰ یک ماتریس مربع r سطری و r ستونی استخراج شده از $[\alpha_{ij}]$ وجود دارد که دترمینان آن مخالف با صفر است .

با تعویض شماره‌گذاری معادله‌ها و مجهول‌ها می‌توان فرض کرد که این ماتریس عبارت ازماتریس :

$$P=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rr} \end{bmatrix}$$

باشد . دراین صورت r معادلهٔ اول را **معادله‌های اصلی** و r مجهول ξ_1 ، ... ، ξ_r را **مجهول‌های اصلی** می‌نامند. معمولاً انتخاب معادله‌ها ومجهول‌های اصلی به‌صورت‌های مختلف امکان‌پذیر است.

۲.۳.۱۱ - چون $\det P\neq 0$ است r سطر اول ماتریس $[\alpha_{ij}]$ نابستگی خطی‌دارند (۳.۹.۱۰ و ۷.۶.۱۰) ، اما $r+1$ سطر دلخواه $[\alpha_{ij}]$ بستگی خطی دارند (۸.۶.۹). پس بنابرشمارهٔ ۸.۷.۸ سطرهای $r+1$ ، $r+2$ ، ... ، n ماتریس $[\alpha_{ij}]$ ترکیب‌های خطی r سطر اول ماتریس $[\alpha_{ij}]$ می‌باشند . درنتیجه اگر طرف اول دستگاه (۱) را با $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، ... ، $f_n(x)$ مشخص کنیم ، اسکالرهای λ_{ij} وجود دارند به قسمی که برای همهٔ عنصرهای x متعلق به K^m داشته باشیم :

$$\begin{aligned} f_{r+1}(x)&=\lambda_{11}f_1(x)+\lambda_{12}f_2(x)+\cdots+\lambda_{1r}f_r(x)\\ f_{r+2}(x)&=\lambda_{21}f_1(x)+\lambda_{22}f_2(x)+\cdots+\lambda_{2r}f_r(x)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

دراین‌صورت دوحالت زیر پیش می‌آید :

۱ - همه برابری‌های :

$$\begin{aligned} \beta_{r+1}&=\lambda_{11}\beta_1+\lambda_{12}\beta_2+\cdots+\lambda_{1r}\beta_r\\ \beta_{r+2}&=\lambda_{21}\beta_1+\lambda_{22}\beta_2+\cdots+\lambda_{2r}\beta_r\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

برقرار نیستند . دراین حالت دستگاه دارای جواب نیست .

۲ ـ همه برابری‌های بالا برقرارند. دراین حالت $(n-r)$ معادلهٔ آخر دستگاه از r معادلهٔ اول آن نتیجه می‌شوند . پس دستگاه (۱) هم‌ارز با r معادلهٔ اصلی است. می‌توان $m-r$ مجهول غیراصلی‌را (درصورتی که وجود داشته باشند. به‌عبارت دیگر اگر $m > r$ باشد) به‌دلخواه انتخاب کرد و با توجه به‌اینکه $\det P \neq 0$ است مجهول‌های اصلی را با استفاده از دستور کرامر به‌دست آورد . بنابراین چنانچه $m > r$ باشد دستگاه نامعین است .

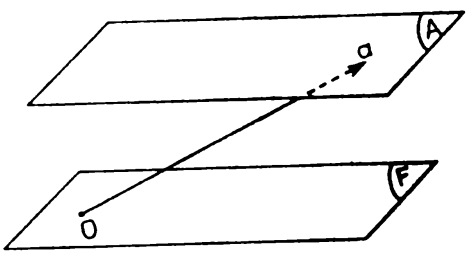
فصل دوازدهم

فضاهای آفین

فضای معمولی هندسه دارای مبدأ نیست ، پس این فضا تشکیل یک فضای برداری نمی‌دهد. دراینجا مفاهیم گوناگونی که به‌انتخاب مبدأ بستگی ندارند مطالعه می‌شود . این فصل (و به‌ویژه پاراگراف ۷.۱۲ که شاید برای خواننده بسیار مجرد باشد) دارای اهمیت چندانی نیست .

۱.۱۲ - زیر فضاهای آفین

۱.۱.۱۲ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی هیأت K باشد . هربخش فضای E را که از یک زیرفضای برداری E به‌وسیلهٔ یک انتقال به‌دست‌آید یک **زیر فضای آفین** از E می‌نامند. به عبارت دیگر یک زیر فضای آفین از E عبارت‌است ازمجموعه‌ای به‌صورت $A=F+a$ که درآن a عنصری از E و F یک زیر فضای برداری E می‌باشد. برحسب قرار داد بخش تهی E را نیز یک زیر فضای آفین می‌گیرند.



شکل ۳۸

۲.۱.۱۲ - دو زیر فضای برداری F و F' از E و بردارهای a و a' متعلق به E را درنظرمی‌گیریم وفرض‌می‌کنیم $F+a=F'+a'$ باشد ، دراین‌صورت‌داریم $F=F'$. زیرا a متعلق به $F+a$ ودرنتیجه متعلق به $F'+a'$ است . پس می‌توان a را به‌صورت $x+a'$ نوشت که درآن x عنصری از F' است ، بنابراین خواهیم داشت :

$$F=F'+a'-a=F'-x$$

که چون $x\in F'$ است برابری $F=F'-x=F'$ به‌دست می‌آید (۱۰.۵.۲) .

۳.۱.۱۲ - بدین ترتیب هنگامی که زیر فضای آفین A داده شده باشد تنها یک

زیر فضای برداری F وجود دارد به‌طوری که داشته باشیم $A=F+a$ ، به عبارت دیگر با در دست داشتن A زیر فضای F کاملاً معین است . زیر فضای برداری F را **راستای** A و بعد F را **بعد** A می‌نامند . دو زیر فضای آفین را که راستای آنها یکی است **هم‌راستا** (متوازی) می‌گویند. چنانچه F یک‌خط (یک‌صفحه، یک هیپرپلان) باشد A را یک **خط** (یک **صفحه** ، یک **هیپر پلان) آفین** می‌نامند . زیرفضاهای آفینی که بعد آنها صفر است نقطه‌های E می‌باشند .

۴.۱.۱۲ - به وارون، درحالت کلی بردار a به وسیلهٔ A تنها بـه یک روش معین نمی‌شود . به بیان‌دیگرا گر b نقطه دلخواهی از A باشدخواهیم‌داشت $A=F+b$. زیرا می‌توان b را به‌صورت $y+a$ نوشت که درآن y عنصری از F است. پس :

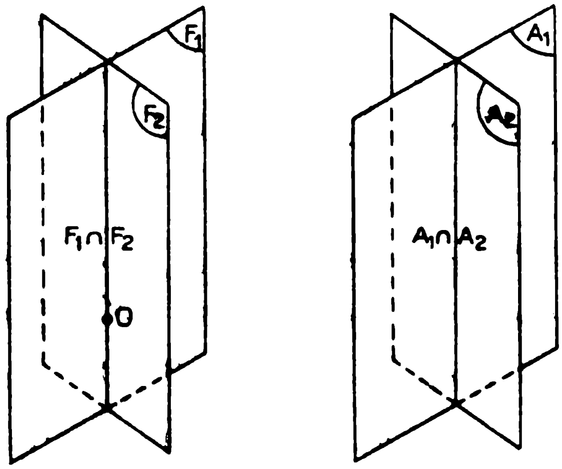
$$F+b=F+(y+a)=(F+y)+a=F+a$$

۵.۱.۱۲ - از شمارهٔ ۴.۱.۱۲ نتیجه می‌شود که هرزیرفضای آفین از E که شامل مبداء باشد یک زیرفضای برداری از E است . به‌وارون هرزیرفضای برداری از E یک زیر فضای آفین از E است که از مبداء می‌گذرد .

۶.۱.۱۲ - **قضیه-فرض‌می‌کنیم زیر فضاهای آفین** A_1 ، A_2 ، $\cdots$ ، A_n **به‌ترتیب دارای راستاهای** F_1 ، F_2 ، $\cdots$ ، F_n **باشند . دراین‌صورت بخش :**

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=A$$

یک زیر فضای آفین است. چنانچه $A\neq\varnothing$ **باشد راستای A عبارت‌است از** $F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n$.



شکل ۳۹

اثبات- اگر A مخالف با $\varnothing$ و a عنصری از A باشد ، A_i از F_i به وسیلهٔ انتقال $x \to t_a(x)=x+a$ به دست می‌آید (۴.۱.۱۲) . پس داریم :

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = t_a(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n)$$

و قضیه ثابت می‌شود .

۲.۱۲ ـ معادله‌های یک زیرفضای آفین

پایهٔ $(e_1 , e_2 , \ldots , e_n)$ فضای برداری E را انتخاب می‌کنیم و به کمک آن E را با K^n یکسان می‌گیریم .

۱.۲.۱۲ ـ فرض می‌کنیم شمار درست p کوچکتر یا برابر با n باشدودستگاه $n-p$ معادلهٔ خطی :

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n-p,1}\xi_1 + \alpha_{n-p,2}\xi_2 + \cdots + \alpha_{n-p,n}\xi_n = \beta_{n-p} \end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم که درآن α_{ij} ها و β_i ها اسکالر می‌باشند .

قضیه-فرض می‌کنیم طرف‌های اول برابری‌های (۱) که فرمهایی خطی هستند نابستگی خطی داشته باشند. دراین‌صورت مجموعهٔ همهٔ عنصرهایی از E مانند x به قسمی که :

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$

و ξ_i ها دردستگاه (۱) صدق کنند ، یک زیرفضای آفین از E است که بعد آن p می‌باشد .

اثبات- بنابرشمارهٔ ۳.۹.۱۰ می‌توان ازماتریس $[\alpha_{ij}]$ یک ماتریس $n-p$ سطری و $n-p$ ستونی استخراج کرد که دارای دترمینان مخالف باصفر باشد . همچنین بنابرشمارهٔ ۱.۲.۱۱ ، دست‌کم یک بردار a از E وجود دارد که جواب دستگاه (۱) باشد . چنانچه فرمهای خطی طرف‌اول برابری‌های (۱) را به ترتیب با f_1 ، f_2 ، $\ldots$ ، f_{n-p} نشان‌دهیم، خواهیم داشت :

$$f_1(a)=\beta_1 \quad , \quad f_2(a)=\beta_2 \ , \ \ldots \ , \ f_{n-p}(a)=\beta_{n-p}$$

بنابراین دستگاه (۱) هم‌ارز با :

$$f_1(x-a)=f_2(x-a)=\cdots=f_{n-p}(x-a)=0 \qquad (۲)$$

می‌شود .

اگر F یک زیر فضای برداری از E و عمود برفرمهای خطی f_1 ، f_2 ، $\cdots$ ، f_{n-p} باشد ، خواهیم داشت $\dim F=p$. پس دستگاه (۲) هم‌ارز با $x-a\in F$ یعنی $x\in F+a$ است . بدین‌ترتیب جوابهای دستگاه(۱) زیر فضای آفین p بعدی $A=F+a$ را تشکیل می‌دهند.

۲.۲.۱۲ ـ جوابهای دستگاه همگن وابسته به دستگاه (۱) یعنی دستگاه :

$$f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_{n-p}(x)=0 \qquad (۱')$$

عبارتند از بردارهای F . به عبارت دیگر دستگاه ('۱) راستای A را معین می‌کند . بنابر شماره‌های ۱.۲.۱۲ و ۱۸.۱۵.۸ طرف اول دستگاه (۱) تشکیل یک پایه از $F^{\perp}$ را می‌دهد .

۳.۲.۱۲ ـ بدین‌ترتیب به‌هردستگاه مانند دستگاه (۱) یک زیر فضای آفین p بعدی از E وابسته می‌شود. **به‌وارون هر زیرفضای آفین p بعدی A از E را می‌توان به‌روش بالا به‌دست آورد .** زیرا اگر F راستای A و a متعلق به A باشد و فرمهای f_1 ، f_2 ، $\cdots$ ، f_{n-p} را یک پایهٔ فضای $F^{\perp}$ بگیریم و قرار دهیم $\beta_i=f_i(a)$ ، با توجه به‌اثبات شمارهٔ ۱.۲.۱۲ جوابهای دستگاه :

$$f_1(x)=\beta_1 \quad , \quad f_2(x)=\beta_2 \ , \ \ldots \ , \ f_{n-p}(x)=\beta_{n-p}$$

عنصرهای زیر فضای آفین $(F^{\perp})^{\perp}+a=F+a=A$ می‌باشند .

۴.۲.۱۲ - دو دستگاه مختلف از نوع دستگاه (۱) ممکن است یک زیر فضای آفین A از E را معین کنند . این مطلب در شمارهٔ ۱۴.۱۵.۸ درمورد زیر فضاهای برداری دیده شد .

۵.۲.۱۲ ـ حالت ویژه : چنانچه همهٔ اسکالرهای α_1 ، α_2 ، $\cdots$ ، α_n برابر باصفر نباشند معادلهٔ :

$$\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\cdots+\alpha_n\xi_n=\beta \qquad (۳)$$

یک هیپرپلان آفین را معین می‌کند (۱۲.۲.۱) .

به‌وارون ، هرهیپرپلان آفین را می‌توان به‌وسیلهٔ معادله‌ای به صورت(۳) نشان داد (شمارهٔ ۱۲ . ۲ . ۳) .

۱۲ . ۲ . ۶ - فرض می‌کنیم A یک‌هیپرپلان به معادلهٔ (۳) و A' هیپرپلان‌دیگری به معادلهٔ :

$$\alpha'_1\xi_1+\alpha'_2\xi_2+\cdots+\alpha'_n\xi_n=\beta' \qquad (۴)$$

باشد. برای اینکه $A=A'$ باشد ، بایاویسنده است که یک‌اسکالر λ مخالف باصفر بتوان یافت به قسمی که داشته باشیم :

$$\alpha'_1=\lambda\alpha_1\ ,\ \alpha'_2=\lambda\alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha'_n=\lambda\alpha_n\ ,\ \beta'=\lambda\beta$$

زیرا دراین‌صورت‌برابری $A=A'$آشکار است . به‌وارون چنانچه $A=A'$ باشد ، طرف اول فرم‌های (۳) و (۴) یعنی فرم‌هـای خطی f و f' متناسب‌اند (زیرا بنابـر ۱۲ . ۲ . ۲ ، چنانچه F راستای A را معین کندداریم $\dim F^{\perp}=1$ ، $f\in F^{\perp}$ ، $f'\in F^{\perp}$) . پس اگر $f'=\lambda f$ ، $\lambda\in K$ ، $\lambda\neq 0$ و $a\in A$ باشد خواهیم داشت $\beta=f(a)$ و $\beta'=f'(a)$ و درنتیجه $\beta'=\lambda\beta$.

۱۲ . ۳ ـ نمایش پارامتری یک زیرفضای آفین

۱۲ . ۳ . ۱ - فرض می‌کنیم A یک زیرفضای آفین p بعدی از E و F راستایAو a متعلق به A باشد . چنانچه $(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_p)$ را یک پایهٔ F بگیریم ، زیر فضای آفین A مجموعهٔ بردارهایی از E به‌صورت :

$$a+\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_px_p$$

است که درآن λ_1 ، λ_2 ، $\ldots$ ، λ_p اسکالرهای دلخواه‌اند . چنانچه یک پایه ازفضایE را انتخاب نماییم و $(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_n)$ رامؤلفه‌های a و $(\alpha_{1i}\ ,\ \alpha_{2i}\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_{ni})$ را مؤلفه‌های بردار x_i نسبت به‌این پایه بگیریم ، زیرفضای آفین A از مجموعهٔ بردارهایی از E تشکیل می‌شود که مؤلفه‌های آنها به‌صورت :

$$(1)\quad \begin{cases} \xi_1=\alpha_1+\alpha_{11}\lambda_1+\alpha_{12}\lambda_2+\cdots+\alpha_{1p}\lambda_p \\ \xi_2=\alpha_2+\alpha_{21}\lambda_1+\alpha_{22}\lambda_2+\cdots+\alpha_{2p}\lambda_p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_n=\alpha_n+\alpha_{n1}\lambda_1+\alpha_{n2}\lambda_2+\cdots+\alpha_{np}\lambda_p \end{cases}$$

است (λ_i ها اسکالرهای دلخواه می‌باشند) . دستگاه (۱) را **نمایش پارامتری** فضای A می‌نامند و λ_1 ، λ_2 ، $\cdots$ ، λ_n را **پارامتر** می‌گویند .

بنابرشمارهٔ ۱۰ . ۹ . ۳ رتبهٔ ماتریس$[\alpha_{ij}]$ برابر با P است، زیرا بردارهای x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_p نابستگی خطی دارند .

۱۲ . ۳ . ۲ - به‌وارون اسکالرهای α_1 ، α_2 ، $\cdots$ ، α_n متعلق به K و ماتریس :

$$[\alpha_{ij}]_{1\leqslant i\leqslant n\,,\,1\leqslant j\leqslant p}$$

از رتبهٔ p را درنظر می‌گیریم . چنانچه بردار a به‌مؤلفه‌های α_1 ، α_2 ، $\cdots$ ، α_n و بردار x_i به‌مؤلفه‌های α_{1i} ، α_{2i} ، $\cdots$ ، α_{ni} باشد، بنابر ۱۰ . ۹ . ۳ ، x_i ها نابستگی خطی دارند و درنتیجه یک زیرفضای برداری p بعدی F از E پدید می‌آورند . بردارهایی که مؤلفه‌های آنها به‌صورت (۱) نوشته می‌شود زیر فضای آفین $F+a$ راکه دارای بعد p است ، تشکیل می‌دهند .

۱۲ . ۳ . ۳ - به‌عنوان‌مثال، اگر x_0 ، y_0 ، z_0 و α ، β ، γ شمارهای حقیقی‌ودست کم یکی از شمارهای α ، β و γ مخالف با صفر باشد معادله‌های :

$$x=x_0+\alpha t\ ,\ y=y_0+\beta t\ ,\ z=z_0+\gamma t$$

(که درآنها t یک پارامتر است) درفضای معمولی خطی را نمایش می‌دهند که از نقطهٔ به‌آرایندهای x_0 ، y_0 و z_0 می‌گذرد وهم‌راستای بردار به مؤلفه‌های α ، β و γ می‌باشد.

۱۲ . ٤ ـ گسترش‌های آفین

۱۲ . ٤ . ۱ ـ فرض می‌کنیم E و F دو فضای برداری روی هیأت K و u یک گسترش E در F باشد. گسترش u را **گسترش آفین** گویند هرگاه u به‌صوت $u=t\circ v$ باشد که درآن v یک گسترش خطی E در F و t یک انتقال در F است .

۱۲ . ٤ . ۲ - اگر t انتقال $y \to y+a$ به بردار a باشد ، برای هربردار x از E خواهیم داشت $u(x)=v(x)+a$ و به علاوه $u(0)=a$.

۱۲ . ٤ . ۳ - قضیه- تجزیهٔ گسترش آفین u به یک انتقال t در F و یک گسترش خطی v فضای برداری E در F یعنی $u=t\circ v$ ، یکتاست .

اثبات- فرض می‌کنیم برای همهٔ x های متعلق به E داشته باشیم :

$$u(x)=v(x)+a \quad \text{و} \quad u(x)=v'(x)+a'$$

که درآنها v و v' گسترش‌های خطی E در F و a و a' عنصرهایی از F می‌باشند . چنانچه قراردهیم $x=0$ خواهیم داشت $u(0)=a$ و $u(0)=a'$ و ازآنجا $a=a'$. درنتیجه برای همهٔ x های متعلق به E برابری $v(x)=v'(x)$ به دست می‌آید یعنی $v=v'$ می‌باشد .

۱۲ . ٤ . ٤ - از قضیهٔ ۱۲ . ٤ . ۳ درستی تعریف زیر آشکار می‌گردد .

تعریف- گسترش v گسترش خطی وابسته به گسترش آفین u نامیده می‌شود.

مثلاً اگر $E=F$ و u یک انتقال در E باشد خواهیم داشت $v=id_E$.

۱۲ . ٤ . ٥ - قضیه - فرض می‌کنیم E ، F و G سه فضای برداری روی هیأت K و $u:E\to F$ و $u_1:F\to G$ گسترش‌های آفین باشند.

الف- $u_1\circ u$ یک گسترش آفین است.

ب- چنانچه v و v_1 به ترتیب گسترش‌های خطی وابسته به u و u_1 باشند گسترش $v_1\circ v$ گسترش خطی وابسته به $u_1\circ u$ می‌باشد.

اثبات- بردارهای a و a_1 ، ($a\in F$ و $a_1\in G$) وجوددارند به‌طوریکه برای هربردار x از E وهربردار y از F داریم :

$$u(x)=v(x)+a \qquad , \qquad u_1(y)=v_1(y)+a_1$$

ازآنجا :

$$(u_1\circ u)(x)=u_1(v(x)+a)=v_1(v(x)+a)+a_1=(v_1\circ v)(x)+v_1(a)+a_1$$

چون $v_1(a)+a_1$ بردار ثابتی از G و $v_1 \circ v$ یک گسترش خطی E در G است، پس $u_1 \circ u$ گسترش آفینی است که $v_1 \circ v$ گسترش خطی وابسته به آن می‌باشد.

۶.۴.۱۲- قضیه - فرض می‌کنیم E و F دو فضای برداری روی K و u یک گسترش آفین E در F و v گسترش خطی وابسته به u باشد. چنانچه A یک زیر فضای آفین از E و D راستای A باشد، $u(A)$ یک زیر فضای آفین از F و $v(D)$ راستای آن است.

اثبات - یک عنصر a در E وجود دارد به‌طوری که $A=D+a$ باشد. پس داریم $v(A)=v(D)+v(a)$ و $v(D)$ یک زیر فضای برداری از F است. بنابراین $v(A)$ یک زیرفضای‌آفین باراستای $v(D)$ می‌باشد، و چون $u(A)$ از $v(A)$ به‌وسیلهٔ یک انتقال بدست می‌آید، پس $u(A)$ نیز یک زیر فضای آفین از F است که $V(D)$ راستای آن می‌باشد.

۷.۴.۱۲ - قضیه - دو فضای برداری E و F روی K و گسترش آفین u فضای E در F را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم v گسترش خطی وابسته به u باشد. برای اینکه u انژکتیو (سورژکتیو، دوسویی) باشد، بایاو بسنده است که v انژکتیو (سوژکتیو، دوسویی) باشد.

اثبات - یک انتقال t در F وجود دارد به قسمی که داریم $u=t \circ v$ و ازآنجا $v=t^{-1} \circ u$. اکنون باتوجه‌به‌اینکه t و t^{-1} گسترش های دوسویی F روی F می‌باشند، اثبات قضیه به آسانی نتیجه می‌شود.

۸.۴.۱۲- قضیه - چنانچه E یك فضای برداری باشد، گسترش‌های آفین دوسویی E روی E، باقانون ترکیب گسترش‌ها، تشکیل یك گروه می‌دهند.

اثبات - فرض می‌کنیم G مجموعهٔ گسترشهای آفین دوسویی E روی E باشد. چنانچه u و u' متعلق‌به G باشند، بنابر ۵.۴.۱۲، $u \circ u'$ متعلق به G است. به‌علاوه id_E عنصری از G می‌باشد. همچنین اگر u متعلق به G باشد، u^{-1} نیز متعلق به G است. زیرا می‌دانیم که u^{-1} دوسویی است و یک گسترش خطی v فضای E در E و بردار $a \in E$ وجود دارد به‌قسمی که برای هربردار x از E داریم $u(x)=v(x)+a$. اما بنابر

شمارهٔ ۷.٤.۱۲ گسترش v دوسویی است. پس برای بردارهای x و y از E داریم:

$$x=u^{-1}(y) \Longleftrightarrow u(x)=y \Longleftrightarrow v(x)+a=y \Longleftrightarrow v(x)=y-a$$
$$\Longleftrightarrow x=v^{-1}(y-a) \Longleftrightarrow x=v^{-1}(y)-v^{-1}(a)$$

پس برای هربردار y از E برابری $u^{-1}(y)=v^{-1}(y)-v^{-1}(a)$ برقرار است، در نتیجه u^{-1} یک گسترش آفین می‌باشد.

۹.٤.۱۲- گروه G شمارهٔ ۸.٤.۱۲ را **گروه آفین** فضای E می‌نامند. انتقال‌های E تشکیل یک زیرگروه ازگروه G می‌دهند. همچنین گروه خطی $GL(E)$ یک زیرگروه ازگروه G است. با توجه به شماره‌های ۷.٤.۱۲ و ۵.٤.۱۲ گسترشی که به هرعنصر u از G گسترش خطی وابسته به آنرا نسبت می‌دهد یک هومورفیسم G در $GL(E)$ است.

۱۰.٤.۱۲- قضیه ـ فضاهای برداری E و F را روی هیأت K درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ E و $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ یک پایهٔ F و u یک گسترش آفین E در F و v گسترش خطی وابسته به u باشد. چنانچه $[\alpha_{ij}]$ ماتریس گسترش خطی v نسبت به پایه‌های:

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n) \quad , \quad (f_1, f_2, \ldots, f_p)$$

و $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ مؤلفه‌های بردار $u(0)$ در پایهٔ $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ باشند، برای هر بردار x از E به مؤلفه‌های ξ_1، ξ_2، $\cdots$، ξ_n، مؤلفه‌های $u(x)$ به‌وسیلهٔ فرمولهای زیر بدست می‌آیند:

$$(1)\qquad \begin{cases} \eta_1=\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\cdots+\alpha_{1n}\xi_n+\alpha_1 \\ \eta_2=\alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\cdots+\alpha_{2n}\xi_n+\alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_p=\alpha_{p1}\xi_1+\alpha_{p2}\xi_2+\cdots+\alpha_{pn}\xi_n+\alpha_p \end{cases}$$

زیرا بنابر شمارهٔ ۲.٤.۱۲ داریم $u(x)=v(x)+u(0)$ و اثبات قضیه از شمارهٔ ۶.۲.۹ نتیجه می‌شود.

۱۱.٤.۱۲- به‌وارون، روشن است که فرمول‌هایی به‌صورت (۱) یک گسترش آفین

را معین می‌کنند که گسترش خطی وابسته به آن دارای ماتریس $[\alpha_{ij}]$ می‌باشد. بدین ترتیب می‌توان تمام گسترش های آفین E در F را به دست آورد.

۱۲.۴.۱۲- معمولاً هر گسترش آفین E در K رایک **تابع آفین** روی E می‌نامند. پس توابع آفین به‌صورت $g=f+\alpha$ می‌باشند که در آنجا $f\in E^*$ و α اسکالری برابر با $g(0)$ است. چنانچه x نقطهٔ متغیری از E به‌آرایندههای ξ_1، ξ_2، ...، ξ_n نسبت به یک پایهٔ داده شده باشد، خواهیم داشت:

$$g(x)=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_n+\alpha$$

که در آن λ_1، λ_2، ...، λ_n اسکالرهای ثابتی می‌باشند (۸.۱۳.۵).

۱۳.۴.۱۲- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری دارای بعد باپایان و u یک گسترش آفین E در E باشد. دترمینان گسترش خطی وابسته به u را **دترمینان** u می‌نامند و با det u نشان می‌دهند.

۱۴.۴.۱۲- با توجه به فرض های قضیهٔ ۱۰.۴.۱۲ و شمارهٔ ۹.۶.۱۰ داریم:

$$\det u=\det[\alpha_{ij}]$$

۱۵.۴.۱۲- قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری با بعدباپایان باشد.

(I) — اگر u_1 و u_2 دو گسترش آفین E در E باشند، داریم:

$$\det(u_1u_2)=(\det u_1)(\det u_2)$$

(II) — برای اینکه گسترش آفین u وارون‌پذیر باشد باید و بسنده است که det u مخالف با صفر باشد.

(III) — چنانچه u وارون‌پذیر باشد خواهیم داشت:

$$\det(u^{-1})=(\det u)^{-1}$$

اثبات ــ قسمت (I) از شماره‌های ۵.۴.۱۲ و ۶.۵.۱۰ و قسمت (II) از شماره‌های ۷.۴.۱۲ و ۵.۵.۱۰ و (III) از شماره‌های ۹.۴.۱۲ و ۷.۵.۱۰ نتیجه می‌شود.

۵.۱۲ـ گرانیگاه

۱۲ . ۰ . ۱ـ **تعریف - فضای برداری E را روی هیأت K در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم** x_1 ، x_2 ، … ، x_n **متعلق به E و** λ_1 ، λ_2 ، … ، λ_n **اسکالرهایی از K باشند به قسمی که** $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n \neq 0$ **باشد. عنصر** $x=(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)^{-1}(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)$ **از E را گرانیگاه** x_1 ، x_2 ، … ، x_n **باضریب‌های (جرمهای)** λ_1 ، λ_2 ، … ، λ_n **می‌نامند.**

۱۲ . ۰ . ۲ـ در فضای معمولی تعریف بالا همان تعریف کلاسیک گرانیگاه می‌باشد.

۱۲ . ۰ . ۳ـ ازتعریف ۱۲ . ۰ . ۱ نتیجه می‌شود که اگر اسکالرهای λ_1 ، λ_2 ، … ، λ_n را در اسکالر $\lambda \neq 0$ ضرب کنیم ، گرانیگاه x_1 ، x_2 ، … ، x_n تغییر نمی‌کند. پس باانتخاب $\lambda=(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)^{-1}$ می‌توان قرار داد $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$.

۱۲ . ۰ . ٤ـ تعریف ۱۲ . ۰ . ۱ را می‌توان به‌وسیلهٔ برابری زیر نیز نشان داد :

$$(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$$

۱۲ . ۰ . ۵ـ **قضیه - بادر نظر گرفتن مطالب پیش‌فرض می‌کنیم مجموعهٔ** $\{1, 2, \ldots, n\}$ **اجتماع زیر مجموعه‌های جدا ازهم** I_1 ، I_2 ، … ، I_p **باشد و برای همهٔ مقادیر** $k=1, 2, \ldots, p$ **داشته باشیم** $\sum_{i\in I_k} \lambda_i \neq 0$

چنانچه y_k گرانیگاه عنصرهای $(x_i)_{i\in I_k}$ **با ضریب‌های** $(\lambda_i)_{i\in I_k}$ **باشد ، x عبارت است ازگرانیگاه** y_1 ، y_2 ، … ، y_p **باضریب‌های :**

$$\sum_{i\in I_1} \lambda_i \ , \ \sum_{i\in I_2} \lambda_i \ , \ \cdots \ , \ \sum_{i\in I_p} \lambda_i$$

(مجموع این ضریب‌ها صفر نیست) .

اثبات - بنابر شمارهٔ ۱۲ . ۰ . ٤ به ترتیب چنین داریم :

$$(\sum_{i\in I_1} \lambda_i+\cdots+\sum_{i\in I_p}\lambda_i)x=(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)x=$$

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=\sum_{i\in I_1}\lambda_ix_i+\sum_{i\in I_2}\lambda_ix_i+\cdots$$

$$+\sum_{i\in I_p}\lambda_ix_i=(\sum_{i\in I_1}\lambda_i)y_1+(\sum_{i\in I_2}\lambda_i)y_2+\cdots+(\sum_{i\in I_p}\lambda_i)y_p$$

یعنی قضیه برقرار است.

۶.۰.۱۲- قضیه ـ فرض می‌کنیم E و F دوفضای برداری روی هیأت K و u یك گسترش آفین E در F باشد. چنانچه x_1 ، $\cdots$ ، x_n عنصرهایی از E و x گرانیگاه x_1 ، $\cdots$ ، x_n باضریب‌های λ_1 ، $\cdots$ ، λ_n باشد (که در آنجا $\lambda_1+\cdots+\lambda_n$ مخالف با صفر است)، $u(x)$ گرانیگاه $u(x_1)$ ، $\cdots$ ، $u(x_n)$ با ضریب‌های λ_1 ، $\cdots$ ، λ_n است.

اثبات ـ قضیه برای حالتی که u یك گسترش خطی E در F باشد آشکار است. پس کافی است که آن را برای حالتی که $E=F$ و u انتقال $x \to x+a$ در E می‌باشد ثابت کنیم. اما دراین‌صورت گرانیگاه $u(x_1)$ ، $\cdots$ ، $u(x_n)$ عبارت است از :

$$(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)^{-1}(\lambda_1(x_1+a)+\cdots+\lambda_n(x_n+a))=$$

$$(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)^{-1}(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)+$$

$$(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)^{-1}(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)a=x+a=u(x)$$

و قضیه برقرار است.

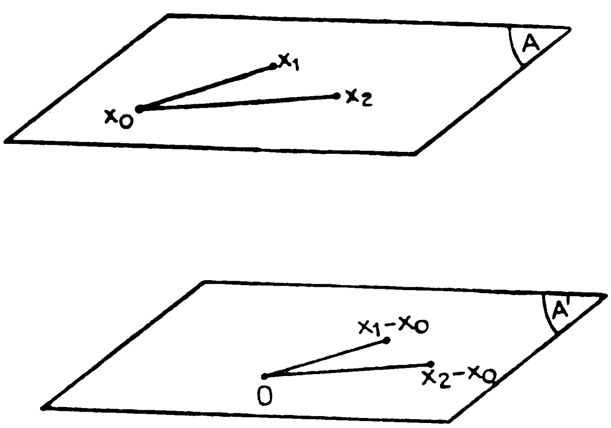
۷.۰.۱۲- قضیه - فرض می‌کنیم E یك فضای برداری و A بخشی از E باشد. برای اینکه A یك زیر فضای آفین E باشد بایاوبسنده است که هر گرانیگاه نقاطی از A متعلق به A باشد.

اثبات ـ اگر A یك زیرفضای برداری E باشد، روشن است که هر گرانیگاه نقاطی از A متعلق به A است. چنانچه قضیهٔ ۶.۰.۱۲ را در مورد انتقالها بکاربریم دیده می‌شود

که مطلب بالا درحالتی که A یک زیر فضای آفین باشد نیز درست است.

به وارون چنانچه هر گرانیگاه نقاطی از A متعلق به A باشد A یک زیر فضای آفین از E است. زیرا باانجام یک انتقال (که بنابر شمارهٔ ۶.۰.۱۲ امکان‌پذیراست) می‌توان فرض کرد که $O\in A$ باشد. دراین‌صورت اگر x و y متعلق به A و λ و μ دو اسکالر باشند، $\lambda x+\mu y$ گرانیگاه سه‌عنصر x و y و ۰ باضریب‌های λ و μ و $(1-\lambda-\mu)$ است. پس $\lambda x+\mu y\in A$ و درنتیجه A یک زیر فضای برداری E می‌باشد.

۸.۰.۱۲- قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری و B بخشی از E باشد. چنانچه A مجموعهٔ گرانیگاه‌های نقاط B باشد، A کوچکترین زیر فضای آفینی از E است که شامل B می‌باشد. به علاوه اگر x_0 متعلق به B باشد راستای A عبارت است از زیر فضای برداری پدیدآمده به‌وسیلهٔ بردارهای $x-x_0$ که درآنجا $x\in B$ می‌باشد.



شکل ۴۰

اثبات - فرض می‌کنیم x_0 متعلق به B و $B'=B-x_0$ و $A'=A-x_0$ باشد. دراین‌صورت $0\in B'$ است و با توجه به ۶.۰.۱۲ دیده می‌شود که A' مجموعهٔ عنصرهایی به صورت $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_{p-1}x_{p-1}+\lambda_p\cdot 0$ می‌باشد که درآنجا بردارهای x_1، ...، x_{p-1} به B' تعلق دارند و برای اسکالرهای λ_1، ...، λ_p داریم $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_p=1$ (شمارهٔ ۳.۰.۱۲). به گفتهٔ دیگر A' عبارت است از مجموعهٔ $\{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_{p-1}x_{p-1}\}$ که درآن x_1، ...، x_{p-1} متعلق به B' و

λ_1 ، λ_2،… ، λ_{p-1} اسکالرهای دلخواهی هستند. بدین ترتیب A' کوچکترین زیر فضای برداری و شامل B' می‌باشد (۱۰.۲.۸) یعنی کوچکترین زیر فضای آفینی است که شامل B' است ، زیرا داریم $o \in B'$ (شمارهٔ ۵.۱.۱۲). پس A کوچکترین زیر فضای آفینی است که شامل B است و راستای A عبارت است از A' یعنی زیر فضای برداری پدید آمده به‌وسیلهٔ $B - x_o$.

۹.۵.۱۲- زیر فضای آفین A که در شمارهٔ ۸.۵.۱۲ معین گردید ، **زیر فضای آفین پدیدآمده به‌وسیلهٔ** B نامیده می‌شود.

۱۰.۵.۱۲- مثلاً زیر فضای آفین پدید آمده به‌وسیله دو عنصر متمایز x_1 و x_2 یک خط است که راستای آن $K(x_2 - x_1)$ می‌باشد.

۱۱.۵.۱۲- کاربرد : نمایش پارامتری دیگر یک زیر فضای آفین

فرض می‌کنیم A زیر فضای آفین پدید آمده به‌وسیلهٔ x_1 ، x_2 ، … ، x_p باشد (۸.۵.۱۲ و ۹.۵.۱۲). چنانچه یک پایه از E اختیار کرده و آرایندهای x_i را نسبت به این پایه α_{i1} ، α_{i2} ، … ، α_{in} بگیریم ، آرایندهای یک نقطهٔ دلخواه از A با قرار دادن :

$$\xi_1 = \frac{\lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{21} + \cdots + \lambda_p \alpha_{p1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p}$$

$$\xi_2 = \frac{\lambda_1 \alpha_{12} + \lambda_2 \alpha_{22} + \cdots + \lambda_p \alpha_{p2}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p}$$

. . . .

$$\xi_n = \frac{\lambda_1 \alpha_{1n} + \lambda_2 \alpha_{2n} + \cdots + \lambda_p \alpha_{pn}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p}$$

بدست می‌آید که در آنها λ_1 ، λ_2 ، … ، λ_p اسکالرهای دلخواهی هستند به‌قسمی که :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p \neq 0$$

است (بنابر شمارهٔ ۳.۵.۱۲ می‌توان فرض کرد که مجموع λ_i ها برابر با ۱ باشد ، در این صورت نیازی به نوشتن مخرج کسرهای بالا نیست).

۶.۱۲- مجموعه‌های کوژ

چون دراین قسمت ناگزیر از نوشتن نابرابریهایی بین عنصرهای $\mathbf{K}$ هستیم ، تنها حالت $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ را درنظر می‌گیریم .

۱.۶.۱۲- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری حقیقی و x و y دو عنصر از E باشند. مجموعهٔ عنصرهایی به‌صورت $\frac{\lambda x+\mu y}{\lambda+\mu}$ را **پاره خط بسته به انجام‌های** x و y می‌نامند که درآنجا $\lambda\geqslant 0$ ، $\mu\geqslant 0$ و $\lambda+\mu\neq 0$ است. به عبارت دیگر پاره خط بسته به‌انجام‌های x و y عبارت است از مجموعهٔ عنصرهایی به صورت $\alpha x+\beta y$ که درآن

$$\alpha\geqslant 0 \quad , \quad \beta\geqslant 0 \quad , \quad \alpha+\beta=1$$

باشد، یعنی مجموعهٔ گرانیگاههای x و y باضریب‌های مثبت. درفضای معمولی که درآن یک نقطه به‌عنوان مبدأ انتخاب شده باشد تعریف بالا همان تعریف معمولی پاره خط است.

۲.۶.۱۲- **تعریف ـ بخش A ازمجموعهٔ E راکوژگویندهرگاه ، برای هردونقطهٔ x و y متعلق به A ، بخش A شامل پاره خط بسته به انجام‌های x و y باشد .**

۳.۶.۱۲- **مثال ــ** هر زیر فضای آفین مجموعه‌ای کوژ است (۷.۵.۱۲) .

۴.۶.۱۲- **مثال -** فرض می‌کنیم f یک فرم خطی روی E و λ یک اسکالر باشد . مجموعهٔ عنصرهای x متعلق به E به‌قسمی که $f(x)\geqslant\lambda$ باشد یک مجموعهٔ کوژ است (این مجموعه‌را می‌توان **نیم‌فضای بسته** نام نهاد). زیرا اگر x و y متعلق به E و α و β متعلق به $\mathbf{R}$ باشند به‌طوری که $f(x)\geqslant\lambda$ ، $f(y)\geqslant\lambda$ ، $\alpha\geqslant 0$ ، $\beta\geqslant 0$ و $\alpha+\beta=1$ باشد داریم :

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)\geqslant\alpha\lambda+\beta\lambda=\lambda$$

همچنین **نیم فضای بازی** که بانابرابری $f(x)>\lambda$ معین می‌شود یک مجموعهٔ کوژ است.

۵.۶.۱۲- **مثال ــ** در صفحهٔ معمولی مجموعهٔ نقاط داخل یک بیضی مجموعه‌ای کوژ است.

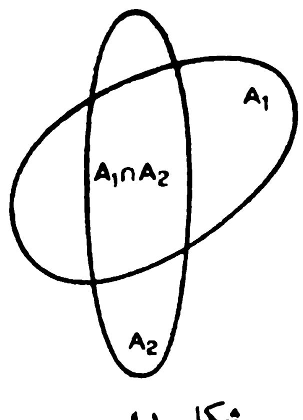
۶.۶.۱۲- قضیه - فرض می‌کنیم A بخشی کوژ از فضای برداری E و x_1 ، ... ، x_n نقاطی از A باشند. چنانچه λ_1 ، ... ، λ_n اسکالرهای مثبتی باشند که مجموع آنها صفر نباشد، گرانیگاه x_1،...،x_n با ضریب‌های λ_1،...،λ_n ، که آن را با x می‌نماییم ، متعلق به A می‌باشد.

اثبات - درستی قضیه برای حالت $n=1$ آشکار است. فرض می‌کنیم برای حالت $(n-1)$ نقطه نیز قضیه برقرار باشد. چنانچه $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ باشد، بازهم درستی قضیه روشن است؛ درغیراین صورت $\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}>0$ است و می‌توان y یعنی گرانیگاه x_1 ، ... ، x_{n-1} باضریب‌های λ_1 ، ... ، λ_{n-1} را به دست آورد. امااز طرفی بنابه فرض بازگشت y متعلق به A می‌باشد، وازطرف دیگر بنابر ۵.۵.۱۲ نقطهٔ x عبارت است ازگرانیگاه y و x_n با ضریب‌های $(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1})$ و λ_n. پس داریم $x\in A$ زیرا A مجموعه‌ای کوژ است.

۷.۶.۱۲- قضیه- اگر A یك بخش کوژ از E و u یك گسترش آفین E در یك فضای برداری حقیقی دیگر F باشد $u(A)$ مجموعه‌ای کوژ است.

اثبات این قضیه از شمارهٔ ۶.۵.۱۲ نتیجه می‌شود.

۸.۶.۱۲- قضیه - اگر $(A_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از بخش‌های کوژ E باشد، مجموعهٔ $A=\bigcap_{i\in I} A_i$ نیز کوژ است.



شکل ۴۱

اثبات - فرض می‌کنیم x و y عنصرهایی از A و S پاره خط بسته به انجام‌های

x و y باشد. برای هراندیس i متعلق به I داریم $S\subset A_i$. بنابراین $S\subset A$ ودرنتیجه A مجموعه‌ای کوژ است.

۹.۶.۱۲- به‌ویژه‌اگر f_1 ، ... ، f_n فرمهای‌خطی‌ای روی E باشند،مجموعه‌ای که با نابرابری‌های $f_1(x)\geqslant\lambda_1$ ، ... ، $f_n(x)\geqslant\lambda_n$ معین شده باشد مجموعه‌ای کوژ است (بنابر شماره‌های ۴.۶.۱۲ و ۸.۶.۱۲).

۱۰.۶.۱۲- اجتماع دو مجموعهٔ کوژ در حالت کلی کوژ نیست.

۱۱.۶.۱۲- **قضیه - فرض می‌کنیم B بخشی از E باشد. چنانچه مجموعهٔ گرانیگاه‌های نقاط B باضریب‌های مثبت‌رابا A نشان‌دهیم ، A کوچکترین بخش کوژ E است که شامل B می‌باشد.**

اثبات ـ روشن‌است که A بخش B را دربر دارد. ثابت می‌کنیم که A کوژ است. برای این‌کار فرض می‌کنیم x و y دو نقطه از A و α و β شمارهای حقیقی باشند به‌قسمی که داشته باشیم $\alpha\geqslant 0$ ، $\beta\geqslant 0$ و $\alpha+\beta=1$. دراین‌صورت خواهیم داشت :

$$x=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n \quad , \quad y=\mu_1y_1+\cdots+\mu_py_p$$

که درآن x_1 ، ... ، x_n و y_1 ، ... ، y_p متعلق به B می‌باشند و داریم :

$$\lambda_1\geqslant 0 , \ldots , \lambda_n\geqslant 0 \ , \ \mu_1\geqslant 0 , \ldots , \mu_p\geqslant 0 \quad ,$$

$$\lambda_1+\cdots+\lambda_n=\mu_1+\cdots+\mu_p=1$$ (شمارهٔ ۳.۵.۱۲) ،

پس :

$$\alpha x+\beta y=\sum_{i=1}^{n}(\alpha\lambda_i)x_i+\sum_{j=1}^{p}(\beta\mu_j)y_j \quad ,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha\lambda_i)+\sum_{j=1}^{p}(\beta\mu_j)=\alpha+\beta=1$$

بنابراین $\alpha x+\beta y$ به‌صورت گرانیگاهی از نقاط B با ضریب‌های مثبت درمی‌آید ودرنتیجه $\alpha x+\beta y\in A$ است . این مطلب ثابت می‌کند که A کوژ است. از طرف دیگر بنابر

شماره ۶.۶.۱۲ هربخش کوژ E که B را در برداشته باشد A را نیز دربر دارد. پس A کوچکترین بخش کوژی است از E که شامل B می‌باشد.

۱۲.۶.۱۲- **تعریف - مجموعهٔ A که درشمارهٔ ۱۱.۶.۱۲ تعریف شد پوش کوژ B نامیده می‌شود.**

۱۳.۶.۱۲- **مثال -** چنانچه x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 چهار نقطهٔ ناهم صفحه ازفضای معمولی باشند، پوش کوژ $\{x_1 , x_2 , x_3 , x_4\}$ چهار وجهی‌ای است که رأس‌های آن x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 می‌باشند (یعنی مجموعهٔ نقاط داخل چهار وجهی، وجه‌ها، یالها و رأس های چهار وجهی).

۷.۱۲- فضاهای آفین

۱.۷.۱۲- فرض می کنیم E یک فضای برداری روی هیأت K باشد. مجموعهٔ A را **فضای آفین وابسته به E** می‌نامیم هرگاه یک گسترش $(P , x) \to P+x$ مجموعهٔ $A\times E$ در A باویژگیهای زیر وجود داشته باشد:

۱- برای هردو عنصر x و y متعلق به E و هرعنصر P متعلق به A داشته باشیم:

$$P+(x+y)=(P+x)+y$$

۲- برای هردوعنصر P و Q متعلق به A تنها یک عنصر x از E یافت شود به قسمی که $P+x=Q$ باشد.

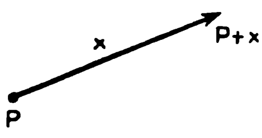
۲.۷.۱۲- عنصرهای A را **نقاط** A و عنصرهای E را **بردارهای** A می‌نامند. همچنین بعد E را **بعد** A می گویند.

۳.۷.۱۲- برای هرنقطهٔ P متعلق به A داریم $P+0=P$. زیرا اگر x تنها عنصری از E باشد به قسمی که داشته باشیم $P+x=P$ (ویژگی ۲ از ۱.۷.۱۲)، خواهیم داشت:

$$P+0=(P+x)+0=P+(x+0)=P+x=P$$

۴.۷.۱۲- **مثال -** فرض می کنیم A فضای معمولی و E فضای برداری تشکیل شده از بردارهای آزاد A باشد. برای هرنقطهٔ P متعلق به A و هربردار آزاد x از A نقطه‌ای را که از P به‌وسیلهٔ انتقالی به‌بردار x بدست می‌آید با $P+x$ نمایش می‌دهیم. دراین‌صورت

ویژگی‌های ۱ و ۲ شمارهٔ ۱.۷.۱۲ برقرارند و درنتیجه A یک فضای آفین وابسته به E می‌باشد.



شکل ۴۲

۱۲.۷.۵- **مثال** - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی K باشد. قرارمی‌دهیم $A=E$ وگسترش $(u, x) \to u+x$ فضای حاصلضرب $E\times E$ در E را درنظر می‌گیریم. دراین صورت ویژگیهای ۱ و ۲ شمارهٔ ۱.۷.۱۲ برقرارند و درنتیجه E یک فضای آفین وابسته به E می‌باشد.

۱۲.۷.۶- به وارون درصورتی‌که یک فضای آفین A وابسته به E داشته باشیم نمی‌توانیم به‌طور ذاتی از A یک فضای برداری بسازیم (مثلاً در فضای معمولی نمی‌توان مجموع دو نقطه را بطور ذاتی تعریف کرد). باوجود این چنانچه نقطهٔ P را متعلق به A بگیریم و Φ_p گسترش $x \to P+x$ فضای E در A باشد، Φ_p دوسویی است (ویژگی ۲ شمارهٔ ۱.۷.۱۲). به‌کمک Φ_p می‌توان ساختمان فضای برداری E را به A منتقل کرد. بدین ترتیب یک فضای برداری بدست می‌آید که آنرا با A_p نشان می‌دهیم. مبداء A_p عبارت است از $P=\circ+P=(\circ)\Phi_p$. دراین صورت P را **مبداء A گویند** (مبداء انتخاب شده را اغلب با O نمایش می‌دهند هرچند که احتمال اشتباه آن با مبداء E نیز هست). بدین ترتیب باانتخاب یک مبداء در A یک فضای برداری ایزومرف با E بدست می‌آید. این ساختمان‌فضای برداری‌روی A به مبداء انتخاب شده بستگی‌دارد (به‌این‌علت، تاکنون فضای معمولی را اغلب باانتخاب یک مبداء درآن، به‌صورت یک فضای برداری درنظرگرفته‌ایم).

۱۲.۷.۷- فرض می‌کنیم O و O' دو مبداء در A باشند. می‌خواهیم گسترشهای Φ_o و $\Phi_{o'}$ را با یکدیگر مقایسه کنیم. اگر a عنصری از E باشد به‌طوریکه داشته باشیم $O'=O+a$ برای هر x متعلق به E خواهیم داشت:

$$\Phi_{o'}(x) = O' + x = (O+a) + x = O + (a+x)$$

پس :

$$\Phi_{o'}(x) = \Phi_o(x+a) \qquad (۱)$$

اگر y نقطه‌ای از A باشد قرار می‌دهیم $x = \Phi_{o'}^{-1}(y)$. دراین‌صورت داریم :

$$y = \Phi_{o'}(x) = \Phi_o(x+a)$$

بنابراین :

$$\Phi_o^{-1}(y) = x + a$$

و ازآنجا :

$$\Phi_o^{-1}(y) = \Phi_{o'}^{-1}(y) + a \qquad (۲)$$

۸.۷.۱۲- اکنون برخی از تعاریف و ویژگیهای فضای برداری E را درنظر گرفته و به‌کمک گسترش دوسویی Φ_o آنها را از E به A منتقل می‌نماییم . برای اینکه مفهوم بدست آمده در A دارای معنی ذاتی باشد لازم‌است که بستگی به انتخاب مبداء O نداشته باشد. بررسی این مطلب بااستفاده از فرمولهای (۱) و (۲) بالا به‌آسانی امکان‌پذیر است.

۹.۷.۱۲- فرض می‌کنیم A_1 بخشی از A و E_1 یک‌زیر فضای برداری از E باشد. A_1 را یک **زیر فضای آفین** A **باراستای** E_1 گویند هرگاه $\Phi_o^{-1}(A_1)$ یک **زیر فضای آفین** E **باراستای** E_1 باشد . چون $\Phi_{o'}^{-1}(A_1)$ از $\Phi_o^{-1}(A_1)$ بوسیلهٔ یک انتقال بدست می‌آید و به‌علاوه هرانتقال در E یک زیرفضای آفین از E را به زیر فضای آفینی‌از E با همان راستا بدل می‌کند ، پس این تعریف به انتخاب O بستگی ندارد .

۱۰.۷.۱۲- فرض می‌کنیم A_1 و A_2 به‌ترتیب دو فضای آفین وابسته به فضاهای برداری E_1 و E_2 روی هیأت K باشند . مبداءهای O_1 و O_2 را در A_1 و A_2 انتخاب می‌کنیم. چنانچه u یک‌گسترش A_1 در A_2 و v یک‌گسترش خطی E_1 در E_2 باشد ، گسترش u یک **گسترش‌آفین** A_1 **در** A_2 وگسترش v **گسترش خطی وابسته به** u گفته می‌شود هرگاه گسترش $\Phi_{o_1}^{-1}(P) \to \Phi_{o_2}^{-1}(u(P))$ فضای E_1 در E_2(یعنی گسترش $\Phi_{o_2}^{-1} \circ u \circ \Phi_{o_1}$) یک‌گسترش آفین و v گسترش‌خطی وابسته به‌آن باشد. هنگامی که یک‌گسترش آفین E_1 در E_2 را باانتقالهایی در E_1 و در E_2 ترکیب‌کنیم بازهم یک گسترش آفین بدست می‌آید وگسترش خطی وابسته بـه آن تغییر نمی‌کند (۴.۴.۱۲ و

۵.۴.۱۲). پس این مفاهیم نیز بستگی به انتخاب مبداء ندارند. در حالت ویژه به‌مفهوم تابع آفین روی A می‌رسیم.

۱۱.۷.۱۲- فرض می‌کنیم P_1 ، ... ، P_n نقاطی‌از فضای آفین A و λ_1 ، ... ، λ_n اسکالرهایی باشند به‌قسمی‌که داشته باشیم $\lambda_1+\cdots+\lambda_n \neq 0$. اگر نقطهٔ O را به‌عنوان مبداء در A انتخاب کنیم، نقطهٔ $P=(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)^{-1}(\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_nP_n)$ از فضای برداری A_o گرانیگاه P_1 ، ... ، P_n با ضریب‌های λ_1 ، ... ، λ_n نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر چنانچه قرار دهیم $x_i=\Phi_o^{-1}(P_i)$ و در فضای E عنصر x را گرانیگاه عنصرهای x_1 ، ... ، x_n با ضرایب λ_1 ، ... ، λ_n بگیریم داریم $P=\Phi_o(x)$.

اگر به‌جای مبداء O مبداء $O'=O+a$ را قرار دهیم x_i ها به $x_i'=x_i-a$ بدل می‌شوند (فرمول (۲) شمارهٔ ۷.۷.۱۲) و درنتیجه x به $x'=x-a$ بدل می‌گردد (۶.۵.۱۲). پس بنابر فرمول (۱) شمارهٔ ۷.۷.۱۲ داریم:

$$\Phi_{o'}(x')=\Phi_o(x'+a)=\Phi_o(x)=P$$

بنابراین مفهوم گرانیگاه در A بستگی به انتخاب مبداء ندارد این گرانیگاه را به صورت:

$$(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)^{-1}(\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_nP_n)$$

نشان می‌دهیم (بدون انتخاب مبداء).

۱۲.۷.۱۲- اگر $K=\mathbf{R}$ باشد، یک زیر مجموعهٔ A راکه به‌وسیلهٔ Φ_o از یک بخش کوژ E بدست‌آید **بخش کوژ** A می‌نامند. این تعریف‌بستگی به‌انتخاب مبداء ندارد. زیرا انتقال یک بخش کوژ از E را به یک بخش کوژ از E بدل می‌کند (۷.۶.۱۲).

۱۳.۷.۱۲- تعاریف‌وقضیه های‌شماره‌های ۱.۱۲ ، ۲.۱۲ ، ... و ۶.۱۲ را می‌توان بدون اشکال برای فضاهای آفین نیز بیان و برقرار نمود. ما انجام آنرا به عهده خواننده می‌گذاریم.

۱۴.۷.۱۲- فرض می‌کنیم b بردار ثابتی‌از E باشد. گسترش $P \to P+b$ فضای آفین A در A را درنظر می‌گیریم و در A مبداء O را انتخاب می‌کنیم. چنانچه قرار دهیم $\Phi_o^{-1}(P)=x$ خواهیم داشت $P=O+x$ ، پس:

$$P+b=(O+x)+b=O+(x+b)=\Phi_o(x+b)$$

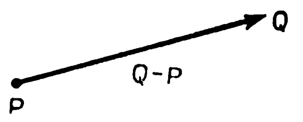
یعني:

$$\Phi_o^{-1}(P+b)=x+b$$

به عبارت‌دیگراگر به‌کمک Φ_0 فضاهای A و E را یکی بگیریم ، گسترش $P \to P+b$ به انتقال $x \to x+b$ بدل می‌گردد. به این علت گسترش $P \to P+b$ را در A انتقال به بردار b می‌نامند. هنگامی‌که A فضای معمولی باشد ، این مطلب با مفهوم عادی انتقال سازگار است.

۱۵.۷.۱۲- چنانچه P و Q دو نقطه از A باشند تنها بردار x ، متعلق به E ، راکه در برابری $P+x=Q$ صدق می‌کند با $Q-P$ نمایش می‌دهند. بنابرشمارهٔ ۱٤.۷.۱۲ اگر مبداء O را در A انتخاب‌کنیم و A_0 را با E یکی بگیریم ، $Q-P$ همان‌کاهش P از Q در فضای برداری A_0 است. از اینجا دستورهای محاسبهٔ زیر بدست می‌آید :

$$Q-P=-(P-Q) \quad , \quad R-P=(R-Q)+(Q-P)$$



شکل ٤۳

۱٦.۷.۱۲- **آراینده‌ها** - هنگامی‌که در A یک مبداء O انتخاب شده باشد هرپایهٔ E را پایهٔ A نیز می‌نامند. فرض می‌کنیم $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ چنین پایه‌ای باشد (بعد A را با پایان می‌گیریم). دراین صورت برای هرنقطه P متعلق به A تنها یک دستگاه اسکالر $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ وجود دارد به قسمی‌که :

$$P=O+\xi_1 e_1+\cdots+\xi_n e_n$$

ξ_1 ، … ، ξ_n را **آراینده‌های نقطهٔ P نسبت به مبداء O و پایهٔ** $(e_1, \ldots, e_n)$ می‌نامند. اگر O' مبداء دیگری باشد و قرار دهیم $O-O'=\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_n e_n$ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} P&=O'+(O-O')+\xi_1 e_1+\cdots+\xi_n e_n \\ &=O'+(\alpha_1+\xi_1)e_1+\cdots+(\alpha_n+\xi_n)e_n \end{aligned}$$

بنابراین آراینده‌های P نسبت به مبداء O' و پایهٔ $(e_1, \ldots, e_n)$ عبارتند از :

$$\eta_1=\alpha_1+\xi_1 \,, \ldots , \eta_n=\alpha_n+\xi_n$$

باستفاده از فرمولهای تغییر پایه (شمارهٔ ۹.۸.۵) دیده می‌شود که آرایندههای P نسبت به O' و یک پایهٔ دیگر $(e'_1, \dots, e'_n)$ توابع آفینی از ξ_1 ، ... ، ξ_n می‌باشند.

۱۲.۷.۱۷- فرض می کنیم A و A' دو فضای آفین و u یک گسترش A در A' باشد. چنانچه در هریک ار فضاهای آفین A و A' یک مبداء و یک پایه انتخاب کنیم و M را نقطه‌ای از A بگیریم می‌توان آرایندههای نقطهٔ $u(M)$ از A' را به‌صورت توابعی از آرایندههای M نوشت. برای اینکه گسترش u آفین باشد بایاوبسنده است که این توابع آفین باشند (شماره‌های ۱۲.٤.۱۰ و ۱۲.٤.۱۱). بدین ترتیب به آسانی می‌توان دید که در صفحه یا فضای معمولی، انتقال ها، همسانی ها و آفینیته ها (تبدیلهای خطی) گسترش هایی آفین می‌باشند.

فصل سیزدهم

گروه‌ها (متمم فصل سوم)

درفصل سوم برخی ازمفاهیم گروه، تنها برای گروه‌های جابجایی مطالعه شد. دراین فصل این مفاهیم را به گروه‌های دلخواه تعمیم می‌دهیم.

۱۳. ۱- زیرگروه‌های ممتاز

۱.۱.۱۳ - **قضیه - فرض می‌کنیم G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد. شرطهای زیر هم‌ارزند:**

(I) — **برای هر x متعلق به G** ، $x^{-1}Hx \subset H$

(II) — **برای هر x متعلق به G** ، $x^{-1}Hx = H$

(III) — **برای هر x متعلق به G** ، $Hx = xH$

اثبات - روشن است که شرایط (II) و (III) هم‌ارزند و ازهریک از آنها شرط (I) نتیجه می‌شود. فرض‌می‌کنیم شرط (I) برقرار باشد. برای هر x متعلق به G داریم $xHx^{-1} \subset H$. بنابراین:

$$H = (x^{-1}x)H(x^{-1}x) = x^{-1}(xHx^{-1})x \subset x^{-1}Hx$$

از بستگی بالا و $x^{-1}Hx \subset H$ نتیجه می‌شود $H = x^{-1}Hx$.

۲.۱.۱۳- هرگاه شرایط قضیه ۱.۱.۱۳ برقرار باشد H را یک **زیرگروه ممتاز یا نرمال** G می‌نامند.

اگر H یک زیرگروه ممتاز G باشد کلاسهای چپ وراست نسبت به H یکی می‌شوند. پس می‌توان تنها **از کلاس نسبت به** H نام برد.

۳.۱.۱۳- ازشرط (III) شمارهٔ ۱.۱.۱۳ نتیجه می‌شود که اگر G جابجایی باشد، هرزیرگروه G ممتاز است.

درشماره‌های ۳.۲.۱۳ و ۴.۲.۱۳ و ۵.۲.۱۳ مثالهای دیگری از زیر گروه‌های ممتاز دیده خواهد شد.

۴.۱.۱۳- گروه G وزیرگروه ممتاز H ازآن‌داده شده‌است. در G بستگی هم‌ارزی R راکه با $xy^{-1}\in H$ معین شده‌است درنظر می‌گیریم. چنانچه $E=G/R$ مجموعهٔ خارج قسمت G بر R باشد، میخواهیم با تعمیم شماره ۱.۴.۳، قانون ترکیبی در E تعریف کنیم.

فرض می‌کنیم u و v دو عنصردلخواه از E باشند. یک نماینده x برای u ویک نماینده y برای v برمی‌گزینیم وثابت می‌کنیم که کلاس عنصر xy به نماینده‌های برگزیده شده در u و v بستگی ندارد و تنها به u و v وابسته‌است. دراین‌صورت اگر کلاس عنصر xy را با uv نشان دهیم، قانون ترکیبی روی E به‌دست می‌آید.

فرض می‌کنیم x_1 و y_1 به ترتیب نماینده‌های دیگری از u و v باشند. داریم $x_1=xs$ و $y_1=yt$ که درآن s و t متعلق به H می‌باشند. دراین‌صورت بستگی $(xy)^{-1}(x_1 y_1)\in H$ برقرار است، زیرا داریم:

$$(xy)^{-1}(x_1y_1)=y^{-1}x^{-1}xsyt=y^{-1}syt$$

وچون $y^{-1}sy\in H$ (زیرا H یک زیرگروه ممتاز G است) و $t\in H$ است پس:

$$y^{-1}syt\in H$$

۵.۱.۱۳- **قضیه**:

(I) – E باقانون ترکیب بالا یک‌گروه است.

(II) – گسترش کانونیک G در $E=G/R$ یک‌هومومرفیسم است.

اثبات این قضیه مانند اثبات قضیه ۲.۴.۳ می‌باشد.

۶.۱.۱۳- گروه E را که به روش بالا تعریف شد **گروه خارج قسمت** G **بر** H می‌نامند و آنرا به‌صورت G/H نمایش‌می‌دهند. به‌این ترتیب دیده می‌شود که وقتی G جابجایی است همان تعریف شمارهٔ ۳.۴.۳ به‌دست می‌آید.

۱۳.۲- تجزیهٔ کانونیک یک هومرفیسم

۱.۲.۱۳ - قضیه- فرض‌می‌کنیم G و G' دوگروه ، f یک‌هومومرفیسم G در G' و N هستهٔ f باشد. دراینصورت N یک‌زیرگروه ممتاز G است.

اثبات- می‌دانیم که N یک‌زیرگروه G است(۴.۵.۲). فرض می‌کنیم x متعلق به N و y متعلق به G باشد و ثابت می‌کنیم که $y^{-1}xy \in N$. اگر e' عنصر بی‌اثر G' باشد داریم :

$$f(y^{-1}xy) = f(y)^{-1} f(x) f(y) = f(y)^{-1} e' f(y) = e'$$

بنابراین $y^{-1}xy \in N$.

۲.۲.۱۳ - با توجه به فرض های شمارهٔ ۱.۲.۱۳ می‌خواهیم تجزیه کانونیک f را بیابیم . بستگی‌هم‌ارزی‌که در G باید درنظرگرفت بستگی $f(x) = f(y)$ یعنی بستگی $x \in yN$ می‌باشد (شماره‌های ۱.۱۲.۱ و ۷.۵.۲) . بنابراین‌کلاسهای هم‌ارزی همان کلاسهای G نسبت به N هستند (۲.۱.۱۳) . درنتیجه تجزیهٔ کانونیک f به‌صورت‌زیر است :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & G' \\ G/N \arrow[r, "h"'] & f(G) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

که درآن s گسترش کانونیک G روی گروه خارج قسمت G/N (شمارهٔ ۶.۱.۱۳) ، i گسترش همانی‌گروه $f(G)$ در G' و h یک ایزومرفیسم گروه G/N روی‌گروه $f(G)$ می‌باشد. ایزومرفیسم بودن h مانند شمارهٔ ۱.۶.۳ به‌آسانی ثابت می‌شود.

۳.۲.۱۳- **مثال -** فضای برداری E راکه دارای بعد باپایان ومخالف باصفر است روی هیأت K درنظر می‌گیریم ، وفرض‌می‌کنیم G گروه خطی E باشد (۳.۴.۸) . اگر K^* مجموعهٔ عنصرهای غیرصفر K باشد ، K^* برای قانون ضرب یک‌گروه است . برای هر u متعلق به G قرار می‌دهیم $f(u) = \det u$. بنابرشمارهٔ ۵.۵.۱۰ عنصر $f(u)$ متعلق به K^* است واز ۶.۵.۱۰ نتیجه‌می‌شود که f یک‌هومومرفیسم G در K^* می‌باشد.

به‌علاوه داریم $f(G)=K^*$. زیرا اگرعنصر λ متعلق به K^* وپایهٔ $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ از E را انتخاب کنیم ، چنانچه عنصر u متعلق به $\mathscr{L}(E,E)$ باشد به‌طوری که داشته باشیم :

$$u(e_1)=e_1 \ , \ u(e_2)=e_2 \ , \ \ldots \ , \ u(e_{n-1})=e_{n-1} \ , \ u(e_n)=\lambda e_n$$

بنابه فرمول ٤ شمارهٔ ۳.۵.۱۰ خواهیم داشت $\det u=\lambda$ پس $u\in G$ و $\lambda\in f(G)$.

چنانچه هستهٔ f را G' بنامیم ، G' مجموعهٔ عنصرهایی است از $\mathscr{L}(E,E)$ که دترمینانشان برابر با یک است . پس بنابرشمارهٔ ۱.۲.۱۳ G' یک زیرگروه ممتاز G می‌باشد . این زیرگروه ممتاز را **گروه خاص‌خطی** E می‌نامند و با $SL(E)$ نشان می‌دهند . از ۲.۲.۱۳ نتیجه می‌شود که گروه خارج قسمت G/G' با گروه K^* ایزومرف است .

۴.۲.۱۳- **مثال** - فرض می‌کنیم E یک‌فضای برداری ، G گروه آفین E (شمارهٔ ۹.۴.۱۲) و G' گروه خطی E باشد. اگر برای هر u متعلق به G گسترش خطی‌وابسته به u (۴.۴.۱۲) را با $f(u)$ نشان دهیم گسترش f یک هومرفیسم G در G' است (۹.۴.۱۲) . روشن است که اگر $u\in G'$ باشد $f(u)=u$ و بنابراین $f(G)=G'$ است. از تعریف ۴.۴.۱۲ به‌آسانی‌نتیجه می‌شود که N (هستهٔ f) مجموعهٔ انتقالهای E می‌باشد . N یک‌زیرگروه ممتاز G است(۱.۲.۱۳) و بنابر ۲.۲.۱۳ گروه خارج قسمت G/N با G' (گروه خطی E) ایزومرف می‌باشد.

۳.۱۳- اتومرفیسمهای یک گروه

۱.۳.۱۳ - فرض می‌کنیم G یک گروه باشد . یادآوری می‌کنیم که هرایزومرفیسم G روی G را یک‌اتومرفیسم G می‌نامند(۷.۶.۲) . آشکاراست که ترکیب‌دواتومرفیسم G اتومرفیسمی از G می‌باشد وگسترش وارون یک اتومرفیسم نیز یک اتومرفیسم است. چون گسترش همانی G نیز اتومرفیسمی‌از G می‌باشد پس مجموعهٔ اتومرفیسمهای G زیر گروهی‌است ازگروه تبدیلهای G ، که آنرا **گروه اتومرفیسمهای** G می‌نامیم .

۲.۳.۱۳ - قضیه- فرض می‌کنیم G یک گروه و A گروه اتومرفیسمهای آن باشد. برای هر x متعلق به G گسترش $y \to xyx^{-1}$ گروه G در G را با α_x نشان می‌دهیم.

(I) — برای هر x متعلق به G گسترش α_x یک اتومرفیسم G است.

(II) — گسترش $x \to \alpha_x$ یک هومومرفیسم G در A است.

اثبات: الف- اگر x متعلق به G باشد α_x یک هومومرفیسم G در G می‌باشد. زیرا برای هر y و هر y' در G داریم:

$$\alpha_x(yy')=xyy'x^{-1}=xyx^{-1}xy'x^{-1}=\alpha_x(y)\alpha_x(y')$$

ب- اگر x و x' عنصرهایی از G باشند داریم $\alpha_{xx'} = \alpha_x \circ \alpha_{x'}$. زیرا به‌ازای هر y متعلق به G می‌توان نوشت:

$$(\alpha_x \circ \alpha_{x'})(y)=\alpha_x(\alpha_{x'}(y))=x(x'yx'^{-1})x^{-1}$$
$$=(xx')y(x'^{-1}x^{-1})=(xx')y(xx')^{-1}=\alpha_{xx'}(y)$$

پ- به ویژه چنانچه عنصر بی‌اثر G را e بنامیم داریم:

$$\alpha_x \circ \alpha_{x^{-1}}=\alpha_{x^{-1}} \circ \alpha_x=\alpha_e=\mathrm{id}_G$$

بنابراین α_x یک گسترش دوسویی G روی G می‌باشد (۰.۸.۱) . با استفاده ازاین مطلب حکم (I) را از (الف) وحکم (II) را از (ب) نتیجه می گیریم .

۳.۳.۱۳- هراتومرفیسم G را که به‌صورت α_x $(x\in G)$ باشد یک **اتومرفیسم درونی** G می‌نامند. بنابر ۲.۳.۱۳ و ۴.۵.۳ مجموعهٔ اتومرفیسمهای درونی G زیرگروهی است از A .

۴.۳.۱۳ - فرض می کنیم G جابجایی باشد. دراین‌صورت اگر x و y متعلق به G باشند داریم $xyx^{-1}=y$. بنابراین دیده می‌شود که گسترش همانی تنها اتومرفیسم درونی یک گروه جابجایی است. باوجود این یک گروه جابجایی می‌تواند دارای اتومرفیسمهای دیگری متمایز ازگسترش همانی باشد (مثلاً گسترش $x \to -x$ یک اتومرفیسم گروه جمعی $\mathbf{R}$ است) .

این مطلب ثابت می کند که معمولاً گروه اتومرفیسمهای درونی یک گروه G از گروه اتومرفیسمهای G متمایز است.

۵.۳.۱۳ - فرض های ۲.۳.۱۳ را در نظر می گیریم. میخواهیم N ، هستهٔ هومومرفیسم $x \to \alpha_x$ را بیابیم . اگر x متعلق به G باشد داریم :

$$x \in N \iff \alpha_x = id_G$$
$$\iff \forall x \in G \ , \ xyx^{-1} = y$$
$$\iff \forall x \in G \ , \ xy = yx$$

پس N مجموعهٔ عنصرهایی است از G که با همهٔ عنصرهای G گردش پذیرند . N را **مرکز** G می‌نامند. بنابرشمارهٔ ۱.۲.۱۳ ، N یک زیرگروه ممتاز G است و بنابر شمارهٔ ۲.۲.۱۳ ، گروه خارج‌قسمت G/N با گروه اتومرفیسمهای درونی G ایزومرف می‌باشد.

۶.۳.۱۳ - **قضیه - فرض می کنیم G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد. برای اینکه H ممتاز باشد بایاو بسنده است که H بوسیله هر اتومرفیسم درونی G پایا (تغییر ناپذیر) باشد.**

اثبات - داریم :

$$H \text{ ممتاز است } \iff (xHx^{-1} = H \ ، \ \forall x \in G)$$
$$\iff (\alpha_x(H) = H \ ، \ \forall x \in G)$$

۷.۳.۱۳ - به علت وجود قضیهٔ ۶.۳.۱۳ ، گاهی زیرگروه‌های ممتاز G را **زیرگروه‌های پایای** G نیز می‌نامند.

فصل چهاردهم

تحویل ماتریسها

فرض می‌کنیم E یک‌فضای برداری با بعد باپایان و u یک‌گسترش خطی E در E باشد. هدف ما دراین‌فصل‌بررسی ساختمان u است. همانطوریکه خواهیم دید درحالت‌های بسیاری u ترکیبی ساده از **همسانی‌ها** می‌باشد . علاوه براینکه نتایج این فصل کاربرد هندسی دارد ، برای مطالعه معادلات دیفرانسیل نیز مفید است.

۱۴. ۱ـ مقادیر ویژه وبردارهای ویژه

فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی K و u یک گسترش خطی E در E باشد .

۱.۱.۱۴ - بردار x متعلق‌به E را **بردار ویژه** گسترش u می‌نامیم‌هرگاه اسکالری مانند λ وجود داشته باشد به قسمی که داشته باشیم $u(x)=\lambda x$.

۲.۱.۱۴ - بردار 0 بردار ویژهٔ u است. دراین حالت اسکالر λ را می‌توان به‌طور دلخواه برگزید . ولی اگر x یک بردار ویژهٔ غیر صفر باشد اسکالر λ به روش یکتا بوسیله x معین می‌شود. زیرا اگر داشته باشیم $u(x)=\lambda x$ و $u(x)=\lambda' x$ خواهیم داشت $(\lambda-\lambda')x=0$. چون بردار x صفر نیست بنابر ۱۴.۱.۸ داریم $\lambda-\lambda'=0$.

۳.۱.۱۴ - اسکالر λ را **مقدار ویژهٔ** گسترش u می‌گوییم هرگاه برداری غیرصفر مانند x یافت شود به‌طوری‌که داشته باشیم $u(x)=\lambda x$ (اگر فرض x مخالف با صفر را منظور نکنیم هراسکالری‌مقدار ویژه خواهد بود) .

۴.۱.۱۴ - بردار ویژه دلخواه وغیر صفر x را درنظر می‌گیریم . همانطوری‌که در بالا دیده شد اسکالر λ به قسمی‌که $u(x)=\lambda x$ باشد ، به‌وسیلهٔ x به روش یکتا معین می‌شود . البته λ یک مقدار ویژه است . λ را **مقدار ویژهٔ وابسته به** x می‌گویند .

۵.۱.۱۴ - اسکالر دلخواه λ را در نظر می‌گیریم . مجموعهٔ E_λ از بردارهای

x متعلق به E به‌قسمی که $u(x)=\lambda x$ باشد یک زیرفضای برداری از E است (زیرا E_λ هستهٔ گسترش $\lambda-u$ است) . E_λ را **زیرفضای ویژهٔ u وابسته به λ** و هرعنصر E_λ را **یک بردار ویژهٔ وابسته به λ** می گویند. هنگامی که می گوییم λ یک مقدار ویژه است به‌این معنی است که ، $E_\lambda \neq \left\{ ۰ \right\}$ می‌باشد .

۶.۱.۱۴ - قضیه - فرض می کنیم $\lambda_۱$ ، $\lambda_۲$ ، $\cdots$ ، λ_p اسکالرهایی دو به دو متمایز و F برابر با $E_{\lambda_۱}+E_{\lambda_۲}+\cdots+E_{\lambda_p}$ باشد . دراینصورت F حاصل‌جمع مستقیم $E_{\lambda_۱}$ ، $E_{\lambda_۲}$ ، $\cdots$ و E_{λ_p} است.

اثبات- قضیه برای $p=۱$ آشکار است . فرض می کنیم که آنرا درحالت $p-۱$ اسکالر ثابت کرده باشیم . اگر x متعلق به $E_{\lambda_۱}\bigcap(E_{\lambda_۲}+\cdots+E_{\lambda_p})$ باشد باید ثابت کنیم که $x=۰$ است . اگر این مطلب را برای اندیسهای ۲ ، ۳ ، $\cdots$ و p ثابت کنیم (شرط (I) شمارهٔ ۶.۵.۸) ، قضیه ثابت شده است.

از $x\in E_{\lambda_۲}+\cdots+E_{\lambda_p}$ نتیجه می‌شود $x=x_۲+\cdots+x_p$ که درآن $x_۲\in E_{\lambda_۲}$ ، ... ، $x_p\in E_{\lambda_p}$. بنابراین :

$$u(x)=\lambda_۲x_۲+\cdots+\lambda_px_p$$

وچون $x\in E_{\lambda_۱}$ پس :

$$u(x)=\lambda_۱x=\lambda_۱(x_۲+\cdots+x_p)$$

بنابراین :

$$۰=\lambda_۲x_۲+\cdots+\lambda_px_p-\lambda_۱(x_۲+\cdots+x_p)$$
$$=(\lambda_۲-\lambda_۱)x_۲+\cdots+(\lambda_p-\lambda_۱)x_p$$

بنا به فرض بازگشت $E_{\lambda_۲}+\cdots+E_{\lambda_p}$ حاصل‌جمع مستقیم $E_{\lambda_۲}$ ، $\cdots$ ، E_{λ_p} است . پس بنابرشرط (III) شمارهٔ ۶.۵.۸ از برابری اخیر نتیجه می‌شود :

$$(\lambda_۲-\lambda_۱)x_۲=\cdots=(\lambda_p-\lambda_۱)x_p=۰$$

چون $\lambda_۱$ متمایز از $\lambda_۲$ ، $\cdots$ ، λ_p می‌باشد ، از برابری‌های بالا و ۱۴.۱.۸ خواهیم داشت :

$$x_۲=\cdots=x_p=۰$$

بنابراین $x=۰$ است.

