انتشارات شیخ طوسی

جستاری در المپیاد ریاضی

جلد اول

www.olympiyad.ir

هنر ریاضی ورزیدن
مسابقات ریاضی مختلف کشورهای جهان
پاسخ مسابقات و ...

نیما نوربخش مقدم

به نام خدا

جستاری در المپیاد ریاضی

تألیف :

نیما نوربخش مقدم

انتشارات شیخ طوسی

موسسه فرهنگی آموزشی خواجه نصیرالدین طوسی

تهران ۱۳۸۵

نوربخش مقدم، نیما
جستاری در المپیاد ریاضی : هنر ریاضی ورزیدن، مسابقات ریاضی مختلف کشورهای جهان پاسخ مسابقات و ... / نیما نوربخش مقدم -- .
تهران : موسسه آموزشی خواجه نصیرالدین طوسی، انتشارات شیخ طوسی، ۱۳۸۵- .
ج. : مصور، جدول.
شماره سری : ISBN 964-96443-0- x
۳۷۰۰ تومان : (ج ۱.) : ISBN 964-96443-3-4
فهرست نویسی براساس اطلاعات فیپا.
کتابنامه.
۱. المپیادها (ریاضیات). ۲. ریاضیات -- مسابقه ها. ۳. ریاضیات -- مسائل، تمرینها و غیره. الف.عنوان.
۵ج۹۱۵ن / ۲۴ / ۳۰۶۰ LB ۳۷۳/۲۳۸۰۷۶
کتابخانه ملی ایران ۸۵-۱۱۸۴۵ م

جستاری در المپیاد ریاضی

تألیف : نیما نوربخش مقدم

ویراستار علمی : امیرحسین نخودکار، خانم شبنم نوری
علی کاردانی، سلمان پارسا

صفحه آرایی و طراحی جلد : لیلا صابری

نوبت چاپ : اول تابستان ۸۵

چاپ : آینده

صحافی : پارس

شمارگان : ۳۰۰۰ نسخه

بهاء: تومان

شابک : ۹۶۴-۹۶۴۴۳-۳-۴ ISBN : 964-96443-3-4

انتشارات شیخ طوسی وابسته به موسسه فرهنگی آموزشی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
تلفن : ۰۲۱-۴۴۰۵۶۸۴۸ www.knti.ir

بسمه تعالی

فهرست مندرجات

مقدمه ناشر ۱
مقدمه مؤلف ۲
فصل اول : هنر ریاضی ورزیدن ۶
الف) هندسه ۹
ب) ترکیبیات ۱۷
ج) جبر ۲۱

فصل دوم : مسابقات ریاضی کشورهای مختلف (سال ۱۹۹۹) ۲۳
۱- روسیه سفید ۲۴
۲- برزیل ۲۹
۳- بلغارستان ۳۰
۴- کانادا ۳۲
۵- چین ۳۳
۶- جمهوری چک و اسلواکی ۳۵
۷- فرانسه ۳۷
۸- هنگ کنگ (چین) ۳۹
۹- مجارستان ۴۰
۱۰- ایران ۴۳
۱۱- ایرلند ۴۷
۱۲- ایتالیا ۴۹
۱۳- ژاپن ۵۱
۱۴- کره ۵۲
۱۵- لهستان ۵۳

۱۶- رومانی ۵۵
۱۷- روسیه (دور چهارم) ۶۱
۱۸- اسلوونی ۶۸
۱۹- تایوان ۶۹
۲۰- ترکیه ۷۰
۲۱- اوکراین ۷۲
۲۲- انگلستان ۷۳
۲۳- ایالات متحده امریکا ۷۵
۲۴- ویتنام ۷۷

فصل سوم : مسابقات ریاضی منطقه ای (سال ۱۹۹۹) ۸۱
۱- المپیاد ریاضی کشورهای آسیای شرقی ۸۲
۲- مسابقه ریاضی اتریش - لهستان ۸۴
۳- المپیاد ریاضی بالکان ۸۶
۴- مسابقات جمهوری چک واسلواکی ۸۷
۵- رقابت های ریاضی مشترک مجارستان - اسرائیل ۸۸
۶- المپیاد ریاضی آمریکای لاتین ۹۱
۷- مسابقات ریاضی Del Cono Sur ۹۳
۸- المپیاد ریاضی شهر سنت پترزبورگ (روسیه) ۹۵

فصل چهارم : پاسخ مسابقات ریاضی کشورهای مختلف (سال ۱۹۹۹) ۹۹
۱- روسیه سفید ۱۰۰
۲- برزیل ۱۲۳
۳- بلغارستان ۱۲۷
۴- کانادا ۱۳۸
۵- چین ۱۴۱
۶- جمهوری چک و اسلواکی ۱۴۶
۷- فرانسه ۱۵۱
۸- هنگ کنگ (چین) ۱۵۶
۹- مجارستان ۱۵۹

۱۰- ایران ۱۶۹
۱۱- ایرلند ۱۸۴
۱۲- ایتالیا ۱۹۰
۱۳- ژاپن ۱۹۶
۱۴- کره ۲۰۰
۱۵- لهستان ۲۰۵
۱۶- رومانی ۲۱۰
۱۷- روسیه (دور چهارم) ۲۲۸
۱۸- اسلوونی ۲۵۷
۱۹- تایوان ۲۵۹
۲۰- ترکیه ۲۶۳
۲۱- اوکراین ۲۷۰
۲۲- انگلستان ۲۷۲
۲۳- ایالات متحده امریکا ۲۷۷
۲۴- ویتنام ۲۸۲

فصل پنجم : پاسخ مسابقات ریاضی منطقه ای (سال ۱۹۹۹) ۲۹۳
۱- المپیاد ریاضی کشورهای آسیای شرقی ۲۹۴
۲- مسابقه ریاضی اتریش - لهستان ۲۹۹
۳- المپیاد ریاضی بالکان ۳۰۶
۴- مسابقات جمهوری چک واسلواکی ۳۱۰
۵- رقابت های ریاضی مشترک مجارستان - اسرائیل ۳۱۶
۶- المپیاد ریاضی آمریکای لاتین ۳۲۴
۷- مسابقات ریاضی Del Cono Sur ۳۲۸
۸- المپیاد ریاضی شهر سنت پترزبورگ (روسیه) ۳۳۱

فصل ششم : مسائل مسابقه ای ۳۴۵
۱- هندسه ۳۲۷
۲- ترکیبیات ۳۵۳
۳- جبر و آنالیز ۳۵۸
۴- نظریه اعداد ۳۶۳

پیوست : ۳۶۷
پیوست ۱ : (نشانه ها) ۳۶۸
پیوست ۲ : (قضایای مهم) ۳۶۹
پیوست ۳ : (طبقه بندی موضوعی سوالات) ۳۸۰

منابع : ۳۸۸

هوالعلیم

اطلبوا العلم و لوبالصین(رسول گرامی اسلام)

در طلب علم باشید ولو در چین باشد.

مقدمه ناشر :

چند سالی است که اقبال عمومی نسبت به حضور دانش آموزان در برنامه های علمی و المپیادها، گسترش یافته است. متأسفانه، در این راه آفت هایی نیز، گریبانگیر این گرایش شده است. از یک سو، عده ای برای حفظ منافع مادی خود، علم را در صندوقچه ها پنهان نموده، امکان دسترسی عمومی به منابع علمی بیشتر و ارزشمندتر را محدود نموده اند تا تنور کسب خود را گرم تر نمایند.

ما معتقدیم، اگر چه تمامی دانش آموزان، امکان ورود به عرصه های رقابت های ملّی و بین المللی را ندارند، ولی ذهن های آن ها در صورت مبادرت به انجام تمرین های علمی مفید و هدایت شده، ورزیده شده و توانایی مواجه شدن با مسائل جدید و پیچیده و حل آن ها را خواهند داشت. در این میان با اعتقاد به این مهم، که علم و دانش از آنِ همه ی فرزندان این کشور است، بر آن شدیم تا با تهیه ی کتاب حاضر (و مجموعه ای از آثار مفید دیگر که در آینده، تقدیم خواهد شد)، نمونه سؤال های تجزیه و تحلیل شده ی المپیادهای جهانی و المپیاد های ملی کشورهای مختلف را تقدیم شما عزیزان نماییم.

امیدواریم با این اقدام، گامی هر چند کوچک به سوی تعالی علمی و پرورش استعدادهای فرزندان عزیز ایران اسلامیمان برداشته باشیم.

ضمناً جهت برقراری ارتباط با این گروه علمی می توانید به سایت اینترنتی زیر مراجعه فرمائید.

www.olympiad.ir

با آرزوی سربلندی ایران اسلامی

مؤسسه فرهنگی خواجه نصیر الدین طوسی

مدیریت نشر شیخ طوسی

بسمه تعالی

نمی‌دانم که در چشم جهان چگونه بوده‌ام ولی در چشم خودم به نظر می‌رسد تنها همچون کودکی بازی کنان بر کرانه دریا بوده‌ام که خود را گاه گاه با یافتن ریگی نرم‌تر و یا صدفی زیباتر از معمول سرگرم کرده‌ام در حالیکه اقیانوس عظیم حقیقت نامکشوف در پیش من گسترده است.

نیوتن

مقدمه مولف :

برگزاری رقابت ها و مسابقات علمی از دیر باز مورد توجه ملل مختلف بوده است و سابقه ای طولانی دارد. اما به شکل رسمی و آکادمیک اولین مسابقه ریاضی به صورت امروزی در کشور مجارستان در سال ۱۸۹۴ تحت نام مسابقات ریاضی " آتووش[1] " برگزار گردید.

اولین المپیاد بین المللی ریاضی در سال ۱۹۵۹ در رومانی با شرکت هفت کشور بلوک شرق (رومانی، مجارستان، چکسلواکی، لهستان، شوروی، آلمان شرقی، بلغارستان) برگزار شدو چهار سال به همین منوال ادامه داشت.بی شک اهداف سیاسی دوران جنگ سرد بی تاثیر در شکل گیری این رقابت ها نبوده است. ولی با پیوستن یوگسلاوی در سال ۱۹۶۳ این اهداف رنگ باخته و این رقابت به صحنه رقابت پرشور علمی، با هدف به چالش کشیدن دانش آموزان برای حل مسائل، تبدیل شده است، و در حال حاضر بیش از ۱۰۰ کشور در این رقابت ها حضور دارند.

در کشور ما نیز در سال ۱۳۶۳ اولین مسابقه ریاضی برگزار گردید و اولین بار ایران در المپیاد ریاضی کوبا در سال ۱۹۸۷ شرکت کرد. و در حال حاضر باشگاه دانش پژوهان وظیفه تربیت و آماده سازی تیم ها برای شرکت در المپیاد های جهانی را بر عهده دارد و رقابت ها به صورت چند مرحله ای در هشت رشته برگزار می شود. استقبال دانش آموزان و روند فزاینده شرکت آنان در المپیادها ما را با سه پرسش مهم روبرو می کند :

۱- هدف از شرکت در المپیاد ها چیست؟
۲- نیاز ها و انگیزه های دانش آموزان برای شرکت در المپیاد ها چیست؟
۳- برای پاسخ گویی به نیازهای دانش پژوهان علاقه مند چه کارهایی انجام شده است و چه باید کرد؟

بطور کلی اهداف شرکت در این رقابت را می توان به چهار قسمت تقسیم کرد :

الف) همگانی کردن علم و دانش (ریاضیات ، فیزیک ، شیمی و ...) :

در جوامع دانایی محور امروزی علوم بخش مهمی از سرمایه اجتماعی و فرهنگی را تشکیل می‌دهد و هر شهروند مدنی باید حداقلی از دانش های گوناگون را بیاموزد.

ب) ایجاد انگیزه و علاقه برای انتخاب رشته های علوم پایه :

در سالهای اخیر شاهد استقبال روزافزون دانش آموزان المپیادی برای ادامه تحصیل در این رشته‌ها هستیم.

---

1. Eotvos

ج) بسط و گسترش تفکر خلاق :

نگرش عمیق تر به مسائل و علاقه به کنجکاوی و حل مسائل خارج از چارچوب آموزش رسمی و ارتباط برقرار کردن با محافل علمی و استفاده از این تفکر در اعتلای کیفیت زندگی .

د) شرکت در رقابت های بین المللی و دست یابی به افتخارات ملی و فردی.

نیاز های دانش آموزان را نیز می توان به چهار محور زیر تقسیم کرد :

الف) زمینه مناسب اجتماعی و کسب آگاهی های لازم

ب) امکانات آموزشی از قبیل جزوه ها و کتاب های کمک آموزشی و ...

ج) کلاسهای آموزشی المپیاد

د) آزمون های آزمایشی دوره ای

ولی هنوز پاسخ شایسته ای به استقبال جوانانمان داده نشده است و در حال حاضر نیز دریافت مدال‌های زرین را تنها هدف شرکت در این رقابت‌ها می‌انگارند. در صورتی که کسب مقام اول جهان در المپیادها تنها بخشی از این اهداف است و باید اذعان داشت که المپیاد هنوز در انحصار بعضی مدارس و مجموعه های خاص بوده و سایر دانش آموزان با مسائل آن و چگونگی آماده سازی برای آن آشنایی چندانی ندارند و هنوز در هیچ یک از چهار محور نیاز دانش آموزان کار اساسی صورت نگرفته است. متأسفانه در سالهای اخیر به خصوص در شهر تهران شاهد تبلیغات گسترده برای دعوت دانش آموزان در کلاس‌های المپیاد هستیم که به طور کاذب و بدون هدف و با انگیزه سوداگری جامعه دانش آموزی را دچار آسیب جدی کرده است که لازم است خانواده‌ها و دانش آموزان با کسب آگاهی‌های لازم دقت بیشتری را مبذول فرمایند. همچنین کتابهای زیادی در زمینه المپیادهای علمی نگاشته شده است، اما وجه مشترک همه آنها این بوده است که برای ارائه مطالب پایه خاصی را می‌طلبد که این پایه در کتب دبیرستانی موجود نیست و در واقع روش اندیشیدن و تفکر روی مسائل را آموزش نمیدهد. و لذا مخاطبین همان گروه دانش آموزان خاص هستند که در مدارس، پایه های خاص را با کلاسهای گوناگون کسب کرده اند و بارها در ضمن تدریس المپیاد ریاضی در نقاط مختلف کشور، به خصوص مناطق محروم، به دانش آموزان مستعد و علاقه مندی برخورد کردیم که ابراز داشته اند ضمن مطالعه کتابها از قضایا و پیش فرض هایی استفاده شده است که کوچکترین اطلاعاتی از آن نداشتند و احساس می کنند بازیگران صحنه رقابتی هستند که عده ای مشخص برنده اند.

بی تردید کتاب حاضر، تنها می تواند پیش درآمدی بر اهداف ذکر شده باشد امید است با استفاده از نظرها و پیشنهادهای سازنده ی شما خوانندگان گرامی بتوانیم در پیشبرد این مجموعه بهره لازم را ببریم. کتاب در برگیرنده ۶ فصل است. فصل اول به "هنر ریاضی ورزیدن" اختصاص یافته که رویکردی نو نسبت به مسائل المپیاد و کمک به گسترش تفکر خلاق دارد. در واقع به تفضیل به چهار مرحله روش حل مسائل ارائه شده توسط "جرج پولیا" استاد آموزش ریاضی که عبارتند از :

۱- فهمیدن مسئله

۲- طرح نقشه ای برای حل

۳- اجرای نقشه ای برای حل

۴- بررسی راه حل و نتایج بدست آمده و طرح مسائل دیگر

می‌پردازد.

فصل دوم شامل المپیاد های ریاضی کشور های مختلف دنیـا در سـال ۱۹۹۹ اسـت. فـصل سـوّم بـه سـوالات مسابقات ریاضی منطقه ای که بین چند کشور مختلف در سال ۱۹۹۹ میلادی برگزار شده اسـت مـی پـردازد. فـصل چهارم نیز پاسخ سوالات فصل دوم است. فصل پنجم هم پاسخ سؤالات فصل سوّم است. فصل ششم به مسائل بـدون حل اختصاص دارد که بصورت مسابقه ای در سه مرحله پاسخ هر یک از سـوالات طبـق دسـتورالعمل ابتـدای فـصل ارسال می شود.

کتاب دارای سه پیوست است : پیوست اول اختصاص به نشانه ها و نمادها دارد، پیوست دوم شامل قضایای مهم و کاربردی است و پیوست سوم طبقه بندی سوالات را بر حسب موضوع های مختلـف مثـل هندسـه، جبـر، ریاضیات گسسته و ... بیان می کند.

در خاتمه لازم می‌دانم از آقایان امیر حسین نخودکار و سلمان پارسا دانـشجویان کارشناسـی ریاضـی دانـشگاه شریف، خانم شبنم نوری و آقای علیرضا کاردانی که زحمت نمونه خوانی اثر را بر عهده داشتند کمال تشکر را داشته باشم. همچنین از خانم صابری و خانم عاطفه آل هاشمی که عهده دار تایپ و صفحه آرایی اثر بودند و آقایان مجتبی نوربخش مقدم، حسن مؤمن و استاد ارجمند جناب حسین خوشنویسان سپاسگزارم.

نیما نوربخش مقدم
بهار ۸۵

فصل اول

« هنر ریاضی ورزیدن »

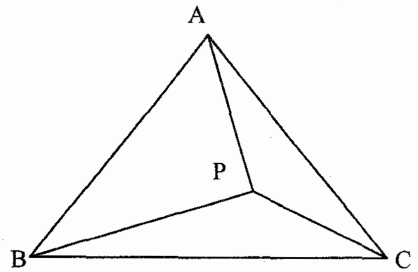
معیار ریاضیدان مانند نقاش و شاعر زیبایی است. اندیشه‌ها هم مانند رنگ‌ها یا واژه‌ها باید هماهنگی کامل داشته و با یکدیگر سازگار باشند. زیبایی نخستین معیار سنجش است. در جهان جایی برای ریاضیات زشت وجود ندارد.
هاردی، ریاضیدان انگلیسی قرن ۲۰

هنر ریاضی ورزیدن

سؤالی که از طرف بیشتر دانش آموزان درباره ریاضی مطرح می‌شود این است که اصلاً ریاضیات به چه درد می‌خورد؟ پاسخی هم که از طرف معلمان داده می‌شود تقریباً در همه جا یکسان است ریاضیات در فیزیک و مهندسی و دریانوردی و هواپیمائی و به طور کلی در همه علوم به کار می‌رود و در حقیقت سنجش درستی یک نظریه علمی بوسیله ریاضیات صورت می‌گیرد. بعضی از دانش آموزان با این پاسخ قانع می‌شوند و بعضی هم بدون قانع شدن مجبور به ادامه کار و خواندن ریاضی می‌شوند. آیا هیچ وقت از خود پرسیده‌ایم که چرا ما با این سؤال مواجه هستیم؟ آن هم سؤالی که معمولاً با این قصد مطرح می‌شود که ریاضیات اصلاً بد است و سخت است و فایده‌ای ندارد. چرا در کلاس فیزیک و تاریخ و جغرافیا و دینی و سایر دروس این سوال کمتر مطرح می‌شود و یا اصلاً مطرح نمی‌شود؟ چرا وقتی معلم تاریخ درباره فتوحات نادر حرف می‌زند همه دانش آموزان می‌فهمند ولی وقتی معلم ریاضی از فتوحات "اویلر" و "تالس" و "فرما" و "فیثاغورث" حرف می‌زند و آن ها را نمایش می‌دهد براحتی مورد استقبال قرار نمی‌گیرد. چرا وقتی همه می‌دانند که در تمام کشورهای دنیا بچه‌ها از سال ورود به مدرسه تا دانشگاه ریاضیات را مطالعه می‌کنند و تنها چیزی است که شاید تمام کشورها به طور یکسان در آن وحدت نظر دارند، باز این سوال که ریاضیات به چه درد می‌خورد مطرح می شود؟ تصور می‌کنم به غیر از تفاوت در ماهیت ریاضیات (که ماهیتی تجریدی دارد) با سایر علوم دو عامل نیز این تفاوت را زیادتر کرده است. عامل اول اینکه تمام کارهای روزانه، گفتگوهای بین افراد در خانواده، برنامه های رادیو و تلویزیون، نوشته‌های روزنامه ها و غیره به شکلی هستند که کار معلم تاریخ و معلمینی را که با عالم تجرید سر وکار ندارند راحت تر کرده است و در حقیقت ریاضیات میان دنیای واقعی و جهان اندیشه پیوند برقرار می کند. یعنی ریاضیات فقط بیانگر مفاهیم تجریدی نیست بلکه در عین حال روشنگر دنیای واقعی و عینی نیز هست.

ریاضیات دنیای انتزاعی مفاهیم ذهنی را به دنیای اشیاء واقعی پیوند می‌دهد بدون اینکه به طور کامل در یکی از آن ها حضور داشته باشد. به طور خلاصه می‌توان گفت ریاضیات استعاره‌های ذهن آدمی برای شناخت دنیای واقعی است. عامل دیگری که ریاضیات را ظاهراً مشکل کرده است مشکل ارایه آن از بدو تا پیدایش است. از همان آغاز پیدایش دانش ریاضی بسیاری از ریاضی دانان می‌کوشیدند که دانسته‌های خود را به صورتی معما وار مطرح سازند. شاید انگیزه آنان این بود که دانش خود را برتر و دست نیافتنی نشان دهند. ازاین رو سعی آنها بر این بوده که یافته های خود را طوری عنوان کنند که نشان دهند از جای دیگری ایده نگرفته اند. در نتیجه از ارتباط بین نتایج ریاضی آنطورکه باید و شاید درکتب منابع بحث نشده و هر نتیجه ریاضی مهارت خاصی را برای یادگیری به خود اختصاص داده است ولی باید دانست که بیشتر کارهای ریاضی حتی نتایج ریاضیدانهای برجسته معمولاً تعمیم کارها و مفاهیمی است که وجود داشتند و بعضی افراد با مهارت خاصی نتایج خود را طوری ارایه می دهند که این تعمیم آشکار نیست و در نتیجه کارش اصیل تر به نظر می رسد. اگر بخواهیم مثال های عینی بزنیم، اثبات قضیه آخر فرما (معادله $x^n + y^n = z^n$ به ازای $n \geq ۳$ جواب صحیح غیر صفر ندارد) توسط "آندرو وایلز" را که در سال ۱۹۹۶ انجام شد، نام می‌بریم. در ابتدا وقتی اثبات هزار و چند صفحه‌ای را می‌بینیم شگفت زده می‌شویم ولی با بررسی ساده‌ای می بینیم که فقط "وایلز" کار "شیمورا" و "تانیاما" و "وایل" را در مورد هندسه‌های بیضوی و هندسه جبری مطالعه کرده است و حدس آنها را در یک حالت تعمیم و آن را اثبات کرده است. در اینجا بهتر است منظور خود را از تعمیم بیان کنیم. منظور از تعمیم یک تعریف، تعریفی است که شامل دسته بزرگتری از اشیائی که تعریف اول به دست می دهد شود و تعمیم یک قضیه A، قضیه ای است که با همان فرض قضیه نتیجه وسیع تری به دست می دهد به طوری که قضیه A از آن نتیجه به دست می آید. منظور ما از تعمیم غیر اینها این موضوع نیز می باشد که بتوانیم یک نتیجه یا قضیه ریاضی را به قسمت دیگری از ریاضی ببریم و آن را بررسی کنیم. برای روشن شدن مطلب مثال زیر را بیان می کنیم.

مثال : فرض کنیم از ما بخواهند نشان دهیم که دستگاه معادلات دارای جواب یکتا است.



$$\begin{cases} \sqrt{X-۱}+\sqrt{Y-۱}=۸\sqrt{۳} \\ \sqrt{X-۹}+\sqrt{Z-۹}=۸\sqrt{۳} \\ \sqrt{Y-۶۴}+\sqrt{Z-۶۴}=۸\sqrt{۳} \end{cases}$$

اگر بخواهیم از روش معمولی بتوان دو رساندن استفاده کنیم به معادلات کسل کننده ای بر می‌خوریم و از طرفی معلوم نیست موفق شویم. ولی اگر تفکر بردن این معادلات را به قسمت دیگری از ریاضی داشته باشیم می بینیم که نتیجه می دهد و آن قسمت دیگر ریاضی، هندسه می باشد. می‌دانیم مقدار $\sqrt{a-b}$ همواره طول یک ضلع مثلث قائم الزاویه به وتر $\sqrt{a}$ و ضلع $\sqrt{b}$ است و این مطلب را نیز می دانیم که مجموع فواصل هر نقطه درون یک مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع همواره با ارتفاع مثلث برابر است.

پس دستگاه فوق، یک حل هندسی خیلی سریع دارد. به این طریق که کافی است یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $8\sqrt{3}$ رسم کنیم. واضح است که ارتفاع آن برابر با ۱۲ خواهد شد. حال اگر نقطه P را در مثلث طوری بگیریم که فاصله اش از BC برابر ۳ و از AB برابر ۸ و از AC برابر یک باشد آشکارا است که PC,PB,PA به ترتیب $\sqrt{X},\sqrt{Z},\sqrt{Y}$ خواهد بود که جوابهای دستگاه به دست می آیند و یکتائی جواب نیز از نظر هندسی بدیهی است.

همانطور که مشاهده شد، روابط جبری دستگاه فوق را به یک مسئله هندسی تعمیم دادیم و می‌توانیم برای دستگاه هایی از این قبیل مانند بالا راه حل هندسی بدست آوریم. متأسفانه ارتباط بین جبر و هندسه به جای آنکه دو طرفه باشد، یکطرفه می باشد و افراد آن دسته از مسائل هندسی را مطرح می کنند که راه حل جبری ساده دارد. ولی ما نشان دادیم که می توانیم این رابطه را دو طرفه کنیم.

باید توجه کرد که ریاضی تنها مجموعه ای از حقایق نیست که آنها را به شکل قضیه، لم و مسئله به دیگران نشان دهیم، بلکه ریاضیات نوعی تفکر است که به وسیله مجموعه ای از قضایا و مسائل باید آن تفکر را در کسانی که خواستار هستند به وجود آوریم تا هرکس با هر مقدار ریاضی که می داند بتواند با مسائل برخورد کند. یکی از راههای ایجاد این تفکر این است که قضایا و مسائلی را که بر خورد می کنیم، تعمیم دهیم و از حالت خاص بیرون آوریم. باید این را گفت که تمام تاریخ ریاضیات چیزی نیست به جز ثبت تعمیم های متوالی در ریاضی. پیشرفت های علمی بشر نیز در همین است. به طور مثال سیستم اعداد از اعداد طبیعی به صحیح و گویا و حقیقی و مختلط و اعداد چهار برگی و سیستم های جبری تعمیم داده شده است. با این حال می‌خواهیم نشان دهیم چگونه می توانیم به کمک تعمیم نتایج تازه به دست آوریم و مسائل را بهتر بررسی کنیم. در ابتدا یک مثال از هندسه و سپس از ترکیبیات و در نهایت از جبر می آوریم.

ابتدا هندسه را انتخاب می کنیم زیرا هندسه مبحثی است که ریاضیات با تمام قسمت هایش در آن متبلور می شود. به علاوه شاید تنها درس دبیرستانی است که از نظر محتوا و دید ریاضی با هر قسمت پیشرفته ای از ریاضیات برابری می کند و تمام آنچه را که ریاضی دان در تخصص خود انجام می دهد، می توان از طریق هندسه به دیگران نشان داد. قبل از ارایه مثال هندسه لطیفه ای را که "جرج پولیا" درباره تعمیم تعریف کرده عنوان می کنیم. او در یک کنفراس ریاضی چشمش به خانم "امی نوتر" که از زنان برجسته ریاضی است و به تعمیم علاقه خاصی داشته می افتد نزدیک می رود سلام و احوال پرسی می کند. پولیا شروع می کند به گفتن این مطلب که ریاضیات امروزه خیلی مبتذل شده و هرکس سریع شروع می کند به تعمیم کارهای دیگران و مقاله چاپ می کند خانم نوتر کمی جا به جا می شود ولی پولیا ادامه می دهد و می گوید من اصلاً فکر می کنم آنهایی که فقط تعمیم می دهند مانند میمونی هستند که وقتی پای درختی می رسند. بدون اینکه مفهوم درخت را بفهمند سریع ازآن بالا می روند. در اینجا خانم نوتر طاقت نیاورده و می رود. پولیا پیش خود گفت چرا ناراحت شد می توانست بگوید آنهایی هم که حالت های خاص را در ریاضی بررسی می کنند مانند میمونی هستند که یواش یواش از همان درخت پایین می آیند.

الف) هندسه

نامساوی زیرا در نظر بگیرید که در آن c,b,a اضلاع مثلث و S مساحت است می خواهیم نشان دهیم $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ و تساوی موقعی برقرار است که مثلث متساوی الاضلاع باشد. برای این مسأله راه حل های زیادی در کتاب های مختلف از طریق جبری و به ندرت از راه هندسی ارایه شده است ولی ما می خواهیم از منظر دیگری به آن نگاه کنیم و چگونگی پیدایش و مسائل دیگر را بررسی کنیم. این یکی از مسائلی بود که در المپیاد جهانی مطرح شد و بیشتر افراد در وهله اول متوسل به راه حل های جبری می شوند که البته ما را به جواب نیز می رساند. چون اگر قرار دهیم $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, p=\frac{a+b+c}{2}$ که با یک توان رساندن تبدیل به نامساوی $(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2 \geq 0$ می شود که بدیهی است وحل تمام می شود. خب در اینجا نقش مثلث چه بود؟ اصلاً اولین کسی که این نامساوی را مطرح کرد چگونه به آن رسید؟ آیا همینطور با حروف S, a,b,c و اعداد حقیقی بازی کرد تا به این نتیجه رسید. آیا همه نامساوی ها و روابط ریاضی و مسائل ریاضی شانسی به وجود آمده اند؟ حال به چگونگی پیدایش این مسأله و جواب دادن به سؤال های بالا می پردازیم. فرض کنیم صفحه P از رأس A از مثلث ABC گذشته و تصویر مثلث ABC روی صفحه P مثلث $A'B'C'$ است که یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع X می‌باشد اگر $cc'=d'$ و $bb'=d'$ خواهیم داشت :

$$\begin{cases} b^2=x^2+d^2 \\ c^2=x^2+d'^2 \\ a^2=x^2+(d'-d)^2 \end{cases}$$

پس از حذف $d'=d$ خواهیم داشت :

$3x^4-2(a^2+b^2+c^2)x^2+16S^2=0$ که S مساحت مثلث است و شرط جواب این است مبین چند جمله ای درجه ۲ ما مثبت باشد یعنی :

$$(a^2+b^2+c^2)^2-48S^2 \geq 0$$

پس می بینیم که شرط جواب در معادله فوق برقراری نامساوی مورد نظر ما است. پس دلیل پیدایش نامساویها این است که دیدیم و مسأله بالا مسئله ای بود که در قرن هفدهم توسط شوارتز مستقیماً حل شد و با توجه به آن می توان گفت نامساوی هم در حقیقت قضیه ای است که شوارتز اثبات کرد پس کاشف این نامساوی کار مهم و جدیدی انجام نداده است. پس اگر ما وقتی این نامساوی را می گوییم تاریخچه آن را ذکر کنیم تأثیر به سزایی برروی خواننده دارد.

حال به بحث تعمیم می پردازیم. در کتب یونانیان باستان مساحت را در مثلث از فرمول $S=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{c}$ کـه در آن c,b,a اضلاع و $\hat{C}$ زاویه مقابل به ضـلع c اسـت بدسـت مـی‌آوردنـد حـال مـی دانـیم $۰<\sin\hat{C}\le ۱$ در نتیجـه $S\le\frac{۱}{۲}ab$ و می‌دانیم $ab\le\frac{a^۲+b^۲}{۲}$ پس $۴S\le a^۲+b^۲$ یعنی تا حدودی توانسته ایم به نامساوی خودمان نزدیک بشویم همچنین می توان روابط مشابه برای اضلاع دیگر به دست می آوریم. حال می دانیم طبق قضیه کسینوس ها در هر مثلث

$$a^۲+b^۲-c^۲=۲ab\cos\hat{C}\Rightarrow a^۲+b^۲-c^۲=۴S\frac{\cos\hat{C}}{\sin\hat{C}}=۴S\cot\hat{C}$$

حال روابط مشابه برای ضلع های دیگر را می نویسیم و جمع می بندیم. داریم:

$$a^۲+b^۲+c^۲=۴S(\cot\hat{A}+\cot\hat{B}+\cot\hat{C})$$

حال با توجه به اینکه $\sum_{\text{دوری}}\cot\hat{A}\ge\sqrt{۳}$ در نتیجه $a^۲+b^۲+c^۲\ge ۴\sqrt{۳}S$ حال می آییم دوباره نامساوی را تعمیم دهیم و قویتر کنیم چون برای مثلث متساوی الضلاع به تساوی تبدیل می شود پس بعد از تعمـیم بایـد ایـن نکته حفظ شود. حدس زیر را می زنیم:

$$a^۲+b^۲+c^۲=۴\sqrt{۳}S+(a-b)^۲$$

با یک بررسی می‌بینیم که این نامساوی درست است حال به این نکته دقت می‌کنـیم کـه فرقـی بـین اضـلاع وجود ندارد پس اگر b,a را عوض کنیم و b,c بگذاریم فرقی ندارد. پس حدس قوی تری می زنیم و به بررسـی آن می پردازیم.

$$a^۲+b^۲+c^۲=۴\sqrt{۳}S+(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲$$

اگر دوباره بخواهیم این نامساوی را با توان دو رساندن و استفاده از رابطه هرون بررسی کنیم به روابط خسـته کننده جبری می رسیم ولی از ایده هنری زیبائی استفاده می‌کنیم و آن اینست که ما می‌توانیم اضـلاع مثلـث را بـه صورت $c=y+z,b=x+z,a=x+y$ بنویسیم و دلیل آن باتوجه به دایره محاطی داخلی مثلث بدیهی است حال می‌بینیم که چگونه این ایده هندسی به ما کمک میکند .باجایگذاری در رابطه به نامساوی بدیهی می رسیم.

$$x^۲y^۲+y^۲z^۲+x^۲z^۲\ge xyz(x+y+z)$$

البته می‌توان با استفاده از نامساویهای جبری تعمیم یافته نامساوی زیـر را بدسـت آورد کـه امیـدواریم در آینـده ای نزدیک بتوان آنرا با استفاده از هندسه مسطحه همانند نامساوی اولیه بدست آوریم :

$$ab+ac+bc+(P-a)^۲+(P-b)^۲+(P-c)^۲\ge$$
$$۴\sqrt{۳}S+(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲$$
$$+(P-b)(P-c)+(P-a)(P-b)+(P-a)(P-c)$$

(اثبات به عنوان تمرین)

دیدیم که یک مسأله بغرنج را با یک بررسی به مسأله ای ساده و بدیهی تبدیل کردیم و تعمیم یافته آن را بررسی کردیم. حال نگرش دوم در تعمیم یعنی انتقال یک مسئله به قسمت دیگری در ریاضیات را بررسی می‌کنیم. یعنی مسئله $a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ۴\sqrt{۳}S$ را به نحو دیگری که بسیار ملموس تر نقش هندسه مسطحه را بیان می‌کند، می‌آوریم که متن ارائه شده توسط مؤلف به چهارمین جشنواره جوان خوارزمی ۱۳۸۱ است.

" در سال سوم دبیرستان کتاب متمم مسائل هندسه تالیف کارونه نویسنده فرانسوی و ترجمه آقایان ازگمی و قوام‌زاده را که از معلم هندسه خود آقای بطحایی گرفته بودم مطالعه می‌کردم که یکی از مسایل توجه مرا جلب کرد و آن مسئله ضمن تعریف شبه میانه گفته بود فاصله محل تلاقی شبه میانه ها تا اضلاع مثلث را بر حسب سه ضلع بدست آورید و من این مسئله را حل کردم که در لم ۲ آن را بیان کرده ام. بعد از آن استراحتی کردم و آمدم تا مسئله بعدی را حل کنم چون می خواستم برای مرحله دوم المپیاد ریاضی آماده شوم. قبل از حل مسئله بعدی به یاد مسئله ۳۶۶ المپیاد ریاضی شوروی که در لم یک بیان کرده ام افتادم از آنجا بود که تصمیم گرفتم این مطالب را به هم وصل کرده و به امید گرفتن نتیجه ای این کار را ادامه دادم.

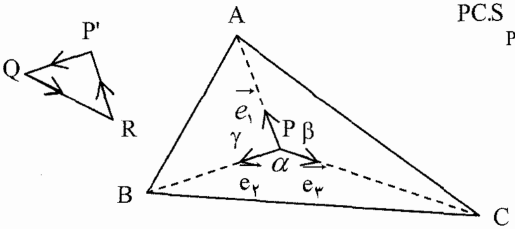
بعد از مدتی که به عبارتهای بزرگ و پیچیده رسیدم آن را موقتاً کنار گذاشتم چون در امتحانات و درس و کار مدرسه بود و فرصت کافی نداشتم. تا اینکه امتحانات تمام شد و من فرصت کافی پیدا کردم در حین دیدن یکی از مسابقات فوتبال جام جهانی ۲۰۰۲ تصمیم گرفتم آن عبارات پیچیده را که در صفحات بعدی خواهیم دید ادامه دهم و آن ها را ساده کنم. بعد از اتمام بدست آورم فاصله نقطه لوموان (محل تلاقی سه شبه میانه) تا مرکز دایره محیطی به توان دو برابر عبارتی است که خواهیم دید.

انتخاب مرکز دایره محیطی در وهله اول به این دلیل بود که محاسبات به دور از عبارتهای پیچیده تر انجام می شد چون فاصله مرکز دایره محیطی از سه راس مثلث برابر است(R). بعد که فاصله نقطه لوموان تا مرکز دایره محیطی به توان دو را برحسب سه ضلع بدست آورم. آن عبارت را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دادم و بعد از انجام یک سری عملیات که خواهیم دید به نامساوی $a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ۴\sqrt{۳}S$ (عبارت یک) رسیدم که a و b و c اضلاع یک مثلث دلخواه و S مساحت آن است. غیر قابل تصور بود برایم که این نامساوی را که قبلا می دانستم و از راههای جبری اثبات شده بود بدست آورده ام. روشی که در این کار به کار بردم می توان برای هر دو نقطه مهم انجام داد و نامساویهای زیادی بدست آورد که بطور مثال در انتها به جای مرکز دایره محیطی مرکز دایره محاطی داخلی را قرار داده ام. "

حال ما در اینجا با روش خاص خود اثبات نامساوی و پاسخ به سوالات ابتدای این فصل را با تکیه محض بر هندسه مسطحه داده ایم.

لم یک[1] : به ازای هر نقطه P درون مثلث ABC (اگر مساحت مثلث xyz را با $S_{\underset{xyz}{\Delta}}$ نشان دهیم) داریم :

$$\overrightarrow{PC}.S_{\underset{PAB}{\Delta}}+\overrightarrow{PA}.S_{\underset{PBC}{\Delta}}+\overrightarrow{PB}.S_{\underset{ACP}{\Delta}}=0 \quad \text{(عبارت دو)}$$



برهان : بردارهای واحد $\vec{e_3},\vec{e_2},\vec{e_1}$ را به ترتیب روی بردارهای $\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PA}$ در نظر می‌گیریم. حال می دانیم مساحت مثلث ABC برابراست با $\frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{AB}\sin\hat{A}$ پس داریم :

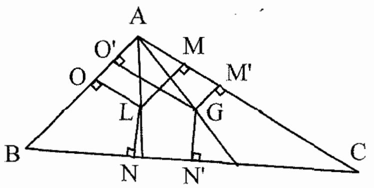
$$(\sin\hat\beta\,\overline{PB}.\vec{e_2}.\overline{PA}.\overline{PC}+\overline{PC}.\vec{e_3}.\overline{PA}.\overline{PB}.\sin\hat\gamma+\overline{PA}.\vec{e_1}.\overline{PB}.\overline{PC}.\sin\hat\alpha)=0$$

که اگر از $\overline{PA}.\overline{PB}.\overline{PC}$ فاکتور بگیریم باید ثابت کنیم $\vec{e_2}\sin\hat\beta+\vec{e_3}\sin\hat\gamma+\vec{e_1}\sin\hat\alpha=0$ برای این منظور مثلث P'QR را که اضلاع آن موازی با بردارهای $\vec{e_3},\vec{e_2},\vec{e_1}$ است را در نظر می‌گیریم چون $\overrightarrow{P'Q}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RP'}=0$ پس $\overline{P'Q}\vec{e_2}+\overline{QR}\vec{e_3}+\overline{RP'}\vec{e_1}=0$ و نیز می‌دانیم طبق رابطه سینوس ها $\overline{P'Q}=2R'\sin\hat\beta$ و به همین ترتیب $\overline{P'Q}=2R'\sin\hat\beta$ و $\overline{P'Q}=2R'\sin\hat\beta$ که R' شعاع دایره محیطی مثلث P'QR است. پس $2R'\sin\hat\gamma\vec{e_3}+2R'\sin\hat\alpha\vec{e_1}+2R'\sin\hat\beta\vec{e_2}=0$ $b_i\in R$
که پس از فاکتورگیری از $2R'$ نتیجه دلخواه ما بدست می‌آید.

تعریف یک : نقطه M را باری سانتر نقاط $a_1,\dots,a_n$ وابسته به ضرایب $b_1,\dots,b_n$ که گویند هرگاه داشته باشیم $b_1\overrightarrow{Ma_1}+b_2\overrightarrow{Ma_2}+\dots+b_n\overrightarrow{Ma_n}=0$ بطور مثال باری سانتر نقاط A و B و C که رأسهای یک مثلث هستند وابسته به ضرایب ۱ و ۱ و ۱ نقطه G مرکز ثقل مثلث است زیرا $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$

تعریف دو : محل تلاقی سه خطی که قرینه های میانه های مثلث نسبت به نیمساز نظیرشان است نقطه لوموان گوییم.

لم دو : فاصله نقطه لوموان از هر ضلع برابر است با دو برابر مساحت مثلث در طول ضلع مورد نظر تقسیم بر مجموع مربعات طول اضلاع مثلث.



۱) می توانیم این لم را برای هر نقطه در فضا تعمیم دهیم که در آن صورت بعضی از علامتها در عبارت دو منفی می شود.

برهان : از تشابه مثلث های GM'A و LOA و مثلث های GO'A و LMA نتیجه می شود

$$\frac{LO}{GM'}=\frac{LM}{GO'}\Rightarrow LO\times GO'=LM\times GM'\Rightarrow LO\times h_c=LM\times h_b$$

$$(h_b=\frac{۲}{b}S\ ,\ h_c=\frac{۲}{c}S)\Rightarrow\frac{LO}{c}=\frac{LM}{b}$$

و به همین ترتیب $\frac{LM}{b}=\frac{LN}{a}\ ,\ \frac{LO}{c}=\frac{LN}{a}$

$$\Rightarrow\frac{LO}{c}=\frac{LO\times c+b\times LM+a\times LN}{a^۲+b^۲+c^۲}=\frac{۲S}{a^۲+b^۲+c^۲}$$

$$\Rightarrow LO=\frac{۲Sc}{a^۲+b^۲+c^۲}\ ,\ LM=\frac{۲Sb}{a^۲+b^۲+c^۲}\ ,\ LN=\frac{۲Sa}{a^۲+b^۲+c^۲}$$

لم سه : باری سانتر نقاط A و B و C (رئوس مثلث) وابسته به ضرایب $a^۲$, $b^۲$, $c^۲$ نقطه لوموان مثلث است.

برهان : طبق لم یک و با توجه به شکل دو داریم:

$$\overrightarrow{LA}.S_{\underset{LBC}{\Delta}}+\overrightarrow{LB}.S_{\underset{LAC}{\Delta}}+\overrightarrow{LC}.S_{\underset{LAB}{\Delta}}=۰$$

که اگر مقادیر مساحت را با توجه به ارتفاعهای مثلثها که در لم دو بدست آوردیم جایگذاری کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{۲Sa^۲}{۲(a^۲+b^۲+c^۲)}\overrightarrow{LA}+\frac{۲Sb^۲}{۲(a^۲+b^۲+c^۲)}\overrightarrow{LB}+\frac{۲Sc^۲}{۲(a^۲+b^۲+c^۲)}\overrightarrow{LC}=۰$$

که با فاکتور گیری از قسمت مشترک $\frac{۲S}{۲(a^۲+b^۲+c^۲)}$ به نتیجه مطلوب می رسیم.

لم ۴ : به ازای هر نقطه مثل O در صفحه مثلث داریم $\overrightarrow{OL}=\frac{a^۲\overrightarrow{OA}+b^۲\overrightarrow{OB}+c^۲\overrightarrow{OC}}{(a^۲+b^۲+c^۲)}$

برهان : می‌دانیم که به ازای هر نقطه P داریم :

$$\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{LA}=\overrightarrow{PA}$$
$$\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{LB}=\overrightarrow{PB}$$
$$\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{PC}$$

با ضرب جمله اول در $a^۲$ و جمله دوم در $b^۲$ و سومی در $c^۲$ و جمع سه رابطه خواهیم داشت :

$$(a^۲+b^۲+c^۲)\overrightarrow{PL}+a^۲\overrightarrow{LA}+b^۲\overrightarrow{LB}+c^۲\overrightarrow{LC}=a^۲\overrightarrow{PA}+b^۲\overrightarrow{PB}+c^۲\overrightarrow{PC}$$

که با توجه به لم سه حکم ما ثابت شده است.

لم ۵ : در مثلث ABC با اضلاع a و b و c و شعاع دایره محیطی R و محاطی داخلی r و P نصف محیط داریم :

$$ab+ac+bc=P^۲+r^۲+۴Rr$$

برهان : اگر از دو رابطه مثلثاتی زیر استفاده کنیم که :

$$P-a=r\ \mathrm{Cotg}\frac{\alpha}{۲}$$

$$\mathrm{Cotg}\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{P(P-a)}{(P-b)(P-c)}}$$

نتیجه مورد نظر بدست می‌آید. و یا اینکه مقادیر R و r و P را جایگذاری می‌کنیم یعنی $R=\frac{abc}{۴S}$ و $P=\frac{a+b+c}{۲}$ و $r=\frac{S}{P}$ و از طریق بازگشتی اثبات را انجام دهیم. حال از این فرمول نتایجی بدست می‌آید که در زیر می‌آوریم :

نتیجه یک :

$$a^۲+b^۲+c^۲=(a+b+c)^۲-۲(ab+ac+bc)=۲P^۲-۲r^۲-۸rR$$

نتیجه دو :

$$a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲=(ab+ac+bc)^۲-۲(abc(a+b+c))$$
$$=P^۴+r^۴+۱۶R^۲r^۲+۲r^۲P^۲+۸r^۳R-۸rRP^۲$$

نتیجه سه :

$$a^۴+b^۴+c^۴=(a^۲+b^۲+c^۲)^۲-۲(a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲)$$
$$=۲P^۴+۲r^۴+۳۲Rr^۲-۱۲P^۲r^۲+۱۶r^۳R-۱۶RrP^۲$$

حال اگر در لم ۴ فرض کنیم نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث باشد خواهیم داشت :

$$\overline{OL}^۲=\frac{(a^۲\overrightarrow{OA}+b^۲\overrightarrow{OB}+c^۲\overrightarrow{OC})^۲}{(a^۲+b^۲+c^۲)^۲}$$

$$=\frac{R^۲(a^۴+b^۴+c^۴)+a^۲b^۲(۲R^۲-c^۲)+a^۲c^۲(۲R^۲-b^۲)+b^۲c^۲(۲R^۲-a^۲)}{(a^۲+b^۲+c^۲)^۲}$$

$$=\frac{R^۲(۴r^۴+۴P^۴+۳۲r^۳R+۶۴R^۲r^۲-۵۶r^۲P^۲-۳۲P^۲rR)}{(۲P^۲-۲r^۲-۸rR)^۲}$$

$$\Rightarrow\overline{OL}^۲=\frac{R^۲(P^۲-r^۲-۴Rr)^۲-۱۲R^۲r^۲P^۲}{(P^۲-r^۲-۴Rr)^۲}=R^۲-\frac{(۲\sqrt{۳}rRP)^۲}{(P^۲-r^۲-۴Rr)^۲}$$

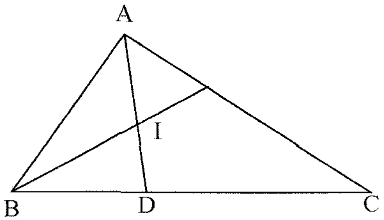
حال چون $\overline{OL}^۲ \geq ۰$ در نتیجه $R^۲ \geq \dfrac{(۲\sqrt{۳}rRP)^۲}{(P^۲ - r^۲ - ۴Rr)^۲}$

$$\overset{\text{طبق لم ۵}}{\Rightarrow} \frac{۱}{۲}R(a^۲ + b^۲ + c^۲) \geq ۲\sqrt{۳}\, rRP \Rightarrow a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq \frac{۸\sqrt{۳}rP}{۲}$$

$$\Rightarrow a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ۴\sqrt{۳}\, S$$

حال به راستی چه کسی می‌داند که نامساوی تعمیم یافته بالا را که از راه جبری بدست آوریم فاصله بین کدام دو نقطه است که این نامساوی از آن نتیجه گرفته شده است. حال برای اینکه نامساوی جدیدی بدست آوریم به جای نقطه O مرکز دایره محیطی نقطه I مرکز دایره محاطی داخلی را قرار می‌دهیم :

$$\overline{IL}^۲ = \left[\frac{a^۲\overrightarrow{IA} + b^۲\overrightarrow{IB} + c^۲\overrightarrow{IC}}{a^۲ + b^۲ + c^۲}\right]^۲ = \frac{a^۴\overrightarrow{IA}^۲ + b^۴\overrightarrow{IB}^۲ + c^۴\overrightarrow{IC}^۲ + \dots}{(a^۲ + b^۲ + c^۲)^۲}$$



لم یک : $AI = \dfrac{d_a(b+c)}{۲P}$

برهان : $IA = \dfrac{d_a.c}{c + \overline{BD}} = \dfrac{d_a.c}{\dfrac{ac}{b+c} + c} = \dfrac{d_a}{\dfrac{a}{b+c} + ۱}$

$$\Rightarrow IA = \frac{d_a(b+c)}{a+b+c}$$

و به همین صورت $\Rightarrow IB = \dfrac{d_b(a+c)}{a+b+c}$ و $\Rightarrow IC = \dfrac{d_c(a+b)}{a+b+c}$

لم دو : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \dfrac{IA^۲ + IB^۲ - c^۲}{۲} = \dfrac{d_a^۲(b+c)^۲ + d_b^۲(a+c)^۲ - c^۲ \times ۴P^۲}{(۴P^۲) \times ۲}$

برهان : با توجه به قضیه کسینوس ها $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A}$ و تعریف ضرب داخلی بردارها بدیهی است.

لم ۳ : $d_a = \dfrac{۲}{b+c}\sqrt{bcP(P-a)}$

$$\overset{\text{لم ۳}}{\Rightarrow} IA^۲ = \frac{\dfrac{۴}{(b+c)^۲}bcP(P-a)(b+c)^۲}{۴P^۲} = \frac{bc(P-a)}{P}$$

لم ۴ : $a^۴IA^۲ + b^۴IB^۲ + c^۴IC^۲ = \dfrac{a^۴bc(P-a)}{P} + \dfrac{b^۴ac(P-b)}{P}$

$$+ \frac{c^۴ab(P-c)}{P} = \frac{abc}{P}(a^۳(P-a) + b^۳(P-b) + c^۳(P-c))$$

حال می‌توانیم $\overline{IL}^{2}$ را برحسب اضلاع مثلث بدست آوریم :

$$\overline{IL}^{2}=\frac{\frac{abc}{P}\left[a^{3}(P-a)+b^{3}(P-b)+c^{3}(P-c)\right]}{(a^{2}+b^{2}+c^{2})^{2}}$$

$$+\frac{\frac{a^{2}b^{2}c}{P}(b(P-a)+a(P-b))-3a^{2}b^{2}c^{2}}{(a^{2}+b^{2}+c^{2})^{2}}$$

$$+\frac{\frac{a^{2}c^{2}b}{P}(a(P-c)+c(P-a))+\frac{b^{2}c^{2}a}{P}(b(P-c)+c(P-b))}{(a^{2}+b^{2}+c^{2})^{2}}$$

$$=\frac{\frac{abc}{P}\left[P(a^{3}+b^{3}+c^{3})-(a^{4}+b^{4}+c^{4})+ab^{2}(P-a)+a^{2}b(P-b)\right.}{(a^{2}+b^{2}+c^{2})^{2}}$$

$$+\frac{a^{2}c(P-c)+ac^{2}(P-a)+b^{2}c(P-c)+bc^{2}(P-b)-3abcP]}{(a^{2}+b^{2}+c^{2})^{2}}$$

$$=\frac{\frac{abc}{P}\left[P(a^{3}+b^{3}+c^{3})-(a^{4}+b^{4}+c^{4})-2(a^{2}b^{2}+b^{2}c^{2}+a^{2}c^{2})\right.}{(a^{2}+b^{2}+c^{2})^{2}}$$

$$+\frac{-3abcP+P(a^{2}b+a^{2}c+b^{2}a+b^{2}c+c^{2}a+c^{2}b)]}{(a^{2}+b^{2}+c^{2})^{2}}$$

$$=\frac{\frac{4RrP}{P}\left[P(2P^{3}-6Pr^{2}-12rRP)\right.}{(a^{2}+b^{2}+c^{2})^{2}}$$

$$+\frac{-(2P^{4}+2r^{4}+32r^{2}R^{2}-12P^{2}r^{2}+16r^{3}R-16RrP^{2})}{(a^{2}+b^{2}+c^{2})^{2}}$$

$$+\frac{(-2P^{4}-2r^{4}-32R^{2}r^{2}-4r^{2}P^{2}-16r^{3}R+16rRP^{2})}{(a^{2}+b^{2}+c^{2})^{2}}$$

$$=\frac{4Rr[4RrP^{2}+4r^{2}P^{2}-4r^{4}-64R^{2}r^{2}-32r^{3}R]}{(2P^{2}-2r^{2}-8Rr)^{2}}+\frac{-12RrP^{2}+P(2P^{3}-4RrP+2Pr^{2})]}{(a^{2}+b^{2}+c^{2})^{2}}$$

$$\Rightarrow\overline{IL}^{2}=\frac{4Rr^{2}[RP^{2}+rP^{2}-r^{3}-16R^{2}r-8r^{2}R]}{(P^{2}-r^{2}-4Rr)^{2}}$$

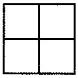
و چون عبارت بالا همواره مثبت است با قرار دادن عبارت بالا بزرگتر یا مساوی می‌توان نامساوی خوبی در مثلث پیدا کرد :

$$RP^{۲} + rP^{۲} \geq r^{۳} + ۸r^{۲}R + ۱۶rR^{۲}$$
$$\Rightarrow P^{۲}(R + r) \geq r(r^{۲} + ۸rR + ۱۶R^{۲})$$

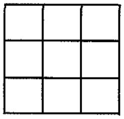
دیدیم که با توجه به لم هایی که ثابت کردیم می توانیم با بدست آوردن ضرایب باری سانتر نقاط رئوس یک مثلث فاصله نقاط مهم و نامساویهایی که قبلا از طریق جبری ثابت شده بود را بدست آوریم.

ب) ترکیبیات

مثال : فرض می کنید می خواهیم تعداد مربعهای یک شبکه $n \times n$ را بشماریم برای یافتن الگو سعی می‌کنیم حالتهای خاص را بدست آوریم و تعمیم دهیم . یک مربع ۲×۲ را در نظر بگیریم ۴ مربع کوچک وجود دارد و یک مربع ۲×۲



حال یک مربع ۳×۳ رادر نظر بگیرید تعداد مربعهای کوچک ۱×۱ برابر ۹ است . تعداد مربعهای ۲×۲ برابر ۴ و تعداد مربعهای ۳×۳ برابر با یک است

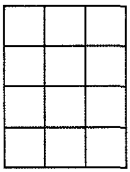


مجموع	مربعهای ۴×۴	مربعهای ۳×۳	مربعهای ۲×۲	مربعهای ۱×۱	اندازه صفحه
	-	-	-	۱	۱×۱
۵	-	-	۱	۴	۲×۲
۴	-	۱	۴	۹	۳×۳
۳۰	۱	۴	۹	۱۶	۴×۴

با کمی تأمل می بینیم که تمام اعداد موجود در جدول مربع کامل است یعنی این حدس را می‌زنیم که اگر اندازه صفحه ۵×۵ بود تعداد مربع ها برابر $۵۵ = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲$ و اگر $n \times n$ بود تعداد مربع ها برابر $n^۲ + (n-۱)^۲ + \dots\dots\dots + ۳^۲ + ۲^۲ + ۱^۲$ باشد و چون این مجموع برابر $\frac{n(n+۱)+(۲n+۱)}{۶}$ است پس حدس ما این است که از روی الگوی بدست آمده مجموع مربع ها در شبکه $n \times n$ از این راه به دست می‌آید. حال می‌خواهیم این الگوها را اثبات و تعمیم دهیم.

می‌دانیم مستطیل یعنی دو خط موازی متمایز عمود بر دو خط موازی متمایز دیگر و اگر فاصله این دو جفت خط موازی برابر باشد شکل مربع می شود. پس اگر در یک شبکه $m\times n$ بخواهیم تعداد مستطیل ها را بشماریم باید تعداد راه های انتخاب دو خط موازی متمایز عمود بر دوخط متمایز دیگر را بشماریم.

مثلاً اگر یک شبکه ۴×۳ را در نظر بگیریم ۴ خط عمودی و ۵ خط افقی داریم پس اگر هر دو خط متمایز دلخواه عمودی و هر دو خط دلخواه افقی را انتخاب کنیم یک مستطیل می‌شود یعنی به $\binom{۴}{۲}$ انتخاب از خطوط عمودی و $\binom{۵}{۲}$ طریق انتخاب از خط افقی داریم.



پس تعداد مستطیل ها $\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۲}$ خواهد بود .پس اگر یک شبکه $m\times n$ داشته باشیم $\binom{n+۱}{۲}\times\binom{m+۱}{۲}$ مستطیل دارد چون $n+۱$ خط عمودی (افقی) و $m+۱$ خط افقی (عمودی) داریم. حال به بررسی مربع ها می پردازیم . اگر همان شبکه ۴×۳ را در نظر بگیریم، اگر ما دو خط عمودی از شبکه به فاصله یک را در نظر بگیریم باید دو خط موازی افقی با فاصله یک را بگیریم تا شکل حاصل مربع شود. پس اگر حساب کنیم می بینیم در شبکه۴×۳ به ۳ طریق می توان دو خط موازی با فاصله یک از خطوط عمودی انتخاب کرد.

زیرا اگر اولین خط را انتخاب کنیم خط دیگری دومی است و اگر $n-۱$ را انتخاب کنیم خط بعدی n است پس به همین ترتیب به چهار طریق می‌توان از خطوط افقی با فاصله یک انتخاب کرد. حال خطوط با فاصله ۲ را در نظر می‌گیریم و به همین ترتیب ادامه می دهیم. جدول زیر را داریم :

تعداد مربعهای ۴×۴	تعداد مربعهای ۳×۳	تعداد مربعهای ۲×۲	تعداد مربعهای ۱×۱	
۰	۱×۲	۲×۳	۳×۴	شبکه ۳×۴

با دقت در جدول و همچنین با بررسی چند مثال ساده تعمیم آن برای حالت کلی جدول $m\times n$ به شکل زیر می شود[1] :

	تعداد مربعهای ۱×۱	تعداد مربعهای ۲×۲	تعداد مربعهای $n\times n$
شبکه $n\times m$	$m\times n$	$(m-1)(n-1)$	$(n-n+1)(m-n+1)$

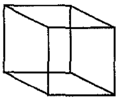
البته این نکته را مورد توجه قرار می دهیم که حداکثر ضلع مربع برابر مینیموم $\{m,n\}$ است. پس می‌توانیم با نماد ریاضی تعداد مربعهای یک شبکه $m\times n$ را با :

$$\sum_{i=0}^{\min\{m,n\}}(m-i)(n-i)$$

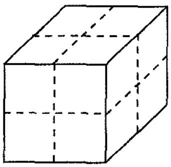
نشان دهیم. حال با این رابطه الگو به دست آمده در اول کار اثبات می‌باشد زیرا وقتی $m=n$ رابطه به صورت

$$\sum_{i=0}^{\min\{m,n\}}(m-i)(n-i)=\sum_{i=0}^{n}(n-i)^2=n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\dots+1^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حال به این بسنده نمی‌کنیم و سعی می‌کنیم به فضای سه بعدی تعمیم دهیم یعنی در یک شبکه $m\times n\times p$ تعداد مکعب مربع ها را بشماریم. ابتدا طبق روند قبل از الگوهای ساده استفاده می‌کنیم. ابتدا یک شبکه ۱×۱×۱. واضح است این تعداد برابر یک است



حال یک شبکه ۲×۲×۲ را در نظر می گیریم می بینیم ۸ مکعب مربع ۱×۱×۱ و یک مکعب مربع ۲×۲×۲ است و اگر یک شبکه ۳×۳×۳ را در نظر بگیریم می‌توانیم این تعداد را بشماریم.



۱) بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض کنیم $n<m$ است.

حال جدول زیر را تنظیم کرده و مشاهده می کنیم.

شبکه	تعداد مکعبهای $۱\times۱\times۱$	تعداد مکعبهای $۲\times۲\times۲$	تعداد مکعبهای $۳\times۳\times۳$	تعداد مکعبهای $۴\times۴\times۴$	مجموع
$۱\times۱\times۱$	۱	-	-	-	۱
$۲\times۲\times۲$	۸	۱	-	-	۹
$۳\times۳\times۳$	۲۷	۸	۱	-	۳۶
$۴\times۴\times۴$	۶۴	۲۷	۸	۱	۱۰۰

با کمی دقت در می یابیم تمام اعداد مکعب اعداد طبیعی هستند. پس الگویی که حدس می زنیم این است که برای شبکه $n\times n\times n$ تعداد مکعبها برابر $۱^۳+۲^۳+\ldots+(n-۱)^۳+n^۳$ است. حال مثل شبکه $m\times n$ روی صفحه این استدلال را روی فضا هم ذکر می کنیم که مکعب مستطیل از برخورد دو صفحه متمایز موازی (افقی) در طول و دو صفحه متمایز موازی در عرض و دو صفحه متمایز در ارتفاع به وجود می‌آید.

یعنی به همان ترتیب که در صفحه ذکر کردیم تعداد مکعب مستطیل ها برابر $\binom{p+۱}{۲}\binom{m+۱}{۲}\binom{n+۱}{۲}$ است و همانطور که برای مکعب مربع استدلال را آغاز می کنیم از تعداد مربعها و روش آن در صفحه ایده می گیریم و همانطور که گفتیم حال اگر مکعب مربع بخواهیم باید فاصله این سه جفت صفحه موازی از یکدیگر یکی می باشد که با همان استدلال در صفحه این تعداد برابر $\sum_{i=۰}^{\min\{n,m,p\}}(m-i)(n-i)(p-i)$ می‌شود و $\min\{m,n,p\}$ برای این است که حداکثر تعداد مربعها روی یک وجه می تواند برابرکمترین مقدار p,m,n باشد. و اگر بخواهیم الگوی به دست آمده و حدس خود درباره شبکه $n\times n\times n$ را ثابت کنیم در رابطه بالا قرار می دهیم $p=n=m$ و داریم :

$$\sum_{i=۰}^{n}(n-i)^۳=\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$$

دیدیم که توانستیم با تعمیم دادن به روابط زیبا و جالبی برسیم و نتایج خوبی به دست آوریم.

ج) جبر

حال در ادامه به بررسی و تعمیم یک نامساوی که در سوالات اردوی تابستان المپیاد مطرح شده بود می پردازیم. سؤال بدین ترتیب بود که اگر x_1, x_2, x_3 اعداد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید:

$$\frac{x_1}{x_2+2x_3}+\frac{x_2}{x_3+2x_1}+\frac{x_3}{x_1+2x_2}\geq 1$$

اگر بخواهیم از مخرج مشترک گیری و توان رسانی و .... برویم خسته کننده است و شاید به جواب هم نرسد. حال می آییم از نامساوی کوشی که ابزار خوبی برای حل نامساوی است استفاده می‌کنیم. نامساوی کوشی برای سه عدد x_1, x_2, x_3 و سه عدد y_1, y_2, y_3 به صورت زیر است :

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\geq(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$$

حال با انتخاب مناسب y_i, x_i سعی می‌کنیم مسأ له را حل کنیم. مثلاً فرض می‌کنیم :

$$x_1=\sqrt{\frac{a}{b+2c}}$$
$$y_1=\sqrt{a}$$

برای جلوگیری از اشتباه فرض می کنیم $x_3=c, x_2=b, x_1=a$ در مسأله اصلی است. با توجه به این انتخاب y_i, x_i ها و ادامه می‌بینیم به جایی نمی‌رسیم پس باید سعی کنیم که y_i, x_i مناسب را انتخاب کنیم. فرض می‌کنیم

$$x_1=\sqrt{\frac{a}{2c+b}}$$
$$y_1=\sqrt{a(b+2c)}$$

و به همین ترتیب y_3, x_3, y_2, x_2 با ادامه محاسبات به نتیجه زیر می‌رسیم :

$$\left(\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\right)((ab+2ac)+(bc+2ab)+(ca+2bc))\geq(a+b+c)^2$$

پس برای اثبات نامساوی مطلوب مسأله باید ثابت کنیم $\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+ac+bc)}\geq 1$ که به نامساوی بدیهی $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$ می‌رسیم. خوب ما توانستیم مسئله مطلوبی را حل کنیم ولی اگر بخواهیم کمی کنکاش کنیم و از ایده‌ای که برای حل این مسئله به کار بردیم برای تعمیم این نامساوی بهره گیریم حالت چهار عددی زیر را در نظر می‌گیریم : اگر $a, b, c, d \in R > 0$ ثابت کنید :

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}$$

حال اگر ایده بالا را به کار بریم می‌بینیم نامساوی درست است. پس می‌آییم نامساوی را برای n عدد $a_1,a_2,\dots,a_n$ که همگی متعلق به اعداد حقیقی مثبت هستند در نظر می‌گیریم. پس نامساوی به شکل

$$\frac{a_1}{a_2+2a_3+\dots+(n-1)a_n}+\frac{a_2}{a_3+2a_4+\dots+(n-1)a_1}+\dots+\frac{a_n}{a_1+2a_2+\dots+(n-1)a_{n-1}}\ge t$$

در می‌آید که مقدار t را پس از به کار بردن روش بالا تعیین می‌کنیم.

اگر $y_1=\sqrt{a_1(a_2+\dots+(n-1)a_n)}$, $x_1=\sqrt{\dfrac{a_1}{a_2+\dots+(n-1)a_n}}$ و به همین ترتیب x_2 تا x_n، y_1 تا y_n را محاسبه و از حالت کلی نامساوی کوشی- شوارتز که به صورت :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\ge\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2$$

است استفاده کنیم و نامساوی مطلوب خود در طرف چپ را S بنامیم داریم :

$$S\ge\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}=\frac{(a_1+\dots+a_n)^2}{n(a_1a_2+\dots+a_1a_n+\dots+a_{n-1}a_n)}\ge t$$

حال اگر بخواهیم بزرگترین t که در نامساوی صدق می‌کند را قرار دهیم باید مقدار $t=\dfrac{2}{n-1}$ را قرار دهیم زیرا :

$$(n-1)(a_1+\dots+a_n)^2\ge 2n(a_1a_2+\dots+a_{n-1}a_n)$$
$$\Rightarrow (n-1)(a_1^2+\dots+a_n^2)\ge 2(a_1a_2+\dots+a_{n-1}a_n)$$
$$\Rightarrow (a_1^2+a_2^2)+(a_1^2+a_3^2)+\dots+(a_1^2+a_n^2)+\dots+(a_{n-1}^2+a_n^2)$$
$$\ge 2a_1a_2+2a_1a_3+\dots+2a_1a_n+\dots+2a_{n-1}a_n$$

که با توجه به نامساوی بدیهی $a^2+b^2\ge 2ab$ اثبات شده است. و اگر t را مقدار بزرگتری بگذاریم نامساوی برقرار نمی‌باشد پس با کمی تأمل و تعمیم یک به نامساوی جالب و زیبا برای n عدد $a_1,\dots,a_n$ به صورت زیر رسیدیم :

$$\frac{a_1}{a_2+\dots+(n-1)a_n}+\dots+\frac{a_n}{a_1+2a_2+\dots+(n-1)a_{n-1}}\ge\frac{2}{n-1}$$

***

فصل دوم

« مسابقات ریاضی کشورهای مختلف (سال ۱۹۹۹) »

اگر می‌خواهید شنا یاد بگیرید وارد آب شوید. اگر می‌خواهید روش حل مسأله ها را یاد بگیرید آن ها را حل کنید.

جورج پولیا ، ریاضیدان قرن ۲۰

مسابقات ریاضی کشورهای مختلف [سال ۱۹۹۹]

۱- روسیه سفید

المپیاد ملی، دور چهارم

مسأله ۱۰-۱ : تمام اعداد حقیقی a را بیابید که تابع $f(x) = \{ax + \operatorname{Sin} x\}$ متناوب باشد. منظور از $\{y\}$ قسمت اعشاری y است.

مسأله ۱۰-۲ : ثابت کنید برای هر عدد صحیح ۱ < n ، S، مجموع همه مقسوم علیه های n (شامل ۱ و n) در نامساوی های روبرو صدق می کند : $k\sqrt{n} < S < \sqrt{۲}kn$، که در آن k تعداد مقسوم علیه های n است.

مسأله ۱۰-۳ : یک صفحه مربعی ۷×۷ که به ۴۹ مربع واحد تقسیم شده و سه نوع کاشی در اختیار داریم : مستطیل های ۳×۱، مربع های ۲×۲ که یک مربع واحد از آن حذف شده (گوشه) و مربع های واحد. مهدی بی نهایت مستطیل و یک گوشه دارد، در حالیکه حسین فقط یک مربع واحد دارد.

الف) ثابت کنید حسین می تواند یک مربع واحد خود را در خانه ای از صفحه مربعی طوری قرار دهد که مهدی نتواند با کاشی های خود بقیه صفحه را بپوشاند.

ب) به مهدی یک گوشه ی دیگر می دهیم. ثابت کنید صرفنظر از اینکه حسین مربع خود را کجا بگذارد، مهدی می تواند بقیه صفحه را بپوشاند.

مسأله ۱۰-۴ : دایره ای در ذوزنقه ی متساوی الساقین ABCD محاط شده است. نقاط تقاطع دایره با قطر AC را k و L می نامیم (k بین A و L). عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\frac{AL.KC}{AK.LC}$$

مسأله ۱۰-۵ : فرض کنید P و Q دو نقطه بر روی ضلع AB از مثلث ABC باشند (P بین A وQ) بطوریکه $\angle ACP = \angle PCQ = \angle QCB$. همچنین فرض کنید $\overline{AD}$ نیمساز $\angle BAC$ باشد و خط AD خطوط CP و CQ را به ترتیب در نقاط M و N قطع کند. اگر $PN = CD$ و $۳\angle BAC = ۲\angle BCA$ ثابت کنید که مساحت مثلث CQD با مساحت مثلث QNB برابر است.

مسأله ۱۰-۶ : نشان دهید که معادله ی $\{x^۳\}+\{y^۳\}=\{z^۳\}$ دارای بی نهایت جواب گویای غیر صحیح است. منظور از $\{a\}$ قسمت اعشاری a است.

مسأله ۱۰-۷ : تمام اعداد طبیعی n و اعداد حقیقی m را بیابید به طوریکه خانه های یک صفحه ی $n\times n$ را بتوان با اعداد $۱,۲,...,n^۲$ برچسب گذاری کرد چنانکه هر عدد فقط یکبار ظاهر شود و داشته باشیم :

$$(m-۱)a_{ij}\leq(i+j)^۲-(i+j)\leq m\,a_{ij}$$

برای هر $۱\leq i,j\leq n$. (a_{ij} عدد قرار گرفته در محل برخورد سطر i ام و ستون j ام است.)

مسأله ۱۱-۱ : حاصلضرب زیر را حساب کنید.

$$\prod_{k=۰}^{۲^{۱۹۹۹}}(۴\sin^۲\frac{k\pi}{۲^{۲۰۰۰}}-۳)$$

مسأله ۱۱-۲ : فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبت باشند. از روی دنباله ی ......,۱,۲,۳ به دو طریق زیر می توان دنباله های جدیدی از اعداد صحیح مثبت ساخت :

۱) ابتدا هر m امین عدد از دنباله را حذف می کنیم (در ابتدا همیشه اولین عدد را حذف می کنیم)؛ سپس در دنباله ی بدست آمده هر عدد n ام را حذف می کنیم. دنباله ی حاصل را اولین دنباله ی مشتق شده می نامیم.

۲) ابتدا هر n امین عدد از دنباله را حذف می کنیم، سپس از دنباله بدست آمده هر m امین عدد را حذف می کنیم. دنباله ی بدست آمده را دومین دنباله ی مشتق شده می نامیم.

حال زوج (m,n) را خوب گوئیم اگر و تنها اگر عبارت زیر برای آن درست باشد :

اگر عدد صحیح مثبت k در هر دو دنباله ی مشتق شده ظاهر شود، در هر دو دنباله در یک مکان باشد.

الف) ثابت کنید $(۲,n)$ برای هر عدد صحیح مثبت n خوب است.

ب) آیا زوج خوب (m,n) وجود دارد به طوریکه $۲<m<n$؟

مسأله ۱۱-۳ : فرض کنید $a_۱, a_۲, \dots\dots, a_{۱۰۰}$ مجموعه ای مرتب از اعداد باشند. در هر حرکت می توانید دو عدد a_n و a_m را انتخاب کرده و آن ها را به ترتیب با اعداد :

$$\frac{a_n^۲}{a_m}-\frac{n}{m}\left(\frac{a_m^۲}{a_n}-a_m\right) \quad , \quad \frac{a_m^۲}{a_n}-\frac{m}{n}\left(\frac{a_n^۲}{a_m}-a_n\right)$$

جایگزین کنید. آیا می توان از مجموعه ی $a_i=\frac{۱}{۵}$، برای $i=۲۰,۴۰,۶۰,۸۰,۱۰۰$ و $a_i=۱$ برای بقیه i ها، به مجموعه ای از اعداد صحیح رسید؟

مسأله ۱۱-۴ : دایره ای در ذوزنقه ی $ABCD$ محاط است. فرض کنید K، L، M و N به ترتیب محل برخورد قطرهای AC و BD با دایره باشند (k بین A و L و M بین B و N). اگر $AK.LC=۱۶$ و $BM.ND=\frac{۹}{۴}$ باشند، شعاع دایره را بیابید.

مسأله ۱۱-۵ : بزرگترین عدد حقیقی k را بیابید به طوریکه برای هر سه تایی a,b,c از اعداد حقیقی مثبت که $k\,abc>a^۳+b^۳+c^۳$، مثلثی با طول اضلاع a,b,c موجود باشد.

مسأله ۱۱-۶ : تمام اعداد صحیح x و y را بیابید که : $x^۶+x^۳y=y^۳+۲y^۲$

مسأله ۱۱-۷ : فرض کنید O مرکز دایره ی w باشد و فرض کنید L نقطه ی برخورد دو وتر AB و CD از w باشد که با هم برابرند و داریم $AL>LB$ و $DL>LC$. فرض کنید M و N دو نقطه به ترتیب روی AL و DL باشند به طوریکه $\angle ALC=۲\angle MON$. ثابت کنید وتری از w که از نقاط M و N می گذرد با $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ همنهشت است.

***

سوالات انتخابی از IMO

مسأله ۱ : تمام توابع $h:Z \to Z$ را بیابید که

$$h(x+y)+h(xy)=h(x)h(y)+1 \quad : x,y \in Z \quad \text{برای هر}$$

مسأله ۲ : فرض کنید $a,b,c \in Q$ و $ac \neq 0$. اگر بدانیم معادله ی $ax^2+bxy+cy^2=0$ یک جواب ناصفر به شکل زیر دارد :

$$(x,y)=(a_0+a_1\sqrt[3]{2}+a_2\sqrt[3]{4},\, b_0+b_1\sqrt[3]{2}+b_2\sqrt[3]{4})$$

که $a_i,b_i \in Q$ و $i=0,1,2$. ثابت کنید که این معادله یک جواب گویای غیرصفر هم دارد.

مسأله ۳ : فرض کنید a و b دو عدد صحیح مثبت باشند به طوریکه حاصلضرب تمام مقسوم علیه های مثبت a (شامل ۱ و a) با حاصلضرب تمام مقسوم علیه های مثبت b برابر باشد. آیا $a=b$ است؟

مسأله ۴ : فرض کنید a، b و c اعداد حقیقی مثبت باشند به طوریکه $a^2+b^2+c^2=3$. ثابت کنید :

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$$

مسأله ۵ : فرض کنید T_1 و T_2 دو مثلث متشابه باشند که نسبت طول دو ضلع از T_1 به طول دو ضلع از T_2 با هم برابر و برابر با نسبت زوایای بینشان است. (نه لزوماً با اضلاع و زاویه ی متناظر شان). آیا T_1 با T_2 همنهشت است؟

مسأله ۶ : دنباله های حقیقی $x_1,x_2,\dots$ و $y_1,y_2,\dots$ به صورت زیر تعریف شده اند :

$$x_1=y_1=\sqrt{3} \qquad x_{n+1}=x_n+\sqrt{1+x_n^2} \quad , \quad y_{n+1}=\frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}} \quad , \quad n \geq 1$$

ثابت کنید برای هر $n>1$: $2<x_ny_n<3$.

مسأله ۷ : فرض کنید O مرکز دایره ی محاطی خارجی مثلث ABC مقابل به زاویه ی A باشد و فرض کنید M نقطه ی میانی $\overline{AC}$ و P نقطه ی برخورد خط های MO و BC باشد. ثابت کنید اگر $\angle BAC=2\angle ACB$، آنگاه $AB=BP$.

مسأله ۸ : فرض کنید O و O_1 مر کز دایره ی محاطی داخلی و دایره ی محاطی خارجی مقابل ضلع A برای مثلث ABC باشند. عمود منصف $\overline{OO_1}$ خط های AB و AC را به ترتیب در نقاط L و N قطع می کند. اگر دایره ی محیطی مثلث ABC بر خط LN مماس باشد ثابت کنید مثلث ABC متساوی الساقین است.

مسأله ۹ : آیا دو سویی f (تابع یک به یک و پوشای f) وجود دارد از :

الف) صفحه به خودش

ب) فضای سه بعدی به خودش

به طوریکه برای هر دو نقطه متمایز A و B ، خط AB و خط f(A)f(B) عمود باشند؟

مسأله ۱۰ : یک لغت دنباله ای متناهی از علامت های a و b است. تعداد علامت های ظاهر شده در لغت را طول لغت می گویند. یک لغت، **۶- نامتناوب** نامیده می شود هرگاه شامل هیچ زیر لغتی به شکل cccccc که c یک لغت است، نباشد. اگر f(n) تعداد لغت های **۶- نامتناوب** با طول n باشد، نشان دهید :

$$f_{(n)} > (\frac{۳}{۲})^n$$

مسأله ۱۱ : تمام اعداد صحیح مثبت n، $n \geq ۲$ را بیابید به طوریکه $\binom{n-k}{k}$ برای $k = ۱,۲,\ldots,\left[\frac{n}{۲}\right]$ زوج باشد.

(قضیه لوکاس : فرض کنید p یک عدد اول باشد، a و b اعداد صحیح مثبت باشند. اگر a و b را برحسب پایه p بنویسیم (یعنی $a = \sum_{i=۰}^{r} a_i p^i$, $b = \sum_{i=۰}^{r} b_i p^i$ که در آن $۰ \leq a_i , b_i \leq p-۱$ برای ($i = ۰,۱,۲, \ldots ,r$)، آنگاه :

$$(\binom{a}{b} \equiv \binom{a_r}{b_r}\binom{a_{r-۱}}{b_{r-۱}}\cdots\binom{a_۰}{b_۰} \pmod{p})$$

مسأله ۱۲ : n بازیکن در یک مسابقه شطرنج شرکت کرده اند. هر دو بازیکن دقیقاً یک بار با هم بازی می کنند. بعد از اتمام مسابقه، از بین هر چهار نفر یک نفر وجود دارد که نتایج متفاوتی در برابر سه بازیکن دیگر کسب کرده است. (یعنی یکی را برده، با یکی مساوی کرده و از یک نفر باخته است.) ثابت کنید بزرگترین n ممکن در $۶ \leq n \leq ۹$ صدق می کند.

***

۲- برزیل

مسأله ۱ : فرض کنید ABCDE یک پنج ضلعی منتظم باشد به طوریکه مساحت ستاره گون ACEBD برابر با ۱ باشد. فرض کنید $\overline{AC}$ و $\overline{BE}$ همدیگر را در P و $\overline{BD}$ و $\overline{CE}$ همدیگر را در Q قطع کنند. [APQD] را حساب کنید.

مسأله ۲ : یک صفحه مربعی ۱۰×۱۰داده شده است. می خواهیم n تا از ۱۰۰ مربع این صفحه را حذف کنیم به طوریکه با هیچ ۴ خانه از خانه های باقیمانده نتوان مستطیلی ساخت که گوشه هایش این ۴ خانه بوده و اضلاعش موازی با صفحه اصلی باشد. کمترین مقدار n را بیابید.

مسأله ۳ : سیاره زُرک کروی شکل است و تعدادی شهر دارد. برای هر شهر A روی زرک، شهر متقاطر (متقارن نسبت به مرکز کره) A' وجود دارد. در زرک جاده هایی وجود دارد که دو شهر را به هم وصل می کنند. اگر جاده ای از P به Q وجود داشته باشد، آنگاه جاده ای از P' به Q' نیز موجود است. جاده ها همدیگر را قطع نمی کنند و هر دو شهر بوسیله ی دنباله ای از جاده ها به هم متصلند. به هر شهر یک مقدار نسبت داده شده و اختلاف مقادیر دو شهر که با یک جاده به هم وصل هستند حداکثر ۱۰۰ است. نشان دهید دو شهر متقاطر موجودند که اختلاف مقادیر آن ها حداکثر ۱۰۰ است.

مسأله ۴ : لیگ فوتبال برزیل n تیم فوتبال دارد. می خواهیم یک دوره مسابقات قهرمانی برگزار کنیم به طوری که هر دو تیم دقیقاً یک بار با هم بازی کنند. همه بازی ها در روزهای یکشنبه انجام می شود و یک تیم در یک یکشنبه نمی تواند بیش از یک بار بازی کند. کوچکترین عدد صحیح مثبت m را بیابید که بتوان این دوره را در m یکشنبه برگزار کرد.

مساله ۵ : مثلث ABC داده شده است. نشان دهید چگونه می توان با خط کش و پرگار مثلث $A'B'C'$ را ساخت به طوریکه مساحت آن کمترین مقدار ممکن باشد و A', B', C' به ترتیب روی اضلاع AB، BC و AC قرار بگیرند و $\angle B'A'C = \angle BAC$ و $\angle A'C'B' = \angle ACB$.

***

۳- بلغارستان

المپیاد ملی، دور سوم

مسأله ۱ : همه ی سه تایی های (x, y, z) از اعداد طبیعی را بیابید به طوریکه y یک عدد اول باشد، y و ۳، z را نشمارند و $x^3 - y^3 = z^2$.

مسأله ۲ : چهارضلعی محدب $ABCD$ در درون دایره ای با مرکز O چنان محاط شده است که مرکز دایره در داخل چهارضلعی است. فرض کنید $MNPQ$ چهارضلعی است که رأس های آن تصویر نقطه ی برخورد دو قطر AC و BD روی اضلاع چهار ضلعی هستند. ثابت کنید : $2[MNPQ] \leq [ABCD]$

مسأله ۳ : در یک مسابقه ۸ داور به نفرات شرکت کننده رای قبول یا رد داده اند. می دانیم که برای هر دو نفر، دو داور حتماً هر دو را قبول کرده اند؛ همچنین دو داور حتماً هر دو نفر اول را قبول و نفر دوم را رد کرده اند؛ دو داور هر دو نفر اول را رد و نفر دوم را قبول کرده اند و در نهایت دو داور حتماً هر دو را رد کرده اند. بیشترین تعداد ممکن برای شرکت کنندگان را بیابید.

مسأله ۴ : تمام زوج های (x, y) از اعداد صحیح را بیابید که : $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$

مسأله ۵ : فرض کنید B_1 و C_1 دو نقطه روی ضلع های AC و AB از مثلث ABC باشند و فرض کنید خط های BB_1 و CC_1 در نقطه ی D همدیگر را قطع می کنند. ثابت کنید می توان یک دایره را در چهارضلعی AB_1DC_1 محاط اگر و تنها اگر دایره های محاطی مثلث های ABD و ACD برهم مماس باشند.

مسأله ۶ : هر نقطه ی دورنی یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱، در درون یکی از شش دایره ی همنهشت با شعاع r قرار می گیرد ثابت کنید : $r \geq \frac{\sqrt{3}}{10}$

***

المپیاد ملی
دور چهارم

مسأله ۱ : مکعب مستطیلی با ابعاد صحیح داریم. همه ی وجود آن را با رنگ سبز رنگ کرده ایم. این مکعب مستطیل با صفحاتی به موازات وجه هایش به مکعب های واحد تقسیم شده است. تمام ابعاد ممکن مکعب مستطیل را بیابید که برای آن ها تعداد مکعب های واحد بدون وجه سبز رنگ، یک سوم تعداد کل مکعب ها باشد.

مسأله ۲ : فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای از اعداد صحیح باشد به طوریکه برای هر $n \geq ۱$:

$$(n-۱)a_{n+۱} = (n+۱)a_n - ۲(n-۱)$$

اگر ۲۰۰۰، $a_{۱۹۹۹}$ را بشمارد، کوچکترین $n \geq ۲$ را بیابید که برای آن ۲۰۰۰، a_n را می شمارد.

مسأله ۳ : مثلثی داریم که مختصات رئوسش اعداد صحیح هستند و طول یکی از اضلاعش $\sqrt{n}$ است که n یک عدد طبیعی خالی از مربع است. ثابت کنید که نسبت شعاع دایره ی محیطی مثلث به شعاع دایره ی محاطی آن یک عدد گنگ است.

مسأله ۴ : تعداد اعداد طبیعی n، $۴ \leq n \leq ۱۰۲۳$ را بیابید که نمایش دودویی آن شامل هیچ ۳ عدد مساوی پشت سرهمی نباشد.

مسأله ۵ : رأس های A، B و C از مثلث ABC که زاویه هایش حاده هستند روی ضلع های $B_۱C_۱$، $C_۱A_۱$ و $A_۱B_۱$ از مثلث $A_۱B_۱C_۱$ طوری قرار گرفته اند که :
$\angle ABC = \angle A_۱B_۱C_۱ , \angle BCA = \angle B_۱C_۱A_۱$ و $\angle CAB = \angle C_۱A_۱B_۱$. ثابت کنید که مرکز ارتفاعیه مثلث ABC و مثلث $A_۱B_۱C_۱$ از مرکز دایره محیطی مثلث ABC به یک فاصله هستند.

مسأله ۶ : ثابت کنید که معادله ی $x^۳ + y^۳ + z^۳ + t^۳ = ۱۹۹۹$ بی نهایت جواب صحیح دارد.

***

۴- کانادا

مسأله ۱ : همه ی جواب های حقیقی معادله ی $۴x^۲ - ۴۰[x] + ۵۱ = ۰$ را بیابید. منظور از $[x]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از یا مساوی با x است.

مسأله ۲ : فرض کنید ABC یک مثلث متساوی الاضلاع با ارتفاع ۱ باشد. دایره ای با شعاع ۱ که مرکزش در سمتی از AB قرار دارد که C هم در همان سمت است، روی ضلع AB می غلتد، دایره در مسیر خود روی AB همیشه $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ را قطع می کند. ثابت کنید طول کمانی از دایره که در داخل مثلث قرار می گیرد همیشه ثابت است.

مسأله ۳ : تمام اعداد صحیح مثبت n را بیابید که برای آن ها $n = d(n)^۲$. که منظور از $d(n)$ تعداد مقسوم علیه های n است (شامل ۱ و n).

مسأله ۴ : فرض کنید $a_۱, a_۲, \dots, a_۸$، ۸ عدد صحیح متمایز از مجموعه ی $S = \{۱,۲,\dots,۱۷\}$ باشند. نشان دهید عدد صحیح $k > ۰$ وجود دارد به طوریکه معادله ی $a_i - a_j = k$ حداقل سه جواب متمایز داشته باشد. همچنین زیرمجموعه ی ۷ عضوی $\{b_۱, b_۲, \dots, b_۷\}$ از S را چنان بیابید که معادله : $b_i - b_j = k$ برای هیچ $k > ۰$، سه جواب متمایز نداشته باشد.

مسأله ۵ : فرض کنید x، y و z اعداد حقیقی نامنفی باشند به طوریکه $x + y + z = ۱$ ثابت کنید :

$$x^۲y + y^۲z + z^۲x \le \frac{۴}{۲۷}$$

و مشخص کنید تساوی در چه زمانی رخ می دهد.

***

۵- چین

مسأله ۱ : فرض کنید مثلث ABC با زوایای حادّه موجود باشد و $\angle B < \angle C$. فرض کنید نقطه ی D روی ضلع BC چنان باشد که $\angle ADB$ منفرجه باشد و همچنین فرض کنید H مرکز ارتفاعیه مثلث ABD باشد. F را نقطه ای در درون مثلث ABC و بر روی دایره ی محیطی مثلث ABD بگیرید. ثابت کنید F مرکز ارتفاعیه مثلث ABC است اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشد : $HD || CF$ و H روی دایره محیطی مثلث ABC باشد.

مسأله ۲ : فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد و $\{f_n(x)\}$ دنباله ای از چند جمله ای ها باشد به طوریکه $f_0(x) = 1$ و $f_{n+1}(x) = xf_n(x) + f_n(ax)$ برای $n = 0, 1, 2, \ldots$.

الف) ثابت کنید : $f_n(x) = x^n f_n(\frac{1}{x})$ برای $n = 0, 1, 2, \ldots$.

ب) یک فرمول صریح برای $f_n(x)$ بیابید.

مسأله ۳ : ۹۹ ایستگاه فضایی وجود دارد. هر جفت از این ایستگاه ها بوسیله ی یک تونل به هم متصل شده اند. ۹۹ تونل دو طرفه اصلی وجود دارد و بقیه ی تونل ها یک طرفه هستند. هر گروه ۴ تایی از ایستگاه های فضایی را متصل به هم گوئیم اگر هر کس بتواند از هر یکی از ایستگاه های گروه به هر ایستگاه دیگر گروه فقط با گذشتن از ۶ تونلی که این ۴ تا را به هم متصل می کنند، برود. بیشترین تعداد ممکن گروه های متصل به هم را بیابید.

مسأله ۴ : فرض کنید m یک عدد صحیح مثبت باشد. ثابت کنید اعداد صحیح a، b و k که a و b هر دو فرد باشند و $k \geq 0$ وجود دارند به طوریکه :

$$2m = a^{19} + b^{99} + k.2^{1999}$$

مسأله ۵ : بیشترین مقدار λ را بیابید به طوریکه اگر $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ یک چندجمله ای درجه سه با ریشه های نامنفی باشد، آنگاه، $f(x) \geq \lambda (x-a)^3$ برای هر $x \geq 0$، شرط برقراری تساوی را نیز بیابید.

مسأله ۶ : یک مکعب $4 \times 4 \times 4$ از ۶۴ مکعب واحد تشکیل شده است. می خواهیم وجوه ۱۶ تا از این مکعب های واحد را رنگ قرمز بزنیم.

یک رنگ آمیزی را جالب گوئیم اگر در هر مکعب مستطیل ۴×۱×۱ از مکعب ها، دقیقاً ۱ مکعب رنگی باشد. تعداد رنگ آمیزی های جالب را بیابید. (دو رنگ آمیزی را اگر بتوان حتی با چند دوران به هم تبدیل کرد باز هم باهم متفاوت هستند.)

***

۶- جمهوری های چک و اسلواکی

مسأله ۱ : در کسر $\frac{۲۹ \div ۲۸ \div ۲۷ \div ... \div ۱۶}{۱۵ \div ۱۴ \div ۱۳ \div ... \div ۲}$ صورت را می توان به هر شکل دلخواه پرانتز گذاری کرد به شرط آنکه مخرج را نیز به همان صورت پرانتز گذاری کنیم.

الف) کمترین مقدار صحیح ممکن برای عبارت حاصل را بدست آورید.

ب) تمام مقادیر صحیح ممکن این عبارت را بدست آورید.

مسأله ۲ : در چهار وجهی ABCD ، وسط های میانه های رئوس A و D را به ترتیب با E و F نشان می دهیم. (میانه یک رأس در یک چهار وجهی، پاره خط واصل بین آن رأس و مرکز ثقل وجه روبرویش است) نسبت حجم های BCEF و ABCD را مشخص کنید.

مسأله ۳ : نشان دهید مثلث ABC با نامگذاری مرسوم اضلاع و میانه هایش موجود است که در آن، $a \neq b$, $a + m_a = b + m_b$. همچنین نشان دهید عدد k موجود است که برای هرچنین مثلثی $a + m_a = b + m_b = k(a+b)$، نهایتاً همه مقادیر ممکن برای $\frac{a}{b}$، نسبت اضلاع این مثلث را بدست آورید.

مسأله ۴ : در یک زبان خاص فقط دو حرف A و B را داریم. کلمات این زبان در خاصیت های زیر صدق می کنند :

(i) هیچ کلمه یک حرفی وجود ندارد و تنها کلمات دو حرفی عبارتند ازAB و BB.

(ii) دنباله ای از حروف با طول $n > ۲$ تشکیل یک کلمه می دهند اگر وتنها اگر بتوان آن را از کلمه ای با طول کمتر از n به طریق زیر بدست آورد :

تمام حروف A در کلمه بدون تغییر می مانند و هر حرف B با یک لغت دیگر جانشین می شود (وقتی این عمل انجام می شود حروف B نمی توانند همگی با یک کلمه خاص جابجا شوند.) نشان دهید برای هر n تعداد کلمات با طول n برابر است با :

$$\frac{۲^n + ۲ \times (-۱)^n}{۳}$$

مسأله ۵ : زاویه حاده APX در صفحه داده شده است. نشان دهید چگونه می توان مربع ABCD را طـوری سـاخت که P روی ضلع BC و روی نیمساز زاویه BAQ قرار گیرد. Q محل تقاطع نیم خط PX با CD است.

مسأله ۶ : همه زوج های a,b از اعداد حقیقی را بیابید که دستگاه معادلات :

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}=a \ , \ \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=b$$

برای اعداد حقیقی (x,y) دارای جواب باشد.

***

۷- فرانسه

مسأله ۱ : الف) بیشترین حجم یک استوانه در دورن یک مخروط داده شده قرار دارد و محور دورانش با محـور دوران مخروط یکی است را بیابید. جواب خود را برحسب R شعاع و H ارتفاع مخروط بیان کنید.

ب) بیشترین حجم یک کره را بیابید که در داخل مخروط داده شده قرار گیـرد. جـواب خـود را برحـسب R و H بیان کنید.

ج) برای مقادیر ثابت R و H کدام یک از مقادیر پیشینه ی بدست آمده در قسمت های قبلی بزرگتر است؟

مسأله ۲ : تمام اعداد صحیح مثبت n را بیابید که برای آن ها :

$$(n+۳)^n = \sum_{k=۳}^{n+۲} k^n$$

مسأله ۳ : مثلثی با زاویه های حاده بیابید که برای آن نسبت کوچکترین ضلع به شـعاع دایـره ی محـاطی بیـشینه باشد.

مسأله ۴ : ۱۹۹۹ آبنبات قرمز و ۶۶۶۱ آبنبات زرد روی میزی قرار دارند. تشخیص آبنبات ها از هـم ممکـن نیـست، چون هر کدام در بسته های خود هستند. یک فرد شکمو با الگوریتم زیر آبنبات ها را می خورد :

الف) اگر آبنباتی باشد، یکی را به تصادف انتخاب می کند، رنگش را می بیند و آن را می خـورد و بـه مرحلـه ی (ب) می رود.

ب) اگر آبنباتی باشد، یکی را به تصادف انتخاب می کند، رنگش را می بیند و

۱- اگر رنگش با آخرین آبنباتی که خورده است یکی باشد، آن را هم می خورد و به مرحله ی (ب) می رود.

۲- اگر رنگش با آخرین آبنباتی کـه خـورده اسـت یکـی نباشـد، دوبـاره بـسته ی آن را مـی پیچـد و آن را سرجایش می گذارد و به مرحله ی (الف) می رود.

ثابت کنید که این شکمو بالاخره همه ی آبنبات ها را می خورد. احتمال آن را بیابید که آخرین آبنبات خورده شـده قرمز باشد.

مسأله ۵ : از یک مثلث داده شده سه نقطه ی جدید با انعکاس هر رأس آن نسبت به ضلع مقابل بدست می آوریم. نشان دهید که این سه نقطه ی جدید همخط هستند اگر وتنها اگر فاصله ی مرکز ارتفاعیه از مرکز دایره محیطی مثلث برابر با قطر دایره ی محیطی مثلث باشد.

***

۸- هنگ کنگ (چین)

مسأله ۱ : فرض کنید PQRS یک چهارضلعی محاطی باشد و $\angle PSR = ۹۰^\circ$ و H و k به ترتیب پای های عمود رسم شده از Q بر خط های PR و PS باشند. ثابت کنید که خط HK، $\overline{QS}$ را نصف می کند.

مسأله ۲ : هرمی داریم که قاعده اش یک نه ضلعی محدّب است. هر قطر قاعده و هر یال هرم با سفید یا سیاه رنگ شده است. از هر رنگ حداقل یکبار استفاده شده است (توجه کنید که اضلاع قاعده رنگ نشده اند). ثابت کنید سه پاره خط همرنگ وجود دارند که تشکیل یک مثلث می دهند.

مسأله ۳ : فرض کنید s و t اعداد صحیح ناصفر و (x,y) زوج مرتبی از اعداد صحیح باشند. یک حرکت (x,y) را به $(x-t,y-s)$ تغییر می دهد زوج (x,y) را خوب گوئیم اگر بعد از چند (شاید صفر) حرکت به زوجی از اعداد صحیح تبدیل شود که نسبت به هم اول نباشند.

الف) آیا (s,t) خوب است؟

ب) ثابت کنید برای هر s و t زوج (x,y) وجود دارد که خوب نیست.

مسأله ۴ : فرض کنید f تابعی تعریف شده روی اعداد حقیقی مثبت با خواص زیر باشد :

۱) $f(۱)=۱$

۲) $f(x+۱)=xf(x)$

۳) $f(x)=۱۰^{g(x)}$

که $g(x)$ تابعی تعریف شده روی اعداد حقیقی است و در نامساوی زیر صدق می کند :

$$g(ty+(۱-t)z)\le tg(y)+(۱-t)g(z)$$

برای اعداد حقیقی y، z و هر $۰\le t\le ۱$:

الف) ثابت کنید :

$$t[g(n)-g(n-۱)]\le g(n+t)-g(n)\le t[g(n+۱)-g(n)]$$

که n عدد صحیح است و $۰\le t\le ۱$.

ب) ثابت کنید :

$$\frac{۴}{۳}\le f(\frac{۱}{۲})\le \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

***

۹- مجارستان

مسأله ۱ : $n \geq ۵$ عدد حقیقی با خواص زیر داریم :

۱- همه غیرصفر هستند و حداقل یکی از آن ها ۱۹۹۹ است.

۲- هر چهار تا از آن ها را می توان طوری کنار هم گذاشت که تشکیل یک تصاعد حسابی دهند.

این اعداد را بیابید.

مسأله ۲ : فرض کنید ABC مثلث قائم الزاویه با $\angle C = ۹۰^\circ$ باشد، مربع های $S_۱$ و $S_۲$ در داخل این مثلث طوری محاط شده اند که رأس C در مثلث و مربع $S_۱$ مشترک است و یکی از ضلع های $S_۲$ روی AB قرار دارد. فرض کنید $[S_۱] = ۴۴۱$ و $[S_۲] = ۴۴۰$ مقدار $AC + BC$ را حساب کنید.

مسأله ۳ : هرم PABCD داده شده است که ABCD یک مربع ۲×۲است و ارتفاع رسم شده از p از مرکز ABCD می گذرد. فرض کنید O و K به ترتیب مرکز کره ی مماس بر وجه ها و کره ی مماس بر یال های هرم PABCD باشند. اگر فاصله O و K تا قاعده برابر باشد، حجم هرم را بیابید.

مسأله ۴ : برای هر عدد صحیح مثبت n، زوج مرتب از اعدادصحیح و مثبت (x,y)؛ (به عنوان تابعی از n) را طوری بیابید که :

$$x^۲ - y^۲ = ۱۰^۲ \times ۳۰^{۲n}$$

همچنین ثابت کنید تعداد چنان زوج هایی نمی تواند مربع کامل باشد.

مسأله ۵ : برای $۰ \leq x, y, z \leq ۱$ تمام جواب های معادله ی زیر را بیابید :

$$\frac{x}{۱ + y + zx} + \frac{y}{۱ + z + xy} + \frac{z}{۱ + x + zy} = \frac{۳}{x + y + z}$$

مسأله ۶ : نقاط وسط یال های یک چهاروجهی روی یک کره قرار دارند. بیشترین حجم چهاروجهی را بیابید.

مسأله ۷ : یک صفحه شطرنج $n^۲ \times n^۲$ داریم که در هر خانه ی آن یک عدد صحیح مثبت نوشته شده است. تفاضل دو عدد در دو خانه ی مجاور (که یک ضلع مشترک دارند) کمتر از یا مساوی با n است. ثابت کنید که حداقل $\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + ۱$ خانه، عددی یکسان دارند.

مسأله ۸ : روزی در قرن ۲۰، الکس در روز تولدش متوجه شد که جمع کردن رقم های سال تولدش سنش را می دهد. در همان روز برنات هم (که روز تولدش با الکس یکی بود ولی هم سن او نبود) متوجه همین نکته شد. آن روز، هر دوی آن ها زیر ۹۹ سال سن داشتند. سن آن ها چند سال باهم فرق می کند؟

مسأله ۹ : مثلث ABC و نقطه ی D روی ضلع AB آن را در نظر بگیرید. دایره های محاطی مثلث های ACD و CDB روی خط $\overline{CD}$ برهم مماس هستند. ثابت کنید دایره ی محاطی ABC برضلع $\overline{AB}$ در نقطه ی D مماس است.

مسأله ۱۰ : فرض کنید R شعاع کره ی محیطی هرم راستی با قاعده ی مربع باشد و فرض کنید r شعاع کره ای باشد که بر چهار سطح جانبی هرم و کره ی محیطی هرم مماس است. اگر $۲R = (۱+\sqrt{۲})r$، زاویه بین وجوه مجاور هرم را پیدا کنید.

مسأله ۱۱ : آیا چند جمله ی $P(x)$ با ضرایب صحیح وجود دارد که :
$P(۱۰) = ۴۰۰, P(۱۴) = ۴۴۰$ و $P(۱۸) = ۵۲۰$؟

مسأله ۱۲ : فرض کنید b،a و c اعداد حقیقی بوده و $n \geq ۲$ عددی صحیح باشد به طوریکه $a^n + b^n = c^n$. تمام k هایی را پیدا کنید که مثلثی با اضلاع b^k, a^k و c^k و یک زاویه منفرجه موجود است.

مسأله ۱۳ : فرض کنید $n > ۱$ عدد حقیقی دلخواه و k تعداد اعداد اول مثبت کوچکتر از یا مساوی با n باشد. $k+۱$ عدد مثبت طوری بگیرید که هیچکدام از آن ها حاصلضرب بقیه را نشمارد. ثابت کنید که عددی بین این $k+۱$ عدد وجود دارد که از n بزرگتر است.

مسأله ۱۴ : چند جمله ای $x^۴ - ۲x^۲ + ax + b$ چهار ریشه ی متمایز دارد. ثابت کنید که قدر مطلق هر ریشه از $\sqrt{۳}$ کوچکتر است.

مسأله ۱۵ : یک چند ضعلی محدب با طول ضلع صحیح و محیط فرد داریم. ثابت کنید که مساحت چندضلعی حداقل برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$.

مسأله ۱۶ : آیا دنباله ای نامتناهی از اعداد صحیح مثبت وجود دارد طوری که :

الف) هیچ جمله ای، جمله ی دیگر را نشمارد.

ب) هر جفت از جمله ها مقسوم علیه مشترک بزرگتر از ۱ داشته باشند ولی هیچ عدد صحیح بزرگتر از ۱ همه ی جمله ها را نشمارد.

مسأله ۱۷ : ثابت کنید برای هر عدد صحیح n، چند جمله ای با ضرایب صحیح وجود دارد که مقادیرش در ۱, ۲, ... , n، توان های متفاوتی از ۲ باشند.

مسأله ۱۸ : تمام اعداد صحیح $N \geq ۳$ را پیدا کنید که بتوان N نقطه در صفحه پیدا کرد (هیچ سه تایی همخط نباشند) به طوریکه هر مثلثی که با سه رأس پوش محدّب آن ها ساخته می شود شامل دقیقاً یک نقطه باشد.

***

۱۰- ایران

دور اول

مسأله ۱ : فرض کنید $n \geq ۲, a_۱ < a_۲ < ... < a_n$ اعداد حقیقی باشند. ثابت کنید :

$$a_۱a_۲^۴ + a_۲a_۳^۴ + ... + a_na_۱^۴ \geq a_۲a_۱^۴ + a_۳a_۲^۴ + ... + a_۱a_n^۴$$

مسأله ۲ : فرض کنید n عددی صحیح و مثبت باشد. n تایی $(a_۱, ..., a_n)$ از اعداد صحیح مثبت را خوب گوئیم اگر $a_۱ + ... + a_n = ۲n$ و برای هر k بین ۱ و n، مجموع هیچ k تا از a_iها، n نشود. تمام n تایی های خوب را بیابید.

مسأله ۳ : فرض کنید I مرکز دایره محاطی مثلث ABC باشد و خط AI دایره ی محیطی ABC را در D قطع کند. پای های عمود از I بر BD و CD را به ترتیب E و F بنامید. اگر $IE + IF = \frac{AD}{۲}$، $\angle BAC$ را محاسبه کنید.

مسأله ۴ : فرض کنید ABC مثلثی باشد که در آن $BC > CA > AB$. نقاط D روی $\overline{BC}$ و E روی نیم خط $\overrightarrow{BA}$ طوری قرار دارند که : $BD = BE = AC$ دایره ی محیطی مثلث BED ، $\overline{AC}$ را در p و خط BP دایره ی محیطی مثلث ABC را در Q قطع می کند.

ثابت کنید : $AQ + QC = BP$

مسأله ۵ : فرض کنید n عددی صحیح و مثبت باشد و $d_۱ < d_۲ < d_۳ < d_۴$ کوچک ترین مقسوم علیه های مثبت n باشند. تمام اعداد صحیح n را بیابید که $n = d_۱^۲ + d_۲^۲ + d_۳^۲ + d_۴^۲$.

مسأله ۶ : فرض کنید $A = (a_۱, a_۲, ..., a_n)$ و $B = (b_۱, b_۲, ..., b_n)$ دو دنباله از ۰ و ۱ باشند. تفاضل A و B ، $d(A, B)$ یعنی تعداد iهایی که برای آن $a_i \neq b_i$ $(۱ \leq i \leq n)$. فرض کنید C,B,A سه دنباله از ۰ و ۱ها باشند و $d(A, B) = d(A, C) = d(B, C) = d$.

الف) ثابت کنید d زوج است.

ب) ثابت کنید دنباله ای از ۰ و ۱ ها مانند D موجود است به نحوی که :

$$d(D, A) = d(D, B) = d(D, C) = \frac{d}{۲}$$

دور دوم

مسأله ۱ : دنباله ی $\{x_n\}$، $n \geq 0$ را به صورت زیر تعریف کنید : $x_0 = 0$ و

$$x_n = \begin{cases} x_{n-1} + \dfrac{3^{r+1} - 1}{2} & n = 3^r(3k+1) \quad \text{اگر} \\ x_{n-1} - \dfrac{3^{r+1} + 1}{2} & n = 3^r(3k+2) \quad \text{اگر} \end{cases}$$

که k و r اعداد صحیح نامنفی هستند. ثابت کنید هر عدد صحیح دقیقاً یکبار در این دنباله ظاهر می شود.

مسأله ۲ : فرض کنید $n(r)$ تعداد نقاط با مختصات صحیح روی دایره ای با شعاع $r > 1$ باشد.

ثابت کنید : $n(r) < 6\sqrt[3]{\pi r^2}$

مسأله ۳ : تمام توابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید که :

برای هر $x, y \in \mathbb{R}$: $f(f(x)+y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$

مسأله ۴ : در مثلث ABC، نیمساز $\angle BAC$، BC را در D قطع می کند. فرض کنید w دایره ای باشد که در D بر BC مماس است و از نقطه ی A می گذرد. فرض کنید M نقطه ی برخورد دوم دایره w با AC باشد و P نقطه ی برخورد دوم دایره ی w با BM باشد. ثابت کنید P روی یک میانه از مثلث ABD قرار می گیرد.

مسأله ۵ : ABC یک مثلث است. اگر نقاط صفحه را با سبز و قرمز رنگ آمیزی کنیم، ثابت کنید که یا دو نقطه ی قرمز با فاصله ی یک واحد از هم وجود دارند یا سه نقطه ی سبز وجود دارند که مثلثی همنهشت با ABC تشکیل می دهند.

***

دور سوّم

مسأله ۱ : فرض کنید $S=\{1,2,\dots,n\}$ و $A_1, A_2, \dots, A_n$ زیرمجموعه هایی از S باشند به طوریکه برای هر $1 \le i_1, i_2, i_3, i_4 \le k$ داریم :

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup A_{i_3} \cup A_{i_4}| \le n-2$$

ثابت کنید $k \le 2^{n-2}$.

مسأله ۲ : فرض کنید ABC یک مثلث و w دایره ای باشد که از A و C می گذرد. دایره ی w اضلاع AB و BC را به ترتیب در نقاط D و E قطع می کند. فرض کنید γ دایره محاطی مثلث خمیده EBD (مثلثی که کمان DE یکی از اضلاعش است) و S مرکز آن باشد. فرض کنید γ در M بر کمان DE مماس باشد. ثابت کنید که نیمساز $\angle AMC$ از مرکز دایره ی محاطی مثلث ABC می گذرد.

مسأله ۳ : فرض کنید $C_1, C_2, \dots, C_n$ دایره هایی به شعاع ۱ در صفحه باشند به طوریکه هیچ دو تا از آن ها بر هم مماس نیستند و زیر مجموعه ای از صفحه که از اجتماع این دایره ها به دست می آید همبند است (بعضی برای هر افراز $\{1,2,\dots,n\}$ به دو زیر مجموعه ی A و B، $\bigcup_{a\in A} C_a$ و $\bigcup_{b\in B} C_b$ مجزا نیستند) ثابت کنید $|S| \ge n$ که :

$$S = \bigcup_{1\le i<j\le n} C_i \cap C_j$$

یعنی مجموعه ی نقاط تقاطع دایره ها. (هر دایره را به عنوان مجموعه ی نقاط روی محیط آن در نظر بگیرید، نه داخل آن)

مسأله ۴ : فرض کنید $-1 \le x_1, x_2, \dots, x_n \le 1$ اعداد حقیقی باشند به طوریکه $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$، ثابت کنید جایگشت σ از $\{1,2,\dots,n\}$ وجود دارد به طوریکه برای هر $1 \le p \le q \le n$:

$$\left|x_{\sigma(p)} + \dots + x_{\sigma(q)}\right| < 2 - \frac{1}{n}$$

همچنین ثابت کنید که عبارت سمت راست را نمی توان با $2-\frac{4}{n}$ جایگزین کرد.

مسأله ۵ : فرض کنید $r_1, \dots, r_n$ اعداد حقیقی باشند. ثابت کنید که $S \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ وجود دارد به طوریکه :

$$1 \le |S \cap \{i, i+1, i+2\}| \le 2$$

برای هر $۱ \leq i \leq n-۲$ و $\left|\sum_{i\in S} r_i\right| \geq \frac{۱}{۶}\sum_{i=۱}^{n}|r_i|$

***

۱۱- ایرلند

مسأله ۱ : همه اعداد حقیقی $x > -1$ را بیابید که :

$$\frac{x^2}{(x+1-\sqrt{x+1})^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$$

مسأله ۲ : نشان دهید عددی در دنباله فیبوناچی موجود است که بر ۱۰۰۰ بخش پذیر است.

مسأله ۳ : فرض کنید F,E,D به ترتیب سه نقطه روی اضلاع AB, CA, BC از مثلث ABC باشند به طوریکه $AD \perp BC$ و $AF = FB$ و BE نیمساز زاویه B است. ثابت کنید CF, BE, AD همرأسند اگر و فقط اگر $a^2(a-c) = (b^2-c^2)(a+c)$ که $c = AB, b = CA, a = BC$.

مسأله ۴ : یک سطح مربعی 100×100 را می خواهیم با کاشی بپوشانیم. تنها کاشی های موجود مستطیل های 1×3 هستند که دقیقاً سه مربع از 100^2 مربع سطح را می پوشانند.

الف) اگر یک مربع 2×2 از وسط سطح حذف شود، ثابت کنید باقیمانده سطح را می توان با کاشی های موجود پوشاند.

ب) اگر مربع 2×2 از یکی از گوشه ها حذف شود ثابت کنید نمی توان بقیه سطح مربعی را با کاشی های موجود پوشاند.

مسأله ۵ : دنباله ی $U_n, n = 0,1,2,\ldots$ را به شکل زیر تعریف کنید :

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$ و برای هر $n \geq 1$، u_{n+1} برابر است با کوچکترین عدد صحیح مثبت به طوریکه $u_{n+1} > u_n$ و $\{u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}\}$ شامل هیچ سه عضوی نباشند که تشکیل یک تصاعد عددی بدهند. u_{100} را بیابید.

مسأله ۶ : دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$y^2 - (x+8)(x^2+2) = 0$$
$$y^2 - (8+4x)y + (16+16x-5x^2) = 0$$

مسأله ۷ : تابع $f : N \to N$ در شرایط زیر صدق می کند :

(i) $f(ab) = f(a)f(b)$ اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک b,a برابر با ۱ باشد.

(ii) $f(p+q) = f(p)+f(q)$ برای همه اعداد اول q, p. $f(p+q) = f(p)+p(q)$

ثابت کنید ۲ = (۲)f , ۳ = (۳)f و ۱۹۹۹ = (۱۹۹۹)f.

مسأله ۸ : فرض کنید a,b,c,d اعداد حقیقی مثبتی با مجموع ۱ باشند. ثابت کنید :

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}$$

که در آن تساوی برقرار است اگر و فقط اگر : $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

مسأله ۹ : همه اعداد صحیح m را بیابید که تعداد مقسوم علیه های m به توان۴، با m مساوی شود.

مسأله ۱۰ : فرض کنید ABCDEF یک شش ضلعی محدب باشد به طوریکه :

$EF = FA, CD = DE, AB = BC$ و $\angle ABC + \angle CDE + \angle EFA = 360^\circ$.

ثابت کنید عمودهای وارد بر FB و BD و DF به ترتیب از A و C و E همرسند.

***

۱۲- ایتالیا

مسأله ۱ : یک صفحه کاغذ مستطیل شکل به ابعاد a و b که $a > b$، داده شده است. این صفحه را از قطر آن تا می زنیم. مساحت مثلثی که با لبه های کاغذ ساخته می شود را پیدا کنید.

مسأله ۲ : یک عدد صحیح مثبت را متعادل گویند اگر تعداد ارقامش با تعداد عامل های اول متمایزش برابر باشد. مثلاً ۱۵ متعادل است ولی ۴۹ نیست. ثابت کنید که تعداد اعداد متعادل متناهی است.

مسأله ۳ : فرض کنید $w_۲, w_۱, w$ سه دایره به ترتیب با شعاع های $r_۲, r_۱, r$ باشند که $۰ < r_۱ < r_۲ < r$. دایره های $w_۱$ و $w_۲$ دو نقطه ی متمایز B و A به دایره ی w مماس داخلی هستند و یکدیگر را در دو نقطه ی متمایز قطع می کنند. ثابت کنید پاره خط $\overline{AB}$ شامل محل برخورد $w_۱$ و $w_۲$ است اگر و تنها اگر : $r_۱ + r_۲ = r$.

مسأله ۴ : آلبرت و باربارا با هم بازی می کنند. بازی به اینصورت است که روی یک میز ۱۹۹۹ قطعه چوب وجود دارد. بازیکنان به نوبت باید چند تا از این قطعه چوب ها را بردارند طوری که هر بازیکن حداقل یکی و حداکثر نصف چوب های باقی مانده را بردارد. بازیکنی که بعد از نوبت او فقط یک چوب روی میز باشد، باخته است. بازی را باربارا شروع می کند. تعیین کنید که برای کدام بازیکن استراتژی برد وجود دارد.

مسأله ۵ : روی دریاچه ای، دهکده ای با خانه های سنگی وجود دارد که این خانه ها روی گره های یک شبکه $m \times n$ مستطیل شکل قرار دارند.
هر خانه نقطه پایانی P پل است که خانه را به یک یا چند خانه ی مجاور وصل می کند (که در اینجا مجاور نسبت به شبکه مستطیل شکل تعریف می شود پس پلها قطری قرار نمی گیرند). برای چه مقادیری از n, m و p پلها را می توان طوری قرار داد که از هر خانه بتوان به خانه دیگر رفت؟ (اگر A و B خانه های مجاور باشند ممکن است بیش از یک پل A را به B وصل کند.)

مسأله ۶ : همه ی سه تایی هایی (x, k, n) از اعداد صحیح مثبت را بیابید طوریکه :

$$۳^k - ۱ = x^n$$

مسأله ۷ : ثابت کنید که برای هر عدداول p معادله ی $۲^p + ۳^p = a^n$ هیچ جواب صحیح مثبت (a,n) ندارد که $a,n > ۱$ باشند.

مسأله ۸ : نقاط D و E روی اضلاع AB وAC از مثلث ABC طوری قرار دارند که $DE \parallel BC$ و $\overline{DE}$ بر دایره ی محاطی ABC مماس است. ثابت کنید :

$$DE \le \frac{AB+BC+CA}{۸}$$

مسأله ۹ :

الف) تمام توابع اکیداً یکنوای $f: IR \to IR$ را بیابید به طوریکه :

$$f(x+f(y)) = f(x)+y \qquad \text{: } x,y \in IR \text{ برای هر}$$

ب) ثابت کنید که برای هر عدد صحیح $n > ۱$، هیچ تابع اکیداً یکنوای $f: IR \to IR$ وجود ندارد که :

$$f(x+f(y)) = f(x)+y^n \qquad \text{: } x,y \in IR \text{ برای هر}$$

مسأله ۱۰ : فرض کنید x مجموعه ای باشد که $|X| = n$ و $A_۱, A_۲, \ldots, A_m$ زیرمجموعه هایی از x باشند به طوریکه :

الف) $|A_i| = ۳$ $\qquad i = ۱,۲, \ldots, m$

ب) $|A_i \cap A_j| \le ۱$ برای هر $i \ne j$

ثابت کنید زیر مجموعه ای از x با حداقل $\lfloor \sqrt{۲n} \rfloor$ عنصر موجود است که شامل هیچ کدام از A_i ها نیست.

