دانش پژوهان جوان
ناشر کتابهای المپیاد

کتاب های دانشگاهی و المپیادی

جلوه‌هایی از ترکیبات

مؤلف :

ویکتور برایانت

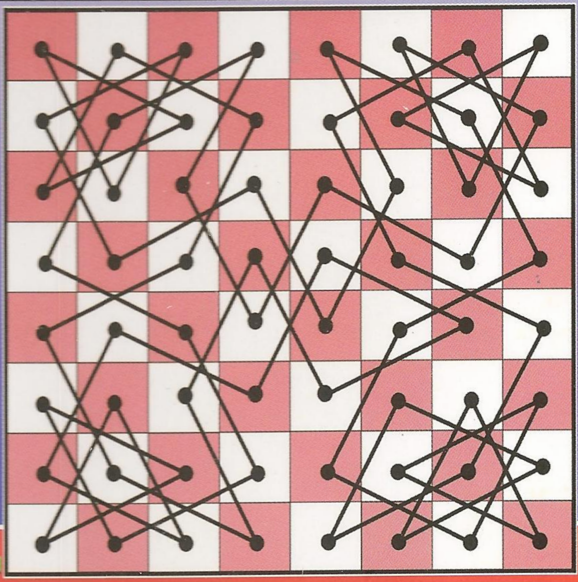
مترجمین :

عباس ثروتی

برنز کشوری المپیاد کامپیوتر ۱۳۷۹

مهدی محمدی

برنز کشوری المپیاد ریاضی ۱۳۷۹



ASPECTS OF COMBINATORICS

A wide-ranging introduction

- ترکیبیات یکی از مهم‌ترین و گسترده‌ترین شاخه‌های ریاضیات می‌باشد. این کتـاب مروری بر مبـاحث مختلفی از این شـاخه از ریـاضیات دارد و شـامل بسـط و توضیح موضوعـات مختلفی از جمله آنالیزترکیبی، نظریه گراف ها، روابط بازگشتی و ... می باشد.
ویژگی مهم این کتاب استفاده از مسائل و تمرین‌های مناسب و کافی در مورد مباحث بیان شده همراه با راهنمایی و حل آن ها می باشد.
- این کتاب منبعی مناسب برای استفاده دانشجویان علوم ریاضی و کامپیوتر، دانـش آموزان علاقـمند به شـرکت در المپیـادهای ریـاضی و کامپیـوتـر و تمامی علاقمندان به دانش ریاضی است.

بسم الله الرحمن الرحیم

جلوه‌هایی از ترکیبیات

مولف:

ویکتور برایانت

مترجمین:

عباس ثروتی

برنده مدال برنز کشوری المپیاد کامپیوتر ۱۳۷۹

مهدی محمدی

برنده مدال برنز کشوری المپیاد ریاضی ۱۳۷۹

سر شناسنامه	برایانت، ویکتور، ۱۹۴۵- Brayant, Victor
عنوان و نام پدیدآورنده	جلوه‌هایی از ترکیبیات/ ویکتور برایانت، مترجمین: عباس ثروتی، مهدی محمدی.
مشخصات نشر	تهران: دانش پژوهان جوان، ۱۳۸۴.
مشخصات ظاهری	۳۴۴ص.: مصور، نموذار.
شابک	۹۷۸-۹۶۴-۷۶۸۵-۵۹-۷
وضعیت فهرست‌نویسی	فیپا
ص.ع.به انگلیسی	Aspects of combinatories.
کتابنامه	ص.۳۳۵-۳۳۶.
موضوع	آنالیز ترکیبی
شناسه افزوده	الف. ثروتی، عباس، ۱۳۶۱ -، مترجم.
شناسه افزوده	ب. محمدی، مهدی، ۱۳۶۱- مترجم.
	ج. عنوان.
رده‌بندی کنگره	QA ۱۶۴/ب۴ج۸
رده‌بندی دیویی	۵۱۱/۶
شماره کتابشناسی ملی	۴۱۰۰۴-۸۳م

جلوه‌هایی از ترکیبیات

مؤلف	ویکتور برایانت
مترجمین	عباس ثروتی
	مهدی محمدی
چاپ پنجم	۱۳۹۰
تیراژ	۵۰۰۰ نسخه
قیمت	۷۰۰۰ تومان
شابک	۹۷۸-۹۶۴-۷۶۸۵-۵۹-۷
نـاشر	دانش‌پژوهان جوان

تهران: خیابان انقلاب، خیابان وحید نظری(بین خ منیری جاوید و خ ۱۲ فرودین) پلاک ۱۰۵ طبقه چهارم واحد ۱۱ صندوق پستی: ۱۳۱۴۵-۱۷۱۳

تلفن: ۶۶۴۹۶۳۶۳ ، ۶۶۴۹۸۹۹۸ دورنگار: ۶۶۹۵۳۲۵۰ سایت: www.irOlympiad.com

فهرست مندرجات

مقدمهٔ مؤلف

امروزه ترکیبیات به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات تعریف می‌شود که به بحث دربارهٔ مباحثی چون مجموعه‌ها، گراف‌ها، ماتریس‌ها و ... می‌پردازد. در حقیقت این موضوعات جزئی کاربردهای بسیاری در دیگر شاخه‌های ریاضیات دارند و این به عنوان یکی از جذابیت‌های این موضوع محسوب می‌شود. همچنین این شاخه از ریاضیات دارای جنبه‌های گوناگونی می‌باشد که دربارهٔ بعضی از آن‌ها در این کتاب بحث خواهیم کرد.

حدود یک دههٔ قبل، وقتی که برای اولین بار آموزش ترکیبیات وارد دوره‌های درسی دانشجویان می‌شود، این مطالب به نظر مباحث ساده‌ای می‌آمدند. امّا مجبوب شدن این مباحث در بین دانشجویان تا حد زیادی وابسته به این حقیقت بود که مسائلی که در این شاخه از ریاضیات به آن‌ها پاسخ داده می‌شد، مباحث کاربردی بودند، اگر چه پاسخ آن‌ها به اندازهٔ پاسخ دادن به مسائل سایر علوم مشکل بود.

مزیت دیگر این مبحث گستردگی موضوعات آن است که موجب می‌شود اگر دانشجویی یک بخش را به‌طور کامل متوجه نشد، بتواند با شروع مبحث جدید سیر مطالعاتی خود را ادامه دهد. حسن دیگر گستردگی این مبحث، قابلیت یادگیری مطالب جدید برای هر کس می‌باشد که با مطالعهٔ مقالات و کتب جدید به‌دست می‌آید.

در ابتدا ممکن است مباحث ترکیبیات کاملاً جدا از هم و بدون ارتباط به نظر برسند. امّا اگر کسی بخواهد برای تدریس در یک دورهٔ آموزشی شروع به جمع‌آوری مطالب کند، در این هنگام متوجه خواهد شد که بعضی از مباحث تا چه میزان با یکدیگر دارای رابطه می‌باشند. بسیاری از این رابطه‌ها بعد از مدت‌ها مطالعه در شاخه‌های مختلف بر فرد آشکار می‌شود. به عنوان مثال ارتباط جالبی که میان مسألهٔ «اتاق انتظار دکتر» از فصل اول و مسألهٔ «مهمانی» از فصل دوازدهم وجود دارد و یا رابطهٔ میان تورنمنت‌ها با قضیهٔ ازدواج نشان‌دهندهٔ مرتبط بودن شاخه‌های ترکیبیات به هم می‌باشد.

موضوعات مطرح شده در این کتاب به‌طور کامل دسته‌بندی نشده‌اند. بلکه در طول کتاب بارها و بارها به یک موضوع رجوع شده است. به نظر من این روش یکی از سرگرم کننده‌ترین و آموزنده‌ترین روش‌ها برای ارائهٔ مطالب است و یک توقف کوتاه قبل از بیان کاربرد جدیدی از یک قضیه موجب فهم بهتر آن می‌شود. اگر چه هیچ پیش‌نیاز رسمی برای مطالعهٔ موضوعات این کتاب وجود ندارد. امّا بسیاری از مباحث آن نیازمند فهم مباحث خاص ریاضی است.

در اینجا لازم می‌دانم از آقایان «پرفکت» و «لیون میرسکی» که کمک‌های شایانی در رابطه با مطالب این کتاب به اینجانب نموده‌اند تشکر کنم. همچنین از کلیهٔ نویسندگانی که

مطالعهٔ مقالات و کتاب‌های آن‌ها مرا در تألیف این کتاب کمک نموده است تشکر و قدردانی می‌کنم. امّا بخش عمدهٔ سپاسگزاری من به آن دسته از فارغ‌التحصیلان دانشگاه شفیلد اختصاص پیدا می‌کند که شرکت آن‌ها در دوره‌های آموزشی من باعث تشویق و علاقه‌مندی هر چه بیشتر من به تألیف این کتاب گردید. تدریس به آن‌ها مایهٔ شادمانی و افتخار من بود.

ویکتور برایانت، ۱۹۹۲

۱

ضریب دوجمله‌ای

انتخاب چند عضو از میان اعضای یک مجموعه و شمارش تعداد حالات این کار در بسیاری از شاخه‌های ترکیبیات ظاهر می‌شود. بنابر این در فصل اول این کتاب به بررسی این مورد می‌پردازیم و با توضیح چند مثال سعی داریم تا با موارد استفادهٔ این موضوع بیشتر آشنا شویم.

n شیء مختلف داده شده است. نماد $\binom{n}{k}$ را برای نمایش تعداد راههای متمایز انتخاب k شیء از n شیء به کار می‌بریم، بطوری که ترتیب انتخاب این k شیء مهم نباشد.

مثال: در این کتاب ۱۶ فصل وجود دارد. به چند طریق می‌توان ۲ فصل از این کتاب را انتخاب کرد؟ در حالت کلی به چند طریق می‌توان ۲ شیء از میان n شیء انتخاب کرد؟

جواب:
$$\binom{۱۶}{۲} = \frac{۱۶ \times ۱۵}{۲} = ۱۲۰$$

راههای مختلفی برای رسیدن به این جواب وجود دارد. به عنوان مثال شما می‌توانید تمام جفت فصلهای ممکن برای انتخاب را بنویسید:

۱, ۲
۱, ۳
۱, ۴
⋮
۱, ۱۶
۲, ۱
۲, ۳
⋮
۱۶, ۱۴
۱۶, ۱۵

۱۶ حالت برای فصل اول و ۱۵ حالت برای فصل دوم داریم. بنابراین ۱۵ × ۱۶ زوج از فصول برای انتخاب داریم. ولی دقت کنید که هر دو فصلی دقیقاً دوبار در این لیست ظاهر شده است. در حالی که این دو حالت را باید یک بار بشمریم. بنابر این باید نصف عدد بدست آمده را در نظر بگیریم. پس مقدار $\binom{۱۶}{۲}$ برابر ۱۲۰ خواهد بود.

از طرف دیگر لیست بالا را می‌توانیم طوری آماده کنیم که عدد اول هر جفت، عدد کوچکتر باشد. در این حالت، هر انتخاب مورد نظر دقیقاً یک بار در لیست ظاهر می‌شود.

$$\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}۱,۲\\ ۱,۳\\ \vdots\\ ۱,۱۶\end{array}\right\}\ ۱۵\\ \left.\begin{array}{c}۲,۳\\ \vdots\\ ۲,۱۶\end{array}\right\}\ ۱۴\\ \left.\begin{array}{c}۳,۴\\ \vdots\\ ۳,۱۶\end{array}\right\}\ ۱۳\\ \quad\vdots\qquad\ \vdots\\ ۱۵,۱۶\}\ ۱\end{array}$$

تعداد حالتهای مورد نظر برابر تعداد جفت عددهای موجود در این لیست می‌باشد که این تعداد برابر است با:

$$\binom{۱۶}{۲}=۱۵+۱۴+\cdots+۲+۱=\frac{۱}{۲}\times۱۵\times۱۶$$

از دو روش اثبات بالا می‌توان فهمید که تعداد راههای انتخاب دو شیء از میان n شیء بدون در نظر گرفتن ترتیب انتخاب برابر است با: $\binom{n}{۲}=\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ □

مثال: به چند طریق می‌توان ۳ فصل از ۱۶ فصل این کتاب را (بدون در نظر گرفتن ترتیب) انتخاب کرد؟ در حالت کلی نشان دهید:

$$\binom{n}{۳}=\binom{n-۱}{۲}+\binom{n-۲}{۲}+\binom{n-۳}{۲}+\cdots+\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}.$$

راه حل: همانند روش اول در مثال قبل یک لیست کلی از سه‌تایی‌هایی که از فصول می‌توان ساخت، ایجاد می‌کنیم. برای اولین عضو سه‌تایی ۱۶ حالت مختلف داریم. هر یک از ۱۵ فصل باقیمانده را می‌توان به عنوان دومین عضو سه‌تایی در نظر گرفت و هر یک از ۱۴ فصل باقیمانده را برای سومین عضو انتخاب کرد. ولی هر مجموعهٔ سه‌تایی از فصول در این لیست دقیقاً ۶ بار ظاهر شده است. (برای مثال $\{۷,۱۵,۱۱\}$ بصورت ۶ سه‌تایی $(۱۵,۱۱,۷)$، $(۷,۱۵,۱۱)$، $(۱۱,۷,۱۵)$، $(۷,۱۵,۱۱)$، $(۱۱,۷,۱۵)$ و $(۷,۱۱,۱۵)$ ظاهر شده است). بنابر این تعداد

راههای انتخاب ۳ فصل از ۱۶ فصل برابر خواهد بود با:

$$\binom{۱۶}{۳} = \frac{۱۶ \times ۱۵ \times ۱۴}{۶} = ۵۶۰$$

روش دوم مسأله قبل لیست کردن زوجها به صورت صعودی بود. در این مسأله نیز ما می‌توانیم سه‌تایی‌هایی را لیست کنیم که اعضای آنها به ترتیب صعودی باشند. یعنی عضو دوم از عضو اول و عضو سوم از عضو دوم بزرگتر باشد. به این ترتیب هر مجموعهٔ سه‌تایی دقیقاً یک بار در این لیست ظاهر می‌شود و تعداد اعضای این لیست برابر تعداد مجموعه‌های سه‌تایی خواهد بود.

$$\left.\begin{matrix} ۱, ۲, ۳ \\ ۱, ۲, ۴ \\ \vdots \\ ۱, ۱۵, ۱۶ \end{matrix}\right\} \quad \binom{۱۵}{۲}$$ سه‌تایی که با عدد ۱ شروع می‌شوند.

$$\left.\begin{matrix} ۲, ۳, ۴ \\ \vdots \\ ۲, ۱۵, ۱۶ \end{matrix}\right\} \quad \binom{۱۴}{۲}$$ سه‌تایی که با عدد ۲ شروع می‌شوند.

$$\left.\begin{matrix} ۳, ۴, ۵ \\ \vdots \\ ۳, ۱۵, ۱۶ \end{matrix}\right\} \quad \binom{۱۳}{۲}$$ سه‌تایی که با عدد ۳ شروع می‌شوند.

$$\vdots$$

$$\left.\begin{matrix} ۱۳, ۱۴, ۱۵ \\ ۱۳, ۱۴, ۱۶ \\ ۱۳, ۱۵, ۱۶ \end{matrix}\right\} \quad \binom{۳}{۲}$$ سه‌تایی که با عدد ۱۳ شروع می‌شوند.

$$۱۴, ۱۵, ۱۶\} \quad \binom{۲}{۲}$$ سه‌تایی که با عدد ۱۴ شروع می‌شوند.

در نتیجه $۵۶۰ = \binom{۲}{۲} + \binom{۳}{۲} + \cdots + \binom{۱۳}{۲} + \binom{۱۴}{۲} + \binom{۱۵}{۲} = \binom{۱۶}{۳}$ و از این طریق می‌توان به رابطهٔ زیر رسید:

$$\binom{n}{۳} = \binom{n-۱}{۲} + \binom{n-۲}{۲} + \cdots + \binom{۳}{۲} + \binom{۲}{۲}. \qquad \square$$

اثبات مثال قبل مقدمه‌ای می‌شود برای بیان نتیجهٔ زیر:

تعداد راههای انتخاب k شیء از میان n شیء با در نظر گرفتن ترتیب انتخاب برابر است با:

$$\underbrace{n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \dots}_{k \text{ جمله}}$$

ولی هنگامی که ترتیب انتخاب مهم نباشد در آن صورت هر مجموعهٔ k عضوی که انتخاب کرده‌ایم در مقدار بدست آمده به تعداد دفعات زیر محاسبه خواهد شد:

$$k \times (k-۱) \times (k-۲) \times \dots \times ۲ \times ۱$$

که این مقدار را در ریاضیات با نماد $k!$ (بخوانید k فاکتوریل) نمایش می‌دهند. در نتیجه تعداد راههای انتخاب k شیء از n شیء برابر خواهد بود با:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-۱)\dots(n-k+۱)}{k(k-۱)\dots \times ۲ \times ۱} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

البته در فرمول بالا باید n و k مثبت باشند. در نتیجه برای اینکه رابطه همواره درست باشد تعریف می‌کنیم: $۰! = ۱$ و برای $k > n$ و یا $k < ۰$: $\binom{n}{k} = ۰$.

مثال: n و k را اعداد صحیح در نظر بگیرید طوری که $۱ \leqslant k \leqslant n$. با استفاده از روش ترکیبیاتی نشان دهید:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-۱}{k-۱} + \binom{n-۲}{k-۱} + \binom{n-۳}{k-۱} + \dots + \binom{k-۱}{k-۱}$$

راه حل: سمت چپ تساوی تعداد راههای انتخاب یک زیر مجموعهٔ k عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, n\}$ می‌باشد. در چند تا از این مجموعه‌ها عدد ۱ به عنوان کوچکترین عدد ظاهر می‌شود؟ در چند تا عدد ۲؟ در چه تعداد عدد ۳؟ و ... . با شمارش تعداد این مجموعه‌ها (مانند مسأله قبل) به سمت دوم تساوی خواهیم رسید. □

مثال: ضریب جملهٔ x^k در بسط عبارت $(۱+x)^n$ چیست؟

راه حل:

$$(۱+x)^n = \underbrace{(۱+x)(۱+x)(۱+x)\dots(۱+x)}_{n \text{ عامل}}$$

می‌توان این مسأله را بوسیلهٔ استقراء روی n حل کرد. امّا در اینجا از روش ترکیبیاتی استفاده می‌کنیم. حاصل $(۱+x)^n$ برابر حاصل جمع تعدادی جمله است که هر کدام حاصلضرب n عدد (۱ یا x) می‌باشند. (از هر پرانتز یا عدد ۱ و یا عدد x در مقدار بدست آمده برای هر جمله ضرب شده است) پس برای بدست آوردن x^k باید از k پرانتز عدد x و از $n-k$ پرانتز باقیمانده عدد ۱ انتخاب شده و در حاصلضرب شرکت کند. بنابر این ضریب x^k (که برابر تعداد جملات x^k بعد از ضرب کردن پرانتزهاست) برابر تعداد راههای انتخاب k شیء از میان n شیء است که برابر $\binom{n}{k}$ می‌باشد. □

از مسأله بالا می‌توان فهمید که:

$$(۱+x)^n = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱}x + \binom{n}{۲}x^۲ + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

عبارت بالا را «بسط دوجمله‌ای» می‌نامند و مقدار $\binom{n}{k}$ نیز مقدار «ضریب دوجمله‌ای» را نمایش می‌دهد.

مثال: نشان دهید:

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{n} = ۲^n$$

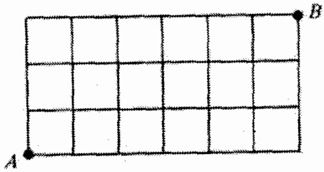
ساده‌ترین راه برای بدست آوردن تساوی بالا قرار دادن $x = ۱$ در بسط دوجمله‌ای می‌باشد. امّا روشی که ما ارائه می‌کنیم شمارش تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی به دو روش مختلف می‌باشد. تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی این مجموعه برابر $\binom{n}{۰}$، تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی آن برابر $\binom{n}{۱}$، ... تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی آن برابر $\binom{n}{r}$, ... و تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی آن برابر $\binom{n}{n}$ می‌باشد. بنابر این تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر مقدار زیر می‌باشد:

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{n}$$

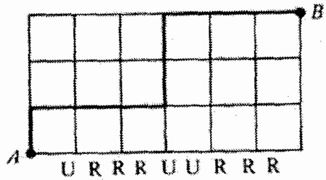
از طرفی تعداد این زیر مجموعه‌ها را از روشی ساده‌تر نیز می‌توانیم بدست آوریم. در هر زیرمجموعه تعدادی از اعضاء وجود دارند و تعدادی نیز عضو زیرمجموعه نیستند. بنابر این برای هر عضو مجموعهٔ اصلی ۲ حالت داریم: یا در یک زیرمجموعه وجود دارد و یا عضو آن نیست. بنابر این تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر خواهد بود با: $\underbrace{۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲}_{n \text{ بار}} = ۲^n$.

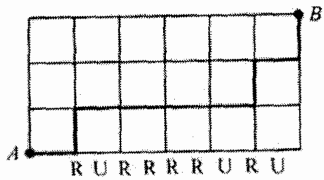
بنابراین تساوی داده شده همواره برقرار است. □

مثال: فرض کنید تصویر روبرو نمایشگر یک شبکه از راهها می‌باشد و شما قصد دارید از نقطهٔ A با حرکت روی خطوط به نقطهٔ B بروید بطوری که کوتاهترین مسیر را طی کنید. به چند طریق مختلف می‌توان این کار را انجام داد؟ حکم مسأله را برای شبکه‌هایی با اندازه‌های مختلف تعمیم دهید.

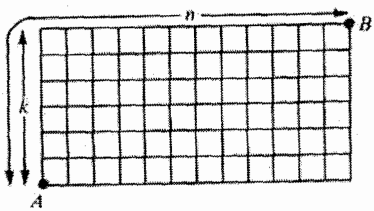


راه حل: دو مسیر حرکت از A به B در شکلهای روبرو نمایش داده شده‌اند یک مسیر خواسته شده از A به B باید از ۹ حرکت تشکیل شده باشد. سه حرکت رو به بالا (U) و شش حرکت رو به سمت راست (R). به عنوان مثال در زیر دو مسیر نشان داده شده، حرکتها با حروف R و U نمایش داده شده‌اند. بنابراین تعداد راههای حرکت از A به B برابر است با تعداد انتخابهای ۳ حرکت رو به بالا از مجموع ۹ حرکت که برابر است با $\binom{9}{3} = 84$.





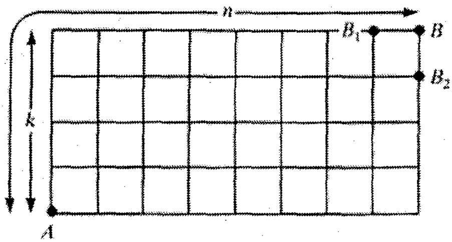
به همین ترتیب در حالت کلی نیز (شکل روبرو) تعداد مسیرهای حرکت با شرایط گفته شده برابر است با $\binom{n}{k}$. (k حرکت رو به بالا داریم). □



مثال: n و k اعداد صحیحی هستند به طوری که $1 \leqslant k \leqslant n$. نشان دهید

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

راه حل: راههای مختلفی برای اثبات این اتحاد وجود دارد. یک راه خسته کننده این است که بسط دو طرف اتحاد را نوشته و درستی اتحاد را نتیجه بگیرید. روش دیگر این است که ببینید ضریب جملهٔ x^k در بسط $(1+x)^n$ و $(1+x)^{n-1}(1+x)$ کدام است؟ امّا راهی که ما ارائه می‌کنیم استفاده از مسأله مسیر در شبکه راهها می‌باشد.



$\binom{n}{k}$ مسیر از A به B وجود دارد (شکل مقابل). این مسیرها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم. مسیرهایی که حرکت آخر آنها به سمت راست است (یعنی از $B_۱$ به B می‌رویم) و مسیرهایی که حرکت آخر آنها به سمت بالاست (یعنی از $B_۲$ به B می‌رویم). در نتیجه داریم:

$$\text{تعداد مسیرهای از } A \text{ به } B = \binom{n}{k}$$
$$= (\text{تعداد مسیرهای از } A \text{ به } B_۱) + (\text{تعداد مسیرهای از } A \text{ به } B_۲)$$
$$= \binom{n-۱}{k} + \binom{n-۱}{k-۱}$$

□

اتحاد گفته شده در مسألهٔ بالا پایه و اساس تشکیل مثلث خیام می‌باشد که از ضرایب دوجمله‌ای تشکیل شده است که در آن هر جمله برابر مجموع دو جملهٔ بالایی آن می‌باشد.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & ۱ & & & & & \\
 & & & & ۱ & & ۱ & & & & \\
 & & & ۱ & & ۲ & & ۱ & & & \\
 & & ۱ & & ۳ & & ۳ & & ۱ & & \\
 & ۱ & & ۴ & & ۶ & & ۴ & & ۱ & \\
 & & & & & \searrow\ \swarrow & & & & & \\
۱ & & ۵ & & ۱۰ & & ۱۰ & & ۵ & & ۱ \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

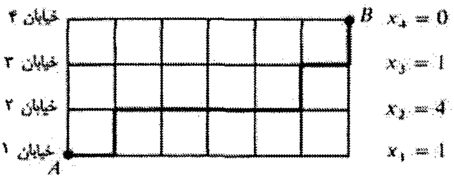
مثال: معادلهٔ زیر چند جواب دارد؟

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۶ \qquad x_i \geqslant ۰$$

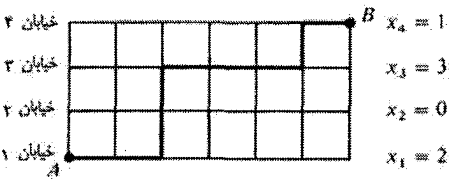
معادلهٔ زیر چند جواب دارد؟

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n \qquad x_i \geqslant ۰$$

راه حل: این مسأله هم راه حلهای مختلفی دارد (که یکی از آنها را در تمارین انتهای این فصل خواهید دید.) امّا اکنون می‌خواهیم از شبکه راهها و مسأله کوتاهترین مسیر استفاده کنیم. برای حل مسأله، شبکه‌ای از راهها را در نظر می‌گیریم که ۴ خیابان افقی دارد و ۶ حرکت به سمت راست باید انجام دهیم:



دو مسیر برای حرکت از A به B در شکلهای روبرو نمایش داده شده‌اند. اگر تعداد حرکتهای به سمت راست در خیابان افقی iام را x_i تعریف کنیم آنگاه تعداد این مسیرها برابر تعداد جوابهای نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ خواهد بود.



در اینجا به وضوح یک تناظر یک به یک میان جوابهای معادله وکوتاهترین مسیرها از A به B وجود دارد و چون تعداد راهها برابر $84 = \binom{9}{3}$ می‌باشد بنابر این تعداد جوابهای معادله نیز برابر ۸۴ خواهد بود.

به همین سادگی می‌توان فهمید که تعداد جوابهای نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ برابر است با تعداد مسیرهایی ازگوشهٔ پائین و سمت چپ به گوشهٔ بالا و سمت راست با k خیابان افقی و n حرکت به سمت راست. در این شبکه همانطورکه در قبل گفته شد باید $n + k - 1$ حرکت داشته باشیم بطوری که $k - 1$ حرکت به طرف بالا باشد. بنابر این جواب مسأله برابر خواهد بود با:

$$\binom{n+k-1}{k-1} \qquad \square$$

تا به حال با ضرایب دوجمله‌ای سر وکار داشتیم. به راحتی می‌توان بحث را به «ضرایب nجمله‌ای» گسترش داد.

مثال: چند عدد ۱۰ رقمی می‌توان با ارقام ۱ و ۲ و ۲و ۳ و ۳ و ۳ و ۴ و ۴ و ۴ و ۴ تشکیل داد؟

راه حل: جواب برابر $\frac{10!}{4!3!2!}$ می‌باشد. برای اثبات این نتیجه می‌توان از اولین مثال بحث ضرایب دوجمله‌ای تقلید کرد. یک لیست بلند از $10!$ عدد در نظر بگیرید که از ۱۰ رقم داده شده تشکیل

شده است. این لیست شامل اعداد تکراری نیز هست. برای مثال عدد ۴۲۳۱۴۴۲۳۴۳ در این لیست به تعداد $۲! \times ۳! \times ۴!$ بار ظاهر شده است. زیرا می‌توان چهار رقم ۴ را در جایگاههای خود جابجا کرد و به اعداد یکسان رسید. برای ارقام ۲ و ۳ نیز همین کار انجام پذیر است. به همین دلیل هر عدد (به علت وجود ارقام تکراری)، $۲! \times ۳! \times ۴!$ بار در این لیست ظاهر خواهد شد.

از طرف دیگر می‌توان مسأله را اینگونه در نظر گرفت که می‌خواهیم از بین ۱۰ مکان موجود در عدد برای قرار گرفتن رقمها، ۴ مکان برای ارقام ۴، از بین ۶ مکان باقیمانده، ۳ مکان برای ارقام ۳، از بین ۳ مکان باقیمانده ۲ مکان برای ارقام ۲، و تنها مکان باقیمانده را برای رقم ۱ انتخاب کنیم. تعداد راههای انجام این کار برابر خواهد بود با:

$$\binom{۱۰}{۴} \times \binom{۶}{۳} \times \binom{۳}{۲} \times \binom{۱}{۱} = ۱۲۶۰۰ \qquad \square$$

این جواب $\binom{۱}{۱} \times \binom{۳}{۲} \times \binom{۶}{۳} \times \binom{۱۰}{۴} = \frac{۱۰!}{۴!۳!۲!}$ ، تعداد راههای قرار دادن ۱۰ شیء در ۴ جعبه است بطوری که در جعبهٔ اول ۴ شیء، در جعبه دوم ۳ شیء، در جعبه سوم ۲ شیء و در جعبه چهارم یک شیء قرار بگیرد. در حالت کلی اگر $r \geqslant ۲$ و $k_۱, k_۲, \ldots, k_r$ اعدادی صحیح باشند به طوری که $k_۱ + k_۲ + \cdots + k_r = n$ آنگاه تعداد راههای قرار دادن n شیء در r جعبه بطوری که $k_۱$ شیء در جعبهٔ اول، $k_۲$ شیء در جعبه دوم و ... و k_r شیء در جعبه rام قرار بگیرد را ضریب چند جمله‌ای می‌نامند و با $\binom{n}{k_۱\ k_۲\ \ldots\ k_r}$ نمایش می‌دهند. اگر یکی از k_iها منفی باشد در آن صورت ضریب را برابر صفر در نظر می‌گیریم. امّا اگر همهٔ k_iها غیر منفی باشند در آن صورت با توجه به حل مثال قبل می‌توان به نتیجهٔ زیر رسید:

$$\binom{n}{k_۱\ k_۲\ \ldots\ k_r} = \frac{n!}{k_۱!\ k_۲!\ \ldots\ k_r!}.$$

در حالت خاص توجه کنید که هنگامی که $r = ۲$، ضرایب چند جمله‌ای تبدیل به ضرایب دو جمله‌ای می‌شوند:

$$\binom{n}{k_۱\ k_۲} = \frac{n!}{k_۱!k_۲!} = \frac{n!}{k_۱!(n-k_۱)!} = \binom{n}{k_۱}$$

همچنین تعدادی از خواص ضرایب دوجمله‌ای قابل تعمیم به ضرایب چند جمله‌ای می‌باشند:

مثال: نشان دهید:

$$\binom{n}{k_۱\ k_۲\ \ldots\ k_r} = \binom{n-۱}{k_۱-۱\ k_۲\ \ldots\ k_r}$$

$$+\binom{n-1}{k_1\ k_2-1\ \ldots\ k_r}$$
$$\vdots$$
$$+\binom{n-1}{k_1\ k_2\ \ldots\ k_r-1}$$

راه حل: می‌خواهیم n شیء را در r جعبه قرار دهیم بطوری که k_1 شیء در جعبه اول، k_2 شیء در جعبه دوم، ... و k_r شیء در جعبهٔ rام قرار بگیرد. اگر فرض کنیم که شیء اول در جعبهٔ iام قرار گرفته باشد، در آن صورت $n-1$ شیء، باقیمانده باید طوری در r جعبه قرار بگیرند که k_1 شیء در جعبهٔ اول و ... و k_i-1 شیء در جعبهٔ iام و ... و k_r شیء در جعبهٔ rام قرار بگیرند و از آنجا که i می‌تواند هر یک از مقادیر ۱ تا n را قبول کند در نتیجه درستی عبارت را می‌توان نتیجه گرفت.

مثال: بسط دوجمله‌ای را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$(a+b)^n=\binom{n}{n\ \ 0}a^n+\binom{n}{n-1\ \ 1}a^{n-1}b+\binom{n}{n-2\ \ 2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{0\ \ n}b^n$$
$$=\sum_{\substack{k_1,k_2\geqslant 0\\ k_1+k_2=n}}\binom{n}{k_1\ \ k_2}a^{k_1}b^{k_2}$$

نشان دهید در حالت کلی می‌توان گفت:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_r)^n=\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r\geqslant 0\\ k_1+k_2+\cdots+k_r=n}}\binom{n}{k_1\ \ k_2\ \ \ldots\ \ k_r}a_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_r^{k_r}$$

راه حل: از روشی مشابه اثبات مسأله بسط دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_r)^n=\underbrace{(a_1+\cdots+a_r)(a_1+\cdots+a_r)\ldots(a_1+\cdots+a_r)}_{n\ \text{عامل}}$$

هنگامی که پرانتزها را ضرب می‌کنیم ضریب جملهٔ $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_r^{k_r}$ برابر است با تعداد راههای انتخاب a_1 از k_1 پرانتز، a_2 از k_2 پرانتز، ... و a_r از k_r پرانتز، که برابر ضریب چند جمله‌ای می‌باشد. □

در پایان این فصل تعدادی مسأله برای تمرین و تسلط بیشتر آورده‌ایم. دقت کنید علامت (ر) در جلوی یک سؤال بدین معنی است که راهنمایی این سؤال در پایان کتاب در بخش «راهنمایی تمارین» آورده شده است و علامت (ج) بدین معنی است که جواب این سؤال (که به صورت یک عدد یا جواب کوتاه است) در پایان کتاب در بخش «پاسخ تمارین» آمده است.

«تمارین»

۱) با استفاده از روشهای مختلف (که در این فصل بیان شدند) نشان دهید: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ (ر)

۲) در صف یک سینما n نفر ایستاده‌اند. (در ضمن هیچ دو نفری جای خود را با یکدیگر عوض نمی‌کنند). آنها در k دسته وارد سینما می‌شوند. بطوری که هر دسته حداقل شامل یک نفر باشد. به چند طریق می‌توان آنها را در k دسته تقسیم و به سینما وارد کرد؟ (هر دسته از تعدادی از کسانی که در صف پشت سر هم ایستاده‌اند تشکیل می‌شود). (ر، ج)

۳) معادلهٔ زیر چند جواب درمجموعه اعداد صحیح مثبت دارد؟ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$

(ر، ج)

۴) الف) با استفاده از مسأله ۳ ثابت کنید که تعداد جوابهای غیر منفی معادلهٔ $x_1+\cdots+x_k=n$ برابر با $\binom{n+k-1}{k-1}$ می‌باشد. (ر)

ب) با در نظر گرفتن x_iهایی که برابر صفر هستند در قسمت (الف) و به کمک مسأله ۳ ثابت کنید:

$$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{k}{0}\binom{n-1}{k-1}+\binom{k}{1}\binom{n-1}{k-2}+\cdots+\binom{k}{k-1}\binom{n-1}{0}$$

۵) در اتاق انتظار مطب یک دکتر، یک ردیف صندلی nتایی است که k بیمار می‌خواهند در آنجا بنشینند. امّا به علت مسائل بهداشتی هیچ دو بیماری نباید کنار هم بنشینند. به چند طریق این کار ممکن است؟ (ر، ج)

۶) فرض کنید می‌خواهیم از میان n شیء، k شیء را انتخاب کرده و هر کدام را با یکی از دو رنگ در دسترس رنگ‌آمیزی کنیم. با شمارش تعداد حالتهای این کار به دو روش ثابت کنید:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k}+\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}+\cdots+\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}=2^k\binom{n}{k}$$

۷) با استفاده از روشهای زیر ثابت کنید:

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

الف) در نظر گرفتن بسط $(1+x)^{2n}$ (ر)

ب) انتخاب n نفر از میان $2n$ نفر که n نفر آنها زن و n نفر دیگر مرد هستند. (ر)

ج) استفاده از مسألهٔ مسیر در شبکهٔ راهها. (ر)

۸) الف) یک گروه $۲n$ نفری شامل n مرد و n زن داریم و می‌خواهیم یک زیرمجموعه از آنها انتخاب کنیم بطوری که تعداد مردها و زنها در آن برابر باشد. با استفاده از مسألهٔ ۷ ثابت کنید که به $\binom{۲n}{n}$ طریق این کار ممکن است.

ب) حال فرض کنید می‌خواهیم در قسمت «الف» علاوه بر انتخاب زیرمجموعه، یک نمایندهٔ مرد و یک نمایندهٔ زن برای زیرمجموعه انتخاب کنیم. تعداد راههای این انتخاب را به دو روش زیر بدست آورید: یا در ابتدا مجموعه را انتخاب کرده و سپس نماینده‌ها را از آن انتخاب کنید و یا ابتدا نماینده‌ها را انتخاب کرده و سپس مابقی زیرمجموعه را انتخاب کنید. آیا می‌توانید اتحاد زیر را نتیجه بگیرید؟

$$۱^۲\binom{n}{۱}^۲ + ۲^۲\binom{n}{۲}^۲ + ۳^۲\binom{n}{۳}^۲ + \cdots + n^۲\binom{n}{n}^۲ = n^۲\binom{۲n-۲}{n-۱}$$

ج) به دو روش مختلف ثابت کنید:

$$\binom{n}{۱} + ۲\binom{n}{۲} + \cdots + n\binom{n}{n} = n \times ۲^{n-۱} \qquad \text{(ر)}$$

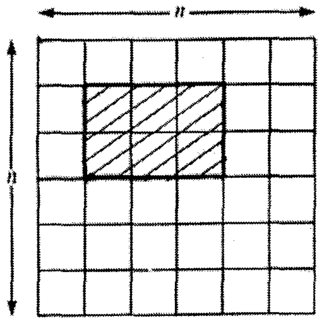
۹) الف) اگر n خط در صفحه رسم کنیم بطوری که هیچ دو خطی موازی و هیچ سه خطی همرس نباشند در آن صورت، چند نقطهٔ تقاطع در صفحه ایجاد می‌شود؟ (ج)

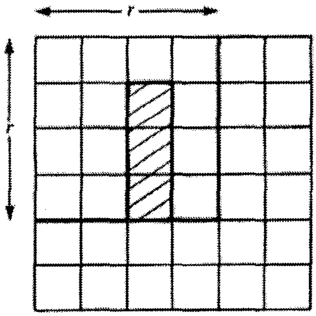
ب) اگر n خط در صفحه رسم کنیم بطوری که $x_۱$ خط در یک جهت با هم موازی باشند، $x_۲$ خط در یک جهت دیگر، $x_۳$ خط در جهتی دیگر و ... و x_k خط نیز در یک جهت با هم موازی باشند و در ضمن هیچ سه خطی همرس نباشند، نشان دهید تعداد نقاط برخورد برابر خواهد بود با:

$$\frac{۱}{۲}(n^۲ - (x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_k^۲)) \qquad \text{(ر)}$$

ج) مجموعه‌ای از ۱۷ خط راست در صفحه رسم کنید بطوری که هیچ سه خطی همرس نباشند و در کل ۱۰۱ نقطهٔ تقاطع در صفحه ایجاد شود؟ (ر، ج)

۱۰) الف) چند مستطیل متمایز در یک شبکهٔ $n \times n$ می‌توان دید (مانند قسمت هاشور خورده در شکل روبرو). مسلماً طول و عرض هر مستطیل حداقل برابر یک واحد است و در ضمن مربعها را نیز باید جزو مستطیلها به حساب آورد (ر، ج)





ب) با استفاده از قسمت «الف» نشان دهید تعداد مستطیل‌هایی که در شبکهٔ $r \times r$ گوشهٔ بالا و سمت چپ شبکهٔ $n \times n$ قرار دارند و حداقل یکی از اضلاع آنها روی خطوط مرزی داخلی شبکهٔ $r \times r$ قرار دارد برابر است با $r^۳$. (ر)

ج) نشان دهید در شبکه $n \times n$، $۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + n^۳$ مستطیل وجود دارد و سپس نتیجه بگیرید:

$$۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + n^۳ = \left(\frac{۱}{۲}n(n+۱)\right)^۲$$

د) چه تعدادی از $۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + n^۳$ مستطیل، مربع هستند؟ (ج)

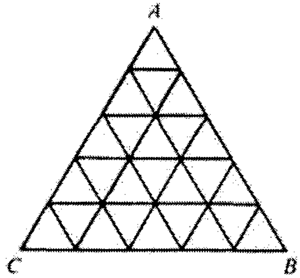
۱۱) الف) نشان دهید مجموع اعداد سطر rام شکل زیر برابر $\binom{r+۱}{۲}$ می‌باشد و سپس با استفاده از روابط موجود برای ضرایب دوجمله‌ای، مجموع کل اعداد را بدست آورید:

$$\begin{array}{c}
۱ \\
۱ \quad ۲ \\
۱ \quad ۲ \quad ۳ \\
۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴ \\
\vdots \\
۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴ \ldots n
\end{array}$$

(ج)

ب) با بدست آوردن مجموع اعداد مثلث داده شده به دو روش مختلف ثابت کنید:

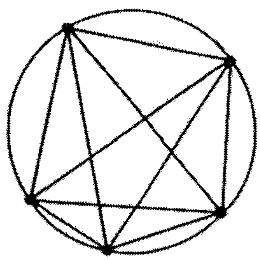
$$۱ \times n + ۲ \times (n-۱) + ۳ \times (n-۲) + \cdots + n \times ۱ = \binom{n+۲}{۳}$$



ج) در شبکه‌ای مانند شکل مقابل به ضلع n چند مثلث وجود دارد که جهت آنها با مثلث ABC یکسان باشد. (منظور شمارش مثلثهایی به صورت $\triangle$ با اندازه‌های مختلف می‌باشد) (ر، ج)

د) در اینگونه شبکه‌ای تعداد مثلثهایی را که در جهت دیگر قرار دارند را نیز به صورت یک ضریب چند جمله‌ای بیابید (منظور شمارش مثلثهایی به صورت $\triangledown$ با اندازه‌های مختلف می‌باشد) (ر، ج)

۱۲) اگر n نقطه روی محیط یک دایره قرار دهیم و سپس هر دو نقطه را بوسیلهٔ یک خط به هم وصل کنیم و در ضمن هیچ سه خطی از خطوط رسم شده در یک نقطه همدیگر را قطع نکنند، ثابت کنید تعداد نواحی ایجاد شده در داخل دایره برابر خواهد بود با:



$$۱ + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۴} \quad \text{(ر)}$$

۱۳) در جلوی یک مغازهٔ بستنی فروشی $m+n$ نفر ایستاده‌اند تا هر کدام یک بستنی به قیمت ۵۰ ریال بخرند هر مشتری یا یک سکهٔ ۵۰ ریالی و یا یک اسکناس ۱۰۰ ریالی همراه دارد. فروشنده نیز در ابتدا هیچ پولی ندارد. اگر دقیقاً m نفر از مشتریها سکه و n نفر مابقی اسکناس داشته باشند، با استفاده از مسألهٔ کوتاهترین مسیر در شبکهٔ راهها احتمال این را بیابید که فروشنده همیشه سکهٔ ۵۰ ریالی برای پرداختن مابقی پول مشتریانی که سکه ندارند داشته باشد. (ر، ج)

۲

شمارش درخت‌ها

نظریهٔ گرافها یکی از موضوعاتی است که در این کتاب به بررسی آنها می‌پردازیم. امّا در این فصل تنها به بررسی و شمارش نوع خاصی از گرافها (توسط آنچه در فصل قبل بیان کردیم) می‌پردازیم.

یک گراف $G = (V, E)$ از یک مجموعهٔ غیر تهی رئوس V و یک مجموعهٔ یالها E تشکیل شده است. هر یال به صورت $\{\{v, w\} : v, w \in V, v \neq w\}$ تعریف می‌شود. یک یال خاص $\{v, w\}$ را به صورت vw (و یا wv) نیز نمایش می‌دهیم و می‌گوئیم که رأس v با رأس w مجاور است و v و w را نقاط پایانی یال vw می‌نامیم.

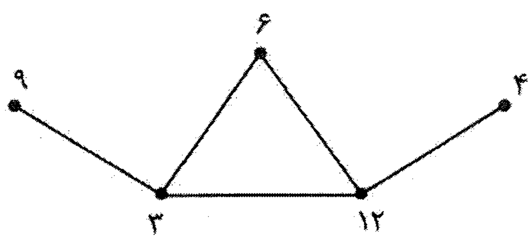
مثال: فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی با مجموعه رئوس زیر باشد:

$$V = \{۳, ۴, ۶, ۹, ۱۲\}$$

و مجموعهٔ یالهای آن را به صورت زیر تعریف کرده باشیم:

$$E = \{vw : v, w \in V, \text{ مقسوم‌علیه } w \text{ و یا } w \text{ مقسوم‌علیه } v \text{ می‌باشد } v\}$$

حال ما می‌توانیم گراف G را با نمایش رئوس بوسیلهٔ نقاط و اتصال رئوس (در صورتی که مجاور باشند) بوسیلهٔ یک خط راست یا منحنی (که نمایانگر یک یال می‌باشد) نمایش دهیم:

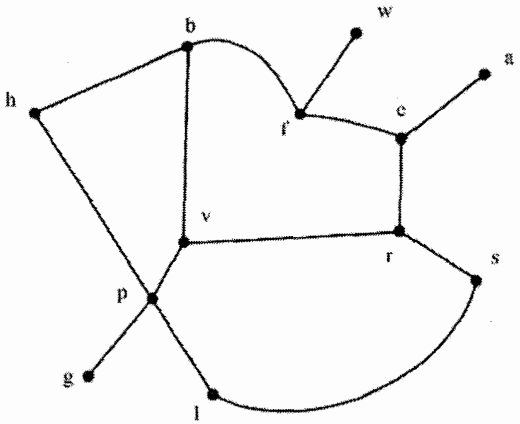


□

توجه کنید که در یک گراف هر زوجی از رئوس ممکن است با هم مجاور باشند. ولی هیچ رأسی با خودش مجاور نیست (یال vv نداریم) و بین هیچ دو رأسی بیش از یک یال وجود ندارد. معمولاً اینگونه گرافی را «گراف ساده» می‌نامند.

قبل از اینکه به بررسی قسمتهای مختلف نظریهٔ گرافها بپردازیم نیاز به آشنایی با چند تعریف داریم:

در یک گراف یک مسیر (یا گشت) دنباله‌ای از رئوس گراف به صورت $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n$ (تکرار مجاز است) می‌باشد بطوری که $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n$ همگی یالهای متفاوتی از گراف می‌باشند. یک مسیر به صورت $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n, v_1$ هنگامی که $n > 1$ و $n-1$ رأس اول مسیر همگی متمایز باشند، یک «دور» نامیده می‌شود. در واقع یک مسیر شما را با شروع از یک رأس در طول یالها حرکت می‌دهد، بطوری که از روی یک یال حداکثر یک بار عبور می‌کنید و یک دور مسیر بسته‌ای است که در آن از هیچ نقطه‌ای بیش از یک بار عبور نمی‌شود.



مثال: فرض کنید شبکهٔ راه آهن یک کشور به شکل زیر باشد (نقاط نشانگر شهرها و خطوط نمایشگر ریل راه آهن می‌باشند). $c, r, s, \ell, p, h, b, v, p, g$ و v, r, c, f, b, v, p, h نمونه‌هایی از مسیر در این گراف می‌باشند.

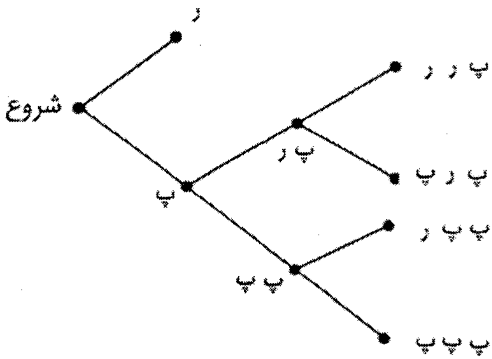
b, h, p, v, b و $h, p, \ell, s, r, c, f, b, h$ نیز نمونه‌هایی از دور در این گراف می‌باشند. □

گرافی که در مثال قبل نمایش داده شد، این خاصیت را دارد که بین هر دو رأس حداقل یک مسیر وجود دارد. اینگونه گرافی را «همبند» می‌نامند. در غیر این صورت گراف را «ناهمبند» می‌نامند.

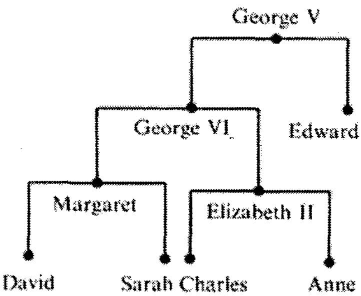
بنابر این هر گراف به تعدادی بخش یا به اصطلاح «مؤلفهٔ همبندی» افراز می‌شود. (برای تعریف مؤلفهٔ همبندی لازم است که با زیرگراف آشنا شویم. زیرگراف یک گراف، گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن، زیرمجموعه رئوس گراف اولیه است و یالهای آن نیز زیرمجموعه‌ای از یالهای گراف اصلی است بطوری که همهٔ آنها بین رأسهای انتخاب شده قرار دارند). هر زیرگراف همبند از یک گراف که نتوان یک رأس و یا یک یال به آن اضافه کرد، طوری که باز هم همبند بماند، «مؤلفهٔ

همبندی» نامیده می‌شود.

در این فصل به بررسی درختها می‌پردازیم که نوع خاصی از گرافها می‌باشند. شما تا به حال با نمونه‌هایی از درختها در زندگی روزمرهٔ خود برخورد کرده‌اید:



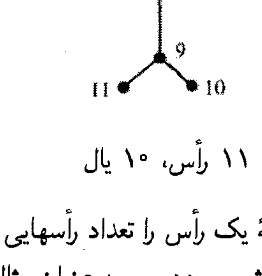
یک درخت احتمال برای سه بار پرتاب یک سکه: اگر تعداد رو آمدن از پشت آمدن بیشتر شود، دیگر ادامه نمی‌دهیم.



قسمتی از شجره‌نامهٔ سلطنتی انگلستان □

این گرافها دارای دو خاصیت هستند. اول اینکه همبند هستند و دوم اینکه اگر شما از یک رأس شروع کرده و روی یالها حرکت کنید بالاخره به رأسی خواهید رسید که یال دیگری به آن متصل نیست. به بیان بهتر می‌توان گفت: درخت گراف همبندی است که دور ندارد.

مثال:



۱۱ رأس، ۱۰ یال □

در گراف $G = (V, E)$، درجهٔ یک رأس را تعداد رأسهایی که با آن رأس مجاور است تعریف می‌کنیم و آن را با $d(v)$ یا dv نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال برای رأس ۷ در مثال بالا داریم:

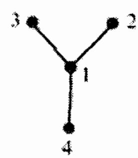
$d(۷) = ۴$. در ضمن رأس با درجهٔ صفر را «رأس تنها» تعریف می‌کنیم.

اگر در یک درخت که بیش از یک رأس دارد، طولانی‌ترین مسیر را در نظر بگیریم، چندان مشکل نیست که بفهمیم دو رأس انتهای این مسیر از درجهٔ یک هستند. در تمارین پایان این فصل از این موضوع برای اثبات اینکه در یک درخت n رأسی، $n - ۱$ یال داریم، استفاده خواهیم کرد.

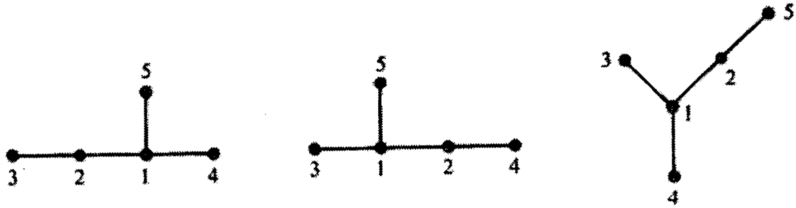
اکنون آماده‌ایم تا تعداد درختهایی را که مجموعهٔ رئوس آنها $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است و درجهٔ هر رأس نیز مشخص شده است، بیابیم.

مثال: چند درخت روی مجموعهٔ رئوس $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ می‌توان ایجاد کرد بطوری که درجهٔ رئوس آن بصورت زیر باشد: $d(۵) = ۱$ و $d(۴) = ۱$ و $d(۳) = ۱$ و $d(۲) = ۲$ و $d(۱) = ۳$

راه حل: تنها سه درخت با این مشخصات وجود دارد. برای پیدا کردن آنها رأس ۵ را در نظر بگیرید. چون $d(۵) = ۱$ در نتیجه در درخت مورد نظر این رأس با رأس دیگری مثل i مجاور است. بنابراین می‌توانیم برای تمام حالتهای ممکن i ($۱ \leqslant i \leqslant ۴$) رأس ۵ و یال $۵i$ را حذف کرده و تعداد درختهای موجود را پیدا کنیم.

$i = ۲$ مجموعهٔ رئوس $= \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ $d(۱) = ۳, d(۲) = ۱, d(۳) = ۱, d(۴) = ۱$ 	$i = ۱$ مجموعهٔ رئوس $= \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ $d(۱) = ۲, d(۲) = ۲, d(۳) = ۱, d(۴) = ۱$  یا 
$i = ۴$ مجموعهٔ رئوس $= \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ $d(۱) = ۳, d(۲) = ۲, d(۳) = ۱, d(۴) = ۰$ چنین درختی وجود ندارد.	$i = ۳$ مجموعهٔ رئوس $= \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ $d(۱) = ۳, d(۲) = ۲, d(۳) = ۰, d(۴) = ۱$ چنین درختی وجود ندارد.

از روی این درختهای فرعی می‌توان با اضافه کردن رأس و یال حذف شده به درخت اولیه رسید.



□

اکنون قصد داریم که یک اصل کلی را برای شمارش درختها با هر مجموعهٔ درجهٔ رئوس داده شده پیدا کنیم.

قضیه: فرض کنید $n \geqslant ۲$ و $d_۱, d_۲, \ldots, d_n$، n عدد صحیح با مجموع $۲n - ۲$ باشند. در این صورت تعداد درختهای با مجموعهٔ رئوس $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ و با درجهٔ رئوس $d_۱, d_۲, \ldots, d_n$ برابر است با:

$$\frac{(n-۲)!}{(d_۱ - ۱)!(d_۲ - ۱)!\ldots(d_n - ۱)!}$$

اثبات: همانطوری که می‌بینید $d_۱ + d_۲ + \cdots + d_n = ۲n - ۲$ و مقدار داده شده در قضیه برابر با $\binom{n-۲}{d_۱-۱\ \ d_۲-۱\ \ldots\ d_n-۱}$ می‌باشد. در واقع این قضیه هم‌ارز این ادعا است که «اگر $d_۱, d_۲, \ldots, d_n$، n عدد صحیح (نه لزوماً مثبت) باشند بطوری که مجموع آنها برابر $۲n - ۲$ باشد در آن صورت تعداد درختهایی که با مجموعهٔ رئوس $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ و درجات $d_۱, d_۲, \ldots, d_n$ می‌توان ساخت برابر با ضریب چند جمله‌ای بالاست.» توجه کنید اگر d_i برابر صفر یا کوچکتر از آن باشد، در آن صورت ضریب چند جمله‌ای و تعداد درختها برابر صفر خواهند بود.

اکنون این قضیه را با استقراء بر روی n اثبات می‌کنیم. حالت پایه $n = ۲$ بدیهی است. در این حالت باید $d_۱ = d_۲ = ۱$ باشد که تنها یک درخت با این شرایط وجود دارد و ضریب چند جمله‌ای داده شده نیز برابر ۱ می‌باشد:

$$n = ۲ \qquad d_۱ = ۱ \qquad d_۲ = ۱ \qquad , \qquad \binom{۱}{۰\ \ ۰} = ۱ \ ,$$

حال فرض کنید $n > ۲$ و $d_۱, d_۲, \ldots, d_n$، n عدد صحیح مثبت با مجموع $۲n - ۲$ باشند و قضیه برای کمتر از n، اثبات شده است. حال چون مجموع n عدد $d_۱, d_۲, \ldots, d_n$ کمتر از $۲n$ است، پس حداقل یکی از آنها (به عنوان مثال d_n) برابر یک است. بنابراین رأس n در درخت مورد نظر دقیقاً به یک رأس دیگر وصل است. فرض کنیم این رأس، رأس i باشد. حال (همانگونه

که در مثال قبل انجام دادیم) رأس n و یال ni را از گراف حذف می‌کنیم. در نتیجه یک درخت با مجموعه رئوس $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ و دنباله درجات رئوس $d_1, d_2, \ldots, d_i - 1, \ldots, d_{n-1}$ بدست می‌آید و چون i هر مقداری بین یک تا $n-1$ را می‌تواند قبول کند می‌توانیم نتیجه بگیریم:

تعداد درختهای روی مجموعهٔ رئوس $\{1, 2, \ldots, n\}$ و با درجات $d_1, d_2, \ldots, d_n$	$= \sum_{i=1}^{n-1}$	تعداد درختهای با مجموعهٔ رئوس $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ و با درجات $d_1, d_2, \ldots, d_i - 1, \ldots, d_{n-1}$

چند درخت روی مجموعه رئوس $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ و با درجات $d_1, d_2, \ldots, d_i - 1, \ldots, d_{n-1}$ وجود دارد؟ چون حاصل جمع این درجات برابر $2(n-1) - 2$ می‌باشد، در نتیجه با توجه به فرض استقراء، می‌توان نتیجه گرفت که تعداد این درخت‌ها برابر $\binom{(n-1)-2}{d_1-1 \ldots d_i-2 \ldots d_{n-1}-1}$ می‌باشد. بنابراین:

تعداد درختهای روی مجموعه رئوس $\{1, 2, \ldots, n\}$ با درجات $d_1, d_2, \ldots, d_n$	$= \sum_{i=1}^{n-1}$	$\binom{n-3}{d_1-1 \quad d_2-1 \quad \ldots \quad d_{n-1}-1}$

امّا طبق خاصیت جمع ضرایب چند جمله‌ای که در فصل قبل بیان کردیم این حاصل جمع برابر است با:

$$\binom{n-2}{d_1-1 \quad d_2-1 \quad \ldots \quad d_{n-1}-1} = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\ldots(d_{n-1}-1)!}$$
$$= \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\ldots(d_{n-1}-1)!\underbrace{(d_n-1)!}_{1}}$$

و این مقدار، همان عدد مورد نظر در استقراء می‌باشد. □

حال از قضیهٔ بالا استفاده می‌کنیم تا تعداد کل درختهایی را که روی مجموعهٔ رئوس $\{1, 2, \ldots, n\}$ تعریف می‌شوند پیدا کنیم. این اثبات زیبا اولین بار توسط آرتور کیلی[1] در سال ۱۸۸۹ ارائه شد. (او تمام درختها را برای حالت $n = 6$ رسم کرد)

1) Arthur Cayley

قضیه (کیلی): برای $n \geqslant ۲$، تعداد درختهایی که مجموعهٔ رئوس آنها $\{۱,۲,\ldots,n\}$ می‌باشد برابر $n^{n-۲}$ می‌باشد.

اثبات: اجازه دهید ابتدا بسط چند جمله‌ای را که در آخرین مثال فصل قبل بیان کردیم یادآوری کنیم:

$$(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)^{n-۲} = \sum_{\substack{k_۱,k_۲,\ldots,k_n\geqslant ۰\\ k_۱+\cdots+k_n=n-۲}} \binom{n-۲}{k_۱\ k_۲\ \ldots\ k_n} a_۱^{k_۱}a_۲^{k_۲}\ldots a_n^{k_n}$$

$$= \sum_{\substack{d_۱,\ldots,d_n\geqslant ۱\\ (d_۱-۱)+\cdots+(d_n-۱)=n-۲}} \binom{n-۲}{d_۱-۱\ \ldots\ d_n-۱} a_۱^{d_۱-۱}a_۲^{d_۲-۱}\ldots a_n^{d_n-۱}$$

در عبارت فوق تمام a_iها را برابر ۱ قرار دهید. داریم:

$$n^{n-۲} = (۱+۱+\cdots+۱)^{n-۲} = \sum_{\substack{d_۱,\ldots,d_n\geqslant ۱\\ (d_۱-۱)+\cdots+(d_n-۱)=n-۲}} \binom{n-۲}{d_۱-۱\ldots d_n-۱}$$

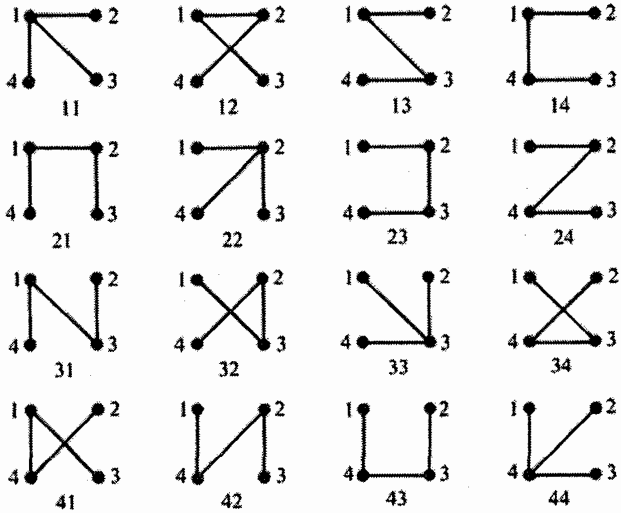
حال برای محاسبهٔ تعداد درختهای روی مجموعه رئوس $\{۱,۲,\ldots,n\}$ باید تعداد درختهای موجود را روی هر مجموعه درجات $d_۱,\ldots,d_n$ حساب کرده و با هم جمع کنیم (البته باید $d_۱+\cdots+d_n = ۲n-۲$) و با استفاده از قضیه قبل می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$\boxed{\text{تعداد درختهای روی مجموعه رئوس } \{۱,۲,\ldots,n\}} = \sum_{\substack{d_۱,\ldots,d_n\geqslant ۱\\ (d_۱-۱)+\cdots+(d_n-۱)=n-۲}} \boxed{\text{تعداد درختهای با مجموعهٔ رئوس } \{۱,۲,۳,\ldots,n\} \text{ با درجات } d_۱,d_۲,\ldots,d_n}$$

$$= \sum_{\substack{d_۱,\ldots,d_n\geqslant ۱\\ (d_۱-۱)+\cdots+(d_n-۱)=n-۲}} \binom{n-۲}{d_۱-۱\ \ d_۲-۱\ \ldots\ d_n-۱} = n^{n-۲}$$

بدین ترتیب قضیه کیلی اثبات می‌شود. □

مثال: در اینجا ۱۶ درخت روی مجموعه رئوس $\{۱,۲,۳,۴\}$ وجود دارد. همچنین ۱۶ زوج از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴\}$ می‌توان انتخاب کرد. بنابراین می‌توان به هر درخت یکی از این زوج اعداد را نسبت داد. (دلیل انجام این کار را توضیح خواهیم داد.)



□

اثباتهای مختلفی برای قضیهٔ کیلی بیان شده است. یکی از این اثباتها که توسط پروفر[1] در سال ۱۹۱۸ ارائه شد، یک تناظر یک به یک بین درختهای روی مجموعه رئوس $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ و مجموعهٔ $(n - ۲)$تایی‌هایی که از اعداد $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ ایجاد می‌شوند (تکرار مجاز است)، پیدا کرد. این کار او باعث شد تا بتوانیم هر درخت را با یک کد $n - ۲$ رقمی نامگذاری کنیم. (مانند همان کاری که در مثال قبل انجام دادیم) حال الگوریتم پروفر را برای کد گذاری درختها ارائه می‌کنیم. این الگوریتم به هر درخت دقیقاً یک کد $n - ۲$ رقمی نسبت می‌دهد.

الگوریتم: یک درخت با مجموعه رئوس $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ داریم که می‌خواهیم کد پروفر مربوط به آن را پیدا کنیم. برای این کار الگوریتم زیر را انجام می‌دهیم:

۱) کوچکترین رأسی را که درجهٔ آن یک است پیدا کنید (فرض کنید این رأس v و رأس مجاور آن w باشد).

۲) w را به عنوان رقم بدست آمده برای کد بنویسید و رأس v و یال vw را حذف کنید.

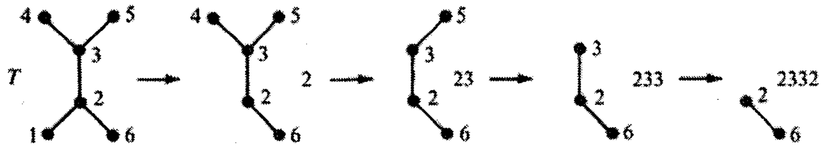
۳) اگر از درخت بیش از یک یال باقی‌مانده، به مرحلهٔ ۱ برگردید. در غیر این صورت به پایان الگوریتم رسیده‌اید. □

چون درخت در ابتدا n رأس دارد و الگوریتم تا جایی ادامه پیدا می‌کند که تنها دو رأس باقی بماند و در عین حال در هر مرحله شماره رأس مجاور رأس حذف شده یادداشت می‌شود، بنابر این کد بدست آمده باید یک کد $n - ۲$ رقمی از اعداد $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد. (ممکن است $n > ۹$

1) Prufer

باشد و در آن صورت کد ما بیش از $n - ۲$ رقم شود. ولی شما برای راحتی کار هر عدد کوچکتر یا مساوی n که در کد ظاهر می‌شود را به عنوان یک رقم در نظر بگیرید)

مثال: الگوریتم داده شده را برای درخت زیر دنبال کنید تا به کد «۲۳۳۲» برسید.



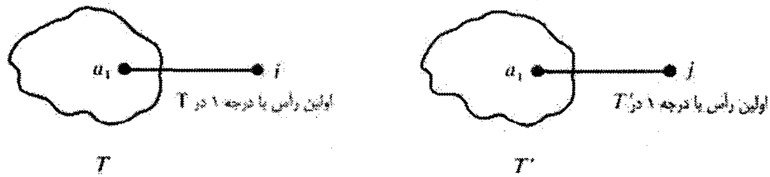
□

دقت کنید که در مثال داده شده هر راس v، در کد ایجاد شده $d(v) - ۱$ مرتبه ظاهر شده است. زیرا هر رأس هر بار که شمارهٔ آن در کد نوشته می‌شود یک رأس مجاور آن حذف و مسلماً یک واحد از درجهٔ آن کم می‌شود تا جایی که درجهٔ آن به یک برسد. بنابراین این موضوع برای همهٔ درختها صادق است.

قضیه: هر لیست $n - ۲$ رقمی که از اعداد $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ تشکیل شده است (تکرار مجاز است) یک کد پروفر مربوط به یک درخت از مجموعه رئوس $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ می‌باشد.

اثبات: $n^{n-۲}$ درخت روی مجموعه رئوس $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ وجود دارد و ما اثبات کردیم که به هر درخت دقیقاً یک کد می‌توان نسبت داد. حال اگر اثبات کنیم که به هیچ دو درختی یک کد یکسان نسبت نداده‌ایم، نتیجه می‌شود که تناظر یک به یکی بین کدها و درخت‌ها وجود دارد.

فرض کنید T و T' دو درخت باشند که به هر دو کد زیر را نسبت داده باشیم: $a_۱a_۲ \ldots a_{n-۲}$.
حال می‌خواهیم اثبات کنیم که $T = T'$. با توجه به آنچه در مثال قبل گفته شد، هر رأس v در کد $d(v) - ۱$ بار ظاهر می‌شود و چون در هر دو درخت به کد یکسانی رسیده‌ایم، در نتیجه باید درجهٔ تمامی رئوس در دو درخت یکسان باشند و در ضمن چون رقم اول کد برای هر دو درخت $a_۱$ می‌باشد، پس باید حالت زیر اتفاق بیفتد:



ما می‌خواهیم نشان دهیم که $i = j$. اگر اینگونه نباشد فرض می‌کنیم $i < j$. چون طبق الگوریتم رأس j باید کوچکترین رأس با درجهٔ ۱ در درخت T' باشد بنابراین درجهٔ رأس i (با توجه به اینکه i از j کوچکتر است) باید بیش از یک باشد و چون درجهٔ این رأس در T برابر یک است به تناقض می‌رسیم. در نتیجه باید $i = j$ باشد. حال الگوریتم با حذف یال $a_۱i$ و رأس

i ادامه پیدا می‌کند. برای ادامهٔ الگوریتم نیز همین استدلال را می‌توانیم بیاوریم. بدین ترتیب اثبات می‌شود که دو درخت باید یکسان باشند. یعنی $T = T'$. □

حال اگر به شما کد پروفر مربوط به یک درخت داده شود آیا می‌توانید درخت مربوط به آن را بیابید؟ ما از اثبات الگوریتم قبل می‌توانیم بفهمیم که چگونه می‌توان این کار را انجام داد: اگر کد ما $a_1a_2\ldots a_{n-2}$ باشد، بنابراین درخت ما باید شامل یال a_1i باشد که i کوچکترین رأس از درجهٔ یک است و چون هر رأس v در لیست $d(v) - 1$ بار ظاهر می‌شود بنابراین i کوچکترین عددی است که در لیست ظاهر نشده است. این ایده می‌تواند ما را برای پیدا کردن الگوریتمی برای یافتن درخت با کد داده شده، راهنمایی کند.

الگوریتم: یک لیست $a_1a_2\ldots a_{n-2}$ از اعداد $\{1, 2, \ldots, n\}$ داده شده است. برای پیدا کردن درختی که این لیست، کد پروفر مربوط به آن است:

الف) سه لیست از اعداد در نظر بگیرید. لیست اول (کد پروفر) $a_1a_2\ldots a_{n-2}$ می‌باشد. لیست دوم (مجموعه رئوس) $1, 2, \ldots, n$ می‌باشد و لیست سوم (مجموعهٔ یالها) که در ابتدا خالی است.

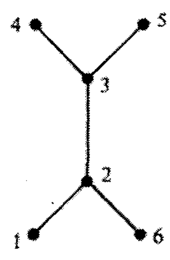
ب) کوچکترین عددی را که در لیست دوم آمده است ولی در لیست اول نیامده است پیدا کنید (مثل i) اولین عدد لیست اول را حذف کنید (مثل j). عدد i را از لیست دوم حذف کنید و یال ij را به لیست سوم اضافه کنید.

ج) اگر هنوز عددی در لیست اول باقی‌مانده بود به مرحلهٔ ۲ بروید در غیر این صورت اگر لیست اول خالی باشد، لیست دوم باید تنها شامل دو عدد باشد. این دو عدد را به عنوان آخرین یال به لیست سوم اضافه کنید. اکنون به پایان الگوریتم رسیده‌اید.

مثال: یافتن درخت T توسط کد پروفر ۲۳۳۲ (به مثال قبل رجوع کنید)

۲۳۳۲	۱۲۳۴۵۶	یال ۱۲ را به لیست سوم اضافه کنید
۳۳۲	۲۳۴۵۶	یال ۳۴ را به لیست سوم اضافه کنید
۳۲	۲۳۵۶	یال ۳۵ را به لیست سوم اضافه کنید
۲	۲۳۶	یال ۲۳ را به لیست سوم اضافه کنید
–	۲۶	یال ۲۶ را به لیست سوم اضافه کنید

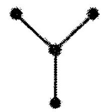
$\Rightarrow$



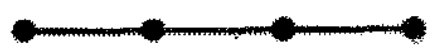
T

□

هنگامی که ما درختهای n رأسی را می‌شمردیم رئوس این درختها دارای برچسب ۱ تا n بودند. مسأله شمارش تعداد درختهای بدون برچسب مسأله‌ای کاملاً متفاوت (و برای n های بزرگ مسأله‌ای بسیار مشکل) می‌باشد. برای مثال ما ۱۶ درخت ۴ رأسی روی مجموعهٔ رئوس $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ پیدا کردیم. در حالی که تنها ۲ درخت ۴ رأسی بدون برچسب وجود دارد.



و



در بیشتر مواقعی که از این به بعد در رابطه با گرافها بحث خواهیم کرد، گرافهای بدون برچسب مورد نظر ما خواهند بود.

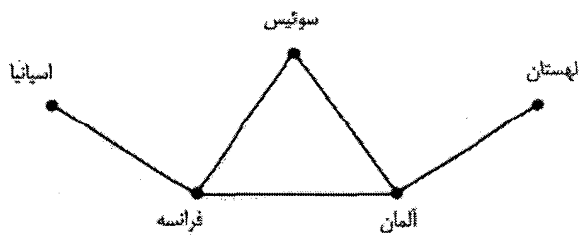
مثال: گراف $G' = (V', E')$ را با مجموعهٔ رئوس

$$V' = \{\text{فرانسه، آلمان، اسپانیا، سوئیس، لهستان}\}$$

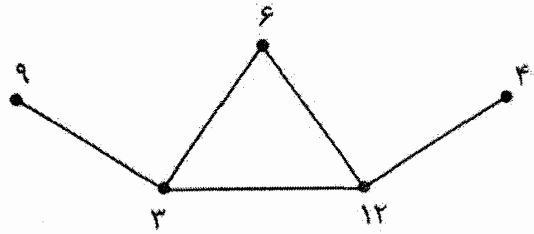
در نظر بگیرید. یالهای گراف را هم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E' = \{vw : \text{مرز مشترک داشته باشند: } v \text{ و } w\}$$

بنابراین گراف G' را می‌توانیم به صورت زیر نمایش دهیم:



اگر ما برچسب رئوس را در نظر نگیریم، این گراف دقیقاً مانند گراف رسم شده در اولین مثال این فصل خواهد بود.

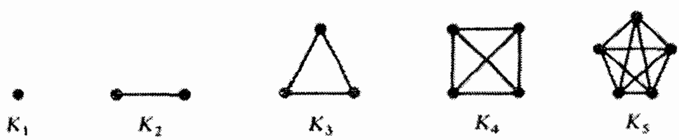


□

در این صورت می‌گوئیم دو گراف G و G' یکریخت هستند. (یعنی تناظر یک به یکی بین اعضای V و V' وجود دارد و اگر یال vw در E وجود دارد یال $v'w'$ نیز در E' وجود داشته باشد و بالعکس). مثال دیگری از گرافهای یکریخت را می‌توانید در گراف‌های مربوط به درخت احتمال و شجره‌نامهٔ خانوادگی در مثال صفحهٔ ۲۳ از همین فصل پیدا کنید. □

دیدید که در این مثال برای بررسی یکریختی گرافها به بررسی برچسب رئوس نپرداختیم. در فصلهای آینده نیز به بررسی گرافهایی که رأسهای آنها برچسب ندارند خواهیم پرداخت.

مثال: گراف کامل K_n، از n رأس تشکیل شده است که هر دوتایی از آنها بوسیلهٔ یک یال به هم وصل شده‌اند.



گراف کامل دو بخشی $K_{m,n}$ نیز از $m+n$ رأس و mn یال تشکیل شده است که هر کدام از m رأس بخش اول به هر کدام از n رأس بخش دوم وصل شده‌اند.

□

«تمارین»

۱) الف) گراف کامل K_n از چند یال تشکیل شده است؟ (ج)

ب) چند گراف با دقیقاً m یال با مجموعه رئوس $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ وجود دارد؟ (ر، ج)

ج) در کل چند گراف با مجموعهٔ رئوس $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ وجود دارد؟ (ر، ج)

۲) (لم دست دادن) نشان دهید در گراف $G = (V, E)$:

$$\sum_{v \in V} d(v) = ۲|E|$$

که در آن $|E|$ برابر تعداد یالها می‌باشد. (ر)

۳) $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید که $E \neq \varnothing$ و درجهٔ هر راس گراف زوج است. نشان دهید که گراف شامل یک دور است. همچنین نشان دهید که اگر یالهای این دور را حذف کنیم باز هم درجهٔ رئوس گراف زوج خواهد بود و نتیجه بگیرید که گراف از مجموعه‌ای از دورها تشکیل شده است که هر یال دقیقاً در یک دور ظاهر شده است.

۴) الف) ثابت کنید که برای هر درخت $G = (V, E)$ داریم: $|E| = |V| - ۱$ (ر)

ب) نشان دهید که اگر $G(V, E)$ یک گراف همبند باشد بطوری که $|E| = |V| - ۱$ در آن صورت G یک درخت خواهد بود. (ر)

۵) برای $n \geqslant ۲$ نشان دهید چه تعداد از $n^{n-۲}$ درخت با مجموعه رئوس $\{۱, ۲, \ldots, n\}$:

الف) یک رأس از درجهٔ $n - ۱$ دارند؟ (ج)

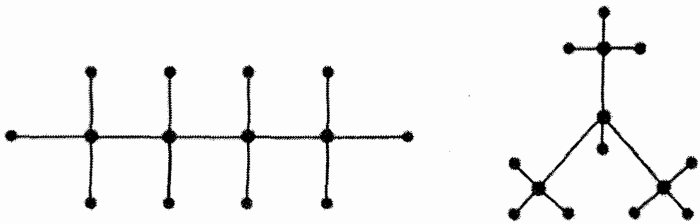
ب) یک رأس از درجهٔ $n - ۲$ دارند؟ (ر، ج)

ج) در آنها همهٔ رئوس از درجهٔ ۱ یا ۲ باشند؟ (ر، ج)

د) در آنها درجهٔ رأس ۱ برابر ۱ باشد؟ (ر، ج)

در ضمن نشان دهید نسبت تعداد درختهایی که در آنها $d(۱) = ۱$ به تعداد کل $n^{n-۲}$ درخت وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل کند، برابر $\frac{۱}{e}$ است. (ر)

۶) مولکول هیدروکربنها از اتمهای کربن (با ظرفیت ۴) و اتمهای هیدروژن (با ظرفیت ۱) تشکیل شده است که می‌توان هر کدام از آنها را به صورت یک گراف همبند نمایش داد. برای مثال مولکول بوتان و ۲ـ متیل پروپان (ایزوبوتان) هر دو شامل ۴ اتم کربن و ۱۰ اتم هیدروژن هستند.



این دو شکل غیر یکریخت را که فرمول شیمیایی یکسان دارند (C_4H_{10}) هم ترکیب یا «ایزومر» می‌نامند.

الف) نشان دهید هر مولکول هیدروکربن با فرمول مولکولی C_nH_{2n+2} (آلکان) دارای نمایشی به صورت یک درخت است. امّا نمایش مولکول هیدروکربنهایی به فرمول C_nH_{2n} (آلکن) به شکل درخت نمی‌باشد. (ر)

ب) نشان دهید دو مثال بالا تنها مولکولهای ایزومر با فرمول C_4H_{10} هستند و سپس تمام مولکولهای ایزومر با فرمول C_3H_8 و C_5H_{12} را بیابید. (ر، ج)

۷) نشان دهید برای هر گراف $G = (V, E)$ با k مؤلفهٔ همبندی داریم:

$$|V| - k \leqslant |E| \leqslant \frac{1}{2}(|V| - k)(|V| - k + 1) \qquad (ر)$$

۳

قضیهٔ ازدواج

در فصل قبل موضوع بحث «شمارش حالتهای مختلف موجود در یک درخت» بود. امّا در این فصل «وجود یک حالت خاص در گرافهای دو بخشی» را بررسی خواهیم کرد. ما در این فصل حول قضیه‌ای که توسط فیلیپ هال[1] در سال ۱۹۳۵ ارائه شد بحث خواهیم کرد. این قضیه با صورتهای مختلفی بیان می‌شود که صورت معروف آن «قضیه ازدواج» نام دارد. در این فصل با صورتهای مختلف این قضیه و اثبات آنها آشنا خواهیم شد.

مثال: در یک گروه، ۷ پسر $B_۱, B_۲, B_۳, B_۴, B_۵, B_۶, B_۷$ و ۶ دختر $G_۱, G_۲, G_۳, G_۴, G_۵, G_۶$ وجود دارند. بطوری که:

دختر $G_۱$ پسرهای $B_۱$ و $B_۲$ و $B_۳$ را می‌شناسد.
دختر $G_۲$ پسرهای $B_۲$ و $B_۳$ را می‌شناسد.
دختر $G_۳$ پسرهای $B_۳$ و $B_۵$ و $B_۷$ را می‌شناسد.
دختر $G_۴$ پسرهای $B_۱$ و $B_۲$ را می‌شناسد.
دختر $G_۵$ پسرهای $B_۱$ و $B_۲$ و $B_۳$ را می‌شناسد.
دختر $G_۶$ پسرهای $B_۴$ و $B_۵$ و $B_۶$ را می‌شناسد.

آیا این ممکن است که هر دختر با یکی از پسرهایی که می‌شناسد ازدواج کند؟

راه حل: این کار ممکن نیست. زیرا چهار دختر $G_۱$ و $G_۲$ و $G_۴$ و $G_۵$ در مجموع تنها سه پسر $B_۱$ و $B_۲$ و $B_۳$ را می‌شناسند و واضح است که نمی‌توان برای این چهار دختر از بین سه نفر همسری انتخاب کرد.

بنابراین برای اینکه بتوانیم برای هر دختری یک پسر برای ازدواج با او انتخاب کنیم، باید هر

1) Philip Hall

زیرمجموعه rتایی از دخترها که انتخاب می‌کنیم، حداقل r پسر را بشناسند. در واقع برای هر دختری می‌توان یک همسر انتخاب کرد اگر و تنها اگر شرط بالا برقرار باشد.

مثال: اگر در مثال قبل فرض کنیم:

دختر G_1 پسرهای B_1 و B_3 را می‌شناسد.
دختر G_2 پسرهای B_2 و B_3 را می‌شناسد.
دختر G_3 پسرهای B_1 و B_3 و B_4 و B_5 را می‌شناسد.
دختر G_4 پسرهای B_2 و B_4 و B_6 و B_7 را می‌شناسد.
دختر G_5 پسرهای B_1 و B_5 را می‌شناسد.
دختر G_6 پسرهای B_1 و B_2 را می‌شناسد.

در این حالت هر مجموعه‌ای از دختران بین خودشان حداقل به تعداد خودشان از پسرها را می‌شناسند. به عنوان مثال دخترهای $\{G_1, G_2, G_6\}$ پسرهای $\{B_1, B_2, B_3\}$ را می‌شناسند. آیا می‌توانیم برای هر دختر یک همسر انتخاب کنیم؟

راه حل: پیدا کردن این مورد بوسیلهٔ روش آزمون و خطا بسیار آسان است. امّا ما می‌خواهیم از روشی استفاده کنیم که بتوان آن را برای حالت کلّی نیز تعمیم داد. (همانگونه که در اثبات قضیهٔ بعدی خواهیم دید).

ما کار را با انتخاب همسر برای هر یک از دخترها شروع می‌کنیم تا به دختری برسیم که دیگر نتوانیم پسری را برای او انتخاب کنیم. به عنوان مثال G_1 می‌تواند با B_1 ازدواج کند، G_2 با B_2، G_3 با B_3، G_4 با B_4 و G_5 با B_5. امّا در آن صورت چون دختر G_6 فقط پسرهای B_1 و B_2 را می‌شناسد که برای آنها قبلاً همسری انتخاب شده است، چگونه می‌توانیم برای او یک همسر انتخاب کنیم؟

دختر G_6 یک میهمانی بر پا می‌کند. او تمام پسرانی را که می‌شناسد دعوت می‌کند. آنها نیز همسران خود را به میهمانی دعوت می‌کنند. این دخترها نیز پسرهایی را دعوت می‌کنند که آنها را می‌شناسند و تا به حال دعوت نشده‌اند. این پسرها نیز به نوبهٔ خود همسران خود را دعوت می‌کنند و . . . این روند ادامه پیدا می‌کند تا جایی که پسری (مثل B_k) دعوت شود که هنوز همسری نداشته باشد. در این مثال داریم:

$$\{G_6\} \xrightarrow{\text{دعوت می‌کند}} \{B_1, B_2\} \longrightarrow \{G_1, G_2\} \longrightarrow \{B_3\} \longrightarrow \{G_3\}$$
$$\longrightarrow \{B_4, B_5\} \longrightarrow \{G_4, G_5\} \longrightarrow \{B_6, B_7\}$$

در این مرحله توقف می‌کنیم. زیرا B_7 هنوز همسری انتخاب نکرده است و به مهمانی دعوت شده است. حال از میان دعوت شدگان زوجهای زیر را تشکیل می‌دهیم:

پسر (B_7) با دختری که او را دعوت کرده است (G_4)، همسر این دختر (B_4) با دختری که او را دعوت کرده است (G_3)، همسر این دختر (B_3) با دختری که او را دعوت کرده است (G_1)، و نهایتاً همسر او (B_1) با دختر (G_6) که او را دعوت کرده است[1].

$$\{G_6\} \longrightarrow \{B_1, B_2\} \longrightarrow \{G_1, G_2\} \longrightarrow \{B_3\} \longrightarrow \{G_3\} \longrightarrow \{B_4, B_5\} \longrightarrow$$

$$\{G_4, G_5\} \longrightarrow \{B_6, B_7\}$$

در نتیجه توانسته‌ایم زوجهایی تشکیل دهیم که هر یک از دخترها در یک زوج با پسری که می‌شناسد قرار داشته باشد. یعنی روشی برای ازدواج دختران و پسران پیدا کرده‌ایم که هر دختری بتواند با پسری که می‌شناسد ازدواج کند. □

حال، حالت کلی این مثال را در قضیهٔ زیر بیان می‌کنیم:

قضیه (قضیهٔ هال ـ صورت ازدواج): یک مجموعه از دختران می‌توانند از بین مجموعه‌ای از پسران که هر یک بعضی از آنها را می‌شناسد، برای خود همسری پیدا کنند اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه‌ای از دختران (مثلاً r عضوی) در میان پسران در مجموع حداقل با r نفر آشنا باشند.

اثبات: $(\Longleftarrow)$: اگر تمام دختران بتوانند برای خودشان همسر پیدا کنند، در آن صورت هر زیرمجموعهٔ r عضوی از دختران در مجموع حداقل r پسر را می‌شناسند. (زیرا هر کدام شوهر خود را می‌شناسد که تعداد آنها برابر خودشان می‌باشد)

$(\Longrightarrow)$: دخترها را به صورت $G_1, G_2, \ldots, G_n$ نامگذاری می‌کنیم. فرض کنید هر زیرمجموعهٔ r عضوی از آنها در بین پسرها حداقل r نفر را می‌شناسند. ما قصد داریم با استقراء روی m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ نشان دهیم که دخترهای $G_1, G_2, \ldots, G_m$ می‌توانند برای خودشان از میان پسرها همسری انتخاب کنند.

حالت پایهٔ $m = 1$ بدیهی است. زیرا دختر G_1 طبق فرض حداقل یک پسر را می‌شناسد که می‌تواند او را به عنوان شوهر خود انتخاب کند. حال فرض کنید $m \geqslant 1$ و دخترهای G_1 و G_2 و ... و G_m توانسته‌اند برای خودشان همسری پیدا کنند. (آنها را به ترتیب B_1 و B_2 و

۱) سه زوج (G_1, B_1)، (G_2, B_2) و (G_3, B_3) همراه با G_6 و B_7 تشکیل زوجهای جدید را داده‌اند.

... و B_m می‌نامیم). حال می‌خواهیم با m زوج موجود و دختر G_{m+1}، $m+1$ زوج جدید تشکیل دهیم. این $m+1$ دختر در میان پسران حداقل $m+1$ پسر را می‌شناسند و فقط m پسر از آنها تاکنون ازدواج کرده‌اند. حال اگر G_{m+1} با پسری آشنا باشد که هنوز ازدواج نکرده باشد، مسأله حل است. زیرا این دو می‌توانند با هم ازدواج کنند. ولی در غیر این صورت چه باید بکنیم؟

مانند مثال قبل فرض کنید دختر G_{m+1} یک مهمانی بر پا کند و تمام پسرانی را که می‌شناسد دعوت کند. آنها نیز همسران خود را دعوت کنند. این دخترها نیز تمام پسرهایی را که می‌شناسند دعوت کنند و ... تا جایی که پسری دعوت شود که تا به حال همسری انتخاب نکرده باشد. (مانند B_x).

حال برای نمایش بهتر دعوت شدگان از مجموعه‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\{G_{m+1}\} \xrightarrow{\text{دعوت می‌کند}} \{B'_1, B'_2, \dots, B'_i\} \longrightarrow \{G'_1, G'_2, \dots, G'_i\}$$
$$\longrightarrow \{B'_{i+1}, \dots, B'_j\} \longrightarrow \{G'_{i+1}, \dots, G'_j\} \longrightarrow \dots$$
$$\longrightarrow \{B'_{k+1}, \dots, B'_\ell\} \longrightarrow \{G'_{k+1}, \dots, G'_\ell\} \longrightarrow \{\dots, B_x\}$$

حال از کجا باید بدانیم که این روند بالاخره متوقف خواهد شد. یعنی حتماً پسری دعوت می‌شود که هنوز ازدواج نکرده باشد؟ اگر هیچ پسری که ازدواج نکرده باشد، دعوت نشود، باید در مرحله‌ای به مجموعه‌ای از دختران (مثل $\{G'_{k+1}, \dots, G'_\ell\}$) برسیم که تمام پسرانی که آنها می‌شناسند، قبلاً دعوت شده باشند. ولی این حالت ممکن نیست. زیرا تا به حال دختران $G'_1, G'_2, \dots, G'_\ell$ و دختر G_{m+1} در مهمانی شرکت کرده‌اند و تمام پسرانی را که می‌شناسند دعوت کرده‌اند. ولی تنها ℓ پسر $(B'_1, B'_2, \dots, B'_\ell)$ دعوت شده‌اند که مخالف فرض است. بنابراین، حتماً به مرحله‌ای خواهیم رسید که پسری دعوت شود که هنوز ازدواج نکرده باشد.

حال مانند مثال قبل زوجهای زیر را تشکیل می‌دهیم:

پسر B_x با دختری که او را دعوت کرده است، همسر این دختر و دختری که او را دعوت کرده است، و ... به همین ترتیب تا دختر G_{m+1} ادامه می‌دهیم[1]:

$$\{G_{m+1}\} \longrightarrow \{\dots B'_z \dots\} \longrightarrow \{\dots G'_z \dots\} \longrightarrow \dots \{\dots B'_c \dots\}$$
$$\longrightarrow \{\dots G'_c \dots\} \longrightarrow \{\dots B_x \dots\}$$

[1] تمام زوجهای قبلی باضافهٔ G_{m+1} و B_x زوجهای جدید را تشکیل می‌دهند.

در نتیجه توانسته‌ایم $m+1$ زوج تشکیل دهیم بطوری که در هر زوج یک دختر با پسری که او را می‌شناسد قرار داشته باشد که این همان حکم استقراء می‌باشد. در نتیجهٔ قضیهٔ هال به این روش اثبات شد. □

اثبات گفته شده کوتاهترین یا ساده‌ترین اثبات موجود برای قضیهٔ هال نمی‌باشد. ولی این امتیاز را داراست که علاوه بر اثبات کردن قضیه، روشی نیز برای انتخاب همسر برای دختران به ما می‌دهد.

اثبات دیگری از این قضیه را می‌توانید در تمارین بیابید. برای بررسی روشهای دیگر اثبات این قضیه می‌توانید به کتاب «Transversal theory» نوشتهٔ «Leon Mirsky» و یا به کتاب «Introduction to graph theory» نوشتهٔ «Robin Wilson» و یا به کتاب تخصصی «Independence theory in combinatories» مراجعه نمائید که لیست آنها را می‌توانید در بخش کتابشناسی بیابید.

قضیهٔ هال با اینکه بدیهی به نظر نمی‌رسد، ولی کاربردهای بسیار زیادی دارد و به صورتهای مختلفی بیان می‌شود. در ادامه صورتهای دیگر این قضیه را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

یک خانواده از مجموعه‌ها را در نظر می‌گیریم: $\mathfrak{A}=(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ (در این مورد مجموعه‌ها را متناهی فرض می‌کنیم.). یک «مجموعه نماینده‌های متمایز» از $\mathfrak{A}$ یک مجموعهٔ X است بطوری که $|X|=n$ و اعضای آن را بتوان طوری در یک ردیف قرار داد که اگر $X=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ در آن صورت $a_1\in A_1$، $a_2\in A_2$ و ... و $a_n\in A_n$. به بیان دیگر n عضو مجموعه X نمایندهٔ n مجموعهٔ A_1 تا A_n می‌باشند.

مثال: خانوادهٔ $\mathfrak{A}=(A_1,A_2,\ldots,A_6)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_1=\{1,3\}\qquad A_2=\{2,3\}\qquad A_3=\{1,3,4,5\}$$
$$A_4=\{2,4,6,7\}\qquad A_5=\{1,5\}\qquad A_6=\{1,2\}$$

حال این خانواده شامل یک مجموعه نماینده‌های متمایز به صورت $X=\{1,2,3,4,5,7\}$ می‌باشد. (یا با ترتیب مناسب $X=\{3,2,4,7,5,1\}$). عدد ۳ را می‌توان نمایندهٔ A_1 در نظر گرفت، ۲ را نمایندهٔ A_2، ۴ را نمایندهٔ A_3، ۷ را نمایندهٔ A_4، ۵ را نمایندهٔ A_5 و ۱ را نمایندهٔ A_6.

امّا برای خانوادهٔ $\mathfrak{A}=(A_1,A_2,\ldots,A_6)$ که بصورت زیر داده شده‌اند:

$$A_1=\{1,2,3\}\qquad A_2=\{2,3\}\qquad A_3=\{3,5,7\}$$
$$A_4=\{1,2\}\qquad A_5=\{1,2,3\}\qquad A_6=\{4,5,6\}$$

مجموعهٔ نمایندگان متمایزی نمی‌توان انتخاب کرد. زیرا برای مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۴$ و $A_۵$ داریم:

$$A_۱ \cup A_۲ \cup A_۴ \cup A_۵ = \{۱, ۲, ۳\}$$

در نتیجه ممکن نیست بتوان برای این ۴ مجموعه، ۴ نمایندهٔ متمایز انتخاب کرد. □

در حالت کلی واضح است که برای آنکه امیدی به پیدا کردن یک «مجموعه نمایندهای متمایز» از خانوادهٔ $\mathfrak{A} = (A_۱, A_۲, \ldots, A_n)$ داشته باشیم باید اجتماع هر rتایی از آنها تعداد اعضایی بیش‌تر یا مساوی r داشته باشند. یعنی:

$$\left|\bigcup_{i\in\{i_۱, i_۲, \ldots, i_r\}} A_i\right| \geqslant |\{i_۱, i_۲, \ldots, i_r\}|$$

و بطور خلاصه می‌توان نوشت:

$$|\bigcup_{i\in I} A_i| \geqslant |I|$$

که I زیرمجموعه‌ای از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ می‌باشد.

مثال بالا شباهت زیادی به قضیه ازدواج دارد. در واقع اگر شما مجموعهٔ $A_۱$ را مجموعهٔ پسرانی در نظر بگیرید که دختر $G_۱$ را می‌شناسند، مجموعهٔ $A_۲$ را مجموعهٔ پسرانی که $G_۲$ را می‌شناسند و ... در آن صورت می‌توانید به همان طریقی که برای دخترها همسر انتخاب می‌کردید، یک مجموعهٔ نمایندهای متمایز برای مجموعه‌ها پیدا کنید.

آنچه گفته شد به ما این امکان را می‌دهد تا حالت مجموعه‌ای قضیهٔ هال را بیان کنیم:

نتیجه (قضیهٔ هال ـ صورت مجموعه‌ای): خانوادهٔ $\mathfrak{A} = (A_۱, A_۲, \ldots, A_n)$ یک مجموعه نماینده‌های متمایز دارد اگر و تنها اگر (برای هر $\{۱, ۲, \ldots, n\} \subset I$) $|\bigcup_{i\in I} A_i| \geqslant |I|$

اثبات: n دختر $۱, ۲, \ldots, n$ را در نظر بگیرید و برای هر $۱ \leqslant i \leqslant n$، A_i را مجموعهٔ پسرانی در نظر بگیرید که دختر i، آنها را می‌شناسد. حال سعی کنید قضیهٔ هال را برای این دختران و پسران در نظر بگیرید:

$\mathfrak{A}$ یک مجموعه نمایندهای متمایز داشته باشد. $\iff$ دخترهای $۱, ۲, \ldots, n$ بتوانند از میان پسرهایی که می‌شناسند برای خود همسری پیدا کنند.

$\iff$ هر مجموعهٔ I از دختران حداقل $|I|$ پسر را بشناسند.

$\iff$ برای هر I، مجموعهٔ $\bigcup_{i\in I} A_i$ حداقل $|I|$ عضو داشته باشد.

$\iff$ برای هر $I \subseteq \{۱, ۲, \ldots, n\}$: $|\bigcup_{i\in I} A_i| \geqslant |I|$ □

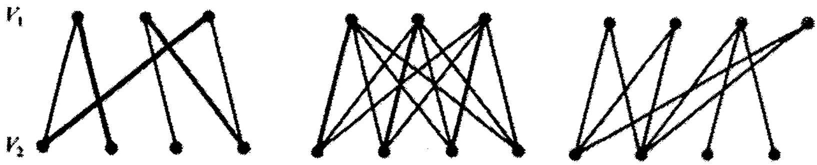
اکنون می‌خواهیم صورت گرافی قضیهٔ هال را بیان کنیم:

یک گراف $G = (V, E)$ دو بخشی است اگر بتوان مجموعهٔ رأسهای آن (V) را به دو مجموعهٔ V_1 و V_2 طوری افراز کرد که هر یالی از گراف یک عضو از V_1 را به یک عضو از V_2 وصل کند. به عبارت دیگر دو سر هیچ یالی در یک بخش از رأسها نباشند. این گراف را به صورت $G = (V_1, E, V_2)$ نمایش می‌دهیم.

یک تطابق از V_1 به V_2 در این گراف، یک مجموعه شامل $|V_1|$ یال می‌باشد که هیچ دو یالی رأس مشترک ندارند. (بنابراین هر رأسی از V_1 دقیقاً توسط یک یال از تطابق به رأسی از V_2 وصل شده است.)

گراف کامل دو بخشی $K_{m,n}$ (که در فصل ۲ تعریف آن را دیدید) مثالی از یک گراف دو بخشی با m رأس در بخش V_1 و n رأس در بخش V_2 می‌باشد. اگر $m \leqslant n$ باشد، در آن صورت این گراف شامل یک تطابق از V_1 به V_2 خواهد بود.

مثال: چند گراف دو بخشی و چند تطابق:



تطابقی از V_1 به V_2 وجود ندارد. | یالهای پر رنگ یک تطابق در $K_{3,4}$ هستند. | یالهای پر رنگ یک تطابق از V_1 به V_2 می‌باشند. □

اگر شما هر رأس V_1 را به عنوان یک دختر و هر رأس V_2 را به عنوان یک پسر در نظر بگیرید، آنگاه واضح است که پیدا کردن یک تطابق از V_1 به V_2 همانند پیدا کردن همسرهای متمایز برای همهٔ دخترها می‌باشد. بنابراین می‌توانیم حالت گرافی قضیهٔ هال را نیز بدون اثبات بیان کنیم. همچنین به بیان صورت ماتریسی قضیهٔ هال خواهیم پرداخت و اثبات آن را در یکی از تمارین از شما خواهیم خواست.

نتیجه (قضیهٔ هال ـ صورت گرافی): گراف دو بخشی $G = (V_1, E, V_2)$ را در نظر بگیرید. این گراف شامل یک تطابق از V_1 به V_2 خواهد بود اگر و تنها اگر هر مجموعهٔ I از رئوس V_1 به حداقل $|I|$ رأس از رئوس V_2 وصل باشند.

نتیجه (قضیه هال ـ صورت ماتریسی): ماتریس M یک ماتریس $m \times n$ با درایه‌های صفر و یک می‌باشد. در این صورت در هر سطر آن یک عدد ۱ وجود دارد و در هیچ ستونی بیش از

یک عدد ۱ وجود ندارد اگر و تنها اگر برای هر مجموعه از سطرها (مثلاً rتایی) تعداد ستونهایی که ۱ های این سطرها در آنها قرار دارند حداقل برابر r باشد.

ما در فصلهای بعد به یک حالت کلی از قضیهٔ هال نیاز خواهیم داشت که همان مسأله ازدواج خواهد بود، با این تفاوت که در انتخاب همسر برای دخترها، چند پسر خاص حتماً باید انتخاب شوند.

مثال: دختر G_1 پسرهای $A_1 = \{B_1, B_2, \boldsymbol{B_7}\}$ را می‌شناسد.
دختر G_2 پسرهای $A_2 = \{\boldsymbol{B_5}, B_6, B_8\}$ را می‌شناسد.
دختر G_3 پسرهای $A_3 = \{\boldsymbol{B_1}, B_3, B_7\}$ را می‌شناسد.
دختر G_4 پسرهای $A_4 = \{B_2, \boldsymbol{B_3}, B_4, B_7\}$ را می‌شناسد.
دختر G_5 پسرهای $A_5 = \{B_1, B_2, B_6, \boldsymbol{B_8}\}$ را می‌شناسد.

واضح است که انتخاب همسر برای این دختران از میان پسرهایی که می‌شناسند ممکن است. به عنوان مثال، یکی از این نوع انتخابها در مجموعه‌ها با چاپ پر رنگ نمایش داده شده است. حال آیا ممکن است که دختران بتوانند برای خود شوهر انتخاب کنند، بطوری که حتماً پسرهای B_5, B_6, B_7, B_8 انتخاب شوند؟ خیر. زیرا برای مثال دختران G_1 و G_3 و G_4 در بین خود پسرهای B_1 و B_2 و B_3 و B_4 و B_7 را می‌شناسند و بنابراین، این سه دختر تنها می‌توانند با یکی از آن پسرهای مورد نظر (B_7) ازدواج کنند. در نتیجه تنها ۲ دختر دیگر باقی می‌ماند (G_2, G_5) که با ۳ پسر مورد نظر باقیمانده ازدواج کنند (B_5, B_6, B_8) که این امر ممکن نیست. □

همانطور که از مثال بالا می‌توان فهمید، برای پیدا کردن همسر برای مجموعه‌ای از دختران به طوری که مجموعهٔ P از پسرها حتماً به عنوان همسر تعدادی از دختران انتخاب شوند، باید برای هر زیرمجموعهٔ I از دختران داشته باشیم:

تعداد دخترهایی که عضو I نیستند	$\leqslant$	تعداد پسرهایی از P که دخترهای عضو I آنها را نمی‌شناسند

حال قصد داریم ثابت کنیم که این شرط لازم و کافی است.

قضیه: یک خانواده از مجموعه‌ها به صورت $\mathfrak{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ را در نظر بگیرید. مجموعهٔ P را نیز به صورت زیر فرض کنید: $P \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

حال $\mathfrak{A}$ دارای یک مجموعهٔ نمایندهای متمایز شامل مجموعهٔ P است اگر و تنها اگر:

الف) $\mathfrak{A}$ یک مجموعهٔ نماینده‌های متمایز داشته باشد.