۷.۱.۱۴- **مثال-** فرض می‌کنیم E یک فضای برداری ، $(e_1 , e_2 , \ldots , e_n)$ یک پایهٔ E و μ_1 ، μ_2 ، $\ldots$ ، μ_n اسکالرهایی دلخواه باشند . عنصر u متعلق به $\mathscr{L}(E , E)$ را به قسمی‌که $u(e_1)=\mu_1 e_1$ ، $\ldots$ ، $u(e_n)=\mu_n e_n$ باشد درنظر می‌گیریم (۶.۸.۸) . چنانچه λ یک اسکالر باشد ، می‌خواهیم زیرفضای E_λ را پیدا کنیم . E_λ مجموعه x هایی است که دربرابری $u(x)=\lambda x$ صدق می‌کنند. پس اگر $x=\xi_1 e_1+\cdots+\xi_n e_n$ باشد داریم :

$$\xi_1\mu_1 e_1+\cdots+\xi_n\mu_n e_n=\lambda\xi_1 e_1+\cdots+\lambda\xi_n e_n$$

و از آنجا

$$(\lambda-\mu_1)\xi_1=\cdots=(\lambda-\mu_n)\xi_n=0$$

می‌بینیم که اگر λ متمایز از μ_1 ، $\ldots$ و μ_n باشد ، تنها برداری که دراین شرایط صدق می‌کند بردار صفر است. بنابراین دراین‌حالت داریم $E_\lambda=\{0\}$. اگر $\lambda=\mu_i$ باشد، دیده می‌شود که E_λ مجموعهٔ ترکیبهای خطی e_j هایی است که برای آنها $\mu_j=\mu_i$. پس **مقادیر ویژهٔ u همان μ_i ها هستند.** به‌علاوه می‌بینیم که E حاصل‌جمع E_{μ_i} ها می‌باشد و با توجه به ۶.۱.۱۴ به سادگی می‌توان دریافت که E حاصل‌جمع مستقیم E_{μ_i} های متمایز است (۸.۸.۸) .

گسترشهای خطی‌ای که دراین‌مثال‌درنظر گرفتیم به‌طور حسی قابل درک‌اند. درعمل خواهیم دید (شمارهٔ ۳.۴.۱۴) که بسیاری ازگسترشهای خطی ازاین نوعند.

۸.۱.۱۴- **حالت‌ماتریسها-** فرض‌می‌کنیم M یک‌ماتریس n سطری و n ستونی با عنصرهای متعلق به $\mathbf{K}$ باشد . مقدارویژه ، زیرفضای ویژه و بردار ویژهٔ گسترش خطی وابسته به M (شمارهٔ ۸.۲.۹) را به ترتیب‌مقدارویژه ، زیرفضای‌ویژه و بردار ویژه ماتریس M می‌نامند . **پس مقادیر ویژه M اسکالر ، بردارهای ویژه M عنصرهایی از $\mathbf{K}^n$ و زیر فضاهای ویژه M زیر فضاهای برداری‌ای از $\mathbf{K}^n$ می‌باشند.**

۲.۱۴- چندجمله‌ای مفسر

۱.۲.۱۴- ماتریس $M=[\alpha_{ij}]$ از رسته (n , n) باعنصرهای‌متعلق به $\mathbf{K}$ داده شده است. مجهول X را اختیارمی‌کنیم و هیات $\mathbf{K}$ را به‌صورت هیأتی غوطه‌ور در $\mathbf{K}(X)$ درنظر می‌گیریم ، و ماتریس $M-X\cdot I_n$ را تشکیل می‌دهیم:

$$M-X\cdot I_n=\begin{bmatrix} a_{11}-X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-X & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-X \end{bmatrix}$$

(عنصرهای این‌ماتریس به $\mathbf{K}(X)$ وبه‌ویژه به $\mathbf{K}[X]$ متعلق‌اند) . عنصر واقع درسطر i ام وستون j ام برابر با $a_{ij}-\delta_{ij}X$ می‌باشد که‌درآن δ_{ij} نشان کرونکراست.

۲.۲.۱۴ - اگر G_n گروه تبدیلهای مجموعهٔ $\{n\ ,\ \ldots\ ,\ ۲\ ,\ ۱\}$ باشد داریم :

$$(۱)\quad \det(M-X\cdot I_n)=\sum_{\sigma\in G_n}\varepsilon_\sigma(a_{\sigma(1),1}-\delta_{\sigma(1),1}X)\cdots(a_{\sigma(n),n}-\delta_{\sigma(n),n}X)$$

دیده می‌شود که $\det(M-X\cdot I_n)$ عنصری است از $\mathbf{K}[X]$. تعریف زیر را که کاربرد آن درشمارهٔ ۱.۳.۱۴ آشکار خواهد شد بیان می‌کنیم :

۳.۲.۱۴ - تعریف - $\det(M-X\cdot I_n)$ را چندجمله‌ای مفسر ماتریس M می‌نامند.

اگر $P(X)$ این‌چند جمله‌ای و λ عنصری از $\mathbf{K}$ باشد خواهیم داشت :

$$P(\lambda)=\det(M-\lambda\cdot I_n)$$

۴.۲.۱۴ - قضیه - داریم :

$$(۲)\quad \det(M-X\cdot I_n)=(-1)^nX^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})X^{n-1}+\cdots+\det M$$

اثبات - درحاصل جمع (۱)، جمله وابسته به $\sigma=e$ برابراست با :

$$(a_{11}-X)(a_{22}-X)\cdots(a_{nn}-X)=(-1)^nX^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+\cdots+a_{nn})X^{n-1}+\cdots$$

دراین برابری‌جمله هائیکه نوشته نشده‌اند درجه‌شان از $n-۲$ کمتر است. اکنون‌جمله‌ای ازمجموع (۱) ، وابسته به‌یک عنصر σ از G_n را درنظر میگیریم . فرض می‌کنیم σ

متمایز از e باشد. پس‌دست‌کم برای یک‌اندیس i داریم $\sigma(i) \neq i$ ، وچون σ دوسویی است این نابرابری عملاً برای دواندیس i برقرار است. ازطرف دیگر برای $i \neq j$ داریم $\delta_{ij} = ۰$. درنتیجه‌دوسازه‌ازحاصلضرب $(a_{\sigma(n),n} - \delta_{\sigma(n),n}X) \cdots (a_{\sigma(1),1} - \delta_{\sigma(1),1}X)$ دارای X نیست یعنی این حاصلضرب یک چندجمله‌ای است که درجه‌اش از $n-۲$ کمتر ویابرابر با $n-۲$ است.

این عمل درستی دوجملهٔ اول بسط (۲) را ثابت می‌کند. جمله ثابت چند جمله‌ای مفسر را می‌توان مانند هرچند جمله‌ای دیگر ، باقراردادن صفر به‌جای مجهول X به دست آورد . بنابراین جمله ثابت برابر است با $\det M$.

۱۴ . ۲ . ۵-قضیه-چندجمله‌ای‌های‌مفسر دوماتریس‌همانندباهم برابرند.

اثبات- فرض‌می‌کنیم M ماتریسی‌دلخواه از رستهٔ (n,n) و S ماتریسی‌وارون‌پذیر از رستهٔ (n , n) باشد. داریم :

$$SMS^{-1} - X \cdot I_n = S(M - X \cdot I_n)S^{-1}$$

بنابراین: $\det(SMS^{-1} - X \cdot I_n) = \det(M - X \cdot I_n)$ زیرا دترمینان‌های دو ماتریس همانند باهم برابرند (۱۰ . ۶ . ۱۰) .

۱۴ . ۲ . ۶ - **تبصره**- فرض می‌کنیم $M = [a_{ij}]$ ماتریسی از رسته (n , n) باشد . اسکالر $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ را **اثر** ماتریس M می‌نامند و به صورت trM نشان‌می‌دهند. با تقریب یک علامت اثر یک‌ماتریس همان ضریب X^{n-1} درچند جمله‌ای مفسر M است . بنابراین از قضیهٔ ۱۴ . ۲ . ۵ نتیجه می‌شود که اثر دوماتریس همانند یکی است.

۱۴ . ۲ . ۷ -قضیه-فرض می‌کنیم $M = [a_{ij}]$ یک ماتریس سه بری از رستهٔ (n , n) باشد. چندجمله‌ای مفسر M برابر است با :

$$(a_{11} - X)(a_{22} - X) \cdots (a_{nn} - X)$$

اثبات این قضیه از شماره‌های ۱۰ . ۷ . ۳ و ۱۰ . ۷ . ۴ نتیجه می‌شود .

۱۴ . ۲ . ۸ - **حالت‌گسترشهای خطی** - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی $(n > ۰)$ روی‌هیات K و u یک عنصراز $\mathscr{L}(E , E)$ باشد. ماتریسهای u

نسبت به پایه‌های مختلف E همانندند (شمارهٔ ۲.۱۰.۹)، و بنابراین همگی دارای یک چند جمله‌ای مفسر و یک اثر می‌باشند. این چند جمله‌ای و این اسکالر را **چند جمله‌ای مفسر u و اثر u** می‌نامند. اثر u را بصورت tru می‌نویسند. پس چند جمله‌ای مفسر u به‌صورت:

$$P(X)=(-1)^n X^n+(-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}\,u\,X^{n-1}+\cdots+\det u \qquad (۲)$$

نوشته می‌شود.

۹.۲.۱۴ - اگر λ متعلق به $\mathbf{K}$ و I گسترش همانی E باشد داریم:

$$P(\lambda)=\det(u-\lambda I)$$

این مطلب از شمارهٔ ۳.۲.۱۴ نتیجه می‌شود.

۱۴. ۳- بستگی‌های بین چند جمله‌ای مفسر و مقادیر ویژه

۱.۳.۱۴ قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری با بعد باپایان روی $\mathbf{K}$، u یک گسترش خطی E در E و P(X) چند جمله‌ای مفسر u باشد. برای اینکه عنصر λ متعلق به $\mathbf{K}$ یک مقدار ویژه باشد باید و بسنده است که داشته باشیم $P(\lambda)=0$.

اثبات قضیه از هم‌ارزی‌های پی‌درپی زیر نتیجه می‌شود:

λ مقدار ویژهٔ u است $\iff$ هستهٔ $u-\lambda\cdot I$ مخالف باصفر است (۵.۱.۱۴).

$\iff$ $u-\lambda\cdot I$ وارون‌پذیر نیست (۴.۱۱.۸).

$\iff$ $\det(u-\lambda\cdot I)=0$، (شمارهٔ ۵.۵.۱۰).

$\iff$ $P(\lambda)=0$، (۹.۲.۱۴).

۲.۳.۱۴ - نتیجه - اگر M ماتریسی از ردهٔ (n , n) باشد، مقادیر ویژهٔ M ریشه‌های چند جمله‌ای مفسر آن هستند.

این نتیجه بیان ماتریسی ۱.۳.۱۴ است.

۳.۳.۱۴ - نتیجه - چنانچه $M=[a_{ij}]$ یک ماتریس سه بری باشد مقادیر ویژهٔ M عنصرهای قطر اصلی آن هستند.

این مطلب از ۲.۳.۱۴ و ۷.۲.۱۴ نتیجه می‌شود.

۱۴. ٤- حالتی که هیأت پایه هیأت شمارهای مختلط است

۱۴. ٤. ۱ - قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی روی C $(n>0)$ و u یک گسترش خطی E در E باشد.

(I) — u دست کم دارای یک مقدار ویژه است.

(II) — چنانچه λ_1 ، λ_2 ، $\cdots$ ، λ_n ریشه‌های چند جمله‌ای مفسر u باشند (هر ریشه به شمارهٔ مرتبهٔ چندگانگی‌اش نوشته شده است)، داریم:

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\operatorname{tr} u \qquad , \qquad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det u$$

اثبات- فرض می‌کنیم $P(X)$ چندجمله‌ای مفسر u باشد. $P(X)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ n است (۱۴. ۲. ٤). بنابر قضیه دالامبر - گوس (شمارهٔ ۵. ۱۱. ۱)، $P(X)$ دست کم دارای یک ریشه λ است، و بنابر ۱۴. ۳. ۱ اسکالر λ یک مقدار ویژه u می‌باشد. پس حکم (I) ثابت است. حکم (II) را از فرمول (۲) شمارهٔ ۱۴. ۲. ۸ و از بستگی‌های بین ضرایب و ریشه‌های یک عنصر $C[X]$ نتیجه می‌گیریم (شمارهٔ ۵. ۱۱. ۷).

۱۴. ٤. ۲ - نتیجه - ماتریس مختلط M از رستهٔ $(n\,,\,n)$ داده شده است:

(I) — M دست کم دارای یک مقدار ویژه است.

(II) — چنانچه λ_1 ، λ_2 ، $\cdots$ ، λ_n ریشه‌های چند جمله‌ای مفسر M باشند (هر ریشه به شمارهٔ مرتبهٔ چندگانگی‌اش نوشته شده است)، داریم:

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\operatorname{tr} M \qquad , \qquad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det M$$

این نتیجه بیان ماتریسی ۱۴. ٤. ۱ است.

۱۴. ٤. ۳ - قضیه - فضای برداری n بعدی $(n>0)$، E روی C داده شده است. فرض می‌کنیم u یک گسترش خطی E در E ، $P(X)$ چندجمله‌ای مفسر آن و λ_1 ، λ_2 ، $\ldots$ ، λ_n ریشه‌های $P(X)$ باشند که بترتیب دلخواهی نوشته‌شده‌اند. اگر تمام این ریشه‌ها ساده باشند پایه‌ای مانند $(e_1, e_2\,,\,\ldots\,,\,e_n)$ از E وجود دارد به‌قسمی که:

$$u(e_1)=\lambda_1 e_1 \;,\; u(e_2)=\lambda_2 e_2\,,\,\ldots\,,\,u(e_n)=\lambda_n e_n$$

اثبات - هریک از λ_i ها یک مقدار ویژه است (۱.۳.۱٤) . فرض می‌کنیم e_i یک بردار ویژه غیر صفر وابسته به λ_i باشد . بنابر ٦.١.١٤ بردار e_1 متعلق به $Ce_2 + Ce_3 + \cdots + Ce_n$ نیست. به‌بیان‌دیگر e_1 ترکیب‌خطی e_2 ، e_3 ، ... ، e_n نمی‌باشد . با استدلالی مشابه برای هریک از e_i ها دیده می‌شود که e_1 ، ... ، e_n نابستگی خطی دارند و بنابراین پایه‌ای از E را تشکیل می‌دهند (شمارهٔ ۸.۱۰.۸ شرط II) .

٤.٤.١٤ - چندجمله‌ای مفسر یک عنصر u متعلق به $\mathscr{L}(E, E)$ «معمولاً» دارای ریشهٔ چندگانه نیست . بنابراین قضیه ۳.٤.١٤ نشان می‌دهد که اگر هیأت پایه هیأت C باشد یک گسترش خطی E در E معمولاً از نوع بسیار ساده‌ای است که درمثال ۷.۱.۱٤ دیده شد.

٥.٤.١٤ - اگر چندجمله‌ای مفسر u دارای ریشه‌های چندگانه هم باشد ممکن‌است که پایه‌ای از E مرکب از بردارهای‌ویژه u وجود داشته باشد [مثلاً چنانچه u گسترش همانی E باشد هرپایه E از بردارهای ویژه تشکیل شده است ولی چند جمله‌ای مفسر u برابربا $(1-X)^n$ است که درنتیجه تنها ریشه‌آن یک‌است که‌ازمرتبه n می‌باشد] . باوجود این عنصرهایی از $\mathscr{L}(E, E)$ وجود دارند که برای آنها نمی‌توان پایه‌ای در E ، تشکیل شده از بردارهای ویژه بدست آورد . برای اینگونه عنصرها می‌توان قضیه شمارهٔ ۷.٤.١٤ را به‌کار برد .

٦.٤.١٤ - **نتیجه - فرض می‌کنیم M ماتریسی مختلط از رستهٔ (n , n) باشد. اگر چندجمله‌ای مفسر M تنها دارای ریشه‌های ساده λ_1 ، ... ، λ_n باشد ، M باماتریس قطری زیر همانند است :**

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

زیرا این مطلب با توجه به شمارهٔ ۲.۱۰.۹ بیان دیگری ازقضیهٔ ۳.٤.١٤ می‌باشد.

۷.۴.۱۴- قضیه- فضای برداری n بعدی E، $(n>0)$ روی C و u یک گسترش خطی E در E داده شده است. فرض می‌کنیم λ_1، λ_2، ...، λ_n ریشه های چند جمله‌ای مفسر u باشندکه به ترتیب دلخواهی نوشته شده‌اند و هر ریشه به شماره مرتبهٔ چندگانگی آن نوشته شده است. دراینصورت پایه‌ای از E مانند $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ می‌توان یافت به‌قسمی که M، ماتریس u نسبت به‌این پایه، از ویژگیهای زیر برخوردار است:

(I) — M یک ماتریس سه‌بری زیرین است.

(II) — عنصر واقع درسطر i ام وستون i ام M برابراست با λ_i.

اثبات: ۱- برای $n=1$ قضیه بدیهی است. فرض می‌کنیم که آنرا برای یک فضای برداری $n-1$ بعدی ثابت کرده باشیم.

۲- چون هستهٔ گسترش خطی $u-\lambda_1$ صفر نیست پس این گسترش سورژکتیونیست (۴.۱۱.۸). بنابراین $(u-\lambda_1)(E)$ مشمول یک هیپرپلان F می‌باشد (۱۰.۱۰.۸ و ۱۸.۱۰.۸). اگر $x\in F$ باشد خواهیم داشت:

$$u(x)=(u-\lambda_1)(x)+\lambda_1 x\in(u-\lambda_1)(E)+F\subset F+F\subset F$$

بنابراین F بوسیله u پایدار است.

۳- فرض می‌کنیم v تحدید u به F و N ماتریس آن نسبت به پایهٔ دلخواه $(e'_2, e'_3, \ldots, e'_n)$ باشد. اگر e_1 برداری از E باشدکه به F تعلق نداشته باشد e_1، e'_2، ...، e'_n نابستگی خطی دارند (۸.۷.۸). بنابراین $(e_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ پایه‌ای است از E. به‌علاوه داریم:

$$u(e_1)=\lambda_1 e_1+(u-\lambda_1)(e_1)\in\lambda_1 e_1+F$$

بدین ترتیب ثابت می‌شود که ماتریس u نسبت به‌پایهٔ $(e_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$M=\left[\begin{array}{c|c}\lambda_1 & 0\ 0\cdots 0\\ \hline N' & N\end{array}\right]$$

که درآن N' یک ماتریس ستونی $n-1$ سطری‌است. بنابر ۱.۷.۱۰ چندجمله‌ای‌مفسر

M برابراست‌با $P(X)\,(X-\lambda_1)$ که درآن $P(X)$ چندجمله‌ای‌مفسر N است. ازاینجا ثابت می‌شود که ریشه‌ های $P(X)$ عبارتند از :

$$\lambda_2 , \lambda_3 , \ldots , \lambda_n$$

(هریک از ریشه‌ها به شماره مرتبهٔ چندگانگی‌اش نوشته شده است).

٤- فرض بازگشت‌را برای F و v بکارمی‌بریم. پایه‌ای مانند $(e_2 , e_3 , \ldots , e_n)$ از F می‌توان یافت به‌طوریکه ماتریس v نسبت به‌این پایه سه بری زبرین و عنصرهای‌قطر اصلی آن به‌ترتیب λ_2 ، λ_3 ، ... و λ_n باشند.

دراینصورت ماتریس u نسبت به‌پایهٔ $(e_1 , e_2 , \ldots , e_n)$ از نوع موردنظردرقضیه خواهد بود.

۸.٤.۱٤ - **تبصره** - با توجه به قراردادهای ۷.٤.۱٤ ماتریس u نسبت به پایه $(e_n , e_{n-1} , \ldots , e_1)$ سه بری زبرین است.

۹.٤.۱٤ - **نتیجه- فرض می‌کنیم M ماتریسی مختلط ازرستهٔ (n , n) باشد. M بایک ماتریس سه بری زبرین وهمچنین بایک ماتریس سه بری زبرین همانند‌است.**

اثبات- باتوجه به ۲.۱۰.۹ این‌مطلب از ۷.٤.۱٤ و ۸.٤.۱٤ نتیجه می‌شود.

۱٤.۵- قضیه کیلی - هامیلتون وکاربردهای آن

۱.۵.۱٤ - قضیه (کیلی - هامیلتون) - **فرض می‌کنم E یک فضای برداری بابعد باپایان روی C ، u یک‌گسترش خطی E در E و P چند جمله‌ای مفسر آن باشد. دراینصورت داریم $P(u)=0$.**

اثبات- بنابر ۷.٤.۱٤ پایه‌ای مانند $(e_1 , \ldots , e_n)$ در E می‌توان یافت که نسبت به‌آن ماتریس u بصورت زیر باشد :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_2 & 0 \cdots 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_3 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \lambda_{n3} \cdots \lambda_n \end{bmatrix}$$

پس داریم :

$$P(X)=(\lambda_n-X)(\lambda_{n-1}-X)\cdots(\lambda_1-X)$$

بنابراین باید ثابت کنیم که :

$$(\lambda_n-u)(\lambda_{n-1}-u)\cdots(\lambda_1-u)=0$$

با روش بازگشت کاهشی روی i ثابت می‌کنیم که گسترش خطی :

$$(\lambda_n-u)(\lambda_{n-1}-u)\cdots(\lambda_i-u)$$

بردارهای e_i ، e_{i+1} ، ... ، e_n را به صفر بدل میکند . دراینصورت با قراردادن $i=1$ اثبات قضیه به‌دست می‌آید.

روشن است که برای $i=n$ گسترش λ_n-u بردار e_n را صفر می‌کند . زیرا درستون n ام ماتریس λ_n-u عنصری جز صفر یافت نمی‌شود.

فرض می‌کنیم $(\lambda_n-u)(\lambda_{n-1}-u)\cdots(\lambda_i-u)$ بردارهای e_i ، e_{i+1} ، ... و e_n را به‌صفر بدل کند و ثابت می‌کنیم که دراینصورت :

$$(\lambda_n-u)(\lambda_{n-1}-u)\cdots(\lambda_i-u)(\lambda_{i-1}-u)$$

بردارهای e_{i-1} ، e_i ، e_{i+1} ، ... و e_n را به صفر بدل می‌کند . درماتریس $\lambda_{i-1}-u$ ستونهای $i-1$ ، i ، ... ، n ام دست‌کم با $i-1$ صفر شروع می‌شوند . به گفته دیگر برای $j=i-1, i, \ldots, n$ بردار $(\lambda_{i-1}-u)(e_j)$ ترکیبی خطی از e_i ، e_{i+1} ، ... ، e_n است. بنا به فرض بـازگشت این ترکیب خطی بوسیلهٔ $(\lambda_n-u)(\lambda_{n-1}-u)\cdots(\lambda_i-u)$ صفر می‌شود . پس :

$$(\lambda_n-u)(\lambda_{n-1}-u)\cdots(\lambda_i-u)(\lambda_{i-1}-u)e_j=0$$

۲.۰.۱۴ - فرض می‌کنیم M ماتریسی مختلط از رسته (n, n) و P چندجمله‌ای مفسر آن باشد. دراین‌صورت $P(M) = 0$ (این همان بیان ماتریسی ۱.۰.۱۴ است). البته این نتیجه برای ماتریسهای حقیقی که حالت ویژهٔ ماتریسهای مختلط می‌باشند نیز درست است. پس با برگشت به حالت گسترشهای خطی می‌بینیم که ۱.۰.۱۴ در بارهٔ فضاهای برداری با بعد باپایان روی هیأت $\mathbf{R}$ نیز برقرار است.

۳.۰.۱۴ - لم - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری با بعد باپایان روی هیأت C و u یک گسترش خطی E در E باشد. چندجمله‌ای مفسر u را P می‌نامیم. فرض می‌کنیم P به‌صورت حاصلضرب دوچندجمله‌ای P_1 و P_2 که نسبت به‌هم اول‌اند نوشته شود یعنی $P = P_1 P_2$. چنانچه $u_1 = P_1(u)$ و $u_2 = P_2(u)$ باشد، وهسته گسترش u_1 را با N_1 و هسته گسترش u_2 را با N_2 نشان دهیم:

(I) — N_1 و N_2 دوزیر فضای برداری E هستند که به‌وسیلهٔ u پایدار می‌باشند و به‌علاوه در E متمم یکدیگرند.

(II) — باتقریب یک ضریب ثابت، P_1 و P_2 به‌ترتیب چندجمله‌ایهای مفسر تحدید u به N_1 و تحدید u به N_2 می‌باشند.

اثبات- الف- فرض می‌کنیم $x \in N_1$ باشد. داریم:

$$u_1(ux) = P_1(u)ux = uP_1(u)x = u(u_1 x) = u(0) = 0$$

بنابراین $ux \in N_1$ پس N_1 بوسیله u پایدار است. بهمین‌ترتیب دیده می‌شود که N_2 هم بوسیله u پایدار است.

ب- هرعنصر $u_1(E)$ به‌صورت $u_1(x)$ است که‌درآن $x \in E$ می‌باشد. بنابرقضیه کیلی - هامیلتون داریم:

$$u_2 u_1 x = P_2(u) P_1(u) x = P(u) x = 0.$$

یعنی $u_1 x \in N_2$. بدین روش ثابت می‌شود که $u_1(E) \subset N_2$ وبه‌روشی مشابه می‌توان دید که $u_2(E) \subset N_1$.

پ- اکنون ثابت می‌کنیم که $N_1 + N_2 = E$. چون P_1 و P_2 نسبت‌به‌یکدیگر

اولند ، بنابر ۳.۵.۵ چند جمله‌ایهایی مانند Q_1 و Q_2 متعلق به $C[X]$ می‌توان یافت به قسمی که :

$$P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 1$$

پس اگر $x \in E$ باشد داریم :

$$x = (P_1(u)Q_1(u) + P_2(u)Q_2(u))x \tag{1}$$
$$= u_1 Q_1(u)x + u_2 Q_2(u)x$$

وچون بنابر (ب) داریم $u_1 Q_1(u)x \in N_2$ و $u_2 Q_2(u)x \in N_1$ پس‌خواهیم داشت $x \in N_2 + N_1$.

ت- برای اثبات این که $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ فرض‌می‌کنیم x متعلق‌به $N_1 \cap N_2$ باشد (پس $u_1x = 0$ و $u_2x = 0$). اما بنابر (۱) داریم :

$$x = Q_1(u)P_1(u)x + Q_2(u)P_2(u)x$$
$$= Q_1(u)u_1x + Q_2(u)u_2x = 0 + 0 = 0$$

ث ـ قسمت (I) لم از (الف) ، (پ) و (ت) نتیجه می‌شود .

ج - فرض‌می‌کنیم v_1 و v_2 به‌ترتیب تحدید u به N_1 وتحدید u به N_2 و P_1^* و P_2^* به‌ترتیب‌چندجمله‌ای‌های‌مفسر v_1 و v_2 باشند. ثابت می‌کنیم‌که $P = P_1^* P_2^*$. اگر B_1 پایه‌ای‌از N_1 و B_2 پایه‌ای از N_2 باشد ، $B = B_1 \cup B_2$ پایه‌ای از E است و اگر M_1 و M_2 به‌ترتیب ماتریسهای v_1 و v_2 نسبت به پایه‌های B_1 و B_2 باشند ماتریس u نسبت به B بصورت $M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$ می‌باشد .

دراین‌صورت برابری $P = P_1^* P_2^*$ را می‌توان از ۱.۷.۱۰ نتیجه‌گرفت.

ح - چنانچه λ ریشه‌ای از P_1^* باشدمی‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که $P_1(\lambda) = 0$. بنابر ۱.۳.۱٤ بردار غیرصفری مانند x متعلق به N_1 وجود دارد به طوری‌که $v_1x = \lambda x$ یعنی $ux = \lambda x$. درنتیجه داریم :

$$u^2x = \lambda^2 x \ , \ u^3(x) = \lambda^3 x \ , \ldots$$

بنابراین :

$$P_1(u)x=P_1(\lambda)x$$

چون $x\in N_1$ داریم : $P_1(u)x=u_1x=0$ پس $P_1(\lambda)x=0$. چون x صفر نیست‌ازاینجا نتیجه می‌شود که $P_1(\lambda)=0$ وچون P_1 و P_2 نسبت‌بهم‌اولند λ ریشه‌ای از P_2 نیست.

بنابراین هیچیک از ریشه های P_1^* ریشهٔ P_2 نیست یعنی P_1^* و P_2 نسبت‌بهم‌اولند. به‌علاوه‌بنابر (ج) چندجمله‌ای P_1^* حاصلضرب $P=P_1P_2$ رامی‌شمرد، پس P_1^* بخشیابی از P_1 است (۲.۰.۰) . به‌روشی مشابه ثابت می‌شود که P_2^* نیز بخشیابی از P_2 است. چون $P_1^*P_2^*=P_1P_2$ پس :

$$\deg P_2^* = \deg P_2 \qquad , \qquad \deg P_1^* = \deg P_1$$

یعنی P_1^* متناسب با P_1 و P_2^* متناسب با P_2 است .

۴.۰.۱۴ - لم- فرض می‌کنیم E یک‌فضای برداری با بعد باپایان روی C و u یک‌گسترش‌خطی E در E باشد. چندجمله‌ای‌مفسر u را P می‌نامیم. فرض‌می‌کنیم‌که P برابر باحاصلضرب m چندجمله‌ای P_1 ، P_2 ، ... ، P_m که نسبت بهم اولند باشد ، یعنی $P=P_1P_2P_3\cdots P_m$. چنانچه $P_1(u)=u_1$ ، ... ، $P_m(u)=u_m$ باشد وهسته u_1 را با N_1 وهستهٔ u_2 را با N_2 ، ... وهستهٔ u_m را با N_m نشان دهیم :

(I) — N_iهابوسیلهٔ u پایدارند و E حاصل‌جمع‌مستقیم N_1 ، ... ، N_m است.

(II) — باتقریب یک ضریب ثابت ، P_i چندجمله‌ای مفسر تحدید u به N_i است.

باتوجه به‌اینکه $(P_1P_2\cdots P_{m-1})$ و P_m نسبت‌بهم اولند (۰.۰.۰) ، این لم را می‌توان به روش بازگشت از لم ۳.۰.۱۴ نتیجه گرفت .

۵.۰.۱۴ - قضیه - E فضایی برداری با بعد باپایان روی هیأت C و u یک‌گسترش خطی E در E است. فرض می‌کنیم P چندجمله‌ای مفسر u و λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_m ریشه‌های متمایز P باشند به‌طوری‌که داشته باشیم:

$$P(X)=(\lambda_1-X)^{h_1}(\lambda_2-X)^{h_2}\cdots(\lambda_m-X)^{h_m}$$

اگرهستهٔ $(\lambda_i-u)^{h_i}$ را N_i بنامیم داریم:

(I) — N_iهابوسیلهٔ u پایدارند و E حاصل‌جمع‌مستقیم N_1 ، . . . ، N_m است.

(II) — $(\lambda_i-X)^{h_i}$ چندجمله‌ای مفسر تحدید u به N_i است.

این‌قضیه حالت‌ویژه‌ای‌از ۴.۵.۱۴ می‌باشد.

۶.۵.۱۴ - **نتیجه - فرض‌می‌کنیم M ماتریسی‌مختلط ازرستهٔ (n , n) ، P چندجمله‌ای مفسرآن و λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_m ریشه‌های متمایز P باشند به‌طوری‌که داشته باشیم:**

$$P(X)=(\lambda_1-X)^{h_1}(\lambda_2-X)^{h_2}\cdots(\lambda_m-X)^{h_m}$$

دراین‌صورت M همانند ماتریسی است به‌صورت:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ . & \cdots & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & M_m \end{bmatrix}$$

که درآن M_i ماتریسی است مربع که چند جمله‌ای مفسرش برابر با $(\lambda_i-X)^{h_i}$ می‌باشد.

این نتیجه همان بیان ماتریسی شمارهٔ ۵.۵.۱۴ است.

۷.۵.۱۴ - **تبصره** - با درنظرگرفتن فرض‌های شمارهٔ ۶.۵.۱۴ می‌بینیم که‌هریک از ماتریسهای M_i خود همانند یک ماتریس سه بری زیرین است که عنصرهای قطر اصلی آن همگی برابر با اسکالر λ_i می‌باشند (۷.۴.۱۴).

۸.۵.۱۴ - شماره‌های ۳.۴.۱۴ و ۶.۴.۱۴ . حالتهای‌ویژه ۵.۵.۱۴ و ۶.۵.۱۴ می‌باشند.

فصل پانزدهم

فرم‌های چند خطی

دراین فصل به بیان مطالب کلی و ساده اکتفا می‌کنیم. از بین فرم‌های چند خطی تنها فرم‌های دوخطی متقارن (درفصل شانزدهم) و فرمهای چند خطی متناوب (درفصل هیجدهم) موردمطالعه قرار خواهند گرفت.

۱۵. ۱- فضای برداری فرم‌های p خطی

۱.۱.۱۵ - فرض می‌کنیم E یک‌فضای برداری روی $\mathbf{K}$ باشد. درشمارهٔ ۲.۱۷.۸ فرمهای دوخطی روی E را تعریف‌کردیم ، و دیدیم که یک فرم دوخطی f روی E یک گسترش E^2 در $\mathbf{K}$ است به‌قسمی‌که $f(x, y)$ به‌طورخطی به x و y بستگی‌داشته باشد.

اگر f و g دوفرم دوخطی روی E و λ یک اسکالر باشد فرمهای $f+g$ و λf را به روش زیر تعریف می‌کنیم :

به ازای هر x وهر y متعلق به E قرارمی‌دهیم:

$$(f+g)(x, y)=f(x, y)+g(x, y)$$

$$(\lambda f)(x, y)=\lambda f(x, y)$$

با این تعاریف $f+g$ و λf فرم‌هایی دوخطی روی E می‌باشند . به‌این ترتیب مجموعهٔ فرمهای دوخطی روی E یک فضای برداری روی $\mathbf{K}$ تشکیل میدهد . بررسی درستی این مطلب را بخواننده واگذار می‌کنیم .

۲.۱.۱۵ - بطورکلی درشمارهٔ ۱.۱۸.۸ فرمهای p خطی روی E تعریف شد . هرگاه f و g دوفرم p خطی روی E و λ یک‌اسکالر باشد ، $f+g$ و λf را به‌روش‌زیر تعریف می‌کنیم :

$$(f+g)(x_1, x_2, \ldots, x_p)=f(x_1, x_2, \ldots, x_p)+g(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

$$(\lambda f)(x_1, x_2, \ldots, x_p)=\lambda f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

به‌این ترتیب مجموعهٔ فرمهای p خطی روی E ، یک‌فضای برداری روی هیأت $\mathbf{K}$ تشکیل می‌دهد.

۳.۱.۱۵ - فرم p خطی f روی E را **متقارن** می‌نامند هرگاه برای p عنصردلخواه x_1 ، x_2 ، ... ، x_p از E وهرتبدیل σ از $\{1, 2, \ldots, p\}$ داشته باشیم :

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)})=f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \tag{1}$$

به ویژه فرم دوخطی f روی E متقارن است اگر به ازای هر x وهر y داشته باشیم :

$$f(x, y)=f(y, x)$$

روشن است که با این تعریف فرمهای خطی متقارن روی E همان فرمهای خطی روی E می‌باشند.

۴.۱.۱۵ - اگر فضای برداری‌فرمهای p خطی‌روی E را F بنامیم ، مجموعهٔ فرمهای p خطی متقارن روی E یک زیر فضای برداری از F است.

۵.۱.۱۵ - درشمارهٔ ۱.۲.۱۰ فرمهای p خطی متناوب روی E را تعریف کردیم . اگر f یک فرم p خطی متناوب روی E باشد بنابه شمارهٔ ۲.۲.۱۰ برای هر p عنصر x_1 ، x_2 ، ... ، x_p متعلق به E وهرتبدیل σ از تبدیل‌های $\{1, 2, \ldots, p\}$ داریم :

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(p)})=\varepsilon_\sigma f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \tag{2}$$

فرمهای خطی‌متناوب روی E همان فرمهای خطی روی E هستند. برحسب قرارداد یک فرم ۰ خطی متناوب روی E را عنصری از $\mathbf{K}$ می‌گیریم .

۶.۱.۱۵ - اگرفضای برداری‌فرمهای p خطی‌روی E را F بنامیم ، مجموعهٔ فرمهای p خطی متناوب روی E یک زیر فضای برداری‌از F است.

۷.۱.۱۵ - به‌جای فرمهای p خطی روی E می‌توان به‌طورکلی‌تر ، گسترشهای p خطی E دریک فضای برداری E_1 را درنظرگرفت . هرگسترش p خطی E در E_1 یک

گسترش f فضای E^p در E_1 است به قسمی که $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ به‌طور خطی به x_1 ، x_2 ، $\ldots$ ، x_p بستگی داشته باشد . دراین‌حالت هم f را متقارن گویند هرگاه f درهمانی (اتحاد) (۱) صدق کند . همچنین f را متناوب خوانند اگر هربارکه دو تا از بردارهای x_i برابر باشند داشته باشیم : $f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$. دراینصورت مانند شمارهٔ ۲.۲.۱۰ به‌آسانی دیده می‌شود که f درهمانی (۲) صدق می کند.

۲.۱۵- سایه وارون به وسیله یک گسترش خطی

۱.۲.۱۰ - فرض می‌کنیم E و F دوفضای برداری روی K ، u یک گسترش خطی E در F و f یک فرم p خطی روی F باشد. به‌آسانی دیده می‌شود که گسترش :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) \longrightarrow f(ux_1, ux_2, \ldots, ux_p)$$

فضای E^p در K یک فرم p خطی f' روی E است. f' را **سایهٔ وارون** f **به‌وسیلهٔ** u می‌نامند.

اگر $p=1$ باشد ، f یک فرم خطی روی F است و دراین‌صورت $f'=f\circ u$ گردانهٔ (مبدل) f به وسیلهٔ $^t u$ است (شمارهٔ ۲.۱٦.۸) .

۲.۲.۱۰ - فرض می کنیم E_p و F_p به ترتیب‌فضاهای برداری فرمهای p خطی روی E و F باشند. درشمارهٔ پیش گسترش $f \to f'$ فضای F_p درفضای E_p راتعریف کردیم. به‌آسانی می‌توان دید که این گسترش خطی است.

۳.۲.۱۰ - فضاهای برداری E , F , G روی K وگسترشهای‌خطی :

$$u : E \longrightarrow F \qquad \text{و} \qquad v : F \longrightarrow G$$

داده شده است. فرض می کنیم f یک فرم p خطی روی G ، f' سایه وارون f بوسیله v و f'' سایه وارون f' بوسیله u باشند. دراینصورت f'' سایه وارون f به وسیلهٔ $v\circ u$ است . زیرا برای هر p عنصر دلخواه x_1 ، x_2 ، $\ldots$ ، x_p متعلق به E داریم :

$$\begin{aligned} f''(x_1, x_2, \ldots, x_p) &= f'(ux_1, ux_2, \ldots, ux_p) \\ &= f(v(ux_1), v(ux_2), \ldots, v(ux_p)) \\ &= f((v\circ u)x_1, (v\circ u)x_2, \ldots, (v\circ u)x_p) \end{aligned}$$

۴.۲.۱۰ ـ بار دیگر فرضهای شمارهٔ ۱.۲.۱۰ را روی E ، F ، u ، f و f' درنظر می‌گیریم. به‌آسانی دیده می‌شود که اگر f متقارن باشد f' متقارن است و اگر f متناوب باشد f' متناوب‌است. اگر f یک فرم ۰ خطی ومتناوب باشد یعنی اگر f یک‌اسکالر λ باشد برحسب قرارداد f' را نیز همان اسکالر λ می‌گیریم.

۵.۲.۱۰ ـ فرض می‌کنیم E یک‌فضای برداری n بعدی ، u یک‌گسترش خطی E در E و f یک فرم n خطی متناوب روی E باشد. اگر دترمینان x_1 ، x_2 ، $\cdots$ ، x_n نسبت به‌یک پایه ثابت‌از E برابر با $f(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ باشد، بنابرشمارهٔ ۳.۵.۱۰ سایهٔ وارون f به وسیله u برابر است با $(\det u) \cdot f$. حالت کلی را هم می‌توان به این حالت برگرداند . زیرا بنابر ۲.۳.۱۰ ، (II) تمام فرمهای n خطی متناوب روی E بایکدیگر متناسبند.

فصل شانزدهم

فرم‌های دو خطی متقارن

دراین فصل به‌بررسی فرم‌های دوخطی متقارن می‌پردازیم. مطالعه این فرم‌ها تقریباً به مطالعهٔ فرم‌های درجه دوم (کوادراتیک) منجر می‌شود. این مفاهیم تعمیم حاصل‌ضرب اسکالرمعمولی می‌باشند. گروه‌های وابسته(مثلاً گروه‌های متعامد) نقش مهمی در هندسه، مکانیک وفیزیک بازی می‌کنند. مثلاً گروه **لورنتز** که درفیزیک‌نقش مهمی دارد یک گروه متعامد است.

درسراسر این فصل فرض می‌کنیم بعد فضاهای‌برداری با پایان و **هیأت** پایه هیأتی است که مشخص آن مخالف با ۲ می‌باشد.

۱.۱۶- فرم‌های دو خطی متقارن

۱.۱.۱۶- فرض می‌کنیم $(e_1 , e_2 , \dots , e_n)$ یک پایهٔ‌فضای برداری E و f یک فرم دو خطی روی E باشد.

قضیه - برای اینکه f متقارن باشد با یاوبسنده است‌که ماتریس آن (۱.۱۱.۹) نسبت به $(e_1 , e_2 , \dots , e_n)$ متقارن باشد.

اثبات - فرض می‌کنیم $[\alpha_{ij}]$ ماتریس f نسبت به پایه انتخاب شده باشد. اگر f متقارن باشد داریم:

$$\alpha_{ij}=f(e_i , e_j)=f(e_j , e_i)=\alpha_{ji}$$

پس ماتریس $[\alpha_{ij}]$ متقارن است.

به وارون فرض می‌کنیم برای هر i و هر j داریم $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$. چنانچه:

$$x=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n \qquad \text{و} \qquad y=\mu_1 e_1+\cdots+\mu_n e_n$$

دو بردار دلخواه از E باشند داریم:

$$f(x\,,\,y)=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\mu_j f(e_i\,,\,e_j)=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\mu_j\alpha_{ij}$$

$$f(y\,,\,x)=\sum_{i,j=1}^{n}\mu_j\lambda_i f(e_j\,,\,e_i)=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\mu_j\alpha_{ji}$$

بنابراین
$$f(x\,,\,y)=f(y\,,\,x)$$
یعنی f متقارن است.

۱۶.۱.۲- می‌بینیم که اگر $\alpha_{ji}=\alpha_{ij}$ باشد می‌توان نوشت:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\,,\,\sum_{j=1}^{n}\mu_j e_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i\alpha_{ii}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i\mu_j+\lambda_j\mu_i)\alpha_{ij}$$

۱۶.۱.۳- **مثال** - فرض می‌کنیم E فضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی باشد. دراینصورت گسترش $(\vec{V}\,,\,\vec{V}')\rightarrow\vec{V}\cdot\vec{V}'$ یک فرم دو خطی متقارن است. از این روگاهی یک فرم دو خطی متقارن را حاصلضرب اسکالر می‌نامند و با $(x\,,\,y)\rightarrow x\cdot y$ نمایش می‌دهند.

۱۶.۱.٤- **مثال** - فرض می‌کنیم $E=K^n$ باشد. گسترش:

$$((\lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\,\cdots\,,\,\lambda_n)\,,\,(\mu_1\,,\,\mu_2\,,\,\cdots\,,\,\mu_n))\rightarrow\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\cdots+\lambda_n\mu_n$$

یک فرم دوخطی متقارن است که **حاصلضرب اسکالر کانونیک** K^n نامیده می‌شود.

۱۶ . ۲- فرم‌های درجهٔ دوم یا فرم‌های کوادراتیک

۱۶.۲.۱- قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی K و q یک گسترش E در K باشد. چنانچه برای یک پایهٔ $(e_1\,,\,e_2\,,\,\ldots\,,\,e_n)$ از E عبارت $q(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n)$ نسبت به λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_n یک چند جمله‌ای همگن درجه دوم باشد، برای هر پایهٔ دیگری از E این مطلب برقرار خواهد بود.

اثبات ـ بنابه فرض داریم :

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right)=\sum_{i,j=1}^{n} \rho_{ij}\lambda_i\lambda_j$$

که درآن ρ_{ij} ها اسکالرهای ثابتی می‌باشند. فرض می‌کنیم $(e'_1 , e'_2 , \dots , e'_n)$ پایه دیگری از E باشد. آرایندههای بردار $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ رادراین پایه λ'_1 ، λ'_2 ، ... ، λ'_n می‌نامیم. دراین صورت داریم :

$$\lambda_i=\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\lambda'_j$$

که درآن α_{ij} ها اسکالرهایی ثابت می‌باشند (۵.۸.۹). پس :

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i e'_i\right)=q\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right)=\sum_{i,j=1}^{n} \rho_{ij}\lambda_i\lambda_j$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} \rho_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\lambda'_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl}\lambda'_l\right)$$

واین‌عبارت‌نسبت به λ'_1 ، λ'_2 ، ... ، λ'_n یک چند جمله‌ای همگن درجه دوم می‌باشد.

۲.۲.۱۶- **تعریف - یک گسترش E درKراکه درقضیهٔ ۱.۲.۱۶ صدق می‌کند یک فرم درجه دوم یا فرم کوادراتیک روی E می‌نامیم.**

۳.۲.۱۶- فرض می‌کنیم S مجموعهٔ فرم‌های دو خطی متقارن روی E و Q مجموعه فرم‌های درجه دوم روی E باشند.

قضیه :

(I) - فرض می‌کنیم f متعلق‌به S باشد و برای هر x متعلق به E قرار می‌دهیم $q_f(x)=f(x , x)$. دراین صورت داریم $q_f \in Q$.

(II) - فرض می‌کنیم q متعلق به Q باشد. برای هر x و هر y متعلق به E قرار می‌دهیم :

$$f_q(x, y) = \frac{۱}{۲}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

دراین صورت داریم $f_q \in S$.

(III) - گسترش $f \to q_f$ یك گسترش دو سویی S روی Q است و $q \to f_q$ گسترش وارون آن می‌باشد .

اثبات - فرض می‌کنیم $(e_۱, e_۲, \ldots, e_n)$ پایه‌ای از E باشد.

(I) - اگر f متعلق‌به S و $[\alpha_{ij}]$ ماتریس f نسبت به‌پایهٔ $(e_۱, e_۲, \ldots, e_n)$ باشد ، برای هربردار دلخواه $x = \lambda_۱ e_۱ + \cdots + \lambda_n e_n$ متعلق به E داریم :

$$q_f(x) = f(x, x) = \sum_{i,j=۱}^{n} \alpha_{ij}\lambda_i\lambda_j$$

پس $q_f \in Q$.

(II) - فرض می‌کنیم q متعلق به Q باشد و قرار می‌دهیم :

$$q(\lambda_۱ e_۱ + \cdots + \lambda_n e_n) = \sum_{i,j=۱}^{n} \rho_{ij}\lambda_i\lambda_j$$

دراین صورت داریم :

$$f_q(\lambda_۱ e_۱ + \cdots + \lambda_n e_n \quad , \quad \mu_۱ e_۱ + \cdots + \mu_n e_n)$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[\sum_{i,j=۱}^{n} \rho_{ij}(\lambda_i + \mu_i)(\lambda_j + \mu_j) - \sum_{i,j=۱}^{n} \rho_{ij}\lambda_i\lambda_j - \sum_{i,j=۱}^{n} \rho_{ij}\mu_i\mu_j\right]$$

$$= \frac{۱}{۲}\sum_{i,j=۱}^{n} \rho_{ij}[(\lambda_i + \mu_i)(\lambda_j + \mu_j) - \lambda_i\lambda_j - \mu_i\mu_j]$$

$$= \frac{۱}{۲}\sum_{i,j=۱}^{n} \rho_{ij}(\lambda_i\mu_j + \lambda_j\mu_i)$$

بنابراین f_q دوخطی است. به علاوه از روی تعریف آشکار است که $f_q(x, y)=f_q(y, x)$ پس $f_q \in S$.

(III) - داریم :

$$f_{q_f}(x, y)=\frac{۱}{۲}[q_f(x+y)-q_f(x)-q_f(y)]$$

$$=\frac{۱}{۲}[f(x+y, x+y)-f(x, x)-f(y, y)]$$

$$=\frac{۱}{۲}[f(x,x)+f(x, y)+f(y,x)+f(y, y)-f(x, x)-f(y, y)]$$

$$=\frac{۱}{۲}[f(x, y)+f(y, x)]=\frac{۱}{۲}\,۲f(x, y)=f(x, y)$$

بنابراین $f_{q_f}=f$. همچنین :

$$q_{f_q}(x)=f_q(x, x)=\frac{۱}{۲}[q(۲x)-q(x)-q(x)]$$

اما از روی تعریف ۲.۲.۱۶ می‌توان به آسانی نتیجه گرفت که :

$$q(۲x)=۴q(x)$$

پس

$$q_{f_q}(x)=q(x)$$

و بنابراین گسترشهای $f \to q_f$ و $q \to f_q$ دوسویی و وارون یکدیگرند (۵.۸.۱).

۴.۲.۱۶- تعریف - گسترشهای f و q_f شمارهٔ بالا را وابسته به یکدیگر می‌گویند.

۵.۲.۱۶- **مثال** - فرض می‌کنیم بعد E برابر ۳ و (e_1, e_2, e_3) پایه‌ای از E باشد. کلی‌ترین فرم دو خطی متقارن f روی E راکه با دستور زیر داده شده است درنظر می‌گیریم (شمارهٔ ۲.۱.۱۶) :

$$f(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3, \mu_1e_1+\mu_2e_2+\mu_3e_3)$$

$$=\alpha\lambda_1\mu_1+\beta(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)+\gamma\lambda_2\mu_2+\delta(\lambda_1\mu_3+\lambda_3\mu_1)$$

$$+\varepsilon(\lambda_2\mu_3+\lambda_3\mu_2)+\zeta\lambda_3\mu_3$$

دراینصورت فرم درجه دوم وابسته به f عبارتست از :

$$q(\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3)=\alpha\lambda_1^2+2\beta\lambda_1\lambda_2+\gamma\lambda_2^2+2\delta\lambda_1\lambda_3+2\varepsilon\lambda_2\lambda_3+\zeta\lambda_3^2$$

۶.۲.۱۶- **مثال** - اگر روی K^n ضرب اسکالر کانونیک را درنظر بگیریم (۴.۱.۱۶) فرم وابسته به‌آن عبارتست از :

$$q((\lambda_1 , \ldots , \lambda_n))=\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2$$

q را فرم درجه دوم کانونیک K^n می‌نامند.

۷.۲.۱۶- **مثال** - E را همان فضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی فرض می‌کنیم. اگر $f(\vec{V} , \vec{V'})$ حاصلضرب اسکالر معمولی باشد فرم درجه دوم وابسته به‌آن عبارتست از تابع :

$$\vec{V} \to \vec{V}\cdot\vec{V}=|\vec{V}|^2$$

۸.۲.۱۶- ازشماره ۳.۲.۱۶ نتیجه می‌شود که مطالعه فرم‌های درجه دوم ومطالعه فرم‌های دو خطی متقارن هم‌ارز می‌باشند.

۳.۱۶- تعامد

۱.۳.۱۶- **تعریف - فرض می‌کنیم E یك فضای برداری، f یك فرم دو خطی متقارن روی E و q فرم درجه دوم وابسته به f باشد. دو عنصر x و y از E را نسبت به f (یا نسبت به q) عمود برهم گوییم هرگاه داشته باشیم :**

$$f(x , y)=0$$

بستگی عمود بودن x و y یك بستگی متقارن است. درشماره ۵.۱۶ خواهیم دید که این تعریف با تعریف ۱.۱۵.۸ سازگار است.

۲.۳.۱۶- دو بخش M و N از E را عمود برهم گویند هرگاه هرعنصر M برهرعنصر N عمود باشد.

۳.۳.۱۶- اگر M و N برهم عمود باشند هرترکیب خطی ازعنصرهای M برهرترکیب خطی ازعنصرهای N عمود است. پس مجموعهٔ بردارهایی از E که بر M

عمودند یک زیر فضای برداری از E را تشکیل می‌دهند (این زیر فضای برداری را زیر فضای برداری عمود بر M می‌نامند و به صورت $M^{\perp}$ نشان می‌دهند).

۴.۳.۱۶- بردار x متعلق به E را **ایزوترپ** خوانند هرگاه این بردار برخودش عمود باشد یعنی داشته باشیم $f(x\ ,\ x)=0$ و یا به عبارت دیگر $q(x)=0$. مثلاً بردار ۰ یک بردار ایزوترپ است. در شماره (۴.۷.۱۶) خواهیم دید که غیر از بردار ۰ بردارهای ایزوترپ دیگری نیز ممکن است وجود داشته باشد.

۵.۳.۱۶- **مثال** - وقتی در فضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی ضرب اسکالر معمولی را درنظر بگیریم، همان مفهوم عمود بودن معمولی بردارها به دست می‌آید. دراین حالت تنها بردار ایزوترپ، بردار صفر است.

۴.۱۶- فرم‌های اصیل

۱.۴.۱۶- **تعریف - بار دیگر فرض‌های شمارهٔ ۱.۳.۱۶ را درنظر می‌گیریم. مجموعهٔ عنصرهایی از E راکه بر تمام E عمود باشند هستهٔ f و یا هسته q می‌نامند.**

اگر هستهٔ f را N بنامیم روشن است که N یک زیر فضای برداری E می‌باشد.

۲.۴.۱۶- فرم f (یا q) را **غیر اصیل** گوییم هرگاه داشته باشیم $N \neq \{0\}$.
در غیر این صورت آنرا **اصیل** می‌نامیم. مثلاً ضرب اسکالر معمولی اصیل است.

۳.۴.۱۶- **قضیه - فرض می‌کنیم $(e_1\ ,\ e_2\ ,\ \dots\ ,\ e_n)$ پایه‌ای از E، f یك فرم دوخطی و متقارن روی E، $[a_{ij}]$ ماتریس f نسبت به پایهٔ $(e_1\ ,\ e_2\ ,\ \dots\ ,\ e_n)$ و N هسته f باشد.**

(I) - برای اینکه بردار $\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\cdots+\lambda_n e_n$ متعلق به N باشد بایاو بسنده است که داشته باشیم:

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{21}+\cdots+\lambda_n a_{n1}=0\\ \lambda_1 a_{12}+\lambda_2 a_{22}+\cdots+\lambda_n a_{n2}=0\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \lambda_1 a_{1n}+\lambda_2 a_{2n}+\cdots+\lambda_n a_{nn}=0\end{array}\right. \qquad (1)$$

(II) - برای اینکه f غیراصیل باشد با یاو بسنده است که $\det[\alpha_{ij}] = 0$.

اثبات - داریم :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \in N$$

$$\Longleftrightarrow \forall i \ , \ f((\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \ , \ e_i) = 0 \ , \quad \text{(بنابر شمارهٔ ۳.۳.۱۶)}$$

$$\Longleftrightarrow \forall i \ , \ \lambda_1 f(e_1 \ , \ e_i) + \lambda_2 f(e_2 \ , \ e_i) + \cdots + \lambda_n f(e_n \ , \ e_i) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall i \ , \ \lambda_1 \alpha_{1i} + \lambda_2 \alpha_{2i} + \cdots + \lambda_n \alpha_{ni} = 0$$

به این ترتیب قسمت(I)ثابت می‌شود. بنابر (I) برای اینکه f غیر اصیل باشد بایاوبسنده است که دستگاه (۱) غیر از صفر جوابهای دیگری نیز داشته باشد. پس بنابر ۱۰.۲.۱۱ باید داشته باشیم $\det[\alpha_{ij}] = 0$ و در نتیجه قسمت (II) نیز ثابت می‌شود.

۴.۴.۱۶- دترمینان‌ماتریس $[\alpha_{ij}]$ را **مبین** f(یا‌ـبین‌فرم‌درجه‌دوم‌وابسته‌به f) نسبت به پایهٔ $(e_1 \ , \ e_2 \ , \ \ldots \ , \ e_n)$ می‌نامند. گرچه مقدار این دترمینان به پایهٔ انتخاب شده بستگی دارد ولی بنابر ۳.٤.۱۶ ، صفر و یا مخالف با صفر بودن این دترمینان یک ویژگی ذاتی f می‌باشد.

۵.٤.۱۶- چنانچه f یک فرم دو خطی متقارن روی E باشد ، به کمک مطالب زیر می‌توان مطالعه f راهمواره به مطالعه یک فرم دو خطی متقارن اصیل منجر ساخت.

فرض می‌کنیم N هسته f و E' فضای برداری E/N باشد. در روی E' فرم دو خطی f' را به روش زیر تعریف می‌کنیم :

برای هردو عنصر x' و y' از E' قرارمی‌دهیم : $\quad f'(x' \ , \ y') = f(x \ , \ y)$

که در آن x نماینده‌ای‌از x' و y نماینده‌ای از y' در E می‌باشد. اسکالر $f'(x' \ , \ y')$ به انتخاب این نماینده‌هابستگی ندارد. زیراهرنماینده دیگر x'(یا y') به صورت $x + x_1$ (یا $y + y_1$) است‌که درآن x_1(یا y_1) به N متعلق است. پس داریم :

$$f(x + x_1 \ , \ y + y_1) = f(x \ , \ y) + f(x \ , \ y_1) + f(x_1 \ , \ y)$$
$$+ f(x_1 \ , \ y_1) = f(x \ , \ y)$$

زیرا $f(x \ , \ y_1) = f(x_1 \ , \ y) = f(x_1 \ , \ y_1) = 0$. چون f یک فرم دو خطی متقارن روی E است به آسانی دیده می‌شود‌که f' نیز یک فرم دو خطی متقارن روی E' می‌باشد.

اکنون ثابت می‌کنیم که f' اصیل است. برای این کار فرض می‌کنیم x' عنصری از E' متعلق به هسته f' باشد. یعنی برای هرعنصر دیگر y' از E' داشته باشیم :

$$f'(x' , y')=0$$

چنانچه x نماینده‌ای از x' در E باشد برای هرعنصر z متعلق به E داریم :

$$f(x , z)=f'(x' , z')=0$$

که درآن z' سایهٔ کانونیک z در E' می‌باشد. پس $x \in N$ و بنابراین $x'=0$ یعنی f' اصیل است. f' را فرم دو خطی متقارن اصیل وابسته به f می‌گویند.

۶.٤.۱۶- قضیه - فرض می‌کنیم f یك فرم دو خطی متقارن اصیل روی E باشد.

(I) - برای‌هر x متعلق به E ،گسترش E در K که با $g_x : y \to f(x , y)$ تعریف شده است یك فرم خطی روی E می باشد.

(II) - گسترش $x \to g_x$ یك ایزومرفیسم E روی E^* است.

اثبات - حکم (I) از دو خطی بودن f نتیجه می‌شود. برای اثبات (II) فرض می‌کینم x و x' دو عنصر از E باشند. برای هرعنصر y متعلق به E داریم :

$$\begin{aligned} g_{x+x'}(y) &= f(x+x' , y)=f(x , y)+f(x' , y)=g_x(y)+g_{x'}(y) \\ &=(g_x+g_{x'})(y) \end{aligned}$$

پس $g_{x+x'}=g_x+g_{x'}$. همچنین برای هراسکالر λ داریم $g_{\lambda x}=\lambda g_x$ یعنی گسترش $x \to g_x$ خطی است.

اکنون ثابت می‌کنیم که گسترش $x \to g_x$ انژکتیو است. برای این کار کافی است ثابت کنیم که هستهٔ‌آن 0 است. اگر x عنصری از E باشد به قسمی که داشته باشیم $g_x=0$ ، برای هر y متعلق به E خواهیم داشت :

$$f(x , y)=g_x(y)=0$$

و از آنجا نتیجه می‌شود $x=0$ زیرا f اصیل است.

فرض می کنیم $n=\dim E$ باشد. بنابر آنچه گذشت رتبهٔ گسترش خطی $x \to g_x$ برابر $n-0=n$ می‌باشد(۲.۱۱.۸). بنابراین بعد سایهٔ E بوسیله این گسترش نیز n

است (۲.۱۱.۸). چون $\dim E^{*}=n$ می‌باشد (۶.۱۲.۸) ، این سایه همان E^{*} است (۱۰.۱.۸ ، II). به این ترتیب (II) ثابت می‌شود.

۷.٤.۱٦- هنگامی‌که یک فرم دو خطی متقارن اصیل f روی E داده شده باشد ، اغلب E و E^{*} را به‌کمک ایزومرفیسم شمارهٔ ۶.٤.۱٦ (که ایزومرفیسم کانونیک گفته می‌شود) یکی می‌گیرند. به بیان دیگر هرعنصر x از E به صورت یک فرم خطی روی E ، که‌عبارت‌از فرم‌خطی $y \to f(x , y)=f(y , x)$ باشد ، درنظر گرفته می‌شود. پس اگر x و y دو عنصر از E باشند نماد $<x , y>$ می‌تواند دو معنی داشته‌باشد یکی $<g_x , y>$ ودیگری $<x , g_y>$ اما چون این اسکالرها به‌ترتیب برابر با $f(x , y)$ و $f(y , x)$ هستند پس باهم برابرند ، و درنتیجه خطر اشتباه وجود ندارد. بنابراین داریم :

$$<x , y> = <y , x> =f(x , y) =f(y , x)$$

۸.٤.۱٦- **مثال** - در فضای برداری بردارهای‌آزاد فضای معمولیE که‌در آن ضرب اسکالر معمولی تعریف شده است ، بردار $\vec{V}$ یک فرم خطی روی E است‌که با :

$$\vec{V}' \to \vec{V} \cdot \vec{V}'$$

معین شده است. به‌علاوه هرفرم خطی روی E به این روش ، و تنها به‌کمک یک بردار V از E ، به دست می‌آید.

۱٦ . ۵- بستگی‌های تعامد بالا با تعامد فصل هشتم

۱.۵.۱٦- مطالب۶.٤.۱٦ رادرنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم‌که f همواره اصیل باشد. اگر x و y دوعنصر دلخواه E باشند داریم :

(x و y نسبت به f برهم عمودند) $\Longleftrightarrow f(x , y)=0$

$\Longleftrightarrow <g_x , y>=0$

$\Longleftrightarrow$ (g_x و y به معنای‌شمارهٔ ۱.۱۵.۸ برهم‌عمودند)

چنانچه باتوجه به ۷.٤.۱٦ ، x و g_x را باهم‌یکی‌بگیریم می‌بینیم که این مفهوم تعامد ، همان مفهوم تعامد ۱.۱۵.۸ است. این مطلب درستی نام‌گذاری‌های یکسان را درهردو حالت ، آشکارمی‌سازد.

۲.۵.۱۶- باتوجه به ۹.۱۵.۸ و ۱۱.۱۵.۸ قضیه زیر به دست می‌آید:

قضیه - فرض می‌کنیم $n=\dim E$ **و** F **یك زیر فضای برداری** k **بعدی** E **باشد. دراین صورت** $F^{\perp}$ **یك زیر فضای برداری** $n-k$ **بعدی است و داریم** $(F^{\perp})^{\perp}=F$.

۳.۵.۱۶- قضیه زیر از شمارهٔ ۷.۱۳.۸ نتیجه می‌شود.

قضیه - فرض می‌کنیم $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ **پایه‌ای از** E **باشد. یك پایه** $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ **از** E **و تنها یك پایه وجود دارد به‌قسمی که‌برای هر** i **وهر** j **داریم** $f(e_i, e_j^*)=\delta_{ij}$.

۴.۵.۱۶-پایهٔ $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ را **پایهٔ دوآل** $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ (نسبت به f یانسبت به فرم درجه دوم‌وابسته‌به f) می‌گویند. ازطرفی به‌کمک ۷.۴.۱۶ می‌توان این پایه دوآل را با پایه دوآل $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ به معنای ۸.۱۳.۸ یکی گرفت. پایهٔ $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ نیز پایه دوآل $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ می‌باشد.

۵.۵.۱۶- **مثال** - درفضای معمولی یک مبدأ و ضرب اسکالر معمولی را درنظر میگیریم و فرض می‌کنیم $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ و $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$ دو پایهٔدوآل باشند. بردار $\vec{e}_1^*$ بربردارهای $\vec{e_2}$ و $\vec{e_3}$ عمود است و با $\vec{e_1}$ یک زاویهٔ کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ می‌سازد، زیرا $\vec{e_1}\cdot\vec{e}_1^*=1>0$. بااستدلالی مشابه برای $\vec{e_2}$ و $\vec{e_3}$ دیده می‌شود که دستگاه نیم خطهای پدیدآمده به وسیلهٔ $\vec{e_1}$، $\vec{e_2}$ و $\vec{e_3}$ ودستگاه نیم‌خطهای پدید آمده به وسیله $\vec{e}_1^*$، $\vec{e}_2^*$ و $\vec{e}_3^*$ دوسه وجهی متمم تشکیل می‌دهند.

۱۶ . ۶- پایه‌های متعامد

۱.۶.۱۶- فرض می‌کنیم f یک فرم دو خطی متقارن روی E و q فرم درجه دوم وابسته به‌آن باشد. خانواده (e_i) از بردارهای E را(نسبت به f یا نسبت به q) **متعامد** می‌گوئیم هرگاه بردارهای e_i دو به دو برهم عمود باشند. این خانواده را (نسبت به f

یا نسبت به q) **یکه‌ای متعامد** (ارتونرمال) می‌نامیم هرگاه این خانواده متعامد باشد و به علاوه برای هر i داشته باشیم $f(e_i, e_i) = ۱$.

۲.۶.۱۶- قضیه - برای هر فرم دو خطی متقارن f روی E پایه‌های متعامدی وجود دارد.

اثبات - درحالتی‌که $\dim E = ۱$ باشد قضیه آشکار است.

فرض می‌کنیم $\dim E$ برابر با n وقضیه برای فضاهای $n - ۱$ بعدی ثابت شده باشد.

حالت اول: در E دست‌کم یک بردار غیر ایزوتروپ $x_۰$ وجود دارد. مجموعهٔ بردارهای x متعلق به E را به قسمی‌که $f(x_۰, x) = ۰$ باشد H می‌نامیم. چون $f(x_۰, x_۰) \neq ۰$ می‌باشد، پس H یک هیپرپلان است(۱۰.۱۰.۸) و داریم $x_۰ \notin H$. بنابراین $\dim H = n - ۱$ پس‌بنابه‌فرض‌بازگشت‌یک‌پایهٔ متعامد $(e_۱, e_۲, \ldots, e_{n-۱})$ برای H وجود دارد. دراین صورت بنابر ۸.۷.۸ بردارهای $e_۱$، $e_۲$، ...، $e_{n-۱}$، $x_۰$ نابستگی خطی دارند ودرنتیجه یک پایه E را تشکیل میدهند. روشن است‌که این پایه متعامد است.

حالت دوم: کلیهٔ‌بردارهای E ایزوتروپ هستند، به بیان دیگر برای هر x داریم $q(x) = ۰$. بنابر شماره ۳.۲.۱۶ داریم $f = ۰$ و درنتیجه هرپایه‌ای از E متعامد است.

۳.۶.۱۶- قضیه - فرض می‌کنیم $(e_۱, e_۲, \ldots, e_n)$ یک‌پایهٔ‌متعامد E نسبت به f باشد و قرار می‌دهیم:

$$f(e_۱, e_۱) = \alpha_۱ \quad , \quad f(e_۲, e_۲) = \alpha_۲, \ldots, f(e_n, e_n) = \alpha_n$$

(I) - برای بردارهای دلخواه $\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i e_i$ و $\sum_{j=۱}^{n} \mu_j e_j$ متعلق به E داریم:

$$f\left(\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i e_i \ , \ \sum_{j=۱}^{n} \mu_j e_j \right) = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \lambda_i \mu_i$$

(II) - هستهٔ f برابر با زیر فضای برداری پدیدآمده به وسیله e_i هایی است‌که برای آنها داریم $\alpha_i = ۰$.

(III) - برای اینکه f اصیل باشد بایاوبسنده است که برای هر اندیس i داشته باشیم $\alpha_i \neq 0$.

اثبات - داریم :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \ , \ \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \mu_j f(e_i , e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i f(e_i , e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \mu_i$$

به این ترتیب قسمت (I) ثابت می‌شود. بنابر ۳.۴.۱۶ برای اینکه $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ متعلق به هستهٔ f باشد بایاوبسنده است که داشته باشیم :

$$\alpha_1 \lambda_1 = \cdots = \alpha_n \lambda_n = 0$$

یعنی برای هر i به طوری که $\alpha_i \neq 0$ باشد داشته باشیم $\lambda_i = 0$. بدین ترتیب (II) ثابت می‌شود. قسمت (III) را می‌توان از (II) نتیجه گرفت.

۴.۶.۱۶- **مثال پایه‌های متعامد** - چنانچه فضای معمولی وضرب اسکالرمعمولی را درنظر بگیریم سه بردار مخالف با صفر $\vec{V}$ و $\vec{V}'$ و $\vec{V}''$ که دو به دو برهم عمود باشند یک پایهٔ متعامد تشکیل می‌دهند. اگر به علاوه :

$$|\vec{V}| = |\overrightarrow{V'}| = |\overrightarrow{V''}| = 1$$

باشد این پایه یکه‌ای متعامد است. همچنین درفضای $\mathbf{K}^n$ وقتی ضرب اسکالرکانونیک (۴.۱.۱۶) را درنظربگیریم پایهٔ کانونیک یک پایه یکه‌ای متعامد می‌باشد.

۵.۶.۱۶- چنانچه $(e_1 , e_2 , \ldots , e_p)$ یک خانواده یکه‌ای متعامد باشد، بردارهای e_1 ، e_2 ، ... ، e_p نابستگی خطی دارند. زیرا اگر اسکالرهای λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_p به قسمی باشند که داشته باشیم $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p = 0$ خواهیم داشت :

$$0 = f(e_i , \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p) = \lambda_i f(e_i , e_i) = \lambda_i$$

و چون این بستگی برای هر i برقرار است پس حکم ثابت است. بویژه اگر شمار p برابر

با بعد E باشد ، $(e_1 , \dots , e_p)$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد E خواهد بود .

۶.۶.۱۶- فرض می‌کنیم $(e_1 , e_2 , \dots , e_n)$ یک پایه یکه‌ای متعامدباشد . بنابر ۳.۶.۱۶ اگر x برداری از E باشد اسکالرهای $f(x , e_1)$ ، ... ، $f(x , e_n)$ آراینده‌های x نسبت به پایهٔ $(e_1 , e_2 , \dots , e_n)$ می‌باشند .

۱۶ . ۷- حالتی که هیأت پایه هیأت شمارهای مختلط است

دراینجا فرص می‌کنیم که $K = C$ باشد .

۱۶ .۷ .۱- چنانچه f یک فرم دو خطی متقارن روی E باشد ، بنابر ۲.۶.۱۶ یک پایهٔ متعامد $(e'_1 , e'_2 , \dots , e'_n)$ وابسته به f در E وجود دارد. اگر قرار دهیم $f(e'_i , e'_i) = \alpha_i$ با تعویض شماره گذاری e'_i ها می‌توان فرض کرد :

$$\alpha_1 \neq 0 , \dots , \alpha_r \neq 0 \qquad , \qquad \alpha_{r+1} = \cdots = \alpha_n = 0$$

(r ممکن استبرابربا n ویابرابر ۰ باشد) . یکی‌از ریشه‌های‌دوم α_i را $\sqrt{\alpha_i}$ می‌نامیم و قرار می‌دهیم :

$$e_1 = \frac{e'_1}{\sqrt{\alpha_1}} \ , \ e_2 = \frac{e'_2}{\sqrt{\alpha_2}} \ , \dots , \ e_r = \frac{e'_r}{\sqrt{\alpha_r}}$$

$$e_{r+1} = e'_{r+1} \ , \dots , \ e_n = e'_n$$

دراین صورت $(e_1 , e_2 , \dots , e_n)$ نیز یک پایه متعامد E است ، و به علاوه برای $1 \leqslant i \leqslant r$ داریم :

$$f(e_i , e_i) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} f(e'_i , e'_i) = \frac{\alpha_i}{\alpha_i} = 1$$

پس بنابر ۳.۶.۱۶ می‌توان نوشت :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \ , \ \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i$$

۱۶ .۷ .۲- اگر f فرمی اصیل باشد از شمارهٔ ۳.۶.۱۶ نتیجه می‌شود $r = n$. بنابراین داریم :

قضیه - اگر f یك فرم دو خطی متقارن‌اصیل‌روی یك فضای برداری مختلط باشد ، برای f پایه‌های یکه‌ای متعامد وجود دارد.

۳.۷.۱۶- چنانچه $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ چنین پایه‌ای باشد نسبت به آن داریم :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \,,\; \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$$

و فرم درجه دوم وابسته به آن با معادله زیر معین می‌شود :

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

بدین ترتیب دیده می‌شود که در روی یک فضای برداری مختلط n بعدی با تقریب یک ایزومرفیسم ، تنها یک فرم درجه دوم اصیل وجود دارد.

۴.۷.۱۶- باتوجه‌به‌فرضهای‌شمارهٔ ۳.۷.۱۶ دیده می‌شود که مثلاً بردار $e_1 + ie_2$ ایزوترپ است.

۸.۱۶- حالتی‌که هیأت پایه هیأت‌شمارهای حقیقی است

دراینجا فرض می‌کنیم که $K = \mathbf{R}$ باشد.

۱.۸.۱۶- **تعریف - فرض‌می‌کنیم E یک فضای برداری حقیقی باشد. فرم دوخطی‌متقارن f روی E را مثبت می‌گوییم‌هرگاه برای هر x متعلق به‌Eداشته باشیم** $f(x, x) \geqslant 0$.

همچنین فرم درجه دوم q روی E را **مثبت** می‌گوییم هرگاه برای هر x متعلق به E داشته باشیم $q(x) \geqslant 0$.

با روشی مشابه فرم‌های **منفی** تعریف می‌شوند.

۲.۸.۱۶- **مثال** - ضرب اسکالر معمولی یک فرم دو خطی متقارن مثبت است.

۳.۸.۱۶- **قضیه-فرض‌می‌کنیم f یک فرم دوخطی متقارن مثبت‌روی E باشد. برای هر x و y متعلق به E داریم :**

$$f(x, y)^2 \leqslant f(x, x) f(y, y)$$

اثبات ـ برای هر λ متعلق به $\mathbf{R}$ می‌توان نوشت :

$$f(x+\lambda y\,,\,x+\lambda y) \geqslant 0$$

و یا :

$$\lambda^2 f(y\,,\,y) + 2\lambda f(x\,,\,y) + f(x\,,\,x) \geqslant 0 \qquad (1)$$

اگر $f(y\,,\,y)=0$ باشد ، برای اینکه نابرابری (۱) به‌ازای هرمقدار λ برقرار باشدباید داشته باشیم $f(x\,,\,y)=0$ ، و قضیه دراین حالت برقرار است.

اگر $f(y\,,\,y)>0$ باشد ، نابرابری (۱) نمی‌تواند برای هرمقدار λ برقرار باشد مگر اینکه مبین طرف اول منفی یا برابر باصفر باشد یعنی داشته باشیم :

$$f(x\,,\,y)^2 - f(x\,,\,x)f(y\,,\,y) \leqslant 0$$

که دراین صورت نیز قضیه برقرار است.

۱۶ . ۸ . ٤- قضیه - اگر f یک فرم دو خطی متقارن مثبت روی E باشد، برای هر x و هر y متعلق به E داریم :

$$\sqrt{f(x+y\,,\,x+y)} \leqslant \sqrt{f(x\,,\,x)} + \sqrt{f(y\,,\,y)}$$

اثبات - باتوجه به فرض می‌توان نوشت :

$$f(x+y\,,\,x+y) = f(x\,,\,x) + 2f(x\,,\,y) + f(y\,,\,y)$$

که بنابر ۱۶ . ۸ . ۳ این مقدارکوچکتر و یا برابر است با :

$$f(x\,,\,x) + 2\sqrt{f(x\,,\,x)\,f(y\,,\,y)} + f(y,y) = \left(\sqrt{f(x\,,\,x)} + \sqrt{f(y\,,\,y)}\right)^2$$

و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۱۶ . ۸ . ٥- **مثال** - چنانچه f ضرب اسکالر معمولی باشد از شماره‌های ۱۶ . ۸ . ۳ و ۱۶ . ۸ . ٤ نابرابریهای :

$$(\vec{V} \cdot \vec{V'})^2 \leqslant |\vec{V}|^2\,|\vec{V'}|^2$$

$$|\vec{V} + \vec{V'}| \leqslant |\vec{V}| + |\vec{V'}|$$

به دست می‌آید.

۱۶ . ۸ . ٦- قضیه - هستهٔ یک‌فرم دو خطی متقارن مثبت f عبارت است از مجموعهٔ بردارهایی که برای f ایزوترپ می‌باشند.

اثبات - فرض می‌کنیم N هستهٔ f باشد. آشکاراست که هربردار x متعلق به N ایزوترپ است. به وارون فرض می‌کنیم $f(x, x) = ۰$ باشد. بنابر ۳.۸.۱۶ برای هر y در E داریم:

$$۰ \leqslant f(x, y)^۲ \leqslant f(x, x)f(y, y) = ۰$$

پس $f(x, y) = ۰$ و درنتیجه $x \in N$ است.

۷.۸.۱۶- نتیجه - فرض می‌کنیم f یک فرم دوخطی متقارن مثبت اصیل روی E باشد.

(I) - تنها بردار ایزوترپ بردار ۰ است.