***

۱۳- ژاپن

مسأله ۱ : هر خانه از یک جدول ۱۹۹۹×۱۹۹۹ شامل حداکثر یک سنگ است. کمترین تعداد سنگ ها را پیدا کنید به طوریکه و قتی یک خانه به تصادف انتخاب می شود، مجموع تعداد سنگ ها در سطر و ستون مربوط حداقل ۱۹۹۹ باشد.

مسأله ۲ : داریم $f(x) = x^{۳} + ۱۷$. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$,n، عدد طبیعی x وجود دارد به طوریکه f(x) بر ۳^{n} بخش پذیر است ولی بر $۳^{n+۱}$ بخشپذیر نیست.

مسأله ۳ : از یک مجموعه ی $۲n+۱$ عضوی از وزنه ها (که n طبیعی است)، اگر هر وزنه را برداریم، $۲n$ وزنه ی باقی مانده را می توان به دو مجموعه طوری افراز کرد که مجموع وزنشان با هم برابر باشند. ثابت کنید که همه ی وزنه ها با هم برابرند.

مسأله ۴ : ثابت کنید :

$$f(x) = (x^{۲}+۱^{۲})(x^{۲}+۲^{۲})(x^{۲}+۳^{۲})\ ...(x^{۲}+n^{۲})+۱$$

را نمی توان به صورت حاصلضرب دو چند جمله ای با ضرایب صحیح و در جه ی بزرگتر از ۰ نوشت.

مسأله ۵ : شش ضلعی محدب ABCDEF با طول اضلاع ۱ داده شده است. فرض کنید m و M بیشترین و کمترین طول در بین سه قطر BE ,AD و CF باشند. تمام مقادیر ممکن برای m و M را بیابید.

***

۱۴- کره

مسأله ۱ : فرض کنید R و r به ترتیب شعاع دایره ی محیطی و محاطی مثلث ABC باشند، همچنین R' و r' به ترتیب شعاع دایره ی محیطی و محاطی مثلث $A'B'C'$ باشند. ثابت کنید اگر $\angle C = \angle C'$ و $Rr' = R'r$، آنگاه دو مثلث همنهشت هستند.

مسأله ۲ : فرض کنید $f: Q \to IR$ تابعی است که در نامساوی $\left|f(m+n)-f(m)\right| \le \frac{n}{m}$ برای اعداد گویای مثبت m و n صدق می کند. نشان دهید که برای همه ی اعداد صحیح و مثبت k :

$$\sum_{i=1}^{k}\left|f(2^k)-f(2^i)\right| \le \frac{k(k-1)}{2}$$

مسأله ۳ : همه ی اعداد صحیح مثبت n را بیابید که $2^n - 1$ مضربی از ۳ باشد و $\frac{2^n-1}{3}$ مقسوم علیه ای از $4m^2+1$ باشد که m عددی صحیح است.

مسأله ۴ : فرض کنید برای هر عدد حقیقی x که $|x| \ne 1$، تابع $f(x)$ وجود دارد که : $f(\frac{x-3}{x+1})+f(\frac{3+x}{1-x}) = x$ تمام $f(x)$ های ممکن را پیدا کنید.

مسأله ۵ : جایگشت $(a_1, a_2, ..., a_6)$ از ۱,۲,۳,...,۶ را طوری در نظر بگیرید که کمترین تعداد تبادل های لازم برای تبدیل $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ به (۱,۲,۳,۴,۵,۶) چهار باشد. تعداد این جایگشت ها را بیابید.

مسأله ۶ : فرض کنید $a_1, a_2, ..., a_{1999}$ اعداد حقیقی نامنفی باشند که در شرایط زیر صدق می کنند :

الف) $a_1 + a_2 + ... + a_{1999} = 2$

ب) $a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{1998}a_{1999} + a_{1999}a_1 = 1$

قرار دهید $S = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{1999}^2$. بیشترین و کم ترین مقدار ممکن S را بیابید.

***

۱۵- لهستان

مسأله ۱ : فرض کنید P نقطه ای روی ضلع BC از مثلث ABC باشد که در آن $AD > BC$. نقطه E روی ضلع AC به گونه ای است که :

$$\frac{AE}{EC} = \frac{BD}{AD - BC}$$

نشان دهید $AD > BE$.

مسأله ۲ : اعداد صحیح نا منفی $a_1 < a_2 < \dots < a_{101} < 5050$ داده شده اند. نشان دهید می توان ۴ عدد صحیح a_n, a_m, a_ℓ, a_k را یافت به طوری که $5050 \mid (a_x + a_\ell - a_m - a_n)$.

مسأله ۳ : فرض کنید $S(n)$ مجموع ارقام عدد صحیح مثبت n باشد. نشان دهید اعداد صحیح مثبت متمایز $\{n_i\}_{1 \le i \le 50}$ موجودند به طوریکه :

$$n_1 + S(n_1) = n_2 + S(n_2) = \dots = n_{50} + S(n_{50})$$

مسأله ۴ : تمام اعداد صحیح $n \ge 2$ را بیابید به طوری که دستگاه معادلات :

$$x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2$$
$$x_2^2 + x_3^2 + 50 = 16x_2 + 12x_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{n-1}^2 + x_n^2 + 50 = 16x_{n-1} + 12x_n$$
$$x_n^2 + x_1^2 + 50 = 16x_n + 12x_1$$

دارای جواب صحیح $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ باشد.

مسأله ۵ : فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ اعدادی صحیح باشند. ثابت کنید :

$$\sum_{1 \le i < j \le n} (|a_i - a_j| + |b_i - b_j|) \le \sum_{1 \le i, j \le n} |a_i - b_j|$$

مسأله ۶ : در ۶ ضلعی محدب ABCDEF :

$\angle A+\angle C+\angle E=۳۶۰$ و $AB.CD.EF=BC.DE.FA$

ثابت کنید $AB.FD.EC=BF.DE.CA$.

***

۱۶- رومانی

مسأله ۱-۷ : طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای اعداد صحیح هستند و حاصل ضرب دو ضلع مجاور به زاویه قائمه برابراست با سه برابر وتر. طول اضلاع را بیابید.

مسأله ۲-۷ : فرض کنید c,b,a اعدادی صحیح و نا صفر باشند به طوریکه $a \neq c$ و $\frac{a}{c}=\frac{a^۲+b^۲}{c^۲+b^۲}$. نشان دهید $a^۲+b^۲+c^۲$ عددی اول نیست.

مسأله ۳-۷ : دقت کنید ABCD یک چهار ضلعی محدب باشد با :
$\angle ABC=\angle ACD, \angle BAC=\angle CAD$ نیم خط های AD و BC یکدیگر را در E و نیم خط های AB و DC یکدیگر را در F قطع می کنند. ثابت کنید :

الف) $AB.DE=BC.CE$

ب) $AC^۲<\frac{۱}{۲}(AD.AF+AB.AE)$

مسأله ۴-۷ : در مثلث ABC، D و E به ترتیب روی روی اضلاع AB,BC قرار دارند. F روی AC به گونه ایست که $EF||BC$ و G روی BC به گونه ای است که $AD||BG$. فرض کنید M و N به ترتیب وسط های $\overline{BC},\overline{AD}$ باشند. ثابت کنید :

الف) $\frac{EF}{BC}+\frac{EG}{AD}=۱$

ب) نقطه وسط $\overline{FG}$ روی خط MN قرار می گیرد.

مسأله ۱-۸ : فرض کنید $p(x)=۲x^۳-۳x^۲+۲$ و قرار دهید :

$$S=\{p(n)|\, n\in N, n\le ۱۹۹۹\}$$
$$T=\{n^۲+۱|\, n\in N\}$$
$$U=\{n^۲+۲|\, n\in N\}$$

ثابت کنید تعداد اعضای $S\cap T$ و $S\cap U$ برابر است.

مسأله ۲-۸ :

الف) فرض کنید $n \geq ۲$ عددی صحیح باشد و

$$x_۱, y_۱, x_۲, y_۲, ..., x_n, y_n$$

اعدادی حقیقی و مثبت باشند به طوری که :

$$x_۱ + x_۲ + ... + x_n \geq x_۱ y_۱ + x_۲ y_۲ + ... + x_n y_n$$

ثابت کنید :

$$x_۱ + x_۲ + ... + x_n \leq \frac{x_۱}{y_۱} + \frac{x_۲}{y_۲} + ... + \frac{x_n}{y_n}$$

ب) فرض کنید c,b,a اعداد حقیقی مثبتی باشند به طوری که : $ab + bc + ca \leq ۳abc$ ثابت کنید :

$a^۳ + b^۳ + c^۳ \geq a + b + c$

مسأله ۳-۸ : فرض کنید $ABCDA'B'C'D'$ یک جعبه مستطیل شکل باشد و E و F به ترتیب دو پای عمود وارد بر خطوط $A'D$ و $A'C$ از A باشند. هم چنین فرض کنید p و Q دو پای عمود وارد بر خطوط $A'C'$ و $A'C$ از نقطه B' باشند. ثابت کنید :

الف) صفحه های AEF و $B'PQ$ با هم موازیند.

ب) مثلث های AEF و $B'PQ$ با هم متشابه هستند.

مسأله ۴-۸ : فرض کنید SABC یک هرم قائم باشد که قاعده ی آن مثلث متساوی الاضلاع ABC است. فرض کنید O مرکز ABC باشد و M وسط $\overline{BC}$. اگر $AM = ۲SO$ و N نقطه ای روی یال SA باشد به طوری که $SA = ۲۵SN$، ثابت کنید صفحات ABP و SBC بر هم عمودند که P نقطه تقاطع خطوط SO و MN است.

مسأله ۱-۹ : فرض کنید ABC یک مثلث و $\overline{AD}$ نیمساز A باشد. نقاط M و N را به ترتیب روی نیم خط های AB و AC طوری در نظر بگیرید که $\angle MDA = \angle ABC$ و $\angle NDA = \angle BCA$. خطوط AD و MN همدیگر را در P قطع می کنند. ثابت کنید : $AD^۳ = AB.AC.AP$.

مسأله ۲-۹ : برای $a, b \geq ۰$ فرض کنید $t(a, b)$ ریشه مثبت معادله ی

$(a + b)x^۲ - ۲(ab - ۱)x - (a + b) = ۰$

باشد. قرار دهید $M = \{(a, b) | a \neq b, t(a, b) \leq \sqrt{ab}\}$. کمترین مقدار $t(a,b)$ را برای $(a, b) \in M$ به دست آورید.

مسأله ۳-۹ : در چهار ضلعی محدب ABCD نیمساز زوایای A و C یکدیگر را در I قطع می کنند. نشان دهید دایره محاطی ABCD موجود است اگر و فقط اگر: $[AIB]+[CID]=[AID]+[BIC]$.

مسأله ۴-۹ : الف) فرض کنید $a,b\in IR$, $a<b$. ثابت کنید $a<x<b$ اگر و فقط اگر $\cdot<\lambda<۱$ موجود باشد به طوری که $x=\lambda a+(۱-\lambda)b$.

ب) تابع $f=IR\to IR$ دارای خاصیت زیر است :

$f(\lambda x+(۱-\lambda)y)<\lambda f(x)+(۱-\lambda)f(y)$ برای هر $x,y\in IR$, $x\neq y$, $\cdot<\lambda<۱$. نشان دهید نمی توان ۴ نقطه روی نمودار تابع یافت به طوری که تشکیل رئوس یک متوازی الاضلاع را بدهند.

مسأله ۱-۱۰ : تمام اعداد حقیقی x و y را بیابید که در روابط زیر صدق کنند :

$$\frac{۱}{۴^x}+\frac{۱}{۲۷^y}=\frac{۵}{۶}$$

$$\log_{۲۷} y-\log_{۴} x\geq\frac{۱}{۶}$$

$$۲۷^y-۴^x\leq ۱$$

مسأله ۲-۱۰ : صفحه ای یال های DA,CD,BC,AB از چهار وجهی ABCD را به ترتیب در Q,P,N,M قطع می کند. ثابت کنید : $MN.NP.PQ.QM\geq AM.BN.CP.DQ$

مسأله ۳-۱۰ : فرض کنید $a,b,c\,(a\neq\cdot)$، اعداد مختلط باشند. فرض کنید $z_۱$ و $z_۲$ ریشه های معادله $az^۲+bz+c=\cdot$ باشند و $w_۱$ و $w_۲$ ریشه های معادله $(a+\bar{c})z^۲+(b+\bar{b})z+(\bar{a}+c)=\cdot$
ثابت کنید اگر $|z_۱|,|z_۲|<۱$ ، آنگاه $|w_۱|=|w_۲|=۱$.

مسأله ۴-۱۰ : الف) فرض کنید $x_۱y_۱,x_۲,y_۲,\ldots,x_n,y_n$ اعداد حقیقی مثبتی باشند به طوریکه :

(i) $x_۱y_۱<x_۲y_۲<\ldots<x_ny_n$

(ii) $x_۱+x_۲+\ldots+x_k\geq y_۱+y_۲+\ldots+y_k$ برای $k=۱,۲,\ldots,n$. ثابت کنید :

$$\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}+\ldots+\frac{۱}{x_n}\leq\frac{۱}{y_۱}+\frac{۱}{y_۲}+\ldots+\frac{۱}{y_n}$$

ب) فرض کنید $A=\{a_۱,a_۲,\ldots,a_n\}\subseteq N$ مجموعه ای باشد که برای هر دو زیر مجموعه مجزای $B,C\subseteq A$، $\sum_{x\in B}x\neq\sum_{x\in C}x$. ثابت کنید : $\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\ldots+\frac{۱}{a_n}<۲$

***

مسائل انتخابی IMO

مسأله ۱ :

الف) نشان دهید بین هر ۳۹ عدد صحیح مثبت متوالی می توان عددی یافت که مجموع ارقامش بر ۱۱ بخش پذیر نباشد.

ب) نخستین ۳۸ عدد صحیح مثبت متوالی را بیابید که مجموع ارقام هیچ کدام از آنها بر ۱۱ بخش پذیر نباشد.

مسأله۲ : فرض کنید ABC یک مثلث با زوایای حاده با نیمسازهای $\overline{BL}$ و $\overline{CM}$ باشد. نشان دهید : $\angle A = 60^\circ$ اگر و فقط اگر نقطه k روی $\overline{BC}$ موجود باشد $(k \neq B, C)$ به طوری که مثلث KLM متساوی الاضلاع شود.

مسأله۳ : نشان دهید برای هر عدد صحیح مثبت n ، عدد

$$S_n = \binom{2n+1}{0}.2^{2n} + \binom{2n+1}{2}.2^{2n-2}.3 + \dots + \binom{2n+1}{2n}.3^n$$

برابر است با مجموع دو مربع کامل متوالی.

مساله ۴ : نشان دهید برای همه اعداد حقیقی مثبت $x_1, x_2, \dots, x_n$ که $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ ، نامساوی زیر برقرار است :

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \dots + \frac{1}{n-1+x_n} \le 1$$

مسأله ۵ : فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ اعدادی صحیح، مثبت و متمایز باشند. ثابت کنید :

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \ge \frac{(2n+1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{3}$$

مسأله ۶ : ثابت کنید برای هر عدد صحیح $n \ge 3$, n عدد صحیح مثبت $a_1, a_2, \dots, a_n$ وجود دارند که تشکیل تصاعد حسابی می دهند و n عدد صحیح مثبت $b_1, b_2, \dots, b_n$ موجودند که تشکیل تصاعد هندسی می دهند به طوریکه

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots < b_n < a_n .$$

یک نمونه از چنین تصاعدها، $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n$ مثال بزنید که هر کدام حداقل ۵ عضو داشته باشند.

مسأله ۷ : فرض کنید a یک عدد حقیقی مثبت و $\{x_n\}(n \geq 1)$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشند به طوریکه

$$x_1 = a \ , \ x_{n+1} \geq (n+2)x_n - \sum_{k=1}^{n-1} kx_k$$ برای $n \geq 1$.

نشان دهید عدد صحیح مثبت n موجود است که $x_n > 1999!$.

مسأله ۸ : فرض کنید O, A, B و C نقاطی متغیر در صفحه باشند به طوریکه :

$OA = 4 \ , OB = 2\sqrt{3} \ , OC = \sqrt{22}$

بیشترین مقدار ممکن برای مساحت مثلث ABC را بیابید.

مسأله ۹ : فرض کنید a و n دو عدد صحیح باشند و p عددی اول به طوریکه $p > |a|+1$. ثابت کنید چند جمله ای $f(x) = x^n + ax + p$ را نمی توان به صورت حاصل ضرب دو چند جمله ای غیر ثابت با ضرایب صحیح تجزیه کرد.

مسأله ۱۰ : دو دایره در A و B یکدیگر را قطع می کنند. خط ℓ از A می گذرد و دایره را به ترتیب در C و D قطع می کند. فرض کنید M و N وسط کمان های $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{BD}$ باشند که شامل A نیستند و K وسط $\overline{CD}$ باشد. ثابت کنید $\angle MKN = 90^\circ$.

مسأله ۱۱ : فرض کنید $n \geq 3$ ، $A_1, A_2, ..., A_n$ نقاطی روی یک دایره باشند. بیشترین تعداد مثلث های حادّه الزاویه را بیابید که رئوس آن ها این نقاط باشند.

مسأله ۱۲ : دانشمندان یک کنفرانس بین المللی، یا بومی هستند یا خارجی. هر دانشمند بومی دقیقاً یک پیغام به یک دانشمند خارجی می فرستد و هر دانشمند خارجی دقیقاً یک پیغام به یک دانشمند بومی می فرستد، به طوری که حداقل یک دانشمند بومی پیغامی دریافت نمی کند.

ثابت کنید مجموعه S از دانشندان بومی و مجموعه T از دانشمندان خارجی موجودند بطوریکه شرایط زیر برقرار باشند :

الف) دانشمندان در S دقیقاً به آن دانشمندان خارجی پیغام فرستاده اند که در T نیستند. (یعنی هر دانشمند خارجی که در T نیست حداقل یک پیام از دانشمندی در S در یافت می کند، اما هیچ کدام از دانشمندان T از اعضای S پیامی دریافت نمی کنند.)

ب) دانشمندان T دقیقاً به آن دانشمندان خارجی که در S نیستند پیام فرستاده اند.

مسأله ۱۳ : چند وجهی p در فضا داده شده است. آیا سه یال از p موجودند که تشکیل اضلاع یک مثلث را بدهند؟

***

۱۷- روسیه

دور چهارم

مسأله ۸-۱ : پدری می خواهد دو پسر خود را به دیدن مادربزرگشان که در ۳۳ کیلومتری آنهاست ببرد. پدر یک موتور سیکلت دارد که بیشترین سرعت آن $۲۵km/h$ است. با یک نفر سرنشین دیگر، بیشینه ی سرعت آن به $۲۰km/h$ کاهش می یابد (این موتور سیکلت نمی تواند ۳ نفر را حمل کند). سرعت پیاده روی هر یک از دو برادر $۵km/h$است. نشان دهید هر سه تای آنها می توانند بعد از سه ساعت به خانه ی مادربزرگ برسند.

مسأله ۸-۲ : عدد طبیعی A دارای خاصیت زیر است :
جمع اعداد صحیح بین و شامل ۱ تا A، همان عدد A به علاوه ی سه رقم در سمت راست آن است. A را بیابید؟

مسأله ۸-۳ : نقاط $A_۱$, $B_۱$ و $C_۱$ به ترتیب روی اضلاع CA, BC و AB از مثلث ABC طوری قرار دارند که میانه های $B_۱B_۲, A_۱A_۲$ و $C_۱C_۲$ از مثلث $A_۱B_۱C_۱$ به ترتیب موازی BC, AB و CA هستند. مشخص کنید که نقاط $A_۱$, $B_۱$ و $C_۱$ اضلاع مثلث ABC را با چه نسبتی تقسیم می کنند؟

مسأله ۸-۴ : ۴۰ بادکنک داریم که فشار هوای داخل آنها را که ممکن است با هم متفاوت باشند نمی دانیم. ما اجازه داریم که حداکثر k تا از این بادکنک ها را انتخاب کنیم و فشار داخل آنها را با هم برابر کنیم (برابر میانگین حسابی فشار داخلی اولیه آنها) کوچکترین k را پیدا کنید که برای آن همیشه می توان فشار هوای همه ی بادکنک ها را با هم یکی کرد.

مسأله ۸-۵ : نشان دهید که اعداد ۱ تا ۱۵ را نمی توان به دو گروه ۲تایی، A و ۱۳تایی B طوری تقسیم کرد که مجموع اعداد B برابر حاصلضرب اعداد A باشد.

مسأله ۸-۶ : مثلث ABC با زوایای حاده داده شده است. فرض کنید $A_۱$ بازتاب A نسبت به خط BC و $C_۱$ بازتاب C نسبت به خط AB باشد. نشان دهید اگر $B_۱, A_۱$ و $C_۱$ همخط باشند و $C_۱B = ۲A_۱B$ آنگاه $\angle CA_۱B$ قائمه است.

مسأله ۸-۷ : یک سری کامل دومینو در جعبه ای قرار دارد. (یعنی برای هر دوتایی اعداد صحیح i,j که $0 \le i \le j \le n$ یک دومینو که در یک مربع آن i و در مربع دیگر آن j نوشته شده است وجود دارد.) دو بازیکن به نوبت هر کدام یک دومینو از جعبه انتخاب می کنند و آن را به یک سر زنجیره ی (مستقیم) دومینوهای روی میز اضافه می کنند، بطوریکه در مربع های چسبیده به هم دومینوهای مجاور یک عدد نوشته شده باشد. (اولین دومینوی زنجیره هر دومینویی می تواند باشد). اولین بازیکنی که نتواند بازی کند، باخته است. با بازی درست کدام بازیکن می برد؟

مسأله ۸-۸ : زنجیره ای از ۵۴ مربع با طول ضلع ۱ به صورت زیر ساخته ایم :
هر جفت از مربع های پشت سر هم، از یک رأس به هم متصل هستند و هر مربعی به دو مربع مجاورش از رئوس مقابل هم متصل است. آیا می توان سطح یک مکعب $3\times3\times3$ را با این زنجیر پوشاند؟

مسأله ۹-۱ : همه ی اعداد صحیح از ۱ تا N ،$N \ge 2$ در دور یک دایره طوری نوشته شده اند که هر دو عدد مجاور حداقل یک رقم مشابه در نمایش دهدهی شان دارند. کوچکترین N را پیدا کنید که این کار ممکن باشد.

مسأله ۹-۲ : در مثلث ABC، نقاط D و E روی ضلع CA طوری قرار دارند که $AB = AD$ و $BE = EC$ (E بین A و D است). فرض کنید F نقطه ی میانی کمان BC از دایره ی محیطی ABC باشد. نشان دهید که نقاط D, E, B و F روی یک دایره قرار دارند.

مسأله ۹-۳ : حاصلضرب اعداد حقیقی و مثبت y،x و z برابر ۱ است. نشان دهید اگر :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge x+y+z$$

آنگاه : $\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k} \ge x^k+y^k+z^k$ برای همه اعداد صحیح مثبت k.

مسأله ۹-۴ : یک ماز از جدولی 8×8 تشکیل شده که در هر خانه ی 1×1 آن یک فلش قرار دارد که به سمت بالا، پائین، چپ و یا راست اشاره می کند. ضلع بالایی مربع، گوشه ی سمت راست بالای جدول راه خروج از این ماز است. مهره ای در مربع گوشه ی سمت چپ پائین ماز قرار دارد. هر بار این مهره را در جهت فلش یک خانه حرکت می دهیم و فلش خانه ای که مهره از آن حرکت کرده را 90° در جهت عقربه های ساعت می چرخانیم. اگر فلش به خارج از جدول اشاره کند (و راه خروج نباشد)، مهره سر جای خود می ماند و فلش را 90° در جهت عقربه های ساعت می چرخانیم. ثابت کنید که این مهره دیر یا زود از این ماز خارج می شود.

مسأله ۹-۵ : یک جدول نامتناهی داریم که هر خانه اش با یکی از ۵ رنگ مختلف رنگ آمیزی شده است به نحوی که در هر ۵ مربع به شکل صلیب (یونانی)، ✠، از هر رنگ یک مربع وجود دارد. نشان دهید که در هر مستطیل ۵×۱نیز از هر رنگ یک مربع وجود دارد.

مسأله ۹-۶: نشان دهید هر عدد طبیعی را می توان به صورت تفاضل دو عدد طبیعی با تعداد عامل های اول برابر نوشت.

مسأله ۹-۷ : در مثلث ABC که $AB > BC$، نقاط K و M نقاط میانی اضلاع AB , CA و I مرکز دایره ی محاطی است. فرض کنید P نقطه ی برخورد خطهای KM , CI و Q نقطه ای باشد که $QP \perp KM$ و $QM || BI$. ثابت کنید $OI \perp AC$.

مسأله ۱۰-۱ : دایره w، نقطه ی A درون w و نقطه ی B که با A برابر نیست در یک صفحه داده شده اند.

تمام مثلث های BXY را در نظر بگیرید طوری که X و Y روی w و A روی وتر XY قرار بگیرد. نشان دهید که مراکز دایره های محیطی این مثلث ها همه روی یک خط قرار می گیرند.

مسأله ۱۰-۲ : n نقطه در فضا داریم. (هیچ سه تایی روی خط و هیچ چهارتایی روی یک صفحه نیستند). از هر ۳ نقطه ی آن، صفحه ای عبور می دهیم. نشان دهید که برای هر $n-3$ نقطه در فضا، صفحه ای (از صفحه های رسم شده) وجود دارد که از هیچ کدام نمی گذرد.

مسأله ۱۰-۳ : آیا ۱۰ عدد صحیح متمایز وجود دارد که جمع هر ۹ عدد آن مربع کامل باشد؟

مسأله ۱۰-۴ : در یک انتخابات، هر فرد رأی دهنده نام n کاندیدا را روی برگ رأی می نویسد. هر برگ رأی داخل یکی از $n+1$ صندوق رأی انداخته می شود. بعد از رأی گیری می بینیم که در هر صندوق حداقل یک برگ رأی وجود دارد و برای هر $n+1$ برگ رأی که هر کدام داخل یک صندوق هستند، اسمی وجود دارد که روی همه ی آن ها نوشته شده است.نشان دهید که حداقل یک صندوق وجود دارد که اسم خاصی روی همه ی برگ رأی هایش نوشته شده باشد.

مسأله ۱۰-۵ : مجموعه ای از اعداد طبیعی را طوری انتخاب کرده ایم که از هر ۱۹۹۹ عدد متوالی، یک عدد از این مجموعه قرار دارد. نشان دهید که دو عدد در این مجموعه قرار دارند که یکی دیگری را می شمارد.

مسأله ۱۱-۱ : تابع $f(x)$ روی همه ی اعداد حقیقی تعریف شده است. می دانیم برای هر $a > 1$، تابع $f(x)+f(ax)$ پیوسته است. نشان دهید $f(x)$ پیوسته است.

مسأله ۱۱-۲ : در کلاسی هر پسر حداقل با یک دختر دوست است. نشان دهید گروهی از حداقل نیمی از دانش آموزان وجود دارد که هر پسری در این گروه با تعداد فردی دختر در گروه دوست است.

مسأله ۱۱-۳ : یک چند وجهی را بر یک کره محیط کرده ایم. یک وجه را بزرگ گوئیم اگر تصویر کره روی صفحه ی آن وجه، کاملاً درون آن وجه قرار بگیرد. نشان دهید که حداکثر ۶ وجه بزرگ وجود دارد.

مسأله ۱۱-۴ : آیا اعداد حقیقی b,a و c وجود دارند، چنانکه برای هر عدد حقیقی x و y داشته باشیم :

$$|x+a|+|x+y+b|+|y+c|>|x|+|x+y|+|y|$$

مسأله ۱۱-۵ : هر خانه از یک جدول ۵۰×۵۰ با یکی از چهار رنگ مختلف رنگ شده است. نشان دهید خانه ای وجود دارد که در بالا، پائین، سمت چپ و سمت راست آن خانه ای همرنگ آن باشد. (که لزوماً با آن مجاور نیستند.)

مسأله ۱۱-۶ : یک چندجمله ای با ضرایب صحیح و خاصیت زیر داریم :
بی نهایت عدد صحیح وجود دارند که برابر مقدار چند جمله ای در بیش از یک عدد صحیح هستند [یعنی مجموعه اعداد صحیحی که چندجمله ای بیش از یک عدد صحیح را به هر یک می برد نامتناهی است] ثابت کنید حداکثر یک عدد صحیح وجود دارد که برابر مقدار چندجمله ای فقط در یک عدد صحیح است.

❋❋❋

دور پنجم

مسأله ۹-۱ : در نمایش دهدهی عدد A، ارقام به ترتیب صعودی از چپ به راست ظاهر می شوند. مجموع ارقام عدد $9A$ چیست؟

مسأله ۹-۲ : فرض کنید S دایره ی محیطی مثلث ABC باشد و A_1 نقطه ی میانی کمان BC از S باشد که شامل A نیست و C_1 نقطه ی میانی کمان AB از S باشد که شامل C نیست. فرض کنید S_1 دایره ای به مرکز A_1 و مماس بر $\overline{BC}$ و S_2 دایره ی به مرکز C_1 و مماس بر $\overline{AB}$ باشد.
نشان دهید که I، مرکز دایره ی محاطی مثلث ABC ، روی یک مماس خارجی مشترک S_1 و S_2 قرار می گیرد.

مسأله ۹-۳ : اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰ را می توان با رنگ های سفید یا سیاه رنگ کرد. یک حرکت مجاز عبارت است از انتخاب یک عدد از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰ و عوض کردن رنگ آن و رنگ هر عدد دیگری که نسبت به آن اول نیست. در ابتدا همه ی اعداد سیاه هستند.
آیا ممکن است بعد از دنباله ای از حرکت ها، همه ی اعداد سفید شوند؟

مسأله ۹-۴ : یک مثلث متساوی الاضلاع با طول ضلع n، روی یک شبکه از مثلث هایی با طول ضلع ۱ کشیده شده است. بیشترین تعداد پاره خطهای شبکه درون و یا روی این مثلث را بیابید که می توان آنها را طوری رنگ کرد که هیچ سه تایی از رنگ شده ها تشکیل مثلث ندهند.

مسأله ۹-۵ : فرض کنید $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$ قسمت اعشاری x را نشان دهد. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n :

$$\sum_{k=1}^{n^2}\left\{\sqrt{k}\right\}\leq\frac{n^2-1}{2}$$

مسأله ۹-۶ : یک دایره که از رأس های A و B مثلث ABC می گذرد و ضلع BC را در D قطع می کند. یک دایره که از رأس های B و C می گذرد، ضلع AB را در نقطه E و دایره ی اول را در F قطع می کند. فرض کنید نقاط A، E، D و C روی دایره ای به مرکز O قرار دارند. نشان دهید $\angle BFO$ قائمه است.

مسأله ۹-۷ : یک برد الکتریکی ۲۰۰۰ اتصال دارد که هر دوتای آنها با سیم به هم متصل اند. دو خرابکار به نامهای وَسیا و پتیا به نوبت سیم ها را می برند. وسیا (که اول شروع می کند) همیشه یک سیم می برد در حالی که پتیا در

هر بار یک یا سه سیم را می برد. بازیکنی که آخرین سیم یک اتصال را ببرد می بازد. با بازی درست کدام یک می برند؟

مسأله ۱۰-۱ : سه کاسه ی خالی روی میزی قرار دارند. سه بازیکن A، B و C که ترتیب بازی آنها تصادفی است، به نوبت هر کدام یک مهره در یک کاسه می اندازند. A مهره ی خود را در کاسه ی اول یا دوم، B در کاسه ی دوم یا سوم و C در کاسه ی اول یا سوم می تواند بیندازد.

اولین بازیکنی که ۱۹۹۹ اُمین مهره را در یک کاسه بیندازد می بازد. نشان دهید بازیکنان A و B می توانند با کمک هم کاری کنند که C ببازد.

مسأله ۱۰-۲ : تمام دنباله های نامتناهی و کراندار از اعداد صحیح مثبت را بیابید که برای هر $n \geq ۲$:

$$a_n = \frac{a_{n-۱} + a_{n-۲}}{(a_{n-۱}\ ,\ a_{n-۲})}$$

(منظور از (a,b) ، بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b است.)

مسأله ۱۰-۳ : دایره ی محاطی مثلث ABC بر اضلاع BC, AB و CA به ترتیب در نقاط L, K و M مماس است. بر هر دو تا از دایره های محاطی BKL, AMK و CLM یک مماس خارجی مشترک رسم شده است که روی ضلعی از ABC قرار نمی گیرد. نشان دهید که این سه مماس از یک نقطه می گذرند.

مسأله ۱۰-۴ : به یک مربع $n \times n$ روی یک صفحه ی شطرنجی نامتناهی کشیده شده است. در هر یک از $n^۲$ خانه ی این مربع در ابتدا یک مهره قرار دارد. یک حرکت عبارت است از پریدن یک مهره از روی مهره ای مجاور آن (افقی یا عمودی) و رفتن به یک خانه ی خالی. مهره ای که یک مهره ی دیگر از روی آن می پرد از صفحه حذف می شود. دنباله ای از حرکت ها طوری انجام می شود که در آخر دیگر نمی توان حرکت کرد. نشان دهید که در این دنباله حداقل $\frac{n^۲}{۳}$ حرکت انجام شده است.

مسأله ۱۰-۵ : مجموع ارقام عدد طبیعی n برابر ۱۰۰ است و مجموع ارقام n ۴۴، ۸۰۰ است. مجموع ارقام n ۳ چند است؟

مسأله ۱۰-۶ : برای اعداد حقیقی و مثبت x و y داریم :

$$x^۲ + y^۳ \geq x^۳ + y^۴$$

نشان دهید : $x^۳ + y^۳ \leq ۲$

مسأله ۱۰-۷ : در جمعی ۱۲ نفره، از میان هر ۹ نفر می توان ۵ نفر را یافت که هر دو نفر آنها همدیگر را می شناسند. نشان دهید که ۶ نفر در این جمع وجود دارند که هر دوتای آن ها همدیگر را می شناسند.

مسأله ۱۱-۱ : آیا ۱۹ عدد متمایز طبیعی وجود دارند که مجموعشان ۱۹۹۹ باشد و مجموع ارقامشان با هم برابر باشند؟

مسأله ۱۱-۲ : روی هر نقطه ای گویا بر خط حقیقی یک عدد صحیح نوشته شده است. نشان دهید پاره خطی با نقاط انتهایی گویا وجود دارد به طوریکه مجموع اعداد روی نقاط انتهایی از دو برابر عدد روی نقطه ی میانی آن بیشتر نباشد.

مسأله ۱۱-۳ : دایره ای که در چهار ضلعی $ABCD$ محاط شده است بر اضلاع BC, AB, DA و CD به ترتیب در نقاط M, L, K و N مماس است. فرض کنید S_3, S_2, S_1 و S_4 به ترتیب دایره های محاطی مثلث های CMN, BLM, AKL و DNK باشند.

مماس های خارجی مشترک دایره های S_1 و S_2، S_2 و S_3، S_3 و S_4، S_4 و S_1 که روی اضلاع $ABCD$ قرار نمی گیرند رسم شده اند. نشان دهید که چهار ضلعی تشکیل شده از این مماس ها یک لوزی است.

مسأله ۱۱-۴ : چهار عدد طبیعی دارای این خاصیت هستند که مجموع هر دو تای آنها بر حاصلضرب دو تای دیگر بخش پذیر است. نشان دهید که حداقل سه تا از این اعداد با هم برابرند.

مسأله ۱۱-۵ : سه چند ضلعی محدب p_2, p_1 و p_3 در صفحه داده شده اند. نشان دهید احکام زیر معادلند.

الف) هیچ خطی هر سه چند ضلعی را قطع نمی کند.

ب) برای $i = 1,2,3$، خطی وجود دارد که هیچ کدام از چند ضلعی ها را قطع نمی کند و p_i نسبت دو چندضلعی دیگر در طرف دیگر خط ℓ_i باشد.

مسأله ۱۱-۶ : از رأس A از چهار وجهی $ABCD$ صفحه ای مماس بر کره ی محیط شده برچهار وجهی می گذرد. نشان دهید که خطوط برخورد این صفحه با صفحات ACD, ABC وABD، ۶ زاویه ی برابر می سازند اگر و تنها اگر: $AB.CD = AC.BD = AD.BC$

***

۱۸- اسلوونی

مسأله ۱ : دنباله ی اعداد حقیقی $a_۱, a_۲, a_۳, ...$ در شرایط اولیه $a_۱ = ۲, a_۲ = ۵۰۰, a_۳ = ۲۰۰۰$ و رابطه ی بازگشتی

$$\frac{a_{n+۲} + a_{n+۱}}{a_{n+۱} + a_{n-۱}} = \frac{a_{n+۱}}{a_{n-۱}}$$

برای $n = ۲, ۳, ۴, ...$ صدق می کند. ثابت کنید که همه ی جمله های این دنباله اعداد صحیح مثبت هستند و $۲^{۲۰۰۰}$ عدد $a_۲...$ را می شمارد.

مسأله ۲ : تمام توابع $f : R \to R$ را بیابید که برای هر $x, y \in IR$ در رابطه ی زیر صدق کنند :

$$f(x - f(y)) = ۱ - x - y$$

مسأله ۳ : فرض کنید E، محل تقاطع قطرها در چهار ضلعی محاطی ABCD و G,F به ترتیب وسط های اضلاع AB و CD باشند. ثابت کنید که سه خطی که از نقاط F,G و E می گذرند و به ترتیب بر $\overline{BD}, \overline{AC}$ و $\overline{AD}$ عمود هستند، همرس هستند.

مسأله ۴ : سه جعبه با حداقل یک مهره در هر یک داده شده اند. در هر حرکت دو جعبه را انتخاب می کنیم و تعداد مهره های داخل آن را با استفاده از مهره های جعبه ی دیگر دو برابر می کنیم. آیا ممکن است که همیشه بتوان بعد از تعدادی متناهی حرکت، یکی از جعبه ها را خالی کرد؟

***

۱۹- تایوان

مسأله ۱ : تمام سه تایی های (x,y,z) از اعداد صحیح مثبت را بیابید به طوریکه :

$$(x+۱)^{y+۱}+۱=(x+۲)^{z+۱}$$

مسأله ۲ : ۱۹۹۹ نفر از یک نمایشگاه بازدید می کنند. از هر ۵۰ نفر حداقل ۲ نفر همدیگر را نمی شناسند. ثابت کنید که می توانیم حداقل ۴۱ نفر را پیدا کنیم که هر کدام حداکثر ۱۹۵۸ نفر دیگر را می شناسد.

مسأله ۳ : فرض کنید P^* مجموعه ی همه ی اعداد فرد کوچکتر از ۱۰۰۰۰ باشد و $p\in P^*$. برای هر زیرمجموعه P^* مانند $S=\{p_۱,p_۲,\dots,p_k\}$ که $k\geq ۲$ و S شامل p نیست، $q\in P^*\setminus S$ وجود دارد به طوریکه :

$$(q+۱)\mid(p_۱+۱)(p_۲+۱)\dots(p_k+۱)$$

تمام مقادیر ممکن p را بیابید.

مسأله ۴ : مثلث ABC با زوایای حاده داده شده است. ارتفاع های رسم شده از رئوس B,A و C اضلاع مقابلشان را به ترتیب در E,D و F قطع می کنند و $AB>AC$. خط EF، BC را در p و خط گذرنده از D و موازی با EF خطوط AC و AB را به ترتیب در Q و R قطع می کند. نقطه ی N را روی ضلع BC طوری بگیرید که : $\angle NQP+\angle NRP<۱۸۰^\circ$. ثابت کنید $BN>CN$.

مسأله ۵ : ۸ طرح مختلف برای n تی شرت طراحی شده است که $n\geq ۲$. می دانیم که هر تی شرت حداقل یک طرح دارد و طرح های روی هیچ دو تی شرتی تماماً مثل هم نیست. همچنین برای هر k طرح، $۱\leq k\leq ۷$ تعداد تی شرت هایی که حداقل یکی از k طرح را دارند زوج است. n را بیابید.

***

۲۰- ترکیه

مسأله ۱ : فرض کنید ABC یک مثلث متساوی الساقین باشد، AB=AC . فرض کنید D نقطـه ای روی $\overline{BC}$ باشـد به طوریکه $BD = ۲DC$ و P نقطه ای روی $\overline{AD}$ باشد به طوریکه $\angle BAC = \angle BPD$. ثابت کنید :

$$\angle BAC = ۲\angle DPC$$

مسأله۲ : برای همه اعداد حقیقی $۰ \le a \le b \le c$ ثابت کنید :

$$(a+۳b)(b+۴c)(c+۲a) \ge ۶۰\ abc.$$

مسأله ۳ : نقاط روی یک دایره با سه رنگ، رنگ آمیزی شده اند. ثابت کنید بی نهایت مثلـث متساوی الاضـلاع بـا رئوس روی دایره و رنگ های یکسان وجود دارد.

مسأله ۴ : فرض کنید $\angle XOY$ داده شده است و M و N به ترتیب دو نقطه روی نیم خط هـای OX و OY باشـند. مکان هندسی نقاط وسط $\overline{MN}$ وقتی M و N روی نیم خط هـای OX و OY حرکـت مـی کننـد و OM+ON ثابـت است، به دست آورید.

مسأله ۵ : تعدادی از رئوس مربع های واحد یک صفحه شطرنج $n \times n$ رنـگ آمیـزی شـده انـد بـه طـوری کـه هـر مربع $k \times k$ که از این مربع ها تشکیل شده است، نقطه ای رنگ آمیزی شده در

دست کم یکی از ضلع هایش داشته باشد. اگر $\ell(n)$ نمایانگر کمترین تعداد نقاط رنگ شده ی مورد نیاز برای چنـین شرایطی باشد ثابت کنید :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ell(n)}{n^۲} = \frac{۲}{۷}$$

مساله ۶ : فرض کنید ABCD یک چهار ضلعی محاطی باشد و L و N به ترتیب وسط قطرهـای AC و BD باشـند. اگر $\overline{BD}$ نیمساز $\angle ANC$ باشد، ثابت کنید $\overline{AC}$ نیز نیمساز $\angle BLD$ است.

مسأله ۷ : تمام توابع $f: IR \to IR$ را بیابید به طوریکه $\left\{\frac{f(x)}{x} \mid x \in IR, x \neq ۰\right\}$ متناهی باشد و برای هر $x \in IR$:

$$f(x-۱-f(x)) = f(x)-x-۱$$

مسأله ۸ : فرض کنید مساحت و محیط چهار ضلعی محاطی C، به ترتیب A_C و P_C باشند. اگر مساحت و محـیط چهارضلعی که بر دایره محیطی C در رئوس C مماس است، به ترتیب P_T, A_T باشند، ثابت کنید :

$$\frac{A_C}{A_T} \geq \left(\frac{P_C}{P_T}\right)^۲$$

مسأله ۹ : ثابت کنید صفحه را نمی توان به صورت اجتماعی متناهی از نواحی درونی چند سهمی نوشت (ناحیـه ی بیرونی یک سهمی اجتماع خطوطی از صفحه است که سهمی را قطع نمی کننـد. ناحیـه درونـی سـهمی، نقـاطی از صفحه هستند که به ناحیه بیرونی تعلق ندارند.)

***

۲۱- اوکراین

مسأله ۱ : فرض کنید $P(x)$ یک چند جمله ای با ضرایب صحیح باشد. دنباله $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ در شروط $x_۱=x_{۲...}=۱۹۹۹$ و $x_{n+۱}=P(x_n)$ برای $n\geq ۱$ صدق می کند. عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\frac{x_۱}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_۳}+\ldots+\frac{x_{۱۹۹۹}}{x_{۲...}}$$

مسأله ۲ : برای اعداد حقیقی $۰\leq x_۱,x_۲,\ldots,x_۶\leq ۱$ نامساوی زیر را ثابت کنید :

$$\frac{x_۱^۳}{x_۲^۵+x_۳^۵+x_۴^۵+x_۵^۵+x_۶^۵+۵}+\frac{x_۲^۳}{x_۱^۵+x_۳^۵+x_۴^۵+x_۵^۵+x_۶^۵+۵}+\ldots+\frac{x_۶^۳}{x_۱^۵+x_۲^۵+x_۳^۵+x_۴^۵+x_۵^۵+۵}\leq\frac{۳}{۵}$$

مسأله ۳ : فرض کنید : $\overline{AA_۱}$, $\overline{BB_۱}$ و $\overline{CC_۱}$ ارتفاع های مثلث حادّه الزاویه ABC باشند و O نقطه ای دلخواه داخل مثلث $A_۱B_۱C_۱$. فرض کنید M,N,P,Q,R و S به ترتیب پاهای عمود بر خطوط $AA_۱, BC, BB_۱, CA, CC_۱, AB$ از نقطه O باشند. ثابت کنید خطوط MN, PQ و RS همرسند.

***

۲۲- انگلستان

مسأله ۱ : چهار کودک داریم. سن هر یک از آن ها بر حسب سال عددی بین ۲و۱۶ است. سن همه آن ها با هم متمایز است. یک سال قبل مربع سن بزرگترین آن ها برابر با مجموع مربعات سن سه کودک دیگر بود. یک سال دیگر، مجموع مربعات سن بزرگترین و کوچک ترین آن ها برابر است با مجموع مربعات سن دو تای دیگر. مشخص کنید آیا با اطلاعات موجود می توان سن آن ها را مشخص کرد. تمامی حالات ممکن برای سن آن ها را بیابید.

مسأله ۲ : دایره ای با قطر $\overline{AB}$ و نقطه x روی AB مفروض است. نقطه P غیر از B,A روی دایره قرار دارد ثابت کنید برای هر مکان P،

$$\frac{\tan \angle APX}{\tan \angle PAX}$$

مقداری ثابت است.

مسأله ۳ : عدد مثبت C را چنان تعیین کنید که معادله $xy^۲ - y^۲ - x + y = c$ دارای دقیقاً سه جواب (x, y) در اعداد صحیح مثبت باشد.

مسأله ۴ : هر عدد صحیح مثبت m را می توان به صورت یکتا در مبنای ۳ به شکل رشته ای از ۲ و ۱ و ۰ نوشت. (با ۰ نمی تواند شروع شود). برای مثال :

$$۹۸ = ۸۱ + ۹ + ۲ \times ۳ + ۲ \times ۱ = (۱۰۱۲۲)_۳$$

فرض کنید $C(m)$ مجموع مکعبات ارقام m در مبنای ۳ باشد. مثلاً :

$$C(۹۸) = ۱^۳ + ۱^۳ + ۲^۳ + ۲^۳ = ۱۸$$

فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت ثابت باشد. دنباله ی $\{u_r\}$ را به شکل زیر تعریف کنید :

$$u_۱ = n \text{ و } u_r = c(u_{r-۱}) \forall r \geq ۲$$

نشان دهید عدد صحیح مثبت r موجود است که ۱۷ یا ۱۰۲ $= u_r$

مسأله ۵ : همه توابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را در نظر بگیرید به طوریکه :

(i) برای هر عدد صحیح مثبت m، عدد صحیح مثبت n موجود است که $f(n) = m$.

(ii) برای هر عدد صحیح مثبت n، $f(n+1) = f(n) - 1$ یا $f(n+1) = 4f(n) - 1$.

مجموعه ی اعداد صحیح مثبت p را بیابید که برای تابع f که در شرایط (i) و (ii) صدق می کند داشته باشیم $f(1999) = p$.

مسأله ۶ : برای هر عدد صحیح مثبت n، قرار دهید $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

الف) برای کدام مقادیر n، می توان S_n را به دو زیر مجموعه ناتهی افراز کرد به طوری که مجموع اعضای دو زیر مجموعه با هم مساوی باشند؟

ب) برای‌کدام مقادیر n، می توان S_n را به سه زیرمجموعه ناتهی افراز کرد که مجموع اعضای سه زیرمجموعه با هم برابر باشند؟

مسأله ۷ : فرض کنید ABCDEF یک ۶- ضلعی باشد که بر دایره w محیط است. دایره ی w بر اضلاع CD,AB و EF به ترتیب در y,z و z مماس باشد. ثابت کنید خطوط QZ,PY و RX همرسند.

مسأله ۸ : سه عدد حقیقی نامنفی q,p و r در تساوی زیر صدق می کنند.

$$p + q + r = 1$$

ثابت کنید :

$$7(pq + qr + rp) \leq 2 + 9pqr$$

مسأله ۹ : تمامی اعداد به شکل $3n^2 + n + 1$ را که n یک عدد صحیح مثبت است در نظر بگیرید.

الف) کوچکترین مقدار مجموع ارقام چنین عددی (در پایه ۱۰) چه می تواند باشد؟

ب) آیا مجموع ارقام چنین عددی (در پایه ۱۰) می تواند ۱۹۹۹ باشد؟

***

۲۳- ایالات متحده آمریکا

مسأله ۱ : تعدادی مهره روی یک صفحه شطرنج قرار دارند بطوریکه :

الف) هر خانه ای که مهره ای در آن نیست یک ضلع مشترک با خانه ای که مهره در آن است دارد.

ب) برای هر دو خانه که مهره دارند، دنباله ای از خانه های شامل مهره وجود دارد که از یکی از آنها شروع و به دیگری ختم می شوند به طوریکه در این دنباله هر دو خانه ی متوالی دارای یک ضلع مشترک هستند. ثابت کنید حداقل $\frac{n^۲-۲}{۳}$ مهره روی این صفحه شطرنج قرار دارد.

مسأله ۲ : فرض کنید ABCD یک چهار ضلعی محاطی محدب باشد. ثابت کنید :

$$|AB-CD|+|AD-BC|\ge ۲|AC-BD|$$

مسأله ۳ : فرض کنید $p>۲$ عددی اول باشد و d و c و b و a اعدادی صحیح بوده که بر p بخش پذیر نیستند و

$$\left\{\frac{ra}{p}\right\}+\left\{\frac{rb}{p}\right\}+\left\{\frac{rc}{p}\right\}+\left\{\frac{rd}{p}\right\}=۲$$

برای هر عدد صحیح r که بر p بخش پذیر نیست.

ثابت کنید حداقل دو تا از اعداد $a+b, a+c, a+d, b+c, b+d$ و $c+d$ بر p بخش پذیرند. برای عدد حقیقی x، $\{x\}=x-[x]$ قسمت اعشاری x است.

مسأله ۴ : فرض کنید $a_۱, a_۲, \dots$ و $a_n (n>۳)$ اعدادی حقیقی باشند به طوریکه :

$$a_۱+a_۲+\dots+a_n\ge n \quad و \quad a_۱^۲+a_۲^۲+\dots+a_n^۲\ge n^۲$$

ثابت کنید $\max(a_۱,a_۲,\dots,a_n)\ge ۲$.

مسأله ۵ : بازی Y۲K در یک مستطیل ۲۰۰۰×۱ به شکل زیر بازی می شود :
دو بازیکن به ترتیب در مربع های خالی حرف S یا O را می نویسند. اولین بازیکنی که در سه مربع متوالی حروف SOS را ایجاد کند برنده است. اگر همه مربع ها بدون ایجاد SOS پر شوند بازی مساوی می شود. ثابت کنید نفر دوم استراتژی برد دارد.

مسأله ۶ : فرض کنید ABCD یک ذوزنقه متساوی الساقین با $AB \| CD$ باشد. W، دایره محاطی مثلث BCD بر CD در E مماس است. فرض کنید F نقطه ای روی نیمساز (داخلی) زاویه $\angle DAC$ باشد به طوری که $EF \perp CD$. فرض کنید دایره محیطی مثلث ACF خط CD را در C و G قطع کند. ثابت کنید مثلث AFG متساوی الساقین است.

***

۲۴- ویتنام

مسأله ۱ : دستگاه معادلات زیر را حل کنید :

$$(1+4^{2x-y}).5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1}$$
$$y^3+4x+1+Ln(y^2+2x)=0$$

مسأله ۲ : فرض کنید C' و B' و A' به ترتیب وسط کمان های AB و CA و BC (که شامل C و B و A نیستند.) از دایره محیطی ABC باشند. اضلاع BC، CA و AB جفت های $\{C'A',A'B'\}$ و $\{A'B',B'C'\}$ و $\{B'C',C'A'\}$ را به ترتیب در $\{R,S\}$ و $\{P,Q\}$ و $\{M,N\}$ قطع می کنند. ثابت کنید $MN=PQ=RS$ اگر و فقط اگر مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد.

مسأله ۳ : برای $n=0,1,2,...$ فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله باشند که به شکل بازگشتی زیر تعریف می شوند :

$$x_0=1, x_1=4, x_{n+2}=3x_{n+1}-x_n$$
$$y_0=1, y_1=-2, y_{n+2}=3y_{n+1}-y_n$$

الف) ثابت کنید $x_n^2-5y_n^2+4=0$ برای همه اعداد صحیح نامنفی n.

ب) فرض کنید a و b دو عدد صحیح مثبت باشند به طوریکه $a^2-5b^2+4=0$. ثابت کنید عدد صحیح نامنفی k موجود است که $x_k=a$ و $y_k=b$.

مسأله ۴ : فرض کنید c و b و a اعدادی حقیقی باشند به طوریکه $abc+a+c=b$. بیشترین مقدار ممکن برای عبارت زیر را حساب کنید :

$$P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}$$

مسأله ۵ : در فضای سه بعدی فرض کنید Oz, Oy, Ox و Ot چهار نیم خط متمایز باشند که در یک صفحه نیستند به طوریکه اندازه زاویه بین هر دو تا از آنها مساوی باشد.

الف) این مقدار مشترک زاویه را حساب کنید.

ب) فرض کنید O نیم خط دیگری غیر از ۴ نیم خط بالا باشد. فرض کنید γ, β, α و δ به ترتیب زاویه بین O_r و O_x و O_y و O_z و O_t باشند. قرار دهید :

$$p = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta$$

$$q = \cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma + \cos^۲\delta$$

ثابت کنید اگر O_r حول نقطه ی O بچرخد، p و q ثابت می مانند.

مسأله ۶ : فرض کنید $S = \{۰,۱,۲,...,۱۹۹۹\}$ و $T = \{۰,۱,۲,...\}$. تمام توابع $f : T \to S$ را بیابید به طوریکه :

(i) $f(s) = s$ برای هر $s \in S$.

(ii) $f(m+n) = f(f(m)+f(n))$ برای $n \in T$ و m.

مسأله ۷ : برای $n = ۱,۲,...$ فرض کنید $\{u_n\}$ دنباله ای باشد که به شکل زیر تعریف می شود :

$$u_۱ = ۱ , u_۲ = ۲, u_{n+۲} = ۳u_{n+۱} - u_n$$

ثابت کنید :

$$u_{n+۲} + u_n \geq ۲ + \frac{u_n^۲ + ۱}{u_n} \quad ,\forall_n$$

مسأله ۸ : فرض کنید مثلث ABC در دایره w محاط شده است. تمام نقاط p در صفحه (ABC) و غیر واقع بر w را بیابید به طوریکه دارای این خاصیت باشند که خطوط PC و PB و PA، w را در C' و B' و A' چنان قطع کنند که $A'B' = A'C'$ و $A'B' \perp A'C'$.

مسأله ۹ : اعداد حقیقی a و b را چنان در نظر بگیرید که $b \neq ۰, a \neq ۰$ و تمام ریشه های معادله ی :

$$ax^۳ - x^۲ + bx - ۱ = ۰$$

حقیقی و مثبت باشند. کوچک ترین مقدار ممکن را برای عبارت زیر بیابید :

$$P = \frac{۵a^۲ - ۳ab + ۲}{a^۲(b-a)}$$

مسأله ۱۰ : فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته روی $[۰,۱]$ باشد بطوریکه :

(i) $f(۰) = f(۱) = ۰$

(ii) $۲f(x) + f(y) = ۳f(\frac{۲x+y}{۳})$ برای همه $x, y \in [۰,۱]$.

ثابت کنید برای $f(x) = ۰ , x \in [۰,۱]$.

مسأله ۱۱ : ضلع قاعده و ارتفاع منشور منتظم قائم شش ضلعی $ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$ به ترتیب برابرند با a و h.

الف) ثابت کنید شش صفحه :

$(AB'F'),(CD'B'),(EF'D'),(D'EC),(F'AE),(B'CA)$

بر یک کره مماسند.

ب) شعاع و مرکز کره را مشخص کنید.

مسأله ۱۲ : برای $n=۱,۲,...$ دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به صورت بازگشتی به شکل زیر تعریف می شوند :

$x_۱=۱, y_۱=۲, x_{n+۱}=۲۲y_n-۱۵x_n, y_{n+۱}=۱۷y_n-۱۲x_n$

الف) ثابت کنید x_n و y_n برای $n=۱,۲,...$ مخالف صفر هستند.

ب) ثابت کنید هر دنباله شامل تعدادی نا متناهی عدد مثبت و نامتناهی عدد منفی است.

ج) برای $n=۱۹۹۹^{۱۹۴۵}$، مشخص کنید آیا x_n و y_n بر ۷ بخش پذیرند یا نه ؟

***

فصل سوم

« مسابقات ریاضی منطقه ای (سال ۱۹۹۹) »

زندگی سراسر حل مسئله است

کارل پوپر، فیلسوف قرن ۲۰

۲- مسابقات ریاضی منطقه ای [سال ۱۹۹۹]

۱- المپیاد ریاضی کشورهای آسیا شرقی

مسأله ۱ : کوچکترین عدد صحیح مثبت n با خاصیت زیر را بیابید :
تصاعدی حسابی از ۱۹۹۹ عدد حقیقی وجود ندارد که شامل دقیقاً n عدد صحیح باشد.

مسأله ۲ : فرض کنید $a_1, a_2, \ldots$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشند که برای هر $i, j = 1, 2, \ldots$ داریم :

$$a_{i+j} \le a_i + a_j$$

ثابت کنید :

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n} \ge a_n$$

برای همه اعداد صحیح n.

مسأله ۳ : فرض کنید w_1 و w_2 دو دایره باشندکه در P و Q متقاطعند. مماس مشترک آن ها که بر P نزدیکتر است، بر w_1 در A و بر w_2 در B مماس است.
مماس بر w_1 در P، w_2 را دوباره در C قطع می کند و امتداد AP ، BC را در R قطع می کند. ثابت کنید دایره محیطی مثلث PQR بر BP و BR مماس است.

مسأله ۴ : تمام زوج های (a, b) از اعداد صحیح را بیابید که اعداد $a^2 + 4b$ و $b^2 + 4a$ هر دو مربع کامل باشند.

مسأله ۵ : فرض کنید S مجموعه ای از $2n+1$ نقطه در صفحه باشند که هیچ سه تای آنها همخط نیستند و هیچ ۴ تای آنها روی یک دایره قرار ندارند. یک دایره، خوب نامیده می شود اگر ۳ تا از این نقاط روی محیطش $n-1$ نقطه در داخل آن و $n-1$ نقطه در خارج آن قرار گرفته باشند. ثابت کنید تعداد دایره های خوب و n، دارای زوجیت یکسانی هستند.

***

۲- مسابقه ریاضی اتریش - لهستان

مسأله ۱ : فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد و $M=\{1,2,...,n\}$. تعداد ۶- تایی های مرتب $(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6)$ را بیابید که در شرایط زیر صدق می کنند :

الف) A_6,A_5,A_4,A_3,A_2,A_1 زیرمجموعه هایی از M هستند. (نه لزوماً متمایز)

ب) هر عضو M به ۰ یا ۳ یا ۶ مجموعه از $A_1,...,A_6$ تعلق دارد.

مسأله ۲ : بزرگترین عدد حقیقی C_1 و کوچکترین عدد حقیقی C_2 را بیابید به طوریکه برای همه اعداد حقیقی مثبت a,b,c,d,e نا مساوی زیر برقرار باشد :

$$C_1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+e}+\frac{e}{e+a}<C_2$$

مسئله ۳ : فرض کنید $n\geq 3$ عددی صحیح باشد. همه n تایی $(f_1,f_2,...,f_n)$ را بیابید که :

$f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i=1,2,,...,n$ توابعی باشند به طوریکه برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ روابط زیر بر قرار باشند :

$$f_1(x)-f_2(x)f_2(y)+f_1(y)=0$$
$$f_2(x^2)-f_3(x)f_3(y)+f_2(y^2)=0$$
$$\vdots$$
$$f_{n-1}(x^{n-1})-f_n(x)f_n(y)+f_{n-1}(y^{n-1})=0$$
$$f_n(x^n)-f_1(x)\ f_1(y)+f_n(y^n)=0$$

مسئله ۴ : خطوط مستقیم ℓ,k و m از نقطه ثابتی درون مثلث ABC چنان رسم شده اند که :

الف) K، خطوط AB و AC را به ترتیب در A_1 و A_2 قطع می کند $(A_1\neq A_2)$ و $PA_1=PA_2$.

ب) ℓ خطوط BC و BA را به ترتیب در B_1 و B_2 قطع می کند $(B_1\neq B_2)$ و $PB_1=PB_2$.

ج) m خطوط CA و CB را به ترتیب در C_1 و C_2 قطع می کند $(C_1\neq C_2)$ و $PC_1=PC_2$.

ثابت کنید خطوط ℓ,k و m با شرایط فوق به طور یکتا مشخص می شوند. نقطه P را چنان بیابید که مثلث های AA_1A_2 , BB_1B_2 و CC_1C_2 مساحت یکسانی داشته باشند و ثابت کنید P با این شرایط یکتاست.

مسأله ۵ : دنباله $\{a_n\}_{n\geq 1}$ از اعداد صحیح در رابطه بازگشتنی زیر صدق می کند :

$$a_{n+1} = a_n^3 + 1999 \quad n = 1, 2, \ldots$$

ثابت کنید حداکثر یک n موجود است که a_n مربع کامل باشد.

مسأله ۶ : تمام اعداد حقیقی $x_1, x_2, \ldots, x_{1998} \geq 0$ را بیابید به طوریکه

$$x_{i+1}^2 + x_{i+1}x_i + x_i^4 = 1$$

برای $i = 0, 1, 2, \ldots, 1998$ و $x_{1999} = x_0$.

مسأله ۷ : همه زوج های (x, y) از اعداد صحیح مثبت را بیابید به طوریکه $x^{x+y} = y^{y-x}$.

مسأله ۸ : فرض کنید خط ℓ داده شده است و نقاط P و Q در یک طرف آن قرار دارند. نقاط M و N روی ℓ قرار دارند و $PM \perp \ell$ و $QN \perp \ell$.

نقطه S بین خطوط PM و QN چنان قرار دارد که $PM = PS$ و $QN = QS$.

عمود منصف های $\overline{SM}$ و $\overline{SN}$ یکدیگر را در R قطع می کنند. فرض کنید T نقطه تقاطع دوم خط RS و دایره محیطی مثلث PQR باشد ثابت کنید $RS = ST$.

مسأله ۹ : بازی یک نفره زیر را در نظر بگیرید.

مجموعه ای متناهی از نقاط مشبکه ای و پاره خطهای انتخاب شده توسط بازیکن، یک موقعیت در این بازی نامیده می شود هرگاه شرایط زیر برقرار باشند :

(i) نقاط انتهایی هر پاره خط منتخب، مشبکه ای باشند.

(ii) هر پاره خط منتخب با یکی از محورهای مختصات، یا خط $y = x$ و یا $y = -x$ موازی باشد.

(iii) هر پاره خط انتخاب شده شامل دقیقاً ۵ نقطه مشبکه ای باشدوتمام این نقاط نیز انتخاب شوند.

(iv) هر دو پاره خط منتخب حداکثر یک نقطه مشترک داشته باشند.

یک حرکت در این بازی عبارتست از انتخاب یک نقطه مشبکه ای جدید و یک پاره خط جدید به طوریکه مجموعه جدید نقاط و پاره خط های منتخب، تشکیل یک موقعیت بدهند. این حکم را ثابت یا رد کنید : یک موقعیت ابتدایی موجود است که برای بازی بی نهایت حرکت وجود دارد.

***

۳- المپیاد ریاضی بالکان

مسأله ۱ : مثلث حادّه الزاویه ABC داده شده است. فرض کنید D وسط کمان کوچک $\overset{\frown}{BC}$ از دایره ی محیطی ABC باشد.

فرض کنید E و F به ترتیب تصویر D تحت بازتاب حول BC و بازتاب نسبت به مرکز دایره ی محیطی باشند و نهایتاً فرض کنید K وسط AE باشد. ثابت کنید :

الف) دایره گذرنده از وسط اضلاع مثلث از نقطه K نیز می گذرد.

ب) خط گذرنده از K و وسط BC بر AF عمود است.

مسأله ۲ : فرض کنید $p > ۲$، عددی اول باشد به طوریکه $۳|p-۲$. قرار دهید :

$$S = \{ y^۲ - x^۳ - ۱ \mid x, y \in Z , ۰ \le x, y \le p-۱\}$$

ثابت کنید حداکثر p عضو از S بر p بخش پذیرند.

مسأله ۳ : فرض کنید ABC یک مثلث حاده الزاویه باشد و فرض کنید N,M و P پای های عمود از مرکز ثقل بر این سه ضلع باشند. ثابت کنید :

$$\frac{۴}{۲۷} < \frac{[MNP]}{[ABC]} \le \frac{۱}{۴}$$

مسأله ۴ : فرض کنید $\{x_n\}_{n\ge۰}$ دنباله ای نا نزولی از اعداد صحیح نامنفی باشد به طوریکه برای هر $k \ge ۰$ تعداد جملات دنباله که کوچکتر از یا مساوی با k هستند، متناهی است. این اعداد را y_k بنامید. ثابت کنید برای همه اعداد صحیح مثبت m و n :

$$\sum_{i=۰}^{n} x_i + \sum_{j=۰}^{m} y_j \ge (n+۱)(m+۱)$$

***

۴- مسابقات چک واسلواکی

مسأله ۱ : برای اعداد صحیح مثبت دلخواه a, b, c ثابت کنید :

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1$$

مسأله ۲ : فرض کنید ABC یک مثلث حاده الزاویه غیر متساوی الساقین با ارتفاع های $\overline{AD}$ و $\overline{BE}$ و $\overline{CF}$ باشد.
فرض کنید ℓ خطی باشد که از D به موازات EF رسم می شود.
قرار دهید $P=\overline{BC}\cap\overline{EF}$ و $Q=\ell\cap\overline{AC}$ و $R=\ell\cap\overline{AB}$. ثابت کنید دایره محیطی مثلث PQR از وسط $\overline{BC}$ می گذرد.

مسأله ۳ : تمام اعداد صحیح k را بیابید به طوریکه یک مجموعه ۱۰- عضوی M از اعداد مثبت موجود باشد که دقیقاً k مثلث مختلف با طول اضلاع برابر با ۳ عضو (نه لزوماً متمایز) از M وجود داشته باشد. (دو مثلث مختلف نامیده می شوند اگر با هم همنهشت نباشند)

مسأله ۴ : تمام اعداد صحیح مثبت k را بیابید که عبارت زیر درست باشد :
اگر $F(x)$ یک چندجمله ای با ضرایب صحیح باشد که در نامساوی $0\leq F(c)\leq k$، برای هر $c\in\{0,1,\dots,k+1\}$ صدق کند، آنگاه :

$$F(0)=F(1)=\dots=F(k+1)$$

مسأله ۵ : تمام توابع $f:(1,\infty)\to \mathbb{R}$ را بیابید به طوریکه :
$f(x)-f(y)=(y-x)f(xy)$ برای هر $x, y>1$.

مسأله ۶ : نشان دهید برای هر عدد صحیح مثبت $n\geq 2$، کوچکترین مضرب مشترک اعداد $1, 2, \dots, n$ بزرگتر از 2^{n-1} است.

***

۵- رقابت های ریاضی مشترک مجارستان- رژیم اشغالگر اسرائیل

دور انفرادی

مسأله ۱ : فرض کنید S مجموعه همه افرازهای $(a_1,a_2,...,a_k)$ از عدد ۲۰۰۰ باشد که :
$1 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_k$ و $a_1 + a_2 + ... + a_k = 2000$. کمترین مقدار $k + a_k$ را در بین تمام این افراز ها به دست آورید.

مسأله ۲ : ادعای زیر را ثابت یا رد کنید :
برای هر عدد صحیح مثبت k، عدد صحیح مثبت $n > 1$ موجود است که ضریب دو جمله ای $\binom{n}{i}$ برای $1 \le i \le n-1$ بر k بخش پذیر است.

مسأله ۳ : فرض کنید ABC یک مثلث غیر متساوی الاضلاع باشد که دایره محاطی داخلی آن بر $\overline{BC}$ و $\overline{CA}, \overline{AB}$ به ترتیب در C_1 ،B_1 و A_1 مماس باشد و فرض کنید H_1 مرکز ارتفاعی مثلث $A_1B_1C_1$ باشد. ثابت کنید H_1 روی خطی که از مرکز دایره محاطی و مرکز دایره محیطی می گذرد، قرار دارد.

مسأله ۴ : برای مجموعه داده شده X، تعریف کنید :

$$X' = \{s - t \mid s, t \in X, s \neq t\}$$

قراردهید $S = \{1, 2, ..., 2000\}$. دو مجموعه ی $A, B \le S$ راچنان در نظر بگیرید که $|A||B| \ge 3999$. ثابت کنید : $A' \cap B' \neq Q$.

مسأله ۵ : برای عددصحیح d داده شده، قرارد هید :

$$S = \{m^2 + dn^2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

فرض کنید : $p, q \in s$ چنان باشند که p اول است و $r = \frac{q}{p}$ یک عدد صحیح. ثابت کنید : $r \in s$.

مسأله ۶ : فرض کنید k و ℓ دو عدد صحیح مثبت باشند و a_{ij} ، $1 \le i \le k$ و $1 \le j \le \ell$ ، $k\ell$ عدد مثبت باشند. ثابت کنید اگر $q \ge p > 0$ آنگاه :

$$\left(\sum_{j=1}^{\ell}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}^{p}\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{\ell} a_{ij}^{q}\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

***

دور تیمی

مسأله ۱ : فرض کنید ABC یک مثلث باشد و p_1 نقطه ای درون مثلث ABC .

الف) ثابت کنید خطوطی که از بازتاب خطوط P_1A, P_1B, P_1C به ترتیب نسبت به نیمساز های زوایای $\angle A, \angle B, \angle C$ به دست می آیند در یک نقطه ی P_2 همرسند.

ب) فرض کنید A_1, B_1, C_1 به ترتیب پای های عمود از P_1 بر ضلع های CA, BC و AB باشند. فرض کنید A_2, B_2 و C_2 نیز به ترتیب پای های عمود از P_2 برضلع های CA, BC و AB باشند. ثابت کنید ۶ نقطه A_1, B_1, C_1 ، A_2, B_2 و C_2 بر یک دایره واقعند.

مسأله ۲ : یک مورچه درون ناحیه ای که با خمی به معادله $x^2 + y^2 + xy = 6$ محدود شده است حرکت می کند. مسیر حرکت او خطوطی راست به موازات محورهای مختصات هستند. او از نقطه ای دلخواه روی خم شروع به حرکت می کند و به سمت درون راه می رود. هنگامی که به مرز می رسد، 90° می چرخد و به مسیرش درون ناحیه ادامه می دهد.

هنگامی که مورچه به نقطه ای از مرزی می رسد که قبلا آنجا بوده یا هنگامی که نمی تواند به طور پیوسته حرکتش را طبق قاعده ی ذکر شده ادامه دهد، حرکت را متوقف می کند. ثابت کنید دیر یا زود و بدون توجه به نقطه آغاز، مورچه می ایستد.

مسأله ۳ : الف) دایره w باشعاع نامعلوم و نقطه P در صفحه داده شده اند. آیا می توان فقط با خط کش، خطی که از P و مرکز دایره می گذرد را رسم کرد؟

ب) دایره w با شعاع نامعلوم در صفحه و نقطه Q روی دایره داده شده اند. خط مماس بر دایره در نقطه Q را فقط با یک خط کش رسم کنید.

ج) دو دایره w_1 و w_2 با شعاع های نامعلوم در صفحه داده شده اند. فقط با یک خط کش خطی که از دو مرکز می گذرد را رسم کنید موقعی که :

(i) دو دایره همدیگر راقطع می کنند.

(ii) دو دایره بر هم مماس هستند و T نقطه تماس، مشخص است.

***

۶- المپیاد ریاضی آمریکای لاتین

مسأله ۱ : تمام اعداد صحیح مثبت n کمتر از ۱۰۰۰ را بیابید به طوریکه $n^{۲}$ برابر باشد با مکعب مجموع ارقام n.

مسأله ۲ : برای دو دایره مفروض $w_{۱}$ و $w_{۲}$، می‌گوییم $w_{۱}$، $w_{۲}$ را نصف می‌کند اگر دو دایره همدیگر را قطع کنند و پاره‌خط واصل بین نقاط تقاطع، قطری از دایره $w_{۲}$ باشد. (اگر $w_{۱}, w_{۲}$ برابر باشند نیز می‌گوییم آنها همدیگر را نصف می‌کنند). دو دایره غیر هم مرکز $w_{۱}$ و $w_{۲}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید بی‌نهایت دایره w موجود است که هر دوی $w_{۱}$ و $w_{۲}$ را نصف می‌کند.

ب) مکان هندسی مرکز w را بیابید.

مسأله ۳ : فرض کنید $p_{۱}, p_{۲}, \dots, p_n$ $(n \geq ۲)$، n نقطه متمایز همخط باشند. دایره‌هایی به شعاع $p_i p_j$ $(۱ \leq i < j \leq n)$ رسم شده‌اند و هر دایره با یکی از k رنگ موجود رنگ‌آمیزی شده است.
نقاطی که به بیش از یک دایره تعلق دارند، رنگ نشده‌اند. یک چنین رنگ‌آمیزی یک (n,k)- پوشش نامیده می‌شود.
برای هر k، تمام اعداد n را بیابید به طوریکه برای هر (n,k)- پوشش، دو مماس خارجی بر دو دایره با رنگ یکسان وجود داشته باشند.

مسأله ۴ : فرض کنید n عددی صحیح و بزرگتر از ۱۰ باشد به طوریکه هر یک از ارقامش به مجموعه $S = \{۱,۳,۷,۹\}$ تعلق داشته باشند. ثابت کنید n یک مقسوم‌علیه اول بزرگتر از یا مساوی با ۱۱ دارد.

مسأله ۵ : فرض کنید ABC یک مثلث حاده الزاویه به دایره محیطی w به مرکز O باشد. فرض کنید $\overline{BE}, \overline{AD}$ و $\overline{CF}$ ارتفاع‌های ABC باشند. فرض کنید خط w, EF را در P و Q قطع کند.

الف) ثابت کنید $AO \perp PQ$.

ب) اگر M وسط $\overline{BC}$ باشد، ثابت کنید :

$$AP^{۲} = ۲AD.OM$$

مسأله ۶ : فرض کنید AB یک پاره‌خط باشد و C نقطه‌ای روی عمود منصف آن $C_۱, C_۲, \ldots, C_n, \ldots$ را مطابق زیر بسازید :

$C_۱ = C$ و برای $n \geq ۱$ اگر C_n روی $\overline{AB}$ نباشد، آنگاه $C_{n+۱}$ مرکز دایره محیطی مثلث ABC_n است. تمام نقاط C را بیابید که دنباله $\{C_n\}_{n\geq ۱}$ برای همه n ها خوش تعریف باشد و دنباله نهایتاً تناوبی شود.

***

۷- مسابقات ریاضی Del Cono Sur

مسأله ۱ : کوچکترین عدد صحیح مثبت n را بیابید به طوری که ۷۳ کسر زیر :

$$\frac{۱۹}{n+۲۱},\frac{۲۰}{n+۲۲},\frac{۲۱}{n+۲۳},\dots,\frac{۹۱}{n+۹۳}$$

همه تحویل ناپذیر باشند.

مسئله ۲: ABC مثلثی با $\angle A = ۹۰^\circ$ است. نقطه‌ی p را روی $\overline{BC}$ رسم کنید به طوریکه اگر Q پای عمود از p بر $\overline{AC}$ باشد، در اینصورت $PQ^۲ = PB.PC$.

مسأله ۳ : یک ردیف از ۱۹۹۹ توپ داریم. هر توپ با قرمز یا آبی رنگ شده است. برای هر توپ مجموع تعداد توپ های قرمز در سمت راست آن و توپ های آبی در سمت چپ آن را زیر آن نوشته‌ایم. دقیقاً سه عدد هست که هر کدام زیر تعداد فردی از توپ ها نوشته شده‌اند. این سه عدد را پیدا کنید.

مسأله ۴ : فرض کنید A عددی با شش رقم باشد که سه تا از آنها که برابر ۲،۱ و ۴ هستند رنگ شده‌اند. ثابت کنید با انجام یکی از دو گزینه‌ی زیر همیشه می‌توان مضربی از ۷ بدست آورد:

۱) سه عدد رنگ شده را حذف کرد.

۲) ترتیب ارقام عدد A را عوض کرد.

مسأله ۵ : مربعی با طول ضلع ۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی از نقاط روی اضلاع این مربع باشد. ثابت کنید رأسی از مربع وجود دارد به طوریکه میانگین حسابی مربع فاصله‌های همه‌ی نقاط S تا آن رأس از $\frac{۳}{۴}$ کمتر نیست.

مسأله ۶ : مورچه‌ای روی یک قرص دایره‌ای به شعاع r در خط مستقیم حرکت می‌کند. این مورچه گاهی می‌ایستد. هر موقع که مورچه می ایستد، 60° می‌پیچد و هر بار در جهت مخالف می‌پیچد. (یعنی اگر در آخرین بار 60° در جهت عقربه‌های ساعت پیچیده باشد در این بار خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌پیچد و برعکس). بیشترین طول مسیری که این مورچه می‌پیماید را بیابید.

***

۸- المپیاد ریاضی شهر سنت پترزبورگ (روسیه)

مسأله ۹-۱ : فرض کنید $x_0 > x_1 > \dots > x_n$ اعداد حقیقی باشند. ثابت کنید :

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq x_n + 2n$$

مسأله ۹-۲ : فرض کنید $f(x) = x^2 + ax + b$ یک چند جمله ای درجه دو با ضرایب صحیح باشد و $|b| \leq 800$. همچنین می دانیم که $f(120)$ عددی اول است. ثابت کنید که $f(x) = 0$ ریشه ی صحیح ندارد.

مسأله ۹-۳ : رئوس یک n- ضلعی منتظم $(n \geq 3)$ با اعداد صحیح متمایز از $\{1, 2, \dots, n\}$ برچسب گذاری شده‌اند. برای هر سه رأس C,B,A که $AB = AC$، برچسب A یا از برچسب های B و C بزرگتر است و یا از هر دوی آن ها کوچکتر است. تمام مقادیر ممکن n را بیابید.

مسأله ۹-۴ : نقاط A_1، B_1 و C_1، روی اضلاع BC و CA و AB از مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = BC)$ قرار دارند. می‌دانیم که $\angle BC_1A_1 = \angle CA_1B_1 = \angle A$. فرض کنید P نقطه‌ی برخورد BB_1 و CC_1 باشد. ثابت کنید AB_1PC_1 محاطی است.

مسأله ۹-۵ : تمام مقادیر ممکن عبارت زیر را بیابید :

$$f(x, y, z) = \left\{ \frac{xyz}{xy + yz + zx} \right\}$$

که x، y و z اعداد صحیح مثبت هستند. در اینجا منظور از $\{x\}$، قسمت اعشاری x است.

مسأله ۹-۶ : فرض کنید $\overline{AL}$ نیمسازی از مثلث ABC باشد دو خط موازی ℓ_1 و ℓ_2 که فاصله‌شان از A با هم مساوی است به ترتیب از نقاط B و C می‌گذرند. نقاط M و N به ترتیب روی ℓ_1 و ℓ_2 طوری انتخاب شده‌اند که خطهای AC و AB به ترتیب خطهای LM و LN را در نقاط میانی $\overline{LM}$ و $\overline{LN}$ قطع می‌کنند. ثابت کنید $LM = LN$.

مسأله ۹-۷ : یک گوشه شکلی است که از حذف کردن یک مربع واحد از یک مربع ۲×۲ به دست می‌آید. ثابت کنید تعداد حالتهایی که می‌توان یک مستطیل ۹۹۹×۹۹۸ را با گوشه‌ها پوشاند به طوریکه دو گوشه می‌توانند یک مستطیل ۳×۲ تشکیل دهند، کمتر یا مساوی تعداد حالت‌هایی است که می‌توان یک مستطیل ۲۰۰۰×۱۹۹۸ را با گوشه‌ها پوشاند به طوریکه هیچ دو گوشه ای تشکیل یک مستطیل ۳×۲ ندهند.

مسأله ۹-۸ : یک n-ضلعی محدب $(n > 3)$ به وسیله‌ی قطرهایش که همدیگر را قطع نمی‌کنند، به مثلث‌هایی تقسیم شده است. ثابت کنید می‌توان $n-1$ تا از قطرها و اضلاع n- ضلعی را طوری انتخاب کرد که هیچ مجموعه‌ای از پاره‌خط های انتخاب شده، تشکیل یک چند ضلعی ندهند و هیچ رأسی دقیقاً در دو پاره خط نباشد.

مسأله ۱۰- ۱ : دنباله‌ی $\{x_n\}$ از اعداد صحیح مثبت با قانون زیر ساخته می‌شود :

$x_1 = 10^{999} + 1$ و برای هر $n \geq 2$، x_n از $11x_{n-1}$ با پاک کردن رقم اول آن به دست می‌آید. آیا این دنباله کراندار است؟

مسأله ۱۰-۲ : ثابت کنید که هر عدد صحیح مثبت کوچکتر از $n!$ را می‌توان به صورت حاصلجمع n یا کمتر از مقسوم علیه های مثبت $n!$ نوشت.

مسأله ۱۰- ۳ : چند عدد ده رقمی داریم که فقط از ارقام ۵،۴،۳ و ۶ تشکیل شده باشند و بر ۶۶۶۶۷ بخش‌پذیر باشند؟

مسأله ۱۰-۴ : اعداد ۱۰۰, ... ,۱,۲ را به صورت زیر در یک جدول ۱۰×۱۰ قرار داده‌ایم : اعداد ۱۰, ... ,۱ به صورت صعودی در ردیف آخر هستند، اعداد ۲۰, ... ,۱۱ در ردیف بعدی از پایین و به طور صعودی قرار دارند و به همین ترتیب. هر کس می‌تواند یک عدد و دو عدد مجاور آن را در جهت‌های مخالف (افقی، عمودی و قطری) انتخاب کند. پس یا به آن عدد دو تا اضافه کند و از اعداد مجاورش یکی کم کند یا از آن عدد ۲ تا کم کند و به اعداد مجاورش یکی اضافه می‌کند.

بعد از تعدادی از این حرکت‌ها دوباره جدول به حالتی بر می‌گردد که دوباره همه ی اعداد ۱۰۰, ... ,۱,۲ در آن ظاهر می‌شوند. ثابت کنید که این اعداد با همان ترتیب اولیه در جدول قرار دارند.

مسأله ۱۰-۵ : چهارضلعی ABCD در درون دایره‌ی w به مرکز O محاط شده است. نیمساز $\angle ABD$ ، $\overline{AD}$ و w را به ترتیب در k و M قطع می‌کند. نیمساز $\angle CBD$ ، $\overline{CD}$ و w را به ترتیب در L و N قطع می‌کند. فرض کنید $MN \parallel KL$. ثابت کنید که دایره‌ی محیطی مثلث MON از نقطه‌ی میانی $\overline{BD}$ می‌گذرد.

مسأله ۱۱-۱ : ۱۵۰ توپ قرمز، ۱۵۰ توپ آبی و ۱۵۰ توپ سبز در یک نمایش، در زیر چادر یک سیرک، معلّق می‌شوند. دقیقاً ۱۳ توپ سبز داخل هر توپ آبی وجود دارد و دقیقاً ۵ توپ آبی و ۱۹ توپ سبز داخل هر توپ قرمز وجود دارد.

(یک توپ را «داخل» توپ دیگر فرض می‌کنیم اگر حتی مستقیماً داخل آن نباشد. مثلا اگر یک توپ سبز داخل یک توپ آبی باشد و این توپ آبی خود داخل یک توپ قرمز باشد در اینصورت توپ سبز نیز داخل توپ قرمز است). ثابت کنید که توپ سبزی وجود دارد که داخل هیچ یک از ۴۴۹ توپ دیگر نیست.

مسأله ۱۱-۲ : $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی حسابی از اعداد صحیح مثبت است. برای هر n، فرض کنید p_n بزرگترین مقسوم‌علیه اول a_n باشد. ثابت کنید دنباله ی $\left\{\frac{a_n}{p_n}\right\}$ بی‌کران است.

مسأله ۱۱-۳ : ۵۰ کارت داریم که اعداد کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ روی هر دو طرف آن ها نوشته شده‌اند (هر عدد دقیقاً یکبار نوشته شده است). کارت‌ها روی میزی چیده شده‌اند به طوریکه مریم فقط روی کارت ها را می‌تواند ببیند. مریم می‌تواند چند کارت را انتخاب کند، آن ها را برگرداند و مجموع ۵۰ عددی که اکنون روی میز هستند را بفهمد. بیشترین مقدار این مجموع که مریم می‌تواند مطمئناً به دست آورد چقدر است؟

مسأله ۱۱-۴ : دو نفر با هم بازی می‌کنند. بازی به اینصورت است که آنها به نوبت روی یک تخته سیاه، مقسوم‌علیه‌های مختلفی از $100!$ را می‌نویسند (غیر از ۱). بازیکنی می‌بازد که بعد از نوبت او بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک همه‌ی اعداد نوشته شده روی تخته سیاه ۱ باشد. کدام بازیکن استراتژی برد دارد؟

مسأله ۱۱-۵ : گراف همبند G، ۵۰۰ رأس دارد که درجه‌ی هر یک ۱،۲ یا ۳ است. یک رنگ‌آمیزی سیاه و سفید رئوس را جالب می‌گوییم اگر بیش از نیمی از رأسها سفید باشند ولی هیچ دو رأس سفیدی به هم متصل نباشند. ثابت کنید می‌توان چند رأس از G را انتخاب کرد به طوریکه در هر رنگ‌آمیزی جالب بیش از نیمی از رئوس انتخاب شده سیاه باشند.

مسأله ۱۱-۶ : سه شعبده باز نمایشی اجرا می‌کنند. آنها به یک تماشاگر بسته‌ای کارت می‌دهند که اعداد ۱،۲، ... ،$2n+1$ $(n > 6)$ روی آن ها نوشته شده است.

تماشاگر یکی از کارت ها را برمی‌دارد و به دلخواه بقیه را به طور مساوی بین شعبده باز اول و دوم تقسیم می‌کند. این دو شعبده باز، بدون اینکه با هم ارتباطی داشته باشند، کارت‌هایشان را می‌بینند و هر کدام یک زوج مرتب از کارت ها انتخاب می‌کنند. سپس هر دو این دو جفت را به شعبده باز سوم می‌دهند. شعبده باز سوم این چهار کارت را می‌بیند و کارتی را که تماشاگر انتخاب کرده، اعلام می‌کند. توضیح دهید این سه شعبده باز چگونه این کار را انجام می‌دهند.

***

فصل چهارم

« پاسخ سوالات مسابقات ریاضی کشورهای مختلف (سال ۱۹۹۹) »

مسائل سرچشمه جوشندگی و حیات ریاضی است.

پاسخ مسابقات ریاضی کشورهای مختلف (سال ۱۹۹۹)

۱- روسیه سفید
المپیاد ملی، دور چهارم

مسأله ۱۰-۱

راه حل : جواب ها عبارتند از : $a=\frac{r}{\pi}, r\in Q$

ابتدا فرض کنید $a=\frac{r}{\pi}$ که $r\in Q$. در اینصورت $r=\frac{s}{t}$ برای $s, t\in Z$ و $t>0$، داریم :

$$f(x+2t\pi)=\left\{\frac{s}{t\pi}(x+2t\pi)+\operatorname{Sin}(x+2t\pi)\right\}=\left\{\frac{s}{t\pi}x+2s+\operatorname{Sin}x\right\}$$
$$=\left\{\frac{s}{t\pi}x+\operatorname{Sin}x\right\}=f(x)$$

بنابراین، f تناوبی با دوره ی تناوب $2\pi t$ است. از طرف دیگر، فرض کنید f تناوبی باشد(یعنی $p>0$ موجود است بطوریکه $f(x)=f(x+p)$، برای هر $x\in IR$). پس برای هر $x\in IR$،

$\{ax+\operatorname{Sin}x\}=\{ax+ap+\operatorname{Sin}(x+p)\}$ و بنابراین $g(x)=ap+\operatorname{Sin}(x+p)-\operatorname{Sin}x$ یک عدد صحیح است. (زیرا $g(x)$ تفاضل دو عدد با قسمت اعشاری یکسان است).

چون g پیوسته است، عدد صحیح k موجود است بطوریکه $g(x)=k$ برای هر $x\in IR$. برای هر $y\in IR$، $n\in IN$، با قرار دادن $x=y, y+p, y+2p, \dots, y+(n-1)p$ در رابطه $g(x)=k$ و جمع کردن n معادله بدست آمده داریم :

$$\operatorname{Sin}(y+np)-\operatorname{Sin}y=n(k-ap)$$

چون قدر مطلق طرف چپ این عبارت کوچکتر یا مساوی با ۲ است، نتیجه می گیریم :

$\operatorname{Sin}(x+p)=\operatorname{Sin}x, k=ap$

برای هر $x \in IR$ و در حالت خاص $\text{Sin}(\frac{\pi}{۲} + p) = \text{Sin}\frac{\pi}{۲} = ۱$. بنابراین $p = ۲m\pi$ برای یک $m \in IN$. پس :

$a = \frac{k}{p} = \frac{k}{۲m\pi} = \frac{r}{\pi}$ که $r = \frac{k}{۲m} \in Q$.

***

مسأله ۱۰-۲

راه حل : فرض کنید $۱ = d_۱ < d_۲ < \ldots < d_k = n$، مقسوم علیه های n باشند، بطوریکه برای هر i : $d_i d_{k+۱-i} = n$.
آنگاه :

$$S = \sum_{i=۱}^{k} d_i = \sum_{i=۱}^{k} \xrightarrow[۲]{d_i + d_{k+۱-i}} \sum_{i=۱}^{k} \sqrt{d_k d_{k+۱-i}} = k\sqrt{n}$$

نامساوی، اکید است. زیرا تساوی برای $\frac{d_۱ + d_k}{۲} > \sqrt{d_۱ d_k}$ برقرار نیست. برای نامساوی سمت راست، فرض کنید $S_۲ = \sum_{i=۱}^{k} {d_i}^۲$.

طبق نامساوی میانگینی توانی :

$$\frac{s}{k} = \sum_{i=۱}^{k} \frac{d_i}{k} \le \sqrt{\frac{\sum {d_i}^۲}{k}} = \sqrt{\frac{s_۲}{k}}$$

بنابراین $S \le \sqrt{ks_۲}$ حال :

$$\frac{s_۲}{n^۲} = \sum_{i=۱}^{k} \frac{{d_i}^۲}{n^۲} = \sum_{i=۱}^{k} \frac{۱}{d_{k+۱-i}^۲} \le \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{j^۲} < \frac{\pi^۲}{۶}$$

[طبق قضیه ای در آنالیز : $\sum_{j=۱}^{\infty} \frac{۱}{j^۲} = \frac{\pi^۲}{۶}$]

چون $d_۱, \ldots, d_k$ اعداد صحیح متمایز بین ۱ و n هستند بنابراین :

$$s \le \sqrt{ks_۲} < \sqrt{\frac{kn^۲\pi^۲}{۶}} < \sqrt{۲kn}$$

***

مسأله ۱۰-۳

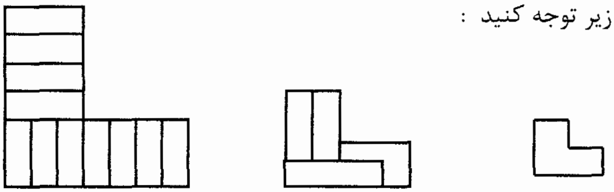
راه حل : الف) حسین باید مربع های خود را در خانه ای که با علامت x در صفحه های زیر مشخص شده است، قرار دهد.

۱	۳	۲	۱	۳	۲	۱
۲	۱	۳	۲	۱	۳	۲
۳	۲	۱	۳	۲	۱	۳
۱	۳	۲	۱	۳	۲	۱
۲	۱	۳	x	۱	۳	۲
۳	۲	۱	۳	۲	۱	۳
۱	۳	۲	۱	۳	۲	۱

۱	۲	۳	۱	۲	۳	۱
۲	۳	۱	۲	۳	۱	۲
۳	۱	۲	۳	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۱	۲	۳	۱
۲	۳	۱	x	۳	۱	۲
۳	۱	۲	۳	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۱	۲	۳	۱

جدول سمت چپ شامل ۱۷ عدد ۱، ۱۵ عدد ۲ و ۱۶ عدد ۳ است. چون هر مستطیل ۱×۳ یک ۱، یک ۲، یک ۳، را می پوشاند گوشه ی مهدی باید یک ۳ و دو ۱ را بپوشاند. پس گوشه ی او باید به شکل باشد. هر گوشه به این شکل یک ۱، یک ۲، یک ۳ را در صفحه ی سمت راست می پوشاند و همینطور هر مستطیل ۱×۳. چون صفحه ی سمت راست نیز شامل ۱۷ عدد ۱، ۱۵ عدد ۲ و ۱۶ عدد ۳ است، مهدی نمی تواند ۴۸ خانه ی باقیمانده را با کاشی های خود بپوشاند.

ب) به شکل های زیر توجه کنید :



شکل اول را می توان طوری چرخاند و در صفحه ی ۷×۷ قرار داد که مربع حسین در جای خالی آن قرار بگیرد، مشابهاً شکل دوم را می توان طوری چرخاند و در صفحه ی ۴×۴ باقی مانده قرار داد که همچنان مربع حسین را نپوشاند. در نهایت گوشه ی آخر را نیز می توان طوری قرار داد که مربع حسین در فضای خالی آن قرار بگیرد.

***

مسأله ۱۰-۴

راه حل اول :

لم : فرض کنید ذوزنقه ی ABCD، (نه لزوماً متساوی الساقین) بر دایره ای به شعاع r محیط شده است. دایره بر ضلع های AB، BC، CD، DA به ترتیب در نقاط P، Q، R و S مماس است. فرض کنید قطر AC دایره را در نقاط K و L قطع کند که K بین A و L است و قرار دهید $m = AP$ و $n = CR$ آنگاه :

$$AK.KC = mn + 2r^2 - \sqrt{(mn+2r^2)^2 - (mn)^2}$$

$$AL.KC = mn + 2r^2 + \sqrt{(mn+2r^2)^2 - (mn)^2}$$

اثبات : بدون کاسته شدن از کلیّت مسئله فرض کنید $AB||CD$ و ذوزنقه را طوری بچرخانید که دو ضلع AB و CD افقی باشند. قرار دهید $t = AK$، $u = KL$ و $v = LC$.

همچنین قرار دهید $\sigma = t + v$ و $\pi = tv$. بنابر قضیه ی قوت نقطه $t(t+u) = m^2$ و $v(v+u) = n^2$. با ضرب این دو تساوی داریم : $\pi(\pi + u\sigma + u^2) = m^2n^2$

فاصله ی افقی A و C از هم $m+n$ و فاصله ی عمودی آن ها $2r$ است.

پس $AC^2 = (m+n)^2 + (2r)^2$ و

$$(m+n)^2 + (2r)^2 = AC^2 = (t+u+v)^2$$

$$m^2 + 2mn + n^2 + 4r^2 = t(t+u) + v(v+u) + 2\pi + u\sigma + u^2$$

$$m^2 + 2mn + n^2 + 4r^2 = m^2 + n^2 + 2\pi + u\sigma + u^2$$

$$2mn + 4r^2 - \pi = \pi + u\sigma + u^2$$

با ضرب دو طرف در π داریم :

$$\pi(2mn + 4r^2 - \pi) = \pi(\pi + u\sigma + u^2) = (mn)^2$$

معادله ی درجه ی ۲ برحسب π را حل می کنیم :

$$\pi = mn + 2r^2 \pm \sqrt{(mn+2r^2)^2 - (mn)^2}$$

حال $m^2n^2 = t(t+u)v(v+u) \geq t^2v^2$ نتیجه می دهد $mn \geq \pi$.

بنابراین : $AK.LC = \pi = mn + 2r^2 - \sqrt{(mn+2r^2)^2 - (mn)^2}$.

همچنین $(AK.AL).(Ck.CL) = m^2n^2$ پس :

$$AL.KC = \frac{m^2n^2}{\pi} = mn + 2r^2 + \sqrt{(mn+2r^2)^2 - (mn)^2}$$

همانند لم فرض کنید $AB||CD$ و دایره ای داده شده بر ضلع های AB، BC، CD و DA به ترتیب در نقاط P، Q، R و S مماس باشد. همچنین قرار دهید $m = AP = PB = AS = BQ$ و $n = DR = RC = DS = CQ$. عمود $\overline{AX}$ را بر خط CD رسم کنید.

آنگاه $AD=m+n$ و $DX=|m-n|$ و $AX=2r$ طبق قضیه ی فیثاغورث برای مثلث ADX داریم :

$$(m+n)^2=(m-n)^2+(2r)^2$$

که نتیجه می دهد $mn=r^2$.

طبق لم داریم $AK.LC=(3-2\sqrt{2})r^2$ و $AL.KC=(3+2\sqrt{2})r^2$ پس :

$$\frac{AL.KC}{AK.LC}=17+12\sqrt{2}$$

راه حل دوم : فرض کنید $A'B'C'D'$ یک مربع با ضلع به طول s باشد و K' و L' را مانند K و L تعریف کنید.

آنگاه : $A'C'=S\sqrt{2}$ و $K'L'=S$ و $A'L'=K'C'=S\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ و $A'K'=L'C'=S\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

بنابراین :

$$\frac{A'L'.K'C'}{A'K'.L'C'}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2}=(\sqrt{2}+1)^4=17+12\sqrt{2}$$

ذوزنقه ی متساوی الساقین دلخواه ABCD و دایره w محاط در آن را در نظر بگیرید و فرض کنید $AB\|CD$.
چون هیچ سه نقطه از A، B، C و D همخط نیستند.

تبدیل افکنشی وجود دارد که ذوزنقه ی ABCD را به متوازی الاضلاع $A'B'C'D'$ می برد. این تبدیل دایره ی w را به مقطع مخروطی w' می برد که بر چهارضلع $A'B'C'D'$ مماس است. قرار دهید $P=BC\cap AD$ و فرض کنید ℓ خط موازی AB باشد که از P می گذرد؛ در اینصورت T خط ℓ را به یک خط در بی نهایت می برد. چون w خط ℓ را قطع نمی کند پس w' یک بیضی است. بنابراین با ترکیب کردن T با یک تبدیل آفین (Affine transformation) (که متوازی الاضلاع را به متوازی الاضلاع می برد) می توانیم فرض کنیم که w' یک دایره است.

فرض کنید W، X، Y، Z به ترتیب نقاط تماس w با اضلاع AB، BC، CD و DA باشند و W', X', Y' و Z' تصویر آن ها تحت T باشند. به دلیل تقارن خط WY از نقطه ی تقاطع خطوط BC و DA می گذرد و خط XZ با خطوط AB وCD موازی است.

پس $W'Y'\|B'C'\|A'D'$ و $X'Z'\|A'B'\|C'D'$. چون w' بر خطوط موازی $A'B'$ و $C'D'$ در W' و Y' مماس است، $\overline{W'Y'}$ قطری از w' است و $W'Y'\perp A'B'$.

بنابراین $B'C'\perp A'B'$ و $A'B'C'D'$ یک مستطیل است. در واقع $A'B'C'D'$ یک مربع است زیرا دایره ی محاطی دارد.

پس در حالتی مشابه با اول راه حل قرار داریم. اگر K' و L' نقاط تقاطع خط $A'C'$ با w' باشند و K' بین A' و L' آنگاه $\frac{A'L'.K'C'}{A'K'.L'C'}=17+12\sqrt{2}$.

حال T، $\{K,L\}=AC\cap w$ را به $\{K',L'\}=A'C'\cap w'$ می برد. (لزوماً ترتیب را حفظ نمی کند). اگر $T(K)=K'$ و $T(L)=L'$ آنگاه داریم :

$$\frac{AL.KC}{AK.LC}=\frac{A'L'.K'C'}{A'K'.L'C'}=17+12\sqrt{2}$$

اگر $T(K)=L'$ و $T(L)=K'$ آنگاه :

$$\frac{AL.KC}{AK.LC}=\frac{۱}{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}<۱$$

که غیر ممکن است زیرا $AL>AK$ و $KC>LC$. پس نتیجه می شود :

$$\frac{AL.KC}{AK.LC}=۱۷+۱۲\sqrt{۲}$$

***

مسأله ۱۰-۵

راه حل : از $۳\angle BAC=۲\angle ACB$ داریم :

$$\angle PAN=\angle NAC=\angle ACP=\angle PCQ=\angle QCD$$

فرض کنید θ مقدار مشترک این زاویه ها باشد. بنابراینACNP و ACDQ چهارضلعی محاطی هستند. پس :

$$\theta=\angle ANP=\angle CQD=\angle CPN$$

مثلث های CQD، NAP و PCN به حالت دو زاویه و ضلع بین با هم همنهشت هستندو بنابراین $CP=CQ$ به دلیل تقارن $AP=QB$. به این ترتیب :

$$[CQD]=[NAP]=[NQB]$$

***

مسأله ۱۰-۶

راه حل : قرار دهید $x=\frac{۳}{۵}(۱۲۵k+۱)$, $y=\frac{۴}{۵}(۱۲۵k+۱)$ و $z=\frac{۶}{۵}(۱۲۵k+۱)$ برای هر عدد صحیح k، این اعداد صحیح نیستند چون ۵ هیچگاه $۱۲۵k+۱$ را نمی شمارد.

از طرفی داریم :

$$۱۲۵x^{۳}=۳^{۳}(۱۲۵k+۱)\equiv ۳^{۳} \pmod{۱۲۵}$$

پس ۱۲۵ , $۱۲۵x^{۳}-۳^{۳}$ را می شمارد و $x^{۳}-(\frac{۳}{۵})^{۳}$ عدد صحیح است. پس $\{x^{۳}\}=\frac{۲۷}{۱۲۵}$ به طور مشابه $\{y^{۳}\}=\frac{۶۴}{۱۲۵}$ و $\{z^{۳}\}=\frac{۲۱۶}{۱۲۵}-۱=\frac{۹۱}{۱۲۵}=\frac{۲۷}{۱۲۵}+\frac{۶۴}{۱۲۵}$. بنابراین $\{z^{۳}\}=\{x^{۳}\}+\{y^{۳}\}$.

***

مسأله ۱۰-۷

راه حل : داریم $n=۱$ و $۲\le m\le ۳$ یا $n=۲$ و $m=۳$. با استفاده از شکل زیر به آسانی می توان دید که این اعداد جواب مسئله هستند.

۱

۲	۱
۴	۳

حال فرض کنید که یک برچسب گذاری مربع های $\{a_{ij}\}$ داده شده است که در شرایط مسأله صدق می کند. طبق فرض $a_{۱۱}\ge ۱$ پس :

$$m-۱\le (m-۱)a_{۱۱}\le (۱+۱)^۲-(۱+۱)=۲$$

یا $m\le ۳$. از طرف دیگر داریم $a_{nn}\le n^۲$ پس :

$$۴n^۲-۲n=(n+n)^۲-(n+n)\le m\,a_{nn}\le mn^۲$$

و

$$m\ge \frac{۴n^۲-۲n}{n^۲}=۴-\frac{۲}{n}$$

پس $۴-\frac{۲}{n}\le m\le ۳$ که ادعای اول را ثابت می کند.

***

مسأله ۱۱-۱

راه حل : برای هر $x\in IR$ قرار دهید $f(x)=Sin(\frac{x\pi}{۲^{۲۰۰۰}})$. وقتی $k=۰$، عبارت داخل پرانتز برابر با ۳- است. با استفاده از فرمول $Sin(۳\theta)=۴Sin^۳\theta-۳Sin\theta$ و با توجه اینکه $f(k)\ne ۰$ برای $۱\le k\le ۲^{۱۹۹۹}$ می توان حاصلضرب فوق را بصورت زیر نوشت :

$$-۳\prod_{k=۱}^{۲^{۱۹۹۹}}\frac{Sin(\frac{۳k\pi}{۲^{۲۰۰۰}})}{Sin(\frac{k\pi}{۲^{۲۰۰۰}})} \qquad \text{یا} \qquad -۳\prod_{k=۱}^{۲^{۱۹۹۹}}\frac{f(۳k)}{f(k)} \qquad (۱)$$

توجه کنید که :

$$\prod_{k=۱}^{۲^{۱۹۹۹}}f(۳k)=\prod_{k=۱}^{\frac{۲^{۱۹۹۹}-۲}{۳}}f(۳k)\cdot\prod_{k=\frac{۲^{۱۹۹۹}+۱}{۳}}^{\frac{۲^{۲۰۰۰}-۱}{۳}}f(۳k)\cdot\prod_{\frac{۲^{۲۰۰۰}+۲}{۳}}^{۲^{۱۹۹۹}}f(۳k)$$

چون $Sin\theta=Sin(\pi-\theta)=-Sin(\pi+\theta)$ داریم :

$$f(x)=f(۲^{۲۰۰۰}-x)=-f(x-۲^{۲۰۰۰})$$

پس با قرار دادن $S_i=\{k|1\le k\le 2^{1999}, k\equiv i \pmod 3\}$ برای $i=0,1,2$ عبارت آخر برابر می شود با :

$$\prod_{k=1}^{\frac{2^{1999}-2}{3}} f(3k)\,.\prod_{k=\frac{2^{1999}+1}{3}}^{\frac{2^{2000}-1}{3}} f(2^{2000}-3k)\,.\prod_{k=\frac{2^{2000}+2}{3}}^{2^{1999}} (-f(3k-2^{2000}))$$

$$=\prod_{k\in s_0} f(k)\,.\prod_{k\in s_1} f(k)\,.\prod_{k\in s_2}(-f(k))=(-1)^{\frac{2^{1999}+1}{3}}\prod_{k=1}^{2^{1999}} f(k)=-\prod_{k=1}^{2^{1999}} f(k)$$

با ترکیب این عبارت با عبارت (۱) نتیجه می شود که حاصلضرب خواسته شده برابر است با : $3=(-1)(-3)$.

***

مسأله ۱۱-۲

راه حل : عدد صحیح مثبت j و روش اول را در نظر بگیرید. اگر $j\equiv 1 \pmod m$، پس $j+mn\equiv 1 \pmod m$ پس هر دوی آن ها حذف می شوند.اگر چنین نباشد فرض کنید بعد از اینکه تمام اعداد همنهشت با ۱ به پیمانه ی m را از دنباله حذف کردیم j، t امین عدد دنباله باشد. n تا از این اعداد حذف شده بین j و $j+mn$ هستند، پس $j+mn$، $(t+mn-n)$–امین عدد باقیمانده در دنباله است. توجه کنید که t و $t+mn-n$ یا هر دو به پیمانه ی n همنهشت با ۱ هستند یا هر دو نیستند.

پس j در دور دوم حذف می شود اگر و تنها اگر $j+mn$ حذف شود. برای دومین بار دنباله ی مشتق شده نیز به طور مشابه می توان استدلال کرد پس در هر کدام از دنباله های مشتق شده، مکان های اعداد حذف شده با دوره ی تناوب mn تکرار می شود. همچنین در میان هر mn عدد پشت سر هم دقیقاً $mn-(m+n-1)$ عدد باقی می ماند. (در دنباله ی مشتق شده ی اول :

$$n+\left(\left\lfloor\frac{mn-n-1}{n}\right\rfloor+1\right)=n+\left(m-1+\left\lfloor\frac{-1}{n}\right\rfloor+1\right)=m+n-1$$

عدد از mn عدد اوّل حذف می شوند، به طور مشابه، $m+n-1$ عدد از mn عدد اول در دومین دنباله ی مشتق شده حذف می شوند.) نتیجه می گیریم که زوج (m,n) خوب است اگر و تنها اگر هرگاه $k\le mn$ در هر دو دنباله باشد، در هر دو در یک مکان ظاهر شود.

الف) برای هر زوج $(2,n)$، اولین دنباله مشتق شده (تا $k=2n$) عبارت است از : $4,6,8,\dots,2n$ اگر k زوج باشد، دومین دنباله مشتق شده عبارت است از :

$3,5,\dots,n-1,n+2,n+4,\dots,2n$ و اگر n فرد باشد دومین دنباله مشتق شده عبارت است از :

$3,5,\dots,n-2,n,n+3,n+5,\dots,2n$. در هر حالت دنباله ی اول و دوم در اعداد زوج بین $n+2$ و $2n$ مشترکند. هر $2n-i$ $(i<\frac{n-1}{2})$، $(i-1-i)$ $(n-1-i)$ این عدد در هر دو لیست است که نشان می دهد $(2,n)$ خوب است.

ب) چنین زوجی موجود است. در واقع ساده ترین زوج ممکن $(m,n)=(۳,۴)$، خوب است. اولین لیست مشتق شده عبارت است از : (تا $k=۱۲$) ۳,۵,۶,۹,۱۱,۱۲ دومین لیست عبارت است از : ۳,۴,۷,۸,۱۱,۱۲. اعداد مشترک در دو لیست ۱۲,۱۱,۳ هستند که همگی در مکان یکسانی از دو لیست قرار دارند.

***

مسأله ۱۱-۳

راه حل :

فرض کنید a_n را به $a_n{}' = \frac{a_n^۲}{a_m} - \frac{n}{m}(\frac{a_m^۲}{a_n} - a_m)$ و a_m را به $a_m{}' = \frac{a_m^۲}{a_n} - \frac{m}{n}(\frac{a_n^۲}{a_m} - a_n)$ تغییر داده ایم.

توجه کنید که :

$$\frac{a_n{}'}{n} + \frac{a_m{}'}{m} = \left[(\frac{۱}{n}.\frac{a_n^۲}{a_m} - \frac{۱}{m}.\frac{a_m^۲}{a_n}) + \frac{a_m}{m}\right] + \left[(\frac{۱}{m}.\frac{a_m^۲}{a_n} - \frac{۱}{n}.\frac{a_n^۲}{a_m}) + \frac{a_n}{n}\right]$$

که برابر است با : $\frac{a_n}{n} + \frac{a_m}{m}$. بنابراین $\sum_{i=۱}^{۱۰۰} \frac{a_i}{i}$ تحت عمل فوق ثابت است. برای مجموعه ی اولیه مقدار این مجموع برابر است با :

$$I_۱ = \sum_{i=۱}^{۹۹} \frac{a_i}{i} + \frac{۱}{۵۰۰}$$

اگر هر کدام از اعداد $\frac{a_۱}{۱}, \frac{a_۲}{۲}, \dots, \frac{a_{۹۹}}{۹۹}$ را بصورت کسرهای تحویل ناپذیر بنویسیم، هیچ کدام از مخرج ها بر ۱۲۵ بخش پذیر نمی شود. از طرفی ۱۲۵، مخرج $\frac{۱}{۵۰۰}$ را می شمارد. بنابراین وقتی $I_۱$ را بصورت کسر تحویل ناپذیر بنویسیم مخرج آن بر ۱۲۵ بخش پذیر است. فرض کنید بتوان مجموعه را به مجموعه ای از اعداد صحیح $b_۱, \dots b_{۱۰۰}$ تبدیل کرد.

آنگاه $I_۲ = \sum_{i=۱}^{۱۰۰} \frac{b_i}{i}$، مخرج هیچکدام از $\frac{b_i}{i}$ ها بر ۱۲۵ بخش پذیر نیست بنابراین وقتی $I_۲$ را بصورت کسر تحویل ناپذیر بنویسیم مخرج آن بر ۱۲۵ بخش پذیر نیست. پس $I_۲ \neq I_۱$ که تناقض است. پس نمی توان از مجموعه ی اولیه به مجموعه ای از اعداد صحیح رسید.

***

مسأله ۱۱-۴

راه حل : فرض کنید دایره بر ضلع های AB، BC، CD و DA به ترتیب در نقاط P، Q، R و S مماس باشد و r شعاع دایره باشد. فرض کنید $w = AS = AP$ ، $x = BP = BQ$ ، $y = CQ = CR$ و $z = DR = DS$. مشابه مسئله ۱۰-۴ داریم : $wz = xy = r^{۲}$ و بنابراین $wxyt = r^{۴}$.

همچنین طبق لم مسئله ۱۰-۴، $AK.LC$ فقط به r و $AP.CR$ بستگی دارد و $BM.ND$ فقط به r و $BP.DR$. متوازی الاضلاع $A'B'C'D'$ را محاط بر دایره ی داده شده رسم کنید و نقاط P',Q',R' و S' را مانند P,Q,R و S تعریف کنید به طوریکه $A'P' = C'R' = \sqrt{wy}$.

نقاط K',L',M' و N' را نیز همانند K,L,M و N درنظر بگیرید. چون $A'P'.C'R' = wy$ بنابر آنچه گفته شد باید داشته باشیم $A'K'.L'C' = AK.LC = ۱۶$ پس $A'K' = L'C' = ۴$. همچنین مانند چهارضلعی $ABCD$ داریم :

$$A'P'.B'P'.C'R'.D'R' = r^{۴} = wxyz$$

پس $B'P'.D'R' = xz$ و $B'M'.N'D' = BM.ND = \frac{۹}{۴}$. بنابراین $B'M' = N'D' = \frac{۳}{۲}$ اگر O مرکز دایره باشد داریم $A'O = ۴ + r$ و $S'O = r$. طبق قضیه فیثاغورث $A'S' = \sqrt{۸r + ۱۶}$ مشابهاً $S'D' = \sqrt{۳r + \frac{۹}{۴}}$. چون $A'S'.S'D' = r^{۲}$ داریم :

$$(۸r + ۱۶)(۳r + \frac{۹}{۴}) = r^{۴}$$

که دارای جواب مثبت $r = ۶$ است و طبق قانون علامت های دکارت جواب مثبت دیگری ندارد.

***

مسأله ۱۱-۵

راه حل : پیدا کردن جواب، معادل با پیدا کردن بزرگترین عدد حقیقی k است که برای هر $a,b,c > ۰$ با $a + b \le c$ داشته باشیم :

$$k\,abc \le a^{۳} + b^{۳} + c^{۳}$$

در ابتدا قرار دهید $b = a$ و $c = ۲a$. پس باید داشته باشیم : $۲ka^{۳} \le ۱۰a^{۳} \Rightarrow k \le ۵$

از طرف دیگر فرض کنید $k = ۵$. آنگاه با قرار دادن $c = a + b + x$ و بسط دادن $a^{۳} + b^{۳} + c^{۳} - ۵abc$ داریم :

$$۲a^{۳} + ۲b^{۳} - ۲a^{۲}b - ۲ab^{۲} + abx + ۳(a^{۲} + b^{۲})x + ۳(a + b)x^{۳} + x^{۳}$$

از نامساوی $(a + b)(a - b)^{۲} \ge ۰$ می دانیم که $۲a^{۳} + ۲b^{۳} - ۲a^{۲}b - ۲ab^{۲} \ge ۰$. بقیه ی جمله ها در عبارت بالا هم همه نامنفی هستند، پس داریم $a^{۳} + b^{۳} + c^{۳} - ۵abc \ge ۰$.

***

مسأله ۱۱-۶

راه حل : جواب ها عبارتند از : $(0,0)$, $(0,-2)$, $(2,4)$ برای زوج (x,y). اگر $x=0$ آنگاه $y=0$ یا -2. اگر $y=0$ آنگاه $x=0$. حال فرض کنید که هر دوی x و y غیر صفر باشند و معادله را به صورت $x^3(x^3+y)=y^2(y+2)$ بنویسید.

ابتدا نشان می دهیم که $(ab,\frac{b^3}{2})$ یا (ab,b^3)، $(x,y)=(ab,2b^3)$ برای a,b صحیح فرض کنید عدد اول P، y را دقیقاً $m>0$ بار بشمارد (یعنی p^m، y را بشمارد ولی P^{m+1} نشمارد) چون $x^6=y^3+2y^2-x^3y$ پس باید P، x را هم بشمارد. مثلاً $n>0$ بار.

فرض کنید $P>2$، آنگاه P طرف راست یعنی $y^2(y+2)$ را دقیقاً $2m$ بار می شمارد. اگر $3n<m$، آنگاه P طرف چپ یعنی $x^3(x^3+y)$ را دقیقاً $6n$ بار می شمارد پس $6n=3m$ که تناقض است. اگر $3n>m$، آنگاه P طرف چپ را دقیقاً $3n+m$ بار می شمارد پس $3n+m=2m$ یا $3n=m$ که تناقض است پس $3n=m$.

حال فرض کنید $P=2$. اگر $m>1$، آنگاه ۲ سمت راست را دقیقاً $2m+1$ بار می شمارد. اگر $3n<m$، آنگاه ۲ سمت چپ را دقیقاً $6n$ بار می شمارد پس $6n=2m+1>2m$ که تناقض است. اگر $3n>m$، آنگاه ۲ سمت چپ را $3n+m$ بار می شمارد پس $3n+m=2m+1$ و $3n=m+1$. همچنین می توایم داشته باشیم $3n=m$.

نشان می دهیم $(ab,\frac{b^3}{2})$ یا (ab,b^3)، $(x,y)=(ab,2b^3)$ برای a و b صحیح. اگر ۲، y را دقیقاً یک بار بشمارد از بحث قبلی ($3n=m$ وقتی $P>2$ و $m>0$) داریم : $y=2b^3$ و $x=ab$ برای a، b صحیح. اگر ۲ y را بیشتر از یک بار بشمارد طبق بحث قبل ($3n=m$ وقتی $P>2$ و $m>0$ و $3n=m$ یا $3n=m+1$ وقتی $P=2$ و $m>1$).

داریم $(x,y)=(ab,b^3)$ یا $(x,y)=(ab,\frac{b^3}{2})$. حال این جواب های ممکن را در معادله قرار می دهیم. در آن صورت داریم :

$$a^6+2a^3=8b^3+8 \text{ ، } a^6+a^3=b^3+2 \text{ یا } 8a^6+4a^3=b^3+4 .$$

در حالت اول اگر $a>1$ آنگاه $(a^2+1)^3>(2b)^3>(a^2)^3$. اگر $a<-2$ آنگاه $(a^2)^3>b^3>(a^2-1)^3$. پس a یکی از مقادیر $-2,-1,0,1$ می تواند باشد که این مقادیر جوابی بدست نمی دهند.