ب) برای هر $I \subseteq \{۱, ۲, \ldots, n\}$ داشته باشیم: $|P - (\bigcup_{i\in I} A_i)| \leqslant n - |I|$

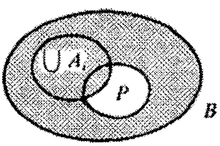
اثبات: ($\Longleftarrow$): اگر این مجموعه نماینده‌های متمایز وجود داشته باشد، واضح است که شرط «الف» برقرار است. حال اگر ما صورت ازدواج این قضیه را در نظر بگیریم، می‌فهمیم که برای هر زیرمجموعه‌ای از دخترها، تعدادِ پسرهایی از P که آنها نمی‌شناسند، باید از تعداد سایر دخترها کمتر باشد. زیرا در غیر این صورت، برای همهٔ اعضای P همسر یافت نمی‌شود. معادل این بیان در صورت مجموعه‌ای این قضیه، شرط «ب» قضیه می‌باشد.

($\Longrightarrow$): فرض کنید خانوادهٔ $\mathfrak{A}$ شرایط «الف و «ب» را داشته باشد و در ضمن $A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n = B$ بطوری که $|B| = m$. حال خانوادهٔ جدید $\mathfrak{A}^*$ را از m مجموعهٔ زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\mathfrak{A}^* = (A_۱, \ldots, A_n, \overbrace{B - P, B - p, \ldots, B - P}^{m-n \text{ بار}})$$

اکنون ادعا می‌کنیم که شرایط «الف» و «ب» تضمین می‌کنند که خانوادهٔ $\mathfrak{A}^*$ نیز یک مجموعه نماینده‌های متمایز داشته باشد: ما باید ثابت کنیم که هر r مجموعه از $\mathfrak{A}^*$ در بین خودشان در مجموع حداقل r عضو دارند.

اگر این r مجموعه فقط از $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ انتخاب شوند، در آن صورت از شرط «الف» می‌توان فهمید که اجتماع این r مجموعه حداقل شامل r عضو است. در غیر این صورت اگر این r مجموعه از $\mathfrak{A}^*$ شامل $\{A_i : i \in I\}$ از مجموعه‌های $A_۱, \ldots, A_n$ باشد و $(۰ <) r - |I|$ مجموعه مابقی از $m - n$ مجموعهٔ دیگر انتخاب شوند، در آن صورت اجتماع این r مجموعه به صورت زیر است:



$$(\bigcup_{i\in I} A_i) \cup (B - P) = B - (P - (\bigcup_{i\in I} A_i))$$

که با توجه به شرط «ب» می‌توانیم بفهمیم که شامل

$$m - ||P - (\bigcup_{i\in I} A_i)| \geqslant m - (n - |I|)$$

عضو است. امّا $r - |I|$ تعداد مجموعه‌های $B - P$ است که از $\mathfrak{A}^*$ انتخاب شده‌اند و بنابراین نمی‌تواند از $m - n$ بیشتر باشد. در نتیجه: $r - |I| \leqslant m - n$. پس داریم $m - (n - |I|) \geqslant r$. بنابراین اجتماع این r مجموعه از $\mathfrak{A}^*$ نیز حداقل شامل r عضو می‌باشد.

با توجه به آنچه گفته شد، فرض می‌کنیم که مجموعهٔ نماینده‌های متمایز خانوادهٔ $\mathfrak{A}^*$ به صورت زیر باشد:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathfrak{A}^* = (A_1, & \ldots, & A_n, & B-P, & B-P, & \ldots, & B-P) \\
\uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
\multicolumn{3}{c}{\underbrace{a_1 \qquad\quad a_n}_{\text{شامل مجموعهٔ } P \text{ می‌باشد}}} & a_{n+1} & a_{n+2} & & a_m
\end{array}$$

و مجموعهٔ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ یک مجموعهٔ نماینده‌های متمایز از $\mathfrak{A}$ می‌باشد که شامل اعضای P است. بنابراین از شرایط «الف» و «ب» نتیجه گرفتیم که مجموعهٔ نماینده‌های متمایز $\mathfrak{A}$ شامل P می‌شود.

«تمارین»

۱) درکدام یک از حالات زیر دخترها می‌توانند از میان پسرانی که آنها را می‌شناسند، همسری برای خود پیدا کنند؟

الف) دختر $G_۱$ پسرهای $\{B_۱, B_۲\}$ را می‌شناسد.
دختر $G_۲$ پسرهای $\{B_۱, B_۲, B_۴\}$ را می‌شناسد.
دختر $G_۳$ پسرهای $\{B_۱, B_۲, B_۳\}$ را می‌شناسد.
دختر $G_۴$ پسرهای $\{B_۱, B_۳\}$ را می‌شناسد.
دختر $G_۵$ پسرهای $\{B_۴, B_۵, B_۶\}$ را می‌شناسد.
دختر $G_۶$ پسرهای $\{B_۱, B_۲, B_۵\}$ را می‌شناسد.

ب) دختر $G_۱$ پسرهای $\{B_۱, B_۳, B_۵\}$ را می‌شناسد.
دختر $G_۲$ پسرهای $\{B_۱, B_۳\}$ را می‌شناسد.
دختر $G_۳$ پسرهای $\{B_۱, B_۵\}$ را می‌شناسد.
دختر $G_۴$ پسرهای $\{B_۱, B_۲, B_۳, B_۴, B_۵\}$ را می‌شناسد.
دختر $G_۵$ پسرهای $\{B_۳, B_۵\}$ را می‌شناسد.
دختر $G_۶$ پسرهای $\{B_۲, B_۴, B_۶, B_۷\}$ را می‌شناسد. (ج)

۲) اثبات صورت مجموعه‌ای قضیهٔ هال:
خانوادهٔ $\mathfrak{A} = (A_۱, \ldots, A_n)$ را با شرط هال در نظر بگیرید.
برای هر $I \subseteq \{۱, ۲, \ldots, n\}$:

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geqslant |I|$$

حال $\mathfrak{B} = (B_۱, \ldots, B_n)$ را یک خانوادهٔ کمینه از زیرمجموعه‌های $A_۱, \ldots, A_n$ در نظر بگیرید. $(۱ \leqslant i \leqslant n : B_i \subseteq A_i)$. فرض کنید برای $\mathfrak{B}$ نیز شرط هال برقرار است.
برای هر $I \subseteq \{۱, ۲, \ldots, n\}$:

$$\left|\bigcup_{i\in I} B_i\right| \geqslant |I|$$

(منظور ازکمینه بودن B_iها این است که اگر عضوی از هر کدام از آنها حذف شود، دیگر شرط هال برقرار نخواهد بود.)

الف) نشان دهید که هر یک از مجموعه‌های $B_1, \ldots, B_n$ شامل تنها یک عضو هستند. (ر)

ب) نتیجه بگیرید که خانوادهٔ $\mathfrak{A}$ شامل یک مجموعهٔ نماینده‌های متمایز است.

۳) مجموعه‌ای از n دختر و m پسر را در نظر بگیرید با این خصوصیت که هر زیرمجموعه‌ای از دختران (مثلاً r عضوی) حداقل r پسر را می‌شناسند. در ضمن فرض کنید پسر B حداقل یکی از دخترها را می‌شناسد. با استفاده از روشهای زیر ثابت کنید که دخترها می‌توانند از میان پسرها برای خود همسرهایی پیدا کنند به شرطی که پسر B نیز یکی از آنها باشد:

الف) از اثبات قضیهٔ هال (صورت ازدواج) توسط ایجاد مهمانی بوسیلهٔ دختران استفاده کنید. (ر)

ب) $m - n$ دختر جدید را در نظر بگیرید که هر کدام همهٔ پسرها بجز B را می‌شناسند. سپس قضیهٔ هال را برای شرایط جدید در نظر بگیرید. (ر)

ج) از آخرین قضیهٔ این فصل با فرض $P = \{B\}$ استفاده کنید. (ر)

۴) نشان دهید در یک گروه شامل n دختر و m پسر، گروه kتایی از دختران وجود دارد که بتوانند از میان پسرانی که می‌شناسند برای خود همسری پیدا کنند، اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعه از دختران (مثلاً rتایی)، آنها حداقل $r + k - n$ پسر را بشناسند. (ر)

۵) وضعیتی از دختران و پسران را در نظر بگیرید که هر مجموعه از دختران حداقل به تعداد خودشان از پسرها را می‌شناسند. در ضمن در کل n دختر داریم و هر دختر حداقل m پسر را می‌شناسد $(m \leqslant n)$. نشان دهید n ازدواج برای دخترها حداقل به $m!$ طریق مختلف قابل انجام است. (ر)

۶) صورت ماتریسی قضیهٔ هال را که در قالب نتیجه، بیان شده بود، ثابت کنید. (ر)

۷) فرض کنید $\mathfrak{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ خانواده‌ای از مجموعه‌هاست بطوری که هر مجموعه شامل حداقل d عضو است. $(d > 0)$ و هیچ عضوی در بیش از d مجموعه ظاهر نشده است. نشان دهید $\mathfrak{A}$ یک مجموعه نماینده‌های متمایز دارد. (ر)

۸) گراف دو بخشی $G = (V_1, E, V_2)$ را در نظر بگیرید که درجهٔ هر رأس در V_1 حداقل برابر d است $(d > 0)$ و درجهٔ هر رأس در V_2 برابر d یا کمتر است. نشان دهید که گراف G شامل یک تطابق از V_1 به V_2 است و نتیجه بگیرید که اگر درجهٔ هر رأس G برابر d باشد، در آن صورت مجموعه یالهای E قابل افراز به d تطابق جدا از هم از V_1 به V_2 می‌باشند.

۹) فرض کنید M یک ماتریس $m \times n$ با درایه‌های صفر و یک می‌باشد که هر سطر شامل حداقل d عدد یک ($d > ۰$) می‌باشد و هیچ ستونی شامل بیش از d عدد ۱ نیست. نشان دهید m عدد یک وجود دارد که هر کدام در یک ردیف باشند و هیچ دوتایی در یک ستون نباشند.
یک «ماتریس جایگشت» ماتریسی مربعی است که در هر سطر و هر ستون آن دقیقاً یک عدد ۱ وجود دارد. نشان دهید یک ماتریس مربعی از صفر و یک که در هر سطر و هر ستون آن دقیقاً d عدد یک وجود دارد، برابر حاصل جمع d ماتریس جایگشت می‌باشد.

۱۰) یک ماتریس $m \times n$ را «تصادفی دوگانه» می‌نامند، اگر درایه‌های آن غیر منفی بوده و حاصل جمع درایه‌های هر سطر و هر ستون آن برابر یک باشد. نشان دهید ماتریس M $(n \times n)$ تصادفی دوگانه است اگر و تنها اگر ماتریسهای جایگشت $M_۱, M_۲, \ldots, M_k$ و اعداد مثبت $\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_k$ با حاصل جمع ۱ وجود داشته باشند بطوری که $M = M_۱\lambda_۱ + M_۲\lambda_۲ + \cdots + M_k\lambda_k$ (ر)

۱۱) مجموعهٔ X به n مجموعهٔ هم اندازه (با تعداد اعضای برابر) به دو روش تقسیم شده است، بطوری که:

$$X = X_۱ \cup X_۲ \cup \ldots \cup X_n = Y_۱ \cup Y_۲ \cup \ldots \cup Y_n$$

نشان دهید اعضای متمایز $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ وجود دارند که در مجموعه‌های متمایز هر دو طرف ظاهر شده باشند. (یعنی یک مجموعه نماینده‌های متمایز از هر دو خانوادهٔ X_iها و Y_iها باشند.) (ر)

۴

سه اصل بنیادی

در این فصل به بررسی و توضیح سه اصل ساده ولی در عین حال مهم می‌پردازیم که در این کتاب و به طور کلی در ترکیبیات در موارد زیادی به آنها رجوع خواهیم کرد. این سه اصل عبارتند از «اصل لانه کبوتری»، «همخوانی» و «اصل شمول و عدم شمول». برای این کار بیشتر به جای توضیح این اصول قصد داریم به بررسی و توضیح مثالها و مسائلی که در حل آنها از این اصول استفاده می‌شود، بپردازیم.

اصل لانه کبوتری

اصل لانه کبوتری یک اصل کاملاً شهودی و بدیهی است با این بیان که «اگر بیش از n کبوتر در n لانه کبوتر بنشینند، حداقل در یکی از لانه‌ها بیش از یک کبوتر خواهد نشست.». برای آشنایی بیشتر با کاربردهای این اصل به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال: ۱۰ عدد صحیح و مثبت کوچکتر از ۱۰۷ داده شده است. نشان دهید دو زیرمجموعهٔ مجزا از این اعداد وجود دارد که حاصل جمع اعضای این دو مجموعه با هم برابر باشد.

راه حل: بزرگترین اعدادی که ممکن است داده شده باشند ۹۷، ۹۸ و ... و ۱۰۶ می‌باشند که حاصل جمع آنها برابر ۱۰۱۵ می‌باشد. بنابراین تعدادی جعبه با شماره‌ای صفر تا ۱۰۱۵ در نظر می‌گیریم.

□	□	□	□	...	□	□
۰	۱	۲	۳		۱۰۱۴	۱۰۱۵

همانطور که می‌دانید تعداد تمام زیرمجموعه‌های این مجموعهٔ ۱۰ عضوی برابر $۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$

می‌باشد. فرض کنید هر زیرمجموعه روی یک کاغذ نوشته شده و در جعبه‌ای قرارگرفته که حاصل جمع اعضای آن برابر شماره جعبه می‌باشد. بنابراین ۱۰۲۴ کاغذ در ۱۰۱۶ جعبه قرارگرفته‌اند که طبق اصل لانه کبوتری حداقل در یک جعبه بیش از یک کاغذ قرار دارد و این بدین معنی است که دو زیرمجموعه (که کاغذ هر دو در یک جعبه قرار داده شده‌اند) دارای حاصل جمعی برابر هستند. البته در این حالت این دو زیرمجموعه لزوماً جدا از هم نیستند. ولی با حذف اعضای مشترک آنها (اشتراک دو مجموعه) از هر یک از آنها به دو زیر مجموعه جدید می‌رسیم که حاصل جمعی برابر دارند. بنابراین اگر از جعبهٔ شمارهٔ صفر شروع کرده و به ترتیب به طور صعودی به جعبه‌ها نگاه کنیم اولین جعبه‌ای که بیش از یک کاغذ در آن باشد، شامل دو زیرمجموعه با مجموع اعضای برابر خواهد بود. □

مثال: در یک جمع، چند نفر با هم دست داده‌اند. (البته هیچ دو نفری با هم دو بار دست نداده‌اند و هیچ کس هم با خودش دست نداده است!) ثابت کنید در این جمع حداقل ۲ نفر وجود دارند که به تعداد مساوی دست داده باشند.

راه حل: فرض کنید n نفر در این جمع بوده‌اند که بعضی از آنها با بعضی دیگر دست داده‌اند. بنابراین تعداد دست دادنهای هر نفر بین صفر تا $n-۱$ خواهد بود. تعدادی جعبه در نظر بگیرید و آنها را با اعداد ۰ و ۱ و ۲و . . . و $n-۱$ شماره‌گذاری کنید. نام هر شخص را روی یک تکه کاغذ نوشته و آن را در جعبه‌ای قرار می‌دهیم که شمارهٔ آن برابر تعداد دست دادنهای آن شخص باشد.

□	□	□	. . .	□	□
۰	۱	۲		$n-۲$	$n-۱$

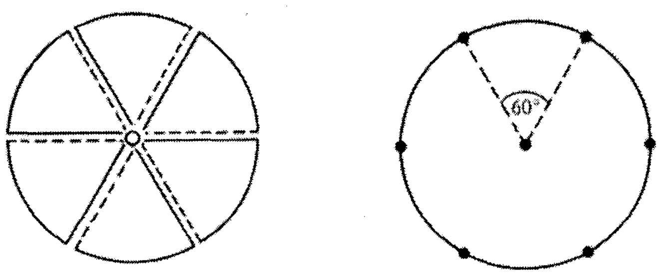
برای آنکه ببینیم دو نفر در این جمع هستند که تعداد دست دادنهایشان با هم برابر است، باید نشان دهیم که جعبه‌ای وجود دارد که در آن بیش از یک کاغذ قرار دارد. در اینجا n کاغذ در n جعبه قرارگرفته‌اند. بنابراین مستقیماً نمی‌توانیم از اصل لانه کبوتری استفاده کنیم. امّا در صورتی در هیچ خانه‌ای بیش از یک کاغذ وجود ندارد که در هر خانه دقیقاً یک کاغذ داشته باشیم (زیرا تعداد خانه‌ها و کاغذها با هم برابر است) یعنی هم در خانهٔ شماره صفر و هم در خانهٔ شمارهٔ $n-۱$ یک کاغذ داشته باشیم. به عبارتی دیگر باید یک نفر باشد که با هیچ کسی دست نداده باشد و از طرفی باید یک نفر هم باشد که با همه دست داده باشد. ولی این امر ممکن نیست (زیرا کسی که با همه دست داده مسلماً با کسی که با هیچ کسی دست نداده هم دست داده است!). بنابراین حداقل یکی از این دو خانه خالی است و با این فرض طبق اصل لانه کبوتری حداقل در یکی از خانه‌ها

بیش از یک کاغذ وجود دارد و این بیانگر وجود حداقل دو نفر با تعداد دست دادنهای برابر است.

این نتیجه را می‌توان به صورت گرافی هم بیان کرد. یعنی «در هر گراف دو رأس با درجهٔ برابر وجود دارد.» اگر شما هر شخصی را به عنوان یک رأس در نظر بگیرید و دو رأس مجاور را به عنوان دو نفر که با هم دست داده‌اند فرض کنید آنگاه تعداد دست دادنهای اشخاص برابر درجهٔ رئوس می‌شود. □

مثال: نشان دهید اگر ۷ نقطه را در داخل دایره‌ای به شعاع یک قرار دهیم، بطوری که فاصلهٔ هیچ دو نقطه‌ای کمتر از یک نباشد، در آن صورت باید یک نقطه در مرکز دایره قرار بگیرد و ۶ نقطهٔ دیگر روی محیط دایره قرار بگیرند و رئوس یک ۶ ضلعی منتظم را تشکیل دهند.

راه حل: دایره را مانند شکل زیر به ۶ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. اگر هفت نقطه طوری در دایره قرار بگیرند که فاصلهٔ هیچ دو نقطه‌ای از هم کمتر از یک نباشد، بنابراین در داخل هیچ بخشی نباید بیش از یک نقطه باشد و چون ۷ نقطه داریم طبق اصل لانه کبوتری یا باید در یکی از قسمتها بیش از یک نقطه باشد و یا یکی از نقاط در مرکز قرارگرفته و مابقی روی محیط دایره قرار بگیرند. چون فاصلهٔ نقاط روی محیط نیز نباید از یک کمتر باشد بنابراین هر دو نقطهٔ مجاور باید به اندازهٔ کمانی برابر یا بیش از ۶۰° با هم فاصله داشته باشند و چون ۶ نقطه روی محیط داریم، بنابراین باید فاصلهٔ هر دو نقطه از هم برابر کمان ۶۰° باشد.



□

مثال: نشان دهید اگر n عدد صحیح مثبت داشته باشیم، زیرمجموعه‌ای غیر تهی از آن وجود دارد که مجموع اعضای آن بر n قابل قسمت باشد.

راه حل: اعداد را برابر $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ قرار دهید و n خانهٔ زیر را در نظر بگیرید:

□	□	□	…	□	□
۰	۱	۲		$n-۲$	$n-۱$

n زیرمجموعهٔ $\{a_۱\}$ و $\{a_۱, a_۲\}$ و $\{a_۱, a_۲, a_۳\}$ و ... و $\{a_۱, \ldots, a_n\}$ را در نظر بگیرید.

هر کدام را در خانه‌ای که شمارهٔ آن برابر باقیماندهٔ تقسیم حاصل جمع اعضای زیرمجموعه بر n می‌باشد، قرار دهید. اگر در هر خانه دقیقاً یک زیرمجموعه قرار بگیرد، یعنی در خانهٔ شمارهٔ صفر نیز یک زیرمجموعه قرار گرفته که به معنی این است که حاصل جمع اعضای این زیرمجموعه بر n بخش‌پذیر است.

در غیر این صورت باید طبق اصل لانه کبوتری دو زیرمجموعه در یک خانه قرار گرفته باشند. فرض می‌کنیم دو زیرمجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_r\}$ و $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_s\}$ $(r < s)$ در یک خانه قرار گرفته باشند. چون $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_r$ و $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_s$ باقیماندهٔ برابری در تقسیم بر n دارند، در نتیجه باید $a_{r+۱} + a_{r+۲} + \cdots + a_s$ بر n قابل قسمت باشد. پس حاصل جمع اعضای زیرمجموعهٔ $\{a_{r+۱}, a_{r+۲}, \ldots, a_s\}$ بر n بخش‌پذیر است. $\square$

مثال: ثابت کنید دنباله‌ای با بیش از $(r-۱)(g-۱)$ عدد متمایز، شامل زیر دنباله‌ای صعودی به طول r و یا زیر دنباله‌ای نزولی به طول g می‌باشد. (برای مثال هر دنباله با بیش از ۶ عدد شامل یک زیر دنبالهٔ صعودی به طول ۴ و یا یک زیر دنبالهٔ نزولی به طول ۳ می‌باشد. دنباله ۴، ۷، <u>۲</u>، <u>۳</u>، ۶، ۱ و <u>۵</u> شامل یک زیر دنبالهٔ نزولی به طول ۳ می‌باشد که زیر اعداد آن خط کشیده شده است.)

راه حل: دنباله داده شده را به صورت $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ در نظر بگیرید و به هر عضو a_i از دنباله دو عدد x_i و y_i را به صورت زیر نسبت دهید:

طول بزرگترین زیر دنبالهٔ صعودی که به a_i ختم شود $\Longleftarrow x_i$

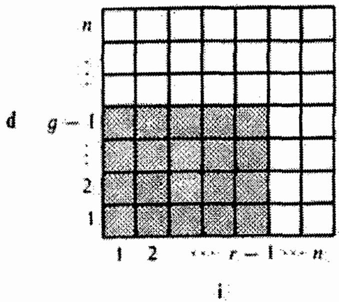
طول بزرگترین زیر دنبالهٔ نزولی که از a_i شروع شود $\Longleftarrow y_i$

بنابراین برای مثال به دنبالهٔ ۴ و ۷ و ۲ و ۳ و ۶ و ۱ و ۵، اعداد زیر را نسبت می‌دهیم:

a_i	۵	۱	۶	۳	۲	۷	۴
x_i	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳
y_i	۳	۱	۳	۲	۱	۲	۱

در حالت کلی هیچ دو عددی دارای جفت اعداد x_i و y_i یکسان نمی‌باشند. زیرا اگر داشته باشیم: $\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots$ در آن صورت اگر $a_i < a_j$ آنگاه باید x_j از x_i بزرگتر باشد (زیرا می‌توان a_j را به زیر دنباله صعودی که به a_i ختم می‌شود اضافه کرد) و یا اگر $a_i > a_j$ باشد در آن صورت $y_i > y_j$ خواهد بود (زیرا می‌توان a_j را به ابتدای زیر دنبالهٔ نزولی که از a_i شروع می‌شود اضافه کرد).

حال یک شبکه از n^2 خانه در نظر می‌گیریم:



از آنجا که هر x_i و y_i بین ۱ و n می‌باشد می‌توانیم اعداد نسبت داده شده به هر عدد را در یکی از خانه‌های جدول قرار دهیم بطوری که در هیچ خانه‌ای بیش از یک عدد قرار نگیرد (برای این کار عدد a_i را در سطر x_i و ستون y_i قرار می‌دهیم). در این حالت چون $n > (r-1)(g-1)$ بنابراین تمام اعداد در $(r-1)(g-1)$ خانهٔ مشخص شده در جدول جا نمی‌گیرند. در نتیجه a_i وجود دارد بطوری که $x_i \geqslant r$ و یا $y_i \geqslant g$. بنابراین a_i عدد انتهایی یک زیردنبالهٔ صعودی به طول حداقل r و یا عدد ابتدایی یک زیر دنبالهٔ نزولی به طول حداقل g می‌باشد. می‌توانیم حالت نامتناهی این مسأله را نیز نتیجه بگیریم. یعنی «در هر دنبالهٔ نامتناهی از اعداد حقیقی متمایز، یک زیر دنبالهٔ صعودی نامتناهی و یا یک زیر دنبالهٔ نزولی نامتناهی وجود دارد.» □

اصل همخوانی

همخوانی را نمی‌توان به عنوان یک اصل ریاضیات در نظر گرفت. ولی از این مورد می‌توان برای حل بسیاری از مسائل ترکیبیاتی بهره جست. مثالهای زیر می‌تواند کاربردهای این اصل را بیشتر آشکار کند:

مثال: نشان دهید در هر گراف تعداد رأسهای با درجهٔ فرد، عددی زوج است.

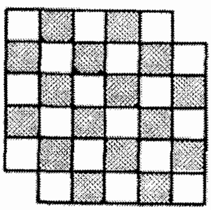
راه حل: لم دست دادن (تمرین دوم فصل ۲) را بیاد بیاورید. در آن برای $G = (V, E)$ داشتیم: $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$ که عددی زوج است. بنابر این $\sum_{\substack{v\in V\\ d(v)\ \text{فرد}}} d(v) + \sum_{\substack{v\in V\\ d(v)\ \text{زوج}}} d(v) = 2|E|$

از این تساوی می‌توان نتیجه گرفت که مجموع درجات رأسهای درجهٔ فرد، زوج است و بنابراین باید تعداد زوجی از آنها وجود داشته باشند. این مثال نمونه‌ای از بکارگیری اصل همخوانی می‌باشد.

مثال: یک صفحهٔ شطرنجی $n \times n$ و تعدادی دومینو را در نظر بگیرید که هر کدام از آنها دو خانهٔ مجاور از صفحهٔ شطرنجی را می‌پوشانند. نشان دهید صفحه را می‌توان با دومینوهای غیر متداخل پوشاند اگر و تنها اگر n زوج باشد. در ضمن نشان دهید اگر و تنها اگر دو خانهٔ گوشه‌های مخالف صفحه را حذف کنیم، نمی‌توان این صفحه را بوسیلهٔ دومینوها پوشاند.

سپس پوششی از یک صفحهٔ ۶×۶ با ۱۸ دومینو را در نظر بگیرید. نشان دهید برای اینگونه پوششی می‌توان صفحه را به دو مستطیل تقسیم کرد بطوری که خط تقسیم کنندهٔ صفحه از میان هیچ دومینویی نگذرد.

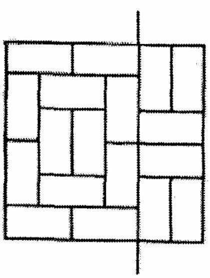
راه حل: اگر اندازهٔ طول و عرض صفحه زوج باشد، پوشاندن آن بوسیلهٔ دومینوها کاری ساده است (این کار را به شما واگذار می‌کنیم.) امّا اگر n فرد باشد، آنگاه به $\frac{۱}{۲}n^۲$ دومینو نیاز داریم که عدد صحیحی نمی‌باشد.



در حالتی که دوگوشهٔ مقابل هم از صفحه حذف شده باشند، اگر n فرد باشد در آن صورت تعداد دومینوهایی که احتیاج داریم عدد صحیحی نخواهد بود و اگر n زوج باشد، در آن صورت صفحه را به صورت شطرنجی رنگ می‌کنیم (همانطور که در شکل نشان داده شده است.) دو خانهٔ حذف شده مسلماً همرنگ خواهند بود.

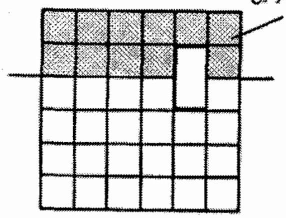
و بنابر این در صفحهٔ باقیمانده تعداد خانه‌های سیاه و سفید برابر نخواهند بود.

از طرفی می‌دانیم هر دومینو دقیقاً یک خانهٔ سیاه و یک خانهٔ سفید را می‌پوشاند، یعنی باید تعداد خانه‌های سیاه و سفید برابر باشد. در نتیجه نمی‌توان این صفحه را با دومینوها پوشاند. (دقت کنید که در اینجا نیز از همخوانی تعداد خانه‌های سیاه و سفید استفاده کردیم.)



حال حالتی را در نظر بگیرید که صفحهٔ ۶×۶ را با ۱۸ دومینو پوشانده‌ایم.

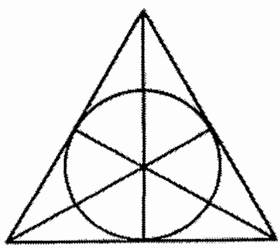
شکل روبرو نمایانگر این حالت می‌باشد و خط مشخص شده نیز صفحه را به دو مستطیل تقسیم کرده است طوری که از میان هیچ دومینویی عبور نکرده است. درکل می‌بینیم که در هر جهت



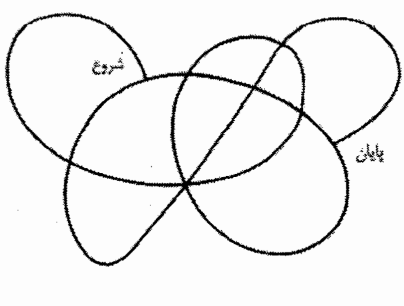
می‌توان ۵ خط روی صفحه رسم کرد که صفحه را به دو مستطیل تقسیم کنند و هر دومینو حداکثر توسط یک خط، قطع می‌شود. با استفاده از اصل همخوانی (زوجیت) می‌توان فهمید که هیچ کدام از ۱۰ خط نمی‌تواند تنها یک دومینو را قطع کند. (یا در کل تعداد فردی دومینو را قطع کند.)

زیرا اگر هر خط فقط یک دومینو را قطع کند در آن صورت در هر طرف آن فرد خانه برای پوشیده شدن توسط دومینوها باقی می‌ماند که ممکن نیست. بنابراین چون هر خطی حداقل باید دو دومینو را قطع کند (چون ۱۸ دومینو و ۱۰ خط داریم) در نتیجه خطی وجود دارد که هیچ دومینویی را قطع نکند. □

مثال: نشان دهید شکل زیر را نمی‌توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و بدون عبور از هر خط بیش از یک بار کشید.



راه حل: شکلی را که بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و بدون عبور از یک خط بیش از یک بار کشیده شده است تصور کنید. (مانند شکل زیر)



نقاطی را که در آنها خطوط همدیگر را قطع می‌کنند، بجز نقاط ابتدا و انتهای مسیر در نظر بگیرید. اگر خط تشکیل دهندهٔ شکل از یک نقطهٔ r بار عبور کند، $2r$ بار به آن نقطه وارد و یا از آن خارج می‌شود. بنابراین در هر شکلی که بتوان به این طریق رسم کرد حداکثر ۲ نقطه خواهد بود که خط

تشکیل دهندهٔ شکل فرد بار به آن وارد و یا از آن خارج شده باشد (نقاط ابتدایی و انتهایی خط تشکیل دهندهٔ شکل). امّا در شکل داده شده در مثال بیش از دو نقطه با فرد خط متصل به آن وجود دارد و به همین دلیل قابل رسم به این روش نیست. □

از مثال بالا می‌توان فهمید که هر شکل یک تکّه (همبند) که ۲ نقطهٔ برخورد با فرد خط اطراف آن باشد قابل رسم به روش گفته شده می‌باشد. ما در این مورد در فصل ۶ بیشتر بحث خواهیم کرد.

مثال: نشان دهید در هر گراف دو بخشی، هر دور از تعداد زوجی یال تشکیل شده است.

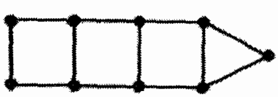
راه حل: گراف دو بخشی $G = (V_1, E, V_2)$ را در نظر بگیرید. (مجموعه رأسهای گراف به دو زیرمجموعهٔ V_1 و V_2 افراز شده و هر یال از E یک رأس از V_1 را به یک رأس از V_2 متصل می‌کند.) حال دور $v_1 v_2 \ldots v_{n-1} v_n v_1$ را در گراف G در نظر بگیرید. در ضمن بدون اینکه به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود فرض کنید $v_1 \in V_1$ و با توجه به یال $v_1 v_2 \in E$ مسلماً $v_2 \in V_2$. به همین ترتیب $v_3 \in V_3$ و ... .بنابراین داریم:

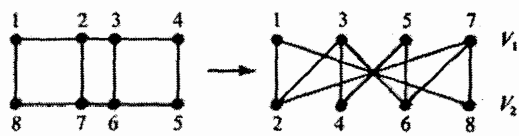
$$\begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & \ldots & v_{n-1} & v_n & v_1 \\ \in V_1 & \in V_2 & & \in V_1 & \in V_2 & \in V_1 \end{array}$$

بنابراین رئوس با اندیس فرد عضو V_1 و رئوس با اندیس زوج عضو V_2 می‌باشند و چون v_n عضو V_2 است می‌توان فهمید n عددی زوج است. □

حال عکس نتیجهٔ بالا را بیان می‌کنیم. یعنی اگر گرافی هیچ دوری با فرد یال (دور فرد) نداشته باشد، آنگاه این گراف دو بخشی است. از آنجائیکه اثبات این حالت مهم‌تر از حالت قبل است، در نتیجه این کار را بعد از چند مثال زیر انجام خواهیم داد.

مثال:





این گراف شامل دور فرد نمی‌باشد.
در نتیجه یک گراف دو بخشی است.

این گراف شامل یک دور فرد می‌باشد.
بنابراین دو بخشی نیست.

قضیه: یک گراف دو بخشی است اگر و تنها اگر شامل دور فرد نباشد.

اثبات: ($\Longleftarrow$): اگر گرافی دو بخشی باشد، آنگاه همانطور که قبل از این مشاهده کردیم، این

گراف دوری با فرد یال ندارد.

($\Longrightarrow$): حال فرض کنید گراف $G=(V,E)$ هیچ دور فردی ندارد. در ضمن فرض کنید گراف G همبند است. (در غیر این صورت اثبات را برای هر یک از مؤلفه‌های همبندی گراف انجام می‌دهیم و اگر هر مؤلفه از گراف دو بخشی باشد، در آن صورت گراف اصلی نیز دو بخشی خواهد بود.) فرض کنید $v_0 \in V$ و $V_1, V_2 \subseteq V$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$V_1 = \{v \in V: \quad \text{در گراف } G \text{ مسیری از } v_0 \text{ به } v \text{ به طول زوج وجود دارد}\}$$
$$V_2 = \{v \in V: \quad \text{در گراف } G \text{ مسیری از } v_0 \text{ به } v \text{ به طول فرد وجود دارد}\}$$

از آنجا که فرض کردیم G همبند است، در نتیجه $V = V_1 \cup V_2$. حال آیا می‌توانیم بگوئیم که $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ و هر یال یک رأس از V_1 را به یک رأس از V_2 وصل می‌کند؟

برای نشان دادن اینکه $V_1 \cap V_2 = \varnothing$، فرض می‌کنیم که $v \in V_1 \cap V_2$ وجود داشته باشد و سپس به تناقض می‌رسیم. از آنجا که $v \in V_1$ می‌توان فهمید که مسیری از v_0 به v با مجموعه یالهای E_1 وجود دارد که $|E_1|$ عددی زوج است. به همین ترتیب از آنجا که $v \in V_2$ بنابراین باید مسیری از v_0 به v شامل یالهای E_2 وجود داشته باشد که $|E_2|$ عددی فرد باشد. حال E^* را تفاضل متقارن دو مجموعهٔ E_1 و E_2 در نظر می‌گیریم: $E^* = (E_1 \cup E_2) - (E_1 \cap E_2)$ و گراف $G^* = (V, E^*)$ را ایجاد می‌کنیم. اگر چند لحظه فکر کنید خواهید فهمید که درجهٔ هر رأس در G^* برابر درجهٔ آن رأس در (V, E_1) به اضافهٔ درجهٔ آن رأس در (V, E_2) منهای دو برابر درجهٔ آن در $(V, E_1 \cap E_2)$ خواهد بود. و این مقدار همواره زوج است. بنابراین با توجه به نتیجهٔ تمرین ۳ فصل دوم، گراف G^* شامل مجموعه‌ای از دورها خواهد بود. (در نتیجه G نیز شامل همین دورها خواهد بود) که این دورها یال مشترکی ندارند. از آنجا که طبق فرض داریم طول تمام دورهای گراف زوج است، در نتیجه $|E^*|$ نیز عددی زوج خواهد بود.

اکنون می‌خواهیم تعداد یالهای E^* را بشمریم. اگر ما تعداد یالهای E_1 را به تعداد یالهای E_2 اضافه کنیم، هر یال $E_1 \cap E_2$ را دو بار محاسبه کرده‌ایم. بنابراین نتیجه می‌گیریم که:

$$|E^*| = |E_1| + |E_2| - ۲|E_1 \cap E_2|$$

و در نتیجه به تناقض می‌رسیم. بنابراین باید $V_1 \cap V_2$ تهی باشد.

در پایان به راحتی می‌توان نشان داد که هر یال از G یک رأس از V_1 را به یک رأس از V_2 وصل می‌کند. زیرا اگر $v_1 \in V_1$ و $v_1v_2 \in E$ در آن صورت مسیری مثل P از v_0 به v_1 با زوج یال وجود دارد. حال اگر یال انتهایی مسیر P، v_2v_1 باشد، در آن صورت با حذف این یال

به مسیری از $v_۰$ به $v_۲$ می‌رسیم که مسلماً شامل فرد یال خواهد بود. و اگر یال انتهایی مسیر P، $v_۲v_۱$ نباشد می‌توان یال $v_۱v_۲$ را که درگراف وجود دارد به انتهای مسیر اضافه کرد تا مسیری از $v_۰$ به $v_۲$ ایجاد شود. در این حالت نیز طول این مسیر فرد خواهد بود. پس در هر دو حالت رأس $v_۲$ عضو $V_۲$ خواهد بود یعنی گراف G یک گراف دو بخشی به صورت $(V_۱, E, V_۲)$ می‌باشد.

اصل شمول و عدم شمول

در اثبات قضیهٔ قبل دیدیم که برای شمارش تعداد اعضای $X \cup Y$، تعداد اعضای X را به تعداد اعضای Y اضافه می‌کردیم و سپس چون هر عضو مشترک در X و Y را دو بار شمرده بودیم نتیجه گرفتیم که:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

«اصل شمول و عدم شمول» تعمیم یافته همین ایده می‌باشد که برای حل مسائل پیچیده‌تر از آن استفاده می‌شود.

مثال: در یک باشگاه ۱۰ نفر تنیس و ۱۵ نفر اسکواش بازی می‌کنند. ۶ نفر از آنها نیز به انجام هر دو ورزش می‌پردازند. چند نفر در این باشگاه به انجام یکی از این دو ورزش می‌پردازند؟

راه حل: با توجه به نتیجهٔ مجموعه‌ای که بدست آوردیم، عدد مورد نظر برابر $۱۹ = ۶ - ۱۵ + ۱۰$ می‌باشد. □

مثال: در یک باشگاه ۱۰ نفر تنیس بازی می‌کنند، ۱۵ نفر اسکواش و ۱۲ نفر بدمینتون. در بین اینها ۵ نفر تنیس و اسکواش، ۴ نفر تنیس و بدمینتون و ۳ نفر اسکواش و بدمینتون بازی می‌کنند و تنها ۲ نفر به هر سه ورزش می‌پردازند. چند نفر در این باشگاه، حداقل به یکی از این سه ورزش می‌پردازند؟

راه حل: ما کار را با جمع کردن ۱۰ و ۱۵ و ۱۲ شروع می‌کنیم. امّا کسانی که به دو ورزش می‌پردازند دو بار شمرده شده‌اند. بنابراین باید تعداد این افراد را از عدد بدست آمده کم کنیم:

$$۱۰ + ۱۵ + ۱۲ - ۵ - ۴ - ۳$$

امّا اکنون کسانی که به انجام هر سه ورزش می‌پردازند، ۳ بار (در ۱۰ و ۱۵ و ۱۲) به حاصل جمع اضافه شده‌اند و سه بار (در ۵ و ۴ و ۳) از حاصل جمع کم شده‌اند. در نتیجه باید تعداد آنها را به عدد حاصل اضافه کنیم: $۱۰ + ۱۵ + ۱۲ - ۵ - ۴ - ۳ + ۲ = ۲۷$

بنابراین ۲۷ نفر در این سه رشته فعالیت می‌کنند. □

قضیه (اصل شمول و عدم شمول): یک مجموعهٔ متناهی از اشیاء که بعضی از آنها شامل خواص $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ می‌باشند در نظر بگیرید. $N(i_۱, i_۲, \ldots, i_r)$ را تعداد اعضایی از این مجموعه در نظر بگیرید که حداقل r خاصیت $i_۱, i_۲, \ldots, i_r$ را داشته باشند. در آن صورت تعداد اعضایی از مجموعه که حداقل یکی از این خواص را دارند برابر است با:

$$\begin{aligned}
&N(۱) + N(۲) + N(۳) + \cdots + N(n) \\
&-N(۱, ۲) - N(۱, ۳) - \cdots - N(n - ۱, n) \\
&+N(۱, ۲, ۳) + N(۱, ۲, ۴) + \cdots + N(n - ۲, n - ۱, n) \\
&- \ldots \\
&\;\vdots \\
&+(-۱)^{n-۱} N(۱, ۲, \ldots, n)
\end{aligned}$$

اثبات: واضح است که اگر عضوی هیچکدام از خواص را نداشته باشد، هیچ‌گاه در مقدار داده شده محاسبه نمی‌شود. بنابراین ما باید نشان دهیم که اعضایی که حداقل یکی از این خصوصیات را دارند دقیقاً یک بار در مقدار داده شده شمرده شده‌اند. فرض کنید عضوی از مجموعه (که حداقل یک خاصیت را دارد) دقیقاً r خاصیت از n خاصیت موجود را داشته باشد. (برای راحتی کار بدون اینکه به تقارن مسأله لطمه‌ای وارد شود فرض کنید که این عضو خصوصیات $۱, ۲, \ldots, r$ را دارد.) حال این عضو چند بار در حاصل جمع زیر ظاهر شده است؟

سطر ۱	$N(۱) + N(۲) + \cdots + N(n)$
سطر ۲	$-N(۱, ۲) - N(۱, ۳) - \cdots - N(n - ۱, n)$
سطر ۳	$+N(۱, ۲, ۳) + N(۱, ۲, ۴) + \cdots + N(n - ۲, n - ۱, n)$
	$- \ldots$
$\vdots$	$\vdots$
سطر n	$+(-۱)^{n-۱} N(۱, ۲, ۳, \ldots, n)$

در سطر اول عبارت این عضو r بار با علامت + ظاهر شده است، در سطر دوم $\binom{r}{۲}$ بار با علامت − ظاهر شده است، در سطر سوم $\binom{r}{۳}$ بار با علامت + و ... و در سطر rاُم $\binom{r}{r}$ بار با علامت

$(-1)^{r-1}$ ظاهر شده است. از این سطر به بعد این عضو هیچ‌گاه شمارش نشده است. حاصل جمع تعداد دفعاتی که این عدد شمرده شده است برابر است با:

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \cdots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r} =$$
$$1 - \underbrace{\left[\binom{r}{0} + (-1)\binom{r}{1} + (-1)^2\binom{r}{2} + \cdots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r}\right]}_{\text{بسط دوجمله‌ای } (1+(-1))^r \text{ که برابر صفر می‌باشد}} = 1$$

از آنچه گفته شد می‌توان فهمید که اگر عضوی حداقل یکی از n خاصیت را داشته باشد، دقیقاً یک بار در مقدار نهایی عبارت داده شده، شمرده شده است. بنابراین اصل شمول و عدم شمول اثبات شد.

مثال: چند عدد بین ۲ تا ۱۰۰۰ وجود دارد که مربع کامل، مکعب کامل و توانهای بالاتر یک عدد صحیح می‌باشد؟

راه حل: مجموعه $\{2, \ldots, 1000\}$ را در نظر بگیرید و عضوی از این مجموعه را که «خاصیت i» را دارد، عضوی در نظر بگیرید که برابر iامین توان حداقل یکی از اعداد صحیح می‌باشد. از آنجا که $2^{10} > 1000$ بنابراین در بین اعضای این مجموعه هیچ یک دهمین توان یک عدد صحیح نیست. (یعنی به ازای $k \geqslant 10 \;:\; N(k) = 0$). بنابراین با استفاده از اصل شمول و عدم شمول برای تعداد اعدادی که حداقل یکی از خواص $\{2, \ldots, 9\}$ را دارند، داریم:

$$\begin{aligned}
&N(2) + N(3) + \cdots + N(9) \\
&-N(2,3) - N(2,4) - \cdots - N(8,9) \\
&+\cdots \\
&\;\vdots \\
&-N(2,3,\ldots,9)
\end{aligned}$$

هر کدام از این اعداد به راحتی قابل محاسبه هستند. برای مثال:

$$N(2) = [\sqrt[2]{1000}] - 1 = 30 \qquad N(3) = [\sqrt[3]{1000}] - 1 = 9 \qquad \ldots$$
$$N(2,3) = N(6) = [\sqrt[6]{1000}] - 1 = 2 \qquad N(2,4) = N(4) = 4 \qquad \ldots$$
$$N(2,3,4) = N(12) = 0 \qquad N(2,3,6) = N(6) = 2 \qquad \ldots$$

(نماد $[x]$ بیانگر جزء صحیح عدد x می‌باشد.) حاصل رابطهٔ بدست آمده برابر تعداد اعضایی است که حداقل یکی از توانهای یک عدد صحیح می‌باشند:

$$۳۰+۹+۴+۲+۲+۱+۱+۱-۲-۴-۲-۱-۲-۱-۱+۲+۱=۴۰$$ □

مثال (تابع اویلر)[1]: عدد صحیح و مثبت m را با عوامل اول $P_۱, P_۲, \ldots, P_n$ در نظر بگیرید. نشان دهید تعداد اعداد صحیح بین ۱ و m که نسبت به m اول هستند برابر است با:

$$m(۱-\frac{۱}{P_۱})(۱-\frac{۱}{P_۲})\ldots(۱-\frac{۱}{P_n})$$

(این مقدار با $\varphi(n)$ نمایش داده می‌شود و آن را در نظریهٔ اعداد تابع اویلر می‌نامند.)

راه حل: مجموعهٔ $A=\{۱,۲,\ldots,m\}$ را در نظر بگیرید و برای هر $۱<i<n$ «خاصیت i» را برای یک عدد این تعریف کنید که P_i مقسوم‌علیه آن عدد باشد. اکنون تعداد اعدادی از مجموعهٔ A که نسبت به m اول هستند برابر است با:

$$\begin{aligned}
&m\\
&-N(۱)-N(۲)-\cdots-N(n)\\
&+N(۱,۲)+N(۱,۳)+\cdots+N(n-۱,n)\\
&-N(۱,۲,۳)-N(۱,۲,۴)-\cdots-N(n-۲,n-۱,n)\\
&+\cdots\\
&\vdots\\
&+(-۱)^n N(۱,۲,\ldots,n)
\end{aligned}$$

اکنون $N(i)$ را تعداد اعضایی از مجموعهٔ A تعریف می‌کنیم که بر P_i بخش‌پذیر باشند. مقدار آن نیز برابر است با $\frac{m}{P_i}$. به همین ترتیب $N(i,j)=\frac{m}{P_iP_j}$ و $\ldots$. بنابراین مقدار نهایی رابطه برابر است با:

$$\begin{aligned}
&m\\
&-\frac{m}{P_۱}-\frac{m}{P_۲}-\ldots
\end{aligned}$$

1) Euler's function

$$
\begin{aligned}
&+\frac{m}{P_۱P_۲}+\frac{m}{P_۱P_۳}+\dots\\
&-\frac{m}{P_۱P_۲P_۳}-\frac{m}{P_۱P_۲P_۴}-\dots\\
&+\cdots\\
&\ \vdots\\
&+(-۱)^n\frac{m}{P_۱P_۲\dots P_n}.
\end{aligned}
$$

که این مقدار پس از تجزیه شدن، برابر همان مقدار داده شده $\varphi(n)$ می‌باشد.

مثال: چند جایگشت از مجموعه اعداد $A=\{۱,۲,\dots,n\}$ وجود دارد که در آن هیچ عددی در جای اصلی خود نیامده باشد. یعنی عدد k در مکان kاُم جایگشت نباشد. (چنین جایگشتی را یک «پریش[1]» می‌نامند.)

راه حل: تمام $n!$ جایگشت A را در نظر بگیرید. «خاصیت i» را قرارگرفتن عدد i در مکان iاُم تعریف می‌کنیم. در نتیجه تعداد پریشهای مجموعهٔ A طبق اصل شمول و عدم شمول برابر است با:

$$
\begin{aligned}
&n!\\
&-N(۱)-N(۲)-\cdots-N(n)\\
&+N(۱,۲)+N(۱,۳)+\cdots+N(n-۱,n)\\
&-\cdots\\
&\ \vdots\\
&+(-۱)^nN(۱,۲,\dots,n)
\end{aligned}
$$

امّا مقدار $N(۱,۲,\dots,r)$ برابر است با تعداد جایگشتهایی از A که $\{۱,۲,\dots,r\}$ در جایگاه اصلی خود قرار بگیرند. واضح است که تعداد این جایگشتها برابر است با $(n-r)!$. به همین دلیل مقدار بدست آمده از رابطهٔ بالا برابر است با:

$$n!-\binom{n}{۱}(n-۱)!+\binom{n}{۲}(n-۲)!-\cdots+(-۱)^{n-۱}\binom{n}{n-۱}۱!+(-۱)^n\binom{n}{n}۰!$$

1) Derangement

و در صورت استفاده از حالت فاکتوریلی ترکیبهای بالا عدد زیر را بدست می‌آوریم:

$$n!(\frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \cdots + (-۱)^n \frac{۱}{n!}) \qquad \square$$

کاربردهایی از اصل شمول و عدم شمول را در فصلهای بعد و بخصوص در مورد چندجمله‌ای رخ در فصل ۱۲ خواهید دید.

«تمارین»

۱) نشان دهید:

الف) دو نفر در لندن وجود دارند که تعداد کتابهای برابری دارند.

ب) دو نفر در جهان وجود دارند که تعداد موهای یکسانی دارند.

۲) فرض کنید $n+1$ عدد مثبت متمایز کوچکتر یا مساوی با $2n$ داریم. نشان دهید:

الف) در بین آنها ۲ عدد وجود دارد که حاصل جمع آنها برابر با $2n+1$ باشد. (ر)

ب) حداقل یک جفت از آنها وجود دارند که نسبت به هم اول باشند. (ر)

ج) در بین آنها دو عدد وجود دارند که یکی مضربی از دیگری باشد. (ر)

۳) ثابت کنید در بین هر $n+1$ عدد صحیح یک جفت عدد وجود دارد که تفاضلشان مضربی از n باشد. (ر)

۴) فرض کنید T یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ باشد. نشان دهید:

الف) اگر ۵ نقطه در T قرار دهیم، دو نقطه از آنها هستند که فاصلهٔ بین آنها $\frac{1}{2}$ و یا کمتر باشد. (ر)

ب) نمی‌توان سطح مثلث T را با سه دایره که قطر آنها کمتر از $\frac{1}{\sqrt{3}}$ است پوشاند. (ر)

۵) عدد صحیح و مثبت n داده شده است. نشان دهید ضریبی از آن وجود دارد که به صورت ۰...۹۰۰۰...۹۹۹ باشد. (ر)

۶) فردی هر روز ۱ پنس یا ۲ پنس به داخل قلکش می‌اندازد و بعد از n روز، m پنس در داخل قلک پس‌انداز شده است. نشان دهید برای هر عدد صحیح k، که $0 \leqslant k \leqslant 2n-m$، چند روز متوالی وجود دارد که مقدار پول پس‌انداز شده در طی این چند روز دقیقاً k پنس باشد. (ر)

۷) نشان دهید حاصل جمع دو عدد فرد مربع کامل نمی‌تواند یک مربع کامل باشد.

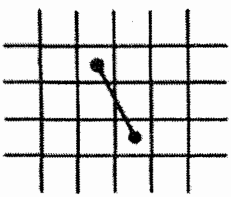
۸) یک صفحهٔ شطرنجی $n \times n$ را در نظر بگیرید که دو خانهٔ آن حذف شده است. نشان دهید می‌توان این صفحه را با دومینوهای غیر متقاطع پوشاند اگر و تنها اگر n زوج باشد و دو خانهٔ حذف شده همرنگ نباشند. (ر)

۹) روی یک صفحهٔ شطرنجی $n \times n$، $n^{۲}$ مهره داریم (در هر خانه یک مهره). در هر حرکت، یک مهره را به خانهٔ مجاور در سطر یا ستون خودش انتقال می‌دهیم. ثابت کنید می‌توان با $n^{۲}$ حرکتِ تمام مهره‌ها، دوباره در هر خانه یک مهره قرار دارد اگر و تنها اگر n زوج باشد. (هر مهره‌ای باید در خانهٔ مجاور خانه‌ای که قبلاً در آن قرار داشت قرار بگیرد).

۱۰) $\frac{۱}{۲}(n^{۳} - (n-۲)^{۳})$ آجر با ابعاد $۲ \times ۱ \times ۱$ داریم و می‌خواهیم آنها را طوری به هم بچسبانیم که سطح خارجی یک مکعب $n \times n \times n$ را بسازیم. (یک مکعب به ضلع n بطوری که مکعبی به ضلع $(n-۲)$ از مرکز آن برداشته‌ایم.) نشان دهید این کار را می‌توان انجام داد اگر و تنها اگر n زوج باشد.

۱۱) الف) در یک گراف، یک دورِ «همیلتونی» دوری است که شامل همه رئوس گراف باشد. (با این نوع گرافها در فصل ۶ بیشتر آشنا خواهیم شد.) نشان دهید که در گراف دو بخشی $G = (V_{۱}, E, V_{۲})$ که شامل یک دور همیلتونی باشد، باید داشته باشیم: $|V_{۱}| = |V_{۲}|$. (ر)

ب) در بازی شطرنج، مهرهٔ اسب می‌تواند در هر جهت روی قطر یک مستطیل ۳×۲ مطابق شکل روبرو حرکت کند.



یک صفحهٔ شطرنجی $n \times n$ داده شده است. بطوری که $n > ۱$ و n فرد است. ثابت کنید مهرهٔ اسب نمی‌تواند از یک خانه شروع کرده و به همهٔ خانه‌های صفحه حرکت کرده و به خانهٔ اولیه برگردد. (ر)

ج) سعی کنید یک مسیر حرکت با شرایط بالا برای اسب روی صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ بیابید.

۱۲) الف) چند عدد صحیح بین ۱ تا ۱۰۰۰۰ وجود دارند که حداقل بر یکی از اعداد ۲ و ۳ و ۵ قابل قسمت باشند؟ (ج)

ب) چند عدد صحیح بین ۱ تا ۱۰۰۰۰ وجود دارند که حداقل بر یکی از اعداد ۲ و ۳ و ۵ و ۷ قابل قسمت باشند؟ (ر)

نتیجه بگیرید که حداکثر ۲۲۸۸ عدد اول کوچکتر از ۱۰۰۰۰ وجود دارد.

(ما می‌توانیم این اعداد را از طریق «غربال اراتستن» بدست آوریم: در هر مرحله کوچکترین عدد اول باقیمانده را در نظر گرفته و ضرایب کوچکتر از ۱۰۰۰۰ آن را حذف کنیم.)

۱۳) n نامه نوشته‌ایم و n پاکت آنها را در اختیار داریم. (هر نامه پاکت مخصوص به خود دارد). بطور تصادفی نامه‌ها را درون پاکت‌ها قرار می‌دهیم. احتمال اینکه هیچ نامه‌ای در پاکت خودش قرار نگیرد چقدر است؟ نشان دهید این احتمال اگر n به سمت بی‌نهایت میل کند، برابر $\frac{۱}{e}$ خواهد بود. (ج)

۱۴) الف) چند تابع از $\{۱, ۲, \ldots, m\}$ به $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ می‌توان تعریف کرد؟ (ج)

ب) چند تابع یک به یک از $\{۱, ۲, \ldots, m\}$ به $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ می‌توان تعریف کرد؟ (ج)

ج) با استفاده از اصل شمول و عدم شمول نشان دهید که تعداد توابع پوشا از $\{۱, ۲, \ldots, m\}$ به $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ برابر است با

$$n^m - \binom{n}{۱}(n-۱)^m + \binom{n}{۲}(n-۲)^m - \cdots + (-۱)^{n-۱}\binom{n}{n-۱}۱^m$$ (ر)

۵

مربع لاتین

مربع لاتین یک آرایهٔ مربعی (ماتریس مربعی) است که در هر سطر و هر ستون آن اعضای مجموعه A به طور کامل و بدون تکرار قرار داشته باشند.

مثال: در جبر مجرد بدنهٔ اصلی جدول ضرب یک گروه متناهی یک مربع لاتین است مثلاً گروه کلاین دارای جدول ضربی به شکل زیر است:

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

□

مثال: در احتمالات نیز ماتریس «متغیر تصادفی دوگانه» (که حاصل جمع هر سطر و ستون آن یک است) یک مربع لاتین است.

$$\begin{pmatrix} ۰ & \frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} & ۰ \\ \frac{۳}{۴} & ۰ & \frac{۱}{۴} \end{pmatrix}$$

□

ما در این فصل تنها بر روی مستطیلها و مربعهایی بحث می‌کنیم که درایه‌های آن اعداد صحیح و مثبت هستند. یک مستطیل لاتین A با ابعاد $p \times q$ عبارت است از: یک ماتریس $p \times q$ که هر یک از درایه‌های آن عضو مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ بوده و هیچ عضو تکراری در سطر و یا

ستون آن بوجود نیاید. در حالت خاص اگر $p = q = n$ آن را مربع لاتین می‌نامیم. در این صورت هر سطر و هر ستون جایگشتی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است.

مثال:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}$$

مربع لاتین ۴×۴

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$$

مربع لاتین ۳×۳

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

مستطیل لاتین ۳×۲ از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

□

در این فصل ما دو سؤال اساسی را در مورد مربع و مستطیل لاتین بررسی خواهیم کرد.

سؤال اول: آیا یک مستطیل لاتین الزاماً بخشی از یک مربع لاتین است؟

مثال: آیا مستطیل لاتین زیر یک بخش از مربع لاتین ۴×۴ است؟

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

به عبارت دیگر، آیا می‌توان دو سطر به این مستطیل لاتین اضافه کرد که تبدیل به مربع لاتین ۴×۴ شود؟ به طور مشابه آیا مستطیل لاتین مقابل بخشی از مربع لاتین ۵×۵ است؟

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۵ & ۱ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}$$

راه حل: به سادگی می‌توان بررسی کرد که مستطیل لاتین اول می‌تواند به مربع لاتین گسترش پیدا کند. یک مثال از چنین گسترشی در زیر نشان داده شده است:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

درواقع بعداً نشان خواهیم داد که هر مستطیل لاتین $p \times n$ با درایه‌هایی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را می‌توان به مربع لاتین $n \times n$ گسترش داد. امّا مستطیل دوم قابل گسترش نیست چون به ستونهای اول، دوم و سوم باید عدد ۲ اضافه شود. چون این سه عدد «۲» باید در دو سطر قرار گیرند پس دو تا از آنها در یک سطر واقع شده بنابراین مربع بدست آمده لاتین نخواهد بود. □

در ادامهٔ این فصل ما شرط لازم و کافی برای اطمینان از قابل گسترش بودن یک مستطیل لاتین به مربع لاتین را بدست خواهیم آورد.

پاسخ ما در مورد قابلیت گسترش یک مستطیل لاتین به مربع لاتین به مسألهٔ «مجموعهٔ نماینده‌های متمایز» خانواده‌ای از مجموعه‌ها (که در فصل ۳ در مورد قضیهٔ هال تعریف کردیم) مرتبط است. اکنون این ارتباط را با ارائهٔ مثالی روشن می‌سازیم:

مثال: اضافه کردن یک سطر به مستطیل لاتین زیر برای بدست آوردن یک مستطیل لاتین ۳×۵

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۴ & ۵ & ۳ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}$$

در واقع یافتن اعضای متفاوت از مجموعه‌های مشخص شدهٔ زیر است. هر مجموعه شامل اعضایی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ است که در آن ستون ظاهر نشده‌اند. توجه کنید که هر مجموعه شامل سه عضو است و هر یک از اعضای $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ دقیقاً در سه تا از مجموعه‌ها ظاهر شده‌اند.

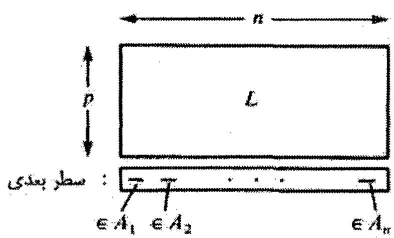
$$\begin{array}{ccccc} \left(\begin{matrix} ۱ \\ ۵ \end{matrix}\right. & \begin{matrix} ۲ \\ ۱ \end{matrix} & \begin{matrix} ۴ \\ ۲ \end{matrix} & \begin{matrix} ۵ \\ ۳ \end{matrix} & \left.\begin{matrix} ۳ \\ ۴ \end{matrix}\right) \\ \{۲, ۳, ۴\} & \{۳, \mathbf{۴}, ۵\} & \{۱, \mathbf{۳}, ۵\} & \{۱, ۲, ۴\} & \{۱, ۲, \mathbf{۵}\} \end{array}$$

یک نمونه از چنین انتخابی با چاپ تیره مشخص شده است این نمونه از اعضا می‌تواند به عنوان یک سطر اضافی استفاده شود. در ادامه می‌توان همین روش را برای گسترش مستطیل لاتین ۳×۵ بدست آمده به مستطیل ۴×۵ و نهایتاً مربع لاتین ۵×۵ استفاده کرد.

قضیه: هر مستطیل لاتین $p \times n$ را می‌توان به مربع لاتین $n \times n$ گسترش داد.

اثبات: فرض کنیم L مستطیل لاتین $p \times n$ باشد. برای هر $۱ \leqslant i \leqslant n$ تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \{\text{اعضایی از مجموعهٔ } \{۱, ۲, \ldots, n\} \text{ که در ستون } i \text{ نیامده‌اند}\}$$



همانطور که در مثال قبل دیدیم یافتن یک سطر اضافی از اعضای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ برای تبدیل L به مستطیل لاتینی $n \times (p + ۱)$ در واقع معادل یافتن یک مجموعهٔ نمایندههای متمایز از خانوادهٔ $\mathfrak{A} = \{A_۱, A_۲, \ldots, A_n\}$ است. از قضیهٔ هال استفاده میکنیم و نشان میدهیم که اجتماع هر r تا از این مجموعهها حداقل شامل r عضو متمایز است که $۱ \leqslant r \leqslant n$. قبل از ارائهٔ استدلال توجه کنید که اولاً: (مانند مثال قبل)

$$|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = \cdots = |A_n| = n - p$$

چون هر کدام از این مجموعهها شامل عضوهایی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است که در ستون p عضوی مربوط به آن نیامدهاند.

ثانیاً: به ازای هر $۱ \leqslant j \leqslant n$ عدد j در دقیقاً $n - p$ مجموعه از خانوادهٔ $\mathfrak{A}$ وجود دارد. زیرا j در دقیقاً p مکان L (p ستون مختلف) ظاهر میشود پس در $n - p$ ستون وجود ندارد و بنا بر تعریف A_iها در $n - p$ مجموعهٔ مختلف ظاهر میشود.

قبلاً در تمرین ۷ از فصل سوم دیدیم که هر خانواده از مجموعهها مانند $\mathfrak{A}$ با ویژگیهای مذکور باید یک مجموعه نمایندههای متمایز داشته باشد. امّا دوباره با استفاده از قضیهٔ هال این مسأله را بطور مستقیم اثبات میکنیم. r مجموعه از خانوادهٔ $\mathfrak{A}$ را در نظر گرفته و ثابت میکنیم شامل حداقل r عضو متمایز است. ابتدا همهٔ اعضای r مجموعهٔ مفروض را (با در نظر گرفتن اعضای تکراری) در یک لیست ردیف میکنیم $r(n - p)$ عضو بدست میآیند. از طرفی همانطور که قبلاً گفتیم هر j حداکثر در $(n - p)$ مجموعه ظاهر میشود. بنابراین اگر اجتماع r مجموعهٔ مفروض شامل کمتر از r عضو متمایز باشد (یعنی حداکثر $r - ۱$ عضو متمایز داشته باشد) لیست باید شامل حداکثر $(n - p)(r - ۱)$ عضو باشد که میدانیم درست نیست چون شامل $r(n - p)$ عضو است. پس هر خانوادهٔ $\mathfrak{A}$ شامل r مجموعه از A_iها حداقل r عضو متمایز دارد و طبق قضیهٔ هال خانوادهٔ $\mathfrak{A} = \{A_۱, A_۲, \ldots, A_n\}$ شامل یک مجموعه نمایندههای متمایز از A_iها میباشد.

از طرفی همانطور که قبلاً گفتیم هر مجموعهٔ نمایندههای متمایز میتواند به عنوان یک سطر اضافی برای L در نظر گرفته شود و آن را به مستطیل لاتین $n \times (p + ۱)$ تبدیل کند. به همین ترتیب میتوان با ادامهٔ این رویه به مربع لاتین $n \times n$ رسید. □

قضیهٔ بالا نشان داد که همیشه میتوان مستطیل لاتین $n \times p$ را به مربع لاتین $n \times n$ گسترش داد. اکنون مستطیل لاتین $p \times q$ را مورد بررسی قرار داده و بزودی متوجه خواهیم شد که گسترش آنها همیشه ممکن نیست.

مثال: آیا می‌توان مستطیل لاتین زیر را به مربع لاتین ۶ × ۶ گسترش داد؟

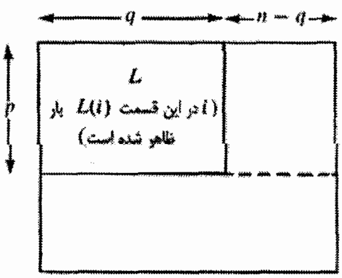
$$\begin{pmatrix} ۶ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۶ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۴ & ۶ \end{pmatrix}$$

راه حل: خیر، یک راه برای بدست آوردن پاسخ این است که توجه کنیم در هر گسترش برای بدست آوردن مربع لاتین ۶ × ۶ نیاز به اضافه کردن سه عدد ۵ داریم. و چون این سه عدد باید در دو ستونی که می‌خواهیم به مستطیل اضافه کنیم واقع شوند پس دو عدد ۵ باید در یک ستون واقع شوند که لاتین بودن مربع را نقض می‌کند.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} ۶ & ۱ & ۲ & ۳ & - & - \\ ۵ & ۶ & ۳ & ۱ & - & - \\ ۱ & ۳ & ۶ & ۲ & - & - \\ ۳ & ۲ & ۴ & ۶ & - & - \\ \hline - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{array}\right)$$

□

به طور کلی می‌توان از مثال فوق به این نتیجه رسید که: برای اطمینان از قابلیت گسترش مستطیل لاتین $q \times p$ به مربع $n \times n$ باید محدودیتی برای اعداد واقع در L قائل شویم. تصور کنید که L قابل گسترش باشد (به صورت مقابل) و هر عدد i دقیقاً $L(i)$ مرتبه در L ظاهر شده باشد. در مربع نهایی در p سطر اول نیاز به p عدد i داریم. بنابراین در قسمت بالایی سمت راست L باید تعداد $(p - L(i))$ عدد i وجود داشته باشد. از طرفی چون این قسمت تنها شامل $n - q$ ستون است، برای ممانعت از قرارگرفتن دو i در یک ستون و اطمینان از گسترش L واضح است که باید داشته باشیم:



مربع لاتین $n \times n$

$$p - L(i) \leqslant n - q \Longrightarrow p + q - n \leqslant L(i)$$

قابل ذکر است که این شرط هم شرط کافی و هم شرط لازم برای گسترش مستطیل لاتین $p \times q$ به مربع لاتین $n \times n$ است. برای اثبات این ادعا باز هم از قضیهٔ هال و مجموعه نمایندههای متمایز یک خانواده استفاده می‌کنیم. امّا قبل از اثبات باید متذکر شویم که انتخاب مجموعه نماینده‌های متمایز در این مورد باید به دقت انجام شود. این نکته را در مثال بعدی خواهیم دید:

مثال: از نکات گفته شده در مورد یک خانواده استفاده کنید و مستطیل لاتین مقابل را به مربع لاتین ۵×۵ گسترش دهید.
$$\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۵ \end{pmatrix}$$

راه حل: در اینجا یک L، ۳×۲ داده شده است. پس داریم $p = ۲$ و $q = ۳$ و $n = ۵$ در نتیجه $p + q - n = ۰$ پس شرط $L(i) \geqslant p + q - n$ به ازای هر i برقرار است می‌توانیم کار را با تبدیل L به مستطیل ۴×۲ آغاز کنیم

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad \swarrow \in \{۲,۵\} \\ \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ & - \\ ۴ & ۱ & ۵ & - \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \nwarrow \in \{۲,۳\} \end{array}$$

این کار ممکن است به یکی از سه روش ممکن زیر انجام شود که در هر صورت سعی می‌کنیم مستطیل ۴×۲ بدست آمده را به یک مستطیل ۵×۲ گسترش دهیم:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۱ & ۵ & ۳ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۱ & ۵ & ۲ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۵ & ۳ \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

گسترش این مستطیل غیر ممکن است چون $L(۲) = ۰$ و داریم:
$$۰ = L(۲) < p + q - n = ۱$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۵ & ۲ & ۳ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ & ۲ & ۵ \\ ۴ & ۱ & ۵ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}}$$

در اینجا دو مستطیل لاتین ۵×۲ داریم که طبق قضیهٔ قبل قابل گسترش به مربع ۵×۵ هستند.

□

فرض می‌کنیم L یک مستطیل لاتین $p \times q$ با درایه‌هایی از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد، که در شرایط $p + q - n \leqslant L(i)$ به ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant n$ صدق می‌کند و می‌خواهیم آن را به مربع لاتین $n \times n$ گسترش دهیم. بدیهی است که مانند مثال بالا وقتی ما یک ستون به L اضافه

می‌کنیم به مستطیل لاتین $p \times (q+۱)$ (که آن را L' می‌نامیم) تبدیل می‌شود و سطر اضافی را باید طوری انتخاب کنیم که رویه ما قابل تکرار برای L' باشد و بتوان L' را نیز گسترش داد. یعنی باید شرط $L'(i) \leqslant p+q+۱-n$ در L' برقرار باشد. پس برای هر i که $L(i)=p+q-n$ برقرار بود باید آن را در ستون اضافی قرار دهیم تا رابطهٔ $L'(i) = L(i)+۱$ برقرار شده و نامساوی فوق درست باشد. به همین منظور مجموعهٔ P را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P = \{i | ۱ \leqslant i \leqslant n \;\; , \;\; L(i) = p+q-n\}$$

همانطور که در بالا گفته شد، برای ادامه دادن روند اضافه کردن ستونها به L باید ستون اضافی در هر صورت شامل مجموعهٔ P باشد تا در مرحلهٔ بعد تعداد iهای واقع شده در L' برابر $q+p+۱-n$ باشد.

مثال: شیوه ارائه شده در بالا را به کار برده و مستطیل لاتین مقابل را به مربع لاتین ۵×۵ گسترش دهید.

$$\begin{pmatrix} ۵ & ۶ & ۱ \\ ۶ & ۵ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}$$

راه حل: ما رویهٔ خود را به طور کامل اجرا می‌کنیم تا اهمیت مجموعهٔ P را به خوبی متوجه شوید و در فهم قضیهٔ بعد به شما کمک کند.

$$\begin{pmatrix} ۵ & ۶ & ۱ & - \\ ۶ & ۵ & ۲ & - \\ ۱ & ۲ & ۳ & - \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \{۲,۳,۴\} \\ \in \{۱,۳,۴\} \\ \in \{۴,۵,۶\} \end{matrix} \qquad p+q-n = ۳+۳-۶ = ۰$$

پس ستون جدید باید شامل مجموعهٔ $P = \{i : L(i) = ۰\} = \{۴\}$ باشد. ستون را اضافه کرده و رویه را ادامه می‌دهیم.

$$\begin{pmatrix} ۵ & ۶ & ۱ & ۴ & - \\ ۶ & ۵ & ۲ & ۱ & - \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۵ & - \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \{۲,۳\} \\ \in \{۳,۴\} \\ \in \{۴,۶\} \end{matrix} \qquad p+q-n = ۳+۴-۶ = ۱$$

پس ستون جدید باید شامل مجموعهٔ $P = \{i | L(i) = ۱\} = \{۳,۴\}$ باشد این سطر را که با چاپ تیره مشخص شده اضافه کرده و ادامه می‌دهیم.

$$\begin{pmatrix} ۵ & ۶ & ۱ & ۴ & ۳ & - \\ ۶ & ۵ & ۲ & ۱ & ۴ & - \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۵ & ۶ & - \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \{۲\} \\ \in \{۳\} \\ \in \{۴\} \end{matrix} \qquad p+q-n = ۳+۵-۶ = ۲$$

پس ستون اضافی باید شامل مجموعهٔ $P = \{i|L(i) = ۲\} = \{۲, ۳, ۴\}$ باشد. این مجموعه را اضافه کرده و یک مستطیل لاتین ۶×۳ بدست می‌آوریم.

$$\begin{pmatrix} ۵ & ۶ & ۱ & ۴ & ۳ & ۲ \\ ۶ & ۵ & ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۵ & ۶ & ۴ \end{pmatrix}$$

بنابر قضیهٔ قبل این مستطیل می‌تواند به مربع لاتین ۶×۶ گسترش یابد. یک نمونه از این گسترش در زیر آمده است.

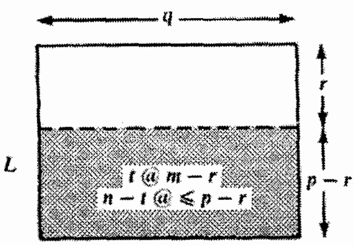
$$\begin{pmatrix} ۵ & ۶ & ۱ & ۴ & ۳ & ۲ \\ ۶ & ۵ & ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۵ & ۶ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۶ & ۱ & ۵ \\ ۴ & ۱ & ۵ & ۳ & ۲ & ۶ \\ ۳ & ۴ & ۶ & ۲ & ۵ & ۱ \end{pmatrix}$$

□

اکنون آماده هستیم که ادعای خود را در مورد گسترش مستطیلهای لاتین $p \times q$ به مربع $n \times n$ اثبات کنیم. امّا ابتدا احتیاج به اثبات لم زیر داریم:

لم: فرض کنید L، مستطیل لاتین $p \times q$ شامل درایه‌های $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد. اگر $۰ \leqslant r \leqslant m < p$ دو عدد صحیح باشند آنگاه تعداد اعضای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ که دقیقاً m بار در L آمده و در همهٔ r سطر اول ظاهر شده‌اند بیشتر از $\dfrac{(n-q)(p-r)}{p-m}$ نمی‌باشند.

اثبات: t را تعداد اعضایی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ در نظر می‌گیریم که دقیقاً m بار در L آمده و در همهٔ r سطر اول L ظاهر شده‌اند. پس این t عضو هرکدام دقیقاً $m - r$ مرتبه در ناحیهٔ سایه زده ظاهر می‌شوند و هرکدام از $n - t$ عضو باقیمانده نیز حداکثر $p - r$ مرتبه در آن ناحیه ظاهر می‌شوند.



برای محاسبهٔ کل اعداد واقع شده در ناحیهٔ سایه زده شده داریم:

$$(p-r)q \leqslant t(m-r) + (n-t)(p-r)$$

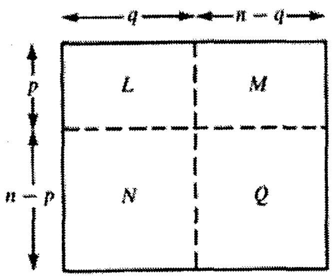
که نتیجه می‌دهد
$$t \leqslant \frac{(n-q)(p-r)}{p-m}$$

و این همان حکم مورد نظر ماست. □

قضیه: اگر L یک مستطیل لاتین $p \times q$ با درایه‌هایی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد آنگاه L را می‌توان به یک مربع لاتین $n \times n$ گسترش داد اگر و تنها اگر مقدار $L(i)$ (تعداد تکرارهای i در L) برای هر $۱ \leqslant i \leqslant n$ در شرط زیر صدق کند:

$$L(i) \geqslant p + q - n$$

اثبات: فرض می‌کنیم که L قابل گسترش به مربع لاتین $n \times n$ به شکل زیر باشد:



چون i به تعداد $L(i)$ مرتبه در L ظاهر شده و p مرتبه در دو بخش M و L با هم ظاهر می‌شود پس $p - L(i)$ مرتبه در M تکرار شده است. امّا از طرفی i به تعداد $n - q$ مرتبه در دو بخش Q و M با هم تکرار می‌شود. پس داریم:

$$p - L(i) \leqslant n - q \Longrightarrow L(i) \geqslant p + q - n$$

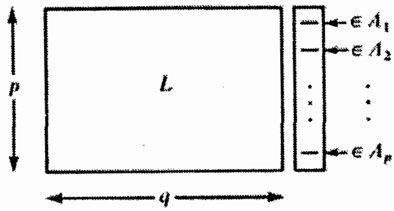
برعکس فرض کنیم رابطهٔ $L(i) \geqslant p + q - n$ به ازای هر i برقرار باشد و $q < n$. روشی ارائه می‌دهیم که بوسیلهٔ آن بتوان L را به مستطیل $p \times (q + ۱)$ گسترش داد و این روش برای مستطیل بدست آمده در مرحلهٔ قبل قابل تکرار باشد و بتواند تا ساختن مستطیل لاتین $p \times n$ ادامه پیدا کند. از طرفی چون بنابر قضیهٔ قبل مطمئن هستیم این مستطیل $p \times n$ قابل گسترش

به مربع لاتین $n \times n$ است حکم قضیه اثبات می‌شود. برای هر $p \geqslant i \geqslant ۱$ مجموعهٔ A_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \{\text{اعضای مجموعهٔ } \{۱, ۲, \ldots, n\} \text{ که در سطر } i \text{ از } L \text{ ظاهر نشده‌اند}\}$$

مجموعهٔ P را نیز مانند مثال قبل به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P = \{i| \ ۱ \leqslant i \leqslant n \ , \ L(i) = p + q - n\}$$



حال نشان می‌دهیم که خانوادهٔ $\mathfrak{A} = \{A_۱, \ldots, A_n\}$ دارای یک مجموعه نماینده‌های متمایز شامل مجموعهٔ P می‌باشد. (که این مجموعه را به عنوان ستون اضافی برای گسترش L به مستطیل لاتین $p \times (q+۱)$ در نظر می‌گیریم.)

برای اثبات وجود مجموعه نماینده‌های متمایز خانوادهٔ $\mathfrak{A}$ باید توجه کنیم که اولاً:

$$|A_۱| = |A_۲| = \cdots = |A_p| = n - q$$

ثانیاً: چون هر i در $p - L(i)$ سطر ظاهر نشده و از طرفی $n - q \geqslant p - L(i)$ پس هر i حداکثر در $n - q$ تا از مجموعه‌های $A_۱, A_۲, \ldots, A_p$ ظاهر شده است. بنابراین دقیقاً مانند اثبات قضیهٔ قبل اجتماع هر r تا از این مجموعه‌ها شامل حداقل r عضو متمایز می‌باشد. در نتیجه طبق قضیهٔ هال یک مجموعه نماینده‌های متمایز از خانوادهٔ مذکور وجود دارد.

حال برای آنکه اثبات کنیم مجموعه نماینده‌های متمایز مورد نظر شامل مجموعهٔ P است باید نشان دهیم:

$$\left|P - (\bigcup_{i \in I} A_i)\right| \leqslant p - |I| \ , \ I \subset \{۱, ۲, ۳, \ldots, p\}$$

و سپس از قضیهٔ آخر فصل سوم استفاده کنیم. برای پرهیز از پیچیده شدن مسأله این حکم را تنها برای $I = \{۱, ۲, \ldots, r\}$ اثبات می‌کنیم. (در حقیقت ما یک مجموعهٔ r عضوی شامل

$\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ را بررسی می‌کنیم و بقیهٔ مجموعه‌ها نیز شبیه همین مورد هستند). بنابر تعریف داریم:

$$\left|P - \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\right| = \text{تعداد اعضای } p \text{ که در } A_i\text{ها نیستند} = \text{تعداد اعضای } p \text{ که در } r \text{ سطر اول آمده‌اند}$$

می‌دانیم هر عضو P مانند k دقیقاً $p+q-n$ مرتبه در L ظاهر می‌شود. حال اگر $p+q-n < r$ آنگاه k حداقل در یکی از A_iها ظاهر شده بنابراین جمع بالا صفر شده و نامساوی برقرار می‌شود.

امّا اگر $p+q-n \geqslant r$ از لم استفاده می‌کنیم و با در نظر گرفتن $m = p+q-n$ نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned}\left|P - \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\right| &= \text{تعداد اعضای مجموعهٔ } \{1, 2, \ldots, n\} \text{ که دقیقاً } p+q-n \\ &\quad \text{مرتبه در } L \text{ ظاهر شده و در همهٔ } r \text{ سطر اول آمده باشند} \\ &\leqslant \frac{(n-q)(p-r)}{p-(p+q-n)} \\ &= p - r \\ &= p - |I|\end{aligned}$$

بنابر نامساوی فوق طبق قضیهٔ هال خانوادهٔ $\mathfrak{A}$ یک مجموعه نماینده‌های متمایز شامل P دارد. می‌توانیم این مجموعه نماینده‌های متمایز را به عنوان ستون اضافی برای گسترش L به مستطیل لاتین $p \times (q+1)$ استفاده کنیم. اگر $L'(i)$ تعداد مرتبه‌های حضور عدد i در مستطیل لاتین جدید یعنی L' باشد در نتیجه خواهیم داشت:

اگر $i \notin P$: $\quad L'(i) \geqslant L(i) > p+q-n$

اگر $i \in P$: $\quad L'(i) = L(i) + 1 = p+q-n+1$

که در هر صورت نتیجه می‌دهد: $\quad L'(i) \geqslant p+q-n+1$

یعنی مستطیل لاتین L' نیز شرط لازم و کافی برای گسترش را دارد و این رویه می‌تواند ادامه پیدا کند تا مستطیل لاتین $p \times n$ ساخته شود و از طرفی بنابر قضیهٔ قبل مطمئن هستیم که این مستطیل می‌تواند به مربع لاتین $n \times n$ گسترش یابد. □

مسألهٔ دوم: دومین مسأله در مورد مربع لاتین آن است که وجود خاصیت «تعامد» را بررسی کنیم. این مفهوم را با مثال زیر روشن می‌کنیم.

مثال: ۱۶ افسر از ۴ لشکر و در هر لشکر ۴ افسر با چهار درجهٔ متفاوت در یک صف ایستاده‌اند. آنها را در یک آرایش ۴ × ۴ طوری قرار دهید که در هر سطر و هر ستون از هر لشکر دقیقاً یک افسر قرار گیرد و هیچ دو افسر با درجهٔ یکسان در یک صف نباشند.

راه حل: ابتدا درجهٔ افسرها را نادیده می‌گیریم. یک ترکیب ساده که در هر سطر و ستون آن از هر لشکر دقیقاً یک افسر وجود دارد در شکل سمت چپ نشان داده شده است.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}$$

ترکیب شمارهٔ درجهٔ افسرها ترکیب شمارهٔ لشکر افسرها

یک انتخاب درجه برای افسرهای این چهار لشکر در شکل سمت راست نشان داده شده است. با این دو شکل می‌توان ماتریس جدیدی ساخت که نشان دهندهٔ ترکیب مورد نظر باشد: مثلاً موقعیت اول از سطر دوم مربوط به افسر لشکر سوم با درجهٔ دوم می‌باشد. یعنی درایهٔ اول هر زوج واقع در یک مکان نشان دهندهٔ درجه و درایهٔ دوم آن نشان دهندهٔ شمارهٔ لشکر افسر ایستاده در آن مکان است.

$$\begin{pmatrix} ۱,۱ & ۲,۲ & ۳,۳ & ۴,۴ \\ ۲,۳ & ۱,۴ & ۴,۱ & ۳,۲ \\ ۳,۴ & ۴,۳ & ۱,۲ & ۲,۱ \\ ۴,۲ & ۳,۱ & ۲,۴ & ۱,۳ \end{pmatrix}$$

□

مسألهٔ افسرها شامل تشکیل دو مربع لاتین است. امّا رابطهٔ بین آنها چیست؟ وقتی ما دو جدول را در هم ادغام می‌کنیم ۱۶ درایهٔ تشکیل شده از زوجهای (۱, ۱) و (۲, ۱) و ... و (۴, ۴) بوجود می‌آید که دو به دو متمایز هستند. این دو مربع لاتین را دو مربع لاتین متعامد می‌نامیم. در حالت کلی دو مربع لاتین $n \times n$ با نامهای $L = (L_{ij})$ و $M = (M_{ij})$ متعامدند اگر $n^۲$ جفت (L_{ij}, M_{ij}) همگی متمایز باشند. این مربع بدست آمده که شامل درایه‌های دوتایی می‌باشد را «مربع لاتین اویلر» یا «مربع لاتین جریکو» می‌نامند. نام اویلر، که بارها در این کتاب آمده است، در این مورد به این خاطر است که در سال ۱۷۸۲ او حدس زد مسألهٔ افسرها برای ۳۶ افسر درجه‌دار برای مربع ۶×۶ غیر قابل حل است. به بیان دیگر اویلر حدس زد که هیچ دو مربع لاتین ۶×۶ متعامد وجود ندارد. جست‌وجوهای گستردهٔ «ج. تاری[1]» در سال ۱۹۰۰ درستی حدس اویلر را اثبات کرد. (البته از آن زمان روشهای متفاوت بهتری برای اثبات این مسأله پیدا شده است). امّا آیا برای هر مقدار n دو مربع لاتین $n \times n$ متعامد وجود دارد؟ به سادگی

1) G. Tarry

می‌توانید این حدس برای $n = ۲$ رد می‌شود چون تنها دو نوع مربع لاتین ۲×۲ به صورت مقابل وجود دارد:

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

حکم تاری نیز این حدس را برای $n = ۶$ رد کرد. امّا بقیهٔ اعداد چطور؟ اویلر حدس زد که برای nهای زوج که بر ۴ بخش‌پذیر نیستند این حکم رد می‌شود. این حدس کلی حل نشده باقی ماند تا اینکه «آر. سی. روز[1]» و «اس. اس. شریخاند[2]» و «ای. تی. پارکر[3]» در سال ۱۹۶۰ در نشریهٔ ریاضی کانادا اثبات کردند جفت مربعهای لاتین متعامد برای همهٔ nها غیر از $n = ۲,۶$ وجود دارد.

اکنون ما مجموعهٔ بزرگتری از مربعهای لاتین $n \times n$ دو به دو متعامد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال: چهار مربع لاتین ۵×۵ دو به دو متعامد پیدا کنید:

راه حل:

$$L_۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{pmatrix} \qquad L_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$L_۳ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} \qquad L_۴ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \end{pmatrix}$$

یک چنین مجموعه‌ای در بالا نشان داده شده است. □

برای راحتی کار با مجموعه مربعهای لاتین متعامد ابتدا آنها را به صورت یک ماتریس ساده نشان می‌دهیم: (با کمی تأمل متوجه خواهید شد که این ماتریس چگونه از روی مربعهای مذکور

1) R. C. Rose 2) S. S. Shrikhande 3) E. T. Parker

ساخته شده است.)

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} i & j & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

در این سطر از M اطلاعات درایه‌های (۲, ۴) از هر مربع را داریم: در L_1 برابر ۵ در L_2 برابر ۱ در L_3 برابر ۲ و در L_4 برابر ۳ است.

حال توجه کنید که ماتریس M چه خاصیتهایی دارد: هیچ جایی در ماتریس پیدا نمی‌کنید که در چهارگوشهٔ یک مستطیل، درایه‌ها به صورت زیر قرار گرفته باشند. (یعنی دو سطر از ماتریس

در دو ستون مختلف درایهٔ یکسان داشته باشند)

$$\begin{matrix} x & \cdots & y \\ \vdots & & \vdots \\ x & \cdots & y \end{matrix}$$

(اینگونه مستطیلی را یک مستطیل متقارن می‌نامیم)

برای مثال یک مستطیل متقارن از ستون‌های اول و چهارم از M نشان دهندهٔ این است که در یک سطر با شمارهٔ یکسان x از ماتریس $L_۲$ دو درایه با شمارهٔ y وجود دارد که لاتینی بودن $L_۲$ را نقض می‌کند. همچنین وجود مستطیل درایه‌ای در دو ستون ۳ و ۵ تعامد مربعهای $L_۱$ و $L_۳$ را نقض می‌کند. بررسی بقیهٔ حالتها را به شما واگذار می‌کنیم.

بطور کلی هر مجموعهٔ rتایی از مربعهای لاتین دو به دو متعامد $n \times n$ را می‌توان بوسیلهٔ یک ماتریس $(r+۲) \times n^۲$ نشان داد. هر یک از درایه‌های M عضوی از $\{۱,۲,\ldots,n\}$ است و هیچ مستطیل متقارنی در آن وجود ندارد. عکس این مطلب نیز درست است که اگر M ماتریسی $(r+۲) \times n^۲$ با درایه‌هایی از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\ldots,n\}$ باشد که هیچ مستطیل متقارنی در آن بوجود نیاید می‌توان ستونهای آن را با $i, j, L_۱, L_۲, \ldots, L_r$ برچسب گذاری کرد که هر سطر نشان دهندهٔ درایهٔ (i,j) در مربع لاتین $L_۱, L_۲, \ldots, L_n$ باشد. خاصیت عدم وجود مستطیل متقارن به ما اطمینان می‌دهد که همهٔ جفتهای (i,j) پوشیده شده‌اند و در نتیجه ما یک مجموعهٔ rتایی از مربعهای لاتین دو به دو متعامد خواهیم داشت. بررسی دقیق این موارد به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. یک سؤال که ممکن است به ذهن برسد این است که: برای هر $n > ۱$ بزرگترین مجموعه از مربعهای لاتین $n \times n$ دو به دو متعامد چند عضو دارد؟ قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که هرگز n تا از این مربعها وجود ندارد.

قضیه: برای هر $n > ۱$ حداکثر $n - ۱$ مربع لاتین $n \times n$ دو به دو متعامد وجود دارد.

اثبات: مجموعهٔ $L_۱, L_۲, \ldots, L_q$ از مربعهای لاتین را در نظر می‌گیریم هدف ما این است که نشان دهیم $q \leqslant n - ۱$. در مثال قبل سطر اول هر یک از مربعها به صورت $(۱,۲,۳,۴,۵)$ است. ابتدا نشان می‌دهیم که مجموعهٔ $L_۱, L_۲, \ldots, L_q$ را می‌توان به مجموعهٔ $L'_۱, L'_۲, \ldots, L'_q$ تبدیل کرد که سطر اول همهٔ L'_iها به صورت $(۱,۲,۳,\ldots,n)$ باشد. فرض می‌کنیم سطر اول مربع $L_۱$ به صورت $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ باشد. در کلِ مربع $L_۱$ به جای $a_۱$ عدد ۱، به جای $a_۲$ عدد ۲ و ... به جای a_n عدد n را قرار میدهیم تا $L'_۱$ بدست بیاید. می‌توان به سادگی نشان داد $L'_۱$ هنوز مربع لاتین است و با دیگر مربعهای $L_۲, L_۳, \ldots, L_q$ متعامد است. همین

رویه را برای دیگر مربعها اجرا می‌کنیم تا مربعهای $L'_۱, L'_۲, L'_۳, \ldots, L'_n$ که سطر اول همهٔ آنها به صورت $(۱, ۲, ۳, \ldots, n)$ است بدست بیایند:

$$L'_۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & \ldots & n \\ ? & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}, L'_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & \ldots & n \\ ? & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}, \ldots, L'_q = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & \ldots & n \\ ? & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

حال درایه‌های ؟ چه اعدادی می‌توانند باشند اولاً: ۱ نمی‌تواند باشد چون لاتین بودن مربعها را نقض می‌کند. ثانیاً: هیچ کدام از آنها تکراری نمی‌تواند باشد.

$$L'_j = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & \ldots & i & \ldots & n \\ i & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}, \quad L'_k = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & \ldots & i & \ldots & n \\ i & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

چون جفت (i, i) یک بار در سطر اول تولید شده و نمی‌تواند دوباره تکرار شود. وگرنه تعامد دو به دوی مربعها را نقض می‌کند در نتیجه به جای هر یک از علامتها باید یکی از اعضای مجموعهٔ $\{۲, ۳, ۴, \ldots, n\}$ قرار بگیرد که حداکثر این عضوها $n - ۱$ است یعنی $q \leqslant n - ۱$. □

پس چهار مربع مجموعهٔ مثال قبل بزرگترین مجموعهٔ مربعهای لاتین ۵×۵ دو به دو متعامد می‌باشد. نظم الگوی این چهار مربع ما را به این گمان می‌اندازد که شیوه‌ای کلی برای ساخت $n - ۱$ مربع لاتین جفت متعامد وجود دارد. (این حدس برای حالتی که n اول یا توانی از یک عدد اول باشد با استفاده از نظریهٔ اعداد اثبات می‌شود.)

قضیه: اگر n اول یا توانی از یک عدد اول باشد آنگاه $n - ۱$ مربع لاتین $n \times n$ دوبدو متعامد وجود دارد.

اثبات: ما تا به حال از مربعهای لاتین با درایه‌هایی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ استفاده کرده‌ایم. امّا در این اثبات بهتر است داریه‌ها را از مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱\}$ انتخاب کنیم. در حساب همنهشتی بر روی مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱\}$ ضرب و جمع در پیمانهٔ n یک راه نسبتاً خوبی برای تولید یک مجموعه به همین صورت می‌باشد. بطور مثال جدول ضرب و جمع به پیمانهٔ ۵ در زیر به عنوان نمونه آورده شده‌اند:

$\cdot$	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳	۴
۲	۰	۲	۴	۱	۳
۳	۰	۳	۱	۴	۲
۴	۰	۴	۳	۲	۱

$\oplus$	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۲	۳	۴	۰
۲	۲	۳	۴	۰	۱
۳	۳	۴	۰	۱	۲
۴	۴	۰	۱	۲	۳

اساساً عملگرهای گفته شده همان عملگرهای معمولی هستند با این تفاوت که از جواب آنها به تعداد ممکن عدد n کم می‌شود تا به پیمانهٔ n بدست بیاید. (اگر مطالعات کافی در جبر مجرد داشته باشید می‌دانید که مجموعهٔ فوق و اعمال ضرب و جمع تشکیل میدان می‌دهند.) حال فرض می‌کنیم n یک عدد اول باشد. $\cdot$ و $\oplus$ ضرب و جمع به پیمانهٔ n باشند. مجموعهٔ $L_۱, L_۲, \ldots, L_{n-۱}$ از مربعهای لاتین را با این قاعده تعریف می‌کنیم، که درایهٔ (i,j) از ماتریس L_k برابر عدد $k \cdot (i-۱) \oplus (j-۱)$ باشد. (اگر این شیوه را برای $n=۵$ اجرا کنید چهار مربع لاتین مثال قبل بدست می‌آید.) واضح است که این شیوه $n-۱$ ماتریس $n \times n$ با درایه‌هایی از مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱\}$ می‌سازد. حال نشان می‌دهیم این مربعهای $n \times n$، لاتین و نیز دو به دو متعامدند.

الف) در L_k هیچ دو عضو یکسانی در یک ستون قرار ندارند: اگر دو درایهٔ $(i,j), (i',j)$ از L_k با هم برابر باشند و $i < i'$ داریم:

$$k \cdot (i-۱) \oplus (j-۱) \overset{n}{\equiv} k \cdot (i'-۱) \oplus (j-۱)$$
$$\Longrightarrow k \cdot (i'-i) \overset{n}{\equiv} ۰$$

امّا چون $۱ \leqslant k \leqslant n-۱$ و $۱ \leqslant i'-i \leqslant n-۱$ است و n نیز اول است پس $k \overset{n}{\not\equiv} ۰$ و $i'-i \overset{n}{\not\equiv} ۰$ یعنی تساوی فوق غیر ممکن است و هیچ دو عضو تکراری در یک ستون از L_k وجود ندارد.

ب) در L_k هیچ دو سطری درایهٔ یکسان ندارد: اثبات این موضوع ساده‌تر از بند قبل است که به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

ج) خواص (الف) و (ب) ایجاب می‌کند که مربع L_k لاتین است. حال برای $۱ \leqslant k', k \leqslant n-۱$ ثابت می‌کنیم L_k و $L_{k'}$ متعامدند: اگر L_k و $L_{k'}$ نامتعامد باشند آنگاه دو زوج مرتب یکسان در ماتریس تعامد آنها (ماتریس حاصل از ادغام L_k و $L_{k'}$) وجود خواهد داشت

که در مکانهای (i,j) و (i',j') قرار گرفته‌اند:

$$\begin{array}{cc} L_k = \begin{pmatrix} x & \\ & x \\ & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i \\ \leftarrow i' \\ \\ \end{array} & L_{k'} = \begin{pmatrix} y & \\ & y \\ & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i \\ \leftarrow i' \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\;\; \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ j & j' \end{array} & \quad\quad\;\; \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ j & j' \end{array} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{تساوی درایهٔ اول} & : k\cdot(i-1)\oplus(j-1)\equiv k\cdot(i'-1)\oplus(j'-1) \\ \text{تساوی درایهٔ دوم} & : k'\cdot(i-1)\oplus(j-1)\equiv k'\cdot(i'-1)\oplus(j'-1) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$(k-k')(i-i') \overset{n}{\equiv} 0$$

که این شرط اول بودن n را مانند بند (الف) نقض می‌کند پس دو مربع لاتین L_k و $L_{k'}$ متعامدند. اکنون ما یک الگوریتم کلی برای ساخت $n-1$ مربع لاتین دوبدو متعامد وقتی n عددی اول است داریم. حال طرح کلی در مورد چگونگی تعمیم این شیوه به هنگامی که n توانی از یک عدد اول است را ارائه می‌دهیم. چون ذکر اثبات کامل نیازمند اطلاعاتی در جبر مجرد می‌باشد از آوردن جزئیات به طور کامل خودداری می‌کنیم.

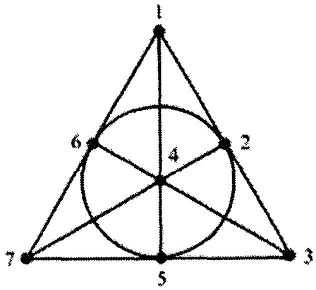
در الگوریتم فوق بخش اصلی اثبات بر پایهٔ میدان بودن $\cdot$ و $\oplus$ بر روی مجموعهٔ $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ قرار داشت. (در یک میدان اگر حاصل ضرب دو عدد صفر شود حتماً یکی از آن دو باید صفر باشد). در حالتی که n توانی از عددی اول باشد میدان بودن این مجموعه رد می‌شود (مثلاً اگر $n=p^r$ و $r>1$ آنگاه $p\cdot p^{r-1} \overset{p^r}{\equiv} 0$). امّا می‌توان عملگری با استفاده از ضرب و جمع روی مجموعهٔ $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ تعریف کرد که تولید یک میدان کند: این میدان «میدان گالویس[1]» نامیده می‌شود. ذکر جزئیات بیشتر در اینجا لزومی ندارد امّا فقط قبول می‌کنیم که چنین میدانی وجود دارد که ایجاب می‌کند بخش اول این اثبات به راحتی به مواردی که n توانی از یک عدد اول است تعمیم پیدا کند. □

این اثبات به ما نشان داد چنانچه یک میدان n عضوی داشته باشیم آنگاه $n-1$ مربع لاتین دو به دو متعامد $n\times n$ وجود دارد. همچنین چنین میدانی را برای nهای اول یا توانی از یک عدد اول معرفی کردیم. این حدس هنوز حل نشده باقیمانده که: «یک مجموعه شامل $n-1$ مربع لاتین دو به دو متعامد وجود دارد اگر و فقط اگر n اول یا توانی از یک عدد اول باشد.»

1) Galois fieeld

آخرین موضوع مورد بحث ما در این فصل در نگاه اول ممکن است با مربعهای لاتین بی‌ربط به نظر بیاید: در اوایل قرن بیستم «اسوالد وبلن[1]» و همکارانش مجردات هندسی را با شیوه‌ای جدید مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. برای روشن شدن موضوع به مثال زیر توجه کنید:

مثال: در شکل مقابل بررسی کنید که برای هفت خط و هفت نقطهٔ ترسیم شده خواص زیر وجود دارد.



الف) هر دو نقطه روی یک خط قرار دارند.

ب) هر دو خط دقیقاً در یک نقطه متقاطعند.

ج) هر خط از سه نقطه می‌گذرد.

د) هر نقطه روی سه خط قرار دارد.

این شکل متشکل از مجموعهٔ نقاط $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ می‌باشد و خطوط آن به صورت $\{۱,۲,۳\}$ و $\{۱,۴,۵\}$ و $\{۱,۶,۷\}$ و $\{۲,۴,۷\}$ و $\{۲,۵,۶\}$ و $\{۳,۴,۵\}$ و $\{۳,۵,۷\}$ می‌باشد. □

بطور کلی یک «صفحهٔ تصویری متناهی» عبارت است از یک مجموعهٔ متناهی (که «نقاط» آن صفحه نامیده می‌شوند) و مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های این مجموعه (که «خطوط» آن صفحه نامیده می‌شوند) که در شرایط زیر صدق کنند:

الف) هر دو نقطه روی دقیقاً یک خط قرار گیرند.

ب) هر دو خط یک نقطهٔ تلاقی داشته باشند.

ج) هر خط شامل $n + ۱$ نقطه باشد.

د) هر نقطه روی $n + ۱$ خط واقع باشد.

عدد n «مرتبهٔ» صفحه تصویری نامیده می‌شود. پس مثال قبل یک صفحهٔ تصویری متناهی از مرتبهٔ ۲ می‌باشد. در تمرینات نشان خواهیم داد که صفحهٔ تصویری متناهی مرتبهٔ n شامل $n^۲ + n + ۱$ نقطه است. در حقیقت این هندسه‌های بوجود آمده شامل اصول موضوعهٔ کمتر و همچنین خواص جالبی هستند که به خاطر دوگانگی حاصل از تغییر نقش نقاط و خطوط در این اصول بوجود می‌آیند. خواهیم دید که تعدادی از این خواص جدید مورد استفادهٔ طراحی گروهها در فصل ۱۵ قرار می‌گیرند. جزئیات بیشتر را می‌توان در منابع معرفی شده در بخش کتاب شناسی پیدا کنید.