(II) - اگر F یک زیر فضای برداری E و g تحدید f به F باشد g مثبت و اصیل است.

زیرا قسمت (I) به آسانی از شمارهٔ ۶.۸.۱۶ به دست می‌آید، به علاوه اگر x برداری از F باشد که برای g ایزوترپ است، x برای f نیز ایزوترپ می‌باشد. پس بنابر ۶.۸.۱۶ فرم g اصیل است.

۸.۸.۱۶- قضیه - چنانچه f یک فرم دو خطی متقارن مثبت باشد، پایه‌های متعامدی از E مانند $(e_1, e_۲, \dots, e_n)$ وجود دارد به قسمی که داشته باشیم:

$$f(e_1, e_1) = \cdots = f(e_r, e_r) = ۱ \quad و \quad f(e_{r+1}, e_{r+1}) = \cdots = f(e_n, e_n) = ۰$$

اثبات - بنابر ۲.۶.۱۶ برای E یک پایه متعامد $(e'_1, e'_۲, \dots, e'_n)$ می‌توان یافت. فرض می‌کنیم $f(e'_i, e'_i)$ α_i چون f مثبت است داریم $\alpha_i \geqslant ۰$. باانتخاب شماره‌گذاری مناسبی برای e'_i ها، می‌توان فرض کرد:

$$\alpha_1 > ۰, \dots, \alpha_r > ۰ \quad و \quad \alpha_{r+1} = \cdots = \alpha_n = ۰$$

اکنون اگر قرار دهیم:

$$e_i = \frac{e'_i}{\sqrt{\alpha_i}} \quad , \quad (۱ \leqslant i \leqslant r \text{ برای})$$

$$و \qquad e_i = e'_i \quad , \quad (r + ۱ \leqslant i \leqslant n \text{ برای})$$

بردارهای e_i تمام خواسته‌های قضیه را دارا می‌باشند.

۹.۸.۱۶- قضیه - فرض می‌کنیم f یك فرم دو خطی متقارن مثبت و اصیل باشد. همواره می‌توان برای f پایه‌های یکه‌ای متعامد یافت.

اثبات - بااستفاده از شماره ۸.۸.۱۶ و با توجه به اینکه f اصیل است، از شماره ۳.٦.۱٦ نتیجه می‌شود که باید داشته باشیم $r=n$.

۱۰.۸.۱٦- نسبت به پایهٔ یکه‌ای متعامد $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ داریم:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\ ,\ \sum_{j=1}^{n}\mu_j e_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i$$

و اگر فرم درجه دوم وابسته به f را q بنامیم خواهیم داشت:

$$q\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

بنابراین، با تقریب یک ایزومرفیسم، درروی یک فضای برداری حقیقی n بعدی تنها یک فرم درجه دوم مثبت و اصیل وجود دارد.

۱۱.۸.۱٦- درحالت ضرب اسکالر معمولی، درستی قضیه ۹.۸.۱٦ کاملاً آشکار است.

۱۲.۸.۱٦- فرض می‌کنیم f یک فرم دوخطی متقارن مثبت و اصیل و $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ یک‌خانواده‌یکه‌ای متعامد باشد. دراین صورت بردارهایی مانند e_{r+1} ، e_{r+2} ، ... ، e_n می‌توان یافت به قسمی که $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یک پایه یکه‌ای متعامد باشد. برای اثبات فرض می‌کنیم که F زیر فضای برداری پدید آمده به وسیلهٔ $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ باشد. بنابر ۵.٦.۱٦ خانوادهٔ $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد برای F است. پس بنابر شمارهٔ ۷.۸.۱٦ ، (I) داریم $F\cap F^{\perp}=\{0\}$ ، و درنتیجه خواهیم داشت:

$$\dim(F+F^{\perp})=\dim F+\dim F^{\perp}$$

بنابراین $\dim(F+F^{\perp})=\dim E$ (شمارهٔ ۲.۵.۱٦) ، یعنی $F+F^{\perp}=E$. بنابر

شماره‌های ۷.۸.۱۶ ، (II) و ۹.۸.۱۶ برای $F^{\perp}$ یک پایه یک‌ه‌ای متعامد مانند $(e_{r+1} , \dots , e_n)$ وجود دارد. پس $(e_1 , e_2 , \dots , e_n)$ یک پایه یکه‌ای متعامد برای E می‌باشد.

۱۳.۸.۱۶- قضیه - اگر f یك فرم دو خطی متقارن باشد، پایه‌های متعامدی مانند $(e_1 , e_2 , \dots , e_n)$ برای E می‌توان یافت به قسمی که :

$$f(e_1 , e_1) = \cdots = f(e_s , e_s) = 1$$

$$f(e_{s+1} , e_{s+1}) = \cdots = f(e_{s+t} , e_{s+t}) = -1$$

$$f(e_{s+t+1} , e_{s+t+1}) = \cdots = f(e_n , e_n) = 0$$

اثبات - بنابر شمارهٔ ۲.۶.۱۶ پایهٔ متعامدی مانند $(e'_1 , e'_2 \dots , e'_n)$ وجود دارد. اگر $f(e'_i , e'_i) = \alpha_i$ باشد، با شماره‌گذاری مناسب e'_i ها می‌توان فرض کرد :

$$\alpha_1 > 0 , \dots , \alpha_s > 0 \quad \text{و} \quad \alpha_{s+1} < 0 , \dots , \alpha_{s+t} < 0$$

$$\alpha_{s+t+1} = 0 , \dots , \alpha_n = 0$$

اکنون قرار می‌دهیم :

$$e_i = \frac{e'_i}{\sqrt{\alpha_i}} \quad , \quad (\text{برای } 1 \leqslant i \leqslant s)$$

$$e_i = \frac{e'_i}{\sqrt{-\alpha_i}} \quad , \quad (\text{برای } s+1 \leqslant i \leqslant s+t)$$

$$e_i = e'_i \quad , \quad (\text{برای } s+t+1 \leqslant i \leqslant n)$$

درآن صورت بردارهای e_i کلیهٔ خواسته‌های قضیه را دارا می‌باشند.

۱٤.۸.۱۶- نسبت به پایه‌ای که دارای ویژگیهای ۱۳.۸.۱۶ باشد داریم :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \, , \, \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mu_i - \sum_{i=s+1}^{s+t} \lambda_i \mu_i$$

دراین صورت برای‌فرم‌درجه دوم q وابسته به f خواهیم داشت :

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} \lambda_i^2$$

۱۰.۸.۱۶- قضیه - در قضیه ۱۳.۸.۱۶ شمارهای درست s و t تنها به فرم f بستگی دارند نه به انتخاب پایهٔ متعامد.

اثبات ـ فرض می‌کنیم (e_i) و $(\bar{e}_i)$ دو پایه از E باشند به قسمی که:

$$q\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\Big)=\lambda_1^2+\cdots+\lambda_s^2-\lambda_{s+1}^2-\cdots-\lambda_{s+t}^2 \quad ,$$

$$q\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \bar{e}_i\Big)=\lambda_1^2+\cdots+\lambda_{\bar{s}}^2-\lambda_{\bar{s}+1}^2-\cdots-\lambda_{\bar{s}+\bar{t}}^2$$

باید ثابت کنیم که $s=\bar{s}$ و $t=\bar{t}$ است. دو زیرفضای برداری F و G از E را که به صورت زیر تعریف شده‌اند درنظر می‌گیریم:

$$F=\mathbf{R}e_1+\mathbf{R}e_2+\cdots+\mathbf{R}e_s \quad ,$$

$$G=\mathbf{R}\bar{e}_{\bar{s}+1}+\mathbf{R}\bar{e}_{\bar{s}+2}+\cdots+\mathbf{R}\bar{e}_n$$

چون داریم $q\Big(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i e_i\Big)=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i^2$ ، پس تحدید q به F مثبت و اصیل است. به روشی مشابه دیده می‌شود که تحدید q به G منفی است. بنابراین اگر $x\in F\cap G$ باشد داریم $q(x)\geqslant 0$ و $q(x)\leqslant 0$ ، یعنی $q(x)=0$. پس بنابر ۷.۸.۱۶ ، (I) داریم $x=0$ و درنتیجه $F\cap G=\{0\}$. از این مطلب نتیجه می‌شود که:

$$\dim F+\dim G\leqslant \dim E$$

یعنی

$$s+(n-\bar{s})\leqslant n$$

و از آنجا $s\leqslant \bar{s}$. با تعویض نقش‌های (e_i) و $(\bar{e}_i)$ خواهیم داشت $\bar{s}\leqslant s$. بنابراین $s=\bar{s}$. همچنین با تعویض f به $-f$ دیده می‌شود که $t=\bar{t}$ است.

۱۶.۸.۱۶- چنانچه درقضیهٔ بالا فرم f را اصیل بگیریم خواهیم داشت $s+t=n$ (شمارهٔ ۳.۶.۱۶).

۱۷.۸.۱۶- جفت $(s\ ,\ t)$ را که در شمارهٔ ۱۳.۸.۱۶ معین گردید، **نشان f** و یا q می‌نامند.

۱۸.۸.۱٦- مثلاً فضای نسبیت خصوصی یک فضای آفین حقیقی چهار بعدی است به قسمی که فضای برداری E وابسته به‌آن از یک فرم درجه دوم که نشان آن (۱ , ۳) است برخوردار می‌باشد. پس پایه‌ای مانند (e_1 , e_2 , e_3 , e_4) در E وجود دارد به طوری که برای شمارهای حقیقی و دلخواه λ_1 ، λ_2 ، λ_3 ، λ_4 داشته باشیم :

$$q(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_4^2$$

دراین فضا بردار x رادر حالتهای $q(x) > 0$, $q(x) < 0$ و $q(x) = 0$ به ترتیب بردار فضا ، بردار زمان و بردار نور می‌نامند.

۱٦ . ۹. آدژوئن

باردیگر به حالت‌هیأت دلخواه **K** که مشخص آن مخالف با ۲ است برمی‌گردیم.

۱.۹.۱٦- قضیه - فرض می‌کنیم f یک فرم دو خطی متقارن اصیل روی E باشد. برای هرعنصر u از $\mathscr{L}(E , E)$ یک عنصر دیگر v از $\mathscr{L}(E , E)$ و تنها یکی وجود دارد به قسمی که برای هرعنصر x و هر عنصر y متعلق به E داشته باشیم :

$$f(u(x) , y) = f(x , v(y))$$

اثبات - می‌دانیم که یک گسترش خطی u' و تنها یکی از E^* در E^* وجود دارد به قسمی که برای هر x متعلق به E و هر y' متعلق به E^* داریم :

$$<u(x) , y'> = <x , u'(y')>$$

(u' همان ترانسپوزه u می‌باشد). پس برای اثبات قضیه کافی است ایزومرفیسم E^* روی E را که به وسیلهٔ f معین شده است بکار بریم (٦.٤.۱٦).

۲.۹.۱٦- تعریف - گسترش خطی v شمارهٔ ۱.۹.۱٦ را آدژوئن u (نسبت به f) می‌نامند و آنرا به صورت u^* می‌نمایند.

۳.۹.۱٦- بنابراین برای عنصرهای دلخواه x و y متعلق به E داریم :

$$f(u(x) , y) = f(x , u^*(y))$$

کلیه ویژگیهای ترانسپوزه را می‌توان به صورت ویژگیهای آدژوئن بیان نمود.

۱۶.۹.۴- اگر u و v عنصرهایی از $\mathscr{L}(E, E)$ و λ یک اسکالر باشد، بنابر شماره‌های ۸.۱۶.۵ و ۸.۱۶.۶ و ۸.۱۶.۹ داریم:

$$(u+v)^*=u^*+v^* \;,\; (\lambda u)^*=\lambda u^* \;,\; (uv)^*=v^*u^* \;,\; u^{**}=u$$

۱۶.۹.۵- بنابر ۸.۱۶.۷ اگر u وارون‌پذیر باشد u^* نیز وارون پذیر است وداریم $(u^*)^{-1}=(u^{-1})^*$.

۱۶.۹.۶- بنابر ۸.۱۶.۱۱ گسترشهای u و u^* هردو دارای یک‌رتبه می‌باشند.

۱۶.۹.۷- بنابر ۱۰.۶.۱۳ داریم $\det(u^*)=\det(u)$.

۱۶.۹.۸- **قضیه - اگر زیرفضای برداری F از E به وسیله u پایدار باشد $F^{\perp}$ به وسیله u^* پایدار است.**

اثبات - فرض می‌کنیم x عنصری از $F^{\perp}$ باشد. باید ثابت کنیم که:

$$u^*(x) \in F^{\perp}$$

به گفته دیگر باید ثابت کنیم که برای هرعنصر y از F داریم $f(y\,,\,u^*(x))=0$. اما می‌دانیم که $f(y\,,\,u^*(x))=f(u(y)\,,\,x)$، و چون F به وسیله u پایدار است پس داریم $u(y)\in F$ بنابراین $u(y)$ بر x عمود است.

۱۶.۹.۹- بنابر۹.۶.۲ اگر M ماتریس u نسبت به‌پایهٔ $(e_1\,,\,e_2\,,\,\dots\,,\,e_n)$ باشد، ${}^tM$ ماتریس u^* نسبت به پایهٔ دوآل $(e_1^*\,,\,e_2^*\,,\,\dots\,,\,e_n^*)$ خواهد بود. به‌ویژه اگر M ماتریس u نسبت به یک پایهٔ یکه‌ای متعامد $(e_1\,,\,e_2\,,\,\dots\,,\,e_n)$ باشد، ${}^tM$ ماتریس u^* نسبت به همان پایهٔ $(e_1\,,\,e_2\,,\,\dots\,,\,e_n)$ خواهد بود.

۱۶.۹.۱۰- **مثال** - در K^n فرم درجهٔ دوم کانونیک q یعنی:

$$q((\lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\,\dots\,,\,\lambda_n))=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2$$

را درنظر می گیریم (۱۶.۲.۶) و فرض می کنیم u عنصری از $\mathscr{L}(K^n\,,\,K^n)$ باشد. اگرماتریس u نسبت به پایه کانونیک را M بنامیم ماتریس u^* نسبت به همین پایه برابر با ${}^tM$ خواهدبود (۱۶.۶.۴ و ۱۶.۹.۹).

۱۶ . ۱۰-گروه متعامد

فضای برداری E و فرم دو خطی متقارن و اصیل f را روی آن درنظر می گیریم:

۱.۱۰.۱۶- قضیه - اگر عنصر u متعلق به $\mathscr{L}(E , E)$ باشد شرایط زیر هم‌ارزند :

(I) - **برای هر x و هر y متعلق به E داریم** $f(u(x) , u(y))=f(x , y)$.

(II) - **برای هر x متعلق به E داریم** $f(u(x) , u(x))=f(x , x)$.

(III) - $u^*u=id_E$.

(IV) - $uu^*=id_E$.

(V) - **u وارون پذیر است و داریم** $u^{-1}=u^*$.

اثبات - (I) $\Longleftarrow$ (II) : فرض می‌کنیم شرط (II) برقرار باشد. گسترشهای $(x , y) \to f(x , y)$ و $(x , y) \to f(u(x) , u(y))$ که فرمهایی دوخطی و متقارن هستند هردو دارای یک فرم درجه دوم وابسته می‌باشند بنابراین باهم برابرند (۳.۲.۱۶).

(III) $\Longleftarrow$ (I) : فرض می‌کنیم‌شرط (I) برقرار باشد. بنابر ۳.۹.۱۶ می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت :

$$f(u^*u(x) , y)=f(x , y)$$

بنابراین $u^*u(x)-x$ برهر بردار y از E عمود است و در نتیجه چون f اصیل است، بردار $u^*u(x)-x$ برابر با صفر است. پس برای هر x متعلق به E داریم :

$$u^*u(x)=x$$

(II) $\Longleftarrow$ (III) : فرض می‌کنیم شرط (III) برقراراست. دراین صورت‌به‌ازای هر x در E داریم :

$$f(u(x) , u(x))=f(u^*u(x) , x)=f(x , x)$$

به این ترتیب (I) و (II) و (III) هم‌ارزند. از طرف دیگر بنابر ۴.۱۱.۸ شرایط (III) و (IV) و (V) هم‌ارز می‌باشند.

۲.۱۰.۱۶- تعریف - هر گسترش خطی E در E را که مانند u درشرایط قضیه ۱.۱۰.۱۶ . صدق کند یک گسترش متعامد (نسبت به f) می‌گویند.

۳.۱۰.۱۶- قضیه - اگر G مجموعه‌گسترشهای خطی متعامد E در E باشد، G زیر گروهی است ازگروه GL(E) (شمارهٔ ۳.۴.۸).

اثبات ـ بنابر شرط (V) شمارهٔ ۱.۱۰.۱۶ داریم $G \subset GL(E)$. فرض می‌کنیم u_1 و u_2 عنصرهای دلخواهی از G باشند. با بکار بردن شرط (I) شماره ۱.۱۰.۱۶ به آسانی دیده می‌شود که $u_1u_2 \in G$ و $u_1^{-1} \in G$.

۴.۱۰.۱۶- تعریف - گروه G بالا را گروه متعامد فرم f می‌نامند.

در فضای برداری حقیقی چهار بعدی، گروه متعامد فرمی با نشان (۱ و ۳) را گروه لورنتس می‌نامند.

۵.۱۰.۱۶- اگر u عنصری از G باشد داریم $u^* \in G$ زیرا $u^* = u^{-1}$.

۶.۱۰.۱۶- قضیه - اگر $u \in G$ باشد داریم $\det u = \pm 1$.

اثبات - چون داریم $uu^* = id_E$ پس بنابر شماره‌های ۴.۵.۱۰ و ۶.۵.۱۰ و ۷.۹.۱۶ خواهیم داشت:

$$1 = \det(id_E) = \det(uu^*) = (\det u)(\det u^*) = (\det u)^2$$

در نتیجه:
$$(\det u - 1)(\det u + 1) = 0$$

۷.۱۰.۱۶- تعریف - عنصرهایی از G را که دترمینانشان برابر با یک است چرخش (نسبت به f) می‌نامند.

اگر $K = \mathbf{R}$ باشدچرخش‌ها اتومرفیسمهایی از E هستند که f و سوی E را پایدار نگهمیدارند (۶.۱۱.۱۰).

اگر مبداء فضای معمولی را O بنامیم، چرخش‌ها نسبت‌به ضرب‌اسکالر معمولی‌همان ترانسفورماسیون‌هایی هستند که معمولا چرخش به‌دور O نامیده می‌شوند. تقارن نسبت به O ضرب اسکالر را پایدار نگهمیدارد اما سوی‌فضا را عوض می‌کند، در نتیجه‌عنصری است از G ولی یک چرخش نیست.

۸.۱۰.۱۶- قضیه - فرض می‌کنیم برای f یك پایهٔ یکه‌ای متعامد $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ وجود داشته و u یك‌گسترش خطی E در E باشد. دراین صورت شرایط زیر هم‌ارزند:

(I) - u **متعامد است.**

(II) - $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ **یك پایهٔ یکه‌ای متعامداست.**

(III) - $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ **یک خانواده یکه‌ای متعامد است.**

اثبات - از شرط (I) شمارهٔ ۱.۱۰.۱۶ نتیجه می‌شود که $(III) \Longleftarrow (I)$ و از شماره ۵.۶.۱۶ نتیجه می‌شود که $(II) \Longleftarrow (III)$. برای اثبات اینکه $(I) \Longleftarrow (II)$ فرض می‌کنیم $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد E و $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ برداری از E باشد. بنابر ۳.۶.۱۶ داریم :

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

به علاوه :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i)$$

بنابراین از فرض قضیه و شمارهٔ ۳.۶.۱۶ نتیجه می‌شود :

$$f(u(x), u(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

پس $f(u(x), u(x)) = f(x, x)$ یعنی u متعامد است(شرط (II) شمارهٔ ۱.۱۰.۱۶).

۹.۱۰.۱۶- فرض می‌کنیم $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ و $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ دو پایهٔ یکه‌ای متعامد E باشند. در آن صورت داریم :

$$\det_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}(f_1, f_2, \dots, f_n) = \pm 1$$

زیرا اگر u گسترش خطی E در E باشد به قسمی که :

$$u(e_1) = f_1, \dots, u(e_n) = f_n$$

u یک گسترش متعامد است (۸.۱۰.۱۶) و بنابراین $\det u = \pm 1$ (شمارهٔ ۶.۱۰.۱۶).

اما بنابر ۳.۵.۱۰ داریم :

$$\det u = \det_{(e_1, \dots, e_n)}(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

۱۶ . ۱۱ـ ماتریسهای متعامد

۱.۱۱.۱۶ـ قضیه - اگر M ماتریسی از رستهٔ (n, n) با عنصرهای متعلق به K باشد شرایط زیر هم‌ارزند:

$$ {}^tM \cdot M = I_n \quad \text{- (I)} $$

$$ M \cdot {}^tM = I_n \quad \text{- (II)} $$

(III) - M وارون پذیر است و $M^{-1} = {}^tM$

به علاوه اگر ضرب اسکالر کانونیک $\mathbf{K}^n$ را درنظر بگیریم هریک از شرطهای بالا هم‌ارز هریک از شرطهای زیر است:

(IV) - ستونهای M یك خانواده یکه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند.

(V) - سطرهای M یك خانواده یکه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند.

اثبات - اگرعنصروابسته به M از $\mathscr{L}(K^n, K^n)$ را u بنامیم عنصروابسته به ${}^tM$ از $\mathscr{L}(K^n, K^n)$ همان u^* خواهد بود (۱۰.۹.۱۶). بنابراین هم‌ارزی شرایط (I) و (II) و (III) از هم‌ارزی شرایط (III) و (IV) و (V) شماره ۱.۱۰.۱۶ نتیجه می‌شود. همچنین هم‌ارزی (I) و (IV) را از شماره ۸.۱۰.۱۶ و هم‌ارزی (II) و (V) را از هم‌ارزی (I) و (IV) با تعویض M به ${}^tM$ نتیجه می‌گیریم.

۲.۱۱.۱۶ـ تعریف - ماتریسی که در شرایط هم‌ارز ۱.۱۱.۱۶ صدق کند ماتریس متعامد نامیده می‌شود.

۳.۱۱.۱۶ـ مثال - بنابه شرط (IV) شمارهٔ ۱.۱۱.۱۶ برای اینکه ماتریس:

$$ \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} $$

متعامد باشد بایاوبسنده است که داشته باشیم:

$$ a^2 + a'^2 + a''^2 = b^2 + b'^2 + b''^2 = c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 $$

$$ ab + a'b' + a''b'' = ac + a'c' + a''c'' = bc + b'c' + b''c'' = 0 $$

و یا با توجه به شرط (V) شماره ۱.۱۱.۱۶ ، بایاوبسنده است که داشته باشیم :

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}=a'^{۲}+b'^{۲}+c'^{۲}=a''^{۲}+b''^{۲}+c''^{۲}=۱$$

$$aa'+bb'+cc'=aa''+bb''+cc''=a'a''+b'b''+c'c''=۰$$

۴.۱۱.۱۶- قضیه - فضای برداری E روی K و فرم دوخطی متقارن و اصیل f روی E داده شده‌اند. فرض می‌کنیم که یك پایه یکه‌ای متعامد $(e_1 , e_۲ , \ldots , e_n)$ برای f وجود داشته باشد. برای اینکه یك گسترش خطی E در E متعامد باشد بایاوبسنده است که ماتریس آن نسبت به پایهٔ $(e_1 , e_۲ , \ldots , e_n)$ متعامد باشد.

اثبات - اگر این گسترش خطی را u و ماتریس آنرا M بنامیم بنابر ۹.۹.۱۶ ماتریس u^* نسبت به $(e_1 , e_۲ , \ldots , e_n)$ همان ${}^tM$ خواهد بود. بنابراین داریم :

M متعامد است $\Longleftrightarrow M \cdot {}^tM=I \Longleftrightarrow uu^*=idE \Longleftrightarrow$ u متعامد است.

۵.۱۱.۱۶ - بنابر ۳.۱۰.۱۶ ماتریسهای متعامد یک زیرگروه ازگروه ماتریسهای وارون پذیر تشکیل می‌دهند.

۶.۱۱.۱۶ - بنابر ۶.۱۰.۱۶ دترمینان یك ماتریس متعامد ۱ ویا ۱ — است.

۷.۱۱.۱۶ - **مثال**- درصفحه معمولی سودارکه‌درآن یك مبداء O اختیارشده‌است پایهٔ‌یکه‌ای متعامد $(\vec{e_1} , \vec{e_۲})$ را درسوی‌مثبت انتخاب می‌کنیم. اگر u چرخشی‌به‌مرکز O و به‌زاویه φ باشد ، بنابر ۳.۲.۹ ماتریس u نسبت به $(\vec{e_1} , \vec{e_۲})$ برابراست با :

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

به‌آسانی ثابت می‌شود که این ماتریس متعامد و دترمینانش برابربا یك است .

۱۲.۱۶ـ گسترشهای خطی متقارن

۱.۱۲.۱۶ - فضای برداری E و فرم دو خطی متقارن اصیل f روی آن داده شده است .

قضیه - اگر u عنصری از $\mathscr{L}(E, E)$ باشد، شرایط زیر هم‌ارزند :

$(I) - \forall x \in E, \forall y \in E, f(u(x), y) = f(x, u(y))$

$(II) - u^* = u$

اثبات - $(I) \Longleftarrow (II)$: فرض می‌کنیم شرط (II) برقرار باشد در این‌صورت با توجه به ۳.۹.۱۶ برای هردو عنصر x و y از E داریم :

$$f(u(x), y) = f(x, u^*(y)) = f(x, u(y))$$

$II \Longleftarrow I$: فرض می‌کنیم شرط (I) برقرار باشد. بنابراین برای هردوعنصر دلخواه x و y از E داریم :

$$f(u(x), y) = f(x, u(y))$$

که باتوجه به‌تعریف u^* (شماره ۲.۹.۱۶) و ویژگی یکتایی v در قضیه ۱.۹.۱۶ نتیجه می‌شود $u^* = u$.

۲.۱۲.۱۶ - تعریف- هر گسترش خطی E در E مانند u که در شرایط ۱.۱۲.۱۶ صدق کند (نسبت به f) متقارن نامیده میشود.

۳.۱۲.۱۶ - مجموعه گسترشهای خطی متقارن E در E یک زیر فضای برداری $\mathscr{L}(E, E)$ را تشکیل می‌دهد . زیرا اگر u و v دوعنصر $\mathscr{L}(E, E)$ باشند به‌قسمی که داشته باشیم $u = u^*$ و $v = v^*$ ، برای اسکالرهای دلخواه λ و μ خواهیم داشت:

$$(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^* = \lambda u + \mu v$$

۴.۱۲.۱۶ - قضیه - فرض می‌کنیم $(e_1, \dots, e_n)$ یك پایهٔ یکه‌ای متعامد برای f و u عنصری‌از $\mathscr{L}(E, E)$ باشد. برای‌اینکه u متقارن‌باشد‌ با‌و بسنده است‌که ماتریس‌آن نسبت‌به $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ متقارن باشد.

اثبات - اگر ماتریس u را نسبت به $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ با M نشان دهیم بنابر ۹.۹.۱۶ ماتریس u^* نسبت به‌همین پایه برابر است با ${}^tM$. بنابراین :

u متقارن است $\Longleftrightarrow u = u^* \Longleftrightarrow M = {}^tM \Longleftrightarrow M$ متقارن است .

۱۶.۱۲.۵ - برای هرعنصر متقارن u از $\mathscr{L}(E, E)$ گسترش $g_u: E \times E \to K$ را به‌روش زیر معین می‌کنیم :

$$\forall x, y \in E \quad , \quad g_u(x, y) = f(ux, y)$$

آشکاراست که g_u یک فرم دوخطی روی E می‌باشد. به‌علاوه داریم :

$$g_u(y, x) = f(uy, x) = f(y, ux) = f(ux, y) = g_u(x, y)$$

پس g_u متقارن است .

قضیه - گسترش $u \to g_u$ یک گسترش دوسویی مجموعهٔ عنصرهای متقارن $\mathscr{L}(E, E)$ (نسبت به f) روی مجموعهٔ فرمهای دوخطی متقارن روی E ، می‌باشد .

اثبات - الف - ثابت می‌کنیم که این گسترش انژکتیو است. فرض می‌کنیم u و u' دو عنصر متقارن از $\mathscr{L}(E$ و $E)$ باشند وداشته باشیم $g_u = g_{u'}$ دراین صورت برای هردو عنصر x و y در E داریم :

$$f(ux, y) = g_u(x, y) = g_{u'}(x, y) = f(u'x, y)$$

چون f اصیل است از برابری‌های بالا نتیجه می‌شود که برای هر x در E داریم $ux = u'x$ وبنابراین $u = u'$.

ب - برای اثبات اینکه این گسترش سورژکتیو است فرض می‌کنیم g یک فرم دوخطی متقارن روی E باشد و ثابت می‌کنیم عنصری متقارن از $\mathscr{L}(E, E)$ مانند u وجود دارد به‌طوریکه $g = g_u$.

برای هر x متعلق به E فرم خطی $y \to g(x, y)$ روی E را با h_x می‌نماییم . بنابر ۱۶.٤.۶ ، (II) یک عنصر x' در E و تنهایکی وجود دارد به‌قسمی که برای هر $y \in E$ داشته باشیم :

$$h_x(y) = f(x', y)$$

اکنون گسترشی راکه به هر $x \in E$ عنصر x' از E راکه به‌روش بالامعین شدوابسته

می‌کند با u نشان می‌دهیم. با این تعریف برای هر x وهر y در E خواهیم داشت :

$$g(x , y)=f(ux , y) \tag{۱}$$

روشن است که :

$$h_{x_1+x_2}=h_{x_1}+h_{x_2}$$

پس بنابر ۱۶.٤.٦، (II) داریم: $(x_1+x_2)'=x_1'+x_2'$

به‌عبارت دیگر $u(x_1+x_2)=u(x_1)+u(x_2)$. همچنین دیده می‌شود که برای هر x متعلق به E و هر λ متعلق به **K** برابری $u(\lambda x)=\lambda u(x)$ برقرار است . پس u یک گسترش خطی E در E می‌باشد. به‌علاوه برای هر x و y متعلق به E داریم :

$$f(ux , y)=g(x , y)=g(y , x)=f(uy , x)=f(x , uy)$$

یعنی u (نسبت به f) متقارن است. درنتیجه از فرمول (۱) برابری $g=g_u$ بدست‌می‌آید.

فصل هفدهم

فرم‌های هرمیتی

ویژگی‌های فرم‌های هرمیتی‌شبیه‌ویژگی‌های‌فرم‌های‌دوخطی متقارن‌است. امافرم‌های هرمیتی‌بیشتر درآنالیز بکار می‌روند (بدینجهت گاهی‌فضاهای برداری‌ایکه در این‌فصل درنظر گرفته می‌شوند بعدشان بی‌پایان‌است). بطوریکه خواهیم دید بعضی از قضایای فرم‌های هرمیتی برخی‌از ویژگی‌های فرم‌های دوخطی متقارن را بدست میدهند.

دراین‌فصل همهٔ فضاهای برداری روی هیأت C درنظرگرفته شده‌اند و بعداین‌فضاها ممکن است بی‌پایان باشد.

۱.۱۷ - فرم‌های هرمیتی

۱.۱.۱۷ - تعریف - فرض می‌کنیم E یك فضای برداری روی C باشد. یك‌گسترش $E \times E$ در C مانند $(x, y) \to f(x, y)$ رایك‌فرم‌هرمیتی‌گوییم هرگاه داشته باشیم:

برای‌هر x و x' و y متعلق به‌E، $f(x+x', y)=f(x, y)+f(x', y)$ (۱)

برای‌هر x و y متعلق‌به E وهر λ متعلق‌به C، $f(\lambda x,y)=\lambda f(x, y)$ (۲)

برای‌هر x و y متعلق‌به E، $f(y, x)=\overline{f(x, y)}$ (۳)

۲.۱.۱۷ - از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود که برای عنصرهای دلخواه x و y , y' متعلق به E داریم:

$$f(x, y+y')=\overline{f(y+y', x)}=\overline{f(y, x)}+\overline{f(y', x)}$$

بنابراین: $$f(x, y+y')=f(x, y)+f(x, y') \quad (۴)$$

۳.۱.۱۷ - از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که برای هر x و y متعلق به E و هر μ متعلق به C داریم:

$$f(x , \mu y) = \overline{f(\mu y , x)} = \bar{\mu}\, \overline{f(y , x)}$$

بنابراین :

$$f(x , \mu y) = \bar{\mu} f(x , y) \qquad (۵)$$

۴.۱.۱۷ - از (۲) و (۵) نتیجه میشود که برای هر x و هر y در E داریم :

$$f(x , 0) = f(0 , y) = 0 \qquad (۶)$$

۵.۱.۱۷ - از (۳) نتیجه‌می‌شود که برای هر x متعلق به E اسکالر $f(x , x)$ حقیقی است .

۶.۱.۱۷ - از (۱) و (۲) و (۴) و (۵) نتیجه می‌شود که :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i , \sum_{j=1}^{q} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \bar{\mu}_j f(x_i , y_j) \qquad (۷)$$

که در آن $x_1 , x_2 , \ldots , x_p , y_1 , y_2 , \ldots , y_q$ عنصرهای دلخواهی از E و $\lambda_1 , \ldots , \lambda_p , \mu_1 , \ldots , \mu_q$ عنصرهای دلخواهی از C می‌باشند .

۷.۱.۱۷ - فرض می‌کنیم $(e_1 , e_2 , \ldots , e_n)$ پایه‌ای از E باشد. ماتریس n سطری و n ستونی $[\alpha_{ij}]$ را که‌در آن $\alpha_{ij} = f(e_i , e_j)$ است، **ماتریس فرم f نسبت‌به پایهٔ** $(e_1 , e_2 , \ldots , e_n)$ می‌نامند. بنابر (۳) داریم :

$$\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$$

به‌ویژه شمارهای $\alpha_{11} , \alpha_{22} , \ldots , \alpha_{nn}$ حقیقی می‌باشند .

۸.۱.۱۷ - ماتریس مختلط $[\beta_{ij}]$ از رستهٔ (n , n) را هرمیتی گوییم هرگاه برای اندیس های دلخواه i و j داشته باشیم $\beta_{ij} = \overline{\beta_{ji}}$ (مثلاً یک ماتریس متقارن حقیقی هرمیتی است) .

بنابراین می‌توان گفت که ماتریس یک فرم هرمیتی نسبت‌به‌یک پایهٔ دلخواه ، یک ماتریس هرمیتی است.

۹.۱.۱۷ - فضای برداری مختلط E و پایهٔ $(e_1 , \ldots , e_n)$ از آن داده شده‌اند. فرض می‌کنیم $\mathscr{C}$ مجموعهٔ فرمهای هرمیتی‌روی E و $\mathscr{M}$ مجموعهٔ ماتریس‌های مختلط هرمیتی از رستهٔ (n , n) باشند . اگر f عنصری از $\mathscr{C}$ باشد، ماتریس آن‌را نسبت به‌پایهٔ

$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یک گسترش $f \to M(f)$ با $M(f)$ می‌نماییم. دراین‌صورت گسترش $f \to M(f)$ یک گسترش دوسویی $\mathscr{E}$ روی $\mathscr{M}$ می‌باشد. زیرا اگر قرار دهیم $M(f) = [\alpha_{ij}]$ ، بنابر(۷) خواهیم داشت :

$$f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\lambda_i\bar{\mu}_j \tag{۸}$$

یعنی گسترش $f \to M(f)$ انژکتیو است. از طرف دیگر اگر $[\alpha_{ij}]$ را یک ماتریس هرمیتی رستهٔ (n, n) بگیریم و یک گسترش f فضای $E \times E$ در $\mathbf{C}$ را بافرمول (۸) معین کنیم ، به‌آسانی دیده می‌شود که f در دستورهای (۱) و (۲) صدق می‌کند و به‌علاوه چون $[\alpha_{ij}]$ هرمیتی است داریم :

$$(\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n, \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\mu_i\bar{\lambda}_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ji}\mu_j\bar{\lambda}_i = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\alpha}_{ij}\mu_j\bar{\lambda}_i$$

به‌طوریکه می‌بینیم این مقدار برابر با مزدوج شمار مختلط

$$f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n)$$

است. بنابراین f یک فرم هرمیتی روی E می‌باشد. به‌ویژه از فرمول (۸) نتیجه می‌شود که $f(e_i, e_j) = \alpha_{ij}$ پس $M(f) = [\alpha_{ij}]$. بنابراین گسترش نام برده سورژکتیواست .

از اینجا روش ساختن فرمهای هرمیتی روی فضاهای برداری مختلط با بعد با پایان، بدست می‌آید.

۱۰.۱.۱۷ - **مثال** - چنانچه $E = \mathbf{C}^n$ باشد گسترش:

$$((\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)) \to \lambda_1\bar{\mu}_1 + \lambda_2\bar{\mu}_2 + \cdots + \lambda_n\bar{\mu}_n$$

یک فرم هرمیتی است که آنرا **فرم هرمیتی کانونیک روی** $\mathbf{C}^n$ می‌نامند.

۱۱.۱.۱۷ - **مثال** - فرض می‌کنیم $[a,b]$ یک فاصله از $\mathbf{R}$ و E فضای برداری توابع مختلط پیوسته روی $[a,b]$ باشد. برای u, v متعلق به E قرار می‌دهیم :

$$f(u,v)=\int_a^b u(t)\overline{v(t)}dt$$

دراینصورت f یک فرم هرمیتی روی E می‌باشد.

۱۲.۱.۱۷ - قضیه - اگر f یک فرم هرمیتی روی E باشد، برای هر دوعنصر x و y متعلق به E داریم :

$$(۹)\qquad 4f(x,y)=f(x+y\,,\,x+y)-f(x-y\,,\,x-y)+if(x+iy\,,\,x+iy)-if(x-iy\,,\,x-iy)$$

اثبات - چنانچه طرف راست (۹) را به‌کمک (۱) و (۲) و (۴) و (۵) بسط دهیم خواهیم داشت :

$$\begin{array}{r}
f(x,x)+f(x,y)+f(y,x)+f(y,y)\\
-f(x,x)+f(x,y)+f(y,x)-f(y,y)\\
+if(x,x)+f(x,y)-f(y,x)+if(y,y)\\
-if(x,x)+f(x,y)-f(y,x)-if(y,y)\\
\hline
0\quad+4f(x,y)+\quad 0+\quad 0
\end{array}$$

۱۳.۱.۱۷ - قضیه - فضای برداری مختلط E وگسترش $f:E\times E\to C$ که در برابری های (۱) و (۲) و (۴) و (۵) صدق می‌کند داده شده‌اند. فرض می‌کنیم که برای هر x متعلق به E مقدار f(x,x) حقیقی باشد. دراین صورت f یك فرم هرمیتی‌است.

اثبات - تنهابرابری (۳) را بایدثابت کرد. اما همانطورکه در ۱۲.۱.۱۷ دیدمشد برابری‌های (۱) و (۲) و (۴) و (۵) برای‌اثبات (۹) بسنده‌اند. با تعویض x و y در (۹) داریم :

$$4f(y,x)=f(y+x\,,\,y+x)-f(y-x\,,\,y-x)+if(i(x-iy)\,,\,i(x-iy))-if(-i(x+iy)\,,\,-i(x+iy))$$

درنتیجه بااستفاده از (۲) و (۵) خواهیم داشت :

$$4f(y,x)=f(x+y\ ,\ x+y)-f(x-y\ ,\ x-y)$$
$$+if(x-iy\ ,\ x-iy)-if(x+iy\ ,\ x+iy)$$

از مقایسه این بستگی و (۹) وبا توجه به‌اینکه برای هر z متعلق به E ، اسکالر $f(z,z)$ حقیقی است دیده می‌شود که $4f(x,y)$ و $4f(y,x)$ شمارهای مختلط مزدوج می‌باشند.

۲.۱۷ ـ تعامد

۱.۲.۱۷ ـ فرض می‌کنیم E یک فضای برداری مختلط و f یک فرم هرمیتی روی E باشد. دوعنصر x و y متعلق‌به E را(نسبت‌به f) **عمود برهم** گویند هرگاه $f(x,y)=0$ باشد. این بستگی نسبت به x و y متقارن است. هرعنصر E راکه برخودش عمود باشد **ایزوترپ** خوانند.

اگر بردارهای x_1 ، x_2 ، ... ، x_n دوبه‌دو برهم عمود باشند ، داریم:

$$f(x_1+\cdots+x_n\ ,\ x_1+\cdots+x_n)=f(x_1\ ,\ x_1)+\cdots+f(x_n\ ,\ x_n)$$

(توجه خواننده را به‌شباهت این مطلب باقضیهٔ فیثاغورث جلب می‌کنیم).

۲.۲.۱۷ ـ دوبخش M و N از E را **عمود برهم** گویندهرگاه هر عنصر M برهر عنصر N عمود باشد.

۳.۲.۱۷ ـ اگر M , N برهم عمود باشند هرترکیب خطی ازعنصرهای M بر هرترکیب خطی از عنصرهای N عمود است. بنابراین مجموعهٔ بردارهای E که بر M عمودند یک زیر فضای برداری از E می‌باشد (این زیرفضا را زیر فضای برداری E عمود بر M می‌نامندوبا $M^{\perp}$ نشان میدهند).

٤.۲.۱۷ ـ مجموعهٔ عنصرهایی از E راکه برتمام E عمودباشد **هستهٔ** f می‌نامند. هستهٔ f یک زیر فضای برداری از E می‌باشد . چنانچه این هسته مخالف با $\{0\}$ باشد ، f را یک فرم **غیراصیل** می‌گویند.

۵.۲.۱۷ ـ فرض می‌کنیم $(e_1\ ,\ e_2\ ,\ \ldots\ ,\ e_n)$ یک پایهٔ E و $[\alpha_{ij}]$ ماتریس f نسبت به‌این پایه باشد.شمار مختلط $\det[\alpha_{ij}]$ را **مبین** f نسبت‌به $(e_1\ ,\ e_2\ ,\ \ldots\ ,\ e_n)$ می‌نامند. برای اینکه f غیر اصیل باشد بایاوبسنده است که این مبین صفر باشد. اثبات این مطلب شبیه ۳.٤.۱٦ است.

۶.۲.۱۷ - فرض می‌کنیم f یک فرم هرمیتی روی E و N هستهٔ f باشد. مانند شمارهٔ ۵.۴.۱۶ بادرنظرگرفتن خارج قسمت E/N می‌توان از روی فرم f یک فرم هرمیتی اصیل f' روی E/N تعریف کرد. f' را فرم وابسته به f می‌نامند. این مطلب بما امکان میدهد که بسیاری از مسایل وابسته به‌فرم‌های هرمیتی را به‌حالت فرم‌های هرمیتی اصیل برگردانیم.

۷.۲.۱۷ - فرض می‌کنیم f یک‌فرم هرمیتی روی E باشد. برای‌هر $y\in E$ گسترش $x \to f(x,y)$ فضای E در $\mathbf{C}$ را با g_y نشان میدهیم. بنابر (۱) و (۲) گسترش g_y یک فرم خطی روی E می‌باشد (یعنی $g_y\in E^*$). از برابری‌های (۴) و (۵) نتیجه می‌شود که برای y و y' متعلق به E و μ متعلق به $\mathbf{C}$ داریم:

$$g_{y+y'} = g_y+g_{y'} \qquad \text{و} \qquad g_{\mu y}=\bar{\mu}g_y$$

بنابراین گسترش $y \to g_y$ فضای E در E^* خطی نیست و درنتیجه مطلب مشکلتر از شمارهٔ ۶.۴.۱۶ می‌باشد. برای رفع این مشکل از مفهوم دیگری کمک می‌گیریم: اگر F یک فضای برداری روی $\mathbf{C}$ باشد مجموعهٔ F راکه از همان قانون جمع فضای برداری برخوردار ولی ضرب آن $(\lambda,x) \to \bar{\lambda}x$ باشد، با $\bar{F}$ نشان می‌دهیم. به‌سادگی می‌توان دریافت که $\bar{F}$ نیز یک فضای برداری روی $\mathbf{C}$ است که آنرا **مزدوج** F می‌نامند. ملاحظه می‌شود که مفاهیم زیر فضای برداری، نابستگی خطی وبنابراین بعد، در F و $\bar{F}$ یکی‌هستند.

اما گسترش $y \to g_y$ که دربالا درنظرگرفته شد یک‌گسترش خطی $\bar{E}$ در E^*است. اگر f اصیل‌وبعد E باپایان باشد این گسترش یک ایزومرفیسم(به‌نام کانونیک) $\bar{E}$ روی E^* می‌باشد. این مطلب مانند ۶.۴.۱۶ ثابت می‌شود. دراین شرایط اغلب $\bar{E}$ و E^* را به کمک این ایزومرفیسم یکی می‌گیرند.

۸.۲.۱۷ - بااستفاده از ایزومرفیسم پیشین واز شماره‌های ۹.۱۵.۸ و ۱۱.۱۵.۸ قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود:

قضیه - فضای برداری مختلط E با بعد با پایان و فرم هرمیتی اصیل f روی E داده شده‌اند. اگر F یك زیر فضای برداری k بعدی E باشد $F^{\perp}$ یك زیر فضای‌برداری $n-k$ بعدی E است وداریم:

$$(F^{\perp})^{\perp}=F$$

۱۷ . ۳ - پایه‌های متعامد

۱۷ . ۳ . ۱ - فرض می کنیم E یک‌فضای برداری مختلط و f یک فرم‌هرمیتی روی E باشد. یک خانواده (e_i) از بردارهای E را (نسبت‌به f) **متعامد** گوییم هرگاه e_iها دوبدو برهم عمودباشند. این خانواده را **یکه‌ای‌متعامد** خوانیم هرگاه به‌علاوه برای هر i داشته باشیم $f(e_i , e_i) = ۱$.

۱۷ . ۳ . ۲ - **قضیه - چنانچه‌بعد E با پایان‌باشد پایه‌های متعامدی در E وجود دارد .**

اثبات این قضیه شبیه ۱٦ . ٦ . ۲ است .

۱۷ . ۳ . ۳ - پایهٔ متعامد $(e'_1 , e'_2 , \dots , e'_n)$ را اختیار می کنیم و قرار می‌دهیم $f(e'_i , e'_i) = \alpha_i$. بنابر ۱۷ . ۱ . ۵ همهٔ α_iها حقیقی هستند . با تعویض شماره‌گذاری e'_iها میتوان فرض کرد :

$$\alpha_1 > 0 , \dots , \alpha_s > 0 \quad , \quad \alpha_{s+1} < 0 , \dots , \alpha_{s+t} < 0$$

$$\alpha_{s+t+1} = 0 , \dots , \alpha_n = 0$$

اکنون قرار می‌دهیم :

$$e_i = \frac{e'_i}{\sqrt{\alpha_i}} \qquad \text{برای} \qquad 1 \leqslant i \leqslant s$$

$$e_i = \frac{e'_i}{\sqrt{-\alpha_i}} \qquad \text{برای} \qquad s+1 \leqslant i \leqslant s+t$$

$$e_i = e'_i \qquad \text{برای} \qquad s+t+1 \leqslant i \leqslant n$$

دراین‌صورت $(e_1 , e_2 , \dots , e_n)$ نیزیک پایهٔ متعامد از E است به‌قسمی که :

$$f(e_1 , e_1) = \cdots = f(e_s , e_s) = 1 \;,\; f(e_{s+1} , e_{s+1}) = \cdots = f(e_{s+t} , e_{s+t}) = -1$$

$$f(e_{s+t+1} , e_{s+t+1}) = \cdots = f(e_n , e_n) = 0$$

به‌علاوه شمارهای مختلط $\lambda_1 , \dots , \lambda_n , \mu_1 , \dots , \mu_n$ هرچه باشند داریم :

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i , \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \bar{\mu}_i - \sum_{i=s+1}^{s+t} \lambda_i \bar{\mu}_i$$

۱۷.۳.۴ - مانند شمارهٔ ۱۶.۸.۱۵ ثابت می‌کنند که شمارهای درست s و t پیشین به‌پایهٔ متعامد انتخاب شده بستگی ندارند بلکه تنها به f وابسته‌اند.

به‌آسانی دیده می‌شود که e_{s+t+1} ، ... ، e_n متعلق به هستهٔ f می‌باشند. بنابراین اگر f اصیل باشد داریم $s+t=n$.

۱۷.۳.۵ - اگر $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ یک خانوادهٔ یکه‌ای متعامد باشد ، بردارهای e_1 ، e_2 ، ... ، e_p نابستگی خطی دارند. این مطلب مانند ۱۶.۶.۵ ثابت می‌شود.

۱۷.۳.۶ - فرض می‌کنیم $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد باشد. اگر داشته باشیم :

$$x=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n \in E$$

خواهیم داشت :

$$f(x, e_i)=f(\Sigma\lambda_i e_i, e_i)=\lambda_i$$

به‌این ترتیب شمارهای $f(x, e_i)$ آرایه‌های x نسبت به‌پایهٔ $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ می‌باشند.

۱۷.۴ - فضاهای تقریباً هیلبرتی

۱۷.۴.۱ - تعریف - فرم هرمیتی f روی E را مثبت گوییم ، هرگاه برای هر x متعلق به E داشته باشیم $f(x,x) \geqslant 0$.

به‌روش مشابه فرمهای هرمیتی‌منفی تعریف می‌شوند.

۱۷.۴.۲ - قضیه - فرض می‌کنیم f یک فرم هرمیتی مثبت روی E باشد. برای هر x وهر y در E داریم :

$$|f(x,y)|^2 \leqslant f(x,x)f(y,y) \qquad \text{(نابرابری شوارتس)}$$

اثبات - برای هرعنصر λ از **C** داریم :

$$0 \leqslant f(x+\lambda y, x+\lambda y)=f(x,x)+\lambda\overline{f(x,y)}+\bar{\lambda}f(x,y)+\lambda\bar{\lambda}f(y,y) \qquad (1)$$

که چون عبارت بالا را درشمار مثبت $f(y,y)$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$0\leqslant[\lambda f(y,y)+f(x,y)][\bar{\lambda}f(y,y)+\overline{f(x,y)}]$$
$$-f(x,y)\overline{f(x,y)}+f(y,y)f(x,x)$$

اگر $f(y,y) \neq ۰$ باشد در آنچه که گذشت می‌توان λ را برابر با $-\frac{f(x,y)}{f(y,y)}$ گرفت و نابرابری مورد نظر را به‌دست آورد. اگر $f(x,x) \neq ۰$ باشد کافی است که نقش x و y را در آنچه که گذشت عوض کنیم. بالاخره اگر $f(x,x) = f(y,y) = ۰$ باشد نابرابری (۱) به‌صورت:

$$۰ \leqslant \lambda\overline{f(x,y)} + \bar{\lambda}f(x,y)$$

درمی‌آید که با قرار دادن $\lambda = -f(x,y)$ خواهیم داشت:

$$|f(x,y)|^۲ \leqslant ۰ \qquad \text{یعنی} \qquad f(x,y) = ۰$$

و قضیه دراین‌حالت هم برقرار است.

۳.٤.۱۷ - قضیه - اگر f یك فرم هرمیتی مثبت روی E باشد برای عنصرهای دلخواه x و y متعلق به E داریم:

$$\sqrt{f(x+y,x+y)} \leqslant \sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)}$$

زیرا:

$$\begin{aligned} f(x+y\ ,\ x+y) &= f(x,x) + f(y,y) + f(x,y) + f(y,x) \\ &\leqslant f(x,x) + f(y,y) + ۲\,|f(x,y)| \\ &\leqslant f(x,x) + f(y,y) + ۲\sqrt{f(x,x)f(y,y)} \end{aligned}$$

(بنابر ۲.٤.۱۷)،

$$= \left(\sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)}\right)^۲$$

٤.٤.۱۷ - قضیه - اگر f یك فرم هرمیتی مثبت باشد هستهٔ f عبارتست از مجموعهٔ بردارهای ایزوترپ برای f.

اثبات این قضیه شبیه شمارهٔ ٦.٨.١٦ است.

۵.٤.۱۷ - نتیجه - فرض می‌کنیم f یك فرم هرمیتی مثبت و اصیل روی E باشد.

(I) - تنها بردار ایزوترپ بردار ۰ است.

(II)- اگر F یك زیرفضای برداری E باشد تحدید f به F مثبت و اصیل است .

اثبات این مطلب شبیه شمارهٔ ۷.۸.۱۶ است.

۶.٤.۱۷ - تعریف- یك فضای برداری مختلط راکه‌از یك فرم‌هرمیتی مثبت برخوردار باشد یك فضای تقریباً هیلبرتی می‌نامند . اگر این فرم اصیل‌هم‌باشد فضای تقریباً هیلبرتی را مجزا خوانند.

(بعضی از فضاهای تقریباً هیلبرتی ویژه‌که دراین درس درنظرگرفته نخواهند شد فضاهای هیلبرتی نامیده می‌شوند) .

دریک‌فضای‌تقریباً هیلبرتی‌برای دوعنصر x و y مقدار فرم‌هرمیتی را معمولاً به‌صورت $(x|y)$ می‌نویسندوآنراحاصلضرب‌اسکالر x و y می‌نامند و قرارمی‌دهند $\|x\|=\sqrt{(x|x)}$. دراین‌صورت‌نابرابری شوارتس چنین نوشته می‌شود :

$$|(x|y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$$

بنابراین قضیهٔ ۳.٤.۱۷ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$$

همچنین داریم :

$$\|\lambda x\|^2=(\lambda x|\lambda x)=\lambda\bar{\lambda}(x|x)=|\lambda|^2\|x\|^2$$

پس :

$$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$$

بدین‌ترتیب تابع $x\to\|x\|$ روی E ویژگیهایی شبیه ویژگیهای یک نرم را داراست. بردارهای ایزوترپ بردارهایی هستندکه برای آنها $\|x\|=0$ است. بنابراین اگر فضای تقریباً هیلبرتی مجزا باشد داریم :

$$x=0\Longleftrightarrow\|x\|=0$$

۷.٤.۱۷ - **مثال -** فضای C^n که از فرم هرمیتی کانونیک برخوردار باشد (۱۰.۱.۱۷) یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزاست .

۸.٤.۱۷ - **مثال -** مثال ۱۱.۱.۱۷ را درنظرمی‌گیریم. دراین مثال فرم هرمیتی مثبت است زیرا اگر $u\in E$ باشد داریم :

$$f(u,u)=\int_a^b u(t)\overline{u(t)}dt=\int_a^b |u(t)|^۲ dt \geqslant ۰$$

نشان‌می‌دهیم که این فرم هرمیتی اصیل نیز هست. برای‌این‌منظور ثابت‌می‌کنیم که اگر u یک عنصر دلخواه مخالف باصفر و متعلق‌به E باشد، u ایزوترپ نیست. چون $u \neq ۰$ است می‌توان $t_۰$ متعلق به $[a,b]$ را به‌قسمی یافت که $|u(t_۰)|$ برابر با شمارمثبت و مخالف باصفر α باشد. چون تابع u پیوسته است یک فاصله I به درازای $۰<l$ می‌توان یافت به‌طوری که:

$$\forall t \in I \quad , \quad |u(t)| > \frac{۱}{۲}\alpha$$

بنابراین $\int_a^b |u(t)|^۲ dt \geqslant l\frac{۱}{٤}\alpha^۲$ پس $f(u,u) > ۰$، یعنی‌فرم‌هرمیتی اصیل است.

بدین‌ترتیب می‌بینیم که E یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزاست.

بابکار بردن نابرابری شوارتس و شمارهٔ ۳.٤.۱۷ دیده می‌شود که اگر u و v توابع پیوسته و مختلط روی $[a,b]$ باشند داریم:

$$\left|\int_a^b u(t)\overline{v(t)}dt\right|^۲ \leqslant \int_a^b |u(t)|^۲ dt \int_a^b |v(t)|^۲ dt$$

$$\left[\int_a^b |u(t)+v(t)|^۲ dt\right]^{\frac{۱}{۲}} \leqslant \left[\int_a^b |u(t)|^۲ dt\right]^{\frac{۱}{۲}} + \left[\int_a^b |v(t)|^۲ dt\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

۹.٤.۱۷ - قضیه- اگر E یک فضای تقریباً هیلبرتی‌مجزا بابعدباپایان باشد، در E یک پایهٔ یکه‌ای‌متعامد وجود دارد.

اثبات این قضیه از ۲.۳.۱۷ و ۷.۳.۱۷ نتیجه می‌شود.

۱۰.٤.۱۷ - نسبت به‌پایهٔ یکه‌ای متعامد $(e_۱, e_۲, \ldots, e_n)$ داریم:

$$(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots \lambda_n e_n \mid \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n) =$$
$$= \lambda_1 \bar{\mu}_1 + \lambda_2 \bar{\mu}_2 + \cdots + \lambda_n \bar{\mu}_n$$

بنابراین دیده می‌شود که باتقریب یک ایزومرفیسم تنها یک فضای تقریباً هیلبرتی‌مجزای n بعدی وجوددارد و این فضا C^n است که از حاصلضرب اسکالر کانونیک برخوردار می‌باشد.

۱۷ . ۵ـ آدژوئن

۱۷ . ۵ . ۱ ـ فرض می‌کنیم E یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزا با بعد باپایان باشد. بنابر شمارهٔ ۱۷ . ۲ . ۷ می‌توان‌فضای E^* را با $\bar{E}$ یکی گرفت. همچنین‌اگر $u \in \mathscr{L}(E,E)$ باشد $^t u$ با یک عنصر از $\mathscr{L}(E,E)$ یکی گرفته می‌شود . این عنصر را که با u^* نشان میدهند ، **آدژوئن** u (نسبت به‌ساختمان تقریباً هیلبرتی E) می‌نامند .

بنابراین برای هر x وهر y متعلق به E داریم :

$$(ux \mid y) = (x \mid u^* y) \tag{1}$$

۱۷ . ۵ . ۲ ـ اگر u و v عنصرهایی از $\mathscr{L}(E,E)$ و $\lambda \in C$ باشد داریم :

$$(u+v)^* = u^* + v^* \tag{2}$$

$$(\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^* \tag{3}$$

$$(uv)^* = v^* u^* \tag{4}$$

$$u^{**} = u \tag{5}$$

این ویژگی‌ها را می‌توان از ویژگی های ترانسپوزیسیون ماتریسها نتیجه گرفت ویا اینکه‌آنها را مستقیماً ثابت کرد. مثلاً (۳) را مستقیما ثابت می کنیم. برای عنصرهای دلخواه x و y متعلق به E داریم :

$$(x \mid (\lambda u)^* y) = ((\lambda u) x \mid y) \qquad \text{بنابر (۱) ،}$$
$$= (\lambda (ux) \mid y) \qquad \text{بنابر تعریف } \lambda u \text{ ،}$$
$$= \lambda (ux \mid y) \qquad \text{بنابر ۱۷ . ۱ . ۱ . (۲) ،}$$
$$= \lambda (x \mid u^* y) \qquad \text{بنابر (۱) ،}$$
$$= (x \mid \bar{\lambda}(u^* y)) \qquad \text{بنابر ۱۷ . ۱ . ۱ . (۵) ،}$$
$$= (x \mid (\bar{\lambda} u^*)) y \qquad \text{بنابرتعریف } \bar{\lambda} u^* \text{ ،}$$

بنابراین برای هر y متعلق به E خواهیم داشت :

$$(\lambda u)^* y = (\bar{\lambda} u^*) y \quad \text{ویا} \quad (\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*$$

۳.۰.۱۷ - روشن است که $(id_E)^* = id_E$. پس از فرمول (٤) نتیجه می‌شود که اگر u وارون پذیر باشد، u^* نیز وارون پذیر است و داریم $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

٤.۰.۱۷ - بنابر ۱۱.۱٦.۸ رتبهٔ u ورتبهٔ u^* باهم برابرند.

۰.۰.۱۷ - قضیه - اگر F یک‌زیر فضای برداری از E باشد‌که به‌وسیلهٔ u پایداراست ، $F^{\perp}$ بوسیلهٔ u^* پایدارخواهدبود.

اثبات این قضیه شبیه شماره ۸.۹.۱٦ است.

٦.۰.۱۷ - اگر M یک ماتریس مختلط باشد ، ماتریسی راکه از تعویض هرعنصر M با مزدوجش بدست می‌آید با $\overline{M}$ نشان‌می‌دهند وآنرا **ماتریس‌مزدوج** M می‌نامند. ماتریس $\overline{({}^tM)} = {}^t(\overline{M})$ راکه با M^* نشان داده می‌شود **آدژوئن** M می گویند.

۷.۰.۱۷ - قضیه - فرض می کنیم $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ یك پایهٔ یکه‌ای متعامد E باشد. اگر u متعلق به $\mathscr{L}(E,E)$ و M ماتریس u نسبت به $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ باشد، M^* ماتریس u^* نسبت به $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ خواهد بود.

اثبات - فرض می کنیم $M = [\alpha_{ij}]$. داریم :

$$u(e_j) = \alpha_{1j}e_1 + \alpha_{2j}e_2 + \dots + \alpha_{nj}e_n$$

بنابراین $\alpha_{ij} = (u(e_j) \mid e_i)$. همچنین‌اگر $[\beta_{ij}]$ ماتریس u^* باشد داریم :

$$(u^*(e_j) \mid e_i) = \beta_{ij}$$

اما :

$$(u^*(e_j) \mid e_i) = (e_j \mid u(e_i)) = \overline{(u(e_i) \mid e_j)}$$

بنابراین $\beta_{ij} = \bar{\alpha}_{ji}$. به‌عبارت دیگر $[\beta_{ij}] = [\alpha_{ij}]^*$.

۸.۰.۱۷ - از فرمول‌های (۲) و (۳) و (٤) و (۰) شمارهٔ ۲.۰.۱۷ نتیجه می‌شود که اگر M و N ماتریسهای مختلطی از رستهٔ (n, n) و λ شمار مختلطی باشد داریم :

$$(M+N)^*=M^*+N^*$$

$$(\lambda M)^*=\bar{\lambda}M^*$$

$$(MN)^*=N^*M^*$$

$$M^{**}=M$$

۱۷ . ۵ . ۹ ـ آشکاراست که $\det[\overline{M}]=\overline{\det M}$ بنابراین :

$$\det[M^*]=\overline{\det[{}^tM]}=\overline{\det[M]}$$

پس اگر $u\in\mathscr{L}(E,E)$ خواهیم داشت $\det(u^*)=\overline{\det(u)}$.

۱۷ . ۶ ـ گروه یکانی

E را همواره یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزا با بعد با پایان فرض می‌کنیم.

۱۷ . ۶ . ۱ ـ قضیه ـ اگر u یك عنصر از $\mathscr{L}(E,E)$ باشد شرطهای زیرهم ارزند :

(I) ـ **برای هر x وهر y در E** ، $(ux|uy)=(x|y)$

(II) ـ **برای هر x در E** ، $\|ux\|=\|x\|$

(III) ـ $u^*u=id_E$

(IV) ـ $uu^*=id_E$

(V) ـ u **وارون پذیراست و** $u^{-1}=u^*$

اثبات ـ اثبات این قضیه به‌غیراز قسمت $(II)\Longrightarrow(I)$ مانند قضیهٔ ۱۶ . ۱۰ . ۱ است. برای اثبات این قسمت‌دوعنصردلخواه x و y از E را درنظر می‌گیریم وقرار می‌دهیم $f(x,y)=(x|y)$ و $g(x,y)=(ux|uy)$. بنابراین f و g فرم‌هایی هرمیتی‌می‌باشند و اگر (II) برقرار باشد برای هر x متعلق به E داریم $f(x,x)=g(x,x)$. پس بنابر ۱۷ . ۱ . ۱۲ خواهیم داشت :

$$\forall x,y\in E \quad , \quad f(x,y)=g(x,y)$$

۱۷ . ۶ . ۲ ـ تعریف ـ یك‌گسترش خطی E در E را که در شرطهای قضیهٔ پیشین صدق می‌کند یك‌گسترش یکانی می‌نامند.

مانند شمارهٔ ۳.۱۰.۱۶ ثابت می‌شود که مجموعهٔ گسترشهای یکانی E در E یک گروه‌است که **گروه یکانی** نامیده می‌شود .

۳.۶.۱۷ - اگر u یکانی باشد u^* نیز یکانی است زیرا $u^*=u^{-1}$.

۴.۶.۱۷ - اگر u یکانی باشد داریم $|\det u|=1$. زیرا :

$$|\det u|^2=(\det u)\cdot\overline{(\det u)}=(\det u)\cdot(\det u^*)=$$
$$=\det(uu^*)=\det(id_E)=1$$

۵.۶.۱۷ - قضیه - فرض می‌کنیم $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد E و u یک عنصر $\mathscr{L}(E,E)$ باشد. شرطهای زیر هم ارزند :

(I)- u یکانی است .

(II)- $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد E است .

(III)- $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ یک خانوادهٔ یکه‌ای متعامداست .

اثبات این قضیه مانند ۸.۱۰.۱۶ است.

۶.۶.۱۷ قضیه - اگر M ماتریسی مختلط‌ازرستهٔ (n,n) باشدشرطهای زیرهم‌ارزند :

(I)- $M^*M=I_n$

(II)- $MM^*=I_n$

(III)- M وارون پذیر است و $M^{-1}=M^*$

به‌علاوه چنانچه C^n ازفرم هرمیتی‌کانونیك برخوردار باشد شرطهای‌بالا باهریك از شرطهای زیرهم‌ارزند :

(IV)- ستونهای M یك خانوادهٔ یکه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند .

(V)- سطرهای M یك خانوادهٔ یکه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند .

اثبات این قضیه مانند ۱.۱۱.۱۶ می‌باشد.

۷.۶.۱۷ - ماتریسی را که درشرطهای قضیهٔ ۶.۶.۱۷ صدق می‌کند **ماتریس یکانی** می‌نامند.

۸.۶.۱۷ - فرض می‌کنیم $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد E باشد . برای اینکه یک عنصر از $\mathscr{L}(E,E)$ یکانی باشد بایاوبسنده است که ماتریس آن‌نسبت

به $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یکانی باشد. این مطلب از ۷.۵.۱۷ نتیجه می‌شود.

۱۷ . ۷- گسترش‌های خطی هرمیتی

E را همواره یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزا با بعد باپایان فرض می‌کنیم.

۱.۷.۱۷ - **قضیه - چنانچه u یك عنصر از $\mathscr{L}(E,E)$ باشد، شرطهای زیر هم‌ارزند:**

$$\forall x,y\in E \quad , \quad (x|uy)=(ux|y) \qquad \text{-(I)}$$

$$u^*=u \qquad \text{-(II)}$$

(III)- برای هر x متعلق به E اسکالر $(x|ux)$ حقیقی است.

اثبات - هم ارزی (I) با (II) شبیه ۱.۱۲.۱۶ ثابت می‌شود. اگر شرط (I) برقرار باشد داریم:

$$(x|ux)=(ux|x)=\overline{(x|ux)}$$

بنابراین $(x|ux)$ حقیقی است. چنانچه شرط (III) برقرار باشد برای هر x و y متعلق به E قرار می‌دهیم $f(x,y)=(ux|y)$ دراینصورت f درفرض های ۱۳.۱.۱۷ صدق می‌کند. بنابراین f یک فرم هرمیتی است به‌ویژه برای x و y متعلق به E داریم $f(y,x)=\overline{f(x,y)}$ یعنی:

$$(uy|x)=\overline{(ux|y)}=(y|ux)$$

پس شرط (I) برقرار است.

۲.۷.۱۷ - **تعریف - یك گسترش خطی E در E راکه در شرطهای ۱.۷.۱۶ صدق می‌کند هرمیتی می‌گویند.**

۳.۷.۱۷ - اگر u و v هرمیتی و λ یک شمار حقیقی باشد $u+v$ و λv هرمیتی است. این مطلب از دستورهای (۲) و (۳) شمارهٔ ۲.۵.۱۷ نتیجه می‌شود.

۴.۷.۱۷ - فرض می‌کنیم $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد E و u یک‌عنصر از $\mathscr{L}(E,E)$ باشد. ماتریس u نسبت‌به $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ را M می‌نامیم. بنابر ۷.۵.۱۷ برای اینکه گسترش u هرمیتی باشد بایاوبسنده است‌که داشته باشیم $M=M^*$. می‌دانیم‌که این شرط هم‌ارز این است‌که ماتریس M هرمیتی باشد.

۵.۷.۱۷ -**قضیه - فرض می‌کنیم u یك عنصرهرمیتی از $\mathscr{L}(E,E)$ و**

λ_1 ، λ_2 ، ... و λ_r مقادیر ویژهٔ متمایز u باشند.

(I) - λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_r حقیقی هستند.

(II) - اگر V_{λ_i} زیرفضای ویژهٔ وابسته به λ_i باشد V_{λ_i}ها دوبه‌دو برهم عمودند و E مجموع مستقیم V_{λ_1} ، V_{λ_2} ، ... ، V_{λ_r} می‌باشد.

اثبات - الف- فرض می‌کنیم x عنصری مخالف باصفر از V_{λ_i} و y عنصری مخالف باصفر از V_{λ_j} باشد. داریم:

$$\lambda_i(x|y)=(\lambda_i x|y)=(ux|y)=(x|uy)=(x|\lambda_j y)=\bar{\lambda}_j(x|y) \quad (۱)$$

اگر i و j برابر باشند باقرار دادن $y=x$ از (۱) نتیجه می‌شود که $\lambda_i=\bar{\lambda}_i$ ودرنتیجه (I) برقرار است. دراین صورت (۱) را می‌توان چنین نوشت $\lambda_i(x|y)=\lambda_j(x|y)$.

اگر $i\neq j$ باشد داریم $(x|y)=0$ وبنابراین V_{λ_i}ها دوبدو برهم عمودند.

ب - بدین‌ترتیب V_{λ_i} بر $\sum\limits_{j\neq i} V_{\lambda_j}$ عموداست وبنابراین هر بردار از:

$$V_{\lambda_i}\cap(\sum_{j\neq i} V_{\lambda_j})$$

برخودش عمود می‌باشد و درنتیجه صفر است (۵.٤.۱۷)، یعنی:

$$V_{\lambda_i}\cap(\sum_{j\neq i} V_{\lambda_j})=\{0\}$$

پ - قرارمی‌دهیم $F=\sum\limits_{i=1}^{r} V_{\lambda_i}$. بنابر (ب) فضای F مجموع مستقیم V_{λ_i}هاست.

پس باید ثابت کنیم که $F=E$. اما چون V_{λ_i}ها به‌وسیلهٔ u پایدار هستند F و $F^{\perp}$ نیز به‌وسیله u پایدار می‌باشند (۵.۵.۱۷). اگر $F^{\perp}\neq\{0\}$ باشد تحدید u به $F^{\perp}$ دست کم دارای یک بردار ویژه مخالف باصفر مانند x است (۱.٤.۱٤). دراین‌صورت x متعلق به‌یکی از V_{λ_i}ها ودرنتیجه متعلق به F می‌باشد. پس $x\in F\cap F^{\perp}$ واین ممکن

نیست. بنابراین داریم $F^{\perp}=\{0\}$ وباتوجه به ۸.۲.۱۷ خواهیم داشت :

$$F=(F^{\perp})^{\perp}=\{0\}^{\perp}=E$$

۶.۷.۱۷ - نتیجه - بادرنظر گرفتن فرضهای شمارهٔ ۵.۷.۱۷ یك پایهٔ یکه‌ای متعامد برای E می‌توان یافت به‌طوریکه‌ماتریس u نسبت به‌این پایه یك ماتریس قطری حقیقی باشد.

زیرا باتوجه به ۷.۸.۸ چنین‌پایه‌ای را می‌توان از اجتماع یک پایهٔ یکه‌ای متعامد از V_{λ_1} ، یک پایهٔ یکه‌ای متعامد از V_{λ_2} ، ... و یک پایهٔیکه‌ای متعامداز V_{λ_r} بدست آورد (وجود چنین پایه‌هایی برای هریک از V_{λ_i} ها از شماره‌های ۵.۴.۱۷ و ۹.۴.۱۷ نتیجه می‌شود).

۷.۷.۱۷ - نتیجه-فرض‌می‌کنیم M یك‌ماتریس‌هرمیتی‌ازرستهٔ (n,n) باشد. یك ماتریس یگانی U از همان رسته می‌توان یافت به‌طوریکه $U^{-1}MU$ یك ماتریس‌قطری حقیقی باشد.

زیرا اگرگسترش خطی C^n در C^n وابسته به M را v بنامیم و روی C^n فرم‌هرمیتی کانونیک را درنظر بگیریم ، چون پایهٔ کانونیک C^n یکه‌ای متعامد است M ودرنتیجه v هرمیتی می‌باشند (۴.۷.۱۷). بنابراین یک پایهٔ یکه‌ای متعامد $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ وجود دارد که‌نسبت به‌آن ماتریسv قطری‌حقیقی‌است(۶.۷.۱۷). اگر $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ پایهٔ کانونیک C^n باشد ، درآن صورت گسترش خطی‌ای که e_1 را به e'_1 و e_2 را به e'_2 و ... و e_n را به e'_n بدل می‌کند یک گسترش‌یگانی است(۵.۶.۱). بنابراین ماتریس تعویض پایه $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ به $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ یک ماتریس یگانی می‌باشد (۲.۸.۹ و ۸.۶.۱۷). اما آشکاراست که ماتریس v نسبت به $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ برابر با $U^{-1}MU$ است (۶.۸.۹).

۸.۱۷ - برگشت به‌حالت گسترشهای خطی متقارن

۱.۸.۱۷ - **قضیه - ماتریس حقیقی ومتقارن M از رستهٔ (n,n) داده شده است . فرض می‌کنیم $P(X)$ چند جمله‌ای مفسر M باشد (پس ضرایب $P(X)$ حقیقی هستند). دراینصورت همه ریشه‌های $P(X)$ در $\mathbf{C}$ حقیقی می‌باشند .**

زیرا می‌توان M را یک ماتریس هرمیتی فرض نمود ، که درآن صورت قضیه از ۵.۲.۱٤ و ۷.۷.۱۷ نتیجه می‌شود .

۲.۸.۱۷ - **لم - فرض می‌کنیم E یك فضای برداری حقیقی با بعد با پایان و مخالف با صفر ، f یك فرم دوخطی متقارن مثبت اصیل روی E و u یك گسترش خطی متقارن E در E باشد . در این‌صورت u دست‌کم دارای یك‌بردار ویژهٔ مخالف با صفر است.**

اثبات - بنابر ۹.۸.۱٦ در E می‌توان یک پایهٔ $(e_1 , e_2 , \dots , e_n)$ یافت که برای f یکه‌ای متعامدباشد. اگر M ماتریس u نسبت به‌پایهٔ $(e_1 , e_2 , \dots , e_n)$ باشد، M یک ماتریس حقیقی متقارن است (٤.۱۲.۱٦) وچند جمله‌ای مفسر M دارای یک ریشهٔ حقیقی λ است (۱.۸.۱۷) . چون λ به هیأت پایهٔ E (یعنی $\mathbf{R}$) متعلق است پس یک مقدار ویژهٔ u می‌باشد (۱.۲.۱٤) و می‌توان به‌آن یک بردار ویژهٔ مخالف با صفر وابسته کرد .

۳.۸.۱۷ - **قضیه - فرض می‌کنیم E یك فضای برداری حقیقی با بعد با پایان ، f یك فرم دو خطی متقارن مثبت اصیل روی E و u یك گسترش خطی متقارن E در E باشد . چنانچه λ_1 ، λ_2 ، $\dots$ ، λ_r مقادیر ویژهٔ متمایز u و V_{λ_i} زیر فضای ویژهٔ u وابسته به λ_i باشد ، V_{λ_i}ها دوبه‌دو برهم عمودند و E حاصل جمع مستقیم V_{λ_1} ، V_{λ_2} ، $\dots$ ، V_{λ_r} است.**

اثبات این قضیه مانند ۷.۱۷.۵ است بااین تفاوت که‌دربخش (پ) استدلال ، باید

بجای شمارهٔ ۱.٤.۱٤ شمارهٔ ۲.۸.۱۷ را بکار برد.

٤.۸.۱۷ - نتیجه - فرض‌های شمارهٔ ۳.۸.۱۷. را در نظر می‌گیریم. یك پایهٔ یکه‌ای متعامد در E وجود دارد به‌طوری که ماتریس u نسبت به آن قطری است.

این مطلب مانند شمارهٔ ۶.۷.۱۷ ثابت می‌گردد.

۵.۸.۱۷ - نتیجه - فرض می‌کنیم M یك ماتریس متقارن حقیقی از رستهٔ (n,n) باشد. یك ماتریس متعامد وحقیقی مانند P از رستهٔ (n , n) وجود دارد به‌قسمی که $P^{-1}MP$ قطری باشد.

این مطلب مانند شمارهٔ ۷.۷.۱۷ ثابت می‌شود.

۹.۱۷ - بررسی دوفرم درجهٔ دوم باهم

۱.۹.۱۷ - فضای برداری حقیقی E با بعد با پایان و دوفرم دوخطی متقارن f و g روی E داده شده‌اند. فرض می‌کنیم که f مثبت و اصیل باشد.

لم - دوپایهٔ $(e_1 , e_2 , \dots , e_n)$ و $(e'_1 , e'_2 , \dots , e'_n)$ از E را که برای f یکه‌ای متعامد هستند درنظرمی‌گیریم. چنانچه A و A' ماتریسهای g نسبت به این دوپایه باشند، A و A' همانندند یعنی چند جمله‌ای مفسر آنها یکی است.

اثبات - فرض‌می‌کنیم M ماتریس‌تعویض پایه $(e_n , \dots , e_1)$ به $(e'_1 , \dots , e'_n)$ باشد. بنابر ۳.۱۱.۹ داریم $A' = {}^tMAM$. گسترش خطی E در E که e_1 را به e'_1 و e_2 را به e'_2 و ... و e_n را به e'_n بدل‌می‌کندیک گسترش متعامداست(۸.۱۰.۱٦). بنابراین M نیز متعامد است (۲.۸.۹ و ٤.۱۱.۱٦). به‌گفته دیگر ${}^tM = M^{-1}$ و داریم $A' = M^{-1}AM$.