در حالت دوم اگر $a>1$ آنگاه $b^3=a^6+a^3-2$ با کمی محاسبه به $(a^2+1)^3>b^3>(a^2)^3$ می رسیم که تناقض است. اگر $a<-1$ داریم $(a^2)^3>b^3>(a^2-1)^3$ پس a برابر است با -1، 0 و یا 1. $a=-1$ نتیجه می دهد $b^3=-2$ و $a=0$ نتیجه می دهد $x=0$ و $a=1$ نتیجه می دهد $b=0$. در هر صورت ما فرض کرده بودیم که b عدد صحیح است و $x,y\neq 0$، پس این حالت هم جوابی نمی دهد.

در حالت سوم وقتی $a>1$ آنگاه $(2a^2+1)^3>b^3>(2a^2)^3$. وقتی $a<-1$ آنگاه $(2a^2)^3>b^3>(2a^2-1)^3$. پس $a=-1$، 0 یا 1. که برای (a,b) دو مقدار $(-1,0)$ و $(1,2)$ را می دهد.

اما فقط (۱,۲) برای وقتی $x, y \neq 0$ جوابی بدست می دهد یعنی (۲,۴). که این اثبات را کامل می کند.

***

مسأله ۱۱-۷

راه حل : فرض کنید P روی کمان کوچک $\overset{\frown}{AC}$ و Q روی کمان کوچک $\overset{\frown}{BD}$ طوری باشند که $PQ = AB = CD$ و خط PQ، $\overline{AL}$ را در نقطه ی M' و $\overline{DL}$ را در نقطه ی N' قطع کند. نشان می دهیم $\angle ALC = 2\angle M'ON'$.

فرض کنید T_1, T_2 و T_3 به ترتیب نقاط میانی پاره خط های $\overline{AB}$، $\overline{PQ}$ و $\overline{CD}$ باشند. $\overline{CD}$ تصویر $\overline{AB}$ تحت دوران حول O با زاوایه ی $\angle T_1OT_3$ است که برابر است با طول کمان AC و همچنین $\angle T_1OT_3$.

همچنین به دلیل تقارن داریم $\angle T_1OM' = \angle M'OT_2$ و $\angle T_2ON' = \angle N'OT_3$. بنابراین :

$$\angle ALC = \angle T_1OT_3 = \angle T_1OT_2 + \angle T_2OT_3$$
$$= 2(\angle M'OT_2 + \angle T_2ON') = 2\angle M'ON'$$

حال به مسئله ی اصلی باز می گردیم. چون $\angle T_1OT_3 = \angle ALC$ داریم $\angle T_1OL = \frac{1}{2}T_1OT_3 = \frac{1}{2}\angle ALC$ و چون $\angle T_1OL$، $\angle MON = \frac{1}{2}\angle ALC = \angle T_1OL$, M باید روی $\overline{T_1L}$ قرار بگیرد. پس دورانی حول O را در نظر بگیرید که T_1 را به M می برد. این دوران A را به نقطه ای مانند P روی $\overset{\frown}{AC}$ و B را به نقطه ای مانند Q روی $\overset{\frown}{BD}$ می برد.

در اینصورت $\overline{PQ}$ وتری با طول AB است که $\overline{AL}$ را در M و $\overline{PL}$ را در N' قطع می کند، از بحث قبلی می دانیم $\angle ALC = 2\angle MON'$. چون $\angle ALC = 2\angle MON$ باید داشته باشیم $N = N'$ پس طول وتر گذرنده از M و N در حقیقت با AB و CD برابر است که مطلوب مسأله است.

***

سوالات انتخابی از IMO

مسأله ۱

راه حل : سه تابع ممکن است جواب مسأله باشند :

برای هر $n \in Z$ $\quad h(n) = 1$

برای هر $n \in Z$ $\quad h(2n) = 1,\ h(2n+1) = 0$

برای هر $n \in Z$ $\quad h(n) = n+1$

با قراردادن $(x,y)=(0,0)$ در معادله ی تابع به $h(0)^2-2h(0)+1=0$ می رسیم پس $h(0)=1$. با گذاشتن $(x,y)=(1,-1)$ در معادله بدست می آوریم :

$h(0)+h(-1)=h(1)h(-1)+1$ یا $h(-1)(1-h(1))=0$. پس $h(-1)=0$ یا $h(1)=1$. ابتدا فرض کنید $h(1)\neq 1$ و $h(-1)=0$. گذاشتن $(x,y)=(2,-1)$, $(x,y)=(-2,1)$ در معادله می دهد

$h(1)+h(-2)=1$ و $h(-2)=h(-2)h(1)+1$.

با جایگذاری $h(-2)=1-h(1)$ در معادله ی دوم داریم :

$$1-h(1)=(1-h(1))h(1)+1$$

$$h(1)^2-2h(1)=0 \quad , \quad h(1)(h(1)-2)=0$$

که نتیجه می دهد $h(1)=0$ یا $h(1)=2$.

پس ۲ یا ۱ و $h(1)=0$. قرار دادن $y=1$ در معادله ی مربوط به هر یک از این حالات نشان می دهد که h باید یکی از سه تابع معرفی شده باشد. هر یک از این سه تابع هم در معادله ی تابع صدق می کنند.

***

مسأله ۲

راه حل : فرض کنید $(\alpha,\beta)=(a_0+a_1\sqrt[3]{2}+a_2\sqrt[3]{4}, b_0+b_1\sqrt[3]{2}+b_2\sqrt[3]{4})$ جواب داده شده باشد. اگر $\beta=0$، آنگاه $a\alpha^2=0$ که غیر ممکن است چون a و α هر دو باید غیرصفر باشند. پس $\beta\neq 0$ و $\frac{\alpha}{\beta}$ ریشه ی چند جمله ای $at^2+bt+c=0$ است. همچنین $\frac{\alpha}{\beta}$ به شکل $c_0+c_1\sqrt[3]{2}+c_2\sqrt[3]{4}$ است که c_1,c_0 و c_2 گویا هستند. چون $\frac{\alpha}{\beta}$ ریشه ی یک چندجمله ای درجه ۲ با ضرایب گویا است پس با به کاربردن فرمول ریشه های چند جمله ای درجه ۲ می بینیم که $\frac{\alpha}{\beta}$ همچنین باید به شکل $d+e\sqrt{f}$ باشد که f,e,d گویا هستند.

پس $(c_0-d)+c_1\sqrt[3]{2}+c_2\sqrt[3]{4}=e\sqrt{f}$. قرار دهید $c_0'=c_0-d$ پس $(c_0'+c_1'\sqrt[3]{2}+c_2\sqrt[3]{4})^2$ باید یک عدد صحیح باشد. پس از بسط دادن این مربع به عبارتی به شکل $\alpha+\beta\sqrt[3]{2}+\gamma\sqrt[3]{4}$ می رسیم که α، β و γ صحیح هستند. این عبارت یک چندجمله ای درجه ۲

برحسب $\sqrt[3]{2}$ با ضرایب صحیح است. چون x^3-2 روی $Z[x]$ تحویل ناپذیر است. نتیجه می گیریم که $\beta=\gamma=0$.

[مجموعه $\{1,\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\}$ تشکیل پایه ای برای $Z[\sqrt[3]{2}]$ روی Z می دهد. چون نمایش هر عضو برحسب پایه یکتاست $\beta=2=0$] پس $\beta=2(c_2^2+c_0'c_1)=0$ و $\gamma=2c_0'c_2+c_1^2=0$. از معادله ی دوم داریم $(c_0'c_1)^2=-2c_0'^3c_2$ و از اولی داریم $(c_0'c_1)^2=c_2^4$. پس $-2c_0'^3c_2=c_2^4$ که نتیجه می دهد $c_2=0$ یا $c_2=-\sqrt[3]{2}c_0'$ در حالت دوم چون c_2 گویا است پس باز هم باید $c_0'=c_2=0$.

در اینصورت $c_1=0$ و $\frac{\alpha}{\beta}=c_0$ یک عدد گویاست. پس $(x,y)=(\frac{\alpha}{\beta},1)$ یک جواب گویای غیر صفر است.

مسأله ۳

راه حل : بله. فرض کنید $d(n)$ تعداد مقسوم علیه های عدد صحیح مثبت n باشد. حاصلضرب تمام مقسوم علیه های مثبت n برابر است با :

$$\prod_{k|n} k = \sqrt{\prod_{k|n} k \prod_{k|n} \frac{n}{k}} = \sqrt{\prod_{k|n} n} = n^{\frac{d(n)}{۲}}$$

پس شرط داده شده معادل با این است که $N = a^{d(a)} = b^{d(b)}$. چون N یک توان $d(a)$ ام کامل a و یک توان $d(b)$ ام کامل b است پس N همچنین یک توان ℓ ام کامل عمودی مانند t است که $\ell = \ell cm(d(a), d(b))$. پس $a = t^{\frac{\ell}{d(a)}}$ و $b = t^{\frac{\ell}{d(b)}}$ هر دو توان هایی از عدد صحیح t هستند. حال اگر a توان بزرگتری از t نسبت به b باشد پس باید مقسوم علیه های بیشتری از b داشته باشد. در اینصورت $b = t^{\frac{t}{d(b)}} < t^{\frac{t}{d(a)}} = a$ که تناقض است. مشابهاً a نمی تواند توان کوچکتری از t نسبت به b باشد پس باید با هم برابر باشند.

***

مسأله ۴

راه حل : با استفاده از نامساوی میانگین حسابی- هارمونیک یا نامساوی کُشی- شوارتز داریم :

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z} \geq \frac{۹}{x+y+z}$$

برای $x, y, z \geq ۰$. همچنین توجه کنید که $a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + bc + ca$ زیرا این نامساوی معادل است با $\frac{۱}{۲}(a-b)^۲ + \frac{۱}{۲}(b-c)^۲ + \frac{۱}{۲}(c-a)^۲ \geq ۰$. پس :

$$\frac{۱}{۱+ab} + \frac{۱}{۱+bc} + \frac{۱}{۱+ca} \geq \frac{۳}{۳+ab+bc+ca} \geq \frac{۹}{۳+a^۲+b^۲+c^۲} = \frac{۳}{۲}$$

***

مسأله ۵

راه حل : مثلث ها لزوماً همنهشت نیستند. فرض کنید که C و B و A رأس های $T_۱$ باشند که $AB = ۴$ و $BC = ۶$ و $CA = ۹$ و فرض کنید $\angle BCA = k\angle ABC$. سپس فرض کنید F و E و D رأس های مثلث $T_۲$ باشند که $DE = \frac{۸k}{۳}$, $EF = ۴k$ و $FD = ۶k$.

مثلث های ABC و DEF با همین ترتیب رئوس متشابه هستند پس $\angle EFD = \angle BCA = k\angle ABC$ همچنین $EF = kAB$ و $ED = k.BC$. بنابراین این دو مثلث شرایط مسئله را دارند. چون $AB > AC$ داریم $\angle BCA < \angle ABC$ و $k < ۱$. پس $DE = \frac{۸k}{۳} < \frac{۸}{۳} < AB$ و مثلثهای ABC و DEF همنهشت نیستند.

***

مسأله ۶

راه حل اول :

قرار دهید $z_n = \frac{۱}{y_n}$ و توجه کنید که رابطه ی بازگشتی y_n معادل است با :

$$z_{n+۱} = z_n + \sqrt{۱ + z_n^۲}$$

همچنین داریم $z_۲ = \sqrt{۳} = x_۱$. چون x_i و z_i دارای یک رابطه ی بازگشتی هستند. پس داریم $z_n = x_{n-۱}$ برای هر $n > ۱$. پس :

$$x_n y_n = \frac{x_n}{z_n} = \frac{x_n}{x_{n-۱}}$$

چون x_i ها صعودی هستند برای $n > ۱$ داریم $۳x_{n-۱}^۲ \geq ۳x_۱^۲ > ۱$ پس :

$$۴x_{n-۱}^۲ > ۱ + x_{n-۱}^۲ \quad , \quad ۲x_{n-۱} > \sqrt{۱ + x_{n-۱}^۲}$$

و

$$۳x_{n-۱} > x_{n-۱} + \sqrt{۱ + x_{n-۱}^۲} = x_n$$

همچنین $\sqrt{۱ + x_{n-۱}^۲} > x_{n-۱}$ که نتیجه می دهد $x_n > ۲x_{n-۱}$ بنابراین $۲ < x_n y_n = \frac{x_n}{x_{n-۱}} < ۳$.

راه حل دوم :

قرار دهید $x_n = \tan a_n$ برای $۰^\circ < a_n < ۹۰^\circ$ داریم :

$$x_{n+۱} = \tan a_n + \sqrt{۱ + \tan^۲ a_n} = \tan a_n + \mathrm{Sec}\ a_n$$

$$= \frac{۱ + \mathrm{Sin}\ a_n}{\mathrm{Cos}\ a_n} = \tan\left(\frac{۹۰^\circ + a_n}{۲}\right)$$

چون $a_۱ = ۶۰^\circ$ داریم $a_۲ = ۷۵^\circ$، $a_۳ = ۸۲.۵^\circ$ و در حالت کلی $a_n = ۹۰^\circ - \frac{۳۰^\circ}{۲^{n-۱}}$ پس :

$$x_n = \tan\left(۹۰^\circ - \frac{۳۰^\circ}{۲^{n-۱}}\right) = \mathrm{Cot}\left(\frac{۳۰^\circ}{۲^{n-۱}}\right) = \mathrm{Cot}\,\theta_n$$

که $\theta_n = \frac{۳۰^\circ}{۲^{n-۱}}$ با محاسباتی مشابه داریم :

$$y_n = \tan ۲\theta_n = \frac{۲\tan\theta_n}{۱ - \tan^۲\theta_n}$$

که نتیجه می دهد :

$$x_n y_n = \frac{۲}{۱-\tan^{۲}\theta_n}$$

چون $۰^\circ < \theta_n < ۴۵^\circ$ داریم $۰ < \tan^{۲}\theta_n < ۱$ و $x_n y_n > ۲$. برای $n > ۱$ داریم $\theta_n < ۳۰^\circ$ که نتیجه می دهد $\tan^{۲}\theta_n < \frac{۱}{۳}$ و $x_n y_n < ۳$.

نکته : از فرمول های بسته ی x_n و y_n در راه حل دوم می توانیم رابطه ی $y_n = \frac{۱}{x_{n-۱}}$ که در راه اول استفاده شد را ببینیم.

***

مسأله ۷

راه حل اول :

می دانیم فاصله O از خط های AB، BC و CA با هم برابر است همچنین می دانیم که خط AO زاویه ی BAC را نصف می کند. پس $\angle BAO = \angle OAC = \angle ACB$. اگر D را نقطه ی برخورد $\overline{AO}$ و $\overline{BC}$ بگیریم داریم $\angle DAC = \angle ACD$ و بنابراین $DC = AD$.

مثلث های OAC و ODC را در نظر بگیرید. طبق آنچه گفته شد ارتفاع های نظیر رأس O در این دو مثلث با هم برابرند و همچنین ارتفاع های نظیر رأس C آن ها نیز با هم برابرند. پس :

$$\frac{OA}{OD} = \frac{[OAC]}{[ODC]} = \frac{AC}{DC}$$

چون M نقطه ی میانی $\overline{AC}$ است داریم $[OAM]=[OMC]$ و $[PAM]=[PMC]$ و بنابراین $[OAP]=[OPC]$.

پس :

$$\frac{OA}{OD} = \frac{[OAP]}{[ODP]} = \frac{[OPC]}{[ODP]} = \frac{PC}{DP}$$

بنابراین $\frac{AC}{DC} = \frac{OA}{OD} = \frac{PC}{DP}$ و $\frac{AC}{CP} = \frac{DC}{DP} = \frac{AD}{DP}$. طبق قضیه ی نیمساز زاویه $\overline{AP}$ زاویه ی $\angle CAD$ را نصف می کند. پس نتیجه می گیریم که $\angle BAP = \angle BAD + \angle DAP = \angle ACP + \angle PAC = \angle APB$ و بنابراین $BA = BP$ که خواسته ی مسئله است.

راه حل دوم :

فرض کنید R نقطه ی میانی کمان BC (که شامل A نمی شود) از دایره ی محیطی مثلث ABC باشد و I مرکز دایره محاطی مثلث ABC باشد. داریم :

$$\angle RBI = \frac{۱}{۲}(\angle CAB + \angle ABC) = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \angle BRI)$$

پس $RB = RI$ و به طور مشابه $RC = RI$ و R مرکز دایره ی محیطی مثلث BIC است. از طرفی چون $\angle IBO = 90^\circ = \angle ICO$، چهارضلعی IBOC محاطی است و R مرکز دایره ی محیطی BCO هم هست. فرض کنید Q نقطه ی برخورد خط های AO و BC باشد. چون M، O و P همخط هستند با به کار بردن قضیه منلائوس برای مثلث AQC داریم :

$$\frac{AM}{CM}\frac{CP}{QP}\frac{QO}{AO}=1$$

می دانیم : $\frac{AM}{CM}=1$ پس $\frac{CP}{PQ}=\frac{AO}{QO}$ چون R روی $\overline{AO}$ و $\overline{QO}$ قرار دارد داریم :

$$\frac{AO}{QO}=\frac{AR+RO}{QR+RO}=\frac{AR+RC}{CR+RQ}$$

که برابر است با $\frac{AC}{CQ}$، چون مثلث های ARC و CRQ متشابه هستند. همچنین $\frac{AC}{CQ}=\frac{AC}{AQ}$ زیرا داریم $\angle BAC = 2\angle ACB$؛ یعنی $\angle QAC = \angle QCA$ و $CQ = AQ$. بنابراین نشان دادیم که :

$$\frac{CP}{PQ}=\frac{AC}{AQ}$$

طبق قضیه نیمساز زاویه خط AP زاویه ی $\angle QAC$ را نصف می کند که نتیجه می دهد :

$AB = BP$ و $\angle BAp = \frac{3}{2}\angle ACB = \angle BPA$

***

مسأله ۸

راه حل : فرض کنید M نقطه ی میانی کمان $\overset{\frown}{BC}$ باشد شامل A نیست.

$\angle OBM = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \angle BOM$ و بنابراین $MB = MO$.

چون $\angle OBC = \frac{\angle B}{2}$ و $\angle CBO_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B)$، $\angle CBO_1$ قائمه است. چون M روی خط AOO_1 است (نیمساز زاویه $\angle A$) و $MB = MO$ پس $\overline{BM}$ میانه ی وتر مثلث قائم الزاویه ی OBO_1 است. پس M نقطه ی میانی $\overline{OO_1}$ است.

بنابراین مماس بر دایره ی محیطی مثلث ABC در M باید بر خط AM عمود باشد. این مماس همچنین با خط BC موازی است که نتیجه می دهد AM یعنی نیمساز زاویه ی $\angle A$ بر خط BC عمود است. و این تنها وقتی ممکن است که $AB = AC$.

***

مسأله ۹

راه حل :

الف) بله : کافی است صفحه را حول یک محور عمود بر آن به اندازه ی ۹۰° بچرخانیم. مثلاً در صفحه ی xy می توانیم نقطه ی (x,y) را به نقطه ی $(y,-x)$ ببریم.

ب) فرض کنید دو سویی f موجود باشد. فضای سه بعدی را با سه محور x، y و z مشخص می کنیم. هر نقطه ی $P=(x_۰,y_۰,z_۰)$ را نیز به شکل یک بردار از $(۰,۰,۰)$ به $(x_۰,y_۰,z_۰)$ در نظر می گیریم. طبق شرط مسئله :

$$(a-b).(f(a)-f(b))=۰$$

برای هر بردار a و b :

بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض کنید f مبدأ را به مبدأ می برد. در غیراینصورت نگاشت $(p)=f(p)-f(۰)$ هنوز یک دوسویی است و شرط مسئله را دارد. با قرار دادن $b=(۰,۰,۰)$ در معادله ی بالا داریم $a.f(a)=۰$ برای هر a. پس معادله ی بالا به صورت زیر در می آید :

$$a.f(b)+b.f(a)=۰$$

برای هر بردار a، b و c و هر عدد حقیقی m و n داریم :

$$m(a.f(a)+b.f(a))=۰$$
$$n(a.f(c)+c.f(a))=۰$$
$$a.f(mb+nc)+(mb+nc).f(a)=۰$$

با جمع کردن دو معادله ی اول و کم کردن آن از معادله ی سوم داریم :

$$a.(mf(b)+nf(c)-f(mb+nc))=۰$$

چون این معادله برای هر a باید درست باشد داریم :

$$f(mb+nc)=mf(b)+nf(c)$$

بنابراین f خطی است و با اثرش روی بردارهای یکه $i=(۱,۰,۰)$، $j=(۰,۱,۰)$ و $k=(۰,۰,۱)$ مشخص می شود. اگر :

$$f(i)=(a_۱,a_۲,a_۳)\ ,\ f(j)=(b_۱,b_۲,b_۳)\ ,\ f(k)=(c_۱,c_۲,c_۳)$$

آنگاه برای هر بردار x داریم :

$$f(x)=\begin{bmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{bmatrix}x$$

از قرار دادن i، j و k در $f(a).a=۰$ داریم $a_۱=b_۲=c_۳=۰$.

سپس با قرار دادن $(a,b)=(i,j)\ ,\ (j,k)\ ,\ (k,i)$ داریم : $b_۱=-a_۲$ و $c_۲=-b_۳$ و $c_۱=-a_۳$. با قرار دادن $k_۱=c_۲$ و $k_۲=-c_۱$ و $k_۳=b_۱$ داریم :

$$f(k_۱i+k_۲j+k_۳k)=k_۱f(i)+k_۲f(j)+k_۳f(k)=۰$$

چون f یک به یک است و $f(0)=0$ پس $k_1=k_2=k_3=0$. پس $f(x)=0$ برای هر x، که با پوشا بودن f در تناقض است. پس فرض اولیه ما غلط است و چنین دوسویی وجود ندارد.

***

مسأله ۱۰

راه حل اول :

لغتی که ۶- نامتناوب نباشد را ۶- متناوب بنامید. برای $n=1$, $f_{(n)}=2>\frac{3}{2}$. برای اثبات حکم برای $n>1$ کافی است نشان دهیم $f_{(n+1)}>\frac{3}{2}f(n)$.

این نامساوی را با استقرای قوی روی n ثابت می کنیم $f(2)=4>\frac{3}{2}f(1)$. حال فرض کنید $n\geq 3$ و نامساوی برای همه اعداد کوچکتر از n برقرار است. برای هر k کمتر از $\frac{n}{6}$، تعداد لغت های به شکل wcccccc، که w یک لغت ۶- نامتناوب با طول $n-6k$ و c یک لغت با طول k است را می شماریم. تعداد لغت های w و c با این خاصیّت به ترتیب $f_{(n-6k)}$ و 2^k تا است. پس تعداد لغات به این شکل $2^k f_{(n-6k)}$ است. اگر $6|n$، تعداد لغات به شکل cccccc، $2^{\frac{n}{6}}$ تا است. بنابراین اگر قرار دهید $m=\left[\frac{n}{6}\right]$، T، تعداد کل لغات های به این شکل برابر است با :

$$\text{اگر } 6|n\text{،}\quad 2^m+\sum_{k=1}^{m-1}2^k f_{(n-6k)}\quad \text{و اگر } 6\nmid n\text{،}\quad \sum_{k=1}^{m-1}2^k f(n-6k)$$

فرض کنید s مجموعه $2f(n-1)$ لغت به شکل w.s باشد که w یک لغت ۶- نامتناوب با طول $n-1$ و s یک علامت تنهاست. طبق تعریف اگر لغت w در s، ۶- متناوب باشد، هر زیر لغت w به شکل cccccc باید در انتهای w ظاهر شود. بنابراین هر لغت ۶- متناوب در s، حداقل یک بار در T شمرده می شود. چون s،$2f(n-1)$ لغت دارد و حداکثرT تای آن ها ۶- متناوب است. نتیجه می گیریم، حداقل $2f(n-1)-T$، ۶- نامتناوب لغت در s داریم. بنابراین کافی است نشان دهیم $T<\frac{1}{2}f(n-1)$. به کمک فرض استقرا و با استقرا روی j، به سادگی دیده می شود که $(\frac{2}{3})^{j-1}f(n-j)<f(n-1)$ برای هر $j\geq 1$. پس :

$$\sum_{k=1}^{m-1}2^k f(n-6k)<\sum_{k=1}^{m-1}2^k(\frac{2}{3})^{6k-1}f_{(n-1)}=\frac{3}{2}f_{(n-1)}\sum_{k=1}^{m-1}(\frac{128}{729})^k$$

$$<\frac{3}{2}\,\frac{\frac{128}{729}}{1-\frac{128}{729}}f(n-1)=\frac{192}{601}f_{(n-1)}$$

بنابراین اگر $n\nmid ۶$، $T < \frac{۱}{۲} f_{(n-۱)}$. حال فرض کنید $n|۶$. اگر $n = ۶$ داریم $f(n-۱) = ۳۲$، چون تمام لغات به طول ۵، ۶- نامتناوب هستند. بنابراین $\frac{۱}{۶} f_{(n-۱)} > ۲^{\frac{n}{۶}}$. در غیراینصورت $n \geq ۱۲$، بنابراین :

$$\frac{۱}{۶} f(n-۱) > \frac{۱}{۸}(\frac{۳}{۲})^{n-۱} > \frac{۱}{۸}.۲^{\frac{n-۱}{۲}} = ۲^{\frac{n-۷}{۲}} > ۲^{\frac{n}{۶}}$$

در هر کدام از حالت فوق :

$$T < ۲^{\frac{n}{۶}} + \frac{۱۹۲}{۶۰۱} f(n-۱) + \frac{۱}{۶} f(n-۱) + \frac{۱}{۳} f(n-۱) = \frac{۱}{۲} f(n-۱)$$

و این استقرا، بنابراین اثبات را کامل می کند.

راه حل دوم :

لغت $x_۱ x_۲ \dots x_n$، را ۶- شمارا بنامید اگر در شرط های زیر صدق کند : (هر کدام از شروط در مورد اعداد صحیح k ای کاربرد دارد که x_i در آن شرط خوش را تعریف باشد.)

(i) $\{ x_{۵k+۱} x_{۵k+۲} x_{۵k+۳} \,,\, x_{۵k+۶} x_{۵k+۷} x_{۵k+۸} \} \neq \{ bab, aba \}$

(ii) $x_{۵k-۱} \neq x_k$

(iii) $x_{۵k} = x_k$

حال حکم از لم های زیر ثابت می شود.

لم ۱ : هر لغت ۶- شمارا، ۶- نامتناوب است.

اثبات : فرض خلف، فرض کنید لغت ۶- شمارای $x = x_۱ x_۲ \dots x_n$ موجود است که ۶- نامتناوب نیست. از بین تمام لغت های c که cccccc یک زیر لغت x است، فرض کنید c′ لغتی با کمترین طول باشد، فرض کنید $x_m x_{m+۱} \dots x_{m+۶\ell-۱} = c'c'c'c'c'c'$.

اگر $۵|\ell$، قرار دهید $\ell' = \frac{\ell}{۵}, m' = \left\lfloor \frac{m}{۵} \right\rfloor$. طبق شرط (iii) زیر لغت $x_{m'} x_{m'+۱} \dots x_{m'+۶\ell'-۱}$ باید به شکل cccccc باشد که تناقض است. بنابراین، ℓ بر ۵ بخش پذیر نیست. برای هر عدد صحیح k بین ۰, $\ell-۱$,......., $r \in \{۰,۱,۲,۳,۴\}$ موجود است که $m+k+r\ell$ به پیمانه ۵ با ۴ همنهشت باشد. بنابراین طبق شرط (ii) :

$$x_{m+k} = x_{m+k+r\ell} \neq x_{m+k+۱+r\ell} = x_{m+k+۱}$$

و نتیجه می شود cccccc به شکل abab......ab یا baba......ba است که با (i) در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و هر لغت ۶- شمارا، ۶- نامتناوب است.

لم ۲ : برای هر عدد صحیح m، تعداد لغات ۶- شمارا با طول m از $(\frac{۳}{۲})^m$ بیشتر است.

اثبات : فرض کنید α_m تعداد لغت های ۶- شمارا با طول m باشد. همچنین فرض کنید β_m تعداد لغات ۶- شمارایی باشد که به aba (یا به خاطر تقارن به bab) ختم می شوند و فرض کنید γ_m تعداد لغات ۶- شمارا با

طول m باشد که به aba (یا bab) ختم نمی شوند. دقت کنید که برای $۱ \le m \le ۳$, $\alpha_m = ۲^m > (\frac{۳}{۲})^m$. همچنین $\alpha_۴ = ۸ > (\frac{۳}{۲})^۴$. پس کافیست نشان دهیم :

$$\alpha_m > (\frac{۳}{۲})^m \text{ برای } m \ge ۵.$$

محاسبه ای ساده نشان می دهد اگر $t \ge ۱$، $\beta_{۵(t+۱)} = \gamma_{۵t}$، $\gamma_{۵(t+۱)} = ۶(\gamma_{۵t} + \beta_{۵t}) + \gamma_{۵t}$. از ترکیب این دو رابطه، به روابط بازگشتی :

$$\gamma_{۵(t+۲)} = ۷\gamma_{۵(t+۱)} + ۶\gamma_{۵t} \ , \ \beta_{۵(t+۲)} = ۷\beta_{۵(t+۱)} + ۶\beta_{۵t}$$

می رسیم. چون $\alpha_m = \beta_m + \gamma_m$، نتیجه می شود که $\alpha_{۵(t+۲)} = ۷\alpha_{۵(t+۱)} + ۶\alpha_{۵t}$ برای $t \ge ۱$. با محاسبه مستقیم داریم $\alpha_۵ = ۸ > (\frac{۳}{۲})^۵$ و $\alpha_{۱۰} = b^۲ > (\frac{۳}{۲})^{۱۰}$. حال به سادگی از استقرا نتیجه می شود $\alpha_{۵t} > (\frac{۳}{۲})^{۵t}$ برای $t \ge ۱$.

حال دقت کنید که $(\alpha_{۵t+۱}, \alpha_{۵t+۲}, \alpha_{۵t+۳}, \alpha_{۵t+۴}) = (۲\alpha_{۵t}, ۴\alpha_{۵t}, ۸\alpha_{۵t}, ۸\alpha_{۵t})$ برای $t \ge ۱$. از ترکیب این رابطه و $\alpha_{۵t} > (\frac{۳}{۲})^{۵t}$، نتیجه می شود $\alpha_m > (\frac{۳}{۲})^m$ برای هر $m \ge ۵$ و لم ثابت می شود.

توجه : راه حل دیگری مشابه راه حل دوم با به کارگیری شرایط زیر در تعریف ۶-شمارا به جای شرط های (ii),(iii) وجود دارد :

(ii′) $x_{۵k-۱} = a$ اگر و فقط اگر $t_{۲k-۲} = ۰$

(iii′) $x_{۵k} = b$ اگر و فقط اگر $t_{۲k-۱} = ۰$

که $t_۰, t_۱, \dots$ دنباله هستند که با $t_۰ = ۰$ و $t_{۲k} = t_k$ و $t_{۲k+۱} = ۱ - t_{۲k}$ برای $k \ge ۱$ تعریف می شود.

***

مسأله ۱۱

راه حل : فرض کنید $p = ۲$، $a = ۲^s - ۱$, $a_{s-۱} = a_{s-۲} = \dots = a_۰ = ۱$. برای هر b که $۰ \le b \le ۲^s - ۱$، هر کدام از $\binom{a_i}{b_i}$ها در رابطه بالا مساوی با ۱ هستند. بنابراین :

$$\binom{a}{b} \equiv ۱ \pmod{۲}$$

نتیجه می شود که $n+۱$ توانی از ۲ است. زیرا در غیراینصورت اگر فرض کنید :

$s = [\log_۲^n]$، $k = n - (۲^s - ۱) = n - \frac{۲^{s+۱} - ۲}{۲} \le n - \frac{n}{۲} = \frac{n}{۲}$، آنگاه $\binom{n-k}{k} = \binom{۲^s - ۱}{k}$ فرد است، تناقض.

برعکس، فرض کنید $n = ۲^s - ۱$ برای عدد صحیح مثبت s. برای $k = ۱, ۲, \dots, \left[\frac{n}{۲}\right]$ حداقل یک صفر در نمایش دودویی $a = n - k$ وجود دارد (مسلماً صفرهای ضریب پیشرو را نمی شماریم).

چون حداقل یک $\underline{\cdot}$ در بسط دودویی $n-k$، وجود دارد. بنابراین رقم متناظر در بسط دودویی $n=k$ یک است. پس $\binom{a_i}{b_i}$ متناظر صفر است. پس از قضیه لوکاس داریم $\binom{n-k}{n}$ زوج است. بنابراین $n=2^s-1$ برای اعداد صحیح $s\geq 2$.

***

مسأله ۱۲

راه حل : فرض کنید $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n$ یعنی A_1, A_2 را شکست داده و A_3, A_2 را شکست داده و $A_n, A_{n-1}, \dots$ را. فرض کنید $X|Y$ یعنی x و y با هم مساوی کرده اند. ابتدا نشان می دهیم نتیجه دلخواه برای $n=6$ می تواند برقرار باشد. بازیکنان را A,B,C,D,E,F بنامید. فرض کنید :

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow E \Rightarrow A$$
$$F \Rightarrow A, F \Rightarrow B, F \Rightarrow C, F \Rightarrow D, F \Rightarrow E$$

و بقیه مسابقه ها با تساوی پایان یافته است. می توان این مفروضات را به عنوان پنج ضلعی منتظم ABCDEF با مرکز F در نظر گرفت. سه حالت مختلف برای گروه های ۴ نفری وجود دارد : ABCD و ABCF و ABDF. در این سه حالت به ترتیب B (یا C)، A و A بازیکنانی هستند که در مقابل سه نفر دیگر نتایج متفاوتی کسب کرده اند.

یا در حالت دیگر فرض کنید :

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow E \Rightarrow F \Rightarrow A$$
$$B \Rightarrow D \Rightarrow F \Rightarrow B \ , \ C \Rightarrow A \Rightarrow E \Rightarrow C$$
$$A|D \ , \ B|E \ , \ C|F$$

در این حالت نیز سه گروه مختلف چهار نفری داریم : ABCD و ABDE و ABDF. (اگر بازیکنان را روی شش ضلعی منتظم قرار دهیم این گروه ها ذوزنقه ای شکل، مستطیل شکل و لوزی شکل می شوند.) در این سه حالت A، B (یا D) و A (یا D) سه بازیکنی هستند که در برابر بقیه نتایج متفاوتی کسب کرده اند. حال نشان می دهیم برای $n=10$ و در نتیجه $n\geq 10$ نمی توان چنین نتایجی داشت. فرض خلف : فرض کنید بتوان برای $n=10$ نتایج دلخواه را داشت. ابتدا ثابت می کنیم همه ی بازیکنان دقیقاً ۴ بار مساوی کرده اند.

گرافی با n رأس که نمایانگر n بازیکن است رسم کنید. بین دو رأس یک یال قرار دهید، اگر دو بازیکن متناظر با رأس ها با هم مساوی کرده باشند، اگر رأس ۷ از درجه ۳ یا کمتر باشد، در اینصورت تعداد رئوس غیرمجاور آن حداقل ۶ تا است.

طبق قضیه رمزی یا سه تای آن ها دو به دو باهم مجاورند یا دو به دو غیر مجاور. (این سه رأس را X و Y و Z بنامید.) در مجموعه $\{V, X, Y, Z\}$ هیچکدام از بازیکنان دقیقاً یک بار با بقیه مساوی نکرده است که تناقض است.

بنابراین درجه هر رأس حداقل ۴ است. حال ثابت می کنیم درجه هر رأس دقیقاً ۴ است. فرض کنید رأس A با حداقل ۵ رأس F,E,D,C,B مجاور باشد. هیچکدام از این رئوس نمی تواند با دوتا از بقیه مجاور باشد. به عنوان مثال اگر B با C و D مجاور باشد در $\{A,B,C,D\}$ هر کدام حداقل دو بار مساوی کرده اند. اما باید بازیکنی باشد که

دقیقاً یک مساوی دارد. حال در مجموعه $\{B,C,D,E\}$ دو نفر وجود دارند که به تساوی رسیده اند. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید دو نفر B و C باشند.

در گروه $\{C,D,E,F\}$ دو نفر باید با هم مساوی کرده باشند، چون طبق آنچه گفته شد C نمی تواند با D، E یا F مساوی کرده باشد. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید E و F باهم مساوی کرده اند. حال در $\{A,B,C,E\}$، D یکی از B یا C را برده و به دیگری باخته است. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید بـه B باختـه و C را شکست داده است.

در $\{A,D,E,F\}$ نیز می توانیم فرض کنیم که D، E را شکست داده و به F باخته است. حال در $\{A,C,D,E\}$، C و E نمی توانند مساوی کرده باشند، بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید C و E را شکست داده است پس در $\{A,C,E,F\}$ C باید به F باخته باشد.

در هر صورت نتیجه می شود در $\{C,D,E,F\}$ هیچ بازیکنی وجود ندارد که در برابر بقیه نتایج متفاوتی کسب کرده باشد که تناقض است.

حال فرض کنید A؛ E,D,C,B مجاور باشد و بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $B|C$. آنگاه ABC یک مثلث است. برای هر رأس k به جز C,B,A گروه $\{A,B,C,K\}$ را در نظر بگیرید : k بایـد بـا یکـی از B,A یـا C مساوی کرده باشد.

طبق اصل لانه کبوتری یکی از سه بازیکن B,A یا C با حداقل سه رأس k مساوی کرده است یعنـی درجـه اش حداقل ۵ است که غیر ممکن است. نتیجه می شود که n نمی تواند بزرگتر مساوی ۱۰ باشد چون n می تواند برابر با ۶ باشد، بیشترین مقدار n بین ۶ و ۹ است.

***

۲- برزیل

مسأله ۱

راه حل : فرض کنید $R=\overline{AD}\cap\overline{BE}$ و $S=\overline{AC}\cap\overline{BD}$ و $T=\overline{CE}\cap\overline{AD}$.

حال $\Delta PQR \sim \Delta CAD$ زیرا مثلث های متناظر در پنج ضلعی های منتظم QTRPS و ABCDE هستند. چون $\Delta CAD \sim \Delta PAR$ داریم $\Delta PQR \cong \Delta PAR$ بنابراین :

$$[APQD]=\frac{[APQD]}{[ACEBD]}=\frac{۲[APR]+[PQR]+[RQT]}{۵[APR]+[PQR]+۲[RQT]}=\frac{۳[APR]+[RQT]}{۶[APR]+۲[RQT]}=\frac{۱}{۲}$$

❋❋❋

مسأله ۲

راه حل : پاسخ عبارت است از ۶۶. شکل زیر را در نظر بگیرید. خانه های علامت گذاری شده، خانه هایی هستند که حذف نشده اند شکل نشان می دهد که n می تواند ۶۶ باشد :

•	•	•	•						
•				•			•		
•					•			•	
•						•			•
	•							•	•
		•					•		•
			•				•	•	
	•				•	•	•		
		•		•		•		•	
			•	•	•				•

حال نشان می دهیم، n حداقل ۶۶ است. فرض خلف : فرض کنید چنین کاری با $n=۶۵$ ممکن باشد. تعداد خانه های باقیمانده در سطر i ام را با a_i نمایش دهید. $(i=۱,۲,\ldots,۱۰)$. در سطر i ام، $\binom{a_i}{۲}$ زوج از خانه های باقیمانده موجود است.

اگر هیچ ۴ خانه باقیمانده تشکیل گوشه های یک مستطیل را ندهند آنگاه $N=\sum_{i=1}^{10}\binom{a_i}{2}$ نباید از $\binom{10}{2}=45$ بیشتر شود. دقت کنید که برای $\sum_{i=1}^{10} a_i=35$، کمترین مقدار $\sum_{i=1}^{10}\binom{a_i}{2}$ وقتی و فقط وقتی اتفاق می افتد که اختلاف هیچ دو a_i ای بیش از ۱ نباشد. پس :

$$45=\sum_{i=1}^{10}\binom{a_i}{2}\geq 5\binom{4}{2}+5\binom{5}{2}=45$$

یعنی کمترین مقدار موقعی اتفاق می افتد که ۵ تا از a_i ها مساوی با ۴ و بقیه مساوی با ۳ باشند. به راحتی دیده می شود که صرف نظر از جایگشت های سطرها و ستون ها، ۵ سطر اول صفحه باید به شکل زیر باشند. با توجه به شکل می فهمیم که امکان ندارد در سطر دیگری حداقل سه مربع حذف نشده باشد.

•	•	•	•						
•				•	•	•			
	•			•			•	•	
		•			•		•		•
			•			•		•	•

زیرا در اینصورت مستطیلی تشکیل می شود که اضلاع آن موازی با اضلاع صفحه هستند. این یک تناقض است چون هر کدام از ۵ سطر باقیمانده شامل سه مربع حذف نشده است. بنابراین n نمی تواند کمتر از ۶۶ باشد.

***

مسأله ۳

راه حل : فرض کنید $[A]$ نمایانگر مقدار نسبت داده شده به A باشد. شهرهای دو به دو متقاطر را بصورت زیر نامگذاری کنید :

$(Z_1, Z'_1), (Z_2, Z'_2), (Z_3, Z'_3), \dots (Z_n, Z'_n)$

که $[Z_i]-[Z'_i]\geq 0$ برای هر i. چون هر زوجی از شهرها با دنباله ای از جاده ها به هم متصل هستند، باید a و b موجود باشند که Z_a, Z'_b با یک جاده به هم مربوطند. بنابراین $[Z_a]-[Z'_b]\leq 100$ و $[Z_b]-[Z'_a]\leq 100$. از جمع دو رابطه داریم :

$$[Z_a]-[Z'_a]+[Z_b]-[Z'_b]\leq 200$$

بنابراین یا $0\leq[Z_a]-[Z'_a]\leq 100$ یا $0\leq[Z_b]-[Z'_b]\leq 100$ در هر حالت حکم ثابت است.

***

مسأله ۴

راه حل : فرض کنید a_n کوچکترین عدد صحیح باشد که بتوان یک دوره مسابقات بین n تیم فوتبال را در a_n یکشنبه برگزار کرد. برای $n>۱$ باید داشته باشیم $a_n \geq ۲\left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil -۱$. زیرا در غیراینصورت تعداد کل بازی های انجام شده از :

$$(۲\left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil -۲).\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor \leq \frac{(n-۱)^۲}{۲} < \binom{n}{۲}$$

تجاوز نخواهد کرد، که تناقض است. از طرفی $۲\left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil -۱$ روز کافی است. فرض کنید $n=۲t+۱$ یا $n=۲t+۲$.
تیم ها را از ۱ تا n و یکشنبه ها را از ۱ تا $۲t+۱$ نامگذاری کنید. در یکشنبه i ام، فرض کنید در یکشنبه i ام تیم i یا استراحت داشته باشد (اگر n فرد باشد) یا با تیم $۲t+۲$ بازی کند (اگر n زوج باشد) و هر تیم دیگر j، مقابل تیم $n \neq ۲t+۲$ بازی کند به طوریکه $j+k \underset{۲t+۱}{\equiv} ۲i$ هر تیم با بقیه تیم ها در $۲t+۱$ یکشنبه بازی می کند و حکم ثابت می شود.

***

مساله ۵

راه حل : همه زوایا به پیمانه ی ۱۸۰° حساب شده اند. برای راحتی مثلث $A'B'C'$ را سره بنامید اگر C', B', A' به ترتیب روی اضلاع AB، BC، CA باشند و $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ حال مشابه ساختن مثلثی سره با کمترین مساحت است. فرض کنید سره $A'B'C'$ را داریم و $P \neq A'$ محل برخورد دوایر محیطی دو مثلث $AA'C$ و $BB'A'$ است. آنگاه :

$$\begin{aligned}\angle B'PC' &= ۳۶۰^\circ - \angle A'PB' - \angle C'PA' \\ &= ۳۶۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \angle CBA) - (۱۸۰^\circ - \angle BAC) \\ &= ۱۸۰ - \angle ACB\end{aligned}$$

بنابراین P روی دایره محیطی مثلث $CC'B'$ نیز قرار می گیرد. حال :

$$\begin{aligned}\angle PAB &= \angle PC'A' = \angle B'C'A' - \angle B'C'P \\ &= \angle B'CC' - \angle B'CP' = \angle PCA\end{aligned}$$

و به دلیل مشابه داریم :

$$\angle PAB = \angle PC'A' = \angle PCA = \angle PB'C' = PBC$$

نقطه ی یکتای P موجود است که $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ (یکی از نقاط بروکار) و بنابراین P ثابت است.
(یعنی مستقل از انتخاب $A'B'C'$) چون P نقطه متناظر در دو مثلث متشابه ABC، $A'B'C'$ است، داریم :

$$[A'B'C'] = [ABC](\frac{PA'}{PA})^۲$$

بنابراین $[A'B'C']$ کمترین مقدار خود را وقتی اختیار می کند که PA' کمینه باشد و این وقتی اتفاق می افتد که $PA' \perp AB$ (و یا مشابهاً موقعی که $PC' \perp AC, PB' \perp BC$). بنابراین مثلث سره با کمترین مساحت، مثلث پدال $A'B'C'$ از P به مثلث ABC است.

این مثلث در واقع با مثلث تصویر ABC تحت دورانی، زاویه $۹۰^\circ - \theta$ و یک تجانس با نسبت $|\sin\theta|$ است. ABC متشابه است: اگر $\angle PAB = \theta$ زاویه بروکار باشد. این مثلث برای ساخت چنین مثلثی ابتدا دوایر : $\{x|\angle BxA = \angle BCA + \angle CAB\}, \{y|\angle CyB = \angle CAB + \angle ABC\}$ را رسم کنید. فرض کنید $P' \neq B$ نقطه تقاطع دو دایره باشد. داریم : $\angle AP'C = \angle ABC + \angle BCA$ و :

$$\begin{aligned}\angle P'AB &= ۱۸۰^\circ - \angle ABP' - \angle BP'A \\ &= ۱۸۰^\circ - (\angle ABC - \angle P'BC) - (\angle BCA + \angle CAB) = \angle P'BC\end{aligned}$$

و مشابهاً $\angle P'BC = \angle P'CA$. بنابراین $P = P'$، در نهایت عمودهایی از P' بر سه ضلع ABC رسم کنید تا $A'B'C'$ بدست آید، این ساخت $A'B'C'$ را کامل می کند.

***

۳- بلغارستان

المپیاد ملی، دور سوم

مسأله ۱

راه حل : معادله را بصورت زیر می نویسیم :

$$(x-y)(x^۲+xy+y^۲)=z^۲$$

هر مقسوم علیه مشترک $x-y$ و $x^۲+xy+y^۲$ همچنین $z^۲$ و $(x^۲+xy+y^۲)-(x+۲y)(x-y)=۳y^۲$ را می شمارد چون $z^۲$ و $۳y^۳$ طبق فرض نسبت به هم اول هستند، $x-y$ و $x^۲+xy+y^۲$ هم باید نسبت به هم اول باشند. پس $x-y$ و $x^۲+xy+y^۲$ هر دو مربع کامل هستند. قرار دهید $a=\sqrt{x-y}$ داریم :

$$x^۲+xy+y^۲=(a^۲+y)^۲+(a^۲+y)y+y^۲=a^۴+۳a^۲y+۳y^۲$$

و

$$۴(x^۲+xy+y^۲)=(۲a^۲+۳y)^۲+۳y^۲$$

اگر قرار دهیم $m=۲\sqrt{x^۲+xy+y^۲}$ و $n=۲a^۲+۳y$ داریم :

$$m^۲=n^۲+۳y^۲$$

یا

$$(m-n)(m+n)=۳y^۲$$

پس $(m-n,m+n)=(۱,۳y^۲),(y,۳y),(۳,y^۲)$.

در حالت اول $۲n=۳y^۲-۱$ و $۴a^۲=۲n-۶y=۳y^۲-۶y-۱$. پس $a^۲\equiv ۲ \pmod{۳}$ که غیرممکن است.

در حالت دوم $n=y<۲a^۲+۳y=n$ که تناقض است.

در حالت سوم داریم : $۴a^۲=۲n-۶y=y^۲-۶y-۳<(y-۳)^۲$.

وقتی $y\geq ۱۰$ داریم $y^۲-۶y-۳>(y-۴)^۲$، پس باید ۷ یا $y=۲,۳,۵$ باشد.

در این حالت داریم : $a=\dfrac{\sqrt{y^۲-۶y-۳}}{۲}$ که فقط برای $y=۷$ و $a=۱$ حقیقی است. پس $x=y+a^۲=۸$ و $z=۱۳$، پس تنها جواب مسأله عبارت است از : $(x,y,z)=(۸,۷,۱۳)$

***

مسأله ۲

راه حل : این نتیجه در واقع هرگاه ABCD محاطی نباشد برقرار است. ابتدا لم زیر را اثبات می کنیم :

لم : اگر $\overline{XW}$ یک ارتفاع از مثلث XYZ باشد آنگاه :

$$\frac{XW}{YZ} \leq \frac{۱}{۲} \tan\left(\frac{\angle Y + \angle Z}{۲}\right)$$

اثبات : X روی کمانی از یک دایره قرار می گیرد که این کمان با $\angle YXZ = ۱۸۰^\circ - \angle Y - \angle Z$ مشخص می شود. فاصله ی آن تا $\overline{YZ}$ وقتی ماکسیمم می شود که X در مرکز این کمان باشد. که این اتفاق هنگامی رخ می دهد که $\angle Y = \angle Z$ در این حالت :

$$\frac{XW}{YZ} = \frac{۱}{۲} \tan\left(\frac{\angle Y + \angle Z}{۲}\right) \qquad \blacksquare$$

فرض کنید M، N، P وQ به ترتیب AB، BC، CD و DA باشند. همچنین فرض کنید T نقطه ی برخورد $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ باشد. قرار دهید $\alpha = \angle ADB$، $\beta = \angle BAC$، $\gamma = \angle CAD$، $\delta = \angle DBA$.

طبق لم : $MT \leq \frac{۱}{۲} AB.\tan\left(\frac{\beta+\delta}{۲}\right)$ و $QT \leq \frac{۱}{۲} AD.\tan\left(\frac{\alpha+\gamma}{۲}\right)$.

همچنین : $\angle MTQ = ۱۸۰^\circ - \angle QAM = ۱۸۰^\circ - \angle DAB$. بنابراین :

$$۲[MTQ] = MT.QT \ \sin\angle MTQ \leq \frac{۱}{۴} \tan\left(\frac{\alpha+\gamma}{۲}\right) \tan\left(\frac{\beta+\delta}{۲}\right) AB.AD \ \sin\angle DAB$$

چون $\frac{\alpha+\gamma}{۲} + \frac{\beta+\delta}{۲} = ۹۰^\circ$ عبارت آخری برابر است با : $\frac{۱}{۴} AB.AP \ \sin\angle DAB = \frac{۱}{۲}[ABD]$ پس $۲[MTQ] \leq \frac{۱}{۲}[ABD]$.

به همین ترتیب $۲[NTM] \leq \frac{۱}{۲}[BCA]$, $[PTN] \leq \frac{۱}{۲}[CDB]$ و $[QTP] \leq \frac{۱}{۲}[DAC]$. از جمع کردن این چهار نامساوی نتیجه می گیریم که $۲[MNPQ]$ حداکثر برابر است با :

$$\frac{۱}{۲}([ABD]+[CDB]) + \frac{۱}{۲}([BCA]+[DAC]) = [ABCD]$$

***

مسأله ۳

راه حل : برای هر دو رای داور r (رد یا قبول) فرض کنید $\overline{r}$ رای مخالف آن باشد (یعنی اگر قبول = r، رد = $\overline{r}$). همچنین وقتی دو داور به یک نفر رای مشابه می دهند به آن یک توافق می گوئیم. ابتدا ثابت می کنیم هر دو داور حداکثر روی سه نفر توافق دارند.

فرض کنید چنین نباشد. بدون کاستی از کلیت مسئله فرض کنید داوران (که با اعداد نشان داده می شـوند) بـه ۴ نفر اول را (که با حروف نشان داده می شوند) به صورتی که در شکل سمت چپ آمـده رای داده انـد : (a, b, c, d رای هایی مشابه است.)

	A	B	C	D
۱	a	b	c	d
۲	a	b	c	d
۳	a	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{d}$
۴	a	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{d}$
۵	$\bar{a}$	$\bar{b}$	c	d
۶	$\bar{a}$	$\bar{b}$	c	d
۷	$\bar{a}$	b		
۸	$\bar{a}$	b		

	A	B	C	D
۱	a	b	c	d
۲	a	b	c	d
۳	a	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{d}$
۴	a	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{d}$
۵	$\bar{a}$	$\bar{b}$		
۶	$\bar{a}$	$\bar{b}$		
۷	$\bar{a}$	b		
۸	$\bar{a}$	b		

	A	B	C	D
۱	a	b	c	d
۲	a	b	c	d
۳	a	$\bar{b}$		
۴	a	$\bar{b}$		
۵	$\bar{a}$	$\bar{b}$		
۶	$\bar{a}$	$\bar{b}$		
۷	$\bar{a}$	b		
۸	$\bar{a}$	b		

اگر شرایط مسئله را برای A و C اعمال کنیم، داوران ۳ و ۴ هر دو باید به C رای $\bar{c}$ بدهند و به طور مشابه آن ها باید D رای $\bar{d}$ بدهند. پس با اعمال شرایط روی B و C، داوران ۵ و ۶ باید هر دو به C رای c بدهند. و به طور مشابه باید به D رای d بدهند. در اینصورت شرایط مسئله برای C و D برقرار نیست، که تناقض است.

پس هر دو داور روی حداکثر سه نفر توافق دارند. پس حداکثر $۳.\binom{۸}{۲}=۸۴$ توافق در بین داوران وجود دارد. از طرف دیگر برای هر نفر دقیقاً ۴ داور او را قبول و ۴ داور او را رد می کنند که نتیجه می دهد تعداد توافق ها برای هر نفر شرکت کننده برابر است با : $\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۲}=۱۲$. پس تعداد شرکت کنندگان باید حداکثر $\frac{۸۴}{۱۲}=۷$ باشد. همانطور که جدول زیر نشان می دهد (۱ یعنی قبول و ۰ یعنی رد) مسابقه با ۷ شرکت کنندگان هم ممکن است :

	A	B	C	D	E	F	G
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰
۳	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰
۴	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱
۵	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۶	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰
۷	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰
۸	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱

***

مسأله ۴

راه حل : وقتی که $y^۲+۳y>۰$ آنگاه $(y+۱)^۳>x^۳>y^۳$. پس باید $y^۲+۳y\le۰$ و یا $y=-۳,-۲,-۱$ و ۰ که جواب های $(x,y)=(۱,۰)$ و $(۱,-۲)$ و $(-۲,-۳)$ را می دهد.

مسأله ۵

راه حل : فرض کنید دایره محاطی ABD در نقطه ی $T_۱$ بر $\overline{AD}$ مماس باشد و دایره محاطی مثلث ACD در نقطه $T_۲$ بر $\overline{AD}$ مماس باشد.

آنگاه : $DT_۱=\frac{۱}{۲}(DA+DB-AB)$ و $DT_۲=(\frac{۱}{۲}DA+DC-AC)$. در ابتدا فرض کنید بتوان دایره ای را درون $AB_۱DC_۱$ محاط کرد و فرض کنید این دایره بر ضلع های $AB_۱, B_۱D, DC_۱$ و $C_۱A$ به ترتیب در نقاط E, F, G و H مماس باشد.

با استفاده از برابری مماس ها داریم :

$$AB - BD = (AH + HB) - (BF - DF)$$
$$= (AH + BF) - (BF - DF) = AH + DF$$

و مشابهاً $AC - CD = AE + DG$. همچنین از برابری مما س ها $AH + DF = AE + DG$ که نتیجه می دهد $AB - BD = AC - CD$ و بنابراین $DA + DB - AB = DA + DC - AC$. پس $DT_1 = DT_2$. $T_1 = T_2$ و دو دایره ی محاطی بر هم مماس هستند.

حال فرض کنید دو دایره ی محاطی بر هم مماس باشند. آنگاه $DA + DB - AB = DA + DC - AC$. فرض کنید w دایره ی محاطی ABB_1 باشد و D' نقطه ی روی $\overline{BB_1}$ باشد (غیر از B_1) به طوریکه خط CD' بر w مماس باشد.

برهان خلف : فرض کنید $D \neq D'$. از پاراگراف بالا می دانیم که دایره های محاطی مثلث های ABD' و ACD' برهم مماس هستند پس $D'A + D'B - AB = D'A + D'C - AC$.

چون $DB - AB = DC - AC$ و $D'B - AB = D'C - AC$ داریم $DB - D'B = DC - D'C$. پس $DD' = |DB - D'B| = |DC - D'C|$. در اینصورت نامساوی مثلث در مثلث $DD'C$ نقض می شود که تناقض است و این اثبات را کامل می کند.

***

مسأله ۶

راه حل : از روی فرض مسئله می دانیم که هر نقطه درون یا روی مثلث در درون یا روی یکی از ۶ دایره قرار می گیرد. تعریف کنید $R = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$.

مثلث را طوری بچرخانید که B در سمت چپ C باشد و A بالای ضلع $\overline{BC}$ باشد. نقطه ی W را روی $\overline{AB}$ قرار دهید چنانکه $WA = R$ و سپس نقطه ی x را دقیقاً زیر W چنان بگیرید که $WX = R$. در مثلث WXB: $WB = 1 - R = \sqrt{3}R$ و $\angle BWX = 30^\circ$ که نتیجه می دهد $YZ = ZC = R$. در مثلث AWY, $\angle A = 60^\circ$, و $AW = AY = R$ که نتیجه می دهد $WY = R$. که این خود می دهد $XZ = R$ و $WX = YZ = R\sqrt{2}$.

حال اگر مثلث با ۶ دایره ی همنهشت با شعاع r پوشیده شود، هر یک از نقاط Z, Y, X, W, C, B, A درون یا روی یک دایره قرار می گیرند پس دو نقطه از این نقاط در داخل یک دایره هستند.

فاصله ی هر دو نقطه از این نقاط حداقل $R \leq 2r$ است پس : $r \geq \frac{\sqrt{3}}{10}$

***

المپیاد ملی
دور چهارم

مسأله ۱

راه حل : فرض کنید c,b,a ابعاد مکعب مستطیل باشند این اعداد هر کدام نباید از ۳ کوچکتر باشند چون در این صورت هر مکعب واحد یک وجه سبز رنگ دارد.
شرط مسأله معادل است با :

$$۳(a-۲)(b-۲)(c-۲)=abc$$

یا

$$۳=\frac{a}{a-۲}.\frac{b}{b-۲}.\frac{c}{c-۲}$$

اگر همه ی ابعاد بزرگتر از یا مساوی با ۷ باشند داریم :

$$\frac{a}{a-۲}.\frac{b}{b-۲}.\frac{c}{c-۲}\le(\frac{۷}{۵})^۳=\frac{۳۴۳}{۱۲۵}<۳$$

که تناقض است. پس حتماً یکی از b,a یا c مثلاً a برابر است با ۳، ۴، ۵ یا ۶. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می کنیم $b\le c$.

اگر $a=۳$ داریم $bc=(b-۲)(c-۲)$ که غیر ممکن است.

اگر $a=۴$ داریم : $(b-۶)(c-۶)=۲۴$. پس $(b,c)=(۷,۳۰),(۸,۱۸),(۹,۱۴)$ یا $(۱۰,۱۲)$.

وقتی $a=۵$ داریم : $(۲b-۹)(۲c-۹)=۴۵$. پس $(b,c)=(۵,۲۷),(۶,۱۲)$ یا $(۷,۹)$.

بالاخره اگر $a=۶$ داریم : $(b-۴)(c-۴)=۸$. پس $(b,c)=(۵,۱۲)$ یا $(۶,۸)$.

بنابراین ابعاد مکعب مستطیل باید یکی از حالات زیر باشد :

$۴\times۷\times۳۰,۴\times۸\times۱۸,۴\times۹\times۱۴,۴\times۱۰\times۱۲,۵\times۵\times۲۷,۵\times۶\times۱۲,۵\times۷\times۹$ یا $۶\times۶\times۸$

***

مسأله ۲

راه حل : ابتدا توجه کنید که دنباله ی $a_n=۲n-۲$ در رابطه بازگشتی صدق می کند. با قرار دادن $b_n=a_n-(۲n-۲)$ رابطه ی زیر را داریم :

$$(n-۱)b_{n+۱}=(n+۱)b_n$$

برای $n \geq ۲$، داریم :

$$.b_n = b_۲\prod_{k=۲}^{n-۱}\frac{k+۱}{k-۱} = b_۲\ ,\ \frac{\prod_{k=۳}^{n} k}{\prod_{k=۱}^{n-۲} k} = \frac{n(n-۱)}{۲}b_۲$$

بنابراین وقتی $n \geq ۲$ جواب های رابطه ی بازگشتی اولیه بصورت :

$$a_n = ۲(n-۱) + \frac{n(n-۱)}{۲}c$$

برای c ثابت با قرار دادن $n = ۲$ در معادله داریم که $c = a_۲ - ۲$ یک عدد صحیح است. حال چون $۲۰۰۰ | a_{۱۹۹۹}$ داریم :

$$۲(۱۹۹۹-۱) + \frac{۱۹۹۹.۱۹۹۸}{۲}.c \equiv ۰ \rightarrow -۴ + ۱۰۰۱c \equiv ۰ \rightarrow c \equiv ۴ \pmod{۲۰۰۰}$$

در اینصورت ۲۰۰۰ دقیقاً در صورتی a_n را می شمارد که :

$$۲(n-۱) + ۲n(n-۱) \equiv ۰ \pmod{۲۰۰۰} \Leftrightarrow (n-۱)(n+۱) \equiv ۰ \pmod{۱۰۰۰}$$

$(n-۱)(n+۱)$ بر ۸ بخش پذیر است اگر و فقط اگر n فرد باشد و بر ۱۲۵ بخش پذیر است دقیقاً وقتی که یکی از $n-۱$ یا $n+۱$ بر ۱۲۵ بخش پذیر باشند. کوچکترین $n \geq ۲$ که در این شرایط صدق می کند $n = ۲۴۹$ است.

***

مسأله ۳

راه حل : مثلث را ABC بنامید. فرض کنید r، R و k به ترتیب شعاع دایره ی محاطی، شعاع دایره ی محیطی و مساحت مثلث باشند قرار دهید $c = AB, b = CA, a = BC$ و همچنین قرار دهید :

$$c = p_۳\sqrt{q_۳}\ ,\ b = p_۲\sqrt{q_۲}\ ,\ a = p_۱\sqrt{q_۱}$$

که p_i و q_i اعداد صحیح مثبت هستند و q_i خالی از مربع است.

طبق قضیه پیک (Pick's Theorem) $(k = I + \frac{۱}{۲}B - ۱)$، k گویا است. همینطور $R = \frac{abc}{۴k}$ و $r = \frac{۲k}{a+b+c}$ گویا هستند. پس $\frac{R}{r} = \frac{abc(a+b+c)}{۸k^۲}$ گویا است. اگر و تنها اگر $abc(a+b+c) = a^۲bc + ab^۲c + abc^۲$ گویا باشد.

فرض کنید این مقدار برابر m باشد و فرض کنید m گویا باشد، داریم :

$a^۲bc = m_۱\sqrt{q_۲q_۳}$, $ab^۲c = m_۲\sqrt{q_۳q_۱}$ و $abc^۲ = m_۳\sqrt{q_۱q_۲}$ برای اعداد صحیح مثبت $m_۱, m_۲$ و $m_۳$. پس $m_۱\sqrt{q_۲q_۳} + m_۲\sqrt{q_۳q_۱} = m - m_۳\sqrt{q_۱q_۲}$. اگر دو طرف را به توان ۲ برسانیم داریم :

$$m_۱^۲q_۲q_۳ + m_۲^۲q_۳q_۱ + ۲m_۱m_۲q_۳\sqrt{q_۱q_۲} = m^۲ + m_۳^۲ - ۲mm_۳\sqrt{q_۱q_۲}$$

اگر $\sqrt{q_۱q_۲}$ گویا نباشد باید ضریبش در دو طرف معادله با هم برابر باشد غیر ممکن است زیرا $۲m_۱m_۲q_۳$ مثبت است در حالی که $-۲mm_۳$ منفی است. بنابراین $\sqrt{q_۱q_۲}$ گویاست. چون $q_۱$ و $q_۲$ خالی از مربع هستند، این فقط زمانی ممکن است که $q_۱ = q_۲$. به همین ترتیب $q_۲ = q_۳$.

بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $BC = \sqrt{n}$ به طوریکه $q_۱ = q_۲ = q_۳ = n$ و $P_۱ = ۱$. همچنین فرض کنید که A در $(۰,۰)$، B در (w,x) و C در (y,z) قرار دارند. طبق نامساوی مثلث باید داشته باشیم $P_۲ = P_۳$ پس :

$$w^۲ + x^۲ = y^۲ + z^۲ = P_۲^۲ n$$

$$(w-y)^۲ + (x-z)^۲ = n$$

توجه کنید که :

$$n = (w-y)^۲ + (x-z)^۲ \equiv w^۲ + x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲P_۲^۲ n \equiv ۰ \pmod{۲}$$

پس n زوج است، پس w و x هر دو زوج یا هر دو فرد هستند همینطور y و z. بنابراین x و y و z باید هر سه زوجیت یکسان داشته باشند چون $w^۲ + x^۲ \equiv y^۲ + z^۲ \pmod{۴}$.

در اینصورت $n = (w-y)^۲ + (x+z)^۲ \equiv ۰ \pmod{۴}$ که با فرض خالی بودن از مربع بودن n در تناقض است. بنابراین فرض اولیه ی ما غلط بوده است و نسبت شعاع دایره ی محیطی به شعاع دایره ی محاطی یک عدد گنگ است.

نکته : بدون شرط خالی از مربع بودن n، این نسبت می تواند گویا باشد، به عنوان مثال نقاط $(i, ۲j-i)$ شبکه ای از نقطه ها به فاصله ی $\sqrt{۲}$ را از هم تشکیل می دهند. در این شبکه می توانیم مثلث قائم الزاویه با اضلاع $۳\sqrt{۲}$، $۴\sqrt{۲}$ و $۵\sqrt{۲}$ پیدا کنیم با انتخاب نقاط $(۰,۰), (۳,۳)$ و $(۱,-۷)$. آنگاه $q_۱ = q_۲ = q_۳$ و نسبت گویا است.

***

مسأله ۴

راه حل : یک رشته ی دودویی، رشته ای متناهی از ارقام ۰ و ۱ است. یک رشته دودویی را (ممکن است با ۰ شروع شود) درست بنامید اگر شامل هیچ سه رقم مساوی متوالی نباشد. فرض کنید a_n تعداد رشته های n، رقمی درست باشد و S_n تعداد رشته های درستی باشد که با دو رقم مساوی شروع می شوند و d_n تعداد رشته های درستی باشد که با دو رقم متفاوت شروع می شوند.

روشن است که $a_n = S_n + d_n$ برای هر n. یک رشته ی $(n+۲)$رقمی که با ۰۰ شروع می شود درست است اگر و تنها اگر n رقم آخر آن تشکیل یک رشته ی درست بدهند که با ۱ شروع می شود.

مشابهاً یک رشته ی $(n+۲)$- که با ۱۱ شروع می شود درست است اگر وتنها اگر n رقم آخر آن یک دنباله ی درست تشکیل دهند که با ۰ شروع می شود. پس : $S_{n+۲} = a_n = S_n + d_n$.

یک رشته ی $(n+۲)$ رقمی که با ۰۱ شروع می شود درست است اگر وتنها اگر n رقم آخر آن یک رشته ی درست را تشکیل دهند که با ۰۰، ۰۱، ۱۰، شروع می شود. مشابهاً یک رشته ی $(n+۲)$رقمی که با ۱۰ شروع می شود درست است اگر وتنها اگر n رقم آخر آن یک رشته ی درست را تشکیل دهند که با ۱۱، ۰۱، یا ۱۰ شروع می شود. پس : $d_{n+۲} = S_n + ۲d_n$ با حل این معادلات بازگشتی داریم :

$$S_{n+۴} = ۳S_{n+۲} - S_n \quad و \quad d_{n+۴} = ۳d_{n+۲} - d_n$$

با جمع این دو داریم :

$$a_{n+۴} = ۳a_{n+۲} - a_n$$

بنابراین می توانیم مقدارهای اولیه a_n را حساب کنیم و سپس با استفاده از رابطه ی بازگشتی سایر مقادیر را نیز بیابیم :

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
a_n	۲	۴	۶	۱۰	۱۶	۲۶	۴۲	۶۸	۱۱۰	۱۷۸

حال از a_n رشته ی درست n- رقمی فقط نیمی از آن ها با ۱ شروع می شوند. پس فقط نیمی از آن ها نمایش دودویی اعداد مثبت هستند و دقیقاً : $\frac{۱}{۲}(a_۱ + a_۲ + ... + a_{۱۰}) = ۲۳۱$ عدد بین ۱ و ۱۰۲۳ خاصیت خواسته شده را دارند. با کنار گذاشتن ۱، ۲، و ۳، جواب مسئله عبارت است از : ۲۲۸.

***

مسأله ۵

راه حل : فرض کنید H و $H_۱$ به ترتیب مرکز ارتفاعیه مثلث ABC و $A_۱B_۱C_۱$ باشند و O, O_A, O_B و O_C به ترتیب مراکز دایره های محیطی مثلث های $ABC, A_۱BC, AB_۱C$ و $ABC_۱$ باشند.

در ابتدا توجه کنید که $\angle BA_۱C = \angle C_۱A_۱B_۱ = \angle CAB = ۱۸۰^\circ - \angle CHB$ که نشان می دهد $BA_۱CH$ یک چهارضلعی محاطی است. از طرفی :

$$O_AA_۱ = \frac{BC}{۲\mathrm{Sin}\,\angle BA_۱C} = \frac{CB}{۲\mathrm{Sin}\,\angle CAB} = OA$$

پس دایره های ABC و $BA_۱CH$ دارای شعاع برابر هستند. مشابهاً $CB_۱AH$ و $AC_۱BH$ محاطی با شعاع دایره محیطی OA هستند. بنابراین :

$$\angle HBC_۱ = ۱۸۰^\circ - \angle C_۱AH = \angle HAB_۱ = ۱۸۰^\circ - \angle B_۱CH = \angle HCA_۱$$

پس زوایای $\angle HO_CC_۱, \angle HO_AA_۱$ و $\angle HO_BB_۱$ نیز باهم برابر هستند. فرض کنید $\angle(\vec{r_۱}, \vec{r_۲})$ زاویه ی بین نیم خط های $\vec{r_۱}, \vec{r_۲}$ باشند. چون $O_AA = O_AB = HB = HC$ چهارضلعی BO_ACH یک لوزی پس یک متوازی الاضلاع است.

در اینصورت :

$$\begin{aligned}\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{HO_A}) &= \angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})+\angle(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{HO_A})\\ &= ۲\angle ACB+\angle(\overrightarrow{CO_A},\overrightarrow{HO_A})\\ &= ۲\angle ACB+\angle CO_AH\\ &= ۲\angle ACB+۲\angle CBH\\ &= ۲\angle ACB+۲(۹۰^\circ-\angle ACB)=۱۸۰^\circ\end{aligned}$$

مشابهاً، $\angle(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{HO_B})=\angle(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{HO_C})=۱۸۰^\circ$.

با ترکیب کردن این نتیجه با $\angle HO_AA_۱=\angle HO_BB_۱=\angle HO_CC_۱$، داریم :

$$\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O_AA_۱})=\angle(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O_BB_۱})=\angle(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{O_CC_۱})$$

فرض کنید θ مقدار مشترک این زاویه ها باشد. در اینجا از اعداد مختلط با مبداء O استفاده می کنیم. فرض کنید P عدد مختلط متناظر با نقطه ی P باشد.

چون HBO_AC متوازی الاضلاع است داریم $O_A=b+c$ و همچنین $a_۱=b+c+xa$ که $x=\mathrm{Cis}\,\theta$. همچنین داریم $b_۱=c+a+xb$ و $c_۱=a+b+xc$ این رابطه ها را می توانیم بصورت زیر بنویسیم :

$$\begin{aligned}a_۱&=a+b+c+(x-۱)a\\ b_۱&=a+b+c+(x-۱)b\\ c_۱&=a+b+c+(x-۱)c\end{aligned}$$

بنابراین نگاشتی که Z را به $a+b+c+(x-۱)Z=h+(x-۱)Z$ می برد، مثلث را به مثلث می برد. بنابراین این نگاشت نقطه ی H را به $H_۱$ می برد پس :

$h_۱=h+(x-۱)h=xh$ و $OH_۱=|h_۱|=|x||h_۱|=|h|=OH$ که خواسته ی مسأله است.

***

مسأله ۶

راه حل : داریم : $(m-n)^۳+(m+n)^۳=۲m^۳+۶mn^۲$. حال فرض کنید که به دنبال یک جواب کلی به فرم زیر هستیم :

$$(x,y,z,t)=(a-b,a+b,\frac{c}{۲}-\frac{d}{۲},\frac{c}{۲}+\frac{d}{۲})$$

برای اعداد صحیح a، b و اعداد صحیح فرد c و d. یک جواب ساده برای این معادله $(x,y,z,t)=(۱۰,۱۰,-۱,۰)$ است پس قرار می دهیم $a=۱۰$ و $c=-۱$ دراینصورت :

$$(x,y,z,t)=(۱۰-b,۱۰+b,-\frac{۱}{۲}-\frac{d}{۲},-\frac{۱}{۲}+\frac{d}{۲})$$

که دقیقاً وقتی جواب است که :

$$(2000+60b^2)-\frac{1+3d^2}{4}=1999 \leftrightarrow d^2-80b^2=1$$

معادله ی دوم یک معادله ی پل (Pell) با جواب $(d_1,b_1)=(9,1)$ است. می توانیم بی نهایت جواب بصورت زیر بسازیم : $(d_{n+1},b_{n+1})=(9d_n+80b_n, 9b_n+d_n) \quad n=1,2,3 \ldots$

که با این استقرا ثابت می شود و از معادله ی بازگشتی کلی زیر نتیجه می شود :

$$(P_{n+1},q_{n+1})=(P_1P_n+q_1q_nD\ ,\ P_1q_n+q_1p_n)$$

که جواب های معادله ی $P^2-Dq^2=1$ را می سازد. اگر جواب نابدیهی (p_1,q_1) را داشته باشیم، یک بررسی سریع نشان می دهد که هر d_n فرد است. بنابراین چون بی نهایت جواب (b_n,d_n) برای معادله ی پل وجود دارد (که هر d_n فرد است).

پس برای معادله ی اولیه نیز بی نهایت جواب صحیح بصورت زیر وجود دارد :

$$(x_n,y_n,z_n,t_n)=(10-b_n, 10+b_n, -\frac{1}{2}-\frac{d_n}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{d_n}{2})$$

***

۴- کانادا

مسأله ۱

راه حل : توجه کنید که : $(2x-3)(2x-17) = 4x^2 - 40x + 51 \le 4x^2 - 40[x] + 51 = 0$ که می دهد $1/5 \le x \le 8/5$ و $1 \le [x] \le 8$ در اینصورت : $x = \frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}$

پس باید :

$$[x] = \left\lfloor \frac{\sqrt{40[x]-51}}{2} \right\rfloor$$

با قرار دادن $[x] = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ در این معادله، می بینیم که $\lfloor x \rfloor$ فقط می تواند یکی از مقادیر ۸ یا ۷، ۶، ۲ را داشته باشد. پس تنها مقدارهای ممکن برای x عبارتند از : $\frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{189}}{2}, \frac{\sqrt{229}}{2}$ و $\frac{\sqrt{269}}{2}$. یک بررسی سریع نشان می دهد که این مقادیر در معادله صدق می کنند.

***

مسأله ۲

راه حل : فرض کنید w دایره مذکور باشد و O مرکز w باشد و همچنین w، $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ را به ترتیب در نقاط M و N قطع کند. فرض کنید دایره ای که از C,O و M می گذرد $\overline{BC}$ را در نقطه ی P قطع کند. داریم :

$$\angle PMO = 180^\circ - \angle OCP = 60^\circ = \angle MCO = \angle MPO$$

پس $OP = OM = 1$ و P بر N منطبق است. بنابراین : $\angle MON = \angle MOP = \angle MCP = 60^\circ$. پس زاویه کمانی از w که در داخل مثلث ABC قرار می گیرد ثابت است بنابراین طول کمان نیز باید ثابت باشد.

***

مسأله ۳

راه حل : اعداد اول را $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$ بنامید، چون n یک مربع کامل است داریم :

$$n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{2a_i} \quad , \quad d(n) = \prod_{i=1}^{\infty} (2a_i + 1)$$

برای اعداد صحیح نامنفی ai. پس $d(n)$ فرد است و n هم فرد است، پس $a_1 = 0$. چون $\frac{d(n)}{\sqrt{n}} = 1$ داریم :

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{2a_i + 1}{p_i^{a_i}} = 1$$

طبق نامساوی برنولی داریم : $p_i^{a_i} \geq (p_i - 1)a_i + 1 > 2a_i + 1$ برای همه ی اعداد اول $p_i \geq 5$ که n را می شمارد. همچنین $3^{a_2} \geq 2a_2 + 1$ و مساوی فقط زمانی رخ می دهد که $a_2 \in \{0,1\}$. بنابراین برای اینکه تساوی بالا برقرار باشد باید داشته باشیم $a_1 = a_3 = a_4 = \ldots = 0$ و $a_2 = \{0,1\}$. پس $n = 1$ و $n = 9$ تنها جواب های مسأله هستند.

***

مسأله ۴

راه حل : برای قسمت اول سوال بدون کاستن از کلیّت مسئله فرض کنید $a_1 < a_2 < \ldots < a_8$. برهان خلف : فرض کنید $k > 0$ وجود نداشته باشد که برای آن معادله ی $a_i - a_j = k$ حداقل سه جواب متمایز داشته باشد، قرار دهید : $\delta_i = a_{i+1} - a_i$ برای $i = 1, 2, \ldots, 7$.

در اینصورت :

$$16 \geq a_8 - a_1 = \delta_1 + \ldots + \delta_7 \geq 1+1+2+2+2+3+3+4 = 16$$

چون در غیراینصورت سه تا از δ_i ها با هم برابرند که با فرض خلف ما در تناقض است. پس $a_8 - a_1 = 16$. پس $\pi = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_7)$ باید یک جایگشت از $(1,1,2,2,3,3,4)$ باشد. می گوئیم یک زوج $m-n$ داریم اگر (n,m) یا $(\delta_i, \delta_{i+1}) = (m,n)$. توجه کنید که نمی توان زوج های ۱-۱ یا ۲-۱ داشت. زیرا در اینصورت داریم ۳ یا $a_{i+2} - a_i = 2$ که سه جواب برای ۳ یا $a_i - a_j = 2$ می دهد.

همچنین نمی توان دو زوج ۳-۱ داشت چون در اینصورت با $\delta_i = 4$، سه جواب برای $a_i - a_j = 4$ بدست می آوریم. حال باتوجه به اینکه هر ۱ در کنار چه عددی باید باشد می بینیم که باید :

$$\pi = (1,4,\ldots,3,1) \ , \ (1,3,\ldots,4,1) \ , \ (1,4,1,3,\ldots),(\ldots,3,1,4,1)$$

حال نمی توان هیچ زوج ۲-۲ داشت. چون در این صورت همراه با زوج ۳-۱ و $\delta_i = 4$ برای $a_i - a_j = 4$ سه جواب خواهیم داشت. بنابراین داریم :

$\pi = (1,4,2,3,2,3,1)$ ، $(1,3,2,3,2,4,1)$ و $(1,4,1,3,2,3,2)$ یا $(2,3,2,3,1,4,1)$

در هر حالت حداقل چهار جواب برای $a_i - a_j = ۵$ وجود دارد که تناقض است. بنابراین صرفنظر از $\{a_۱, a_۲, ..., a_۸\}$ که انتخاب می کنیم معادله ی $a_i - a_j = k$ برای یک $k \in \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ حداقل سه جواب متمایز دارد. برای قسمت دوم مسأله فرض کنید $(b_۱, b_۲, ..., b_۷) = (۱,۲,۴,۹,۱۴,۱۶,۱۷)$. هر یک از ۱، ۲، ۳، ۵، ۷، ۸، ۱۲، ۱۳ و ۱۵ دقیقاً تفاضل دو جفت از b_iها است و هر یک ۱۵، ۱۴ و ۱۶ دقیقاً تفاضل یک جفت از b_iها است. هیچ عددی تفاضل بیش از دو جفت نیست. بنابراین مجموعه ی $\{b_۱, b_۲, ..., b_۷\}$ شرایط مسئله را دارد.

***

مسأله ۵

راه حل : بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $x = \max\{x, y, z\}$ اگر $x \ge y \ge z$ آنگاه :

$$x^۲y + y^۲z + z^۲x \le x^۲z + z^۲y + y^۲x - z(xy + (x-y)(y-z))$$
$$= (x+z)^۲ y = ۴\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}y\right)\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}y\right)y \le \frac{۴}{۲۷}$$

که نامساوی آخر از نامساوی AM-GM (میانگین حسابی و هندسی) نتیجه می شود. تساوی برقرار است اگر و تنها $z = ۰$ (از نامساوی اول) و $y = \frac{۱}{۳}$ که در این حالت $(x, y, z) = (\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, z)$.

اگر $x \ge z \ge y$ آنگاه :

$$x^۲y + y^۲z + z^۲x = x^۲z + z^۲y + y^۲x - (x-z)(z-y)(x-y) \le x^۲z + z^۲y + y^۲x \le \frac{۴}{۲۷}$$

که نامساوی دوم به دلیل نتیجه ای که برای $x \ge y \ge z$ بدست آوریم برقرار است (اگر جای y و z را عوض کنیم).

در نامساوی اول تساوی فقط زمانی زخ می دهد که دو تا از x، y و z برابر باشند و در نامساوی دوم زمانی رخ می دهد که $(x, z, y) = (\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, ۰)$.

چون این دو شرط با هم نمی توانند برقرار باشند، در این حالت نامساوی اکید است. بنابراین نامساوی برقرار است و تساوی زمانی رخ می دهد که $(x, y, z) = (\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, ۰), (\frac{۱}{۳}, ۰, \frac{۲}{۳})$ یا $(۰, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳})$.

***

۵- چین

مسأله ۱

راه حل : می دانیم اگر p مرکز ارتفاعیه مثلث UVW باشد داریم :

$$\angle VPW = (۹۰^\circ - \angle PWV) + (۹۰^\circ - \angle WVP)$$
$$= \angle WV + \angle UV = ۱۸۰^\circ - \angle VOW$$

حال فرض کنید F مرکز ارتفاعیه مثلث ABC باشد، آنگاه :

$$\angle ACB = ۱۸۰^\circ - \angle AFB = ۱۸۰^\circ - \angle ADB = \angle AHB$$

پس ACHB محاطی است. حال خط های CF و HD هر دو بر ضلع AB عمود هستند، پس با هم موازی هستند پس شرط دوم نیز برقرار است. از جهت دیگر فرض کنید $CF || HD$ و H روی دایره ی محیطی مثلث ABC باشد. چون AFDB و AHCB محاطی هستند داریم :

$$\angle AFB = \angle ADB = ۱۸۰^\circ - \angle AHB = ۱۸۰^\circ - \angle ACB$$

بنابراین، F یک نقطه ی تقاطع دایره ی تعریف شده با زوایه ی $\angle AFB = ۱۸۰^\circ - \angle ACB$ و خط تعریف شده با $CF \perp AB$ می باشد. پس F یا مرکز ارتفاعیه مثلث ABC است یا بازتاب نقطه ی C نسبت به خط AB است. که نقطه ی دومی بیرون از مثلث ABC می افتد بنابراین F باید مرکز ارتفاعیه مثلث ABC باشد.

***

مسأله ۲

راه حل : وقتی $a = ۱$ داریم : $f_n(x) = (x+۱)^n$ برای هر n و قسمت (الف) برای آن برقرار است. حال فرض کنید $a \neq ۱$. روشن است که f_n از درجه ی n است و جمله ی ثابت آن همیشه ۱ است. قرار دهید :

$$f_n(x) = c_۰ + c_۱x + \ldots + c_nx^n$$

با استقرا روی n ثابت می کنیم :

$$(a^i - ۱)c_i = (a^{n+۱-i} - ۱)c_{i-۱}$$

برای $۰ \leq i \leq n$ (که داریم $c_{-۱} = ۰$).

حالت پایه ی استقرا برای $n = ۰$ ساده است. حال :

$$f_{n-۱}(x) = b_۰ + b_۱x + \ldots + b_{n-۱}x^{n-۱}$$

در فرض استقرا صدق می کند.

پس داریم :

$(a^{n-i}-1)b_{i-1}=(a^i-1)b_i$ و $(a^{i-1}-1)b_{i-1}=(a^{n+1-i}-1)b_{i-2}$ برای $i\geq 1$.

برای $i=0$، حکم استقرا برابر است با $0=0$. برای $i\geq 1$ طبق رابطه ی بازگشتی داریم :

$$c_i=b_{i-1}+a^i b_i \quad و \quad c_{i-1}=b_{i-2}+a^{i-1}b_{i-1}$$

پس حکم استقرا معادل است با :

$$\begin{aligned}
(a^i-1)c_i=(a^{n+1-i}-1)c_{i-1} &\Leftrightarrow (a^i-1)(b_{i-1}+a^i b_i)\\
&=(a^{n+1-i}-1)(b_{i-2}+a^{i-1}b_{i-1}) \Leftrightarrow (a^i-1)\,b_{i-1}+a^i(a^i-1)b_i\\
&=(a^{n+1-i}-1)\,b_{i-2}+(a^n-a^{i-1})\,b_{i-1}\\
&\Leftrightarrow (a^i-1)\,b_{i-1}+a^i(a^{n-i}-1)\,b_{i-1}\\
&=(a^{i-1}-1)\,b_{i-1}+(a^n-a^{i-1})\,b_{i-1} \Leftrightarrow\\
&\qquad (a^n-1)\,b_{i-1}=(a^n-1)\,b_{i-1}
\end{aligned}$$

پس حکم درست است.

حال با استفاده از حاصلضرب های تلسکوپی داریم :

$$\begin{aligned}
c_i=\frac{c_i}{c_0}&=\prod_{k=1}^{i}\frac{c_k}{c_{k-1}}\\
&=\prod_{k=1}^{i}\frac{a^{n+1-k}-1}{a^k-1}=\frac{\prod_{k=n+1-i}^{n}(a^k-1)}{\prod_{k=1}^{i}(a^k-1)}\\
&=\frac{\prod_{k=i+1}^{n}(a^k-1)}{\prod_{k=1}^{n-1}(a^k-1)}=\prod_{k=1}^{n-i}\frac{a^{n+1-k}-1}{a^k-1}=\prod_{k=1}^{n-i}\frac{c_k}{c_{k-1}}=\frac{c_{n-i}}{c_0}=c_{n-i}
\end{aligned}$$

که صورت صریح f_n را می دهد. همچنین $f_n(x)=x^n f_n(\frac{1}{x})$ اگر و تنها اگر $c_i=c_{n-i}$ برای $i=0,1,\dots,n$ وطبق بحث قبل این شرط برقرار است و این اثبات را کامل می کند.

***

مسأله ۳

راه حل : فرض کنید $f(x)=\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$، که تعمیمی از $\binom{x}{3}$ برای همه ی اعداد حقیقی است. در یک گروه ۴ تایی از ایستگاه های فضایی، یک ایستگاه را مشکل دار بنامید اگر سه تونل یک طرفه به آن وارد شوند یا سه تونل یک طرفه از آن خارج شوند. (از تونل های مربوط به ایستگاه های همان گروه). در هر گروه حداکثر یک ایستگاه مشکل دار از هر نوع وجود دارد که در مجموع حداکثر دو ایستگاه مشکل دار می شود.

اگر در یک گروه از ۴ ایستگاه یک ایستگاه مشکل دار وجود داشته باشد، مثلاً A، آنگاه غیر ممکن است که بتوان از بقیه ی ایستگاه ها به A رسید، یا غیر ممکن است که از a به ۳ ایستگاه دیگر رفت.

ادعا می کنیم که اگر یک گروه ۴ تایی از ایستگاه های C,B,A و D شامل هیچ ایستگاه مشکل دار و هیچ تونل دو طرفه ای نباشد آنگاه این گروه متصل به هم است. از یک ایستگاه شروع می کنیم و در تونل های یک طرفه حرکت می کنیم تا به ایستگاهی که از آن شروع کرده بودیم برسیم (در تونل هایی که اعضای گروه را به هم مربوط می کند حرکت می کنیم) اگر از هر ۴ ایستگاه بگذریم که گروه متصل به هم است. در غیراینصورت باید دقیقاً از ۳ ایستگاه بگذریم مثلاً از A به B به C.

از هر کدام از این ایستگاه ها می توانیم به سه تای دیگر برویم. حال طبق فرض چون D مشکل دار نیست بدون کاستن از کلیت می توانیم فرض کنیم یک تونل یک طرفه از A به D وجود دارد. که در اینصورت از هر ایستگاهی می توانیم به D برسیم. بنابراین این گروه متصل به هم است.

ایستگاه ها را با اعداد ۱,۲, ... ,۹۹ نشان دهید. برای $i=۱,۲,...,۹۹$ فرض کنید a_i تونل یک طرفه به ایستگاه i وارد می شوند و b_i تونل یکطرفه از ایستگاه i خارج می شوند.

ایستگاه i در $\binom{b_i}{۳}+\binom{a_i}{۳}$ گروه چهارتایی مشکل دار است. با جمع بستن این مقدار برای همه ی ایستگاه ها به : $\sum_{i=۱}^{۹۹}\left(\binom{a_i}{۳}+\binom{b_i}{۳}\right)$ می رسیم. این مقدار برابر است با : $\sum_{i=۱}^{۱۹۸}f(x_i)$.

برای اعداد صحیح نا منفی $x_۱,x_۲,\dots,x_{۱۹۸}$. که $\sum_{i=۱}^{۱۹۸}x_i=۹۶/۹۹$. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید که $x_۱,x_۲,\dots,x_k$ حداقل ۱ و $x_{x+۱},x_{x+۲},\dots,x_{۱۹۸}$ صفر هستند. چون $f(x)$ به عنوان تابعی از x برای $x\ge ۱$ محدب است، مقدارش حداقل برابر است با :

$$k\binom{\frac{۹۶/۹۹}{k}}{۲}$$

همچنین $mf(x)\ge f(mx)$ برای $m\le ۱$ و $mx\ge ۲$.

قرار دهید $m=\frac{k}{۱۹۸}$ و $mx=\frac{۹۶/۹۹}{۱۹۸}=۴۸$. پس نتیجه می گیریم که مجموع حداقل برابر است با $۱۹۸\binom{۴۸}{۲}$.

چون هرگروه ۴ تایی غیر متصل به هم از ایستگاه ها حداکثر دو ایستگاه مشکل دار دارد حداقل $۹۹\binom{۴۸}{۳}$ گروه ۴ تایی غیر متصل وجود دارد. پس حداکثر $\binom{۹۹}{۴}-۹۹\binom{۴۸}{۳}$ گروه متصل به هم وجود دارد.

حال باید نشان دهیم که این مقدار ماکسیموم اختیار می شود. ایستگاه ها را دور یک دایره قرار دهید و بین هر دو ایستگاه مجاور هم یک تونل دو طرفه قرار دهید. حال بین دو ایستگاه A و B که مجاور هم نیستند یک تونل یک طرفه قرار دهید اگر و تنها اگر A ،۵,۳,... یا ۹۷ ایستگاه در جهت حرکت عقربه های ساعت از B فاصله داشته باشد.

در این چینش ایستگاه ها هر ایستگاهی $۲\binom{۴۸}{۳}$ بار مشکل دار می شود. به آسانی دیده می شود که در این حالت هرگروه ۴ تایی که شامل یک تونل دو طرفه است متصل به هم است.

حال فرض کنید در گروه ۴ تایی C,B,A و D,A مشکل دار است وB نزدیکترین و D دورترین ایستگاه در جهت عقربه های ساعت از A باشند. اگر تونل های یک طرفه از A خارج شوند، سه تونل یک طرفه باید به D وارد شود در حالت دیگر اگر تونل های یک طرفه به A وارد شوند، در اینصورت سه تونل یک طرفه باید از D به سایر تونل ها خارج شود. بنابراین هر گروه ۴ تایی غیر متصل به هم دقیقاً دو ایستگاه مشکل دار دارد. پس تساوی در پاراگراف قبلی برقرار می شود و $\binom{۹۹}{۴}-۹۹\binom{۴۸}{۳}$ گروه متصل به هم وجود دارد.

***

مسأله ۴

راه حل : نکته ی اصلی در این است که اگر $\{t_1,...,t_n\}$ با $\{1,3,5,...,2^n-1\}$ به پیمانه ی 2^n برابر باشد آنگاه $\{t_1^s,....,t_n^s\}$ نیز با $\{1,3,...,2^{n-1}\}$ به پیمانه ی 2^n برابر است که s یک عدد صحیح مثبت فرد است.

برای دیدن دلیل این نکته توجه کنید که برای

$$t_i^s-t_j^s=(t_i-t_j)(t_i^{s-1}+t_i^{s-2}t_j+t_j^{s-1})\ ،i\neq j$$

چون $t_i^{s-1}+t_i^{s-2}t_j+.....+t_j^{s-1}$ یک عدد فرد است : $t_i\equiv t_j\ \Leftrightarrow\ t_i^s\equiv t_j^s\ \ (\mathrm{mod}\ 2^n)$ بنابراین عدد فرد a وجود دارد که $2m-1\equiv a^{19}\ (\mathrm{mod}\ 2^{1999})$. پس اگر ما $a\equiv a\ (\mathrm{mod}\ 2^{1999})$ را به اندازه ی کافی منفی بگیریم تا $2m-1-a^{19}>0$ داریم : $(a,b,k)=(a,1,\frac{2m-1-a^{19}}{2^{1999}})$ جواب معادله است.

***

مسأله ۵

راه حل : فرض کنید γ,β,α سه ریشه f باشند. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $0\le\alpha\le\beta\le\gamma$، داریم :

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\qquad x-a=x+\alpha+\beta+\gamma\ge 0$$

اگر $0\le x\le\alpha$ آنگاه (با به کاربردن نامساوی میانگین حسابی - هندسی) داریم :

$$-f(x)=(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)\le\frac{1}{27}(\alpha+\beta+\gamma-3x)^3$$

$$\le\frac{1}{27}(x+\alpha+\beta+\gamma)^3=\frac{1}{27}(x-a)^3$$

بنابراین $f(x)\ge-\frac{1}{27}(x-a)^3$. تساوی دقیقاً زمانی رخ می دهد که در نا مساوی اول :

$x-\alpha=x-\beta=\gamma-x$ و $x+\gamma-\alpha-\beta=x+\alpha+\beta+\gamma$ در نامساوی دوم.
پس $\alpha=\beta=0$ و $\gamma=2x$ بالاخره وقتی $\alpha<x<\beta$ یا $x>\gamma$ داریم :

$$f(x)>0\geq-\frac{1}{27}(n-a)^3$$

بنابراین $\lambda=-\frac{1}{27}$ برای این دو حالت هم کار می کند. از استدلال بالا می بینیم که λ باید حداکثر $-\frac{1}{27}$ باشد چون در غیراینصورت نامساوی برای چند جمله ای $f(x)=x^2(x-1)$ در $x=\frac{1}{2}$ غلط است. تساوی وقتی برقرار می شود که یا $\alpha=\beta=\gamma$ و $x=0$ یا وقتی که $\alpha=\beta=0$ و γ هر عدد نامنفی دلخواه و $x=\frac{\gamma}{2}$ باشد.

***

مسأله ۶

راه حل : یک وجه از مکعب اصلی را بعنوان وجه زیرین در نظر بگیرید. برای هر مربع واحد A روی این وجه، مکعب مستطیل $4\times1\times1$ عمودی که A وجه زیرین آن است را در نظر می گیریم. اگر i امین مکعب بالای A رنگ شده باشد (شمارش از A شروع می شود). عدد i را در A بنویسید. هر رنگ آمیزی جالب به طور یک به یک مربع لاتین 4×4 روی وجه زیرین متناظر می شود (در هر مربع لاتین $m\times n$، هر سطر و ستون شامل هر یک از n برچسب $a_1,\dots,a_n$ دقیقاً یکبار است). از جهت دیگر برای هر مربع لاتین می توانیم یک رنگ آمیزی متناظر با آن بسازیم. بنابراین برای حل مسئله کافی است تعداد مربع های لاتین 4×4 را بشماریم. توجه کنید که جابجا کردن سطرهای یک مربع لاتین دیگر بدست می دهد. پس اگر ۴ برچسب c,b,a و d را داشته باشیم هر یک از $4!\times3!$ حالات ممکن برای سطر و ستون اول به یک تعداد مساوی مربع های لاتین منجر می شود. پس $4!\times3!\times x$ مربع لاتین 4×4 داریم که x تعداد مربع های لاتین است که سطر اول و ستون اول آن ها شامل برچسب های c,b,a و d، به ترتیب نوشته شده هستند. خانه ی سطر دوم و ستون دوم یا برابر a یا c یا d است که ۴ مربع زیر را می سازد :

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d\\ b & a & d & c\\ c & d & a & b\\ d & c & b & a\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix} a & b & c & d\\ b & a & d & c\\ c & d & b & a\\ d & c & a & b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d\\ b & c & d & a\\ c & d & a & b\\ d & a & b & c\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix} a & b & c & d\\ b & d & a & c\\ c & a & d & b\\ d & c & b & a\end{bmatrix}$$

بنابراین $x=4$ و تعداد رنگ آمیزی های جالب 4×4 برابر است با : $4!\times3!\times4=576$.

***

۶- جمهوری های چک و اسلواکی

مسأله ۱

راه حل : الف) عبارت حاصل را همواره می توان بصورت نسبت $\frac{A}{B}$ نوشت (اگر جملات مشابه را با هم حذف نکنیم) که A و B اعداد صحیحی هستند که در رابطه زیر صدق می کنند.

$$AB = (۲)(۳)\dots(۲۹) = ۲۹! = ۲^{۲۵}.۳^{۱۳}.۵^{۶}.۷^{۴}.۱۱^{۲}.۱۳^{۲}.۱۷.۱۹.۲۳.۲۹$$

(برای اینکه به چنین تجزیه ای برسیم می توانیم تمامی اعداد اول را جمله به جمله بشماریم یا از اینکه توان p در n! برابر است با :

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^{۲}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^{۳}} \right\rfloor + \dots \qquad (۱)$$

استفاده کنیم.) اعداد اولی که توان آن ها در تجزیه !۲۹ فرد است نمی توانند حتی بعد از اینکه جملات مشابه را حذف می کنیم از کسر $\frac{A}{B}$ حذف شوند.

$$H = ۲.۳.۱۷.۱۹.۲۳.۲۹ = ۱۲۹۲۶۴۶$$

از طرف دیگر :

$$\frac{۲۹ \div ((\dots((۲۸ \div ۲۷) \div ۲۶) \div \dots \div ۱۷) \div ۱۶)}{۱۵ \div ((\dots((۱۴ \div ۱۳) \div ۱۲) \div \dots \div ۳) \div ۲)}$$

$$= \frac{۲۹.۱۴}{۱۵.۲۸} . \frac{(۲۷)(۲۶)\dots(۱۶)}{(۱۳)(۱۲)\dots(۲)} = \frac{۲۹.۱۴^{۲}}{۲۸} . \frac{۲۷!}{(۱۵!)^{۲}}$$

$$= ۲۹.۷.\frac{۲^{۲۳}.۳^{۱۳}.۵^{۶}.۷^{۳}.۱۱^{۲}.۱۳^{۲}.۱۷.۱۹.۲۳}{(۲^{۱۱}.۳^{۶}.۵^{۳}.۷^{۲}.۱۱.۱۳)^{۲}} = H$$

(دوباره برای شمارش توان ها در فاکتوریل از (۱) استفاده کردیم). بنابراین H مقدار مورد نظر است.

ب) بیایید حاصل ضرب A و B را دقیقتر بررسی کنیم. در هر یک از ۱۴ جفت اعداد :

$$\{۲۹,۱۵\}, \{۲۸,۱۴\}, \dots, \{۱۶,۲\}$$

یکی از اعداد عاملی از A و دیگری عامل B است. پس عبارت حاصل را می توان به صورت :

$$V = \left(\frac{۲۹}{۱۵}\right)^{\varepsilon_۱} \left(\frac{۲۸}{۱۴}\right)^{\varepsilon_۲} \dots \left(\frac{۱۶}{۲}\right)^{\varepsilon_{۱۴}}$$

نوشت که هر کدام از ε_iها برابرند با ۱± و $\varepsilon_۱ = ۱$ و $\varepsilon_۲ = -۱$ بدون توجه به پرانتز گذاری.

چون کسرهای $\frac{۱۶}{۲}, \dots, \frac{۲۶}{۱۲}, \frac{۲۷}{۱۳}$ همگی از ۱ بزرگترند. ۷ (که می تواند صحیح باشد یا نباشد) باید در نامساوی $H = \frac{۱۶}{۲} \cdot \dots \cdot \frac{۲۶}{۱۲} \cdot \frac{۲۷}{۱۳} \cdot \frac{۱۴}{۲۸} \cdot \frac{۲۹}{۱۵} \geq ۷$ صدق کند که H همان عدد قسمت (الف) است. پس H تنها عبارت صحیح برای ۷ است! .

***

مسأله ۲

راه حل : فرض کنید K، L به ترتیب وسط یال های AD, BC و A. و D. به ترتیب مرکز ثقل مثلث های BCD و ABC باشند. میانه AA. و DD. هر دو صفحه AKD قرار می گیرند و T اشتراک آن ها، آن ها را به نسبت $\frac{۳}{۱}$ تقسیم می کند. (T مرکز ثقل چهار وجهی است) همچنین T وسط $\overline{KL}$ است زیرا :

$$\vec{T} = \frac{۱}{۴}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}) = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}(\vec{A}+\vec{D})+\frac{۱}{۲}(\vec{B}+\vec{C})) = \frac{۱}{۲}(\vec{K}+\vec{L})$$

نتیجه می شود که :

$$\frac{ET}{AT} = \frac{FT}{DT} = \frac{۱}{۳}$$

و بنابراین $\Delta ATD N \Delta ETF$ ،$EF = \frac{۱}{۳}AD$. چون صفحه BCL، AD و EF را نصف می کند، چهار وجهی های ABCD و BCEF را نیز به دو بخش با حجم مساوی تقسیم می کند. فرض کنید G وسط $\overline{EF}$ باشد. آنگاه :

$$\frac{[BCEF]}{[ABCD]} = \frac{[BCGF]}{[BCLD]} = \frac{GF}{LD} \cdot \frac{[BCG]}{[BCL]} = \frac{۱}{۳}\frac{KC}{KL} = \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۹}$$

***

مسأله ۳

راه حل : می دانیم :

$$m_a^۲ = \frac{۱}{۴}(۲b^۲ + ۲c^۲ - a^۲) \ , \ m_b^۲ = \frac{۱}{۴}(۲a^۲ + ۲c^۲ - b^۲)$$

پس : $m_a^۲ - m_b^۲ = \frac{۳}{۴}(b^۲ - a^۲)$. اگر شرط مسأله یعنی $m_a - m_b = b - a \neq ۰$ برقرار باشد، آنگاه $m_a - m_b = \frac{۳}{۴}(b+a)$. حال از دستگاه معادلات :

$$m_a - m_b = b - a$$

$$m_a + m_b = \frac{۳}{۴}(b+a)$$

نتیجه می شود $m_a=\frac{۱}{۸}(۷b-a)$ و $m_b=\frac{۱}{۸}(۷a-b)$ و $a+m_a=b+m_b=\frac{۷}{۸}(a+b)$ بنابراین : $K=\frac{۷}{۸}$

حال باید ببینیم برای کدام $a\neq b$، مثلث ABC با اضلاع a,b و میانه های $m_a=\frac{۱}{۸}(۷b-a)$ و $m_b=\frac{۱}{۸}(۷a-b)$ موجود است. می توانیم سه ضلع مثلث $AB_۱G$ که در آن G مرکز ثقل ABC و $B_۱$ وسط ضلع AC است را بیابیم :

$$AB_۱=\frac{b}{۲}\ ,\ AG=\frac{۲}{۳}m_a=\frac{۲}{۳}.\frac{۱}{۸}(۷b-a)=\frac{۱}{۱۲}(۷b-a)$$
$$B_۱G=\frac{۱}{۳}m_b=\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۸}(۷a-b)=\frac{۱}{۲۴}(۷a-b)$$

با نوشتن نامساوی مثلث برای اضلاع این مثلث باید شرط زیر را داشته باشیم : $\frac{۱}{۳}<\frac{a}{b}<۳$

که طبق فرض $\frac{a}{b}=۱$ غیرقابل قبول است. از طرفی این شرط کافی هم است. اگر $AB_۱G$ را بسازیم می توان از روی آن مثلث ABC را با $b=AC$ و $m_a=AA_۱$ و $m_b=BB_۱$ ساخت.

حال طبق تساوی $m_a^۲-m_b^۲=\frac{۳}{۴}(b-a^۲)$ باید داشته باشیم $a=BC$.

***

مسأله ۴

راه حل : هر دنباله ی متناهی از حروف A و B را یک رشته بنامید. فرض کنید ... نمایشگر یک رشته (احتمالاً تهی) باشد و *** نماینده یک لغت با حروف یکسان (بعنوان مثال $\underbrace{B***B}_{k}$ رشته ای از k حرف B است). نشان می دهیم یک رشته دلخواه، یک کلمه است اگر وفقط اگر در شروط زیر صدق کند :

الف) رشته با حرف B به پایان می رسد.

ب) یا با حرف A شروع شود یا با تعداد زوجی حرف B (یا حتی تماماً B باشد)

واضح است که این شروط لازم هستند : برای دو لغت AB و BB از طول ۲ برقرارند و این دو شرط برای هر کلمه ی جدید که با استفاده از (ii) ساخته شود صادق هستند.

حال با استقرا روی n نشان می دهیم هر رشته با طول n که در دو شرط (الف) و (ب) صدق کند یک کلمه است. واضح است برای $n=۱$ و $n=۲$ حکم برقرار است. اگر $n>۲$، آنگاه یک لغت با طول n باید به یکی از شکل های زیر باشد :

$$AA\cdots B\ ,AB\cdots B\ ,\ \underbrace{B***B}_{۲k}\ A\cdots B\ ,\ \underbrace{B***B}_{۲k+۲}$$

که $۲\leq ۲k\leq n-۲$. باید نشان دهیم این ۴ رشته در شرط(ii) که حروف B را با رشته هایی (با طول کمتر از n) جایگزین می کند صادق هستند. با کمک از کلمه ی فرض استقرا.

کلمه ی $AA\cdots B$ از کلمه AB با عمل $A(A\cdots B)$ ساخته می شود. کلمه ی $AB\cdots B$ از AB بوسیله $A(B\cdots B)$ یا از BB بوسیله ی $(AB)(\cdots B)$ ساخته می شود، بسته به اینکه حرف اولیه ی آن A، با تعدادی زوج یا فرد از حروف B بدست آید.

کلمه ی $A\cdots B$ $\underbrace{B***B}_{2k}$ از BB با جایگزینی $(A\cdots B)$ $\underbrace{(B***B)}_{2k}$ بدست می آید و کلمه $\underbrace{B***B}_{2k+2}$ از BB به جایگزینی BB $\underbrace{(B***B)}_{2k}$ بدست می آید بنابراین حکم با استقرا ثابت می شود. حال نشان می دهیم P_n، تعداد لغات با طول n با رابطه زیر بدست می آید :

$$P_n = \frac{2^n.2(-1)^n}{3}$$

برای $n=1, n=2$ رابطه برقرار است. زیرا $P_1 = 0$ و $P_2 = 2$. حال اگر نشان دهیم $P_{n+2} = 2^n + P_n$ حکم با استقرا روی n ثابت می شود. این رابطه بازگشتی به وضوح برقرار است. زیرا هر لغت به طول $n+2$ یا به شکل $A\cdots B$ است که $\cdots$ می تواند هر کدام از 2^n رشته به طول n باشد یا به شکل $BB\cdots$ که $\cdots$ یکی از P_n کلمه به طول n است.

***

مسأله ۵

راه حل : دوران 90° حول نقطه ی A که B را به D و نقاط P و C و D را به ترتیب به D', C', P' می برد، را در نظر بگیرید. چون $\angle PAD' = 90^\circ$، از خاصیت نیمساز خارجی نتیجه می شود AP'، نیمساز $\angle QAD'$ است. در نتیجه فاصله نقطه ی P' از $\overline{AD'}$ و $\overline{AQ}$ با هم برابر است و برابر طول ضلع مربع ABCD است.

همچنین این فاصله برابر است با طول ارتفاع AD در مثلث AQP'. چون ارتفاع های رسم شده از A و P' در این مثلث با هم برابرند، داریم $AQ = P'Q$. حال ما می توانیم P' را بسازیم پس همچنین می توانیم Q را نیز بعنوان محل تقاطع PX و عمود منصف AP' بسازیم. ادامه ساخت واضح است و همچنین روشن است که مربع ABCD حاصل شده شرایط خواسته شده را دارد.

***

مسأله ۶

راه حل : اگر دستگاه داده شده دارای جواب (x, y) به ازای $a = A$ و $b = B$ باشد، آنگاه به وضوح جوابی به شکل (kx, ky) برای $a = \frac{1}{k}A$ و $b = \frac{1}{k}B$ و $k \neq 0$ نیز دارد. بنابراین وجود جواب فقط به مقدار ab بستگی دارد.

کار را با امتحان کردن مقدار عبارت $P(u,v)=\dfrac{(u+v)(u^3+v^3)}{(u^2+v^2)^2}$ که v و u در رابطه $u^2+v^2=1$ صدق می کنـد آغاز می کنیم. داریم :

$$p(u,v)=(u+v)(u^3+v^3)=(u+v)^2(u^2-uv+v^2)$$
$$=(u^2+2uv+v^2)(1-uv)=(1+2uv)(1-uv)$$

تحت شرایط $u^2+v^2=1$ حاصلضرب uv می تواند تمام مقادیر بازه $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ را اختیار کند (اگر $u=\cos\alpha$ و $v=\sin\alpha$، آنگاه $uv=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$.) پس کافی است برد تابع $f(t)=(1+2t)(1-t)$ در بازه ی $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ بیابیم. طبق ضابطه ی f :

$$f(t)=-2t^2+t+1=-2(t-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{8}$$

نتیجه می شود این تصویر عبارت است از بازه بسته با نقاط ابتدایی و انتهایی :

$f(\frac{1}{4})=\frac{9}{8}\ ,\ f(-\frac{1}{2})=0$.

در نتیجه اگر دستگاه داده شده دارای جواب باشد a,b باید در شرایط $0\le ab\le\frac{9}{8}$ صـدق کنـد کـه فقـط وقتـی $ab=0$ که $x+y=0$ در نتیجه $a=b=0$.

برعکس اگر a,b در شرایط $0<ab\le\frac{9}{8}$ صدق کنند، طبق آنچه اثبات کردیم اعداد u و v موجودند به طوریکـه : $u^2+v^2=1$ و $(u+v)(u^3+v^3)=ab$ بـا تعریـف : $a'=u+v$ و $b'=u^3+v^3$ تـساوی $a'b'=ab\neq 0$ نتیجـه می دهد دو نسبت $\frac{a'}{a}$ و $\frac{b}{b'}$ دارای مقدار یکسان $k\neq 0$ هستند بنابراین $(x,y)=(ku,kv)$ بـه وضـوح یـک جـواب برای دستگاه به ازای a,b داده شده است.

***

۷- فرانسه

مسأله ۱

راه حل : فرض کنید $\ell=\sqrt{R^{۲}+H^{۲}}$ مولد مخروط باشد. همچنین مخروط را طوری بچرخانید که قاعده اش افقی و رأس آن به سمت بالا باشد.

الف) هر استوانه ای که در شرایط داده شده صدق کند را می توان آنقدر بزرگ کرد تا محیط در وجه دایروی آن روی مخرروط قرار گیرد. وجه بالایی استوانه یک مخروط کوچک در بالای مخروط اصلی ایجاد می کند. اگر شعاع استوانه r باشد، در اینصورت ارتفاع مخروط کوچک $r.\frac{H}{R}$است و ارتفاع استوانه برابر است با :

$$h=H-r.\frac{H}{R}$$

بنابراین حجم استوانه برابر است با :

$$\pi r^{۲}h=\pi r^{۲}H(۱-\frac{r}{R})=۴\pi R^{۲}H(\frac{r}{۲R}.\frac{r}{۲R}(۱-\frac{r}{R}))$$

طبق نامساوی میانگین حسابی و هندسی برای $\frac{r}{۲R},\frac{r}{۲R}$ و $۱-\frac{r}{R}$ این مقدار حداکثر برابر است با :

$$۴\pi R^{۲}H.\frac{۱}{۲۷}(\frac{r}{۲R}+\frac{r}{۲R}+(۱-\frac{r}{R}))^{۳}=\frac{۴}{۲۷}\pi R^{۲}H$$

که تساوی زمانی رخ می دهد که $\frac{r}{۲R}=۱-\frac{r}{R}\Leftrightarrow ۱=\frac{۲}{۳}R$

ب) هر دایره که در شرایط قضیه صدق کند را می توان طوری انتقال داد تا مرکز آن روی محور مخروط قرار بگیرد. پس می توان آن را بزرگ کرد و در صورت لزوم در جهت عمودی منتقل کرد تا آنجا که بر قاعده و وجه مدور مخروط مماس شود.

فرض کنید r شعاع دایره باشد. سطح مقطعی از مخروط را در نظر بگیرید که محور مخروط، یک مثلث از مخروط و یک دایره از کره را شامل می شود. اضلاع مثلث ℓ,ℓ و ۲R هستند و ارتفاع آن (از ضلع به طول ۲R) H است. شعاع دایره r است و دایره ی محاطی این مثلث است. h مساحت این مستطیل برابر است با $RH=\frac{۱}{۲}(۲R)(H)$ و نصف محیط آن $s=R+\ell$ است چون $h=rs$ داریم :

$$.r=\frac{RH}{R+\ell}$$

پس حجم کره برابر است با :

$$\frac{۴}{۳}\pi r^{۳} = \frac{۴}{۳}\pi(\frac{RH}{R+\ell})^{۳}$$

ج) ادعا می کنیم وقتی که $\frac{h}{R} = \sqrt{۳}$ یا $۲\sqrt{۶}$ دو حجم برابر هستند، برای $۲ > \frac{h}{R} > \sqrt{۳}$، حجم کره بیشتر است و برای $\sqrt{۳} > \frac{h}{R} > ۰$ یا $۲ < \frac{h}{R}$ حجم استوانه بیشتر است.

می خواهیم : $\frac{۴}{۳}\pi(\frac{RH}{R+\ell})^{۳}$ و $\frac{۴}{۲۷}\pi R^{۲}H$ را با هم مقایسه کنیم. به طور معادل با ضرب هر دو در $\frac{۲۷}{۴\pi R^{۲}H}(R+\ell)^{۳}$ باید $(R+\ell)^{۳}$ و $۹RH^{۲} = ۹R(\ell^{۲}-R)^{۲}$ را باهم مقایسه کنیم.

قرار دهید $\frac{\ell}{R} = \varphi$، پس معادلاً باید $۳(\varphi+۱)$ و $۹(\varphi^{۲}-۱)$ را باهم مقایسه کنیم. حال :

$$(۱+\varphi)^{۳} - ۹(\varphi^{۲}-۱) = \varphi^{۳} - ۶\varphi^{۲} + ۳\varphi + ۱۰ = (\varphi+۱)(\varphi-۲)(\varphi-۵)$$

بنابراین وقتی ۵ یا ۲ $= \varphi$، حجم ها باهم برابر است؛ وقتی $۵ > \varphi > ۲$ حجم کره بیشتر است و وقتی $۲ > \varphi > ۱$ یا $\varphi > ۵$ حجم استوانه بیشتر است. با مقایسه ی R و H به جای R و ℓ به نتایجی که قبلاً بیان کردیم می رسیم.

***

مسأله ۲

راه حل : $n = ۲$ و $n = ۳$ جواب های معادله هستند. ادعا می کنیم اینها تنها جواب های این معادله اند. در ابتدا توجه کنید که تابع :

$$f(n) = (\frac{n+۳}{n+۲})^{n} = (۱+\frac{۱}{n+۲})^{n}$$

برای $n > ۰$ صعودی است. برای دیدن علت، توجه کنید که مشتق $\ell n f(n)$ نسبت به n برابر است با :

$$\ell n(۱+\frac{۱}{n+۲}) - \frac{n}{(n+۲)(n+۳)}$$

طبق بسط تیلور :

$$\ell n(۱+\frac{۱}{n+۲}) = \sum_{j=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n+۲)^{۲j}}\left[\frac{۱}{۲j-۱}(n+۲) - \frac{۱}{۲j}\right] > \frac{۲(n+۲)-۱}{۲(n+۲)^{۲}}$$

و بنابراین :

$$\frac{d}{dn}\ell n f(n) = \ell n(\frac{n+۳}{n+۲}) - \frac{n}{(n+۲)(n+۳)} > \frac{۲(n+۲)-۱}{۲(n+۲)^{۲}} - \frac{n}{(n+۲)^{۲}} = \frac{۳}{۲(n+۲)^{۲}} > ۰$$

بنابراین $\ell n f(n)$ و $f(n)$ صعودی هستند. حال، توجه کنید که اگر $f(n) < ۲$ آنگاه داریم :

$$(\frac{۲}{۱})^{n} > (\frac{۳}{۲})^{n} > \ldots > (\frac{n+۳}{n+۲})^{n} > ۲$$

پس :

$$(n+۳)^n > ۲(n+۲)^n > ... > ۲^j(n+۳-j)^n > ... > ۲^n.(۳)^n$$

بنابراین :

$$۳^n + ۴^n + ... + (n+۲)^n < (\frac{۱}{۲^n} + \frac{۱}{۲^{n-۱}} + ... + \frac{۱}{۲})(n+۳)^n = (۱ - \frac{۱}{۲^n})(n+۳)^n < (n+۳)^n$$

پس تساوی خواسته شده برقرار نسیت. چون $... < f(۷) < f(۶) < ۲$ تساوی برای هر $n \geq ۶$ برقرار نیست. به راحتی می توان دید که نامساوی برای $n = ۱,۴,۵$ نیز برقرار نیست (در هر حالت یک طرف عبارت فرد است و طرف دیگر آن زوج است).