1) Oswald veblen

امّا چه ارتباطی میان مربع لاتین و صفحهٔ تصویری متناهی وجود دارد؟ نشان خواهیم داد که صفحهٔ تصویری متناهی مرتبهٔ n وجود دارد اگر و فقط اگر n توانی از عددی اول باشد و این حدس زده شده که تنها یک شکل از چنین صفحاتی وجود دارد. همانطور که می‌بینید این شرط بسیار شبیه شرط وجود $n - ۱$ مربع لاتین $n \times n$ دو به دو متعامد است اکنون نشان می‌دهیم این دو مسأله وجودی معادل یکدیگرند:

قضیه: صفحهٔ تصویری متناهی مرتبهٔ n وجود دارد اگر و فقط اگر $n - ۱$ مربع لاتین $n \times n$ دو به دو متعامد وجود داشته باشد.

اثبات: ابتدا برای سادگی کار رابطهٔ میان وجود صفحهٔ تصویری مرتبهٔ ۲ و دو مربع لاتین ۳×۳ را بیان می‌کنیم که البته قضیه را اثبات نمی‌کند امّا طرح کلی اثبات را به ما خواهد داد که می‌تواند به راحتی تعمیم پیدا کند و در ادامه چند اشاره به حالت عمومی و کلی اثبات خواهیم کرد. ابتدا با دو مربع لاتین ۳×۳ متعامد آغاز می‌کنیم:

$$L_۱ = \begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix} \qquad L_۲ = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}.$$

حال طبق شیوه‌ای که قبلاً توضیح دادیم ماتریس مختلط آنها را تشکیل می‌دهیم:

$$M = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۳ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$$

مثلاً این سطر نشان می‌دهد که درایهٔ $(۱,۳)$ در ماتریس $L_۱$ برابر ۲ و در $L_۲$ برابر ۳ است

حال نقاط $\{c_۱, c_۲, c_۳, c_۴, r_۱, r_۲, \ldots, r_۹\}$ را تعریف می‌کنیم (که متناظر ۴ ستون و ۹ سطر ماتریس M است). خطوط را از این نقاط به این صورت می‌سازیم که هر خط یا چهارتایی $\{c_۱, c_۲, c_۳, c_۴\}$ است یا یک چهارتایی به فرم $\{c_i, r_s, r_t, r_u\}$ که i شمارهٔ ستونی است که در

آن ستون، سطرهای شمارهٔ s, t, u دارای درایهٔ یکسان هستند. مثلاً در مورد ماتریس فوق می‌توان خط $\{c_۲, r_۳, r_۶, r_۹\}$ را در نظر گرفت چون در ستون دوم و سطرهای ۳ و ۶ و ۹ درایهٔ یکسان ۳ وجود دارد. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم خطوط زیر را بدست خواهیم آورد: (می‌توانید هر یک از این خطوط را بررسی کنید)

$$\{c_۱, c_۲, c_۳, c_۴\}\ \ \{c_۱, r_۱, r_۲, r_۳\}\ \ \{c_۱, r_۴, r_۵, r_۶\}\ \ \{c_۱, r_۷, r_۸, r_۹\}$$
$$\{c_۲, r_۱, r_۴, r_۷\}\ \{c_۲, r_۲, r_۵, r_۸\}\ \{c_۲, r_۳, r_۶, r_۹\}\ \{c_۳, r_۲, r_۶, r_۷\}\ \{c_۳, r_۳, r_۴, r_۷\}$$
$$\{c_۳, r_۱, r_۵, r_۹\}\ \ \{c_۴, r_۲, r_۴, r_۹\}\ \ \{c_۴, r_۱, r_۶, r_۸\}\ \ \{c_۴, r_۳, r_۵, r_۷\}$$

اکنون به سادگی می‌توان اصول موضوعهٔ صفحهٔ تصویری متناهی مرتبهٔ ۳ را در مورد خطوط و نقاط بدست آمده بررسی کرد. در حالت کلی $n - ۱$ مربع لاتین $n \times n$ یک ماتریس M به ابعاد $(n + ۱) \times n^۲$ با درایه‌هایی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ و بدون مستطیل متقارن (به شکل مقابل) به ما می‌دهد:

$$\begin{array}{ccc} x & \ldots & y \\ \vdots & & \vdots \\ x & \ldots & y \end{array}$$

طبق روشی که در بالا آوردیم، $n^۲ + n + ۱$ نقطهٔ $\{c_۱, c_۲, \ldots, c_{n+۱}, r_۱, r_۲, \ldots, r_{n^۲}\}$ را خواهیم داشت. همچنین $n^۲ + n + ۱$ خط را می‌توانیم بسازیم که هر کدام شامل $n + ۱$ نقطه بوده و هر جفت از نقاط روی دقیقاً یک خط قرار داشته باشند. در این حالت خاصیت عدم وجود مستطیل متقارن در ماتریس M این اطمینان را به ما می‌دهد که این نقاط در اصول موضوعهٔ صفحهٔ تصویری متناهی صدق می‌کنند. مثلاً تعداد نقاط مشترک موجود در هر دو خط $\{c_j, r_i, \ldots\}$ و $\{c_{j'}, r_{i'}, \ldots\}$ چند تا است؟

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} \vdots & ۲ \\ ۱ & \vdots \\ \vdots & ۲ \\ ۱ & ۲ \\ ۱ & \vdots \\ \vdots & ۲ \\ ۱ & \vdots \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow\ \ \uparrow & \\ j\ \ \ j' & \end{array}$$

اگر $j = j'$ آنگاه c_j تنها نقطهٔ مشترک در دو خط مذکور است امّا اگر $j \neq j'$ خط اول را شماره تمام سطور شامل ۱ در ستون j و خط دوم را شمارهٔ تمام سطور شامل ۲ در ستون j' در نظر می‌گیریم. خاصیت عدم وجود مستطیل متقارن تضمین میکند که جفت $(۱, ۲)$ دقیقاً یک بار در M ظاهر شده است. (مثلاً در iامین سطر) پس دو خط داده شده در دقیقاً یک نقطه مشترک هستند.

برای تبدیل صفحهٔ تصویری متناهی به مربعهای لاتین فرض می‌کنیم صفحهٔ تصویری متناهی مرتبهٔ ۳ داده شده است و این صفحه شامل ۱۳ خط که هرکدام شامل ۴ نقطه است می‌باشد. نقاط واقع بر خطوط را با حروف

$c_1, c_2, c_3, c_4, r_1, r_2, \ldots, r_9$ مشخص می‌کنیم تا خطوطی که در ابتدای این اثبات آورده بودیم بوجود آیند. این واقعیت که هر دو خط در یک نقطه مشترکند به این معنی است که ۱۲ خط (شامل همهٔ خطوط غیر از خط $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ قابل تفکیک به چهار دستهٔ سه‌تایی به شکل زیرند:

$$\begin{array}{lccc}
c_1 \text{ خطوط شامل}: & \{c_1, r_1, r_2, r_3\}, & \{c_1, r_4, r_5, r_6\}, & \{c_1, r_7, r_8, r_9\} \\
c_2 \text{ خطوط شامل}: & \{c_2, r_1, r_4, r_7\}, & \{c_2, r_2, r_5, r_8\}, & \{c_2, r_3, r_6, r_9\} \\
c_3 \text{ خطوط شامل}: & \{c_3, r_2, r_6, r_7\}, & \{c_3, r_3, r_4, r_8\}, & \{c_3, r_1, r_5, r_9\} \\
c_4 \text{ خطوط شامل}: & \{c_4, r_2, r_4, r_9\}, & \{c_4, r_1, r_6, r_8\}, & \{c_4, r_3, r_5, r_7\} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 1 & 2 & 3
\end{array}$$

ستون اول را گروه ۱ و ستون دوم را گروه ۲ و ستون سوم را گروه ۳ می‌نامیم حال ماتریس M را به این صورت می‌سازیم که درایهٔ (i, j) در این ماتریس برابر k است اگر جفت (c_i, r_j) در گروه k قرار داشته باشند. با اجرای این روش ماتریس M به صورت زیر بدست می‌آید.

$$M = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 3 & 2 \\
1 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 3 & 2 & 3 \\
2 & 1 & 2 & 1 \\
2 & 2 & 3 & 3 \\
2 & 3 & 1 & 2 \\
3 & 1 & 1 & 3 \\
3 & 2 & 2 & 2 \\
3 & 3 & 3 & 1
\end{pmatrix}$$

چون $\{c_4, r_5\}$ در گروه سوم قرار دارند

چون $\{c_2, r_8\}$ در گروه دوم قرار دارند

حال ماتریس M بدست آمده را می‌توانیم در ساختن و بازخوانی دو مربع لاتین 3×3 متعامد زیر به کار ببریم:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

این رویه می‌تواند در حالت کلی نیز اجرا شود: صفحهٔ تصویری متناهی متشکل از $n^۲ + n + ۱$ نقطه و $n^۲ + n + ۱$ خط می‌تواند ماتریس M به ابعاد $(n + ۱) \times n^۲$ را تولید کند که درایه‌های آن از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشند.

اصول موضوعهٔ صفحهٔ تصویری متناهی شرط کافی برای عدم وجود مستطیل متقارن در M را فراهم می‌کند چون اگر دو سطر مانند دو سطر زیر در M وجود داشته باشد:

$$\text{سطر } i \longrightarrow \ldots x \ldots y \ldots$$
$$\text{سطر } i' \longrightarrow \ldots x \ldots y \ldots$$

نتیجه می‌شود که جفت $\{r_i, r_{i'}\}$ روی دو خط قرار دارند که متناقض اصل موضوعهٔ اول صفحهٔ تصویری متناهی است. بنابراین ماتریس M را می‌توان برای بازخوانی $n - ۱$ مربع لاتین $n \times n$ که دو به دو متعامدند به کار برد. $\square$

بنابر قضیهٔ بالا صفحهٔ تصویری متناهی از مرتبه‌های $n = ۲, ۳, ۴, ۵, ۷, ۸, ۹$ وجود دارد چون این اعداد یا اول هستند یا توانی از یک عدد اول، که شرایط قضیهٔ وجود $n - ۱$ مربع لاتین $n \times n$ دو به دو متعامد را برآورده می‌سازند. امّا هیچ صفحهٔ تصویری متناهی از مرتبهٔ ۶ وجود ندارد چون همانطور که قبلاً دیدیم هیچ دو مربع لاتین ۶×۶ متعامد وجود ندارد. (اثبات دقیق این مسأله در تمرین ۱۰ فصل ۱۵ آمده است.) یک مورد دیگر که شرایط وجود صفحهٔ تصویری متناهی را برآورده نمی‌سازد $n = ۱۰$ است. این موضوع در سال ۱۹۸۹ توسط «سی. لم[1]» و «ال. تیل[2]» و «اس. سویرز[3]» اثبات شد. آنها اعلام کردند که جستجوی گستردهٔ کامپیوتری (با صرف ۳۰۰ ساعت وقت) نشان داده است صفحهٔ تصویری متناهی مرتبهٔ ۱۰ وجود ندارد.

1) C. Lam 2) L. Thiel 3) S. Swierz

«تمارین»

۱) برای کدام مقادیر i و j مستطیل‌های لاتین زیر قابل گسترش به مربع لاتین ۶×۶ می‌باشند. یک نمونه از این گسترش را انجام دهید.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۶ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۱ & j \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۲ & i \end{pmatrix}$$ (ج)

۲) ثابت کنید حداکثر تعداد مربعهای لاتین $n \times n$ برابر عدد زیر است:

$$n! \times (n-۱)! \times (n-۲)! \times \ldots \times ۳! \times ۲! \times ۱!$$ (ر)

۳) L یک مستطیل لاتین $p \times q$ با درایه‌هایی از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\ldots,n\}$ است که هر عضو این مجموعه به تعداد یکسان در L ظاهر شده است. نشان دهید L قابل گسترش به مربع لاتین $n \times n$ است.

۴) n,p,q اعداد طبیعی با شرایط $q < n$ و $۱ \leqslant p$ هستند. هر مستطیل لاتین $p \times q$ با درایه‌هایی از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\ldots,n\}$ را می‌توان مستطیل لاتین $p \times q$ با درایه‌هایی از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\ldots,N\}$ در نظر گرفت که $N \geqslant n$. نشان دهید می‌توان مستطیل $p \times q$ مورد نظر را به مربع لاتین $N \times N$ گسترش داد و (به ازای مقادیر معلوم n,p,q) کمترین مقدار N را برای چنین مستطیل‌هایی پیدا کنید. (ر، ج)

۵) نشان دهید اگر L و L^T (ترانهادهٔ ماتریس L) دو مربع لاتین متعامد باشند آنگاه قطر آنها درایهٔ تکراری ندارد. ثابت کنید که برای $n = ۳$ چنین مربعی وجود ندارد امّا برای $n = ۴$ یک نمونه از این جفت مربعها وجود دارد. (ج)

۶) الف) با استفاده از روش حساب همنهشتی که در این فصل گفتیم ۴ مربع لاتین ۵×۵ دو به دو متعامد پیدا کنید. (اگر احساس می‌کنید مشکل است صفحهٔ تصویری متناهی متناظر با آن را پیدا کنید.) (ج)

ب) نشان دهید اگر با استفاده از روش حساب همنهشتی که در این فصل آورده‌ایم، به ازای هر n طبیعی، $n-۱$ ماتریس $n \times n$ تولید کنیم آنگاه L_k مربع لاتین است اگر و فقط اگر $(k,n) = ۱$ همچنین نشان دهید L_k و $L_{k'}$ متعامدند اگر و فقط اگر n نسبت به هر یک از اعداد k و k' و $k - k'$ اول باشد. (ر)

ج) عملگرهای $\cdot$ و $\oplus$ را بر روی اعداد $\{۰, ۱, ۲, ۳\}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$\cdot$	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳
۲	۰	۲	۳	۱
۳	۰	۳	۱	۲

$\oplus$	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۱	۲	۳
۱	۱	۰	۳	۲
۲	۲	۳	۰	۱
۳	۳	۲	۱	۰

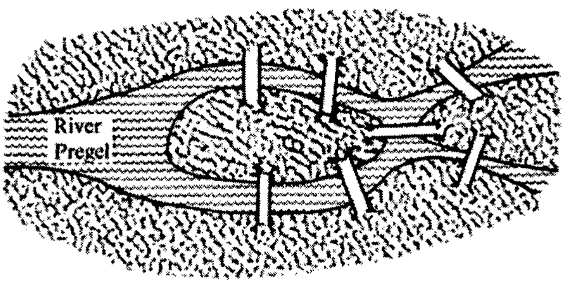
این عملگرها را به کار برده و سه مربع لاتین دو بد دو متعامد ۴ × ۴ تولید کنید. (ج)

۷) نشان دهید صفحهٔ تصویری متناهی مرتبهٔ n شامل $n^۲ + n + ۱$ خط متمایز و $n^۲ + n + ۱$ نقطه می‌باشد. (ر)

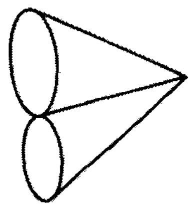
۶

اولین قضیهٔ نظریه گرافها

در قرن هجدهم ساکنان شهر «کونیگسبرگ» ازکشور شوروی (اکنون این شهر در روسیه قرار دارد و نام آن کالنینگراد می‌باشد) همواره با یک مسألهٔ معروف روبرو بودند که چگونه می‌توانند در شهر خود حرکت کنند بطوری که از هر پل دقیقاً یک بار عبور کنند.



کونیگسبرگ



نمایش گرافی شهر

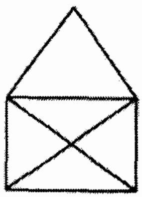
با نشان دادن هر پل بوسیلهٔ یک خط و هر ناحیه از شهر بوسیلهٔ یک نقطه می‌توان فهمید مسأله گفته شده هم‌ارز است با این مسأله: «شکل سمت راست بالا را بدون برداشتن قلم از روی صفحه و یا دو بار طی کردن یک خط رسم کنید». طبق آنچه در بحث «همخوانی» فصل ۴ بیان شد، مسألهٔ بالا در صورتی ممکن است که حداکثر دو نقطه وجود داشته باشند که فرد خط اطراف آنها باشد. حال چون در شکل مورد نظر چهار نقطه با فرد اطراف آن وجود دارد، بنابراین، این کار ممکن نیست.

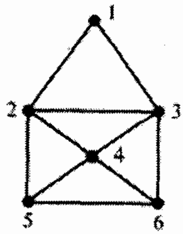
این نتیجه در سال ۱۷۳۶، در مقاله‌ای که توسط «ویلیام اویلر» ارائه شد، بیان شده بود. مقالهٔ او را می‌توانید در کتاب «نظریهٔ گراف‌ها ۱۹۳۶ـ۱۷۳۶» بیابید. تاریخ‌هایی که در عنوان کتاب وجود دارند، به این واقعیت اشاره می‌کنند که مقالهٔ اویلر اولین قدم در شکل‌گیری شاخه‌ای از علم

بود که امروزه نظریه گراف نامیده می‌شود. در این فصل قصد داریم تا به بررسی نتیجه‌ای که توسط اویلر بیان شده بود و سایر نتایج مرتبط با آن بپردازیم.

اولین کاری که می‌خواهیم انجام دهیم، مانند مسأله کونیگسبرگ، بررسی گرافهایی است که در آنها مسیری شامل همهٔ یالها وجود داشته باشد.

مثال: آیا می‌توانید شکل سمت چپ را بدون اینکه قلم را از روی کاغذ بردارید یا از روی خطی دو بار عبور کنید، رسم کنید؟ به عبارت دیگر آیا می‌توان مسیری در گراف سمت راست پیدا کرد که شامل همهٔ یالها باشد؟





راه حل: به راحتی می‌توانیم شکل سمت چپ را همانطورکه خواسته شده رسم کنیم و یا مسیر مورد نظر را در شکل سمت راست پیدا کنیم. به عنوان مثال مسیر ۶, ۳, ۴, ۶, ۵, ۴, ۲, ۳, ۱, ۲, ۵ تمام یالهای گراف را می‌پوشاند. □

با توجه به آنچه که در مورد نقاط برخورد با درجهٔ فرد بیان کرده بودیم می‌توانیم بفهمیم که در یک گراف که بیش از دو رأس با درجهٔ فرد دارد، یک مسیر که شامل همهٔ یالها شود وجود ندارد. همچنین گرافی که اینگونه مسیری دارد، باید همبند باشد. امّا ما نمی‌توانیم با توجه به این گفته‌ها نتیجه بگیریم که هرگراف همبند با ۲ یا کمتر از ۲ رأس با درجهٔ فرد شامل یک مسیر با همهٔ یالهای گراف است. اگر چه اویلر در سال ۱۷۳۶ در مقالهٔ خود تلویحاً اشاره کرده بود که این نتیجه درست است. امّا این نتیجه یک قرن بعد اثبات شد. به هر حال این مسأله به عنوان «قضیهٔ اویلر» و یا «اولین قضیه از نظریه گرافها» شناخته شده است. ما این قضیه را ابتدا با بررسی مسیرهایی که نقطهٔ ابتدا و انتهای آنها یکی است توضیح می‌دهیم. اینگونه مسیرها را «مسیر بسته[1]» می‌نامند. مسیر بسته‌ای که شامل همهٔ یالهای گراف باشد یک «مسیر اویلری» نامیده می‌شود و گرافی را که

۱) فرق مسیر بسته با دور این است که دور شامل رأس تکراری نمی‌شود ولی مسیر بسته می‌تواند رأس تکراری داشته باشد.

شامل یک مسیر اویلری باشد «گراف اویلری» می‌نامند.

قضیه: (اویلر-هایرهولتزر[1]): گراف همبند G را در نظر بگیرید. در آن صورت سه خاصیت زیر در مورد گراف G هم‌ارزند:

الف) درجهٔ تمام رئوس G زوج باشد.

ب) G متشکل از چند دور باشد بطوری که هر یال دقیقاً در یک دور ظاهر شده باشد.

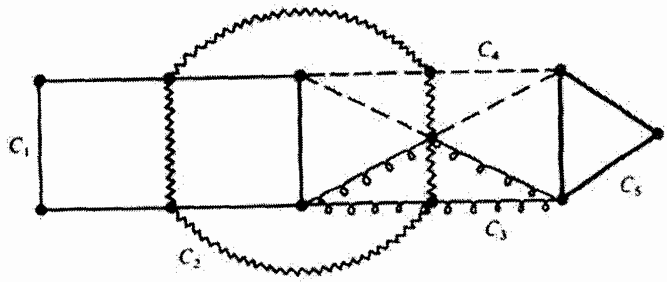
ج) G یک گراف اویلری باشد.

اثبات: (الف $\Longleftrightarrow$ ب): در تمرین ۳ از فصل دوم دیدیم که از شرط «الف» می‌توان شرط «ب» را (حتی برای گرافهای ناهمبند) نتیجه گرفت. زیرا با توجه به اینکه درجهٔ هر رأسی زوج است بنابراین گراف نمی‌تواند شامل رأس با درجهٔ یک باشد. در نتیجه هر مؤلفهٔ همبندی از گراف شامل حداقل یک دور است (زیرا با توجه به اینکه رأس درجهٔ یک ندارد درخت نیست). با حذف هر دور باز هم شرط «الف» برقرار است. با ادامه دادن همین روند به گراف بدون یالی می‌رسیم. در نتیجه یالهای گراف را به تعدادی دور افراز کرده‌ایم. این نتیجه را می‌توانیم با استقرای ریاضی نیز به طور دقیق‌تر بیان کنیم.

نتیجه گرفتن شرط «الف» از شرط «ب» نیز کاملاً ساده و بدیهی است. زیرا اگر یک رأس در r دور ظاهر شود، درجهٔ آن برابر $2r$ خواهد بود که عددی زوج است.

(ب $\Longrightarrow$ ج): به طور شهودی می‌توان فهمید که اگر G همبند باشد و از چند دور یال مجزا تشکیل شده باشد، آنگاه این دورها می‌توانند تشکیل یک مسیر اویلری بدهند. برای این کار از استقراء استفاده می‌کنیم. فرض کنید شرط «ب» برقرار باشد و گراف از r دور یال مجزا تشکیل شده باشد. حال می‌خواهیم با استقراء روی r نتیجه بگیریم که گراف شامل یک مسیر اویلری می‌باشد. حالت پایهٔ $r = 0$ بدیهی است. زیرا با توجه به اینکه گراف شامل هیچ دوری نمی‌باشد در نتیجه باید تنها از یک رأس تشکیل شده باشد. بنابراین خود این یک رأس یک مسیر بسته می‌باشد که شامل همهٔ یالها است. حال فرض کنید $r > 0$ و حکم مسأله برای گرافهای با کمتر از r دور برقرار باشد. چون گراف همبند است می‌توانیم یالهای گراف را به مجموعه‌های $C_1, C_2, \ldots, C_r$ افراز کنیم بطوری که به ازای هر i، گرافی که شامل یالهای $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_i$ با مجموعهٔ رئوسی باشد که انتهای این یالها باشند، همبند باشد.

1) Euler Hierholzer



در این حالت در گرافی با مجموعه یالهای $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_{r-1}$ درجهٔ تمام رئوس زوج است. در نتیجه طبق فرض استقراء گراف شامل یک مسیر اویلری است. حال از یک رأس شروع کرده و روی مسیر شروع به حرکت می‌کنیم. چون گراف همبند است در نتیجه در مکانی از مسیر به رأسی برمی‌خوریم که در دور rام قرار دارد. در این قسمت از مسیر می‌توانیم دور rام را طی کرده و به همان رأس برگشته و ادامهٔ مسیر را طی می‌کنیم. پس می‌توان با r دور نیز مسیری اویلری در گراف پیدا کرد.

(ج $\Leftarrow$ الف): فرض کنید شرط «ج» برقرار باشد و گراف $G = (V, E)$ شامل یک مسیر اویلری $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ باشد. در آن صورت E از n یال زیر تشکیل شده است:

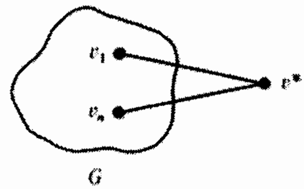
$$E = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_nv_1\}$$

حال واضح است که اگر رأس v در لیست $v_1, v_2, \ldots, v_n$، r بار ظاهر شده باشد، در آن صورت درجهٔ آن در گراف G برابر $2r$ خواهد بود. در نتیجه درجهٔ هر رأس G زوج خواهد بود. یعنی شرط «الف» برقرار است. □

یک مسیر غیر بسته در گراف که شامل همهٔ یالهای گراف باشد را یک مسیر «شبه اویلری» می‌نامند و گرافی که شامل اینگونه مسیری باشد را گراف شبه اویلری می‌نامند. اکنون می‌توانیم قضیهٔ قبل را در مورد گرافهای شبه اویلری تعمیم دهیم:

نتیجه: فرض کنید G یک گراف همبند باشد. در آن صورت G شبه اویلری است اگر و تنها اگر دقیقاً دو رأس درجهٔ فرد داشته باشد.

اثبات: فرض کنید $G = (V, E)$ شامل یک مسیر شبه اویلری $v_1, v_2, \ldots, v_n$ $(v_1 \neq v_n)$ باشد. در آن صورت رأس v^* را به گراف اضافه کرده و گراف $G^* = (V \cup \{v^*\}, E \cup \{v_1v^*, v_nv^*\})$ را ایجاد می‌کنیم.



واضح است که مسیر $v_1, v_2, \ldots, v_n, v^*, v_1$ یک مسیر اویلری در گراف G^* است. بنابراین طبق قضیهٔ قبل درجهٔ هر رأس در گراف G^* زوج است. حال دو یال اضافه شده v_1v^* و v_nv^* و رأس v^* را از گراف حذف می‌کنیم تا به گراف اولیه برسیم. واضح است که در این گراف نیز بجز دو رأس v_1 و v_n درجهٔ همهٔ رئوس زوج است و درجهٔ این دو رأس (به خاطر حذف شدن یک یال مجاور هر کدام) فرد خواهد بود.

برعکس فرض کنید گراف همبند $G = (V, E)$ دقیقاً شامل دو رأس با درجهٔ فرد (مثل v_1 و v_n) است. گراف G^* را مانند قبل، از گراف G می‌سازیم. واضح است که گراف G^* همبند است و درجهٔ تمام رئوس آن زوج است. بنابراین طبق قضیهٔ قبل گراف شامل یک مسیر اویلری می‌باشد. در این چنین مسیری ما می‌توانیم از یک رأس دلخواه شروع کرده و با حرکت روی تمام یالها به رأس اولیه برسیم. به عنوان مثال با شروع از v^* داریم:

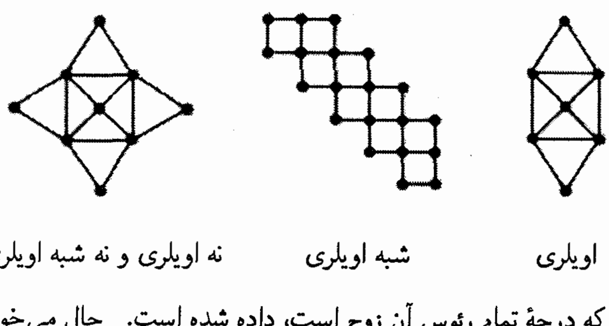
$$v^*, v_1, v_2, \ldots, v_n, v^*$$

بنابراین واضح است که مسیر

$$v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n$$

یک مسیر شبه اویلری در G می‌باشد. □

مثال:

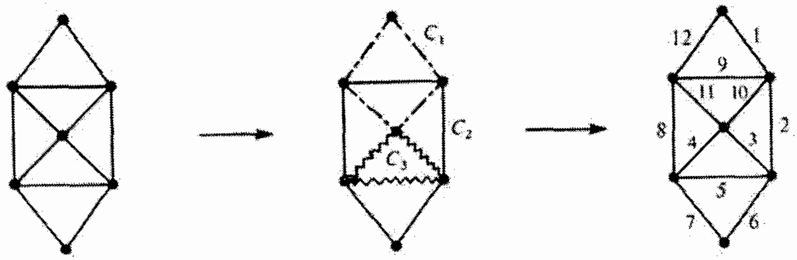


اویلری   شبه اویلری   نه اویلری و نه شبه اویلری □

یک گراف همبند که درجهٔ تمام رئوس آن زوج است، داده شده است. حال می‌خواهیم با استفاده از آنچه در اثبات قضیهٔ قبل بیان شد، یک مسیر اویلری در آن پیدا کنیم. برای این کار باید یک

دور در گراف پیدا کرده و آن را حذف کنیم و در گراف باقیمانده نیز همین کار را انجام دهیم تا جایی که دیگر یالی در گراف باقی نماند. سپس در هر مرحله یک دور حذف شده را به مسیر اویلری که تاکنون پیدا شده اضافه می‌کنیم تا در پایان تمام دورهای حذف شده را به مسیر اضافه کرده باشیم.

مثال:



از C_1 شروع کنید و در هر مرحله یک دور را به مسیر مورد نظر اضافه کنید. □

الگوریتم زیر یک روش مناسب برای پیدا کردن مسیر اویلری در گراف همبند با درجات زوج به ما می‌دهد. بیان این الگوریتم نیاز به تعریف «یال برشی» دارد: یال e از گراف همبند $G = (V, E)$ برشی است اگر و تنها اگر گراف $G = (V, E - \{e\})$ ناهمبند باشد. یال برشی را «پل» نیز می‌نامند.

الگوریتم زیر روشی ارائه می‌دهد که در آن برای پیدا کردن مسیر مورد نظر یالهای گراف یک به یک حذف می‌شوند و در ضمن رأسهایی که درجهٔ آنها صفر شود نیز حذف می‌شوند. تنها محدودیت این الگوریتم این است که در یک مرحله در صورتی یک یال برشی را حذف می‌کنیم که نتوانیم غیر از این عمل کنیم. ترتیب یالهای حذف شده، مسیر اویلری مورد نظر را به ما می‌دهد.

قضیه (الگوریتم فلوری[1]): گراف همبند G داده شده است که درجهٔ تمام رئوس آن زوج است. می‌خواهیم یک مسیر اویلری در آن پیدا کنیم. برای این کار یک دنباله برای مسیر اویلری در نظر می‌گیریم که در ابتدا تهی است. حال:

۱- رأس v_1 را در دنبالهٔ مورد نظر بنویسید و گراف G_1 را همان گراف G تعریف کنید.

۲- فرض کنید رئوس $v_1, v_2, \ldots, v_i$ تاکنون در دنباله قرار گرفته باشند و گراف G_i تعریف شده باشد. اکنون

۲-۱- اگر گراف G_i شامل یالی به صورت v_iv نمی‌باشد، در این مرحله بایستید.

1) Fleury

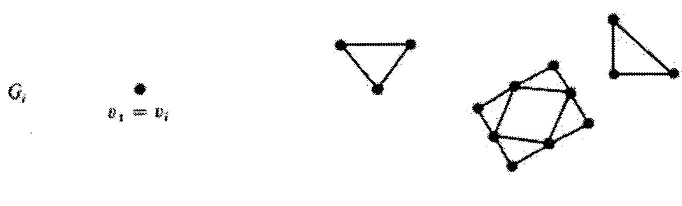
۲ـ۲ـ اگر گراف G_i شامل یال غیر برشی به صورت $v_i v$ می‌باشد، در آن صورت رأس v را به عنوان v_{i+1} در نظر گرفته و به انتهای دنباله اضافه کنید و گراف G_{i+1} را از حذف یال $v_i v_{i+1}$ و حذف رأس v_i (اگر درجهٔ آن با حذف یال $v_i v_{i+1}$ صفر شود) بسازید. سپس به مرحلهٔ ۲ برگردید.

۲ـ۳ـ اگر هر یال موجود $v_i v$ از گراف G_i به صورت یال برشی باشد، در آن صورت یک یال دلخواه $v_i v$ را در نظر گرفته و رأس v را به عنوان v_{i+1} تعریف کنید و در ادامهٔ دنبالهٔ مورد نظر بنویسید. حال گراف G_{i+1} را از حذف یال $v_i v_{i+1}$ و حذف رأس v_{i+1} (در صورتی که با حذف یال گفته شده درجهٔ آن صفر شود) بسازید. سپس به مرحلهٔ ۲ برگردید.

اکنون دنبالهٔ رئوس ایجاد شده، مسیر اویلری مورد نظر است.

اثبات: فرض کنید الگوریتم روی گراف G انجام شده است. در هر مرحله G_i شامل یالهای گراف G بجز $v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{i-1} v_i$ می‌باشد و رئوس $v_1, v_2, \ldots, v_i$ در صورتی که درجهٔ آنها صفر باشد، حذف می‌شوند. حال به راحتی می‌توان دید که در گراف G_i بجز رئوس v_1 و v_i درجهٔ تمام رئوس زوج است و اگر $v_1 \neq v_i$ باشد درجهٔ این دو فرد و در غیر این صورت درجهٔ این دو نیز زوج خواهد بود. علاوه بر این درجهٔ رئوس موجود در گراف G_i مثبت خواهند بود.

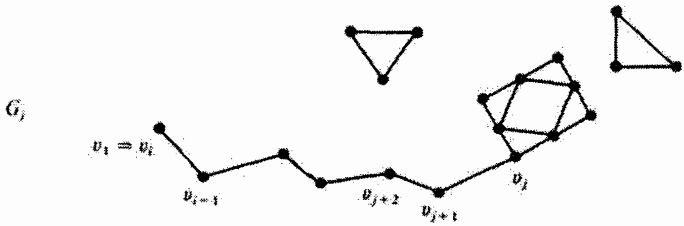
فرض کنید الگوریتم در مرحلهٔ G_i تمام شده است. در این صورت یک مسیر $v_1, \ldots, v_i$ در گراف G پیدا شده است و چون الگوریتم پایان یافته است در نتیجه یال $v_i v$ در گراف G_i موجود نبوده است. یعنی درجهٔ v_i در G_i برابر صفر بوده است و چون این مقدار زوج است بنابراین طبق آنچه گفته شد باید $v_1 = v_i$ باشد. یعنی مسیر مورد نظر یک مسیر بسته است. اگر این مسیر شامل همهٔ یالهای گراف باشد که مسیر اویلری ایجاد شده است. در غیر این صورت، اگر چند یال از G در مسیر موجود نباشد، G_i شامل یک مجموعهٔ غیر تهی از یالها خواهد بود.



درجهٔ همهٔ رئوس زوج می‌باشد.

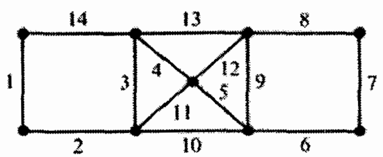
از آنجا که G همبند است، در نتیجه در یکی از مراحل نوشتن رئوس $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ در دنبالهٔ ایجاد شده باید گراف ناهمبند شده باشد. فرض کنید این رأس v_j باشد. در نتیجه گراف G_j

باید بصورت زیر باشد:



امّا در آن صورت چرا باید الگوریتم از G_j به G_{j+1} منجر شود؟ در این مرحله یال برشی $v_j v_{j+1}$ انتخاب شده است. در حالی که انتخاب یک یال غیر برشی نیز ممکن بود. در نتیجه هیچ‌گاه حالتی پیش نمی‌آید که گراف باقیمانده ناهمبند شود. یعنی در پایان همهٔ یالهای گراف در مسیر بستهٔ ایجاد شده وجود دارند. □

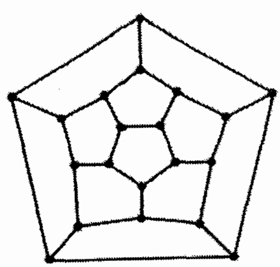
مثال: درگراف شکل زیر یکی از مسیرهای اویلری ممکن که با الگوریتم فلوری ایجاد شده است نمایش داده شده است. دقت کنید که شماره‌های روی یالها ترتیب قرارگرفتن آنها در مسیر می‌باشد.



□

اکنون می‌خواهیم مسأله جدیدی را بررسی کنیم که در آن به جای پیدا کردن یک راه بسته شامل همهٔ یالها، به پیدا کردن یک راه بسته شامل همهٔ رأسها می‌پردازیم.

مثال: رأسهای گراف زیر را با شماره‌های ۱, ۲, ۳, . . . , ۲۰ برچسب گذاری کنید، به طوری که رأس ۱ مجاور ۲ باشد، ۲ مجاور ۳ باشد، . . . ، ۱۹ مجاور ۲۰ باشد و رأس ۲۰ نیز مجاور رأس ۱ باشد.

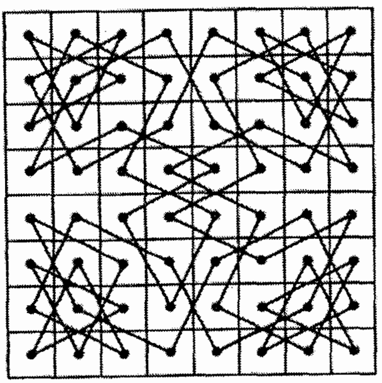


حل این تمرین ساده را به شما واگذار می‌کنیم.

این مسأله همان «بازی بیست وجهی» می‌باشد که در سال ۱۸۵۶ توسط «ویلیام هَمیلتون[1]» طراحی و حل شد. در نظریهٔ گرافها نیز مشابه این تمرین، این است که دوری شامل همهٔ رئوس پیدا کنیم. این گونه دوری را امروزه «دور همیلتونی» می‌نامند و گرافی که شامل دور همیلتونی باشد «گراف همیلتونی» نامیده می‌شود. ما با این نوع گرافها در تمرین ۱۱ از فصل چهار برخورد کرده بودیم که اکنون آن را در قابل مثال زیر بیان می‌کنیم:

مثال: یک مسیر روی صفحهٔ شطرنجی پیدا کنید که یک مهرهٔ اسب بتواند با شروع از یک خانه روی آن مسیر حرکت کرده و از همهٔ خانه‌های صفحه دقیقاً یک بار عبور کند و به خانهٔ اولیه برگردد.

راه حل: اگر هر کدام از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی را به عنوان یک رأس گراف در نظر گرفته و دو رأس را مجاور بگیریم اگر اسب بتواند از یکی از آن خانه‌ها به خانهٔ دیگر حرکت کند، در آن صورت پیدا کردن مسیر اسب معادل پیدا کردن یک دور همیلتونی در گراف ایجاد شده می‌باشد. یکی از مسیرهای موجود برای حرکت اسب در شکل زیر نمایش داده شده است.



□

در مورد گرافهای اویلری ما توانستیم یک شرط لازم و کافی برای پیدا کردن مسیر اویلری پیدا کنیم. امّا در مورد گرافهای همیلتونی این گونه شرطی وجود ندارد. امّا شرطهای لازم یا کافی مختلفی در مورد وجود یک دور همیلتونی در گراف وجود دارد. در زیر یکی از شرطهای کافی همیلتونی بودن یک گراف را بررسی می‌کنیم.

قضیه: فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی با $|V| \geqslant 3$ باشد بطوری که برای هر دو رأس غیر مجاور u و v از آن داشته باشیم:

1) William Rowan Hamilton

$$d(u) + d(v) \geqslant |V|$$

در آن صورت گراف G همیلتونی خواهد بود.

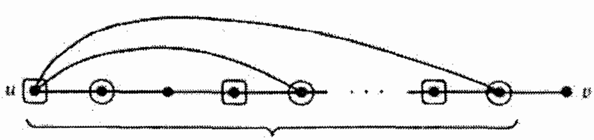
اثبات: فرض کنید گرافی با n رأس وجود داشته باشد که قضیه در مورد آن صادق نباشد. در نتیجه این گراف باید دو شرط زیر را توأماً داشته باشد:

گراف دور همیلتونی ندارد	و	برای هر جفت از رئوس غیر مجاور: $d(u) + d(v) \geqslant n$

تا آنجا که می‌توانیم یالهایی به گراف اضافه می‌کنیم که در گراف دور همیلتونی ایجاد نشود. (یعنی هر یال دیگری اضافه کنیم، گراف همیلتونی شود.) در آن صورت، بزرگترین گرافی با n رأس را داریم که هر دو شرط بالا را دارد. واضح است که گراف کامل نیست. (زیرا گراف کامل با $n \geqslant ۳$ رأس همیلتونی می‌باشد.) در نتیجه گراف شامل دو رأس u و v می‌باشد که با هم مجاور نیستند. از آنجا که با اضافه کردن هر یال دیگری گراف باید همیلتونی شود، در نتیجه با اضافه کردن یال uv نیز باید دور همیلتونی ایجاد شود. یعنی می‌توان گفت اکنون یک مسیر از u به v وجود دارد که از هر n رأس گراف دقیقاً یک بار می‌گذرد.

مسیر شامل تمام رئوس است

دور تمام $d(u)$ رأس مجاور رأس u یک دایره رسم می‌کنیم و دور تمام رأسهایی که در مسیر یک یال عقب‌تر از این $d(u)$ رأس هستند یک مربع رسم می‌کنیم.



$d(u)$ رأس هستند که دور آنها دایره کشیده شده است.

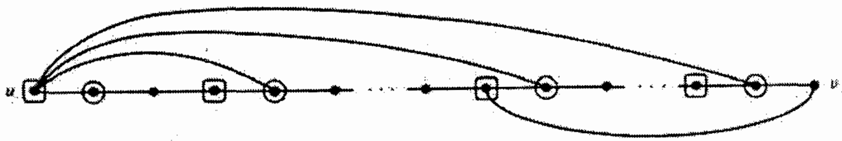
$\therefore$ $d(u)$ رأس هستند که دور آنها مربع کشیده شده است.

$\therefore$ $n - d(u) - ۱$ رأس هستند که دور آنها مربع کشیده نشده است.

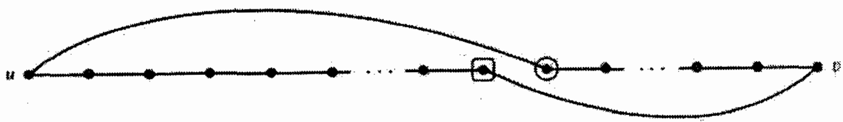
چه تعداد از این $n-1$ رأس با رأس v مجاور هستند؟

$$\text{تعداد رأسهای مجاور رأس } v = d(v) \geqslant n - d(u) > \text{تعداد رأسهایی که دور آنها مربع است.}$$

در نتیجه باید یکی از رأسهایی که دور آن مربع کشیده شده است با رأس v مجاور باشد.



امّا در این صورت گراف G شامل دور همیلتونی زیر خواهد بود که با انتخاب G متناقض است.



اینِ تناقض بیانگر درستی قضیه می‌باشد. □

«تمارین»

۱) الف) برای چه nهایی گراف کامل n رأسی (K_n) اویلری و برای چه n هایی شبه اویلری است؟ (ج)

ب) برای چه m و nهایی گراف کامل دو بخشی $K_{m,n}$ اویلری و برای چه m و nهایی شبه اویلری است؟ (ج)

ج) برای چه nهایی K_n همیلتونی است؟ (ج)

د) برای چه m و nهایی $K_{m,n}$ همیلتونی است؟ (ج)

۲) یک صفحهٔ شطرنجی $n \times n$ در نظر بگیرید. برای چه nهایی می‌توان یک مسیر پیدا کرد که در آن یک مهرهٔ اسب بتواند تمام حرکتهای ممکن در جهت‌های مختلف را انجام دهد؟ (ج)

۳) گراف همبند G با $k > 0$ رأس با درجهٔ فرد موجود است نشان دهید $\frac{1}{2}k$ مسیر یال مجزا در گراف بین این k رأس وجود دارد که تمام یالهای گراف را می‌پوشانند. (دو سر مسیرها همین k رأس می‌باشند.) □

۴) مکمل گرافِ $G = (V, E)$، گرافی است به صورت $\bar{G} = (V, \bar{E})$ که در آن

$$E = \{uv : u, v \in V, u \neq v \ , \ uv \notin E\}$$

(گراف $\bar{G}$ شامل یالهایی است که در G وجود ندارند.) تمام گرافهایی را بیابید که هم خود و هم مکمل آنها اویلری باشند. (ج)

۵) گراف G با $2d + 1$ رأس موجود است که درجهٔ هر رأس آن d می‌باشد. نشان دهید این گراف اویلری است. (ر)

(در ضمن سعی کنید نشان دهید اگر $d > 0$ باشد آنگاه گراف G همیلتونی نیز هست)

۶) گراف $G = (V, E)$ با $|V| \geqslant 3$ را در نظر بگیرید. نشان دهید اگر برای هر رأس v از گراف $d(v) \geqslant \frac{1}{2}|V|$ باشد آنگاه G یک گراف همیلتونی است.

۷) گراف $G = (V, E)$ را با $|V| \geqslant 4$ در نظر بگیرید. نشان دهید اگر در این گراف برای هر سه رأس u و v و w حداقل دو تا از سه یال uv و vw و uw موجود باشند، آنگاه این گراف همیلتونی است.

۸) در میان $2n$ همکلاسی، هر دانش‌آموز حداقل با n دانش‌آموز دیگر دوست است. در یک گردش تفریحی که دانش‌آموزان همراه با معلمشان رفته بودند، معلم از آنها خواست

که هر کس دست یک نفر دیگر را بگیرد. ثابت کنید اگر هر کس بخواهد دست یکی از دوستان خود را بگیرد، در آن صورت حداقل به دو راه مختلف هر دانش‌آموز می‌تواند دست یکی از دوستان خود را بگیرد. $(n > ۱)$

۹) نشان دهید اگر گراف G با n رأس شامل بیش از $\frac{۱}{۲}(n^۲ - ۳n + ۴)$ یال باشد، آنگاه G یک گراف همیلتونی است. همچنین نشان دهید اگر فرض مسأله را این گونه تغییر دهیم که « G حداقل شامل $\frac{۱}{۲}(n^۲ - ۳n + ۴)$ یال باشد» در آن صورت حکم مسأله برای هیچ یک از مقادیر $n > ۱$ برقرار نیست. (ر)

۱۰) گراف $G = (V, E)$ را «شبه همیلتونی» می‌نامیم اگر G شامل یک مسیر باشد که هر رأس از V دقیقاً یک بار در آن ظاهر شده باشد. نشان دهید اگر برای هر دو رأس غیر مجاور u و v از G داشته باشیم $d(u) + d(v) \geqslant |V| - ۱$ در آن صورت گراف G یک گراف شبه همیلتونی است. (البته ممکن است همیلتونی نیز باشد.) (ر)

۱۱) اگر $G = (V, E)$ یک گراف باشد و $v_۱, v_۲, \ldots, v_r$ تعدادی از رئوس گراف G (نه همهٔ آنها) باشد، در آن صورت $G - \{v_۱, v_۲, \ldots, v_r\}$ بیانگر گرافی است که از حذف رئوس $v_۱, v_۲, \ldots, v_r$ و یالهای مجاور آنها از گراف G حاصل می‌شود.

الف) نشان دهید در صورتی که $|V| \geqslant ۳$، اگر G تنها از یک دور تشکیل شده باشد و یا G یک گراف کامل باشد، در آن صورت $G - \{u\}$ به ازای هر $u \in V$ یک گراف همبند خواهد بود ولی $G - \{u, v\}$ به ازای $u, v \in V$ که $uv \notin E$ یک گراف غیر همبند خواهد بود.

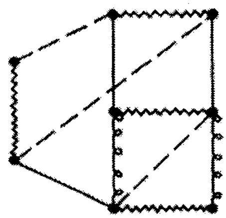
ب) حال نشان دهید در صورتی که $|V| \geqslant ۳$ و $G - \{u\}$ به ازای هر $u \in V$ همبند باشد و $G - \{u, v\}$ به ازای هر $u, v \in V$ که $uv \notin E$ غیر همبند باشد، در آن صورت G یا تنها از یک دور تشکیل شده است و یا یک گراف کامل است. (در حالت کلی‌تر این مسأله ـ که در فصل ۱۱ بیان شده است ـ تنها به این شرایط نیاز داریم که $G - \{u\}$ همواره همبند باشد و $G - \{u, v\}$ برای هر $u, v \in V$ که $uv \notin E$ ناهمبند است با این شرط که رأسی مثل w وجود داشته باشد بطوری که $uw, wv \in E$) (ر)

۷

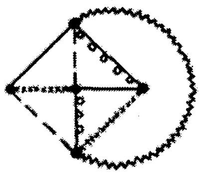
رنگ‌آمیزی یالی

یک گراف داده شده است و ما می‌خواهیم یالهای آن را با چند رنگ طوری رنگ‌آمیزی کنیم که هر یالی دقیقاً به یک رنگ در آمده و هیچ دو یالی که یک سر مشترک دارند همرنگ نباشند (این کار را اصطلاحاً «رنگ‌آمیزی یالی گراف» می‌نامند.) برای هر گرافی حداقل چند رنگ برای رنگ‌آمیزی یالی لازم است؟

مثال:



یک رنگ‌آمیزی یالی با
چهار رنگ



یک رنگ‌آمیزی یالی با
پنج رنگ

در مثال بالا بیشترین درجهٔ رئوس هر گراف برابر ۴ است و بنابراین با کمتر از ۴ رنگ نمی‌توان یالهای گراف را رنگ کرد. در گراف سمت چپ چهار رنگ کافی بود، در حالیکه در گراف سمت راست به رنگ پنجم نیز نیاز داشتیم. □

برای گراف G حداقل تعداد رنگهای لازم برای رنگ‌آمیزی یالی آن را «عدد رنگی یالی» می‌نامند و با $\chi'(G)$[1] نمایش می‌دهند واضح است که اگر بزرگترین درجهٔ گراف G برابر d باشد آنگاه $\chi'(G) \geqslant d$ و برای بعضی از گرافها (مانند گراف سمت چپ مثال قبل) d رنگ برای

۱) χ یکی از حروف یونانی است که تلفظ آن «خی» می‌باشد.

رنگ‌آمیزی کافی است و داریم: $\chi'(G) = d$. اولین قضیهٔ این فصل یک دسته از گرافها را که در آنها $\chi'(G) > d$ می‌باشد معرفی می‌کند.

قضیه: فرض کنید G یک گراف با فرد رأس باشد و درجهٔ همهٔ رئوس آن برابر d $(d > ۰)$ باشد. در آن صورت یالهای آن را نمی‌توان با d رنگ، رنگ‌آمیزی کرد.

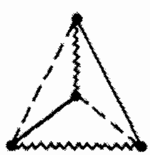
اثبات: فرض کنید G یک گراف n رأسی باشد که n عددی فرد است، و در ضمن درجهٔ همهٔ رئوس برابر d می‌باشد. در آن صورت در یک رنگ‌آمیزی یالی از G، هیچ رنگی بیش از یک بار در یالهای مجاور یک رأس ظاهر نمی‌شود. بنابراین از هر رنگی حداکثر $\frac{۱}{۲}n$ یال وجود دارد. ولی چون n عددی فرد است، در نتیجه حداکثر $\frac{۱}{۲}(n - ۱)$ یال از هر رنگ در گراف وجود دارد.

در ضمن از آنجا که درجهٔ هر رأس d است بنابراین در کل $\frac{۱}{۲}nd$ یال در گراف وجود دارد. در نتیجه تعداد رنگ‌های لازم حداقل برابر است با:

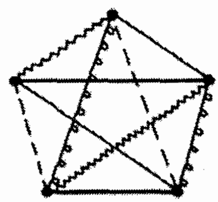
$$\frac{\frac{۱}{۲}dn}{\frac{۱}{۲}(n - ۱)} = d\frac{n}{n - ۱} > d$$

و بنابراین بیش از d رنگ برای رنگ‌آمیزی یالی گراف لازم است. □

مثال:



$\chi'(K_۴) = ۳$



$\chi'(K_۵) = ۵$

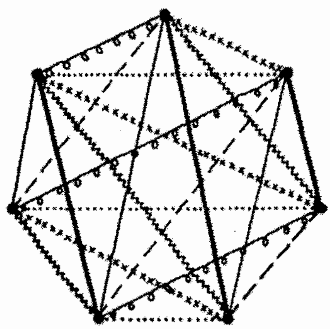
□

قضیه: عدد رنگی یالی گراف کامل K_n برابر است با:

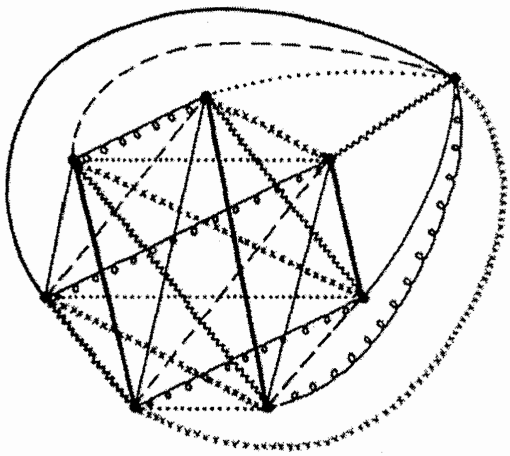
$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n - ۱ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ n & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

اثبات: هر رأس از K_n از درجهٔ $n - ۱$ می‌باشد و با توجه به قضیهٔ قبل واضح است که اگر n فرد باشد آنگاه بیش از $n - ۱$ رنگ برای رنگ‌آمیزی یالی لازم است.

حال قصد داریم نشان دهیم که در این حالت $\chi'(K_n) = n$ و روشی برای رنگ‌آمیزی یالها با n رنگ ارائه کنیم. n رأس گراف را به عنوان n رأس یک n ضلعی منتظم در نظر بگیرید و یالهای گراف را بوسیلهٔ خطوط راستی نمایش دهید. حال دو یال را با رنگ یکسان رنگ‌آمیزی کنید اگر و تنها اگر این دو یال موازی یکدیگر باشند (این کار برای حالت $n = ۵$ در گراف سمت راست مثال قبل و برای حالت $n = ۷$ در گراف سمت چپ شکل زیر نمایش داده شده است. با کمی تأمل می‌توان فهمید که در یک n ضلعی منتظم (که n فرد است) با در نظر گرفتن قطرها دقیقاً n جهت مختلف وجود دارد. در نتیجه همهٔ یالها را می‌توان با n رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. در ضمن از آنجا که گراف $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ یال دارد و رنگ‌آمیزی ما نسبت به رنگ‌ها کاملاً متقارن است، در نتیجه از هر رنگ دقیقاً برای رنگ‌آمیزی $\frac{۱}{۲}(n-۱)$ یال استفاده شده است.



$K_۷$



$K_۸$

حال فرض کنید که n عددی زوج است. با توجه به آنچه گفته شد می‌توان $K_{n-۱}$ را با $n-۱$ رنگ، رنگ‌آمیزی یالی کرد. در ضمن چون درجهٔ هر رأس از $K_{n-۱}$ برابر $n-۲$ است در نتیجه برای هر رأسی، رنگی وجود دارد که یالی به آن رنگ مجاور رأس گفته شده نباشد. ضمناً از آنجا که رنگ‌آمیزی طبق روشی که گفته شد، نسبت به رنگ‌ها متقارن است، در نتیجه هر رنگی دقیقاً در یالهای مجاور یک رأس ظاهر نشده است.

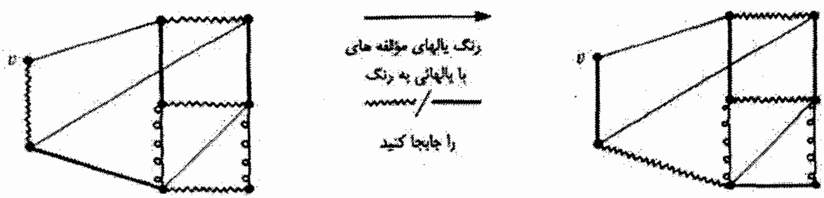
حال رأس nاُم را به گراف $(K_{n-۱})$ اضافه می‌کنیم و یال بین این رأس و هر رأس دیگر را به رنگی در می‌آوریم که هیچ یالی به رنگ آن، مجاور رأس گفته شده نباشد. (همانطور که گفته شد دقیقاً یک رنگ برای این کار وجود دارد). در نتیجه توانستیم رنگ‌آمیزی یال‌های K_n برای nهای زوج را با $n-۱$ رنگ انجام دهیم. برای حالت $n = ۸$ این کار در گراف سمت راست

شکل‌های قبل نمایش داده شده است. □

بنابراین گراف کامل زوج رأسی دارای این خاصیت است که عدد رنگی یالی آن برابر با بزرگترین درجهٔ گراف می‌باشد. این خاصیت در مورد گرافهای دو بخشی نیز صادق است. قبل از بیان این قضیه لازم است که چند نکته را بیان کنیم:

اگر یک رنگ‌آمیزی یالی ازگراف $G = (V, E)$ داده شده باشد و زیرگرافی از آن را در نظر بگیریم که مجموعهٔ رئوس آن V و مجموعه یالهای آن، یالهای به دو رنگ c و c' از G باشند، در آن صورت درجهٔ رئوس این زیرگراف باید برابر ۰، ۱ و یا ۲ باشند. در نتیجه مؤلفه‌های همبندی این گراف باید یا یک رأس تنها باشند، یا یک دور باشند و یا یک مسیر بدون رأس تکراری. در ضمن واضح است که یالهای یک دور یا مسیر نیز یک در میان به رنگ c و c' می‌باشند. با کمی تأمل می‌توان فهمید که می‌توان رنگ یالهای هر مسیر یا دور در این زیرگراف را جابجا کرد. (یعنی رنگ c را به c' و رنگ c' را به c تبدیل کرد.) ما این کار را در مثال زیر انجام داده‌ایم.

مثال:



□

قضیه (کونیگ[1]): گراف دو بخشی $G = (V_1, E, V_2)$ را در نظر بگیرید که بزرگترین درجهٔ آن برابر d می‌باشد. در آن صورت $\chi'(G) = d$.

اثبات: این قضیه را به کمک استقراء روی $|E|$ اثبات می‌کنیم. حالت پایهٔ $|E| = 0$ بدیهی است. حال فرض کنید گراف $G = (V_1, E, V_2)$ با $|E| > 0$ یال با بزرگترین درجهٔ d داده شده است و نتیجهٔ قضیه برای گرافهای دو بخشی با تعداد یالهای کمتر از $|E|$ برقرار است. حال یال vw را از گراف G حذف کنید و به گراف دو بخشی G' برسید. اکنون بزرگترین درجهٔ گراف G' برابر d و یا کمتر از آن می‌باشد. بنابراین طبق فرض استقراء، می‌توان این گراف را با d رنگ رنگ‌آمیزی یالی کرد.

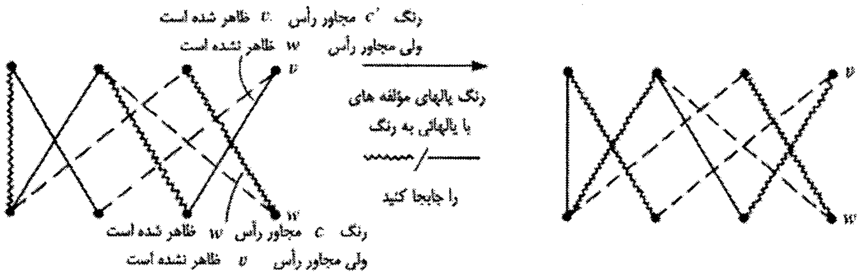
حال در گراف G' درجهٔ دو رأس v و w حداکثر $d - 1$ می‌باشد. (زیرا قبل از حذف یال vw بزرگترین درجهٔ گراف برابر d بود.) و چون یالهای گراف G' با d رنگ، رنگ‌آمیزی شده‌اند، در

1) König

نتیجه برای هر کدام از این دو رأس رنگی وجود دارد که در هیچ کدام از یالهای مجاور آنها ظاهر نشده باشد. اگر رنگی وجود داشته باشد که یالی به آن رنگ مجاور هیچ‌کدام از دو رأس v و w نباشد، در آن صورت یال vw را به آن رنگ در می‌آوریم. در غیر این صورت فرض کنید که یالی به رنگ c مجاور w است و مجاور v نیست و به همین ترتیب یالی به رنگ c' مجاور v است و مجاور w نیست.

حال زیرگرافی از G' را در نظر بگیرید که مجموعه رأسهای آن V است و یالهای آن یالهایی از G' هستند که به دو رنگ c و c' در آمده‌اند. طبق آنچه قبل از این گفته شد، این زیرگراف مجموعه‌ای از رأسهای تنها، دورها و مسیرهای بدون رأس تکراری می‌باشد. واضح است که دو رأس v و w هر دو ابتدای مسیری از این زیرگراف می‌باشند. ادعا می‌کنیم که این دو رأس نمی‌توانند ابتدا و انتهای یک مسیر باشند. زیرا در آن صورت چون رأس اول آن در بخش V_1 و رأس آخر آن در بخش V_2 می‌باشد، پس باید مسیر از فرد یال تشکیل شده باشد. به همین دلیل یال اول و آخر آن باید همرنگ باشند که این طور نیست.

در نتیجه ما می‌توانیم مسیری که یکی از این دو رأس (مثلاً v) ابتدای آن است را انتخاب کرده و رنگ یالهای آن را (همانطور که قبل از بیان قضیه گفته شد) عوض کنیم. مانند نمونهٔ زیر:



به این ترتیب اکنون رنگ c' در یالهای مجاور هیچ یک از دو رأس v و w ظاهر نشده است. بنابراین می‌توانیم یال vw را به این رنگ در آوریم. در نتیجه به یک رنگ‌آمیزی یالی گراف G با d رنگ دست یافته‌ایم. □

دیدید که در بعضی از گرافها (مانند گرافهای دو بخشی و گرافهای کامل با زوج رأس) عدد رنگی یالی برابر با بزرگترین درجهٔ گراف (d) بود. در ضمن گرافهایی را دیدید که d رنگ برای رنگ‌آمیزی یالی آنها کافی نبود. حال مسأله‌ای که می‌خواهیم بررسی کنیم این است: در کل حداکثر چه تعداد رنگ برای رنگ‌آمیزی یالی یک گراف لازم است؟

«هر گرافی با بزرگترین درجهٔ d حداکثر با $d+1$ رنگ قابل رنگ‌آمیزی یالی است.» این نتیجهٔ زیبا توسط فردی روسی به نام «ویزینگ[1]» در سال ۱۹۶۴ بدست آمد. برای بیان این

1) V. G. Vizing

نتیجه و اثبات آن ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم:

لم: گراف $G = (V, E)$ را با بزرگترین درجهٔ d در نظر بگیرید و $e_1, e_2, \ldots, e_r$ را یالهایی از G فرض کنید که همگی دارای رأس مشترک v می‌باشند. فرض کنید گراف $G' = (V, E - \{e_1, e_2, \ldots, e_r\})$ قابل رنگ‌آمیزی یالی با D رنگ $(D \geqslant d)$ می‌باشد بطوری که حداقل یک رنگ در یالهای مجاور هیچ کدام از دو سر یال e_1 ظاهر نشود، حداقل دو رنگ در یالهای مجاور هیچ کدام از دو سر یال e_2 ظاهر نشود، حداقل دو رنگ در یالهای مجاور هیچکدام از دو سر یال e_3 ظاهر نشود و ... و حداقل دو رنگ در یالهای مجاور هیچکدام از دو سر یال e_r ظاهر نشود. در آن صورت گراف G قابل رنگ‌آمیزی یالی با D رنگ می‌باشد.

اثبات: این لم را به کمک استقراء روی r ثابت می‌کنیم. حالت $r = 1$ بدیهی است. زیرا در آن صورت اگر گراف G' با D رنگ، رنگ‌آمیزی یالی شده باشد، رنگی وجود دارد که در یالهای مجاور هیچکدام از دو سر یال e_1 ظاهر نشده است. بنابراین می‌توان یال e_1 را به آن رنگ درآورد.

حال فرض کنید $r > 1$ و مسأله برای مقادیر کمتر از r درست است. در ضمن رنگ‌آمیزی یالی G' با D رنگ نیز داده شده است. حال باید یکی از این r یال را با یکی از این D رنگ طوری رنگ‌آمیزی کنیم که شرایط مسأله دوباره برای $r - 1$ یال باقیمانده برقرار شود. برای راحتی کار مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$C_1 =$ {رنگی که در یالهای مجاور هیچیک از دو سر یال e_1 ظاهر نشده است}

$C_2 =$ {دو رنگی که در یالهای مجاور هیچیک از دو سر یال e_2 ظاهر نشده‌اند}

$C_3 =$ {دو رنگی که در یالهای مجاور هیچیک از دو سر یال e_3 ظاهر نشده‌اند}

$\vdots$

$C_r =$ {دو رنگی که در یالهای مجاور هیچیک از دو سر یال e_r ظاهر نشده‌اند}

اگر رنگی وجود داشته باشد که فقط عضو یکی از این مجموعه‌ها (مثل C_i) باشد، در آن صورت می‌توانیم یال e_i را به آن رنگ درآورده و مجموعهٔ C_i را حذف کنیم. (اگر این رنگ در C_1 باشد در آن صورت مجموعهٔ C_1 را حذف می‌کنیم و یال e_1 را به آن رنگ در می‌آوریم. سپس برای اینکه یکی از مجموعه‌ها یک عضوی باشد، بدون اینکه لطمه‌ای به شرایط مسأله بخورد، یک عضو از یکی از مجموعه‌ها را حذف می‌کنیم.) بدین ترتیب طبق فرض استقراء توانسته‌ایم رنگ‌آمیزی یالی گراف G را با D رنگ انجام دهیم.

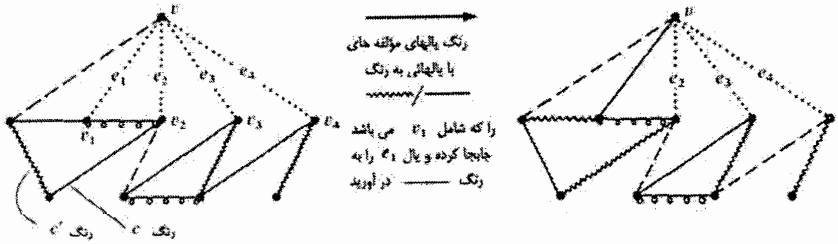
امّا اگر هیچ رنگی نباشد که فقط در یکی از C_iها ظاهر شده باشد، در آن صورت چه باید

بکنیم؟ در این حالت واضح است که هر رنگی باید حداقل در ۲ تا از C_iها ظاهر شده باشد و بنابراین تعداد رنگهای متمایزی که در همهٔ این مجموعه‌ها ظاهر شده است حداکثر برابر $\frac{1}{2}(2r-1)$ خواهد بود که کمتر از r می‌باشد. در ضمن می‌دانیم که درجهٔ رأس v در G حداکثر برابر با d می‌باشد. بنابراین درجهٔ v در G' حداکثر برابر $d-r$ خواهد بود. به عبارت دیگر حداکثر $d-r$ رنگ در G' مجاور رأس v خواهند بود. بنابراین:

تعداد رنگهای متمایزی که در مجموعه‌های $C_1, C_2, \ldots, C_r$ ظاهر شده‌اند	$> d-(d-r)$	$\geqslant D-(d-r)$	$\geqslant$	تعداد رنگهای متمایزی که در یالهای مجاور v ظاهر نمی‌شوند

بنابراین باید رنگی مثل c وجود داشته باشد که در یالهای مجاور رأس v ظاهر نشده باشد و در ضمن عضو هیچ یک از C_iها نیز نباشد. اگر یالی به رنگ c مجاور هیچیک از دو سر e_1 نباشد، در آن صورت واضح است که می‌توان یال e_1 را به رنگ c درآورد و مسأله را برای $r-1$ یال باقیمانده طبق فرض استقراء حل شده تلقی کرد. در غیر این صورت به روش زیر عمل می‌کنیم:

فرض کنید $C_1 = \{c'\}$ و زیر گرافی از G' را در نظر بگیرید که از یالهایی به رنگ c و c' تشکیل شده است. با فرض اینکه یال e_1 رأس v را به رأس v_1 وصل کند، مؤلفه‌ای از این زیر گراف را در نظر بگیرید که شامل رأس v_1 باشد. حال رنگ یالهای این مؤلفه را با یکدیگر عوض کنید. در این صورت واضح است که یالی به رنگ c مجاور v و v_1 نمی‌باشد. اکنون یال e_1 را به رنگ c در آورید.

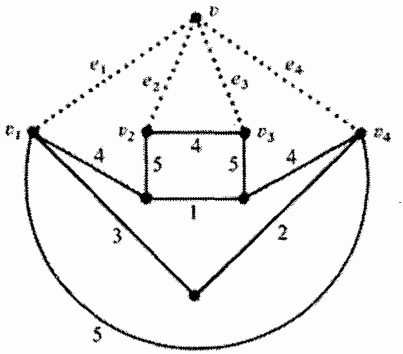


حال مجموعهٔ C_1 را حذف کنید و $r-1$ مجموعهٔ باقیمانده را در نظر بگیرید. تنها مشکلی که ممکن است ایجاد شود این است که امکان دارد انتهای مسیری که رنگ یالهای آن را عوض کرده‌ایم یکی از دو سر یکی از یالهای حذف شده (مثل e_i) باشد و رنگ جدیدی که به یال انتهای مسیر داده‌ایم عضو C_i باشد. در این حالت می‌توانیم این رنگ را از C_i حذف کنیم. (واضح است که چون اکنون فقط یکی از مجموعه‌ها یک عضوی شده است، شرط مسأله برای $r-1$

یال برقرار است). بنابراین در این حالت نیز می‌توان طبق فرض مسأله، رنگ‌آمیزی یالی گراف G را با D رنگ انجام داد. □

مثال: گراف زیر به طور جزئی بوسیلهٔ ۵ رنگ، رنگ‌آمیزی یالی شده است و یالهایی که رنگ نشده‌اند، در شرایط لم قبل صدق می‌کنند. با استفاده از روشی که در اثبات لم بیان کردیم، مابقی یالهای گراف را نیز با این ۵ رنگ، رنگ‌آمیزی کنید.

راه حل:



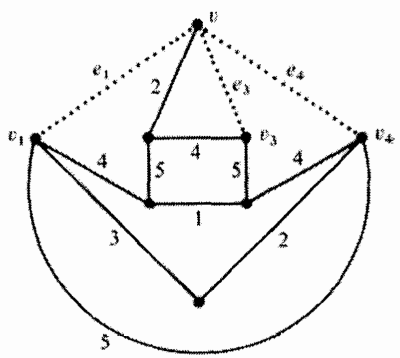
$C_1 = \{1\}$

$C_2 = \{2, 3\}$

$C_3 = \{1, 3\}$

$C_4 = \{1, 3\}$

آیا رنگی وجود دارد که فقط در یکی از مجموعه‌ها ظاهر شده باشد؟ بله. رنگ ۲ فقط عضو مجموعهٔ C_2 می‌باشد. بنابراین می‌توانیم یال e_2 را به رنگ ۲ در آوریم.



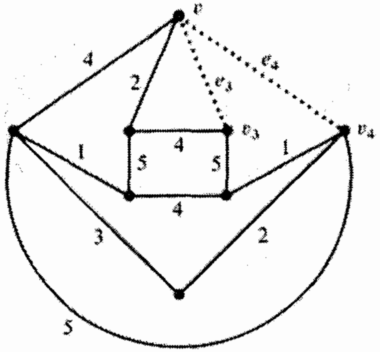
$C_1 = \{1\}$

$C_3 = \{1, 3\}$

$C_4 = \{1, 3\}$

آیا اکنون نیز رنگی وجود دارد که فقط عضو یکی از مجموعه‌ها باشد؟ واضح است که جواب منفی است. بنابراین در این مرحله رنگی را انتخاب می‌کنیم که یالی به آن رنگ مجاور v نباشد و این رنگ عضو C_1 و C_3 و C_4 نباشد. (قبل از این دیدیم که حتماً اینگونه رنگی وجود دارد.) رنگ ۴ این شرایط را دارد. این رنگ و تنها عضو مجموعهٔ C_1 را که رنگ ۱ می‌باشد، انتخاب می‌کنیم و در زیرگراف شامل یالهای c و c'، مؤلفه‌ای را که شامل رأس v_1 است انتخاب کرده و

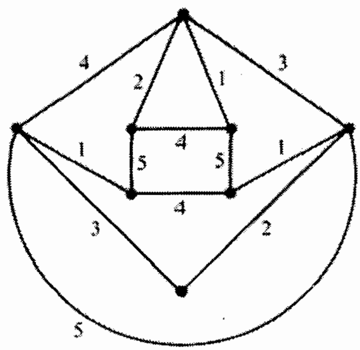
رنگ یالهای آن را (همانطور که قبلاً گفته شده بود) عوض می‌کنیم. امّا بعد از این کار رنگ ۱ در یالهای مجاور رأس $v_{۴}$ ظاهر می‌شود. بنابراین رنگ ۱ را از مجموعهٔ $C_{۴}$ حذف می‌کنیم:



$C_{۴} = \{۳\}$

$C_{۳} = \{۱, ۳\}$

حال چون رنگ ۱ فقط عضو $C_{۳}$ است بنابراین یال $e_{۳}$ را به رنگ ۱ در می‌آوریم و رنگ ۳ را به یال باقیماندهٔ $e_{۴}$ نسبت می‌دهیم:



□

اکنون آماده‌ایم تا قضیهٔ مهم «ویزینگ» را بیان کنیم:

قضیه (ویزینگ): هر گراف $G = (V, E)$ با بزرگترین درجهٔ d حداکثر با $d + ۱$ رنگ قابل رنگ‌آمیزی یالی است. به عبارت دیگر $d \leqslant \chi'(G) \leqslant d + ۱$

اثبات: اثبات این قضیه را بوسیلهٔ استقراء روی $|E|$ انجام می‌دهیم. حالت $|E| = ۰$ بدیهی است.

حال فرض کنید $|E| > ۰$ و حکم مسأله برای گرافهای با کمتر از $|E|$ یال برقرار است.

رأس $v \in V$ از گراف را که درجهٔ آن مثبت است، در نظر بگیرید و فرض کنید یالهای $e_{۱} = vv_{۱}, e_{۲} = vv_{۲}, \ldots, e_{r} = vv_{r}$ به آن متصل هستند. گراف G' را به صورت

$G' = (V, E - \{e_۱, \ldots, e_۲\})$ تعریف می‌کنیم. حال بزرگترین درجهٔ گراف G' حداکثر برابر d می‌باشد. بنابراین طبق فرض استقراء گراف G' حداکثر با $d + ۱$ رنگ قابل رنگ‌آمیزی یالی است. این رنگ‌آمیزی یالی G' را انجام می‌دهیم.

از آنجا که در گراف G' درجهٔ هر کدام از رئوس $v_۱, v_۲, \ldots, v_۲$ کوچکتر یا مساوی $d - ۱$ است و برای رنگ‌آمیزی یالها از $d + ۱$ رنگ استفاده شده است، در نتیجه برای هر کدام از این رئوس حداقل ۲ رنگ وجود دارند که در یالهای مجاور آن رأس ظاهر نشده‌اند. به بیان دیگر می‌توانیم بگوئیم حداقل یک رنگ برای یال $e_۱$ و حداقل دو رنگ برای سایر یالها (با شرایط گفته شده) وجود دارد. در نتیجه با توجه به لم قبل (قرار دهید $D = d + ۱$) یک رنگ‌آمیزی یالی G با $d + ۱$ رنگ وجود دارد. □

حال قضیهٔ زیر را که یکی از نتایج قضیهٔ ویزینگ می‌باشند، بیان می‌کنیم.

قضیه: گراف $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید که بزرگترین درجهٔ آن برابر d می‌باشد ($d \geqslant ۲$). در این صورت اگر این گراف شامل هیچ دوری نباشد که درجهٔ تمام رئوس آن برابر d باشد، آنگاه یالهای این گراف با d رنگ قابل رنگ‌آمیزی است. به عبارت دیگر $\chi'(G) = d$

اثبات: برای اثبات این قضیه از روشی مشابه روش اثبات قضیهٔ ویزینگ استفاده می‌کنیم. این بار نیز روی $|E|$ استقراء می‌زنیم. حالت $|E| \leqslant ۲$ بدیهی است. حال فرض کنید $|E| > ۲$ و حکم مسأله برای گرافهای با کمتر از $|E|$ یال برقرار است. از آنجا که هیچ دوری از گراف متشکل از رئوس با درجهٔ d نیست، در نتیجه رأسی با درجهٔ d وجود دارد که حداکثر با یک رأس دیگر با درجهٔ d مجاور باشد. (در غیر این صورت رئوس با درجهٔ d باید تشکیل دور بدهند که مخالف فرض است.) فرض کنید رأس $v \in V$ اینگونه رأسی باشد که یک سر یالهای $e_۱ = vv_۱, e_۲ = vv_۲, \ldots, e_d = vv_d$ می‌باشد. حال گراف G' را به صورت $G' = (V, E - \{e_۱, e_۲, \ldots, e_۲\})$ تعریف می‌کنیم. در ابتدا نشان خواهیم داد که گراف G' قابل رنگ‌آمیزی یالی با d رنگ می‌باشد.

بزرگترین درجهٔ گراف G' حداکثر برابر d می‌باشد. اگر این درجه کمتر از d باشد آنگاه مسلماً گراف G' طبق قضیهٔ ویزینگ با d رنگ قابل رنگ‌آمیزی یالی خواهد بود. در غیر این صورت چون بزرگترین درجهٔ G' برابر d می‌باشد و هیچ دوری تنها از رئوس درجهٔ d تشکیل نشده است، در نتیجه طبق فرض استقراء یالهای این گراف با d رنگ قابل رنگ‌آمیزی خواهند بود. پس در هر حال داریم: $\chi'(G') \leqslant d$.

از آنجا که رأس v در گراف G حداکثر با یک رأس با درجهٔ d مجاور است، می‌توان نتیجه گرفت که در گراف G' حداکثر درجهٔ یک رأس مجاور v برابر $d - ۱$ خواهد بود و درجهٔ مابقی

حداکثر برابر ۲ − d می‌باشد. از طرفی برای رنگ‌آمیزی یالهای G' از d رنگ استفاده کرده‌ایم. در نتیجه شرایط لم گفته شده قبل از قضیهٔ ویزینگ برای یالهای $e_۱, e_۲, \ldots, e_d$ برقرار است. پس می‌توان نتیجه گرفت که یالهای گراف G با d رنگ قابل رنگ‌امیزی هستند. به عبارت دیگر $\chi'(G) = d$. □

در بعضی از کتاب‌ها با توجه به عدد رنگی هر گراف، آنها را به دو دستهٔ «کلاس ۱» و «کلاس ۲» تقسیم می‌کنند. گرافهای کلاس ۱، گرافهایی هستند که برای آنها داریم $\chi'(G) = d$ و گرافهای کلاس ۲ نیز گرافهایی هستند که در آنها $\chi'(G) = d + ۱$ می‌باشد.

«تمارین»

۱) نشان دهید برای هر گراف $G=(V,E)$ داریم: $\chi'(G) \geqslant \frac{|E|}{[\frac{1}{2}|V|]}$

(نماد $[x]$ نشان دهندهٔ جزء صحیح عدد x می‌باشد.)

۲) گراف G را در نظر بگیرید که درجهٔ تمام رئوس آن (بجز یک رأس) برابر با d است. نشان دهید اگر G قابل رنگ‌آمیزی یالی با d رنگ باشد، آنگاه:

الف) تعداد رأسهای G، فرد است. (ر)

ب) G شامل یک رأس با درجهٔ صفر می‌باشد. (ر)

۳) گراف همبند G را در نظر بگیرید که درجهٔ تمام رئوس آن برابر d است. در ضمن این گراف شامل رأسی است که با حذف آن رأس و یالهای مجاور آن گراف ناهمبند می‌شود. نشان دهید: $\chi'(G) = d + ۱$ (ر)

۴) گراف G یک گراف همیلتونی می‌باشد که درجهٔ هر رأس آن برابر ۳ می‌باشد. نشان دهید که:

$$\chi'(G) = ۳$$ (ر)

۵) در یک کلاس هر پسر دقیقاً d دختر و هر دختر دقیقاً d پسر را می‌شناسد. با استفاده از رنگ‌آمیزی یالی گرافها نشان دهید که می‌توان حداقل به d طریق مختلف دانش‌آموزان را به زوجهایی تقسیم کرد که در هر زوج یک دختر و پسر که همدیگر را می‌شناسند قرار داشته باشند. (ر)

۶) ماتریس M یک ماتریس $m \times n$ می‌باشد که از درایه‌های صفر و یک تشکیل شده است. در ضمن در هر سطر یا ستون حداکثر d رقم یک وجود دارد. نشان دهید می‌توان ماتریس M را به صورت حاصل جمع d ماتریس با درایه‌های صفر و یک نشان داد که در هرکدام از آنها، هر سطر یا ستون حداکثر شامل یک رقم ۱ باشد. (ر)

۸

تورنمنت‌ها

ما این فصل کوتاه را با بررسی تعمیمی از صورت ازدواج قضیهٔ هال که به «مسأله حرمسرا» معروف است، شروع خواهیم کرد. سپس به بحث دربارهٔ «تورنمنت‌ها» خواهیم پرداخت و برخی از ویژگیهای آنها را بررسی خواهیم کرد و در نهایت با استفاده از مسأله حرمسرا در اثبات یک قضیه در مورد تورنمنت‌ها، این دو بحث را به یکدیگر مرتبط خواهیم ساخت.

در فصل ۳، صورت ازدواج از قضیهٔ هال را بیان و اثبات کردیم و اکنون قصد داریم تا حالت مشابه دیگری از آن را بررسی کنیم:

قضیه (قضیهٔ هال ـ صورت حرمسرا): اعداد صحیح و غیر منفی $g_1, g_2, \dots, g_n$ داده شده‌اند. n پسر $B_1, B_2, \dots, B_n$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که B_1 می‌خواهد با g_1 دختر ازدواج کند. (مانند صورت ازدواج، تنها با دخترانی می‌تواند ازدواج کند که آنها را می‌شناسد). B_2 با g_2 دختر و ... و B_n با g_n دختر. در ضمن هیچ دختری همزمان نمی‌تواند ۲ همسر داشته باشد. در آن صورت این کار ممکن است اگر و تنها اگر برای هر مجموعهٔ $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots B_{i_s}$ از پسران آنها در مجموع حداقل $g_{i_1} + g_{i_2} + \cdots + g_{i_s}$ دختر را بشناسند.

اثبات: اگر همهٔ پسران بتوانند به خواستهٔ خود برسند، درآن صورت برای هر s پسر $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots B_{i_s}$ (که مانند صورت ازدواج آنها را متمایز فرض می‌کنیم) آنها حداقل باید همسران خود را بشناسند که تعداد آنها برابر است با $g_{i_1} + g_{i_2} + \cdots + g_{i_s}$. از طرف دیگر، فرض کنید هر مجموعهٔ $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots B_{i_s}$ از پسران در مجموع حداقل $g_{i_1} + g_{i_2} + \cdots + g_{i_s}$ نفر از دخترها را بشناسند. حال به جای B_1، g_1 پسر جدید به نام B_1 قرار دهید که هر کدام همان دخترهایی را می‌شناسند که B_1 می‌شناخت. به همین ترتیب برای بقیهٔ پسرها نیز این کار را انجام دهید:

$$\text{پسرها}: \underbrace{B_1, \dots, B_1}_{g_1\ \text{تا}},\ \underbrace{B_2, \dots, B_2}_{g_2\ \text{تا}}, \dots, \underbrace{B_n, \dots, B_n}_{g_n\ \text{تا}}$$

ما اکنون قصد داریم تا از صورت ازدواج قضیهٔ هال استفاده کنیم. در آنجا می‌خواستیم برای هر دختری یک همسر از میان پسرانی که می‌شناسد انتخاب کنیم. ولی در این مورد مسأله را اینگونه فرض کنید که می‌خواهیم برای هر پسری یک همسر از میان دخترانی که می‌شناسد انتخاب کنیم.) بنابراین باید نشان دهیم که در وضعیت جدید، هر r پسری در مجموع حداقل r تا از دخترها را می‌شناسند:

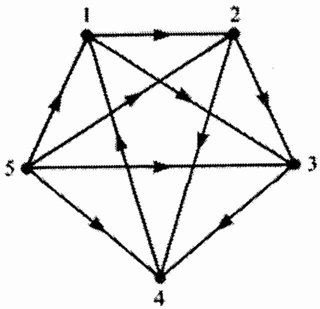
یک مجموعهٔ rتایی از پسرها را در نظر بگیرید و فرض کنید شامل پسرهایی باشد که مجموعهٔ نامهای آنها به صورت $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_s}\}$ باشد. (یعنی حداقل یک پسر با هر کدام از این نامها عضو r پسر مورد نظر باشد و بر عکس) در آن صورت می‌توان گفت:

$$r \leqslant g_{i_1} + g_{i_2} + \cdots + g_{i_s}$$

زیرا طرف راست نامساوی برای تعداد همسرهایی است که همهٔ پسرهای با نام‌های $B_{i_1}, \ldots, B_{i_s}$ می‌خواهند که مسلماً کمتر از r نیست. حال با توجه به فرض مسأله می‌دانیم که پسرهای $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots B_{i_s}$ در مجموع حداقل $g_{i_1} + g_{i_2} + \cdots + g_{i_s}$ تا از دخترها (و در نتیجه حداقل r تا از آنها) را می‌شناسند. این بدین معنی است که مجموعهٔ rتایی از پسرها که انتخاب کرده‌ایم (و شامل پسرهایی با نامهای $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots B_{i_s}$ بودند) در مجموع حداقل r دختر را می‌شناسند.

بنابراین چون در حالت جدید، هر r پسری در مجموع حداقل r دختر را می‌شناسند، در نتیجه بنابر فرضی که در مورد صورت ازدواج از قضیهٔ هال کردیم، می‌توان برای هر یک از آنها یک همسر از میان دخترانی که می‌شناسند، انتخاب کرد. به عنوان مثال می‌توان برای هر یک از g_1 پسر با نام B_1 یک همسر انتخاب کرد. حال به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که با تبدیل این g_1 پسر به نام B_1 به حالت اولیه (یعنی یک پسر به نام B_1) توانسته‌ایم g_1 همسر متمایز از میان دخترانی که می‌شناسد برای او انتخاب کنیم. □

اکنون به بحث در مورد تورنمنت‌ها می‌پردازیم: در یک باشگاه یک تورنمنت ورزشی بین یک گروه برگزار می‌شود، بطوری که هر ورزشکار با تمام ورزشکارهای دیگر دقیقاً یک بار مسابقه می‌دهد. در ضمن در هر مسابقه حتماً یکی از طرفین برنده می‌شود. بدین ترتیب اگر تورنمنت شامل n ورزشکار باشد (که آنها را به صورت $۱, ۲, \ldots, n$ شماره‌گذاری می‌کنیم) در آن صورت $\binom{n}{۲}$ زوج ورزشکار (و به تبع آن $\binom{n}{۲}$ مسابقه) وجود دارد. حال می‌توان مسابقه‌ها را بوسیلهٔ زوج اعدادی نشان داد که عدد اول شمارهٔ ورزشکار برنده و عدد دوم شمارهٔ ورزشکار بازنده باشد. به همین ترتیب می‌توان یک تورنمنت با n ورزشکار را بوسیلهٔ یک گراف کامل n رأسی که رأسهای آن با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, n$ برچسب گذاری شده‌اند نمایش داد بطوری که هر یال آن بصورت یک پیکان باشد از رأس i به رأس j اگر «i بر j غلبه کرده باشد».



مثال: نمودار روبرو نمایشی برای یک تورنمنت با ۵ ورزشکار ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ می‌باشد که مسابقات به صورت ۱۲، ۱۳، ۲۳، ۲۴، ۳۴، ۴۱، ۵۱، ۵۲، ۵۳ و ۵۴ در آن انجام شده‌اند. بنابراین در این تورنمنت به عنوان مثال ۱ از ۴ و ۵ شکست خورده است و ۲ و ۳ را نیز شکست داده است. □

این نوع نمایش یک تورنمنت نوع خاصی از گرافها را معرفی می‌کند که آن را «گراف جهت‌دار» می‌نامند. اکنون قصد نداریم به طور کامل به بحث دربارهٔ آنها بپردازیم. ولی به طور اجمالی لازم است توضیحاتی در مورد آنها ارائه کنیم: یک گراف جهت‌دار $(V, \vec{E})$ شامل مجموعهٔ رئوس V (مانند گرافهای معمولی) و مجموعهٔ یالهای $\vec{E}$ می‌باشد که زیر مجموعه‌ای از مجموعه $\{vw : v, w \in V\}$ می‌باشد. یک گراف جهت‌دار مانند گرافهای معمولی نمایش داده می‌شود، با این تفاوت که هر یال آن بصورت یک پیکان می‌باشد. (یعنی دارای جهت است.)

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان مجموعهٔ اصطلاحات نظریهٔ گرافها را برای گرافهای جهت‌دار نیز تعمیم داد. به عنوان مثال یک «مسیر جهت‌دار»، مسیری است که در جهت پیکانها باشد. و به همین ترتیب « درجهٔ ورودی» یا «درجهٔ خروجی» یک رأس نیز برابر تعداد یالهایی است که به یک رأس وارد یا از آن خارج می‌شوند و . . . .

در نمایش گرافی یک تورنمنت، مسیر جهت‌دار $p_1, p_2, \ldots, p_r$ دنباله‌ای از ورزشکاران می‌باشد بطوری که p_1 بر p_2 غلبه کرده باشد، p_2 بر p_3 و . . . و p_{r-1} بر p_r. با توجه به این مطلب در مثال قبل مسیر جهت‌دار ۵, ۴, ۱, ۲, ۳ وجود داشت که شامل تمام رئوس می‌شد. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که همواره یک مسیر جهت‌دار در یک تورنمنت وجود دارد بطوری که در آن هر ورزشکاری دقیقاً یک بار ظاهر شده باشد. (شرایط وجود یک دور همیلتونی جهت‌دار را در تمارین پایان فصل بررسی خواهیم کرد.)

قضیه: در یک تورنمنت با n ورزشکار، می‌توان ورزشکارها را با اعداد $p_1, \ldots, p_n$ طوری شماره‌گذاری کرد که p_1 بر p_2 غلبه کرده باشد، p_2 بر p_3 و . . . و p_{n-1} بر p_n.

اثبات: این قضیه را بوسیلهٔ استقراء روی n اثبات می‌کنیم:

حالت پایهٔ $n = 2$ (ویا $n = 1$) بدیهی است. بنابراین فرض کنید $n > 2$ و حکم مسأله برای تورنمنت‌های با کمتر از n ورزشکار برقرار است.

در ابتدا یکی از ورزشکاران (مثلاً p) را کنار گذاشته و مسابقات بین $n-۱$ ورزشکار دیگر را در نظر بگیرید. این مسابقه‌ها نیز مسلماً تشکیل یک تورنمنت خواهند داد و بنابراین با توجه به فرض استقراء می‌توان $n-۱$ ورزشکار باقیمانده را با اعداد $p_۱, \ldots, p_{n-۱}$ طوری شماره‌گذاری کرد که: $p_۱$ بر $p_۲$ غلبه کرده باشد، $p_۲$ بر $p_۳$ و $\ldots$ و $p_{n-۲}$ بر $p_{n-۱}$.

حال به نتایج مسابقه‌های ورزشکار p توجه کنید: اگر p توسط همهٔ $n-۱$ ورزشکار دیگر شکست خورده باشد، در آن صورت داریم:

$p_۱$ بر $p_۲$ غلبه کرده است، $p_۲$ بر $p_۳$ و $\ldots$ و $p_{n-۲}$ بر $p_{n-۱}$ و $p_{n-۱}$ بر p.

که همان حکم مورد نظر می‌باشد. در غیر این صورت اگر p حداقل یکی از سایر ورزشکاران را شکست داده باشد، در آن صورت i را برابر کوچکترین مقداری در نظر می‌گیریم که p بر p_i غلبه کرده باشد. اگر $i=۱$ باشد، در آن صورت داریم:

p بر $p_۱$ غلبه کرده است، $p_۱$ بر $p_۲$ و $\ldots$ و $p_{n-۲}$ بر $p_{n-۱}$.

و اگر $i>۱$ باشد، داریم:

$$p_۱ \text{ بر } p_۲ \text{ غلبه کرده است}, \ldots, \underbrace{p_{i-۱} \text{ بر } p}_{\substack{\text{زیرا } p_i \text{ اولین ورزشکاری از دنباله} \\ \text{است که } p \text{ او را شکست داده است.}}}, \ p \text{ بر } p_i, \ldots, p_{n-۲} \text{ بر } p_{n-۱}.$$

در هر دو حالت ما به حکم مورد نظر دست یافته‌ایم. □

بسیاری از نتایج بدست آمده در مورد گرافها را می‌توان برای گرافهای جهت‌دار نیز تعمیم داد. به عنوان مثال یک گراف جهت‌دار، شامل یک «مسیر اویلری جهت‌دار» است اگر و تنها اگر «قویاً همبند» باشد (بدین معنی که مسیری جهت‌دار از هر رأس به هر رأس دیگری در آن وجود داشته باشد.) و درجهٔ ورودی هر رأس با درجهٔ خروجی آن برابر باشد.

برای مطالعهٔ بیشتر در مورد گرافهای جهت‌دار می‌توانید به کتاب «Introduction to graph Theory» اثر «R. I. Wilson» و برای آموختن مطالب بیشتر در مورد «دورهای جهت‌دار همیلتونی» و تورنمنت‌ها می‌توانید به کتاب «Topics on tournaments» از «J. M. Moon» مراجعه کنید.

این کتاب‌ها در بخش کتاب‌شناسی در انتهای این کتاب معرفی شده‌اند.

نتیجهٔ مهمی در مورد تورنمنت‌ها که اکنون می‌خواهیم آن را بررسی کنیم، امتیازهای ورزشکاران در یک تورنمنت می‌باشد. در یک تورنمنت با n ورزشکار $۱, ۲, \ldots, n$، نماد b_i را برای نمایش تعداد ورزشکارهایی که توسط ورزشکار i شکست خورده‌اند، به کار می‌بریم. بنابراین

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ امتیازهای ورزشکاران در تورنمنت خواهد بود.

مثال: کدامیک از دنباله‌های زیر می‌تواند نمایانگر امتیازهای ورزشکاران یک تورنمنت ۶ نفره باشد:

الف) ۱, ۱, ۲, ۴, ۴, ۴

ب) ۱, ۱, ۲, ۳, ۳, ۵

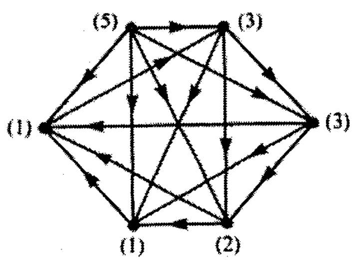
ج) ۰, ۱, ۱, ۴, ۴, ۵

راه حل:

الف) به وضوح این دنباله نمی‌تواند امتیازهای یک تورنمنت ۶ نفره باشد. زیرا:

$$۴ + ۴ + ۴ + ۲ + ۱ + ۱ = ۱۶ \neq \binom{۶}{۲}$$

ب) در اینجا یک نمایش گرافی از تورنمنتی با ۶ ورزشکار نمایش داده شده است که امتیاز آنها همان دنبالهٔ مورد نظر می‌باشد. (دقت کنید که امتیاز هر ورزشکار درجهٔ خروجی رأس متناظر با آن در گراف می‌باشد.)



ج) اگر چه مجموع ۶ عدد ۰, ۱, ۱, ۴, ۴, ۵ برابر $\binom{۶}{۲}$ می‌باشد، ولی این دنباله نمی‌تواند امتیازهای ورزشکاران یک تورنمنت ۶ نفره باشد. یکی از راههای نشان دادن این ادعا، در نظر گرفتن مسابقات بین سه ورزشکاری است که امتیازهای ۰ و ۱ و ۱ بدست آورده‌اند. این سه ورزشکار در بین خود $۳ = \binom{۳}{۲}$ مسابقه انجام داده‌اند که باید امتیاز این سه مسابقه به خود آنها رسیده باشد. بنابراین مجموع امتیاز آنها نباید کمتر از ۳ باشد که این طور نیست. □

با توجه به آنچه در این مثال بیان شد، می‌توانیم در مورد امتیازهای هر تورنمنتی با n ورزشکار نیز بگوئیم که در مجموع امتیازها باید برابر $\binom{n}{۲}$ بوده و مجموع امتیاز هر r ورزشکاری نیز نباید کمتر از

$\binom{r}{۲}$ باشد (زیرا این ورزشکارها این تعداد مسابقه در بین خودشان انجام داده‌اند که امتیاز آنها باید در بین خودشان تقسیم شده باشد.)

عکس این نتیجه نیز درست است. یعنی اگر برای هر مجموعه‌ای از n عدد صحیح دو شرط بالا را داشته باشیم، آنگاه این اعداد می‌توانند امتیازهای یک تورنمنت n نفره باشند. این قضیه اولین بار توسط «لاندا[1]» در سال ۱۹۵۳ اثبات شد. امّا از پذیرفتن این قضیه به عنوان نتیجه‌ای از صورت حرمسرا از قضیهٔ هال مدت زیادی نمی‌گذرد.

قضیه (لاندا): دنبالهٔ اعداد صحیح $g_۱, g_۲, \ldots, g_n$ را در نظر بگیرید. این دنباله امتیازهای ورزشکاران یک تورنمنت می‌باشد اگر و تنها اگر:

الف) $$g_۱ + g_۲ + \cdots + g_n = \binom{n}{۲}$$

ب) برای هر $n \geqslant r \geqslant ۱$، مجموع هر r عدد از دنباله از $\binom{r}{۲}$ کمتر نباشد.

اثبات: فرض کنید تورنمنتی با n ورزشکار وجود دارد بطوری که امتیازهای آنها به صورت $g_۱, g_۲, \ldots, g_n$ باشد. در آن صورت به وضوح مجموع این اعداد برابر تعداد مسابقات خواهد بود که $\binom{n}{۲}$ می‌باشد. همچنین هر r ورزشکار از میان آنها، $\binom{r}{۲}$ مسابقه در بین خودشان انجام داده‌اند که از این مسابقات، $\binom{r}{۲}$ امتیاز نصیب آنها شده است. بنابراین مجموع امتیازهای آنها نباید کمتر از این مقدار باشد.

از طرف دیگر، $g_۱, g_۲, \ldots, g_n$ را دنباله‌ای از اعداد صحیح در نظر بگیرید که شرایط (۱) و (۲) در آنها صدق می‌کند: حال در حالت خاص قرار دهید $r = ۱$. نتیجه می‌شود که هیچ کدام از اعداد نباید منفی باشند. حال برای هر s عدد $g_{i_۱}, g_{i_۲}, \ldots, g_{i_s}$ از دنباله، $n - s$ عدد دیگر را در نظر بگیرید. مجموع آنها طبق شرط (۲) نباید کمتر از $\binom{n-s}{۲}$ باشد. بنابراین

$$g_{i_۱}, g_{i_۲}, \ldots, g_{i_s} \leqslant \binom{n}{۲} - \binom{n-s}{۲} \qquad *$$

حال صورت حرمسرا از قضیهٔ هال را بیاد آورید. فرض کنید n پسر $۱, ۲, \ldots, n$ می‌خواهند در مجموع $\binom{n}{۲}$ همسر برای خود انتخاب کنند. آنها برای این کار یک تورنمنت بر پا می‌کنند و هر دو پسری با هم یک بار مسابقه می‌دهند. $\binom{n}{۲}$ دختر را در نظر بگیرید که آنها را به صورت $(۱,۲), (۱,۳), \ldots, (۱,n), (۲,۳), \ldots, (n-۱,n)$ نامگذاری می‌کنیم. حال فرض کنید برندهٔ مسابقه پسر i با پسر j، دختر (i,j) را به عنوان همسر انتخاب می‌کند. (فرض کنید هر پسری تمام دخترانی را که برای ازدواج با آنها مسابقه می‌دهد، می‌شناسد.) حال برای هر s پسر

1) H. G. Landau

$i_1, i_2, \ldots, i_s$ آنها در مجموع چند دختر را می‌شناسند؟ با کمی تأمل می‌توان فهمید که آنها همهٔ دخترها بجز دخترهایی را که تنها $n - s$ پسر دیگر برای ازدواج با آنها مسابقه می‌دهند را می‌شناسند که تعداد آنها برابر با $\binom{n}{2} - \binom{n-s}{2}$ می‌باشد. حال با توجه به نابرابری * می‌توان نتیجه گرفت که s پسر $i_1, i_2, \ldots, i_s$ در بین خودشان حداقل $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_s}$ دختر را می‌شناسند. بنابراین با توجه به صورت حرمسرا از قضیهٔ هال (که در ابتدای این فصل بیان شد) پسرهای $n, \ldots, 2, 1$ می‌توانند به ترتیب $g_1, g_2, \ldots, g_n$ همسر از میان دخترانی که می‌شناسند، انتخاب کنند. به بیان دیگر بازیهای تورنمنت می‌توانند طوری انجام شوند که پسر ۱، g_1 بار برنده شود، پسر ۲، g_2 بار، ... و پسر n، g_n بار. این بدین معنی است که پسرهای $n, \ldots, 2, 1$ به ترتیب $g_1, g_2, \ldots, g_n$ امتیاز بگیرند که در آن صورت تورنمنتی یافته‌ایم که امتیازهای موجود در آن، دنبالهٔ داده شده باشد. □

«تمارین»

۱) در یک تورنمنت با n ورزشکار:

الف) چند دنباله برای امتیازهای ورزشکاران وجود دارد بطوری که امتیاز هیچ دو ورزشکاری برابر نباشد. (ج)

ب) چند دنباله برای امتیازهای ورزشکاران وجود دارد که تنها امتیاز دو ورزشکار با هم برابر باشد و بجز آن دو، امتیاز هیچ دو ورزشکار دیگری با هم برابر نباشند. (ج)

ج) اگر ورزشکار نفر اول، بیشترین امتیاز را داشته باشد و مابقی همگی در ردهٔ دوم باشند، دنباله امتیازهای آنان چه خواهد بود؟ (ج)

۲) در یک تورنمنت با n ورزشکار با امتیازهای $b_1, b_2, \ldots, b_n$ چند مجموعهٔ سه نفری از ورزشکاران وجود دارد که هرکدام یکی از مسابقه‌های بین خودشان را برده و دیگری را باخته باشد؟ (ر، ج)

۳) نشان دهید در یک تورنمنت با n ورزشکار، مجموع امتیازهای هر r ورزشکار حداکثر برابر است با $nr - \binom{r+1}{2}$ (ر)

۴) یک تورنمنت (و یا در حالت کلی یک گراف جهت‌دار) را قویاً همبند می‌نامند اگر در آن یک مسیر جهت‌دار از هر رأس به هر رأس دیگری وجود داشته باشد. نشان دهید در یک تورنمنت با n ورزشکار، سه گزارهٔ زیر هم‌ارزند:

الف) تورنمنت قویاً همبند باشد.

ب) تورنمنت یک دور جهت‌دار همیلتونی داشته باشد.