۲.۹.۱۷ - نخست یادآوری‌می‌کنیم که همهٔ ریشه‌های چند جمله‌ای مفسر A حقیقی هستند(۱.۸.۱۷). فرض می‌کنیم α_1 ، α_2 ، ... ، α_n این ریشه‌ها باشند، که درآن هر ریشه به‌شمارهٔ‌مرتبهٔ‌چند‌گانگی‌اش نوشته‌شده‌است. بنابر ۱.۹.۱۷ دنبالهٔ $(\alpha_n , \dots , \alpha_2 , \alpha_1)$

با تقریب یک‌ترتیب، بوسیلهٔ f و g کاملاً مشخص است وبستگی به‌انتخاب پایهٔ یکه‌ای متعامد $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ندارد. این دنباله را دنبالهٔ **پایاهای** g **نسبت‌به** f **می‌نامند**.

۳.۹.۱۷ - **مثال** - فرض می‌کنیم که بتوان پایه‌ای مانند $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ از E یافت که برای f یکه‌ای‌متعامد وبرای g متعامدباشد و قرار می‌دهیم $g(e_i, e_i) = \alpha_i$ دراین‌صورت ماتریس g نسبت به $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یک ماتریس قطری است که عنصرهای قطرآن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ می‌باشند. بنابر ۷.۲.۱٤ دنبالهٔ پایاهای g نسبت‌به f دنبالهٔ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ است.

٤.۹.۱۷ - در زیر خواهیم دید که مطلب مورد مطالعه در ۳.۹.۱۷ که به‌ظاهر حالتی‌بسیار ویژه دارد، عملاً یک حالت کلی است.

قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری حقیقی بابعد با پایان، f یک فرم دوخطی متقارن مثبت اصیل روی E، g یک فرم دوخطی متقارن روی E و $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ دنبالهٔپایاهای g نسبت‌به f باشد. دراینصورت:

(I) - پایه‌ای از E وجود داردکه برای f یکه‌ای متعامد و برای g متعامد باشد.

(II) - اگر $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ چنین پایه‌ای باشد (در صورت لزوم می‌توان ترتیب α_iها راتغییرداد) داریم:

$$g(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n)$$
$$= \alpha_1 \lambda_1 \mu_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mu_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mu_n$$

اثبات - الف - بنابر ۵.۱۲.۱٦ یک گسترش خطی متقارن E در E مانند u وجود دارد به‌قسمی که‌برای هر x و y در E داریم $g(x,y) = f(ux, y)$ وبنابر ٤.۸.۱۷ یک‌پایهٔ $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ وجود دارد که برای f یکه‌ای متعامد است و برای هر i داریم $ue_i = \lambda_i e_i$ که‌درآن λ_iها شمارهایی‌حقیقی می‌باشند. دراین‌صورت‌برای $i \neq j$ خواهیم‌داشت:

$$g(e_i, e_j) = f(ue_i, e_j) = f(\lambda_i e_i, e_j) = \lambda_i f(e_i, e_j) = \lambda_i \cdot 0 = 0$$

بنابراین پایهٔ $(e_1 , e_2 , \ldots , e_n)$ برای g متعامد است. بدین‌ترتیب (I) ثابت شد.

ب - فرض می‌کنیم $(e_1 , e_2 , \ldots , e_n)$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد برای f و متعامد برای g باشد (لازم نیست که این پایه‌همان پایه‌ای باشد که دربالا درنظر گرفته شد). بنابر ۳.۹.۱۷ و درصورت لزوم پس‌از تغییر ترتیب α_iها ، داریم .

$$g(e_1 , e_1)=\alpha_1 , \ldots , g(e_n , e_n)=\alpha_n$$

دراین‌صورت قسمت (II) قضیه از ۳.۶.۱۶ نتیجه می‌گردد.

فصل هیجدهم
فرم‌های چند خطی متناوب

فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی‌باشد. در فصل دهم فرم‌های p خطی متناوب روی E تعریف شد اما تنها حالت $p=n$ مورد مطالعه قرارگرفت. دراینجا باردیگر به‌مطالعهٔ دقیق حالت کلی می‌پردازیم. به‌ویژه ضرب «خارجی» فرم‌های متناوب را بررسی می‌کنیم. این‌مفاهیم درفصل فرمهای دیفرانسیل (کتاب آنالیز) به‌کار می‌آیند، زیرا هرفرم دیفرانسیل درحقیقت یک «میدان» فرم‌های چند خطی متناوب است.

دراین فصل فرض‌می‌کنیم که همهٔ فضاهای برداری فضاهایی با بعد با پایان باشند.

۱.۱۸ ـ نامتقارن‌کردن

۱.۱.۸ - قضیه - فرض می‌کنیم f یك فرم p خطی روی E باشد. گسترش $g : E^p \to K$ را به‌صورت:

$$g(x_1 , x_2 , \dots , x_p) = \sum_{\sigma \in G_p} \varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)} , x_{\sigma(2)} , \dots , x_{\sigma(p)})$$

که‌درآن G_p گروه تبدیلهای $\{1, 2, \dots, p\}$ است، درنظرمی‌گیریم. دراینصورت g یك‌فرم p خطی متناوب روی E می‌باشد.

اثبات - روشن است‌که g یک فرم p خطی است زیرا ترکیبی خطی از فرم‌های p خطی می‌باشد. ثابت می‌کنیم که g متناوب نیز هست.

بدین منظور فرض می‌کنیم برای دواندیس متمایز i و j داشته باشیم $x_i = x_j$ ونشان می‌دهیم که $g(x_1 , x_2 , \dots , x_p) = 0$.

عنصر τ از G_p راکه برای آن $\tau(i)=j$ ، $\tau(j)=i$] و برای $k \neq i,j$ $\tau(k)=k$ است؛ درنظر می‌گیریم. چون $\tau^2 = e$ است (شمارهٔ ۵.۲.۳) پس زیرگروه

H از G_p پدید آمده به‌وسیلهٔ τ برابر با $\{e , \tau\}$ است. هر کلاس راست G_p برحسب H مجموعه‌ای دوعنصری است. این کلاسها دوبدو جدا ازهم می‌باشند و اجتماع آنها G_p است. درهر کلاس راست c یک عنصر σ_c را انتخاب می‌کنیم (پس عنصر دیگر این کلاس $\tau\sigma_c$ خواهد بود).

اگر A مجموعهٔ σ_cها باشد G_p اجتماع دومجموعهٔ جدااز هم A و τA خواهدشد. پس

$$g(x_1 , \cdots , x_p) = \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)} , \cdots , x_{\sigma(p)}) + \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_{\tau\sigma} f(x\tau_{\sigma(1)} , \cdots , x_{\tau\sigma(p)})$$

$$= \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_\sigma [f(x_{\sigma(1)} , \cdots , x_{\sigma(p)}) - f(x_{\tau\sigma(1)} , \cdots , x_{\tau\sigma(p)})]$$

در مطالعهٔ $x_{\tau\sigma(k)}$ سه‌حالت پیش میآید :

۱ - $\sigma(k) \neq i$ و $\sigma(k) \neq j$ پس $x_{\tau\sigma(k)} = x_{\sigma(k)}$

۲ - $\sigma(k) = i$ پس $x_{\tau\sigma(k)} = x_{\tau(i)} = x_j = x_i = x_{\sigma(k)}$

۳ - $\sigma(k) = j$ پس $x_{\tau\sigma(k)} = x_{\tau(j)} = x_i = x_j = x_{\sigma(k)}$

بنابراین درحاصل جمع بالا مقدار هرکروشه صفراست و درنتیجه :

$$g(x_1 , x_2 , \cdots , x_p) = 0$$

۲.۱.۱۸ - **تعریف - بافرض‌های ۱.۱.۱۸ گوییم که g یك فرم p خطی متناوب است که از نامتقارن کردن f بدست آمده‌است.**

۳.۱.۱۸ - فرض می‌کنیم $f_1 ، f_2 ، \cdots ، f_p$ فرم‌هایی خطی روی E باشند. گسترش $f : E^p \to K$ که به‌صورت :

$$(x_1 , x_2 , \cdots , x_p) \to f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_p(x_p)$$

تعریف‌شده است یك فرم p خطی روی E می‌باشد. فرم p خطی متناوب روی E را که از نامتقارن کردن f بدست می‌آید **حاصلضرب خارجی** $f_1 ، f_2 ، \cdots ، f_p$ می‌نامیم وبا $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p$ می‌نماییم.

بنابراین برحسب تعریف داریم :

$$(1)\quad (f_1 \wedge \cdots \wedge f_p)(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{\sigma \in G_p} \varepsilon_\sigma f_1(x_{\sigma(1)}) f_2(x_{\sigma(2)}) \cdots f_p(x_{\sigma(p)})$$

بدگفته دیگر :

$$(1')\quad (f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p)(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \det[f_i(x_j)]_{1 \leqslant i, j \leqslant p}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_p) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_p(x_1) & f_p(x_2) & \cdots & f_p(x_p) \end{vmatrix}$$

۴.۱.۱۸ - **مثال** - اگر f_1 و f_2 دوفرم خطی روی E باشند ، $f_1 \wedge f_2$ یک فرم دوخطی متناوب روی E است بهقسمی که داریم :

$$(f_1 \wedge f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) - f_1(x_2) f_2(x_1)$$

۵.۱.۱۸ - **قضیه - فرض می‌کنیم f_1 ، f_2 ، $\ldots$ ، f_p فرم‌هایی خطی روی E باشند. اگر دوتا از f_iها باهم برابر باشند خواهیم داشت :**

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p = 0$$

اثبات - فرض می‌کنیم که برای دواندیس متمایز i و j داریم $f_i = f_j$ وثابت می‌کنیم که $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p = 0$. دراین‌صورت دردترمینان فرمول $(1')$ سطر i ام وسطر j ام یکی می‌باشند درنتیجه بنابر ۸.۶.۱۰ مقدار این دترمینان صفر است . بنابراین :

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p)(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$$

چون این مطلب برای بردارهای دلخواه x_1 ، x_2 ، $\ldots$ ، x_p برقرار می‌باشد پس :

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p = 0$$

۶.۱.۱۸ - **قضیه - اگر فضای برداری فرمهای p خطی متناوب روی E را F بنامیم، گسترش $(f_1, f_2, \ldots, f_p) \to f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p$ فضای $(E^*)^p$ در F یک گسترش p خطی است .**

اثبات - چنانچه f_1 ، f'_1 ، f_2 ، f_3 ، … ، f_p متعلق به E^* باشد ، بنابرفرمول (۱) شمارهٔ ۳.۱.۱۸ آشکار است که x_1 ، x_2 ، … ، x_p هرچه باشند داریم :

$$((f_1+f'_1)\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p)(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$
$$=(f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p)(x_1, x_2, \cdots, x_p)+(f'_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p)(x_1, x_2, \cdots, x_p)$$

بنابراین :

$$(f_1+f'_1)\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p=f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p+f'_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p$$

به‌همین‌ترتیب دیده می‌شود که :

$$(\lambda f_1)\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p=\lambda(f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p)$$

به‌روش مشابه این مطلب برای اندیسهای ۲ ، ۳ ، … ، p ثابت می‌شود.

۷.۱.۱۸ - قضیه - چنانچه f_1 ، f_2 ، … ، f_p متعلق‌به E^* و σ یك تبدیل $\{1, 2, \ldots, p\}$ باشد ، خواهیم داشت :

$$f_{\sigma(1)}\wedge f_{\sigma(2)}\wedge\cdots\wedge f_{\sigma(p)}=\varepsilon_\sigma f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p$$

زیرا باتوجه به ۷.۱.۱۵ این مطلب از ۵.۱.۱۷ و ۶.۱.۱۷ نتیجه می‌شود.

۸.۱.۱۸ - قضیه - فرض می‌کنیم $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ پایه‌ای از E و $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ پایهٔ دوال آن‌در E^* باشد.شمارهای درست i_1 ، i_2 ، … ، i_p بین ۱ و n و $f=e_{i_1}^*\wedge e_{i_2}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_p}^*$ را درنظر می‌گیریم .

(I) - اگر

$$x_1=\lambda_1^1e_1+\lambda_2^1e_2+\cdots+\lambda_n^1e_n$$
$$x_2=\lambda_1^2e_1+\lambda_2^2e_2+\cdots+\lambda_n^2e_n$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$x_p=\lambda_1^pe_1+\lambda_2^pe_2+\cdots+\lambda_n^pe_n$$

بردارهایی از E باشند داریم :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \begin{vmatrix} \lambda^1_{i_1} & \lambda^2_{i_1} & \cdots & \lambda^p_{i_1} \\ \lambda^1_{i_2} & \lambda^2_{i_2} & \cdots & \lambda^p_{i_2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda^1_{i_p} & \lambda^2_{i_p} & \cdots & \lambda^p_{i_p} \end{vmatrix}$$

(II) - چنانچه $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ **و** $j_1, j_2, \dots, j_p$ **شمارهای درستی بین ۱ و n باشند به‌قسمی‌که** $j_1 < j_2 < \cdots < j_p$ ، **داریم** $f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}) = 0$ **مگر اینکه** $j_1 = i_1$ ، $j_2 = i_2$ ، ...، $j_p = i_p$ **که‌در این‌حالت خواهیم داشت** $f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}) = 1$

اثبات - داریم :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{\sigma \in G_p} \varepsilon_\sigma e^*_{i_1}(x_{\sigma(1)}) \cdots e^*_{i_p}(x_{\sigma(p)})$$

$$= \sum_{\sigma \in G_p} \varepsilon_\sigma \lambda^{\sigma(1)}_{i_1} \cdots \lambda^{\sigma(p)}_{i_p}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda^1_{i_1} & \lambda^2_{i_1} & \cdots & \lambda^p_{i_1} \\ \lambda^1_{i_2} & \lambda^2_{i_2} & \cdots & \lambda^p_{i_2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda^1_{i_p} & \lambda^2_{i_p} & \cdots & \lambda^p_{i_p} \end{vmatrix}$$

به‌ویژه :

$$f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}) = \sum_{\sigma \in G_p} \varepsilon_\sigma \langle e^*_{i_1}, e_{j_{\sigma(1)}} \rangle \cdots \langle e^*_{i_p}, e_{j_{\sigma(p)}} \rangle$$

اگر یکی از اندیسهای $j_1, j_2, \dots, j_p$ به $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ تعلق نداشته باشد تمام‌جمله‌های‌این حاصل‌جمع صفرند وبنابراین $f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}) = 0$. فرض‌می‌کنیم

که j_1 ، j_2 ، ... ، j_p همگی به $\left\{i_1, i_2, \cdots, i_p\right\}$ متعلق باشند. اگر

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_p \quad \text{و} \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_p$$

باشد باید داشته باشیم $j_1 = i_1$ ، $j_2 = i_2$ ، ... و $j_p = i_p$ و در حاصل جمع پیشین تنها جملهٔ مخالف باصفر جملهٔ وابسته به $\sigma = e$ می‌باشد واین جمله برابر با ۱ است .

۹.۱.۱۸ - **قضیه-فرض می‌کنیم $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ یك پایه از E و $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ پایهٔدوآل آن در E^* باشد. دراینصورت حاصلضرب‌های خارجی $e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*$ ،بهقسمی‌که‌داشته‌باشیم $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ ،یك پایهٔ فضای برداری‌فرم‌های p خطی متناوب روی E را تشکیل می‌دهند.**

اثبات - الف - ثابت می‌کنیم که این‌حاصلضرب‌های خارجی نابستگی خطی‌دارند. برای این‌منظور فرض می‌کنیم داشته باشیم :

$$\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} \mu_{i_1 i_2 \cdots i_p} e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^* = 0$$

که درآن $\mu_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ اسکالرهای‌دلخواه می‌باشند. درآنصورت‌بنابر ۸.۱.۱۸.(II) برای هر دنباله کاملاً افزایشی $(j_1, j_2, \cdots, j_p)$ از شمارهای درست بین ۱ و n داریم :

$$0 = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} \mu_{i_1 i_2 \cdots i_p} (e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*)(e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_p})$$

$$= \mu_{j_1 j_2 \cdots j_p}$$

ب - اکنون نشان‌می‌دهیم که هرفرم p خطی متناوب g روی E را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از $e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*$ ها نوشت. برای این کار قرار می‌دهیم :

$$g(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_p}) = g_{i_1 i_2 \cdots i_p} \in K$$

و ثابت می‌کنیم :

$$g = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} g_{i_1 i_2 \cdots i_p} e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^* \tag{۲}$$

فرض می‌کنیم x_1 ، x_2 ، ... ، x_p بردارهایی‌از E باشند وثابت می‌کنیم که‌مقادیر دوطرف (۲) برای x_1 ، ... ، x_p یکی‌است.چون‌دوطرف(۲) فرم‌های p خطی می‌باشند، کافی

است مطلب را برای حالتی که x_1 ، $x_۲$ ، ... ، x_p از بردارهای پایهٔ e_1 ، $e_۲$ ، ... ، e_n هستند ثابت کنیم. وچون دوطرف (۲) فرم‌های متناوب می‌باشند کافی است استدلال را در مورد $x_1=e_{j_1}$ و $x_۲=e_{j_۲}$ و ... و $x_p=e_{j_p}$ ، که درآن‌داریم $j_1<j_۲<\cdots<j_p$ ، انجام دهیم . اما بنابر تعریف $g_{j_1 j_۲ \cdots j_p}$ داریم :

$$g(e_{j_1}, e_{j_۲}, \cdots, e_{j_p})=g_{j_1 j_۲ \cdots j_p}$$

پس بنابر ۸.۱.۱۸ . (II) خواهیم داشت :

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p} g_{i_1 \cdots i_p}(e^*_{i_1}\wedge\cdots\wedge e^*_{i_p})(e_{j_1},\cdots,e_{j_p})=g_{j_1 j_۲ \cdots j_p}$$

۱۰.۱.۱۸ - **مثال** - اگر $(e_1, e_۲, e_۳, e_٤, e_٥)$ پایه‌ای از فضای‌برداری E باشد ، فضای برداری فرم‌های سه خطی متناوب روی E دارای پایه‌ای با عنصرهای زیر خواهد بود :

$$e^*_1\wedge e^*_۲\wedge e^*_۳ \;,\; e^*_1\wedge e^*_۲\wedge e^*_٤ \;,\; e^*_1\wedge e^*_۲\wedge e^*_٥ \;,\; e^*_1\wedge e^*_۳\wedge e^*_٤ \;,$$
$$e^*_1\wedge e^*_۳\wedge e^*_٥ \;,\; e^*_1\wedge e^*_٤\wedge e^*_٥ \;,\; e^*_۲\wedge e^*_۳\wedge e^*_٤ \;,\; e^*_۲\wedge e^*_۳\wedge e^*_٥ \;,$$
$$e^*_۲\wedge e^*_٤\wedge e^*_٥ \;,\; e^*_۳\wedge e^*_٤\wedge e^*_٥$$

۱۱.۱.۱۸ - نتیجه - فرض‌می‌کنیم E یك فضای برداری n بعدی باشد
(I) - برای $p=1, ۲, \cdots, n$ بعد فضای برداری فرم‌های p خطی متناوب روی E برابراست با $C^p_n=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

(II) - برای $p>n$ فضای برداری فرمهای p خطی متناوب روی E برابر با $\{0\}$ است.

زیرا اگر $p>n$ باشد p بردار E همیشه بستگی خطی خواهند داشت و بنابراین (II) را از ۳.۲.۱۰ می‌توان‌بدست‌آورد. اگر $p\leqslant n$ باشدشمارهٔ دنباله‌های کاملاً افزایشی $i_1<i_۲<\cdots<i_p$ در $\{1, ۲, \cdots, n\}$ برابر است باشمارهٔ بخش‌های p عنصری از $\{1, ۲, \cdots, n\}$ یعنی C^p_n. بنابراین (I) از ۹.۱.۱۸ بدست می‌آید.

۱۲.۱.۱۸ - به‌ویژه بعد فضای برداری فرم‌های n خطی متناوب‌روی E برابربایک است ، و تنها عنصر $e_1^* \wedge e_2^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$ یک پایهٔ این فضا را تشکیل می‌دهد [$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ پایه‌ای از E فرض شده است]. بدین‌ترتیب دوباره قسمت (II) قضیهٔ ۲.۳.۱۰ بدست می‌آید .

۲.۱۸ - حاصلضرب خارجی فرم‌های متناوب

۱.۲.۱۸ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری ، f یک‌فرم p خطی متناوب روی E و g یک فرم q خطی متناوب‌روی E باشند. می‌خواهیم یک فرم $(p+q)$ خطی روی E تعریف کنیم . این‌فرم را به‌صورت $f \overline{\wedge} g$ می‌نماییم .

فرض‌می‌کنیم G_{p+q} گروه تبدیلهای $\{1, 2, 3, \cdots, p+q\}$ و A مجموعهٔ عنصرهایی مانند σ از G_{p+q} باشد که برای آنها داریم :

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p)$$

$$\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \cdots < \sigma(p+q)$$

اکنون گسترش $f \overline{\wedge} g : E^{p+q} \to K$ را بصورت :

$$(f \overline{\wedge} g)(x_1, x_2, \cdots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p)}) g(x_{\sigma(p+1)}, \cdots, x_{\sigma(p+q)})$$

تعریف می‌کنیم .

آشکاراست که $(f \overline{\wedge} g)(x_1, x_2, \cdots, x_{p+q})$ به‌طور خطی‌به $x_1, x_2, \cdots, x_{p+q}$ بستگی داردبنابراین $f \overline{\wedge} g$ یک فرم $(p+q)$ خطی‌است. درشمارهٔ ۵.۲.۱۸ ثابت‌خواهیم کرد که $f \overline{\wedge} g$ متناوب می‌باشد .

هنگامی‌که $p=0$ یعنی f یک اسکالر λ است داریم $f \overline{\wedge} g = \lambda g$. هم‌چنین اگر g یک اسکالر μ باشد داریم $f \overline{\wedge} g = \mu f$.

۲.۲.۱۸ . **مثال** - اگر f و g فرمهای‌دوخطی‌متناوب روی E باشند $f \overline{\wedge} g$ یک‌فرم چهار خطی است که بادستور زیر معین می‌شود :

$$(f\overline{\wedge} g)(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$=f(x_1, x_2)g(x_3, x_4)-f(x_1, x_3)g(x_2, x_4)+f(x_1, x_4)g(x_2, x_3)$$
$$+f(x_2, x_3)g(x_1, x_4)-f(x_2, x_4)g(x_1, x_3)+f(x_3, x_4)g(x_1, x_2)$$

از روی این مثال به‌آسانی دیده می‌شود که $f\overline{\wedge} g$ متناوب است.

۳.۲.۱۸ - فرض می‌کنیم f ، f_1 ، f_2 فرم‌های p خطی‌متناوب روی E و g ، g_1 ، g_2 فرم‌های q خطی متناوب روی E باشند. چنانچه λ یک اسکالر باشد به‌آسانی می‌توان درستی برابری‌های زیر را بررسی کرد:

$$(f_1+f_2)\overline{\wedge} g=f_1\overline{\wedge} g+f_2\overline{\wedge} g$$
$$f\overline{\wedge}(g_1+g_2)=f\overline{\wedge} g_1+f\overline{\wedge} g_2$$
$$(\lambda f)\overline{\wedge} g=\lambda(f\overline{\wedge} g)$$
$$f\overline{\wedge}(\lambda g)=\lambda(f\overline{\wedge} g)$$

۴.۲.۱۸ -فرض میکنیم f_1 ، f_2 ، ... ، f_{p+q} فرمهای خطی‌روی E باشند. یادآوری می‌کنیم که $f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p$ یک فرم p خطی متناوب روی E و $f_{p+1}\wedge f_{p+2}\wedge\cdots\wedge f_{p+q}$ یک فرم q خطی متناوب روی E می‌باشد.

لم - داریم:

$$(f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_p)\overline{\wedge}(f_{p+1}\wedge f_{p+2}\wedge\cdots\wedge f_{p+q})=f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_{p+q}$$

اثبات- درگروه G_{p+q} می‌توانیم زیرگروهی‌را درنظربگیریم که هر عنصرآن شمارهای درست ۱ ، ۲ ، ... ، p را به‌یکدیگر بدل می‌کند ولی شمارهای درست $p+1$ ، $p+2$ ،...، $p+q$ را ثابت نگه‌می‌دارد. این زیرگروه رامی‌توان‌با گروه G_p یکی گرفت. همچنین می‌توانیم زیرگروه دیگری درنظربگیریم که هر عنصرش شمارهای درست $p+1$ ، $p+2$ ، ... ، $p+q$ را به‌یکدیگر بدل می‌کند ولی شمارهای درست ۱ ، ۲ ، ... ، p را ثابت نگه‌می‌دارد. این زیرگروه را با گروه G_q یکی‌می‌گیریم. هرعنصر G_{p+q} راتنها به‌یک روش می‌توان به‌صورت $\sigma\sigma'\sigma''$ نوشت که‌درآن $\sigma'\in G_p$ و $\sigma''\in G_q$ و σ به‌مجموعهٔ A ، که درشمارهٔ ۱.۲.۱۸ درنظرگرفته شد، متعلق است. اکنون اگر x_1 ، x_2 ، ... ، x_{p+q} عنصرهای دلخواهی از E باشند داریم:

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_{p+q})(x_1, x_2, \cdots, x_{p+q})$$

$$= \sum_{\sigma\in A,\sigma'\in G_p,\sigma''\in G_q} \varepsilon_{\sigma\sigma'\sigma''} f_1(x_{\sigma\sigma'\sigma''(1)}) \cdots f_{p+q}(x_{\sigma\sigma'\sigma''(p+q)})$$ ، (بنابر ۳.۱.۱۸)

$$= \sum_{\sigma\in A,\sigma'\in G_p,\sigma''\in G_q} \varepsilon_\sigma \varepsilon_{\sigma'} \varepsilon_{\sigma''} f_1(x_{\sigma\sigma'(1)}) \cdots f_p(x_{\sigma\sigma'(p)}) f_{p+1}(x_{\sigma\sigma''(p+1)}) \cdots$$

$$f_{p+q}(x_{\sigma\sigma''(p+q)})$$ ، (بنابر تعریف G_p , G_q)

عبارت بالا پس از دسته‌بندی جمله‌ها به‌صورت $\sum_{\sigma\in A} \varepsilon_\sigma \alpha_\sigma \beta_\sigma$ نوشته می‌شود که درآن :

$$\alpha_\sigma = \sum_{\sigma'\in G_p} \varepsilon_{\sigma'} f_1(x_{\sigma\sigma'(1)}) \cdots f_p(x_{\sigma\sigma'(p)})$$

$$\beta_\sigma = \sum_{\sigma''\in G_q} \varepsilon_{\sigma''} f_{p+1}(x_{\sigma\sigma''(p+1)}) \cdots f_{p+q}(x_{\sigma\sigma''(p+q)})$$

بنابراین :

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_{p+q})(x_1, \cdots, x_{p+q})$$

$$= \sum_{\sigma\in A} \varepsilon_\sigma (f_1 \wedge \cdots \wedge f_p)(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p)})(f_{p+1} \wedge \cdots \wedge f_{p+q})$$

$$(x_{\sigma(p+1)}, \cdots, x_{\sigma(p+q)})$$ ، (بنابر ۳.۱.۱۸)

$$= (f_1 \wedge \cdots \wedge f_p) \overline{\wedge} (f_{p+1} \wedge \cdots \wedge f_{p+q})(x_1, x_2, \cdots, x_{p+q})$$ ، (بنابر ۱.۲.۱۸)

۵.۲.۱۸ - قضیه - فرض می‌کنیم f یک‌فرم p خطی متناوب روی E و g یک‌فرم q خطی متناوب روی E باشد. درآن صورت $f \overline{\wedge} g$ یک‌فرم $(p+q)$ خطی متناوب روی E خواهد بود.

اثبات - بنابر ۹.۱.۱۸ می‌توان نوشت :

$$f=f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p+f'_1 \wedge f'_2 \wedge \cdots \wedge f'_p+f''_1 \wedge f''_2 \wedge \cdots \wedge f''_p+\cdots$$

$$g=g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_q+g'_1 \wedge g'_2 \wedge \cdots \wedge g'_q+g''_1 \wedge g''_2 \wedge \cdots \wedge g''_q+\cdots$$

که درآن f_i ، f'_i ، f''_i ، ... ، g_i ، g'_i ، g''_i ، ... فرمهایی خطی روی E می‌باشند. پس بنابر ۳.۲.۱۸ فرم $f\overline{\wedge}g$ برابر است با حاصل جمع جمله‌هایی به‌صورت :

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p)\overline{\wedge}(g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_q)$$

اما هریک از این جمله‌ها یک فرم $(p+q)$ خطی متناوب است (۴.۲.۱۸).

۶.۲.۱۸ - بدین‌ترتیب‌دیده می‌شود که درمجموعهٔ فرم‌های چند خطی متناوب‌روی E قانون $\overline{\wedge}$ یک قانون ترکیب‌است. بنابراین مانند شمارهٔ ۴.۱.۲ اگر f ، g ، h ، k ، ... فرمهای چندخطی متناوبی‌روی E باشند می‌توان $f\overline{\wedge}g\overline{\wedge}h$ ، $f\overline{\wedge}g\overline{\wedge}h\overline{\wedge}k$ ، ... را بادستورهای زیر تعریف کرد :

$$f\overline{\wedge}g\overline{\wedge}h=f\overline{\wedge}(g\overline{\wedge}h)\ ،\ f\overline{\wedge}g\overline{\wedge}h\overline{\wedge}k=f\overline{\wedge}(g\overline{\wedge}(h\overline{\wedge}k))\ ,\ \cdots$$

۷.۲.۱۸ - **قضیه - چنانچه f_1 ، f_2 ، ... ، f_p فرمهایی خطی روی E باشند داریم :**

$$f_1\overline{\wedge}f_2\overline{\wedge}\cdots\overline{\wedge}f_p=f_1 \wedge f_2 \wedge\cdots\wedge f_p$$

اثبات - قضیه را به‌روش بازگشت ثابت می‌کنیم . برای $p=1$ مطلب آشکار است. فرض می‌کنیم که قضیه درحالت $p-1$ فرم برقرار باشد . داریم :

$$f_1\overline{\wedge}f_2\overline{\wedge}\cdots\overline{\wedge}f_p=f_1\overline{\wedge}(f_2\overline{\wedge}\cdots\overline{\wedge}f_p) \quad ، \quad (\text{بنابر } ۶.۲.۱۸)$$

$$=f_1\overline{\wedge}(f_2 \wedge \cdots \wedge f_p) \quad ، \quad (\text{بنابر فرض بازگشت})$$

$$=f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p \quad ، \quad (\text{بنابر } ۴.۲.۱۸)$$

۸.۲.۱۸ - به‌کمک قضیهٔ ۷.۲.۱۸ می‌توانیم پس‌از این علامت $\overline{\wedge}$ را رها کرده و علامت $\wedge$ را جانشین آن‌سازیم واین عمل ، تولید هیچگونه ابهامی‌نخواهد کرد. مثلاً وقتی برای $i=1$ ، ۲ ، ... ، r ، g_i یک فرم p_i خطی متناوب روی E باشد می‌توان فرم $g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_r$ را درنظرگرفت. این فرم یک‌فرم $(p_1+p_2+\cdots+p_r)$ خطی متناوب روی E می‌باشد و **حاصلضرب‌خارجی** g_1 ، g_2 ، ... ، g_r نامیده‌میشود.

چنانچه $p_1=p_2=\cdots=p_r=1$ باشد مفهوم ۳.۱.۱۸ دوباره بدست می‌آید. فرم $g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_r$ به‌طور خطی به g_1 ، g_2 ، ... ، g_r بستگی دارد . بنابر ۱.۲.۱۸ ضرب یک‌فرم دریک اسکالر حالت ویژه‌ای از ضرب خارجی است.

۹.۲.۱۸ - **قضیه - چنانچه f ، g ، h فرمهای چند خطی متناوب روی E باشند داریم :**

$$f \wedge (g \wedge h)=(f \wedge g) \wedge h$$

اثبات- به‌کمک ۹.۱.۱۸ می‌توان فرض کرد :

$$f=f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p$$

$$g=g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_q$$

$$h=h_1 \wedge h_2 \wedge \cdots \wedge h_r$$

که درآن f_1 ، f_2 ، ... ، g_1 ، g_2 ، ... ، h_1 ، h_2 ، ... فرمهایی خطی روی E هستند .
چنانچه دوبار پی‌درپی لم شمارهٔ ۴.۲.۱۸ را به‌کار بریم خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}f \wedge (g \wedge h) &= (f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p) \wedge [(g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_q) \\ &\qquad \wedge (h_1 \wedge h_2 \wedge \cdots \wedge h_r)] \\ &= (f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p) \wedge (g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_q \wedge h_1 \wedge h_2 \wedge \cdots \wedge h_r) \\ &= f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p \wedge g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_q \wedge h_1 \wedge h_2 \wedge \cdots \wedge h_r\end{aligned}$$

ازعبارت $(f \wedge g) \wedge h$ هم‌همین نتیجه به‌دست می‌آید.

۱۰.۲.۱۸ - شماره‌های ۸.۲.۱۸ و ۹.۲.۱۸ نتایج شماره‌های ۳.۲.۱۸ و ۴.۲.۱۸ و ۵.۲.۱۸ و ۶.۲.۱۸ و ۷.۲.۱۸ را دربردارند. بنابراین شماره‌های اخیر را می‌توان به‌عنوان لم‌هایی درنظر گرفت .

۱۱.۲.۱۸ - **قضیه-چنانچه f یک‌فرم p خطی‌متناوب روی E و g یک فرمq خطی متناوب روی E باشد داریم :**

$$(g \wedge f)=(-1)^{pq} f \wedge g$$

اثبات - به‌کمک ۹.۱.۱۸ می‌توان فرض کرد :

$$f=f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p \ , \ g=g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_q$$

که درآن f_1 ، ... ، f_p ، g_1 ، ... ، g_q فرمهای‌خطی‌روی E می‌باشند. دراینصورت‌داریم:

$$f \wedge g = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p \wedge g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_q$$
$$g \wedge f = g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_q \wedge f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p$$

اما بنابر ۷.۱.۱۸ داریم $g \wedge f = \varepsilon_\sigma f \wedge g$ که‌درآن σ تبدیلی از $\{1, 2, \ldots, p+q\}$ است که به‌روش زیر معین شده است :

$$\sigma(1) = p+1 \;,\; \sigma(2) = p+2 \;,\; \ldots \;,\; \sigma(q) = p+q$$
$$\sigma(q+1) = 1 \;,\; \sigma(q+2) = 2 \;,\; \ldots \;,\; \sigma(q+p) = p$$

جفت‌های (i, j) که برای آنها $1 \leqslant i < j \leqslant p+q$ و $\sigma(i) > \sigma(j)$ می‌باشد جفت‌هایی هستند که درآنها $1 \leqslant i \leqslant q$ و $q+1 \leqslant j \leqslant q+p$. پس بنابر ۲.۱.۱۰ شمارهٔ وارونی‌های σ برابر است با pq و درنتیجه $\varepsilon_\sigma = (-1)^{pq}$.

۱۲.۲.۱۸ - فضاهای برداری E و F روی K وگسترش خطی $u : E \to F$ داده شده‌اند. فرض‌می‌کنیم f یک‌فرم p خطی‌متناوب روی F و g یک فرم q خطی‌متناوب روی F باشند. اگر سایه‌های وارون f و g به‌وسیلهٔ u را به‌ترتیب f' و g' بنامیم f' یک فرم p خطی متناوب روی E و g' یک‌فرم q خطی متناوب روی E می‌باشند. در زیر ثابت می‌کنیم که h ، **سایهٔ‌وارون** $f \wedge g$ **به‌وسیلهٔ** u **برابراست‌با** $f' \wedge g'$.

فرض می‌کنیم A زیرمجموعه‌ای ازگروه G_{p+q} باشد که در شمارهٔ ۱.۲.۱۸ درنظر گرفته شد. برای عنصرهای دلخواه x_1 ، x_2 ، ... ، x_{p+q} متعلق به E داریم :

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_{p+q}) = (f \wedge g)(ux_1, \ldots, ux_{p+q})$$
$$= \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_\sigma f(ux_{\sigma(1)}, \ldots, ux_{\sigma(p)})\, g(ux_{\sigma(p+1)}, \ldots, ux_{\sigma(p+q)})$$
$$= \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_\sigma f'(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})\, g'(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)})$$
$$= (f' \wedge g')(x_1, x_2, \ldots, x_{p+q}) \qquad \text{(بنابر ۱.۲.۱۸) ،}$$

۳.۱۸ ـ فرم‌های دوخطی متناوب

۱.۳.۱۸ ـ فرض می‌کنیم E یک فضای برداری و f یک‌فرم دوخطی متناوب روی E باشد. عنصرهای x و y متعلق به E را (نسبت به f) **عمود برهم گوییم** هرگاه داشته باشیم $f(x,y)=0$. چون $f(x,y)=-f(y,x)$ این بستگی بین x و y متقارن است.

۲.۳.۱۸ ـ مفاهیم وتعاریف ۲.۳.۱۶ و ۳.۳.۱۶ را می‌توان کلمه‌به‌کلمه دراین حالت تعمیم داد.

۳.۳.۱۸ ـ مانند شماره‌های ۱.٤.۱٦ و ۲.٤.۱٦ هستهٔ f و فرم‌های غیر اصیل را تعریف می‌کنیم. قضیهٔ ۳.٤.۱٦ و اثبات آن‌دراین‌حالت نیز برقرار است و مانند شمارهٔ ٥.٤.۱٦ مطالعهٔ فرم‌های دوخطی متناوب دلخواه را می‌توان به مطالعهٔ فرم‌های دوخطی متناوب اصیل برگرداند. قضیه ٦.٤.٦ و اثبات آن نیز برقرار است.

٤.۳.۱۸ ـ فرض می‌کنیم $\dim E=n$ و f یک فرم دوخطی متناوب اصیل روی E باشد. چنانچه F یک زیرفضای برداری k بعدی E باشد، $F^{\perp}$ یک زیرفضای‌برداری $n-k$ بعدی E می‌باشد و داریم $(F^{\perp})^{\perp}=F$. اثبات این‌مطالب شبیه ۲.٥.۱٦است.

٥.۳.۱۸ ـ قضیه ـ فضای برداری E که بعد آن زوج و برابر با $2p$ می‌باشدداده شده است. اگر f یک‌فرم‌دوخطی‌روی E و $(e_1, e_2, \cdots, e_{2p})$ یک پایهٔ E باشد:

(I)- شرایط زیرهم‌ارزند:

الف-اسکالرهای $f(e_i , e_j)$ همگی صفرند مگر:

$$f(e_1 , e_2)=-f(e_2 , e_1)=1 \quad , \quad f(e_3 , e_4)=-f(e_4 , e_3)=1 \; , \cdots ,$$
$$f(e_{2p-1} , e_{2p})=-f(e_{2p} , e_{2p-1})=1$$

ب - برای بردارهای دلخواه $x=\xi_1 e_1+\cdots+\xi_{2p}e_{2p}$ و $y=\eta_1 e_1+\cdots+\eta_{2p}e_{2p}$ **داریم:**

$$f(x , y)=(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)+(\xi_3\eta_4-\xi_4\eta_3)+\cdots+(\xi_{2p-1}\eta_{2p}-\xi_{2p}\eta_{2p-1})$$

پ-

$$f=e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^* + \cdots + e_{2p-1}^* \wedge e_{2p}^*$$

(II) - اگر شرایط بالا برقرار باشند f یك فرم متناوب اصیل است.

اثبات - بنابر ۴.۱.۱۸ داریم :

$$(e_1^* \wedge e_2^*)(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_{2p} e_{2p} , \eta_1 e_1 + \cdots + \eta_{2p} e_{2p}) = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1$$

که ازآن هم‌ارزی ب و پ ثابت‌می‌شود. به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که الف از ب نتیجه می‌گردد.

اگر شرط الف برقرار باشد داریم :

$$\begin{aligned} & f(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_{2p} e_{2p} , \eta_1 e_1 + \cdots + \eta_{2p} e_{2p}) \\ & = f(\xi_1 e_1 , \eta_2 e_2) + f(\xi_2 e_2 , \eta_1 e_1) + \cdots \\ & + f(\xi_{2p-1} e_{2p-1} , \eta_{2p} e_{2p}) + f(\xi_{2p} e_{2p} , \eta_{2p-1} e_{2p-1}) \\ & = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 + \cdots + \xi_{2p-1} \eta_{2p} - \xi_{2p} \eta_{2p-1} \end{aligned}$$

بدین‌ترتیب (I) ثابت می‌شود. ازشرط پ نتیجه می‌شود که f متناوب است وازشرط ب نتیجه‌می‌شود که‌اگر یك بردار x از E برهربردار y متعلق‌به E عمود باشد تمام‌آرایندههای x صفرند وبنابراین f اصیل است.

۶.۳.۱۸ - تعریف-هر پایه‌ای راکه درشرایط‌الف، ب، پ قضیه۵.۳.۱۸ صدق‌کند یك‌پایهٔ بهم بافته یاسمپلکتیك (نسبت‌به f) می‌نامند.

۷.۳.۱۸ - قضیه-اگر f یك‌فرم‌دوخطی متناوب اصیل‌روی E باشد، برای E پایه‌هایی وجود داردکه نسبت به f بهم بافته می‌باشند.

اثبات- قضیه برای حالتی‌که بعد فضای E برابر با صفراست‌آشکار می‌باشد. فرض می‌کنیم که‌بعد فضا یعنی n مثبت ومخالف‌با صفر وقضیه برای‌بعدهای کوچکتر از n برقرار باشد. اگر e_1 یك‌بردار غیر صفراز E باشد، چون f اصیل‌است‌برداری‌مانند e_2 در E وجود داردبه‌قسمی‌که $f(e_1,e_2) \neq 0$. باضرب e_2 دریك‌اسکالر می‌توان فرض کرد $f(e_1,e_2) = 1$ چون f متناوب است e_1 و e_2 نابستگی خطی دارند. قرار می‌دهیم $F = Ke_1 + Ke_2$ و $G = F^\perp$. دراین صورت F یك زیر فضای ۲ بعدی از E و G یك زیر فضای $n-2$ بعدی‌از E می‌باشد (۴.۳.۱۸). فرض می‌کنیم x متعلق به $F \cap G$ باشد، چون داریم $x \in F$ اسکالرهای λ و μ وجود دارند به‌قسمی‌که $x = \lambda e_1 + \mu e_2$ وچون $x \in G$

است پس بر e_1 و e_2 عمود می‌باشد یعنی :

$$0=f(x , e_1)=f(\lambda e_1+\mu e_2 , e_1)=\lambda f(e_1 , e_1)+\mu f(e_2 , e_1)=-\mu$$

$$0=f(x , e_2)=f(\lambda e_1+\mu e_2 , e_2)=\lambda f(e_1 , e_2)+\mu f(e_2 , e_2)=\lambda$$

بنابراین $x=0$. بدین ترتیب ثابت می‌شود که $F\cap G=\{0\}$ و در نتیجه $F+G$ یک زیر فضای $2+(n-2)=n$ بعدی از E می‌باشد. پس $F+G=E$ یعنی E حاصل جمع مستقیم F و G است. اگر f' تحدید f به $G\times G$ باشد، f' یک فرم دوخطی متناوب روی G است. فرض می‌کنیم y عنصری از G باشد که نسبت به f' بر G عمود است. دراین‌صورت از طرفی y نسبت به f بر G عمود است واز طرف دیگر چون $G=F^{\perp}$، y بر F عمود است. پس y بر E عمود می‌باشد، وچون f اصیل است داریم $y=0$. بدین ترتیب ثابت می‌شود که f' اصیل است. بنابرفرض بازگشت می‌توان در G یک پایهٔ بهم‌بافته نسبت به f' یافت ؛ این پایه را به‌صورت :

$$(e_3 , e_4 , \ldots , e_{2p-1} , e_{2p})$$

می‌نویسیم. چنانکه دیده می‌شود $(e_1 , e_2 , e_3 , e_4 , \ldots , e_{2p-1} , e_{2p})$ پایه‌ای است از E که در شرط الف قضیهٔ ۵.۳.۱۸ صدق می‌کند.

۸.۳.۱۸ - **نتیجه - چنانچه روی E یك فرم دوخطی متناوب اصیل وجود داشته باشد بعد E زوج است.**

۹.۳.۱۸ - از ۷.۳.۱۸ نتیجه می‌شود که در روی یک فضای برداری با بعد $2p$، با تقریب یک ایزومرفیسم، تنها یک فرم دوخطی متناوب اصیل وجود دارد .

۱۰.۳.۱۸ - شباهتی را که تاکنون بین مطالعهٔ فرم های دوخطی متناوب و مطالعهٔ فرم های دوخطی متقارن دیده شد می‌توان بیش‌از این هم دنبال کرد.

۴.۱۸ ـ حالت فضای معمولی سودار

۱.۴.۱۸ - فرض می‌کنیم E فضای‌برداری‌بردارهای‌آزاد فضای معمولی سودارباشد. بنابر ۶.۴.۱۶ یک ایزومرفیسم کانونیک E روی E^* وجود دارد . چنانچه F فضای

برداری فرم‌های دوخطی متناوب‌روی E باشد ، قضیه زیر نشان می‌دهد که یک ایزومرفیسم کانونیک E روی F نیز وجود دارد .

قضیه - برای هر بردار $\vec{V}$ متعلق به E ،گسترش $f_{\vec{V}} : E\times E \to \mathbf{R}$ را به‌روش زیر تعریف می‌کنیم :

(حاصلضرب‌مختلط $\vec{V} ، \vec{V}_1 ، \vec{V}_2) = (\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2) = f_{\vec{V}}(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)$

دراین صورت $f_{\vec{V}}$ یك فرم دوخطی متناوب روی E است ، و گسترش $\vec{V} \to f_{\vec{V}}$ یك ایزومرفیسم E روی F می‌باشد .

اثبات - اثبات اینکه $f_{\vec{V}}$ یک‌فرم دوخطی متناوب روی E است از شماره‌های ۳.۱۲.۱۰ و ۵.۱۲.۱۰ نتیجه می‌شود به‌علاوه داریم :

$$f_{\vec{V}+\vec{V'}}(\vec{V}_1 , \vec{V}_2)=$$

$$=(\vec{V}+\vec{V'} , \vec{V}_1 , \vec{V}_2) = (\vec{V} , \vec{V}_1 , \vec{V}_2) + (\vec{V'} , \vec{V}_1 , \vec{V}_2)$$

$$=f_{\vec{V}} (\vec{V}_1 , \vec{V}_2)+f_{\vec{V'}} (\vec{V}_1 , \vec{V}_2) = (f_{\vec{V}} + f_{\vec{V'}})(\vec{V}_1 , \vec{V}_2)$$

بنابراین :

$$f_{\vec{V}+\vec{V'}} = f_{\vec{V}} + f_{\vec{V'}}$$

به‌همین ترتیب دیده می‌شود که $f_{\lambda\vec{V}}=\lambda f_{\vec{V}}$. بنابراین $\vec{V} \to f_{\vec{V}}$ یک‌گسترش‌خطی E در F است. اگر $\vec{V}\neq 0$ باشد بردارهای $\vec{V}_2 , \vec{V}_1$ وجود دارند به‌قسمی‌که $(\vec{V} , \vec{V}_1 , \vec{V}_2)$ یک پایهٔE باشد . درآنصورت بنابر ۵.۱۲.۱۰ داریم :

$$f_{\vec{V}} (\vec{V}_1 , \vec{V}_2) = (\vec{V} , \vec{V}_1 , \vec{V}_2) \neq 0$$

پس $f_{\vec{V}}$ ودرنتیجهٔ هستهٔ گسترش $\vec{V}\to f_{\vec{V}}$ برابربا $\{0\}$ است.بنابراین‌رتبهٔ این گسترش

برابر است با $\dim E = ۳$. پس بعد سایهٔ این گسترش نیز ۳ است ، چون داریم $\dim F = ۳$ (بنابر ۱۱.۱.۱۸) ، گسترش $\vec{V} \to f_{\vec{V}}$ سورژکتیو می‌باشد.

۲.٤.۱۸ - فرض می‌کنیم $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ یک‌پایهٔ یکه‌ای‌متعامد E وباسوی مثبت باشد. داریم :

$$f_{\vec{e_1}}(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = (\vec{e_1}, \vec{e_1}, \vec{e_2}) = 0$$

$$f_{\vec{e_1}}(\vec{e_1}, \vec{e_3}) = (\vec{e_1}, \vec{e_1}, \vec{e_3}) = 0$$

$$f_{\vec{e_1}}(\vec{e_2}, \vec{e_3}) = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) = 1$$ ، (بنابر ۲.۱۲.۱۰)

اما بنابر ۸.۱.۱۸ داریم :

$$(\vec{e_2^*} \wedge \vec{e_3^*})(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = (\vec{e_2^*} \wedge \vec{e_3^*})(\vec{e_1}, \vec{e_3}) = 0 \quad ,$$

$$(\vec{e_2^*} \wedge \vec{e_3^*})(\vec{e_2}, \vec{e_3}) = 1$$

پس :

$$f_{\vec{e_1}} = \vec{e_2^*} \wedge \vec{e_3^*} \tag{1}$$

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که :

$$f_{\vec{e_2}} = \vec{e_3^*} \wedge \vec{e_1^*} \tag{2}$$

$$f_{\vec{e_3}} = \vec{e_1^*} \wedge \vec{e_2^*} \tag{3}$$

۳.٤.۱۸ - حاصلضرب مختلط ، یک فرم سه خطی متناوب روی E می‌باشد . اگر باردیگر $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ را یک پایهٔ یکه‌ای متعامد E وبا سوی مثبت بگیریم ، بنابر ۸.۱.۱۸ خواهیم‌داشت:

$$(\vec{e}_1^* \wedge \vec{e}_2^* \wedge \vec{e}_3^*)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$$

به‌علاوه بنابر ۲.۱۲.۱۰ حاصلضرب مختلط $\vec{e}_1$ ، $\vec{e}_2$ ، $\vec{e}_3$ برابر با یک است. چون دوفرم سه‌خطی متناوب روی E با یکدیگر متناسب می‌باشند ، دیده می‌شود که این **حاصلضرب مختلط روی E برابر است با** $\vec{e}_1^* \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3^*$.

تمرین

۱ - مجموعهٔ E ودو بخش A و B از آن داده شده‌اند . ثابت کنید که

$$A\subset B \Longrightarrow \complement B\subset \complement A$$

۲ - این عبارتها را ساده کنید: $(A\cup B)\cap B$ ، $(A\cap B)\cup B$ ،
$A\cap(B\cup C)\cap(D\cup A)$ ، $(A\cup B)\cap(C\cup A)$

۳ - این هم‌ارزی‌ها را ثابت کنید : $(A\supset B\,,\,A\supset C)\Longleftrightarrow A\supset(B\cup C)$

$$(A\cap B)\supset(C\cup D)\Longleftrightarrow(\complement A\cup\complement B)\subset(\complement C\cup\complement D)$$

٤ - مجموعهٔ E ومجموعهٔ بخشهای آن یعنی $\mathscr{P}(E)$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم f یک گسترش $\mathscr{P}(E)$ در مجموعهٔ شمارهای حقیقی $\mathbf{R}$ باشد به طوری که :

$$\forall A\,,\,B\in\mathscr{P}(E)\;:\;A\cap B=\varnothing\Longrightarrow f(A\cup B)=f(A)+f(B)$$

(دراین‌صورت گسترش f را یک تابع جمعی مجموعه‌ای نامند) . ثابت کنید که :

الف — $f(\varnothing)=0$

ب — $\forall A\,,\,B\in\mathscr{P}(E)\;:\;f(A\cup B)=f(A)+f(B)-f(A\cap B)$

فرمول بالا برای بخشهای A_1 و A_2 و A_3 و A_4 از E به‌چه‌صورت درمی‌آید؟

۵ - فرض می‌کنیم A ، B و C سه بخش از یک مجموعهٔ E باشند. قرار می‌دهیم :

$$E_1=A\cap\complement B\cap\complement C \quad \text{و} \quad E_2=A\cap(B\cup C)$$

مجموعه‌های $E_1\cap E_2$ و $E_1\cup E_2$ را معین کنید.

٦ - فرض می‌کنیم E مجموعهٔ شمارهای اول و بزرگتر از ۲ باشد . بستگی دوتایی R روی E به‌صورت زیر داده شده است : $aRb\Longrightarrow \frac{a+b}{2}\in E\;,\;(a\,,\,b\in E)$

ویژگیهای بستگی R را مطالعه کنید .

۷ - ثابت کنید که در روی مجموعهٔ خطهای یک صفحه ، بستگی $aRb \Longleftrightarrow$ (دو خط a و b هم راستا هستند) یک بستگی هم‌ارزی است . اما بستگی $aRb \Longleftrightarrow$ (دو خط a و b بریکدیگر عمودند) یک بستگی هم‌ارزی نیست.

۸ - فرض می‌کنیم O یک نقطه از صفحهٔ P و Γ مجموعهٔ دایره‌های صفحهٔ P باشند که بر O نمی‌گذرند . بستگی دوتایی R را روی مجموعهٔ Γ به صورت زیر درنظر می‌گیریم :

دو دایرهٔ C و C' از Γ دربستگی R صدق می‌کنند، اگر و تنها اگر یک انعکاس به قطب O وجود داشته باشد به‌طوری‌که C را به C' بدل کند . ویژگیهای بستگی R رامطالعه کنید .

۹ - دریک صفحه ، خط D و بستگی $MRM' \Longleftrightarrow$ (دو نقطهٔ M و M' دریک طرف D قرار دارند) را در نظر می‌گیریم . آیا بستگی R یک بستگی هم‌ارزی است ؟

۱۰ - اگر E یک مجموعهٔ n عنصری باشد ، ثابت کنید که شمارهٔ بخشهای مجموعهٔ E برابر است با ۲^n .

۱۱ - مجموعهٔ n عنصری E داده شده است . شمارهٔ بستگی‌های متقارنی را که می‌توان روی E تعریف کرد پیدا کنید .

۱۲ - مجموعهٔ E و بستگی دوتایی R روی E داده شده‌اند . اگر R بازتابی و متقارن باشد ، ثابت کنید که بستگی دوتایی R' به طوری که برای a و b متعلق به E:

$$aR'b \Longleftrightarrow (aRb \quad \text{و} \quad bRa)$$

یک بستگی هم‌ارزی روی E است.

۱۳ - در روی یک مجموعهٔ n عنصری چند بستگی بازتابی و چند بستگی بازتابی و متقارن می‌توان تعریف کرد.

۱۴ - مجموعهٔ E را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم d یک گسترش $E\times E$ در R_+ باشد ، که دارای ویژگیهای زیر است :

الف — $\forall x \in E \quad , \ d(x\ ,\ x)=۰$

ب — $\forall x\ ,\ y \in E \quad , \ d(x\ ,\ y)=d(y\ ,\ x)$

$\forall x\ ,\ y\ ,\ z \in E\ ,\ \ d(x\ ,\ y) \leqslant \operatorname{Sup}\,[d\,(x\ ,\ z\,)\ ,\ d(y\ ,\ z)]$

ثابت کنید که برای مقدار ثابت λ متعلق به $\mathbf{R}^*_+$ بستگی‌های $d(x, y) < \lambda$ و $d(x, y) \leqslant \lambda$ بستگی‌های هم‌ارزی روی E می‌باشند . کلاس هم ارزی یک عنصر a از E را برای هریک ازاین بستگی‌ها معین کنید.

۱۵ - فرض می‌کنیم φ یک گسترش $\mathbf{R}^2$ در $\mathbf{R}^2$ باشد بـه طوری که برای هـر x و y متعلق به $\mathbf{R}$ داشته باشیم : $\varphi(x , y)=(x , xy-y^3)$

معین کنید که آیا گسترش φ سورژکتیواست ؟ آیا گسترش φ انژکتیواست؟

۱۶ - مجموعه‌هـای E و F وگسترش φ مجموعـهٔ E درF داده شده‌اند . اگـر مجموعهٔ بخشهای E را با $\mathscr{P}(E)$ و مجموعهٔ بخشهای F را با $\mathscr{P}(F)$ بنماییم ،گسترش φ یک گسترش $\mathscr{P}(E)$ در $\mathscr{P}(F)$ معین می‌کند به طوری که به هر بخش A از E ، بخش $\varphi(A)$ از F را وابسته می‌کند.

ثابت کنید که : الف — $\varphi(A\bigcup B)=\varphi(A)\bigcup\varphi(B)$, $\forall A , B \in \mathscr{P}(E)$

ب — $\varphi(A\bigcap B)\subset\varphi(A)\bigcap\varphi(B)$, $\forall A , B\in \mathscr{P}(E)$

و به کمک یک مثال نشان دهید که در حالت کلی $\varphi(A\bigcap B)$ و $\varphi(A) \bigcap \varphi(B)$ برابر نیستند .

پ ـ اگر گسترش φ انژکتیو باشد فرمول ب به چه صورت در می‌آید؟

۱۷ - مجموعه‌هـای E و F وگسترش $f : E\longrightarrow F$ را در نظر می‌گیریم . اگر B بخشی ازE و A^* بخشی ازF باشد قرار می‌دهیم :

$$f(B)=B^* \quad \text{و} \quad A=f^{-1}(A^*)$$

ثابت کنید که
$$f(A\bigcap B)=A^*\bigcap B^*$$

۱۸ - عنصر p از $\mathbf{Z}$ را در نظر می‌گیریم و بـرای عنصرهای a و b از $\mathbf{Z}$ بستگی دوتایی R را روی $\mathbf{Z}$ چنین تعریف می‌کنیم :

a و b در R صدق می‌کنند اگر و تنها اگر $a+b$ بر p بخش‌پذیر باشد .

ویژگیهای بستگی دوتایی R را مطالعه کنید.

۱۹ - فرض می‌کنیم E مجموعهٔ بردارهای فضا باشد. برای بردارهای $\vec{V}$ و $\vec{V'}$

از E بستگی دوتایی R را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$\vec{V}\, R\, \vec{V'} \Longleftrightarrow$ (هرگاه $\vec{X}$ متعلق به E وجود داشته باشد به‌طوری که $\vec{V} = \vec{X} \wedge \vec{V'}$)

ویژگیهای بستگی دوتایی R را بررسی کنید.

۲۰ - بستگی دوتایی R را روی مجموعهٔ E درنظر می‌گیریم و بستگی دوتایی دیگر R' را روی E ، به کمک R ، چنین تعریف می‌کنیم : « برای عنصرهای a و b از E قرار می‌دهیم $aR'b$ هرگاه عنصرهای x_0 ، x_1 ، ... ، x_n از E وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $i = 0, 1, \ldots, n-1$ داشته باشیم $x_i R x_{i+1}$ که در آن $x_0 = a$ و $x_n = b$ است » . ثابت کنید که R' متعدی است . اگر A مجموعهٔ جفت‌های $(a\ ,\ b)$ باشد به طوری که داشته باشیم aRb و A' مجموعهٔ جفت‌های $(a'\ ,\ b')$ باشد به طوری که داشته باشیم $a'R'b'$ ثابت کنید که $A \subseteq A'$. نشان دهید که A' کوچکترین بخش از $E \times E$ است به‌طوری که $A \subseteq A'$ و بستگی R' وابسته به A' متعدی باشد (اگر B یک بخش از $E \times E$ باشد، منظور از بستگی S وابسته به B عبارت است از $(aSb \Longleftrightarrow (a\ ,\ b) \in B)$
درصورتی که بستگی R بازتابی و متقارن باشد بستگی R' چگونه خواهد بود؟

۲۱ - گسترش f مجموعهٔ $\mathbf{Z}$ در $\mathbf{Z}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$f(n) = \begin{cases} k & , \quad n = 3k \\ n & , \quad n \neq 3k \end{cases}$$

آیا گسترش f انژکتیو است ؟ آیا f سورژکتیو است؟

۲۲ - مجموعهٔ E و بخش A از آن را درنظر می‌گیریم . فرض می‌کنیم f و g دو گسترش $\mathscr{P}(E)$ در $\mathscr{P}(E)$ باشند به‌طوری که برای هر X از $\mathscr{P}(E)$ داشته باشیم

$$f(X) = A \cap X \quad \text{و} \quad g(X) = A \cup X$$

تجزیه‌های کانونیک f و g را بدست آورید ، و ثابت کنید که گسترش $\varphi : g(\mathscr{P}(E)) \longrightarrow \mathscr{P}(E - A)$ به طوری که $\varphi(Z) = Z - A$ دو سویی است .

۲۳ - فرض می‌کنیم $(R_i)_{i\in I}$ یک دسته بستگی ترتیبی تام روی یک مجموعهٔ E باشد (مجموعهٔ I باپایان است) . قرار می‌دهیم :

$$A_i=\{ (a , b) \mid aR_ib , a\in E , b\in E\}$$

اگر $A=\bigcap_{i\in I} A_i$ و R بستگی دوتایی $xRy \Leftrightarrow (x , y)\in A$ روی E باشد ، آیا R یک بستگی ترتیبی است؟ آیا R یک بستگی ترتیبی تام است ؟

۲۴ - فرض می‌کنیم E یک‌مجموعه ، R یک بستگی ترتیبی غیر تام روی E و P یک بستگی دوتایی روی E باشد به‌طوری‌که « برای a و b متعلق به E داشته باشیم aPb هرگاه هیچیک از بستگی‌های aRb و bRa برقرار نباشند ». اگر قرار دهیم:

$$A=\{(a , b) \mid aRb , a\in E , b\in E\}$$ و

$B=\{(a' , b') \mid a'Pb' , a'\in E , b'\in E\}$ و بستگی Q را به صورت زیرمعین کنیم :

$$aQb \Leftrightarrow (a , b)\in A\cup B$$

ویژگیهای دوبستگی P و Q را مطالعه کنید.

۲۵ - فرض می‌کنیم E یک‌مجموعهٔ n عنصری و $\mathscr{P}(E)$ مجموعهٔ بخشهای E باشد. برای X و Y متعلق به $\mathscr{P}(E)$ قرار می‌دهیم XRY هرگاه $X\subset Y$ باشد . ثابت کنید که R یک بستگی ترتیبی است و اگر $F=\{(X , Y) \mid XRY\}$ باشد شمارهٔ عنصرهای F را پیدا کنید.

۲۶ - اگر n یک شمار درست و مثبت باشد عبارت $\sum_{p=0}^{n} (C_n^p)^2$ را حساب کنید.

۲۷ - ثابت کنید که !۱۰۰۰ بر 2^{994} بخش پذیر است اما بر 2^{995} بخش‌پذیر نیست ، و بزرگترین‌شمار درست ومثبت n را پیدا کنید به طوری‌که 3^n بخشیاب !۱۰۰۰ باشد.

۲۸ - اگر n ، p و k شمارهای درستی باشند به طوری‌که $0\leqslant k\leqslant p\leqslant n$ برابری های زیر را ثابت کنید :

$$C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p \qquad (1)$$

$$C_n^0 C_n^p + C_n^1 C_{n-1}^{p-1} + \cdots + C_n^p C_{n-p}^0 = 2^p C_n^p \qquad (2)$$

۲۹ - در روی مجموعهٔ X دو قانون ترکیب با عنصرهای بی اثر e و $\acute{e}$ داده شده است. اگر x و y دو عنصر از X باشند، ترکیب x و y را به وسیلهٔ این دوقانون ترکیب، به ترتیب با xy و $x*y$ نمایش می‌دهیم . فرض می‌کنیم برای عنصرهای دلخواه x ، y ، u و v از X داشته باشیم $(x*y)(u*v)=(xu)*(yv)$ ثابت کنید که :

الف - داریم $e=\acute{e}$.

ب - برای هر دو عنصر x و y از X داریم $x*y=xy$.

پ - دوقانون ترکیب داده شده جابجایی و انجمنی هستند .

۳۰ - در روی مجموعهٔ شمارهای حقیقی $\mathbf{R}$ قانون ترکیب داخلی T به صورت زیر داده شده است :

$$\forall a\ ,\ b\in\mathbf{R}\ ,\ aTb=\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} \quad \text{و} \quad (\text{اگر } a^2+b^2\neq 0)$$

$$0\,T\,0=0$$

الف - آیا این قانون ترکیب جابجایی است ؟ انجمنی است ؟ نسبت به قانون ضرب روی $\mathbf{R}$ پخشی است؟ آیا قانون ضرب روی $\mathbf{R}$ نسبت به قانون T پخشی است ؟

ب - آیا قانون T دارای عنصر بی اثر است ؟ آیا هر عنصر a از $\mathbf{R}$ دارای عنصر وارون است ؟ آیا قانون T یک قانون ترکیب گروه است؟

۳۱ - مجموعهٔ $E=\{0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\}$ را درنظر می‌گیریم و برای عنصرهای $a\ ,\ b$ از E قرار می‌دهیم $aTb=(a^2+b^2)(\bmod 5)$

ویژگیهای قانون ترکیب T را بررسی کنید .

۳۲ - در روی مجموعهٔ شمارهای حقیقی $\mathbf{R}$ قانون ترکیب T به صورت زیر داده شده است :

$$aTb=a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}\ ,\ \forall a\ ,\ b\in\mathbf{R}$$

ثابت کنید که مجموعهٔ $(\mathbf{R}\ ,\ T)$ با گروه جمعی $(+\ ,\ \mathbf{R})$ ایزومرف است (از گسترش $shx \longleftarrow x$ استفاده کنید) .

۳۳- در روی مجموعهٔ $\mathbf{R}$ قانون ترکیب $*$ به صورت زیر داده شده است :

$$x*y=x+y-xy \quad , \quad \forall x\ ,\ y\in\mathbf{R}$$

ثابت کنید که $\mathbf{R}$ با این قانون تشکیل گروه نمی‌دهد ، اما $R'=\mathbf{R}-\{۱\}$ با این قانون تشکیل گروه می‌دهد. سپس $x^{(n)}=x*\cdots*x$ را محاسبه کنید .

۳٤- اگر E یک مجموعهٔ n عنصری و F یک مجموعهٔ m عنصری باشد ثابت کنید که شمارهٔ همهٔ گسترشهای E در F برابر با n^m است.

۳۵- مجموعهٔ دو عنصری $E=\{a\ ,\ b\}$ را در نظر می گیریم و دو قانون ترکیب داخلی + و . را در روی E به صورت زیر معین می کنیم :

جدول قانون +

+	a	b
a	a	b
b	b	b

جدول قانون .

·	a	b
a	a	a
b	a	b

فرض می کنیم f گسترش دوسویی E روی E باشد به طوری که $f(a)=b$ و $f(b)=a$

الف - آیا E با یکی از دوقانون + یا . تشکیل گروه می‌دهد؟

ب - اگر F مجموعهٔ توابع دو متغیری روی E با مقادیر در E باشد (گسترشهای $E^۲$ در E) ، شمارهٔ عنصرهای F را پیدا کنید ، و ثابت کنید که هر عنصر φ از F تنها دارای یک تجزیه به صورت :

$$\varphi(a\ ,\ b)=\alpha_۰\cdot f(a)\cdot f(b)+\alpha_۱\cdot f(a)\cdot b+\alpha_۲\cdot a\cdot f(b)+\alpha_۳\cdot a\cdot b$$

است که در آن $\alpha_i\in E$ ، $(i=۰\ ,\ ۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳)$ و علامتهای + و . همان جمع و ضربی است که به‌وسیلهٔ جدولهای بالا معین گردید.

۳٦- اگر E یک مجموعهٔ n عنصری باشد ، چند قانون ترکیب داخلی روی E می‌توان تعریف کرد ؟ چند تا از این قانونهای ترکیب جابجایی هستند؟

۳۷ - ثابت کنید که مجموعهٔ شمارهای گویا به صورت $\frac{1+2p}{1+2q}$ با ضرب معمولی تشکیل یک گروه می‌دهد $(p\,,\,q \in \mathbf{Z})$.

۳۸ - ثابت کنید که اگر دو عنصر a و b از یک گروه گردش پذیر باشند، a^p و b^q نیز گردش پذیرند (p و q شمارهای درست و مثبتی هستند) .

۳۹ - ثابت کنید که یک گروه G جابجایی است اگر و تنها اگر گسترش $x \longrightarrow x^{-1}$ یک اتومرفیسم G باشد.

۴۰ - فرض می‌کنیم f یک گسترش $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ باشد. $T \in \mathbf{R}$ را دورهٔ تناوب f گوییم اگر برای هر x از $\mathbf{R}$ داشته باشیم $f(x+T)=f(x)$. ثابت کنید مجموعهٔ دوره‌های تناوب f تشکیل یک زیر گروه جمعی از $\mathbf{R}$ می‌دهد.

۴۱ - ثابت کنید که گسترش $x \longrightarrow \varphi(x)=2^x$ یک ایزومرفیسم گروه جمعی $\mathbf{R}$ روی گروه ضربی $\mathbf{R}^*_+$ است.

۴۲ - همهٔ گروه‌های مرتبهٔ چهار را پیدا کنید و ثابت کنید که همهٔ آنها جابجایی هستند .

۴۳ - فرض می‌کنیم G یک گروه با پایان مرتبهٔ $2n$ و e عنصر بی اثر آن باشد . اگر H_1 و H_2 دو زیرگروه مرتبهٔ n از G باشند به طوری که $H_1 \cap H_2=\{e\}$ ثابت کنید که $n=2$ و دراین صورت ساختمان G کاملاً معین است. جدول G را تشکیل دهید و زیرگروه‌های دیگر G را بدست آورید.

۴۴ - نخست یادآوری می‌کنیم که رتبهٔ یک عنصر a از یک گروه ضربی عبارت‌است‌از کوچکترین شمار درستی مانند n به قسمتی که a^n عنصربی اثرگروه باشد. فرض می‌کنیم G یک گروه با پایان و a و b دو عنصر از G باشند. ثابت کنید که اگر a و b و ba دارای رتبه ۲ باشند a و b گردش پذیرند. همچنین ثابت کنید که a و a^{-1} دارای‌یک رتبه هستند.

۴۵ - فرض می‌کنیم G و G' دوگروه و f و g دو هومرفیسم G در G' باشند. مجموعهٔ عنصرهای x از G را به طوری که $f(x)=g(x)$ باشد ، با H می‌نماییم. ثابت کنید که H یک زیر گروه از G است. اگر h گسترش همانی H در G باشد ،

ثابت کنید که $f\circ h=g\circ h$. نشان دهید که اگر G'' یک گروه دیگر و h' یک هومومرفیسم G'' در G باشد به‌طوری که $f\circ h'=g\circ h'$ دراین‌صورت یک هومومرفیسم $\varphi:G''\longrightarrow H$ و تنها یک هومومرفیسم وجود دارد به‌طوری که $h'=h\circ\varphi$ باشد.

۴۶ - مجموعهٔسه عنصری $E=\{a , b , c\}$ را درنظر می‌گیریم . اگر S مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای E باشد ، جدول ترکیب گروه S را تشکیل دهید،وهمهٔ زیرگروه‌های S را معین کنید.

۴۷ - مجموعهٔ $E=\{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵\}$ داده‌شده است. اگر $S_۱$ و $S_۲$دوتبدیل از E به صورت :

$$S_۱=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۵ & ۴ & ۱ & ۳ \end{pmatrix} \quad , \quad S_۲=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۵ & ۴ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

باشند ، تبدیلهای $S_۱\circ S_۲$ ، $S_۲\circ S_۱$ ، $S_۱^{-۱}$ ، $S_۲^{-۱}$ ، $S_۲^{-۱}\circ S_۱^{-۱}$ و $(S_۲\circ S_۱)^{-۱}$ را پیدا کنید.

۴۸ - مجموعهٔ $Z/۵Z$ را در نظر می‌گیریم وعنصرهای‌آن‌را با $\bar{۰}$ ، $\bar{۱}$ ، $\bar{۲}$ ، $\bar{۳}$ و $\bar{۴}$ نمایش می‌دهیم . جدول‌ضرب این مجموعه را تشکیل دهید وجواب‌هریک ازمعادله‌های $\bar{۲}x+\bar{۱}=\bar{۰}$ و $\bar{۳}x+\bar{۴}=\bar{۰}$ و همچنین جواب دستگاه

$$\begin{cases} \bar{۳}x+\bar{۴}y=\bar{۱} \\ \bar{۲}x+\bar{۳}y=\bar{۲} \end{cases}$$

را بدست آورید .

اگر $f(x)=\bar{۱}x^۲+\bar{۱}x+\bar{۱}$ باشد$(x\in Z/۵Z)$ ، مقادیرممکن $f(x)$ را پیدا کنید، و نتیجه را توضیح دهید.

۴۹ - مجموعهٔ E ازجفت های (a , b) را که درآن a و b شمارهای حقیقی هستند و $a\neq ۰$ است در نظر می‌گیریم و قانون ترکیب $*$ را روی E به صورت زیرتعریف می‌کنیم :

$$(a , b) * (a' , b')=(aa' , ab'+b)$$

الف ـ نشان دهید که $(E , *)$ یک گروه است. آیا این گروه جابجایی است؟

ب ـ ثابت کنید که عنصرهای $(a , ۰)$ از E تشکیل یک زیرگروه از E می‌دهند که با گروه ضربی شمارهای حقیقی ایزومرف است.

پ ـ گسترش $\varphi : E \longrightarrow \mathbf{R}$ به طوری که $\varphi[(a , b)]=a$ داده شده است.
تحقیق کنید که داریم $\varphi[(a , b) * (a' , b')]=\varphi[(a , b)]\ \varphi[(a' , b')]$ وبه علاوه مجموعهٔ $\varphi^{-1}(1)$ زیرگروهی از E است که با گروه جمعی شمارهای حقیقی ایزومرف است.

۵۰ ـ G یک گروه ضربی است با عنصر بی‌اثر e و A و B دو زیرگروه از G هستند.
اگر X و Y دو زیر مجموعه از G باشند قرار می‌دهیم :

$$XY=\{xy \mid x \in X , y \in Y\} \quad \text{و} \quad X^{-1}=\{z^{-1} \mid z \in X\}$$

الف ـ ثابت کنید که $(AB)^{-1}=BA$ و از آنجا نتیجه بگیرید که برای این که AB یک زیرگروه از G باشد با یاوبسنده است که $AB=BA$ باشد. درصورتی که این شرط برقرار باشد زیرگروه پدید آمده به وسیلهٔ $A \bigcup B$ را معین کنید.

ب ـ فرض می‌کنیم که داشته باشیم $AB=BA$ و C یک زیرگروه دیگر از G و شامل A باشد. نشان دهید که $C \bigcap AB$ یک زیرگروه از G است که بر $A(B \bigcap C)$ منطبق است.

۵۱ ـ حلقهٔ A را که برای آن داریم $\forall x \in A , x^2=x$ در نظر می‌گیریم (دو قانون ترکیب A را با همان علامتهای جمع و ضرب معمولی نمایش می‌دهیم و عنصر بی‌اثر قانون جمع را با ۰ می‌نماییم). ثابت کنید که :

الف ـ $\forall x \in A \quad , \quad x+x=0$

ب ـ $\forall x \in A \ , \ \forall y \in A \quad , \quad xy=yx$

پ ـ بستگی $xy=x$ بین عنصرهای A یک بستگی ترتیبی است.

ت ـ $\forall x \in A \ , \ \forall y \in A \ , \ xy(x+y)=0$ و از آنجا نتیجه بگیرید که اگر A انتگر باشد، یا A تنها دارای عنصر ۰ است و یا A تنها دارای دوعنصر است.

۵۲ ـ مجموعه بخشهای مجموعهٔ E یعنی $\mathscr{P}(E)$ را در نظر می‌گیریم و دوقانون ترکیب $\oplus$ و $*$ را در روی $\mathscr{P}(E)$ به‌صورت :

$$A \oplus B=(A \bigcap \complement B) \bigcup (\complement A \bigcap B) \ , \ \forall A , B \in \mathscr{P}(E)$$

$$A * B=A \bigcap B$$

اختیار می‌کنیم . ثابت کنید که با این دو قانون ، $\mathscr{P}(E)$ یک حلقهٔ جابجایی یکه‌دار است. آیا این حلقه انتگراست؟ آیا این حلقهٔ یک هیأت است؟

۵۳ - فرض می‌کنیم A یک حلقه ، ∘ عنصر بی‌اثر قانون جمع A و $A \neq \{ ∘ \}$ باشد . ثابت کنید که اگر برای هردو عنصر a و b از A ، $a \neq ∘$ ، هریک از معادله‌های $ax=b$ و $ya=b$ دست کم دارای یک جواب باشند ، A یک هیأت است و جواب‌های معادله‌های بالا یکتا می‌باشند.

۵٤ - دو شمار گویا و دلخواه a و b و شمار درست و مثبت n را در نظرمی‌گیریم (n ثابت) ، و فرض می‌کنیم که n مربع هیچ شمار درستی نباشد .ثابت کنید که مجموعهٔ شمارهاحقیقی $a+b\sqrt{n}$ با همان دوقانون‌جمع وضرب معمولی تشکیل یک هیأت‌می‌دهد.

۵۵ - فرض می‌کنیم f یک آندومرفیسم هیأت $\mathbf{R}$ باشد. یعنی برای هر x و y متعلق به $\mathbf{R}$داشته باشیم :

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad , \quad f(xy)=f(x)f(y)$$

ثابت کنید که دراین‌صورت f یاگسترش همانی است ویاگسترش صفر است.

۵٦ - مجموعهٔ سه عنصری $E=\{a , b , c\}$ داده شده است . اگر H مجموعهٔ قانون‌های‌ترکیب داخلی‌روی E باشد ، شمارهٔعنصرهای H را پیدا کنید. چنانچه $\top$ و $\perp$ دو عنصر دلخواه از H باشند ،آیا E با این دوقانون تشکیل یک هیأت می‌دهد ؟ بـه چند روش ؟

۵۷ - قرار می‌دهیم $\mathbf{R}^*=\mathbf{R}-\{ ∘ \}$ و در روی‌مجموعهٔ$\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$ قانون‌ترکیب $*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(x , y) * (x' , y')=(xx' , \frac{y'}{x}+x'y)$$

ثابت کنید که $\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$ با قانون $*$ یک گروه است. یک گسترش $\mathbf{R}^*$ در $\mathbf{R}$ پیدا کنید که نمودارآن یک زیر گروه ازگروه $\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$ باشد . دو زیرگروه دیگر ازگروه $\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$ مشخص کنید .

۵۸ - فرض‌می‌کنیم G گروه تبدیلهای یک‌مجموعهٔ چهار عنصری E باشد.مجموعهٔ تشکیل شده ازتبدیل همانی E وتبدیلهایی که جای‌هر دو عنصر از E را با یکدیگر عوض

می‌کنند با H نمایش می‌دهیم $(H \subset G)$. ثابت کنید که H یک زیرگروه ممتاز از G است (H گروه **کلین** نامیده می‌شود) .