بنابراین تنها جواب های این تساوی عبارتند از $n = ۳$ و $n = ۲$.

***

مسأله ۳

راه حل : فرض کنید $a \leq b \leq c$ طول اضلاع مثلث باشند. فرض کنید زاویه روبرو به آن ها A، B و C باشد؛ فرض کنید $s = \frac{۱}{۲}(a+b+c)$ نصف محیط مثلث باشد و r شعاع دایره ی محاطی آن باشد.

بدون کاستن از کلیت فرض کنید که شعاع دایره ی محیطی مثلث $R = \frac{۱}{۲}$ و $b = \text{Sin}\, B, a = \text{Sin}\, A$ و $c = \text{Sin}\, C$. مساحت مثلث برابر است با :

$$rs = \frac{۱}{۲} r(\text{Sin}\, A + \text{Sin}\, B + \text{Sin}\, C)$$

و همچنین برابر است با : $\frac{abc}{۴R} = \frac{۱}{۲} \text{SinA SinB SinC}$ بنابراین :

$$r = \frac{\text{SinA SinB SinC}}{\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC}}$$

و

$$\frac{a}{r} = \frac{\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC}}{\text{SinB SinC}}$$

چون $A = ۱۸۰^\circ - B - C$ و $\text{SinA} = \text{Sin}(B+C)\text{SinB CosC} + \text{CosB SinC}$ و داریم :

$$\frac{a}{r} = \text{Cot}\, B + \text{Csc}\, B + \text{CotC} + \text{Csc}\, C$$

توجه کنید که $f(x) = \text{Cot}\, x + \text{Csc}\, x$ روی بازه ی $۰^\circ < x < ۹۰^\circ$ یک تابع نزولی است. حال دو حالت داریم $B < ۶۰^\circ$ یا $B > ۶۰^\circ$. اگر $B > ۶۰^\circ$ چون $C > B > ۶۰^\circ$، مثلث با $A' = B' = C' = ۶۰^\circ$ نسبت $\frac{a'}{r'}$ بزرگتری دارد.

بنابراین فرض کنید $B \leq ۶۰^\circ$.

همچنین فرض کنید که $A = B$ زیرا در غیراینصورت مثلث با زوایای $A' = B' = \frac{1}{2}(A+B) \le B$ و $C' = C$ نسبت $\frac{a'}{r'}$ بزرگتری دارد. چون $C > 90°$ داریم $45° < A \le 60°$ حال :

$$\frac{a}{r} = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin B \sin C} = \frac{2\sin A + \sin(2A)}{\sin A \sin(2A)} = 2\csc(2A) + \csc A$$

حال مشتق دوم $\csc x$ برابر است با $\csc x(\csc^2 x + \cot^2 x)$، که برای $0° < x < 180°$ اکیداً مثبت است. بنابراین $\csc$ و $\csc(2x)$ هر دو در بازه ی $0° < x < 90°$ اکیداً محدب هستند پس $g(A) = 2\csc(2A) + \csc A$، که تابعی محدب از A است و بیشترین مقدار خود را در یکی از نقاط انتهای بازه ی $45° \le A \le 60°$ اختیار می کند.

چون $g(45°) = 2 + \sqrt{2} < 2\sqrt{3} = g(60°)$ پس تابع g وقتی ماکسیموم است که $A = B = C = 60°$ باشد. بنابراین بیشترین نسبت $2\sqrt{3}$ است که با هر مثلث متساوی الاضلاع بدست می آید.

***

مسأله ۴

راه حل : اگر در هر زمان تعدادی متناهی آبنبات باقی مانده باشد، آنگاه در زمان بعدی شکمو باید یکی از مراحل (الف)، قسمت اول مرحله ی (ب) یا قسمت دوم مرحله ی (ب) را انجام دهد. در دو حالت اول او یک آبنبات می خورد، در حالت سوم او به مرحله (الف) می رود و یک آبنبات می خورد. چون تعداد آبنبات ها متناهی است، شکمو بالاخره باید تمام آبنبات ها را بخورد.

حال با استقرا روی تعداد کل آبنبات ها اثبات می کنیم که اگر با $r > 0$ آبنبات قرمز و $y > 0$ آبنبات زرد و از مرحله ی (الف) شروع کنیم. احتمال این که آخرین آبنبات خورده شده قرمز باشد $\frac{1}{2}$ است.

فرض کنیم که ادعا برای تعداد کمتری از آبنبات ها درست باشد، فرض کنید بعد از اینکه شکمو مرحله ی اول و دوم را تمام می کند و طبق الگوریتم به مرحله ی (الف) برمی گردد r' آبنبات قرمز و y' آبنبات زرد روی میز باقی مانده باشد، باید داشته باشیم : $r' + y' < r + y$ احتمال اینکه $r' = 0$ برابر است با :

$$\frac{r}{r+y} \cdot \frac{r-1}{r+y-1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{y+1} = \frac{1}{\binom{r+y}{r}}$$

به همین ترتیب احتمال اینکه $y' = 0$ برابر است با :

$$\frac{1}{\binom{r+y}{y}} = \frac{1}{\binom{r+y}{r}}$$

(در حالت $r = y = 1$ این ادعا را ثابت می کند.)

در غیراینصورت احتمال اینکه r' و y' هر دو هنوز مثبت باشند برابر است با :

$$1-\frac{2}{\binom{r+y}{r}}$$

طبق فرض استقرا، در این حالت آخرین آبنبات با احتمال برابر $\frac{1}{2}$ قرمز یا زرد است. بنـابراین احتمـال اینکـه در کل آخرین آبنبات خورده شده قرمز باشد برابر است با :

$$\underbrace{\frac{1}{\binom{r+y}{r}}}_{y'=0}+\underbrace{\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{\binom{r+y}{r}}\right)}_{r',y'>0}=\frac{1}{2}$$

که این مرحله ی استقرایی و اثبات را کامل می کند.

***

مسأله ۵

راه حل : فرض کنید مثلث داده شده ABC باشد فـرض کنـیم انعکـاس رئـوس A، B و C نـسبت بـه ضـلع هـای متناظرشان به ترتیب D، E و F باشند. همچنین فرض کنید A', B' و C' نقاط میانی $\overline{CA}, \overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و G، H و O مرکز ثقل، مرکز ارتفاعیه و مرکز دایره ی محیطی باشند.

مثلـث $A''B''C''$ را طـوری بگیریـد کـه A، B و C بـه ترتیـب نقـاط میـانی اضـلاع $C''A'', B''C''$ و $A''B''$ باشـند. در اینصورت G مرکز ثقل و H مرکز دایره محیطی مثلث $A''B''C''$ هستند. فـرض کنیـد E', D' و F' تـصویر O روی خطهای $C''A'', B''C''$ و $A''B''$ باشند. تجانس h با مرکز G و نسبت $-\frac{1}{2}$ را در نظر بگیرید.

این نگاشت نقـاط C'', B'', A'', C, B, A را بـه ترتیـب بـه نقـاط B, A, C', B', A' و C مـی نگـارد. توجـه کنیـد کـه $A'D' \perp BC$ چون O مرکز ارتفاعیه مثلث $A'B'C'$ است.

در نتیجه $\frac{AD}{A'D'}=\frac{2}{1}=\frac{GA}{GA'}$ و $\angle DAG=\angle D'A'G$. پس داریم : $h(D)=D'$. مـشابهاً $h(E)=E'$ و $h(F)=F'$.

بنابراین D، E و F همخط هستند اگر و تنها اگر E', D' و F' همخط باشند.

حال E', D' و F' تصاویر O روی اضلاع $C''A'', B''C''$ و $A''B''$ هستند. طبق قضیه ی سیمسن ایـن سـه نقطـه همخط هستند اگر وتنها اگر O روی دایره محیطی $A''B''C''$ باشد. چون شعاع دایـره ی محیطـی مثلـث $A''B''C''$، $2R$ است، O روی دایره ی محیطی آن قرار دارد اگر وتنها اگر $OH=2R$.

***

۸- هنگ کنگ (چین)

مسأله ۱

راه حل : $\overline{QK}$ و $\overline{RS}$ هر دو بر $\overline{PS}$ عمود هستند.

پس $\overline{QK}$ با $\overline{RS}$ موازی است و داریم : $\angle KQS = \angle RSQ$. چون PQRS محاطی است. $\angle RSQ = RPQ$ و چهارضلعی PHKQ نیز محاطی است چون $\angle PKQ = \angle PHQ = ۹۰^\circ$، در نتیجه $\angle RPQ = \angle HPQ = \angle HKQ$. بنابراین $\angle KQS = \angle HKQ$. و نتیجه می شود که خط HK وتر $\overline{QS}$ از مثلث قائم الزاویه KQS را نصف می کند.

راه حل دوم :

خط سیمسون رسم شده از Q نسبت به مثلث PRS از H و K و F می گذرد که F پایه ی عمود رسم شده از Q بر $\overleftrightarrow{RS}$ است. بنابراین خط HK همان خط FK است، که قطر مستطیل SFQK نیز هست پس این خط قطر دیگری یعنی $\overline{QS}$ را نصف می کند.

***

مسأله ۲

راه حل : برهان خلف : فرض کنید چنین پاره خط هایی موجود نباشند. طبق اصل لانه کبوتری ۵ تا از یال های هرم باید همرنگ باشند. بدون کاستن از کلیت فرض کنید که آن ها پاره خطهایی سیاه رنگ از V رأس هرم به $B_۱, B_۲, B_۳, B_۴$ و $B_۵$ هستند که $B_۱B_۲B_۳B_۴B_۵$ یک پنج ضلعی محدب است (B_i ها لزوماً مجاور هم نیستند). همه ی $\overline{B_۱B_۲}, \overline{B_۲B_۳}, \overline{B_۳B_۴}, \overline{B_۴B_۵}$ و $\overline{B_۵B_۱}$ نمی توانند اضلاع نه ضلعی باشند، سپس بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید که $\overline{B_۱B_۲}$ رنگ شده است.

طبق فرض خلف چون مثلث VB_iB_j هر سه ضلعش سیاه نیستند $\overline{B_۱B_۲}$ و $\overline{B_۲B_۴}$ و $\overline{B_{۴۱}B_۱}$ باید سفید باشند. حال مثلث $B_۱B_۲B_۴$ سه ضلع سفید رنگ دارد که تناقض است.

***

مسأله ۳

راه حل : الف) فرض کنید (s,t) خوب نباشد. پس بعد از یک حرکت به $(s-t,t-s)$ می رسیم، بدون کاستن از کلیت می توانیم فرض کنیم $s-t=۱$ و $t-s=-۱$ چون دو عدد باید نسبت به هم اول باشند. در اینصورت $s+t$ نمی تواند صفر باشد چون فرد است. همچنین $s+t=(s-t)+۲t\neq(s-t)+۰=۱$ و $(s+t)=(t-s)+۲s\neq(t-s)+۰=-۱$ بنابراین عدد اول P وجود دارد که $s+t$ را می شمارد.
بعد از $p-۱$ حرکت $(s+t)$ به $(s-(p-۱)t,t-(p-۱)s)\equiv(s+t,t+s)\equiv(۰,۰)\pmod p$ تبدیل می شود که تناقض است. پس $(s+t)$ خوب است.

ب) فرض کنید x و y اعداد صحیحی باشند که $sx-ty=g$ و $g=\gcd(s,t)$.
با قرار دادن $s=gs'$ و $t=gt'$ داریم $s'x-t'y=۱$ پس $\gcd(x,y)=۱$. برهان خلف، فرض کنید بعد از k حرکت عدد اول p، $x-kt$ و $y-ks$ را می شمارد. در اینصورت داریم :

$$O\equiv x-kt\equiv y-ks\pmod p$$
$$\Rightarrow O\equiv s(x-kt)\equiv t(y-ks)\pmod p$$
$$\Rightarrow O\equiv sx-ty\equiv g\pmod p$$

بنابراین p و g را می شمارد که g هم s و t را می شمارد سپس اولین معادله ی بالا برابر می شود با $O\equiv x\equiv y\pmod p$. با اینکه x و y نسبت به هم اول هستند در تناقض است. بنابراین زوج (x,y) خوب نیست.

***

مسأله ۴

راه حل : الف) با قرار دادن $t=\frac{۱}{۲}$ در نامساوی داده شده داریم : $g(\frac{۱}{۲}(y+z))\leq\frac{۱}{۲}(g(y)+g(z))$

حال t را ثابت (نه حتماً برابر $\frac{۱}{۲}$) فرض کنید. با قرار دادن $y=n-t$ و $z=n+t$ در رابطه ی بالا داریم :

$$g(n)\leq\frac{۱}{۲}(g(n-t)+g(n+t))$$

یا

$$g(n)-g(n-t)\leq g(n+t)-g(n)\qquad(۱)$$

با قرار دادن $x=n$ و $y=n-۱$ در نامساوی داده شده داریم :

$$g(t(n-۱)+(۱-t)n)\leq tg(n-۱)+(۱-t)g(n)$$

یا

$$t[g(n)-g(n-۱)]\leq g(n)-g(n-t)$$

با ترکیب کردن این نامساوی و نامساوی (۱)، نامساوی سمت چپ بدست می آید. نامساوی سمت راست نیز با قراردادن $z=n$ و $y=n+۱$ در نامساوی داده بدست می آید.

ب) از خاصیت ۲ تابع f داریم $f(\frac{۳}{۲})=\frac{۱}{۲}f(\frac{۱}{۲})$ و $f(\frac{۵}{۲})=\frac{۳}{۲}f(\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۴}f(\frac{۱}{۲})$.

همچنین $f(۲)=۱.f(۱)=۱$ و $f(۳)=۲f(۱)=۲$. حال اگر در نامساوی قسمت (الف) قرار دهـیم $n=۲$ و $t=\frac{۱}{۲}$ داریم :

$$\frac{۱}{۲}\left[g(۲)-g(۱)\right]\le g(\frac{۵}{۲})-g(۲)\le\frac{۱}{۲}\left[g(۳)-g(۲)\right]$$

اگر این نامساوی را به توان ۱۰ برسانیم داریم :

$$\sqrt{\frac{f(۲)}{f(۱)}}\le\frac{f(\frac{۵}{۲})}{f(۲)}\le\sqrt{\frac{f(۳)}{f(۲)}} \quad \text{یا} \quad ۱\le f(\frac{۵}{۲})\le\sqrt{۲}$$

که با گذاشتن $f(\frac{۵}{۲})=\frac{۳}{۴}f(\frac{۱}{۲})$ در نامساوی بالا به نتیجه خواسته شده می رسیم.

***

۹- مجارستان

مسأله ۱

راه حل : در ابتدا فرض کنید همه ی این اعداد نامنفی باشند. اگر $x \le y \le z \le w \le v$ پنج عدد دلخواه از این اعداد باشند، آنگاه x, y, z, w و x, y, z, v و x, y, w, v و x, z, w, v و y, z, w, v همه باید تصاعدهای هندسی باشند. با مقایسه ی هر دو تصاعد پشت سرهم در این ۵ تصاعد می بینیم که باید $x = y = z = w = v$ بنابراین همه ی این اعداد باهم برابرند.

اگر در اعداد ما بعضی منفی باشند هر عدد x را با $|x|$ جایگزین کنید. خاصیت ۲ حفظ می شود و طبق بالا همه ی این $|x|$ها با هم برابرند بنابراین هر یک از این اعداد ۱۹۹۹ یا ۱۹۹۹- بوده است.

همچنین داریم $n \ge 5$، پس حتماً سه تا از این اعداد با هم برابرند. اما با سه تا ۱۹۹۹- و یک ۱۹۹۹ نمی توان هیچ تصاعد هندسی ساخت یا با سه تا ۱۹۹۹ و یک ۱۹۹۹- . پس همه اعداد باید برابر ۱۹۹۹ باشند.

***

مسأله ۲

راه حل : فرض کنید $S_1 = CDEF$ و $S_2 = KLMN$ که D و k روی $\overline{AC}$ و N روی $\overline{BC}$ قرار دارند. فرض کنید s_1 و s_2 طول اضلاع مربع های S_1 و S_2 باشد پس داریم : $s_1 = 21, s_2 = \sqrt{440}$ و $b = CA, a = BC$ و $c = AB$.

با استفاده از نسبت های بین مثلث های متشابه ABC, AED و EBF داریم :

$$s_1\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 1 \text{ یا } c = AB = AE + EB = c\left(\frac{s_1}{a}+\frac{s_1}{b}\right)$$

چون مثلث های ABC , AKL و NBM متشابه هستند داریم :

$$c = AB = AL + LM + MB = s_2\left(\frac{b}{a}+1+\frac{a}{b}\right) \text{ و } s_2 = \frac{abc}{(ab+c^2)}$$

در اینصورت :

$$\frac{1}{s_2^2}-\frac{1}{s_1^2} = \left(\frac{1}{c}+\frac{c}{ab}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{c^2}+\frac{c^2}{a^2b^2}+\frac{2}{ab}\right) - \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}\right) = \frac{1}{c^2}$$

بنابراین :

$$c=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s_2^2}-\frac{1}{s_1^2}}}=21\sqrt{440}.$$

با حل کردن $s_2=\frac{abc}{(ab+c^2)}$ برحسب ab داریم $ab=s_2c^2/(c-s_2)=21^2.22$ در نهایت :

$$AC+BC=a+b=\frac{ab}{s_1}=21.22=462$$

***

مسأله ۳

راه حل : فرض کنید r و R به ترتیب شعاع های کره های داده شده باشند و h ارتفاع هرم باشد. به دلیل متقارن بودن هرم O و K هر دو روی ارتفاع رسم شده از P قرار می گیرند.

سطح مقطع هرم ناشی از صفحه ای عمود بر قاعده اش که از مرکز قاعده به موازات ضلع $\overline{AB}$ می گذرد را در نظر بگیرید. این سطح مقطع شامل یک مثلث متساوی الساقین با قاعده ی ۲ و ساق های به طول $\sqrt{h^2+1}$ از هرم است.

دایره ی محاطی این مثلث سطح مقطع صفحه و کره ی به مرکز O است پس شعاع آن r است. از یک طرف مساحت این مثلث برابر است با حاصلضرب شعاع دایره ی محاطی در نصف محیط آن یعنی $\frac{1}{2}r(2+2\sqrt{h^2+1})$. از طرف دیگر این مساحت نصف حاصلضرب قاعده و ارتفاع است یعنی $\frac{1}{2}\times 2\times h$.

با مساوی قرار دادن این دو مقدار داریم : $r=(\sqrt{h^2+1}-1)/h$. همچنین به دلیل تقارن، کره دوم بر $\overline{AB}$ در نقطه M، وسط آن مماس است، چون فاصله K تا صفحه ی ABCD باید r باشد داریم $R^2=KM^2=r^2+1$. از طرفی اگر کره ی دوم بر $\overline{AP}$ در نقطه ی N مماس باشد، طبق مماس های مساوی داریم : $AN=AM=1$.

دراینصورت $PN=PA-1=\sqrt{h^2+2}-1$. همچنین $PK=h+r$ اگر k در طرف دیگر صفحه ی ABCD باشد و داریم $PK=h-r$ اگر k بر همان طرفی باشد که O قرار دارد، بنابراین :

$$Pk^2=PN^2+NK^2$$
$$(h\pm r)^2=(\sqrt{h^2+2}-1)^2+(r^2+1)\pm 2rh$$
$$=4-2\sqrt{h^2-2}$$

داشتیم $r = \frac{\sqrt{h^۲+۱}-۱}{h}$ بنابراین :

$$\pm(\sqrt{h^۲+۱}-۱) = ۲-\sqrt{h^۲+۲}$$

$\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ جواب یکتای این معادله است. پس حجم هرم برابر است با :

$$\frac{۴\sqrt{۷}}{۹} = \frac{۱}{۳}.۴\times\frac{\sqrt{۷}}{۳}$$

***

مسأله ۴

راه حل : چون $۱۰^۲.۳۰^{۲n}$ زوج است پس x و y باید زوجیت یکسانی داشته باشند.

در اینصورت (x,y) یک جواب است اگر و تنها اگر $(u,v) = (\frac{x+y}{۲},\frac{x-y}{۲})$ زوجی از اعداد صحیح باشند که $u > v$ و $uv = ۵^۲.۳۰^{۲n}$. حال $۵^۲.۳۰^{۲n} = ۲^{۲n}.۳^{۲n}.۵^{۲n+۲}$ دقیقاً $(۲n+۳)(۲n+۱)^۲$ مقسوم علیه دارد. پس بدون شرط $u > v$ دقیقاً $(۲n+۳)(۲n+۱)^۲$ تا از چنین زوج های (u,v) داریم. دقیقاً در یک زوج $u = v$ و طبق تقارن در نیمی از زوج های باقی مانده $u > v$ است.

در نتیجه $\frac{۱}{۲}((۲n+۱)^۲(۲n+۳)-۱) = (n+۱)(۴n^۲+۶n+۱)$ زوج داریم که در معادله صدق می کنند. فرض کنید که $(n+۱)(۴n^۲+۶n+۱)$ مربع کامل باشد چون $(n+۱)$ و $(۴n^۲+۶n+۱) = (n+۱)(۴n+۲)-۱$ نسبت به هم اول هستند، $۴n^۲+۶n+۱$ نیز باید مربع کامل باشد. اما $(۲n+۲)^۲ > ۴n^۲+۶n+۱ > (۲n+۱)^۲$ که تناقض است.

***

مسأله ۵

راه حل : فرض کنید $x+y+z > ۰$ چون در غیر اینصورت عبارت بالا بی معنا خواهد بود. $(۱-z)(۱-x) \geq ۰ \leftarrow (z-۱)(x-۱)$

$۱+zx \geq x+z$ پس $\frac{x}{(x+y+z)} \geq \frac{x}{(۱+y+zx)}$. با انجام همین محاسبات برای دو کسر دیگر نتیجه می گیریم که عبارت سمت چپ حداکثر برابر است با $\frac{(x+y+z)}{(x+y+z)} \geq \frac{۳}{(x+y+z)}$ اگر تساوی برقرار باشد باید $x = y = z = ۱$ باشد. که این جواب معادله ی داده شده است.

***

مسأله ۶

راه حل : فرض کنید O مرکز کره و r شعاع آن باشد. B,A و C را سه نقطه روی سطح کره در نظر بگیرید.

دراینصورت : $[OAB]=\frac{1}{2}OA.OB\operatorname{Sin}\ A\hat{O}B\le\frac{1}{2}r^2$.

به همین طریق ارتفاع نقطه C از صفحه OAB حداکثر $CO=\frac{1}{2}r^2$ است که در این حالت چهاروجهی OABC دارای بیشترین حجم یعنی $\frac{r^3}{6}$ خواهد بود.

حال اگر $\{C,C'\},\{B,B'\},\{A,A'\}$ زوج هایی از نقاط متقاطر روی کره باشند، هشت وجهی $ABCA'B'C'$ را می توان به ۸ چهاروجهی با حجم ماکسیمم تقسیم کرد پس ماکسیمم حجم آن برابر است با $\frac{4r^3}{3}$. تساوی برای یک هشت وجهی منتظم برقرار می شود. در شرایط مسئله، چهاروجهی T را (با حجم V) به نسبت $\frac{1}{2}$ حول هریک از رأس آن کوچک کنید تا ۴ چهاروجهی، هرکدام با حجم $\frac{V}{8}$ بدست آورید.

۶ نقطه ی میانی یک هشت وجهی را تشکیل می دهند با حجم $\frac{V}{2}$. از طرفی نقطه ی وسط پاره خطی که رأس های C و D از این هشت وجهی را (که روبروی هم هستند) به هم وصل می کند همان p یعنی مرکز ثقل چهاروجهی است. اگر $O\neq P$ در اینصورت خط OP عمود منصف هر پاره خط است و همه ی این پاره خطها باید در صفحه ای که از P می گذرد و بر OP عمود است قرار بگیرند که در اینصورت $\frac{V}{2}=0$.

در غیراینصورت نقاط وسط تشکیل سه جفت نقطه ی متقاطر می دهند که یک چندوجهی با بیشترین حجم یعنی $\frac{4r^3}{3}$ می سازد. بنابراین $V\le\frac{8r^3}{3}$ و تساوی برای یک چهاروجهی منتظم اتفاق می افتد.

***

مسأله ۷

راه حل : a و b را به ترتیب کوچکترین و بزرگترین اعداد روی صفحه در نظر بگیرید. این دو عدد حداکثر n^2-1 خانه در جهت افقی و n^2-1 خانه در جهت عمودی باهم فاصله دارند، پس مسیری از یکی به دیگری با حداکثر طول $2(n^2-1)$ وجود دارد.

چون تفاضل هر دو عدد مجاور حداکثر n است پس $b-a\le 2(n^2-1)n$. تمام اعداد روی صفحه، اعداد صحیح بین a و b هستند. پس حداکثر $2(n^2-1)n+1$ عدد متمایز روی صفحه داریم. بنابراین چون $n^4>(2(n^2-1)n+1)(\frac{n}{2})$ بیشتر از $\frac{n}{2}$ خانه ها باید شامل یک عدد باشند.

مسأله ۸

راه حل : فرض کنید C سال داده شده باشد. سال تولد الکس ۱۸uv یا ۱۹uv (که u و v رقم هستند) می باشد پس :

$C=۱۸uv+(۹+u+v)=۱۸۰۹+۱۱u+۲v$ یا $C=۱۹uv+(۱۰+u+v)=۱۹۱۰+۱۱u+v$.

به طور مشابه فرض کنید که سال تولد برنات با رقم های u' و v' تمام شود. الکس و برنات نمی توانند هر دو در یک قرن متولد شده باشند، چون در اینصورت داریم :

$۲(v-v')=۱۱(u'-u) \Leftarrow ۱۱u+۲v=۱۱u'+۲v'$. پس یا $(u,v)=(u',v')$ یا $|u-u'|\geq ۱۱$ که هر دو غیر ممکن هستند. حال بدون کاستن از کلیت فرض کنید الکس در قرن ۱۹ به دنیا آمده باشد و :

$$u-u'=۹\ ,\ v-v'=۱ \Leftarrow ۱۱(u-u')+۲(v-v')=۱۰۱ \Leftarrow ۱۸۰۹+۱۱u+۲v=۱۹۱۰+۱۱u'+۲v'$$

پس تفاضل سن آن ها برابر است با : $۱۹u'v'-۱۸uv=۱۰۰+۱۰(u'-u)+(v'-v)=۹$

***

مسأله ۹

راه حل : اگر دایره ی محاطی مثلث XYZ بر اضلاع XZ, YZ و XY در نقاط V,U و W مماس باشد آنگاه (با استفاده از مماس های برابر) :

$$XY+YZ+ZX=(YW+YV)+(XW+ZV)+XZ=(۲YV)+(XZ)+XZ$$

و $YU=\frac{۱}{۲}(XY+YZ-ZX)$. بنابراین اگر دایره های محاطی مثلث های ACD و CDB در نقطه ی E برهم مماس باشد آنگاه :

$$AD=\frac{۱}{۲}(CA+AB-BC) \Leftarrow AD-CA=(AB-AD)-BC$$
$$\Leftarrow AD+DC-CA=۲DE=BD+DC-CB$$

اگر دایره ی محاطی مثلث ABC بر $\overline{AB}$ در نقطه ی D' مماس باشد، در آن صورت هم $AD'=\frac{۱}{۲}(CA+AB-BC)$. پس : $D=D'$.

***

مسأله ۱۰

راه حل : فرض کنید P رأس هرم، ABCD قاعده هرم و M و N وسط های AB و CD باشند، به دلیل تقارن مراکز هر دو کره روی ارتفاعی که از P رسم می شود قرار دارند. صفحه ی PMN هرم را در مثلث PMN و کره ها را در دایره های کره قطع می کند. فرض کنید O مرکز دایره ی کوچکتر باشد. این دایره بر $\overline{PM}$ و $\overline{PN}$ و بر دایره ی بزرگتر به ترتیب در نقاط V,U و W مماس است.

به دلیل تقارن، W روی ارتفاع رسم شده از P قرار می گیرد در نتیجه W در دایره ی بزرگتر مقابل P قرار دارد. (WP قطر دایره بزرگتر است). بنابراین $OP = ۲R - r = \sqrt{۲}\, r$. مثلث OUP، $۹۰^\circ - ۴۵^\circ - ۴۵^\circ$ است و $\angle OPU = \angle OPV = ۴۵^\circ$.

پس مثلث NPM قائم الزاویه متساوی الساقین است و فاصله ی P از صفحه ی ABCD برابر $\frac{BC}{۲}$ می باشد. بنابراین می توان مکعبی به مرکز P ساخت که ABCD یکی از وجوه آن باشد و این مکعب را می توان به ۶ هرم همنهشت با PABCD تقسیم کرد.

رأس سه تا از این هرم ها در A قرار می گیرد. پس سه برابر زاویه ی بین دو وجه PAB و PAD یک دور کامل می شود، پس این زاویه برابر ۱۲۰° است. به بیان دیگر فرض کنید سه هرم PADE, PABD و PAEB باشند و P' نقطه ی میانی $\overline{AP}$ و D', B' و E' روی صفحات PAE, PAD, PAB طوری باشند که خط های $D'P', B'P'$ و $E'D'$ همه بر خط AP عمود باشند.

زاویه ی بین هر دو تا از این خط ها زاویه ی خواسته شده است. چون همه ی این خط ها روی یک صفحه قرار دارند (و همه بر AP عمودند) پس زاویه باید ۱۲۰° باشد.

***

مسأله ۱۱

راه حل : اگر چنین P موجود باشد می توانیم فرض کنیم از درجه ۴ است در غیراینصورت باقی مانده ی آن بر $(x-۱۰)(x-۱۴)(x-۱۸)$ را در نظر می گیریم. اگر قرار ۰ هیم $P(x) = ax^۲ + bx + c$ با محاسبه ی سر راست داریم : $P(x+۴) + P(x-۴) - ۲P(x) = ۳۲a$ برای هر x.
با گذاشتن $x = ۱۴$ در این عبارت داریم $۳۲a = ۴۰$ که غیر ممکن است چون a باید عدد صحیح باشد، پس چنین P ای وجود ندارد.

***

مسأله ۱۲

راه حل : روشن است که $a < c$ و $b < c$. پس برای $m > n$ داریم :
$c^m = c^{m-n}(a^n + b^n) > a^{m-n}a^n + b^{m-n}b^n = a^m + b^m$ همچنین برای $m < n$ داریم :
$$c^m = c^{m-n}(a^n + b^n) < a^{m-n}a^n + b^{m-n}b^n = a^m + b^m$$
حال مثلثی با اضلاع a^k, b^k و c^k وجود دارد اگر و تنها اگر $a^k + b^k > c^k$ و این مثلث زاویه ای منفرجه دارد اگر وتنها اگر $(a^k)^۲ + (b^k)^۲ < (c^k)^۲$ یعنی $a^{۲k} + b^{۲k} < c^{۲k}$ طبق $a < c$ و $b < c$، این شرایط با نامساوی های $k < n$ و $۲k > n$ معادلند. بنابراین $\frac{n}{۲} < k < n$.

مسأله ۱۳

راه حل : برهان خلف، فرض کنید چنین نباشد. پس اگر $a_1, \dots, a_{k+1}$ اعداد داده شده باشند این اعداد باید در مجموع حداکثر k عامل اول داشته باشد(اعداد اول کوچکتر از n). فرض کنید $O_p(a)$ نشان دهنده ی بزرگترین d باشد که $p^d | a$.

همینطور قرار دهید $q = a_1 a_2 \dots a_{k+1}$. آنگاه برای هر عدد اول P، $O_p(q) = \sum_{i=1}^{k+1} O_p(a_i)$. در نتیجه باید حداکثر یک مقدار i باشد که برای آن $O_p(a_i) > \frac{O_p(q)}{2}$. چون حداکثر k عدد اول وجود دارد که q را می شمارد، برای هر عدد اول که q را می شمارد یک i وجود دارد که برای آن شرط $O_p(a_i) > \frac{O_p(q)}{2}$ برقرار نیست.

در اینصورت $2O_p(a_i) \le O_p(q) \Leftarrow O_p(a_i) > O_p(\frac{q}{a_i})$ برای هر عدد اول که q را می شمارد. که نتیجه می دهد $a_i | \frac{q}{a_i}$ که تناقض است.

***

مسأله ۱۴

راه حل : فرض کنید r,q,p و s ریشه ها باشند.

داریم :

$$pq + pr + ps + qr + qs + rs = -2, p + q + r + s = 0$$

و بنابراین $p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 0^2 - 2(-2) = 4$.

طبق نامساوی کشی شوارتز $(1+1+1)(q^2 + r^2 + s^2) \ge (q + r + s)^2$ برای هر عدد حقیقی r,q و s. از طرفی چون r,q و s متمایزاند نامساوی اکید می شود.

بنابراین : $4 = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 > p^2 + \frac{(-p)^2}{3} = \frac{4p^2}{3}$ یا $|p| < \sqrt{3}$. این نتیجه برای s,r و q نیز برقرار است.

***

مسأله ۱۵

راه حل :

لم ۱ : اگر $0 \le x, y \le 1$ آنگاه : $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} \ge \sqrt{1 - (x + y - 1)^2}$

اثبات : با مربع کردن دو طرف و کم کردن $۲-x^۲-y^۲$ از آن ها به نامساوی معادل $۲\sqrt{(۱-x^۲)(۱-y^۲)} \geq -۲(۱-x)(۱-y)$ می رسیم که درست است. چون طرف چپ مثبت است و طرف راست حداکثر صفر است.

لم ۲ : اگر $x_۱+...+x_n \leq n-\frac{۱}{۲}$ و برای هر i ، $۰ \leq x_i \leq ۱$ آنگاه : $\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{۱-x_i^۲} \geq \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

اثبات : با استقرا روی n. حالت $n=۱$ بدیهی است. اگر $n>۱$، آنگاه یا $\min(x_۱,x_۲) \leq \frac{۱}{۲}$ یا $x_۱+x_۲>۱$. در حالت اول بلافاصله داریم $\max(\sqrt{۱-x_۱^۲},\sqrt{۱-x_۲^۲}) \geq \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ در حالت دوم می توانیم دو عدد $x_۱$ و $x_۲$ را با عدد $x_۱+x_۲-۱$ جایگزین کنیم و با استفاده از فرض استقرا و لم ۱ به نتیجه خواسته شده برسیم.

فرض کنید P و Q راس هایی از چندضلعی باشند و $\ell = PQ$ بیشینه باشد. این چندضلعی از دو مسیر از P تا Q تشکیل شده است که طول هر کدام یک عدد بزرگتر یا مساوی ℓ است. این اعداد متمایزند چون محیط چندضلعی عددی فرد است. بنابراین m، طول مسیر بزرگتر حداقل $\ell+۱$ است.

چندضلعی را در صفحه ی مختصات طوری قرار دهید که $P=(۰,۰), Q=(\ell,۰)$ و مسیر بزرگتر در نیم صفحه ی بالایی باشد. چون طول هر ضلع چند ضلعی عددی صحیح است این مسیر را می توان به پاره خط هایی به طول ۱ تقسیم کرد.

فرض کنید که نقاط پایانی این پاره خط ها به ترتیب $P_۰=P, P_۱=(x_۱,y_۱), P_۲=(x_۲,y_۲)$, ... و $P_m=Q$ باشند. r وجود دارد به طوریکه y_r بیشینه است. آنگاه یا $r \geq x_r+\frac{۱}{۲}$ یا $(m-r) \geq (\ell-x_r)+\frac{۱}{۲}$. فرض کنید نامساوی اولی برقرار باشد (در غیراینصورت می توانیم Q و P را برعکس انتخاب کنیم). می دانیم $y_۱ \geq ۰$ و طبق بیشینه بودن ℓ باید داشته باشیم $x_۱ \geq ۰$. چون چندضلعی محدب است باید $y_۱ \leq y_۲ \leq ... \leq y_r$ و $x_۱ \leq x_۲ \leq ... \leq x_r$. حال $y_{i+۱}-y_i=\sqrt{۱-(x_{i+۱}-x_i)^۲}$ بنابراین :

$$y_r=\sum_{i=۰}^{r-۱}(y_{i+۱}-y_i)=\sum_{i=۰}^{r-۱}\sqrt{۱-(x_{i+۱}-x_i)^۲} \geq \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

طبق لم ۲ : چون مثلث PP_rQ قاعده ی $\overline{PQ}$ با طول حداقل ۱ و ارتفاع $y_r \geq \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ دارد، پس مساحت آن حداقل برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$. چون این چندضلعی محدب است شامل این مستطیل می شود، بنابراین مساحت کل چندضلعی حداقل $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ است.

***

مسأله ۱۶

راه حل : دنباله ی مورد نظر وجود دارد. فرض کنید $P_0, P_1, \ldots$ به ترتیب اعداد اول بزرگتر از ۵ باشند. همچنین فرض کنید $q_{3i} = 6$, $q_{3i+1} = 10$ و $q_{3i+2} = 15$ برای هر عدد صحیح نامنفی r.
قرار دهید : $s_i = p_i q_i$ برای هر دنباله ی $i \geq 0$. $s_0, s_1, s_2, \ldots$ به وضوح در شرط (الف) صدق می کند چون حتی هیچ p_i که $i \neq j$, s_i را نمی شمارد. برای قسمت اول شرط (ب) توجه کنید که اندیس های هر جفت از جمله ها به پیمانه ۳، هر دو در $\{0و1\}$ یا $\{0,2\}$ و یا $\{1,2\}$ هستند.
پس به ترتیب مضرب مشترک ۳،۲ و یا ۵ دارند. برای قسمت دوم کافی است نشان دهیم هیچ عدد اولی همه ی S_iها را نمی شمارد. داریم $2 \nmid s_2$, $3 \nmid s_1$ و $5 \nmid s_0$ و هر عدد اول بزرگتر از ۵ دقیقاً یک جمله را می شمارد.

***

مسأله ۱۷

راه حل : کافی است ادعا را برای $n \geq 4$ ثابت کنیم چون هر چند جمله ای که برای $n \geq 4$ در شرط گفته شده صدق کند برای $n \leq 3$ نیز کار می کند. برای هر $i = 1,2,\ldots,n$ حاصلضرب $s_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n}(i-j)$ را در نظر بگیرید.
چون $n \geq 4$ یکی از جملات $2, i-j$ می شود پس حاصلضرب زوج است. پس می توانیم قرار دهیم $s_i = 2^{a_i} m_i$ برای اعداد صحیح مثبت m_i, q_i که m_i فرد است. فرض کنید L کوچکترین مضرب مشترک همه ی q_i ها باشد و $r_i = \dfrac{L}{q_i}$.
برای هر i، تعداد نامتناهی توان ۲ وجود دارد که به پیمانه ی $\left|m_i^{r_i}\right|$ همنهشت با ۱ هستند (به طور خاص، طبق قضیه اویلر $2^{\phi(|m_i^{r_i}|)j} \equiv 1 \pmod{|m_i^{r_i}|}$ برای هر $j \geq 0$) بنابراین بی نهایت عدد صحیح c_i وجود دارد که $c_i m_i^{r_i} + 1$ توانی از ۲ است.
برای هر c_i تعریف کنید :

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \Big(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(x-j)\Big)^{r_i} + 2^L$$

برای هر $1 \leq k \leq n$ در جمع بالا هر جمله ی $\left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x-j)\right)^{r_i}$ که $i \neq k$ صفر می شود. دراینصورت :

$$P(k) = c_k \Big(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n}(k-j)\Big)^{r_i} + 2^L = 2^L(c_k m_k^{r_k} + 1)$$

که توانی از ۲ است. از طرفی با انتخاب مناسب c_i ها می توانیم تمام این توان ها را متمایز کنیم.

مسأله ۱۸

راه حل : اگر پوش محدّب یک k- ضلعی باشد. می توان آن را به $k-۲$ مثلث تقسیم کرد طوریکه هر مثلث شامل دقیقاً یک نقطه باشد. چون هیچ سه تا از این نقطه ها همخط نیستند پس هیچ نقطه ای روی اضلاع و قطرهای پوش محدّب وجود ندارد که نتیجه می دهد $N=۲k-۲$. حال با استقرا روی $k \geq ۳$، مجموعه S شامل $۲k-۲$ نقطه می سازیم.

این مجموعه از دو مجموعه ی $S_۱$ شامل رئوس یک k- ضلعی محدّب و $S_۲$، $k-۲$ نقطه داخل این k- ضلعی تشکیل شده است. مجموعه ی S را طوری می سازیم که :

۱- هیچ سه نقطه از $۲k-۲$ نقطه همخط نباشند.

۲- هر مثلث که با سه رأس k- ضلعی ساخته شود شامل دقیقاً یک نقطه از مجموعه ی $S_۲$ در داخل خود باشد. حالت $k=۳$ ساده است.

حال فرض کنید که k- ضلعی محدّب $P_۱P_۲...P_k$ و مجموعه ی $S_۲$ داده شده اند. قطعاً نقطه ی Q را می توانیم جوری بگیریم که $P_۱P_۲...P_kQ$ یک $k+۱$- ضلعی محدّب باشد. فرض کنید نقطه R در طول پاره خط P_kQ حرکت می کند.

در ابتدا $(R=P_k)$ طبق فرض مثلث P_iP_jR برای هر $۱ \leq i < j < k$ شامل یک نقطه از S است؛ اگر R کمتر از یک مقدار به اندازه ی کافی کوچک d_{ij} حرکت کند، هنوز این نقطه در درون مثلث P_iP_jR قرار دارد و نقطه ای دیگری در این مثلث وارد نمی شود. از طرفی با انتخاب d_{ij} به اندازه ی کافی کوچک می توانیم مطمئن باشیم که اگر $۰ < P_kR < d_{ij}$، آنگاه R با هیچ دو نقطه ای از S همخط نمی شود.

بطور مشابه برای هر $۱ \leq i \leq k-۱$ P_i و P_k روی $\overline{P_iP_k}$ قرار می گیرند ولی هیچ نقطه ی دیگری از $S' = \{P_۱, P_۲, ..., P_k\} \cup S$ روی این خط قرار نمی گیرد. چون تعداد نقاط S' متناهی است، اگر P_kR از تعداد به اندازه ی کافی کوچک e_i کوچکتر باشد، هیچ نقطه ای از S' در درون مثلث P_iP_kR قرار نمی گیرد.

حال موقعیت R را طوری ثابت کنید که P_kR از $\min\{d_{ij}, e_i\}$ کوچکتر باشد، در اینصورت $P_۱P_۲...P_kR$ یک $(k+۱)$- ضلعی محدّب است. نقطه ی P را درون مثلثی که با خطهای $P_۱P_k$ ، $RP_{k-۱}$ و P_kR ساخته می شود طوری بگیرید که P با هیچ دو نقطه ای از $S \cup \{R\}$ همخط نباشد. ادعا می کنیم که چند ضلعی $P_۱P_۲...P_kR$ و مجموعه ی $S \cup \{P\}$ در شرایط مسئله صدق می کنند.

اگر سه نقطه از P_i ها را انتخاب کنیم طبق فرض تشکیل یک مثلث می دهند که دقیقاً یک نقطه از S در آن قرار دارد. هر مثلث P_iP_jR $(i, j < k)$ شامل همان نقطه است که داخل $P_iP_jP_k$ قرار دارد و هر مثلث P_iP_kR فقط شامل نقطه ی P است و همان طور که دیدیم هیچ سه نقطه ای از مجموعه ای که ساختیم روی یک خط قرار ندارند که این مرحله ی استقرایی اثبات را کامل می کند.

***

۱۰- ایران

دور اول

مسأله ۱

راه حل اول : ادعا را با استقرا روی n ثابت می کنیم. برای $n=۲$ دو طرف مساوی هستند. فرض کنید ادعا برای $n-۱$ برقرار باشد یعنی : $a_۱a_۲^۴+a_۲a_۳^۴+\dots+a_{n-۱}a_۱^۴ \geq a_۲a_۱^۴+\dots+a_۱a_{n-۱}^۴$

حال ادعا برای n از رابطه ی زیر ثابت می شود :

$$a_{n-۱}a_n^۴+a_na_۱^۴-a_{n-۱}a_۱^۴ \geq a_na_{n-۱}^۴+a_۱a_n^۴-a_۱a_{n-۱}^۴$$

(توجه کنید که این معادله نامعادله ی اصلی برای $n=۳$ است) بدون کاستن از کلیت فرض کنید $a_n-a_۱=۱$، در غیراینصورت می توانیم هر یک از $a_۱$، $a_{n-۱}$ و a_n را بر $a_n-a_۱ \geq ۰$ تقسیم کنیم که در این صورت باز هم نامساوی برقرار است. آنگاه طبق نامساوی ینسن برای تابع محدب $x^۴$، داریم :

$$a_۱^۴(a_n-a_{n-۱})a_n^۴(a_{n-۱}-a_۱) \geq (a_۱(a_n-a_{n-۱})+a_n(a_{n-۱}-a_۱))^۴$$
$$=(a_{n-۱}(a_n-a_۱))^۴=a_{n-۱}^۴(a_n-a_۱)$$

که با جابه جا کردن جملات به نتیجه خواسته شده می رسیم.

راه حل دوم :

از یک روش مقدماتی استفاده می کنیم تا حالت $n=۳$ را ثابت کنیم. تعریف کنید :

$$p(x,y,z)=xy^۴+yz^۴+zx^۴-yx^۴-zy^۴-xz^۴$$

می خواهیم ثابت کنیم $p(x,y,z) \geq ۰$ برای $x \leq y \leq z$.

چون $p(x,x,z)=p(x,y,y)=p(z,y,z)=۰$ می دانیم $(y-x)(z-y)(z-x)$، $p(x,y,z)$ را می شمارد.

داریم :

$$\begin{aligned}
p(x,y,z) &= yz^4 - zy^4 + zx^4 - xz^4 + xy^4 - yx^4\\
&= zy(z^3 - y^3) + xz(x^3 - z^3) + xy(y^3 - x^3)\\
&= zy(z^3 - y^3) + xz(y^3 - z^3) + xz(x^3 - y^3) + xy(y^3 - x^3)\\
&= z(y-x)(z^3 - y^3) + x(z-y)(x^3 - y^3)\\
&= (y-x)(z-y)(z(z^2 + zy + y^2) - x(x^2 + xy + y^2))\\
&= (y-x)(z-y)((z^3 - x^3) + y^2(z-x) + y(z^2 - x^2))\\
&= (y-x)(z-y)(z-x)(z^2 + zx + x^2 + y^2 + yz + yx)\\
&= \frac{1}{2}(y-x)(z-y)(z-x)((x+y)^2 + (z+x)^2) \geq 0
\end{aligned}$$

***

مسأله ۲

راه حل : فرض کنید یک n تایی خوب $(a_1, \dots, a_n)$ داریم و مجموع های $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ را در نظر بگیرید. تمام این مجموع ها بین 0 و $2n$ هستند. بنابراین اگر هر یک از این مجموع ها به پیمانه ی n صفر شود، با n برابر است و به تناقض می رسیم.

همچنین، اگر هر دو تایی با هم به پیمانه ی n همنهشت باشند می توانیم آن ها را از هم کم کنیم تا به یک مجموع جزئی دیگر برسیم که برابر n است و دوباره به تناقض برسیم. بنابراین، این مجموع های جزئی همه باید غیر صفر و به پیمانه ی n متمایز باشند.

به طور خاص $a_2 \equiv a_1 + \dots + a_k \pmod n$ برای $k \geq 1$. اگر $k > 1$ باشد می توانیم از دو طرف a_2 را کم کنیم تا به یک مجموع جزئی برابر n برسیم که تناقض است پس. $k = 1$, $a_1 = a_2 \pmod n$ به طور مشابه همه ی a_iها به پیمانه ی n با هم همنهشت هستند. چون مجموع a_iها $2n$ است، یکی از a_iها باید حداکثر ۲ باشد.

اگر a_iها همه به پیمانه ی n با ۱ همنهشت باشند، آنگاه $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ باید جایگشتی از $1, 1, \dots, 1, n+1$ باشد. برای هر k بین ۱ و n، مجموع هیچ k تا از این a_iها n نمی شود، پس این n تایی ها خوب هستند.

اگر همه ی a_iها به پیمانه ی n با z همنهشت باشند، آنگاه $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (2, 2, \dots, 2)$. اگر n فرد باشد، مجموع هیچ k تا از a_iها n نمی شود پس این n تایی خوب است. ولی اگر n زوج باشد آنگاه مجموع هر $\frac{n}{2}$ از a_iها، n می شود پس در این صورت این n تایی خوب نیست.

***

مسأله ۳

راه حل : در این اثبات از خاصیت معروفی استفاده می کنیم که می گوید $DB = DI = DC$. در واقـع $\angle BDI = \angle C$ نتیجه می دهد : $\angle DIB = (\angle A + \angle B)/۲$ و داریم : $\angle IBD = (\angle A + \angle B)/۲$.
بنابراین $DB = DI$ و به همین شکل $DC = DI$. قرار دهید. $\theta = \angle BAD$ آنگاه :

$$\frac{۱}{۴}ID.AD = \frac{۱}{۲}ID.(IE + IF)$$
$$= \frac{۱}{۲}BD.IE + \frac{۱}{۲}CD.IF = [BID] + [DIC]$$
$$= \frac{ID}{AD}([BAD] + [DAC]) = \frac{۱}{۲}ID.(AB + AC).\sin\theta$$

و داریم : $\frac{AD}{AB + AC} = ۲\sin\theta$.

فرض کنید x نقطه ای روی نیم خط $\overrightarrow{AB}$ غیر از A باشد به طوری کـه. $DX = DA$ چـون $\angle XBD = \angle DCA$ و $\angle DXB = \angle XAD = \angle DAC$ ، داریم : $\Delta XBD \cong \Delta ACD$ و $BX = AC$. آنگاه :

$$۲\sin\theta = \frac{AD}{AB + AC} = \frac{AD}{AB + BX} = \frac{AD}{AX} = \frac{۱}{۲\cos\theta}$$

پس $۲\sin\theta\cos\theta = \frac{۱}{۲}$ و $\angle BAC = ۲\theta = ۳۰^\circ$ یا ۱۵۰°.

***

مسأله ۴

راه حل اول : همه ی زاویه ها به پیمانه ی ۱۸۰° محاسبه می شود مگر اینکه خلاف آن گفته شود. فرض کنید Q' نقطه ای روی BP باشد به طوریکه $\angle BEQ' = \angle DEP$.
آنگاه : $\angle Q'EP = \angle AED - \angle BEQ' + \angle DEP = \angle BED$
چون $BE = BD$,$\angle BED = \angle EDB$ و چون چهارضلعی BEPD محاطی است. $\angle EDB = \angle EPB$ چ
بنابراین $\angle Q'EP = \angle EPB = \angle EPQ'$,$Q'P = Q'E$. چون BEPD و BAQC محاطی هستند داریم :
$\angle BEQ' = \angle DEP = \angle DBP = \angle CAQ$
$\angle Q'BE = \angle QBA = \angle QCA$
بـا ترکیـب ایـن نتیجـه و $BE = AC$ نتیجـه مـی گیـریم کـه مثلـث هـای EBQ' و ACQ همنهـشت هـستند. پس $BQ' = QC$ و $EQ' = AQ$. بنابراین $AQ + QC = EQ' + BQ' = PQ' + BQ'$ که اگر Q' بین B و P باشـد بـا BP برابر است. E روی $\overrightarrow{AB}$ و P روی $\overrightarrow{CA}$ است، پس E و P هر دو در یک سمت $\overline{BC}$ هستند، پس در یک سمت $\overline{BD}$ نیز هستند. D روی $\overrightarrow{BC}$ و P روی $\overrightarrow{AC}$ است، پس D و P هر دو در یک سمت $\overline{BA}$ هستند، پس در یک سـمت $\overline{BE}$ نیـز هستند.

بنابراین BEPD محاطی است (به همین ترتیب نوشته شده) و $\angle BEQ' = \angle DEP < \angle BEP$ (که در اینجا زوایا را بـه پیمانه ی ۱۸۰° محاسبه نکرده ایم). پس Q' روی پاره خط BP قرار می گیرد.

راه حل دوم :

چون BEPD و BAQC محاطی هستند داریم :

$$\angle PED = \angle PBD = \angle QBC = \angle QAC$$

و

$$\angle EPD = ۱۸۰^\circ - \angle DBE = ۱۸۰^\circ - \angle CBA = \angle AQC$$

که با هم نتیجه می دهند. $\Delta PED \sim \Delta QAC$ در اینصورت :

$$\frac{AC.EP}{DE} = AQ \ , \quad \frac{AC.PO}{DE} = QC$$

همانند راه حل اول BEPD به همین ترتیب نوشته شده محاطی است پس طبق قضیه بطلمیوس داریم :

$$BD.EP + BE.PD = BP.DE$$

با جایگذاری $BD = BE = AC$ داریم :

$$\frac{AC.EP}{DE} + \frac{AC.PD}{DE} = BP$$

یا $AQ + QC = BP$ و حکم ثابت است.

***

مسأله ۵

راه حل : جواب $n = ۱۳۵$ است. دقت کنید که $x^۲ \equiv O \pmod ۴$ وقتـی x زوج باشـد و $x^۲ \equiv ۱ \pmod ۴$ وقتـی x فـرد باشد. اگر n فرد باشد آنگاه همه ی d_i ها فرد هستند و

$$(\text{mod}\,۴)\, n \equiv d_۱^۲ + d_۲^۲ + d_۳^۲ + d_۴^۲ \equiv ۱+۱+۱+۱ \equiv O$$

که تناقض است. پس. $۲ \mid n$

اگـر $۴ \mid n$ آنگـاه $d_۱ = ۱$ و $d_۲ = ۲$ و $(\text{mod}\,۴)\, n \equiv ۱ + O + d_۳^۲ + d_۴^۲ \not\equiv O$ کـه تنـاقض اسـت پـس $۴ \nmid n$.
بنابراین $\{d_۱, d_۲, d_۳, d_۴\} = \{۱,۲,p,q\}$ یا $\{۱,۲,p,۲p\}$ که p و q اعداد اول فرد هستند. در حالت اول $n \equiv ۳ \pmod ۴$ که تناقض است. پس $n = ۵(۱+p^۲)$ و $۵ \mid n$ پس $p = d_۳ = ۵$ و $n = ۱۳۰$.

***

مسأله ۶

راه حل : الف) به پیمانه ی ۲ داریم :

$$\begin{aligned} d(A,B) &= (a_۱ - b_۱) + (a_۲ - b_۲) + \dots + (a_n - b_n) \\ &= (a_۱ + a_۲ + \dots + a_n) + (b_۱ + b_۲ + \dots + b_n) \end{aligned}$$

پس :

$$۳d \equiv d(A,B)+d(B,C)+d(C,A)=۲(\sum_{i=۱}^{n} a_i+\sum_{i=۱}^{n} b_i+\sum_{i=۱}^{n} c_i)$$

پس d باید بر ۲ بخش پذیر باشد.

ب) D را به صورت زیر تعریف کنید : برای هر i، اگر $a_i = b_i = c_i$ آنگاه قرار دهید

$d_i = a_i = b_i = c_i$

در غیر اینصورت دو تا از c_i, b_i, a_i مساوی هستند فرض کنیم d_i این مقدار برابر باشد. ادعا می کنیم D در شرایط گفته شده صدق می کند. فرض کنید α تعداد iهایی باشد که برای آن $a_i \neq b_i$ و $a_i \neq c_i$. β و γ را نیز بطور مشابه تعریف کنید.

توجه کنید که $d(A.D)=\alpha, d(B,D)=\beta$ و $d(C,D)=\gamma$. همچنین داریم :

$$d=d(A,B)=\alpha+\beta$$
$$d=d(B,C)=\beta+\gamma$$
$$d=d(C,A)=\gamma+\alpha$$

پس $\alpha=\beta=\gamma=\frac{d}{۲}$.

***

دور دوم

مسأله ۱

راه حل اول :

با استقرا بر روی $t \geq ۰$ ثابت می کنیم که:

(۱) $$\left\{x_۰, x_۱, \dots, x_{۳^t-۲}\right\}=\left\{\frac{-۳^t-۳}{۲}, -\frac{۳^t-۵}{۲}, \dots, \frac{۳^t-۱}{۲}\right\}$$

(۲) $$x_{۳^t-۱}=-\frac{۳^t-۱}{۱}$$

از این ادعاها نتیجه ی خواسته شده بدست می آید. درستی این ادعا برای $t=۱$ به آسانی دیده می شود. حال فرض کنید این ادعاها برای t درست باشند، نشان می دهیم که برای $t+۱$ نیز درست هستند.

برای هر عدد صحیح مثبت m ، قرار دهید $m=۳^r(۳k+s)$ برای k,r و s صحیح نامنفی که $s\in\{۱,۲\}$ و تعریف کنید : $r_m=r$ و $S_m=s$. آنگاه برای, $m<۳^t$ داریم : $s_m=s_{m+۳^t}=r_{m+۲.۳^t}$ و $r_m=r_{m+۳^t}=r_{m+۲.۳^t}$.

پس :

$$x_m-x_{m-۱}=x_{۳^t+m}-x_{۳^t+m-۱}=x_{۲.۳^t+m}-x_{۲.۳^t+m-۱}$$

با قرار دادن $k<۳^t$, ... ,$m=۱,۲$ و جمع کردن معادله های حاصل داریم :

$$x_k=x_{۳^t+k}-x_{۳^t}$$

$$x_k=x_{۲.۳^t+k}-x_{۲.۳^t}$$

حال با قرار دادن $n=۳^t$ در رابطه ی بازگشتی و با استفاده از فرض استقرا برای قسمت (۲) داریم : $x_{۳^t}=۳^t$ و

$$\left\{x_{۳^t},\dots,x_{۲.۳^t-۲}\right\}=\left\{\frac{۳^t+۳}{۲},\dots,\frac{۳^{t+۱}-۱}{۲}\right\}$$

$$x_{۲.۳^{t-۱}}=\frac{۳^t+۱}{۲}$$

حال با قرار دادن $n=۲.۳^t$ در رابطه ی بازگشتی داریم : $x_{۲.۳^t}=-۳^t$ که می دهد :

$$\left\{x_{۲.۳^t},\dots,x_{۳^{t+۱}-۲}\right\}=\left\{-\frac{۳^{t+۱}-۳}{۲},\dots,-\frac{۳^t+۱}{۲}\right\}$$

$$x_{۲.۳^{t+۱}}-۱=-\frac{۳^{t+۱}-۱}{۲}$$

با ترکیب این با قسمتهای (۱) و (۲) فرض استقرا ادعا برای $t+۱$ ثابت می شود که این اثبات را کامل می کند.

راه حل دوم : برای $n_i\in\{-۱,۰,۱\}$ فرض کنید که عدد $[n_m n_{m-۱}\dots n_۰]$ در مبنای $\bar{۳}$ برابر $\sum_{i=۰}^{m} n_i ۳^i$ باشد. با استقرا روی k، به سادگی می توان نشان داد که هر عدد در مبنای $\bar{۳}$ با حداکثر k رقم برابر است با :

$$\left\{\frac{-۳^k-۱}{۲},-\frac{۳^k-۳}{۲},\dots,\frac{۳^k-۱}{۲}\right\}$$

که نشان می دهد هر عدد صحیح در مبنای $\bar{۳}$ دارای نمایش یگانه است. حال با استقرا روی n ثابت می کنیم که اگر $n=a_m a_{m-۱}\dots a_۰$ در مبنای ۳ باشد آنگاه در مبنای $\bar{۳}$، $x_n=[b_m b_{m-۱}\dots b_۰]$ که $b_i=-۱$ اگر $a_i=۲$ و $b_i=a_i$ در غیر اینصورت برای حالت پایه ی استقرا داریم : $x_۰=۰=[۰]$.

حال فرض می کنیم که ادعا برای $n-1$ درست است. اگر $n = a_m a_{m-1} \ldots a_{r+1} 1\underbrace{00\ldots0}_{r}$ آنگاه :

$$
\begin{aligned}
x_n &= x_{n-1} + \frac{3^{r+1}-1}{2} \\
&= \left[b_m b_{m-1} \ldots b_i \ 0 \underbrace{-1 -1 \ldots -1}_{r} \right] + \left[\underbrace{11\ldots1}_{r+1} \right] \\
&= \left[b_m b_{m-1} \ldots b_i \ 1 \underbrace{00\ldots0}_{r} \right]
\end{aligned}
$$

و اگر $n = a_m a_{m-1} \ldots a_i \ 2 \underbrace{00\ldots0}_{r}$ آنگاه :

$$
\begin{aligned}
x_n &= x_{n-1} + \left(-\frac{3^{r+1}+1}{2}\right) \\
&= \left[b_m b_{m-1} \ldots b_i \ 1 \underbrace{-1 -1 \ldots -1}_{r} \right] + \left[-1 \underbrace{11\ldots1}_{r+1} \right] \\
&= \left[b_m b_{m-1} \ldots b_i \ -1 \ldots \underbrace{00\ldots0}_{r} \right]
\end{aligned}
$$

در هر حالت ادعا برای n نیز درست است که استقرا را کامل می کند.
توجه کنید که هر عدد صحیح در مبنای $\bar{3}$ یگانه است. پس هر عدد صحیح دقیقاً یکبار در $\{x_n\}_{n \geq 0}$ ظاهر می شود.

***

مسأله ۲

راه حل : دایره ای به شعاع r در نظر بگیرید که شامل n نقطه ای با مختصات صحیح است. ثابت می کنیم. $n < 6\sqrt[3]{\pi r^2}$ چون $r > 1$ و $8 > 6\sqrt[3]{\pi}$ می توانیم فرض کنیم. $n > 8$. n نقطه روی دایره را به ترتیب و در جهت خلاف عقربه های ساعت $P_1, P_2, \ldots, P_n$ بنامید.

چون مجموع کمان های $P_1P_3, P_2P_4, \ldots, P_nP_2$ (در جهت خلاف عقربه های ساعت) برابر است با 4π، پس یکی از کمان ها مثلاً P_iP_{i+2} حداکثر برابر $\frac{4\pi}{n}$ است. بدون کاستن از کلیت فرض کنید این کمان P_1P_3 باشد.

فرض کنید مثلث ABC داخل کمانی به زاویه ی $\frac{۴\pi}{n}$ محاط شده باشد. مساحت این مثلث هنگامی بیشینه است که A ، C در نقاط انتهایی کمان و B در نقطه ی میانی کمان قرار بگیرد (جایی که فاصله اش با خط AC بیشترین است).

در اینصورت $\angle CAB = \angle BCA = \frac{\pi}{n}$ و $\angle ABC = ۱۸۰^\circ - \frac{۲\pi}{n}$، پس :

$$[ABC] = \frac{abc}{۴r} = \frac{(۲r\,Sin\frac{\pi}{n})(۲r\,Sin\frac{۲\pi}{n})(۲r\,Sin\frac{\pi}{n})}{۴r}$$
$$\le \frac{(۲r\frac{\pi}{n})(۲r\frac{۲\pi}{n})(۲r\frac{\pi}{n})}{۴r}$$
$$= \frac{۴r^۲\pi^۳}{n^۳}$$

چون مثلث $P_۱P_۲P_۳$ در درون کمانی به زاویه ی $\frac{۴\pi}{n}$ محاط شده است، طبق استدلال بالا، $[P_۱P_۲P_۳] \le \frac{۴r^۲\pi^۳}{n^۳}$

چون $P_۱ , P_۲$ و $P_۳$ نقاط با مختصات صحیح هستند $[P_۱P_۲P_۳]$ حداقل $\frac{۱}{۲}$ است. (این را می توان با استفاده از فرمول پیک $k = I + \frac{۱}{۲}B - ۱$ یا با فرمول $k = \frac{۱}{۲}|x_۱y_۲ - x_۲y_۱ + x_۲y_۳ - x_۳y_۲ + x_۳y_۱ - x_۱y_۳|$ ثابت کرد).

بنابراین :

$$\frac{۱}{۲} \le [P_۱P_۲P_۳] \le \frac{۴r^۲\pi^۳}{n^۳} \Rightarrow$$
$$n^۳ \le ۸r^۲\pi^۳ \Rightarrow$$
$$n \le \sqrt[۳]{۸r^۲\pi^۳} = ۲\pi\sqrt[۳]{r^۲} < ۶\sqrt[۳]{\pi r^۲}$$

***

مسأله ۳

راه حل : قرار دهید $(x,y) = (x,x^۲)$ در اینصورت :

$$f(f(x)+x^۲) = f(۰) + ۴x^۲f(x) \qquad (۱)$$

قرار دهید $(x,y) = (x,-f(x))$ در اینصورت :

$$f(۰) = f(x^۲ + f(x)) - ۴f(x)^۲ \qquad (۲)$$

با جمع کردن (۱) و (۲) داریم $۴f(x)(f(x)-x^۲)=۰$. که نتیجه می دهد برای هر x، $f(x)=۰$ یا $f(x)=x^۲$.
(همچنین می توانیم این نتیجه را با قرار دادن $y=\frac{x^۲-f(x)}{۲}$ در معادله ی اولیه به دست آوریم). روشن است که $f(x)=۰$ و $f(x)=x^۲$ در معادله داده شده صدق می کنند.

حال ثابت می کنیم که f نمی تواند هیچ ترکیبی از این دو تابع باشد. فرض کنید $a\neq ۰$ وجود دارد که به طوریکه $f(a)=۰$. با قرار دادن $x=a$ در معادله اصلی داریم : $f(y)=f(a^۲-y)$. اگر $y\neq\frac{a^۲}{۲}$، آنگاه $y^۲\neq(a^۲-y)^۲$ پس $f(y)=f(a^۲-y)=۰$.

بنابراین $f(y)=۰$ برای هر $a\neq\frac{a^۲}{۲}$. همینطور با انتخاب $x=۲a$ یا یک مقدار دیگر در معادله ی اصلی می توانیم به طور مشابه نشان دهیم $f(\frac{a^۲}{۲})=۰$ پس $f(x)=۰$ برای هر x یا $f(x)=x^۲$ برای هر x. پس ادعای ما ثابت می شود.

***

مسأله ۴

راه حل : $\overline{AP}$ را امتداد دهید تا $\overline{BD}$ را در نقطه ی E قطع کند. ادعا می کنیم $BE=ED$ که در اینصورت $\overline{AP}$ میانه ای از مثلث ABD می شود داریم :

$$BE=ED \Leftrightarrow BE^۲=ED^۲=EP.EA$$
$$\Leftrightarrow \Delta BEP\sim\Delta AEB \Leftrightarrow \angle EBP=\angle BAE$$

فرض کنید N نقطه ی دوم برخورد w با AB باشد با استفاده از زاویه ها و اندازه کمان ها به پیمانه ی ۱۸۰°، چون $\overline{AD}$ زاویه ی بین خطهای AN و AC را نصف می کند داریم :

$$\angle BAE=\angle NAP=\frac{\hat{ND}-\hat{PD}}{۲}=\frac{\hat{DM}-\hat{PD}}{۲}=\angle DBM=\angle EBP \text{ و } \hat{DM}=\hat{ND}$$

و اثبات کامل می شود.

***

مسأله ۵

راه حل : یک چند ضلعی را سبز (قرمز) می گوئیم اگر رأسهای آن همه سبز (قرمز) باشند. یک پاره خط را سبز گوئیم (یا به همین صورت قرمز) اگر هر دو نقطه ای انتهایی آن سبز (قرمز) باشند.

برهان خلف : فرض کنید هیچ نقاط قرمز و سبزی با شرایط گفته شده وجود ندارند، و فرض کنید b,a و c اضلاع مثلث ABC باشد. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $a \le b,c$. ابتدا ثابت می کنیم هیچ پاره خط قرمزی به طول a وجود ندارد.

اگر XY پاره خط قرمزی با طول a باشد آنگاه دایره های واحد به مرکز X و Y باید به طور کامل سبز باشند. حال Z را طوری در نظر بگیرید که $\Delta XYZ \cong \Delta ABC$. دایره واحد به مرکز Z باید کاملاً قرمز باشد چون در غیراینصورت یک مثلث سبز با رأس هایی حول X و Y تشکیل می دهد که تناقض است.

در این دایره می توانیم پاره خط قرمز پیدا کنیم. تناقض :

حال تمام صفحه نمی تواند سبز باشد پس نقطه ی قرمز R وجود دارد. دایره w به مرکز R و شعاع a باید کاملاً سبز باشد. سپس دو نقطه ی D و E را روی W بگیرید که $DE = a$.

چون $a \le b,c$ می توانیم F را خارج از W طوری در نظر بگیریم که $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ پس F باید قرمز باشد. بنابراین اگر DE را حول R بچرخانیم، F یک دایره ی کاملاً قرمز با شعاع بزرگتر از a می کشد و روی این دایره می توانیم دو نقطه با فاصله ی a از هم پیدا کنیم که تناقض است.

***

دور سوم

مسأله ۱

راه حل : برای مجموعه ی T، فرض کنید $|T|$ تعداد عناصر T باشد. مجموعه ی $T \subseteq S$ را ۲- پوششی گویند اگر i و j موجود باشند به طوریکه $T \subseteq A_i \cup A_j$ (ولی i و j لزوماً متمایز نیستند).

فرض کنید A مجموعه ای باشد که در میان زیر مجموعه های ۲- پوششی S کمترین عنصر را داشته باشد.

خانواده های مجموعه های $S_1 = \{A\cap A_1, A\cap A_2, \dots, A\cap A_k\}$ را در نظر بگیرید ($A\cap A_i$ ممکن است با یک $A\cap A_j$ مساوی باشد که i و j متمایزند، ما در اینجا از مجموعه های مساوی صرفنظر می کنیم). چون A ۲- پوششی نیست اگر $X \in S_1$، آنگاه $A - X \notin S_1$. پس حداکثر نیمی از زیر مجموعه های با تعداد اعضای $|A|$ در S_1 هستند و $|S_1| \le 2^{|A|-1}$. از طرف دیگر، قرار دهید $B = S - A$ و خانواده ی مجموعه های $S_2 = \{B\cap A_1, B\cap A_2, \dots, B\cap A_k\}$ را در نظر بگیرید.

ادعا می کنیم که اگر $X \in S_2$ آنگاه $B - X \notin S_2$. فرض خلف بکنید که X و $B-X$ هر دو در S_2 باشند که $X = B\cap A_\ell$ و $B - X = B\cap A_{\ell'}$ طبق مینمال بودن j,i,A و m وجود دارند به طوریکه $A_i \cup A_j = A\setminus\{m\}$ در اینصورت :

$$\left|A_\ell \cup A_{\ell'} \cup A_i \cup A_j\right| = n-1$$

که تناقض است. پس فرضی ها اشتباه بوده است و $|S_2| \le 2^{|B|-1} = 2^{n-|A|-1}$. چون هر مجموعه ی A_i از طریق اشتراکش با A و $B = S - A$ بطور یگانه مشخص می شود.

نتیجه می گیریم :

$$k \le |S_1|.|S_2| \le 2^{n-2}.$$

***

مسأله ۲

راه حل : فرض کنید O و R مرکز شعاع دایره ی w و r شعاع دایره ی γ و I مرکز دایره ی محاطی مثلث ABC باشد خط های AI و CI را امتداد دهید تا w را به ترتیب در نقاط M_A و M_C قطع کند.

همچنین فرض کنید خط AD در نقطه ی F بر γ مماس باشد و خط CE در نقطه ی G بر γ مماس باشد . در آخر فرض کنید d طول مماس خارجی از M_A بر W باشد. توجه کنید که چون خط AM_A زاویه ی $\angle DAC$ را نصف می کند داریم : $DM_A = M_AC$ و بطور مشابه $EM_C = M_CA$.

اگر قضیه ی بطلمیوس تعمیم یافته را برای دایره های D, C, M_A و γ (بعضی از آن ها فقط یک نقطه هستند) که بر دایره W مماس خارج هستند داریم :

$$CG.DM_A = M_AC.DF + d.CD$$
$$d^2 = M_AC^2\left(\frac{CG - DF}{CD}\right)^2$$

توجه کنید که d^2 برابر است با قوت نقطه ی M_A نسبت به دایره ی γ، پس $d^2 = M_As^2 - r^2$. طبق قضیه ی استوارت برای خط سوایی M_AM در مثلث SOM_A، داریم :

$$M_AS^2.OM + M_AO^2.MS = M_AM^2.SO + SM.MO.SO$$
$$M_AS^2.R + R^2.r = M_AM^2.(R + r) + r.R.(R + r)$$
$$M_AM^2(R + r) = (M_AS^2 - r^2)R = d^2R$$

با ترکیب دو معادله ی شامل d^2 داریم :

$$M_AC^2\left(\frac{CG - DF}{CD}\right)^2 = \frac{M_AM^2(R + r)}{R}$$
$$\left(\frac{M_AM}{M_AC}\right)^2 = \left(\frac{R}{R + r}\right)\left(\frac{CG - DF}{CD}\right)^2$$

بطور مشابه :

$$\left(\frac{M_CM}{M_CA}\right)^2 = \left(\frac{R}{R + r}\right)\left(\frac{AF - EG}{AE}\right)^2$$

حال :

$$CG - DF = (CG + GB) - (DF + FB) = CB - DB$$

و بطور مشابه :

$$AF - BG = (AF + FB) - (EG + GB) = AB - BE$$

از طرفی چون ACDE دوری است، با دنبال کردن زاویه ها داریم $\angle BDC = \angle AEC$ و $\angle DCB = \angle BAE$ پس $\Delta CBD \sim \Delta ABE$ و :

$$\frac{CG - DF}{CD} = \frac{CB - DB}{CD} = \frac{AB - BE}{EA} = \frac{AF - EG}{AE}$$

بنابراین داریم :

$$\frac{M_A M}{M_A C} = \frac{M_C M}{M_C A} \Rightarrow \frac{\operatorname{Sin} \angle MAM_A}{\operatorname{Sin} \angle M_A AC} = \frac{\operatorname{Sin} \angle M_C CM}{\operatorname{Sin} \angle ACM_C}$$

اگر فرم مثلثاتی قضیه سوا (Ceva) در مثلث AMC را برای خطهای CM_C, AM_A و MI داریم :

$$\frac{\operatorname{Sin} \angle MAM_A}{\operatorname{Sin} \angle M_A AC} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \angle ACM_C}{\operatorname{Sin} \angle IMA} = ۱$$

به طوریکه :

$$\operatorname{Sin} \angle CMI = \operatorname{Sin} \angle IMA \Rightarrow \angle CMI = \angle IMA$$

چون $\angle AMC < ۱۸۰^\circ$. بنابراین، خط MI زاویه ی $\angle AMC$ را نصف می کند پس نیمساز زاویه ی $\angle AMC$ از I، مرکز دایره محاطی ABC می گذرد.

***

مسأله ۳

راه حل : قرار دهید. $T = \{C_۱, C_۲, \dots, C_n\}$ برای هر $s \in S$ و $C \in T$ تعریف کنید :

$$f(s, C) = \begin{cases} ۰ & s \notin C \\ \frac{۱}{k} & s \in C \end{cases}$$

که k تعداد دایره هایی است که از s می گذرند (شامل C). پس :

$$\sum_{C \in T} f(s, C) = ۱ \quad \text{برای هر } s \in S.$$

از طرفی دیگر، برای یک دایره ی ثابت $C \in T$، قرار دهید $s_۰ \in S \cap C$ نقطه ای باشد به طوریکه :

$$f(S_۰, C) = \min\{f(s, C) \mid s \in S \cap C\}$$

فرض کنید $C, C_۲, \dots, C_k$ دایره هایی هستند که از $s_۰$ می گذرند. در اینصورت C دایره های $C_۲, \dots, C_k$ را در نقاط متمایز $s_۲, \dots, s_k$ نیز قطع می کند.

بنابراین :

$$\sum_{s\in C} f(s,C) \geq \frac{1}{k} + \frac{k-1}{k} = 1$$

داریم :

$$|S| = \sum_{s\in S}\sum_{C\in T} f(s,C) = \sum_{C\in T}\sum_{C\in T} f(s,C) \geq n$$

***

مسأله ۴

راه حل : اگر $n=1$ آنگاه $x_1 = 0$ و جایگشت $\sigma(1)=1$ کافی است. اگر $n=2$ آنگاه $|x_1|,|x_2| \leq 1$ و $|x_1 + x_2| = 0$ و جایگشت $(\sigma(1),\sigma(2)) = (1,2)$ کافی است. حال فرض کنید $n \geq 3$. x_i ها را بعنوان بردار در نظر بگیرید. مسأله معادل با این است که اگر از یک نقطه روی محور اعداد شروع بتوانیم روی n بردار $x_1, x_2, \ldots, x_n$ با ترتیبی حرکت کنیم که در نهایت بازه ی $[m, m+2-\frac{1}{n})$ بمانیم.

x_i را طولانی بنامید اگر $|x_i| \geq 1-\frac{1}{n}$ و در غیراینصورت آن را کوتاه بگوئید. همچنین x_i را مثبت بگوئید اگر $x_i \geq 0$ و منفی بگویید اگر $x_i < 0$. بدون کاستن از کلیت فرض کنید که تعداد بردارهای مثبت حداقل برابر تعداد بردارهای منفی است (در غیراینصورت می توانیم هر x_i را با $-x_i$ جایگزین کنید) حرکت خود را در دو مرحله انجام می دهیم :

۱- در ابتدا یک در میان روی بردارهای مثبت طولانی و بردارهای منفی طولانی حرکت می کنیم تا دیگر بردار منفی طولانی نداشته باشیم. فرض کنید در یک زمان در نقطه ی P هستیم.

توجه کنید که در این مرحله از حرکت ما، حرکت در امتداد هر دو بردار جهت ما را حداکثر به اندازه ی $\frac{1}{n}$ در یک جهت عوض می کند. بنابراین اگر بعد از P روی $2t \leq n$ بردار حرکت کنیم، در محدوده ی $\frac{t}{n} \leq \frac{1}{2}$ از P می مانیم. اگر روی $2t+1$ بردار بعد از P حرکت کنیم در محدوده ی $\frac{t}{n}+1 \leq \frac{3}{2} < 2-\frac{1}{n}$ از P می مانیم. بنابراین، در این مرحله ما در بازه ی $I=[m, m+2-\frac{1}{n})$ با طول $2-\frac{1}{n}$ می مانیم.

۲- بعد از مرحله ی (۱)، ادعا می کنیم که تا وقتی برداری وجود داشته باشد که روی آن حرکت نکرده ایم و ما در داخل I باشیم، حتماً برداری وجود دارد که تا به حال انتخاب نشده و اگر روی آن حرکت کنیم در داخل I می مانیم در اینصورت در پایان حرکتمان روی تمام بردارها در داخل I می مانیم.

اگر هیچ بردار مثبتی نباشد، می توانیم روی هر بردار منفی حرکت کنیم و برعکس. پس فرض کنید که هم بردارهای مثبت و هم بردارهای منفی داریم. چون همه ی بردارهای طولانی منفی را در مرحله ی (۱) انتخاب کرده ایم، در این مرحله بردارهای منفی کوتاه مانده اند.

حال اگر در سمت راست $m+1-\frac{1}{n}$ باشیم می توانیم روی یک بردار منفی کوتاه بدون اینکه به m برسیم یـا از آن رد کنیم. در عوض اگر رو یا در سمت چپ $m+1-\frac{1}{n}$ باشیم می توانیم روی یک مدار مثبت حرکت کنیم (کوتـاه یا طولانی) بدون اینکه از $m+2-\frac{1}{n}$ عبور کنیم. بنابراین می توانیم سفرمان را تمام کنیم و این نتیجه می دهد کـه جایگشت ۶ وجود دارد.

اما فرض کنید $\frac{1}{n}$ با $\frac{4}{n}$ عوض شود. برای $n=1$ این کران هرگز برقرار نیست و برای $n=2$ بـرای بعـضی مقـادیر ایـن کـران برقـرار اسـت (مـثلاً $x_1=1$ و $x_2=-1$). اگـر $n=2k+1\geq 3$ یـا $n=2k+2\geq 4$، فـرض کنید $x_1=x_2=\ldots=x_k=1$ و $x_{k+1}=x_{k+2}=\ldots=x_{2k+1}=\frac{-k}{k+1}$. اگر n زوج باشد، می توانیم قرار دهـیم $x_n=0$ و در جایگشت این جمله را در نظر نگیریم.

اگر دو عدد مجاور در جایگشت برابر باشند آنگاه مجموع این دو برابر اسـت بـا $-2.\frac{k}{k+1}\leq -2+\frac{4}{n}$ یـا $2\geq 2-\frac{4}{n}$

بنابراین در جایگشت بردارهای ۱ و $-\frac{k}{k+1}$ باید متناوب باشند و با $\frac{-k}{k+1}$شروع شود و پایان یابد.

بنابراین مجموع دو بردار اولی و آخری برابر است با $-2\frac{k}{k+1}$، پس $2k-1$ جمله ی وسطی مجموعشان برابر است با $2-\frac{4}{n}\geq 2\frac{k}{k+1}$ که تناقض است. بنابراین $\frac{1}{n}$ نمی تواند با $\frac{4}{n}$ جایگزین شود.

***

مسأله ۵

راه حل : قرار دهید $\sigma=\sum_{i=1}^{n}|r_i|$ و برای $i=0,1,2$ تعریف کنید :

$$S_i=\sum_{r_j\geq 0,\, j\equiv i} r_j \quad \text{و} \quad t_i=\sum_{r_j<0,\, -j\equiv i} r_j$$

که همنهشتی ها در پیمانه ی ۳ محاسبه شده اند. در اینصورت داریـم : $\sigma=s_1+s_2+s_3-t_1-t_2-t_3$ و 2σ برابر است با :

$$(s_1+s_2)+(s_2+s_3)+(s_3+s_1)-(t_1+t_2)-(t_2+t_3)-(t_3+t_1)$$

بنابراین $i_1\neq i_2$ وجود دارد به طوریکه $s_{i_1}+s_{i_2}\geq\frac{\sigma}{3}$ یا $t_{i_1}+t_{i_2}\leq\frac{-\sigma}{3}$ یا هر دو. بدون کاسته شدن از کلیـت، فـرض کنید $s_{i_1}+s_{i_2}\geq\frac{\sigma}{3}$ و $|s_{i_1}+s_{i_2}|\geq|t_{i_1}+t_{i_2}|$.

بنابراین : $s_{i_1}+s_{i_2}+t_{i_1}+t_{i_2}\geq 0$.

داریم :

$$\left[s_{i۱}+s_{i۲}+t_{i۱}\right]+\left[s_{i۱}+s_{i۲}+t_{i۲}\right]\geq s_{i۱}+s_{i۲}\geq \frac{\sigma}{۳}$$

بنابراین حداقل یک از $s_{i۱}+s_{i۲}+t_{i۱}$ و $s_{i۱}+s_{i۲}+t_{i۲}$ بزرگتر یا مساوی $\frac{\sigma}{۶}$ است.

***

۱۱- ایرلند

مسأله ۱

راه حل : قرار دهید $y=\sqrt{x+۱}$. بنابراین $y\in(۰,۱)\cup(۱,\infty)$ و $x=y^۲-۱$. پس نامساوی بالا معادل است با :

$$\frac{(y^۲-۱)^۲}{(y^۲-y)^۲}<\frac{(y^۲-۱)^۲+۳(y^۲-۱)+۱۸}{y^۴}\Leftrightarrow\frac{(y^۲+۱)^۲}{y^۲}<\frac{y^۴+y^۲+۱۶}{y^۴}$$

$$\Leftrightarrow (y+۱)^۲y^۲<y^۴+y^۲+۱۶\Leftrightarrow ۲y^۳<۱۶$$

بنابراین نامساوی دقیقاً موقعی برقرار است که $y<۲$ یا $y\in(۰,۱)\cup(۱,۲)$ و یا $x\in(-۱,۰)\cup(۰,۳)$

***

مسأله ۲

راه حل : در واقع برای هر عدد طبیعی n، نامتناهی جمله دنباله فیبوناچی موجودند که بر n بخش پذیر باشند. دنباله فیبوناچی اینگونه تعریف می شود : $F_۰=۰$ و $F_۱=۱$ و برای هر $k\geq۰$ ، $F_{k+۲}=F_{k+۱}+F_k$. زوج های مرتب $(F_۰,F_۱),(F_۱,F_۲),\ldots$ متشکل از جملات متوالی دنباله فیبوناچی را در نظر بگیرید. چون دنباله فیبوناچی نامتناهی است و تنها $n^۲$ حالت برای زوج های مرتب به پیمانه n وجود دارد، دو زوج از زوج های $(F_j,F_{j+۱})$ باید همنهشت باشند ؛ پس i و m وجود دارند به طوریکه $F_i\underset{n}{\equiv}F_{i+m}$ ، $F_{i+۱}\underset{n}{\equiv}F_{i+m+۱}$.

اگر $i\geq۱$، آنگاه : $F_{i-۱}\equiv F_{i+۱}-F_i\equiv F_{i+m+۱}-F_{i+m}\equiv F_{i+m-۱}\pmod n$

و همچنین : $F_{i+۲}\equiv F_{i+۱}+F_i\equiv F_{i+m+۱}+F_{i+m}\equiv F_{i+۲+m}\pmod n$

اگر همینطور ادامه دهیم داریم : $F_j\equiv F_{j+m}\pmod n$ برای هر $j\geq۰$. بویژه :

$$۰\equiv F_۰\equiv F_m\equiv F_{۲m}\equiv\ldots\pmod n$$

بنابراین اعداد F_m ، $F_{۲m}$, ... همگی بر n بخش پذیرند. اگر قرار دهید $n=۱۰۰۰$ حکم مسأله به اثبات می رسد.

***

مسأله ۳

راه حل : طبق قضیه سوا، خطوط سوایی CF, BE, AD در ΔABC همرأسند اگر و فقط اگر :

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

در این مسئله $\frac{AF}{FB}=1$, $\frac{CE}{EA}=\frac{a}{c}$ بنابراین CF, BE, AD همرأسند اگر وفقط اگر $\frac{BD}{DC}=\frac{c}{a}$. این رابطه برقرار است اگر وفقط اگر $BD=\frac{ac}{a+c}$ و $DC=\frac{a^2}{a+c}$. چون $AB^2-BD^2=BD^2=AC^2-CD^2$ این دو تساوی دقیقاً موقعی برقرارند که تساوی های زیر برقرا باشند :

$$AB^2-(\frac{ac}{a+c})^2=AC^2-(\frac{a^2}{a+c})^2$$
$$(a+c)^2c^2-a^2c^2=(a+c)^2b^2-a^4$$
$$a^4-a^2c^2=(b^2-c^2)(a+c)^2$$
$$a^2(a-c)=(b^2-c^2)(a+c)$$

بنابراین سه خط همرأسند اگر و فقط اگر تساوی داده شده برقرار باشد. همچنین با استفاده از قانون کسینوس ها داریم :

$$\frac{BD}{DC}=\frac{c\cos B}{b\cos C}=\frac{c}{b}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2-c^2}=\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}$$

پس به طریقی دیگر می توان گفت این عبارت با $\frac{c}{a}$ برابر است اگر و فقط اگر تساوی داده شده برقرار باشد.

***

مسأله ۴

راه حل : یک دستگاه مختصات برای سطح مربعی طوری در نظر بگیرید که رئوس مربع ها نقاط شبکه ای $\{(x,y)|0\le x,y\le 100, x,y\in Z\}$ باشند.

ناحیه مستطیلی $\{(x,y)|a\le x\le b, c\le y\le d\}$ را با $[(a,c)-(b,d)]$ نشان دهید.

الف) واضح است که هر مستطیل که طول یکی از اضلاعش بر ۳ بخش پذیر باشد را می توان با کاشی ها پوشاند. پس ابتدا چهار مستطیل :

$[(0,0)-(48,52)]$, $[(0,52)-(52,100)]$
$[(52,48)-(100,100)]$, $[(48,0)-(100,52)]$

را کاشی کنید تنها قسمت باقی مانده $[(52,52)-(48,48)]$ است. چون ناحیه مرکزی $[(51,51)-(49,49)]$ حذف شده است، پس واضح است که قسمت باقی مانده را می توان با کاشی ها پوشاند.

ب) بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید که $([۲,۲]-(۰,۰)]$ مربع ۲×۲ حذف شده باشد. هر مربع $[(x,y)-(x+۱,y+۱)]$ باقی مانده را با اعداد $L(x,y)\in\{۰,۱,۲\}$ نامگذاری به گونه ای که $L(x,y)\equiv x+y \pmod ۳$. ۳۳۳۳ مربع با ۰ نامگذاری شده اند. ۳۳۳۱ مربع با ۱ و ۳۳۳۲ مربع با ۲. چون هر مستطیل ۳×۱، از هر کدام از سه شماره ۰ و ۱ و ۲ یکی را می پوشاند. سطح مربعی را نمی توان کاشی کرد.

***

مسأله ۵

راه حل : هر عدد صحیح نامنفی n را در مبنای ۲ بنویسید. (مثلاً $۱۰۰=۱۱۰۰۱۰۰_۲$). حال فرض کنید دنباله صفر و یک به دست آمده یک عدد در مبنای سه است. (مثلاً $۹۸۱=۱۱۰۰۱۰۰_۳$) این عدد صحیح را t_n بنامید $(t_{۱۰۰}=۹۸۱)$.

با استقرای قوی ثابت می کنیم $t_n=u_n$. واضح است که $t_۰=u_۰$, $t_۱=u_۱$. پس فرض کنید $t_k=u_k$ برای هر $k<n$ نشان می دهیم $t_n=u_n$. ابتدا نشان می دهیم در دنباله ی $t_۰,t_۱,t_۲,\dots,t_n$ هیچ سه عددی وجود ندارند که تشکیل تصاعد عددی بدهند که نتیجه می دهد : $u_n\le t_n$. سه عدد دلخواه $۰\le\alpha<\beta<\gamma\le n$ را انتخاب کرده و $t_\alpha, t_\beta, t_\gamma$ در پایه ۳ را در نظر بگیرید. t_α و t_γ شامل هیچ عدد ۲ ای نیستند پس در جمع $t_\alpha+t_\gamma$، سه بر یکی انجام نمی شود. همچنین توجه کنید که t_α, t_γ حداقل در یک رقم با هم متفاوتند پس این رقم در $t_\alpha+t_\gamma$ برابر با ۱ است. از طرف دیگر $۲t_\beta$ فقط شامل ۲ و ۰ است.

پس $t_\alpha+t_\gamma\neq ۲t_\beta$، برای هر α,β,γ. بنابراین بین $t_۰,t_۱,t_۲,\dots,t_n$، هیچ سه عددی موجود نیستند که تشکیل تصاعد عددی بدهند. درنتیجه $u_n\le t_n$. حال نشان می دهیم برای هر $k\in\{t_{n-۱}+۱, t_{n-۱}+۲,\dots,t_n-۱\}$، اعداد a و b موجودند که $t_a+k=۲t_b$ که نتیجه می شود $u_n\ge t_n$.

ابتدا توجه کنید که بسط k در مبنای ۳ شامل یک ۲ است، چون تنها اعداد صحیح نامنفی که در مبنای ۳ فقط شامل ۰،۱ را هستند، t_iها هستند. بنابراین می توانیم دو عدد b و a را بیابیم به طوریکه : $k<t_b<t_a\le ۰$ و

- وقتی که بسط k در مبنای ۳ یک ۰ یا ۱ را شامل شود، t_a و t_b نیز هر کدام همان رقم را در مکان متناظر در بسط مبنای ۳ شان داشته باشند.
- وقتی که بسط k در مبنای ۳ شامل یک۲ شود، t_a رقم ۰ و t_b رقم ۱ را در مکان متناظر در بسط مبنای ۳ شان داشته باشند.

t_a و t_b ساخته شده در نا مساوی $t_a<t_b<k$ صدق می کنند و $t_a+k=۲t_b$. بنابراین t_a, t_b و k تشکیل تصاعد عددی می دهند. بنابراین $u_n\ge t_n$ و از رابطه $u_n\le t_n$ داریم : $u_n=t_n$

پس : $u_{۱۰۰}=t_{۱۰۰}=۹۸۱$.

***

مسأله ۶

راه حل : ابتدا توجه کنید که $(x,y)=(-۲,۶),(-۲,-۶)$ هر دو معادله صدق می کنند و تنها جواب های ممکن برای $x=-۲$ هستند. پس فرض کنید $x\neq -۲$. اگر $y^{۲}=(x+۸)(x^{۲}+۲)$ را در $y^{۲}+۱۶+۱۶x-۵x^{۲}=۴(x+۲)y$ قرار دهید. داریم :

$$۴(x+۲)y=x^{۳}+۳x^{۲}+۱۸x+۳۲=(x+۲)(x^{۲}+x+۱b)$$

با تقسیم بر $x+۲$ بدست می آوریم : $۴y=x^{۲}+x+۱۶$ با حل این معادله بر حسب y و با توجه به معادله اول به معادله زیر می رسیم :

$$x^{۴}-۱۴x^{۳}-۹۵x^{۲}=۰ \text{ یا } x^{۲}(x+۵)(x-۱۹)=۰.$$

بنابراین $x\in\{۰,-۵,۱۹\}$ با بکارگیری معادله $۴y=x^{۲}+x+۱۶$ بدست می آوریم $(۱۹,۹۹)$ یا $(x,y)=(۰,۴),(-۵,۹)$. به راحتی دیده می شود که هر یک از این پاسخ ها در معادله صدق می کنند.

***

مسأله ۷

راه حل : وقتی (a,b) را در (i) قرار می دهیم، می نوسیم $(i)_{a,b}$. (a,b نسبت به هم اول) و وقتی (p,q) را در (ii) قرار می دهیم می نویسیم $(ii)_{(p,q)}$.

ابتدا $f(۱),f(۲),f(۴)$ را می یابیم. طبق $(i)_{۱,b}$ ، $f(۱)=۱$. طبق $(i)_{۲,۳}$ داریم : $f(۶)=f(۲)f(۳)$ و از $(ii)_{۳,۳}$ داریم $f(۶)=۲f(۳)$. پس $f(۲)=۲$ و طبق $(ii)_{۲,۲}$ ، $f(۴)=۴$. از $(ii)_{۳,۲},(ii)_{۵,۲}$ به دست می آوریم :

$$f(۵)=f(۳)+۲ \quad , \quad f(۷)=f(۵)+۲=f(۳)+۴$$

طبق $(ii)_{۵,۷}$ ، $f(۱۲)=f(۵)+f(۷)=۲f(۳)+b$ و از $(i)_{۴,۳}$ به دست می آوریم $f(۱۲)=۴f(۳)$ پس : $f(۳)=۳$ و با توجه به دو تساوی فوق $f(۷)=۷,f(۵)=۵$. حال $f(۱۱),f(۱۳)$ را بدست می آوریم، طبق $(i)_{۳,۵}$ داریم $f(۱۵)=۱۵$ و با استفاده از $(ii)_{۱۳,۲},(ii)_{۱۱,۲}$ داریم :

$$f(۱۳)=f(۱۵)-f(۲)=۱۳$$
$$f(۱۱)=f(۱۳)-f(۲)=۱۱$$

نهایتاً $f(۱۹۹۹)$ را به دست می آوریم به چند بار به کارگیری (i) داریم :

$$f(۲۰۰۲)=f(۲.۷.۱۱.۱۳)=f(۲)f(۷)f(۱۱)f(۱۳)=۲۰۰۲$$

حال چون ۱۹۹۹ اول است از $(ii)_{۱۹۹۹,۳}$ داریم :

$$f(۱۹۹۹)=f(۲۰۰۲)-f(۳)=۱۹۹۹$$

***

مسأله ۸

راه حل : با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز داریم :

$$[(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)]\times\left(\frac{a^۲}{a+b}+\frac{b^۲}{b+c}+\frac{c^۲}{c+d}+\frac{d^۲}{d+a}\right)\geq(a+b+c+d)^۲$$

بنابراین :

$$\frac{a^۲}{a+b}+\frac{b^۲}{b+c}+\frac{c^۲}{c+d}+\frac{d^۲}{d+a}\geq\frac{۱}{۲}(a+b+c+d)=\frac{۱}{۲}$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط و اگر :

$\frac{a+b}{a}=\frac{b+c}{b}=\frac{c+d}{c}=\frac{d+a}{d}$ یعنی اگر و فقط اگر $a=b=c=d=\frac{۱}{۴}$.

***

مسأله ۹

راه حل : اگر m شرط داده شده را داشته باشد، باید توان چهارم کامل باشد. پس می توانیم آن را بصورت $m=۲^{۴a_۲}۳^{۴a_۳}۵^{۴a_۵}۷^{۴a_۷}....$ تجزیه کنیم که a_iها اعدادی صحیح و نامنفی هستند. تعداد مقسوم علیه ها ی مثبت m برابر است با :

$$(۴a_۲+۱)(۴a_۳+۱)(۴a_۵+۱)(۴a_۷+۱)....$$

این عدد فرد است پس m نیز فرد است و $a_۲=۰$، بنابراین :

$$۱=\frac{۴a_۳+۱}{۳^{a_۳}}.\frac{۴a_۵+۱}{۵^{a_۵}}.\frac{۴a_۷+۱}{۷^{a_۷}}....=x_۳x_۵x_۷...$$

که برای هرp اول، $x_p=\frac{۴a_p+۱}{p^{a_p}}$. P را در سه حالت $p=۳$، $p=۵$ و $p>۵$ بررسی می کنیم:

اگر $a_۳=۱$، $x_۳=\frac{۵}{۳}$، اگر ۲ یا $a_۳=۰$، $x_۳=۱$ و اگر $a_۳>۲$، طبق نامساوی برنولی :

$$۳^{a_۳}=(۸+۱)^{\frac{a_۳}{۲}}>۸\left(\frac{a_۳}{۲}\right)+۱=۴a_۳+۱$$

بنابراین $x_۳<۱$. اگر ۱ یا $a_۵=۰$، $x_۵=۱$ و اگر $a_۵\geq۲$ طبق نامساوی برنولی :

$$۵^{a_۵}=(۲۴+۱)^{\frac{a_۵}{۲}}\geq\frac{۲۴a_۵}{۲}+۱=۱۲a_۵+۱$$

بنابراین $\frac{۹}{۲۵}\leq\frac{۴a_۵+۱}{۱۲a_۵+۱}\leq x_۵$. نهایتاً برای هر $p>۵$، اگر $a_p=۰$، $x_p=۱$، اگر $a_p=۱$، آنگاه $p^{a_p}=p>۵=۴a_p+۱$

بنابراین $x_p<۱$ و اگر $a_p>۱$ دوباره از نامساوی برنولی داریم :

$$p^{a_۵}>۵^{a_۵}>۱۲a_p+۱$$

پس همانند بالا $x_p < \frac{9}{25}$. حال اگر $a_3 \neq 1$ داریم $x_p \leq 1$ برای هر p. چون $x_2 x_3 x_5 \ldots = 1$، باید داشته باشیم $x_p = 1$ برای هر p.

بنابراین $a_3 \in \{0,2\}$ و $a_5 = \{0,1\}$ و $a_7 = a_{11} = \ldots = 0$. پس :

$m = 1^4 \cdot (3^2)^4 \cdot 5^4$ یا $(3^2 \cdot 5)^4$

در غیراینصورت اگر $a_3 = 1$، آنگاه $3 | m = 5^4 (4a_5+1)^4 (4a_7+1)^4 \ldots$. بنابراین عدد اول $p' \geq 5$ موجود است که $3 | 4a_{p'}+1$ و $a_{p'} \geq 2$. طبق بالا، داریم : $x_{p'} \leq \frac{9}{25}$ و $x_3 x_5 x_7 \ldots < \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{25} < 1$ که تناقض است. پس تنها اعداد صحیح m عبارتند از 1, 5^4, 3^8 و $3^8 \cdot 5^4$ براحتی می توان دید این ۴ عدد شرط مسأله را دارند.

***

مسأله ۱۰

راه حل اول : نتیجه حتی هنگامی که شرط روی زاویه ها را برداریم نیز برقرار است. فرض کنید C_1 دایره به مرکز B و شعاع $AB = BC$، C_2 دایره به مرکز D و شعاع $CD = DE$ و C_3 دایره به مرکز F و شعاع $EF = FA$ باشند. خط عمود بر FB از نقطه A، محور اصلی دو دایره C_1 و C_3 است. مشابهاً خط گذرنده از C و عمود بر BD محور اصلی دو دایره C_1 و C_2 و خط گذرنده از E و عمود بر DF، محور اصلی دو دایره C_3 و C_2 است. چون این سه محور در مرکز اصلی به دایره همرسند پس حکم نتیجه می شود.

راه حل دوم : ابتدا لم زیر را ثابت می کنیم.

لم : نقاط $W \neq X$ و $Y \neq Z$ مفروضند. خطوط WX و YZ بر هم عمودند اگر و فقط اگر :

$$YW^2 - WZ^2 = XY^2 - XZ^2 \qquad (1)$$

اثبات : دستگاه مختصات دکارتی را چنان وضع کنید که :

$Z = (x_2, y_2)$, $Y = (x_1, y_1)$, $X = (1,0)$, $W = (0,0)$

(۱) به شکل زیر در می آید :

$$x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = (x_1 - 1)^2 + y_1^2 - (x_2 - 1) - y_2^2$$

که پس از ساده کردن نتیجه می دهد $x_1 = x_2$. و این درست است اگر و فقط اگر YZ بر محور xها یا WX عمود باشد. اگر نقطه تلاقی عمود بر BD,FB به ترتیب از A , C را P بنامیم، آنگاه از لم نتیجه می شود :

$PF^2 - PB^2 = AF^2 - AB^2$, $PB^2 - PD^2 = CB^2 - CD^2$

داریم $AB = BC$, $EF = FA$ و $CD = DE$ از جمع دو تساوی بالا داریم :

$$PF^2 - PD^2 = EF^2 - ED^2$$

بنابراین، خط PE بر DF نیز عمود است که اثبات را کامل می کند.

***

۱۲- ایتالیا

مسأله ۱

راه حل : فرض کنید ABCD مستطیل باشد که $AD = a$ و $AB = b$. فرض کنید D' بازتاب نقطه ی D نسبت به خط AC باشد و قرار دهید $E = \overline{AD'} \cap \overline{BC}$. می خواهیم $[CD'E]$ پیدا کنیم.

چون $AB = CD'$, $\angle ABE = \angle CD'E = ۹۰^\circ$ و $\angle BEA = \angle D'EC$ پس مثلث های ABE و $CD'E$ همنهشت هستند.

بنابراین $AE = EC$ و $CE^۲ = AE^۲ = AB^۲ + BE^۲ = b^۲ + (a - CE)^۲$ پس : $CE = \frac{a^۲ + b^۲}{۲a}$

درنتیجه داریم :

$$[CD'E] = [ACD'] - [ACE] = \frac{ab}{۲} - \frac{b}{۲}.CE = \frac{b(a^۲ - b^۲)}{۴a}$$

***

مسأله ۲

راه حل : حاصلضرب n عدد اول را در نظر بگیرید که $n > ۱۵$. حاصلضرب اولین ۱۶ عدد از اعداد اول برابر است با :

$(۲.۵۳)(۳.۴۷).(۵.۴۳)(۷.۴۱).۱۱.۱۳.۱۷.۱۹.۲۳.۲۹.۳۱.۳۷. > ۱۰۰^۴ .۱۰^۸ = ۱۰^{۱۶}$

حال بقیه ی $n - ۱۶$ عدد اول هرکدام حداقل ۷۰ هستند پس حاصلضرب اولین n عدد اول بزرگتر از ۱۰^n است. اگر x، n رقم داشته باشد و متعادل باشد، آنگاه بزرگتر یا مساوی حاصلضرب اولین n عدد اول است.

اگر $n \geq ۱۶$ طبق پاراگراف قبل x باید از ۱۰^n بزرگتر باشد پس حداقل باید $n + ۱$ رقم داشته باشد که تناقض است. پس x می تواند حداکثر ۱۵ رقم داشته باشد که نتیجه می دهد تعداد اعداد متعادل متناهی است.

***

مسأله ۳

راه حل : فرض کنید که O مرکز دایره ی w باشد و توجه کنید که C و D که مراکز w_1 و w_2 هستند به ترتیب روی خطهای $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ قرار می گیرند. فرض کنید E نقطه ای روی $\overline{AB}$ باشد به طوریکه $CE \| OB$ در اینصورت : $\Delta ACE \sim \Delta AOB$. پس $AC = CE$ و E روی w_1 است.

کافی است اثبات کنیم $r = r_1 + r_2$ اگر و تنها اگر E روی w_2 باشد. عبارت های زیر معادل هستند : $r = r_1 + r_2$؛ $r - r_2 = r_1$؛ $OB - BD = AC$؛ $OD = CE$؛ CEDO متوازی الاضلاع است؛ $DE \| AO$؛ $\Delta BOE \sim \Delta BOA$؛ $BD = DE$؛ E روی w_2 است و این اثبات را کامل می کند.

***

مسأله ۴

راه حل : عدد k را بی امید بنامید اگر بازیکنی که در نوبتش k چوب روی میز است، استراتژی بردی نداشته باشد. اگر k بی امید باشد $2k+1$ نیز بی امید است چون بازیکنی که با $2k+1$ چوب مواجه می شود می تواند تعداد $k+1, k+2, \ldots$ یا $2k$ چوب باقی بگذارد که در اینصورت بازیکن دیگر می تواند در هر حالت جوری بازی کند که k چوب بماند.

چون ۲ بی امید است پس $5, 11, \ldots, 3.2^n - 1$ برای $n \geq 0$ نیز بی امید هستند. برعکس اگر $3.2^n - 1 < k < 3.2^{n+1} - 1$، آنگاه، بازیکنی که با k چوب روبرو می شود می تواند $3.2^n - 1$ چوب روی میز باقی بگذارد و برنده شود. چون ۱۹۹۹ به شکل $3.2^n - 1$ نیست، بی امید نیست پس باربارا استراتژی برد دارد.

***

مسأله ۵

راه حل : فرض کنید که بتوان پلها را به نحو خواسته شده قرارداد، و خانه ها را روی نقاط شبکه ی $\{(a,b) \mid 1 \leq a \leq m, 1 \leq b \leq n\}$ قراردهید. خانه ها را مانند صفحه شطرنج با رنگ های آبی و قرمز طوری رنگ آمیزی کنید که هر پل یک خانه ی آبی را به یک خانه ی قرمز وصل کند.

چون تعداد پلهایی که به هر خانه وارد می شوند برابر است (دقیقاً P تا) تعداد خانه های آبی با تعداد خانه های قرمز برابر است. پس : $2 \mid mn$.

در ابتدا حالتی را بررسی می کنیم که حداقل یکی از m, n یا p، ۱ باشد. اگر $(m,n) = (1,2)$ یا $(2,1)$، هر مقداری برای p کار می کند. اگر $m = 1$ و $n > 2$ (یا $n = 1$ و $m > 2$) آنگاه p پل باید $(1,1)$ و $(1,2)$، (یا $(1,1)$ و $(2,1)$) را به هم وصل کنند.

پس هیچ کدام از این دو خانه به خانه ای دیگر وصل نیست که تناقض است. در آخر نمی توانیم $p=1$ و $mn>2$ داشته باشیم، چون در اینصورت اگر دو خانه ی A و B به هم وصل باشند دیگر به هیچ خانه ی دیگری نمی توانند وصل شوند.

حال فرض کنید $2|mn$ که n,m و p بزرگتراز ۱ هستند. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $2|m$. دنباله ای از پلها بسازید که از $(1,1)$ شروع شود و تا $(1,n)$ بالا می رود. سپس به سمت راست تا (m,n) می رود پس تا $(m,1)$ پایین می آید پس به سمت چپ تا $(m-1,1)$ می رود. برای $k=m-1,m-3,\ldots,3$ از $(k,1)$ به $(k,n-1)$ بالا می رویم، پس به چپ و $(k-1,n-1)$ و پایین تا $(k-1,1)$ می رویم و دوباره به چپ $(k-2,1)$ به می رویم. این مسیر را ادامه می دهیم تا به نقطه ای $(1,1)$ برسیم (شکل زیر این مسیر را برای $m=6$ و $n=4$ نشان می دهد)

تا به حال برای هر خانه ای دو پل ساخته ایم که به آن متصل است و از هر خانه ای می توان به خانه ی دیگر رفت. حال برای $p-2$ پل باقی مانده که باید به هر خانه متصل باشد توجه کنید که دنباله ی پلهای ما شامل mn پل است که یک عدد زوج است.

حال اگر دنباله ای پلها را به همان روش ولی یکی در میان بسازیم، یک پل به پلهایی که به هر خانه متصل است اضافه می شود. پس اگر این کار را $p-2$ تکرار کنیم به هر خانه ای دقیقاً p پل متصل می شود. بنابراین یا $mn=2$ و P هر عدد صحیح مثبت و یا $2|mn$ و $m,n,p>1$.

***

مسأله ۶

راه حل : جواب عبارت است از همه ی سه تایی های بصورت $(3^k-1,k,1)$ برای هر عدد صحیح مثبت k و $(2,2,3)$. برای $n=1$ جواب ها معلوم هستند.

حال n نمی تواند زوج باشد چون در آنصورت $3^k=(x^{\frac{n}{2}})^2+1$ ، ۳ را نمی شمارد (چون هیچ مربعی به پیمانه ی ۳ با ۲ همنهشت نیست) همچنین باید داشته باشیم $x\neq 1$. فرض کنید $n>1$ فرد باشد و $x\geq 2$.

آنگاه $3^k=(x+1)\sum_{i=0}^{n-1}(-x)^i$ در نتیجه $x+1$ و $\sum_{i=0}^{n-1}(-x)^i$ هر دو توان هایی از ۳ هستند.

چون $\sum_{i=0}^{n-1}(-x)^i \geq x^2-x+1 \geq x+1$ باید داشته باشیم : $0\equiv\sum_{i=0}^{n-1}(-x)^i\equiv n \pmod{x+1}$ پس $x+1\mid n$ و به طور خاص داریم : $3\mid n$

قرار دهید $x' = x^{\frac{n}{3}}$ داریم : $3^k = x'^3 + 1 = (x'+1)(x'^2 - x' + 1)$. مانند بالا $x'+1$ باید توانی از ۳ باشد، مثلاً 3^t . در اینصورت $3^k = (3^t - 1)^3 + 1 = 3^{3t} - 3^{2t+1} + 3^{t+1}$ که برای $t>1$ اکیداً بین 3^{t-1} و 3^t قرار می گیرد. بنابراین باید $t=1$, $x'=2$ و $k=2$ که جواب $(x,k,n)=(2,2,3)$ می دهد.

***

مسأله ۷

راه حل : اگر $p=2$ داریم $a^n = 13$ که غیر ممکن است. در غیراینصورت p فرد است و $5 | 2^p + 3^p$. چون $n>1$ باید داشته باشیم $25 | 2^p + 3^p$.

پس :

$$2^p + (5-2)^p = 2^p + \left(\binom{p}{1}5.(-2)^{p-1} + (-2)^p\right) \equiv 5p.2^{p-1} \pmod{25}$$

پس $5 | p$. بنابراین $p=5$. ولی معادله ی $a^n = 2^n + 3^n = 5^2.11$ هیچ جوابی ندارد.

***

مسأله ۸

راه حل : قراردهید $BC=a$, $CA=b$ و $AB=c$. همچنین فرض کنید $h=\frac{2[ABC]}{a}$ فاصله ی A تا خط BC باشد و $r=\frac{2[ABC]}{a+b+c}$ شعاع دایره ی محاطی ABC باشد. توجه کنید که :

$$\frac{h-2r}{h} = \frac{b+c-a}{a+b+c}$$

قرار دهید $x=b+c-a$, $y=c+a-b$, $z=a+b-c$ آنگاه :

$$(x+y+z)^2 \ge (2\sqrt{x(y+z)})^2 = 4x(y+z)$$

طبق نامساوی میانگین حسابی - هندسی پس $(a+b+c)^2 \ge 8(b+c-a)a$ یا :

$$\frac{b+c-a}{a+b+c}.a \le \frac{a+b+c}{8} \Rightarrow \frac{h-2r}{h}BC \le \frac{AB+BC+CA}{8}$$

چون $DE \| BC$ داریم $\frac{DE}{BC} = \frac{h-2r}{h}$ با جایگزاری در عبارت بالا به نامساوی خواسته شده می رسیم.

***

مسأله ۹

راه حل :

الف) تنها توابع با این خاصیت عبارتند از $f(x)=x$ و $f(x)=-x$. با قرار دادن $x=y=0$ داریم : $f(f(0))=f(0)$ در صورتیکه با گذاشتن $x=-f(0)$، $y=0$ داریم $f(-f(0))=f(0)$.

چون f اکیداً یکنوا است پس یک به یک است پس $f(0)=-f(0)$ و $f(0)=0$. پس با قرار دادن $x=0$ داریم : $f(f(y))=y$ برای هر y. فرض کنید f صعودی باشد، اگر $f(x)<x$ آنگاه $x=f(f(x))>f(x)$ که تناقض است؛ اگر $f(x)<x$ آنگاه $x=f(f))<f(x)$ که باز هم تناقض است. پس $f(x)=x$ برای هر x.

حال فرض کنید f نزولی باشد. با قراردادن $x=-f(t)$ و $y=t$ و پس $x=0$ و $y=-t$ در معادله داریم : $f(-f(t))=f(f(-t))=-t$ پس $f(t)=-f(-t)$ برای هر t.

حال برای هر x اگر $f(x)<-x$ آنگاه :

$$x=f(f(x))>f(-x)=-f(x)$$

که تناقض است. اگر $f(x)<-x$ آنگاه :

$$x=f(f(x))<f(-x)=f(x)$$

که تناقض است. پس برای هر x باید $f(x)=-x$.

بنابراین یا $f(x)=x$ یا $f(x)=-x$ برای هر x و چک کردن این که این دو تابع در معادله صدق می کنند ساده است.

ب) چون f اکیداً یکنواست، یک به یک است. پس برای $y\neq 0$ داریم $f(y)\neq f(-y)$ و $f(x+f(y))\neq f(x+f(-y))$ و بنابراین $f(x)+y^n\neq f(x)+(-y)^n$. بنابراین n نمی تواند زوج باشد. حال فرض کنید برای n فرد چنین f موجود باشد. با استدلالی مشابه قسمت (الف)، داریم $f(0)=0$ و $f(f(y))=y^n$.

به طور خاص $f(f(1))=1$. اگر f صعودی باشد پس مانند قسمت (الف) داریم :

$f(2)=f(1+f(1))=f(1)+1^n=2$ و $2^n=f(f(2))=f(2)=2$ که تناقض است. اگر f نزولی باشد، مانند قسمت (الف) داریم $f(1)=-1$، در اینصورت :

$$f(2)=f(1+f(-1))=f(1)+(-1)^n=-2$$

و

$$2^n=f(f(2))=f(-2)=-f(2)=2$$

که تناقض است.

***

مسأله ۱۰

راه حل : فرض کنید A زیر مجموعه ای از X باشد که شامل هیچ A_i نباشد و در بین چنین مجموعه هایی بیشترین عناصر را داشته باشد.

قرار دهید $k=|A|$ طبق فرض برای هر $x\in X-A$، $i(x)\in\{۱,\ ...\ ,m\}$ وجود دارد به طوریکه $A_{i(x)}\subseteq A\cup\{x\}$. قرار دهید $L_x=A\cap A_{i(x)}$، که طبق بالا باید ۲ عنصر داشته باشد. چون $۱\le|A_i\cap A_j|$ برای $i\ne j$ پس L_xها متمایزند. حال $\binom{x}{۲}$ زیر مجموعه ۲ عضوی از A وجود دارد، پس حداکثر $\binom{k}{۲}$ مجموعه L_x داریم. بنابراین $n-k\le\binom{k}{۲}$ یا $k^۲+k\ge ۲n$. در نتیجه :

$$k\ge\sqrt{۲n}\ \text{ یا }\ k\ge\frac{۱}{۲}(-۱+\sqrt{۱+۸n})>\sqrt{۲n}-۱$$

***

۱۳- ژاپن

مسأله ۱

راه حل : سنگ ها را در خانه های جدول به صورت شطرنجی قرار دهید به طوریکه در چهار خانه ی گوشه ای جدول سنگ باشد. این طرز قرار گرفتن سنگ ها در شرط خواسته شده صدق می کند و در این حالت $۱۰۰۰ \times ۱۰۰۰ + ۹۹۹ \times ۹۹۹ = ۱۹۹۸۰۰۱$ سنگ داریم. حال ثابت می کنیم که این عدد کمترین تعداد ممکن سنگ است.

فرض کنید که شرط گفته شده برقرار باشد و K کمترین تعداد سنگ ها در همه ی سطرها و ستون ها باشد. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید یک ستون K سنگ دارد. برای هریک از K سنگ در آن ستون، طبق کمترین بودن K هر سطر که شامل این سنگ است باید حداقل K سنگ دیگر نیز داشته باشد. و برای هر یک از $۱۹۹۹ - k$ خانه ی خالی در این ستون، سطر شامل آن خانه باید حداقل $۱۹۹۹ - k$ سنگ داشته باشد تا بنابراین مجموع تعداد سنگ ها حداقل برابر است با :

$$k^{۲} + (۱۹۹۹ - k)^{۲} = ۲(k - \frac{۱۹۹۹}{۲})^{۲} + \frac{۱۹۹۹^{۲}}{۲} \geq \frac{۱۹۹۹^{۲}}{۲} = ۱۹۹۸۰۰۰.۵$$

در نتیجه باید حداقل ۱۹۹۸۰۰۱ سنگ داشته باشیم.

***

مسأله ۲

راه حل : استقرا روی n اگر $n = ۲$ ، $x = ۱$ کار می کند. حال فرض کنید که ادعا برای $n \geq ۲$ درست است. یعنی عدد طبیعی y وجود دارد به طوریکه $y^{۳} + ۱۷$ بر ۳^{n} بخش پذیر است ولی بر $۳^{n+۱}$ نیست. ثابت می کنیم که این ادعا برای $n + ۱$ نیز درست است.

فرض کنید اعداد صحیح a و m را داریم که a بر ۳ بخش پذیر نیست و $m \geq ۲$. در اینصورت $a^{۲} \equiv ۱ \pmod{۳}$ و $۳^{m} a^{۲} \equiv ۳^{m} \pmod{۳^{m+۱}}$ از طرفی چون $m \geq ۲$ داریم :

$$۳m - ۳ \geq ۲m - ۱ \geq m + ۱$$

پس : $(a + ۳^{m-۱})^{۳} \equiv a^{۳} + ۳^{m} a^{۲} + ۳^{۲m-۱} a + ۳^{۳m-۳} \equiv a^{۳} + ۳^{m} \pmod{۳^{m+۱}}$

چون $y^{۳}+۱۷$ بر ۳^{n} بخش پذیر است پس به پیمانه ی $۳^{n+۱}$ با ۰، ۳^{n} یا ۲.۳^{n} برابر است. چون ۳ ،۱۷ را نمی شمارد پس y را نیز نباید بشمارد .

پس با دوبار به کار بردن نتیجه پاراگراف قبلی (یکبار با $(a,m)=(y,n)$ و یکبار با $(a,m)=(y+۳^{n-۱},n)$)، نتیجه می گیریم که $۳^{n+۱}$ باید $(y+۳^{n-۱})^{۳}+۱۷$ یا $(y+۲.۳^{n-۱})^{۳}+۱۷$ را بشمارد.