ج) برای هر $1 \leqslant r \leqslant n$، مجموع امتیازهای هر r ورزشکار بزرگتر از $\binom{r}{2}$ باشد. (ر)

۵) نشان دهید در یک تورنمنت با n ورزشکار، دور جهت‌دار وجود ندارد اگر و تنها اگر ورزشکاران قابل شماره‌گذاری به صورت $p_1, p_2, \ldots, p_n$ باشند بطوری که برای هر $i < j$: p_i بر p_j غلبه کرده باشد. (بنابراین p_1 همه را شکست داده است، p_2 همه را بجز p_1 شکست داده است و ...). سپس نتیجه بگیرید که $n!$ راه برای انتخاب نتایج مسابقات در یک تورنمنت n نفره وجود دارد بطوری که در آن، دور جهت‌دار وجود نداشته باشد. (اینگونه تورنمنتی با n ورزشکار را یک «جهت‌گیری بدون دور» از K_n می‌نامند که با آن در فصل ۱۱ برخورد خواهیم کرد.)

۶) الف) یک تورنمنت n نفره در چندین روز متوالی انجام می‌گیرد، بطوری که هر ورزشکار در هر روز حداکثر یک مسابقه انجام می‌دهد. حداقل چند روز برای انجام تمام بازیهای این تورنمنت لازم است؟ (ر، ج)

ب) یک لیگ فوتبال از n تیم تشکیل شده است و در یک فصل هر تیم با هر تیم دیگری دقیقاً دو بار مسابقه می‌دهد. در ضمن هر تیمی در هر روز حداکثر یک مسابقه انجام می‌دهد. حداقل تعداد روزهایی که برای انجام بازیهای این فصل لیگ لازم است، چقدر است؟ (ج)

۹

قضایای کمبیشینه

تصور کنید که یک بسته آب‌نبات از انواع مختلف دارید. کمترین تعداد آب‌نبات که باید انتخاب کنید تا تعداد انواع آب‌نبات‌ها مشخص شود چقدر است؟ بیشترین تعداد آب‌نباتی که می‌توانید انتخاب کنید بطوری که هیچ جفتی از یک نوع پیدا نشود چقدر است؟ در واقع پاسخ این دو سؤال یکی است. این یک مثال کوچک از مواقعی است که یک سؤال در مورد بیشترین مقدار عاملی به سؤال در مورد کمترین مقدار عامل دیگر مرتبط است. این مسائل را به عنوان نتایجی از «قضایای کمبیشینه» مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این فصل سه قضیهٔ مهم در مورد مسائل کمبیشینه مطرح می‌کنیم. یکی در رابطه با ماتریسها، دیگری در مورد گرافها و سومی دربارهٔ شبکه‌ها می‌باشد. (البته این سه قضیه در حقیقت بیان‌های مختلفی از یکدیگر می‌باشند و متفاوت نیستند.)

ماتریس‌ها

این مورد یکی از مواردی است که از قضیهٔ پرکاربرد «هال» استفاده می‌کنیم و به دنبال یک عدد ۱ در هر سطر و هر ستون از یک ماتریس صفر و یک می‌گردیم که هیچ کدام در یک سطر و یا یک ستون واقع نشوند. ممکن است این چنین مجموعه‌ای از ۱ها که هر سطر و ستون را بپوشاند وجود نداشته باشد. امّا ما به دنبال حداکثر تعداد ۱ها با این خاصیت می‌گردیم که هیچ کدام در یک سطر یا ستون واقع نباشند.

مثال:

$$M_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

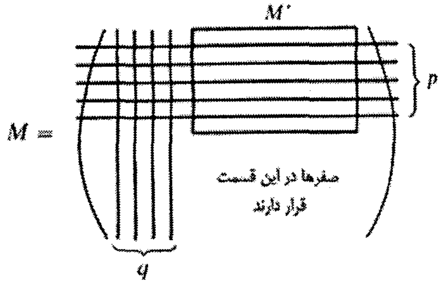
در ماتریس M_1 شرایط قضیهٔ هال برقرار است که در هر r سطر تعدادی یک وجود دارند که حداقل در r ستون مختلف واقع هستند. یعنی مجموعه‌ای از یک‌ها وجود دارد که هر کدام در یک سطر واقع هستند و هیچ دوتایی از آنها در یک ستون واقع نیستند. امّا ماتریس M_2 چنین مجموعه‌ای از یک‌ها را ندارد و تنها امکان یافتن مجموعه‌ای با چهار عدد یک وجود دارد که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک ستون واقع نباشند. هر دوی این مجموعه‌ها هم برای M_1 و هم برای M_2 با چاپ تیره نشان داده شده‌اند. از سوی دیگر توجه کنید که امکان یافتن حداقل چهار خط (هر خط یک سطر و یا یک ستون است) در ماتریس M_2 وجود دارد که تمام یک‌های این ماتریس روی این خطوط واقع شده باشند. این چهار خط در سمت راست ماتریس M_2 نشان داده شده‌اند. واضح است که در ماتریس M_1 می‌توان پنج خط رسم کرد که همهٔ یک‌ها روی این پنج خط واقع شده باشند. این پنج خط همان سطرهای M_1 هستند.

قضیه (کونیگ ـ اگروری[1]): اگر برای هر ماتریس M با درایه‌های صفر و یک، خط را به معنی یک سطر و یا یک ستون در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

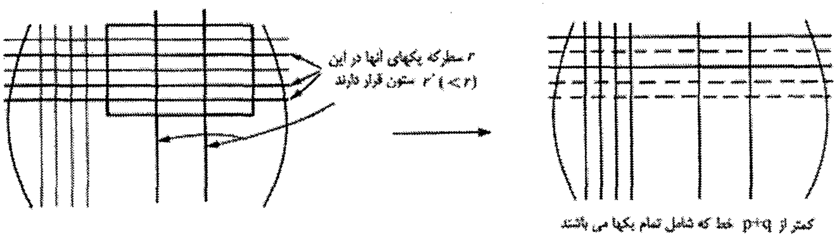
بیشترین تعداد یک‌هایی که هیچ کدام بر یک خط واقع نباشند = کمترین تعداد خطهایی که همهٔ ۱های M را شامل شوند

اثبات: بیشترین تعداد یک‌های غیر واقع بر یک خط را β و کمترین تعداد خطوط پوشانندهٔ همهٔ یک‌ها را α می‌نامیم. چون β عدد یک داریم که هیچ کدام بر یک خط واقع نیستند و α خط مفروض همهٔ یک‌ها را می‌پوشانند، پس داریم $\beta \leqslant \alpha$. حال نشان می‌دهیم $\alpha \geqslant \beta$. برای این کار باید α عدد یک پیدا کنیم که هیچ کدام بر یک خط واقع نباشند. فرض می‌کنیم $\alpha = p + q$ بطوری که (بدون کاسته شدن از کلیّت مسأله) درایه‌های p سطر اول و q ستون اول شامل تمام یک‌های M باشند.

1) KÖnig-Egervary

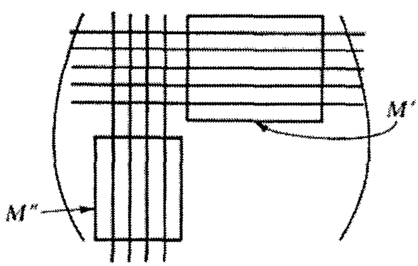


به ماتریس M' توجه کنید. ادعا می‌کنیم که هر r سطر از ماتریس M' دارای تعدادی یک است که حداقل در r ستون متمایز قرار دارند. فرض می‌کنیم که این ادعای ما درست نباشد. پس در این r سطر، یک‌ها r' ستون متمایز را می‌پوشانند که $r' < r$.



امّا در این حالت می‌توان به جای r سطر مذکور که جزو خطوط پوشاننده هستند r' ستون مورد نظر را قرار دارد و تعداد خطوط پوشانندهٔ یک‌های ماتریس را کاهش داد که این مخالف با کمینه بودن α است. بنابراین هر r سطر از ماتریس M' شامل تعدادی یک در حداقل r ستون متمایز است.

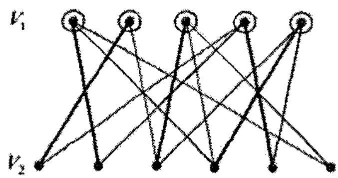
اکنون با استفاده از شکل ماتریسی قضیهٔ هال p سطر از M' دارای p عدد یک هستند که هیچ دوتایی از آنها در سطر یا ستون یکسانی قرار ندارند. به همین ترتیب نشان می‌دهیم که در بخش M'' نیز q عدد یک وجود دارد که هیچ دوتایی از آنها در یک سطر یا ستون یکسان قرار ندارند و این بدین معنی است که حداقل $\alpha = p + q$ عدد یک در ماتریس M وجود دارد که هیچ دوتایی از آنها در یک سطر و یا یک ستون مشترک قرار ندارند. پس $\alpha \leqslant \beta$ و بنابراین $\alpha = \beta$.



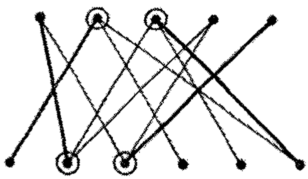
گراف

در یک گراف یک تطابق عبارت است از مجموعه‌ای از یالها بطوری که هیچ دو یالی رأس مشترک نداشته باشند. ما وجود تطابق از V_1 به V_2 را بر روی گراف دو بخشی $G = (V_1, E, V_2)$ بررسی می‌کنیم. اگر تطابقی وجود داشته باشد، واضح است که تطابقی با بیشترین یال نیز وجود دارد. امّا در گراف دو بخشی $G = (V_1, E, V_2)$ تعداد یالهای بزرگترین تطابق از V_1 به V_2 کمتر یا مساوی با $|V_1|$ می‌باشد.

مثال:



یک تطابق کامل از V_1 به V_2 (بزرگترین تطابق)



بزرگترین تطابق که شامل فقط ۴ یال می‌باشد.

درگراف سمت چپ پنج رأس حلقه دار از V_1 دارای خاصیت پوششی هستند. یعنی هر یال از G حداقل به یک رأس حلقه‌دار منتهی می‌شود. هیچ مجموعه‌ای از رئوس پوششی نمی‌توان یافت که کمتر از پنج عضو داشته باشد. از طرفی بزرگترین تطابق از V_1 به V_2 دارای پنج یال است. در شکل سمت راست نیز مجموعهٔ چهار رأس حلقه‌دار دارای خاصیت پوششی هستند و هیچ مجموعه‌ای با کمتر از چهار رأس ویژگی مفروض را ندارد. همچنین بزرگترین تطابق از V_1 به V_2 دارای ۴ یال است. □

مثال بالا قضیهٔ کمبیشینه در مورد گرافها را بیان می‌کند. شما با کمی تأمّل می‌توانید ارتباط میان مثال بالا و یکی از ماتریس‌های بخش قبل پیدا کنید. در حقیقت نتیجهٔ زیر تکراری از قضیهٔ «کونیگ ـ اگروری» است. اثبات آن نیز به عنوان تمرین در آخر فصل ارائه شده است.

قضیه: فرض کنید که $G = (V_1, E, V_2)$ یک گراف دو بخشی باشد. آنگاه داریم:

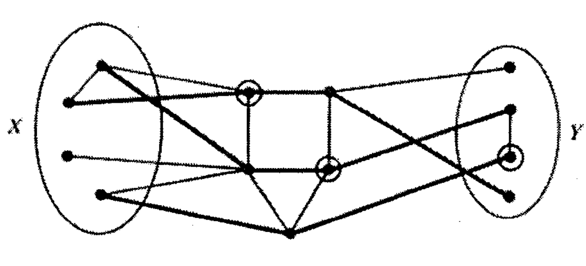
تعداد یالهای بزرگترین تطابق = کمترین تعداد رئوس پوششی □

این قضیه کاربردهای فراوانی دارد که بالاتر از سطح این کتاب است. در کتاب «Selected topics in graph theory» از «D. R. Woodall» (که دیدگاههای جالبی

در مورد قضایای کمبیشینه دارد) توضیح داده شده است که «الگوریتم هونگارین[1]» چگونه برای پیدا کردن بزرگترین تطابق در یک گراف به کار می‌رود. این الگوریتم (که به خاطر ملیت کونیگ و اگروری به الگوریتم مجارستانی نیز مشهور است) بی‌شباهت با الگوریتم قضیهٔ هال که در فصل سوم بیان کردیم نیست. همچنین ودال[2] نشان داد که این روش می‌تواند برای گرافهای وزندار نیز تعمیم بیابد. یک تعمیم از قضیهٔ قبلی به این صورت است که بیشترین تعداد مسیرهای جدا از هم از V_1 به V_2 برابر با کمترین تعداد رئوسی است که حذف آن رئوس و یالهای متصل به آنها V_1 را از V_2 جدا می‌کند. این نتیجه که همان قضیهٔ بعدی مورد بررسی ما می‌باشد، در سال ۱۹۷۲ توسط «منگر[3]» اثبات شد.

مجموعه‌ای از مسیرهای گراف $G = (V, E)$ را جدا از هم می‌نامیم اگر هر دو مسیر از این مجموعه در هیچ رأسی مشترک نباشند. یک مسیر از یک مجموعهٔ رئوس مانند X به یک مجموعهٔ رئوس مانند Y عبارت است از مسیری که رأس ابتدای آن در مجموعهٔ X و رأس انتهای آن در مجموعهٔ Y باشد. در ضمن اگر دیگر رئوس مسیر در هیچ کدام از مجموعه‌های X و Y واقع نشوند، «مسیر بهینه» نامیده می‌شود. از طرف دیگر یک مجموعهٔ S از رئوس G «جداکننده» نامیده می‌شوند اگر و فقط اگر هر مسیر عبوری از X به Y شامل حداقل یک رأس از رئوس S باشد. واضح است که می‌توان هر یک از مجموعه‌های X و Y را به عنوان یک مجموعهٔ S با ویژگی فوق در نظر گرفت. امّا معمولاً مجموعه‌های دیگری به غیر از X و Y با ویژگی S وجود دارند.

مثال: در گراف شکل زیر حداکثر سه مسیر مجزا از X به Y وجود دارد که یک چنین مجموعه‌ای از مسیرها با خطوط تیره نشان داده شده‌اند. همچنین کمترین تعداد رئوس جداکنندهٔ X از Y سه تا است که با رئوس حلقه‌دار نشان داده شده‌اند.



□

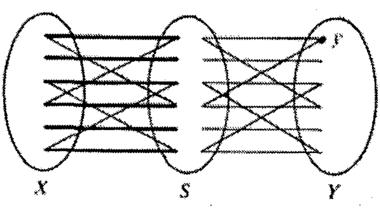
1) Hungarian algorithm 2) Woodall 3) K. Menger

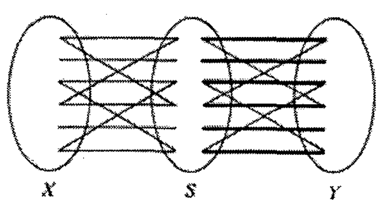
قضیه (منگرا): گراف $G = (V, E)$ و $X, Y \subseteq V$ مفروضند. در این صورت داریم:

$$\text{بیشترین تعداد مسیرهای مجزا از } X \text{ به } Y = \text{کمترین تعداد رئوس جداکنندهٔ } X \text{ از } Y$$

اثبات: کمترین تعداد رئوس جداکنندهٔ X از Y را α و بیشترین تعداد مسیرهای مجزا بین X و Y را β می‌نامیم. طبق معمول یک نامساوی واضح بین α و β به صورت $\alpha \geqslant \beta$ برقرار است: چون هر مسیر از X به Y باید حداقل یکی از رئوس جداکننده را شامل شود. برای نامساوی $\beta \geqslant \alpha$ اثباتی براساس استقراء بر روی $|E| + |V|$ ارائه می‌کنیم. برای حالت $|E| + |V| = ۱$ اثبات بدیهی است. پس فرض می‌کنیم در گراف G، $|E| + |V| > ۱$ و حکم برای گرافهای کوچکتر[۱] اثبات شده است. برای نشان دادن اینکه $\beta \geqslant \alpha$ باید α عدد مسیر مجزا از X به Y معرفی کنیم. این کار را در دو حالت انجام می‌دهیم:

الف) مجموعه S، شامل α رأس وجود دارد که X را از Y جدا می‌کند. با این شرط که $X \neq S$ و $Y \neq S$. چون Y خودش جداکنندهٔ X و Y است پس $Y \not\subset S$ (چون $|S|$ کمترین مقدار است.) از طرفی داریم $Y \neq S$ و در نتیجه $Y \nsubseteq S$. یعنی رأس y در Y وجود دارد که در S وجود ندارد: $y \in Y - S$. با کمی تأمل متوجه می‌شویم که مجموعهٔ S نه تنها در G بلکه در G' که حاصل از حذف y از G است، کوچکترین مجموعهٔ جداکنندهٔ X و S است.





حال بنابر فرض استقراء در گراف G' که کوچکتر از G است α مسیر مجزا از X به S وجود دارد و این مسیرها در G نیز مجزا هستند. از طرفی با استدلالی مشابه آنچه در مورد مجموعهٔ Y گفته شد می‌توانیم نتیجه بگیریم که α مسیر مجزا از S به Y در G وجود دارد. واضح است که می‌توان مسیرهای X به S و S به Y را به α مسیر از X به Y تبدیل کرد که مجزا باشند.

---

۱) منظور از گراف کوچکتر در اینجا گرافی است که مقدار $|E| + |V|$ در آن کمتر باشد.

ب) اگر شرایط حالت «الف» ایجاد نشود، پس S با یکی از مجموعه‌های X و Y برابر است. فرض می‌کنیم $S = X$ و $\alpha = |X|$. اگر $X \subseteq Y$ آنگاه یافتن α مسیر مجزا از X به Y کار بسیار ساده‌ای است. در حقیقت هر رأس X به عنوان مسیری ساده از X به Y خواهد بود. پس فرض می‌کنیم که $v \in \{X - Y\}$ وجود دارد و مجموعهٔ $X - \{v\}$ را بررسی می‌کنیم[1]. از آنجا که این مجموعه کمتر از α رأس دارد که X را از Y جدا می‌کند و این مخالف فرض $S = X$ است، پس باید با حذف v یک مسیر مجزا نیز حذف شود. یعنی یک مسیر مجزا وجود دارد که با v شروع می‌شود. مثلاً $v, w, \ldots$. حال گراف $G' = (V, E - \{vw\})$ را در نظر می‌گیریم:

اگر X هنوز کوچکترین مجموعهٔ جداکنندهٔ X از Y باشد با استفاده از فرض استقراء در گراف G'، α مسیر مجزا از X به Y وجود دارد که در نتیجه در G نیز این تعداد مسیر وجود خواهد داشت. در غیر این صورت مجموعه S' شامل $\alpha - ۱$ رأس وجود دارد که جداکنندهٔ X از Y در G' باشد. در این صورت واضح است که $S' \cup \{v\}$ و $S' \cup \{w\}$ هر دو جداکنندهٔ X از Y در G می‌باشند و هر دو شامل α رأس هستند و از آنجائی که در این حالت فرض کردیم کوچکترین مجموعهٔ جداکنندهٔ X از Y، یکی از دو مجموعهٔ X یا Y است در نتیجه واضح است که $X = S' \cup \{v\}$ و $Y = S' \cup \{w\}$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $\alpha - ۱$ مسیر مجزای شامل رئوس S' بعلاوهٔ مسیر w و v، α مسیر مجزا از X به Y را در گراف G می‌سازند.

پس هم در حالت «الف» و هم در حالت «ب»، α مسیر مجزا از X به Y وجود دارد. در نتیجه $\beta \leqslant \alpha$. از این نامساوی و نامساوی عکس آن که قبلاً اثبات شده بود نتیجه می‌گیریم که $\alpha = \beta$. □

شبکه‌ها

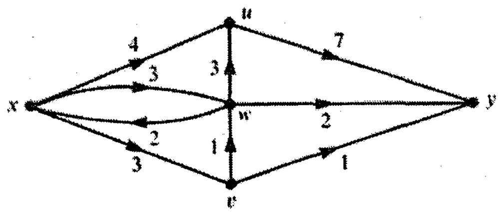
یک شبکه $N = (V, c)$، از یک مجموعهٔ رئوس ناتهی و متناهی V تشکیل شده است که به هر زوج مرتب (v, w) که $v, w \in V$، عدد حقیقی و غیر منفی $c(v, w)$ را به عنوان ظرفیت به آن نسبت می‌دهیم. (در حقیقت c یک تابع به صورت $c : V \times V \longrightarrow R$ است). حال بدون اینکه در تعریف‌های قبلی خود در مورد گرافهای جهت‌دار تغییر دهیم با اصطلاحاتی مستقل

---

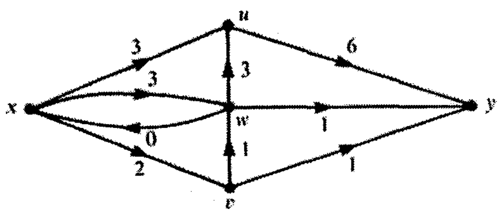
۱) در حقیقت می‌توان در این قسمت فرض کرد که $X \cap Y = \varnothing$ در غیر این صورت هر یک از اعضای $X \cap Y$ هم به عنوان مسیر مجزا و هم به عنوان رئوس جدا کننده محاسبه شده و از دو طرف تساوی کم می‌شود و مسأله به حالت کوچکتر در فرض استقرا تبدیل می‌شود. ــ م

از اصطلاحات گرافی به چند تعریف مورد نیاز خود اشاره می‌کنیم: اگر $c(v,w) > ۰$ آنگاه فرض می‌کنیم از v به w یال جهت‌داری وجود دارد که ظرفیت آن $c(w,x)$ است و بدین ترتیب با رئوس V، شبکه‌ای مانند نمودار گراف جهت‌دار وزن‌دار رسم می‌کنیم. قبل از ادامهٔ بحث شبکه‌ها در حالت کلی، فرض می‌کنیم که ظرفیت‌ها اعداد صحیح هستند و برای هر $v \in V$ داریم $c(v,v) = ۰$ تا بتوانیم به شکلی ساده‌تر بررسی را انجام دهیم.

مثال: شبکه $N = (V,c)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:
$V = \{u,v,w,x,y\}$ و $c(x,u) = ۴$ و $c(x,w) = ۳$ و $c(v,y) = ۱$ و $c(u,y) = ۷$ و $c(w,x) = ۲$ و $c(x,v) = ۳$ و $c(w,y) = ۲$ و دیگر ظرفیتها برابر صفر هستند.

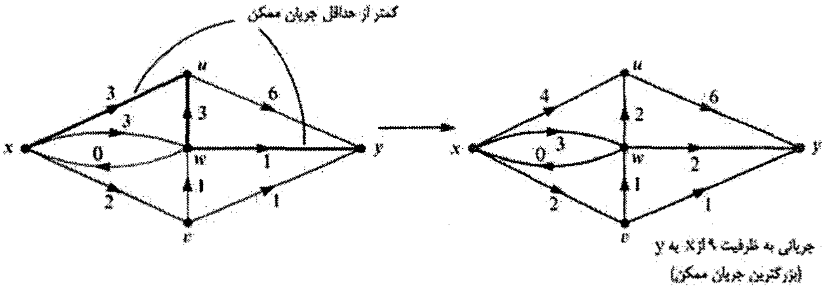


می‌توانید شبکه را به عنوان شبکه‌ای از لوله‌های آب فرض کنید که در یالهای آنها حداکثر به مقدار ظرفیتشان آب جریان دارد و آب تنها در جهت نشان داده شده در هر یال می‌تواند حرکت کند. اکنون شما می‌توانید مفهوم جریان را در مورد شبکه‌ها درک کنید. مثلاً:

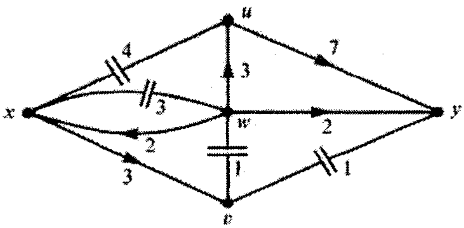


یک جریان به اندازهٔ ۸ از x به y برقرار است که دارای این ویژگیها می‌باشد: در x از کل یالها جریان ۸ خارج می‌شود و در y نیز کل جریان وارد می‌شود. در هیچ یک از رئوس دیگر جریان هدر نمی‌رود. یعنی جریان ورودی با جریان خروجی برابر است. مسلماً جریان برقرار شده در یک یال همیشه از ظرفیت آن کمتر است. امّا این جریان بزرگترین جریان ممکن از x به y نیست: اگر شما از مسیر x,u,w,y (بدون در نظرگرفتن جهت یالها) حرکت کنید، در طول مسیر، جریان عبوری برخی یالها در جهت مخالف و همچنین برخی یالها در جهت موافق کمتر از ظرفیت آن

یالها است. چنین مسیری را یک «مسیر افزایشی» می‌نامیم. چون اگر در طول حرکت در مسیر مقدار جریان در یالهای با جهت موافق جهت حرکت را یک واحد افزایش داده و مقدار جریان در یالهای با جهت مخالف جهت حرکت را یک واحد کم کنیم، آنگاه در کل شبکهٔ جریان، یک واحد به اندازهٔ جریان اضافه می‌شود:



با بازگشتن به شبکهٔ اصلی به طور واضح می‌بینیم که می‌توان با بریدن تعدادی از یالها از برقراری هرگونه جریان بین x و y جلوگیری کرد. مثلاً ساده‌ترین راه، بریدن تمام یالهای خروجی از x است که عبارتند از xu, xv, xw که جمع ظرفیت آنها برابر ۱۰ = ۴ + ۳ + ۳ است. البته امکان دارد که یک برش دیگر از یالها موجود باشد که دارای مجموع ظرفیت کمتر باشد. مثلاً ما با قطع یالهای xu و xw و wv و vy هرگونه جریانی از x به y را قطع خواهیم کرد و از طرفی مجموع ظرفیت یالهای قطع شده برابر ۹ = ۱ + ۱ + ۴ + ۳ خواهد بود. همچنین هیچ‌گونه مجموعهٔ دیگری از یالها نمی‌توان یافت که با قطع آنها تمام جریانهای بین x و y قطع شود (اینگونه مجموعه‌ای را یک «برش» می‌نامیم) و مجموع ظرفیت آنها (ظرفیت برش) کمتر از ۹ باشد.



در حالت کلی، در شبکه $N = (V, c)$ داده شده، جریان یال vw یک عدد $f(vw)$ است که $0 \leqslant f(v,w) \leqslant c(v,w)$. می‌توان فرض کرد که جریان عبارت است از مقدار مایعی که در یک لوله حرکت می‌کند و بیشتر از ظرفیت لوله نمی‌تواند باشد. ما مواردی را بررسی می‌کنیم که $f(v,w)$ مانند $c(v,w)$ یک عدد طبیعی یا صفر است. اگر در کل یک جریان در شبکه داشته باشیم، باید:

الف) جریان ورودی به x صفر باشد.

ب) جریان خروجی از y صفر باشد.

ج) برای هر رأس غیر از x و y جریان ورودی و خروجی برابر باشد.

آنگاه تابع f (از $V\times V$ به اعداد صحیح نامنفی) یک «جریان» از x به y نامیده می‌شود. همچنین x «منبع» جریان و y «مخزن» نامیده می‌شود. به راحتی می‌توان دید که جریان خروجی از x با جریان ورودی به y برابر است. این عدد را «اندازهٔ جریان» می‌نامیم. واضح است که در یک شبکه می‌توان یک جریان از x به y با اندازهٔ صفر پیدا کرد. (اگر جریان هر یال را برابر صفر قرار دهیم.) همچنین یک برش جداکننده x از y عبارت است از مجموعه‌ای از یالها که با قطع کردن آنها هیچ‌گونه جریانی از x به y برقرار نشود. «ظرفیت برش» برابر مجموع ظرفیت‌های یالهای یک برش است. در مثال بالا بزرگترین اندازهٔ جریان از x به y برابر با کمترین ظرفیت برش یعنی ۹ می‌باشد که البته یک نتیجهٔ اتفاقی نیست. این نتیجه به صورت کلی‌تر اولین بار توسط «فورد[1]» و «فولکرسون[2]» در سال ۱۹۵۶ اثبات شد:

قضیه (جریان بیشینه ـ برش کمینه): میان هر دو رأس x و y از یک شبکه داریم:

بیشترین اندازهٔ یک جریان از x به y = کمترین ظرفیت یک برش جداکنندهٔ x از y

اثبات: $N=(V,c)$ را یک شبکه فرض می‌کنیم و α را کمترین مقدار ظرفیت ممکن برای یک برش جداکنندهٔ x از y و β را بیشترین جریان از x به y فرض می‌کنیم. اگر یک برش با ظرفیت k داشته باشیم آنگاه با برداشتن آنها همهٔ جریانها قطع می‌شود. مسلم است که اگر این یالها را به شبکه برگردانیم، حداقل به مقدار k به اندازهٔ جریان که صفر بود اضافه می‌شود. پس در هر صورت ظرفیت یک برش از اندازهٔ هر جریان بیشتر و یا با آن مساوی است و در حالت خاص، کمترین ظرفیت برش بزرگتر یا مساوی با بزرگترین اندازهٔ جریان است. یعنی $\alpha\geqslant\beta$.

برای اثبات اینکه $\beta\geqslant\alpha$ می‌خواهیم با استفاده از استقراء روی n، نشان دهیم برای هر مقدار $0\leqslant n\leqslant\alpha$، یک جریان با مقدار اندازهٔ n وجود دارد. در نتیجه یک جریان با اندازهٔ α نیز

1) L. R. Ford 2) D. R. Fulkerson

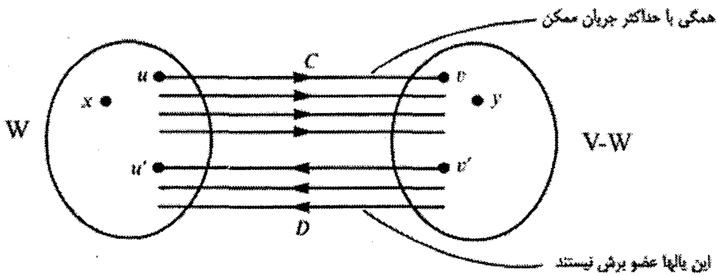
وجود خواهد داشت. بنابراین β که اندازهٔ بزرگترین جریان است از α ناکمتر است. واضح است که یک جریان با اندازهٔ صفر وجود دارد. فرض می‌کنیم $\circ \leqslant n < \alpha$ و یک جریان با اندازهٔ n داریم. نشان می‌دهیم که جریانی به اندازهٔ $n + ۱$ وجود دارد. W را مجموعه‌ای از رئوس در نظر می‌گیریم که برای هر رأسی از آن (مثل w) یک مسیر افزایشی از x به w وجود داشته باشد. یعنی دنباله‌ای از رئوس به صورت زیر داشته باشیم:

$$x = x_\circ, x_۱, x_۲, \ldots, x_{m-۱}, x_m = w$$

با این ویژگی که برای هر $\circ \leqslant i \leqslant m$:

$$\underbrace{f(x_i, x_{i+۱}) < c(x_i, x_{i+۱})}_{\text{اگر یال } x_ix_{i+۱} \text{ هم جهت با مسیر کلی جریان باشد}} \qquad \text{یا} \qquad \underbrace{f(x_{i+۱}, x_i) > \circ}_{\text{اگر یال } x_ix_{i+۱} \text{ دارای جهت مخالف با مسیر کلی جریان باشد}}$$

اثبات می‌کنیم که $y \in W$. فرض می‌کنیم این گونه نباشد و مجموعه‌های W و $V - W$ را در نظر می‌گیریم: C را مجموعه‌ای از یالهای بین W و $V - W$ در نظر می‌گیریم که جهت آنها از W به $V - W$ باشد. واضح است که مجموعهٔ C یک برش جداکنندهٔ x از y است.



طبق تعریف W که در بالا ارائه شد امکان ندارد از یک مسیر افزایشی از یک رأس در W به رأسی در $V - W$ رفت. بنابراین برای هر یال uv در C داریم: $f(u, v) = c(u, v)$ و برای هر یال $u'v'$ در D داریم: $f(u', v') = \circ$.

با کمی تأمل می‌توان نتیجه گرفت که اندازهٔ جریان (که اکنون برابر n می‌باشد و کمتر از α است) برابر مجموع ظرفیت‌های یالهای C می‌باشد. طبق آنچه در بالا گفتیم C یک برش از W

به $V - W$ است که ظرفیت کمتر از α دارد و این مخالف کمینه بودن α است. در نتیجه $y \in W$. پس طبق تعریفِ W یک مسیر افزایشی از x به y وجود دارد که شامل دنباله‌ای از رئوس به صورت $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m = y$ است بطوری که برای هر $0 \leqslant i \leqslant m$:

$$f(x_i, x_{i+1}) < c(x_i, x_{i+1}) \qquad \text{یا} \qquad f(x_{i+1}, x_i) > 0$$

حال تغییرات زیر را بر روی یالهای مسیر مفروض انجام می‌دهیم:

اگر $f(x_{i+1}, x_i) > 0$ آنگاه در این یال جریان را یک واحد افزایش می‌دهیم.

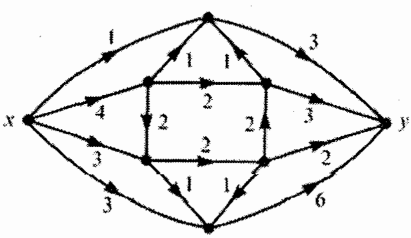
اگر $f(x_i, x_{i+1}) < c(x_i, x_{i+1})$ آنگاه در این یال جریان را یک واحد کاهش می‌دهیم.

به سادگی می‌توان بررسی کرد که یک جریان جدید f' از x به y با اندازهٔ جریان $n + 1$ را می‌توان با این روش تولید کرد.

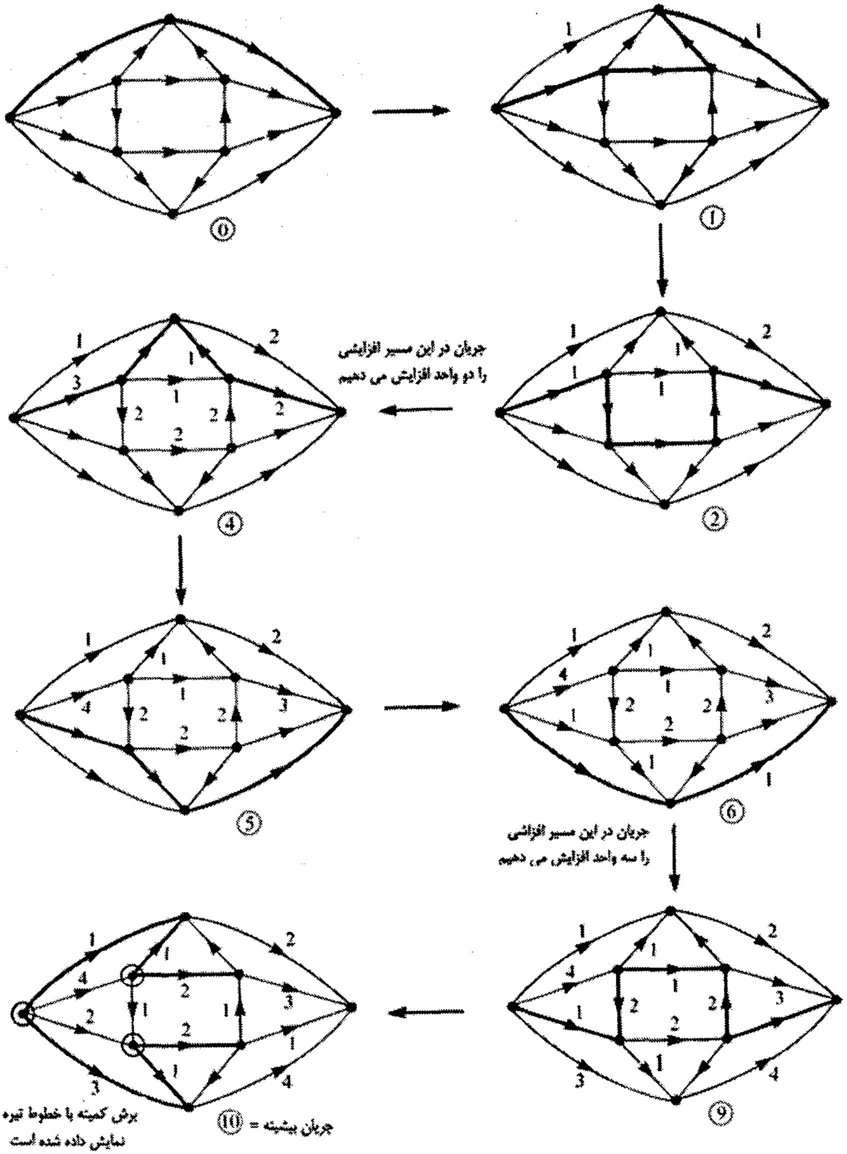
پس ما ثابت کردیم برای هر $0 \leqslant n \leqslant \alpha$، جریانی با اندازهٔ n وجود دارد. نتیجه آنکه جریانی با اندازهٔ α خواهیم داشت. پس چون β بیشترین اندازهٔ جریان ممکن است داریم $\beta \geqslant \alpha$. و با توجه به عبارت $\beta \leqslant \alpha$ که قبلاً اثبات کرده بودیم نتیجه می‌گیریم که $\alpha = \beta$. □

الگوریتم استفاده شده در اثبات قضیه این اهمیت را دارد که برای هر دو رأس در یک شبکه به ما این امکان را می‌دهد که با استفاده از آن یک جریان بیشینه و یا یک برش کمینه را پیدا کنیم.

مثال: در شبکه نشان داده شده یک جریان بیشینه از x به y پیدا کنید.



راه حل: از یک جریان به اندازهٔ صفر آغاز می‌کنیم و در هر مرحله (تا پایان الگوریتم) یک مسیر افزایشی در یالها پیدا می‌کنیم که اندازهٔ کل جریان را افزایش دهد و در شکل بعد همین روند را ادامه می‌دهیم.



در شکل نهایی هیچ مسیر افزایشی از x به y وجود ندارد. مجموعهٔ W (با تعریفی که در اثبات قضیه قبل ارائه کرده بودیم) با رئوس حلقه‌دار در شکل نهایی نشان داده شده است. پس جریان بیشینه به مقدار ۱۰، برابر با کمترین ظرفیت برش یعنی ۱۰ می‌باشد که این برش با یالهای تیره‌تر از W به $V - W$ نشان داده شده است. □

در این قسمت بحث در مورد قضایای کمبیشینه به پایان رسید. به سادگی می‌توان متوجه شد که هر یک از موضوعهای مورد بحث ما کاملاً به هم مرتبط هستند. مثلاً ما از قضیهٔ هال برای اثبات قضیهٔ کونیگ ـ اگروری که حالت خاصی از قضیهٔ منگر است استفاده کردیم. همچنین قضیهٔ جریان بیشینه و برش کمینه حالت تعمیم یافته وزن‌دار قضیهٔ منگر است. دو نمونهٔ دیگر از این روابط را در تمرینها خواهید یافت. برای بررسی دقیق‌تر قضایای کمبیشینه می‌توانید به کتاب «The equivalence of some combinatorial matching theorems» نوشتهٔ «P.F. Reichmeider» رجوع کنید.

«تمارین»

۱) $G=(V_1,E,V_2)$ یک گراف دو بخشی است. با استفاده از قضیهٔ کونیگ ـ اگروری ثابت کنید:

بیشترین تعداد یالهای یک تطابق = کمترین تعداد رئوسی که هر یال گراف حداقل شامل یکی از این رئوس باشد (ر)

۲) $G=(V_1,E,V_2)$ یک گراف دو بخشی است که برای هر $W\subseteq V_1$، $j(W)$ را تعداد اعضای V_2 که به حداقل یک رأس از W متصل هستند تعریف می‌کنیم. نشان دهید بیشترین تعداد یالهای یک تطابق برابر است با

$$\min_{W\subseteq V_1}\{|V_1|-|W|+|j(W)|\}$$ (ر)

۳) قضیهٔ هال را با استفاده از قضیهٔ کونیگ ـ اگروری ثابت کنید. (ر)

۴) (صورت یالی از قضیهٔ منگر) $G=(V,E)$ یک گراف است و x و y دو رأس از آن هستند. یک مجموعه از یالها را جداکنندهٔ x از y می‌نامیم اگر هر مسیر از x به y شامل حداقل یک یال از آن مجموعه باشد. قضیهٔ برش کمینه ـ جریان بیشینه را به کار برده و ثابت کنید حداقل تعداد یالهای جداکنندهٔ x از y برابر حداکثر تعداد مسیرهای مجزا از x به y است. (ر)

۱۰

روابط بازگشتی

در این فصل ما به طرح شیوهٔ دیگری برای محاسبه و شمارش ترکیبهای مختلف و انتخابهایی از اشیاء متفاوت می‌پردازیم. امّا این بار از روش مستقیم استفاده نمی‌کنیم بلکه پاسخهای خود را با توجه به حالتهای قبلی و کوچکتر بدست می‌آوریم.

مثال: دنبالهٔ فیبوناچی به این صورت است: $\circ, ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, \ldots$ که به جز دو جملهٔ اول، هر جملهٔ آن حاصل جمع دو جملهٔ قبلی خود است:

$$F_{\circ} = \circ \qquad F_{۱} = ۱ \qquad n > ۲ : F_n = F_{n-۱} + F_{n-۲}$$

این رابطه یک دنباله را به صورت یکتا تعیین می‌کند و به شما این توانایی را می‌دهد که هر جملهٔ دلخواه این دنباله را محاسبه کنید. و البته اگر شما فرمولی (مستقیم) برای محاسبهٔ F_n دارید می‌توانید درستی آن را بوسیلهٔ شرایط بالا تحقیق کنید. مثلاً به عنوان تمرین می‌توانید نشان دهید فرمول زیر در دنبالهٔ فیبوناچی صدق می‌کند:

$$F_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\Big((\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^n - (\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})^n\Big)$$

و به این ترتیب یک فرمول صریح برای F_n پیدا می‌شود. امّا هنوز نمی‌دانیم که چطور روابط بین جملات دنباله چنین فرمولی به ما می‌دهد.

مثال: در فصل اول با مثلث خیام آشنا شدیم:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & & & & & \searrow \; \swarrow & & & & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

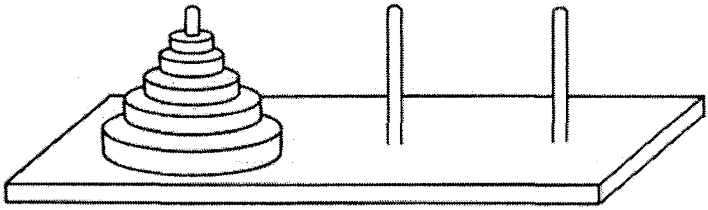
ابتدا درایهٔ سطر اول را به صورت $p_{00} = 1$ تعریف می‌کنیم. در سطر بعدی p_{01} و p_{10}، در سطر بعدی p_{02} و p_{11} و p_{20} و بطور کلی در هر سطر اعداد $p_{0n}, p_{1,n-1}, \ldots, p_{n-1,1}$ و p_{n0} را داریم. البته ما می‌دانیم که درایه‌های مثلث خیام ضرایب دوجمله‌ای هستند. امّا اکنون این موضوع را نادیده می‌گیریم و فرض می‌کنیم تنها مثلث خیام به ما داده شده است و از شما می‌خواهند مقدار p_{ij} را بطور صریح بدست آورید. مطمئناً برای مقادیر معلوم i و j این کار ساده است امّا منظور بدست آوردن آن برای هر مقدار i و j است. بعد از سطر دوم هر جمله از جمع کردن دوجملهٔ بالایی خود بدست می‌آید. یعنی داریم: $p_{ij} = p_{i-1,j} + p_{i,j-1}$ و $p_{n0} = p_{0n} = 1$ این رابطه‌ها مطمئناً به شما توانایی محاسبهٔ هر درایهٔ دلخواه از مثلث را می‌دهد. مثلاً

$$p_{22} = p_{12} + p_{21} = (p_{02} + p_{11}) + (p_{11} + p_{20}) = 2(p_{11} + 1) = 2(p_{10} + p_{01} + 1) = 6$$

این بار نیز مانند مثال قبلی اگر فرمولی برای p_{ij} سراغ دارید، باامتحان کردن آن در شرایط بالا می‌توانید صحت آن را بررسی کنید. امّا بدون روشهای جدیدی که در این فصل ارائه می‌دهیم روابط بالا کمکی برای پیدا کردن فرمول عمومی p_{ij} به ما نمی‌کنند. □

در همهٔ مثالهای بالا چند جملهٔ ابتدایی یک دنباله به شما داده شده است و یک فرمول به شما می‌گوید که چطور جملات بعدی را برحسب جملات قبلی محاسبه کنید این روش تعریف جملات را روش «بازگشتی» و رابطهٔ بدست آمده را «رابطهٔ بازگشتی» می‌نامند. در برخی موارد می‌توان روابط بازگشتی را حل نمود، به این معنی که می‌توان فرمول صریح و مستقل از دیگر جملات برای هر جمله بدست آورد. در این فصل ما راهکارهای مختلفی برای حل روابط بازگشتی در ضمن مثالها ارائه خواهیم کرد. دو مثال بعدی نمونه‌های ساده‌ای می‌باشند. چون در رابطهٔ بازگشتی آن هر جمله تنها از جملهٔ ما قبل خود استفاده می‌کند. (یعنی a_n برحسب n و a_{n-1} قابل بیان است)

مثال: (**برج هانوی**) در این مسألهٔ مشهور (که به برج برهما نیز شهرت دارد) به شما یک تخته با سه میله داده می‌شود: در میلهٔ اول n حلقه که قطر آنها از بالا به پایین افزایش پیدا می‌کند، وجود دارد و در دو میلهٔ دیگر (همانطورکه در شکل زیر می‌بینید) حلقه‌ای وجود ندارد.



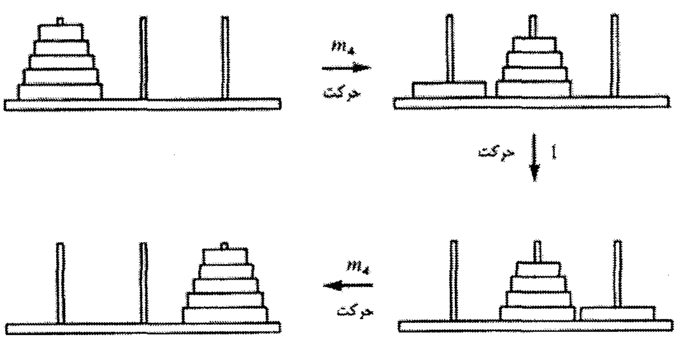
وظیفهٔ شما این است که حلقه‌ها را از میلهٔ اول به میلهٔ سوم انتقال دهید با این شرایط که:

الف) در هر حرکت تنها یک مهره جابجا شود و از یک میله به میلهٔ دیگر منتقل شود.

ب) در هیچ زمانی نباید مهرهٔ بزرگتری روی مهرهٔ کوچکتر از خود قرار گیرد.

کمترین تعداد حرکت مورد نیاز برای انتقال n مهره چقدر است؟

راه حل: m_n را کمترین تعداد حرکت لازم برای انتقال n مهره تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم شما مقدار $m_۴$ را بدست آورده و حالا سعی می‌کنید $m_۵$ را بدست بیاورید و ۵ مهره را انتقال دهید. شما می‌توانید با $m_۴$ حرکت چهار مهرهٔ بالایی را به حلقهٔ وسط انتقال دهید. در یک حرکت مهرهٔ پنجم که بزرگترین مهره است را در میلهٔ سوم بگذارید و با $m_۴$ حرکت دیگر مهره‌های میلهٔ وسط را روی میلهٔ سوم قرار دهید:



از طرفی شما برای انتقال پنج مهره مجبورید چهار مهره روی مهرهٔ پنجم را ابتدا بردارید و بعد مهرهٔ پنجم را به میلهٔ سوم برده و سپس چهار مهرهٔ بعدی را روی آن بچینید. در نتیجه حداقل

به $۲m_۴ + ۱$ حرکت برای انتقال پنج مهره نیاز است. بنابراین $m_۵ = ۲m_۴ + ۱$. به همین صورت می‌توان این روش را برای n اجرا کرد و دنباله بازگشتی زیر را بدست آورد:

$$m_۱ = ۱ \ : \ m_n = ۲m_{n-۱} + ۱ \qquad n > ۱$$

و با این شیوه می‌توان اعداد دنباله را به صورت دنبالهٔ $۱, ۳, ۷, ۱۵, ۳۱, ۶۳$ بدست آورد. به راحتی می‌توانید فرمولی برای m_n حدس بزنید: $m_n = ۲^n - ۱$. از آنجا که رابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ مذکور را به طور یکتا مشخص می‌کند و این دنباله فرمول فوق را تأیید می‌کند، می‌توانیم درستی حدس خود را بررسی کنیم. با استفاده از جایگزینی فرمول در دنبالهٔ بازگشتی بالا:

$$m_۱ = ۲^۱ - ۱ = ۱$$
$$m_n = ۲(m_{n-۱}) + ۱ = ۲(۲^{n-۱} - ۱) + ۱ = ۲^n - ۱$$

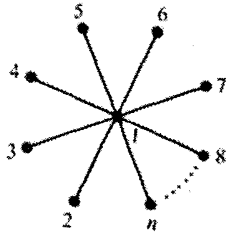
بنابراین حداقل تعداد حرکتهای لازم برای انتقال n مهره در برج هانوی برابر $۲^n - ۱$ می‌باشد. □

مثال: در فصل ۲ ما از ضرایب چند جمله‌ای در «قضیهٔ کیلی» استفاده کردیم تا ثابت کنیم تعداد درختهای فراگیر یک گراف K_n برابر $n^{n-۲}$ است. اکنون ما با یک روش جدید (که می‌توانید آن را در کتاب «Introduction to graph theory» اثر «R.J. Wilson» ببینید) با استفاده از رابطهٔ بین درخت‌های فراگیری که درجهٔ یک رأس آن یک عدد مشخص است را ارائه می‌کنیم. t_k را تعداد درختهایی با مجموعهٔ رئوس $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ فرض می‌کنیم که رأس ۱ به همهٔ رئوس غیر از k رأس متصل است. (پس درجهٔ رأس ۱ برابر $n - k - ۱$ است). می‌توان نشان داد که:

$$t_k = \frac{(n-k-۱)(n-۱)}{k} t_{k-۱} \qquad (۰ < k < n-۱).$$

یک فرمول صریح برای t_k پیدا کنید و ثابت کنید:

$$t_۰ + t_۱ + \cdots + t_{n-۲} = n^{n-۲}$$



راه حل: ابتدا توجه کنید که $t_۰$ برابر تعداد همهٔ درخت‌هایی است که همهٔ دیگر رئوس به رأس ۱ متصل هستند. واضح است که تنها یک درخت با چنین خاصیتی وجود دارد.

با استفاده از این نکته که $t_\circ = ۱$ و چون رابطهٔ بازگشتی مقدار t_k را برحسب $t_{k-۱}$ می‌دهد پس مقادیر $t_۱, t_۲, \ldots, t_{n-۲}$ به ترتیب معلوم می‌شوند. با به کار بردن فرمول اولیه برای هر t_k و تکرار آن برای $t_{k-۱}$ و ... تا $t_۱$ داریم:

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{(n-k-۱)(n-۱)}{k} t_{k-۱} = \frac{(n-k-۱)(n-k)(n-۱)^۲}{k(k-۱)} t_{k-۲} \\ &= \frac{(n-k-۱)(n-k)(n-k+۱)(n-۱)^۳}{k(k-۱)(k-۲)} t_{k-۳} \\ &\vdots \\ &= \frac{(n-k-۱)(n-k)(n-k+۱)\ldots(n-۲)(n-۱)^k}{k(k-۱)(k-۲)\ldots \times ۱} t_\circ \\ &= \binom{n-۲}{k}(n-۱)^k. \end{aligned}$$

و با استفاده از این فرمول برای هر t_k داریم:

$$t_\circ + t_۱ + t_۲ + \cdots + t_{n-۲} = \binom{n-۲}{\circ}(n-۱)^\circ + \binom{n-۲}{۱}(n-۱) + \binom{n-۲}{۲}(n-۱)^۲ + \cdots + \binom{n-۲}{n-۲}(n-۱)^{n-۲} = n^{n-۲} \qquad \square$$

در دو مثال قبلی رابطهٔ بازگشتی تنها شامل یک جملهٔ قبل بود. اکنون به مثال‌هایی می‌پردازیم که مانند دنبالهٔ فیبوناچی شامل دو جملهٔ قبل از خود هستند:

قضیه: مقادیر $a_\circ$ و $a_۱$ داده شده‌اند و دنبالهٔ $a_\circ, a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ با رابطهٔ:

$$n > ۱ \qquad a_n = Aa_{n-۱} + Ba_{n-۲}$$

تعریف می‌شود، که A و B اعداد ثابتی هستند. α و β را ریشه‌های معادلهٔ کمکی $X^۲ - AX - B = \circ$ قرار می‌دهیم داریم:

الف) اگر $\alpha \neq \beta$ آنگاه اعداد ثابت c, d وجود دارند که: $\qquad a_n = c\alpha^n + d\beta^n \qquad n \geqslant \circ$

ب) اگر $\alpha = \beta$ آنگاه اعداد ثابت d, c وجود دارند که: $\qquad a_n = (c + dn)\alpha^n \qquad n \geqslant \circ$

اثبات: ما حالت (الف) را اثبات می‌کنیم (حالت (ب) نیز مشابه آن است و به عنوان تمرین به شما واگذار می‌شود). و این بسیار ساده است که بررسی کنیم اگر d و c داده شده باشند آنگاه

فرمول داده شده شرط $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$ را برآورده می‌سازد. چون داریم:

$$\begin{aligned} a_n &= Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = A(c\alpha^{n-1} + d\beta^{n-1}) + B(c\alpha^{n-2} + d\beta^{n-2}) \\ &= c\alpha^{n-2}(\underbrace{A\alpha + B}_{=\alpha^2}) + d\beta^{n-2}(\underbrace{A\beta + B}_{=\beta^2}) \\ &= c\alpha^n + d\beta^n \end{aligned}$$

مراحل اصلی و کلی این اثبات وابسته به این حقیقت هستند که اعداد β و α ریشه‌های معادلهٔ $X^2 - AX - B$ هستند. امّا مقادیر d و c را باید با به کار بردن فرمول مذکور برای حالت $n = 0$ و $n = 1$ بدست بیاوریم و یک دستگاه تشکیل دهیم:

$$\begin{cases} n = 0 \quad : \quad a_0 = c + d \\ n = 1 \quad : \quad a_1 = c\alpha + d\beta \end{cases}$$

و تا وقتی که داریم $\alpha \neq \beta$ دستگاه بالا قابل حل است.

با حل این دستگاه جواب یکتا برای c و d بدست می‌آید و فرمول داده شده، تمام جملات a_n که $n \geqslant 0$ را تولید می‌کند.

مثال: فرمولی صریح برای دنبالهٔ فیبوناچی پیدا کنید:

راه حل: می‌دانیم که $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$ و برای $n \geqslant 2$: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ پس این رابطهٔ بازگشتی یک معادلهٔ کمکی به صورت $x^2 - x - 1 = 0$ دارد، که ریشه‌های آن اعداد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ هستند. با استفاده از قضیه فوق می‌توانیم نتیجه بگیریم که اعداد F_n به صورت

$$F_n = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

هستند. برای پیدا کردن مقادیر d و c مقادیر $n = 0$ و $n = 1$ را در معادلهٔ فوق قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} F_0 = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = c + d = 0 \\ F_1 = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

از حل این دستگاه داریم: $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و $d = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ و از آنجا داریم:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

همانطور که قبلاً نیز آن را بدست آورده بودیم. □

قضیه قبل و یک تعمیم ساده از آن به ما توانایی آن را می‌دهد که به حل روابط بازگشتی‌ای بپردازیم که در آن هر جمله به صورت مجموع ضرایبی از جملات ما قبل خود بیان شده است امّا دنباله‌هایی که با روابط بازگشتی جالب در ترکیبیات با آنها مواجه می‌شویم کمتر به صراحت و سادگی دنباله‌های مذکور هستند. در مثال بعدی با یکی دیگر از شیوه‌های حل روابط بازگشتی آشنا می‌شویم که می‌تواند راه حل بخش وسیعی از انواع دنباله‌های بازگشتی را در بر بگیرد. به عنوان نمونه در این مثال به وسیلهٔ این شیوه یک فرمول دیگر برای دنبالهٔ فیبوناچی بدست می‌آوریم:

مثال: $F_۰, F_۱, F_۲, \ldots$ را دنبالهٔ فیبوناچی در نظر می‌گیریم و تابع $f(x)$ را به صورت

$$f(x) = F_۰ + F_۱x + F_۲x^۲ + \cdots + F_kx^k + \ldots$$

تعریف می‌کنیم نشان دهید که $f(x) = \dfrac{x}{۱ - x(x+۱)}$ سپس F_n را به صورت مجموعی از ضرایب بسط دوجمله‌ای بدست بیاورید:

راه حل: شاید به عنوان یک ریاضیدان در مورد همگرایی سری فوق و مقادیری از x که تابع $f(x)$ را خوش تعریف می‌کند آگاهی داشته باشید. امّا اکنون هدف ما بررسی این موارد نیست. تابع f را «تابع مولد» دنبالهٔ $F_۰, F_۱, F_۲, \ldots$ می‌نامیم. این تعریف برای بیان جبری دنباله و فهم این مطلب است که این تابع در دامنهٔ تعریف خود (هر جا که باشد) همگرا است و شاخص x^n تنها به عنوان یک مکان برای قرار دادن ضریب x^n می‌باشد. (در حقیقت در توابع مولد تنها ضرایب برای ما مهم هستند و چون می‌خواهیم تمام یک دنبالهٔ بی‌نهایت جمله‌ای را به شکل کوتاه بنویسیم و از طرفی جملات آن نیز با هم تداخل نکنند آنها را ضرایب جملات متمایز x^k قرار می‌دهیم و به این ترتیب تابع مولد ساخته می‌شود و همراه با کار بر روی ضرایب جملات متغیر x را نیز دخالت می‌دهیم.) با در نظر داشتن این نکات می‌بینیم که:

$$\begin{aligned}
f(x) &= F_۰ + F_۱x + F_۲x^۲ + F_۳x^۳ + \ldots,\\
xf(x) &= \qquad\quad F_۰x + F_۱x^۲ + F_۲x^۳ + \ldots,\\
x^۲f(x) &= \qquad\qquad\qquad F_۰x^۲ + F_۱x^۳ + \ldots.
\end{aligned}$$

از آنجا که $F_۲ = F_۱ + F_۰$ و $F_۳ = F_۲ + F_۱, \ldots, F_k = F_{k-۱} + F_{k-۲}$، با کم کردن سطر دوم و سوم از سطر اول داریم:

$$f(x)(۱ - x(۱+x)) = f(x) - xf(x) - x^۲f(x) = F_۰ + (F_۱ - F_۰)x = x$$

از طرفی می‌دانیم سری گستردهٔ $\frac{1}{1-y}$ به صورت زیر است:

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots + y^k + \ldots$$

با قرار دادن $y = x(1+x)$ داریم:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x(1+x)} = x + x^2(1+x) + x^3(1+x)^2 + x^4(1+x)^3 + \ldots$$

از طرفی F_n برابر ضریب x^n در عبارت بالا می‌باشد. یعنی برای یافتن ضریب x^n در $f(x)$ و مقدار F_n باید ضریب x^n را در هر یک از عبارات بالا که به صورت $x^{k+1}(1+x)^k$ است محاسبه کنیم. می‌دانیم که ضریب x^n در این عبارت برابر ضریب x^{n-k-1} در عبارت $(1+x)^k$ است که طبق بسط دوجمله‌ای برابر $\binom{k}{n-k-1}$ است. بنابراین این مجموع به صورت زیر در می‌آید که نشان دهندهٔ ضریب x^n در $f(x)$ است.

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots$$

(از جایی به بعد جملات همگی برابر صفر می‌شوند) □

در مورد هر دنباله از اعداد به صورت $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ «تابع مولد» این دنباله به صورت

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \ldots$$

تعریف می‌شود. در مثال قبل کاربرد این نوع تابع را برای حل روابط بازگشتی دیدیم. چند مثال بعدی پر کاربرد بودن این ابزار محاسباتی را نشان می‌دهند:

مثال: N یک عدد صحیح و مثبت است و برای هر $0 \leqslant n \leqslant N$ تعریف می‌کنیم:

$$a_n = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{N}{n}$$

با استفاده از روش تابع مولد، مقدار a_n را به صورت یک ضریب دوجمله‌ای نمایش دهید:

راه حل: ما یک اتحاد برای ضرایب چند جمله‌ای در فصل اول داشتیم که می‌توانیم با استفاده از آن مقادیر a_n را بدست آوریم، امّا چون می‌خواهیم کاربرد تابع مولد را نشان دهیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

فرض می‌کنیم دنبالهٔ $a_۰, a_۱, a_۲, \ldots$ ساخته شده است. یک تابع مولد برای دنباله تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A(x) &= a_۰ + a_۱ x + a_۲ x^۲ + a_۳ x^۳ + \ldots \\ &= \tbinom{۰}{۰} + \tbinom{۱}{۰} + \tbinom{۲}{۰} + \tbinom{۳}{۰} + \tbinom{۴}{۰} + \ldots + \tbinom{N}{۰} \\ &\quad + \tbinom{۱}{۱}x + \tbinom{۲}{۱}x + \tbinom{۳}{۱}x + \tbinom{۴}{۱}x + \ldots + \tbinom{N}{۱}x \\ &\quad + \tbinom{۲}{۲}x^۲ + \tbinom{۳}{۲}x^۲ + \tbinom{۴}{۲}x^۲ + \ldots + \tbinom{N}{۲}x^۲ \\ &\quad + \tbinom{۳}{۳}x^۳ + \tbinom{۴}{۳}x^۳ + \ldots + \tbinom{N}{۳}x^۳ \\ &\qquad \ddots \qquad \vdots \\ &\quad + \tbinom{N}{N}x^N . \end{aligned}$$

می‌بینیم که هر ستون از این عبارت، خود یک بسط دوجمله‌ای است. پس اگر مقادیر موجود در هر ستون را با هم جمع کنیم به تساوی زیر خواهیم رسید:

$$A(x) = ۱ + (۱ + x) + (۱ + x)^۲ + (۱ + x)^۳ + \cdots + (۱ + x)^N$$

حال کافی است مجموع فوق را بدست بیاوریم. چون یک تصاعد هندسی است داریم:

$$A(x) = \frac{(۱ + x)^{N+۱} - ۱}{(۱ + x) - ۱} = \frac{(۱ + x)^{N+۱} - ۱}{x}$$

پس مقدار a_n برابر ضریب x^n در عبارت فوق است که برابر است با ضریب $x^{n+۱}$ در عبارت $(۱ + x)^{N+۱} - ۱$ که با توجه به بسط دوجمله‌ای، برابر $\binom{N+۱}{n+۱}$ است یعنی $a_n = \binom{N+۱}{n+۱}$. □

مثال: الف) نشان دهید مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ به $۲^{n-۱} - ۱$ طریق می‌تواند به دو مجموعهٔ ناتهی افراز شود.

ب) s_n را تعداد افرازهای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ به سه مجموعه ناتهی تعریف می‌کنیم. برای مثال $s_۴ = ۶$ و این ۶ افراز به صورت زیر هستند:

$$\{۱\}\ \{۲\}\ \{۳, ۴\}, \qquad \{۱\}\ \{۳\}\ \{۲, ۴\}, \qquad \{۱\}\ \{۴\}\ \{۲, ۳\},$$
$$\{۲\}\ \{۳\}\ \{۱, ۴\}, \qquad \{۲\}\ \{۴\}\ \{۱, ۳\}, \qquad \{۳\}\ \{۴\}\ \{۱, ۲\}.$$

نشان دهید مقدار s_n با استفاده از فرمول بازگشتی زیر محاسبه می‌شود.

$$s_۰ = ۰ \ , \ s_۱ = ۰ \ , \ s_n = ۳s_{n-۱} + ۲^{n-۲} - ۱ \ (n > ۱)$$

سپس یک تابع مولد به کار برده و فرمول صریحی برای s_n بدست بیاورید.

راه حل: الف) هر یک از دو مجموعهٔ افراز هیچ اشتراکی ندارند. n را در مجموعهٔ اول قرار می‌دهیم. حال تعداد راههای افراز کردن $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n-۱, n\}$ به دو مجموعهٔ ناتهی برابر است با تعداد انتخابهای یک زیر مجموعهٔ ناتهی از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n-۱\}$ که به عنوان مجموعهٔ دوم افراز قرار گیرد و تعداد این انتخابها $۲^{n-۱} - ۱$ است. نام این مجموعه را E می‌گذاریم. حال افراز ما به صورت (E و $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\} - E$) است که دو مجموعهٔ ناتهی و غیر مشترکند.

ب) فرض می‌کنیم s_n تعداد افرازهای مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n-۱, n\}$ به سه مجموعه A و B و C باشد. دو حالت امکان دارد: یا یکی از آن مجموعه‌ها به صورت $A = \{n\}$ است یا نیست.

۱) اگر باشد کافی است مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n-۱\}$ را به دو مجموعهٔ B و C افراز کنیم که طبق قسمت (الف) به $۲^{n-۱} - ۱$ حالت امکان دارد.

۲) اگر یکی از مجموعه‌ها به صورت $\{n\}$ نباشد. پس مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n-۱\}$ را با $s_{n-۱}$ روش به سه مجموعهٔ C' و B' و A' افراز می‌کنیم و سپس هر بار عدد n را به یکی از این سه مجموعه اضافه می‌کنیم تا افرازهای زیر بدست بیایند:

$$A = A' \cup \{n\} \ , \ B = B' \ , \ C = C'$$
$$A = A' \ , \ B = B' \cup \{n\} \ , \ C = C'$$
$$A = A' \ , \ B = B' \ , \ C = C' \cup \{n\}$$

یعنی داریم: $s_n = ۲^{n-۲} - ۱ + ۳s_{n-۱}$

تابع مولد دنبالهٔ $s_۰, s_۱, s_۲, s_۳, \ldots$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s(x) = s_۰ + s_۱x^۱ + s_۲x^۲ + \cdots + s_kx^k + \ldots \qquad (۱)$$

بنابراین:

$$۳xs(x) = \quad ۳s_۰x + ۳s_۱x^۲ + ۳s_۲x^۳ + \cdots + ۳s_{k-۱}x^k + \ldots \qquad (۲)$$

از طرفی طبق رابطهٔ بازگشتی داریم: $s_۲ - ۳s_۱ = ۲^۰ - ۱$ و $s_۳ - ۳s_۲ = ۲^۱ - ۱$ و ...

در نتیجه از کم کردن مقدار $3xs(x)$ از $s(x)$ به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}(1-3x)s(x) =&s_0+(s_1-3s_0)x+(s_2-3s_1)x^2+\cdots+(s_k-3s_{k-1})x^k+\ldots\\ =&0+0\times x+(2^0-1)x^2+(2^1-1)x^3+\cdots+(2^{k-2}-1)x^k+\ldots\\ =&x^2(1+2x+(2x)^2+(2x)^3+\cdots+(2x)^{k-2}+\ldots)\\ &-x^2(1+x+x^2+\cdots+x^{k-2}+\ldots)\\ =&x^2(\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x})\end{aligned}$$

حال از تساوی فوق نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned}s(x)&=x^2(\frac{1}{(1-2x)(1-3x)}-\frac{1}{(1-x)(1-3x)})\\ &=x^2(\frac{3}{2(1-3x)}+\frac{1}{2(1-x)}-\frac{2}{1-2x})\end{aligned}$$

برای بدست آوردن s_n ضریب x^n در $s(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$s_n=\frac{3}{2}\times 3^{n-2}+\frac{1}{2}-2\times 2^{n-2}=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1-2^n)$$

(تعداد افرازهای مختلف مجموعهٔ $\{1,2,3,\ldots,n\}$ به k مجموعهٔ ناتهی با نماد $s(n,k)$ نشان داده می‌شود که از زمان ریاضیدان قرن هجدهم «جیمز استرلینگ[1]» به نام اعداد استرلینگ نوع دوم شناخته می‌شود. (دربارهٔ اعداد استرلینگ نوع اول و رابطهٔ بازگشتی مربوط به اعداد استرلینگ نوع دوم در تمارین پایان فصل مسائلی ارائه خواهیم کرد.) □

مثال: برای عدد $p_{i,j}$ در مثلث خیام که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند، فرمولی صریح بدست آورید:
$p_{0,n}=p_{n,0}=1\ ,\ \ p_{i,j}=p_{i-1,j}+p_{i,j-1}\quad (i,j>0)$

راه حل: در این مثال هدف ما پیدا کردن مستقیم جواب نیست. چون ما می‌دانیم: $p_{i,j}=\dfrac{(i+j)!}{i!j!}$ و می‌توانیم بررسی کنیم که این فرمول در رابطهٔ بازگشتی داده شده صدق می‌کند. امّا فرض می‌کنیم که هنوز فرمول فوق را نداریم و می‌خواهیم به روش توابع مولد آن را پیدا کنیم.

روشهای مختلفی برای پیدا کردن جملهٔ $p_{i,j}$ از مثلث خیام بوسیلهٔ توابع مولد وجود دارد. ما برای هر سطر یک تابع مولد تعریف می‌کنیم. به این ترتیب که برای هر $n\geqslant 0$ تعریف می‌کنیم:

$$f_n(x)=p_{n,0}+p_{n-1,1}x+p_{n-2,2}x^2+\cdots+p_{0,n}x^n$$

1) James Stirling

پس داریم:

$$f_1(x) = p_{1,0} + p_{0,1}x = 1 + x$$

و با استفاده از دنبالهٔ بازگشتی می‌بینیم که برای $n > 1$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= p_{n,0} \quad + \quad p_{n-1,1}x \quad + \quad p_{n-2,2}x^2 \quad + \cdots + \quad p_{0,n}x^n \\ &= 1 + (p_{n-1,0} + p_{n-2,1})x + (p_{n-2,1} + p_{n-3,2}x^2) + \cdots + 1x^n \\ &= (1+x)(p_{n-1,0} + p_{n-2,1}x + p_{n-3,2}x^2 + \cdots + p_{0,n-1}x^n) \\ &= (1+x)f_{n-1}(x) \end{aligned}$$

اکنون تابع $f_n(x)$ خود دارای یک دنبالهٔ بازگشتی با روابط زیر است:

$$f_1(x) = (1+x) \ , \ \ n > 1: \ f_n(x) = (1+x) \cdot f_{n-1}(x)$$

و از آنجا داریم:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (1+x)f_{n-1}(x) = (1+x)(1+x)f_{n-2}(x) = \ldots \\ &= (1+x)^{n-1}f_1(x) = (1+x)^n \end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم اگر $i + j = n$ باشد جملهٔ $p_{i,j}$ برابر ضریب x^j در عبارت $f_n(x)$ است: یعنی ضریب x^j در $(1+x)^n$ که برابر $\binom{i+j}{j}$ است. □

مثال: نشان دهید تعداد روشهای پرداخت n ریال برابر ضریب x^n در عبارت

$$((1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})(1-x^{50})(1-x^{100}))^{-1}$$

است. در ساختن n ریال از سکه‌های رایج ۱ و ۲ و ۵ و ۱۰ و ۲۰ و ۵۰ و ۱۰۰ ریالی استفاده می‌شود.

راه حل: تابع داده شده را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} &(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots) \\ &\times (1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + \ldots)(1 + x^{20} + x^{40} + x^{60} + \ldots) \\ &\times (1 + x^{50} + x^{100} + x^{150} + \ldots)(1 + x^{100} + x^{200} + x^{300} + \ldots) \end{aligned}$$

چگونه می‌توان مثلاً $x^{۲۱}$ را در این عبارت تولید کرد. چند روش برای این منظور عبارتند از:

$$x^{۲۱} \times ۱ \times ۱ \times ۱ \ldots \quad \text{یا} \quad x^{۱۹} \times x^{۲} \times ۱ \times ۱ \ldots \quad \text{یا}$$
$$x^{۱۱} \times x^{۱۰} \times ۱ \times ۱ \ldots \quad \text{یا} \quad x^{۱۱} \times ۱ \times ۱ \times x^{۱۰} \times ۱ \ldots$$

هر حاصل ضرب از هفت مؤلفه تشکیل شده است. اگر مؤلفهٔ اول x^a باشد یعنی a ریال از سکه‌های ۱ ریالی پرداخت کردیم. اگر مؤلفهٔ دوم x^b یعنی b ریال از سکه‌های ۲ ریالی و .... بنابراین حاصل ضرب مؤلفه‌های بالا نشان دهندهٔ مجموعه‌های زیر از سکه‌ها هستند.

۲۱ عدد یک ریالی یا ۱۹ عدد یک ریالی و ۱ عدد دو ریالی یا ۱۱ عدد یک ریالی و ۲ عدد پنج ریالی یا ۱۱ عدد یک ریالی و ۱ عدد ده ریالی و ...

با کمی تأمّل شما می‌توانید نشان دهید یک تناظر یک به یک میان تعداد روشهای بدست آوردن $x^{۲۱}$ در عبارت فوق و تعداد روشهای ساختن ۲۱ ریال با سکه‌های مذکور وجود دارد. یعنی ضریب $x^{۲۱}$ در عبارت مذکور برابر روشهای ساختن ۲۱ ریال با سکه‌های رایج است. البته این مسأله به همین صورت برای n ریال نیز درست است. □

مثال: d_n را تعداد روشهای بدست آوردن مجموع n از اعداد ظاهر شده در پرتابهای متوالی تاس تعریف می‌کنیم، مثلاً $d_۴ = ۸$ که پرتابهای مربوطه عبارتند از:

۴، ۲ + ۲، ۱ + ۳، ۳ + ۱، ۲ + ۱ + ۱، ۱ + ۲ + ۱، ۱ + ۱ + ۲، ۱ + ۱ + ۱ + ۱

نشان دهید مقدار d_n برابر ضریب x^n در عبارت زیر است:

$$(۱ - x - x^{۲} - x^{۳} - x^{۴} - x^{۵} - x^{۶})^{-۱}$$

راه حل: تفاوت چندان مهمی میان این مثال و مثال قبل وجود ندارد، ما در این مثال عبارت ۱ + ۲ + ۱ که مجموع چهار را تولید می‌کند با عبارت ۲ + ۱ + ۱ متفاوت در نظر گرفته می‌شود. در حالی که در مثال قبل برای ساختن چهار ریال از یک سهٔ دو ریالی و دو سکهٔ یک ریالی تفاوتی میان جایگاه قرار گرفتن سکه‌ها قائل نبودیم.

یک راه برای حل چنین مسأله‌ای پیدا کردن رابطهٔ بازگشتی برای دنبالهٔ $d_۰, d_۱, d_۲, \ldots$ و سپس به کار بردن تابع مولد $D(x)$ است. برای مثال به سادگی می‌توان دید که با استفاده از پرتابها داریم: $d_n = d_{n-۱} + d_{n-۲} + d_{n-۳} + d_{n-۴} + d_{n-۵} + d_{n-۶}$ و از این رابطه به همراه مقادیر اولیه برای تولید توابع مولد استفاده می‌کنیم. دوباره می‌توانیم کار را با الهام از توابع

مولد دنبال کنیم. واضح است که تعداد روشهای بدست آوردن مجموع n در یک پرتاب تاس برابر ضریب x^n در عبارت زیر است:

$$x + x^۲ + x^۳ + x^۴ + x^۵ + x^۶$$

(چون در یک پرتاب هر یک از اعداد ۱ تا ۶ را یک مرتبه می‌توانیم ببینیم و دیگر اعداد را صفر مرتبه). با کمی تأمل می‌توانید دریابید که تعداد روشهای بدست آمدن مجموع n در دو پرتاب برابر ضریب x^n در عبارت

$$(x + x^۲ + x^۳ + x^۴ + x^۵ + x^۶) \times (x + x^۲ + x^۳ + x^۴ + x^۵ + x^۶)$$

است (مثلاً مجموع ۵ می‌تواند از طریق ۴ + ۱ یا ۳ + ۲ یا ۲ + ۳ یا ۱ + ۴ بدست آورد از طرفی جملهٔ $x^۵$ را عبارت فوق می‌توانید از $x \cdot x^۴$ یا $x^۲ \cdot x^۳$ یا $x^۳ \cdot x^۲$ یا $x^۴ \cdot x^۱$ بدست بیاورید). به راحتی می‌توان این موضوع را تعمیم داد که تعداد روشهای تولید مجموع n در پرتاب k تاس برابر ضریب x^n در عبارت $(x + x^۲ + x^۳ + x^۴ + x^۵ + x^۶)^k$ است بنابراین تعداد روشهای بدست آوردن مجموع n در هر تعداد پرتاب مجاز برابر ضریب x^n در عبارت زیر است:

$$\sum_{k=۰}^{\infty}(x + x^۲+ x^۳+ x^۴+ x^۵+ x^۶)^k = (۱ -(x + x^۲+ x^۳+ x^۴+ x^۵+ x^۶))^{-۱}$$

که حکم را ثابت می‌کند. □

مثال: p_n را تعداد افرازهای متفاوت n و d_n را تعداد افرازهای n به اعداد متمایز و o_n را تعداد افرازهای n به عاملهای فرد در نظر می‌گیریم. برای مثال $p_۵ = ۷$ (که در مثال بالا نشان داده شدند) و $d_۵ = ۳$ (که تنها افرازهای ۴ + ۱ ، ۲ + ۳ و ۵ مجاز هستند) و $o_۵ = ۳$ (تنها افرازهای ۵ و ۳ + ۱ + ۱ و ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ مجاز هستند). توابع مولد دنباله‌های p_i و d_i و o_i را بدست بیاورید. و ثابت کنید که برای هر n طبیعی داریم $o_n = d_n$.

راه حل: ما با روش شمارش افرازها از قبل آشنایی داریم. در مثال سکه‌ها باید n را تنها با استفاده از اعداد ۱ و ۲ و ۵ و ۱۰ و ۲۰ و ۵۰ و ۱۰۰ افراز می‌کردیم. یک تعمیم ساده از این مسأله می‌تواند تابع مولد دنبالهٔ p_i را تولید کند. یعنی داریم:

$$P(x) = (\underbrace{۱ + x + x^۲ + x^۳ + \ldots}_{\text{برای شمارش ۱ها}})(\underbrace{۱ + x^۲ + x^۴ + x^۶ + \ldots}_{\text{برای شمارش ۲ها}})$$

$$\times (\underbrace{۱ + x^۳ + x^۶ + x^۹ + \ldots}_{\text{برای شمارش ۳ها}}) \ldots$$

اگر ما مجاز به انتخاب بیش از یکبار از هر عدد نباشیم تابع مولد d_i را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$D(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots$$

و اگر ما مجاز به انتخاب تنها عاملهای فرد باشیم تابع مولد o_i را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$O(x) = (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^3+x^6+x^9+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots)\dots$$

و از آنجا ما سه تابع مولد به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
P(x) &= ((1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots)^{-1} \\
D(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots \\
O(x) &= ((1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots)^{-1}
\end{aligned}$$

حال برای آنکه نشان دهیم برای هر n داریم $o_n = d_n$، باید ثابت کنیم ضریب x^n در $D(x)$ و $O(x)$ برابرند یعنی باید ثابت کنیم $D(x) = O(x)$ (اگر چه این دو تابع در نمایش خود متفاوتند):

$$\begin{aligned}
D(x) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\dots \\
&= \frac{\cancel{(1-x^2)}}{(1-x)}\cdot\frac{\cancel{(1-x^4)}}{\cancel{(1-x^2)}}\cdot\frac{\cancel{(1-x^6)}}{(1-x^3)}\cdot\frac{\cancel{1-x^8}}{\cancel{1-x^4}}\cdot\frac{\cancel{1-x^{10}}}{1-x^5}\dots \\
&= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\dots \\
&= O(x)
\end{aligned}$$

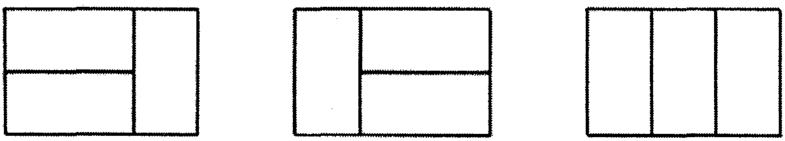
بنابراین تعداد افرازهای یک عدد به اعداد متمایز برابر تعداد افرازهای همان عدد به اعداد فرد می‌باشد. □

تاکنون ما راههای مختلفی برای حل روابط بازگشتی ارائه داده‌ایم. البته روابط بازگشتی دیگری نیز وجود دارند که در تمارین این فصل و فصلهای بعدی با آنها آشنا خواهید شد.

«تمارین»

۱) الف) برای هر عدد طبیعی n تعداد زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ را که هیچ دو عضو آن یک واحد اختلاف ندارند با g_n تعریف می‌کنیم. مثلاً $g_{۳} = ۵$ و مجموعه‌ها عبارتند از: $\{۱, ۳\}$ و $\{۳\}$ و $\{۲\}$ و $\{۱\}$ و $\varnothing$. رابطه بازگشتی میان g_nها را پیدا کرده و ثابت کنید که g_n همان اعداد فیبوناچی هستند. (ج)

ب) برای هر n تعداد روشهای پر کردن یک جدول $n \times ۲$ بوسیلهٔ n عدد دومینو با ابعاد ۱×۲ را j_n تعریف می‌کنیم با این شرط که هیچ خانه‌ای اضافه نماند و یا خالی نباشد. برای مثال حالت $j_{۳} = ۳$ در شکل زیر نشان داده شده است.



یک رابطهٔ بازگشتی میان اعضای دنبالهٔ j_n پیدا کنید و ثابت کنید j_nها همان اعداد فیبوناچی هستند. (ج)

۲) الف) برای هر عدد صحیح نامنفی n تعداد ردیفهای nتایی از اعضای $\{۲, ۱, ۰\}$ را، که هیچ جای آن دوبار عدد ۲ و یا دوبار عدد ۱ ظاهر نشود، با c_n نشان می‌دهیم. نشان دهید c_nها دارای رابطهٔ بازگشتی به این صورت می‌باشند:

$$c_{۰} = ۱ \qquad c_{۲} = ۳ \qquad\qquad c_n = ۲c_{n-۱} + c_{n-۲} \tag{ر}$$

ب) با استفاده از قضیه حل روابط بازگشتی دوجمله‌ای، c_n را به صورت جملات ضرایب بسط دوجمله‌ای و توانهایی از ۲ بدست بیاورید. (ج)

ج) از روش توابع مولد استفاده کنید و فرمول صریح c_n را به صورت ضرایب بسط دوجمله‌ای و توانهایی از ۲ بدست بیاورید. (ج)

به عنوان مثال برای $n = ۳$ داریم $c_{۳} = ۱۷$ که به صورت زیر می‌باشند:

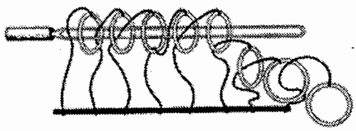
۰۰۰, ۰۰۱, ۰۰۲, ۰۱۰, ۰۱۲, ۰۲۰, ۰۲۱, ۱۰۰,
۱۰۱, ۱۰۲, ۱۲۰, ۱۲۱, ۲۰۰, ۲۰۱, ۲۰۲, ۲۱۰, ۲۱۲.

۳) در یک بازی مشهور «حلقه‌های چینی» تعدادی حلقه و نخ متصل به هم وجود دارد که اولین حلقه می‌تواند به راحتی حرکت کند (یعنی حلقهٔ سمت راست در شکل زیر). امّا

بقیهٔ حلقه‌ها تنها در صورتی می‌توانند از حلقه بیرون بیایند که حلقهٔ قبل از آن داخل میله و دیگر حلقه‌ها خارج از میله باشند. مثلاً حلقهٔ پنجم تنها در حالتی می‌تواند بیرون بیاید که حلقهٔ چهارم داخل حلقه و حلقه‌های اول و دوم و سوم خارج از حلقه باشند. r_n را تعداد کمترین انتقالهای لازم برای انتقال n حلقهٔ اول به خارج از میله تعریف می‌کنیم. نشان دهید r_n در شرایط دنبالهٔ زیر صدق می‌کند:

$$r_۰ = ۰ \qquad r_۱ = ۱ \qquad r_n = r_{n-۱} + ۲r_{n-۲} + ۱ \quad n > ۱$$

سپس روش توابع مولد را به کار برده و یک فرمول مستقل برای r_n بدست بیاورید. (ج)



۴) برای هر عدد صحیح و مثبت k و هر عدد صحیح نامنفی n قرار می‌دهیم $b_{n,k} = \binom{n+k-۱}{k}$ و $B_k(x)$ را به صورت تابع مولد دنبالهٔ $b_{۰,k}, b_{۱,k}, b_{۲,k}, \ldots$ تعریف می‌کنیم ثابت کنید که

$$B_۱(x) = \frac{۱}{۱-x} \ , \quad B_k(x) = \frac{B_{k-۱}(x)}{۱-x} \quad k > ۱$$

و سپس نتیجه بگیرید که $b_{n,k}$ برابر ضریب x^n در بسط $\frac{۱}{(۱-x)^n}$ است.

۵) k و n اعداد صحیح نامنفی هستند. نشان دهید تعداد جوابهای معادلهٔ زیر برابر ضریب x^n در بسط $\frac{۱}{(۱-x)^k}$ است که در فصل اول فرمول آن را بدست آوردیم:

$$y_۱ + y_۲ + y_۳ + \cdots + y_k = n \quad , \quad \forall i : y_i \geqslant ۰$$ (ر)

۶) الف) k و n را اعداد صحیح نامنفی فرض می‌کنیم. نشان دهید مجموع

$$\sum_{\substack{y_i > ۱ \text{ که} \\ y_۱+y_۲+\cdots+y_k=n,}} y_۱ y_۲ y_۳ \ldots y_k$$

برابر ضریب x^n در عبارت $(x + ۲x^۲ + ۳x^۳ + \ldots)^k$ است. همچنین نشان دهید که عبارت اخیر به صورت $x^k(۱-x)^{-۲k}$ قابل بیان است و می‌توان مجموع بالا را به صورت ضرایب دوجمله‌ای بدست آورد. (ر، ج)

ب) n دانش‌آموز در یک صف قرار دارند. معلم آنها را به k بخش تقسیم می‌کند و از هر بخش یک نماینده انتخاب می‌کند. از بخش (الف) استفاده کنید و نشان دهید گروهها و سرگروهها به $\binom{n+k-1}{2k-1}$ طریق می‌توانند انتخاب شوند. سپس یک روش مستقیم برای پیدا کردن این فرمول پیدا کنید. (ر)

۷) الف) ماتریسهای M و N که در زیر نشان داده شده‌اند مفروضند: (m عددی زوج است)

$$M=\begin{pmatrix} \binom{1}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \dots & \binom{m}{m} \end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} \binom{1}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \binom{3}{1} & -\binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\binom{m}{1} & \binom{m}{2} & -\binom{m}{3} & \dots & \binom{m}{m} \end{pmatrix}.$$

نشان دهید برای $j \geqslant i$ درایهٔ (i,j) در ماتریس $M \times N$ برابر ضریب x^{i-j} در $\frac{(1+x)^i}{(1+x)^{(j+1)}}$ است و نتیجه بگیرید $M^{-1} = N$ (ر)

ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کنید و نشان دهید اگر داشته باشیم:

$$\begin{array}{lllll} \binom{1}{1}a_1 & & & & = b_1, \\ \binom{2}{1}a_1 & +\binom{2}{2}a_2 & & & = b_2, \\ \binom{3}{1}a_1 & +\binom{3}{2}a_2 & +\binom{3}{3}a_3 & & = b_3, \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{m}{1}a_1 & +\binom{m}{2}a_2 & \binom{m}{3}a_3 & +\dots+\binom{m}{m}a_m & = b_m, \end{array}$$

آنگاه داریم:

$$\begin{array}{lllll} \binom{1}{1}b_1 & & & & = a_1, \\ -\binom{2}{1}b_1 & +\binom{2}{2}b_2 & & & = a_2, \\ \binom{3}{1}b_1 & -\binom{3}{2}b_2 & +\binom{3}{3}b_3 & & = a_3, \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\binom{m}{1}b_1 & +\binom{m}{2}b_2 & -\binom{m}{3}b_3 & +\dots+\binom{m}{m}b_m & = a_m. \end{array}$$

۸) برای اعداد صحیح و مثبت $1 \leqslant n \leqslant m$ عدد s_n را تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ $\{1,2,3,\dots,m\}$ به $\{1,2,\dots,n\}$ تعریف می‌کنیم که m عددی معلوم است. نشان

دهید برای هر $1 \leqslant n \leqslant m$ داریم:

$$\binom{n}{1}s_1 + \binom{n}{2}s_2 + \binom{n}{3}s_3 + \cdots + \binom{n}{n}s_n = n^m \qquad \text{(ر)}$$

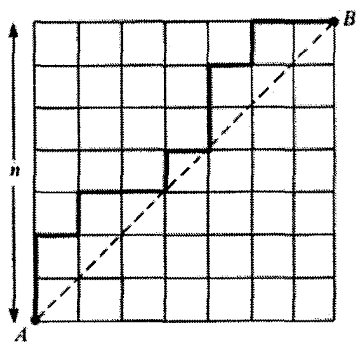
سپس از روش معکوس‌یابی در تمرین قبل استفاده کنید و فرمولی برای s_n پیدا کنید و پاسخ تمرین ۱۴ فصل چهارم را بدست بیاورید. (ج)

۹) P و D را توابع مولد مرتبط با دنباله‌های افراز کلی و افراز متمایز اعداد هستند که در انتهای همین فصل معرفی شدند. نشان دهید: $P(x) = D(x)P(x^2)$ و نتیجه بگیرید که:

$$p_n = d_n + d_{n-2}p_1 + d_{n-4}p_2 + d_{n-6}p_3 + \ldots$$

همچنین یک روش مستقیم برای اثبات اتحاد بالا پیدا کنید.

۱۰) در فصل اول دیدیم که تعداد کوتاهترین مسیرها از A به B در مربع $n \times n$ به شکل مقابل برابر $\binom{2n}{n}$ است. حال u_n را تعداد کوتاهترین مسیرهای فوقانی در نظر می‌گیریم. یعنی مسیرهایی از A به B که هرگز در زیر قطر AB قرار نمی‌گیرند همچنین v_n را تعداد مسیرهای فوقانی که قطر AB را تنها در نقاط A و B قطع می‌کنند در نظر می‌گیریم. نشان دهید: $n > 1: \ v_n = u_{n-1}$. سپس با در نظر گرفتن آخرین نقطهٔ برخورد قطر AB و مسیر فوقانی نشان دهید:



$$u_0 = 1 \ , \ \ u_n = u_0u_{n-1} + u_1u_{n-2} + u_2u_{n-3} + \cdots + u_{n-1}u_0 \qquad \text{(ر)}$$

حال $U(x)$ را برابر تابع مولد دنبالهٔ u_i قرار می‌دهیم: ثابت کنید:

$$x\big(U(x)\big)^2 - U(x) + 1 = 0$$

و از آنجا نشان دهید: $u_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (این اعداد را «اعداد کاتالان» می‌نامند که در تمرین ۱۳ فصل اول به طور مختصر با آن آشنا شدید). (ر)

۱۱) الف) برای اعداد نامنفی صحیح m و n عدد $s(m,n)$ را ضریب x^m در عبارت زیر قرار می‌دهیم.

$$x(x-۱)(x-۲)(x-۳)\dots(x-n+۱)$$

(با این فرض که $s(۰,۰)=۱$) این اعداد با نام «اعداد استرلینگ نوع اول» مشهورند. نشان دهید این اعداد با دنبالهٔ بازگشتی زیر قابل تعریف هستند:

$$s(۰,۰)=۱\ ,\ \ s(m,۰)=۰ \qquad (m>۰),$$
$$s(۰,n)=۰ \qquad (n>۰)$$

و

$$s(m,n)=s(m-۱,n-۱)+(m-۱)s(m-۱,n)$$

ب) برای اعداد صحیح نامنفی n و m عدد $S(m,n)$ را برابر تعداد افرازهای مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\dots,m\}$ به n مجموعهٔ ناتهی تعریف می‌کنیم. (با این فرض که $S(۰,۰)=۱$) این اعداد به نام «اعداد استرلینگ نوع دوم» مشهورند. نشان دهید که این اعداد را می‌توان از طریق دنبالهٔ بازگشتی زیر محاسبه نمود:

$$S(۰,۰)=۱\ \ S(m,۰)=S(۰,n)=۰ \qquad m,n>۰$$
$$S(m,n)=S(m-۱,n-۱)+nS(m-۱,n)$$

ج) فرمول تعداد توابع پوشا از $\{۱,۲,\dots,m\}$ به $\{۱,۲,\dots,n\}$ در تمرین ۸ را برای بازنویسی فرمول $S(m,n)$ استفاده کنید. (ج)

د) N و M را دو ماتریس ۴ × ۴ تعریف می‌کنیم که درایه‌های (m,n) در آنها به ترتیب برابر $S(m,n)$ و $S(m,n)$ $(۱\leqslant m,n\leqslant ۴)$ هستند. درایه‌های $N\times M$ را محاسبه کنید و نشان دهید: $M^{-۱}\equiv N$ (ج)

(این مسأله و همچنین این وابستگی میان اعداد استرلینگ نوع اول و دوم برای هر ماتریس $k\times k$ به صورت فوق صحیح است. برای مطالعه دیگر خواص این اعداد و مسائل شمارشی بیشتر در مورد آنها به متون پیشرفته‌تر مانند «Combinatorial theory» از «M. Aigner» و یا «Eunmerative combinatories» از «R.P. Stanley» مراجعه کنید.)

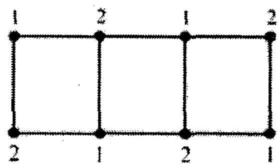
۱۲) روش توابع مولد را به کار گرفته و بوسیلهٔ آن دو تاس متفاوت که اعداد صحیح روی هر وجه آن قرار دارد طراحی کنید که: تعداد روشهای بدست آوردن مجموع n در پرتاب دو تاس معمولی برابر تعداد روشهای بدست آوردن مجموع n در پرتاب دو تاس طراحی شده باشد. (ر، ج)

۱۱

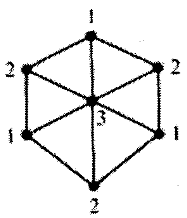
رنگ‌آمیزی رأسی

فرض کنید می‌خواهیم رئوس یک گراف را با چند رنگ موجود، رنگ‌آمیزی کنیم، بطوری که هیچ دو رأس مجاوری رنگ یکسان نداشته باشند. این کار را«رنگ‌آمیزی رأسی» گراف می‌نامند. می‌خواهیم ببینیم برای هر گرافی حداقل به چه تعداد رنگ مختلف برای رنگ‌آمیزی رأسی گراف احتیاج داریم؟

مثال:



رنگ‌آمیزی رأسی با دو
رنگ ۲ و ۱

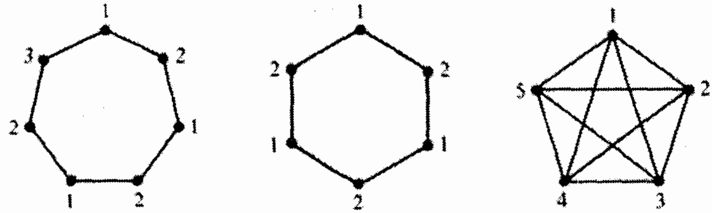


رنگ‌آمیزی رأسی با سه
رنگ ۳ و ۲ و ۱

□

برای هر گراف حداقل تعداد رنگهای لازم برای رنگ‌آمیزی رئوس آن را عدد رنگی رأسی می‌نامند و آن را با $\chi(G)$ نمایش می‌دهند.

مثال: واضح است که برای رنگ‌آمیزی رأسی گراف کامل K_n نیاز به n رنگ داریم. همچنین برای رنگ‌آمیزی رأسی گرافی که فقط از یک دور تشکیل شده است، اگر این دور شامل زوج رأس باشد به ۲ رنگ و در غیر این صورت به ۳ رنگ نیازمندیم.

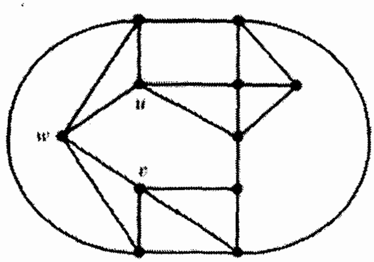


$\chi(G) = ۳$ $\chi(G) = ۲$ $\chi(K_۵) = ۵$

□

گراف $G = (V, E)$ با بزرگترین درجهٔ d را در نظر بگیرید. همانطورکه در فصل ۷ دیدید، عدد رنگی یالی این گراف در رابطهٔ $d \leqslant \chi(G) \leqslant d + ۱$ صدق می‌کرد. از مثال اول این فصل می‌توان فهمید که کران پائین این رابطه برای عدد رنگی رأسی صدق نمی‌کند. امّا همانطورکه بعد از این خواهیم گفت برای عدد رنگی رأسی داریم: $\chi(G) \leqslant d + ۱$. در ضمن بروکس[1] در سال ۱۹۴۱ نشان داد که برای چه گرافهایی $\chi(G) = d + ۱$ می‌باشد. مثال زیر روشی برای رنگ‌آمیزی رأسی گرافها بیان می‌کند.

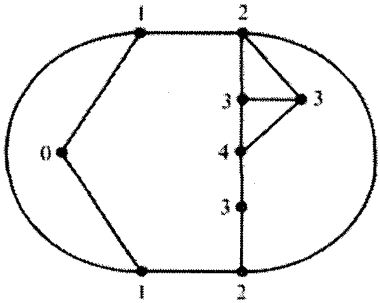
مثال: گراف $G = (V, E)$ با بزرگترین درجهٔ ۴ را در نظر بگیرید:



روند زیر نشان می‌دهد که چگونه می‌توان رأسهای G را با چهار رنگ، رنگ‌آمیزی کرد:

الف) سه رأس u و v و w را در نظر می‌گیریم بطوری که $uw, vw \in E$ و $uv \notin E$. اکنون گراف G' را با حذف دو رأس u و v از گراف G ایجاد می‌کنیم. برای هر رأس از G' مثل x، طول کوتاهترین مسیر از x به w را «فاصلهٔ x از w» می‌نامیم. بدین ترتیب فاصلهٔ هر رأس از گراف G' از w برابر است با:

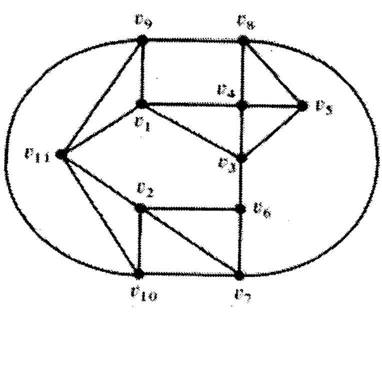
1) R.L. Brooks



G'

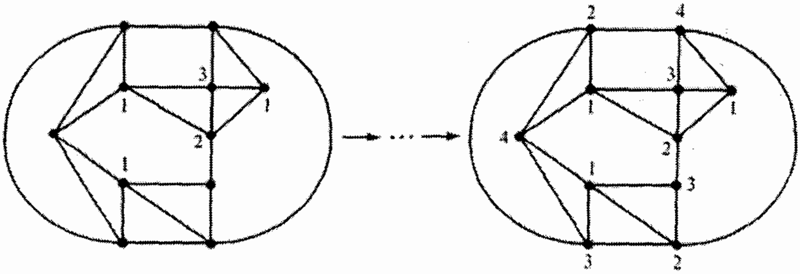
(توجه کنید که هر رأس با فاصلهٔ α $(\alpha > 0)$ از w با رأسی با فاصلهٔ $\alpha - 1$ از w مجاور است.)

ب) رأسهای گراف G را به صورت زیر برچسب گذاری کنید: $u = v_1$، $v = v_2$. رأس v_3 را رأسی در نظر بگیرید که بیشترین فاصله را از w در G' داشته باشد و تا به حال به آن برچسبی نسبت نداده باشیم. به همین ترتیب $v_4, v_5, \ldots, v_n$ را به مابقی رئوس G' نسبت می‌دهیم. (واضح است که فاصلهٔ v_5 از w کوچکتر یا مساوی فاصلهٔ v_4 از w است و به همین ترتیب برای سایر رئوس.)



توجه کنید که این روند باعث می‌شود که هر رأس v_i $(i < 11)$ با یک رأس با اندیس بیشتر مجاور باشد.

ج) رنگهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را در نظر بگیرید. رأسهای گراف G را به ترتیب $v_1, v_2, \ldots, v_{11}$ طوری رنگ کنید که در هر مرحله v_i را به کوچکترین رنگی درآورید که هیچیک از رئوس مجاور آن تا به آن موقع به آن رنگ در نیامده‌اند.



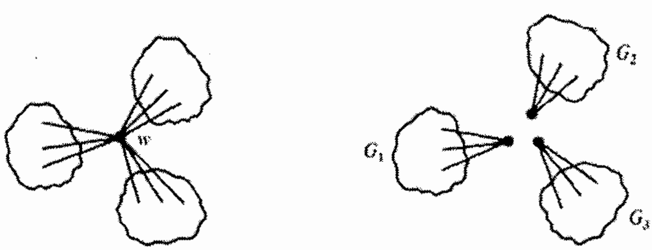
در این روش ما توانستیم رئوس گراف G را با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم. این رنگ‌آمیزی یک رنگ‌آمیزی مجاز برای G می‌باشد. زیرا برای هر رأس v_i $(1 \leqslant i < 11)$ رأسی با اندیس بزرگتر با آن مجاور است که هنوز رنگ نشده است. در نتیجه حداکثر $d-1$ رنگ در رأسهای مجاور آن رأس ظاهر شده‌اند. یعنی حداقل یک رنگ دیگر برای رنگ‌آمیزی این رأس وجود دارد. برای رنگ‌آمیزی رأس ۱۱ نیز حتماً رنگی وجود دارد. زیرا دو رأس v_1 و v_2 هر دو به رنگ ۱ درآمده‌اند. در نتیجه کمتر از d رنگ مختلف در رأسهای مجاور آن ظاهر شده‌اند. □

قضیه (بروکس): گراف همبند $G = (V, E)$ با بزرگترین درجهٔ d را در نظر بگیرید. اگر G یک گراف کامل باشد و یا تنها شامل یک دور با فرد رأس باشد در آن صورت $\chi(G) = d + 1$ و در غیر این صورت $\chi(G) \leqslant d$.

اثبات: واضح است که حکم قضیه برای گرافهای کامل و گرافهای متشکل از یک دور با هر اندازه‌ای برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم که گراف G یک گراف کامل یا یک دور نمی‌باشد و می‌خواهیم نشان دهیم که رئوس این گراف قابل رنگ‌آمیزی با d رنگ می‌باشد. اثبات را بوسیلهٔ استقراء روی تعداد رئوس انجام می‌دهیم:

حالت پایهٔ $|V| = 3$ می‌باشد که بدیهی است. بنابراین فرض کنید برای گراف G داریم: $|V| > 3$ و حکم قضیه برای گرافهای با کمتر از $|V|$ رأس برقرار است.