۵۹ ـ در حلقهٔ $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ هریک از دو دستگاه معادله های زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \bar{3}x+\bar{5}y=\bar{1} \\ \bar{5}x+\bar{2}y=a \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \bar{5}x+\bar{2}y=a \\ \bar{2}x+\bar{4}y=b \end{cases}$$

۶۰ ـ درهیأت $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$ هریک از دو دستگاه معادله های زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \bar{3}x+\bar{1}y=\bar{5} \\ \bar{2}x+\bar{6}y=\bar{3} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{1} \\ \bar{5}x+\bar{3}y=\bar{6} \end{cases}$$

۶۱ ـ نشان دهید که مجموعهٔ $\{1, -1, i, -i\}$ یک زیرگروه از گروه ضربی C^* است که با گروه جمعی $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ایزومرف است.

۶۲ ـ فرض می‌کنیم A مجموعهٔ تابع های آفین با ضرایب حقیقی $f(x)=ax+b$ باشد. در A دوقانون جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad , \quad \forall f, g \in A$$
$$(fg)(x)=f[g(x)]$$

الف ـ ثابت کنید که A با قانون جمع یک گروه جابجایی است؟

ب ـ ثابت کنید که قانون ضرب انجمنی است اما جابجایی نیست . آیا A یک حلقه است؟

۶۳ ـ حلقهٔ دلخواه A را درنظر می‌گیریم و در روی $Z \times A$ دو قانون جمع وضرب را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(m, x)+(n, y)=(m+n, x+y)$$
$$(m, x) \cdot (n, y)=(mn, my+nx+xy)$$

ثابت کنید که مجموعهٔ $\mathbf{Z} \times A$ با این دو قانون یک حلقهٔ یکه‌دار است و این حلقه دارای یک ایده‌آل I می‌باشد که با A ایزومرف است.

٦٤ - الف - فرض می‌کنیم p یک شمار اول و q شمار درستی باشد به طوری که $0 < q < p$. ثابت کنید که C_p^q بر p بخش پذیر است.

ب - ثابت کنید که در یک حلقهٔ جابجایی A که مفسر آن p است برای هردنبالهٔ با پایان a_1 ، a_2 ، $\cdots$ ، a_k از عنصرهای A داریم:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_k^p$$

و از آنجا نتیجه بگیرید که برای هرشمار درست و مثبت k داریم $k^p \equiv k (\bmod p)$

٦٥ - بزرگترین بخشیاب مشترک و کوچکترین مضرب مشترک چندجمله‌ای های حقیقی زیررا پیدا کنید :

$$P_1 \equiv x^5 - x^4 - x^3 + 2x + 2$$

$$P_2 \equiv x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 9x + 5$$

٦٦ - یک چندجمله‌ای تشکیل دهید که ضریبهای آن شمارهای درست، درجهٔ آن می‌نیمم و $\alpha = 2 + \sqrt[3]{3}$ یکی از ریشه های آن باشد.

٦٧ - برای‌چه مقادیری‌از $n \in N$ چند جمله‌ای $P(x) \equiv (x+1)^n - x^n - 1$ بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیراست.

٦٨ - ماندهٔ تقسیم $(\operatorname{ch}a + x \operatorname{sh}a)^n$ را بر $x^2 - 1$ پیدا کنید.

٦٩ - معادلهٔ $x^3 + px + q = 0$ که در آن p و q دوشمار مختلطاند داده‌شده است ریشه های این معادله را x_1 و x_2 و x_3 می گیریم . عبارت $\Delta = (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2$ را برحسب p و q پیدا کنید .

٧٠ - چنانچه $A[X] = \frac{Z}{3Z}[X]$ حلقهٔ چندجمله‌ای های روی هیأت $Z/_3Z$ باشد، نشان دهید که مجموعهٔ چندجمله‌ای های درجهٔ اول $A[X]$ با پایان است وچند جمله‌ای $u = -\bar{1} - \bar{1}x + \bar{1}x^2$ درهیأت $Z/_3Z = \{\bar{1} , \bar{0} , -\bar{1}\}$ ساده نشدنی است .

٧١ - هرگاه K یک هیأت جابجایی باشد که مفسر آن مخالف با ۲ است و $A(X , Y)$ یک چند جمله‌ای از حلقهٔ $K[X , Y]$ باشد به طوری که داشته باشیم:

$$A(X , Y) = A(Y , X)$$

ثابت کنید که اگر $A(X , Y)$ بر $X - Y$ بخش پذیر باشد بر $(X - Y)^2$ نیز بخش پذیراست.

۷۲- معادلهٔ $\frac{x}{t-a}+\frac{y}{t-b}+\frac{z}{t-c}-۱=۰$ که در آن a، b و c سه شمار حقیقی دوبه دو متمایزند،داده شده است . فرض می‌کنیم x ، y و z جوابهای دستگاه خطی‌ای باشد که به ترتیب از قراردادن h ، k و l به‌جای t درمعادلهٔ بالابدست می‌آید.

الف - چنانچه طرف چپ معادلهٔ داده شده را به صورت کسر گویای:

$$\frac{P(t)}{(t-a)(t-b)(t-c)}$$

بنویسیم ، درجـهٔ چند جمله‌ای $P(t)$ وجمله‌ای ازآن راکه‌دارای بزرگترین درجه است معین کنید و ریشه‌های آن را بدست آورید ، و از روی آنها $P(t)$ را پیدا کنید .

ب - با بکار بردن‌روش‌عملی‌تجزیهٔ کسرهای گویابه‌عنصرهای ساده مقادیر x ، y و z را برحسب a ، b ، c ، h ، k و l حساب کنید.

۷۳ - فرض می‌کنیم a و bدوشمار حقیقی متمایز و φ و ψ دو چند جمله‌ای‌از$\mathbf{C}[X]$ باشند که نسبت‌به یکدیگر اولند . کلیهٔ چند جمله‌ای‌های $f(x)$ را پیدا کنید به‌طوری که $f(x)+a$ بر $\varphi(x)$ و $f(x)+b$ بر $\Psi(x)$ بخش پذیرباشد.

درحالتی که $a=۱$ ، $b=-۱$ ، $\varphi(x)=x^۲+۱$ و $\psi(x)=x^۳+۱$ باشد $f(x)$ را بدست آورید .

۷۴- درمعادلهٔ $f(x)\equiv(x+۱)^n-x^n-\lambda=۰$ مقادیر $\lambda\in\mathbf{C}$ را بدست آورید به طوری که این معادله دارای ریشهٔ چندگانه باشد (n شمار درستی است بزرگتر ویابرابر با ۲).

۷۵- شمارهای مختلط m ، n و p را پیدا کنید به طوری که معادلهٔ :

$$f(x)\equiv x^۶+mx^۴+۱۰x^۳+nx+p=۰$$

دارای یک ریشهٔ چهارگانه باشد ، سپس ریشه‌های معادله را بدست آورید.

۷۶- فرض‌می‌کنیم $P(x)$ یک‌چندجمله‌ای‌حقیقی‌درجهٔ‌پنجم باشد . اگر $P(x)+۱$ بر$(x-۱)^۳$ و $P(x)-۱$ بر $(x+۱)^۳$ بخش پذیر باشند ، $P(x)$ را پیدا کنید .

۷۷- دو چندجمله‌ای $f(X)$ و $g(X)$ با ضریبهای مختلط به صورت‌زیرداد شده‌اند:

$$f(X) \equiv X^{۲} - ۴X + ۵$$

$$g(X) \equiv X^{۳} - (۱ + ۲i)X^{۲} - ۳X + ۲i - ۱$$

نشان دهید که $f(X)$ و $g(X)$ یک ریشهٔ مشترک α دارند و آن را حساب کنید، و از آنجا تجزیهٔ کسر گویای $\frac{f(X)}{g(X)}$ را به‌عنصرهای‌ساده در روی هیأت شمارهای مختلط‌بدست آورید.

۷۸ - چند جمله‌ای‌حقیقی A را طوری پیدا کنید که دارای کمترین درجه‌بوده و A بر $X^{۲}+۱$ و $A-۱$ بر $X^{۳}+۱$ بخش پذیر باشد.

آیا می‌توان چند جمله‌ای A را که برچندجمله‌ای B بخش پذیر باشدطوری‌بدست‌آورد که $A-۱$ بر C بخش پذیرباشد؟ (B و C دوچند جمله‌ای داده شده هستند).

۷۹ - اگر K یک هیأت‌باشخص p باشد، نشان دهید که مشتق یک چندجمله‌ای A از $K[X]$ برابر باصفر است اگر و تنها اگر A یک ترکیب خطی از ۱ و توانهای مثبت X^{p} باضرایب متعلق به K باشد.

۸۰ - هیأت‌جابجایی K و $x_{۱}$، $x_{۲}$، $x_{۳}$ سه عنصرمتمایز از آن داده‌شده‌اند. چنانچه $r_{۱}$، $r_{۲}$ و $r_{۳}$ به ترتیب مانده‌های تقسیم چند جمله‌ای A از $K[X]$ بر $X-x_{۱}$، $X-x_{۲}$ و $X-x_{۳}$ باشد ماندهٔ تقسیم A بر $(X-x_{۱})(X-x_{۲})(X-x_{۳})$ را پیدا کنید.

۸۱ - چنانچه a و b دو عنصر متمایز از یک هیأت جابجایی K باشد، ثابت کنید که در $K[X]$ چند جمله‌ای‌های یکتای P و Q وجود دارند به‌طوری که:

$$\deg P < ۲n \quad , \quad \deg Q < ۲n \tag{۱}$$

$$(X-a)^{۲n}P + (X-b)^{۲n}Q = ۱ \tag{۲}$$

و از آنجا نتجه بگیرید که:

$$P(a+b-X) = Q(X) \quad , \quad Q(a+b-X) = P(X)$$

۸۲ - چندجمله‌ای $A = a_{n}X^{n} + a_{n-۱}X^{n-۱} + \cdots + a_{۰}$ را که ضریبهای‌آن متعلق به $\mathbf{Z}$ و نسبت به یکدیگر اول هستند، درنظر می‌گیریم.

الف ـ اگر شمارگویای x که برابر با کسر ساده نشدنی p/q است یک صفر A باشد ، ثابت کنید که $a_۰$ بر p و a_n بر q بخش پذیر است .

ب ـ ریشه های گویای چند جمله‌ای $۲X^۳+۴X^۲+۲X-۴$ را پیدا کنید.

۸۳ ـ حلقهٔ $E=\mathbf{R}[X]/(X^۲-۱)$ یعنی حلقهٔ خارج قسمت حلقهٔ چند جمله‌ای های با ضرایب حقیقی $\mathbf{R}[X]$ بر ایدآل مضارب $X^۲-۱$ را در نظر می گیریم (هر عنصر از E به‌وسیلهٔ یک چند جمله‌ای درجهٔ ۰ ویا درجهٔ ۱ نشان داده می‌شود) .

الف ـ مجموع و حاصل‌ضرب‌دو عنصر از E را معین کنید و نشان دهید که E دارای بخشیاب های‌صفر است و مجموعهٔ بخشیاب های صفر از اجتماع دو ایدآل I و J تشکیل می‌شود .

ب ـ عنصرهای وارون پذیر E را بدست‌آورید و معادله درجهٔ اول $\alpha\xi+\beta=۰$ را (که در آن α و β عنصرهای داده شده از E و ξ نامعین است) حل و بحث کنید .

پ ـ ثابت کنید که اگر حاصل‌ضرب $\delta_۱\delta_۲$ صفرباشد معادلهٔ $(\xi-\delta_۱)(\xi-\delta_۲)=۰$ دست کم دارای چهار جواب است.

۸۴ ـ شمارهای مختلط زیر را به صورت $x+iy$ درآورید :

$$\frac{۳+۶i}{۳-۴i} \ , \ \left(\frac{۱+i}{۲-i}\right)^۲+\frac{۱-۷i}{۴+۳i} \ , \ \frac{۲+۵i}{۱-i}+\frac{۲-۵i}{۱+i}$$

۸۵ ـ مدول وآرگومان $z=a\frac{۱+ib}{۱-ib}$ را بدست آورید (a و b دو شمار حقیقی هستند و $a>۰$ است) .

۸۶ ـ شمارهای مختلط z راپیدا کنید به‌طوری که $z^۷$ و $\frac{۱}{z^۲}$ مزدوج یکدیگرباشند .

۸۷ ـ اگر $|z-۲|=|z|$ و $\arg z=\arg(z+۳+i)$ باشد ، z رابدست آورید (منظور از $\arg$ آرگومان است) .

۸۸ ـ فرض‌می کنیم $z_۱$ ، $z_۲$ و $z_۳$ سه شمار مختلط باشند به طوری که $z_۱ . z_۲ \neq ۰$ و $\frac{z_۱}{z_۲} \notin \mathbf{R}$. ثابت کنید که یک جفت حقیقی (a , b) و تنها یک جفت وجود دارد به

قسمی که داریم $z_3 = az_1 + bz_2$ و از آنجا نتیجه بگیرید که

$I_m(z_3 . \bar{z}_2) = aI_m(z_1 . \bar{z}_2)$ و $I_m(z_3 . \bar{z}_1) = bI_m(z_2 . \bar{z}_1)$ (منظور از I_m بخش انگاری است).

۸۹ - شمارهای مختلط z را بدست آورید به طوری که z ، $\frac{1}{z}$ و $z-1$ دارای یک مدول باشند.

۹۰ - معادله های زیر را حل کنید :

$$z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0 \quad ,$$

$$z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0 \quad , \quad 27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$$

$$z^4 = -119 + 120i \quad , \quad z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$$

$$z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} \quad , \quad z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

۹۱ - عبارت $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i}$ را حساب کنید.

۹۲ - فرض می کنیم a ، b و c سه شمار مختلط و A ، B و C سایه های آنها در صفحه باشد . ثابت کنید یک شرط با یاوبسنده برای این که درسه بر ABC داشته باشیم $AB = BC = CA$ این است که $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ باشد.

۹۳ - معادلهٔ درجهٔ دوم $z^2 - 2(\cos\theta + i\sin\theta)z + 1 = 0$ را در نظر می گیریم.

الف - اگر z' و z'' ریشه های این معادله باشند ، ثابت کنید که مدولهای z' و z'' وارون یکدیگر و آرگومانهای آنها قرینهٔ یکدیگرند.

ب - اگر M' و M'' سایه های z' و z'' باشند، مکان نقطهٔ M میانهٔ پاره خط $M'M''$ را هنگامی که θ تغییر می کند پیدا کنید.

پ - z' و z'' برای چه مقادیر θ انگاری محض هستند ؟ حقیقی هستند؟

۹۴ - در صفحهٔ مختلط تبدیل $Z = \frac{z}{2-z}$ داده شده است.

الف - نقطه‌های دوگانهٔ این تبدیل را پیدا کنید.

ب - فرض می‌کنیم $z_1 \neq 0$ ، $z_1 \neq 1$ و $|z_1| \leqslant 1$ باشد. دنبالهٔ (z_n) را به طوری که $z_{n+1} = \frac{z_n}{2 - z_n}$ باشد در نظر می‌گیریم $(n = 1, 2, \cdots)$. ثابت کنید که $|z_1| > |z_2| > 0$ و به طور کلی دنبالهٔ $(|z_n|)$ کاملاً کاهشی است.

پ - نشان دهید که حد دنبالهٔ (z_n) برابر با صفر است (از نابرابری $|2 - z_1| \geqslant 2 - |z_1|$ استفاده کنید).

۹۵ - معادلهٔ $(z+1)^n = \cos 2na + i\sin 2na = e^{2ina}$ را حل کنید $(a \in \mathbf{R})$ و از آنجا مقدار عبارت:

$$P_n = \sin a \cdot \mathrm{sni}\left(a + \frac{\pi}{n}\right) \cdots \sin\left(a + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$ را حساب کنید.

۹۶ - دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$iz - 2\omega = -4 + 3i \quad , \quad 2\bar{\omega} + \bar{z} = 3$$

۹۷ - مقدار $(1+i)^{1350}$ را بدست آورید.

۹۸ - اگر سایه‌های سه‌شمار مختلط az^2 ، a^2z و z^3 رأسهای یک سه برباشند که دارای ضلعهای برابر است ، z را بدست آورید $(a \in \mathbf{C})$.

۹۹ - مدول ، آرگومان ، بخش حقیقی، بخش انگاری و ریشه های دوم $(1 \times 2i)^3$ را پیدا کنید.

۱۰۰ - ثابت کنید که یک شرط بایاوبسنده برای اینکه سایه‌های سه شمار مختلط z ، z' و z'' روی یک خط باشند این است که داشته باشیم :

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z' & \bar{z}' & 1 \\ z'' & \bar{z}'' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۱۰۱ - معادلهٔ $z^n - a = 0$ که درآن داریم $a \in \mathbf{C}$ ، $|a| = 1$ و $n \in \mathbf{N}$ داده شده است. ریشه‌های این معادله را z_1 ، z_2 ، $\cdots$ ، z_n می‌نامیم و قرار می‌دهیم:

$$u_1=(1+z_1)^n \quad , \cdots , \quad u_n=(1+z_n)^n$$

ثابت کنید که سایه‌های شمارهای مختلط u_i روی یک خط قرار دارند.

۱۰۲ - z را طوری تعیین کنید که سایه‌های z و z^2 و z^4 هم خط باشند.

۱۰۳ - ریشه‌های معادلهٔ $x^8\times x^4+1=0$ را به‌دوروش زیر پیدا کنید:

الف - باحل دستگاه $x^4=u$ و $u^2+u+1=0$

ب - با تجزیهٔ چند جمله‌ای x^8+x^4+1 به حاصل‌ضرب سازه‌های درجهٔ دوم با ضرایب حقیقی.

۱۰۴ - مطلوبست محاسبهٔ $\cos\frac{\pi}{5}$

الف - با استفاده از معادلهٔ $z^5+1=0$.

ب - با استفاده از فرمول موآور.

۱۰۵ - شمارهای مختلط a و b و u داده شده‌اند. معادلهٔ:

$$(z-a)^n=u(z-b)^n \qquad (A)$$

را در نظر می‌گیریم:

الف - نشان دهید که معادلهٔ (A) هم‌ارز با دستگاه زیر است:

$$\frac{z-a}{z-b}=x \quad , \quad x^n=u$$

ریشه‌های‌این معادله را هنگامی‌که $a=j$ ، $b=j^2$ ، $u=1$ و $n=6$ است‌بدست آورید و نتیجه بدست آمده را با بسط دو طرف معادلهٔ (A) و حل مستقیم آن‌مقایسه کنید.

ب - ثابت کنید که سایهٔ ریشه‌های معادلهٔ (A) ، برحسب مقادیر $|u|$ روی یک دایره یا روی یکی خط قرار دارند.

اگر $n\geqslant 3$ باشد، a ، b و u را چگونه انتخاب کنیم تا همهٔ ریشه‌های (A) حقیقی باشند؟

۱۰۶ - یک شرط بایاوبسنده بدست آورید برای این‌که سایه‌های ریشه‌های معادلهٔ $z^3+pz+q=0$ رأسهای یک سه‌بر ABC باشد به‌طوری‌که $\hat{A}=\frac{\pi}{2}$ و $AB=AC$

۱۰۷ - شمارهای مختلط z و Z به طوری که داریم $\frac{Z-1}{Z+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ داده شده‌اند.

الف- Z را به‌صورت تابعی از z و $z_1=\frac{1}{z}$ بدست آورید.

ب- سایه‌های Z ، z و z_1 نسبت به یکدیگر چگونه‌اند ؟

۱۰۸ - در صفحهٔ مختلط ، همتای دایرهٔ به معادلهٔ $|z-1|=1$ را به وسیلهٔ تبدیل $Z=\frac{z}{2-z}$ پیدا کنید $(z\neq 2)$.

۱۰۹ - به وسیلهٔ محاسبه و به روش هندسی شمارهای مختلط z را معین کنید به طوری که:

$$(1)\qquad \left|\frac{z-3}{z-0}\right|=1 \quad , \quad (2)\qquad \left|\frac{z-3}{z-0}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۱۰ - بردارهای $x_1(1,2,1,1)$ ، $x_2(1,-1,0,1)$ ، $x_3(0,0,-1,1)$ و $x_4(1,2,2,0)$ و $x(1,1,1,1)$ از فضای برداری $\mathbf{R}^4$ داده شده‌اند.

الف- ثابت کنید که x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 تشکیل یک پایه از $\mathbf{R}^4$ را می‌دهند.

ب- آرایندههای x را درپایهٔ (x_1, x_2, x_3, x_4) بدست‌آورید.

۱۱۱ - سه بردار a ، b و c از فضای برداری E روی هیأت K را ، که مفسر آن مخالف با ۲ است درنظر می گیریم و قرار می‌دهیم :

$$u=b+c \ , \ v=c+a \ , \ w=a+b$$

الف - ثابت کنید که زیرفضا های برداری پدیدآمده به‌وسیلهٔ (a, b, c) و (u, v, w) بریکدیگر منطبق می‌باشند.

ب - نشان دهید که بردارهای u ، v و w نابستگی خطی‌دارند اگر و تنها اگر بردارهای a ، b و c نابستگی خطی داشته باشند.

۱۱۲ - بردارهای $a(-2,x,y,3)$ ، $e_1(1,-1,1,2)$ و $e_2(-1,2,3,1)$ از فضای برداری $\mathbf{R}^4$ دادهشده‌اند. x و y را پیدا کنید به طوری که بردار a به زیرفضای برداری F از $\mathbf{R}^4$ ، پدید آمده به وسیلهٔ e_1 و e_2 متعلق باشد.

۱۱۳ - درفضای‌برداری $\mathbf{R}^۴$ زیر فضای بردار $F_۱$ پدید آمده به وسیلهٔ بردارهای

$$e_۱(۲ , ۲ , ۱ , ۰) \ , \ e_۲(۱ , ۴ , ۲ , -۱) \ , \ e_۳(۲ , ۱ , -۱ , ۰) \ ,$$
$$e_۴(۲ , -۵ , -۴ , ۲)$$

و زیرفضای برداری $F_۲$ پدیدآمده به‌وسیلهٔ بردارهای $a_۱(۲ , ۱ , ۴ , ۵)$ و $a_۲(۱,۲ , ۳ , ۴)$ را درنظر می گیریم. بعدهریک ازاین دو زیر فضای برداری ویک پایه از هرکدام را بدست آورید. همچنین بعدهای $F_۱ + F_۲$ و $F_۱ \cap F_۲$ را معین کنید ویک پایه‌ازهرکدام‌از این دو زیر فضا، پیدا نمایید.

۱۱۴ - آیا مجموعهٔ بردارهای $x (x_۱ , x_۲ , x_۳)$ از $\mathbf{R}^۳$ به طوری که $x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ = ۰$ باشد یک زیرفضای برداری از $\mathbf{R}^۳$ است ؟ به همین مطلب در مورد مجموعهٔ بردارهای x از $\mathbf{R}^۳$ به‌طوری که $x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ = ۱$ باشد جواب دهید.

۱۱۵ - آیامی‌توان x و y را یافت به‌طوری‌که بردار $(۱ , y , ۱ , x)$ از $\mathbf{R}^۴$ به زیر فضای برداری پدید آمده به‌وسیلهٔ $e_۱(۱ , ۲ , ۳ , ۴)$ و $e_۲(۱ , -۲ , ۳ , -۴)$ از $\mathbf{R}^۴$، متعلق باشد.

۱۱۶ - فضای برداری چند جمله‌ای‌های یک متغیری حقیقی را در نظرمی گیریم و آن را با $\mathscr{P}$ می‌نماییم. ثابت کنید که مجموعهٔ‌چند جمله‌ای‌های P متعلق‌به $\mathscr{P}$ به‌طوری که $\int_۰^۱ P(x)dx = ۰$ باشد یک زیرفضای‌برداری از $\mathscr{P}$ است، امامجموعهٔ چندجمله‌ای های Q از $\mathscr{P}$ به طوری که $\int_۰^۱ Q(x)dx = -۱$ باشدیک زیرفصای‌برداری از $\mathscr{P}$ نیست.

۱۱۷ - فرض‌می‌کنیم E یک فضای برداری A ، B و C سه زیر فضای برداری از E باشند، به‌طوری که‌داشته باشیم $B \subset C$ ، $A+B=A+C$ ، $A \cap B = A \cap C$ ثابت کنید که داریم $B=C$.

۱۱۸ - در فضای برداری $\mathbf{R}^۴$ بردارهای $a(۱ , ۲ , -۱ , -۲)$ ، $b(۲,۳,۰,-۱)$ و $c(۱ , ۳ , -۱ , ۰)$ و $d(۱ , ۲ , ۱ , ۴)$ نسبت به‌پایهٔ کانونیک $\mathbf{R}^۴$ داده‌شده‌اند. ثابت کنید که این‌چهار بردارنابستگی‌خطی دارند و مؤلفه های بردار $x(۷,۱۴ , -۱ , ۲)$ را نسبت به پایهٔ (a , b , c , d) پیدا کنید.

۱۱۹ - بردارهای $a(\lambda, 1, 1)$ ، $b(-1, -1, \lambda)$ و $c(-1, -\lambda, 1)$ از $\mathbf{R}^3$ داده شده‌اند. رتبهٔ این دستگاه بردار را برحسب مقادیر مختلف λ پیدا کنید (رتبهٔ یک دستگاه بردار عبارتست از شمارهٔ ماکزیمم بردارهایی از دستگاه که نا بستگی خطی دارند).

۱۲۰ - بردارهای $a(1, 1, \alpha)$ ، $b(1, \alpha, 1)$ و $c(\alpha, 1, 1)$ از فضای برداری V داده شده‌اند. رتبهٔ این دستگاه بردار را برحسب مقادیر مختلف α پیدا کنید اگر:

الف - V فضای برداری حقیقی $\mathbf{R}^3$ باشد.

ب - V فضای برداری $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$ روی هیأت $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ باشد.

۱۲۱ - فضای برداری $\mathbf{R}^4$ و پایهٔ کانونیک آن را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$f_1(1, 0, -\lambda, 0) \;,\; f_2(0, 1, 0, -\frac{1}{\lambda}) \;,\; f_3(1, 0, 0, -\mu) \;,$$

$$f_4(0, 1, 0, -\frac{1}{\mu})$$

چهار فرم خطی روی $\mathbf{R}^4$ ، نسبت به پایهٔ دوال پایهٔ کانونیک $\mathbf{R}^4$ ، باشند (λ و μ مخالف با صفرند).

نابستگی خطی این فرمها را مطالعه کنید و درحالتی که این چهار فرم نابستگی خطی دارند پایهٔ دوال پایهٔ (f_1, f_2, f_3, f_4) را بدست آورید.

مطلب بالا را در مورد فرمهای خطی زیر نیز مطالعه کنید:

$$g_1(1, 0, -\sin\alpha, -\cos\alpha) \;,\; g_2(0, 1, -\cos\alpha, \sin\alpha) \quad, \alpha\in\mathbf{R}$$

$$g_3(1\ 0, \sin\beta, -\cos\beta) \;,\; g_4(0, 1, -\cos\beta, -\sin\beta) \quad, \beta\in\mathbf{R}$$

۱۲۲ - چنانچه n یک شمار درست و مثبت و E مجموعهٔ توابع x روی $\mathbf{R}$ به‌صورت:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

باشد (a_0 ، a_1 ، ... ، a_n ، b_1 ، ... ، b_n شمارهای حقیقی هستند):

الف - ثابت کنید که E یک زیر فضای برداری‌از فضای برداری حقیقی گسترشهای $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ می‌باشد.

ب ـ اگر m یک شمار درست و E_m مجموعهٔ توابع x باشد به‌طوری که:

$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kt+b_k \sin kt) \quad , \quad 0\leqslant m\leqslant n$$

با استفاده از روش بازگشت روی m ثابت کنید که اگر $x\in E_m$ تابع صفر باشد ضرایب a_k و b_k برابر با صفرند (از تابع $x''+m^2x$ که در آن x'' مشتق دوم تابع x است استفاده کنید).

پ ـ یک پایهٔ E را پیدا کنید.

۱۲۳ ـ الف ـ ثابت کنید که چند جمله‌ای X^3-2 در $Q[X]$ ساده نشدنی است.

ب ـ نشان دهید که مجموعهٔ E شمارهای حقیقی به صورت $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ که در آن a ، b و c شمارهای گویا هستند یک هیأت است.

پ ـ ثابت کنید که E یک فضای برداری سه بعدی روی هیأت Q می‌باشد.

۱۲۴ ـ E مجموعهٔ داده شده درتمرین شمارهٔ (۱۲۲) است. گسترش خطی E در E را که به هرعنصر x از E عنصر $y=u(x)\in E$ را وابسته میکند درنظرمی گیریم بطوری که:

$$y(t)=x\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

ثابت کنید که u یک گسترش خطی و u^8 گسترش همانی است (u^8 ترکیب ۸ گسترش u می‌باشد). هستهٔ u و سایهٔ $u(E)$ را پیدا کنید.

۱۲۵ ـ ثابت کنید که مجموعهٔ گسترشهای $[-1, 1]$ در هیأت $\mathbf{R}$ که آن را با F می‌نماییم ، با دو قانون ترکیب جمع و ضرب :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (1)$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x) \qquad (2)$$

یک حلقهٔ جابجائی است.

معلوم کنید کدام یک از زیر مجموعه های F که در زیر مشخص شده‌اند زیر حلقهٔ F وکدام یک از آنها ایدآل F می‌باشند :

$\mathscr{P}=$ مجموعهٔ توابع چند جمله‌ای .

$\mathscr{P}_n =$ مجموعهٔ توابع چند جمله‌ای که درجهٔ آنها کوچکتر ویا برابر با n است.

$\mathscr{Q}_n =$ مجموعهٔ توابع چندجمله‌ای درجه n .

$\mathscr{N} =$ مجموعهٔ گسترشهای f به‌طوری که $f(\circ)=\circ$ باشد.

$\mathscr{U} =$ مجموعهٔ گسترشهای f به‌طوری که $f(\circ)=1$ باشد.

۱۲۶ - ثابت کنید مجموعهٔ F که در تمرین شمارهٔ (۱۲۵) معین گردیدبا دوقانون:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad , \quad (\lambda f)(x)=\lambda f(x) \quad , \quad \lambda\in\mathbf{R}$$

یک فضای برداری روی $\mathbf{R}$ می‌باشد .

معلوم کنید کدام یک‌از زیر مجموعه های $\mathscr{P}$ ، $\mathscr{P}_n$ ، $\mathscr{Q}_n$ ، $\mathscr{N}$ و $\mathscr{U}$ تشکیل زیر فضای برداری میدهند (این زیر مجموعه‌ها در تمرین شمارهٔ ۱۲۵ معین شده‌اند) .

۱۲۷ - فضای‌برداری E بعدی n روی‌هیأت K و E^* دوآل E را درنظر می گیریم و فرض می کنیم Φ مجموعه‌ای از بردارهای E و F زیر فضای برداری E پدید آمده بوسیلهٔ بردارهای Φ باشد. ثابت کنید :

الف - فرمهای خطی‌ای که مقدار آنها برای هربردار از Φ برابر با صفر است یک‌زیر فضای برداری F^* از E^* تشکیل میدهند.

ب - صفرهای مشترك فرمهای خطی F^* بردارهای F هستند.

پ - $\dim F+\dim F^*=n$.

۱۲۸ - گسترش خطی f فضای برداری $\mathbf{R}^4$ در $\mathbf{R}^4$ که به بردار u به مؤلفه‌های x ، y ، z و t بردار f(u) به مؤلفه‌های X ، Y ، Z و T را وابسته میکند داده شده است و داریم :

$$\begin{aligned} X &= x+y+z-t \\ Y &= -x+y-z-t \\ Z &= x-y-z-t \\ T &= -x-y+z+2t \end{aligned}$$

رتبهٔ f و فضای $f(\mathbf{R}^4)$ را معلوم کنید. ثابت کنید که $f(\mathbf{R}^4)$ نقطهٔ مشترکی با میدان D معین شده بوسیلهٔ $T>\circ$ ، $Z>\circ$ ، $Y>\circ$ و $X>\circ$ ندارد.

۱۲۹ - فضای برداری $\mathbf{R}^5$ را درنظر می گیریم . نشان دهید که مجموعهٔ بردارهای $x=(x_1, x_2, x_3 x_4, x_5)$ که دربستگی‌های :

$$\sum_{i=1}^{5} a_{ij}x_i = 0 \quad , \quad j = 1 , \cdots , 4$$

صدق می کنند یک زیر فضای برداری از $\mathbf{R}^5$ است و این مطلب را از روی گسترش خطی تعبیر کنید .

۱۳۰ - عنصرهای d , c , b , a از هیأت جابجایی K و ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

را درنظر می گیریم .

الف - ماتریس A^2 را محاسبه کنید و نشان دهید که شمارهای α و β وابسته به a ، b ، c و d وجود دارند به قسمی که داریم :

$$A^2 - \alpha A - \beta I = 0$$

درچه حالتی ضریب های α و β یکتا نیستند .

ب - ثابت کنیدمجموعهٔ $\mathscr{A}$ که‌ازماتریس B به صورت $B = uI + vA$ (u و v عنصرهای دلخواهی از K و I ماتریس یکه است) تشکیل شده است یک حلقهٔ یکه‌دار جابجایی است .

پ - در حالت $K = \mathbf{R}$ نشان دهید که اگر B دارای وارون B^{-1} باشد ، B^{-1} نیز متعلق به $\mathscr{A}$ است. درچه صورت $\mathscr{A}$ یک هیأت است.

۱۳۱ - فرض می کنیم E فضای برداری مجموعهٔتابع هایی به صورت $P(x) = a\cos x + b\sin x + c$ روی هیأت $\mathbf{R}$ باشد . اگر φ و ψ دوگسترش E در E باشند و $\varphi(P) = Q$ و $\psi(P) = R$ به طوری که داشته باشیم

$$Q(x) = P\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{و} \quad R(x) = \frac{d}{dx}(P(x))$$

گسترشهای $\varphi \circ \psi$ و $\psi \circ \varphi$ را پیدا نمایید و آنها را بایکدیگر مقایسه کنید.

۱۳۲- ماتریس مربع X راکه در برابری زیر صدق می‌کندپیداکنید .

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$$

۱۳۳- برای $x \in \mathbf{R}$ ماتریس $A(x)$ را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x \\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x \end{bmatrix}$$

الف ـ اگر $y \in \mathbf{R}$ باشد ماتریس $A(x) \cdot A(y)$ را حساب کنید .

ب ـ اگر $n \in \mathbf{Z}$ باشد $(A(x))^n$ را بدست آورید .

۱۳۴- ماتریسهای A و B به‌صورت زیر داده شده‌اند :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریسهای A^n و B^n را برای $n \in N$ حساب کنید .

۱۳۵- فرض می‌کنیم $\mathscr{M}$ مجموعهٔ ماتریسهای حقیقی مربع مرتبهٔ دوم باشد . همهٔ ماتریسهای A متعلق به $\mathscr{M}$ راکه در برابری $A^2 = A$ صدق می‌کنند ، بدست‌آورید .

۱۳۶- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ داده شده است . همهٔ ماتریسهای حقیقی X و Y را که در برابری‌های $AX = A$ و $YA = A$ صدق می‌کنند ، بدست‌آورید .

۱۳۷- فرض می‌کنیم E مجموعهٔ ماتریسهایی به‌صورت $M(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ باشد که درآنها a و b متعلق به $\mathbf{R}$ هستند .

الف ـ ثابت کنید که E یک زیرفضای برداری از فضای برداری ماتریسهای مربع مرتبهٔ دوم $\mathscr{M}$ با عنصرهای متعلق به $\mathbf{R}$ روی $\mathbf{R}$ ، می‌باشد و بعد E را معین کنید . همچنین ثابت کنید که E یک زیر حلقه از $\mathscr{M}$ است .

ب ـ فرض می‌کنیم φ گسترش $\mathbf{C}$ در $\mathbf{E}$ باشد به‌طوری‌که:

$$\varphi(a+ib)=M(a\,,b)$$

ثابت‌کنید‌که φ یک ایزومرفیسم فضای برداری و حلقه است . آیا $\mathbf{E}$ دارای یک ساختمان هیأت می‌باشد؟

۱۳۸ـ فرض می‌کنیم a ، b و c متعلق به $\mathbf{C}$ و f آندومرفیسمی از $\mathbf{C}^۳$ باشد که نسبت به‌پایهٔ‌کانونیک $(e_۱\,,\,e_۲\,,\,e_۳)$ دارای ماتریس زیر است :

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

ماتریس f را نسبت به‌پایهٔ $e'_۱=e_۱+e_۲+e_۳$ ، $e'_۲=e_۲$ و $e'_۳=e_۳$ بدست آورید.

۱۳۹ـ دوماتریس مربع مرتبهٔ سوم A و B به‌صورت زیر داده شده است. ماتریس مربع مرتبهٔ سوم C را بدست آورید به‌طوری‌که داشته باشیم $CB=A$.

الف ـ
$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۲ \\ ۴ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\,,\quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

ب ـ
$$A=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۱ \\ ۸ & ۱ & -۵ \\ ۴ & ۳ & k \end{bmatrix}\,,\quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & -۱ \\ -۵ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

۱۴۰ـ رتبهٔ ماتریس‌های زیررا در هیأت $\mathbf{Q}$ پیدا کنید:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۱ & ۵ \\ -۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}\,,\quad \begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۵ & ۳ & -۲ \\ ۰ & ۴ & ۲ & ۲ & ۰ \\ ۲ & -۲ & ۴ & ۰ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۷ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

۱۴۱ـ در هیأت $\mathbf{K}=\mathbf{Z}/۲\mathbf{Z}$ ماتریس A به‌صورت زیر داده شده است :

$$A=\begin{bmatrix} ١ & -١ & ٠ & ١ \\ ١ & ١ & -١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

رتبهٔ A را بدست آورید. همین مسأله را برای هیأتهای $K=\mathbf{Z}/٢\mathbf{Z}$ و $K=\mathbf{Z}/٥\mathbf{Z}$ حل کنید.

١٤٢- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری، f یک آندومرفیسم E و $N(f)$ هستهٔ f باشد. ثابت کنید که:

الف - $N(f)\subset N(f^٢)\subset N(f^٣)\subset\cdots$ و $f(E)\supset f^٢(E)\supset f^٣(E)\supset\cdots$

ب - $f^٢$ گسترش صفر است اگر و تنها اگر داشته باشیم $f(E)\subset N(f)$

١٤٣- گسترش خطی $\mathbf{R}^٣$ در $\mathbf{R}^٤$ را که نسبت به‌پایه‌های کانونیک $\mathbf{R}^٣$ و $\mathbf{R}^٤$ دارای ماتریس:

$$A=\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ٦ \\ -١ & ٤ & ١ \\ ٢ & -٨ & -٢ \end{bmatrix}$$

است با f نمایش می‌دهیم. بعد $f(\mathbf{R}^٣)$ و بعد هستهٔ f را پیدا کنید. یک پایه از هستهٔ f را بدست آورید.

١٤٤- فرض می‌کنیم p و q دوشمار حقیقی ثابت و E مجموعهٔ ماتریسهایی به‌صورت:

$$M(a\,,\,b)=\begin{bmatrix} a & b \\ -qb & a+pb \end{bmatrix}$$

باشد که درآن a و b دوشمار حقیقی دلخواه هستند. ثابت کنید که E یک حلقهٔ جابجایی است. آیا E می‌تواند یک هیأت باشد؟

١٤٥- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری با بعد با پایان و u یک آندومرفیسم E باشد. ثابت کنید که اگرهستهٔ u و $u(E)$ بریکدیگر منطبق باشند بعد E زوج است.

آیا چنین گسترشهایی وجود دارد؟ آیا این گسترشها می‌توانند دوسویی باشند؟

۱۴۶- ماتریس $A=[a_i^j]$ از رستهٔ (n, n) که درآن داریم :

$a_i^j=۱$ اگر $j=i+۱$ باشد $(i=۱, ۲, \cdots, n-۱)$

$a_i^j=۰$ اگر $j\neq i+۱$ باشد

داده شده است. رتبهٔ ماتریس A^k را بدست آورید $(k\in \mathbf{N})$.

۱۴۷- فضای برداری $\mathbf{R}^۴$ و بردار دلخواه $u(x, y, z, t)$ از آن‌را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم فرمهای خطی $\varphi_۱$ ، $\varphi_۲$ ، $\varphi_۳$ و $\varphi_۴$ روی $\mathbf{R}^۴$ به‌صورت زیر داده شده باشند:

$$\varphi_۱ : u \longrightarrow \varphi_۱(u)=x+y+z+t$$
$$\varphi_۲ : u \longrightarrow \varphi_۲(u)=x-y-z+t$$
$$\varphi_۳ : u \longrightarrow \varphi_۳(u)=-x-y+z+t$$
$$\varphi_۴ : u \longrightarrow \varphi_۴(u)=-۳x+y-۳z-۷t$$

ثابت‌کنید که $\varphi_۱$ ، $\varphi_۲$ ، $\varphi_۳$ و $\varphi_۴$ بستگی خطی دارند ، و ازآنجا نتیجه بگیرید که بخش A از $\mathbf{R}^۴$ به‌طوری‌که :

$$A=\{u \mid \varphi_i(u) > ۰ , i=۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$$

تهی است.

۱۴۸- ثابت‌کنید که بردارهای $\vec{a}(۱ , ۲ , ۱)$ ، $\vec{b}(۲ , ۳ , ۳)$ و $\vec{c}(۳,۷, ۱)$ تشکیل یک پایه از $\mathbf{R}^۳$ را می‌دهند. همچنین درمورد بردارهای :

$$\vec{a'}(۳ , ۱ , ۴) \quad , \quad \vec{b'}(۵ , ۲ , ۳) \quad , \quad \vec{c'}(۱ , ۱ , -۶)$$

ماتریس تعویض پایهٔ $(\vec{a} , \vec{b} , \vec{c})$ را به $(\vec{a'} , \vec{b'} , \vec{c'})$ پیدا کنید.

۱۴۹- مطالب بالا را در $\mathbf{R}^۴$ ، در مورد بردارهای زیر نیز ثابت‌کنید :

$$\vec{a}(۱ , ۱ , ۱ , ۱) \ , \ \vec{b}(۱, ۲,۱, ۱) \ , \ \vec{c}(۱,۱,۲,۱) \ , \ \vec{d}(۱, ۳, ۲, ۳)$$
$$\vec{a'}(۱ , ۰ , ۳ , ۳) \ , \ \vec{b'}(-۲ , -۳ , -۵ , -۴) \ , \ \vec{c'}(۲ , ۲, ۵ , ۴) \ ,$$
$$\vec{d'}(-۲ , -۳ , -۴ , -۴)$$

۱۵۰- وارون ماتریس زیر را حساب کنید :

$$\begin{bmatrix} ۱+a_۱ & ۱ & ۱ \cdots & ۱ \\ ۱ & ۱+a_۲ & ۱ \cdots & ۱ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ۱ & ۱ & ۱ \cdots & ۱+a_n \end{bmatrix}$$

۱۵۱ - اگر $\omega=\cos\frac{۲\pi}{n}+i\sin\frac{۲\pi}{n}$ باشد ثابت کنید که وارون ماتریس:

$$M=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & \omega & \omega^۲ & \cdots & \omega^{n-۱} \\ ۱ & \omega^۲ & \omega^۴ & \cdots & \omega^{۲(n-۱)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ۱ & \omega^{n-۱} & \omega^{۲(n-۱)} & \cdots & \omega^{(n-۱)^۲} \end{bmatrix}$$

از ماتریس M با تبدیل ω به $\omega^{-۱}$ و تقسیم آن بر n بدست می‌آید.

۱۵۲- وارون ماتریس :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱+i & -i \\ ۰ & i & ۱-۲i \\ ۱ & ۱ & i \end{bmatrix}$$

را در حلقهٔ C حساب کنید.

۱۵۳- آیا سه فرم خطی $۲x-y+۳z$ ، $۳x-۵y+z$ و $۴x-۷y+z$ روی $R^۳$ یک پایه از فضای دوآل فضای $R^۳$ را تشکیل می‌دهند؟

۱۵۴- ثابت کنید که فرمهای خطی $x+۲y+z$ ، $۲x+۳y+۳z$ و $۳x+۷y+z$ تشکیل یک پایهٔ فضای دوآل $(R^۳)^*$ را می‌دهند. پایهٔ دوال این پایه را در $R^۳$ پیدا کنید.

۱۵۵- دترمینان‌های زیر را حساب کنید :

$$D_n = \begin{vmatrix} ۱-n & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۱-n & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱-n & \cdots & ۱ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱-n \end{vmatrix} , \quad D_n = \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۲ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ & ۲ & \cdots & ۰ & ۰ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$D_{n+۱} = \begin{vmatrix} x & a_۱ & a_۲ & \cdots & a_{n-۱} & ۱ \\ a_۱ & x & a_۲ & \cdots & a_{n-۱} & ۱ \\ a_۱ & a_۲ & x & \cdots & a_{n-۱} & ۱ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ & \cdots & x & ۱ \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ & \cdots & a_n & ۱ \end{vmatrix} , \quad D_n = \begin{vmatrix} ۱ & n & n & \cdots & n \\ n & ۲ & n & \cdots & n \\ n & n & ۳ & \cdots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

۱۵۶- برابری‌های زیر را ثابت کنید :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos ۲\alpha & \cos ۲\beta & \cos ۲\gamma \end{vmatrix} = ۲(\cos\beta - \cos\alpha)(\cos\gamma - \cos\alpha)(\cos\gamma - \cos\beta)$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} p+q & q & \cdots & q \\ q & p+q & \cdots & q \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ q & q & \cdots & p+q \end{vmatrix} = (p+nq)p^{n-۱}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (1+a_1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & (1+a_2) & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (1+a_n) \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

۱۵۷- در فضای برداری اقلیدسی $\mathbf{R}^3$ چهار بردار $\vec{v}_1$ ، $\vec{v}_2$ ، $\vec{v}_3$ و $\vec{v}_4$ داده شده‌اند. ثابت کنید که:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \vec{v}_1^{\,2} & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_4 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2^{\,2} & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_4 \\ \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_3^{\,2} & \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_4 \\ \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_3 & \vec{v}_4^{\,2} \end{vmatrix} = 0$$

۱۵۸- برابری‌های زیر را ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

۱۵۹- معادله های زیر را حل و بحث کنید :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 7x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 9x_4 + 7x_5 = \lambda \end{cases}$$

۱۶۰ - دستگاه معادله‌های زیر را که درآن ضرایب و مجهولات متعلق به‌هیأت C میباشند ، حل و بحث کنید:

$$\begin{cases} \lambda x_i + a_i X_{n+1} = b_i \qquad , \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i + \lambda x_{n+1} = b_{n+1} \end{cases}$$

۱۶۱- دستگاه معادله های خطی زیر را حل و بحث کنید:

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} cy - bz = p \\ -cx + az = q \\ bx - ay = r \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+ \quad by+ \quad 2z=1 \\ ax+(2b-1)\,y+ \quad 3z=1 \\ ax+ \quad by+\ (b+3)\,z=2b-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a+1)x+ \quad 3y+ \quad az= a+4 \\ (4a-1)x+(a+1)y+\ (2a-1)z=2a+2 \\ (5a-4)x+(a+1)y+\ (3a-4)z= a-1 \end{cases}$$

۱۶۲- صفحهٔ آفین E روی K داده شده است. نقاط a ، b ، c و d از E راکه هیچ سه‌تای آنها هم خط نیستند درنظر می‌گیریم و خطی‌راکه از نقاط x و y می‌گذرد با D_{xy} نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم خطوط D_{ab} , D_{cd} درنقطهٔ e و D_{ad} , D_{bc} درنقطهٔ f به‌یکدیگر برخورد کنند. نشان دهید که گرانیگاههای سه دسته نقاط (a , c) و (b , d) و (e , f) هم خط می‌باشند. چنانچه خط‌های D_{ab} و D_{cd} هم راستا باشند چه وضعی پیش می‌آید؟

۱۶۳- فضای‌آفین E روی هیأت K را درنظرمی‌گیریم. فرض می‌کنیم نقاط a،bوc از E هم‌خط نباشند. چنانچه گرانیگاههای (b , c) ، (c , a) و (a , b) را بترتیب با a' ، b' و c' نشان دهیم ثابت‌کنیدکه خطوط $D_{aa'}$, $D_{bb'}$, $D_{cc'}$ ازگرانیگاههای سه‌نقطهٔ a ، b و c می‌گذرند.

این تمرین را برای n نقطه‌که نابستگی خطی دارند بررسی‌کنید.

۱۶۴- سه‌برهای (a , b , c) و (a' , b' , c') ازفضای‌آفین E روی K داده شده‌اند به‌طوری‌که خط‌های aa' ، bb' و cc' بریک نقطه O می‌گذرند. چنانچه e نقطهٔ برخورد $D_{a'b'}$ و D_{ab} و f نقطهٔ برخورد $D_{b'c'}$ و D_{bc} و g نقطه برخورد $D_{c'a'}$ و D_{ca} باشند ، نشان دهیدکه سه نقطهٔ e ، f و g هم‌خط می‌باشند (قضیه دزارگ) .

۱۶۵ - فضای آفین E روی هیأت K وگسترش آفین u فضای E در E را درنظر می‌گیریم.

الف ـ ثابت‌کنید برای اینکه u هرخط راست D را به‌یک خط راست هم‌راستا با D بدل کند بایاوبسنده است که گسترش خطی v وابسته به u یک همسانی $t \to \lambda t$ به‌نسبت λ مخالف با صفر باشد (چنانچه $\lambda=1$ باشد u یک انتقال است).

ب ـ ثابت کنید که برای $\lambda \neq 1$ یک نقطه $a \in E$ وجود دارد به‌قسمی که داریم $u(a)=a$ و چنانچه a را مبداء قرار دهیم گسترش u همسانی به‌مبداء a و نسبت λ خواهد شد.

پ ـ چنانچه دو گسترش آفین u_1 و u_2 فضای E در E انتقال و یا همسانی باشد، نشان دهید که $u_1 \circ u_2$ یک همسانی و یا یک انتقال است.

هرگاه هر سه گسترش u_1، u_2 و $u_1 \circ u_2$ همسانی باشند. ثابت کنید که مرکزهای آنها هم‌خط می‌باشند. درحالتی که u_1 و u_2 همسانی و $u_1 \circ u_2$ یک انتقال باشد چه بستگی‌ای بین مرکزهای همسانی و بردار انتقال $u_1 \circ u_2$ وجود دارد.

۱۶۶- فرض می‌کنیم E مجموعهٔ توابع حقیقی پیوسته در فاصلهٔ $[0, 1]$ باشد. مجموعهٔ عنصرهای φ از E را که برای آنها داریم $\varphi(0)=1$ و $\varphi(1) \leqslant 0$ با A نمایش می‌دهیم. ثابت کنید که A یک بخش کوژ از E است.

۱۶۷- گروه G که قانون ترکیب آن ضربی است داده شده است. چنانچه A یک بخش غیرتهی از G باشد بخش‌های $C(A)$ و $N(A)$ را به‌روش زیر معین می‌کنیم:

$$N(A)=\{x \mid Ax=xA\} \text{ و } C(A)=\{x \mid \forall a \in A , xa=ax\}$$

الف ـ ثابت کنید $N(A)$ یک زیرگروه از G و $C(A)$ یک زیرگروه ممتاز از $N(A)$ می‌باشد.

ب ـ چنانچه $A=G$ باشد $C(A)$ را **مرکز گروه** می‌نامیم و با C نشان می‌دهیم. ثابت کنید که گروه خارج قست G/C با گروه اتومرفیسمهای درونی G ایزومرف است.

۱۶۸- گروه دلخواه G داده شده است.

الف ـ فرض می‌کنیم A و B دو زیرگروه ممتاز G باشند به‌قسمی که $A \subset B \subset G$. ثابت کنید که B/A یک زیرگروه ممتاز از G/A می‌باشد و از آن نتیجه بگیرید که گروههای G/B و $(G/A)/(B/A)$ ایزومرفند.

ب ـ چنانچه H و S دو زیرگروه دلخواه از G باشند قرار میدهیم:

$$HS=\{xy \mid x \in H , y \in S\}$$

۱ ـ به‌کمک یک مثال نشان دهید که HS ممکن است یک زیرگروه از G نباشد.

۲ ـ چنانچه S ممتاز باشد نشان دهید که $HS = SH$ وثابت کنید که دراین‌حالت HS یک زیرگروه از G و H و S زیرگروههایی از HS می‌باشند ، به‌علاوه $H \cap S$ یک زیرگروه ممتاز می‌باشد .

۳ ـ ثابت کنید که گروههای $H/H \cap S$ و HS/S ایزومرفند .

۱۶۹- گروههای ضربی G و G' که عنصرهای بی‌اثرآنها به‌ترتیب e و e' است داده شده‌اند .

الف ـ نشان‌دهید که‌مجموعهٔ $G \times G'$ باقانون $(a , b)(a' , b') = (aa' , bb')$ یک گروه است .

ب ـ فرض‌می‌کنیم H یک زیرگروه ممتاز G و H' یک زیرگروه ممتاز G' باشد . گسترش GG' در $G/H \times G'/H'$ راکه با $(x , x') \rightarrow (xH, x'H')$ معین شده است g می‌نامیم. ثابت کنید که g یک همومرفیسم گروه و سورژکتیو است .

پ ـ نشان دهید که $H \times H'$ یک زیرگروه ممتاز از $G \times G'$ است وگروه‌های $G \times G'/H \times H'$ و $G/H \times G'/H'$ ایزومرف می‌باشند .

ت ـ اکنون فرض می کنیم f یک همومرفیسم سورژکتیو G روی G' باشد و قرار می‌دهیم $H_1 = f^{-1}(H')$. ثابت کنید که H_1 یک زیرگروه ممتاز از G می‌باشد و از آن نتیجه بگیرید که گروههای G/H_1 و G'/H' ایزومرفند .

۱۷۰- مجموعهٔ $G = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ با قانون ترکیب :

$$(a , b)\ (a' , b') = \left(aa' \ , \ \frac{b'}{a} + a'b \right)$$

را درنظر می گیریم .

الف ـ ثابت کنید که با این قانون G یک گروه غیرجابجایی است که عنصر بی‌اثرآن $(\text{۱} , \text{۰})$ است، به‌علاوه گسترش $f((x , y)) = |x|$ یک همومرفیسم گروه G درگروه $\mathbf{R}^*$ است و ازآن نتیجه بگیرید که $G' = \{-\text{۱} , +\text{۱}\} \times \mathbf{R}$ یک زیرگروه ممتاز از G می‌باشد (قانون ترکیب گروه R^* ضرب است) .

ب ـ نشان دهید که گروه‌های $\mathbf{R}^*_+$ و G/G' ایزومرفند .

(منظور از $\mathbf{R}^*$ مجموعه $\mathbf{R}-\{0\}$ و $\mathbf{R}_+^*$ مجموعهٔ عنصرهای بزرگتر از صفر $\mathbf{R}$ است) .

۱۷۱- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری حقیقی دوبعدی و e یک بردار غیرصفر از E باشد. مجموعهٔ آندومرفیسم‌های E را که دترمینان آنها برابر با ۱ بوده و e یک بردار ویژهٔ آنها باشد با V نشان می‌دهیم.

الف - ثابت کنید که با قانون ترکیب آندومرفیسم‌ها ، V یک گروه است.

ب - فرض می‌کنیم f یک عنصر از V و M ماتریس آن وابسته به پایهٔ $(e\,,\,e')$ باشد (e' برداری است دلخواه که با e متناسب نیست) ماتریس M^n را حساب کنید.

پ - ثابت کنید که گروه V با گروه $\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$ ایزومرف می‌باشد (قانون ترکیب گروه $\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$ عبارت است از $(a\,,b)\,(a'\,,b')=\left(aa'\,,\,\dfrac{b'}{a}+a'b\right)$).

۱۷۲- فرض می‌کنیم $\mathscr{M}_n$ فضای برداری ماتریس‌های مربع حقیقی مرتبهٔ n باشد. زیرمجموعهٔ $\mathscr{E}$ از $\mathscr{M}_n$ را به‌روش زیر تعریف می‌کنیم: هرعنصر $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ از $\mathscr{M}_n$ به $\mathscr{E}$ متعلق است هرگاه و تنها هرگاه داشته باشیم :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}=\sum_{j=1}^{n} a_{2j}=\cdots=\sum_{j=1}^{n} a_{nj}$$

این مقدار مشترك را با $\lambda(A)$ نشان می‌دهیم.

الف - ثابت کنید که $\mathscr{E}$ یک زیر فضای برداری $\mathscr{M}_n$ است و نشان دهید که گسترش $A\to\lambda(A)$ یک همومرفیسم گروه $\mathscr{E}$ در گروهٔ جمعی $\mathbf{R}$ است.

ب - ثابت کنید که برای هر $A\in\mathscr{E}$ اسکالر $\lambda(A)$ یک مقدار ویژهٔ A است.

۱۷۳- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی روی هیأت $\mathbf{K}$ و :

$$B=(\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2\,,\,\cdots\,,\,\vec{e}_n)$$

یک پایهٔ E و u یک آندومرفیسم E باشد.

الف - برای هر $1\leqslant i\leqslant n$ زیرفضای E پدید آمده به‌وسیلهٔ $\vec{e}_i$ را S_i می‌نامیم.

ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس u نسبت به پایهٔ B قطری باشد این است که برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$ داشته باشیم $u(S_i) \subset S_i$.

ب - اگر λ یک مقدار ویژهٔ u باشد ، نشان دهید که برای هرشمار درست m اسکالر λ^m یک مقدار ویژهٔ آندومرفیسم u^m می‌باشد و ازآن نتیجه بگیرید که برای هرچندجمله‌ای $P(x)$ با ضرایب متعلق به $\mathbf{K}$ اسکالر $P(\lambda)$ یک مقدار ویژهٔ آندومرفیسم $v=P(u)$ است .

۱۷۴- مقادیر ویژه هریک ازماتریس های مختلط زیررا حساب کنید و برای هرمقدار ویژه زیر فضای ویژهٔ وابسته به‌آن را مشخص کنید :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ 2 & 1+i \end{bmatrix}$$

۱۷۵ - ثابت کنید که ماتریس های حقیقی و مربع A و ${}^tA$ دارای مقادیر ویژهٔ مشترکند. چنانچه x یک بردار ویژهٔ ماتریس A وابسته به‌مقدار ویژهٔ λ و y یک‌بردار ویژهٔ ${}^tA$ وابسته به‌مقدار ویژهٔ μ باشد ، ثابت کنید که اگر $\lambda \neq \mu$ باشد بردارهای x و y بریکدیگر عمودند.

۱۷۶ - ماتریس P را طوری تعیین کنید که ماتریس $A'=P^{-1}AP$ که درآن

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

است قطری باشد. همین مسأله را وقتی ماتریس A برابر با

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

است حل کنید.

(درهردوحالت A ماتریسی با عنصرهای متعلق‌به هیأت $\mathbf{R}$ است) .

۱۷۷- مسأله بالا را وقتی A یکی‌از ماتریس های زیر و با عنصرهای متعلق‌به هیأت داده شده است حل کنید :

$$A=\begin{bmatrix}3&2&2&-4\\2&3&2&-1\\1&1&2&-1\\2&2&2&-1\end{bmatrix}$$ و $$\mathbf{K}=\mathbf{C}:A=\begin{bmatrix}5&14&13\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$$ و $$A=\begin{bmatrix}2-i&0&i\\0&1+i&0\\i&0&2-i\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\mathbf{Q}:\qquad A=\begin{bmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\mathbf{R}:\qquad A=\begin{bmatrix}-2&-8&-12\\1&4&4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}:\qquad A=\begin{bmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{0}\\-\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{bmatrix}$$

۱۷۸- ماتریس $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&3\end{bmatrix}$ مفروض است. یک ماتریس سه‌بری پیدا کنید که با ماتریس A همانند باشد.

۱۷۹- مسأله بالا را درمورد ماتریس A و ماتریس مختلط B حل کنید.

$$B=\begin{bmatrix}-1&-1&-6&3\\1&-2&-3&0\\-1&1&0&1\\-1&-1&-5&3\end{bmatrix}$$ و $$A=\begin{bmatrix}9&-1&8&-9\\6&-1&5&-5\\-5&1&-4&0\\4&0&5&-4\end{bmatrix}$$

۱۸۰ - a یک شمارحقیقی مخالف با صفر و f یک آندومرفیسم $\mathbf{R}^4$ است به‌طوریکه ماتریس f نسبت به‌پایهٔ کانونیک $\mathscr{E} = (e_1 , e_2 , e_3 , e_4)$ به‌صورت‌زیر می‌باشد:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الف - آیا A قطری شدنی است.

ب - ماتریس f را نسبت به‌پایهٔ $\mathscr{E}'=(e'_1 , e'_2 , e'_3 , e'_4)$ که به‌صورت زیر معین شده است بنویسید:

$$e'_k=e_1+e_2+\cdots+e_k \qquad (k=1 , 2 , 3 , 4)$$

۱۸۱- مقادیر ویژه وبردارهای‌ویژهٔ هریک ازماتریس های‌مختلط زیر را حساب کنید، و هریک ازاین ماتریس‌ها را ، درصورت امکان بیک ماتریس قطری و در غیراینصورت بیک ماتریس سه‌بری تحویل کنید:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \sin\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 2\cos(\theta+\varphi) & \cos 2\theta+i\sin 2\theta \\ \cos 2\varphi+i\sin 2\varphi & -2i\sin(\theta+\varphi) \end{bmatrix}$$

۱۸۲- برای چه‌مقادیری از m میتوان ماتریس حقیقی $\begin{bmatrix} 1 & m & m \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ را قطری کرد.

۱۸۳- فرض می‌کنیم E یک فضای‌برداری با بعد داخواه روی هیأت $\mathbf{K}$ و u یک آندومرفیسم E باشد. مجموعهٔ تمام λ های متعلق به $\mathbf{K}$ را که برای آنها $u-\lambda id_E$ وارون‌پذیرنیست طیف (اسپکتر) u وهرعنصرطیف را یک « مقدار ویژهٔ » u می‌نامیم. اگر $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ و S طیف u باشد برای هر $\lambda\in\mathbf{C}-S$ قرار می‌دهیم :

$$v_\lambda=u-\lambda e \quad , \quad t_\lambda=(v_\lambda)^{-1}$$

الف ـ ثابت کنید:

$$\forall\mu\ ,\ \lambda\in\mathbf{C}-S \quad , \quad t_\lambda-t_\mu=(\lambda-\mu)t_\lambda\circ t_\mu$$

ب ـ اکنون فرض می‌کنیم C' یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{C}$ و $\mathscr{F}=(f_\lambda)_{\lambda\in C'}$ یک خانواده از آندومرفیسم‌های E باشد به‌قسمی که :

$$\forall\lambda\ ,\ \mu\in C' \quad , \quad f_\lambda-f_\mu=(\lambda-\mu)f_\lambda\circ f_\mu$$

به‌علاوه فرض می‌کنیم یکی از آندومرفیسم‌های $\mathscr{F}$ وارون‌پذیر باشد . ثابت کنید که هرآندومرفیسم $\mathscr{F}$ وارون‌پذیر است و یک آندومرفیسم u و تنها یکی می‌توان یافت به‌طوریکه :

$$\forall\lambda\in C' \quad , \quad (f_\lambda)^{-1}=u-\lambda id_E$$

۱۸۴- فرض می‌کنیم A یک ماتریس حقیقی وارون‌پذیر از رستهٔ $(n\ ,\ n)$ باشد. ثابت کنید که هرفرم درجه دوم q که ماتریس آن برابر با $B=A^tA$ باشد یک فرم‌مثبت و اصیل است.

۱۸۵- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری‌حقیقی و Q مجموعهٔ‌فرم‌های درجه دوم روی E باشد. در روی Q بستگی دوتایی R را به‌روش زیر تعریف می‌کنیم :

$$\Phi R\Psi \iff$$

یک اتومرفیسم E مانند u وجود دارد به‌قسمی که برای هر x متعلق به E داریم :

$$\Phi(u(x))=\Psi(x)$$

الف ـ ثابت کنید R یک بستگی هم‌ارزی است.

ب ـ چنانچه φ و ψ فرم‌های دو خطی متقارن وابسته به Φ و Ψ باشد، ثابت کنید :

$$\Phi R \Psi \Longrightarrow \forall x , y \in E \quad \text{و} \quad \varphi(u(x) , u(y)) = \psi(x , y)$$

۱۸۶- فرض می‌کنیم E یک فضای‌برداری حقیقی و گسترش $\Phi : E \to \mathbf{R}$ به‌قسمی باشد که برای هرجفت (x , y) از عنصرهای E شرایط زیر برقرار باشد:

الف - $\Phi(x+y)+\Phi(x-y)=۲(\Phi(x)+\Phi(y))$

ب - گسترش $t \to \Phi(tx+y)$ یک گسترش پیوسته است.

ثابت کنید Φ یک فرم درجه دوم روی E می‌باشد.

راهنمایی - ثابت کنید که گسترش $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ که با دستور $\varphi(x , y) = \Phi(x+y)-\Phi(x-y)$، داده شده است یک فرم دوخطی متقارن روی E است و Φ فرم درجهٔ دوم وابسته به‌آن است.

۱۸۷- ماتریس حقیقی $\Omega_n = [\omega_{ij}]_{۱\leqslant i , j\leqslant n}$ را که درآن $\omega_{ij} = i+j-۱$ است درنظرمی‌گیریم. ثابت کنید که هرفرم درجهٔ دوم که ماتریس آن Ω_n باشد حاصل‌ضرب دوفرم خطی است و این فرمها را معین کنید.

۱۸۸- فرض می‌کنیم A یک ماتریس از رسته $(۱ , n)$ باشد. ثابت کنید هرفرم درجه‌دوم که با ماتریس $\Omega = A\,{}^tA$ تعریف شده باشد مربع یک فرم خطی است.

۱۸۹- ثابت کنید که اگر دوبردار x و y ازیک فضای تقریباً هیلبرتی برهم عمود و $z=x+y$ باشد داریم:

$$\|z\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲ \qquad \text{(قضیهٔ فیثاغورث)}$$

۱۹۰- فرض می‌کنیم E یک فضای‌برداری n بعدی روی هیأت $\mathbf{K}$ و f یک فرم دوخطی روی E و A ماتریس آن نسبت به یک پایهٔ $(e_i)_{۱\leqslant i\leqslant n}$ باشد. چنانچه برای هربردار $x=(x_۱ , \cdots , x_n)$ قراردهیم $X = \begin{bmatrix} x_۱ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$ ثابت کنید:

الف - $f(x , y) = \det\ ({}^tY \cdot A \cdot X)$

ب ـ اگر B ماتریس f نسبت به پایهٔ دیگر $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ و P ماتریس تعویض پایهٔ (e_i) به (e'_i) باشد ثابت کنیم $B = {}^tPAP$.

۱۹۱- فرض می کنیم q یک فرم درجهٔ دوم روی $\mathbf{R}^n$ و $y \in \mathbf{R}^n$ باشد.

الف ـ ثابت کنید که اگر $q(y) \neq 0$ باشد مجموعهٔ بردارهای عمود بر y یک زیر فضای برداری از $\mathbf{R}^n$ به‌بعد $n-1$ است و چنانچه این زیرفضا را H و فضای پدید آمده به‌وسیلهٔ y را F بنامیم H و F در $\mathbf{R}^n$ متمم یکدیگرند.

ب ـ اگر $q(y) = 0$ باشد:

یا y برتمام بردارهای فضا عمود است.

یا بردارهای عمود بر y یک زیر فضای بردای $n-1$ بعدی است که شامل y است.

۱۹۲- فرض می کنیم E مجموعهٔ تمام دنباله های (x_n) با جملهٔ عمومی $x_n \in \mathbf{C}$ باشد به‌قسمی که $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$.

الف ـ ثابت کنید که E یک فضای برداری است.

ب ـ قرار می دهیم $((x_n) \mid (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ ثابت کنید که با این ضرب داخلی E یک فضای تقریباً هیلبرتی سجزاست.

پ ـ چنانچه قرار دهیم $f((x_n)) = (\xi_n)$ که درآن $\xi_n = \dfrac{x_n}{n}$ ، ثابت کنید f یک گسترش هرمیتی است.

ت ـ قرار می دهیم $g((x_n)) = (\eta_n)$ که درآن $\eta_n = x_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$ و $\eta_1 = 0$ ثابت کنید g آندومرفیسمی است که نرم را پایدار نگهمیدارد. آیا g همانی است؟

۱۹۳- فرض می کنیم E یک فضای تقریباً هیلبرتی و h یک آندومرفیسم هرمیتی E باشد. برای هر $x \in E$ قرار می دهیم $\varphi(x, y) = (h(x) \mid y)$

الف ـ ثابت کنید که φ یک فرم هرمیتی است.

ب ـ چنانچه φ مثبت باشد ثابت کنید که هرمقدار ویژهٔ h یک شمار حقیقی مثبت است .

۱۹۴ - فرض می‌کنیم برای دوآندومرفیسم f و g از فضای تقریباً هیلبرتی E داشته باشیم : $g\circ f-f\circ g=id_E$ ، $f=g^*$ و قرارمی‌دهیم $g\circ f=h$. ثابت کنید .

الف ـ بعد E بی‌پایان است. ب ـ f انژکتیو است . پ ـ h یک گسترش هرمیتی است .

۱۹۵- فضای تقریباً هیلبرتی E و $a\in E$ را درنظر می‌گیریم به‌قسمی‌که $\|a\|=1$ و فرض می‌کنیم $k\in\mathbb{C}$ و $k\neq -1$ باشد و قرارمی‌دهیم $u(x)=k(x\,|\,a)a+x$

الف ـ ثابت کنید u یک اتومرفیسم است و وارون آنرا حساب کنید.

ب ـ ثابت کنید u هرمیتی است. برای چه‌مقدار k گسترش u یکانی است؟

پ ـ مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ u را حساب کنید.

۱۹۶-ثابت کنید که‌شرط بایاوبسنده برای‌آنکه‌حاصل‌ضرب دوماتریس هرمیتی A و B ماتریسی هرمیتی باشد این است که داشته باشیم $AB=BA$.

۱۹۷- چنانچه f یک فرم هرمیتی‌اصیل روی E با بعد با پایان و M و N دوزیر فضای‌برداری E باشند ثابت کنید :

$$(M+N)^{\perp}=M^{\perp}\cap N^{\perp} \quad \text{و} \quad (M\cap N)^{\perp}=M^{\perp}+N^{\perp}$$

۱۹۸- نشان دهید که اگر f یک فرم هرمیتی‌اصیل روی‌یک فضای E بابعدباپایان و M یک زیرفضای E باشد شرط‌های زیر هم‌ارزند :

الف ـ $M\cap M^{\perp}=\{0\}$.

ب ـ تحدید f به M یک فرم اصیل است.

پ ـ فضای E جمع مستقیم M و $M^{\perp}$ است.

ت ـ $E=M+M^{\perp}$.

۱۹۹- در روی $\mathbf{R}^{4}$ (نسبت به‌پایه کانونیک) فرم:

$$f(x, y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-cx_4y_4$$

را که درآن $c>0$ است درنظر می گیریم.

الف - ثابت کنید f یک فرم دوخطی متقارن و اصیل است.

ب - مخروط ایزوترپ آنرا مشخص کنید.

پ - عنصرهای گروه متعامد f را معین کنید (چرخش های f را نیز معین کنید).

۲۰۰ - در یک فضای برداری تقریباً هیلبرتی دلخواه E خانوادهٔ یکه‌ای متعامد $(e_1, \dots, e_n)$ را درنظرمی گیریم و برای هر $x\in E$ قرارمی‌دهیم $\xi_k=(x \mid e_k)$ ، $1\leqslant k\leqslant n$ ثابت کنید $\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\geqslant\|x\|^2$.

۲۰۱ - ثابت کنید هرفرم هرمیتی غیرصفر روی یک فضای‌برداری دارای بردارهای غیرایزوترپ است.

۲۰۲ - ثابت کنید که اگر f یک فرم هرمیتی روی E و $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد باشد برای هر $x\in E$ و $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i$ داریم $\xi_i=f(x, e_i)$

۲۰۳ - فرض می کنیم E یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزا ، u یک آندومرفیسم E و u^* آدژوئن آن باشد و داشته باشیم $u\circ u^*=u^*\circ u$.

الف - ثابت کنید $\operatorname{Ker} u=\operatorname{Ker} u^*$ (منظور از $\operatorname{Ker} u$ هستهٔ آندومرفیسم u است).

ب - اگر λ یک مقدارویژه u باشد ثابت کنید $\bar{\lambda}$ یک مقدار ویژهٔ u^* است.

۲۰۴ - فرض می کنیم $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -2 & 10 & -2 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد. یک ماتریس

متعامد مانند P پیدا کنید به‌قسمی که $P^{-1}AP$ ماتریسی قطری و عنصرهای قطرآن مقادیر ویژهٔ A باشند .

۲۰۵- مسأله بالا را در مورد هریک از ماتریسهای زیر حل کنید :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

حل چند مسألهٔ نمونه

پیش‌از پایان این کتاب به حل چند مسأله به‌عنوان نمونه می‌پردازیم. دراینجا از تکرار صورت این مسأله‌ها که در قسمت تمرین‌ها داده شده است خودداری می‌کنیم و تنها به نوشتن شمارهٔ آنها اکتفا می‌نماییم.

حل ۱- فرض می‌کنیم $A \subset B$ دراینصورت داریم:

$$x \in A \Longrightarrow x \in B \quad \text{و یا} \quad x \notin B \Longrightarrow x \notin A$$

و چون $x \notin B \Longleftrightarrow x \in \complement_E B$ و $x \notin A \Longleftrightarrow x \in \complement_E B$

پس $\forall x \quad , \quad x \in \complement_E B \Longrightarrow x \in \complement_E A$

یعنی $\complement_E B \subset \complement_E A$

حل ۴- الف ـ با توجه به فرض داریم:

$$f(A \cup \varnothing) = f(A) + f(\varnothing) = f(A) \Longrightarrow f(A) = 0$$

ب ـ اگر A و B دو بخش دلخواه از $\mathscr{P}(E)$ باشند داریم:

$$A \cup B = A \cup (B \cap \complement_E A)$$

و چون A و $B \cap \complement_E A$ دو بخش جدا ازهم هستند خواهیم داشت:

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B \cap \complement_E A) \qquad (۱)$$

به‌علاوه داریم $B = (A \cap B) \cup (B \cap \complement_E A)$ و دو بخش $A \cap B$ و $B \cap \complement A$ جدا ازهم می‌باشند پس $f(B) = f(A \cap B) + f(B \cap \complement_E A)$ که بااستفاده‌ازآن برابری (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B) \qquad (۲)$$

فرمول بالا برای سه بخش از E چنین نوشته می‌شود:

$$f(A_۱\bigcup A_۲\bigcup A_۳)=f[(A_۱\bigcup A_۲)\bigcup A_۳]=f(A_۱\bigcup A_۲)$$

$$+f(A_۳)-f[(A_۱\bigcup A_۲)\bigcap A_۳]$$

$$=f(A_۱)+f(A_۲)-f(A_۱\bigcap A_۲)+f(A_۳)$$

$$-f[(A_۱\bigcap A_۳)\bigcup(A_۲\bigcap A_۳)]$$

$$=\sum_{i=۱}^{۳} f(A_i)-f(A_۱\bigcap A_۲)$$

$$-[f(A_۱\bigcap A_۳)+f(A_۲\bigcap A_۳)-f(A_۱\bigcap A_۲\bigcap A_۳\bigcap A_۴)]$$

$$=\sum_{i=۱}^{۳} f(A_i)-\sum_{i,j=۱}^{۳,i<j} f(A_i\bigcap A_j)+f(A_۱\bigcap A_۲\bigcap A_۳)$$

و برای چهار بخش:

$$f(\bigcup_{i=۱}^{۴} A_i)=\sum_{i=۱}^{۴} f(A_i)-\sum_{i<j} f(A_i\bigcap A_j)+\sum_{i<j<k} f(A_i\bigcap A_j\bigcap A_k)$$

$$-f(\bigcap_{i=۱}^{۴} A_i)\quad,\quad(i\,,j\,,k=۱\,,\ldots\,,۴)$$

حل ۶- چون همهٔ عنصرهای E فرد هستند پس $\frac{a+b}{۲}$ یک شمار درست است. بستگی R بازتابی است زیرا برای هر $a\in E$ داریم $\frac{a+a}{۲}=a\in E$ پس aRa . بستگی R متقارن است زیرا $\frac{a+b}{۲}=\frac{b+a}{۲}$ پس:

$$aRb \Longleftrightarrow bRa$$

اما بستگی R متعدی نیست ، زیرا مثلاً داریم ۲۳R۳ و ۳R۷ چون:

$$\frac{۳+۲۳}{۲}=۱۳\in E \quad و \quad \frac{۳+۷}{۲}=۵\in E \quad اما \quad \frac{۲۳+۷}{۲}=۱۵\notin E$$

پس ۲۳R۷ درست نیست. بنابراین $(۳R۷$ و $۲۳R۳) \not\Rightarrow ۲۳R۷$. یعنی R متعدی نیست.

حل ۸- اگر C یک‌دایره از مجموعهٔ Γ باشد داریم CRC زیرا یک انعکاس وجود دارد که C را تغییر نمی‌دهد و آن عبارتست از انعکاس به قطب O و با توانی برابر با توان O نسبت به دایرهٔ C . پس بستگی R بازتابی است. بستگی R متقارن است، زیرا اگر انعکاس J دایرهٔ C را به دایرهٔ C' بدل کند J دایرهٔ C' را نیز به C بدل می‌کند. به‌علاوه اگر انعکاس J به قطب O و با توان p دایرهٔ C را به دایرهٔ C' بدل کند و انعکاس J' به قطب O و با توان p' دایرهٔ C' را به دایرهٔ C'' بدل نماید، دایرهٔ C'' همتای دایرهٔ C در یک همسانی به مرکز O و با نسبت $\frac{p'}{p}$ خواهد بود. بنابراین یک انعکاس به قطب O وجود دارد که C را به C'' بدل می‌کند. پس بستگی R متعدی است.