پس عدد طبیعی x' وجود دارد که بر ۳ بخش پذیر نیست و $۳^{n+۱} \mid x'^{۳}+۱۷$. اگر $۳^{n+۲}$، $x'^{۳}+۱۷$ را نشمارد که مسئله حل است، در غیراینصورت ادعا می کنیم که عدد $x=x'+۳^{n}$ جواب مسئله است.

چون $x=x'+۳^{n-۱}+۳^{n-۱}+۳^{n-۱}$، طبق نتیجه دو پاراگراف قبلی داریم :

$$x^{۳}\equiv x'^{۳}+۳^{n}+۳^{n}+۳^{n}\equiv x'^{۳} \pmod{۳^{n+۱}}$$

بنابراین $۳^{n+۱} \mid x^{۳}+۱۷$ از طرف دیگر چون $x=x'+۳^{n}$ داریم :

$$x^{۳}\equiv x'^{۳}+۳^{n+۱}\not\equiv x'^{۳} \pmod{۳^{n+۲}}$$

درنتیجه $۳^{n+۲}$ ، $x^{۳}+۱۷$ را نمی شمارد، و این مرحله استقرایی اثبات را کامل می کند.

***

مسأله ۳

راه حل : وزنه ها $a_{۱},a_{۲},\ldots,a_{۲n+۱}$ را بنامید. پس برای هر j ، $۱\le j\le ۲n$ داریم :

$$c_{۱}^{(j)}a_{۱}+c_{۲}^{(j)}a_{۲}+\ldots+c_{۲n}^{(j)}a_{۲n}=a_{۲n+۱}$$

که $c_{j}^{(j)}=۰$ و n تا از $c_{j}^{(j)}$ باقی مانده برابر ۱ هستند و بقیه برابر ۱- هستند. در اینصورت ۲n معادله در ۲n مجهول $a_{۱},a_{۲},\ldots,a_{۲n}$ داریم. واضح است که :

$$(a_{۱},a_{۲},\ldots,a_{۲n})=(a_{۲n+۱},a_{۲n+۱},\ldots,a_{۲n+۱})$$

یک جواب این دستگاه معادلات است.

طبق قانون کرامر این جواب یگانه است اگر و تنها اگر دترمینان ماتریس ناصفر باشد.

$$M=\begin{bmatrix} c_{۱}^{(۱)} & c_{۲}^{(۱)} & \cdots & c_{۲n}^{(۱)} \\ c_{۱}^{(۲)} & c_{۲}^{(۲)} & \cdots & c_{۲n}^{(۲)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{۱}^{(۲n)} & c_{۲}^{(۲n)} & \cdots & c_{۲n}^{(۲n)} \end{bmatrix}$$

روی قطر اصلی M همه زوج و خارج از آن همه فرد هستند. پس اگر M را در خودش ضرب کنیم، ماتریس حاصل روی قطرش فرد و خارج آن زوج است. در نتیجه :

$$(\det M)^{۲}=\det(M^{۲})$$

فرد است، پس $\det M$ باید نا صفر باشد.

***

مسأله ۴

راه حل : برای $n=1$ بدیهی است. برهان خلف، بگیرید $n \geq 2$ و فرض کنید $f(x)$ را بتوان بصورت حاصلضرب $g(x)h(x)$ نوشت که :

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_\ell x^\ell$$
$$h(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{\ell'} x^{\ell'}$$

که $\ell, \ell' > 0$ و ضرایب a_i, b_i صحیح هستند.

چون برای $m = \pm 1, \pm 2, \dots \pm n$ داریم $(mi)^2 + m^2 = 0$ پس $f(mi) = g(mi)h(mi) = 1$.چون ضرایب g و h صحیح هستند پس $g(mi)$ برابر است با $ir - 1, 1$ و یا $i-$ از طرفی چون قسم موهومی :

$$g(mi) = (a_0 - a_2 m^2 + a_4 m^4 - \dots) + m(a_1 - a_3 m^2 + a_5 m^4 - \dots)i$$

مضربی از m است، پس $g(mi)$ برای $m \neq \pm 1$ باید برابر ± 1 باشد. همچنین چون $g(mi)h(mi) = 1$ داریم : $g(mi) = h(mi) = \pm 1$ و برای $m \neq \pm 1$.

طبق قضیه تجزیه داریم :

$$g(x) - h(x) = (x^2 + 2^2)(x^2 + 3^2) \dots (x^2 + n^2)k(x)$$

که $k(x)$ یک چند جمله ای با ضرایب صحیح و درجه ی حداکثر ۱ است.

چون $(g(i), h(i))$ برابر است با $(1,1), (-1,-1), (i,-i)$ یا $(-i,i)$ داریم :

$$2 \geq |g(i) - h(i)| = (-1 + 2^2)(-1 + 3^2) \dots (-1 + n^2)|k(i)|$$

و بنابراین باید $k(i) = 0$. چون درجه ی $k(x)$ حداکثر ۱ است نتیجه می گیریم که $k(x) = 0$ برای هر x و $g(x) = h(x)$ برای هر x. آنگاه : $a_0^2 = g(0)h(0) = f(0) = (1^2)(2^2)\dots(n^2) + 1$ که غیر ممکن است.

❊❊❊

مسأله ۵

راه حل : ادعا می کنیم که مقادیر ممکن عبارتند از $\sqrt{3} \leq M \leq 3$ و $1 \leq m \leq 2$. ابتدا نشان می دهیم که همه ی این مقادیر اختیار می شوند. مثلث ACE با طول ضلع ۲ را به یک تبدیل پیوسته به شش ضلعی $ABCDEF$ با طول ضلع ۱ تبدیل کنید و این شش ضلعی را نیز به طور پیوسته به یک پاره خط به طول ۳ تبدیل کنید (مثلاً با بزرگ کردن قطر AD از چند ضلعی منتظم و نزدیک کردن نقاط B, C, FF به خط AD).

در این صورت M به طور پیوسته از $\sqrt{3}$ به ۲ و به ۳ تغییر می کند. به طور مشابه با تبدیل کردن یک مستطیل 2×1 به طور پیوسته به شش ضلعی، m نیز به طور پیوسته از ۱ تا ۲ تغییر می کند. حال اثبات می کنیم که m و M هیچ مقدار دیگری نمی تواند داشته باشند. داریم :

$$AD \leq AB + BC + CD = 3$$

و به همین ترتیب $DF, CF \leq 3$. پس $M \leq 3$.

برهان خلف : فرض کنید $m<1$ و بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $AD<1$. چون $AD<AB=BC=CD=1$ داریم :

$$\angle DCA<\angle DAC \quad , \quad \angle ABD<\angle ADB$$
$$\angle CBD=\angle CDB \quad , \quad \angle BCA=\angle BAC$$

بنابراین :

$$\begin{aligned}\angle CDA+\angle BAD&=\angle CDB+\angle BDA+\angle BAC+\angle CAD\\&>\angle CBD+\angle DBA+\angle BCA+\angle ACD\\&=\angle CBA+\angle BCD\end{aligned}$$

در نتیجه $\angle CDA+\angle BAD>180^\circ$ و به همان طریق $\angle EDA+\angle FAD>180^\circ$. در اینصورت :

$$\angle CDE+\angle BAF=\angle CDA+\angle EDA+\angle BAD+\angle FAD>360^\circ$$

که غیر ممکن است چون ABCDEF محدب است. پس $m\geq 1$.

حال نشان می دهیم که $m\geq\sqrt{3}$ و $m\geq 2$. چون مجموع زوایای داخلی ABCDEF، 720° است، جفتی از زوایای مجاور داخلی وجود دارند که مجموعشان از 240° بیشتر است همچنین جفتی نیز وجود دارند که مجموعشان کمتر یا مساوی 240° است. بنابراین کافی است ثابت کنیم $CF\geq\sqrt{3}$ وقتی $\angle A+\angle B\geq 240^\circ$ و $CF\leq 2$ وقتی که $\angle A+\angle B\leq 240^\circ$. طبق قانون کسینوس ها :

$$CF^2=BC^2+BF^2-2BC.\cos\angle FBC$$

بنابراین اگر B,A و F را ثابت بگیریم و $\angle ABC$ را کوچک کنیم، زاویه ی $\angle FBC$ در نتیجه CF را کوچک کرده ایم. به طور مشابه اگر B,A و C را ثابت بگیریم و $\angle BAF$ را کوچک کنیم ، باز هم CF را کوچک کرده ایم. بنابراین کافی است اثبات کنیم که $\sqrt{3}\geq CF$ وقتی که $\angle A+\angle B=240^\circ$.

به همین طریق کافی است اثبات کنیم $CF\leq 2$ وقتی که $\angle A+\angle B=240^\circ$. حال فرض کنید $\angle A+\angle B$ برابر 240° باشد. نقطه برخورد خطهای BC و AF را P بنامید و قرار دهید $x=PA$ و $y=PB$ چون $\angle A+\angle B=240^\circ$ پس $\angle P=60^\circ$. با به کار بردن قانون کسینوس ها برای مثلث های PAB و PCF داریم :

$$1=AB^2=x^2+y^2-xy$$
و
$$CF^2=(x+1)^2+(y+1)^2-(x+1)(y+1)=2+x+y$$

بنابراین کافی است مقادیر $x+y$ را بیابیم که $x^2+y^2-xy=1$ و $x,y\geq 0$ که نتیجه می دهند :

$$(x+y)^2+3(x-y)^2=4\ ,\ x+y\geq 0$$

و $|x-y|\leq x+y$. بنابراین :

$$\begin{aligned}1&=\frac{1}{4}(x+y)^2+\frac{3}{4}(x-y)^2\\&\leq(x+y)^2\leq(x+y)^2+3(x-y)^2=4\end{aligned}$$

پس $1\leq x+y\leq 2$ و $\sqrt{3}\leq CF\leq 2$

***

۱۴- کره

مسأله ۱

راه حل : فرض کنید w دایره محیطی ABC باشد. با استفاده از دوران، انتقال، تجانس و بازتاب می توانیم فرض کنیم که $A = A'$, $B = B'$, $R = R'$ و $r = r'$ و C و C' روی کمان $\hat{AB}$ از w قرار می گیرند.

اگر قبل از این تبدیلات دو مثلث متشابه بودند. اکنون نیز متشابه هستند پس کافی است ثابت کنیم این دو مثلث اکنون متشابه هستند. چون :

$$r = \frac{۱}{۲}(AC + BC - AB)\,Cot(\angle C)$$

و

$$r' = \frac{۱}{۲}(A'C' + B'C' - A'B')\,Cot(\angle C')$$

$$= \frac{۱}{۲}(A'C' + B'C' - AB)\,Cot(\angle C)$$

باید $AC + BC = A'C' + B'C'$ و بنابراین $AB + BC + CA = A'B' + B'C' + C'A'$. مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{۱}{۲}r\,(AB + BC + CA)$ که با مساحت مثلث $A'B'C'$ یعنی :

$\frac{۱}{۲}r'(A'B' + B'C' + C'A')$ مساوی است. چون $\overline{AB}$ قاعده ی هر دو مثلث است پس ارتفاع های از C و C' بر $\overline{AB}$ نیز برابرند. که نتیجه می دهد ΔABC تا با $\Delta A'B'C'$ یا با $\Delta B'A'C'$ همنهشت است.

***

مسأله ۲

راه حل : از شرط $\left|f(m+n) - f(m)\right| \le \frac{n}{m}$ داریم :

$$\left|f(۲^{i+۱}) - f(۲^{i})\right| \le \frac{۲^{i+۱} - ۲^{i}}{۲^{i}} = ۱$$

پس برای $k > i$:

$$\left|f(۲^{k}) - f(۲^{i})\right| \le \sum_{j=۱}^{k-۱}\left|f(۲^{j+۱}) - f(۲^{j})\right| \le k - i$$

از نامساوی بالا داریم :

$$\sum_{i=1}^{k}\left|f(2^k)-f(2^i)\right|=\sum_{i=1}^{k-1}\left|f(2^k)-f(2^i)\right|\le\sum_{i=1}^{k-1}(k-i)=\frac{k(k-1)}{2}$$

***

مسأله ۳

راه حل : جواب $n=2^k$ ، $k=1,2,\dots$ است. در ابتدا توجه کنید که $2\equiv -1 \pmod 3$. پس $3|2^n-1$ اگر و تنها اگر n زوج باشد. برهان خلف : فرض کنید که $\ell\ge 3$ یک مقسوم علیه مثبت و فرد n باشد. در اینصورت $2^\ell-1$ بر ۳ بخش پذیر نیست. اما مقسوم علیه ای از 2^n-1 است. پس مقسوم علیه ای از $4m^2+1$ نیز هست. از طرف دیگر $2^\ell-1$ مقسوم علیه اولی به شکل $p=4r+3$ دارد. دراینصورت $(2m)^2\equiv -1 \pmod{4r+3}$ اما طبق قضیه ی معروفی در نظریه اعداد می دانیم که یک مربع به پیمانه ی یک عدد اول به شکل $4r+3$ نمی تواند با ۱- هنمنهشت باشد.

بنابراین n در واقع به شکل 2^k برای $k\ge 1$ است داریم :

$$\frac{2^n-1}{3}=(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)(2^{2^3}+1)\dots(2^{2^{k-1}}+1)$$

جملات سمت راست همه نسبت به ۲ اول هستند چون همه فردند. آنها همچنین اعداد فرد هستند و طبق قضیه ای در نظریه اعداد نسبت به هم اولند (فرض کنید عدد اول P ، $2^{2^a}+1$ و $2^{2^b}+1$ را بشمارد که $a<b$. آنگاه $2^{2^a}\equiv 2^{2^b}\equiv -1 \pmod p$.

پس :

$$-1\equiv 2^{2^b}=\left(2^{2^a}\right)^{2^{b-a}}\equiv((-1)^2)^{2^{b-a-1}}\equiv 1 \pmod p$$

که نتیجه می دهد $p=2$ که غیر ممکن است). بنابراین طبق قضیه ی باقی مانده چینی عدد صحیح مثبت C وجود دارد که به طور همزمان در :

$$C\equiv 2^{2^{i-1}} \pmod{2^{2^i}+1}\quad i=1,2,\dots,k-1$$

صدق می کند و $C\equiv 0 \pmod 2$. با قرار دادن $C\ne 2m$ و $4m^2+1$ مضربی از $\frac{2^n-1}{3}$ می شود.

***

مسأله ۴

راه حل : قرار دهید $t=\frac{x-3}{x+1}$ پس $t=\frac{3+t}{1-t}$. معادله داده شده را می توان بصورت زیر نوشت :

$$f(t)+f(\frac{t-3}{t+1})=\frac{3+t}{1-t}$$

مشابهاً قرار دهید : $t=\frac{3+x}{1-x}$ پس $x=\frac{t-3}{t+1}$ و $\frac{x-3}{x+1}=\frac{3+t}{1-t}$.

این بار می توانیم معادله ی بالا را بصورت زیر بنویسیم :

$$f(\frac{3+t}{1-t})+f(t)=\frac{t-3}{t+1}$$

با جمع کردن دو معادله ی به دست آمده داریم :

$$\frac{8t}{1-t^2}=2f(t)+f(\frac{t-3}{t+1})+f(\frac{3+t}{1-t})=2f(t)+t$$

پس :

$$f(t)=\frac{4t}{1-t^2}-\frac{t}{2}$$

و با کمی محاسبات جبری می بینیم که این تابع در معادله صدق می کند.

***

مسأله ۵

راه حل : فرض کنید اعداد متمایز $b_1, b_2, \ldots, b_n$ بین او n داده شده اند. یک دور به طول b_1, k را به یکی از k-1 عدد دیگر می برد، تصویر b را به یکی از $k-2$ عدد دیگر می برد و به همین ترتیب تا اینکه آخرین عدد باقی مانده را به b_1 می برد. بنابراین $(k-1)! = (k-1)(k-2)\ldots(1)$ دور به طول k از این مجموعه وجود دارد.

هر جایگشتی که بتوان آن را به صورت حاصل ضرب چهارتبادل نوشت زوج است. پس جایگشتی که در شرط مساله صدق می کند باید یکی از حالات زیر را داشته باشد:

۱) جایگشت بدیهی باشد

۲) ترکیب دو تبادل باشد

۳) یک دور به طول ۳ باشد

۴) ترکیب یک دور به طول ۲ و یک دور به طول ۴ باشد

۵) ترکیب دو دور به طول ۳ باشد

۶) یک دور به طول ۵ باشد.

جایگشت های از نوع ۲،۱و۳ را می تواند با ترکیب کم تر از چهار جایگشت به دست آورد. بر عکس، هر جایگشت زوجی که با ۰ یا دو تبادل به دست آید یکی از این سه نوع است. پس جایگشت های خواسته شده در صورت مسئله دقیقاً از نوع های ۴، ۵ و ۶ هستند.

برای جایگشتهای از نوع ۴، $\binom{6}{2}=15$ راه برای ساختن دورها از ۱,۲, ... ,۶ وجود دارد. همچنین $(4-1)!(2-1)!=6$ راه برای جابجا کردن اعداد داخل دورها وجود دارد که در مجموع ۹۰=۶.۱۵ جایگشت می شود. برای جایگشت های از نوع ۵, $\frac{1}{2}\binom{6}{3}=10$ راه مختلف برای ساختن دو دور سه تایی وجود دارد (چون $\binom{6}{3}$ هر چنان جایگشتی را دو بار می شمارد، یکبار به شکل (abc)(def) و یکبار به شکل (def)(abc)). $(3-1)!(3-1)!=4$ حالت برای جابه جا شدن اعداد در داخل دورها وجود دارد پس در مجموع ۱۵.۴ = ۴۰ جایگشت از نوع ۵ داریم.

در نهایت برای جایگشت های از نوع ۵, $\binom{6}{5}=6$ راه برای ساختن یک دور به طول ۵ وجود دارد و $(5-1)!=24$ راه برای جابه جا شدن اعداد در این دور وجود دارد پس در مجموع ۶.۲۴ = ۱۴۴ جایگشت از نوع ۵ داریم و در مجموع :

$$90+40+144=274$$

جایگشت داریم که با حداقل ۴ تبادل به دست می آیند.

***

مسأله ۶

راه حل : بدون کاستن از کلیت فرض کنید که a_{1999} کوچک ترین a_iها است. همچنین می توانیم فرض کنیم $a \geq 0$. از رابطه های داده شده داریم :

$$\begin{aligned}
4 &= (a_1+a_2+\dots+a_{1999})^2 \geq (a_1+a_2+\dots+a_{1999})^2-(a_1-a_2+a_3-\dots-a_{1998}+a_{1999})^2\\
&= 4(a_1+a_3+\dots+a_{1999})(a_2+a_4+\dots+a_{1998})\\
&\geq 4(a_1a_2+a_2a_3+\dots+a_{1998}a_{1999})\\
&\quad+4(a_1a_4+a_2a_5+\dots+a_{1996}a_{1999})+4a_1(a_6+a_8+\dots+a_{1998})\\
&= 4(1-a_{1999}a_1)+4(a_1a_4+a_2a_5+\dots+a_{1996}a_{1999})\\
&\quad+4a_1(a_6+a_8+\dots+a_{1998})\\
&= 4+4(a_1a_4+a_2a_5+\dots+a_{1996}a_{1999})\\
&\quad+4a_1(a_6+a_8+\dots+a_{1998}-a_{1999})\geq 4
\end{aligned}$$

پس در نامساوی های اول و سوم باید تساوی برقرار باشد.

پس باید داشته باشیم :

۱) $a_۱ + a_۳ + \ldots + a_{۱۹۹۹} = a_۲ + a_۴ + \cdots + ۱۹۹۸ = ۱$

۲) $a_۱ a_۴ = a_۲ a_۵ = \ldots = a_{۱۹۹۶} a_{۱۹۹۹} = ۰$

۳) $a_۶ + a_۸ + \ldots + a_{۱۹۹۸} = a_{۱۹۹۹}$

شرط (۲) نتیجه می دهد $a_۴ = ۰$. از (۳) داریم : $a_۶ = a_۸ = \ldots = a_{۱۹۹۸} = ۰$.

پس از (۱) داریم : $a_۲ = ۱$ و از (ب) نتیجه می گیریم $a_۱ + a_۳ = ۱$.

با جایگذاری در شرط (الف) داریم :

$$a_۴ + a_۵ + \ldots + a_{۱۹۹۹} = ۰$$

پس $a_۴ = a_۵ = \ldots = a_{۱۹۹۹} = ۰$، بنابراین :

$$S = a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲$$

$$= a_۱^۲ + ۱ + (۱ - a_۱)^۲ \qquad a_۲ = a_۱ + a_۳ = ۱$$ چون :

$$= ۲(a_۱^۲ - a_۱ + ۱) = ۲(a_۱ - \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۳}{۲}$$

پس بیشترین مقدار S ، ۲ است و وقتی اختیار می شود که $a_۱ = ۱$ و کم ترین مقدار S برابر $\frac{۳}{۲}$ است وقتی که $a_۱ = \frac{۱}{۲}$.

***

۱۵- لهستان

مسأله ۱

راه حل اول : نقاط D و B,C و فاصله AD را ثابت و A را متغیر بگیرید. مکان هندسی A دایره ای با شعاع D است. طبق تساوی داده شده $\frac{AE}{EC}$ ثابت است. بنابراین $\lambda = \frac{EC}{AC}$ نیز ثابت است. چون E تصویر A تحت تجانس به مرکز C و شعاع λ است، مکان هندسی نقاط E تصویر مکان هندسی A تحت این تجانس است - یک دایره که مرکزش روی $\overline{BC}$ است.

BE موقعی بیشترین مقدار خود را اختیار می کند که E اشتراک دایره با خط BC باشد که دورتر از B قرار دارد. اگر در این حالت نشان دهیم $AD = BE$ مساله حل است. (نامساوی $AD > BE$ اکید است زیرا تساوی موقعی رخ می دهد که E روی $\overline{BC}$ باشد که غیر ممکن است). در این حالت B,D,C,E,A هم خط هستند و طبق تساوی داده شده :

$$AE(AC - BD) = AE(AD - BC) = EC.BD$$
$$\Rightarrow AE.AC = (AE + EC).BD = AC.BD \Rightarrow AE = BD$$
$$\Rightarrow AD = BC$$

راه حل دوم : فرض کنید F نقطه ای روی $\overline{AD}$ باشد به طوری که $FA = BC$ و فرض کنید خط BF ضلع AC را در E' قطع کند. طبق قانون سینوس ها :

$$AE' = FA.\frac{\sin \angle AFE'}{\sin \angle FE'A} = CB.\frac{\sin \angle DFB}{\sin \angle CE'F}$$

و

$$E'C = CB.\frac{\sin \angle E'BC}{\sin \angle CE'B} = CB.\frac{\sin \angle FBD}{\sin \angle CE'F}$$

بنابراین :

$$\frac{AE'}{E'C} = \frac{\sin \angle DFB}{\sin \angle FBD} = \frac{DB}{FD} = \frac{BD}{AD - BC} = \frac{AE}{EC}$$

پس $E = E'$.

فرض کنید ℓ خطی است که از A به موازات BC رسم می شود. روی نیم خط G, BC را طوری تعریف کنید که BG = AD , CG = FD و فرض کنید خطوط GE, ℓ یکدیگر را در H قطع کنند. مثلث های ECG , EAH با یکدیگر متشابه هستند. بنابراین : $AH = CG.\dfrac{AE}{EC} = FD.\dfrac{AE}{EC}$.

طبق قضیه من لائوس برای مثلث CAD و خط EFB داریم :

$$\frac{CE.AF.DB}{EA.FD.BC} = ۱$$

بنابراین :

$$AH = FD.\frac{AE}{EC} = FD.\frac{AF.DB}{FD.BC} = DB\frac{AF}{BC} = DB$$

که نتیجه می دهد چهار ضلعی BDAH یک متوازی الاضلاع است و BH = AD.

بنابراین مثلث BHG متساوی الساقین است با BH = BG = AD. چون $\overline{BE}$ یک خط سوایی در این مثلث است، باید داشته باشیم $BE \angle AD$.

***

مسأله ۲

راه حل : ابتدا دقت کنید که a_iها همگی به پیمانه ۵۰۵۰ متمایزند، زیرا همگی بین ۰ و ۵۰۵۰ هستند. حال همه ی مجموع های $a_i + a_j$ برای $i < j$ را در نظر بگیرید. $\binom{۱۰۱}{۲} = ۵۰۵۰$ تا از این مجموع ها موجودند. اگر دو تا از این مجموع ها مثلاً $a_k + a_\ell$ و $a_m + a_n$ به پیمانه ۵۰۵۰ همنهشت باشند که مساله حل است. (در این حالت هر ۴ اندیس باید متمایز باشند : اگر به عنوان مثال $k = m$، داریم : $\ell = n$ زیرا همه a_i ها به پیمانه ۵۰۵۰ متمایزند.

اما زوج های $\{k,\ell\}, \{m,n\}$ را متمایز انتخاب کرده بودیم). تنها حالت ممکن دیگر این است که این مجموع ها تمام اعداد به پیمانه ۵۰۵۰ را اختیار کنند. آنگاه با جمع این چنین مجموع هایی داریم :

$$۱۰۰(a_۱ + a_۲ + \ldots + a_{۱۰۱}) \equiv ۰ + ۱ + \ldots + ۵۰۴۹ = ۲۵۲۵.۵۰۴۹ \pmod{۵۰۵۰}$$

چون عدد سمت چپ زوج است و ۲۵۲۵×۵۰۴۹ فرد، به تناقض می رسیم.

***

مسأله ۳

راه حل : با استقرا روی X نشان می دهیم اعداد صحیح مثبت $n_۱, n_۲, \ldots\ldots, n_k$ با خاصیت مورد نظر موجودند اگر $k = ۱$، حکم واضح است. برای $k > ۱$ فرض کنید $m_۱ < \ldots < m_{k-۱}$ در فرض استقرا برای $k-۱$ صدق کنند. توجه کنید که با افزودن توانهای بزرگی از ۱۰ می توانیم m_i ها را به اندازه کافی بزرگ در نظر بگیریم، چون خاصیت مورد نظر برقرار باقی می ماند.

حال m را طوری انتخاب کنید که $m \equiv m_1 + 1 \pmod 9$ ، $1 \le m \le 9$. با توجه به اینکه $S(x) \equiv x \pmod 9$، داریم : $m_1 - m + S(m_1) - S(m) + 11 = 9\ell$ برای یک عدد صحیح ℓ. با انتخاب m_i به قدر کافی بزرگ داریم $10^{\ell} \ge m_{k-1}$.

حال فرض کنید : $n_i = 10^{\ell+1} m_i$ برای $i < k$ و $n_k = m + 10^{\ell+1} - 10$.

واضح است که $n_i + S(n_i) = n_j + S(n_j)$ برای $i, j < k$ و :

$$\begin{aligned} n_1 + S(n_1) &= (10^{\ell+1} + m_1) + (1 + S(m_1)) \\ &= (m_1 + S(m_1) + 1) + 10^{\ell+1} \\ &= (9\ell + S(m) + m - 10) + 10^{\ell+1} \\ &= (m + 10^{\ell+1} - 10) + (9l + S(m)) \\ &= n_k + S(n_k) \end{aligned}$$

***

مسأله ۴

راه حل : جواب $n \equiv 0 \pmod 3$ معادله $x^2 + y^2 + 50 = 16x + 12y$ را به صورت $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 50$ باز نویسی می کنیم. که جواب های صحیحش به صورت زیر است :

$(7,-1), (7,13), (9,-1), (9,13), (3,1), (3,11)$

$(13,1), (13,11), (1,5), (1,7), (15,5), (15,7)$

بنابراین هر زوج (x_1, x_{i+1}) باید یکی از اینها باشد. $(x_{n+1} = x_1)$. اگر $3 | n$ آنگاه قرار دهید: $x_{3i} = 1$ و $x_{3i+1} = 7$ و $x_{3i+2} = 13$ برای هر i برعکس، اگر یک جواب وجود داشت، زوج های (x_i, x_{i+1}) را که می توانند جواب باشند در نظر بگیرید. مختص اول هر زوج برابر است با مختص دوم زوج دیگر و بر عکس، که حالات ممکن بالا را به $(13,1), (7,13), (1,7)$ کاهش می دهد نتیجه می شود x_i ها باید یک دنباله تکرار شوند $1,7,13,1,7,13,\ldots$ را تشکیل دهند، که تنها وقتی ممکن است که $3 | n$.

***

مسأله ۵

راه حل : تعریف کنید $f_{\{a,b\}}(x) = 1$ اگر $a \le x < b$ یا $b \le x < a$ و در غیر این صورت صفر. توجه کنید که اگر a, b صحیح باشند، $|a - b| = \sum_x f_{\{a,b\}}(x)$ که مجموع روی تمام اعداد صحیح انجام می شود (این مجموع خوش تعریف است، زیرا تعداد جملات i صفر آن متناهی است).

حال عدد صحیح دلخواه x را ثابت در نظر بگیرید و فرض کنید $a_{\le}$ تعداد i هایی باشد که $a_i \le x$. $b_>, b_{\le}, a_>$ را نیز به طور مشابه تعریف کنید. داریم :

$$(a_{\le}-b_{\le})+(a_{>}-b_{>})=(a_{\le}+a_{>})-(b_{\le}+b_{>})$$
$$=n-n=\cdot \Rightarrow (a_{\le}-b_{\le})(a_{>}-b_{>})\le \cdot$$

بنابراین $a_{\le}a_{>}+b_{\le}b_{>} \le a_{\le}b_{>}+a_{>}b_{\le}$.

حال $\sum_{i<j} f_{\{a_i,a_j\}}(x) = a_{\le}a_{>}$، زیرا هر دو طرف یک مجموع از زوج ها را می شمارند و بقیه جمله ها هم به همین ترتیب ساده می شوند، پس :

$$\sum_{۱\le i\le j\le n} f_{\{a_i,a_j\}}(x)+f_{\{b_i,b_j\}}(x)\le \sum_{۱\le i,j\le n} f_{\{a_i,b_j\}}(x)$$

چون x یک عدد صحیح دلخواه بوده نا مساوی بالا برای هر عدد صحیح x برقرار است. با جمع روی تمام اعداد صحیح و با توجه به آنچه ابتدا گفته شد، به نا مساوی مورد نظر می رسیم. در این نامساوی تساوی برقرار است اگر و تنها اگر نامساوی بالا برای هر x تساوی برقرار شود که دقیقاً موقعی برقرار است که a_iها و b_iها با یک ترتیبی با هم مساوی باشند.

***

مسأله ۶

راه حل اول : نقطه G را چنان انتخاب کنید که مثلث GBC با مثلث FBA متشابه باشد (با همین ترتیب رئوس) آنگاه $\angle DCG = ۳۶۰^\circ - (\angle GCB + \angle BCD) = \angle DEF$ و

$$\frac{GC}{CD}=\frac{FA-\frac{BC}{AB}}{CD}=\frac{FE}{ED}$$

بنابراین $\Delta DCG \sim \Delta DEF$. حال $\frac{AB}{BF}=\frac{CB}{BG}$ به خاطر تشابه مثلث ها و

$$\angle ABC = \angle ABF + \angle FBC = \angle CBG + \angle FBC = \angle FBG$$

بنابراین $\Delta ABC \sim \Delta FBG$ و مشابهاً $\Delta EDC \sim \Delta FDG$. پس :

$$\frac{AB}{CA}\cdot\frac{EC}{DE}\cdot\frac{FD}{BF}\cdot\frac{FB}{GF}\cdot\frac{FG}{DF}\cdot\frac{FD}{BF}=۱.$$

و حکم ثابت است.

راه حل دوم : انعکاسی حول F و به شعاع r انجام دهید. از تساوی صورت سوال نتیجه می شود :

$$\frac{A'B'.r^۲}{A'F.B'F}\cdot\frac{C'D'.r^۲}{C'F.D'F}\cdot\frac{r^۲}{E'F}=\frac{B'C'.r^۲}{B'F.C'F}\cdot\frac{D'E'.r^۲}{D'F.E'F}\cdot\frac{r^۲}{A'F}$$

یا

$$\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{E'D'}{D'C'}$$

شرط روی زوایا نتیجه می دهد :

$$\angle FAB + \angle BCF + \angle FCD + \angle DEF = ۳۶۰^\circ$$

از زاویه های جهت دار استفاده می کنیم. این تساوی به :

$\angle A'B'F + \angle FB'C' + \angle C'D'F + \angle FD'E' = ۳۶۰^\circ$ یا $\angle A'B'C' = \angle E'D'C'$ منجر می شود.

پس مثلث های $A'B'C'$ و $E'D'C'$ متشابه هستند و در نتیجه :

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{E'D'}{E'C'}$$

یا معادلاً :

$$\frac{A'B'.r^۲}{A'F.B'F}.\frac{r^۲}{D'F}.\frac{E'C'.r^۲}{C'F.E'F} = \frac{r^۲}{B'F}.\frac{D'E'.r^۲}{D'F.E'F}.\frac{C'A'.r^۲}{A'F.C'F}.$$

حال با یک انعکاس مجدد به حالت ابتدایی بر می گردیم و مسئله حل می شود.

راه حل سوم : شش ضلعی را در صفحه مختلط قرار دهید و فرض کنید :

$$f = A - F, \ldots, b = C - B \text{ و } a = B - A$$

رابطه حاصل ضرب در سوال نتیجه می دهد $|ace| = |bdf|$ و تساوی زاویه ای نتیجه می دهد $\frac{-b}{a}.\frac{-d}{c}.\frac{-f}{e}$ حقیقی و مثبت است. بنابراین $ace = -bdf$. همچنین :

$a + b + c + d + e + f = ۰$ با ضرب در ad و جمع $ace + bdf = ۰$ داریم :

$$a^۲d + abd + acd^۲ + ad^۲ + ade + adf + ace + bdf = ۰$$

یا $\quad a(d+e)(c+d) + d(a+b)(f+a) = ۰$

بنابراین :

$$|a(d+e)(c+d)| = |d(a+b)(f+a)|$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

❋❋❋

۱۶- رومانی

مسأله ۱-۷

راه حل : یکی از اضلاع قائمه باید بر سه بخش پذیر باشد، فرض کنید طول این ضلع ۳a، طول ضلع دیگر زاویه قائمه b و طول وتر برابر با c باشد که c,b,a اعدادی صحیح و مثبت هستند. طبق شرط داده شده داریم : $۳ab = ۳(۳a+b+c)$ یا $c = ab - ۳a - b$.

طبق قضیه فیثاغورث $(۳a)^۲ + b^۲ = c^۲ = (ab - ۳a - b)^۲$ که به صورت زیر ساده می شود :

$ab[(a-۲)(b-۶)-۶] = ۰$ چون $a, b \geq ۰$، داریم $(a,b) \in \{(۳,۱۲),(۴,۹),(۵,۸),(۸,۷)\}$ و بنابراین طول اضلاع مثلث برابرند با $(۹,۱۲,۱۵),(۷,۱۵,۱۷)$ یا $(۷,۲۴,۲۵)$.

***

مسأله ۲-۷

راه حل : با ساده کردن تساوی داریم : $(a-c)(b^۲ - ac) = ۰$، چون $a \neq c$ پس $ac = b^۲$.

حال $a^۲ + b^۲ + c^۲ = a^۲ + (۲ac - b^۲) + c^۲ = (a+c)^۲ - b^۲ = (a+b+c)(a-b+c)$ همچنین $|a|,|c|$ نمی توانند هر دو برابر با ۱ باشند. پس : $a^۲ + b^۲ + c^۲ > |a| + |b| + |c| \geq |a+b+c|, |a-b+c|$ در نتیجه $a^۲ + b^۲ + c^۲$ نمی تواند عددی اول باشد.

***

مسأله ۳-۷

راه حل : الف) چون $\angle BAC + \angle CBA = \angle ECA$، داریم : $\angle ECD = \angle BAC$.

پس $\Delta CDE \sim \Delta ACE$ و $\frac{AE}{CE} = \frac{CE}{DE}$. از طرفی $\overline{AC}$ نیمساز $\angle A$ در مثلث ABE است. پس $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE}$.

بنابراین $\frac{AB}{BC} = \frac{CE}{DE}$ و در نتیجه $AB.DE = BC.CE$.

ب) توجه کنید که $\overline{AC}$ نیمساز زاویه A از دو مثلث ADF و AEB است، بنابراین کافی است.

ثابت کنیم اگر $\overline{XL}$ یک نیمساز در مثلث دلخواه xyz باشد آنگاه $XL^{۲} < xy.xz$. فرض کنید $\overrightarrow{XL}$ و دایره محیطی xyz یکدیگر را در M قطع کنند. چون $\Delta XYL \sim \Delta XMZ$، داریم: $XL^{۲} < XL.XM = XY.XL$ و حکم ثابت می شود.

***

مسأله ۴-۷

راه حل : الف) چون $\Delta AEF \sim \Delta ABC, EF \,||\, BC$ و $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}$.

مشابهاً چون $AD \,||\, EG$، $\Delta BEG \sim \Delta BAD$, $\frac{EB}{AB} = \frac{EG}{AD}$، بنابراین $\frac{EF}{BC} + \frac{EG}{AD} = ۱$.

ب) فرض کنید خطوط AN و EF یکدیگر را درP قطع کنند و Q نقطه روی خط BC باشد به طوری که $AD \,||\, PQ$. چون $EF \,||\, BC$ و N وسط $\overline{BC}$ است پس P نقطه وسط $\overline{EF}$ است. بنابراین بردار EP با بردارهای GQ و PF , مساوی است و PFQG متوازی الاضلاع است.

پس نقطه X، وسط $\overline{FG}$ باید هم چنین وسط $\overline{PQ}$ نیز باشد. چون M وسط $\overline{AD}$ است و $AD \,||\, PQ$، نتیجه می شود M,X و N باید هم خط باشند.

***

مسأله ۱-۸

راه حل : دقت کنید که $|S \cap T|$ برابر است با تعداد مربع های کامل است به شکل $(۲n+۱)(n-۱)^{۲} = ۲n^{۳} - ۳n^{۲} + ۱$ که $n \in N$، $n \leq ۱۹۹۹$. برای چنین n هایی $(۲n+۱)(n-۱)^{۲}$. دقیقاً وقتی مربع کامل است که یا $n = ۱$ و یا $n \in \{ \frac{۱}{۲}(k^{۲}-۱) \,|\, k = ۱,۳,۵,...,۶۳ \}$ بنابراین $|S \cap T| = ۳۲$.

از طرفی $S \cap U$ برابر است با تعداد مربع های کامل به شکل $(۲n-۳)n^{۲} = ۲n^{۳} - ۳n^{۲}$ که $n \leq ۱۹۹۹, n \in N$ برای چنین n هایی $n^{۲}(۲n-۳)$ دقیقاً وقتی مربع کامل است که یا $n = ۰$ یا $n \in \{ \frac{۱}{۲}(u^{۲}+۳) \,|\, k = ۱,۳,۵,...,۶۳ \}$. بنابراین $|S \cap U| = ۳۲$ و حکم ثابت است.

***

مسأله ۲-۸

راه حل : الف) طبق نا مساوی کوشی- شوارتز و سپس نامساوی داده شده:

$$(\sum_{i=۱}^{n} x_i)^{۲} \leq \sum_{i=۱}^{n} x_i y_i \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{y_i} \leq \sum_{i=۱}^{n} x_i \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{y_i}$$

با تقسیم دو طرف بر $\sum_{i=1}^{n} x_i$ نا مساوی مورد نظر به دست می آید.

ب) طبق نامساوی میانگین حسابی - همساز برای c,b,a داریم :

$$a+b+c \geq \frac{9abc}{ab+bc+ca} \geq \frac{9abc}{3abc} = 3$$

نا مساوی داده شده در سوال معادل است با $3 \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ که نتیجه می دهد :

$$a+b+c \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

بنابراین اگر قرار دهیم : $y_3 = \frac{1}{c^2}, y_2 = \frac{1}{b^2}, y_1 = \frac{1}{a^2}, x_3 = c, x_2 = b, x_1 = a$

طبق قسمت الف) : $a+b+c \leq a^3+b^3+c^3$.

***

مسأله ۳-۸

راه حل : الف) فرض کنید منظور از $(p_1p_2 \dots p_k)$ صفحه شامل نقاط $p_k, \dots, p_2, p_1$ باشد. ابتدا دقت کنید که چهار ضلعی $A'B'CD$ یک متوازی الاضلاع است.

بنابراین در یک صفحه قرار می گیرد. داریم $AE \perp A'D$. همچنین خط AE در صفحه $(ADD'A)$ قرار می گیرد که بر CD عمود است. پس $AE \perp CD$ و بنابراین $AE \perp (A'B'CD)$ و $AE \perp A'C$. چون $AC \perp AF$ پس $A'C \perp EF, A'C \perp (AEF)$.

مشابهاً $B'Q \perp A'C$. چون خطوط $A'C, B'Q, EF$ همگی در صفحه $(A'B'CD)$ قرار دارند، نتیجه می شود که $EF || B'Q$. به طریق مشابه $FA || QP$. بنابراین صفحات $(B'PQ), (AEF)$ موازی هستند.

ب) چون $EF || B'Q$ و $FA || QP$، داریم $\angle EFA = \angle PQB'$. به علاوه طبق بالا $AE \perp EF$ و مشابهاً $B'P \perp PQ$ که نتیجه می دهد $\angle AEF = \angle B'PQ = 90^\circ$ بنابراین $\Delta AEF \sim \Delta B'PQ$.

***

مسأله ۴-۸

راه حل : قرار دهید $S = AB = BC = CA$.

با محاسبه ای ساده داریم : $AO = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}S$ و $AS = \frac{5}{\sqrt{48}}S$ و $AN = \frac{24}{5\sqrt{48}}S$.

آنگاه : $AO.AM = AN.AS = \frac{1}{2}S^2$ پس MONS یک چهار ضلعی محاطی است.

بنابراین $P,\angle MNS=۹۰^\circ$ مرکز ارتفاعی مثلث AMS است. فرض کنید Q محل برخوردMS و AP باشد. دقت کنید که $\angle AMB=\angle AQM=\angle QMB=۹۰^\circ$. با چند بار استفاده از قضیه فیثاغورث داریم :

$$AB^۲=AM^۲+MB^۲=AQ^۲+QM^۲+MB^۲=AQ^۲+QB^۲$$

که $\angle AQB=۹۰^\circ$. حال $AQ\perp QB$ و $AQ\perp QM$، بنابراین خط AQ باید بر صفحه (SBC) عمود باشد. چون صفحه (ABP) شامل AQ است، صفحات (ABP) و (SBC) باید بر هم عمود باشند.

***

مسأله ۱-۹

راه حل : چون $\Delta ADB\sim\Delta AMD,\ \frac{AD}{AB}=\frac{AM}{AD}$ همچنین $AMDN,\angle MAN+\angle NDM=۱۸۰^\circ$ یک چهار ضلعی محاطی است. چون $\angle DCA=\angle ADN=\angle AMN,\ \Delta ADC\sim\Delta APM,\ \frac{AD}{AP}=\frac{AC}{AM}$ بنابراین :

$$\frac{AD}{AB}\frac{AD}{AC}\frac{AD}{AP}=\frac{AM}{AD}\frac{AD}{AC}\frac{AC}{AM}=۱$$

***

مسأله ۲-۹

راه حل : چند جمله ای زیر را در نظر بگیرید : $P(x)=(a+b)x^۲-۲(ab-۱)x-(a+b)=۰$ چون $a+b\neq ۰$، حاصلضرب ریشه های $P(x)$ عبارت است از $-\frac{a+b}{a+b}=-۱$. بنابراین $P(x)$ باید یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی داشته باشد. چون ضریب پیشرو $P(x)$ مثبت است. $P(x)$ برای $x>t(a,b)$ مثبت و برای $۰\leq x<t(a,b)$ منفی است. (چون در این حالت X بین دو ریشه قرار دارد) بنابراین شرط $t(a,b)\leq\sqrt{ab}$ معادل است با :

$$P(\sqrt{ab})\geq ۰ \text{، یا } (ab-۱)(a+b-۲\sqrt{ab})\geq ۰$$

طبق نامساوی میانگین حسابی - هندسی $a+b>۲\sqrt{ab}$ که نامساوی اکید است زیرا $a\neq b$، بنابراین $t(a,b)\leq\sqrt{ab}$ دقیقاً وقتی $ab\geq ۱$.

حال با استفاده از فرمول ریشه های چند جمله ای درجه ۲ :

$$t(a,b)=\frac{ab-۱}{a+b}+\sqrt{(\frac{ab-۱}{a+b})^۲+۱}$$

بنابراین، اگر $ab\geq ۱$ داریم $t(a,b)\geq ۱$ که مساوی در حالتی رخ می دهد که $ab=۱$.

***

مسأله ۳-۹

راه حل : می دانیم که یک دایره در چهار ضلعی محدب ABCD محاط می شود اگر و فقط اگر
AB+CD=AD+BC

نیمساز زاویه A از نقاطی داخل زاویه $\angle BAD$ تشکیل شده است که از AB و AD به یک فاصله اند. مشابهاً نیمساز زاویه C از نقاطی داخل زاویه $\angle BCD$ تشکیل شده است که از BC و BD به یک فاصله اند.

فرض کنید ABCD دایره محاطی داشته باشد. در این صورت مرکز این دایره فاصله یکسانی از ۴ ضلع دارد. پس روی هر دو نیمساز قرار می گیرد و بنابراین همان I است. اگر فرض کنید r شعاع این دایره باشد :

$$[AIB]+[CID]=r(AB+CD)=r(AD+BC)=[AID]+[BIC].$$

بر عکس، فرض کنید $[AIB]+[CID]=[AID]+[BIC]$. فرض کنید فاصله نقطه I از خط ℓ را با $d(I,\ell)$ نشان دهیم. قرار دهید $x=d(I,AB)=d(I,AD)$, $y=d(I,BC)=d(I,CD)$. پس :

$[AIB]+[CID]=[AID]+[BIC].$

$AB.X+CD.y=AD.X+BC.y$

$X(AB-AD)=y(BC-CD)$

اگر $AB=AD$، آنگاه $BC=CD$ و بنابراین $AB+CD=AD+BC$. در غیر این صورت فرض کنید $AB>AD$ آنگاه $BC>CD$. نقاط $A'\in\overline{AB}$, $C'\in\overline{BC}$ را چنان در نظر بگیرید که $AD=AA'$, $CD=CC'$ طبق حالت ((ض ز ض)) $\Delta AIA'\cong\Delta AID$, $\Delta DCI\cong\Delta C'IC$.

بنابراین $IA'=ID=IC'$ به علاوه با کم کردن $[AIA']+[DCI]=[AID]+[C'IC]$ از دو طرف شرط داده شده، داریم $[A'IB]=[C'IB]$ یا $IA'.IB.\sin\angle A'IB=IC'.IB.\sin\angle CIB$. بنابراین $\angle A'IB=\angle C'IB$ و در نتیجه $\Delta A'IB\cong\Delta C'IB$ طبق (ض ز ض). پس $\angle IBA'=\angle IBC'$، نتیجه می دهد I روی نیمساز زاویه ABC قرار دارد. بنابراین $x=d(I,AB)=d(I,BC)=y$ و دایره به مرکز I و شعاع $x=y$ بر چهار ضلع چهار ضلعی مفروض مماس است.

***

مسأله ۴-۹

راه حل : الف) صرفنظر از مقدار x، مقدار یکتای $\lambda=\dfrac{b-x}{b-a}$ موجود است که $x=\lambda a+(1-\lambda)b$ همچنین $a<x<b \Leftrightarrow 0<\dfrac{b-x}{b-a}<1$ که ادعا را ثابت می کند.

ب) شرط داده شده می گوید f اکیداً محدب است. به بیان هندسی، وقتی $x<t<y$، نقطه $(t,f(t))$ اکیداً زیر خط واصل $(x,f(x)),(y,f(x))$ قرار می گیرد. فرض کنید متوازی الاضلاعی موجود باشد که رئوس آن روی نمودار f واقعند و از چپ به راست مختص x آنها برابر است با d,c,b,a. در این صورت یا $(b,f(d))$ و یا $(d,f(d))$ باید بالای خط واصل $(a,f(a))$, $(c,f(c))$ قرار بگیرند که تناقض است.

مسأله ۱-۱۰

راه حل : نخست، برای این که رابطه دوم با معنی باشد باید $x, y > ۰$. پس $۲۷^{y} > ۱$. از رابطه سوم داریم:

$$\frac{۱}{۲۷^{y}} \geq \frac{۱}{۴^{x}+۱}$$

با ترکیب این نامساوی با تساوی اول داریم :

$$\frac{۱}{۴^{x}} + \frac{۱}{۴^{x}+۱} \leq \frac{۵}{۶}$$

پس $x \geq \frac{۱}{۲}$. مشابهاً رابطه دوم و سوم به دست می دهد :

$$\frac{۵}{۶} \leq \frac{۱}{۲۷^{y}-۱} + \frac{۱}{۲۷^{y}}$$

پس $y \leq \frac{۱}{۳}$. اگر $x > \frac{۱}{۲}$ یا $y < \frac{۱}{۳}$ داریم :

$$\text{lig}_{۲۷}^{y} - \log_{۴}^{x} < \frac{۱}{۶}$$

که با رابطه دوم در تناقض است. پس تنها جواب ممکن عبارت است از $(x, y) = (\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳})$ که در هر سه رابطـه صـدق می کند.

***

مسأله ۲-۱۰

راه حل : طبق قانون کسینوس ها در مثلث MBN ، داریم :

$$MN^{۲} = MB^{۲} + BN^{۲} - MB.BN \geq MB.BN$$

مشابهاً $NP^{۲} \geq CN.CP$, $PQ^{۲} \geq DP.DQ$ و $MQ^{۲} \geq AQ.AM$. با ضرب این نامساوی ها داریم :

$$(MN.NP.PQ.MQ)^{۲} \geq (BM.CN.DP.AQ).(AM.BN.CP.DQ)$$

حال صفحه داده شده با دو صفحه (ABC) و (ADC) متمایز است. بنـابراین اگـر خـط AC را در نقطـه T قطـع کند T,N,M باید هم خط باشند. زیرا در غیر این صورت تنها صفحه شامل T,N,M صفحه (ABC) است.

پس این صفحه با AC در حداکثر یک نقطه T اشتراک دارد. طبق قضیه من- لائوس برای مثلث ABC و خط MNT داریم :

$$\frac{AM.BN.CT}{MB.NC.TA} = ۱$$

مشابهاً T,Q,P نیز هم خطند و داریم :

$$\frac{AQ.DP.CT}{QD.PC.TA} = ۱$$

با مساوی قرار دادن این دو کسر و طرفین - وسطینی داریم :

$$AM.BN.CP.DQ = BM.CN.DP.AQ$$

این عبارت حتی موقعی که صفحه خط AC را قطع نکند نیز درست است. در این حالت باید داشته باشیم $AC \,||\, MN$ و $AC \,||\, PQ$ که در این حالت از تشابه مثلث ها داریم :

$$CP.DQ = DP.AQ \quad \text{و} \quad AM.BN = BM.CN$$

با ترکیب آخرین تساوی و نامساوی پاراگراف اول داریم :

$$(MN.NP.PQ.QM)^{2} \geq (AM.BN.CP.DQ)^{2}$$

که نتیجه مورد نظر را به دست می دهد.

***

مسأله ۳-۱۰

راه حل : ادعا می کنیم : $Re(b)^{2} \leq |a+\bar{c}|^{2}$. اگر $\partial_1 = \partial_2 = 0$ ، آنگاه $b = 0$ و نامساوی برقرار است.

در غیراینصورت فرض کنید $a = m+ni$ و $c = r+si$ و $\partial_1 = x+iy$ که $1 > t = |\partial_1| = \sqrt{x^{2}+y^{2}}$ همچنین توجه کنید که $r^{2}+s^{2} = |c|^{2} = |a\,\partial_1\partial_2|^{2} < |a|^{2}|\partial|^{2} = (m^{2}+n^{2})t^{2}$ (۱)

بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $\partial_1 \neq 0$. آنگاه :

$$|Re(b)| = |Re(-b)| = \left|Re(a\,\partial_1 + \frac{2}{\partial_1})\right| = \left|Re(a\partial_1) + Re(\frac{2}{\partial_1})\right|.$$

بنابراین :

$$|Re(b)| = \left|(mx-ny)+(rx+sy)t^{2}\right| = \left|x(m+\frac{r}{t^{2}}-n)\right|$$

$$\leq \sqrt{x^{2}+y^{2}}\sqrt{(m+\frac{r}{t^{2}})^{2}+(\frac{3}{t^{2}-n})^{2}} = t\sqrt{(m+\frac{r}{t^{2}})^{2}+(\frac{s}{t^{2}}-n)^{2}}$$

که این نامساوی، از نامساوی کوشی - شوارتز نتیجه شده است.

بنابراین اثبات ادعا به نشان دادن رابطه زیر تبدیل می شود.

$$t^{2}((m+\frac{r}{t^{2}})^{2}+(\frac{s}{t^{2}}-n)^{2}) \leq (m+1)^{2}+(n-s)^{2}$$

$$\Leftrightarrow (mt^{2}+r)^{2}+(st^{2}-n)^{2} \leq (t^{2}(m+r)^{2}+(n-s)^{2})$$

$$\Leftrightarrow (r^{2}+s^{2})(1-t^{2}) < (m^{2}+n^{2})(t^{4}-t^{2})$$

$$\Leftrightarrow (1-t^{2})((m^{2}+n^{2})t^{2}-(r^{2}+s^{2})).$$

طبق فرض $1-t^{2} > 0$, $(m^{2}+n^{2})t^{2}-(r^{2}+s^{2}) > 0$ طبق (۱) . بنابراین ادعا ثابت شد.

حال چون $|\partial_1\partial_2| < 1$ ، $\left|\frac{c}{a}\right| = |\partial_1\partial_2| < 1$، داریم $|c| < |a|$, $a+\bar{c} \neq 0$ آنگاه، ریشه های معادله درجه دوم $(a+\bar{c})\partial^2 + (b+\bar{b})\partial + (\bar{a}+c) = 0$ عبارتند از :

$$\frac{-(b+\bar{b}) \pm \sqrt{(b+\bar{b})^2 - 4(a+\bar{c})(\bar{a}+c)}}{2(a+c)}$$

یا (با تقسیم صورت و مخرج بر ۲) :

$$\frac{-Re(b) \pm \sqrt{Re(b)^2 - (a+\bar{c})^2}}{a+\bar{c}} = \frac{-Re(b) \pm i\sqrt{|a+\bar{c}|^2 - Re(b)^2}}{a+\bar{c}}$$

برای هر ریشه، قدر مطلق صرت برابر است با $\sqrt{Re(b)^2 + (|a+\bar{c}|^2 - Re(b)^2)} = |a+\bar{c}|$ و قدر مطلق مخرج نیز به وضوح برابر است با $|a+\bar{c}|$ پس $|w_1| = |w_2| = 1$.

***

مسأله ۴-۱۰

راه حل : الف) فرض کنید $\pi_i = \frac{1}{x_i y_i}$, $S_i = x_i - y_i$ برای $1 \le i \le n$. داریم :

$\pi_1 > \pi_2 > \ldots > \pi_n > 0$, $\sum_{i=1}^{k} S_i \ge 0$ ، برای هر $1 \le k \le n$. دقت کنید که :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{y_x} - \frac{1}{x_x}\right) = \sum_{k=1}^{n}\pi_k S_x = \pi_n \sum_{i=1}^{n} S_i + \sum_{k=1}^{n-1}(\pi_k - \pi_{k+1})(S_1 + S_2 + \ldots + S_k) \ge 0$$

و حکم ثابت است.

ب) بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ و قرار دهید $y_i = 2^{i-1}$ برای هر i.

به وضوح : $a_1 y_1 < a_2 y_2 < \ldots < a_n y_n$

برای هر k , 2^{k-1} مجموعی که با انتخاب حداقل یکی از a_i ها به وجود می آیند، متمایز هستند. بنابراین بزرگترین آنها، $\sum_{i=1}^{k} a_i$ باید حداقل $2^k - 1$ باشد. بنابراین برای $k = 1,2,\ldots,n$ داریم :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \ge 2^k - 1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_k$$

طبق قسمت (الف) باید داشته باشیم :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_n}$$

***

مسائل انتخابی IMO

مسأله ۱

راه حل : یک عدد صحیح را مرگبار بنامید، اگر مجموع ارقامش بر ۱۱ بخش پذیر باشد و فرض کنید $d(n)$ ، مجموع ارقام عدد صحیح مثبت n باشد.

اگر n به ۰ ختم شود، اعداد $n, n+۱, \dots, n+۹$ فقط در یکان با هم متفاوتند، که از ۰ تا ۹ تغییر می کند. پس $d(n), d(n+۱), \dots, d(n+۹)$ تشکیل تصاعد حسابی با قدر نسبت ۱ می دهند. بنابراین اگر $d(n) \not\equiv ۱ \pmod{۱۱}$، یکی از این ۹ عدد مرگبار است.حال فرض کنید n به ۰ ختم شود و $d(n) \equiv d(n+۱۰) \equiv ۱ \pmod{۱۱}$.

چون $d(n) \equiv ۱ \pmod{۱۱}$، باید داشته باشیم $d(n+۹) \equiv ۱۰ \pmod{۱۱}$. اگر $n+۹$ به k رقم ۹ ختم شود، آنگاه داریم $۲ \equiv d(n+۱۰) - d(n+۹) \equiv ۱ - ۹k \pmod{۱۱}$. پس $k \equiv ۶ \pmod{۱۱}$.

الف) فرض کنید ۳۹ عدد صحیح متوالی داریم که هیچ کدام مرگبار نیستند. از ۱۰ تای اول یکی باید به ۰ ختم شود. این عدد را n بنامید. چون هیچ یک از $n, n+۱, \dots, n+۹$ مرگبار نیستند. باید داشته باشیم $d(n) \equiv ۱ \pmod{۱۱}$ طبق آنچه در بالا گفته شد، این نتیجه می دهد که $n+۹$, $n+۱۹$ باید به حداقل ۶ رقم ۹ ختم شوند و این غیر ممکن است زیرا $n+۱۰$ و $n+۲۰$ هر دو نمی توانند مضربی از یک میلیون باشند!

ب) فرض کنید ۳۸ عدد متوالی $N, N+۱, \dots, N+۳۷$ را داریم که هیچ کدام مرگبار نیسند. طبق تحلیلی مشابه با قسمت الف) هیچ کدام از ۹ عدد اول نمی توانند به رقم صفر ختم شوند. بنابراین $N+۹$ به یک صفر ختم می شود و هم چنین $N+۱۹$, $N+۲۹$. پس باید داشته باشیم $d(N+۹) \equiv d(N+۱۹) \equiv d(N+۲۹) \equiv ۱ \pmod{۱۱}$.

بنابراین $d(N+۱۸) \equiv ۱۰ \pmod{۱۱}$. به علاوه اگر $N+۱۸$ به k رقم ۹ ختم شود باید داشته باشیم $k \equiv ۶ \pmod{۱۱}$ کوچکترین n ممکن با این شرایط ۹۹۹۹۹۹ است و ۳۸ عدد متوالی عبارتند از ۹۹۹۹۸۱، ۹۹۹۹۸۲، ... و ۱۰۰۰۰۱۸. هیچ کدام از این اعداد مرگبار نیستند : مجموع ارقام آنها به پیمانه ۱۱ به ترتیب با ۱, ۲, ... , ۱۰, ۱, ۲, ... , ۱۰, ۱, ۲, ... , ۱۰, ۲, ۳, ... , ۹, ۱۰ همنهشت هستند.

***

مسأله ۲

راه حل : فرض کنید خطوط BL , CM یکدیگر را در I قطع کنند. آنگاه :

$$\angle BIC = ۱۸۰^\circ - \angle ICB - \angle CBI = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}(\angle C + \angle B) = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \angle A) = ۹۰^\circ + \angle A$$

و بنابراین $\angle BIC = ۱۲۰^\circ$ اگر وفقط اگر $\angle A = ۶۰^\circ$.

برای اثبات لزوم شرط، فرض کنید $\angle A = ۶۰^\circ$ ، k نقطه اشتراک $\overline{BC}$ و نیمساز داخلی $\angle BIC$ باشد. ادعا می کنیم مثلث KLM متساوی الاضلاع است. چون $\angle BIC = ۱۲۰^\circ$، می دانیم که $\angle MIB = \angle KIB = ۶۰^\circ$. به علاوه $IB = IB, \angle IBM = \angle IBK$.

بنابراین طبق حالت« ض ز ض»، $\Delta IBM = ۶۰^\circ$ ، $IM = IK$.

مشابهاً $IL = IK = IM$. با ترکیب با رابطه $\angle KIL = \angle LIM = \angle MIK = ۱۲۰^\circ$، این تساوی نتیجه می دهد مثلث KLM متساوی الاضلاع است. برای اثبات کفایت شرط، فرض کنید K روی $\overline{BC}$ قرار دارد مثلث KLM متساوی الاضلاع است. دو مثلث BLK و BLM را در نظر بگیرید :

$\angle MBL = \angle KBL$, $LM = LK$, $BL = BL$

حالت همنهشتی «ض ز ض» نداریم ولی می دانیم :

یا $\angle LKB + \angle BML = ۱۸۰^\circ$ و یا $\angle LKB = \angle BML$

چون $\angle KBM < ۹۰^\circ$ و $\angle MLK = ۶۰^\circ$، می دانیم که $\angle LKB + \angle BML > ۲۱۰^\circ$.

بنابراین $\angle LKB = \angle BML$, $\Delta BLK \cong \Delta BLM$ و $BK = BM$.

نتیجه می شود $IK = IM$. مشابهاً $IL = IK$ و I مرکز دایره ی محیطی مثلث KLM است. پس $\angle LIM = ۲\angle LKM = ۱۲۰^\circ$، که نتیجه می دهد $\angle BIC = \angle LIM = ۱۲۰^\circ$, $\angle A = ۶۰^\circ$.

***

مسأله ۳

راه حل : فرض کنید $\alpha = ۱+\sqrt{۳}$, $\beta = ۱-\sqrt{۳}$, $T_n = \frac{۱}{۲}(\alpha^{۲n+۱}+\beta^{۲n+۱})$.

توجه کنید که $\alpha\beta = -۲$ و $\frac{\alpha^۲}{۲} = ۲+\sqrt{۳}$, $\frac{\beta^۲}{۲} = ۲-\sqrt{۳}$. هم چنین با به کارگیری بسط دو جمله ای برای $(۱+\sqrt{۳})^n$, $(۱-\sqrt{۳})^۲$ به دست می آوریم $T_n = \sum_{k=۰}^{n}\binom{۲n+۱}{۲k}۳^k$، که برای هر n، صحیح است. حال با بکارگیری بسط دو جمله ای برای $(۲+\sqrt{۳})^{۲n+۱}$, $(۲-\sqrt{۳})^{۲n+۱}$، داریم :

$$S_n = \frac{(\frac{\alpha^۲}{۲})^{۲n+۱}+(\frac{\beta^۲}{۲})^{۲n+۱}}{۴} = \frac{\alpha^{۴n+۲}+\beta^{۴n+۲}}{۲^{۲n+۳}}$$

$$= \frac{\alpha^{۴n+۲}+۲(\alpha\beta)^{۲n+۱}+\beta^{۴n+۲}}{۲^{۲n+۳}}+\frac{۱}{۲} = \frac{Tn^۲}{۲^{۲n+۱}}+\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $۲^{۲n+۱}S_n = T_n^۲ + ۲^{۲n}$.

اما $۲^{۲n} \mid T_n^۲$, $۲^{۲n+۱} \nmid T_n^۲$ و بنابراین : $T_n \equiv ۲^n \pmod{۲^{n+۱}}$.

بنابراین : $S_n = \frac{T_n^2}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2} = (\frac{T_n - 2^n}{2^{n+1}})^2 + (\frac{T_n + 2^n}{2^{n+1}})^2$ برابر است با مجموع دو مربع کامل متوالی.

***

مساله ۴

راه حل اول :

فرض کنید $a_1 = \sqrt[n]{x_1}, a_2 = \sqrt[n]{x_2}, \ldots, a_n = \sqrt[n]{x_n}$ آنگاه : $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ و :

$$\frac{1}{n-1+x_k} = \frac{1}{n-1+a_k^n} = \frac{1}{n-1+\frac{1}{a_1 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_n}}$$

$$\leq \frac{1}{n-1+\frac{(n-1)a_k^{n-1}}{a_1^{n-1}+\ldots+a_{k-1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-1}+\ldots+a_n^{n-1}}}$$

باتوجه به نامساوی میانگین حسابی - هندسی. پس نتیجه می شود :

$$\frac{1}{n-1+x_k} \leq \frac{a_1^{n-1}+\ldots+a_{k-1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-1}+\ldots+a_n^{n-1}}{(n-1)(a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\ldots+a_n^{n-1})}$$

با جمع برای k های مختلف داریم :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-1+x_k} \leq 1$$

راه حل دوم : فرض کنید $f(x) = \frac{1}{n-1-x}$. می خواهیم ثابت کنیم $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq 1$. توجه کنید که :

$$f(y)+f(\partial) = \frac{2(n-1)+y+\partial}{(n-1)^2+y\partial+(y+\partial)(n-1)}$$

برای هر تعداد از x_i های داده شده که با ۱ برابر نیستند، اندیس های k,j موجودند که $x_j < 1 < x_k$. اگر $f(x_j)+f(x_k) \leq \frac{1}{n-1}$، آنگاه تعبیه $f(x_i)$ ها کمتر از $\frac{1}{n-1}$ هستند. پس $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) < 1$ و حکم ثابت است.

در غیراینصورت $f(x_j)+f(x_k^1) > \frac{1}{n-1}$. قرار دهید $x_j' = 1$, $x_k' = x_j x_k$

داریم $x_j' x_k' = x_j x_k$ و چون :

$$x_j < 1 < x_k$$
$$\Rightarrow (1-x_j)(x_k-1) > 0 \Rightarrow x_j + x_k > x_j' + x_k'$$

قرار دهید $a=2(n-1)$ ، $b=(n-1)^2+x_jx_k=(n-1)^2+x'_jx'_k$ ، $c=\frac{1}{n-1}$. همچنین قرار دهید $m=x_j+x_k$ ، $m'=x'_j+x'_k$. پس داریم :

$$f(x_j)+f(x_k)=\frac{a+cm}{b+m}\ ,\ f(x'_j)+f(x'_k)=\frac{a+cm'}{b+m'}.$$

حال :

$$\frac{a+cm}{b+m}>C\Rightarrow a+cm>(b+m)C\Rightarrow\frac{a}{b}>C\ ,$$

$$(a-bc)(m-m')>0\Rightarrow\frac{a+cm'}{b+m'}>\frac{a+cm}{b+m}\Rightarrow f(x'_j)+f(x'_k)=f(x_j)+f(x_k)$$

بنابراین تا وقتی که x_j ، x_2 ای موجود نباشند که $f(x_j)+f(x_k)\le\frac{1}{n-1}$ و همه x_i ها برابر با ۱ نباشند، می توانیم جفت x_j ، x_2 را (که هیچ کدام با ۱ مساوی نیستند) با ۱ و x_jx_k جایگزین کنیم. این عمل حاصل ضرب $x_1x_2-x_n$ را مساوی ۱ نگه می دارد ولی $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ را زیاد می کند. پس نهایتاً نامساوی $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le 1$ برای مجموع جدیدی که به دست می آید نتیجه می دهد که برای مجموع اصلی $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le 1$. بنابراین اثبات به پایان می رسد.

راه حل سوم : فرض خلف : فرض کنید $1<\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\dots+\frac{1}{n-1+x_n}$.

با قرار دادن $y_i=\frac{x_i}{n-1}$ برای $i=1,2,\dots,n$ داریم :

$$\frac{1}{1+y_1}+\frac{1}{1+y_2}+\dots+\frac{1}{1+y_n}>n-1$$

و بنابراین :

$$\frac{1}{1+y_1}>(1-\frac{1}{1+y_2})+(1-\frac{1}{1+y_3})+\dots+(1-\frac{1}{1+y_n})$$

$$=\frac{y_2}{1+y_2}+\frac{y_3}{1+y_3}+\dots+\frac{y_n}{1+y_n}>(n-1)\sqrt[n-1]{\frac{y_2y_3\dots y_n}{(1+y_2)(1+y_3)\dots(1+y_n)}}$$

نامساوی های مشابهی برای $\frac{1}{1+y_2},\frac{1}{1+y_3},\dots,\frac{1}{1+y}$ بنویسید.

با ضرب این n نامساوی در هم داریم :

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+y_k}>(n-1)^n\frac{y_1y_2\dots y_n}{(1+y_1)(1+y_2)\dots(1+y_n)}$$

یا

$$1>((n-1)y_1)((n-1)y_2)\dots((n-1)y_n)=x_1x_2\dots x_n.$$

که تناقض است.

مسأله ۵

راه حل : بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. ثابت می کنیم

$$3x_k^2 \ge 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}) + (2k+1)x_k.$$

آنگاه با جمع این نامساوی ها برای $k = 1, 2, \dots, n$ نامساوی دلخواه به دست می آید.

اولاً $x_1 x_2 + \dots + x_{k-1} \le (x_k - (k-1)) + (x_k - (k-2)) + \dots + (x_k - 1) = (k-1)x_k - \frac{k(k-1)}{2}$

بنابراین :

$$2(x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}) + (2k+1)x_k \le (4x-1)x_k - k(x-1).$$

حال $3x_k^2 - [(4k-1)x_k - k(k-1)] = x_k(3x_k - 4k + 1) + k(k-1)$ که موقعی کمترین مقدار خود را اختیار می کند که $x_k = \frac{2}{3}k$. چون $x_k \ge k$:

$$x_k(3x_k - 4k + 1) + k(k-1) \ge k(3k - 4k + 1) + k(k-1) = 0$$

بنابراین :

$$3x_k^2 \ge (4k-1)x_k - k(k-1) \ge 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}) + (2k+1)x_k$$

و حکم ثابت است.

***

مسأله ۶

راه حل : هدف ما پیدا کردن تصاعدهایی با $b_{n-1} = a_{n-2} + 1, b_n = a_{n-1} + 1$ است. قرار دهید $d = a_{n-1} - a_{n-2}$.

آنگاه برای هر $2 \le i, j \le n-1$، داریم $b_{i+1} - b_i \le b_n - b_{n-1} = d$.

پس $b_j = b_n + \sum_{i=j}^{n-1}(b_i - b_{i+1}) > a_{n-1} + (n-j)d = a_{j-1}$ اگر $b_1 < a_1$، آنگاه :

$$b_j = b_1 + \sum_{i=1}^{j-1}(b_{i+1} - b_i) \le a_1 + (n-j)d = a_j$$

برای هر j. بنابراین زنجیر نامساوی ها برقرار است.

فرض کنید $b_1, b_2, \dots, b_n$ به ترتیب مساوی باشند با $k^{n-1}, k^{n-2}(k+1), \dots, k^0(k+1)^{n-1}$ ، که x مقداری است که بعداً مشخص می کنیم هم چنین قرار دهید $a_{n-1} = b_n - 1$, $a_{n-2} = b_{n-1} - 1$. و بقیه a_i ها را مشابهاً تعریف کنید. آنگاه $d = a_n - a_{n-1} = b_n - b_{n-1} = (k+1)^{n-2}$, $a_1 = (k+1)^{n-2}(k+3-n) - 1$.

بنابراین کافی است k چنان انتخاب شود که $(k+1)^{n-2}(k+3-n) - 1 - k^{n-1} > 0$ اگر به طرف چپ به عنوان چند جمله ای برحسب k نگاه کنیم، ضریب k^{n-1} برابر است با صفر و ضریب k^{n-2} برابر است با ۱ بنابراین برای k ی به اندازه کافی بزرگ مثبت است و می توان دنباله های مورد نظر $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ را به دست آورد.

برای $n=5$ ، k باید به گونه ای باشد که $5.(k+1)^{3}(k-2)-1-k^{4}>0$ ، $k=5$ مناسب است. پس :

$$625<647<750<863<900<1079<1080<1295<1269<1511$$

***

مسأله ۷

راه حل : با استقرا روی $n\geq 1$ ثابت می کنیم :

$$x_{n+1}>\sum_{k=1}^{n}kx_{k}>a.n!$$

برای $n=1$، داریم : $x_{2}\geq 3x_{1}>x_{1}=a$. حال فرض کنید ادعا برای همه مقادیر کمتر از n برقرار باشد. آنگاه :

$$x_{n+2}\geq (n+3)\,x_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}kx_{k}$$
$$=(n+1)\,x_{n+1}+2x_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}kx_{k}$$
$$>(n+1)\,x_{n+1}+2\sum_{k=1}^{n}kx_{k}-\sum_{k=1}^{n}kx_{k}=\sum_{k=1}^{n+1}kx_{k}$$

به علاوه طبق تعریف $x_{1}>0$ ، $x_{2},x_{3},\ldots,x_{n}$ همگی طبق فرض استقرا مثبت هستند.

بنابراین $x_{n+1}>(n+1)\,n_{n+1}>(n+1)\,(a.n!)=a-(n+1)!$. بنابراین مرحله استقرایی کامل می شود. بنابراین برای n های به مقدار کافی بزرگ داریم $x_{n+1}>n!.a>1999!$.

***

مسأله ۸

راه حل : ابتدا چهار وجهی MNPQ را با خواص زیر در نظر بگیرید :

۱) اگر H پای عمود وارد بر صفحه (NPQ) از نقطه M باشد،

$$HQ=\sqrt{22}\ ,\ HP=2\sqrt{3}\,,HN=4$$

۲) خطوط MP,MN و MQ دو به دو بر هم عمودند. اگر چنین چهار وجهی موجود باشد، فرض کنید $O=H$ و مثلث ABC را در صفحه (MPQ) بکشید.

داریم $MA=\sqrt{MO^{2}+OA^{2}}=\sqrt{MH^{2}+HN^{2}}=MN$ و مشابهاً $MC=MQ\,,MB=MP$. بنابراین :

$$[ABCM]\leq\frac{1}{3}[ABM]MC\leq\frac{1}{3}(\frac{1}{2}MA.MB).MC$$
$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}MN.MP).MQ=[MNPQ]$$

و بنابراین بیشترین مقدار ممکن برای $[ABC]$ برابر است با $[NPQ]$.
پس کافی است چهار وجهی MNPQ را بیابیم. قرار دهید $x = MH$، بنابراین :

$$MQ=\sqrt{x^۲+۲۲},MP=\sqrt{x^۲+۱۲}\ ,MN=\sqrt{x^۲+۱۶}$$

طبق قضیه فیثاغورث در مثلث $NH=۴, MHN$. حال فرض کنید خطوط PQ, NH یکدیگر را در ریال قطع کنند. در مثلث های قائم الزاویه متشابه MHN , MRN، داریم :

$$.MR=MH.\frac{MN}{NH}=\frac{۱}{۴}(x^۲+۱۶)$$

چون $MN \perp (MPQ)$، داریم $MN \perp PQ$.
چون $MH \perp (NPQ)$ داریم $MH \perp PQ$. بنابراین $PQ \perp (MNHR)$ بنابراین $\overline{MR}$ ارتفاع مثلث قائم الزاویه MPQ است. بنابراین $MR.PQ = PQ = ۲[MPQ] = MP.MQ$ یا :

$$\sqrt{\frac{(x^۲+۱۶)^۲}{۱۶}-(x^۲+۱۶)}\sqrt{x^۲+۱۲+x^۲+۲۲}=\sqrt{x^۲+۱۲}\sqrt{x^۲+۲۲}$$

با قرار دادن $۴y=x^۲+۱۶$ و به توان رساندن دو طرف داریم :

$$(y^۲-۴y)(۸y+۲)=(۴y-۴)(۴y+۶)=(y-۶)(۴y^۲+y-۲)=۰$$

چون $y=\frac{۱}{۴}(x^۲+۱۶)>۴$، تنها جواب معادله $y=۶$ و در نتیجه $x\sqrt{۸}$ است. پس با قرار دادن :
$MN=\sqrt{۲۴}$ و $MP=\sqrt{۲۰}$, $MQ=\sqrt{۳۰}$، چهار وجهی مورد نظر را به دست می آوریم.
پس $[MNPQ]$ برابر است با $\frac{۱}{۳}MH.[MPQ], \frac{۱}{۶}MN.MP.MQ$. با مساوی قرار دادن این دو عبارت بیشترین مقدار $[ABC]$ برابر است با :

$$[NPQ]=\frac{MN.MP.MQ}{۲.MH}=۱۵\sqrt{۲}$$

***

مسأله ۹

راه حل : فرض کنید ∂ یک ریشه مختلط چند جمله ای باشد. نشان می دهیم $|\partial|>۱$. فرض کنید $|\partial|\le ۱$، آنگاه $\partial^n+a\partial=-p$ و نتیجه می گیریم :

$$p=|\partial^n+a\partial|=|\partial||\partial^{n-۱}+a|\le|\partial^{n-۱}|+|a|\le ۱+|a|$$

که با فرض در تناقض است. حال فرض کنید $f=gh$ تجزیه f به دو چند جمله ای غیر ثابت با ضرایب صحیح باشد. آنگاه $p=f(۰)=g(۰)h(۰)$ و بنابراین یا $|g(۰)|=۱$ یا $|h(۰)|=۱$. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $|g(۰)|=۱$. اگر $\partial_۱,\partial_۲,...,\partial_k$ ریشه های g باشند، چون آنها ریشه های f نیز هستند. داریم :

$$۱=|g(۰)|=|\partial_۱\partial_۲...\partial_k|=|\partial_۱||\partial_۲|...|\partial_k|>۱$$

مسأله ۱۰

راه حل : زاویه ها جهت دار و به پیمانه 180° حساب شده اند. فرض کنید M'، بازتاب نقطه M نسبت به K باشد. مثلث های $M'KD, MKC$ با همین ترتیب رئوس با هم همنهشت هستند و $M'D = MC$. چون M وسط $\widehat{BC}$ است داریم $BN = ON$. پس :

$$\angle MBN = \left|180^\circ - \angle ABM\right| + (180^\circ - \angle NBA)$$
$$= \angle MCA + \angle ADN = \angle M'DA + \angle ADN = \angle M'DN$$

بنابراین $\Delta M'DN \cong \Delta HBN$ ، $MN = M'N$. پس $\overline{NK}$ میانه قاعده مثلث متساوی الساقین MNM' است. پس ارتفاع نیز است و $NK \perp MK$.

***

مسأله ۱۱

راه حل : بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید نقاط $A_1, A_2, ..., A_n$ در جهت پاد ساعتگرد باشند. همچنین اندیس ها را به پیمانه n در نظر بگیرید، یعنی $A_{n+1} = A_1, A_{n+2} = A_2$ و مانند آن. کمانی از دایره که از A_i شروع و به A_j در جهت پاد ساعتگرد ختم می شود را A_iA_j بنامید.

فرض کنید x_5 تعداد کمان های باز باشد که دقیقاً $5-1$ نقطه دارند. اگر $S \neq \frac{n}{2}$، آنگاه برای هر iها نتیجه می گیریم (۱) $x_5 + x_{n-x} \geq n$ برای هر $S \neq \frac{n}{2}$، به دلیل مشابه این نامساوی حتی برای $S = \frac{n}{2}$ نیز برقرار است. برای همه ی S ها، تساوی رخ می دهد اگر و فقط اگر نقاط مقابل نظر A_i ، A_{i+s} موجود باشند.

تعداد مثلث های منفرجه الزاویه $A_iA_jA_k$ برابر است با تعداد زوایای باز $\angle A_iA_jA_k$. برای هر کمان باز A_iA_k که شامل $S-1$ نقطه در درون خودش است، $n-s-1$ تا چنین زاویه $A_iA_jA_k$ موجود است. نتیجه می شود N تعداد مثلث های منفرجه الزاویه برابر است با :

$$N = x_1(n-2) + x_2(n-3) + ... + x_{n-3}.2 + x_{n-2}.1 + x_{n-1}.O$$

با دسته بندی جملات و استفاده از (۱) داریم :

$$N \geq \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} (s-1)(x_{n-s} + x_5) \geq n(1+2+...+\frac{n-3}{2}) = \frac{n(n-1)(n-3)}{8}$$

اگر n فرد باشد، و :

$$N \geq \sum_{s=1}^{\frac{n-2}{2}} (s-1).(x_{n-s}+x_s)+\frac{n-2}{2}x_{\frac{n}{2}}$$

$$\geq n(1+2+...+\frac{n-4}{2})+\frac{n-2}{2}.\frac{n}{2}=\frac{n(n-2)^2}{8}$$

اگر n زوج باشد. تساوی موقعی برقرار است که نقاط مقابل قطر وجود نداشته باشند و موقعی که $x_k=0$ برای $k<\frac{n}{2}$. برای مثال موقعی که n فرد است، اگر نقاط تشکیل یک n – ضلعی منتظم بدهند تساوی رخ می دهد. موقعی که n زوج است تساوی رخ می دهد اگر :

$$m(A_1A_2)=m(A_2A_3)=..=m(A_{n-1}A_n)=\frac{360^\circ}{n}+\varepsilon \text{ که } 0<\varepsilon<\frac{360^\circ}{n^2}$$

نهایتاً، چون تعداد کل مثلث ها که رئوس آنها n نقطه داده باشند برابر است با $\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$، با کم کردن مقدار مینیمم N ، بیشترین مقدار مثلث های حاده الزاویه برابر است با $\frac{(n-1)n(n+1)}{24}$ اگر n فرد باشد و $\frac{(n-2)n(n+2)}{24}$ اگر n زوج باشد.

***

مسأله ۱۲

راه حل : فرض کنید A مجموعه دانشمندان بومی و B مجموعه دانشمندان خارجی باشد. فرض کنید $g:B\to A$, $f:A\to B$ توابعی باشند که به شکل زیر تعریف می شوند : f (a) دانشمند خارجی باشد که پیامی از a دریافت می کند، g (b) دانشمندی بومی می باشد که پیامی از b دریافت می کند.

اگر چنین زیر مجموعه های T,S موجود باشند، باید داشته باشیم $T=B-f(s)$ بنابراین ثابت می کنیم باید زیر مجموعه $S\leq A$ موجود باشدکه $A-S=g(B-f(s))$.

برای هر زیر مجموعه $X\leq A$ فرض کنید $h(x)=A-g(B-f(x))$. اگر $x\leq y$ آنگاه

$$f(x)\leq f(y)\Rightarrow B-f(y)\leq B-f(x)\Rightarrow g(B-f(y))\leq g(B-f(x))$$
$$\Rightarrow A-g(B-f(x))\leq A-g(B-f(y))\Rightarrow h(x)\leq h(y).$$

فرض کنید $M=\{x\leq A \mid h(x)\leq x\}$. M ناتهی است زیرا $A\in M$. به علاوه، g پوشا نیست، پس یک دانشمند بومی .a وجود دارد که در $g(B-f(x))$ نیست و بنابراین همیشه در $h(x)$ است برای هر $X\leq A$. پس هر زیر مجموعه درM شامل .a است در نتیجه $S=\bigcap_{X\in M} X$ ناتهی است.

طبق تعریف S ، داریم : $h(S) \le S$. طبق یکنوا بودن h داریم $h(h(S)) \le h(S)$. پس $h(S) \in M$، $S \le h(S)$. با ترکیب دو رابطه داریم $h(S) = S$.

***

مسأله ۱۳

راه حل : پاسخ مثبت است. فرض کنید چند وجهی p موجود است که هیچ سه یالی از آن تشکیل مثلث نمی دهند. فرض کنید $E_1, E_2, \ldots, E_n$ یال های چند وجهی با ترتیب نزولی طول باشد و فرض کنید e_i طول E_i باشد. دو وجهی را که E_1 را تشکیل می دهند در نظر بگیرید. برای هر کدام از این وجوه مجموع طول یال های آن به جز E_1 از e_1 بزرگتر است. بنابراین :

$$e_2 + e_3 + \ldots + e_n > 2e_1$$

چون فرض کرده ایم هیچ سه یالی از p تشکیل مثلث نمی دهند، داریم :

$$e_{i+1} + e_{i+2} \le e_i \quad \text{برای } i = 1,2,\ldots,n-2$$

بنابراین :

$$\begin{aligned} 2(e_2 + e_3 + \ldots + e_n) &= e_2 + (e_2 + e_3) + (e_3 + e_4) + \ldots + (e_{n-1} + e_n) + e_n \\ &\le e_2 + (e_1) + (e_2) + \ldots + (e_{n-2}) + e_n \end{aligned}$$

بنابراین :

$$e_2 + e_3 + \ldots + e_n \le e_1 + e_2 - e_{n-1} < e_1 + e_1 + 0 = 2e_1$$

که تناقض است. بنابراین فرض، غلط بوده است و سه یال از p موجودند که تشکیل مثلث بدهند.

***

۱۷- روسیه

دور چهارم

مسأله ۸-۱

راه حل : ابتدا پدر، پسر اولش را ۲۴ کیلومتر با موتوری می برد که $\frac{۶}{۵}$ ساعت طول می کشد؛ پس برمی گردد تا به پسر دیگرش در ۹ کیلومتری برسد (پسر دوم ۹ کیلومتر در اینصورت پیاده آمده است) که $\frac{۳}{۵}$ساعت طول می کشد؛ و در نهایت پدر با پسر دومش $\frac{۶}{۵}$ ساعت دیگر با موتورسیکلت به خانه ی مادربزرگ می رسد. هر پسر $\frac{۶}{۵}$ ساعت یعنی ۲۴ کیلومتر با موتور سیکلت و $\frac{۶}{۵}$ ساعت یعنی ۹ کیلومتر پیاده می رود. پس هر سه دقیقاً بعد از ۳ ساعت به خانه ی مادربزرگ می رسند.

***

مسأله ۸-۲

راه حل : قرار دهید :

$$k=(۱+۲+\ldots+A)-۱۰۰۰\ A$$
$$=\frac{A(A+۱)}{۲}-۱۰۰۰A=A(\frac{A+۱}{۲}-۱۰۰۰)$$

می دانیم $۰\le k\le ۹۹۹$. اگر $A<۱۹۹۹$ آنگاه k منفی است. اگر $A\ge ۲۰۰۰$ آنگاه $\frac{A+۱}{۲}-۱۰۰۰\ge\frac{۱}{۲}$ و $k\ge ۱۰۰۰$.
پس $A=۱۹۹۹$ و $۱+۲+\ldots+۱۹۹۹=۱۹۹۹۰۰۰$.

***

مسأله ۸-۳

راه حل اول : A_1 ، B_1 و C_1، اضلاع CA,BC و AB را به نسبت ۱:۲ تقسیم می کنند.

(یعنی $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{1}{2}$ و بقیه به همین شکل).

لم : در هر مثلث XYZ، میانه ها را می توان طوری انتقال داد تا تشکیل یک مثلث دهند، همچنین میانه های ایم مثلث جدید با اضلاع XYZ موازی هستند.

اثبات : فرض کنید z,y,x به ترتیب نشان دهنده ی بردارهای $\overrightarrow{ZX},\overrightarrow{YZ}$ و $\overrightarrow{XY}$ باشند. می دانیم $x+y+z=0$.
همچنین بردارهای نشان دهنده ی میانه های XYZ عبارتند از :

$$m_x=z+\frac{x}{2}\ ,\ m_y=x+\frac{y}{2}\ ,\ m_z=y+\frac{z}{2}$$

و داریم $\frac{3}{2}(x+y+z)=\overrightarrow{0}$ پس میانه ها تشکیل یک مثلث می دهند. از طرفی، بردارهای نشان دهنده ی میانه های این مثلث جدید عبارتند از :

$$m_x+\frac{m_y}{2}=x+y+z-\frac{3}{4}y=-\frac{3}{4}y$$

و به همین ترتیب $-\frac{3}{4}z$ و $-\frac{3}{4}x$.

* بنابراین این میانه ها با اضلاع YX,XZ و ZY موازی هستند.

فرض کنید E,D و F نقاط میانی اضلاع CA,BC و AB و ℓ_1,ℓ_2 و ℓ_3، پاره خطهای B_1B_2,A_1A_2 و C_1C_2 باشند. چون ℓ_1,ℓ_2 و ℓ_3 با BC,AB و AC موازی هستند. میانه های تشکیل شده با ℓ_1,ℓ_2 و ℓ_3 با AD,CF و BE موازی هستند. طبق لم آنها همچنین با B_1C_1 ، C_1A_1 و A_1B_1 موازیند. بنابراین $DE\ ||\ A_1B_1$ و $\Delta BCE\sim\Delta_1 AC_1B_1$. دراینصورت :

$$\frac{B_1C}{AC}=\frac{1}{2}\frac{B_1C}{EC}=\frac{1}{2}.\frac{A_1C}{BC}=\frac{1}{2}(1-\frac{A_1B}{CB})$$

و بطور مشابه :

$$\frac{C_1A}{BA}=\frac{1}{2}(1-\frac{B_1C}{AC})$$
$$\frac{B_1C}{CB}=\frac{1}{2}(1-\frac{C_1A}{BA})$$

با حل این سه معادله داریم :

$$\frac{B_1C}{AC}=\frac{C_1A}{BA}=\frac{A_1B}{CB}=\frac{1}{3}$$

و ادعای ما ثابت می شود به راحتی می توان دید که این نسبت ها در معادلات بالا صدق می کنند.

راه حل دوم : مانند راه اول می دانیم $B_1C_1\ ||\ AD,\ A_1B_1\ ||\ BE$ و $C_1A_1\ ||\ CF$. فرض کنید B',A' و C' نقاطی باشند که اضلاع CA,BC و AB را به نسبت ۱:۲ تقسیم می کنند.

چون $\frac{CA'}{CB}=\frac{CB'}{\frac{1}{2}CA}$ داریم : $A_1B_1 \mid\mid BE \mid\mid A'B'$ و به همین ترتیب.

برهان خلف : فرض کنید A_1 به B نزدیکتر از A_1 باشد. چون $A_1B_1 \mid\mid A'B'$, B_1 نسبت به B_1 از C دورتر است. بطور مشابه، C_1 از C' به A نزدیکتر و A_1 از B دورتر از A' است که تناقض است. به همین شکل، A_1 نمی تواند نسبت به A از B دورتر باشد. بنابراین $A_1=A'$ و $B_1=B'$ و $C_1=C'$.

***

مسأله ۸-۴

راه حل : $k=5$ کمترین مقدار است.

ابتدا فرض کنید $k=5$ توجه کنید ما فشار هوای داخل هر ۸ بادکنک $A, B, \dots, H$ را می توانیم با هم برابر کنیم به این صورت که ابتدا فشارهای $\{A,B,C,D\}$ و پس $\{E,F,G,H\}$ را با هم مساوی می کنیم پس فشارهای $\{A,B,E,F\}$ و $\{C,D,G,H\}$ را یکی می کنیم.

۴۰ بادکنک را به گروه های ۵ تایی تقسیم کنید و فشار هر گروه را با هم یکی کنید. حال ۵ گروه هشت تایی تشکیل دهید (شامل یک بادکنک از هر گروه ۵ تایی) و فشار هوای این گروه های جدید را با هم یکی کنید. حال فرض کنید $k \geq 4$. فرض کنید $b_1, b_2, \dots, b_{40}$ فشار هوای اولیه داخل بادکنک ها باشند. به سادگی می توان نشان داد که فشار هوای هر بادکنک هر زمان را می توان به صورت ترکیب خطی $a_1b_1+\dots+a_{40}b_{40}$ نوشت که a_j ها گویا هستند و مخرجشان بر هیچ عدد اولی غیر از ۲ و ۳ بخش پذیر نیست.

بنابراین اگر b_j ها روی اعداد گویا مستقل خطی باشند (مثلاً اگر $b_j=e^j$) هیچ گاه به فشار :

$$\frac{1}{40}b_1+\frac{1}{40}b_2+\dots+\frac{1}{40}b_{40}$$

در یک بادکنک نمی رسیم. در این حالت هیچ گاه نمی توانیم فشار داخل هر ۴۰ بادکنک را با هم برابر کنیم.

***

مسأله ۸-۵

راه حل : برهان خلف : فرض کنید این کار امکان پذیر باشد و a و b اعداد عضو A باشند. داریم :

$$(1+2+\dots+15)-a-b=ab$$
$$120=ab+a+b$$
$$|2|=(a+1)(b+1)$$

چون a و b اعداد صحیح بین ۱ و ۱۵ هستند تنها جواب این معادله عبارت است از $(a,b)=(10,10)$. از طرفی a و b باید متمایز باشند. پس به تناقض می رسیم.

***

مسأله ۸-۶

راه حل : بنابر بازتاب های گفته شده داریم : $\Delta ABC \cong \Delta ABC_1 \cong A_1BC$

چون $\angle B$ حاده است، C_1 و A هر دو در یک سمت BC قرار می گیرند. بنابراین C_1 و A_1 در دو سمت BC قرار می گیرند. چون C_1، B و A_1 همخط هستند داریم :

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle C_1BA + \angle ABC + \angle CBA_1 \\ &= \angle ABC + \angle ABC + \angle ABC \end{aligned}$$

پس $\angle ABC = 60^\circ$. همچنان می دانیم :

$$C_1B = 2A_1B \Rightarrow CB = 2AB$$

در نتیجه مثلث ABC ، $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ است و $\angle CA_1B = \angle BAC = 90^\circ$.

***

مسأله ۸-۷

راه حل : بازیکن اول استراتژی برد دارد. اگر $n = 0$ که بدیهی است. در غیراینصورت بازیکن اول باید با $(0,0)$ شروع کند و اگر بازیکن دوم در حرکت اولش $(0,a)$ را انتخاب کرد، بازیکن اول باید (a,a) را انتخاب کند. در اینجا، بازیکن دوم با زنجیره ای روبرو است که دو سر آن 0 یا a است. همچنین دومینوی $(0,k)$ روی میز است.

اگر و تنها اگر اگر دومینوی $(0,k)$ روی میز باشد. در این موقعیت که آن را خوب می گوئیم اگر بازیکن دوم $(0,k)$ را بازی کند، آنگاه بازیکن اول بعد از آن (k,a) را بازی می کند. از طرف دیگر اگر بازیکن دوم (a,k) را بازی کند بازیکن اول می تواند $(k,0)$ را بازی کند که دوباره بازی به موقعیت خوب برای بازیکن اول برمی گردد. بنابراین با این استراتژی بازیکن اول همیشه می تواند حرکت کند پس بازیکن دوم می بازد.

***

مسأله ۸-۸

راه حل : این کار ممکن نیست. برهان خلف : فرض کنید این کار ممکن باشد. محورهای مختصات را طوری در نظر بگیرید که رئوس مکعب در $(3_i, 3_j, 3_k)$ و $i,j,k \in \{0,1\}$ قرار گیرند و زنجیر را روی مکعب قرار دهید. فرض کنید هر دو مربع مجاور در زنجیر به وسیله ی یک پین (سوزن کوچک) به هم متصل هستند و در ابتدا و انتهای زنجیر نیز پین قرار دارد.

پین P در (x,y,z) را در نظر بگیرید، پین بعدی، Q در یکی از $(x, y\pm1, z\pm1)$ و $(x\pm1, y, z\pm1)$ یا $(x\pm1, y\pm1, z)$ قرار دارد. در هر حالت زوجیت مجموع مختصات P با زوجیت مجموع مختصات Q برابر است و بنابراین زوجیت مجموع مختصات همه ی پین ها با هم برابر است. بدون کاسته از کلیت، فرض کنید همه زوج هستند.

گرافی بسازید که رأسهای آن نقطه های با مجموع زوج در روی مکعب باشند و دو رأس را با یک یال به هم وصل کنید اگر دو نقطه رأس های مقابل هم یک مربع واحد باشند.

هر مربع در زنجیرها شامل یکی از این یال ها می شود، اما چون دقیقاً ۵۴ تا از این یال ها وجود دارد (هر یک در یک مربع واحد روی سطح مکعب) و ۵۴ تا مربع در زنجیرها وجود دارد، هر یال دقیقاً یکبار استفاده شده است. در اینصورت اگر از هر پین به پین بعدی در زنجیرمان حرکت کنیم، در واقع یک مسیر اویلری می سازیم که از همه ی یال های می گذرد. اما چهارتا از رأس ها، در (۰,۰,۰)، (۰,۱,۱)، (۱,۰,۱) و (۱,۱,۰) همه دارای درجه ی فرد ۳ هستند. پس این مسیر اویلری وجود ندارد.

***

مسأله ۹-۱

راه حل : $N=۲۹$ جواب مسأله است. چون ۱ باید با دو عدد مجاور باشد باید داشته باشیم $N \geq ۱۱$. دراینصورت و باید با دو عدد مجاور باشد و کوچکترین اعدادی که شامل رقم و ۹ هستند ۱۹ و ۲۹ از پس $N \geq ۲۹$ و در حقیقت $N=۲۹$ کار می کند.

۱,۱۰,۱۱,۱۲,۲۰,۲۱,۲۲,۲,۲۳,۳,۱۳, ... ,۲۷,۷,۱۷,۱۸,۸,۲۸,۲۹,۹,۱۹

***

مسأله ۹-۲

راه حل : فرض کنید I مرکز دایره ی محاطی مثلث ABC باشد.

چون $AD = AB$ و $\angle ADB = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\angle CAB$ و :

$$\angle BDC = ۱۸۰^\circ - \angle ADB = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\angle CAB$$
$$= ۱۸۰^\circ - \angle ICB - \angle CBI = \angle BIC$$

بنابراین BIDC محاطی است.

توجه کنید چون $\angle BAF = \angle FAC$ و F روی خط AI قرار دارد. با دنبال کردن زاویه ها می بینیم که F مرکز دایره ای است که از I,B و C می گذرد. طبق پاراگراف قبل این دایره از D می گذرد. بنابراین $FD = FC$ و $\angle FDC = \angle DCF = \angle BCA + \frac{۱}{۲}\angle CAB$.

چون $BE = EC$ و $BF = FC$، خط BF عمود منصف $\overline{BC}$ است. بنابراین :

$$\angle DEF = ۹۰^\circ - \angle BCA = ۱۸۰^\circ - \angle ADB - \angle FDC = \angle BDF$$

و BEDF محاطی است.

***

مسأله ۹-۳

راه حل : توجه کنید که :

$$(x-a)(y-1)(z-1) = xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1$$
$$= 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + x + y + z - 1$$
$$= x + y + z - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \leq 0$$

برای هر عدد صحیح و مثبت k داریم : $1 < x^k \Leftrightarrow 1 < x$ و $x < 1 \Leftrightarrow x^k < 1$. روابطی مشابه برای y^k و z^k برقرار است. بنابراین :

$$(x-1)(y-1)(z-1) \leq 0$$
$$\Rightarrow (x^k-1)(y^k-1)(z^k-1) \leq 0$$
$$\Rightarrow x^k y^k z^k - x^k y^k - y^k z^k - z^k x^k + x^k + y^k + z^k - 1 \leq 0$$
$$\Rightarrow x^k + y^k + z^k \leq \frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k}$$

نکته : در اولین نگاه ممکن است روشن نباشد که چرا عبارت $(x-1)(y-1)(z-1)$ را در نظر گرفتیم. به جای آن می توانستیم بنویسیم $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$ و $z = \frac{c}{a}$ که a,b و c مثبت هستند (مثلاً می توانیم بگیریم $a = 1$, $b = \frac{1}{x}$ و $c = \frac{1}{zy}$ در اینصورت نامساوی برابر است با :

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2b + b^2c + c^2a$$
$$\geq ab^2 + bc^2 + ca^2 \Leftrightarrow 0 \geq (a-b)(b-c)(c-a)$$
$$= abc(\frac{a}{b} - 1)(\frac{b}{c} - 1)(\frac{c}{a} - 1) \Rightarrow$$
$$0 \geq (x-1)(y-1)(z-1)$$

***

مسأله ۹-۴

راه حل : برهان خلف : فرض کنید که مهره برای همیشه در ماز باقی بماند. چون تعداد خانه ها متناهی است پس این مهره حداقل به یک خانه بی نهایت بار وارد می شود پس فلش داخل این خانه باید بی نهایت بار 90° بچرخد، پس مهره باید به هر یک از خانه های مجاور این خانه نیز بی نهایت بار وارد شود. بنابراین این مهره باید به تمام خانه های جدول بی نهایت بار وارد شود. به خصوص به خانه ی گوشه ی سمت راست بالا نیز حداقل ۴بار وارد می شود. پس بالاخره در یک زمان فلش این خانه به سمت خارج ماز قرار می گیرد و در بار بعدی که مهره می خواهد حرکت کند باید از ماز خارج شود که تناقض است.

مسأله ۹-۵

راه حل : مراکز مربع های جدول را با مختصات صحیح برچسب بزنید و فرض کنید که مربع (۰,۰) قهوه ای رنگ باشد. صلیب به مرکز (۱,۱) باید یک مربع به رنگ قهوه ای داشته باشد. اما مربع های (۰,۱),(۱,۰) و (۱,۱) نمی توانند قهوه ای باشند چون هرکدام در صلیبی قرار دارند که (۰,۰) نیز در آن است. پس یا (۲,۱) و یا (۱,۲) باید قهوه ای رنگ باشد.

بدون کاستن از کلیت فرض کنید (۱,۲) قهوه ای باشند. (۲,۰) با (۰,۰) در یک صلیب قرار دارد پس (۳,۱) باید قهوه ای باشد. با تکرار این تحلیل برای (۱-,۲) نیز باید قهوه ای باشد. پس همینطور با رفتن به سمت بیرون داریم که هر مربع به شکل $(i+۲j, ۲i-j)$ قهوه ای است.

چون این نقاط مراکز صلیب هایی هستند که تمام صفحه را می پوشانند، پس هیچ مربع دیگری نمی تواند قهوه ای رنگ باشد. چون هیچ دو تا از این مربع ها در یک مستطیل ۵×۱ قرار ندارند پس هیچ دو مربعی در یک مستطیل ۵×۱ قهوه ای نیستند. همین نتیجه را می توان برای بقیه رنگ ها به کار برد. بنابراین مربع های یک مستطیل ۵×۱ رنگ های مختلفی دارند.

***

مسأله ۹-۶

راه حل : اگر n زوج باشد آن را می توان بصورت $(۲n)-(n)$ نوشت. اگر n فرد باشد، فرض کنید d کوچکترین عدد اول فردی باشد که n را نمی شمارد. پس قرار دهید $n=(dn)-((d-۱)n)$. عدد dn دقیقاً یک عامل اول بیشتر از n دارد. همچنین $(d-۱)n$ بر ۲ بخش پذیر است چون $(d-۱)$ زوج است. عامل های اول فرد عدد $(d-۱)n$ همگی از d کمترند. پس همه ی آنها n را می شمارد. بنابراین $(d-۱)n$ دقیقاً یک عامل اول بیشتر از n دارد پس dn و $(d-۱)n$ دارای تعداد برابری عامل های اول هستند.

***

مسأله ۹-۷

راه حل : نقطه ی C را بر نیم خط CB طوری قرار دهید که $CS = CA$. فرض کنید P' نقطه ی میانی AS باشد. چون مثلث ACS متساوی الساقین است، P' روی خط CI است.

همچنین P' و M نقاط میانی AS و AC هستند که نتیجه می دهد $P'M \parallel SC$. پس : $P'=P$. فرض کنید دایره محاطی بر BC ، CA و AB به ترتیب دو نقاط D, E و F مماس باشد.

با قرار دادن $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ و $s = \frac{۱}{۲}(a+b+c)$ داریم :

$$SD = SC - DC = b(S-D) = \frac{۱}{۲}(b+c-a) = FA,$$

$$BF = s - b = DB,$$

$$AP = PS$$

بنابراین :

$$\frac{SD}{DB}\frac{BF}{FA}\frac{AP}{PS} = ۱$$

و طبق قضیه منلائوس برای مثلث ABS , P روی خط DF قرار می گیرد. در اینصورت مثلث PDE متساوی الساقین است و $\angle DEP = \angle PDE = \angle FEA = ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲}$ و داریم :

$$\angle CED = ۹۰^\circ - \frac{\angle C}{۲}$$

بنابراین :

$$\angle PEA = ۱۸۰^\circ - \angle DEP - \angle CED = ۹۰^\circ - \frac{\angle B}{۲}$$

حال فرض کنید نقطه ی Q' طوری باشد که $Q'I \perp AC$ و $Q'M \,||\, BI$. آنگاه :

$$\angle Q'EP = ۹۰^\circ - \angle PEA = \frac{\angle B}{۲}$$

همچنین می دانیم $\angle Q'MP = \angle Q'EP$.

چندضلعی $Q'EMP$ محاطی است و $\angle Q'PM = \angle Q'EM = ۹۰^\circ$.

پس $Q' = Q$ و QI بر AC عمود است.

❊❊❊

مسأله ۱۰-۱

راه حل : از فاصله های جهت دار استفاده می کنیم. فرض کنید I مرکز دایره ی محاطی و R شعاع دایره ی محاطی مثلث BXY باشند. عمود OO' را بر خط AB رسم کنید.

قوت A نسبت به دایره BXY برابر است با $AX.AY$ و همچنین $AO^۲ - R^۲$.

بنابراین :

$$BO' - O'A = \frac{BO'^۲ - O'A^۲}{BO' + O'A}$$

$$= \frac{(BO' - O'O^۲) - (OA^۲ - OO'^۲)}{AB}$$

$$= \frac{XA.AY}{AB}$$

که این ثابت است چون $AX.AY$ برابر قوت A نسبت به دایره w نیز هست.

چون $BO'-O'A$ و $BO'+O'A=AB$ ثابت هستند، BO' و $O'A$ نیز ثابت اند. پس صرفنظر از انتخاب X و Y، O' ثابت است. بنابراین O روی خط عمود بر AB که از O' می گذرد قرار دارد.

***

مسأله ۱۰-۲

راه حل : n نقطه ی داده شده را مفروض و $n-3$ نقطه را تصادفی بنامید. همه ی این نقاط را سطح صفر می گوئیم. چون نقاط مفروض از نقاط تصادفی بیشتر است یکی از نقاط مفروض مثلاً A، تصادفی نیست. صفحه ی P را طوری بکشید که از A نگذرد و برای هر نقطه ای دیگر X (خواه مفروض، خواه تصادفی) فرض کنید X' نقطه ی برخورد AX با صفحه ی P باشد.

این نقاط X' را سطح یک بنامید و X' را مفروض یا تصادفی می گوئیم اگر X به ترتیب مفروض یا تصادفی باشد. چون هیچ چهار نقطه ی سطح صفر هم صفحه نیستند، هیچ سه نقطه ی سطح یک نیز همخط نیستند و چون هیچ سه نقطه ی سطح صفر همخط نیست، پس دو نقطه ی سطح یک بر هم منطبق نمی شوند.

پس $n-1$ نقطه ی سطح یک مفروض و حداکثر $n-3$ نقطه ی سطح یک تصادفی داریم. حال دوباره عملیاتی مشابه انجام دهید. یکی از نقاط مفروض سطح یک مثلا B' وجود دارد که تصادفی سطح یک نیست. خط ℓ را در P طوری رسم کنید که از B' نگذرد و با $B'X'$ موازی نباشد، برای هر $B'\neq X'$ از سطح یک.

پس برای هر نقطه ی سطح یک غیر از B' (خواه مفروض، خواه تصارفی) فرض کنید X'' نقطه ی برخورد $B'X'$ با خط ℓ باشد. این نقاط را X'' و سطح دو بنامید همچنین آنها را مفروض یا تصادفی می گوئیم اگر وتنها اگر X به ترتیب مفروض یا تصادفی باشد.

چون هیچ سه نقطه ی سطح یک مفروض همخط نیستند همه ی نقاط سطح دو متمایز هستند. بنابراین $n-2$ نقطه ی مفروض سطح دو داریم. اما حداکثر $n-3$ نقطه تصادفی سطح دو داریم. بنابراین یکی از این نقاط مثلاً C'' تصادفی نیست.

صفحه ی (ABC) را در نظر بگیرید. اگر این صفحه شامل یک نقطه ی سطح صفر تصادفی- مثلاً Q باشد آنگاه، Q' باید با B' و C' همخط باشد و بنابراین Q'' باید با C'' برابر باسد که تناقض است. (چون C'' تصادفی نیست). بنابراین صفحه ی (ABC) از هیچ نقطه ی سطح صفر مفروض نمی گذرد.

***

مسأله ۱۰-۳

راه حل : بله، چنین ۱۰ عددی وجود دارند. قرار دهید : $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ و دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$S - a_1 = 9.1^2$$
$$S - a_2 = 9.2^2$$
$$\vdots$$
$$S - a_{10} = 9.10^2$$

با جمع بستم این معادلات داریم :

$$9S = 9.(1^2 + 2^2 + \dots + 10^2)$$

پس :

$$a_k = S - 9k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 - 9k^2$$

بنابراین همه ی a_kها متمایز هستند و جمع هر ۹تای آنها مربع کامل است.

***

مسأله ۱۰-۴

راه حل : برهان خلف : فرضی در هر صندوق، هیچ اسمی روی تمام برگ رأی ها نوشته نشده است. صندوق ها را با $1, 2, \dots, n$ برچسب گذاری کنید و به یک برگ رأی دلخواه از صندوق ۱ نگاه کنید. فرض کنید n اسم روی آن نوشته شده است. مثلاً Al, Bob,..., Zed طبق فرض برگ رأیی در صندوق دوم وجود دارد که نام AL روی آن نوشته نشده باشد، برگ رأیی در صندوق سوم وجود دارد که نام Bob روی آن نوشته نشده باشد و به همین ترتیب.

پس برگ رأیی در صندوق $(i+1)$ام وجود دارد که اسم i ام را روی آن نوشته نشده است. بنابراین روی این $n+1$ برگه، که هر کدام از یک صندوق هستند، اسمی وجود ندارد که روی همه ی برگه رأی ها باشد، تناقض.

***

مسأله ۱۰-۵

راه حل : جدولی با ۱۹۹۹ ستون و ۲۰۰۰ سطر بسازید. در سطر اول آن $1, 2, \dots, 1999$ بنویسید.

عدد خانه های سطرهای بعدی را طور بازگشتی بصورت زیر تعریف کنید : فرض کنید که اعداد سطر i ام، $k+1, k+2, \dots, k+1999$ و حاصلضربشان M باشد.

سطر $i+1$ام را با $M+k+1, M+k+2, \dots, M+k+1999$ پر کنید. همه ی اعداد سطر $i+1$ام از اعداد سطر iام بزرگتر هستند. از طرفی هر عددی، عدد پائینی خود در جدول را می شمارد (بنابراین همه ی اعداد زیر خود را می شمارند).

در هر سطر ۱۹۹۹ عدد متوالی قرار دارد پس در هر یک عدد انتخابی هست. چون ۲۰۰۰ سطر داریم، پس دو عدد انتخابی در یک ستون هستند و یکی از آنها دیگری را می شمارد.

***

مسأله ۱۱-۱

راه حل : می دانیم برای هر $a > 1$ توابع :

$$P(x) = f(X) + f(ax)$$

$$Q(x) = f(x) + f(a^2x)$$

$$P(ax) = f(ax) + f(a^2x)$$

پیوسته هستند. پس تابع :

$$\frac{1}{2}(P(x) + Q(x) - P(ax)) = f(x)$$

نیز پیوسته است.

***

مسأله ۱۱-۲

راه حل : از استقرای قوی روی تعداد کل دانش آموزان استفاده می کنیم. حالت پایه، صفر دانش آموز بدیهی است. حال فرض کنید ادعا برای هر تعداد دانش آموزان کوچکتر از nدرست باشد $(n > 0)$ و می خواهیم ادعا را برای n ثابت کنیم.

حداقل باید یک دختر وجود داشته باشد، یک دختر از n دانش آموزا انتخاب کنید. حال کلاس را به سه زیرمجموعه تقسیم می کنیم : زیرمجموعه ی A شامل این دختر و زیرمجموعه ی مثل C' از C باشد، با حداقل $\frac{|C|}{2}$ دانش آموز بطوریکه هر پسر در C' با تعداد فردی دختر در C' دوست است. فرض کنید B_o مجموعه ی پسران عضو B باشد که تعداد فردی دختر در C' دوست هستند و B_E مجموعه پسران عضو B باشد که :

$$\text{الف)}\quad |B_o| \geq \frac{|A \cup B|}{2}$$

در این حالت مجموعه ی $S = B_o \cup C'$ ادعا ثابت می کند. یعنی S حداقل $\frac{n}{2}$ عضو دارد و هر پسر در S با تعداد فردی دختر در S دوست است.

$$\text{ب)}\quad |A \cup B_E| \geq \frac{|A \cup B|}{2}$$

در این حالت قرار دهید $T = A \cup B_E \cup C'$. در این حالت هرپسر در C' با تعداد فردی دختر C' دوست است و با دختر در A دوست نیست. هر پسر در B_E با تعداد زوجی دختر در C' و دختر در A دوست است پس در مجموع با تعداد فردی دختر در T دوست است. در نهایت T حداقل $\frac{n}{۲}$ عضو دارد. پس مجموعه ی T ادعا را ثابت می کند. به این ترتیب استقرا کامل می شود.

نکته : با روشی مشابه می توان نتیجه ای کمی قوی تر را ثابت کرد : فرض کنید هر پسر در کلاس حداقل با یک دختر دوست است و هر پسر یک زوجیت دارد یعنی یا « زوج» است یا « فرد ». آنگاه گروهی متشکل از نیمی از دانش آموزان وجود دارد به طوریکه هر پسر در گروه با تعدادی دختر در گروه دوست است که زوجیت آن با زوجیت او یکی است (با فرض اینکه همه ی پسرها فرد هستند. به نتیجه ی قبلی می رسیم.)

***

مسأله ۱۱-۳

راه حل :

لم : کره ای به شعاع R را در نظر بگیرید. قسمتی از کره بین دو صفحه ی موازی که کره را قطع می کنند را قرار می گیرد را یک برش از کره می گوئیم. مساحت سطح برش برابر است با $۲\pi RW$ که W فاصله ی بین دو صفحه است.

اثبات : کره را طوری بچرخانید که برش افقی باشد، یک قطعه بی نهایت کوچک افقی از این برش را بگیرید، که شبیه مقطع باریکی از پائین یک مخروط متقارن است. فرض کنید عرض این مقطع w، شعاع آن r و مولد آن ℓ باشد.

مساحت سطح جانبی آن (برای w بی نهایت کوچک) برابر است با $۲\pi r\ell$. اگر سطح جانبی مخروط با خط افقی زاویه ی θ بسازد آنگاه $\ell \sin\theta = w$ و $R \sin\theta = r$ بنابراین مساحت این سطح همچنین برابر است با $۲\pi RW$. با جمع کردن این بی نهایت کوچک ها، مساحت سطح کل برش برابر است با $۲\pi RW$.

فرض کنید R شعاع و O مرکز دایره ی محاط شده باشد. برای هر رأس بزرگ F از چندوجهی، کره را روی آن تصویر کنید تا دایره ی k را تشکیل دهد. پس O را به k وصل کنید تا تشکیل یک مخروط بدهد. چون این مخروط ها از هم مجزا هستند، سطح کره را در مقطع های دایره شکل و جدا از هم قطع می کنند. هر مقطع دایره شکل برشی از کره با عرض $R(۱-\frac{۱}{۲}\sqrt{۲})$ است و طبق لم ناحیه ای به مساحت $۲\pi R^۲(۱-\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}) > \frac{۱}{۷}(۴\pi R^۲)$ از سطح کره را می پوشاند.

[صفحات مربوط به برش را یکی مماس بر کره و بر دیگری را طوری بگیرید که شامل محل برخورد مخروط با کره باشد] بنابراین هر مقطع دایره شکل بیش از $\frac{۱}{۷}$ سطح کره را می پوشاند که می رساند تعداد این مقطع ها باید کمتر از ۷ تا باشد پس حداکثر ۶ وجه بزرگ وجود دارد.

***

مسأله ۱۱-۴

راه حل : چنین اعدای وجود ندارند. فرض کنید این اعداد باشند. قرار دهید $y=-b-x$، در اینصورت برای هر x داریم :

$$|x+a|+|-b-x+c|>|x|+|-b|+|-b-x|$$

اگر x را منفی با قدر مطلق به اندازه ی کافی بزرگ انتخاب کنیم داریم :

$$(-x-a)+(-b-x+c)>(-x)+|b|+(-b-x)$$
$$\Rightarrow -a+c>|b|\geq 0$$

پس $c>a$. از طرف دیگر اگر a را مثبت و به اندازه ی کافی بزرگ انتخاب کنیم داریم :

$$(x+a)+(b+x-c)>(x)+|b|+(b+x)\Rightarrow a-c>|b|\geq 0$$

پس $c<a$ که تناقض است.

***

مسأله ۱۱-۵

راه حل : بنابر اصل لانه ی کبوتر، حداقل یک چهارم جدول (۶۲۵) همرنگ هستند. فرض کنید قرمز. از این ۶۲۵ خانه ی قرمز، حداکثر ۵۰ عدد بالاترین خانه قرمز در ستون خود، حداکثر ۵۰ عدد پائین ترین خانه قرمز در ستون خود هستند. مشابهاً حداکثر ۵۰ عدد از این خانه ها سمت چپ ترین خانه و حداکثر ۵۰ عدد از این خانه ها سمت راست ترین خانه در سطر خود هستند. که مجموع حداکثر ۲۰۰ خانه می شود. بقیه ی ۴۲۵ یا بیشتر خانه ی باقیمانده، حتماً در بالا، پائین، سمت راست و سمت چپ خود خانه ی قرمز رنگ دارند.

***

مسأله ۱۱-۶

راه حل : در ابتدا توجه کنید که چند جمله ای نمی تواند ثابت باشد. فرض کنید $P(x)=C_nx^n+C_{n-1}x^{n-1}+...+C_0$ چند جمله ای داده شده باشد که $C_n\neq 0$.
شرایط مسئله ایجاب می کند که n زوج و حداقل ۲ باشد. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $C_n>0$. چون ضریب پیشرو $P(x)$ مثبت است و $P(x)$ ثابت نیست پس N وجود دارد که برای هر $x>N$ $P(x)$ نزولی است.

زوج صحیح (s,t) و $P(s)=P(t)$ را در نظر بگیرید. چون بی نهایت از این زوجها وجود دارد، پس باید بی نهایت زوج باشد که $s>N$. برای هر عدد صحیح k، چند جمله ای $P(x)-P(k-x)$ را در نظر بگیرید. با کمی محاسبه جبری داریم که ضریب x^n صفر است و ضریب x^{n-1} برابر است با :

$$f(k)=2C_{n-1}+C_n(nk)$$

فرض کنید K بزرگترین عدد صحیح باشد که $f(K) < ۰$ (چنان عدد صحیحی وجود دارد چون طبق فرض بالا $C_n.n > ۰$) آنگاه برای t به اندازه کافی بزرگ داریم :

$$P(t) < P(K-۱-t) < P(K-۱-t) < \dots$$

و

$$P(t) \geq P(K+۱-t) > P(K+۲-t) > P(K+۳-t) > \dots > P(N)$$

بنابراین باید داشته باشیم $s = K+۱-t$ و $P(t)+P(K+۱-t) = ۰$ برای بی نهایت مقدار t. اما درجه ی P متناهی است که نتیجه می دهد $P(x)-P(K+۱-x)$ چند جمله ای ثابت صفر است. پس اگر $P(a)+b$ برای اعداد صحیح a و b همچنین داریم : $P(K+۱-a) = b$.