اگر گراف همبند G شامل رأسی مثل w باشد بطوری که با حذف آن گراف باقیمانده ناهمبند شود، در آن صورت گراف‌های G_i را همانطور که در شکل زیر می‌بینید در نظر می‌گیریم:



حال طبق فرض استقراء می‌توان رئوس هر کدام از G_iها را با d رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. اکنون واضح است که رنگهای رئوس هر کدام از G_iها را می‌توان طوری تغییر داد که رنگ رأس w در همهٔ آنها یکسان باشد. در نتیجه می‌توان رئوس گراف G را نیز با یکی کردن رئوس w از G_iها با این d رنگ، رنگ‌آمیزی کرد.

حال فرض کنید که گراف شامل رأسی که با حذف آن گراف ناهمبند شود نمی‌باشد. همانطور که در تمرین ۱۱ از فصل ۶ دیدیم گرافهای کامل و گرافهایی که فقط از یک دور تشکیل شده‌اند این خاصیت را دارند که حذف هیچ رأسی باعث ناهمبند شدن آنها نمی‌شود و در ضمن اگر سه رأس u و v و w وجود داشته باشند که $uw, vw \in E$ و $uv \notin E$ در آن صورت با حذف رئوس u و v گراف ناهمبند می‌شود. حال از آنجا که گراف G گراف کامل و یا دور نمی‌باشد و در ضمن از آنجا که فرض کردیم که هیچ رأسی از G وجود ندارد که با حذف آن گراف ناهمبند شود، در نتیجه باید سه رأس مثل u و v و w از گراف G وجود داشته باشد که $vw, uw \in E$ و $uv \notin E$ و در ضمن با حذف دو رأس u و v گراف همبند باقی بماند.

حال همانطور که در مثال قبل نشان دادیم، رأسهای گراف G را با $v_۱ = u$ و $v_۲ = v$ و $v_۳, v_۴, \ldots, v_n = w$ برچسب گذاری می‌کنیم. این برچسب گذاری دارای این خاصیت است که هر رأس v_i $(۱ \leqslant i < n)$ با یک رأس با اندیس بیشتر مجاور است. این خصوصیت برای $i = ۱$ و $i = ۲$ بدیهی است و برای $i \geqslant ۲$ اگر شما کوتاهترین مسیر از v_i به w را در G' به صورت

$$v_i, \quad v_j, \quad \ldots, \quad w$$

$$w \text{ فاصله‌از } : \ \alpha, \quad \alpha - ۱, \quad \ldots, \quad ۰$$

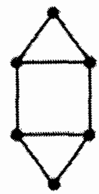
در نظر بگیرید. این بدین معنی است که $v_i v_j \in E$ و بنابراین $j > i$.

حال رنگهای $۱, ۲, ۳, \ldots, d$ را در نظر بگیرید و رئوس گراف G را به ترتیب $v_۱, v_۲, \ldots, v_n$ با کوچکترین رنگی رنگ‌آمیزی کنید که تا به حال در رأسهای رنگ شدهٔ مجاور آن ظاهر نشده باشد. بنابراین همانطور که در مثال قبل دیدید دو رأس $v_۱$ و $v_۲$ به رنگ ۱ در خواهند آمد. همچنین هنگامی که می‌خواهیم رأس v_i $(۳ \leqslant i < n)$ را رنگ کنیم این رأس حداقل با یک رأس با اندیس بیشتر (و بنابراین رنگ نشده) مجاور است و از آنجا که درجهٔ هر رأس حداکثر برابر d می‌باشد بنابراین رأس v_i حداکثر با $d - ۱$ رأس رنگ شده مجاور است. در نتیجه حداقل یک رنگ برای رنگ‌آمیزی وجود دارد. در پایان چون رأس $v_n = w$ با دو رأس $v_۱$ و $v_۲$ مجاور است و هر دو این رئوس به رنگ ۱ هستند، در نتیجه برای رأس v_n نیز یک رنگ برای رنگ‌آمیزی وجود دارد. بنابراین رئوس این گراف را با d رنگ، رنگ‌آمیزی کردیم که حکم استقراء بود. □

مسأله بعدی که می‌خواهیم راجع به آن بحث کنیم دربارهٔ تعداد رنگهای لازم برای رنگ‌آمیزی

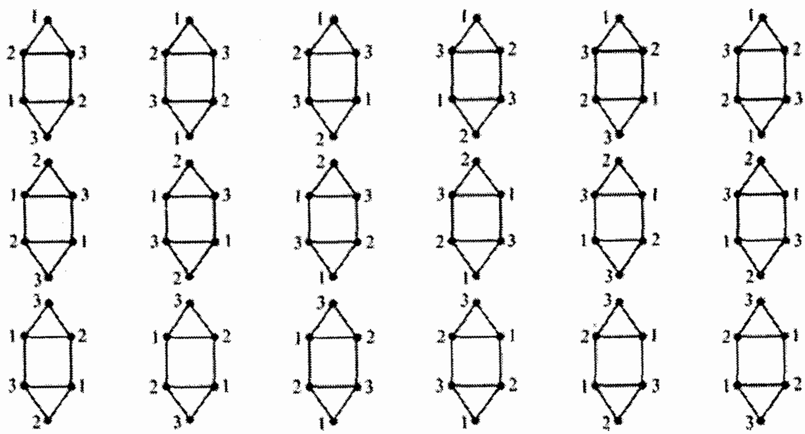
یک گراف نیست. بلکه درباره تعداد راههای رنگ‌آمیزی رئوس یک گراف با رنگهای داده شده است.

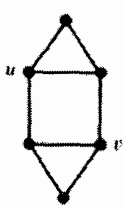
مثال: گراف G را در شکل زیر نشان داده‌ایم. تعداد راههای متفاوت رنگ‌آمیزی رأسی G با سه رنگ ۱ و ۲ و ۳ را بدست آورید.



در ضمن یک فرمول برای تعداد راههای رنگ‌آمیزی رأسی گراف G با k رنگ موجود بدست آورید.

راه حل: پیدا کردن راههای متمایز رنگ‌آمیزی گراف G با سه رنگ چندان مشکل نیست. ۱۸ روش برای این کار وجود دارد که در زیر آنها را می‌بینید.

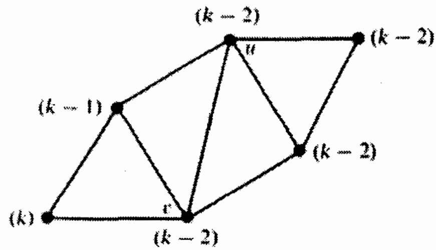




برای پیدا کردن یک فرمول برای تعداد راههای رنگ‌آمیزی رئوس گراف G با k رنگ لازم است که ۲ حالت مختلف را در نظر بگیریم: حالت اول اینکه دو رأس u و v (که در شکل مقابل نشان داده شده‌اند) به یک رنگ در آمده باشند و حالت دوم اینکه این دو رأس دو رنگ مختلف داشته باشند. برای این گراف به راحتی می‌توان تعداد راههای رنگ‌آمیزی رأسی در این دو حالت را حساب کرده و با هم جمع کرد:

u و v دارای دو رنگ مختلف می‌باشند:

گراف G_1 را با اضافه کردن یال uv به گراف G بدست آورید حال واضح است که تعداد راههای رنگ‌آمیزی گراف G بطوری که دو رأس u و v دو رنگ مختلف داشته باشند برابر است با تعداد راههای رنگ‌آمیزی G_1. اکنون می‌خواهیم تعداد راههای رنگ‌آمیزی G_1 با k رنگ موجود را پیدا کنیم. برای این کار تعداد حالتهای رنگ‌آمیزی رئوس G_1 را مطابق شکل زیر از چپ به راست پیدا می‌کنیم و به هر رأس تعداد رنگهای ممکن برای رنگ‌آمیزی آن را نسبت می‌دهیم:

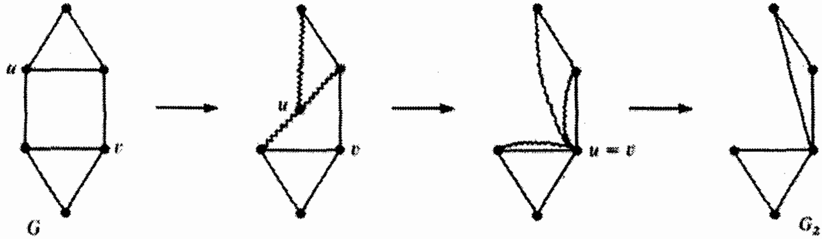


برای رنگ‌آمیزی رأس سمت چپ می‌توانیم از k رنگ موجود استفاده کنیم. امّا برای رأس بعد نمی‌توانیم از رنگی که برای رأس اول استفاده کرده‌ایم، استفاده کنیم. رأس بعدی نیز (چون به دو رأس مجاور هم متصل است) می‌تواند به هر یک از $k - ۲$ رنگ باقیمانده در آید و به همین ترتیب برای رئوس بعد. بنابراین تعداد راههای رنگ‌آمیزی G_1 با k رنگ موجود برابر بود با:

$$k(k-1)(k-2)^4$$

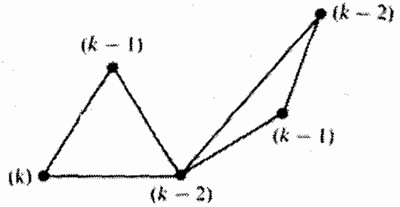
u و v دارای رنگهای یکسان باشند:

گراف G_2 را از قرار دادن دو رأس u و v روی یکدیگر و تبدیل آنها به یک رأس در گراف G بدست آورید.



با کمی تأمل می‌توان فهمید که تعداد راههای رنگ‌آمیزی رئوس G بطوری که u و v دارای رنگهای یکسان باشند برابر تعداد راههای رنگ‌آمیزی رئوس G_2 می‌باشد. حال برای اینکه ببینیم به چند

حالت می‌توان رئوس گراف $G_۲$ را با k رنگ، رنگ‌آمیزی کرد، همانطور که در شکل زیر می‌بینید، تعداد رنگهای ممکن برای رنگ‌آمیزی هر رأس را از سمت چپ به راست به رئوس نسبت می‌دهیم:



بنابراین تعداد راههای رنگ‌آمیزی رئوس $G_۲$ برابر خواهد بود با: $k(k-۱)^۲(k-۲)^۲$

تعداد راههای رنگ‌آمیزی رئوس G برابر مجموع تعداد راههای رنگ‌آمیزی رئوس $G_۱$ و $G_۲$ می‌باشد که این مقدار برابر است با:

$$k(k-۱)(k-۲)^۴ + k(k-۱)^۲(k-۲)^۲ =$$
$$k(k-۱)(k-۲)^۲((k-۲)^۲ + (k-۱)) =$$
$$k(k-۱)(k-۲)^۲(k^۲ - ۳k + ۳)$$

و هنگامی که $k = ۳$ است همانطور که قبل از این بیان کردیم، این مقدار برابر ۱۸ می‌باشد. □

در مثال قبل تعداد راههای رنگ‌آمیزی رئوس G با k رنگ یک چند جمله‌ای برحسب k بود. حال می‌خواهیم نشان دهیم که این نتیجه برای هر گرافی برقرار است:

قضیه: گراف G و عدد مثبت k داده شده است. نماد $P_G(k)$ را نمایشگر تعداد راههای مختلف رنگ‌آمیزی رأسی گراف G با k رنگ موجود در نظر بگیرید. در آن صورت P_G یک چند جمله‌ای برحسب k می‌باشد (این مقدار را چنه جمله‌ای رنگی گراف G می‌نامند.)

اثبات: این قضیه را بوسیلهٔ استقراء روی m اثبات می‌کنیم که m تعداد یالهایی است که در G وجود ندارد. (این یالها، یالهای گراف مکمل G یعنی $\bar{G}$ می‌باشند.) حالت پایهٔ $m = ۰$ هنگامی است که گراف G یک گراف کامل باشد و برای رنگ‌آمیزی آن هر رأسی باید یک رنگ مجزا داشته باشد. بنابراین داریم:

$$P_{k_n}(k) = k(k-۱)(k-۲)\ldots(k-n+۱)$$

که یک چند جمله‌ای برحسب k می‌باشد.

حال فرض کنید $m > 0$ و حکم مسأله برای گرافهایی که تعداد یالهای غیر موجود کمتری دارند، درست است. چون $m > 0$ در نتیجه حداقل یک یال مثل uv وجود دارد که در G نیست. گراف G_1 را از اضافه کردن یال uv به گراف G بدست آورده‌ایم و گراف G_2 را از قرار دادن دو رأس v و u روی یکدیگر و تبدیل آنها به یک رأس ایجاد کرده‌ایم. (دو رأس v و u تبدیل به یک رأس شده‌اند که یالهای مجاور این رأس یالهای مجاور دو رأس u و v در گراف G می‌باشند.) بنابراین با توجه به مثال قبل واضح است که:

$$P_G(k) = \text{تعداد راههای رنگ‌آمیزی رأسی } G \text{ با } k \text{ رنگ موجود}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{تعداد راههای رنگ‌آمیزی رأسی } G \\ \text{با } k \text{ رنگ بطوری که دو رأس } u \text{ و } v \\ \text{دارای رنگهای متفاوت باشند} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{تعداد راههای رنگ‌آمیزی رأسی} \\ G \text{ با } k \text{ رنگ بطوری که دو رأس} \\ u \text{ و } v \text{ دارای رنگهای یکسان} \\ \text{باشند} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{تعداد راههای رنگ‌آمیزی رأسی } G_1 \\ \text{با } k \text{ رنگ} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{تعداد راههای رنگ‌آمیزی رأسی} \\ G_2 \text{ با } k \text{ رنگ} \end{pmatrix}$$

$$= P_{G_1}(k) + P_{G_2}(k)$$

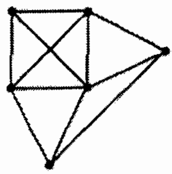
امّا از آنجا که تعداد یالهای غیر موجود در هرکدام از گرافهای G_1 و G_2 کمتر از m می‌باشند، در نتیجه طبق فرض استقراء هرکدام از $P_{G_1}(k)$ و $P_{G_2}(k)$ یک چند جمله‌ای برحسب k می‌باشند. بنابراین حاصل جمع آنها نیز (که برابر $P_G(k)$ می‌باشد) یک چند جمله‌ای برحسب k خواهد بود. □

در اثبات این قضیه نشان دادیم که برای چند جمله‌ای رنگی گراف G، رابطهٔ بازگشتی زیر را داریم:

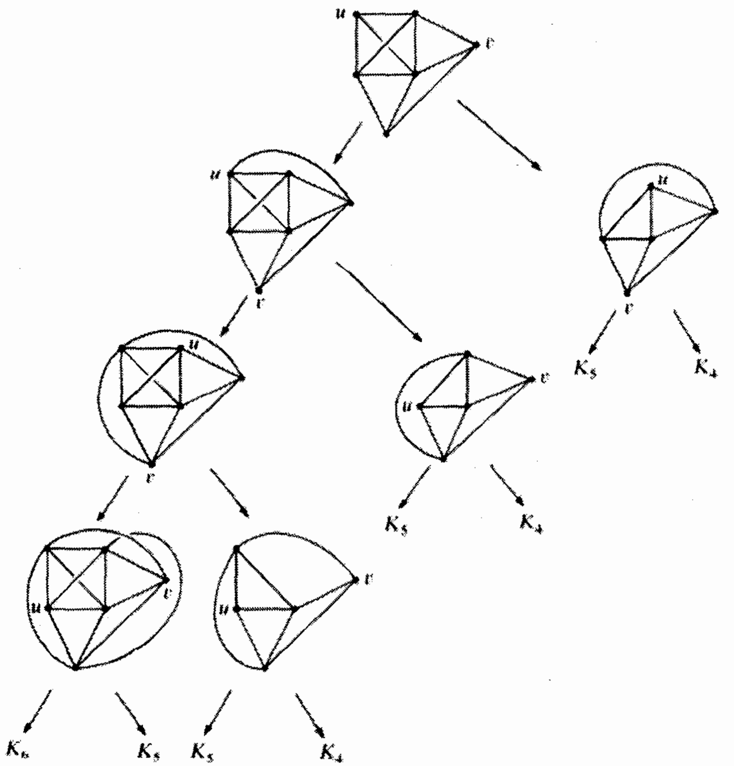
$$P_G = P_{G_1} + P_{G_2}$$

و از این رابطه می‌توان برای پیدا کردن یک الگوریتم برای یافتن تعداد راههای رنگ‌آمیزی رأسی گراف G استفاده کرد: برای گراف دادهٔ شدهٔ G آنقدر از رابطهٔ بازگشتی بالا استفاده می‌کنیم تا به یک گراف کامل برسیم. حال چند جمله‌ای رنگی گراف G برابر مجموع چند جمله‌ای رنگی گرافهای کامل بدست آمده خواهد بود.

مثال: چند جمله‌ای رنگی گراف G را که در زیر نمایش داده شده است بدست آورید:



راه حل: کار را با گراف G آغاز می‌کنیم. یک جفت رأس غیر مجاور مانند u و v را انتخاب می‌کنیم و سپس $G_۱$ را در سمت چپ و $G_۲$ را در سمت راست گراف G ایجاد می‌کنیم. سپس برای هر کدام از گرافهای حاصل نیز این کار را ادامه می‌دهیم تا جایی که به گرافهای کامل برسیم:



بنابراین:

$$P_G(k) = P_{k_۶}(k) + ۴P_{k_۵}(k) + ۳P_{k_۴}(k)$$
$$= k(k-۱)(k-۲)(k-۳)(k-۴)(k-۵)$$

$$+ ۴k(k-۱)(k-۲)(k-۳)(k-۴) + ۳k(k-۱)(k-۲)(k-۳)$$
$$= k(k-۱)(k-۲)(k-۳)(k^۲ - ۵k + ۷)$$
□

«تمارین»

۱) نشان دهید گراف $G = (V, E)$ دو بخشی است اگر و تنها اگر

$$\chi(G) \leqslant ۲$$

۲) عدد صحیح $d > ۱$ داده شده است. گرافی مانند G مثال بزنید که بزرگترین درجهٔ آن برابر d باشد و همچنین برای آن داشته باشیم:

$$\chi(G) = ۲$$

۳) گراف G داده شده است. نشان دهید که این گراف شامل حداقل $\chi(G)$ رأس با درجهٔ $\chi(G) - ۱$ یا بیشتر می‌باشد. (ر)

۴) بدون استفاده از قضیهٔ بروکس و بوسیلهٔ استقراء روی تعداد رأسها نشان دهید که رئوس یک گراف با بزرگترین درجهٔ d با $d + ۱$ رنگ قابل رنگ‌آمیزی می‌باشند.

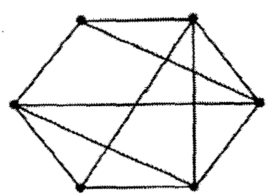
۵) گراف همبند G با بزرگترین درجهٔ d را در نظر بگیرید که شامل رأسی مانند w با درجهٔ کمتر از d می‌باشد. با برچسب گذاری رأسها با ترتیب کاهش فاصله از رأس w، الگوریتم ساده‌ای برای رنگ‌آمیزی رأسی G با d رنگ پیدا کنید. (ج)

۶) گراف $G = (V, E)$ و گراف $\bar{G}$ که مکمل آن می‌باشد را در نظر بگیرید. نشان دهید.

$$\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geqslant |V| \quad , \quad \chi(G) + \chi(\bar{G}) \leqslant |V| + ۱ \qquad (ر)$$

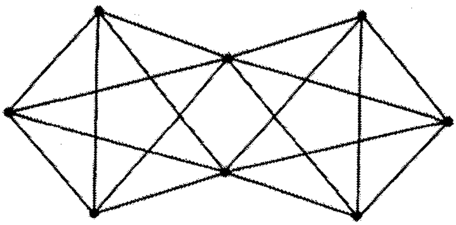
۷) گراف G و عدد صحیح و مثبت n را در نظر بگیرید. نشان دهید که $(x - n)$ یکی از عوامل $P_G(k)$ می‌باشد اگر و تنها اگر $\chi(G) > n$.

۸) با استفاده از روشی که در آخرین مثال این فصل بیان شد، چند جمله‌ای رنگی گراف زیر را بدست آورید:



(ج)

۹) چند جمله‌ای رنگی مربوط به گراف زیر را بدست آورید:



(ر، ج)

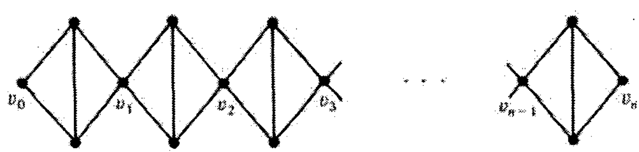
۱۰) گراف $G_۱$ را از حذف دو یال بدون رأس مشترک از K_n و گراف $G_۲$ را از حذف دو یال با رأس مشترک از K_n ایجاد کرده‌ایم. نشان دهید:

$$P_{G_۱}(k) - P_{G_۲}(k) = k(k-۱)(k-۲)\dots(k-n+۳) \qquad (\text{ر})$$

۱۱) الف) دو گراف $G_۱$ و $G_۲$ با یک رأس مشترک داده شده‌اند بطوری که اجتماع آن دو گراف G می‌باشد.

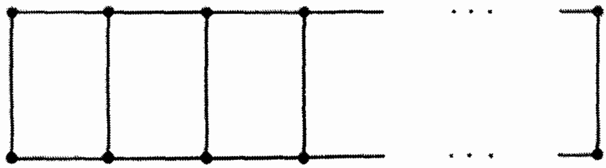
نشان دهید که $P_G(k) = \frac{۱}{k} P_{G_۱}(k) \times P_{G_۲}(k)$

ب) تعداد راههای رنگ‌آمیزی رأسی گراف زیر با k رنگ چند تا است؟ در چه تعداد از آنها رئوس $v_۰, v_۱, v_۲, \dots, v_n$ دارای رنگ یکسان می‌باشند؟



(ج)

۱۲) با استقراء روی n نشان دهید که در گراف $۲n$ رأسی زیر چند جمله‌ای رنگی برابر است با $k(k-۱)(k^۲-۳k+۳)^{n-۱}$



(ر)

۱۳) الف) گراف G با یال $e = uv$ از آن را در نظر بگیرید. گراف G_1 را از حذف یال e از G و گراف G_2 را از حذف یال e و روی هم گذاشتن دو رأس u و v از G بدست می‌آوریم. نشان دهید:

$$P_G(k) = P_{G_1}(k) - P_{G_2}(k)$$ (ر)

ب) نتیجه بگیرید که چند جمله‌ای رنگی یک درخت n رأسی برابر است با $k(k-1)^n$ (ر)

ج) کوچکترین جفت از گرافهای غیر یکریخت را بیابید که چند جمله‌ای رنگی یکسان داشته باشند. (ج)

۱۴) گراف $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که چند جمله‌ای رنگی آن به صورت زیر خواهد بود:

$P_G(k) = k^{|v|} - |E|k^{|v-1|} + k$ توانهای کمتر (ر)

۱۵) (قضیهٔ استنلی[1]: ۱۹۷۲): «یک جهت‌دهی بدون دور» درگراف $G = (V, E)$ عبارت است از جهت دادن به تمام یالهای گراف G بطوری که هیچ دور جهت‌داری در گراف ایجاد نشود. (یعنی دنبالهٔ رئوس $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ وجود نداشته باشند طوری که $v_1 \to v_2, v_2 \to v_3, \ldots, v_n \to v_1$)

گراف $G = (V, E)$ با چند جمله‌ای رنگی P_G را در نظر بگیرید. نشان دهید که گراف G دقیقاً $(-1)^{|V|}P_G(-1)$ جهت‌دهی بدون دور دارد. (ر)

1) Stanley

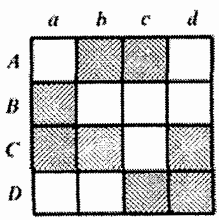
۱۲

چند جمله‌ای‌های رخ

در این فصل خواهیم دید که چگونه می‌توان مسائل مختلفی را به یک مسأله در مورد قرارگرفتن تعدادی رخ در یک صفحهٔ شطرنج تبدیل کرد.

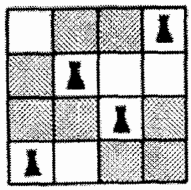
مثال: شغلهای a, b, c, d را می‌خواهیم به افراد A, B, C, D واگذار کنیم. به طوری که به هر شخص یک شغل تعلق بگیرد، و با این شرایط که: شخص A نمی‌خواهد شغلهای b, c را انجام دهد شخص B نمی‌خواهد شغل a را انجام دهد، شخص C نمی‌خواهد شغلهای d, b, a را انجام دهد و شخص D نیز مایل به انجام شغلهای d, c نیست. به چند روش می‌توان این شغلها را بین افراد تقسیم کرد؟

راه حل: هدف ما از طرح این مسأله ارائه یک راه حل معمولی برای آن نیست. بلکه می‌خواهیم نشان دهیم که این مسأله چطور می‌تواند به صورت مسألهٔ قرارگرفتن چند رخ در یک صفحهٔ شطرنج بیان شود. جدول اشخاص و شغلها را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:



حال اگر مثلاً به شخص B شغل c را اختصاص دادیم در جدول در خانهٔ (B, c) علامت تیک قرار می‌دهیم. همچنین مربعهایی که شامل اختصاص شغلهای غیر دلخواه افراد به آنها است را سیاه می‌کنیم. اکنون اختصاص دادن این چهار شغل به این چهار نفر معادل قرار دادن چهار علامت

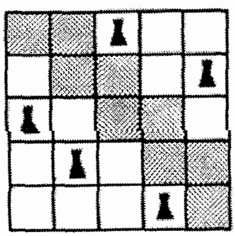
تیک در خانه‌های سفید است به طوری که هیچ دوتایی از آنها در یک سطر یا ستون نباشند. حال می‌توانیم مسأله را به مسألهٔ رخهای صفحهٔ شطرنج تبدیل کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم که جدول بالا یک صفحهٔ شطرنج است همانطور که می‌دانید در صفحهٔ شطرنج هر رخ می‌تواند در طول سطر یا ستون خودش حرکت کند. یک مجموعه از رخها در صفحهٔ شطرنج «سازگار» نامیده می‌شوند اگر هیچ دوتایی از آنها روی یک سطر یا ستون نباشند. در نتیجه مسأله انتصاب اشخاص بالا متناظر مسألهٔ قرار دادن چهار رخ سازگار در قسمتهای سایه نخوردهٔ صفحهٔ رسم شده در شکل زیر است. یک چنین شیوه‌ای در شکل زیر نشان داده شده است که متناظر اختصاص دادن شغلها به صورت d به A، b به B، c به C و a به D است.



□

مثال: تعداد جایگشتهای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را پیدا کنید که عدد i در مکان i یا $i+۱$ قرار نگیرد.

راه حل: این بار نیز قصد نداریم که مسأله را مستقیماً حل کنیم. بلکه می‌خواهیم نشان دهیم که چطور می‌توان مسأله را به مسأله‌ای در مورد رخها تبدیل کرد. فرض کنید که بخشهای سایه نزده شدهٔ صفحهٔ ۵×۵ شکل زیر برای قرار دادن پنج رخ سازگار در نظر گرفته شده‌اند. یک چنین ترکیب سازگاری نشان داده شده است.



چه رابطه‌ای میان این شکل و مسأله جایگشتها وجود دارد؟ اگر تصور کنید که رخ واقع شده در سطر i و ستون j به معنای نگاشتن i به j است آنگاه ترکیب بالا مطابق نگاشت زیر است:

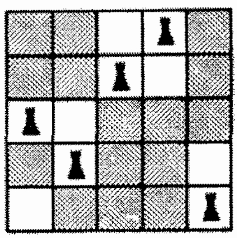
$$۱ \to ۳,\ \ ۲ \to ۵,\ \ ۳ \to ۱,\ \ ۴ \to ۲,\ \ ۵ \to ۴$$

این شرط که رخها سازگارند (هیچ دوتایی از آنها در یک سطر و ستون واقع نیستند) اطمینان می‌دهد که این نگاشت یک جایگشت است. و با سایه زدن تعدادی مربع مطمئن هستیم که عدد i به i یا $i + ۱$ نگاشته نمی‌شود بنابراین تعداد روشهای قرار دادن پنج رخ سازگار در خانه‌های سایه نخوردهٔ صفحهٔ مورد نظر دقیقاً برابر تعداد جایگشتهای مورد نظر ما خواهد بود. □

مثال: به چند طریق می‌توان سطر چهارمی به این مستطیل لاتین ۵×۳ اضافه کرد که یک مستطیل لاتین ۵×۴ با درایه‌هایی از $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ داشته باشیم.

$$\begin{pmatrix} ۴ & ۱ & ۵ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۵ & ۳ \\ ۲ & ۵ & ۳ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}$$

راه حل: به سادگی می‌توانیم ببینیم که اضافه کردن سطر چهارم به مستطیل لاتین مذکور متناظر است با قرار دادن پنج رخ سازگار در قسمتهای سایه نخوردهٔ صفحهٔ ۵×۵ نشان داده شده در شکل زیر. مثلاً یک ترکیب نشان داده شده در شکل زیر مطابق سطر جدید $(۳, ۴, ۲, ۱, ۵)$ است.



□

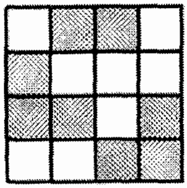
این مثالها نشان می‌دهند که چطور برخی مسائل قابل بیان به صورت مسأله قرار دادن تعدادی رخ در صفحهٔ شطرنج هستند.

در آغاز یک صفحهٔ $(n \times n)$ را در نظر می‌گیریم و یک قسمت از آن را انتخاب می‌کنیم که مجاز به استفاده از آن هستیم و آن را صفحه B می‌نامیم. برای چنین صفحه‌ای چند جمله‌ای رخ B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_B(x) = ۱ + r_۱ x + r_۲ x^۲ + \cdots + r_k x^k + \cdots + r_n x^n$$

که در آن r_k تعداد روشهای قرار دادن k رخ سازگار در صفحهٔ B است. (در حقیقت چند جمله‌ای‌های رخ نوعی از توابع مولدند که همانطور که قبلاً هم اشاره کردیم ربطی به مقدار x ندارند.)

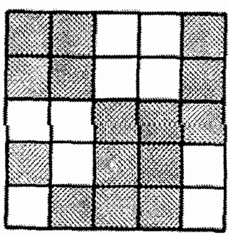
مثال: چند جمله‌ای رُخ صفحهٔ ۴ × ۴ زیر را که در مسألهٔ تخصیص شغل ابتدای فصل آوردیم، پیدا کنید



راه حل: ما روش محاسبهٔ چند جمله‌ای رخ را بطور کامل ارائه خواهیم داد. امّا اکنون توجه کنید که یک رخ می‌تواند به ۸ طریق در صفحهٔ مورد نظر قرار گیرد. (چون ۸ مربع در دسترس هستند) با کمی محاسبات طولانی و دقیق متوجه می‌شویم دو رخ سازگار به ۱۹ روش مختلف می‌توانند در جدول قرار گیرند. همچنین سه رخ با ۱۴ روش مختلف و چهار رخ با تنها ۲ روش مختلف به صورت سازگار در صفحهٔ مذکور قرار می‌گیرند. بنابراین چند جمله‌ای رخ صفحهٔ مورد نظر به این صورت است: $r_B(x) = ۱ + ۸x + ۱۹x^۲ + ۱۴x^۳ + ۲x^۴$ □

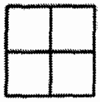
تبدیل یک مسأله به مسأله‌ای هم‌ارز راه حل آن نیست. امّا در مواردی می‌توانیم از راهکارهای خود که قبلاً آموخته‌ایم (مانند دنباله‌های بازگشتی و اصل شمول و عدم شمول) در تسهیل محاسبهٔ چند جمله‌ای‌های رخ استفاده کنیم و این چند جمله‌ای‌ها ما را قادر می‌سازند که همهٔ مثالهای فوق و برخی دیگر از انواع مسائل ترکیبیاتی را حل کنیم. اولین ابزار کاهش دهنده محاسبات ما در مورد صفحاتی است که می‌توانند به دو قسمت افراز شوند بطوری که هیچ تأثیری بر روی یکدیگر نگذارند.

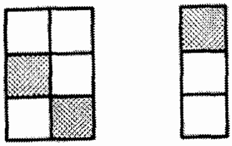
مثال: در مستطیل لاتینی تمرین صفحهٔ قبل ما می‌توانیم صفحهٔ زیر را برای آن بسازیم:



ما این تمرین را به همین صورت رها کرده بودیم. امّا اکنون نشان می‌دهیم که صفحهٔ B دارای چند جمله‌ای رخ به صورت: $r_B(x) = ۱ + ۱۰x + ۳۵x^۲ + ۵۰x^۳ + ۲۶x^۴ + ۴x^۵$ است.
خانه‌های سفید این صفحه دارای این خاصیت هستند که می‌توانند به دو بخش D و C تقسیم

شوند که هیچ سطر و ستون مشترکی نداشته باشند:

C  $r_C(x) = 1 + 4x + 2x^2$

D  $r_D(x) = 1 + 6x + 9x^2 + 2x^3$

توجه کنید که:

$$1+10x+35x^2+50x^3+26x^4+4x^5=(1+4x+2x^2)(1+6x+9x^2+2x^3)$$

یعنی

$$r_B(x) = r_C(x) \cdot r_D(x)$$

و این رابطه برای هر جفت صفحهٔ غیر مشترک صحیح است. □

قضیه: اگر صفحهٔ B را بتوان به دو قسمت D و C تقسیم کرد که هیچ سطر و ستون B در آن دو مشترک نباشد آنگاه داریم: $r_B(x) = r_C(x) \cdot r_D(x)$

اثبات: برای اثبات رابطهٔ داده شده باید ثابت کنیم ضریب x^k در هر دو طرف یکسان است. از آنجا که قرارگرفتن رخها در C هیچ محدودیت خاصی برای قرارگرفتن رخها در D ایجاد نمی‌کند پس به سادگی می‌توان دید که:

تعداد روشهای قرار دادن k رخ در صفحهٔ B = ضریب x^k در $r_B(x)$

=(تعداد روشهای قرار دادن ۰ رخ در صفحهٔ C) × (تعداد روشهای قرار دادن k رخ در D)

+(تعداد روشهای قرار دادن ۱ رخ در صفحهٔ C) × (تعداد روشهای قرار دادن $k-1$ رخ در D)

⋮

+ (تعداد روشهای قرار دادن k رخ در صفحهٔ C) × (تعداد روشهای قرار دادن ۰ رخ در D)

=(ضریب جملهٔ x^0 در $r_C(x)$) × (ضریب جملهٔ x^k در $r_D(x)$)

+ (ضریب جملهٔ x^1 در $r_C(x)$) × (ضریب جملهٔ x^{k-1} در $r_D(x)$)

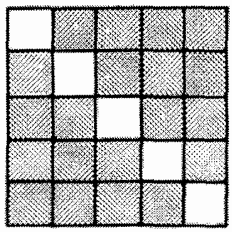
⋮

$+$ (ضریب جملهٔ x^k در $r_C(x)$) $\times$ (ضریب جملهٔ x^0 در $r_D(x)$)

$=$ ضریب x^k در $r_C(x) \times r_D(x)$

و به این ترتیب قضیهٔ بالا ثابت می‌شود. □

مثال: صفحه‌هایی به فرم صفحهٔ داده شده در شکل زیر که دارای n مربع سایه نخورده هستند یک چند جمله‌ای رخ به صورت $(1+x)^n$ دارند



این حکم را می‌توان به صورت عادی و یا بوسیلهٔ استقراء و یا با استفاده از اینکه این صفحه از n عدد مربع کوچک 1×1 که هیچ کدام در سطر و ستونی مشترک نیستند محاسبه نمود. هر کدام از مربعهای کوچک دارای چند جمله‌ای رخ به صورت $(1+x)$ هستند با استفاده از تعمیم قضیهٔ قبل چند جمله‌ای رخ صفحهٔ حاصل برابر حاصل ضرب این چند جمله‌ای‌های مستقل است. (یعنی $(1+x)^n$) □

در فصل قبل سعی کردیم برای پیدا کردن چند جمله‌ای رنگی یک گراف آن را به دو گراف ساده‌تر تقسیم کنیم و چند جمله‌ای رنگی هر کدام را پیدا کنیم (و اگر کار مشکل بود باز این رویه را تکرار می‌کردیم). در این روش ما از الگوریتمی مقدماتی و ابتدایی استفاده می‌کردیم که بر پایهٔ روابط بازگشتی قرار داشت. اکنون می‌خواهیم یک چنین شیوه‌ای را برای یافتن چند جمله‌ای رخ یک صفحه به کار بگیریم.

قضیه: B یک صفحه است و S یک مربع خاص از آن صفحه. B_1 را صفحهٔ حاصل از حذف S از B و B_2 را صفحهٔ حاصل از حذف سطر و ستون مربع S از صفحهٔ B می‌نامیم، آنگاه داریم:

$$r_B(x) = r_{B_1}(x) + x r_{B_2}(x)$$

اثبات: مانند گذشته برای اثبات تساوی داده شده باید ثابت کنیم برای هر $k \geqslant 1$ ضریب x^k در هر دو طرف تساوی برابر است. شما می‌توانید هر یک از مراحل زیر را به سادگی دنبال کرده و

درستی آن را بررسی کنید:

تعداد روشهای قرار دادن k رخ سازگار در $B =$ ضریب x^k در $r_B(x)$

$=$(تعداد روشهایی که k رخ در خانه‌های B به جز خانهٔ S قرار می‌گیرند)

$+$ (تعداد روشهایی که k رخ در خانه‌های B به همراه خانهٔ S قرار می‌گیرند)

$=$(تعداد روشهای قرار دادن k رخ در B_1)

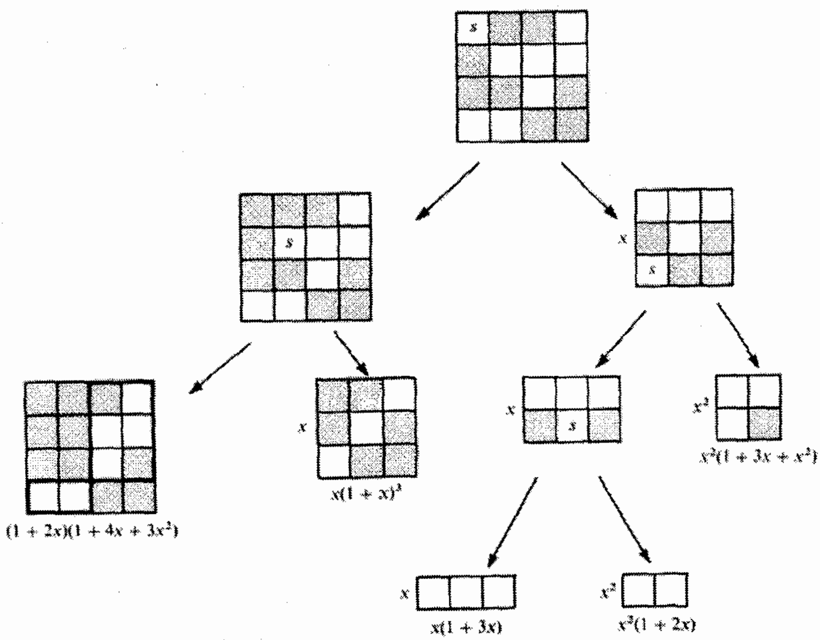
$+$ (تعداد روشهای قرار دادن $k-1$ رخ در B_2)

$=$(ضریب جملهٔ x^k در $r_{B_1}(x)$) $+$ (ضریب x^{k-1} در $r_{B_2}(x)$)

$=$ضریب x^k در عبارت $r_{B_1}(x) + x \cdot r_{B_2}(x)$

بنابراین داریم: $r_B(x) = r_{B_1}(x) + x \cdot r_{B_2}(x)$ که قضیه را ثابت می‌کند. □

مثال: قبل از ارائهٔ شیوه و راهکار بعدی ابتدا با استفاده از دو قضیهٔ قبل، چند جمله‌ای رخ مسألهٔ تخصیص شغلها که در ابتدای این فصل آمد یک بار دیگر بدست می‌آوریم. در هر مرحله یک مربع کوچک را انتخاب می‌کنیم و صفحه B_1 را سمت چپ و صفحه B_2 را (با یک ضریب x) در سمت راست آن رسم می‌کنیم (که B_1 و B_2 همان تعریفهای قضیهٔ قبل را دارند).



در نتیجه داریم:

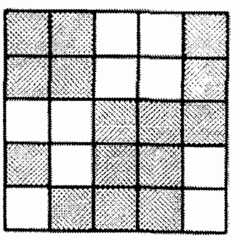
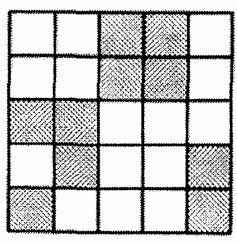
$$\begin{aligned} r_B(x) =&(۱ + ۲x)(۱ + ۴x + ۳x^۲) + x(۱ + x)^۳ + x(۱ + ۳x) + x^۲(۱ + ۲x)\\ &+ x^۲(۱ + ۳x + x^۲) = ۱ + ۸x + ۱۹x^۲ + ۱۴x^۳ + ۲x^۴ \end{aligned}$$

که قبلاً نیز آن را بدست آورده بودیم. □

در این مثال دیدیم که دو قضیهٔ قبل با هم به کار گرفته شدند و یک راهکار منطقی و ساده برای محاسبهٔ چند جمله‌ای رخ ایجاد کردند. اگر چه آن نتایج بسیار مفیدند امّا به اندازهٔ کافی به ما توانایی برای حل مسائلی را که قبلاً نمی‌توانستیم آنها را حل کنیم نمی‌دهند.

حال ما با سومین نتیجه دربارهٔ چند جمله‌ای‌های رخ که بسیار جالبتر از بقیه است و ما را قادر به حل برخی مسائل مشکلتر می‌کند آشنا می‌شویم:

مثال: صفحهٔ B در شکل سمت چپ یک صفحهٔ بدست آمده از مستطیل لاتینی مثال صفحهٔ ۱۸۳ است. صفحهٔ $\bar{B}$ در شکل سمت راست مکمل صفحهٔ B است در صفحهٔ ۵×۵. به این صورت که $\bar{B}$ متشکل از مربعهای سایه خوردهٔ صفحهٔ B است. چند جمله‌ای‌های رخ B و $\bar{B}$ به این صورت بدست می‌آیند: ($r_B(x)$ قبلاً محاسبه شده بود و شما می‌توانید بررسی کنید که $r_{\bar{B}}(x)$ نیز صحیح است)

B  $\bar{B}$ 

$r_B(x)=۱+۱۰x+۳۵x^۲+۵۰x^۳+۲۶x^۴+۴x^۵$ $\quad r_{\bar{B}}(x)=۱+۱۵x+۷۵x^۲+۱۴۵x^۳+۹۶x^۴+۱۲x^۵$

این نتیجه بدست می‌آید که ضرایب این دو چند جمله‌ای یک رابطهٔ نه چندان واضحی دارند که به این صورت است:

$r_B(x)$ ضرایب در $=۱, \quad ۱۰, \quad ۳۵, \quad ۵۰, \quad ۲۶, \quad ۴$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow ۵! \times ۱ - ۴! \times ۱۰ + ۳! \times ۳۵ - ۲! \times ۵۰ + ۱! \times ۲۶ - ۰! \times ۴\\ &= ۱۲۰ - ۲۴۰ + ۲۱۰ - ۱۰۰ + ۲۶ - ۴\\ &= ۱۲ \end{aligned}$$

که برابر ضریب $x^۵$ در $r_{\bar{B}}(x)$ است

همچنین داریم:

$$r_{\bar{B}}(x) \text{ ضرایب در } = ۱, \quad ۱۵, \quad ۷۵, \quad ۱۴۵, \quad ۹۶, \quad ۱۲$$

$$\Longrightarrow ۵! \times ۱ - ۴! \times ۱۵ + ۳! \times ۷۵ - ۲! \times ۱۴۵ + ۱! \times ۹۶ - ۰! \times ۱۲$$

$$= ۱۲۰ - ۳۶۰ + ۴۵۰ - ۲۹۰ + ۹۶ - ۱۲$$

$$= ۴ \qquad \text{که برابر ضریب } x^۵ \text{ در } r_B(x) \text{ است}$$

□

قضیه: اگر B بخشی از صفحهٔ $n \times n$ با چندجمله‌ای $r_B(x) = ۱ + r_۱x + r_۲x^۲ + \cdots + r_nx^n$ باشد و $\bar{B}$ مکمل B نسبت به صفحهٔ $n \times n$ باشد آنگاه تعداد روشهای قرار دادن n رخ سازگار در $\bar{B}$ برابر عدد زیر است:

$$n! - (n-۱)! \times r_۱ + (n-۲)! \times r_۲ - \cdots + (-۱)^n ۰! \times r_n$$

اثبات: ما از اصل شمول و عدم شمول که در فصل چهارم معرفی کردیم، استفاده می‌کنیم. برای استفاده از این اصل نیاز به مجموعه‌ای از اشیاء و ویژگی‌ها داریم که یک شیئ می‌تواند هر یک از آن ویژگی‌ها را داشته یا نداشته باشد. شیئ‌های خود را مجموعهٔ حالتهای قرارگرفتن n رخ سازگار در صفحهٔ $n \times n$ در نظر می‌گیریم. $n!$ از چنین ترکیبهایی وجود دارد که در هر سطر یک رخ باشد. اکنون مجموعهٔ ویژگی‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

ویژگی (۱) : حالاتی که مهرهٔ سطر اول در خانه‌ای متعلق به B باشد

ویژگی (۲) : حالاتی که مهرهٔ سطر دوم در خانه‌ای متعلق به B باشد

⋮ ⋮

ویژگی (n) : حالاتی که مهرهٔ سطر nاُم در خانه‌ای متعلق به B باشد

پس تعداد حالات قرار دادن n رخ سازگار در صفحهٔ $n \times n$ که هیچ کدام از ویژگی‌های بالا را ندارند برابر تعداد حالات قرار دادن n رخ سازگار در $\bar{B}$ است که بنابر اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$\begin{aligned} n! - \quad & N(۱) \quad - \quad N(۲) \quad - \cdots - \quad N(n) \\ + \quad & N(۱,۲) \quad + \quad N(۱,۳) \quad + \cdots + \quad N(n-۱,n) \end{aligned}$$

$$- N(۱,۲,۳) - N(۱,۲,۴) - \cdots - N(n-۲, n-۱, n)$$
$$\vdots$$
$$+ (-۱)^n N(۱,۲,\ldots,n),$$

$N(i_۱, i_۲, \ldots, i_r)$ برابر تعداد حالتهای چیدن n رخ در صفحهٔ مورد نظر است که دارای حداقل r خاصیت متمایز $i_۱, i_۲, \ldots, i_r$ هستند.

حال چطور می‌توانیم $N(i_۱, i_۲, \ldots, i_r)$ را محاسبه کنیم؟ برای مثال ما $N(۱,۲,۳)$ را محاسبه می‌کنیم: این مقدار برابر است با تعداد روشهای قرار گرفتن سه رخ در سه سطر اول در خانه‌های متعلق به B و $n-۳$ رخ باقیمانده در بقیهٔ سطور در خانه‌های دلخواه (که برابر $(n-۳)!$ حالت است). بنابراین داریم:

$$N(۱,۲,۳) + N(۱,۲,۴) + N(۱,۲,۵) + \cdots + N(n-۲, n-۱, n)$$
$=(n-۳)! \times$ (تعداد حالتهای قرار دادن سه رخ در سطرهای ۳ و ۲ و ۱ متعلق به B)

$+ (n-۳)! \times$ (تعداد حالتهای قرار دادن سه رخ در سطرهای ۴ و ۲ و ۱ متعلق به B)

$+ (n-۳)! \times$ (تعداد حالتهای قرار دادن سه رخ در سطرهای ۵ و ۲ و ۱ متعلق به B)

$+ \vdots \qquad \vdots$

$+(n-۳)! \times$ (تعداد حالتهای قرار دادن سه رخ در سطرهای n و $n-۱$ و $n-۲$ متعلق به B)

$=(n-۳)! \times$ (تعداد حالتهای قرار دادن سه رخ در خانه‌های صفحهٔ B)

$=(n-۳)! \times r_۳$

به همین ترتیب داریم:

$$N(۱,۲,۳,۴) + N(۱,۲,۳,۵) + \cdots + N(n-۳, n-۲, n-۱, n) = (n-۴)! \times r_۴$$

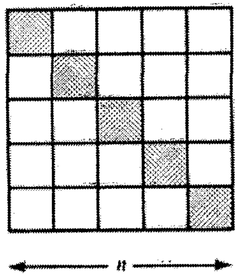
و الی آخر . . . .

حال تعداد روشهای قرار دادن n رخ در مکانی غیر از خانه‌های صفحهٔ B را می‌شماریم:

$$n! - N(۱) - N(۲) - \cdots - N(n) + N(۱,۲) + \cdots + (-۱)^n N(۱,۲,\ldots,n)$$
$$= n! - (n-۱)! \times r_۱ + (n-۲)! \times r_۲ - \cdots + (-۱)^n r_n \times ۰!$$

و قضیه اثبات می‌شود. □

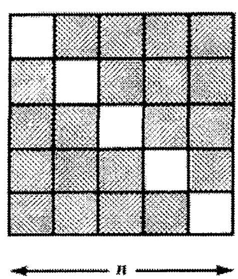
مثال: در فصل پنج ما تعداد پریشهای مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ را محاسبه کردیم. (پریش یعنی جایگشتی که برای هر $i \in \{۱, \ldots, n\}$ داشته باشیم $i \not\to i$) حال می‌خواهیم این نتیجه را با استفاده از چند جمله‌ای رخ بدست بیاوریم: تعداد پریش‌های مجموعهٔ فوق برابر تعداد حالات قرار دادن n رخ در صفحهٔ زیر است:



(چون، همانطور که قبلاً اشاره کردیم، اگر تصور کنید که قرار دادن رخ در سطر i و ستون j به معنی نگاشتن عدد i به عدد j است به این ترتیب تناظری یک به یک بین ترکیبهای قرار دادن n رخ در صفحهٔ مذکور و پریشهای مجموعهٔ مورد نظر موجود است.) با استفاده از قضیهٔ بالا تعداد روشهای قرار دادن n رخ در صفحهٔ ترسیم شده برابر است با:

$$n! - r_۱ \times (n-۱)! + r_۲ \times (n-۲) - \cdots + (-۱)^n \times r_n \times ۰!$$

که $۱ + r_۱x + r_۲x^۲ + \cdots + r_nx^n$ چند جمله‌ای رخ صفحهٔ زیر است.



ما قبلاً دیدیم که چند جمله‌ای رخ چنین صفحاتی به صورت $(۱+x)^n$ است پس $r_k = \binom{n}{k}$ و از آنجا پریشهای $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ برابر است با

$$n! - (n-۱)! \times r_۱ + (n-۲)! \times r_۲ - \cdots + (-۱)^n \times ۰! \times r_n$$

$$=n! - (n-۱)!\binom{n}{۱} + (n-۲)! \times \binom{n}{۲} - \cdots + (-۱)^n \times ۰! \times \binom{n}{n}$$

$$=n! - (n-۱)! \times \frac{n!}{۱! \times (n-۱)!} + (n-۲)! \times \frac{n!}{۲! \times (n-۲)!} - \cdots + (-۱)^n \times ۰! \times \frac{n!}{n! \times ۰!}$$

$$=n!(۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots + (-۱)^n \times \frac{۱}{n!})$$

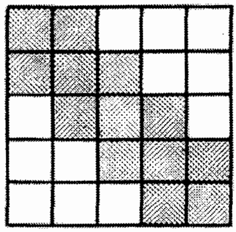
و این همان فرمولی است که قبلاً بدست آورده بودیم. □

اکنون می‌توانیم که از نتایج خود در مورد چند جمله‌ای‌های رخ برای حل مسائل جالب در ترکیبیات استفاده کنیم. برای خوانندگانی که می‌خواهند بهره و لذت بیشتری از چنین راه حلهایی ببرند حل تمرینهایی که علامت راهنمایی دارند پیشنهاد می‌شود.

«تمارین»

۱) آیا یک چند جمله‌ای می‌تواند هم چند جمله‌ای رخ باشد و هم چند جمله‌ای رنگی یک گراف؟ (ج)

۲) الف) چند جمله‌ای رخ صفحهٔ زیر را بدست آورید.



(ج)

ب) چند جایگشت از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ وجود دارد که عدد i به i یا $i - ۱$ و یا $i + ۱$ نگاشته نشود؟ چند جایگشت وجود دارد که هر عدد i به یکی از اعداد i یا $i - ۱$ و یا $i + ۱$ نگاشته شود؟ (ج)

۳) بوسیلهٔ چند جمله‌ای رخ تعداد روشهای چیدن اعداد ۱ تا ۵ را در یک ردیف بطوری که عدد هر مکان از مجموعه‌های زیر آن انتخاب می‌شود، بدست آورید.

مکان:	۵	۴	۳	۲	۱
	$\{۱, ۳, ۴, ۵\}$	$\{۲, ۳, ۴\}$	$\{۱, ۴, ۵\}$	$\{۱, ۲, ۵\}$	$\{۲, ۳, ۴, ۵\}$

(ر، ج)

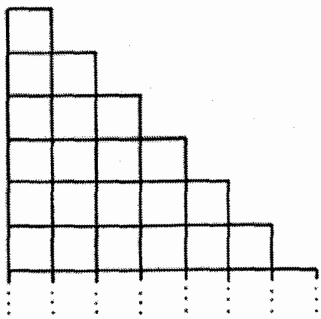
۴) مستطیل لاتینی زیر را در نظر بگیرید:

$$L = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۳ & ۵ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

از قضیهٔ سوم این فصل استفاده کنید و تعداد روشهای اضافه کردن سطر سوم را برای ایجاد مستطیل لاتینی از درایه‌های $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ محاسبه کنید. پاسخ خود را بوسیلهٔ محاسبهٔ مستقیم اثبات کنید و نشان دهید که L حداقل به ۲۴ طریق می‌تواند به مربع لاتینی ۵×۵ گسترش یابد. (ج)

۵) B را صفحهٔ مربوط به مثال تخصیص شغل که در آغاز فصل ارائه شد در نظر بگیرید. بررسی کنید که چند جمله‌ای رخ B با چند جمله‌ای رخ $\bar{B}$ برابر است. و در حالت کلی نشان دهید اگر چند جمله‌ای رخ B و $\bar{B}$ یکسان باشند (که $\bar{B}$ مکمل B در صفحهٔ $n \times n$ است) آنگاه عدد n زوج است. همچنین ثابت کنید تعداد روشهای قرار دادن یک رخ و همچنین $n - ۱$ رخ سازگار در چنین صفحه‌ای زوج است. (ر)

۶) فرض کنید یک صفحه مانند صفحهٔ شکل زیر داریم که دارای n سطر است:



نشان دهید که چند جمله‌ای رخ آن به صورت زیر است:

$$۱+S(n+۱, n)x+S(n+۱, n-۱)x^۲+S(n+۱, n-۲)x^۳+\cdots+S(n, ۱)x^n$$

که ضرایب چند جمله‌ای اعداد استرلینگ نوع دوم هستند که در تمرین ۱۱ فصل ۱۰ معرفی شدند. (ر)

۷) B را قسمتی از یک صفحهٔ $n \times n$ فرض می‌کنیم که چند جمله‌ای رخ زیر را دارد:

$$r_B(x) = ۱ + r_۱x + r_۲x^۲ + \cdots + r_nx^n$$

همچنین برای $n \leqslant k \leqslant ۰$ عدد b_k را به عنوان تعداد روشهای قرار دادن n رخ سازگار در صفحهٔ کامل $n \times n$ که دقیقاً k رخ آن واقع بر B باشند در نظر می‌گیریم. نشان دهید برای $n \leqslant k \leqslant ۰$ داریم:

$$\binom{k}{k}b_k + \binom{k+۱}{k}b_{k+۱} + \cdots + \binom{n}{k}b_n = r_k(n-k)! \qquad (ر)$$

همچنین ثابت کنید که:

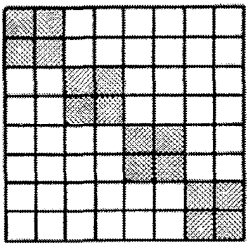
$$n! + r_۱(n-۱)!x + r_۲(n-۲)!x^۲ + \cdots + r_n \times ۰! \times x^n$$

$$= b_0 + b_1(1+x) + b_2(1+x)^2 + \cdots + b_n(1+x)^n$$

از این نتیجه برای بدست آوردن اثبات دیگری برای قضیه ارتباط چند جمله‌ای رخ یک صفحه و صفحهٔ مکمل آن استفاده کنید. (در حقیقت می‌توان b_k را برحسب اعداد $r_k, r_{k+1}, \ldots, r_n$ بدست آورد).

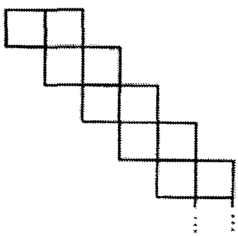
۸) الف) چند جمله‌ای صفحهٔ کامل $n \times n$ را بدست آورید. (ج)

ب) به چند طریق می‌توان هشت رخ سازگار را در صفحهٔ زیر قرار داد:



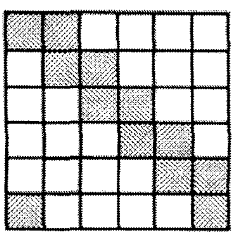
(ج)

۹) (مسألهٔ مهمانی) الف) چند جمله‌ای رخ صفحه‌ای به شکل زیر که شامل m مربع باشد را بدست آورید.



(ر، ج)

ب) چند جمله‌ای رخ بخش سایه زده شدهٔ صفحهٔ $n \times n$ زیر را بدست آورید.



تعداد روشهای قرار دادن n رخ سازگار در صفحهٔ سایه نخورده را نیز بدست آورید.

(ر، ج)

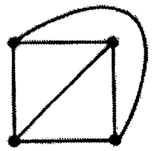
ج) در یک میهمانی شام خانوادگی n زوج زن و مرد قرار است دور یک میز گرد شام بخورند به چند طریق می‌توانند دور میز قرار بگیرند که هیچ زوجی کنار هم نباشند و همهٔ زنان و مردان بطور متناوب قرار بگیرند؟ (ر، ج)

۱۳

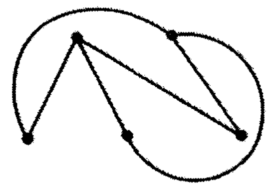
گرافهای مسطح

تاکنون با گرافها به صورت مجموعه‌ای از رئوس و یالها آشنا شدیم که هر یال دو رأس را به هم وصل می‌کند. بعضی از گرافها را می‌توان طوری رسم کرد که یالها همدیگر را قطع نکنند مگر در نقاط ابتدایی و انتهایی هر یال. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: گراف کامل $K_{۴}$ و گراف کامل دو بخشی $K_{۲,۳}$ را می‌توان به صورت گفته شده رسم کرد.

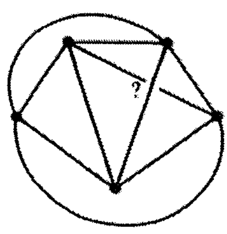


$K_{۴}$

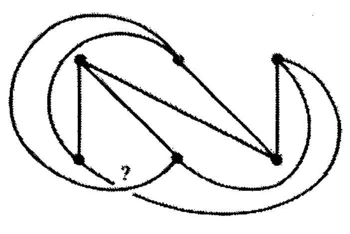


$K_{۲,۳}$

امّا برای نمایش گرافهای $K_{۵}$ و $K_{۳,۳}$ بدین روش به مشکل برمی‌خوریم:



$K_{۵}$



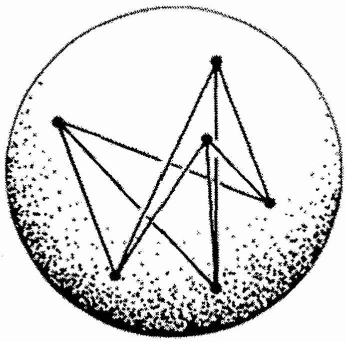
$K_{۳,۳}$

در واقع ما اثبات خواهیم کرد که این دو گراف را نمی‌توان طوری رسم کرد که یالهایشان یکدیگر را قطع نکنند. □

گراف $G = (V, E)$ را «مسطح[1]» می‌نامند اگر بتوان آن را به روشی که گفته شد در صفحه رسم کرد. یعنی هیچ دو یالی همدیگر را قطع نکنند مگر در رئوس ابتدا و انتهایشان. اینگونه نمایشی از گراف را «نمایش مسطح» آن می‌نامند. بنابراین با توجه به مثال قبل می‌توان گفت که گرافهای $K_۴$ و $K_{۲,۳}$ مسطح می‌باشند، در حالی که $K_۵$ و $K_{۳,۳}$ مسطح نیستند.

امّا با اینکه بعضی از گرافها را نمی‌توان روی صفحه بدون تقاطع یالها رسم کرد، واضح است که در فضای سه بعدی هر گرافی را می‌توان با یالهایی به صورت خط راست و بدون تقاطع یالها نمایش داد. برای این کار می‌توانیم برای هر مجموعهٔ متناهی از رئوس، آنها را روی سطح یک کره طوری قرار دهیم که هیچ چهار رأسی هم صفحه نباشند و یالها را بوسیلهٔ خطوط راست نمایش دهیم. بدین ترتیب بدیهی است که یالها همدیگر را قطع نمی‌کنند.

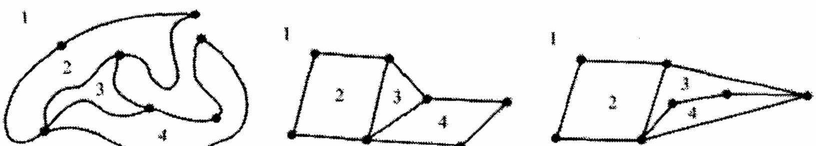
مثال: نمایش گراف $K_{۳,۳}$ در سه بعد با خطوط راست نامتقاطع:



□

فرض کنید یک گراف مسطح داده شده است. مجموعه نقاطی از صفحه را در نظر بگیرید که عضو یالهای گراف نباشند. طبیعتاً این نقاط را می‌توان به بخشهای جداگانه‌ای افراز کرد. هر کدام از این بخشها را یک «ناحیه» می‌نامند.

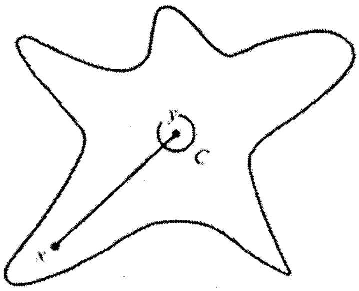
مثال: شکلهای زیر نمایشهای مسطحی از یک گراف می‌باشند. در هر کدام از حالتها ناحیه‌های گراف با شماره‌گذاری مشخص شده‌اند. واضح است که در هر سه، ناحیهٔ ۱ نامتناهی و مابقی نواحی متناهی می‌باشند.



۱) در بعضی از کتابها، گراف مسطح را گراف هامنی نیز نامیده‌اند.

دو نمایش اول گراف بالا یکسان (هم‌ارز) می‌باشند. امّا نمایش سوم هم‌ارز با دو نمایش اول نمی‌باشد. زیرا به عنوان مثال نمایش سوم دارای ناحیه‌ای با ۵ یال اطراف آن می‌باشد که دو نمایش دیگر دارای اینگونه ناحیه‌ای نیستند. □

یکی از مسائل مهم موجود این است که برای یک گراف که نمایش مسطحی از آن داده شده است، نمایش مسطحی «هم‌ارز» و یکسان با آن پیدا کنیم طوری که تمام یالهای آن پاره‌خطهای راست باشند. این نتیجهٔ جالب اولین بار توسط واگنر[1] در سال ۱۹۳۶ و بطور جداگانه توسط فری[2] در سال ۱۹۴۸ اثبات شد. در ادامه حالت ساده‌ای از نتیجه‌ای که آنها بدست آورده‌اند و ایدهٔ اثبات آن بیان خواهد شد. ولی برای رسیدن به این منظور نیاز به آشنایی با «مجموعهٔ ستاره‌ای شکل» داریم: منظور از مجموعهٔ ستاره‌ای شکل مجموعه‌ای از نقاط (مثل S) روی صفحه است که تشکیل یک ناحیهٔ بسته را بدهند بطوری که در داخل آن دایره‌ای مثل C (با شعاع مثبت) وجود داشته باشد که برای هر $x \in S$ و $y \in C$ خطی که دو نقطهٔ x و y را به هم وصل می‌کند کاملاً در داخل S قرار بگیرد. (در هیچ نقطه‌ای آن را قطع نکند)



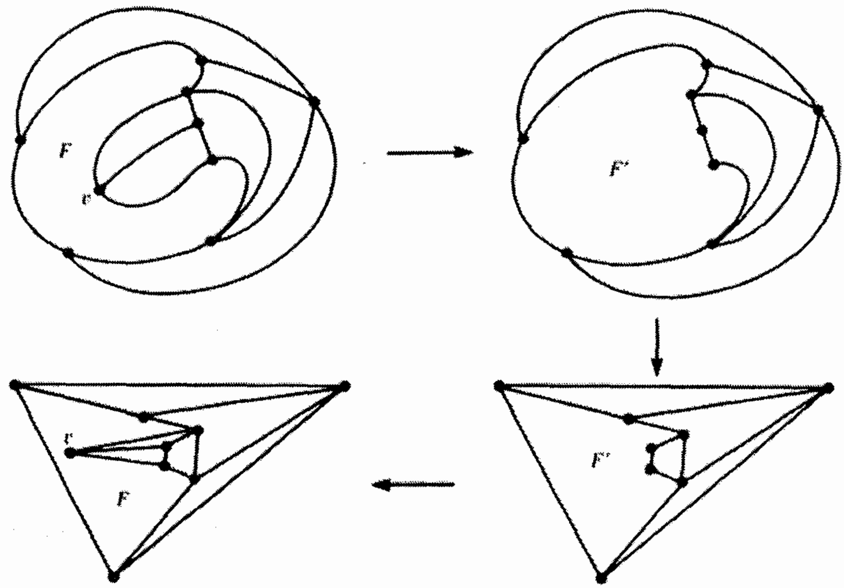
مجموعهٔ ستاره‌ای شکل S

قضیه (فری ـ واگنر): نمایش مسطحی از گراف G داده شده است بطوری که شامل ناحیه‌ای مثل F باشد که توسط یک دور احاطه شده است. در آن صورت برای گراف G نمایش مسطحی وجود دارد بطوری که تمام یالهای آن به صورت پاره‌خطهای راست باشند و در ضمن ناحیهٔ F در آن به صورت یک مجموعهٔ ستاره‌ای شکل باشد.

ایدهٔ اثبات: اثبات را بوسیلهٔ استقراء روی تعداد رئوس انجام می‌دهیم. حالتهای پایه بدیهی هستند. حال فرض کنید نمایش مسطحی از گراف G داده شده است که شامل ناحیه‌ای مثل F است که توسط یک دور احاطه شده است، در ضمن فرض کنید حکم مسأله برای گرافهای کوچکتر از G (طبق فرض استقراء) برقرار است. حال ما حکم قضیه را برای حالتی بررسی می‌کنیم که رأسی مثل v روی دور احاطه کنندهٔ ناحیهٔ F وجود داشته باشد بطوری که با حذف این رأس و یالهای مجاور آن، ناحیهٔ F، تبدیل به ناحیهٔ بزرگتری مثل F' شود که باز هم توسط یک دور احاطه شده است. (همانطور که در شکل بعد نمایش داده شده است). حال با توجه به

1) Wagner 2) Fa'ry

فرض استقراء می‌توانیم نمایش مسطحی برای گراف حاصل از حذف رأس v و یالهای مجاور آن از گراف G' بدست بیاوریم که حکم مسأله در آن صادق باشد. بدین ترتیب در نمایش مسطح بدست آمده ناحیهٔ F' به صورت یک مجموعهٔ ستاره‌ای شکل خواهد بود. در نتیجه می‌توانیم با توجه به تعریف مجموعهٔ ستاره‌ای شکل، رأس v را در ناحیهٔ F' طوری قرار دهیم که بتوانیم یالهای مجاور آن را به رأسهای مربوطه با یک خط راست طوری رسم کنیم که یالهای دیگر را قطع نکنند. بنابراین نمایش مسطحی برای گراف G با شرایط خواسته شده پیدا کرده‌ایم:

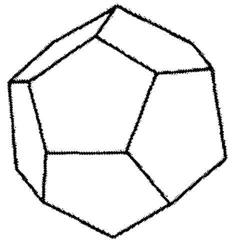


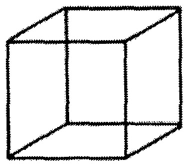
همانطور که در مثالهای قبل دیدید، راههای مختلفی برای نمایش مسطح یک گراف وجود دارد. امّا اگر دقت کرده باشید، در همهٔ آنها تعداد ناحیه‌ها ثابت است و ما قصد داریم تا رابطه‌ای برای تعداد نواحی یک گراف مسطح بیان کنیم. این رابطه که تعداد نواحی را برحسب تعداد رئوس و تعداد یالها بیان می‌کند به «فرمول اویلر[1]» معروف است. زیرا او این رابطه را در بررسیهای خود برای یافتن تعداد وجوه یک چندضلعی محدب یافته بود. البتّه این «کوشی[2]» بود که در سال ۱۸۱۳ این رابطه در چندضلعی‌های محدب را برای گرافهای مسطح نیز تعمیم داد و درستی آن را اثبات کرد.

مثال: شکل سمت چپ نمایشی از یک مکعب را نشان می‌دهد. همانطور که می‌بینید این

1) Euler's formula 2) Cauchy

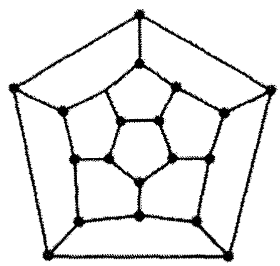
شکل دارای ۸ رأس، ۱۲ یال و ۶ وجه می‌باشد شکل سمت راست نیز یک ۱۲ وجهی می‌باشد که شامل ۲۰ رأس، ۳۰ یال و ۱۲ وجه می‌باشد.





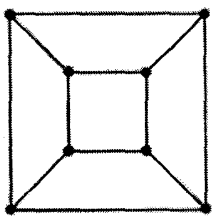
در هر دو حالت: ۲ + تعداد رئوس − تعداد یالها = تعداد وجوه

اویلر در سال ۱۷۵۲ اثبات کرد که این نتیجه برای تمام چند وجهی‌های محدب برقرار است. هر کدام از این چند وجهی‌ها را می‌توان روی صفحه به صورت یک گراف مسطح نمایش داد. (همانطور که در شکلهای زیر می‌بینید). در هر کدام از این حالتها تعداد رأسها، یالها و وجه‌های چند وجهی برابر با تعداد رأسها، یالها و نواحی گراف مسطح می‌باشد.



$G = (V, E)$

تعداد نواحی = $|E| - |V| +$ ۲



$G = (V, E)$

تعداد نواحی = $|E| - |V| +$ ۲

قضیه (فرمول اویلر): گراف همبند و مسطح $G = (V, E)$ را داریم. در آن صورت در هر نمایش مسطح G تعداد نواحی برابر خواهد بود با: $|E| - |V| +$ ۲.

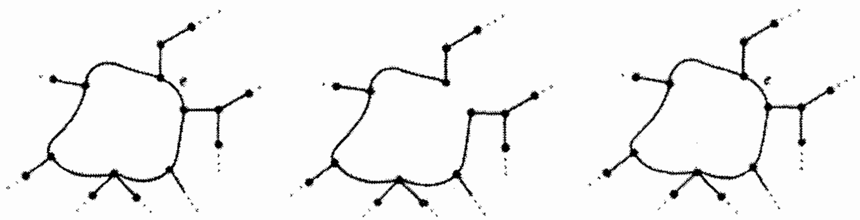
اثبات: این قضیه را بوسیلهٔ استقراء روی تعداد دورهای G اثبات می‌کنیم. اگر این گراف دوری نداشته باشد، در آن صورت یک درخت است و واضح است که یک درخت در صفحه فقط یک ناحیه ایجاد می‌کند و در ضمن برای هر درخت داریم: $|E| = |V| -$ ۱.

بنابراین در این حالت: تعداد نواحی = ۱ = ۲ + $|E| - |V|$

حال فرض کنید G حداقل شامل یک دور است و در ضمن طبق فرض استقراء حکم مسأله برای گرافهای با کمتر از این تعداد دور برقرار است.

یک نمایش مسطح از G را در نظر بگیرید. یال e از گراف G را در نظر بگیرید که عضو یکی از دورهای G بود. حال گراف $G' = (V, E - \{e\})$ را از حذف یال e از G بدست می‌آوریم. اکنون واضح است که با حذف یال e از نمایش مسطح G به یک نمایش مسطح از G' می‌رسیم و چون تعداد دورهای G' از G کمتر است بنابراین طبق فرض استقراء برای گراف $G' = (V, E - \{e\})$ داریم: تعداد نواحی $= |E - \{e\}| - |V| + ۲ = |E| - |V| + ۱$

حال با اضافه کردن یال e به گراف G' چه تغییری در تعداد نواحی ایجاد می‌شود؟ از آنجا که یال e از یک دور حذف شده بود واضح است که با اضافه کردن آن یکی از نواحی G' به دو ناحیه تقسیم می‌شود که یکی از این نواحی همان دور اولیه می‌باشد:



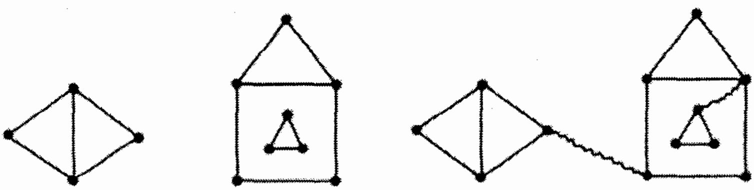
G G' G

تعداد نواحی $= |E| - |V| + ۲$ تعداد نواحی $= |E| - |V| + ۱$

واضح است که اکنون تعداد نواحی G یکی از G' بیشتر است. یعنی برابر است با $|E| - |V| + ۲$ که همان حکم استقراء می‌باشد. در نتیجه اثبات قضیه انجام شده است. □

نتیجهٔ اول: گراف مسطح $G = (V, E)$ با k مؤلفهٔ همبندی را در نظر بگیرید. در این صورت تعداد نواحی نمایش مسطح گراف G برابر خواهد بود با: $|E| - |V| + k + ۱$

اثبات: یکی از نمایشهای مسطح گراف G را در نظر بگیرید. $k - ۱$ یال طوری به گراف G اضافه کنید که گراف حاصل همبند و مسطح باشد. یعنی هر مؤلفه را بوسیلهٔ یک یال به یک مؤلفهٔ دیگر وصل کنید تا به گراف $G' = (V, E')$ برسید که تعداد نواحی آن با تعداد نواحی G برابر است.



G G'

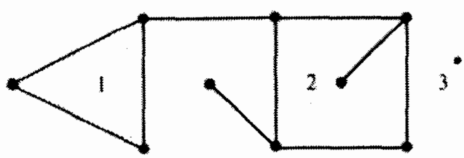
طبق فرمول اویلر تعداد نواحی نمایش مسطح G' (و در نتیجه G) برابر خواهد بود با:

$$|E'| - |V| + ۲ = (|E| + k - ۱) - |V| + ۲ = |E| - |V| + k + ۱,$$

دقت کنید که از فرمول اویلر نمی‌توان فهمید که چه گرافهایی مسطح هستند. زیرا قضیهٔ اویلر بیان می‌کند که «اگر G مسطح باشد آنگاه ... » البته با استفاده از این قضیه می‌توان مسطح نبودن بعضی از گرافها را تشخیص داد.

در بعضی از مسائل نیاز داریم تعداد یالهایی را که یک ناحیه را احاطه کرده‌اند بشمریم. این کار برای نواحی که توسط یک دور احاطه شده‌اند کاملاً ساده است. امّا اگر یالی وجود داشته باشد که دو طرف این یال در یک ناحیه باشند، آنگاه این یال را دوباره می‌شمریم.

مثال: در این گراف، ناحیهٔ ۱ توسط ۳ یال احاطه شده است، ناحیهٔ ۲ توسط ۶ یال و ناحیهٔ ۳ توسط ۱۱ یال.



بدین ترتیب تعداد کل یالهایی که برای احاطه نواحی شمرده‌ایم برای ۲۰ می‌باشد که دو برابر تعداد کل یالهای گراف است. این رابطه همواره برقرار است. زیرا هر یالی دو طرف دارد و برای هر طرف یک بار شمرده می‌شود. □

نتیجهٔ دوم: اگر گراف سادهٔ $G = (V, E)$ مسطح باشد و $|V| \geqslant ۳$ آنگاه $|E| \leqslant ۳|V| - ۶$.

اثبات: می‌توانیم فرض کنیم G همبند است. (در غیر این صورت می‌توان حداقل یالهای لازم برای همبند شدن گراف را به آن اضافه کرد و آنگاه نامساوی را برای گراف جدید و نتیجتاً گراف اولیه بدست آورد.) حال یک نمایش مسطح از G را در نظر بگیرید و تعداد نواحی آن را f بنامید. از شرط $|V| \geqslant ۳$ و ساده بودن گراف G می‌توان فهمید که هر ناحیه‌ای از گراف توسط حداقل سه یال احاطه شده است. بنابراین مجموع تعداد یالهایی که هر ناحیه را احاطه کرده‌اند حداقل برابر خواهد بود با $۳f$. در ضمن همانطور که در مثال قبل گفتیم این مقدار برابر است با $۲|E|$. بنابراین داریم:

$$۲|E| \geqslant ۳f = ۳(|E| - |V| + ۲) \Longrightarrow$$
$$۲|E| \geqslant ۳|E| - ۳|V| + ۶ \Longrightarrow |E| \leqslant ۳|V| - ۶$$

که همان نامساوی مورد نظر می‌باشد. □

مثال: نشان دهید گراف $K_۵$ مسطح نیست.

اثبات: اگر $K_۵$ مسطح باشد باید طبق نتیجهٔ قبل داشته باشیم: $|E| \leqslant ۳|V| - ۶$. امّا برای گراف کامل ۵ رأسی $|V| = ۵$ و $|E| = ۱۰$ می‌باشد و بنابراین در این مورد $|E| \nleqslant ۳|V| - ۶$. در نتیجه گراف $K_۵$ مسطح نیست. □

دو نتیجهٔ بعد در حقیقت تکرار نتیجهٔ قبل می‌باشند که شروط و نتیجه آن دقیق‌تر شده است:

نتیجهٔ سوم: اگر $G = (V, E)$ یک گراف سادهٔ دو بخشی باشد و در ضمن $|V| \geqslant ۳$ آنگاه

$$|E| \leqslant ۲|V| - ۴$$

اثبات: به یاد دارید که گرافهای دو بخشی دور به طول فرد ندارند. در نتیجه می‌توان فهمید که در یک گراف دو بخشی مسطح، هر ناحیه توسط زوج یال احاطه شده است. در ضمن چون گراف ساده است، در نتیجه می‌توان گفت که ناحیه‌ای که تنها دو یال آن را احاطه کرده باشد نداریم. بنابراین هر ناحیه توسط حداقل ۴ یال احاطه شده است پس همانطورکه در مورد نتیجهٔ دوم گفتیم می‌توان فهمید که:

$$۲|E| \geqslant ۴(|E| - |V| + ۲) \Longrightarrow$$
$$۲|E| \geqslant ۲|E| - ۲|V| + ۴ \Longrightarrow |E| \leqslant ۲|V| - ۴$$

که نامساوی مورد نظر می‌باشد. □

مثال: نشان دهید گراف $K_{۳,۳}$ مسطح نمی‌باشد.

اثبات: برای این گراف کامل دو بخشی داریم: $|V| = ۶$ و $|E| = ۹$ و بنابراین: $|E| \nleqslant ۲|V| - ۴$. بنابراین طبق نتیجهٔ قبل گراف $K_{۳,۳}$ مسطح نمی‌باشد. □

نتیجهٔ چهارم: گراف مسطح $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید که حداقل شامل یک دور است و در ضمن هر دور در این گراف شامل حداقل r یال می‌باشد (این عدد را برای هر گرافی کمر گراف می‌نامند.) در این صورت برای G داریم:

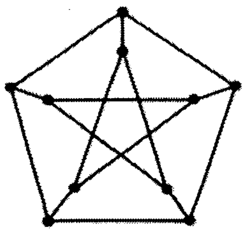
$$(r-۲)|E| \leqslant r(|V|-۲)$$

اثبات: در هر نمایش مسطح از G هر ناحیه توسط حداقل r یال احاطه شده است. بنابراین طبق استدلالی که در اثبات نتیجهٔ دوم آوردیم، داریم:

$$۲|E| \geqslant r(|E|-|V|+۲) \Longrightarrow$$
$$۲|E| \geqslant r|E|-r|V|+۲r \Longrightarrow (r-۲)|E| \leqslant r(|V|-۲)$$

که همان نامساوی مورد نظر می‌باشد. □

مثال: گراف پترسن در شکل زیر نمایش داده شده است. نشان دهید که این گراف مسطح نیست.



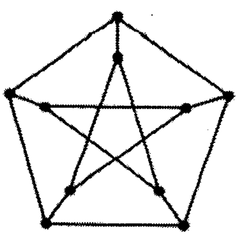
راه حل: برای گراف پترسن می‌دانیم که کمر گراف برابر $r = ۵$ میباشد. همچنین $|E| = ۱۵$ و $|V| = ۱۰$. بنابراین: $۴۵ = (r-۲)|E| \nleqslant r(|V|-۲) = ۴۰$

پس طبق نتیجهٔ چهارم گراف پترسن مسطح نمی‌باشد. □

دیدیم که گرافهای $K_۵$ و $K_{۳,۳}$ مسطح نمی‌باشند. قضیهٔ معروفی که در سال ۱۹۳۰ توسط کوراتوفسکی[1] بیان شد، بدین صورت است که هر گراف غیر مسطحی باید به نوعی شامل یکی از دو گراف غیر مسطح $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ باشد.

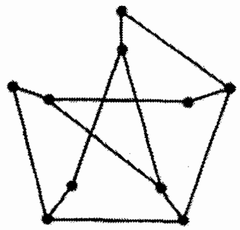
مثال: در مثال قبل دیدید که گراف پترسن مسطح نمی‌باشد. آیا این گراف شامل $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ می‌باشد؟

گراف پترسن:

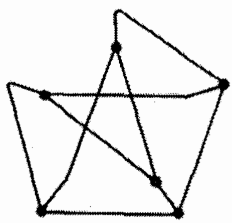


1) K. Kuratowski

زیرگرافی از آن:



گراف حاصل از حذف رئوس درجهٔ ۲: (با حذف این رئوس دو یال مجاور آنها را به هم متصل می‌کنیم تا به یک یال بزرگتر تبدیل شوند).



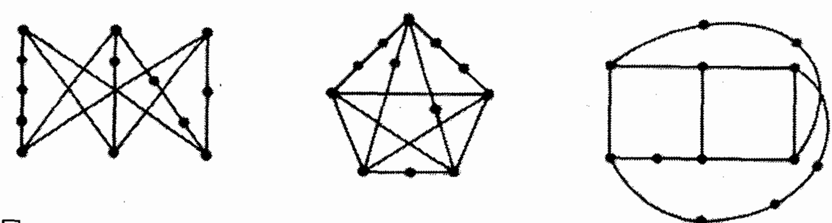
$K_{۳,۳}$

اکنون می‌خواهیم ایدهٔ حذف رئوس درجهٔ ۲ را که در مثال قبل گفتیم به صورت دقیق‌تر بیان کنیم: یال $e = uv$ از گراف داده شده است. با قرار دادن رأس جدید w روی یال e می‌توانیم آن را به دو یال جدید uv و wv تقسیم کنیم:

عکس عمل بالا، همان عمل حذف رئوس درجهٔ ۲ می‌باشد.

یک K-گراف، گرافی است که بتوان بوسیلهٔ تقسیم کردن یالها با رئوس جدید در یکی از دوگراف $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ به آن رسید. (اینگونه گرافی را یک گراف «همسانریخت» با $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ می‌نامند.)

مثال: گرافهای زیر همگی K-گراف می‌باشند:



□

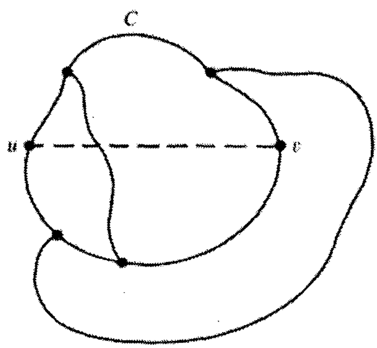
اکنون می‌خواهیم قضیهٔ معروفی را بیان کنیم به این مفهوم که «اگر گرافی مسطح نباشد آنگاه باید زیرگرافی به صورت یک Kـگراف داشته باشد.» اثبات کامل این قضیه را می‌توانید در کتاب «نظریهٔ گرافها و کاربردهای آن» تألیف باندی[1] و مورتی[2] بیابید:

قضیه (کوراتوفسکی): یک گراف مسطح است اگر و تنها اگر شامل هیچ زیرگرافی به صورت یک Kـگراف نباشد.

ایدهٔ اثبات: واضح است که اگر گرافی شامل یک Kـگراف باشد مسطح نیست. در نتیجه باید ثابت کنیم که یک گراف نامسطح حتماً شامل یک Kـگراف می‌باشد. یعنی باید ثابت کنیم که اگر با حذف بعضی از یالهای گراف مورد نظر به گراف G برسیم که کوچکترین گراف نامسطح باشد (یعنی با حذف هر یال دیگری گراف مسطح شود) و در ضمن این گراف رأسی با درجهٔ ۲ نداشته باشد، آنگاه G باید $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ باشد.

گراف G با شرایط بالا را در نظر بگیرید. یال uv از G را در نظر گرفته و گراف G' را از حذف یال uv از G بدست آورید. واضح است که G باید مسطح باشد. می‌توان نشان داد که گراف G' دارای دوری مثل C شامل u و v می‌باشند. واضح است که در هر نمایش مسطح از G' نمی‌توان یال uv را بدون قطع کردن یالهای دیگر به آن اضافه کرد. لذا در تمامی نمایش‌های موجود G'، دو رأس u و v به نحوی از هم «جدا» شده‌اند. در اثبات قضیهٔ کوراتوفسکی تمام حالتهای موجود برای جدا شدن دو رأس u و v از هم را بررسی می‌کنیم.

یکی از ساده‌ترین حالتها (که باید بررسی شود) هنگامی است که یک مسیر از داخلِ دورِ C و یک مسیر دیگر از خارجِ دورِ C، دو رأس u و v را از هم جدا کرده باشد. مانند شکل زیر:



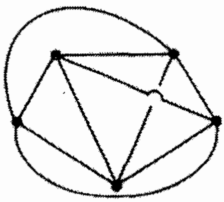
1) J.A. Bondy 2) U.S.R. Murty

امّا از قبل می‌دانیم که این شکل یک K-گراف است که از گراف $K_{۳,۳}$ بدست آمده است. (در واقع با توجه به کمینه بودن تعداد یالهای G و نبودن رأسهای درجهٔ ۲ در آن می‌توان نتیجه گرفت که در این حالت مسیر خارجی و مسیر داخلی دورِ C هر کدام یک یال تنها می‌باشند و بنابراین شکل نمایش داده شده، تمام گراف G می‌باشد.)

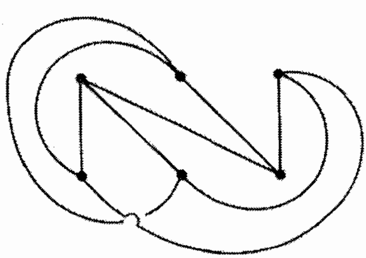
مابقی حالتهای موجود نیز سرانجام تبدیل به گرافهای $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ خواهند شد. □

همانطور که گفته شد گرافهای $K_۵$ و $K_{۳,۳}$ غیر مسطح می‌باشند. امّا در اولین مثال این فصل دیدیم که می‌توان این دو گراف را طوری رسم کرد که تنها یک نقطهٔ تقاطع در یالها وجود داشته باشد. حال اگر ما روی صفحه یک پل در نظر بگیریم می‌توانیم این گرافها را بدون تقاطع یالها رسم کنیم.

مثال: گرافهای $K_۵$ و $K_{۳,۳}$ را بدون برخورد یالها روی یک صفحه با یک پل رسم کنید:

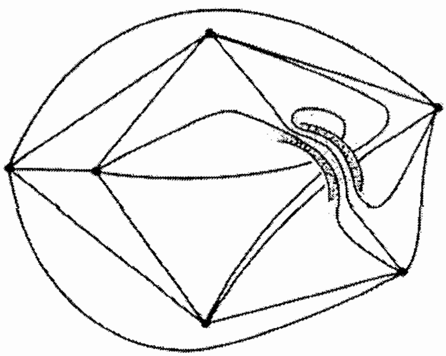


$K_۵$



$K_{۳,۳}$

گرافهای $K_۷$ و $K_{۴,۴}$ را می‌توان با استفاده از یک پل دیگر به صورت گفته شده رسم کرد. در زیر، گراف $K_۶$ را با یک پل رسم کرده‌ایم. دو گراف $K_۷$ و $K_{۴,۴}$ را خودتان رسم کنید.



$K_۶$

□

در حالت کلی اگر برای گراف G حداقل به g پل نیاز داشته باشیم تا بتوانیم آن را بدون تقاطع یالها نمایش دهیم، آنگاه می‌گوئیم گراف G از ردهٔ g می‌باشد و می‌نویسیم: $\mathcal{Y}(G) = g$. بنابراین به عنوان مثال گرافهای مسطح از ردهٔ صفر می‌باشند و گراف $K_۶$ (همانطور که نشان داده شد) از ردهٔ ۱ می‌باشد.

می‌توان فرمول اویلر را برای گرافهای از ردهٔ g نیز تعمیم داد. یعنی گرافهایی که می‌توان آنها را با استفاده از g پل بدون تقاطع یالها روی صفحه مورد نظر رسم کرد. در زیر این قضیه را بدون اثبات بیان می‌کنیم:

قضیه: گراف همبند $G = (V, E)$ را با شرط $|V| \geqslant ۳$ در نظر بگیرید. در این صورت:

الف) $|E| - ۶\mathcal{Y}(G) \leqslant ۳|V| - ۶$

ب) اگر G دو بخشی باشد آنگاه $|E| - ۴\mathcal{Y}(G) \leqslant ۲|V| - ۴$

ج) اگر کمر گراف G برابر r باشد آنگاه $(r - ۲)|E| - ۲r\mathcal{Y}(G) \leqslant r(|V| - ۲|$ □

اگر از بخش «الف» این قضیه برای گرافهای کامل K_n استفاده کنیم ($|V| = n$ و $|E| = \frac{۱}{۲}n(n-۱)$) نتیجه می‌گیریم که

$$\mathcal{Y}(K_n) \geqslant \frac{۱}{۱۲}n(n-۱) - \frac{۱}{۲}n + ۱ = \frac{۱}{۱۲}(n-۳)(n-۴)$$

از آنجا که ردهٔ یک گراف یک عدد صحیح است، در نتیجه داریم:

$$\mathcal{Y}(K_n) \geqslant \lceil \frac{۱}{۱۲}(n-۳)(n-۴) \rceil$$

(نماد $\lceil x \rceil$ بیانگر کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی x می‌باشد.) حال برای مثال می‌توان گفت: $\mathcal{Y}(K_۷) \geqslant \lceil ۱ \rceil = ۱$ و $\mathcal{Y}(K_۸) \geqslant \lceil \frac{۵}{۴} \rceil = ۲$. در واقع نیز می‌توان دید که $\mathcal{Y}(K_۷) = ۱$ و $\mathcal{Y}(K_۸) = ۲$ و در حالت کلی همواره تساوی برقرار است که در قضیهٔ بعد آن را بیان خواهیم کرد.

همچنین از قسمت «ب» قضیهٔ قبل می‌توان نتیجه گرفت که برای گرافهای کامل دو بخشی $K_{m,n}$ داریم:

$$\mathcal{Y}(K_{m,n}) \geqslant \lceil \frac{۱}{۴}(m-۲)(n-۲) \rceil$$

و اینجا نیز همواره تساوی برقرار است.

قضیه: الف) $\mathcal{Y}(K_n) = \lceil \frac{۱}{۱۲}(n-۳)(n-۴) \rceil$

ب) $\mathcal{Y}(K_{m,n}) = \lceil \frac{۱}{۴}(n-۲)(m-۲) \rceil$

که نماد $\lceil x \rceil$ بیانگر کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی x می‌باشد. □

این قضیه تا سال ۱۹۶۸ به صورت حل نشده باقی مانده بود که سرانجام توسط رینگل[1] و یانگس[2] اثبات شد. از این قضیه برای حل مسأله‌ای از بحث رنگ‌آمیزی نقشه نیز خواهیم کرد که در فصل بعد با آن آشنا خواهید شد.

1) G. Ringel 2) Youngs

«تمارین»

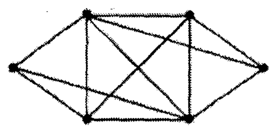
۱) گراف مسطح $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید:

الف) اگر G شامل هیچ رأسی از درجهٔ صفر نباشد و نمایش مسطحی از G وجود داشته باشد که هر ناحیه از آن بوسیلهٔ سه یال احاطه شده باشد آنگاه: $|E| = ۳|V| - ۶$.

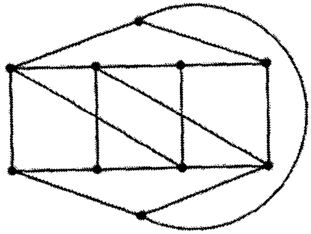
ب) اگر G نمایش مسطحی داشته باشد که هر ناحیهٔ آن حداقل با ۴ یال احاطه شده باشد آنگاه $|E| \leqslant ۲|V| - ۴$.

۲) کدامیک از گرافهای زیر مسطح می‌باشند؟ هر کدام که مسطح بود نمایشی مسطح از آن بوسیلهٔ خطوط راست ایجاد کنید و هر کدام که نامسطح بود یک Kـگراف در آن بیابید:

الف)



ب)



(ر، ج)

۳) گراف مسطح G را در نظر بگیرید بطوری که در نمایش مسطحی از آن هر ناحیه توسط دوری شامل زوج یال احاطه شده است. نشان دهید گراف G دو بخشی است. (ر)

۴) نمایشی از دو گراف $K_۷$ و $K_{۴,۴}$ روی صفحه با استفاده از تنها یک پل طوری رسم کنید که هیچ دو یالی همدیگر را قطع نکنند. (به بیان دیگر نمایش مسطحی از این دو گراف روی سطح یک «چنبره[1]» ایجاد کنید.) (ج)

۵) ضخامت گراف $G = (V, E)$ کمترین تعداد گرافهای مسطح $(V, E_۱), (V, E_۲), \ldots, (V, E_t)$ می‌باشند بطوری که $E_۱ \cup E_۲ \ldots \cup E_t = E$. نشان دهید برای $|V| \geqslant ۳$ ضخامت گراف G حداقل برابر است با $\{|E| - (۳|V| - ۶)\}$ و نتیجه بگیرید که ضخامت گراف کامل K_n حداقل برابر است با $[\frac{۱}{۶}(n + ۷)]$.

---

۱) چنبره شکلی است که از روی هم قرار دادن قاعده‌های یک استوانه بدست می‌آید. شکلی شبیه به تیوب.

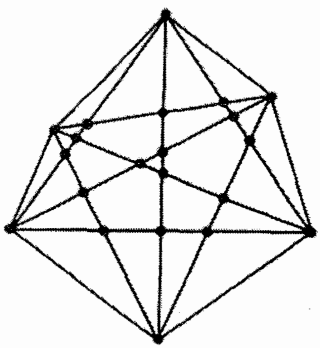
۶) مکمل گراف $G = (V, E)$ گراف $\bar{G} = (V, \bar{E})$ می‌باشد بطوری که:

$$\bar{E} = \{vw : \ v, w \in V \ , \ \ v \neq w \ , \ \ vw \notin E\}$$

الف) گراف ۸ رأسی G را بیابید که G و $\bar{G}$ مسطح باشند. (اینگونه گرافی وجود دارد. در واقع G و $\bar{G}$ یکریخت می‌باشند.) (ج)

ب) ثابت کنید اگر $|V| \geqslant$ ۱۱ آنگاه G و $\bar{G}$ هر دو نمی‌توانند مسطح باشند (در واقع این مسأله برای $|V| \geqslant$ ۹ درست است. ولی اثبات آن بسیار مشکل است) (ر)

۷) یک n ضلعی در نظر بگیرید که همهٔ قطرهای آن رسم شده‌اند. (در شکل حالت $n =$ ۶ نمایش داده شده است.) در ضمن فرض کنید هیچ سه قطری از یک نقطه نمی‌گذرند. حال شکل حاصل را با تبدیل نقاط برخورد قطرها به رئوس جدید به یک گراف مسطح تبدیل کنید. سپس با استفاده از فرمول اویلر تعداد ناحیه‌هایی که در داخل n ضلعی ایجاد شده‌اند را بدست آورید. (این مسأله در تمارین فصل اول نیز بیان شده بود) (ر، ج)



۸) گراف مسطح G را در نظر بگیرید که درجهٔ هر رأس آن برابر ۳ می‌باشد.

الف) نشان دهید که اگر G نمایش مسطحی داشته باشد که در آن هر ناحیه‌ای توسط دقیقاً ۴ یا ۶ یال احاطه شده باشد، در آن صورت دقیقاً ۶ ناحیه وجود دارد که توسط ۴ یال احاطه شده‌اند. (ر)

ب) نشان دهید اگر گراف G نمایش مسطحی داشته باشد که در آن هر ناحیه‌ای دقیقاً توسط ۵ یا ۶ یال احاطه شده باشد، در آن صورت دقیقاً ۱۲ ناحیه وجود دارد که بوسیلهٔ ۵ یال احاطه شده‌اند.

در هر مورد دو گراف مثال بزنید که تعداد رأسهای برابری نداشته باشند. (ج)

۹) گراف مسطح و دو بخشی G را در نظر بگیرید که درجهٔ هر رأس از آن برابر d است. نشان دهید که $d <$ ۴.

آیا اینگونه گرافی برای $d =$ ۳ وجود دارد؟ (ج)

۱۰) گراف مسطح G با حداقل سه رأس را در نظر بگیرید و برای هر عدد صحیح و غیر منفی n، مقدار v_n را برابر با تعداد رئوس از درجهٔ n تعریف کنید. نشان دهید:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(۶-n)v_n \geqslant ۱۲ \qquad \text{(ر)}$$

نتیجه بگیرید که G حداقل شامل ۳ رأس از درجهٔ ۵ یا کمتر می‌باشد. (ر)

۱۱) با استفاده از تمرین ۹ و بوسیلهٔ استقراء ثابت کنید که هر گراف مسطح قابل رنگ‌آمیزی رأسی با ۶ رنگ است. (ر)

۱۲) گراف همبند و مسطح $G=(V,E)$ را در نظر بگیرید که درجهٔ هر رأس آن حداقل برابر عدد مثبت d می‌باشد. اگر در نمایشی مسطح از آن هر ناحیه‌ای توسط c یال احاطه شده باشد، نشان دهید: $\frac{۱}{c}+\frac{۱}{d}>\frac{۱}{۲}$ (ر)

تمام اعداد صحیح c و d ($d \geqslant ۳$) را بنویسید که در شرایط نامعادلهٔ بالا صدق کنند و در هر مورد یک گراف با شرایط گفته شده رسم کنید: (ج)

۱۳) بازی زیر را در نظر بگیرید:

«تعداد رأس روی یک صفحه قرار داده‌ایم. دو نفر به نوبت به این ترتیب بازی می‌کنند که هر کس در نوبت خود یک رأس جدید روی صفحه قرار داده و آن را توسط دو یال به دو رأس دیگر موجود متصل می‌کند با این شرط که گراف حاصل همواره باید یک گراف مسطح باشد و در ضمن درجهٔ هیچ رأسی نباید بیشتر از ۳ شود. بازنده کسی که نتواند در نوبت خود بازی کند.»

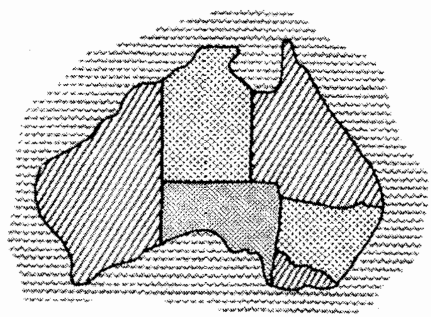
ثابت کنید این بازی به ازای هر تعداد رأس اولیه، همواره پایان‌پذیر است و برنده خواهد داشت. (ر)

۱۴

رنگ‌آمیزی نقشه

در این فصل در رابطه با رنگ‌آمیزی نواحی روی یک نقشه بحث خواهیم کرد طوری که هیچ دو ناحیهٔ مجاوری دارای یک رنگ نباشند.

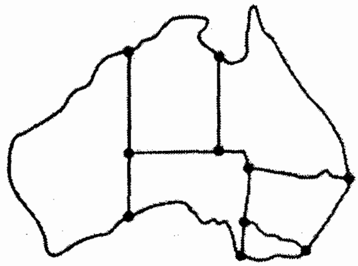
مثال:



این شکل نقشهٔ ایالتهای استرالیا می‌باشد که هر ناحیه به یک رنگ در آمده است (دریای اطراف نیز یک ناحیه محسوب شده است.) البته هر دو ناحیه مجاور دارای رنگهای متفاوت هستند. ما برای این کار از ۴ رنگ استفاده کرده‌ایم. در مورد این نقشه، این تعداد رنگ حداقل تعداد رنگهای لازم می‌باشد. □

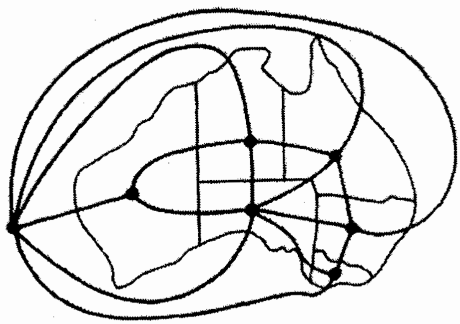
حال می‌خواهیم ببینیم که چگونه می‌توان رنگ‌آمیزی نقشه را به مسائل نظریهٔ گراف‌ها ربط داد؟ دو روش برای این کار موجود است که در مثال بعد به آنها اشاره خواهیم کرد.

مثال: نقشهٔ استرالیا که قبل از این نشان داده شده را می‌توان بوسیلهٔ یک گراف مسطح نمایش داد.



در این صورت، یک رنگ‌آمیزی نقشه، رنگ‌آمیزی ناحیه‌های این گراف است بطوری که هیچ دو ناحیه‌ای که یال مرزی مشترک دارند، همرنگ نباشند.