حل ۱۰- این مسأله را با استفاده از روش بازگشت حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $E=\varnothing$ باشد. دراینصورت تنها بخش E همان $\{\varnothing\}$ است. یعنی شمارهٔ بخشهای E برابراست با $۲^۰=۱$. اگر E یک مجموعهٔ یک عنصری باشد، مجموعهٔ بخشهای E عبارتست از $\{\varnothing, E\}$ یعنی شمارهٔ بخشهای E برابر است با $۲^۱=۲$. اکنون فرض می‌کنیم شمارهٔ بخشهای یک مجموعهٔ $(n-۱)$ عنصری برابر با $۲^{n-۱}$ باشد و ثابت می‌کنیم که شمارهٔ بخشهای یک مجموعهٔ n عنصری برابراست با ۲^n. بدین منظور مجموعهٔ n عنصری E را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم x عنصری از E باشد. مکمل $\{x\}$ را در E با F نمایش می‌دهیم. دراینصورت داریم $F\bigcup\{x\}=E$ و $F\bigcap\{x\}=\varnothing$. چنانچه A بخش دلخواهی از F باشد، A و $A\bigcup\{x\}$ دو بخش از E خواهند بود. به‌علاوه اگر A و B دو بخش از F باشند به طوری که داشته باشیم $A\neq B$ خواهیم داشت $A\bigcup\{x\}\neq B\bigcup\{x\}$. ازاینجا نتیجه می‌شود که شمارهٔ بخشهای E دوبرابر

شمارهٔ بخشهای F است (برای بخش $\varnothing$ از F دو بخش $\varnothing$ و $\{x\}=\{x\}\bigcup\varnothing$ از E را خواهیم داشت). اما F یک مجموعهٔ $n-1$ عنصری است و بنا به فرض بازگشت شمارهٔ بخش‌های F برابر است با 2^{n-1} پس شمارهٔ بخشهای مجموعهٔ n عنصری E برابر است با $2^n=2^{n-1}\times 2$.

حل ۱۱- اگر E یک مجموعهٔ n عنصری باشد، مجموعهٔ حاصلضرب $E\times E$ دارای n^2 عنصر است. چون هربستگی دوتایی روی E با دادن بخشی از $E\times E$ معین می‌شود پس شمارهٔ همهٔ بستگی‌های دوتایی که می‌توان روی E تعریف کرد برابر است با شمارهٔ بخشهای مجموعهٔ $E\times E$ یعنی $2^{(n^2)}$. اما برای بستگی دوتایی متقارن R روی E ازدو جفت (x,y) و (y,x) کافی است تنها یکی درنظر گرفته شود. زیرا $yRx \Longleftrightarrow xRy$ پس با توجه به اینکه مجموعهٔ $E\times E$ دارای n عنصر به صورت (x,x) (عنصرهای قطری) و $\frac{1}{2}(n^2-n)$ عنصر به‌صورت (x,y)، $(x\neq y)$ است، نتیجه می‌شود که شمارهٔ جفت‌های معین کننده یک بستگی‌دوتایی متقارن روی E برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$ بنابراین شمارهٔ بستگی‌های دوتایی متقارنی که می‌توان روی E تعریف کرد برابر است با شمارهٔ بخش‌های یک مجموعهٔ $\frac{n(n+1)}{2}$ عنصری یعنی $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

حل ۱۲- برای هر $a\in E$ داریم $aR'a$ زیرا aRa برقرار است (چون R بازتابی‌است)، پس R' بازتابی است. اگر $aR'b$ دراین‌صورت bRa و aRb پس $bR'a$ یعنی R' متقارن است. چنانچه $aR'b$ و $bR'c$ دراینصورت (aRb و bRa) و (bRc و cRb) اما R متعدی است پس $aRc \Longrightarrow$ (bRc و aRb) و $cRa \Longrightarrow$ (bRa و cRb) و در نتیجه $aR'c$ یعنی R' متعدی است.

حل ۱۴- بستگی بین x و y از E را برای $d(x,y)<\lambda$ با $xR_\lambda y$ نمایش می‌دهیم. دراینصورت داریم $xR_\lambda x$ زیرا $d(x,x)=0<\lambda$. همچنین:

$$xR_\lambda y \Longrightarrow yR_\lambda x$$

زیرا $d(x,y)=d(y,x)$. به علاوه اگر $xR_\lambda y$ و $yR_\lambda z$ خواهیم داشت $d(x,y)<\lambda$ و $d(y,z)<\lambda$ پس $\mathrm{Sup}[d(x,y)$ و $d(y,z)]<\lambda$ و از آنجا $d(x,z)<\lambda$ بنابراین $xR_\lambda z$ و درنتیجه بستگی R_λ یک بستگی هم‌ارزی روی E است. اگربرای $d(x,y)\leqslant\lambda$ قرار دهیم $xR'_\lambda y$ ، به روش مشابه‌می‌توان ثابت کرد که R'_λ نیز یک بستگی هم‌ارزی روی E است.

کلاس هم‌ارزی a برای R_λ عبارتست ازمجموعهٔ :

$$\mathbf{C}_a=\{x\,,\,x\in E \mid xR_\lambda a\}=\{x\,,\,x\in E \mid d(a\,,\,x)<\lambda\}$$

یعنی C_a عبارتست ازمجموعهٔ x هایی از E که برای آنها داریم $d(a,x)<\lambda$. مجموعهٔ C_a را **گوی باز** به مرکز a و به شعاع λ می‌نامند. همچنین کلاس هم‌ارزی a برای R'_λ عبارتست‌ازمجموعهٔ x هایی از E که برای آنها $d(a,x)\leqslant\lambda$ باشد این مجموعه را **گوی بسته** به مرکز a و به شعاع λ می‌گویند.

حل ۱۵- قرارمی‌دهیم $\varphi(x,y)=(X,Y)$. اگر φ سورژکتیو باشد برای‌هر $(X,Y)\in\mathbf{R}^2$ باید دست‌کم یک‌عنصر $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\varphi(x,y)=(X,Y)$ یعنی دستگاه $x=X$ و $xy-y^3=Y$ دست‌کم دارای یک جواب (x,y) باشد. اما این دستگاه هم‌ارز بامعادلهٔ درجهٔ سوم $y^3-Xy+Y=0$ است که همیشه دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی دارد. پس φ سورژکتیو است. اما φ انژکتیو نیست زیرا این معادلهٔ درجهٔ سوم می‌تواند بیش‌از یک ریشهٔ حقیقی داشته باشد (کافی است‌که $-4X^3+27Y^2\leqslant 0$ باشد).

حل ۱۶- الف ـ اگر A بخش دلخواهی‌از E باشد $\varphi(A)$ بخشی است از F زیرا $\varphi(A)=\{y\,,\,y\in F \mid \exists x\in A\,,\,\varphi(x)=y\}$. پس داریم :

$$\begin{aligned}
y\in\varphi(A\cup B) &\Longrightarrow (\exists x\in A\cup B : \varphi(x)=y)\\
&\Longrightarrow (\exists x\in A \text{ یا } \exists x\in B : \varphi(x)=y)\\
&\Longrightarrow [\varphi(x)\in\varphi(A) \text{ یا } \varphi(x)\in\varphi(B)]\\
&\Longrightarrow \varphi(x)\in\varphi(A)\cup\varphi(B)
\end{aligned}$$

بنابراین $\varphi(A\bigcup B) \subset \varphi(A)\bigcup\varphi(B)$.

به وارون می‌توان نوشت :

$$\begin{aligned} y \in \varphi(A)\bigcup\varphi(B) &\Longrightarrow [y \in \varphi(A) \text{ یا } y \in \varphi(B)] \\ &\Longrightarrow [\exists x_1 \in A \,|\, y=\varphi(x_1) \text{ یا } \exists x_2 \in B \,|\, y=\varphi(x_2)] \\ &\Longrightarrow [\exists x \in A\bigcup B \,|\, y=\varphi(x)] \\ &\Longrightarrow \varphi(x) \in \varphi(A\bigcup B) \end{aligned}$$

پس $\varphi(A)\bigcup\varphi(B) \subset \varphi(A\bigcup B)$ و از آنجا $\varphi(A\bigcup B)=\varphi(A)\bigcup\varphi(B)$.

ب ـ برای اثبات این قسمت داریم :

$$\begin{aligned} y \in \varphi(A\bigcap B) &\Longrightarrow [\exists x\,,\, x \in A \text{ و } x \in B \,|\, \varphi(x)=y] \\ &\Longrightarrow [\varphi(x) \in \varphi(A) \text{ و } \varphi(x) \in \varphi(B)] \\ &\Longrightarrow \varphi(x) \in \varphi(A)\bigcap\varphi(B) \end{aligned}$$

یعنی $\varphi(A\bigcap B) \subset \varphi(A)\bigcap\varphi(B)$. وارون این مطلب درحالتی که φ یک گسترش دلخواه باشد برقرار نیست. مثلاً" اگر در صفحه معمولی دو خط متقاطع δ و Δ را که با محور x ها همراستا نیستند در نظر بگیریم و مجموعه نقاط روی δ را با A ، مجموعه نقاط روی Δ را با B و گسترش «تصویرمتعامد روی محور x ها» را با φ نشان دهیم دراین صورت داریم (محور x ها) $=\varphi(B)=\varphi(A)$ پس :

$$\varphi(A)\bigcap\varphi(B) = (\text{محور } x \text{ ها})$$

درصورتیکه $\varphi(A\bigcap B)$ تنها دارای یک عنصر است و آن تصویر نقطهٔ برخورد δ و Δ روی محورx ها است. پس $\varphi(A\bigcap B) \underset{\neq}{\subset} \varphi(A)\bigcap\varphi(B)$

پ ـ اینک فرض می‌کنیم φ انژکتیوو y عنصری از $\varphi(A)\bigcap\varphi(B)$ باشد پس یک $x_1 \in A$ و یک $x_2 \in B$ وجود دارد به‌طوری که $\varphi(x_1)=y$ و $\varphi(x_2)=y$ پس $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$ و از آنجا $x_1=x_2=x$. چون $x_1 \in A$ و $x_2 \in B$ پس

$x \in A\cap B$ و درنتیجه $y=\varphi(x) \in \varphi(A\cap B)$ پس بطور خلاصه اگر φ انژکتیو باشدداریم $\varphi(A)\cap\varphi(B) \subset \varphi(A\cap B)$ وبا توجه به قسمت ب دراین حالت‌داریم :

$$\varphi(A\cap B)=\varphi(A)\cap\varphi(B)$$

حل ۲۲- بستگی هم‌ارزی وابسته به f عبارتست از بستگی R روی $\mathscr{P}(E)$ که به‌صورت زیر معین می‌شود :

$$XRY \iff f(X)=A\cap X=A\cap Y=f(Y)$$

دراینصورت کلاس هم‌ارزی یک‌عنصر X از $\mathscr{P}(E)$ ، که آن را با X' نمایش‌می‌دهیم، از همهٔ بخشهای E که مقطع آنها با A همان $A\cap X$ است ، تشکیل می‌گردد. آشکار است که داریم $f(\mathscr{P}(E))=\mathscr{P}(A)$. گسترش h مجموعهٔ $\mathscr{P}(E)/R$ در $\mathscr{P}(A)$ به طوری‌که $h(X')=f(X)$ باشد یک‌گسترش دوسویی است و تجزیه f به‌صورت $i\circ h\circ s$ در می‌آید که در آن s گسترش سورژکتیوکانونیک $\mathscr{P}(E)$ در $\mathscr{P}(E)/R$ و i گسترش انژکتیوکانونیک $\mathscr{P}(A)$ در $\mathscr{P}(E)$ است.

همچنین بستگی هم‌ارزی وابسته به g عبارتست‌از بستگی S روی $\mathscr{P}(E)$ که‌به‌صورت زیر معین می‌شود :

$$XSY \iff g(X)=A\cup X=A\cup Y=g(Y)$$

دراینصورت کلاس هم‌ارزی یک عنصر X از $\mathscr{P}(E)$ ، که آنرا با X'' نمایش‌می‌دهیم، از همهٔ بخشهای E کـه اجتماع آنها با A همان $A\cup X$ است، تشکیل می‌شود. آشکار است‌که $g(\mathscr{P}(E))$ مجموعهٔ بخشهایی از E است‌که شامل A می‌باشند. اگـر s' گسترش سورژکتیوکـانونیک $\mathscr{P}(E)$ روی $\mathscr{P}(E)/S$ و i' گسترش انژکتیوکانونیک $g(\mathscr{P}(E))$ در $\mathscr{P}(E)$ و h' گسترش $\mathscr{P}(E)/S$ در $g(\mathscr{P}(E))$ باشد به طوری‌که برای $X \in \mathscr{P}(E)$ داشته باشیم $h'(X'')=g(X)$ گسترش h' دوسویی است و تجزیهٔ g به‌صورت $i'\circ h'\circ s'$ است.

اگر Z و Z' دو عنصر از $g(\mathscr{P}(E))$ باشند به‌طوری‌که داشته باشیم :

$$\varphi(Z)=Z-A=Z'-A=\varphi(Z')$$

خواهیم داشت $(Z-A)\bigcup A=(Z'-A)\bigcup A$

و چون Z و Z' شامل A هستند پس $(Z-A)\bigcup A=Z$ و $(Z'-A)\bigcup A=Z'$ یعنی φ انژکتیو است. همچنین اگر Y عنصری از $\mathscr{P}(E-A)$ باشد داریم $Y\bigcup A\in g(\mathscr{P}(E))$ و $\varphi(Y\bigcup A)=Y$ یعنی φ سورژکتیو است. بنابراین φ دوسویی است. از اینجا نتیجه می‌شود که گسترش $\varphi\circ h'$ نیز یک گسترش دوسویی $\mathscr{P}(E)/S$ روی $\mathscr{P}(E-A)$ است.

حل ۲۶- فرض می‌کنیم E یک مجموعهٔ $2n$ عنصری باشد. می‌دانیم که شمارهٔ بخشهای n عنصری E برابر است با C^n_{2n}. اکنون شمارهٔ این بخشها را به روش دیگر حساب می‌کنیم. بدین منظور یک زیر مجموعهٔ n عنصری A از E درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم X_1 یک بخش ثابت p عنصری از A باشد $(p\leqslant n)$. دراینصورت شمارهٔ بخشهای n عنصری X از E به‌طوری‌که $X\bigcap A=X_1$ برابر است با C^{n-p}_n. زیرا برای بدست آوردن X باید به p عنصر X_1، $n-p$ عنصر دیگر از $E-A$ را افزود. اما شمارهٔ بخشهای p عنصری مجموعهٔ A برابر است با C^p_n (شمارهٔ روشهایی که می‌توان X_1 را در A انتخاب کرد). بنابراین شمارهٔ بخشهای n عنصری X از E به طوری‌که $X\bigcap A$ یک بخش p عنصری باشد، برابر است با $C^p_n\,C^{n-p}_n$.
از اینجا نتیجه می‌شود که شمارهٔ بخشهای n عنصری مجموعهٔ E عبارتست از:

$$\sum_{p=0}^{n} C^p_n \cdot C^{n-p}_n$$

اما می‌دانیم که $C^p_n=C^{n-p}_n$ پس

$$\sum_{p=0}^{n} (C^p_n)^2=C^n_{2n}$$

حل ۲۷- به‌طورکلی اگر $p!$ بر 2^n بخش پذیر باشد $(Q(p/2)!)\cdot 2^{Q(p/2)}$ نیز بر 2^n بخش‌پذیر است [$Q(p/2)$ عبارتست از خارج قسمت تقسیم p بر ۲]. زیرا سازه‌های زوج $p!$ عبارتند از 2×1، 2×2، 2×3، ...، $2\times Q(p/2)$

اکنون ازاین مطلب برای پیدا کردن بزرگترین شمار درست n به طوری که !۱۰۰۰ بر ۲^n بخش پذیر باشد استفاده می کنیم. داریم :

$$Q\left(\frac{۱۰۰۰}{۲}\right)=۵۰۰ \;,\; Q\left(\frac{۵۰۰}{۲}\right)=۲۵۰ \;,\; Q\left(\frac{۲۵۰}{۲}\right)=۱۲۵ \;,$$

$$Q\left(\frac{۱۲۵}{۲}\right)=۶۲ \quad Q\left(\frac{۶۲}{۲}\right)=۳۱ \;,\; Q\left(\frac{۳۱}{۲}\right)=۱۵ \;,\; Q\left(\frac{۱۵}{۲}\right)=۷ \;,$$

$$Q\left(\frac{۷}{۲}\right)=۳ \;,\; Q\left(\frac{۳}{۲}\right)=۱$$

پس اگر !۱۰۰۰ بر ۲^n بخش پذیر باشد :

$$۲^{۵۰۰}\times ۲^{۲۵۰}\times ۲^{۱۲۵}\times ۲^{۶۲}\times ۲^{۳۱}\times ۲^{۱۵}\times ۲^{۷}\times ۲^{۳}\times ۲^{۱}(۱!)$$

نیز بر ۲^n بخش پذیراست. بنابراین بزرگترین شمار درست n به‌طوری که !۱۰۰۰ بر ۲^n بخش پذیر باشد عبارتست از :

$$x=۵۰۰+۲۵۰+۱۲۵+۶۲+۳۱+۱۵+۷+۳+۱=۹۹۴$$

در نتیجه !۱۰۰۰ بر $۲^{۹۹۴}$ بخش پذیر است و بر $۲^{۹۹۵}$ بخش پذیر نیست.

برای پیدا کردن بزرگترین شمار درست n به طوری که !۱۰۰۰ بر ۳^n بخش پذیر باشد به روش مشابه عمل می کنیم :

$$Q\left(\frac{۱۰۰۰}{۳}\right)=۳۳۳ \;,\; Q\left(\frac{۳۳۳}{۳}\right)=۱۱۱$$

$$Q\left(\frac{۱۱۱}{۳}\right)=۳۷ \;,\; Q\left(\frac{۳۷}{۳}\right)=۱۲$$

$$Q\left(\frac{۱۲}{۳}\right)=۴ \;,\; Q\left(\frac{۴}{۳}\right)=۱$$

پس اگر $1000!$ بر 3^n بخش‌پذیر باشد $(1!)^1 3^1 \times 3^4 \times 3^{12} \times 3^{37} \times 3^{111} \times 3^{333}$ نیز بر 3^n بخش‌پذیر است. بنابراین خواهیم داشت :

$$n = 333 + 111 + 37 + 12 + 4 + 1 = 498$$

حل ۲۹- الف - در برابری $(x * y)(u * v) = (xu) * (yv)$ قرار می‌دهیم $x = v = e'$ و $y = u = e$ خواهیم داشت $(e' * e)(e * e') = (e'e) * (ee')$ اما e' عنصر بی‌اثر قانون $*$ است پس داریم $e' * e = e * e' = e$ و $e' * e' = e'$ همچنین e عنصر بی‌اثر قانون ضرب است پس $e'e = ee' = e'$ و $ee = e$ بنابراین برابری بالا به‌صورت $ee = e' * e'$ در می‌آید یعنی $e = e'$.

ب - برابری داده شده برای $y = u = e$ چنین نوشته می‌شود :

$$(x * e)(e * v) = (xe) * (ev)$$

و چون بنابر قسمت الف e عنصر بی‌اثر هردو قانون است پس $x * e = xe = x$ و $e * v = ev = v$ بنابراین برای هرعنصر $(x, v) \in X \times X$ داریم $xv = x * v$ یعنی قانون ضرب و قانون $*$ یکی هستند (پس $xy = x * y$).

پ - اکنون برابری داده شده را بااستفاده از قسمت ب چنین می‌نویسیم :

$$(xy)(uv) = (xu)(yv)$$

و این برابری برای $x = v = e$ و عنصرهای دلخواه u و y از X به صورت $yu = uy$ درمی‌آید. یعنی قانون ترکیب جابجایی است. برای اثبات انجمنی بودن قانون ترکیب ، در $(xy)(uv) = (xu)(yv)$ قرار می‌دهیم $u = e$ دراینصورت برای هرسه عنصر دلخواه x و y و v از X خواهیم داشت $(xy)v = x(yv)$.

حل ۳۰- الف - جابجایی بودن قانون $\top$ آشکار است زیرا :

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = \frac{b^3 + a^3}{b^2 + a^2}$$

اما قانون $\top$ انجمنی نیست زیرا $(a\top b)\top c \neq a\top(b\top c)$ همیشه برقرار نیست مثلاً برای $b=a=1$ و $c=0$ طرف اول برابر با $\frac{9}{5}$ و طرف دوم برابر با $\frac{427}{265}$ است

قانون $\top$ نسبت به ضرب معمولی $\mathbf{R}$ پخشی نیست زیرا داریم :

$$a\top(bc)=\frac{a^3+b^3c^3}{a^2+b^2c^2} \quad , \quad (a^2+b^2c^2 \neq 0)$$

و

$$(a\top b)(a\top c)=\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^3+c^3}{a^2+c^2}$$

و مانند بالا به آسانی دیده می‌شود که $(a\top b)(a\top c)$ همیشه با $a\top(bc)$ برابر نیست.

ضرب معمولی $\mathbf{R}$ نسبت به قانون $\top$ پخشی است یعنی داریم :

$$a(b\top c)=(ab)\top(ac)$$

زیرا :

$$a(b\top c)=a\,\frac{b^3+c^3}{b^2+c^2} \quad , \quad (b^2+c^2 \neq 0)$$

و :

$$(ab)\top(ac)=\frac{a^3b^3+a^3c^3}{a^2b^2+a^2c^2}=a\,\frac{b^3+c^3}{b^2+c^2} \quad , \quad (a^2(b^2+c^2)\neq 0)$$

به‌علاوه برای $b=c=0$ داریم $a(0\top 0)=a0=0$ و $(a0)\top(a0)=0\top 0=0$ یعنی $0=0$ و برای $a=0$ داریم $0(b\top c)=0=(0b)\top(0c)=0\top 0=0$.

ب ـ اگر قانون $\top$ دارای عنصر بی‌اثر e باشد باید برای هر $a\in\mathbf{R}$ داشته باشیم :

$$a\top e=\frac{a^3+e^3}{a^2+e^2}=a \quad , \quad a^2+e^2\neq 0$$

و یا $a^3+e^3=a^3+ae^2$ یعنی $e^3=ae^2$ و از آنجا $e=0$.

اگر a نسبت به $\top$ دارای وارون a' باشد باید داشته باشیم :

$$a\top a'=0=\frac{a^3+a'^3}{a^2+a'^2}$$

که ازآن برای $a \neq 0$ نتیجه می‌شود $a' = -a$ و چنانچه $a = 0$ باشد خواهیم‌داشت $a' = 0$ پس هرعنصر از $\mathbf{R}$ دارای وارون است. قانون $\top$ یک قانون ترکیب گروه نیست زیرا $\top$ انجمنی نیست.

حل ۳۱- جدول ترکیب مجموعهٔ E به صورت زیر است :

$\diagdown$ a / b	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۱	۴	۴	۱
۱	۱	۲	۰	۰	۲
۲	۴	۰	۳	۳	۰
۳	۴	۰	۳	۳	۰
۴	۱	۲	۰	۰	۲

بنابراین قانون $\top$ یک قانون ترکیب داخلی روی E است. به‌علاوه $\top$ انجمنی و جابجایی است. قانون $\top$ دارای عنصر بی اثر نیست.

حل ۳۲- گسترش $x \to shx$ مجموعهٔ $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ را با φ نمایش می‌دهیم. گسترش φ دوسویی است و داریم :

$$\varphi(a)\top\varphi(b) = sha\sqrt{1+sh^2b} + shb\sqrt{1+sh^2a}$$

$$= shachb + chashb = sh(a+b)$$

یعنی $\varphi(a)\top\varphi(b) = \varphi(a+b)$ پس φ یک ایزومرفیسم $(\mathbf{R}, \top)$ روی $(\mathbf{R}, +)$ است بنابراین مجموعهٔ $(\mathbf{R}, \top)$ یک‌گروه جابجابی است (زیرا $(\mathbf{R}, +)$ یک‌گروه جابجایی است).

حل ۳۳- به آسانی ثابت می‌شود که قانون $*$ انجمنی و جابجایی است. اگرقانون

* دارای عنصر بی‌اثر e باشد باید برای هر $x \in \mathbf{R}$ داشته باشیم :

$$x * e = x + e - ex = x \quad \text{و یا} \quad e(1-x)=0$$

پس $e=0$ و دراینصورت داریم $x * 0 = 0 * x = x$. یعنی 0 عنصر بی‌اثر * است.
چنانچه برای این قانون x' وارون x باشد باید داشته باشیم :

$$x * x' = x + x' - xx' = 0$$

اما این برابری برای $x=1$ برقرارنیست‌و برای $x \neq 1$ داریم $x' = \frac{x}{1-x}$ پس همهٔ عنصرهای $\mathbf{R}$ دارای وارون هستند به جز عنصر ۱ بنابراین $\mathbf{R}$ با قانون * تشکیل گروه نمی‌دهد.

اما مجموعهٔ $\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \{1\}$ با قانون * تشکیل گروه می‌دهد. چون اولاً * یک قانون ترکیب داخلی روی $\mathbf{R}'$ است، زیرا اگر $x \neq 1$ و $y \neq 1$ باشد داریم $(x-1)(y-1) \neq 0$ و یا $x+y-xy \neq 1$ یعنی $x * y \neq 1$ به‌علاوه $(\mathbf{R}', *)$ همهٔ ویژگیهای $(\mathbf{R}, *)$ را دارد وهمهٔ عنصرهای آن وارون پذیرند بنابراین $(\mathbf{R}', *)$ یک گروه است و این گروه جابجایی نیز هست.

برای محاسبهٔ $x^{(n)}$ از برابری $x * y = (1-x)(y-1) + 1$ استفاده می‌کنیم. داریم :

$$x^{(2)} = x * x = (1-x)(x-1) + 1 = 1 - (1-x)^2$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} * x = [1 - (1 - (1-x)^2)](x-1) + 1 = 1 - (1-x)^3$$

و به روش بازگشت خواهیم داشت $x^{(n)} = 1 - (1-x)^n$.

حل ۳۵- الف - مجموعهٔ E باقانون + تشکیل گروه‌نمی‌دهد. زیرا باقانون +، که عنصربی‌اثرآن a است، b دارای عنصروارون نیست (یعنی عنصری مانند x از E وجود ندارد به‌طوری‌که $b+x=x+b=a$ باشد). مجموعهٔ E باقانون ضرب $\cdot$ نیز تشکیل گروه نمی‌دهد. زیرا با این‌قانون، که عنصر بی اثر آن b است، a دارای‌عنصر وارون نیست (یعنی عنصری مانند x از E وجود ندارد به طوری‌که $a \cdot x = x \cdot a = b$ باشد).

ب ـ اگر (x , y) عنصر دلخواهی از $E^۲$ باشد، هرعنصر φ از F با دردست داشتن $\varphi(x , y)$ از E کاملاً معین است. اما $\varphi(x , y)$ یکی‌از چهار عبارت زیر است:

$$\varphi(a , a) \ , \ \varphi(a , b) \ , \ \varphi(b , a) \ , \ \varphi(b , b) \qquad (۱)$$

و چون هریک از عبارتهای بالا تنها و تنها می‌تواند برابر با دو مقدار a یا b باشد پس F دارای $۲^۴ = ۱۶$ عنصر است(شمارهٔ گسترشهای یک مجموعهٔ چهار عنصری در یک‌مجموعهٔ ۲ عنصری).

به طوری که دیده شد هرعنصر φ از F به کمک چهار عبارت (۱) کاملاً معین می‌گردد و اگر داشته باشیم :

$$\varphi(x , y) = \alpha_0 \cdot f(x) \cdot f(y) + \alpha_1 \cdot f(x) \cdot y + \alpha_2 \cdot x \cdot f(y) + \alpha_3 \cdot x \cdot y$$

خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}\varphi(a , a) &= \alpha_0 \cdot b \cdot b + \alpha_1 \cdot b \cdot a + \alpha_2 \cdot a \cdot b + \alpha_3 \cdot a \cdot a \\ &= \alpha_0 \cdot b + \alpha_1 \cdot a + \alpha_2 \cdot a + \alpha_3 \cdot a = \alpha_0 \cdot b + a + a + a \\ &= \alpha_0 \cdot b = \alpha_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(a , b) &= \alpha_0 \cdot b \cdot a + \alpha_1 \cdot b \cdot b + \alpha_2 \cdot a \cdot a + \alpha_3 \cdot a \cdot b \\ &= \alpha_1 \cdot b = \alpha_1\end{aligned}$$

همچنین :

$$\varphi(b , a) = \alpha_2 \quad , \quad \varphi(b , b) = \alpha_3$$

حل ۴۲ـ فرض می کنیم G یک گروه ضربی چهارعنصری باشد (برای‌آسانی قانون ترکیب گروه را ضرب گرفته‌ایم). اگر e عنصر بی‌اثر G و a_1 ، a_2 و a_3 عنصرهای دیگر آن باشند ، می‌دانیم که رتبهٔ هریک از عنصرهای a_1 ، a_2 و a_3 بخشیابی از ۴ است و رتبهٔ هیچ یک ازاین سه عنصر برابر با یک نیست (زیرا عنصر بی‌اثر یک گروه تنها دارای رتبهٔ یک است). پس دو حالت پیش می‌آید.

الف ـ رتبهٔ یکی از عنصرهای a_1 ، a_2 یا a_3 برابر با ۴ است : فرض می کنیم

مثلاً" رتبهٔ a_1 چهار باشد. دراینصورت a_1 گروه G را پدید می‌آورد (چنین گروهی را **گروه دوری** می‌گویند) و G با گروه جمعی $Z/4Z$ ایزومرف است.

ب ـ رتبهٔ سه عنصر a_1 ، a_2 و a_3 برابر با ۲ است : دراینصورت داریم :

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = e$$

و برای G تنها و تنها جدول ترکیب زیر را خواهم داشت :

	e	a_1	a_2	a_3
e	e	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	e	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	e	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	e

زیرا ترکیب a_i و a_j برای $i \neq j$ ، عنصر a_k است به‌طوری‌که $k \neq i$ و $k \neq j$ باشد. جدول بالا یک قانون ترکیب انجمنی و جابجایی روی G معین می‌کند. وانگهی اگر عنصرهای گروه جمعی $H = Z/2Z$ را با $\bar{0}$ و $\bar{1}$ نمایش دهیم باقراردادن:

$$\varphi(e) = (\bar{0}, \bar{0}) \ , \ \varphi(a_1) = (\bar{0}, \bar{1}) \ , \ \varphi(a_2) = (\bar{1}, \bar{0}) \ , \ \varphi(a_3) = (\bar{1}, \bar{1})$$

یک گسترش دوسویی φ گروه G روی مجموعهٔ حاصلضرب $H \times H$ خواهیم داشت. به علاوه φ یک هومورفیسم G روی گروه جمعی $H \times H$ نیز هست (مثلاً داریم $(\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_3) = (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1}) + (\bar{1}, \bar{0}) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$.

پس φ یک ایزومرفیسم G روی $H \times H$ است. بنابراین همهٔ گروه‌های مرتبهٔ ۴ جابجایی می‌باشند. این گروه‌ها :

- یا دوری مرتبهٔ ۴ هستند و در نتیجه با گروه جمعی $Z/4Z$ ایزومرفند.
- یا با گروه جمعی $(Z/2Z)\times(Z/2Z)$ که گروه **کلین** نامیده می‌شود، ایزومرف می‌باشند.

حل ۴۳- آشکار است که باید $n \geqslant 2$ باشد وگرنه خواهیم داشت:

$$H_1 = H_2 = \{ e \}$$

و چون داریم $H_1 \cap H_2 = \{ e \}$ پس مجموعهٔ $H_1 \cup H_2$ دارای $2n-1$ عنصر است. بنابراین $G = H_1 \cup H_2 \cup \{ a_3 \}$ که در آن $a_3 \in G$ و $a_3 \notin H_1$ و $a_3 \notin H_2$. به‌علاوه اگر a_3^{-1} وارون a_3 باشد داریم $a_3^{-1} \notin H_1 \cup H_2$. زیرا چنانچه:

$$a_3^{-1} \in H_1 \cup H_2$$

باشد باید داشته باشیم $a_3 \in H_1 \cup H_2$ که چنین نیست. پس $a_3 = a_3^{-1}$.

اکنون فرض می‌کنیم $n > 2$ پس $H_1 \cup H_2$ دست‌کم دارای سه عنصر مانند a_1، a_1' و a_2 است به‌قسمی که $a_1 \neq e$، $a_1' \neq e$، $a_1' \neq a_1$ و $a_2 \neq e$ دراینصورت اگر عنصرهای a_1 و a_1' متعلق به H_1 و عنصر a_2 متعلق به H_2 باشند خواهیم داشت $a_1 a_2 = a_3$. زیرا اگر $a_1 a_2 \in H_1$ باشد باید $a_2 \in H_1$ وچنانچه $a_1 a_2 \in H_1$ باشد باید $a_1 \in H_2$ باشد که چنین نیست. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $a_1' a_2 = a_3$ و در نتیجه $a_1 a_2 = a_1' a_2$ و از آنجا $a_1 = a_1'$ که مخالف با فرض است پس داریم $n = 2$ یعنی مرتبهٔ گروه G چهار است.

اگر قرار دهیم $H_1 = \{e , a_1\}$ و $H_2 = \{e , a_2\}$ خواهیم داشت:

$$G = \{e , a_1 , a_2 , a_3\} \ , \ a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = e$$

و به طوری که در حل مسألهٔ ۴۲ دیده شد، دراین شرایط G یک گروه جابجایی است که با گروه جمعی $(Z/2Z)\times(Z/2Z)$ ایزومرف می‌باشد. جدول ترکیب این گروه همان است که درحل مسأله پیش‌دیده شد. از اینجا نتیجه می‌شود که زیرگروه‌های G عبارتند از H_1، H_2 و $H_3 = \{e , a_3\}$.

حل ۴۴- چون a، b و ab دارای رتبهٔ ۲ هستند داریم $a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$

(e عنصر بی‌اثر گروه است). پس $a=a^{-1}$ ، $b=b^{-1}$ و $ab=(ab)^{-1}$ ودر نتیجه $ab=b^{-1}a^{-1}=ba$ یعنی a و b گردش پذیرند. آشکار است که زیرگروه پدید آمده بوسیلهٔ a از G برزیرگروه پدیدآمده بوسیلهٔ a^{-1} منطبق است. بنابراین رتبهٔ a و a^{-1} یکی است.

حل ۴۵- فرض می‌کنیم e عنصر بی‌اثر G و e' عنصر بی‌اثر G' باشد. دراینصورت داریم $f(e)=g(e)=e'$ پس $e\in H$.

به‌طورکلی اگر A بخشی از یک گروه G باشد، **برای اینکه A یك زیر گروه از G تشکیل دهد باید و بسنده است که برای هردو عنصر دلخواه x و y از A عنصر xy^{-1} متعلق به A باشد.** پس فرض می‌کنیم x و y متعلق به H باشند، داریم $f(x)=g(x)$ و $f(y)=g(y)$ و چون f و g هومرفیسم هستند داریم $f(y^{-1})=(f(y))^{-1}$ و $g(y^{-1})=(g(y))^{-1}$ (زیرا مثلاً برای f داریم $(f(yy^{-1})=f(e)=f(y)f(y^{-1})$ وازآنجا $f(y^{-1})=(f(y))^{-1}=(g(y))^{-1}=g(y^{-1})$ و در نتیجه :

$$f(xy^{-1})=f(x)f(y^{-1})=g(x)g(y^{-1})=g(xy^{-1})$$

بنابراین xy^{-1} متعلق است به H پس H یک زیرگروه از **G** است.

اگر $x\in H$ باشد $h(x)\in H$ پس $f(h(x))=g(h(x))$ یعنی $f\circ h=g\circ h$.

چنانچه x'' عنصر دلخواهی از G'' باشد چون داریم $f\circ h'=g\circ h'$ پس $f(h'(x''))=g(h'(x''))$ یعنی $h'(x'')\in H$.

اکنون گسترش $\varphi : G''\to H$ را چنین تعریف می‌کنیم :

$$\forall x''\in G'' \quad , \quad \varphi(x'')=h'(x'')$$

دراینصورت φ یک هومرفیسم است و به علاوه برای هرعنصر x'' از G'' داریم :

$$h(\varphi(x''))=\varphi(x'')=h'(x'')$$

یعنی $h\circ\varphi=h'$. اگر φ' یک هومرفیسم دیگر G'' در H باشد به‌طوری‌که $h\circ\varphi'=h'$ ، برای هرعنصر x'' از G'' خواهیم داشت :

$$h(\varphi'(x''))=h(\varphi(x''))=h'(x'')$$

و از آنجا با توجه به‌اینکه h انژکتیو است $\varphi'(x'')=\varphi(x'')$ یعنی $\varphi=\varphi'$.

حل ۴۶- فرض می‌کنیم $s=\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ عنصر دلخواهی از S باشد ($(\alpha\ \beta\ \gamma)$ تبدیلی از $(a\ b\ c)$ است). چون‌شمارهٔ تبدیلهای‌یک مجموعهٔ سه‌عنصری برابر است با ۶ = !۳ پس S دارای ۶ عنصر زیر است :

$$s_0=I=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix},\quad s_1=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix},\quad s_2=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

$$s_3=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix},\quad s_4=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix},\quad s_5=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

اگر $s=\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ و $s'=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ دوعنصر دلخواه از S باشند ($(a'\ b'\ c')$ تبدیلی از $(a\ b\ c)$ است) ترکیب s و s' را به صورت زیر معین می‌کنیم :

$$s'\circ s=\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

و یا :

$$(s'\circ s)(a)=s'(s(a))=s'(\alpha)=a',\quad (s'\circ s)(b)=s'(s(b))=s'(\beta)=b',$$
$$(s'\circ s)(c)=s'(s(c))=s'(\gamma)=c'$$

مثلاً برای بدست آوردن $s_2\circ s_3$ چنین عمل می‌کنیم :

$$s_3 \circ s_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = s_5$$

اکنون اگر به روش بالا ترکیبهای $s_i \circ s_j$ را بدست آوریم جدول ترکیب زیر را برای S خواهیم داشت :

	I	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
I	I	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	s_1	I	s_4	s_5	s_2	s_3
s_2	s_2	s_3	I	s_1	s_5	s_4
s_3	s_3	s_2	s_5	s_4	I	s_1
s_4	s_4	s_5	s_1	I	s_3	s_2
s_5	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	I

از روی این جدول دیده می‌شود که I عنصر بی اثر است ، عنصرهای s_3 و s_4 وارون یکدیگرند و وارون عنصرهای s_1 ، s_2 و s_5 خود این عنصرها هستند. پس S یک گروه است که جابجایی نیست. به‌آسانی دیده می‌شود که زیرگروه‌های S عبارتنداز $\{I\}$ ، $\{I, s_1\}$ ، $\{I, s_2\}$ ، $\{I, s_5\}$ و $\{I, s_3, s_4\}$.

حل ٤٧- با توجه به حل مسألهٔ ٤٦ که در بالا دیده شد ، چنین داریم :

$$S_1 \circ S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ & ٥ \\ ۳ & ٥ & ٤ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۳ & ٥ & ٤ & ۱ & ۲ \\ ٤ & ۳ & ۱ & ۲ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ & ٥ \\ ٤ & ۳ & ۱ & ۲ & ٥ \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب :

$$S_{۲} \circ S_{۱}=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ & ٥ \\ ٥ & ۲ & ۱ & ۳ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$S_{۱}^{-۱}=\begin{pmatrix} ۲ & ٥ & ٤ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ & ٥ \\ ٤ & ۱ & ٥ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}$$

$$S_{۲}^{-۱}=\begin{pmatrix} ۳ & ٥ & ٤ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ & ٥ \\ ٤ & ٥ & ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}$$

$$S_{۱}^{-۱} \circ S_{۲}^{-۱}=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ & ٥ \\ ۳ & ۲ & ٤ & ٥ & ۱ \end{pmatrix}=(S_{۲} \circ S_{۱})^{-۱}$$

حل ٤٨- جدول ضرب مجموعهٔ $Z/٥\mathbf{Z}$ چنین است :

	$\overline{۰}$	$\overline{۱}$	$\overline{۲}$	$\overline{۳}$	$\overline{٤}$
$\overline{۰}$	$\overline{۰}$	$\overline{۰}$	$\overline{۰}$	$\overline{۰}$	$\overline{۰}$
$\overline{۱}$	$\overline{۰}$	$\overline{۱}$	$\overline{۲}$	$\overline{۳}$	$\overline{٤}$
$\overline{۲}$	$\overline{۰}$	$\overline{۲}$	$\overline{٤}$	$\overline{۱}$	$\overline{۳}$
$\overline{۳}$	$\overline{۰}$	$\overline{۳}$	$\overline{۱}$	$\overline{٤}$	$\overline{۲}$
$\overline{٤}$	$\overline{۰}$	$\overline{٤}$	$\overline{۳}$	$\overline{۲}$	$\overline{۱}$

بااستفاده از این جدول جواب معادله‌ها و دستگاه داده شده را پیدا می‌کنیم :

$$\bar{۳}x+\bar{۴}=\bar{۰} \Longrightarrow \bar{۳}x=-\bar{۴}=\bar{۱} \Longrightarrow x=\frac{\bar{۱}}{\bar{۳}}=\bar{۲}$$

$$\bar{۲}x+\bar{۱}=\bar{۰} \Longrightarrow \bar{۲}x=-\bar{۱}=\bar{۴} \Longrightarrow x=\bar{۲}$$

و : $\bar{۳}x+\bar{۴}y=\bar{۱} \Longrightarrow x=\frac{\bar{۱}}{\bar{۳}}-\frac{\bar{۴}}{\bar{۳}}y=\bar{۲}-\bar{۳}y$

پس : $\bar{۲}x+\bar{۳}y=\bar{۲}=\bar{۲}(\bar{۲}-\bar{۳}y)+\bar{۳}y=\bar{۴}-\bar{۳}y$

و یا $\bar{۳}y=\bar{۲}$ پس $y=\bar{۴}$ و از آنجا $x=\bar{۲}-\bar{۲}=\bar{۰}$

داریم $f(\bar{۰})=\bar{۱}$ ، $f(\bar{۱})=\bar{۳}$ ، $f(\bar{۲})=\bar{۲}$ ، $f(\bar{۳})=\bar{۳}$ و $f(\bar{۴})=\bar{۱}$ ازاینجا نتیجه می‌شود که معادله $f(x)=\bar{۰}$ در هیأت $Z/۵Z$ جواب ندارد. به‌طور کلی اگر K یک هیأت باشد و ریشه‌های هرمعادلهٔ جبری با ضرایب متعلق به K ، متعلق به K باشند گویند که هیأت K **به طور جبری بسته** است. پس با توجه به آنچه که دیده شد هیأت $Z/۵Z$ به طور جبری بسته نیست.

حل ۵۱- الف ـ چون داریم $x^۲=x$ پس :

$$x^۲+x^۲+x^۲+x^۲=x+x \quad \text{و یا} \quad (x+x)^۲=x+x$$

که از آن نتیجه می‌شود $x+x=۰$ (یعنی $x=(-x)$).

ب ـ همچنین داریم $(x+y)^۲=x+y$ و یا $x^۲+xy+yx+y^۲=x+y$ یعنی $x+y+xy+yx=x+y$ پس $x+y+yx=۰$ و یا $xy=(-yx)=yx$

پ ـ برای بستگی $xRy \Longleftrightarrow xy=x$ ویژگیهای زیر را داریم :

ـ xRx : زیرا برای هرعنصر x متعلق‌به A ، $x^۲=x$ پس R بازتابی است.

ـ از xRy و yRx نتیجه می‌شود $x=y$. زیرا دراینصورت $xy=x$ و $yx=y$ و با توجه به قسمت ب $x=y$. پس R نامتقارن است.

- از xRy و yRz نتیجه می‌شود xRz زیرا دراینصورت $xy=x$ و $yz=y$ که از ضرب آنها خواهیم داشت $(xy)(yz)=xy=x$ و از طرف دیگر :

$$(xy)(yz)=xy^2z=xyz=(xy)z=xz$$

پس $xz=x$ یعنی xRz بنابراین R متعدی است. از اینجا نتیجه می‌شود که R یک بستگی ترتیبی است.

ت - داریم
$$xy(x+y)=xyx+xy^2=(yx)x+xy$$
$$=yx^2+xy=yx+xy=0$$

اکنون اگر عنصری مانند x متعلق به A وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x\neq 0$ دراینصورت و برای هر y متعلق به A داریم $xy(x+y)=0$ پس یا $y=0$ $(x,y)\in A^2$ و یا $x=y$ بنابراین $A=\{0, x\}$. و اگر عنصری مانند x متعلق به A وجود نداشته باشد به طوری‌که $x\neq 0$ دراینصورت داریم $A=\{0\}$.

حل ۵۲- آشکار است که دو قانون ترکیب $\oplus$ و $*$ داخلی و جابجایی هستند. برای اثبات ویژگی انجمنی $\oplus$ از برابریهای $\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B$ و $\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B$ و ویژگیهای پخشی اجتماع و مقطع نسبت به یکدیگر استفاده می‌کنیم، خواهیم داشت :

$$A\oplus(B\oplus C)=[A\cap\complement(B\oplus C)]\cup[\complement A\cap(B\oplus C)]$$
$$=\{A\cap\complement[(B\cap\complement C)\cup(\complement B\cap C)]\}\cup\{\complement A\cap[(B\cap\complement C)\cup(\complement B\cap C)]\}=$$
$$=\{A\cap[\complement(B\cap\complement C)\cap\complement(\complement B\cap C)]\}\cup[(\complement A\cap B\cap\complement C)\cup(\complement A\cap\complement B\cap C)]$$
$$=\{A\cap[(\complement B\cup C)\cap(B\cup\complement C)]\}\cup D$$
$$=(A\cap\{[\complement B\cap(B\cup\complement C)]\cup[C\cap(B\cup\complement C)]\})\cup D$$
$$=(A\cap\{[(\complement B\cap B)\cup(\complement B\cap\complement C)]\cup[(C\cap B)\cup(C\cap\complement C)]\})\cup D$$
$$=(A\cap\{[\varnothing\cup(\complement B\cap\complement C)]\cup[(C\cap B)\cup\varnothing]\})\cup D$$
$$=\{A\cap[(\complement B\cap\complement C)\cup(C\cap B)]\}\cup D$$
$$=[(A\cap\complement B\cap\complement C)\cup(A\cap C\cap B)]\cup D$$

که در آنها قرار داده‌ایم $D=(\complement A\cap B\cap \complement C)\cup(\complement A\cap \complement B\cap C)$ برای محاسبهٔ $(A \oplus B) \oplus C$ با توجه به اینکه $\oplus$ جابجایی است و در نتیجه داریم :

$$(A \oplus B) \oplus C = C \oplus (A \oplus B)$$

کافی است عبارت $C \oplus (A \oplus B)$ را حساب کنیم. اما این عبارت از $A \oplus (B \oplus C)$ با تبدیل دوری روی A ، B و C بدست می‌آید. و چون طرف راست برابری :

$$A \oplus (B \oplus C) = (A\cap \complement B\cap \complement C)\cup(A\cap B\cap C)\cup (\complement A\cap B\cap \complement C)\cup(\complement A\cap \complement B\cap C)$$

که دربالا محاسبه‌شدنسبت به A ، B و C متقارن‌است و با تبدیل دوری روی A ، B و C تغییر نمی‌کند پس خواهیم داشت :

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

اگر قانون $\oplus$ دارای عنصر بی‌اثر X باشد برای هربخش A از E باید داشته باشیم :

$$A \oplus X = (A\cap \complement X)\cup(\complement A\cap X) = A$$

اما برای $A=E$ برابری بالا چنین نوشته می‌شود :

$$E \oplus X = (E\cap \complement X)\cup(\complement E\cap X) = (\complement X)\cup \varnothing = \complement X = E$$

پس باید $X=\varnothing$ باشد و دراینصورت برای هربخش A داریم :

$$A \oplus \varnothing = (A\cap E)\cup(\complement A\cap \varnothing) = A\cup\varnothing = A$$

قرینهٔ A نسبت به $\oplus$ خود A است زیرا :

$$A \oplus A = (A\cap \complement A)\cup(\complement A\cap A) = \varnothing\cup\varnothing = \varnothing$$

بنابراین $\mathscr{P}(E)$ با قانون $\oplus$ یک گروه جمعی جابجایی است.

ویژگی انجمنی قانون $*$ آشکار است. برای ویژگی پخشی $*$ نسبت به $\oplus$ داریم :

$$A * (B \oplus C) = A \cap [(B \cap \complement C) \cup (C \cap \complement B)]$$
$$= (A \cap B \cap \complement C) \cup (A \cap \complement B \cap C)$$

و :

$$(A * B) \oplus (A * C) = [(A \cap B) \cap \complement(A \cap C)] \cup \{[\complement(A \cap B)] \cap (A \cap C)\}$$
$$= [(A \cap B) \cap (\complement A \cup \complement C)] \cup [(\complement A \cup \complement B) \cap (A \cap C)]$$
$$= (A \cap B \cap \complement A) \cup (A \cap B \cap \complement C) \cup (\complement A \cap A \cap C) \cup (\complement B \cap A \cap C)$$
$$= \varnothing \cup (A \cap B \cap \complement C) \cup \varnothing \cup (\complement B \cap A \cap C)$$
$$= (A \cap B \cap \complement C) \cup (\complement B \cap A \cap C)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $A * (B \oplus C) = (A * B) \oplus (A * C)$ یعنی $*$ نسبت به $\oplus$ پخشی است. پس مجموعهٔ $\mathscr{P}(E)$ با دو قانون $*$ و $\oplus$ یک حلقهٔ جابجایی است و به‌علاوه این حلقه یکه‌دار است ، زیرا برای هربخش دلخواه A از E داریم :

$$A * E = A \cap E = A$$

یعنی E عنصریکهٔ قانون $*$ است. حلقهٔ $\mathscr{P}(E)$ انتگر نیست ، زیرا اگر A و B دو بخش متمایزازمجموعهٔ E باشند داریم $A * B = A \cap B = \varnothing$ (پس اگرمجموعهٔ E بیش‌از یک‌عنصر داشته باشد حلقهٔ $\mathscr{P}(E)$ انتگر نیست ، چون دراینصورت همیشه دو بخش $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$ وجود دارد به‌طوری‌که $A \cap B = \varnothing$ باشد). بنابراین $\mathscr{P}(E)$ نمی‌تواند یک هیأت باشد چون $\mathscr{P}(E)$ حلقهٔ انتگر نیست.

از برابری $A \oplus A = \varnothing$ که دربالابدست‌آوردیم نتیجه می‌شود که حلقهٔ $\mathscr{P}(E)$ دارای مفسر ۲ می‌باشد.

حل ۵۳- اگر $a \in A$ و $a \neq ०$ باشد ، چون‌بنابه فرض معادلهٔ $ax = b$ دست‌کم دارای یک جواب است پس عنصری مانند e متعلق به A وجود دارد به‌طوری‌که $ae = a$. همچنین‌اگر c عنصری از A باشد چون بنابه فرض معادلهٔ $ya = b$ دست‌کم دارای یک جواب است پس عنصری مانند z متعلق به A وجود دارد به‌طوری‌که

$za=c$. بنابراین خواهیم داشت $ce=(za)e=z(ae)=za=c$. به همین‌ترتیب ازبرابری‌های $e'a=a$ و $au=c$ (این برابری‌هابنابه فرض وجود دارند) که درآنجا c عنصر دلخواهی از A است نتیجه می‌شود $e'c=e'(au)=(e'a)u=au=c$. اما از دو برابری $ce=c$ و $e'c=c$ خواهیم داشت $e'e=e'$ و $e'e=e$ پس $e=e'$ و از آنجا $ce=ec=c$ یعنی e عنصریکهٔ حلقهٔ A است و یا به عبارت دیگر A یکه‌دار است. به‌علاوه برای $a\neq ۰$ دو عنصر a' و a'' متعلق به A وجود دارند به‌طوری‌که $aa'=e$ و $a''a=e$. دراینصورت داریم:

$$a''aa'=a''(aa')=a''e=a'' \quad \text{و} \quad a''aa'=(a''a)a'=ea'=a'$$

پس $a'=a''$ یعنی هرعنصر $a\neq ۰$ متعلق به A دارای وارون است. بدین‌ترتیب A یک هیأت است. و چون وارون a یکتاست، پس معادلهٔ $ax=b$ دارای جواب یکتای $x=a^{-۱}b$ و معادلهٔ $ya=b$ دارای جواب یکتای $y=ba^{-۱}$ می‌باشد (این مطلب از هیأت بودن A نیز نتیجه می‌شود).

حل ۵۴- قرار می‌دهیم $K=\{a+b\sqrt{n}\}$. برای هردو عنصر $a+b\sqrt{n}$ و $a'+b'\sqrt{n}$ از K داریم:

$$a+b\sqrt{n}+a'+b'\sqrt{n}=[(a+a')+(b+b')\sqrt{n}\,]\in K$$

$$(a+b\sqrt{n}\,)(a'+b'\sqrt{n}\,)=[aa'+nbb'+(ab'+a'b)\sqrt{n}\,]\in K$$

آشکار است‌که K با قانون جمع یک‌گروه جابجایی است‌که عنصر بی‌اثر آن ۰ و قرینهٔ عنصر $a+b\sqrt{n}$ عنصر $-a-b\sqrt{n}$ است.

همان طوری‌که دیده شد قانون ضرب یک قانون ترکیب داخلی روی K است. به‌علاوه قانون ضرب انجمنی‌است و نسبت به جمع پخشی است و عنصریکهٔ آن ۱ می‌باشد $(a=۱\,,\,b=۰)$. اگر وارون عنصر $a+b\sqrt{n}$ را $a'+b'\sqrt{n}$ بگیریم خواهیم داشت $(a+b\sqrt{n}\,)(a'+b'\sqrt{n}\,)=۱$ و یا $aa'+nbb'+(ab'+a'b)\sqrt{n}=۱$ که از آن نتیجه می‌شود $aa'+nbb'=۱$ و $ab'+a'b=۰$. این دو معادله‌که

نسبت به a' و b' خطی هستند هنگامی دارای جواب یکتا می‌باشند که $a^2 - nb^2 \neq 0$ یعنی دستگاه کرامر باشد. اما شرط $n \neq \frac{a^2}{b^2}$ با فرض $b \neq 0$ برای n برقرار است زیرا n شمار درستی است که مربع هیچ شمار درستی نیست. دراینصورت داریم :

$$a' = \frac{a}{a^2 - nb^2} \quad \text{و} \quad b' = \frac{-b}{a^2 - nb^2}$$

اگر $b = 0$ باشد دو معادلهٔ $aa' = 1$ و $ab' = 0$ را برای تعیین a' و b' خواهیم داشت، که چون باید $a \neq 0$ باشد (زیرا 0 عنصر بی‌اثر قانون جمع K است) پس خواهیم داشت $b' = 0$ و $a' = \frac{1}{a}$. بدین ترتیب هرعنصر از K که مخالف با 0 باشد وارون پذیر است. بنابراین K یک هیأت است. این هیأت جابجایی نیز می‌باشد.

حل ۵۶- بطور کلی یک قانون ترکیب داخلی روی یک مجموعه E عبارتست از یک گسترش $E \times E$ در E . پس شمارهٔ قانونهای ترکیب داخلی روی مجموعهٔ E عبارتست از شمارهٔ همه گسترش‌های مجموعهٔ $E \times E$ در E. به علاوه بنابر مسأله ۲۴ شمارهٔ گسترش‌های یک مجموعهٔ n عنصری در یک مجموعهٔ m عنصری برابر است با m^n. پس دراین‌جا چون E سه عنصر دارد مجموعهٔ $E \times E$ دارای نه عنصر است و بنابراین شمارهٔ قانونهای ترکیب داخلی روی E یعنی شمارهٔ عنصرهای H برابر است با 3^9.

هریک از این قانون‌ها را می‌توان به کمک یک جدول سه سطری و سه ستونی نمایش داد و آشکاراست که برای هریک از آنها یکی از سه عنصر a ، b و c عنصر بی‌اثر است.

از میان همهٔ قانونهایی مانند $\top$ که برای آنها a عنصر بی‌اثر است تنها یکی هست که برای آن $(E , \top)$ یک گروه آبلی است. زیرا چون در یک گروه دستور ساده کردن از دو طرف برقرار است، در جدول گروه هرعنصر یک بار و تنها یک بار درهرسطر و درهرستون نوشته می‌شود. بدین ترتیب برای E با عنصر بی اثر a تنها جدول ترکیب زیر را داریم :

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

اکنون گسترش φ مجموعهٔ $(E , \top)$ را درگروه جمعی $\mathbf{Z}/۳\mathbf{Z}=\{\bar{۰} , \bar{۱} , \bar{۲}\}$ به صورت زیر درنظر می‌گیریم :

$$\varphi : \quad a \to \bar{۰} \quad , \quad b \to \bar{۱} \quad , \quad c \to \bar{۲}$$

چون φ یک ایزومرفیسم است پس $(E , \top)$ یک گروه جابجایی است.

اینک فرض می‌کنیم b برای قانون $\perp$ عنصر بی‌اثر باشد (عنصر بی‌اثر قانون $\perp$ باید متمایز از عنصر بی‌اثر قانون $\top$ باشد). دراینصورت داریم :

$$\forall x , y \in E \quad , \quad a \perp x = a \quad , \quad b \perp y = y$$

وچون باید $E - \{a\}$ یک گروه ضربی باشد ، تنها جدول ترکیب زیر بدست می‌آید :

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

اثبات ویژگی پخشی و انجمنی ساده است وآنرا به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم .

شمارهٔ هیأت‌هایی که E با دو قانون $\top$ و $\perp$ تشکیل می‌دهد برابر است باشمارهٔ روش‌هایی که می‌توان عنصر بی‌اثر قانون $\top$ و عنصریکهٔ قانون $\perp$ را انتخاب کرد ، و چون عنصر بی‌اثر $\top$ متمایز با عنصر یکهٔ $\perp$ است پس این شماره برابر است با ۶ .یعنی شمارهٔ این هیأت‌ها ۶ تا است وهمهٔ آنها جابجایی هستند و با $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ایزومرف می‌باشند.

حل ۵۷- آشکار است که قانون ترکیب $*$ روی $\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$ داخلی است اما جابجایی نیست. برای اثبات ویژگی انجمنی $*$ عبارتهای :

$$((x\,,\,y) * (x'\,,\,y')) * (x''\,,\,y'') \quad \text{و} \quad (x\,,\,y) * ((x'\,,\,y') * (x''\,,\,y''))$$

را محاسبه می‌کنیم ،که برای هردو ، بااستفاده از جابجایی بودن $\mathbf{R}$ ، عبارت :

$$\left(xx'x''\ ,\ \frac{y''}{xx'}+\frac{x''y'}{x}+x'x''y\right)$$

بدست می‌آید.

عنصر بی‌اثر $*$ عبارت است از $(1\,,\,0)$ زیرا برای هرعنصر $(x\,,\,y)$ از $\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$ داریم :

$$(1\,,\,0) * (x\,,\,y)=(x\,,\,y) * (1\,,\,0)=(x\,,\,y)$$

وارون عنصر دلخواه $(x\,,\,y)$ از $\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$ عنصر $\left(\frac{1}{x}\ ,\ -y\right)$ است زیرا :

$$(x\,,\,y) * \left(\frac{1}{x}\ ,\ -y\right)=\left(\frac{1}{x}\ ,\ -y\right) * (x\,,\,y)=(1\,,\,0)$$

بدین ترتیب $\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$ با قانون $*$ یک گروه است.

فرض می‌کنیم f یک گسترش $\mathbf{R}^*$ در $\mathbf{R}$ و Γ نمودار این گسترش باشد. از برابری :

$$(x\,,\,f(x)) * (x'\,,\,f(x'))=\left(xx'\ ,\ \frac{1}{x}f(x')+x'f(x)\right)$$

نتیجه می‌شود که برای پایدار بودن بخش غیر تهی Γ از $\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$ ، نسبت به قانون $*$ ، لازم است که برای هر x و x' متعلق به $\mathbf{R}^*$ داشته باشیم :

$$f(xx') = \frac{۱}{x} f(x') + x'f(x) \qquad (۱)$$

اما داریم $f(xx') = f(x'x)$ پس خواهیم داشت :

$$\frac{۱}{x} f(x') + x'f(x) = \frac{۱}{x'} f(x) + xf(x')$$

و یا :

$$\forall x , x' \in \mathbf{R}^* \quad ; \quad \left(x - \frac{۱}{x}\right) f(x') = \left(x' - \frac{۱}{x'}\right) f(x)$$

که اگر x' را ثابت و مخالف با ۱ و ۱ − بگیریم نتیجه خواهد شد :

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \quad , \quad f(x) = k\left(x - \frac{۱}{x}\right) \quad , \quad (\text{k مقداری است ثابت}) \qquad (۲)$$

به وارون برای هرعنصر ثابت k متعلق به $\mathbf{R}$ گسترش f مجموعهٔ $\mathbf{R}^*$ در $\mathbf{R}$ که با برابری (۲) تعریف شده است در (۱) صدق می‌کند و نمودار این گسترش یک بخش غیر تهی و پایدار Γ ازگروه $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ ، نسبت به قانون * است. Γ یک زیرگروه از $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ است اگر و تنها اگر وارون هرعنصر $(x , f(x))$ از Γ (به‌وسیلهٔ قانون *) که به‌صورت $\left(\frac{۱}{x} , -f(x)\right)$ است عنصری از Γ باشد. به‌عبارت دیگر اگر و تنها اگر برای هر x متعلق به $\mathbf{R}^*$ داشته باشیم $f\left(\frac{۱}{x}\right) = -f(x)$ یعنی :

$$k\left(\frac{۱}{x} - x\right) = -k\left(x - \frac{۱}{x}\right)$$

که همواره برقرار است.

از نظر هندسی زیرگروه‌های بدست آمده هذلولی‌هایی به مرکز O هستند که یکی ازمجانبهای آنها محور y ها است و بردو نقطهٔ $(۰ , ۱)$ و $(۰ , ۱-)$ می‌گذرند. البته به این هذلولی‌ها باید $Ox - \{۰\}$ که نمودار تابع f برای مقدار $k = ۰$ است افزوده شود.

دو زیرگروه دیگر $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ عبارتند از $\mathbf{R} \times \{۱\}$ و $\mathbf{R} \times \{۱- , ۱\}$.

حل ۵۸- فرض می‌کنیم $E=\{۱,۲,۳,۴\}$ باشد دراینصورت :

$$H=\{e,a,b,c\}$$

که در آن داریم :

$$e=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{pmatrix} \quad , \quad a=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} \quad , \quad c=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

آشکاراست که برای‌هرعنصر s متعلق به H داریم $s^۲=e$ و $s^{-۱}\in H$ وترکیب هردو عنصر ازسه عنصر a ، b و c متعلق به H ، عنصر دیگر H است. زیرا اگر مجموعهٔ $\{i,j,k\}$ همان مجموعهٔ $\{۲,۳,۴\}$ باشد :

$$\begin{pmatrix} ۱ & i & j & k \\ i & ۱ & k & j \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} ۱ & j & i & k \\ j & ۱ & k & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & k & i & j \\ k & ۱ & j & i \end{pmatrix}$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که H یک بخش غیرتهی از G است که نسبت به قانون‌ترکیب تبدیلها پایدار است و بنابر آنچه که گفته شد H یک زیرگروه از G است.

اکنون اگر s عنصر دلخواهی از H و σ عنصر دلخواهی از G باشد ، قرار می‌دهیم $\sigma^*=\sigma^{-۱}\circ s\circ\sigma$. دراینصورت اگر $s=e$ باشد خواهیم داشت $\sigma^*=e$ و درنتیجه $\sigma^*\in H$ وچنانچه $s\neq e$ باشد ، بادرنظرگرفتن مجموعهٔ $\{i,j,k\}$ بالا ، و فرض اینکه $\sigma(i)$ سایهٔ $\sigma(۱)$ به‌وسیلهٔ s باشد خواهیم داشت :

$$s[\sigma(۱)]=\sigma(i) \quad , \quad s[\sigma(i)]=\sigma(۱)$$

$$s[\sigma(j)]=\sigma(k) \quad , \quad s[\sigma(k)]=\sigma(j)$$

که اگر سایهٔ عنصرهای بالا را به‌وسیلهٔ $\sigma^{-۱}$ درنظر بگیریم نتیجه می‌شود :

$$\sigma^*(۱)=i \ , \ \sigma^*(i)=۱ \ , \ \sigma^*(j)=k \ , \ \sigma^*(k)=j$$

یعنی σ^* عنصری است از H . بنابراین H یک زیرگروه ممتاز G است.

حل ۵۹- باید دانست که اگر k یک عنصر وارون پذیر و k' عنصردلخواهی از یک حلقه باشند سه دستگاه :

$$S:\begin{cases} A=\bar{0} \\ B=\bar{0} \end{cases},\quad S':\begin{cases} B+kA=\bar{0} \\ B=\bar{0} \end{cases},\quad S'':\begin{cases} B+kA=\bar{0} \\ B+k'(B+kA)=\bar{0} \end{cases}$$

جوابهای یکسان دارند. اکنون اگر S را همان دستگاه داده شدهٔ :

$$\begin{cases} \bar{5}x+\bar{2}y=a \\ \bar{2}x+\bar{4}y=b \end{cases}$$

بگیریم و قرار دهیم $k=\bar{1}$ و $k'=\bar{4}$ دستگاه‌های S' و S'' به‌صورت زیر درمی‌آیند :

$$S':\begin{cases} x=a+b \\ \bar{2}x+\bar{4}y=b \end{cases},\quad S'':\begin{cases} x=a+b & (1) \\ \bar{4}y=\bar{4}a+\bar{5}b & (2) \end{cases}$$

پس می‌توان به‌جای دستگاه داده شده دستگاه S'' را حل کرد. اما معادلهٔ (۲) دستگاه S'' را با توجه به‌اینکه $\bar{4}$ عنصر وارون پذیری از حلقه نیست ، بلکه یک مقسوم‌علیه صفر است (زیرا $\bar{0}=\bar{3}\times\bar{4}$) می‌توان چنین نوشت $\bar{3}\times\bar{4}y=\bar{3}\times\bar{4}a+\bar{3}\times\bar{5}b$ که ازآن نتیجه می‌شود $\bar{3}b=\bar{0}$. پس b باید برابر با $\bar{0}$ ، $\bar{2}$ یا $\bar{4}$ باشد. بنابراین :

- اگر b برابربا $\bar{1}$ ، $\bar{3}$ یا $\bar{5}$ باشد دستگاه S جواب ندارد.

- اگر $b=\bar{0}$ باشد معادلهٔ (۲) به صورت $\bar{4}(y-a)=\bar{0}$ درمی‌آید وجوابهای آن $y=a$ و $y=a+\bar{3}$ است. پس S دارای دو جواب زیر است :

$$\begin{cases} x=a \\ y=a \end{cases},\quad \begin{cases} x=a \\ y=a+\bar{3} \end{cases}$$

- چنانچه $b=\bar{2}$ باشد معادلهٔ (۲) به‌صورت $\bar{4}(y-a-\bar{1})=\bar{0}$ نوشته می‌شود و S دارای دو جواب زیر است :

$$\begin{cases} x=a+\bar{2} \\ y=a+\bar{1} \end{cases} , \quad \begin{cases} x=a+2 \\ y=a+4 \end{cases}$$

- اگر $b=\bar{4}$ باشد، معادلهٔ (۲) به صورت $\bar{4}(y-a+\bar{1})=\bar{0}$ درمی‌آید و برای S دو جواب زیر را داریم:

$$\begin{cases} x=a+4 \\ y=a+\bar{5} \end{cases} , \quad \begin{cases} x=a+\bar{4} \\ y=a+2 \end{cases}$$

دستگاه دیگر این مسأله به روش مشابه حل می‌شود.

حل ۶۴- الف - می‌دانیم که $C_p^q=\dfrac{p(p-1)\cdots(p-q+1)}{q(q-1)\cdots 2\times 1}$ و چون C_p^q یک شمار درست است پس $p(p-1)\cdots(p-q+1)$ بر $q(q-1)\cdots 2\times 1$ بخش پذیر است. اما p با $q(q-1)\cdots 2\times 1$ اول است، زیرا q مخالف باصفر و مخالف با p است. پس $(p-1)\cdots(p-q+1)$ بر $q(q-1)\cdots 2\times 1$ بخش‌پذیر است. بنابراین داریم $C_p^q=pm$ که درآن $m=\dfrac{(p-1)\cdots(p-q+1)}{q(q-1)\cdots 2\times 1}$ و $m\in N$. یعنی C_p^q بر p بخش‌پذیر است.

ب - برابری داده شده برای $k=1$ آشکار است. برای $k=2$ بااستفاده ازفرمول نیوتن داریم:

$$(a_1+a_2)^p=a_1^p+\left(\sum_{q=1}^{p-1} C_p^q a_1^q a_2^{p-q}\right)+a_2^p$$

و چون p مشخص حلقهٔ جابجایی A است، پس برای هرشمار درست q به طوری که $1\leqslant q\leqslant p-1$ داریم $C_p^q a_1^q a_2^{p-q}=0$ و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$(a_1+a_2)^p=a_1^p+a_2^p$$

اکنون فرض می‌کنیم که برابری داده شده برای $k-1$ درست باشد. دراینصورت برابری:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^p=[(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})+a_k]^p$$

برای دوعنصر $(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})$ و a_k چنین می‌نویسیم :

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^p=(a_1+\cdots+a_{k-1})^p+a_k^p$$

وچون بنا به فرض داریم $(a_1+\cdots+a_{k-1})^p=a_1^p+\cdots+a_{k-1}^p$ پس خواهیم داشت

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^p=a_1^p+a_2^p+\cdots+a_k^p$$

اینک حلقه Z/pZ را در نظر می‌گیریم . برای $k\in N$ داریم :

$$\bar{k}=\bar{1}+\bar{1}+\cdots+\bar{1}=(\text{مجموع } k \text{ جملهٔ برابر با } \bar{1})$$

که با استفاده از اثبات قسمت (ب) بالا خواهیم داشت :

$$\bar{k}^p=(\bar{1}+\bar{1}+\cdots+\bar{1})^p=\bar{1}^p+\bar{1}^p+\cdots+\bar{1}^p=\bar{k}$$

و یا

$$k^p=k(\mathrm{mod}\ p)$$

حل ۶۵ - چون‌درجهٔ P_1 از درجهٔ P_2 بزرگتر است ابتدا P_1 رابر P_2 تقسیم‌می‌کنیم (از نوشتن عملیات تقسیم خودداری می‌شود) و بخشیاب و ماندهٔ تقسیم را که به‌ترتیب عبارتند از $x-6$ و $P_3=19x^3+51x^2+51x+32$ بدست می‌آوریم. یعنی

$$P_1=(x-6)P_2+P_3$$

اکنون P_2 را بر P_3 تقسیم‌می‌کنیم ، خواهیم داشت :

$$P_2=\left(\frac{x}{19}+\frac{44}{19^2}\right)P_3+\frac{397}{361}(x^2+x+1)$$

از تقسیم P_3 بر ماندهٔ تقسیم بالا یعنی x^2+x+1 (از نوشتن ضریب آن چشم‌پوشی می‌کنیم) نتیجه می‌شود .

$$P_3=(19x+32)(x^2+x+1)$$

به‌طوریکه دیده می‌شود ماندهٔ تقسیم بالا برابر با صفر است . بنابراین بزرگترین بخشیاب مشترک P_1 و P_2 عبارت است از x^2+x+1 و داریم :

$$P_1=(x^2+x+1)\ (x^3-2x^2+2)$$

$$P_2=(x^2+x+1)\ (x^2+4x+5)$$

درنتیجه برای کوچکترین مضرب مشترك P_1 و P_2 عبارت زیر بدست می‌آید :

$$(x^2+x+1)\ (x^2+4x+5)\ (x^3-2x^2+2)$$

حل ۶۶ - معادلهٔ درجهٔ n :

$$c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n=0 \ ,\ c_k\in \mathbf{Z}$$

را درنظرمی‌گیریم و فرض می‌کنیم α یکی از ریشه‌های این معادله باشد، یعنی داشته باشیم :

$$c_0\alpha^n+c_1\alpha^{n-1}+\cdots+c_n=0$$

پس خواهیم داشت:

$$\alpha^n=-\frac{c_1}{c_0}\alpha^{n-1}-\cdots-\frac{c_n}{c_0}=a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_0$$

که در آن $a_k=-\dfrac{c_k}{c_0}\in \mathbf{Q}$ است. پس برای حل مسأله کافی است توانهای پی‌درپی α را تشکیل داده درمعادله‌بالا ببریم و کوچکترین مقدار n را که برای آن α^n یك ترکیب خطی از α^j ها با ضرایب گویا باشد $(0\leqslant j<n)$ پیدا کنیم . اما داریم :

$$\alpha^2=4+4\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2 \quad , \quad \alpha^3=17+12\sqrt[3]{3}+6(\sqrt[3]{3})^2$$

بطوری‌که دیده می‌شود α^2 ترکیب خطی α و ۱ با ضریب های گویا نیست اما α^3 را می‌توان بصورت زیرکه ترکیبی خطی از α^2 و α و ۱با ضریب‌های گویا می‌باشد نوشت:

$$\alpha^3=a_0+a_1(2+\sqrt[3]{3})+a_2(2+\sqrt[3]{3})^2$$

که در آن $a_0=17$ و $a_1=-12$ و $a_2=6$ است. پس خواهیم داشت $n=3$ و α ریشهٔ معادلهٔ $x^3-6x^2+12x-17=0$ می‌باشد.

حل ۶۷ - چند جمله‌ای $P(x)$ دارای ضریب‌های حقیقی است و ریشه‌های x^2+x+1 شمارهای مختلط مزدوج j و j^2 می‌باشند (j ریشه سوم شمار ۱ است) . پس برای اینکه $P(x)$ بر x^2+x+1 بخش پذیر باشد ، یعنی داشته باشیم :

$$P(x)=(x^2+x+1)q(x) \quad , \quad q(x)\in R[x]$$

با یا وبسنده است که $P(j)=0$ باشد. اما داریم :

$$P(j)=(j+1)^n-j^n-1=(-j^2)^n-j^n-1$$

اکنون اگر قرار دهیم $n=m+r$ خواهیم داشت:

$$(-j^2)^n-j^n-1=(-j^2)^m(-j^2)^r-j^mj^r-1$$

به طوری که دیده می‌شود برای اینکه طرف راست برابری بالا به صورت $(-j^2)^m-j^m-1$ درآید بایاوبسنده است که $j^r=1$ و $(-j^2)^r=1$ باشد و از آنجا کوچکترین مقدار درستی که برای r به‌دست می‌آید $r=6$ است . بنابراین می‌توان n را شمارهای درستی گرفت که با مقیاس ۶ برابرند . اگر :

$$n=0 \mod 6 \quad , \quad P(j)=-1$$

$$n=1 \mod 6 \quad , \quad P(j)=0$$

$$n=2 \mod 6 \quad , \quad P(j)=2j$$

$$n=3 \mod 6 \quad , \quad P(j)=-3$$

$$n=4 \mod 6 \quad , \quad P(j)=2j^2$$

$$n=5 \mod 6 \quad , \quad P(j)=0$$

پس جواب‌ها عبارتند از $n=6k+1$ و $n=6k+5$

حل ۶۸ - چون بخشیاب یعنی x^2-1 از درجهٔ دوم است پس درجهٔ ماندهٔ تقسیم از یک بیشتر نیست. بنابراین می‌توان نوشت :

$$P(x)=(cha+x\ sha)^n=(x^۲-۱)q(x)+\lambda x+\mu$$

و آز آنجا خواهیم داشت:

$$P(۱)=(cha+sha)^n=\lambda+\mu$$

$$P(-۱)=(cha-sha)^n=-\lambda+\mu$$

که با استفاده از فرمولهای :

$$cha+sha=e^a \quad , \quad cha-sha=e^{-a}$$

نتیجه می‌شود :

$$\lambda=\frac{e^{na}-e^{-na}}{۲}=shna \text{ و } \mu=\frac{e^{na}+e^{-na}}{۲}=chna$$

و از آنجا :

$$\lambda x+\mu=x\ shna+chna$$

حل ۶۹ - بستگی‌های بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ داده شده عبارتند از :

$$x_۱+x_۲+x_۳=۰$$

$$x_۱x_۲+x_۲x_۳+x_۳x_۱=p$$

$$x_۱x_۲x_۳=-q$$

اکنون برای محاسبهٔ $(x_۲-x_۳)^۲$ چنین عمل می‌کنیم :

$$(x_۲-x_۳)^۲=x_۲^۲+x_۳^۲-۲x_۲x_۳$$

$$x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲=(x_۱+x_۲+x_۳)^۲-۲(x_۱x_۲+x_۲x_۳+x_۳x_۱)=-۲p$$

$$x_۲x_۳=\frac{x_۱x_۲x_۳}{x_۱}=-\frac{q}{x_۱}$$

پس خواهیم داشت :

$$(x_۲-x_۳)^۲=-۲p-x_۱^۲+\frac{۲q}{x_۱}=\frac{-x_۱^۳-۲px_۱+۲q}{x_۱}$$

اما داریم $x_1^3+px_1+q=0$ که از آن نتیجه می‌شود $-x_1^3=px_1+q$. پس :

$$(x_2-x_3)^2=\frac{-px_1+3q}{x_1}$$

به این ترتیب $(x_2-x_3)^2$ نسبت به x_1 بدست می‌آید. چنانچه همین روش را در مورد $(x_3-x_1)^2$ و $(x_1-x_2)^2$ بکار بریم خواهیم داشت:

$$\Delta=\frac{(-px_1+3q)(-px_2+3q)(-px_3+3q)}{x_1x_2x_3}=$$

$$-\frac{p^3}{q}\left(\frac{3q}{p}-x_1\right)\left(\frac{3q}{p}-x_2\right)\left(\frac{3q}{p}-x_3\right)$$

وانگهی x_1 ، x_2 و x_3 ریشه های معادلهٔ $\varphi(x)=0$ می‌باشند پس داریم :

$$\varphi(x)=x^3+px+q=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

که با استفاده از آن عبارت Δ به صورت زیر بدست می‌آید :

$$\Delta=-\frac{p^3}{q}\varphi\left(\frac{3q}{p}\right)=-\frac{p^3}{q}\left[\left(\frac{3q}{p}\right)^3+p\left(\frac{3q}{p}\right)+1\right]$$

یا :

$$\Delta=-(4p^3+27q^2)$$

حل ۷۰ - هرچند جمله‌ای درجهٔ اول از $\frac{Z}{3Z}[x]$ به‌صورت $ax+b$ نوشته می‌شود که درآنجا داریم a و $b\in Z/3Z$. پس a و b می‌توانند مقادیر $\bar{1}-$ ، $\bar{0}$ و $\bar{1}$ را اختیار کنند و در نتیجه ۹ چند جمله‌ای درجه اول در $\frac{Z}{3Z}[x]$ وجود دارد.