بنابراین حداکثر یک مقدار b وجود دارد که ممکن است مقدار $P(x)$ در عدد صحیح x باشد. بطور خاص :

$$b = P(\frac{K+۱}{۲})$$

***

دور پنجم

مسأله ۹-۱

راه حل : قرار دهید $A = \underline{a_۱ a_۲ \dots a_k}$. طبق تفاضل زیر :

$$\begin{array}{rcccccc} & a_۱ & a_۲ & a_۳ & \dots & a_k & o \\ - & & a_۱ & a_۲ & \dots & a_{k-۱} & a_k \\ \hline & & & & ۹A & & \end{array}$$

می بینیم که ارقام $۱۰A - A = ۹A$ عبارتند از :

$$a_۱ , a_۲ - a_۱ , a_۳ - a_۲ , \dots , a_{k-۱} - a_{k-۲} , a_k - a_{k-۱} - ۱ , ۱۰ - a_k.$$

که مجموعشان برابر است با $۱۰ - ۱ = ۹$.

***

مسأله ۹-۲

راه حل : نتیجه قوی تری را ثابت می کنیم : I روی مماس خارجی مشترک $S_۱$ و $S_۲$ قرار می گیرد که با خط AC موازی است. فرض کنید ℓ خط مماس بر S در نقطه ی B باشد؛ ادعا می کنیم که ℓ یک مماس مشترک خارجی $S_۱$ و $S_۲$ است.

می دانیم $\overline{BC}$ بر S_1 مماس است. مماس دیگری از B بر S_1 رسم کنید و نقطه ی تماس را P بنامید، چون خطهای BP و BC بازتاب یکدیگر نسبت به خط $BA_\circ$ هستند داریم :

$\angle CBP = 2\angle CBA_\circ = 2\angle CAA_\circ = \angle CAB$

بنابراین خط BP بر S مماس است، بنابراین باید همان خط ℓ باشد. مشابهاً ℓ بر S_2 مماس است و چون از داخل S نمی گذرد پس $\overline{A_\circ B_\circ}$ را قطع نمی کند. بنابراین، ℓ یک مماس خارجی مشترک S_1 و S_2 است. ℓ'، بازتاب ℓ نسبت به خط $A_\circ B_\circ$ خارجی مشترک دیگر S_1 و S_2 است.

چون : $\angle BCA_\circ = \angle A_\circ C_\circ C = \angle A_\circ IC$ و $\angle C_\circ A_\circ B = \angle AA_\circ C_\circ = \angle IA_\circ C_\circ$ ، I و B بازتاب یکدیگر نسبت به خط $A_\circ B_\circ$ هستند. بنابراین همانطور که مطلوب بود I روی ℓ' قرار می گیرد.

از طرفی زاویه ی بین خط CB و ℓ برابر است با $\angle CBP = \angle CAB$ و زاویه بین خطهای CB و $C_\circ A_\circ$ برابر است با $\frac{1}{2}(\angle CAB + \angle BCA) = \frac{1}{2}(C\hat{A}_\circ + B\hat{A}_\circ)$. پس زاویه ی بین خطهای CB و ℓ' برابر است با :

$2.\frac{1}{2}(\angle CAB + \angle BCA) - \angle CAB = \angle BCA$ که نتیجه می دهد خط ℓ' با AC موازی است.

***

مسأله ۹-۳

راه حل اول :

ممکن است ابتدا لم زیر را ثابت می کنیم :

<u>لم</u> : برای هر مجموعه ی S از اعداد صحیح مثبت، زیرمجموعه ی $T \subseteq S$ وجود دارد که به طوریکه هر عضو S تعداد فردی از عناصر T را می شمارد.

<u>اثبات</u> : ادعا را با استقرا روی $|S|$، تعداد عناصر S اثبات می کنیم. اگر $|S| = 1$، قرار دهید $T = S$. اگر $|S| > 1$، آنگاه فرض کنید a کوچکترین عنصر S باشد. مجموعه ی $S' = S \setminus \{a\}$ را در نظر بگیرید که $|S| - 1$ عضو دارد. طبق فرض استقرا زیرمجموعه ی $T' \subseteq S'$ وجود دارد به طوریکه هر عضو S' تعداد فردی از عناصر T' را می شمارد.

اگر همچنین a تعداد فردی از عناصر T' را بشمارد، پس مجموعه ی $T = T'$ ادعا را ثابت می کند. در غیراینصورت مجموعه ی $T = T' \cup \{a\}$ را در نظر بگیرید. A تعداد فردی از عناصر T را می شمارد هر عنصر دیگر S بزرگتر از a است و آن را نمی شمارد، اما تعداد فردی از عناصر $T' = T \setminus \{a\}$ را می شمارد. بنابراین T ادعا را ثابت می کند و این مرحله ی استقرایی و اثبات لم را کامل می کند.

حال هر عدد $n > 1$ را برحسب تجزیه به عوامل اول آن بنویسید.

$n = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \dots P_k^{a_k}$

که P_iها اعداد اول متمایز و a_iها اعداد صحیح مثبت هستند. توجه کنید که n همیشه با $P(k) = P_1 P_2 \dots P_k$ همرنگ است. لم را برای $S = \bigcup_{i=2}^{1000000} P(i)$ به کار برید تا زیرمجموعه $T \subseteq S$ را بیابید که هر عضو S تعداد فردی از

اعضای T را بشمارد. فرض کنید برای $t(q), q \in S$ تعداد عناصری از T باشد که q آنها را می شمارد $u(q)$ تعداد عوامل اول q باشد. همه ی اعداد عضو T را بگیرید و رنگ آنها را عوض کنید. حال ببینید که رنگ عدد $n > ۱$ چگونه تغییر می کند. طبق اصل شمول و عدم شمول تعداد عناصر T که نسبت به n اول نیستند برابر است با :

$$\sum_{q|p(n), a>۱} (-۱)^{u(a)+۱} t(q)$$

در حالت خاص اگر $q|P(n)$ بر $m > ۰$ عدد اول بخش پذیر باشد، آنگاه q، $\binom{m}{۱} - \binom{m}{۲} + \binom{m}{۳} - \dots = ۱$ بار در مجموع بالا شمرده می شود. (برای مثال اگر $n = ۶$ آنگاه تعداد

عناصر T که بر ۲ یا ۳ بخش پذیرند برابر است با $(t(۲) + t(۳) - t(۶))$. طبق تعریف T، هر یک از مقادیر $t(q)$ فرد است. چون $P(n)$، $۲^k - ۱$ مقسوم علیه بزرگتر از ۱ دارد، مجموع بالا برابر مجموع $۲^k - ۱$ عدد فرد است پس خود یک عدد فرد است.

بنابراین بعد انتخاب T، هر عدد $۱ < n$، به تعدادی فردی تغییر رنگ می دهد بنابراین در نهایت سفید می شود. در نهایت ۱ را انتخاب کنید تا رنگش سفید شود.

نکته : یک تغییر جزئی در اثبات بالا نشان می دهد که T یکتاست. با کمی کار بیشتر نتیجه می گیریم که در اصل دقیقاً یک راه برای تغییر دادن رنگ همه ی اعداد به سفید وجود دارد.

راه حل دوم :

بله ممکن است. عبارت کلی تری را ثابت می کنیم که در آن ۱۰۰۰۰۰۰ با عدد صحیح مثبت دلخواه m عوض شده است. همچنین اعدادی را در نظر می گیریم که بر تعداد کمی عدد اول بخش پذیر هستند نه همه ی اعداد اول.

لم : برای مموعه ای از اعداد اول $S = \{P_۱, P_۲, \dots, P_n\}$، فرض کنید $Q(m)$ مجموعه ی اعداد بین ۲ و m باشد که فقط بر اعداد اول عضو S بخش پذیرند. عناصر $Q(m)$ را می توان با سفید یا سیاه رنگ کرد. یک حرکت مجاز عبارت است از انتخاب یک عدد از $Q(m)$ و عوض کردن رنگ آن و رنگ هر عدد دیگری که نسبت به آن اول نیست. آنگاه با انتخاب اعداد عضو مجموعه ی $R_m(S)$ یا $Q_m(S)$ می توان رنگ آمیزی Q_m را برعکس کرد.

اثبات : لم را با استقرا روی n اثبات می کنیم. اگر $n = ۱$ آنگاه انتخاب $P_۱$ کافی است. فرض کنید $n > ۱$ و بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید همه ی اعداد در اول سیاه هستند.

قرار دهید $T = \{P_۱, P_۲, \dots P_{n-۱}\}$ و t را بزرگترین عدد صحیحی تعریف کنید که $t P_n \le m$. می توانیم فرض کنیم $t \ge ۱$، چون در غیراینصورت می توانیم از P_n صرفنظر کنیم و بقیه ی اعضای T را بگیریم که در آن صورت طبق فرض استقرا لم ثابت می شود.

حال اعداد عضو $R_m(T)$, $R_t(T)$ و $\{P_n x | x \in R_t(T)\} = P_n R_t(T)$ را انتخاب کنید. و اثر این حرکت را روی عدد y در نظر بگیرید :

- اگر y مضربی از P_n نباشد. دراینصورت انتخاب اعداد در $R_m(T)$ فاصله ایی گذاشته شود y را سفید می کند. اگر انتخاب $x \in R_t(t)$ رنگ y را عوض کند آنگاه انتخاب $P_n x$ آن را دوباره به سفید باز می گرداند.

- اگر y توانی از P_n باشد. انتخاب عددی از $R_m(T)$ و $R_t(T)$ اثری بر y ندارد ولی هر $|R_t(T)|$ عضو موجود در $x R_t(T)$ رنگ y را عوض می کند.
- اگر $P_n | y$ اما y توانی از P_n نباشد. دراینصورت انتخاب عددی از $R_m(t)$، y را سفید می کند. چون $y \neq P_n^i$ پس بر یک عدد اول در T بخش پذیر است پس انتخاب اعداد عنصر $R_t(T)$، y را دوباره سیاه می کند. در نهایت هر یک از $|R_t(T)|$ عدد عضو $x R_t(T)$ رنگ y را تغییر می دهد.

بنابراین، همه ی مضارب P_n از یک رنگ هستند (اگر $|R_t(T)|$ زوج باشد، سیاه در غیراینصورت سفید)، در حالی که بقیه ی عناصر عضو $Q_m(S)$ سفید هستند. اگر مضارب P_n سیاه باشند می توانیم P_n را انتخاب کنیم تا آنها را سفید کند.

حال به مسئله ی اصلی بازمی گردیم. قرار دهید $m = ۱۰۰۰۰۰۰$ و فرض کنید S مجموعه ی تمام اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰۰۰۰۰ باشد. طبق لم می توانیم اعدادی بین ۲ و ۱۰۰۰۰۰۰ انتخاب کنیم به طوریکه همه ی اعداد ۱۰۰۰۰۰۰,...,۲,۳ سفید شوند. در نهایت با انتخاب ۱ این فرآیند خاتم می یابد.

***

مسأله ۹-۴

راه حل : این شبکه از $\frac{n(n+۱)}{۲}$ مثلث متساوی الاضلاع کوچک با طول ضلع ۱ تشکیل شده است. در هر یک از این مثلث ها حداکثر ۲ پاره خط را می توان رنگ کرد پس در کل می توان حداکثر $n(n+۱) = \frac{۳n(n+۱)}{۲}, \frac{۲}{۳}$ پاره خط را رنگ کرد. هر پاره خطی در یکی از ۳ جهت قرار دارد. پ . می توانیم با رنگ کردن همه ی پاره خطهایی که در دو جهت خاص قرار دارند، می توانیم به مقدار بیشینه ی $n(n+۱)$ برسیم.

***

مسأله ۹-۵

راه حل : ادعا را با استقرا روی n اثبات می کنیم. برای $n = ۱$ داریم $۰ \leq ۰$. حال فرض کنید ادعا برای n درست باشد. می خواهیم آن را برای $n+۱$ اثبات کنیم. هر یک از اعداد $\sqrt{n^۲+۱}, \sqrt{n^۲+۲}, \dots, \sqrt{n^۲+۲n}$ بین n و $n+۱$ قرار دارند پس :

$$\left\{\sqrt{n^۲+i}\right\} = \sqrt{n^۲+i} - n$$
$$< \sqrt{n^۲+i+\frac{i^۲}{۴n^۲}} - n = \frac{i}{۲n}$$

بنابراین داریم :

$$\sum_{k=1}^{(n+1)^2}\{\sqrt{k}\}=\sum_{k=1}^{n^2}\{\sqrt{k}\}+\sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2}\{\sqrt{k}\}$$
$$<\frac{n^2-1}{2}+\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}i+0$$
$$=\frac{n^2-1}{2}+\frac{2n+1}{2}=\frac{(n+1)^2-1}{2}$$

که مرحله ی استقرایی و اثبات را کامل می کند.

***

مسأله ۹-۶

راه حل : چون AEDC محاطی است و O مرکز آن است داریم :

$$\angle COA=2\angle CDA=\angle CDA+\angle CEA$$
$$=(180^\circ-\angle ADB)+(180^\circ-\angle BEC)$$

چون BDFA و BEFC محاطی هستند. $\angle ADB=\angle AFB$ و $\angle BEC=\angle BFC$. بنابراین :

$$\angle COA=360^\circ-\angle AFB-\angle BFC=\angle CFA$$

پس AFOC محاطی است. بنابراین :

$$\angle OFA=180^\circ-\angle ACO=180^\circ-\frac{180^\circ-\angle COA}{2}=90^\circ+\angle CDA$$

چون ABDF محاطی است :

$$\angle OFA+\angle AFB=90^\circ+\angle CDA+\angle ADB=270^\circ$$

پس $\angle BFO=90^\circ$.

***

مسأله ۹-۷

راه حل : پتیا بازی را می برد. اتصال ها را دور یک دایره قرار دهید و آنها را با ۱,۲, ... ,۲۰۰۰ برچسب بزنید و فرض کنید (x,y) سیم بین اتصالهای x و y باشد (در اینجا برچسب ها به پیمانه ی ۲۰۰۰ حساب می شوند). اگر وسیا سیم $(a,1000+a)$ را قطع کند، پتیا می تواند $(500+a,1500+a)$ را ببرد. در غیراینصورت اگر وسیا سیم (a,b) را ببرد، پتیا می تواند سه سیم $(a+500\ ,\ b+500)$, $(a+1000\ ,b+1000)$ و $(a+1500,b+1500)$ را قطع کند، توجه کنید که در هر حالت پتیا و وسیا اتصالهای مختلفی را می برند.

با استفاده از این استراتژی بعد از هر حرکت پتیا، برد الکتریکی نسبت به دوران ۹۰° , ۱۸۰° و ۲۷۰° متقارن است که نشان می دهد پتیا همیشه می تواند حرکت های بالا را انجام دهد. برای مثال اگر $(a+۱۵۰۰, b+۱۵۰۰)$ در حرکت پتیا قطع شود پس حتماً (a,b) باید قبلاً توسط وسیا بریده شده باشند.

همچنین، پتیا هیچ وقت نمی بازد، چون اگر او آخرین سیم (x,y) از اتصال x را ببرد، در اینصورت پتیا باید یکی از آخرین سیم های $(x-۱۵۰۰, y-۱۵۰۰)$, $(x-۱۰۰۰, y-۱۰۰۰)$ یا $(x-۵۰۰, y-۵۰۰)$ از یک اتصال دیگر را بریده باشد که تناقض است.

❋❋❋

مسأله ۱۰-۱

راه حل : فرض کنید A همیشه در کاسه ی اول مهره می اندازد تا اینکه ۱۹۹۸ مهره در کاسه ی اول باشد بعد از آن در کاسه ی دوم می اندازد. همچنین فرض کنید B فقط در کاسه ی سوم مهره می اندازد تا اینکه ۱۹۹۸ مهره در کاسه باشد پس او هم در کاسه ی دوم می اندازد.

برهان خلف : فرض کنید C نبازد. بدون کاستن از کلیت فرض کنید که کاسه ی اول زودتر از کاسه ی سوم به ۱۹۹۸ مهره برسد. این لحظه را یک لحظه ی بحرانی بنامید. در ابتدا فرض کنید که کاسه ی سوم به ۱۹۹۸ مهره نمی رسد، حداکثر ۹۹۹ دور باید از لحظه ی بحرانی بگذرد چون در هر دور حداکثر ۶ مهره در این کاسه قرار می گیرد. (یکی از B و یکی از C). پس A حداکثر ۹۹۹ مهره در کاسه ی دوم می اندازد و نمی بازد.

بنابراین هیچ کس نمی بازد که تناقض است. بنابراین در دور $k \le ۹۹۹$ بعد از لحظه ی بحرانی کاسه ی سوم شامل ۱۹۹۸ مهره است. بعد از این دور A حداکثر k مهره در کاسه ی دوم انداخته است و B ممکن است که حداکثر در دور k-ام یک مهره در کاسه دوم انداخته باشد. پس کاسه ی دوم حداکثر ۱۰۰۰ مهره دارد. اما، کاسه ی اول و کاسه ی سوم هر کدام ۱۹۹۸ مهره دارند. بنابراین در دور بعدی C می بازد.

❋❋❋

مسأله ۱۰-۲

راه حل : تنها دنباله ... ,۲,۲,۲ است که به وضوح در شرط بالا صدق می کند. قرار دهید :

$g_n = g \subset d(a_n, a_{n+۱})$. آنگاه $g_{n+۱}$ هم a_n و هم $a_{n+۱}$ را می شمارد و بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها یعنی g_n را نیز می شمارد. بنابراین، g_iها دنبالی غیرصعودی از اعداد صحیح مثبت تشکیل می دهد پس در نهایت با یک عدد صحیح مثبت g برابر می شود. در اینجا a_i در رابطه ی بازگشتی زیر صدق می کند :

$$ga_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$$

اگر $g = ۱$ آنگاه $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} > a_{n-۱}$ بنابراین دنباله صعودی و بی کران خواهد بود.

اگر $g \geq ۳$ آنگاه :

$$a_n = \frac{a_{n-۱} + a_{n-۲}}{g} < \frac{a_{n-۱} + a_{n-۲}}{۲} \leq \max\{a_{n-۱}, a_{n-۲}\}$$

مشابهاً $a_{n+۱} < \max\{a_{n-۱}, a_n\} \leq \max\{a_{n-۲}, a_{n-۱}\}$ پس :

$$\max\{a_n, a_{n+۱}\} < \max\{a_{n-۲}, a_{n-۱}\}$$

بنابراین ماکسیمم هر جفت پشت سر هم تشکیل یک دنباله ی نامتناهی نزولی از اعداد صحیح می دهند که تناقض است. بنابراین $g = ۲$ و داریم $۲a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$ یا $a_n - a_{n-۱} = \frac{-۱}{۲}(a_{n-۱} - a_{n-۲})$.

که نتیجه می دهد $a_i - a_{i-۱}$ به صفر میل می کند و در نهایت a_i ها ثابت هستند از $۲a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$ این ثابت باید ۲ باشد. حال اگر برای $a_n = a_{n+۱} = ۲, n > ۱$ آنگاه $g < d(a_{n-۱}, a_n) = g < d(a_{n-۱}, ۲)$ یا ۱ است یا ۲.

حال :

$$۲ = a_{n+۱} = \frac{a_{n-۱} + a_n}{g < d(a_{n-۱}, ۲)}$$

که نتیجه می دهد یا $a_{n-۱} = ۰$ که غیرممکن است و یا $a_{n-۱} = ۲$. بنابراین تمام a_i برابر ۲ هستند.

***

مسأله ۱۰-۳

راه حل : فرض کنید E, D و F به ترتیب نقاط وسط کمان های کوچک KL, MK و LM از دایره ی محاطی باشند. همچنین فرض کنید $S_۱, S_۲$ و $S_۳$ به ترتیب دایره های محاطی مثلث های BKL, AMK و CLM باشند.

چون AK بر دایره ی محاطی ABC مماس است، $\angle AKD = \angle KLD = \angle KMD = \angle DKM$ به طور مشابه $\angle AMD = \angle DMK$. بابراین D مرکز دایره ی محاطی AMK و مرکز $S_۱$ است.

به همین شکل، E مرکز $S_۲$ و F مرکز $S_۳$ است. طبق نتیجه ای که در مسئله ی ۹. ۳ ثابت شد I، مرکز دایره ی محاطی KLM روی مماس خارجی مشترک $S_۱$ و $S_۲$ قرار می گیرد. چون I روی ضلع AB نیست باید بر روی مماس دیگر قرار بگیرد. بطور مشابه مماس خارجی مشترک $S_۲$ و $S_۳$ (که روی BC نیست) از I می گذرد، همینطور مماس خارجی مشترک $S_۱$ و $S_۳$ (که روی CA نیست) بنابراین هر سه مماس از نقطه ی I می گذرند.

***

مسأله ۱۰-۴

راه حل : در پایان بازی هیچ دو خانه ی مجاوری شامل مهره نیستند (چون هیچ پرش دیگری ممکن است) در غیراینصورت باید یک خط بی نهایت از مهره ها داشته باشیم که امکان ندارد. در هنگام بازی، هر بار که یک مهره در خانه ی A از روی یک مهره در خانه ی B می پرد، تصور کنید که یک دو مینوی ۱×۲ روی A و B قرار می دهیم.

در پایان، هر خانه ی بدون مهره در صفحه با یک دو مینو پوشیده شده است به طوری که هیچ دو خانه ای که با دو مینو پوشیده نشده اند مجاور نیستند. حال ثابت می کنیم که حداقل باید $\frac{n^۲}{۳}$ دومینو داشته باشیم که نتیجه می دهد حداقل باید $\frac{n^۲}{۳}$ حرکت انجام شده باشد.

<u>لم :</u> اگر یک صفحه $n \times n$ با دومینوهای مستطیل شکل ۱×۲ پوشیده شود (ممکن است روی هم باشند یا یک مربع آنها در خارج صفحه باشد) به طوریکه هیچ دو خانه ی پوشیده نشده کنار هم نباشند، آنگاه حداقل $\frac{n^۲}{۳}$ دومینو روی صفحه است.

<u>اثبات :</u> هر جفت از خانه های مجاور روی صفحه را یک کاشی بنامید. اگر کاشی شامل دو خانه در حاشیه ی صفحه باشد آن را کاشی بیرونی و در غیر این صورت کاشی درونی بنامید.

حال قسمتی از هر کاشی را اگر یک دومینو مثل D می پوشاند در نظر بگیرید. اگر m دومینو کاملاً و یا قسمتی از آنها روی این کاشی باشد، می گوئیم D، $\frac{۱}{m}$ کاشی را خراب می کند. a را مجموع مقادیری از تمام کاشی های بیرونی بگیرید که D خراب می کند و همینطور b را مجموع مقادیری از کاشی درونی بگیرید که D خراب می کند. در اینصورت می گوئیم امتیاز D، $۱.۵a + b$ است.

دومینوی عمودی D که خانه ی سمت چپ و بالای صفحه و خانه ی زیر آن را می پوشاند را در نظر بگیرید. این دومینو کسری از دو کاشی افقی را خراب می کند. یکی از دو خانه ی سمت راست D حتماً باید با دومینو پوشیده شده باشد، چون اگر D همه ی یکی از کاشی های افقی را کند (یعنی تنها دو مینوی روی این کاشی باشد) در اینصورت حداکثر می تواند نیمی از کاشی دیگر را خراب کند. با استفاده از این نوع تحلیل، یک بررسی ساده نشان می دهد که امتیاز هر دومینو حداکثر می تواند ۶ باشد. همچنین می توان دید که هر دومینوی با امتیاز ۶ :

۱) به طور کامل داخل صفحه قرار دارد.

۲) شامل یک خانه در گوشه ی صفحه نمی شود.

۳) دومینوی دیگری وجود ندارد که قسمتی از این دو روی هم باشند.

۴) هیچ یک از اضلاع به طول ۱ دومینوهای دیگر مرز مشترک ندارد.

در یک چینش درست از دومینوها تمام کاشی ها به طور کامل خراب می شوند.

چون $۴(n-۱)$ کاشی خارجی و $۲(n-۱)(n-۲)$ کاشی داخلی داریم که نیجه می دهد مجموع امتیازها $۱.۵\times۴(n-۱)+۲(n-۱)(n-۲)=۲(n^۲-۱)$ است.

بنابراین باید حداقل $\left[\frac{n^۲-۱}{۳}\right]=\left[\frac{۲(n^۲-۱)}{۶}\right]$ دومینو داشته باشیم.

برهان خلف : فرض کنید که دقیقاً $\frac{n^۲-۱}{۳}$ دومینو داریم. برای این که این مقدار عددی صحیح باشد، n باید بر ۳ بخش پذیر نباشد. به علاوه برای هر دو مینوها ۴ شرط گفته شده باید برقرار باشد.

یک دومینوی افقی که در پایین ترین سطر صفحه قرار ندارد را در نظر بگیرید، یکی از دو خانه ی زیر آن باید با دومینو پوشیده شده باشد طبق شرطهای چهارگانه، این خانه باید با یک دومینوی افقی پوشیده شده باشد (نه عمودی). بنابراین به زنجیری از دومینوهای افقی می رسیم که تا پایین ترین سطر صفحه ادامه دارد. به همین طریق می توانیم این زنجیر را به سطر بالایی صفحه نیز برسانیم.

برای اینکه کاشی های هر سطر را طوری بپوشانیم که شروط چهارگانه برقرار باشد باید یکی در میان خانه ی خالی و دومینوهای افقی داشته باشیم. در سطر بالایی چون هیچ دومینویی خانه ی گوشه ای را نباید بپوشاند پس باید با یک خانه ی خالی شروع کنیم و با یک خانه ی خالی نیز تمام کنیم. پس $n \equiv 1 \pmod 3$. در این صورت در سطر دوم ما باید با یک دومینوی افقی شروع کنیم (تا کاشی عمودی گوشه ی سمت چپ بالا را بپوشانیم).

بعد از این که دومینوها را با فاصله ی یک خانه ی خالی در سطر دوم قرار دادیم. در آخر ستون دو خانه ی خالی مجاور باقی می ماند که تناقض است. بنابراین غیر ممکن است که بتوان صفحه را با دقیقاً $\frac{n^2-1}{3}$ دومینو پوشاند پس حداقل $\frac{n^2}{3}$ دو مینو نیاز داریم.

نکته : وقتی n زوج باشد، یک اثبات راحت تر برای مسئله اصلی وجود دارد : n^2 خانه ی صفحه را به صفحه های کوچک 2×2 تقسیم کنید که هر کدام شامل ۴ کاشی 1×2 (قسمتی روی هم) است. در آخر بازی، هیچ کدام از این n^2 کاشی نمی توانند شامل دو مهره باشند (چون در آخر بازی هیچ دو مهره ی مجاور هم وجود ندارد). هر حرکتی یک مهره را از حداکثر ۳ کاشی پر حذف می کند که نتیجه می دهد حداقل $\frac{n^2}{3}$ حرکت باید انجام شود.

اگر همین استدلال را برای n فرد انجام دهیم بر حد کوچکتر $\frac{n^2-n-1}{3}$ حرکت می رسیم. اما برای هر n به اندازه ی کافی بزرگ می توانیم تعداد مهره هایی را که در آخر بازی بیرون از ناحیه ی $(n+2)\times(n+2)$ (که صفحه در آن قرار دارد) می افتند را بشماریم. هر کدام از این مهره ها پرش کرده است که یک مهره حداکثر از دو کاشی پر حذف کرده است و از این می توانیم نشان دهیم که $\frac{n^3}{2}$ حرکت لازم است.

***

مسأله ۱۰-۵

راه حل : مجموع ارقام $3n$، ۳۰۰ است. فرض کنید $S(n)$ مجموع ارقام x باشد آنگاه $S(a+b)$ برابر است با $S(a)+S(b)$ منهای ۹ برابر تعداد گری ها در جمع $a+b$.

بنابراین $S(a+b)\le S(a)+S(b)$ با چند بار به کار بردن این نامساوی داریم

$$S(a_1+\dots+a_x)\le S(a_1)+\dots+S(a_x)$$

فرض کنید d رقمی بین و شامل ۰ تا ۹ باشد.

اگر $d \le ۲$ آنگاه $S(۴۴d) = ۸d$ و اگر $d = ۳$ آنگاه $S(۸d) = ۶ < ۸d$. اگر $d \ge ۴$ آنگاه $۴۴d \le ۴۴\times۹$ حداکثر سه رقم دارد به طوریکه $S(۴۴d) \le ۲۷ < ۸d$ حال قرار دهید $n = \sum n_i.۱۰^i$ که n_i ها ارقام n در مبنای ۱۰ هستند. آنگاه :

$$\sum ۸n_i = S(۴۴n) \le \sum S(۴۴n_i.۱۰^i)$$
$$= \sum S(۴۴n_i) \le \sum ۸n_i$$

بنابراین در نامساوی دوم باید تساوی برقرار باشد یعنی هر کدام از n_i ها باید ۱،۰ و یا ۲ باشد. در اینصورت هر رقم $۳n$، ۳ برابر هر رقم n است و $S(۳n) = ۳S(n) = ۳۰۰$.

***

مسأله ۱۰-۶

راه حل : به طور معادل می توانیم ثابت کنیم اگر $x^۳ + y^۳ < ۲$ آنگاه :

$$x^۲ + y^۳ < x^۳ + y^۴$$

ابتدا توجه کنید که طبق نامساوی میانگین توانی :

$$\sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{۲}} \le \sqrt[۳]{\frac{x^۳+y^۳}{۲}}$$

که نتیجه می شود :

$$x^۲ + y^۲ \le (x^۳+y^۳)^{\frac{۲}{۳}}.۲^{\frac{۱}{۳}}$$
$$< (x^۳+y^۳)^{\frac{۲}{۳}}(x^۳+y^۳)^{\frac{۱}{۳}}$$
$$= x^۳ + y^۳$$

یا $x^۲ - x^۳ < y^۳ - y^۲$. حال $۰ \le y^۲(y-۱)^۲ \Leftarrow y^۳ - y^۲ \le y^۴ - y^۳$ پس :

$$x^۲ - x^۳ < y^۴ - y^۳ \Rightarrow x^۲ + y^۳ < x^۳ + y^۴$$

***

مسأله ۱۰-۷

راه حل : برهان خلف : فرض کنید که چنان ۶ نفری موجود نباشند یک گراف کامل با ۱۲ رأس بکشید که هر رأس متناظر با یک نفر باشد و افراد را با $A, B, C, \dots, L$ بر چسب گذاری کنید. یال بین دو نفر را قرمز کنید اگر همدیگر را بشناسند و در غیر این صورت آبی کنید. آنگاه در میان هر ۹ رأس حداقل یک گراف $K_۵$ قرمز وجود دارد و در بین هر ۶ رأس حداقل یک یال آبی وجود دارد.

ثابت می کنیم که هیچ دور آبی رنگ با طول فرد در گراف وجود ندارد. فرض کنید چنین دور آبی رنگی به طول i) ۳ یا ۵ ii) ۷ iii) و iv) ۱۱ وجود داشته باشد.

i) فرض کنید دور آبی به طول ۳ داشته باشیم (بدون کاسته شدن از کلیت ABC) یا یک دور آبی به طول ۵ داشته باشیم (بدون کاسته شدن از کلیت ABCDE). در حالت اول یک یال آبی در بین DEFGHI وجود دارد (فرض کنید DE). هر گراف K_5 قرمز حداکثر یک رأس از $\{A,B,C\}$ و حداکثر یک رأس از $\{D,E\}$ دارد. در حالت دوم هر گراف K_5 حداکثر دو رأس از $\{ABCDE\}$ دارد.

حال : FGHIJK یک یال آبی دارد بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید این یال FG باشد. حال برای هر یال v_1v_2 در HIJKL باید یک گراف K_5 قرمز رنگ در $ABCDEFGV_1V_2$ وجود داشته باشد. مانند بالا این گراف می تواند حداکثر دو رأس از $\{A,B,C,D,E\}$ داشته باشد و باید حداکثر یک رأس از $\{F,G\}$، $\{V_1\}$ و $\{V_2\}$ داشته باشد. بنابراین V_1 و V_2 باید با یک یال قرمز به هم وصل باشد پس HIJKL یک K_5 قرمز است. حال FHIJKL نمی توانند K_6 قرمز باشد، پس بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید FH آبی باشد. بطور مشابه GHIJKL نمی تواند یا GH و یا GI آبی باشد. به طور مشابه GHIYKL نمی تواند K_6 قرمز باشد، پس بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید یا GH و یا GI آبی باشد. در هر حالت، ABCDEFGHI باید شامل یک K_5 قرمز باشد. اگر CH آبی باشد آنگاه K_5 حداکثر ۴ رأس، دو تا از $\{A,B,C,D,E\}$ و یکی از هر کدام از $\{F,G,H\}$ و $\{I\}$ باید داشته باشد اگر GI آبی باشد آنگاه این K_5 حداکثر ۴ رأس، دو تا از $\{A,B,C,D,E\}$ و یکی از هر کدام از $\{F,H\}$ و $\{GI\}$ دارد که هر کدام از این حالت ها به تناقض منجر می شود.

ii) اگر دور آبی رنگی به طول ۷ وجود داشته باشد بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید ABCDEFG باشد. مانند قبل، هر K_5 باید شامل حداکثر ۳ رأس از $\{A,B,\ldots,G\}$ باشد پس HIYKL باید یک K_5 قرمز باشد. حال برای هر $10=\binom{5}{2}$ جفت $\{H,I,J,K,L\}\supseteq\{V_1,V_2\}$ باید یک K_5 قرمز در میان $ABCDEFGV_1V_2$ باشد.

پس برای هر یال در HIGKL، یک مثلث قرمز از ABCOEFG و آن یال یک K_5 قرمز را تشکیل می دهند. ABCDEFG حداکثر شامل ۷ مثلث قرمز است : GBD,…,BDF, ACE. پس مثلثی وجود دارد که با دو یال از HIJKL متناظر است. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید ACE یا با هر دوی HI و Hj متناظر است و یا ACE با هر دوی HI و JK متناظر است. در هر حالت ACEHIJ یک K_6 قرمز رنگ است. تناقض.

iii) فرض کنید دور آبی رنگی به طول ۹ وجود داشته باشد. در بین این ۹ رأس هیچ K_5 قرمزی نیست که تناقض است.

iv) در نهایت فرض کنید دور آبی رنگی به طول ۱۱ وجود داشته باشد. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید این دور ABCDEFGHIJk باشد.

در بین $\{A,B,C,D,E,F,G,H,I\}$ باید یک K_5 قرمز رنگ باشد که حتماً باید ACFGI باشد. به همین شکل DFHJA باید یک K_5 قرمز باشد پس AH,…,AD, AC همه قرمز هستند. به طور مشابه هر یال در ABCDEFGHI قرمز است مگر یال هایی که در دور آبی رنگ به طول ۱۱ هستند.

حال در بین $\{A,B,C,D,E,F,G,H,L\}$ یک K_5 قرمز وجود دارد که یا ACEGL است یا BDFHL . بدون کاستن از کلیت فرض کنید اولی باشد. چون ACEGLI و ACEGLJ نمی توانند K_6 های قرمز رنگ باشند پس AI و AJ باید آبی باشند.

آنگاه AIJ یک دور آبی به طول ۳ است، تناقض. بنابراین هیچ دور آبی رنگی به طول ۳ وجود ندارد. پس یال های آبی یک گراف دو قسمتی را تشکیل می دهند. یعنی ۱۲ رأس را می توان به دو مجموعه ی S_1 و S_2 که شامل هیچ یال آبی رنگی نیستند تقسیم کرد. یکی از این مجموعه ها، مثلاً S_1 حداقل ۶ رأس دارد.

اما در آن صورت S_1 باید یک K_6 قرمز باشد که تناقض است. بنابراین فرض اولیه ی ما اشتباه بوده است. پس یک K_6 قرمز رنگ وجود دارد یعنی ۶ نفر هستند که دو به دو همدیگر را بشناسند.

***

مسأله ۱۱-۱

راه حل : چنین اعدادی وجود ندارند. برهان خلف. فرض کنید این اعداد وجود داشتند. میانگین اعداد برابر است با $۱۰۶ > \frac{۱۹۹۹}{۱۹}$ پس عدد وجود دارد که از ۱۰۶ کوچک تر است و مجموع ارقامش حداکثر ۱۸ است.

هر عدد با مجموع ارقامش به پیمانه ی ۹ همنهشت است پس همه ی اعداد و مجموع ارقام آنها به پیمانه ی ۹ همنهشت هستند، فرض کنید با عدد K همنهشت باشند.

آنگاه $۱۹۹۹ \equiv ۱۹K \Leftarrow K \equiv ۱ \pmod{۹}$ پس مجموع ارقام که بین اعداد مشترک است یا ۱ است یا ۱۰ اگر ۱ باشد همه ی اعداد برابرند با ۱،۱۰،۱۰۰ یا ۱۰۰۰ پس دو تا از آنها باید برابر باشند که مجاز نیست. پس مجموع ارقام ۱۰ است. توجه کنید که کوچک ترین ۲۰ عدد با مجموع ارقام ۱۰ عبارتند از :

۱۹,۲۸,۳۷, ... ,۹۱,۱۰۹,۱۱۸,۱۲۷, ... ,۱۹۰,۲۰۸

مجموع ۹ عدد عبارت است از :

$$(۱۰+۲۰+...+۹۰)+(۹+۸+...+۱) = ۴۵۰+۴۵ = ۴۴۵$$

در حالی که مجموع ۹ عدد دوم برابر است با :

$$(۹۰۰)+(۱۰+۲۰+...+۸۰)+(۹+۸+۷+..+۱) = ۹۰۰+۳۶۰+۴۵ = ۱۳۰۵$$

پس مجموع ۱۸ عدد اول برابر است با ۱۸۰۰. چون $۱۹۹۹ \neq ۱۹۰+۱۸۰۰$، بزرگ ترین عدد در بین ۱۹ عدد باید حداقل ۲۰۸ باشد. پس کوچکترین ۱۸ عدد مجموعشان برابر ۱۸۰۰ می نمود، که در این صورت کل حداقل $۱۹۹۹ < ۲۰۲۸$ می باشد که تناقض است.

***

مسأله ۱۱-۲

راه حل : فرض کنید $f:Q\to Z$ تابعی باشد که هر عدد گویا را به عدد صحیحی که روی آن نوشته شده است می برد. برهان خلف. فرض کنید برای هر $q,r\in Q$

$$f(q)+f(r)>۲f(\frac{q+r}{۲}) \qquad i\geq ۰$$

قرار دهید $a_i=\frac{۱}{۲^i}$ و $b_i=-\frac{۱}{۲^i}$. می خواهیم نشان دهیم که برای یک k، $f(a_k)$ و $f(b_k)$ هر دو از $f(۰)$ کوچکتر هستند. فرض کنید i طوری باشد که $f(a_i)\geq f(۰)$. حال شرط را اعمال می کنیم :

$$f(a_i+۱)<\frac{f(a_i)+f(۰)}{۲}\leq f(a_i)$$

چون برد f اعداد صحیح است، هرگاه $f(a_i)\geq f(۰)$ آنگاه $f(a_i+۱)\leq f(a_i)-۱$. بنابراین m وجود دارد به طوریکه $f(a_m)<f(۰)$ آنگاه :

$$f(a_{m+۱})<\frac{f(a_m)+f(۰)}{۲}<\frac{۲f(۰)}{۲}$$

پس $f(a_i)<f(۰)$ برای $i\geq m$. به طور مشابه n وجود دارد به طوریکه $f(b_i)<f(۰)$ برای $i\geq n$. حال اگر بگیریم $K=\max\{m,n\}$ به تناقض می رسیم :

$$f(a_k)+f(b_k)<۲f(۰)$$

***

مسأله ۱۱-۳

راه حل : فرض کنید p نقطه ی برخورد دو مماس خارجی مشترک بر دایره ی $S_۱$ باشد و R,Q و S به ترتیب نقاط بر خورد مماسهای خارجی مشترک رسم شده بر دایره های $S_۲,S_۳$ و $S_۴$ باشند. مشابه مسئله ۱۰-۳، مراکز دایره های $S_۱,S_۲,S_۳$ و $S_۴$ به ترتیب وسط های کمانهای MN,LM,KL و NK هستند. خط AB از I، مرکز دایره ی محاطی مثلث KLM نمی گذرد. پس طبق نتیجه ای که در مسئله ۹-۳ ثابت کردیم مماس خارجی دیگر یعنی $\overline{PQ}$ باید از I بگذرد و با KM موازی باشد.

به همین ترتیب $RS||KM$ پس داریم $PQ||RS$. مشابهاً $SP||LN||QR$ پس $PQRS$ یک متوازی الاضلاع است. منظور از $<x|w>$، طول مماس رسم شده از نقطه ی X بر دایره W است و منظور از $<w_۱|w_۲>$ طول مماس خارجی مشترک دایره های $w_۱$ و $w_۲$ است.

در اینصورت می دانیم :

$$AB=<A|S_۱>+<S_۱|S_۲>+<S_۲|B>$$
$$=<A|S_۱>+<S_۱|P>+PQ+<Q|S_۲>+<S_۲|B>$$

همچنین روابطی مشابه برای CD, BC و DA نیز برقرار است. با دادن اینها در $AB+CD=BC+DA$ (این تساوی برقرار است چون $ABCD$ بر یک دایره محیط شده است) داریم $PQ+RS=QR+SP$. چون $PQRS$ یک لوزی است، $PQ=RS$ و $QR=SP$ که نتیجه می دهد : $PQ=QR=RS=SP$ و $PQRS$ یک لوزی است.

***

مسأله ۱۱-۴

راه حل : برهان خلف فرض کنید چهار عدد گفته شده موجود باشند و هیچ سه تایی از آنها با هم برابر نباشند. چهار عدد c, b, a و d را از بین چهارتایی هایی که شرایط مسئله را دارند جوری انتخاب کنید که $a+b+c+d$ مینیمال باشد.

اگر عدد اول p a و b را بشمارد آنگاه از $a\,|\,(b+c)^2$ و $a\,|\,(b+d)^2$ می دانیم که c, p و d را نیز می شمارد. آنگاه $\frac{a}{p}, \frac{b}{p}, \frac{c}{p}, \frac{d}{p}$ یک مثال نقض با مجموع کمتر است. بنابراین این چهار عدد دو به دو نسبت به هم اول هستند.

فرض کنید عدد اول $p>2$ a را می شمارد. چون a هر یک از $(b+c)^2, (c+d)^2$ و $(d+b)^2$ را می شمارد می دانیم $c+d, b+c, p$ و $d+b$ را می شمارد.

پس p $(b+c)+(c+d)+(d+b)$ را نیز می شمارد و داریم $p\,|\,b+c+d$.

پس $p\,|\,(b+c+d)-(b+c)=d$ و به همین شکل $p\,|\,b$ و $p\,|\,c$ که تناقض است.

پس هر یک از c, b, a و d توانهایی از ۲ هستند، چون این اعداد دو به دو نسبت به هم اولند پس باید همه ۱ باشند. که تناقض است. پس فرض اولیه ما اشتباه بوده است و چنین ۴ عددی که هیچ سه تایی آنها برابر نباشند وجود ندارد.

***

مسأله ۱۱-۵

راه حل : در این اثبات « چند ضلعی » به رو و داخل یک چند ضلعی گفته می شود. با این فرض اثری بر مسئله ندارد چون هر خطی که داخل یک چند ضلعی را قطع کند ابتدا باید از مرز چند ضلعی بگذرد. فرض کنید خط ℓ هر سه چند ضلعی را قطع می کند. شکل را طوری بچرخانید که ℓ افقی باشد و فرض کنید که ℓ چند ضلعی p_i را در نقطه ی A_i قطع می کند که A_2, A_1 و A_3 به همین ترتیب از چپ به راست روی خط ℓ قرار دارند. هر خطی که هیچ کدام از چند ضلعی ها را قطع نمی کند یا با ℓ موازی است یا ℓ را در سمت چپ A_2 و یا در سمت راست A_2 قطع می کند. در همه ی این حالات m، A_2 را از هر دوی A_1 و A_3 جدا نمی کند پس خط m نمی تواند p_2 را از چند جمله ای های دیگر جدا کند.

(در دو حالت اول A_2 و A_3 از هم جدا نمی شوند و در حالات اول و سوم A_1 و A_3 از هم جدا نمی شوند.) برای اثبات جهت دیگر مسئله، لم شهودی ولی غیر بدیهی زیر را اثبات می کنیم :

لم : برای هر دو چند ضلعی محدب داده شده که همدیگر را قطع نمی کنند، خطی وجود دارد که آنها را از هم جدا می کند.

اثبات : فرض کنید V، برش محدب دو چند ضلعی باشد. اگر همه ی رأس های V از یک چندضلعی باشند پس این چندضلعی شامل چندضلعی دیگر است که تناقض است. همچنین برای هر چهار رأس A,B,C,D که به همین ترتیب روی V قرار دارند (ولی نه لزوماً مجاور هم) چون AC و BD همدیگر را قطع می کنند، A و C نمی توانند در یک چند ضلعی باشند و B,D در چند ضلعی دیگر، پس تعدادی از رئوس مجاور هم $V_1,...,V_m$ در یک چند ضلعی Q و بقیه ی آن ها در چند ضلعی دیگر R هستند. در اینصورت V_1V_m ضلعی از Q است پس خط V_1V_m R را قطع نمی کند. حال می توانیم خطی بی نهایت نزدیک به V_1V_m انتخاب کنیم که Q را قطع نکند. این خط R,Q را از هم جدا می کند. حال فرض کنید که هیچ خطی سه چند ضلعی را قطع نمی کند.

در اینصورت هر دو تا از چند ضلعی ها جدا از هم هستند، مثلاً اگر M در $p_1 \cap p_2$ باشد و $N \neq M$ در p_3 باشد آنگاه خط MN هر سه چند ضلعی را قطع می کند. H، برش محدب p_1, p_2 را مثلثی کنید (یعنی آن را به مثلث هایی تقسیم بندی کنید که رئوسشان همان رئوس H هستند.) اگر p_3، H را در نقطه ی M قطع کند آنگا M_0 رو یا داخل یک مثلث XYZ است.

بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $Y, Z \in P_2, X \in P_1$ (در غیراینصورت هم مثلث XYZ و هم نقطه ای M در یکی از P_1 یا P_2 قرار می گیرند، که در این صورت این چند ضلعی p_3 را قطع می کند). آنگاه خط P_1XM و P_3 را قطع می کند. چون XM، خط YZ را نیز قطع می کند، P_L را نیز قطع می کند که تناقض است.

پس H از P_3 جدا است و طبق لم می توانیم خطی رسم کنیم که این دور از هم جدا کند پس این خط P_1 و P_2 را از p_3 جدا می کند همین استدلال را می توانیم برای P_1 و P_2 نیز بکشیم پس حکم مسئله ثابت می شود.

***

مسأله ۱۱-۶

راه حل : انعکاسی حول A با شعاع r انجام دهید. چون صفحه ی داده شده P، بر کره ی محیطی ABCD مماس است، کره بر یک صفحه ی موازی با D تصویر می شود که شامل D', C', B'، تصاویر C,B و D تحت وارون نیز هست.

صفحات ACD, ABC ،P و ABD تحت وارون ثابت می مانند چون همگی شامل A هستند. حال چون $C'D'$ در صفحه ای موازی P قرار دارد، صفحه $P, ACD = AC'D'$ را در خطی موازی خط $C'D'$ قطع می کند. اگر دقیق تر بخواهیم بگوئیم، متوازی الاضلاع $C'D'AX$ را رسم کنید. آنگاه X هم در صفحه ی $AC'D' = ACD$ و هم در صفحه ی P است (چون $DX \parallel C'D'$). پس حمل برخورد ACD و P خط PX موازی با $C'D'$ است.

به طور مشابه صفحه ی ABD و P را در خطی موازی $D'B'$ و صفحه ی P,ABC را در خطی موازی $B'C'$ قطع می کند. این خطوط ۶ زاویه ی برابر تشکیل می دهند اگر و تنها اگر $D'B', C'D'$ و $B'C'$ زوایای مساوی تشکیل دهند. یعنی اگر مثلث $C'D'B'$ متساوی الاضلاع باشد و $C'D' = D'B' = B'C'$. طبق فرمول فاصله ی وارون این برقرار است اگر و تنها اگر :

$$\frac{CDr^2}{AC.AD} = \frac{DBr^2}{AD.AC} = \frac{BC.r^2}{AB.AC}$$

که با حکم مسئله معادل است.

***

۱۸- اسلوونی

مسأله ۱

راه حل : از رابطه ی بازگشتی داریم $a_{n+2}a_{n-1} = a_{n+1}^2$ برای $n = 2,3,\ldots$. هیچ یک از جمله های دنباله نمی توانند صفر باشند، پس می توانیم بنویسیم :

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}} \qquad n = 2,3,\ldots$$

طبق استقرا مقدار عبارت $\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}}$ ثابت است و برابر است با $2 = \frac{a_3}{a_2 a_1}$. بنابراین $a_{n+2} = 2a_n a_{n+1}$ و همه ی جملات دنباله اعداد صحیح مثبت هستند.

برای این رابطه ی جدید ما همچنین می دانیم $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ برای عد صحیح مثبت n، یک عدد صحیح زوج است.

داریم :

$$a_{2000} = \frac{a_{2000}}{a_{1999}}\frac{a_{1999}}{a_{1998}}\cdots\frac{a_2}{a_1}.a_1$$

در این حاصلضرب هر یک از ۱۹۹۹ کسر بر ۲ بخش پذیر است. و $a_1 = 2$ هم زوج است. پس a_{2000} بر 2^{2000} بخش پذیر است.

***

مسأله ۲

راه حل : برای $x = 0$ و $y = 1$ داریم $f(-f(1)) = 0$.

برای $y = -f(1)$ داریم $f(x) = 1 + f(1) - x$، قرار دهید $a = 1 + f(1)$ ، $f(x) = a - x$، داریم :

$$1 - x - y = f(x - f(y)) = a - x + f(y) = 2a - x - y$$

پس $a = \frac{1}{2}$. و $f(x) = \frac{1}{2} - x$، در معادله ی تابعی صدق می کند.

***

مسأله ۳

راه حل : همه ی زاویه ها جهت دار و به پیمانه ی ۱۸۰° حساب می شوند عمود $\overline{GP}$ را بر قطر AC و عمود $\overline{FQ}$ را بر قطر BD رسم کنید. فرض کنید R محل برخورد خطهای PG و FQ باشد و H پای عمود رسم شده از E بر ضلع AD باشد. می خواهیم ثابت کنیم E,H و R همخط هستند.

چون F و G دو نقطه ی وسط اضلاع متناظر مثلث های متشابه DEC و ABE هستند (با جهت مخالف)، مثلث های DPE و AQE نیز با جهت های مخالف متشابه هستند. بنابراین $\angle DPE = \angle EQA$ و بنابراین AQPD یک چهار ضلعی محاطی است. چون $\angle EPR = ۹۰^\circ = \angle EQR$ ، چهار ضلعی EQRP نیز محاطی است. پس

$$\angle ADQ = \angle APQ = \angle EPQ = \angle ERQ$$

در نتیجه $\angle DEH = ۹۰^\circ - \angle ADQ = ۹۰^\circ - \angle ERQ = \angle QER$.

چون E,D و Q همخط هستند. E,H و R نیز باید همخط باشند.

***

مسأله ۴

راه حل : بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید که تعداد مهره ها در جعبه ها b,a و c هستند که $a \le b \le c$.
بنویسید $b = qa + r$ که $۰ \le r \le a$ و $q \ge ۱$. پس q را بر مبنای ۲ بنویسید :

$$q_۱ = m_۰ + ۲m_۱ + \ldots + ۲^k m_k$$

که هر $m_i \in \{۰,۱\}$ و $m_k = ۱$. حال برای هر $i = ۰,۱, \ldots ,k$ ، $۲^i a$ مهره به جعبه ی اول اضافه کنید : اگر $m_i = ۱$ این مهره ها را از جعبه ی دوم بردارید و در غیر این صورت آن ها را از جعبه ی سوم بردارید. به این ترتیب ما حداکثر $(۲^k - ۱)a < qa \le b \le c$ مهره از جعبه ی سوم بر می داریم و در کل دقیقاً qa مهره از جعبه ی دوم بر می داریم. اکنون در جعبه ی دوم $r < a$ مهره باقی مانده است. پس اکنون جعبه ی با کمترین تعداد مهره، تعداد مهره هایش از a کمتر است. در این صورت با تکرار این فرایند در نهایت می توانیم یکی از جعبه ها را خالی کنیم.

***

۱۹- تایوان

مسأله ۱

راه حل : قرار دهید $a = x+1$، $b = y+1$ و $c = z+1$. آنگاه $a,b,c \geq 2$ و :

$$a^b + 1 = (a+1)^c$$

$$((a+1)-1)^b + 1 = (a+1)^c$$

اگر معادله را به پیمانه ی $(a+1)$ بنویسیم داریم $(-1)^b + 1 \equiv 0$، پس b فرد است. اگر معادله ی دوم را به پیمانه ی $(a+1)^2$ بنویسیم بعد از بکاربردن بسط دو جمله ای داریم :

$$\binom{b}{1}(a+1)(-1)^{b-1} + (-1)^b + 1 \equiv 0 \pmod{(a+1)^2}$$

پس $(a+1) \mid b$ و a زوج است. از طرف دیگر، اگر بعد از بکاربردن بسط دوجمله ای معادله ی اول را به پیمانه ی a^2 بنویسیم داریم :

$$1 \equiv \binom{c}{1}(a+1) \pmod{a^2}$$

پس c بر a بخش پذیر است و c هم زوج است. قرار دهید $a = 2a_1$ و $c = 2c_1$ آنگاه :

$$2^b a_1^b = a^b = (a+1)^c - 1 = ((a+1)^{c_1} - 1)((a+1)^{c_1} + 1)$$

در نتیجه $\gcd((a+1)^{c_1} - 1, (a+1)^{c_1} + 1) = 2$. بنابراین با استفاده از این نکته که $2a_1$ یک مقسوم علیه $(a+1)^c - 1$ است. داریم :

$$(a+1)^{c_1} - 1 = 2a_{a_1}^{b}$$

$$(a+1)^{c_1} + 1 = 2^{b-1}$$

باید داشته باشیم $2^{b-1} > 2a_{a_1}^{b} \Rightarrow a_1 = 1$. و این معادلات می دهند $c_1 = 1$ و $b = 3$. بنابراین تنها جواب برابر است با :

$$(x,y,z) = (1,2,1,)$$

***

مسأله ۲

راه حل : فرض کنید Y مجموعه ی کسانی باشد که حداقل ۱۹۵۹ نفر را می شناسند و $N(p)$ نشان دهنده ی تعداد آدم هایی باشد که P می شناسد. برهان خلف : فرض کنید کمتر از ۴۱ نفر هر کدام حداکثر ۱۹۵۸ نفر را می شناسند پس $|Y| \geq ۱۹۵۹$.

حال نشان می دهیم ۵۰ نفر هستند که همه، یکدیگر را می شناسند که تناقض است. شخص $y_۱ \in Y$ را انتخاب کنید و قرار دهید $B_۱ = N(y_۱)$ که $|B_۱| \geq ۱۹۵۹$.

آنگاه $|B_۱| + |Y| > ۱۹۹۹$ و شخصی مثل $y_۲ \in B_۱ \cap Y$ وجود دارد.

حال قرار دهید $B_۲ = N(y_۱) \cap N(y_۲)$ که :

$$|B_۲| = |B_۱| + |N(y_۲)| - |B_۱ \cup N(y_۲)| \geq ۱۹۵۹ + ۱۹۵۹ - ۱۹۹۹ = ۱۹۹۹ - ۴۰.۲$$

آنگاه $|B_۲| + |Y| > ۱۹۹۹$، پس شخص $y_۳ \in B_۲ \cap Y$ وجود دارد. حال به طور مشابه ادامه دهید : فرض کنید j شخص مختلف $y_۱, y_۲, \ldots, y_j$ در Y داریم که همه یکدیگر را می شناسند و فرض کنید $B_j = N(y_۱) \cap N(y_۲) \cap \ldots \cap N(y_j)$ حداقل $۱۹۹۹ - ۴۰j \geq ۷۹ > ۴۰$ عضو داشته باشد. آنگاه $|B_j| + |Y| > ۱۹۹۹$ و شخص $y_{j+۱} \in B_j \cap Y$ وجود دارد. بنابراین $B_{j+۱} = B_j \cap N(y_{j+۱})$ حداقل :

$$|B_j| + |N(y_{j+۱})| - |B_j \cup N(y_{j+۱})| \geq (۱۹۹۹ - ۴۰j) + ۱۹۵۹ - ۱۹۹۹ = ۱۹۵۹ - ۴۰(j+۱) > ۰$$

عضو دارد و به همین ترتیب ادامه می دهیم. بنابراین می توانیم ۴۹ نفر مثل $y_۱, y_۲, \ldots, y_{۴۹}$ پیدا کنیم به طوریکه : $B_{۴۹} = N(y_۱) \cap N(y_۲) \cap \ldots \cap N(y_{۴۹})$ ناتهی باشد. پس شخص $y_{۵۰} \in B_{۴۹}$ وجود دارد. اما در اینصورت هر دو نفر از $y_۱, y_۲, \ldots, y_{۵۰}$ همدیگر را می شناسند که تناقض است.

***

مسأله ۳

راه حل : یک عدد اول مرسن، عدد اولی به شکل $۲^n - ۱$ است که $n > ۰$. توجه کنید که اگر $۲^n - ۱$ اول باشد آنگاه $n > ۱$ و n اول است.

چون در غیراینصورت اگر n زوج باشد $n = ۲m$ و $۲^n - ۱ = (۲^m - ۱)(۲^m + ۱)$ و اگر n فرد باشد $n = ab$ برای a,b فرد و $۲^n - ۱ = (۲^a - ۱)(۲^{(b-۱)a} + ۲^{(b-۲)a} + \ldots + ۲^n + ۱)$. که در هر صورت با اول بودن $۲^n - ۱$ به تناقض می رسیم. با محاسبات سرراست داریم که T مجموعه ی اعداد مرسن کوچکتر از ۱۰۰۰۰ برابرند. با :

$$\{m_۲, m_۳, m_۵, m_۷, m_{۱۳}\} = \{۳, ۷, ۳۱, ۱۲۷, ۸۱۹۱\}$$

که $m_p = ۲^p - ۱$. ($۲^{۱۱} - ۱$ اول نیست و برابر است با ۲۳.۸۹). ادعا می کنیم این مجموعه تمام مقادیر ممکن p است. اگر یک عدد اول p در شرایط مسئله صدق کند و در T نباشد، آنگاه به مجموعه ی $S = T$ توجه کنید.

باید عدد اول $q \notin S$ و کوچکتر از ۱۰۰۰ باشد که :

$$(q+۱) \mid (M_۲ + ۱)(M_۳ + ۱)(M_۵ + ۱)(M_۷ + ۱)(M_{۱۳} + ۱) = ۲^{۳۰}$$

پس $q+1$ توانی از ۲ است و ۹ یک عدد اول مرسن کوچکتر از ۱۰۰۰ است. پس $q \in T \in S$ که تناقض است. از طرفی دیگر فرض کنید $p \in T$. و $P^* \geq S = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ داریم که شامل p نیست، که $k \geq 2$ و $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. براهان خلف، فرض کنید برای هر $q \in P^*$ به طوریکه :

$$(q+1) \mid (p_1+1) \ldots (p_k+1)$$

داشته باشیم $q \in S$. دراینصورت :

$$4 \mid (p_1+1)(p_2+1) \to M_2 \in S$$
$$8 \mid (M_2+1)(p_2+1) \to M_3 \in S$$
$$32 \mid (M_2+1)(M_3+1) \to M_5 \in S$$
$$128 \mid (M_2+1)(M_5+1) \to M_7 \in S$$
$$8192 \mid (M_3+1)(M_5+1)(M_7+1) \to M_{13} \in S$$

پس p، که عدد اول مرسن کوچکتر از ۱۰۰۰۰ است باید در S باشد که تناقض است. بنابراین عدد اول $10000 > 9$ وجود دارد که در S نیست و $(q+1) \mid (p_1+1) \ldots (p_k+1)$. که این اثبات را کامل می کند.

***

مسأله ۴

راه حل : فرض کنید M، وسط BC باشد. ادعا می کنیم M,Q,P و R روی یک دایره هستند. در اینصورت خواهیم داشت :

$$\angle MQP + \angle MRP = 180^\circ > \angle NQP + \angle NRP$$

این فقط وقتی می تواند درست باشد اگر N بین M و C باشد، پس $BN > CN$.

چون $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$، می بینیم که نقاط E,C,B و F روی یک دایره هستند، بنابراین $PB.PC = PE.PF$ همچنین نقاط F,E,D و M روی دایره ی نُه نقطه ی مثلث ABC قرار دارند.

بنابراین : $PE.PF = PD.PM$ (یا از طریق دیگر، با دنبال کردن زاویه ها به راحتی می توانیم نشان دهیم DEFM محاطی است). از این دو معادله داریم :

$$PB.PC = PD.PM \qquad (1)$$

از طرف دیگر چون $\Delta AEF \sim \Delta ABC$ و $QR \parallel EF$ داریم : $\angle RBC = \angle AEF = \angle CQR$.

بنابراین CQBR محاطی است و :

$$DQ.DR = DB.DC \qquad (2)$$

حال قرار دهید $MB = MC = a$, $MD = d$ و $MP = p$. داریم :

$$DP = p-d \text{ و } CD = a-d \ , \ PC = p-a \ , \ DB = a+d \ , \ PB = p+a$$

آنگاه معادله ی (۱) نتیجه می دهد $(p+a)(p-a)=(p-d)p$. بنابراین :
$a^۲=dp$ و $(a+d)(a-d)=(p-d)d$ یا معادلاً :

$$DB.DC=DP.DM \qquad (۳)$$

با ترکیب (۲) و (۳) داریم $DQ.DR=DP.DM$ پس نقاط R,M,Q,P روی یک دایره هستند.

***

مسأله ۵

راه حل : فرض کنید X مجموعه ی ۸ طرح مختلف باشد. زیر مجموعه ی S از X را مُد بنامید اگر تی شرتی باشد که دقیقاً شامل طرحهای S باشد، مجموعه ی مد A را با تعداد عناصر مینیمال $|A|\geq ۱$ در نظر بگیرید.

چون $n\geq ۲$ باید داشته باشیم $|A|\leq ۷$. بقیه ی $n-۱$ مجموعه ی مد، حداقل شامل یکی از $k=۸-|A|$ طرح در $X\setminus A$ هستند، پس $n-۱$ زوج است و n فرد است. روشن است که هر مجموعه ی ناتهی $S\subseteq X$، تعداد فردی زیرمجموعه ی مد دارد : برای $S=X$ این عدد n است.

برای $|S|\leq ۷$، t مجموعه ی مد شامل عنصری از $X\setminus S$ هستند که t زوج است. پس بقیه ی $n-t$ مجموعه های مد که $n-t$ فرد است در S هستند.

دراینصورت هر مجموعه ی ناتهی از X مد است. چون در غیراینصورت مجموعه ی غیر مد مینیمال $S\subseteq X$ را انتخاب کنید. زیرمجموعه های مد آن $۲^{|S|}-۲$ زیرمجموعه ی سره هستند که همه طبق مینمال بودن S مد هستند. اما این عددی زوج است که غیرممکن است.

بنابراین باید $۲^۸-۱=۲۵۵$ تی شرت داشته باشیم. اگر k طرح داده شده باشد $(۱\leq k\leq ۷)$ تعداد زوجی از تی شرت ها، $۲^۸-۲^{۸-k}$، حداقل شامل یکی از این طرح ها هستند.

***

۲۰- ترکیه

مسأله ۱

راه حل : X را روی $\overline{BP}$ چنان اختیار کنید که $BX = AP$. آنگاه :

$$\angle ABX = \angle ABP = \angle DPB - \angle PAB = \angle CAB - \angle PAB = \angle CAP$$

چون $AB = CA$, $BX = AP$ ، طبق حالت « ض ز ض » داریم $\Delta ABX \cong \Delta CAP$.

بنابراین $[ABX] = [CAP]$, $\angle DPC = ۱۸۰^\circ - \angle CPA = ۱۸۰^\circ - \angle AXB = \angle PXA$.

حال چون BD=۲CD ، فاصله B از خط AD ، دو برابر فاصله C از خط AD است.

بنابراین : $[ABP] = ۲[CAP] \Rightarrow [ABX] + [AXP] = ۲[ABX]$

پس : $[AXP] = [ABX]$, $XP = BX = AP$.

بنابراین : $\angle BAC = \angle BPD = \angle PXA + \angle XAP = ۲\angle PXA = ۲\angle DPC$ و $\angle PXA = \angle XAP$.

***

مسأله ۲

راه حل : طبق نامساوی میانگین حسابی - هندسی داریم : $-a + b + b \ge ۳\sqrt[۳]{ab^۲}$

باضرب این نامساوی و نامساوی های مشابه برای $b + ۲c$, $c + ۲a$ داریم :

$$(a + ۲b)(b + ۲c)(c + ۲a) \ge ۲۷abc$$

پس :

$$(a + ۳b)(b + ۴c)(c + ۲a) \ge (a + \frac{۱}{۳}a + \frac{۸}{۳}b)(b + \frac{۲}{۳}b + \frac{۱۰}{۳}c)(c + ۲a)$$

$$= \frac{۲۰}{۹}(a + ۲b)(b + ۲c)(c + ۲a) \ge ۶۰abc$$

***

مسأله ۳

راه حل اول : نقاط روی دایره را بی نهایت ۱۳- ضلعی منتظم افراز کنید. در هر ۱۳- ضلعی طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۵ راس با رنگ یکسان وجود دارد. مثلاً قرمز در ادامه ثابت می کنیم که از بین این ۵ راس سه راس هستند

که تشکیل مثلثی متساوی الساقین می دهند. پس برای هر ۱۳- ضلعی یک مثلث متساوی اساقین تکرنگ وجود دارد. بنابراین بی نهایت مثلث متساوی الساقین تکرنگ وجود دارند. پس کافی است ادعای زیر را ثابت کنیم. ادعا، فرض کنید ۵ راس یک ۱۳- ضلعی منتظم با رنگ قرمز، رنگ آمیزی شده اند.

سه تا از این رئوس هستند که تشکیل یک مثلث متساوی الساقین می دهند. اثبات : فرض کنید هیچ کدام از این ۵ راس تشکیل یک مثلث متساوی الساقین ندهند. رئوس را $P_0, P_1, \ldots, P_{12}$ بنامید. (با اندیس هایی به پیمانه ۱۳) ابتدا نشان می دهیم P_i و P_{i+2} نمی توانند هر دو قرمز باشند. فرض کنید قرمز باشند. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید P_{12} و P_1 قرمز هستند. پس P_{10}, P_0, P_3 نمی توانند قرمز باشند. به علاوه تنها یک راس از هر زوج $(P_{11}, P_4), (P_4, P_7), (P_7, P_8)$ قرمز هستند.

زیرا هر کدام از این زوجها با P_1 تشکیل یک مثلث متساوی الساقین می دهند، مشابهاً حداکثر یک راس از هر کدام از زوج های $(P_2, P_9), (P_9, P_6), (P_6, P_5)$ قرمز هستند. حال سه رأس از $\{P_{11}, P_4, P_7, P_8\} \cup \{P_2, P_9, P_6, P_5\}$ قرمز هستند.

بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید دو رأس از $\{P_{11}, P_4, P_7, P_8\}$ قرمزند. رئوس P_4, P_8 می توانند هر دو قرمز باشند زیرا با p_{12} تشکیل یک مثلث متساوی الساقین می دهند. بنابراین p_{11}, p_7 باید قرمز باشند. به هر حال هر رأس باقیمانده مثلثی متساوی الساقین با دو تا از p_1, p_7, p_{11}, p_{12} تشکیل می دهند بنابراین نمی توانیم ۵ رأس قرمز پیدا کنیم که تناقض است.

حال ثابت می کنیم p_i و p_{i+1} نمی توانند قرمز باشند. اگر چنین باشند، بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید p_6, p_7 قرمز باشند. پس p_4, p_5, p_8, p_9 نمی توانند قرمز باشند. (مشابه با پاراگراف قبل) P_0 نیز نمی تواند قرمز باشد زیرا $P_0P_6P_7$ متساوی الساقین است.

حال هر یک از زوج های (P_3, P_{11}) و (P_{11}, P_1) حداکثر یک راس قرمز دارند زیرا $P_3P_7P_{11}$ و $P_1P_6P_{11}$ متساوی الساقین هستند. هم چنین همانطور که قبلاً گفته شد P_1, P_3 نمی توانند هر دو قرمز باشند. پس حداکثر یکی از $\{P_1, P_3, P_{11}\}$ می توانند قرمز باشند.

مشابهاً حداکثر یکی از $\{p_2, p_{10}, p_{12}\}$ می توانند قرمز باشند. پس حداکثر ۴ راس قرمز وجود دارد که تناقض است. بنابراین اگر P_i قرمز باشد آن گاه $P_{i-2}, P_{i-1}, P_{i+1}, P_{i+2}$ نمی توانند قرمز باشند. در اینصورت تنها ۴ راس قرمز می توانیم داشته باشیم که تناقض است.

راه حل دوم :

فرض کنید $k \geq 1$ رنگ داریم و یک عدد $n \geq 3$. طبق قضیه ون در واردن (van der wardan). می توان N ای یافت که برای هر رنگ آمیزی اعداد، $1, 2, \ldots, N$ با k رنگ، n عدد در تصاعدی حسابی باشند که همرنگ هستند. با بکارگیری این قضیه برای $k = n = 3$ می توان چنین N ای یافت و دایره را ه بی نهایت N- ضلعی منتظم به جای ۱۳- ضلعی تقسیم کرد.

برای هر N- ضلعی $P_1P_2 \ldots P_N$، i, j, k ای (بین ۱ و N) وجود دارند که تشکیل تصاعد حسابی دهند و P_i, P_j, P_k رنگ یکسانی داشته باشند.

بنابراین مثلث $P_iP_jP_k$ یک مثلث متساوی الساقین تک رنگ است. چون بی نهایت N- ضلعی داریم پس بی نهایت مثلث متساوی الساقین تکرنگ نیز داریم.

***

مسأله ۴

راه حل : فرض کنید $\hat{y},\hat{x}$ بردارهای یکه ای در جهت نیم خط های oy,ox باشند. فرض کنید OM+ON مساوی با مقدار ثابت k باشد.

اگر $OM=C$ آنگاه $ON=K-C$ و بنابراین وسط $\overline{MN}$ برابر است با $\frac{1}{2}(c\hat{x}+(k-c)\hat{y})$ موقعی که C بین ۰ تا K تغییر می کند، این نقطه وسط در طول پاره خط واصل بین $\frac{1}{2}k\hat{y},\frac{1}{2}k\hat{x}$ حرکت می کند. یعنی $M'N'$ که $N'\in\overrightarrow{OY}$, $M'\in\overrightarrow{OX}$, $OM'=ON'=\frac{1}{2}k$.

***

مسأله ۵

راه حل : برای هر نقطه رنگ آمیزی شده P، هر مربع $|x|$ صفحه شامل این نقطه را در نظر بگیرید. اگر این مربع m نقطه رنگ شده شامل P داشته باشد می گوییم P، $\frac{1}{m}$ نقطه از آن مربع را به دست آورده است.

با جمع این مقدارها روی همه مربع های $|x|$ که P روی آنها قرار دارد، تعداد کل نقاطی که P جمع می کند را به دست می آوریم.

هر نقطه رنگ شده روی لبه صفحه ی شطرنج حداکثر ۲ نقطه به دست می آورد. برای یک نقطه رنگ شده P داخل صفحه شطرنج مربع ۲×۲ با مرکز P باید شامل یک نقطه رنگی Q در مرز خودش باشد. پس Q,P هر دو روی یک مربع واحد قرار می گیرند و P حداکثر نصف یک نقطه از آن به دست می آورد. پس P حداکثر $\frac{7}{2}$ نقطه را جمع می کند. پس هر نقطه رنگی حداکثر $\frac{7}{2}$ نقطه جمع می کند و $\ell(n)$ نقطه رنگ شده حداکثر به $\frac{7}{2}\ell(n)$ نقطه تعلق دارند برای اینکه شرط گفته شده بر قرار باشد، تعداد کل نقاطی که جمع می شوند باید n^2 باشد پس $\frac{7}{2}\ell(n)\geq n^2$ و بنابراین $\frac{\ell(n)}{n^2}\geq\frac{2}{7}$.

حال یک صفحه $n\times n$ داده شده را در گوشه یک صفحه ی $n'\times n'$ قرار دهید که $n\le n'\le n+۶$, $۷\mid n'+۱$. برای هر شبکه ۷×۷ از رئوس در صفحه $n'\times n'$، رئوس را مانند زیر رنگ کنید.

● ○ ● ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ● ○ ●
○ ● ○ ● ○ ○ ○
● ○ ○ ○ ○ ● ○
○ ○ ● ○ ● ○ ○
○ ● ○ ○ ○ ○ ●
○ ○ ○ ● ○ ● ○

در اینصورت هر مربع $k\times k$ در صفحه شطرنجی نقطه ای رنگی در دست کم یکی از رأس هایش دارد. چون، $\frac{۲}{۷}(n'+۱)^۲$ راس را در این رنگ آمیزی رنگ کرده ایم داریم :

$$\ell(n)\le\frac{۲}{۷}(n'+۱)^۲\le\frac{۲}{۷}(n+۷)^۲$$

بنابراین :

$$\frac{\ell(n)}{n^۲}\le\frac{۲}{۷}\left(\frac{n+۷}{n}\right)^۲$$

وقتی $n\to\infty$ سمت راست به مقدار دلخواه به $\frac{۷}{۲}$ نزدیک می شود. چون $\frac{۲}{۷}\le\frac{\ell(n)}{n^۲}$ برای هر n، پس

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ell(n)}{n^۲}=\frac{۲}{۷}$$

***

مساله ۶

راه حل : فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی دلخواه باشد و L و N به ترتیب وسط $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ باشند. انعکاسی به مرکز B و شعاع دلخواه انجام دهید. C,D,A به نقاط هم خط C',D',A' نگاشته می شوند در حالیکه N به نقطه N' نگاشته می شود به طوری که D' وسط $\overline{BN'}$ باشد. تنها دو نقطه X روی $A'D'$ موجودند که $\angle BXN'=\angle BA'N'$ نقطه A' و بازتاب A' حول D'. پس :

$$\angle ANB=\angle BNC\Leftrightarrow\angle BA'N'=\angle BC'N'\Leftrightarrow A'D'=D'C'$$
$$\Leftrightarrow\frac{AD}{BA.BD}=\frac{DC}{BD.BC}\Leftrightarrow AD.BC=BA.DC$$

مشابهاً $\angle BLA=\angle DLA\Leftrightarrow AD.BC=BA.DC$.

بنابراین $\angle BNC = \angle ANB \Leftrightarrow \angle DLA = \angle BLA$. به عبارت دیگر $\overline{BD}$. $\angle ANC$ را نصف می کند اگر و فقط اگر $\overline{AC}, \angle BLD$ را نصف کند و حکم ثابت است.

***

مسأله ۷

راه حل : ابتدا نشان می دهیم مجموعه $\{x-f(x) \mid x \in R\}$ متناهی است. اگر نه، نامتناهی $k \neq ۱$ موجودند که برای یک x_k , $x_k - f(x_k) = k$. آنگاه :

$$\frac{f(k-۱)}{k-۱} = \frac{f(x_k - ۱ - f(x_k))}{k-۱} = \frac{f(x_k) - x_k - ۱}{k-۱} = -۱ - \frac{۲}{k-۱}$$

چون k بی نهایت مقدار اختیار می کند $\frac{f(k-۱)}{k-۱}$ نیز اینگونه است که تناقض است. حال x را چنان اختیار کنید که $|x-f(x)|$ برای $x = x_۰$ ماکزیمم شود. اگر $y = x_۰ - ۱ - f(x_۰)$ داریم :

$$y - f(y) = y - (f(x_۰) - x_۰ - ۱) = ۲(x_۰ - f(x_۰))$$

چون $|x-f(x)|$ ماکزیمم است باید داشته باشیم $y - f(y) = x_۰ - f(x_۰) = ۰$. بنابراین برای هر x، $f(x) = x$ و این تابع شرایط سوال را برآورده می کند.

***

مسأله ۸

راه حل : فرض کنید چهار ضلعی بیرونی EFGH باشد قرار دهید :

$\angle H = ۲\alpha_۴$, $\angle G = ۲\alpha_۳$, $\angle F = ۲\alpha_۲$, $\angle E = ۲\alpha_۱$

فرض کنید دایره محیطی C دارای مرکزO و شعاع r باشد و ضلع های HE , GH , FG , EF در J, I, L, K بر C مماس باشند. در مثلث قائم الزاویه EIO ، داریم $IO = r$, $\angle OEI = \alpha_۱$ ، بنابراین $EI = r \operatorname{Cot} \alpha_۱$. پس از یافتن عباراتی مشابه برای IF , FJ , ... ,LE، داریم :

$$PT = ۲r \sum_{i=۱}^{۴} \operatorname{Cot} \alpha_i$$

همچنین $[EFO] = \frac{۱}{۲} EF.IO = \frac{۱}{۲} EF.r$. با محاسبه $[HEO],[GHO],[FGO]$، داریم :

$$A_T = \frac{۱}{۲} P_T . r$$

توجه کنید که :

$$IJ = ۲ r \operatorname{Sin} < IKL = ۲ r \operatorname{Sin} < FIJ = ۲ r \operatorname{Sin}(۹۰^\circ - \alpha_۲) = ۲ r \operatorname{Cos} \alpha_۲$$

عبارات مشابهی برای LI,KL,JK نتیجه می دهد $P_C = 2r\sum_{i=1}^{4} \cos\alpha_i$. همچنین توجه کنید که $\angle IOJ = 180^\circ - \angle JFI = 180^\circ - 2\alpha_2$ و بنابراین :

$[IOJ] = \frac{1}{2} OI.OJ \sin\angle IOJ = \frac{1}{2} r^2 \sin(2\alpha_2) = r^2 \sin\alpha_2 \cos\alpha_2$ با اضافه کردن این رابطه به روابط مشابه برای $[LOI],[KOL],[JOK]$ داریم : $A_C = r^2 \sum_{i=1}^{4} \sin\alpha_i \cos\alpha_i$

بنابراین نامساوی که می خواهیم ثابت کنیم به شکل زیر در می آید :

$$A_C . P_t^2 \geq A_T . P_C^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 \sum_{i=1}^{4} \sin\alpha_i \cos\alpha_i . P_t^2 \geq (\frac{1}{2} P_r . r) 4r^2 . (\sum_{i=1}^{4} \cos\alpha_i)^2$$

$$\Leftrightarrow P_T . \sum_{i=1}^{4} \sin\alpha_i \cos\alpha_i \geq 2r . (\sum_{i=1}^{4} \cos\alpha_i)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} \cos\alpha_i . \sum_{i=1}^{4} \sin\alpha_i \cos\alpha_i \geq (\sum_{i=1}^{4} \cos\alpha_i)^2$$

نامساوی آخر طبق نامساوی کوشی - شوارتز $\sum a_i^2 \sum b_i^2 \geq (\sum a_i b_i)^2$ برای $a_i = \sqrt{\cot\alpha_i}$، $b_i = \sqrt{\sin\alpha_i \cos\alpha_i}$ برقرار است.

***

مسأله ۹

راه حل : فرض خلف : فرض کنید صفحه را بتوانیم با تعدادی متناهی از نواحی درونی چند سهمی - مثلاً n تا، بپوشانیم زاویه حاده $\theta < (\frac{360}{2n})^\circ$ را انتخاب نموده ثابت در نظر بگیرید.

یکی از سهمی ها را در نظر بگیرید و (موقتاً) یک دستگاه مختصات طوری انتخاب کنید که سهمی نمودار، $y = ax^2$ که $a > 0$ باشد. (فرض کنید مختصات گذاری طوری انجام شده است که ۱ واحد محور y ها طول برابری با ۱ واحد محور x ها داشته باشد).

خطوط مماس بر سهمی در نقاط $x = \pm\frac{\cot\theta}{2a}$ را رسم کنید. این نقاط دارای شیب $2ax = \pm\cot\theta$ هستند. این خطوط همدیگر را روی محور y ها با زاویه 2θ قطع می کنند و یک ناحیه V شکل در صفحه ایجاد می کنند که شامل نقاط داخلی سهمی است.

اگر مراحل فوق را برای تمامی سهمی ها انجام دهید، n ناحیه ۷- شکل به دست می آید که کل صفحه را می پوشانند. دوباره یک محور x انتخاب کنید و فرض کنید نیم خطهای کناره این ناحیه ها زاویه های $\phi_j, \phi_j+2\theta$ را با محور x ها بسازند. (زوایا به پیمانه 180°). چون $2n\theta < 360^\circ$، زاویه $\emptyset'$ موجود است که در هیچ کدام از بازه های $[\phi_j, \phi_j+2\theta]$ قرار نمی گیرد. حال نیم خط گذرا از مبدا که با محور x ها زاویه $\emptyset'$ می سازد را در نظر بگیرید.

برای x به اندازه کافی بزرگ، نقاط روی این نیم خط در هیچ یک از ناحیه های ۷- شکل نمی توانند قرار بگیرند که تناقض است پس فرض اولیه نادرست بوده است و نمی توانیم صفحه را با نواحی درونی متناهی سهمی بپوشانیم.

***

۲۱- اوکراین

مسأله ۱

راه حل : قرار دهید $a_i = x_i - x_{i-1}$ برای هر ،که تفاضل به پیمانه ۱۹۹۹ حساب می شود. چون $c-d$، $P(c)-P(d)$ c را برای اعداد صحیح d و c می شمارد پس $a_i | a_{i+1}$ برای هر i.

ابتدا فرض کنید برای هر i، $a_i \neq 0$. پس $|a_{i+1}| \geq |a_i|$. همچنین $|a_1| = |a_2| \ldots$ پس همه $|a_i|$ها باید مساوی باشند. فرض کنید این مقدار مشترک را $m > 0$ بنامیم. اگر n تا از $a_1, a_2, \ldots, a_{1999}$ برابر با m و $1999 - n$ تای بقیه برابر با $-m$ باشند.

آنگاه مجموع آنها $a_1 + a_2 + \ldots + a_{1999} = x_{1999} - x_0 = 0$ برابر است با $m(2n - 1999) \neq 0$ که تناقض است. بنابراین k ای موجود است که $a_k = 0$ و چون $a_k | a_{k+1}$، $a_{k+1} = 0$ مشابهاً $a_{k+2} = 0, \ldots$ پس همه x_i ها با هم برابرند و عبارت داده شده برابر است با ۱۹۹۹.

***

مسأله ۲

راه حل : نامساوی $1 \leq x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0$ نتیجه می دهد که طرف چپ نامساوی حداکثر برابر است با :

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{x_i^3}{x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_6^5 + 4} = \frac{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + \ldots x_6^5 + 4}$$

برای $t \geq 0$ داریم :

$$\frac{t^5 + t^5 + t^5 + 1 + 1}{5} \geq t^3$$

طبق نامساوی میانگین حسابی - هندسی، با جمع ۶ نامساوی به دست آمده برای $t = x_1, x_2, \ldots, x_6$ و تقسیم بر $(x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_6^5 + 4)$ نتیجه می گیریم که عبارت فوق حداکثر $\frac{3}{6}$ است.

***

مسأله ۳

راه حل : دقت کنید سه خط گذرنده از سه رأس یک مثلث همرسند اگر و فقط اگر تصویر آنها تحت نیمساز زوایا همرس باشند، این حکم به راحتی با استفاده از قضیه سوا ثابت می شود. فرض کنید : A_0 ، B_0 ، C_0 به ترتیب مرکز مستطیل های OMA_1N ، OPB_1Q و OSC_1R باشند.

تحت تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{1}{2}$، مثلث $A_1B_1C_1$ به مثلث $A_0B_0C_0$ تصویر می شود. آنگاه چون خطوط AA_1 ، BB_1 ، CC_1 نیمساز زوایای مثلث $A_1B_1C_1$ هستند (به راحتی ثابت می شود). نیمساز زوایای مثلث $A_0B_0C_0$ با خطوط AA_1 ، BB_1 ، CC_1 موازی هستند.

چون OMA_1N یک مستطیل است، قطرهای OA_1 ، MN بازتاب یکدیگر نسبت به خط گذرنده از A_0 به موازات AA_1 هستند. طبق بالا این خط، دقیقاً نیمساز زاویه $\angle C_0A_0B_0$ در مثلث $C_0B_0A_0$ است. مشابهاً خطوط OB_1 و OC_1 بازتاب خطوط PQ و RS تحت دیگر نیمسازها هستند. چون خطوط OA_1 ، OB_1 ، OC_1 در O همرسند، طبق مشاهده اولیه، خطوط MN ، PQ و RS همرسند.

***

۲۲- انگلستان

مسأله ۱

راه حل : فرض کنید سن فعلی کودکان $a+۱, b+۱, c+۱$ و $d+۱$ باشند. داریم :

$۱ \leq a < b < c < d \leq ۱۵$ توجه کنید که $b \leq ۱۳$، بنابراین $b-a \leq ۱۲$. همچنین داریم :

$$d^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ \quad (۱)$$

و

$$(d+۲)^۲ + (a+۲)^۲ = (b+۲)^۲ + (c+۲)^۲ \quad (۲)$$

با کم کردن (۱) از (۲) داریم $۴(a+d) + a^۲ = ۴(b+c) - a^۲$. یا

$$a^۲ = ۲(b+c-a-d) \quad (۳)$$

پس a باید زوج باشد، زیرا مربع آن زوج است. به علاوه چون $d > c$،

$a^۲ = ۲(b-a+(c-d)) < ۲(b-a)۲۴$

و بنابراین $a = ۲$ یا $a = ۴$. اگر $a = ۴$، چون $a^۲ < ۲(b-a)$، داریم $۲b > a^۲ + ۲a = ۲۴$. پس $b > ۱۲$. بنابراین $b = ۱۳, c = ۱۴$ و $d = ۱۵$ که با شرایط داده شده در تناقض است. بنابراین $a = ۲$. طبق (۳) داریم $b + c - d = ۴$. با قرار دادن $a = ۲$ و $d = b + c - ۴$ در (۱) و ساده کردن آن به دست می آوریم.

$(b-۴)(c-۴) = ۱۰ = ۱.۱۰ = ۲.۵$

پس $(b,c) = (۵,۱۴)$ یا $(۶,۹)$. در این دو حالت بر ترتیب $d = ۱۵$ و $d = ۱۱$. بنابراین تنها حالات ممکن $(a,b,c,d) = (۲,۵,۱۴,۱۵)$ یا $(۲,۶,۹,۱۱)$ هستند که شرایط (۱) و (۲) را بر آورده می کنند. نتیجه می شود جواب یکتایی وجود ندارد و نمی توان سن کودکان را مشخص کرد.

***

مسأله ۲

راه حل : فرض کنید Q تصویر X روی $\overline{AP}$ باشد. توجه کنید که $\angle APB = ۹۰^\circ$ و بنابراین :

$tg \angle PAX = \dfrac{PB}{PA}$ همچنین $PB \parallel XQ$، پس $\Delta AQX \sim \Delta APB$.

بنابراین :

$$\operatorname{tg}\angle APX=\frac{QX}{QP}=\frac{\dfrac{AX.BP}{AB}}{\dfrac{BX.AP}{AB}}=\frac{AX.BP}{BX.AP}$$

و

$$\frac{\operatorname{tg}\angle APX}{\operatorname{tg}\angle PAX}=\frac{AX}{BX}$$

که مقداری ثابت است.

❊❊❊

مسأله ۳

راه حل : موقعی که $y=۱$، طرف چپ صفر است. پس می توانیم معادله را به شکل زیر بازنویسی کنیم.

$$x=\frac{y(y-۱)+c}{(y+۱)(y-۱)}$$

صورت به پیمانه $(y+۱)$ با $c+(-۲)(-۱)$ و به پیمانه $(y-۱)$ با C همنهشت است. بنابراین باید داشته باشیم $C\equiv -۲(\bmod\ (y+۱))$ و $C\equiv ۰(\bmod (y-۱))$.

چون $C=y-۱$ در معادله همنهشتی صدق می کند باید داشته باشیم :

$$C\equiv y-۱(\bmod[y-۱,y+۱])$$

اگر y زوج باشد $[y-۱\ ,\ y+۱]=y^۲-۱$ و اگر y فرد باشد $[y-۱,y+۱]=\frac{۱}{۲}(y^۲-۱)$. پس برای $y=۲,۳,۱۱$ داریم $C\equiv ۱(\bmod\ ۳)$، $C\equiv ۲(\bmod\ ۴)$ و $C\equiv ۱۰\ (\bmod\ ۶۰)$.

بنابراین $C=۱۰$ را امتحان می کنیم. برای اینکه x صحیح باشد باید $(y-۱)\mid ۱۰ \Rightarrow y=۲,۳,۶$ یا ۱۱ از این مقادیر به ترتیب به دست می آید ۱ یا $x=۴,۲,\frac{۷}{۲}$.

بنابراین دقیقاً سه جواب در اعداد صحیح مثبت وجود دارد :

$$(x,y)=(۴,۲)\ ,(۲,۳),(۱,۱۱)$$

❊❊❊

مسأله ۴

راه حل : اگر $d\geq ۵, m$ رقم داشته باشد طبق نامساوی برنولی داریم :

$m\geq ۳^{d-۱}=(۸۰+۱)^{\frac{d-۱}{۴}}\geq ۸۰\ .\ \frac{d-۱}{۴}+۱>۸d$ بنابراین $m>C(m)$

اگر $۳۲>m$، m ۴ رقم در مبنای ۳ داشته باشد، آنگاه $C(m)\leq ۲^۳+۲^۳+۲^۳+۲^۳=۳۲<m$.

از طرف دیگر اگر $۳۲ \le m \le ۲۷$، آنگاه m با ارقام ۱۰ در مبنای ۳ شروع می شود.

و $m < ۱۷ = ۲^۳ + ۲^۳ + ۰^۳ + ۱^۳ < C(m)$ بنابراین برای هر $m \ge ۲۷$، $m\ C(m) < ۰$.

پس در نتیجه داریم : $u_s < ۲۷$. چون u_s حداکثر سه رقم دارد، $u_{s+۱}$ فقط می تواند برابر باشد با ۸, ۱۶, ۲۴, ۱, ۹, ۱۷, ۲, ۱۰ یا ۳.

اگر مساوی ۱، ۲ یا ۱۷ باشد حکم ثابت است. اگر برابر با ۳ یا ۹ باشد، $U_{s+۲} = ۱$. در غیراینصورت محاسبه ای ساده نشان می دهد، U_r نهایتاً برابر با ۲ می شود.

$$\left.\begin{matrix} ۸ = (۲۲)_۳ \\ ۲۴ = (۲۲۰)_۳ \end{matrix}\right\} \rightarrow ۱۶ = (۱۲۱)_۳ \rightarrow ۱۰ = (۱۰۱)_۳ \rightarrow ۲$$

***

مسأله ۵

راه حل : فرض کنید در یک پیاده رو قدم می زنید. بلوک های این پیاده رو از چپ به راست با اعداد صحیح مثبت شماره گذاری شده است، به طوریکه در زمان n در بلوک $f(n)$ ایستاده اید. دقت کنید اگر $۰ < f(n) - f(n+۱)$، آنگاه $f(n) - f(n+۱) = ۱$ ـ یعنی موقعی که به سمت چپ حرکت می کنیم دقیقاً یک بلوک حرکت می کنیم. مشابهاً موقعی که به سمت راست حرکت می کنیم باید به $۴f(n) - ۱$ برویم.

فرض کنید در بلوک $f(a)$ قرار داریم و هنوز به $f(a) - ۱$ نرفته ایم. اگر به سمت راست حرکت کنیم (یعنی $f(a+۱) > f(a)$) آنگاه در یک زمان باید از بلوک $f(a)$ بگذریم تا به $f(a) - ۱$ برسیم.

اما این حرکت مجاز نیست. بنابراین باید داشته باشیم $f(a+۱) = f(a) - ۱$. بنابراین مسیر حرکت کاملاً با $f(۱)$ مشخص می شود : موقعی که در $f(n)$ قرار داریم، اگر به $f(n) - ۱ > ۰$ نرفته باشیم باید داشته باشیم $f(n+۱) = f(n) - ۱$. در غیراینصورت $f(n+۱) = ۴f(n) - ۱$.

اگر $f(۱) = ۱$، آنگاه تابع f را که اینگونه تعریف می شود در نظر بگیرید :

اگر $۲^k \le n \le ۲^{k+۱}$ قرار دهید $f(n) = (۳.۲^k - ۱) - n$.

تابع f دو سویی است زیرا برای $n = ۲^k, ۲^k + ۱, \ldots, ۲^{k+۱} - ۱$ داریم

$$f(n) = ۲^{k+۱} - ۱, ۲^{k+۱} - ۲, \ldots, ۲^k$$

با یک بررسی سریع در می یابیم f در شرط (ii) صدق می کند. بنابراین همانطور که در بالا ثابت شد، این تنها تابعی است که $f(۱) = ۲$. در این حالت، چون $۲^۹ \le ۱۹۹۹ < ۲^{۱۱}$ داریم :

$$f(۱۹۹۹) = (۳/۲^{۱۰} - ۱) - ۱۹۹۹ = ۱۰۷۲$$

اگر $f(۱) = ۲$ تابع f را که به شکل زیر تعریف می شود در نظر بگیرید :

برای $۴^k \le n < ۳.۴^k$ قرار دهید $f(n) = (۴^{k+۱} - ۱) - n$. برای $۳.۴^k < n < ۴^{k+۱}$، قرار دهید $f(n) ۷.۴^k - ۱ - n$. دوباره می توانیم نشان دهیم تابع f در شرایط دلخواه صدق می کند و این تنها تابعی است که $f(۱) = ۲$.

در این حالت چون $۴^k \leq ۱۹۹۹ < ۳.۴^۵$ داریم :

$f(۱۹۹۹) = (۴^۶ - ۱) - ۱۹۹۹ = ۲۰۹۶$

نهایتاً فرض کنید $f(n) = ۳$. ابتدا باید از $f(۱) - ۱$, $f(۱) - ۲$ و ... و ۱ بگذریم. نتیجه می شود $f(n) = ۳$ و برای یک n، $f(n + ۲) = ۱$. در این صورت $f(n + ۳) = ۴.۱ - ۱ = ۳ = f(n)$ که تناقض است بنابراین تنها مقادیر ممکن برای $f(۱۹۹۹)$ عبارتند از ۱۰۷۲ و ۲۰۹۶.

***

مسأله ۶

راه حل : الف) فرض کنید $\sigma(T)$ مجموع عناصر مجموعه T باشد. برای اینکه شرط مسأله برقرار باشد باید $\sigma(S_n) = \frac{n(n+۱)}{۲}$ زوج باشد و بنابراین باید $n = ۴k - ۱$ یا $۴k$ که $k \in N$. برای چنین n ای فرض کنید A شامل عضو دوم و سوم از هر یک از مجموعه های : $\{n, n-۱, n-۲, n-۳\}$ و $\{n-۴, n-۵, n-۶, n-۷\}$ و ... و $\{۴, ۳, ۲, ۱\}$ باشد.

(اگر $n = ۴k - ۱$ آخرین مجموعه به صورت $\{۳, ۲, ۱\}$ است) و همچنین قرار دهید $B = S_n \setminus A$. آنگاه $\sigma(A) = \sigma(B)$.

ب) برای اینکه شرط دلخواه برقرار باشد باید $\sigma(S_n) = \frac{n(n+۱)}{۲}$ بر ۳ بخش پذیر باشد به علاوه برای $n = ۳$ چنین زیر مجموعه هایی نمی توان ساخت پس n باید به شکل $۳k + ۲$ یا $۳k + ۳$ باشد که $k \in N$. با استقرا روی n نشان می دهیم تمام این n ها کار می کنند. داریم :

$S_۵ = \{۵\} \cup \{۱, ۴\} \cup \{۲, ۳\}$, $S_۶ = \{۱, ۶\} \cup \{۲, ۵\} \cup \{۳, ۴\}$, $S_۸ = \{۸, ۴\} \cup \{۷, ۵\} \cup \{۱, ۲, ۳, ۶\}$ و

$S_۹ = \{۹, ۶\} \cup \{۸, ۷\} \cup \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

حال فرض کنید بتوانیم $S_{n-۶}$ را به صورت $A \cup B \cup C$ بنویسیم که $\sigma(A) = \sigma(B) = \sigma(C)$. آنگاه :

$\sigma(A \cup \{n-۵, n\}) = \sigma(B \cup \{n-۴, n-۱\}) = \sigma(C \cup \{n-۳, n-۲\})$

که مرحله استقرایی و اثبات را کامل می کند.

***

مسأله ۷

راه حل : فرض کنید O مرکز w باشد. چون P وسط $\overline{AB}$ است، $AP = PB$. طبق تساوی مماس ها $ZA = AP = PB = BX$. بنابراین $\angle ZOA = \angle AOP = \angle POB = \angle BOX$. نتیجه می شود که $\angle ZOP = \angle POX$ و بنابراین $\angle ZYP = \angle PYX$.

بنابراین YP نیمساز زاویه $\angle XYZ$ است. مشابهاً خطوط XR و ZQ نیمساز زوایای $\angle ZXY$ و $\angle YZX$ هستند و بنابراین خطوط QZ,PY و RX در مرکز دایره محاطی داخلی XYZ همرسند.

مسأله ۸

راه حل : برای تابع دلخواه f با سه متغیر، فرض کنید $\sum_{cyc} f(p,q,r)$ نمایانگر مجموع دوری $f(p,q,r)+f(q,r,p)+f(r.P,Y)$ باشد - به عنوان مثال :

$$\sum_{cyc}(pqr+p)=۳\,pqr+p+q+r$$

چون $p+q+r=۱$ نامساوی معادل است با :

$$۷(pq+qr+rp)(p+q+r)\le ۲(p+q+r)^۳+۹\,pqr$$
$$\Leftrightarrow ۷\sum_{cyc}(p^۲q+pq^۲+pqr)\le ۹\,pqr+\sum_{cyc}(۲p^۳+۶p^۲q+۶pq^۲+۴pqr)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}p^۲q+\sum_{cyc}pq^۲\le\sum_{cyc}۲p^۳=\sum_{cyc}\frac{۲p^۳+q^۳}{۳}+\sum_{cyc}\frac{p^۳+۲q^۳}{۳}$$

نامساوی آخر طبق نامساوی میانگین حسابی - هندسی وزن دار برقرار است.

***

مسأله ۹

راه حل :

الف) فرض کنید $f(n)=۳n^۲+n+۱$. اگر $n=۸$ مجموع ارقام $f(۸)=۲۰۱$ برابر است با ۳. فرض کنید m ای موجود است که $f(m)$ دارای مجموع ارقام کمتری است. آنگاه رقم آخر $f(m)$ یا باید ۰ باشد یا ۱ یا ۲. چون $f(n)=n(n+۳)\equiv ۱ \pmod ۲$ برای هر n، رقم یکان $f(n)$ باید ۱ باشد.

چون $f(n)$ هرگز با ۱ مساوی نمی شود، پس باید داشته باشیم $۳m^۲+m+۱=۱۰^k+۱$ برای یک عدد صحیح مثبت k و $m(۳m+۱)=۱۰^k$. چون m و $۳m+۱$ نسبت به هم اولند و $m<۳m+۱$ باید یا داشته باشیم $(m,۳m+۱)=(۱,۱۰^k)$ - که غیر ممکن است - یا $(m,۳m+۱)=(۲^k,۵^k)$. برای $k=۱$، $۵^k\ne ۳.۲^k+۱$ و برای $k>۱$، داریم :

$$۵^k=۵^{k-۲}.۲۵>۲^{k-۲}.(۱۲+۱)\ge ۳.۲^k+۱$$

بنابراین، $f(m)$ نمی تواند با $۱۰^k+۱$ برابر باشد و ۳ کمترین مقدار مجموع رقم هاست.

ب) فرض کنید $n=۱۰^{۲۲۲}-۱$، $f(n)=۳.۱۰^{۴۴۴}-۶.۱۰^{۲۲۲}+۳+۱۰^{۲۲۲}$.

بنابراین بسط اعشاری آن عبارت است از :

$$\underbrace{۲۹\ldots۹}_{۲۲۱}\ \underbrace{۵۰\ldots۰۳}_{۲۲۱}$$

و مجموع ارقام $f(۱۰^{۲۲۲}-۱)$ برابر است با ۱۹۹۹.

۲۳- ایالات متحده آمریکا

مسأله ۱

راه حل : کافی است ثابت کنیم اگر m مهره روی صفحه طوری باشند که در شرط (ب) صدق کنند آنگاه تعداد خانه هایی که این مهره ها می پوشانند یا با آنها مجاور هستند حداقل برابر است با $۳m+۲$. با استقرا به راحتی ثابت می شود : برای $m=۱$ روشن است.

اگر m مهره طوری چیده شده باشند که در شرط (ب) صدق کنند می توان تعدادی از آنها را حذف کرد به طوریکه شرط (ب) هنوز برقرار باشد که در اینصورت این تعداد مهره حداکثر $۳m-۱$ خانه را می پوشانند و با اضافه کردن یک مهره ۳ تا به این مجموع اضافه می شود. (زیرا خانه ای که اشغال می کند قبلاً شمرده شده و یکی از همسایگانش نیز مهره دارد)

***

مسأله ۲

راه حل اول : فرض کنید E نقطه تقاطع $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ باشد. در این صورت مثلث های ABE و DCE متشابه هستند. بنابراین اگر قرار دهیم $x=AE$, $y=BE$ و $Z=AB$، آنگاه k ای موجود است که $kx=DE$ و $ky=CE$ و $Z=CD$، حال

$$|AB-CD|=|k-۱|Z$$

و

$$|AC-BD|=|(kx+y)-(ky+x)|=|k-۱|\ |x-y|$$

چون $|x-y|\le Z$ طبق نامساوی مثلث، نتیجه می شود $|AB-CD|\ge|AC-BD|$ و مشابهاً $|AD-BC|\ge|AC-BD|$ این دو نامساوی نتیجه دلخواه را به دست می دهد.

راه حل دوم : فرض کنید $۲\alpha, ۲\beta, ۲\gamma$ و ۲δ به ترتیب اندازه کمانهای AB, BC, CD و DA باشند و فرض کنید شعاع دایره محیطی ABCD، ۱ باشد. بدون کاسته شدن ازکلیت فرض کنید $\beta\le\delta$ در این صورت $\alpha+\beta+\gamma+\delta=۱۸۰^\circ$ و (طبق قانون تعمیم یافته سینوس ها)

$$|AB-CD|=۲|\sin\alpha-\sin\gamma|=۴\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{۲}\right|\left|\cos(\frac{\alpha+\gamma}{۲}+\beta)\right|$$

و $\left|AC-BD\right|=۲\left|\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)-\operatorname{Sin}(\beta+\gamma)\right|=۴\left|\operatorname{Sin}\frac{\alpha-\gamma}{۲}\right|\left|\operatorname{Cos}\left(\frac{\alpha+\gamma}{۲}+\beta\right)\right|$

چون $۰\leq\frac{۱}{۲}(\alpha+\gamma)\leq\frac{۱}{۲}(\alpha+\gamma)+\beta\leq۹۰^\circ$ (طبق فرض $\beta\leq\delta$) و تابع کسینوس روی $[۰,۹۰^\circ]$ نامنفی و نزولی است، نتیجه می گیریم : $|AB-CD|\geq|AC-BD|$ و مشابهاً $|AD-BC|\geq|AC-BD|$.

❋❋❋

مسأله ۳

راه حل : برای سادگی، تنها عدد صحیح در $\{۰,...,p-۱\}$ را که با x به پیمانه p همنهشت است با $[x]$ نمایش می دهیم. حال شرط داده شده را می توان به صورت زیر نوشت :

(۱) $[ra]+[rb]+[rc]+[rd]=۲p$ برای r هایی که بر p بخش پذیر نیستند

اگر به جای a و b و c و d ، ma ، mb ، mc ، md قرار دهیم که m عددی صحیح و دلخواه است که نسبت به p اول است، شرط مسأله بدون تغییر باقی می ماند. اگر m را چنان انتخاب کنیم که $ma\equiv۱\pmod p$ و آنگاه a ، b ، c و d را با $[ma]$ ، $[mb]$ ، $[mc]$ ، $[md]$ جایگزین کنیم، داریم $a=۱$ و $d\in\{۱,...,p-۱\}$ و c و b.

با به کاربردن (۱) با $r=۱$، نتیجه می شود $a+b+c+d=۲p$ حال توجه کنید که :

$$[(r+۱)x]-[rx]=\begin{cases}[x] & , \quad [rx]<p-[x]\\ -p+[x] & , \quad [rx]\geq p-[x]\end{cases}$$

اگر (۱) را برای دو مقدار متوالی r به کار گیریم، طبق آنچه دیدیم برای $r=۱,...,P-۲$، دو تا از مقادیر $p-a-[ra], p-b-[rb], p-c-[rc], p-d-[rd]$ مثبت و دو تای آنها منفی هستند.

می گوییم زوج (r,x) مثبت است اگر $[rx]<p-[x]$ و در غیر این صورت آن را منفی می خوانیم. پس برای هر $r<p-۱$ ، $(r,۱)$ مثبت است. بنابراین دقیقاً یکی از (r,b) ، (r,c) ، (r,d) نیز مثبت هستند.

<u>لم :</u> اگر $r_۱,r_۲\in\{۱,...,p-۱\}$ دارای این خاصیت باشند که $(r_۱,x)$ و $(r_۲,x)$ منفی باشند ولی (r,x) برای $r_۱<r<r_۲$ مثبت باشد، آنگاه :

$r_۲-r_۱=\left\lfloor\frac{p}{x}\right\rfloor$ یا $r_۲-r_۱=\left\lfloor\frac{p}{x}\right\rfloor+۱$

<u>اثبات :</u> توجه کنید که (r',x) منفی است اگر و فقط اگر :

$\{r'x+۱,r'x+۲,...,(r'+۱)x\}$

ضریبی از p را شامل شود. در حالت خاص دقیقاً یک مضرب p در $\{r_۱x,r_۱x+۱,...,r_۲x\}$ قرار می گیرد.
چون $[r_۱x]$ و $[r_۲x]$ اعضای متمایزی از $\{p-[x],...,p-۱\}$ هستند، داریم :

$p-x+۱<r_۲x-r_۱x<p+x-۱$

که لم از آن نتیجه می شود.

$[rx]$	۹	۱۰	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۰
(r,x) یا مثبت است یا منفی	−			+			+			+			−	
r	<u>۳</u>			۴			۵			۶			<u>۷</u>	

(شکل فوق معنی مثبت و منفی را در حالت $x=3$ و $p=11$ نشان می دهد. توجه کنید که اختلاف بین ۷ و ۳ در اینجا $\left[\frac{p}{x}\right]+1$ است. r بعدی که (r,x) منفی باشد $r=10$ است: $\left[\frac{p}{x}\right]=7-10$) به خاطر آورید که دقیقاً یکی از $(1,b),(1,c),(1,d)$ مثبت هستند. می توانیم فرض کنیم $(1,b)$ مثبت است در نتیجه $b<\frac{p}{2}$, $c,d>\frac{p}{2}$. قرار دهید $S_1=\left[\frac{p}{b}\right]$.

بنابراین S_1 کوچک ترین عدد صحیح مثبت است که (S_1,b) منفی است. حال دقیقاً یکی از (S_1,c) , (S_1,d) مثبت هستند، مثلاً اولی. چون S_1 نیز کوچک ترین عدد صحیح مثبت است که (S_1,c) را مثبت می کند، یا معادلاً $(S_1,p-c)$ را منفی، داریم : $S_1=\left[\frac{p}{p-c}\right]$. طبق لم مقادیر متوالی r که (r,b) منفی است با هم به اندازه S_1 یا S_1+1 اختلاف دارند. همچنین طبق لم (برای $x=P-c$) مقادیر متوالی r که (r,c) برایشان منفی است نیز به اندازه S_1 یا S_1+1 اختلاف دارند. با توجه به این نکات نشان می دهیم (r,d) همیشه منفی است.

r	۱		S_1	S_1+1		S'	$S'+1$		S	$S+1\overset{?}{=}t$
(r,b)	+		−	+		−	+		−	$-_?$
(r,c)	−	...	+	−	...	+	−	...	−	$+_?$
(r,d)	−		−	−		−	−		+	$-_?$

اگر این چنین نباشد، کوچک ترین عدد صحیح $S>S_1$ موجود است که (S,d) مثبت است. آنگاه (S,b) و (S,c) هر دو منفی هستند. اگر S' آخرین عدد صحیح قبل از S باشد که (S',b) منفی است، (S' می تواند با S_1 مساوی باشد)، آنگاه (S',d) نیز منفی است (طبق مینیمال بودن S). همچنین :

$S-S'=S_1$ یا $S-S'=S_1+1$

مشابهاً اگر t اولین عدد صحیح بعد از S' باشد که (t,c) مثبت است، آنگاه :

$t-S'=S_1$ یا $t-S'=S_1+1$

پس نتیجه می گیریم $|t-S|\le ۱$. اما نمی توانیم داشته باشیم $t\ne S$، زیرا (t,S) و (t,b) هر دو منفی هستند ـ و هر دو مقدار برای r که (r,b) منفی باشد حداقل $S_۱\ge ۲$ با هم اختلاف دارند.

که تناقض است (شکل بالا حالت مفروض را برای $t=S+۱$ نشان می دهد) و نه می توانیم داشته باشیم $t=S$. چون فرض کرده ایم (I,c) منفی است.

بنابراین نمی توانیم داشته باشیم $|t-S|\le ۱$ که با یافته هایمان تناقض دارد و بنابراین ثابت می شود (r,d) همیشه منفی است. حال اگر $d\ne p-۱$، آنگاه $s\in\{۱,...,p-۱\}$ یکتایی که $[ds]=۱$ برابر با $p-۱$ نیست و (s,d) مثبت است که تناقض است. بنابراین $d=p-۱$ و $a+d$ و $b+c$ بر p بخش پذیرند.

***

مسأله ۴

راه حل : قرار دهید $S=\sum b_i$ و $b_i=۲-a_i$ و $T=\sum b_i^۲$ آنگاه داریم :

$$(۲-b_۱)+(۲-b_۲)+...+(۲-b_n)\ge n$$

$$(۴-۴b_۱+b_۱^۲)+...+(۴-۴b_n+b_n^۲)\ge n^۲$$

یا $S\le n$ و $T\ge n^۲-۴n+۴S$. از این دو نامساوی نتیجه می گیریم :

$$T\ge n^۲-۴n+۴S\ge(n-۴)S+۴S=nS$$

به عبارت دیگر اگر $b_i>۰$ برای $i=۱,۲,...,n$، آنگاه به وضوح $b_i<\sum b_i=S\le n$ و بنابراین :

$$T=b_۱^۲+...+b_n^۲<nb_۱+...+nb_n=b=nS$$

پس نمی توانیم داشته باشیم $b_i>۰$ برای $i=۱,...,n$، بنابراین برای یک i $b_i\le ۰$، یعنی برای یک i $a_i\ge ۲$ که حکم را ثابت می کند.

نکته : عبارت موقعی که $n\le ۳$ نادرست است. مثال $a_۱=a_۲=a_{n-۱}=۲$ و $a_n=۲-n$ نشان می دهد که اگر $a_i\le ۲$ و $\sum a_i\ge n$، آنگاه $\sum a_i^۲\le n^۲$. با توجه به اینکه جایگزینی یک زوج a_i,a_j یا $۲,a_i+a_{j-۲}$ مجموع مربعات را زیاد می کند.

***

مسأله ۵

راه حل : یک صفحه نیمه پر را پایدار بنامید اگر هیچ SOS در آن موجود نباشد و با یک حرکت نیز نتوان به SOS رسید. و در غیراینصورت آن را ناپایدار بنامید. در یک صفحه پایدار یک مربع را بد بنامید اگر با قرار گرفتن حرف S یا O در آن، یک صفحه نا پایدار به وجود آید.

بنابراین یک بازیکن بازی را می بازد اگر همه ی خانه های باقی مانده بد باشند در غیراینصورت او مطمئن است می تواند یک حرکت دیگر انجام دهد.

ادعا : یک مربع بد است اگر و فقط اگر در یک بلوک از ۴ خانه ی متوالی به شکل S−−S قرار بگیرد.
اثبات : اگر یک مربع بد باشد، آنگاه با نوشتن O در آن باید یک حالت ناپایدار ایجاد شود. بنابراین مربع بد باید یک S در یک طرف و یک مربع خالی در طرف دیگر داشته باشد.

اگر یک S در آن نوشته شود نیز باید حالت بد ایجاد شود پس باید یک S دیگر در آن طرف مربع خالی قرار گرفته باشد. از ادعا نتیجه می شود که همیشه تعداد زوجی مربع بد وجود دارد. پس بازیکن دوم استراتژی برابر شکل زیر را دارد :

الف) اگر صفحه در هر زمانی ناپایدار باشد، حرکت برنده را انجام می دهد، در غیر این صورت مانند زیر ادامه می دهد :

ب) در حرکت اول یک S را حداقل در چهار خانه به انتها مانده یا حداقل به فاصله هفت خانه از حرکت اول بازیکن اول قرار می دهد. (صفحه به اندازه کافی برای این کار بلند است.)

ج) در حرکت دوم، یک S را سه خانه دور تر از حرکت اول بازیکن دوم قرار دهد، به طوریکه مربعهای این بین خالی بوده و صفحه باقی مانده پایدار بماند. (با در نظر گرفتن حرکت دوم بازیکن اول، این کار حداقل از یک طرف ممکن است) حال دو خانه بد ایجاد شده که هر کس زودتر آن ها را پر کند بازنده است، بنابراین بازی مساوی نمی شود.

د) در هر حرکت بعدی در یک خانه که بد نیست بازی کند و صفحه را پایدار نگه دارد.

چنین خانه ای همواره موجود است زیرا اگر صفحه پایدار باشد، تعداد خانه های خالی، فرد است و تعداد خانه های بد، زوج است. چون بعد از حرکت دوم بازیکن دوم، خانه بد وجود دارد، بازی با تساوی به پایان نمی رسد. و چون بازیکن دوم همواره می تواند بازی را پایدار به پیش ببرد، بازیکن اول نمی تواند ببرد. پس در نهایت بازیکن دوم برنده است.

***

مسأله ۶

راه حل : نشان می دهیم $FA = FG$. فرض کنید H مرکز دایره محاطی خارجی مثلث ACD مقابل به رأس A باشد. در این صورت H روی نیمساز AF قرار می گیرد. فرض کنید محل تماس این دایره با CD ، K باشد. با استفاده از تساوی مماس ها داریم $CK = \frac{۱}{۲}(AD + CD - AC)$.

با محاسبه ای مشابه در مثلث BCD، داریم $CE = \frac{۱}{۲}(BC + CD - BD) = CK$. بنابراین $E = K$ و $F = H$. چون F مرکز دایره محاطی خارجی است، داریم FC نیمساز خارجی زاویه $\angle DCA = \angle GCA$ است. بنابراین :

$$\angle GAF = \angle GCF = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\angle GCA = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\angle GFA$$

نتیجه می گیریم مثلث GAF متساوی الساقین است و $FA = F۶$.

۲۴- ویتنام

مسأله ۱

راه حل : تنها جواب موجود $(x,y)=(0,-1)$ است که تساویهای $5=5$ و $0=0$ را ایجاد می کند. ابتدا معادله اول را برای $t=2x-y$ حل می کنیم. با ضرب معادله در 5^{t-1} داریم :

$$(1-5^{t-1})+4(4^{t-1}-10^{t-1})=0$$

اگر $t>1$. آنگاه $1-5^{t-1}$ و $4^{t-1}-10^{t-1}$ هر دو منفی هستند و اگر $t<1$ هر دو مثبت هستند پس $2x-y=1$. با جایگزینی $2x=y+1$ در معادله دوم نتیجه می شود :

$$y^3+2y+3+\ell n(y^2+y+1)=0$$

این معادله دارای جواب $y=-1$ است. برای اینکه نشان دهیم این تنها جواب ممکن است، کافی است نشان دهیم $f(y)=y^3+2y+3+\ell n(y^2+y+1)$ همواره صعودی است.

مشتق f را حساب می کنیم :

$$f'(y)=3y^2+2+\frac{2y+1}{y^2+y+1}$$

دقت کنید که $2(y^2+y+1)+(2y+1)=2(y+1)^2+1>0$ و $y^2+y+1>(y+\frac{1}{2})\geq 0$ پس :

$$f'(y)=3y^2+\frac{2(y^2+y+1)+(2y+1)}{y^2+y+1}>3y^2\geq 0 \qquad , \qquad \forall y$$

***

مسأله ۲

راه حل : اگر ABC متساوی الاضلاع باشد، طبق تقارن $MN=PQ=RS$.

حال فرض کنید $MN=PQ=RS$. دقت کنید که $\angle BMS=\frac{1}{2}(\hat{BC'}+\hat{CA'})=\frac{1}{2}(\angle C+\angle A)$ و مشابهاً $\angle C'SR=\angle MSB=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$.

به علاوه :

$$\angle A'B'C' = \angle A'B'B\angle BB'C' = \frac{۱}{۲}(\angle A + \angle C)$$

پس $MB = SB$ و بنابراین $\Delta NA'M \sim \Delta C'A'B \sim \Delta C'RS$. حال طبق قانون سینوس ها در مثلث های $C'SB$ و $A'MB$ داریم :

$$C'S = SB\frac{\sin\angle C'BS}{\sin\angle SC'B} = SB\frac{\sin\frac{\angle C}{۲}}{\sin\frac{\angle A}{۲}}$$

و

$$MA' = MB.\frac{\sin\angle A'BM}{\sin\angle MA'B} = MB.\frac{\sin\frac{\angle A}{۲}}{\sin\frac{\angle C}{۲}}$$

در نتیجه :

$$\frac{C'S}{MA'} = (\frac{\sin\frac{\angle C}{۲}}{\sin\frac{\angle A}{۲}})^۲$$

حال چون $\Delta C'RS \sim \Delta C'A'B'$، داریم $RS = A'B'.\frac{C'S}{C'B'}$ و چون $\Delta NA'M \sim \Delta C'A'B'$ داریم $MN = B'C'.\frac{MA'}{B'A'}$.