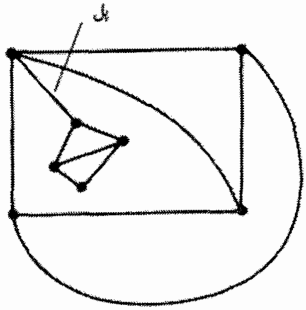
در عین حال ما می‌توانیم گراف دیگری نیز ایجاد کنیم که ناحیه‌های مجاور را به نوعی مشخص کرده باشد. به عنوان مثال برای نقشهٔ استرالیا می‌توان ۷ رأس را برای نمایش ناحیه‌ها در نظر گرفت و دو رأس را بوسیلهٔ یک یال به هم متصل کرد اگر و تنها اگر دو ناحیهٔ متناظر آنها دارای مرز مشترک باشند. گراف حاصل (همانطور که در شکل زیر می‌بینید) یک گراف مسطح است.



اکنون رنگ‌آمیزی نقشهٔ فوق معادل با رنگ‌آمیزی رأسی گراف حاصل می‌باشد. به راحتی می‌توان اثبات کرد که گراف حاصل برای هر نقشه‌ای مسطح خواهد بود. □

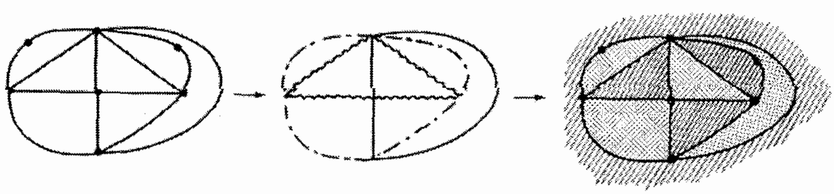
مثال بالا نشان داد که رنگ‌آمیزی یک نقشه معادل رنگ‌آمیزی نواحی یک گراف مسطح و یا رنگ‌آمیزی رأسی یک گراف دیگر است. در این فصل در بیشتر موارد از رنگ‌آمیزی نواحی استفاده می‌کنیم. البته در انتهای این فصل قضیه‌ای را نیز بوسیله رنگ‌آمیزی رأسی اثبات خواهیم کرد.

هنگامی که ما دربارهٔ رنگ‌آمیزی نقشه بحث می‌کنیم باید گراف حاصل از نقشه (گراف متناظر برای رنگ‌آمیزی نواحی) دو خاصیت زیر را داشته باشد: اولاً همبند باشد و ثانیاً یالی به صورت پل نداشته باشد. (یعنی نمایش مسطحی از یک گراف باشد.)



اکنون می‌توانیم نتیجه بگیریم که رنگ‌آمیزی نقشه یعنی رنگ کردن ناحیه‌های حاصل از نمایش مسطح یک گراف روی صفحه بطوری که دو ناحیه دارای یال مرزی مشترک، همرنگ نباشند. حال موضوعی که می‌خواهیم به بررسی آن بپردازیم این است که «حداقل به چند رنگ مختلف نیاز داریم تا بتوانیم یک نقشه را رنگ‌آمیزی کنیم؟». در مثال قبل دیدید که نقشهٔ استرالیا نیاز به ۴ رنگ دارد و با بررسی چند مثال دیگر می‌توان حدس زد که چهار رنگ برای رنگ‌آمیزی هر نقشه‌ای کافی است. قبل از بیان «قضیهٔ چهار رنگ» که حدس زده شده را بیان می‌کند و اثبات آن نیز کار مشکلی می‌باشد، ابتدا به بررسی چند نکتهٔ ساده‌تر در مورد رنگ‌آمیزی نقشه می‌پردازیم. اولین موضوعی که به بررسی آن می‌پردازیم این است که «چه نقشه‌هایی با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی می‌باشند؟».

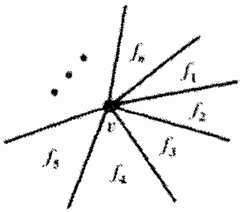
مثال: در شکل سمت چپ پائین نقشه‌ای را با رأسهای آن می‌بینید که درجهٔ هر رأس زوج می‌باشد. می‌توان دید که یالها یک مجموعه از چند دور مجزا از هم را تشکیل می‌دهند. (همانطور که در شکل وسط می‌بینید) یک رنگ را برای رنگ‌آمیزی ناحیه‌هایی که در داخل فرد دور هستند قرار دهید و رنگ دیگر را برای رنگ‌آمیزی ناحیه‌هایی که در داخل زوج دور هستند استفاده کنید. بدین ترتیب یک رنگ‌آمیزی برای نقشه با دو رنگ بدست آورده‌اید.



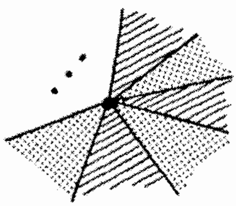
قضیه: یک نقشه را می‌توان با دو رنگ، رنگ‌آمیزی کرد اگر و تنها اگر درجهٔ همهٔ رئوس آن زوج باشد.

اثبات: ($\Longleftarrow$) ابتدا فرض کنید که نقشه (که متناظر با گراف G می‌باشد) با دو رنگ، رنگ‌آمیزی شده است. رأس v از G را در نظر بگیرید و درجهٔ آن را n فرض کنید. در نقشه رنگ‌آمیزی

شده، نواحی مجاور رأس v را با $f_1, f_2, \dots, f_n$ برچسب گذاری کنید. لازم نیست که رنگ تمام این نواحی متفاوت باشند. به عنوان مثال رنگ نواحی f_1 و f_3 می‌تواند یکسان باشد. حال واضح است که طبق شرط رنگ‌آمیزی نقشه، رنگ f_1 با رنگ f_2 متفاوت است، رنگ f_2 با رنگ f_3 و ... و رنگ f_n نیز با رنگ f_1 تفاوت دارد. در ضمن چون نواحی فقط با دو رنگ، رنگ‌آمیزی شده‌اند، در نتیجه n باید عددی زوج باشد. بنابراین درجهٔ هر رأس از گراف زوج خواهد بود.



($\Longleftarrow$) حال فرض کنید گراف G با درجهٔ رئوس زوج متناظر با نقشه‌ای است که می‌خواهیم آن را رنگ‌آمیزی کنیم. چون گراف G اویلری است، طبق قضیهٔ (اویلر ـ هایرهولتزر) از فصل ۶، این گراف متشکل از چند دور یال مجزا می‌باشد. حال در نقشه این دورها را در نظر بگیرید: هر کدام از این دورها دارای یک «سطح داخلی» می‌باشند. برای هر ناحیه‌ای از نقشه می‌توانیم تعداد دورهایی را که این ناحیه درون سطح داخلی آنها قرار دارد بشمریم: اگر ناحیه‌ای درون فرد دور از $C_1, C_2, \dots, C_n$ قرار داشت، آنگاه می‌توانیم آن را به رنگ اول درآوریم. و اگر در داخل زوج دور قرار داشت، آن را با رنگ دوم رنگ‌آمیزی می‌کنیم. (مانند مثال قبل).



با این روش رنگ‌آمیزی، هر ناحیه‌ای به یک رنگ در می‌آید. امّا آیا این رنگ‌آمیزی یک رنگ‌آمیزی مجاز است؟ به عبارت دیگر آیا نواحی مجاور دارای رنگهای مختلف هستند؟

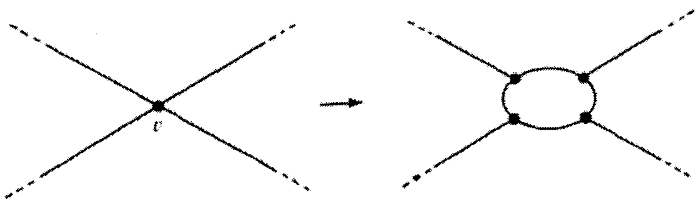
یال e از گراف G را در نظر بگیرید. این یال دقیقاً در یکی از دورهای $C_1, C_2, \dots, C_r$ ظاهر شده است. فرض کنید این دور C_i باشد. فرض کنید ناحیهٔ یک طرف این یال به رنگ اول در آمده باشد. در آن صورت این ناحیه در داخل فرد دور خواهد بود. از آنجا که یال e عضو یکی از دورها می‌باشد، در نتیجه به راحتی می‌توان دید که ناحیهٔ دیگر مجاور این یال در داخل زوج دور خواهد بود که در نتیجه به رنگ دوم در آمده است. یعنی نقشه با دو رنگ، رنگ‌آمیزی شده است، آن هم به صورت مجاز. □

آیا شما نواحی نقشه‌های جغرافیایی که معمولاً می‌بینید را می‌توانید با دو رنگ رنگ‌آمیزی کنید؟ معمولاً این طور نیست. زیرا طبق قضیه تنها در صورتی این کار ممکن است که درجهٔ هر رأس گراف متناظر با آن نقشه زوج باشد.

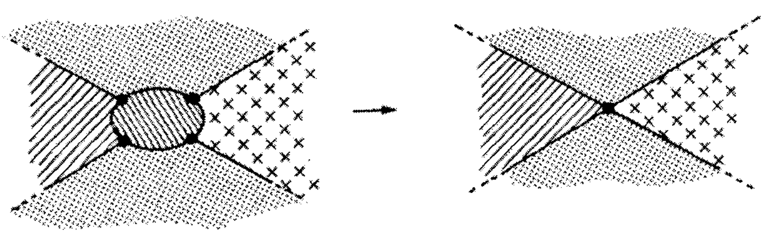
در نقشه‌های جغرافیایی معمولاً رئوس با درجهٔ ۴ و یا بالاتر، کمتر به چشم می‌خورد. زیرا وجود اینگونه رئوس بدین معناست که حداقل ۴ ناحیه از نقشه دقیقاً در یک نقطه به هم رسیده

باشند که این اتفاق کمتر پیش می‌آید. به همین **دلیل** قصد داریم توجه خود را به «گرافهای مکعب» معطوف کنیم که در آنها درجهٔ هر رأس برابر با ۳ است. مثال زیر علت این کار را بهتر بیان می‌کند.

مثال: یک نقشهٔ جغرافیایی در نظر بگیرید که در گراف متناظر آن رئوس درجهٔ ۴ یا بالاتر نیز وجود دارد. در ضمن فرض کنید که روشی برای رنگ‌آمیزی نقشه‌هایی که گراف متناظر آنها یک گراف مکعب است، داریم. حال می‌خواهیم نقشهٔ مورد نظر را با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم. برای این کار تبدیل زیر را برای یک رأس v با درجهٔ ۴ (و یا بیشتر) انجام می‌دهیم:



این کار را برای تمام رئوس با درجهٔ بیشتر از ۳ انجام می‌دهیم تا دیگر هیچ رأسی با درجهٔ بیشتر از ۳ وجود نداشته باشد. حال نواحی نقشهٔ حاصل را می‌توان طبق فرض با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. سپس با حذف ناحیه‌های اضافه شده می‌توانیم به نقشهٔ اولیه برسیم. در این صورت توانسته‌ایم نقشهٔ اصلی را با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم.



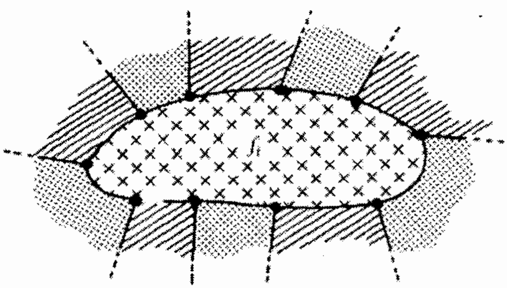
بنابراین می‌توانیم توجه خود را به گرافها و نقشه‌های درجهٔ ۳ معطوف کنیم. منظور از نقشهٔ درجهٔ ۳، نقشه‌ای است که گراف متناظر با آن یک گراف مکعب باشد. قبل از اینکه به بیان قضیه‌ای در مورد اینگونه نقشه‌ها بپردازیم، ابتدا نتیجهٔ ساده‌ای از فرمول اویلر را بیان می‌کنیم: در هر نقشهٔ درجهٔ ۳، حداقل یک ناحیه وجود دارد که با کمتر یا مساوی ۵ یال احاطه شده باشد. زیرا در غیر این صورت هر ناحیه‌ای باید حداقل توسط ۶ یال احاطه شده باشد و در آن صورت ما می‌توانیم با شمارش یالهای اطراف هر ناحیه نامساوی زیر را بدست آوریم: $۲|E| \leqslant ۶(|E|-|V|+۲)$

که از آن می‌توان نتیجه گرفت: $2|E| > 3|V|$. ولی از آنجا که درجهٔ هر رأس برابر با ۳ است، در نتیجه نامساوی بالا هیچ‌گاه برقرار نیست و همواره حالت تساوی برقرار است. بنابراین در اینگونه نقشه‌ای، همواره ناحیه‌ای وجود دارد که حداکثر توسط ۵ یال احاطه شده باشد. ما از این نتیجه برای اثبات بعضی از قضایای رنگ‌آمیزی نقشه استفاده خواهیم کرد. قضیهٔ زیر بیان می‌کند که چه موقع نقشهٔ درجهٔ ۳ قابل رنگ‌آمیزی با ۳ رنگ می‌باشد.

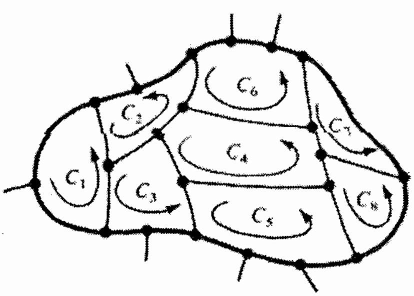
قضیه: نقشهٔ درجهٔ ۳، با سه رنگ قابل رنگ‌آمیزی است، اگر و تنها اگر گراف متناظر با آن دو بخشی باشد.

اثبات: ($\Longleftarrow$) در ابتدا فرض کنید که نقشهٔ درجهٔ ۳ (و گراف متناظر با آن) با سه رنگ رنگ‌آمیزی شده‌اند. اکنون قصد داریم نشان دهیم که هر دوری از G شامل زوج یال است که در نتیجه طبق قضیه‌ای که در بخش همخوانی از فصل ۴ بیان کردیم، می‌توان فهمید که G دو بخشی است. دور C_i در گراف G را در نظر می‌گیریم که ناحیهٔ f_i از نقشه را احاطه کرده است.

اکنون چون درجهٔ هر رأس برابر با ۳ است، در نتیجه حالتی مثل شکل سمت چپ بدست می‌آید: یکی از رنگها برای ناحیهٔ f_i استفاده خواهد شد و دو رنگ دیگر برای رنگ‌آمیزی نواحی مجاور f_i (بطور متناوب) استفاده خواهند شد. در نتیجه باید زوج ناحیه در اطراف f_i قرار داشته باشند. به عبارت دیگر C_i باید شامل زوج یال باشد.



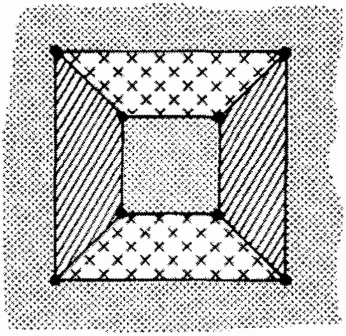
حال دور C از گراف G را در نظر بگیرید و فرض کنید نواحی $f_1, f_2, \ldots, f_n$ در داخل این دور قرار گرفته‌اند. بنابراین (همانطور که در تمرین ۳ فصل قبل دیدید) باید ثابت کنیم که دور C شامل زوج یال می‌باشد. برای هر ناحیهٔ f_i، دور احاطه کنندهٔ آن را C_i می‌نامیم و فرض می‌کنیم m یال درون دور C قرار داشته باشد. بدین ترتیب می‌توانیم تعداد یالهای دور C را بشمریم:



$$|C| = \underbrace{|C_1| + \cdots + |C_n|}_{\text{هر کدام زوج است}} - 2m = \text{زوج}$$

بنابراین هر دور از G شامل زوج یال است. پس می‌توان نتیجه گرفت که گراف G دو بخشی است.

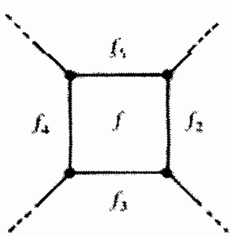
($\Longrightarrow$) فرض کنید گراف $G = (V, E)$ گراف متناظر با نقشه باشد و در ضمن G یک گراف دو بخشی با درجهٔ رئوس ۳ باشد. بنابراین چون گراف دو بخشی است، در نتیجه طبق نتیجهٔ سوم از قضیهٔ اویلر (که در فصل ۱۳ بیان شده است) داریم: $|E| \leqslant 2|V| - 4$. حال با توجه به اینکه درجهٔ هر رأس برابر با ۳ است می‌توانیم نتیجه بگیریم که



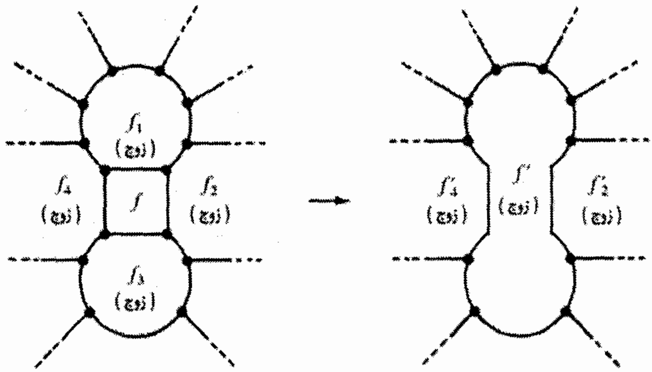
$$3|V| = 2|E| \leqslant 4|V| - 8$$

و بنابراین $|V| \geqslant 8$ و $|E| \geqslant 12$. در واقع به راحتی می‌توان فهمید که تنها گرافی با شرایط گفته شده که $|E| = 12$ باشد گراف نمایش داده شده در شکل روبرو می‌باشد.

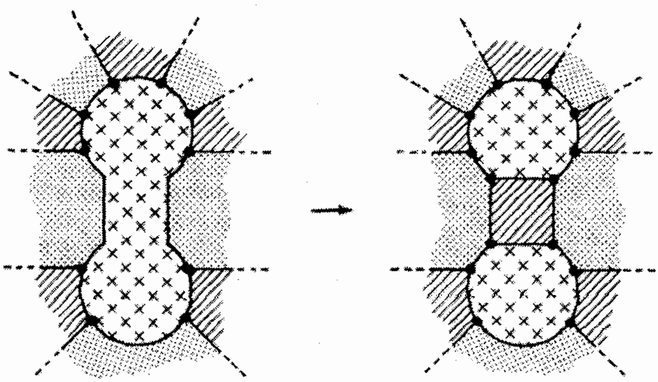
حال اثبات را بوسیلهٔ استقراء روی $|E|$ انجام می‌دهیم. حالت پایه $|E| = 12$ می‌باشد که طبق شکل با سه رنگ قابل رنگ‌آمیزی است. حال فرض کنید $|E| > 12$ و حکم برای گرافهای با تعداد یالهای کمتر برقرار است. با توجه به نتیجه‌ای که قبل از قضیه بیان کردیم، هر نقشهٔ درجهٔ ۳ دارای ناحیه‌ای است که با ۳، ۴ و یا ۵ یال احاطه شده است. امّا از آنجا که گراف دو بخشی است، در نتیجه هر ناحیه‌ای توسط زوج یال احاطه شده است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که گراف شامل ناحیه‌ای است که دقیقاً توسط ۴ یال احاطه شده است. این ناحیه را مانند شکل مقابل f بنامید و ناحیه‌های مجاور آن را با f_1, f_2, f_3, f_4 نامگذاری کنید. ممکن است f_3 و f_1 هر دو قسمتی از یک ناحیه باشند و یا f_2 و f_4 هر دو داخل یک ناحیه باشند. ولی مسلماً برای هر دو جفت این حالت ممکن نیست. یعنی ممکن نیست که هم f_2 و f_4 هر دو در یک ناحیه باشند و هم f_3 و f_1. حال بدون اینکه به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود فرض کنید f_1 و f_3 در دو ناحیهٔ مختلف هستند (مانند شکل زیر).



حال با حذف دو یال بین ناحیهٔ f و نواحی f_1 و f_3، ناحیه‌های f' و f'_2 و f'_4 را بدست آورید.



با کمی تأمل می‌توان فهمید که رئوس شکل جدید نیز همگی از درجهٔ ۳ می‌باشند و گراف هنوز دو بخشی است. حال با توجه به اینکه تعداد یالهای گراف کمتر شده است و در ضمن هر ناحیه‌ای در آن توسط زوج یال احاطه شده است، در نتیجه طبق فرض استقراء ناحیه‌های گراف حاصل قابل رنگ‌آمیزی با ۳ رنگ می‌باشند. واضح است که چون یک رنگ به f' نسبت داده شده است، در نتیجه ناحیه‌های اطراف آن یکی در میان به دو رنگ دیگر در آمده‌اند. اکنون به راحتی می‌توان فهمید که f'_2 و f'_4 نیز باید همرنگ باشند و بنابراین می‌توان دو یال حذف شده را به گراف اضافه کرد و ناحیهٔ چهارتایی ایجاد شده را با رنگی که به هیچ کدام از f' و f'_2 و f'_4 نسبت داده نشده است، رنگ کرد.

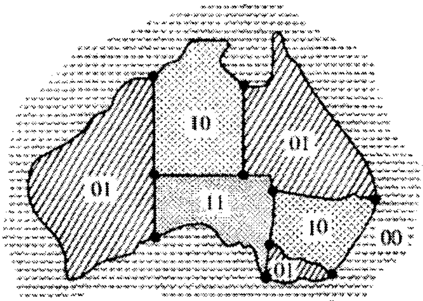


در نتیجه توانسته‌ایم نقشهٔ اولیه را با سه رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم که حکم مسأله می‌باشد. □

تاکنون شرایطی را برای رنگ‌آمیزی نقشه با ۲ رنگ و یا ۳ رنگ بررسی کردیم. اکنون می‌خواهیم این کار را برای چهار رنگ بررسی کنیم. در قضیهٔ قبل نشان دادیم که ناحیه‌های

هر گراف با درجهٔ رئوس ۳ که عدد رنگی رأسی آن برابر با ۲ است، با ۳ رنگ قابل رنگ‌آمیزی می‌باشند. قضیهٔ بعدی که بیان خواهیم کرد، رنگ‌آمیزی نواحی یک نقشهٔ درجهٔ ۳ با عدد رنگی یالی ۳ را با ۴ رنگ بیان خواهد کرد.

مثال: نقشهٔ استرالیا را که نواحی آن با چهار رنگ، رنگ‌آمیزی کرده بودیم، به یاد بیاورید. اکنون به رنگهای مورد استفاده اعداد ۰۰, ۰۱, ۱۰, ۱۱ را مانند زیر نسبت می‌دهیم:



هر یالی بین دو ناحیه با رنگهای مختلف قرار دارد. در نتیجه ما می‌توانیم یالها را با سه رنگ به این صورت رنگ‌آمیزی کنیم که به هر یال با توجه به رنگ دو ناحیهٔ مجاور آن، رنگی را به صورت زیر نسبت می‌دهیم:

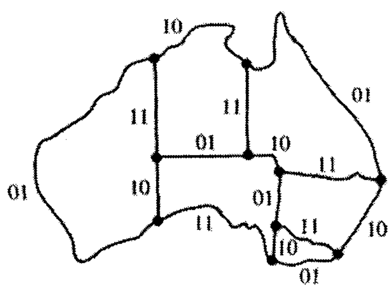
رنگ ۰۱ در یک طرف و رنگ ۱۰ در طرف دیگر قرار دارد ⇐ رنگ ۱۱ را به یال نسبت می‌دهیم.

به همین ترتیب:

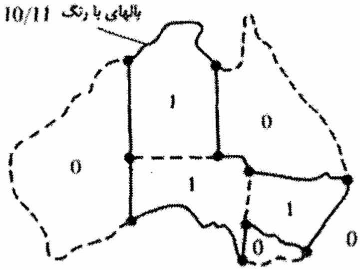
۱۰,۰۰ ⟹ ۱۰   ۱۰,۱۱ ⟹ ۰۱

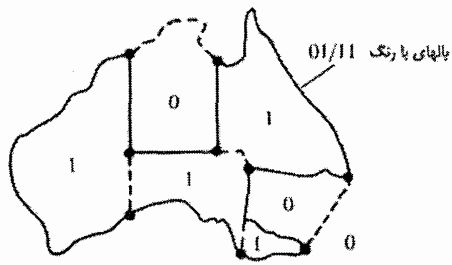
۱۱,۰۰ ⟹ ۱۱   ۰۱,۰۰ ⟹ ۰۱   ۰۱,۱۱ ⟹ ۱۰

به این ترتیب یک رنگ‌آمیزی یالی گراف با ۳ رنگ بدست می‌آید.

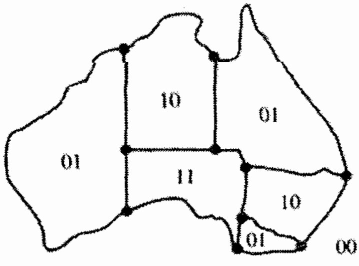


حال فرض کنید که ما یک رنگ‌آمیزی یالی با ۳ رنگ ۱۰، ۰۱ و ۱۱ داریم و می‌خواهیم یک رنگ‌آمیزی برای نواحی گراف با ۴ رنگ بدست آوریم: در شکل سمت چپ زیر ما به نواحی که در داخل دورِ متشکل از یالهای به رنگ ۱۰ و ۱۱ قرار دارند شمارهٔ ۱ و به مابقی نواحی شمارهٔ ۰ را نسبت می‌دهیم. (واضح است که یالهای با رنگ ۱۰ و ۱۱ در گراف تشکیل مجموعه‌ای از دورهای مجزا می‌دهند)؛ در شکل سمت راست نیز به نواحی که در داخل دوری متشکل از یالهای به رنگ ۰۱ و ۱۱ قرار دارند عدد ۱ و به مابقی نواحی عدد صفر را نسبت داده‌ایم:





در هرکدام از دو شکل بالا به هر ناحیه‌ای یک مقدار داده شده است. برای مثال به ناحیهٔ غربی استرالیا در شکل سمت چپ عدد صفر و در شکل سمت راست عدد ۱ نسبت داده شده است. اکنون ما رنگ ۰۱ را به آن نسبت می‌دهیم. برای مابقی ناحیه‌ها نیز به همین صورت عمل می‌کنیم: رنگی را به هر ناحیه نسبت می‌دهیم که رقم اول آن مقدار آن ناحیه در شکل سمت چپ و رقم دوم آن، مقدار آن ناحیه در شکل سمت راست باشد. همانطور که می‌بینید با این روش، به رنگ‌آمیزی نواحی نقشه (همانطور که در ابتدا داشتیم)، رسیدیم.



□

قضیه: نواحی یک نقشهٔ درجهٔ ۳ با چهار رنگ قابل رنگ‌آمیزی هستند، اگر و تنها اگر این گراف با ۳ رنگ قابل رنگ‌آمیزی یالی باشد.

اثبات: ($\Longleftarrow$) ابتدا فرض کنید نقشهٔ درجهٔ ۳ (و گراف G متناظر با آن) قابل رنگ‌آمیزی با چهار رنگ باشد. این چهار رنگ را با شماره‌های ۰۰, ۰۱, ۱۰, ۱۱ نامگذاری می‌کنیم. مانند مثال قبل ما یک رنگ‌آمیزی یالی برای G با سه رنگ از چهار رنگ ایجاد می‌کنیم. برای پیدا کردن رنگ هر یال، به رنگ دو طرف آن دقت کرده و به روش زیر رنگ یال را بدست می‌آوریم:

رنگ ۱۱ را به یال نسبت می‌دهیم. $\Leftarrow$ رنگ ۱۰ در یک طرف و رنگ ۰۱ در طرف دیگر باشد

۱۰,۱۱ $\Longrightarrow$ ۰۱   ۱۰,۰۰ $\Longrightarrow$ ۱۰

۰۱,۱۱ $\Longrightarrow$ ۱۰   ۰۱,۰۰ $\Longrightarrow$ ۰۱   ۱۱,۰۰ $\Longrightarrow$ ۱۱

به این ترتیب هر یالی با یکی از سه رنگ ۰۱ و ۱۰ و ۱۱ رنگ‌آمیزی می‌شود. امّا آیا این رنگ‌آمیزی یک رنگ‌آمیزی مجاز است؟ یعنی آیا هر دو یال مجاور، رنگهای مختلف دارند؟ فرض کنید برای مثال، ناحیه‌هایی به رنگ ۰۰ و ۰۱ و ۱۱ در یک رأس به هم رسیده‌اند در آن صورت سه یالی که با این رأس مجاورند، با رنگهای ۰۱ و ۱۰ و ۱۱ رنگ‌آمیزی خواهند شد.

در بقیهٔ حالتها نیز می‌توانیم مختلف بودن رنگ هر سه یال مجاور را به همین صورت بررسی کنیم. یعنی بدین صورت توانسته‌ایم یک رنگ‌آمیزی یالی با سه رنگ بدست آوریم.

($\Longrightarrow$) فرض کنید رنگ‌آمیزی یالی گراف G با سه رنگ ۰۱ و ۱۰ و ۱۱ داده شده است. بنابراین هر رنگی دقیقاً در یک یال مجاور هر رأس ظاهر شده است. حال در زیرگرافی که از حذف یالهای به رنگ ۰۱ تشکیل می‌شود، درجهٔ هر رأس برابر ۲ می‌باشد و بنابراین این زیرگراف از چند مؤلفه به صورت دور تشکیل شده است. (البته ممکن است یک دور در داخل دور دیگری قرار داشته باشد.) حال در نقشه به هر ناحیه‌ای که در داخل زوج دور قرار داشته باشد، عدد صفر و به هر ناحیه‌ای که در داخل فرد دور قرار داشته باشد، عدد یک را نسبت می‌دهیم.

اکنون در گراف G زیرگراف حاصل از حذف یالهای به رنگ ۱۰ را در نظر می‌گیریم و مانند قبل به هر ناحیه مقدار صفر یا یک را نسبت می‌دهیم. سپس در گراف G، هر ناحیه را به رنگی در می‌آوریم که رقم اول آن، مقدار آن ناحیه در زیرگراف اول و رقم دوم آن، مقدار آن در زیرگراف دوم باشد. بدین ترتیب یک رنگ‌آمیزیِ نقشه با چهار رنگ بدست می‌آید. حال باید بررسی کنیم که آیا برای هر یال e دو ناحیهٔ مجاور آن دارای رنگهای متفاوت می‌باشند؟ فرض کنید برای مثال یال e به رنگ ۱۰ باشد و ناحیهٔ f در یک طرف آن به رنگ ۱۱ باشد. بنابراین با توجه به روند گفته شده، چون رقم اول رنگ ناحیهٔ f، یک است در نتیجه این ناحیه در داخل تعداد فردی دور قرار دارد که از یالهای به رنگ ۱۰ و ۱۱ تشکیل شده‌اند. امّا باید توجه داشته باشیم که چون یال e خود به رنگ ۱۰ می‌باشد و در زیرگراف گفته شده قرار دارد، بنابراین رنگ دو ناحیهٔ مجاور آن باید رقم اول مختلفی داشته باشند. در ضمن چون یال e در زیرگراف حاصل از یالهای با رنگ ۰۱ و ۱۱ وجود ندارد لذا ناحیهٔ f و ناحیهٔ دیگر مجاور یال e (f')، باید در این زیرگراف، هر دو در یک ناحیه قرار بگیرند. بنابر رقم دومِ رنگ هر دو ناحیهٔ f و f' یکسان خواهد بود. در نتیجه رنگ ناحیهٔ f' برابر ۰۱ خواهد بود که متمایز با رنگ ناحیهٔ f است. در حالت‌های دیگر، دو ناحیهٔ مجاور هر یال به رنگ ۱۰ دارای رنگهایی با رقم دوم متمایز هستند و دو ناحیهٔ مجاور هر یال به رنگ ۱۱ در هر دو رقم رنگ خود متفاوت می‌باشند. بنابراین در همهٔ حالتها هر دو ناحیهٔ مجاور، دارای رنگهای مختلف خواهند بود. □

این قضیه در واقع هم‌ارزی دو ویژگی مهم در گرافها را بیان می‌کند. ویژگی اوّل این است که «هر نقشهٔ درجهٔ ۳ (و در نتیجه هر نقشه‌ای) قابل رنگ‌آمیزی با چهار رنگ است.» برای بررسی ویژگی دوم، توجه خود را به قضیهٔ ویزینگ از فصل هفتم معطوف می‌کنیم: اگر بزرگترین درجهٔ رئوس یک گراف برابر d باشد، آنگاه این گراف قابل رنگ‌آمیزی یالی با $d+1$ رنگ است. البته برای بعضی از گرافها این کار با d رنگ نیز انجام‌پذیر است. امّا یافتن این دسته از گرافها بسیار مشکل است. ویژگی دوم این است که «گرافهای مسطح با درجهٔ رئوس ۳، قابل رنگ‌آمیزی یالی با ۳ رنگ می‌باشند.»

حل قضیهٔ چهار رنگ (که تاریخچهٔ جالب و طولانی دارد)، باعث ایجاد گسترش بسیاری از شاخه‌های نظریه گراف شد که امروزه در استدلالها و حل مسائل خود به راحتی به آنها رجوع می‌کنیم. ولی این قضیه تا سال ۱۹۷۶ به صورت حل نشده باقی مانده بود تا اینکه دو ریاضیدان آمریکایی به نامهای «اَپل[1]» و «هَکن[2]» با استفاده از ایده‌هایی که قبلاً «کِمپ[3]» برای حل قضیه به کار برده بود (البته موفق به حل آن نشده بود) توانستند بوسیلهٔ کامپیوتر این مسأله را حل کنند

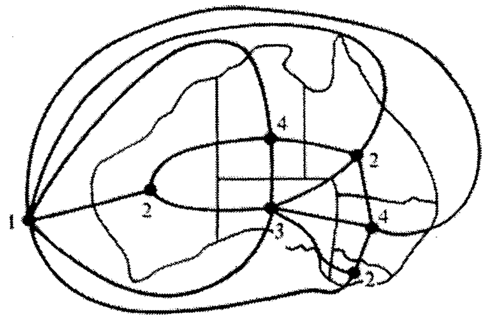
1) K. Appel 2) W. Haken 3) A.B. Kempe

(جزئیات بیشتری در این مورد را می‌توانید در کتاب «Selected topies in graph theory» بیابید.) آنها اعلام کرده بودند که حل این مسأله با کامپیوتر ۳۰۰ ساعت زمان برده است که بیانگر پیچیدگی اثبات آنها می‌باشد. در اینجا ما قضیه را بدون اثبات بیان خواهیم کرد.

قضیه (قضیهٔ چهار رنگ): هر نقشه‌ای با چهار رنگ قابل رنگ‌آمیزی است. □

فرض کنید یک نقشه داده شده است. از روی آن گراف مسطحی ایجاد می‌کنیم به این صورت که مجموعهٔ رئوس گراف همان مجموعهٔ نواحی نقشه می‌باشند و دو رأس از گراف با یک یال به هم متصلند اگر و تنها اگر دو ناحیهٔ متناظر با آن رئوس در نقشه با هم دارای مرز مشترک باشند. اینگونه گرافی را گراف «دوگان» نقشه می‌نامیم. از تعریف گراف دوگان در حل آخرین قضیهٔ این فصل استفاده خواهیم کرد.

مثال: نقشهٔ استرالیا را به یاد بیاورید. واضح است که رنگ‌آمیزی این نقشه معادل رنگ‌آمیزی رأسی گراف مسطح جدید است.



حال بدون اینکه به بیان جزئیات بیشتر بپردازیم، نتیجهٔ زیر را قبول می‌کنیم که «امکان رنگ‌آمیزی هر نقشه با ۵ رنگ معادل با امکان رنگ‌آمیزی رأسی هر گراف مسطح با ۵ رنگ می‌باشد.» و این فصل را با اثبات درستی این دو عبارت معادل به پایان می‌رسانیم.

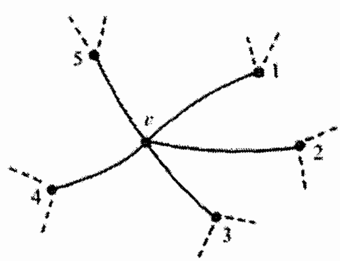
قضیه: هر نقشه‌ای با ۵ رنگ قابل رنگ‌آمیزی است.

اثبات: با توجه به آنچه قبل از این بیان شد، ما می‌توانیم نتیجهٔ معادل این قضیه را اثبات کنیم که هر گراف مسطح $G = (V, E)$ قابل رنگ‌آمیزی رأسی با ۵ رنگ می‌باشد. این کار را با استقراء روی $|V|$ انجام می‌دهیم. حالتهای $|V| \leqslant ۵$ بدیهی می‌باشند. حال فرض کنید $|V| > ۵$ و یک نمایش مسطح از G داریم. در ضمن می‌دانیم حکم مسأله برای گرافهای با کمتر از $|V|$

رأس برقرار است. با توجه به نتیجهٔ دوم فرمول اویلر (فصل ۱۳)، از مسطح بودن G می‌توان فهمید که $|E| \leqslant ۳|V| - ۶$ بنابراین

$$\sum_{v \in V} d(v) = ۲|E| \leqslant ۶|V| - ۱۲ < ۶|V|$$

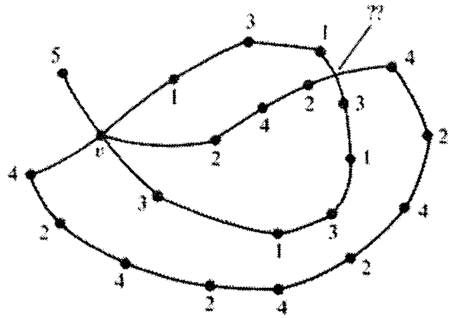
این بدین معنی است که درجهٔ تمام رئوس G نمی‌توانند مساوی و یا بیشتر از ۶ باشند. یعنی رأسی مانند v وجود دارد که درجهٔ آن حداکثر برابر با ۵ باشد. حال گراف G' را از حذف رأس v و یالهای مجاور آن از گراف G بدست می‌آوریم. با توجه به فرض استقراء می‌توانیم رئوس گراف G' را با ۵ رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم. حال دوباره رأس v و یالهای مجاور آن را به G' اضافه می‌کنیم تا به گراف اولیهٔ G برسیم. اگر اکنون رنگی وجود داشته باشد که در هیچ یک از رئوس مجاور v ظاهر نشده باشد، آنگاه می‌توان رأس v را به آن رنگ در آورد و بدین ترتیب یک رنگ‌آمیزی رأسی برای G' با ۵ رنگ بدست آورد. در غیر این صورت فرض کنید که رأس v انتهای ۵ یال $vv_۱$، $vv_۲$، $vv_۳$، $vv_۴$ و $vv_۵$ می‌باشد بطوری که رنگ رئوس v_i برابر i است. (همانطور که در شکل می‌بینید).



برای هر $۱ \leqslant i \leqslant j \leqslant ۵$ زیرگراف G_{ij} از G' را متشکل از رئوس به رنگ i و j و یالهای بین آنها ایجاد کنید. اگر $v_۱$ و $v_۳$ در دو مؤلفهٔ مختلف از $G_{۱۳}$ باشند، می‌توانیم در مؤلفه‌ای که شامل $v_۱$ است، رنگ تمام رئوس را عوض کنیم (یعنی رئوس به رنگ ۱ را به رنگ ۳ در آوریم و برعکس).

با کمی تأمل می‌توان دریافت که گراف G' هنوز شامل یک رنگ‌آمیزی رأسی مجاز با ۵ رنگ می‌باشد و در ضمن رنگ ۱ در هیچ یک از رئوس مجاور رأس v در G ظاهر نشده است. بنابراین می‌توانیم رأس v را به رنگ ۱ در آوریم و به رنگ‌آمیزی رأسی مورد نظر از G برسیم. در مورد رئوس $v_۲$ و $v_۴$ و زیرگراف $G_{۲۴}$ نیز می‌توانیم به همین ترتیب بحث کنیم. بنابراین تنها حالتی که باقی می‌ماند این است که دو رأس $v_۱$ و $v_۳$ در $G_{۱۳}$ در یک مؤلفه و دو رأس $v_۲$ و $v_۴$ در $G_{۲۴}$ نیز در یک مؤلفه قرار داسته باشند. بنابراین باید یک مسیر بین $v_۱$ و $v_۳$ وجود داشته باشد که رنگ رئوس آن یکی در میان ۱ و ۳ باشد و همچنین مسیری بین $v_۲$ و $v_۴$ وجود داشته باشد که رنگ رئوس آن بطور متناوب ۲ و ۴ باشد. امّا اگر بخواهیم که این چنین حالتی را رسم کنیم خواهیم دید که نمایش این حالت با فرض مسطح بودن G غیر ممکن است. زیرا این دو مسیر حداقل در

یک نقطه مشترک خواهند بود که چون گراف مسطح است، در نتیجه این نقطه باید یک رأس باشد. امّا از آنجا که رنگ رئوس دو مسیر با هم متفاوت است، در نتیجه ایجاد این حالت ممکن نیست.



بنابراین در تمام حالات ممکن توانستیم رنگ‌آمیزی رأسی گراف G را با ۵ رنگ انجام دهیم. □

«تمارین»

۱) نقشه‌ای را در نظر بگیرید که کمتر از ۱۲ ناحیه دارد و درجهٔ هر رأس گراف متناظر با آن حداقل برابر با ۳ است. نشان دهید که این گراف شامل ناحیه‌ای است که بوسیلهٔ حداکثر ۴ یال احاطه شده است. (ر)

بدون استفاده از قضیهٔ چهار رنگ نشان دهید که اینگونه نقشه‌ای با چهار رنگ قابل رنگ‌آمیزی است. (ر)

۲) فرض کنید تعدادی سکهٔ هم‌اندازه را روی یک میز ریخته‌ایم، بطوری که هیچ دو سکه‌ای روی هم قرار نگرفته‌اند. می‌خواهیم سکه‌ها را طوری رنگ کنیم که هر دو سکه‌ای که با هم تماس دارند، رنگهای مختلفی داشته باشند. بدون استفاده از قضیه چهار رنگ نشان دهید که چهار رنگ مختلف برای انجام این کار کافی است. در ضمن نشان دهید حالتهایی وجود دارند که سه رنگ برای آنها کافی نیست. (ر، ج)

۳) نشان دهید یک نقشهٔ درجهٔ ۳ با چهار رنگ قابل رنگ‌آمیزی است اگر و تنها اگر بتوان به هر رأس v از گراف متناظر با آن مقدار $p(v) = \pm ۱$ را نسبت داد طوری که برای هر دور $v_۱, v_۲, \ldots, v_n, v_۱$ که یالهای آن احاطه کنندهٔ یک ناحیه از نقشه باشند، داشته باشیم:

$$p(v_۱) + p(v_۲) + \cdots + p(v_n) \overset{۳}{\equiv} ۰$$ (ر)

۴) دو گراف $G_۱ = (V, E_۱)$ و $G_۲ = (V, E_۲)$ داده شده‌اند. گراف $G_۱ \cup G_۲$ را برابر $(V, E_۱ \cup E_۲)$ در نظر می‌گیریم. نشان دهید $\chi(G_۱ \cup G_۲) \leqslant \chi(G_۱) \cdot \chi(G_۲)$ که $\chi(G)$ بیانگر عدد رنگی رأسی G می‌باشد. (ر)

نتیجه بگیرید که اگر $G = (V, E)$ گرافی باشد که مکمل آن یک گراف مسطح باشد آنگاه

$$\chi(G) \geqslant \frac{|V|}{۵}$$ (ر)

۵) روی سطح یک چنبره یک نقشهٔ درجهٔ ۳ رسم کنید، طوری که قابل رنگ‌آمیزی با ۶ رنگ نباشد. (ج)

۱۵

طرح‌ها و کد گذاری

در این فصل به بررسی طرح‌ها و کد گذاری‌ها خواهیم پرداخت. به زبان ساده می‌توان هدف و موضوع این فصل را اینگونه بیان کرد: هدف طراحی یک سری آزمایش‌ها است که در طی آن چند شی که نمی‌توانند همزمان مورد مقایسه قرارگیرند، ارزیابی شده و نتایج این آزمایشهای جزئی ما را تا حد امکان به نتیجهٔ دقیق نزدیک کنند.

مثال: نه نوع قهوه به تعدادی پیشخدمت داده می‌شود که مقایسه شوند. هیچ‌کدام قادر نیستند همهٔ نُه نوع را مقایسه کنند. (تقریباً بعد از چهارمین نوع همهٔ مزه‌ها را یکی تشخیص می‌دهند!). برای این کار دوازده پیشخدمت در نظرگرفته و به هرکدام ۳ نوع قهوه داده می‌شود تا مقایسه کنند. آزمایشی طراحی کنید که در طی آن هر جفت از قهوه‌ها دقیقاً توسط یک نفر مقایسه شود.

راه حل: انواع قهوه را با اعداد ۱ تا ۹ نشان می‌دهیم و به پیشخدمتها مجموعه‌های قهوه‌های زیر را می‌دهیم:

$\{۱, ۴, ۷\}$	$\{۷, ۸, ۹\}$	$\{۴, ۵, ۶\}$	$\{۱, ۲, ۳\}$
$\{۲, ۶, ۷\}$	$\{۲, ۵, ۸\}$	$\{۱, ۵, ۹\}$	$\{۳, ۶, ۹\}$
$\{۳, ۵, ۷\}$	$\{۲, ۴, ۹\}$	$\{۱, ۶, ۸\}$	$\{۳, ۴, ۸\}$

مشاهده می‌کنید که هر جفت قهوه در دقیقاً یک مجموعه ظاهر شده است. همچنین توجه کنید که (هر چند این شرط خواسته نشده) هر نوع قهوه توسط چهار پیشخدمت چشیده می‌شود. □

این مثال بسیار ساده منجر به تعریف زیر می‌شود:

طرح: یک طرح عبارت است از چند زیر مجموعهٔ حقیقی (بلوک) که هر زیر مجموعه شامل تعداد مساوی عضو بوده و هر جفت از اعضا در تعداد مساوی از زیر مجموعه‌ها (بلوکها) ظاهر

شده باشد. همانطورکه در قضیهٔ زیر خواهیم دید می‌توان از تعریف این نتیجه را بدست آورد که هر عضو در تعداد یکسانی از زیر مجموعه‌ها ظاهر می‌شود.

قضیه: فرض کنیم یک طرح از v عضو داریم که شامل b بلوک k عضوی می‌باشد و هر جفت از اعضاء در λ عدد از بلوکها ظاهر شود، حال اگر هر متغیر در r بلوک ظاهر شود، آنگاه داریم:

$$r = \frac{b \cdot k}{v} = \frac{\lambda(v - ۱)}{k - ۱}$$

اثبات: x را یک عضو خاص از اعضای موجود در طرح در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که در r_x عدد از بلوکها ظاهر شده باشد. ابتدا تعداد جفتهای شامل x را به دو روش می‌شماریم. x در دقیقاً r_x عدد از بلوکها ظاهر شده و در هرکدام می‌تواند با $k - ۱$ عضو دیگر از همان بلوک جفت شود. یعنی تعداد جفتهای شامل x برابر $r_x(k - ۱)$ است.

از طرفی x با هر یک از $v - ۱$ عضو موجود در کل طرح جفت شده و دقیقاً در λ بلوک ظاهر می‌شود. پس کل جفتهای شامل x برابر $\lambda(v - ۱)$ می‌باشد. از این دو نتیجه داریم:

$$r_x \cdot (k - ۱) = \lambda \cdot (v - ۱) \Longrightarrow r_x = \frac{\lambda \cdot (v - ۱)}{k - ۱}$$

چون مقدار r_x مستقل از x است پس تعداد تکرارهای هر عضوی از طرح برابر $\frac{\lambda(v - ۱)}{k - ۱}$ است.

برای نشان دادن قسمت دوم تساوی داده شده تعداد کل درایه‌های همهٔ بلوکها را به دو روش می‌شماریم: چون هر عضو در r بلوک ظاهر شده است پس این تعداد برابر $v \cdot r$ است. همچنین چون هر بلوک شامل k عضو است پس این تعداد برابر با $k \cdot b$ نیز می‌باشد. پس داریم:

$$k \cdot b = v \cdot r \Longrightarrow r = \frac{b \cdot k}{v}$$

در بررسی طرحها ما با پنج شاخص سر و کار خواهیم داشت:

v: تعداد اعضای طرح

b: تعداد بلوکهای طرح

r: تعداد بلوکهای شامل یک عضو خاص

k: تعداد اعضای یک بلوک خاص

λ: تعداد بلوکهای شامل یک جفت خاص از اعضا.

چنین طرحی را به صورت (v, b, r, k, λ) نشان می‌دهیم. پس مثال قهوه در ابتدای فصل یک طرح $(۹, ۱۲, ۴, ۳, ۱)$ است. در بررسی طرحها ممکن است قراردادهای دیگری در نظر گرفته

شود. از آنجا که در هر طرح هر سه شاخص می‌تواند تمام پنج شاخص را مشخص کند، (همانطور که در قضیهٔ قبل دیدیم) برخی از مؤلفین طرحها را با سه شاخص معرفی می‌کنند.

باید بدانیم که هر پنج عدد که در شرایط شاخصهای یک طرح (عبارت قضیهٔ قبل) صدق کند لزوماً یک طرح را نمی‌سازد. مثلاً شاخصهای $\lambda = ۱$ و $k = r = ۷$ و $b = v = ۴۳$ در شرایط قضیهٔ بالا صدق می‌کند امّا همانطور که در تمرینها خواهیم دید هیچ طرح $(۴۳, ۴۳, ۷, ۷, ۱)$ وجود ندارد. بطور کلی ساختن یک طرح به این آسانی صورت نمی‌گیرد، هر چند که ما در ادامهٔ این فصل یک روش کلی برای ساختن طرح ارائه خواهیم کرد.

مطالعهٔ طرحها، که بطورکامل «طرح کامل از بلوکهای ناقص» نامیده می‌شود، تنها این نوع خاص را در بر نگرفته بلکه شامل انواع مختلفی می‌باشد. مثلاً یک «طرح مرتبهٔ t» طرحی است که هر زیر مجموعهٔ tتایی از اعضاء در تعداد یکسانی از مجموعهٔ بلوکها ظاهر شده باشد. طرحهای بررسی شده در این فصل از مرتبهٔ ۲ هستند. خوانندگان علاقمند می‌توانند جزئیات بیشتر را در کتب معرفی شده در بخش کتاب‌شناسی مثلاً کتاب «Combinatorics of experimental designs» از «D.j. and A.P. Street» بخوانند.

قبل از اینکه خواص بیشتری از طرحها را معرفی کنیم یک روش برای نشان دادن یک طرح بوسیلهٔ ماتریس بیان می‌کنیم. خانوادهٔ $\{A_۱, A_۲, \ldots, A_b\}$ از مجموعهٔ اعضای $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_v\}$ تشکیل یک ماتریس $b \times v$ مثل M می‌دهند که درایه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & x_j \in A_i \\ ۰ & x_j \notin A_i \end{cases}$$

با این روش می‌توانیم یک ماتریس M برای بلوکهای طرح (v, b, r, k, λ) تشکیل دهیم. البته شکل M وابسته به چگونگی ترتیب A_iها است. امّا مطمئن هستیم هیچ ماتریسی از باز چیدن سطور و ستونهای M بدست نمی‌آید که نمایش طرح جدیدی باشد.

مثال: طرح $(۹, ۱۲, ۴, ۳, ۱)$ در مثال قبلی بلوکهای زیر را تشکیل می‌داد.

$$\begin{array}{cccc} \{۱, ۴, ۷\} & \{۷, ۸, ۹\} & \{۴, ۵, ۶\} & \{۱, ۲, ۳\} \\ \{۲, ۶, ۷\} & \{۲, ۵, ۸\} & \{۲, ۴, ۹\} & \{۱, ۶, ۸\} \\ \{۱, ۵, ۹\} & \{۳, ۵, ۷\} & \{۳, ۶, ۹\} & \{۳, ۴, ۸\} \end{array}$$

با استفاده از شیوهٔ گفته شده در بالا می‌توان ماتریس زیر را از روی طرح فوق ساخت:

v ستون

b سطر

$$M = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

در هر سطر k رقم $\leftarrow$
صفر قرار دارد. $\leftarrow$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

در هر ستون r رقم ۱ قرار دارد.

چهار شاخص از شاخصهای یک طرح در ماتریس M به سادگی قابل مشاهده‌اند امّا شاخص λ چندان قابل تشخیص نیست. در حقیقت ماتریس طرح فوق به ما اعلام می‌کند که هر دو عضو در دقیقاً یک بلوک ظاهر می‌شوند چون در هر دو ستون M دقیقاً در یک سطر، هر دو شامل عدد یک هستند. بطورکلی در یک طرح (v, b, r, k, λ) ما هر جفت ۱ را دقیقاً در λ سطر خواهیم داشت. یک راه بهتر برای مشخص کردن λ محاسبهٔ ماتریس حاصل ضرب $M^T \cdot M$ است که M^T همان ترانهادهٔ ماتریس M می‌باشد. به سادگی می‌توانید این حاصل ضرب را به صورت زیر بدست آورید.

$$M^T \cdot M = \begin{pmatrix}
4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4
\end{pmatrix}.$$

بطور کلی در این ماتریس حاصل ضرب r بر روی قطر اصلی و λ بر روی دیگر درایه‌ها ظاهر می‌شود. □

قضیه: M را یک ماتریس بدست آمده از خانواده‌ای شامل b زیر مجموعهٔ k عضوی از یک مجموعهٔ v عضوی در نظر می‌گیریم: M ماتریس حاصل از طرح (v, b, r, k, λ) است اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$M^T \cdot M = \begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & r \end{pmatrix}$$

ضمناً این ماتریس $v \times v$ دارای دترمینان مثبت زیر است.

$$M^T \cdot M = (r + (v-1)\lambda)(r-\lambda)^{v-1}$$

اثبات: به سادگی می‌توان بررسی کرد که ماتریس مفروض به فرم مورد نظر است اگر و فقط اگر خانوادهٔ ما یک طرح باشد.

درایهٔ (i, j) از ماتریس حاصل ضرب $M^T \cdot M$ به این ترتیب بدست می‌آید:

$$a_{ij} = \boxed{\text{سطر } i\text{اُم از } M^T} \cdot \boxed{\begin{matrix}\text{ستون}\\ j\text{اُم}\\ \text{از}\\ M\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{ستون}\\ i\text{اُم}\\ \text{از}\\ M\end{matrix}} \cdot \boxed{\begin{matrix}\text{ستون}\\ j\text{اُم}\\ \text{از}\\ M\end{matrix}} = \begin{cases} i=j : & \text{تعداد یکهای ستون } i\text{اُم از } M \\ i \neq j : & \text{تعداد سطرهایی که در هر دو ستون } i \text{ و } j\text{، در آن سطرها عدد ۱ قرار دارد.} \end{cases}$$

و این مقادیر همان r و λ می‌باشند اگر و فقط اگر خانوادهٔ مفروض یک طرح باشد.

ترکیب ساده و منظم سطرها و ستونهای ماتریس $v \times v$ ما را به راحتی قادر به محاسبهٔ دترمینان ماتریس می‌سازد: همهٔ سطرها را به سطر اول اضافه می‌کنیم و سپس ستون اول را از همهٔ ستونها کم می‌کنیم:

$$\det\begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & r & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \lambda & \dots & r \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} r+(v-۱)\lambda & ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ \lambda & r-\lambda & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ \lambda & ۰ & r-\lambda & ۰ & \dots & ۰ \\ \lambda & ۰ & ۰ & r-\lambda & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & ۰ & ۰ & ۰ & \dots & r-\lambda \end{pmatrix}$$

که برابر است با: $(r+(v-۱)\lambda)(r-\lambda)^{v-۱}$

برای آنکه نشان دهیم این دترمینان مثبت است باید نشان دهیم $r-\lambda > ۰$ با استفاده از قضیهٔ قبل داریم: چون $۱ < k < v$

$$r = \frac{\lambda \cdot (v-۱)}{k-۱} > \lambda \Longrightarrow r - \lambda > ۰$$ □

اکنون می‌توانیم رابطهٔ دیگری میان شاخصهای یک طرح بدست آوریم یعنی رابطهٔ $v \geqslant b$ که نشان می‌دهد در یک آزمایش برای مقایسهٔ v شئ با یک طرح نیاز به حداقل v آزمایش داریم. این نامساوی در سال ۱۹۴۰ توسط «سر رونالد فیشر[1]» آمار شناس برجسته آن زمان اثبات شد.

قضیه (نامساوی فیشر): در طرح (v, b, r, k, λ) داریم: $b \geqslant v$

اثبات: فرض کنیم یک طرح با شرط $b < v$ داریم. هدف ما بدست آوردن یک تناقض است. M را ماتریس متشکل از طرح فوق قرار می‌دهیم که ابعادش $b \times v$ می‌باشد و طبق فرض سطرهایش کمتر از ستونهایش هستند. $v-b$ سطر صفر به ماتریس اضافه می‌کنیم تا یک ماتریس $v \times v$ تولید شود:

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{M} \\ \boxed{۰} \end{pmatrix}$$

و از آنجا داریم:

$$N^T N = \begin{pmatrix} \boxed{M} \\ \boxed{۰} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boxed{M} \\ \boxed{۰} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{M} & \boxed{۰} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{M} \\ \boxed{۰} \end{pmatrix} = M^T M$$

از طرفی طبق قضیهٔ قبل می‌دانیم: $۰ < \det(M^T \cdot M)$

1) Sir Ronald Fisher

حال دترمینان $N^T \cdot N$ که یک ماتریس مربعی است بدست می‌آوریم:

$$\det(N)^2 = \det(N^T \cdot N) = \det(M^T \cdot M) > 0$$

امّا این عبارت با فرض اینکه N دارای حداقل یک سطر صفر است متناقض است و این تناقض نشان می‌دهد که $v \leqslant b$ و حکم ثابت می‌شود. □

از آنجا که تعداد بلوکهای یک طرح کمتر از تعداد اعضا نیست، حالتی را که $b = k$ باشد بهینه‌ترین طرح در نظر می‌گیریم. در یک چنین طرحی داریم $r = \frac{bk}{v} = k$. بنابراین شاخصهای این طرح به صورت (v, v, k, k, λ) خواهند بود و این طرح را «طرح متقارن» می‌گویند. قبل از بررسی خواص طرحهای متقارن با نوعی طرح به نام «طرح حلقوی» آشنا می‌شویم.

مثال: هر یک از دو ماتریس داده شدهٔ زیر حلقوی هستند و به این صورت ساخته می‌شوند که: بعد از ساختن سطر اول، سطر بعد از «انتقال» دنبالهٔ اعداد سطر قبل خود به اندازهٔ یک واحد به جلو بدست می‌آید. (یعنی هر درایه به جای درایهٔ سمت راست خود قرار می‌گیرد و درایهٔ آخر به جای درایهٔ اول می‌نشیند.)

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

در این قسمت رویه به همان صورت ماتریس مقابل است تنها سطر اول $\{1, 4, 5, 7, 9\}$ می‌باشد. به سادگی مشاهده می‌شود که این ماتریس یک طرح نیست چون جفت $\{0, 1\}$ در یکی از بلوکها و جفت $\{6, 9\}$ در سه بلوک مختلف ظاهر شده است.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

اگر فرض کنیم اعضای مجموعهٔ ما $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$ باشند آنگاه بلوک اول شامل $\{1, 3, 4, 5, 9\}$ می‌باشد و هر زیر رشته هر بلوک از اضافه کردن یک عدد ۱ به پیمانه ۱۱ به اعداد سطر قبل بدست می‌آید. با این شیوه طرحی به صورت فوق خواهیم داشت.

جدول تفاضلی دو ماتریس فوق را که نشان دهندهٔ تفاضل هر دو درایهٔ بلوک اول است تشکیل می‌دهیم:

$-(\mathrm{mod}\ ۱۱)-$	۱	۴	۵	۷	۹
۱	۰	۸	۷	۵	۳
۴	۳	۰	۱۰	۸	۶
۵	۴	۱	۰	۹	۷
۷	۶	۳	۲	۰	۹
۹	۸	۵	۴	۲	۰

$-(\mathrm{mod}\ ۱۱)-$	۱	۳	۴	۵	۹
۱	۰	۹	۸	۷	۳
۳	۲	۰	۱۰	۹	۵
۴	۳	۱	۰	۱۰	۶
۵	۴	۲	۱۰	۰	۷
۹	۸	۶	۵	۴	۰

توجه کنید که در جدول فوق عدد ۱ تنها یک بار ظاهر شده در حالی که عدد ۳ سه بار ظاهر شده است. در حقیقت در جدول فوق تعداد مرتبه‌های ظاهر شدن $|i-j|$ برابر تعداد بلوکهای شامل جفت $\{i, j\}$ در ماتریس M است.

توجه کنید که هر درایهٔ غیر صفر در این جدول به تعداد مساوی ظاهر شده است. (درحقیقت هر کدام دو بار ظاهر شده که این به خاطر تساوی $۲ = \lambda$ می‌باشد.)

زیر مجموعهٔ P از مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \ldots, v-۱\}$ «تفاضلی کامل» نامیده می‌شود اگر در جدول تفاضل P به پیمانهٔ v هر یک از اعداد $\{۱, ۲, ۳, \ldots, v-۱\}$ به تعداد مساوی ظاهر شوند. در مثال بالا مجموعهٔ $\{۱, ۳, ۴, ۵, ۹\}$ یک «مجموعهٔ تفاضلی کامل» است و می‌تواند به عنوان سطر اول یک طرح حلقوی قرار گیرد. امّا مجموعهٔ $\{۱, ۴, ۵, ۷, ۹\}$ یک مجموعهٔ تفاضلی کامل نیست، و به همین خاطر است که طرح حلقوی با سطر اولیهٔ حاصل از این مجموعه بوجود نمی‌آید.

قضیه: فرض کنیم $\{b_۱, b_۲, \ldots, b_k\}$ زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \ldots, v-۱\}$ باشد که $۱ < k < v$. علامت $\oplus$ را به عنوان جمع به پیمانهٔ v تعریف می‌کنیم و B_i را مجموعه‌ای با تعریف زیر در نظر می‌گیریم:

$$B_i = \{b_۱ \oplus i, b_۲ \oplus i, \ldots, b_k \oplus i\}\ ,\ ۰ \leqslant i \leqslant v-۱$$

مجموعه‌های $B_۰, B_۱, \ldots, B_{v-۱}$ تشکیل یک طرح می‌دهند اگر و فقط اگر $B_۰$ یک مجموعهٔ تفاضلی کامل به پیمانهٔ v باشد.

اثبات: مجموعه‌های $B_۰, B_۱, B_۲, \ldots, B_{v-۱}$ که دارای تعداد اعضای یکسان هستند در نظر می‌گیریم. برای آنکه بدانیم این مجموعه‌ها تشکیل یک طرح می‌دهند یا نه، باید بررسی کنیم که آیا هر دو عضو دلخواه در تعداد مساوی از مجموعه‌ها ظاهر شده است یا نه. خاصیت حلقوی مجموعه‌ها به این معنی است که مثلاً جفت عضو $(۰, ۳)$ به همان تعداد ظاهر شده باشد که

جفت عضو $(۱,۴)$ و یا جفت عضو $(۲,۵)$ و ... تکرار شده‌اند. بنابراین ما یک j از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\ldots,v-۱\}$ انتخاب می‌کنیم و نشان می‌دهیم تعداد دفعات ظهور $\{۰,j\}$ در کل بلوکها یک عدد ثابت است. (بهتر است بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض کنیم که $۰ \notin B_۰$).

در چه صورتی j و ۰ در مجموعهٔ B_i هر دو با هم ظاهر می‌شوند؟ واضح است که این حالت تنها به شکل زیر اتفاق می‌افتد:

$$B_i =\{b_۱ + i, b_۲ + i, \ldots, b_\alpha + i, \ldots, b_\beta + i, \ldots, b_k + i\}$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{برابر صفر است} & \text{برابر } j \text{ است} \\ \text{اگر و فقط اگر} & \text{اگر و فقط اگر} \\ b_\alpha + i \overset{v}{\equiv} ۰ & b_\beta + i \overset{v}{\equiv} j \end{array}$$

حال ادعا می‌کنیم که j و ۰ هر دو در B_i قرار دارند اگر و فقط اگر: $i = v - b_\alpha$ و $b_\beta - b_\alpha \overset{v}{\equiv} j$ باشد. اگر j و ۰ در B_i باشند داریم:

$$i = v - b_\alpha \quad , \quad j \overset{v}{\equiv} b_\beta + i \overset{v}{\equiv} b_\beta + v - b_\alpha \overset{v}{\equiv} b_\beta - b_\alpha$$

برعکس، فرض کنیم که $i = v - b_\alpha$ و $j = b_\beta - b_\alpha$ داریم:

$$i = v - b_\alpha \Rightarrow b_\alpha + i \overset{v}{\equiv} ۰ \quad , \quad b_\beta + i \overset{v}{\equiv} b_\beta + v - b_\alpha \overset{v}{\equiv} b_\beta - b_\alpha \overset{v}{\equiv} j$$

یعنی j و ۰ هر دو در مجموعهٔ B_i وجود دارند. پس هر گاه $j \overset{v}{\equiv} b_\beta - b_\alpha$ آنگاه اعداد j و ۰ عضو مجموعهٔ B_{v-b_α} هستند و برعکس اگر j و ۰ عضو مجموعهٔ B_{v-b_α} باشند آنگاه $j \overset{v}{\equiv} b_\beta - b_\alpha$. پس یک تناظر یک به یک میان حالاتی که: «هر دو عضو j و ۰ در یکی از مجموعه‌های $B_۰, B_۱, \ldots, B_{v-۱}$ وجود داشته باشند» و حالاتی که «دو عضو $B_۰$ دارای تفاضل j به پیمانهٔ v باشند» وجود دارد، که برابر تعداد دفعات ظاهر شدن عدد j در جدول تفاضلی $B_۰$ به پیمانهٔ v است.

پس هر جفت عضو در تعداد یکسانی از مجموعه‌ها ظاهر می‌شود اگر و فقط اگر هر عدد j که $۱ \leqslant j \leqslant n-۱$ به تعداد یکسان در جدول تفاضل مجموعهٔ $B_۰$ به پیمانهٔ v ظاهر شود: یعنی اگر و فقط اگر مجموعهٔ $B_۰$ یک مجموعهٔ تفاضلی کامل به پیمانهٔ v باشد. □

برای آنکه بتوانیم از قضیهٔ قبل استفاده کنیم، باید یک شیوهٔ جدید برای تولید مجموعهٔ تفاضلی، به منظور ساخت طرحهای حلقوی داشته باشیم.

مثال: از توانهای ۲ به پیمانهٔ ۱۹ اعداد زیر تولید می‌شوند.

$$۲^{۱} \equiv ۲ \quad ۲^{۲} \equiv ۴ \quad ۲^{۳} \equiv ۸ \quad ۲^{۴} \equiv ۱۶ \quad ۲^{۵} \equiv ۱۳ \quad ۲^{۶} \equiv ۷$$
$$۲^{۷} \equiv ۱۴ \quad ۲^{۸} \equiv ۹ \quad ۲^{۹} \equiv ۱۸ \quad ۲^{۱۰} \equiv ۱۷ \quad ۲^{۱۱} \equiv ۱۵ \quad ۲^{۱۲} \equiv ۱۱$$
$$۲^{۱۳} \equiv ۳ \quad ۲^{۱۴} \equiv ۶ \quad ۲^{۱۵} \equiv ۱۲ \quad ۲^{۱۶} \equiv ۵ \quad ۲^{۱۷} \equiv ۱۰ \quad ۲^{۱۸} \equiv ۱$$

توانهای زوج را در نظر بگیرید. جدول تفاضلی این مجموعه یعنی مجموعهٔ $Q = \{۱, ۴, ۵, ۶, ۷, ۹, ۱۱, ۱۶, ۱۷\}$ نشان می‌دهد که Q یک مجموعهٔ تفاضلی به پیمانهٔ ۱۹ است:

− (mod ۱۹)	۱	۴	۵	۶	۷	۹	۱۱	۱۶	۱۷
۱	۰	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۱	۹	۴	۳
۴	۳	۰	۱۸	۱۷	۱۶	۱۴	۱۲	۷	۶
۵	۴	۱	۰	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۸	۷
۶	۵	۲	۱	۰	۱۸	۱۶	۱۴	۹	۸
۷	۶	۳	۲	۱	۰	۱۷	۱۵	۱۰	۹
۹	۸	۵	۴	۳	۲	۰	۱۷	۱۲	۱۱
۱۱	۱۰	۷	۶	۵	۴	۲	۰	۱۴	۱۳
۱۶	۱۵	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۷	۵	۰	۱۸
۱۷	۱۶	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۸	۶	۱	۰

هر عدد غیر صفر چهار بار در جدول ظاهر شده است.

حال کار را با مجموعهٔ Q آغاز می‌کنیم و به همان ترتیب عدد یک را به پیمانهٔ ۱۹ با اعضای آن اضافه می‌کنیم. تا طرح حلقوی (۱۹, ۱۹, ۹, ۹, ۴) بدست بیاید. □

در مثال بالا اعداد ۱۷ و ۱۶ و ۱۱ و ۹ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۱ را باقیماندهٔ مربعی به پیمانهٔ ۱۹ می‌نامیم. چون باقیماندهٔ مربعهای کامل به پیمانهٔ ۱۹ هستند. اکنون ببینیم چطور می‌توان این شیوه را برای هر $v = ۴n - ۱$ که v عددی اول است تعمیم داد. در این قضیه و اثبات آن ما از تعدادی از خاصیتهای ضرب به پیمانهٔ v استفاده می‌کنیم.

قضیه: عدد v را عددی اول به فرم $۴n - ۱$ که n عددی طبیعی است در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که θ مولد[۱] مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, v - ۱\}$ باشد: یعنی مجموعهٔ $\{\theta^{۱}, \theta^{۲}, \ldots, \theta^{v-۱}\}$ همهٔ اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, v - ۱\}$ را تولید کند، آنگاه مجموعهٔ $\{\theta^{۲}, \theta^{۴}, \ldots, \theta^{v-۱}\}$ که

۱) این تعریف ریشهٔ اولیه در نظریهٔ اعداد است.

مجموعهٔ باقیمانده‌های توانهای زوج به پیمانهٔ v هستند یک مجموعهٔ تفاضلی کامل به پیمانهٔ v است که می‌تواند اولین بلوک طرح حلقوی $(۴n-۱, ۴n-۱, ۲n-۱, ۲n-۱, n-۱)$ را تولید می‌کند.

اثبات: در طول این اثبات ما بر روی مجموعهٔ $\{۰, ۱, \ldots, v-۱\}$ تحت عملیات حسابی به پیمانه v کار خواهیم کرد. (یک حلقه تشکیل می‌دهیم و در جای خاص از (-۱) نیز استفاده خواهیم کرد). از آنجا که $\theta^{v-۱} \overset{v}{\equiv} ۱$ و $\theta^{۲} \equiv \theta^{v+۱}$ و $\theta^{۴} \equiv \theta^{v+۳}$ و $\ldots$ پس هیچ توان زوجی از θ برابر توان فردی از آن نخواهد بود همچنین چون $(-۱)^{۲} \equiv ۱ \equiv \theta^{v-۱}$ در نتیجه داریم $\theta^{۲n-۱} \equiv \theta^{\frac{v-۱}{۲}} \equiv (-۱)$.

حال برای هر $۱ \leqslant i, j < v$ فرض می‌کنیم $j \cdot i^{-۱} \equiv \theta^{k}$. می‌خواهیم نشان دهیم که چطور هر دارایهٔ i در جدول تفاضلی Q متناظر با یک دارایهٔ یکتای دیگر j است. دارایهٔ $i \equiv \theta^{۲a} - \theta^{۲b}$ در جدول تفاضلی را در نظر می‌گیریم:

$$j \equiv \theta^{k}(\theta^{۲a} - \theta^{۲b}) \equiv \theta^{۲a+k} - \theta^{۲b+k}$$

حال اگر k زوج باشد این تساوی بیان می‌کند که j حاصل از تفاضل دو عضو متمایز Q است. در غیر این صورت اگر k فرد باشد:

$$\begin{aligned} j &\equiv (\theta^{۲a} - \theta^{۲b})\theta^{k} \equiv (-۱)(\theta^{۲b+k} - \theta^{۲a+k}) \equiv \theta^{۲n-۱}(\theta^{۲b+k} - \theta^{۲a+k}) \\ &\equiv \theta^{۲n+۲b+k-۱} - \theta^{۲n+۲a+k-۱} \end{aligned}$$

که باز هم j تفاضل دو عدد متمایز در Q است.

بنابراین هر عضو جدول تفاضلی Q مانند i تناظری با یک عضو دیگر مانند j دارد. هر تعداد تفاضل i به همان تعداد تفاضل j را تولید می‌کند پس تعداد تکرارهای j در جدول حداقل برابر i است و بنابر تقارن مسأله تعداد iها در جدول نیز حداقل برابر j است. بنابراین هر دو عضو مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, v-۱\}$ به یک تعداد در مجموعهٔ تفاضلی Q ظاهر می‌شود و این یعنی Q یک مجموعهٔ تفاضلی کامل است. در نتیجه طبق قضیهٔ قبل Q اولین بلوک طرح حلقوی می‌باشد که شاخص‌های زیر را دارد:

$$b = v = ۴n - ۱ \qquad r = k = |Q| = ۲n - ۱$$

$$\lambda \frac{r(k-۱)}{v-۱} = \frac{(۲n-۱)(۲n-۲)}{(۴n-۲)} = n - ۱$$

در فصل پنجم وقتی $n - ۱$ مربع لاتینی را برای nهای اول ساختیم با استفاده از حساب همنهشتی و میدان گالوا (GF(n))، این قضیه را برای حالتی که n توانی از یک عدد اول باشد تعمیم دادیم. چون قسمت اصلی اثبات ما بر پایهٔ وجود میدان بر روی مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱\}$ قرار داشت. به همین ترتیب با استفاده از یک بحث مشابه بر روی قضیهٔ قبل می‌توانیم یک طرح حلقوی به صورت $(۴n - ۱, ۴n - ۱, ۲n - ۱, ۲n - ۱, n - ۱)$ برای مواقعی که $v = ۴n - ۱$ به صورت توانی از یک عدد اول است، ایجاد کنیم. جزئیات این تعمیم و دیگر اطلاعات طرحهای حلقوی را می‌توانید در کتاب استریت که قبلاً معرفی شد پیدا کنید.

حال باز می‌گردیم به بررسی طرحهای متقارن. صفت متقارن برای طرحهایی که در آنها $b = v$ برقرار است، به خاطر داشتن ویژگی مخصوص به آنها نسبت داده می‌شود. در مثال بعد این خاصیت را بررسی می‌کنیم.

مثال: ماتریس طرح متقارن $(۷, ۷, ۳, ۳, ۱)$ را با بلوکهای $\{۳, ۴, ۷\}$ و $\{۲, ۵, ۷\}$ و $\{۱, ۶, ۷\}$ و $\{۱, ۴, ۵\}$ و $\{۳, ۵, ۶\}$ و $\{۲, ۴, ۶\}$ و $\{۱, ۲, ۳\}$ به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$M = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

می‌توان ماتریس ترانهادهٔ آن را به صورت زیر بدست آورد.

$$M^T = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

که این ماتریس خود ماتریس یک طرح متقارن $(۷, ۷, ۳, ۳, ۱)$ دیگر با بلوکهای $\{۱, ۴, ۵\}$ و

$\{۱,۲,۶\}$ و $\{۱,۳,۷\}$ و $\{۲,۴,۷\}$ و $\{۳,۴,۶\}$ و $\{۲,۳,۵\}$ و $\{۵,۶,۷\}$ است. این ماتریس جدید را «دوگان» ماتریس اولیه می‌نامیم. $\square$

قضیه: اگر M ماتریس حاصل از یک طرح حلقوی باشد، آنگاه M^T (که ترانهادهٔ ماتریس M است) نیز یک ماتریس حاصل از یک طرح حلقوی می‌باشد.

اثبات: M را ماتریس حاصل از طرح (v,v,k,k,λ) قرار می‌دهیم این ماتریس یک ماتریس $v\times v$ از صفرها و یکها می‌باشد که در هر سطر و هر ستون آن k عدد یک قرار دارد. ماتریس Λ را یک ماتریس $v\times v$ تعریف می‌کنیم که تمام درایه‌های آن λ می‌باشد. I نیز ماتریس یکه $v\times v$ است. با استفاده از قضیهٔ دوم این فصل داریم:

$$M^T\cdot M=\begin{pmatrix} k & \lambda & \lambda & \dots & \lambda\\ \lambda & k & \lambda & \dots & \lambda\\ \lambda & \lambda & k & \dots & \lambda\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & k\end{pmatrix}_{v\times v}=\Lambda+(k-\lambda)I.$$

از طرفی M^T نیز مانند M یک ماتریس $v\times v$ است که در هر سطر و ستون آن k عدد ۱ وجود دارد. با استفاده از قضیهٔ قبل برای نشان دادن اینکه M^T حاصل از طرح (v,v,k,k,λ) است، ما باید نشان دهیم $(M^T)^T\cdot M^T$ برابر $\Lambda+(k-\lambda)I$ است. در حقیقت باید نشان دهیم که $M^T\cdot M=M\cdot M^T$ (البته باید در نظر داشت که در حالت کلی ضرب یک ماتریس در ترانهاده‌اش خاصیت جابجایی ندارد.) همانطورکه از قبل می‌دانیم M ماتریس مربعی است پس داریم $\det(M\cdot M^T)>۰$. چون:

$$(\det M)^۲=\det M^T\cdot\det M=\det(M\cdot M^T)>۰$$

از طرفی چون $\det M\neq ۰$ پس ماتریس M یک معکوس دارد. با توجه به این نکته که هر سطر و هر ستون M شامل k عدد یک است، داریم:

$$M\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda\\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda\\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda\end{pmatrix}_{v\times v}=\begin{pmatrix} k\lambda & k\lambda & k\lambda & k\dots & k\lambda\\ k\lambda & k\lambda & k\lambda & k\dots & k\lambda\\ k\lambda & k\lambda & k\lambda & k\dots & k\lambda\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ k\lambda & k\lambda & k\lambda & \dots & k\lambda\end{pmatrix}_{v\times v}=\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda\\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda\\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda\end{pmatrix}_{v\times v}M$$

با توجه به نتیجهٔ فوق می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}M \cdot M^T &= (M \cdot M^T) \cdot (M \cdot M^{-1}) = M \cdot (M^T \cdot M) \cdot M^{-1}\\ &= M(\Lambda + (k-\lambda) \cdot I)M^{-1} = M\Lambda \cdot M^{-1} + (k-\lambda)M \cdot I \cdot M^{-1}\\ &= \Lambda M \cdot M^{-1} + (k-\lambda)I = \Lambda + (k-\lambda)I\\ &= M^T \cdot M\end{aligned}$$

و حکم قضیه اثبات می‌شود. □

پس M^T یک ماتریس $v \times v$ با k عدد یک در هر سطر و ستون است که هر دو سطر دارای λ عدد ۱ مشترک است. و از طرفی داریم:

$$(M^T)^T \cdot M^T = \begin{pmatrix} k & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & k & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & k & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & k \end{pmatrix}$$

بنابراین طبق قضیه‌ای که قبل از این بیان کردیم، M^T یک ماتریس حاصل از یک طرح (v, v, k, k, λ) است و این حکم قضیه را اثبات می‌کند.

نتیجهٔ اول: هر دو بلوک از طرح (v, v, k, k, λ) دقیقاً در λ نقطه مشترکند.

اثبات: M را ماتریس حاصل از طرح (v, v, k, k, λ) در نظر می‌گیریم. از قضیهٔ قبل می‌دانیم که M^T نیز یک ماتریس حاصل از طرح (v, v, k, k, λ) است. از آنجا که هر دو ستون M^T دقیقاً در λ مکان با هم یک هستند پس هر دو سطر M در دقیقاً λ مکان با هم یک هستند.

حال اشتراکات دو بلوک را با تناظر دادن آنها به دو سطر از M می‌شماریم. تعداد اعضای مشترک بین دو بلوک برابر تعداد مکانهایی از دو سطر M است که هر دو سطر همزمان درایهٔ یک داشته باشند، که بنابر توضیحی که در ابتدای اثبات دادیم برابر λ است. □

نتیجهٔ دوم: هر دو سطر از ماتریس حاصل از طرح حلقوی (v, v, k, k, λ) در دقیقاً $۲(k-\lambda)$ مکان متفاوتند.

اثبات: با استفاده از نتیجه اول واضح است که هر دو سطر از ماتریس حاصل از طرح (v, v, k, k, λ) به صورت زیر است. (البته برای راحتی کار ستونها را بازآرایی کرده‌ایم) بنابراین

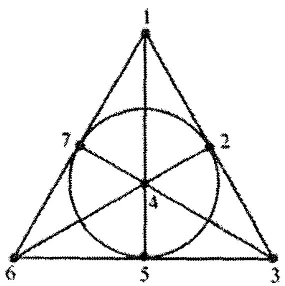
$k-\lambda$ مکان وجود دارد که در سطر اول ۱ و در سطر دوم ۰ است همچنین $k-\lambda$ مکان هم وجود دارد که در سطر اول درایهٔ ۰ و در سطر دوم درایهٔ ۱ قرار داد در نتیجه فرع اثبات می‌شود.

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
 & & & & \multicolumn{8}{c|}{\longleftarrow k \longrightarrow} & & & & \\
۰ & ۰ & \cdots & & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\
۱ & ۱ & \cdots & & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\
 & & & & \multicolumn{4}{c|}{\longleftarrow \lambda \longrightarrow} & & & & & & & & \\
\multicolumn{8}{c}{\longleftarrow k \longrightarrow} & & & & & & & &
\end{array}$$

□

یک طرح متقارن صرف نظر از بهینه بودنش دارای خاصیتهای دوگانی می‌باشد. مثلاً هر دو بلوک آن دارای تعداد یکسانی عضو مشترک است و ما این ویژگی را در طرحهای حلقوی نیز دیده بودیم. ما قبلاً نوعی از طرحهای متقارن را در مبحث صفحات تصویری متناهی بررسی کرده‌ایم. اکنون مطالعات جدید خود بر روی این صفحات را به بررسی‌های قبلی خود در مورد طرحها اضافه می‌کنیم.

مثال: دوباره یک صفحهٔ تصویری مرتبهٔ دو را بررسی می‌کنیم. در این صفحه خطوط عبارتند از $\{۱, ۲, ۳\}$ و $\{۲, ۴, ۶\}$ و $\{۳, ۵, ۶\}$ و $\{۱, ۴, ۵\}$ $\{۱, ۶, ۷\}$ و $\{۲, ۵, ۷\}$ و $\{۳, ۴, ۷\}$ توجه کنید که این خطوط بلوکهای طرح $(۷, ۷, ۳, ۳, ۱)$ که در مثال قبل بررسی کردیم، می‌باشند. (قضیهٔ قبل نیز که در مورد طرحهای دوگان بود بیان دیگری از دوگانی نقاط و خطوط در هندسهٔ تصویری متناهی است که ما در فصل پنجم به آن اشاره کردیم.)



قضیه: یک صفحهٔ تصویری متناهی مرتبهٔ n متناظر است با یک طرح به صورت $(n^۲+n+۱, n^۲+n+۱, n+۱, n+۱, ۱)$ به این صورت که خطوط صفحهٔ تصویری متناظر بلوکها و نقاط متناظر اعضای بلوکهای این طرح هستند.

اثبات: فرض می‌کنیم که یک صفحهٔ تصویری متناهی مرتبهٔ n داریم. یادآوری می‌کنیم که این صفحهٔ تصویری متشکل است از یک مجموعهٔ نقاط و یک مجموعهٔ خطوط که زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ تمام نقاط هستند که ویژگی‌های زیر را دارا می‌باشند:

۱) هر دو نقطه روی دقیقاً یک خط قرار دارند.

۲) هر دو خط دقیقاً یک نقطه مشترک دارند.

۳) هر خط شامل $n+1$ نقطه است.

۴) هر نقطه روی $n+1$ خط واقع است.

آیا این خطوط بلوکهای یک طرح نیستند؟ ادعا می‌کنیم که این چنین است. چون این مجموعه‌ها اندازهٔ یکسانی دارند (طبق خاصیت سوم) و هر دو عضو (نقطه) روی تعداد یکسانی از بلوکها (خطوط) ظاهر شده (طبق خاصیت اول)، یعنی یک طرح داریم که در آن $k = n+1$ و $\lambda = 1$. همچنین از خاصیت دوم می‌توان نتیجه‌گرفت که: $r = n+1$. اکنون دو شاخص دیگر طرح را بدست می‌آوریم:

$$r = n+1 = \frac{bk}{v} = \frac{(v-1)\lambda}{k-1} = \frac{b(n+1)}{v} = \frac{(v-1)}{n}$$
$$\Longrightarrow b = v = n^2+n+1$$

در نتیجه همانطورکه ادعا کرده بودیم یک طرح $(n^2+n+1, n^2+n+1, n+1, n+1, 1)$ خواهیم داشت. (در حقیقت ما همین مبحث را برای حل تمرین ۷ از فصل پنجم بدون استفاده از طرحها انجام داده‌ایم).

برعکس، فرض کنیم که طرح $(n^2+n+1, n^2+n+1, n+1, n+1, 1)$ به ما داده شده است. اگر بلوکها را به عنوان خطوط در نظر بگیریم شاخصهای طرح خاصیت‌های اول و سوم و چهارم را برقرار می‌سازند:

$$\begin{array}{ccccc} (n^2+n+1, & n^2+n+1, & n+1, & n+1, & 1) \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & ۴ & ۳ & ۱ \end{array}$$

تنها خاصیت دوم می‌ماند که نتیجه‌ای مستقیم از نتیجه اول است که می‌گوید هر دو بلوک در تعداد یکسانی از اعضا مشترکند. بنابراین بلوکهای یک طرح متقارن نیز می‌توانند خطوط صفحهٔ تصویری متناهی را شکل دهند و در نتیجه قضیه ثابت می‌شود. □

بنابراین شیوه ارائه شده در فصل پنجم برای تولید صفحات متناهی از مربعهای لاتین می‌تواند روشی دیگر برای تولید طرحهای متقارن باشد. همچنین عدم وجود صفحهٔ متناهی مرتبهٔ ۶ معادل عدم وجود طرح $(43, 43, 7, 7, 1)$ است که این مسأله را در تمرینها بررسی خواهیم کرد. بطور

مشابه امکان وجود صفحهٔ متناهی مرتبهٔ ۱۰ معادل امکان وجود طرح (۱, ۱۱, ۱۱, ۱۱۱, ۱۱۱, ۱۱۱) است که عدم وجود این طرح در سال ۱۹۸۹ بوسیلهٔ کامپیوتر اثبات شد.

مطالب فوق نشان می‌دهد که کاربرد طرحهای متقارن تنها به خاطر برگزاری آزمایشهای بهینه با نتیجه مطمئن‌تر نیست. علاوه بر این، طرحها در شناخت و تصحیح کدهای خطا کاربرد دارند. اما قبل از بیان این موضوع ما یک قضیهٔ کلی در مورد این کدها بیان خواهیم کرد بدون آن که از طرحها استفاده کنیم. فرض می‌کنیم که شما می‌خواهید یک پیام را به صورت الکترونیکی انتقال دهید. اول باید پیام به زبان الکترونیکی ترجمه شود و برای این منظور باید آن را به صورت کدهایی از صفر و یک درآوریم. (این شیوه را کد گذاری دودویی می‌نامند). برای درک مفاهیم این بخش به مثال زیر توجه کنید.

مثال: به عنوان یک نمونهٔ ساده فرض کنید شما می‌خواهید که تنها یکی از چهار لغت «شمال» و «جنوب» و «خاور» و «باختر» را بفرستید. ساده‌ترین کد دودویی برای انتقال این لغات به صورت ترجمه به «کد واژه‌های» زیر است.

$$۱۱ \to ب \qquad ۱۰ \to خ \qquad ۰۱ \to ج \qquad ۰۰ \to ش$$

در این شیوه ما برای هر کد واژه از تعداد یکسانی رقم استفاده کرده‌ایم که این تعداد را اندازهٔ کد می‌نامند پس در این مثال اندازهٔ کدها برابر ۲ است.

به خاطر احتمال وقوع اشتباه در انتقال الکترونیکی پیام بهتر است برای تشخیص وقوع خطا پیامها را با کد واژه‌های پیچیده‌تری انتقال دهیم.

بازنگری مثال قبل: در مثال قبلی وقوع یک اشتباه کوچک در انتقال پیام می‌تواند به کلی پیغام را تغییر دهد و موجب دریافت پیام غلط شود. مثلاً یک اشتباه در رقم اول کد واژهٔ معادل «شمال» می‌تواند موجب دریافت پیام «خاور» شود. کدهایی که در زیر آمده یک کد گذاری جدید برای این چهار لغت است:

$$۱۱۰ \to ب \qquad ۱۰۱ \to خ \qquad ۰۱۱ \to ج \qquad ۰۰۰ \to ش$$

بررسی بیشتر بر روی ارقام نشان می‌دهد که هر واژه شامل تعداد زوجی از ارقام ۱ است. پس اگر یک خطا در یک رقم از کد واژه‌ای صورت بگیرد گیرنده تعداد فردی ۱ در پیام دریافت می‌کند و متوجه می‌شود که این کد واژه قابل ترجمه نیست و در انتقال پیام خطایی رخ داده است. پس از انتقال دهندهٔ پیام درخواست تکرار می‌کند تا کد صحیح دریافت شود. این کد گذاری می‌تواند وقوع یک خطا را در انتقال پیام تشخیص دهد. (چنین شیوه‌ای برای کدهای پیچیده‌تر نیز مورد

استفاده قرار می‌گیرد. مثلاً وقتی فروشنده فروشگاهی بارکدهای اجناس را به صورت الکترونیکی پویش می‌کند، اگر اشتباهی رخ دهد کامپیوتر متوجه شده و با صدای بوق فروشنده را آگاه می‌کند تا دوباره عمل را تکرار کند.

مثال فوق نشان می‌دهد که چطور می‌توان وقوع خطا را تشخیص داد. امّا برخی اوقات این امکان برای ما فراهم نیست که از انتقال دهنده تقاضای تکرار پیام کنیم. مثلاً وقتی کدهای صوتی از لوح فشرده خوانده می‌شود یا وقتی از ماهوارهٔ هواشناسی اطلاعات آب و هوایی دریافت می‌کنیم. در این مواقع نیاز داریم که تا آنجا که ممکن است کدها را تصفیه و تصحیح کنیم.

بازنگری دوبارهٔ مثال قبل: اگر ما از کدهای قبلی استفاده کنیم و ۰۰۱ را دریافت کنیم با توجه به اینکه هیچکدام از کد واژه‌های مورد نظر ما نیست، گیرنده متوجه می‌شود که اشتباهی در انتقال رخ داده است. امّا اگر حتی فرض کنیم که دقیقاً یک اشتباه رخ داده است این غیر ممکن است که تشخیص دهیم پیام اصلی کدامیک از موارد: ۰۰۰ (برای شمال) ۰۱۱ (برای جنوب) و یا ۱۰۱ (برای خاور) بوده است.

پس در صورت امکان گیرنده باید درخواست تکرار پیغام کند. ولی ما می‌توانیم کدها را به صورت زیر تعریف کنیم:

ش ← ۰۰۰۱۱۱ ج ← ۰۱۱۰۱۰ خ ← ۱۰۱۱۰۰ ب ← ۱۱۰۰۰۱

اگر چه این بار طول کدها دو برابر شد امّا مزیت بیشتری نسبت به حالت قبل دارد. اولاً می‌توان خطایی را که حداکثر در سه رقم اتفاق افتاده در زمان انتقال تشخیص داد. این معادل آن است که بگوییم هیچ کد واژه‌ای با سه یا کمتر از سه تغییر بر روی ارقام خود قابل تغییر به کد واژهٔ دیگر نیست. امّا امتیاز عمدهٔ این کد گذاری آن است که گیرنده می‌تواند در این حالت که سه یا کمتر از سه خطا رخ داده پیام اصلی را بدون درخواست تکرار تشخیص دهد. مثلاً فرض کنید پیام دریافتی ۱۱۱۰۰۱ باشد. چون هیچکدام از کد واژه‌های ما نیست پس خطایی رخ داده است. حدس بزنیم پیام اصلی چه بوده است:

شمال ۰۰۰۱۱۱: که با پنج تغییر بر روی ۱۱۱۰۰۱ بوجود می‌آید.
جنوب ۰۱۱۰۱۰: که با سه تغییر بر روی ۱۱۱۰۰۱ بوجود می‌آید.
خاور ۱۰۱۱۰۰: که با سه تغییر بر روی ۱۱۱۰۰۱ بوجود می‌آید.
باختر ۱۱۰۰۰۱: که با یک تغییر بر روی ۱۱۱۰۰۱ بوجود می‌آید.

با توجه به اینکه تجهیزات ما آنقدر قابل اعتماد هستند که بیش از یک خطا بسیار غیر محتمل است، گیرنده پیام را به صورت باختر ۱۱۰۰۰۱ که با کمترین تغییر بر روی کد واژهٔ دریافتی بدست

می‌آید، تصحیح می‌کند. □

این یک نمونه ساده از تصحیح خطای کد است که اگر کمتر از چهار خطا روی هر کد واژه اتفاق بیفتد می‌تواند وجود خطا را تشخیص دهد و اگر کمتر از ۲ خطا رخ داده باشد می‌تواند آن را تصحیح کند. خاصیت اصلی این کد گذاری که قابلیت تصحیح خطا را به ما می‌دهد این است که برای تبدیل یک واژه به کد واژهٔ دیگر نیاز به حداقل چهار تغییر داریم. تعمیم ساده‌ای از این ویژگی و مسألهٔ فوق را که کلید «نظریه تصحیح خطای کدها» می‌باشد، به صورت قضیهٔ زیر بیان می‌کنیم.

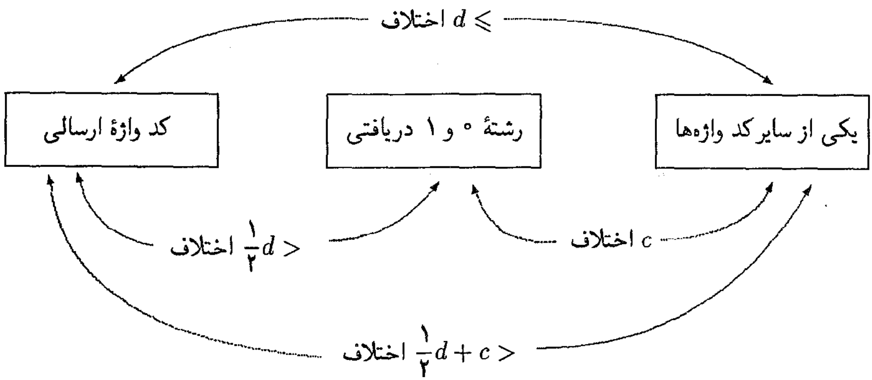
قضیه: فرض کنیم که کد واژه‌های یک کد گذاری این خاصیت را داشته باشند که هر کد واژه با حداقل d تغییر بر روی دیگری بدست بیاید آنگاه در این کد گذاری می‌توان:

الف) خطا را تشخیص داد اگر کمتر از d تغییر در هر واژه رخ بدهد.

ب) خطا را تصحیح کرد اگر کمتر از $\frac{d}{۲}$ تغییر در هر واژه رخ داده باشد.

اثبات: الف) ما نیاز به حداقل d تغییر داریم تا یک کد واژه را به کد واژهٔ دیگر تبدیل کنیم. بنابراین اگر کمتر از d خطا در کد واژه اتفاق بیفتد، آنگاه رشتهٔ دریافتی نمی‌تواند یک کد واژهٔ مورد نظر باشد. بنابراین گیرندهٔ کد واژه تشخیص می‌دهد که خطایی رخ داده است.

ب) این حالت هدف علاوه بر تشخیص خطا، تصحیح خطا را نیز شامل می‌باشد. اگر میان کد واژهٔ ارسالی و رشتهٔ دریافتی از ۰ و ۱ کمتر از $\frac{d}{۲}$ اشتباه رخ داده باشد، آنگاه چند اختلاف میان کد واژهٔ دریافتی و دیگر واژه‌ها وجود دارد؟ فرض کنیم چنین کد واژه‌ای با c تغییر بر روی کد واژهٔ دریافتی ساخته شود نمودار زیر را بطور خلاصه رسم می‌کنیم:



این نمودار نشان می‌دهد که $d < \frac{d}{۲} + c$ در نتیجه $\frac{d}{۲} < c$ بنابراین کد واژهٔ ارسالی تنها کد واژه‌ای است که با کمتر از $\frac{d}{۲}$ تغییر بر روی رشتهٔ دریافتی بدست می‌آید. بنابراین در این حالت کد واژهٔ

ارسالی برابر با کد واژه‌ای است که با کمترین تغییرات بر روی رشتهٔ دریافتی بدست می‌آید و گیرنده می‌تواند با محاسبه این کد واژه را بدست آورد. □

نظریهٔ کد گذاری را بطور کامل می‌توانید در کتاب «A first course in coding theory» از «R. Hill» که اطلاعات آن در لیست کتاب شناسی موجود است، پیدا کنید. امّا ما فقط می‌خواهیم کد گذاریهایی را که از طرحهای متقارن تشکیل می‌شوند بررسی کنیم. ما در نتیجهٔ دوم دیدیم که هر دو سطر از ماتریس ناشی از طرح (v, v, k, k, λ) در دقیقاً $۲(k-\lambda)$ مکان متفاوتند. بلافاصله این نتیجه را خواهیم داشت که:

قضیه: اگر کد واژه‌های یک کد گذاری متشکل از سطرهای ماتریس ناشی از یک طرح (v, v, k, k, λ) باشند آنگاه در این کد گذاری می‌توان

الف) وجود خطاها را تشخیص داد اگر کمتر از $۲(k-\lambda)$ خطا در هر واژه باشد.

ب) خطاها را تصحیح کرد اگر کمتر از $(k-\lambda)$ خطا در هر واژه موجود باشد. □

کد گذاری بدست آمده با این روش دو ویژگی ویژه دارد. اولاً همهٔ کد واژه‌ها وزن یکسان دارند (یعنی از تعداد یکسانی ۱ تشکیل شده‌اند) ثانیاً هر دو کد واژه در تعداد دقیقاً یکسانی از مکانها متفاوتند. برای هر کد گذاری با این ویژگیهای خاص آنهایی که از یک طرح بدست می‌آیند بهترین حالت را تولید می‌کنند، همان‌طور که در تمرینها خواهیم دید هر کد گذاری با اندازهٔ v می‌تواند حداکثر v کد واژه تولید کند. بنابراین در یک کد گذاری ناشی از ماتریس $b \times v$ باید داشته باشیم $b \leqslant v$. از طرفی با استفاده از قضیهٔ نامساوی فیشر در ماتریس یک طرح داریم $v \geqslant b$.

بنابراین همانطور که دیدیم یک ماتریس طرح با کمترین تعداد بلوکها برابر است با ماتریس یک کد گذاری خاص با بیشترین تعداد واژه‌ها و ارتباط این دو مسأله می‌تواند یک قضیهٔ کمبیشینه دیگر را تولید کند. خوانندگانی که می‌خواهند روابط جالب میان طرحها و کدگذاری‌ها را دنبال کنند، می‌توانند به کتاب «Gragh theory, coding theory and block designs» اثر «P.J. Cameron» و «J.H. Van Lint» مراجعه کنند.

کد گذاری به اندازهٔ v که از یک طرح بدست آمده دارای v کد واژه است. ما این فصل را با یک مثال به پایان می‌بریم که روشن می‌کند چطور در برخی حالات امکان دارد در یک کد گذاری شامل $۲(v+۱)$ کد واژه با اندازهٔ $v+۱$، هنوز خاصیت تصحیح خطا را داشته باشیم.

مثال: ماتریس M را ماتریس حاصل از طرح $(۷, ۷, ۳, ۳, ۱)$ در نظر می‌گیریم:

$$M=\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1&1&0\\ 1&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

همانطورکه انتظار داریم هر دو سطر در چهار مکان متفاوتند. بنابراین اگر سطرهای M به عنوان کد واژه‌های یک کد گذاری در نظر بگیریم آنگاه وجود خطا را در یک کد واژه در صورتی که کمتر از چهار خطا صورت گیرد می‌توان تشخیص داد و اگر کمتر از دو خطا صورت گیرد می‌توان آن را تصحیح کرد.

حال M' را برابر با تغییر یافتهٔ ماتریس M با نگاشت $\begin{bmatrix} 0 \to 1 \\ 1 \to 0 \end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم و ماتریس 16×8 را به صورت زیر می‌سازیم:

$$N=\begin{pmatrix} 1 & 1\;\;1\;\;1\;\;1\;\;1\;\;1\;\;1 \\ \begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{matrix} & \boxed{\quad M \quad} \\ \begin{matrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{matrix} & \boxed{\quad M' \quad} \\ 0 & 0\;\;0\;\;0\;\;0\;\;0\;\;0\;\;0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

آنگاه به سهولت قابل بررسی است که، هر دو سطر N حداقل در چهار مکان متفاوتند. بنابراین اگر سطور N را به عنوان کد واژه‌های یک کدگذاری مورد استفاده قرار دهیم، ویژگی تصحیح خطا را مانند گذشته خواهیم داشت. امّا با اضافه کردن یک واحد به اندازهٔ کدها می‌توانیم بیش از دو برابر گذشته کد واژه داشته باشیم.

در تمرینها خواهیم دید که تنها طرحهای متقارن قابلیت تولید طرحهایی به صورت $(۴n-۱, ۴n-۱, ۲n-۱, ۲n-۱, n-۱)$ را دارند. مانند طرحهای حلقوی که قبلاً تولید می‌کردیم.

«تمارین»

۱) اعداد صحیح k و v داده شده‌اند به طوری که $1 < k < v$. نشان دهید که طرح $(v, \binom{v}{k}, \binom{v-1}{k-1}, k, \binom{v-2}{k-2})$ وجود دارد.