اگر چند جمله‌ای u دارای یک بخشیاب درجهٔ اول باشد این چند جمله‌ای یک ریشه در $Z/3Z$ خواهد داشت و چون داریم :

$$u(\bar{0}) = -1 \quad , \quad u(\bar{1}) = -\bar{1} \quad , \quad u(-\bar{1}) = 1$$

چند جمله‌ای u در $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ ریشه ندارد یعنی ساده نشدنی است .

حل ۷۱ ـ فرض می‌کنیم $A(X, Y)$ بر $X-Y$ بخش پذیر باشد ،به عبارت دیگر یک چند جمله‌ای Q از $K[X, Y]$ وجود داشته باشد به طوری‌که :

$$A(X, Y)=(X-Y)\,Q(X, Y)$$

پس چند جمله‌ای $Q(X, Y)$ درشرط زیر صدق می‌کند :

$$A(X, Y)=(X-Y)\,Q(X, Y)=(Y-X)Q(Y, X)=A(Y, X)$$

یا :

$$(X-Y)\,[Q(X, Y)+Q(Y, X)]=0$$

اما حلقهٔ $K[X, Y]$ یک حلقهٔ انتگراست و چند جمله‌ای $X-Y$ برابر با صفر نیست . پس خواهیم‌داشت :

$$Q(X, Y)+Q(Y, X)=0$$

که از آن نتیجه می‌شود :

$$Q(Y, Y)+Q(Y, Y)=2Q(Y, Y)=0 \Longrightarrow Q(Y, Y)=0$$

از معادلهٔ بالا چنین برمی‌آید که $Q(X, Y)$ بر $X-Y$ بخش پذیر است.

از اینجا بخش پذیری $A(X, Y)$ بر $(X-Y)^2$ آشکار می‌گردد .

حل ۷۲ ـ داریم :

$$P(t)=x(t-b)(t-c)+y(t-c)(t-a)+z(t-a)(t-b)$$
$$-(t-a)(t-b)(t-c)$$

به‌طوریکه دیده می‌شود $P(t)$ از درجهٔ سوم است و جمله‌ای از آن‌که بزرگترین درجه را

دارد $t^{3}-$ می‌باشد. با توجه به فرض مسأله آشکار است که :

$$P(h)=P(k)=P(l)=0$$

پس $P(t)$ دارای سه جواب متمایز h و k و l است و در نتیجه خواهیم داشت :

$$P(t)=-(t-h)(t-k)(t-l)$$

ب ـ برای تجزیهٔ کسر گویای مورد نظر چنین می‌نویسیم:

$$\frac{P(t)}{(t-a)(t-b)(t-c)}=\frac{x}{t-a}+\frac{y}{t-b}+\frac{z}{t-c}-1$$

$$=-\frac{(t-h)(t-k)(t-l)}{(t-a)(t-b)(t-c)}$$

پس در تجزیه بالا x و y و z به صورت ضرایب عنصرهای ساده و -1 به صورت بخش درست کسر درمی‌آیند . برای محاسبهٔ x همانی :

$$\frac{x}{t-a}+\frac{y}{t-b}+\frac{z}{t-c}=1-\frac{(t-h)(t-k)(t-l)}{(t-a)(t-b)(t-c)}$$

را در $t-a$ ضرب می‌کنیم و سپس قرار می‌دهیم $t=a$ ، خواهیم داشت :

$$x=1-\frac{(a-h)(a-k)(a-l)}{(a-b)(a-c)}$$

به همین ترتیب مقادیر y و z را به‌دست می‌آوریم :

$$y=1-\frac{(b-h)(b-k)(b-l)}{(b-a)(b-c)}$$

$$z=1-\frac{(c-h)(c-k)(c-l)}{(c-a)(c-b)}$$

حل ۷۳ - چنانچه :

$$f(x)+b=\psi(x)Q_۲(x) \quad \text{و} \quad f(x)+a=\varphi(x)Q_۱(x)$$

باشد خواهیم داشت $\varphi Q_۱-\psi Q_۲=a-b$ و چون $a-b\neq ۰$ است این معادله چنین نوشته می‌شود :

$$\varphi\cdot\frac{Q_۱}{a-b}+\psi\cdot\frac{-Q_۲}{a-b}=۱$$

ویا بصورت :

$$\varphi(x)\alpha(x)+\psi(x)\beta(x)=۱ \qquad (۱)$$

بستگی (۱) همان اتحاد بزو برای دوچند جمله‌ای $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ است و در نتیجه $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ که در برابری (۱) صدق کنند وجود دارند . برای تعیین یکی ازجوابهای $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ کسر گویای $\frac{۱}{\varphi(x)\psi(x)}$ را به عنصرهای ساده تجزیه می کنیم، وچون φ و ψ دارای ریشهٔ مشترك نیستند می‌توان عنصرهای ساده وابسته به‌هریک از چند جمله‌ای‌های φ و ψ را به‌طور جداگانه بدست‌آورد. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{\varphi(x)\psi(x)}=\frac{\beta_۰(x)}{\varphi(x)}+\frac{\alpha_۰(x)}{\psi(x)}$$

که درآن $\alpha_۰(x)$ و $\beta_۰(x)$ یکی از جوابهای $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ است و داریم :

$$\deg\beta_۰<\deg\varphi \quad \text{و} \quad \deg\alpha_۰<\deg\psi$$

پس $\alpha_۰\varphi+\beta_۰\psi=۱$ چنانچه α و β یک جواب دیگر (۱) باشد ، دراینصورت $\alpha\varphi+\beta\psi=۱$ است و داریم :

$$(\alpha-\alpha_۰)\varphi+(\beta-\beta_۰)\psi=۰$$

برابری بالا نشان می‌دهد که $(\beta-\beta_۰)\psi$ بر φ بخش پذیر است وچون φ و ψ نسبت‌به

یکدیگر اولند $\beta-\beta_\circ$ بر φ بخش‌پذیر می‌باشد. پس خواهیم داشت:

$$\beta-\beta_\circ=\lambda(x)\varphi$$

و درنتیجه :

$$(۲)\quad \begin{cases}\beta=\beta_\circ+\lambda(x)\varphi(x)\\ \alpha=\alpha_\circ-\lambda(x)\psi(x)\end{cases}$$

به‌وارون چنانچه $\lambda(x)$ یک چند جمله‌ای دلخواه باشد، چند جمله‌ای های $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ که از فرمولهای (۲) نسبت به $\alpha_\circ$ و $\beta_\circ$ بدست می‌آیند جوابهای (۱) می‌باشند. به‌این ترتیب برابریهای (۲) همهٔ جواب‌های (۱) را معین می‌کنند.

اما داریم $\alpha(x)=\dfrac{Q_۱(x)}{a-b}$ پس $Q_۱(x)=(a-b)\,[\alpha_\circ(x)-\lambda(x)\psi(x)]$

و در نتیجه همهٔ جوابهای $f(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شوند :

$$\begin{aligned}f(x)&=-a+\varphi(x)Q_۱(x)\\ &=-a+(a-b)\varphi(x)[\alpha_\circ(x)-\lambda(x)\psi(x)]\\ &=-b+(b-a)\psi(x)[\beta_\circ(x)+\lambda(x)\varphi(x)]\end{aligned}$$

اکنون چنانچه روش بالا را درحالت $a=۱$ ، $b=-۱$ ، $\varphi(x)=x^۲+۱$ و $\psi(x)=x^۳+۱$ بکاربریم خواهیم داشت :

$$\frac{۱}{(x^۲+۱)(x^۳+۱)}=\frac{\beta_\circ(x)}{x^۲+۱}+\frac{\alpha_\circ(x)}{x^۳+۱}$$

از همانی بالا نتیجه می‌شود $\beta_\circ(x)=Ax+B=\dfrac{۱}{۲}(x+۱)$

و :

$$\frac{\alpha_\circ(x)}{x^۳+۱}=\frac{۱}{(x^۲+۱)(x^۳+۱)}-\frac{x+۱}{۲(x^۲+۱)}=\frac{-x^۲-x+۱}{۲(x^۳+۱)}$$

پس برای چند جمله‌ای $f(x)$ خواهیم داشت :

$$f(x)=1-2(x^3+1)\left[\frac{1}{2}(x+1)+\lambda(x)(x^2+1)\right]$$

$$=1-(x^3+1)(x+1)+\mu(x)(x^3+1)(x^2+1)$$

که در آن $\mu(x)$ یک چند جمله‌ای دلخواه است.

حل ۷۴ - هر ریشه چندگانهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ در معادلهٔ $f'(x)=0$ نیز صدق می‌کند. اما داریم:

$$f'(x)=n(x+1)^{n-1}-nx^{n-1}=0$$

و چون $x=0$ ریشه مورد نظر نیست معادلهٔ بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-1}=1 \qquad (1)$$

بنابراین $1+\frac{1}{x}$ یکی از ریشه‌های $(n-1)$ امشمار ۱ (بجز خود ۱) است یعنی:

$$1+\frac{1}{x}=\cos\frac{2k\pi}{n-1}+i\sin\frac{2k\pi}{n-1}\ ,\ k\in\{0,1,2,\cdots,n-2\}$$

و یا:

$$\frac{1}{x}=\cos\frac{2k\pi}{n-1}-1+i\sin\frac{2k\pi}{n-1}=2\sin\frac{k\pi}{n-1}\left(-\sin\frac{k\pi}{n-1}+i\cos\frac{k\pi}{n-1}\right)$$

$$=2i\sin\frac{k\pi}{n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{n-1}+i\sin\frac{k\pi}{n-1}\right)$$

و از آنجا:

$$x_k=\frac{-i}{2\sin\frac{k\pi}{n-1}}\left(\cos\frac{k\pi}{n-1}-i\sin\frac{k\pi}{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{k\pi}{n-1}}\cdot e^{-i\left(\frac{k\pi}{n-1}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

پس برای λ چنین خواهیم داشت :

$$\lambda_k=(x_k+1)^n-(x_k)^n=(x_k+1)^{n-1}(x_k+1)-x_k^n$$

ویا با استفاده از (۱): $$\lambda_k=(x_k)^{n-1}(x_k+1)-x_k^n=(x_k)^{n-1}$$

و درنتیجه :

$$\lambda_k=\frac{1}{\left(2\sin\frac{k\pi}{n-1}\right)^{n-1}}\,e^{-i\left[k\pi+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}$$

λ_k را میتوان به‌صورت زیر نیز نوشت :

$$\lambda_k=\frac{(-1)^{k+n-1}\,i^{n-1}}{\left(2\sin\frac{k\pi}{n-1}\right)^{n-1}}$$

حل ۷۵ - اگر معادلهٔ $f(x)=0$ دارای یک ریشه چهارگانه باشد، این ریشه‌باید در معادله های :

$$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$$

نیز صدق کند. پس چنین خواهیم داشت :

$$(1)\qquad 6x^5+4mx^3+30x^2+n=0$$

$$(2)\qquad 30x^4+12mx^2+60x=0 \implies 5x^4+2mx^2+10x=0$$

$$(3)\qquad 10x^3+2mx+5=0$$

معادلهٔ (۲) دارای‌ریشه‌صفر است،اما این‌ریشه در معادلهٔ (۳) صدق نمیکند پس ریشهٔ مشترك نخواهد بود. بنابراین ریشهٔ مشترك باید در معادله‌های زیر صدق کند :

$$5x^3+2mx+10=0$$

$$10x^3+2mx+5=0$$

ازاین دو معادله نتیجه می‌شود : $5x^3 - 5 = 0$

با توجه به‌اینکه $f(x)=0$ نمی‌تواند دارای ریشهٔ مختلط (غیر حقیقی) چهارگانه باشد (وگرنه باید مزدوج‌آن‌نیزریشهٔ $f(x)=0$ باشد که دراینصورت $f(x)$ از درجهٔ ۸ خواهد بود) تنهاریشهٔ $x=1$ معادلهٔ بالا می‌تواندریشهٔ چهارگانه باشد. چنانچه $x=1$ ریشه چهارگانه $f(x)=0$ باشد خواهیم داشت:

$$1+m+10+n+p=0$$

$$6+4m+30+n=0$$

$$5+2m+10=0$$

و ازآنجا : $m=-\dfrac{15}{2}\ ,\ n=-6\quad ,\ p=\dfrac{5}{2}$

در این‌صورت چنین داریم : $f(x)=(x-1)^4\left(x^2+4x+\dfrac{5}{2}\right)$

و دو ریشه دیگر معادله عبارتند از : $-2\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

حل ۷۶ - چنانچه $P(x)+1$ بر $(x-1)^3$ بخش پذیر باشد مشتق آن $P'(x)$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر است . همچنین از فرض دوم نتیجه می‌شود که $P'(x)$ بر $(x+1)^2$ بخش پذیر است. اما $(x-1)^2$ و $(x+1)^2$ نسبت به یکدیگر اولندپس $P'(x)$ بر حاصل‌ضرب آنها بخش‌پذیر خواهد بود . و چون $P'(x)$ از درجهٔ چهارم‌است خواهیم داشت :

$$P'(x)=A(x+1)^2(x-1)^2=A(x^2-1)^2$$

که در آن A یک اسکالر است. ازاینجا برای $P(x)$ عبارت زیر بدست می‌آید :

$$P(x)=A\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x\right)+B$$

اکنون با توجه به‌اینکه $P(x)+1$ بر $(x-1)^3$ و $P(x)-1$ بر $(1+x)^3$ بخش پذیر است می‌توان A و B را حساب کرد :

$$P(1)+1=0 \quad \text{و} \quad P(-1)-1=0$$

و یا

$$P(1)+1=A\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)+B+1=0$$

$$P(-1)-1=A\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1\right)+B-1=0$$

از دومعادلهٔ بالا نتیجه می‌شود :

$$A=-\frac{15}{8} \quad \text{و} \quad B=0$$

و از آنجا :

$$P(x)=-\frac{15}{8}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x\right)$$

حل ۷۷ - معادلهٔ $f(X)=0$ دارای دو ریشه است و به آسانی می‌توان دید که ریشهٔ $\alpha=2+i$ آن در معادلهٔ $g(X)=0$ صدق میکند. **باتوجه به** ریشهٔ مشترک این دو معادله می‌توان نوشت :

$$f(X)=[X-(2+i)][X-(2-i)]$$

$$g(X)=[X-(2+i)]\,(X-i)(X+1)$$

و از آنجا :

$$\frac{f(X)}{g(X)}=\frac{X-2+i}{(X-i)(X+1)}=\frac{2i}{X-i}+\frac{1-2i}{X+1}$$

حل ۷۸ - با توجه به فرض های مسأله می‌توان نوشت :

$$A=(X^2+1)U=(X^3+1)V+1$$

واز آنجا خواهیم داشت $(X^۲+۱)U-(X^۳+۱)V=۱$

اما چندجمله‌ای‌های $X^۲+۱$ و $X^۳+۱$ نسبت بیکدیگر اولند. پس برابری بالا همان اتحاد بزو است. بنابراین دوچندجمله‌ای U و V که دارای کمترین درجه باشندوجود دارد که برابری بالا را برقرار کنند. این چند جمله‌ای‌ها را می‌توان با استفاده از روش تعیین بزرگترین بخشیاب مشترك $X^۳+۱$ و $X^۲+۱$ به وسیلهٔ تقسیم‌های پی در پی بدست آورد :

$$X^۳+۱=X(X^۲+۱)-(X-۱)$$
$$X^۲+۱=(X+۱)(X-۱)+۲$$

ازآنها نتیجه می‌شود :

$$۲=X^۲+۱-(X+۱)\ [X(X^۲+۱)-(X^۳+۱)]$$

$$U=-\frac{۱}{۲}(X^۲+X-۱) \quad \text{و} \quad V=-\frac{۱}{۲}(X+۱)$$

پس :

$$A=-\frac{۱}{۲}(X^۲+۱)(X^۲+X-۱)$$

در حالت کلی چنین داریم :

$$A=BU=CV+۱$$

که از آن برابری $BU-CV=۱$ را خواهیم داشت. این برابری به شرط آنکه (شرط بایاوبسنده) چند جمله‌ای‌های V و U نسبت به یکدیگر اول باشند همواره ممکن است (قضیهٔ بزو).

حل ۷۹ - بنابه‌تعریف مشتق یک چندجمله‌ای چنین داریم :

$$A=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \Longrightarrow A'=\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

پس :

$$A'=0 \Longleftrightarrow \forall k \ , \ k\alpha_k=0$$

چون شمار p ، مشخص هیأت K ، شماری است اول ، پس اگر α_k صفر نباشد تنها شمارهای درست k به‌طوری‌که $k\alpha_k=0$ باشد مضربهای p می‌باشند. بنابراین :

- اگر k مضرب p باشد ، α_k دلخواه است.
- اگر k مضرب p نباشد ، α_k برابر با صفر است.

پس خواهیم داشت :

$$A=\alpha_0+\sum_{r=1}^{s} \alpha_{rp}X^{rp}$$

یعنی A ترکیبی خطی از ۱ و توانهای مثبت X^p با ضرایب متعلق به K می‌باشد. وارون این مطلب نیز آشکار است.

حل ۸۰ - ماندهٔ تقسیم A بر $X-x_i$ یک چند جمله‌ای درجهٔ صفراست که با r_i نمایش داده می‌شود. پس می‌توان نوشت :

$$A=(X-x_i)Q_i+r_i \Longrightarrow A(x_i)=r_i \quad , \quad (i=1,2,3)$$

همچنین ماندهٔ تقسیم A بر $(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ یک چند جمله‌ای R است که درجهٔ آن از ۲ بیشتر نیست. یعنی :

$$A=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)Q+R \Longrightarrow R(x_i)=A(x_i)=r_i$$

پس بنابردستور انترپلاسیون لاگرانژ تنها جواب دستگاه $A(x_i)=R(x_i)=r_i$ که درجه آن حداکثر برابربا ۲ است عبارت‌است از :

$$R=r_1\frac{(X-x_2)(X-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+r_2\frac{(X-x_3)(X-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}$$

$$+r_3\frac{(X-x_1)(X-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

چنانچه S جواب دیگر دستگاه بالا باشد چند جمله‌ای $S-R$ بر $(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ بخش پذیر خواهد بود . بنابراین درجهٔ $S-R$ و درنتیجه درجهٔ S دست کم برابر با ۳ خواهد شد و این ممکن نیست .

حل ۸۱ - الف - اگر کلاس α شامل یک چند جمله‌ای A باشد شامل ماندهٔ تقسیم A بر X^2-1 یعنی شامل یک چند جمله‌ای R از درجهٔ ۰ یا ۱ نیز خواهد بود. پس سایر چند جمله‌ای های کلاس α از افزودن مضاربی از X^2-1 بر R بدست می‌آیند و درنتیجه درجهٔ آنها دست کم برابر با ۲ است . بنابراین نمایش یک عنصر از E بوسیلهٔ یک چند جمله‌ای درجهٔ ۰ یا ۱ یکتا می‌باشد و خواهیم داشت :

$$\begin{cases}\alpha=a_0+a_1X\\ \beta=b_0+b_1X\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=a_0+b_0+(a_1+b_1)X\\ \alpha\beta=a_0b_0+a_1b_1+(a_0b_1+a_1b_0)X\end{cases}$$

(بجای $a_1b_1X^2$ هم ارز آن $a_1\,b_1$ را قرار داده‌ایم) .

عنصرهای α و β بخشیابهای صفرند هرگاه داشته باشیم :

$$(a_0+a_1X)(b_0+b_1X)=(X^2-1) \text{ مضرب } \Longleftrightarrow$$
$$(a_0+a_1X)(b_0+b_1X)=a_1b_1(X^2-1)$$

یعنی هرگاه α و β بخشیاب های X^2-1 باشند که در اینصورت یا داریم :

$$\beta=b_1(X+1) \text{ و } \alpha=a_1(X-1)$$

ویا :
$$\beta=b_1(X-1) \quad \text{ و } \quad \alpha=a_1(X+1)$$

بنابراین مجموعهٔ بخشیاب های صفر عبارت است از اجتماع مجموعه های :

$$I=\{a(X-1) : a\in R\} \quad \text{ و } \quad J=\{a(X+1) : a\in R\}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که I و J از ایدآل های $R[X]$ می‌باشند.

ب - اگر $\alpha=a_0+a_1X$ بخشیاب صفر نباشد از معادلهٔ $(a_0+a_1X)(a_0-a_1X)=a_0^2-a_1^2$ نتیجه می‌شود که α دارای یک وارون به صورت

زیر است:

$$\alpha^{-1}=\frac{a_0}{a_0^2-a_1^2}-\frac{a_1}{a_0^2-a_1^2}X$$

پس هرعنصر حلقهٔ E یاوارون پذیر است یا بخشیاب صفر می‌باشد.

چنانچه α^{-1} یک وارون α باشد معادلهٔ :

$$\alpha\xi+\beta=0 \Longleftrightarrow \alpha^{-1}\alpha\xi+\alpha^{-1}\beta=0 \Longleftrightarrow \xi=-\alpha^{-1}\beta$$

تنها دارای یک ریشه است (β دلخواه است) .

اگر α بخشیاب صفر باشد α به یکی از ایدآل‌های I یا J متعلق است و $\alpha\xi$ که حاصل‌ضرب یک عنصر آیدآل در یک عنصر حلقه است به همین اید آل تعلق دارد . پس برای این‌که معادلهٔ $\alpha\xi+\beta=0$ دارای جواب باشد لازم است‌که α و β هر دو به یک ایدآل‌متعلق‌باشند (I یا J) .به علاوه این شرط کافی نیز هست . زیرا اگر α و β را متعلق به I بگیریم و قرار دهیم :

$$\alpha=a(X-1) \quad و \quad \beta=b(X-1)$$

معادلهٔ بالا به صورت $(X-1)(a\xi+b)=0$ درمی‌آید و دارای جوابهای $\xi=-\frac{b}{a}+l(X+1)$ است‌که در آنها l یک شمار حقیقی‌دلخواه می‌باشد.

چنانچه α برابر با صفر باشد لازم است‌که β نیز صفر باشد. دراین‌صورت هرعنصر از E جواب معادله خواهد بود.

پ ـ اگر $\delta_1\delta_2=0$ باشد خواهیم داشت :

$$(\xi-\delta_1)(\xi-\delta_2)=\xi^2-\xi(\delta_1+\delta_2)=0$$

و به این ترتیب آشکار می‌شود که معادلهٔ بالا دارای چهار جواب زیر است :

$$\xi=\delta_1 \;,\; \xi=\delta_2 \;,\; \xi=0 \;,\; \xi=\delta_1+\delta_2$$

این جواب‌ها متمایزند زیرا مثلاً چنین داریم :

$$\delta_۱ = a(X-۱) \ , \ \delta_۲ = b(X+۱) \ , \ \delta_۱+\delta_۲ = (a+b)X+b-a$$

حل ۸۴ - داریم :

$$\frac{۳+۶i}{۳-۴i} = \frac{(۳+۶i)\,(۳+۴i)}{۲۵} = -\frac{۳}{۵} + \frac{۶}{۵}i$$

و :

$$\left(\frac{۱+i}{۲-i}\right)^۲ + \frac{۱-۷i}{۴+۳i} = \left[\frac{(۱+i)(۲+i)}{۵}\right]^۲ + \frac{(۱-۷i)(۴-۳i)}{۲۵} = -۱-i$$

و :

$$\frac{۲+۵i}{۱-i} + \frac{۲-۵i}{۱+i} = \frac{۲+۵i}{۱-i} + \overline{\left(\frac{۲+۵i}{۱-i}\right)} = ۲R\left(\frac{۲+۵i}{۱-i}\right)$$

(منظور از R بخش حقیقی شمار مختلط است) اما داریم :

$$\frac{۲+۵i}{۱-i} = \frac{(۲+۵i)(۱+i)}{۲} = -\frac{۳}{۲} + \frac{۷}{۲}i$$

پس :

$$\frac{۲+۵i}{۱-i} + \frac{۲-۵i}{۱+i} = ۲\left(-\frac{۳}{۲}\right) = -۳$$

حل ۸۵ - داریم :

$$|z| = |a|\,\frac{|۱+ib|}{|۱-ib|} = |a| \cdot \left(\frac{۱+b^۲}{۱+b^۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = |a|$$

و $\quad \mathrm{Arg}\, a = ۰ \quad , \quad \mathrm{Arg}(۱+ib) = \mathrm{Arc\,tg}\, b$

زیرا برای هرمقدار حقیقی b یکی از آرگومانهای $۱+ib$ بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ قراردارد.

همچنین داریم $\overline{۱+ib}=۱-ib$ پس :

$$\mathrm{Arg}\,\frac{۱+ib}{۱-ib}=۲\ \mathrm{Arctg}\ b$$

و از آنجا : $$\mathrm{Arg}z=۲\,\mathrm{Arctg}b \pmod{۲\pi}$$

حل ۸۶ - اگر $\overline{z^۷}=\frac{۱}{z^۲}$ باشد خواهیم داشت :

$$|z^۷|=\frac{۱}{|z^۲|} \quad \text{یا} \quad |z^۹|=۱ \Longrightarrow |z|=۱$$

پس‌شمار مختلط z به صورت $z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ نوشته می‌شود $(\theta\in\mathbf{R})$ که

در این‌صورت $\overline{z^۷}=e^{-۷i\theta}$ و $\frac{۱}{z^۲}=e^{-۲i\theta}$

از اینجا چنین نتیجه می‌شود :

$$e^{۵i\theta}=۱ \quad \text{و} \quad \theta=\frac{۲k\pi}{۵}$$

بنابراین برای z پنج جواب زیر وجود دارد :

$$z=e^{i\frac{۲k\pi}{۵}}\ ,\quad (k=۰\,,\,۱\,,\,۲\,,\,۳\,,\,۴)$$

حل ۸۷ - چنانچه‌نقطهٔ Aسایهٔ شمار ۲ ونقطهٔ M سایهٔ شمار z و Oمبدأ آرایندهٔها باشد شرط $|z-۲|=|z|$ هم‌ارز با $OM=AM$ است و نقطهٔ M روی عمود میانهٔ پاره خط OAقرار دارد (خط $x=۱$).

اگر نقطهٔ B سایهٔ شمار مختلط $-۳-i$ باشد خواهیم داشت :

$$(\overrightarrow{Ox}\ \text{و}\ \overrightarrow{OM})=(\overrightarrow{Ox}\ \text{و}\ \overrightarrow{BM}) \mod ۲\pi$$

پس نیم‌خط‌های OM و BM بریکدیگر منطبق‌اند و در نتیجه M نقطهٔ برخوردOB

و عمود میانهٔ OA است. بنابراین با توجه به اینکه بردارهای $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{BM}$ هم سو هستند چنین داریم:

$$x=۱ \text{ و } y=\frac{۱}{۳} \quad \text{و} \quad z=۱+\frac{i}{۳}$$

حل ۸۸ - اگر نقطه‌های $M_۱$ و $M_۲$ و $M_۳$ به ترتیب سایهٔ شمارهای $z_۱$ و $z_۲$ و $z_۳$ باشند، از شرط $\frac{z_۱}{z_۲} \notin \mathbf{R}$ نتیجه می‌شود که نقاط O و $M_۱$ و $M_۲$ هم خط نیستند. پس دو بردار $\overrightarrow{OM_۱}$ و $\overrightarrow{OM_۲}$ تشکیل یک پایه از صفحه مختلط را می‌دهند و تنها به یک روش می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{OM_۳}=a\overrightarrow{OM_۱}+b\overrightarrow{OM_۲} \quad \text{و} \quad (a \text{ و } b\in\mathbf{R})$$

یا:

$$z_۳= a z_۱+bz_۲ \qquad (۱)$$

از ضرب دو طرف برابری (۱) در $\overline{z_۱}$ نتیجه می‌شود:

$$z_۳\overline{z_۱}=a\,|z_۱|^۲+bz_۲\cdot\overline{z_۱}$$

و چون $a\,|z_۱|^۲ \in \mathbf{R}$ است خواهیم داشت:

$$\operatorname{Im}(z_۳\cdot\overline{z_۱})=b\cdot\operatorname{Im}(z_۲\cdot\overline{z_۱})$$

به همین ترتیب:

$$\operatorname{Im}(z_۳\cdot\overline{z_۲})=a\cdot\operatorname{Im}(z_۱\cdot\overline{z_۲})$$

حل ۸۹ - بنابه فرض داریم $|z|=\frac{۱}{|z|}$ که از آن نتیجه می‌شود $|z|=۱$ پس سایهٔ z روی دایرهٔ به مرکز O و شعاع یک قرار دارد. هم‌چنین داریم $|z|=|۱-z|$ پس سایهٔ z روی خط‌عمود میانهٔ پاره‌خط OA قرار دارد (A نقطهٔ به آراینده‌های $(۱ , ۰)$ است). اما دایره و خط نامبرده دو نقطهٔ برخورد دارند که آرگومانهای

آن‌ها $\frac{\pi}{۳}$ و $-\frac{\pi}{۳}$ است. بنابراین دوجواب زیر را داریم :

$$z_۱=\cos\frac{\pi}{۳}+i\sin\frac{\pi}{۳}=-j^۲ \quad و \quad z_۲=\cos\frac{\pi}{۳}-i\sin\frac{\pi}{۳}=-j=\overline{z_۱}$$

حل ۹۰ - چون در معادلهٔ $z^۲-(۵-۱۴i)z-۲(۵i+۱۲)=۰$ داریم :

$$\Delta=(۵-۱۴i)^۲+۸(۵i+۱۲)=-۷۵-۱۰۰i$$

پس $\Delta\neq ۰$ و معادله دارای ریشه‌های $\frac{۵-۱۴i+\varepsilon d}{۲}$ است که در آن $\varepsilon=۱$ یا $\varepsilon=-۱$ و d یک ریشهٔ دوم Δ است. اگر قرار دهیم $d=u+iv$ خواهیم داشت $d^۲=u^۲-v^۲+۲iuv=-۷۵-۱۰۰i$ که از آن نتیجه می‌شود $u^۲-v^۲=-۷۵$ و $۲uv=-۱۰۰$ از حذف v بین این دو معادله، به معادلهٔ $u^۴+۷۵u^۲-۲۵۰۰=۰$ می‌رسیم. اما ریشه‌های معادلهٔ $X^۲+۷۵X-۲۵۰۰=۰$ عبارتند از -۱۰۰ و $+۲۵$ پس $u^۲=۲۵$ و $u=\varepsilon'.۵$ که در آن $\varepsilon'^۲=۱$ که چون‌در معادلهٔ $uv=-۵۰$ قراردهیم خواهیم داشت $v=-\varepsilon'.۱۰$. بنابراین ریشه‌های دومΔ عبارتند از $۵-۱۰i$ و $-۵+۱۰i$ و در نتیجه ریشه‌های معادله‌چنین خواهند بود:

$$\frac{(۵-۱۴i)+(۵-۱۰i)}{۲}=۵-۱۲i \quad , \quad \frac{(۵-۱۴i)-(۵-۱۰i)}{۲}=-۲i$$

معادلهٔ $z^۲-(۳+۴i)z-۱+۵i=۰$ مانند معادلهٔ بالا حل می‌شود. در این‌معادله ریشه‌های دوم Δ عبارتند از $۱+۲i$ و $-۱-۲i$ و ریشه‌های معادله $۲+۳i$ و $۱+i$ می‌باشند.

در معادلهٔ $z^۲-۲iz+۲-۴i=۰$ نیز ریشه‌های دوم Δ عبارتند از $۱+۲i$ و $-۱-۲i$ و ریشه‌های معادله $۱+۳i$ و $-۱-i$.

معادلهٔ $(z+1)^6+27(z-1)^6=0$ را که در آن $z\neq -1$ است می‌توان چنین نوشت $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^6=-\frac{1}{27}$ قرار می‌دهیم $\frac{z-1}{z+1}=u=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ و از آنجا خواهیم داشت $u^6=-\frac{1}{27}$ پس :

$$\rho^6=\frac{1}{27}\quad,\quad 6\theta=\pi+2k\pi$$

$$\Longrightarrow \rho=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad,\quad \theta_k=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\ ,\quad (k=0,1,\dots,5)$$

بنابراین جواب‌های زیر را داریم :

$$u_0=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ u_1=\frac{i}{\sqrt{3}}\quad,\quad u_2=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}$$

$$u_3=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\quad,\quad u_4=-\frac{i}{\sqrt{3}}\quad,\ u_5=\frac{1}{2}-\frac{i}{2\sqrt{3}}$$

اما از برابری $u=\frac{z-1}{z+1}$ نتیجه می‌شود $z=\frac{1+u}{1-u}$ و برای z جوابهای زیر بدست می‌آید :

$$z_0=2+i\sqrt{3}\quad,\quad z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\quad,\quad z_2=\frac{2+i\sqrt{3}}{7}$$

$$z_3=\frac{2-i\sqrt{3}}{7}\quad,\quad z_4=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\quad,\quad z_5=2-i\sqrt{3}$$

برای حل معادلهٔ $z^4=-119+120i$ قرار می‌دهیم $z^2=X$ دراین‌صورت معادلهٔ $X^2=-119+120i$ بدست می‌آید که جواب‌های آن عبارتند از $X=\pm(5+12i)$ و ازآنجا جوابهای زیر را برای z خواهیم داشت :

$$z_۱=۲-۳i\ ,\ z_۲=-۲+۳i\ ,\ z_۳=۳+۲i\ ,\ z_۴=-۳-۲i$$

برای حل دو معادلهٔ آخرچنین عمل می‌کنیم :

$$\frac{۱+i\sqrt{۳}}{۱-i\sqrt{۳}}=\frac{۲\left(\cos\frac{\pi}{۳}+i\sin\frac{\pi}{۳}\right)}{۲\left(\cos\left(-\frac{\pi}{۳}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{۳}\right)\right)}$$

$$=\cos\frac{۲\pi}{۳}+i\sin\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\frac{۱-i}{۱+i\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۲}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{۴}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right)\right)}{۲\left(\cos\frac{\pi}{۳}+i\sin\frac{\pi}{۳}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\cos\frac{۱۷\pi}{۱۲}+i\sin\frac{۱۷\pi}{۱۲}\right)$$

درنتیجه این دو معادله بصورت زیر در می‌آیند :

$$z^۶=\cos\frac{۲\pi}{۳}+i\sin\frac{۲\pi}{۳}\ ,\ z^۴=۲^{-\frac{۱}{۲}}\left(\cos\frac{۱۷\pi}{۱۲}+i\sin\frac{۱۷\pi}{۱۲}\right)$$

و برای معادلهٔ درجهٔ ششم بالا ، جوابهای :

$$z_k=\cos\frac{\frac{۲\pi}{۳}+۲k\pi}{۶}+i\sin\frac{\frac{۲\pi}{۳}+۲k\pi}{۶}=\cos\left(\frac{\pi}{۹}+\frac{k\pi}{۳}\right)$$

$$+i\sin\left(\frac{\pi}{۹}+\frac{k\pi}{۳}\right)\qquad ,\ ۰\leqslant k\leqslant ۵$$

و برای معادلهٔ درجهٔ چهارم بالا جوابهای :

$$z_k = ۲^{-\frac{۱}{۸}} \left[\cos\left(\frac{۱۷\pi}{۴۸} + \frac{k\pi}{۲}\right) + i \sin\left(\frac{۱۷\pi}{۴۸} + \frac{k\pi}{۲}\right) \right]$$
$$, \quad ۰ \leqslant k \leqslant ۳$$

را داریم:

حل ۹۱ — قرار می‌دهیم $\frac{۱+k(k+۱)+i}{۱+k(k+۱)-i} = r_k e^{i\theta_k}$ در این صورت داریم

$r_k = ۱$ و $\theta_k = ۲\,\mathrm{Arc}\,tg \frac{۱}{۱+k(k+۱)}$ که با فرض $k = tg\, u_k$ خواهیم داشت:

$$tg \frac{\theta_k}{۲} = \frac{(k+۱)-k}{۱+k(k+۱)} = tg(u_{k+۱} - u_k) \quad و \quad \frac{۱}{۲}\theta_k = u_{k+۱} - u_k$$

پس $\frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{n} \theta_k = u_{n+۱} - u_۱ = \mathrm{Arc}tg(n+۱) - \frac{\pi}{۴}$ و از آنجا

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=۱}^{n} \theta_k = ۲ \lim_{n\to\infty} \left[\mathrm{Arc}tg(n+۱) - \frac{\pi}{۴} \right] = ۲\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\pi}{۲}$$

بنابراین حد عبارت مورد نظر برابر است با i.

حل ۹۲ - برای این که درسه بر ABC داشته باشیم $AB = BC = CA$ باید و بسنده است که :

$$AB = AC \quad و \quad (AB, AC) = (Ox, AC) - (Ox, AB) = \pm \frac{\pi}{۳} \mod ۲\pi$$

و یا با استفاده از شمار های مختلط a ، b و c :

$$|b-a| = |c-a| \quad و \quad \arg(c-a) - \arg(b-a) = \pm \frac{\pi}{۳} \mod ۲\pi$$

یعنی: $c-a = (b-a)e^{-i\frac{\pi}{۳}}$ یا $c-a = (b-a)e^{i\frac{\pi}{۳}}$

پس شرط با یاویسندهٔ بالا چنین نوشته می‌شود :

$$\left[c-a-(b-a)e^{i\frac{\pi}{3}}\right]\left[c-a-(b-a)e^{-i\frac{\pi}{3}}\right]=0$$

که پس از ساده کردن به صورت زیر درمی‌آید :

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

حل ۹۳ - الف - درمعادلهٔ داده شده داریم $z'z''=1$ و ازآنجا $z'=\frac{1}{z''}$

پس خواهیم داشت :

$$|z'|=\frac{1}{|z''|} \quad \text{و} \quad \operatorname{Arg} z'+\operatorname{Arg} z''=0$$

ب - اگر u شمار مختلطی باشد که‌سایهٔ آن M است بنابه فرض داریم :

$$u=\frac{z'+z''}{2}=\cos\theta+i\sin\theta$$

بنابراین مکان نقطهٔ M هنگامی‌که θ تغییر می‌کند دایره‌ای است به مرکز مبدأ و شعاع یک.

حل ۹۴ - الف - نقطه‌های‌دوگانه عبارتند از جوابهای معادلهٔ $z=\frac{z}{2-z}$

یعنی : $\quad z=1 \quad \text{و} \quad z=0$

ب - داریم $z_2=\frac{z_1}{2-z_1}$ وچون با توجه به فرضهای مسأله $|2-z_1|>1$

است پس $|z_1|>|z_2|=\left|\frac{z_1}{2-z_1}\right|$ وانگهی $z_2\neq 0$ است (وگرنه خواهیم داشت $z_1=0$). بنابراین داریم $|z_1|>|z_2|>0$. ازاینجا شرطهای $z_2\neq 0$ و $|z_2|<1$ برای z_2 به دست می‌آید ، و با روشی مشابه نتیجه می‌شود

$|z_1| > |z_2|$ اکنون اگر روش بازگشت را بکار بریم ، به آسانی دیده می‌شود که دنبالهٔ ($|z_n|$) کاملاً کاهشی است. به علاوه این دنباله ازطرف پائین کراندار است (صفر یک کران پائین آن است) !. پس دارای حدی است که ممکن است مثبت ویا صفر باشد.

پ - داریم $|2-z_1| \geqslant 2-|z_1|$ و از آنجا نتیجه می‌شود $|2-z_n| \geqslant 2-|z_n|$. اما $|z_1| > |z_n|$ پس $2-|z_1| < 2-|z_n|$ ویا $1 < 2-|z_1| < |2-z_n|$ بنابراین خواهیم داشت :

$$|z_{n+1}| < \frac{|z_n|}{2-|z_1|} < \frac{|z_{n-1}|}{(2-|z_1|)^2} < \cdots < \frac{|z_1|}{(2-|z_1|)^n}$$

وچون هنگامی که n به سمت $+\infty$ می‌گراید $\dfrac{|z_1|}{(2-|z_1|)^n}$ به سمت صفر میل می‌کند (زیرا داریم $1 < 2-|z_1|$) پس خواهیم داشت : $\lim\limits_{n\to\infty} z_{n+1}=0$

حل ۹۵ - داریم $(z+1)^n=(\cos 2a+i\sin 2a)^n$ پس $z+1=\alpha_k(\cos 2a+i\sin 2a)$ که درآن α_k یکی از ریشه‌های n ام یک است ، یعنی :

$$\alpha_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad , \quad 0\leqslant k\leqslant n-1$$

از اینجا نتیجه می‌شود :

$$z_k=-1+\cos 2\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)+i\sin 2\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$=-2\sin^2\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)+2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\cos\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$=2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\left[\cos\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)+i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right]$$

و یا
$$z_k = ۲i\, \sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}$$

اکنون برای محاسبهٔ P_n حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ داده شده را ، هم از روی معادله و هم با استفاده از مقدار z_k که در بالا به دست آوردیم ، حساب‌می‌کنیم . داریم :

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^n(1-e^{2ina}) = (2i)^n \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}$$

$$= (2i)^n P_n \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}$$

اما :

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)} = e^{i\sum_{k=0}^{n-1}\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)} = e^{ina+\frac{i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k}$$

$$= e^{ina+\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}} = e^{ina}\, e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}}$$

پس :

$$P_n = \frac{(-1)^n(1-e^{2ina})}{(2i)^n e^{ina} e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}}} = \frac{(-1)^n(-2i\sin na)}{2^n i^n e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}}}$$

(از فرمول $2i\sin x = e^{ix}-e^{-ix}$ استفاده کرده‌ایم) .

و چون داریم $i^n = e^{i\frac{n\pi}{۲}}$ پس خواهیم داشت $P_n = \frac{sin\, na}{۲^{n-۱}}$

حل ۹۷ - داریم $۱+i = \sqrt{۲}\, e^{i\frac{\pi}{۴}}$ پس:

$$(۱+i)^{۱۳۵۲} = ۲^{۶۷۶} e^{۳۳۸ i\pi} = (-۱)^{۳۳۸} ۲^{۶۷۶} = ۲^{۶۷۶}$$

حل ۱۰۱ - چون $|a| = ۱$ است قرار می‌دهیم $a = cos\theta + i sin\theta$ دراین صورت خواهیم داشت:

$$z_k = \alpha_k e^{i\frac{\theta}{n}} = e^{۲\frac{ik\pi}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \quad , \quad k = ۱, ۲, \cdots, n$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$۱ + z_k = ۱ + e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{۲k\pi}{n}\right)}$$

$$= ۲ cos\left(\frac{\theta}{۲n} + \frac{k\pi}{n}\right)\left[cos\left(\frac{\theta}{۲n} + \frac{k\pi}{n}\right) + i\, sin\left(\frac{\theta}{۲n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right]$$

پس:

$$u_k = (۱ + z_k)^n = ۲^n cos^n\left(\frac{\theta}{۲n} + \frac{k\pi}{n}\right)\left[cos\left(\frac{\theta}{۲} + k\pi\right) + i\, sin\left(\frac{\theta}{۲} + k\pi\right)\right]$$

به طوری که دیده می‌شود یا آرگومان‌شمارهای مختلط u_k برابر است با $\frac{\theta}{۲}$ و یا برابر است با $\left(\frac{\theta}{۲} + \pi\right)$. بنابراین سایه‌های u_k روی یک خط قرار دارند.

حل ۱۰۲ - برای اینکه سایه‌های z ، $z^۲$ و $z^۴$ هم خط باشند بایاویسنده است

که $z(z+1)=\dfrac{z^4-z^2}{z^2-z}$ حقیقی باشد. اما از $z(z+1)\in \mathbf{R}$ نتیجه می‌شود

$y(2x+1)=0$ پس یا z یک شمار حقیقی دلخواه است ویا $z=-\dfrac{1}{2}+iy$ است

که در آن z عنصر دلخواهی از $\mathbf{R}$ می‌باشد.

حل ۱۰۳ - معادلهٔ $u^2+u+1=0$ دارای جوابهای $u_1=j$ و $u_2=j^2$ است

که در آنها داریم $\qquad j=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ و $j^3=1$

پس به جای دستگاه داده شده می‌توان دستگاه $x^4=j$ و $x^4=j^2$ را حل کرد.

j یکی از ریشه‌های چهارم $x^4=j$ است. زیرا داریم $j=j$. $j^4=j^3\cdot j$ سایر ریشه‌های آن از ضرب j در ریشه‌های چهارم ۱ به‌دست می‌آیند. یعنی:

$$x_1=j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\quad,\quad x_2=ij=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$$

$$x_3=-x_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\quad,\quad x_4=-ij=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

ریشه‌های $x^4=j^2$ را نیز می‌توان به همین روش پیدا کرد. این ریشه‌ها عبارتند از:

$$j^2\quad,\quad ij^2\quad,\quad -j^2\quad,\quad -ij^2$$

همچنین با توجه به اینکه داریم $(\bar{x})^4=\bar{j}=j^2$ می‌توان گفت که ریشه‌های $x^4=j^2$ مزدوج ریشه‌های $x^4=j$ یعنی $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ ، $\bar{x}_3$ و $\bar{x}_4$ می‌باشند.

ب - داریم:

$$x^8+x^4+1=(x^4+1)^2-x^4=(x^4-x^2+1)\,(x^4+x^2+1)$$

$$x^4-x^2+1=(x^2+1)^2-3x^2=(x^2-x\sqrt{3}+1)(x^2+x\sqrt{3}+1)$$

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

که از آنها نتیجه می‌شود :

$$x^۸+x^۴+۱=(x^۲-x\sqrt{۳}+۱)(x^۲+x\sqrt{۳}+۱)(x^۲-x+۱)(x^۲+x+۱)$$

با استفاده از برابری بالا می‌توان ریشه‌های معادلهٔ داده شده را به دست آورد.

حل ۱۰۴ - الف - ریشه‌های معادلهٔ $z^۵=-۱=e^{i\pi}$ عبارتند از $z_k=e^{i(۲k+۱)\pi/۵}$ ، $(k=۰\ ,\ ۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳\ ,\ ۴)$. همهٔ این ریشه‌ها به جز $z_۲=-۱$ جواب‌های معادلهٔ زیر می‌باشند :

$$\frac{z^۵+۱}{z+۱}=z^۴-z^۳+z^۲-z+۱=z^۲\left[z^۲+\frac{۱}{z^۲}-\left(z+\frac{۱}{z}\right)+۱\right]=۰$$

به‌جای حل معادلهٔ بالا می‌توان دستگاه :

$$\begin{cases} u=z+\dfrac{۱}{z} \\ u^۲-u-۱=۰ \end{cases}$$

راحل کرد . چنانچه $z=e^{i\alpha}$ باشد خواهیم داشت $u=e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}=۲\cos\alpha$. بنابراین ریشه‌های معادلهٔ $u^۲-u-۱=۰$ عبارتند از $۲\cos\frac{\pi}{۵}$ و $۲\cos\frac{۳\pi}{۵}$ و چون $۰<\frac{\pi}{۵}<\frac{\pi}{۲}<\frac{۳\pi}{۵}<\pi$ است پس $۲\cos\frac{\pi}{۵}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}>۰$ و $۲\cos\frac{۳\pi}{۵}=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}<۰$ واز آنجا داریم : $\cos\frac{\pi}{۵}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۴}$

ب - با استفاده از فرمول موآور داریم :

$$\cos ۵\alpha=۱۶\cos^۵\alpha-۲۰\cos^۳\alpha+۵\cos\alpha$$

چنانچه $\alpha=\frac{\pi}{۵}$ باشد $\cos ۵\alpha=\cos\pi=-۱$ است و اگر قرار دهیم $x=\cos\frac{\pi}{۵}$

خواهیم داشت : $16x^5-20x^3+5x+1=0$

از آنچه که گفته شد چنین برمی‌آید که $\cos\frac{3\pi}{5}$ و $\cos\pi=-1$ نیز ریشه‌های معادلهٔ بالا هستند. پس عبارت طرف راست این معادله بر $x+1$ بخش پذیر است ، یعنی:

$$16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)(16x^4-16x^3-4x^2+4x+1)$$
$$=(x+1)(4x^2-2x-1)^2$$

بنابراین $\cos\frac{\pi}{5}$ و $\cos\frac{3\pi}{5}$ ریشه‌های معادله $4x^2-2x-1=0$ می‌باشند و $\cos\frac{\pi}{5}$ ریشهٔ مثبت آن یعنی $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ است. به علاوه این ریشه‌ها دوگانه می‌باشند.

حل ۱۰۵ ـ الف - چون b ریشهٔ معادلهٔ (A) نیست می‌توان قرارداد $x=\frac{z-a}{z-b}$ که در آن x جواب معادلهٔ $x^n=u$ خواهد بود .

پس حل معادلهٔ (A) به تعیین ریشه‌های n ام شمار u برمی‌گردد و به هریک از این ریشه‌ها تنها یک مقدار z وابسته می‌شود مگر اینکه این ریشه برابر با ۱ باشد یعنی داشته باشیم $u=1$ ، که دراین صورت برای z تنها $n-1$ جواب خواهیم داشت . زیرا در این‌حالت معادله از درجهٔ $n-1$ است. باید دانست که مقادیر z که به این ترتیب به دست می‌آیند از یکدیگر متمایزند ، زیرا z تابعی هوموگرافیک از x است. معادلهٔ $x^6=1$ دارای ۶ ریشه است که یکی از آنها برابر با ۱ می‌باشد و برای ۵ ریشهٔ دیگر ، با در نظر گرفتن مقادیر a و b ، ریشه‌های معادلهٔ (A) چنین می‌باشند :

$$\begin{cases} x_1=-j^2 \\ z_1=-2 \end{cases}\qquad \begin{cases} x_2=j \\ z_2=-1 \end{cases}\qquad \begin{cases} x_3=-1 \\ z_3=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4=j^2 \\ z_4=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} x_5=-j \\ z_5=1 \end{cases}$$

چنانچه دوطرف معادله را بسط داده و ساده کنیم خواهیم داشت :

$$2z^5+5z^4-5z^2-2z=z(z^2-1)(2z^2+5z+2)=0$$

که از حل آن همان ریشه‌های بالا به دست می‌آید.

ب ـ سایه‌های a ، b و z را به ترتیب با A ، B و M نشان می‌دهیم ، دراین صورت داریم :

$$\frac{MA}{MB}=\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=|x|=\sqrt[n]{|u|}$$

اگر $|u|\neq 1$ باشد مکان نقطهٔ M دایره‌ای است که نسبت فاصله‌های نقاط آن از A و B برابر با $\sqrt[n]{|u|}$ است.

چنانچه $|u|=1$ باشد مکان نقطهٔ M عمود میانهٔ پاره خط AB است.

اگر همهٔ ریشه‌ها حقیقی باشند سایهٔ آنها روی ox قرار دارد ، و چون همهٔ ریشه‌ها متمایزند ، در حالت $n\geqslant 3$ ، سایهٔ ریشه‌ها نمی‌توانندهم روی یک دایره و هم‌روی ox واقع باشند . پس شرط بایاوبسنده‌برای حقیقی بودن همهٔ ریشه‌ها این‌است که محورoxعمود میانهٔ پاره خطAB باشد. به‌عبارت دیگر $|u|=1$ و a و b مزدوج یکدیگرباشند.

حل ۱۰۷ - الف ـ برابری داده شده را می‌توان چنین نوشت :

$$(Z-1)(z+1)^2=(Z+1)(z-1)^2$$

که از آن نتیجه می‌شود :

$$Z=\frac{z^2+1}{2z}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}(z+z_1)$$

ب - برابری $Z=\frac{1}{2}(z+z_1)$ نشان می‌دهد که سایهٔ Z نقطهٔ میانهٔپاره خطی است که سایه‌های z و z_1 را به‌هم می‌پیوند.

حل ۱۰۸ - می‌توان تبدیل داده شده را به تبدیلهای ساده تجزیه کرد و همتای دایره را بوسیلهٔ تبدیلهای به دست آمده معین کرد. اما دراینجا این مسأله را به روش آسان‌تری حل می‌کنیم. چون داریم $|z-۱|=۱$ پس می‌توان قرارداد $z=۱+e^{i\theta}$ که دراین صورت خواهیم داشت $z=i\,\mathrm{cotg}\,\theta$. بنابراین هنگامی که θ تغییر می‌کند سایهٔ z دایرهٔ داده شده وسایهٔ Z محور y هارا می‌پیماید . یعنی همتای دایره محور y هاست (محور انگاری) .

حل ۱۰۹ - قرار می‌دهیم $z=x+iy$ دراینصورت خواهیم داشت :

$$|z-۳|^{۲}=(x-۳)^{۲}+y^{۲} \quad , \quad |z-۵|^{۲}=(x-۵)^{۲}+y^{۲}$$

بنابراین شرط (۱) به‌صورت $x^{۲}-۶x+۹+y^{۲}=x^{۲}-۱۰x+۲۵+y^{۲}$ ویا $x=۴$ وشرط (۲) به صورت $(x-۳)^{۲}+y^{۲}=\frac{۱}{۲}[(x-۵)^{۲}+y^{۲}]$ ویا $(x-۱)^{۲}+y^{۲}=۸$ درمی‌آید. پس در حالت اول $z=۴+iy$ است $(y\in R)$ و در حالت دوم سایهٔ z دایرهٔ به معادلهٔ $(x-۱)^{۲}+y^{۲}=۸$ را می‌پیماید.

اکنون برای تعیین z به روش هندسی ، فرض می‌کنیم سایهٔ ۳ ، ۵ و z به‌ترتیب نقطه‌های A ، B و M از صفحهٔ xoy باشد . دراینصورت شرط (۱) هم‌ارز با $\|\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}\|$ وشرط (۲) هم‌ارز با $۲\|\overrightarrow{MA}\|=\sqrt{۲}\|\overrightarrow{MB}\|$ است. پس درحالت اول M نقطه‌ای است از عمود میانهٔ پاره خط AB. اما این عمودمیانه دارای معادلهٔ $x=۴$ است. بنابراین برای اینکه z در شرط (۱) صدق کند بایاوبسنده است که بخش حقیقی z برابر با ۴ باشد. درحالت دوم مکان نقطهٔ M دایره‌ای است به قطر CD به طوری که دونقطهٔ C و D برمحور xها قرار دارند و پاره خط AB را به نسبت $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ تقسیم می‌کنند. برای تعیین این دو نقطه C را بین A و B ، و D را در خارج A و B می‌گیریم. چون باید داشته باشیم :

$$\frac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{CB}\|}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad و \quad \frac{\|\overrightarrow{DA}\|}{\|\overrightarrow{DB}\|}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس خواهیم داشت :

$$\|\overrightarrow{DB}\| - \|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = ۲ \quad \text{و} \quad \|\overrightarrow{CA}\| + \|\overrightarrow{CB}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = ۲$$

بنابراین :

$$\left(۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\|\overrightarrow{CB}\| = ۲ \quad \text{و} \quad \left(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\|\overrightarrow{DB}\| = ۲$$

یعنی
$$\|\overrightarrow{DB}\| = ۴+۲\sqrt{۲} \quad \text{و} \quad \|\overrightarrow{CB}\| = ۴-۲\sqrt{۲}$$

درنتیجه C نقطه‌ای به طول $۱+۲\sqrt{۲}$ و D نقطه‌ای به طول $۲\sqrt{۲}-۱$ می‌باشد. پس دایرهٔ به قطر CD دایره‌ای‌است‌که مرکز آن به طول ۱ و شعاع آن $۲\sqrt{۲}$ است. بنابراین معادلهٔ این دایره چنین است :

$$(x-۱)^۲+y^۲=(۲\sqrt{۲})^۲=۸$$

حل ۱۱۲ - برای‌این‌که‌بردار a به زیر فضای برداری F متعلق باشد بایدداشته باشیم $a=\alpha e_۱+\beta e_۲$ که در آن α و β متعلق به $\mathbf{R}$ هستند. از برابری بالا چهار معادلهٔ زیر برای تعیین x ، y ، α و β به دست می‌آید :

$$-۲=\alpha-\beta \ , \ x=-\alpha+۲\beta \ , \ y=\alpha+۳\beta \ , \ ۳=۲\alpha+\beta$$

که ازآنها نتیجه می‌شود :

$$\beta=\frac{۷}{۳} \quad \text{و} \quad \alpha=\frac{۱}{۳} \ ، \ y=\frac{۲۲}{۳} \ ، \ x=\frac{۱۳}{۳}$$

حل ۱۱۳ - ماتریس زیر را که‌ستونهای آن به‌ترتیب مؤلفه‌های بردارهای $e_۱$ ، $e_۲$ ، $e_۳$ و $e_۴$ است درنظر می‌گیریم :

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۱ & -۵ \\ ۱ & ۲ & -۱ & -۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

چون دترمینان این ماتریس برابر با صفر است پس چهار بردار e_1 ، e_2 ، e_3 و e_4 بستگی‌خطی‌دارند. اما یکی ازدترمینانهای مرتبهٔسومی که می‌توان از ماتریس بالاجدا کرد، مثلاً دترمینانی که از سه سطر و سه ستون اول به دست می‌آید، مخالف باصفر است. بنابراین سه بردار e_1 ، e_2 و e_3 نا بستگی خطی دارند. پس بعد F_1 برابر با ۳است و (e_1 , e_2 , e_3) یک پایه ازF_1می‌باشد. همچنین a_1 و a_2 نا بستگی‌خطی‌دارند. پس بعد F_2 برابر با ۲ است و (a_1 , a_2) یک پایه از F_2 می‌باشد. وانگهی داریم :

$$\dim F_1 = ۳ \leqslant \dim (F_1 + F_2) \leqslant ۴ = \dim \mathbf{R}^۴$$

پس بعد F_1+F_2 یا ۳ است و یا ۴. اما F_1+F_2 را می‌توان به‌صورت زیر فضای برداری پدیدآمده به وسیلهٔ $F_1 \bigcup F_2$ درنظرگرفت. و چون چهار بردار e_1 ، e_2 ، e_3 و a_1 نابستگی خطی دارند (بررسی آن به عهدهٔ خواننده است) پس :

$\dim (F_1 + F_2) = ۴$ و (e_1 , e_2 , e_3 , a_1) یک پایه از F_1+F_2 است .

به علاوه داریم :

$$\dim (F_1 \bigcap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim (F_1 + F_2) = ۱$$

اگر بردار x متعلق به $F_1 \bigcap F_2$ باشد خواهیم داشت :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = y_1 a_1 + y_2 a_2$$

با درنظرگرفتن مؤلفه‌های بردارهای e_1 ، e_2 ، e_3 ، e_4 ، a_1 و a_2 چهار معادلهٔ زیر برای تعیین x_1 ، x_2 ، x_3 (همچنین y_1 و y_2) به‌دست می‌آید :

$$\begin{cases} ۲x_1 + x_2 + ۲x_3 - ۲y_1 - y_2 = ۰ \\ ۲x_1 + ۴x_2 + x_3 - y_1 - ۲y_2 = ۰ \\ x_1 + ۲x_2 - x_3 - ۴y_1 - ۳y_2 = ۰ \\ -x_2 - ۵y_1 - ۴y_2 = ۰ \end{cases}$$

دستگاه همگن بالا دارای رتبهٔ ۴ است و از آن نتیجه می‌شود $y_1 + y_2 = ۰$ که بافرض

$y_1=-y_2=\lambda$ خواهیم‌داشت $x=\lambda(a_1-a_2)$. پس بردار $(۱ , ۱ , ۱- , ۱-)b$ یک پایه از $F_1\cap F_2$ است . وانگهی داریم $b=۲e_1-e_2-e_3$.

حل ۱۱۷ - چون داریم $C\subset B$ کافی است ثابت‌کنیم $B\subset C$. اگر c عنصری از C باشد ، c به $A+C$ و درنتیجه به $A+B$ نیز متعلق است زیرا $A+B=A+C$. پس عنصر a از A و عنصر b از B وجود دارد به طوری‌که $c=a+b$. اما $B\subset C$ است‌پس b به C تعلق دارد و در نتیجه $a=c-b$به $A\cap C$ متعلق است و چون داریم $A\cap B=A\cap C$ پس a به $A\cap B$ و در نتیجه به B تعلق دارد. بنابراین $c=a+b$ که مجموع دو عنصر از B است به B متعلق است. پس هر عنصر از C عنصری است از B یعنی داریم $C\subset B$.

حل ۱۱۸ - با بکار بردن روش معمولی می‌توان نابستگی خطی چهار بردار داده شده را ثابت‌کرد و مؤلفه‌های بردار x را نسبت به آنها به‌دست‌آورد. اما دراینجا ماروش دیگری برای حل این‌مسأله بکار می‌بریم. بدین‌ترتیب که به‌جای این چهار بردار ، چهار ترکیب خطی ازآنها را درنظرمی گیریم وثابت می‌کنیم‌که این‌چهار ترکیب خطی‌نابستگی خطی دارند . همچنین‌نخست بین بردار x و چهار بردار a ، b ، c و d یک‌بستگی خطی پیدا می‌کنیم و سپس از روی آن مؤلفه‌های x را به دست می‌آوریم . چگونگی این عملیات از روی جدولهای (دستگاه بردارها) زیر آشکار است :

a	b	c	d	x
۱	۲	۱	۱	۷
۲	۳	۳	۲	۱۴
۱−	۰	۱−	۱	۱−
۲−	۱−	۰	۴	۲

a	$b'=b-۲a$	$c'=c-a$	$d'=d-a$	$x'=x-۷a$
۱	۰	۰	۰	۰
۲	-۱	۱	۰	۰
-۱	۲	۰	۲	۶
-۲	۳	۲	۶	۱۶

a	b'	$c''=c'+b'$	$d''=d'-c''$	$x''=x'-۳c''$
۱	۰	۰	۰	۰
۲	-۱	۰	۰	۰
-۱	۲	۲	۰	۰
-۲	۳	۰	۱	۱

به طوری که دردستگاه آخر دیده‌می‌شود چهار بردار a ، b' ، c'' و d'' نابستگی‌خطی دارند . پس چهار بردار a ، b ، c و d نیز نابستگی خطی دارند . وانگهی‌داریم $x''=d''$ که عبارتست از بستگی خطی بین بردارهای x ، a ، b ، c و d . اما $x''=d''$ به‌صورت $x'-۳c''=d'-c''$ ویا $x'=d'+۲c''$ در می‌آید که می‌توان آن را چنین نوشت :

$$x-۷a=d-a+۲(c'+b')$$

ویا:

$$x-۷a=d-a+۲(c-a+b-۲a)$$

که ازآن نتیجه می‌شود $x=۲b+۲c+d$ یعنی مؤلفه های x نسبت به پایهٔ (a , b , c , b) عبارتند از (۱ , ۲ , ۲ و ۰).

حل ۱۲۰ - الف - این مسأله را نیز به روش مسألهٔ ۱۱۸ حل می‌کنیم. بدین منظور دستگاه‌های زیر را تشکیل می‌دهیم :

a	b	c	a	$b-a$	$c-\alpha a$
1	1	α	1	0	0
1	α	1	1	$\alpha-1$	$1-\alpha$
α	1	1	α	$1-\alpha$	$1-\alpha^2$

a	$b-a$	$c-\alpha a+b-a$
1	0	0
1	$\alpha-1$	0
α	$1-\alpha$	$2-\alpha-\alpha^2$

اکنون گوییم یا $2-\alpha-\alpha^2=0$ است یعنی یا $\alpha=1$ ویا $\alpha=-2$ می‌باشد، که برای $\alpha=1$ سه‌بردار a ، b و c با یکدیگر برابرند و رتبهٔ دستگاه یک است ،و برای $\alpha=-2$ بردارهای a و b نابستگی خطی دارند و داریم $c=(1+\alpha)a+b$ ورتبهٔ دستگاه ۲ است.

یا $2-\alpha-\alpha^2\neq 0$ است یعنی $\alpha\neq 1$ و $\alpha\neq -2$. دراین صورت رتبهٔ دستگاه ۳ است.

ب - دراین حالت α یا $\bar{0}$ است ویا $\bar{1}$. اگر $\alpha=\bar{1}$ باشدسه‌بردار a ، b و c بایکدیگر برابرند و رتبهٔ دستگاه ۱ است . اگر $\alpha=\bar{0}$ باشد محاسبات قسمت الف نشان می‌دهد که a و b نابستگی‌خطی‌دارند .وچون داریم $a+b+c=\bar{0}$ پس رتبهٔ دستگاه ۲ است.

حل ۱۲۱ - اگر روش حل مسألهٔ ۱۱۸ را بکار بریم برای فرم خطی f_4-f_2 مؤلفه‌های $\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda}, 0, 0, 0\right)$ به دست می‌آید. ازاینجا نتیجه می‌شود که اگر $\mu\neq\lambda$ باشد چهار فرم f_1 ، f_2 ، f_3 و f_4 نابستگی خطی دارند و تشکیل یک پایه می‌دهند. دراین‌صورت اگر (e_1 , e_2 , e_3 , e_4) پایهٔ دوال پایهٔ (f_1 , f_2 , f_3 , f_4) باشد باید داشته باشیم :

$$f_i(e_j)=\delta_{ij} \quad , \quad (i\,,\,j=1\,,\,2\,,\,3\,,\,4)$$

فرض می‌کنیم x_i^1 ، x_i^2 ، x_i^3 و x_i^4 مؤلفه‌های بردار e_i نسبت به پایهٔ کانونیک $\mathbf{R}^4$ باشد. پس داریم :

$$f_1(e_1)=x_1^1-\lambda x_1^3=1 \quad , \quad f_2(e_1)=x_1^2-\frac{1}{\lambda}x_1^4=0$$

$$f_3(e_1)=x_1^1-\mu x_1^4=0 \quad , \quad f_4(e_1)=x_1^2-\frac{1}{\mu}x_1^4=0$$

از معادله‌های $f_2(e_1)=0$ و $f_4(e_1)=0$ نتیجه می‌شود $x_1^2=x_1^4=0$
و از معادله‌های $f_3(e_1)=0$ و $f_1(e_1)=1$ به‌دست می‌آوریم :

$$x_1^3=-\frac{1}{\lambda} \quad \text{و} \quad x_1^1=0$$

پس مؤلفه‌های e_1 عبارتند از $\left(0\,,\,-\frac{1}{\lambda}\,,\,0\,,\,0\right)$

برای تعیین مؤلفه‌های e_2 معادله‌های زیر را داریم :

$$x_2^1-\lambda x_2^3=0 \qquad x_2^2-\frac{1}{\lambda}x_2^4=1$$

$$x_2^1-\mu x_2^4=0 \qquad x_2^2-\frac{1}{\mu}x_2^4=0$$

که از حل آنها دستگاه جواب :

$$x_2^1=\frac{\lambda\mu^2}{\lambda-\mu} \quad , \quad x_2^2=\frac{\lambda}{\lambda-\mu}$$

$$x_2^3=\frac{\mu^2}{\lambda-\mu} \quad , \quad x_2^4=\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}$$

که عبارتند از مؤلفه‌های e_2 به دست می‌آید.

به همین‌ترتیب برای به‌دست آوردن مؤلفه‌های e_3 معادله‌های :

$$x_2^1 - \lambda x_2^3 = 0 \quad , \quad x_2^2 - \frac{1}{\lambda} x_2^4 = 0$$

$$x_2^1 - \mu x_2^4 = 1 \quad , \quad x_2^2 - \frac{1}{\mu} x_2^4 = 0$$

و برای به دست آوردن مؤلفه‌های e_4 معادله‌های :

$$x_4^1 - \lambda x_4^3 = 0 \quad , \quad x_4^2 - \frac{1}{\lambda} x_4^4 = 0$$

$$x_4^1 - \mu x_4^4 = 0 \quad , \quad x_4^2 - \frac{1}{\mu} x_4^4 = 1$$

را داریم ، که از حل آنها خواهیم داشت :

$$x_2^1 = 1 \quad , \quad x_2^2 = 0 \quad , \quad x_2^3 = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad x_2^4 = 0$$

$$x_4^1 = \frac{\lambda\mu^2}{\mu - \lambda} \quad , \quad x_4^2 = \frac{\mu}{\mu - \lambda}$$

$$x_4^3 = \frac{\mu^2}{\mu - \lambda} \quad , \quad x_4^4 = \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda}$$

که به‌ترتیب عبارتند از مؤلفه‌های e_2 و e_4 .

قسمت دوم مسأله به روش مشابه حل می‌شود که انجام آن را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم .

حل ۱۲۷ - الف - اگر f^* و g^* دو فرم خطی باشند (دو عنصر از F^*) که مقدار آنها برای هر بردار از Φ برابر با صفر است و λ عنصری از K باشد ، داریم :

$$f^*(x) = g^*(x) = 0 \implies (f^* - g^*)\,(x) = 0$$

$$f^*(x) = 0 \implies (\lambda f^*)(x) = 0$$

پس F^* یک زیر فضای برداری از E^* است.

ب- مقدار هرفرم خطی f^* از F^* برای هربرداراز Φ صفر است ، چون‌عنصرهای F ترکیب‌های خطی بردارهای Φ هستند ، پس مقدار f^* برای هر بردار از F صفر است. وانگهی اگر e_1 برداری از E باشد که به F متعلق نیست و بعد F را p بگیریم و e_2 ، e_3 ، ... ، e_{p+1} یک پایه از F باشد ، بردارهای e_1 ، e_2 ، ... ، e_{p+1} نابستگی خطی دارند. پس‌این‌بردارها را می‌توان به کمک بردارهای e_{p+2} ، ... ، e_n تکمیل کرد به طوری که e_1 ، ... ، e_n یک پایه از E باشد. دراین‌صورت هر بردار x از E تنها به یک روش به صورت $e = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ نوشته می‌شود. اکنون فرم خطی e^* از E^* را به‌طوری که $e^*(x)=x_1$ باشد در نظر می‌گیریم . دراین‌صورت مقدار e^* برای بردارهای e_2 ، ... ، e_{p+1} برابر با صفر است. پس مقدار e^* برای هربرداراز F صفر است بنابراین e^* به F^* متعلق است‌و مقدارآن برای e_1 برابر است با ۱ یعنی $e^*(e_1)=1$ پس برای هربردار از E مانند e_1 که متعلق به F نباشد ، دست کم یک فرم‌خطی از F^* مانند e^* وجود دارد که برای e_1 صفر نیست. ازاینجا نتیجه می‌شود که بردارهای F صفرهای مشترك عنصرهای F^* هستند.

پ - فرض می‌کنیم $\dim F^*=q$ و f_1^* ، f_2^* ، ... ، f_q^* یک پایه از F^* باشد. گسترش خطی E در K^q راکه با g نمایش می‌دهیم به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$f_i^*(x)=\xi_i \quad , \quad i=1, 2, \cdots, q$$

دراین‌صورت‌رتبهٔ گسترش g عبارت است ازبعد زیرفضای برداری پدید آمده به وسیلهٔ فرمهای f_1^* ، ... ، f_q^* یعنی برابر با q. اما ازطرف دیگر رتبهٔ g برابر است با $\dim E - \dim g^{-1}(0)$ ومی‌دانیم که $g^{-1}(0)$ (هستهٔ g) عبارت‌است از مجموعهٔ‌صفرهای مشترك عنصرهای F^* یعنی عبارت است از F . وچون $\dim F=p$ پس خواهیم داشت $q=n-p$ ویا $p+q=n$ یعنی $\dim F+\dim F^*=n$

حل ۱۳۱ -آشکار است که $\mathscr{B}=(\cos x , \sin x , 1)$ یک پایه از فضای‌برداری

است. زیرا $cos x$ ، $sin x$ و ۱ نابستگی خطی دارند و هرعنصر از E به‌صورت یک ترکیب E خطی از $cos\, x$ ، $sin x$ و ۱ می‌باشد. سایهٔ عنصرهای پایهٔ $\mathscr{B}$ به‌وسیله φ و ψ به‌ترتیب عبارتند از (۱ و ۰ و ۰) و ($sin x$ و $cos x$ و ۰) و ($cos x$ و $- sin x$ و ۰) بنابراین سایهٔ عنصرهای پایه $\mathscr{B}$ به وسیلهٔ $\varphi \circ \psi$ و $\psi \circ \varphi$ چنین خواهد بود :

$$\varphi \circ \psi : \quad - cos x \; , \; sin x \; , \; 0$$

$$\psi \circ \varphi : \quad cos x \; , \; - sin x \; , \; 0$$

از اینجا نتیجه می‌شود که گسترش $\varphi \circ \psi + \psi \circ \varphi$ عبارت است از آندومرفیسم صفرفضای برداری E . این مطلب را می‌توان با استفاده از ماتریس‌های گسترش‌های φ و ψ نیز به‌دست‌آورد. اگر A و B به‌ترتیب ماتریس‌های گسترشهای φ و ψ نسبت به پایهٔ $\mathscr{B}$ باشند ، داریم :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از ماتریس‌های A و B نتیجه می‌شود که ماتریس گسترش $\varphi \circ \psi + \psi \circ \varphi$ یعنی $AB + BA$ ، عبارت است از ماتریس صفر سه سطری و سه ستونی.

حل ۱۳۳ - الف - بنابر قانون ضرب ماتریس‌ها داریم :

$$A(x)A(y) = \begin{bmatrix} chx & shx \\ shx & chx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} chy & shy \\ shy & chy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

که درآن :

$$a = chxchy + shxshy = ch(x+y)$$

$$b = chxshy + shxchy = sh(x+y)$$

پس : $$A(x)A(y) = A(x+y)$$

ب - بنابر قسمت (الف) داریم :

$$(A(x))^{2}=A(x)A(x)=A(x+x)=A(2x)$$

فرض کنیم $n>2$ وداشته باشیم $(A(x))^{n-1}=A((n-1)x)$ دراین‌صورت داریم :

$$A^{n}(x)=A^{n-1}(x)A(x)=A((n-1)x+x)=A(nx)$$

بنابراین برابری $(A(x))^{n}=A(nx)$ برای هر $n\geqslant 1$ برقرار است وانگهی :

$$A(0)=\begin{pmatrix} ch0 & sh0 \\ sh0 & ch0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_{2}$$

پس می‌توان دستور بالا را برای $n=0$ نیز بکاربرد یعنی :

$$(A(x))^{0}=A(0x)=A(0)=I_{2}$$

به علاوه برای هر $x\in \mathbf{R}$ داریم :

$$A(x)A(-x)=A(x-x)=A(0)=I_{2}$$

پس $A(-x)=(A(x))^{-1}$ ازاینجا نتیجه می‌شود که برای‌هر $p<0$ و هرشمارحقیقی x داریم

$$[A(x)]^{p}=[(A(-x)^{-1}]^{p}=[A(-x)]^{-p}=A(px)$$

پس به طور خلاصه برای هر $n\in \mathbf{Z}$ داریم :

$$(A(x))^{n}=A(nx)$$

حل ۱۳۴ - داریم $B^{0}=I_{3}$ و :

$$B^{2}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و از آنجا :

$$B^3=B^2B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=0$$

پس برای هر $n>3$ داریم $B^n=0$

برای محاسبهٔ A^n نخست توجه کنیم که :

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

یعنی $A=I_3+B$. چون ماتریس‌های مربع مرتبه ۳ با قانون جمع و ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک حلقه می‌دهند و در این حلقه دوعنصر I_3 و B گردش پذیرند ، یعنی $I_3B=BI_3$ پس می‌توان برای آنها دستور دوجمله‌ای‌را بکاربرد(شمارهٔ ۴ . ۱ . ۹) و در نتیجه نوشت :

$$A^n=(I_3+B)^n=I_3^n+C_n^1\,I_3^{n-1}B+C_n^2\,I_3^{n-2}B^2+\cdots+B^n$$

چون برای $n\geqslant 3$ داشتیم $B^n=0$ پس :

$$A^n=I_3+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2$$

یعنی :

$$A^n=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&n&0\\0&0&n\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&\frac{n(n-1)}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$$

حل ۱۳۵ - فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ که در آن a ، b ، c و d شمار-
هایی حقیقی هستند. داریم :

$$A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{bmatrix}$$

از آنجا از برابری $A^2=A$ معادله های زیر نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} a^2+bc=a & (1) \\ b(a+d)=b & (2) \\ c(a+d)=c & (3) \\ bc+d^2=d & (4) \end{cases}$$

دوحالت درنظر می‌گیریم :

حالت اول $b=0$ - در این صورت از (۱) نتیجه می‌شود $a^2-a=0$ یعنی یا $a=0$ یا $a=1$ و از (۴) نتیجه می‌شود $d^2-d=0$ یعنی یا $d=1$ یا $d=0$. چون از (۳) نتیجه می‌شود $c(d+a-1)=0$ پس اگر $d+a\neq 1$ باشد $c=0$ و اگر $d+a=1$ باشد c دلخواه است. پس جوابها دراین حالت عبارتند از ماتریس های زیر :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن c شماری حقیقی و دلخواه است.

حالت دوم $b\neq 0$ - دراین‌صورت از (۲) نتیجه می‌شود $a+d=1$ واز (۱) حاصل می‌شود $c=\dfrac{a-a^2}{b}$. پس جواب‌ها دراین حالت ماتریس‌هایی به‌صورت زیرند :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \dfrac{a^2-a}{b} & 1-a \end{bmatrix}$$

که درآن $a \in \mathbf{R}$ و $b \in \mathbf{R}^*$

حل ۱۳۶ - چنانچه ماتریس X به صورت $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ فرض‌شود خواهیم داشت:

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+z & 2y+t \\ 2x+z & 2y+t \end{bmatrix}$$

و ازآنجا از برابری $AX=A$ دستگاه $\begin{cases} 2x+z=2 \\ 2y+t=1 \end{cases}$ به‌دست می‌آید .یعنی

$$\begin{cases} z=2-2x \\ t=1-2y \end{cases}$$

پس جوابهای معادله $AX=A$ ماتریس‌هایی به‌صورت زیرند :

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ 2-2x & 1-2y \end{bmatrix}$$

که درآن $x \in \mathbf{R}$ و $y \in \mathbf{R}$.