بنابراین $RS = MN$ نتیجه می دهد :

$$A'B'.\frac{C'S}{C'B'} = B'C'.\frac{MA'}{B'A'} \Rightarrow \frac{C'S}{MA'} = (\frac{B'C'}{A'B'})^۲$$

$$= (\frac{\sin\frac{۱}{۲}(\angle B + \angle C)}{\sin\frac{۱}{۲}(\angle B + \angle A)})^۲ = (\frac{\cos\frac{\angle A}{۲}}{\cos\frac{\angle C}{۲}})^۲$$

$$\Rightarrow (\frac{\sin\frac{\angle C}{۲}}{\sin\frac{\angle A}{۲}})^۲ = (\frac{\cos\frac{\angle A}{۲}}{\cos\frac{\angle C}{۲}})^۲$$

$$\Rightarrow (\sin\frac{\angle C}{۲}\cos\frac{\angle C}{۲})^۲ = (\sin\frac{\angle A}{۲}\cos\frac{\angle A}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}\sin^۲\angle C = \frac{۱}{۴}\sin^۲\angle A \Rightarrow \sin\angle C = \sin\angle A$$

چون $\angle A + \angle C < ۱۸۰^\circ$، این فقط موقعی ممکن است که $\angle A = \angle C$. مشابهاً $\angle A = \angle B$ و بنابراین مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

مسأله ۳

راه حل : ابتدا با استقرا روی n ثابت می کنیم $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (\frac{3x_n + 5y_n}{2}$ و $\frac{x_n + 3y_n}{2})$ برای $n \geq 0$. برای $n = 0$ داریم $(\frac{1+3}{2}, \frac{3+5}{2}) = (4,2)$ و برای $(\frac{4+6}{2}, \frac{12+10}{2}) = (11,5)$.

فرض کنید فرمول برای (x_{n+1}, y_{n+1}) , $n = k$ و $n = k+1$ برقرار باشد که $k \geq 0$ با جایگزینی عبارت برای $(x_{k+3}, y_{k+3}) = (3x_{k+2} - x_{k+1}, 3y_{k+2} - y_{k+1})$، درمی یابیم که :

$$(x_{k+3}, y_{k+3}) = (\frac{3}{2}(3x_{k+1} - x_k) + \frac{5}{2}(3y_{k+1} - y_k), \frac{1}{2}(3x_{k+1} - x_k) + \frac{3}{2}(3y_{k+1} - y_x))$$
$$= (\frac{1}{2}(3x_{k+2} + 5y_{k+2}), \frac{1}{2}(x_{k+2} + 3y_{k+2}))$$

این مرحله استقرایی و در نتیجه ادعا را ثابت می کند.

الف) با استقرا روی n ثابت می کنیم $x_n^2 - 5y_n^2 + 4 = 0$. برای $n = 0$ داریم $1 - 5 + 4 = 0$. حال فرض کنید نتیجه برای n بر قرار است. ثابت می کنیم (با کمک از نتیجه ای که به دست آوردیم) نتیجه برای $n+1$ نیز برقرار است :

$$x_{n+1}^2 - 5y_{n+1}^2 = (\frac{3x_n + 5y_n}{2})^2 - 5(\frac{x_n + 3y_n}{2})^2$$
$$= \frac{4x_n^2 + 20y_n^2}{4} = x_n^2 - 5y_n^2 = -4$$

ب) فرض خلف : فرض کنید $a^2 - 5b^2 + 4 = 0$ برای اعداد صحیح $a, b > 0$ و عدد k موجود نیست که $(x_k, y_k) = (a,b)$ a و b را چنان اختیار کنید که $a + b$ کمترین مقدار را داشته باشد.

فرض کنید $(a', b') = (\frac{3a - 5b}{2}, \frac{3b - a}{2})$. ثابت می کنیم a' و b' اعدادی صحیح و مثبت هستند. اگر a و b دارای زوجیت یکسانی باشند و $a < 3b$ و $3a > 5b$ آنگاه این ادعا درست است. دقت کنید که $a - b \equiv a^2 - 5b^2 + 4 \equiv 0 \pmod 2$. حال $a^2 = 5b^2 - 4 < b^2$ پس $a < 3b$. به علاوه مثال نقض برای ۲ یا $a = 1$ وجود ندارد. پس $a^2 > 5$ و $0 = 5a^2 - 25b^2 + 20 < 5a^2 - 25b^2 + 4a^2$. پس $3a > 5b$. با استفاده از تساوی $a^2 - 5b^2 = -4$، کمی محاسبه نشان می دهد $a'^2 - 5b'^2 = -4$.

به هر حال $a' + b' = \frac{3a - 5b}{2} + \frac{3b - a}{2} = a - b < a + b$. طبق مینیمال بودن (a,b)، باید (a_k, b_x)ای موجود باشد مساوی با (a', b'). در اینصورت :

$$(a,b) = (\frac{3a' + 5b'}{2}, \frac{a' + 3b'}{2}) = (a_{k+1}, b_{k+1})$$

که تناقض است. پس حکم ثابت است.

***

مسأله ۴

راه حل : شرط مسأله معادل است با $b=\frac{a+c}{۱-ac}$ که تغییر متغیر $A=\mathrm{Tan}^{-۱}a$ و $C=\mathrm{Tan}^{-۱}c$ را پیشنهاد می کند.
پس $b=tg(A+C)$ و

$$\begin{aligned}P&=\frac{۲}{tg^۲A+۱}-\frac{۲}{tg^۲(A+C)+۱}+\frac{۳}{tg^۲C+۱}\\&=۲\cos^۲A-۲\cos^۲(A+C)+۳\cos^۲C\\&=(۲\cos^۲A-۱)-(۲\cos^۲(A+C)-۱)+۳\cos^۲C\\&=\cos(۲A)-\cos(۲A+۲C)+۳\cos^۲C\\&=۲\sin(۲A+C)\sin C+۳\cos^۲C\end{aligned}$$

با قرار دادن $u=|\sin C|$، این عبارت حداکثر برابر است با :

$$\begin{aligned}۲u+۳(۱-u^۲)&=-۳u^۲+۲u+۳\\&=-۳(u-\frac{۱}{۳})^۲+\frac{۱۰}{۳}\le\frac{۱۰}{۳}\end{aligned}$$

تساوی موقعی برقرار است که $\sin(۲A+C)=۱$ و $\sin C=\frac{۱}{۳}$، یعنی موقعی که

$$(a,b,c)=(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\sqrt{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۴})\ \text{یا}\ (\frac{-\sqrt{۲}}{۲},-\sqrt{۲},\frac{-\sqrt{۲}}{۴})$$

بنابراین بیشترین مقدار P برابر است با $\frac{۱۰}{۳}$.

***

مسأله ۵

راه حل : فرض کنید O مبدأ باشد و فرض کنید ۴ نیم خط، کره واحد را در A و B و C و D قطع کنند. در اینصورت ABCD یک چهار وجهی منتظم است و (اگر X نمایانگر بردار $\vec{ox}$ باشد) داریم $A+B+C+D=۰$.

الف) فرض کنید زاویه مشترک $\emptyset$ باشد. آنگاه :

$$o=A.(A+B+C+D)=A.A+A.(B+C+D)=۱+۳\cos\emptyset$$

پس $\emptyset=\mathrm{Cos}^{-۱}(\frac{-۱}{۳})$.

ب) بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید O_r کره واحد را در $U=(۱,۰,۰)$ قطع کند.
همچنین قرار دهید $A=(x_۱,y_۱,\partial_۱)$ و به همین ترتیب برای بقیه آنگاه :

$$\begin{aligned}p&=U.A+U.B+U.C+U.D\\&=U.(A+B+C+D)=U.\vec{O}=O\end{aligned}$$

که ثابت است. همچنین $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\operatorname{Cos}\alpha, \operatorname{Cos}\beta, \operatorname{Cos}\gamma, \operatorname{Cos}\delta)$ و $q = \sum x_i^2$. لم بعد نتیجه می دهد q همواره با $\frac{4}{3}$ برابر است.

لم : فرض کنید چهار وجهی منتظم T محاط در کره با رئوس (x_i, y_i, ∂_i) برای $1 \le i \le 4$ داده شده است. آنگاه :

$$\sum x_i^2 = \sum y_i^2 = \sum \partial_i^2 = \frac{4}{3} \text{ و } \sum x_i y_i = \sum y_i \partial_i = \sum \partial_i x_i = 0.$$

اثبات : لم به راحتی موقعی که رئوس برابرند با :

$$A_\cdot = (0,0,1) \quad , B_\cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, O, \frac{-1}{3}\right)$$

$$C_\cdot = \left(\frac{-\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{-1}{3}\right), D_\cdot = \left(\frac{-\sqrt{2}}{3}, \frac{-\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

نتیجه می شود. حال فرض کنید حکم برای چهار وجهی ABCD درست است. این چهار وجهی را حول محور ∂ها به اندازه زاویه θ دوران دهید. در این صورت هر یک از (x_i, y_i, ∂_i) برابر می شوند با :

$$(x_i', y_i', \partial_i') = (x_i \operatorname{Cos}\theta - y_i \operatorname{Sin}\theta, x_i \operatorname{Sin}\theta + y_i \operatorname{Cos}\theta, \partial_i) \text{ و}$$

$$\sum x_i'^2 = \operatorname{Cos}^2\theta \sum x_i^2 - 2\operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta \sum x_i y_i + \operatorname{Sin}^2\theta \sum y_i^2 = \frac{4}{3}$$

$$\sum y_i'^2 = \operatorname{Sin}^2\theta \sum x_i^2 + 2\operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta \sum x_i y_i + \operatorname{Cos}^2\theta \sum y_i^2 = \frac{4}{3}$$

$$\sum \partial_i'^2 = \sum \partial_i^2 = \frac{4}{3}$$

$$\sum x_i' y_i' = \operatorname{Sin}\theta \cos\theta \sum (x_i^2 - y_i^2) + (\operatorname{Cos}^2\theta - \operatorname{Sin}^2\theta) \sum x_i y_i = 0$$

$$\sum y_i' \partial_i' = \operatorname{Sin}\theta \sum x_i \partial_i + \operatorname{Cos}\theta \sum y_i \partial_i = 0$$

$$\sum \partial_i' x_i' = \operatorname{Cos}\theta \sum \partial_i x_i - \operatorname{Sin}\theta \sum \partial_i y_i = 0$$

مشابهاً عبارات هنگامی که دوران حول محور y و محور ∂ انجام شود نیز درست است.

حال ابتدا دورانی حول محور ∂ انجام دهید تا یکی از رئوس در صفحه $y\partial$ قرار بگیرند. سپس شکل حاصل را حول محور x بچرخانید تا این رأس $(0,0,1)$ شود. در نهایت دورانی حول محور ∂ انجام دهید تا چهار وجهی با چهار وجهی $A_\cdot B_\cdot C_\cdot D_\cdot$ که در بالا شرح داده شد متناظر شود. چون می دانیم لم برای $A_\cdot B_\cdot C_\cdot D_\cdot$ برقرار است. اگر دوران ها را برعکس انجام دهیم تا به T می رسیم معادلات درست باقی می مانند و حکم ثابت می شود.

***

مسأله ۶

راه حل : فرض کنید $f(۲۰۰۰)=۲۰۰۰-t$ که $۱\le t\le ۲۰۰۰$.

با استقرا روی n ثابت می کنیم $f(n)=f(n-t)$ برای $n\ge ۲۰۰۰$. طبق فرض حکم برای $n=۲۰۰۰$ برقرار است. فرض کنید برای n برقرار باشد، داریم :

$$f(n+۱)=f(f(n)+f(۱))=f(f(n-t)+f(۱))=f(n-t+۱)$$

که استقرا را کامل می کند. بنابراین تابع دقیقاً با مقدار $f(۲۰۰۰)$ مشخص می شود. پس حداکثر ۲۰۰۰ تا از چنین توابعی موجودند.

برعکس فرض کنید $C\in S$، نشان می دهیم تابع f موجود است که $f(۲۰۰۰)=C$. قرار دهید $t=۲۰۰۰-c$ و f را اینگونه تعریف کنید : $f(s)=S$ برای $s\in S$ و $f(n)=f(n-t)$ برای $n\ge ۲۰۰۰$. با استقرا روی $m+n$ ثابت می کنیم شرط (ii) برقرار است.

اگر $m+n\le ۲۰۰۰$، آنگاه $n\in s$ و m و حکم واضح است. در غیر این صورت بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $n\ge ۲۰۰۰$. آنگاه :

$$f(m+n)=f(m+n-t)=f(f(m)+f(n-t))=f(f(m)+f(n))$$

که در آن تساوی اول و سوم از تعریف تناوبی f نتیجه می شود و تساوی دوم نتیجه فرض استقرا است. پس دقیقاً ۲۰۰۰ تا از این توابع موجود است.

***

مسأله ۷

راه حل : ابتدا با استقرا ثابت می کنیم برای $n\ge ۱$، $u_nu_{n+۲}=u_{n+۱}^۲+۱$. چون $u_۳=۱$، برای $n=۱$ داریم : $۱.۵=۲^۲+۱$. حال فرض کنید رابطه برای $n=k\ge ۱$ برقرار باشد. برای اثبات برقراری آن برای $n=k+۱$، کافی است ثابت کنیم $u_{k+۱}u_{k+۳}-u_{k+۲}^۲-u_{k+۱}^۲$. این رابطه برقرار است، زیرا معادل است با :

$$u_{k+۱}(u_{k+۱}+u_{k+۳})=u_{k+۲}(u_k+u_{k+۲})$$

یا $u_{k+۱}.۳u_{k+۲}=u_{k+۲}.۳u_{k+۱}$. بنابراین اثبات استقرا به پایان می رسد. اگر u_n و $u_{n+۱}$ برای $n\ge ۱$ مثبت باشند، آنگاه $u_{n+۲}=\frac{u_{n+۱}^۲}{u_n}$ نیز مثبت است. چون $u_۱$ و $u_۲$ مثبت هستند، بنابراین u_n برای هر $n\ge ۱$ مثبت است. پس طبق نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی، برای $n\ge ۱$، $u_n+\frac{۱}{u_n}\ge ۲$. بنابراین :

$$u_{n+۲}+u_n=\frac{u_{n+۱}^۲+۱}{u_n}+u_n=\frac{u_{n+۱}^۲}{u_n}+(u_n+\frac{۱}{u_n})\ge\frac{u_{n+۱}^۲}{u_n}+۲$$

***

مسأله ۸

راه حل : همه زوایا جهت دار و به پیمانه ۱۸۰° حساب شده اند. مسأله کلی تری را حل می کنیم : فرض کنید مثلث DEF ثابت است تمام نقاط P را می یابیم به طوریکه اگر $A' = PA \cap w$ و $B' = PB \cap w$ و $C' = PC \cap w$، آنگاه مثلث های $A'B'C'$ و DEF با همین ترتیب رئوس با هم متشابه باشند. به عبارت دیگر می خواهیم

$$\angle C'A'B' = \angle FDE \quad \text{و} \quad \angle B'C'A' = EFD$$

برای x و y داده شده روی w، تعریف کنید $\angle \widehat{xy} = \angle xzy$، برای هر نقطه دیگر z روی w . برای P داده شده داریم :

$$\angle BPA = \angle \widehat{BA} + \angle \widehat{B'A'} = \angle BCA + \angle B'C'A' \quad \text{و} \quad \angle CPB = \angle \widehat{CB} + \angle \widehat{C'B'} = \angle CAB + \angle C'A'B'.$$

پس $\angle B'C'A' = \angle EFD$ اگر و فقط اگر $\angle BPA = \angle BCA + \angle EFD$، در حالیکه $\angle C'A'B = \angle FDE$ اگر و فقط اگر $\angle CPB = \angle CAB + \angle FDE$ بنابراین نقطه دلخواه P، نقطه اشتراک دو دایره $\{P' | \angle BP'A = \angle BCA + \angle EFD\}$ و $\{P' | \angle CP'B = \angle CAB + \angle FDE\}$ به جز B است.

حال به مسأله اصلی بر می گردیم. می خواهیم P را چنان بیابیم که مثلث $A'B'C'$ یک مثلث $۴۵^\circ - ۴۵^\circ - ۹۰^\circ$ با $\angle C'A'B' = ۹۰^\circ$ باشد.

چون زاویه ها جهت دار هستند دو امکان وجود دارد $\angle A'B'C' = ۴۵^\circ$ و یا $\angle A'B'C' = -۴۵^\circ$. اگر استدلال بالا را دوبار با مثلث DEF که به طور مناسب تعریف می شود، به کار بریم دو محل ممکن برای نقطه P را می یابیم.

***

مسأله ۹

راه حل : موقعی که ریشه های معادله هر سه $\sqrt{۳}$ باشند، داریم $a = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$, $b = \sqrt{۳}$ و $P = ۱۲\sqrt{۳}$. نشان می دهیم $۱۲\sqrt{۳}$ کمترین عبارت ممکن برای P است. فرض کنید ریشه های معادله $ax^۳ - x^۲ + bx - ۱$ برابر باشند با $P = tgA$, $q = tgB$ و $r = tgC$ که $۰^\circ < A, B, C < ۹۰^\circ$. آنگاه :

$$ax^۳ - x^۲ + bx - ۱ = a(x-p)(x-q)(x-r)$$
$$= ax^۳ - a(p+q+r)x^۲ + a(pq+qr+rp)x - a(pqr)$$

بنابراین $۰ < \frac{۱}{pqr} = \frac{۱}{p+q+r} = a$ و $p+q+r = pqr$. پس :

$$r = \frac{p+q}{pq-۱} = -tg(A+B) = tg(۱۸۰^\circ - A - B).$$

که نتیجه می دهد $A + B + C = ۱۸۰^\circ$. چون tgx روی بازه $۰^\circ < x < ۹۰^\circ$ محدب است،

$$\frac{۱}{a} = tgA + tgB + tgC \geq ۳tg۶۰^\circ = ۳\sqrt{۳}$$

بنابراین $a \le \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$. همچنین توجه کنید که :

$$\frac{b}{a} = pq + qr + rp \ge ۳\sqrt[۳]{p^۲q^۲r^۲} = ۳\sqrt[۳]{\frac{۱}{a^۲}} \ge ۹ > ۱$$

پس $b > a$. بنابراین مخرج P همواره مثبت است و تابعی است صعودی از b، در حالیکه صورت P تابعی نزولی از b است. پس برای یک a ی ثابت، P تابعی نزولی از b است. به علاوه :

$$(p-q)^۲ + (q-r)^۲ + (r-p)^۲ \ge ۰ \Rightarrow (p+q+r)^۲ \ge ۳(pq+qr+rp)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{a^۲} \ge \frac{۳b}{a} \Rightarrow b \le \frac{۱}{۳a}$$

و

$$P \ge \frac{۵a^۲ - ۳a(\frac{۱}{۳a}) + ۲}{a^۲(\frac{۱}{۳a} - a)} = \frac{۵a^۲ + ۱}{\frac{a}{۳} - a^۳}$$

بنابراین برای $۰ < a < \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$، کافیست نشان دهیم :

$$۵a^۲ + ۱ \ge ۱۲\sqrt{۳}(\frac{a}{۳} - a^۳) = ۴\sqrt{۳}a - ۱۲\sqrt{۳}a^۳$$

$$\Leftrightarrow ۱۲\sqrt{۳}a^۳ + ۵a^۲ - ۴\sqrt{۳}a + ۱ \ge ۰$$

$$\Leftrightarrow ۳(a - \frac{۱}{۳\sqrt{۳}})(۴\sqrt{۳}a^۲ + ۳a - ۳) \ge ۰$$

$$\Leftrightarrow ۴\sqrt{۳}a^۲ + ۳a - \sqrt{۳} \le ۰$$

معادله درجه دوم آخر یک ریشه مثبت دارد :

$$\frac{-۳ + \sqrt{۵۷}}{۸\sqrt{۳}} \ge \frac{-۳ + ۷}{۸\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}} > \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

پس موقعی که $۰ < a \le \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$، مثبت است و حکم ثابت می شود.

***

مسأله ۱۰

راه حل : با استقرا روی n ثابت می کنیم $f(\frac{m}{۳^n}) = ۰$ برای همه اعداد صحیح $n \ge ۰$ و $۰ \le m \le ۳^n$. طبق شرط (i) برای $n = ۰$، این ادعا درست است. حال فرض کنید برای $n = k - ۱ > ۰$ درست است، آن را برای $n = k$ ثابت می کنیم. اگر $m \equiv ۰ \pmod{۳}$ آنگاه طبق فرض استقرا :

$$f(\frac{m}{۳^k}) = f(\frac{\frac{m}{۳}}{۳^{k-۱}}) = ۰$$

اگر $m \equiv ۱ (mod\,۳)$، آنگاه $۱ \le m \le ۳^k - ۲$ و

$$۳f\left(\frac{m}{۳^k}\right) = ۲f\left(\frac{\frac{m-۱}{۳}}{۳^{k-۱}}\right) + f\left(\frac{\frac{m+۲}{۳}}{۳^{k-۱}}\right) = ۰ + ۰ = ۰$$

بنابراین $f\left(\frac{m}{۳^k}\right) = ۰$. در نهایت اگر $m \equiv ۲ (mod\,۳)$، آنگاه :

$$۳f\left(\frac{m}{۳^k}\right) = ۲f\left(\frac{\frac{m+۱}{۳}}{۳^{k-۱}}\right) + f\left(\frac{\frac{m-۲}{۳}}{۳^{k-۱}}\right) = ۰ + ۰ = ۰ \text{ و } ۲ \le m \le ۳^k - ۱$$

بنابراین $f\left(\frac{m}{g^k}\right) = ۰$ و استقرا تمام می شود. برای هر $x \in [۰,۱]$، می توانیم دنباله ای از اعداد به شکل $\frac{m}{۳^k}$ را بسازیم که به x میل می کند. چون f پیوسته است، نتیجه می شود $f(x) = ۰$ برای هر $x \in [۰,۱]$ و حکم ثابت است.

***

مسأله ۱۱

راه حل : الف) فرض کنید O مرکز منشور باشد. $(AB'F')$ به کره ای یکتا با مرکز O مماس است. صفحه های دیگر داده شده، بازتاب ها و دورانهای $(AB'F')$ نسبت به O هستند. چون کره تحت این تبدیلات ثابت می ماند نتیجه می شود این ۶ صفحه بر کره مفروض مماس هستند.

ب) طبق قسمت الف) مرکز کره، O مرکز منشور است. فرض کنید P نقطه وسط $\overline{AE}$ و P' وسط $\overline{A'E'}$ باشد.

همچنین فرض کنید Q وسط $\overline{PF'}$ و R تصویر O روی خط PF' باشد. توجه کنید که P ، P' ، Q ، R ، O و F' همه در یک صفحه قرار دارند. به راحتی می توان دید که $F'P' = \frac{a}{۲}$ و $QO = \frac{۳a}{۴}$. همچنین $\angle RQO = \angle PF'P'$، زیرا $QO \| F'P'$. با توجه به این رابطه و $\angle ORQ = \angle PP'F' = ۹۰^\circ$ داریم: $\Delta ORQ \sim \Delta PP'F'$. بنابراین شعاع کره برابر است با :

$$OR = PP'.\frac{OQ}{PF'} = h.\frac{\frac{۳a}{۴}}{\sqrt{\left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + h^۲}} = \frac{۳ah}{۲\sqrt{a^۲ + ۴h^۲}}$$

***

مسأله ۱۲

راه حل : الف) طبق رابطه بازگشتی برای $x_{n+۱}$، داریم $y_n = \frac{۱}{۲۲}(۱۵x_n + x_{n+۱})$ و $y_{n+۱} = \frac{۱}{۲۲}(۱۵x_{n+۱} + x_{n+۲})$ برای $n \ge ۱$. جایگزینی این دو رابطه در رابطه بازگشتی $y_{n+۱}$ نتیجه می دهد : $x_{n+۲} = ۲x_{n+۱} - ۹x_n$

محاسبه مشابه نشان می دهد :

$y_{n+2} = 2y_{n+1} - 9y_n$

اگر x_n فرد باشد، x_{n+2} نیز فرد است. چون $x_1 = 1$ و $x_2 = 29$ فرد هستند، همه x_n ها فرد و در نتیجه نا منفی هستند. مشابهاً اگر y_n و y_{n+1} هر دو به پیمانه ۴ با ۲ همنهشت باشند، آنگاه y_{n+2} نیز چنین است. چون $y_1 = 2$ و $y_2 = 22$ به پیمانه ۴ با ۲ همنهشت هستند، پس همه y_n ها به پیمانه ۴ با ۲ همنهشتند. و بنابراین ناصفرند.

ب) توجه کنید که $x_{n+3} = 2(2x_{n+1} - 9x_n) - 9x_{n+1} = -5x_{n+1} - 18x_n$. بنابراین اگر x_n و x_{n+1} مثبت باشند (یا منفی) آنگاه x_{n+3} منفی (یا مثبت) است. بنابراین در بین هر ۴ جمله متوالی x_n، یک عدد مثبت و یک عدد منفی وجود دارد. پس بی نهایت جمله مثبت و بی نهایت جمله منفی در دنباله وجود دارد. استدلالی مشابه برای y_n نیز کار می کند.

ج) تمام هم نهشتی ها به پیمانه ۷ هستند مگر اینکه ذکر شده باشد. توجه کنید که اگر $x_n \equiv x_{n+1}$ و $x_n \not\equiv 0$ آنگاه $(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+5}) \equiv (0, 5x_n, 3x_n, 3x_n)$ که $5x_n \not\equiv 0$ و $3x_n \not\equiv 0$ چون $x_1 \equiv x_2 \equiv 1$ داریم $x_n \equiv 0$ اگر وفقط اگر $n \equiv 3 \pmod 4$.

چون $1999^{1945} \equiv 3^{1945} \equiv 3.9^{\frac{1944}{2}} \equiv 3 \pmod 4$. پس داریم $7|x_n$ موقعی که $n = 1999^{1945}$ از طرف دیگر فرض کنید $7|y_{n'}$ برای یک n' و کمترین مقدار چنین n' را انتخاب کنید. طبق رابطه بازگشتی برای y_n داریم $y_n = y_{n+1} + 3y_{n+2}$.

اگر $n' \geq 5$ آنگاه $y_{n'-2} \equiv y_{n'-1}$ و $y_{n'-3} \equiv 4y_{n'-1}$ و $y'_{n-4} \equiv 0$ که با مینیمال بودن n' در تناقض است. پس داریم $n' \leq 4$ ولی $(y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv (2,1,5,1)$. بنابراین هیچ کدام از y_n ها بر ۷ بخش پذیر نیستند. به طور خاص ۷، y_n را برای $n = 1999^{1945}$ نمی شمارد.

***

فصل پنجم

« پاسخ سوالات مسابقات ریاضی منطقه ای (سال ۱۹۹۹)»

زندگی سراسر طرح مسئله است نه حل آن.

ویتگنشتاین، فیلسوف قرن ۲۰

۲- پاسخ مسابقات ریاضی منطقه ای (سال ۱۹۹۹)

۱- المپیاد ریاضی کشورهای آسیا شرقی

مسأله ۱

راه حل : فرض کنید ۱۹۹۹ جمله تصاعد حسابی از $\frac{p}{q}$ شروع شده و دارای قدر نسبت $\frac{1}{q}$ باشند که p و q دو عدد صحیح باشند و $1 < q < 1999$. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $1 \le p \le q$. موقعی که $p = 1$، تصاعد شامل اعداد صحیح $1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{1999}{q} \right\rfloor$ است. موقعی که $p = q$، تصاعد شامل اعداد صحیح $1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{1999}{q} \right\rfloor + 1$ است. چون ۱۹۹۹ اول است، q،۱۹۹۹ را نمی شمارد و بنابراین :

$$\left\lfloor \frac{1999}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1998}{q} \right\rfloor$$

پس تصاعد شامل :

$$\left\lfloor \frac{1999}{q} \right\rfloor \text{ یا } \left\lfloor \frac{1999}{q} \right\rfloor + 1$$

عدد صحیح است و هر k به این شکل می تواند اختیار شود، چنین عددی را خوب بنامید.

بر عکس، فرض کنید تصاعدی حسابی شامل دقیقاً k عدد صحیح داریم که $1 < k < 1999$. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید قدر نسبت آن مثبت باشد و شامل ۰ به عنوان t-امین جمله شود.

قدرنسبت نمی تواند گنگ باشد، پس به شکل $\frac{p}{q}$ است که p و q دو عدد صحیح مثبت نسبت به هم اولند. چون $۱ < k < ۱۹۹۹$، پس $۱ < q < ۱۹۹۹$. حال تصاعد حسابی با قدر نسبت $\frac{۱}{q}$ و جمله t-ام صفر را در نظر بگیرد. این تصاعد دقیقاً شامل k عدد صحیح است، پس k خوب است. حال برای $q = ۳۲$ داریم :

$$۱۹۹۹ < ۲q(q+۱) \Rightarrow \frac{۱۹۹۹}{q} - \frac{۱۹۹۹}{q+۱} < ۲$$

چون $\left\lfloor \frac{۱۹۹۹}{۳۲} \right\rfloor = ۶۲$ و $\left\lfloor \frac{۱۹۹۹}{۱۹۹۸} \right\rfloor = ۱$ نتیجه می شود هر عدد صحیح k بین ۱ و ۶۳ خوب است. همچنین :

$$\left\lfloor \frac{۱۹۹۹}{۳۱} \right\rfloor = ۶۴ \ , \ \left\lfloor \frac{۱۹۹۹}{۳۰} \right\rfloor = ۶۶ \ , \ \left\lfloor \frac{۱۹۹۹}{۲۹} \right\rfloor = ۶۸$$

اگر $q \le ۲۸ : \left\lfloor \frac{۱۹۹۹}{q} \right\rfloor \ge ۷۱$ و اگر $q \ge ۳۲ : \left\lfloor \frac{۱۹۹۹}{q} \right\rfloor \le ۶۲$.

پس k می تواند هر مقدار صحیح کوچکتر از ۷۰ را اختیار کند، ولی نمی تواند ۷۰ باشد. پس مقدار مورد نظر n، ۷۰ است.

***

مسأله ۲

راه حل : لم : اگر m و n اعداد صحیح مثبتی باشد که $m \ge n$ آنگاه :

$$a_۱ + a_۲ + \dots + a_n \ge \frac{n(n+۱)}{۲m} . a_m$$

اثبات : نا مساوی برای $m = n$ از جمع کردن نا مساوی های :

$$۲a_n \ge ۲a_n \ , \ a_{n-۱} + a_۱ \ge a_n \ , \ \dots , a_۲ + a_{n-۲} \ge a_n \ , \ a_۱ + a_{n-۱} \ge a_n$$

و تقسیم آنها بر ۲ به دست می آید. حال برای اعداد صحیح j، قرار دهید :

$$\beta_j = \frac{a_۱ + a_۲ + \dots + a_j}{۱ + ۲ + \dots + j}$$

پس نامساوی برای $m = n = j = k+۱$ معادل است با $\beta_j \ge \frac{a_j}{j}$ و $\beta_k \ge \beta_{k+۱}$. بنابراین اگر $m \ge n$ داریم :

$$\beta_n \ge \beta_{n+۱} \ge \dots \ge \beta_m \ge \frac{a_m}{m}$$

حال نامساوی دلخواه از نوشتن $a_1+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_n}{n}$ برحسب مجموع آبل و آنگاه چند بار استفاده از لم به دست می آید :

$$\begin{aligned}a_1+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_n}{n}&=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)\\&+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)(a_1+a_2+\ldots+a_n)\\&\geq\frac{1}{n}\,\frac{n(n+1)}{2n}\,a_n+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j(j+1)}\cdot\frac{j(j+1)}{2n}\,a_n=a_n\end{aligned}$$

❋❋❋

مسأله ۳

راه حل : از زاویه های جهت دار استفاده می کنیم با استفاده از خطوط مماس و چهار ضلعی های محاطی داریم : $\angle QAR=\angle QAP=\angle QPC=\angle QBC=\angle QBR$ پس QABR محاطی است.

چون $\angle BPR$ یک زاویه خارجی مثلث ABP است داریم $\angle BPR=\angle BAP+\angle PBA$. بعد دوباره با استفاده از خطوط مماس و چهار ضلعی های محاطی، داریم :

$\angle BAP+\angle PBA=\angle BAR+\angle PCB=\angle BQR+\angle PQB=\angle PQR$

بنابراین $\angle BPR=\angle PQR$ که نتیجه می دهد خط BP بر دایره محیطی مثلث PQR مماس است. حال، $\angle PRB$ یک زاویه خارجی مثلث CRP است، بنابراین $\angle PRB=\angle PCR+\angle RPC$ می دانیم که $\angle PCR=\angle PCB=\angle PQB$. با فرض اینکه تقاطع خطوط CP و AB و T باشد، داریم :

$\angle RPC=\angle APT=\angle AQP=\angle BAP=\angle BAR=\angle BQR$

بنابراین $\angle PRB=\angle PQB+\angle BQR=\angle PQR$. نتیجه می شود که BR بر دایره محیطی مثلث PQR مماس است.

❋❋❋

مسأله ۴

راه حل : اگر $a=0$، آنگاه b باید مربع کامل باشد و برعکس. حال فرض کنید a و b هر دو ناصفرند. توجه کنید که a^2+4b و a^2 زوجیت یکسانی دارند و مشابهاً b^2 و b^2+4a نیز زوجیت یکسانی دارند.

اگر b مثبت باشد آنگاه $a^2+4b\geq(|a|+2)^2=a^2+4|a|+4$. بنابراین $|b|\geq|a|+1$.

اگر b منفی باشد آنگاه $a^2+4b\leq(|a|-2)^2=a^2-4|a|+4$. بنابراین $|b|\geq|a|-1$.

مشابهاً $a>0\Rightarrow|a|\geq|b|+1$ و $a<0\Rightarrow|a|\geq|b|-1$

بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $b > a$. اگر a و b مثبت باشند، آنگاه طبق پاراگراف آخر داریم $b \geq a+1$ و $a \geq b+1$ که تناقض است. اگر a و b منفی باشند آنگاه $a = b$ یا $a = b-1$. برای $b \geq -5$ فقط $(-5,-6)$ و $(a,b) = (-4,-4)$ کار می کند. در غیراینصورت داریم :

$(b+4)^2 < b^2 + 4a < (b+2)^2$

که تناقض است. نهایتاً اگر a منفی باشد و b مثبت، آنگاه داریم $|b| \geq |a|+1$ و $|a| \geq |b|-1$. آنگاه داریم : $|b| = |a|+1$ و بنابراین $a+b=1$. هرچنین زوجی کار می کند، زیرا آنگاه $a+4b = (a-2)^2$, $b^2+4a = (b-2)^2$ هر دو مربع کامل هستند. بنابراین زوج های (a,b) ممکن عبارتند از : $(-4,-4)$ و $(-5,-6)$ و $(-6,-5)$ و $(0,n^2)$ و $(n^2,0)$ و $(n,1-n)$ که n یک عدد صحیح است.

***

مسأله ۵

راه حل : لم : فرض کنید $2n \geq 1$ نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تای آنها همه خط نیستند و یک نقطه مشخص A در بین آنهاست. یک خط را خوب بنامید اگر از A و یکی از نقاط دیگر بگذرد و $2n-2$ نقطه باقیمانده را جدا کند : یعنی، نصف آنها یک طرف خط و نصف دیگر آنها در طرف دیگر خط قرار بگیرد. تعدادخط های خوب فرد است.

اثبات : حکم را با استقرار ثابت می کنیم. واضح است که حکم برای $n=1$ برقراراست. حال فرض کنید حکم برای $n-1$ درست باشد، آن را برای n ثابت می کنیم.

بدون کاسته شدن از کلیت، $2n-1$ نقطه غیر از A را روی یک دایره به مرکز A مرتب کنید. از بین $2n-1$ نقطه B و C را چنان انتخاب کنید که فاصله آنها از هم بیشینه باشد.

آنگاه اگر C و B و $P \neq A$ نقطه ای داده شده باشد. B و C در دو طرف مختلف خط AP قرار می گیرد. بنابراین خط AP خوب است. اگر و فقط اگر $2n-3$ نقطه باقیمانده را جدا کند. طبق فرض استقرا تعداد فردی از این خطوط وجود دارد.

نهایتاً خط AB خوب است اگر و فقط اگر AC خوب باشد. - که ۰ یا ۲ خط خوب به تعداد اضافه می کند. بنابراین مجموع کلی فرد باقی می ماند. پس حکم با استقرا ثابت می شود.

فرض کنید یک جفت نقطه $\{A,B\}$ در S داریم. انعکاسی حول A با شعاع دلخواه انجام دهید. B و $2n-1$ نقطه $C_1, C_2, \ldots, C_{2n-1}$ به $2n$ نقطه متمایز $B', C'_1, C'_2, \ldots, C'_{2n-1}$ نگاشته می شوند. (که هیچ سه تایی هم خط نیستند).

همچنین دایره گذرنده از C_k, B, A خوب است اگر و فقط اگر خط متناظر $B'C'_k$ بقیه C'_i ها را جداکند. طبق لم تعداد فردی از چنین خط هایی وجود دارد؛ و بنابراین تعداد فرد از دایره های خوب که از یک زوج از نقاط داده شده می گذرند. برای هر نقطه تعداد دایره های خوب گذرنده از این نقطه را بشمارید.

هر دایره خوب ۳بار در این روش شمرده می شود، پس اگر k دایره خوب وجود داشته باشد آنگاه تعدادی که ما می شماریم $3k$ است. $\binom{2n+1}{2} = n(2n+1)$ زوج از نقاط موجود است که هر کدام به شمارش ما یک عدد فرد اضافه می کند پس $3k \equiv n(2n+1) \pmod 2$ در نتیجه $k \equiv n \pmod 2$ و حکم ثابت است.

***

۲- مسابقه ریاضی اتریش - لهستان

مسأله ۱

راه حل : برای هر $K \in M$, $\binom{۶}{۰}$روش برای گذاشتن k در دقیقاً ۰ تا از ۶ مجموعه، $\binom{۶}{۳}$ روش بـرای گذاشـتن k در دقیقاً سه مجموعه و $\binom{۶}{۶}$طریق برای گذاشتن k در تمام مجموعه ها وجود دارد.

با جمع این اعداد $۲۲ = ۱ + ۲۰ + ۱$روش برای گذاشتن k در مجموعه ها وجود دارد. هر حالت مورد نظـر بـه طـور یکتا با داشتن جایگاه تک تک اعضا مشخص می شود پس ۲۲^nروش برای این کار ممکن است.

***

مسأله ۲

راه حل : قرار دهید :

$$f(a,b,c,d,e)=\frac{a}{a+b}+...+\frac{e}{e+a}$$

دقت کنید که $f(e,d,c,b,a)=۵-f(a,b,c,d,e)$ بنابراین $f(a,b,c,d,e)$ مقدار x را می تواند بپذیرد اگر و تنها اگرمقدار $x-۵$را بپذیرد.

پس اگر $C_۱$ را بیابیم، $C_۲=۵-C_۱$ اگر $e=۱, d=\varepsilon, c=\varepsilon^۲, b=\varepsilon^۳, a=\varepsilon^۴$ آنگاه :

$$f(a,b,c,d,e)=\frac{۴\varepsilon}{۱+\varepsilon}+\frac{۱}{۱+\varepsilon^۴}$$

که برای مقدارکوچک ε می تواند به اندازه دلخواه به ۱نزدیک شود.

حال ثابت می کنیم $f(a,b,c,d,e)$ همواره از ۱ بزرگتر است. چون f همگن است، بدون کاسته شـدن از کلیـت می توانیم فرض کنیم $a+b+c+d+e=۱$. تـابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ بـرای مقـادیر مثبـت x، محـدب اسـت. پـس طبـق نامساوی ینسن :

$$ag(x_۱)+bg(x_۲)+...+eg(x_۵)\geq g(ax_۱+bx_۲+...+ex_۵)$$

با به کار بردن این نامساوی برای $x_1 = a+b$, $x_2 = b+c$, ... , $x_5 = e+a$، داریم :

$$f(a,b,c,d,e) \geq \frac{1}{\sum\limits_{cyc} a(a+b)}$$

$$= \frac{(a+b+c+d+e)^2}{\sum\limits_{cyc} a(a+b)} > \frac{\sum\limits_{cyc} a(a+2b)}{\sum\limits_{cyc} a(a+b)} > 1$$

(منظور از $\sum\limits_{cyc} h(a,b,c,d,e)$ مجموع رو به رو است) :

$$\left(h(a,b,c,d,e)+h(b,c,d,e,a)+\ldots+h(e,a,b,c,d)\right)$$

پس $C_1 = 1$ و طبق آنچه گفته شد $C_2 = 4$.

***

مسئله ۳

راه حل : باقراردادن $x = y$ در رابطه k-ام به دست می آوریم $2f_k(x^k) = f_{k+1}(x)^2$ (به جای f_{n+1} می نویسیم f_1)، بنابراین اگر $f_k(x) = 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ آنگاه $f_{k+1}(x)$ نیز همواره صفر است. مشابهاً تمامی f_iها مساوی صفر می شوند.

حال فرض کنید هیچ f_k ای متحد با صفر نباشد. ابتدا عدد فرد k را در نظر بگیرید. برای هر مقدار حقیقی r، قرار دهید $x = \sqrt[k]{r}$. آنگاه : $2f_k(r) = 2f_k(x^k) = f_{k+1}(x)^2 \geq 0$ برای هر r. حال عدد زوج k را در نظر بگیرید. برای $r \geq 0$ با قرار دادن $x = \sqrt[k]{r}$ مثل بالا داریم : $f_k(r) \geq 0$. به علاوه f_k به ازاء بعضی مقادیر اکیداً مثبت است. چون x وجود دارد که $f_{k+1}(x) \neq 0$ داریم :

$$.f_k(x_k) = \frac{1}{2} f_{k+1}(x)^2 > 0$$

همچنین دقت کنید نمی توانیم x,y ای داشته باشیم که $f_k(x) < 0$, $f_k(y) > 0$ چون در این صورت داریم :

$$f_{k-1}(x^{k-1}) - f_k(x)f_k(y) + f_{k-1}(y^{k-1}) > 0$$

که با معادله $k-1$-ام در تناقض است. پس نتیجه می شود : $f_k(x) \geq 0$ برای هر x. بنابراین برای هر x و k : $f_k(x) \geq 0$. حال با استقرار روی k ثابت می کنیم f_k تابع ثابت است. برای $k = 1$ با قراردادن $f_2(x) = \sqrt{2f_1(x)}$, $f_2(y) = \sqrt{2f_2(y)}$ در معادله اول داریم :

$$f_1(x) - 2\sqrt{f_1(x)f_1(y)} + f_1(y) = 0$$

برای هر $x,y \in \mathbb{R}$. طبق نامساوی میانگین حسابی - هندسی این رابطه فقط موقعی برقرار است که $f_1(x) = f_1(y)$ برای هر $x,y \in \mathbb{R}$. حال فرض کنید برای هر x و y، $f_k(x) = f_k(y)$ آنگاه :

$$f_{k+1}(x) = \sqrt{2f_k(x^k)} = \sqrt{2f_k(y^k)} = f_{k+1}(y)$$

که استقرار را کامل می کند.

اگر قرار دهید $f_k(x)=c_n$ (که $c_{n+1}=c_1$). آنگاه $c_k=\frac{1}{2}c_{k+1}^2$ برای هر k. چون برای هر x $f_k(x)\geq 0$ ولی f_x متحد با صفر نیست. هر c_k مثبت است. اگر $2 > c_{k+1} > 0$ آنگاه $0 < c_k < c_{k+1} < 2$.

بنابراین $c_n < c_1 < \ldots < c_{n-1} < c_n$ که تناقض است. مشابهاً اگر $c_{k+1} > 2$ آنگاه $c_k > c_{k+1} > 2$ در نتیجه $c_n > c_1 > \ldots > c_{n-1} > c_n$ که تناقض است. پس $c_k=2$ برای هر k. بنابراین تنها توابع ممکن $f_k(x)=0$, $f_k(x)=2$ هستند.

***

مسئله ۴

راه حل : فرض کنید ℓ، بازتاب خط AB حول P باشد. چون A_1, A_2 تصویر یکدیگر حول P هستند. A_2 باید روی ℓ باشد. بنابراین A_2 باید نقطه تقاطع ℓ و خط AC باشد و این نقطه تقاطع یکتاست زیرا خطوط AB و AC موازی نیستند. بنابراین k باید خطی باشد که از نقطه p و این نقطه می گذرد و بر عکس، این خط در خاصیت (الف) صدق می کند.

مشابهاً خطوط ℓ و m نیز به طور یکتا مشخص می شوند. حال فرض کنید مثلث های AA_1A_2, BB_1B_2 مساحت یکسانی داشته باشند. فرض کنید Q وسط $\overline{AA_1}$ باشد.

چون P وسط $\overline{A_1A_2}$ است. داریم :

$$[AQP]=\frac{1}{2}[AA_1P]=\frac{1}{4}[AA_1A_2]$$

مشابهاً اگر R وسط $\overline{B_1B_2}$ باشد، آنگاه :

$$[BRP]=\frac{1}{2}[BB_2P]=\frac{1}{4}[BB_1B_2]$$

بنابراین $[AQP]=[BRP]$ و چون ارتفاع های راس P در مثلث AQP و BRP مساویند، باید داشته باشیم $AQ=BR$. حال چون Q و P وسط $\overline{A_1A_2}$ و $\overline{A_1A}$ هستند، داریم $AA_2 \,||\, PQ$ و بنابراین $AC \,||\, PQ$. این نتیجه می دهد که Q بین A و B قرار می گیرد.

مشابهاً R نیز بین A و B قرار می گیرد. چون $AQ=BR$ پس Q و R فاصله یکسانی تا C' وسط $\overline{AB}$ دارند. بنابراین تجانس حول C' که A را به Q می فرستد، B را به R تصویر می کند.

این تجانس همچنین خط AC را به QP تصویر می کند. زیرا $QP \,||\, AC$ و همچنین BC را نیز به RP می برد. بنابراین C را به P می برد پس C' و P و C هم خط هستند و P روی میانه راس C مثلث ABC قرار دارد.

مشابهاً P باید روی میانه رئوس A و B در مثلث ABC نیز قرار بگیرد پس P همان مرکز ثقل مثلث ABC است.

برعکس اگر $p=6$ آنگاه k و ℓ و m به ترتیب موازی خطوط BC و CA و AB هستند و :

$$[AA_1A_2]=[BB_1B_2]=[CC_1C_2]=\frac{4}{9}[ABC]$$

مسأله ۵

راه حل : مقادیر ممکن (a_n, a_{n+1}) به پیمانه ۴ را در نظر بگیرید،

a_n	۰	۱	۲	۳
a_{n+1}	۳	۰	۳	۲

بدون توجه به اینکه a_1 چه عددی باشد، $a_2, a_3, \ldots$ همگی به پیمانه ۴ با ۲ یا ۳ همنهشتند. هر مربع کامل بر پیمانه ۴ با ۰ یا ۱ همنهشت است. پس حداکثر دو جمله (a_2, a_1) می توانند مربع کامل باشند. اگر a_2, a_1 هر دو مربع کامل باشند. آنگاه $a_1 = a^4$ و $a_2 = b^2$، پس

$$1999 = b^2 - (a^3)^2 = (b+a^3)(b-a^3) \quad \text{یا} \quad a^6 + 1999 = b^2$$

چون ۱۹۹۹ اول است، $b - a^3 = 1$ و $b + a^3 = 1999$. پس :

$$a^3 = \frac{1999-1}{2} = 999$$

که غیر ممکن است. پس حداکثر یک جمله از دنباله مربع کامل است.

***

مسأله ۶

راه حل : فرض کنید R ریشه حقیقی مثبت $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$ باشد. داریم :

$$R^2 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1+\sqrt{2} \Rightarrow R = \sqrt{-1+\sqrt{2}}$$

اگر $x_n, x_{n+1} > R$ آنگاه $1 = x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2 \geq R^2 + R^2 + R^4 = 1$

و تساوی هنگامی رخ می دهد که $x_n = x_{n+1} = R$.

مشابهاً اگر $x_n, x_{n+1} \leq R$ آنگاه باید داشته باشیم $x_n = x_{n+1} = R$. پس یا $x_n = x_{n+1} = R$ یا $x_n < R < x_{n+1}$ و یا $x_n > R > x_{n+1}$.

حال اگر $x_0 < R$، آنگاه $x_0 = x_{1999} > R, \ldots, x_2 < R, x_1 > R$ که تناقض است. مشابهاً نمی توانیم داشته باشیم $x_0 > R$. پس $x_0 = R$ و تنها جواب ممکن عبارتست از :

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_{1998} = R = \sqrt{-1+\sqrt{2}}$$

***

مسأله ۷

راه حل : قرار دهید $\gcd(x,y)=c$ ، $a=\frac{x}{c}$ ، $b=\frac{y}{c}$. آنگاه داریم :

$$(ac)^{c(a+b)}=(bc)^{c(b-a)}$$
$$(ac)^{(a+b)}=(bc)^{(b-a)}$$
$$a^{a+b}c^{2a}=b^{b-a}$$

بنابراین $a^{a+b}\mid b^{b-a}$. چون $\gcd(a,b)=1$ و a باید مساوی ۱ باشد. بنابراین $b^{b-1}=c^2$ یک مربع کامل است. این دقیقاً موقعی درست است که b فرد باشد یا b یک مربع کامل باشد. اگر $b=2n+1$، آنگاه $c=(2n+1)^n$ و اگر $b=n^2$ آنگاه $c=n^{n^2-1}$ پس :

$$(x,y)=((2n+1)^n,(2n+1)^{n+1}) \text{ یا } (n^{n^2-1},n^{n^2+1})$$

که n عددی طبیعی است و هرچنین زوج هایی در معادله صدق می کنند.

***

مسأله ۸

راه حل : همه زوایا جهت دار و به پیمانه ۱۸۰ درجه حساب شده اند. فرض کنید T'، بازتاب R حول S باشد. می خواهیم ثابت کنیم چهارضلعی $PRQT'$ محاطی است.

چون $RM=RS=RN$ ، $\angle RMN=\angle MNR=x$. توجه کنید که چهار ضلعی $PMRS$ یک کایت است که نسبت به خط PR متقارن است بنابراین :

$$\angle PSR=\angle RMP=90^\circ+x \ , \ \angle MPR=\angle RPS=\partial \ , \ \angle PRM=\angle SRP=y$$

مشابهاً $\angle QRS=\angle NRQ=u$ و $\angle SQR=\angle RQN=V$ و $\angle RSQ=\angle QNR=90^\circ+x$ در مثلث MNR، $2(x+y+u)=180^\circ$ در مثلث PMR، $y+\partial+90^\circ+x=180^\circ$ بنابراین $2(x+y+\partial)=180^\circ$ پس $2\partial=2u$.

حال شکل مسأله را طوری بچرخانید که MN افقی شود و P و Q بالای MN قرار گیرند. طبق داده های موجود، S بالای MN و بین خطوط PM و QN و زیر S قرار می گیرد. با این اطلاعات می توان نتیجه گرفت $u=\partial$ یا $\angle SPR=\angle SRQ$.

مشابهاً $y=v$ و $\angle PRS=\angle SQR$. بنابراین $\Delta PSR\sim\Delta RSQ$. فرض کنید A و B به ترتیب وسط $\overline{PR}$ و $\overline{QR}$ باشند. آنگاه $\overline{SA}$ و $\overline{SB}$ میانه های نظیر در مثلث های متشابه PRS و RQS هستند. بنابراین $\Delta ASR\sim\Delta BSQ$ و نتیجه می شود :

$$\angle ASB=\angle ASR+\angle RSB=\angle BSQ+\angle RSB=\angle RSQ=90^\circ+x$$

پس :

$$\angle ASB+\angle ARB=\angle ASB+\angle PRQ=90^\circ+x+y+\partial=180^\circ$$

و چهارضلعی ASRB محاطی است. چون $PRQT'$ تصویر ARBS تحت یک تجانس به مرکز R و نسبت ۲ است، پس $PRQT'$ نیز محاطی است و حکم ثابت است.

***

مسأله ۹

راه حل : موقعیتی وجود ندارد که بازی با بی شمار حرکت انجام شود. برای هر پاره خط منتخب، نقطه انتهایی آن را نقطه چپ، گوشه چپ و بالا، بالا وگوشه راست و بالا بنامید (بسته به اینکه پاره خط با یکی از خطوط $y=\cdot$, $y=-x$, $x=\cdot$ و $y=x$ موازی باشند).

پاره خطی را که چهار نقطه شبکه ای دیگر هر پاره خط می سازند را پاره خط کوچک می گوییم. دقت کنید که هیچ دو پاره خطی کوچک هم جهتی اشتراک ندارد. همچنین برای هر موقعیت، یک نقطه مشبکه ای را نقطه گم شده بنامید اگر نقطه انتهایی یک پاره خط انتخاب شده در یک جهت باشد ولی روی هیچ پاره خط منتخب دیگری در آن جهت قرار نگیرد. (توجه کنید که در طول بازی، یک نقطه ممکن است در یک جا گم شده باشد و در یک جا گم شده نباشد)

لم : برای عدد صحیح $N > \cdot$، اگر بازی تا بی نهایت ادامه پیدا کند، آنگاه در یک زمان حداقل N نقطه گم شده وجود دارد.

اثبات : فرض کنید k خط داریم که شامل لااقل یک پاره خط منتخب است. $\left[\frac{k}{۴}\right]$ آنها باید جهت یکسانی داشته باشند. هر کدام از این خطوط دست کم شامل یک نقطه گم شده متفاوت با بقیه هستند : نقطه چپ، چپ و بالا، بالا یا بالا و راست. پس کافی است نشان دهیم k می تواند به اندازه دلخواه بزرگ باشد.

فرض خلف : فرض کنید k کراندار باشد. آنگاه هم پاره خط های منتخب روی تعدادی متناهی خط قرار می گیرند. این خطوط در مجموعه ای متناهی S شامل t نقطه اشتراک دارند. پس از موقعیتی به بعد هیچ نقطه جدید منتخبی در S قرار نمی گیرد. در این لحظه فرض کنید S پاره خط منتخب و p نقطه منتخب خارج از S داریم. پس از n حرکت یا بیشتر، $s+n$ پاره خط کوچک وجود دارد و $p+n$ نقطه خارج از s. هر پاره خط کوچک شامل ۴ نقطه است که مجموع آنها $۴(s+n)$ می شود. از طرف دیگر هر کدام از t نقطه روی حداکثر یک پاره خط کوچک قرار می گیرند.

که نتیجه می دهد مجموع کل نقاط حداکثر $۴t+(p+n)$ است. پس $۴(s+n) \le ۴t+p+n$. اما برای n به قدرکافی بزرگ این نامساوی نادرست است که به تناقض می انجامد.

حال فرض کنید در موقعیت اصلی، s پاره خط و p نقطه منتخب داریم. طبق لم بیش از $۴(p-s)$ نقطه گم شده داریم. فرض کنید این اتفاق پس از n حرکت بیفتد، موقعی که $s+n$ پاره خط منتخب و $p+n$ نقطه منتخب داریم. آنگاه طبق لم $s+n$ پاره خط کوچک هر کدام شامل ۴ نقطه داریم که در مجموع $۴(s+n)$ نقطه می شود.

از طرف دیگر هر کدام از نقاط گم شده روی حداکثر سه پاره خط کوچک قرار می گیرد و هرکدام از نقاط دیگـر روی حداکثر ۴ پاره خط کوچک، پس مجموع کلی از :

$$۳.۴(p-s)+۴(p+n-۴(p-s))=۴(s+n)$$

کمتر است که تناقض است. پس بازی با بیشمار حرکت ادامه پیدا نمی کند.

***

۳- المپیاد ریاضی بالکان

مسأله ۱

راه حل :

الف) فرض کنید $B_۱, M$ و $C_۱$ به ترتیب وسط اضلاع BC و CA و AB باشند. داریم :

$\angle C_۱MB_۱ = \angle A$ و $\Delta ABC \sim \Delta MB_۱C_۱$

همچنین BECD یک لوزی است و :

$\angle BEC = \angle CDB = ۱۸۰^\circ - \angle A$

تجانس به مرکز A و شعاع $\frac{۱}{۲}$ مثلث BEC را به مثلث $C_۱KB_۱$ می برد. بنابراین :

$\angle C_۱KB_۱ + \angle C_۱MB_۱ = \angle BEC + \angle A = ۱۸۰^\circ$

بنابراین چهار ضلعی $MC_۱KB_۱$ محاطی است.

ب) چون $ED = ۲EM$ و $EA = ۲EK$، پس $AD \| MK$. $\overline{DF}$ یک قطر است پس $AD \perp AF$، بنابراین :

$MK \perp AF$

❋❋❋

مسأله ۲

راه حل : لم : اگر p عددی اول و $k > ۱$ یک عدد صحیح باشند به طوریکه k و $p-۱$ نسبت به هم اول باشند آنگاه برای هر x و y :

$$x^k \equiv y^k \Rightarrow x \equiv y (\bmod p)$$

اثبات : اگر $y \equiv ۰ \ (\bmod p)$، حکم واضح است. در غیراینصورت توجه کنید که $x^k \equiv y^k (\bmod p)$ نتیجه می دهد که $(xy^{-۱})^k \equiv ۱ \ (\bmod p)$ پس کافیست ثابت کنید :

$a^k \equiv ۱ \Rightarrow a \equiv ۱ \ (\bmod p)$

چون $\gcd(p-1,k)=1$، اعدادصحیح b و c موجودند به طوریکه $b(p-1)+ck=1$. بنابراین :

$$a^k \equiv 1 \Rightarrow a^c \equiv 1 \Rightarrow a^{1-b(p-1)} \equiv 1 \pmod p$$

اگر $a=0$ به تناقض می رسیم و در غیراینصورت طبق قضیه کوچک فرما :

$$(a^{-b})^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

بنابراین $a \equiv 1 \pmod p$ همچنین توجه کنید که به وضوح $a \not\equiv 1 \pmod p$. فرض کنید d مرتبه a باشد، یعنی کوچکترین عدد صحیح مثبت که $a^d \equiv 1 \pmod p$ داریم : $d|k$.

مجموعه $\{1, a, a^2, \dots, a^{d-1}\}$ را در نظر بگیرید. اگر این مجموعه شامل همه اعداد $1, 2, \dots, p-1$ نشود آنگاه یک عضو دیگر b انتخاب کنید و مجموعه $\{b, ba, ba^2, \dots, ba^{d-1}\}$ را در نظر بگیرید. این دو مجموعه مجزا هستند، زیرا در غیراینصورت :

$$ba^i \equiv a^j \Rightarrow b \equiv a^{j-i} \pmod p$$

که تناقض است. با ادامه این روند می توان $\{1, 2, \dots, P-1\}$ را به مجموعه های d- عضوی افراز کرد. بنابراین : $d|p-1$. چون $d|k$ و $\gcd(k, p-1)=1$، پس $d=1$. بنابراین : $a \equiv a^d \equiv 1 \pmod p$.

چون $3 | p-2$ و $\gcd(3, p-1)=1$ طبق ادعا نتیجه می شود در مجموعه $\{1^3, 2^3, \dots, p^3\}$ و $\{1, 2, \dots, p\}$ به پیمانه p برابرند. بنابراین برای هر y که : $0 < y \le p-1$

دقیقاً یک x بین ۰ و $p-1$ وجود دارد که $x^3 \equiv y^2 - 1 \pmod p$. یعنی $p | y^2 - x^3 - 1$ پس S حداکثر p عضو دارد که بر p بخش پذیرند وحکم ثابت است.

***

مسأله ۳

راه حل : ابتدا ثابت می کنیم :

$$\frac{9[MNP]}{[ABC]} \le \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

فرض کنید G مرکز ثقل مثلث ABC باشد و N,M و P به ترتیب روی اضلاع AC,BC و AB باشند. همچنین قرار دهید $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ و $K=[ABC]$. داریم :

$$[ABG] = \frac{k}{3} = \frac{1}{2} c.GP \Rightarrow GP = \frac{2k}{3c}$$

مشابهاً $GN = \frac{2k}{3b}$ بنابراین :

$$[PGN] = \frac{1}{2} GP.GN \sin A = \frac{2k^2 \sin A}{9bc} = \frac{k^2 a^2}{9Rabc}$$

با جمع این فرمول و فرمول های مشابه برای [NGM] و[MGP] داریم :

$$[MNP]=\frac{k^۲(a^۲+b^۲+c^۲)}{۹Rabc}$$

با تقسیم این رابطه بر $[ABC]=K$ و جایگزینی $k=\frac{abc}{۴R}$ ،$b=۲R\,Sin\,B, a=۲R\,Sin\,A$ و $c=۲R\,Sin\,C$ در طرف راست داریم :

$$\frac{[MNP]}{[ABC]}=\frac{۱}{۹}(Sin^۲A+Sin^۲B+Sin^۲c)$$

بنابراین کافیست ثابت کنیم $\frac{۴}{۳}<Sin^۲A+Sin^۲B+Sin^۲C\le\frac{۹}{۴}$. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $A\ge B\ge C$. برای اثبات نامساوی راست، توجه کنید که $A<۹۰^\circ$ نتیجه می دهد $B>۴۵^\circ$. تابع $Sin^۲x$ روی $[۴۵^\circ,۹۰^\circ]$ مقعر است. پس می توانیم نامساوی ینسن را بکار بریم :

$$Sin^۲A+Sin^۲B\le ۲Sin^۲(\frac{A}{۲}+\frac{B}{۲})=۲Cos^۲(\frac{c}{۲})$$

بنابراین کافیست ثابت کنیم :

$$۲Cos^۲(\frac{C}{۲})+Sin^۲C\le\frac{۹}{۴}\Leftrightarrow ۱+Cos\,C+۱-Cos^۲C\le\frac{۹}{۴}$$

$$\Leftrightarrow -(Cos\,C+\frac{۱}{۲})^۲\le ۰$$

که برقرار است. برای اثبات نامساوی سمت چپ توجه کنید که تابع $Sin^۲x$ روی $[۰,۹۰^\circ]$ صعودی است و داریم :

$B\ge\frac{۱۸۰^\circ-A}{۲}$ پس :

$$Sin^۲A+Sin^۲B+Sin^۲C>Sin^۲A+Cos^۲(\frac{A}{۲})=-Cos^۲A+\frac{۱}{۲}Cos\,A+\frac{۳}{۲}$$

طبق فرض A بزرگترین زاویه است. در نتیجه $۹۰^\circ>A\ge ۶۰^\circ$ و $\frac{۱}{۲}\ge Cos\,A>۰$ پس :

$$-Cos^۲A+\frac{۱}{۲}Cos\,A+\frac{۳}{۲}\ge\frac{۳}{۲}>\frac{۴}{۳}$$

و حکم ثابت است.

***

مسأله ۴

راه حل : طبق تعریف $y_s\le t$ اگر و فقط اگر $x_t>s$. این گزاره معادل است با : $y_s\le t$ اگر و فقط اگر $x_t\le s$.
بنابراین دنباله های $\{x_i\}$ و $\{y_i\}$ دوگان هم هستند یعنی با بکاربردن الگوریتم داده شده برای $\{y_i\}$ به $\{x_i\}$ می رسیم.

برای یافتن $\sum_{i=0}^{n} x_i$، توجه کنید که از میان $x_0, x_1, \ldots, x_n$ دقیقاً y_0 جمله برابرند با ۰، و $y_1 - y_0$ جمله برابرند با ۱ و ... و $y_{x_{n-1}} - y_{x_{n-2}}$ جمله برابرند با x_{n-1}، و بقیه $n+1-x_{n-1}$ جمله برابرند با x_n. بنابراین :

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = 0.(y_0)+1(y_1-y_0)+\ldots(x_n-1)(y_{x_n-1}-y_{x_n-2})+x_n(n+1-y_{x_n-1})$$
$$= -y_0-y_1-\ldots-y_{x_n-1}+(n+1)x_n$$

ابتدا فرض کنید $x_n-1 \geq m$ و قرار دهید $x_n-1=m+k$ برای $k \geq 0$. چون $x_n > m+k$ طبق آنچه دیدیم داریم $y_{m+k} \leq n$ پس $y_m \geq \ldots \geq y_{m+k} \geq y_{m+k} \geq n+1$. بنابراین :

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j = (n+1)x_n - \left(\sum_{j=0}^{x_n-1} y_j - \sum_{i=0}^{m} y_i\right)$$
$$= (n+1)x_n - \sum_{i=m+1}^{m+k} y_i$$
$$\geq (n+1)(m+k+1) - k(n+1)$$
$$= (n+1)(m+1)$$

حال فرض کنید $x_n - 1 < m$ آنگاه :

$$x_n \leq m \Rightarrow y_m > n \Rightarrow y_m - 1 \geq n$$

چون $\{x_i\}$ و $\{y_j\}$ دوگان هستند، می توانیم همین استدلال را برای دو دنباله برعکس انجام دهیم. این اثبات را کامل می کند

***

۴- مسابقات چک واسلواکی

مسأله ۱

راه حل اول : قرار دهید :

$$\partial = a + ۲b \ , \ \ y = c + ۲a \ \ , \ \ x = b + ۲c$$

داریم $a = \frac{۱}{۹}(۴y + \partial - ۲x)$ و $b = \frac{۱}{۹}(۴\partial + x - ۲y)$ و $c = \frac{۱}{۹}(۴x + y - ۲\partial)$، بنابراین نامساوی داده شده به نامساوی زیر تبدیل می شود :

$$\frac{۴y + \partial - ۲x}{۹x} + \frac{۴\partial + x - ۲y}{۹y} + \frac{۴x + y - ۲\partial}{۹\partial} \ge ۱$$

که معادل است با :

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{\partial} + \frac{\partial}{y}\right) + \left(\frac{\partial}{x} + \frac{x}{\partial}\right) + \partial\left(\frac{y}{x} + \frac{\partial}{y} + \frac{x}{\partial}\right) \ge ۱۵$$

این نامساوی طبق نامساوی میانگین حسابی - هندسی بر قرار است. مقادیر داخل پرانتز به ترتیب حداقل برابراند با : ۲،۲،۲،۳ در نتیجه طبق نامساوی میانگین حسابی - هندسی برای ۱۵ کسر به شکل $\frac{x}{y}$ در طرف چپ این نامساوی برقرار است. (که $\partial\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{\partial} + \frac{\partial}{y}\right)$ شامل ۹ تا از این کسرهاست)

راه حل دوم :

طبق نامساوی کوشی - شوارتز

$$(u_۱v_۱ + u_۲v_۲ + u_۳v_۳)^۲ \le (u_۱^۲ + u_۲^۲ + u_۳^۲)(v_۱^۲ + v_۲^۲ + v_۳^۲)$$

عبارت $(a + b + c)^۲$ حداکثر برابراست با :

$$\left(\frac{a}{b + ۲c} + \frac{b}{c + ۲a} + \frac{c}{a + ۲b}\right)\left[a(b + ۲c) + b(c + ۲a) + c(a + ۲b)\right]$$

از طرف دیگر طبق نامساوی $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ داریم

$$a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)\leq (a+b+c)^2$$

با ترکیب دو رابطه اخیر داریم :

$$a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)\leq \left(\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\right)\left[a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)\right]$$

که پس از تقسیم بر عبارت (مثبت) $a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)$ به نا مساوی دلخواه دست می یابیم.

***

مسأله ۲

راه حل : فرض کنید M وسط $\overline{BC}$ باشد بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید $AB > AC$. در اینصورت ترتیب نقاط داده شده روی خط BC عبارتست از B,M,D,C,P.

چون $\angle BEC=\angle BFC=90^\circ$، چهارضلعی BCEF محاطی است و بنابراین :

$$\angle QCB=\angle 180^\circ-\angle BCE=\angle EFB=\angle QRB$$

بنابراین RCQB نیز محاطی است و :

$$DB.DC=DQ.DR$$

چهارضلعی MRPQ محاطی است اگر و فقط اگر $DM.DP=DQ.DR$، پس کافیست ثابت کنیم $DB.DC=DP.DM$، چون نقاط B,C,E,F روی یک دایره قرار دارند، داریم :

$$PB.PC=PE.PF.$$

دایره محیطی مثلث DEF (که دایره نه نقطه ABC نامیده می شود) از وسط اضلاع مثلث ABC نیز می گذرد که نتیجه می دهد $PE.PF=PD.PM$.

بامقایسه دو تساوی اخیر داریم $PE.PC=PD.PM$. با قرار دادن $MB=MC=u$ و $MP=p$ و $MD=d$ رابطه آخر به شکل زیر در می آید :

$$(p+u)(p-u)=(p-d)p \Leftrightarrow u^2=dp \Leftrightarrow (u+d)(u-d)=(p-d)d \Leftrightarrow DB.DC=DP.PM$$

و این اثبات را کامل می کند.

***

مسأله ۳

راه حل : برای هر مجموعه ۱۰- عضوی از اعداد مثبت، دقیقاً $\binom{12}{3}$ سه تایی $x,y,\partial\,(x\leq y\leq \partial)$ از اعداد M موجود است.

بنابراین $۲۲۰ = \binom{۱۲}{۳} \geq k$. از طرف دیگر برای هر یک از $\binom{۱۱}{۲}$ زوج x,y از M (با $x \leq y$) می توانیم مثلثی با اضلاع x,y,y بسازیم. بنابراین $k \geq \binom{۱۱}{۲} = ۵۵$. با به کاربردن لم زیر مقادیر ممکن برای k عبارتند از : ۵۵, ۵۶, ... , ۲۲۰.

لم : فرض کنید اعداد صحیح مثبت k و n را داریم که :

$$\binom{n+۱}{۲} \leq k \leq \binom{n+۲}{۳}$$

آنگاه یک مجموعه n عضوی M از اعداد صحیح موجود است که دقیقاً k مثلث با طول اضلاع برابر با ۳تا از اعضای M (نه لزوماً متمایز) وجود دارد.

به علاوه مجموعه n عضوی S_n با اعداد $x_۱ < x_۲ < \dots < x_n$ وجود دارد که $x_n < ۲x_۱$ و $\binom{n+۱}{۲}$ مجموع دوتایی $x_i + x_j (۱ \leq i < j \leq n)$ متمایز باشند. دقیقاً $\binom{n+۲}{۳}$ مثلث رامی توان با اعضای S_n ساخت.

اثبات : ادعا را با استقرار روی n ثابت می کنیم. برای $n = ۱$ حکم به وضوح برقرار است. حال فرض کنید حکم برای n برقرار باشد و $\binom{n+۲}{۲} \leq k \leq \binom{n+۲}{۳}$.

اگر $(n+۱) + \binom{n+۲}{۳} \leq k \leq \binom{n+۲}{۲}$ آنگاه ابتدا مجموعه n عضوی $M' = \{x_۱, x_۲, \dots x_n\}$ را بیابید به طوریکه دقیقاً $k-(n+۱)$ مثلث بتوان ساخت. $x_{n+۱} > ۲.\max\{M'\}$ را انتخاب کرده و قرار دهید :

$M = M' \cup \{x_{n+۱}\}$

آنگاه دقیقاً k مثلث می توان با اعضای M ساخت، $k-(n+۱)$ مثلث با $\{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$ و $n+۱$ مثلث با طول اعضای $x_i, x_{n+۱}, x_{n+۱}$ برای $i = ۱, ۲, \dots, n+۱$. در غیراینصورت :

$$k = \binom{n+۲}{۳} + n + ۱ + q \quad \text{که} \quad q \in \left\{۱, ۲, \dots, \binom{n+۱}{۲}\right\}$$

برای مجموعه S_n ساخته شده در لم، یک عضو $x_{n+۱}$ که از x_n بزرگتر باشد ولی از دقیقاً q تا $\binom{n+۱}{۲}$ مجموع دو تایی اولیه S_n کوچکتر باشد را اضافه کنید.

به این ترتیب مجموعه M را به دست می آوریم که دقیقاً k مثلث را می تواند بسازد : $\binom{n+۲}{۳}$ مثلث از $\{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$ ، $n+۱$ مثلث دیگر از $x_i, x_{n+۱}, x_{n+۱}$ و دقیقاً q مثلث دیگر با طول اضلاع $x_i, x_j, x_{n+۱}$ (که $i, j \neq n+۱$) هیچ یک از اعداد $x_i + x_{n+۱}$ با مجموع های دو تایی اولیه برابر نیستند پس می توانیم $S_{n+۱}$ را بسازیم ولم ثابت می شود.

***

مسأله ۴

راه حل : برای $k < ۴$ عبارت نادرست است. مثال نقض : $F(x) = x(۲-x)$ برای $k = ۱$، $F(x) = x(۳-x)$ برای $k = ۲$ و $F(x) = x(۴-x)(x-۲)^۲$ برای $k = ۳$. حال فرض کنید $k \geq ۴$ ثابت باشد و $F(x)$ خاصیت داده شده را دارا باشد. ابتدا داریم :

$$F(k+۱) - F(۰) = ۰$$

چون این عبارت مضربی از $k+۱$ است که قدر مطلق آن حداکثر k است. بنابراین :

$$F(x) - F(۰) = x(x-k-۱)\ G(x)$$

که $G(x)$ یک چند جمله ای دیگر با ضرایب صحیح است. داریم :

$$k \geq \left|F(c) - F(۰)\right| = c(k+۱-c)\left|G(c)\right|$$

برای $c = ۱,۲, \ldots, k$ اگر $۲ \leq c \leq k-۱$ (چنین عددی موجود است زیرا $k \geq ۴$) آنگاه :

$$c(k+۱-c) = ۲(k-۱) + (c-۲)(k-۱-c) \geq ۲(k-۱) > k$$

که با توجه به نامساوی اول نتیجه می دهد $\left|G(c)\right| < ۱$ یا $G(c) = ۰$. بنابراین $۲,۳,\ldots,k-۱$ ریشه های $G(x)$ هستند. پس :

$$F(x) - F(۰) = x(x-۲)(x-۳)\ \ldots\ (x-k+۱)(x-k-۱)\ H(x)$$

که $H(x)$ نیز یک چندجمله ای با ضرایب صحیح است. کافیست ثابت کنیم :

$$H(۱) = H(k) = ۰$$

هر دو عبارت $c = ۱$ و $c = k$ در نامساوی $k \geq \left|F(c) - F(۰)\right| = (K-۲)!.K.\left|H(c)\right|$ صدق می کند. چون $(k-۲)! > ۱$ باید داشته باشیم $H(۱) = H(k) = ۰$.

***

مسأله ۵

راه حل : برای هر $t > ۱$. تساوی را برای $(x, y) = (t,۲)\ ,\ (t,۴)\ ,(۲t,۲)$ به کار می بریم :

$$f(t) - f(۲) = (۲-t)f(۲t)$$
$$f(t) - f(۴) = (۴-t)f(۴t)$$
$$f(۲t) - f(۲) = (۲-۲t)f(۴t)$$

با کم کردن تساوی دوم از تساوی اول و جایگزینی برای $f(۲t)$ در معادله ی سوم $f(t)$ راحساب می کنیم. داریم :

$$f(۴) + (t-۳)f(۲) = t(۲t-۵)f(۴t)$$

برای هر $t > ۱$. با برقراردادن $t = \frac{۵}{۲}$ به دست می آوریم $f(۴) = \frac{۱}{۲}f(۲)$ و با جایگزینی در تساوی بالا داریم :

$$(t - \frac{۵}{۲})f(۲) = t(۲t-۵)f(۴t)$$

نتیجه می شود برای هر $t > ۱$ و $t \neq \frac{۵}{۲}$:

$$f(۴t) = \frac{f(۲)}{۲t}$$

پس طبق معادله دوم از سه معادله ابتدای راه حل داریم :

$$f(t) = f(۴) + (۴-t)f(۴t) = \frac{۱}{۲}f(۲) + \frac{(۴-t)f(۲)}{۲t} = \frac{۲f(۲)}{t}$$

این رابطه برای $f(x)$ حتی موقعی که $t = \frac{۵}{۲}$ نیز برقرار است که می توان با به کار بردن معادله اصلی برای $y = ۲, x = \frac{۵}{۲}$ آن رابررسی کرد. (و با استفاده از $f(۵) = \frac{۲f(۲)}{۵}$). با قرار دادن $c = ۲f(۲)$ داریم :

$$f(x) = \frac{c}{x}$$

برای هر x. این تابع خاصیت داده شده را برای هر مقدار حقیقی c دارد.

***

مسأله ۶

راه حل : برای هر $n \geq ۳$ داریم :

$$۲^{n-۱} = \sum_{k=۰}^{n-۱} \binom{n-۱}{k} < \sum_{k=۰}^{n-۱} \binom{n-۱}{\left\lfloor \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor} = n\binom{n-۱}{\left\lfloor \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor}$$

بنابراین کافیست ثابت کنیم $n\binom{n-۱}{\left\lfloor \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor}$، $\ell cm(۱,۲, \dots ,n)$ را می شمارد. که ℓcm کوچکترین مضرب مشترک است. با استفاده از استدلالی شامل تجزیه به عوامل اول، نتیجه کلی تری را ثابت می کنیم :

برای $k < n$, $\ell cm(n, n-۱, \dots , n-k)$ بر $n\binom{n-۱}{k}$ بخش پذیر است. فرض کنید n و k اعداد طبیعی ثابتی باشند و $k < n$ و فرض کنید $p \leq n$ یک عدد اول دلخواه باشد. فرض کنید p^{α} بزرگترین توان p باشد که $\ell cm(n, n-۱, \dots , n-k)$ را می شمارد و همچنین $p^{\alpha} | n-L$ برای یک L. آنگاه برای هر $i \leq \alpha$ می دانیم $p^i | n-L$. نابراین دقیقاً $\left\lfloor \frac{L}{p^i} \right\rfloor$ تا از $\{n-L+۱, n-L+۲, \dots , n\}$ مضربی از p^i هستند.

پس P^i، $\left\lfloor \frac{L}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k-L}{p^i} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor$، تا از عدد k باقی مانده را می شمارد – که حداکثر تعداد مضارب P^i بین ۱ و k است.

نتیجه می شود که :

$$n\binom{n-۱}{k}=\frac{n(n-۱)\ \dots\ (n-L+۱)(n-L-۱)\ \dots\ (n-k)}{k!}.(n-L)\ ,\ p$$

را حداکثر α بار می شمارد پس :

$$n\binom{n-۱}{k} \mid \ell cm(n, n-۱, \dots, n-k)$$

***

۵- رقابت های ریاضی مشترک مجارستان- رژیم اشغالگر اسرائیل

دور انفرادی

مسأله ۱

راه حل : طبق نامساوی میانگین حسابی- هندسی

$$k+a_k \geq ۲\sqrt{ka_k} \geq ۲\sqrt{۲۰۰۰} > ۸۹$$

چون $k+a_k$ یک عددصحیح است.باید حداقل ۹۰ باشد.از طرفی می توان به عدد ۹۰ رسید. زیرا برای افراز $\underbrace{(۴۰,۴۰,\ldots,۴۰)}_{۵۰}$ داریم : $k+a_k=۹۰$.

***

مسأله ۲

راه حل اول : عبارت نادرست است. برای اثبات قرار دهید $k=۴$ و فرض کنید $n>۱$ موجود است که $\binom{n}{i}$ برای $۱\leq i\leq n-۱$ بر ۴ بخش پذیر است. آنگاه :

$$۰\equiv\sum_{i=۱}^{n-۱}\binom{n}{i}=۲^n-۲\equiv-۲ \pmod ۴$$

که تناقض است.

راه حل دوم :

ادعا به وضوح برای $k=۱$ برقرار است. ثابت کنیم مجموعه اعداد صحیح مثبت $k>۱$ که ادعا برای آن برقرار است، دقیقاً با مجموعه اعداد اول برابر است. ابتدا فرض کنید k اول باشد. n را در مبنای k بنویسید : $n=n_۰+n_۱k+\ldots+n_mk^m$ که $۰\leq n_۰,n_۱,\ldots,n_m\leq k-۱$ و $n_m\neq۰$. همچنین فرض کنید داریم $۱\leq i\leq n-۱$ و قرار دهید : $i=i_۰+i_۱k+\ldots+i_mk^m$ که $۰\leq i_۰,i_۱,\ldots,i_m\leq k-۱$ ، (همچنین ممکن است $i_m=۰$)

طبق قضیه لوکاس داریم :

$$\binom{n}{i} \equiv \prod_{j=0}^{m} \binom{n_j}{i_j} \pmod p$$

اگر $n = k^m$، آنگاه $n_0 = n_1 = \dots = n_{m-1} = 0$. همچنین برای $1 \le i \le n-1$، $i_m = 0$ اما $i_{j'}$ای موجود است که ناصفر باشد در اینصورت $\binom{n_{j'}}{i_{j'}} \equiv 0$ و بنابراین $\binom{n}{i} \equiv 0 \pmod k$ برای $1 \le i \le n-1$.

حال فرض کنید $n \ne k^m$ و اگر $n_m > 1$، آنگاه با قرار دادن $i = k^m < n$ داریم :

$$\binom{n}{i} \equiv (n_m)(1)(1)\dots(1) \equiv n_m \ne 0 \pmod k$$

و در غیراینصورت یک $n_{j'} \ne 0$ وجود دارد. آنگاه قراردهید $i = n_{j'} k^{j'} < n$ داریم :

$$\binom{n}{i} \equiv (1)(1)\dots(1) \equiv 1 \ne 0 \pmod k$$

بنابراین ادعا موقعی که k اول است دقیقاً وقتی برقرار است که $n = k^m$. حال فرض کنید که ادعا برای یک $k > 1$ و عدد n برقرار است. اگر عدد اول p، k را بشمارد آنگاه ادعا باید برای p و n نیز برقرار باشد پس n باید برابر باشد با p^m که $m \ge 1$.

آنگاه $k = p^r$ برای یک $r \ge 1$، چون اگر دو عدد اول P و q، k را بشمارند آنگاه k باید توانی کامل از p و q باشد که غیرممکن است. قرار دهید $i = p^{m-1}$ طبق قضیه کومر، $p^t \Big| \binom{n}{t}$ اگر و فقط اگر t کوچکتر از یا مساوی با تعداد ده بر یک ها در مجموع $(n-i)+i$ در پایه p باشد.

فقط یک ده بر یک بین مکانهای p^{m-1} و p^m وجود دارد :

```
۱
      ۱۰۰ ... ۰
+   p−۱۰۰ ...۰
----------------
۱  ۰  ۰  ۰... ۰
```

بنابراین باید داشته باشیم $r \le 1$ و k باید اول باشد.

(از راهی دیگر، برای $n = p^m$ و $i = p^{m-1}$ داریم :

$$\binom{n}{i} = \prod_{j=0}^{p^{m-1}} \frac{p^m - j}{p^{m-1} - j}$$

اگر $j = 0$ آنگاه $\frac{p^m - j}{p^{m-1} - j} = p$. در غیراینصورت $0 < j < p^{m-1}$ که اگر $p^t < p^{m-1}$ بزرگترین توانی از p باشد که j را می شمارد آنگاه همچنین بزرگترین توان p است که $p^m - j$ و $p^{m-1} - j$ را می شمارد.

بنابراین وقتی $j=0$ ، $\frac{p^m-j}{p^{m-1}-j}$ یک عامل p از $\binom{n}{i}$ را می شمارد و موقعی که $j>0$، صفر عامل. پس p^2، ضریب دوجمله ای را نمی شمارد و بنابراین دوباره $r \le 1$.)

***

مسأله ۳

راه حل : فرض کنید w_1, I, w_2 و O به ترتیب دایره محاطی داخلی، مرکز دایره محاطی داخلی، دایره محیطی و مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشند. چون $I \neq O$، خط IO تعریف شده است.

فرض کنید T مرکز تجانس با نسبت مثبت باشد که w_1 را به w_2 و بنابراین I به O می فرستد. همچنین فرض کنید $A_2B_2C_2$ به تریب وسط کمان های CA,AB و BC از w_2 باشند که شامل B,C و A نیستند چون نیم خط های IA_1, OA_2 جهت یکسانی دارند، T باید A_1 را به A_2 و به طور مشابه B_1 را به B_2 و C_1 را به C_2 بفرستد. همچنین چون اندازه کمان های AC_2 و A_2B_2 مجموعی برابر با 180° دارند. داریم :

$\overline{AA_2} \perp C_2B_2$.

مشابها" $\overline{C_2A_2} \perp \overline{BB_2}$ و $\overline{A_2B_2} \perp \overline{CC_2}$. چون خطوط AA_2, BB_2 و CC_2 در I همرسند. I مرکز ارتفاعی مثلث $A_2B_2C_2$ است. بنابراین I تصویر H_1 تحت تجانس تعریف شده است. پس T, H_1 و I هم خطند. طبق آنچه گفته شده، I,O و T هم خطند و نتیجه می شود که I,O و H_1 هم خطند.

راه حل دوم : w_1, I, w_2 و O را طبق راه حل اول تعریف کنید. فرض کنید w_3 دایره نه نقطه مثلث $A_1B_1C_1$ باشد و S مرکز آن.

چون I مرکز دایره محیطی $A_1B_1C_1$ است، S وسط $\overline{IH_1}$ است و H_1, S و I هم خطند. حال تصویر را نسبت به w_1 انعکاس دهید. و سطرهای $\overline{A_1B_1}, \overline{B_1C_1}$ و $\overline{C_1A_1}$ به A,C و B نگاشته می شوند و بنابراین w_3 به w_2 نگاشته می شود. پس O,S و I هم خطند. بنابراین H_1, O, S و I نیز هم خطند.

***

مسأله ۴

راه حل : تمام مجموع های به شکل $a+b$ را در نظر بگیرید که $a \in A, b \in B, |A|.|B| \ge 3999$ و $|A|$ و B, A لزوماً متمایز نیستند. اگر هر دوی ۲ و ۴۰۰۰ به این شکل باشند. آنگاه هر دوی A و B شامل ۱ و ۲۰۰۰ هستند.

پس $2000-1 \in A' \cap B'$ در غیراینصورت هرمجموع $a+b$، یک مقدار از حداکثر ۳۹۹۸ مقدار بین ۲ و ۳۹۹۹ و یا بین ۳ و ۴۰۰۰ را می پذیرد.

بنابراین طبق اصل لانه کبوتری دو تا مجموع a_1+b_1 و a_2+b_2 از $|A|.|B|$ مجموع با هم برابرند که $a_2 \in A$، $b_1,b_2 \in B, a_1$ و $(a_1+b_1) \neq (a_2,b_2)$. آنگاه $a_1 \neq a_2$ (چون در غیراینصورت $b_1 = b_2$ و داریم $((a_1,b_1)=(a_2,b_2)$) و بنابراین $A' \bigcap B'$ ناقص است. زیرا شامل $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$ است.

***

مسأله ۵

راه حل : توجه کنید که :

$$(x^2+dy^2)(u^2+dv^2) = (xu \pm dyv)^2 + d(xv \pm yu)^2$$

قرار دهید $q = a^2 + db^2$ و $p = x^2 + dy^2$ برای اعدادصحیح y و x و b و a.

با حل برحسب v,u پس از قرار دادن :

$a = xu + dyv, b = xv - yu, a = xu - dyv$ و $b = xv + yu$ داریم :

$$u_1 = \frac{ax - dby}{p}, v_1 = \frac{ay + bx}{p}$$
$$u_2 = \frac{ax + dby}{p}, v_2 = \frac{ay - bx}{p}$$

توجه کنید که :

$$(ay+bx)(ay-bx) = (a^2+db^2)y^2 - (x^2+dy^2)b^2 \equiv o \pmod p$$

بنابراین p، یکی از $ay+bx$ و $ay-bx$ را می شمارد بنابراین یکی از v_2, v_1 عددی صحیح است. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید v_1 یک عدد صحیح باشد. چون $r = u_1^2 + dv_1^2$ عددی صحیح است و u_1 گویا است. پس u_1 نیز صحیح است و $r \in s$ وحکم ثابت است.

***

مسأله ۶

راه حل اول : تعریف کنید $b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}{}^p$ برای $j = 1, 2, \ldots, \ell$ و طرف چپ نامساوی داده شده را با L و طرف راست آن با R نمایش دهید. داریم :

$$L^q = \sum_{j=1}^{\ell} bj^{\frac{q}{p}} = \sum_{j=1}^{\ell} (b_j{}^{\frac{q-p}{p}} (\sum_{i=1}^{k} a_{ij}^p))$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (\sum_{j=1}^{\ell} b_j{}^{\frac{q-p}{p}} a_{ij}^p)$$

با استفاده از نامساوی هولود داریم :

$$L^q \leq \sum_{i=1}^{k}\left[(\sum_{j=1}^{\ell}(b_j^{\frac{q-p}{p}})^{\frac{q}{q-p}})^{\frac{q-p}{p}}(\sum_{j=1}^{\ell}(a_{ij}^{p})^{\frac{p}{q}})^{\frac{p}{q}}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left[(\sum_{j=1}^{r}b_j^{\frac{q}{p}})^{\frac{q-p}{q}}(\sum_{j=1}^{\ell}a_{ij}^{q})^{\frac{p}{q}}\right]$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{\ell}b_j^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{q-p}{q}}\left[\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{\ell}a_{ij}^{q})^{\frac{p}{q}}\right]=\text{۷}L^{q-p}R^p$$

نا مساوی $L \leq R$ باتقسیم دوطرف $L^q \leq L^{q-p}R^p$ بر L^{q-p} و گرفتن ریشه p ام به دست می آید.

راه حل دوم : قرار دهید $r=\frac{q}{p}$ و $c_{ij}=a_{ij}^{p}$. آنگاه $r \geq 1$ و نا مساوی داده شده با نامساوی زیر معادل است.

$$\left(\sum_{j=1}^{\ell}(\sum_{i=1}^{k}c_{ij})^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{\ell}c_{ij}^{r})^{\frac{1}{r}}$$

این نامساوی را با استقرا روی k ثابت می کنیم برای $k=1$ تساوی برقراراست. برای $k=2$ نامساوی همان نامساوی مینکوفسکی است. فرض کنید $k \geq 3$ و نامساوی برای $k-1$ برقرار است آنگاه طبق فرض استقرابرای $k-1$ داریم :

$$\sum_{i=1}^{k-1}(\sum_{j=1}^{\ell}C_{ij}^{r})^{\frac{1}{r}}+(\sum_{j=1}^{\ell}C_{kj}^{r})^{\frac{1}{r}} \geq (\sum_{j=1}^{\ell}(\sum_{i=1}^{k-1}C_{ij})^r)^{\frac{1}{r}}+(\sum_{j=1}^{\ell}C_{kj}^{r})^{\frac{1}{r}}$$

طبق نامساوی مینکوفسکی برای $\widetilde{C}_{ij}=\sum_{i=1}^{k-1}C_{ij}, \widetilde{C}_{2j}=C_{kj}$ داریم :

$$(\sum_{j=1}^{\ell}(\sum_{i=1}^{k-1}c_{ij})^r)^{\frac{1}{r}}+(\sum_{j=1}^{\ell}c_{kj}^{r})^{\frac{1}{r}} \geq (\sum_{j=1}^{\ell}(\sum_{i=1}^{k}c_{ij})^r)^{\frac{1}{r}}$$

که مرحله استقرایی را تمام می کند.

***

دور تیمی

مسأله ۱

راه حل : الف) طبق شکل مثلثاتی قضیه سوا داریم :

$$\frac{\sin\angle ABP_1 \sin\angle BCP_1 \sin\angle CAP_1}{\sin\angle P_1BC \sin\angle P_1CA \sin\angle P_1AB}=1$$

حال فرض کنید بازتاب های مفروض از خطوط P_1B, P_1C و P_1A اضلاع CA, AB و BC را به ترتیب در نقاط F و E و D قطع کنند. آنگاه $\angle EBC=\angle ABP_1, \angle ABE=\angle P_1BC$ و روابط مشابه. بنابراین :

$$\frac{\sin\angle EBC \sin\angle FCA \sin\angle DAB}{\sin\angle BCF \sin\angle CAD \sin\angle ABE}=1$$

پس دوباره طبق صورت مثلثاتی قضیه سوا سه خط جدید همرسند.

ب) توجه کنید که چهارضلعی های $P_1A_1CB_1$ و $P_2A_2CB_2$ محاطی هستند زیرا هر کدام دو زاویه 90° مقابل به هم دارند چون $\angle P_1CB_1=\angle A_2CP_2$ داریم $\angle B_1P_1C=\angle CP_2A_2$ و طبق استدلال قبلی $\angle B_1A_1C=\angle CB_2A_2$ که B_2, B_1, A_2, A_1 بر یک دایره واقعند. به دلیل مشابه C_2, C_1, A_2, A_1 هم دایره هستند. آنگاه باید هر ۶ نقطه B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 و A_1 هم دایره باشند، زیرا در غیراینصورت محور اصلی دایره های $B_1B_2C_1C_2, A_1A_2B_1B_2$ و $C_1C_2A_1A_2$ هم رأس نیستند که با قضیه محورهای اصلی در تناقض است.

***

مسأله ۲

راه حل اول : اگر مورچه از (a,b) به (c,b) برود آنگاه a و c ریشه های $f(t)=t^2+bt+b^2-6$ هستند. بنابراین $C=-a-b$. مشابهاً اگر مورچه از (a,b) در جهتی موازی با محور y حرکت کند به نقطه ی $(a,-a-b)$ روی خم می رسد. فرض کنید (a,b) نقطه آغاز حرکت مورچه باشد و فرض کنید مورچه در جهت موازی با محور xها حرکت را شروع کند؛ حالتی که مورچه به موازات محور y ها حرکت کند مشابه است. اگر پس از ۵ حرکت مورچه همچنان در حال حرکت باشد، پس از ششمین حرکت به جای اصلیش برمی گردد :

$$(a,b)\to(-a-b,b)\to(-a-b,a)\to(b,a)$$
$$\to(b,-a-b)\to(a,-a-b)\to(a,b)$$

پس مورچه حداکثر پس از ۶ حرکت می ایستد.

راه حل دوم :

خم را 45° دوران دهید، اگر (x,y) نقطه ای روی خم جدید C_1 باشد. $\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y)$ همان نقطه روی خم اصلی است. معادله تصویر خم تحت دوران عبارت است از:

$$3x^2 + y^2 = 12$$

بنابراین خم یک بیضی است و جهت حرکت مورچه برحسب خم جدید به موازات خطوط با زوایای $\pm 45^\circ$ نسبت به محور x ها ست. حال یک تبدیل آفینی را به کار برید به طوریکه (x,y) روی خم جدید C_2 همان $(x, \sqrt{3}y)$ روی خم C_1 باشد در اینصورت خم مورچه به شکل زیر است :

$$x^2 + y^2 = 4$$

که دایره ایست به شعاع ۲ و جهت جدید حرکت مورچه به موازات خطوط بازاویه $\pm 30^\circ$ نسبت به محورx هاست. بنابراین اگر مورچه از P_1 به P_2 و بعد به P_3 برود، آنگاه $\angle P_1P_2P_3$ یا 0° یا 60° و یا 120° است. بنابراین تا موقعی که مورچه به طور پیوسته حرکت می کند هر دو نقطه ای که از یکی به دیگری می رود انتهای کمانی به زاویه 0° یا 120° ویا 240° در دایره است. بنابراین پس از حداکثر ۶ حرکت او به نقطه ای که قبلاً آنجا بوده می رسد.

***

مسأله ۳

راه حل : الف) چنین خطی را می توان رسم کرد. ابتدا نشان می دهیم برای یک دایره داده شده با شعاع نامعلوم، پیداکردن O– مرکز دایره با خط کش غیرممکن است.

فرض خلف : فرض کنید بتوان مرکز را مشخص کرد. یک تبدیل افکنشی در صفحه انجام دهید که O را به O' و w را به دایره دیگر w' ببرد. خطوط رسم شده تحت این تبدیل به خط برده می شوند و بنابراین آنها همچنان شامل O' می شوند. از طرف دیگر چنین خطاهایی با هم ترکیب می شوند تا مرکز w' را بسازند. در صورتیکه O به مرکز w' نگاشته نشده است که تناقض است.

حال نشان می دهیم ساخت خط مورد نظر نیز غیرممکن است. درغیراینصورت برای دایره w با شعاع نامعلوم می توانیم نقطه دلخواه p_1 را در نظر گرفته و خط P_1O را رسم کنیم.

همچنین یک نقطه P_2 که روی خط P_1O نباشد را انتخاب و خط P_2O را رسم می کنیم حال محل تقاطع این دو خط O را مشخص می کند که تناقض با آنچه در بالا گفته شده است.

ب) برای نقطه داده شده A که روی w نیست فرض کنید خط ℓ_1 از A می گذرد و دایره w را در B_1 و C_1 قطع می کند، همچنین فرض کنید خط دیگری ℓ_2 از A گذشته و دایره را در B_2 و C_2 قطع کند. خط گذرنده از $B_1B_2 \cap C_1C_2$ و $B_1C_2 \cap C_1B_2$، قطب نقطه A نسبت به w است.

برعکس برای هرخط ℓ می توانیم دو نقطه از آن را انتخاب کنیم که روی w قرار ندارند و قطب این دو نقطه را بسازیم. اگر ℓ از مرکز w بگذرد، آنگاه این دو قطب با هم موازیند در غیراینصورت همدیگر را نقطه قطبی ℓ قطع می کنند.

حال فرض کنید w و Q داده شده اند، نقطه دیگر R را روی دایره مشخص کنید و نقطه قطبی T از خط QR را رسم کنید. (اگر نقطه ای قطبی در بی نهایت شد جای نقطه R را عوض کنید). آنگاه خط TQ قطب نقطه Q می شود و این قطب در Q بر w مماس است. بنابراین خط Q T خط دلخواه است.

ج) (i) خطوط مماس بر w_1 در P و Q را رسم کنید و نقطه تقاطع آن ها را X_1 بنامید، طبق تقارن این نقطه باید روی خط مورد نظر باشد. حال خطوط مماس بر w_2 در P و Q را رسم کنید. آنها نیز در X_2 همدیگر را قطع می کنند که x_2 روی خط مورد نظر است. بنابراین X_2 و X_1 از مرکز دو دایره می گذرد.

(ii) لم: ذوزنقه ABCD با $AB \| CD$ داده شده است. فرض کنید خطوط AD و BC همدیگر را در M و خطوط AC و BD همدیگر را در N قطع کنند. در اینصورت خط MN از وسط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ می گذرد.

اثبات: بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید M در آن طرف از خط CD قرار دارد که A و B هستند. فرض کنید خط MN و $\overline{CD}$ همدیگر را در P قطع کنند. طبق قضیه سوا درمثلث MDC برای خطوط سوایی گذرنده از N داریم:

$$\frac{DA}{AM}.\frac{MB}{BC}.\frac{CP}{PD}=1$$

مثلث های MAB و MDC متشابه هستند. بنابراین $\frac{MB}{BC}=\frac{MA}{AN}$ پس $\frac{CP}{PD}=1$ و حکم ثابت است.

حال یک خط از T رسم کنید که w_1 را در A و w_2 را در C قطع کند. خط دیگری نیز از T رسم کنید که w_1 را در B و w_2 را در D قطع کند. تحت تجانس حول T که w_1 را به w_2 می برد. خط AB به CD تصویر می شود. بنابراین $AB \| CD$. اگر خطوط AD و BC موازی بودند، نقاط A و C را با نقاط دیگری جایگزین کنید. در غیراینصورت با استفاده از لم می توانیم F_1 وسط $\overline{CD}$ را بیابیم.

حال طبق قسمت (ب) می توانیم نقطه قطبی F_2 روی خط CD را بیابیم. آنگاه خط F_1F_2 از O_2، مرکز w_2 می گذرد. مشابهاً می توانیم خط دیگر C_1C_2 را بیابیم که از O_2 بگذرد پس O_2 تقاطع خطوط F_1F_2 و C_1C_2 است. مشابه O_1 مرکز w_1 را می توان یافت و بنابراین O_1O_2 قابل رسم است.

***

۶- المپیاد ریاضی آمریکای لاتین

مسأله ۱

راه حل : برای اینکه $n^۲$ مکعب کامل باشد، باید n مکعب کامل باشد. چون $n < ۱۰۰۰$ باید داشته باشیم $۹^۳$ یا ... یا $۲^۳$ یا $n = ۱^۳$ محاسبه نشان می‌دهد که $n = ۱$ و $n = ۲۷$ کار می‌کند ولی ۱۲۵ و $n = ۸,۶۴$ نه. برای $n \geq ۶^۳ = ۲۱۶$ داریم $n^۲ \geq ۶^۶ > ۲۷^۳$ اما مجموع ارقام n حداکثر برابر است با $۲۷ = ۹ + ۹ + ۹$ که نتیجه می‌دهد هیچ $n \geq ۶^۳$ خاصیت مطلوب را ندارد. پس ۲۷ و $n = ۱$ تنها جوابها هستند.

❋❋❋

مسأله ۲

راه حل : فرض کنید دایره w با مرکز O و شعاع r داده شده است. نشان می‌دهیم برای هر نقطه P، دایره ای یکتا با مرکز P موجود است که w را نصف می‌کند و شعاع این دایره برابر است با $\sqrt{r^۲ + OP^۲}$. اگر $O = P$ ادعا واضح است. در غیراینصورت فرض کنید $\overline{AB}$ قطر عمود بر OP باشد به طوریکه $PA = PB = \sqrt{r^۲ + OP^۲}$. چون $PA = PB$ دایره‌ای به مرکز P موجود است که از A و B می‌گذرد. این دایره w را نصف می‌کند.

برعکس اگر دایره Γ به مرکز w, P را با قطر $A'B'$ نصف کند، آنگاه O و P هر دو روی عمود منصف $\overline{A'B'}$ قرار دارند. پس $A'B' \perp OP$ و باید داشته باشیم $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ و بنابراین :

$$PA' = PB' = PA = PB = \sqrt{r^۲ + OP^۲}$$

حال به مسأله اصلی برمی‌گردیم. یک دستگاه مختصات را طوری انتخاب کنید که مرکز $O_۱ = (۰,۰), w_۱$ و شعاع آن $r_۱$ و مرکز $O_۲ = (a,۰)$ ،$w_۲$ و شعاع آن $r_۲$ باشد. برای هر نقطه $P = (x, y)$ دایره به مرکز P که $w_۱$ را نصف می‌کنند همان دایره‌ی به مرکز P است که $w_۲$ را نصف می‌کند اگر و فقط اگر $\sqrt{r_۱^۲ + O_۱P^۲} = \sqrt{r_۲^۲ + O_۲P^۲}$.

یعنی اگر و فقط اگر :

$$r_1^2 + x^2 + y^2 = r_2^2 + (x-a)^2 + y^2$$
$$2ax = r_2^2 - r_1^2 + a^2$$

بنابراین برای هر نقطه P در امتداد خط $x = \frac{r_2^2 - r_1^2 + a^2}{2a}$ یک دایره W با مرکز w_1 ,P و w_2 را نصف می‌کند. چون بی‌نهایت از این نقاط وجود دارد، پس تعداد چنین دایره‌هایی نیز بی‌نهایت است.

برعکس طبق بالا اگر w هر دو دایره را نصف کند، آنگاه مرکز آن باید روی خط داده شده قرار داشته باشد- که خطی است عمود بر خط المرکزین w_1, w_2. در حقیقت به یاد آورید که محور عمود w_1, w_2 خط $2a(a-x) = r_2^2 - r_1^2 + a^2$. بنابراین مکان هندسی موردنظر محور اصلی دو دایره w_1, w_2 است که تحت عمود منصف خط المرکزین دو دایره بازتاب داده شده است.

***

مسأله ۳

راه حل : بدون کاسته شدن از کلیت n نقطه را طوری نامگذاری کنید که نام آنها از چپ به راست بصورت $p_1, p_2, \dots, p_n$ باشد اگر $n \le k+1$، آنگاه هر دایره p_ip_j $(1 \le i < j \le n)$ را با i–امین رنگ، رنگ کنید. آنگاه هر دو دایره با رنگ یکسان i–ام در p_i مماس داخل هستند، بنابراین دو مماس خارجی بر آنها موجود نیست.

حال اگر $n \ge k+2$، آنگاه دو دایره با قطر p_1p_2، p_2p_3، ... ، $p_{k+1}p_{k+2}$ باید رنگ یکسانی داشته باشند. پس دو خط وجود دارند که مماس خارجی بر آن دو دایره باشند. بنابراین جواب عبارتست از $n \ge k+2$.

***

مسأله ۴

راه حل : دقت کنید که حاصل ضرب هر دو عضو از $\{1,3,7,9\}$ به پیمانه ۲۰ دوباره در $\{1,3,7,9\}$ قرار می‌گیرد. بنابراین هر حاصل ضرب متناهی از چنین اعدادی دوباره در S قرار می‌گیرد. (به پیمانه ۲۰) به طور خاص هر عدد به شکل 3^j7^k به پیمانه ۲۰ با یکی از ۹ یا ۱,۳,۷ هم نهشت است.

حال اگر همه ارقام $n \ge 10$ در S باشند، آنگاه رقم دهگان آن فرد است و نمی‌توانیم داشته باشیم $9 \pmod{20}$ یا $n \equiv 1,3,7$. پس n نمی‌تواند به شکل 3^j7^k باشد. همچنین n نمی‌تواند بر ۲ یا ۵ بخش‌پذیر باشد (در غیراینصورت رقم یکان آن ۷,۳,۱ یا ۹ نیست). پس n باید بر عددی اول بزرگتر از یا مساوی با ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

***

مسأله ۵

راه حل : فرض کنید H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد به طوریکه AEHF و BFHD و CDHE محاطی باشند. آنگاه :

$\angle AFE = \angle AHE = \angle DHB = 90^\circ - \angle HBD = 90^\circ - \angle EBC = \angle BCE = C$

و $\angle OAF = \angle OAB = 90^\circ - C$. بنابراین $AO \perp EF$ و در نتیجه $AO \perp PQ$. فرض کنید R شعاع دایره محیطی ABC باشد. قطر AA' را عمود بر $\overline{PQ}$ رسم کنید و تقاطع آن با $\overline{PQ}$ را T بنامید. آنگاه :

$AT = AF \cos(90^\circ - C) = AF \sin C = AC \cos A \sin C = 2R \cos A \sin B \sin C$

طبق تقارن $PT = TQ$.

بنابراین از قضیه قوت نقطه داریم $PT^2 = PT.TQ = AT.TA' = AT(2R - AT)$.

بنابراین :

$AP^2 = AT^2 + PT^2 = AT^2 + AT(2R - AT) = 2R.AT = 4R^2 \cos A \sin B \sin C$

از طرف دیگر :

$OM = O < \sin < OCM = R\sin(90^\circ - A) = R\cos A$ و $AD = AC \sin C = 2R \sin B \sin C$

بنابراین :

$AP^2 = 4R^2 \cos A \sin B \sin C = 2AD.OM$

***

مسأله ۶

راه حل : تمام زوایا جهت دار و به پیمانه 180° حساب شده اند مگر اینکه تصریح شده باشد. آنگاه C_n به طور یکتا با $\theta_n = \angle AC_nB$ مشخص می‌شود. به علاوه داریم $\theta_{n+1} = 2\theta_n$ برای هر n. برای اینکه دنباله نهایتاً تناوبی شود باید داشته باشیم $\theta_{j+1} = \theta_{k+1}$ یا $2^j\theta_1 = 2^k\theta_1$ برای یک k, j. (به پیمانه 180°) یعنی 180° باید $\theta(2^j - 2^k)$ را بشمارد یعنی $180^\circ.r = (2^k - 2^j)\theta_1$ برای اعداد صحیح j, k.

بنابراین $\theta_1 = 180^\circ.\frac{r}{2^k - 2^j}$ باید ضریب گویایی از 180° باشد : $180^\circ.\frac{p}{q}$ که p و q نسبت به هم اولند. همچنین اگر $q = 2^n$ برای عدد صحیح n، $\theta_{n+1} = 180^\circ.p = 180^\circ$ که نمی‌تواند برقرار باشد پس q نمی‌تواند توانی از ۲ باشد برعکس، فرض کنید چنین زاویه $180^\circ.\frac{p}{q}$ داریم که p و q نسبت به هم اولند و q توانی از ۲ نیست. اولاً دنباله نقاط خوش تعریف است چون $\frac{2^n p}{q}$ همیشه یک مقسوم علیه غیر بدیهی فرد در مخرج دارد.

بنابراین هرگز عدد صحیح نمی‌شود و $\theta_{n+1}=\frac{۲^n p}{q}.۱۸۰^\circ$ مساوی با ۱۸۰° نمی‌شود. ثانیاً قرار دهید $q=۲^j t$ برای t فرد و $k=\phi(t)+j$. چون $t|۲^{\phi(t)}-۱$ داریم :

$$\theta_{k+۱}=۲^k.\theta_۱=۲^{\phi(t)+j}.\frac{p}{q}.۱۸۰^\circ=۲^{\phi(t)}\frac{p}{q}۱۸۰^\circ\equiv\frac{p}{t}.۱۸۰^\circ$$

در حالیکه :

$$\theta_{j+۱}\equiv۲^j\ \frac{p}{q}.۱۸۰^\circ=\frac{p}{t}.۱۸۰^\circ$$

بنابراین $\theta_{j+۱}\equiv\theta_{k+۱}$ پس دنباله تناوبی است. بنابراین مجموعه نقاط موجود برای C تمام نقاط C است که $\angle ACB$ (غیر جهت‌دار) برابر باشد با $\frac{p}{q}.۱۸۰^\circ$ برای اعداد صحیح مثبت و نسبت به هم اول p و q که q توانی از ۲ نیست.

***

۷- مسابقات ریاضی Del Cono Sur

مسأله ۱

راه حل : توجه کنید که تفاضل بین صورت و مخرج هر کسر برابر است با $n+2$. پس $n+2$ باید نسبت به هر یک از اعداد ۱۹ تا ۹۱ اول باشد. چون این اعداد شامل مضربی از هر عدد اول کوچکتر یا مساوی ۹۱ هستند پس $n+2$ فقط باید شامل عوامل اول بزرگتر از ۹۱ باشد. کوچکترین عدد با این خاصیت ۹۷ است پس $n=95$.

***

مسئله ۲

راه حل : D را روی نیم‌خط AB طوری قرار دهید که $AB=BD$ و E را روی AC طوری قرار دهید به طوریکه $AC=CE$. همچنین F را روی $\overline{DE}$ طوری بگیرید که $\angle FBD=\angle BCA$. پس خط عمود بر $\overline{AC}$ که از F می‌گذرد را رسم کنید. ادعا می‌کنیم این خط $\overline{BC}$ و $\overline{AC}$ را در P و Q، نقاط خواسته شده قطع می‌کند.

چون $BD \parallel FQ$، داریم $\angle BFQ=\angle FBD=\angle BCA=\angle BCQ$. پس BFCQ محاطی است. از طرفی چون $BO=BA$ و $DA \parallel FQ$ ، داریم $PF=PQ$. پس بنابر قوت نقطه داریم :

$PB.PC=PF.PQ=PQ^2$.

***

مسأله ۳

راه حل : یک رنگ‌آمیزی $4n-1$ توپ را خوب بنامید اگر دقیقاً سه عدد باشد که هر کدام زیر تعداد فردی توپ نوشته شده باشند ادعا می‌کنیم که در اینصورت این سه عدد $2n-2$، $2n-1$ و $2n$ هستند.

فرض کنید $b_1, b_2, \ldots$ رنگ توپها باشند (B برای آبی و R برای قرمز) و $x_1, x_2, \ldots$ به ترتیب عدد نوشته شده زیر توپها باشند.

در اینصورت $x_{k+1} - x_k = 1$ اگر $b_k = b_{k+1} = B$ اگر $x_{k+1} - x_k = -1, b_k = b_{k+1} = R$ اگر $x_k = x_{k+1}, b_k \neq b_{k+1}$: حال وقتی $n = 1$، تنها رنگ‌آمیزی‌های خوب عبارتند از RRB و BRR که هر دو در ادعا صدق می‌کنند.

برهان خلف : فرض کنید $n_\circ > 1$، کمترین nای باشد که ادعا برای آن نادرست است. حال یک جفت از توپها با رنگ‌های متفاوت را یک زوج بنامید.

برای رنگ‌آمیزی $n_\circ$ توپ یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد :

الف) دو یا بیشتر زوج جدا از هم وجود دارد. با حذف این دو زوج بقیه‌ی x_iها را دقیقاً ۲ تا کم می‌کند و اعداد زیر چهار توپ حذف می‌شوند. پس یک رنگ‌آمیزی خوب برای $4(n_\circ - 1) - 1$ توپ برقرار کرده‌ایم که ادعا برای آنها غلط است که تناقض است.

ب) رنگ‌آمیزی به صورت R ... RBRR ... RR است یا B ... BRBB ... BB است. در این صورت $\{x_i\}$ تشکیل یک سری نانزولی می‌دهند که فقط زیر توپهای BRB یا RBR با هم برابر می‌شوند. پس $4(n_\circ - 1) - 2$ عدد، زیر تعداد فردی از توپها ظاهر می‌شوند که این نمی‌تواند با ۳ برابر باشد.

ج) دقیقاً یک زوج در رنگ‌آمیزی وجود دارد بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید رشته‌ای از m توپ آبی و بعد از آن رشته‌ای از n توپ قرمز داشته باشیم.

بدیهی است که m و n نمی‌توانند ۱ باشند. در اینصورت با حذف دو توپ آبی آخری و دو توپ قرمز اولی یک رنگ‌آمیزی غیرممکن برای $4(n_\circ - 1) - 1$ توپ می‌سازیم که مانند حالت (الف) غیرممکن است.

د) همه‌ی توپها همرنگ هستند در اینصورت $4n_\circ - 1 < 3$ از اعداد مورد نظر داریم که تناقض است. بنابراین برای هر رنگ آمیزی خوبی ادعا درست است. همچنین برای $n_\circ = 500$. پس سه عدد مورد نظر برابرند با ۱۰۰۰ و ۹۹۹ و ۹۹۸.

مسأله ۴

راه حل : توجه کنید که اعداد ۱۲۴،۲۱۴،۲۴۱،۱۴۲،۴۲۱ و ۴۱۲ به پیمانه‌ی ۷ به ترتیب برابرند با ۶،۵،۴،۳،۲،۱ و ۷. فرض کنید سه رقم دیگر عدد A، y، z و x باشند که به همین ترتیب از چپ به راست در A ظاهر می‌شوند. اگر عدد سه رقمی xyz بر ۷ بخش‌پذیر باشد می توانیم سه عدد رنگ شده را حذف کنیم. در غیراینصورت عدد ۶ رقمی xyz۰۰۰ هم بر ۷ بخش پذیر نیست و می‌توانیم جایگشت مناسبی abz از اعداد ۲،۱ و ۴ را با xyz۰۰۰ جمع کنیم تا مجموع یعنی xyzabc بر ۷ بخش‌پذیر باشد.

***

مسأله ۵

راه حل : فرض کنید V_1, V_2, V_3 و V_4 چهار رأس مربع و $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. برای P_k بدون کاسته شدن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم P_k روی ضلع V_1V_2 قرار دارد.

قرار دهید $x = P_k V_1$ داریم :

$$\sum_{i=1}^{4} P_k V_i^2 = x^2 + (1-x)^2 + (1+x^2) + (1+(1-x)^2) = 4(x-\frac{1}{2})^2 + 3 \geq 3$$

پس $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n} P_j V_i^2 \geq 3n$ یا :

$$\sum_{i=1}^{4}(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P_j V_i^2) \geq 3$$

بنابراین $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P_j V_i^2 \; (i=1,2,3,4)$ حداقل $\frac{3}{4}$ است. پس اگر V_i را طوری انتخاب کنیم که برای آن $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P_j V_i^2$ بیشینه بشود، در اینصورت مطمئناً این میانگین حداقل $\frac{3}{4}$ است.

***

مسأله ۶

راه حل : فرض کنید که این مورچه مسیر خود را از p_0 آغاز می‌کند، در $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ می‌ایستد و در p_n مسیرش تمام می‌شود. توجه کنید که همه‌ی پاره‌خط‌های $P_{zi}P_{zi+1}$ با هم موازی هستند و همه‌ی پاره‌خط‌های $P_{zi+1}P_{zi+2}$ نیز با هم موازی هستند.

پس در اینصورت می‌توان همه‌ی پاره خط‌ها را جوری جا به جا کنیم که تشکیل دو پاره خط P_0Q و QP_n بدهند که $\angle P_0QP_n = 120^\circ$. در اینصورت $P_0P_n \leq 2r$ و طول مسیر اولیه برابر است با $P_0Q + QP_n$. قرار دهید $P_0P_n = C$, $P_0Q = a$ و $QP_n = b$. در اینصورت :

$(zr)^2 \geq c^2 = a^2 + b^2 + ab = (a+b)^2 - ab \geq (a+b)^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2$.

پس $\frac{4}{\sqrt{3}}r \geq a+b$ و تساوی روی می‌دهد اگر و تنها اگر $a=b$. بنابراین بیشترین مقدار برابر است با $\frac{4}{\sqrt{3}}r$. این مقدار بیشینه زمانی بدست می‌آید که $\overline{p_0p_2}$ قطری از دایره باشد و $p_0p_1 = p_1p_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}r$.

***

۸- المپیاد ریاضی شهر سنت پترزبورگ (روسیه)

مسأله ۹-۱

راه حل : برای $i=0,1,\dots,n-1$ داریم $x_i - x_{i+1} > 0$. بنابراین طبق نامساوی میانگین حسابی هندسی داریم :

$$(x_i - x_{i+1}) + \frac{1}{(x_i - x_{i+1})} \geq 2$$

با جمع کردن این نامساوی‌ها برای $i=0,1,\dots,n-1$ به نتیجه‌ی خواسته شده می‌رسیم.

***

مسأله ۹-۲

راه‌حل : برهان خلف : فرض کنید $f(x)$ ریشه‌ی صحیحی مثل r_1 داشته باشد. قرار دهید :

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)$$

می‌دانیم که ریشه‌ی دیگر آن $r_2 = -a - r_1$ نیز باید یک عدد صحیح باشد.

چون $f(120) = (120 - r_1)(120 - r_2)$ اول است پس یکی از $|120 - r_1|$ و $|120 - r_2|$ برابر یک است و دیگری یک عدد اول مثل p است. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید $|120 - r_1| = 1$.

آنگاه $\wp_1 = 119$ یا $|z|$ $|r_1| \geq 119,$. همچنین $|120 - r_2|$ اول است اما اعداد $114, 115, \dots, 126$ همگی مرکب هستند ($119 = 7.17$ و بقیه‌ی اعداد به روشنی بر ۵،۳،۲ یا ۱۱ بخش‌پذیر هستند). پس $|r_2| \geq 7$ و $|b| = |r_1 r_2| \geq |119.7| > 800$. که تناقض است.

***

مسأله ۹-۳

راه حل : فرض کنید $n = 2^s t$ که t فرد است. t-ضلعی منتظم $P_1 \dots P_t$ را در نظر بگیرید که با هر یک از 2^s نقطه از n نقطه ساخته می‌شود (t تا 2^s نقطه داریم). در این t-ضلعی رأس B که کمترین برچسب را دارد و رأس B دومین کوچکترین برچسب را دارد.