۲) طرح (v, b, r, k, λ) داده شده است نشان دهید که طرحی با شاخصهای زیر وجود دارد:
$(v, b, b-r, v-k, b+\lambda-2r)$

۳) طرح (v, b, r, k, λ) و بلوک B از آن داده شده است. برای هر $0 \leqslant i \leqslant k$ مقدار x_i را برابر تعداد بلوکهایی تعریف می‌کنیم که با B در دقیقاً i عضو مشترکند. نشان دهید:

الف) $\sum_{i=0}^{k} x_i = b - 1$

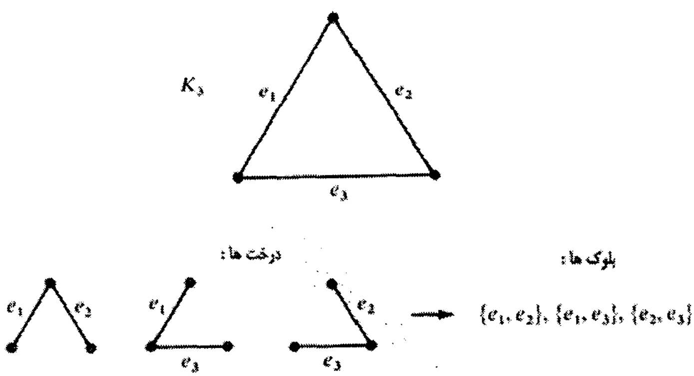
ب) $\sum i x_i = k(r-1)$ (ر)

ج) $\sum_{i=0}^{k} i(i-1)x_i = k(k-1)(\lambda-1)$ (ر)

۴) نشان دهید اگر طرح (v, v, k, k, λ) وجود داشته باشد آنگاه عدد $k + \lambda(v-1)$ یک مربع کامل است. اثبات کنید اگر v زوج باشد آنگاه $k - \lambda$ نیز مربع کامل است. (ر)

۵) نشان دهید اگر n یک عدد اول و یا توانی از یک عدد اول باشد آنگاه طرح به صورت $(n^2, n^2+n, n+1, n, 1)$ وجود دارد. (ر)

۶) ریاضیدانی ادعا می‌کند که قادر است با استفاده از درخت‌ها یک طرح تولید کند: او برای عدد صحیح $n > 2$، گراف کامل K_n را با مجموعهٔ رئوس V و مجموعهٔ یالهای E در نظر می‌گیرد و یالها را به عنوان اعضای بلوک تصور می‌کند. هر بلوک را مجموعهٔ یالهایی از K_n می‌گیرد که تشکیل یک درخت با رئوس V بدهند. مثلاً برای $n = 3$:



یک طرح $(۱, ۲, ۲, ۳, ۳)$ تولید می‌شود.

نشان دهید برای $n > ۳$ این شیوهٔ تولید طرح باطل می‌شود.

۷) (مسئله راهبه‌ها ۱۸۵۰) آیا امکان دارد ۱۵ راهبه در پنج صف حرکت کنند بطوری که در طول هفته هر راهبه با هر یک از دیگر راهبه‌ها دقیقاً یک بار در یک صف قرارگرفته باشند؟ (ج)

۸) یک «دستگاه اشتاینر» یک مجموعهٔ bتایی از زیرمجموعه‌های سه عضوی از یک مجموعهٔ v عضوی است بطوری که هر جفت از اعضای آن در دقیقاً یک زیرمجموعهٔ سه‌تایی ظاهر شده باشد. نشان دهید در یک چنین دستگاهی:

الف) v فرد است

ب) $b = \dfrac{v(v-۱)}{۶}$

ج) v عددی به صورت $۶n+۱$ یا $۶n+۳$ است.

(در حقیقت دستگاه سه‌تایی اشتاینر برای هر n با شرط (ج) وجود دارد.)

۹) نشان دهید اگر $B \subseteq \{۰, ۱, ۲, \ldots, v-۱\}$ یک مجموعه تفاضل کامل به پیمانه v باشد که $|B| = k$ آنگاه $k(k-۱)$ بر $v-۱$ بخش‌پذیر است.

در قضیهٔ صفحهٔ ۲۴۰ ما چنین مجموعه‌ای را برای $k = \dfrac{v-۱}{۲}$ پیدا کردیم. نشان دهید که اگر چنین مجموعه‌ای وجود داشته باشد آنگاه برای nهای صحیح داریم: $v = ۴n - ۱$

۱۰) (برای خوانندگانی که می‌خواهند بدانند چرا طرح $(۱, ۷, ۷, ۴۳, ۴۳)$ و یا صفحهٔ تصویری متناهی مرتبهٔ ۶ وجود ندارد.)

الف) Q یک ماتریس مربعی است. نشان دهید ماتریس قطری D وجود دارد که همهٔ درایه‌های قطر آن ± ۱ است و $Q + D$ دترمینان غیر صفر دارد.

ب) P را یک ماتریس ۴۴×۴۴ با درایه‌های گویا فرض می‌کنیم. نشان دهید که اعداد حقیقی و گویای $x_۱, x_۲, \ldots, x_{۴۳}$ با شرایط زیر وجود دارند به طوری که $y_۱ = \pm x_۱, \ldots, y_{۴۳} = \pm x_{۴۳}$

$$P \cdot \begin{pmatrix} x_۱ \\ \vdots \\ x_{۴۳} \\ ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_۱ \\ \vdots \\ y_{۴۳} \\ y \end{pmatrix} \qquad (\text{ر})$$

ج) ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$K = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ & -۲ \end{pmatrix}$$

که رابطه $K \cdot K^T = ۶I_۴$ برای آن برقرار است. اکنون شما یک ماتریس ۴۴×۴۴ (مثلاً L) را با شرط $L \times L^T = ۶I_{۴۴}$ پیدا کنید. (I_n ماتریس یکهٔ $n \times n$ است) (ج)

د) نشان دهید که اعداد گویای x و y وجود ندارند که $۶y^۲ = x^۲ + ۱$. (ر)

ه) حال می‌توانیم نشان دهیم که طرح $(۴۳, ۴۳, ۷, ۷, ۱)$ وجود ندارد.

فرض کنید چنین طرحی وجود دارد و M ماتریس حاصل از آن باشد. ماتریس ۴۴×۴۴، N را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{\quad M \quad} & \begin{matrix} ۰ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{matrix} \\ ۰ \quad ۰ \quad \cdots \quad ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

و قرار می‌دهیم $P = \frac{۱}{۶} L N^T$ که L را در بخش (ج) تعریف کردیم حال شما برای تکمیل اثبات با استفاده از بخش (ب) اعداد گویای $x_۱, x_۲, \ldots, x_{۴۳}, y$ را بدست آورده و فرض کنید دهید $x = x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{۴۳}$. نشان دهید y و x در معادلهٔ $۶y^۲ = x^۲ + ۱$ صدق می‌کنند. (ر)

۱۱) فرض کنید با تجهیزات خود می‌خواهیم یک کدگذاری دودویی را انتقال دهیم که احتمال مستقل وقوع خطا در هر رقم برابر p است. در مثال ب / خ / ج / ش در این فصل دو شیوهٔ کدگذاری با قابلیت تصحیح خطا را دیدیم. در شیوهٔ اول اندازهٔ کد گذاری ۳ بود و با وقوع حداکثر یک خطا می‌توانستیم وجود خطا را تشخیص دهیم، و در شیوهٔ دوم اندازهٔ کدگذاری ۶ بود و با وقوع حداکثر ۳ خطا می‌توانستیم وجود خطا را تشخیص دهیم. با در نظر گرفتن p محاسبه کنید:

الف) احتمال وجود بیش از یک خطا در عملیات انتقال با شیوهٔ اول در یک کد واژه (ج)

ب) احتمال وجود بیش از سه خطا در عملیات انتقال با شیوهٔ دوم در یک کد واژه. (ج)

این احتمالها را برای حالتهای $p = ۰/۷۵$ و $p = ۰/۳$ و $p = ۰/۱$ محاسبه کنید. متوجه خواهید شد که کوچکی احتمال خطا در کد گذاری دوم آن را قابل اطمینان‌تر می‌کند. (ج)

۱۲) فرض کنید که یک خانواده شامل زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ b عضوی داریم به طوری که هر زیر مجموعه شامل r عضو است و هر جفت زیرمجموعه دقیقاً در λ عضو مشترکند. با شمارش کل تعداد ظهور اعضا در هر جفت از مجموعه‌ها (و یا به صورت دیگری) نشان دهید:

$$b((v-۱)\lambda + r) \geqslant vr^۲$$

و ثابت کنید تساوی هنگامی برقرار می‌شود که هر یک از b عضو مجموعهٔ اصلی در تعداد ثابتی از زیرمجموعه‌ها (مثلاً k زیرمجموعه) قرار گیرند به طوری که: (ر)

$$r = \frac{bk}{v} = \frac{\lambda(v-۱)}{k-۱}$$

۱۳) نشان دهید در یک کد گذاری شامل b کد واژه به اندازهٔ v که همهٔ کد واژه‌ها دارای وزن یکسان هستند و هر دو کد واژه در تعداد یکسانی مکان با هم متفاوتند، داریم: $b \leqslant v$

۱۴) H را ماتریس $m \times m$ با درایه‌های ۱+ و ۱− در نظر می‌گیریم که سطر اول آن شامل درایه‌های ۱+ است و خاصیت $H \cdot H^T = mI_m$ برای آن برقرار است که $m > ۲$ (این ماتریس را «ماتریس نرمال شدهٔ هادامار» می‌نامند) نشان دهید که:

الف) هر سطر و هر ستون H (بجز اولین سطر و ستون) شامل دقیقاً $\frac{m}{۲}$ عدد یک هستند. (ر)

ب) برای هر دو ستون H (بجز ستون اول) در دقیقاً $\frac{m}{۴}$ سطر هر دو ستون عدد ۱ دارند.

حال فرض کنید $m = ۴n$ و ماتریس M را ماتریس حاصل از پاک کردن سطر و ستون اول H و قرار دادن ۰ به جای ۱− در دیگر درایه‌ها در نظر می‌گیریم. نشان دهید M ماتریس حاصل از طرح $(۴n-۱, ۴n-۱, ۲n-۱, ۲n-۱, n-۱)$ است.

۱۵) M را ماتریس حاصل از طرح (v, v, k, k, λ) فرض می‌کنیم. همانطور که قبلاً دیدیم هر دو سطر M در دقیقاً $۲(k-\lambda)$ درایه متفاوتند و هر سطر M می‌توان به عنوان کد واژه‌های یک کد گذاری با قابلیت تصحیح خطا در نظر گرفت. حال مانند آخرین مثال

این فصل M' را ماتریس حاصل از M تحت نگاشت $\begin{bmatrix} ۰ \longrightarrow ۱ \\ ۱ \longrightarrow ۰ \end{bmatrix}$ تعریف می‌کنیم و ماتریس N با ابعاد $(v+۱) \times ۲(v+۱)$ را به این صورت می‌سازیم:

$$N = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & & & & \\ ۱ & & M & & \\ \vdots & & & & \\ ۱ & & & & \\ ۰ & & & & \\ ۰ & & M' & & \\ \vdots & & & & \\ ۰ & & & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{pmatrix}$$

الف) نشان دهید هر دو سطر N در حداقل $۲(k-\lambda)$ مکان متفاوتند اگر و تنها اگر $k \leqslant ۲\lambda + ۱$ و $v \geqslant ۳k - ۲\lambda$ (ر)

ب) از روابط میان شاخص‌های طرح استفاده کنید و نشان دهید که نامساوی‌های قسمت (الف) به تساوی تبدیل می‌شود اگر و فقط اگر $k = ۲\lambda + ۱$ و $v = ۴\lambda + ۳$ (ر)

ج) نشان دهید اگر سطرهای N را به عنوان کد واژه‌های یک کد گذاری مورد استفاده قرار دهیم آنگاه قابلیت تصحیح خطا را مانند کد گذاری حاصل از M خواهیم داشت اگر و تنها اگر طرح اولیه به صورت $(۴n-۱, ۴n-۱, ۲n-۱, ۲n-۱, n-۱)$ باشد.

۱۶

نظریهٔ رمزی

قبل از آنکه صورت کلی نظریهٔ رمزی را بیان کنیم سه مسأله برای آشنایی اولیه با این مبحث ارائه می‌کنیم (البته بدون ارائه راه حل). مثال اول بدیهی و ساده است امّا دو مثال بعدی که مرتبط با قوانین اعداد رمزی هستند چندان هم ساده نیستند.

مثال:

الف) اگر هر یک از زیرمجموعه‌های یک عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ را با دو رنگ قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کنیم، مستقل از شیوهٔ رنگ‌آمیزی، یک زیرمجموعهٔ چهار عضوی از آن وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های یک عضوی آن یک رنگ می‌باشند.

ب) اگر هر یک از زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۸\}$ را با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کنیم، مستقل از شیوهٔ رنگ‌آمیزی یک زیرمجموعهٔ چهار عضوی از این مجموعه وجود دارد که تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی آن یک رنگند.

ج) اگر هر یک از زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۲۱\}$ را با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کنیم، مستقل از شیوهٔ رنگ‌آمیزی یک زیرمجموعهٔ چهارعضوی از این مجموعه وجود خواهد داشت، که تمام زیرمجموعه‌های سه عضوی آن یک رنگند. □

بطور کلی برای هر عدد طبیعی c (مانند عدد ۴ در مثال بالا) و عدد طبیعی $k < c$ (مانند اعداد ۱ و ۲ و ۳ در مثال بالا) عدد طبیعی R وجود دارد که اگر همهٔ زیرمجموعه‌های k عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, R\}$ را با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یک زیرمجموعهٔ c عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, R\}$ وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های k عضوی آن یکرنگند. این مسأله حالت خاص رنگ‌آمیزی دو رنگی از «نظریهٔ رمزی» است که اولین بار برای هر تعداد رنگ توسط «اِف.پی.

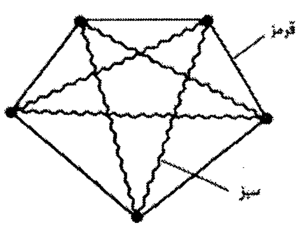
رمزی[1]» در سال ۱۹۳۰ اثبات شد. در حالتی که R کوچکترین مقدار ممکن باشد آن را عدد رمزی می‌نامند. امّا حتی در حالت کوچک و محدود نیز بدست آوردن اعداد رمزی پیچیده و مشکل خواهد بود و ما حتی در مورد مقادیر کوچک و خاص این اعداد اطلاعات بسیار کمی داریم.

کار را با بررسی دقیق‌تر حالت $k = ۱$ و $k = ۲$ که در مثالهای (الف) و (ب) آمده‌اند آغاز می‌کنیم. در حالت (الف) که $k = ۱$ است یک بیان ساده‌ای از اصل لانه کبوتری داریم مثلاً اگر اعداد ۱ تا ۷ را در دو لانهٔ سبز و قرمز وارد کنیم حداقل یک لانه شامل چهار عدد خواهد بود. حالت $k = ۲$ شامل رنگ کردن زیرمجموعه‌های دو عضوی است، که می‌توان به عنوان رنگ کردن یالهای یک گراف کامل در نظر گرفت. برای مثال رنگ‌آمیزی همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۸\}$ معادل رنگ کردن یالهای گراف کامل ۱۸ رأسی با رئوس $\{۱, ۲, \ldots, ۱۸\}$ است. مثال قسمت (ب) بیان می‌کند که اگر یالهای گراف $K_{۱۸}$ را با دو رنگ رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه حتماً یک زیرگراف $K_۴$ وجود دارد که همهٔ یالهای آن یک رنگ هستند. این حالت از نظریهٔ رمزی ($k = ۲$) می‌تواند به صورت یک مسأله در نظریهٔ گراف تبدیل شود.

در بخش ابتدایی این فصل شکل گرافی نظریهٔ رمزی را بررسی خواهیم کرد و در ادامه نتایج مربوط به آن را بیان می‌کنیم. در انتهای فصل نگاهی وسیع‌تر به این موضوع خواهیم داشت که نتایج بسیار جالبی را با اتمام این کتاب همراه می‌سازد.

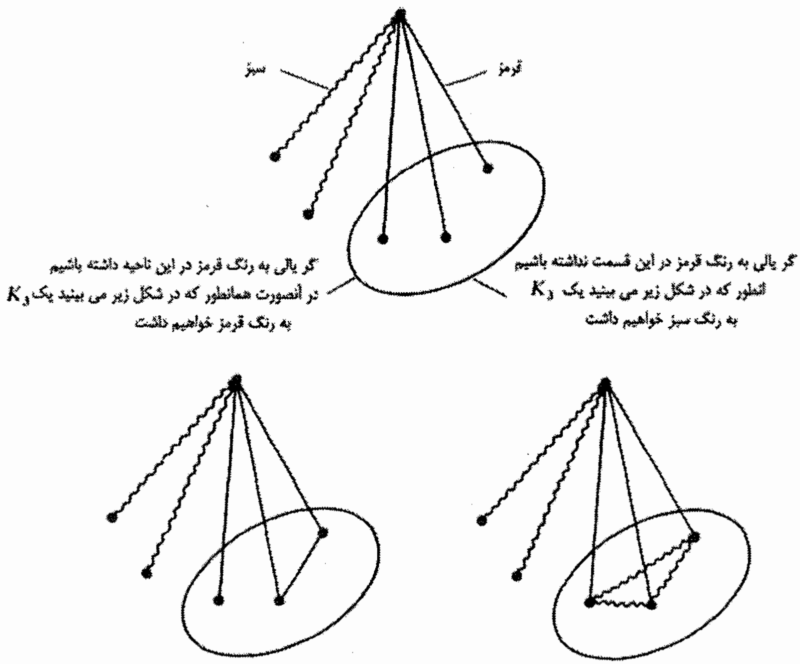
مثال: نشان دهید که می‌توان یالهای گراف $K_۵$ را طوری با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کرد که هیچ زیرگراف $K_۳$ با یالهای یک رنگ در آن پیدا نشود. همچنین نشان دهید اگر یالهای گراف $K_۶$ را با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کنیم حتماً یک زیرگراف $K_۳$ با یالهای یک رنگ در آن وجود دارد.

راه حل: به سادگی می‌توان یک رنگ‌آمیزی از $K_۵$ ارائه داد که هیچ زیرگراف $K_۳$ با یالهای یک رنگ بوجود نیاید:



1) F.P. Ramsey

حال فرض کنیم که یالهای گراف $K_۶$ را با دو رنگ رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. یک رأس از آن را در نظر می‌گیریم. این رأس به پنج رأس دیگر متصل است که هر یک از این یالها می‌تواند سبز یا قرمز باشد. در نتیجه حداقل سه تا از آنها یک رنگ هستند بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض می‌کنیم سه تا از این یالها قرمز باشند:



این مثال نشان می‌دهد $n = ۶$ کمترین مقدار n برای برقراری این خاصیت است که: اگر یالهای گراف K_n را با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه حتماً یک گراف $K_۳$ با یالهای یک رنگ بوجود می‌آید که رنگ یالهای آن یا سبز است یا قرمز. حال می‌خواهیم این مسأله را برای مقادیر بزرگتر از ۳ نیز تعمیم دهیم. مثلاً گرافی با این خاصیت که اگر یالهای آن را با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کنیم حداقل یک زیرگراف $K_{۱۰}$ با یالهای یک رنگ در آن وجود داشته باشد. حداقل چه اندازه‌ای باید داشته باشد؟

به هیچ عنوان واضح نیست که چنین گرافی لزوماً موجود باشد چون ممکن است یالهای آن را طوری رنگ‌آمیزی کرد که شرط مذکور را برآورده نسازد. امّا در قضیهٔ بعدی نشان می‌دهیم که اگر مثلاً یالهای گراف $K_{۴۶۶۲۰}$ را با دو رنگ قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کنیم مستقل از چگونگی رنگ‌آمیزی حتماً یک زیرگراف $K_{۱۰}$ با یالهای یک رنگ قرمز یا سبز در آن یافت می‌شود. امّا قبل از ادامهٔ بحث برای سادگی بیان مطالب چند قرارداد می‌کنیم. اولاً «رنگ‌آمیزی یالهای گراف

کامل n رأسی» را با عبارت «رنگ‌آمیزی K_n» مشخص می‌کنیم و منظور از «K_n یک رنگ»، «گراف K_n با یالهای یک رنگ» خواهد بود.

قضیه: اگر $r, g \geqslant 2$ باشند و $n = \binom{r+g-2}{r-1}$ آنگاه اگر گراف K_n را با دو رنگ قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کنیم، حتماً یک زیرگراف K_r قرمز یا K_g سبز در آن بوجود خواهد آمد.

اثبات: با استفاده از استقراء بر روی $r+g$ این قضیه را ثابت می‌کنیم. کوچکترین حالت ممکن که پایهٔ استقراء نیز می‌باشد حالت $r = g = 2$ است. در هر صورت اگر $r = 2$ یا $g = 2$ مسأله بدیهی می‌شود. مثلاً اگر $r = 2$ آنگاه $n = \binom{2+g-2}{2-1} = g$ و واضح است که اگر K_g را با دو رنگ قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کنیم یا یک یال قرمز (K_2) وجود دارد و یا اینکه یک K_g سبز بوجود می‌آید.

حال فرض می‌کنیم $g, r > 2$ و قضیه برای اعداد کمتر از $r+g$ صحیح باشد مخصوصاً برای دو حالت زیر:

الف) اگر $n_1 = \binom{r+(g-1)-2}{r-1}$ و K_{n_1} را با دو رنگ رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یا یک K_r قرمز و یا یک K_{g-1} سبز بوجود می‌آید.

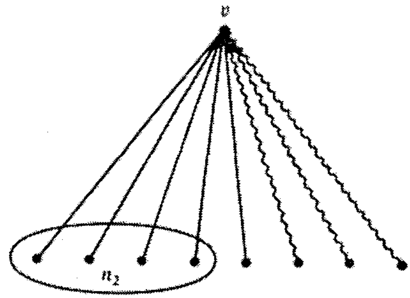
ب) اگر $n_2 = \binom{(r-1)+g-2}{(r-1)-1}$ و یالهای K_{n_2} را با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یا یک K_{r-1} قرمز داریم یا یک K_g سبز رنگ.

حال حکم قضیه را برای g, r اثبات می‌کنیم. فرض کنید $n = \binom{r+g-2}{r-1}$ و یالهای K_n را با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. رأس خاص v را در نظر می‌گیریم. $n-1$ رأس به آن متصل هستند. با استفاده از رابطهٔ بازگشتی ضرایب دوجمله‌ای داریم:

$$
\begin{aligned}
n-1 = \binom{r+g-2}{r-1} - 1 &= \binom{r+(g-1)-2}{r-1} + \binom{(r-1)+g-2}{(r-1)-1} - 1 \\
&> \binom{r+(g-1)-2}{r-1} - 1 + \binom{g+(r-1)-2}{(r-1)-1} - 1 \\
&= (n_1 - 1) + (n_2 - 1)
\end{aligned}
$$

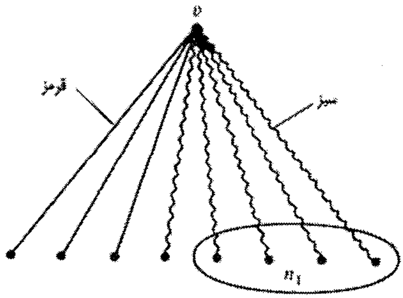
پس در مورد یالهای متصل به v می‌توان گفت که یا حداقل n_2 عدد از آنها قرمزند و یا حداقل n_1 عدد از آنها سبز هستند.

اگر $n_۲$ یال متصل به v قرمز باشند:



طبق (ب) در این قسمت یک K_{r-1} قرمز و یا یک K_g سبز خواهیم داشت

اگر $n_۱$ یال متصل به v سبز باشند:



طبق (الف) در این قسمت یک K_r قرمز و یا یک K_{g-1} سبز خواهیم داشت

در این جا دو حالت متقارن ممکن است پیش بیاید. فرض می‌کنیم مثلاً حالت سمت چپ اتفاق بیفتد. طبق آنچه گفته شد اگر در مجموعهٔ مشخص شده در شکل K_r قرمز بوجود بیاید که مسأله حل می‌شود امّا اگر $K_{g-۱}$ سبز بوجود بیاید با اضافه کردن یالهای سبز متصل به v به این گراف یک K_g سبز رنگ بوجود می‌آید و اثبات کامل می‌شود. در نتیجه استقراء و متعاقباً حکم قضیه اثبات می‌شود. □

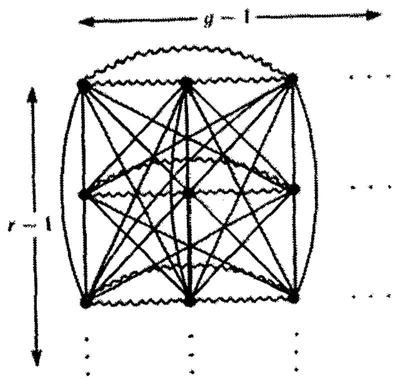
اگر $r, g \geqslant ۲$ قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که عدد صحیح n وجود دارد که: اگر یالهای K_n را با دو رنگ قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یا یک K_r قرمز رنگ بوجود می‌آید و یا یک K_g سبز رنگ. اکنون اعداد رمزی $R(g, r)$ را تعریف می‌کنیم: «کوچکترین عدد n که خاصیت فوق را داراست». چون جابجایی رنگها تأثیری در مقدار این عدد ندارد پس $R(g, r) = R(r, g)$. قضیهٔ بعد اطلاعات بیشتری در مورد این اعداد به ما می‌دهد:

قضیه: برای $r, g \geqslant ۲$ عدد رمزی $R(r, g)$ در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$۱ + (r - ۱)(g - ۱) \leqslant R(r, g) \leqslant \binom{r + g - ۲}{r - ۱}$$

اثبات: نامساوی سمت راست نتیجه مستقیم قضیهٔ قبل است؛ چون بنابر قضیهٔ قبل $n = \binom{r+g-۲}{r-۱}$ خاصیت عدد رمزی را داراست و $R(r, g)$ کوچکترین عددی است که این خاصیت را دارد. برای اثبات نامساوی سمت چپ باید یک رنگ‌آمیزی از یالهای گراف $K_{(r-۱)(g-۱)}$ ارائه کنیم که هیچ K_r قرمز یا K_g سبز بوجود نیاید. برای این کار $(r - ۱)(g - ۱)$ عدد از رئوس را در یک مستطیل $(r - ۱)(g - ۱)$ قرار می‌دهیم. حال هر دو رأس واقع در یک سطر را با رنگ سبز و هر دو رأس غیر واقع در یک سطر را با رنگ قرمز به هم متصل می‌کنیم. مجموعهٔ یالهای سبز

یک گراف $r-1$ بخشی است که هر بخش آن یک K_{g-1} سبز رنگ است پس در گراف مذکور K_g وجود ندارد. (بطور کلی‌تر هیچ گراف g رأسی همبندی در آن یافت نمی‌شود.)



به سادگی می‌توان عدم وجود K_r قرمز را نیز بررسی کرد: اگر چنین گرافی موجود باشد دو رأس آن طبق اصل لانه کبوتری در یک سطر قرار می‌گیرد. امّا این دو رأس با رنگ سبز به هم متصلند پس نمی‌توانند بخشی از یک K_r قرمز رنگ باشند. بنابراین ما می‌توانیم گراف $K_{(g-1)(r-1)}$ را طوری با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کنیم که نه K_r قرمز بوجود بیاید نه K_g سبز رنگ و این ثابت می‌کند که: $(g-1)(r-1)+1 \leqslant R(r,g)$ □

امّا مقدار دقیق اعداد رمزی چقدر است؟ بدیهی است که اگر $g \geqslant 2$ آنگاه $R(2,g)=g$ (این حالت تساوی نامساویهای قضیهٔ قبل است.) مثالهای این فصل نشان می‌دهند که $R(3,3)=6$ و $R(4,3)=R(3,4)=9$ و $R(4,4)=18$ همچنین اثبات شده است که: $R(3,5)=14$ و $R(3,6)=18$ و $R(3,7)=23$ به جز این چند مورد حالت دیگری از اعداد رمزی شناخته نشده است.

به سادگی می‌توان مسألهٔ اعداد رمزی را از ۲ رنگ به m رنگ تعمیم داد:

قضیه: m را عددی صحیح و مثبت در نظر می‌گیریم. آنگاه یک عدد صحیح M وجود دارد که: اگر یالهای گراف K_M را با m رنگ رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یک زیرگراف K_3 یک رنگ تولید می‌شود. (در تمرینهای این فصل خواهیم دید که $M=[m!\cdot e]+1$).

اثبات: اثبات این قضیه با استفاده از استقراء بر روی m بدست می‌آید: حالت $m=1$ بدیهی است و حالت $m=2$ حالتی از اعداد رمزی است که قبلاً ثابت کردیم. (و نشان دادیم اگر K_6 را با دو رنگ رنگ‌آمیزی کنیم یک K_3 یک رنگ بوجود خواهد آمد یعنی $M=6$). حال

فرض می‌کنیم $M > ۲$ و حکم مسأله برای حالت $m - ۱$ اثبات شده باشد. با استفاده از فرض استقراء داریم: عدد $M_۰$ وجود دارد بطوری که اگر یالهای $K_{M_۰}$ را با $m - ۱$ رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه حتماً یک زیرگراف $K_۳$ با یالهای یک رنگ در آن وجود دارد. حال قرار می‌دهیم: $M = R(۳, M_۰)$. برای آنکه نشان دهیم عدد M شرایط حکم مسأله برای m رنگ را برآورده می‌سازد باید نشان دهیم که اگر K_M را با m رنگ رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه حتماً یک زیرگراف $K_۳$ با یالهای یک رنگ در آن وجود دارد.

برای راحتی کار یکی از رنگها را قرمز و بقیهٔ $m - ۱$ رنگ را «غیر قرمز» می‌نامیم. با انتخاب مقدار $R(۳, M_۰)$ برای M، طبق قضیهٔ اعداد رمزی، در هر رنگ‌آمیزی K_M یا یک $K_۳$ با یالهای قرمز رنگ داریم که در این صورت حکم ثابت می‌شود و یا یک $K_{M_۰}$ با یالهای غیر قرمز (که شامل $m - ۱$ رنگ است) وجود دارد و در این صورت نیز طبق فرض استقراء و مقدار مفروض $M_۰$ یک $K_۳$ با یالهای یک رنگ داریم و به این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود. □

از $R(۳, ۳) = ۶$ داریم: $R(۳, R(۳, ۳)) = R(۳, ۶) = ۱۸$ طبق قضیه بالا اگر یالهای گراف K_M را به سه رنگ مختلف رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یک گراف $K_۳$ با یالهای یک رنگ وجود دارد. البته ما در تمرینها نشان خواهیم داد که این حکم برای $K_{۱۷}$ نیز برقرار است (امّا برای $K_{۱۶}$ برقرار نیست.) خوانندگان با کمی دقت متوجه می‌شوند که می‌توان به همین صورت اعداد رمزی به شکل $R(r_۱, r_۲, r_۳, \ldots, r_m)$ را تعریف کرد. مثلاً مورد قبلی نشان داد که $R(۳, ۳, ۳) = ۱۷$.

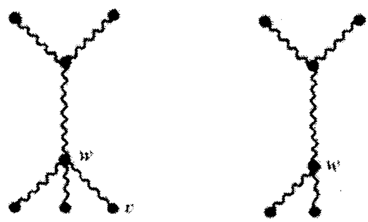
یکی از نتایجی که از نظریهٔ رمزی بدست می‌آید، این است که در یک گراف به اندازهٔ کافی بزرگ (نه فقط K_r قرمز و K_g سبز بلکه) هر گراف خاص سبز یا قرمز پیدا می‌شود. اکنون ما یک نتیجه در این مورد ارائه می‌کنیم که بطور جالبی امکان اختصاص دادن یک عدد برای ایجاد شرایط مذکور و اطمینان از برقراری حکم را به ما می‌دهد.

قضیه: فرض می‌کنیم که $r, g \geqslant ۲$ و یک درخت T با g رأس داده شده است. اگر هر یک از یالهای $K_{(r-۱)(g-۱)+۱}$ را با دو رنگ قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه حتماً یک K_r قرمز یا یک T سبز رنگ وجود دارد. علاوه بر این مقدار $(r - ۱)(g - ۱) + ۱$ کوچکترین مقدار برای داشتن چنین ویژگی در هر حالت است.

اثبات: ابتدا این موضوع را که مقدار $(r - ۱)(g - ۱) + ۱$ کمترین مقدار با این چنین ویژگی است بررسی می‌کنیم. اگر گراف $K_{(r-۱)(g-۱)}$ را مانند صفحهٔ قبل رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه نه یک K_r قرمز و نه هیچ گراف همبند g رأسی سبز وجود ندارد (و متعاقباً هیچ درخت سبز g رأسی نیز وجود ندارد).

حال اثبات را با استقراء بر روی $r + g$ انجام می‌دهیم. مقادیر $r = g = ۲$ را به عنوان فرض استقراء در نظر می‌گیریم. در حقیقت برای حالاتی که $r = ۲$ یا $g = ۲$ مسأله بدیهی است: مثلاً اگر $r = ۲$ داریم: $n = (۲ - ۱)(g - ۱) + ۱ = g$. واضح است که اگر یالهای گراف $K_n = K_g$ را با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یا یک $K_۲$ (یک یال) قرمز داریم و یا یک K_g سبز (که شامل هر درخت g رأسی سبز مانند T می‌شود).

فرض می‌کنیم که $r > ۲$ و $g > ۲$ و قضیه برای مقادیر کوچکتر از $r + g$ برقرار باشد. ابتدا نمودار T را که می‌خواهیم با یالهای سبز در گراف پیدا کنیم در نظر می‌گیریم. این درخت $g > ۲$ رأس دارد پس قاعدتاً یک رأس v با درجهٔ یک در آن وجود دارد که با یال vw به رأس w متصل می‌شود. درخت T' را از حذف یال vw و رأس v از T بدست می‌آوریم:



T T'

حال فرض استقراء برای مقادیر کوچکتر از $r + g$ را در نظر می‌گیریم. در حالت خاص با فرض کردن K_r و درخت T' داریم:

الف) اگر $n_۱ = (r - ۱)(g - ۱) + ۱$ باشد و یالهای گراف $K_{n_۱}$ را با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یا یک درخت T' سبز و یا یک K_r قرمز داریم.

بطور مشابه حکم را در مورد $K_{r-۱}$ و T می‌نویسیم:

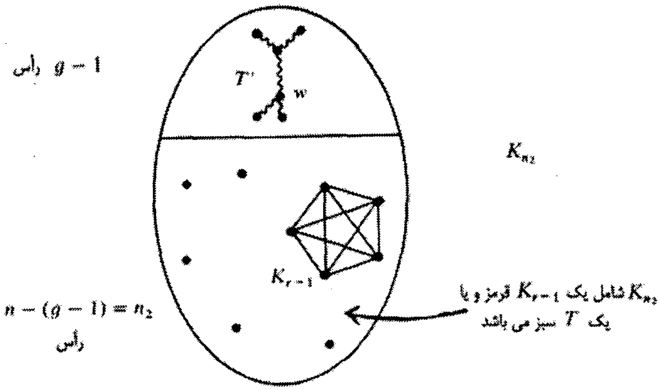
ب) اگر $n_۲ = (r - ۲)(g - ۱) + ۱$ باشد و یالهای گراف $K_{n_۲}$ را با دو رنگ قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یا یک درخت T سبز و یا یک $K_{r-۱}$ قرمز داریم.

حال فرض می‌کنیم که $n = (r - ۱)(g - ۱) + ۱$ و سعی می‌کنیم یک K_r قرمز یا یک T سبز در K_n پیدا کنیم. ابتدا توجه کنید که $n > n_۱$ و همچنین:

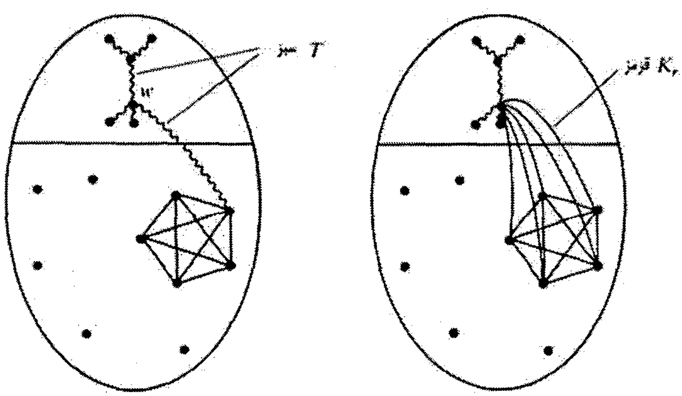
$$n - (g - ۱) = (r - ۱)(g - ۱) - (g - ۱) + ۱ = (r - ۲)(g - ۱) + ۱ = n_۲$$

فرض می‌کنیم یالهای K_n را با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. از آنجا که $n > n_۱$ طبق بخش (الف) این گراف یا شامل K_r قرمز است (که در این صورت حکم مسأله بدست می‌آید)

یا شامل T' سبز است. اما در حالت دوم این درخت T' سبز را (که $g - ۱$ رأس دارد) کنار بگذارید و به $n_۲ = n - (g - ۱)$ رأس باقیمانده توجه کنید:



طبق بخش (ب) این گراف $K_{n_۲}$ یا شامل $K_{r-۱}$ قرمز است یا T سبز (که در این حالت حکم اثبات می‌شود). پس حالتی می‌ماند که $K_{r-۱}$ قرمز تشکیل شود. رئوس گراف $K_{r-۱}$ قرمز به وسیلهٔ یک سری یالها به رأس w از T' متصل می‌شوند. اگر یکی از این یالها سبز باشد (که در شکل سمت چپ این حالت نشان داده شده است)، یک درخت T سبز رنگ با g رأس تشکیل می‌شود. در غیر این صورت همهٔ این یالهای متصل کنندهٔ w به رئوس $K_{r-۱}$ قرمزند و تولید K_r قرمز می‌کنند (این حالت نیز در شکل سمت راست نشان داده شده است:



به این ترتیب نتیجه بوسیلهٔ استقراء برای هر مقدار r و g اثبات می‌شود. □

گرافهای مورد استفادهٔ ما تاکنون متناهی بودند و حال برای بررسی حالت نامتناهی نظریه رمزی به شکل مجموعه‌ای آن باز می‌گردیم. (امّا اگر میل دارید که این حالت نامتناهی را نیز بر روی گرافها بررسی کنید باید یک گراف با مجموعهٔ رئوس $\{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ فرض کرده و سپس نتایج بدست آمده را با شکل گرافی بر روی آن پیاده کنید.

قضیه: مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots,\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر هر زیرمجموعهٔ دو عضوی آن را با یکی از رنگهای یک مجموعهٔ متناهی از رنگهای مختلف رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از این مجموعه وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی آن یک رنگ هستند.

اثبات: فرض می‌کنیم هر زیرمجموعهٔ دو عضوی $N = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ را با یکی از رنگ‌های یک مجموعهٔ متناهی از رنگ‌ها، رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. ما باید مجموعهٔ $S \subseteq N$ که تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی آن یک رنگند را بسازیم. برای راحتی ادامهٔ کار مجموعه‌ها را ابتدا برچسب گذاری می‌کنیم و قرار می‌دهیم: $N_۰ = N$ عدد $n_۰$ را یکی از اعضای $N_۰$ در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی $N_۰$ را که شامل $n_۰$ هستند بررسی می‌کنیم: $\{\{n_۰, n\} : n \in N_۰ - \{n_۰\}\}$. مثلاً اگر $n_۰ = ۱$ آنگاه این مجموعه از زیرمجموعه‌ها برابر $\{\{۱, ۲\}, \{۱, ۳\}, \{۱, ۴\}, \ldots\}$ خواهد بود. این گروه نامتناهی از مجموعه‌ها با تعدادی متناهی رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود. پس یک زیرمجموعه نامتناهی از این جفت‌ها با یک رنگ وجود دارد. فرض کنید مجموعهٔ $\{\{n_۰, n\} : n \in N_۱\}$ همهٔ جفتهای یک رنگ مذکور باشند. (و برای مثال فرض کنید که همهٔ آنها قرمزند).

حال $n_۱$ را عضوی از $N_۱$ در نظر می‌گیریم و مجموعهٔ همهٔ جفت‌های شامل $n_۱$ را بررسی می‌کنیم: $\{\{n, n_۱\} : n \in N_۱ - \{n_۱\}\}$ این مجموعه نامتناهی با تعداد متناهی رنگ رنگ‌آمیزی می‌شود پس تعداد نامتناهی از چنین جفت‌هایی باید با یک رنگ رنگ‌آمیزی شده باشند. مجموعهٔ نامتناهی $\{\{n_۱, n\} : n \in N_۲\}$ را برابر همهٔ چنین جفت‌های هم رنگی در نظر می‌گیریم. (و برای مثال فرض می‌کنیم همهٔ این جفت‌ها سبز باشند).

دوباره $n_۲$ را یک عضو دلخواه از $N_۲$ فرض می‌کنیم و همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی شامل $n_۲$ را در نظر می‌گیریم: $\{\{n, n_۲\} : n \in N_۲ - \{n_۲\}\}$. دوباره این مجموعه یک زیرمجموعهٔ نامتناهی $\{\{n, n_۳\} : n \in N_۳\}$ از این جفت‌ها دارد که هم رنگند. (که مثلاً آبی هستند). سپس $n_۳$ را عضوی از $N_۳$ در نظر گرفته و به این ترتیب یک دنبالهٔ نامتناهی از مجموعه‌های نامتناهی بدست می‌آوریم که:

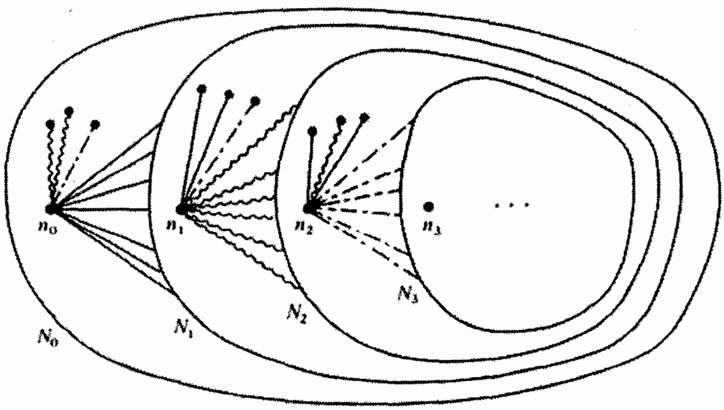
$$\ldots \subseteq N_۳ \subseteq N_۲ \subseteq N_۱ \subseteq N_۰ = N$$

و از هر مجموعه یک عضو داریم:

$$n_۰ \in N_۰,\ \ n_۱ \in N_۱,\ \ n_۲ \in N_۲,\ \ n_۳ \in N_۳, \ldots$$

به طوری که برای هر عضو خاص n_i زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعهٔ $\{\{n, n_i\} : n \in N_{i+۱}\}$ یک رنگ هستند.

اگر شما یک مجموعهٔ نامتناهی از رئوس را در نظر بگیرید می‌توانید این رویه را به صورت گراف دنبال کنید و اثبات آن را با اثبات ما مقایسه و مطابقت کنید.



بنابراین (با فرض رنگهای فرضی ما در اثبات بالا) ما ردیف نامتناهی زیر را خواهیم داشت:

که همه به یک رنگ مثلاً قرمز هستند $\{\{n_۰, n\} : n \in N_۱\}$

که همه به یک رنگ مثلاً سبز هستند $\{\{n_۱, n\} : n \in N_۲\}$

که همه به یک رنگ مثلاً آبی هستند $\{\{n_۲, n\} : n \in N_۳\}$

$\vdots$

که همه به یک رنگ از رنگهای قبلی مثلاً قرمز هستند $\{\{n_k, n\} : n \in N_{k+۱}\}$

$\vdots$

با توجه به اینکه تعداد متناهی رنگ وجود دارد، حداقل یک رنگ وجود دارد که به تعداد نامتناهی

در ستون سمت راست بالا ظاهر می‌شود (مثلاً رنگ زرد) یعنی مجموعه‌های زیر را داریم که:

که همهٔ جفت‌های آن یک رنگند مثلاً زرد	$\{\{n_{i_1}, n\} : n \in N_{i_1+1}\}$
که همهٔ جفت‌های آن یک رنگند مثلاً زرد	$\{\{n_{i_2}, n\} : n \in N_{i_2+1}\}$
که همهٔ جفت‌های آن یک رنگند مثلاً زرد	$\{\{n_{i_3}, n\} : n \in N_{i_3+1}\}$
$\vdots$	$\vdots$

حال مجموعهٔ $S = \{n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \ldots\}$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه نامتناهی است و مدعی می‌شویم که هر زیرمجموعهٔ دو عضوی آن به رنگ زرد است: جفت دلخواه $\{n_{i_\alpha}, n_{i_\beta}\}$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$n_{i_\alpha} < n_{i_\beta} \quad : \quad n_{i_\beta} \in N_{i_\beta} \subseteq N_{i_\beta - 1} \subseteq \ldots \subseteq N_{i_\alpha + 1}$$

پس جفت $\{n_{i_\alpha}, n_{i_\beta}\}$ یک جفت در مجموعهٔ $\{\{n_{i_\alpha}, n\} : n \in N_{i_\alpha+1}\}$ است که بنابر فرض و تعریف این مجموعه، این جفت زرد است. همانطور که ادعا کرده بودیم.

پس هر زیرمجموعهٔ دو عضوی S که مجموعه‌ای نامتناهی است دارای رنگ یکسان (زرد) با بقیهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی است، و به این ترتیب حکم مسأله اثبات می‌شود. □

این قضیه بحث ما را در حالت گرافی نظریهٔ رمزی پایان می‌دهد. همان طوری که در آغاز فصل گفتیم نظریهٔ رمزی می‌تواند به رنگ کردن زیرمجموعه‌های سه عضوی و بطور کلی زیرمجموعه‌های K عضوی یک مجموعه تبدیل شود و تعمیم یابد. ما حالت سه عضوی آن را اثبات می‌کنیم و روشی برای تعمیم آن به حالات بالاتر ارائه می‌کنیم.

قضیه: برای $r, g \geqslant ۳$ عدد صحیح و مثبت n وجود دارد که اگر هر زیرمجموعهٔ سه‌عضوی $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ را با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یا یک زیرمجموعهٔ r عضوی از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی آن قرمزند، یا یک زیرمجموعهٔ g عضوی از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی آن سبز هستند.

اثبات: برهان ما بر پایهٔ استقراء قرار دارد که روی $r + g$ انجام می‌شود. حالت پایه را حالت $r = g = ۳$ قرار می‌دهیم. بطور کلی وقتی $r = ۳$ (و یا $g = ۳$) می‌توانیم قرار دهیم $n = g$ (و یا $n = r$) و مسأله در این حالت بدیهی می‌شود.

بنابراین فرض می‌کنیم $r, g \geqslant ۳$ و حکم برای اعداد کمتر از $r + g$ صحیح باشد: در حالت خاص $r - ۱$ و g با استفاده از فرض استقراء عدد $n_۱$ را داریم که:

الف) اگر در مجموعهٔ V_1 که $|V_1| = n_1$ همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی را با یکی از رنگهای قرمز یا سبز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یا یک زیرمجموعهٔ g عضوی از V_1 وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی آن سبز هستند و یا یک زیرمجموعهٔ $r-1$ عضوی از V_1 وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی آن قرمزند.

بطور مشابه برای حالت r و $g-1$ با استفاده از فرض استقراء خواهیم داشت عدد n_2 در $\mathbb{N}$ وجود دارد که:

ب) اگر در مجموعهٔ V_2 که $|V_2| = n_2$ همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی را با یکی از دو رنگ قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کنیم، آنگاه: یا یک زیرمجموعهٔ $g-1$ عضوی از V_2 وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی آن سبز هستند و یا یک زیرمجموعهٔ r عضوی از V_2 وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی آن قرمز هستند.

اکنون مقدار R را برابر عدد رمزی $R(n_1, n_2)$ قرار می‌دهیم و $n = R + 1$ فرض می‌کنیم. نشان می‌دهیم n همان مقدار مورد نیاز قضیهٔ ما برای r و g می‌باشد. به این معنی که اگر تمام زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, R+1\}$ را به یکی از دو رنگ قرمز یا سبز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یا یک زیرمجموعهٔ g عضوی از آن وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی آن سبزند و یا یک زیرمجموعهٔ r عضوی از آن وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی آن قرمزند.

رئوس گراف کامل K_R را بر روی اعضای $\{1, 2, \ldots, R\}$ قرار داده و هر یال آن را با رنگ سبز یا قرمز به این ترتیب رنگ‌آمیزی می‌کنیم که زیرمجموعهٔ سه عضوی $\{i, j, R+1\}$ را به رنگ یال ij در می‌آوریم. با استفاده از تعریف عدد رمزی $R = R(n_1, n_2)$ یا یک K_{n_1} که همهٔ یالهایش قرمزند وجود دارد و یا یک گراف K_{n_2} که همهٔ یالهایش سبز هستند. فرض می‌کنیم مثلاً K_{n_2} سبز وجود دارد (حالت دیگر مشابه همین حالت است):

این واقعیت که K_{n_2} با یالهای سبز (همراه با مجموعهٔ رأسی V_2) وجود دارد، به این معنی است که V_2 یک زیرمجموعه از $\{1, 2, \ldots, R\}$ است. که $|V_2| = n_2$ و هر یال ij (که $i, j \in V_2$) به رنگ سبز در K_n وجود دارند. با تناظری که با رنگ‌آمیزی یالها و مجموعه‌ها داشتیم می‌توانیم بگوییم:

برای هر i, j که در V_2 باشند زیرمجموعهٔ سه عضوی $\{i, j, R+1\}$ سبز است

از طرفی با استفاده از فرض استقرا در حالت (ب) یا یک زیرمجموعهٔ r عضوی از V_2 وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی آن قرمزند (که در این صورت اثبات کامل است) یا

یک زیرمجموعهٔ $g-1$ عضوی از V_2 وجود دارد که همهٔ اعضای آن سبز هستند. این مجموعه را W می‌نامیم. مجموعهٔ W زیرمجموعه‌ای از V_2 است که هر زیرمجموعهٔ سه عضوی آن سبز است. از طرفی طبق فرض بالا برای هر $i, j \in W$ مجموعهٔ $\{i, j, R+1\}$ به رنگ سبز است.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در مجموعهٔ $W \cup \{R+1\}$ که g عضو دارد هر زیرمجموعهٔ سه عضوی به رنگ سبز رنگ‌آمیزی شده است. و به این ترتیب حکم استقراء برای حالت r و g اثبات شده و اثبات استقرایی ما کامل می‌شود. □

به راحتی می‌توانید بفهمید که عدد رمزی $R_k(r, g)$ که دربارهٔ رنگ‌آمیزی زیرمجموعه‌های k عضوی است چگونه تعریف می‌شود. در حقیقت عدد رمزی $R(r, g)$ که در مورد آن بحث کردیم برابر $R_2(r, g)$ است و اثبات قبلی نشان داد که: $R_3(r, g) \leqslant 1 + R_2(R_3(r-1, g), R_3(r, g-1))$ و این حکم نشان می‌دهد چون مقادیر R_2 وجود دارند مقادیر R_3 نیز پیدا می‌شوند با کمی تلاش و صرف وقت می‌توان حکمی مشابه برای R_4 به صورت زیر پیدا کرد:

$$R_4(r, g) \leqslant 1 + R_3(R_4(r-1, g), R_4(r, g-1))$$

و به همین صورت چنین حکمی برای R_kهای بزرگتر یافت می‌شود که نشان می‌دهد R_kها به صورت استقرایی وجود دارند: در واقع حالت کلی قضیهٔ رمزی شامل رنگ‌آمیزی زیرمجموعه‌های k عضوی با m رنگ است که یک مجموعهٔ r_1 عضوی و یا r_2 عضوی و یا ... و یا r_m عضوی که تمام زیرمجموعه‌های k عضوی آنها از رنگ اول و یا رنگ دوم و ... و یا رنگ mاُم باشد و به این ترتیب مقدار $R_k(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ تعریف می‌شود.

حال ما چند نتیجه از قضیه رمزی را بیان می‌کنیم. این نتایج بیان می‌کنند که اگر یک مجموعهٔ به اندازهٔ کافی بزرگ را رنگ‌آمیزی کنید حداقل یک مورد از چند الگوی مشخص شده در این رنگ‌آمیزی‌ها بوجود می‌آیند. به همین علت است که نظریهٔ رمزی بیش از قضیهٔ رمزی بسط و گسترش یافته است. این نظریه شامل یک سری نتایج نابدیهی است که مثلاً نشان می‌دهد: بی‌نظمی نامتناهی غیر ممکن است. (ما یک نمونه از چنین قضایایی را در فصلهای قبل دیده‌ایم مثلاً در فصل چهارم دیدیم که در یک دنبالهٔ $(r-1)(g-1)+1$ عضوی از اعداد یک زیر دنبالهٔ r عضوی صعودی یا یک زیر دنبالهٔ g عضوی نزولی وجود دارد.) خوانندگان علاقمند می‌توانند قضایای رمزی گونه را در متون پیشرفتهٔ نظریهٔ رمزی در کتابهای «آر.ال. گراهام[1]» «بی.ال. روتسچیلد[2]» «جی.اچ. اسپنسر[3]» در لیست کتاب‌شناسی پیدا کنند. ما در ادامهٔ فصل به بررسی

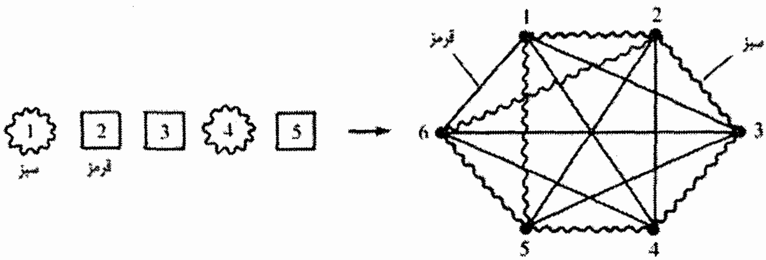
1) R.L. Graham 2) B.L. Rothschild 3) G.H. Spenser

کاربردهای نظریهٔ رمزی و روابط و نتایج آن می‌پردازیم.

مثال: نشان دهید اگر اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ را با یکی از رنگهای قرمز یا سبز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه سه عدد هم رنگ x, y, z که لزوماً متمایز نیستند یافت می‌شوند که $x + y = z$.

راه حل: البته چون اعداد این مسأله کوچک هستند به سادگی می‌توان با آزمایش کل حالات درستی آن را بررسی کنیم. امّا برای رسیدن به یک روش کلی برای این گونه مسائل باید راه حلی براساس مطالب گفته شده در نظریهٔ رمزی بدست آوریم. پس فرض می‌کنیم که هر یک از اعداد ۱ تا ۵ با یکی از رنگهای قرمز و سبز رنگ‌آمیزی شده است. حال این رنگ‌آمیزی را با رنگ‌آمیزی $K_۶$ مرتبط می‌کنیم.

گراف $K_۶$ را بر روی مجموعهٔ رئوس $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ بنا می‌کنیم و به هر یال ij عدد $|i - j|$ را نسبت می‌دهیم. اکنون رنگ‌آمیزی اعضای مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ معادل رنگ‌آمیزی یالهای $K_۶$ است مثلاً رنگ‌آمیزی به صورت زیر:



به $K_۳$ قرمز با رئوس ۱ و ۴ و ۶ دقت کنید
(زیرا ۴ − ۶ = ۲ و ۱ − ۴ = ۳ و ۱ − ۶ = ۵ قرمز هستند.)

از آنجایی که عدد رمزی $R(۳, ۳)$ برابر ۶ است، پس در گراف مورد نظر یک $K_۳$ یک رنگ داریم. فرض کنیم رئوس این $K_۳$ به صورت $\{i, j, k\}$ باشند و $i < j < k$ (مثلاً مجموعهٔ $\{۱, ۴, ۶\}$ در شکل بالا). طبق الگوی رنگ‌آمیزی مذکور اعداد $k - i$ و $k - j$ و $j - i$ به یک رنگ باید باشند. حال قرار می‌دهیم: $x = k - j$ و $y = j - i$ و $z = k - i$ که هر سه یک رنگند و داریم: $x + y = z$ □

قضیه‌ای که قبلاً در مورد رنگ‌آمیزی K_M به m رنگ برای بوجود آمدن $K_۳$ یک رنگ ارائه کردیم ما را قادر می سازد که این مثال را برای هر تعداد از رنگها بیان کنیم. روش کلی اثبات این مسأله نیز مانند مثال قبلی است که به عنوان تمرینی ساده به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه (شور): عدد صحیح و مثبت m داده شده است و M را کوچکترین مقداری تعریف

می‌کنیم که اگر K_M را با m رنگ رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه $K_۳$ یک رنگ تولید شود. (در تمرینات خواهیم دید که $M = [m!.e] + ۱$) حال اگر اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, M - ۱\}$ را با m رنگ مختلف رنگ‌آمیزی کنیم حتماً سه عدد x, y, z (که لزوماً متمایز نیستند) یافت می‌شود که $x + y = z$. قضیهٔ فوق (که بیش از یک دهه قبل از نظریهٔ رمزی ارائه شد) به افتخار ریاضیدان آلمانی «آی. شور[1]» نامگذاری شده است. امّا نتیجهٔ اصلی این قضیه که در سال ۱۹۱۶ ارائه شد به آخرین مسألهٔ فرما در پیمانهٔ p مرتبط است و از اثبات رمزی گونهٔ این قضیه در اثبات آن استفاده می‌شود. ما تنها صورت کلی این مسأله را به همراه اثبات آن می‌آوریم و از ذکر جزئیات خودداری می‌کنیم چرا که نیازمند اطلاعاتی در مورد نظریهٔ گروهها می‌باشد.

قضیه: عدد صحیح و مثبت m داده شده است. M را به همان صورت قضیهٔ قبل تعریف می‌کنیم. اگر p را عدد طبیعی اولی فرض کنیم که $M \leqslant p$ آنگاه اعداد $\alpha, \beta, \gamma \in \{۱, ۲, \ldots, M\}$ وجود دارند که: $\alpha^m + \beta^m \overset{p}{\equiv} \gamma^m$

اثبات: (جزئیات این اثبات به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود). m و M و p را به همان صورت تعریف شده در صورت قضیه فرض می‌کنیم. از قضیهٔ قبل می‌دانیم، اگر یکی از اعداد $\{۱, ۲, ۳, \ldots, p - ۱\}$ را با یکی از m رنگ رنگ‌آمیزی کنیم، آنگاه x, y, z از یک رنگ یکسان وجود دارند که $x + y = z$.

عملیات ضرب و جمع بر روی مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, p - ۱\}$ تولید میدان می‌کنند. در نتیجه هر عدد صحیح x از این مجموعه یک معکوس ضربی $x^{-۱}$ دارد. حال مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, p - ۱\}$ را با این قاعده رنگ‌آمیزی می‌کنیم: x, y هم رنگند اگر و فقط اگر $x^{-۱} \cdot y \equiv r^m$ که در آن $r \in \{۱, ۲, \ldots, p - ۱\}$. این عمل را با حداکثر m رنگ انجام می‌دهیم. (در حقیقت تعداد توانهای mاُم غیر صفر از زیر گروه ضربی $\{۱, ۲, \ldots, p - ۱\}$ برابر تعداد رنگهای استفاده شده و مساوی تعداد همدسته‌ها یعنی $(m, p - ۱)$ می‌باشد.) مثلاً برای حالت $m = ۳$ داریم $M = ۱۸$ و مقدار p را برابر ۱۹ قرار می‌دهیم توانهای سوم غیر صفر در پیمانهٔ ۱۹ برابرند با:

$۲^۳ \overset{۱۹}{\equiv} ۸$	$۴^۳ \overset{۱۹}{\equiv} ۷$	$۱^۳ \overset{۱۹}{\equiv} ۱$
$۸^۳ \overset{۱۹}{\equiv} ۱۸$	$۱۰^۳ \overset{۱۹}{\equiv} ۱۲$	$۵^۳ \overset{۱۹}{\equiv} ۱۱$

اکنون یک رنگ‌آمیزی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, p - ۱\}$ با استفاده از روابط فوق خواهیم ساخت که در آن از کمتر از سه رنگ استفاده شود و شرط مسأله را برقرار کند. مثلاً چون $۶^{-۱} \overset{۱۹}{\equiv} ۱۶$ و

1) I. Schur

$۴^۳ \equiv ۷ \overset{۱۹}{\equiv} ۴ \cdot ۶^{-۱}$ پس ۴ و ۶ یک رنگ هستند به همین ترتیب از سه رنگ برای رنگ‌آمیزی اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۸\}$ به صورت زیر استفاده می‌شود:

قرمز : $۱, ۷, ۸, ۱۱, ۱۲, ۱۸$ سبز : $۲, ۴, ۶, ۹, ۱۰, ۱۵$ آبی : $۳, ۵, ۱۳, ۱۴, ۱۶, ۱۷$

(اگر مطالعاتی در جبر داشته باشید متوجه خواهید شد که هر یک از مجموعه‌های سبز و آبی مجموعه اعداد قرمز را تولید می‌کنند). به حالت کلی مسأله باز می‌گردیم:

این روش از رنگ‌آمیزی که ارائه شد طبق قضیهٔ قبل سه عدد هم رنگ از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, p-۱\}$ مانند x, y, z بوجود می‌آورد که $x + y = z$ بنابراین در میدان تولید شده بر روی $\{۱, ۲, \ldots, p-۱\}$ توسط ضرب و جمع به پیمانهٔ p داریم:

$$۱ + x^{-۱}y \overset{p}{\equiv} x^{-۱}z$$

از طرفی

الف) $۱ \overset{p}{\equiv} \alpha^m$ (که $\alpha = ۱$)

ب) از هم رنگ بودن x, y نتیجه می‌شود که داریم: $y.x^{-۱} \overset{p}{\equiv} \beta^m$ که $\beta \in \{۱, ۲, \ldots, p-۱\}$

ج) از هم رنگ بودن x, z نتیجه می‌شود که داریم: $x^{-۱}.z \overset{p}{\equiv} \gamma^m$ که $\gamma \in \{۱, ۲, \ldots, p-۱\}$

پس در نتیجه داریم:

$$۱ + x^{-۱}y \overset{p}{\equiv} x^{-۱}z \Longrightarrow \alpha^m + \beta^m \overset{p}{\equiv} \gamma^m \ , \ \alpha, \beta, \gamma \in \{۱, ۲, \ldots, p-۱\} \ \square$$

نتیجهٔ بعدی از نظریهٔ رمزی چهار چوب مشابه‌ای با دیگر نتایج دارد، امّا یک پیامد مستقیم از نظریهٔ رمزی نیست:

مثال: نشان دهید که اگر هر یک از اعداد $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۳۲۵\}$ را با قرمز یا سبز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه حتماً یک گروه سه‌تایی یک رنگ از اعداد متمایز x, y, z وجود دارد که: $y = \frac{۱}{۲}(x + z)$

راه حل: در حقیقت عدد ۳۲۵ بسیار بزرگتر از حد لازم برای ایجاد شرایط مسأله می‌باشد (عدد ۹ کافی است!). امّا ما یک روش کلی را به کار می‌گیریم. فرض می‌کنیم اعداد ۱ تا ۳۲۵ را با قرمز و آبی رنگ‌آمیزی کرده‌ایم قصد داریم نشان دهیم که سه عدد هم رنگ وجود دارند که یکی میانگین حسابی دوتای دیگر است. همهٔ اعداد را در یک سطر مرتب می‌کنیم و به ۶۵ بخش پنج‌تایی تقسیم می‌کنیم:

$$\boxed{۱|۲|۳|۴|۵}\quad \boxed{۶|۷|۸|۹|۱۰}\quad \cdots \quad \boxed{۱۶۱|۱۶۲|۱۶۳|۱۶۴|۱۶۵}\quad \cdots \quad \boxed{۳۲۱|۳۲۲|۳۲۳|۳۲۴|۳۲۵}$$

الگوی رنگی هر بخش را بدست می‌آوریم مثلاً یک بخش ممکن است الگوی RRGGR و بخش دیگر الگوی GRGGR داشته باشد. در کل ما ($۳۲ = ۲^۵$) حالت متمایز از الگوهای رنگی داریم. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری در میان ۳۳ بخش اول حداقل دو بخش با الگوی رنگی یکسان وجود دارد: فرض می‌کنیم الگوی رنگی بخش I و بخش J یکسان باشد که $۱ < I < J \leqslant ۳۳$. از طرفی بخش $K = ۲J - I$ دارای شرط $K \leqslant ۶۵$ می‌باشد در نتیجه چنین بخشی یعنی بخش Kـاُم وجود دارد. علاوه بر این، بخش J وسط دو بخش K و I قرار دارد:

$$\begin{array}{ccccccc} & I & & J & & K & \\ \cdots & \boxed{-\,-\,-\,-\,-} & \cdots & \boxed{-\,-\,-\,-\,-} & \cdots & \boxed{-\,-\,-\,-\,-} & \cdots \\ & & \searrow\swarrow & & & & \end{array}$$

دو بخش با الگوی رنگی یکسان

به سه درایهٔ اول بخش I دقت کنید. دو تا از این درایه‌ها باید یک رنگ باشند، مثلاً درایهٔ iـاُم و jـاُم هم رنگ و قرمز هستند که $۱ \leqslant i < j \leqslant ۳$. حال فرض می‌کنیم $k = ۲j - i$ که نتیجتاً $k \leqslant ۵$ یعنی درایهٔ kـاُم در بخش I وجود دارد. از طرفی درایهٔ j وسط دو درایهٔ i و k قرار دارد. ما یک چنین وضعیتی را رسم کرده‌ایم:

$$\begin{array}{ccccccc} & I & & J & & K & \\ \cdots & \boxed{R-R--} & \cdots & \boxed{R-R--} & \cdots & \boxed{-\,-\,-\,-\,-} & \cdots \\ & i\ \ j\ \ k & & i\ \ j\ \ k & & i\ \ j\ \ k & \\ & & \searrow\swarrow & & & & \end{array}$$

دو بخش با الگوی رنگی یکسان

رنگ درایهٔ kـاُم در بخش I چیست؟ اگر قرمز باشد ما فوراً سه عدد هم رنگ بدست می‌آوریم که یکی در وسط فاصلهٔ دو تای دیگر است. (یعنی درایهٔ iـاُم و jـاُم و kـاُم از بخش I). پس درایهٔ kـاُم از بخش I به رنگ سبز است. از آنجا که الگوی رنگی بخش J با I یکسان است kـاُمین درایهٔ J نیز سبز است:

$$\begin{array}{ccccccc} & I & & J & & K & \\ \cdots & \boxed{R-R-G} & \cdots & \boxed{R-R-G} & \cdots & \boxed{----?} & \cdots \\ & i\ \ j\ \ k & & i\ \ j\ \ k & & i\ \ j\ \ k & \end{array}$$

حال درایهٔ kـاُم بخش K چه رنگی است؟ اگر سبز باشد سه عدد سبز داریم که یکی در وسط دوتای دیگر است (درایهٔ kـاُم بخش‌های I و J و K):

$$\cdots \boxed{R - R - Ⓖ} \cdots \boxed{R - R - Ⓖ} \cdots \boxed{- - - - Ⓖ} \cdots$$

و اگر این درایه قرمز باشد، سه عدد قرمز داریم که یکی در وسط دو تای دیگر است (درایهٔ i از I و درایهٔ j از J و درایهٔ k از بخش K)

$$\cdots \boxed{Ⓡ - R - G} \cdots \boxed{R - Ⓡ - G} \cdots \boxed{- - - - Ⓡ} \cdots$$

پس در همهٔ حالات ما می‌توانیم سه عدد هم رنگ x, y, z پیدا کنیم که y واسطهٔ x و z باشد: یعنی $y = \frac{۱}{۲}(x+z)$ که همان حکمی است که می‌خواستیم اثبات کنیم. □

عدد ۳۲۵ چطور بدست آمد؟ چون در هر بخش دو رنگ داریم هرکدام شامل $۵ = ۱ + ۲ \times ۲$ درایه می‌باشد. از طرفی $۳۲ = ۲^۵$ الگوی رنگ خواهیم داشت پس ما نیاز به $۶۵ = ۱ + ۲ \times ۳۲$ بخش داریم: به عبارتی

$$۳۲۵ = (۲ \times ۲ + ۱)(۲ \times ۲^{۲\times۲+۱} + ۱) = (۲ \times ۲ + ۱)(۲ \times ۲^{۲\times۲+۱} + ۱)$$

حال فرض می‌کنیم مسألهٔ معادلی برای سه رنگ داریم: مقدار L چقدر باشد تا مطمئن باشیم در رنگ‌آمیزی همهٔ اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, L\}$ با یکی از سه رنگ سبز، قرمز و آبی سه عدد هم رنگ x, y, z وجود دارند که $y = \frac{x+z}{۲}$؟ همانطور که در تمرینها با تعمیم برهان فوق بدست خواهیم آورد،

$$L = (۲ \times ۳ + ۱)(۲ \times ۳^{\text{پرانتز قبل}} + ۱)(۲ \times ۳^{\text{دو پرانتز قبل}} + ۱)$$

و با چهار رنگ نیاز به تعداد اعداد زیر داریم:

$$L = (۲ \times ۴ + ۱)(۲ \times ۴^{\text{پرانتز قبل}} + ۱)(۲ \times ۴^{\text{دو پرانتز قبل}} \times ۲)(۴^{\text{سه پرانتز قبل}} + ۱)$$

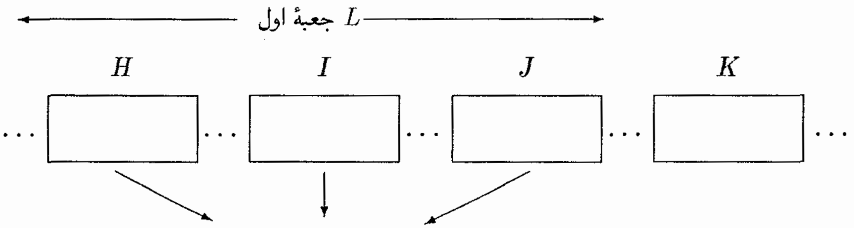
و الی آخر. بنابراین اگر چه شیوهٔ ما برای هر تعداد رنگ تعمیم پیدا می‌کند امّا مجموعهٔ واقعی بسیار بزرگ شده و روش ما نسبتاً پیچیده می‌شود. بنابراین ما یک بیان ساده از نتیجه را برای m رنگ بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه: برای عدد صحیح و مثبت m عدد صحیح L وجود دارد که: اگر اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, L\}$ را با یکی از m رنگ مفروض رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه حتماً اعداد صحیح و متمایز x, y, z از یک رنگ در این مجموعه وجود دارند که $y = \frac{۱}{۲}(x+z)$. □

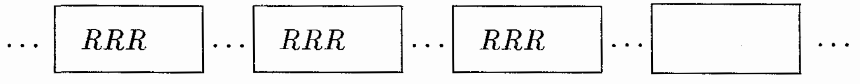
یک روش دیگر برای بیان این قضیه آن است که به دنبال سه عدد هم رنگ x, y, z باشیم که سه جملهٔ متوالی از یک تصاعد حسابی باشند. ما اکنون سعی می‌کنیم که یک تصاعد حسابی چهارجمله‌ای با اعداد هم رنگ پیدا کنیم.

مثال: با استفاده از قضیهٔ قبل می‌دانیم عدد L وجود دارد که در رنگ‌آمیزی اعضای مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, L\}$ با $۲^{۶۵۰}$ رنگ یک تصاعد حسابی سه‌جمله‌ای با جملات یک رنگ وجود داشته باشد. نشان دهید اگر اعداد $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۳۰۰L\}$ را با دو رنگ قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کنیم، آنگاه حتماً یک تصاعد حسابی چهارجمله‌ای از یک رنگ وجود دارد.

راه حل: فرض می‌کنیم اعداد داده شده از ۱ تا $۱۳۰۰L$ را که هرکدام با یکی از رنگهای قرمز و آبی رنگ شده‌اند، در یک ردیف چیده‌ایم و آنها را به $۲L$ جعبه تقسیم می‌کنیم که هر کدام شامل ۶۵۰ عدد باشد. تعداد الگوهای ممکن برای رنگ‌آمیزی هر جعبه برابر $۲^{۶۵۰}$ است. با توجه به روشهای رنگ‌آمیزی هر جعبه، ما در L جعبهٔ اول $۲^{۶۵۰}$ الگوی رنگ‌آمیزی داریم که هر کدام از جعبه‌ها به یکی از این الگوها رنگ‌آمیزی شده بنابراین طبق انتخاب L در مسأله ما سه جعبه با الگوی رنگی یکسان در L جعبهٔ اول داریم که یکی در وسط فاصلهٔ دو جعبهٔ دیگر است. فرض می‌کنیم این سه جعبه Hـاُمین و Iـاُمین و Jـاُمین جعبه از ردیف مورد نظر باشند که $H < I < J$ واین سه جعبه را همراه جعبهٔ Kـاُم که $K = ۲J - I$ رسم می‌کنیم:



از آنجائی که جعبهٔ H شامل ۶۵۰ عدد مختلف است طبق مثال قبل در میان ۳۲۵ عدد اول این جعبه یک تصاعد حسابی سه‌جمله‌ای وجود دارد که اعداد آن یک رنگ هستند. فرض می‌کنیم که در جعبهٔ H (که الگوی رنگی آن با J و I یکسان است) سه جملهٔ تصاعد حسابی به رنگ قرمز وجود دارند:



اگر این سه جمله بتوانند جملهٔ چهارم هم رنگ خود یعنی قرمز داشته باشند آنگاه ما به آنچه می‌خواستیم رسیده‌ایم. پس فرض می‌کنیم که جملهٔ چهارم این تصاعد (که در همان جعبه قرار

می‌گیرد) به رنگ سبز باشد و ترکیب در جعبهٔ K را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\cdots \boxed{RRRG} \cdots \boxed{RRRG} \cdots \boxed{RRRG} \cdots \boxed{\quad ?} \cdots$$

اگر به جای علامت سؤال عدد سبز قرار گیرد آنگاه تصاعد حسابی چهارجمله‌ای سبز رنگ زیر را داریم:

$$\cdots \boxed{RRRG} \cdots \boxed{RRRG} \cdots \boxed{RRRG} \cdots \boxed{\quad G} \cdots$$

وگرنه عدد قرمز به جای علامت سؤال قرار می‌گیرد که در آن صورت تصاعد حسابی چهارجمله‌ای قرمز رنگ زیر را داریم:

$$\cdots \boxed{R\,RRG} \cdots \boxed{R\,R\,RG} \cdots \boxed{RR\,R\,G} \cdots \boxed{\quad R} \cdots$$

بنابراین در هر حالت می‌توانیم یک تصاعد حسابی چهار جمله‌ای با یک رنگ پیدا کنیم. □

عدد این مثال برای ایجاد شرایط کافی انتخاب شده بود امّا در حقیقت خیلی بزرگتر از مقدار حقیقی برای شرط مسأله بود. (کوچکترین اعداد با این شرایط «اعداد وان‌در ویردن[1]» که مرتبط به اعداد رمزی هستند، نامیده می‌شوند).

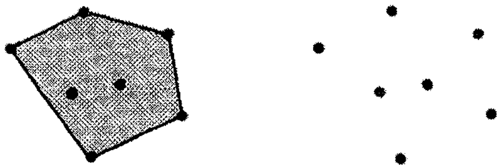
این مثال نشان می‌دهد که چگونه قضیهٔ وجود تصاعد سه‌جمله‌ای ما را قادر می‌سازد که (با تغییر اندازهٔ جعبه‌ها و تعداد آنها) نتیجه‌ای مشابه برای تصاعد حسابی چهارجمله‌ای بدست بیاوریم. قضیه در مورد تصاعد چهارجمله‌ای ما را قادر به ساختن تصاعد پنج‌جمله‌ای می‌کند و الی‌آخر. بدون آنکه به جزئیات نسبتاً این برهان استقرایی اشاره کنیم و بدون پژوهش بیشتر در مورد این موضوع، قضیهٔ زیر را که حالت کلی از قضیهٔ ارائه شده توسط «بی.ال. وان‌در ویردن[2]» در ۱۹۲۷ است بیان می‌کنیم:

قضیه (وان‌در ویردن): اعداد r و m را اعداد صحیح و مثبت در نظر می‌گیریم. عدد صحیح L وجود دارد بطوری که اگر اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, L\}$ را با m رنگ رنگ‌آمیزی کنیم یک تصاعد حسابی r جمله‌ای با یک رنگ از اعداد مجموعه وجود داشته باشد. □

آخرین کاربرد قضیهٔ رمزی ما را قادر می‌سازد که نتیجه‌ای در مورد چهارضلعی‌های محدب بیان کنیم. کار را با واژه‌شناسی موضوع مورد بحث آغاز می‌کنیم، که اغلب آنها را آشنا و تکراری خواهید یافت: مجموعهٔ A در صفحه «محدب» است اگر پاره‌خط واصل بین هر دو نقطه از

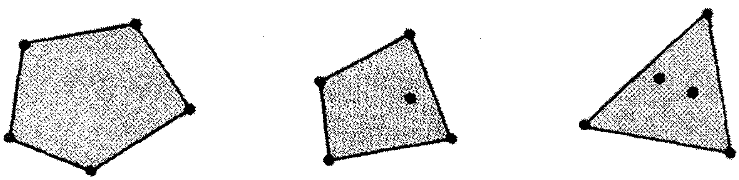
1) Vander Wearden numbers 2) B.L. Vander Wearden

مجموعه بطور کامل در داخل مجموعهٔ A قرار بگیرد. در یک مجموعهٔ داده شده در صفحه «پوش محدب» عبارت است از زیرمجموعه‌ای محدب از صفحه که نقاط مجموعه A داخل آن باشند (و این کوچکترین مجموعهٔ محدب شامل مجموعهٔ A می‌باشد). در یک صفحه یک چند ضلعی محدب به عنوان پوش محدبی برای هر مجموعه نقاط در صفحه وجود دارد. رئوس p عبارتند از نقاط $v \in p$ بطوری که $p - \{v\}$ مجموعه‌ای محدب باشد. برای نشان دادن نتیجه‌های رمزی گونه در مورد چند ضلعی‌های محدب ما نیاز به دو خاصیت مقدماتی از آنها داریم:

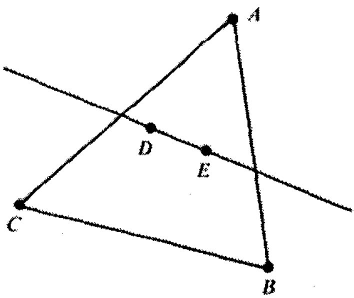


مثال: نشان دهید اگر ۵ نقطه در صفحه طوری قرار گیرند که هیچ سه نقطه‌ای بر یک خط قرار نگیرند، آنگاه چهار تا از آنها وجود دارند که تشکیل یک چهار ضلعی محدب می‌دهند.

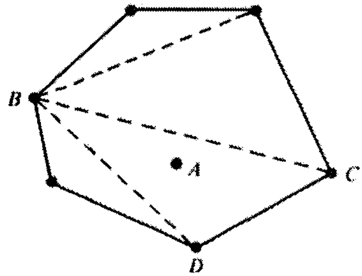
راه حل: پوش محدب این مجموعهٔ ۵ تایی از نقاط را تشکیل می‌دهیم که ممکن است سه یا چهار یا پنج تا از آنها را در بر بگیرد. به این ترتیب:



اگر پوش محدب شامل پنج نقطه باشد، هر چهار نقطه از آن رئوس تشکیل یک چهار ضلعی محدب می‌دهد و در حالتی که شامل چهار نقطه باشد همین چهار نقطه تشکیل یک چهار ضلعی محدب می‌دهند. بالاخره اگر شامل سه نقطه باشد: A و B و C و دو نقطهٔ باقیماندهٔ E و D در داخل یا روی مثلث ABC قرار می‌گیرند. خط واصل DE دو ضلع از مثلث را قطع می‌کند: فرض کنیم ضلع BC را قطع نکند به سادگی می‌توانیم که تحقیق کنیم E و D و C و B یک چهار ضلعی محدب تشکیل می‌دهند.



مثال: نشان دهید اگر r ($\geqslant$ ۴) نقطه در صفحه تشکیل یک چند ضلعی محدب ندهند آنگاه چند مجموعهٔ چهارتایی از نقاط وجود دارد که هیچ کدام محدب نیستند.



راه حل: فرض کنیم که r نقطه تشکیل یک چند ضلعی محدب ندهند. آنگاه نقطه‌ای مانند A وجود دارد که در داخل پوش محدب شامل $r-1$ نقطهٔ باقیمانده است. این پوش محدب تعدادی از r نقطهٔ مفروض را شامل می‌شود.

حال A داخل یکی از مثلثهای تشکیل شده از سه تا از آن رئوس (واقع بر پوش) قرار دارد و (همانطور که نشان داده شده) آنها را B و C و D یا فقط BCD می‌نامیم و در نتیجه D و C و B و A تشکیل یک چهار ضلعی غیر محدب می‌دهند، همانطور که حدس می‌زدیم. □

این آشنایی کوتاه با چند ضلعی‌های محدب ما را قادر می‌سازد که قضیهٔ رمزی گونهٔ زیر را بیان کنیم.

قضیه: به ازای عدد صحیح و مثبت r عدد صحیح و مثبت R وجود دارد به طوری که برای هر R نقطه در صفحه که هیچ سه‌تایی بر یک خط واقع نباشند حتماً یک rـ ضلعی محدب با رئوسی از این R نقطه وجود داشته باشد.

اثبات: در صفحهٔ ۲۷۲ دیدیم که چگونه وجود اعداد رمزی را برای زیرمجموعه‌های چهار عضوی قرمز یا سبز مورد استدلال قرار دادیم بنابراین ما می‌دانیم که اگر اعداد $r, g \geqslant ۴$ داده شده باشند، آنگاه عدد صحیح و مثبت $R = R_۴(r, g)$ با این خاصیت وجود دارد: اگر تمام زیرمجموعه‌های چهار عضوی یک مجموعهٔ R عضوی را با دو رنگ قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یا یک مجموعهٔ r عضوی که همهٔ زیرمجموعه‌های چهار عضوی آن قرمزند، و یا یک زیرمجموعهٔ g عضوی که همهٔ زیرمجموعه‌های چهار عضوی آن سبزند، وجود دارد.

حال برای اثبات این قضیهٔ پر کاربرد ابتدا باید توجه کنیم که اگر $r \leqslant ۳$ آنگاه مسأله بدیهی است. چون هر r نقطه (غیر واقع بر یک خط) یک چند ضلعی محدب شامل آن نقاط تشکیل می‌دهند و ما می‌توانیم قرار دهیم $R = r$.

پس فرض می‌کنیم $r \geqslant ۴$ و R را مقدار عدد رمزی $R_۴(r, ۵)$ قرار می‌دهیم. برای آنکه نشان دهیم R در شرایط مسأله صدق می‌کند، فرض می‌کنیم که R نقطه (که هیچ سه‌تایی بر یک خط قرار ندارند) در صفحه قرار دارند و اثبات می‌کنیم که r تا از آنها وجود دارند که رئوس یک r

ضلعی محدب هستند. هر زیرمجموعهٔ چهار عضوی از این R نقطه را به ترتیب زیر رنگ‌آمیزی می‌کنیم:

سبز	قرمز
اگر چهار نقطه تشکیل چهار ضلعی غیر محدب بدهند (یعنی در هر پوش محدب آنها یک نقطه در داخل مثلث پوش قرار گیرد).	اگر چهار نقطهٔ مفروض تشکیل یک چهار ضلعی محدب بدهند.

بنابراین با انتخاب R برابر عدد رمزی $R_4(r,5)$ یکی از این دو حالت وجود دارد:

الف) r نقطه که هر زیرمجموعهٔ چهار عضوی آن قرمز است؛ و یا

ب) پنج نقطه که هر زیرمجموعهٔ چهار عضوی آن سبز است.

امّا مثال اولی که در این موضوع حل کردیم نشان داد که هر پنج نقطه در صفحه شامل چهار نقطه است که تشکیل چهار ضلعی محدب می‌دهند. عبارت معادل این حکم، با توجه به روش رنگ‌آمیزی ما، این است که هر زیرمجموعهٔ پنج عضوی از نقاط شامل حداقل یک زیرمجموعهٔ چهار عضوی به رنگ قرمز است. پس بنابر مثال اول حالت (ب) هیچگاه اتفاق نمی‌افتد. در نتیجه همیشه حالت (الف) اتفاق خواهد افتاد: r نقطه وجود دارد که هر زیرمجموعهٔ چهار عضوی آن قرمز رنگ است یا به عبارت دیگر: r نقطه وجود دارد که هر زیرمجموعهٔ چهار عضوی آن تشکیل یک چهار ضلعی محدب می‌دهند. در نتیجه این r نقطه تشکیل یک r ضلعی محدب می‌دهند: در غیر این صورت بنابر مثال دوم باید یک زیرمجموعهٔ چهارعضوی از آن تشکیل یک چهار ضلعی غیر محدب بدهد و این مخالف فرض فوق است. پس به این ترتیب همیشه عدد R برای قضیهٔ فوق وجود دارد و این اثبات را کامل می‌کند. □

با اثبات این قضیه مبحث «نظریهٔ رمزی» که آخرین فصل این کتاب است به پایان می‌رسد. این مبحث جالب بر پایهٔ دو مبحث عمده و پرکاربرد و در عین حال سادهٔ «شمارش» و «نظریهٔ گرافها» قرار داشت. البته باید این نکته را یادآور شد که همانند فصول گذشتهٔ این کتاب تمرینهای انتهای فصل شامل تعمیمها و کاربردهای نظریهٔ رمزی در مباحثی مانند نظریهٔ اعداد و جبر می‌باشد تا علاقمندان به پژوهش و مطالعه بیشتر بتوانند از این مطالب استفاده کنند.

در پایان امیدواریم که از مباحث این کتاب که در واقع گشت و گذاری در دنیای ریاضیات ترکیبیاتی است لذّت برده باشید و همچنین امیدواریم این کتاب راهنمای خوبی برای آن دسته از خوانندگانی که قصد ادامهٔ مطالعات ریاضی خود را دارند، باشد.

«تمارین»

۱) نشان دهید اگر $K_۶$ را با دو رنگ سبز و قرمز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه دو مثلث ($K_۳$) تک رنگ بوجود خواهد آمد و اگر $K_۷$ را با دو رنگ رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه حداقل سه مثلث تک رنگ بوجود می‌آید.

۲) q عدد صحیح مثبتی است و $Q = \binom{۲q}{q}$. فرض کنید هر یک از یالهای K_Q را با یکی از دو رنگ قرمز یا سبز رنگ‌آمیزی کرده‌ایم به طوری که هیچ $K_{q+۲}$ یک رنگی وجود ندارد. نشان دهید یک $K_{q+۱}$ از یک رنگ و یا یک K_q از رنگ دیگر وجود دارد. (ر)

۳) نشان دهید اعداد رمزی برای مقادیر $r, g > ۲$ در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$R(r,g) \leqslant R(r-۱,g) + R(r,g-۱) \qquad \text{(ر)}$$

۴) برای $g \geqslant ۲$ یک گراف کامل بر روی رئوس $\{۱,۲,۳,\ldots,۳g-۴\}$ بنا می‌کنیم. یال ij را به رنگ قرمز در می‌آوریم اگر $|i-j| \overset{۳}{\equiv} ۱$ و در غیر این صورت آن را سبز می‌کنیم. نشان دهید این رنگ‌آمیزی نه شامل $K_۳$ قرمز است و نه شامل K_g سبز و از آنجا بدست آورید: $R(۳,g) \geqslant ۳(g-۱)$ (ر)

۵) تمرین ۳ و ۴ را به کار ببرید و اثبات کنید که: $R(۳,۴) = ۹$

۶) $r \geqslant ۲$ را عدد صحیح مثبت فرض می‌کنیم نشان دهید: $R(۲r,۲r) > ۲^r$ (ر)

۷) برای اعداد مفروض $r,g,b \geqslant ۲$ عدد $R(r,g,b)$ را تعریف می‌کنیم: کوچکترین عدد صحیح مثبت n که اگر یالهای گراف K_n را با رنگهای آبی یا قرمز یا سبز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه حتماً K_r قرمز یا K_g سبز و یا K_b آبی در گراف موجود باشد. نشان دهید:

الف) $R(r,g,۲) = R(r,g)$

ب) $R(r,g,b) \leqslant \min\{R(r,R(g,b)), R(g,R(r,b)), R(b,R(r,g))\}$ (ر)

ج) برای $r,g,b \geqslant ۲$ داریم

$$R(r,g,b) < R(r-۱,g,b) + R(r,g-۱,b) + R(r,g,b-۱) \qquad \text{(ر)}$$

د)
$$R(r,g,b) \leqslant \frac{(r+g+b-۳)!}{(r-۱)!(g-۱)!(b-۱)!} \qquad \text{(ر)}$$

قسمت (الف) و (ج) را به کار ببرید و ثابت کنید $R(۳,۳,۳) \leqslant ۱۷$

۸) رابطهٔ بازگشتی زیر برای دنبالهٔ اعداد صحیح $M_1, M_2, M_3, \ldots$ تعریف شده است:

$$M_1 = 3 \quad \text{و} \quad M_m = mM_{m-1} - m + 2 \qquad m > 1$$

الف) نشان دهید $M_m = [m!e] + 1$ (ر)

ب) بوسیلهٔ استقراء نشان دهید که اگر یالهای K_m را با m رنگ رنگ‌آمیزی کنیم حتماً یک زیرگراف K_3 یک رنگ در آن وجود دارد. (ر)

۹) $r \geqslant 2$ و عددی صحیح است و دنبالهٔ $R_1, R_2, R_3, \ldots$ را بوسیلهٔ رابطهٔ بازگشتی مقابل تعریف می‌کنیم: $R_1 = r$ و $R_m = \binom{2R_{m-1}-2}{R_{m-1}-1}$
نشان دهید اگر یالهای K_{R_m} را با 2^m رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یک K_r یک رنگ در آن وجود دارد. (ر)

۱۰) اثبات کنید اگر هر یک از یالهای گراف $K_{(r-1)^2+1}$ را با قرمز یا سبز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه حتماً درخت قرمز مفروض با r رأس و یا درخت مفروض سبز r رأسی در آن وجود دارد.

۱۱) G_1 یک گراف با عدد رنگی رأسی $\chi(G_1) = r$ و G_2 یک گراف همبند با g رأس است یک رنگ‌آمیزی از یالهای $K_{(r-1)(g-1)}$ با رنگهای قرمز و سبز پیدا کنید که G_1 قرمز و G_2 سبز در آن ایجاد نشود. (ج)

۱۲) T_1 یک درخت با r رأس و T_2 یک درخت با g رأس و یک رأس از درجهٔ $g - 1$ است. نشان دهید اگر هر یال K_{r+g-2} را با دو رنگ سبز یا قرمز رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه حتماً یک T_1 قرمز یا یک T_2 سبز وجود دارد. (ر)

در حالتی که $g = 2$ مضربی از $r - 1$ است نشان دهید که $r + g - 2$ کوچکترین عدد با این خاصیت است، به این ترتیب که یک رنگ‌آمیزی از K_{r+g-3} ارائه دهید که نه T_1 قرمز و نه T_2 سبز تولید شود. (ج)

۱۳) عدد صحیح مثبت n را «فرد جمع» می‌نامیم اگر حاصل جمع تمام عاملهای اول آن فرد باشد (مثلاً ۵۴ فرد جمع است چون $3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54$ چون $3 + 3 + 3 + 2$ فرد است پس ۵۴ فرد جمع است) نشان دهید یک مجموعهٔ نامتناهی از اعداد صحیح مثبت وجود دارد که جمع هر دو عدد مثبت از آن عددی فرد جمع است. (ر)

۱۴) فرض کنید هر عدد صحیح مثبت را با قرمز یا سبز رنگ‌آمیزی کنیم. هر عدد گویا x که $0 < x < 1$ قابل بیان به صورت کسر $\frac{m}{n}$ است که m و n نسبت به هم اول هستند.

یک چنین اعداد گویایی چهار الگوی رنگی می‌توانند داشته باشند: $\frac{\text{قرمز}}{\text{سبز}}$ و $\frac{\text{قرمز}}{\text{قرمز}}$ و $\frac{\text{سبز}}{\text{قرمز}}$ و $\frac{\text{سبز}}{\text{سبز}}$. ثابت کنید مجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت وجود دارد که حاصل تقسیم هر عدد کوچکتر بر هر عدد بزرگتر یک عدد گویا با الگوی رنگی یکسان تولید می‌کند.

۱۵) در یک ماتریس مربع، زیر ماتریس اصلی، از حذف چند سطر و ستونهای متناظر با آنها بدست می‌آید. ماتریس را نیمه ثابت می‌نامیم اگر همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی و همهٔ درایه‌های زیر قطر اصلی یکسان باشند. (البته حتماً یک نیستند) مانند ماتریس زیر:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{سطر و ستون اول و چهارم را حذف کنید}} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

حال فرض می‌کنیم $r \geqslant ۲$. نشان دهید عدد صحیح R وجود دارد که هر ماتریس $R \times R$ با درایه‌های صفر و یک، یک زیر ماتریس اصلی $r \times r$ که یک ماتریس نیمه ثابت است دارد. (ر)

۱۶) نشان دهید اگر هر یک از اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۸, ۹\}$ را با قرمز یا سبز رنگ بزنیم آنگاه حتماً یک تصاعد سه‌جمله‌ای با اعداد یک رنگ خواهیم داشت.

۱۷) فرض کنید: $L = ۷ \times (۲ \times ۳^{۷} + ۱)(۲ \times ۳^{۷(۲\times ۳^{۷}+۱)} + ۱)$ نشان دهید اگر اعضای مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, L\}$ را با قرمز یا سبز یا آبی رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یک تصاعد سه‌جمله‌ای با جملات یک رنگ وجود دارد. (ر)

۱۸) اعداد صحیح و مثبت r و m داده شده‌اند. از صورت داده شده در مورد قضیه وان‌در ویردن استفاده کنید تا اثبات کنید: عدد صحیح L^* وجود دارد که اگر اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, L^*\}$ را با m رنگ رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه یک تصاعد حسابی r جمله‌ای وجود دارد که همهٔ جملات و قدر نسبت تصاعد به یک رنگ باشند. (ر)

راهنمایی تمارین

«فصل ۱»

۱) تساوی را می‌توان با استفاده از روش‌های زیر ثابت کرد.

- مقایسهٔ ضریب x^k در بسط $(1+x)^n$ و در بسط $x^n(1+\frac{1}{x})^n$.
- مقایسهٔ تعداد راههای انتخاب کردن k شیء از میان n شیء با تعداد راههای انتخاب نکردن $n-k$ شیء از میان n شیء.

۲) تعداد راههای انجام این کار برابر با تعداد راههای قرار دادن $k-1$ مانع در $n-1$ فاصلهٔ میان n نفر است که در یک ردیف قرار گرفته‌اند.

۳) سعی نکنید این مسأله را با استفاده از مسألهٔ مشابهی که در مورد x_i های غیر منفی داشتیم حل کنید. به جای این کار دقت کنید که این مسأله هم‌ارز با تمرین قبلی می‌باشد.

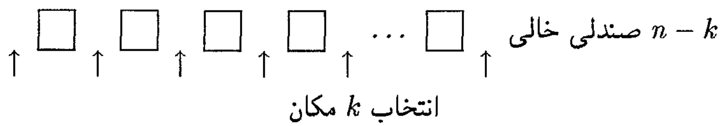
۴) الف)

$x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ (x_iها اعداد صحیح غیر منفی هستند.)

$\equiv(x_1+1)+(x_2+1)+\ldots+(x_k+1)=n+k$ ((x_i+1)ها اعداد صحیح مثبت هستند)

$\equiv y_1+y_2+\ldots+y_k=n+k$ (y_iها اعداد صحیح مثبت هستند)

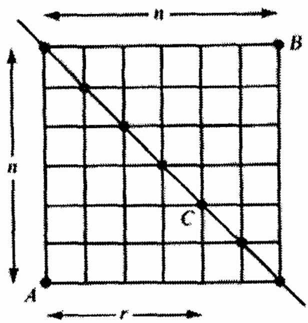
۵) این مسأله هم‌ارز با این است که: $n-k$ صندلی خالی داریم و می‌خواهیم k مکان بین این صندلی‌ها (با در نظر گرفتن مکان اول و آخر) انتخاب کرده و k صندلی برای k بیمار در آنجا قرار دهیم.



۷) الف) ضریب x^n در تساوی روبرو را بررسی کنید $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$

ب) انتخاب n نفر معادل انتخاب r مرد و $n-r$ زن برای هر $\circ \leqslant r \leqslant n$ می‌باشد. (یعنی r مرد انتخاب شوند و r زن انتخاب نشوند.)

ج) در شبکهٔ روبرو $\binom{2n}{n}$ مسیر از A به B وجود دارد. هرکدام از این مسیرها دقیقاً از یکی از نقاطی که در شکل نشان داده شده عبور می‌کند.



۸) ج) راههای مختلفی برای حل مسأله وجود دارد. مانند در نظرگرفتن زیرمجموعه‌هایی با یک نماینده و یا بررسی بسط $(1+x)^n$.

۹) ب) هرکدام از x_i خط، $n - x_i$ خط دیگر را قطع می‌کنند. در نتیجه تعداد کل نقاط برابر است با: $\frac{1}{2}\sum x_i(n-x_i)$. در ضمن می‌دانیم که $\sum x_i = n$.

ج) باید x_iهایی را بیابید که مجموع آن‌ها برابر ۱۷ باشد و مجموع مربعات آنها نیز برابر $17^2 - 2 \times 101$ باشد. (این کار را به روش آزمون و خطا انجام دهید.)

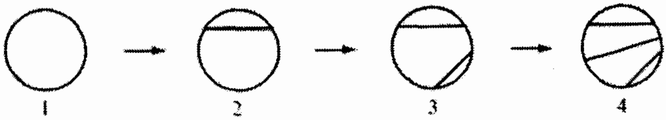
۱۰) الف) تعداد مستطیل‌ها برابر تعداد راههای انتخاب ۲ خط موازی افقی و ۲ خط موازی عمودی است.

ب) تعداد مستطیلهای مورد نظر برابر تعداد مستطیلهایی است که در شبکهٔ $r \times r$ گوشهٔ بالا و سمت چپ قرار دارند منهای تعداد مستطیلهایی است که در شبکهٔ $(r-1)\times(r-1)$ گوشهٔ بالا و سمت چپ قرار دارند.

۱۱)

ج)	مثلثهای با ارتفاع n:	1
	مثلثهای با ارتفاع $n-1$:	$1+2$
	مثلثهای با ارتفاع $n-2$:	$1+2+3$
	$\vdots$	$\vdots$
د)	مثلثهای با ارتفاع ۱:	$1+2+\cdots+(n-1)$
	مثلثهای با ارتفاع ۲:	$1+2+\cdots+(n-3)$
	$\vdots$	$\vdots$

۱۲) بدون در نظر گرفتن خطوط، خود دایره شامل یک ناحیه است. حال هر خطی که رسم می‌کنیم، با فرض اینکه هیچ خط دیگری را قطع نکند، یک ناحیه به تعداد کل نواحی اضافه می‌کند.

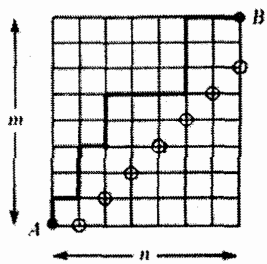


از طرفی، هر خطی هنگامی که خط دیگری را قطع می‌کند، یک ناحیهٔ دیگر به تعداد کل نواحی اضافه می‌کند.

در نتیجه برای تعداد کل نواحی داریم:

تعداد نقاط برخورد + تعداد خطوط + ۱ = تعداد کل نواحی

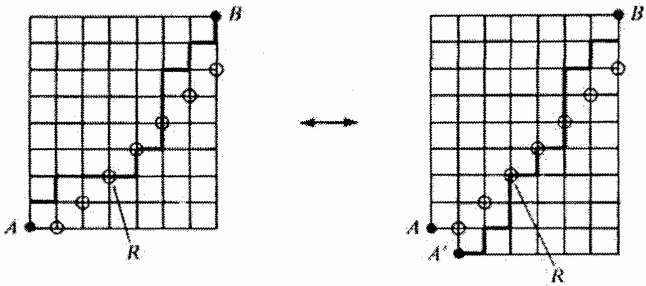
۱۳) (حالت $m \geqslant n$) شبکهٔ $m \times n$ زیر را در نظر بگیرید. اگر یک حرکت به بالا را به عنوان یک مشتری با یک سکهٔ ۵۰ ریالی و یک حرکت به سمت راست را به عنوان یک مشتری با یک اسکناس ۱۰۰ ریالی در نظر بگیریم، آنگاه تعداد مسیرهای از A به B برابر با تعداد راههای قرار گرفتن مشتریها در صف می‌باشد.



حال در چه تعداد از این حالتها فروشنده به مشکل برمی‌خورد؟

برای شمارش تعداد حالتهای مورد نظر، باید تعداد مسیرهایی از A به B را بدست آوریم که حداقل از یکی از نقاط حلقه‌دار شبکهٔ زیر عبور کرده باشند. یکی از این مسیرها را در نظر

بگیرید که اولین نقطهٔ حلقه‌داری که از آن عبور کرده R باشد. در آن صورت با منعکس کردن مسیر از A تا R نسبت به خط حاصل از نقاط حلقه‌دار به مسیر زیر می‌رسیم.



مسیر $A \to B$ مسیر $A' \to B$

(تمرین ۱۰ از فصل ۱۰ را ببینید.)

«فصل ۲»

۱) ب) به چند طریق می‌توان m یال از مجموعه یالهای K_n انتخاب کرد؟

ج) مجموعه یالهای K_n چند زیرمجموعه دارد؟

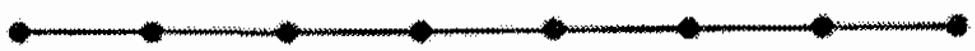
۲) دو سر تمام یالها را بشمارید. استفاده از استقراء روی تعداد یالها یک راه ریاضیاتی حل این مسأله است. (به این نتیجه «لم دست دادن» می‌گویند. زیرا بیان می‌کند که در جمعی که چند نفر با هم دست داده‌اند، مجموع تعداد دست دادنهای افراد، دو برابر تعداد کل دست دادن‌ها می‌باشد.)

۴) الف) استقراء روی تعداد رئوس (اگر $|V| > 1$ باشد، در آن صورت رأسی از درجهٔ یک وجود دارد که با حذف آن به درختی کوچکتر خواهیم رسید.)

ب) فرض کنید در گراف همبند $G = (V, E)$ داریم $|E| = |V| - 1$. امّا G یک درخت نمی‌باشد. در آن صورت G باید شامل یک دور باشد که با حذف یک یال از این دور گراف هنوز همبند باقی می‌ماند. اگر گراف باز هم دوری داشت، این کار را برای آن نیز به همین ترتیب انجام می‌دهیم تا جایی که گراف شامل هیچ دوری نباشد. بعد از حذف k یال $(k > 0)$ به یک درخت خواهیم رسید. حال چرا این فرض با نتیجهٔ قسمت «الف» متناقض است؟

۵) ب) دنبالهٔ درجات اینگونه درختی باید برابر $n-۲,۲,۱,\dots,۱$ باشد. بنابراین برای $n>۴$ باید رأس یکتایی مثل i را انتخاب کنیم که درجه‌اش برابر $n-۲$ باشد، رأسی مثل j انتخاب کنیم که مجاور i نباشد و رأسی مثل k انتخاب کنیم که مجاور رأس j باشد.