هم‌چنین اگر قرار دهیم $Y = \begin{bmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{bmatrix}$ دراین‌صورت:

$$YA = \begin{bmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x'+2y' & x'+y' \\ 2z'+2t' & z'+t' \end{bmatrix}$$

و از آنجا از برابری $YA=A$ دستگاه $\begin{cases} x'+y'=1 \\ z'+t'=1 \end{cases}$ نتیجه شود. یعنی :

$$\begin{cases} y'=1-x' \\ t'=1-z' \end{cases}$$

پس جوابهای معادلهٔ ماتریسی $YA=A$ ماتریس‌هایی به‌صورت زیرند :

$$Y=\begin{bmatrix} x' & 1-x' \\ z' & 1-z' \end{bmatrix}$$

که در آن $x'\in \mathbf{R}$, $z'\in \mathbf{R}$

حل ۱۳۷ - الف - فرض می‌کنیم a ، a' ، b ، b' و λ شمارهایی حقیقی باشند . داریم :

$$M(a\,,b)-M(a'\,,b')=\begin{pmatrix} a-a' & b-b' \\ b-b' & a-a' \end{pmatrix}=M(a-a'\,,\,b-b')$$

$$\lambda M(a\,,\,b)=\lambda\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ -\lambda b & \lambda a \end{bmatrix}=M(\lambda a\,,\,\lambda b)$$

$$M(a\,,\,b)M(a'\,,\,b')=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} aa'-bb' & ab'+ba' \\ -(ab'+ba') & aa'-bb' \end{bmatrix}=M(aa'-bb' \text{ و } ab'+ba')$$

بنابراین مجموع و حاصلضرب دوعنصر از E عنصری است از E و ضرب یک اسکالر در

عنصری از E عنصری است از E . پس E یک زیر فضای برداری و یک زیرحلقه از حلقه $\mathscr{M}$ است.

برای محاسبهٔ بعد E نخست توجه کنیم که ماتریس های :

$$J=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} \quad و \quad I=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

فضای E را پدید می‌آورند. زیرا داریم $M(a\ ,\ b)=aI+bJ$ به علاوه I و J نابستگی خطی دارند، زیرا متناسب نیستند. پس $(I\ ,\ J)$ یک پایهٔ E است، یعنی $\dim E=۲$.

ب - گسترش φ گسترشی خطی است. زیرا برای شمارهای حقیقی a،b،a'، b' وλ داریم :

$$\varphi[(a+ib)+(a'+ib')]=\varphi[(a+a')+i(b+b')]=M(a+a'\ ,\ b+b')$$
$$=M(a\ ,\ b)+M(a'\ ,\ b')=\varphi(a+ib)+\varphi(a'+ib')$$
$$\varphi[\lambda(a+ib)]=\varphi(\lambda a+i\lambda b)=M(\lambda a\ ,\ \lambda b)=\lambda M(a\ ,\ b)$$

به علاوه از تعریف φ برمی‌آید که φ سورژکتیو است. φ انژکتیو نیزهست، زیرا :

$$\varphi(a+ib)=۰ \Longrightarrow M(a\ ,\ b)=۰ \Longrightarrow aI+bJ=۰ \Longrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}=0 \Longrightarrow (a=۰ \text{ و } b=۰\ ) \Longrightarrow a+ib=۰$$

بنابراین φ یک ایزومرفیسم فضای برداری است. به‌علاوه داریم :

$$\varphi[(a+ib)(a'+ib')]=\varphi[aa'-bb'+i(ab'+ba')]$$
$$=M(aa'-bb'\quad ,\quad ab'+ba')$$
$$=M(a\ ,\ b)\ M(a'\ ,\ b')=\varphi(a+ib)\ \varphi(a'+ib')$$

پس φ یک ایزومرفیسم حلقه نیز هست.

از آنچه که گذشت نتیجه می‌شود که E یک حلقهٔ ایزومرف با هیأت $\mathbf{C}$ است . پس E یک هیأت است .

حل ۱۳۸ - ماتریس تعویض پایهٔ $(e_1 \ , \ e_2 \ , \ e_3)$ به پایهٔ $(e'_1 \ , e'_2 \ , e'_3)$ عبارتست از ماتریس :

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از فرض های صورت مسأله نتیجه می‌شود $e_1 = e'_1 - e'_2 - e'_3$ و $e_2 = e'_2$ و $e_3 = e'_3$ پس :

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس بنابر شمارهٔ ۹ . ۸ . ۶ ماتریس f درپایهٔ $(e'_1 \ , e'_2 \ , \ e'_3)$ عبارت است از :

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ -a+b & -b+c & -c+a \\ -a+c & -b+a & -c+b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} a+b+c & b & c \\ 0 & -b+c & -c+a \\ 0 & -b+a & -c+b \end{bmatrix}$$

حل ۱۳۹ - الف - داریم $\det B \neq 0$ یعنی ماتریس B وارون پذیر است و می‌توان نوشت $C=AB^{-1}$ پس خواهیم داشت :

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \ , \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ب - داریم $\det B=0$ و چون می‌توان از ماتریس B ماتریس وارون پذیر

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

را جدا کرد پس رتبهٔ B برابر با ۲ است.

آندومرفیسم‌های $\mathbf{R}^3$ راکه ماتریس‌های آنها نسبت به پایهٔ کانونیک $\mathscr{E}=(e_1\ ,\ e_2\ , e_3)$ همان A ، B و C است به‌ترتیب با f ، g و h نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم با در دست داشتن آندومرفیسم‌های f و g آندومرفیسم h را به‌دست آوریم. ستونهای ماتریس B به ترتیب عبارتند از مؤلفه‌های بردارهای $g(e_1)$ ، $g(e_2)$ و $g(e_3)$ نسبت به پایهٔ $\mathscr{E}$ ، و رتبهٔ این دستگاه بردار ، همان طوری که دیده شد ، برابر با ۲ است. بین این بردارها بستگی :

$$3g(e_1)+g(e_2)+0g(e_3)=0$$

وجود دارد. برای‌این‌که $h\circ g=f$ باشد باید داشته باشیم :

$$3f(e_1)+f(c_2)+0f(e_3)=0$$

که از آن نتیجه می‌شود $12+3+5k=0$ ویا $k=-3$. اگر این شرط برقرار باشد معادلهٔ $h\circ g=f$ به‌صورت :

$$h[g(e_1)]=f(e_1)\quad , \quad h[g(e_2)]=f(e_2)$$

نوشته می‌شود ، که می‌توان آنرا به صورت ماتریسی زیر نیز نوشت :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 8 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

از معادلهٔ ماتریسی بالا شش معادلهٔ خطی زیر از ۹ مجهول c_{ij} به دست می‌آید :

$$c_{11}+2c_{12}-5c_{13}=-2\quad , \quad 2c_{11}-c_{12}=1$$

$$c_{21}+2c_{22}-5c_{23}=8\quad , \quad 2c_{21}-c_{22}=1$$

$$c_{31}+2c_{32}-5c_{33}=4\quad , \quad 2c_{31}-c_{32}=3$$

با فرض $c_{۱۳}=\alpha$ ، $c_{۲۳}=\beta$ و $c_{۳۳}=\gamma$

جواب دستگاه بالا به‌صورت زیر درمی‌آید (برای حل دستگاه بالا می‌توانستیم نخست جواب دستگاه همگن وابسته به‌این دستگاه‌را پیدا کنیم وسپس یک جواب‌ویژهٔ دستگاه را به آن بیفزاییم) :

$$c_{۱۱}=\alpha \ , \ c_{۱۲}=۲\alpha-۱ \ , \ c_{۲۱}=\beta+۲$$

$$c_{۲۲}=۲\beta+۳ \ , \ c_{۳۱}=\gamma+۲ \ , \ c_{۳۲}=۲\gamma+۱$$

بنابراین برای ماتریس c جوابهای بیشماری به‌صورت زیر خواهیم داشت :

$$C=\begin{bmatrix} \alpha & ۲\alpha-۱ & \alpha \\ \beta+۲ & ۲\beta+۳ & \beta \\ \gamma+۲ & ۲\gamma+۱ & \gamma \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha & ۲\alpha & \alpha \\ \beta & ۲\beta & \beta \\ \gamma & ۲\gamma & \gamma \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

حل ۱۴۰ - الف - میدانیم که رتبهٔ هرماتریس ، با عنصرهای واقع درهیأت K، عبارت‌است از شمارهٔ ماکزیمم ستونهایی (یا سطرهایی) از ماتریس که نابستگی خطی‌دارند به شرط این‌که هرستون را به عنوان برداری از K^n درنظر بگیریم .

دراینجا از ماتریس اولی سه‌بردار :

$$v_۳=(-۴\ ,\ ۰\ ,\ -۱\ ,\ ۴)\ ,\ v_۲=(-۳,\ ۱\ ,\ ۰\ ,\ ۲)\ ,\ v_۱=(۲\ ,\ ۳,-۱,۰)$$

از فضای $Q^۴$ بدست می‌آید . اما رتبهٔ این ماتریس یعنی شمارهٔ ماکزیممی از این سه بردار که نابستگی خطی دارند. بنابراین رتبهٔ این ماتریس یعنی بعد زیرفضایی از $Q^۴$ که‌بوسیلهٔ این سه‌بردار پدیدمی‌آید. اما زیرفضای پدید آمده بوسیلهٔ‌این سه‌بردار با زیرفضای پدید آمده بوسیله سه‌بردار :

$$v'_۳=v_۳+۲v_۱ \ ، \ v'_۲=۲v_۲+۳v_۱ \ ، \ v'_۱=v_۱$$

یکی است(زیرا بردارهای v'_1 ، v'_2 و v'_3 ترکیبی خطی از v_1 , v_2 , v_3 هستند).
اما داریم :

$$v'_1=(2\,,\,3\,,\,-1\,,\,0)\,,\quad v'_2=(0\,,\,11\,,\,-3\,,\,4)$$
$$v'_3=(0\,,\,11\,,\,-3\,,\,4)$$

چنانکه دیده می‌شود از این سه‌بردار v'_1 و v'_2 نابستگی خطی دارند پس رتبهٔ ماتریس مورد نظر ۲ است .

ب - مانند قسمت الف عمل می‌کنیم. دراینجا پنج برداراز Q^4 داریم که آنهارا به ترتیب v_1 , v_2 , v_3 , v_4 و v_5 مینامیم. بعد زیر فضای پدید آمده بوسیلهٔ این ۵ بردار با بعد زیر فضای پدید آمده بوسیلهٔ ۵ بردار زیر یکی است :

$$v_1\;,\;v'_2=v_2-7v_1\quad,\quad v'_3=v_3-5v_1$$
$$v'_4=v_4-3v_1\quad,\quad v'_5=v_5+2v_1$$

چون
$$v'_3=v'_4=(0\,,\,2\,,\,-6\,,\,-8)$$

پس بعد فضای پدید آمده‌بوسیله‌این ۵ بردار برابراست با بعد زیر فضای پدید آمده‌بوسیلهٔ چهار بردار v_1 ، v'_2 ، v'_3 و v'_5 . اما این چهار بردار همان زیر فضایی را پدید می‌آورند که چهار بردار v_1 ، v'_2 ، $v''_3=v'_3-\frac{1}{2}v'_2$ و v'_5 و زیر فضای پدید آمده بوسیله این چهار بردار همان زیر فضای پدید آمده بوسیلهٔ چهار بردار زیر است :

v_1	v'_2	v''_3	$v''_5=2v'_5-5v''_3$
1	0	0	0
0	4	0	0
2	-16	2	0
3	-22	3	3

چنانکه دیده می‌شود این چهار بردار نابستگی خطی‌دارند ، پس رتبهٔ ماتریس مورد نظر ۴ است .

حل ۱۴۱ - می‌دانیم که رتبهٔ یک ماتریس M بزرگترین شمار درستی است مانند s به‌طوری که بتوان از M یک ماتریس مربع مرتبهٔ s با دترمینان مخالف با صفر جدا کرد.
دراینجا داریم:

$$\det A=\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & -۱ \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{vmatrix}=-۶$$

پس اگر ماتریس A را در هیأت $Z/۵Z$ درنظربگیریم داریم $\det A=-۶=+۴\neq ۰$
و درنتیجه رتبهٔ A ، که ماتریسی است مربع ، برابر با ۴ است.
ولی اگر ماتریس A را در هیأت $Z/۲Z$ یا هیأت $Z/۳Z$ در نظر بگیریم در هردوحالت داریم $\det A=-۶=۰$. درحالت اول دترمینان ماتریس

$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ، که از ماتریس A جدا شده است برابر است با ۱ و در نتیجه مخالف با صفر است. پس دراین حالت رتبهٔ A برابر با ۳ است.

درحالت دوم ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ که‌ازماتریس A جدا شده‌است

دترمینانش برابر با $۲\neq ۰$ است. پس دراین حالت نیز رتبهٔ A برابر با ۳ است.

حل ۱۴۲ - الف - اگر $x\in N(f)$ باشد داریم:

$$f(x)=۰ \quad \text{و} \quad f^{۲}(x)=f[f(x)]=۰$$

یعنی $x \in N(f^2)$ پس $N(f) \subset N(f^2)$

به همین روش می‌توان ثابت کرد که $N(f^2) \subset N(f^3) \subset \cdots$

اکنون فرض می‌کنیم x عنصری از $f^k(E)$ باشد $(k \geqslant 2)$. دراین‌صورت عنصر a از E وجود دارد به طوری که:

$$f^k(a) = x = f^{k-1}[f(a)]$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که x سایهٔ عنصر $f(a)$ بوسیله گسترش f^{k-1} است .

پس $x \in f^{k-1}(E)$ و بنابراین $f^{k-1}(E) \supset f^k(E)$

ب - فرض می‌کنیم $f^2 = 0$ باشد به عبارت دیگر برای هر x متعلق به E داشته باشیم $f[f(x)] = 0$ اگر $y \in f(E)$ باشد عنصر x از E وجود دارد به طوری که

$f(x) = y$ پس $f(y) = f^2(x) = 0$ یعنی $y \in N(f)$

بنابراین خواهیم داشت $f(E) \subset N(f)$

به‌وارون فرض می‌کنیم $f(E) \subset N(f)$ باشد . چون برای هر x از E داریم $f(x) \in f(E)$ پس $f(x) \in N(f)$.ودرنتیجه خواهیم داشت $f[f(x)] = 0$ یعنی $f^2 = 0$

حل ۱۴۳ - می‌دانیم که بعد $f(\mathbf{R}^3)$ برابر است با رتبهٔ ماتریس A . اما به آسانی دیده‌می‌شود که در ماتریس A دوسطر اول (وهمچنین دوسطر آخر) متناسب‌می‌باشند. بنابراین از ماتریس A نمی‌توان‌دترمینان مرتبه‌سومی جدا کرد که مخالف‌باصفرباشد ولی می‌توان دترمینان مرتبهٔ دومی (به وسیله سطر اول وسطر سوم) جدا کرد که مخالف با صفر باشد. بنابراین دو تا ازسه بردار ستونی ماتریس A نابستگی‌خطی دارند ، پس $\dim f(\mathbf{R}^3) = 2$. ازاینجا نتیجه می‌شود که

$$\dim N(f) = 3 - 2 = 1$$

برای بدست آوردن یک پایه از $N(f)$ قرار می‌دهیم $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ و معادلهٔ $AX = 0$ را حل می‌کنیم .

بنابرآنچه که دیده شد ، در حل معادلهٔ ماتریسی $AX=0$ کافی است دومعالهٔ :

$$x_1+2x_2+3x_3=0$$

$$-x_1+4x_2+x_3=0$$

را درنظر گرفت. دراین‌صورت از حل این دو معادله خواهیم داشت:

$$\frac{x_1}{0}=\frac{x_2}{2}=\frac{x_3}{-3}$$

بنابراین هستهٔ f یک زیر فضای برداری یک بعدی از $\mathbf{R}^3$ است که از بردارهای $(0\lambda\ ,\ 2\lambda\ ,\ -3\lambda)$ تشکیل می‌شود . یک پایه ازاین زیر فضا عبارت است از بردار $X_1(0\ ,\ 2\ ,\ -3)$.

حل ۱۴۴ - با استفاده از عبارت ماتریس $M(a\ ,\ b)$ می‌توان درستی همهٔ ویژگیهای یک حلقهٔ جابجایی را بررسی کرد . اما در اینجا ما مسأله را به روش دیگری حل می‌کنیم. داریم :

$$M(a\ ,\ b)=a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q & p\end{bmatrix}=a\mathbf{I}+b\mathbf{J}$$

که در آن قرارداده‌ایم :

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ ,\ J=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q & p\end{bmatrix}$$

پس E عبارت است از مجموعهٔ ماتریسهایی به‌صورت $aI+bJ$. وانگهی تجزیه ماتریس $M(a\ ,\ b)$ به‌صورت $aI+bJ$ یکتاست (اثبات این مطلب آسان است) .

اکنون برابری زیر را درنظر می گیریم :

$$M(a\,,b)+M(a'\,,b')=aI+bJ+a'I+b'J=(a+a')I+(b+b')J$$
$$=M(a+a'\,,\,b+b')$$

این برابری یک ایزومرفیسم گروه جمعی $\mathbf{R}^2$ روی E معین می‌کند . پس مجموعهٔ E دارای یک ساختمان گروه جمعی است . برای بررسی قانون ضرب ماتریس J^2 راحساب می‌کنیم:

$$J^2=\begin{bmatrix} -q & p \\ -pq & -q+p^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -q & 0 \\ 0 & -q \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & p \\ -pq & p^2 \end{bmatrix}$$

$$=-q\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+p\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & p \end{bmatrix}=-qI+pJ$$

در نتیجه برای حاصل‌ضرب دو ماتریس خواهیم داشت :

$$M(a\,,\,b)\,.\,M(a'\,,\,b')=(aI+bJ)\,(a'I+b'J)=$$
$$aa'I+(ab'+a'b)\,J+bb'J^2$$
$$=(aa'-qbb')\,I+(ab'+a'b+bb')J$$
$$=M(aa'-qbb'\,,\,ab'+a'b+pbb')$$

پس مجموعهٔ E برای قانون ضرب بسته است . به علاوه برابری بالا نسبت به $(a\,,b)$ و $(a'$ و $b')$ متقارن است. بنابراین قانون ضرب ویژگی جابجایی دارد . وجود ویژگی‌های انجمنی و پخشی را می‌توان به آسانی ثابت کرد. به‌این ترتیب E یک حلقهٔ جابجایی‌است. وانگهی این حلقه‌یکه دار است. زیرا داریم $I=M(1\,,0)\in E$ پس برای اینکه E یک هیأت باشد ، بایاوبسنده است که هرماتریس $M(a\,,b)$ از E بجزماتریس‌صفر که‌برای $a=0$ و $b=0$ به دست می‌آید ، دارای ماتریس وارونی‌مانند

$M(a' \text{ و } b')$ در E باشد یعنی داشته باشیم :

$$M(a\ ,\ b)\ .\ M(a'\ ,\ b') = I$$

که از آن دومعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$\begin{cases} aa' - qbb' = 1 \\ ab' + a'b + pbb' = 0 \end{cases}$$

این دستگاه که نسبت به a' و b' خطی است ، باید برای هر مقدار a و b (که هر دو باهم صفر نباشند) دارای یک جواب و تنها یک جواب باشد . پس دترمینان :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -qb \\ b & a+pb \end{vmatrix} = a^2 + pab + qb^2$$

همواره باید مخالف باصفر باشد . اما با فرض $a \neq 0$ می‌توان نوشت :

$$\Delta = a^2 \left[1 + p\left(\frac{b}{a}\right) + q\left(\frac{b}{a}\right)^2 \right]$$

پس برای این‌که $\Delta \neq 0$ باشد بایدکروشهٔ بالا هرگز صفر نشود یعنی داشته باشیم $p^2 - 4q < 0$ اگر $a = 0$ و $b \neq 0$ باشد ، Δ را چنین می‌نویسیم :

$$\Delta = b^2 \left[q + p\left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right]$$

وهمان نتیجهٔ بالا به‌دست می‌آید .

بنابراین اگر $p^2 - 4q < 0$ باشد حلقهٔ E یک هیأت است . در حالتی‌که $p^2 - 4q \geqslant 0$ باشد E یک حلقهٔ جابجایی یکه‌دار است (دراینحالت E یک حلقهٔ انتگرنیست) .

حل ۱۴۵ - بعد فضای برداری E را p می‌گیریم . دراین صورت داریم :

$$\dim N(u) + \dim u(E) = p$$

پس اگر هستهٔ u یعنی $N(u)$ بر $u(E)$ منطبق باشد داریم $\dim N(u)=\dim u(E)$ ودر نتیجه $2\dim N(u)=p$ یعنی p زوج است. اکنون قرار می‌دهیم $p=2n$ و e_1 ، e_2 ، ... ، e_n رایک‌پایه از $N(u)$ می‌گیریم .پس :

$$u(e_i)=0 \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

پایهٔ (e_i) از $N(u)$ را به وسیلهٔ بردارهای e_{n+1} ، ... ، e_{2n} کامل می‌کنیم به طوری‌که e_1 ، e_2 ، ... ، e_{2n} یک پایه از E تشکیل دهند. دراین صورت $u(E)$ به وسیلهٔبردارهای :

$$u(e_1)\ ,\ \cdots,u(e_n)\ ,\ u(e_{n+1})\ ,\cdots,u(e_{2n})$$

و یا

$$u(e_{n+1})\ ,\cdots\ ,\ u(e_{2n})$$

پدید می‌آید . چون می‌خواهیم $N(u)=u(E)$ باشد ، مثلاً قرار می‌دهیم :

$$u(e_{n+1})=e_n\ ,\ u(e_{n+2})=e_{n-1}\ \cdots\ ,\ u(e_{2n})=e_1$$

در این‌صورت ماتریس u نسبت به پایهٔ (e_i) ، $1 \leqslant i \leqslant 2n$ به‌صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

بنابراین گسترش u وجود دارد . اما این گسترش دوسویی نیست.این مطلب‌از حل مسأله ۱۴۲ نیز نتیجه می‌شود زیرا داریم $u^2=0$.

حل ۱۴۶ - داریم :

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اکنون اگر پایهٔ $(e_1 , \ldots , e_n)$ از $\mathbf{R}^n$ را درنظر بگیریم ، وگسترشی را که ماتریس آن نسبت به این پایه همان ماتریس A است با φ نشان دهیم ، داریم :

$$\varphi(e_1)=0 \ , \ \varphi(e_2)=e_1 \ , \ \varphi(e_3)=e_2 \ , \ \cdots \ , \ \varphi(e_n)=e_{n-1}$$

پس $(e_1 , e_2 , \cdots , e_{n-1})$ یک پایه از $\varphi(\mathbf{R}^n)$ است یعنی بعد $\varphi(\mathbf{R}^n)$ برابر است با $n-1$ پس رتبهٔ ماتریس A برابر است با $n-1$. همچنین داریم :

$$\varphi^2(e_1)=0 \ , \ \varphi^2(e_2)=\varphi(e_1)=0 \ , \ \varphi^2(e_3)=e_1 \cdots , \varphi^2(e_n)=e_{n-2}$$

پس $(e_1 , e_2 , \cdots , e_{n-2})$ یک پایه از $\varphi^2(\mathbf{R}^n)$ است یعنی بعد $\varphi^2(\mathbf{R}^n)$ برابر است با $n-2$ پس رتبهٔ ماتریس A^2 برابر است با $(n-2)$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که رتبهٔ ماتریس A^k ، برای $k<n$ ، برابر است با $(n-k)$. وبرای $k\geqslant n$ داریم $A^k=0$ یعنی A^k صفر است.

جواب ۱۴۷ - ثابت می‌شود که φ_1 ، φ_2 ، φ_3 و φ_4 بستگی خطی دارند و داریم :

$$3\varphi_1+2\varphi_2+2\varphi_3+\varphi_4=0$$

به علاوه رتبهٔ دستگاه (φ_i) برابر با ۳ است . وچون درمعادلهٔ بالا ضریب های φ_i همه

مثبت می‌باشند پس دستگاه $\varphi_i(u) > 0$ ، $i = 1, 2, 3, 4$ ، جواب ندارد . یعنی بخش A تهی است.

حل ۱۵٦ - با استفاده‌از برابری $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ، دترمینان اول به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

که دترمینان اول یک دترمینان **واندرموند** است (مسألهٔ شمارهٔ ۱۰۸ را ببینید) و دترمینان دوم برابر باصفراست. پس عبارت بالا برابر است با :

$$2(\cos\beta - \cos\alpha)(\cos\gamma - \cos\alpha)(\cos\gamma - \cos\beta)$$

برای‌محاسبهٔ دترمینان Δ_n (دترمینان دوم) همهٔ سطرهای Δ_n را با سطر اول‌جمع‌می‌کنیم و از $p+nq$ فاکتور می‌گیریم ، خواهیم داشت :

$$\Delta_n = (p+nq)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q & p+q & q & \cdots & q \\ q & q & p+q & \cdots & q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ q & q & q & \cdots & p+q \end{vmatrix}$$

که اگرستون اول را به‌ترتیب از همهٔ ستونهای دیگرکم‌کنیم نتیجه می‌شود :

$$\Delta_n = (p+nq)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & p & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p & 0 & 0 & \cdots & p \end{vmatrix} = (p+nq)p^{n-1}$$

برای محاسبهٔ دترمینان آخر، سطر اول را به‌ترتیب از همه سطرهای دیگر کم می‌کنیم، در نتیجه یک دترمینان قطری به دست می‌آید که مقدار آن برابر است با $a_1a_2\cdots a_n$.

حل ۱۵۷ - می‌دانیم که هرچهار بردار دلخواه از فضای برداری $\mathbf{R}^3$، بستگی خطی دارند. یعنی داریم:

$$\lambda_1 \vec{v}_1+\lambda_2 \vec{v}_2+\lambda_3 \vec{v}_3+\lambda_4 \vec{v}_4=\vec{0}$$

که در آن همهٔ λ_i ها باهم صفر نیستند. فرض می‌کنیم $\lambda_1\neq 0$ و دترمینان $\lambda_1\Delta$ را به‌صورت زیردر نظر می‌گیریم:

$$\lambda_1\Delta=\begin{vmatrix} \lambda_1\vec{v}_1^2 & \lambda_1\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 & \lambda_1\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3 & \lambda_1\vec{v}_1\cdot\vec{v}_4 \\ \vec{v}_2\cdot\vec{v}_1 & \vec{v}_2^2 & \vec{v}_2\cdot\vec{v}_3 & \vec{v}_2\cdot\vec{v}_4 \\ \vec{v}_3\cdot\vec{v}_1 & \vec{v}_3\cdot\vec{v}_2 & \vec{v}_3^2 & \vec{v}_3\cdot\vec{v}_4 \\ \vec{v}_4\cdot\vec{v}_1 & \vec{v}_4\cdot\vec{v}_2 & \vec{v}_4\cdot\vec{v}_3 & \vec{v}_4^2 \end{vmatrix}$$

اگر در دترمینان بالا سطرهای دوم و سوم و چهارم را به ترتیب در λ_2، λ_3 و λ_4ضرب کنیم و با سطر اول جمع کنیم مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند، و عنصرهای سطر اول آن برابر می‌شوند با:

$$\vec{v}_i\,(\lambda_1 \vec{v}_1+\lambda_2 \vec{v}_2+\lambda_3 \vec{v}_3+\lambda_4\vec{v}_4)=\vec{v}_i\cdot\vec{0}=0\,,\; i=1\;2\;,3\;,4$$

یعنی عنصرهای سطر اول دترمینان $\lambda_1\Delta$ صفرند پس $\lambda_1\Delta=0$ و درنتیجه $\Delta=0$

حل ۱۶۸ - الف - A زیرگروه B و زیرگروه ممتاز G است، پس A زیرگروه ممتاز B نیز هست و در نتیجه B/A دارای معنی است. اگر $\xi=zA$ یک عنصردلخواه G/A باشد $\eta=zB$ یک عنصر G/B است. به علاوه اگر z' نمایندهٔ دیگری ازکلاس ξ باشد داریم $\xi=z'A$ و در آن‌صورت خواهیم داشت $\eta=z'B$. زیرا از $z'\in zA$ نتیجه می‌شود $zB=z'B$. از اینجا نتیجه می‌شود که بستگی $\xi\to\eta$ یک گسترش G/A در G/B معین می‌کند. این گسترش را f می‌نامیم. پس $f(zA)=zB$ ودر

نتیجه f سورژکیتو است. اگر ξ_1 عنصر دیگری از G/A وبه صورت $\xi_1 = z_1A$ باشد داریم :

$$f(\xi\xi_1) = f((zA)(z_1A)) = f(zz_1A) = zz_1B = (zB)(z_1B) = f(\xi)f(\xi_1)$$

پس f یک هومومرفیسم گروه است .

چون عنصر بی‌اثر گروه G/B برابر با B است داریم :

$$\xi = zA \in \text{Ker } f \Longleftrightarrow f(\xi) = B \Longleftrightarrow zB = B \Longleftrightarrow z \in B \Longleftrightarrow \xi \in B/A$$

یعنی هستهٔ f برابر با B/A است و چون هستهٔ هرهمومرفیسم یک زیرگروه ممتاز است پس B/A زیرگروه ممتاز G/A است . به علاوه تجزیهٔ کانونیک f بصورت زیر است:

$$\begin{array}{ccc} G/A & \xrightarrow{f} & G/B \\ \downarrow & & \uparrow i \\ (G/A)/(B/A) & \xrightarrow{h} & f(G/A) = G/B \end{array}$$

که در آن h یک ایزومرفیسم است.

ب - ۱ - صفحهٔ معمولی‌را که‌از دو محور عمود برهم برخوردار است در نظرمی گیریم و زیر مجموعهٔ G از گروه تبدیلهای صفحه را به روش زیر تعریف می کنیم :

هرعنصرازG یا یک چرخش به مرکز مبداء و یا یک تقارن نسبت به یک محور گذرنده برمبداء می‌باشد. برای قانون ترکیب تبدیلها ، G یک گروه است. زیرا از طرفی ترکیب دو چرخش یک چرخش ، ترکیب دو تقارن یک تقارن و ترکیب یک تقارن ویک چرخش یک چرخش است . و از طرف دیگر تبدیل همانی ، یک چرخش به زاویهٔ صفر است.

اگر a و b دو تقارن متعلق به G باشند داریم $a^2 = b^2 = I$ که در آن I تبدیل همانی صفحه است . پس اگر قرار دهیم $A = \{a\ ,\ I\}$ ، $B = \{b\ ,\ I\}$

هریک ار زیر مجموعه‌های A و B یک زیرگروه G می‌باشد و داریم :

$$AB=\{a, b, I, ab\}$$

اما AB یک زیرگروه نیست زیرا $(ab)^2 \notin AB$.

۲ - چون S ممتاز است برای هرعنصر $h \in G$ داریم $hS=Sh$ و از آنجابرای هرعنصر $s \in S$ داریم $hs \in Sh$ ودر نتیجه $hs \in SH$ زیرا $Sh \subset SH$. پس $HS \subset SH$ و به روش مشابه خواهیم داشت $SH \subset HS$ ، یعنی $HS=SH$.
اثبات این‌که HS دراینحالت یک زیرگروه G و H و S زیرگروههای HS هستند ساده است و به خواننده واگذار می‌شود .

برای اثبات این‌که $H \cap S$ زیرگروه ممتاز S است‌گسترش g گروه H درگروه HS/S را به روش زیر معین می‌کنیم :

$$\forall h \in H \quad , \quad g(h)=hS$$

چون $H \subset HS$ است بنابراین hS عنصری‌از HS/S می‌باشد . چنانکه دیده می‌شود g سورژکتیو است و داریم $g=\pi \circ i$ که دو آن i انژکسیون‌کانونیک Hدر HS و π سورژکسیون‌کانونیک HS روی HS/S می‌باشد بنابراین g یک همومرفیسم گروه است.
به علاوه داریم :

$$\text{Ker } g=\{h \in H \mid hS=S\} = \{h \in H \mid h \in S\}=H \cap S$$

(منظور از $\text{Ker } g$ هستهٔ g است) .

پس $H \cap S$ که هستند همومرفیسم g است یک زیر گروه ممتاز است

۳ - اگر تجزیه‌کانونیک همومرفیسم g معین شده در بالا را در نظر بگیریم،باتوجه به این‌که g سورژکتیو و $H \cap S$ هستهٔ gواست نتیجه خواهدشد‌که $g(H)$ و $H/\text{Ker } g$ ایزومرف هستند یعنی HS/S و $H/H \cap S$ ایزومرف می‌باشند .

حل ۱۷۱ - الف - نخست گوشزدمی‌کنیم‌که هرمقدار ویژهٔ یک اتومرفیسم ، مخالف با صفر است. مجموعهٔ V تهی‌نیس ت زیرا همومرفیسم همانی E متعلق‌به E می‌باشد (دترمینان گسترش همانی‌برابر با یک وهربردار غیر صفر بردار ویژه آن است) . اگر u و v دوعنصر

ازV باشد و مقدار ویژه u (یا v) وابسته به e را λ (یا μ) بنامیم :

$$\det(u \circ v)=(\det u)\ (\det v)=۱\ .\ ۱=۱$$

$$(u \circ v)\ (e)=u(v(e))=u(\mu e)=\mu(u(e))=\mu\lambda e$$

پس e یک بردار ویژهٔ $u \circ v$ است .

از این برابری‌ها نتیجه می‌شود که $u \circ v \in V$. به‌علاوه هر عنصر $u \in V$ وارون‌پذیر است زیرا دترمینانش مخالف با صفر است. همچنین از $u^{-۱} \circ u=id_E$ نتیجه می‌شود $u^{-۱}(u(e))=e$ یعنی $u^{-۱}(\lambda e)=e$ و از آنجا $\lambda u^{-۱}(e)=e$ پس $u^{-۱}(e)=\lambda^{-۱}e$ و e یک بردار ویژه $u^{-۱}$ است و چون $\det u^{-۱}=\det u=۱$ داریم $u^{-۱} \in V$ پس V یک گروه است.

ب- اگر مقدار ویژهٔ f وابسته به e را α بنامیم ماتریس f بصورت $M=\begin{bmatrix} \alpha & \mu \\ ۰ & \nu \end{bmatrix}$ خواهد بود که در آن μ و ν مؤلفه‌های $f(e')$ می‌باشند . اما چون $\det f=۱$ است پس $\alpha\nu=۱$ یعنی : $\nu=\dfrac{۱}{\alpha}$

و : $M=\begin{bmatrix} \alpha & \mu \\ ۰ & \dfrac{۱}{\alpha} \end{bmatrix}$ پس $M^۲=\begin{bmatrix} \alpha^۲ & \alpha\mu+\dfrac{\mu}{\alpha} \\ ۰ & \dfrac{۱}{\alpha^۲} \end{bmatrix}$

و $M^۳=\begin{bmatrix} \alpha^۳ & \alpha^۲\mu+\mu+\dfrac{\mu}{\alpha^۲} \\ ۰ & \dfrac{۱}{\alpha^۳} \end{bmatrix}$ به این ترتیب دیده می‌شود که $M^n=\begin{bmatrix} \alpha^n & \mu_n \\ ۰ & \alpha^{-n} \end{bmatrix}$

که در آن $\mu_n=\mu(\alpha^n+\alpha^{n-۲}+\cdots+\alpha^{۲-n}+\alpha^{-n})$.

پ - مجموعهٔ ماتریسهای وابسته به عنصرهای V نسبت به‌پایهٔ (e , e') باقانون

ضرب‌ماتریسها، یک گروه ایزومرف با V است. هریک ازاین ماتریسها بصورت $\begin{bmatrix} \alpha & \mu \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$ است که درآن $(\alpha, \mu) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. بنابراین $f \to (\alpha, \mu)$ یک گسترش دوسویی V در $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ می‌باشد و به‌آسانی دیده می‌شود که این گسترش یک هوسرفیسم گروه است. زیرا:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \mu \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha' & \mu' \\ 0 & \alpha'^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\alpha' & \alpha\mu' + \alpha'^{-1}\mu \\ 0 & (\alpha\alpha')^{-1} \end{bmatrix}$$

حل ۱۷۳ - الف - شرط بایاوبسنده برای اینکه ماتریس u قطری باشد اینست که داشته باشیم $u(e_i) = \lambda_i e_i$ که درآن λ عنصری از K است. چون S_i پدید آمده بوسیلهٔ e_i است پس‌شرط بایاوبسنده برای اینکه $u(S_i) \subset S_i$ باشد اینست که $u(e_i) \in S_i$ باشد. یعنی $u(e_i)$ متناسب با e_i باشد.

ب- اگر یک بردار ویژهٔ وابسته به λ را x بنامیم داریم:

$$u^m(x) = u^{m-1}(u(x)) = u^{m-1}(\lambda x) = \lambda u^{m-1}(x) = \cdots = \lambda^m x$$

پس λ^m یک مقدار ویژهٔ u^m و x یک بردار ویژهٔ وابسته به آن است. حال اگر $P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ یک چندجمله‌ای با ضرایب متعلق به K باشد داریم:

$$P(u)(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i x = P(\lambda)x$$

یعنی $P(\lambda)$ یک مقدار ویژهٔ $P(u)$ و x یک بردار ویژهٔ آنست.

حل ۱۷۴ - مقادیر ویژه یک ماتریس عبارتند از ریشه‌های چند جمله‌ای مفسر آن. پس برای پیدا کردن مقادیر ویژه B چند جمله‌ای مفسر آنرا تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم:

$$\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix} ۱-\lambda & ۱-i \\ ۱+i & ۲-\lambda \end{vmatrix}=(۱-\lambda)(۲-\lambda)-۲$$

$$(۱-\lambda)(۲-\lambda)-۲=۰ \Longrightarrow \lambda^۲-۳\lambda=۰ \Longrightarrow \lambda_۱=۰\ ,\ \lambda_۲=۳$$

برای پیدا کردن معادله‌های زیرفضای ویژه وابسته به λ معادلهٔ $B\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\end{bmatrix}$ را ساده می‌کنیم :

$$B\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_۱+(۱-i)x_۲\\(۱+i)x_۱+۲x_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda x_۱\\\lambda x_۲\end{bmatrix}$$

پس برای $\lambda_۱=۰$ داریم :

$$(۱)\qquad \begin{cases} x_۱+(۱-i)x_۲=۰\\ (۱+i)x_۱+۲x_۲=۰\end{cases}$$

و برای $\lambda_۲=۳$ داریم :

$$(۲)\qquad \begin{cases} (۱-i)x_۲=۲x_۱\\ (۱+i)x_۱=x_۲\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x_۱+(۱-i)x_۲=۳x_۱\\ (۱+i)x_۱+۲x_۲=۳x_۲\end{cases}$$

پس زیرفضای ویژه وابسته به‌صفر ، خط مختلط به‌معادله‌های (۱) و زیرفضای ویژه وابسته به ۳ ، خط مختلط به‌معادله‌های (۲) است . مقادیر ویژه ماتریس A و زیرفضاهای وابسته به‌آن مقادیر نیز به‌روش بالا حساب می‌شوند.

حل ۱۷۶- به‌طور کلی برای اینکه ماتریس مربع A از رسته $(n\ ,\ n)$ با عنصرهای متعلق به هیأت K قابل‌قطری کردن باشد ، بایاوبسنده است که چند جمله‌ای مفسرآن دارای n ریشه (ساده یا چندگانه) باشد و مرتبهٔ چندگانگی هرریشه برابر با بعد زیرفضای ویژهٔ وابسته به‌آن ریشه باشد.

دراینصورت برای پیدا کردن ماتریس A' به‌روش زیر عمل می‌کنیم :

۱ - ریشه‌های چندجمله‌ای مفسر را حساب می‌کنیم.

۲ ـ برای هرریشه مانند λ معادلهٔ زیرفضای‌ویژهٔ وابسته به‌آن‌را تشکیل می‌دهیم یعنی می‌نویسیم $Ax=\lambda x$.

۳ ـ درهریک از زیرفضاهای ویژه یک پایه به‌دلخواه برمی‌گزینیم.

٤ ـ ماتریس P را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم :

ستونهای P مؤلفه‌های بردارهایی است که برای هرپایه درهریک از زیرفضاهای‌ویژه انتخاب کرده‌ایم (چنانکه دیده می‌شود P یکتا نیست زیرا در هرفضای برداری میتوان پایه‌های بیشماری انتخاب کرد) .

۵ ـ P^{-1} را حساب کرده و درستی محاسبات خودرا با تشکیل‌دادن $P^{-1}AP$ بررسی می‌کنیم. $P^{-1}AP=A'$ باید ماتریسی قطری باشد که عنصرهای قطری آن همان مقادیر ویژه است.

حال مطالب بالا را درمورد ماتریس حقیقی

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

انجام می‌دهیم :

$$\det(A-\lambda I_3)=0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)=0 \Longrightarrow (\lambda_1=1 \ , \ \lambda_2=2 \ , \ \lambda_3=3)$$

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1+2x_2+x_3 \\ 2x_2+3x_3 \end{bmatrix}$$

بنابراین اگر E_1 ، E_2 و E_3 به‌ترتیب زیرفضاهای ویژه وابسته به λ_1 ، λ_2 و λ_3 باشند داریم :

معادله‌های E_1 :
$$\begin{cases} x_1=x_1 \\ x_1+2x_2+x_3=x_2 \\ 2x_1+3x_3=x_3 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x_2=0 \\ x_1+x_3=0 \end{cases}$$

معادله‌های E_2 :
$$\begin{cases} x_1 = 2x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_3 = 2x_3 \end{cases}$$
یا
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

معادله‌های E_3 :
$$\begin{cases} x_1 = 3x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3x_2 \\ 2x_1 + 3x_3 = 3x_3 \end{cases}$$
یا
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 - x_2 = 0 \end{cases}$$

λ_i ها مقادیرویژهٔ ساده و E_1 ، E_2 و E_3 هرکدام یک زیرفضای یک‌بعدی هستند. پس ماتریس قابل قطری کردن است. در E_1 بردار $\vec{e_1} = (1, 0, -1)$ ، در E_2 بردار $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$ و در E_3 بردار $\vec{e_3} = (0, 1, 1)$ را برمی‌گزینیم. پس خواهیم داشت :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
و ازآنجا
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چنانکه دیده می‌شود
$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

باید توجه داشت که برای اینکه ماتریسی قابل قطری کردن باشد لازم نیست که تمام ریشه‌ها ساده باشند بلکه کافی است شرایطی که دربالا گفته شد برقرار باشند. مثلاً

در مورد ماتریس
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
داریم :

$$\det(A - \lambda I_3) = (1 - \lambda)^2 (3 - \lambda)$$

پس $\lambda_1 = 3$ ریشهٔ ساده و $\lambda_2 = 1$ ریشهٔ دوگانه است. داریم :

$$Ax = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

برای λ_1 :
$$Ax = \lambda_1 x \implies \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 \qquad = 0 \end{cases}$$

برای λ_2 :
$$Ax = \lambda_2 x \implies \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

پس زیرفضای ویژهٔ وابسته به λ_2 یک صفحه است و بعد آن برابر مرتبه چندگانگی λ_2 یعنی ۲ می‌باشد ، پس ماتریس قابل قطری کردن است. دراین صفحه دو بردار

$$\vec{e}_1 = (0 , 1 , -1) \quad \text{و} \quad \vec{e}_2 = (1 , 0 , -1)$$

را که نسبت به‌هم‌نابستگی خطی دارند برمی‌گزینیم و در زیرفضای ویژه وابسته به λ_1 بردار $(0 , 1 , 1) = \vec{e}_3$ را انتخاب می‌کنیم. داریم :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

و به‌سادگی دیده می‌شود که

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

حل ۱۷۸- درقضیه شمارهٔ ۷.۴.۱۴ با استفاده از روش بازگشت ثابت کردیم که هرماتریس مختلط مربع M را می‌توان سه‌بری کرد یعنی می‌توان یک ماتریس P طوری پیدا کرد که $P^{-1}MP$ یک ماتریس سه‌بری باشد و عنصرهای قطر اصلی این ماتریس همان مقادیر ویژهٔ M باشند. البته ماتریس P که بدین روش معین می‌شود یکتا نیست. راههای مختلفی برای پیدا کردن ماتریس P و ماتریس سه‌بری موردنظر وجود دارد که یکی ازآنها همان‌روش اثبات قضیهٔ ۷.۴.۱۴ ، یعنی ساختن ستونهای P به‌روش بازگشت

است. این قضیه که روش سه‌بری کردن یک ماتریس مختلط مربع مرتبهٔ n مانند M را می‌دهد چنین است :

۱ ـ ریشه‌های چند جمله‌ای مفسر M را حساب می‌کنیم (ممکن است بعضی از ریشه‌ها چندگانه و برخی شمار مختلط باشند) .

۲ ـ یکی از ریشه‌ها مثلاً λ_1 را انتخاب می‌کنیم و زیرفضای برداری E_1 تشکیل شده از بردارهایی مانند $b=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ، به‌قسمی که یک $a=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ بتوان یافت به‌طوریکه $(M-\lambda I_n)a=b$ ، را درنظر می‌گیریم و معادلهٔ یک هیپرپلان F از C^n را می‌نویسیم به‌قسمی که داشته باشیم $E_1 \subset F$.

(گاهی ممکن است E_1 خودش یک هیپرپلان باشد دراین‌صورت تنها معادلهٔ E_1 را می‌نویسیم) .

۳ ـ یک بردار $e_1 \notin F$ و یک پایهٔ $(e_2 , \dots , e_n)$ از F را درنظر گرفته و ماتریسی راکه ستون i ام آن مؤلفه‌های e_i درپایهٔ کانونیک است P_1 می‌نامیم .

۴ ـ ماتریس $P_1^{-1}MP_1$ را تشکیل می‌دهیم. این ماتریس به‌صورت:

$$P_1^{-1}MP_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \cdots 0 \\ \hline N_1 & M_1 \end{array}\right]$$

خواهد بود. چون مقادیر ویژهٔ این ماتریس همان مقادیر ویژهٔ M هستند (زیرا این ماتریس و M همانندند) پس مقادیر ویژهٔ M_1 همان مقادیر ویژهٔ M هستند تنها مرتبهٔ چندگانگی λ_1 یکی کم شده است. به‌علاوه اگر گسترش خطی وابسته به M را u بنامیم M_1 ماتریس تحدید u به F (که بنابرهمان قضیه یک گسترش F در F است) درپایهٔ $(e_2 , e_3 , \dots , e_n)$ است. این گسترش را u' می‌نامیم.

۵ ـ آنچه راکه‌دربارهٔ M و u وپایهٔ کانونیک دربالا گفته‌شد، درمورد M_1 و u' و پایه $(e_2 , \dots , e_n)$ عمل می‌کنیم و یک ماتریس P_2 بدست می‌آوریم. خواهیم داشت :

$$P_{2}^{-1}M_{1}P_{2}=\left[\begin{array}{c|c}\lambda_{2} & 0\cdots 0 \\ \hline N_{2} & M_{2}\end{array}\right]$$

به‌این ترتیب پس‌از بار مثلاً i ام ماتریس M_i به‌صورت سه‌بری درخواهد آمد.

۶ ـ ماتریس

$$P=P_{1}\left[\begin{array}{c|c}1 & 0\cdots 0 \\ \hline 0 & P_{2}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & P_{3}\end{array}\right]\cdots\left[\begin{array}{c|c}\begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & P_{i}\end{array}\right]$$

ماتریس موردنظر است.

۷ ـ برای پیدا کردن ماتریس سه‌بری موردنظر $P^{-1}MP$ را تشکیل می‌دهیم.

توجه: ممکن‌است درحالاتی (به‌ویژه درحالت یک ماتریس مرتبهٔ ۳)، درقسمت ۳ پایهٔ F را طوری انتخاب کرد که ماتریس M_1 سه‌بری شود.

حال عملیات بالا را درمورد ماتریس $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{bmatrix}$ انجام‌میدهیم:

$$\det(A-\lambda I_{3})=\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 1 & -3 & 3-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)^{3}$$

یعنی $\lambda=1$ یک مقدار ویژهٔ سه‌گانه است. پس $\lambda_1=1$ را درنظر می‌گیریم.

اگر گسترش خطی وابسته به A را u بنامیم، بعد زیرفضای

$$E_{1}=(u-id_{\mathbf{C}^{3}})(\mathbf{C}^{3})$$

برابر با ۲ است. زیرا رتبهٔ ماتریس $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}$ برابر با ۲ است. چون

ستون‌های اول و دوم این ماتریس نابستگی خطی دارند، پس E_1 بوسیلهٔ این دوستون

پدیدآمده است ، یعنی هربردار $(X, Y, Z) \in E_1$ ترکیبی خطی ازاین‌دو بردار است

ودرنتیجه $0 = \begin{vmatrix} X & 1 & -1 \\ Y & -1 & 0 \\ Z & -3 & 1 \end{vmatrix}$ ویا $X - 2Y + Z = 0$ که همان معادلهٔ E_1

است. دراین‌جاخود E_1 یک‌هیپرپلان‌است پس $F = E_1$. اکنون بردار $e_1 = (1, 0, 0)$ را که متعلق به F نیست درنظر می‌گیریم . دو بردار $e_2 = (1, 0, -1)$ و $e_3 = (1, 1, 1)$ متعلق به F می‌باشند و یک پایه ازآنرا تشکیل میدهند. داریم:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین دراین مسأله داریم $P_1 = P$ و ماتریس سه‌بری موردنظر عبارتست از

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

حل ۱۸۲- چند جمله‌ای سفسر : $\det(A - \lambda I_3) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$

پس ریشه‌ها به m بستگی ندارند.

$$Ax = \begin{bmatrix} x_1 + mx_2 + mx_3 \\ -x_1 \quad +x_2 - \quad x_3 \\ x_1 \qquad + 2x_3 \end{bmatrix}$$

معادلهٔ زیرفضای ویژهٔ E_2 وابسته به ریشهٔ سادهٔ ۲ عبارتست از $Ax=2x$ یعنی $\begin{cases} x_2+x_3=0 \\ x_1 \qquad =0 \end{cases}$

پس بردار $e_1 = (0 , 1 , -1)$ یک پایهٔ این زیرفضا است.

زیرفضای ویژهٔ E_1 وابسته به ریشهٔ دوگانهٔ ۱ دارای معادله های $\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ m(x_2+x_3)=0 \end{cases}$ است.

حالت اول : $m=0$ پس معادلهٔ این زیرفضا $x_1+x_3=0$ است و دوبعدی است و ماتریس قابل قطری شدن است. برای بدست آوردن P کافی است دو بردار $e_2 = (0 , 1 , 0)$ و $e_3 = (1 , 0 , -1)$ را که نابستگی خطی دارند، دراین زیرفضا انتخاب کنیم. دراینصورت خواهیم داشت :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

حالت دوم : $m \neq 0$ دراینحالت E_1 یک خط است که بعد آن یک می باشد درصورتیکه ۱ ، ریشهٔ دوگانهٔ معادله مفسراست. درنتیجه ماتریس قابل قطری شدن نیست. (حل مسأله ۱۷۶ را ببینید).

حل ۱۸۴ - به طورکلی اگر فرم درجهٔ دوم q بوسیلهٔ ماتریس $[a_{ij}]$ تعریف شده باشد برای $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e_i}$ داریم :

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij}\lambda_j \Big) \lambda_i = [\lambda_1 \; \lambda_2 \cdots \lambda_n] \, [a_{ij}] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

پس $q(x)=\det {}^tX[\alpha_{ij}]X$

که در آن $X=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}$ است.

حال اگر به‌جای $[\alpha_{ij}]$ ماتریس $B=A^tA$ را که در آن A یک ماتریس حقیقی رستهٔ (n , n) است، قراردهیم داریم :

$$q(x)=\det({}^tXA^tAX)=\det({}^tYY)$$

که در آن $Y={}^tAX$. اما ${}^tY$ یک ماتریس رستهٔ $(۱ , n)$ است. قرارمی‌دهیم $Y=[y_1 \cdots y_n]$ پس $q(x)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$ و در نتیجه $q(x)\geqslant ۰$ یعنی q مثبت است. به‌علاوه چون برای یک فرم مثبت هربردار ایزوترپ متعلق به هسته است و به‌وارون، پس اصیل بودن q هم‌ارز است با $q(x)=۰ \Longrightarrow x=۰$ و این نیز برقرار است. زیرا $q(x)=۰ \Longrightarrow y_i=۰ , \forall i$ و ازآنجا ${}^tAX=۰$ ولی چون A وارون‌پذیر است ${}^tA$ وارون‌پذیراست. پس‌از برابری ${}^tAX=۰$ نتیجه می‌شود $X=۰$ یعنی $x=۰$ (X ماتریس ستونی است که عنصرهایش مولفه‌های x می‌باشد).

حل ۱۸۷- $\omega_{ij}=i+j-۱=ij-(i-۱)(j-۱)$

قرارمی‌دهیم $\omega'_{ij}=ij$ و $\omega''_{ij}=(i-۱)(j-۱)$ پس $\omega_{ij}=\omega'_{ij}-\omega''_{ij}$ اگر فرم‌های درجه‌دوم تعریف شده بوسیلهٔ ماتریس‌های $[\omega'_{ij}]$ ، $[\omega''_{ij}]$ و $[\omega_{ij}]$ را به‌ترتیب q' ، q'' و q بنامیم برای هر $x=(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ داریم :

$$q(x)=q'(x)-q''(x)$$

اما :

$$q'(x)=\det({}^tX[\omega'_{ij}]X)$$

که در آن $X=\begin{bmatrix}x_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{bmatrix}$. پس :

$$q'(x)=\det\left(\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 2 & 4 & \cdots & 2n\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ n & 2n & \cdots & n^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{bmatrix}\right)$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n} ix_i\\ 2\sum\limits_{i=1}^{n} ix_i\\ \cdots\\ n\sum\limits_{i=1}^{n} ix_i\end{bmatrix}\right)$$

$$=x_1\sum_{i=1}^{n} ix_i+2x_2\sum_{i=1}^{n} ix_i+\cdots=\left(\sum_{i=1}^{n} ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} ix_i\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} ix_i\right)^2$$

به همین ترتیب دیده می‌شود که :

$$q''(x)=\left(\sum_{i=1}^{n-1} ix_{i+1}\right)^2$$

پس:

$$q(x)=\left(\sum_{i=1}^{n-1} ix_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n-1} ix_{i+1}\right)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} ix_i - \sum_{i=1}^{n-1} ix_{i+1} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} ix_i + \sum_{i=1}^{n-1} ix_{i+1} \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{k=1}^{n} (2k-1) x_k \right)$$

و چنانکه دیده می‌شود q حاصلضرب دوم فرم خطی است.

حل ۱۹۱- الف - نخست گوشزد می‌کنیم که هرفرم خطی یاسورژکتیو ویا صفراست.

اینک فرض می‌کنیم φ فرم دوخطی وابسته به q باشد. گسترش $x \xrightarrow{\varphi_y} \varphi(x, y)$ یک فرم خطی روی $\mathbf{R}^n$ است که صفر نیست زیرا $\varphi(y, y) = q(y) \neq 0$. هستهٔ φ_y را H می‌نامیم. داریم :

$$x \in H \Leftrightarrow \varphi_y(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow (\text{x بر y عمود است})$$

اما چون φ_y سورژکتیو است داریم $\mathbf{R}^n/H \simeq \mathbf{R}$ و ازآنجا $n - \dim H = 1$ یعنی $\dim H = n-1$. میدانیم که $H \oplus \mathbf{R}^n/H = \mathbf{R}^n$ اما $\mathbf{R}^n/H$ یک فضای یک بعدی و ایزومرف با F است (مستقیماً نیز میتوان ثابت کرد که $H \oplus F = \mathbf{R}^n$ اثبات این مطلب به‌خوانندهٔ توصیه می‌شود) .

ب - اگر $q(y)$ صفر باشد دوحالت پیش می‌آید. یا گسترش φ_y تعریف شده در (الف) صفر است. دراینصورت برای هر x داریم $\varphi_y(x) = 0$ یعنی x بر y عموداست. یا اینکه φ_y صفر نیست. دراین‌صورت مانند (الف) ثابت می‌شود که هستهٔ φ_y که همان مجموعهٔ بردارهای عمود بر y است، یک زیرفضای $n-1$ بعدی‌است. البته دراین حالت y متعلق به‌این هسته است.

حل ۱۹۲- الف - می‌دانیم که مجموعهٔ تمام دنباله‌های شمارهای مختلط یک‌فضای برداری F روی هیأت $\mathbf{C}$ است که درآن قانون جمع و ضرب در اسکالر بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$(x_i)_{i \in \mathbf{N}^*} + (y_i)_{i \in \mathbf{N}^*} = (x_i + y_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$$

$$\lambda (x_i)_{i \in \mathbf{N}^*} = (\lambda x_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$$

پس کافی‌است ثابت کنیم E یک زیرفضای‌برداری‌از F است. اگر $x=(x_i)$ و $y=(y_i)$ عنصرهایی از E و λ و μ دو اسکالر دلخواه باشند قرار‌می‌دهیم $z=\lambda x+\mu y$.
چون برای هردوشمار مختلط u و v داریم: $|u+v|^2+|u-v|^2 = 2(|u|^2+|v|^2)$
پس

$$\sum_{i=1}^{\infty}|z_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|\lambda x_i+\mu y_i|^2 \leqslant 2|\lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2+2|\mu|^2\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^2 < +\infty$$

بنابراین $\lambda x+\mu y \in E$ و درنتیجه E یک زیرفضای برداری از F است.

ب- نخست از بستگی $x_n\overline{y_n} = \frac{1}{4}[(x_n+\overline{y_n})^2-(x_n-\overline{y_n})^2]$ نتیجه‌می‌شود

که وقتی (x_n) و (y_n) دوعنصر از E باشند داریم $\sum_{i=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}<\infty$ پس $((x_n)\,|\,(y_n))$
دارای معنی است. به‌علاوه به‌سادگی دیده می‌شود که :

$$(1)\quad \forall x=(x_n)\,,\ y=(y_n)\,,\ z=(z_n)\in E\ :\ (x+y\,|\,z)=(x\,|\,y)+(x\,|\,z)$$

$$(2)\quad \forall x=(x_n)\,,\ y=(y_n)\in E\,,\ \forall\lambda\in \mathbf{C}\ :\ (\lambda x\,|\,y)=\lambda(x\,|\,y)$$

$$(3)\quad \forall x=(x_n)\,,\ y=(y_n)\in E\ :\ (x\,|\,y)=\overline{(y\,|\,x)}$$

پس $(\circ\,|\,\circ)$ یک فرم هرمیتی است. به‌علاوه $(x\,|\,x) = \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 \geqslant 0$ پس فرم مثبت است و درنتیجه E یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزا است (اصیل بودن این فرم آشکار است).

پ- میدانیم که « f هرمیتی است » بدین معنی است که f یک گسترش خطی E در E است و $f^*=f$ ویا به‌عبارت دیگر f خطی است و برای هر x و y متعلق به E داریم :

$$(f(x)\,|\,y)=(x\,|\,f(y))$$

اگرسری $|x_i|^2$ $\sum_{i=1}^{\infty}$ همگرا باشد سری $\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{x_i}{i}\right|^2$ نیزهمگرا است. پس f یک گسترش E در E است وخطی بودن‌آن نیز آشکاراست. اگر $x=(x_i)$ و $y=(y_i)$ باشدداریم:

$$(f(x)\mid y)=\left(\left(\frac{x_n}{n}\right)\middle|(y_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n\overline{y_n}}{n}$$

و
$$(x\mid f(y))=\left((x_n)\middle|\left(\frac{y_n}{n}\right)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_n\overline{y_n}}{n}$$

پس f هرمیتی است.

ت- هنگامی که می گوییم آندومرفیسم g نرم را پایدار نگهمیدارد یعنی برای هر x داریم $\|g(x)\|=\|x\|$.

اما :

$$\|g(x)\|^2=(g(x)\mid g(x))=((\eta_i)\mid(\eta_i))=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i^2$$

$$=\eta_1^2+\eta_2^2+\cdots=x_1^2+x_2^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}|x_i|^2=\|x\|^2$$

برای اینکه g همانی باشد لازم است که g وارون‌پذیر و در نتیجه سورژکتیو باشد. اما g سورژکتیو نیست. زیرا اگر قراردهیم $(\eta_n)=(\cdots,0,0,1)$ این دنباله یک‌عنصر از E است و هیچ‌عنصری از E مانند x وجود ندارد به‌قسمی‌که $g(x)=(\eta_n)$ باشد. پس g همانی نیست.

حل ۱۹۴ - نخست یادآوری می‌کنیم که نمیتوان دوماتریس مربع A و B با عنصرهای متعلق‌به‌یک هیأت K و از رستهٔ (n,n) یافت به‌قسمی‌که $AB-BA=I_n$ باشد. زیرا اثر ماتریس طرف اول این برابری صفر و اثرماتریس طرف دوم برابر $n\cdot 1$ خواهد بود.

الف - اگر بعد E باپایان وبرابر با n باشد و ماتریس وابسته‌به f را B وماتریس

وابسته بـه g را A بنامیم از بستگی $g\circ f - f\circ g = id_E$ نتیجـه مـی‌شود $AB-BA=I_n$ و این غیرممکن است. پس بعد E بی‌پایان است.

ب- برای اینکه f انژکتیو باشد بایاوبسنده است که هسته‌اش صفر باشد. اگر x عنصری متعلق به‌هسته f باشد داریم :

$$\begin{aligned}\| g(x)\|^۲ &= (g(x) \mid g(x)) = (f(g(x)) \mid x) = ((f\circ g)(x) \mid x)\\ &= ((g\circ f - id_E)(x) \mid x)\\ &= (g(f(x)) \mid x) - (x \mid x) = -\|x\|^۲\end{aligned}$$

زیرا $f(x)=۰$ است. پس بطورخلاصه $\|g(x)\|^۲ = -\|x\|^۲$ وازآنجا $x=۰$ و f انژکتیو است.

پ- h ترکیب دوگسترش خطی و درنتیجه خطی است. به‌علاوه :

$$h^* = (g\circ f)^* = f^*\circ g^* = (g^*)^*\circ g^* = g\circ f = h$$

پس h یک گسترش هرمیتی است.

حل ۲۰۱ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری مختلط و f یک فرم هرمیتی غیرصفر روی E باشد.

اگر هیچ برداراز E ایزوترپ نباشدبرای هر $x\in E$ خواهیم داشت $f(x,x)=۰$. دراینصورت از برابری :

$$۰ = f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + \overline{f(x,y)} + f(y,y)$$

نتیجه می‌شود که برای هر x و y متعلق به E برابری $f(x,y)+\overline{f(x,y)}=۰$ برقرار است. اگر دراین برابری بجای x عنصر tx را بگذاریم و قراردهیم $u=f(x,y)$ خواهیم داشت :

$$tu+\overline{tu}=۰ \qquad \forall t\in C$$

چون بنابفرض f مخالف با صفر است x و y را می‌توان به‌قسمی برگزید که $u\neq ۰$ باشد. اگر t را برابر $u^{-۱}$ بگیریم خواهیم داشت :

$$۱+۱=۰$$

و این غیرممکن است. پس دست‌کم یک بردار ایزوترپ در E برای f وجود دارد.

حل ۲۰۳ - الف - چون $u\circ u^*=u^*\circ u$ است داریم:

$$u(x)=0 \Longrightarrow u^*(u(x))=0 \Longrightarrow u(u^*(x))=0 \Longrightarrow (uu^*(x)\mid x)=0$$
$$\Longrightarrow (u^*(x)\mid u^*(x))=0 \Longrightarrow \|u^*(x)\|^2=0 \Longrightarrow u^*(x)=0$$

بدین‌ترتیب ثابت می‌شود که $\operatorname{Ker} u\subset \operatorname{Ker} u^*$ و به‌روش مشابه میتوان دید که $\operatorname{Ker} u^*\subset \operatorname{Ker} u$ و ازآنجا $\operatorname{Ker} u=\operatorname{Ker} u^*$.

ب- اگر λ یک مقدار ویژه u باشد قرارمیدهیم $v=u-\lambda Id_E$. اگر x یک بردار ویژه وابسته به λ باشد داریم:

$$u(x)=\lambda x \iff \exists x\neq 0\ ,\ (u-\lambda Id_E)(x)=0$$
$$\iff v(x)=0 \iff x\in \operatorname{Ker} v$$

پس زیرفضای ویژه وابسته به λ برابر با $\operatorname{Ker} v$ میباشد. به‌علاوه با توجه به‌اینکه $v^*=u^*-\bar{\lambda}\, id_E$ است با تبدیل v به v^* درآنچه‌که گذشت نتیجه می‌شود که زیرفضای ویژه u^* وابسته به مقدار ویژه $\bar{\lambda}$ برابر با $\operatorname{Ker} v^*$ است. وانگهی به‌آسانی دیده می‌شود که $v^*\circ v=v\circ v^*$ بنابراین بنابر (الف) داریم $\operatorname{Ker} u=\operatorname{Ker} v^*$ پس اگر λ مقدار ویژه u باشد $\bar{\lambda}$ مقدار ویژه u^* است.

حل ۲۰۴ - میدانیم که اگر M یک ماتریس هرمیتی (متقارن) باشد و بتوان M را قطری کرد یعنی بتوان ماتریس وارون‌پذیری مانند P پیدا کرد که $P^{-1}MP$ ماتریسی قطری باشد، درآن صورت میتوان P را یک ماتریس یکه‌ای (متعامد) اختیار کرد، یعنی به‌طوری‌که داشته باشیم $P^{-1}={}^tP$. همانطورکه درحل مسألهٔ ۱۷۶ دیدیم برای پیدا کردن P باید یک پایه تشکیل شده از بردارهای ویژهٔ A را پیدا کنیم. برای اینکه P متعامد باشد کافی است که این پایه یک پایهٔ یکه‌ای متعامد باشد (قضیه). اما داریم:

$$\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 1\\ -2 & 10-\lambda & -2\\ 1 & -2 & 7-\lambda\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -1\\ -2 & 10-\lambda & 2\\ 1 & -2 & -7+\lambda\end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 10-\lambda & 2 \\ -(6-\lambda) & -2 & -7+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 10-\lambda & 2 \\ 0 & -4 & -8+\lambda \end{vmatrix} = -(6-\lambda)[(10-\lambda)(-8+\lambda)+8]$$

$$= -(6-\lambda)(\lambda-6)(12-\lambda) = (6-\lambda)^2(12-\lambda)$$

پس $\lambda_1 = 6$ یک ریشهٔ دوگانه و $\lambda_2 = 12$ یک ریشهٔ ساده است.

معادلهٔ زیرفضای ویژهٔ وابسته به λ_1 عبارت است از :

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \qquad (1)$$

و معادله‌های زیرفضای ویژهٔ وابسته به λ_2 عبارتند از :

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = 0x_1 + 2x_2 \end{cases} \qquad (2)$$

در (۱) دوبردار عمودبرهم $\vec{e_1} = (1, 0, -1)$ و $\vec{e_2} = (1, 1, 1)$ را بر می‌گزینیم و در (۲) بردار $\vec{e_3} = (1, -2, 1)$ را که بر دو بردار $\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}$ عموداست انتخاب می‌کنیم. پس $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ یک پایهٔ متعامد است. ازاین پایه یک پایهٔ یکه‌ای متعامد میسازیم یعنی قرار میدهیم :

$$\vec{e'_1} = \frac{\vec{e_1}}{\sqrt{(\vec{e_1} \mid \vec{e_1})}} = \frac{\vec{e_1}}{\sqrt{2}}, \quad \vec{e'_2} = \frac{\vec{e_2}}{\sqrt{(\vec{e_2} \mid \vec{e_2})}} = \frac{\vec{e_2}}{\sqrt{3}},$$

$$\vec{e'_3} = \frac{\vec{e_3}}{\sqrt{(\vec{e_3} \mid \vec{e_3})}} = \frac{\vec{e_3}}{\sqrt{6}}$$

و ازآنجا :

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

به‌آسانی دیده می‌شود که $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$.

فهرست نشانه‌ها

$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$	۲.۱.۱ :
$x \in E \;,\; x \notin E$	۳.۱.۲ :
$\varnothing$	۱.۱.٤ :
$\{x\} \;,\; \{x, y\}$	٤.۱.۱ :
$E \subset F \;,\; F \supset E$	۱.۲.۱ :
$E \cap F \;,\; E \cap F \cap G$	۱.۳.۱ :
$E \cup F \;,\; E \cup F \cup H$	۲.۳.۱ :
$E - A \;,\; \complement_E A \;,\; \complement A$	۳.۳.۱ :
$X \times Y$	۲.٥.۱ :
$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$	٤.٥.۱ :
X^n	٥.٥.۱ :
$x \to f(x)$	۱.٦.۱ :
id_E	۲.٦.۱ :
$f: X \to Y \;,\; X \xrightarrow{f} Y$	۳.٦.۱ :
$g \circ f \;,\; gf$	۱.۷.۱ :
$f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$	۳.۷.۱ :
f^n	٤.۷.۱ :
f^{-1}	۲.۸.۱ :
$f(A)$	۱.۹.۱ :
$f^{-1}(B) \;,\; f^{-1}(b)$	۲.۹.۱ :
$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \;,\; (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$	۱.۱۰.۱ :

$(x_1, x_2, \cdots), (x_i)_{i\geqslant 1}$	٢.١٥.١ :
$(x_i)i\in I \;,\; (x_i)$	٣.١٥.١ :
$\bigcup_{i\in I} X_i \;,\; \bigcap_{i\in I} X_i$	٤.١٥.١ :
$n\equiv n'(\mathrm{mod}\,a)$	٢.١١.١ :
xRy	٣.١١.١ :
E/R	١٥.١١.١ :
$x\leqslant y, y\geqslant x, x<y, y>x$	١.١٣.١ :
$[a,b],]a,b[, [a,b[,]a,b], [a,+\infty[,$	٥.١٣.١ :
$]a,+\infty[,]-\infty,a],]-\infty,a[,]-\infty,+\infty[$	٥.١٣.١ :
$\sup Y \;,\; \inf Y$	٦.١٤.١ :
$\sup_{x\in E} f(x) \;,\; \inf_{x\in E} f(x)$	١٥.١٤.١ :
C_n^p	٦.١٥.١ :
$x\cdot y \;,\; xy \;,\; x+y$	٣.١.٢ :
$x_1x_2\cdots x_n \;,\; \prod_{1\leqslant i\leqslant n} x_i \;,\; x^n$	٤.١.٢ و ١٢.٥.٢ :
$x_1+x_2+\cdots+x_n \;,\; \sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i \;,\; nx$	٤.١.٢ :
$AB \;,\; xB \;,\; Bx$	٦.١.٢ :
$A+B$	٦.١.٢ :
١ , ٠	٤.٤.٢ :
x^0	٥.٤.٢ :
$x^{-1} \;,\; -x$	٧.٥.٢ :
aZ	٢.٢.٣ :

فهرست الفبائی

واژه‌ها

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Adjointe	Adjoint	آدژوئن
Coordonnée	Coordinate	آراینده
Argument	Argument	آرگومان
Affine	Affin	آفین
Endomorphisme	Endomorphism	آندومرفیسم
Automorphisme	Automorphism	اتومرفیسم
Trace	Trace	اثر
Réunion	Union	اجتماع
Escalaire	Scalar	اسکالر
Non dégénéré	Non degenerated	اصیل
Croissante (fonction)	Increasing (function)	افزایشی (تابع)
Translation	Translation	انتقال
Associative (loi)	Associatieve (law)	انجمنی (قانون ترکیب)
Injective (application)	Injective, one-to - one (map)	انژکتیو(گسترش)
Imaginaire	Imaginary	انگاری
Inversion	Inversion	انورسیون
Idéal	Ideal	ایدآل
Isotrope	Iotropic	ایزوترپ
Isomorphisme	Isomorphism	ایزومرفیسم
Finie	Finite	باپایان

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Ouvert	Open	باز
Réflexif	Reflexive	بازتابی
Partie	Part	بخش
Diviseur	Divisor	بخشیاب
Egalité	Equality	برابری
Vecteur	Vector	بردار
Plus grand Commun Diviseur	Greatest common Divisor	بزرگترین بخشیاب مشترك
Relation	Relation	بستگی
Relation d'ordre	Order relation	بستگی ترتیبی
Dépendancc linéaire	Linear dependence	بستگی خطی (بردار)
Relation d'équivalence	Eqivalence relation	بستگی هم‌ارزی
Fermé	Closed	بسته
Développement	Expansion	بسط
Dimension	Dimension	بعد
Neutre	Neutral	بی‌اثر
Infini	Infinite	بی‌پایان
Bidual (Espace)	Bidual (Space)	بی‌دوآل (فضا)
Segment	Segment	پاره خط
Invariant	Invariant	پایا
Stable	Stable	پایدار
Base	Base	پایه
Distributive (loi)	Distributive (law)	پخشی (قانون)
Engendré	Generated	پدید آمده

فارسی	انگلیسی	فرانسه
تابع	Function	Fonction
تبدیل	Permutation	Permutation
تجزیه	Decomposition	Décomposition
تحدید	Restriction	Restriction
ترانسپوزه	Transpose	Transposé
ترانسپوزیسیون	Transposition	Transposition
ترتیب	Arrangement	Arrangement
ترکیب خطی	Linear Combination	Combinaison linéaire
ترکیب	Composite	Composé
تصویر	Projection	Projection
تقریباً هیلبرتی	Prehilbertian	Préhilbertien
تماماً	Totally	Totalement
تهی	Empty	Vide
جابجایی	Commutative	Commutatif
جدا	Disjoint	Disjoint
جفت	Pair , couple	Couple
جمعی (قانون)	Additive (law)	Additive (loi)
چند جمله‌ای	Polynomial	Polynôme
چند خطی	Multilinear	Multilinéaire
حاصلضرب	Product	Produit
حاصلضرب خارجی	Exterior product	Produit extérieur
حاصلضرب مختلط	Triple product	Produit mixte
حقیقی	Real	Réel
حلقه	Ring	Anneau

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Quotient	Quotient	خارج قسمت
Famille	Family	خانواده
Droite	Line	خط
Intérieur	Intrior	داخل
Détérminant	Determinant	دترمینان
Degré	Degree	درجه
Quadratique	Quadratic	درجه دوم (کوادراتیک)
Entier	Integer	درست
Intèrieur	Interior	درونی
Système	System	دستگاه
Suite	Sequence	دنباله
Dual	Dual	دوال
Bilinéaire	Bilinear	دوخطی
Bijective (app.)	One - to - oneonto (map.)	دوسویی
Direction	Direction	راستا
Rang	Rank	رتبه
Racine	Root	ریشه
Paire	Even	زوج
Sous - espace	Sub space	زیرفضا
Sous - groupe	Subgroup	زیر گروه
Sous - ensemble	Subset	زیرمجموعه
Réduite	Reduced	ساده شده
Irréductible	Irreducible	ساده نشدنی
Image	Image	سایه

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Comparable	Comparable	سنجیدنی
Surjective (app)	Onto (map.)	سورژکتیو (گسترش)
Nombre	Number	شمار
Plan	Plane	صفحه
Multiplicative (loi)	Multiplicative (law)	ضربی (قانون)
Coefficient	Coefficient	ضریب
Elément	Element	عنصر
Dégénéré	Degenerated	غیراصیل
Intervalle	Interval	فاصله
Impaire	Odd	فرد
Forme	Form	فرم
Pôle	Pole	قطب
Diagonale principale	Principal diagonal	قطراصلی
Intègre	Integral	کامل
Strictement Croissante , decroissante , monotone ,	Strictly increasing, decreasing, monotonic	کاملاً افزایشی کاهشی، یکنوا
Décroissante (fonction)	Decreasing (function)	کاهشی (تابع)
Borne	Bound	کران
Borné	Bounded	کراندار
Fraction	Fraction	کسر
Classe d'équivalence	Equivalence class	کلاس هم‌ارزی
Convexe	Convex	کوژ
Cofacteur	Cofactor	کوفاکتور

فارسی	انگلیسی	فرانسه
گرانیگاه	Barycenter	Baryeentre
گردش پذیر	Permutable	Permutable
گروه	Group	Groupe
گسترش	Mapping	Application
ماتریس	Matrix	Matrice
ماتریس سطری	Row matrix	Matrice ligne
ماتریس‌سه‌بری(زیرین، زبرین)	Triangular matrix (inferior , superior)	Matrice triangulaire (inférieure , supérieure)
ماتریس قطری	Diagonal matrix	Matrice diagonale
ماتریس مربع	Square matrix	Matrice carrée
ماتریس‌های هم‌ارز	Equilvalent matrices	Matrices équivalentes
ماتریس‌های همانند	Similar matrices	Matrices semblables
مانده	Rest	Reste
مبداء	Origin	Origine
مبین	Discriminant	Discriminant
متعامد عمود برهم	Orthogonal	Orthogonal
متعدی	Transitive	Transitif
متغیر	Variable	Variable
متقارن	Symmetric	Symétrique
مثبت	Positive	Positif
ممتاز	Distinguished	Distingué
متناوب	Alternated	Alternée
مجزا	Separated	Séparé
مجموعه	Set	Ensemble

فارسی	انگلیسی	فرانسه
مختلط	Complex	Complexe
مدول	Module	Module
مرتب (مجموعه)	Ordered (set)	Ordonné (ensemble)
مرتبه	Order	Ordre
مرکز	Center	Centre
مزدوج	Conjugate	Conjugué
مستقیم	Direct	Directe
مشتق	Derivative	Dérivée
مشتق نسبی	Partial derivative	Dérivée partielle
مشخص	Characteristic	Caractéristique
مشمول	Included	Inclus
مضرب	Multiple	Multiple
معادله	Equation	Equation
مفسر	Characteristic	Caractéristique
مقطع	Meet	Intersection
منفی	Negative	Negatif
نابرابری	Inequality	Inégalité
نابستگی (بردار)	Independence	Indépendance
نامتقارن کردن	Antisymmetrisation	Antisymétrisation
نرمال	Normal	Normal
نشان	Signature	Signature
نماینده	Representant	Représentant
نمودار	Graph	Graphe
نیم‌باز (بسته)	Half - open (closed)	Demi - ouvert (fermé)
وارون	Inverse	Inverse

فارسی	انگلیسی	فرانسه
وارون‌پذیر	Invertible	Inversible
ویژه	Proper	Propre
همانندی	Similitude	Similitude
همانی	Identity	Identité
هم‌راستا	Parallel	Parallèle
همسانی	Homothetie	Homothétie
همگن	Homogeneous	Homogène
هومرفیسم	Homomorphism	Homomorphisme
هیأت	Field	Corps
یک نوا	Monotonic	Monoton
یکه	Unity	Unité
یکه‌ای	Unitary	Unitaire
یکه‌ای متعامد	Orthonormal	Ortonormal