چون t فرد است باید C وجود داشته باشد به طوریکه $AB = AC$. در اینصورت برچسب C باید از برچسب A نیز کوچکتر باشد که تناقض است. از طریقی دیگر اگر برچسب $p_۱$ از p_t و $p_۲$ بزرگتر باشد، آنگاه برچسب $p_۲$ از $p_۳$ کوچکتر است، برچسب $p_۳$ از $p_۴$ بزرگتر است و به همین ترتیب تا اینکه برچسب p_t از $p_۱$ بزرگتر است که تناقض است.

حال با استقرار روی $S \geq ۰$ ثابت می‌کنیم که شرایط مسأله برای $n = ۲^s$ برقرار است. برای $S = ۱$، برچسب رأس را ۱ بگذارید. برای مرحله‌ی استقرایی اثبات فرض کنیم بتوانیم یک ۲^s-ضلعی منتظم را با اعداد $a_۱, \ldots, a_۲ s$ به همین ترتیب برچسب‌گذاری کنیم در این صورت یک $۲^{s+۱}$ ضلعی را می‌توانیم بصورت $a_۱ + ۲^۲, a_۲ + z^s, \ldots, a_{۲^s}, a_{۲^s} + ۲^s$ و $a_۱$ برچسب‌گذاری کنیم.

(راه دیگر این است که وقتی $n = ۲^s$ می‌توان رئوسی را به صورت زیر برچسب‌گذاری کرد. برای هر $i = ۱,۲, \ldots ۲^s$، هر رقم از بسط دودویی $i+۱$ را وارونه کنید (۰ به ۱ و ۱ به ۰) و آن را با ۱ جمع کنید. آنگاه راس i ام را با این عدد برچسب بگذارید).

***

مسأله ۹-۴

راه حل : زاویه‌ها به پیمانه‌ی ۱۸۰° محاسبه می‌شوند. فرض کنید دایره‌های محیطی مثلث‌های $AB_۱C_۱$ و $A_۱B_۱C$ در P' همدیگر را قطع کنند به طوریکه $AB_۱P'C_۱$ و $CB_۱P'A_۱$ محاطی باشند. در اینصورت :

$$\angle A_۱P'C_۱ = (۱۸۰^\circ - \angle C_۱P'B_۱) + (۱۸۰^\circ - \angle B_۱P'A_۱)$$
$$= \angle B_۱AC_۱ + \angle A_۱CB_۱ = \angle CAB + \angle BCA$$
$$= ۱۸۰^\circ - \angle ABC = ۱۸۰^\circ - \angle C_۱BA_۱$$

پس $BA_۱P'C_۱$ نیز محاطی است. حال از $\angle BC_۱A_۱ = \angle A = \angle C$ نتیجه می‌گیریم :

$\Delta BC_۱A_۱ \sim \Delta BCA$ پس : $BC_۱.BA = BA_۱.BC$. بنابراین B نسبت به دایره‌های محیطی مثلث‌های $AB_۱C_۱$ و $A_۱B_۱C$ دارای قوت برابر است. پس روی $B_۱P'$، محور اصلی آن دو قرار می‌گیرد. به طور مشابه $\angle CA_۱B_۱ = \angle A$ نتیجه می‌دهد :

$\Delta ABC \sim \Delta A_۱B_۱C$ پس $CA.CB_۱ = CB.CA_۱$

بنابراین C نسبت به دایره‌های محیطی مثلث‌های $B_۱AC_۱$ و $A_۱BC_۱$ دارای قوت یکسان است پس C روی محور اصلی آنها یعنی $C_۱P'$ قرار دارد. در اینصورت P' هم روی خط $CC_۱$ و هم روی خط $BB_۱$ قرار دارد. پس باید با P مساوی باشد. و $ABPC_۱$ محاطی است.

***

مسأله ۹-۵

راه حل : روشن است که $f(x,y,z)$ باید عددی گویا و نامنفی کوچکتر از ۱ باشد. ثابت می‌کنیم که برد f شامل همه‌ی این اعداد است. فرض کنید دو عدد گویای نامنفی p و q داریم که $p<q$ و قرار دهید: $x_1 = y_1 = z(q-1)$ و $z_1 = 1$. آنگاه :

$$f(x_1,y_1,z_1) = \left\{\frac{4(q-1)^2}{4(q-1)^2+4(q-1)}\right\} = \frac{q-1}{q}$$

قرار دهید $X = \frac{xyz}{xy+yz+zx}$. توجه کنید که برای هر عدد صحیح غیر صفر k داریم :

$$f(kx,ky,kz) = \{hX\} = \{K\lfloor X\rfloor + h\{x\}\} = \{h.f(x,y,z)\}.$$

در اینصورت $f(p(q-1).x, p(q-1).y_1, p(q-1).z_1) = \frac{p}{q}$ و می‌بینیم که هر عدد گویای $\frac{p}{q}<1$ در برد f قرار دارد.

***

مسأله ۹-۶

راه حل : زاویه‌های مثلث ABC را نیز با B,A و C نشان می‌دهیم. فرض کنید خط ℓ از A می‌گذرد و بر AL عمود است. پس نقاط M' و N' را روی ℓ طوری بکشید که $\angle ALM' = \angle ALN' = \frac{A}{2}$ (که M' و N' به ترتیب در همان طرف از خط AL قرار دارند که B و C قرار دارند) و در نهایت فرض کنید خط ℓ و ℓ_1 را در نقطه‌ی Q قطع کند.

ادعا می‌کنیم که M' روی ℓ_1 واقع است. شکل را طوری بچرخانید که ℓ_1 و ℓ_2 عمودی باشند و قرار دهید $x = \angle QBA$ توجه کنید که $AM' = AL\tan\angle ALM' = AL\tan\frac{A}{2}$، پس فاصله‌ی افقی A از M' برابر است با :

$$AM'\sin(180^\circ - \angle AQB) = AL\tan\frac{A}{2}.\sin(\angle QBA + \angle BAQ)$$

$$= AL\ \tan\frac{A}{2}.\sin(x + 90^\circ - \frac{\Delta}{2})$$

$$= AL\tan\frac{A}{2}.\cos(\frac{A}{Z} - x)$$

از طرف دیگر فاصله‌ی افقی A از ℓ_1 برابر است با $AB\sin x$. بنابراین کافی است ثابت کنیم :

$$AB\sin x = AL\tan\frac{A}{2}\cos(\frac{A}{2} - x)$$

طبق قانون سینوس‌ها برای مثلث ABL می‌دانیم که $AL\sin(\frac{A}{z} + B) = AB\sin B$.

پس باید ثابت کنیم :

$$\operatorname{Sin}(\frac{A}{۲}+B).\operatorname{Sin}x=\operatorname{Sin}B.\tan\frac{A}{z}.\operatorname{Cos}(\frac{A}{۲}-x)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Sin}(\frac{A}{۲}+B).\operatorname{Cos}\frac{A}{۲}.\operatorname{Sin}x$$

$$=\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}\frac{A}{۲}\operatorname{Cos}(\frac{A}{۲}-x)$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{Sin}(A+B)+\operatorname{Sin}B).\operatorname{Sin}x$$

$$=\operatorname{Sin}B.(\operatorname{Sin}(A-x)+\operatorname{Sin}x)\Leftrightarrow$$

$$\operatorname{Sin}C.\operatorname{Sin}x=\operatorname{Sin}B.\operatorname{Sin}(A-x)\Leftrightarrow$$

$$AB\operatorname{Sin}x=AC\operatorname{Sin}(A-x)$$

$AB\operatorname{Sin}x$ فاصله‌ی A از $\ell_۱$و $AC\operatorname{Sin}(A-x)$ فاصله‌ی A از $\ell_۲$ است که با هم برابرند. بنابراین M' روی $\ell_۱$ قرار دارد. حال فرض کنید خطهای AB و LM' یکدیگر را در نقطه‌ی P قطع کند. چون $\angle LAP=\angle PLA=\frac{A}{۲}$ ، $\overline{AP}$ میانه‌ی وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه $M'AL$ است.

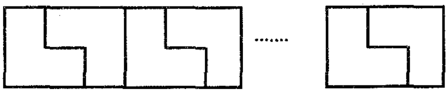
پس خط AB، $\overline{LM'}$ را در نقطه‌ی میانی آن قطع می‌کند پس $M=M'$. به طور مشابه $N=N'$.

بنابراین $\angle LNM=۹۰^\circ-\frac{A}{۲}=\angle LMN$ و $LM=LN$.

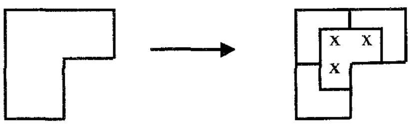
***

مسأله ۹-۷

راه حل : هر حالتی از پوشش مستطیل ۹۹۹×۹۹۸ را در نظر بگیرید و در زیر آن یک قطعه‌ی ۹۹۹×۲ خانه‌ای اضافه کنید که با گوشه‌ها به شکل زیر پوشیده شده‌اند :



پس، این مستطیل ۹۹۹×۱۰۰۰ را تا دو برابر اندازه‌اش بزرگ کنید و هر گوشه‌ی بزرگ را با ۴ گوشه‌ی کوچک معمولی به صورت زیر بپوشانید :



برای هرگوشه در مستطیل ۹۹۹×۱۰۰۰، هیچ کدام از ۴ گوشه‌ای که آن را می‌پوشانند نمی‌توانند نصفی از یک مستطیل ۳×۲ باشند. همچنین گوشه‌های «مرکزی» (مانند آن که در شکل با × علامت زده شده است) در همان جهتی قرار دارند که گوشه‌های اولیه که مستطیل ۹۹۹×۱۰۰۰ را می‌پوشانند قرار داشتند.

بنابراین هر پوششی از مستطیل ۹۹۹×۹۹۸ را می‌توان به پوششی از مستطیل ۱۹۹۸×۲۰۰۰ تبدیل کرد به طوریکه هیچ دو گوشه‌ای تشکیل یک مستطیل ۳×۲ ندهند. پس نتیجه‌ی خواسته شده به دست می‌آید.

***

مسأله ۹-۸

راه حل : بعد از اینکه تعدادی از پاره‌خطها را انتخاب کردیم، برای هر رأس تعداد پاره‌خطهایی انتخاب شده که رأس روی آنها قرار دارد را با $d(V)$ نشان می‌دهیم و درجه‌ی V می‌گوییم. همچنین می‌گوییم پاره‌خطهای n- ضلعی مثلثی شده را نسبت به ضلع AB انتخاب کرده‌ایم اگر $n-1$ پاره خط انتخاب کرده باشیم که هیچ مجموعه‌ای از آنها تشکیل چند ضلعی ندهند و هیچ یک از $n-2$ رأس غیر از A و B از درجه‌ی ۲ نباشند.

لم : برای هر n- ضلعی محدب مثلثی شده $(n \geq 3)$ و هر دو رأس A و B از n- ضلعی، می توانیم پاره‌خط های n- ضلعی را نسبت به ضلع AB به سه طریق الف، ب و ج انتخاب کنیم که هر یک از این راه ها در شرط متناظر خودشان از شروط زیر صدق می‌کنند :

الف) $\overline{AB}$ انتخاب شده باشد و $d(A) \geq 2$

ب) $\overline{AB}$ انتخاب شده باشد و $d(A) \neq 2$

ج) $(d(A),d(B)) \neq (1,1)$ یا $(2,2)$

اثبات : برای $n=3$ اگر مثلث ABC داده شده باشد می‌توانیم ضلع AB را به همراه الف) AC، ب) BC و ج) AC انتخاب کنیم. حال فرض کنید $n \geq 4$ و ادعا برای nهای کوچکتر برقرار باشد، ثابت می‌کنیم که ادعا برای n نیز برقرار است.

$\overline{AB}$ باید قسمتی از مثلث ABC از مثلث‌های کشیده شده باشد. در اینصورت یا ۱) $\overline{AC}$ ضلعی از n- ضلعی است و $\overline{BC}$ ضلع نیست و یا ۲) $\overline{BC}$ ضلع است و $\overline{AC}$ نیست و یا ۳) هیچ کدام از $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ ضلع نیستند.

۱) فرض کنید p و $(n-1)$- ضلعی تشکیل شده از رئوس n- ضلعی غیر از A باشد.

الف) طریق (ب) را برای p به کار ببرید تا $d(C) \neq 2$ و $\overline{BC}$ انتخاب شده باشد. پس به جای $\overline{AC},\overline{BC}$ و $\overline{AB}$ را انتخاب کنید.

($\overline{BC}$ را از مجموعه‌ی پاره خطهای انتخابی حذف می کنیم و به جای آن $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ را انتخاب می‌کنیم)

ب) طریق (ب) را برای p به کار ببرید تا $d(C) \neq 2$ و $\overline{BC}$ انتخاب شده باشد. پس $\overline{AB}$ را نیز انتخاب کنید.

ج) طریق (الف) را برای p به کار ببرید تا $d(B) \geq 2$ و $\overline{BC}$ انتخاب شده باشد. اگر $d(c) \neq 2$ آنگاه $\overline{AB}$ را نیز انتخاب کنید در غیراینصورت $\overline{AC}$ را انتخاب کنید.

۲) فرض کنید $p(n-1)$- ضلعی تشکیل شده از رئوس n- ضلعی غیر از B باشد.

الف) طریق (ب) را برای p به کار برید تا $d(C) \neq ۲$ و $\overline{AC}$ انتخاب شده باشد. آنگاه $\overline{AB}$ را نیز انتخاب کنید.

ب) طریق (ب) را برای p به کار برید تا $d(C) \neq ۲$ و $\overline{AC}$ انتخاب شده باشد. اگر $d(A) = ۲$ آنگاه AB را انتخاب کنید، در غیراینصورت به جای $\overline{AB}, \overline{AC}$ و $\overline{BC}$ را انتخاب کنید.

ج) مانند قسمت (الف).

۳) فرض کنید p چند ضلعی تشکیل شده از رئوس A و C و رئوس بین آنها باشد (در طرفی از خط AC که B در آن طرف نیست) و فرض کنید Q چند ضلعی تشکیل شده از رئوس B و C و رئوس بین آنها باشد (در طرفی از خط BC که A در آن طرف نیست).

الف) طریق (الف) را برای P و Q به کار برید تا $d(C) \geq ۲ + ۲ = ۴$ و $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ انتخاب شده باشند، پس به جای $\overline{AB}, \overline{BC}$ را انتخاب کنید.

ب) طریق (الف) را برای P و Q به کار برید تا $d(C) \geq ۲ + ۲ = ۴$ و $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ انتخاب شده باشند. اگر $d(A) = ۲$ به جای $\overline{AB}, \overline{BC}$ را انتخاب کنید، در غیراینصورت به جای $\overline{AB}, \overline{AC}$ را انتخاب کنید.

ج) مانند قسمت (ب). حال به مسألهٔ اصلی باز می‌گردیم. چون $n \geq ۴$ ضلع و فقط $n - ۲$ مثلث داریم، مثلثی وجود دارد که شامل دو ضلع مجاور XY و YZ است. فرض کنید $P(n-۱)$ - ضلع تشکیل شده از رئوس n- ضلعی غیر از Y باشد و طریق (ج) را برای P و رئوس X و Z بکار برید.

آنگاه اگر $d(X)$ یا $d(Z)$ برابر ۲ بودند، به ترتیب $\overline{XY}$ و $\overline{YZ}$ را انتخاب کنید. در غیراینصورت اگر $d(X)$ یا $d(Z)$ برابر ۱ بودند، به ترتیب $\overline{YZ}$ یا $\overline{XY}$ را انتخاب کنید.

در غیراینصورت هر دوی $d(Z), d(X)$ حداقل ۳ هستند و می‌توانیم برای پایان کار هر کدام از $\overline{XY}$ یا $\overline{YZ}$ را انتخاب کنیم.

***

مسأله ۱۰-۱

راه حل : اگر $x_{n-۱}$ و k رقم داشته باشد آنگاه $x_{n-۱} < ۱۰^k$ پس $۱۱x_{n-۱} < ۱۱۰۱۶^k = ۱۱۰۰ \ldots ۰$. بنابراین اگر $۱۱x_{n-۱}$, $k+۲$ رقم داشته باشد. دو رقم اول آن ۱ و ۰ هستند. با پاک کردن رقم اول آن به x_n می رسیم که حداکثر k رقم دارد.

در غیراینصورت $۱۱x_{n-۱}$ حداکثر $k+۱$ رقم دارد و با پاک کردن رقم اول آن به x_n می رسیم که حداکثر k رقم دارد. پس تعداد اعداد x_n کراندار است و x_n نیز کراندار است.

***

مسأله ۱۰-۲

راه حل : n را ثابت بگیرید و قرار دهید $a_k = \frac{n!}{k!}$ ، $k=1,2,\cdots,n$. فرض کنید عدد m که $a_k \le m < a_{k-1}$ داده شده است که $2 \le k \le n$. در اینصورت عدد $d = a_k \left\lfloor \frac{m}{a_k} \right\rfloor$ را در نظر بگیریم. داریم $0 \le m-d < a_k$ و از طرفی چون :

$$S = \left\lfloor \frac{m}{a_k} \right\rfloor < \frac{a_{k-1}}{a_k} = k$$

پس $\frac{n!}{d} = \frac{k!}{s}$ یک عدد صحیح است. پس می‌توانیم dرا از m کم کنیم، که d مقسوم علیه‌ای از $n!$ است، تا عددی کوچکتر از a_k به دست آوریم.

پس اگر با هر عدد صحیح $m < n! = a_1$ شروع کنیم با کم کردن حداکثر یک مقسوم علیه $n!$ از m می‌توانیم به عددی کوچکتر از a_2 برسیم؛ با کم کردن حداکثر یک مقسوم‌علیه $n!$ از آن عدد دوباره می‌توانیم به عددی کوچکتر از a_3 برسیم و به همین ترتیب پس m را می‌توانیم به صورت مجموع حداکثر $n-1$ مقسوم‌علیه مثبت $n!$ بنویسیم.

مسأله ۱۰- ۳

راه حل : فرض کنید $66667n$ عددی ده رقمی باشد که همه‌ی ارقام آن ۵،۴،۳ و ۶باشند آنگاه :

$$3333333333 \le 66667n \le 6666666666$$
$$\Rightarrow 50000 \le n \le 99999$$

حالت‌های زیر را در نظر بگیرید : الف) $n \equiv 0 \pmod 3$. در اینصورت :

$$66667n = \frac{2}{3}n.10^5 + \frac{1}{3}n$$

پنج رقم از $\frac{n}{3}.2$ و بعد از آن پنج رقم از $\frac{n}{3}$. این ارقام همگی ۵،۴،۳ یا ۶ هستند اگر و تنها اگر $n = 99999, \frac{n}{3} = 33333$.

ب) $n \equiv 1 \pmod 3$. در این صورت :

$$66667n = \frac{2}{3}(n-1).10^5 + \frac{1}{3}(n+2) + 66666$$

پنج رقم $\frac{2}{3}(n-1)$ و بعد از آن پنج رقم $\frac{1}{3}(n+2)+66666$. چون $\frac{1}{3}(n+2)+66666$ باید بین $66667, 99999$ باشد همه‌ی ارقام آن نمی‌تواند ۵،۴،۳ و یا ۶ باشد. پس در این حالت جوابی نداریم.

ج) $n \equiv 2 \pmod 3$. قرار دهید $a = \frac{1}{3}(n-2)$ در اینصورت :

$$66667n = (\frac{2}{3}(n-2)+1).10^5 + \frac{1}{3}(n-2) + 33334$$

پنج رقم از $x = ۲a + ۱$ و بعد از آن پنج رقم از $y = a + ۳۳۳۳۴$. ارقام یکان x و y بین ۳ و ۶ هستند اگر و تنها اگر رقم یکان a ۱ یا ۲ باشد. در این حالت سایر ارقام x و y همگی بین ۳ و ۶ هستند اگر و تنها اگر سایر ارقام a,۲ یا ۳ باشند. پس در این حالت ۳۲ تا a داریم (برای هر یک از پنج رقم آن دو انتخاب داریم) و هر a یک جواب $n = ۳a + ۲$ به دست می‌دهد.

بنابراین دقیقاً یک جواب برای حالت $n \equiv ۰ \pmod ۳$ و ۳۲ جواب برای حالت $n \equiv ۲ \pmod ۳$ بدست می‌آید. پس در کل ۳۳ مقدار برای n و ۳۳ عدد ده رقمی داریم.

***

مسأله ۱۰-۴

راه حل : خانه‌های جدول را با a_{ij} برچسب بگذارید که a_{ij} خانه‌ی در سطر i ام و ستون j ام است به طوریکه خانه‌ی $a_{۱۱}$ خانه‌ی گوشه‌ی پایین و سمت چپ جدول است. همچنین فرض کنید $b_{ij} = ۱۰(i-۱) + j$ عددی باشد که در ابتدا در خانه‌ی سطر i ام و ستون j ام قرار دارد. توجه کنید که :

$$P = \sum_{i,j=۱}^{۱۰} a_{ij} b_{ij}$$

ثابت است. چون هر بار که خانه‌های a_{mn}, a_{pq}, a_{rs} تغییر می‌کنند (که $n+s=۲q, m+r=۲p$) p به اندازه‌ی $b_{mn} - ۲b_{pq} + b_{rs}$ یا :

$$۱۰\big((m-۱)+(r-۱)-z(p-۱)\big)+(n+s-۲q)=۰$$

کم یا زیاد می‌شود. (برای مثال، اگر خانه‌های $a_{۳۵}, a_{۴۶}, a_{۵۷}$ تغییر کنند آنگاه p به اندازه‌ی $۰ = (۵۷ + ۴۶.۲ - ۳۵)\pm$ تغییر می‌کند). در ابتدا $p = \sum_{i,j=۱}^{۱۰} b_{ij} b_{ij}$ در نهایت، خانه‌های a_{ij} با یک ترتیبی از b_{ij} ها برابرند و

$$P = \sum_{i,j=۱}^{۱۰} a_{ij} b_{ij}$$

طبق نامساوی جابجایی این حداقل برابر است با $\sum_{i,j=۱}^{۱۰} b_{ij} b_{ij}$ و تساوی وقتی رخ می‌دهد که هر $b_{ij} = a_{ij}$. می‌دانیم که تساوی رخ داده است چون p ثابت است. پس a_{ij} ها باید با b_{ij} ها برابر باشند پس اعداد $۱,۲,\cdots,۱۰۰$ را دوباره به همان ترتیب ظاهر می‌شوند.

***

مسأله ۱۰-۵

راه حل : زاویه‌ها جهت‌دار و به پیمانه ۱۸۰° محاسبه می‌شوند. فرض کنید Q,P و R به ترتیب وسط‌های $\overline{DA},\overline{DB}$ و $\overline{DC}$ باشند، نقط M و N به ترتیب وسط کمانهای AD و DC هستند. پس نقاط O,Q,M و O,R,N هم خط هستند پس $\angle MON=\angle QOR$. از طرفی $\angle DQO=\angle DRO=۹۰^\circ$ که نتیجه می‌دهد DQOR محاطی است و :

$$\angle QOR=۱۸۰^\circ-\angle RDQ=۱۸۰^\circ-\angle CDA=\angle ABC$$

به علاوه، $\angle QPR=\angle QPD+\angle DPR=\angle ABD+\angle DBC=\angle ABC$.

در اینصورت برای اثبات ادعایمان کافی است نشان دهیم $\Delta PQM\sim\Delta PRN$ (با همین ترتیب نقاط)، چون در اینصورت :

$$\angle MPN=\angle QPR-\angle QPM+\angle RPN=\angle QPR=\angle ABC=\angle MON$$

و MPON محاطی می‌شود. (در غیراینصورت ممکن است که هر دو مثلث PQM و PRN تباهیده باشند) حال قرار دهید $a=AB$ و $b=BC$ و $e=AC,d=DA,C=CD$ و $f=BD$. فرض کنید خط MN خطهای AD و CD را به ترتیب درE وF قطع کند. در اینصورت :

$$\angle DEF=\frac{۱}{۲}(\hat{DN}+\hat{AM})$$
$$=\frac{۱}{۲}(\hat{NC}+\hat{MD})=\angle EFD$$

پس $DE=DF$. چون $KL\mid\mid EF$ ، داریم. از طرفی طبق قضیه نیمساز زاویه برای مثلث‌های ABD و CBD , $DK=d.\frac{f}{a+f}$ و $DL=C.\frac{f}{b+f}$ پس داریم :

$$d(d+f)=c(a+f)$$
$$(c-d)f=bd-ac \qquad (۱)$$

اگر $c=d$ آنگاه باید داشته باشیم $bd=ac$ پس $a=b$. آنگاه $\overline{BD}$ قطری از w است و $P=۰$ و ادعا ثابت می‌شود.

در غیراینصورت $c-d$, $bd-ac\neq۰$ و $f=\frac{bd-ac}{c-d}$.

حال ثابت می‌کنیم $\Delta PQM\sim\Delta PRN$. توجه کنید :

$$\angle PQM=\angle PQD+\angle DQM=\angle BAD+۹۰^\circ$$
$$=\angle BCD+۹۰^\circ=\angle PRD+\angle DRN=\angle PRN$$

همچنین توجه کنید که زاویه‌های $\angle PQM$ و $\angle PRN$ هر دو باز هستند.

پس کافی است ثابت کنیم :

$$\frac{PQ}{QM}=\frac{PR}{RN}\Leftrightarrow \frac{\frac{BA}{۲}}{AQ\tan\angle MAQ}$$
$$=\frac{\frac{BC}{۲}}{CR\tan\angle RCN}\Leftrightarrow \frac{\frac{BA}{۲}}{\frac{AD}{۲}\tan\angle MCD}$$
$$=\frac{\frac{BC}{۲}}{\frac{CD}{۲}\tan\angle DAN}\Leftrightarrow \frac{a}{d\tan\angle ACM}=\frac{b}{c\tan\angle NAC} \qquad (۲)$$

چون خطهای CM و AN نیمسازهای زاویه‌های $\angle ACD$ و $\angle DAC$ هستند همدیگر را در I مرکز دایره ی محاطی مثلث ACD قطع می‌کنند. همچنین فرض کنید دایره‌ی محاطی مثلث ACD و $\overline{AC}$ را در T قطع کند. آنگاه :

$$\tan\angle ACM=\frac{IT}{TC}=\frac{IT}{\frac{۱}{۲}(e+c-d)}$$

و

$$\tan\angle NAC=\frac{IT}{TA}=\frac{IT}{\frac{۱}{۲}(e+d-c)} \quad ,$$

$$\frac{\tan\angle ACM}{\tan\angle NAC}=\frac{e+d-c}{e+c-d}$$

پس (Z) معادل است با :

$$ac(e+c-d)=bd(e+d-c)\Leftrightarrow$$
$$e=\frac{(ac+bd)(c-d)}{bd-ac}$$

طبق قضیه بطلمیوس و (۱) داریم :

$$e=\frac{ac+bd}{f}=\frac{(ac+bd)(c-d)}{bd-ac}$$

همانطور که می‌خواستیم. بنابراین مثلث PQM با مثلث PRN متشابه است و $\angle MPN=\angle MON$ و MPON در حقیقت محاطی است.

***

مسأله ۱۱-۱

راه حل : برهان خلف، فرض کنید هر توپ سبزی داخل یک توپ دیگر باشد. توجه کنید که هیچ توپ قرمزی داخل هیچ توپ آبی نیست چون در اینصورت این توپ آبی شامل حداقل ۱۹ توپ سبز خواهد بود.

توپ‌های قرمزی را در نظر بگیرید که داخل هیچ توپ قرمز دیگری نیستند، فرض کنید m تا از این توپ‌ها داریم. پس این m توپ را با توپهای داخلشان دور بریزید. پس همه‌ی توپهای قرمز را با توپهای داخلشان دور می‌ریزیم که ۱۹m توپ سبز نیز در آن است. همچنین، چون هیچ توپ قرمزی داخل هیچ توپ آبی نیست، پس هنوز دقیقاً ۱۳ توپ سبز داخل هر یک از توپ‌های آبی باقی مانده وجود دارد.

حال توپ‌های آبی باقی مانده را در نظر بگیرید که داخل هیچ توپ آبی دیگری نباشند، فرض کنید تعداد آنها n باشد و پس آنها را با همه‌ی توپهای داخلشان دور بریزید. پس همه‌ی توپ‌های آبی باقیمانده را به همراه ۱۳n توپ سبزی که در آنها وجود دارد دور می‌ریزیم.

در این لحظه همه‌ی توپ‌های سبز دور ریخته شده‌اند پس باید داشته باشیم $۱۵۰ = ۱۹m + ۱۳n$. اگر این معادله را به پیمانه‌ی ۱۳ بنویسیم داریم $۶m \equiv ۷ \Leftarrow m \equiv ۱۲ \pmod{۱۳}$. پس $m \geq ۱۲$ و $۱۵۰ = ۱۹m + ۱۳n \geq ۱۹.۱۲ = ۲۲۸$ که تناقض است. پس فرض اولیه ما اشتباه بوده است و توپ سبزی وجود دارد که داخل هیچ توپ دیگری نیست.

***

مسأله ۱۱-۲

راه حل : فرض کنید d، قدر نسبت دنباله‌ی حسابی و N یک عدد دلخواه باشد. اعداد اول $p < q$، بزرگتر از N را طوری بگیرید که d را نشمارند. در اینصورت جمله‌ای مثل a_n وجود دارد که بر pq بخش‌پذیر است. چون :

$$p_k \geq q > p \text{ داریم } p \left| \frac{a_k}{p_k} \right. \text{ و } \frac{a_k}{p_k} \geq p > N$$

بنابراین برای هر N ، k وجود دارد به طوریکه $\frac{a_k}{p_k} > N$، پس دنباله‌ی $\left\{\frac{a_n}{p_n}\right\}$ بی‌کران است.

***

مسأله ۱۱-۳

راه حل : جواب برابر است با :

$$۲۵۲۵ = \frac{۱}{۲}(۱+۲+۳+\cdots+۱۰۰).$$

مریم همیشه می‌تواند این مجموع را داشته باشد؛ اگر جمع اعداد روی میز کمتر از این مقدار باشد مریم می‌تواند همه را برگرداند تا به جمعی بیشتر از این مقدار برسد. پس این مقدار همیشه به دست می‌آید. برای بیشترین بودن این عدد فرض کنید اعداد روی میز $۷۵, \cdots, ۲۶, ۲۷$ باشند با مجموع ۲۵۲۵ و فرض کنید که اعداد روی k کاردی که مریم برمی‌گرداند، k عدد اول از دنباله‌ی $۱۰۰, \cdots, ۷۶, ۲۵, \cdots, ۱, ۲$ باشد.

اگر مریم ۰ تا ۲۵ کارت را برگرداند این مجموع کم می‌شود و اگر بیشتر از این مقدار را برگرداند مجموع حداکثر برابر است با :

$$۲۵۲۵ = \frac{۱}{۲}(۱+۲+\cdots+۲۵+۷۶+۷۷+\cdots+۱۰۰)$$

در هر صورت، مریم نمی‌تواند مجموعی بیش از ۲۵۲۵ به دست آورد.

***

مسأله ۱۱-۴

راه حل : بازیکن دوم استراتژی برد دارد. توجه کنید که هر عدد اول $p < ۱۰۰$. تعداد زوجی از عاملهای $!۱۰۰$ را می‌شمارد :

عاملهایی که p می‌شمارد را می‌توان به زوجهای جدا از هم $(k, ۹۷k)$ تقسیم کرد (یا اگر $P = ۹۷$ به زوج های $(k, ۸۹k)$).

(توجه کنید که هیچ کدام از این عاملها ۱ نیستند چون ۱ بر p بخش‌پذیر نیست). اگر بازیکن اول عدد اول p را بنویسد، بازیکن دوم می‌تواند هر عدد دیگر بخش‌پذیر بر p را بنویسد، اگر بازیکن اول یک عدد مرکب بنویسد بازیکن دوم همیشه می‌تواند عدد اول P را که آن عدد را می‌شمارد بنویسید.

در هر صورت، در حرکات بعدی بازیکنان می‌توانند یک عدد جدید $q \mid ۱۰۰!$ را بنوسیند و نبازند اگر و تنها اگر q بر p بخش‌پذیر باشد. چون تعداد زوجی از این اعداد q وجود دارد - بازیکن دوم آخرین عدد ممکن را می‌نویسد و بازیکن اول می‌بازد.

***

مسأله ۱۱-۵

راه حل : در ابتدا الگوریتمی ارائه می‌دهیم که (به طور موقت) یالهایی از G را حذف می‌کند تا اینکه G تنها از زنجیره‌هایی از رئوس تشکیل شده باشد (دنباله‌ای از رأسهای $V_1, \cdots, V_n$ که هر V_i مجاور V_{i+1} است را زنجیره گوییم)

گراف شاید شامل یک رأس منفرد نیز باشد.

در ابتدا، تا زمانی که دوری در G وجود دارد. از آن دور یک یال حذف می‌کنیم. در این صورت گراف G در نهایت به یک درخت تبدیل می‌شود (گراف همبند بدون دور). برگ‌های درخت (رئوس با درجه‌ی ۱) را در نظر بگیرید که هنوز عضوی از یک زنجیر نیستند. اگر همه‌ی آنها مجاور رأسی با درجه‌ی ۳ باشند، آنگاه باید دقیقاً چهار رأس داشته باشیم با یک رأس مرکزی و سه رأس مجاور آن که عضو زنجیری نیست. یکی از یالها را حذف کنید و یک زنجیر درست کنید.

در غیراینصورت برگی وجود دارد که مجاور یک رأس از درجه ۳ نیست. از این رأس، روی گراف حرکت کنید تا به یک رأس درجه ۳ برسید مثل V. و یالی را که از آن به V وارد شده‌اید را حذف کنید. این کار یک زنجیر درست می‌کند و بقیه‌ی رأس‌ها را در یک درخت همبند دیگر قرار می‌دهد. پس می‌توانیم این الگوریتم را برای این درخت تازه درست شده تکرار کنیم تا به نتیجه‌ی خواسته شده برسیم. غیر از رأس منفرد، هر رأس یا در یک زنجیره‌ی فرد است (زنجیره‌ای با تعداد رأس‌های فرد) و یا در یک زنجیره‌ی زوج است (زنجیره‌ای با تعداد رأسهای زوج).

حال از هر زنجیره‌ی فرد یک رأس را که مجاور یکی از دو سر انتهایی است را انتخاب کنید. توجه کنید که برای هر رنگ آمیزی جالب، حتی اگر تمام یالهای حذف شده دوباره برگردند، در هر زنجیره‌ای حداکثر رأسهای سفید یکی در میان هستند.

پس در هر زنجیره‌ی زوجی حداکثر نیمی از رأسها سفید هستند. از طرفی اگر هر یک از رأسهای انتخاب شده سفید باشد، آنگاه در زنجیره‌ی فردی که این رأس در آن قرار دارد حداقل رأسهای سیاه یکی بیشتر از رأسهای سفید هستند، و اگر رأس انتخاب شده سیاه باشد، آنگاه حداکثر تعداد رأسهای سفید یکی از رأسهای سیاه بیشتر است.

فرض کنید b زنجیره‌ی فرد داریم که رأس انتخابی از آن سیاه است و w زنجیره‌ی فرد داریم که رأس انتخابی آن سفید است. اگر یک رأس منفرد داشته باشیم حداکثر $1+b-w$ رأس سفید بیشتر از رأس سیاه در گراف داریم پس $1+b-w>0$. می‌دانیم که $1+b-w$ باید زوج باشد چون $1+b+w \equiv 500 \pmod 2$ در اینصورت $b-w \geq 1, 1+b-w \geq 2$ که نتیجه می‌دهد تعداد رأسهای انتخابی سیاه از سفید بیشتر است.

در آخر، اگر رأس منفرد نداشته باشیم، در این صورت حداکثر $b-w$ رأس سفید بیشتر از رأس سیاه در گراف داریم. پس $b-w>0$ و هنوز تعداد رأسهای سیاه انتخابی از رأسهای سفید بیشتر است. بنابراین در هر صورت، برای هر رنگ‌آمیزی جالب تعداد رأسهایی انتخابی سیاه از رأسهای انتخابی سفید بیشتر است.

***

مسأله ۱۱-۶

راه حل : هر یک از دو شعبده باز اول از زوج مرتب استفاده می‌کند تا مجموع اعداد پیش او را به پیمانه‌ی $zn+1$ به شعبده باز سوم برساند. شعبده باز سوم با این اطلاعات، به سادگی این دو عدد را از عدد :

$$1+2+\cdots+(2n+1)=(2n+1)(n+1)\equiv 6 \pmod{2n+1}$$

کم می‌کند تا عدد خواسته شده را به دست آورد. از اینجا تا آخر راه حل همه‌ی زوجهای مرتب به پیمانه‌ی $2n+1$ محاسبه شده‌اند. همچنین $(a,b)_k$ زوج مرتب $(a+k,b+k)$ را نشان می‌دهد و $b-a$ را تفاضل این زوج گوییم. (که به پیمانه‌ی $2n+1$ محاسبه می‌شود و بین ۱ تا $2n$ است). فرض کنید :

$$(0,2n)_k,(0,1)_k,(n,2)_k,(n,2n-1)_k,(4,n+1)_k,(2n-3,n)_k$$

همه نماینده مجموعی برابر k به پیمانه $2n+1$ هستند. تفاضل این زوجها برابر است با :

$2n, 1, n+3, n-1, n-3, n+5$.

چون $n>5$ همه‌ای این تفاضل ها متمایز هستند. اگر n فرد باشد آنگاه فرض کنید $(n-1,n+2)_k, \cdots, (2,2n-1)_k, (1,2n)_k$ هم نشان دهنده‌ی حاصل جمع k به پیمانه‌ی $2n+1$ باشند. تفاضل این زوجها همه فرد است : $3, \cdots, 2n-3, 2n-1$. از طرفی هیچ کدام از این تفاضل ها برابر ۱ که در پاراگراف قبلی داشتیم نیستند.

به طور مشابه، اگر n زوج باشد فرض کنید $(n+2,n-1)_k, \cdots, (2n-1,2)_k, (2n,1)_k$ مجموع k را به پیمانه‌ی $2n+1$ نشان دهند. تفاضل این زوجها همه زوج است : $2,4,\cdots,2n-2$.

هیچ کدام از این تفاضل‌ها با $2n$ که در دو پاراگراف قبلی داشتیم برابر نیستند. توجه کنید که اگر دو زوجی که به شعبده باز سوم داده می‌شود یعنی $(a_1,b_1)_{k_1}, (a_2,b_2)_{k_2}$ برابر باشند آنگاه تفاضلشان نیز با هم برابر است و باید داشته باشیم $b_1-a_1 \equiv b_2-a_2 \pmod{2n+1}$.

چون می‌دانیم تفاضل‌های $b-a$ همه متمایز هستند پس باید داشته باشیم $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$ و بنابراین $k_1=k_2$. پس هر زوج (a,b) حداکثر به یک مجموع مربوط می‌شود پس انتخاب های ما خوش تعریف هستند.

حال فرض کنید که یکی از دو شعبده باز اول تعدادی کارت دارد که مجموعشان به پیمانه ی $2n+1$، k می‌شود. برهان خلف، فرض کنید این شعبده باز نتواند هیچ زوجی از آنهایی که در بالا گفتیم را به شعبده باز سوم بدهد. در این صورت قرار دهید $S_k=\{s+k \mid s\in S\}$.

این شعبده باز حداکثر یک کارت از هر یک از سه مجموعه‌ی

$$\{4,n+1,2n-3\}_k, \{2,n,2n-1\}_k \{0,1,2n\}_k$$

دارد و حداکثر یک کارت از هر کدام از $n-4$ مجموعه‌ی :

$$\{n-1,n+2\}_k, \cdots, \{6,2n-5\}_k, \{5,2n-4\}_k, \{3,2n-2\}_k$$

دارد. در هر حال این مجموعه‌های مجموعه‌ی $\{0,1,2,\cdots,2n\}$ را افراز می‌کنند و سپس شعبده باز باید حداکثر $n-1=(n-4)+3$ کارت داشته باشد که تناقض است. پس فرض ما اشتباه بوده است و هر یک از دو شعبده باز می‌تواند مجموع خود را با یکی از زوجهای معرفی شده به نفر سوم برساند و این اثبات را کامل می‌کند.

***

فصل ششم

« مسائل مسابقه ای »

شتاب کن که روزها در گذرند و در روزهای خوشی نیز روی کمک دیگران حساب نکن
که همه چیز در دستان توست.

در این فصل تعدادی سوال المپیادی مطرح شده است که علاقه مندان می‌توانند آنها را حل نموده و پاسخ هر یک از سوالات را به آدرس صندوق پستی ۱۵۸۹-۱۳۱۸۵ به نام نیما نوربخش و یا به آدرس پست الکترونیک Farhikhte.Sharif@gmail.com ارسال نمایند.

به افرادی که هر یک از سوالات را به طور کامل حل نمایند در سه مرحله :

۱- زمستان ۸۵
۲- تابستان ۸۶
۳- زمستان ۸۶

به قید قرعه جوایزی اهدا خواهد شد. علاقه مندان جهت دریافت راهنمایی و مشاوره المپیاد می‌توانند به آدرس :
تهران - خیابان ستارخان - بین برق آلستوم و پل ستارخان - جهاد دانشگاهی شریف

(واحد المپیاد فرهیختگان شریف) مراجعه نمایند.

مسائل مسابقه

سوالات هندسه

۱- در مثلث ABC ، C_1, B_1, A_1 را به ترتیب پای ارتفاع های متناظر رأس های A , B , C فرض کنید و C', B', A' را محل برخورد CC_1, BB_1, AA_1 با دایره محیطی مثلث ABC (به شعاع R) بگیرید. اگر R_1 شعاع دایره محاطی $A_1B_1C_1$ باشد ثابت کنید.

$$(AA')^n \sin 2A + (BB')^n \sin 2B + (CC')^n \sin 2C \geq 2^{2n+1}(RR_1)^{\frac{n}{2}-1} S_1$$

(S_1 مساحت $A_1B_1C_1$ است)

۲- در مثلث ABC ، C', B', A' به ترتیب محل تماس دایره محاطی داخلی با اضلاع BC ، CA ، AB هستند. فرض کنید خط عمود بر نیمساز زاویه A که از A' رسم می شود AC ، AB را به ترتیب در A_2, A_1 قطع کند. عمود خارج شده از B' به نیمساز زاویه B ، BA ، BC را، به ترتیب، در B_2, B_1 و عمود خارج شده از C' به نیمساز زاویه C ، CB ، CA را ، به ترتیب، در C_2, C_1 قطع کند. ثابت کنید C_1A_2, B_1C_2, A_1B_2 موازیند.

۳- نیم دایره ای به قطر AB مفروض است. دو دایره ی Γ_2, Γ_1 با شعاع های غیر مساوی بر نیم دایره به ترتیب در نقاط C و D مماس داخل هستند، این دو دایره بر AB نیز مماس اند ولی یکدیگر را قطع نمی کنند. فرض کنید d مماس مشترک خارجی دو دایره ی Γ_2, Γ_1 (متمایز از AB) باشد. نقاط تماس d با Γ_2, Γ_1 را به ترتیب E و F می نامیم. ثابت کنید CE ، DF روی نیم دایره یکدیگر را قطع می کنند.

۴- فرض کنید ABC یک مثلث بوده و M یک نقطه داخل آن باشد، ثابت کنید :

$$\operatorname{Min}\{AM, BM, CM\} + AM + BM + CM < AB + BC + CA$$

۵- O و N به ترتیب مرکز دایره ی محیطی و مرکز دایره ی نه نقطه مثلث ABC هستند. N' مزدوج همه زاویه ی N است. یعنی $\left(N'\hat{B}A = N\hat{B}C, N'\hat{A}B = N\hat{A}C\right)$، A' محل برخورد عمود منصف OA با ضلع BC است و C', B' نیز به همین ترتیب به دست می آیند.

الف) ثابت کنید C', B', A' هم خط اند، خط مورد نظر را L می نامیم.

ب) ثابت کنید ON' عمود است بر L .

۶- فرض کنید ABCDEF یک شش ضلعی منتظم بوده و دایره محاطی آن را در نظر می گیریم، فرض کنید دایره بر اضلاع AB ، CD ، EF به ترتXب در نقاط P , Q , R مماس باشد و نقاط تماس دایره با اضلاع FA ، BC ، DE را به ترتیب X ، Y ، Z می گیریم.
ثابت کنید PY ، QZ ، RX همرسند.

۷- چهار ضلعی محاطی ABCD مفروض است. M و N به ترتیب اوساط اضلاع AD و BC هستند. MN خطوط CD و AB را به ترتیب در K و L قطع می کند. X را محل برخورد CD و AB و Y را محل برخورد AC و BD می‌گیریم. ثابت کنید XY بر دایره ی محیطی KLX مماس است.

۸- نقطه M درون چهارضلعی محدب ABCD مفروض است به طوریکه :

$$A\hat{M}B = M\hat{A}D + M\hat{C}D$$
$$C\hat{M}D = M\hat{C}B + M\hat{A}B$$

و $MA = MC$ ثابت کنید : $BC \times MD = CM \times AB$

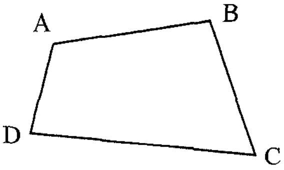
۹- مثلثهای متساوی الساقین $A_3A_1O_2$ و $A_1A_2O_3$ ($O_2A_3 = O_2A_1$ و $O_3A_1 = O_3A_2$) روی اضلاع و در بیرون مثلث $A_1A_2A_3$ ساخته شده اند. نقطه O_1 در بیرون مثلث طوری قرار دارد که $O_1\hat{A}_3A_2 = \frac{1}{2}A_1\hat{O}_3A_2$ و $O_1\hat{A}_2A_3 = \frac{1}{2}A_1\hat{O}_2A_3$. ثابت کنید $\overline{A_1O_1} \perp \overline{O_2O_3}$. همچنین اگر T پای عمود وارد از O_1 بر A_2A_3 باشد، ثابت کنید

$$\frac{A_1O_1}{O_2O_3} = 2\frac{O_1T}{A_2A_3}$$

۱۰- فرض کنید a ، b و c اضلاع یک مثلث حاده الزاویه و m_a ارتفاع وارد بر ضلع a باشد، ثابت کنید :

$$1 < \frac{a + 2m_a}{b + c} < \sqrt{2}$$

۱۱- درون یک مثلث ABC یک نقطه p با ویژگی زیر پیدا کنید : از p عمودهایی بر سه ضلع مثلث رسم می کنیم، پای عمود ها مثلثی تشکیل می دهند که p مرکز ثقل آن باشد.



۱۲- برای چهار ضلعی محدب ABCD ثابت کنید :

$$(AC\times BD)^{2}=(AB\times CD)^{2}+(BC\times AD)^{2}-2(AB\times CD\times BC\times AD)\cos(\hat{A}+\hat{C})$$

۱۳- نشان دهید سه وتر تقاطع دایرهٔ محیطی یک مثلث با دایره های محاطی خارجی، اضلاع متناظر مثلث را در سه نقطهٔ همخط قطع می کنند.

۱۴- در چند ضلعی محاطی، قطرهای نامتقاطع رسم می شوند و چند ضلعی را به مثلث هایی تقسیم می کنند. ثابت کنید که مجموع شعاعهای دایره های محاط در این مثلث ها، مستقل از طریقی است که قطرها رسم شده اند.

۱۵- I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC است. A_1 و A_2 دو نقطه روی ضلع BC هستند به طوری که $A_1\hat{I}B=A_2\hat{I}C=90^\circ$. A' کل برخورد AI با دایرهٔ محیطی مثلث ABC است محل برخورد $A'A_1$ با AC و $A'A_2$ با AB را به ترتیب A'_1 و A'_2 می نامیم. به طریق مشابه B'_1 و B'_2، C'_1 و C'_2 را به دست می آوریم.

ثابت کنید : $A'_1A'_2$، $B'_1B'_2$ و $C'_1C'_2$ همرسند.

۱۶- I و I_a به ترتیب، مراکز دایره محاطی داخلی و دایره محاطی خارجی متناظر ضلع BC از مثلث ABC هستند. A' و M، به ترتیب محل برخورد II_a با BC و دایره محیطی، N وسط کمان $\overset{\frown}{MBA}$ و S و T، به ترتیب، محل برخورد NI و NI_a با دایره محیطی می باشند. ثابت کنید S، T و A' هم خط هستند.

۱۷- در مثلث حاده الزاویه ABC، نیمساز زاویه‌های $\hat{A}$، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ دایره محیطی را در A_1، B_1 و C_1 قطع می‌کنند (به ترتیب). M و N را نیز به ترتیب نقاط تقاطع AB با B_1C_1 و BC با A_1B_1 می گیریم. ثابت کنید MN از مرکز دایره محاطی ABC می‌گذرد.

۱۸- ABC مثلثی حاده الزاویه است، فرض کنید دایره ای که بر اضلاع AB و AC و دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس است به ضلع AB و AC به ترتیب در E و F مماس است و نقطه تماسش با دایرهٔ محیطی مثلث ABC نقطه N است. (فرض می کنیم این دایره در داخل دایرهٔ محیطی ABC قرار دارد) از وسط پاره خط EF عمودی بر ضلع BC فرود می آوریم تا آن را در H قطع کند. همچنین از رأس A خطی به موازات ضلع BC رسم می کنیم تا دایرهٔ محیطی را در نقطه ای دیگر به نام D قطع کند، نشان دهید سه نقطه N و H و D همخط اند.

۱۹- فرض کنید O یک نقطه در درون مثلث حاده الزاویه ABC باشد. از نقطهٔ o سه عمود بر سه ضلع مثلث وارد می‌کنیم. فرض کنید اضلاع BC و AB و AC را به ترتیب در A_1و C_1 و B_1 قطع کنند. نشان دهید O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است، اگر و تنها اگر محیط مثلث $A_1B_1C_1$ از محیط هیچکدام از مثلث های AB_1C_1 و BC_1A_1 و CA_1B_1 کمتر نباشد.

۲۰- فرض کنید نیمساز زاویهٔ A در مثلث ABC ، ضلع BC را در D قطع کند. می دانیم $AB+AD=CD$ و در ضمن $AC+AD=BC$ ، زوایای این مثلث را تعیین کنید.

۲۱- مثلث حاده الزاویه ABC مفروض است. فرض کنید A_1و B_1 به ترتیب پای ارتفاعهای وارد از A و B باشند. مماسهای رسم شده بر دایره محیطی مثلث CA_1B_1 در نقاط A_1 و B_1 یکدیگر را در M قطع می کنند ثابت کنید دایره های محیطی مثلثهای CA_1B_1 ، BMA_1 و AMB_1 یک نقطه مشترک دارند.

۲۲- AB قطر دایره O است L_a و L_b به ترتیب خطوط مماس بر O در نقاط A و B بوده و C نقطه ای دلخواه روی دایره است. خط BC و L_a را در k و نیمساز زاویه $\hat{CAK}$، خط Ck رادر H قطع می کند. M را وسط کمان CAB و S را نقطه دوم برخورد HM با دایرهٔ O می گیریم. T محل برخورد L_b با مماس بر دایره O در نقطه M است، ثابت کنید k, T, S هم خط هستند.

۲۳- مثلث ABC مفروض است اگر x و y به ترتیب پای عمودهای وارد شده از A و C بر نیمساز داخلی رأس B باشند و E و B_1 نیز به ترتیب پای ارتفاع رأس B وسط ضلع AC باشند ثابت کنید x و y و E و B_1 هم دایره‌اند.

۲۴- دایره های C_1 و C_2 به مرکز O_1 و O_2 همدیگر را در نقاط A و B قطع می کنند و شعاعهای O_1B و O_2B به ترتیب C_2 و C_1 را در F و E قطع خواهند کرد. از B خطی به موازات EF رسم می کنیم تا C_1 و C_2 را به ترتیب در M و N قطع کند، نشان دهید $MN=AE + AF$.

۲۵- دایره محاطی مثلث ABC در نقطهٔ A' بر ضلع BC مماس است و خط AA' دایره محاطی را در نقطه دیگر k قطع می نماید . اگر خطوط CK و BK دایره محاطی را به ترتیب در نقاط B'و C' قطع نمایند، نشان دهید که خطوط AA' و BB' و CC' همرسند. (از یک نقطه می گذرند).

۲۶- نشان دهید مراکز دوایر محاطی شش مثلثی که با رسم نیمسازهای یک مثلث پدید می آیند، بر یک مقطع مخروطی واقعند.

۲۷- ثابت کنید مثلث حاصل از قرینه رأسهای یک مثلث با ضلع مقابلش، مثلثی می‌سازد که مساحت آن کمتر از $\frac{۱}{۵}$ مساحت مثلث اصلی است.

۲۸- مثلث حاده الزاویه ABC مفروض است، M را وسط پاره خط BC می گیریم. نقطهٔ N را داخل مثلث طوری بگیرید که $A\hat{B}N = B\hat{A}M$ ، $C\hat{A}N = C\hat{A}M$ ثابت کنید $C\hat{A}M = B\hat{A}N$.

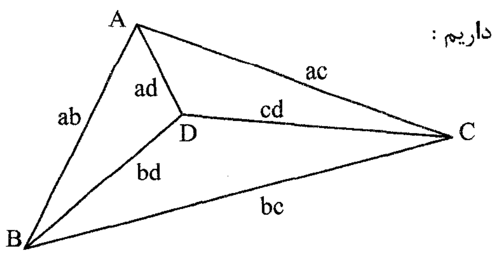
۲۹- در مثلث ABC ، D , E , F به ترتیب پای ارتفاعهای وارد بر AB, AC, BC هستند اگر D' ، E' و F'، هم به ترتیب پای ارتفاعهای وارد بر DE , FD, EF در مثلث DEF باشند، ثابت کنید سه خط AD' ، BE' و CF' همرسند؟ همچنین ثابت کنید نقطهٔ همرسی آنها روی خط اویلر مثلث ABC واقع است؟

۳۰- n - ضلعی محدب با رئوس $P_۱, P_۲, \dots, P_n$ در صفحه مفروض است. فرض کنید برای هر انتخاب از رأسهای p_i و p_j یک رأس در n ضلعی وجود دارد که پاره خط $p_i\, p_j$ از آن بر زاویه °۶۰ رویت می شود. ثابت کنید : $n = ۳$.

۳۱- مثلث ABC و دایره ی محیطی آن Ω را در نظر می گیریم. فرض کنید X یک نقطه متغیر روی کمان AB باشد و $O_۱$ و $O_۲$ به ترتیب مراکز دوایر محاطی مثلث های CAX و CBX باشند. ثابت کنید دایره ی محیطی مثلث $XO_۱O_۲$ دایره ی Ω را در یک نقطه ی ثابت قطع می کند.

۳۲- H، نیم صفحه بالایی، مجموعه نقاطی از $R^۲$ است که بالای محور x ها قرار دارند. در این فضا هر نیمدایره که مرکز آن روی محور x ها است را یک شبه خط می نامیم. اگر "دو شبه خط" همدیگر را در یک نقطه قطع کنند چهار "شبه زاویه" به وجود می آید که اندازه هر یک را، زاویه بین مماس های متناظر تعریف می کنیم.
" نیمساز یک شبه زاویه"، شبه خطی است که از رأس شبه زاویه می گذرد و شبه زاویه را نصف می کند. ثابت کنید در" شبه مثلث " شبه نیمسازهای داخلی هم رأسند !!! (این یک شبه سوال است).

۳۳- در مثلث روبرو a،b،c،d مقادیر مثبت هستند و داریم :



ثابت کنید : $A\hat{B}D + A\hat{C}D = ۶۰^\circ$

۳۴- اگر x_1 , x_2 , x_3 سه عدد حقیقی مثبت باشند ثابت کنید :

$$\sqrt{x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2} + \sqrt{x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2} \geq \sqrt{x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2}$$

***

سوالات ترکیبیات

۱- عدد صحیح و مثبت $n \geq ۴$ مفروض است. مجموعه ی $S = \{ p_۱, p_۲, \dots, p_n \}$، n نقطه در صفحه است که هیچ سه تایی روی یک خط و هیچ چهارتایی روی یک دایره قرار ندارند، فرض کنید a_t، $۱ \leq t \leq n$ ، تعداد دایره های $p_i p_j p_k$ باشد که p_t داخل آن است، فرض کنید :

$$m(s) = a_۱ + a_۲ + \dots + a_n$$

ثابت کنید یک عدد صحیح و مثبت $f(n)$ وجود دارد که فقط به n وابسته است و نقاط s رأسهای یک چند ضلعی محدب اند اگر و فقط اگر $m(s) = f(n)$.

۲- $f(n,k)$ را حداقل تعداد رئوس مورد نیاز برای یک گراف کامل فرض کنید به طوری که برای هر رنگ آمیزی یالهای گراف که در آن هر رنگی حداکثر n بار استفاده شده باشد، یک زیر گراف کامل k رأسی موجود باشد که یالهای آن رنگ های مختلف دارند.

الف : ثابت کنید $f(n,۳) = n + ۲$.

ب : ثابت کنید $f(n,k)$ وجود دارد !

۳- P یک چند وجهی است که تمام وجه های آن مثلث و تعداد یال های آن فرد است. روی رأس های P اعداد ۱ تا n را نوشته ایم (P ، n رأس دارد). نشان دهید تعداد وجه هایی که اعداد روی رئوس آن در جهت ساعت گرد صعودی هستند فرد است (از خارج P به چند وجهی نگاه می کنیم).

۴- فرض کنید n نفر، $A_۱$, ... ,A_n در یک مسابقه ی تنیس شرکت کرده اند. تیم ها طبق یک ترتیب ثابت با هم بازی می کنند و برنده‌ی مسابقه یک امتیاز کسب می کند. هر دو نفر حداکثر یک بار با هم بازی می کنند. فرض کنید طبق همان ترتیب ثابت مسابقه های ۱ ، ۲ ، ... ، k ، $\left(k \leq \binom{n}{۲}\right)$ انجام شده باشد.

ثابت کنید شر ط لازم و کافی برای دنباله ی $d_۱, \dots, d_n$ که نفر $A_۱$ ، $d_۱$ امتیاز، نفر $A_۲$ ، $d_۲$ امتیاز، ... و نفر A_n ، d_n امتیاز گرفته باشد این است که :

الف) برای هر i ، $d_i \in Z$.

ب) $\sum_{i=۱}^{n} d_i = K$.

ج) هر تعدادی از n نفر را که در نظر بگیریم برای آنها داشته باشیم :

$$\sum_{A_i \text{ عضو آنها باشد}} d_i \leq \text{تعداد بازیهای بین آنها}$$

۵- یک قطر پراکنده در یک ماتریس $n \times n$ عبارت است از Xک مجموعه ی n عضوی از درایه ها، که از هر سطر و از هر ستون دقیقاً یک عضو را شامل است. فرض کنید A ماتریس با درایه های صفر و یک است که دقیقاً یک قطر پراکنده با درایه های یک دارد. نشان دهید با جا به جا کردن سطرها و ستون های A، می توان A را به ماتریسی تبدیل کرد که درایه های زیر قطر اصلی آن همه صفر باشند.

۶- فرض کنید P چند وجهی محدبی با رأس های $V_1, V_2, \ldots, V_p$ باشد. رأس های متمایز V_i, V_j را « همسایه » می‌نامیم اگر متعلق به یک وجه از چند وجهی باشند. در هر رأس V_i یک عدد صحیح $V_i(\cdot)$ نوشته شده است. دنباله ی $(V_i(n))_{n \geq \cdot}$ به شکل زیر ساخته می شود :

$V_i(n+1)$ برابر است با میانگین حسابی اعداد $V_j(n)$ برای همه ی V_j هایی که همسایه ی V_i اند. ثابت کنید اگر همه ی $V_i(n)$ ها $1 \leq i \leq p$ و $n \in N$، اعداد صحیح باشند. آنگاه اعداد $M \in N$ و $K \in Z$ وجود دارند به طوری که برای هر $n \geq M$ و هر $1 \leq i \leq p$ داشته باشیم $V_i(n) = k$.

۷- یک آجر پلکانی با سه پله و عرض ۲،از ۱۲ مکعب تشکیل شده است. کلیه ی اعداد صحیح و مثبت n را تعیین کنید که بتوانیم مکعب هایی به ضلع n را با این آجرهای پلکانی بپوشانیم.

۸- در یک آزمون، ۵ سوال تستی ۴ گزینه ای داده شده است و دانش آموزان در هر سوال باید دقیقاً یکی از گزینه ها را انتخاب کنند. فرض کنید ۲۰۰۰ تا پاسخنامه داریم و یک عدد صحیح و مثبت n به طوریکه در بین هر n پاسخنامه، ۴ پاسخنامه وجود دارد که در هر دوتایی از این ۴ پاسخنامه حداکثر ۳ سوال با جوابهای یکسان وجود دارد. لطفاً کوچکترین مقدار ممکن n را تعیین کنید.

۹- مجموعه ای از ۲۰۰۰ دایره یکسان را در صفحه در نظر می گیریم به طوری که هیچ دو دایره ای مماس نیستند و هر دایره حداقل دو دایره دیگر را قطع کند. فرض کنید N تعداد نقاط تقاطع این دایره ها باشد، کوچک ترین مقدار N را پیدا کنید.

۱۰- K و t دو عدد صحیح و نسبت به هم اولند. در رشته $n \ \ldots$ ۱۲۳، می توانیم جای دو عدد را عوض کنیم اگر تفاضل آنها برابر K یا t باشد. ثابت کنید با این روش می توا نیم هر جایگشتی از ۱ تا n را ایجاد کنیم، اگر و فقط اگر $n \geq k+t-1$.

۱۱- ثابت کنید :

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 \binom{2n+m-r}{2n} = \binom{m+n}{n}^2$$

۱۲- γ یک خط بسته روی کره ی واحد و دارای این ویژگی است که هر دایره عظیمی در کره را قطع می کند. نشان دهید طول γ حداقل برای 2π است.

۱۳- در هر سطر و ستون یک جدول $m \times n$ ، دست کم یک ستاره قرار دارد. همچنین اگر در خانه (i, j) ستاره باشد، داریم $\frac{r_i}{c_j} = \left(\frac{i}{j}\right)^{\alpha}$. که در آن $\alpha \in R$ عددی ثابت، r_i تعداد ستاره های سطر i ام و c_j تعداد ستاره های ستون j ام است. ثابت کنید $m = n$.

۱۴- $P_1, P_2, \ldots, P_{11}$ ،۱۱ نقطه متمایز روی یک خط هستند به طوریکه برای هرجفت P_i و P_j داریم $\overline{P_iP_j} \le 1$، ثابت کنید مجموع همه $\overline{P_iP_j}$ (فاصله ی P_i از P_j) از ۳۰ کمتر است.

۱۵- یک چند وجهی محدّب داریم که هر وجه آن یک مثلث است و در ضمن درجه ی هر رأس آن زوج است. نشان دهید می توان رئوس این چند وجهی را با اعداد ۱ و ۲ و ۳ طوری برچسب گذاری کرد که در هر وجه هر سه عدد ۱ و ۲ و ۳ ظاهر شده باشد.

۱۶- مدرسه ای n دانش آموز و k کلاس دارد . هر دانش آموز در یک کلاس تحصیل می کند. هر دو دانش آموز از یک کلاس با هم دوست هستند. برای هر دو کلاس حداقل یک دانش آموز از هر کلاس وجود دارد که با هم دوست نیستند. ثابت کنید دانش آموزان مدرسه را می توان به $n - k + 1$ دسته افراز کرد طوری که هیچ دو دانش آموزی از یک دسته با هم دوست نباشند.

۱۷- فرض کنیدS تعداد زیر مجموعه های ۷۷ عضوی $H = \{1, 2, 3, \ldots, 2001\}$ را نشان دهد که مجموع اعضایشان زوج است و N آنهایی که مجموع اعضا فرد است. از S و N کدام بزرگ تر هستند؟ تفاضل S و N چند است؟

۱۸- n نفر (با نام های $1, 2, \ldots, n$) دور یک میز گرد نشسته اند. بعضی از آنها با هم دوست هستند (اگر a با b دوست است آنگاه b با a دوست است). در هر گام دو دوستِ همسایه می توانند جایشان را عوض کنند. شرط لازم و کافی برای رابطه های دوستی بین آنها چیست به طوری که با انجام گام های ذکر شده بتوانند ترتیب نشستن اولیه شان را به هر جایگشتی تبدیل کنند.

۱۹- دیسک به شعاع واحد عبارت است از دایره ی به شعاع واحد و نقاط درون آن. این دیسک را با تعدادی نوار پوشانده ایم (به طور کامل)، نشان دهید مجموع طول نوارها حداقل برابر دو است.

توجه : نوار عبارت است از ناحیه ی بین دو خط موازی و طول این نوار را فاصله ی بین دو خط موازی اش تعریف می کنند.

۲۰- در گراف G ، هر دو مثلث (K_3) در حداقل یک رأس مشترک اند. اگر بدانیم G هیچ زیر گرافی به صورت K_5 ندارد ، ثابت کنید می توان با حذف حداکثر دو رأس از G، به گرافی بدون مثلث دست یافت.

۲۱- فرض کنید $A=(a_1, a_2, \dots, a_{1380})$ دنباله ای از اعداد طبیعی باشد. m را تعداد زیر دنباله های سه تایی (a_i, a_j, a_k) ، $1 \le i < j < k \le 1380$، می گیریم به طوری که $a_k = a_j + 1$ و $a_j = a_i + 1$. حداکثر مقدار m چقدر است؟

۲۲- ثابت کنید هر گراف k – همبند یالی - بحرانی؛ یک راس از درجه k دارد.

۲۳- A زیر مجموعه ای از مجموعه ی $\{1, 2, \dots, (2n+1)\}$ است به طوریکه مجموع هیچ دو عضو A ، عضوی از A نیست. بیشترین تعداد اعضای A چند تا می تواند باشد. همه مثال های ممکن با این تعداد ماکزیمم را پیدا کنید.

۲۴- گرافی جهت دار در نظر بگیرید که هر یال آن در یک دور جهت دار آمده باشد. روی هر یال، عددی حقیقی نوشته شده است. شرط لازم و کافی برای این اعداد چیست، بطوری که بتوان به هر رأس، عددی حقیقی نسبت داد که ویژگی زیر برای هر رأس برقرار باشد : یالهای ورودی به رأس V را در نظر بگیرید و برای هر یک، عدد روی آن را در عدد رأس مبدأ آن ضرب کنید. مجموع این اعداد برابر عدد نسبت داده شده به رأس V است.

۲۵- فرض کنید S_1, S_2, S_3 سه کره در R^3 باشند که مراکز آنها در یک راستا نیستند و فرض کنید $k \le 8$ تعداد صفحاتی باشد که به هر سه کره مماس هستند. اگر A_i و B_i و C_i به ترتیب نقاط تماس صفحه ی مماس i ام $(1 \le i \le k)$ و کرات S_1 و S_2 و S_3 باشند و O_i مرکز دایره محیطی مثلث $A_iB_iC_i$ باشد، نشان دهید که O_i ها همگی در یک راستا هستند. (توجه کنید که حالت $k=0$ حکم بطور بدیهی برقرار است).

۲۶- خانه های یک جدول $2n \times 2n$ را با ۱ و ۱- پر کرده ایم، بطوریکه حاصل جمع اعداد هر سطر و نیز هر ستون نامنفی شده‌اند. نشان دهید n سطر و n ستون از این جدول را می توان انتخاب کرد، بطوریکه حاصل جمع اعداد واقع در محلهای تلاقی آنها بیشتر یا مساوی n باشد.

۲۷- n نقطه در صفحه داریم که فاصله ی بین هر دوتایی آنها یک عدد طبیعی است. ثابت کنید حداقل $\frac{۱}{۶}$ این فواصل بر ۳ بخش پذیر است.

۲۸- یک صفحه ۶ × ۶ را با رسم خطوط افقی و عمودی به ۳۶ خانه تقسیم کرده ایم، این صفحه با ۱۸ تا پلاک ۱ × ۲ پوشانده شده است، ثابت کنید یکی از خطوط هیچ یک از پلاک ها را قطع نمی کند.

۲۹- n و K دوعدد صحیح و مثبت دلخواه‌اند.
ثابت کنید اعداد صحیح $a_۱ > a_۲ > a_۳ > a_۴ > K$ وجود دارند که :

$$n = \pm\binom{a_۱}{۳}\pm\binom{a_۲}{۳}\pm\binom{a_۳}{۳}\pm\binom{a_۴}{۳}\pm\binom{a_۵}{۳}$$

۳۰- یک جایگشت $a_۱a_۲a_۳a_۴a_۵a_۶$ از اعداد $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ را در نظر بگیرید که با جا به جا کردن دو عدد، ۴ مرتبه (نه کمتر و نه بی‌شتر) به ۱۲۳۴۵۶ قابل تبدیل است. تعداد این جایگشت ها را پیدا کنید.

۳۱- دو عدد صحیح و مثبت n و k را در نظر می گیریم، به طوری که $k \ge ۱$ و $n > ۲k+۱$. n نقطه روی دایره داده شده است. سپس $nk+۱$ وتر دلخواه ازبین وترهایی که این نقاط را به هم وصل می کنند را رسم می کنیم. ثابت کنید $k+۱$ وتر هستند که هیچ دوتایی از آنها نقطه ی مشترکی ندارند.

۳۲- زبان L ، n حرفی است. یک کلمه در این زبان عبارت است از دنباله ای متناهی از حروف. فرهنگ لغت شامل k عبارت به شکل $A = B$ است که A و B دو کلمه متفاوت هستند. اگر در کلمه ای قطعه ای برابر A وجود داشته باشد می توان به جای آن B گذاشت و به کلمه ای « معادل » رسید. فرض کنید در این زبان هر کلمه، معادلی با کمتر از صد حرف داشته باشد. ثابت کنید : $k \ge n$.

۳۳- آیا مجموعه ای از دایره ها وجود دارد که هر خط حداقل یک دایره را قطع کند و جمع مساحت دایره ها متناهی باشد؟

۳۴- آیا می توان دایره را به ۱۲ قسمت همنهشت افراز کرد که مرکز حداقل در یک قسمت نباشد؟

۳۵- A و B دو مجموعه متناهی است و a و b دو عدد ثابت که $\forall x \in A \cup B$ در نتیجه یا $x+a \in A$ یا $x-b \in B$. ثابت کنید : $a|A| = b|B|$.

***

سوالات جبر و آنالیز

۱- فرض کنید $n = 2^m + 1$ و $f_1, f_2, \ldots, f_n$ توابعی صعودی از $[0,1]$ به $[0,1]$ هستند که در شرایط زیر صدق می کنند:
به ازای هر $1 \le i \le n$ و هر $x, y \in [0,1]$، $|f_i(x) - f_i(y)| \le |x - y|$ و $f_i(0) = 0$ ثابت کنید $i \ne j$ ای وجود دارد که برای هر $x \in [0,1]$، $|f_i(x) - f_j(y)| \le \frac{1}{m}$.

۲- فرض کنید $f: N \to \mathbb{N}$ در شرایط زیر صدق می کند.
الف : $f(1) = 1$.
ب : اگر $f(n+1) = \begin{cases} f(n)+2 & n=f(f(n)-n+1) \\ f(n)+1 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$ ، f را بیابید و ثابت کنید

$f(f(n) - n + 1) \in \{n , n+1\}$

۳- فرض کنید x, y, z سه عدد حقیقی و مثبت باشند. نشان دهید برای هر n, m صحیح که : $n \ge m \ge 0$ ؛

$$\frac{x^n}{(y+z)^m} + \frac{y^n}{(z+x)^m} + \frac{z^n}{(x+y)^m} \ge \frac{1}{2^m}\left(x^{n-m} + y^{n-m} + z^{n-m}\right).$$

۴- اعدا حقیقی $a, b, c > 0$ مفروض اند، ثابت کنید نامساوی :

$$\frac{x(a-x)}{x^2 + ab - bx} + \frac{x(b-x)}{x^2 + bc - cx} + \frac{x(c-x)}{x^2 + ca - ax} \le 1$$

برای هر عدد حقیقی x که $0 < x < \min\{a, b, c\}$ برقرار است. همچنین ثابت کنید، دقیقاً یک عدد x وجود دارد که برای آن تساوی برقرار است.

۵- کلیه ی دنباله های $\{a_n\}$ را پیدا کنید که برای آنها دو شرط زیر برقرار باشد :
I) برای هر n، a_n یک عدد صحیح غیر منفی است.
II) اگر m و n دو عدد صحیح و مثبت دلخواه باشند، آنگاه $\frac{a_n}{a_m + 1} < \frac{n}{m}$.

۶- A مجموعه همه ی دنباله های با جملات صحیح و $\emptyset: A \to Z$ تابعی است با دو ویژگی زیر :
I) برای هر $s, t \in A$ ، داریم $\emptyset(s+t) = \emptyset(s) + \emptyset(t)$.
($s+t$ دنباله ای است که n امین جمله آن، مجموع n امین جمله s و n امین جمله t است).

II) برای هر n ، $\emptyset(\cdot,\cdot,\ \dots\ ,\cdot,1,\cdot,\cdot,\cdot,\dots)=\cdot$

الف) ثابت کنید : $\emptyset(1,2,4,8,16,\dots)=\cdot$

ب) ثابت کنید : $\emptyset\equiv\cdot$.

۷- فرض کنید $X_1,\dots,X_n\geq -1$ و $\sum_{i=1}^{n}X_i^3=\cdot$ ثابت کنید $\sum_{i=1}^{n}X_i\leq\frac{n}{3}$ و نشان دهید تساوی چه موقع واقع می‌شود.

۸- کلیه ی توابع اکیداً یکنوا مثل $f:R^+\to IR^+$ را پیدا کنید به طوریکه $f\left(\frac{x^2}{f(x)}\right)=x$.

۹- همه ی چند جمله‌ایهای $P(x)$ با ضرایب حقیقی را پیدا کنید که برای هر $x\in R$ داشته باشیم: $g:R\to R$

$$P(x).P(2x^2-1)=P(x^2)P(2x-1)$$

۱۰- کلیه توابع و $f:R\to R$ را پیدا کنید، به طوری که برای هر $x,y\in R$ داشته باشیم :

$$f(x+g(y))=xf(y)-yf(x)+g(x)$$

۱۱- کلیه توابع $f:N\to IN$ را بیابید که در هر سه شرط زیر صدق می کنند :

- $f(m)=1\Leftrightarrow m=1$
- ب. م. م $d=(m,n)$, $f(m\times n)=\frac{f(m)\times f(n)}{f(d)}$
- $f^{(2000)}(m)=f(m)\ ,\ m\in N$

۱۲- فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty}2^{-n_k}$ بسط مبنای ۲ عدد $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ باشد نشان دهید : $n_{k+1}\leq 2n_k+2$

۱۳- فرض کنیدf و g دو چند جمله ای باشند که در شرط زیر به ازای هر x صدق می کنند:

$$f(x^2)=f\left(x-\frac{1}{2}\right)g\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

الف) نشان دهید $g\geq\cdot$.

ب) با فرض $\deg f\geq 2$ تمام چند جمله ای های g , f را بیابید.

۱۴- آیا چند جمله ای غیر ثابت وجود دارد که $P(1),P(2),\dots$ همگی اول باشند؟

۱۵- دنباله $\{a_n\}_{n\geq ۰}$ در شرایط زیر صدق می کند. برای هر $n \geq ۰$:

$$a_{۲n+۱} = a_{۲n} + ۱ \quad (i \qquad a_{۴n+۲} = a_{۴n} + ۱ \quad (ii \qquad a_{۴n} = a_{۲n} + a_n \quad (iii$$

نشان دهید اگر $m \in N$، آنگاه دقیقاً $a_{۲^{m+۱}}$ عدد طبیعی n وجود دارد که $۰ \leq n \leq ۲^m$ و $a_{۴n} = a_{۳n}$.

۱۶- کلیه ی توابع پوشای $f : N \to IN$ را پیدا کنید که در شرایط زیر صدق کنند :

برای هر $m, n \in IN$ $\qquad m | n \quad \Leftrightarrow \quad f(m) | f(n)$

۱۷- فرض کنید $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ اعدادی مثبت اند که $\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ = n$ و $\sum_{i=۱}^{n} x_i \geq s > ۰$ و $۰ \leq \lambda \leq ۱$ ثابت کنید دست کم $\left[\frac{S^۲(۱-\lambda)^۲}{n}\right]$ تا ا ز ا ین عدد ها بیش تر از $\frac{\lambda s}{n}$ است.

۱۸- فرض کنید تابع $F : [۰ , ۱] \to R$ با شرایط i) $f(۰) = ۰$ و ii) f' صعودی؛ داده شده است. ثابت کنید $\frac{f(x)}{x}$ بر روی بازه ی $(۰ , ۱]$ صعودی است.

۱۹- اگر G یک گروه باشد و A و B دو زیر گروه متناهی آن ثابت کنید تعداد اعضای مجموعه ی AB برابر است با $\frac{|A||B|}{|A \cap B|}$. (که در آن $AB = \{ab \,|\, a \in A, b \in B\}$).

۲۰- برای $i = ۱,۲,\ldots,n$ می دانیم $a_i \geq ۱$، نشان دهید :

$$(۱+a_۱)(۱+a_۲)\ldots(۱+a_n) \geq \frac{۲^n}{n+۱}(۱+a_۱+a_۲+\ldots+a_n)$$

۲۱- $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ اعداد حقیقی دلخواهی هستند، نشان دهید :

$$\frac{x_۱}{۱+x_۱^۲} + \frac{x_۲}{۱+x_۱^۲+x_۲^۲} + \ldots + \frac{x_n}{۱+x_۱^۲+x_۲^۲+\ldots+x_n^۲} < \sqrt{n}$$

۲۲- همه ی توابع $f : Z \to Z$ را بیابید که برای هر $x, y, z \in Z$ داشته باشیم :

$$f(x^۳ + y^۳ + z^۳) = (f(x))^۳ + (f(y))^۳ + (f(z))^۳$$

۲۳- برای $n \ge ۲$ قرار دهید $M(n) = \{|a-b| : ab \overset{n}{\equiv} ۱ \,,\, ۱ \le a,b \le n\}$. ثابت کنید :

$$(i)\ M(n) \le \lfloor n - ۲\sqrt{n-۱} \rfloor$$

و تساوی بی نهایت مرتبه اتفاق می افتد.

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{M(n)}{n} = ۱$$

۲۴- مقدار مجموع زیر را پیدا کنید.

$$\frac{a_۱}{۲} + \frac{a_۲}{۲^۲} + \frac{a_۳}{۲^۳} + \ldots + \frac{a_k}{۲^k} + \ldots$$

که $\{a_n\}$ دنباله ای از اعداد است که به صورت زیر تعریف می شود :

$$a_۱ = ۱ \quad , \quad a_۲ = ۱ \quad , \quad a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} \quad n > ۲$$

۲۵- کلیه ی توابع $f : R \to IR$ را پیدا کنید به طوریکه برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم :

$$f(x + y\,f(x)) = f(f(x)) + x\,f(y)$$

۲۶- اعداد صحیح و مثبت a، b، c که در شرایط $b > ۲a$ و $c > ۲b$ صدق می‌کنند مفروض اند. ثابت کنید یک عدد حقیقی λ وجود دارد که قسمت اعشاری هر سه عدد $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ در بازه ی $\left(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right]$ قرار می‌گیرد.

۲۷- برای هر عدد صحیح و مثبت n ثابت کنید یک چند جمله ای با ضرایب صحیح موجود است که مقادیر آن چند جمله‌ای برای ۱,۲, ... ,n توان های متمایزی از ۲ هستند.

۲۸- تابع f که در شرط زیر صدق می کند مفروض است :

$$f(۱) + f(۲) + \ldots + f(n) = n^۲ f(n) \qquad , n \in N$$

اگر $f(۱) = ۹۹۹$، مقدار $f(۲۰۰۱)$ را در صورت امکان پیدا کنید.

۲۹- کلیه ی توابع $f : R \to IR$ را پیدا کنید که برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم :

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^۲ + y$$

۳۰- کمترین مقدار مجموع زیر را بیابید :

$$S = x_۱ + \frac{x_۲^۲}{۲} + \ldots + \frac{x_n^n}{n}$$

که x_i ها اعداد مثبتی هستند که در شرط $\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{x_i} = n$ صدق می کنند.

۳۱- تمام چند جمله ای های درجه ی ۲، $f(x)=ax^{2}+bx+c$ را در نظر بگیرید که $a<b$ و به ازای تمام x ها، $f(x)\geq 0$، کمترین مقدار $\frac{a+b+c}{b-a}$ را پیدا کنید.

۳۲- عددهای حقیقی و غیر صفر a، b ، c ، x، y ، z چنانند که :

$$c=ax+by \quad , \quad b=cz+ax \quad , \quad a=by+cz$$ یک

ثابت کنید : $2abc+ab+ac+bc-1=0$

***

سوالات نظریه اعداد

۱- فرض کنید $p>۲$ یک عدد اول باشد که۳، $p-۲$ را می شمارد. همچنین فرض کنید
$S=\{x^۲+y^۲+۱ \mid$ اعداد صحیح هستند y,x ، $۱\le x,y\le p-۱\}$
ثابت کنید حداکثر $p-۱$ عضو S بر P بخش پذیرند.

۲- دنباله ی $c_۱, c_۲, \dots, c_n$ از اعداد طبیعی را «کامل» گوییم هرگاه هر عدد طبیعیm در فاصله‌ی۱ تا $\sum_{i=۱}^{n} c_i$ را بتوان به صورت $\sum_{i=۱}^{n} \frac{c_i}{a_i}$ نوشت که a_iها اعدادی طبیعی اند. به ازای هر عدد طبیعی n حداکثر مقدار c_n چه قدر است؟

۳- برای هر عدد صحیح و مثبت n، فرض کنید $d(n)$، تعداد مقسوم علیه های مثبتn باشد. کلیه اعداد صحیح و مثبت n را پیدا کنید که $(d(n))^۳=۴n$.

۴- فرض کنید c,b,a اعداد صحیح و مثبت و دو به دو نسبت به هم اول باشند. عدد صحیح و مثبت n را "خوب" می‌نامیم اگر اعداد صحیح و مثبت z, y, x موجود باشند که $n=bcx+aby+caz$. تعداد اعداد خوب را مشخص کنید.

۵- مقسوم علیه های مثبت و فرد اعداد ۱،۲، ... ، n را در نظر بگیرید، مجموع آنها را پیدا کنید، مشابه این کار را برای مقسوم علیه های مثبت و زوج انجام دهید. ثابت کنید این دو مجموع حداکثر به اندازه n با یکدیگر تفاوت دارند.

۶- ثابت کنید بی نهایت عدد مرکب n وجود دارد که اگر $(a,n)=۱$ آنگاه $a^{n-k} \overset{n}{\equiv} ۱$ است. ($k\ge ۲$ عدد ثابت و دلخواه است.)

۷- تمام جوابهای معادله‌ی سیـاله‌ی زیر را در مجموعه ی اعداد صحیح بدست آورید :

$$۱۹^x+۷^y=t^۳$$

۸- فرض کنید $p\ge ۵$ عددی اول باشد. نشان دهید عددی صحیح مانند a وجود دارد که $۱\le a\le p-۲$ به طوری که $p^۲$ هیچکدام از دو عدد $a^{p-۱}-۱$ و $(a+۱)^{p-۱}-۱$ را عاد نمی کند. (نمی شمارد!)

۹- C عددی طبیعی است. c_1 و c_3 و c_7 و c_9 نشان دهنده ی تعداد مقسوم علیه های c هستند که به ترتیب رقم یکان آنها ۱ ، ۳ ، ۷ ، ۹ می باشد. (بسط اعشاری) نشان دهید : $c_3 + c_7 \le c_1 + c_9$.

۱۰- سه عدد مربع کامل دو رقمی را پشت سر هم نوشته ایم، عدد شش رقمی حاصل نیز مربع کامل است. آن عدد را پیدا کنید.

۱۱- فرض کنید k عددی صحیح و نامنفی باشد و اعداد صحیح a_1 ، a_2 ، ... ، a_n طوری باشند که در تقسیم بر $n + k$ حداقل $2k$ باقی مانده متمایز ایجاد کند. ثابت کنید حاصل جمع تعدادی از a_i ها بر $n + k$ بخشپذیر است.

۱۲- $\pi(n)$ نشان دهنده ی تعداد اعداد اول کوچکتر یا مساوی n می باشد که $n \in N$. اگر ۳۳ و ۸ و ۶ و ۴ و $n = 2$، دیده می شود $\pi(n) \mid n$ ($\pi(n)$ عاد می کند n را). آیا نامتناهی عدد طبیعی مانند n داریم که $\pi(n) \mid n$؟ چـرا؟

۱۳- ثابت کنید اگر عبارت $(x, y \in R)$ $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ به ازای ۴ مقدار متوالی و طبیعی n عددی صحیح باشد، آنگاه به ازای هر $n \in N$ هم عددی صحیح خواهد بود.

۱۴- چند عدد طبیعی $n \in N$ وجود دارد که هر دوی $n - 1$ و $\frac{n(n+1)}{2}$ مربع کامل باشند.

۱۵- فرض کنید n یک عدد صحیح و مثبت و d یک مقسوم علیه $2n^2$ باشد، ثابت کنید $n^2 + d$ نمی تواند یک مربع کامل باشد.

۱۶- فرض کنید n یک عدد صحیح و مثبت، $p > 2$ یک عدد اول و d یک مقسوم علیه pn^2 باشد. ثابت کنید $n^2 + d$ حداکثر برای یک مقدار d می‌تواند مربع کامل باشد.

۱۷- فرض کنید $a > 1$ یک عدد صحیح و مثبت و فرد باشد. کوچکترین عدد صحیح و مثبت n را پیدا کنید به طوریکه 2^{2000} یک مقسوم علیه $a^n - 1$ باشد.

۱۸- کلیه ی سه تایی های (a, m, n) از اعداد صحیح و مثبت را پیدا کنید که $a^m + 1$ عدد $(a+1)^n$ را بشمارد.

۱۹- برای اعداد صحیح و مثبت m و n ، فرض کنید : $T(m,n)=\gcd(m,\frac{n}{\gcd(m,n)})$

الف) ثابت کنید بی نهایت زوج از اعداد صحیح و مثبت (m,n) وجود دارند که $T(m,n)>۱$ و $T(n,m)>۱$.

ب) آیا یک زوج (m,n) وجود دارد به طوریکه $T(m,n)=T(n,m)>۱$

۲۰- ثابت کنید هر عدد گویای مثبت بصورت $\frac{a^۳+b^۳}{c^۳+d^۳}$ قابل نمایش است که d, c, b, a اعداد صحیح و مثبت اند.

۲۱- چهار جمله ی نخست یک دنباله عبارت است از ۱و ۸ و ۳ و ۱ و از جمله چهارم به بعد هر جمله برابر است با رقم سمت راست مجموع چهار جمله ی قبل از آن، آیا در این دنباله به ردیف چهار جمله ۸ و ۹ و ۷ و ۱ می رسیم؟

***

پیوست ها

« نشانه ها »

« قضایای مهم »

« طبقه بندی موضوعی سوالات »

پیوست ۱ :

نشانه‌ها

نشانه‌های مجموعه‌ی اعداد و میدان‌ها :

Z	مجموعه‌ی اعداد صحیح
Z^+	مجموعه‌ی اعداد صحیح و مثبت
Z_n	مجموعه‌ی اعداد صحیح به هنگ n
Q	مجموعه‌ی اعداد گویا
Q^+	مجموعه‌ی اعداد گویا و مثبت
R	مجموعه‌ی اعداد حقیقی
R^+	مجموعه‌ی اعداد حقیقی و مثبت
R^n	مجموعه‌ی n تایی‌ها از اعداد حقیقی
C	مجموعه‌ی اعداد مختلط
$[x^n]\ (P(x))$	ضریب جمله x^n در چند جمله‌ای $P(x)$
$\deg P$	درجه چند جمله‌ای $P(x)$
$\deg(K/k)$	درجه میدان توسعه یافته K/k
$F[x]$	حلقه چند جمله‌ای‌ها که ضرایب آنها در میدان F است.
$Q(r)$	میدان اعداد مختلط $\frac{g(r)}{h(r)}$ که $h(x) \in Q[x]$ و $g(x)$ و $h(r) \neq 0$

نشانه‌های مجموعه‌ها، منطقی و هندسی

$\Leftrightarrow$	اگر و تنها اگر
$\Rightarrow$	در نتیجه (معادل است)
$A \subset B$	A زیر مجموعه محض B است
$A \subseteq B$	A زیر مجموعه B است
$A \setminus B$	A منهای B
$A \cap B$	اشتراک مجموعه‌های A و B
$A \cup B$	اجتماع مجموعه‌های A و B
$a \in A$	عضو a متعلق است به مجموعه A
AB	پاره خط AB : همچنین طول پاره خط AB
$\overrightarrow{AB}$	بردار AB
$[F]$	مساحت شکل F

پیوست ۲ :

قضایای مهم و کاربردی :

اصل لانه کبوتری : اگر n شی در $k < n$ جعبه قرار بگیرند، آنگاه جعبه ای وجود دارد که حداقل شامل دو شی است.

دستگاه همساز : چهار نقطه A, B, C, D را یک دستگاه همساز نامیده و با $(ABCD)$ نمایش می دهیم اگر C و D مزدوج همساز یکدیگر نسبت به A و B باشند.

انعکاس به مرکز O و شعاع r : برای یک نقطه O در صفحه و عدد حقیقی $r > 0$، انعکاس حول O به شعاع r هر نقطه $P \neq O$ را به نقطه ی P' روی نیمخط $\overrightarrow{OP}$ می برد که $OP.OP' = r^2$ همچنین این نگاشت را انعکاس حول w، دایره به مرکز O و شعاع r نیز می نامیم. خواص مهم انعکاس عبارتند از :

۱- خطوطی که از O می گذرند روی خودشان منعکس می شوند. (یک نقطه خاص روی خط ثابت نمی ماند)

۲- خطوطی که از O نمی گذرند به دایره ای گذرنده از O منعکس می شوند و بر عکس.

۳- دایره هایی که از O نمی گذرند به دایره ای دیگر که از O نمی گذرد منعکس می شوند.

۴- یک دایره غیراز w روی خودش منعکس شود (نه نقطه به نقطه، درحالت کلی اگر و فقط اگر بر w عمود باشد، یعنی w را قطع کند و مماس بر دایره و w در نقاط اشتراک بر هم عمود باشند.

تابع تناوبی (متناوب) : $f(x)$ تناوبی با دوره تناوب $T > 0$ است اگر برای هر x،

$$f(x+T) = f(x)$$

تابع با تقعر به سمت بالا (پایین) : تابع $f(x)$ با تقعر به سمت بالا (پایین) روی $[a,b]$است اگر $f(x)$ زیر (روی) خط واصل $(a_1, f(a_1))$ و $(a_2, f(a_2))$، قرار بگیرد، برای هر :

$$a \le a_1 < x < b_1 \le b$$

تابع مولد : اگر $a_0, a_1, a_2, \dots$ دنباله ای از اعداد باشد، آنگاه تابع مولد این دنباله سری نامتناهی زیر است :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

تبدیل قطب- قطبی : فرض کنید C دایره ای به مرکزO و شعاع R باشد. تبدیل قطب- قطبی نسبت به C، نقاط متمایز با O را به خطوط و خطوطی که از O نمی گذرند را به نقاط می برد. اگر $P \neq O$ یک نقطه باشد آنگاه قطبی P خط P' است که بر نیم خط $\overrightarrow{OP}$ عمود بوده و در رابطه زیر صدق می کند.

$$d(O,P)\,d(O,P') = R^{2}$$

که $d(A,B)$ نمایانگر فاصله بین A و B است. اگر q خطی باشد که از O نمی گذرد، آنگاه قطب q نقطه Q' است که قطبی q دارد.

تجانس : یک تجانس (تشابه مرکزی) تبدیلی است که یک نقطه O را ثبات نگه می دارد (مرکز تجانس) و نقاط دیگر p را به P' می برد به طوریکه P' و P وO هم خط باشند و نسبت $OP : OP' = k$ ثابت باشد. (K می تواند مثبت یا منفی باشد) K نسبت تجانس نامیده می شود.

جایگشت : فرض کنید S یک مجموعه باشد. یک جایگشت از S تابع یک به یک و پوشایی $\pi : S \to S$ است. اگر $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ یک مجموعه متناهی باشد می توان یک جایگشت π از S را بصورت $\{y_1, \dots, y_n\}$ نمایش داد که : $y_k = \pi(x_k)$.

چند ضلعی محاطی : یک چند ضلعی که بتوان آن را در دایره محاط کرد.

خط اویلر : مرکز ارتفاعی، مرکز دایره محیطی هر مثلث هم خط هستند و مرکز ثقل فاصله مرکز ارتفاعی و مرکز دایره محیطی را به نسبت دو به یک تقسیم می کند. خطی که این سه نقطه روی آن قرار دارند خط اویلر مثلث نامیده می شود.

خط سوایی : یک خط سوایی در یک مثلث پاره خطی است که یک رأس را به نقطه ای از ضلع مقابل آن وصل می کند.

خط سیمسون : برای هر نقطه P روی دایره محیطی مثلث ABC، پای های عمود بر اضلاع از نقطه P روی یک خط قرار می گیرند که خط سیمسون P نسبت به مثلث ABC نامیده می شود.

دایره فوئرباخ : پای های سه ارتفاع هر مثلث، وسط های سه ضلع و وسط پاره خط واصل سه رأس و مرکز ارتفاعی همه روی یک دایره قرار می گیرند که آن را دایره فوئرباخ یا دایره نه نقطه مثلث می نامند. فرض کنید R شعاع دایره محیطی مثلث باشد.

دایره نه نقطه مثلث دارای شعاع $\frac{R}{۲}$ است و مرکز آن، وسط پاره خط واصل بین مرکز ارتفاعی و مرکز دایره محیطی مثلث است.

دایره نه نقطه : دایره فوئرباخ را ببینید.

دنباله فیبوناچی : دنباله ... , $F_۰$, $F_۱$ که به صورت بازگشتی و به شکل $F_۰ = ۰$, $F_۱ = ۱$, $F_{n+۲} = F_{n+۱} + F_n$ تعریف می شود.

دوایر محاطی خارجی : برای هر مثلث ABC ، چهار دایره وجود دارند که بر اضلاع AB, BC, CA مماس هستند. یکی دایره محاطی داخلی است که درون مثلث قرار می گیرد. یکی در جهت مخالف خط BC نسبت به A و دایره محاطی خارجی مقابل به A نامیده می شود و مشابهاً برای دو ضلع دیگر نیز دو دایره داریم. مرکز دایره محاطی خارجی مقابل به رأس A روی نیمساز داخلی A و نیمساز خارجی C, B قرار می گیرد.

روابط مثلثاتی :

$$\text{Sin}^۲x + \text{Cos}^۲x = ۱$$
$$۱ + \text{Cot}^۲x = \text{Csc}^۲x$$
$$۱ + \text{tg}^۲x = \text{Sec}^۲x$$

فرمول های جمع و تفریق :

$$\text{Sin}(a \pm b) = \text{Sin}\,a\,\text{Cos}\,b \pm \text{Cos}\,a\,\text{Sin}\,b$$
$$\text{Cos}(a \pm b) = \text{Cos}\,a\,\text{Cos}\,b \mp \text{Sin}\,a\,\text{Sin}\,b$$
$$\text{tg}(a \pm b) = \frac{\text{tg}\,a \pm \text{tg}\,b}{۱ \mp \text{tg}\,a\,\text{tg}\,b}$$

فرمول های دو برابر قوس :

$$\text{Sin}\,۲a = ۲\,\text{Sin}\,a\,\text{Cos}\,a$$
$$= \frac{۲\,\text{tg}\,a}{۱ + \text{tg}^۲a}$$
$$\text{Cos}\,۲a = ۲\,\text{Cos}^۲a - ۱ = ۱ - \text{Sin}^۲a$$
$$= \frac{۱ - \text{tg}^۲a}{۱ + \text{tg}^۲a}$$
$$\text{tg}\,۲a = \frac{۲\,\text{tg}\,a}{۱ - \text{tg}^۲a}$$

فرمول های سه برابر قوس :

$$\operatorname{Sin} ۳a = ۳\operatorname{Sin} a - ۴\operatorname{Sin}^۳ a$$

$$\operatorname{Cos} ۳a = ۴\operatorname{Cos}^۳ a - ۳\operatorname{Cos} a$$

$$\operatorname{tg} ۳a = \frac{۳\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^۳ a}{۱ - ۳\operatorname{tg}^۲ a}$$

فرمول های نصف قوس :

$$\operatorname{Sin}^۲ \frac{a}{۲} = \frac{۱ - \operatorname{Cos} a}{۲}$$

$$\operatorname{Cos}^۲ \frac{a}{۲} = \frac{۱ + \operatorname{Cos} a}{۲}$$

فرمول های جمع به ضرب :

$$\operatorname{Sin} a + \operatorname{Sin} b = ۲\operatorname{Sin} \frac{a+b}{۲} \operatorname{Cos} \frac{a-b}{۲}$$

$$\operatorname{Cos} a + \operatorname{Cos} b = ۲\operatorname{Cos} \frac{a+b}{۲} \operatorname{Cos} \frac{a-b}{۲}$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{Sin}(a+b)}{\operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b}$$

فرمول های تفاضل به ضرب :

$$\operatorname{Sin} a - \operatorname{Sin} b = ۲\operatorname{Sin} \frac{a-b}{۲} \operatorname{Cos} \frac{a+b}{۲}$$

$$\operatorname{Cos} a - \operatorname{Cos} b = -۲ \operatorname{Sin} \frac{a-b}{۲} \operatorname{Cos} \frac{a+b}{۲}$$

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{Sin}(a-b)}{\operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b}$$

فرمول های ضرب به جمع :

$$۲\operatorname{Sin} a \operatorname{Cos} b = \operatorname{Sin}(a+b) + \operatorname{Sin}(a-b)$$

$$۲\operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b = \operatorname{Cos}(a+b) + \operatorname{Sin}(a-b)$$

$$۲\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin} b = -\operatorname{Cos}(a+b) + \operatorname{Cos}(a-b)$$

ریشه واحد : جواب معادله $Z^n - ۱ = ۰$.

زاویه بروکار : نقطه بروکار را ببینید.

سه تایی فیثاغورثی : سه تایی (a,b,c) از اعداد یک سه تایی فیثاغورثی نامیده می شود. اگر یک مثلث قائم الزاویه با اضلاع به طول c, b, a موجود باشد. اگر c طول وتر مثلث مفروض باشد، این تعریف معادل است با : $c^۲ = a^۲ + b^۲$

اگر c,b,a اعدادی صحیح باشند، سه تایی، اولیه نامیده می شود هر گاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک c, b, a برابر ۱ باشد. همه سه تایی های فیثاغورثی اولیه با معادلات پارامتری زیر به دست می آیند :

$$a = 2uv \qquad b = u^2 - v^2 \qquad c = u^2 + v^2$$

که $u > v$ دو عدد صحیح نسبت به هم اول هستند که هر دو فرد نیستند.

ضریب دو جمله ای :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ضریب x^k در $(1+x)^n$.

عدد فرما : عددی به شکل 2^{2^n} که n یک عدد صحیح مثبت است.

عدد مثلثی : عددی به شکل $\frac{n(n+1)}{2}$ که n یک عدد صحیح مثبت است.

فرمول اویلر : فرض کنید O و I به ترتیب مرکز، دوایر محیطی و محاطی داخلی مثلثی باشند و R و r شعاع های این دو دایره آنگاه :

$$OI^2 = R^2 - 2rR$$

فرمول دوموآور : برای هر زاویه α و هر عدد صحیح n :

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

فرمول هرون : مساحت مثلثی به طول اضلاع c, b, a برابر است با :

$$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

که : $S = \frac{(a+b+c)}{2}$.

قضیه سینوس ها : .در مثلث ABC با شعاع دایره محیطی R :

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB} = 2R$$

قضیه استیوارت : در مثلث ABC، با خط سوایی $\overline{AD}$، قرار دهید : $a = BC$ و $b = AC$ و $c = AB$ و $m = BD$ و $n = DC$ و $d = AD$ آنگاه :

$$d^2a + man = c^2n + b^2m$$

این فرمول را می توان برای بیان طول ارتفاع ها و نیمسازهای مثلث بر حسب طول اضلاع بکار برد.

قضیه اویلر : برای اعداد صحیح نسبت به هم اول a و m که $m \geq 1$: $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{a}$ که $\varphi(m)$ تعداد اعداد صحیح مثبت کوچکتر از یا مساوی با m است که نسبت به m اولند.

قضیه باقیمانده چینی : فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت باشد. و $a_1, a_2, \ldots, a_k$ اعداد صحیح و $n_1, n_2, \ldots, n_k$ اعداد صحیح و مثبت که دو به دو نسبت به هم اولند. آنگاه عدد صحیح یکتایی a که $0 \leq a < \prod_{i=1}^{k} ni$ موجود است که $a \equiv a_i \pmod{n_i}$ برای $i = 1, 2, \ldots, k$.

قضیه پیک : فرض کنید P یک چند ضلعی در صفحه مختصات باشد که خودش را قطع نمی کند و رئوس آن نقاط مشبکه ای هستند. فرض کنید B تعداد نقاط مشبکه ای روی مرز P و I تعداد نقاط مشبکه ای درون آن باشد. آنگاه مساحت P برابر است با :

$$I + \frac{1}{2}B - 1$$

قضیه بطلمیوس : در چهار ضلعی محدب محاطی ABCD :

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC$$

قضیه دزارگ : در دو مثلث رئوس متناظر را با پاره خط هایی به هم وصل می کنیم. این پاره خط ها همرس یا موازیند اگر و فقط اگر نقاط تقاطع اضلاع متناظر دو مثلث هم خط باشند.

قضیه دو جمله ای :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

قضیه سوا و شکل مثلثاتی آن : فرض کنید AD و BE و CF سه خط سوایی مثلث ABC باشند. گزاره های زیر با هم معادلند.

(i) CF, BE, AD همرسند.

(ii) $$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=۱$$

(iii) $$\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC}.\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA}.\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle DAB}=۱$$

قضیه فوئرباخ : دایره نه نقطه هر مثلث بر دایره محاطی داخلی و سه دایره محاطی خارجی مماس است.

قضیه قوت نقطه : برای یک نقطه ثابت P و دایره ثابت w خطی از P رسم کنید که دایره را در X و Y قطع کند. قوت نقطه P نسبت به w با حاصل ضرب PX.PY تعریف می شود. قضیه قوت نقطه بیان می کند که این مقدار ثابت است. یعنی به چگونگی رسم خط P بستگی ندارد همچنین توجه کنید که مهم نیست P روی دایره، درون یا بیرون آن باشد.

قضیه کوچک فرما : اگر P یک عدد اول باشد آنگاه : $a^p \equiv a \pmod p$.

قضیه لوکاس : فرض کنید p یک عدد اول باشد. a و b دو عدد صحیح مثبت به طوریکه :

$$a = a_k p^k + a_{k-۱} p^{k-۱} + \dots + a_۱ p + a_۰$$

$$b = b_k p^k + b_{k-۱} p^{k-۱} + \dots + b_۱ p + b_۰$$

که $۰ \le a_i , b_i < p$ اعداد صحیح باشند. آنگاه :

$$\binom{a}{b} \equiv \binom{a_k}{b_k}\binom{a_{k-۱}}{b_{k-۱}}\dots\binom{a_۱}{b_۱}\binom{a_۰}{b_۰} \pmod p$$

قضیه منلائوس : فرض کنید G,F و H به ترتیب نقاطی روی اضلاع CA, BC و AB از مثلث ABC باشند.آنگاه H, G, F هم خط هستند اگر و فقط اگر، با استفاده از طول جهت دار:

$$\frac{AH}{HB}.\frac{BF}{FC}.\frac{CG}{GA}=-۱$$

قضیه هلی : اگر $n > d$ و $C_۱, C_۲, \dots, C_n$ زیرمجموعه هایی محدب از IR^d باشند که هر $d+۱$ تای آنها اشتراک ناتهی داشته باشند آنگاه نقطه ای وجود دارد که در همه مشترک است.

ماتریس : ماتریس یک آرایه مستطیل شکل از اشیاء است. ماتریس A، با m سطر و n ستون یک ماتریس $m \times n$ نامیده می شود. سطر i ام و ستون j ام ماتریس A را با a_{ij} نشان می دهیم.

اگر ماتریسی تعداد سطرها و ستونهای برابری داشته باشد ماتریس مربعی نامیده می شود. اگر A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد قطر اصلی آن درایه های $a_{۱۱}, a_{۲۲}, \dots, a_{nn}$ هستند.

مثلث های متجانس : دو مثلث ABC و DEF متجانس هستند اگر اضلاع آنها موازی باشند فرض کنید $AB \parallel DE$ و $BC \parallel EF$ و $CA \parallel FD$. در اینصورت طبق حالت خاصی از قضیه دزارگ خطوط AD و BE و CF در نقطه X همرس هستند. بعلاوه با یک تجانس به مرکز X مثلث ABC بر DEF منطبق می شود.

قضیه واندرموند : برای اعداد صحیح مثبت n و k، عدد صحیح مثبت N موجود است به طوریکه خاصیت زیر برقرار باشد :

بین هر N عدد صحیح متوالی که هر یک بایکی از n رنگ موجود رنگ آمیزی شده اند، k عدد وجود دارند که تشکیل تصاعد عددی می دهند.

مجموع آبل : برای عدد صحیح $n > ۰$ و اعداد حقیقی $a_۱, \dots, a_n$ و $b_۱, \dots, b_n$:

$$\sum a_i b_i = b_n \sum_{i=۱}^{n} a_i + \sum_{i=۱}^{n-۱} ((b_i - b_{i+۱}) \sum_{j=۱}^{i} a_j)$$

محور اصلی : فرض کنید $w_۱$ و $w_۲$ دو دایره غیر هم مرکز باشند. مکان هندسی نقاطی که قوت برابری نسبت به این دایره دارند محور اصلی دو دایره $w_۱$ و $w_۲$ نامیده می شود. اگر $w_۱$ و $w_۲$ و $w_۳$ سه دایره باشند که مراکز آنها روی یک خط نباشند، آنگاه دقیقاً یک نقطه وجود دارد که قوتهای آن نسبت به سه دایره با هم برابرند. این نقطه، مرکز اصلی $w_۱$ و $w_۲$ و $w_۳$ نامیده می شود.

مرکز ارتفاعی یک مثلث : محل تقاطع ارتفاع ها در یک مثلث.

مرکز ثقل چهار وجهی : نقطه اشتراک پاره خط های واصل وسط یال های روبه رو به هم، که برابر است با نقطه اشتراک پاره خط واصل هر رأس و مرکز ثقل وجه روبه رویش.

مرکز ثقل مثلث : محل تقاطع میانه ها در مثلث.

مـــزدوج همـــساز : فـرض کنیـد $D,\ C,\ B,\ A$ بـه ترتیـب چهـار نقطـه واقـع بـر یـک خـط باشـند اگـر $AC:CB=AD:DB$ آنگاه نقاط C و D مزدوج همساز یکدیگر نسبت به نقاط A و B نامیده می شوند و می گـوئیم AB به طور همساز توسط C و D تقسیم می شود. اگر C و D نـسبت بـه B و A همـساز باشـند، آنگـاه A و B نیـز نسبت به C و D همساز هستند.

نامساوی برنولی : برای $x>-۱$ و $a>۱$:

$$(۱+x)^a \geq ۱+ax$$

و تساوی موقعی اتفاق می افتد که $a=۰$

نامساوی کوشی- شوارتز : برای اعداد حقیقی $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ و $b_۱, b_۲, \dots, b_n$

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ \cdot \sum_{i=۱}^{n} b_i^۲ \geq \left(\sum_{i=۱}^{n} a_i b_i\right)^۲$$

که تساوی وقتی و فقط وقتی رخ می دهد که a_i و b_i برای $i=۱,۲,\dots,n$ متناسب باشند.

نامساوی میانگین توانی : فرض کنید $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ اعداد مثبتی باشـند کـه $a_۱+a_۲+\dots+a_n=۱$ بـرای اعـداد مثبت $x_۱, \dots, x_n$ تعریف کنید.

$$M_{-\infty}=\min\{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$$

$$M_{\infty}=\max\{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$$

$$M_{۰}=x_۱^{a_۱}, x_۲^{a_۲}, \dots, x_n^{a_n}$$

$$M_t=(a_۱x_۱^t+a_۲x_۲^t+\dots+a_nx_n^t)^{\frac{۱}{t}}$$

که t یک عدد حقیقی نا صفر است. آنگاه برای $s\leq t$:

$$M_{-\infty}\leq M_S\leq M_t\leq M_{\infty}$$

نامساوی میانگین حسابی- همساز : اگر $a_۱, a_۲, \dots, a_n$، n عدد صحیح باشـند، آنگـاه میـانگین حـسابی آنهـا بـه صورت $\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} a_i$ و میانگین همساز آنها بصورت $\frac{۱}{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{a_i}}$ تعریف می شود. نا مساوی میانگین حسابی- همـساز بیـان می کند که :

$$\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} a_i \geq \frac{۱}{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{a_i}}$$

که تساوی رخ می دهد اگر و فقط اگر $a_1 = a_2 = ... = a_n$. این نامساوی حالت خاصی از نامساوی میانگین توانی است.

نامساوی میانگین حسابی - هندسی : اگر $a_1, ..., a_n$ ، n عدد نامنفی باشند، میانگین هندسی آنها بصورت $(a_1 a_2 ... a_n)^{\frac{1}{n}}$ تعریف می شود. نامساوی میانگین حسابی - هندسی می گوید که :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq (a_1 ... a_n)^{\frac{1}{n}}$$

که تساوی رخ می دهد اگر و فقط اگر $a_1 = ... = a_n$. این نامساوی نیز حالت خاصی از نامساوی میانگین توانی است.

نامساوی میانگین حسابی - میانگین مربعات : برای اعداد مثبت $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

نامساوی مینکوفسکی : برای عدد صحیح مثبت n، عدد حقیقی $r \geq 1$ و اعداد حقیقی مثبت $a_1, a_2, ..., a_n$ و $b_1, b_2, ..., b_n$ داریم :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_n + b_n)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

نامساوی ینسن : اگر جهت تقعر تابع f روی $[a, b]$ به سمت بالا باشد و $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ اعداد روی نامنفی با مجموع ۱ باشند آنگاه برای هر $x_1, x_2, ..., x_n$ در بازه $[a, b]$.

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n)$$

اگر جهت تقعر f به سمت پایین باشد جهت نا مساوی عوض می شود.

نقاط بروکار : برای هر مثلث ABC، نقطه ی یکتای P وجود دارد که $\angle ABP = \angle BCP = \angle CAP$ و نقطه یکتای Q به طوریکه $\angle BAQ = \angle CBQ = \angle ACQ$. نقاط P و Q نقاط بروکار مثلث ABC

نامیده می شوند. به علاوه $\angle BAQ$ و $\angle ABP$ با هم برابرندو مقدار مشترک آنها یا ϕ، زاویه بروکار مثلث ABC نامیده می شود.

نقطه شبکه ای : در صفحه دکارتی، یک نقطه شبکه ای (x, y) نقطه ای است که x و y هر دو صحیح باشند.

همنهشتی : برای اعداد صحیح b, a ، $n \geq ۱$ ، $a = b \pmod{n}$ (a همنهشت با b است به پیمانه n) یعنی $a - b$ بر n بخش پذیر است.

***

پیوست ۳ :

طبقه بندی موضوعی سوالات

جبر

روسیه سفید	99-10.1, 11.1; 99-S-6
بلغارستان	99-R4-1
کانادا	99-1
چین	99-2
چکسلواکی	99-6
مجارستان	99-8, 11, 17
ایران	99-R2-1
ایرلند	99-1, 6
ژاپن	99-3, 4
لهستان	99-4
رومانی	99-7.1, 7.2, 10.1; 99-S-3, 6, 9
روسیه	99-R5-9.1, 10.2, 10.5
اسلوونی	99-1
اوکراین	99-1
انگلیس	99-1, 4
ویتنام	99-1, 3
آسیای شرقی	99-1
اتریش - لهستان	99-3, 6
جمهوری چکسلواکی	99-4
اسرائیل	99-T-2
ایالات متحده آمریکا	99-1, 6
سنت پترزبورگ (روسیه)	99-9.2, 10.1, 10.2, 10.5

۱) هر کدام از حروف R، S، I و T به ترتیب نمایانگر مرحله، مسابقه انتخابی، دور فردی و دور تیمی است.

ترکیبیات

بلاروس	99-10.3, 11.2; 99-S-10, 12
برزیل	99-2, 4
بلغارستان	99-R3-3; 99-R4-4
کانادا	99-4
چین	99-3, 6
جمهوری چکسلواکی	99-4
فرانسه	99-4
هنگ کنگ	99-2
مجارستان	99-7
ایران	99-R1-6;99-R3-4
ایرلند	99-4
ایتالیا	99-4, 5
ژاپن	99-1
کره	99-5
هلند	99-2
رومانی	99-S-11, 12
روسیه	99-R4-8.7, 8.8, 9.1, 9.4, 9.5, 10.7, 11.3, 11.6; 99-R5-9.4, 9.5, 9.8, 10.1, 10.4, 10.8
تایوان	99-2, 5
ترکیه	99-3, 5
رومانی	99-S-11, 12
اتریش – لهستان	99-1
جمهوری چکسلواکی	99-3
ایالات متحده آمریکا	99-3
المپیاد del Cono Sur	99-3
سنت پترزبورگ (روسیه)	99-9.3, 9.7, 9.8

هندسه ترکیبیاتی

بلغارستان	99-R-6
مجارستان	99-18
ایران	99-R2-5; 99-R3-3
روسیه	99-R4-10.3, 11.4; 99-R5-11.6
ترکیه	99-9
آسیای شرقی	99-5
اتریش – لهستان	99-9

نظریه اعداد ترکیبیاتی

بلاروس	99-11.3
مجارستان	99-4
ایران	99-R1-2
ایرلند	99-5
روسیه	99-R4-10.8
اسلونی	99-4
سنت پترزبورگ(روسیه)	99-11.5, 11.8

نظریه مجموعه و آنالیز ترکیبی

ایران	99-R3-1, 5
ایتالیا	99-10
مجارستان – اسرائیل	99-I-4

نظریه گراف

سنت پترزبورگ (روسیه)	99-11.7

معادلات تابعی

بلاروس	99-S-1, 9
مجارستان	99-4
ایران	99-R2-3

ایرلند	99-7
ایتالیا	99-9
کره	99-2, 4
روسیه	99-R5-1.2
اسلوونی	99-2
ترکیه	99-7
ویتنام	99-6, 10
جمهوری چکسلواکی	99-5

هندسه

بلاروس	99-10.4, 10.5, 11.4, 11.7; 99-S-5, 7, 8
برزیل	99-1, 5
بلغارستان	99-R3-2, 5; 99-R4-5
کانادا	99-2
چین	99-1
جمهوری چک اسلواکی	99-2, 3, 5
فرانسه	99-5
مجارستان	99-1, 2, 3, 9, 10
ایران	99-R1-3, 4; 99-R3-2
ایرلند	99-3, 10
ایتالیا	99-1, 3, 8
کره	99-1
هلند	99-1, 6
رومانی	99-7.3, 7.4, 8.3, 8.4, 9.1, 9.3; 99-S-2, 10
روسیه	99-R4-8.3, 8.6, 9.2, 9.8, 10.2, 10.6; 99-R5-9.3, 9.7, 10.3, 11.3, 11.5, 11.7
اسلوونی	99-3
تایوان	99-4
ترکیه	99-1, 4, 6
انگلیس	99-2, 7

انگلستان	99-6
ویتنام	99-2, 5, 8, 11
آسیای شرقی	99-3
اتریش – لهستان	99-4, 8
بالکان	99-1
مجارستان – اسرائیل	99-I-3; 99-T-1, 3
ایالات متحده آمریکا	99-2, 5
مدیترانه	99-2, 3
المپیاد Del Cono Sur	99-2
سنت پترزبورگ (روسیه)	99-9.4, 9.6, 10.7

نامساویها

بلاروس	99-10.2, 10.7, 11.5; 99-S-4
برزیل	99-3
کانادا	99-5
چین	99-5
فرانسه	99-3
مجارستان	99-5, 12, 14
ایران	99-R1-1
ایرلند	99-8
هلند	99-5
رومانی	99-8.2, 9.2, 9.4, 10.3, 10.4; 99-S-4, 5, 7
روسیه	99-R4-9.3, 11.5; 99-R5-99-R5;-9.6, 10.7
ترکیه	99-2, 8
اوکراین	99-2
انگلستان	99-4
آسیای شرقی	99-2
اتریش – لهستان	99-2
بالکان	99-4

جمهوری چک اسلواکی	99-1
مجارستان – اسرائیل	99-I-1, 6
سنت پترزبورگ (روسیه)	99-9.1, 10.6, 11.4

نا مساوی های هندسی

مجارستان	99-6, 15
ایران	99-R2-2
ژاپن	99-5
رومانی	99-10.2; S-8, 13
انگلستان	99-2
بالکان	99-3
المپیاد del Cono Sur	99-5, 6

نظریه اعداد

بلاروس	99-11.6; 99-S-2, 3, 11
مجارستان	99-3, 4, 13, 16
ایران	99-R1-5
ایرلند	99-2, 9
ایتالیا	99-2, 6, 7
ژاپن	99-2
کره	99-3
هلند	99-3
رومانی	99-8.1; 99-S-1
روسیه	99-R4-8.5, 9.7; 99-R5-11.1
تایوان	99-1, 3
اوکراین	99-3
انگلستان	99-3
ویتنام	99-12
آسیای شرقی	99-4

اتریش – لهستان	99-5, 7
بالکان	99-2
جمهوری چک اسلواکی	99-6
مجارستان – اسرائیل	99-I-2,5
ایالات متحده آمریکا	99-4
المپیاد del Cono Sur	99-1, 4
سنت پترزبورگ (روسیه)	99-9.5, 11.1, 11.3

منابع :

۱) T-Andreescu and Z-Feng, Mathematical Olympiads From Around The world, Mathematical Association of America, ۲۰۰۲

۲) کرمزاده امید علی، نتایج باورنکردنی در ریاضیات ، انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۷۸

۳) انجمن ریاضی ایران، واژنامه ریاضی و آمار (انگلیسی - فارسی ، فارسی - انگلیسی) مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۰

۴) یاگلوم، مسائل پیکار جوی ریاضی، یاسی پور، نشر علوم پایه، تهران، ۱۳۷۶

۵) هاوارد ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمه وحیدی اصل محمد قاسم، نشر دانشگاهی، ۱۳۷۹

۶) تابش یحیی، آشنایی با المپیاد ریاضی، موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف،۱۳۸۰

۷) نوربخش مقدم نیما، فصلنامه دانش پژوه، شماره ۲۳، انتشارات باشگاه دانش پژوهان جوان، زمستان ۱۳۸۴

۸) نوربخش مقدم نیما، جزوات دست نوشته المپیاد ریاضی (چاپ نشده)، اردوی باشگاه دانش پژوهان جوان، ۱۳۸۱