ج) اینگونه درختی باید به صورت زیر باشد:

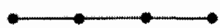


د) در اینگونه درختی چه رأسی مجاور رأس ۱ خواهد بود؟ چند درخت روی مجموعهٔ رئوس $\{۲,۳,\dots,n\}$ می‌توان ساخت؟ برای نشان دادن قسمت آخر باید بدانید که $(۱-\frac{۱}{n})^n \longrightarrow \frac{۱}{e}$

۶) الف) در $C_nH_{۲n+۲}$، n رأس از درجهٔ ۴ و مابقی از درجهٔ یک می‌باشند. حال مجموع درجات رئوس گراف و تعداد یالهای آن را بدست آورید. سپس با استفاده از قسمت «ب» تمرین ۴ نشان دهید که این مولکول به شکل یک درخت است.

برای $C_nH_{۲n}$ نیز با شمارش رئوس و یالها می‌توان فهمید که مولکول به شکل یک درخت نیست.

ب) در مولکول $C_۴H_{۱۰}$، چهار اتم کربن و یالهای بین آنها تشکیل یک درخت ۴ رأسی بدون برچسب می‌دهند. همانگونه که می‌بینید تنها دو حالت برای اینگونه درختی وجود دارد.

 و 

به همین ترتیب اتمهای کربن مولکولهای $C_۳H_۸$ و $C_۵H_{۱۲}$ تشکیل درختهایی با ۳ و ۵ رأس می‌دهند.

۷) برای اثبات نابرابری سمت چپ نشان دهید اگر دو تا از مؤلفه‌های همبندی، دو گراف کامل با m و n رأس باشند بطوری که $n \geqslant m \geqslant ۲$، در آن صورت تعداد یالهای این دو مؤلفه از تعداد یالهای دو گراف کامل با $n+۱$ و $m-۱$ رأس کمتر است. حال چگونه می‌توانیم حداکثر تعداد یالهای گراف را بدست آوریم در حالی که تعداد مؤلفه‌های همبندی و تعداد رئوس گراف را داریم؟

«فصل ۳»

۲) الف) فرض کنید $x, y \in B_۱$ بطوری که $x \neq y$ تا به تناقض برسیم. برای خانواده‌های $(B_۱ - \{y\}, B_۲, \ldots, B_n)$ و $(B_۱ - \{x\}, b_۲, \ldots, B_n)$ شرط هال برقرار نیست.
بنابراین نشان دهید دو مجموعهٔ $I_۱, I_۲ \subseteq \{۲, ۳, \ldots, n\}$ وجود دارند بطوری که:

$$|(B_۱ - \{x\}) \cup (\bigcup_{i \in I_۱} B_i)| = |I_۱| \text{ و } |(B_۱ - \{y\}) \cup (\bigcup_{i \in I_۲} B_i)| = |I_۲|$$

سپس نتیجه بگیرید که:

$$B_۱ \subseteq \bigcup_{i \in I_۱ \cup I_۲} B_i \quad \text{و} \quad B_۱ - \{y\} \subseteq \bigcup_{i \in I_۲} B_i \quad \text{و} \quad B_۱ - \{x\} \subseteq \bigcup_{i \in I_۱} B_i$$

در ضمن می‌دانید که: $\quad |\bigcup_{i \in I_۱ \cap I_۲} B_i| \geqslant |I_۱ \cap I_۲|$

حال با استفاده از رابطهٔ $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ نشان دهید که مجموعهٔ $I = \{۱\} \cup I_۱ \cup I_۲$ با این فرض که خانوادهٔ $\mathfrak{B}$ دارای شرط هال است، تناقض دارد.

۳) الف) اثبات صورت ازدواج قضیهٔ هال را با تشکیل زوجِ پسر B و دختری که او را می‌شناسد، آغاز می‌کنیم. در ادامهٔ کار برای پیدا کردن همسر برای دختران (با توجه به اثباتی که قبلاً بیان کردیم)، هیچگاه پسری را که برای او همسری برگزیده‌ایم، کنار نمی‌گذاریم. بلکه ممکن است همسر دیگری برای او برگزینیم. در نتیجه در هر مرحله‌ای، پسر B دارای یک همسر خواهد بود.

ب) در شرایط جدید ما m پسر و m دختر داریم. به راحتی می‌توان فهمید که در بین آنها نیز شرط هال برقرار است. حال با توجه به قضیهٔ هال تمام دختران و پسران می‌توانند برای خود همسر بیابند. حال کدامیک از دختران همسر B خواهد بود؟

ج) تنها حالتی که ممکن است شرایط مسأله در قضیهٔ گفته شده برای حالت $|P| = ۱$ صدق نکند، هنگامی است که $|P - (\bigcup_{i \in I} A_i)| = ۱$ و $n - |I| = ۰$. امّا این حالت غیر ممکن است.

۴) $n - k$ پسر جدید را در نظر بگیرید که تمام دختران آنها را می‌شناسند. نشان دهید در حالت اوّلیه حداقل k دختر وجود دارند که بتوانند برای خود از میان پسرانی که می‌شناسند همسر انتخاب کنند، اگر و تنها اگر در حالت جدید هر دختری بتواند برای خود همسری از

میان پسرانی که می‌شناسد انتخاب کند. سپس از قضیهٔ هال برای حالت جدید استفاده کنید.

۵) از استقراء روی n استفاده کنید. n دختر داده شده‌اند که شرط قضیهٔ هال در آنها صادق است. یکی از این دختران را در نظر بگیرید. اگر او بتواند با هر یک از پسرانی که می‌شناسد (تعداد آنها حداقل m است) ازدواج کند بطوری که برای بقیهٔ دخترها و پسرها شرط قضیهٔ هال برقرار باشد، در آن صورت طبق استقراء حکم مسأله برقرار است. در غیر این صورت اگر با ازدواج این دختر با یکی از پسرهایی که می‌شناسد، شرط قضیهٔ هال برای مابقی دختران برقرار نباشد، در آن صورت باید n' دختر $(m \leqslant n' \leqslant n)$ وجود داشته باشند بطوری که در بین خود دقیقاً n' پسر را بشناسند. در هر حالتی برای ازدواج n دختر، این n' دختر باید با n' پسری که می‌شناسند ازدواج کنند. در نتیجه طبق فرض استقراء همسران آنها حداقل به $m!$ طریق مختلف قابل انتخاب می‌باشند.

۶) m دختر و n پسر را در نظر بگیرید. حال به ازای آشنایی پسر i با دختر j، در سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس M، عدد یک را قرار دهید.

۷) r مجموعه از خانوادهٔ $\mathfrak{A}$ انتخاب کنید و اعضای آنها را (با در نظر گرفتن اعضای تکراری)، در یک لیست بنویسید. این لیست شامل حداقل rd عضو (نه لزوماً غیر تکراری) خواهد بود. در ضمن هیچ عضوی بیش از d بار در این لیست ظاهر نشده است. بنابراین حداقل r عضو متمایز در این لیست خواهد بود.

۱۰) برای نشان دادن آن که هر ماتریس تصادفی دوگانه قابل نمایش به صورت چنین حاصل جمعی است، از استقراء روی Y، تعداد درایه‌های غیر صفر ماتریس M استفاده می‌کنیم. کمترین مقدار Y برابر n می‌باشد. حال اگر $Y > n$ باشد، از صورت ماتریسی قضیهٔ هال استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم در M، مجموعه‌ای از درایه‌های غیر صفر وجود دارد بطوری که در هر سطر و هر ستون دقیقاً یکی از آنها وجود داشته باشد. فرض کنید $\lambda_۱$ کوچکترین این درایه‌ها باشد. حال ماتریس $M_۱$ را ماتریس جایگشتی در نظر بگیرید که یک درایهٔ آن برابر ۱ است، اگر و تنها اگر یکی از درایه‌های غیر صفری که انتخاب کرده بودیم در آن مکان قرار داشته باشد. حال از فرض استقراء برای $\frac{۱}{(۱-\lambda_۱)}(M - \lambda_۱ M_۱)$ استفاده کنید.

۱۱) گراف دو بخشی $G = (V_۱, E, V_۲)$ را با مجموعه رئوس $V_۱ = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ و $V_۲ = \{y_۱, y_۲, \ldots, y_n\}$ تعریف می‌کنیم، بطوری که رأس x_i به رأس y_j متصل است اگر و تنها اگر $X_i \cap Y_i \neq \varnothing$. حال نشان دهید که هر r رأس از $V_۱$ با حداقل r رأس از

$V_۲$ مجاور می‌باشد. سپس از قضیهٔ هال استفاده کنید.

«فصل ۴»

۲) الف) از اصل لانه کبوتری به صورت زیر استفاده کنید:

$\square$	$\cdots$	$\square$	$\square$	$\square$
$n, n+۱$		$۳, ۲n-۲$	$۲, ۲n-۱$	$۱, ۲n$

ب) از اصل لانه کبوتری استفاده کرده و نشان دهید که ۲ عدد متوالی در بین $n+۱$ عدد وجود دارد.

ج) از اصل لانه کبوتری به صورت زیر استفاده کنید.

$\square$	$\cdots$	$\square$	$\square$	$\square$
$۲n-۱$		۵	۳	۱

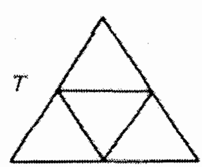
هر عدد را در خانه‌ای قرار دهید که شمارهٔ آن خانه برابر بزرگترین عامل فرد آن عدد باشد.

۳) از اصل لانه کبوتری به صورت زیر استفاده کنید:

$\square$	$\cdots$	$\square$	$\square$	$\square$
$n-۱$		۲	۱	۰

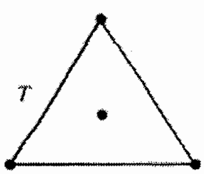
باقیماندهٔ تقسیم هرکدام از اعداد $a_۱-a_۰, \ldots, a_n-a_۰$ بر n را محاسبه کرده و در خانهٔ با شمارهٔ متناظر قرار دهید.

۴) الف)



پنج نقطه در داخل چهار مجموعه قرار دارند.

ب)



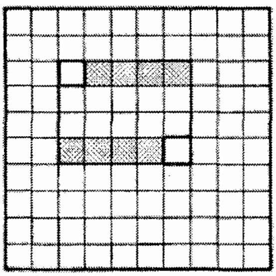
چهار نقطه در داخل سه دایره قرار دارند.

۵) برای اعداد $\ldots ,۹, ۹۹, ۹۹۹$ از اصل لانه کبوتری مانند تمرین شمارهٔ ۳ استفاده کنید.
(این مسأله را می‌توان با در نظر گرفتن بسط اعشاری عدد $\frac{1}{n}$ نیز حل کرد. برای بررسی این روش می‌توانید به فصل اول از کتاب «Yet another introduction to analysis» که مشخصات آن در بخش کتاب‌شناسی بیان شده است رجوع کنید.)

۶) حالت $k = 0$ بدیهی است. حال اگر مجموع پولهای پس‌اندازشده پس از i روز را t_i بنامیم، آنگاه $2n$ عدد صحیح $t_1, t_2, t_n, k, k+t_1, \ldots, k+t_{n-1}$ همگی از $2n$ کمتر می‌باشند.

۸) ($\Longleftarrow$) با استفاده از بررسی همخوانی زوج و فرد و سیاه و سفید به راحتی می‌توان به جواب رسید.

($\Longrightarrow$) برای نشان دادن اینکه اگر n زوج باشد و دو خانهٔ حذف شده غیر هم رنگ باشند، می‌توان صفحه را با دومینوها پوشاند، کوچکترین مستطیل را روی صفحه در نظر بگیرید که شامل دو خانهٔ حذف شده باشد. حال می‌توان نشان داد که یکی از ابعاد این مستطیل زوج و دیگری فرد می‌باشد:
به راحتی می‌توان قسمت هاشور زده را با دومینوها پوشاند، سپس برای مابقی مستطیل این کار را انجام داد و در نهایت مابقی صفحهٔ شطرنجی را پوشاند.



۱۰) هر آجر را به صورت دو مکعب هر کدام با ابعاد یک سانتی متر (یکی به رنگ سیاه و دیگری رنگ سفید) در نظر بگیرید که به یکدیگر چسبیده‌اند.

۱۱) الف) دور همیلتونی گراف باید به شکل زیر باشد:

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} v_1, & v_2, & v_3, & \ldots & v_n, \\ \in V_1, & \in V_2, & \in V_1, & & \in V_2, \end{array}}_{\text{تمام رأسها دقیقاً یک بار در این دنباله ظاهر شده‌اند.}} \begin{array}{c} v_1 \\ \in v_1 \end{array}$$

ب) یک اسب همواره از یک خانهٔ سفید صفحهٔ شطرنج به یک خانهٔ سیاه آن (و یا بر عکس) حرکت می‌کند.

۱۴ ج) n^m تابع موجود را در نظر بگیرید و «خاصیت i» را به این صورت تعریف کنید که برای هیچ کدام از مقادیر j، $f(j)$ برابر i نباشد. در آن صورت برای مثال

$N(1, 2, \ldots, r)$ که برابر تعداد تابعهایی از $\{1, 2, \ldots, m\}$ به $\{1, 2, \ldots, n\}$ است که «خاصیت i» را داشته باشند، برابر $(n-r)^m$ خواهد بود.

«فصل ۵»

۲) تعداد راههای اضافه کردن سطر جدید به مستطیل لاتینی $p \times n$ با درایه‌هایی از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ برابر است با تعداد راههای انتخاب جایگشتهای متمایز از n مجموعه با تعداد اعضای $n - p$ که با توجه به تمرین ۵ فصل سوم این امر می‌تواند به حداقل $(n-p)!$ روش انجام گیرد.

۴) اگر $N \geqslant p + q$ آنگاه برای هر $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ داریم: $L(i) \geqslant p + q - N$. امّا $N \geqslant n$ واضح است که این شرط مورد نیاز است.

۶) ب) در اثبات قضیهٔ چهارم همین فصل در انتهای اثبات $k(i - i')$ باید بر n بخش‌پذیر باشد. اگر (n, k) نسبت به هم اول باشند (i, i') باید بر n بخش‌پذیر باشد.

۷) فرض کنیم p نقطه داریم. از طرفی هر نقطهٔ خاص X می‌تواند با هر یک از $p - 1$ نقطه دیگر جفت شود و هر کدام در یک خط قرار گیرند. همچنین X در $n + 1$ خط قرار دارد و با n نقطهٔ دیگر در یک خط قرار می‌گیرند. حال به دو طریق می‌شماریم، جمع کل همهٔ دوتایی‌های شامل هر X تعداد کل خطوط را می‌دهد. از طرفی هر نقطه در $n + 1$ خط قرار دارد و هر خط شامل $n + 1$ نقطه میباشد. در نتیجه تعداد خطوط هم برابر p است.

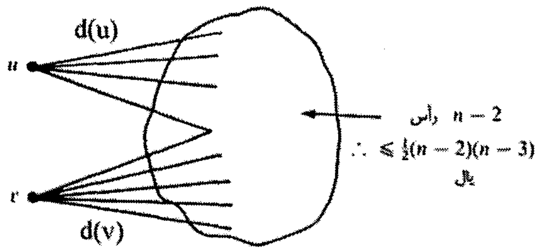
«فصل ۶»

۳) استقراء روی $p = \frac{1}{2}k$. اگر $p > 1$ باشد، گراف جدیدی با حذف یالهای بلندترین مسیر این گراف (که از یک رأس با درجهٔ فرد شروع و به رأس دیگری با درجهٔ فرد ختم می‌شود)، ایجاد کنید. حال فرض استقراء را روی مؤلفه‌های حاصل بررسی کنید.

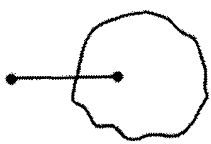
۵) با استفاده از اصل همخوانی نشان دهید که d عددی زوج است. همچنین نشان دهید که اگر دو رأس u و v با هم مجاور نباشند، در آن صورت رأس دیگری مثل w وجود خواهد داشت که یالهای uw و vw عضو مجموعهٔ یالهای گراف باشند. (در واقع برای $d > 0$ گراف G یک گراف همیلتونی نیز می‌باشد. امّا اثبات این مسأله بسیار مشکل است. این مسأله و مسائلی مشابه آن را می‌توانید در کتاب «Graph theory and related topics»

نوشتهٔ «J.A. Bondy» و «U.S.R Murty» بیابید. برای بررسی حالت شبه همیلتونی بودن گراف به مسألهٔ ۱۱ از همین فصل رجوع کنید.)

۹) دو رأس غیر مجاور u و v را در نظر بگیرید:



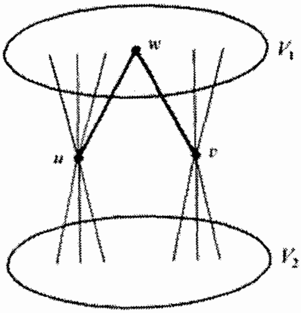
برای قسمت دوم مسأله گراف زیر را در نظر بگیرید.



$K_{n-۱}$

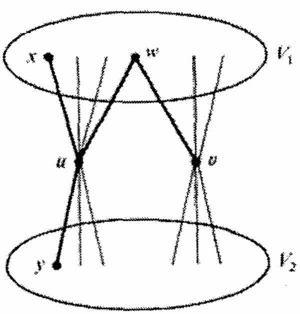
۱۰) ابتدا نشان دهید G همبند است. سپس فرض کنید $|V| = n$ و $v_{۱}, v_{۲}, \ldots, v_r$ را بلندترین مسیری در گراف G در نظر بگیرید که شامل رأس تکراری نباشد. فرض کنید $r < n$ تا به تناقض برسید. دقت کنید که رأس $v_{۱}$ تنها با رئوس مجموعهٔ $\{v_{۲}, \ldots, v_r\}$ و رأس v_r نیز تنها با رئوس $\{v_{۱}, \ldots, v_{r-۱}\}$ می‌تواند مجاور باشد. حال با توجه به آخرین قضیه‌ای که در این فصل بیان شد، چون $d(v_{۱}) + d(v_r) \geqslant r$، در نتیجه گراف شامل دوری است که همهٔ رئوس $v_{۱}, v_{۲}, \ldots, v_r$ عضو آن هستند. حال با توجه به همبند بودن گراف می‌توان نتیجه گرفت که مسیری با حداقل $r + ۱$ رأس در G وجود دارد که مخالف فرض اولیه است.

۱۱) ب) فرض کنید G یک گراف کامل نیست و با توجه به شرایط مسأله $G - \{u\}$ همواره همبند است، امّا اگر برای سه رأس متمایز u و v و w داشته باشیم $uw, vw \in E$ و $uv \notin E$ در آن صورت گراف $G - \{u, v\}$ ناهمبند خواهد بود. حال می‌خواهیم نشان دهیم، برای هر سه رأسی که اینگونه در نظر بگیریم داریم $d(w) = ۲$ (و بنابراین درجهٔ همهٔ رئوس برابر ۲ خواهد بود.)



فرض کنید V_1 و V_2 مجموعهٔ رئوس دو مؤلفهٔ همبندی باشند که در گراف $G-\{u,v\}$ وجود دارد و فرض کنید $w \in V_1$. (همانطورکه در شکل می‌بینید). اگر $V_1 \neq \{w\}$ و x و y همانطور نمایش داده شده‌اند، باشند، در آن صورت $xu, yu \in E$ و $xy \notin E$ که در آن صورت با توجه به شرایط داده شده، $G-\{x,y\}$ ناهمبند خواهد بود. رأس u در یکی از مؤلفه‌های همبندی آن قرار خواهد گرفت: رأس z را به عنوان رأسی در مؤلفهٔ همبندی دیگر آن در نظر بگیرید. با توجه به اینکه $G-\{x\}$ و $G-\{y\}$ همبند و $G-\{x,y\}$ ناهمبند است، در نتیجه در گراف G مسیری از z به u وجود دارد که شامل y می‌شود ولی شامل x نمی‌شود و همچنین شامل مسیری از z به u است که x در آن قرار دارد ولی y عضو آن نیست. از طرفی تمام مسیرهای از z به u شامل x یا y خواهند بود. رأس z در کجا قرار دارد؟

اگر z در بخش V_1 قرار داشته باشد، در آن صورت مسیری از z به u که از x نگذرد، باید از رأس v عبور کند (چرا؟) امّا در آن صورت می‌توان مسیر از z به v، سپس u را در نظر گرفت که شامل هیچ کدام از رئوس x و y نیست. در نتیجه $z \notin V_1$. به همین ترتیب می‌توان نشان داد $z \notin V_2$. سپس نتیجه بگیرید که $V_1 = \{w\}$ و بنابراین $d(w) = 2$.



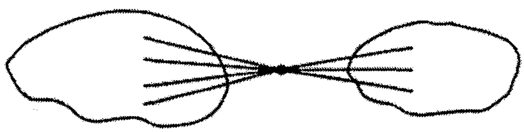
«فصل ۷»

۲) اگر گراف فقط شامل یک رأس باشد که دو نتیجهٔ گفته شده بدیهی هستند. در غیر این صورت می‌دانیم $d > 0$ و در ضمن رأسی مانند v وجود دارد که درجه‌اش کمتر از d باشد. تمام d رنگ در هر کدام از رأسهای با درجهٔ d ظاهر شده‌اند:

الف) یکی از رنگهایی را که در رأس v ظاهر نشده است در نظر بگیرید.

ب) یکی از رنگهایی را که در رأس v ظاهر شده است (در صورت وجود) در نظر بگیرید.

۳) گراف G را به صورت زیر در نظر بگیرید. از تمرین شمارهٔ ۲ (و قضیهٔ ویزینگ) در مورد زیرگراف مناسبی از آن استفاده کنید.



۴) ابتدا نشان دهید که تعداد رأسهای گراف G باید زوج باشد. حال یالهای دور همیلتونی را به صورت متناوب با ۲ رنگ، رنگ‌آمیزی کنید. آیا اکنون می‌توانید یالهای باقیمانده را نیز با یک رنگ، رنگ‌آمیزی کنید؟

۵) گراف دو بخشی متناظر با دانش‌آموزان را ایجاد کرده و آن را رنگ‌آمیزی یالی کنید. یالهای هر رنگ معادل یک روش برای ازدواج خواهند بود.

۶) گراف دو بخشی $G = (V_1, E, V_2)$ را متناظر با ماتریس M در نظر بگیرید، طوری که $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$ و سپس گراف حاصل را رنگ‌آمیزی یالی کنید. زیرگرافهای حاصل از یالهای هر رنگ، یک ماتریس مورد نظر را تعریف می‌کنند.

«فصل ۸»

۲) تعداد مجموعه‌های سه نفری از ورزشکاران را پیدا کنید که در آنها یک ورزشکار، دو ورزشکار دیگر را برده باشد.

۳) اگر تعداد بازی‌هایی را که ورزشکار i برده است، b_i بنامیم آنگاه تعداد بازیهایی که او از دست داده است برابر خواهد بود با: $\ell_i = n - 1 - b_i$. اکنون $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ امتیازهای n

ورزشکار در یک تورنمنت دیگر می‌باشند.

۴) (الف) $\Leftarrow$ (ب): می‌دانیم که تورنمنت شامل یک مسیر جهت‌دار به صورت $p_1, p_2, \ldots, p_n$ می‌باشد. اگر شرط (الف) برقرار باشد، در آن صورت باید یالی از p_n به یکی از p_iها وجود داشته باشد و در نتیجه گراف شامل یک دور جهت‌دار خواهد بود. دور $p'_1, p'_2, \ldots, p'_r, p'_1$ را بزرگترین این دورها در نظر بگیرید. اگر ورزشکاری مانند p وجود داشته باشد که در این دور قرار نداشته باشد، در نتیجه به راحتی می‌توان با توجه به شرط (الف) دور بزرگتری در گراف به صورت $p'_1, \ldots, p'_{i-1}, p$ و $p'_i, \ldots, p'_r, p'_1$ بدست آورد که مخالف فرض اولیه است.

(ب) $\Leftarrow$ (ج): با توجه به برقرار بودن شرط (ب)، در هر زیرمجموعهٔ r عضوی از ورزشکاران، حداقل یک ورزشکار وجود خواهد داشت که یکی از $n - r$ ورزشکار دیگر را شکست داده باشد.

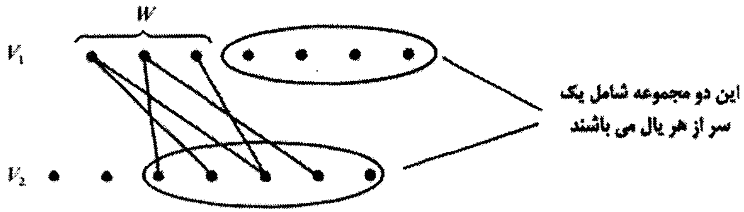
(ج) $\Leftarrow$ (الف): اگر شرط (الف) برقرار نباشد، در آن صورت می‌توانیم ورزشکاران را به دو زیرمجموعهٔ P_1 و P_2 افراز کنیم بطوری که هیچ ورزشکاری از P_1، ورزشکاری از P_2 را شکست نداده باشد. امّا در آن صورت، شرط (ج) برای امتیازهای ورزشکاران P_1 برقرار نیست.

۶) یکی از راههای حل مسأله، رنگ‌آمیزی یالی است که دو رنگ متفاوت برای یالها را به عنوان دو روز مختلف در نظر می‌گیریم. (یک گراف به این صورت تشکیل دهید که به ازای هر ورزشکار یک رأس قرار دهید و سعی کنید همهٔ یالهای گراف را رنگ‌آمیزی کنید.)

«فصل ۹»

۱) $V_1 = \{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m\}$ و $V_2 = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ و ماتریس M را با اندازهٔ $m \times n$ به این صورت تعریف می‌کنیم که: درایهٔ (i, j) برابر ۱ است اگر و فقط اگر r_i به c_j در G متصل باشد. متناظر یک تطابق در گراف G در ماتریس M چیست؟ مجموعهٔ رئوسی که هر یال شامل حداقل یکی از آنها باشد متناظر چیست؟

۲) با استفاده از تمرین ۱ ما می‌توانیم کمترین تعداد رئوسی که هر یال حداقل شامل یکی از آنها باشد بشماریم. می‌دانیم که $W \subseteq V_1$ است و $V_1 - W$ را در نظر می‌گیریم می‌دانیم که یک یال یا به یک رأس از V_1 متصل است یا به یک رأس از $V_1 - W$. با این ویژگی یک تطابق بسازید و ثابت کنید که مجموعهٔ $J(W) \cup (V_1 - W)$ یک تطابق است.



۳) نشان دهید اگر ماتریس M از مرتبهٔ $m \times n$ با درایه‌های ۰ و ۱ ویژگی هال را داشته باشد. (در هر r سطر یک‌ها حداقل r ستون را بپوشانند.) آنگاه m را برابر کمترین تعداد خطوط M که همهٔ ۱ ها را می‌پوشاند در نظر می‌گیریم. سپس قضیهٔ کونیگ اگروری را به کار برید و قضیه هال را اثبات کنید.

۴) گراف G را به صورت $G = (V, E)$ در نظر می‌گیریم. شبکه $N = (V, c)$ را با این قاعده تعریف می‌کنیم که $C(v, u) = C(u, v) = ۱$ اگر و فقط اگر u و v در گراف G مجاور باشند در غیر این صورت مقدار تساوی فوق را برابر صفر قرار می‌دهیم. نشان دهید کوچکترین برش جداکنندهٔ x از y هیچگاه از یالهای uv و vu با هم استفاده نمی‌کند. نتیجه بگیرید کمترین تعداد یالهای جداکنندهٔ x از y در G برابر کوچکترین برش در شبکهٔ N است. همچنین نشان دهید مجموعهٔ n عدد از مسیرهای مجزا از x به y متناظر جریانی به اندازهٔ n از x به y در شبکه N است. در ادامه قضیهٔ جریان بیشینه ـ برش کمینه را برای N به کار ببرید.

«فصل ۱۰»

۲) الف) چطور می‌توان یک دنباله به طول $n - ۱$ را به یک دنباله به طول n گسترش داد:

$C_n =$ (تعداد دنباله‌های به طول $n - ۱$ که به ۰ ختم می‌شوند و با اضافه کردن ۰ یا ۱ یا ۲ به آن طول آن n می‌شود)

$+$ (تعداد دنباله‌هایی به طول $n - ۱$ که به ۱ ختم می‌شوند و با اضافه کردن ۰ یا ۲ طول آنها n می‌شود)

$+$ (تعداد دنباله‌هایی به طول $n - ۱$ که به ۲ ختم می‌شوند و با اضافه کردن ۱ یا ۲ طول آنها n می‌شود)

چه تعداد از دنباله‌های فوق به ۰ ختم می‌شوند؟

۵) می‌دانیم $x^{y_۱} \cdot x^{y_۲} \cdot x^{y_۳} \cdot \ldots \cdot x^{y_k} = x^n$ اگر و فقط اگر $y_۱ + y_۲ + \cdots + y_k = n$

که تعداد جوابهای آن برابر ضریب x^n در عبارت زیر است:

$$\underbrace{(x+۲x^۲+۳x^۳+\ldots)}_{\text{که شامل } y_۱ \text{ است}}\underbrace{(x+۲x^۲+۳x^۳+\ldots)}_{\text{که شامل } y_۲ \text{ است}}\ldots\underbrace{(x+۲x^۲+۳x^۳+\ldots)}_{\text{که شامل } y_k \text{ است}}$$

۶) الف) این قسمت نیز مانند راهنمایی تمرین ۵ است. با این تفاوت که هر بار که n از معادلهٔ $y_۱+y_۲+\cdots+y_k=n$ تولید می‌شود ضریب x^n برابر $y_۱\cdot y_۲\cdot\ldots\cdot y_k$ می‌شود و این برابر ضریب x^n در عبارت زیر است:

$$\underbrace{(x+۲x^۲+۳x^۳+\ldots)}_{\text{که شامل } x^{y_۱} \text{ است}}\underbrace{(x+۲x^۲+۳x^۳+\ldots)}_{\text{که شامل } x^{y_۲} \text{ است}}\ldots\underbrace{(x+۲x^۲+۳x^۳+\ldots)}_{\text{که شامل } x^{y_k} \text{ است}}$$

ب) تقسیم کردن دانش‌آموزان به دو گروه، شبیه پیدا کردن جوابهای معادلهٔ $y_۱+y_۲+\cdots+y_k=n$ است و انتخاب کردن یک نماینده از هر گروه به طریق $y_۱\cdot y_۲\cdot y_۳\cdot\ldots\cdot y_k$ انجام می‌شود و این همان قسمت (الف) است. برای یافتن یک روش مستقیم فرض کنید مثلاً هفت دانش‌آموز که با $\times$ نشانشان می‌دهیم می‌خواهند به سه گروه تقسیم شوند.

گروهها را با علامت | از هم جدا می‌کنیم و نمایندگان هر گروه را با یک دایره مشخص می‌کنیم: سپس علامتهای | و دایره را با خط فاصله جایگزین می‌کنیم:

$$\times\ \otimes|\times\ \otimes\ \times|\ \otimes\ \times$$

$$\to\times\ -\ -\ \times\ -\ \times-\ -\times$$

تقسیم n دانش‌آموزان به k گروه تناظر یک به یک دارد با انتخاب $۲k-۱$ خط فاصله در n مکان.

۷) واضح است که برای $j>i$ درایهٔ (i,j) از ماتریس $M\cdot N$ صفر است. برای $i\geqslant j$ می‌توانیم عدد درایهٔ (i,j) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\binom{i}{i-j}\binom{j}{۰}-\binom{i}{i-j-۱}\binom{j+۱}{۱}+\binom{i}{i-j-۲}\binom{j+۲}{۲}$$

$$-\ldots(-۱)^{i-j}\binom{i}{۰}\binom{i}{i-j}$$

که برابر ضریب x^{i-j} در عبارت زیر است:

$$\underbrace{(\binom{i}{0}+\binom{i}{1}x+\binom{i}{2}x^{2}+\cdots+\binom{i}{i-j}x^{i-j}+\dots)}_{(1+x)^{i}}$$

$$\times\underbrace{(\binom{j}{0}-\binom{j+1}{1}x+\binom{j+2}{2}x^{2}-\binom{j+3}{3}x^{3}+\dots)}_{(1+x)^{-j-1}}$$

حال ضریب x^{i-j} در عبارت $(1+x)^{i-j-1}$ چقدر است؟

۸) $\binom{n}{r}S_r$ تابع از $\{1,2,3,\dots,m\}$ به $\{1,2,3,\dots,n\}$ وجود دارد که دقیقاً r عضو از مجموعهٔ برد را شامل می‌شود و می‌توانیم نتیجه را به صورت m معادله بنویسیم:

$$\begin{aligned}
&\binom{1}{1}S_1 && = 1^m\\
&\binom{2}{1}S_1+\binom{2}{2}S_2 && = 2^m\\
&\binom{3}{1}S_1+\binom{3}{2}S_2+\binom{3}{3}S_3 && = 3^m\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots && = \vdots\\
&\binom{m}{1}S_1+\binom{m}{2}S_2+\binom{m}{3}S_3+\cdots+\binom{m}{m}S_m && = m^m
\end{aligned}$$

و سپس معکوس آن را می‌نویسیم.

۱۰) چند مسیر فوقانی وجود دارد که بعد از گام rاُم قطر را لمس می‌کند؟ به u_r روش می‌توان به این نقطهٔ مفروض بر روی قطر رسید و به v_{n-r} روش می‌توان این راه را تا نقطهٔ B ادامه داد که قطر در هیچ نقطه‌ای قطع نشود بنابراین $v_{n-r}\times u_r$ روش وجود دارد.

این به آن معنا است که برای $n>1$ ضریب x^n در $u(x)$ برابر ضریب x^{n-1} در $(u(x))^2$ است و معادلهٔ مورد نظر می‌تواند توجیه شود.

حل معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $u(x)$ نتیجه می‌دهد:

$$u(x)=\frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2x}$$

چون u_n ضریب x^n در این عبارت است پس داریم:

$$u_n=(-\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(\dots)\times(-\frac{2n-1}{2})\times(-4)^{n+1}\times\frac{1}{(n+1)!}$$

که می‌توان آن را ساده کرد.

۱۲) تعداد روشهای بدست آوردن مجموع n در دو پرتاب تاس متداول برابر ضریب x^n در عبارت زیر است.

$$g(x) = (x+x^۲+x^۳+x^۴+x^۵+x^۶)^۲ = x^۲(۱+x)^۲(۱-x+x^۲)^۲(۱+x+x^۲)^۲$$

حال اگر دو تاس داشته باشیم که در وجه‌های آن اعداد $\{a,b,c,d,e,f\}$ و $\{a',b',c',d',e',f'\}$ که لزوماً متمایز نیستند نوشته شده باشند آنگاه تعداد روشهای بدست آمدن مجموع n در دو پرتاب تاس برابر ضریب x^n در عبارت زیر است:

$$(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f)(x^{a'}+x^{b'}+x^{c'}+x^{d'}+x^{e'}+x^{f'})$$

که جملهٔ ثابت آن صفر است و به ازای $x = ۱$ مقدار هر پرانتز ۶ می‌شود. حال ما باید $g(x)$ را به صورت حاصلضرب این دو عامل تعریف کنیم.

«فصل ۱۱»

۳) فرض کنید رئوس گراف G با $\chi(G)$ رنگ، رنگ‌آمیزی شده‌اند. حال یکی از این رنگها را در نظر بگیرید و نشان دهید رأسی مثل v با این رنگ در گراف وجود دارد که به ازای هر رنگ دیگر، رأسی با آن رنگ وجود دارد که با رأس v مجاور باشد.

۶) برای قسمت اول فرض کنید رنگهای $۱, ۲, \ldots, \chi(G)$ را برای رنگ‌آمیزی G و رنگهای $۱', ۲', \ldots, \chi(\bar{G})'$ را برای رنگ‌آمیزی $\bar{G}$ به کار برده‌ایم. حال $\chi(G)\cdot\chi(\bar{G})$ رنگ $(۱,۱'), (۱,۲'), \ldots, (i,j'), \ldots, (\chi(G), \chi(\bar{G})')$ را برای رنگ‌آمیزی رأسی یک گراف کامل با مجموعه رئوس v به کار ببرید.

برای قسمت دوم فرض کنید حکم مسأله برقرار نیست. حال $G=(V,E)$ را کوچکترین گرافی در نظر بگیرید که حکم مسأله در آن برقرار نباشد. اکنون رأس $v \in V$ را در نظر گرفته و گراف G' را از حذف رأس v و یالهای مجاور آن در G بدست آورید. نشان دهید:

$$\chi(G) = \chi(G') + ۱ \quad \text{و} \quad \chi(\bar{G}) = \chi(\bar{G'}) + ۱ \quad \text{و} \quad \chi(G') + \chi(\bar{G'}) = |V|$$

همچنین نشان دهید درجهٔ رأس v در G حداقل برابر $\chi(G')$ و در $\bar{G'}$ حداقل برابر $\chi(\bar{G'})$ می‌باشد. حال سعی کنید تا به تناقض برسید.

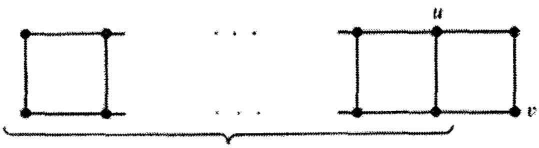
۹) بهتر است برای این مسأله از رابطهٔ بازگشتی گفته شده استفاده نکنیم. در عوض گراف G' را از حذف یال uv از گراف K_5 بدست آورید. حال تعداد راههای رنگ‌آمیزی رأسی گراف G را بدست آورید که در آنها دو رأس u و v دارای رنگهای یکسان و غیر یکسان هستند. اکنون گراف G را از روی هم قرار دادن رئوس u و v از دو گراف مشابه G' بدست آورید و چندجمله‌ای رنگی آن را محاسبه کنید.

۱۰) گراف G_3 را گراف کامل K_{n-1} در نظر بگیرید بطوری که یک یال از آن حذف شده است. از رابطهٔ بازگشتی که در این فصل برای چندجمله‌ای رنگی بیان شده بود برای گرافهای G_1، G_2 و G_3 استفاده کنید و سپس $P_{G_1} - P_{G_2}$ را به صورت چندجمله‌ای رنگی یک گراف کامل بیان کنید.

۱۲) اگر $n > 1$ باشد و حکم مسأله برای گرافهای کوچکتر برقرار باشد، در آن صورت ما می‌توانیم تعداد راههای رنگ‌آمیزی $2(n-1)$ رأس اول گراف با k رنگ را بدست آوریم. حال تعداد رنگ‌آمیزی‌هایی برای دو رأس پایانی را در نظر بگیرید که:

الف) در آنها دو رأس u, v (که در شکل نشان داده شده‌اند) دارای رنگهای متفاوت باشند.

ب) در آنها دو رأس v و u دارای رنگهای یکسان باشند.



۱۳) الف) از رابطهٔ بازگشتی برای گراف G_1 استفاده کنید.

ب) از استقراء روی n استفاده کنید. اگر $n > 1$ در آن صورت با استفاده از روشی که در قسمت (الف) بیان شده به دو گراف می‌رسیم که با استفاده از فرض استقراء می‌توان چندجمله‌ای رنگی آنها را بدست آورد و سپس چندجمله‌ای رنگی گراف اولیه را محاسبه کرده و به حکم استقراء رسید.

۱۴) از استقراء روی m (تعداد یالهایی که در گراف G وجود ندارند) استفاده می‌کنیم. اگر در G، $m > 0$ یال غیر موجود باشند، دوگراف G_1 و G_2 را مطابق با آخرین قضیهٔ این فصل بدست می‌آوریم و از فرض استقراء برای آنها استفاده می‌کنیم.

۱۵) حکم مسأله را برای گرافهای کامل بررسی کنید (تمرین ۱۵ از فصل ۸ را ببینید). سپس از استقراء روی تعداد یالهایی که درگراف وجود ندارند (تعداد یالهای گراف مکمل) استفاده کنید. فرض کنید یال uv درگراف G وجود نداشته باشد و G_1 و G_2 را به ترتیب گرافهایی در نظر بگیرید که از اضافه کردن و منقبض کردن یال uv بدست می‌آیند. حال نشان دهید هر جهت دهی بدون دورگراف G به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:

۱) با جهت‌دهی یال uv به صورت $u \to v$ یک جهت‌دهی بدون دور در G_1 ایجاد خواهد شد و با جهت‌دهی این یال به صورت $v \to u$، یک جهت‌دهی بدون دور دیگر برای G_1 بدست خواهد آمد.

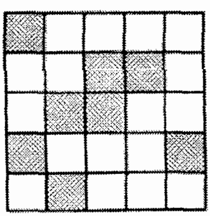
۲) تنها در یکی از حالتهای جهت‌دهی یال uv، یک جهت‌دهی بدون دور برای G_1 بدست خواهد آمد.

حال نشان دهید تعداد جهت‌دهی‌های بدون دورگراف G از نوع ۱ برابر با تعداد جهت‌دهی‌های بدون دورگراف G_2 خواهد بود و سپس نتیجه بگیرید:

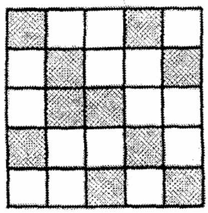
$$\begin{pmatrix}\text{تعداد جهت‌دهی‌های}\\ \text{بدون دور } G\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{تعداد جهت‌دهی‌های}\\ \text{بدون دور } G_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{تعداد جهت‌دهی‌های}\\ \text{بدون دور } G_1\end{pmatrix}$$

«فصل ۱۲»

۳) پاسخ مورد نظر ما برابر تعداد روشهای قرار دادن ۵ رخ سازگار در بخش سایه نخوردهٔ مربع زیر است.



۴) پاسخ این سؤال نیز برابر تعداد روشهای قرار دادن ۵ رخ سازگار در بخش سایه نخوردهٔ مربع زیر است.



۵) در این حالت داریم:

$$r_B(x) = ۱ + r_۱x + r_۲x^۲ + \cdots + r_{n-۱}x^{n-۱} + r_nx^n = r_{\bar{B}}(x)$$

همچنین داریم:

$$r_۱ = \bar{B} \text{ تعداد مربعهای } = B \text{ تعداد مربعهای } = \frac{۱}{۲}n^۲$$

از طرفی می‌توان گفت:

$$\underbrace{n! - (n-۱)!r_۱ + (n-۲)!r_۲ - \ldots \pm ۲! \times r_{n-۲}}_{\text{زوج}} \pm ۱! \times r_{n-۱} \pm r_n = r_n$$

۶) استقرا بر روی n: اگر $n > ۱$ باشد و برای مقادیر کوچکتر از n جواب معلوم باشد می‌توان نوشت:

$r_k =$(تعداد حالتهای قرارگرفتن k رخ به طوری که از سطر آخر استفاده نشود)

$+$ (تعداد حالتهای قرارگرفتن k رخ به طوری که از سطر آخر استفاده شود)

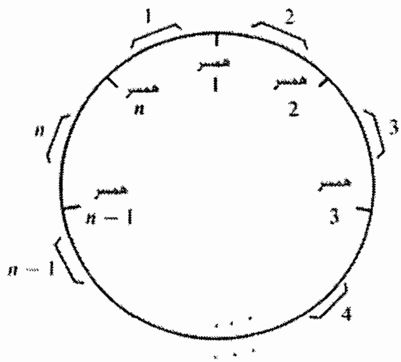
$= S(n, n-k) + (n-k+۱)S(n, n-k+۱)$

۷) به دو روش تعداد حالتهای قرارگرفتن n رخ سازگار در صفحهٔ $n \times n$ که k رخ و یا بیشتر در B باشند را بشمارید و سپس k تا از این رخها را سیاه کنید.

۹) الف) می‌توان از استقراء بر روی m استفاده کرد و با استفاده از روش بازگشتی صفحهٔ شامل m مربع را به دو قسمت تقسیم کرد. همچنین در یک ردیف زیگزاگ از مربعها می‌توان k رُخ سازگار را قرار داد اگر و فقط اگر بین هر دو رخ حداقل یک خانه فاصله باشد و این همان تمرین ۵ از فصل اول است.

ب) از روش بازگشتی خود استفاده می‌کنیم و مربع پایین سمت چپ را به عنوان s در نظر می‌گیریم و پس از به کار بردن قضیهٔ دوم این فصل، از قسمت (الف) کمک می‌گیریم.

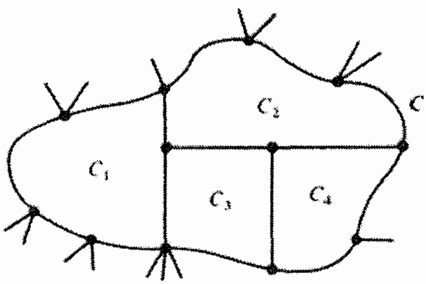
ج) ابتدا یکی از زنها را بر روی یک صندلی دلخواه می‌نشانیم. $2n$ روش برای این کار وجود دارد. $n-1$ جا برای دیگر زنها باقی می‌ماند وقتی همگی در این $n-1$ مکان قرارگرفتند n صندلی برای قرارگرفتن شوهرانشان باقی می‌ماند. به چند طریق می‌توان شوهرانشان را روی صندلی‌ها نشاند؟ صفحهٔ شطرنجی قسمت (ب) شرط لازم را فراهم می‌سازد.



«فصل ۱۳»

۲) در گراف قسمت (ب)، دوری با سه یال وجود ندارد.

۳) دوری مثل C از گراف را در نظر بگیرید. فرض کنید در نمایش مسطحی از گراف، این دور شامل نواحی باشد که با دورهای $c_1, c_2, \ldots, c_r$ احاطه شده‌اند. (هرکدام از این دورها شامل زوج یال می‌باشند.) حال نشان دهید دور C نیز شامل زوج یال می‌باشد.



۶) ب) اگر $G = (V, E)$ و $\bar{G} = (V, \bar{E})$ هر دو مسطح باشند و در ضمن $|V| = n \geqslant 3$، در آن صورت

$$|E| \leqslant 3n - 6 \quad \text{و} \quad |\bar{E}| \leqslant 3n - 6$$

حال این دو نابرابری را با هم جمع کنید تا به یک نامساوی درجهٔ دو برسید.

۷) دقت کنید که محیط شکل شامل n رأس می‌باشد (که درجهٔ هر کدام برابر $n - ۱$ است). در ضمن $\binom{n}{۴}$ رأس دیگر نیز در شکل وجود دارد (که درجهٔ هر کدام برابر ۴ می‌باشد). اکنون تعداد یالهای گراف را از طریق شمارش مجموع درجات بدست آورید.

۸) الف) تعداد نواحی را که با چهار یال احاطه شده‌اند x و تعداد نواحی که با شش یال احاطه شده‌اند را y بنامید. در نتیجه داریم:

$$x + y = |E| - |V| + ۲$$

$$۲|E| = ۴x + ۶y \Longrightarrow |E| = ۳(x + y) - x$$

$$۲|E| = ۳|V|$$

این معادلات جوابهای زیادی دارند. ولی در همهٔ آنها داریم: $x = ۶$.

۱۰) می‌دانیم که:

$$|V| = \sum_{n=۰}^{\infty} v_n \quad \text{و} \quad |E| = \frac{۱}{۲}\sum_{v\in V} d(v) = \frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty} nv_n$$

اکنون از این معادلات در رابطهٔ $|E| \leqslant ۳|V| - ۶$ استفاده کنید. برای قسمت بعد، دقت کنید که در گرافهای همبند داریم:

$$۵(v_۱ + v_۲ + v_۳ + v_۴ + v_۵) \geqslant ۵v_۱ + ۴v_۲ + ۳v_۳ + ۲v_۴ + v_۵$$
$$\geqslant \sum_{n=۱}^{\infty}(۶ - n)v_n \geqslant ۱۲$$

۱۱) اگر $|V| > ۶$ باشد و حکم مسأله برای گرافهای کوچکتر برقرار باشد، در آن صورت گرافی را که از حذف رئوس با درجهٔ کمتر از ۶ بدست می‌آید، در نظر بگیرید.

۱۲) f را برابر تعداد نواحی در نظر بگیرید. حال:

$$۲|E| = cf = d|V| \quad \text{و} \quad f = |E| - |V| + ۲$$

اکنون طرفین معادلهٔ سمت راست را بر $۲|E|$ تقسیم کنید.

۱۳) بازی هنگامی پایان خواهد یافت که شرط مسطح بودن گراف برقرار نباشد. (البته این یک بازی جوانمردانه نیست!). فرض کنید گراف شامل n رأس و m یال است. حال حداکثر چه تعداد یال دیگر می‌توان به این گراف اضافه کرد که درجهٔ هیچ رأسی بیشتر از سه نشود؟

نشان دهید تعداد این یالها بعد از اینکه هر دو بازیکن هر کدام یک مرحله بازی کنند، یک واحد کم خواهد شد.

«فصل ۱۴»

۱) نابرابریهای

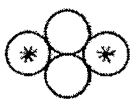
$$|E| - |V| + ۲ \leqslant ۱۱,$$
$$۲|E| \geqslant ۳|V|,$$
$$۲|E| \geqslant ۵(|E| - |V| + ۲).$$

منجر به تناقض می‌شوند.

روی تعداد یالها استقراء بزنید. درگام استقراء یک ناحیه که توسط سه یا چهار یال احاطه شده است را در نظر بگیرید و سپس همانطور که در اثبات قضیهٔ صفحهٔ ۲۲۲ دیدید، اگر ناحیه توسط چهار یال احاطه شده بود، آن را حذف کنید و اگر توسط سه یال احاطه شده بود، آن را منقبض کرده و تبدیل به یک نقطه کنید.

۲) در اثبات مسأله بوسیلهٔ استقراء، دو سکه را که بیشترین فاصله را از هم دارند در نظر بگیرید و نشان دهید که هر کدام از آنها حداکثر با سه سکهٔ دیگر مجاور هستند.

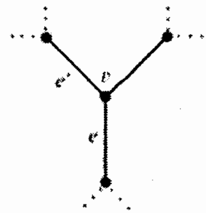
برای یافتن ترتیبی برای سکه‌ها که با سه رنگ قابل رنگ‌آمیزی نباشند، دقت کنید که در حالت زیر



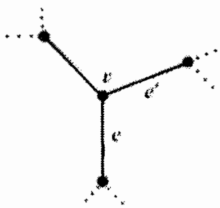
اگر تنها سه رنگ داشته باشیم، در آن صورت، دو سکه‌ای که با ستاره علامت زده شده‌اند، دارای رنگ یکسان خواهند بود. حال می‌توان تعدادی از سکه‌ها را که به صورت گروههایی به شکل بالا کنار هم قرار گرفته‌اند، طوری کنار هم چید که به رنگ چهارم نیاز داشته باشیم.

۳) نشان دهید تابع p وجود دارد اگر و تنها اگر، گراف متناظر با نقشه با سه رنگ قابل رنگ‌آمیزی یالی باشد.

($\Longleftarrow$) فرض کنید تابع p وجود دارد. یال e از گراف را در نظر گرفته و به آن عدد ۱ را نسبت می‌دهیم. سپس به تمام یالها یک عدد نسبت می‌دهیم. برای این کار از این روش استفاده می‌کنیم که وقتی به یک یال e با شمارهٔ ℓ رسیدیم، به یال مجاور آن (مثل e') به صورت زیر یک شماره نسبت می‌دهیم:



$e \to e'$ حرکت پاد ساعتگرد
دور ناحیه
به e' شمارهٔ $\ell - p(v)$ را نسبت می‌دهیم.

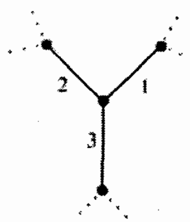


$e \to e'$ حرکت ساعتگرد
دور ناحیه
به e' شمارهٔ $\ell + p(v)$ را نسبت می‌دهیم.

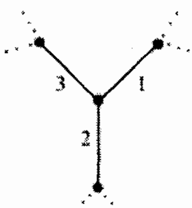
حال نشان دهید یالهای گراف با سه رنگ به صورت مجموعهٔ شماره‌های زیر رنگ‌آمیزی شده‌اند:

$$\{\ldots, -۵, -۲, ۱, ۴, ۷, \ldots\}\ ,\ \{\ldots, -۴, -۱, ۲, ۵, ۸, \ldots\}\ ,$$
$$\{\ldots, -۳, ۰, ۳, ۶, \ldots\}$$

($\Longrightarrow$) فرض کنید یک رنگ‌آمیزی یالی گراف با ۳ رنگ ۳ و ۲ و ۱ داده شده است.در نتیجه یالی از هر سه رنگ مجاور هر کدام از رئوس وجود دارد. حال $p(v)$ را به صورت زیر تعریف کنید:



$p(v) = -۱$ اگر رنگهای ۳ و ۲ و ۱ به ترتیب پاد ساعتگرد حول v قرار گرفته باشند.



$p(v) = ۱$ اگر رنگهای ۳ و ۲ و ۱ به ترتیب ساعتگرد حول رأس v قرار گرفته باشند.

۴) این مسأله را با تمرین ۶ از فصل ۱۱ مقایسه کنید و از روش حل آن مسأله استفاده کنید. با استفاده از آخرین قضیهٔ این فصل می‌توانیم نابرابری زیر را بنویسیم:

$$\chi(G \cup \bar{G}) \leqslant \chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \leqslant ۵\chi(G)$$

«فصل ۱۵»

۳) ب) تعداد راههای قرارگرفتن اعضای B در بلوکهای دیگر را به دو روش مختلف بشمرید.

ج) تعداد راههای قرارگرفتن هر جفت از اعضای B در بلوکهای دیگر را به دو روش مختلف بشمرید.

۴) روابط اصلی بین شاخص‌ها را به کار برده و $k + \lambda(v - ۱)$ را ساده کنید. حال اگر M ماتریس ناشی از طرح باشد، داریم:

$$\underbrace{(\det(M))^{۲}}_{\text{مربع کامل}} = \det M \cdot \det M^T = \underbrace{(k + \lambda(v - ۱))}_{\text{مربع کامل}}\underbrace{(k - \lambda)^{v-۱}}_{\therefore\ \text{مربع کامل}}$$

۵) همهٔ خطوط را از صفحهٔ تصویری متناهی مرتبهٔ n پاک می‌کنیم.

۶) اگر با استفاده از شیوه او یک طرح بسازیم (با استفاده از قضیهٔ تعداد درخت‌ها در فصل دوم) داریم: $k = n - ۱$ $\qquad b = n^{n-۲}$ $\qquad v = \frac{۱}{۲}n(n - ۱)$ حال مقدار λ را پیدا کنید و نشان دهید برای $n > ۳$ مقدار آن صحیح نمی‌باشد.

۱۰) الف) اگر برای $n \geqslant ۲$ ماتریس M ماتریس $n \times n$ داده شده باشد، توجه کنید که

$$\det\left(M + \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & & ۰ \end{pmatrix}\right) + \det\left(M - \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \end{pmatrix}\right) = ۲\det M'$$

M' ماتریس حاصل از حذف سطر و ستون اول M است. حال با استفاده از استقراء روی n می‌توان نتیجه را بدست آورد.

ب) Q را ماتریس حاصل از پاک کردن سطر و ستون آخر P قرار می‌دهیم. R را به عنوان سطر آخر P در نظر می‌گیریم که درایهٔ آخر آن حذف شده باشد و ماتریس D

همان تعریف قسمت (الف) را دارد. حال معادله زیر را حل می‌کنیم.

$$(Q+D)\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ \vdots \\ x_{۴۳} \end{pmatrix} = -P$$

ج) اگر معادله جواب گویایی داشته باشد آنگاه اعداد a, b, c صحیح یافت می‌شوند که هیچ عامل مشترکی ندارند و در معادلهٔ $۶a^۲ = b^۲ + c^۲$ صدق می‌کنند امّا با در نظرگرفتن باقیماندهٔ مربع کامل به پیمانهٔ ۳ متوجه می‌شویم هم b و هم c در نتیجه a هم باید بر ۳ بخش‌پذیر باشند و این تناقض است.

د) ابتدا توجه کنید که

$$P^T \cdot P = (\frac{۱}{۶}NL^T)\cdot(\frac{۱}{۶}LN^T) = \frac{۱}{۶}NN^T = \frac{۱}{۶}\begin{pmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۷ & ۱ & \dots & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۷ & \dots & ۱ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

پس از این واقعیت استفاده کنید که:

$$۶\cdot(y_۱\ y_۲ \dots y_{۴۳}\ y)\cdot\begin{pmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ \vdots \\ y_{۴۳} \\ y \end{pmatrix} = ۶(x_۱\cdot x_۲ \dots x_{۴۳}\ ۱)\cdot P^T \cdot P \cdot \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ \vdots \\ x_{۴۳} \\ ۱ \end{pmatrix}$$

و این حاصلضرب را ساده کنید و نشان دهید سمت راست تساوی شامل عبارت $(x_۱ + x_۲ + \dots + x_{۴۳})^۲$ است.

۱۲) فرض می‌کنیم هر یک از b عضو مفروض در $k_1, k_2, \ldots, k_b$ زیرمجموعه ظاهر شده باشد با شمردن مجموع تعداد حالتهای واقع شدن یک عضو در یک جفت مجموعه داریم:

$$\frac{1}{2}v(v-1) = \sum_{i=1}^{b} \frac{1}{2}k_i(k_i - 1)$$

با در نظر گرفتن اینکه مجموع k_iها برابر vr است و مجموع مربعهای آنها وقتی کمترین مقدار است که هر کدام برابر $\frac{vr}{b}$ باشند.

۱۳) ماتریس M را متشکل از b کد واژه به عنوان سطرهای M قرار می‌دهیم. نشان دهید هر دو سطر M دارای $k - \frac{d}{2}$ عدد ۱ در یک ستون هستند و نتیجه بگیرید ماتریس MM^T یک ماتریس $b \times b$ به صورت مقابل است که دترمینان آن مثبت است.

$$\begin{pmatrix} k & k-\frac{d}{2} & k-\frac{d}{2} & \ldots & k-\frac{d}{2} \\ k-\frac{d}{2} & k & k-\frac{d}{2} & \ldots & k-\frac{d}{2} \\ k-\frac{d}{2} & k-\frac{d}{2} & k & \ldots & k-\frac{d}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k-\frac{d}{2} & k-\frac{d}{2} & k-\frac{d}{2} & \ldots & k \end{pmatrix}$$

حال فرض کنید که $v < b$ با اضافه کردن $b - v$ سطر صفر به M مانند اثبات نامساوی فیشر عمل کنید.

۱۴) الف) اگر $i > 1$ و iامین سطر دارای s عدد یک باشد آنگاه حاصلضرب آن در سطر اول دارای $\delta - (m - s) = 0$ عدد یک است. همچنین H و H^T می‌توانند به یکدیگر تبدیل شوند و همین استدلال را می‌توان برای ستونها استفاده کرد.

ب) اگر iاُمین و jاُمین ستون که $(1 < i < j)$ در t مکان با هم ۱ باشند آنگاه حاصلضرب دو ستون نشان خواهد داد که $t = \frac{m}{4}$.

۱۵) الف) همهٔ جفت‌های ممکن از سطرها را در N مقایسه کنید و تعداد اختلافها را بدست آورید. این تعداد حداقل برابر $2(k - \lambda)$ است اگر و فقط اگر:

$$v - k \geqslant 2(k-\lambda) \quad , \quad k + 1 \geqslant 2(k-\lambda) \quad ,$$
$$1 + v - 2(k-\lambda) \geqslant 2(k-\lambda)$$

و بوسیلهٔ آن دو نامساوی داده شده را نتیجه بگیرید.

ب) عبارت $v = \frac{k(k-1)}{\lambda} + 1$ را در نامساوی $v \geqslant 3k - 2\lambda$ قرار داده و نامعادلهٔ درجهٔ دوم مذکور را حل کنید و ثابت کنید: $k \geqslant 2\lambda + 1$.

«فصل ۱۶»

۲) توجه کنید که $Q = \binom{(q+1)+(q+1)-2}{(q+1)-1}$ پس در گراف K_Q یک گراف K_{q+1} یک رنگ مثلاً قرمز وجود دارد. امّا شما می‌توانید از این حقیقت استفاده کنید که:

$$Q > \binom{(q+2)+q-2}{(q+2)-1}$$

۳) قرار می‌دهیم $n = R(r-1, g) + R(r, g-1)$. فرض می‌کنیم که یالهای K_n با رنگ قرمز و یا سبز رنگ شده‌اند. حال یک رأس خاص از K_n را در نظر می‌گیریم که به $n-1$ یال متصل است از این تعداد حداقل $R(r-1, g)$ یال قرمزند یا حداقل $R(r, g-1)$ یال سبز هستند و ما در هر صورت می‌توانیم یک K_r قرمز یا یک K_g سبز پیدا کنیم.

در حالتی هم که $R(r-1, g)$ و $R(r, g-1)$ هر دو زوج باشند ما به راحتی می‌توانیم بررسی کنیم که در K_{n-1} (که فرد رأس دارد) امکان دارد که $R(r-1, g) - 1$ یال قرمز متصل به یک رأس داشته باشیم.

۴) به سادگی می‌توانیم از حساب همنهشتی برای اثبات عدم وجود K_3 قرمز استفاده کنیم. فرض می‌کنیم یک K_p سبز پیدا کردیم و (به علت تقارن) عدد ۱ یکی از رئوس ما بود. حال $p-1$ رأس دیگر باید از اعداد زیر انتخاب شوند:

$$3, 4 \quad 6, 7 \quad 9, 8, \ldots, 3g-9, 3g-8 \quad 3g-6 \quad 3g-5$$

و از هر جفت نیز حداکثر یک عضو باید انتخاب شود.

۶) فرض کنیم گراف کامل ما شامل 2^r رأس برچسب خورده می‌باشد. $2^{\binom{2^r}{2}}$ حالت برای انتخاب یک مجموعه از یالهای قرمز برای این گراف وجود دارد. و از آنجا، $2^{\binom{2^r}{2}-\binom{2r}{2}}$ حالت برای انتخاب چنین مجموعه‌ای که شامل $\binom{2r}{2}$ یال سازندهٔ یک K_{2r} بر روی $2r$ رأس مفروض وجود دارد. پس حداکثر $\binom{2^r}{2r} \cdot 2^{\binom{2^r}{2}-\binom{2r}{2}}$ روش برای انتخاب یالهای سازندهٔ یک K_{2r} قرمز داریم. حداکثر ۲ برابر این تعداد روشهای انتخاب یالهای قرمز به ما رنگ‌آمیزی شامل K_{2r} قرمز یا K_{2r} سبز می‌دهد. حال نشان دهید برای $r \geqslant 2$: $2^{\binom{2^r}{2}} > 2\binom{2^r}{2r}2^{\binom{2^r}{2}-\binom{2r}{2}}$ و نتیجهٔ مورد نظر را از آن بگیرید.

۷) ب) برای نشان دادن $R(r, R(g,b)) \geqslant R(r,g,b)$ تصور کنید که شما سبز و آبی را تشخیص نمی‌دهید و نسبت به آنها کوررنگ هستید.

ج) اگر $n = R(r-1,g,b) + R(r,g-1,b) + R(r,g,b-1) - 1$ آنگاه در K_n یالهای متصل به یک رأس باید حداقل شامل $R(r-1,g,b)$ یال قرمز و یا $R(r,g-1,b)$ یال سبز و یا $R(r,g,b-1)$ یال آبی باشند.

د) بر روی $r+g+b$ استقراء بزنید. حالتهای $r=2$ یا $g=2$ و یا $b=2$ بدیهی هستند و نتیجهٔ قسمت (ب) شما را قادر به حل استقرا می‌سازد.

۸) الف) اول نشان دهید:

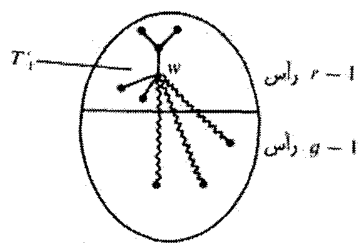
$$[m!e] + 1 = 2 + m + m(m-1) + m(m-1)(m-2) + \cdots + m!$$

و این به سادگی قابل بررسی است که این دنباله در شرایط رابطهٔ بازگشتی صدق می‌کند.

ب) اگر K_{M_m} را با m رنگ رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه $mM_m - m + 1$ یال به هر رأس متصل است که حداقل M_{m-1} تا از آنها به یک رنگ هستند. به انتهای دیگر این یالها توجه کنید و به همین ترتیب ساده مسأله را ادامه دهید.

۹) فرض کنید که $m > 1$ و قضیه برای حالت $m-1$ اثبات شده است اگر $R_m = \binom{2R_{m-1}-2}{R_{m-1}-1}$ و یالهای K_{R_m} را با 2^m رنگ رنگ‌آمیزی کنیم آنگاه فرض می‌کنیم که 2^{m-1} تا از این رنگها سایهٔ سبز و 2^{m-1} دیگر سایهٔ قرمز دارند.

۱۲) اگر $r > 2$ و $g > 2$ و نتیجه برای اعداد کمتر از $r+g$ صحیح باشد، T_1' را قرار می‌دهیم T_1 که یک رأس درجهٔ یک v (متصل به یال wv) از آن حذف شده باشد. در هر گراف سبز و قرمز K_{r+g-2} یک T_1' قرمز یا یک T_2 سبز وجود دارد. در این حالت همهٔ یالهای واقع در K_{r+g-2} که $g-1$ رأس غیر واقع در T_1' را به w متصل می‌کنند در نظر می‌گیریم (همانطور که نشان داده شده است).



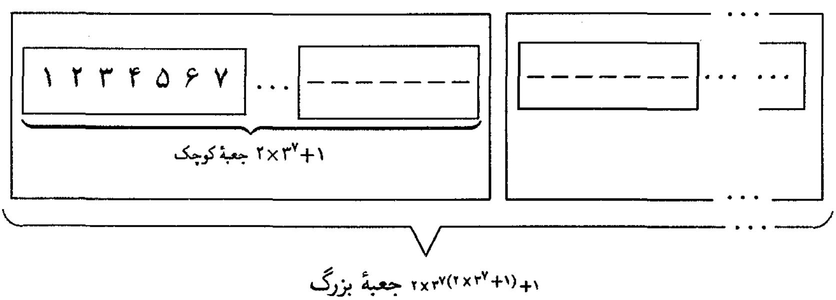
۱۳) زیرمجموعه‌های دو عضوی $N = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ را با این قاعده رنگ می‌کنیم که $\{i, j\}$ قرمز است اگر $i + j$ یک عدد فرد ـ جمع باشد و در غیر این صورت آن را سبز می‌کنیم. حال یک مجموعهٔ نامتناهی $S \subseteq N$ وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی آن به یک رنگند: فرض می‌کنیم همگی قرمز باشند. در غیر این صورت S را به روش دیگر بازسازی می‌کنیم.

۱۵) R را برابر $R(r, r, r, r)$ قرار می‌دهیم به طوری که اگر K_R را با چهار رنگ رنگ‌آمیزی کنیم یک K_r با یالهای یک رنگ موجود باشد. (وجود چنین عددی را از تمرین ۹ می‌توان بدست آورد) برای هر ماتریس $R \times R$ که درایهٔ m_{ij} آن صفر یا یک باشد یک رنگ‌آمیزی یالهای K_R (با مجموعهٔ رئوس $\{۱, ۲, \ldots, R\}$) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: برای $i < j$ یال ij را به این ترتیب رنگ می‌کنیم

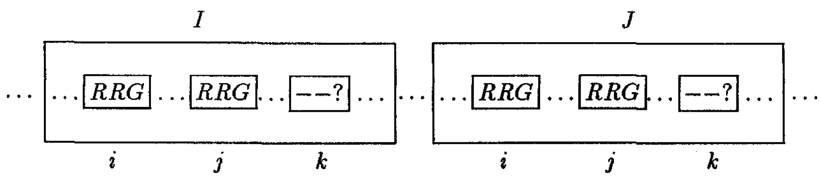
$$\text{قرمز}: \quad m_{ij} = ۰ \quad , \quad m_{ji} = ۰$$

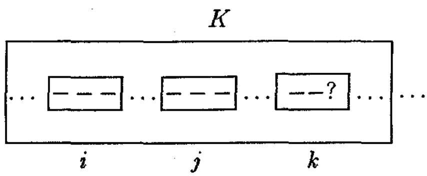
$$\text{سبز}: \quad m_{ij} = ۱ \quad , \quad m_{ji} = ۰ \quad , \ldots$$

۱۷) این مسأله بسیار شبیه بحث مورد استفاده در مثال صفحهٔ ۲۷۵ است امّا یک مرحله بیشتر ادامه می‌یابد). ما اعداد $L - ۱$ را در یک سطر مرتب می‌کنیم و آنها را به جعبه‌های هفت‌تایی تقسیم می‌کنیم و هر $۲ \times ۳^۷ + ۱$ جعبه را در یک جعبهٔ بزرگ قرار می‌دهیم:



$۳^{۷(۲\times۳^۷+۱)}$ روش رنگ‌آمیزی وجود دارد. جعبه‌های بزرگتر شمارهٔ I و J دارای الگوی رنگ‌آمیزی یکسان هستند که $I < J \leqslant ۳^{۷(۲\times۳^۷+۱)}$ اگر $K = ۲J - I$ جعبهٔ شماره K وجود دارد. با استفاده از یک بحث گسترده در مورد حالات الگوی رنگی در جعبهٔ I داریم:





فرض کنید حالتهای درایهٔ ؟ قرمز، سبز و یا آبی باشد (حال همین حالتها را برای درایهٔ ؟؟ در نظر بگیرید)

۱۸) استقراء بر روی m. فرض کنید نتیجه برای $m-۱$ درست باشد و L را طوری قرار می‌دهیم که اگر مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,L\}$ را با $m-۱$ رنگ رنگ‌آمیزی کنیم، یک تصاعد حسابی r جمله‌ای با جملات و قدر نسبت یک رنگ موجود باشد. حال (با استفاده از قضیهٔ وان‌در ویردن) L^* را برابر مقداری قرار می‌دهیم که اگر مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\ldots,L^*\}$ را با m رنگ رنگ‌آمیزی کنیم یک تصاعد حسابی با $(r-۱)L+۱$ جمله با جملات همرنگ در آن موجود باشد. فرض کنید چنین رنگ‌آمیزی و چنین تصاعدی به رنگ قرمز به این شکل موجود باشد:

$$a, \quad a+d, \quad a+۲d, \quad a+۳d,\ldots,a+(r-۱)Ld$$

اکنون این دو حالت را در نظر بگیرید که آیا همهٔ jdها به ازای $۱ \leqslant j \leqslant L$ قرمز هستند؟ (در این صورت یک تصاعد حسابی با قدرنسبت jd به رنگ قرمز موجود است) و یا اینکه همهٔ اعداد $d,۲d,۳d,\ldots,Ld$ به $m-۱$ رنگ دیگر هستند (در این حالت از فرض استقراء می‌توانید استفاده کنید).

«پاسخ تمارین»

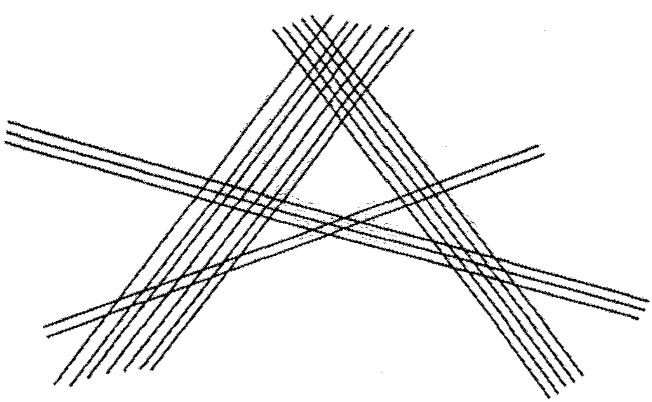
«فصل ۱»

۲ و ۳) $\binom{n-۱}{k-۱}$

۵) $\binom{n-k+۱}{k}$

۹) الف) $\binom{n}{۲}$

ج) تنها مجموعه‌هایی از اعداد صحیح مثبت که حاصل جمع آنها برابر ۱۷ و مجموع مربعات آنها ۸۷ باشد این مجموعه‌ها هستند: $\{۱,۱,۱,۲,۴,۸\}$ و $\{۱,۲,۳,۳,۸\}$ و $\{۱,۵,۵,۶\}$ و $\{۲,۳,۵,۷\}$. به عنوان مثال حالتی که شامل دو خط موازی در یک جهت، سه خط موازی در جهتی دیگر، ۵ خط موازی در یک جهت دیگر و ۷ خط موازی دیگر می‌باشد، در زیر نمایش داده شده است.



۱۰) الف) $\binom{n+۱}{۲}^{۲}$

د) $۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{۱}{۶}n(n+۱)(۲n+۱)$

۱۱) الف) $\binom{n+۲}{۳}$

ج) $\binom{n+۲}{۳}$

د)

$$\begin{cases} \text{زوج } n: & \binom{n}{۲}+\binom{n-۲}{۲}+\cdots+\binom{۲}{۲}=\frac{۱}{۲۴}n(n+۲)(۲n-۱) \\ \text{فرد } n: & \binom{n}{۲}+\binom{n-۲}{۲}+\cdots+\binom{۳}{۲}=\frac{۱}{۲۴}(n-۱)(n+۱)(۲n+۳) \end{cases}$$

۱۳) $(m \geqslant n):\ ۱-\dfrac{\binom{m+n}{m+۱}}{\binom{m+n}{m}}=۱-\dfrac{n}{m+۱}$

$(m<n):\ ۰$

(در حالتی که $m=n$ تعداد حالتهای مساعد برابر $\dfrac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$ خواهد بود که «عدد کاتالان» نامیده می‌شود. توضیح بیشتر را می‌توانید در تمرین ۱۰ از فصل ۱۰ بیابید.)

«فصل ۲»

۱) الف) $\binom{n}{۲}=\dfrac{۱}{۲}n(n-۱)$

ب) $\binom{\frac{۱}{۲}n(n-۱)}{m}$

ج) $۲^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$

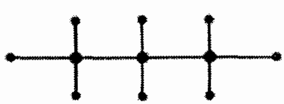
۵) الف) n درخت برای حالت $n>۲$ و تنها یک درخت برای حالت $n=۲$.

ب) $n(n-۱)(n-۲)$ درخت برای حالت $n>۴$ و به ترتیب ۱۲ و ۳ و ۰ درخت برای حالتهای $n=۲,۳,۴$.

ج) $\dfrac{n!}{۲}$

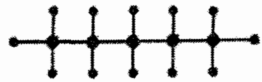
د) $(n-۱)^{n-۲}$

۶) ب) برای $C_۳H_۸$ تنها یک حالت وجود دارد.

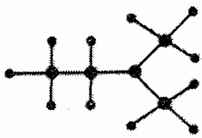


پروپان

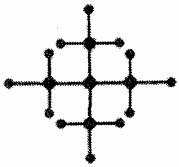
برای $C_۵H_{۱۲}$، سه ایزومر می‌تواند وجود داشته باشد.



پنتان



۲ـ متیل بوتان



۲و۲ـ دی‌متیل پروپان

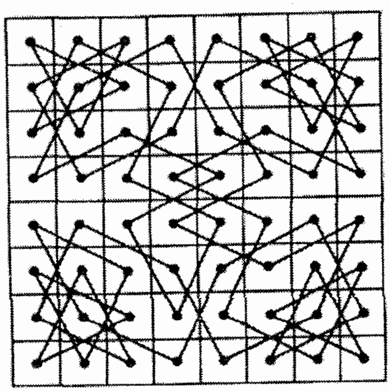
«فصل ۳»

۱) الف) سه روش ازدواج برای دخترها وجود دارد. آنها می‌توانند به ترتیب با پسرهای ۱, ۴, ۲, ۳, ۶, ۵ یا با پسرهای ۲, ۴, ۱, ۳, ۶, ۵ و یا با پسرهای ۲, ۴, ۳, ۱, ۶, ۵ ازدواج کنند.

ب) پیداکردن همسر برای تمام دخترها غیر ممکن است. برای مثال دخترهای ۱, ۲, ۳, ۵ در میان خودشان تنها سه پسر ۱, ۳, ۵ را می‌شناسند.

«فصل ۴»

۱۱) ب) یکی از چندین حالت موجود برای اسب به صورت زیر است.



۱۲) الف) ۷۳۳۴(= ۵۰۰۰ + ۳۳۳۳ + ۲۰۰۰ − ۱۶۶۶ − ۱۰۰۰ − ۶۶۶ + ۳۳۳)

ب) ۷۷۱۵ = (۵۰۰۰ + ۳۳۳۳ + ۲۰۰۰ + ۱۴۲۸ − ۱۶۶۶ − ۱۰۰۰ − ۶۶۶ −
۷۱۴ − ۴۷۶ − ۲۸۵ + ۳۳۳ + ۲۳۸ + ۱۴۲ + ۹۵ − ۴۷)

۱۳) $\frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \cdots + \frac{(-۱)^n}{n!}$ (این مقدار به ازای $n \to \infty$ برابر $\frac{۱}{e}$ می‌باشد)

۱۴) الف) n^m

ب) $n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-m+۱)$

«فصل ۵»

۱) i می‌تواند ۶ باشد و هیچ مقدار ممکنی برای j وجود ندارد. یک گسترش برای مقدار $i = ۶$ عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۵ & ۶ & ۱ & ۲ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۶ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۶ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۶ & ۵ & ۱ & ۴ \\ ۶ & ۵ & ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

۴) $N = \max\{n, p+q\}$

۵)

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

۶) الف) پاسخ با اضافه کردن یک به هر درایه در مثال صفحهٔ ۷۹ آمده است.

ج) توجه کنید که در این نوع دستورالعمل‌ها اول مربع لاتینی در بخشهای (الف) و (ج) همان جدول جمع می‌باشد.

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۰ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۳ & ۲ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

«فصل ۶»

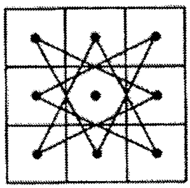
۱) الف) گراف K_n برای nهای فرد اویلری و برای nهای زوج شبه اویلری می‌باشد.

ب) گراف $K_{m,n}$ برای m و nهای زوج اویلری و برای $m = n = ۱$ و نیز برای m فرد و $n = ۲$ (و یا برعکس)، شبه اویلری می‌باشد.

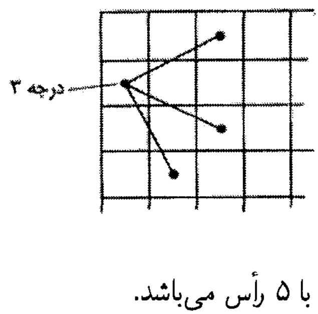
ج) K_n برای $n \geqslant ۳$ همیلتونی است.

د) $K_{m,n}$ برای $m = n > ۱$ همیلتونی است.

۲) این گونه مسیری برای $n = ۱, ۲, ۳$ وجود دارد. (در واقع برای $n = ۱$ و $n = ۲$ هیچ حرکت ممکنی برای اسب وجود ندارد!)



برای $n \geqslant ۴$ گراف حاصل از حرکتهای ممکن برای اسب روی صفحهٔ شطرنج اویلری نیست. زیرا این گراف شامل ۸ رأس با درجهٔ ۳ می‌باشد.



۴) کوچکترین این گرافها، دوری با ۵ رأس می‌باشد.

«فصل ۸»

۱) الف) دنبالهٔ امتیازها باید به صورت $۰, ۱, ۲, \ldots, n-۲, n-۱$ باشند. در ضمن $n!$ روش برای اختصاص امتیازها به n ورزشکار وجود دارد. (در این حالت هر مسابقه را ورزشکاری که امتیاز بیشتری دارد، برده است).

ب) این گونه دنباله‌ای برای امتیاز ورزشکاران وجود ندارد.

ج) در این حالت n باید زوج باشد، امتیاز ورزشکار اول برابر $n - ۱$ و امتیاز سایر ورزشکاران برابر $\frac{۱}{۲}n - ۱$ خواهد بود.

۲)

$$\binom{n}{۳} - \binom{b_۱}{۲} - \binom{b_۲}{۲} - \cdots - \binom{b_n}{۲}$$

۶) الف) برای nهای فرد، n روز و برای nهای زوج $n - ۱$ روز لازم است.

ب) برای nهای فرد $۲n$ روز و برای nهای زوج $۲(n - ۱)$ روز لازم است.

«فصل ۱۰»

۱) الف) $g_n = g_{n-۱} + g_{n-۲}\ ,\ \ g_۱ = ۲ = F_۳\ ,\ g_۲ = ۳ = F_۴ \Rightarrow g_n = F_{n+۲}$

ب) $j_n = j_{n-۱} + j_{n-۲}\ ,\ \ j_۱ = ۱ = F_۲\ ,\ ,j_۲ = ۲ = F_۳ \Rightarrow j_n = F_{n+۱}$

۲) ب)

$$c_n = \frac{۱}{۲}((۱+\sqrt{۲})^{n+۱} + (۱-\sqrt{۲})^{n+۱}) = \binom{n+۱}{۰} + ۲\binom{n+۱}{۲} + ۲^۲\binom{n+۱}{۴} + ۲^۳\binom{n+۱}{۶} + \ldots$$

ج) داریم c_n برابر ضریب x^n در عبارت $(۱+x)(۱+x(۲+x)+x^۲(۲+x^۲)+\ldots)$ است که برابر است با

$$\left(\binom{n}{۰}۲^n + \binom{n-۱}{۱}۲^{n-۲} + \binom{n-۲}{۲}۲^{n-۴} + \ldots\right)$$
$$\left(\binom{n-۱}{۰}۲^{n-۱} + \binom{n-۲}{۱}۲^{n-۳} + \binom{n-۳}{۱}۲^{n-۵} + \ldots\right)$$

۳) r_n برابر ضریب x^n در عبارت زیر است:

$$r(x) = \frac{x}{(۱-x-۲x^۲)(۱-x)} = \frac{۲}{۳(۱-۲x)} - \frac{۱}{۶(x+۱)} - \frac{۱}{۲(۱-x)}$$

که برابر است با

$$\begin{cases} \frac{۲}{۳}\times ۲^n - \frac{۲}{۳} & \text{اگر } n \text{ زوج بود} \\ \frac{۲}{۳}\times ۲^n - \frac{۱}{۳} & \text{اگر } n \text{ فرد بود} \end{cases} = [\frac{۲^{n+۱}}{۳}]$$

که [ ] علامت جزء صحیح است.

۶) الف) $\binom{n+k-۱}{۲k-۱}$

۸) معادلهٔ معکوس به ما می‌دهد:

$$\begin{array}{llll} +\binom{۱}{۱}۱^m & & & = s_۱ \\ -\binom{۲}{۱}۱^m & +\binom{۲}{۲}۲^m & & = s_۲ \\ +\binom{۳}{۱}۱^m & -\binom{۳}{۲}۲^m & \binom{۳}{۳}۳^m & = s_۳ \\ \vdots & & \vdots & \end{array}$$

و به همین ترتیب در حالت کلی داریم:

$$s_n = \binom{n}{n}n^m - \binom{n}{n-۱}(n-۱)^m + \binom{n}{n-۲}(n-۲)^m - \ldots + (-۱)^{n-۱}\binom{n}{۱}۱^m$$

۱۱) ج) یک تابع پوشا از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, m\}$ به $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ مانند افراز $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ به m مجموعهٔ ناتهی است که مکان آنها مهم است. بنابر تمرین ۸ داریم:

$$S(m,n) = \frac{۱}{n!}\left(n^m - \binom{n}{n-۱}(n-۱)^m + \cdots + (-۱)\right)$$

د)

$$M = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & -۳ & ۱ & ۰ \\ ۶ & ۱۱ & -۶ & ۱ \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۷ & ۶ & ۱ \end{pmatrix}$$

۱۲)

$$\begin{aligned} (x + x^۲ + x^۳ + x^۴ + x^۵ + x^۶)^۲ &= (x(۱+x)(۱+x+x^۲)) \\ &\quad \times (x(۱+x)(۱+x+x^۲)(۱-x+x^۲)^۲) \\ &= (x + ۲x^۲ + ۲x^۳ + x^۴)(x + x^۳ + x^۵ + x^۶ + x^۴ + x^۸) \end{aligned}$$

پس تاسهای جدید باید اعداد $\{۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۴\}$ و $\{۱, ۳, ۴, ۵, ۶, ۸\}$ را بر روی وجه‌های خود داشته باشند.

«فصل ۱۱»

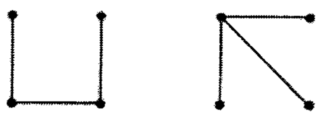
۵) رئوس را به صورت $v_1, v_2, \ldots, v_n(= w)$ به ترتیب کاهش فاصله از رأس w در نظر بگیرید. رنگها را نیز به صورت $1, 2, \ldots, d$ نامگذاری کنید. حال در هر مرحله رأس v_i را با کوچکترین رنگی رنگ‌آمیزی کنید که هیچ رأس مجاور با v_i با آن رنگ، رنگ‌آمیزی نشده باشد. به راحتی می‌توان بررسی کرد که با این روش یک رنگ‌آمیزی رأسی برای G با d رنگ بدست می‌آوریم.

۸)
$$P_G(k) = P_{K_6}(k) + 4P_{K_5}(k) + 4P_{K_4}(k) + P_{K_3}(k)$$
$$= k(k-1)(k-2)(k^3 - 8k^2 + 23k - 23).$$

۹)
$$P_G(k) = \frac{\left(k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)\right)^2}{k(k-1)} + \frac{\left(k(k-1)(k-2)(k-3)\right)^2}{k}$$
$$= k(k-1)(k-2)^2(k-3)^2(k^2 - 7k + 15).$$

۱۱) ب) تعداد راههای رنگ‌آمیزی رأسی گراف برابر $k(k-1)^n(k-2)^{2n}$ می‌باشد. در حالتی که رنگ v_iها یکسان باشند، تعداد راههای رنگ‌آمیزی رأسی گراف برابر با $k(k-1)^n(k-2)^n$ خواهد بود.

۱۳) ج) به راحتی می‌توان فهمید که هر دو گراف غیر یکریخت با سه رأس یا کمتر دارای چندجمله‌ای رنگی مختلفی خواهند بود. پس گراف مورد نظر حداقل ۴ رأسی است و با توجه به قسمت «ب» این مسأله، دو درخت غیر یکریخت چهار رأسی دارای چندجمله‌ای یکسانی خواهند بود.



دو درخت غیر یکریخت با
چندجمله‌ای رنگی $k(k-1)^3$

«فصل ۱۲»

۱) خیر چون جملهٔ ثابت در چندجمله‌ای رخ برابر یک ولی در چندجمله‌ای رنگی برابر صفر است.

۲) الف) $۱ + ۱۲x + ۴۸x^۲ + ۷۴x^۳ + ۴۰x^۴ + ۴x^۵$

ب) تعداد حالاتی که i به یکی از حالات مذکور نگاشته نشود = ۴

تعداد حالاتی که i به یکی از حالات مذکور نگاشته شود =

$$۵! - ۴! \times ۱۲ + ۳! \times ۴۸ - ۲! \times ۷۴ + ۱! \times ۴۰ - ۰! \times ۴$$

۳) صفحهٔ سایه خورده در بخش راهنمایی این سؤال دارای چندجمله‌ای رخ به صورت زیر است.

$$(۱ + ۳x + x^۲)(۱ + ۵x + ۶x^۲ + x^۳) = ۱ + ۸x + ۲۲x^۲ + ۲۴x^۳ + ۹x^۴ + x^۵$$

پس جواب ما به این صورت است:

$$۵! - ۴! \times ۸ + ۳! \times ۲۲ - ۲! \times ۲۴ + ۱! \times ۹ - ۰! \times ۱ = ۲۰$$

۴) چندجمله‌ای قسمت سایه خورده به این صورت است:

$$(۱+۴x+۲x^۲)(۱+۶x+۹x^۲+۲x^۳) = ۱+۱۰x+۳۵x^۲+۵۰x^۳+۲۶x^۴+۴x^۵$$

پس جواب ما به این صورت است:

$$۵! - ۴! \times ۱۰ + ۳! \times ۳۵ - ۲! \times ۵۰ + ۱! \times ۲۶ - ۰! \times ۴ = ۱۲$$

۸) الف) $۱ + ۱! \times \binom{n}{۱}^۲ x + ۲!\binom{n}{۲}^۲ x^۲ + ۳!\binom{n}{۳}x^۳ + \cdots + n!\binom{n}{n}^۲ x^n$

ب) صفحهٔ سایه خورده دارای چندجمله‌ای رخ به این صورت خواهد بود.

$$(۱ + ۴x + ۲x^۲)^۴ = ۱ + ۱۶x + ۱۰۴x^۲ + ۳۵۲x^۳ + ۶۶۴x^۴ + ۷۰۴x^۵ + ۴۱۶x^۶ + ۱۲۸x^۷ + ۱۶x^۸$$

و پاسخ مورد نظر ما برابر ۴۷۵۲ خواهد بود که از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود.

$$۸! - (۷! \times ۱۶) + (۶! \times ۱۰۴) - (۵! \times ۳۵۲) + (۴! \times ۶۶۴) - (۳! \times ۷۰۴) + (۲! \times ۴۱۶) - (۱! \times ۱۲۸) + (۰! \times ۱۶)$$

ج) $\frac{۴۷۵۲}{۸!} = \frac{۳۳}{۲۸۰}$

۹) الف) $۱ + \binom{m}{۱}x + \binom{m-۱}{۲}x^۲ + \cdots + \binom{m-k+۱}{k}x^k + \ldots$

ب) چندجمله‌ای رخ چنین صفحه‌ای به صورت زیر است:

$$\sum_{k=۰}^{m} \frac{۲n}{۲n-k}\binom{۲n-k}{k}x^k$$

ج) تعداد روشهای قرار دادن $۲n$ نفر دور میز برابر است با

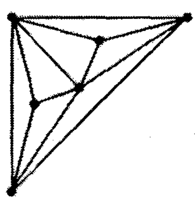
$$(۲n)!\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k \frac{۲n}{۲n-k}\binom{۲n-k}{k}(n-k)!$$

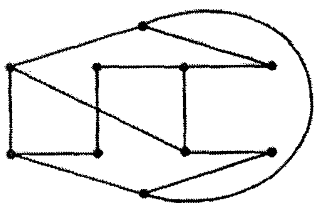
البته در این مثال ما جای افراد را مهم شمرده‌ایم و تقارن را در نظر گرفته‌ایم در حقیقت هر صندلی را با بقیه آنها متمایز گرفته‌ایم.

«فصل ۱۳»

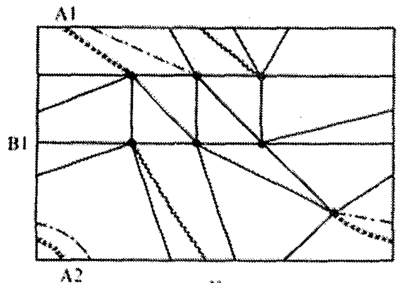
۲) گراف «الف» مسطح و گراف «ب» غیر مسطح می‌باشد:

الف) ب)

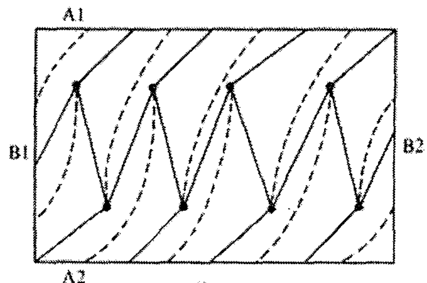




۴) نشان دادن یک تصویر سه بعدی روی صفحه کار مشکلی است. ما اکنون می‌خواهیم برای این کار از یک روش معمول در توپولوژی استفاده کنیم. هر یک از تصاویر زیر را یک کاغذ انعطاف‌پذیر و کشسان در نظر بگیرید. حال سمت $A_۱$ آنها را به سمت $A_۲$ بچسبانید تا به یک استوانه برسید. اکنون سمت $B_۱$ استوانه را (که به شکل یک دایره در آمده است) بدون پیچش اضافی به سمت $B_۲$ آن بچسبانید. در این صورت به نمایشی از دو گراف مورد نظر می‌رسیم که یالها همدیگر را قطع نمی‌کنند (در واقع با این کار دو گراف $K_{۴۴}$ و $K_۷$ را بدون تقاطع یالها روی سطح یک چنبره نمایش داده‌ایم.)

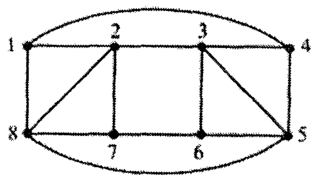


K_5

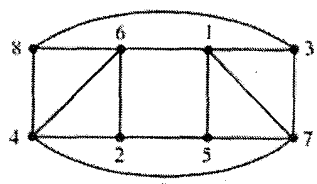


$K_{3,3}$

۶) الف)



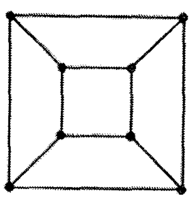
G

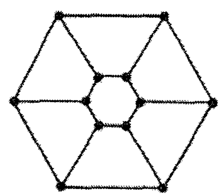


$\bar{G}$

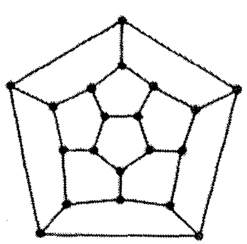
۷) تعداد نواحی داخل n ضلعی برابر خواهد بود با: $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} - n + 1$

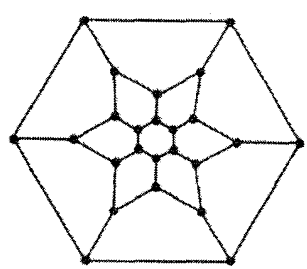
۸) الف)



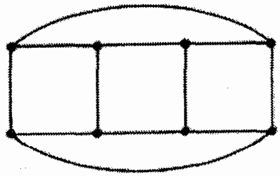


ب)





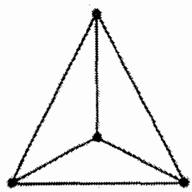
۹) بله



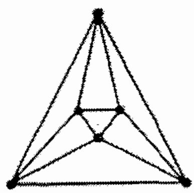
۱۲) (c, d) می‌تواند هر یک از این زوج‌ها باشد:

$$(۳,۳) \ , \ (۳,۴) \ , \ (۴,۳) \ , \ (۳,۵) \text{ یا } (۵,۳)$$

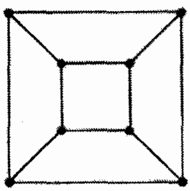
برای هر کدام از این حالتها، گرافی وجود دارد (در واقع این پنج گراف، نمایشی از اجسامی هستند که به «اجسام افلاطونی» مشهورند.)



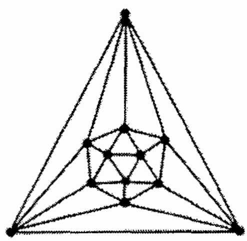
چهاروجهی: (۳,۳)



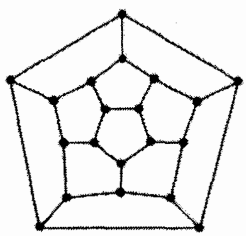
هشت‌وجهی: (۳,۴)



مکعب: (۴,۳)



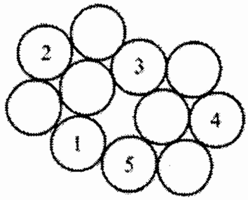
بیست‌وجهی: (۳,۵)



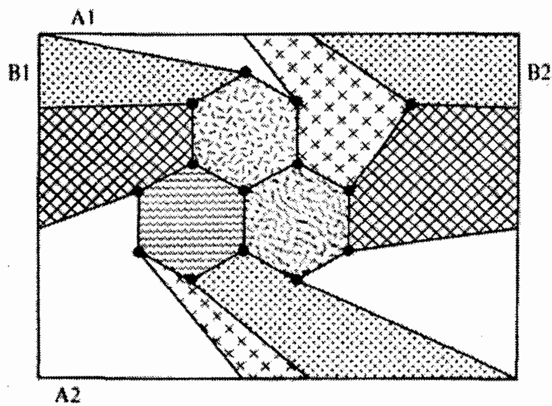
دوازده‌وجهی: (۵,۳)

«فصل ۱۴»

۲) اگر بخواهیم سکه‌هایی راکه به ترتیب زیر روی میز قرار گرفته‌اند با سه رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم، در آن صورت با شروع از سکهٔ شمارهٔ ۱، خواهیم دید که سکه‌هایی که شماره دارند، باید دارای رنگهای یکسان باشند، در حالی که دو سکهٔ شماره‌دار ۵ و ۱ با هم مجاور می‌باشند.



۵) مانند روشی که در پاسخ تمرین شمارهٔ ۴ از فصل قبل بیان کردیم، می‌توان شکل زیر را به عنوان نمایش یک گراف روی سطح چنبره در نظر گرفت (با چسباندن سمت A_1 به A_2 و سمت B_1 به B_2 بدون چرخش اضافی). حال به راحتی می‌توان دید که نمایش حاصل از گراف دارای هفت ناحیه می‌باشد که دو بدو با هم مجاور هستند.



«فصل ۱۵»

۷) یک ترکیب ممکن از هفت ترکیب ممکن به صورت زیر است

۱ ۱۰ ۱۱	۱ ۸ ۹	۱ ۶ ۷	۱ ۴ ۵	۱ ۲ ۳
۲ ۱۲ ۱۴	۲ ۹ ۱۱	۴ ۸ ۱۲	۱ ۱۴ ۱۵	۱ ۱۲ ۱۳
۵ ۱۰ ۱۵	۲ ۸ ۱۰	۲ ۵ ۷	۲ ۴ ۶	۲ ۱۳ ۱۵
۳ ۸ ۱۱	۳ ۱۳ ۱۴	۳ ۴ ۷	۳ ۹ ۱۰	۳ ۱۲ ۱۵
۵ ۱۱ ۱۴	۴ ۱۱ ۱۵	۶ ۸ ۱۴	۶ ۱۱ ۱۳	۳ ۵ ۶

۷ ۱۰ ۱۳	۷ ۹ ۱۴	۴ ۹ ۱۳	۴ ۱۰ ۱۴	۵ ۹ ۱۲
۷ ۱۱ ۱۲	۶ ۹ ۱۵	۷ ۸ ۱۵	۶ ۱۰ ۱۲	۵ ۸ ۱۳

(این در حقیقت یک نوع خاص از دستگاه سه‌تایی‌های اشتاینر است که در تمرین دیدیم با شرایط $b = ۳۵$ و $v = ۱۵$)

۱۰) ج)

$$L = \begin{pmatrix} \boxed{k} & & & & \\ & \boxed{k} & & \circ & \\ & & \boxed{k} & & \\ & \circ & & \ddots & \\ & & & & \boxed{k} \end{pmatrix}$$

۱۱) ج)

الف) $p^۲(۳ - ۲p)$ ب) $p^۴(۱۵ - ۲۴p + ۱۰p^۲)$

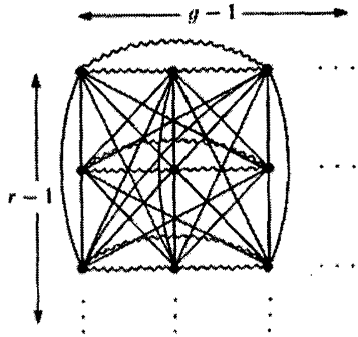
$p = ۰/۷۵ \Rightarrow$ الف) ۰/۸۴۴ ب) ۰/۸۳۱

$p = ۰/۳ \Rightarrow$ الف) ۰/۲۱۶ ب) ۰/۰۷۰

$p = ۰/۱ \Rightarrow$ الف) ۰/۰۲۸ ب) ۰/۰۰۱

«فصل ۱۶»

۱۱) مانند صفحهٔ ۲۶۴ تعداد $(r - ۱)(g - ۱)$ رأس را در یک جدول $(r - ۱) \times (g - ۱)$ قرار می‌دهیم و به همان صورت رأسهای واقع در یک سطر را با یالهای یک رنگ رنگ‌آمیزی می‌کنیم. همانطور که دیدیم هیچ گراف همبندی با g رأس در گراف رنگ شده وجود ندارد که یالهایش یک رنگ باشند. برای هر گراف قرمز هم، رأسهای واقع در سطر i را با رنگ i که $(۱ \leqslant i \leqslant r - ۱)$ رنگ‌آمیزی می‌کنیم. این یک رنگ‌آمیزی با $r - ۱$ رنگ برای هر گراف قرمز به ما می‌دهد. پس $G_۱$ به رنگ قرمز نمی‌تواند وجود داشته باشد.



۱۲) قرار می‌دهیم $g - ۲ = k(r - ۱)$ پس $r_g - ۳ = (k + ۱)(r - ۱)$ حال رئوس $K_{r+g-۳}$ را به $k + ۱$ دسته تقسیم می‌کنیم که هر دسته یک $K_{r-۱}$ قرمز می‌باشد. یالهای باقیمانده را به رنگ سبز در می‌آوریم. واضح است که $T_۱$ قرمز وجود ندارد. از طرفی هر رأس دقیقاً به $g - ۲$ یال سبز متصل است و چون در $T_۲$ هر رأس به دقیقاً $g - ۱$ یال باید متصل باشد پس $T_۲$ نیز وجود ندارد.

«کتاب‌شناسی»

M. Aigner: *Combinatorial theory* (Springer-Verlag, 1979)

I. Anderson: *A first course in combinatorial mathematics* (Oxford, 1979)

M. Behzad and G. Chartrand: *Introduction to the theory of graphs* (Allyn and Bacon, 1971)

L.W. Beineke and R.J. Wilson (ed): *Selected topics in graph theory* (Academic Press, 1978)

N.L. Biggs, E.K. Lloyd and R.J. Wilson: *Graph theory 1736-1936* (Oxford, 1976)

J.A. Bondy and U.S.R. Murty: *Graph theory with applications* (Elsevier, 1976)

J.A. Bondy and U.S.R. Murty (ed): *Graph theory and related topics* (Academic Press, 1979)

V.W. Bryant: *Yet another introduction to analysis* (Cambridge, 1990)

V.W. Bryant and H. Perfect: *Independence theory in combinatorics* (Chapman and Hall, 1980)

P.J. Cameron and J.H. Van Lint: *Graph theory, coding theory and block designs* (Cambridge, 1975)

S. Fiorini and R.J. Wilson: *Edge-colourings of graphs* (Pitman, 1977)

R.L. Graham, B.L. Rothschild and J.H. Spencer: *Ramsey theory* (Wiley, 1980)

F. Harary: *Graph theory* (Addison-Wesley, 1969)

R. Hill: *A first course in coding theory* (Oxford, 1986)

L. Lovasz and M.D. Plummer: *Matching theory* (North-Holland, 1991)

L. Mirsky: *Transversal theory* (Acadmic Press, 1971)

J.W. Moon: *Topics on tournaments* (Holt, Rinehart and Winston, 1968)

P.F. Reichmeider: *The equivalence of some combinatorial matching theorems* (Polygonal, 1984)

H.J. Ryser: *Combinatorial mathematics* (Maths Association of America/ Wiley, 1963)

R.P. Stanley: *Enumerative combinatorics (vol. 1)* (Wadsworth and Brooks, 1986)

A.P. Street and D.J. Street: *Combinatorics of experimental design* (Oxford, 1987)

R.J. Wilson: *Introduction to graph theory (3rd ed)* (Longman, 1985)